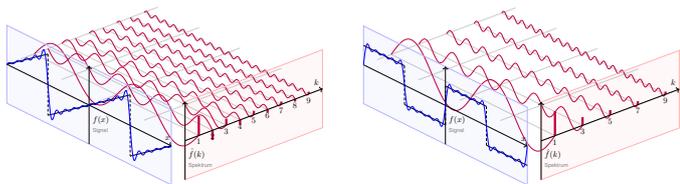


Kapitel I

Fourier-Analyse periodischer Funktionen



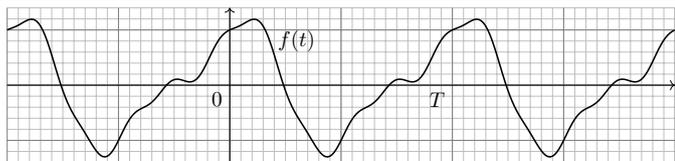
*L'analyse mathématique est aussi étendue que la nature elle-même [...]. Elle rapproche les phénomènes les plus divers, et découvre les analogies secrètes qui les unissent.*

Joseph Fourier (1768–1830), *Théorie analytique de la chaleur* (1822)

Inhalt dieses Kapitels I

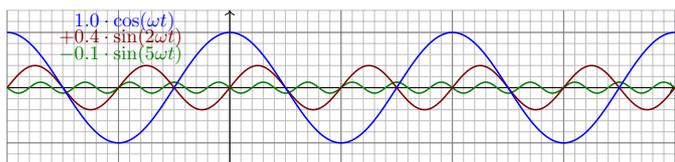
- 1 Die trigonometrische Orthonormalbasis
  - Periodische Funktionen, erste Beispiele
  - Periodische Fortsetzung, Spiegelung
  - Skalarprodukt und Orthonormalbasis
- 2 Fourier-Analyse und das Dirichlet-Kriterium
  - Fourier-Entwicklung der Sägezahnfunktion
  - Das Konvergenz-Kriterium von Dirichlet
  - Fourier-Entwicklung von Treppenfunktionen
- 3 Rechenregeln zu Integration und Glattheit
  - Integrieren und Differenzieren
  - Ableiten der Fourier-Koeffizienten
  - Von Potenzreihen zu Fourier-Reihen
- 4 Fazit: Fourier-Analyse periodischer Funktionen
  - Zusammenfassung und Verständnisfragen
  - Weitere Aufgaben und Anwendungen

Motivation zu Fourier-Reihen



Vorgelegt sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit Periode  $T$ , also Grundfrequenz  $\omega = 2\pi/T$ . Ziel: Wir zerlegen das Signal  $f$  in harmonische Schwingungen gemäß

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \underbrace{a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t)}_{\text{Grundschwingung}} + \underbrace{a_2 \cos(2\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) + \dots}_{\text{Oberschwingungen}}$$



Motivation zu Fourier-Reihen

Periodische Vorgänge sind überall: Jahreszeiten, Tag & Nacht, Puls, Schwingungen, Schall... Ihr Innenohr ermittelt eine Fourier-Analyse. Zerlegung (Analyse) in harmonische Schwingungen gelingt für praktisch alle periodischen Funktionen, egal wie kapriziös sie auch sein mögen! Diese sensationelle Entdeckung trug Fourier 1807 der Akademie vor. Dirichlet klärte 1829 grundlegende Fragen zur Konvergenz (Synthese).

Die Fourier-Analyse hat zahlreiche wichtige technische Anwendungen:

- Digitalisierung von Ton- und Bilddaten (FFT, MP3, JPEG, MPEG).
- Datenkompression, Herausfiltern relevanter Frequenzbereiche.
- Datenanalyse, Mustererkennung, z.B. Spracherkennung.
- Zerlegen von komplizierten Funktionen in einfache Basisfunktionen.
- Optimale  $L^2$ -Approximation, Lösung von Differentialgleichungen.

Wir behandeln hierzu ausführlich die mathematischen Grundlagen:

- Wie berechnet man zur Funktion  $f$  ihre Fourier-Koeffizienten?
- Konvergiert die Fourier-Reihe? Wie? Wann? Wo? Wogegen?

▶ 3Blue1Brown: *But what is a Fourier series?* [youtu.be/r6sGWTCMz2k](https://youtu.be/r6sGWTCMz2k)

Periodische Funktionen

Jede Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  können wir als **Signal** betrachten: Jedem Zeitpunkt  $t \in \mathbb{R}$  wird ein reeller Wert  $f(t) \in \mathbb{R}$  zugeordnet. Diese Zuordnung ist zunächst beliebig und muss nicht stetig sein. Es ist nützlich, auch komplexe Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  zu untersuchen; das kostet keinerlei Mehraufwand und vereinfacht viele Rechnungen.

Definition 11A: periodische Funktion

Eine Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  hat **Periode**  $T \in \mathbb{R}_{>0}$ , wenn gilt:

$$f(t+T) = f(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

Das bedeutet, die Funktionswerte wiederholen sich im Abstand von  $T$ . Hierzu sagen wir auch kurz, die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ist  **$T$ -periodisch**.

In diesem Fall gilt  $f(t+nT) = f(t)$  für alle ganzen Zahlen  $n \in \mathbb{Z}$ .

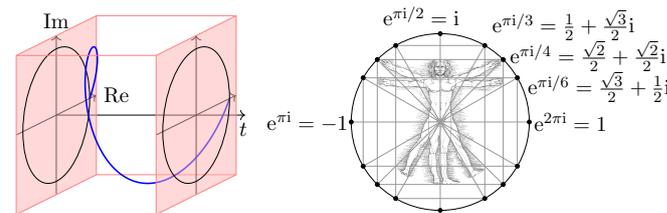
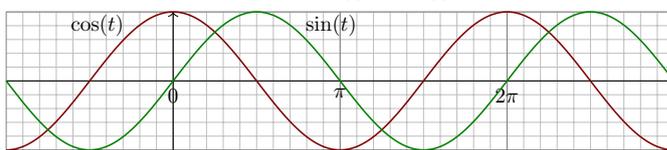
Mit  $T$  sind somit auch alle Vielfachen  $2T, 3T, 4T, \dots$  Perioden.

Die kleinste Periode nennt man gelegentlich auch **Minimalperiode**.

Diese zusätzliche Bedingung spielt im Folgenden meist keine Rolle.

Periodische Funktionen

**Leitbeispiel:** Die Funktion  $e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$  hat Periode  $T = 2\pi$ .

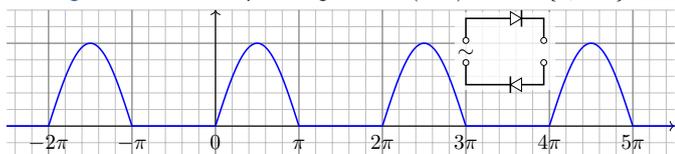


Die Funktionen  $\cos(k\omega t)$  und  $\sin(k\omega t)$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  haben Periode  $T = 2\pi/\omega$ , ebenso die komplexe Funktion  $e_k(t) := e^{ik\omega t} = \cos(k\omega t) + i \sin(k\omega t)$ .

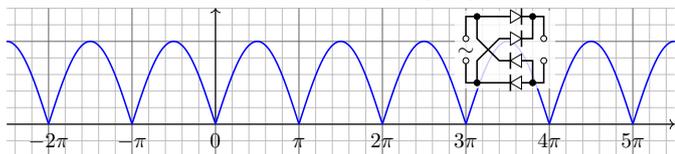
Periodische Funktionen: Beispiele

Legen wir die Spannung  $\sin t$  an einen Gleichrichter, so erhalten wir...

**Einweg-Gleichrichter:** Spannungsverlauf  $(\sin t)^+ = \max\{0, \sin t\}$ . [1417]



**Zweiweg-Gleichrichter:** Spannungsverlauf  $|\sin t|$  mit Periode  $\pi$ . [1417]

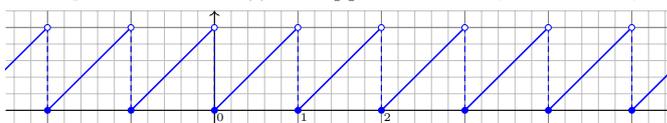


Diese Funktionen sind stetig aber nicht differenzierbar (in  $t \in \pi\mathbb{Z}$ ).

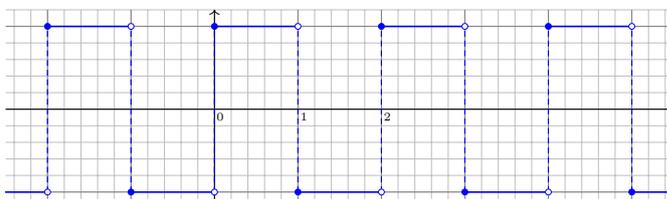
Periodische Funktionen: Beispiele

Die **Gauß-Klammer**  $[x] := \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$  bedeutet Abrunden.

Die **Sägezahnfunktion**  $s(t) = t - [t]$  hat Periode 1 (und 2, 3, 4, ...).

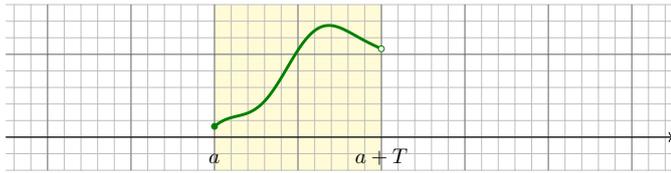


Die **Rechteckfunktion**  $r(t) = (-1)^{[t]}$  hat Periode 2 (und 4, 6, 8, ...).

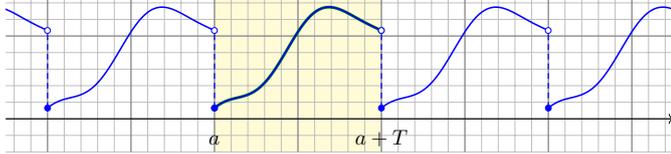


Diese Funktionen sind unstetig (in  $t \in \mathbb{Z}$ ) aber stückweise stetig (B1E).

**Aufgabe:** Setzen Sie die folgende Funktion  $T$ -periodisch fort.



**Lösung:** Hier gilt  $f(t+T) = f(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ , und so setzen wir  $f$  fort:



Jede  $T$ -periodische Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ist eindeutig durch ihre Werte auf einem beliebigen Periodenintervall  $[a, a+T[$  bestimmt. Ausführlich:

**Aufgabe:** Gegeben sei  $g: [a, a+T[ \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $a \in \mathbb{R}$  und  $T > 0$ . Dazu existiert genau eine  $T$ -periodische Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f|_{[a, a+T[} = g$ .  
(1) Warum gilt hier Eindeutigkeit? (2) Wie beweist man die Existenz?

**Lösung:** Zur Vereinfachung können wir alles nach  $a = 0$  verschieben.  
(1) Eindeutigkeit: Jede reelle Zahl  $t \in \mathbb{R}$  schreibt sich eindeutig als

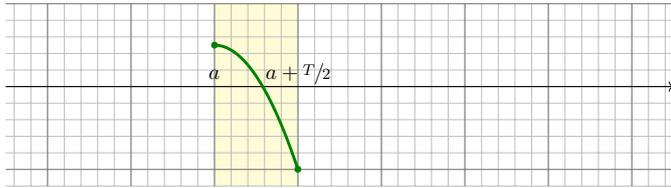
$$t = q \cdot T + r \quad \text{mit } q \in \mathbb{Z} \text{ und } 0 \leq r < T.$$

Ausführlich: Quotient  $q = \lfloor t/T \rfloor \in \mathbb{Z}$  und Rest  $r = t - qT \in [0, T[$ .  
Damit berechnet sich  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eindeutig aus  $g: [0, T[ \rightarrow \mathbb{C}$  gemäß

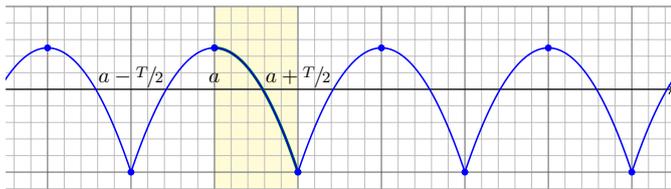
$$f(t) = f(t - qT) = f(r) = g(r).$$

(2) Existenz: Aus den vorgegebenen Daten  $g: [0, T[ \rightarrow \mathbb{C}: r \mapsto g(r)$  konstruieren wir explizit die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}: t \mapsto g(t - \lfloor t/T \rfloor \cdot T)$ . Diese Funktion  $f$  ist tatsächlich  $T$ -periodisch und erfüllt  $f|_{[a, a+T[} = g$ .

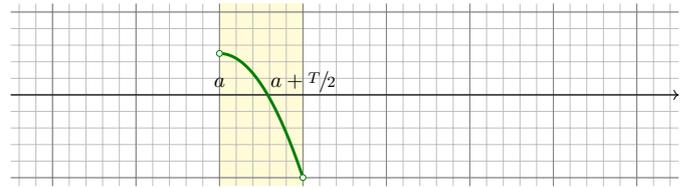
**Aufgabe:** Setzen Sie die Funktion (bzgl.  $a$ ) gerade  $T$ -periodisch fort.



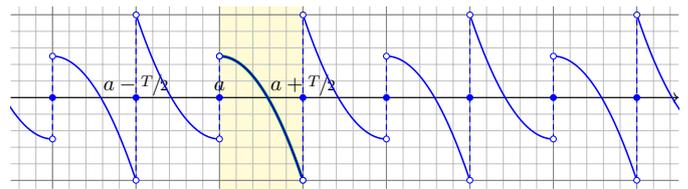
**Lösung:** Hier gilt  $f(t+T) = f(t)$  und  $f(a-t) = f(a+t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ :



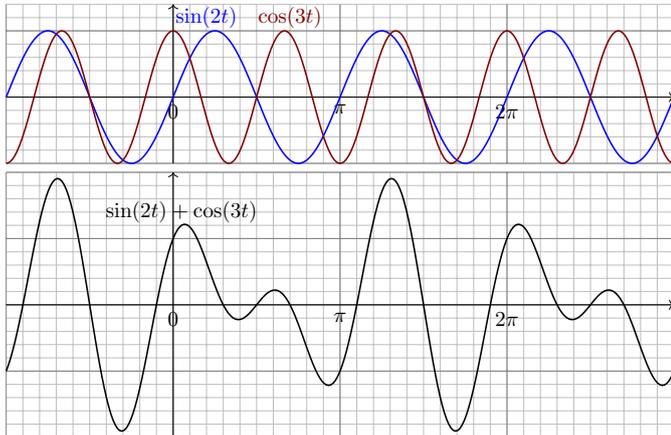
**Aufgabe:** Setzen Sie die Funktion (bzgl.  $a$ ) ungerade  $T$ -periodisch fort.



**Lösung:** Hier gilt  $f(t+T) = f(t)$  und  $f(a-t) = -f(a+t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ :



Haben  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  Periode  $T$ , dann auch ihre Summe  $f+g$ .

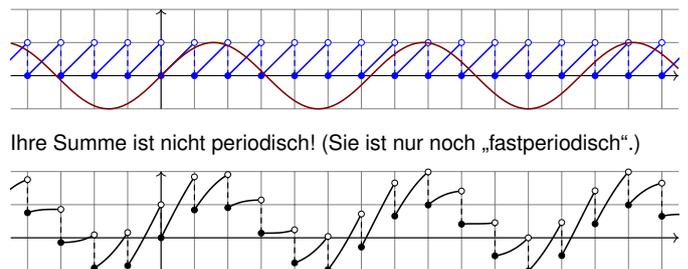


**Aufgabe:** Sind  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  periodisch, dann auch ihre Summe?

**Lösung:** Nein! Hierzu müssen  $f, g$  eine gemeinsame Periode haben.

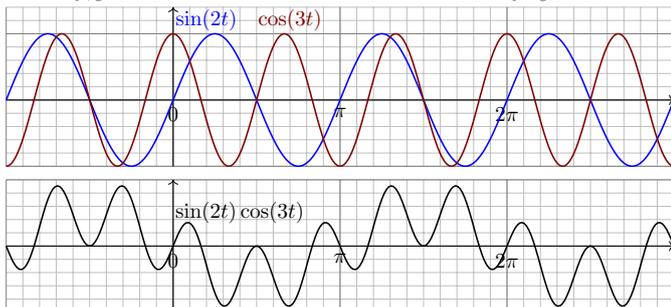
⚠ Bei der obigen Summe haben  $f$  und  $g$  eine gemeinsame Periode. Das ist auch nötig, andernfalls ist die Summe nicht mehr periodisch!

**Beispiel:** Die Sägezahnfunktion  $s(t) = t - \lfloor t \rfloor$  hat Periode  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Die Funktion  $t \mapsto \sin(t)$  hat Perioden  $2\pi n$ , aber keine mit  $s$  gemeinsam:



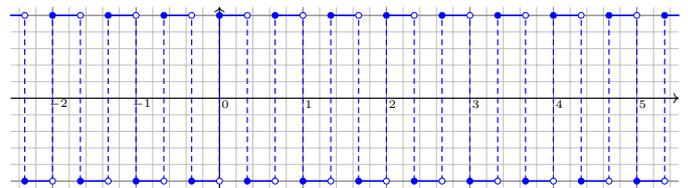
Ihre Summe ist nicht periodisch! (Sie ist nur noch „fastperiodisch“.)

Haben  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  Periode  $T$ , dann auch ihr Produkt  $f \cdot g$ .

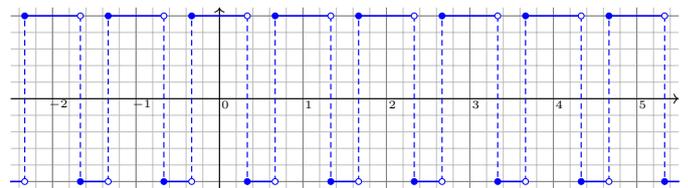


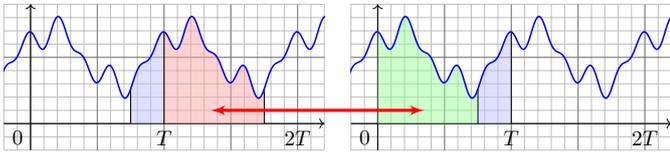
Der Funktionenraum  $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) := \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \}$  ist ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum, sogar eine Algebra, bezüglich der punktweisen Verknüpfungen. Darin liegt die Menge  $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{C})^{\mathbb{Z}T} := \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \forall t \in \mathbb{R}: f(t+T) = f(t) \}$  aller  $T$ -periodischen Funktionen als Untervektorraum und Unter algebra: Summen und Produkte  $T$ -periodischer Funktionen sind  $T$ -periodisch.

