Klausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (*1 Punkt*)

Name: Musterlösung	Matrikelnummer: Musterlösung
Vorname: Musterlösung	Studiengang: Musterlösung

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 6 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Gesamt
Punkte	/1	/12	/8	/14	/12	/7	/11	/65

Erläuterung: Zur Nacharbeit dieser Klausur sind die Antworten ausgiebig erläutert. Ergebnisse und Rechnungen sind ausführlicher dargestellt, als in der Prüfung verlangt war. Möge es nützen!

Tipp für zukünftige Leser: Ihre Vorlesung und wöchentlichen Übungen erklären Ihnen diese wunderbaren Rechentechniken. Nutzen Sie dies, arbeiten Sie kontinuierlich mit, es lohnt sich!

Nützliche Werte

Tabelle für das Integral $\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ über die Normalverteilung $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-t^2/2}$:

	x+0.00	x+0.01	x+0.02	x+0.03	x+0.04	x+0.05	x+0.06	x+0.07	x+0.08	x+0.09
$x = 0.0$	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41308	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

Ablesebeispiele: Für $x = 1.23$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t \approx 0.39065$. Für $x = 2.58$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t \approx 0.49506$.

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.

Aufgabe 2. *Vermischtes (4 + 4 + 4 Punkte)*

2A. Bei Ihnen haben sich unerwartet Gäste angekündigt und Sie backen noch schnell einen Kuchen. Die Zubereitung des Kuchenteigs beinhaltet Milch als einzige leicht verderbliche Zutat. Da Sie regelmäßig einkaufen gehen, ist die Milch bei Ihnen zu Hause in der Regel an 95% aller Tage frisch. Aus Erfahrung wissen sie, dass die Gäste Ihren Kuchen in etwa 90% aller Fälle loben werden, wenn die Milch frisch war. Hatte die Milch dagegen einen Stich, so sinkt die Wahrscheinlichkeit für ein Lob auf 20%.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit p_1 werden Ihre Gäste den Kuchen loben? $p_1 = \boxed{\frac{865}{1000} \approx 87\%}$.

Angenommen, das Lob bleibt diesmal aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p_2 war die Milch nicht mehr frisch? $p_2 = \boxed{\frac{8}{27} \approx 30\%}$. Sie können Brüche angeben oder auf ganze Prozentzahlen runden.

Seien $P(L)$ und $P(F)$ die Warscheinlichkeiten dafür, dass die Gäste den Kuchen loben bzw. die Milch frisch ist. Nach dem Satz über die totale Wahrscheinlichkeit▶ gilt
$P(L) = P(F)P(L|F) + P(\bar{F})P(L|\bar{F})$. Also
$P(L) = 0.95 \cdot 0.90 + 0.05 \cdot 0.2 = 0.81 + 0.045 + 0.01 = 0.865.$▶ Daher lautet die Gegenwahrscheinlichkeit $P(\bar{L}) = 1 - P(L) = 0.135$. Nach dem Satz von Bayes▶ erhält man schließlich $P(\bar{F}|\bar{L}) = P(\bar{L}|\bar{F}) \cdot \frac{P(\bar{F})}{P(\bar{L})}$. Also $P(\bar{F}|\bar{L}) = 0.8 \cdot \frac{0.05}{0.135} = \frac{8}{10} \cdot \frac{10}{27} = \frac{8}{27} \approx 30\%$▶ .

4

2B. Wir betrachten das lineare Differentialgleichungssystem $y' = Ay$ mit $A := \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie eine Fundamentalmatrix $W(t) = \boxed{e^t \begin{pmatrix} 2 & 2t+1 \\ 1 & t+1 \end{pmatrix}}$.

Das charakteristisches Polynom von A ist:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 4 \\ -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^2.$$

Es gibt daher nur einen (doppelten) Eigenwert $\lambda = 1$.

