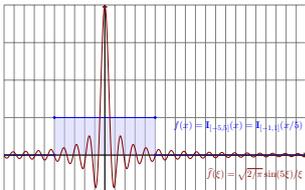


Kapitel K

Fourier–Transformation



Joseph Fourier (1768–1830)



Inhalt dieses Kapitels K

- 1 Erste Beispiele, Eigenschaften, Rechenregeln
 - Von der Fourier–Reihe zum Fourier–Integral
 - Einfache Beispiele und erste Eigenschaften
 - Der Umkehrsatz für Fourier–Transformierte
- 2 Analytische Eigenschaften
 - Rechenregeln der Fourier–Transformation
 - Ableitung und Multiplikation
 - Faltung und Produkt
- 3 Metrische Eigenschaften
 - Energiegleichung und Fourier–Isometrie
 - Die Unschärferelation für Fourier–Paare
 - Bedeutung in der Quantenmechanik
- 4 Fazit: Fourier–Transformation
 - Zusammenfassung
 - Verständnisfragen
 - Weitere Aufgaben

Motivation: von Fourier–Reihe zu Fourier–Integral

Die Funktion $f : [-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{C}$ zerlegen wir in ihre **Fourier–Reihe**:

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ixk \cdot 2\pi/T} \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{1}{T} \int_{x=-T/2}^{T/2} e^{-ixk \cdot 2\pi/T} f(x) dx$$

Sei $\Delta\xi = 2\pi/T = \omega$. Wir betrachten $\xi = k\Delta\xi$ als **diskrete Variable**:

$$g(\xi) = \int_{x=-T/2}^{T/2} e^{-ix\xi} f(x) dx \quad \text{und} \quad f(x) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}\Delta\xi} g(\xi) e^{ix\xi} \Delta\xi$$

Für nicht-periodische Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ betrachten wir $T \rightarrow \infty$. Dann gilt $\Delta\xi \rightarrow 0$, und somit wird ξ eine **kontinuierliche Variable**. Heuristisch wird so aus der Fourier–Reihe das **Fourier–Integral**:

$$g(\xi) = \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x) dx \quad \text{und} \quad f(x) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

Diese Formel mit 2π vor dem letzten Integral ist die Konvention der Physik, siehe Laplace [L406]. Ich verwende in diesem Kapitel die symmetrische, in der Mathematik übliche Normierung $\sqrt{2\pi}$.

Motivation: von Fourier–Reihe zu Fourier–Integral

Die Fourier–Analyse hat zahlreiche technische Anwendungen:

- Digitalisierung von Ton- und Bilddaten, Datenkompression.
- Datenanalyse, Mustererkennung, z.B. Spracherkennung.

Sie ist zudem ein universelles Werkzeug der Mathematik:

- Zerlegen von komplizierten Funktionen in einfache Basisfunktionen.
- Optimale Approximation, Lösung von Differentialgleichungen.

Die oben gezeigten Formeln sind zunächst eine nützliche **Heuristik**, d.h. eine plausible Herleitung durch geschicktes Raten, noch ohne Beweis. Definition und Eigenschaften werden wir nun detailliert diskutieren.

😊 Fourier–Integrale können wir oft ausrechnen mit Integralsätzen wie dem Residuensatz. Hier zahlt sich unsere solide Vorbereitung aus!

⚠ In der Literatur gibt es mindestens drei Konventionen für den Faktor 2π vor dem Integral oder im Exponenten. Beim sorgfältigen Vergleich muss man jeweils nachschauen, welche Normierung zugrunde liegt.

Wir beginnen daher, wie es sich gehört, mit einer präzisen Definition.

Fourier–Transformation

Definition K1A: Fourier–Transformation

Die **Fourier–Transformierte** einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist

$$\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \hat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx.$$

Wir nennen f **Fourier–transformierbar**, falls diese Integrale existieren. Für $f \in L^1$, also $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty$, ist der Integrand absolut integrierbar. Allgemein nutzen wir den Cauchy–Hauptwert und Residuenkalkül (F4K).

Die so definierte Zuordnung $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$ heißt **Fourier–Transformation**.

Die **inverse Fourier–Transformation** $\mathcal{F}^{-1} : \hat{f} \mapsto f$ ist definiert durch

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

Auch hierzu fordern bzw. sichern wir die Transformierbarkeit von \hat{f} . Dies kürzen wir ab als **Transformationspaar** $f \circ \bullet \hat{f}$ bzw. $\hat{f} \circ \bullet f$.

Fourier–Transformation

Periodische Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stellen wir als **Fourier–Reihe** dar, also eine **diskrete Überlagerung** von harmonischen Schwingungen. Hier hingegen stellen wir f dar als ein **Fourier–Integral**, also eine **kontinuierliche Überlagerung** harmonischer Schwingungen $\hat{f}(\xi) e^{i\xi x}$. Somit ist \hat{f} die **Dichtefunktion** der in f enthaltenen Harmonischen.

In der Signalverarbeitung zerlegt die Fourier–Transformation das **Signal** f in sein **Spektrum** \hat{f} . Man nennt dann x meist die **Zeitvariable** und $f(x)$ die Funktion im **Zeitbereich**. Als Gegenstück hierzu heißt ξ die **Frequenzvariable** und die Transformierte $\hat{f}(\xi)$ **Spektralfunktion**.

In (quanten-)physikalischen Anwendungen betrachtet man x als **Ort** und ξ als **Impuls**. Dies sind **konjugierte Variablen** in der klassischen, hamiltonschen Mechanik (s. P2F). In der Quantenmechanik übersetzt dann die Fourier–Transformation zwischen Orts- und Impulsdarstellung.

Hin- und Rücktransformation sind konjugiert gemäß $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = \overline{\mathcal{F}(f)}$.

⚠ Verschiedene Autoren verwenden hier verschiedene Konventionen. Der obige Faktor $1/\sqrt{2\pi}$ führt zu einer symmetrischen Umkehrformel.

Fourier–Transformation und Cauchy–Hauptwert

Wir setzen stillschweigend voraus, dass $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ auf jedem endlichen Intervall $[-r, r]$ integrierbar ist. Bei Polstellen, etwa $f(x) = e^{iux}/(x-s)$ in $x = s$, betrachten wir das uneigentliche Integral $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-r}^{s-\varepsilon} + \int_{s+\varepsilon}^r$.

Als Integral über \mathbb{R} vereinbaren wir hier den **Cauchy–Hauptwert**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx := \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r e^{-i\xi x} f(x) dx.$$

Dieses Integral existiert, wenn f auf ganz \mathbb{R} absolut integrierbar ist, also $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty$ erfüllt, aber auch noch in weiteren Fällen.

Als Beispiel betrachten wir unten die **Spaltfunktion** $\text{si} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\text{si}(x) = \begin{cases} \sin(x)/x & \text{für } x \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Diese ist über \mathbb{R} nicht absolut integrierbar, $\int_{\mathbb{R}} |\text{si}(x)| dx = \infty$. [B421] Glücklicherweise existiert noch der obige Cauchy–Hauptwert [K107] analog zur Summierbarkeit der Leibniz–Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}/k$. [B322]

Linearität der Fourier–Transformation

😊 Aus der Linearität des Integrals folgt unmittelbar:

Satz K1B: Linearität

Die Fourier–Transformation ist linear:

$$\mathcal{F}[af + bg] = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g)$$

für alle \mathcal{F} –transformierbaren Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ und $a, b \in \mathbb{C}$.

$$f \circ \bullet \hat{f}, g \circ \bullet \hat{g} \implies af + bg \circ \bullet a\hat{f} + b\hat{g}$$

Nachrechnen: Dank Linearität des Integrals gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(af + bg)(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} [af(x) + bg(x)] dx \\ &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx + \frac{b}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} g(x) dx \\ &= a\hat{f}(\xi) + b\hat{g}(\xi) \end{aligned}$$

Beispiel: Rechteckfunktion $\circ \rightarrow \bullet$ **Spaltfunktion** K107
Beispiel

Aufgabe: Wir betrachten ein reelles Intervall $[a, b] = [c - r, c + r]$.
 (1) Fourier-transformieren Sie die Rechteckfunktion $f(x) = \mathbf{I}_{[a,b]}(x)$.
 (2) Berechnen Sie aus der Transformierten \hat{f} die Rücktransformierte.

Lösung: (1) Im Punkt $\xi = 0$ ist die Rechnung besonders leicht:

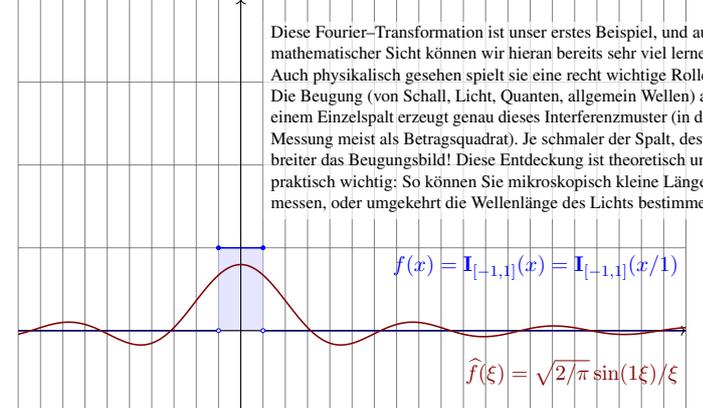
$$\hat{f}(0) \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=a}^b 1 dx = \frac{b-a}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} r$$
 Für $\xi \neq 0$ rechnen wir geduldiger und finden die **Spaltfunktion** [B149]:

$$\hat{f}(\xi) \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=a}^b e^{-i\xi x} dx \stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi} \right]_{x=a}^b$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-i\xi c} e^{i\xi r} - e^{-i\xi r}}{2i} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-i\xi c} \sin(\xi r)}{\xi}$$
 (Verschiebung) (Spaltfunktion)

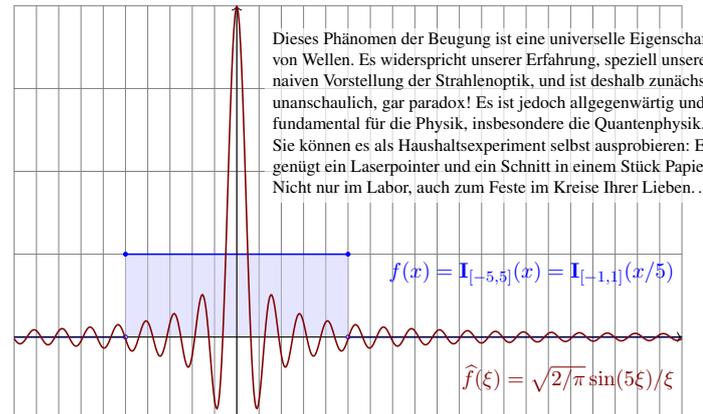
☺ Insbesondere ist \hat{f} stetig, auch im Punkt $\xi = 0$: Entwickeln Sie hierzu $\sin(\xi r)$ als Potenzreihe um $\xi = 0$, nutzen die Regel von L'Hospital oder direkt die Ableitung $\sin(\xi r)/\xi = (\sin(\xi r) - \sin(0r))/(\xi - 0) \rightarrow r \cos(0)$.

Beispiel: Rechteckfunktion $\circ \rightarrow \bullet$ **Spaltfunktion** K108
Beispiel



☺ Wir sehen hier die **Unschärferelation**: Ist f schmal, so ist \hat{f} breit. Beugung am Einzelspalt erzeugt dieses Interferenzmuster (quadrirt).

Beispiel: Rechteckfunktion $\circ \rightarrow \bullet$ **Spaltfunktion** K109
Beispiel



☺ Wir sehen hier die **Unschärferelation**: Ist \hat{f} schmal, so ist f breit. Anwendung: So können Sie mikroskopisch kleine Strukturen messen.