Hat  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  Periode  $T$ , dann auch  $g(t) = f(kt)$  für  $k \in \mathbb{N}$ . Beispiel: Die Rechteckfunktion  $r(t) = (-1)^{\lfloor t \rfloor}$  hat Periode 2, ebenso  $r(3t)$ :



Auch ihr Produkt  $r(t)r(3t)$  hat Periode 2. Es hat sogar Periode 1!





**Lemma 11B: Integral  $T$ -periodischer Funktionen**

Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  sei  $T$ -periodisch und auf  $[0, T]$  integrierbar. Zur Integration können wir ein beliebiges Periodenintervall wählen:

$$\int_{t=a}^{a+T} f(t) dt = \int_{t=0}^T f(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt.$$

**Nachrechnen:** Wie skizziert sei  $0 < a < T$ , allgemein geht's genauso. Dank Periodizität gilt  $\int_{t=T}^{T+a} f(t) dt = \int_{t=0}^a f(t) dt$ , dank Additivität also

$$\int_a^{a+T} f = \int_a^T f + \int_T^{T+a} f = \int_a^T f + \int_0^a f = \int_0^a f + \int_a^T f = \int_0^T f.$$

Umparametrisieren auf Periode  $2\pi$

😊 Jede  $T$ -periodische Funktion können wir zu Periode  $2\pi$  umparametrisieren. Letztere sind für uns besonders bequem.

**Proposition 11D: Umparametrisierung auf Periode  $2\pi$**

Sei  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}: t \mapsto \varphi(t)$  eine Funktion mit Periode  $T > 0$  und Grundfrequenz  $\omega = 2\pi/T$ . Wir setzen  $x = \omega t$ , also  $t = x/\omega$ .

Dann hat die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}: f(x) = \varphi(t) = \varphi(x/\omega)$  Periode  $2\pi$ , denn für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $f(x + 2\pi) = \varphi(t + T) = \varphi(t) = f(x)$ .

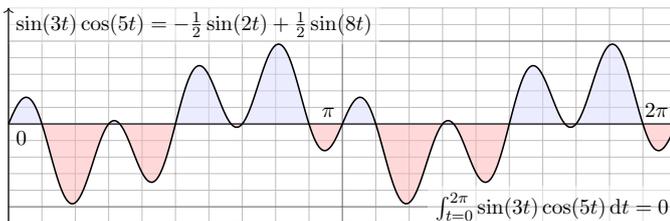
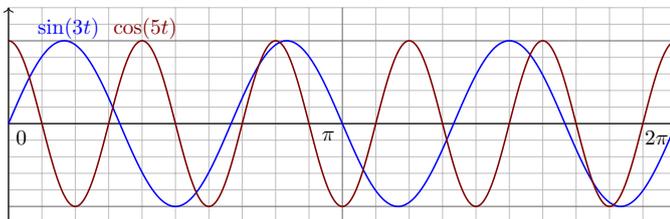
Das Skalarprodukt bleibt dank Substitutionsregel B1K unverändert.

Für  $t = x/\omega$  und  $dt = dx/\omega$  sowie  $\varphi(t) = f(x)$  und  $\psi(t) = g(x)$  gilt:

$$\langle \varphi | \psi \rangle_T = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \overline{\varphi(t)} \psi(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{x=0}^{2\pi} \overline{f(x)} g(x) dx = \langle f | g \rangle_{2\pi}$$

Wir betrachten im Folgenden meist  $2\pi$ -periodische Funktionen. Dann ist  $\omega = 1$ , und unsere Formeln werden kürzer und einfacher. In konkreten Anwendungen ist die Frequenz  $\omega$  meist fest vorgegeben. Die Umrechnung gelingt jedenfalls leicht wie oben in 11D festgehalten.

Orthogonalität trigonometrischer Funktionen



Orthogonalität trigonometrischer Funktionen

**Aufgabe:** Integrieren Sie für  $k, \ell \in \mathbb{N}$  folgende Funktionen über  $[0, T]$ :

$$\cos(k\omega t) \cos(\ell\omega t), \quad \sin(k\omega t) \sin(\ell\omega t), \quad \sin(k\omega t) \cos(\ell\omega t).$$

Wir erinnern hierzu an die stets nützlichen Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) \cos(\beta) &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)], \\ \sin(\alpha) \sin(\beta) &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)], \\ \sin(\alpha) \cos(\beta) &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]. \end{aligned}$$

Leiten Sie zunächst diese Additionstheoreme aus der Euler-Formel  $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$  und dem Exponentialgesetz  $e^{i\alpha+i\beta} = e^{i\alpha} e^{i\beta}$  ab.

**Lösung:** Zur Berechnung nutzen wir folgende Grundintegrale

$$\begin{aligned} \int_{t=0}^T \sin(n\omega t) dt &= 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}, \\ \int_{t=0}^T \cos(n\omega t) dt &= \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq 0, \\ T & \text{für } n = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

**Definition 11c: Skalarprodukt periodischer Funktionen**

Für Funktionen  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  definieren wir ihr **Skalarprodukt** durch

$$L^p \times L^q \rightarrow \mathbb{C}: (f, g) \mapsto \langle f | g \rangle := \frac{1}{b-a} \int_{t=a}^b \overline{f(t)} g(t) dt.$$

Der Integrand  $\overline{f}g$  sei absolut integrierbar, etwa  $f \in L^\infty$  beschränkt und  $g \in L^1$  absolut integrierbar, allgemein  $f \in L^p, g \in L^q$  mit  $1/p + 1/q = 1$ . Bei Periode  $T > 0$  integrieren wir über ein Intervall mit  $b - a \in \mathbb{N}_{\geq 1} \cdot T$ . Das Periodenintegral ist invariant bei Verschiebung und Vervielfachung.

**Symmetrie:** Vertauschen bedeutet konjugieren,  $\langle g | f \rangle = \overline{\langle f | g \rangle}$ .

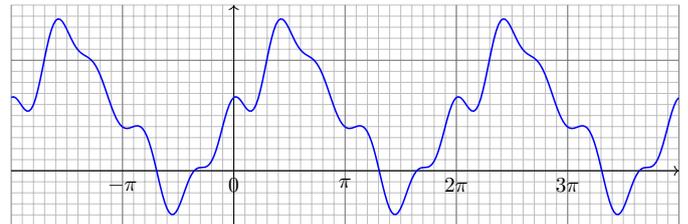
**Linearität** im zweiten Faktor, konjugiert im ersten: Für alle  $\alpha \in \mathbb{C}$  gilt

$$\begin{aligned} \langle f | g_1 + g_2 \rangle &= \langle f | g_1 \rangle + \langle f | g_2 \rangle, & \langle f | \alpha g \rangle &= \alpha \langle f | g \rangle, \\ \langle f_1 + f_2 | g \rangle &= \langle f_1 | g \rangle + \langle f_2 | g \rangle, & \langle \alpha f | g \rangle &= \overline{\alpha} \langle f | g \rangle. \end{aligned}$$

**Positivität:** Für jede stetige Funktion  $f \neq 0$  gilt  $\langle f | f \rangle > 0$ . Allgemein gilt  $\langle f | f \rangle \geq 0$ , und aus  $\langle f | f \rangle = 0$  folgt  $f(t) = 0$  für fast alle  $t \in [a, b]$ .

Trigonometrische Polynome

Beispiel:  $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin(x) - \frac{1}{7} \sin(3x) + \frac{2}{15} \cos(5x) + \frac{3}{100} \cos(6x)$



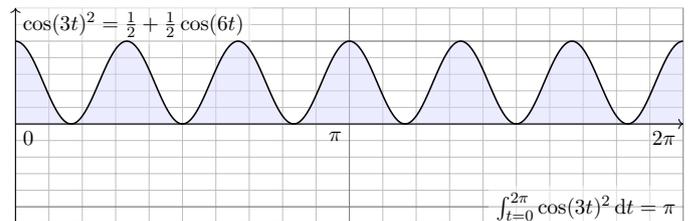
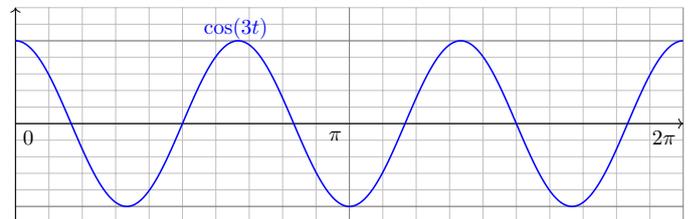
**Trigonometrisches Polynom** nennen wir jede endliche Summe

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega t}.$$

zu gegebenen Koeffizienten  $a_k, b_k \in \mathbb{C}, b_0 = 0$  bzw.  $c_{\pm k} = (a_k \mp ib_k)/2$ .

😊 Beide Schreibweisen sind nützlich, die komplexe ist oft bequemer.

Orthogonalität trigonometrischer Funktionen



Orthogonalität trigonometrischer Funktionen

Die Orthogonalität folgt dann durch direktes Nachrechnen.

$$\begin{aligned} \int_{t=0}^T \cos(k\omega t) \cos(\ell\omega t) dt &= \frac{1}{2} \int_{t=0}^T \cos((k-\ell)\omega t) + \cos((k+\ell)\omega t) dt \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell, \\ T/2 & \text{für } k = \ell \geq 1, \\ T & \text{für } k = \ell = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{t=0}^T \sin(k\omega t) \sin(\ell\omega t) dt &= \frac{1}{2} \int_{t=0}^T \cos((k-\ell)\omega t) - \cos((k+\ell)\omega t) dt \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell, \\ T/2 & \text{für } k = \ell \geq 1, \\ 0 & \text{für } k = \ell = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\int_{t=0}^T \sin(k\omega t) \cos(\ell\omega t) dt = \frac{1}{2} \int_{t=0}^T \sin((k-\ell)\omega t) + \sin((k+\ell)\omega t) dt = 0$$

😊 Das ist schön. Alles wird noch schöner und übersichtlicher für die komplexe Funktion  $e^{ik\omega t} = \cos(k\omega t) + i \sin(k\omega t)$ , siehe nächste Aufgabe.

Die trigonometrische Orthonormalbasis

I121  
Beispiel

Für Funktionen  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit Periode  $T$  nutzen wir das **Skalarprodukt**

$$\langle f | g \rangle := \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \overline{f(t)} g(t) dt.$$

Sei  $\omega = 2\pi/T$ . Als **Basisfunktion**  $e_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  definieren wir

$$e_k(t) := e^{ik\omega t} = \cos(k\omega t) + i \sin(k\omega t).$$

Ihre Linearkombinationen sind die **trigonometrischen Polynome**:

$$f(t) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ik\omega t}, \quad g(t) = \sum_{\ell=-n}^n \widehat{g}(\ell) e^{i\ell\omega t} \quad \text{mit} \quad \widehat{f}(k), \widehat{g}(\ell) \in \mathbb{C}.$$

**Aufgabe:** Wie bestimmt die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ihr Spektrum  $\widehat{f}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ ? Wir nutzen Orthonormalität: Berechnen Sie hierzu die Skalarprodukte

- (0)  $\langle 1 | e_n \rangle$ , (1)  $\langle e_k | e_\ell \rangle$ , (2)  $\langle e_k | g \rangle$ , (3)  $\langle f | g \rangle$ , (4)  $\langle f | f \rangle$ .
- (5) Entwickeln Sie  $f(t) = \sin^2 t$  und  $g(t) = \cos^3 t$  in Fourier-Polynome.
- (6) Berechnen Sie daraus  $\frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \sin^4 t dt$  und  $\frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \cos^6 t dt$ .

Die trigonometrische Orthonormalbasis

I123  
Beispiel

(2) **Fourier** — Dank Linearität und Orthonormalität erhalten wir:

$$\langle e_k | g \rangle \stackrel{\text{Def}}{=} \left\langle e_k \left| \sum_{\ell=-n}^n \widehat{g}(\ell) e_\ell \right. \right\rangle \stackrel{\text{Lin}}{=} \sum_{\ell=-n}^n \widehat{g}(\ell) \langle e_k | e_\ell \rangle \stackrel{(1)}{=} \widehat{g}(k)$$

☺ Das Skalarprodukt filtert den gewünschten Koeffizienten heraus!

(3) **Parseval** — Dank Bilinearität und Orthonormalität erhalten wir:

$$\langle f | g \rangle \stackrel{\text{Def}}{=} \left\langle \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e_k \left| \sum_{\ell=-n}^n \widehat{g}(\ell) e_\ell \right. \right\rangle \stackrel{\text{Lin}}{=} \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) \langle e_k | \sum_{\ell=-n}^n \widehat{g}(\ell) e_\ell \rangle$$

$$\stackrel{\text{Lin}}{=} \sum_{k=-n}^n \sum_{\ell=-n}^n \widehat{f}(k) \widehat{g}(\ell) \langle e_k | e_\ell \rangle \stackrel{(1)}{=} \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) \widehat{g}(k).$$

☺ Diese Rechnung gilt allgemein für Orthonormalbasen wie im  $\mathbb{R}^n$ .

(4) **Energiegleichung** — Für das Normquadrat gilt Pythagoras (I11):

$$\langle f | f \rangle \stackrel{(3)}{=} \sum_{k=-n}^n |\widehat{f}(k)|^2$$

☺ Das Normquadrat ist die Summe der Koeffizientenquadrate.

Die trigonometrische Orthonormalbasis

I125  
Ausführung

Satz I1E: trigonometrische Orthonormalbasis

Die Menge aller Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ist ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum. Hierin ist die Teilmenge aller  $T$ -periodischen Funktionen ein Untervektorraum. Als Basisfunktion  $e_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  und  $\omega = 2\pi/T$  definieren wir

$$e_k(t) := e^{ik\omega t} = \cos(k\omega t) + i \sin(k\omega t).$$

Diese erzeugen den Unterraum  $V = \{ \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega t} \mid n \in \mathbb{N}, c_k \in \mathbb{C} \}$  der trigonometrischen Polynome. Hierauf haben wir das Skalarprodukt

$$V \times V \rightarrow \mathbb{C} : (f, g) \mapsto \langle f | g \rangle := \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \overline{f(t)} g(t) dt.$$

Damit gelten die Orthonormalitätsrelationen

$$\langle e_k | e_\ell \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell: \text{ paarweise Orthogonalität,} \\ 1 & \text{für } k = \ell: \text{ Normierung auf Länge 1.} \end{cases}$$

Die trigonometrische Orthonormalbasis

I127  
Ausführung

- ☺ Dieselben Gleichungen nutzen wir allgemein für Fourier-Reihen.
- ☺ Das Fourier-Integral filtert den gewünschten Koeffizienten heraus!
- ☺ Das Skalarprodukt beschert uns Struktur, Klarheit und Übersicht.
- ☺ Die Orthonormalität der Basis  $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  vereinfacht die Rechnung.

**Korollar I1F:** Jede Funktion bestimmt ihre Koeffizienten.

(2) Die Funktionen  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  seien gegeben als Fourier-Polynome

$$f(t) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ik\omega t} \quad \text{und} \quad g(t) = \sum_{k=-n}^n \widehat{g}(k) e^{ik\omega t}.$$

(2a) Aus  $\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k)$  für alle  $k = -n, \dots, n$  folgt offensichtlich  $f = g$ .

(2b) Umgekehrt folgt aus  $f = g$  auch  $\widehat{f} = \widehat{g}$ , dank der Fourier-Integrale:

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} g(t) dt = \widehat{g}(k)$$

☺ Koeffizientenvergleich! Dazu genügt bereits  $f = g$  fast überall. (A4G)

Die trigonometrische Orthonormalbasis

I122  
Beispiel

**Lösung:** (0) Wir berechnen  $\langle 1 | e_n \rangle$ . Für  $n = 0$  ist es besonders leicht:

$$\langle 1 | e_0 \rangle \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{T} \int_{t=0}^T 1 \cdot e^{i0\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T 1 dt = 1.$$

Für  $n \in \mathbb{Z}$  mit  $n \neq 0$  nutzen wir den HDI und  $\omega T = 2\pi$ :

$$\langle 1 | e_n \rangle \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{T} \int_{t=0}^T 1 \cdot e^{in\omega t} dt \stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} \frac{1}{T} \left[ \frac{1}{in\omega} e^{in\omega t} \right]_{t=0}^T = 0.$$

(1) **Orthonormalität** — Wir berechnen die gesuchten Skalarprodukte:

$$\langle e_k | e_\ell \rangle \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \overline{e_k(t)} e_\ell(t) dt \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} e^{i\ell\omega t} dt$$

$$\stackrel{\text{Exp}}{=} \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{i(\ell-k)\omega t} dt \stackrel{(0)}{=} \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell, \\ 1 & \text{für } k = \ell. \end{cases}$$

☺ Die Basis  $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  ist orthonormal bezüglich des Skalarprodukts! Das ist analog zur Geometrie des euklidischen Raumes  $\mathbb{R}^n$  bzw.  $\mathbb{C}^n$ .

☺ Im Komplexen ist alles halb so schwer und doppelt so schön!

Die trigonometrische Orthonormalbasis

I124  
Beispiel

(5) Wir entwickeln  $f$  und  $g$  dank der Euler-Formel  $e^{it} = \cos t + i \sin t$ :

$$f(t) = \sin(t)^2 = \left( \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^2 = -\frac{1}{4} e^{2it} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{-2it} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2t)$$

$$g(t) = \cos(t)^3 = \left( \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} e^{3it} + \frac{3}{8} e^{it} + \frac{3}{8} e^{-it} + \frac{1}{8} e^{-3it}$$

$$= \frac{3}{4} \cos(t) + \frac{1}{4} \cos(3t)$$

☺ Dank Orthonormalität (1) lesen wir die Fourier-Koeffizienten ab (2).

