

## Kapitel J

## Die Fourier–Isometrie



*L'étude approfondie de la nature est la source  
la plus féconde des découvertes mathématiques.*

Joseph Fourier (1768–1830), *Théorie analytique de la chaleur* (1822)

Vollversion

• [michael-eisermann.de/lehre/HM3](http://michael-eisermann.de/lehre/HM3)

• 30.09.2023

## Inhalt dieses Kapitels J

J002

- 1 Parseval–Gleichung und Fourier–Isometrie
  - Die Energiegleichung und erste Anwendungsbeispiele
  - Die Fourier–Isometrie zwischen Funktion und Spektrum
  - Isoperimetrisches Problem und Lösung durch Fourier–Reihen
- 2 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz
  - Punktweise Konvergenz nach Dirichlet
  - Gleichmäßige Approximation nach Fejér
  - Wann gilt punktweise Konvergenz fast überall?
- 3 Konvergenz im quadratischen Mittel
  - Bestapproximation durch Orthogonalprojektion
  - Konvergenz im quadratischen Mittel
  - Vergleich der drei Konvergenzbegriffe
- 4 Fazit: Fourier–Analyse und Synthese
  - Zusammenfassung
  - Verständnisfragen

**Fourier–Analyse** zerlegt das Signal  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ins Spektrum  $\hat{f} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ :

$$f \circ \longrightarrow \bullet \hat{f}, \quad \hat{f}(k) := \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} f(t) dt, \quad f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ik\omega t}.$$

Hierzu sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  absolut integrierbar auf  $[0, T]$  und  $T$ –periodisch. Der Fourier–Koeffizient  $\hat{f}(k)$  ist die Amplitude der Schwingung  $e^{ik\omega t}$ . Somit ist  $\hat{f} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  das Spektrum zur Grundfrequenz  $\omega = 2\pi/T$ .

**Fourier–Synthese:** Zu gegebenem Spektrum  $\hat{f} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  betrachten wir die zugehörigen Teilschwingungen  $\hat{f}(k) e^{ik\omega t}$  und rekonstruieren hieraus durch Überlagerung die Funktion  $f(x) = \sum_k \hat{f}(k) e^{ik\omega t}$ , falls konvergent. Konvergiert die Reihe? In welchem Sinne? Mit welchem Grenzwert?

Bislang nutzen wir **punktweise und gleichmäßige Konvergenz** (I2A). In diesem Kapitel geht es um **Konvergenz im quadratischen Mittel**. Für typische Anwendungen sind diese drei die zentralen Techniken. Wir nutzen zwei zentrale Sätze: Dirichlet I2A und Fischer–Riesz J1A.

Im vorigen Kapitel haben wir einzelne Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  untersucht. In diesem Kapitel betrachten wir den Vektorraum aller Funktionen. Diese mutige Sichtweise verschafft uns einen besseren Überblick: Wir nutzen unser Wissen über lineare Algebra und Skalarprodukte.

Die  $T$ –periodischen Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  bilden einen Vektorraum, ebenso bilden die Koeffizientenfolgen  $\hat{f} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  einen Vektorraum: Addition und Skalarmultiplikation sind jeweils punktweise erklärt, dies nutzen und schätzen wir bereits als praktische Rechenregeln.

Die Fourier–Analyse ist eine lineare Abbildung  $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$ .

Die Fourier–Synthese ist eine lineare Abbildung  $\mathcal{F}^{-1} : \hat{f} \mapsto f$ .

Auf welchen Funktionenräumen sollten wir diese nun betrachten?

Die Isometrie  $L^2 \leftrightarrow \ell^2$  ist überraschend einfach und überaus nützlich!

Kurzum: Wir transformieren hier nicht nur einzelne Funktionen, sondern untersuchen, wie sich die Fourier–Analyse  $\mathcal{F} : L^2 \rightarrow \ell^2$  und die Fourier–Synthese  $\mathcal{F}^{-1} : \ell^2 \rightarrow L^2$  als lineare Abbildungen verhalten. Eine anschauliche Anwendung ist die isoperimetrische Ungleichung J1B.

## Satz von Parseval: die Energiegleichung

Wir führen die Untersuchungen des vorangegangenen Kapitels I fort. Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  absolut integrierbar auf  $[0, T]$  und  $T$ -periodisch. Die **Fourier-Analyse** zerlegt das Signal  $f$  in sein Spektrum  $\hat{f}$ :

$$f \circ \longrightarrow \hat{f}, \quad \hat{f}(k) := \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} f(t) dt, \quad f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ik\omega t}.$$

Für die punktweise bzw. gleichmäßige Konvergenz dieser Reihe haben wir das praktische Dirichlet-Kriterium I2A, das wir in §J2 beweisen. In §J3 führen wir diese Fourier-Analyse weiter aus und beweisen: Dabei gilt die **Parseval-Gleichung**, auch **Energiegleichung** genannt:

$$\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{\ell^2} \quad \text{also} \quad \frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2$$

Genau dann ist die Funktion  $f$  quadrat-integrierbar,  $\int_0^T |f(t)|^2 dt < \infty$ , wenn die Koeffizientenfolge  $\hat{f}$  quadrat-summierbar ist,  $\sum_k |\hat{f}(k)|^2 < \infty$ .

## Satz von Parseval: die Energiegleichung

😊 Die komplexe Schreibweise ist meist kürzer und übersichtlicher. Für reelle Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nutzen wir auch die Co/Sinus-Reihe:

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$$

Dank der einfachen Umrechnung  $c_{\pm k} = \frac{1}{2}(a_k \mp ib_k)$  erhalten wir:

$$\frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2$$

**Nachrechnen:** Es gilt  $|c_0|^2 = \frac{1}{4}a_0^2$  und  $|c_{\pm k}|^2 = \frac{1}{4}(a_k^2 + b_k^2)$  für  $k \neq 0$ ; jeder Summand tritt jeweils einmal für  $+k$  und einmal für  $-k$  auf.

😊 Wie so oft ist die komplexe Gleichung eleganter und leichter. Ich gebe beide Formeln an, damit Sie sie leicht zur Hand haben.

Physikalisch bedeutet die Parseval-Gleichung eine Energieerhaltung: Die Gesamtenergie des Signals  $f$  (als Integral auf der linken Seite) ist die Summe der Energien aller Teilschwingungen  $\hat{f}(k) e_k$  (rechte Seite).

Analogie: In der Physik ist  $\frac{m}{2}|v|^2$  die kinetische Energie einer Masse  $m$  mit Geschwindigkeit  $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ , also  $v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$ . Da unsere Basis  $(e_1, e_2, e_3)$  orthonormal ist, gilt  $|v|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$ : Die Gesamtenergie ist daher die Summe der Teilenergien!

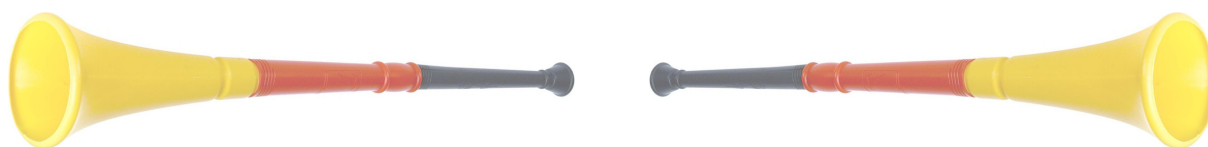
Für trigonometrische Polynome, also endliche Summen statt Reihen, folgt die Parseval-Gleichung direkt aus dem Satz des Pythagoras: I121  
Die Gesamtlänge (aka Norm) des Vektors  $f$  zum Quadrat (linke Seite) ist gleich der Quadratsumme seiner Koordinaten  $\hat{f}(k)$  (rechte Seite).

Der Raum  $L^2$  entsteht als Abschluss der trigonometrischen Polynome: Die Funktionen  $e_k(t) = e^{ik\omega t}$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  bilden eine Hilbert-Basis (J3E), also ein vollständiges Orthonormalsystem für den Raum  $L^2([0, T], \mathbb{C})$  mit dem Skalarprodukt  $\langle f | g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \overline{f(t)} g(t) dt$ , wie oben erklärt.

Alternativ führt folgende Sichtweise und Rechnung ebenfalls zum Ziel: Wie in den folgenden Beispielen gilt Parseval für Rechteckfunktionen. Per Linearkombination gilt Parseval dann für alle Treppenfunktionen. Per Grenzübergang gilt Parseval für alle integrierbaren Funktionen!

Wir können uns  $f$  zum Beispiel als ein akustisches Signal vorstellen. Die Fourier-Analyse  $f \mapsto \hat{f}$  zerlegt das Signal  $f$  in sein Spektrum  $\hat{f}$ . Die Fourier-Synthese  $\hat{f} \mapsto f$  rekonstruiert aus dem Spektrum das ursprüngliche Signal. Dabei geht keinerlei Information verloren!

Anwendung: Aus dem Spektrum können wir Frequenzen leicht ausfiltern, abschwächen oder verstärken. Die Fußball-Weltmeisterschaft 2010 etwa war geprägt vom Brummen der Vuvuzela. Ihre Grundfrequenz liegt bei ca. 230Hz, dazu kommen noch Obertöne. Diese Frequenzen lassen sich gezielt herausfiltern durch (digitale) Fourier-Analyse-Synthese.

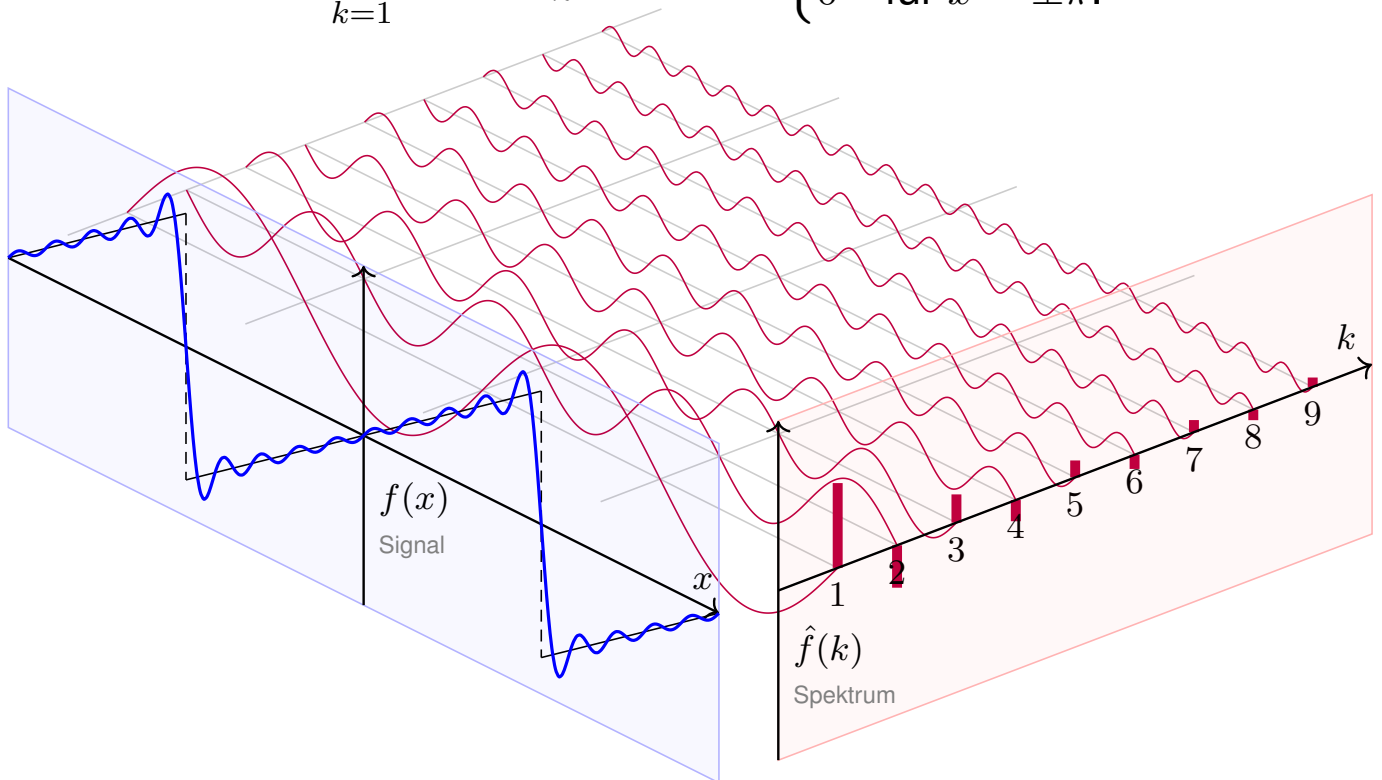


Der klare Vorteil: Man kann die störenden Frequenzen gezielt dämpfen; das Getröte ist trotz Filter zwar noch zu hören, doch spürbar gemindert. So kann die Fernsehzuschauer:in den Stadionjubiläum wieder genießen.

Wieviel Energie geht dem Signal hierdurch verloren? Genau die Energie der herausgefilterten Frequenzen. Ein Jubel für die Energiegleichung!

**Aufgabe:** Berechnen Sie beide Seiten der Energiegleichung für

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \sin(kx) = \begin{cases} x & \text{für } -\pi < x < \pi, \\ 0 & \text{für } x = \pm\pi. \end{cases}$$



**Lösung:** Wir berechnen beide Seiten der Energiegleichung

$$\frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f(t)|^2 dt \stackrel{!}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k^2| = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2.$$

Das Integral ergibt:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

Die Reihe ergibt:

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Dies entspricht der bemerkenswerten Gleichung 1321

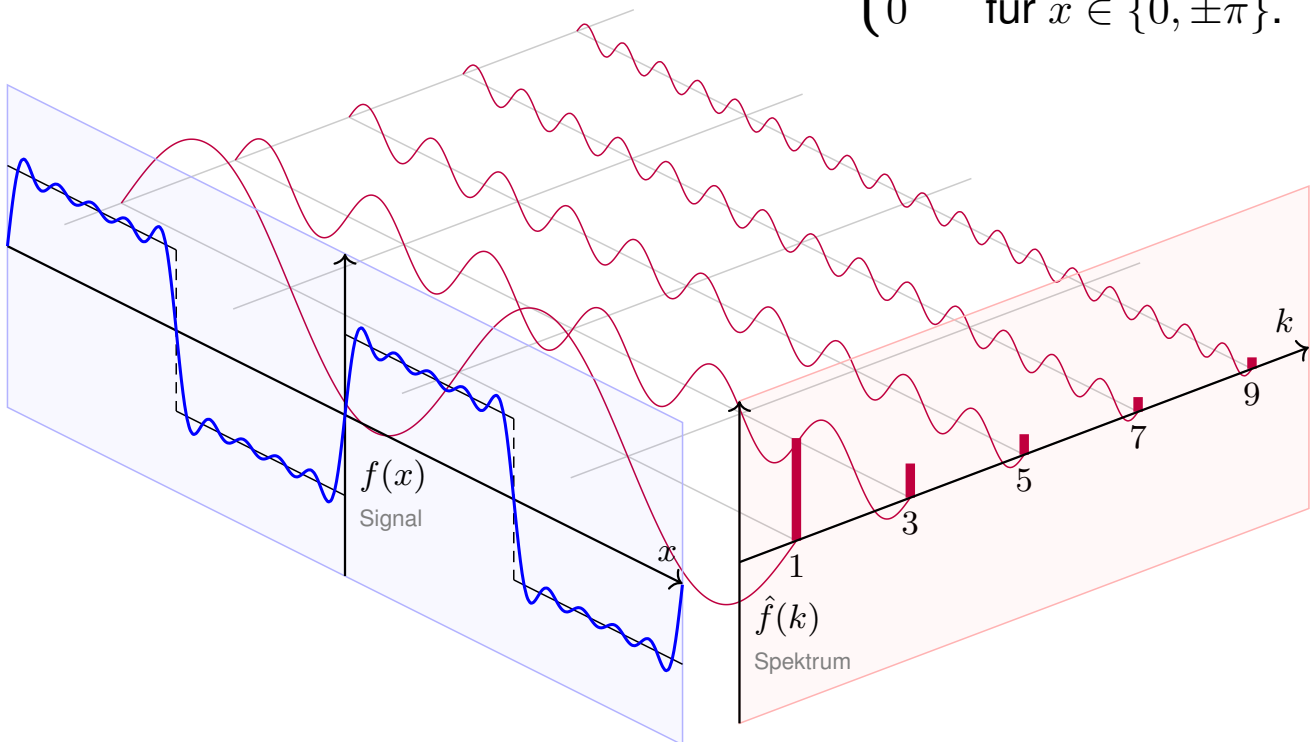
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

😊 Diese Reihe haben wir im vorigen Kapitel ausgerechnet.



**Aufgabe:** Berechnen Sie beide Seiten der Energiegleichung für

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left[ \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right] = \begin{cases} +1 & \text{für } 0 < x < \pi, \\ -1 & \text{für } -\pi < x < 0, \\ 0 & \text{für } x \in \{0, \pm\pi\}. \end{cases}$$



**Lösung:** Wir berechnen beide Seiten der Energiegleichung

$$\frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f(t)|^2 dt \stackrel{!}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k^2| = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2.$$

Das Integral ergibt:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = 1$$

Die Reihe ergibt:

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{8}{\pi^2 (2j+1)^2}$$

Dies entspricht der bemerkenswerten Gleichung 1309

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Diesen Wert können Sie alternativ auch aus  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$  ableiten. Sehen Sie wie?

