Modulklausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Bitte füllen Sie Folgendes aus.

Name: Musterlösung	Matrikelnummer: Musterlösung
Vorname: Musterlösung	Name des Tutors: Musterlösung

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise.**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben.
- Mobiltelefone und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die Kästen für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Aufgaben sind untereinander unabhängig.

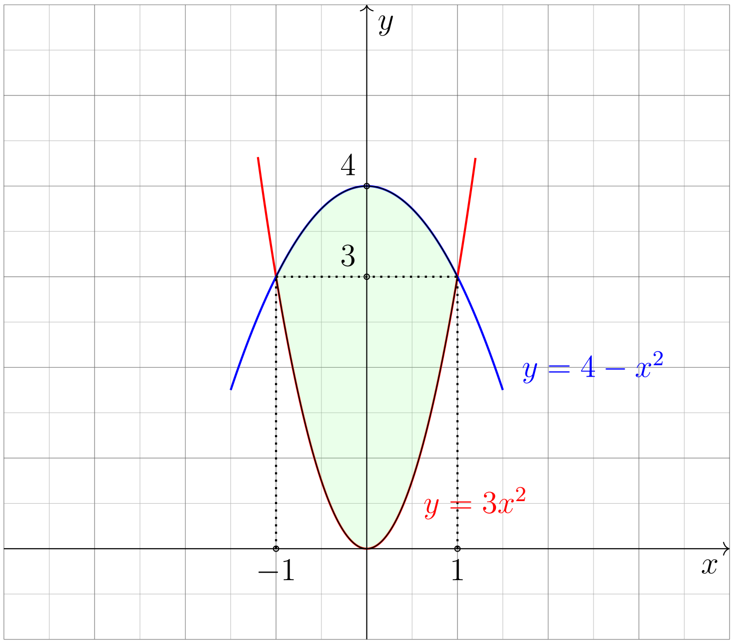
Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt
Punkte	/10	/10	/10	/10	/10	/10	/60

Aufgabe 1. *Integration (10 Punkte)*

Betrachten Sie die Fläche $A \subset \mathbb{R}^2$, welche durch die Parabeln $y = 3x^2$ und $y = 4 - x^2$ beschränkt wird.

1A. Skizzieren Sie die Fläche A.



[1 Punkt für die Schnittpunkte, 1 Punkt für den Schnitt mit der y-Axis] 2

1B. Beschreiben Sie A als Normalbereich in y-Richtung:

-1	$\leq x \leq$	1	und	$3x^2$	$\leq y \leq$	$4 - x^2$

[In der Regel, 1 Punkt pro Kästchen. 1 Punkt, falls die Angaben für x der Form $-A, A$ sind, z.B. $(-2, 2)$ oder $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$] 4

1C. Berechnen Sie $\int_A x^2 \, \mathrm{d}(x, y)$.

$$
\begin{aligned}
\int_A x^2 \,\mathrm{d}(x,y) &= \int_{-1}^{1}\int_{3x^2}^{4-x^2} x^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} x^2 y\Big|_{y=3x^2}^{4-x^2} \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} x^2(4-x^2-3x^2)\,\mathrm{d}x \\
&= 4\int_{-1}^{1}(x^2-x^4)\,\mathrm{d}x \\
&= 4\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_{x=-1}^{1} = \frac{16}{15}.
\end{aligned}
$$

[Max 4 Punkte, -1 Punkt für jeden Rechenfehler.]

$\overline{}\ 4$

Aufgabe 2. *Dreidimensionale Integrale und Integralsätze (10 Punkte)*

Der Körper $K \subset \mathbb{R}^3$ und das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} 4x^2 + y^2 \leq 4 \\ 0 \leq z \leq 4 - 4x^2 - y^2 \end{array} \right\} \quad \text{und} \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - z \\ 2x + z \\ xy \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Skizzieren Sie K auf Ihrem Schmierpapier.