(6) Wir nutzen die Energiegleichung (4) und Fourier-Koeffizienten (5):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \sin^4 t dt \stackrel{\text{Def}}{=} \langle f | f \rangle \stackrel{(4)}{=} \sum_{k=-n}^n |\widehat{f}(k)|^2 \stackrel{(5)}{=} \frac{3}{8}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \cos^6 t dt \stackrel{\text{Def}}{=} \langle g | g \rangle \stackrel{(4)}{=} \sum_{k=-n}^n |\widehat{g}(k)|^2 \stackrel{(5)}{=} \frac{5}{16}$$

☺ Die Energiegleichung gilt allgemein für Fourier-Reihen! (Satz J1A)

Die trigonometrische Orthonormalbasis

I126  
Ausführung

Korollar I1F: Fourier-Koeffizienten durch Skalarprodukt

(1) Wir betrachten ein trigonometrisches Polynom:

$$f(t) = \sum_{\ell=-n}^n c_\ell e^{i\ell\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{\ell=1}^n a_\ell \cos(\ell\omega t) + b_\ell \sin(\ell\omega t)$$

Die Funktion  $f$  bestimmt die Koeffizienten durch Fourier-Integrale:

$$c_k = \langle e_k | f \rangle = \langle e^{ik\omega t} | f \rangle = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} f(t) dt,$$

bzw.

$$a_k = \langle 2 \cos(k\omega t) | f \rangle = \frac{2}{T} \int_{t=0}^T \cos(k\omega t) f(t) dt,$$

$$b_k = \langle 2 \sin(k\omega t) | f \rangle = \frac{2}{T} \int_{t=0}^T \sin(k\omega t) f(t) dt.$$

☺ Die Formeln für die Koeffizienten  $c_k$  sind besonders schön, da die Funktionen  $e_k(t) = e^{ik\omega t}$  orthonormal sind. Hingegen sind  $\cos(k\omega t)$  und  $\sin(k\omega t)$  zwar orthogonal, aber mit  $L^2$ -Norm  $\sqrt{2}/2$  statt Normierung 1.

Die trigonometrische Orthonormalbasis

I128  
Ausführung

Korollar I1F: Norm und Skalarprodukt

(3) Koeffizienten  $\widehat{f}(k), \widehat{g}(k) \in \mathbb{C}$  definieren trigonometrische Polynome

$$f(t) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ik\omega t} \quad \text{und} \quad g(t) = \sum_{k=-n}^n \widehat{g}(k) e^{ik\omega t}.$$

Für ihre Norm und ihr Skalarprodukt gilt nach Pythagoras (I11)

$$\frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-n}^n |\widehat{f}(k)|^2, \quad \text{kurz} \quad \|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{\ell^2},$$

$$\frac{1}{T} \int_{t=0}^T \overline{f(t)} g(t) dt = \sum_{k=-n}^n \overline{\widehat{f}(k)} \widehat{g}(k), \quad \text{kurz} \quad \langle f | g \rangle_{L^2} = \langle \widehat{f} | \widehat{g} \rangle_{\ell^2}.$$

☺ Diese Isometrie ist eine zentrale Eigenschaft der Fourier-Theorie. Für trigonometrische Polynome folgt dies direkt aus der Orthonormalität der Basis  $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ . Erfreulicherweise gilt dies nach Vervollständigung ganz allgemein für alle quadrat-integrierbaren Funktionen! (Satz J1A)

Fourier–Theorie führt uns wie durch Zauberhand zu Skalarprodukten. Wir erinnern uns dazu an grundlegende Begriffe und Rechentechniken.

☐ Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §3.5.

Das **euklidische Skalarprodukt** von zwei Vektoren  $u, v \in \mathbb{R}^n$  ist

$$\langle u | v \rangle = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n.$$

Übliche Schreibweisen:  $\langle u | v \rangle = \langle u, v \rangle = u \cdot v = u \cdot v = u^T v = \dots$

Für jeden Vektor  $u \in \mathbb{R}^n$  gilt somit  $\langle u | u \rangle = u_1^2 + \dots + u_n^2 \geq 0$ .

Die **euklidische Norm** des Vektors  $u \in \mathbb{R}^n$  ist definiert durch

$$|u| = \sqrt{\langle u | u \rangle} = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}.$$

Übliche Schreibweisen:  $|u| = |u|_2 = \|u\| = \|u\|_2 = \dots$

Der **euklidische Abstand** zwischen zwei Punkten  $u, v \in \mathbb{R}^n$  ist

$$|u - v| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}.$$

Das **hermitesche Skalarprodukt** von zwei Vektoren  $u, v \in \mathbb{C}^n$  ist

$$\langle u | v \rangle = \overline{u_1} v_1 + \dots + \overline{u_n} v_n.$$

Übliche Schreibweisen:  $\langle u | v \rangle = \langle u, v \rangle = u \cdot v = u \cdot v = \overline{u}^T v = \dots$

Für jeden Vektor  $u \in \mathbb{C}^n$  gilt somit  $\langle u | u \rangle = |u_1|^2 + \dots + |u_n|^2 \geq 0$ .

Die **hermitesche Norm** des Vektors  $u \in \mathbb{C}^n$  ist definiert durch

$$|u| = \sqrt{\langle u | u \rangle} = \sqrt{|u_1|^2 + \dots + |u_n|^2}.$$

Übliche Schreibweisen:  $|u| = |u|_2 = \|u\| = \|u\|_2 = \dots$

Der **hermitesche Abstand** zwischen zwei Punkten  $u, v \in \mathbb{C}^n$  ist

$$|u - v| = \sqrt{|u_1 - v_1|^2 + \dots + |u_n - v_n|^2}.$$

⚠ Im komplexen Skalarprodukt muss ein Faktor konjugiert werden, damit  $\langle u | u \rangle \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  gilt. Ich konjugiere systematisch den ersten, andere Autoren den zweiten. In der Literatur werden beide Konventionen genutzt, sie gehen durch Vertauschen und Konjugation ineinander über.

**Definition 11G: Skalarprodukt**

Ein **Skalarprodukt** auf einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  ist eine Abbildung

$$\langle - | - \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K} : (u, v) \mapsto \langle u | v \rangle,$$

die (konjugiert) symmetrisch, bilinear und positiv ist.

Ein Skalarprodukt ermöglicht uns, in  $V$  Winkel und Längen zu messen. Damit gewinnen wir auf  $V$  die üblichen geometrischen Werkzeuge:

- **Orthogonalität:**  $u, v \in V$  stehen senkrecht, wenn  $\langle u | v \rangle = 0$ .
- **Norm:** Die Länge eines Vektors  $v \in V$  ist  $\|v\| = \sqrt{\langle v | v \rangle}$ .
- **Cauchy–Schwarz–Ungleichung:** Es gilt  $|\langle u | v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ .
- **Winkel:**  $\langle u | v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\alpha)$  mit  $\alpha = \angle(u, v) \in [0, \pi]$ .
- **Dreiecksungleichung:** Es gilt  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ .
- **Metrik:** Der Abstand zweier Vektoren  $u, v$  ist  $\|u - v\|$ .
- **Konvergenz**  $v_n \rightarrow v$  ist definiert durch  $\|v_n - v\| \rightarrow 0$ .

😊 Diese Begriffe kennen Sie bereits aus dem  $\mathbb{R}^n$ . Erstaunlicherweise nützen Sie ebenso für Funktionen als Grundlage der Fourier–Theorie!

**Nachrechnen:** (1) Für  $v = 0$  ist die Ungleichung offenbar richtig. Wir dürfen daher  $v \neq 0$  annehmen, dank Positivität also  $\langle v | v \rangle > 0$ . Wir setzen  $z = au - bv$  mit  $a, b \in \mathbb{C}$  und berechnen das Normquadrat:

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle z | z \rangle &= \langle au - bv | au - bv \rangle \\ &= |a|^2 \langle u | u \rangle - \overline{a} b \langle u | v \rangle - a \overline{b} \langle v | u \rangle + |b|^2 \langle v | v \rangle \end{aligned}$$

Wir wählen nun geschickte Koeffizienten  $a = \langle v | v \rangle$  und  $b = \langle v | u \rangle$ :

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle v | v \rangle [\langle u | u \rangle \langle v | v \rangle - 2|\langle u | v \rangle|^2 + |\langle u | v \rangle|^2] \\ = \langle v | v \rangle [\langle u | u \rangle \langle v | v \rangle - |\langle u | v \rangle|^2] \end{aligned}$$

Wegen  $\langle v | v \rangle > 0$  erhalten wir die gewünschte Ungleichung:

$$\langle u | u \rangle \langle v | v \rangle - |\langle u | v \rangle|^2 \geq 0$$

(2) Bei Gleichheit gilt  $\langle z | z \rangle = 0$ , also  $z = au + bv = 0$ , somit  $u = (b/a)v$ . Umgekehrt folgt aus linearer Abhängigkeit  $u = \lambda v$  die Gleichheit, denn

$$\begin{aligned} |\langle u | v \rangle|^2 &= |\langle \lambda v | v \rangle|^2 = |\lambda|^2 \langle v | v \rangle^2, \\ \langle u | u \rangle \langle v | v \rangle &= \langle \lambda v | \lambda v \rangle \langle v | v \rangle = |\lambda|^2 \langle v | v \rangle^2. \end{aligned}$$

Überall in Naturwissenschaft und Technik sind komplexe Zahlen nützlich. Gerade in der Fourier–Theorie vereinfachen sie viele Rechnungen: Im Komplexen ist alles halb so schwer und doppelt so schön!

Jede **komplexe Zahl**  $z \in \mathbb{C}$  schreibt sich eindeutig als

$$z = x + iy \quad \text{mit} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Die **Konjugation**  $\bar{\cdot} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist definiert durch

$$z = x + iy \quad \mapsto \quad \bar{z} = x - iy.$$

Für das Produkt von  $\bar{z}$  und  $z$  gilt demnach

$$\bar{z} \cdot z = (x - iy)(x + iy) = x^2 + y^2 \geq 0.$$

Hieraus gewinnen wir die **Norm** von  $z \in \mathbb{C}$  mittels

$$|z| = \sqrt{\bar{z} \cdot z} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

😊 Somit entspricht diese Norm auf  $\mathbb{C}$  der euklidischen Norm auf  $\mathbb{R}^2$ .

☐ Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §1.7.

☐ Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §3.6. Soweit möglich behandeln wir den reellen und komplexen Fall parallel: Im Folgenden steht  $\mathbb{K}$  entweder für den Körper  $\mathbb{R}$  oder den Körper  $\mathbb{C}$ .

Das Skalarprodukt auf  $V = \mathbb{K}^n$  erfreut sich folgender Eigenschaften:

- 1 (konjugierte) **Symmetrie:** Für alle  $u, v \in V$  gilt  $\langle v | u \rangle = \overline{\langle u | v \rangle}$ .
- 2 **Linearität im zweiten Faktor:** Für alle  $\alpha \in \mathbb{K}$  gilt

$$\langle u | v_1 + v_2 \rangle = \langle u | v_1 \rangle + \langle u | v_2 \rangle, \quad \langle u | \alpha v \rangle = \alpha \langle u | v \rangle.$$

Dank Symmetrie folgt (konjugierte) **Linearität im ersten Faktor:**

$$\langle u_1 + u_2 | v \rangle = \langle u_1 | v \rangle + \langle u_2 | v \rangle, \quad \langle \alpha u | v \rangle = \overline{\alpha} \langle u | v \rangle.$$

Wegen der Konjugation heißt dies auch **semilinear** oder **antilinear**. Beides zusammen besagt: Über  $\mathbb{R}$  ist  $\langle - | - \rangle$  **bilinear**, über  $\mathbb{C}$  nur konjugiert bilinear, genannt **sesquilinear** (lat. *sesqui* 'anderthalb'). Aus Symmetrie folgt  $\langle v | v \rangle \in \mathbb{R}$ , und aus Linearität  $\langle 0 | 0 \rangle = 0$ .

- 3 **Positivität:** Für jeden Vektor  $v \in V \setminus \{0\}$  gilt  $\langle v | v \rangle > 0$ .

😊 Wir benötigen nur diese drei einfachen Eigenschaften, mehr nicht.

☐ Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §3.6.

**Satz 11H: Cauchy–Schwarz– und Dreiecksungleichung**

Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle - | - \rangle$ .

(1) Für alle  $u, v \in V$  gilt die **Cauchy–Schwarz–Ungleichung:**

$$|\langle u | v \rangle|^2 \leq \langle u | u \rangle \langle v | v \rangle$$

(2) Gleichheit gilt genau dann, wenn  $u, v$  linear abhängig sind.

(3) Für die Norm  $\|u\| = \sqrt{\langle u | u \rangle}$  ist die Ungleichung (1) äquivalent zu:

$$|\langle u | v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

(4) Für alle  $u, v \in V$  folgt hieraus die **Dreiecksungleichung**

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

(5) Für den Abstand gilt demnach  $\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|$ .

(4) Schließlich zeigen wir die Dreiecksungleichung, die dem Abstand zugrundeliegt. Sie besagt geometrisch: Der Abstand von  $x$  nach  $z$  ist kleiner oder gleich der Länge des Umweges von  $x$  über  $y$  nach  $z$ .

Die Rechnung beruht auf der Cauchy–Schwarz–Ungleichung (1):

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle u + v | u + v \rangle = \langle u | u \rangle + \langle u | v \rangle + \langle v | u \rangle + \langle v | v \rangle \\ &= \|u\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle u | v \rangle) + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2|\langle u | v \rangle| + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2\|u\| \|v\| + \|v\|^2 \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt dank Monotonie der Wurzelfunktion  $x \mapsto \sqrt{x}$ .

😊 Beachten Sie, dass wir für das Skalarprodukt nur voraussetzen, dass es (konjugiert) symmetrisch, bilinear und positiv ist (11G). Genau diese und keine weiteren Eigenschaften haben wir in der Rechnung benötigt. Das macht Skalarprodukte wunderbar flexibel und vielseitig einsetzbar.

**Satz I1I: Pythagoras und Fourier-Koeffizienten**  
 Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ .  
 (1) Sind  $u_1, \dots, u_n$  orthogonal, also  $\langle u_k | u_\ell \rangle = 0$  für  $k \neq \ell$ , so gilt  

$$\|u_1 + \dots + u_n\|^2 = \|u_1\|^2 + \dots + \|u_n\|^2.$$
  
 (2) Sind  $e_1, \dots, e_n$  orthonormal und  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ , so gilt demnach  

$$\|c_1 e_1 + \dots + c_n e_n\|^2 = |c_1|^2 + \dots + |c_n|^2.$$
  
 (3) Für jede Linearkombination  $f = \sum_{\ell=1}^n c_\ell u_\ell$  und  $u_k \neq 0$  gilt  

$$c_k = \langle u_k | f \rangle / \langle u_k | u_k \rangle.$$

😊 Der klassische Satz des Pythagoras ist der erste interessante Fall, nämlich die Ebene  $V = \mathbb{R}^2$  über  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  mit euklidischem Skalarprodukt. Er gilt ebenso für  $V = \mathbb{K}^n$  über  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  in jeder Dimension  $n \in \mathbb{N}$  und wörtlich genauso für trigonometrische Polynome wie oben in Satz I1F (auch wenn Pythagoras sicher nie an diese Allgemeinheit gedacht hat).

**Satz I1J: Laplace 1816, Gram 1883, Schmidt 1907**  
 Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ .  
 Sei  $b_1, \dots, b_n \in V$  eine Basis des Unterraums  $U_n = \langle b_1, \dots, b_n \rangle_{\mathbb{K}}$ .  
 (1) Daraus erhalten wir rekursiv die Orthogonalbasis  $u_1, \dots, u_n$  durch  

$$u_n := b_n - \sum_{k=1}^{n-1} u_k \lambda_k \quad \text{mit} \quad \lambda_k = \frac{\langle u_k | b_n \rangle}{\langle u_k | u_k \rangle}.$$
  
 (2) Optional können wir  $u_n$  ersetzen durch  $u'_n = \mu_n u_n$  mit  $\mu_n \in \mathbb{K}^\times$ .  
 (3) Normiert zu  $e_k := u_k / \|u_k\|$  erhalten wir eine Orthonormalbasis:  

$$\langle u_k | u_\ell \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell, \\ \|u_k\|^2 > 0 & \text{für } k = \ell, \end{cases} \quad \text{und} \quad \langle e_k | e_\ell \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell, \\ 1 & \text{für } k = \ell. \end{cases}$$

😊 Das Gram-Schmidt-Verfahren ist einfach, aber wirkungsvoll.  
 📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §5.5.

Die Orthogonalität von  $(e_k = e^{ikx})_{k \in \mathbb{Z}}$  haben wir oben direkt berechnet. Diese fundamentale Eigenschaft hat einen tieferen, allgemeinen Grund:  
**Aufgabe:** (1) Der Ableitungsoperator  $\frac{1}{i} \frac{d}{dx}$  ist hermitisch:  

$$\left\langle \frac{1}{i} \frac{d}{dx} f \mid g \right\rangle = \left\langle f \mid \frac{1}{i} \frac{d}{dx} g \right\rangle$$
  
 (2) Für den Operator  $\frac{1}{i} \frac{d}{dx}$  ist  $e_k$  Eigenfunktion zum Eigenwert  $k$ :  

$$\frac{1}{i} \frac{d}{dx} e^{ikx} = k e^{ikx}$$
  
 (3) Demnach sind alle Eigenfunktionen  $e_k$  untereinander orthogonal.  
**Lösung:** (1) Für  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  stetig diff'bar und  $2\pi$ -periodisch gilt:  

$$\left\langle f \mid \frac{1}{i} \frac{d}{dx} g \right\rangle = \frac{1}{i} \int_0^{2\pi} \overline{f} g' = \frac{1}{i} [\overline{f} g]_0^{2\pi} - \frac{1}{i} \int_0^{2\pi} \overline{f}' g = \left\langle \frac{1}{i} \frac{d}{dx} f \mid g \right\rangle$$
  
 Aussage (2) ist klar. Damit folgt (3) wie für Matrizen bekannt. [I143]  
 Die Entwicklung nach Eigenfunktionen ist ein universelles Prinzip und nützt uns vor allem für Differentialgleichungen. Die Fourier-Theorie diagonalisiert den Ableitungsoperator  $\frac{1}{i} \frac{d}{dx}$ . Die Entwicklung nach seinen Eigenfunktionen  $e^{ikx}$  für  $k \in \mathbb{Z}$  ist die Fourier-Reihe.