Eigenvektor zu $\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} v = 0, \quad \text{Lösung} : v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Hauptvektor w über v: $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} w = v, \quad \text{Lösung} : w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Hieraus erhalten wir das erhoffte Fundamentalsystem: $\{e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, e^t \begin{pmatrix} 2t+1 \\ t+1 \end{pmatrix}\}.$

4

2C. Wir betrachten die 1-dimensionale Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial}{\partial t}u - \frac{\partial^2}{\partial x^2}u = 0$.

Welche gewöhnlichen Differentialgleichungen an v und w liefert der Produktansatz $u(t,x) = v(t)w(x)$? $v' = \lambda v$ und $w'' = \lambda w$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ Finden Sie alle Lösungen u dieser Form, welche zusätzlich die Randbedingungen $u(t,0) = 0 = u(t,\pi)$ erfüllen.

$u(t,x) = b_k e^{-k^2 t} \sin(kx)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $b_k \in \mathbb{R}$.

Einsetzen des Produktansatzes in die Differentialgleichung ergibt $\frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)}$ ▶ . Da die linke Seite nur von t abhängt und die Rechte nur von x, müssen beide Seiten notwendig konstant sein etwa gleich λ. Hieraus folgen die gewöhnlichen Differentialgleichungen $v'(t) = \lambda v(t)$ und $w''(x) = \lambda w(x)$ mit (ein und der selben) reellen Zahl λ. ▶ Um zusätzlich das Randwertproblem zu lösen, schreiben wir $\lambda = \pm\omega^2$ mit einer positiven reellen Zahl ω. Das positive Vorzeichen impliziert die Lösung $w(x) = ce^{\omega x}$ mit einer Konstanten c, welche die gewünschten Randbedingungen offenbar nicht erfüllt. Daher muss $\lambda = -\omega^2$ gelten. Somit $w(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$ mit reellen Konstanten a und b. ▶ Einsetzen der Randbedingung $w(0) = 0$ liefert $a = 0$. Folglich übersetzt sich die zweite Randbedingung $w(\pi) = 0$ in $\sin(\omega\pi) = 0$ und somit $\omega = k$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Damit bekommt man $v'(t) = -k^2 v(t)$ mit der Lösung $v(t) = ce^{-k^2 t}$, wobei c eine beliebige reelle Konstante ist. Insgesamt folgt also, dass es eine reelle Zahl b_k gibt (nämlich $b_k = bc$) mit $u(t,x) = b_k \cos(kx)e^{-k^2 t}$. ▶ Probe: es gilt $u(t,0) = b_k e^{-k^2 t}\sin(0) = 0$ und $u(t,\pi) = b_k e^{-k^2 t}\sin(k\pi) = 0$. Damit stimmt die Anfangsbedingung. Weiter hat man $\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = -b_k k^2 e^{-k^2 t}\sin(kx) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)$, also ist auch die Differentialgleichung erfüllt. Bemerkung: Da die Wärmeleitungsgleichung linear ist, ist die allgemeine Lösung des Randwertsproblems die Superposition $u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k e^{-k^2 t}\sin(kx)$, welche man als räumliche Fourierreihe mit den zeitabhängigen Fourierkoeffizienten $b_k(t) := b_k e^{-k^2 t}$ interpretieren kann.

4

Aufgabe 3. *Runter kommen sie alle* (*3 + 3 + 2 = 8 Punkte*) Ein Flugzeug bietet Sitzplätze für 375 Passagiere. Man weiß bei der Fluggesellschaft aus Erfahrung, dass ein Passagier mit 10%-er Wahrscheinlichkeit seinen gebuchten Flug nicht antritt. Für einen Flug wird die Fluggesellschaft daher mehr als 375 Tickets verkaufen. Im Folgenden nehmen wir an, sie verkauft 400 Tickets.

3A. Wie ist die Anzahl X der Passagiere, die den Flug antreten verteilt? Berechnen Sie den Mittelwert μ und die Varianz σ^2.