Beispiel: Rechteckfunktion $\circ \rightarrow \bullet$ **Spaltfunktion** K110
Beispiel

(2) Die Fourier-Transformierte von $f = \mathbf{I}_{[a,b]}$ ist

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\xi a} - e^{-i\xi b}}{i\xi}$$

Erinnerung an Seite F425: Mit dem Residuenkalkül bestimmen wir

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\xi u}}{\xi} d\xi \stackrel{\text{Res}}{\stackrel{\text{F4k}}{=}} \text{sign}(u) \text{res}_{z=0} \left(\frac{e^{izu}}{z} \right) = \text{sign}(u)$$

Zu \hat{f} berechnen wir damit die **inverse Fourier-Transformation**:

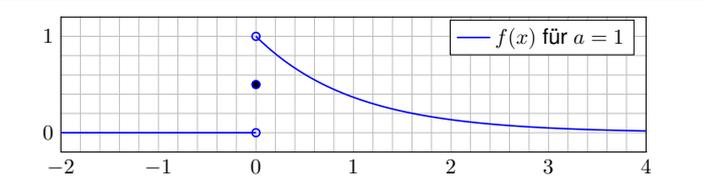
$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\xi a} - e^{-i\xi b}}{i\xi} e^{i\xi x} d\xi$$

$$\stackrel{\text{Lin}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\xi(x-a)}}{\xi} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\xi(x-b)}}{\xi} d\xi \stackrel{\text{Res}}{=} \begin{cases} 0 & \text{für } x \notin [a, b], \\ 1 & \text{für } x \in]a, b[, \\ \frac{1}{2} & \text{für } x \in \{a, b\}. \end{cases}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \quad \bullet \quad \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \quad \bullet \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

☺ Wir erhalten die ursprüngliche Funktion f , aber sprungnormiert!

Fourier-Transformation der Exponentialverteilung K111
Beispiel



Aufgabe: Sei $a > 0$. Berechnen Sie folgende Fourier-Transformation:

$$\begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ e^{-ax} & \text{für } x > 0 \\ 1/2 & \text{für } x = 0 \end{cases} = f(x) \quad \circ \bullet \quad \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a + i\xi}$$

Lösung: Wir setzen die Definition ein und rechnen es aus:

$$\sqrt{2\pi} \hat{f}(\xi) \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{x=0}^{\infty} e^{-i\xi x} e^{-ax} dx$$

$$\stackrel{\text{Exp}}{=} \int_{x=0}^{\infty} e^{-(a+i\xi)x} dx \stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} \left[-\frac{e^{-(a+i\xi)x}}{a+i\xi} \right]_{x=0}^{\infty} = \frac{1}{a+i\xi}$$

Fourier-Transformation der Exponentialverteilung K112
Beispiel

Aufgabe: Berechnen Sie die Rücktransformation.
Lösung: Wir nutzen den Residuenkalkül, hier erneut Satz F4k:

$$f(x) \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\xi x}}{a + i\xi} d\xi$$

$$\stackrel{\text{Lin}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\xi x}}{\xi - ia} d\xi \stackrel{\text{Res}}{\stackrel{\text{F4k}}{=}} \begin{cases} e^{-ax} & \text{für } x > 0 \quad (\text{Residuum in } \xi = ia), \\ 0 & \text{für } x < 0 \quad (\text{keine Sing. in } \mathbb{C}_{\text{Im} \leq 0}). \end{cases}$$

Den Fall $x = 0$ müssen wir separat weiterrechnen:

$$f(0) \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi - ia} d\xi \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi + ia}{\xi^2 + a^2} d\xi \quad (\text{gerader Anteil})$$

$$\stackrel{\text{Lin}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{\xi^2 + a^2} d\xi \stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} \frac{1}{2\pi} \left[\arctan(x/a) \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2}$$

☺ Wir erhalten genau die Exponentialverteilung der vorigen Aufgabe! Insbesondere gilt: In $x = 0$ ist die Rücktransformierte sprungnormiert. Zur Bequemlichkeit haben wir deshalb auch f gleich so eingerichtet.

Fourier-Transformation der Cauchy-Verteilung K113
Beispiel

Aufgabe: Sei $a > 0$. Fourier-transformieren Sie $g(x) = e^{-a|x|}$.
Lösung: Direkt ausrechnen... oder besser gleich Linearität nutzen:

$$\begin{cases} e^{-ax} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \\ 1/2 & \text{für } x = 0 \end{cases} = f(x) \quad \circ \bullet \quad \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a + i\xi}$$

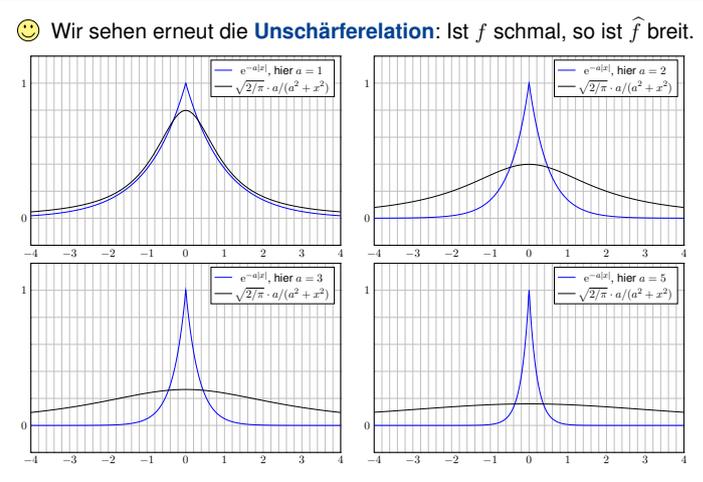
$$\Rightarrow g(x) = f(x) + f(-x) \quad \circ \bullet \quad \hat{g} = \hat{f}(\xi) + \hat{f}(-\xi)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a + i\xi} + \frac{1}{a - i\xi} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a}{a^2 + \xi^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + \xi^2}$$

☺ Die Rücktransformation gelingt ebenso: Wir haben oben bereits $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = f$ ausgerechnet. Daraus folgt $\mathcal{F}^{-1}(\hat{g}) = g$ dank Linearität.
 ☺ Dies folgt ebenso aus jedem der beiden folgenden Umkehrsätze, da die Funktion f und ihre Transformierte \hat{f} alle Bedingungen erfüllen.

Fourier-Transformation der Cauchy-Verteilung K114
Beispiel



☺ Unsere Beispiele illustrieren folgende allgemeine Regel:

Satz K1c: Eigenschaften der Fourier-Transformierten

Ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ absolut integrierbar, also $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty$, dann gilt:

(1) Die Fourier-Transformierte $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig und beschränkt:

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}$$

(2) Sie verschwindet im Unendlichen (Riemann-Lebesgue-Lemma):

$$|\hat{f}(\xi)| \rightarrow 0 \quad \text{für } |\xi| \rightarrow \infty$$

(3) Zudem gilt die Plancherel-Gleichung (Energiegleichung):

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

Beweis der Stetigkeit der Transformierten

(1) Sei f absolut integrierbar. Die Beschränktheit von \hat{f} ist dann klar:

$$|\hat{f}(\xi)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |e^{-i\xi x}| \cdot |f(x)| dx$$

Zur gleichmäßigen Stetigkeit von $\hat{f}(\xi)$ betrachten wir

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\xi + \eta) - \hat{f}(\xi)| &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} [e^{-i(\xi+\eta)x} - e^{-i\xi x}] f(x) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |e^{-i\xi x}| \cdot |e^{-i\eta x} - 1| \cdot |f(x)| dx. \end{aligned}$$

In jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ gilt $e^{-i\eta x} \rightarrow 1$ für $\eta \rightarrow 0$, demnach also $g_{\eta}(x) \rightarrow 0$. Zudem ist $g_{\eta}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt durch die integrierbare Funktion $2|f|$. Dank majorisierter Konvergenz [D209] vertauschen Integral und Limes:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} g_{\eta}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{\eta \rightarrow 0} g_{\eta}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} 0 dx = 0$$

Somit gilt $|\hat{f}(\xi + \eta) - \hat{f}(\xi)| \rightarrow 0$, also $\hat{f}(\xi + \eta) \rightarrow \hat{f}(\xi)$ für $\eta \rightarrow 0$.

Der Umkehrsatz im Spezialfall $L^1 \circ \bullet L^1$

Satz K1d: Umkehrsatz im Spezialfall $L^1 \circ \bullet L^1$

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ absolut integrierbar mit Fourier-Transformierter

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx.$$

Dann ist die Funktion \hat{f} stetig. Ist umgekehrt auch $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ absolut integrierbar und f stetig, so gilt in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ die Umkehrformel

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

⚠ Der Satz macht die strenge Voraussetzung, dass beide Funktionen $f, \hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sowohl stetig als auch absolut integrierbar sein müssen. Als Gegenleistung garantiert er die Umkehrformel in jedem Punkt!

☺ Unsere Beispiele illustrieren dies: Die Cauchy-Verteilung [K113] erfüllt Voraussetzung und Folgerung, die Spaltfunktion [K107] hingegen nicht.

Der Umkehrsatz für sprungnormierte Funktionen

Satz K1E: Umkehrformel für sprungnormierte Funktionen

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ absolut integrierbar mit Fourier-Transformierter

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx.$$

Zudem sei f stückweise stetig differenzierbar und sprungnormiert,

$$f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Dann gilt für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}$ die Umkehrformel

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

Für solche Funktionen ist die Transformation $f \circ \bullet \hat{f}$ also umkehrbar.

☺ Einfachster Fall: Ist f stetig in x , so ist $f(x) = f(x\pm)$ sprungnormiert.

Die Fourier-Transformierte haben wir oben sehr allgemein definiert: Für das Integral fordern wir nur die Existenz des Cauchy-Hauptwerts. Das hat den Vorteil, auf möglichst viele Funktionen anwendbar zu sein; genau das nutzen wir bereits in unseren ersten Beispielrechnungen.

Gute Eigenschaften hat die \mathcal{F} -Transformation aber erst für absolut integrierbare Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, also solche mit $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty$. Das ist eine Einschränkung, garantiert uns aber starke Folgerungen. Meist werden wir uns also auf diesen besonders gutartigen Fall stützen.

Im Satz ist die absolute Integrierbarkeit von f wesentlich, andernfalls kann die Transformierte \hat{f} auch unstetig sein, wie in obigen Beispielen. Zum Beispiel ist die Spaltfunktion $\hat{f}(\xi) = \sqrt{2/\pi} \sin(\xi)/\xi$ nicht absolut integrierbar, und tatsächlich ist die (Rück)Transformierte nicht stetig.

(3) Die Plancherel-Gleichung erweitert die Fourier-Isometrie. Sie besagt: Genau dann ist f quadrat-integrierbar, wenn \hat{f} dies ist, und die Integrale über $|f|^2$ und $|\hat{f}|^2$ sind gleich (Energiegleichung). Wir zeigen dies etwas später gegen Ende des Kapitels (Satz K3A).

Beweis des Riemann-Lebesgue-Lemmas

(2) Die Transformierte von $f(x) = \mathbf{I}_{[a,b]}(x)$ verschwindet im Unendlichen:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=a}^b e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\xi b} - e^{-i\xi a}}{-i\xi} \rightarrow 0 \quad \text{für } |\xi| \rightarrow \infty$$

Dank Linearität gilt dies somit für alle Treppenfunktionen. Jede absolut integrierbare Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ können wir durch Treppenfunktionen approximieren: Zu $\varepsilon > 0$ existiert eine Treppenfunktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\|f - g\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| dx \leq \varepsilon.$$

Damit liegen auch die Transformierten \hat{f} und \hat{g} nahe beieinander:

$$|\hat{f}(\xi) - \hat{g}(\xi)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} [f(x) - g(x)] dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| dx \leq \varepsilon$$

Aus $|\hat{f}(\xi)| \leq |\hat{g}(\xi)| + \varepsilon$ und $|\hat{g}(\xi)| \rightarrow 0$ erhalten wir

$$\limsup_{|\xi| \rightarrow \infty} |\hat{f}(\xi)| \leq \limsup_{|\xi| \rightarrow \infty} |\hat{g}(\xi)| + \varepsilon = \varepsilon.$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgern wir $\limsup_{|\xi| \rightarrow \infty} |\hat{f}(\xi)| = 0$.

Der Umkehrsatz im Spezialfall $L^1 \circ \bullet L^1$

Wir sprechen von **Fourier-Analyse** und **Fourier-Synthese**:

- Die Analyse $\mathcal{F}: f \mapsto \hat{f}$ zerlegt das Signal f in sein Spektrum \hat{f} .
- Die Synthese $\mathcal{F}^{-1}: \hat{f} \mapsto f$ integriert das Spektrum \hat{f} zum Signal f .

Dies ist analog zu Fourier-Reihen, dort mit diskretem Spektrum. Für die Ausdehnung $\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}: L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ siehe Seite K301.

Beispiel: Die Umkehrformel für Glockenkurven können wir explizit nachrechnen [K128]. Hier sind f und \hat{f} stetig und absolut integrierbar.