*Hinweis:* Sie können die ungeraden und die geraden Terme getrennt summieren und erhalten  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \sum_{j=0}^{\infty} 1/(2j+1)^2 + \sum_{j=1}^{\infty} 1/(2j)^2$ , die letzte Reihe ist gleich  $\frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ .

Die **quadrat-integrierbaren** Funktionen bilden den  $\mathbb{C}$ –Vektorraum

$$L^2 = L^2([0, T], \mathbb{C}) := \left\{ f : [0, T] \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{t=0}^T |f(t)|^2 dt < \infty \right\}.$$

Hierauf haben wir als **Skalarprodukt** und **Norm** die Integrale

$$\langle f | g \rangle_{L^2} := \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \overline{f(t)} g(t) dt \quad \text{und} \quad \|f\|_{L^2}^2 := \frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f(t)|^2 dt.$$

Die **quadrat-summierbaren** Folgen bilden den  $\mathbb{C}$ –Vektorraum

$$\ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) := \left\{ \hat{f} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 < \infty \right\}.$$

Hierauf haben wir als **Skalarprodukt** und **Norm** die Summen

$$\langle \hat{f} | \hat{g} \rangle_{\ell^2} := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(k)} \hat{g}(k) \quad \text{und} \quad \|\hat{f}\|_{\ell^2}^2 := \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2.$$

Das Produkt ist absolut integrierbar/summierbar dank Cauchy–Schwarz.

😊 Beide Vektorräume  $L^2$  und  $\ell^2$  scheinen zunächst sehr verschieden. Die Fourier–Isometrie enthüllt jedoch das Gegenteil: Sie sind isomorph!

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  abs. integrierbar auf  $[0, T]$  und  $T$ –periodisch,  $\omega = 2\pi/T$ .

Die **Fourier–Analyse** zerlegt das Signal  $f$  in sein Spektrum  $\hat{f}$ :

$$f \circ \longrightarrow \hat{f}, \quad \hat{f}(k) := \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} f(t) dt, \quad f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ik\omega t}.$$

Es gilt die **Parseval–Gleichung**, auch **Energiegleichung** genannt:

$$\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{\ell^2} \quad \text{also} \quad \frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2$$

Dank dieser Gleichung gilt  $f \in L^2$  genau dann, wenn  $\hat{f} \in \ell^2$  gilt.

Für  $f, g \in L^2$  gilt die **Parseval–Gleichung** zudem für Skalarprodukte:

$$\langle f | g \rangle_{L^2} = \langle \hat{f} | \hat{g} \rangle_{\ell^2} \quad \text{also} \quad \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \overline{f(t)} g(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(k)} \hat{g}(k)$$

😊 Diese Beziehungen fassen wir in folgendem Satz zusammen: Fourier–Analyse und –Synthese sind zueinander inverse Isometrien.

## Satz J1A: Fourier–Isometrie, Fischer–Riesz 1907

Jeder Funktion  $f \in L^2$  ordnen wir ihre Fourier–Koeffizienten  $\hat{f} \in \ell^2$  zu:

$$\mathcal{F} : L^2([0, T], \mathbb{C}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) : f \mapsto \hat{f} \text{ mit } \hat{f}(k) = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} f(t) dt$$

Umgekehrt definiert jede Koeffizientenfolge  $\hat{f} \in \ell^2$  eine Funktion  $f \in L^2$ :

$$\mathcal{F}^{-1} : \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \rightarrow L^2([0, T], \mathbb{C}) : \hat{f} \mapsto f \text{ mit } f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ik\omega t}$$

Diese Abbildungen sind  $\mathbb{C}$ –linear und zueinander inverse Isometrien. Norm und Skalarprodukt bleiben erhalten dank Parseval–Gleichung:

$$\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{\ell^2} \quad \text{also} \quad \frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2,$$

$$\langle f | g \rangle_{L^2} = \langle \hat{f} | \hat{g} \rangle_{\ell^2} \quad \text{also} \quad \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \overline{f(t)} g(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(k)} \hat{g}(k).$$

## Die Fourier–Isometrie

Diese Fourier–Isometrie ist der Höhepunkt unserer kurzen Einführung zu Fourier–Reihen. Sie perfektioniert die ersehnte Analyse / Synthese:

$$(\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}) : L^2([0, T], \mathbb{C}) \cong \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) : f \leftrightarrow \hat{f}$$

Diese Beziehung ist höchst erstaunlich und ungemein praktisch: Aus dem Signal  $f$  gewinnen wir das Spektrum  $\hat{f}$  und umgekehrt.

Aus  $f \in L^2 \subset L^1$  folgt  $\hat{f} \in \ell^2 \subset \ell^\infty$  dank Energiegleichung. Umgekehrt: Für  $\hat{f} \in \ell^2 \supset \ell^1$  konvergieren die Polynome  $f_n(t) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{ik\omega t}$  in  $L^2 \supset L^\infty$  gegen eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  dank Vollständigkeit von  $L^2$ .

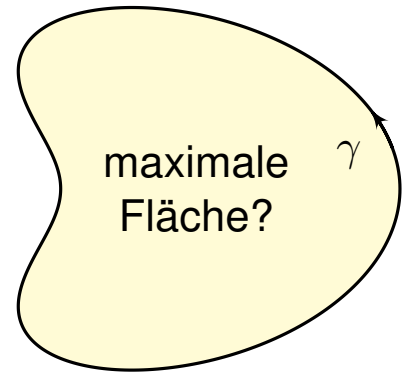
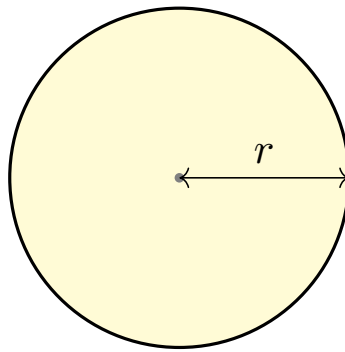
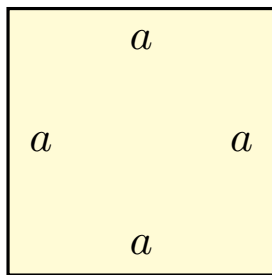
Aus der Energiegleichung folgt die allgemeine Parseval–Gleichung. Damit das Integral einen Sinn hat, muss  $f g$  absolut integrierbar sein. Damit die Reihe einen Sinn hat, muss  $\hat{f} \hat{g}$  absolut summierbar sein. Beides wird garantiert durch die Cauchy–Schwarz–Ungleichung:

$$\|f \cdot g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^2} \cdot \|g\|_{L^2}, \quad \|\hat{f} \cdot \hat{g}\|_{\ell^1} \leq \|\hat{f}\|_{\ell^2} \cdot \|\hat{g}\|_{\ell^2}$$

Ungleichungen und Konvergenzbegriffe werden nachfolgend ausgeführt. Doch zuerst präsentiere ich eine elegante geometrische Anwendung.



Wieviel Fläche  $F$  können Sie mit einem Zaun der Länge  $L$  abstecken?



- Aufgabe:** (0) Wie verhalten sich  $L$ ,  $F$  und  $F/L^2$  bei Streckung um  $\lambda$ ?
- (1) Welche Fläche  $F_{\square}$  erreichen Sie mit einem Quadrat von Umfang  $L$ ?
  - (2) Welche Fläche  $F_{\circ}$  erreichen Sie mit einem Kreis von Umfang  $L$ ?
  - (3) Geht noch mehr? Wie sehen optimale Kurven aus?

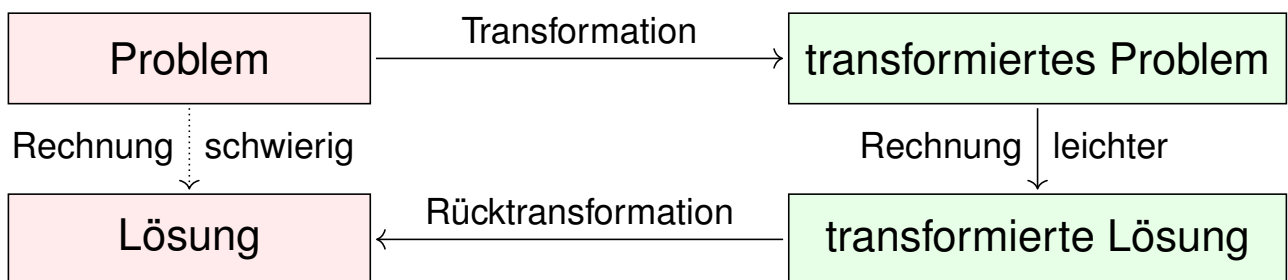
- Lösung:** (0)  $L$  wächst linear,  $F$  quadratisch,  $F/L^2$  bleibt konstant.
- (1) Seitenlänge  $a = L/4$ , Fläche  $F_{\square} = a^2 = L^2/16$ . Das ist schon gut.
  - (2) Radius  $r = L/2\pi$ , Fläche  $F_{\circ} = \pi r^2 = L^2/4\pi$ . Das ist noch besser!

Sei  $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$  ein geschlossener Weg, also  $\gamma(0) = \gamma(L)$ .  
Hierbei sei  $\gamma'$  absolut integrierbar und  $\gamma(t) = \gamma(0) + \int_0^t \gamma'(\tau) d\tau$ .

Wir parametrisieren nach Weglänge, mit konstanter Geschwindigkeit  $|\gamma'(t)| = 1$  für alle  $t$ . Nach Skalierung können wir  $L = 2\pi$  annehmen.

Beispiel: Der Kreis  $\gamma(t) = c_0 + c_1 e^{it}$  mit  $c_0, c_1 \in \mathbb{C}$  und  $|c_1| = 1$ .

Die umschlossene Fläche ist  $F = \frac{1}{2} \text{Im} \int_{t=0}^{2\pi} \bar{\gamma} \gamma' dt = \pi$ .



- Aufgabe:** Untersuchen Sie die Fourier-Entwicklung  $\gamma(t) = \sum_k c_k e^{ikt}$ :
- (1) Entwickeln Sie  $\gamma'$  und berechnen Sie  $\sum_k k^2 |c_k|^2$  dank Parseval.
  - (2) Berechnen Sie die von  $\gamma$  umschlossene Fläche  $F$  mit Green.
  - (3) Gilt immer  $F \leq \pi$ ? (4) Für welche Kurven gilt Gleichheit?

(1) Wir entwickeln  $\gamma, \gamma' : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  in ihre Fourier-Reihen

$$\gamma(t) = \sum c_k e^{ikt} \quad \text{und} \quad \gamma'(t) \sim \sum ik c_k e^{ikt}.$$

Wir lesen diese Beziehung von rechts nach links als Integration (I3A):  
Wegen  $\gamma(t) = \gamma(0) + \int_0^t \gamma'(\tau) d\tau$  dürfen wir termweise integrieren!  
Dank Energiegleichung und Parametrisierung nach Weglänge folgt:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 |c_k|^2 \stackrel{(E)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \underbrace{|\gamma'(t)|^2}_{=1} dt = 1.$$

(2) Die umschlossene Fläche berechnen wir mit Green und Parseval:

$$\begin{aligned} F &\stackrel{(G)}{=} \frac{1}{2} \int_{t=0}^{2\pi} \gamma_1 \gamma'_2 - \gamma_2 \gamma'_1 dt = \frac{1}{2} \int_{t=0}^{2\pi} \text{Im} \left[ (\gamma_1 - i\gamma_2)(\gamma'_1 + i\gamma'_2) \right] dt \\ &= \pi \text{Im} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \bar{\gamma} \gamma' dt \right] \stackrel{(P)}{=} \pi \text{Im} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{c}_k \cdot ikc_k \right] = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} k |c_k|^2. \end{aligned}$$

Gleichung (G) ist die Greensche Formel [E209] für den Flächeninhalt.

(3) Wir vergleichen unsere Fläche  $F$  mit der Kreisfläche  $\pi$ :

$$|F| \stackrel{(2)}{=} \left| \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} k |c_k|^2 \right| \leq \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k| \cdot |c_k|^2 \quad \text{und} \quad \pi \stackrel{(1)}{=} \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 \cdot |c_k|^2$$

Die erste Reihe ist termweise kleiner-gleich der zweiten:

$$|F| - \pi \leq \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{(|k| - k^2)}_{\leq 0} |c_k|^2 \leq 0.$$

Also gilt  $|F| \leq \pi$ : Die Kreisfläche kann nicht übertroffen werden!

(4) Gleichheit gilt nur, wenn  $c_k = 0$  für alle  $k \notin \{-1, 0, 1\}$ . Also

$$\gamma(t) = c_{-1} e^{-it} + c_0 + c_1 e^{it} \quad \text{mit} \quad |c_1|^2 + |c_{-1}|^2 \stackrel{(1)}{=} 1.$$

Aus  $F = +\pi$  folgt  $|c_1|^2 - |c_{-1}|^2 \stackrel{(2)}{=} +1$ , also  $|c_1| = 1$  und  $|c_{-1}| = 0$ .

Aus  $F = -\pi$  folgt  $|c_1|^2 - |c_{-1}|^2 \stackrel{(2)}{=} -1$ , also  $|c_1| = 0$  und  $|c_{-1}| = 1$ .

😊 Das heißt, nur Kreise  $\gamma(t) = c_0 + e^{i(\alpha \pm t)}$  maximieren die Fläche!  
Alle anderen Kurven umschließen strikt kleineren Flächeninhalt.

Das isoperimetrische Problem ist eine klassische Optimierungsaufgabe: Wieviel Fläche  $F$  können Sie mit einem Zaun der Länge  $L$  abstecken? Die Lösung mit Fourier–Reihen grenzt an Zauberei! Was passiert hier?

Nach ersten Beispielen wollen wir *alle* Möglichkeiten erkunden. Wir wollen alle periodischen Funktionen  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  untersuchen und zu gegebenem Umfang  $L$  die größtmögliche Fläche  $F$  finden.

Der Raum aller Funktionen ist allerdings sehr unübersichtlich. Die Fourier–Isometrie übersetzt dies in ein Problem über Reihen. Dieses ist wesentlich übersichtlicher und kann leicht gelöst werden.

Dabei haben wir die Fourier–Isometrie voll ausgenutzt: Die Übersetzung bewahrt alle wesentlichen Informationen!

Dieses schöne Ergebnis bildet eine würdige Illustration: Transformation zur Vereinfachung ist durchaus typisch.

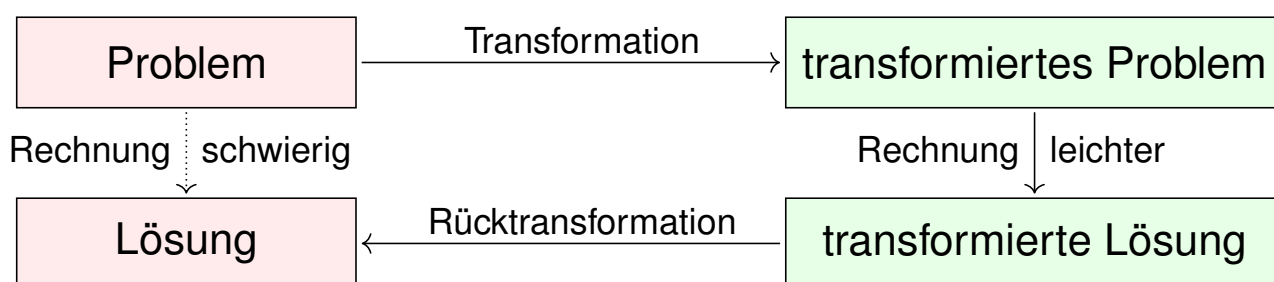
😊 Darum geht es in Mathematik und Wissenschaft allgemein: Zusammenhänge verstehen und geeignete Werkzeuge entwickeln, um damit konkrete Probleme zu lösen, effizient, sicher, korrekt.

## Die isoperimetrische Ungleichung

J118

Wieviel Fläche  $F$  können Sie mit einem Zaun der Länge  $L$  abstecken?

😊 Fourier transformiert ein schwieriges Problem in ein leichtes!



😊 Wir haben so den Beweis von Hurwitz (1902) nachgerechnet:

### Satz J1B: isoperimetrische Ungleichung

Sei  $\gamma: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein geschlossener Weg, also  $\gamma(0) = \gamma(L)$ . Zudem sei  $\gamma$  stückweise stetig differenzierbar und habe Länge  $L$ .

Für den umschlossenen Flächeninhalt  $F$  gilt immer  $F \leq F_{\circ} = L^2/4\pi$ . Gleichheit gilt nur, wenn  $\gamma$  einen Kreis vom Umfang  $L$  beschreibt.

Das ist anschaulich plausibel und nun auch nachvollziehbar bewiesen!