$P(X = k) = \boxed{\binom{400}{k}(0.9)^k(0.1)^{400-k}}$, $\mu = \boxed{360}$, $\sigma^2 = \boxed{36}$

Die gesuchte Verteilung ist die Binomialverteilung $B_{n,p}(k)$ mit $n = 400$ und $p = 0.9$. Der Mittelwert berechnet sich nach $\mu = np = 0.9 \cdot 400 = 360$. Man hat $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q = 36$ und damit $\sigma = 6$.

3

3B. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheinen mehr als 375 Reisende zum Flug? Benutzen sie den zentralen Grenzwertsatz, um durch eine geeignete Normalverteilung zu approximieren.

$P(X \geq 375) \approx \boxed{0.00621}$

Zentrieren und Normieren: es ist $375 = 360 + 15 = \mu + 2.5\sigma$. Daher $P(X \geq 375) = 1 - P(X \leq 375) = 0.5 - \int_0^{2.5} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$. Aus der oben angegebenen Tabelle für die Standard-Normalverteilung sehen wir, dass $\int_0^{2.5} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0.49379$. Damit ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als 375 Passagiere erscheinen mit 0.00621 etwas kleiner als ein Prozent. Wer hier $376 = 360 + 16 = \mu + 2.66\sigma$ als Grenze nimmt, rechnet $\int_0^{2.66} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0.49608$ und erhält 0.00392 als Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Passagiere nicht in das Flugzeug passen. Wer sich – numerisch am präzisesten – für die Mitte entscheidet, der betrachtet $375,5 = 360 + 15.5 = \mu + 2.58\sigma$ und erhält die Wahrscheinlichkeiten $\int_0^{2.58} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0.49492$ bzw. 0.00508.

3

3C. Bei der letzten Wartung vor dem Start wird entdeckt, dass die linke Tragfläche einen Riss hat und daher eine Ersatzmaschine beschafft werden muss. Für wieviele Passagiere mindestens muss diese Sitzplätze haben, damit mit 96%-er Wahrscheinlichkeit kein Passagier zurückbleiben muss? Anzahl der Sitzplätze $\geq \boxed{371}$

Laut Tabelle gilt $\int_a^{\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leq 0.04$ für $a \leq 1.76$. Damit ist die gesuchte Mindestmenge an Sitzplätzen $360 + 6 \cdot 1.76 = 370.56 \leq 371$. Je nachdem wie man die Grenzen in der Näherung durch die Normalverteilung interpretiert ist 372 auch eine plausible Lösung, vgl. die Erklärungen zu Teil (b).