Beweisidee: Der Satz gilt für Glockenkurven [K128], also auch für ihre Linearkombination [K106]. Jede absolut integrierbare Funktion lässt sich so approximieren. Durch Grenzübergang gilt er dann für alle $f, \hat{f} \in L^1$.

Bemerkung: Dieser Umkehrsatz ist ein wichtiger erster Schritt. In vielen Anwendungen jedoch ist f nicht stetig oder f nicht absolut integrierbar. Wir möchten daher ein Kriterium, das auch Sprungstellen behandelt. Der nächste Satz liefert diese praktische und bequeme Erweiterung. Wir finden wieder die Sprungnormierung wie bei Fourier-Reihen.

Der Umkehrsatz für sprungnormierte Funktionen

☺ Dies haben wir in unseren Beispielen beobachtet, etwa K107:

Die Umkehrformel gilt für Indikatorfunktionen $f = \mathbf{I}_{[a,b]}$ mit $a < b$ in \mathbb{R} : Hier können wir beide \mathcal{F} -Transformationen explizit nachrechnen!

☺ Dank Linearität gilt der Satz somit für alle Treppenfunktionen.

Beweis: Eine Rechnung für den allgemeinen Fall finden Sie bei Meyberg-Vachnauer, *Höhere Mathematik 2*, §11.6, Satz 6.3.

Wir werden den Satz hier durch weitere Rechenbeispiele illustrieren. Das ersetzt nicht den Beweis, trainiert aber unsere Rechentechniken.

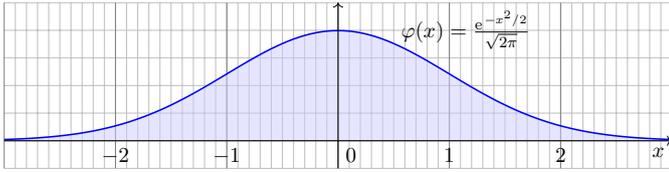
Bemerkung: Der Satz entspricht dem Dirichlet-Kriterium I2A für Fourier-Reihen: Ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ periodisch, stückweise stetig diff'bar und sprungnormiert, so gilt für die Fourier-Koeffizienten $\hat{f}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ik\omega t} \quad \circ \bullet \quad \hat{f}(k) = \frac{1}{T} \int_{t=-T/2}^{T/2} e^{-ik\omega t} f(t) dt.$$

Wir schreiben „ $f(t) = \dots$ “ und nicht bloß „ $f(t) \sim \dots$ “, denn die Reihe konvergiert in jedem Punkt t und hat als Grenzwert tatsächlich $f(t)$.

Wir erinnern an die Dichte der **Standard-Normalverteilung**

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$



- 😊 Wahrscheinlichkeitsdichte: $\varphi \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = 1$
 - 😊 Hier gilt Schwerpunkt = Mittelwert = $\int_{\mathbb{R}} x \varphi(x) dx = 0$,
 - 😊 Trägheitsmoment = Varianz = $\int_{\mathbb{R}} (x - \mu)^2 \varphi(x) dx = 1$.
- Sie spielt in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine zentrale Rolle. Auch für die Fourier-Transformation ist sie ein zentrales Beispiel.

Wiederholung: Berechnen Sie das Gaußsche Integral [C230]

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}.$$

Lösung: Wir nutzen Fubini und Transformation in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} dt \right)^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx \right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2} dy \right) \\ &\stackrel{\text{Lin}}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2} dy \right) dx \stackrel{\text{Lin}}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \cdot e^{-y^2/2} dy dx \\ &\stackrel{\text{Exp}}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x^2+y^2)/2} dy dx \stackrel{\text{Fub}}{=} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} e^{-(x^2+y^2)/2} d(x, y) \\ &\stackrel{\text{Polar}}{=} \int_{\mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi]} e^{-\rho^2/2} \rho d(\rho, \varphi) \stackrel{\text{Fub}}{=} \int_{\rho=0}^{\infty} \int_{\varphi=0}^{2\pi} e^{-\rho^2/2} \rho d\varphi d\rho \\ &\stackrel{\text{Lin}}{=} 2\pi \int_{\rho=0}^{\infty} \rho e^{-\rho^2/2} d\rho \stackrel{\text{HDI}}{=} 2\pi \left[-e^{-\rho^2/2} \right]_{\rho=0}^{\infty} = 2\pi \end{aligned}$$

Satz K1F: Fouriertransformierte der Standard-Normalverteilung

Für die Normalverteilung gilt $\varphi \circ \bullet \varphi$, also $e^{-x^2/2} \circ \bullet e^{-\xi^2/2}$.

😊 Die Fourier-Transformierte der Standard-Normalverteilung φ ist... sie selbst, also $\hat{\varphi} = \varphi$! Auch die Rücktransformation von $\hat{\varphi}$ ergibt φ . Dies gelingt mit Cauchy-Integralsatz [K128] oder Ableitung [D415].

- Aufgabe:** (1) Berechnen Sie den Wert $\hat{\varphi}(0) = 1/\sqrt{2\pi}$ sowie
 (2) $\hat{\varphi}'(\xi) = -\xi \hat{\varphi}(\xi)$ durch Ableitung unter dem Integral.
 (3) Berechnen Sie hieraus die Funktion $\hat{\varphi}(\xi) = e^{-\xi^2/2}/\sqrt{2\pi}$.

Lösung: (1) Die Fourier-Transformierte ist definiert durch

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \varphi(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} e^{-x^2/2} dx.$$

Den Wert für $\xi = 0$ kennen wir dank des Gaußschen Integrals:

$$\hat{\varphi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

(2) Wir berechnen $\hat{\varphi}'$ durch Differenzieren unter dem Integral:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}'(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \frac{d}{d\xi} \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[e^{-i\xi x} e^{-x^2/2} \right] dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} (-ix) e^{-i\xi x} e^{-x^2/2} dx \quad (\dots \text{ partielle Integration. } \dots) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\underbrace{i e^{-i\xi x} e^{-x^2/2}}_{=0} \right]_{x \rightarrow -\infty}^{\infty} - \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} \xi e^{-i\xi x} e^{-x^2/2} dx = -\xi \hat{\varphi}(\xi) \end{aligned}$$

(3) Demnach genügt $\hat{\varphi}$ der Differentialgleichung $\hat{\varphi}'(\xi) = -\xi \hat{\varphi}(\xi)$.

Wir trennen die Variablen gemäß $\hat{\varphi}'(\xi)/\hat{\varphi}(\xi) = -\xi$

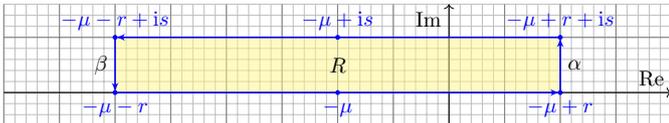
und integrieren zu $\ln \hat{\varphi}(\xi) - \ln \hat{\varphi}(0) = -\xi^2/2$.

Wir erhalten so die Lösung $\hat{\varphi}(\xi) = \hat{\varphi}(0) e^{-\xi^2/2}$.

Mit $\hat{\varphi}(0) = 1/\sqrt{2\pi}$ folgt $\hat{\varphi}(\xi) = (1/\sqrt{2\pi}) e^{-\xi^2/2}$.

😊 Diese Rechnung gelingt dank unserer Integrationswerkzeuge! Mit Satz K2A wird diese Rechnung ein eleganter Vierzeiler. [K207] Wir rechnen es nochmal alternativ mit dem Cauchy-Integralsatz.

Aufgabe: Vergleichen Sie $\int_{-r}^r e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx$ mit $\int_{-r}^r e^{-(x-\mu+is)^2/2\sigma^2} dx$ dank des Cauchy-Integralsatzes und zeigen Sie Gleichheit für $r \rightarrow \infty$.



Lösung: Dies sind Wegintegrale der holomorphen Funktion $e^{-z^2/2\sigma^2}$:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial R} e^{-z^2/2\sigma^2} dz = \int_{x=-r}^r e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx - \int_{x=-r}^r e^{-(x-\mu+is)^2/2\sigma^2} dx \\ &\quad + \int_{\alpha} e^{-z^2/2\sigma^2} dz + \int_{\beta} e^{-z^2/2\sigma^2} dz \\ &\rightarrow \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx - \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-(x-\mu+is)^2/2\sigma^2} dx \end{aligned}$$

😊 Die Wegintegrale längs α und β verschwinden für $r \rightarrow \infty$, denn $|\int_{\alpha} e^{-z^2/2\sigma^2} dz| \leq \int_{\alpha} |e^{-z^2/2\sigma^2}| \cdot |d\alpha| \leq s e^{-\text{Re}(is-\mu+r)^2/2\sigma^2} \rightarrow 0$.

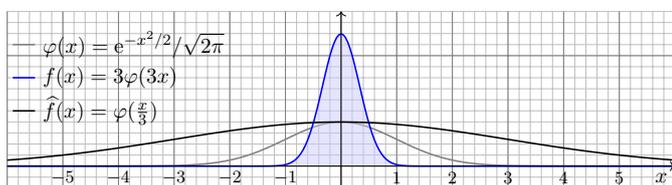
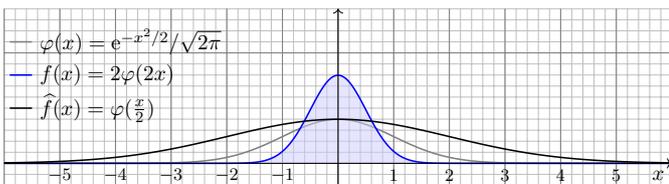
Aufgabe: Fourier-transformieren Sie die Normalverteilung

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \circ \bullet \hat{f}(\xi) = e^{-i\mu\xi} \varphi(\sigma\xi).$$

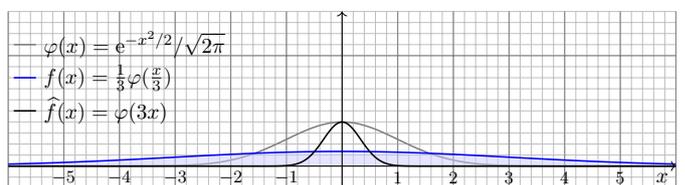
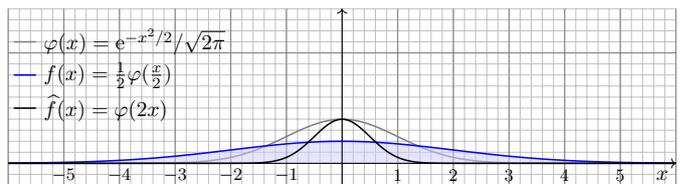
Lösung: Wir setzen die Definition ein und rechnen es aus:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &\stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx \\ &\stackrel{\text{qE}}{=} \frac{1}{2\pi\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-(x-\mu+i\sigma^2\xi)^2/2\sigma^2}}_{\text{quadratische Ergänzung}} \underbrace{e^{-i\mu\xi - \sigma^2\xi^2/2}}_{\text{Rest ohne } x} dx \\ &\stackrel{\text{Lin}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\mu\xi - \sigma^2\xi^2/2} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\mu+i\sigma^2\xi)^2/2\sigma^2} dx \\ &\stackrel{\text{Res}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\mu\xi - \sigma^2\xi^2/2} = e^{-i\mu\xi} \varphi(\sigma\xi) \end{aligned}$$

😊 Die Rücktransformierte $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = f$ berechnen Sie ebenso leicht.



- 😊 Der Flächeninhalt $\int_{\mathbb{R}} a\varphi(ax) dx = 1$ bleibt unverändert.
- 😊 Wir sehen die Unschärferelation: Ist f schmal, so ist \hat{f} breit.



- 😊 Der Flächeninhalt $\int_{\mathbb{R}} a\varphi(ax) dx = 1$ bleibt unverändert.
- 😊 Wir sehen die Unschärferelation: Ist f breit, so ist \hat{f} schmal.

Für die Transformation $f(x) \circ \rightarrow \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx$ gilt:

$a f(x) \circ \rightarrow a \hat{f}(\xi),$	$f(x) + g(x) \circ \rightarrow \hat{f}(\xi) + \hat{g}(\xi),$
$f(-x) \circ \rightarrow \hat{f}(-\xi),$	$\overline{f(x)} \circ \rightarrow \overline{\hat{f}(-\xi)},$
$f(ax) \circ \rightarrow \frac{1}{ a } \hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right),$	$\frac{1}{ a } f\left(\frac{x}{a}\right) \circ \rightarrow \hat{f}(a\xi),$
$f(x-a) \circ \rightarrow e^{-i\xi a} \hat{f}(\xi),$	$e^{iax} f(x) \circ \rightarrow \hat{f}(\xi-a),$
$\partial_x f(x) \circ \rightarrow i\xi \hat{f}(\xi),$	$x f(x) \circ \rightarrow i\partial_\xi \hat{f}(\xi),$
$(f * g)(x) \circ \rightarrow \sqrt{2\pi} \cdot \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi),$	$f(x) \cdot g(x) \circ \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\hat{f} * \hat{g})(\xi).$

- ⚠ Die letzten vier erfordern Voraussetzungen, siehe K2A und K2B.
- 😊 Glattheit der Funktion f entspricht schnellem Abklingen von \hat{f} .
- 😊 Schnelles Abklingen der Funktion f entspricht Glattheit von \hat{f} .