**Aufgabe:** Jeder hermitesche Operator  $A: V \rightarrow V$  hat nur reelle Eigenwerte und orthogonale Eigenräume:  
 (1) Für jeden Vektor  $v \in V$  gilt zunächst  $\langle v | Av \rangle \in \mathbb{R}$ .  
 (2) Sei  $v \in V$  ein Eigenvektor,  $Av = \lambda v$  mit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Dann gilt  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  
 (3) Seien  $u, v \in V$  Eigenvektoren,  $Au = \lambda u$  und  $Av = \mu v$  mit  $\lambda \neq \mu$ . Dann sind  $u$  und  $v$  orthogonal, also  $\langle u | v \rangle = 0$ .  
**Lösung:** (1)  $\langle v | Av \rangle = \langle Av | v \rangle = \overline{\langle v | Av \rangle}$ . Wir rechnen (2) nach:  

$$\lambda \langle v | v \rangle = \langle v | \lambda v \rangle = \langle v | Av \rangle = \langle Av | v \rangle = \langle \lambda v | v \rangle = \overline{\lambda} \langle v | v \rangle$$
  
 Wegen  $v \neq 0$  und Positivität gilt  $\langle v | v \rangle > 0$ , also  $\lambda = \overline{\lambda}$ . Ebenso (3):  

$$\lambda \langle u | v \rangle = \langle \lambda u | v \rangle = \langle Au | v \rangle = \langle u | Av \rangle = \langle u | \mu v \rangle = \mu \langle u | v \rangle$$
  
 Also  $(\lambda - \mu) \langle u | v \rangle = 0$ . Wegen  $\lambda - \mu \neq 0$  folgt somit  $\langle u | v \rangle = 0$ .  
 Slogan: Hermitesche Operatoren verhalten sich wie reelle Zahlen.  
 Genauer: wie reelle Diagonalmatrizen. Wir erinnern an folgenden Satz:

**Aufgabe:** Rechnen Sie diese allgemeinen Regeln nach.  
**Lösung:** (1) Die Norm erhalten wir aus dem Skalarprodukt:  

$$\|\sum_k u_k\|^2 = \langle \sum_k u_k | \sum_\ell u_\ell \rangle = \sum_k \sum_\ell \langle u_k | u_\ell \rangle = \sum_k \|u_k\|^2$$
  
 (2) Speziell für  $u_k = c_k e_k$  mit  $\|e_k\| = 1$  gilt  $\|u_k\|^2 = |c_k|^2 \|e_k\|^2 = |c_k|^2$ . Hieraus folgt  $\|c_1 e_1 + \dots + c_n e_n\|^2 = |c_1|^2 + \dots + |c_n|^2$  wie behauptet.  
 (3) Die Koeffizientenformel folgt dank Orthogonalität (1) gemäß  

$$\langle u_k | f \rangle = \langle u_k | \sum_\ell c_\ell u_\ell \rangle = \sum_\ell c_\ell \langle u_k | u_\ell \rangle = c_k \langle u_k | u_k \rangle.$$
  
 Dank  $u_k \neq 0$  wissen wir  $\langle u_k | u_k \rangle > 0$ , somit  $c_k = \langle u_k | f \rangle / \langle u_k | u_k \rangle$ .  
 😊 Das Skalarprodukt filtert den gewünschten Koeffizienten heraus! Diese Rechenregeln sind in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  und im Raum  $\mathbb{R}^3$  anschaulich vertraut, sie gelten genauso in jedem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt. Selbst für unendlich-dimensionale Vektorräume, etwa  $V = L^2([0, T], \mathbb{C})$  für die Fourier-Theorie, erweist sich dies als ausgesprochen nützlich!

**Aufgabe:** Alles steht explizit da. Rechnen Sie es sorgsam nach!  
**Lösung:** (1) Wir führen Induktion über  $n$ . Für  $n = 1$  ist die Aussage klar. Sei nun  $n \geq 2$ . Im Unterraum  $U_{n-1} \leq V$  haben wir die gegebene Basis  $(b_1, \dots, b_{n-1})$  bereits zur Orthogonalbasis  $(u_1, \dots, u_{n-1})$  transformiert. Im Unterraum  $U_n$  erhalten wir aus der Basis  $(b_1, \dots, b_{n-1}, b_n)$  zunächst  $(u_1, \dots, u_{n-1}, b_n)$  und dann  $(u_1, \dots, u_{n-1}, u_n)$  mit  $u_n := b_n - \sum_{k=1}^{n-1} u_k \lambda_k$ . Für alle  $j = 1, \dots, n-1$  gilt  $\langle u_j | u_n \rangle = \langle u_j | b_n \rangle - \langle u_j | u_j \rangle \lambda_j = 0$ . Dies verschwindet genau für  $\lambda_j = \langle u_j | b_n \rangle / \langle u_j | u_j \rangle$ . Voilà!  
 (2) Basiseigenschaft und Orthogonalität bleiben nach Skalierung von  $u_n$  zu  $u'_n = \mu_n u_n$  mit  $\mu_n \in \mathbb{K}^\times$ . Das verschafft uns zusätzlichen Spielraum.  
 (3) Da  $(u_1, \dots, u_n)$  eine Basis von  $U_n$  ist, gilt insbesondere  $u_n \neq 0$ . Normierung zu  $e_n := u_n / \|u_n\|$  liefert also eine Orthonormalbasis.  
 😊 Dieses Verfahren funktioniert genauso, wenn  $b_1, \dots, b_n$  nur ein Erzeugendensystem von  $U_n$  ist, aber nicht notwendig linear unabhängig. Wenn bei der Orthonormalisierung  $u_n = 0$  auftritt, so ist  $b_n$  eine Linearkombination von  $b_1, \dots, b_{n-1}$  und wird ganz einfach aus der Liste gelöscht. Auf diese Weise können wir aus jedem Erzeugendensystem eine Orthonormalbasis extrahieren.

📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §6.4. Reelle Matrizen mit der Eigenschaft  $A = A^T$  nennt man *symmetrisch*. Im Komplexen muss man *transponieren* und *konjugieren*. Ausführlich:  
 Zur Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ist  $A^* := \overline{A}^T$  die **hermitesch-konjugierte Matrix**. Für Spaltenvektoren  $u, v \in \mathbb{C}^n$  gilt  $\langle u | v \rangle = \overline{u}^T v$ , und daher  

$$\langle u | Av \rangle = \overline{u}^T Av = \overline{A}^T \overline{u}^T v = \langle A^* u | v \rangle.$$
  
 Wir nennen die Matrix  $A$  **hermitesch**, wenn  $A^* = A$  gilt, gleichbedeutend also  $\langle u | Av \rangle = \langle Au | v \rangle$  für alle  $u, v \in \mathbb{C}^n$ .  
**Beispiel:** Sei  $V_n = \{ \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \mid c_k \in \mathbb{C} \}$  der  $\mathbb{C}$ -Vektorraum der trigonometrischen Polynome vom Grad  $\leq n$  und  $A = \frac{1}{i} \frac{d}{dx}: V_n \rightarrow V_n$  der Ableitungsoperator. Bezüglich der Basis  $(e_{-n}, e_{-n+1}, \dots, e_{n-1}, e_n)$  von  $V_n$  entspricht  $A$  der Diagonalmatrix  $\text{diag}(-n, -n+1, \dots, n-1, n)$ .  
**Allgemein:** Sei  $V$  ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ . Sei  $A: V \rightarrow V$  eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung (auch „Operator“ genannt). Wir nennen  $A$  **hermitesch**, wenn  $\langle u | Av \rangle = \langle Au | v \rangle$  für alle  $u, v \in V$ .

**Satz I1k: Diagonalisierung hermitescher Matrizen**  
 Jede hermitesche Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ist orthogonal diagonalisierbar: Es gibt eine orthogonale Basis  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{C}^n$  aus Eigenvektoren.  
**Beweis:** Induktion über  $n = \dim V$ : Für  $n = 1$  ist alles klar. Sei  $n \geq 2$ . Sei  $\lambda \in \mathbb{R}$  ein Eigenwert und  $v \in V$  ein zugehöriger Eigenvektor. Der hierzu orthogonale Unterraum ist  $W = \{ w \in V \mid \langle v | w \rangle = 0 \}$ . Es gilt  $A(W) \subseteq W$ , das heißt, für alle  $w \in W$  gilt  $Aw \in W$ , denn  

$$\langle v | Aw \rangle = \langle Av | w \rangle = \langle \lambda v | w \rangle = \lambda \langle v | w \rangle = 0.$$
  
 Es gilt  $\dim W = n - 1$ . Nach Induktionsvoraussetzung existiert eine orthogonale Basis  $v_1, \dots, v_{n-1}$  von  $W$  aus Eigenvektoren. Somit ist  $v_1, \dots, v_{n-1}, v$  eine orthogonale Basis von  $V$ .  
 😊 Ähnliches gilt für den Ableitungsoperator  $\frac{1}{i} \frac{d}{dx}$  und die Entwicklung nach den Eigenfunktionen  $e^{ikx}$  in eine Fourier-Reihe. Der Vektorraum  $L^2$  ist allerdings unendlich-dimensional, ein entscheidender Unterschied.

Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  sei  $T$ -periodisch und auf  $[0, T]$  abs. integrierbar. Wir entwickeln  $f$  in **Harmonische** zur Grundfrequenz  $\omega = 2\pi/T$ :

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} \quad \text{mit} \quad c_k := \langle e_k | f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-ik\omega t} f(t) dt$$

Hier ist  $c_k \in \mathbb{C}$  die Amplitude (und Phase) der  $k$ -ten Schwingung  $e^{ik\omega t}$ . Dank **Euler-Formel**  $e^{ik\omega t} = \cos(k\omega t) + i \sin(k\omega t)$  ist hierzu äquivalent:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \quad \text{mit Koeffizienten}$$

$$a_k := \frac{2}{T} \int_0^T \cos(k\omega t) f(t) dt = c_k + c_{-k}, \quad c_k = \frac{a_k - ib_k}{2},$$

$$b_k := \frac{2}{T} \int_0^T \sin(k\omega t) f(t) dt = i(c_k - c_{-k}), \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}.$$

😊 Für  $x = \omega t$  erhalten wir Periode  $2\pi$  und Grundfrequenz 1.

Das  $T$ -periodische **Signal**  $f$  zerlegen wir so in sein **Spektrum**  $\hat{f}$ :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad \circ \bullet \quad \hat{f}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \hat{f}(k) = c_k := \frac{1}{T} \int_0^T e^{-ik\omega t} f(t) dt$$

In Grad  $\leq n$  approximieren wir  $f$  durch das **Fourier-Polynom**  $f_n$ :

$$f_n(t) := \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$$

Für  $n \rightarrow \infty$  erhalten wir (zumindest formal) die **Fourier-Reihe**:

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$$

Gelesen: „Die Funktion  $f$  hat die Fourier-Koeffizienten  $c_k$  bzw.  $a_k, b_k$ .“  
Für trigonometrische Polynome ist die Reihe endlich, sonst unendlich!  
😊 Für die Konvergenz dieser Reihe gibt es effiziente Kriterien. [I216]

Zur **Fourier-Analyse** benötigen wir nur die **absolute Integrierbarkeit**, also  $\int_0^T |f(t)| dt < \infty$ . Wegen  $|e^{-ik\omega t}| = 1$  ist dann  $e^{-ik\omega t} f(t)$  über  $[0, T]$  absolut integrierbar, und obiges Integral definiert  $c_k \in \mathbb{C}$  für jedes  $k \in \mathbb{Z}$ .

Das **trigonometrische Polynom**  $f_n$  dient uns als Approximation an  $f$ . Die **Fourier-Reihe** ist jedoch zunächst nur eine bequeme Schreibweise: Wir wissen noch nicht, ob und in welchem Sinne die Reihe konvergiert!

Zur **Konvergenz** benötigen wir etwas stärkere Voraussetzungen an  $f$ , etwa quadratische Integrierbarkeit  $\int_0^T |f(t)|^2 dt < \infty$ , siehe Kapitel J. Selbst wenn die Fourier-Reihe in einem Punkt  $t \in [0, 2\pi]$  konvergiert, muss der Grenzwert nicht der Funktionswert  $f(t)$  sein. Dazu genügen stärkere Forderungen, etwa **Differenzierbarkeit** im Punkt  $t$  (Satz I2A). Nur im Falle der Konvergenz in jedem Punkt  $t \in \mathbb{R}$  schreiben wir

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$$

Das nennen wir die **Fourier-Synthese**, also das Zusammensetzen der Teilschwingungen zwecks Rekonstruktion der ursprünglichen Funktion  $f$ .

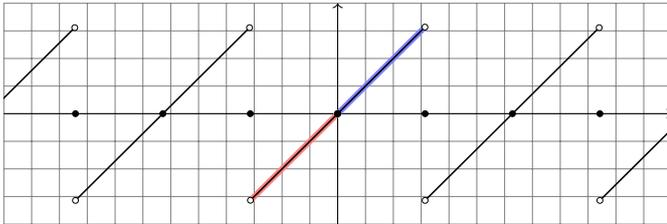
Das Konvergenzproblem ist analog zur Taylor-Reihe von  $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ :

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad \text{mit Taylor-Koeffizienten} \quad c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

Das bedeutet zunächst nur:  $f$  hat die Taylor-Koeffizienten  $c_k$  (B438). Konvergenz: Für  $n \rightarrow \infty$  muss das Restglied verschwinden:  $R_n(z) \rightarrow 0$ .

In diesem Kapitel berechnen wir zunächst zentrale Beispiele von Fourier-Reihen: Sägezahn-, Rechteck- und Treppenfunktion etc. Die hierbei beobachteten Eigenschaften und Rechentechniken formulieren wir parallel hierzu allgemein als Sätze / Rechenregeln. Das dient ganz konkret dazu, nützliche Tricks und Abkürzungen zu erklären und für Anwendungen bereit zu stellen. Insbesondere aber klären wir, wann, wo und wogegen die Fourier-Reihe konvergiert. Im nächsten Kapitel übertragen wir die geometrischen Begriffe des  $\mathbb{R}^n$  wie Skalarprodukt, Norm und Abstand, auf quadratisch integrierbare Funktionen und ihre Fourier-Reihen. Das ist eine überaus nützliche Betrachtungsweise und der natürliche Rahmen der Fourier-Theorie.

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ungerade und  $2\pi$ -periodisch mit  $f(x) = x$  für  $0 < x < \pi$ .  
**Aufgabe:** (0) Skizzieren Sie  $f$ . (1) Berechnen Sie die Fourier-Reihe.



⚠ Wir wissen zunächst nur  $f(x) = x$  für  $0 < x < \pi$ . Da  $f$  ungerade ist, also  $f(-x) = -f(x)$ , folgt  $f(0) = 0$  und  $f(x) = x$  für  $-\pi < x < 0$ . Dies setzen wir  $2\pi$ -periodisch fort. Insbesondere folgt  $f(\pm\pi) = 0$ .

😊 Die Funktionsskizze ist für die Rechnung hilfreich. Wer schon die Funktion nicht zeichnen kann, dem misslingt wohl auch das Integral.

(1) Der nulle Fourier-Koeffizient  $c_0$  ist der Mittelwert über eine Periode:

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0 \quad (\text{siehe Skizze})$$

Für  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  rechnen wir komplex und nutzen partielle Integration:

$$c_k \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} x dx \stackrel{\text{part}}{=} \frac{1}{2\pi} \left( \left[ \frac{i}{k} e^{-ikx} x \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{i}{k} e^{-ikx} dx \right)$$

$$= \frac{i}{k} \cdot \frac{e^{-\pi i k} \pi + e^{\pi i k} \pi}{2\pi} = \frac{i}{k} \cdot \frac{(-1)^k + (-1)^k}{2} = (-1)^k \frac{i}{k}$$

Damit haben wir die Funktion  $f$  in ihre Fourier-Reihe entwickelt:

$$f(x) \sim \sum_{k \neq 0} (-1)^k \frac{i}{k} e^{ikx} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \sin(kx)$$

$$= 2 \left[ \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \dots \right]$$

😊 Da  $f$  ungerade ist, erhalten wir  $c_{-k} = -c_k$ , also eine Sinus-Reihe.

Umrechnung der Koeffizienten für die Co/Sinus-Reihe:

$$a_k = c_k + c_{-k} = 0, \quad b_k = i(c_k - c_{-k}) = (-1)^{k+1} \frac{2}{k}.$$

Zum Vergleich nochmal direkt die Integrale für  $a_k, b_k$  mit  $k \geq 1$ :

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(kx) dx \quad (\text{ungerader Integrand})$$

$$= \frac{1}{\pi} \left( \left[ x \frac{\sin(kx)}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(kx)}{k} dx \right) = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(kx) dx \quad (\text{gerader Integrand})$$

$$= \frac{1}{\pi} \left( \left[ x \frac{-\cos(kx)}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(kx)}{k} dx \right) = (-1)^{k+1} \frac{2}{k}$$

Zur Berechnung von  $a_k, b_k$  sind zwei Integrale nötig, für  $c_k$  nur eins. Man spart ein wenig, doch der Rechenweg ist Geschmackssache. Die Umrechnung zwischen  $a_k, b_k$  und  $c_k$  gelingt jedenfalls leicht.