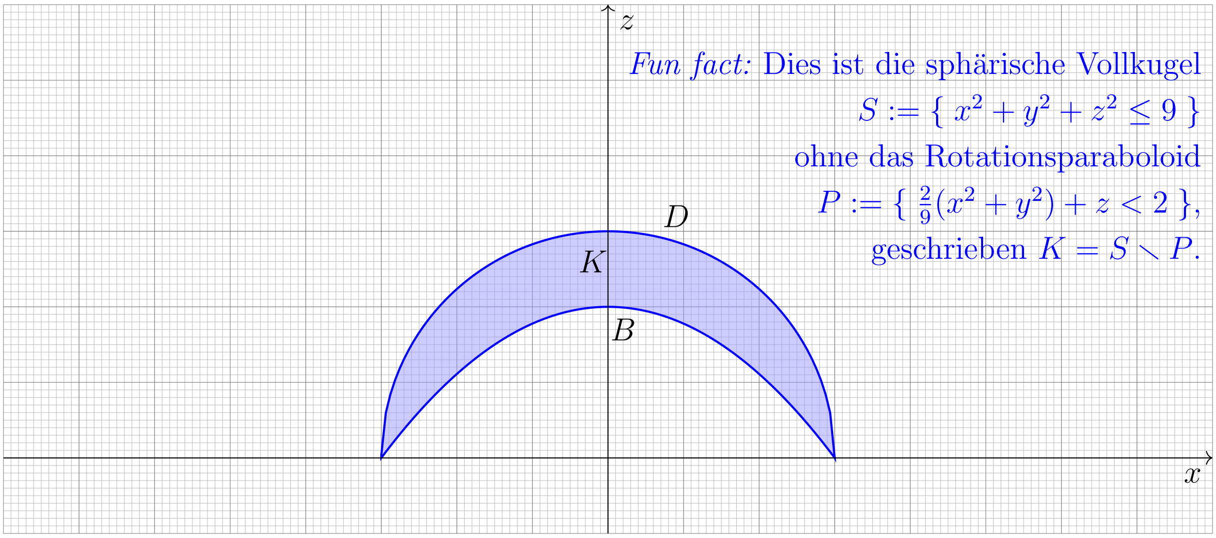
2

Aufgabe 4. *Kratzen Sie an der Oberfläche (4 + 3 + 4 + 3 = 14 Punkte)*

Der Körper $K \subset \mathbb{R}^3$ und das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$K = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2 - \tfrac{2}{9}(x^2+y^2) \le z \le \sqrt{9-x^2-y^2} \right\} \quad \text{und} \quad f(x,y,z) = (-2y, 2x, x^2+y^2).$$

4A. Skizzieren Sie den Schnitt von K mit der x–z–Ebene, also mit der Ebene $y = 0$:



Fun fact: Dies ist die sphärische Vollkugel $S := \{ x^2+y^2+z^2 \le 9 \}$ ohne das Rotationsparaboloid $P := \{ \tfrac{2}{9}(x^2+y^2) + z < 2 \}$, geschrieben $K = S \setminus P$.

Parametrisieren Sie den Körper K in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi, \qquad 0 \le \rho \le \boxed{3}, \\ \boxed{2 - \tfrac{2}{9}\rho^2} \le z \le \boxed{\sqrt{9-\rho^2}} \end{cases}$$

4

4B. Berechnen Sie mit dieser Parametrisierung das Volumen $\mathrm{vol}_3(K)$ des Körpers K:

$$\mathrm{vol}_3(K) = \int_K 1 \,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_{\rho=0}^{3} \int_{z=2-\frac{2}{9}\rho^2}^{\sqrt{9-\rho^2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho$$ ▶ Transformationssatz anwenden

$$= 2\pi \int_{\rho=0}^{3} \Big(\rho\sqrt{9-\rho^2} - \rho(2 - \tfrac{2}{9}\rho^2) \Big) \,\mathrm{d}\rho$$ Innere Integrale vereinfachen

$$= 2\pi \Big[-\tfrac{1}{3}(9-\rho^2)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{9}{8}(2 - \tfrac{2}{9}\rho^2)^2 \Big]_{\rho=0}^{3}$$ ▶ Stammfunktion

$$= 2\pi \Big[9 - \tfrac{9}{2} \Big] = 9\pi.$$ ▶ Einsetzen

Erläuterung: Beim Transformationssatz die Funktionaldeterminante nicht vergessen!

3

4C. Die Randfläche ∂K besteht aus dem Boden B mit $z = 2 - \frac{2}{9}(x^2 + y^2)$ und dem Deckel D mit $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Wir parametrisieren B in Zylinderkoordinaten:

$$\Phi_B\begin{pmatrix}\rho\\ \varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\rho\cos\varphi\\ \rho\sin\varphi\\ 2-\frac{2}{9}\rho^2\end{pmatrix}, \quad \frac{\partial\Phi_B}{\partial\rho}\times\frac{\partial\Phi_B}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ -\frac{4}{9}\rho\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-\rho\sin\varphi\\ \rho\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}\frac{4}{9}\rho^2\cos\varphi\\ \frac{4}{9}\rho^2\sin\varphi\\ \rho\end{pmatrix}}$$

Berechnen Sie mit Φ_B den Fluss des Vektorfeldes f durch B:

$$\int_{s\in B} f(s)\bullet \mathrm{d}S = \int_{\rho=0}^{3}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\rho^2\cdot\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho$$ ▸ Einsetzen und vereinfachen

$$= 2\pi\int_{\rho=0}^{3}\rho^3\,\mathrm{d}\rho = \frac{81}{2}\pi$$ ▸ Stammfunktion und Einsetzen

Erläuterung: Das positive Vorzeichen des Integrals entspricht der Anschauung: Vektorfeld und Normalenvektor zeigt hier nach oben, also in den Körper K hinein. Das ist eine der beiden möglichen Orientierungen, für den Gaußschen Integralsatz in der nächsten Frage benötigen wir die umgekehrte Orientierung. Beide unterscheiden sich nur im Vorzeichen.

