Prof. Dr. Michael Eisermann • Höhere Mathematik 3 (vertieft)

Kapitel M

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Vincent van Gogh (1853–1890), *La nuit étoilée*, wikimedia.org

Vollversion • michael-eisermann.de/lehre/HM3 • 30.09.2023

Inhalt dieses Kapitels M

Wie löst man Differentialgleichungen?

Beispiele gewöhnlicher Differentialgleichungen (kurz DG, engl. ODE):

1. Erster Ordnung: $y'(x) = y(x)$
2. Zweiter Ordnung: $y''(x) + 4y(x) = 0$
3. Dritter Ordnung: $y'''(x)\,y'(x) - y''(x)^2 + (1+x^2)\,y(x)^2 = 0$

Gesucht ist jeweils eine Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$, deren Ableitungen die geforderte Gleichung für alle $x \in I$ erfüllen. Wie sehen mögliche Lösungen in diesen Beispielen aus?

1. $y(x) = 0$, oder $y(x) = \mathrm{e}^x$, allgemein $y(x) = a\,\mathrm{e}^x$ mit $a \in \mathbb{R}$. Probe!
2. $\sin(2x)$, $\cos(2x)$, allgemein $y(x) = a\sin(2x) + b\cos(2x)$. Probe!
3. Eine mögliche Lösung ist $y(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$. Machen Sie die Probe!

🙂 Lösungen sind oft schwer zu finden, aber leicht zu überprüfen.

Jede ernsthafte Rechnung schließt deshalb mit einer Probe durch Einsetzen und Nachrechnen, wenigstens mit Plausibilitätsprüfung!

Wir behandeln die Grundfragen gewöhnlicher Differentialgleichungen: Wie viele Lösungen gibt es? Wie findet man eine? womöglich gar alle?

Wozu dienen Differentialgleichungen?

Differentialgleichungen sind die Sprache der Naturgesetze.

- Oft ist der unabhängige Parameter $x \in \mathbb{R}$ die Zeit.
- Die abhängige Größe $y(x) \in \mathbb{R}^n$ ist der Zustand zur Zeit x.
- Die Gleichung $y'(x) = f(x, y(x))$ ist das Bewegungsgesetz für y.
- Die Anfangsdaten $y(x_0) = y_0$ sind der Startpunkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Viele Modelle in Naturwissenschaft und Technik haben diese Form! Was benötigen Sie zur Lösung von Differentialgleichungen?

- Leistungsstarke Lösungstheorie als verlässliche Grundlage
- Erprobte Rezepte für spezielle Klassen von Gleichungen
- Wie immer Übung und Erfahrung, Geschick und Ausdauer

Trotz allgemeiner Lösungstheorie und -methoden hat jede DG ihre Eigenarten: Wir müssen genau hinschauen und sorgfältig arbeiten!

Zur Sorgfalt gehört, die gefundenen / benachbarte / alle Lösungen zu prüfen, zu skizzieren, zu diskutieren und alle Sonderfälle zu beachten.

📖 Zur Vertiefung und für zahlreiche Anwendungsbeispiele siehe H. Heuser: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Vieweg, 6. Aufl. 2009

Gewöhnliche und partielle DG

Eine **Differentialgleichung** ist eine Gleichung für eine Funktion $y(x)$, in der auch ihre Ableitungen $y', y'', \dots$ auftreten. Wir unterscheiden:

$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	gewöhnliche Differentialgleichung in $x, y, y', y'' \dots$
$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$	System gewöhnlicher DG in $x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n', \dots$
$y : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$	partielle Differentialgleichung in $x_1, \dots, x_m, y, \partial_i y, \dots$
$y : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$	System partieller DG in $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n, \partial_i y_j, \dots$

Dies wird häufig genutzt und ist eine mathematische Grundtechnik aller Naturwissenschaftler:innen und Ingenieur:innen. Prominente Beispiele:

- Dynamik, Newton $\ddot{q} = f(q)$, Hamilton $\dot{q}_i = \partial H / \partial p_i$, $\dot{p}_i = -\partial H / \partial q_i$.
- Strömung, Cauchy–Riemann $\partial_x u = \partial_y v$, $\partial_x v = -\partial_y u$. Navier–Stokes.
- Wärmeleitung, Wellen-, Potential-, Maxwell–Gleichungen, uvm.

Zu partiellen Differentialgleichungen kommen wir später ab Kapitel Q.

Es gibt darüber hinaus auch stochastische Differentialgleichungen, in die Zufallsvariablen als Parameter eingehen. Dies wird zum Beispiel in der Finanzmathematik zur Modellierung von Börsenkursen genutzt.

Implizite Differentialgleichungen

Gegeben sei eine stetige Funktion $F : \mathbb{R}^{n+2} \supset G \to \mathbb{R}$. Dies definiert die zugehörige **implizite Differentialgleichung n–ter Ordnung**:

$$\boxed{F\big(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}\big) = 0}$$

Sie heißt algebraisch, analytisch, etc., falls die Funktion F dies ist. Eine **Lösung** dieser Differentialgleichung auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist eine n–mal diff'bare Funktion $y : I \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x \in I$ gilt:

$$\big(x,\ y(x),\ y'(x), \dots,\ y^{(n-1)}(x),\ y^{(n)}(x)\big) \in G,$$
$$F\big(x,\ y(x),\ y'(x), \dots,\ y^{(n-1)}(x),\ y^{(n)}(x)\big) = 0.$$

Sind zudem noch **Anfangsdaten** gegeben, also ein Startpunkt

$$\big(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n\big) \in G,$$

so soll die Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ durch diesen Punkt laufen, das heißt

$$x_0 \in I,\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},\ y^{(n)}(x_0) = y_n.$$

Diese Problemstellung heißt implizites **Anfangswertproblem** (AWP). Kann man die DG nach $y^{(n)}$ auflösen, so erhält man eine **explizite DG**.

Explizite Differentialgleichungen

Gegeben sei eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^{n+1} \supset G \to \mathbb{R}$. Dies definiert die zugehörige **explizite Differentialgleichung n–ter Ordnung**

$$\boxed{y^{(n)} = f\big(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\big)}$$

Sie heißt algebraisch, analytisch, etc., falls die Funktion f dies ist. Eine **Lösung** dieser Differentialgleichung auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist eine n–mal diff'bare Funktion $y : I \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x \in I$ gilt:

$$\big(x,\ y(x),\ y'(x), \dots,\ y^{(n-1)}(x)\big) \in G,$$
$$y^{(n)}(x) = f\big(x,\ y(x),\ y'(x), \dots,\ y^{(n-1)}(x)\big).$$

Sind zudem noch **Anfangsdaten** gegeben, also ein Startpunkt

$$\big(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}\big) \in G,$$

so soll die Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ durch diesen Punkt laufen, das heißt

$$x_0 \in I,\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Diese Problemstellung heißt explizites **Anfangswertproblem** (AWP).

Differentialgleichungen erster Ordnung

Gegeben sei eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^2 \supset G \to \mathbb{R}$. Dies definiert die zugehörige **explizite Differentialgleichung erster Ordnung**:

$$\boxed{y' = f(x, y).}$$

Gesucht sind alle diff'baren Funktionen $y : I \to \mathbb{R}$ auf einem (maximalen) Intervall $I \subset \mathbb{R}$, die obige Gleichung erfüllen, d.h. für alle $x \in I$ gilt

$$(x, y(x)) \in G \quad \text{und} \quad y'(x) = f(x, y(x)).$$

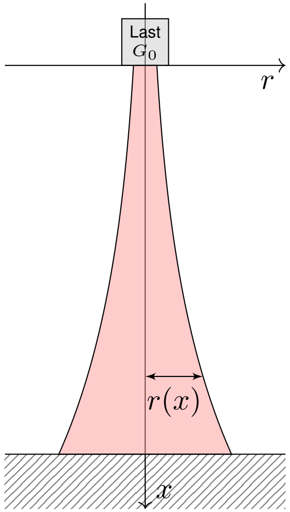
Die erste Forderung besagt, dass der Graph von y in G liegt, kurz $y \subset G$. Die zweite: In jedem Punkt $(x, y) \in G$ schreibt $f(x, y)$ die Steigung vor. Anders gesagt, die Lösung $x \mapsto (x, y(x))$ verläuft ganz im Gebiet G und erfüllt dort die Bedingung $y' = f(x, y)$. Äquivalente Schreibweisen:

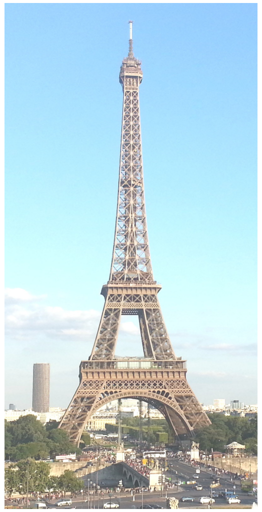
$$y' = f(x,y), \quad y'(x) = f(x, y(x)), \quad \dot{y} = f(t, y), \quad \dot{y}(t) = f(t, y(t)),$$
$$u' = f(x,u), \quad u'(x) = f(x, u(x)), \quad \dot{x} = f(t, x), \quad \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad \dots$$

⚠ Der Kontext gibt an, was der unabhängige Parameter ist (x, t, …) und was die hiervon abhängige, gesuchte Funktion ist (y, u, …).

Ein hoher Turm braucht eine breite Basis.

M107
Beispiel





Der Eiffelturm in Paris am Abend des 14.08.2013, Höhe 324m

Der Burj Khalifa in Dubai, Höhe 830m, Bildquelle: wikimedia

Aufgabe: Konstruieren Sie eine Säule aus einem Material konstanter Dichte ϱ, so dass der Druck (Last pro Fläche) überall konstant p ist.

Zahlenbeispiel: Beton $\varrho = 3\text{g/cm}^3$, Last $G_0 = 4600\text{kN}$, Radius $r_0 = 1\text{m}$, Höhe 300m.
Unser Modell ist zwar extrem vereinfacht, aber es illustriert doch recht gut das Prinzip.

Ein hoher Turm braucht eine breite Basis.

M108
Beispiel

Lösung: In Höhe x haben wir den Radius $r(x) > 0$ gemäß Skizze. Die Fläche ist $A(x) = \pi r(x)^2$, das Volumen $V(x) = \int_{h=0}^{x} \pi r(h)^2 \,\mathrm{d}h$, das Gewicht $G(x) = g\varrho V(x)$, der Druck $G(x)/A(x) = p$. Insgesamt:

$$g\varrho \cdot \int_{h=0}^{x} \pi r(h)^2 \,\mathrm{d}h \quad \overset{!}{=} \quad p \cdot \pi r(x)^2$$

Ableiten dieser Integralgleichung ergibt unsere Differentialgleichung:

$$g\varrho\, \pi r(x)^2 \quad = \quad 2p\, \pi r(x)\, r'(x).$$

Diese ist elementar lösbar. Wir trennen die Variablen und integrieren:

$$\frac{r'(x)}{r(x)} = \frac{g\varrho}{2p} \;\Rightarrow\; \int_{h=0}^{x} \frac{r'(h)}{r(h)} \,\mathrm{d}h = \int_{h=0}^{x} \frac{g\varrho}{2p} \,\mathrm{d}h \;\Rightarrow\; \ln r(x) - \ln r_0 = x\frac{g\varrho}{2p}$$

Wir erhalten somit $r(x) = r_0\, \mathrm{e}^{xg\varrho/2p}$. Der Radius wächst exponentiell!

Dank passender mathematischer Werkzeuge gelingt uns die Rechnung erfreulich leicht.
Zahlenbeispiel: $p \approx 1500\text{kN/m}^2$, $r(x) = 1\text{m} \cdot \mathrm{e}^{x \cdot 0.01/\text{m}}$, $r(300\text{m}) \approx 20\text{m}$.
Die Druckfestigkeit liegt je nach Beton zwischen 10 und 100N/mm^2.

Theorie und Anwendung: Modellierungskreislauf

M109
Erläuterung

Abstraktion ist die Kunst, Wichtiges von Unwichtigem zu trennen.

Differentialgleichungen nutzen wir zur Formulierung der Naturgesetze, sie sind die universelle Sprache der Naturwissenschaft und der Technik: Damit können wir Probleme formulieren, strukturieren, verstehen, lösen.

1. Grundlegendes Verständnis der vorliegenden Situation:
Um Anwendungen in der Physik, Mechanik, Thermodynamik, Strömungslehre, etc. zu verstehen, benötigen Sie zunächst die erforderlichen Grundkenntnisse der betroffenen Anwendungsgebiete: Naturgesetze, grundlegende Modelle, geeignete Vereinfachungen, etc.

Erst so können Sie die Situation quantitativ und präzise erfassen.

2. Mathematische Modellierung der vorliegenden Situation:
Durch geeignete Vereinfachung, Formalisierung und Abstraktion erhalten Sie ein mathematisches Modell. Dieses besteht aus den relevanten Größen und den zwischen ihnen gelten Beziehungen, meist geeignete Gleichungen, sehr häufig Differentialgleichungen.

Hierzu nutzen Sie die Techniken Ihrer HM und weitere nach Bedarf.

Theorie und Anwendung: Modellierungskreislauf

M110
Erläuterung

3. Lösung durch geeignete mathematische Werkzeuge: Dazu lernen Sie hier die grundlegenden Rechentechniken. Das ist ein weites Gebiet! Je nach Ihren Anwendungen vertiefen Sie die nötigen Techniken zur numerischen Näherung, zu partiellen Differentialgleichungen, etc.

Lösungen sind oft schwer zu finden, aber leicht zu überprüfen.
Zur Sorgfalt gehört, die gefundenen / benachbarte / alle Lösungen zu prüfen, zu diskutieren und umsichtig alle Sonderfälle zu beachten.

4. Anpassung und Überprüfung anhand gegebener Daten:
Ist eine mathematische Lösung oder numerische Näherung gelungen, so passen Sie schließlich die noch freien Parameter des Modells an die gegebenen Daten an und überprüfen soweit möglich die Vorhersagen des Modells durch Experimente, Messungen, Alternativmodelle, etc.

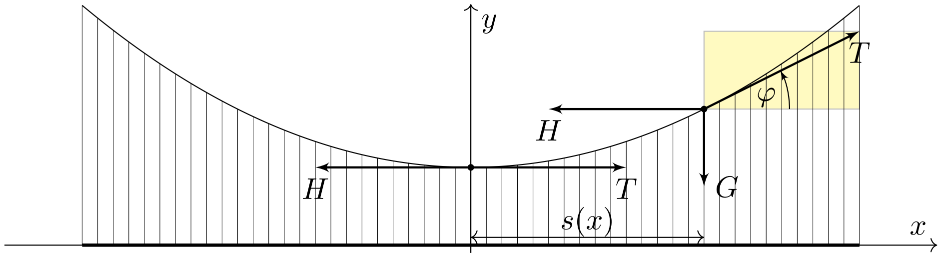
Falls nötig muss erneut ab (1) ein besseres Modell erstellt werden.

Diese Vorlesung konzentriert sich auf Lösungsmethoden (Schritt 3). Aus Ihren Vorlesungen kennen Sie bereits einige Anwendungen (1,2,4), viele weitere werden noch folgen. Nutzen Sie diese Querverbindungen!

Beispiel aus der Mechanik: Hängebrücke

Golden Gate Bridge, San Francisco

Aufgabe: Eine Hängebrücke trägt eine schwere Fahrbahn der Dichte ϱ mit leichten Kabeln. Bestimmen Sie deren Verlauf als Funktionsgraph. Wir vernachlässigen das Gewicht der Kabel gegenüber der Fahrbahn.



Beispiel aus der Mechanik: Hängebrücke

Lösung: Wir suchen die Funktion $y(x)$. Wie in der Skizze haben wir die Steigung $y'(x) = \tan\varphi(x)$ und die Fahrbahnlänge $s(x) = x - x_0$.
In jedem Punkt $(x, y(x))$ des Kabels herrscht **Kräftegleichgewicht**:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -g\varrho\, s(x) \end{pmatrix}}_{\text{Gewichtskraft, vertikal}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -H \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{horizontal}} + \underbrace{\begin{pmatrix} T\cos\varphi(x) \\ T\sin\varphi(x) \end{pmatrix}}_{\text{tangential}} = 0$$

Aus $H = T\cos\varphi(x)$ und $g\varrho\, s(x) = T\sin\varphi(x)$ folgt

$$y'(x) \;=\; \tan\varphi(x) \;=\; \frac{\sin\varphi(x)}{\cos\varphi(x)} \;=\; \frac{g\varrho}{H}\, s(x) \;=\; 2a(x - x_0).$$

🙂 Als Lösungen dieser DG $y'(x) = 2a(x - x_0)$ finden wir die Parabeln

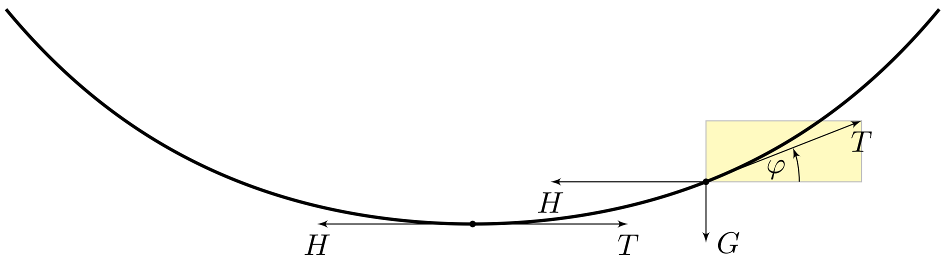
$$y(x) = a(x - x_0)^2 + y_0.$$

⚠ Wir brauchen effiziente Methoden zur systematischen Lösung!
Machen Sie die Probe! Dies ist tatsächlich die allgemeine Lösung.
Die Parameter a, x_0, y_0 passen wir dann den gegebenen Daten an.

Beispiel aus der Mechanik: Kettenlinie

Indiana Jones and the Temple of Doom

Aufgabe: Eine homogene Kette der Dichte ϱ hängt frei und ruhig an ihren Enden. Bestimmen Sie ihren Verlauf als Funktionsgraph.



Beispiel aus der Mechanik: Kettenlinie

Lösung: Wir suchen die Funktion $y(x)$. Wie in der Skizze haben wir die Steigung $y'(x) = \tan\varphi(x)$ und Kettenlänge $s(x) = \int_{t=x_0}^{x} \sqrt{1 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t$.
In jedem Punkt $(x, y(x))$ der Kette herrscht **Kräftegleichgewicht**:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -g\varrho\, s(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -H \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T\cos\varphi(x) \\ T\sin\varphi(x) \end{pmatrix} = 0$$

Aus $H = T\cos\varphi(x)$ und $g\varrho\, s(x) = T\sin\varphi(x)$ folgt

$$y'(x) \;=\; \tan\varphi(x) \;=\; \frac{g\varrho}{H}\, s(x) \;=\; a^{-1} \int_{t=x_0}^{x} \sqrt{1 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Ableiten dieser Integralgleichung ergibt die Differentialgleichung

$$y''(x) = a^{-1}\sqrt{1 + y'(x)^2} \quad \text{bzw.} \quad z'(x) = a^{-1}\sqrt{1 + z(x)^2}.$$

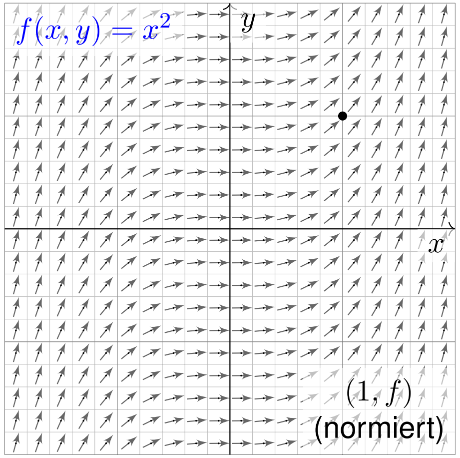
🙂 Als Lösungen dieser DG finden wir die Hyperbelfunktionen:

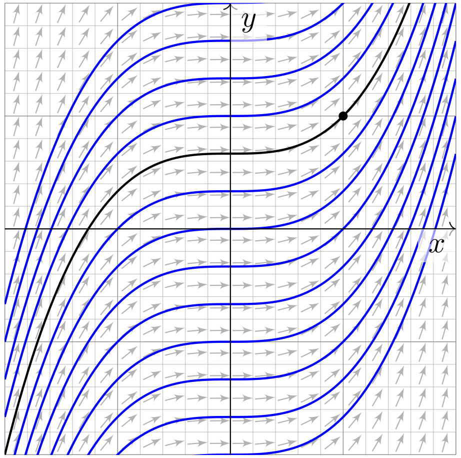
$$z(x) = \sinh\Big(\frac{x - x_0}{a}\Big) \quad \text{also} \quad y(x) = a\cosh\Big(\frac{x - x_0}{a}\Big) + y_0$$

⚠ Wir brauchen effiziente Methoden zur systematischen Lösung!
Machen Sie die Probe! Dies ist tatsächlich die allgemeine Lösung.
Die Parameter a, x_0, y_0 passen wir dann den gegebenen Daten an.

Ein erstes Beispiel: Richtungsfeld und Lösungsschar

Aufgabe: Welche Funktionen $y : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ erfüllen $y'(x) = x^2$? zudem $y(1) = 1$? Was ist jeweils das maximale Definitionsintervall I?





Wir skizzieren das Richtungsfeld zu $f(x,y)=x^2$ auf dem Gebiet $G=\mathbb{R}^2$: Lösungskurven $x \mapsto (x, y(x))$ sind tangential zum Vektorfeld $(1, f(x,y))$. Sie erkennen so den qualitativen Verlauf der Lösungen $y(x) = x^3/3 + c$.

Separation der Variablen und Integration

🙂 Geometrisch ist dies ein Strömungsfeld: Lassen wir ein Teilchen in diesem Strom schwimmen, so ist seine Trajektorie eine Lösungskurve!

Lösung: Die Variablen sind getrennt. Wir können direkt integrieren:

$$\begin{aligned} & y'(x) = x^2 \\ \Longrightarrow \quad & \int y'(x)\,\mathrm{d}x = \int x^2\,\mathrm{d}x + \mathrm{const} \\ \Longrightarrow \quad & y(x) = x^3/3 + c \end{aligned}$$

Die Probe ist leicht: Ableiten genügt... Es gilt tatsächlich $y'(x) = x^2$. Unsere Rechnung beweist, dass wir alle Lösungen gefunden haben! Die Integrationskonstante $c \in \mathbb{R}$ können wir hierbei frei wählen.

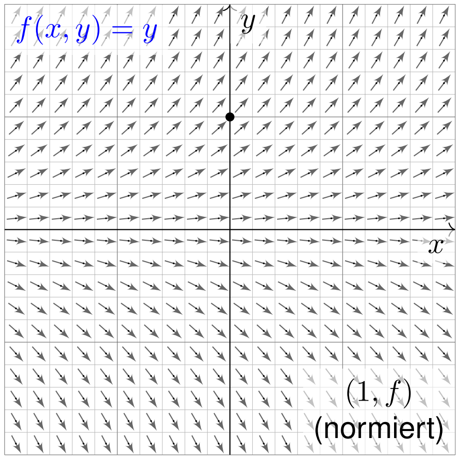
🙂 Das AWP $y'(x) = x^2$ mit $y(1) = 1$ wird einzig gelöst durch

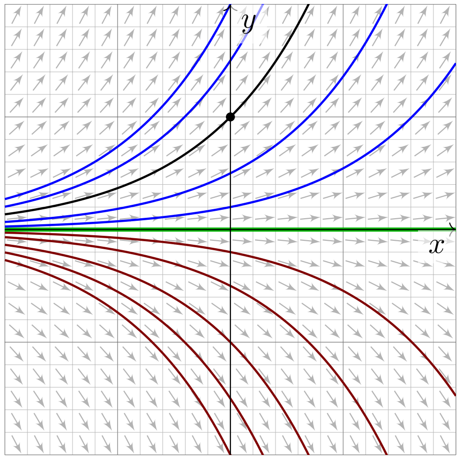
$$y \;:\; \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;:\; x \mapsto y(x) = (x^3 + 2)/3.$$

Ist ein beliebiger Anfangswert $y(x_0) = y_0$ vorgegeben, so ist die einzige Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y(x) = (x^3 - x_0^3)/3 + y_0$. Machen Sie die Probe! Jede andere Lösung ist Einschränkung $y|_J$ auf ein Intervall, $1 \in J \subset \mathbb{R}$.

Die Wachstumsgleichung: Richtungsfeld und Lösungsschar

Aufgabe: Welche Funktionen $y : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ erfüllen $y'(x) = y(x)$? zudem $y(0) = 1$? Was ist jeweils das maximale Definitionsintervall I?





Wir skizzieren das Richtungsfeld zu $f(x,y) = y$ auf dem Gebiet $G = \mathbb{R}^2$: Lösungskurven $x \mapsto (x, y(x))$ sind tangential zum Vektorfeld $(1, f(x,y))$. Sie erkennen so den qualitativen Verlauf der Lösungen $y(x) = c \cdot \mathrm{e}^x$.

Separation der Variablen und Integration

🙂 Anders als die ersten drei Aufgaben aus der Mechanik sind diese Aufgaben kontextfrei: Zu lösen ist eine gegebene Gleichung, so einfach.

Lösung: Eine Lösung ist $y(x) = 0$. Für $y > 0$ integrieren wir:

$$\begin{aligned} & y'(x) = y(x) \\ \Longrightarrow \quad & \frac{y'(x)}{y(x)} = 1 \qquad \Longrightarrow \quad \int \frac{y'(x)}{y(x)}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x + \mathrm{const} \\ \Longrightarrow \quad & \ln y(x) = x + \mathrm{const} \qquad \Longrightarrow \quad y(x) = c \cdot \mathrm{e}^x \end{aligned}$$

Die Probe ist leicht: Ableiten genügt... Es gilt tatsächlich $y'(x) = y(x)$. Die Integrationskonstante $c = \mathrm{e}^{\mathrm{const}} > 0$ können wir hierbei frei wählen. Ebenso verfahren wir im Falle $y < 0$ und erhalten $y(x) = c \cdot \mathrm{e}^x$ mit $c < 0$. Unsere Rechnung beweist, dass wir alle Lösungen gefunden haben!

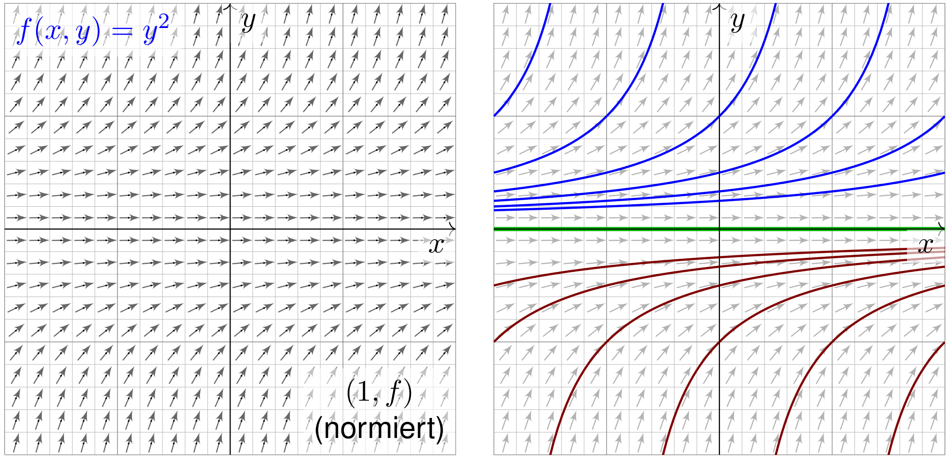
🙂 Das AWP $y'(x) = y(x)$ mit $y(0) = 1$ wird einzig gelöst durch

$$y \;:\; \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;:\; x \mapsto y(x) = \mathrm{e}^x.$$

🙂 Ist ein beliebiger Anfangswert $y(x_0) = y_0$ vorgegeben, so ist die einzige Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y(x) = y_0\,\mathrm{e}^{x - x_0}$. Machen Sie die Probe! Jede andere Lösung ist Einschränkung $y|_J$ auf ein Intervall, $0 \in J \subset \mathbb{R}$.

Die Explosionsgleichung: Richtungsfeld und Lösungsschar

Aufgabe: Welche Funktionen $y:\mathbb{R}\supset I\to\mathbb{R}$ erfüllen $y'(x)=y(x)^2$?
Finden Sie zu jeder Lösung das maximale Definitionsintervall I.



Wir skizzieren das Richtungsfeld zu $f(x,y)=y^2$ auf dem Gebiet $G=\mathbb{R}^2$:
Lösungskurven $x\mapsto(x,y(x))$ sind tangential zum Vektorfeld $(1,f(x,y))$.
Sie erkennen so den qualitativen Verlauf der Lösungen $y(x)=1/(c-x)$.

Separation der Variablen und Integration

Lösung: Eine Lösung ist $y(x)=0$. Für $y\neq 0$ integrieren wir:

$$\begin{aligned} & y'(x)=y(x)^2 \\ \Longrightarrow\quad & \frac{y'(x)}{y(x)^2}=1 &&\Longrightarrow\quad \int\frac{y'(x)}{y(x)^2}\,\mathrm{d}x=\int 1\,\mathrm{d}x+\text{const} \\ \Longrightarrow\quad & -y(x)^{-1}=x+\text{const} &&\Longrightarrow\quad y(x)=\frac{1}{c-x}\end{aligned}$$

Die Probe ist leicht: Ableiten genügt… Es gilt tatsächlich $y'(x)=y(x)^2$.
Unsere Rechnung beweist, dass wir alle Lösungen gefunden haben!
Achtung Polstelle: Jede Lösung $y_c^\pm$ „explodiert“ in endlicher Zeit.