Ein klassisches Optimierungsproblem:  
Der Legende nach wurde Karthago gegründet durch die phönizische Königin Elissa, römisch Dido genannt. Der lokale Herrscher versprach ihr dazu so viel Land, wie sie mit einer Kuhhaut umspannen könne. Diese schnitt Dido in dünne Streifen der Gesamtlänge  $\ell$  und maß die Grenze des zukünftigen Karthago ab, das auf einer Seite durch die gerade Mittelmeerküste begrenzt wird.

**Aufgabe:** (1) Welche Kurve wählt Dido, um die Fläche zu maximieren?  
(2) Und wenn zwei Küstenpunkte der Stadtgrenze vorgegeben sind?  
😊 Intuition ist gut, aber vage. Schlüssige Argumente sind besser.

(1) Wir betrachten die Fläche, die von einer Geraden  $G$  und einem Weg  $\gamma$  der Länge  $\ell$  begrenzt wird. Durch Spiegelung an  $G$  erweitern wir  $\gamma$  zu einem geschlossenen Weg. Dabei verdoppeln sich die Länge und der umschlossene Flächeninhalt. Nach der isoperimetrischen Ungleichung folgt  $2F \leq (2\ell)^2 / (4\pi)$ , also  $F \leq \ell^2 / (2\pi)$ . Nur für einen Halbkreis erhalten wir Gleichheit.

(2) Wir fixieren zwei Punkte  $A$  und  $B$  mit Abstand  $< \ell$  auf der Geraden  $G$  und verlangen, dass  $\gamma$  von  $A$  nach  $B$  läuft. Sei  $\Gamma$  der Kreisbogen der Länge  $\ell$  von  $A$  nach  $B$ . Wir vergleichen den von  $\gamma$  und  $\Gamma$  umschlossenen Flächeninhalt, jeweils ergänzt durch den fehlenden Kreisbogen jenseits  $G$ . Die isoperimetrische Ungleichung besagt, dass der Flächeninhalt genau für  $\gamma = \Gamma$  maximal ist.

## Die isoperimetrische Ungleichung

J120

Wer Freude am Knobeln hat, mag vielleicht folgende Varianten untersuchen: Sie verfügen über einen Zaun der Länge  $L$ , entweder starr (ein Geradensegment) oder flexibel (eine stückweise stetig differenzierbare Kurve). In einem großen rechteckigen Garten möchten Sie einen Bereich für Ihre Kaninchen einzäunen. Welche Fläche ist hier höchstens möglich? Welche Zaunkurve maximiert die Fläche? Was gilt für einen kreisförmigen Garten? Was gilt für ein parabelförmig auslaufendes Ende des Gartens? Machen Sie sich Skizzen und argumentieren Sie umsichtig!

Zum Ausklang nenne ich noch ein einfaches, aber erhellendes Zahlenbeispiel. Es ist eine schöne, leichte Aufgabe, doch sie erfordert geometrischen Sachverstand und quantitativen Vergleich. Mit den nützlichen Werkzeugen Ihrer Vorlesung zur HM3 gelingt Ihnen die Lösung nun leicht:

**Aufgabe:** (nach einer Klausuraufgabe vom Februar 2012)

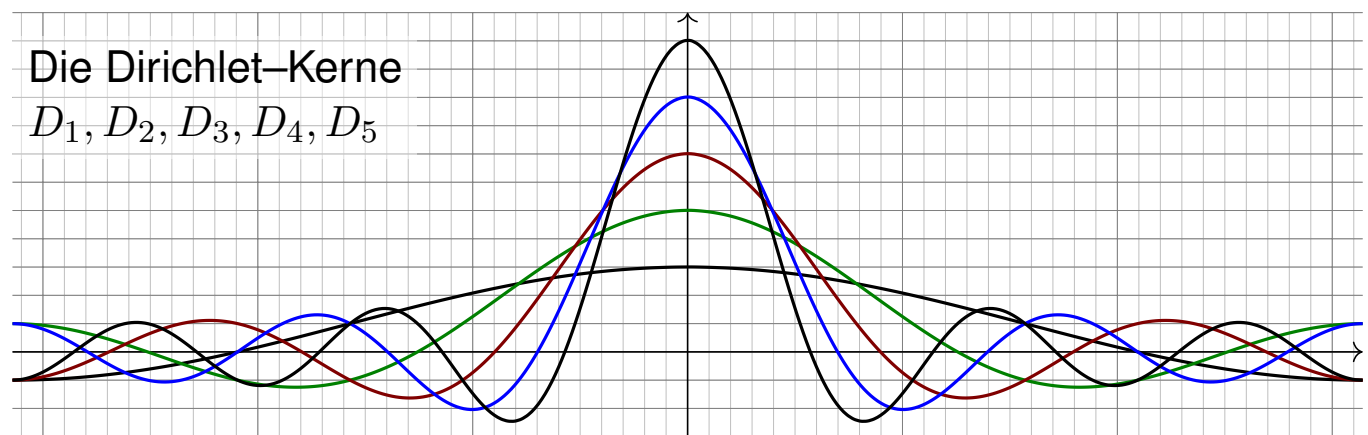
- (1) Können Sie mit 12m Zaun eine Fläche von  $12\text{m}^2$  umschließen?
- (2) Können Sie mit 13m Zaun eine Fläche von  $13\text{m}^2$  umschließen?

**Lösung:** Wir wissen, dass der Kreis den Flächeninhalt  $F$  maximiert:

$$F \leq F_{\circ} = L^2 / 4\pi, \quad \text{und Gleichheit gilt nur für den Kreis (J1B).}$$

- (1) Für  $L = 12$  finden wir  $F_{\circ} = L^2 / 4\pi < 12$ . (Es gilt  $12 < 4\pi < 13$ .)
- (2) Für  $L = 13$  erreicht der Kreis die Fläche  $F_{\circ} = L^2 / 4\pi > 13$ .

Der Satz von Dirichlet I2A ist der Grundstein der Fourier-Reihen.  
Wir rechnen ihn nun geduldig nach. Nur für Unerschrockene!



**Aufgabe:** (1) Rechnen Sie die Formel des **Dirichlet-Kerns** nach:

$$D_n(x) := \sum_{k=-n}^n e^{ikx} = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{\sin((n + 1/2)x)}{\sin(x/2)}$$

(2) Für das  $n$ -te Fourier-Polynom von  $f$  folgt die **Faltungsformel**:

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x - t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - t) D_n(t) dt$$

**Lösung:** (1) Wir nutzen die geometrische Reihe für  $z = e^{ix}$ :

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \sum_{k=-n}^n e^{ikx} = e^{-inx} \cdot \sum_{k=0}^{2n} e^{ikx} = \frac{e^{-i(n+1/2)x}}{e^{-ix/2}} \cdot \frac{1 - e^{i(2n+1)x}}{1 - e^{ix}} \\ &= \frac{e^{i(n+1/2)x} - e^{-i(n+1/2)x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} = \frac{\sin((n + 1/2)x)}{\sin(x/2)} \end{aligned}$$

(2) Das  $n$ -te Fourier-Polynom von  $f$  ist definiert durch

$$f_n(x) := \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \quad \text{mit den Koeffizienten} \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} f(t) dt.$$

Wir setzen ein und fassen dank Linearität zusammen:

$$\begin{aligned} 2\pi f_n(x) &\stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{k=-n}^n \left[ \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} f(t) dt \right] e^{ikx} \stackrel{\text{Lin}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \sum_{k=-n}^n e^{ik(x-t)} \right] dt \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x - t) dt \stackrel{\text{Subs}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - s) D_n(s) ds \end{aligned}$$

**Satz J2A: Konvergenz in einem vorgegebenen Punkt**

Angenommen,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  erfüllt die Dirichlet-Bedingung im Punkt  $x$ , d.h. beide Grenzwerte  $f(x\pm)$  und beide Ableitungen  $f'(x\pm)$  existieren. Dann konvergiert im Punkt  $x$  die Fourier-Reihe  $f_n(x)$  gemäß

$$f_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \rightarrow \frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)] \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

**Beweis:** Dank unserer obigen Vorbereitungen (1) und (2) wissen wir:

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)}{\sin(t/2)} \sin((n + \frac{1}{2})t) dt$$

Die Konvergenz für  $n \rightarrow \infty$  beweisen wir durch folgende Grenzwerte:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 f(x+t) D_n(t) dt &\rightarrow \frac{1}{2} f(x-), \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt &\rightarrow \frac{1}{2} f(x+). \end{aligned}$$

**Beweis des Dirichlet-Kriteriums**

Wir zeigen den rechten Grenzwert. Hierzu nutzen wir die Funktion

$$g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C} : t \mapsto \begin{cases} \frac{f(x+t) - f(x+)}{\sin(t/2)} & \text{für } 0 < t \leq \pi, \\ 0 & \text{für } -\pi \leq t \leq 0. \end{cases}$$

Für  $t \searrow 0$  gilt  $g(t) \rightarrow 2f'(x+)$ . Demnach ist mit  $f$  auch  $g$  integrierbar.

Für  $D_n(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kt)$  gilt  $\int_{-\pi}^0 D_n(t) dt = \int_0^{\pi} D_n(t) dt = \pi$ .

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt - \frac{1}{2} f(x+) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{\pi} [f(x+t) - f(x+)] D_n(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x+)}{\sin(t/2)} \sin((n + \frac{1}{2})t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin((n + \frac{1}{2})t) dt \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Der letzte Grenzwert ist das Riemann-Lebesgue-Lemma I3B.



**Aufgabe:** (3) Zeigen Sie für  $0 \leq t \leq s \leq \pi$  die Ungleichungen

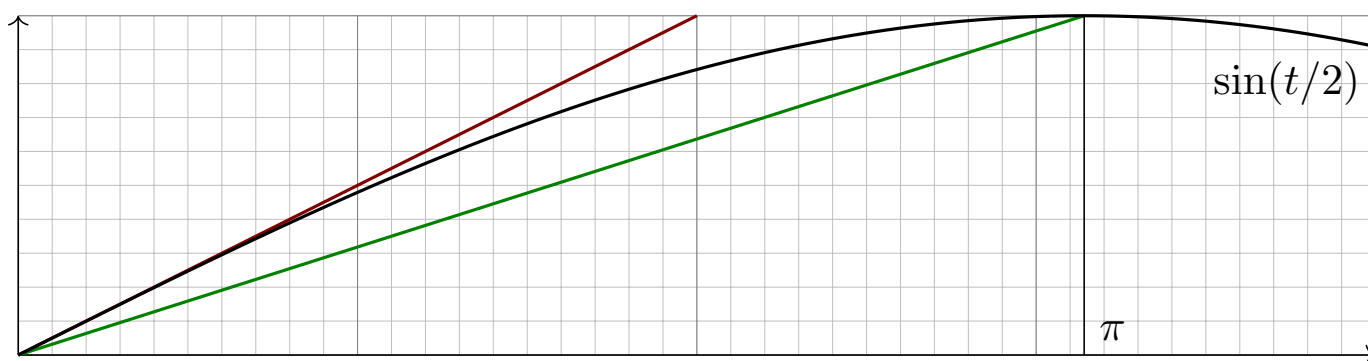
$$\frac{t}{\pi} \leq \sin\left(\frac{t}{2}\right) \leq \frac{t}{2} \quad \text{und} \quad \frac{t}{\sin(t/2)} \leq \frac{s}{\sin(s/2)}$$

(4) Sei  $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  absolut stetig mit  $f(0) = 0$  und  $|f'| \leq L$ .

Zeigen Sie für  $f(t)$  und  $g(t) = f(t)/\sin(t/2)$  die Schranken

$$|f(t)| \leq Lt, \quad |g(t)| \leq L\pi, \quad |g'(t)| \leq \frac{4L}{t}.$$

**Lösung:** (3) Kurvendiskussion:  $\sin(t/2)$  ist konkav auf  $[0, \pi]$ .



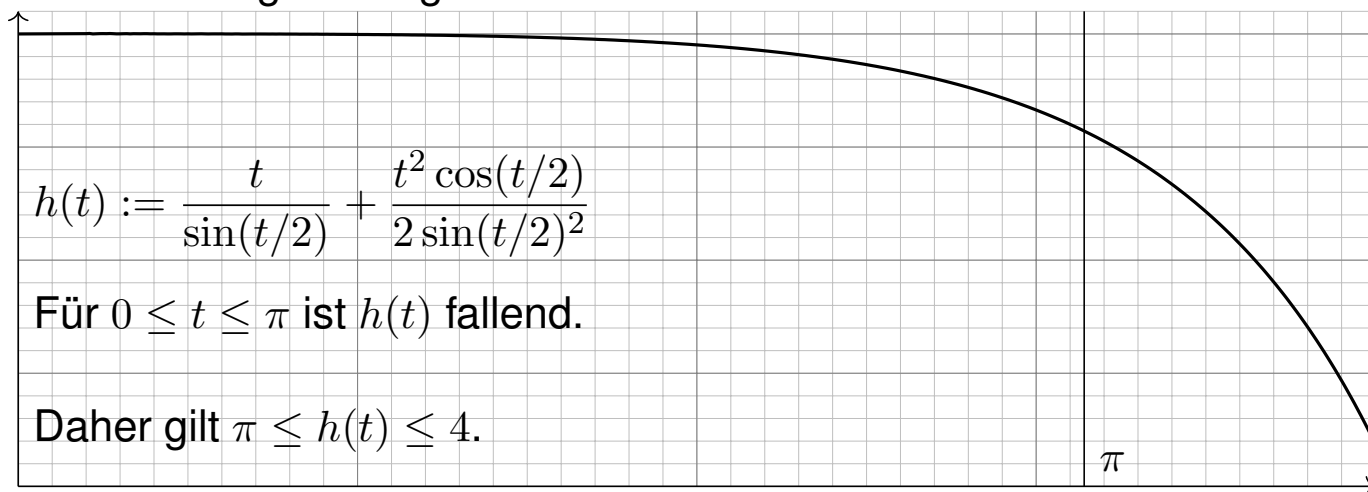
(4) Mit  $f(0) = 0$  und  $|f'| \leq L$  gilt

$$|f(t)| = \left| \int_{\tau=0}^t f'(\tau) d\tau \right| \leq \int_{\tau=0}^t |f'(\tau)| d\tau \leq \int_{\tau=0}^t L d\tau = Lt,$$

$$|g(t)| = \left| \frac{f(t)}{\sin(t/2)} \right| = \frac{|f(t)|}{|\sin(t/2)|} \leq \frac{Lt}{\sin(t/2)} \leq \frac{Ls}{\sin(s/2)} \leq L\pi,$$

$$|g'(t)| = \left| \frac{f'(t)}{\sin(t/2)} - \frac{f(t) \cos(t/2)/2}{\sin(t/2)^2} \right| \leq \frac{L}{\sin(t/2)} + \frac{Lt \cos(t/2)}{2 \sin(t/2)^2} \leq \frac{4L}{t}.$$

Die letzte Ungleichung erhalten wir durch eine Kurvendiskussion:



**Satz J2B: gleichmäßige Konvergenz mit Fehlerschranke**

Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  sei periodisch und absolut stetig mit  $|f'| \leq L$ . Dann konvergieren die Fourier-Polynome  $f_n$  gleichmäßig gegen  $f$ : Für alle  $x \in \mathbb{R}$  und  $n \geq 7$  gilt die explizite Fehlerschranke

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 2L \cdot \ln(n)/n \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

**Beweis:** Nach Verschiebung dürfen wir  $x = 0$  und  $f(x) = 0$  annehmen. Dank unserer obigen Vorbereitungen (1) und (2) wissen wir:

$$f_n(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{\sin(t/2)} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt$$

Wir zerlegen dies in  $\int_{-\pi}^{-\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\pi}$  für  $\varepsilon = \pi/(2n + 1)$ . Dank (4) gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^{\varepsilon} \left| \frac{f(t)}{\sin(t/2)} \right| \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt &\leq \frac{L\varepsilon}{\sin(\varepsilon/2)} \int_0^{\varepsilon} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt \\ &= \frac{L\varepsilon}{\sin(\varepsilon/2)} \cdot \left[ -\frac{\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{n + \frac{1}{2}} \right]_0^{\varepsilon} = \frac{L}{2n + 1} \cdot \frac{2\pi/(2n + 1)}{\sin(\pi/(4n + 1))} \end{aligned}$$

**Beweis des Dirichlet-Kriteriums**

Für  $\int_{-\varepsilon}^0$  gilt dieselbe Schranke. Für  $\int_{\varepsilon}^{\pi}$  nutzen wir partielle Integration:

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{\pi} f(t) D_n(t) dt &= \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{f(t)}{\sin(t/2)} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt \\ &= \left[ -\frac{f(t)}{\sin(t/2)} \frac{\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{n + \frac{1}{2}} \right]_{\varepsilon}^{\pi} + \int_{\varepsilon}^{\pi} \left[ \frac{f(t)}{\sin(t/2)} \right]' \frac{\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{n + \frac{1}{2}} dt \end{aligned}$$

Für  $\varepsilon = \pi/(2n + 1)$  verschwindet die Auswertung  $[\dots]_{\varepsilon}^{\pi}$ . Mit (4) bleibt:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\varepsilon}^{\pi} f(t) D_n(t) dt \right| &\leq \int_{\varepsilon}^{\pi} \left| \left[ \frac{f(t)}{\sin(t/2)} \right]' \right| \cdot \frac{1}{n + \frac{1}{2}} dt \leq \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{4L}{t} dt \\ &= \frac{4L}{n + \frac{1}{2}} \left[ \ln \pi - \ln \varepsilon \right] = \frac{8L}{2n + 1} \ln(2n + 1) \end{aligned}$$

Für  $\int_{-\pi}^{-\varepsilon}$  gilt dieselbe Schranke. Für den Gesamtfehler erhalten wir:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{L}{2n + 1} \left[ \frac{2/(2n + 1)}{\sin(\pi/(4n + 2))} + \frac{8}{\pi} \ln(2n + 1) \right] \leq 2L \cdot \frac{\ln n}{n}$$

Die letzte Ungleichung gilt für  $n \geq 7$ , erneut dank Kurvendiskussion.