Folgern Sie den Fluss des Vektorfeldes f aus dem Körper K durch den Deckel D nach oben:

$$\int_{s\in D} f(s)\bullet \mathrm{d}S = \int_{s\in B} f(s)\bullet\mathrm{d}S + \int_K \mathrm{div}(f)\,\mathrm{d}K = \frac{81}{2}\pi$$ Dank Gauß! $\mathrm{div}(f) = 0$!

4

4D. Berechnen Sie den Fluss von $F = \mathrm{rot}(f)$ durch B nach oben als geeignetes Wegintegral:

$$\int_{s\in B} F(s)\bullet\mathrm{d}S = \int_{s\in B}\mathrm{rot}\,f(s)\bullet\mathrm{d}S = \int_{\partial B} f(s)\bullet\,\mathrm{d}s$$ ▸ Dank Stokes!

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} f(\Phi_B(3,\varphi))\bullet\partial_\varphi\Phi_B(3,\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$ ▸ Parametrisieren, $\rho = 3$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} 18\,\mathrm{d}\varphi = 36\pi$$ ▸ Einsetzen und ausrechnen

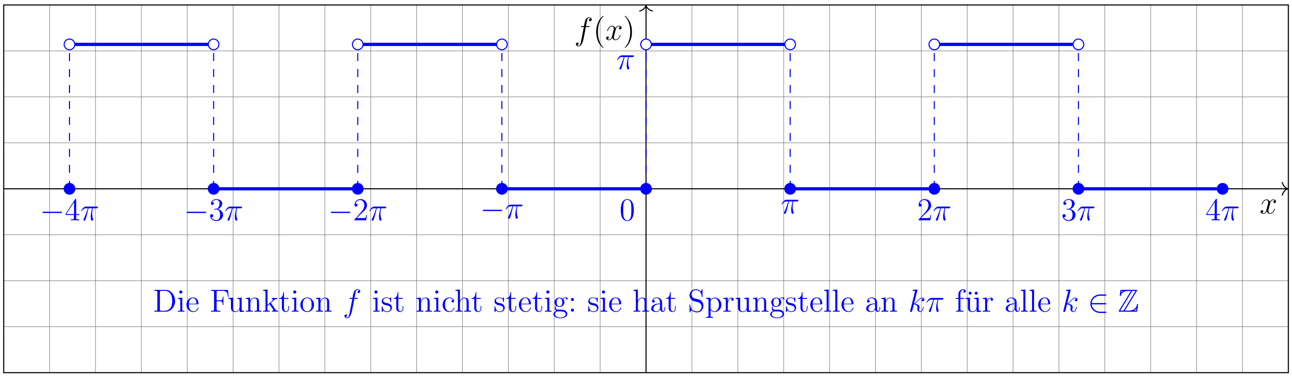
Erläuterung: Alternativ können Sie explizit das Vektorfeld $g = \mathrm{rot}\,f$ und das Flussintegral $\int_{s\in B} g(s)\bullet\mathrm{d}S$ berechnen. Dieser Rechenweg ist zwar etwas länger, hier aber ebenso möglich. Übung: Probieren und vergleichen Sie beide! Das Ergebnis ist dasselbe, so wie es sein muss.

3

Aufgabe 5. *Kriegen Sie solche Sprünge auf die Reihe?* (*2 + 3 + 4 + 3 = 12 Punkte*)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei 2π-periodisch mit $f(x) = \pi$ für $0 < x < \pi$ und $f(x) = 0$ für $\pi \leq x \leq 2\pi$.