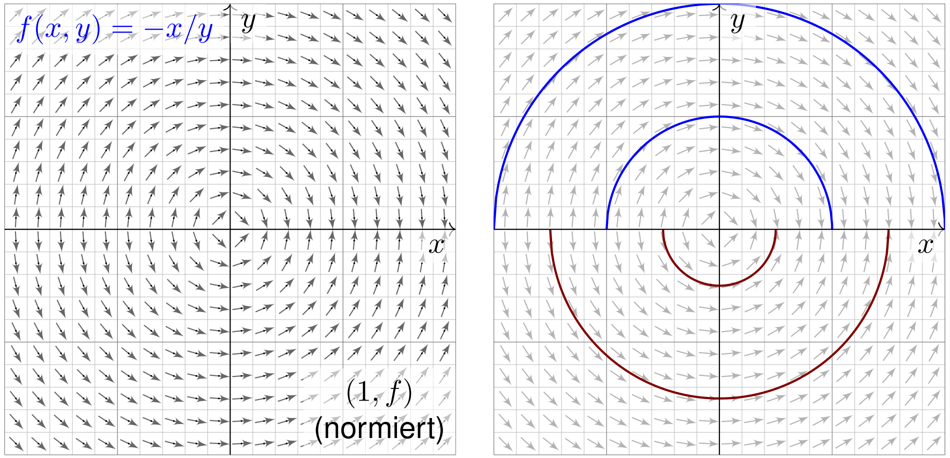
🙂 Zu jeder Konstanten $c\in\mathbb{R}$ erhalten wir hier zwei Lösungen:

$$\begin{aligned} y_c^+ &: \,]-\infty,c[\,\to\mathbb{R}_{>0} : x\mapsto y_c^+(x)=1/(c-x),\\ y_c^- &: \,]c,+\infty[\,\to\mathbb{R}_{<0} : x\mapsto y_c^-(x)=1/(c-x).\end{aligned}$$

🙂 Durch jeden Startpunkt (x_0,y_0) läuft genau eine maximale Lösung,
nämlich die Funktion $y:\mathbb{R}\supset I\to\mathbb{R}:x\mapsto y(x)=y_0/(1-(x-x_0)y_0)$
auf dem Definitionsintervall $I=\{\,x\in\mathbb{R}\mid(x-x_0)y_0<1\,\}$. Probe!

Die Kreisgleichung: Richtungsfeld und Lösungsschar

Aufgabe: Welche Funktionen $y:\mathbb{R}\supset I\to\mathbb{R}$ erfüllen $y'(x)=-x/y(x)$?
Finden Sie zu jeder Lösung das maximale Definitionsintervall I.



Wir skizzieren hier das Richtungsfeld zu $f(x,y)=-x/y$ auf $G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$.
Lösungskurven $x\mapsto(x,y(x))$ sind tangential zum Vektorfeld $(1,f(x,y))$.
Sie erkennen den qualitativen Verlauf der Lösungen $y(x)=\pm\sqrt{r^2-x^2}$.

Separation der Variablen und Integration

Lösung: Wir trennen die Variablen und integrieren:

$$\begin{aligned} & y'(x)=-x/y(x) \\ \Longrightarrow\quad & y(x)\,y'(x)=-x &&\Longrightarrow\quad \int y(x)\,y'(x)\,\mathrm{d}x=\int -x\,\mathrm{d}x+c \\ \Longrightarrow\quad & y(x)^2/2=-x^2/2+c &&\Longrightarrow\quad y(x)=\pm\sqrt{r^2-x^2}\end{aligned}$$

Für $c\le 0$ gibt es keine Lösungen; wir wählen daher $c=r^2/2$, $r\in\mathbb{R}_{>0}$.
Zu jedem Radius $r>0$ beschreibt die Lösung $y_r^+(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ den oberen Halbkreis und entsprechend $y_r^-(x)=-\sqrt{r^2-x^2}$ den unteren.
Die Probe ist leicht: Ableiten genügt. Es gilt tatsächlich $y'(x)=-x/y(x)$.
Unsere Rechnung beweist, dass wir alle Lösungen gefunden haben!

🙂 Durch jeden Startpunkt $(x_0,y_0\neq 0)$ läuft genau eine max. Lösung,

$$y\,:\,]-r,r[\,\to\mathbb{R}\,:\,x\mapsto y(x)=\operatorname{sign}(y_0)\sqrt{r^2-x^2}\quad\text{mit}\quad r=\sqrt{x_0^2+y_0^2}.$$

Bemerkenswert: Sie existiert nur auf dem endlichen Intervall $I=\,]-r,r[$.
Hier explodiert nicht $y(x)$, sondern nur die Steigung $y'(x)$ für $x\to\pm r$.

Separierbare Differentialgleichungen

Aufgabe: Alle bisherigen Beispiele nutzen als Lösungsmethode die **Trennung der Variablen**. Formulieren Sie diese als allgemeine Regel.

Lösung: Eine **separierbare Differentialgleichung** ist von der Form

$$\boxed{y' = g(x)\,h(y) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0.}$$

Lösungsmethode: Wir trennen die Variablen gemäß $y'/h(y) = g(x)$, wobei wir $h(y) \neq 0$ annehmen müssen, und integrieren anschließend:

$$\int_{t=x_0}^{x} \frac{y'(t)}{h(y(t))}\,\mathrm{d}t \quad \stackrel{!}{=} \quad \int_{t=x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t \quad =: G(x)$$

Auf der linken Seite substituieren wir $u = y(t)$ und $\mathrm{d}u = y'(t)\,\mathrm{d}t$:

$$\int_{t=x_0}^{x} \frac{y'(t)}{h(y(t))}\,\mathrm{d}t \quad = \quad \int_{u=y_0}^{y} \frac{1}{h(u)}\,\mathrm{d}u \quad =: H(y)$$

Somit gilt $H(y(x)) \stackrel{!}{=} G(x)$, und Auflösen ergibt $y(x) = H^{-1}(G(x))$.

🙂 Diese Methode fassen wir allgemein im folgenden Satz zusammen.

Separation der Variablen und Integration

Satz M1A: Lösung separierbarer Differentialgleichungen

Zu lösen sei die separierbare Differentialgleichung

$$\boxed{y' = g(x)\,h(y) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0.}$$

Gegeben sind hierzu stetige Funktionen $g : I \to \mathbb{R}$ und $h : J \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ auf Intervallen $I, J \subset \mathbb{R}$ sowie die Anfangswerte $x_0 \in I$ und $y_0 \in J$. Wir definieren Stammfunktionen $G : I \to \mathbb{R}$ und $H : J \to \mathbb{R}$ durch

$$G(x) := \int_{t=x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{und} \qquad H(y) := \int_{u=y_0}^{y} \frac{1}{h(u)}\,\mathrm{d}u.$$

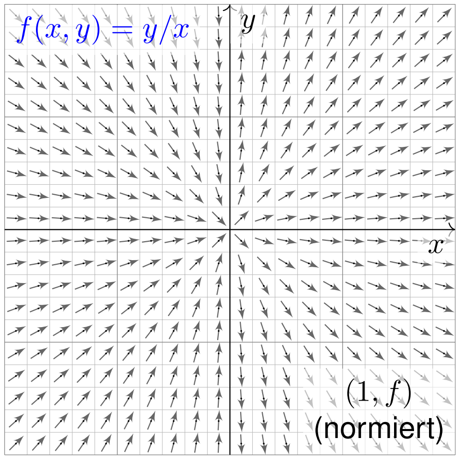
Die Funktion H ist streng monoton, also bijektiv auf ihr Bild $H(J) \subset \mathbb{R}$. Sei $I_0 \subset I$ ein hinreichend kleines Intervall um $x_0 \in I_0$ mit $G(I_0) \subset H(J)$. Unser AWP erlaubt genau eine Lösung $y : \mathbb{R} \supset I_0 \to J \subset \mathbb{R}$, nämlich

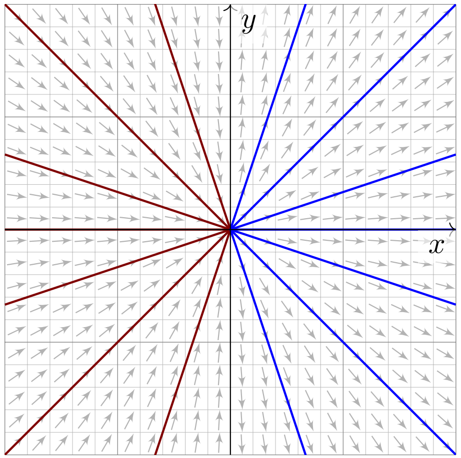
$$\boxed{y(x) = H^{-1}(G(x)).}$$

🙂 Lösungsformel 🙂 Eindeutigkeit 🙂 Stetig abhängig von (x_0, y_0)

Die Geradengleichung: Richtungsfeld und Lösungsschar

Aufgabe: Welche Funktionen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfüllen $x\,y'(x) = y(x)$? Wie viele Lösungen laufen durch einen gegebenen Startpunkt (x_0, y_0)?





Die **implizite DG** $x\,y' = y$ ist definiert in allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Auf $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ ist sie äquivalent zur **expliziten DG** $y' = y/x$.

Separation der Variablen und Integration

Lösung: Wir nehmen zunächst $x, y > 0$ an und trennen die Variablen:

$$\begin{aligned}
& x\,y'(x) = y(x) \\
\implies\ & \frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{1}{x} && \implies \int \frac{y'(x)}{y(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \mathrm{const} \\
\implies\ & \ln y(x) = \ln x + \mathrm{const} && \implies \quad y(x) = a \cdot x
\end{aligned}$$

Unsere Rechnung beweist, dass wir tatsächlich alle Lösungen $y(x) > 0$ für $x > 0$ gefunden haben. Für $x < 0$ oder $y < 0$ verfahren wir ebenso. Die explizite DG $y'(x) = y(x)/x$ wird gelöst durch die Halbgeraden

$$\begin{aligned}
y_a^+ &: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} : x \mapsto a \cdot x, \quad a \in \mathbb{R}, \\
y_b^- &: \mathbb{R}_{<0} \to \mathbb{R} : x \mapsto b \cdot x, \quad b \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Die implizite DG $x\,y'(x) = y(x)$ wird gelöst durch die Geraden

$$y_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto c \cdot x, \quad c \in \mathbb{R}.$$

🙂 Durch jeden Startpunkt $(x_0 \neq 0, y_0)$ läuft genau eine Lösung y_c.
⚠ Durch den Startpunkt $(0, 0)$ laufen unendlich viele Lösungen!
⚠ Durch jeden Startpunkt $(0, y_0 \neq 0)$ läuft gar keine Lösung!

Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

🙂 Die folgende Definition präzisiert unsere Problemstellung. Liegt eine vermeintliche Lösung vor, so sind genau diese Eigenschaften zu prüfen!

Definition M1B: explizite DG und Anfangswertproblem

Gegeben sei eine stetige Funktion $f:\mathbb{R}^2 \supset G \to \mathbb{R}$ als **rechte Seite**. Sie definiert eine **explizite Differentialgleichung erster Ordnung**

$$\boxed{y'(x) = f(x, y(x)) \quad \text{kurz} \quad y' = f(x, y).}$$

Eine **Lösung** dieser Differentialgleichung auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist eine (stetig) differenzierbare Funktion $y: I \to \mathbb{R}$, die für alle $x \in I$ die Bedingungen $(x, y(x)) \in G$ und $y'(x) = f(x, y(x))$ erfüllt.

Sind zudem **Anfangsdaten** $(x_0, y_0) \in G$ gegeben, so soll die Lösung y durch diesen Punkt laufen, das heißt $x_0 \in I$ und $y(x_0) = y_0$ erfüllen.

Ein solches Anfangswertproblem heißt **gut gestellt**, wenn genau eine Lösung y existiert und stetig von den Anfangsdaten (x_0, y_0) abhängt.

Beispiel: Separierbare DG sind gut gestellt dank unseres Satzes M1A.

Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

🙂 Schnellen Überblick verschafft uns der folgende zentrale Satz:

Satz M1C: Cauchy Existenz- und Eindeutigkeitssatz, kurz ∃&E

Sei $f:\mathbb{R}^2 \supset G \to \mathbb{R}$ stetig. Zu lösen sei die Differentialgleichung

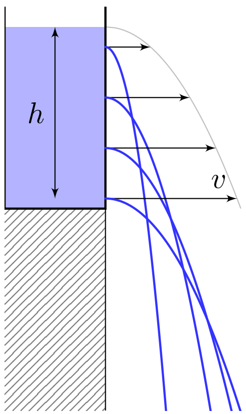
$$\boxed{y' = f(x, y) \quad \text{mit Anfangswert} \quad y(x_0) = y_0.}$$

(1) Zu jedem Startpunkt $(x_0, y_0) \in \mathring{G}$ existieren Lösungen $y: \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$. Jede kann beidseitig bis zum Rand ∂G (oder ∞) fortgesetzt werden.

(2) Ist $f(x, y)$ stetig diff'bar nach y, so ist die Lösung durch $(x_0, y_0) \in \mathring{G}$ eindeutig bestimmt. Lokal hängt sie stetig differenzierbar von (x_0, y_0) ab.

Wir werden diesen grundlegenden Satz in Kapitel O weiter ausführen und dort auch beweisen. Existenz bedeutet nach M1B: Es gibt ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ um x_0 und eine Funktion $y: I \to \mathbb{R}$ mit $y(x_0) = y_0$ sowie $(x, y(x)) \in G$ und $y'(x) = f(x, y(x))$ für alle $x \in I$. Jede solche Lösung kann beidseitig fortgesetzt werden bis sie den Rand von G erreicht oder nach ∞ entkommt. Lässt sie sich nicht weiter fortsetzen, so heißt sie maximale Lösung. Folgendes Beispiel zeigt, dass es zu (x_0, y_0) auch mehrere Lösungen geben kann. Das Problem ist dann schlecht gestellt. Eindeutigkeit bedeutet: Sind $u: I \to \mathbb{R}$ und $v: J \to \mathbb{R}$ Lösungen mit $u(x_0) = v(x_0) = y_0$, so gilt $u = v$ auf dem gemeinsamen Intervall $I \cap J$. Sind u, v maximal, so gilt zudem $I = J$.

Warnendes Beispiel: Torricellis Eimer als Wasseruhr



Torricellis Gesetz: Wasser fließt aus einem Zylinder mit der Geschwindigkeit $v = \sqrt{2\,g\,h}$. Hierbei ist h die Pegelhöhe, $g = 9.81\mathrm{m/s^2}$ die Erdbeschleunigung, also v die Geschwindigkeit eines Wassertropfens im freien Fall aus Höhe h.

Energiegleichung in der Strömungslehre!

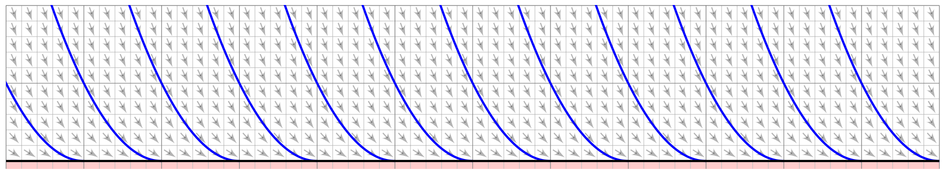
`en.wikipedia.org/wiki/Torricelli's_law`
`en.wikipedia.org/wiki/Water_clock`

Anwendung als Wasseruhr: Wie funktioniert das? Zeit $t \in \mathbb{R}$, Wasserhöhe $y(t) \ge 0$ über der Öffnung.

Der Pegel y erfüllt **Torricellis Differentialgleichung** $y'(t) = -a\sqrt{y(t)}$. Die Konstante $a > 0$ hängt von der Größe (und Form) der Öffnung ab. In folgender Rechnung nehmen wir zur Vereinfachung $a = 2$ an.

Aufgabe: Welche Funktionen $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ erfüllen $y'(t) = -2\sqrt{y(t)}$? Hier ist $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\ge 0}$ und $f(t, y) = -2\sqrt{y}$. Was sagt der ∃&E-Satz? Welche Anfangswertprobleme $y(t_0) = y_0$ sind hier gut gestellt?

Warnendes Beispiel: Torricellis Eimer als Wasseruhr



Lösung: Die Nullfunktion $y(t) = 0$ ist eine Lösung. Sei also $y > 0$. Separation $y'(t) / 2\sqrt{y(t)} = -1$ und Integration zu $\sqrt{y(t)} = c - t \ge 0$. Wir finden die Lösung $y_c(t) = (c - t)^2$ für $t \le c$. Für $t > c$ gilt das nicht:

🙂 Der Eimer bleibt leer und füllt sich nicht wieder! Maximale Lösung:

$$y_c \;:\; \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\ge 0} \;:\; t \mapsto y_c(t) = \begin{cases} (c - t)^2 & \text{für } t \le c, \\ 0 & \text{für } t \ge c. \end{cases}$$

🙂 Jedes AWP $y(t_0) = y_0 > 0$ hat genau eine maximale Lösung!

⚠ Jedes AWP $y(t_0) = 0$ hat unendlich viele Lösungen (y_c mit $c \le t_0$).

Letzteres ist schlecht gestellt. Anschaulich: Ist der Eimer einmal leer, so erkennen wir nicht mehr, wann er auslief! Mathematische Warnung: Für $y > 0$ ist $f(t, y) = -2\sqrt{y}$ stetig nach y diff'bar, für $y = 0$ aber nicht!

Exakte Differentialgleichungen: erstes Beispiel

Zwecks Illustration beginne ich mit einem sehr einfachen Beispiel.

Aufgabe: Wir betrachten erneut $y'(x) = -x/y(x)$, umgeschrieben zu

$$\boxed{2x + 2y(x) \cdot y'(x) = 0.}$$

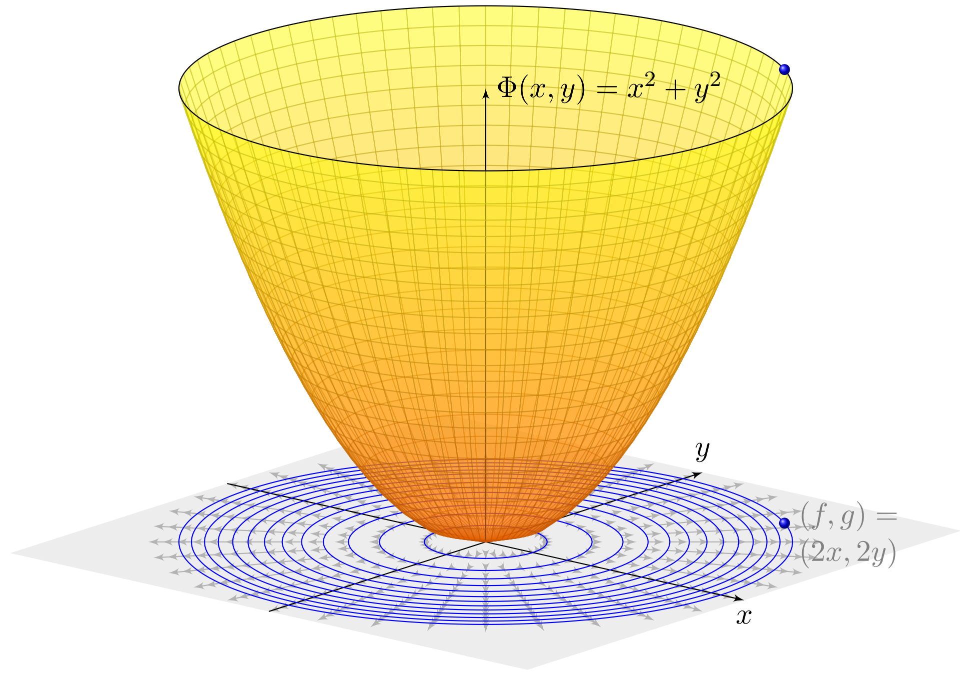
Dieser Typ von Differentialgleichung hat die allgemeine Form

$$\begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = 0 \qquad \text{hier mit} \qquad \begin{cases} f(x,y) = 2x, \\ g(x,y) = 2y. \end{cases}$$

(1) Wie liegen die Lösungen $x \mapsto (x, y(x))$ zum Vektorfeld (f, g)?
(2) Finden und skizzieren Sie ein Potential $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zu (f, g).
(3) Gewinnen Sie aus den Niveaulinien von Φ die Lösungen der DG.
(4) Finden Sie die maximalen Lösungen mit $y(3) = 4$ bzw. $y(1) = -1$.

Lösung: (1) Jede Lösung verläuft senkrecht zum Vektorfeld (f, g).
(2) Notwendiges Kriterium: Gilt $\operatorname{rot}(f, g) = 0$, also $\partial_y f = \partial_x g$? Ja!
Zudem ist $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend, also existiert ein Potential.
Wir finden $\Phi(x, y) = x^2 + y^2$ $(+\text{const})$. Probe: $\operatorname{grad} \Phi = (2x, 2y)$.

Exakte Differentialgleichungen: erstes Beispiel



Exakte Differentialgleichungen: erstes Beispiel

(3) Die Niveaulinien des Potentials Φ sind Kreise um den Nullpunkt.
Diese stehen senkrecht zum radialen Gradientenfeld $\operatorname{grad} \Phi = (f, g)$.
Die allgemeinen Lösungen $y(x)$ der DG sind somit Halbkreise:
Zu jedem Radius $r > 0$ hat die DG demnach die beiden Lösungen

$$y_r^{\pm} \; : \;]{-r}, r[\to \mathbb{R} \; : \; x \mapsto \pm\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Probe: Erfüllt diese Funktion tatsächlich $2x + 2y(x) \cdot y'(x) = 0$? Ja!
Der folgende Satz versichert uns, dass wir so alle Lösungen finden.
Das Definitionsintervall von $y_r^{\pm}$ haben wir jeweils maximal gewählt.

(4a) Auflösen von $\Phi(x, y(x)) = x^2 + y(x)^2 \stackrel{!}{=} \Phi(3, 4) = 25$ ergibt

$$y(x) = +\sqrt{25 - x^2} \quad \text{für } -5 < x < 5.$$

(4b) Auflösen von $\Phi(x, y(x)) = x^2 + y(x)^2 \stackrel{!}{=} \Phi(1, -1) = 2$ ergibt

$$y(x) = -\sqrt{2 - x^2} \quad \text{für } -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}.$$

Die Konstante und das Vorzeichen werden jeweils so bestimmt, dass die Lösung durch den vorgegebenen Punkt $y(3) = 4$ bzw. $y(1) = -1$ läuft.

Exakte Differentialgleichungen: erstes Beispiel

🙂 Das Potential Φ und die Lösungen $x \mapsto (x, y(x))$ sind anschaulich:
Analytische Lösung und geometrische Interpretation ergänzen sich!

Wir nutzen hierzu die geometrischen Eigenschaften des Gradienten:
Der Gradient $\operatorname{grad} \Phi = (f, g)$ zeigt in Richtung des steilsten Anstiegs.
In jedem Punkt steht er senkrecht zur Niveaulinie (Äquipotentialkurve).

📖 Zur Wiederholung siehe Kimmerle–Stroppel, Analysis, §4.9.

🙂 Die Differentialgleichung $f(x, y) + g(x, y)\, y' = 0$ bedeutet:
Jede Lösung $x \mapsto (x, y(x))$ verläuft senkrecht zum Vektorfeld (f, g).
Der Satz M2A garantiert, dass die Lösungen genau die Niveaulinien von Φ sind, also keine Lösungen hinzukommen oder verloren gehen.

🙂 Potential und Lösungen können wir meist gut berechnen!
Hier nutzen wir unsere Integralsätze und Techniken aus Kapitel H:
Notwendig ist zunächst die Rotationsfreiheit $\operatorname{rot}(f, g) = 0$. Auf einfach zusammenhängenden (z.B. konvexen) Gebieten ist dies hinreichend.

🙂 Sind die Voraussetzungen zur Existenz eines Potentials gesichert, so können wir (f, g) zu einem Potential integrieren und die DG lösen!

Exakte Differentialgleichungen: die Idee

Die Trennung der Variablen ist nützlich, aber leider nicht immer möglich. Hier hilft das allgemeinere Lösungsverfahren für **exakte DG** weiter: Angenommen $y : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y(x)$, erfüllt eine Gleichung

$$\Phi(x, y(x)) = \text{const}$$

für eine Funktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \supset G \to \mathbb{R}$. Für die Ableitung nach x gilt dann

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi(x, y(x)) = 0.$$

Sind $\Phi(x, y)$ und $y(x)$ stetig differenzierbar, so gilt dank Kettenregel

$$\partial_x\Phi(x, y(x)) \cdot 1 + \partial_y\Phi(x, y(x)) \cdot y'(x) = 0.$$

Eine Differentialgleichung dieser Form heißt **exakt** mit Potential Φ. Lösungen $x \mapsto (x, y(x))$ sind dann **Äquipotentialkurven** von Φ (M2A).

☺ In Anwendungen verläuft die Rechnung typischerweise umgekehrt: Die Differentialgleichung ist gegeben, wir prüfen Exaktheit, bestimmen ein Potential Φ und lösen schließlich die Gleichung $\Phi(x, y) = c$ nach y. Meist wird ein Anfangswert (x_0, y_0) vorgeben und somit $c = \Phi(x_0, y_0)$.

Exakte Differentialgleichungen: die Methode

Satz M2A: Lösung exakter Differentialgleichung

Jedes stetige Vektorfeld $(f, g) : \mathbb{R}^2 \supset G \to \mathbb{R}^2$ definiert eine DG

$$\boxed{f(x, y) + g(x, y)\, y' = 0.}$$

Diese DG heißt **exakt**, wenn ein Potential Φ zu (f, g) existiert, also eine C^1–Funktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \supset G \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad}\Phi = (f, g)$, d.h. $\partial_x\Phi = f$, $\partial_y\Phi = g$. Die Lösungen der DG sind dann die Äquipotentialkurven von Φ:

(1) Eine differenzierbare Funktion $y : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ ist genau dann Lösung der Differentialgleichung, wenn $\Phi(x, y(x)) = \text{const}$ für alle $x \in I$ gilt.

(2) Zu jedem Punkt $(x_0, y_0) \in G$ mit $g(x_0, y_0) \neq 0$ existiert ein offenes Intervall I um x_0 und eine eindeutige Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ mit $y(x_0) = y_0$.

☺ Implizite Lösung ☺ Eindeutigkeit ☺ Stetig abhängig von (x_0, y_0)
Aussage (2) ist der Satz über implizite Funktionen: Er besagt dass wir die Gleichung $\Phi(x, y(x)) = c := \Phi(x_0, y_0)$ nach $y(x)$ auflösen können. Ob und wie die explizite Auflösung gelingt, hängt vom Einzelfall ab, aber zumindest lokal um (x_0, y_0) ist sie prinzipiell immer möglich.

Exakte Differentialgleichungen: die Methode

Aufgabe: Rechnen Sie die Äquivalenz (1) nach, also „⇒“ und „⇐“.

Lösung: (1a) Die Implikation „⇐“ besagt, dass jede Äquipotentialkurve y mit $\Phi(x, y(x)) = \text{const}$ die DG löst. Dank Kettenregel gilt wie gesehen:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi(x, y(x)) &= \partial_x\Phi(x, y(x)) \cdot 1 + \partial_y\Phi(x, y(x)) \cdot y'(x) \\ &= f(x, y(x)) + g(x, y(x))\, y'(x) \end{aligned}$$

(1b) Die Implikation „⇒“ besagt, dass jede Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ der DG eine Äquipotentialkurve von Φ ist. Für $a, b \in I$ gilt nämlich dank HDI:

$$\begin{aligned} \Phi(b, y(b)) - \Phi(a, y(a)) &= \int_{x=a}^{b} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\Phi(x, y(x))\Big]\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{x=a}^{b} f(x, y(x)) + g(x, y(x))\, y'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x=a}^{b} 0\,\mathrm{d}x = 0. \end{aligned}$$

☺ Demnach sind die Lösungskurven $x \mapsto y(x)$ genau die Niveaulinien! Dank (2) ist das Niveau tatsächlich eine *Linie* (und kein *Plateau* o.ä.): Wir erhalten die eindeutige Lösung y durch Auflösen von $\Phi(x, y) = c$.

Wie löst man exakte Differentialgleichungen?

Seien $f, g : \mathbb{R}^2 \supset G \to \mathbb{R}$ stetig. Die Differentialgleichung

$$f(x, y) + g(x, y)\, y' = 0$$

ist genau dann exakt, wenn das zugehörige Vektorfeld

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \supset G \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$$

exakt ist, also ein Potential $\Phi : G \to \mathbb{R}$ besitzt. Zur Erinnerung (H2E):

(f, g) ist exakt, d.h. $\exists\Phi : \partial_x\Phi = f, \partial_y\Phi = g$	$\xrightarrow{(f,g)\text{ stetig diff'bar}}$ $\xleftarrow[G\text{ einfach zshgd}]{}$	f ist rotationsfrei, d.h. $\partial_x g = \partial_y f$

☺ Ein Potential $\Phi(x, y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (f, g) \bullet \mathrm{d}\gamma$ konstruieren wir durch das Arbeitsintegral: wegunabhängig da $\operatorname{rot}(f, g) = 0$ und G einfach zshgd. Zur praktischen Berechnung eignet sich koordinatenweise Integration.

☺ Bei der Anwendung auf DG muss G notfalls eingeschränkt werden, z.B. ein kleines Rechteck um (x_0, y_0), damit G einfach zshgd wird (E3D).

Was ist ein integrierender Faktor?

Unser Ziel und Slogan: Was noch nicht exakt ist, wird exakt gemacht! Sei $(f,g) : \mathbb{R}^2 \supset G \to \mathbb{R}^2$ stetig. Zu lösen sei die Differentialgleichung

$$\boxed{f(x,y) + g(x,y)\,y' = 0.}$$

🙂 Mit einem Potential Φ zu (f,g) können wir diese DG lösen, wie zuvor. Wenn nicht? Multiplikation mit $\lambda \neq 0$ ergibt die äquivalente Gleichung

$$\boxed{\lambda(x,y)\,f(x,y) + \lambda(x,y)\,g(x,y)\,y' = 0.}$$

Diese beiden Differentialgleichungen haben genau dieselben Lösungen! Anschaulich: Die Richtung von (f,g) bleibt, nur die Länge wird skaliert. Falls (f,g) selbst schon ein Potential hat, dann genügt der Faktor $\lambda = 1$. Andernfalls wollen wir (f,g) umformen, um eine exakte DG zu erhalten:

Definition M2B: integrierender Faktor

Eine Funktion $\lambda : G \to \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ heißt **integrierender Faktor** zu (f,g), wenn das skalierte Vektorfeld $(\lambda f, \lambda g) : G \to \mathbb{R}^2$ ein Potential hat.

Integrierender Faktor: ein einfaches Beispiel

Aufgabe: Wir betrachten das Vektorfeld $(f,g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2y^3 + y \\ x^3y^2 - x \end{pmatrix}.$$

Existiert ein Potential? Ist $\lambda(x,y) = (xy)^{-1}$ ein integrierender Faktor?