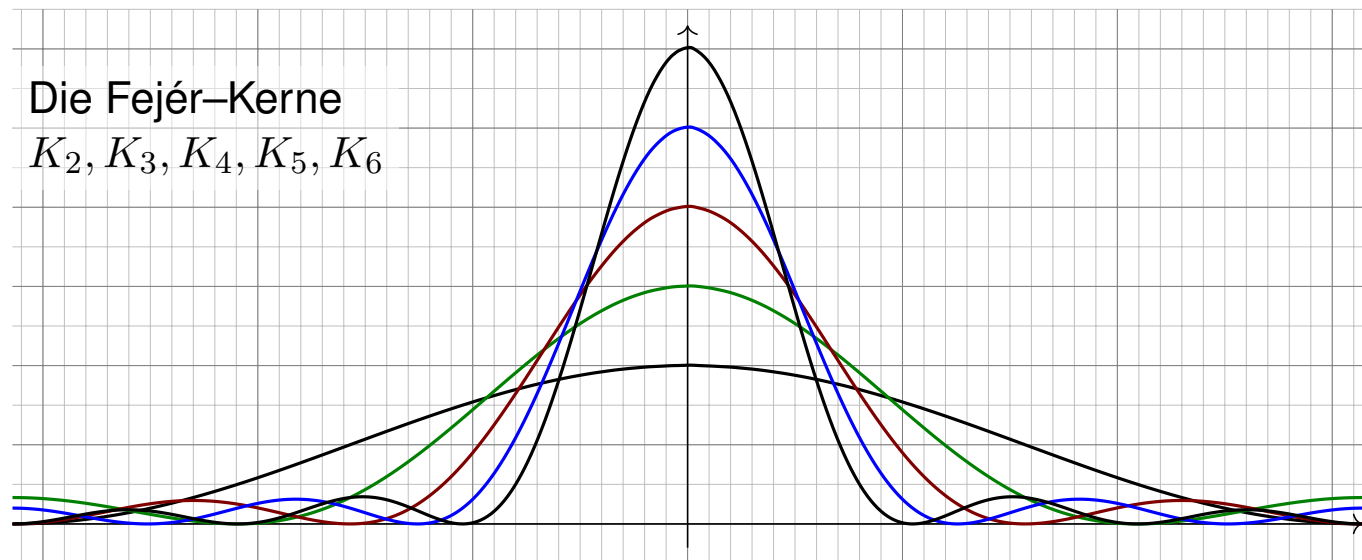
- 😊 Die Fourier–Polynome  $f_n$  zu  $f$  sind die  $L^2$ –Bestapproximation. [J310]
  - 😊 Das Dirichlet–Kriterium I2A sichert punktweise Konvergenz. [I216]
  - 😊 Ist  $f$  absolut stetig mit  $|f'| \leq L$ , so gilt gleichmäßige Konvergenz auf ganz  $\mathbb{R}$  gemäß  $|f_n - f| \leq 2L \cdot \ln(n)/n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . [I216]
  - 😞 Ohne Differenzierbarkeit geht's nicht: Es gibt stetige Funktionen  $f$ , deren Fourier–Reihe  $f_n(x)$  in allen Punkten  $x \in \mathbb{Q}$  divergiert. [J218]
- Geniale Lösung: Lipót Fejér nutzte statt  $f_n$  das arithmetische Mittel

$$f_n^* := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_n = \sum_{k=-n}^n \frac{n - |k|}{n} c_k e^{ikx}.$$

- 😊 Diese Gewichtung dämpft Oszillationen und konvergiert immer:

## Satz J2c: Gleichmäßige Approximation, Fejér 1911

Vorgelegt sei eine beliebige stetige Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  von Periode  $T$ . Die Fejér–Polynome  $f_n^*$  konvergieren gleichmäßig gegen  $f$ , das heißt: Der maximale Abstand wird beliebig klein,  $\max |f_n^* - f| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .



**Aufgabe:** (1) Berechnen Sie **Dirichlet–Kern** und **Fejér–Kern**:

$$D_n(x) := \sum_{k=-n}^n e^{ikx} \quad \text{und} \quad K_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_n(x)$$

(2) Für das  $n$ –te Fejér–Polynom von  $f$  folgt die **Faltungsformel**:

$$f_n^*(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_n(x - t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - t) K_n(t) dt$$

**Lösung:** (1) Wir kennen bereits die Dirichlet-Kerne J201:

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \sum_{k=-n}^n e^{ikx} = e^{-inx} \cdot \sum_{k=0}^{2n} e^{ikx} = \frac{e^{-i(n+1/2)x}}{e^{-ix/2}} \cdot \frac{1 - e^{i(2n+1)x}}{1 - e^{ix}} \\ &= \frac{e^{i(n+1/2)x} - e^{-i(n+1/2)x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} = \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)} \end{aligned}$$

Aufsummieren führt uns glücklich zu einer Teleskopsumme:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{i(k+1/2)x} - e^{-i(k+1/2)x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} \cdot \frac{e^{ix/2} - e^{-ix/2}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{i(k+1)x} - e^{ikx} + e^{-i(k+1)x} - e^{-ikx}}{(e^{ix/2} - e^{-ix/2})^2} \\ &= \frac{e^{inx} - 2 + e^{-inx}}{(e^{ix/2} - e^{-ix/2})^2} = \frac{\sin(nx/2)^2}{\sin(x/2)^2} = \frac{1 - \cos(nx)}{1 - \cos(x)} \end{aligned}$$

😊 Beide Kerne sind normiert:  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt = 1$ .  
Anders als der Dirichlet-Kern  $D_n$  erfüllt der Fejér-Kern zudem  $K_n \geq 0$ .

(2) Das  $n$ -te Fourier-Polynom von  $f$  ist definiert durch

$$f_n(x) := \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \quad \text{mit den Koeffizienten} \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} f(t) dt.$$

Wir setzen ein und fassen dank Linearität zusammen:

$$\begin{aligned} f_n(x) &\stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \left[ \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} f(t) dt \right] e^{ikx} \stackrel{\text{Lin}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \sum_{k=-n}^n e^{ik(x-t)} \right] dt \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt \quad \stackrel{\text{Subs}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-s) D_n(s) ds \end{aligned}$$

Das  $n$ -te Fejér-Polynom von  $f$  ist das arithmetische Mittel:

$$f_n^*(x) := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_n(x-t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K_n(t) dt$$

😊 Diese Integraldarstellung nutzen wir nun zur Fehlerabschätzung.

**Beweis des Approximationssatzes von Fejér:**

Der Fejér-Kern erfüllt  $K_n \geq 0$  und  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt = 1$ . Zudem gilt:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} K_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{t=\delta}^{\pi} \frac{\sin(nt/2)^2}{n \sin(t/2)^2} dt \leq \frac{1}{\pi} \int_{t=\delta}^{\pi} \frac{1}{n(t/\pi)^2} dt \\ &= \frac{1}{n} \int_{t=\delta}^{\pi} \frac{\pi}{t^2} dt = \frac{1}{n} \left[ -\frac{\pi}{t} \right]_{t=\delta}^{\pi} = \frac{1}{n} \left[ \frac{\pi}{\delta} - 1 \right] < \frac{\pi}{n\delta} \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Das bedeutet, die Gesamtmasse 1 konzentriert sich um 0.

Wir müssen nur noch das Verhalten für  $|t| < \delta$  kontrollieren.

Hierzu genügt uns die vorausgesetzte Stetigkeit der Funktion  $f$ .

Dank Kompaktheit des Periodenintervalls  $[-\pi, \pi]$  ist die Funktion  $f$  sogar gleichmäßig stetig: Zu jedem  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  existiert ein  $\delta \in ]0, \pi[$  so, dass für alle  $x \in \mathbb{R}$  und  $|t| < \delta$  die Schranke  $|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon/2$  gilt.

Damit erhalten wir mühelos folgende Schranke:

$$0 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t| < \delta} |f(x-t) - f(x)| K_n(t) dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t| < \delta} \frac{\varepsilon}{2} K_n(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

## Gleichmäßige Approximation nach Fejér

Nach diesen länglichen, aber elementaren Vorbereitungen können wir nun den Approximationsfehler der Fejér-Polynome  $f_n^*$  abschätzen:

$$\begin{aligned} |f_n^*(x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x-t) - f(x)] K_n(t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| K_n(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|t| < \delta} \frac{\varepsilon}{2} K_n(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} 2 \max|f| K_n(t) dt \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2\pi \max|f|}{n\delta} < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq \frac{4\pi}{\varepsilon\delta} \max|f| \end{aligned}$$

Ausführlich gesagt: Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein Index  $n_0 \in \mathbb{N}$ , sodass für alle  $n \geq n_0$  die gleichmäßige Fehlerschranke  $|f_n^* - f| \leq \varepsilon$  gilt.

Das beweist die Aussage des Satzes: Die Fejér-Polynome  $f_n^*$  konvergieren gleichmäßig gegen die vorgegebene Funktion  $f$ .

😊 Die Konvergenz kann sehr langsam sein, aber sie gilt immer!  
Je glatter die Funktion  $f$ , desto schneller die Konvergenz.

Ist  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  absolut stetig mit  $|f'| \leq L$ , so wissen wir [1216]:

$$|f_n(x) - f(x)| < 2L \cdot \ln(n)/n \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

**Aufgabe:** Die Fejér–Polynome konvergieren ebenso schnell:

$$|f_n^*(x) - f(x)| < 4L \cdot \ln(n)/n \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

**Lösung:** Wir führen die Rechnung des vorigen Beweises fort:

$$\begin{aligned} |f_n^*(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| K_n(t) dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} L|t| K_n(t) dt && \leq \frac{L}{\pi} \int_0^{\pi} t \frac{\sin(nt/2)^2}{n \sin(t/2)^2} dt \\ &\leq \frac{L}{\pi} \int_0^{\delta} t \cdot 4n dt + \frac{L}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} \frac{t}{n(t/\pi)^2} dt = \frac{Ln}{\pi} 2\delta^2 + \frac{L\pi}{n} (\ln \pi - \ln \delta) \\ &= \frac{L}{n} \left[ \frac{\pi}{2} + \pi(\ln 2 + \ln n) \right] && < 4L \frac{\ln n}{n} \quad (\text{Skizze!}) \end{aligned}$$

In der letzten Zeile setzen wir  $\delta = \pi/2n$  und verlangen  $n \geq 80$ .

(Die Konstante 4 lässt sich noch verbessern, das ist aber mühsam.)

😊 Fejérs Trick lässt sich allgemein zur Summation anwenden:

Für schwach divergente Reihen wird damit Konvergenz erzwungen!

Für  $a_k \in \mathbb{C}$  konvergiert die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  gegen  $s$ , kurz  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s$ , wenn die Folge der Partialsummen  $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$  gegen  $s$  konvergiert.

Dann konvergieren auch die Mittelwerte  $s_n^* = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} s_k$  gegen  $s$ , etwas langsamer, aber Konvergenz und Grenzwert sind dieselben.

Umgekehrt kann aber  $s_n^*$  konvergieren, selbst wenn  $s_n$  divergiert:

**Aufgabe:** Wir betrachten  $a_k = (-1)^k (k+1)^c$ . Für welche  $c \in \mathbb{R}$  konvergiert die Folge  $s_n$ ? und  $s_n^*$ . Was passiert speziell für  $c = 0$ ?

**Lösung:** Für  $c = 0$  divergiert die Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$ . Hingegen konvergiert die Folge  $(s_n^*)_{n \in \mathbb{N}} = (\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{6}, \dots) \rightarrow \frac{1}{2}$ .

Die Folge  $s_n$  konvergiert für  $c < 0$  dank Leibniz (Satz B3G) und divergiert für  $c \geq 0$  dank Cauchy. Die Folge  $s_n^*$  konvergiert für  $c \leq 0$  wie gesehen.

**Aufgabe:** Für jede stetige Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  garantiert Fejérs Satz: Falls die Fourier–Reihe  $f_n(x)$  im Punkt  $x$  konvergiert, dann gegen  $f(x)$ .

**Lösung:** Aus  $f_n(x) \rightarrow s$  folgt  $f(x) = \lim f_n^*(x) = \lim f_n(x) = s$ .



In unseren (noch sehr bescheidenen) Beispielen sind wir von einer (harmlosen) Funktion  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  ausgegangen und haben eine (harmlose) Fourier–Reihe  $f \sim \sum c_k e_k$  erhalten. Wenn wir diese Reihe nun in einem Punkt  $x \in \mathbb{R}$  auswerten, so erhalten wir  $f(x) = \sum c_k e^{ikx}$  für fast jedes  $x \in \mathbb{R}$ . Das ist eine wichtige und nützliche Eigenschaft!

😊 Dies gilt insbesondere für jede stückweise stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion  $f$  dank des Dirichlet–Kriteriums I2A.

⚠ Die Konvergenz einer Fourier–Reihe müssen wir jeweils prüfen. Punktweise Konvergenz ist keineswegs selbstverständlich:

### Satz J2D: Kolmogorov 1923

Es gibt integrierbare Funktionen  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ , d.h.  $\int_{x=0}^{2\pi} |f(x)| dx < \infty$ , deren Fourier–Reihe  $\sum_k c_k e^{ikx}$  in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$  divergiert.

Diese Frage war lange offen, und Kolmogorovs Antwort kam als Schock. Dieser Satz dient uns hier nur als Warnung vor naiven Trugschlüssen. Solche Beispiele sind eher exotisch, wie uns folgender Satz versichert.

Punktweise Konvergenz ist keineswegs selbstverständlich, aber...

😊 Ein klein wenig mehr als Integrierbarkeit genügt fast überall:

### Satz J2E: Carleson 1966, Hunt 1968

Gilt  $\int_{x=0}^{2\pi} |f(x)|^p dx < \infty$  für ein  $p > 1$ , so konvergiert die Fourier–Reihe fast überall gegen  $f$ , d.h. in allen  $x \in \mathbb{R} \setminus N$  außer einer Nullmenge  $N$ .

😊 Dies gilt insbesondere für jede stetige Funktion. Die Konvergenz in einem vorgegebenen Punkt  $x \in \mathbb{R}$  garantiert das Dirichlet–Kriterium I2A.

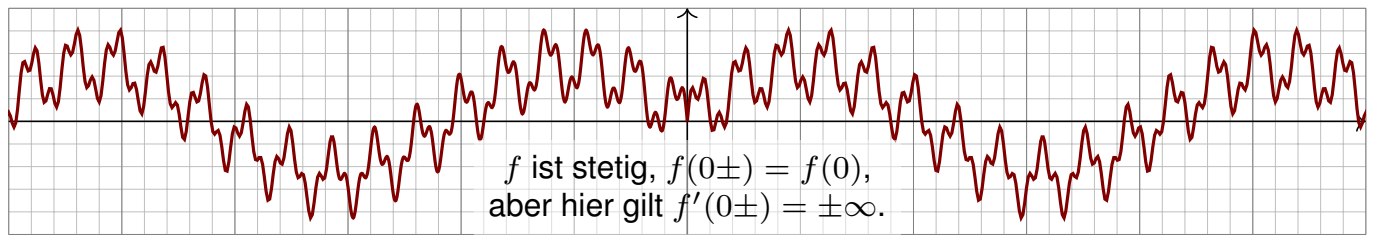
⚠ Konvergenz in *allen* Punkten hingegen wäre zu viel verlangt:

### Satz J2F: Kahane & Katznelson 1966

Zu jeder Nullmenge  $N \subset \mathbb{R}$  existiert eine stetige Funktion, deren Fourier–Reihe in allen Punkten  $x \in N$  divergiert.

Diese Sätze sind extrem schwierig zu beweisen und dienen hier nur zur Illustration — und als Warnung vor allzu naiven Trugschlüssen. Das folgende schön-konkrete Beispiel illustriert die Problematik.

Gibt es stetige periodische Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , deren Fourier–Reihe nicht konvergiert? Können wir solche Beispiele konkret angeben? Ja!



## Satz J2G: Fejér 1911

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gerade,  $2\pi$ –periodisch und für  $0 \leq x \leq \pi$  gegeben durch

$$f(x) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \sin\left(\left(i^{(2^i)} + 1/2\right) \cdot x\right) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx).$$

Die Funktion  $f$  ist stetig, aber in  $x = 0$  divergiert ihre Fourier–Reihe.