5A. Skizzieren Sie die Funktion f auf dem Intervall $[-4\pi, 4\pi]$.



Bestimmen Sie den Grenzwert der Fourier–Reihe $f_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ von f im Punkt $x = \pi$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\pi) = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

Dank Dirichlet-Kriterium!

2

5B. Bestimmen Sie die Koeffizienten c_k der komplexen Fourier–Reihe $f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$:

$$c_k = \begin{cases} \boxed{\dfrac{\pi}{2}} & \text{für } k = 0, \\[2ex] \boxed{\dfrac{-\mathrm{i}}{k}} & \text{für } k \text{ ungerade}, \\[2ex] \boxed{0} & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{\pi}{2\pi}\int_0^{\pi} 1\mathrm{d}x & \text{falls } k=0 \\ \frac{\pi}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-ikx}\mathrm{d}x & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{falls } k=0 \\ \frac{-i}{k} & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

3

5C. Bestimmen Sie die Koeffizienten der reellen Fourier–Reihe $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$:

$a_0 =$	π	
$a_k =$	0	für $k \geq 1$,
$b_k =$	0	für k gerade,
$b_k =$	$\frac{2}{k}$	für k ungerade,

Erläuterung:
Sie können aus c_k leicht die reellen Koeffizienten $a_k = c_k + c_{-k}$ und $b_k = \mathrm{i}(c_k - c_{-k})$ ablesen. 4

5D. Bestimmen Sie durch Auswertung der Fourier–Reihe von f an der Stelle $x = \pi/2$ den exakten Wert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$.

$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{n\geq 0} \frac{2}{2n+1} \sin((2n+1)x)$ die reelle Fourier-Reihe

$\pi = \frac{\pi}{2} + \sum_{n\geq 0} \frac{2}{2n+1} \sin((2n+1)\frac{\pi}{2})$ Auswerten an der Stelle $x = \pi/2$

$$= \frac{\pi}{2} + \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{2}{2n+1}$$

$\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ ▶ Auflösen nach der gesuchten Reihe

Erläuterung: Die zweite Gleichung gilt dank des Satzes von Dirichlet, denn im Punkt $x = \pi/2$ existieren die einseitigen Grenzwerte $f(x\pm) = \pi$ und auch die Ableitungen $f'(x\pm) = 0$. (Die Funktion ist einfach stetig da.) Die Fourier–Reihe $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert daher im Punkt $x = \pi/2$ für $n \to \infty$ gegen den Wert $f(\pi/2) = \pi$. Die so erhaltene Gleichung lösen wir dann sorgfältig auf. 3

Aufgabe 6. *Charaktertest* (*7 Punkte*)

Zu lösen ist für $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (t, x) \mapsto u(t, x)$ die partielle Differentialgleichung

$$\partial_t u(t,x) + x\,\partial_x u(t,x) = x + 1 \qquad \text{für alle } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R},$$
$$u(0,x) = \cos(x) \qquad \text{für } t = 0 \text{ und alle } x \in \mathbb{R}.$$

Geben Sie das charakteristische Differentialgleichungssystem zu $u(t(s), x(s)) = z(s)$ an:

$t'(s) = \quad 1,$ $\qquad t(0) = 0,$

$x'(s) = \boxed{x(s)},$ $\qquad x(0) = x_0,$

$z'(s) = \boxed{x(s) + 1},$ $\qquad z(0) = \cos(x_0).$

Bestimmen Sie damit die zugehörige Charakteristik $s \mapsto (t(s), x(s), z(s))$:

$t(s) = s, \quad x(s) = \boxed{x_0\, \mathrm{e}^s},$ $\qquad z(s) = \boxed{x_0\, \mathrm{e}^s + s + \cos(x_0) - x_0}$

Bestimmen Sie damit die gesuchte Lösung: Wir lösen $u(t(s), x(s)) = z(s)$ auf und erhalten