Lösung: (1) Das Vektorfeld (f,g) erlaubt kein Potential, denn

$$\operatorname{rot}(f,g) = \partial_x g - \partial_y f = (3x^2y^2 - 1) - (3x^2y^2 + 1) = -2 \neq 0$$

(2) Multiplikation mit $\lambda(x,y) = (xy)^{-1}$ skaliert das Vektorfeld zu

$$\begin{pmatrix} \lambda f \\ \lambda g \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x\,y^2 + 1/x \\ x^2y - 1/y \end{pmatrix}.$$

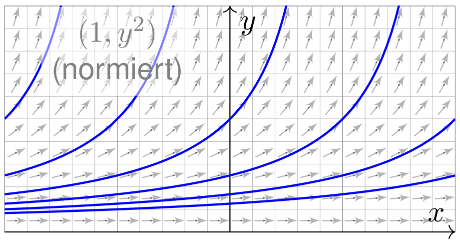
Dank dieser Korrektur verschwindet die Rotation, denn

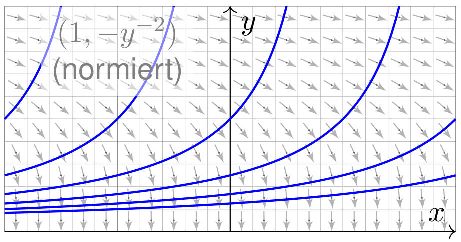
$$\operatorname{rot}(\lambda f, \lambda g) = \partial_x(\lambda g) - \partial_y(\lambda f) = 2xy - 2xy = 0.$$

🙂 Somit ist $\lambda(x,y) = (xy)^{-1}$ ein integrierender Faktor für (f,g).
⚠ Hierzu müssen wir das Gebiet $\mathbb{R}^2$ auf $x, y \neq 0$ einschränken!
(3) Als Potential finden wir $\Phi(x,y) = x^2y^2/2 + \ln|x| - \ln|y|$ für $x, y \neq 0$.

Exakt verallgemeinert separierbar.

Beispiel: Wir können $y' = y^2$ umschreiben zu $1 - y'/y^2 = 0$. Wir gelangen so von einer separierbaren zu einer exakten DG!





Aufgabe: Auf einem Rechteck $G = I \times J \subset \mathbb{R}^2$ betrachten wir die DG

$$\boxed{(1) \qquad y' = g(x)\,h(y) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0.}$$

Diese können wir äquivalent umwandeln zu

$$\boxed{(2) \qquad g(x)\,h(y) - y' = 0 \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0.}$$

Ist diese DG exakt? Ist $\lambda(x,y) = 1/h(y)$ ein integrierender Faktor? Lösen Sie so (2). Vergleichen Sie mit der Separationsmethode für (1).

Exakt verallgemeinert separierbar.

Lösung: Das Vektorfeld $(\,g(x)h(y),\ -1\,)$ ist i.A. nicht exakt, denn

$$\partial_y\big[g(x)h(y)\big] = g(x)h'(y) \quad \neq \quad \partial_x\big[-1\big] = 0.$$

Durch Multiplikation mit $\lambda(x,y) = 1/h(y)$ erhalten wir eine exakte DG:

$$g(x) + \frac{-1}{h(y)}\,y' = 0, \quad \text{denn} \quad \partial_y\Big[g(x)\Big] = \partial_x\left[\frac{-1}{h(y)}\right] = 0.$$

Als Potential findet wir $\Phi(x,y) = G(x) - H(y)$ mit

$$G(x) := \int_{t=x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{und} \qquad H(y) := \int_{u=y_0}^{y} \frac{1}{h(u)}\,\mathrm{d}u.$$

🙂 Auflösen von $G(x) - H(y) = 0$ liefert $y(x) = H^{-1}(G(x))$ wie zuvor. In diesem Spezialfall erhalten wir erneut die Separationsmethode M1A.

🙂 Jede separierbare DG lässt sich so in eine exakte DG umformen. Wie zuvor müssen wir hierzu $h(y) \neq 0$ für alle $y \in J$ voraussetzen.

🙂 Umgekehrt ist nicht jede exakte DG auch separierbar. M215 M316
Exakte DG erweitern daher wesentlich unseren Werkzeugkasten!

Wie berechnet man einen integrierenden Faktor?

M213

Bedingung für einen integrierenden Faktor zum Vektorfeld (f, g):

$$\boxed{\partial_y\big[\lambda(x,y)\,f(x,y)\big] = \partial_x\big[\lambda(x,y)\,g(x,y)\big]}$$

Dies ist eine partielle Differentialgleichung für $\lambda(x,y)$:

$$(\partial_y\lambda)\,f + \lambda\,(\partial_y f) = (\partial_x\lambda)\,g + \lambda\,(\partial_x g)$$

Leider gibt es keine allgemeine Methode zur Lösung dieser Gleichung.

In wichtigen Spezialfällen gibt es jedoch integrierende Faktoren, die nur von einer Variablen abhängen, also nur von x oder nur von y.

Aufgabe: Lösen Sie diese Gleichung für $\lambda = \lambda(x)$, also $\partial_y\lambda = 0$.

Lösung: Die obige Gleichung vereinfacht sich für $\lambda(x)$ zu:

$$\lambda(x)\,\partial_y f(x,y) = \lambda'(x)\,g(x,y) + \lambda(x)\,\partial_x g(x,y)$$

Wir lösen nach λ auf und erhalten folgende gewöhnliche DG:

$$\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = \frac{\partial_y f(x,y) - \partial_x g(x,y)}{g(x,y)} = -\frac{\operatorname{rot}(f,g)}{g}(x,y)$$

Dies ist lösbar, wenn auch die rechte Seite nur von x abhängt!

Integrierende Faktoren in nur einer Variablen

M214

Satz M2C: integrierende Faktoren in nur einer Variablen

Für jeden nur von x abhängigen integrierenden Faktor $\lambda = \lambda(x)$ gilt:

$$\boxed{\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = \frac{\partial_y f(x,y) - \partial_x g(x,y)}{g(x,y)}, \qquad \text{kurz:} \quad \frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = -\frac{\operatorname{rot}(f,g)}{g}(x,y)}$$

Für jeden nur von y abhängigen integrierenden Faktor $\lambda = \lambda(y)$ gilt:

$$\boxed{\frac{\lambda'(y)}{\lambda(y)} = \frac{\partial_x g(x,y) - \partial_y f(x,y)}{f(x,y)}, \qquad \text{kurz:} \quad \frac{\lambda'(y)}{\lambda(y)} = +\frac{\operatorname{rot}(f,g)}{f}(x,y)}$$

Dies ist lösbar, wenn auch die rechte Seite nur von x bzw. y abhängt.

Ob eine dieser Lösungen möglich ist, muss man ausprobieren. Die Vorgehensweise ist wie folgt: Auf einem einfach-zusammenhängenden Gebiet G ist das Vektorfeld (f,g) genau dann exakt, wenn $\operatorname{rot}(f,g) = 0$ gilt. Diese sehr einfache Bedingung wird man deshalb als erstes prüfen. Ist $\operatorname{rot}(f,g) \neq 0$, so kann man hoffen, dass die Rotation wie oben formuliert ein Vielfaches von g oder von f ist. Dann greifen obige Kriterien: Wir können einen integrierenden Faktor λ berechnen, das Vektorfeld durch λ korrigieren und schließlich zu einem Potential integrieren.

Beispielrechnung für einen integrierenden Faktor

M215
Beispiel

Aufgabe: Lösen Sie für $x > 0$ die Differentialgleichung

$$\boxed{\big[1 - x^2 y(x)\big] + \big[x^2 y(x) - x^3\big]\,y'(x) = 0.}$$

(1) Ist sie separierbar? (2) exakt? (3) Existiert ein integrierender Faktor?
(4) Finden Sie ein Potential und (5) damit alle Lösungskurven $x \mapsto y(x)$.

Lösung: (1) Separierbar? $f(x,y) = \frac{x^2y-1}{x^2y-x^3} \stackrel{?}{=} g(x)\,h(y)$: Nein! Beweis?
Es gilt $f(1,3)f(2,4) = \frac{2}{2}\cdot\frac{15}{8} = \frac{15}{8}$, aber $f(1,4)f(2,3) = \frac{3}{3}\cdot\frac{11}{4} = \frac{11}{4}$. M316

(2) Exakt? Hier ist $f(x,y) = 1 - x^2y$ und $g(x,y) = x^2y - x^3$, also

$$\operatorname{rot}(f,g) = \partial_x g - \partial_y f = (2xy - 3x^2) + x^2 = 2xy - 2x^2 \neq 0$$

Die DG ist demnach leider nicht exakt. Glücklicherweise gilt jedoch

$$-\frac{\operatorname{rot}(f,g)}{g} = -\frac{2xy - 2x^2}{x^2y - x^3} = -\frac{2x(y-x)}{x^2(y-x)} = -\frac{2}{x}.$$

(3) Daher gibt es einen nur von x abhängigen integrierenden Faktor:

$$\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = -\frac{2}{x} \quad\Rightarrow\quad \ln|\lambda(x)| = -2\ln|x| + \text{const} \quad\Rightarrow\quad \lambda(x) = c\,x^{-2}$$

Beispielrechnung für einen integrierenden Faktor

M216
Beispiel

Die Konstante c ist für den Multiplikator unerheblich. Wir setzen $c = 1$.
(4) Wir berechnen ein Potential zum reskalierten Vektorfeld

$$\begin{pmatrix}\lambda f\\ \lambda g\end{pmatrix} : \mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x^{-2} - y\\ y - x\end{pmatrix}.$$

Nun gilt $\operatorname{rot}(\lambda f, \lambda g) = 0$. Probe! Wir integrieren koordinatenweise:

$$\begin{aligned}
\partial_x\Phi(x,y) &\stackrel{!}{=} x^{-2} - y &\implies\quad \Phi(x,y) &= \textstyle\int x^{-2} - y\,\mathrm{d}x\\
& & &= -x^{-1} - xy + c(y).\\
\partial_y\Phi(x,y) &= -x + c'(y) \stackrel{!}{=} y - x &\implies\quad c(y) &= \textstyle\int y\,\mathrm{d}y\\
& & &= y^2/2 + \text{const}
\end{aligned}$$

Wir finden so das Potential $\Phi(x,y) = y^2/2 - xy - 1/x$. Probe!

(5) Die Lösungskurven $x \mapsto y(x)$ der DG sind die Niveaulinien von Φ:

$$y(x)^2/2 - x\,y(x) - 1/x = c.$$

Auflösen nach y ergibt $y(x) = x \pm \sqrt{x^2 + 2/x + 2c}$. Die Probe ist leicht!

Lineare Differentialgleichung: homogen

Zu lösen sei die **homogene lineare Differentialgleichung**

$$\boxed{y'(x) = a(x)\,y(x).}$$

Hierbei ist $a : I \to \mathbb{R}$ stetig auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ sowie $x_0 \in I$.

Aufgabe: Bestimmen Sie die Menge L aller Lösungen $y : I \to \mathbb{R}$.
Ist L ein reeller Untervektorraum in $C(I, \mathbb{R})$? Welcher Dimension?

Lösung: Die Nullfunktion $y = 0$ löst $y'(x) = a(x)\,y(x)$.
Wir nehmen $y(x) \neq 0$ an, sodass wir durch $y(x)$ dividieren können:
Separation $y'(x)/y(x) = a(x)$ und Integration zu $\ln|y(x)| = A(x) + C$
liefert $|y(x)| = \mathrm{e}^{A(x)+C}$ also $y(x) = \pm\,\mathrm{e}^{C}\,\mathrm{e}^{A(x)}$ mit der Stammfunktion

$$A : I \to \mathbb{R} : x \mapsto A(x) := \int_{t=x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t$$

Wir erhalten somit alle Lösungen $y_c(x) = c\,\mathrm{e}^{A(x)}$ mit $c \in \mathbb{R}$. Probe!
☺ Diese Lösungsformel gilt für $c > 0$ und $c < 0$ ebenso wie für $c = 0$.

Lineare Differentialgleichung: homogen

Ist unsere Lösungsmenge $L = \{\, y_c = c\,\mathrm{e}^{A} \mid c \in \mathbb{R} \,\}$ bereits vollständig?
Wir nutzen den Eindeutigkeitssatz M1C oder rechnen es direkt nach:

Angenommen, irgendeine Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ erfüllt $y'(x) = a(x)\,y(x)$.
Wir betrachten den Quotienten $q(x) = y(x)/y_1(x)$ und leiten ab:

$$q'(x) = \frac{y'(x)y_1(x) - y(x)y_1'(x)}{y_1(x)^2} = \frac{a(x)y(x) \cdot y_1(x) - y(x) \cdot a(x)y_1(x)}{y_1(x)^2} = 0$$

Auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ folgt aus $q' = 0$, dass die Funktion q konstant ist.
Demnach gilt $y = c\,y_1 = y_c$. Wir kennen also tatsächlich *alle* Lösungen!

☺ Alle Lösungen sind Vielfache der Fundamentallösung $\mathrm{e}^{A(x)}$.
Anders gesagt, die Lösungsmenge $\{\, y_c : I \to \mathbb{R} : x \mapsto c\,\mathrm{e}^{A(x)} \mid c \in \mathbb{R} \,\}$
ist hier ein reeller Vektorraum der Dimension 1 mit Basis $y_1(x) = \mathrm{e}^{A(x)}$.

☺ Die lineare Struktur ist später für DG n–ter Ordnung sehr nützlich:
In diesem Fall ist die Lösungsmenge ein Vektorraum der Dimension n.
Die Konstruktion einer Basis, also eines „Fundamentalsystems“ von
Lösungen der DG, gestaltet die Rechnung besonders übersichtlich.

Lineare Differentialgleichung: homogen

Da lineare Differentialgleichungen häufig vorkommen, halten wir fest:

Satz M2D: Lösungsformel für homogene lineare DG

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a : I \to \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}$. Zu lösen ist

$$\boxed{y'(x) = a(x)\,y(x) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0.}$$

Es existiert genau eine Lösung $y : I \to \mathbb{R}$, und diese ist gegeben durch

$$\boxed{y(x) = \mathrm{e}^{A(x)}\,y_0 \quad \text{mit} \quad A(x) = \int_{t=x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t.}$$

☺ Lösungsformel ☺ Eindeutigkeit ☺ Stetig abhängig von (x_0, y_0)
☺ Die Lösungsmenge $L_0 = \{\, \mathrm{e}^{A}\,y_0 \mid y_0 \in \mathbb{R} \,\}$ ist ein 1-dim. Vektorraum!
Das heißt: Linearkombinationen von Lösungen sind wieder Lösungen.
Die Zuordnung $\mathbb{R} \to L_0 : y_0 \mapsto \mathrm{e}^{A}\,y_0$ ist ein Vektorraumisomorphismus.
☺ Die gesamte Lösungsmenge wird damit besonders übersichtlich und wesentlich einfacher zu beschreiben als bei nicht-linearen Problemen!

Lineare Differentialgleichung: homogen

Aufgabe: Welche der folgenden DG sind (homogen) linear?

$$y' = y, \quad y' = y/x, \quad y' = -xy, \quad y' = xy, \quad y' = x, \quad y' = x^2, \quad y' = y^2.$$

Für lineare finde man alle Lösungen und die spezielle durch (x_0, y_0).
Ist auch für die nicht-linearen die Lösungsmenge ein Vektorraum?

Lösung: Unter den bisher diskutierten DG sind folgende linear:

Lineare DG		allgemeine Lösung,	AWP zu (x_0, y_0)
$y' = y$	$\Rightarrow$	$y(x) = c \cdot \mathrm{e}^{x}$,	$y(x) = y_0 \cdot \mathrm{e}^{(x-x_0)}$
$y' = y/x$	$\Rightarrow$	$y(x) = c \cdot x$,	$y(x) = y_0 \cdot x/x_0$
$y' = -xy$	$\Rightarrow$	$y(x) = c \cdot \mathrm{e}^{-x^2/2}$,	$y(x) = y_0 \cdot \mathrm{e}^{(x_0^2 - x^2)/2}$
$y' = xy$	$\Rightarrow$	$y(x) = c \cdot \mathrm{e}^{x^2/2}$,	$y(x) = y_0 \cdot \mathrm{e}^{(x^2 - x_0^2)/2}$

Hingegen sind die DG $y' = x$ oder $y' = x^2$ oder $y' = y^2$ nicht linear.
Wir kennen hierzu die Lösungsmengen: sie bilden keinen Vektorraum!

Lineare Differentialgleichung: inhomogen

Aufgabe: Lösen Sie die **inhomogene lineare Differentialgleichung**

$$\boxed{y'(x) = a(x)\,y(x) + b(x) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0.}$$

Lösung: (0) Direkt integrierbar? Nur für $a = 0$. Im Folgenden sei $a \neq 0$.
(1) Separierbar? Nur für $b = ka$ mit $k \in \mathbb{R}$. (2) Exakt? Leider auch nicht:

$$\underbrace{-a(x)\,y - b(x)}_{f(x,y)} + \underbrace{1}_{g(x,y)}\,y' = 0 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{rot}(f,g) = \partial_x g - \partial_y f = a \neq 0$$

(3) Integrierender Faktor? Löse $\lambda'(x)/\lambda(x) = -\operatorname{rot}(f,g)/g = -a(x)$!
Integration ergibt $A(x) = \int_{t=x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t$ und $\lambda(x) = \mathrm{e}^{-A(x)} > 0$. Also:

$$-\big[\mathrm{e}^{-A(x)} a(x)\,y(x) + \mathrm{e}^{-A(x)}\,b(x)\big] + \big[\mathrm{e}^{-A(x)}\big]y'(x) = 0$$

Diese DG ist exakt. (Probe!) Hierzu finden wir das Potential

$$\Phi(x,y) = \mathrm{e}^{-A(x)}\,y - \int_{t=x_0}^{x} \mathrm{e}^{-A(t)}\,b(t)\,\mathrm{d}t. \qquad \text{(Probe!)}$$

Auflösen der Gleichung $\Phi(x,y) = \Phi(x_0,y_0) = y_0$ nach y liefert

$$y(x) = \mathrm{e}^{A(x)} \int_{t=x_0}^{x} \mathrm{e}^{-A(t)}\,b(t)\,\mathrm{d}t \;+\; \mathrm{e}^{A(x)}\,y_0. \qquad \text{(Probe!)}$$

Lineare Differentialgleichung: inhomogen

Satz M2E: Lösungsformel für lineare DG 1. Ordnung

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetig, sowie $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}$.
Die homogene DG $y'(x) = a(x)\,y(x)$ mit $y(x_0) = y_0$ wird gelöst durch $y_1(x) = \mathrm{e}^{A(x)}\,y_0$ mit $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t$. Zur inhomogenen Gleichung

$$\boxed{y'(x) = a(x)\,y(x) + b(x) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0}$$

existiert genau eine Lösung $y : I \to \mathbb{R}$, und diese ist gegeben durch

$$\boxed{y(x) \;=\; \mathrm{e}^{A(x)} \int_{t=x_0}^{x} \mathrm{e}^{-A(t)}\,b(t)\,\mathrm{d}t \;+\; \mathrm{e}^{A(x)}\,y_0.}$$

Lösungsformel — Eindeutigkeit — Stetig abhängig von (x_0, y_0)

Für $a = 0$ ist's der HDI. — Für $b = 0$ entfällt der inhomogene Term.

Die Lösungsmenge $L_b = \{\, y_b + \mathrm{e}^{A}\,y_0 \mid y_0 \in \mathbb{R} \,\}$ ist ein affiner Raum.
„Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen“.

Diese Lösungsformel gilt allgemein für lineare DGSysteme (O3D).

Lineare Differentialgleichung: erstes Beispiel

Aufgabe: Lösen Sie für $x > 0$ die Differentialgleichung

$$\boxed{y' = y/x + x^3 \quad \text{mit} \quad y(1) = y_0.}$$

Lösung: Diese DG ist linear mit $a(x) = 1/x$ und $b(x) = x^3$.

$$A(x) = \int_{t=1}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=1}^{x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln t\Big]_{t=1}^{x} = \ln x.$$

Der integrierende Faktor ist $\mathrm{e}^{-A(x)} = 1/x$. Damit finden wir:

$$\int_{t=1}^{x} \mathrm{e}^{-A(t)}\,b(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=1}^{x} t^{-1}\cdot t^3\,\mathrm{d}t = \int_{t=1}^{x} t^2\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{t=1}^{x} = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}$$

Als Lösung unserer Differentialgleichung gewinnen wir schließlich:

$$y(x) = \mathrm{e}^{A(x)} \int_{t=x_0}^{x} \mathrm{e}^{-A(t)}\,b(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{A(x)}\,y_0 = \underbrace{\frac{x^4 - x}{3}}_{\text{partikuläre Lösung}} + \underbrace{x\,y_0}_{\text{homogene Lösung}}$$

Die Probe ist leicht! Sorgfältig einsetzen und ableiten…
Vergleichen Sie dies mit der obigen homogenen DG $y' = y/x$.

Lineare Differentialgleichung: zweites Beispiel

Aufgabe: Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\boxed{y' = -xy + x^3 \quad \text{mit} \quad y(0) = y_0.}$$

Lösung: Diese DG ist linear mit $a(x) = -x$ und $b(x) = x^3$.

$$A(x) = \int_{t=0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{x} -t\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{x} = -\frac{x^2}{2}$$

Der integrierende Faktor ist $\mathrm{e}^{-A(x)} = \mathrm{e}^{x^2/2}$. Damit finden wir:

$$\int_{t=0}^{x} \mathrm{e}^{-A(t)}\,b(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{x} \mathrm{e}^{t^2/2}\,t^3\,\mathrm{d}t \qquad \text{Subs} \begin{cases} u = t^2/2, \\ \mathrm{d}u = t\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

$$\overset{\text{Subs}}{=} \int_{u=0}^{x^2/2} \mathrm{e}^u \cdot 2u\,\mathrm{d}u \overset{\text{part}}{=} \Big[\mathrm{e}^u\,(2u - 2)\Big]_{u=0}^{x^2/2} = \mathrm{e}^{x^2/2}(x^2 - 2) + 2$$

Als Lösung unserer Differentialgleichung gewinnen wir schließlich:

$$y(x) = \mathrm{e}^{A(x)} \int_{t=x_0}^{x} \mathrm{e}^{-A(t)}\,b(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{A(x)}\,y_0 = \underbrace{x^2 - 2 + 2\,\mathrm{e}^{-x^2/2}}_{\text{partikuläre Lösung}} + \underbrace{\mathrm{e}^{-x^2/2} y_0}_{\text{homogene Lösung}}$$

Die Probe ist leicht! Sorgfältig einsetzen und ableiten…

Elementar lösbare Differentialgleichungen

Sei $f : \mathbb{R}^2 \supset G \to \mathbb{R}$ stetig. Zu lösen sei die **Differentialgleichung**

$$\boxed{y' = f(x, y) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0.}$$

Qualitativer Überblick dank **Existenz- und Eindeutigkeitssatz** M1C:

(1) Im Inneren $\mathring{G}$ existieren Lösungen und laufen bis zum Rand ∂G.

(2) Ist f stetig diff'bar nach y, so ist die Lösung durch $(x_0, y_0) \in \mathring{G}$ eindeutig bestimmt und hängt stetig von diesen Anfangswerten ab.

Elementar lösen können wir vor allem **exakte Differentialgleichungen**:

- $f(x, y) + g(x, y)\, y' = 0$ ist exakt, wenn $(f, g) = \operatorname{grad} \Phi$. M206

Wichtige **Spezialfälle** hiervon sind:

- $y' = f(x)$ durch Integration dank HDI. B123
- $y' = g(x)\, h(y)$ durch Trennung der Variablen. M124
- $y' = a(x)\, y + b(x)$ lineare DG, explizite Lösungsformel. M222

Durch **Substitution** hierauf zurückführbar sind:

- $y' = f(ax + by + c)$ mit Substitution $v = ax + by + c$. M409
- $y' = f(y/x)$ Ähnlichkeits-DG, mit Substitution $v = y/x$. M411
- $y' = a(x)\, y + b(x)\, y^n$ Bernoulli–DG, mit Substitution $v = y^{1-n}$. M413

Existenz, Eindeutigkeit, Lösungsmethoden

Kapitel M präsentiert die wichtigsten Lösungsmethoden für gewöhnliche eindimensionale Differentialgleichungen sowie Anwendungsbeispiele.

Zahlreiche Aufgaben üben, illustrieren und vertiefen diese Techniken. Das ist für Differentialgleichungen unentbehrlich: Üben, üben, üben!

Eine Lösung zu finden ist schwer, sie zu überprüfen ist meist leicht. Deshalb sollen Sie am Ende jeder Rechnung die Probe machen!

Trotz allgemeiner Lösungstheorie und -methoden hat jede DG ihre Eigenarten: Man muss genau hinschauen und sorgfältig arbeiten!

Insbesondere ist zu klären und bei jeder Rechnung zu beachten, auf welchem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ die DG definiert und Lösungen gesucht sind.

Bei allen Umformungen ist sicherzustellen oder nachträglich zu prüfen, dass keine fiktiven Lösungen hinzukommen oder echte verloren gehen.

Zur Sorgfalt gehört, die gefundenen / benachbarte / alle Lösungen zu prüfen, zu skizzieren, zu diskutieren und alle Sonderfälle zu beachten.

📖 Zur Vertiefung und für zahlreiche Anwendungsbeispiele siehe H. Heuser: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Vieweg, 6. Aufl. 2009

Zusammenfassung und Verständnisfragen

Aufgabe: Begründen Sie durch ein Ergebnis Ihrer Vorlesung oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel aus Ihrem Fundus:

(1) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig. Zu jedem Startpunkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ existiert ein Intervall $[x_0, x_1]$ mit $x_1 > x_0$ und eine Funktion $y : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ mit $y(x_0) = y_0$ und $y'(x) = f(x, y(x))$ für alle $x \in [x_0, x_1]$.

(2) Sei $f : [x_0, x_1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $y_0 \in \mathbb{R}$. Dann existiert eine Lösung $y : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ mit $y(x_0) = y_0$ und $y'(x) = f(x, y(x))$ für alle $x \in [x_0, x_1]$.

(3) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig. Für je zwei Funktionen $y, \tilde{y} : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ mit $y(x_0) = \tilde{y}(x_0) = y_0$ sowie $y'(x) = f(x, y(x))$ und $\tilde{y}'(x) = f(x, \tilde{y}(x))$ für alle $x \in [x_0, x_1]$ gilt Gleichheit $y(x) = \tilde{y}(x)$ für alle $x \in [x_0, x_1]$.

(4) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig und nach y stetig differenzierbar. Für je zwei Lösungen wie in (3) gilt Gleichheit $y(x) = \tilde{y}(x)$ für alle $x \in [x_0, x_1]$.

(5) Ist jede separierbare DG exakt? bis auf integrierenden Faktor?

(6) Ist jede lineare DG exakt? bis auf einen integrierenden Faktor?

(7) Ist jede exakte DG separierbar? Ist jede exakte DG linear? Nennen Sie eine exakte DG, die weder separierbar noch linear ist.

Zusammenfassung und Verständnisfragen

Lösung: (1) Ja, das ist die Existenzaussage des ∃&E-Satzes M1C.

(2) Nein, wir können das Lösungsintervall $[x_0, x_1]$ nicht vorschreiben: Die Lösung y startet in $y(x_0) = y_0$, kann aber noch vor Erreichen von x_1 an den Rand gelangen M121 oder nach Unendlich entkommen M119.

(3) Nein, die Stetigkeit der rechten Seite f allein reicht hierzu nicht. Ein anschauliches Gegenbeispiel ist die Wasseruhr $y' = \sqrt{|y|}$ M129; ganz ähnlich ist $y' = \sqrt[3]{y(x)^2}$ M325 und allgemein $y' = |y|^\alpha$ O233.

(4) Ja, das ist die Eindeutigkeitsaussage des ∃&E-Satzes M1C.

(5) Die separierbare DG $y' = g(x)h(y)$ schreiben wir $g(x)h(y) - y' = 0$. In dieser Form ist sie exakt nur für $g(x) = 0$ oder $h'(y) = 0$. Sie wird exakt durch Multiplikation mit dem integrierenden Faktor $1/h(y)$. M211

(6) Die lineare DG $y' = a(x)y + b(x)$ schreiben wir $a(x)y + b(x) - y' = 0$. In dieser Form ist sie exakt nur für $a(x) = 0$. Sie wird exakt durch Multiplikation mit dem integrierenden Faktor $e^{-A(x)}$ mit $A' = a$. M221

(7) Nicht jede exakte DG ist separierbar, ebenso ist nicht jede linear. Beispiele sind leicht zu konstruieren: $x + y^2 + 2xyy' = 0$ für $x, y > 0$ ist exakt, aber $y' = {}^1\!/_2(y/x + 1/y)$ ist weder linear noch separierbar. M316

Separierbare Differentialgleichungen

Satz M1A erklärt die Lösung **separierbarer Differentialgleichungen**:

$$\boxed{y' = g(x)\,h(y) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0}$$

Gegeben sind hierzu stetige Funktionen $g : I \to \mathbb{R}$ und $h : J \to \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ auf Intervallen $I, J \subset \mathbb{R}$ sowie Anfangswerte $x_0 \in I$ und $y_0 \in J$.
Wir definieren Stammfunktionen $G : I \to \mathbb{R}$ und $H : J \to \mathbb{R}$ durch

$$G(x) := \int_{t=x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{und} \qquad H(y) := \int_{u=y_0}^{y} \frac{1}{h(u)}\,\mathrm{d}u.$$

Die Funktion H ist streng monoton, also bijektiv auf ihr Bild $H(J) \subset \mathbb{R}$.
Sei $I_0 \subset I$ ein hinreichend kleines Intervall um $x_0 \in I_0$ mit $G(I_0) \subset H(J)$.
Das AWP erlaubt genau eine Lösung $y : \mathbb{R} \supset I_0 \to J \subset \mathbb{R}$, nämlich

$$\boxed{y(x) = H^{-1}(G(x)).}$$

☺ Lösungsformel ☺ Eindeutigkeit ☺ Stetig abhängig von (x_0, y_0)
☺ Die Probe ist leicht! Einsetzen und sorgfältig nachrechnen…

Lineare Differentialgleichungen

Satz M2E erklärt die Lösungsformel für **lineare DG erster Ordnung**:

$$\boxed{y'(x) = a(x)\,y(x) + b(x) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0}$$

Hierzu sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}$.
Die homogene DG $y'(x) = a(x)y(x)$ mit $y(x_0) = y_0$ wird gelöst durch $y_1(x) = \mathrm{e}^{A(x)}\,y_0$ mit $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t$. Zur inhomogenen Gleichung existiert genau eine Lösung $y : I \to \mathbb{R}$, und diese ist gegeben durch

$$\boxed{y(x) \;=\; \mathrm{e}^{A(x)} \int_{t=x_0}^{x} \mathrm{e}^{-A(t)}\,b(t)\,\mathrm{d}t \;+\; \mathrm{e}^{A(x)}\,y_0.}$$

☺ Lösungsformel ☺ Eindeutigkeit ☺ Stetig abhängig von (x_0, y_0)
☺ Für $a = 0$ ist's der HDI. ☺ Für $b = 0$ entfällt der inhomogene Term.
☺ Die Lösungsmenge $\{\, y_b + \mathrm{e}^{A}\,y_0 \mid y_0 \in \mathbb{R} \,\}$ ist ein affiner Raum.
„Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen".
☺ Diese Lösungsformel gilt allgemein für lineare DGSysteme (O3D).
☺ Die Probe ist leicht! Einsetzen und sorgfältig nachrechnen…

Exakte Differentialgleichungen

Jedes stetige Vektorfeld $(f, g) : \mathbb{R}^2 \supset G \to \mathbb{R}^2$ definiert eine DG

$$\boxed{f(x, y) + g(x, y)\,y' = 0.}$$

Diese DG heißt **exakt**, wenn ein Potential Φ zu (f, g) existiert, also eine C^1–Funktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \supset G \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad}\Phi = (f, g)$, d.h. $\partial_x\Phi = f$, $\partial_y\Phi = g$.