Das Dirichlet–Kriterium I2A gibt hinreichende Kriterien zur Konvergenz. Dies ist hier jedoch nicht erfüllt, denn  $f'(0+) = +\infty$  und  $f'(0-) = -\infty$ . Tatsächlich divergiert  $f_n(0)$  für  $n \rightarrow \infty$ , wie wir nun nachrechnen.



## Satz J2H: Fejér 1911

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gerade,  $2\pi$ –periodisch und für  $0 \leq x \leq \pi$  gegeben durch

$$f(x) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \sin\left(\left(i^{(i^2)} + 1/2\right) \cdot x\right) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx).$$

Die Funktion  $f$  ist stetig, aber in  $x = 0$  divergiert ihre Fourier–Reihe.

😊 In fast jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$  gilt Konvergenz  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  (J2E).

😊 Die Fejér–Polynome  $f_n^*$  konvergieren gleichmäßig gegen  $f$  (J2C).

Die Divergenz ist entsprechend subtil; wir rechnen sie jetzt nach.

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gerade,  $2\pi$ –periodisch und für  $0 \leq x \leq \pi$  gegeben durch

$$f(x) := \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \sin(\omega_i x) \quad \stackrel{?}{\sim} \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx).$$

mit Frequenzen  $\omega_i \in \mathbb{N} + 1/2$ , Amplituden  $\mu_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  und  $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i < \infty$ . Dies garantiert gleichmäßige Konvergenz, und  $f$  ist stetig (I3c).

**Aufgabe:** (1) Für  $k, \ell \in \mathbb{N}$  finden wir das Integral

$$\lambda_{k,\ell} := \int_{x=0}^{\pi} \cos(kx) \sin((\ell + 1/2)x) \, dx = \frac{\ell + 1/2}{(\ell + 1/2)^2 - k^2}.$$

(2) Für die Fourier–Koeffizienten folgt  $a_k = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \omega_i / (\omega_i^2 - k^2)$ .

(3) Für  $\sigma_{n,\ell} := \sum_{k=0}^n \lambda_{k,\ell}$  gilt  $\sigma_{n,\ell} \geq 0$  und  $\sigma_{n,n} \geq \frac{1}{2} \ln(n + 1/2)$ .

(4) Für  $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$  und  $n = \ell_i = \omega_i - 1/2$  gilt  $s_n \geq \frac{1}{2} \mu_i \ln \omega_i$ .

(5) Wir können  $\mu_i$  und  $\omega_i$  so wählen, dass die Folge  $s_n$  divergiert.

😊 Die Funktion  $f$  ist stetig, aber in  $x = 0$  divergiert ihre Fourier–Reihe!

**Lösung:** (1) Wir nutzen die trigonometrischen Additionstheoreme:

$$\begin{aligned} & \int_{x=0}^{\pi} \cos(kx) \sin((\ell + 1/2)x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{x=0}^{\pi} \sin((\ell + k + 1/2)x) + \sin((\ell - k + 1/2)x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{-\cos((\ell + k + 1/2)x)}{\ell + k + 1/2} + \frac{-\cos((\ell - k + 1/2)x)}{\ell - k + 1/2} \right]_{x=0}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\ell + k + 1/2} + \frac{1}{\ell - k + 1/2} \right] = \frac{\ell + 1/2}{(\ell + 1/2)^2 - k^2} \end{aligned}$$

(2) Da die Funktion  $f$  gerade ist, finden wir  $b_k = 0$  und

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_{x=0}^{\pi} \cos(kx) f(x) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_{x=0}^{\pi} \cos(kx) \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \sin(\omega_i x) \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \int_{x=0}^{\pi} \cos(kx) \sin(\omega_i x) \, dx = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \frac{\omega_i}{\omega_i^2 - k^2} \end{aligned}$$

(3) Für  $k \leq \ell$  gilt  $\lambda_{k,\ell} \geq 0$ , für  $n \leq \ell$  also  $\sigma_{n,\ell} \geq 0$ . Für  $n \geq \ell$  finden wir:

$$\begin{aligned} 2\sigma_{n,\ell} &= 2 \sum_{k=0}^n \frac{\ell + 1/2}{(\ell + 1/2)^2 - k^2} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\ell + k + 1/2} + \frac{1}{\ell - k + 1/2} \\ &= \sum_{j=\ell}^{\ell+n} \frac{1}{j + 1/2} + \sum_{j=\ell-n}^{\ell} \frac{1}{j + 1/2} = \frac{1}{\ell + 1/2} + \sum_{j=\ell-n}^{\ell+n} \frac{1}{j + 1/2} \\ &= \frac{1}{\ell + 1/2} + \sum_{j=n-\ell}^{n+\ell} \frac{1}{j + 1/2} \geq 0 \end{aligned}$$

Durch Vergleich von Summe und Integral finden wir genauer:

$$2\sigma_{n,\ell} \geq \int_{t=n-\ell+1/2}^{n+\ell+3/2} \frac{1}{t} dt = \ln\left(\frac{n + \ell + 3/2}{n - \ell + 1/2}\right)$$

Speziell für  $n = \ell$  finden wir damit die behauptete untere Schranke:

$$2\sigma_{n,n} \geq \ln(4n + 3) \geq \ln(n + 1/2)$$

(4) Für die  $n$ -te Partialsumme finden wir somit:

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k \stackrel{(2)}{=} \sum_{k=0}^n \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \frac{\omega_i}{\omega_i^2 - k^2} \stackrel{\text{Lin}}{=} \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \sum_{k=0}^n \frac{\omega_i}{\omega_i^2 - k^2} \stackrel{(3)}{=} \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \sigma_{n,\ell_i}$$

Für alle Terme gilt  $\mu_i \sigma_{n,\ell_i} \geq 0$ . Speziell für  $n = \ell_i = \omega_i - 1/2$  folgt:

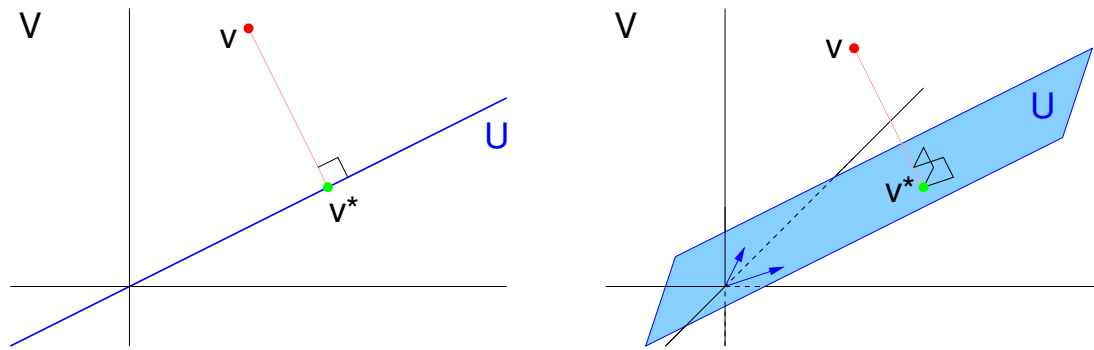
$$s_n = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \sigma_{n,\ell_i} \geq \frac{2}{\pi} \mu_i \sigma_{n,n} \geq \frac{2}{\pi} \mu_i \cdot \frac{1}{2} \ln \omega_i = \frac{\mu_i \ln \omega_i}{\pi}$$

(5) Wir wählen nun die Frequenzen  $\omega_i \in \mathbb{N} + 1/2$  und die Amplituden  $\mu_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  so, dass  $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i < \infty$  gilt, aber  $\mu_i \ln \omega_i \rightarrow \infty$ . Beispiele:

$$\mu_i = \frac{1}{2^i}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1, \quad \omega_i = i^{(2^i)} + \frac{1}{2}, \quad \ln \omega_i \geq 2^i \ln i$$

$$\mu_i = \frac{1}{i^2}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \omega_i = i^{(i^2)} + \frac{1}{2}, \quad \ln \omega_i \geq i^2 \ln i$$

😊 Die Funktion  $f$  ist stetig, aber in  $x = 0$  divergiert ihre Fourier-Reihe!



Sei  $V$  ein Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle - | - \rangle$  über  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ . (I1G)  
Hierin sei  $U \subset V$  ein endlich-dim. Untervektorraum,  $\dim U = n < \infty$ .

**Approximationsproblem:** Zu einem gegebenen Vektor  $v \in V$  suchen wir den / einen Vektor  $v^* \in U$ , der  $v$  am nächsten liegt.

**Lösung:** Wir definieren  $U$  durch eine Basis, orthonormalisieren (I1J) diese zu  $e_1, \dots, e_n$  und berechnen die Orthogonalprojektion von  $v$  auf  $U$ .

Schon der Fall  $V = \mathbb{R}^2$  und  $n = 1$  (oder  $V = \mathbb{R}^3$  und  $n = 1, 2$ ) ist interessant und Ihnen vielleicht noch aus der Schule vertraut. Die obige Skizze und die folgenden Argumente gelten aber ganz allgemein: Der Raum  $V$  darf beliebig groß sein, zum Beispiel ein Funktionenraum; lediglich der Unterraum  $U$  soll zur Vereinfachung endlich-dimensional bleiben, zum Beispiel der Unterraum  $U$  aller trigonometrischen Polynome vom Grad  $\leq k$ , mit  $n = \dim U = 1 + 2k$ .

### Satz J3A: Gauß 1795, Bessel 1818

Zu jedem Vektor  $v \in V$  existiert genau eine **Bestapproximation** in  $U$ , also ein Vektor  $v^* \in U$  mit  $\|v - v^*\| < \|v - u\|$  für alle  $u \in U \setminus \{v^*\}$ .

(1) Berechnung: Sei  $e_1, \dots, e_n$  eine Orthonormalbasis des Raums  $U$ . Dann ist  $v^*$  gegeben durch die **Orthogonalprojektion** von  $v$  auf  $U$ :

$$v^* = \sum_{k=1}^n v_k e_k \quad \text{mit Fourier-Koeffizienten} \quad v_k = \langle e_k | v \rangle.$$

(2) Zudem ist  $v^*$  der einzige Vektor in  $U$ , für den  $v - v^*$  senkrecht steht auf allen  $u \in U$ . Dank Pythagoras gilt daher die **Bessel-Gleichung**:

$$\underbrace{|v_1|^2 + \dots + |v_n|^2}_{\text{Längenquadrat von } v^*} + \underbrace{\|v - v^*\|^2}_{\text{Approximationsfehler}} = \underbrace{\|v\|^2}_{\text{Längenquadrat von } v}$$

Hieraus folgt vergrößernd die **Bessel-Ungleichung**:

$$|v_1|^2 + \dots + |v_n|^2 = \|v^*\|^2 \leq \|v\|^2$$

**Nachrechnen:** (1) Wir betrachten den genannten Vektor

$$v^* := \sum_{k=1}^n v_k e_k \quad \text{mit den Koeffizienten} \quad v_k = \langle e_k | v \rangle.$$

Für jeden Vektor  $u \in U$  gilt  $u = \sum_{k=1}^n u_k e_k$  mit Koeffizienten  $u_k \in \mathbb{K}$ .

Den Abstand zwischen  $v$  und  $u$  berechnen wir dank Skalarprodukt:

$$\begin{aligned} \|v - u\|^2 &= \langle v - u | v - u \rangle = \langle v | v \rangle - \langle v | u \rangle - \langle u | v \rangle + \langle u | u \rangle \\ &= \langle v | v \rangle - \left\langle v \left| \sum_{k=1}^n u_k e_k \right. \right\rangle - \left\langle \sum_{k=1}^n u_k e_k \left| v \right. \right\rangle + \left\langle \sum_{k=1}^n u_k e_k \left| \sum_{\ell=1}^n u_\ell e_\ell \right. \right\rangle \\ &= \langle v | v \rangle - \sum_{k=1}^n u_k \langle v | e_k \rangle - \sum_{k=1}^n \overline{u_k} \langle e_k | v \rangle + \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \overline{u_k} u_\ell \langle e_k | e_\ell \rangle \\ &= \langle v | v \rangle - \sum_{k=1}^n u_k \overline{v_k} - \sum_{k=1}^n \overline{u_k} v_k + \sum_{k=1}^n |u_k|^2 = \|v\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle u | v^* \rangle + \|u\|^2 \end{aligned}$$

## Bestapproximation durch Orthogonalprojektion

Speziell für  $u = v^*$  gilt somit:

$$\|v - v^*\|^2 = \|v\|^2 - \|v^*\|^2.$$

Dieser Abstand ist minimal, denn im Vergleich gilt:

$$\begin{aligned} \|v - u\|^2 - \|v - v^*\|^2 &= \sum_{k=1}^n |u_k|^2 - \sum_{k=1}^n u_k \overline{v_k} - \sum_{k=1}^n \overline{u_k} v_k + \sum_{k=1}^n |v_k|^2 \\ &= \sum_{k=1}^n (\overline{u_k} - \overline{v_k})(u_k - v_k) = \sum_{k=1}^n |u_k - v_k|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Gleichheit gilt hierbei nur für  $u = v^*$ , andernfalls  $\|v - u\| > \|v - v^*\|$ .

(2) Die behauptete Orthogonalität rechnen wir ebenso direkt nach:

$$\langle v - v^* | u \rangle = \left\langle v - \sum_{k=1}^n v_k e_k \left| \sum_{\ell=1}^n u_\ell e_\ell \right. \right\rangle = \sum_{k=1}^n u_k \overline{v_k} - \sum_{k=1}^n u_k \overline{v_k} = 0.$$

Hieraus folgen die Bessel-Gleichung und die Bessel-Ungleichung.



Für jede Folge  $\widehat{f}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  definieren wir die **Quadrat-Norm**

$$\|\widehat{f}\|_{\ell^2}^2 := \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2 \quad \text{also} \quad \|\widehat{f}\|_{\ell^2} := \left[ \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2 \right]^{1/2}.$$

Die **quadrat-summierbaren** Folgen bilden den  $\mathbb{C}$ -Vektorraum

$$\ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z}) = \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) := \left\{ \widehat{f}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \mid \|\widehat{f}\|_{\ell^2} < \infty \right\}.$$

Auf  $\ell^2$  haben wir  $\cdot: \ell^2 \times \ell^2 \rightarrow \ell^1$  und somit das **Skalarprodukt**

$$\langle - \mid - \rangle: \ell^2 \times \ell^2 \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \langle \widehat{f} \mid \widehat{g} \rangle := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{\widehat{f}(k)} \widehat{g}(k).$$

Dies ist absolut summierbar dank **Cauchy–Schwarz–Ungleichung**:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k) \cdot \widehat{g}(k)| \leq \|\widehat{f}\|_{\ell^2} \cdot \|\widehat{g}\|_{\ell^2}$$

😊 Für endliche Summen kennen wir das vom Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$ .  
Für unendliche Reihen folgt die Ungleichung durch Grenzübergang.

## Vergleich mit $p$ -summierbaren Folgen

Für  $1 \leq p \leq \infty$  und  $\widehat{f}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  definieren wir die  **$\ell^p$ -Norm**

$$\|\widehat{f}\|_{\ell^p} := \left[ \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^p \right]^{1/p} \quad \text{wobei} \quad \|\widehat{f}\|_{\ell^\infty} := \sup_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|.$$

Die  **$\ell^p$ -summierbaren Folgen** bilden den  $\mathbb{C}$ -Vektorraum

$$\ell^p = \ell^p(\mathbb{Z}) = \ell^p(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) := \left\{ \widehat{f}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \mid \|\widehat{f}\|_{\ell^p} < \infty \right\}.$$

Demnach bedeutet  $\ell^1$  absolut summierbar und  $\ell^\infty$  beschränkt.

Für  $1 < p < q < \infty$  gelten dabei die Inklusionen  $\ell^1 \subsetneq \ell^p \subsetneq \ell^q \subsetneq \ell^\infty$ .

Dank **Minkowski–Ungleichung** C4L ist  $\ell^p$  ein Vektorraum und normiert.

Für  $p, q \in [1, \infty]$  mit  $1/p + 1/q = 1$  gilt die **Hölder–Ungleichung** C4L:

$$\|\widehat{f} \cdot \widehat{g}\|_{\ell^1} \leq \|\widehat{f}\|_{\ell^p} \cdot \|\widehat{g}\|_{\ell^q}$$

Im Spezialfall  $p = q = 2$  ist dies die Cauchy–Schwarz–Ungleichung.

Das Produkt  $\cdot: \ell^p \times \ell^q \rightarrow \ell^1$  stiftet somit die **bilineare Paarung**

$$\langle - \mid - \rangle: \ell^p \times \ell^q \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \langle \widehat{f} \mid \widehat{g} \rangle := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{\widehat{f}(k)} \widehat{g}(k).$$

Für  $f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  messbar definieren wir die **Quadrat-Norm**

$$\|f\|_{L^2}^2 := \int_{x \in \Omega} |f(x)|^2 dx \quad \text{also} \quad \|f\|_{L^2} := \left[ \int_{x \in \Omega} |f(x)|^2 dx \right]^{1/2}.$$

Die **quadrat-integrierbaren Funktionen** bilden den  $\mathbb{C}$ -Vektorraum

$$L^2 = L^2(\Omega) = L^2(\Omega, \mathbb{C}) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid \|f\|_{L^2} < \infty \right\}.$$

Auf  $L^2$  haben wir  $\cdot : L^2 \times L^2 \rightarrow L^1$  und somit das **Skalarprodukt**

$$\langle - \mid - \rangle : L^2 \times L^2 \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \langle f \mid g \rangle := \int_{x \in \Omega} \overline{f(x)} g(x) dx.$$

Dies ist absolut integrierbar dank **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**:

$$\int_{x \in \Omega} |f(x) \cdot g(x)| dx \leq \|f\|_{L^2} \cdot \|g\|_{L^2}$$

😊 Für Treppenfunktionen  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  ist dies eine endliche Summe. Für  $f, g \in L^2(\Omega, \mathbb{C})$  folgt die Ungleichung daraus durch Grenzübergang.