$u(t,x) = \boxed{x + t + \cos(x\,\mathrm{e}^{-t}) - x\,\mathrm{e}^{-t}}$ Startwerte transportiert längs Charakteristiken

Machen Sie schließlich die Probe: Wir leiten $u(t,x)$ geduldig ab und erhalten

$\partial_t u(t,x) = \boxed{1 + x\,\mathrm{e}^{-t} \sin(x\,\mathrm{e}^{-t}) + x\,\mathrm{e}^{-t}}$ nach Produkt- und Kettenregel

$x\,\partial_x u(t,x) = \boxed{x - x\,\mathrm{e}^{-t} \sin(x\,\mathrm{e}^{-t}) - x\,\mathrm{e}^{-t}}$ Probe: $u(t,x)$ erfüllt die PDE!

$\overline{}$
7

Aufgabe 7. *Endlich! Das System ist am Ende (3 + 1 + 1 + 3 + 3 Punkte)*

Wir betrachten das lineare Differentialgleichungssystem $y'(t) = A\,y(t) + b(t)$ mit

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -3 & 4 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

7A. Sind die folgenden Vektoren v_i Eigenvektoren von A? Wenn ja, wie lauten die zugehörigen Eigenwerte λ_i ?

$v_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor $\boxed{\text{Nein}}$ (Ja/Nein) zum Eigenwert $\lambda_1 = \boxed{}$ ▶

$v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor $\boxed{\text{Ja}}$ (Ja/Nein) zum Eigenwert $\lambda_2 = \boxed{1}$ ▶

$v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor $\boxed{\text{Ja}}$ (Ja/Nein) zum Eigenwert $\lambda_3 = \boxed{1}$ ▶ 3

7B. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $P(x)$ von A und dessen Nullstellen x_i. Wie können Sie hier effektiv Ihr Ergebnis aus Teil (a) einsetzen?

$P(x) = \boxed{x^3 - 3\,x + 2}$, $x_1 = \boxed{-2}$, $x_2 = \boxed{1}$ $x_3 = \boxed{1}$ ▶

Nach Teil (a) kennen wir schon die Eigenwerte $x_2 = x_3 = 1$. Weiter ist bekanntlich die Spur von A gleich der Summe der Eigenwerte. Mit $\mathrm{Spur}(A) = 0$ folgt also $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ und daher $x_1 = -2$. Damit ergibt sich das charakteristische Polynom über seine Linearfaktorzerlegung $P(x) = (x+2)(x-1)^2 = x^3 - 3x + 3$. Alternativ rechnet man das charakteristische Polynom zunächst nach der üblichen Formel aus. Polynomdivision durch $(x-1)^2$ liefert den gesuchten verbleibenden reellen Linearfaktor $x + 2$ und damit $x_1 = -2$. 1

7C. Finden Sie eine Basis $\mathscr{B}$ des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A.

$$\mathscr{B} = \boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}},$$

Die Eigenwertgleichung $Av = -2v$ führt direkt auf das homogene Gleichungssystem
$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 3 & 0 \\ -3 & 6 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen bringen wir dieses auf Zeilenstufenform $\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right)$ und finden den dritten Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. ▶
Zusammen mit den in Teil (a) gegebenen Eigenvektoren erhalten wir die gesuchte Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A.

Bemerkung: Da wir nach Teil (a) schon zwei Eigenvektoren zum Eigenwert 1 kennen und da außerdem der dritte Eigenwert verschieden von Eins ist, musste eine solche Eigenbasis existieren. Hauptvektoren höherer Stufe gibt es hier insbesondere nicht.