Konjugation:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \overline{f(x)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} f(x) dx.$$

Streckung: Substitution mit $y = ax$ für $a \neq 0$ liefert

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(ax) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi y/a} f(y) \frac{dy}{|a|}.$$

Ortsverschiebung: Substitution mit $y = x - a$ liefert

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x-a) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi(y+a)} f(y) dy.$$

Phasenverschiebung: Multiplikation mit e^{iax} liefert

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} e^{iax} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi-a)x} f(x) dx.$$

Aufgabe: Wir wissen bereits

$$f(x) = \mathbf{I}_{[-1,1]}(x) \circ \rightarrow \hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\xi)}{\xi}.$$

Was erhalten Sie bei Streckung um $a > 0$ und Verschiebung um $c \in \mathbb{R}$?

Lösung: Bei Streckung um $a > 0$ gilt

$$f(x/a) = \mathbf{I}_{[-a,a]}(x) \circ \rightarrow a \hat{f}(a\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(a\xi)}{\xi}.$$

Bei Verschiebung um $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbf{I}_{[-a,a]}(x-c) = \mathbf{I}_{[-a-c, a-c]}(x) \circ \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-ic\xi} \frac{\sin(a\xi)}{\xi}.$$

- 😊 Dies können Sie wie oben auch direkt nachrechnen: Wiederholung! Wir sehen erneut die **Unschärferelation**: Ist f schmal, so ist \hat{f} breit. Die Ortsverschiebung in x entspricht der Phasenverschiebung in ξ .

Aufgabe: Wir wissen bereits

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \circ \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/2}.$$

Was erhalten Sie bei Streckung um $\sigma > 0$ und Verschiebung um $\mu \in \mathbb{R}$?

Lösung: Bei Streckung um $\sigma > 0$ gilt

$$\frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \circ \rightarrow \varphi(\sigma\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\sigma^2\xi^2/2}.$$

Bei Verschiebung um $\mu \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \circ \rightarrow e^{-i\mu\xi} \varphi(\sigma\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\mu\xi - \sigma^2\xi^2/2}.$$

- 😊 Dies können Sie wie oben auch direkt nachrechnen: Wiederholung! Wir sehen erneut die **Unschärferelation**: Ist f schmal, so ist \hat{f} breit. Die Ortsverschiebung in x entspricht der Phasenverschiebung in ξ .

Satz K2A: Ableitung und Multiplikation

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ absolut integrierbar mit \mathcal{F} -Transformierter $f \circ \rightarrow \hat{f}$.

(1) Ist f absolut stetig und $\partial_x f$ über \mathbb{R} absolut integrierbar, so gilt

$$\partial_x f(x) \circ \rightarrow i\xi \hat{f}(\xi).$$

(2) Ist $x f(x)$ über \mathbb{R} absolut integrierbar, so ist \hat{f} stetig diff'bar und

$$x f(x) \circ \rightarrow i\partial_\xi \hat{f}(\xi).$$

Die \mathcal{F} -Transformation $f \circ \rightarrow \hat{f}$ verwandelt die Ableitung ∂_x in die Multiplikation mit $i\xi$, und Multiplikation mit x in die Ableitung $i\partial_\xi$. Diese Formeln können wir mehrfach anwenden auf $\partial_x^n f(x)$ und $x^n f(x)$.

- 😊 Glattheit der Funktion f entspricht schnellem Abklingen von \hat{f} : Ist $\partial_x^n f(x)$ stetig und absolut integrierbar, so folgt $\xi^n \hat{f}(\xi) \rightarrow 0$.
- 😊 Schnelles Abklingen der Funktion f entspricht Glattheit von \hat{f} : Ist $x^n f(x)$ absolut integrierbar, so ist $\hat{f}(\xi)$ n -mal stetig differenzierbar.

Nachrechnen: (1) Für $f' = \partial_x f$ erhalten wir dank partieller Integration

$$\begin{aligned} \widehat{f'}(\xi) &\stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f'(x) dx \\ &\stackrel{\text{B2a}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\underbrace{e^{-i\xi x} f(x)}_{= 0 \dots \text{Warum?}} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} (-i\xi) e^{-i\xi x} f(x) dx \right] \stackrel{\text{Def}}{=} i\xi \hat{f}(\xi). \end{aligned}$$

Für $s, t \geq x$ gilt $|f(s) - f(t)| = \left| \int_s^t f'(u) du \right| \leq \int_s^t |f'(u)| du \leq \int_x^\infty |f'(u)| du$. Für $x \rightarrow \infty$ geht Letzteres gegen 0, somit erfüllt $f(x)$ die Cauchy-Bedingung und besitzt einen Grenzwert. Ebenso für $x \rightarrow -\infty$. Beide Grenzwerte sind Null, andernfalls wäre f nicht absolut integrierbar.

(2) Dank $\int_{\mathbb{R}} |x f(x)| dx < \infty$ dürfen wir ∂_ξ unters Integral ziehen:

$$\begin{aligned} \widehat{x f(x)}(\xi) &\stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} x f(x) dx \stackrel{\text{Diff}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} i\partial_\xi e^{-i\xi x} f(x) dx \\ &\stackrel{\text{D3E}}{=} i\partial_\xi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx \stackrel{\text{Def}}{=} i\partial_\xi \hat{f}(\xi) \end{aligned}$$

- ⚠ Die technischen Voraussetzungen sind wichtig und unvermeidlich, sonst verwickelt sich die Rechnung in verheerende Widersprüche. [K409]

Beispiel: Wir betrachten erneut die Standard-Normalverteilung:

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Die oben durchgeführten Rechnungen für $\hat{\varphi} = \varphi$ waren lehrreich, aber eher mühsam. Die folgende Aufgabe macht es uns wesentlich leichter:

Aufgabe: Rechnen Sie folgende Schritte nach und begründen Sie:

- (1) Die Funktion φ erfüllt die Differentialgleichung $\partial_x \varphi(x) + x \varphi(x) = 0$.
- (2) Die \mathcal{F} -Transformierte erfüllt somit ebenfalls $\xi \hat{\varphi}(\xi) + \partial_\xi \hat{\varphi}(\xi) = 0$.
- (3) Wir trennen die Variablen gemäß $\hat{\varphi}'(\xi)/\hat{\varphi}(\xi) = -\xi$, integrieren zu $\ln \hat{\varphi}(\xi) - \ln \hat{\varphi}(0) = -\xi^2/2$ und erhalten die Lösung $\hat{\varphi}(\xi) = \hat{\varphi}(0) e^{-\xi^2/2}$.
- (4) Mit dem Anfangswert $\hat{\varphi}(0) = 1/\sqrt{2\pi}$ folgt $\hat{\varphi}(\xi) = (1/\sqrt{2\pi}) e^{-\xi^2/2}$.

Lösung: Die ausführliche Aufgabenstellung enthält bereits die Antwort: Wir überprüfen (1) durch Ableiten, damit folgt (2) mühelos aus Satz K2A. (3) Diese Differentialgleichung haben wir bereits auf Seite K126 gelöst. (4) Den Wert $\hat{\varphi}(0) = 1/\sqrt{2\pi}$ haben wir oben auf Seite K124 berechnet.

Aufgabe: Zu $f(x) = e^{-x^2/2}$ kennen wir bereits $\hat{f}(\xi) = e^{-\xi^2/2}$. (5) Fourier-transformieren Sie $g(x) = x e^{-x^2/2}$ und $h(x) = x^2 e^{-x^2/2}$.

- 😊 **Bemerkung:** Wir können die Fourier-Integrale direkt ausrechnen. ... Das ist allerdings mühsam. Versuchen Sie es einmal als Übung!
- 😊 Es ist viel leichter, scharf hinzusehen und geschickt zu rechnen:

Lösung: (5a) Wir nutzen die Multiplikationsregel:

$$\begin{aligned} f(x) = e^{-x^2/2} &\circ \rightarrow \hat{f}(\xi) = e^{-\xi^2/2} \\ g(x) = x f(x) &\circ \rightarrow i\partial_\xi \hat{f}(\xi) = -i\xi e^{-\xi^2/2} \\ h(x) = x^2 f(x) &\circ \rightarrow (i\partial_\xi)^2 \hat{f}(\xi) = (1 - \xi^2) e^{-\xi^2/2} \end{aligned}$$

(5b) Alternativ nutzen wir die Ableitungsregel:

$$\begin{aligned} f(x) = e^{-x^2/2} &\circ \rightarrow \hat{f}(\xi) = e^{-\xi^2/2} \\ g(x) = -\partial_x f(x) &\circ \rightarrow -i\xi \hat{f}(\xi) = -i\xi e^{-\xi^2/2} \\ h(x) = \partial_x^2 f(x) + f(x) &\circ \rightarrow (i\xi)^2 \hat{f}(\xi) + \hat{f}(\xi) = (1 - \xi^2) e^{-\xi^2/2} \end{aligned}$$

Satz K2B: Faltung und Produkt

Sind $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ absolut integrierbar, so auch ihre **Faltung**

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(x-s) ds.$$

(1) Unter Fourier-Transformation wird sie zum punktweisen **Produkt**:

$$(f * g)(x) \circ \bullet \sqrt{2\pi} \cdot \widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{g}(\xi)$$

(2) Umgekehrt wird das punktweise Produkt zur Faltung:

$$f(x) \cdot g(x) \circ \bullet \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\widehat{f * g})(\xi)$$

⚠ Den Faktor $\sqrt{2\pi}$ empfinde ich hier als störend, aber er folgt aus unserer in Definition K1A festgelegten Normierung. Andere Konventionen sind hier bequemer, dafür andernorts lästiger.

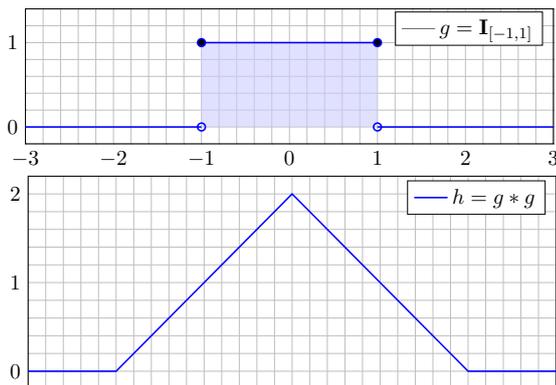
Aufgabe: Rechnen Sie diese beiden Transformationsregeln nach!

Nachrechnen: (1) Dank Fubini und Substitution $x = s + t$ gilt:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{g}(\xi) &\stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{s \in \mathbb{R}} e^{-i\xi s} f(s) ds \cdot \int_{t \in \mathbb{R}} e^{-i\xi t} g(t) dt \\ &\stackrel{\text{Lin}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{t \in \mathbb{R}} \int_{s \in \mathbb{R}} e^{-i\xi(s+t)} f(s) g(t) ds dt \\ &\stackrel{\text{Subs}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{t \in \mathbb{R}} \int_{x \in \mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x-t) g(t) dx dt \\ &\stackrel{\text{Fub}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{x \in \mathbb{R}} \int_{t \in \mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x-t) g(t) dt dx \\ &\stackrel{\text{Lin}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{x \in \mathbb{R}} e^{-i\xi x} \cdot \left[\int_{t \in \mathbb{R}} f(x-t) g(t) dt \right] dx \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{x \in \mathbb{R}} e^{-i\xi x} \cdot (f * g)(x) dx \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{f * g}(\xi) \end{aligned}$$

(2) Die umgekehrte Formel zeigen Sie wörtlich genau: Übung!

Faltung von Rechteck zu Dreieck



☺ Faltung glättet! Hier ist g unstetig, hingegen $h = g * g$ stetig, $g * g * g$ sogar stetig differenzierbar, etc. Dies entspricht dem schnellen Abklingen der \mathcal{F} -Transformierten: \widehat{g} geht gegen Null wie $1/\xi$, hingegen $\widehat{h} = \widehat{g}^2$ wie $1/\xi^2$, dann \widehat{g}^3 sogar wie $1/\xi^3$, etc.