## Vergleich mit $p$ -integrierbaren Funktionen

Für  $1 \leq p \leq \infty$  und  $f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  definieren wir die  **$L^p$ -Norm**

$$\|f\|_{L^p} := \left[ \int_{x \in \Omega} |f(x)|^p dx \right]^{1/p} \quad \text{wobei} \quad \|f\|_{L^\infty} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

Die  **$L^p$ -integrierbaren Funktionen** bilden den  $\mathbb{C}$ -Vektorraum

$$L^p = L^p(\Omega) = L^p(\Omega, \mathbb{C}) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid \|f\|_{L^p} < \infty \right\}.$$

Demnach bedeutet  $L^1$  absolut integrierbar und  $L^\infty$  essentiell beschränkt.

Gleichheit  $f = g$  in  $L^p(\Omega, \mathbb{C})$  bedeutet  $f(x) = g(x)$  für fast alle  $x \in \Omega$ .

Für  $0 < \operatorname{vol}(\Omega) < \infty$  und  $1 < p < q < \infty$  folgt  $L^1 \supsetneq L^p \supsetneq L^q \supsetneq L^\infty$ .

Dank **Minkowski-Ungleichung** C4L ist  $L^p$  ein Vektorraum und normiert.

Für  $p, q \in [1, \infty]$  mit  $1/p + 1/q = 1$  gilt die **Hölder-Ungleichung** C4L:

$$\|f \cdot g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$$

Im Spezialfall  $p = q = 2$  ist dies die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

Das Produkt  $\cdot : L^p \times L^q \rightarrow L^1$  stiftet somit die **bilineare Paarung**

$$\langle - \mid - \rangle : L^p \times L^q \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \langle f \mid g \rangle := \int_{x \in \Omega} \overline{f(x)} g(x) dx.$$

Wir wenden Bessels Approximationssatz auf Fourier–Polynome an. Für quadrat-integrierbare  $f, g : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$  ist das **Skalarprodukt**

$$\langle f | g \rangle_{L^2} := \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \overline{f(t)} g(t) dt.$$

Die zugehörige **Norm** ist definiert durch  $\|f\|_{L^2} = \sqrt{\langle f | f \rangle}$ , also

$$\|f\|_{L^2} := \left[ \frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f(t)|^2 dt \right]^{1/2}.$$

Der **mittlere quadratische Abstand** zwischen  $f, g$  ist definiert durch

$$\|f - g\|_{L^2} := \left[ \frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f(t) - g(t)|^2 dt \right]^{1/2}.$$

Der punktweise Abstand  $|f(t) - g(t)|^2$  wird hier über  $[0, T]$  integriert. Das Quadrat gewichtet dabei große Abweichungen stärker als kleine. Der Faktor  $1/T$  normiert und vereinfacht zudem die Fourier–Formeln. Die abschließende Wurzel sorgt dafür, dass die Norm homogen ist, also tatsächlich  $\|\alpha \cdot f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$  für alle  $\alpha \in \mathbb{C}$  erfüllt.

## Bestapproximation durch Fourier–Polynome

### Satz J3B: Bestapproximation durch Fourier–Polynome

Sei  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$  quadrat-integrierbar, das heißt  $\int_0^T |f(t)|^2 dt < \infty$ .

(1) Sei  $f_n = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega t}$  eine Approximation durch ein beliebiges trigonometrisches Polynom vom Grad  $n$  mit Koeffizienten  $c_k \in \mathbb{C}$ .

Bessel-Ungleichung: Der mittlere quadratische Fehler  $\|f - f_n\|$  wird genau dann minimal, wenn  $f_n$  das Fourier–Polynom zu  $f$  ist, also

$$c_k = \langle e_k | f \rangle = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} f(t) dt.$$

Der mittlere quadratische Fehler ist dann  $\|f - f_n\|^2 = \|f\|^2 - \|f_n\|^2$ .

(2) Für  $n \rightarrow \infty$  gilt Konvergenz  $\|f - f_n\| \searrow 0$  im quadratischen Mittel. Für die Normen folgt  $\|f_n\| \nearrow \|f\|$  und somit die Energiegleichung:

$$\frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f_n(t)|^2 dt = \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \nearrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f(t)|^2 dt$$

**Aufgabe:** Zeigen Sie dies für jede stetige Funktion  $f$  durch Vergleich von quadratischer Bestapproximation  $f_n$  und Fejér–Approximation  $f_n^*$ .

😊 Zusammen sind diese Approximationssätze extrem wirkungsvoll.

**Lösung:** Teil (1) ist die Anwendung von Bessels Approximationssatz J3A auf den Vektorraum  $L^2([0, T], \mathbb{C})$  und trigonometrische Polynome.

(2) Für die Fejér–Approximation  $f_n^*$  gilt  $\max|f_n^* - f| \rightarrow 0$  dank J2c. Die quadratische Bestapproximation sind die Fourier–Polynome  $f_n$ , daher gilt  $\|f_n - f\|_{L^2} \leq \|f_n^* - f\|_{L^2}$ . Ausgeschrieben bedeutet das:

$$\frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f_n(t) - f(t)|^2 \leq \frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f_n^*(t) - f(t)|^2 \leq (\max|f_n^* - f|)^2 \rightarrow 0$$

Monotonie  $\|f_{n+1} - f\|_{L^2} \leq \|f_n - f\|_{L^2}$  ist klar, somit gilt  $\|f_n - f\|_{L^2} \searrow 0$ . Dank Aussage (1) folgt die monotone Konvergenz  $\|f_n\|_{L^2} \nearrow \|f\|_{L^2}$ .

😊 Die Fejér–Approximation J2c stellt sicher, dass trigonometrische Polynome dicht liegen im Raum  $C([0, 2\pi], \mathbb{C})$  der stetigen Funktionen.

Die Konvergenz  $\|f_n\|_{L^2}^2 \nearrow \|f\|_{L^2}^2$  bedeutet ausgeschrieben:

$$A_n := \frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f_n(t)|^2 dt \nearrow \frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f(t)|^2 dt =: A$$

Offensichtlich gilt für die Koeffizientensummen entsprechendes:

$$B_n := \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \nearrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 =: B$$

Die Energiegleichung  $A_n = B_n$  gilt für jedes trigonometrische Polynom dank Pythagoras [125]. Damit folgt die Energiegleichung  $A = B$  für  $f$ .

😊 Damit ist die Energiegleichung (2) für stetige Funktionen bewiesen. Das war das Ziel dieser Aufgabe (als leichtere, teilweise Lösung).

😊 Hieraus folgt der Satz J3B allgemein durch Vervollständigung: Die stetigen Funktionen liegen dicht in  $L^2([0, T], \mathbb{C})$  bezüglich  $L^2$ –Norm.

😊 Der folgende Satz fasst dieses Ergebnis zusammen und erweitert zudem die Energiegleichung zur Parseval–Gleichung für Skalarprodukte.

## Satz J3C: Energiegleichung und Satz von Parseval

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  absolut integrierbar auf  $[0, T]$  und  $T$ -periodisch.

Wir zerlegen  $f$  in **Harmonische** zur Grundfrequenz  $\omega = 2\pi/T$ :

$$f \circ \longrightarrow \hat{f}, \quad \hat{f}(k) := \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} f(t) dt, \quad f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ik\omega t}.$$

Es gilt die **Parseval-Gleichung**, auch **Energiegleichung** genannt:

$$\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{\ell^2} \quad \text{also} \quad \frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2$$

Dank dieser Gleichung gilt  $f \in L^2$  genau dann, wenn  $\hat{f} \in \ell^2$  gilt.

Für  $f, g \in L^2$  gilt die **Parseval-Gleichung** zudem für Skalarprodukte:

$$\langle f | g \rangle = \langle \hat{f} | \hat{g} \rangle \quad \text{also} \quad \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \overline{f(t)} g(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(k)} \hat{g}(k)$$

## Energiegleichung und Satz von Parseval

**Aufgabe:** Rechnen Sie die Parseval-Gleichung mit Fubini nach im Spezialfall  $f \in L^1$  und  $\hat{g} \in \ell^1$ , somit  $g(t) = \sum_k \hat{g}(k) e^{ik\omega t} \in L^\infty$ .

**Lösung:** Wir setzen ein und rechnen's geduldig aus:

$$\begin{aligned} \langle f | g \rangle_{L^2} &\stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \overline{f(t)} g(t) dt &&\stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \overline{f(t)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{g}(k) e^{ik\omega t} dt \\ &\stackrel{\text{Lin}}{=} \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{e^{-ik\omega t} f(t)} \hat{g}(k) dt &&\stackrel{\text{Fub}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \overline{e^{-ik\omega t} f(t)} dt \right] \hat{g}(k) \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(k)} \hat{g}(k) &&\stackrel{\text{Def}}{=} \langle \hat{f} | \hat{g} \rangle_{\ell^2} \end{aligned}$$

😊 Speziell für  $f = g$  erhalten wir die Energiegleichung  $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{\ell^2}$ . Für  $f \in L^1$  und  $\hat{f} \in \ell^1$  ist damit die Energiegleichung erneut bewiesen.

Für  $f \in L^2$  folgt sie durch Grenzübergang, wie in Satz J3B ausgeführt.

Für  $f, g \in L^2$  folgt  $\hat{f}, \hat{g} \in \ell^2$ , und obige Gleichungen bestehen weiter.

Für Skalarprodukte erhalten wir dies durch Polarisieren der Norm.

😊 Wir kennen die folgenden Beziehungen, die eine bemerkenswerte Dualität zwischen  $L^p$ -Funktionen und  $\ell^q$ -Folgen illustrieren:

(1a) Für  $f \in L^1$  wissen wir  $\hat{f} \in \ell^\infty$ , genauer  $\hat{f}(k) \leq \|f\|_{L^1}$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$ . Dank Riemann–Lebesgue gilt zudem Abklingen  $|\hat{f}(k)| \rightarrow 0$  für  $|k| \rightarrow \infty$ .

(1b) Zu  $\hat{f} \in \ell^1$  konvergiert  $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e_k$  in  $L^\infty$ , sogar gleichmäßig. Insbesondere gilt dann  $\|f\|_{L^\infty} \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)| \cdot \|e_k\|_{L^\infty} = \|\hat{f}\|_{\ell^1}$ .

(2) Der zentrale Fall: Für  $f \in L^2$  gilt  $\hat{f} \in \ell^2$  und die Fourier–Isometrie

$$\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{\ell^2} \quad \text{also} \quad \frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2.$$

Diese Fälle behandeln die wichtigen Extreme  $(p, q) = (1, \infty)$  und den symmetrischen Fall  $(p, q) = (2, 2)$ . Sie werden durch folgenden Satz von Young und Hausdorff zusammengefasst und verallgemeinert.

### Satz J3D: Young 1913, Hausdorff 1923

Wir fixieren  $p, q$  mit  $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$  und  $1/p + 1/q = 1$ , zum Beispiel  $(p, q) = (1, \infty)$  oder  $p = q = 2$  wie oben.

(1) Aus  $f \in L^p$  folgt  $\hat{f} \in \ell^q$ , genauer gilt die Ungleichung

$$\|\hat{f}\|_{\ell^q} \leq \|f\|_{L^p} \quad \text{also} \quad \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^q \right)^{1/q} \leq \left( \frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

(2) Umgekehrt: Für  $c \in \ell^p$  konvergiert die Folge  $f_n = \sum_{k=-n}^n c_k e_k$  gegen eine Funktion  $f$  in  $L^q$ . Für diese gilt  $\hat{f} = c$ , genauer gilt die Ungleichung

$$\|f\|_{L^q} \leq \|\hat{f}\|_{\ell^p} \quad \text{also} \quad \left( \frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f(t)|^q dt \right)^{1/q} \leq \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^p \right)^{1/p}.$$

⚠ Die Aussagen werden falsch, wenn wir  $p$  und  $q$  vertauschen. In beiden Teilen geht das Argument von  $1 \leq p \leq 2$  nach  $2 \leq q \leq \infty$ . Ich nenne diesen Satz hier nur zur Illustration — und ohne Beweis.



Wollen wir eine Fourier–Reihe in einem einzelnen Punkt auswerten, so müssen wir uns die Frage der punktweisen Konvergenz stellen! Das Dirichlet–Kriterium I2A liefert uns hierzu ein bequemes und doch starkes Werkzeug. Es erlaubt insbesondere die Berechnung von einigen Reihengrenzwerten, die sonst nur schwer zu bekommen sind.

Wir kennen zudem die gleichmäßige Konvergenz  $f_n \rightarrow f$  auf  $X$ : Hier liegt Konvergenz in allen Punkten  $x \in X$  vor und zudem eine gleichmäßige Fehlerschranke  $\sup |f_n - f| \rightarrow 0$ . Das ist die stärkste und wirksamste Forderung, für manche Anwendungen jedoch leider zu stark.

Fourier–Reihen nutzen das Skalarprodukt periodischer Funktionen. Es liegt daher nahe, die Güte der Approximation von  $f$  durch  $f_n$  mit der zugehörigen Norm des mittleren quadratischen Abstands zu messen:

$$\|f_n - f\|_{L^2([0,T],\mathbb{C})}^2 = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f_n(t) - f(t)|^2 dt$$

Für die Konvergenz von Fourier–Reihen ist dieser Abstands begriff der natürlichste: Bezüglich der  $L^2$ –Norm sind alle Formeln am einfachsten.

Wir fassen die Beziehungen dieser drei Konvergenzarten zusammen. Seien  $f_0, f_1, f_2, \dots, f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  Funktionen auf einer Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ .

Gleichmäßige Konvergenz:

$$\sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$$

$\text{vol } \Omega < \infty \Downarrow \Uparrow$   $\Uparrow \Downarrow$  immer

Konvergenz im quadratischen Mittel:

$$\int_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)|^2 dx \rightarrow 0$$



Punktweise Konvergenz:

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ in jedem Punkt } x \in \Omega$$

😊 Die Implikation „gleichmäßig  $\Rightarrow L^p$ “ folgt sofort aus der Ungleichung

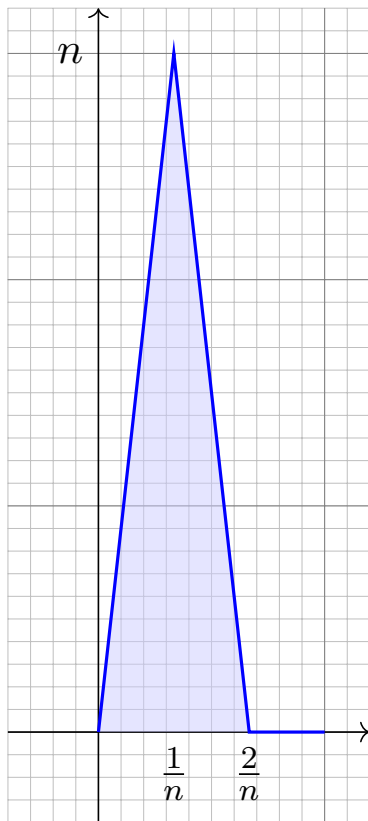
$$\int_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)|^p dx \leq \text{vol}(\Omega) \cdot (\sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)|)^p \rightarrow 0.$$

😊 Die Implikation „gleichmäßig  $\Rightarrow$  punktweise“ ist klar: Für  $x \in \Omega$  gilt

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0.$$

⚠ Die Umkehrungen gelten nicht, siehe Gegenbeispiele. J319 J320

**!** Aus punktweiser Konvergenz  $f_n \rightarrow f$ , also  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  für alle  $x$ , folgt nicht die Konvergenz im quadratischen Mittel!



Gegenbeispiel „wachsende Zacken“:

Für  $n \geq 2$  sei  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 2n - n^2 x & \text{für } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}, \\ 0 & \text{für } \frac{2}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

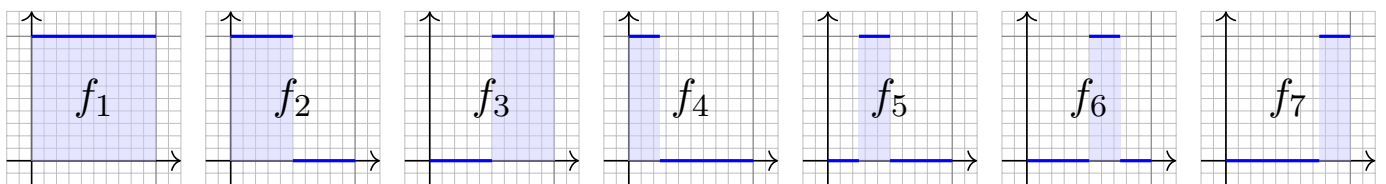
Für jeden Punkt  $x \in [0, 1]$  gilt  $f_n(x) \rightarrow 0$ .