2A. Parametrisieren Sie K in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \boxed{2\rho\sin\varphi} \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq \boxed{4 - 4\rho^2} \end{cases}$$

2

2B. Berechnen Sie die Funktionaldeterminante der Parametrisierung Φ und das Volumen des Körpers K:

$$\det \Phi' = \boxed{2\rho}, \qquad \operatorname{vol}_3(K) = \boxed{4\pi}.$$

2

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}_3(K) &= \int_K 1 \,\mathrm{d}(x,y,z) \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{1} \int_{z=0}^{4-4\rho^2} 2\rho \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi \qquad \text{Transformationssatz} \\ &= 2\pi \int_{\rho=0}^{1} \int_{z=0}^{4-4\rho^2} 2\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho = 2\pi \int_{\rho=0}^{1} 2\rho(4-4\rho^2)\,\mathrm{d}\rho \\ &= 16\pi \int_{\rho=0}^{1} (\rho - \rho^3) = 16\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 4\pi. \end{aligned}$$

Beim Transformationssatz die Funktionaldeterminante nicht vergessen.

2C. Die Randfläche ∂K besteht aus dem Boden B mit $z = 0$ und dem Mantel M. Wir parametrisieren M in Polarkoordinaten mit $\Phi_M : [0,1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$$\Phi_M\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ 2\rho\sin\varphi \\ 4 - 4\rho^2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial\Phi_M}{\partial\rho} \times \frac{\partial\Phi_M}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ 2\sin\varphi \\ -8\rho \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\rho\sin\varphi \\ 2\rho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 16\rho^2\cos\varphi \\ 8\rho^2\sin\varphi \\ 2\rho \end{pmatrix}}$$

1

2D. Berechnen Sie den Fluss von f durch ∂K nach außen.

$$\int_{\partial K} f \cdot \mathrm{d}S = \boxed{0}.$$

1

$$\int_{\partial K} f \cdot \mathrm{d}S = \int_K \operatorname{div}(f)\,\mathrm{d}(x,y,z) = 0 \text{ dank Gauß, da } \operatorname{div}(f) = 0.$$

2E. Berechnen Sie die Rotation $\operatorname{rot}(f)$ und ihren Fluss durch M nach außen.

$$\operatorname{rot}(f) = \boxed{\begin{pmatrix} x-1 \\ -1-y \\ 1 \end{pmatrix}}, \qquad \int_M \operatorname{rot}(f) \cdot \mathrm{d}S = \boxed{2\pi}.$$

3

$$\begin{aligned}
\int_M \operatorname{rot}(f) \cdot \mathrm{d}S &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi - 1 \\ -1-2\rho\sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16\rho^2\cos\varphi \\ 8\rho^2\sin\varphi \\ 2\rho \end{pmatrix} \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (16\rho^3\cos^2\varphi - 16\rho^2\cos\varphi - 8\rho^2\sin\varphi - 16\rho^3\sin^2\varphi + 2\rho)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(4\cos^2\varphi - \frac{16}{3}\cos\varphi - \frac{8}{3}\sin\varphi - 4\sin^2\varphi + 1\right) \mathrm{d}\varphi = 2\pi
\end{aligned}$$

(Da die z-Koordinaten positiv ist, zeigt die Normale nach außen.)

Beachten Sie, dass $\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 0$ und dass $\int_0^{2\pi}\cos^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\sin^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$.

[1 Punkt für die Rotation, 2 Punkte für das Integral. Das Integral bekommt 1 Punkt, falls das Ergebnis ein rationales Vielfaches von π ist (z.B. 0, π, 4π oder $-\frac{16}{3}\pi$)]

2F. Sei $\Gamma = \partial M$ die Randkurve von M. Berechnen Sie das Arbeitsintegral des Vektorfeldes f längs Γ bezüglich der von M induzierten Orientierung:

$$\int_\Gamma f \cdot \mathrm{d}\Gamma = \boxed{2\pi}.$$

1

$$\int_\Gamma f \cdot \mathrm{d}\Gamma = \int_{\partial M} f \cdot \mathrm{d}\Gamma = \int_M \operatorname{rot}(f) \cdot \mathrm{d}S = 2\pi \qquad \text{dank Stokes.}$$

[1 Punkt wenn das Ergebnis mit dem vorherigen Ergebnis übereinstimmt (auch wenn falsch)]

Aufgabe 3. *Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten* (*10 Punkte*)

3A. Betrachten Sie die folgende homogene lineare Differentialgleichung

$$y''''(t) - 3\,\mathrm{i}\,y'''(t) - 2\,y''(t) = 0.$$

Bestimmen Sie das zugehörige charakteristische Polynom p und seine Faktorisierung über $\mathbb{C}$:

$$p(x) = \boxed{x^4 - 3\mathrm{i}x^3 - 2x^2 = x^2(x-\mathrm{i})(x-2\mathrm{i}).}\,.$$ 2

[2 Punkte auch wenn die Faktorisierung fehlt, aber es ist klar von der Aufgabe 3B, dass der Student/die Studentin die richtigen Nullstellen gefunden hat.]