Satz M2A erklärt die Lösungskurven exakter Differentialgleichung:
Die Lösungen $x \mapsto (x, y(x))$ der DG sind Äquipotentialkurven von Φ.

(1) Eine differenzierbare Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ ist genau dann Lösung der Differentialgleichung, wenn $\Phi(x, y(x)) = \mathrm{const}$ für alle $x \in I$ gilt.

(2) Zu jedem Punkt $(x_0, y_0) \in G$ mit $g(x_0, y_0) \neq 0$ existiert ein offenes Intervall I um x_0 und eine eindeutige Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ mit $y(x_0) = y_0$.

☺ Implizite Lösung ☺ Eindeutigkeit ☺ Stetig abhängig von (x_0, y_0)

Aussage (2) ist der Satz über implizite Funktionen: Er besagt dass wir die Gleichung $\Phi(x, y(x)) = c$ nach der Funktion $y(x)$ auflösen können. Ob und wie gut die explizite Auflösung gelingt, hängt vom Einzelfall ab, aber zumindest lokal um (x_0, y_0) ist sie prinzipiell immer möglich.

Integrierende Faktoren

Eine Funktion $\lambda : G \to \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ heißt **integrierender Faktor** zu (f, g), wenn das skalierte Vektorfeld $(\lambda f, \lambda g) : G \to \mathbb{R}^2$ ein Potential hat.
Beispiele: Separierbar $\lambda(y) = 1/h(y)$ M211, linear $\lambda(x) = \mathrm{e}^{-A(x)}$ M221.

Satz M2C erklärt integrierende Faktoren in nur einer Variablen:
Für jeden nur von x abhängigen integrierenden Faktor $\lambda = \lambda(x)$ gilt:

$$\boxed{\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = \frac{\partial_y f(x, y) - \partial_x g(x, y)}{g(x, y)}, \qquad \text{kurz:} \quad \frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = -\frac{\operatorname{rot}(f, g)}{g}(x, y)}$$

Für jeden nur von y abhängigen integrierenden Faktor $\lambda = \lambda(y)$ gilt:

$$\boxed{\frac{\lambda'(y)}{\lambda(y)} = \frac{\partial_x g(x, y) - \partial_y f(x, y)}{f(x, y)}, \qquad \text{kurz:} \quad \frac{\lambda'(y)}{\lambda(y)} = +\frac{\operatorname{rot}(f, g)}{f}(x, y)}$$

Dies ist lösbar, wenn auch die rechte Seite nur von x bzw. y abhängt.
Ob eine dieser Lösungen möglich ist, muss man jeweils ausprobieren.

☺ Vorgehensweise: Man prüft zunächst $\operatorname{rot}(f, g) = 0$. Falls möglich, berechnet man ein Potential Φ zu (f, g), notfalls nur lokal um (x_0, y_0).
Andernfalls versucht man einen der beiden obigen Korrekturfaktoren λ.

Aufgabe: Wir untersuchen erneut (nach M125) die Differentialgleichung

$$\boxed{y(x) - x \cdot y'(x) = 0.}$$

Diese DG ist besonders einfach, an ihr testen wir all unsere Methoden.

(1) Ist diese Differentialgleichung separierbar? Ist sie exakt?

(2) Wird die DG exakt durch den Faktor $\lambda(x,y) = (xy)^{-1}$?
Finden und skizzieren Sie ein Potential für $x > 0$ und $y > 0$.

(3) Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung.
Finden Sie die maximale Lösung zum Anfangswert $y(1) = \pi$.

(4) Welche Anfangswertprobleme (x_0, y_0) sind hier gut gestellt?
Hängt die Lösung stetig von den Anfangwerten (x_0, y_0) ab?

(5) Ist die DG $y' = y/x$ linear? Was ergibt die Lösungsformel?
Gibt es einen int. Faktor, der nur von x abhängt? nur von y?

(6) Wird die DG exakt durch den Faktor $\lambda(x,y) = 1/(x^2+y^2)$?
Finden und skizzieren Sie ein Potential! Auf welchem Gebiet geht das?

Lösung: (1) Diese DG ist separierbar. Wir können sie durch Trennung der Variablen integrieren, siehe M125. Sie ist jedoch nicht exakt:

$$\underbrace{(+y)}_{f(x,y)} + \underbrace{(-x)}_{g(x,y)}\, y'(x) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{rot}(f,g) = \partial_x g - \partial_y f = -2 \neq 0$$

(2) Die äquivalente DG $1/x - y'/y = 0$ ist exakt!
Wir finden das Potential $\Phi(x,y) = \ln x - \ln y = \ln(x/y)$ für $x, y > 0$.
Lösungskurven $\ln(x/y) = \text{const}$, also $y(x) = cx$ für $x, c > 0$. Probe!

(3) Die explizite DG $y'(x) = y(x)/x$ wird gelöst durch die Halbgeraden $y_c^+ : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c \cdot x$, sowie $y_c^- : \mathbb{R}_{<0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c \cdot x$ mit $c \in \mathbb{R}$.
Die implizite DG $x\, y'(x) = y(x)$ wird gelöst durch die Geraden $y_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y(x) = c \cdot x$. Durch $(1, \pi)$ läuft die Lösung $y(x) = \pi x$.

(4) Durch jeden Startpunkt $(x_0 \neq 0, y_0)$ läuft genau eine Lösung y_c, nämlich die mit $c = y_0/x_0$, und diese hängt stetig von (x_0, y_0) ab.
Durch den Startpunkt $(0,0)$ laufen unendlich viele Lösungen!
Durch den Startpunkt $(0, y_0 \neq 0)$ läuft gar keine Lösung!

(5) Die DG $y' = y/x$ ist linear mit $a(x) = 1/x$ und $b(x) = 0$. Lösung:

$$y(x) = y(1)\, \mathrm{e}^{A(x)} \quad \text{mit} \quad A(x) = \int_{t=1}^{x} a(t)\, \mathrm{d}t = \ln x \quad \text{also} \quad y(x) = cx.$$

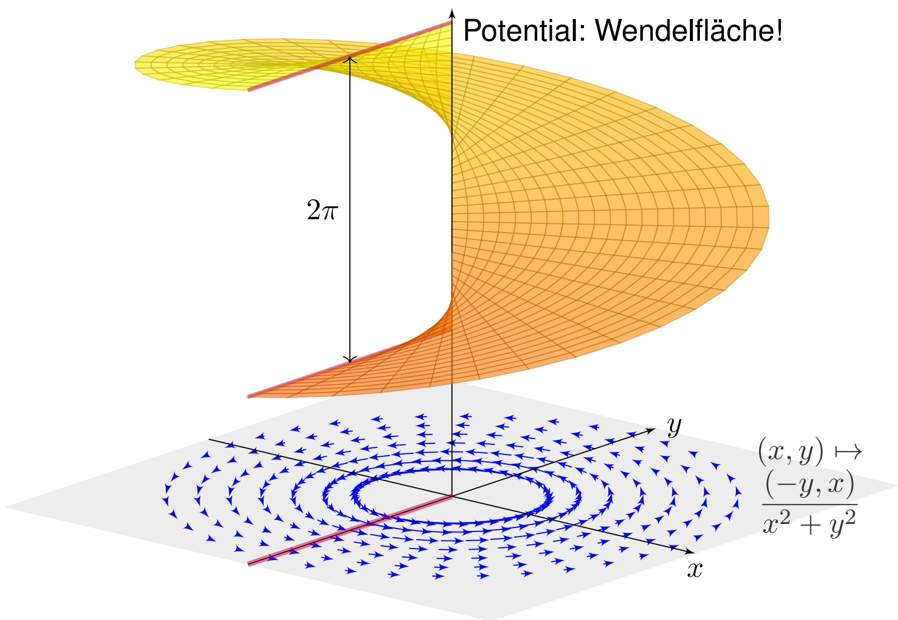
Dies entspricht den Lösungen aus (2), fortgesetzt wie in (3).
Der int. Faktor $\mathrm{e}^{-A(x)} = 1/x$ führt zur exakten DG $y/x^2 - y'/x = 0$.
Der int. Faktor $1/y$ führt zur exakten DG $1/x - y'/y = 0$ wie in (2).

(6) Wir dividieren durch $x^2 + y^2$ und erhalten das Wirbelfeld:

$$\underbrace{\frac{-y}{x^2+y^2}}_{f(x,y)} + \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{g(x,y)}\, y'(x) = 0$$

Auf der punktierten Ebene $G = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ sind beide DG äquivalent.
Die zweite erfüllt nun zudem die notwendige Bedingung $\operatorname{rot}(f,g) = 0$.

⚠ Das Gebiet G ist nun nicht mehr einfach zusammenhängend!
Potentiale sind Teile einer Wendelfläche: Diese schließt sich nicht!
Äquipotentialkurven sind Halbgeraden, wie in obigen Lösungen.



Separation der Variablen: wann und wie?

Wie können wir bequem feststellen, ob $y' = f(x,y)$ separierbar ist?
Wie können wir andernfalls nachweisen, dass dies unmöglich ist?

Satz M3A: Kriterium für Separierbarkeit

Gegeben sei $f : \mathbb{R}^2 \supset I \times J \to \mathbb{R}$ stetig. Äquivalent sind:

(0) Die Funktion f lässt sich als Produkt $f(x,y) = g(x)\,h(y)$ separieren mit stetigen Faktoren $g : I \to \mathbb{R}$ und $h : J \to \mathbb{R}$.

(1) Für je zwei Punkte $(x_0,y_0),(x_1,y_1) \in I \times J$ ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} f(x_0,y_0) & f(x_0,y_1) \\ f(x_1,y_0) & f(x_1,y_1) \end{pmatrix}$$

singulär, ausgeschrieben $f(x_0,y_0)f(x_1,y_1) = f(x_1,y_0)f(x_0,y_1)$.

(2) Für jeden Punkt $(x_0,y_0) \in I \times J$ mit $f(x_0,y_0) \neq 0$ gilt

$$f(x,y) = \frac{f(x,y_0) \cdot f(x_0,y)}{f(x_0,y_0)} = g(x)\,h(y)$$

etwa mit $g : I \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x,y_0)$ und $h : J \to \mathbb{R} : y \mapsto f(x_0,y)/f(x_0,y_0)$.

Separation der Variablen: wann und wie?

Nachrechnen: „(0) ⇒ (1)“: Angenommen es gilt $f(x,y) = g(x)\,h(y)$. Die Zeilenvektoren $g(x_0) \cdot (h(y_0), h(y_1))$ und $g(x_1) \cdot (h(y_0), h(y_1))$ sind dann linear abhängig, also $\det A = 0$. Gleiches gilt für Spaltenvektoren.

„(1) ⇒ (2)“: Aus $f(x_0,y_0)f(x,y) = f(x,y_0)f(x_0,y)$ für alle $(x,y) \in I \times J$ folgt die Aussage (2), indem wir durch $f(x_0,y_0) \neq 0$ dividieren.

„(2) ⇒ (0)“: Im Falle $f = 0$ genügen $g = 0$ und $h = 1$. Andernfalls gibt es einen Punkt $(x_0,y_0) \in I \times J$ mit $f(x_0,y_0) \neq 0$, sodass wir (2) anwenden können. Nach Konstruktion sind $g : I \to \mathbb{R}$ und $h : J \to \mathbb{R}$ stetig.

Die Äquivalenz (0) ⇔ (1) ⇔ (2) löst die eingangs gestellten Fragen:

🙂 Wenn Sie $f(x,y)$ separieren wollen, dann zeigt (2) explizit wie: So konstruieren Sie bequem die gewünschten Faktoren g und h.

🙂 Wenn dies nicht möglich sein sollte, dann zeigt (1) das Hindernis: Es genügt ein einziges Gegenbeispiel bestehend aus zwei Punkten $(x_0,y_0),(x_1,y_1) \in I \times J$ mit $f(x_0,y_0)f(x_1,y_1) \neq f(x_1,y_0)f(x_0,y_1)$.

Dann wissen Sie sicher, dass $y' = f(x,y)$ nicht separiert werden kann, und verschwenden keine kostbare Zeit mit langer, erfolgloser Suche.

Lineare Differentialgleichungen: wann und wie?

Wie können wir bequem feststellen, ob $y' = f(x,y)$ linear ist?
Wie können wir andernfalls nachweisen, dass dies unmöglich ist?

Satz M3B: Kriterium für Linearität

Gegeben sei $f : \mathbb{R}^2 \supset I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Äquivalent sind:

(0) Die Zuordnung $(x,y) \mapsto f(x,y)$ ist affin-linear in y, das heißt: Für alle $(x,y) \in I \times \mathbb{R}$ gilt $f(x,y) = a(x)\,y + b(x)$, wobei $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetig sind.

(1) Für jeden Punkt $(x,y) \in I \times \mathbb{R}$ gilt $f(x,y) = f(x,1)\,y + f(x,0)(1-y)$.

(2) Für $a, b : I \to \mathbb{R}$ mit $a(x) = f(x,1) - f(x,0)$ und $b(x) = f(x,0)$ gilt $f(x,y) = a(x)\,y + b(x)$ in jedem Punkt $(x,y) \in I \times \mathbb{R}$.

🙂 Wenn Sie $f(x,y)$ linear schreiben wollen, dann zeigt (2) explizit wie: So konstruieren Sie bequem die gewünschten Funktionen a und b.

🙂 Wenn dies nicht möglich sein sollte, dann zeigt (1) das Hindernis: Es genügt ein Gegenbeispiel mit $f(x,y) \neq f(x,1)\,y + f(x,0)(1-y)$.

Dann wissen Sie sicher, dass $y' = f(x,y)$ nicht linear sein kann, und verschwenden keine weitere Zeit mit erfolgloser Suche.

Linear oder separierbar, beides oder keines?

Aufgabe: Welche der folgenden Differentialgleichungen $y' = f_i(x,y)$ sind linear? separierbar? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

$$f_1(x,y) = \frac{x^2y^2 + 2x^2 + xy^3 + 2xy - 3y^2 - 6}{y^2+2}, \quad f_2(x,y) = \frac{x^2y - 1}{x^2y - x^3}$$

Lösung: (1) Ist f_1 affin-linear in y, also $f_1(x,y) = a(x)\,y + b(x)$, dann mit $f_1(x,0) = x^2 - 3 = b(x)$ und $f_1(x,1) = x + x^2 - 3$, also $a(x) = x$. Tatsächlich können wir den angegebenen Bruch wesentlich kürzen:

$$f_1(x,y) = \frac{(x^2 + xy - 3)(y^2+2)}{y^2+2} = \underbrace{x}_{a(x)}\,y + \underbrace{x^2 - 3}_{b(x)}$$

Ist f_1 separierbar? Nach einigen Proben sehen wir: Nein! Gegenbeispiel $f_1(0,0)f_1(1,1) = (-3)\cdot(-1) = 3$ und $f_1(1,0)f_1(0,1) = (-2)\cdot(-3) = 6$.

(2) Wäre $(x,y) \mapsto f_2(x,y)$ affin-linear in y, dann speziell auch für $x = 2$, also $y \mapsto (4y-1)/(4y-8)$. Dies hat jedoch eine Polstelle in $y = 2$!

Ist f_2 separierbar? Nach einigen Proben sehen wir: Nein! Gegenbeispiel: Es gilt $f_2(1,2)f_2(-1,3) = \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, aber $f_2(-1,2)f_2(1,3) = \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

Eine Handvoll Differentialgleichungen

Aufgabe: Mit welchen unserer Methoden lassen sich die folgenden Differentialgleichungen lösen? Lösen Sie jede Gleichung mit einem (jedem) der möglichen Verfahren. Machen Sie am Ende die Probe!

Gleichung \ Verfahren	Separation (M1A, M3A)	exakte DG (M2A, M2C)	lineare DG (M2E, M3B)
(1) $yy' + 2\sin(x) = 0$	✓	✓	–
(2) $y' = x + y$	–	–	✓
(3) $y' = y^2 \sin(x)$	✓	–	–
(4) $4 - \frac{y^2}{x^2} + 2\frac{y}{x}y' = 0$	–	✓	–
(5) $y' = \frac{y}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$	✓	–	✓

Eine Handvoll Differentialgleichungen

(1) Die Differentialgleichung $y\,y' + 2\sin(x) = 0$ ist nicht linear (M3B), aber exakt (M2A): Es gilt Rotationsfreiheit $\partial_x y = 0 = \partial_y \sin(x)$, und das (implizit gegebene) Definitionsgebiet $\mathbb{R}^2$ ist einfach zusammenhängend.

Zum Vektorfeld (f, g) mit $f(x,y) = 2\sin(x)$ und $g(x,y) = y$ finden wir das Potential $\Phi(x,y) = y^2/2 - 2\cos(x)$. Auflösen von $\Phi(x, y(x)) = c$ ergibt die Lösungen $y(x) = \pm\sqrt{4\cos(x) + c}$, wobei $c > -4$.

Diese DG kann ebenso durch Separation (M1A) gelöst werden:

$$\begin{aligned} & y(x)\,y'(x) = -2\sin(x) \\ \Longrightarrow\quad & \int y(x)y'(x)\,\mathrm{d}x = \int -2\sin(x)\,\mathrm{d}x \\ \Longrightarrow\quad & y(x)^2/2 = 2\cos(x) + \text{const} \\ \Longrightarrow\quad & y(x) = \pm\sqrt{4\cos(x) + c} \end{aligned}$$

Probe: $y'(x) = \mp 2\sin(x)/\sqrt{4\cos(x)+c}$ erfüllt $y(x)\,y'(x) + 2\sin(x) = 0$.

(2) Die zweite Differentialgleichung $y' = x + y$ ist nicht exakt (M2A), denn $\partial_x(1) = 0 \neq -1 = \partial_y(-x-y)$, und auch nicht separierbar (M3A). Sie ist offensichtlich linear (M2E), und zwar mit $a(x) = 1$ und $b(x) = x$.

Eine Handvoll Differentialgleichungen

Integrierender Faktor ist hier $A(x) = \int_{t=x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=x_0}^{x} 1\,\mathrm{d}t = x - x_0$:

$$y(x) = \mathrm{e}^{A(x)} \int_{t=x_0}^{x} \mathrm{e}^{-A(t)}\, b(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{A(x)} y_0 = \mathrm{e}^{x-x_0} \int_{t=x_0}^{x} \mathrm{e}^{x_0 - t}\, t\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{x-x_0} y_0$$

$$= \mathrm{e}^{x-x_0}\Big[-(\mathrm{e}^{x_0-t})(1+t)\Big]_{t=x_0}^{x} + \mathrm{e}^{x-x_0} y_0 = -(1+x) + \mathrm{e}^{x-x_0}(1 + x_0 + y_0)$$

Probe: $y'(x) = -1 + \mathrm{e}^{x-x_0}(1 + x_0 + y_0)$ erfüllt $y'(x) = x + y$.

(3) Die DG $y' = y^2\sin(x)$ ist nicht exakt (M2A) und nicht linear (M3B), aber separierbar. Eine offensichtliche Lösung ist $y = 0$. Für $y \neq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} & y'(x) = y(x)^2 \sin(x) \quad\Longrightarrow\quad \frac{y'(x)}{y(x)^2} = \sin(x) \\ \Longrightarrow\quad & \int \frac{y'(x)}{y(x)^2}\,\mathrm{d}x = \int \sin(x)\,\mathrm{d}x \quad\Longrightarrow\quad -\frac{1}{y(x)} = -\cos(x) + \text{const} \\ \Longrightarrow\quad & \frac{1}{y(x)} = \cos(x) + c \quad\Longrightarrow\quad y(x) = \frac{1}{\cos(x) + c} \end{aligned}$$

Probe: $y'(x) = \sin(x)/(\cos(x)+c)^2$ erfüllt $y'(x) = y(x)^2\sin(x)$.

Eine Handvoll Differentialgleichungen

(4) Die Differentialgleichung $4 - y^2/x^2 + 2yy'/x = 0$ ist weder linear (M3B), noch separierbar (M3A), aber exakt (M2A): Wir finden das Potential $\Phi(x,y) = 4x + y^2/x$. Auflösen von $4x + y(x)^2/x = c$ ergibt $y(x) = \pm\sqrt{cx - 4x^2}$. Probe: $y'(x) = \pm(c - 8x)/2\sqrt{cx - 4x^2}$ erfüllt die DG.

(5) Die DG $y' = y/\sqrt{x} + 1/\sqrt{x}$ ist nicht exakt (M2A), aber linear (M2E) und separierbar (M1A): Eine Lösung ist $y = -1$. Für $y \neq -1$ finden wir:

$$\begin{aligned} & y'(x) = \frac{y(x)+1}{\sqrt{x}} \quad\Longrightarrow\quad \frac{y'(x)}{y(x)+1} = \frac{1}{\sqrt{x}} \\ \Longrightarrow\quad & \int \frac{y'(x)}{y(x)+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \quad\Longrightarrow\quad \ln\big|y(x)+1\big| = 2\sqrt{x} + \text{const} \\ \Longrightarrow\quad & \big|y(x)+1\big| = \mathrm{e}^{2\sqrt{x}+\text{const}} \quad\Longrightarrow\quad y(x) = c\,\mathrm{e}^{2\sqrt{x}} - 1 \end{aligned}$$

Der Faktor $c = \pm\mathrm{e}^{\text{const}}$ kann Werte in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ annehmen; im Fall $c = 0$ finden wir erneut $y(x) = -1$. Probe: $y'(x) = c\,\mathrm{e}^{2\sqrt{x}}/\sqrt{x}$ erfüllt die DG.

Die Lösungsformel M2E für lineare DG liefert dasselbe Ergebnis; diese Rechnung führe ich hier nicht aus, sondern empfehle sie als Übung.

Rationale DG mit nicht-analytischen Lösungen

Aufgabe: Wir suchen alle Funktionen $y : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ mit

$$\boxed{x^3\, y'(x) = 2\, y(x) \quad \text{für alle} \quad x \in I.}$$

(1) Klassifizieren Sie diese Differentialgleichung nach unserem Katalog: Ordnung, implizit / explizit, algebraisch, linear, separierbar, exakt, ...

Finden Sie Lösungen $y : \mathbb{R}_{<0} \to \mathbb{R}$ mit $y(-1) = a/\mathrm{e}$ und $y : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $y(1) = b/\mathrm{e}$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$. Sind diese Lösungen eindeutig? Skizze!

(2) Lassen sich diese lokalen Lösungen zu einer globalen Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen? Welcher Wert $y(0)$ muss zur Stetigkeit gewählt werden? Ist y dann differenzierbar? sogar stetig differenzierbar?

(3) Zu welchen Anfangswerten $y(x_0) = y_0$ existieren globale Lösungen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$? Sind diese eindeutig? Genauer: Durch welche Punkte $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ läuft genau eine Lösung / unendliche viele / gar keine?

(4) Sind die Lösungen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar? Sind sie analytisch? Finden Sie alle analytischen Lösungen!

Siehe Kimmerle–Stroppel, Analysis, Beispiel 2.6.12, sowie B438.
Obige Differentialgleichung M125 ist ähnlich, aber weniger dramatisch.

Rationale DG mit nicht-analytischen Lösungen

Lösung: (1) Diese DG ist von erster Ordnung, implizit, algebraisch, d.h. von der Form $F(x, y, y') = 0$ mit einem Polynom F in x, y, y'.
Die explizite Gleichung $y'(x) = 2x^{-3} y(x)$ für $x \neq 0$ ist linear in y.
Die Gleichung kann für $x \neq 0$ und $y \neq 0$ separiert werden:

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{2}{x^3} \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{y'(x)}{y(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow \quad \ln y(x) = -1/x^2 + c \quad \Longrightarrow \quad y(x) = C\,\mathrm{e}^{-1/x^2}$$

Lokale Lösungen sind $y : \mathbb{R}_{<0} \to \mathbb{R} : x \mapsto a\,\mathrm{e}^{-1/x^2}$ mit $y(-1) = a/\mathrm{e}$ und $y : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} : x \mapsto b\,\mathrm{e}^{-1/x^2}$ mit $y(1) = b/\mathrm{e}$. Beide sind jeweils eindeutig.

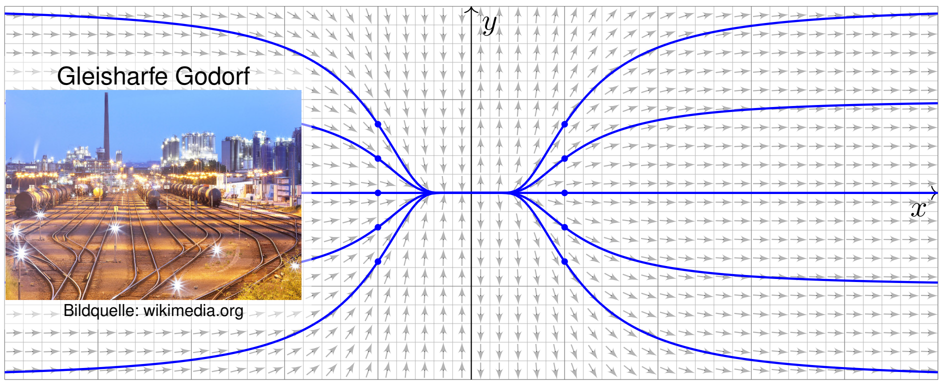
(2) Für $x \nearrow 0$ gilt $a\,\mathrm{e}^{-1/x^2} \to 0$. Für $x \searrow 0$ gilt $b\,\mathrm{e}^{-1/x^2} \to 0$. Wir setzen:

$$y_{a,b} \,:\, \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,:\, x \mapsto y(x) = \begin{cases} a\,\mathrm{e}^{-1/x^2} & \text{für } x < 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ b\,\mathrm{e}^{-1/x^2} & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Diese Funktion ist stetig und sogar stetig differenzierbar (siehe unten).
🙂 Damit sind alle Lösungen unserer Differentialgleichung gefunden!

Rationale DG mit nicht-analytischen Lösungen

Skizze der Lösungen $y_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für verschiedene Werte $a, b \in \mathbb{R}$:



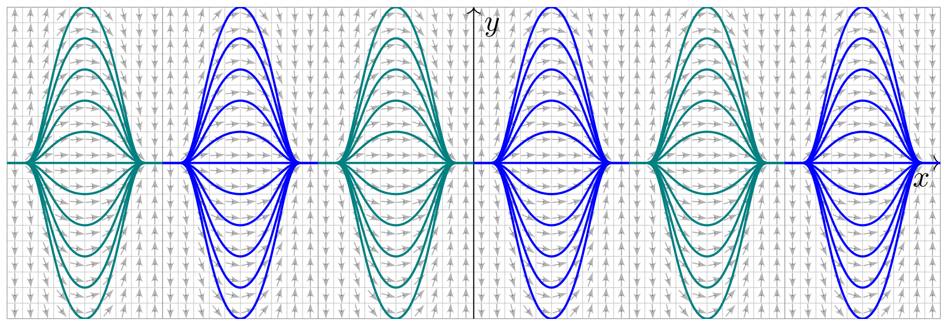
(3) Durch Punkte (x_0, y_0) mit $x_0 = 0$ und $y_0 \neq 0$ geht keine Lösung.
Durch jeden anderen Punkt verlaufen unendlich viele Lösungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$!

Zu $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x^3\, y'(x) = 2\, y(x)$ ist kein Anfangswertproblem $y(x_0) = y_0$ gut gestellt.
Die Einschränkung von y auf $\mathbb{R}_{<0}$ ist die eindeutige Lösung des AWP $y(-1) = a/\mathrm{e}$ auf $\mathbb{R}_{<0}$.
Die Einschränkung von y auf $\mathbb{R}_{>0}$ ist die eindeutige Lösung des AWP $y(+1) = b/\mathrm{e}$ auf $\mathbb{R}_{>0}$.
Erst die Wahl *beider* Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ legt die globale Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eindeutig fest.
Die Funktion y ist auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ analytisch, an der Klebestelle 0 noch glatt, aber nicht analytisch.

Rationale DG mit nicht-analytischen Lösungen

(4) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$ für $x > 0$ und $f(x) = 0$ für $x \leq 0$ ist beliebig oft diff'bar und in jedem Punkt $x \neq 0$ analytisch. B438

Jede Lösung $y_{a,b}(x) = a f(-x) + b f(x)$ ist beliebig oft differenzierbar.
Sie ist analytisch nur für $a = b = 0$, also die Nullfunktion $y_{0,0} = 0$.



🙂 Ebenso lösen wir $\sin(x)^3\, y'(x) = 2\cos(x)\, y(x)$ zu $y(x) = a\,\mathrm{e}^{-1/\sin(x)^2}$.
Das erinnert an kosmologische Modelle vom Big Bang zum Big Crunch: Dazwischen ist die Entwicklung deterministisch, darüber hinaus wird alle Information vollständig gelöscht (als vage, aber eindrückliche Analogie).