Hingegen gilt  $\int_0^1 |f_n(x)| dx = 1$  sowie

$$\int_0^1 |f_n(x)|^2 dx = \frac{2}{3}n \rightarrow \infty \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Es gilt  $f_n(x) \rightarrow 0$  in jedem Punkt  $x \in [0, 1]$ , aber  $\max |f_n - 0| \rightarrow \infty$  im maximalen Abstand ( $L^\infty$ ) sowie  $\|f_n - 0\|_{L^1} = 1$  im mittleren Abstand ( $L^1$ ) und  $\|f_n - 0\|_{L^2} \rightarrow \infty$  im quadratischen Mittel ( $L^2$ ).

**!** Aus Konvergenz im quadratischen Mittel  $\|f - f_n\|_{L^2} \rightarrow 0$  folgt nicht gleichmäßige Konvergenz, ja nicht einmal punktweise  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ : Es kann sein, dass die Folge  $f_n(x)$  in keinem Punkt  $x$  konvergiert!



Gegenbeispiel „wandernde Blöcke“: Wir zerlegen das Intervall  $I_1 = [0, 1]$  in zwei Hälften  $I_2 = [0, 1/2]$  und  $I_3 = [1/2, 1]$ , und diese wiederum in  $I_4 = [0, 1/4]$  und  $I_5 = [1/4, 1/2]$  sowie  $I_6 = [1/2, 3/4]$  und  $I_7 = [3/4, 1]$ , usw. Hierzu betrachten wir die Folge der Indikatorfunktionen

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in I_n, \\ 0 & \text{für } x \notin I_n. \end{cases}$$

Die Quadrat-Norm  $\|f_n\|_{L^2} = \text{vol}_1 I_n$  (Länge von  $I_n$ ) konvergiert gegen 0. Jedoch konvergiert  $f_n(x)$  für  $n \rightarrow \infty$  in keinem Punkt  $x$ : Die Folge  $f_n(x)$  besteht nämlich aus vielen Nullen und immer mal wieder einer 1.

😊 Die trigonometrischen Funktionen  $e^{ik\omega t}$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  sind vollständig: Sie lassen sich durch keine hierzu orthogonale Funktion  $f$  erweitern!

### Satz J3E: Vollständigkeit der trigonometrischen Basis

Sei  $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  integrierbar auf  $[0, T]$  und  $T$ -periodisch. (1) Gilt

$$\int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} f(t) dt = 0$$

für alle  $k \in \mathbb{Z}$ , so folgt  $f(t) = 0$  für fast alle  $t \in \mathbb{R}$ . (2) Gilt

$$\int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} g(t) dt = \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} h(t) dt$$

für alle  $k \in \mathbb{Z}$ , so folgt  $g(t) = h(t)$  für fast alle  $t \in \mathbb{R}$ .

😊 Nochmal anders gesagt: Die Fourier-Analyse  $f \mapsto \hat{f}$  ist injektiv. Haben zwei Funktionen  $g, h$  dasselbe Spektrum  $\hat{g} = \hat{h}$ , so folgt  $g = h$ . (Das heißt: Gleichheit gilt überall bis auf eine Menge vom Maß Null.)

**Aufgabe:** Zeigen Sie diesen Satz im Spezialfall stetiger Funktionen  $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit dem Approximationssatz von Fejér (Satz J2c).

**Lösung:** (1) Die Voraussetzung bedeutet  $\hat{f}(k) = 0$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$ . Für die Fourier-Polynome gilt demnach  $f_n = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Für die Fejér-Polynome gilt dann ebenso  $f_n^* = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Der Approximationssatz von Fejér garantiert uns dann

$$\max|f| = \max|f - f_n^*| \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Das bedeutet  $\max|f| = 0$ , also  $f(t) = 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  wie behauptet.

😊 Jede stetige Funktion  $f \neq 0$  hat demnach ein Spektrum  $\hat{f} \neq 0$ , das heißt, es können nicht alle Fourier-Koeffizienten verschwinden.

(2) Aussage (1) angewendet auf  $f = g - h$  liefert  $f = 0$ , also  $g = h$ .

😊 Haben stetige Funktionen dasselbe Spektrum, so sind sie gleich. Umgekehrt bedeutet das, für stetige Funktionen  $g \neq h$  gilt  $\hat{g} \neq \hat{h}$ .

😊 Hieraus folgt der Satz für alle integrierbaren Funktionen durch Vervollständigung: Die stetigen Funktionen liegen dicht in  $L^1([0, T], \mathbb{C})$ .

**Satz J3F: Vollständigkeit**

(1) Wir haben folgende lineare Abbildung  $L^2([0, T], \mathbb{C}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ :

Gilt  $\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt < \infty$ , so bilden die Fourier-Koeffizienten

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} f(t) dt$$

eine Zahlenfolge  $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  mit  $\sum_k |c_k|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt < \infty$ .

(2) Wir haben folgende lineare Abbildungen  $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \rightarrow L^2([0, T], \mathbb{C})$ :

Gilt  $\sum_k |c_k|^2 < \infty$ , so konvergiert die trigonometrische Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} \quad \text{im quadratischen Mittel}$$

gegen eine Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_k |c_k|^2 < \infty$ .

**Absolute und gleichmäßige Konvergenz****Satz J3G: Vollständigkeit**

(1) Wir haben folgende lineare Abbildung  $L^1([0, T], \mathbb{C}) \rightarrow \ell^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ :

Gilt  $\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)| dt \leq M < \infty$ , so bilden die Fourier-Koeffizienten

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} f(t) dt$$

eine Zahlenfolge  $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  mit der gleichmäßigen Schranke  $|c_k| \leq M$ .

(2) Wir haben folgende lineare Abbildungen  $\ell^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \rightarrow L^\infty([0, T], \mathbb{C})$ :

Gilt  $\sum_k |c_k| \leq M < \infty$ , so konvergiert die trigonometrische Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} \quad \text{gleichmäßig}$$

gegen eine stetige Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $|f| \leq M$ .

Es gilt die **Parseval–Gleichung**, auch **Energiegleichung** genannt:

$$\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{\ell^2} \quad \text{also} \quad \frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2$$

Insbesondere ist  $f$  genau dann quadrat-integrierbar,  $\int_0^T |f(t)|^2 dt < \infty$ , wenn die Koeffizientenfolge  $\hat{f}$  quadrat-summierbar ist,  $\sum |\hat{f}(k)|^2 < \infty$ .

Alternativ nutzen wir die Co/Sinus-Reihe mit  $c_{\pm k} = \frac{1}{2}(a_k \mp ib_k)$ :

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$$

$$\frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2.$$

Für  $f, g \in L^2$  gilt die **Parseval–Gleichung** zudem für Skalarprodukte:

$$\langle f | g \rangle = \langle \hat{f} | \hat{g} \rangle \quad \text{also} \quad \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \overline{f(t)} g(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(k)} \hat{g}(k)$$

## Die Fourier–Isometrie

Die **quadrat-integrierbaren** Funktionen bilden den  $\mathbb{C}$ –Vektorraum

$$L^2 = L^2([0, T], \mathbb{C}) := \left\{ f : [0, T] \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{t=0}^T |f(t)|^2 dt < \infty \right\}.$$

Hierauf haben wir als **Skalarprodukt** und **Norm** die Integrale

$$\langle f | g \rangle_{L^2} := \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \overline{f(t)} g(t) dt \quad \text{und} \quad \|f\|_{L^2}^2 := \frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f(t)|^2 dt.$$

Die **quadrat-summierbaren** Folgen bilden den  $\mathbb{C}$ –Vektorraum

$$\ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) := \left\{ \hat{f} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 < \infty \right\}.$$

Hierauf haben wir als **Skalarprodukt** und **Norm** die Summen

$$\langle \hat{f} | \hat{g} \rangle_{\ell^2} := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(k)} \hat{g}(k) \quad \text{und} \quad \|\hat{f}\|_{\ell^2}^2 := \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2.$$

Das Produkt ist absolut integrierbar/summierbar dank Cauchy–Schwarz.

😊 Beide Vektorräume  $L^2$  und  $\ell^2$  scheinen zunächst sehr verschieden. Die Fourier–Isometrie enthüllt jedoch das Gegenteil: Sie sind isomorph!

Die **Fourier–Isometrie** J1A ist folgende Analyse / Synthese:

$$(\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}) : L^2([0, T], \mathbb{C}) \cong \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) : f \leftrightarrow \hat{f}$$

Jeder Funktion  $f \in L^2$  ordnen wir ihre Fourier–Koeffizienten  $\hat{f} \in \ell^2$  zu:

$$\mathcal{F} : L^2 \rightarrow \ell^2 : f \mapsto \hat{f} \quad \text{mit} \quad \hat{f}(k) = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} f(t) dt$$

Umgekehrt definiert jede Koeffizientenfolge  $\hat{f} \in \ell^2$  eine Funktion  $f \in L^2$ :

$$\mathcal{F}^{-1} : \ell^2 \rightarrow L^2 : \hat{f} \mapsto f \quad \text{mit} \quad f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ik\omega t}$$

Diese Abbildungen sind  $\mathbb{C}$ –linear und zueinander inverse Isometrien zwischen dem Funktionenraum  $L^2([0, T], \mathbb{C})$  und Folgenraum  $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ .

😊 Funktionen  $f \in L^2$  und Folgen  $\hat{f} \in \ell^2$  entsprechen sich verlustfrei. Norm und Skalarprodukt bleiben erhalten dank Parseval–Gleichung.

😊 Eine Anwendung ist die **isoperimetrische Ungleichung** J1B: Allein der Kreis maximiert den umschlossenen Flächeninhalt  $F$ .

Die Fourier–Isometrie nutzt wesentlich die Begriffe der linearen Algebra: Vektorräume mit Skalarprodukt I1G, Cauchy–Schwarz–Ungleichung I1H, Satz des Pythagoras I1I, Orthonormalisierung I1J. Zentrales Beispiel: Die Menge aller Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ist ein  $\mathbb{C}$ –Vektorraum. Hierin ist die Teilmenge der  $T$ –periodischen Funktionen ein Untervektorraum.

Die Funktionen  $e_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : t \mapsto e^{ik\omega t} = \cos(k\omega t) + i \sin(k\omega t)$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  spannen den Unterraum  $V = \{ \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega t} \mid n \in \mathbb{N}, c_k \in \mathbb{C} \}$  aller trigonometrischen Polynome auf und sind hierin eine Orthonormalbasis.

Die Vervollständigung dieses Raumes  $V$  bezüglich der  $L^2$ –Norm ist der Raum  $L^2 = L^2([0, T], \mathbb{C})$  aller quadrat–integrierbaren Funktionen.

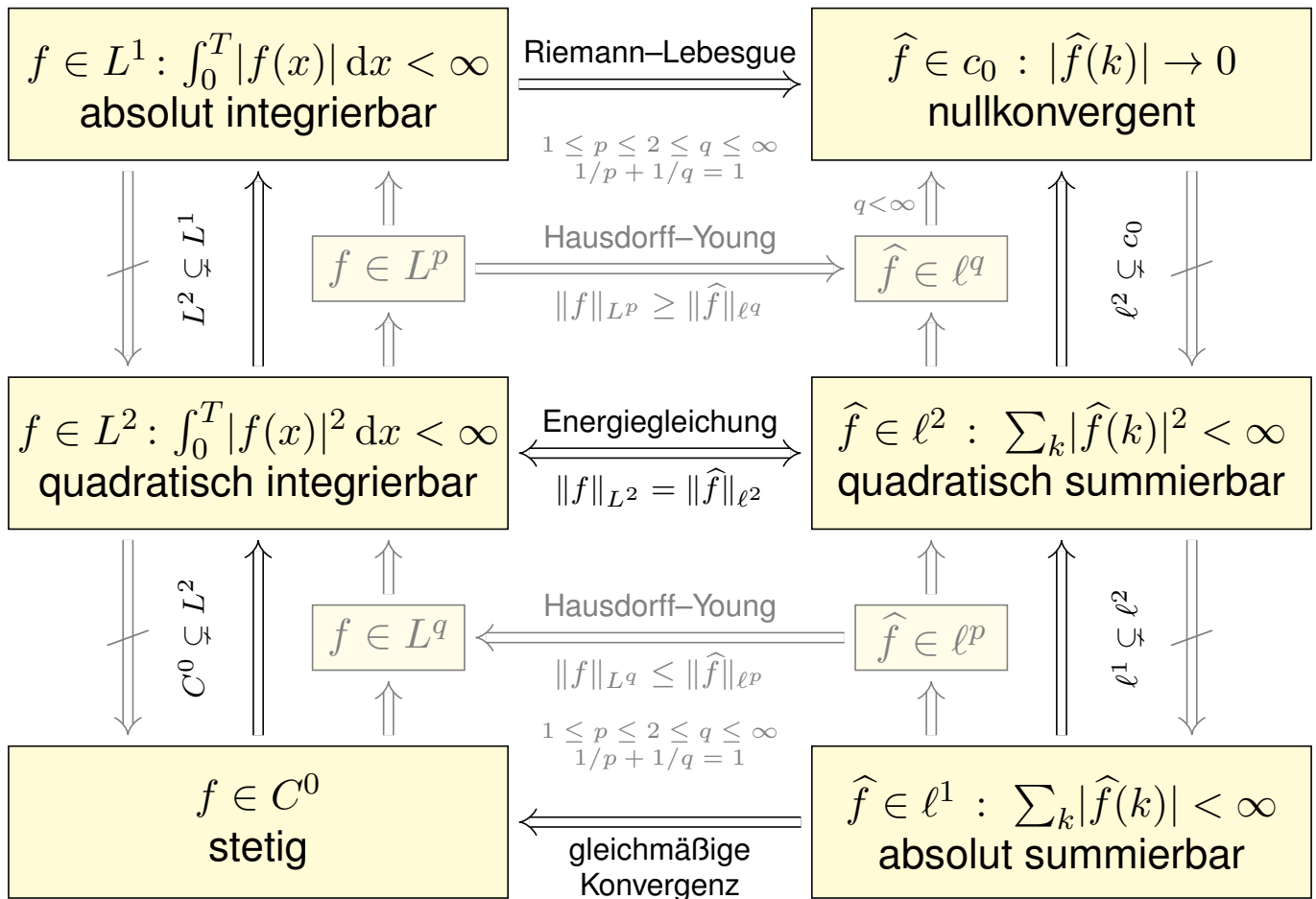
Auch die Menge aller Folgen  $\hat{f} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  ist ein  $\mathbb{C}$ –Vektorraum.

Die Folgen  $\delta_k : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\delta_k(k) = 1$  und  $\delta_k(\ell) = 0$  für  $\ell \neq k$  spannen den Unterraum  $W = \{ \sum_{k=-n}^n c_k \delta_k \mid n \in \mathbb{N}, c_k \in \mathbb{C} \}$  aller Folgen mit endlichem Träger auf und sind hierin eine Orthonormalbasis.

Die Vervollständigung dieses Raumes  $W$  bezüglich der  $\ell^2$ –Norm ist der Raum  $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$  aller quadrat–summierbaren Folgen.

😊 Die Fourier–Isometrie  $f \leftrightarrow \hat{f}$  liefert  $V \cong W$ , vervollständigt  $L^2 \cong \ell^2$ .





Von oben nach unten werden die Bedingungen strikt stärker. Die Implikationen gehen daher immer nur von unten nach oben. Die Umkehrungen gelten nicht, wie geeignete Gegenbeispiele zeigen.