Wir faktorisieren erst mal $x^4 - 3\mathrm{i}x - 2x^2 = x^2(x^2 - 3\mathrm{i}x - 2)$. Was übrig bleibt ist ein quadratisches Polynom und wir können die übliche p-q-Formel benutzen, um die Nullstellen zu finden:

$$-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \frac{3\mathrm{i}}{2} \pm \sqrt{-\frac{9}{4} + 2} = \frac{3\mathrm{i}}{2} \pm \frac{\mathrm{i}}{2} \implies x_1 = \mathrm{i}, x_2 = 2\mathrm{i}.$$

3B. Folgern Sie die allgemeine komplexe Lösung $y: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ der oben genannten Differentialgleichung.

$$y(t) = \boxed{c_1 + c_2 t + c_3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + c_4\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}}\,.$$ 2

3C. Betrachten Sie nun die folgende lineare Differentialgleichung

$$y''''(t) - 3\,\mathrm{i}\,y'''(t) - 2\,y''(t) = -2(1+3\mathrm{i})\,\mathrm{e}^t.$$

Benutzen Sie den richtigen Ansatz, um eine partikuläre Lösung zu finden

$$\text{Ansatz: } y(t) = \boxed{c\,\mathrm{e}^t}\,.$$ 1

$$\text{Partikuläre Lösung: } y(t) = \boxed{2\,\mathrm{e}^t}\,.$$ 2

[1 Punkt für die partikuläre Lösung, falls sie von der Ansatzform ist.]

Wir benutzen den Ansatz $y(t) = c\,\mathrm{e}^t$ (keine Resonanz: 1 ist keine Nullstelle vom charakteristischen Polynom). Wir haben $y(t) = y'(t) = y''(t) = y'''(t) = y''''(t)$. Einsetzen liefert $c\,\mathrm{e}^t(1 - 3\mathrm{i} - 2) = -2(1+3\mathrm{i})\,\mathrm{e}^t$, also muss $c = 2$ sein.

3D. Finden Sie eine Lösung des folgenden Anfangswertproblems

$$y''''(t) - 3\,\mathrm{i}\,y'''(t) - 2\,y''(t) = -2(1+3\mathrm{i})\,\mathrm{e}^t \qquad \text{mit} \quad y(0) = 3, y'(0) = 1, y''(0) = 2, y'''(0) = 2.$$

$$y(t) = \boxed{2\,\mathrm{e}^t + 1 - t}\,.$$ 3

[1 Punkt, falls die Lösung von der Form partikuläre Lösung + homogene Lösung ist. 1 Punkt, falls $y(0) = 3$.]

Die Lösung hat die folgende Form: $y(t) = 2\,\mathrm{e}^t + c_1 + c_2 t + c_3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + c_4\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}$. Einsetzen liefert das folgende System:

$$\begin{aligned}
y(0) &= 2 + c_1 + c_3 + c_4 &&= 3\\
y'(0) &= 2 + c_2 + \mathrm{i}c_3 + 2\mathrm{i}c_4 &&= 1\\
y''(0) &= 2 - c_3 - 4c_4 &&= 2\\
y'''(0) &= 2 - \mathrm{i}c_3 - 8\mathrm{i}c_4 &&= 2
\end{aligned}$$

Also muss $c_3 = c_4 = 0$, $c_1 = 1$, $c_2 = -1$ sein.

Aufgabe 4. *Charakteristikmethode* (*10 Punkte*)

Gesucht werden Lösungen $u : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der folgenden partiellen Differentialgleichung:

$$x\partial_x u(x,y) + (y - x)\partial_y u(x,y) = u - y \qquad \text{mit} \quad u(1,y) = y^2/2.$$

4A. Stellen Sie das Differentialgleichungssystem für die charakteristischen Kurven auf.

$$x'(t) = \boxed{x(t)}, \qquad x(0) = 1,$$

$$y'(t) = \boxed{y(t) - x(t)}, \qquad y(0) = y_0,$$

$$z'(t) = z(t) - y(t), \qquad z(0) = \boxed{\frac{y_0^2}{2}}.$$

3

4B. Sie haben ein homogenes lineares Differentialgleichungssystem der Form $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

mit $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ gefunden. Schreiben Sie die Matrix A: $\quad A = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$. 1

4C. Ergänzen Sie folgende Sätze.