Aufgabe: Finden Sie alle maximalen Lösungen

$$\begin{array}{llll} (1) & y:I\to\mathbb{R}_{>0} & \text{mit} & y'(x)=\sqrt[3]{y(x)^2},\\ (2) & y:I\to\mathbb{R}_{\ge 0} & \text{mit} & y'(x)=\sqrt[3]{y(x)^2},\\ (3) & y:I\to\mathbb{R} & \text{mit} & y'(x)=\sqrt[3]{y(x)^2}. \end{array}$$

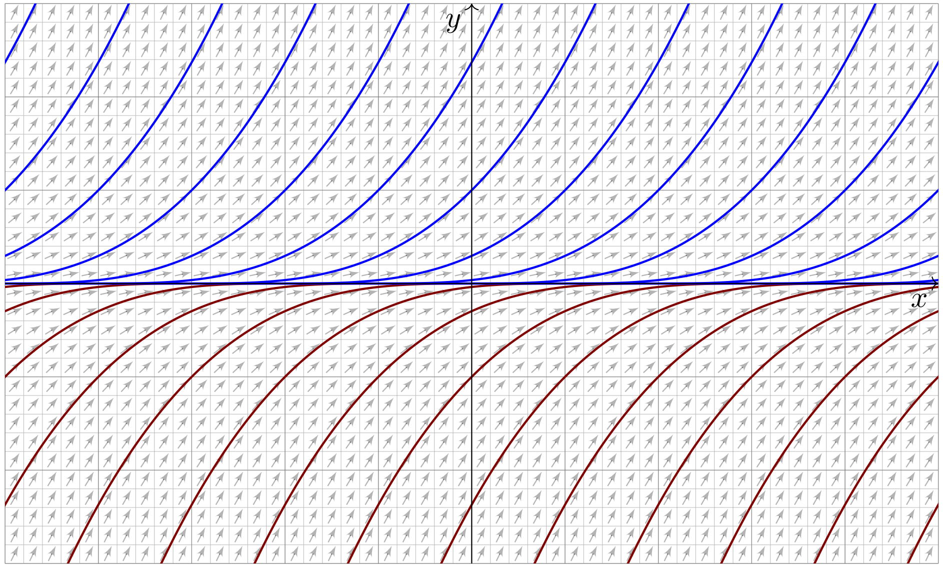
(a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld und mögliche Lösungskurven.
(b) Qualitative Lösung: Welche AWP $y(x_0)=y_0$ sind gut gestellt?
(c) Quantitative Lösung: Berechnen Sie alle maximalen Lösungen.

Lösung: (1c) Für $y>0$ ist unsere DG äquivalent zu $y'=y^{2/3}$.
Separation $y^{-3/2}\,y'=1$ und Integration zu $3y^{1/3}=x-b$.
Auflösen liefert $y(x)=(x-b)^3/27$ für $x>b$. Probe!
(1b) Zu jedem $b\in\mathbb{R}$ erhalten wir somit die maximale Lösung

$$y_b:\,]b,\infty[\,\to\mathbb{R}_{>0},\quad y_b(x)=(x-b)^3/27.$$

Durch jeden Startpunkt $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{>0}$ läuft genau eine Lösung.
☺ Hier ist demnach jedes AWP $y(x_0)=y_0>0$ gut gestellt.

(1a) Skizze der gefundenen Lösungen:



(2c) Für $y\ge 0$ ist zudem die konstante Funktion $y(x)=0$ eine Lösung.
Für $y>0$ kennen wir die Lösungen $y_b(x)=(x-b)^3/27$ für $x>b$.
Jede lässt sich eindeutig fortsetzen zur maximalen Lösung

$$y_b\;:\;\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{\ge 0}\;:\;x\mapsto y_b(x)=\begin{cases}0 & \text{für } x\le b,\\ (x-b)^3/27 & \text{für } x\ge b.\end{cases}$$

(2b) Durch jeden Startpunkt (x_0,y_0) mit $y_0>0$ läuft genau eine Lösung.
Durch jeden Punkt $(x_0,0)$ hingegen laufen unendlich viele Lösungen!

⚠ Jedes AWP $y(x_0)=y_0>0$ ist gut gestellt, aber $y(x_0)=0$ schlecht.

Ohne Vorsichtsmaßnahmen sind Lösungen nicht immer eindeutig, d.h. zum selben Anfangswert kann es verschiedene Lösungen geben.
Wir haben dieses Problem bereits für die Wasseruhr M129 diskutiert.
Die Gleisharfe M321 illustriert ebenso das Mehrdeutigkeitsproblem.
Der vorligende Fall ist ähnlich. Aber es kommt noch schlimmer...

(3c) Für $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist die konstante Funktion $y(x)=0$ eine Lösung.
Für $y>0$ kennen wir die Lösung $y(x)=(x-b)^3/27$ für $x>b$.
Für $y<0$ finden wir ebenso $y(x)=(x-a)^3/27$ für $x<a$. Probe!
Für alle $a\le b$ in $\mathbb{R}$ setzen wir diese zusammen zur maximalen Lösung

$$y_{a,b}\;:\;\mathbb{R}\to\mathbb{R}\;:\;x\mapsto y_{a,b}(x)=\begin{cases}(x-a)^3/27 & \text{für } x\le a,\\ 0 & \text{für } a\le x\le b,\\ (x-b)^3/27 & \text{für } x\ge b.\end{cases}$$

Hierbei lassen wir auch die Sonderfälle $a=-\infty$ und $b=+\infty$ zu.
(3b) Hier ist kein Anfangswertproblem $y'(x_0)=y_0$ gut gestellt.

⚠ Durch jeden Punkt $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ laufen unendlich viele Lösungen.

∃&E: Die rechte Seite ist nach y stetig diff'bar mit $\partial_y(y^{2/3})=\frac{2}{3}y^{-1/3}$.
Dies gilt nur für $y\neq 0$. Auf der x–Achse gilt dieses Kriterium nicht mehr!
In solch kritischen Punkten ist Vorsicht und besondere Sorgfalt geboten.

Aufgabe: Wir lösen die implizite Differentialgleichung $(y')^2 + y^2 = 1$ für $y' > 0$ bzw. $y' \geq 0$ auf zu den expliziten Differentialgleichungen

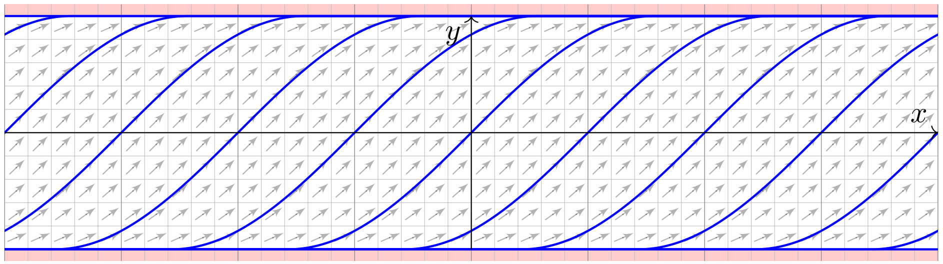
$$\boxed{\begin{array}{llll}(1) & y'(x) = \sqrt{1-y(x)^2} & \text{für} & -1 < y < 1,\\ (2) & y'(x) = \sqrt{1-y(x)^2} & \text{für} & -1 \leq y \leq 1.\end{array}}$$

(a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld und mögliche Lösungskurven.

(b) Qualitative Lösung: Welche AWP $y(x_0) = y_0$ sind gut gestellt?

(c) Quantitative Lösung: Berechnen Sie alle maximalen Lösungen.

Lösung: (a) Richtungsfeld und Lösungsskizzen auf $G = \mathbb{R} \times [-1, +1]$:



(b) Zum Überblick suchen wir zunächst die **qualitative Lösung**:
Die rechte Seite $f(x, y) = \sqrt{1 - y^2}$ ist stetig auf ganz $G = \mathbb{R} \times [-1, 1]$.
Der ∃&E-Satz garantiert hier zumindest die **Existenz** von Lösungen.

Das heißt: Zu jedem Anfangswert (x_0, y_0) mit $x_0 \in \mathbb{R}$ und $-1 \leq y_0 \leq 1$ existiert **mindestens** eine Lösung; diese läuft beidseitig bis zum Rand.

Wir untersuchen genauer die Ableitung $\partial_y f(x, y) = -y/\sqrt{1-y^2}$.
Die Funktion f ist stetig diff'bar auf dem Inneren $G^\circ = \mathbb{R} \times]-1, 1[$.
Der Satz garantiert hier **Existenz und Eindeutigkeit** von Lösungen.

Das heißt: Zu jedem Anfangswert (x_0, y_0) mit $x_0 \in \mathbb{R}$ und $-1 < y_0 < 1$ existiert **genau eine** Lösung; diese läuft beidseitig bis zum Rand.

🙂 Diesen ersten Überblick verschaffen wir uns ganz ohne Rechnung!
Manchmal ist das auch schon alles, was wir wollen… oder können.

⚠ Die mangelnde Ableitung $\partial_y f$ auf dem Rand $y = \pm 1$ mahnt uns zu Vorsicht: Möglicherweise geht die Eindeutigkeit hier verloren.

⚠ Auf dem Rand macht der ∃&E-Satz keine Aussage mehr.
Wir lösen die Gleichung und schauen genauer hin…

(c) Nun berechnen wir explizit die **quantitative Lösung**:

(1c) Für $-1 < y < 1$ gilt $\sqrt{1-y^2} \neq 0$, und wir können dividieren:
Separation $y'/\sqrt{1-y^2} = 1$ und Integration zu $\arcsin(y) = x - c$ liefert $y(x) = \sin(x - c)$ unter der Bedingung $x \in]c - \pi/2, c + \pi/2[$.

(2c) Für jedes $c \in \mathbb{R}$ erhalten wir so die maximale Lösung

$$y_c : \mathbb{R} \to [-1, 1] : x \mapsto y_c(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x \leq c - \pi/2, \\ \sin(x - c) & \text{für } c - \pi/2 \leq x \leq c + \pi/2, \\ +1 & \text{für } x \geq c + \pi/2. \end{cases}$$

Auch die konstanten Funktionen $y(x) = \pm 1$ sind Lösungen ($c = \mp\infty$).

🙂 Zu jedem AWP (x_0, y_0) mit $|y_0| < 1$ existiert genau eine Lösung y_c.
Für genau eine Verschiebung $c \in \mathbb{R}$ läuft y_c durch den Punkt (x_0, y_0).

⚠ Zum AWP (x_0, y_0) mit $y_0 = +1$ existieren unendlich viele Lösungen.
Nämlich die konstante Lösung $y = +1$ sowie alle y_c mit $c \leq x_0 - \pi/2$.

⚠ Zum AWP (x_0, y_0) mit $y_0 = -1$ existieren unendlich viele Lösungen.
Nämlich die konstante Lösung $y = -1$ sowie alle y_c mit $c \geq x_0 + \pi/2$.

Zur Illustration habe ich hier vornehmlich Beispiele vorgestellt, die sich möglichst leicht und in geschlossener Form lösen lassen.

Für viele Differentialgleichungen ist keine geschlossene Lösung möglich!
Zum Beispiel hat $y'(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$ mit $y(0) = 0$ die eindeutige Lösung

$$y(x) = \int_{t=0}^{x} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t.$$

Für dieses Integral gibt es nachweislich keine elementare Formel. B145
In solchen Fällen greifen wir auf numerische Methoden zurück. B147
Damit lässt sich nahezu jede praktische Frage ebenso gut handhaben.

Bevor man jedoch solcherart numerische Approximation unternimmt, muss man sicherstellen, dass die DG gut gestellt ist, also das Problem überhaupt eine eindeutige Lösung hat, die man approximieren könnte.

Die Sorgfalt gebietet daher, das Problem zunächst qualitativ zu lösen, also Existenz, Eindeutigkeit und Stabilität der Lösung sicherzustellen, und den Verlauf der Lösung möglichst präzise einzugrenzen. M441
Erst dann darf man sich getrost numerischen Näherungen zuwenden.

Exponentielles Wachstum: Medikamente und Drogen

Ab Zeitpunkt $t = 0\,\mathrm{min}$ wird per Infusion ein Medikament verabreicht. Der Durchfluss ist auf $b = 6\,\mathrm{mg}/\mathrm{min}$ eingestellt. Der Körper baut in jeder Minute 5% des im Blut vorhandenen Medikaments ab ($a = 0.05/\mathrm{min}$).

Aufgabe: (1) Beschreiben Sie die Medikamentenmenge $y(t)$ im Blut durch eine Differentialgleichung. Probe: Gelten in dieser Gleichung die richtigen physikalischen Einheiten? (2) Skizzieren Sie das Vektorfeld.
(3) Lösen Sie diese Differentialgleichung. Ist die Lösung eindeutig?
(4) Wie verhält sich $y(t)$ für $t \to \infty$? Ist dies plausibel?

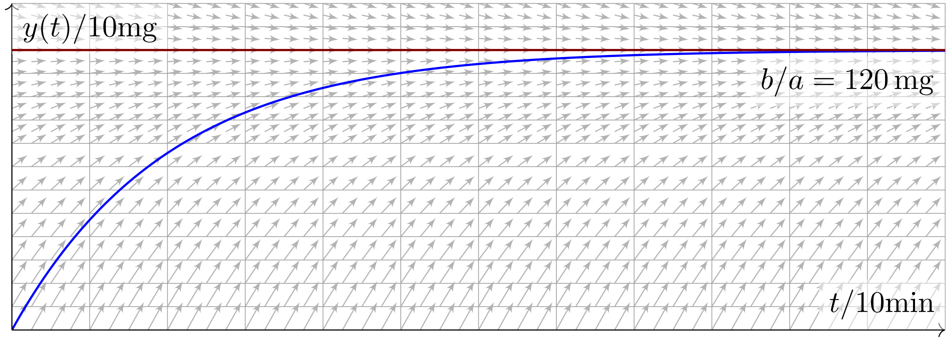
🙂 Das ist ein besonders einfaches Modell, aber sehr häufig verwendet. Es gilt ebenso beim Konsum einer Droge, etwa Alkohol, die über einen längeren Zeitraum konstant zugeführt und zugleich abgebaut wird.

Im Gegensatz zu den vorigen Aufgaben ist hier die Differentialgleichung in der Aufgabenstellung noch nicht gegeben, sondern muss als erstes gefunden und anschließend gelöst werden. Diese Art Problemstellung ist wesentlich realistischer, daher interessanter, aber meist auch spürbar schwieriger; wir illustrieren dies nur an besonders einfachen Fällen.

📖 H. Heuser: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Vieweg 2009

Exponentielles Wachstum: Medikamente und Drogen

Lösung: (1) Wir messen die Zeit t in Minuten. Für die Medikamentenmenge $y(t) \in \mathbb{R}$ finden wir die Gleichung $y'(t) = b - a\,y(t)$ mit $y(0) = 0$. Diese DG ist linear und inhomogen, allgemeine Lösung siehe M221.



(3) Wir lösen die DG hier durch die Substitution $u(t) = b/a - y(t)$ und finden $u'(t) = -y'(t) = a\,y(t) - b = -a\,u(t)$ mit $u(0) = b/a$. Die Lösung $u(t) = (b/a)\,\mathrm{e}^{-at}$ und $y(t) = (b/a)(1 - \mathrm{e}^{-at})$ ist dann direkt klar.

(4) Für $t \to \infty$ gilt $y(t) \to b/a$. 🙂 Wir sehen dies leicht auch direkt: Im Gleichgewicht wird gleich viel zugeführt ($+b$) wie abgebaut ($-a \cdot b/a$).

Exponentielles Wachstum: heißer Kaffee

Ein Kaffee wird bei $100^\circ\mathrm{C}$ gebrüht. Die Raumtemperatur beträgt $20^\circ\mathrm{C}$. Abkühlung reduziert die Temperaturdifferenz um 7% pro Minute.

Aufgabe: (1) Beschreiben Sie die Temperatur $y(t)$ des Kaffees durch eine Differentialgleichung. Probe: Gelten in dieser Gleichung die richtigen physikalischen Einheiten? (2) Skizzieren Sie das Vektorfeld.
(3) Lösen Sie diese Differentialgleichung. Ist die Lösung eindeutig?
(4) Wie verhält sich $y(t)$ für $t \to \infty$? Ist dies physikalisch plausibel?
(5) Wann hat der Kaffee $60^\circ\mathrm{C}$ erreicht? 🙂 Das ist die Halbwertszeit.
(6) Sie sind in Eile und haben nur $5\mathrm{min}$ Wartezeit zur Verfügung. Ist es besser, die Milch am Anfang oder am Ende zuzugeben? (konkretes Zahlenbeispiel: 75% Kaffee, 25% Milch zu $8^\circ\mathrm{C}$).

🙂 Das ist eine klassische Aufgabe, mit unserem Werkzeug sollte sie leicht fallen. Es gelten dieselben Bemerkungen wie zur vorigen Aufgabe. In Frage (6) stecken zahlreiche implizite Annahmen, wie die Form der Tasse und die Art des Wärmeaustauschs; erklären Sie diese explizit! Die konkreten Zahlen sind etwas willkürlich, dafür aber einfach genug. Je nach Situation werden Sie deutlich andere Konstanten messen.

Exponentielles Wachstum: heißer Kaffee

Lösung: (1) Wir starten bei $y_0 = 100^\circ\mathrm{C}$ und nähern uns $y_\infty = 20^\circ\mathrm{C}$ gemäß der Gleichung $y'(t) = -\lambda\big[y(x) - y_\infty\big]$ mit $\lambda = 0.07/\mathrm{min}$.
(3) Die Lösung $y(t) = y_\infty + (y_0 - y_\infty)\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$ ist leicht zu sehen.
(4) Für $t \to \infty$ gilt $y(t) \searrow y_\infty$, wie anschaulich zu erwarten war.
(5) Bei $60^\circ\mathrm{C}$ wurde die Hälfte der Temperaturdifferenz abgebaut: $y(T) \overset{!}{=} 60^\circ$ bedeutet $1/2 = \mathrm{e}^{-\lambda T}$, also $-\ln 2 = -\lambda T$ und somit

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0.693}{0.07/\mathrm{min}} \approx 9.9\,\mathrm{min}, \qquad \text{Merkregel: } \frac{70\%}{\text{Zerfallsrate}}$$

(6a) Erst die Milch zugeben, dann den Milchkaffee abkühlen lassen:

$$y(0\,\mathrm{min}) = 0.75 \cdot 100^\circ\mathrm{C} + 0.25 \cdot 8^\circ\mathrm{C} = 77.0^\circ\mathrm{C}$$
$$y(5\,\mathrm{min}) = 20^\circ\mathrm{C} + 57^\circ\mathrm{C} \cdot \mathrm{e}^{-0.35} \approx 60.2^\circ\mathrm{C}$$

(6b) Erst den Kaffee abkühlen lassen, dann die Milch zugeben:

$$y(5\,\mathrm{min}) = 20^\circ\mathrm{C} + 80^\circ\mathrm{C} \cdot \mathrm{e}^{-0.35} \approx 76.4^\circ\mathrm{C}$$
$$\text{Mischung} = 0.75 \cdot 76.4^\circ\mathrm{C} + 0.25 \cdot 8^\circ\mathrm{C} \approx 59.3^\circ\mathrm{C}$$

🙂 Wenn Sie Ihren Milchkaffee weniger heiß wollen, dann geben Sie die Milch erst am Ende hinzu. Der Unterschied ist allerdings kaum spürbar.

Die logistische Differentialgleichung

Wir untersuchen die Größe $y(x) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ einer Population (z.B. Bakterien, Pflanzen, Tiere, ...) im Verlauf der Zeit $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Das einfachste Modell ist eine Wachstumsrate $y'(x)$ proportional zur Populationsgröße $y(x)$:

$$\boxed{y'(x) = \lambda\, y(x), \quad y(0) = y_0}$$

Die Lösung $y(x) = y_0\, \mathrm{e}^{\lambda x}$ ist exponentielles Wachstum. Für $\lambda > 0$ und $y_0 > 0$ wächst $y(x)$ unbeschränkt. Realistischer ist folgendes Modell: Wegen beschränkter Ressourcen gibt es eine maximale Größe K der Population. Ihr Wachstum wird gebremst durch den Faktor $1 - y(x)/K$:

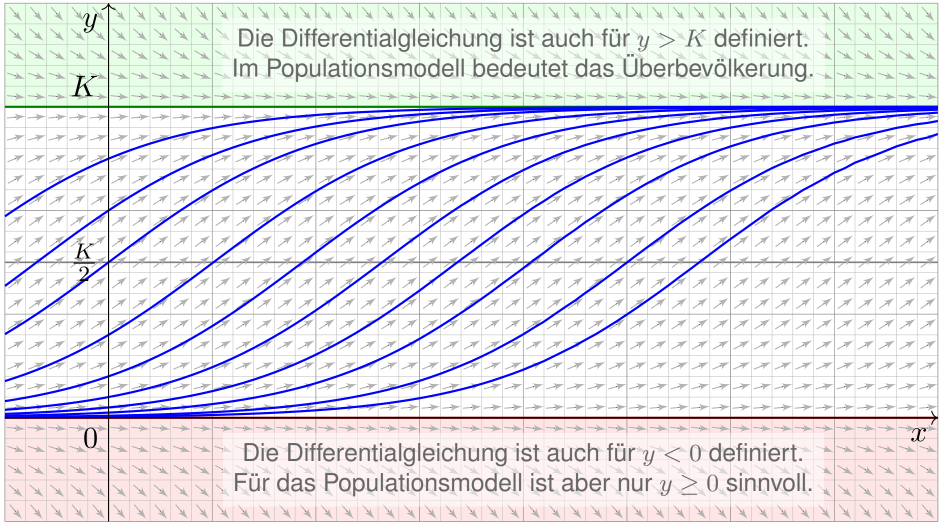
$$\boxed{y'(x) = \lambda\, y(x)(1 - y(x)/K), \quad y(0) = y_0}$$

Dies ist die **logistische Differentialgleichung**. Sie ist ein einfaches nicht-lineares Modellbeispiel und Spezialfall der Bernoulli–Gleichung.

Aufgabe: (1) Skizzieren Sie das zugehörige Vektorfeld. (2) Bestimmen Sie alle Fixpunkte (= konstante Lösungen). (3) Bei Start in $y(0) \in \,]0, K[$, bleibt jede Lösung beschränkt? (4) Existiert eine Lösung für alle $x \geq 0$, also $y : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$? Ist sie eindeutig? (5) Wie verhält sie sich für kleine x? (6) für $x \to \infty$? (7) Berechnen Sie die Lösung $y(x)$ schließlich explizit.

Die logistische Differentialgleichung

Lösung: (1) Skizze des Vektorfeldes und einiger Lösungskurven:



(2) Fixpunkte von $y' = \lambda y(1 - y/K)$ sind Nullstellen der rechten Seite, also $y = 0$ (keine Population) und $y = K$ (maximale Populationsgröße).

Die logistische Differentialgleichung

(3) Dank (2) haben wir die konstanten Lösungen $u(x) = 0$ und $v(x) = K$. Jede Lösung $y : [0, x_1[\,\to \mathbb{R}$ mit $y(0) \in \,]0, K[$ ist somit im Intervall $]0, K[$ gefangen: Dank Eindeutigkeitssatz M1C kann sie u und v nicht kreuzen.

(4) Da eine Lösung $y : [0, x_1[\,\to \,]0, K[$ keine Polstellen hat, lässt sie sich für alle $x \geq 0$ fortsetzen (M1C) zu genau einer Lösung $y : \mathbb{R}_{\geq 0} \to [0, K]$.

(5) Für $y/K \approx 0$ gilt $y' \approx \lambda y$: Kleine Populationen wachsen demnach zunächst exponentiell; die Maximalgröße K hat noch kaum Einfluss.

Nahe der Maximalgröße $y \approx K$ gilt $y' \approx 0$, das Wachstum stagniert.

Aus $y' = \lambda y - (\lambda/K) y^2$ folgt $y'' = \lambda y' - 2(\lambda/K) y y'$. Für $0 < y < K$ haben wir $y' > 0$, also $y'' > 0$ für $0 < y < K/2$ und $y'' < 0$ für $K/2 < y < K$.

Bis zur Hälfte der Maximalgröße haben wir demnach beschleunigtes Wachstum ($y'' > 0$), oberhalb der Hälfte gebremstes Wachstum ($y'' < 0$).

(6) Für $0 < y < K$ gilt $y' > 0$, wir erwarten daher $y(x) \nearrow K$ für $x \to \infty$.

Dank Bolzano–Weierstraß konvergiert $y(x)$ für $x \to \infty$. Sei $c = \lim_{x\to\infty} y(x)$ der Grenzwert. Aus $y'(x) = \lambda y(x)(1 - y(x)/K)$ folgt $\lim_{x\to\infty} y'(x) = \lambda c(1 - c/K)$. Dieser Wert muss Null sein, andernfalls wäre $y'(x) \geq m > 0$ für $x \geq x_0$ und $y(x) \geq m(x - x_0)$ würde die Schranke K überschreiten. Also gilt $\lambda c(1 - c/K) = 0$, das heißt $c = 0$ oder $c = K$. Für jeden Startwert $0 < y_0 < K$ haben wir also tatsächlich Konvergenz $y(x) \nearrow K$ für $x \to \infty$.

Die logistische Differentialgleichung

🙂 Die vorhergehenden Überlegungen klären das qualitative Verhalten.

(7) Wir lösen die logistische Gleichung $y'(x) = \lambda\, y(x) - (\lambda/K)\, y(x)^2$ schließlich explizit. Sie ist vom Bernoulli–Typ M413: Wir substituieren deshalb $v(x) = y(x)^{-1}$ und erhalten eine lineare DG für $v(x)$:

$$v'(x) = -y(x)^{-2}\, y'(x) = -\lambda\, y(x)^{-1} + \lambda/K = \lambda/K - \lambda\, v(x)$$

Diese wird gelöst durch $v(x) = 1/K - c\, \mathrm{e}^{-\lambda x}$, analog zu M401, also:

$$y(x) = \frac{1}{v(x)} = \frac{1}{1/K - c\, \mathrm{e}^{-\lambda x}}$$

Der Anfangswert $y(0) = y_0$ bestimmt $c = 1/K - 1/y_0$. Wir erhalten:

$$\boxed{y(x) = \frac{K}{1 + (K/y_0 - 1)\, \mathrm{e}^{-\lambda x}}}$$

🙂 Die Lösung gelingt leicht — jedoch erst mit passenden Methoden.

🙂 Machen Sie die Probe durch Einsetzen in die Differentialgleichung!

🙂 Geduldige Kurvendiskussion bestätigt alle Vorhersagen aus (2–6).

🙂 Diese Gleichung tritt auch beim Massenwirkungsgesetz auf. O153

Dort lösen wir sie alternativ durch Separation und Partialbruchzerlegung.

Substitution: linearer Term
M409 Beispiel

In günstigen Fällen lässt sich $y' = f(x,y)$ vereinfachen und lösen durch eine geschickte Substitution $y(x) = \varphi(v(x))$ und $y'(x) = \varphi'(v(x))\, v'(x)$.

Beispiel: Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ Konstanten. Zu lösen sei die DG

$$\boxed{y' = f(ax + by + c).}$$

Für $v(x) = ax + by(x) + c$ gilt $v'(x) = a + by'(x) = a + bf(v(x))$, also

$$\boxed{v' = a + bf(v).}$$

🙂 Diese DG in v ist separierbar und kann so gelöst werden. M124

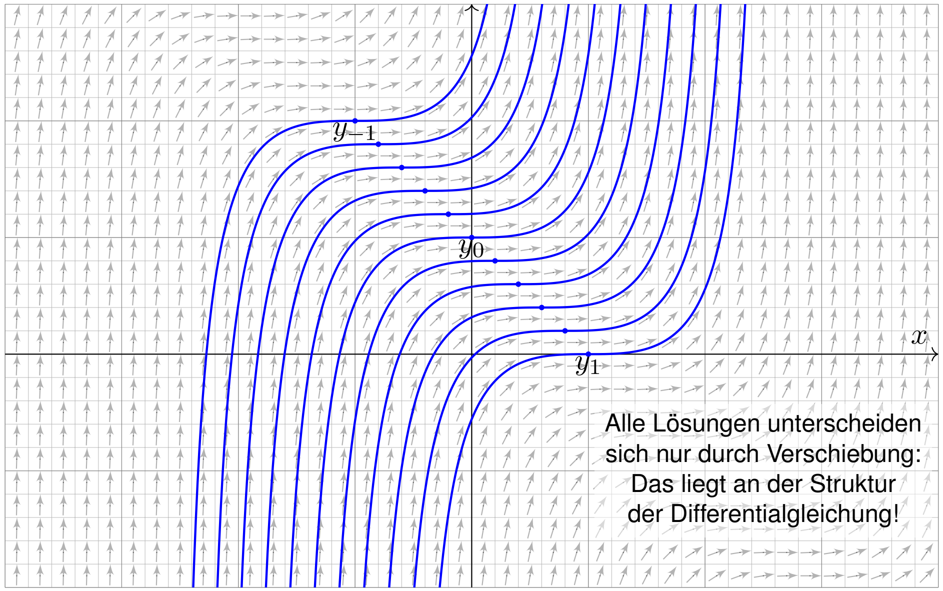
Aufgabe: Bestimmen Sie alle Lösungen von $y' = (x + y - 1)^2$. Maximales Definitionsintervall? Sind alle AWP $y(x_0) = y_0$ gut gestellt?

Lösung: Die Substitution $v = x + y - 1$ führt zu $v' = 1 + v^2$. Separation $v'/(1 + v^2) = 1$ und Integration zu $\arctan(v) = x - c$ liefert $v = \tan(x - c)$ unter der Bedingung $x \in \,]c - \pi/2, c + \pi/2[$. Rücksubstitution ergibt $y(x) = 1 - x + \tan(x - c)$. Probe!

🙂 Damit sind alle Lösungen y gefunden. Durch jeden Punkt (x_0, y_0) geht genau eine Lösung: In diesem Beispiel sind alle AWP gut gestellt!

Skizze der gefundenen Lösungen
M410 Beispiel

Lösungen $y_c :]c - \pi/2, c + \pi/2[\to \mathbb{R}$ mit $y_c(x) = 1 - x + \tan(x - c)$.



Substitution: Ähnlichkeits-Differentialgleichung
M411 Beispiel

Eine **Ähnlichkeits-Differentialgleichung** ist von der Form

$$\boxed{y' = f(y/x).}$$

Hierbei muss $x \neq 0$ gelten. Für $y = xv$ gilt $y' = v + xv' = f(v)$, also

$$\boxed{v' = \frac{f(v) - v}{x}.}$$

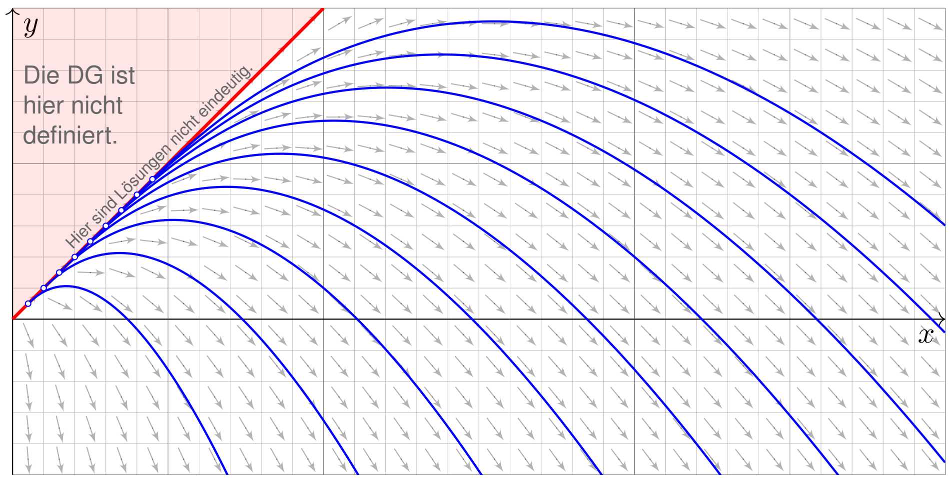
🙂 Diese DG in v ist separierbar und kann so gelöst werden. M124
Hierbei wird durch $f(v) - v$ dividiert, also muss dies $\neq 0$ sein.