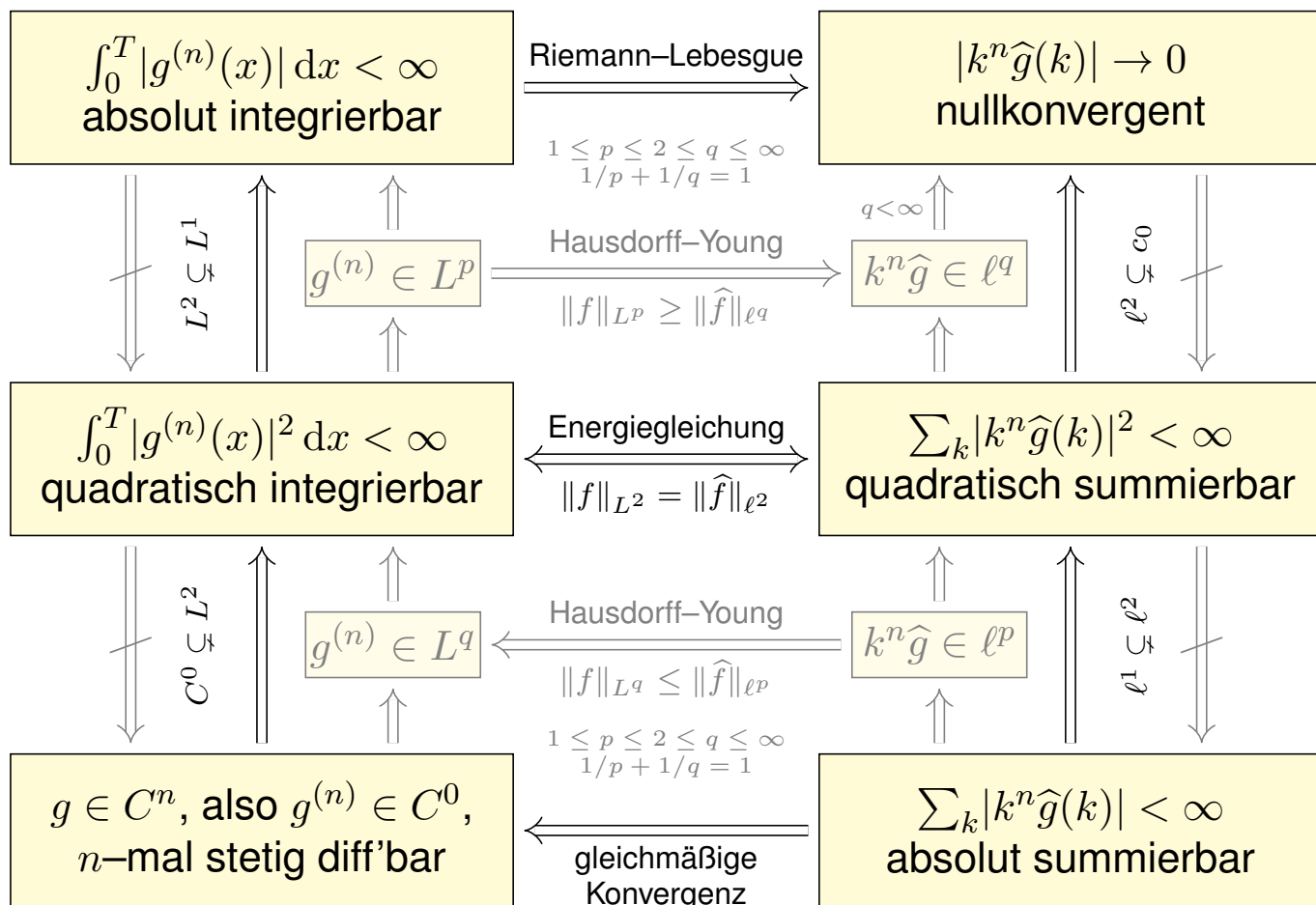
In der oberen Hälfte gehen Implikationen von links nach rechts: Schwache Bedingungen an  $f$  garantieren schwache Folgerungen für  $\hat{f}$ .

In der unteren Hälfte gehen Implikationen von rechts nach links: Erst starke Bedingungen an  $\hat{f}$  garantieren starke Folgerungen für  $f$ .

In der Mitte steht der symmetrische Fall  $p = q = 2$ : Die Energiegleichung  $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{\ell^2}$  garantiert die nützliche Äquivalenz  $f \in L^2 \iff \hat{f} \in \ell^2$ . Die  $L^2$ –Theorie ist daher zentral: die schönste, beste und einfachste.

Ergänzend nenne ich zudem die Hausdorff–Young–Ungleichungen: Sie interpolieren zwischen  $(p, q) = (1, \infty)$  und dem zentralen Fall  $(p, q) = (2, 2)$  durch  $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$  mit  $1/p + 1/q = \infty$ .

Dasselbe Diagramm gilt für  $g \in C^n$  und die  $n$ –fache Ableitung  $f = g^{(n)}$ , allgemein für  $g \in AC^n$ , also  $g \in C^{n-1}$  und  $g^{(n-1)} \in AC$  absolut stetig.



## Punktweise Konvergenz vs quadratisches Mittel

Wir fassen die Beziehungen dieser drei Konvergenzarten zusammen. Seien  $f_0, f_1, f_2, \dots, f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  Funktionen auf einer Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ .

Gleichmäßige Konvergenz:

$$\sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$$

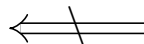
$$\text{vol } \Omega < \infty \Downarrow$$



$\Downarrow$  immer

Konvergenz im quadratischen Mittel:

$$\int_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)|^2 dx \rightarrow 0$$



Punktweise Konvergenz:

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ in jedem Punkt } x \in \Omega$$

😊 Die Implikation „gleichmäßig  $\Rightarrow L^p$ “ folgt sofort aus der Ungleichung

$$\int_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)|^p dx \leq \text{vol}(\Omega) \cdot (\sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)|)^p \rightarrow 0.$$

😊 Die Implikation „gleichmäßig  $\Rightarrow$  punktweise“ ist klar: Für  $x \in \Omega$  gilt

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0.$$

⚠ Die Umkehrungen gelten nicht, siehe Gegenbeispiele. J319 J320

**Aufgabe:** Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze Begründung (ein Ergebnis der Vorlesung oder ein Gegenbeispiel).

- (1) Was bedeutet punktweise Konvergenz der Fourier–Reihe von  $f$ ? Was sagt das Dirichlet–Kriterium über Konvergenz und Grenzwert?
- (2) Angenommen  $f$  ist nicht nur stetig, sondern stückw. stetig diff'bar. Konvergiert die Fourier–Reihe gleichmäßig gegen  $f$ ? Wie schnell?
- (3) Was besagt Pythagoras für Norm und Skalarprodukt? Allgemein: Was besagt die Parseval–Gleichung für Norm und Skalarprodukt?
- (4) Wie definieren Sie die Räume  $L^p$  und  $\ell^p$  für  $1 \leq p \leq \infty$ ? Erklären Sie insb. die wichtigsten Fälle  $L^1, L^2, L^\infty$  und  $\ell^1, \ell^2, \ell^\infty$ .
- (5) In welchem Sinne ist das Fourier–Polynom  $f_n$  vom Grad  $n$  die beste Approximation an die Funktion  $f$  in  $L^2([0, T], \mathbb{C})$ ? In welchem Sinne konvergieren die Funktionen  $f_n$  gegen  $f$ ?
- (6) Nennen Sie eine Folge  $\hat{f}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  in  $\ell^2$  aber nicht in  $\ell^1$ . Gilt umgekehrt  $\ell^1 \subset \ell^2$ ? (Beweis oder Gegenbeispiel)

- (1) Nennen Sie eine Funktion  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  in  $L^1$  aber nicht in  $L^2$ . Gilt umgekehrt  $L^2 \subset L^1$ ? (Beweis oder Gegenbeispiel)
- (2) Wie definieren Sie die Fourier–Abbildungen (Analyse / Synthese)

$$\mathcal{F} : L^1 \rightarrow \ell^\infty \quad \text{und} \quad \mathcal{F}^{-1} : \ell^1 \rightarrow L^\infty?$$

Wie definieren Sie als symmetrische Fassung die Fourier–Isometrie

$$\mathcal{F} : L^2 \rightarrow \ell^2 \quad \text{und} \quad \mathcal{F}^{-1} : \ell^2 \rightarrow L^2?$$

- (3) Wie ändert sich das Spektrum  $\hat{f}$ , wenn Sie  $f$  in einem Punkt  $t \in \mathbb{R}$  abändern? in endlich vielen Punkten? auf einer Menge vom Maß Null?
- (4) Was bedeutet: Aus dem Signal  $f$  gewinnen Sie das Spektrum  $\hat{f}$  und umgekehrt rekonstruieren Sie aus dem Spektrum  $\hat{f}$  das Signal  $f$ ?
- (5) Wie lösen Fourier–Reihen das isoperimetrische Problem? Inwiefern transformieren sie ein schwieriges Problem in ein leichtes?
- (6) Welchen Flächeninhalt können Sie mit einem Zaun der Länge  $L$  höchstens umgrenzen? Welche Kurven maximieren die Fläche?

**Aufgabe:** Seien  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  periodisch und absolut integrierbar.

(0) Wiederholen Sie möglichst präzise den Satz von Parseval (J3C).

(1) Seien  $f, g$  stetig. (a) Gilt  $\widehat{f} = 0 \Rightarrow f = 0$  und (b)  $\widehat{f} = \widehat{g} \Rightarrow f = g$ ?

(2) Dieselbe Fragen für  $f, g$  stückweise stetig und (3) sprungnormiert.

(4) Allgemein: (a) Folgt aus  $\widehat{f} = 0$  stets  $f = 0$ , zumindest fast überall?

(b) Folgt aus  $\widehat{f} = \widehat{g}$  stets  $f = g$ , zumindest fast überall?

**Lösung:** (1a) Ja: Dank Parseval gilt  $\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2 = 0$ .

Aus dem Integral  $\int_0^T |f(t)|^2 dt = 0$  und der Stetigkeit von  $f$  folgt  $f = 0$ .

Ausführlich siehe Satz J3E und den anschließenden Beweis.

(1b) Ja, dies folgt aus (1a) angewendet auf die Differenz  $f - g$ .

(2) Nein: Wie zuvor gilt  $\int_0^T |f(t)|^2 dt = 0$ , allerdings dürfen wir nun  $f$  an endlich vielen Stellen ändern. Dann gilt weiterhin  $\widehat{f} = 0$  aber  $f \neq 0$ .

(3) Ja, die Sprungnormierung stellt die Eindeutigkeit wieder her.

(4) Ja, aus  $\int_0^T |f(t)|^2 dt = 0$  folgt  $f(x) = 0$  für fast alle  $x \in \mathbb{R}$ , das heißt alle  $x$  außerhalb einer vernachlässigbaren Menge  $N \subset \mathbb{R}$ ,  $\text{vol}_1(N) = 0$ .

**Aufgabe:** (1) Ist  $\sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx)$  Fourier-Reihe einer int'baren Funktion?

(2) Ist die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx)/\sqrt{k}$  stetig?

(3) Vorgelegt sei die trigonometrische Reihe  $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-a} \sin(kx)$ . Für welche  $a \in \mathbb{R}$  konvergiert  $f$  in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$ ? Für welche  $a \in \mathbb{R}$  ist  $f$  zudem quadrat-integrierbar? stetig? stetig differenzierbar?

(4) Dieselben Fragen für  $f(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \sin(kx)/(k^a \ln(k)^b)$  oder  $f(x) = \sum_{k=3}^{\infty} \sin(kx)/(k^a \ln(k)^b \ln(\ln k)^c)$  mit  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

**Lösung:** (1) Nein nach Riemann–Lebesgue I3B, denn  $b_k = 1 \not\rightarrow 0$ .

(2) Nein, denn  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k = \infty$ . Ausführlicher gilt folgendes:

(3) Diese trig. Reihe konvergiert für  $a > 0$  in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$ :

In  $x = 0, \pi/2, \pi, \dots$  folgt dies aus dem Leibniz-Kriterium (Satz B3G), und allgemein für  $x \in \mathbb{R}$  aus Dirichlets Verallgemeinerung (Satz B3I).

Für  $f \in L^2$  ist  $a > 1/2$  notwendig und hinreichend dank Parseval (J3C).

Für  $f \in C^0$  ist  $a > 1/2$  notwendig und  $a > 1$  hinreichend (Satz I3C).

Für  $f \in C^1$  ist  $a > 3/2$  notwendig und  $a > 2$  hinreichend (Satz I3C).

(4) Analog zu (3); zur Konvergenz dieser Reihen siehe B303.

**Aufgabe:** Vorgegeben sei ein Exponent  $a \in \mathbb{R}$ . (1) Ist  $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-a} e^{ikx}$  die Fourier-Reihe einer stetigen  $2\pi$ -periodischen Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ? (2) Falls ja, wie oft ist  $f$  stetig differenzierbar? mindestens? höchstens?

**Lösung:** Wir nutzen die obigen Kriterien zu Konvergenz und Stetigkeit. Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} |k^{-a}|$  divergiert für  $a \leq 1$  und konvergiert für  $a > 1$ .

(1a) Für  $a > 1$  gilt  $\sum_{k=1}^{\infty} |k^{-a}| < \infty$ , somit konvergieren die Funktionen  $f_n(x) = \sum_{k=1}^n k^{-a} e^{ikx}$  gleichmäßig gegen  $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-a} e^{ikx}$ . Alle Funktionen  $f_n$  sind stetig, also auch die Grenzfunktion  $f$ .

Die Antwort lautet hier also: Ja,  $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-a} e^{ikx}$  ist stetig.

(1b) Für  $a \leq 1$  gilt  $\sum_{k=1}^{\infty} |k^{-a}| = \infty$ . Angenommen es gäbe eine stetige und  $2\pi$ -periodische Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} k^{-a} e^{ikx}$ .

Dank  $f \in C^0([0, 2\pi], \mathbb{C}) \subset L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$  folgt dann  $\int_{x=0}^{2\pi} |f(x)| dx < \infty$  und dank Energiegleichung  $\sum_{k=1}^{\infty} |k^{-a}|^2 < \infty$ , also  $2a > 1$ .

Für  $a \leq 1/2$  ist die Antwort also: Nein,  $f$  kann nicht stetig sein.

Für  $1/2 < a \leq 1$  lassen unsere Kriterien keinen Schluss zu.

(2) Wir nehmen  $a > 1$  an und untersuchen  $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-a} e^{ikx}$ . Durch Ableiten und Integrieren erhalten wir dank (1) sofort:

(2a) Aus  $a > n + 1$  folgt  $f \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ :

Für  $a > n + 1$  ist  $f$  mindestens  $n$ -mal stetig differenzierbar.

(2b) Aus  $f \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  folgt  $a > n + \frac{1}{2}$ :

Für  $a \leq n + 1/2$  ist  $f$  höchstens  $(n - 1)$ -mal stetig differenzierbar.

Zusammenfassend bleiben damit zwei Möglichkeiten:

- $a \in ]n + 1, n + \frac{3}{2}] \implies f \in C^n \setminus C^{n+1}$ , das heißt:  
 $f$  ist  $n$ -mal stetig differenzierbar, aber nicht  $(n + 1)$ -mal.
- $a \in ]n + \frac{3}{2}, n + 2] \implies f \in C^n \setminus C^{n+2}$ , das heißt:  
 $f$  ist  $n$ -mal stetig differenzierbar, höchstens aber  $(n + 1)$ -mal.

😊 Unsere bequemen Kriterien liefern uns recht präzise Aussagen: einfacher Plausibilitätscheck und schnelle Vorabinformation.

😞 Es bleibt eine (kleine) Lücke. Falls dies wirklich nötig sein sollte, so müssen wir hierzu die gegebene Funktion  $f$  genauer untersuchen.

**Aufgabe:** Für  $C^\infty$ -glatte Funktionen klingen die Fourier-Koeffizienten extrem schnell ab; hierzu gilt erfreulicherweise auch die Umkehrung:

- (1) Ist  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} e^{ikx}$  die Fourier-Reihe einer glatten Funktion?
- (2) Ist  $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} e^{ikx}$  die Fourier-Reihe einer glatten Funktion?
- (3) Was gilt für  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$  mit  $|c_k| \leq q^k$  und  $0 < q < 1$ ?

**Lösung:** Ja, in beiden Fällen ist die so dargestellte Funktion glatt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (e^{ix})^k = \exp(e^{ix}) = f(x)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{e^{ix}}{2}\right)^k = \frac{1}{1 - e^{ix}/2} = g(x)$$

Die Funktionen  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  sind  $2\pi$ -periodisch und  $C^\infty$ -glatt.

(3) Dasselbe gilt allgemein: Die Laurent-Reihe  $h(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k z^k$  konvergiert auf dem Kreisring  $U = K(0, q^{-1}, q) \subset \mathbb{C}$ . Die so definierte Funktion  $h: \mathbb{C} \supset U \rightarrow \mathbb{C}$  ist  $C^\infty$ -glatt, sogar analytisch / holomorph. Somit ist insbesondere auch  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}: x \mapsto h(e^{ix}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$  glatt.

😊 Schnelles Abklingen der Fourier-Koeffizienten entspricht Glattheit der Funktion. Sie kennen hierzu das  $L^2$ -Kriterium  $\sum |c_k|^2 < \infty$  sowie das  $C^n$ -Kriterium  $\sum |c_k| k^n < \infty$ , wie oben erklärt und illustriert.

😊 In unserem vorliegenden Beispiel klingen die Koeffizienten extrem schnell ab, so dass das  $C^n$ -Kriterium für jedes  $n \in \mathbb{N}$  erfüllt ist: Die so dargestellte Funktion  $f$  ist also tatsächlich  $C^\infty$ -glatt.

😊 Besser noch können Sie die Reihe sogar explizit ausrechnen: Sie erkennen hier die Exponentialreihe bzw. die geometrische Reihe!

Gleiches gilt für jede Potenzreihe im Inneren ihres Konvergenzkreises, allgemein jede Laurent-Reihe im Inneren ihres Konvergenzkreisrings. Auch hier lohnt sich Ihre Investition in mathematische Allgemeinbildung.

😊 Glattheit der Funktion  $f$  und Abklingen der Fourier-Koeffizienten  $\hat{f}$  können Sie leicht prüfen, selbst in vielen schwierigen Situationen, in denen Sie  $f$  nicht genau kennen oder analysieren können.

😊 Unsere bequemen Kriterien liefern uns recht präzise Aussagen: einfacher Plausibilitätscheck und schnelle Vorabinformation.