Der Vektor $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ein Hauptvektor von A zum Eigenwert $\lambda = \boxed{1}$ der Stufe 3.

Die dazugehörige Hauptvektorkette ist

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto v_2 = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}} \longmapsto v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$ 2

Das charakteristische Polynom von A ist $(1-\lambda)^3$, also muss $\lambda = 1$ sein. Dann ist $v_2 = (A-E)v_3$ und $v_1 = (A-E)v_2$.

4D. Finden Sie eine Lösung des Anfangswertproblems (abhängig von y_0) für das homogene lineare Differentialgleichungssystem, das Sie gefunden haben.

$$x(t) = \boxed{\mathrm{e}^t},$$

$$y(t) = \boxed{y_0\,\mathrm{e}^t - t\,\mathrm{e}^t},$$

$$z(t) = \boxed{\frac{1}{2}y_0^2\,\mathrm{e}^t - y_0 t\,\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}t^2\,\mathrm{e}^t}.$$ 3

[Im Allgemeinen 1 Punkt pro Kästchen. 1 Punkt, falls die Lösungen die Anfangsbedingungen erfüllen (aber 3 Punkte nur wenn alle drei richtig sind).]

Alle Lösungen des homogenen DG-Systems haben folgende Gestalt ($c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$):

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = c_1 \,\mathrm{e}^t v_1 + c_2 \,\mathrm{e}^t (v_2 + t v_1) + c_3 \,\mathrm{e}^t (v_3 + t v_2 + \frac{t^2}{2} v_1) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -\,\mathrm{e}^t \\ t\,\mathrm{e}^t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ -t\,\mathrm{e}^t \\ \frac{t^2}{2}\,\mathrm{e}^t \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{aligned} x(t) &= c_3 \,\mathrm{e}^t \\ y(t) &= -(c_2 + t c_3)\,\mathrm{e}^t \\ z(t) &= (c_1 + c_2 t + c_3 \frac{t^2}{2})\,\mathrm{e}^t \end{aligned}$$

Aus den Anfangswerten leiten wir Folgendes her: $c_3 = 1$, $c_2 = -y_0$, $c_3 = \frac{y_0^2}{2}$.

4E. Bestimmen Sie eine explizite Lösung der ursprünglichen partiellen Differentialgleichung (abhängig nur von x und y):

$$u(x,y) = \boxed{\frac{y^2}{2x}}.$$ 1

Wir lösen nach t und y_0:

$$t = \ln(x) \qquad y_0 = \frac{y}{x} + \ln(x).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} u(x,y) = z(t) &= \frac{1}{2}\ln(x)^2\,\mathrm{e}^{\ln(x)} - \Big(\frac{y}{x} + \ln(x)\Big)\ln(x)\,\mathrm{e}^{\ln(x)} + \frac{1}{2}\Big(\frac{y}{x} + \ln(x)\Big)^2 \mathrm{e}^{\ln(x)} \\ &= \frac{1}{2}x\ln(x)^2 - \Big(\frac{y}{x} + \ln(x)\Big)x\ln(x) + \frac{1}{2}x\left(\frac{y^2}{x^2} + 2\cdot\frac{y}{x}\cdot\ln(x) + \ln(x)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}x\ln(x)^2 - y\ln(x) - x\ln(x)^2 + \frac{y^2}{2x} + y\ln(x) + \frac{1}{2}x\ln(x)^2 \\ &= \frac{y^2}{2x}. \end{aligned}$$

Aufgabe 5. *Wahrscheinlichkeitsteorie (10 Punkte)*

$k \backslash \mu$	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6
0	0.1353	0.0821	0.0498	0.0302	0.0183	0.0111	0.0067	0.0041	0.0025
1	0.2707	0.2052	0.1494	0.1057	0.0733	0.0500	0.0337	0.0225	0.0149
2	0.2707	0.2565	0.2240	0.1850	0.1465	0.1125	0.0842	0.0618	0.0446
3	0.1804	0.2138	0.2240	0.2158	0.1954	0.1687	0.1404	0.1133	0.0892
4	0.0902	0.1336	0.1680	0.1888	0.1954	0.1898	0.1755	0.1558	0.1339
5	0.0361	0.0668	0.1008	0.1322	0.1563	0.1708	0.1755	0.1714	0.1606
6	0.0120	0.0278	0.0504	0.0771	0.1042	0.1281	0.1462	0.1571	0.1606
7	0.0034	0.0099	0.0216	0.0385	0.0595	0.0824	0.1044	0.1234	0.1377
8	0.0009	0.0031	0.0081	0.0169	0.0298	0.0463	0.0653	0.0849	0.1033
9	0.0002	0.0009	0.0027	0.0066	0.0132	0.0232	0.0363	0.0519	0.0688