1

Im Folgenden geben wir Ihnen eine Fundamentalmatrix $W(t)$ und einen Vektor $v(t)$ an:

$$W(t) := \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & e^t \\ e^{-2t} & e^t & 0 \\ -e^{-2t} & -e^t & e^t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v(t) := \begin{pmatrix} (1-t)e^{2t} \\ -(1-t)e^{-t} \\ te^{-t} \end{pmatrix}.$$

7D. Finden Sie eine partikuläre Lösung y_{part} der Differentialgleichung $y'(t) = A\,y + b(t)$ und machen Sie anschließend die Probe auf die DGL. *Hinweis: Überprüfen Sie zunächst die Beziehung* $W(t)v(t) = b(t)$.

$$y_{\text{part}}(t) = \boxed{\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} - \frac{3}{2}t \\ \frac{3}{4} - \frac{3}{2}t \\ -\frac{7}{4} + \frac{t}{2} \end{pmatrix}}$$

Variation der Konstanten: Wir machen den Ansatz $y(t) = W(t)c(t)$ mit der Fundamentalmatrix $W(t)$ und einem zeitabhängigen Vektor $c(t)$. Dies ergibt bekanntlich die Differentialgleichung $c'(t) = W(t)^{-1}b(t)$.▶ Dabei kennen wir den Term $W(t)^{-1}b(t)$ schon aus dem vorherigen Aufgabenteil. Es folgt also $c'(t) = \begin{pmatrix} (1-t)e^{2t} \\ -(1-t)e^{-t} \\ t\,e^{-t} \end{pmatrix}$. (Wer möchte kann natürlich auch die angegebene Fundamentalmatrix invertieren und sich so den Vektor $v(t) = W^{-1}(t)b(t)$ selbst erschließen.) Aufintegrieren liefert $c(t) - c_0 = \begin{pmatrix} (\frac{3}{4} - \frac{t}{2})e^{2t} \\ -te^{-t} \\ -(1+t)\,e^{-t} \end{pmatrix}$.▶

Wir erhalten die Lösung

$$y(t) := \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & e^{t} \\ e^{-2t} & e^{t} & 0 \\ -e^{-2t} & -e^{t} & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\frac{3}{4} - \frac{t}{2})e^{2t} \\ -te^{-t} \\ -(1+t)\,e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} - \frac{3}{2}t \\ \frac{3}{4} - \frac{3}{2}t \\ -\frac{7}{4} + \frac{1}{2}t \end{pmatrix}.▶$$

Probe: Es gilt $y'(t) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ und $Ay = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} - t \end{pmatrix}$ und damit $y'(t) = A\,y(t) + b(t)$.▶

3

7E. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y'(t) = A\,y + b(t)$ mit $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Machen Sie anschließend die Probe auf den Anfangswert.

$$y(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} - \frac{3}{2}t + \frac{1}{4}e^{-2t} + e^{t} \\ \frac{3}{4} - \frac{3}{2}t + \frac{1}{4}e^{-2t} - e^{t} \\ -\frac{7}{4} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}e^{-2t} + 2e^{t} \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems hat die Form $y(t) = y_{\text{part}}(t) + W(t)c$, wobei $c = (c_1, c_2, c_3)$ ein konstanter Vektor ist und $y_{\text{part}}(t)$ die Lösung ist, die wir zuvor in Teil (e) gefunden haben.▶ Die Anfangsbedingung $y(0) = y_{\text{part}}(0) + W(0)c = (1,0,0)^T$ liefert folgende Gleichung $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ -\frac{7}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$. Wir erhalten das inhomogene lineare Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix}$. Eine Standardrechnung liefert die Lösung $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.▶ Also

$y(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} - \frac{3}{2}t \\ \frac{3}{4} - \frac{3}{2}t \\ -\frac{7}{4} + \frac{1}{2}t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4}e^{-2t} + e^t \\ \frac{1}{4}e^{-2t} - e^t \\ -\frac{1}{4}e^{-2t} + 2e^t \end{pmatrix}$ Probe: $y(0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ -\frac{7}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.▶

Bemerkung: Genauso gut könnte man hier mit der geschlossenen Formel $y(t) = \int_0^t W^{-1}(s)b(s)\,\mathrm{d}s + W(t)W^{-1}(0)y_0$ arbeiten, wobei $y_0 := (1,0,0)^T$ der Anfangswert ist und $W(s)^{-1}$ das Inverse der Fundamentalmatrix zum Zeitpunkt s.

3

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.