Aufgabe: Lösen Sie $y' = y/x - \sqrt{1 - y/x}$ für $x > 0$ und $y < x$. Was ist zu jeder Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ das maximale Definitionsintervall? Erhalten wir zusätzliche Lösungen, wenn wir auch $y \le x$ zulassen?

Lösung: Die Substitution $v = y/x$ führt zu $v' = -\sqrt{1 - v}/x$. Ausführlich: Wir haben hier $f(v) = v - \sqrt{1 - v}$ und nutzen die obige Vorbereitung. Separation $-v'/\sqrt{1 - v} = 1/x$ und Integration zu $2\sqrt{1 - v} = \ln x - \ln c$ liefert $v = 1 - \ln(x/c)^2/4$ unter der Bedingung $x > c > 0$. Rücksubstitution ergibt $y(x) = x(1 - \ln(x/c)^2/4)$. Probe!

Skizze der gefundenen Lösungen
M412 Beispiel

Lösungen $y_c :]c, \infty[\to \mathbb{R}$ mit $y_c(x) = x(1 - \ln(x/c)^2/4)$ und $c \in \mathbb{R}_{>0}$.



⚠ Unsere Rechnung nutzt $x > 0$ und $y < x$: Hier gilt $v = y/x < 1$, und wir können durch $\sqrt{1 - v}$ dividieren. Durch jeden Anfangswert (x_0, y_0) mit $y_0 < x_0$ läuft genau eine Lösung. Im Sonderfall $v = 1$ ist auch $y(x) = x$ eine Lösung, wie man durch Einsetzen in die DG sieht. Durch jeden Anfangswert (x_0, y_0) mit $0 < x_0 = y_0$ laufen unendlich viele Lösungen!

Substitution: Bernoulli–Differentialgleichung

M413 Beispiel

Seien $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetig, $n \neq 1$. Zu lösen sei die **Bernoulli–Gleichung**

$$\boxed{y'(x) = a(x)\,y(x) + b(x)\,y(x)^n.}$$

Im Falle $y \neq 0$ ist diese DG äquivalent zu $y'y^{-n} = a(x)y^{1-n} + b(x)$.
Für $v = y^{1-n}$ gilt $v' = (1-n)\,y'y^{-n}$. Wir erhalten so die lineare DG

$$\boxed{\frac{1}{1-n} v'(x) = a(x)\,v(x) + b(x).}$$

Aufgabe: Lösen Sie $y' = y/x - y^2$ für $x > 0$ mit $y(1) = 1$.

Lösung: Die Substitution $y = 1/v$ führt zu $v' = -v/x + 1$.
Diese DG in v ist linear mit $a(x) = -1/x$ und $b(x) = 1$. Wir finden $A(x) = -\ln x$. Der integrierende Faktor ist hier $\mathrm{e}^{-A(x)} = x$, also

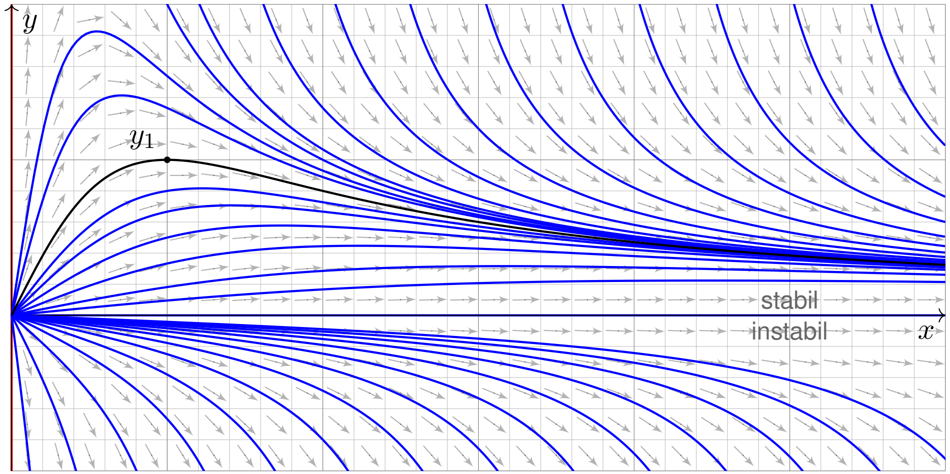
$$v(x) = \mathrm{e}^{A(x)} \int \mathrm{e}^{-A(x)}\,b(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{x}\int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2+c}{2x}.$$

Rücksubstitution ergibt $y(x) = 2x/(x^2+c)$. Die Probe ist leicht!
Der Anfangswert $y(1) = 1$ bestimmt die Konstante $c = 1$.

Skizze der gefundenen Lösungen

M414 Beispiel

Lösungen $y_c : \mathbb{R}_{>0} \smallsetminus \{\sqrt{-c}\} \to \mathbb{R}$ mit $y_c(x) = 2x/(x^2+c)$ und $c \in \mathbb{R}$.



☺ Wir können die Differentialgleichung $y' = y/x - y^2$ auch vereinfachen und qualitativ lösen:
Für kleine $x > 0$ ähnelt unsere DG $y' = y/x - y^2$ der Geradengleichung $y' = y/x$. M125
Für große $x \to \infty$ ähnelt unsere DG $y' = y/x - y^2$ eher der Gleichung $y' = -y^2$. M119
Das Ab- und Aufrunden einer Differentialgleichung ist oft eine hilfreiche Technik. M441

Nochmal Trennung der Variablen

M415 Übung

Aufgabe: Bestimmen Sie alle Lösungen $y : I \to \mathbb{R}$ der DG

$$\boxed{y' = \tfrac{3}{2}\,x^2\,y^3 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1.}$$

Maximales Definitionsintervall? Sind alle AWP $y(x_0) = y_0$ gut gestellt?

Lösung: Für $y > 0$ separieren wir $-2y'/y^3 = -3x^2$ und integrieren:

$$\int -2\frac{y'(x)}{y^3(x)}\,\mathrm{d}x = \int -3x^2\,\mathrm{d}x + \mathrm{const}$$

$$\Longrightarrow \qquad y(x)^{-2} = c^3 - x^3 \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}$$

Auflösen nach y ergibt die Lösungen

$$y_c : \,]{-\infty}, c[\, \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad y_c(x) = \frac{1}{\sqrt{c^3 - x^3}}.$$

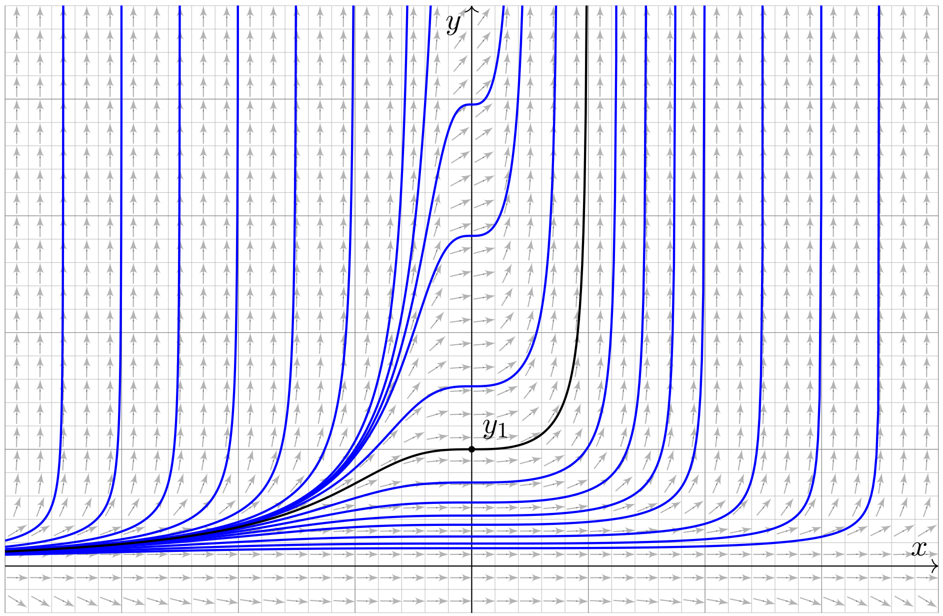
Die Lösung y_c existiert nur für $x < c$; bei $x = c$ liegt eine Polstelle vor!
Probe! Der Anfangswert $y(0) = 1$ bestimmt den Parameter $c = 1$.

⚠ Weitere Lösungen sind 0 und $-y_c$. Durch jeden Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ geht genau eine Lösung: In diesem Beispiel sind alle AWP gut gestellt!

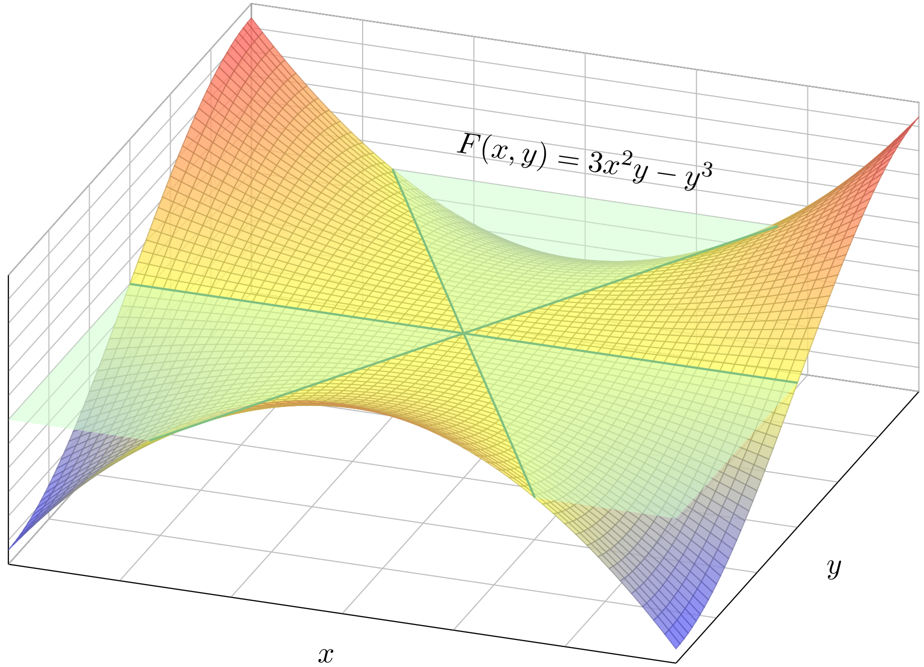
Skizze der gefundenen Lösungen

M416 Übung

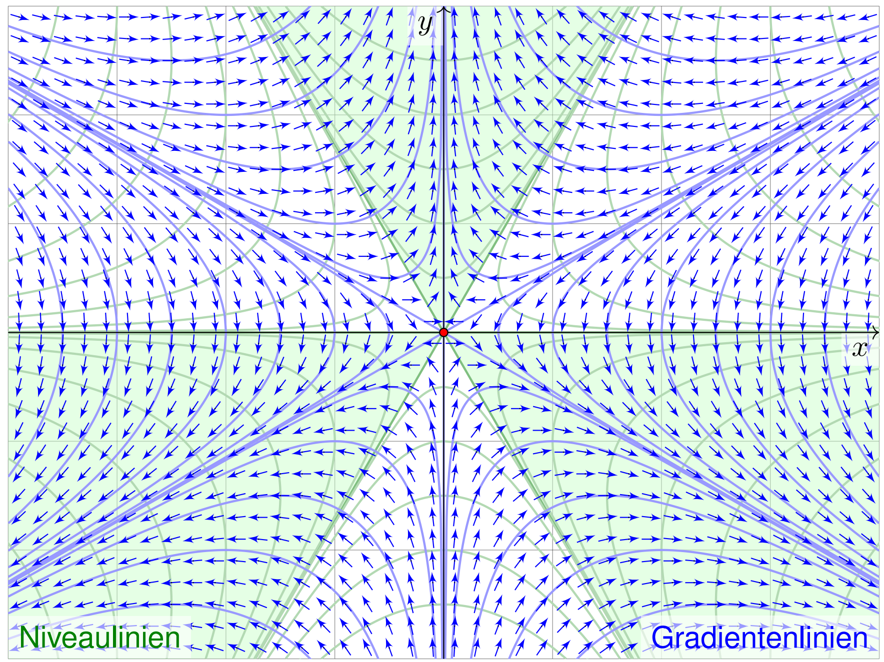
Lösungen $y_c : \,]{-\infty}, c[\, \to \mathbb{R}$ mit $y_c(x) = 1/\sqrt{c^3 - x^3}$ und $c \in \mathbb{R}$.



Der Ritt auf dem Affensattel: die Fläche



Der Ritt auf dem Affensattel: das Gradientenfeld



Der Ritt auf dem Affensattel: die Gradientenlinien

Der Graph der Polynomfunktion $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}:(x,y) \mapsto 3x^2y - y^3$ ist der berühmte **Affensattel**. Die zweite Skizze zeigt das (normierte negative) Gradientenfeld $G = -\operatorname{grad} F/|\operatorname{grad} F|$. Demnach weist $G(x,y)$ in jedem Punkt $(x,y) \neq (0,0)$ in Richtung des steilsten Abstiegs auf der Fläche.

Aufgabe: Wir untersuchen $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}:(x,y) \mapsto ax^2y - y^3$ mit $a \in \mathbb{R}$.

(1) Berechnen Sie zu F das Gradientenfeld $\operatorname{grad} F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

(2) Finden Sie eine (möglichst einfache) Differentialgleichung für die Niveaulinien, also Kurven $x \mapsto y(x)$, die stets auf gleicher Höhe bleiben.

Ist diese Differentialgleichung exakt? Mit welchem Potential?

(3) Finden Sie eine (möglichst einfache) Differentialgleichung für die Gradientenlinien, also Kurven $x \mapsto y(x)$, die stets dem steilsten Abstieg folgen. Interpretieren Sie dies geometrisch und physikalisch-dynamisch.

Ist diese Differentialgleichung exakt? Mit welchem Potential?

(4) Für welche (zweimal diff'baren) Funktionen $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist neben der Niveaugleichung (2) auch die Gradientengleichung (3) eine exakte DG? Wie hängt das zusammen mit harmonischen / holomorphen Funktionen?

Der Ritt auf dem Affensattel: die Gradientenlinien

Lösung: (1) Wir finden $\operatorname{grad} F = (\partial_x F, \partial_y F) = (\,2axy,\ ax^2 - 3y^2\,)$.
(2) Dies leistet $\operatorname{grad}(F) \bullet (x,y)' = (2axy)\cdot 1 + (ax^2 - 3y^2)\cdot y' \stackrel{!}{=} 0$.
Diese Differentialgleichung ist exakt mit Potential F, nach Definition!
(3) Dies leistet $\operatorname{grad}(F) \times (x,y)' = (3y^2 - ax^2)\cdot 1 + (2axy)\cdot y' \stackrel{!}{=} 0$.

Geometrisch bedeuten diese Gleichungen: Gradientenlinien stehen senkrecht auf Niveaulinien. Physikalisch realisieren Sie dies wie folgt: Sie bestreichen die Fläche mit Honig und lassen eine kleine Metallkugel hinunterrollen. Der Honig bremst die Kugel so, dass sie nicht beschleunigt, sondern immer brav die Richtung des steilsten Abstiegs sucht, also entlang G hinunterrollt.

Hier gilt $f = 3y^2 - ax^2$ und $g = 2axy$, also $\operatorname{rot}(f,g) = 2ay - 6y \stackrel{?}{=} 0$.
Diese DG ist exakt nur für $a = 3$, dann mit Potential $E(x,y) = 3xy^2 - x^3$.

(4) Unsere Gradientengleichung $\operatorname{grad}(F) \times (x,y)' = -\partial_y F + \partial_x F \cdot y' = 0$ ist genau dann exakt, wenn $\operatorname{rot}(-\partial_y F, \partial_x F) = \partial_x^2 F + \partial_y^2 F$ verschwindet, also F eine **harmonische Funktion** ist. Zu dieser exakten DG existiert ein Potential $E:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\partial_x E = -\partial_y F$ und $\partial_y E = \partial_x F$. Dies sind die **Cauchy–Riemann–Gleichungen** für $H = F + \mathrm{i}E:\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und ebenso $K = \mathrm{i}H = -E + \mathrm{i}F$; somit sind H und K **holomorphe Funktionen**!
Diese wichtige Eigenschaft nutzt man für ebene Potentialströmungen.
Im Beispiel gilt $K(x + \mathrm{i}y) = (x + \mathrm{i}y)^3 = (x^3 - 3xy^2) + \mathrm{i}(3x^2y - y^3)$.

Der Ritt auf dem Affensattel: die Rechnung

Aufgabe: Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$. Zu lösen ist die implizite Differentialgleichung

$$\boxed{3y^2 - ax^2 + 2axy \cdot y' = 0 \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0.}$$

Die vorige Aufgabe erklärt die geometrisch-physikalische Anschauung. Das kann Ihnen helfen! Der wichtige Spezialfall $a = 3$ entspricht einer Potentialströmung. Wir untersuchen hier $a > 0$. Diese *Gleichung* ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert. Unsere *Rechnung* zwingt uns zu Fallunterscheidungen, wir müssen dann geeignet einschränken und konzentrieren uns daher auf $x > 0$ und $y > 0$. Die anderen Fälle sind analog, für die Sonderfälle $x = 0$ oder $y = 0$ müssen wir genauer hinsehen.

(1) Formulieren Sie diese DG in expliziter Form. Für welche Startpunkte (x_0, y_0) garantiert der ∃&E-Satz eine eindeutige Lösung? (Und sonst?)

(2) Lösen die Geraden $y_\pm(x) = \pm cx$ mit $c := 1/\sqrt{2 + 3/a}$ unsere DG? Begründen oder widerlegen Sie folgende Schranke: Aus $|y(x_0)| < cx_0$ für *ein* $x_0 \in I$ folgt $|y(x)| < cx$ für *alle* $x \in I$, also $y_- < y < y_+$ auf I. Was bedeutet das geometrisch-physikalisch in den obigen Graphiken?

(3) Lösen Sie die Differentialgleichung mit einer unserer Methoden:
(a) durch einen integrierenden Faktor (ausgehend von der implizten DG),
(b) als Ähnlichkeitsdifferentialgleichung (durch Substitution $u = y/x$),
(c) als Bernoulli–DG (durch Substitution $v = y^{1-n}$ mit geeignetem n).

Der Ritt auf dem Affensattel: die Rechnung

(1) Wir schreiben die Differentialgleichung in expliziter Form:

$$y' = \frac{ax^2 - 3y^2}{2axy} = \frac{x}{2y} + \frac{3y}{2ax}$$

Die rechte Seite ist für $x = 0$ und für $y = 0$ nicht definiert. Daher macht der ∃&E-Satz M1c hier keine Aussage. In jedem Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $x_0, y_0 \neq 0$ hingegen ist die rechte Seite definiert, stetig und nach y stetig differenzierbar. Also garantiert der ∃&E-Satz M1c, dass es genau eine Lösung $y : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ durch den Punkt (x_0, y_0) gibt, insb. mit I maximal.

In den verbleibenden Punkten (x_0, y_0) mit $x_0 = 0$ oder $y_0 = 0$ schauen wir noch genauer hin. Wir betrachten hierzu die implizite Differentialgleichung als das oben skizzierte Vektorfeld. Wir suchen dann allgemeine Lösungskurven der Form $\gamma : \mathbb{R} \supset J \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (x(t), y(t))$; die Tangente $\dot\gamma(t) = (\dot x(t), \dot y(t))$ muss $(3y^2 - ax^2)\,\dot x + (2axy)\,\dot y = 0$ für alle $t \in J$ erfüllen.

Durch den Punkt $(0, 0)$ laufen die Lösungen $\gamma_\pm : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\pm t, \mp ct)$, wie in (2) genannt, und zusätzlich $\gamma_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (0, t)$. Letztere ist keine Lösung der Form $x \mapsto y(x)$, denn hier ist y keine Funktion von x. In $\gamma(t_0) = (x(t_0), y(t_0)) = (x_0, 0) \neq (0, 0)$ gilt $\dot x(t_0) = 0$, die Tangente $\dot\gamma(t)$ ist also senkrecht, daher gibt es auch hier keine Lösung der Form $x \mapsto y(x)$.

⚠ Die Wahl der Parametrisierung $x \mapsto y(x)$ ist zum Rechnen bequem, und wie gesehen für $x > 0$ und $y > 0$ gerechtfertigt. Sie schließt aber einige physikalisch sinnvolle Lösungen aus!

Der Ritt auf dem Affensattel: die Rechnung

(2) Ja, die Geraden $y_\pm(x) = \pm cx$ mit $c := 1/\sqrt{2 + 3/a}$ lösen unsere DG:

$$3y^2 - ax^2 + 2axy \cdot y' = x^2(3c^2 - a + 2ac^2) \stackrel{!}{=} 0$$

Wegen $x \neq 0$ gilt dies genau für die Konstanten $c = \pm 1/\sqrt{2 + 3/a}$. Im oben skizzierten Fall $a = 3$ sind dies anschaulich die Bergrücken.

Dank der Eindeutigkeitsgarantie des ∃&E-Satzes (1) können sich bei dieser DG verschiedene Lösungen $y : \mathbb{R} \setminus \{0\} \supset I \to \mathbb{R}$ nicht kreuzen: Aus $y(x_0) < y_+(x_0)$ für ein $x_0 \in I$ folgt $y(x) < y_+(x)$ für alle $x \in I$. Aus $y(x_0) > y_-(x_0)$ für ein $x_0 \in I$ folgt $y(x) > y_-(x)$ für alle $x \in I$.

(3a) Wir untersuchen die implizite Differentialgleichung auf Exaktheit:

$$\underbrace{3y^2 - ax^2}_{=:\,f(x,y)} + \underbrace{2axy}_{=:\,g(x,y)}\, y' = 0$$

Hier gilt $\operatorname{rot}(f, g) = 2ay - 6y$: Unsere DG ist also exakt nur für $a = 3$. Der Quotient $-\operatorname{rot}(f, g)/g = (6 - 2a)/(2ax) = b/x$ hängt nur von x ab, wobei $b = 3/a - 1$. Mit Satz M2c finden wir einen integrierenden Faktor:

$$\ln \lambda(x) = \int \frac{b}{x}\, \mathrm{d}x = b \ln(x) + \text{const} \quad \Longrightarrow \quad \lambda(x) = \mathrm{e}^{b \ln(x) + \text{const}} = Cx^b$$

Der Ritt auf dem Affensattel: die Rechnung

Wir suchen nun ein Potential Φ zum reskalierten Vektorfeld

$$x^b \cdot \begin{pmatrix} 3y^2 - ax^2 \\ 2axy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^b y^2 - ax^{b+2} \\ 2ax^{b+1} y \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \operatorname{grad} \Phi(x, y).$$

Koordinatenweise Integration ergibt $\Phi(x, y) = ax^{b+1} y^2 - ax^{b+3}/(b + 3)$. Wir lösen schließlich $\Phi(x, y(x)) = \Phi(x_0, y_0)$ nach $y(x)$ auf und erhalten

$$y(x) = \pm \sqrt{\frac{\Phi(x_0, y_0)}{ax^{3/a}} + \frac{x^2}{2 + 3/a}}.$$

Im Spezialfall $a = 3$ ist unsere DG exakt; wegen $b = 3/a - 1 = 0$ finden wir das Potential $\Phi(x, y) = 3xy^2 - x^3$, genau wie in der vorigen Aufgabe. Die Lösungen sind dann (wie oben bereits skizziert) gegeben durch

$$y(x) = \pm \sqrt{\frac{3x_0 y_0^2 - x_0^3}{3x} + \frac{x^2}{3}}.$$

Machen Sie jeweils die Probe! Die Rechnungen (3b/c) liefern dasselbe Ergebnis mit zwei weiteren Methoden; ich empfehle sie als Übung.

Exakte Differentialgleichungen und Potentiale

Aufgabe: Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\boxed{1 - 2xy^2 + 2(1-x^2)y\,y' = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1.}$$

Ist sie exakt? Was ist die maximale Lösung? Inwiefern ist diese stabil? Was bewirkt eine kleine Störung des Anfangswerts $y(0) = 1 \pm \varepsilon$?

Lösung: Diese DG ist exakt: $\operatorname{rot} = 0$. (Wäre sie noch nicht exakt, so suchen wir zuerst einen integrierenden Faktor.) Sie ist Ableitung von

$$x + (1-x^2)y^2 = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Machen Sie die Probe! (Sie wissen bereits, wie man solche Potentiale ausrechnet; so gelingt es auch hier. Übung!) Auflösen nach y ergibt:

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{c-x}{1-x^2}} \quad \text{für} \quad -1 < x < \min\{1, c\}$$

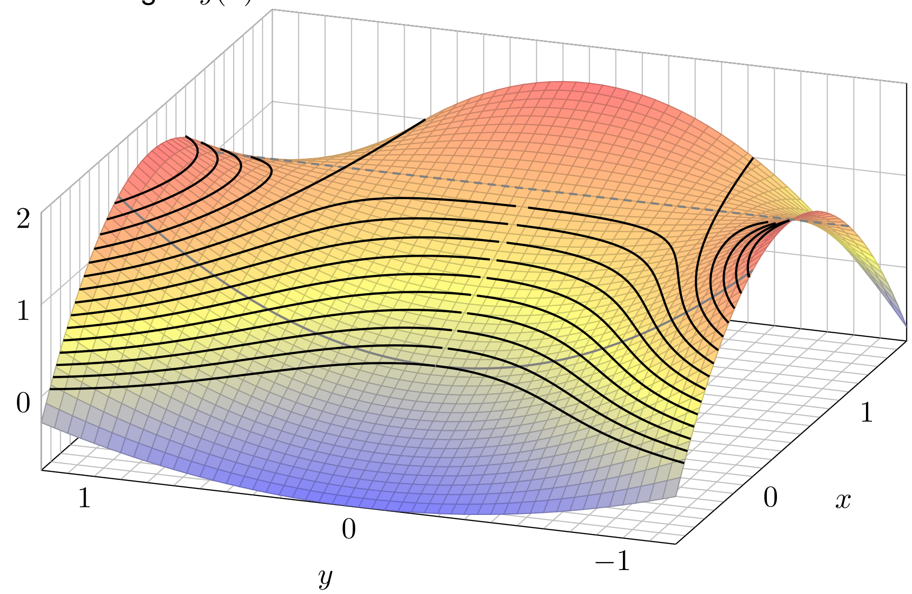
Das AWP $y(0) = 1$ wird gelöst für $c = 1$. Die maximale Lösung ist hier

$$y :]{-1}, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad y(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}.$$

Machen Sie die Probe durch Einsetzen in unsere Differentialgleichung!

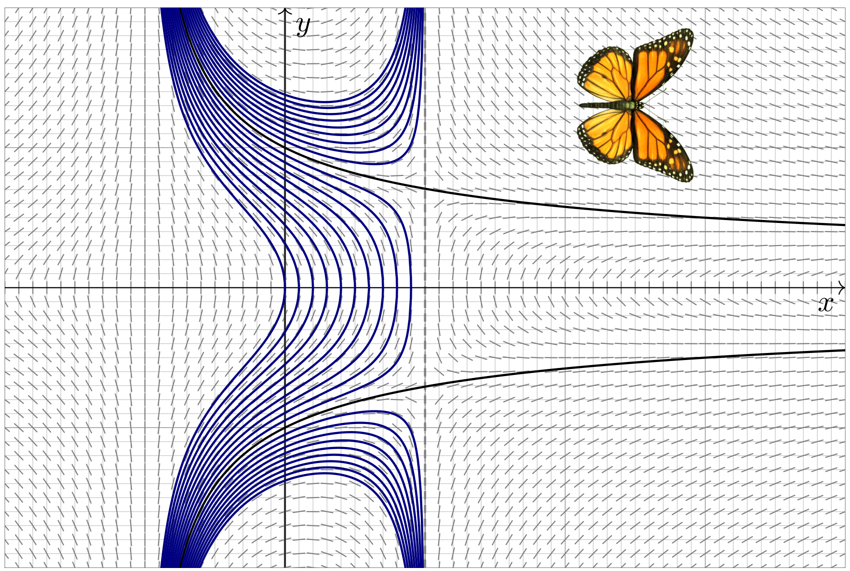
Exakte Differentialgleichungen und Potentiale

Das Potential $\Phi(x,y) = x + (1-x^2)y^2$ lässt sich veranschaulichen: Die Lösungen $y(x)$ der DG sind die Niveaulinien des Potentials Φ.



Exakte Differentialgleichungen und Potentiale

Lösungen $y(x) = \pm\sqrt{(c-x)/(1-x^2)}$ zu Anfangswerten $y(0) = y_0$:



Exakte Differentialgleichungen und Potentiale

Anfangsdaten sind oft zufälligen kleinen Schwankungen unterworfen, etwa durch kleine äußere Störungen oder ungenaue Messdaten.

Wir sehen hier eine Illustration des berüchtigten Schmetterlingseffekts. Der Verlauf der Lösung hängt empfindlich vom Startwert $y_0 = y(0)$ ab:

- Zu $|y_0| > 1$ existiert die Lösung nur für $-1 < x < 1$ und läuft dann in die Polstelle bei $x = \pm 1$.
- Zu $0 < |y_0| < 1$ existiert die Lösung nur für $-1 < x \le \sqrt{|y_0|}$, danach wird der Radikand negativ.

Nur für $y_0 = \pm 1$ existiert die Lösung $y(x) = \pm 1/\sqrt{1+x}$ für alle $x > -1$.

Was sagt das über die Stabilität von Lösungen unter kleinen Störungen? Lösungen durch benachbarte Punkte haben nur endliche Lebenszeit: Entweder sie explodieren bei $x = 1$ oder sie kollabieren schon zuvor.