Faltung von Rechteck zu Dreieck

Aufgabe: Zu $g = \mathbf{I}_{[-a,a]}$ bestimme man $h = g * g$ und \widehat{h} sowie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\xi a)^2}{\xi^2} d\xi.$$

Lösung: Hier ist $g = \mathbf{I}_{[-a,a]}$ die Rechteckfunktion mit Breite $2a$. Die Faltung $h = g * g$ ist dann die Dreieckfunktion mit Breite $4a$:

$$\begin{aligned} (g * g)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{I}_{[-a,a]}(x-t) \cdot \mathbf{I}_{[-a,a]}(t) dt = \int_{-a}^a \mathbf{I}_{[x-a, x+a]}(t) dt \\ &= \text{vol}_1([x-a, x+a] \cap [-a, a]) = \begin{cases} 2a - |x| & \text{für } |x| \leq 2a, \\ 0 & \text{für } |x| \geq 2a. \end{cases} \end{aligned}$$

Die \mathcal{F} -Transformierte der Faltung $h = g * g$ ist das Produkt

$$\widehat{h}(\xi) = \sqrt{2\pi} \widehat{g}(\xi)^2 = \sqrt{2\pi} \frac{2}{\pi} \frac{\sin(\xi a)^2}{\xi^2} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\xi a)^2}{\xi^2}.$$

Dank Umkehrformel K1E von \widehat{h} zu h im Punkt $x = 0$ gilt

$$2a = h(0) \stackrel{!}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\xi) d\xi = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\xi a)^2}{\xi^2} d\xi.$$

Energiegleichung und Fourier-Isometrie

Die quadrat-integrierbaren Funktionen bilden den Vektorraum

$$L^2 = L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) := \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

Auf diesem definieren wir Skalarprodukt und Norm durch

$$\langle f | g \rangle_{L^2} := \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} g(x) dx, \quad \|f\|_{L^2} := \sqrt{\langle f | f \rangle} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx}.$$

Satz K3A: Plancherel 1910

Für die Fourier-Transformation $\mathcal{F}: f \mapsto \widehat{f}$ gilt allgemein $\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2}$. Speziell für quadrat-integrierbare Funktionen erhalten wir die Isometrie

$$\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \quad \langle f | g \rangle = \langle \widehat{f} | \widehat{g} \rangle, \quad \|f\| = \|\widehat{f}\|.$$

☺ Physikalisch bedeutet dies Energieerhaltung: Das Energieintegral $\int |f(x)|^2$ des Signals ist gleich dem Integral $\int |\widehat{f}(\xi)|^2$ der Energiedichte.

☺ Für Fourier-Reihen gilt entsprechend die Parseval-Gleichung [4110]

$$\mathcal{F}: L^2([0, 2\pi], \mathbb{C}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}), \quad \langle f | g \rangle = \langle \widehat{f} | \widehat{g} \rangle, \quad \|f\| = \|\widehat{f}\|.$$

Energiegleichung und Fourier-Isometrie

Aufgabe: Beweisen Sie den Satz für $f \circ \bullet \widehat{f}, g \circ \bullet \widehat{g}$ mit $f, \widehat{g} \in L^1$.

Nachrechnen: Seien f und \widehat{g} absolut integrierbar. Fubini ergibt dann:

$$\begin{aligned} \langle f | g \rangle &\stackrel{\text{Def}}{=} \int_{x \in \mathbb{R}} \overline{f(x)} g(x) dx \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{x \in \mathbb{R}} \overline{f(x)} \left[\int_{y \in \mathbb{R}} \widehat{g}(y) e^{ixy} dy \right] dx \\ &\stackrel{\text{Lin}}{=} \int_{x \in \mathbb{R}} \int_{y \in \mathbb{R}} \overline{f(x)} e^{ixy} \widehat{g}(y) dy dx \stackrel{\text{Fub}}{=} \int_{y \in \mathbb{R}} \int_{x \in \mathbb{R}} e^{-ixy} \overline{f(x)} \widehat{g}(y) dx dy \\ &\stackrel{\text{Lin}}{=} \int_{y \in \mathbb{R}} \left[\int_{x \in \mathbb{R}} e^{-ixy} \overline{f(x)} dx \right] \widehat{g}(y) dy \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{y \in \mathbb{R}} \overline{\widehat{f}(y)} \widehat{g}(y) dy \stackrel{\text{Def}}{=} \langle \widehat{f} | \widehat{g} \rangle \end{aligned}$$

Speziell für $f = g$ erhalten wir die Energiegleichung $\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2}$.

Demnach ist \widehat{f} genau dann quadrat-integrierbar, wenn f dies ist.

Für alle Funktionen $f, \widehat{g} \in L^1 \cap L^2$ ist damit der Satz bewiesen.

Im allgemeinen Fall $f \in L^2$ wählen wir eine approximierende Funktionenfolge $f_n \in L^1 \cap L^2$ mit $\|f - f_n\|_{L^2} \rightarrow 0$ und definieren $\widehat{\mathcal{F}}(f) := \lim \widehat{\mathcal{F}}(f_n)$. Dank Energiegleichung für alle f_n liegt das Ergebnis $\widehat{\mathcal{F}}(f)$ wieder in L^2 und ist von der Wahl der Approximation $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unabhängig. So setzen wir die Fourier-Transformation fort von $\mathcal{F}: L^2 \cap L^1 \rightarrow L^2 \cap L^\infty$ zu $\widehat{\mathcal{F}}: L^2 \rightarrow L^2$. Diese Fortsetzung ist eine Isometrie, das heißt, die Energiegleichung bleibt dabei erhalten.

Anwendung des Satzes von Plancherel

Aufgabe: Wenden Sie Plancherel (K3A) an auf die Spaltfunktion

$$f(x) = \mathbf{I}_{[-a,a]} \circ \bullet \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\xi a)}{\xi} \quad \text{und berechnen Sie} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\xi a)^2}{\xi^2} d\xi.$$

Lösung: Die linke Seite der Plancherel-Gleichung ist

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-a}^a 1 dx = 2a.$$

Die rechte Seite der Plancherel-Gleichung ist

$$\|\widehat{f}\|_{L^2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\xi a)^2}{\xi^2} d\xi.$$

Die Gleichung $\|f\|_{L^2}^2 = \|\widehat{f}\|_{L^2}^2$ liefert das gesuchte Integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\xi a)^2}{\xi^2} d\xi = a\pi$$

☺ Dasselbe Ergebnis erhalten wir aus der Hutfunktion. [K413]

Anwendung des Satzes von Plancherel

Aufgabe: Bestimmen Sie mit Plancherel (K3A) den Wert des Integrals

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{ab}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx \quad \text{für } a, b > 0.$$

Lösung: Wir erkennen und nutzen die Fourier-Transformierte

$$f_a(x) = e^{-a|x|} \circ \bullet \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\xi^2 + a^2} = \widehat{f}_a(\xi).$$

Plancherel transformiert ein schweres Integral in ein leichtes:

$$\begin{aligned} I &\stackrel{\text{Def}}{=} \frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{R}} \overline{\widehat{f}_a(\xi)} \cdot \widehat{f}_b(\xi) d\xi \stackrel{\text{K3A}}{=} \frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{R}} \overline{f_a(x)} \cdot f_b(x) dx \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} \frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-(a+b)|x|} dx \stackrel{\text{Sym}}{=} \pi \int_{x=0}^{\infty} e^{-(a+b)x} dx \\ &\stackrel{\text{HDI}}{=} \pi \left[\frac{-1}{a+b} e^{-(a+b)x} \right]_{x=0}^{\infty} = \frac{\pi}{a+b} \end{aligned}$$

☺ Dasselbe Ergebnis erhalten wir mit dem Residuensatz. [F429]

Die Unschärferelation für Fourier-Paare K305
Ergänzung

Sei $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ quadrat-integrierbar, also $\|g\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx < \infty$.
Division $f = g/\|g\|_{L^2}$ durch die Norm normiert unsere Funktion zu

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = 1.$$

Wir interpretieren $|f(x)|^2$ als Wahrscheinlichkeitsdichte auf \mathbb{R} (Kapitel V).
Die Varianz ist die mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert μ :

$$\mu := \int_{\mathbb{R}} x |f(x)|^2 dx, \quad \mathbf{V}(f) := \int_{\mathbb{R}} (x - \mu)^2 |f(x)|^2 dx$$

Dank Plancherel gilt $\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = 1$, also ist auch $|\widehat{f}(x)|^2$ eine WDichte.

$$\widehat{\mu} := \int_{\mathbb{R}} \xi |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi, \quad \mathbf{V}(\widehat{f}) := \int_{\mathbb{R}} (\xi - \widehat{\mu})^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

Nach Verschiebung dürfen wir $\mu = 0$ und $\widehat{\mu} = 0$ annehmen. K201
Die Varianz ist ein bewährtes Maß für die Breite der WVerteilung.
Diese wollen wir untersuchen und die Unschärferelation verstehen.

Die Unschärferelation für Fourier-Paare K306
Ergänzung

Aufgabe: Führen Sie dies für die Glockenkurve $g(x) = e^{-x^2/2\sigma^2}$ aus.
Berechnen Sie die Varianzen $\mathbf{V}(f)$ und $\mathbf{V}(\widehat{f})$ sowie $\mathbf{V}(f) \cdot \mathbf{V}(\widehat{f})$.

Lösung: Wir normieren g und transformieren:

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{\sigma\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad \circ \bullet \quad \sqrt{\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{\sigma^2 \xi^2}{2}} := \widehat{f}(\xi).$$

Das Absolutquadrat definiert jeweils eine Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$|f(x)|^2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}, \quad |\widehat{f}(\xi)|^2 = \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} e^{-\sigma^2 \xi^2},$$

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = 1,$$

$$\int_{\mathbb{R}} x |f(x)|^2 dx = 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \xi |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = 0,$$

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx = \frac{\sigma^2}{2}, \quad \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{2\sigma^2}.$$

☺ Für die Varianzen gilt somit $\mathbf{V}(f) \cdot \mathbf{V}(\widehat{f}) = 1/4$.

Die Unschärferelation für Fourier-Paare K307
Ergänzung

In unseren Beispielen sehen wir explizit die Unschärferelation:
Ist die Funktion f schmal, so ist ihre Transformierte \widehat{f} breit.
Dies gilt immer und lässt sich sogar quantitativ präzisieren:

Satz K3B: Unschärferelation
Für jede quadrat-integrierbare Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ gilt

$$\mathbf{V}(f) \cdot \mathbf{V}(\widehat{f}) \geq \frac{1}{4}.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn f und somit \widehat{f} eine Glockenkurve ist.

In der Quantenmechanik ist $|f(x)|^2$ die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Aufenthaltsort eines Teilchens, und dual hierzu ist $|\widehat{f}(\xi)|^2$ die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Impuls. Die obige Ungleichung ist (bis auf Konstanten) Heisenbergs Unschärferelation. Sie besagt: Ist der Ort scharf bestimmt, so ist der Impuls unscharf, und umgekehrt. Diese Unschärferelation rührt nicht von unvollkommenen Messinstrumenten her, sondern ist prinzipieller Natur. Sie wurde 1927 von Werner Heisenberg in der von ihm (und anderen) entwickelten Quantenmechanik formuliert. Wir erkennen sie hier als eine grundsätzliche Eigenschaft der Fourier-Transformation.

Die Unschärferelation für Fourier-Paare K308
Ergänzung

Nachrechnen: Aus $\widehat{f}'(\xi) = i\xi \widehat{f}(\xi)$ und Plancherel-Gleichung folgt:

$$\int_{\mathbb{R}} |\xi \widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}'(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx.$$

Hierzu sei f absolut stetig und f' absolut integrierbar. K205
Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung I134 erhalten wir:

$$\mathbf{V}(f) \cdot \mathbf{V}(\widehat{f}) = \int_{\mathbb{R}} |xf(x)|^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx \geq \left| \int_{\mathbb{R}} x \overline{f(x)} f'(x) dx \right|^2 \geq \frac{1}{4}$$

Für das letzte Integral nutzen wir partielle Integration:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \overline{f(x)} f'(x) dx = \left[x \overline{f(x)} f(x) \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} f(x) + x \overline{f'(x)} f(x) dx$$

$$\Rightarrow 2 \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} x \overline{f(x)} f'(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = -1$$

Hierzu sei $|xf(x)|^2 \rightarrow 0$ für $|x| \rightarrow \infty$. Mit beiden zusätzlichen Annahmen gilt die Unschärferelation. Diese Funktionen liegen dicht in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
Per Grenzübergang gilt die Ungleichung daher für alle $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Die Unschärferelation in der Quantenmechanik K309
Ergänzung

Die Quantenmechanik war und ist eine bahnbrechende Entdeckung. Rasant hat sie im Laufe des 20. Jahrhunderts die Physik revolutioniert. Ihre Anwendungen reichen vom Laser bis zur Kernspinresonanz, vom Transistor bis zum Computer, von Atomuhr bis Atombombe. Sie prägt bis heute unsere technikbasierte Gesellschaft.