Tabelle 1: Werte der Poisson-Dichtefunktion $p_\mu(k) = \frac{\mu^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\mu}$.

5A. Die Länge der Schlange in der Uni-Mensa ist Poisson-verteilt mit Erwartungswert $\mu = 4$.

Berechnen Sie die Standardabweichung: $\sigma = \boxed{2}$.

1

5B. Berechnen Sie mithilfe der oberen Tabelle die Wahrscheinlichkeit, dass

(a) kein Mensch ansteht: $\boxed{p(0) = \mathrm{e}^{-4} \approx 0.0183}$, 1

(b) mehr Menschen als erwartet anstehen: $\boxed{p(x > 4) = 1 - \sum_{k=0}^{4} \frac{4^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-4} \approx 0.3711}$, 2

(c) die Anzahl der anstehenden Menschen sich von der erwarteten Anzahl um (strikt) weniger als die Standardabweichung unterscheidet: $\boxed{p(2 < x < 6) = \sum_{k=3}^{5} \frac{4^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-4} \approx 0.5471}$. 2

[Volle Punkte auch wenn das Ergebnis nicht explizit berechnet wurde.]

5C. Ein Ameisennest enthält eine Million Ameisen. Die meisten Ameisen sind schwarz, aber 0.1% davon sind rot. Ein Forscher sammelt zufällig 2.500 Ameisen.

Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Forscher höchstens 2 rote Ameisen ausgewählt hat?

[1 Punkt: Der Student hat verstanden, dass es um eine hypergeometrische Verteilung geht.
1 Punkt: Der Student hat verstanden, dass er 3 Terme addieren muss.
2 Punkte nur wenn alles richtig ist.]

Hypergeometrische Verteilung mit $N = 1.000.000$, $K = 1.000$, $n = 2.500$.

$$p(0) + p(1) + p(2) = \frac{\binom{1.000}{0}\binom{999.000}{2.500} + \binom{1.000}{1}\binom{999.000}{2.499} + \binom{1.000}{2}\binom{999.000}{2.498}}{\binom{1.000.000}{2.500}}$$

2

5D. Berechnen Sie explizit mithilfe der oberen Tabelle eine geschickte Approximation von dieser Wahrscheinlichkeit.

[1 Punkt]

$$H(N, K, n) \approx B(n, K/N) \approx P(\lambda)$$

mit $\lambda = nK/N = 2.5$.

[1 Punkt] Das heißt,

$$p(0) + p(1) + p(2) \approx \frac{\lambda^0}{0!}\mathrm{e}^{-\lambda} + \frac{\lambda^1}{1!}\mathrm{e}^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2!}\mathrm{e}^{-\lambda} \approx 0.0821 + 0.2052 + 0.2565 = 0.5438.$$

Falsche Rechnung ist kein Fehler.