⚠ Wenn diese DG ein physikalisches System beschreibt, etwa ein kritisches Bauteil eines Flugzeugs, dann haben Sie Grund zur Sorge! Daher fordern wir Stetigkeit / Stabilität für gut gestellte Probleme (M1B).

Exakte Differentialgleichungen und Potentiale

Aufgabe: Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\boxed{x\sin(y)\,y' = x + \cos(y) \quad \text{mit} \quad y(1) = y_0 \in [0,\pi].}$$

Ist sie exakt? Was ist die maximale Lösung? Inwiefern ist diese stabil? Was bewirkt eine kleine Störung des Anfangswerts $y(1) = \frac{2}{3}\pi \pm \varepsilon$?

Lösung: Wir prüfen diese DG auf Exaktheit:

$$\underbrace{\big[x + \cos(y)\big]}_{f(x,y)} + \underbrace{\big[-x\sin(y)\big]}_{g(x,y)}\, y' = 0$$

Hierzu muss die Rotation $\operatorname{rot}(f,g) = \partial_x g - \partial_y f$ verschwinden:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -\sin y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\sin y.$$

🙂 Wir haben Glück, diese DG ist exakt: $\operatorname{rot}(f,g) = 0$. (Wäre sie noch nicht exakt, so müssten wir zuerst einen integrierenden Faktor suchen.)

🙂 Das Gebiet $\mathbb{R}^2$ ist einfach-zusammenhängend. Also hat unser Vektorfeld $(f,g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein Potential $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Es bleibt uns nun, eins zu berechnen… Diese Fragestellung können Sie bereits lösen!

Exakte Differentialgleichungen und Potentiale

Integration: Wegen $\partial_x \Phi(x,y) \overset{!}{=} f(x,y) = x + \cos y$ versuchen wir

$$\Phi(x,y) = \int x + \cos y \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}x^2 + x\cos y + c(y).$$

Die Integrationskonstante $c(y)$ hängt nur von y ab. Weiterhin:

$$\partial_y \Phi(x,y) = -x\sin y + c'(y) \quad \overset{!}{=} \quad g(x,y) = -x\sin y$$

Aus $c'(y) = 0$ folgt $c(y) = \text{const}$. So finden wir das Potential

$$\Phi(x,y) = \tfrac{1}{2}x^2 + x\cos y \quad (+\text{const}). \qquad \text{(Probe!)}$$

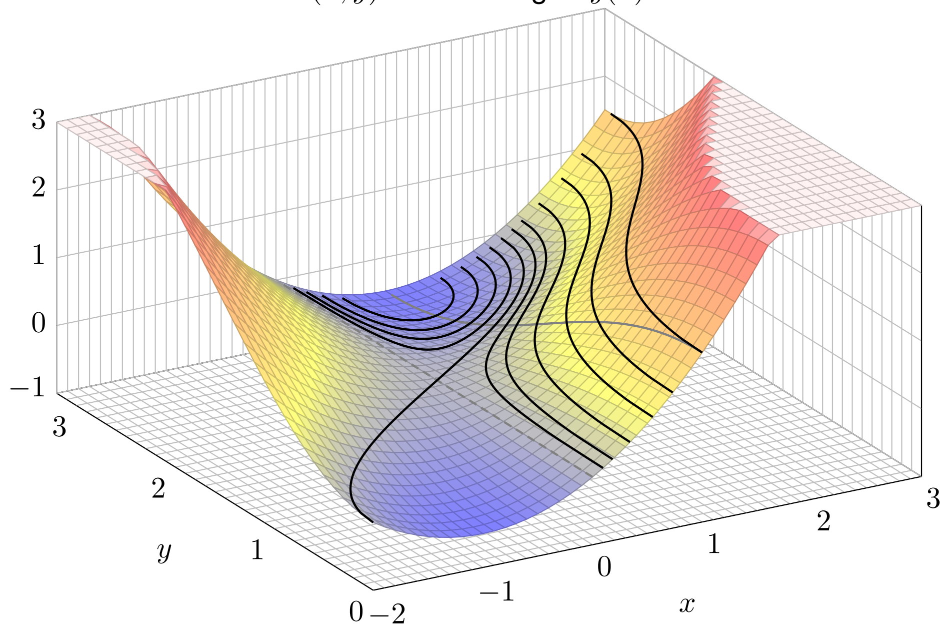
Auflösen von $\Phi(x,y) = c$ nach y ergibt $\cos y = c/x - x/2$, also

$$y(x) = \arccos\left(\frac{c}{x} - \frac{x}{2}\right). \qquad \text{(Probe!)}$$

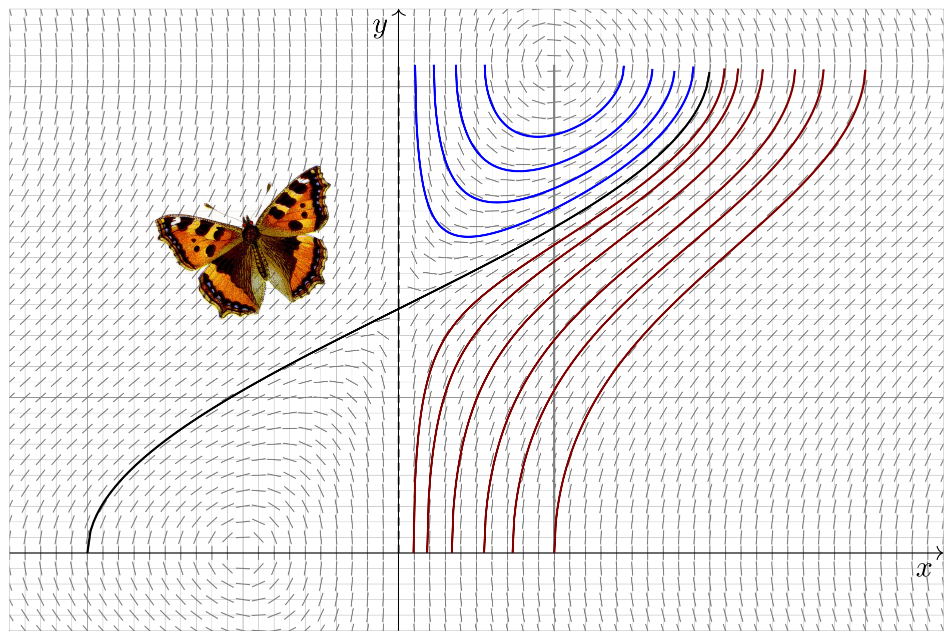
Der Anfangswert $y(1) = y_0 \in [0,\pi]$ bestimmt $c = \frac{1}{2} + \cos(y_0) \in [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.
Für $c = 0$ existiert die Lösung $y(x) = \arccos(-x/2)$ für $x \in [-2,+2]$.
Für $-\frac{1}{2} \le c < 0$ existiert die Lösung nur für $x \in [1 \mp \sqrt{2c+1}] \subset [0,2]$.
Für $0 < c \le \frac{3}{2}$ existiert die Lösung für $x \in [\sqrt{2c+1} \mp 1]$. (Skizze!)

Exakte Differentialgleichungen und Potentiale

Skizze des Potentials $\Phi(x,y)$. Die Lösungen $y(x)$ sind die Niveaulinien!



Exakte Differentialgleichungen und Potentiale



Exakte Differentialgleichungen und Potentiale

Aufgabe: Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\boxed{\big[y-\cos(x)\big]\,y\,y' = -\sin(x)\,y^2 \quad \text{mit} \quad y(0)=3.}$$

Ist sie exakt? Existiert ein integrierender Faktor? maximale Lösung?
Für welche Startwerte $y(0)=y_0$ existieren Lösungen $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$?

Lösung: Wir prüfen diese DG auf Exaktheit:

$$\underbrace{\big[\sin(x)\,y^2\big]}_{f(x,y)} + \underbrace{\big[y-\cos(x)\big]\,y}_{g(x,y)}\; y' = 0$$

Existiert ein Potential $\Phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad}\Phi=(f,g)$? Leider nein:

$$\partial_x g(x,y)=\sin(x)\,y,\quad \partial_y f(x,y)=2\sin(x)\,y,\quad \operatorname{rot}(f,g)=-\sin(x)\,y\neq 0.$$

Wir suchen einen integrierenden Faktor $\lambda(x)$:

$$\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} \overset{!}{=} -\frac{\operatorname{rot}(f,g)}{g} = \frac{\sin(x)\,y}{y-\cos(x)} \quad\Longrightarrow\quad \text{nicht lösbar}$$

☹ Die linke Seite hängt nur von x ab, die rechte auch noch von y.

Exakte Differentialgleichungen und Potentiale

Wir suchen einen integrierenden Faktor $\lambda(y)$:

$$\frac{\lambda'(y)}{\lambda(y)} \overset{!}{=} \frac{\operatorname{rot}(f,g)}{f} = \frac{-1}{y} \quad\Longrightarrow\quad \ln\lambda(y)=c-\ln y \quad\Longrightarrow\quad \lambda(y)=\frac{C}{y}$$

Dank dieses Faktors $\lambda(y)$ erhalten wir die exakte Differentialgleichung

$$\boxed{\big[2\sin(x)\,y\big]+2\big[y-\cos(x)\big]\,y'=0.}$$

Wir berechnen ein Potential Φ durch koordinatenweise Integration:

$$\begin{aligned}
\partial_x\Phi(x,y) &= 2y\sin(x) &&\Longrightarrow& \Phi(x,y) &= c(y)-2y\cos(x)\\
\partial_y\Phi(x,y) &= 2y-2\cos(x) &&\Longrightarrow& \Phi(x,y) &= y^2-2y\cos(x) \quad (+\text{const})
\end{aligned}$$

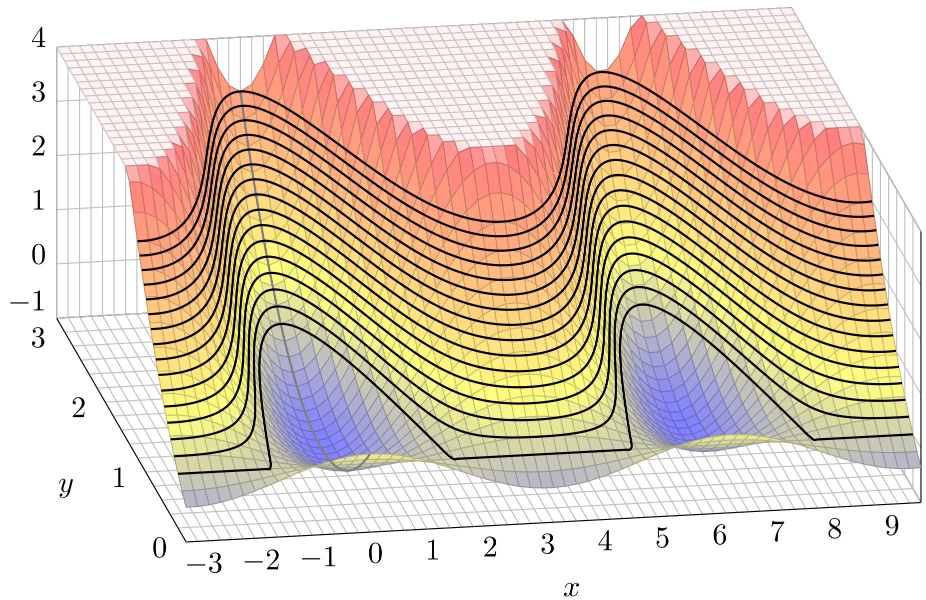
Lösungskurven erfüllen $y^2-2y\cos(x)=\Phi(x_0,y_0)=c$, also

$$y(x)=\cos(x)\pm\sqrt{\cos(x)^2+c}.$$

Der AW $y(0)=3$ bestimmt den Parameter $c=3$. Machen Sie die Probe!

☺ Diese und die vorige Aufgabe sind eng verwandt; sehen Sie wie?

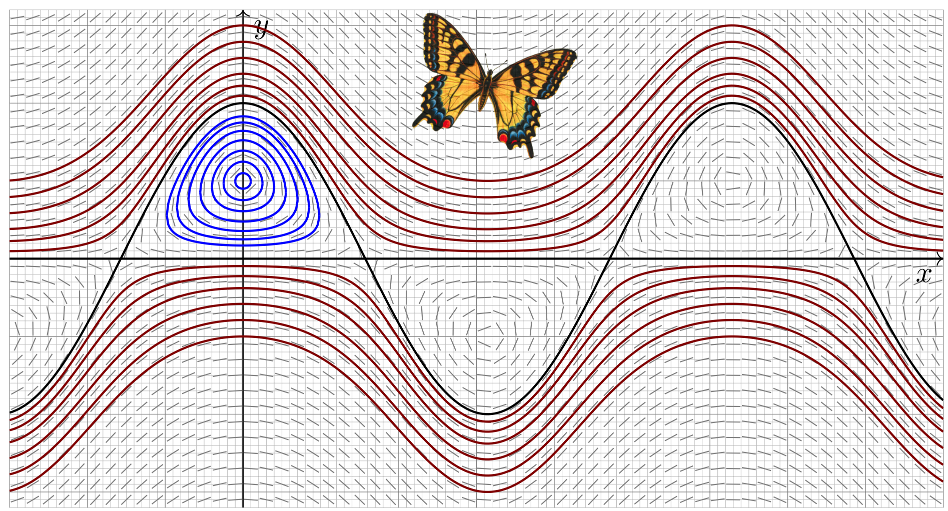
Exakte Differentialgleichungen und Potentiale



⚠ Auf dem kritischen Niveau $\Phi=0$ kreuzen sich zwei Lösungskurven: Dort gilt Eindeutigkeit nicht, der ∃&E-Satz lässt sich nicht anwenden!

Exakte Differentialgleichungen und Potentiale

Lösungen $y(x)=\cos(x)\pm\sqrt{\cos(x)^2+c}$ zu Anfangswerten $y(0)=y_0$:



☺ Zu $y(0)=y_0\geq 2$ existiert genau eine Lösung $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ebenso zu $y_0\leq 0$, aber für $0<y_0<2$ bleibt die Lösung im Potentialtopf gefangen!

Lösung durch Variation der Konstanten

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, hierauf $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}$. Zu lösen sei eine **lineare Differentialgleichung**, zunächst homogen

$$\boxed{y'(x) = a(x)\,y(x) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0.}$$

Die Lösung ist eindeutig (Satz M2D), und wir kennen sie explizit:

$$y(x) = \mathrm{e}^{A(x)}\,y_0 \quad \text{mit} \quad A(x) = \int_{t=x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t.$$

Zu lösen sei nun allgemeiner die **inhomogene Differentialgleichung**

$$\boxed{y'(x) = a(x)\,y(x) + b(x) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0.}$$

Das inhomogene Problem ist schwieriger: Wie finden wir eine Lösung? Gibt es ein allgemeines Verfahren? eine übersichtliche Lösungsformel? Wir haben dies oben mit einem integrierenden Faktor über eine exakte Differentialgleichung gelöst (Satz M2E). Lineare Differentialgleichungen treten häufig auf und sind daher recht wichtig. Zur Übung lösen wir die inhomogene Gleichung mit einer zweiten, nützlichen Rechenmethode.

Lösung durch Variation der Konstanten

Die Idee der **Variation der Konstanten** geht auf Lagrange zurück: Wenn $y_0(x) = \mathrm{e}^{A(x)} c_0$ mit konstantem $c_0 \in \mathbb{R}$ die homogene DG löst, dann löst vielleicht der Ansatz $y(x) = \mathrm{e}^{A(x)} c(x)$ die inhomogene DG.
☺ Das ist zunächst nur ein Ansatz, aber einen Versuch ist es wert!

Aufgabe: Setzen Sie $y(x) = \mathrm{e}^{A(x)} c(x)$ ein und bestimmen Sie $c(x)$. Können Sie so die Existenz / Eindeutigkeit einer Lösung garantieren?

Lösung: Wir leiten den Ansatz ab; gemäß Produktregel erhalten wir

$$y'(x) = \big[\mathrm{e}^{A(x)} c(x)\big]' = a(x)\,\mathrm{e}^{A(x)} c(x) + \mathrm{e}^{A(x)} c'(x).$$

Einsetzen in unsere Gleichung $y'(x) = a(x)\,y(x) + b(x)$ ergibt

$$a(x)\,\mathrm{e}^{A(x)} c(x) + \mathrm{e}^{A(x)} c'(x) \stackrel{!}{=} a(x)\,\mathrm{e}^{A(x)} c(x) + b(x).$$

Vergleich beider Seiten liefert $\mathrm{e}^{A(x)} c'(t) = b(t)$, also $c'(t) = \mathrm{e}^{-A(x)} b(t)$.
☺ Wir erleben ein nützliches Wunder: Diese Differentialgleichung für die gesuchte Funktion c können wir direkt durch Integration lösen:

$$c(x) = \int_{t=x_0}^{x} \mathrm{e}^{-A(t)}\,b(t)\,\mathrm{d}t \;+\; c(x_0)$$

Lösung durch Variation der Konstanten

Damit finden wir zu unserer inhomogenen Gleichung die Lösung

$$y(x) = \mathrm{e}^{A(x)} c(x) = \mathrm{e}^{A(x)} \left[\int_{t=x_0}^{x} \mathrm{e}^{-A(t)}\,b(t)\,\mathrm{d}t \;+\; c(x_0)\right]$$

Zunächst können wir hierbei die Integrationskonstante $c(x_0)$ frei wählen. Wir passen sie schließlich den gegebenen Anfangsdaten $y(x_0) = y_0$ an: Für $x = x_0$ gilt $A(x_0) = 0$ und $y(x_0) = c(x_0)$; wir setzen also $c(x_0) = y_0$. Zusammenfassend erhalten wir erneut die Lösungsformel aus Satz M2E:

Die homogene DG $y'(x) = a(x)\,y(x)$ mit $y(x_0) = y_0$ wird gelöst durch $y_1(x) = \mathrm{e}^{A(x)}\,y_0$ mit $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t$. Zur inhomogenen Gleichung

$$\boxed{y'(x) = a(x)\,y(x) + b(x) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0}$$

finden wir durch Variation der Konstanten die Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ mit

$$\boxed{y(x) = \mathrm{e}^{A(x)} \left[\int_{t=x_0}^{x} \mathrm{e}^{-A(t)}\,b(t)\,\mathrm{d}t \;+\; y_0\right].}$$

Lösung durch Variation der Konstanten

☺ Diese Rechenmethode heißt „Variation der Konstanten“; das klingt widersinnig (Oxymoron), beschreibt aber sehr treffend unser Vorgehen.

☺ Sie zeigt die Existenz einer Lösung dank expliziter Lösungsformel. Die Ansatzmethode garantiert leider nicht die Eindeutigkeit der Lösung: Denkbar wären auch andere Ansätze und evtl. noch weitere Lösungen.

☺ Cauchys ∃&E-Satz M1C sichert hier die Eindeutigkeit — und auch die Existenz, dank expliziter Lösungsformel wissen wir noch mehr.

☺ Der Rechenweg mit einem integrierenden Faktor über eine exakte Differentialgleichung liefert dieselbe Lösungsformel und somit auch die Existenz; zudem liefert er die Eindeutigkeit als Dreingabe gratis mit.

Übung: Schreiben Sie beide Rechenwege selbständig auf (d.h. ohne Vorlage). Beide sind nahezu gleich, nur die Sichtweise ist verschieden.

☺ Exakte Differentialgleichungen stehen in höherer Dimension nicht mehr zur Verfügung, wohl aber die Variation der Konstanten. N311 O311

Das Ergebnis ist bemerkenswert: Dieser Kunstgriff gelingt immer!

Ab- und Aufrunden einer Differentialgleichung

M441 Ergänzung

Wir betrachten ein Anfangswertproblem, wie üblich von der Form

$$\boxed{y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0.}$$

☹ Oft können (oder wollen) wir Lösungen y nicht explizit ausrechnen.
☺ Wir wollen (oder müssen) dann y wenigstens geschickt eingrenzen.

Aufgabe: (1) Lösen Sie für $x \ge 0$ das AWP $u'(x) = u(x)^2$, $u(0) = 1$:
(a) Finden Sie eine maximale Lösung $u : [0, x_1[\to \mathbb{R}$. Ist u eindeutig?
(b) Was ist hier die Intervallgrenze x_1? Was passiert für $x \nearrow x_1$?
(2) Lösen Sie für $x \ge 0$ ebenso das AWP $v'(x) = 1 + v(x)^2$, $v(0) = 1$.
(3) Untersuchen Sie qualitativ das AWP $y'(x) = x^2 + y(x)^2$, $y(0) = 1$.
Hinweis: Können Sie (3) ebenso leicht explizit lösen wie (1) und (2)?
Wie helfen (1,2) zur Eingrenzung von (3)? Formulieren Sie eine Regel!

Riccati–Gleichungen $y'(x) = a(x) + b(x)y(x) + c(x)y(x)^2$ bilden eine umfangreiche Klasse; sie enthält lineare $y'(x) = a(x) + b(x)y(x)$ und Bernoulli–DG $y'(x) = b(x)y(x) + c(x)y(x)^2$. Eine geschlossene Lösung durch elementare Funktionen ist im Allgemeinen nicht möglich. In solchen Fällen hilft die allgemeine Technik der Eingrenzung: einfach und effizient!

Ab- und Aufrunden einer Differentialgleichung

M442 Ergänzung

Lösung: (1a) Wir lösen $u'(x) = u(x)^2$. Die triviale Lösung ist $u = 0$.
Für $u(x) > 0$ trennen wir die Variablen und integrieren:

$$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{u'(x)}{u(x)^2}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x + \text{const}$$

$$\Longrightarrow \quad -u(x)^{-1} = x + \text{const} \quad \Longrightarrow \quad u(x) = \frac{1}{c - x}$$

Hierbei ist $c \in \mathbb{R}_{>0}$ eine Konstante und $u(0) = 1/c$. Durch den Startwert $u(0) = 1$ verläuft somit als einzige Lösung $u : [0, 1[\to \mathbb{R} : x \mapsto 1/(1 - x)$.
(1b) Die Lösung explodiert in endlicher Zeit: Für $x \nearrow 1$ gilt $u(x) \nearrow \infty$.
Das maximale Definitionsintervall ist $[0, 1[$ wegen der Polstelle in 1.
(2a) Auch für $v'(x) = 1 + v(x)^2$ trennen wir die Variablen und integrieren:

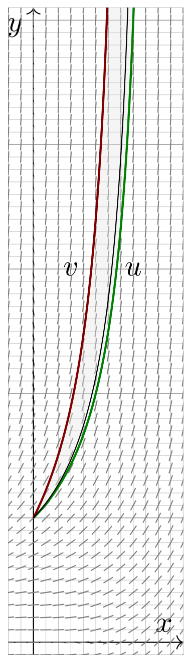
$$\frac{v'(x)}{1 + v(x)^2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{v'(x)}{1 + v(x)^2}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x + \text{const}$$

$$\Longrightarrow \quad \arctan(v(x)) = x + \text{const} \quad \Longrightarrow \quad v(x) = \tan(x + c)$$

Durch $v(0) = 1$ geht $v : [0, \frac{\pi}{4}[\to \mathbb{R} : x \mapsto \tan(x + \frac{\pi}{4})$ als einzige Lösung.
(2b) Diese Lösung explodiert noch schneller: Für $x \nearrow \frac{\pi}{4}$ gilt $v(x) \nearrow \infty$.

Ab- und Aufrunden einer Differentialgleichung

M443 Ergänzung



(3) Das Problem $y'(x) = x^2 + y(x)^2$ mit Start in $y(0) = 1$ können wir leider nicht so einfach und explizit lösen.

Satz M1C garantiert zunächst Existenz und Eindeutigkeit: Es gibt genau eine maximale Lösung $y : [0, x_1[\to \mathbb{R}$. M128

Satz M4A erlaubt den Vergleich der (noch unbekannten) Lösung y mit Unterlösungen u und Oberlösungen v:

☺ Wir erhalten ohne numerische Mühe die Eingrenzung

$$\frac{1}{1 - x} \le y(x) \le \tan\Big(x + \frac{\pi}{4}\Big).$$

Wir finden Polstellen in $0.785 \approx {}^{\pi}/_{4} \le x_1 \le 1$: Die Lösung y lebt also mindestens bis 0.785, jedoch höchstens bis 1.

Auch die Lösung y explodiert: Für $x \nearrow x_1$ gilt $y(x) \nearrow \infty$.

☺ In vielen Fällen genügt diese grobe Information. Andernfalls unternehmen wir eine numerische Näherung.

Der Ansatz $w(x) = 1/(1 + ax)$ liefert bessere Oberlösungen für $a \ge {}^{17}/_{16}$. Die obige Skizze zeigt, wie erstaunlich genau diese Eingrenzung bereits ist.

Ab- und Aufrunden einer Differentialgleichung

M444 Ergänzung

Die hier benutzte **Rundungsregel** ist ebenso einfach wie genial:
Wir können $y'(x) = f(x, y(x))$ mit $y(x_0) = y_0$ wie folgt eingrenzen.

1. Wir runden f und y_0 geschickt ab zu $f^{\downarrow} \le f$ und $y_0^{\downarrow} \le y_0$ und lösen das leichtere Problem $u(x) = f^{\downarrow}(x, u(x))$ mit $u(x_0) = y_0^{\downarrow}$.
2. Wir runden f und y_0 geschickt auf zu $f^{\uparrow} \ge f$ und $y_0^{\uparrow} \ge y_0$ und lösen das leichtere Problem $v(x) = f^{\uparrow}(x, v(x))$ mit $v(x_0) = y_0^{\uparrow}$.

Der folgende Satz M4A erfüllt unsere Hoffnung, denn es gilt $u \le y \le v$.
Satz M4B erklärt alles nötige für die strikten Ungleichungen $u < y < v$.
Hier sind Geschick und Kreativität gefordert: Die gewählten Rundungen $f^{\downarrow} \le f \le f^{\uparrow}$ sollen möglichst nahe bei f liegen, aber leichter lösbar sein.

Aufgabe: (4) Der Ansatz $w(x) = \frac{1}{1+ax}$ liefert bessere Oberlösungen.
Lösung: (4) Wir finden $w'(x) = aw(x)^2$. Wir wünschen $w(x) \ge y(x)$.
Hierzu genügt $w'(x) \ge x^2 + w(x)^2$, eingesetzt also $(a - 1)w(x)^2 \ge x^2$.
Wir nutzen $w(x) \ge u(x) = 1/(1 - x)$, wollen also $(a - 1)/(1 - x)^2 \ge x^2$.
Es genügt $(a - 1) \ge 1/16 \ge x^2(1 - x)^2$, wir finden so $a = 17/16$.
Probe: Es gilt $w'(x) = aw(x)^2 \ge x^2 + w(x)^2$, dank M4A also $w \ge y$.

Eingrenzung durch Unter/Oberlösungen

Wir betrachten ein Anfangswertproblem, wie üblich von der Form

$$\boxed{y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0.}$$

Satz M4A: Eingrenzung durch Unter/Oberlösungen

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \supset I \times K \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y)$ sei stetig und in y stetig differenzierbar; $I = [x_0, x_1]$ und K seien kompakte Intervalle. Seien $y, u, v : I \to K$ differenzierbar, sodass für alle $x \in I$ gilt:

(a) y ist eine **Lösung** des AWP: $y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0$

(b) u ist eine **Unterlösung**: $u'(x) \le f(x, u(x)), \quad u(x_0) \le y_0$

(c) v ist eine **Oberlösung**: $v'(x) \ge f(x, v(x)), \quad v(x_0) \ge y_0$

Dann gilt: $\boxed{u(x) \le y(x) \le v(x) \quad \text{für alle } x \in I}$

Allein aus (a,b) folgt bereits $u \le y$, und mit $u(x_0) < y_0$ sogar $u < y$.
Allein aus (a,c) folgt bereits $y \le v$, und mit $v(x_0) > y_0$ sogar $v > y$.

Der Satz ist bequem und intuitiv plausibel. Der Beweis ist trickreich.

Eingrenzung durch Unter/Oberlösungen

Beweis: (1) Wir zeigen zunächst: Aus (b,c) und $u \ge v$ folgt $u = v$.
Die Ableitung $\partial f / \partial y$ ist stetig und $I \times K \subset \mathbb{R}^2$ kompakt, also gilt eine Schranke $\partial f / \partial y \le M < \infty$. Für jedes $x \in I$ folgt dank $u \ge v$ in K und Mittelwertsatz $f(x, u) - f(x, v) = (\partial f / \partial y)(x, \zeta) \cdot (u - v) \le M \cdot (u - v)$.
Die Hilfsfunktion $\varphi(x) = [u(x) - v(x)]\, \mathrm{e}^{-M(x - x_0)} \ge 0$ ist differenzierbar:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \big[u'(x) - v'(x)\big]\, \mathrm{e}^{-M(x-x_0)} - M\, \big[u(x) - v(x)\big]\, \mathrm{e}^{-M(x-x_0)} \\ &\le \Big(\big[f(x, u(x)) - f(x, v(x))\big] - M\, \big[u(x) - v(x)\big]\Big)\, \mathrm{e}^{-M(x-x_0)} \le 0 \end{aligned}$$

Es gilt $u(x_0) = v(x_0)$, also $\varphi(x_0) = 0$, sowie $\varphi' \le 0$, also $\varphi = 0$.

(2) Mit (1) folgern wir die Eingrenzung $u \le y \le v$. Zunächst $u \le v$:
Angenommen, die Ungleichung $u \le v$ gälte nicht auf ganz $I = [x_0, x_1]$.
Dann gäbe es ein Intervall $[a, b] \subset I$ mit $u(a) = v(a)$ und $u > v$ auf $]a, b]$.
Mit (1) folgt aus $u \ge v$ auf $[a, b]$ aber $u = v$ auf $[a, b]$, ein Widerspruch!
Also gilt $u \le v$ auf ganz $[x_0, x_1]$. Hieraus folgt schließlich der Satz M4A:
Statt (u, v) vergleichen wir nun (u, y) und (y, v) und erhalten $u \le y \le v$.

Eingrenzung durch Unter/Oberlösungen

Satz M4A beinhaltet insbesondere die Eindeutigkeit der Lösung y. M128
Ohne stetige Ableitung $\partial f / \partial y$ gelten diese Aussagen nicht mehr! M325
Setzen wir f nur als stetig voraus, so gilt immerhin noch folgendes:

Satz M4B: Eingrenzung durch Unter/Oberlösungen

Sei $f : \mathbb{R}^2 \supset G \to \mathbb{R}$ stetig, $I = [x_0, x_1] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $y, u, v : I \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit Graph in G, sodass für alle $x \in I$ gilt:

(a) y ist eine **Lösung** des AWP: $y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0$

(b) u ist eine **strikte Unterlösung**: $u'(x) < f(x, u(x)), \quad u(x_0) \le y_0$

(c) v ist eine **strikte Oberlösung**: $v'(x) > f(x, v(x)), \quad v(x_0) \ge y_0$

Dann gilt: $\boxed{u(x) < y(x) < v(x) \quad \text{für alle } x \in \,]x_0, x_1]}$

Allein aus (a,b) folgt bereits $u < y$. Allein aus (a,c) folgt bereits $y < v$.