😊 Die Fourier-Koeffizienten  $a_k, b_k, c_k$  sind hier leicht zu berechnen. Da  $f$  reell ist, gilt  $a_k, b_k \in \mathbb{R}$  und  $c_{-k} = \overline{c_k}$ . Da  $f$  ungerade, gilt  $a_k = 0$ . Die folgenden Graphiken zeigen hierzu die **Fourier-Polynome**  $f_n$ . Wir wollen verstehen, in welchem Sinne  $f_n \rightarrow f$  konvergiert.

😊 Für jeden Punkt  $x \in \mathbb{R}$  gilt augenscheinlich  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ : In den Punkten  $x = 0$  und  $x = \pi$  ist dies klar, ansonsten keineswegs! Die Koeffizienten klingen nur langsam ab ( $\sim 1/k$ ), das heißt auch hohe Frequenzen tragen noch deutlich bei: Die Fourier-Reihe ist „rau“.

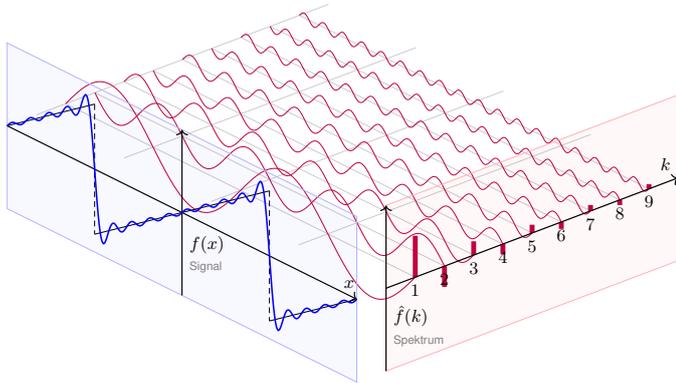
⚠ Wir sehen recht eindringlich das sogenannte **Gibbs-Phänomen**: Die Funktionen  $f_n$  überschwingen in Sprungstellen um ca. 9%.

😊 Es gilt daher **keine gleichmäßige Konvergenz**  $f_n \rightarrow f$  auf  $\mathbb{R}$ : Ein kleiner  $\varepsilon$ -Schlauch um  $f$  enthält nicht alle  $f_n$  für  $n \geq n_0$ .

😊 Auf jedem Intervall  $I = [-\pi + \delta, \pi - \delta]$  **abseits der Sprungstellen** konvergiert  $f_n$  gleichmäßig gegen  $f$ : Zu jedem  $\varepsilon > 0$  liegen schließlich alle  $f_n$  im  $\varepsilon$ -Schlauch um  $f$  auf  $I$ . Auch das ist bemerkenswert!

## Fourier-Entwicklung der Sägezahnfunktion

I209  
Beispiel

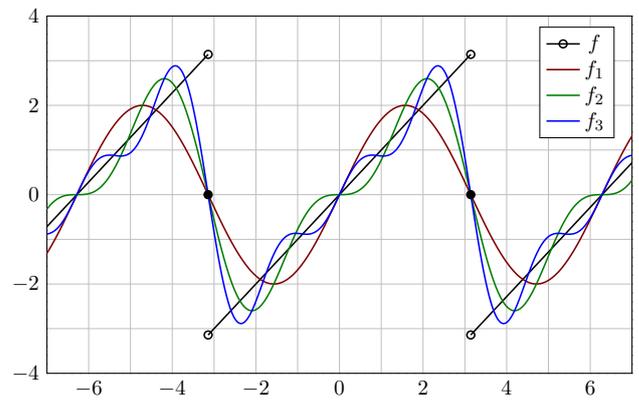


$$f(x) = 2 \left[ \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{5} \sin 5x \mp \dots \right]$$

## Fourier-Entwicklung der Sägezahnfunktion

I210  
Beispiel

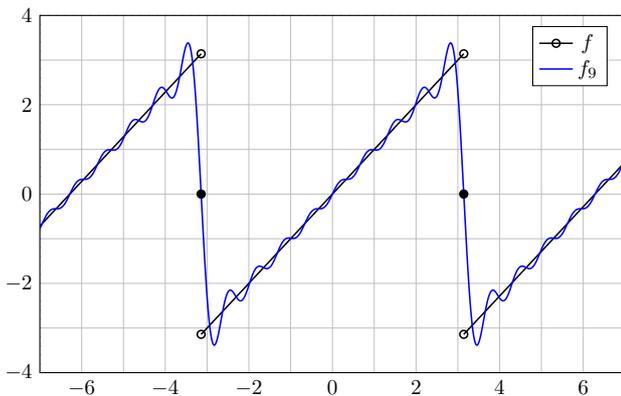
Die ersten Fourier-Polynome  $f_1, f_2, f_3, \dots$  ähneln  $f$  zunächst nur grob:



## Fourier-Entwicklung der Sägezahnfunktion

I211  
Beispiel

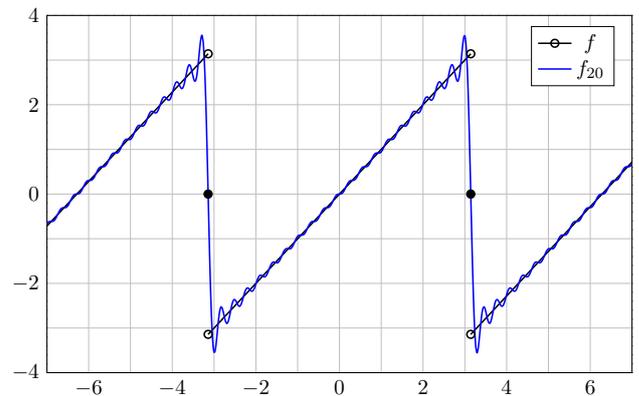
Das Fourier-Polynom  $f_9$  von Grad 9 liegt schon näher bei  $f$ :



## Fourier-Entwicklung der Sägezahnfunktion

I212  
Beispiel

Das Überspringen bleibt auch bei höherem Approximationsgrad:



## Punktweise & gleichmäßige Konvergenz von Fourier-Reihen

I213  
Erläuterung

Wir untersuchen die zentrale Frage: Konvergiert die Fourier-Reihe? Wir approximieren  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit Periode  $T$  durch Fourier-Polynome

$$f_n(t) := \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega t} \quad \text{mit} \quad c_k := \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} f(t) dt.$$

Wir sagen, die Fourier-Reihe von  $f$  **konvergiert im Punkt**  $t \in \mathbb{R}$ , wenn die Zahlenfolge  $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{C}$  für  $n \rightarrow \infty$  konvergiert.

Sie **konvergiert im Punkt**  $t$  **gegen**  $f(t)$ , wenn  $f_n(t) \rightarrow f(t)$  gilt. In diesem Falle (und sorgsamerweise nur dann) schreiben wir

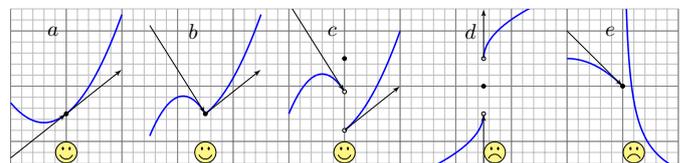
$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega t} \quad \text{oder kurz} \quad f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}.$$

⚠ Fourier vermutete zunächst Konvergenz  $f_n \rightarrow f$  für jede Funktion  $f$ . Das ist jedoch nicht immer der Fall. Wir brauchen praktische Kriterien!

😊 Wir nutzen hierzu das Dirichlet-Kriterium: Ein wenig Regularität von  $f$  im Punkt  $t \in \mathbb{R}$  garantiert die erhoffte Konvergenz  $f_n(t) \rightarrow f(t)$ !

## Punktweise & gleichmäßige Konvergenz von Fourier-Reihen

I214



Links-/rechtsseitiger Grenzwert und Ableitungen von  $f$  im Punkt  $t$ :

$$\begin{aligned} f(t-) &:= \lim_{\tau \nearrow t} f(\tau), & f(t+) &:= \lim_{\tau \searrow t} f(\tau), \\ f'(t-) &:= \lim_{\tau \nearrow t} \frac{f(\tau) - f(t-)}{\tau - t}, & f'(t+) &:= \lim_{\tau \searrow t} \frac{f(\tau) - f(t+)}{\tau - t}. \end{aligned}$$

Die **Dirichlet-Bedingung** fordert, dass alle vier Grenzwerte existieren. Wir nennen  $f$  **sprungnormiert** im Punkt  $t$ , falls  $f(t) = \frac{1}{2}[f(t-) + f(t+)]$ .

Zur Erinnerung: Genau dann ist  $f$  stetig in  $t$ , wenn  $f(t) = f(t-) = f(t+)$  gilt.

Beispiele  $a, b$  sind stetig,  $c, d$  haben eine Sprungstelle,  $d$  ist sprungnormiert,  $c$  nicht.

Beispiele  $a, b, c$  haben beidseitige Ableitungen,  $d$  hingegen nicht (senkrechte Tangente).

Beispiel  $e$  hat rechtsseitig eine Polstelle, hier sind Ableitung und Sprungnormierung sinnlos.

## Punktweise & gleichmäßige Konvergenz von Fourier-Reihen

I215  
Erläuterung

**Stetigkeit** im Punkt  $t \in \mathbb{R}$  ist äquivalent zu  $f(t) = f(t-) = f(t+)$ .

Im Falle  $f(t-) \neq f(t+)$  hat  $f$  in  $t$  eine **Sprungstelle** (siehe Skizze).

**Differenzierbarkeit** im Punkt  $t$  impliziert Stetigkeit und ist äquivalent zu Dirichlet mit  $f(t) = f(t-) = f(t+)$  und  $f'(t-) = f'(t+) = f'(t)$ .

Zu einer vorgelegten Funktion  $f$  stellt sich die konkrete Frage:

In welchen Punkten konvergiert die Fourier-Reihe? und wogegen?

Das Kriterium von Dirichlet gibt hierauf eine sehr praktische Antwort:

Ist  $f$  im Punkt  $t$  differenzierbar, so konvergiert die Fourier-Reihe gegen den Wert  $f(t)$ . Das gilt auch dann noch, wenn  $f$  in  $t$  stetig ist und beide links-/rechtsseitige Ableitungen existieren. Sogar Sprungstellen können wir so noch gut behandeln: Die Fourier-Reihe konvergiert dann gegen den Mittelwert! Um all diese Fälle präzise zu klären, muss man nur die vier geforderten (links-/rechtsseitigen) Grenzwerte von  $f$  sicherstellen.

😊 Die Dirichlet-Bedingung ist recht milde: Sie erlaubt Sprungstellen und verhindert lediglich, dass unsere Funktion  $f$  allzu wild oszilliert. Für viele praktische Fälle ist das ausreichend — und sehr bequem!

## Punktweise & gleichmäßige Konvergenz von Fourier-Reihen

I216

**Satz I2A:** Dirichlet-Kriterium für Fourier-Reihen, siehe J2A & J2B

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  abs. integrierbar auf  $[0, T]$  und  $T$ -periodisch,  $\omega = 2\pi/T$ .

(1) Angenommen,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  erfüllt die Dirichlet-Bedingung im Punkt  $t$ , d.h. beide Grenzwerte  $f(t\pm)$  und beide Ableitungen  $f'(t\pm)$  existieren.

Dann konvergiert in diesem Punkt  $t$  die Fourier-Reihe  $f_n(t)$  gemäß

$$f_n(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega t} \rightarrow \frac{1}{2}[f(t+) + f(t-)] \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty.$$

⚠ Der Funktionswert  $f(t)$  im Punkt  $t$  spielt dabei gar keine Rolle.

(1a) Speziell gilt  $f_n(t) \rightarrow f(t)$  falls  $f$  in  $t$  zudem sprungnormiert ist.

(1b) Ist  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  stückweise stetig differenzierbar und überall stetig bzw. sprungnormiert, dann konvergiert  $f_n(t) \rightarrow f(t)$  in jedem Punkt  $t \in \mathbb{R}$ .

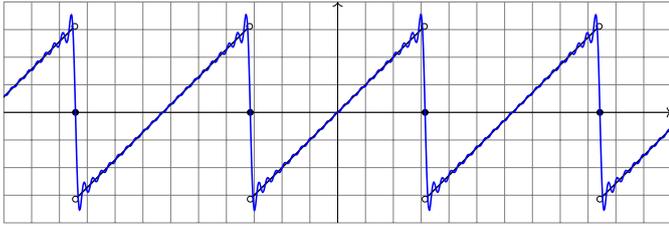
(2) Ist  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und stückweise stetig differenzierbar mit  $|f'| \leq L$ , so konvergiert die Fourier-Reihe  $f_n \rightarrow f$  sogar gleichmäßig auf ganz  $\mathbb{R}$ :

$$|f_n(t) - f(t)| \leq 2L/\omega \cdot \ln(n)/n \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty$$

Punktweise Konvergenz von Fourier-Reihen

I217  
Beispiel

☺ Das Dirichlet-Kriterium I2A können wir auf die Sägezahnfunktion anwenden und die Konvergenz ihrer Fourier-Reihe vollständig klären! Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ungerade und  $2\pi$ -periodisch mit  $f(x) = x$  für  $0 < x < \pi$ .



- Aufgabe:** (2) Bestimmen Sie  $f(x \pm)$  und  $f'(x \pm)$  in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$ .  
 (3) In welchen Punkten  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert  $f_n(x)$  für  $n \rightarrow \infty$ ? Wogegen?  
 (4) Wogegen konvergiert  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \dots$ ?

Punktweise Konvergenz von Fourier-Reihen

I218  
Beispiel

**Lösung:** (2) Auf  $]-\pi, \pi[$  gilt  $f(x) = x$ . In jedem Punkt  $x \in ]-\pi, \pi[$  ist  $f$  stetig,  $f(x \pm) = f(x)$ , und zudem differenzierbar,  $f'(x \pm) = f'(x) = 1$ . Alles wiederholt sich  $2\pi$ -periodisch, auf  $]\pi, 3\pi[$ ,  $]\pi, 5\pi[$ , etc.

In unserem Beispiel ist  $\pi$  die einzige Sprungstelle (modulo  $2\pi\mathbb{Z}$ ):

$$f(\pi-) = \lim_{t \nearrow \pi} f(t) = \lim_{t \nearrow \pi} [t] = +\pi$$

$$f(\pi+) = \lim_{t \searrow \pi} f(t) = \lim_{t \searrow \pi} [t - 2\pi] = -\pi$$

Auch in der Sprungstelle existieren die einseitigen Ableitungen:

$$f'(\pi-) = \lim_{t \nearrow \pi} \frac{f(t) - f(\pi-)}{t - \pi} = \lim_{t \nearrow \pi} \frac{t - \pi}{t - \pi} = \lim_{t \nearrow \pi} 1 = 1$$

$$f'(\pi+) = \lim_{t \searrow \pi} \frac{f(t) - f(\pi+)}{t - \pi} = \lim_{t \searrow \pi} \frac{(t - 2\pi) - (-\pi)}{t - \pi} = \lim_{t \searrow \pi} 1 = 1$$

- ☺ Das zeigt: Unsere Funktion  $f$  erfüllt die **Dirichlet-Bedingung!** (I2A)  
 ☺ Zudem ist  $f$  **sprungnormiert**, das heißt  $f(x) = \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]$ . Das gilt in  $x = \pm\pi$  dank  $f(\pm\pi) = 0$ , aber ebenso für  $-\pi < x < \pi$ .

Punktweise Konvergenz von Fourier-Reihen

I219  
Beispiel

(3) Dank (2) können wir das Dirichlet-Kriterium (I2A) nutzen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \sin(kx) \stackrel{\text{Dirichlet}}{\stackrel{\text{I2A}}{=}} f(x) = \begin{cases} x & \text{für } -\pi < x < \pi, \\ 0 & \text{für } x = \pm\pi. \end{cases}$$

(4) Speziell für  $x = \pi/3$  kennen wir folgende nützliche Werte:

$k$	0	1	2	3	4	5	...
$\cos(k\pi/3)$	1	1/2	-1/2	-1	-1/2	1/2	...
$\sin(k\pi/3)$	0	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$	0	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$	...

Damit können wir Reihe und Funktion auswerten und vergleichen:

$$\sqrt{3} \left[ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \dots \right] \stackrel{(*)}{=} f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

☺ Hieraus erhalten wir den gesuchten Grenzwert der Reihe:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \dots = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = 0.6045997880\dots$$

☺ Dass diese Reihe konvergiert wissen wir dank Leibniz-Kriterium B3G. Nun können wir sogar ihren Grenzwert berechnen, exakt und explizit!

Punktweise Konvergenz von Fourier-Reihen

I220  
Beispiel

☺ Das praktische Dirichlet-Kriterium I2A bestätigt unsere Anschauung! Wir gewinnen explizite Grenzwerte und können damit exakt rechnen. Das ist ein mächtiges Werkzeug, wie wir schon in dieser Aufgabe sehen:

⚠ Für die letzte Rechnung (4) benötigen wir  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dies stellen wir im vorigen Teil durch das Dirichlet-Kriterium sicher (3). Hierzu müssen wir nur die geforderten Grenzwerte von  $f$  sichern (2).

Diese Vorgehensweise ist typisch und besteht aus zwei Teilen:

Zur **Fourier-Analyse** berechnen wir die Fourier-Koeffizienten (1):

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x) dx$$

Zur **Fourier-Synthese** bestimmen wir zum betrachteten Punkt  $x \in \mathbb{R}$ , ob und wogegen die Fourier-Reihe  $f_n(x)$  für  $n \rightarrow \infty$  konvergiert (2-4).

⚠ Nur im Falle der Konvergenz in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$  schreiben wir:

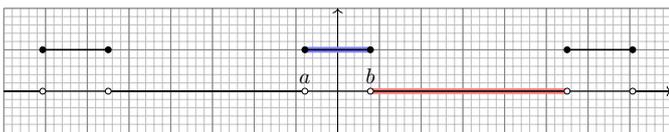
$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

Fourier-Entwicklung von Treppenfunktionen

I221  
Beispiel

Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei  $2\pi$ -periodisch mit  $f = \mathbb{I}_{[a,b]}$  auf  $[a, a+2\pi]$ . Hierbei seien die Werte  $a < b < a + 2\pi$  beliebig vorgegeben. Später wollen wir insbesondere  $-a = b = \pi/4$  betrachten.