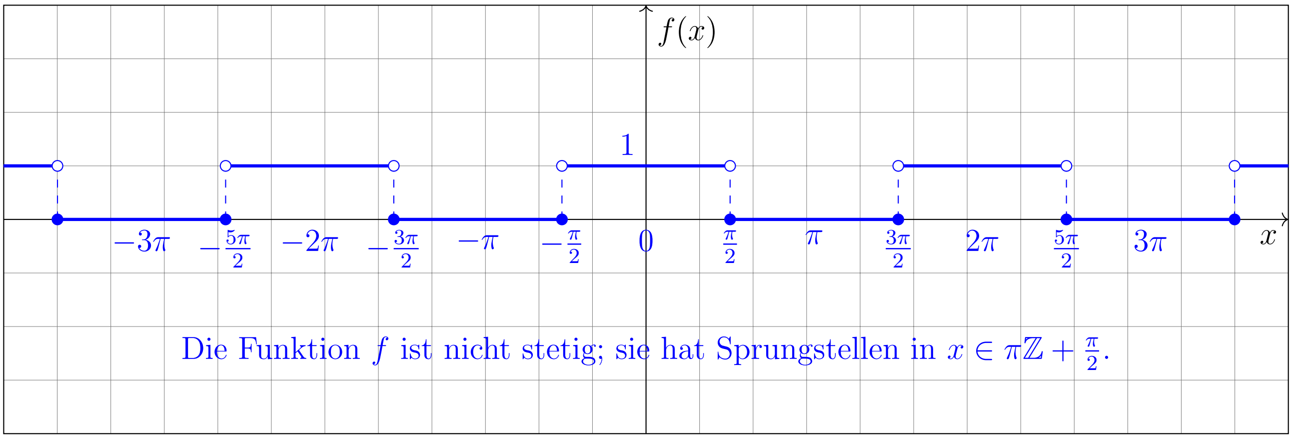
2

Aufgabe 6. *Fourier-Reihen (10 Punkte)*

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die gerade 2π-periodische Funktion definiert durch

$$f(x) = 1 \quad \text{für } 0 \le x < \frac{\pi}{2} \qquad \text{und} \qquad f(x) = 0 \quad \text{für } \frac{\pi}{2} \le x < \pi.$$

6A. Skizzieren Sie die Funktion f auf dem Interval $[-3\pi, 3\pi]$.



1 Punkt falls die Funktion 2π-periodisch ist — 2

6B. Bestimmen Sie den Grenzwert der Fourier–Reihe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von f in den Punkten $x = 0$ und $x = \pi/2$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = \boxed{1}, \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(\pi/2) = \boxed{\frac{1}{2}}.$$ dank Dirichlet-Kriterium — 2

6C. Berechnen Sie die Koeffizienten c_k der komplexen Fourier–Reihe $f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$.

$$c_0 = \boxed{\frac{1}{2}}, \qquad c_k = \begin{cases} \boxed{0} & \text{falls } k = 4l \ (l \neq 0) \text{ oder } k = 4l+2, \\ \boxed{\dfrac{1}{\pi k}} & \text{falls } k = 4l+1, \\ \boxed{-\dfrac{1}{\pi k}} & \text{falls } k = 4l+3. \end{cases}$$ — 4

[Im allgemeinen 1 Punkt pro Kästchen. 1 Punkt falls c_k von der Form $\frac{c}{k}$ ist, mit $c \in \mathbb{C}$.]

Falls $k = 0$,

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

Falls $k \neq 0$

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} f(x)\,\mathrm{d}x && \text{Definition} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{-\mathrm{i}k} \right]_{x=-\pi/2}^{\pi/2} && (k \neq 0) \\
&= \frac{1}{2\pi} \Big(- \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi/2}}{\mathrm{i}k} + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/2}}{\mathrm{i}k} \Big) \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}k} \Big(- \cos(-k\pi/2) - \mathrm{i}\sin(-k\pi/2) + \cos(k\pi/2) + \mathrm{i}\sin(k\pi/2) \Big) \\
&= \frac{1}{\pi k} \sin(k\pi/2) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{falls } k = 4l \text{ oder } k = 4l+2 \\ \frac{1}{\pi k} & \text{falls } k = 4l+1 \\ -\frac{1}{\pi k} & \text{falls } k = 4l+3. \end{cases}
\end{aligned}$$

6D. Bestimmen Sie durch Auswertung der Fourier-Reihe an einer geeigneten Stelle den Wert

$$a = \sum_{l \geq 0} \left(\frac{1}{4l+1} - \frac{1}{4l+3} \right) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \dots$$

Auswertung in $x = \boxed{0}$ ergibt $a = \boxed{\pi/4}$. 2

Es gilt $c_k = c_{-k}$, also haben wir

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi \mathrm{i}kx} = c_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{2\pi \mathrm{i}kx}.$$

Auswertung in $x = 0$ der Fourier-Reihe ergibt

$$1 = f(0) = c_0 + 2 \sum_{k \geq 1} c_k = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{l \geq 0} \Big(\frac{1}{4l+1} - \frac{1}{4l+3} \Big) = \frac{1}{2} + \frac{2a}{\pi}.$$

Es folgt: Die obige Reihe konvergiert gegen $\frac{\pi}{4}$.