Für technisch gebildete Menschen gehören daher die Grundideen der Quantenmechanik zur Allgemeinbildung. Zur Illustration füge ich deshalb ein paar Bemerkungen zur physikalischen Sichtweise an. Wer in der Chemie oder der Physik der Quantenmechanik begegnet, darf sich freuen, dies hier als grob vereinfachte Skizze wiederzufinden.

Im Rahmen Ihrer Ausbildung möchte ich erneut betonen: Erfolgreiche Entwicklung/Anwendung ist engstens verwoben mit der erfolgreichen Entwicklung/Anwendung passender mathematischer Werkzeuge. Das hat sich in allen Bereichen als Erfahrungstatsache erhärtet, und genau deshalb lernen und nutzen Sie Höhere Mathematik.

Die Unschärferelation in der Quantenmechanik K310
Ergänzung

Wir betrachten den Vektorraum $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ aller quadrat-integrierbaren Funktionen $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, also $\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx < \infty$, mit Skalarprodukt

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi(x)} \psi(x) dx.$$

Wie zuvor normieren wir ψ durch die Bedingung $\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx = 1$ und interpretieren die Funktion $|\psi(x)|^2$ als Wahrscheinlichkeitsdichte. Der **Ortsoperator** ist die Multiplikation mit x . Bezüglich ψ gilt dann

$$\langle x \rangle := \langle \psi | x\psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} x |\psi(x)|^2 dx.$$

Dies ist der Erwartungswert der WVerteilung $|\psi|^2$, ihr Schwerpunkt. Der **Impulsoperator** ist $p = -i\hbar \partial_x$. Dank Fourier-Isometrie K3A gilt

$$\langle p \rangle := \langle \psi | p\psi \rangle \stackrel{\text{Z}}{=} \langle \widehat{\psi} | \hbar \xi \widehat{\psi} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \hbar \xi |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi.$$

Dies ist der Erwartungswert des Impulses bzgl. der WVerteilung $|\widehat{\psi}|^2$.
Im Experiment sind die gemessenen **Observablen** x und p zufällig!

Die Unschärferelation in der Quantenmechanik K311
Ergänzung

Ort x und Impuls p wirken als **Operatoren** auf Funktionen $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Beide Operatoren sind **hermitesch** bezüglich des Skalarprodukts: I141

$$\langle \varphi | x\psi \rangle = \langle x\varphi | \psi \rangle, \quad \langle \varphi | p\psi \rangle = \langle p\varphi | \psi \rangle.$$

Sie haben reelle Eigenwerte und orthogonale Eigenfunktionen. I142
Ortsoperator x und Impulsoperator p kommutieren jedoch nicht, denn

$$x p \psi = -i\hbar x \partial_x \psi \quad \text{aber} \quad p x \psi = -i\hbar \partial_x(x\psi) = -i\hbar \psi - i\hbar x \partial_x \psi.$$

Wir schreiben dies kurz als **Kommutator** $[x, p] := xp - px = i\hbar$.

Wir müssen voraussetzen, dass sowohl ψ als auch $x\psi$ und $\partial_x \psi$ in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ liegen. Um dies zu iterieren nutzen wir den Schwartz-Raum $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \subset L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$: Er besteht aus allen beliebig diff'baren Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\sup |x^m \partial^n f| < \infty$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$. Zum Beispiel erfüllen Glockenkurven $f(x) = \exp(-(x-\mu)^2/2\sigma^2)$ diese Bedingung, ebenso jede glatte Funktion mit kompaktem Träger. Die Schwartz-Funktionen liegen dicht in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
Damit sind $x, p: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ Operatoren auf \mathcal{S} . Gleiches gilt für die Transformation $\mathcal{F}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$. Für Schwarz-Funktionen sind alle Bedingungen erfüllt und alle Rechenregeln besonders einfach. Zum Beispiel sind Wellenfunktionen $e^{i\omega x}$ Eigenfunktionen von p , denn $p e^{i\omega x} = \hbar \omega e^{i\omega x}$. Diese liegen leider nicht in L^2 , wir denken daher an $e^{i\omega x} \exp(-x^2/2\sigma^2)$ für sehr großes σ . Solche Dämpfung wird stillschweigend verwendet, damit die nötigen Integrale konvergieren.

Die Unschärferelation in der Quantenmechanik K312
Ergänzung

Seien A und B zwei hermitesche Operatoren, etwa $A = x$ und $B = p$.

$$\langle A^2 \rangle := \langle \psi | A^2 \psi \rangle = \langle A\psi | A\psi \rangle, \quad \langle B^2 \rangle := \langle \psi | B^2 \psi \rangle = \langle B\psi | B\psi \rangle.$$

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung liefert dann

$$\langle A\psi | A\psi \rangle \langle B\psi | B\psi \rangle \geq |\langle A\psi | B\psi \rangle|^2 = |\langle \psi | AB\psi \rangle|^2 = |\langle AB \rangle|^2.$$

Wir zerlegen $AB = \frac{1}{2}\{A, B\} + \frac{1}{2}[A, B]$ in die Summanden

$$\{A, B\} = AB + BA \quad \text{und} \quad [A, B] = AB - BA.$$

Der Antikommutator $\{A, B\}$ ist hermitesch, also $\langle \{A, B\} \rangle$ reell, der Kommutator $[A, B]$ ist antihermitesch, also $\langle [A, B] \rangle$ imaginär.

$$|\langle AB \rangle| = \left| \frac{1}{2} \langle \{A, B\} \rangle + \frac{1}{2} \langle [A, B] \rangle \right| \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|$$

Zusammengefasst erhalten wir die allgemeine Unschärferelation:

$$\langle A^2 \rangle \langle B^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2$$

Speziell für x und p wissen wir $[x, p] = i\hbar$, also $\langle x^2 \rangle \langle p^2 \rangle \geq \hbar^2/4 > 0$.
Das Produkt der beiden Streuungen ist demnach mindestens $\hbar/2$.

Die **Fourier-Transformierte** von $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx \quad \text{für } \xi \in \mathbb{R}.$$

Wir fordern hierzu, dass f auf jedem Intervall $[-r, r]$ integrierbar ist. Unter dem Integral über \mathbb{R} verstehen wir hier den **Cauchy-Hauptwert**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx := \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r e^{-i\xi x} f(x) dx.$$

Die Zuordnung $\mathcal{F}: f \mapsto \hat{f}$ heißt **Fourier-Transformation**. Die **inverse Fourier-Transformation** $\mathcal{F}^{-1}: \hat{f} \mapsto f$ ist

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Dies kürzen wir ab als **Fourier-Transformationspaar** $f \circ \bullet \hat{f}$. Die Fourier-Transformation ist linear, kurz $a f + b g \circ \bullet a \hat{f} + b \hat{g}$.

Grundlegende Rechenregeln

Für die Transformation $f(x) \circ \bullet \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx$ gilt:

$$\begin{aligned} a f(x) &\circ \bullet a \hat{f}(\xi), & f(x) + g(x) &\circ \bullet \hat{f}(\xi) + \hat{g}(\xi), \\ f(-x) &\circ \bullet \hat{f}(-\xi), & \overline{f(x)} &\circ \bullet \overline{\hat{f}(-\xi)}, \\ f(ax) &\circ \bullet \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right), & \frac{1}{|a|} f\left(\frac{x}{a}\right) &\circ \bullet \hat{f}(a\xi), \\ f(x-a) &\circ \bullet e^{-i\xi a} \hat{f}(\xi), & e^{iax} f(x) &\circ \bullet \hat{f}(\xi - a), \\ \partial_x f(x) &\circ \bullet i\xi \hat{f}(\xi), & x f(x) &\circ \bullet i \partial_\xi \hat{f}(\xi), \\ (f * g)(x) &\circ \bullet \sqrt{2\pi} \cdot \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi), & f(x) \cdot g(x) &\circ \bullet \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\hat{f} * \hat{g})(\xi). \end{aligned}$$

- ⚠ Die letzten vier erfordern Voraussetzungen, siehe K2A und K2B.
- 😊 Glattheit der Funktion f entspricht schnellem Abklingen von \hat{f} .
- 😊 Schnelles Abklingen der Funktion f entspricht Glattheit von \hat{f} .

Verständnisfragen

Aufgabe: Die Transformationen \mathcal{F} und \mathcal{F}^{-1} sind zueinander invers; kleine Unebenheiten sind leider unvermeidbar, die sollten Sie kennen:

(1) Integrale: Nennen Sie absolut integrierbare Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit Fourier-Transformierter \hat{f} , deren Rücktransformation nicht in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ gegen den ursprünglichen Funktionswert $f(x)$ konvergiert. Unter welchen Voraussetzungen gilt's in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$?

(2) Reihen: Nennen Sie 2π -periodische und absolut integrierbare Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, deren Fourier-Reihe $f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ nicht in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ gegen den Funktionswert $f(x)$ konvergiert. Unter welchen Voraussetzungen gilt's in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$?

Lösung: Rechteckfunktionen $\mathbf{I}_{[a,b]}$ sind unvermeidliche Kandidaten: Hin- und Rücktransformation liefert die sprungnormierte Funktion. Allgemein können wir jede Funktion f in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ beliebig abändern, Integral und Fourier-Transformierte ändern sich dadurch nicht, aber die Konvergenz in diesem Punkt gegen $f(x)$ geht verloren. (Das gilt allgemeiner für alle $x \in \mathbb{N}$ in einer Nullmenge, $\text{vol}_1(\mathbb{N}) = 0$.)

Verständnisfragen

Aufgabe: (1) Was genau besagt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung? Wann genau gilt Gleichheit? Können Sie Ihre Antworten beweisen?

(2) Die Unschärferelation K3B beruht im Wesentlichen auf der Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Wann genau gilt hier Gleichheit?

Lösung: (1) Wir erinnern an Satz 11H: In jedem \mathbb{K} -Vektorraum V mit Skalarprodukt $\langle - | - \rangle$ gilt $|\langle u | v \rangle|^2 \leq \langle u | u \rangle \langle v | v \rangle$ für alle $u, v \in V$. Gleichheit gilt genau dann, wenn u, v über \mathbb{K} linear abhängig sind.

(2) Die Unschärferelation $\mathbf{V}(f) \cdot \mathbf{V}(\hat{f}) \geq \frac{1}{4}$ beruht auf der CSU (K3B):

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(f) \cdot \mathbf{V}(\hat{f}) &= \int_{\mathbb{R}} |x f(x)|^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |\xi \hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} |x f(x)|^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx \geq \left| \int_{\mathbb{R}} x \overline{f(x)} \cdot f'(x) dx \right|^2 = \dots \geq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Bei Gleichheit müssen $x \overline{f(x)}$ und $f'(x)$ linear abhängig sein, also $f'(x) = \lambda x f(x)$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ gelten. Wir integrieren $f'(x)/f(x) = \lambda x$ zu $\ln f(x) = c + \lambda x^2/2$ und erhalten $f(x) = C e^{\lambda x^2/2}$. Dies ist quadrat-integrierbar für $\lambda < 0$. Gleichheit gilt daher nur für Glockenkurven! **K306**

Eigenschaften der Transformierten

Beispiele:

$$\begin{aligned} e^{-x^2/2} &\circ \bullet e^{-\xi^2/2} \\ e^{-a|x|} &\circ \bullet \sqrt{2/\pi} a/(a^2 + \xi^2) \\ \mathbf{I}_{[-r,r]}(x) &\circ \bullet \sqrt{2/\pi} \sin(\xi r)/\xi \end{aligned}$$

Ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ absolut integrierbar, also $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty$, dann gilt: Die Fourier-Transformierte $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig und beschränkt:

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}$$

Sie verschwindet im Unendlichen (Riemann-Lebesgue-Lemma):

$$|\hat{f}(\xi)| \rightarrow 0 \quad \text{für } |\xi| \rightarrow \infty$$

Zudem gilt die Plancherel-Gleichung (Energiegleichung):

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

Umkehrsätze und Isometrie

Sind $f, \hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ absolut integrierbar und stetig, so gilt punktweise

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi = f(x) \circ \bullet \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx.$$

Die punktweise Rücktransformation für alle $x \in \mathbb{R}$ (linke Gleichung) gilt auch, wenn $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ absolut integrierbar, stückweise stetig und stetig diff'bar sowie sprungnormiert ist, also $f(x) = \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]$.