**Aufgabe:** (0) Skizzieren Sie  $f$ . (1) Berechnen Sie die Fourier-Reihe.



☺ Wir berechnen hier die Fourier-Reihe einer Indikatorfunktion. Durch Linearkombination erhalten wir beliebige Treppenfunktionen!

- (2) Bestimmen Sie  $f(x \pm)$  und  $f'(x \pm)$  für jeden Punkt  $x \in \mathbb{R}$ .  
 (3) In welchen Punkten  $x$  konvergiert  $f_n(x)$  für  $n \rightarrow \infty$ ? Wogegen?  
 (4) Welche Werte haben Funktion und Reihe für  $x = b = -a$ ?  
 (5) Wogegen konvergiert  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \dots$ ?

Fourier-Entwicklung von Treppenfunktionen

I222  
Beispiel

(1) Der Fourier-Koeffizient  $c_0$  ist der Mittelwert über eine Periode:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{x=a}^{a+2\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{x=a}^b 1 dx = \frac{b-a}{2\pi} \quad (\text{siehe Skizze})$$

Für  $k \neq 0$  rechnen wir komplex und finden:

$$c_k \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{x=a}^{a+2\pi} e^{-ikx} dx \stackrel{\text{HD1}}{\stackrel{\text{BH}}{=}} \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{-1}{ik} e^{-ikx} \right]_a^b = \frac{e^{-ika} - e^{-ikb}}{2\pi ik}$$

Die Fourier-Reihe, zunächst formal (ohne Anspruch auf Konvergenz):

$$f(x) \sim \frac{b-a}{2\pi} + \sum_{k \neq 0} \frac{e^{-ika} - e^{-ikb}}{2\pi ik} e^{ikx}$$

☹ Ohne Werkzeug ist dieser Reihe kaum anzusehen, ob und wogegen sie konvergiert. ☺ Hier rettet uns das Dirichlet-Kriterium! (Satz I2A)

(2) Die Funktion  $f$  ist konstant auf  $]a, b[$  und auf  $]b, a + 2\pi[$ . Hier ist  $f$  stetig, also  $f(x \pm) = f(x)$ , und differenzierbar,  $f'(x \pm) = f'(x) = 0$ .

In  $x \in \{a, b\}$  hat  $f$  eine Sprungstelle, mit  $f(a+) = f(b-) = 1$  und  $f(a-) = f(b+) = 0$  sowie einseitigen Ableitungen  $f'(x \pm) = 0$ .

Fourier-Entwicklung von Treppenfunktionen

I223  
Beispiel

(3) Dank (2) können wir das Dirichlet-Kriterium (I2A) nutzen:

$$\frac{b-a}{2\pi} + \sum_{k \neq 0} \frac{e^{-ika} - e^{-ikb}}{2\pi ik} e^{ikx} \stackrel{\text{Dirichlet}}{\stackrel{\text{I2A}}{=}} \begin{cases} 1 & \text{für } a < x < b, \\ 0 & \text{für } b < x < a + 2\pi, \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = a \text{ und für } x = b. \end{cases}$$

(4) Im symmetrischen Fall  $a = -b$  vereinfacht sich diese Reihe zu:

$$\frac{b}{\pi} + \sum_{k \neq 0} \frac{\sin(kb)}{k\pi} e^{ikx} = \frac{b}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \frac{\sin(kb)}{k\pi} \cos(kx)$$

☺ Da  $f$  gerade ist, erhalten wir  $c_{-k} = c_k$ , also eine Cosinus-Reihe.

⚠ In der Sprungstelle gilt  $f(\pm b) = 1$ . Die Reihe ergibt hingegen:

$$\frac{b}{\pi} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kb)}{k\pi} \cos(kb) \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} \implies \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kb)}{k} \cos(kb) = \frac{\pi}{4} - \frac{b}{2}$$

☺ Den Wert dieser Reihe verdanken wir Dirichlet! Speziell für  $b = \pi/2$  sehen wir ihn direkt, denn hier gilt  $\sin(kb) \cos(kb) = 0$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$ .

Fourier-Entwicklung von Treppenfunktionen

I224  
Beispiel

(5) Speziell für  $x = b = \pi/4$  kennen wir folgende nützliche Werte:

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$\cos(k\pi/4)$	+1	$+\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$+\frac{\sqrt{2}}{2}$	...
$\sin(k\pi/4)$	0	$+\frac{\sqrt{2}}{2}$	+1	$+\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	...

Für ungerade  $k = 2j + 1$  gilt  $2 \sin(k\pi/4) \cos(k\pi/4) = (-1)^j$ , sonst = 0. Wir setzen also  $x = b = \pi/4$  in unsere Reihe ein und vereinfachen:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right) \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} \implies \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j+1} = \frac{\pi}{4}$$

☺ Hieraus erhalten wir den gesuchten Grenzwert der Reihe:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots = \frac{\pi}{4} = 0.7853981633\dots$$

☺ Das ist die Leibniz-Reihe, die wir bereits von Seite B319 kennen. Für  $x = b = \pi/3$  erhält man übrigens die Reihe der vorigen Aufgabe.

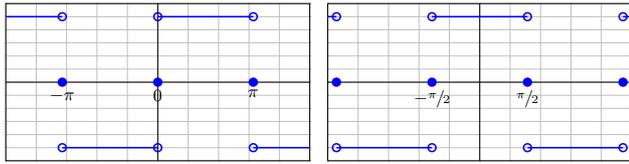
### Fourier-Entwicklung der Rechteckfunktion

I225  
Beispiel

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ungerade und  $2\pi$ -periodisch mit  $f(x) = 1$  für  $0 < x < \pi$ .  
Hierzu sei  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(x) = f(x + \pi/2)$  die Verschiebung um  $\pi/2$ .

**Aufgabe:** (0) Skizzieren Sie  $f, g$ . (1) Berechnen Sie die Fourier-Reihen.  
(2) Konvergiert die Fourier-Reihe in jedem Punkt gegen die Funktion?

**Lösung:** Der vorigen Aufgabe entnehmen wir bzw. rechnen direkt aus:



$f$  ungerade  $\sim$  Sinusreihe       $g$  gerade  $\sim$  Cosinusreihe

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left[ \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x + \frac{1}{9} \sin 9x + \dots \right]$$

$$g(x) = \frac{4}{\pi} \left[ \cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x - \frac{1}{7} \cos 7x + \frac{1}{9} \cos 9x \mp \dots \right]$$

### Fourier-Entwicklung der Rechteckfunktion

I226  
Beispiel

(0) Skizze! (1) Wir rechnen geduldig oder nutzen die vorige Aufgabe.  
(2) Dank Dirichlet I2A gilt  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  und  $g_n(x) \rightarrow g(x)$  in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$ , hier sogar in den Sprungstellen da sprungnormiert.

☺ Wir erkennen hier besonders schön folgende Symmetrieregeln:

Für jede **reelle** Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt  $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ , also  $c_{-k} = \overline{c_k}$ .

Ist  $f$  **gerade**, also  $f(-x) = f(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , so gilt

$$b_k = 0, \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(kx) f(x) dx, \quad c_{-k} = c_k.$$

Also  $f \sim$  **Cosinusreihe**. Für reelle Funktionen heißt das  $c_k \in \mathbb{R}$ .

Ist  $f$  **ungerade**, also  $f(-x) = -f(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , so gilt

$$a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(kx) f(x) dx, \quad c_{-k} = -c_k.$$

Also  $f \sim$  **Sinusreihe**. Für reelle Funktionen heißt das  $c_k \in i\mathbb{R}$ .

☺ Mit dieser einfachen Beobachtung lässt sich dank Symmetrie die Rechnung halbieren oder Ergebnisse auf Plausibilität prüfen.

### Fourier-Entwicklung der Rechteckfunktion

I227  
Beispiel

Zur Illustration nochmal ausführlich die Rechnung für  $f$ :

Der nullte Fourier-Koeffizient ist der Mittelwert über eine Periode:

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) dx = 0 \quad (\text{ungerader Integrand})$$

Berechnung der Fourier-Koeffizienten für  $k \geq 1$ :

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) \cos(kx) dx = 0 \quad (\text{ungerader Integrand})$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) \sin(kx) dx \quad (\text{gerader Integrand})$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(kx) dx = \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{\cos(kx)}{k} \right]_0^\pi$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1 - \cos(k\pi)}{k} \right] = \begin{cases} 0 & \text{für } k \text{ gerade,} \\ \frac{4}{k\pi} & \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

☺ Dank Symmetrie sparen wir hier 50% des Rechenaufwands.

### Fourier-Entwicklung der Rechteckfunktion

I228  
Beispiel

Zum Vergleich das Integral für  $c_k$  mit  $k \neq 0$ :

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi e^{-ikx} f(x) dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^\pi e^{-ikx} dx - \int_{-\pi}^0 e^{-ikx} dx \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^\pi e^{-ikx} dx - \int_0^\pi e^{ikx} dx \right]$$

$$= \frac{1}{i\pi} \int_0^\pi \sin(kx) dx = \frac{1}{i\pi} \left[ -\frac{\cos(kx)}{k} \right]_0^\pi dx$$

$$= \frac{1}{i\pi} \left[ \frac{1 - \cos(k\pi)}{k} \right] = \begin{cases} \frac{2}{i\pi k} & \text{für } k \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{für } k \text{ gerade.} \end{cases}$$

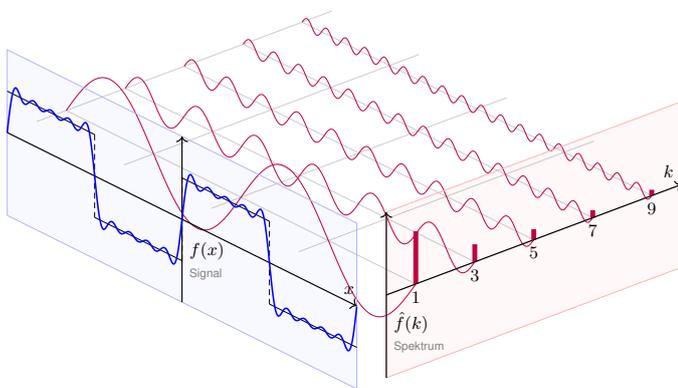
Oder umgerechnet für die Co/Sinus-Reihe:

$$a_k = c_k + c_{-k} = 0, \quad b_k = i(c_k - c_{-k}) = \begin{cases} \frac{4}{k\pi} & \text{für } k \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{für } k \text{ gerade.} \end{cases}$$

☺ Die komplexwertige Rechnung bringt hier keine weitere Ersparnis.

### Fourier-Entwicklung der Rechteckfunktion

I229  
Beispiel

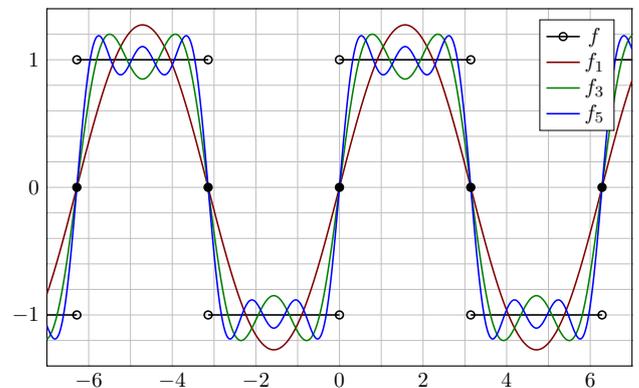


$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left[ \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x + \frac{1}{9} \sin 9x + \dots \right]$$

### Fourier-Entwicklung der Rechteckfunktion

I230  
Beispiel

Die ersten Fourier-Polynome  $f_1, f_3, f_5, \dots$  ähneln  $f$  zunächst nur grob:

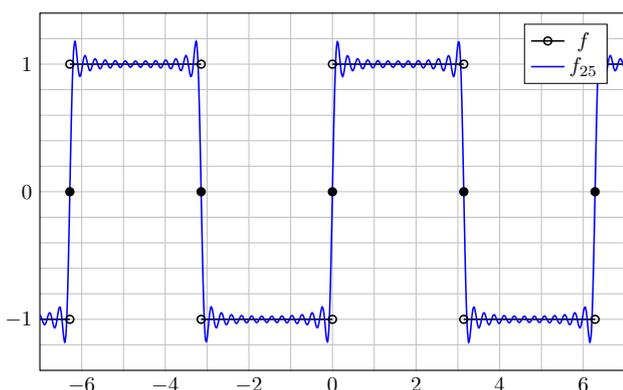


Die Fourier-Polynome  $f_n$  höheren Grades liegen immer näher an  $f$ .

### Fourier-Entwicklung der Rechteckfunktion

I231  
Beispiel

Das Überschwingen bleibt auch bei höherem Approximationsgrad:



Dieses **Gibbs-Phänomen** tritt allgemein an jeder Sprungstelle auf!

### Fourier-Entwicklung der Rechteckfunktion

I232  
Beispiel

☺ Was erkennen wir an diesen Fourier-Polynomen  $f_1, f_2, f_3, \dots$ ?

Für große  $n$  ähnelt das Fourier-Polynom  $f_n$  immer mehr der Funktion  $f$ .  
Das Dirichlet-Kriterium I2A garantiert uns die **punktweise Konvergenz!**  
In jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$  gilt Konvergenz  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  für  $n \rightarrow \infty$ .

An jeder Sprungstelle passiert jedoch etwas höchst Bemerkenswertes:  
Die Fourier-Polynome  $f_n$  können dem Sprung nur folgen, indem sie etwa 9% über das Ziel hinausschießen. Auch für Approximationen größerer Ordnung bleibt dieses **Gibbs-Phänomen** bestehen.

Anschaulich: Wenn wir um  $f$  einen sehr schmalen Schlauch legen, so liegt darin **keines** der Fourier-Polynome  $f_n$ . Das bedeutet, die Konvergenz  $f_n \rightarrow f$  gilt hier punktweise, aber nicht gleichmäßig!  
Der Abstand  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|$  wird nicht beliebig klein.

Auf jedem kompakten Intervall  $[a, b]$  mit  $0 < a < b < \pi$  fern der Sprungstellen ist unsere Funktion  $f$  jedoch stetig, sogar stetig differenzierbar.  
Auf  $[a, b]$  konvergieren die Fourier-Polynome  $f_n$  gleichmäßig gegen  $f$ .  
Ein Überschwingen findet auf  $[a, b]$  nicht statt, nur in den Sprungstellen!

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  absolut integrierbar auf  $[0, T]$  und  $T$ -periodisch.  
Wir entwickeln  $f$  in **Harmonische** zur Grundfrequenz  $\omega = 2\pi/T$ :

$$f \circ \bullet \hat{f}, \quad \hat{f}(k) := \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} f(t) dt, \quad f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ik\omega t}.$$

Diese **Analyse** zerlegt das Signal  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  in sein Spektrum  $\hat{f}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ .  
Die Reihe ist wie zuvor zunächst nur eine symbolische Schreibweise;  
wir schreiben Gleichheit nur im Falle der (punktweisen) Konvergenz.  
Für diese Fourier-Analyse gelten folgende nützliche Rechenregeln:

Linearität:  $a f \circ \bullet a \hat{f}, \quad f + g \circ \bullet \hat{f} + \hat{g},$   
Symmetrie:  $f(-t) \circ \bullet \hat{f}(-k), \quad \overline{f(t)} \circ \bullet \overline{\hat{f}(-k)},$   
Verschiebung:  $f(t-a) \circ \bullet e^{-ik\omega a} \hat{f}(k), \quad e^{i\ell\omega t} f(t) \circ \bullet \hat{f}(k-\ell),$   
Produkte:  $f \cdot g \circ \bullet \hat{f} * \hat{g}, \quad f * g \circ \bullet \hat{f} \cdot \hat{g}.$

Linearität folgt unmittelbar aus der Linearität des Integrals.  
Die weiteren Regeln erhalten wir jeweils durch Substitution:

$$\frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} f(-t) dt = \frac{1}{T} \int_{s=0}^T e^{ik\omega s} f(s) ds = \hat{f}(-k)$$

$$\frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} \overline{f(t)} dt = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{ik\omega t} f(t) dt = \overline{\hat{f}(-k)}$$

$$\frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} f(t-a) dt = \frac{1}{T} \int_{s=-a}^{T-a} e^{-ik\omega(s+a)} f(s) ds = e^{-ik\omega a} \hat{f}(k)$$

$$\frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} e^{i\ell\omega t} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-i(k-\ell)\omega t} f(t) dt = \hat{f}(k-\ell)$$

☺ Meist gehen wir mit  $x = \omega t$  zur Periode  $T = 2\pi$  und  $\omega = 1$  über.  
In diesem Spezialfall sind alle Formeln etwas kürzer und einfacher.  
In konkreten Anwendungen ist die Frequenz  $\omega$  meist fest vorgegeben.  
Die Umrechnung gelingt jedenfalls leicht wie oben in 11D festgehalten.

Wir entwickeln periodische Funktionen  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  in Fourier-Reihen

$$f(t) \sim \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}(m) e^{im\omega t} \quad \text{und} \quad g(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}(n) e^{in\omega t}.$$

Für  $h = f \cdot g$  erhalten wir formal (ohne Anspruch auf Konvergenz):

$$h(t) \sim \sum_m \sum_n \hat{f}(m) e^{im\omega t} \cdot \hat{g}(n) e^{in\omega t} = \sum_k \left[ \sum_{m+n=k} \hat{f}(m) \hat{g}(n) \right] e^{ik\omega t}$$

Das legt folgende einfache Produktregel nahe:

$$h = f \cdot g \circ \bullet \hat{h} = \hat{f} * \hat{g} \quad \text{mit} \quad \hat{h}(k) = \sum_{m+n=k} \hat{f}(m) \hat{g}(n)$$

☺ Konvergenz ist sichergestellt falls  $\sum |\hat{f}(m)| < \infty$  und  $\sum |\hat{g}(n)| < \infty$ .  
☺ Die Fourier-Analyse übersetzt so das punktweise Produkt  $h = f \cdot g$  der Signale, also  $h(t) = f(t) \cdot g(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ , in das Faltungsprodukt  $\hat{h} = \hat{f} * \hat{g}$  der Spektren; das kennen wir von Polynomen und Reihen!