In Satz M4A ist die Bedingung an f streng, aber die Ungleichungen schwach (in Voraussetzung und Schlussfolgerung). In Satz M4B ist die Bedingung an f schwach, aber alle Ungleichungen sind strikt. Das AWP kann hier mehrere Lösungen y haben, doch alle liegen zwischen u und v! Für die qualitative Beschreibung von Lösungen sind diese Abschätzungen ungemein nützlich.

Eingrenzung durch Unter/Oberlösungen

Lemma M4C: Du musst steigen oder sinken...

Sei $g : \mathbb{R} \supset [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $g(a) = g(b) = 0$ differenzierbar in a bzw. b.

$$\begin{array}{ccccc} g'(a) > 0 & \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} & g > 0 \text{ auf }]a, a+\varepsilon[, & g'(b) < 0 \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} g > 0 \text{ auf }]b-\varepsilon, b[, \\ \Downarrow & & \Downarrow & \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \\ g'(a) \ge 0 & \underset{\not\Rightarrow}{\Longleftarrow} & g \ge 0 \text{ auf } [a, a+\varepsilon[, & g'(b) \le 0 \underset{\not\Rightarrow}{\Longleftarrow} g \ge 0 \text{ auf }]b-\varepsilon, b]. \end{array}$$

Übung: Rechnen Sie diese Implikationen nach: Nutzen Sie direkt den Differenzenquotienten! Die Umkehrungen gelten nicht: Gegenbeispiele!

Beweis des Satzes: Aus $u(x_0) < y(x_0)$ folgt $u < y$ auf $[x_0, x_0 + \varepsilon[$.
Bei $u(x_0) = y(x_0)$ nutzen wir das Lemma für $g = y - u : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$.
Es gilt $g(x_0) = 0$ und $g'(x_0) > 0$, also $g > 0$ auf $]x_0, x_0 + \varepsilon[$, d.h. $u < y$.
Wir zeigen $u < y$ auf ganz $]x_0, x_1]$. Angenommen, dies gälte nicht. Dann sei $\xi := \inf\{\, x \in [x_0 + \varepsilon, x_1] \mid u(x) \ge y(x) \,\}$. Damit gilt $u < y$ auf $]x_0, \xi[$ und $u(\xi) = y(\xi)$. Das Lemma zeigt $u'(\xi) \ge y'(\xi)$. Nach (a,b) gilt aber $u'(\xi) < f(\xi, u(\xi)) = f(\xi, y(\xi)) = y'(\xi)$, ein Widerspruch! Wir schließen, dass $u < y$ auf $]x_0, x_1]$ gelten muss. Ebenso folgt die Ungleichung $y < v$.

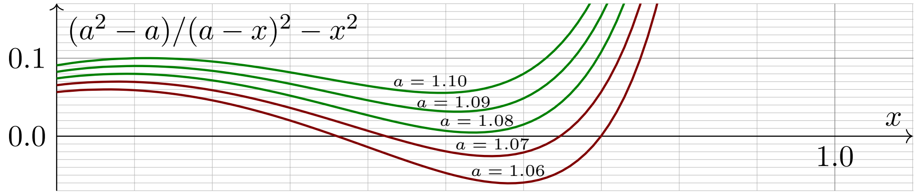
Abschätzung und Eingrenzung von Lösungen

Wir untersuchen das AWP $y(0) = 1$ und $y'(x) = y(x)^2 - x^2$ für $x \ge 0$.

Aufgabe: (1) Gibt es eine eindeutige maximale Lösung $y : [0, x_1[\to \mathbb{R}$? Existiert sie zumindest für $0 \le x < 1$? Explodiert sie in endlicher Zeit?
(2) Vergleichen Sie mit dem AWP $v(0) = 1$ und $v'(x) = v(x)^2$ für $x \ge 0$.
(3) Gilt $y(x) \ge u(x) := a/(a - x)$? Probieren Sie $a = 1.07$ und $a = 1.08$.

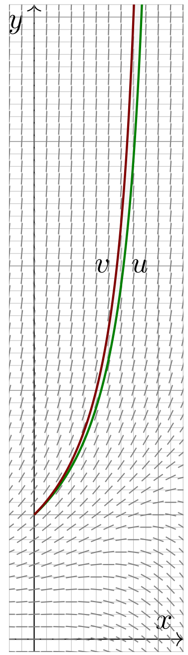
Lösung: (1) Ja, dank ∃&E-Satz M1C. (2) Es gilt $f^{\uparrow}(x, y) := y^2 \ge f(x, y)$.
Die Oberlösung $v(x) = 1/(1 - x)$ zeigt $y(x) \le v(x)$ dank Satz M4A.
Die Lösung y existiert demnach mindestens auf dem Intervall $[0, 1[$.

(3) Für $u(x) = a/(a - x)$ gilt $u(0) = 1$ und $u'(x) = a/(a - x)^2$. Wir wollen $u'(x) \le u(x)^2 - x^2$, also $(a^2 - a)/(a - x)^2 - x^2 \ge 0$. Dies gilt für $a \ge 1.08$:



Somit ist $u(x) = 1.08/(1.08 - x)$ eine Unterlösung. Dank Satz M4A gilt $y(x) \ge u(x)$. Die Lösung y explodiert in endlicher Zeit, bei $x_1 \in [1, 1.08]$.

Abschätzung und Eingrenzung von Lösungen



Das AWP $y'(x) = y(x)^2 - x^2$, $y(0) = 1$ können wir nicht elementar lösen, d.h. explizit als geschlossene Formel.

Satz M1C garantiert zunächst Existenz und Eindeutigkeit: Es gibt genau eine maximale Lösung $y : [0, x_1[\to \mathbb{R}$. M128

Das ist schön und gut. Wie berechnen wir genaueres?

Satz M4A erlaubt den Vergleich der (noch unbekannten) Lösung y mit Unterlösungen u und Oberlösungen v:

🙂 Wir erhalten ohne numerische Mühe die Eingrenzung

$$\frac{1.08}{1.08 - x} \le y(x) \le \frac{1}{1 - x}.$$

Satz M4B garantiert die strikten Ungleichungen für $x > 0$.

Wir finden Polstellen in $1 \le x_1 \le 1.08$: Unsere Lösung y lebt also mindestens bis 1, jedoch höchstens bis 1.08.

🙂 In vielen Fällen genügt diese grobe Information. Andernfalls unternehmen wir eine numerische Näherung.

Beschränkung und Fortsetzbarkeit von Lösungen

Aufgabe: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig, aber nicht notwendig differenzierbar. Wir untersuchen das AWP $y(x_0) = y_0$ und $y'(x) = f(x, y(x))$ für $x \ge x_0$ und wollen das Wachstum bequem abschätzen: Es gelte $|y_0| \le c$ und eine in $|y|$ lineare Schranke $|f(x, y)| \le a(x)|y| + b(x)$ mit $a, b \ge 0$ stetig.
(1) Lösen Sie zunächst $u'(x) = a(x)u(x) + b(x)$ mit $u(x_0) = c$, speziell
(2) für $a, b \ge 0$ konstant. Sind die Lösungen u eindeutig? (3) Existieren sie für alle Zeit $x \ge x_0$? Oder enden sie vorzeitig in einer Polstelle?
(4) Welche Schranken folgen für y? (5) Sind die Lösungen y eindeutig?
(6) Existieren sie für alle Zeit $x \ge x_0$? Oder enden sie evtl. vorzeitig?

Lösung: (1) Wir runden auf: Zur linearen DG $u'(x) = a(x)u(x) + b(x)$ mit $u(x_0) = c$ ist die Lösungen eindeutig und explizit bekannt (M2E):

$$u(x) = e^{A(x)} \Big[\int_{t=x_0}^{x} e^{-A(t)}\, b(t)\, dt + c\Big] \ge 0 \quad \text{mit} \quad A(x) = \int_{t=x_0}^{x} a(t)\, dt$$

(2) Speziell für a, b konstant gilt $A(x) = a(x - x_0)$ und somit

$$u(x) = e^{a(x-x_0)} \Big[\int_{t=x_0}^{x} e^{-a(t-x_0)}\, b\, dt + c\Big] = e^{a(x-x_0)}(c + b/a) - b/a.$$

Im Sonderfall $a = 0$ erhalten wir noch einfacher $u(x) = b(x - x_0) + c$.

Beschränkung und Fortsetzbarkeit von Lösungen

(3) Die Lösung u existiert für alle Zeit $x \ge x_0$: Sie hat keine Polstellen!

(4) Wir zeigen $y(x) \le u(x)$ für alle $x \ge x_0$. Für $x \ge x_0$ mit $y(x) \le 0$ ist dies klar, denn $u(x) \ge 0$. Für $x \ge x_0$ mit $y(x) \ge 0$ nutzen wir Satz M4A:

Es gilt $y'(x) = f(x, y(x)) \le a(x)y(x) + b(x)$. Es folgt $y(x) \le u(x)$, denn y ist eine Unterlösung zu u. Genauer sei $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots$ mit $y|_{[x_0,x_1]} \ge 0$ und $y|_{]x_1,x_2[} < 0$ und $y|_{[x_2,x_3]} \ge 0$ etc. Auf $[x_0, x_1]$ nutzen wir $y(x_0) \le c = u(x_0)$. Auf $[x_2, x_3]$ nutzen wir $y(x_2) = 0 \le u(x_2)$, usw.

Hieraus folgt $y(x) \le u(x)$ für alle $x \ge x_0$. Wörtlich dieselbe Rechnung für $-y$ und $-f$ statt y und f zeigt $-y \le u$. Somit gilt insgesamt $|y| \le u$.

(5) Nein, Lösungen sind im Allgemeinen nicht eindeutig! M129 M325
Wir verlangen hier nur, dass f stetig ist; um den Eindeutigkeitssatz M1C anwenden zu können, müsste f zudem in y stetig differenzierbar sein.

(6) Jede Lösung y lässt sich für alle Zeit fortsetzen zu $y : [x_0, \infty[\to \mathbb{R}$.
🙂 Die Ungleichung $|y| \le u$ liefert eine bequeme explizite Schranke und garantiert insbesondere, dass y keine Polstellen entwickelt.

Qualitative Analyse dank ∃&E-Satz

⚠ Häufig lassen sich selbst einfache Differentialgleichungen nicht elementar lösen, also durch keine geschlossene Formel. Wir nutzen dann qualitative Aussagen und anschließend numerische Näherungen.

Aufgabe: Vorgelegt sei eine explizite Differentialgleichung

$$\boxed{y'(x) = f(x, y(x))}$$

mit stetiger rechter Seite $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Begründen Sie durch ein Ergebnis der Vorlesung oder widerlegen Sie durch ein passendes Gegenbeispiel:

(1) Ist die rechte Seite f elementar / linear / algebraisch / analytisch, so gilt dasselbe für jede Lösung $y : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung.

(2) Welche Form von Schranke für y folgt aus $|f(x, y)| \le M \in \mathbb{R}$?

(3) Läuft durch jeden Startpunkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ eine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

(4) Welche zusätzlichen Bedingungen wären hier zu fordern / prüfen?

(5) Können sich verschiedene Lösungen $u \ne v : [a, b] \to \mathbb{R}$ schneiden? Etwas stärker: Gibt es Lösungen u, v mit $u(a) < v(a)$ aber $u(b) > v(b)$?

(6) Welche zusätzlichen Bedingungen wären hier zu fordern / prüfen?

Qualitative Analyse dank ∃&E-Satz

Lösung: (1) Die DG $y' = y$ ist linear / algebraisch, die Lösung $y(x) = \mathrm{e}^x$ aber nicht. Die rechte Seite von $y'(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$ ist elementar, die Lösung $y(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$ aber nicht. ☺ Ist f jedoch analytisch, also lokal in eine konvergente Potenzreihe entwickelbar, so auch jede Lösung y.

(2) Für $x_1 < x_2$ in I gilt $y(x_1) - y(x_2) = \int_{x_1}^{x_2} y'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\,\mathrm{d}x$, somit die Schranke $|y(x_1) - y(x_2)| \le \int_{x_1}^{x_2} |f(x, y)|\,\mathrm{d}x \le M \cdot |x_1 - x_2|$.

(3) Nein, Lösungen können explodieren / in Polstellen laufen. M119 M409

(4) Für $|f(x, y)| \le M$ oder allgemeiner $|f(x, y)| \le a(x)|y| + b(x)$ M451 haben Lösungen $y : I \to \mathbb{R}$ mit $y'(x) = f(x, y(x))$ niemals Polstellen. ☺ Dank Existenzsatz M1C läuft durch jeden Startpunkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mindestens eine maximale Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Eventuell auch mehrere:

(5) Ja, ein Gegenbeispiel ist die Wasseruhr $y'(x) = -a\sqrt{y(x)}$. M129 Wir kennen viele weitere drastische Beispiele: M321 M325 M329 M411 M433

(6) Die Stetigkeit der rechten Seite f genügt nicht, um die Eindeutigkeit von Lösungen zu gegebenen Anfangswerten $y(x_0) = y_0$ zu garantieren. ☺ Der Eindeutigkeitssatz M1C verlangt noch stetige Differenzierbarkeit von $f(x, y)$ nach y; dann ist jedes Anfangswertproblem eindeutig lösbar!

Qualitative Analyse dank ∃&E-Satz

Aufgabe: Skizzieren Sie das ebene Vektorfeld zur Differentialgleichung

$$\boxed{y' = f(x, y) := \sin(y)\,\sqrt[3]{\cos(x)^2/(1 + x + y)}.}$$

Explizite Lösungen sind hier wohl kaum zu erwarten. Was tun Sie dann?

(1) Lässt sich der ∃&E-Satz hier anwenden? Warum und wie genau?

(2) Können sich verschiedene Lösungen $u \ne v : I \to \mathbb{R}$ schneiden? Folgt aus $u(x_0) < v(x_0)$ für ein $x_0 \in I$ also $u(x) < v(x)$ für alle $x \in I$?

(3) Ist die konstante Nullfunktion $\tilde{y}(x) = 0$ eine Lösung dieser DG? Wie viele Nullstellen hat demnach jede andere Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

(4) Für welche Startpunkte $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ist jede Lösung konstant?

(5) Für welche Startpunkte $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ist jede Lösung beschränkt?

(6) Durch welche Startpunkte $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ läuft eine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

(7) Welches Verhalten haben Lösungen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $x \to \infty$?

Lösung: (1) Ja, der ∃&E-Satz M1C lässt sich hier anwenden. Genauer: Die rechte Seite $f(x, y)$ ist stetig und zudem in y stetig differenzierbar. (Zwar nicht in x, aber das wird von Satz M1C auch nicht gefordert.)

Qualitative Analyse dank ∃&E-Satz

(2) Nein, verschiedene Lösungen können sich nicht schneiden!

Ausführlich: Angenommen, für zwei Punkte $a < b$ in I gälte $u(a) < v(a)$ aber $u(b) \ge v(b)$. Mit u, v ist auch die Differenz $h = u - v : I \to \mathbb{R}$ stetig und erfüllt $h(a) < 0$ sowie $h(b) \ge 0$. Dank Zwischenwertsatz gilt $h(t) = 0$ für mindestens ein $t \in]a, b]$, also $u(t) = v(t)$. Dank Eindeutigkeit (1) wäre dann aber $u = v$, im Widerspruch zu $u(a) < v(a)$.

(3) Ja! Einsetzen ergibt sofort: Die Nullfunktion ist eine Lösung. Dank (2) haben andere Lösungen demnach keine Nullstellen!

(4) Jede konstante Funktion $y(x) = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ löst $y' = f(x, y)$.

(5) Für jeden Startpunkt! Sei $y : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung unserer DG. Wir betrachten $x_0 \in I$ und $y_0 = y(x_0) \in [(k-1)\pi, k\pi] =: J$. Dank (2,4) bleibt $y(x)$ für alle $x \in I$ im Intervall J gefangen.

(6) Der ∃&E-Satz M1C garantiert die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ für ein (kleines) Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Dank (5) ist die Lösung y beschränkt, sie kann also insbesondere keine Polstellen entwickeln. Dank M1C lässt sie sich in beide Richtungen fortsetzen zu $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(7) Durch jeden Startpunkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ verläuft genau eine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diese ist beschränkt, denn sie verläuft ganz in $[(k-1)\pi, k\pi]$.

Fluchtgeschwindigkeit und Flugbahn eines Geschosses

Aufgabe: (1) Formulieren Sie die radiale Flugbewegung $r : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ einer Punktmasse m im Schwerefeld eines Planeten mit Masse M.

(2) Multiplizieren Sie mit $m\dot{r}(t)$, integrieren Sie zur Energiegleichung.

(3) Was ist die Fluchtgeschwindigkeit v_F? Im Spezialfall der Erde?

(4) Wie verläuft in diesem Grenzfall die Flugbahn $r(t)$?

Lösung: (1) Die Bewegungsgleichung ist nach Newton

$$\boxed{\ddot{r}(t) = -\gamma M/r(t)^2, \quad r(0) = R > 0, \quad \dot{r}(0) = v_0 > 0.}$$

Wie üblich ist hier $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \mathrm{Nm}^2/\mathrm{kg}^2$ die Gravitationskonstante.

Newtons Bewegungsgesetz (in seiner allgemeinen Form) ist Grundlage der Himmelsmechanik. Im Allgemeinen benötigt man für solche DG numerische Methoden. In unserem Spezialfall (4) jedoch können wir sie exakt lösen! Das ist bemerkenswert, und diese Technik sollten Sie kennen.

🙂 Das Zweikörperproblem lässt sich exakt lösen: Kepler um 1600 emprisch, Newton 1687 mathematisch, Bahnen sind Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln. Es ist oft eine nützliche Näherung.

⚠ Für drei und mehr Körper lässt sich die Lösung nicht mehr elementar formulieren, die Differentialgleichung kann im Allgemeinen nur noch numerisch gelöst werden. O125

Fluchtgeschwindigkeit und Flugbahn eines Geschosses

(2) Wir multiplizieren die DG mit $m\dot{r}(t)$ und erhalten

$$m\,\dot{r}(t)\,\ddot{r}(t) + \frac{\gamma m M\,\dot{r}(t)}{r(t)^2} = 0.$$

Durch Integration von 0 bis t erhalten wir die äquivalente Gleichung

$$\boxed{\frac{1}{2}m\,\dot{r}(t)^2 - \frac{\gamma m M}{r(t)} = \frac{1}{2}m v_0^2 - \frac{\gamma m M}{R} =: E.}$$

🙂 Die Summe aus kinetischer und potentieller Energie ist konstant! Das Bewegungsgesetz impliziert Energieerhaltung (und umgekehrt).

(3) Wir suchen die Geschwindigkeit v_0 zur Flucht $r(t) \to \infty$ für $t \to \infty$. Notwendig hierzu ist nach obiger Energieformel $E \geq 0$, also

$$\boxed{v_0 \geq v_F := \sqrt{2\gamma M/R}}$$

Beispiel Erde: $M = 5.97 \cdot 10^{24}\mathrm{kg}, \quad R = 6.36 \cdot 10^6\mathrm{m}, \quad v_F = 11.2\mathrm{km/s}.$

🙂 Dies ist die berühmte Fluchtgeschwindigkeit von der Erdoberfläche. Zum Vergleich: $11\,200\mathrm{m/s}$ ist etwa 33fache Schallgeschwindigkeit.

Fluchtgeschwindigkeit und Flugbahn eines Geschosses

(4) Im Grenzfall $E = 0$ vereinfacht sich unsere Differentialgleichung zu

$$\boxed{\dot{r}(t) = \sqrt{2\gamma M}\; r(t)^{-1/2}, \quad r(0) = R.}$$

Diese DG lösen wir durch Trennung der Variablen und Integration:

$$\Longrightarrow \quad \int_{\tau=0}^{t} \dot{r}(\tau)\, r(\tau)^{1/2}\,\mathrm{d}\tau = \int_{\tau=0}^{t} \sqrt{2\gamma M}\,\mathrm{d}\tau$$

$$\Longrightarrow \quad \left[\frac{2}{3} r(\tau)^{3/2}\right]_{\tau=0}^{t} = \sqrt{2\gamma M} \cdot t$$

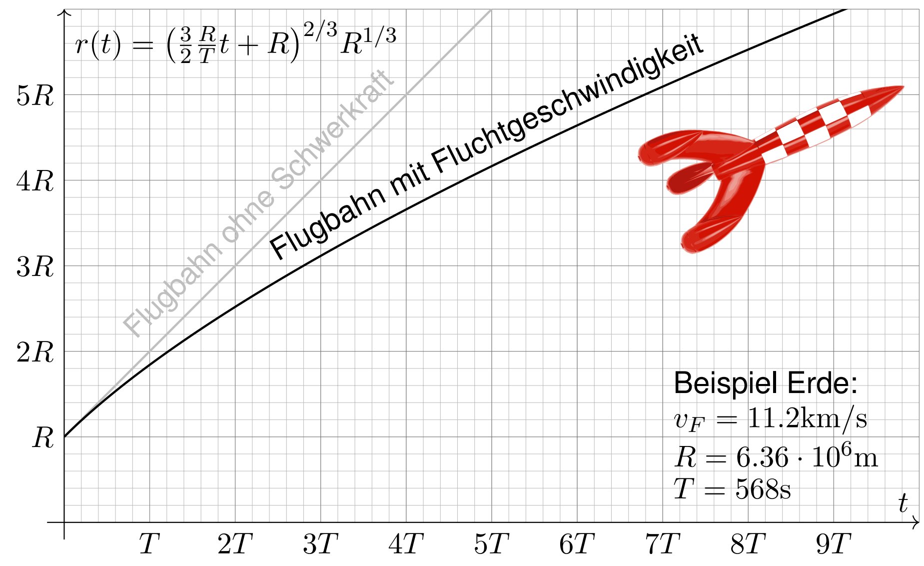
$$\Longrightarrow \quad r(t)^{3/2} - R^{3/2} = \frac{3}{2}\sqrt{2\gamma M} \cdot t$$

$$\Longrightarrow \quad r(t) = \left(\frac{3 v_F}{2} \cdot t + R\right)^{2/3} R^{1/3}$$

🙂 Diese Funktion löst die ursprüngliche Bewegungsgleichung mit den AW $r(0) = R$ und $\dot{r}(0) = v_F$ sowie $r(t) \to \infty$ und $\dot{r}(0) \to 0$ für $t \to \infty$. Die Geschwindigkeit v_F genügt also tatsächlich, um dem Schwerefeld der Masse M zu entfliehen! Somit ist v_F die Fluchtgeschwindigkeit.

Fluchtgeschwindigkeit und Flugbahn eines Geschosses

Skizze der gefundenen Lösung (in natürlichen Einheiten):



Die Raketengrundgleichung nach Ziolkowsky

Aufgabe: (1) Eine Rakete mit Masse $m(t)$ und Geschwindigkeit $v(t)$ wird angetrieben durch konstanten Massenausstoß $\mu = -\dot{m} = \ldots \mathrm{kg/s}$ mit Geschwindigkeit $v_b = 3500\mathrm{m/s}$. Die Rakete bestehe anfangs zu 99% aus Brennstoff. Was ist die Endgeschwindigkeit (ohne weitere Kräfte)?

Lösung: (1) Die Impulserhaltung ergibt folgende Bilanz:

$$0 = \mathrm{d}p = \underbrace{\mathrm{d}(mv)}_{\text{Rakete}} - \underbrace{(\mathrm{d}m)(v - v_b)}_{\text{ausgestoßene Masse}} = \underbrace{m \cdot \mathrm{d}v + \mathrm{d}m \cdot v_b}_{\text{Bilanz im Schwerpunktsystem}}$$

Division durch $\mathrm{d}t$, Trennung der Variablen, Integration bis Brennschluss:

$$\Longrightarrow \qquad \dot{v}(t) = -v_b \frac{\dot{m}(t)}{m(t)}$$

$$\Longrightarrow \qquad \int_{t=t_0}^{t_1} \dot{v}(t)\,\mathrm{d}t = -v_b \int_{t=t_0}^{t_1} \frac{\dot{m}(t)}{m(t)}\,\mathrm{d}t$$

$$\Longrightarrow \qquad v(t_1) - v(t_0) = -v_b \Big[\ln m(t)\Big]_{t=t_0}^{t_1} = v_b \ln \frac{m(t_0)}{m(t_1)}$$

Zahlenbeispiel $\qquad = 3.5\mathrm{km/s} \cdot \ln(100) \approx 16.1\mathrm{km/s}$

Die Raketengrundgleichung nach Ziolkowsky

Aufgabe: (2) Bei welcher Brenndauer kann man so der Erde entfliehen? (Senkrechter Start, keine Luftreibung, keine Zentrifugalkraft etc.)

Lösung: Von (1) subtrahieren wir die Erdbeschleunigung $g \lessapprox 9.81\mathrm{m/s}^2$:

$$\Longrightarrow \qquad \dot{v}(t) = -v_b \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} - g$$

$$\Longrightarrow \qquad v(t_1) - v(t_0) = v_b \ln \frac{m(t_0)}{m(t_1)} - g(t_1 - t_0)$$

Bei vertikalem Start im Schwerefeld der Erde addiert sich der freie Fall. Zur Vereinfachung nehmen wir geringe Flughöhe an, somit konstantes g. (In Wirklichkeit nimmt die Erdbeschleunigung $g(r/R)^{-2}$ deutlich ab; leider ist die genauere Gleichung auch mühsamer zu integrieren…) Ich begnüge mich hier mit einer groben **Überschlagsrechnung**. Hinreichend kurze Brenndauer $T = t_1 - t_0$ zur Flucht:

$$gT < 16.1\mathrm{km/s} - 11.2\mathrm{km/s} \approx 4900\mathrm{m/s}$$

$$\Longrightarrow \qquad T < 500\mathrm{s}$$

Vision, Berechnung, Realisierung

Konstantin Ziolkowski (1857–1935) arbeitete als Mathematiklehrer, seine wissenschaftlichen Studien veröffentlichte er als Amateur. Aufgrund seiner Berechnungen erkannte er, dass damals mögliche Feststoffraketen zum Erreichen des Weltraums zu schwach wären, und schlug zum Antrieb Flüssigtreibstoff vor (Wasserstoff, Sauerstoff, Kohlenwasserstoffe). Er veröffentlichte 1903 die Raketengrundgleichung und leitete daraus das Prinzip der Mehrstufenrakete ab.

Zahlenbeispiel für eine zweistufige Rakete: erste Stufe voll 50t, leer 5t, zweite Stufe voll 10t, leer 1t, Nutzlast 1t, Startgeschwindigkeit $v(t_0) = 0$, Endgeschwindigkeit $v_{\mathrm{End}} = v(t_1)$:

$$\frac{v_{\mathrm{End}}}{v_b} = \ln \frac{50 + 10 + 1}{5 + 10 + 1} + \ln \frac{10 + 1}{1 + 1} \approx 1.34 + 1.70 = 3.03$$

Zum Vergleich eine einstufige Rakete mit gleicher Treibstoff- und Strukturmasse:

$$\frac{v_{\mathrm{End}}}{v_b} = \ln \frac{50 + 10 + 1}{5 + 1 + 1} \approx 2.16$$

Bei sonst gleichen Daten erreicht die einstufige Rakete also eine geringere Endgeschwindigkeit. Das ist anschaulich plausibel, da mehr (überflüssige) Strukturmasse beschleunigt werden muss. Die Raketengrundgleichung und die abgeleitete Rechnung präzisieren dieses Phänomen.

Die Raketengrundgleichung folgt aus Impulserhaltung und einer einfachen Differentialgleichung. Sie ist grundlegend für Trägerraketen, da hier die Treibstoffmasse groß ist, und die Gesamtmasse während des Fluges stark abnimmt. Hingegen ist für Orbiter wie den Mars- oder Venus-Express (Seite W221) der Verlust der Treibstoffmasse vernachlässigbar im Vergleich zur Gesamtmasse.

Vision, Berechnung, Realisierung

An der Geschichte der Raumfahrt sehen wir exemplarisch eine einhundertjährige Entwicklung von futuristischer Vision über die mathematische Theorie bis hin zur technischen Realisierung. Ich betone nochmals: Ohne Vision keine Theorie, ohne Theorie keine erfolgreiche Anwendung.

Jules Vernes (1828–1905) war ein französischer Schriftsteller und ein Begründer der Science-Fiction-Literatur. Die Abenteuer seiner Helden thematisieren den rasanten Fortschritt und neue technische Möglichkeiten seiner Epoche und nehmen viele zukünftige Entwicklungen vorweg: *Cinq semaines en ballon* (Fünf Wochen im Ballon, 1863), *De la Terre à la Lune* (Von der Erde zum Mond, 1865), *Autour de la Lune* (Reise um den Mond, 1869), *Vingt mille lieues sous les mers* (Zwanzigtausend Meilen unter dem Meer, 1869). Sein größter Erfolg war der Roman *Le Tour du monde en 80 jours* (In 80 Tagen um die Welt, 1872), der bis heute populär ist.

Konstantin Ziolkowski (1857–1935) war ein russischer Mathematiker und Physiker, Amateur und Wegbereiter der Raumfahrt. Er vollzog den Schritt von *Fiction* zu *Science*: Angeregt durch Jules Vernes Erzählungen, schrieb Ziolkowski selbst Geschichten über interplanetare Raumfahrt. Dazu untersuchte er zunehmend die physikalisch-technischen Probleme von Raumflügen, lang bevor sie realisiert werden konnten. Er befasste sich mit Fragen des Betriebs von Raumstationen, der industriellen Nutzung des Weltraums, und schlug den Weltraumlift vor, um Objekte möglichst günstig direkt in den geostationären Orbit zu befördern. Er hat jedoch nie eine Rakete gebaut und schien bei vielen seiner Theorien nicht davon auszugehen, dass sie jemals umgesetzt würden. Sein technischer Weitblick wurde erst spät gegen Ende seines Lebens erkannt und inspirierte nachfolgende Wissenschaftler wie Hermann Oberth (1894–1989) und Wernher von Braun (1912–1977). Den Beginn der Raumfahrt (Sputnik 1957, Juri Gagarin 1961) erlebte er nicht.