Die quadrat-integrierbaren Funktionen bilden den \mathbb{C} -Vektorraum

$$L^2 = L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) := \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \right\}.$$

Die Fourier-Transformation definiert eine Isometrie $\mathcal{F}: L^2 \rightarrow L^2$, also

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \quad \text{und} \quad \langle f | g \rangle = \langle \hat{f} | \hat{g} \rangle \quad \text{für } f, g \in L^2.$$

Unschärfe ist anschaulich: Ist f schmal, so ist \hat{f} breit, und umgekehrt. Quantitativ: Für alle $f \in L^2$ gilt die Unschärferelation $\mathbf{V}(f) \cdot \mathbf{V}(\hat{f}) \geq \frac{1}{4}$. Optimalfall: Gleichheit gilt genau dann, wenn f eine Glockenkurve ist.

Verständnisfragen

Aufgabe: Wie verhalten sich die Transformationen \mathcal{F} und \mathcal{F}^{-1} ...

- 1 bei Linearkombinationen von Funktionen?
- 2 bei Streckung und Verschiebung?
- 3 bei Ableitung von Funktionen?
- 4 bei Produkten von Funktionen?

Welche Voraussetzungen werden jeweils benötigt?

- 5 Ist für jede reelle Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auch \hat{f} reell? Welche zusätzliche Symmetrie garantiert dies?
- 6 Ist für jede Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Transformierte \hat{f} stetig? Welche zusätzliche Voraussetzung garantiert dies?
- 7 Was besagt das Riemann-Lebesgue-Lemma?
- 8 Was besagt der Satz von Plancherel? im Vergleich zu Parseval?
- 9 Was besagt die Unschärferelation? Qualitativ? Quantitativ?

Lösung: Lesen Sie das obige Fazit... und noch einmal das Kapitel! Dort finden Sie die allgemeinen Regeln und zahlreiche Beispiele.

Verständnisfragen: komplexe Potenzen

Aufgabe: Die folgende Rechnung beweist $0 = 1$. Wo stecken Fehler?

Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt:

- Multiplikation von (1) mit $e \implies e^{2\pi i k + 1} = e \quad (2)$
- Einsetzen von (2) in (1) $\implies (e^{2\pi i k + 1})^{2\pi i k} = 1 \quad (3)$
- Potenzgesetz $(e^w)^z = e^{wz} \implies e^{-4\pi^2 k^2 + 2\pi i k} = 1 \quad (4)$
- Potenzgesetz $e^{w+z} = e^w \cdot e^z \implies e^{-4\pi^2 k^2} \cdot e^{2\pi i k} = 1 \quad (5)$
- Anwendung von (1) $\implies e^{-4\pi^2 k^2} = 1 \quad (6)$
- Grenzwert für $k \rightarrow \infty \implies 0 = 1 \quad (7)$

⚠ Das ist eine lehrreiche Übung, bitte versuchen Sie zuerst selbst, den Fehler einzugrenzen! Die Gleichungen (1) und (2) sind tatsächlich gültig, auch (3) $1^z = 1$ scheint noch in Ordnung, obschon die Bedeutung von a^z für $a, z \in \mathbb{C}$ unklar ist. Die letzte Gleichung (7) ist offensichtlich falsch, ebenso (6), (5), (4). Die Implikationen (4) \implies (5) \implies (6) \implies (7) sind alle einwandfrei, sie starten leider bei einer falschen Aussage (4). Der einzige Fehler liegt also bei (3) \implies (4). In \mathbb{C} sind Logarithmen und Potenzen nicht eindeutig, daher ist extreme Vorsicht geboten! **F506**

Aufgabe: Stimmen die folgenden Rechnungen? Wo stecken Fehler?

$$(1) \left. \begin{array}{l} e^{-ax} \text{ für } x > 0 \\ 0 \text{ für } x < 0 \end{array} \right\} = f(x) \quad \circ \bullet \quad \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a + i\xi}$$

$$\Rightarrow -af(x) = f'(x) \quad \circ \bullet \quad i\xi \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i\xi}{a + i\xi}$$

$$\Rightarrow f(x) \quad \circ \bullet \quad \text{Whaaa?} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i\xi/a}{a + i\xi}$$

$$(2) e^{-a|x|} = g(x) \quad \circ \bullet \quad \widehat{g}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + \xi^2}$$

$$\Rightarrow a^2 e^{-a|x|} = g''(x) \quad \circ \bullet \quad (i\xi)^2 \widehat{g}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{-a\xi^2}{a^2 + \xi^2}$$

$$\Rightarrow g(x) \quad \circ \bullet \quad \text{Whaaa?} \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{-\xi^2/a}{a^2 + \xi^2}$$

⚠ Unsere Ableitungsregel K2A verlangt absolute Stetigkeit, diese ist links jedoch nicht erfüllt. Umgekehrt verlangt die Multiplikationsregel absolute Integrierbarkeit, diese ist rechts verletzt. Tatsächlich führen die obigen, allzu naiven Rechnungen zu dramatisch falschen Ergebnissen!

Aufgabe: Fourier-transformieren Sie die Funktionen $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = x$ und $h(x) = x^2$ für $|x| \leq a$, fortgesetzt durch Null für $|x| > a$.

Bemerkung: Wir können die Fourier-Integrale mühsam ausrechnen...

☺ Es ist viel effizienter, scharf hinzusehen und geschickt zu rechnen: Wie / Können Sie hier die Multiplikations/Ableitungsregel anwenden?

Lösung: Wir können Satz K2A(2) auf $f = \mathbf{I}_{[-a,a]}$ anwenden:

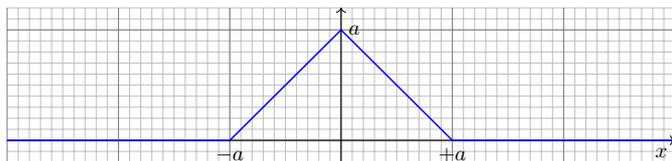
$$f(x) = \mathbf{I}_{[-a,a]}(x) \quad \circ \bullet \quad \widehat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(a\xi)}{\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \xi^k,$$

$$g(x) = x f(x) \quad \circ \bullet \quad i\partial_\xi \widehat{f}(\xi) = i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a\xi \cos(a\xi) - \sin(a\xi)}{\xi^2}$$

$$h(x) = x^2 f(x) \quad \circ \bullet \quad -\partial_\xi^2 \widehat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(a^2 \xi^2 - 2) \sin(a\xi) + 2a\xi \cos(a\xi)}{\xi^3}$$

☺ Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist das Produkt $x^m f(x)$ über \mathbb{R} absolut integrierbar. Die rechte Seite \widehat{f} ist beliebig oft differenzierbar, gar analytisch, genauer: darstellbar als eine auf \mathbb{R} konvergente Potenzreihe. Versuchen Sie es! Sie finden $c_{2n} = (-1)^n \sqrt{2/\pi} a^{2n+1} / (2n+1)!$ und $c_{2n+1} = 0$ für $n \in \mathbb{N}$.

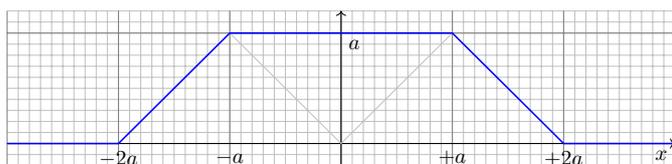
Aufgabe: Fourier-transformieren Sie die folgende Hutfunktion H_a :



- Nutzen Sie die Ableitung H'_a und deren \mathcal{F} -Transformierte.
- Alternativ hilft die Faltung $H_a = g * g$ mit $g = \mathbf{I}_{[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]}$. [K211]
- Alternativ setzen Sie die Definition ein und rechnen es geduldig aus. Plausibilitätscheck: Gilt $H_{2a}(x) = H_a(x+a) + 2H_a(x) + H_a(x-a)$? Durch Rücktransformation bestimmen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(\xi a)^2 / \xi^2 d\xi$. [K211]

Der direkte Ansatz (3) liegt am nächsten, führt aber zu einer etwas mühsamen Integration. Als Training sollten Sie dies einmal durchrechnen: Das ist eine sehr lehrreiche Übung. Wenn einem nichts besseres einfällt, dann ist dies auch die einzig gangbare Methode. Meist ist es günstiger wie in (1) oder (2), neue Funktionen auf alte zurückzuführen. Das geht oft schneller. Genau hierfür haben wir die Rechenregeln entwickelt!

Aufgabe: Fourier-transformieren Sie die Trapezfunktion T_a :



- Nutzen Sie die Ableitung T'_a und deren \mathcal{F} -Transformierte.
- Alternativ hilft die Summe $T_a(x) = H_a(x+a) + H_a(x) + H_a(x-a)$.
- Alternativ setzen Sie die Definition ein und rechnen es geduldig aus.

Der direkte Ansatz (3) liegt am nächsten, führt aber zu einer etwas mühsamen Integration. Als Training sollten Sie dies einmal durchrechnen: Das ist eine sehr lehrreiche Übung. Wenn einem nichts besseres einfällt, dann ist dies auch die einzig gangbare Methode. Meist ist es günstiger wie in (1) oder (2), neue Funktionen auf alte zurückzuführen. Das geht oft schneller. Genau hierfür haben wir die Rechenregeln entwickelt!

☺ Es ist effizienter, scharf hinzusehen und geschickt zu rechnen! Je mehr Werkzeuge Sie beherrschen und nutzen können, desto besser.

Aufgabe: Fourier-transformieren Sie die Funktionen

$$e^{-|x|}, \quad x e^{-|x|}, \quad -\text{sign}(x) e^{-|x|}.$$

Bemerkung: Sie können die Fourier-Integrale direkt ausrechnen...

☹ Das ist allerdings mühsam. Versuchen Sie es einmal als Übung!

☺ Es ist viel leichter, scharf hinzusehen und geschickt zu rechnen:

Lösung: Die erste kennen wir bereits, die anderen folgern wir:

Zur Anwendung von Satz K2A sind hier alle Voraussetzungen erfüllt.

$$e^{-|x|} = f(x) \quad \circ \bullet \quad \widehat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1 + \xi^2}$$

$$x e^{-|x|} = x f(x) \quad \circ \bullet \quad i\partial_\xi \widehat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{-2i\xi}{(1 + \xi^2)^2}$$

$$-\text{sign}(x) e^{-|x|} = \partial_x f(x) \quad \circ \bullet \quad i\xi \widehat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\xi}{1 + \xi^2}$$

☺ Allgemein für $g(x) = p(x) f(x)$ finden wir ebenso $\widehat{g}(\xi) = p(i\partial_\xi) \widehat{f}(\xi)$, wobei $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ ein beliebiges Polynom ist.