☺ Umgekehrt gilt: Die Fourier-Analyse übersetzt das Faltungsprodukt  $h = f * g$  der Signale in das punktweise Produkt  $\hat{h} = \hat{f} \cdot \hat{g}$  der Spektren.  
Das Faltungsprodukt  $h = f * g$  der Signale ist hierbei definiert durch

$$h(t) := \frac{1}{T} \int_{u=0}^T f(u)g(t-u) du = \frac{1}{T} \int_{v=0}^T f(t-v)g(v) dv.$$

☺ Integrierbarkeit gilt falls  $\int_0^T |f(t)| dt < \infty$  und  $\int_0^T |g(t)| dt < \infty$ .  
Die Fourier-Koeffizienten berechnen wir hieraus wie folgt:

$$\hat{h}(k) \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{T^2} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} \int_{u=0}^T f(u)g(t-u) du dt$$

$$\stackrel{\text{Fub}}{=} \frac{1}{T^2} \int_{u=0}^T \int_{t=0}^T e^{-ik\omega u} f(u) \cdot e^{-ik\omega(t-u)} g(t-u) dt du$$

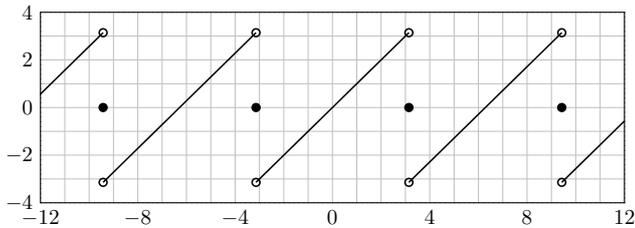
$$\stackrel{\text{Subst}}{=} \frac{1}{T} \int_{u=0}^T e^{-ik\omega u} f(u) du \cdot \frac{1}{T} \int_{v=0}^T e^{-ik\omega v} g(v) dv \stackrel{\text{Def}}{=} \hat{f}(k) \cdot \hat{g}(k)$$

☺ Die Fourier-Analyse  $f, g \circ \bullet \hat{f}, \hat{g}$  ist demnach dank  $f * g \circ \bullet \hat{f} \cdot \hat{g}$  ein Algebra-Homomorphismus von  $(L^1([0, T], \mathbb{C}), *)$  nach  $(\ell^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{C}), \cdot)$ .

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ungerade und  $2\pi$ -periodisch mit  $f(x) = x$  für  $0 < x < \pi$ .

**Aufgabe:** (1) Skizzieren Sie  $f(x)$  und nennen Sie die Fourier-Reihe.

**Lösung:** Sie können dies nochmal berechnen oder wiedererkennen:



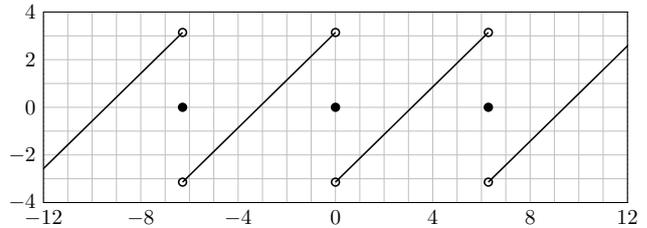
$$f(x) = 2 \left[ \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \dots \right]$$

☺ Dies ist unsere gute alte Sägezahnfunktion von Seite I205.  
**Übung** zur Wiederholung: Rechnen Sie die Koeffizienten selbst aus!

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ungerade und  $2\pi$ -periodisch mit  $f(x) = x$  für  $0 < x < \pi$ .

**Aufgabe:** (2) Skizzieren Sie  $f(x - \pi)$  und nennen Sie die Fourier-Reihe.

**Lösung:** Sie können dies nochmal berechnen oder wiedererkennen:



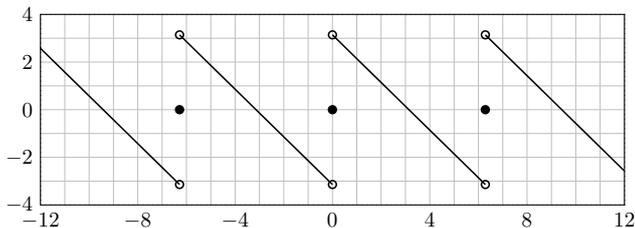
$$f(x - \pi) = 2 \left[ -\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x - \dots \right]$$

☺ Dies ist die um  $\pi$  nach rechts verschobene Sägezahnfunktion.  
**Übung:** Was ergibt eine beliebige Verschiebung  $f(x+a)$  um  $a \in \mathbb{R}$ ?

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ungerade und  $2\pi$ -periodisch mit  $f(x) = x$  für  $0 < x < \pi$ .

**Aufgabe:** (3) Skizzieren Sie  $f(\pi - x)$  und nennen Sie die Fourier-Reihe.

**Lösung:** Sie können dies nochmal berechnen oder wiedererkennen:

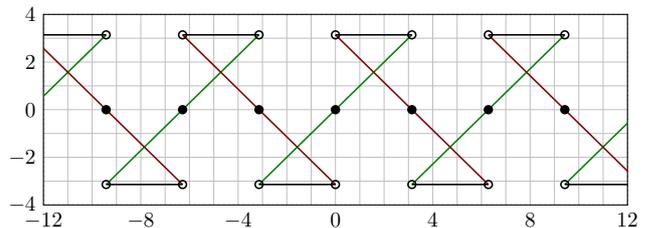


$$f(\pi - x) = 2 \left[ \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{4} \sin 4x + \dots \right]$$

☺ Diese Spiegelung ergibt eine fallende Sägezahnfunktion.  
**Übung:** Was ergibt eine beliebige Spiegelung  $f(a-x)$  für  $a \in \mathbb{R}$ ?

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ungerade und  $2\pi$ -periodisch mit  $f(x) = x$  für  $0 < x < \pi$ .

**Aufgabe:** (4) Skizzieren Sie  $g(x) = f(x) + f(\pi - x)$  und nennen Sie die Fourier-Reihe. **Lösung:** Wir nutzen geschickt die Linearkombination:



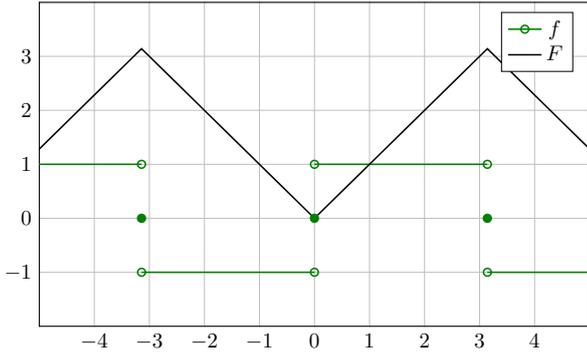
$$f(x) + f(\pi - x) = 4 \left[ \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x + \dots \right]$$

☺ Die Summe ist unsere gute alte Rechteckfunktion von Seite I225!  
**Übung:** Was ergibt die Linearkombination  $f(x) + f(a-x)$  für  $a \in \mathbb{R}$ ?

### Fourier-Entwicklung der Dreieckfunktion

I309  
Beispiel

**Aufgabe:** Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ungerade,  $2\pi$ -periodisch,  $f(x) = 1$  für  $0 < x < \pi$ . Die Integralfunktion  $F(x) = \int_{t=0}^x f(t) dt$  ist periodisch.  
 (0) Skizzieren Sie  $f$  und  $F$ . (1) Berechnen Sie die Fourier-Reihen.  
 (2) Wogegen konvergieren  $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$  und  $1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} \pm \dots$ ?



### Fourier-Entwicklung der Dreieckfunktion

I310  
Beispiel

**Lösung:** Auf  $[-\pi, \pi]$  finden wir  $F(x) = |x|$ , dann  $2\pi$ -periodisch.  
 (1) Die Fourier-Reihe der Rechteckfunktion  $f = F'$  kennen wir bereits:

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \left[ \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x + \frac{1}{9} \sin 9x + \dots \right]$$

Aus  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  erhalten wir dank Integration (I3A) mühelos:

$$F(x) \sim C_0 - \frac{4}{\pi} \left[ \cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \frac{1}{7^2} \cos 7x + \dots \right]$$

Der nulle Fourier-Koeffizient  $C_0$  ist der Mittelwert über eine Periode:

$$C_0 \stackrel{\text{Det}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

Dank Dirichlet I2A haben wir Konvergenz in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$ . Also:

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[ \cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \frac{1}{7^2} \cos 7x + \dots \right]$$

### Fourier-Entwicklung der Dreieckfunktion

I311  
Beispiel

Zum Vergleich die direkte Berechnung der Fourier-Koeffizienten:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(kx) dx \quad (\text{gerader Integrand}) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(kx) dx \quad (\text{partielle Integration}) \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \left[ x \frac{\sin(kx)}{k} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(kx)}{k} dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\cos(kx)}{k^2} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\cos(k\pi) - 1}{k^2} \right] = \begin{cases} 0 & \text{für } k \text{ gerade,} \\ -\frac{4}{\pi k^2} & \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin(kx) dx = 0 \quad (\text{ungerader Integrand})$$

Daraus erhalten wir die ersehnte Co/Sinus-Reihe:

$$F(x) \sim \frac{\pi}{2} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2j+1)^2} \cos((2j+1)x)$$

### Fourier-Entwicklung der Dreieckfunktion

I312  
Beispiel

Zum Vergleich direkt das Integral für  $C_k$  mit  $k \neq 0$ :

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} |x| dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{\pi} e^{-ikx} x dx - \int_{-\pi}^0 e^{-ikx} x dx \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{\pi} e^{-ikx} x dx + \int_0^{\pi} e^{ikx} x dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(kx) x dx = \dots \text{ wie oben } \dots \\ &= \begin{cases} -\frac{2}{\pi k^2} & \text{für } k \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{für } k \text{ gerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

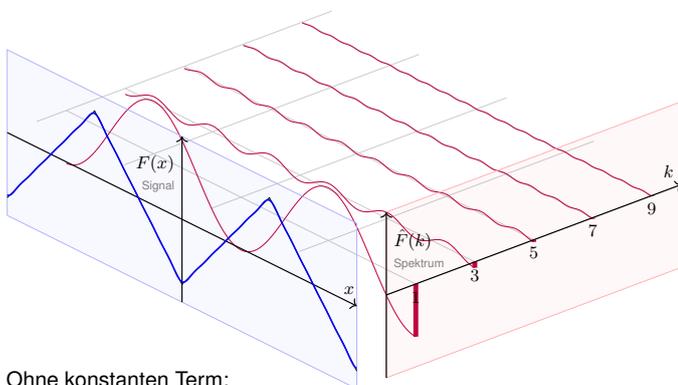
Oder umgerechnet für die Co/Sinus-Reihe:

$$B_k = i(C_k - C_{-k}) = 0, \quad A_k = C_k + C_{-k} = \begin{cases} -\frac{4}{\pi k^2} & \text{für } k \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{für } k \text{ gerade.} \end{cases}$$

☺ Die komplexwertige Rechnung bringt hier keine weitere Ersparnis.

### Fourier-Entwicklung der Dreieckfunktion

I313  
Beispiel



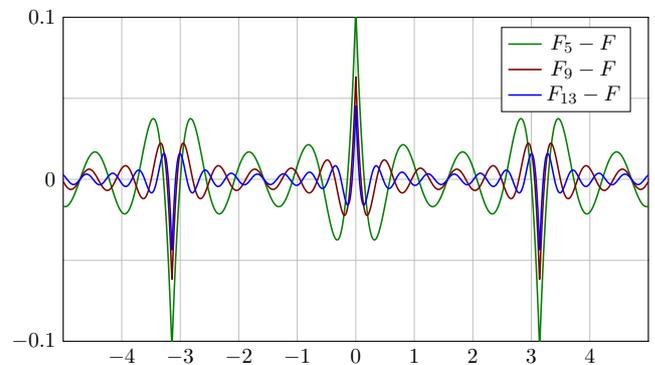
Ohne konstanten Term:

$$F(x) = -\frac{4}{\pi} \left[ \cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \frac{1}{7^2} \cos 7x + \frac{1}{9^2} \cos 9x + \dots \right]$$

### Fourier-Entwicklung der Dreieckfunktion

I314  
Beispiel

Die Fourier-Polynome  $F_n$  konvergieren gleichmäßig gegen  $F$ :



Zur besseren Sichtbarkeit zeichne ich die Differenz  $F_n - F$  vergrößert. Dieser Fehler liegt in einem  $\epsilon$ -Schlauch mit  $\epsilon \leq 2 \max |F'| \ln(n)/n$ . (I2A)

### Fourier-Entwicklung der Dreieckfunktion

I315  
Beispiel

☺ Was erkennen wir an diesen Fourier-Polynomen  $F_1, F_2, F_3, \dots$ ?  
 Schon die ersten Fourier-Polynome  $F_n$  liegen recht nahe bei  $F$ .  
 Das **Dirichlet-Kriterium** I2A garantiert uns Konvergenz in jedem Punkt!

Noch besser: Wenn wir um  $F$  einen Schlauch der Breite  $\epsilon > 0$  legen, so liegen darin alle Fourier-Polynome  $F_n$  für ausreichend großes  $n$ :  
 Die Fourier-Polynome  $F_n$  **konvergieren gleichmäßig** gegen  $F$ !

Dies ist kein Zufall, sondern illustriert den Satz I2A von Dirichlet:  
 $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ist stetig und stückweise stetig differenzierbar mit  $|F'| \leq 1$ .  
 Aus der Skizze lesen wir  $|F_{13} - F| \leq F_{13}(0) < 0.05$  ab. Satz I2A sagt  $|F_{13} - F| \leq 2 \max |F'| \ln(13)/13 < 0.4$  voraus: Diese allgemeine und einfache Fehlerschranke ist korrekt, hier um den Faktor 8 zu großzügig.  
 Das ist durchaus respektabel, dafür ist unsere Schranke bequem und der Beweis relativ leicht (ausgeführt ab Seite J201 im nächsten Kapitel).

Als Kontrast illustrieren die obige Sägezahn- und Rechteckfunktion das Gibbs-Phänomen in jeder Sprungstelle. Hier kann bestenfalls noch punktweise Konvergenz vorliegen, aber keine gleichmäßige.

### Fourier-Entwicklung der Dreieckfunktion

I316  
Beispiel

(2a) Ausgewertet im Punkt  $x = 0$  finden wir:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[ 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right] \stackrel{\text{Dirichlet}}{\text{I2A}} F(0) = 0$$

Hieraus folgt:

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8} = 1.2337005501 \dots$$

(2b) Ausgewertet im Punkt  $x = \pi/4$  finden wir:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \left[ 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots \right] \stackrel{\text{Dirichlet}}{\text{I2A}} F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Hieraus folgt:

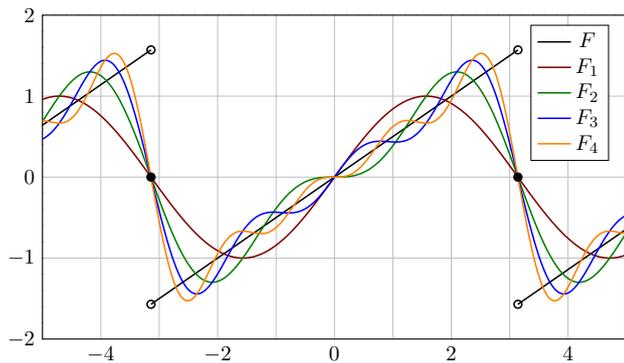
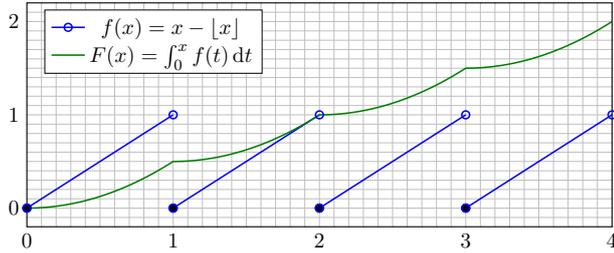
$$1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8\sqrt{2}} = 0.8723580249 \dots$$

☺ Dank passender Werkzeuge war die Rechnung schließlich leicht. Erneut gelingt uns damit die Berechnung schwieriger Reihen! Aus der Reihe  $A := \sum_{j=0}^{\infty} 1/(2j+1)^2 = \pi^2/8$  folgt zudem  $B := \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$ , denn  $B = A + B/4$ . Dies löst das berühmte **Basler Problem**. [I324]

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine  $T$ -periodische Funktion und differenzierbar. Dann ist die **Ableitung**  $f'$  ebenfalls  $T$ -periodisch, soweit klar. Hingegen ist die **Integralfunktion**  $F(x) = \int_{t=0}^x f(t) dt$  dann und nur dann periodisch, wenn  $\int_{t=0}^T f(t) dt = 0$  gilt:

$$F(x+T) - F(x) = \int_{t=x}^{x+T} f(t) dt \stackrel{|||}{=} \int_{t=0}^T f(x) dx \stackrel{!}{=} 0$$

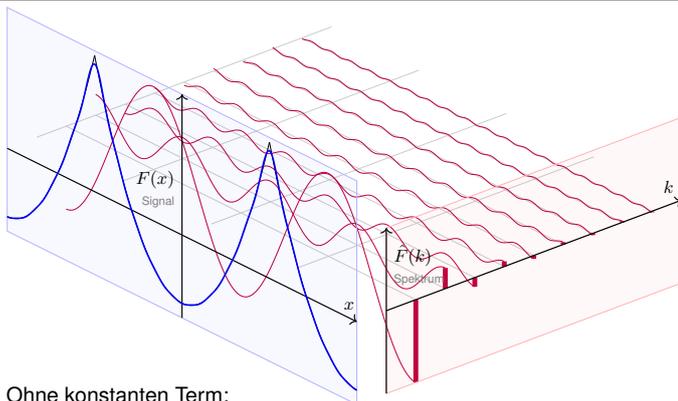
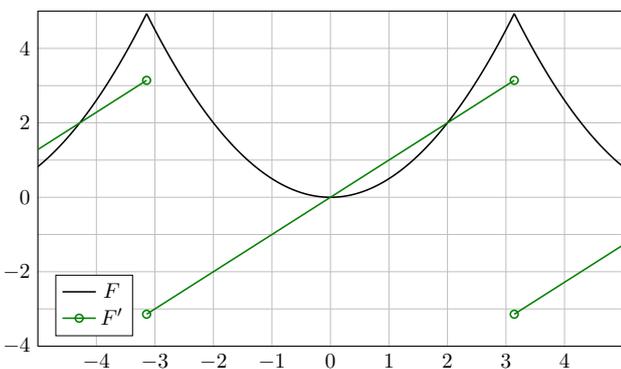
Ein illustratives Gegenbeispiel liefert folgende Sägezahnfunktion:



Wir vergleichen die Fourier-Reihen von  $F$  und der Ableitung  $f = F'$ .