Aufgabe: Bestimmen Sie mit Plancherel (K3A) den Wert des Integrals

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix} \sin(x)}{x + x^3} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix} \sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{1 + x^2} dx.$$

Lösung: Wir erkennen und nutzen die Fourier-transformierten

$$f(x) = \mathbf{I}_{[-1,1]}(x) \quad \circ \bullet \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\xi)}{\xi} = \widehat{f}(\xi),$$

$$g(x) = e^{-|x|} \quad \circ \bullet \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1 + \xi^2} = \widehat{g}(\xi).$$

Plancherel transformiert ein schweres Integral in ein leichtes:

$$I \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi} \widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{g}(\xi) d\xi \stackrel{\text{K3A}}{=} \frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{R}} f(x-1) \cdot g(x) dx$$

$$\stackrel{\text{Def}}{=} \frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{[0,2]}(x) \cdot e^{-|x|} dx \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{\pi}{2} \int_{x=0}^2 e^{-x} dx$$

$$\stackrel{\text{HDI}}{=} \frac{\pi}{2} \left[-e^{-x} \right]_{x=0}^2 = \frac{\pi}{2} \left[1 - e^{-2} \right] = 1.35821 \dots$$

Lösung: (1) Außer in den Punkten $\{-a, 0, a\}$ ist H_a differenzierbar:

$$H'_a(x) = \mathbf{I}_{[-a,0]}(x) - \mathbf{I}_{[0,a]}(x)$$

$$\widehat{H}'_a(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i}{\xi} \left[(1 - e^{ia\xi}) - (e^{-ia\xi} - 1) \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i}{\xi} \left[2 - 2\cos(a\xi) \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{4i}{\xi} \sin\left(\frac{a\xi}{2}\right)^2$$

Dank Ableitungsregel $\partial_x H_a(x) \circ \bullet i\xi \widehat{H}_a(\xi)$ erhalten wir:

$$\widehat{H}_a(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2}{\xi^2} \sin\left(\frac{a\xi}{2}\right)^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos(a\xi)}{\xi^2}$$

☺ Dasselbe Ergebnis erhalten wir durch Faltung [K211] oder direkt. Plausibilität: Es gilt $H_{2a}(x) = H_a(x+a) + 2H_a(x) + H_a(x-a)$ und

$$\widehat{H}_{2a}(\xi) = \widehat{H}_a(\xi) (e^{ia\xi} + 2 + e^{-ia\xi}) \text{ nach Verschiebungsregel}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2}{\xi^2} \sin\left(\frac{a\xi}{2}\right)^2 (2 + 2\cos(a\xi)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2}{\xi^2} \sin(a\xi)^2$$

Lösung: (1) Außer in den Punkten $\{\pm 2a, \pm a\}$ ist T_a differenzierbar:

$$T'_a(x) = \mathbf{I}_{[-2a,-a]}(x) - \mathbf{I}_{[a,2a]}(x)$$

$$\widehat{T}'_a(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i}{\xi} \left[(e^{ia\xi} - e^{2ia\xi}) - (e^{-2ia\xi} - e^{-ia\xi}) \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i}{\xi} \left[2\cos(a\xi) - 2\cos(2a\xi) \right]$$

Dank Ableitungsregel $\partial_x T_a(x) \circ \bullet i\xi \widehat{T}_a(\xi)$ erhalten wir:

$$\widehat{T}_a(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\xi^2} \left[\cos(a\xi) - \cos(2a\xi) \right]$$

(2) Aus der Summe $T_a(x) = H_a(x+a) + H_a(x) + H_a(x-a)$ folgt

$$\widehat{T}_a(\xi) = \widehat{H}_a(\xi) (e^{ia\xi} + 1 + e^{-ia\xi}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2}{\xi^2} \sin\left(\frac{a\xi}{2}\right)^2 (1 + 2\cos(a\xi))$$

☺ Beide Lösungen aus (1) und (2) sehen zunächst verschieden aus. Beide Funktionen sind aber tatsächlich gleich dank Additionstheorem.

Faltung von Normalverteilungen

K417
Übung

Die Normalverteilung $\varphi = N(\mu, \sigma^2)$ ist gegeben durch

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Aufgabe: Für die Faltung von Normalverteilungen gilt:

$$N(\mu_1, \sigma_1^2) * N(\mu_2, \sigma_2^2) = N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

Zeigen Sie dies (1) durch Fourier-Transformation und (2) direkt.

Lösung: (1) Wir kennen die Fourier-Transformierten [K128]:

$$\begin{aligned} f &= N(\mu_1, \sigma_1^2) & \xrightarrow{\circ} & \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\mu_1\xi - \sigma_1^2\xi^2/2} \\ g &= N(\mu_2, \sigma_2^2) & \xrightarrow{\circ} & \hat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\mu_2\xi - \sigma_2^2\xi^2/2} \\ h &= N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2) & \xleftarrow{\circ} & \hat{h}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i(\mu_1+\mu_2)\xi - (\sigma_1^2+\sigma_2^2)\xi^2/2} \end{aligned}$$

Wir nutzen hierzu dankend die Faltung K2B und die Umkehrung K1D.

Faltung von Normalverteilungen

K418
Übung

(2) Wir rechnen alles direkt aus. Zur Vereinfachung sei $\mu_1 = \mu_2 = 0$.

$$h(x) = \int_{u=-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u) du = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{u=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x-u)^2}{2\sigma_2^2}} du$$

Zum Vergleich fügen wir den erhofften Faktor ein:

$$h(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \cdot \frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sigma_1\sigma_2\sqrt{2\pi}} \int_{u=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x-u)^2}{2\sigma_2^2}} du$$

Dies vereinfachen wir weiter mit $\sigma^2 := \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$ und $\mu := \frac{\sigma_1^2x}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$:

$$h(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{u=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du}_{=1}$$

☺ Zu dieser Rechnung benötigen Sie vor allem den Mut, die gewünschten Umformungen geduldig durchzuführen. Zur Übung multiplizieren Sie den letzten Schritt aus.

Transformation von Differentialgleichungen

K419
Übung

Wir untersuchen die homogene **Wärmeleitungsgleichung** [S101]

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) &= \kappa \partial_x^2 u(t, x) & \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= u_0(x) & \text{für } t = 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Aufgabe: Lösen Sie dies durch Fourier-Transformation bezüglich x .

Hierzu gibt es Voraussetzungen: Satz K2A erfordert, dass u zweimal stetig nach x differenzierbar ist und $\partial_x^2 u$ absolut integrierbar. Das ist am Ende noch zu überprüfen, siehe hierzu Satz D5D.

Lösung: Die \mathcal{F} -Transformierte $\hat{u}(t, \xi)$ erfüllt $\partial_t \hat{u}(t, \xi) = -\kappa \xi^2 \hat{u}(t, \xi)$.

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung in t mit Parameter ξ .

Wir trennen die Variablen gemäß $[\partial_t \hat{u}(t, \xi)]/\hat{u}(t, \xi) = -\kappa \xi^2$ und integrieren von 0 bis t zu $\ln \hat{u}(t, \xi) - \ln \hat{u}(0, \xi) = -\kappa \xi^2 t$.

Wir erhalten so die Lösung $\hat{u}(t, \xi) = e^{-\kappa \xi^2 t} \hat{u}_0(\xi)$ für alle $t \geq 0$.

Rücktransformation $e^{-\kappa \xi^2 t} \xrightarrow{\circ} e^{-x^2/4\kappa t} / \sqrt{2\kappa t}$ und Faltung ergibt:

$$u(t, x) = \int_{y \in \mathbb{R}} \frac{e^{-(x-y)^2/4\kappa t}}{\sqrt{4\pi\kappa t}} u_0(y) dy \quad \text{für } t > 0.$$

Transformation von Differentialgleichungen

K420
Übung

☺ Das Ergebnis entspricht unserer in Satz D5D präsentierten Lösung: Die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = \kappa \partial_x^2 u$ hat als Fundamentallösung eine auseinanderfließende Glockenkurve, den **Wärmeleitungskern**

$$H : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : H(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\kappa t}\right)$$

Die Konstanten sichern die Normierung $\int_{\mathbb{R}} H(t, x) dx = 1$. (Gauß C2G)

Für $t = 0$ sei die Wärmeverteilung $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vorgegeben, mit $u_0 \in C_b$.

Für $t > 0$ erhalten wir die Lösung durch **Superposition** (Faltung D5E):

$$u(t, x) = \int_{y \in \mathbb{R}} u_0(x-y) H(t, y) dy = \int_{z \in \mathbb{R}} u_0(z) H(t, x-z) dz.$$

☺ Stehen die Formeln schon da, so genügt geduldiges Nachrechnen: Machen Sie die Probe und zeigen Sie $\partial_t u = \kappa \partial_x^2 u$ durch Ableiten. [D5I3]

☺ Die Fourier-Transformation bietet eine elegant-effiziente Herleitung. Anschließend sammeln und prüfen wir die Voraussetzungen (D5D, D5V).

Transformation von Differentialgleichungen

K421
Übung

Aufgabe: Finden Sie eine quadrat-integrierbare Funktion

$$u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad u(x) - u''(x) = e^{-|x|}.$$

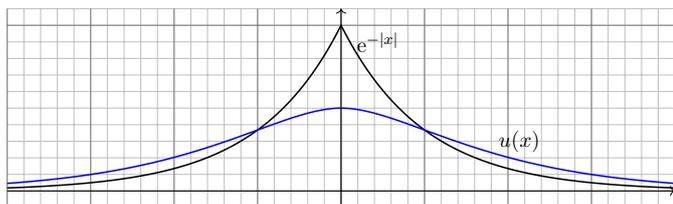
Lösen Sie diese Gleichung durch Fourier-Transformation:

(1) Zu welcher Gleichung für \hat{u} wird diese DG transformiert?

(2) Lösen Sie nach \hat{u} auf und berechnen die Rücktransformierte u .

(3) Probe: Erfüllt die gefundene Funktion u die Gleichung?

(4) Ist die gefundene Funktion u die einzige Lösung?



Transformation von Differentialgleichungen

K422
Übung

Lösung: (1) Wir fourier-transformieren die Summanden:

$$u(x) \quad \circ \bullet \quad \hat{u}(\xi)$$

$$u''(x) \quad \circ \bullet \quad (i\xi)^2 \hat{u}(\xi)$$

$$f(x) = e^{-|x|} \quad \circ \bullet \quad \hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\xi^2}$$

Die transformierte Gleichung für \hat{u} lautet also

$$\hat{u}(\xi) + \xi^2 \hat{u}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\xi^2}$$

Diese können wir leicht nach \hat{u} auflösen:

$$\hat{u}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\xi^2} \cdot \frac{1}{1+\xi^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \hat{f}(\xi) \cdot \hat{f}(\xi)$$

☺ Integraltransformationen (hier Fourier, später Laplace) machen aus Differentialgleichungen einfache algebraische Gleichungen. Wunderbar! Diese können wir leicht lösen. Dann bleibt noch die Rücktransformation.

Transformation von Differentialgleichungen

K423
Übung

(2) Dank Faltungsformel finden wir $u = \frac{1}{2} f * f$. Für $x \geq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} (f * f)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} e^{-|x-t|} dt = \int_{-\infty}^x e^{-|t|-x+t} dt + \int_x^{\infty} e^{-|t|+x-t} dt \\ &= e^{-x} \int_{-\infty}^x e^{-|t|+t} dt + e^x \int_x^{\infty} e^{-2t} dt \end{aligned}$$

Für die letzten beiden Integrale gilt:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x e^{-|t|+t} dt &= \int_{-\infty}^0 e^{2t} dt + \int_0^x e^0 dt = \frac{1}{2} + x \\ \int_x^{\infty} e^{-2t} dt &= \frac{-1}{2} [e^{-2t}]_x^{\infty} = \frac{1}{2} e^{-2x} \end{aligned}$$

Für $x \geq 0$ erhalten wir somit folgendes Ergebnis:

$$u(x) = \frac{1}{2} \left[e^{-x} \left(\frac{1}{2} + x \right) + e^x \frac{1}{2} e^{-2x} \right] = \frac{1}{2} (1+x) e^{-x}.$$

Da die Funktion $u = \frac{1}{2} f * f$ gerade ist, folgt schließlich

$$u(x) = \frac{1}{2} (1+|x|) e^{-|x|}.$$

Transformation von Differentialgleichungen

K424
Übung

(3) Wir machen die Probe. Für $x \geq 0$ gilt

$$u(x) = \frac{1}{2} (1+x) e^{-x}, \quad u'(x) = \frac{-1}{2} x e^{-x}, \quad u''(x) = \frac{-1}{2} (1-x) e^{-x}.$$

Hier gilt $u(x) - u''(x) = e^{-x} = e^{-|x|}$. Für $x \leq 0$ gilt

$$u(x) = \frac{1}{2} (1-x) e^x, \quad u'(x) = \frac{-1}{2} x e^x, \quad u''(x) = \frac{-1}{2} (1+x) e^x.$$

Hier gilt $u(x) - u''(x) = e^x = e^{-|x|}$. Somit ist u quadrat-integrierbar, zweimal stetig differenzierbar und erfüllt die Differentialgleichung.

(4) Die homogene Gleichung $u - u'' = 0$ hat die allgemeine Lösung

$$u_h(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x} \quad \text{mit} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Allgemeine Lösung der Gleichung $u(x) - u''(x) = e^{-|x|}$ ist demnach

$$u(x) + u_h(x) = \frac{1}{2} (1+|x|) e^{-|x|} + \alpha e^x + \beta e^{-x}.$$

Quadrat-integrierbar ist diese Funktion nur für $\alpha = \beta = 0$.

☺ Die Laplace-Transformation (Kapitel L) geht hier weiter!