**Aufgabe:** Impliziert  $F(x) \sim \sum_k C_k e^{ikx}$  immer  $f(x) \sim \sum_k ikC_k e^{ikx}$ ? Die Fourier-Polynome  $F_n$  sind beliebig diff'bar. Gilt  $F_n'(0) \rightarrow F'(0)$ ?

**Aufgabe:** Sei  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  von Periode  $2\pi$  mit  $F(x) = x^2/2$  für  $|x| \leq \pi$ . (0) Skizzieren Sie  $F$  und  $F'$ . (1) Berechnen Sie die Fourier-Reihen. (2) Wogegen konvergieren  $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \pm \dots$  und  $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \pm \dots$ ?



Ohne konstanten Term:

$$F(x) = -2 \left[ \cos x - \frac{1}{2^2} \cos 2x + \frac{1}{3^2} \cos 3x - \frac{1}{4^2} \cos 4x + \frac{1}{5^2} \cos 5x \mp \dots \right]$$

Satz I3A: termweise Integration von Fourier-Reihen

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  integrierbar auf  $[0, T]$  und  $T$ -periodisch. Die zugehörige Integralfunktion  $F(t) := C + \int_{\tau=0}^t f(\tau) d\tau$  ist genau dann periodisch, wenn  $F(T) - F(0) = \int_{\tau=0}^T f(\tau) d\tau$  verschwindet. In diesem Falle gilt:

$$c_k = \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} f(t) dt = \left[ e^{-ik\omega t} F(t) \right]_{t=0}^T + ik\omega \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} F(t) dt = ik\omega C_k$$

= 0 da T-periodisch

Das heißt, wir dürfen Fourier-Reihen termweise integrieren:

$$f(t) \sim c_0 + \sum_{k \neq 0} c_k e^{ik\omega t} \iff F(t) \sim C_0 + \sum_{k \neq 0} \frac{c_k}{ik\omega} e^{ik\omega t}$$

Integrationskonstante durch Punktprobe:  $F(0) = C = C_0 + \sum_{k \neq 0} \frac{c_k}{ik\omega}$

😊 Wir können die Umkehrung sorgsam als Ableitungsregel für  $F$  lesen: Hierzu sei  $F$  **absolut stetig** mit  $F' = f$ , also  $F(t) = F(0) + \int_{u=0}^t f(u) du$ .

**Lösung:** Dank Dirichlet-Kriterium I2A wissen wir für  $-\pi < x < \pi$ :

$$F(x) = \frac{x}{2} = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots$$

Die naive Ableitungsregel gilt hier keineswegs:

$$f(x) = 1/2 \not\sim \cos x - \cos 2x + \cos 3x - \cos 4x + \dots$$

😞 In  $x = 0$  gilt  $F_n'(0) = 1$  für  $n$  ungerade und  $F_n'(0) = 0$  für  $n$  gerade. Siehe Graphik! Die Zahlenfolge  $0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$  konvergiert nicht!

😞 Die Ableitungen  $F_n'(0)$  konvergieren nicht gegen  $F'(0) = 1/2$ ! Sie erkennen das Problem sehr deutlich an den obigen Graphen.

⚠ Hier gilt nicht  $F(t) = F(0) + \int_{u=0}^t f(u) du$  wie im Satz I3A verlangt. Bitte lesen Sie Sätze sorgsam und gründlich, wie immer, so auch hier. Nur wer sein Werkzeug beherrscht, rechnet korrekt und effizient.

😊 Satz I3A garantiert: Integrieren ist besser als Differenzieren! Für die Ableitungsregel gemäß Satz I3A muss  $F$  absolut stetig sein. Zum Beispiel genügt:  $F$  stetig und stückweise stetig differenzierbar.

**Lösung:** Die Fourier-Reihe von  $F$  kann man direkt berechnen... oder bequemer und schneller aus  $F(x) = \int_{t=0}^x F'(t) dt$  ablesen.

(1) Die Ableitung  $f = F'$  ist  $2\pi$ -periodisch mit  $f(x) = x$  für  $-\pi < x < \pi$ . Das ist unsere Sägezahnfunktion [205]. Für diese wissen wir bereits:

$$f(x) \sim 2 \left[ \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \dots \right]$$

Aus  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  erhalten wir dank Integrationsregel I3A mühelos:

$$F(x) \sim C_0 - 2 \left[ \cos x - \frac{1}{2^2} \cos 2x + \frac{1}{3^2} \cos 3x - \frac{1}{4^2} \cos 4x + \dots \right]$$

Der nullte Fourier-Koeffizient  $C_0$  ist der Mittelwert über eine Periode:

$$C_0 \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{2} dx = \frac{1}{12\pi} [x^3]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{6}$$

Dank Dirichlet I2A haben wir Konvergenz in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$ . Also:

$$F(x) = \frac{\pi^2}{6} - 2 \left[ \cos x - \frac{1}{2^2} \cos 2x + \frac{1}{3^2} \cos 3x - \frac{1}{4^2} \cos 4x \pm \dots \right]$$

(2a) Ausgewertet im Punkt  $x = 0$  finden wir:

$$\frac{\pi^2}{6} - 2 \left[ 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \pm \dots \right] \stackrel{\text{Dirichlet I2A}}{=} F(0) = 0$$

Hieraus erhalten wir den Grenzwert der folgenden Reihe:

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \pm \dots = \frac{\pi^2}{12} = 0.8224670334 \dots$$

(2b) Ausgewertet im Punkt  $x = \pi$  finden wir:

$$\frac{\pi^2}{6} + 2 \left[ 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \right] \stackrel{\text{Dirichlet I2A}}{=} F(\pi) = \frac{\pi^2}{2}$$

Hieraus erhalten wir die Lösung des berühmten **Basler Problems**:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} = 1.6449340668 \dots$$

In der HM2 konnten Sie schon zeigen, dass diese Reihe konvergiert. (Wiederholung: Wie? B3A) Nun können wir endlich ihren Grenzwert berechnen! Dieses berühmte Problem wurde 1644 von Pietro Mengoli gestellt und 90 Jahre später 1735 von Leonhard Euler gelöst (zunächst noch vage). Dank starker Fourier-Theorie fällt uns das Ergebnis in den Schoß! 📺 [youtu.be/d-03eB9sf1s](https://youtu.be/d-03eB9sf1s)

Für unsere Sägezahnfunktion [1205] finden wir:

$$f(x) = 2 \left[ \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \dots \right]$$

Für die Parabelfunktion  $F(x) = \int_{t=0}^x f(t) dt$  folgt [1321]:

$$F(x) = \frac{\pi^2}{6} - 2 \left[ \cos x - \frac{1}{2^2} \cos 2x + \frac{1}{3^2} \cos 3x - \frac{1}{4^2} \cos 4x + \dots \right]$$

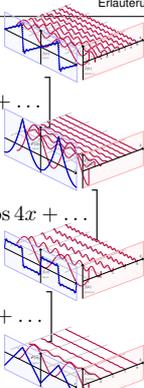
Für unsere Rechteckfunktion [1225] finden wir:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left[ \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x + \dots \right]$$

Für die Dreieckfunktion  $F(x) = \int_{t=0}^x f(t) dt$  folgt [1309]:

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[ \cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \frac{1}{7^2} \cos 7x + \dots \right]$$

😊 Glattheit entspricht schnellem Abklingen der Fourier-Koeffizienten!



😊 Glattheit impliziert schnelles Abklingen der Fourier-Koeffizienten:

**Satz I3B: Riemann–Lebesgue–Lemma**

Ist  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  absolut integrierbar, so sind die Fourier-Koeffizienten  $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{x=0}^{2\pi} e^{-ikx} f(x) dx$  eine Nullfolge, das heißt  $|c_k| \rightarrow 0$  für  $|k| \rightarrow \infty$ . Demnach ist  $F(x) = C + \int_{t=0}^x f(t) dt$  absolut stetig und erfüllt  $|kC_k| \rightarrow 0$ . Entsteht  $F$  aus  $f$  durch  $d$ -fache Integration, so gilt sogar  $|k^d C_k| \rightarrow 0$ .

😊 Umgekehrt garantiert schnelles Abklingen auch Glattheit (s.a. J3C):

**Satz I3C: Abklingen und gleichmäßige Konvergenz**

Sei  $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  eine beliebige Folge komplexer Zahlen  $c_k \in \mathbb{C}$ . Im Falle  $\sum_k |c_k| < \infty$  gilt gleichmäßige Konvergenz gegen die stetige Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}: x \mapsto f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \quad \text{und} \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{x=0}^{2\pi} e^{-ikx} f(x) dx.$$

Gilt sogar  $\sum_k |k^d c_k| < \infty$ , so ist  $f$  mindestens  $d$ -mal stetig diff'bar. Letzteres ist zum Beispiel erfüllt, wenn  $|c_k| \leq c/|k|^{d+\alpha}$  mit  $\alpha > 1$  gilt.

😊 Slogan und Merkregel: Integrieren glättet, Differenzieren raut auf. Das schlägt sich unmittelbar in den Fourier-Koeffizienten nieder. Wir kennen hierfür bereits einige eindrückliche Beispiele:

**Aufgabe:** Prüfen und interpretieren Sie diese Kriterien zum Abklingen (Satz I3B und Satz I3C) an unseren vier bisherigen Beispielen.

**Lösung:** Die Beispiele liegen wunderbar explizit vor uns:

- (1) Die Sägezahnfunktion  $f$  ist unstetig, mit Sprungstellen in  $\pi + 2\pi\mathbb{Z}$ . Ihre Fourier-Koeffizienten erfüllen  $|c_k| = 1/|k| \rightarrow 0$ , aber  $\sum_k |c_k| = \infty$ .
- (2) Ihre Integralfunktion  $F$  ist stetig, und hier gilt  $\sum_k |C_k| < \infty$ . Hingegen ist  $F$  nicht stetig diff'bar, und es gilt  $\sum_k |kC_k| = \infty$ .

Treppenfunktionen [1221] liefern weitere Beispiele:

- (3) Die Rechteckfunktion  $g$  ist nicht stetig, mit Sprungstellen in  $\pi\mathbb{Z}$ . Ihre Fourier-Koeffizienten erfüllen  $|c_k| \leq 1/|k| \rightarrow 0$ , aber  $\sum_k |c_k| = \infty$ .
- (4) Die Dreieckfunktion  $G$  ist stetig, und hier gilt  $\sum_k |C_k| < \infty$ . Hingegen ist  $G$  nicht stetig diff'bar, und es gilt  $\sum_k |kC_k| = \infty$ .

**Beweisidee des Riemann–Lebesgue–Lemmas I3B:**

Das Abklingen  $|c_k| \rightarrow 0$  gilt für jede Treppenfunktion. [1221] Per Approximation gilt es dann für jede integrierbare Funktion.

Die Folgerung für  $d$ -fache Integrale  $F^{(d)} = f$  ist dann klar dank I3A: Aus  $f(x) \sim \sum c_k e^{ikx}$  folgt  $F(x) \sim \sum (ik)^{-d} c_k e^{ikx}$ , also  $c_k = (ik)^d C_k$ .

⚠ Die Umkehrung gilt nicht! Für  $b_k = 1/\ln k$  gilt  $|b_k| \rightarrow 0$ , die Reihe  $f(x) = \sum_{k=2}^{\infty} b_k \sin(kx)$  konvergiert für alle  $x \in \mathbb{R}$  (Dirichlet B3). Aber diese Funktion  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  ist nicht absolut integrierbar! Das Problem ist, dass die Koeffizienten  $b_k$  zu langsam abklingen.

**Beweisidee zur gleichmäßigen Konvergenz in Satz I3C:**

Der gleichmäßige Limes stetiger Funktionen ist eine stetige Funktion. Genau dies wenden wir hier auf die Reihe  $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$  an. Gilt sogar  $\sum_k |k^d c_k| < \infty$ , so wenden wir dies auf die  $d$ -te Ableitung an.

⚠ Punktweise oder gar gleichmäßige Konvergenz sind etwas besonderes: Es gibt stetige Funktionen  $f$ , deren Fourier-Reihe  $f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$  in unendlich vielen Punkten  $x \in \mathbb{R}$  divergiert!

**Aufgabe:** (1) Entwickeln Sie  $\exp(w)$  und  $\ln(1+z)$  in Potenzreihen. (2) Berechnen Sie geometrisch möglichst explizit die reellen Funktionen

$$f(x) = \text{Im} \ln(1 + e^{ix}) \quad \text{und} \quad g(x) = \text{Re} \ln(1 + e^{ix}).$$

- (3) Entwickeln Sie  $f$  und  $g$  in trigonometrischen Reihen.
- (4) Wogegen konvergieren  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$  und  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ ?

**Lösung:** (1) Für Exponential- und Logarithmusfunktion wissen wir

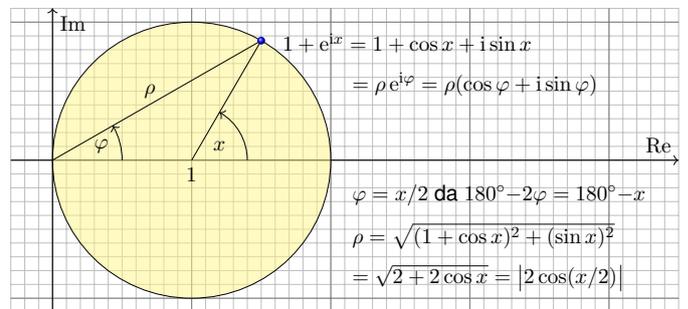
$$\exp(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} \quad \text{und} \quad \ln(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^k}{k},$$

mit Konvergenzradien  $\infty$  bzw. 1. Es gilt  $\exp \ln(1+z) = 1+z$ , also

$$1+z = \exp(w) \Leftrightarrow w = \ln(1+z) \quad \text{für} \quad |z| < 1, \quad -\pi/2 < \text{Im} w < \pi/2.$$

Dies gilt auch noch auf dem Rand für  $|z| = 1$  mit  $z \neq -1$ . (Satz B3F)

😊 Zum Hauptzweig des komplexen Logarithmus siehe F225.



(2) Aus der Skizze lesen wir die komplexen Polarkoordinaten ab:

$$\begin{aligned} \ln(1 + e^{ix}) &= \ln(\rho e^{i\varphi}) = \ln \rho + i\varphi \quad \text{mit} \quad -\pi/2 < \varphi < \pi/2 \\ f(x) &= \text{Im} \ln(1 + e^{ix}) = \varphi = x/2 \quad \text{für} \quad -\pi < x < \pi \\ g(x) &= \text{Re} \ln(1 + e^{ix}) = \ln \rho = \ln |2 \cos(x/2)| \end{aligned}$$

(3) Die Potenzreihe für  $\ln(1+z)$  liefert:

$$\begin{aligned} \ln(1 + e^{ix}) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} e^{ikx} \\ f(x) &= \text{Im} \ln(1 + e^{ix}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx) \\ g(x) &= \text{Re} \ln(1 + e^{ix}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cos(kx) \end{aligned}$$

Die Grenzwerte dieser Reihen haben wir eben ausgerechnet:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin(kx)}{k} &= \frac{x}{2} \quad \text{für} \quad -\pi < x < \pi \\ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\cos(kx)}{k} &= \ln |2 \cos(x/2)| \end{aligned}$$

😊 Diese Sinus-Reihe ist unsere gute alte Sägezahnfunktion [1205].

(4) Damit haben wir  $f$  und  $g$  in trigonometrische Reihen entwickelt:

$$\begin{aligned} \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots &= \begin{cases} x/2 & \text{für} \quad -\pi < x < \pi, \\ 0 & \text{für} \quad x = \pm\pi. \end{cases} \\ \cos x - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} - \frac{\cos 4x}{4} + \dots &= \begin{cases} \ln |2 \cos(x/2)|, & \\ -\infty & \text{für} \quad x = \pm\pi. \end{cases} \end{aligned}$$

Im Punkt  $x = \pi/2$  wird die erste zu folgender Leibniz-Reihe [B319]:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

Im Punkt  $x = 0$  wird die zweite zu folgender Leibniz-Reihe [B319]:

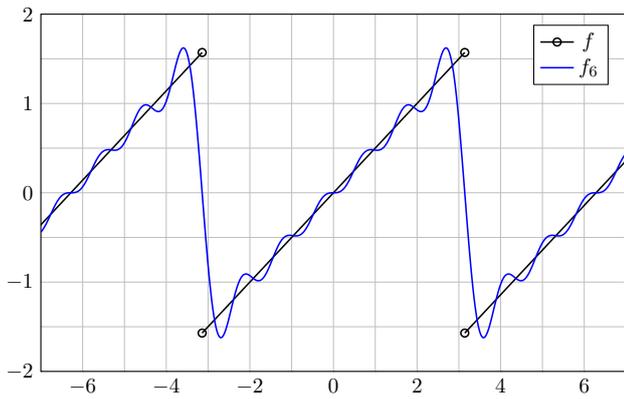
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2$$

In der Polstelle  $x = \pi$  finden wir die harmonische Reihe [B302]

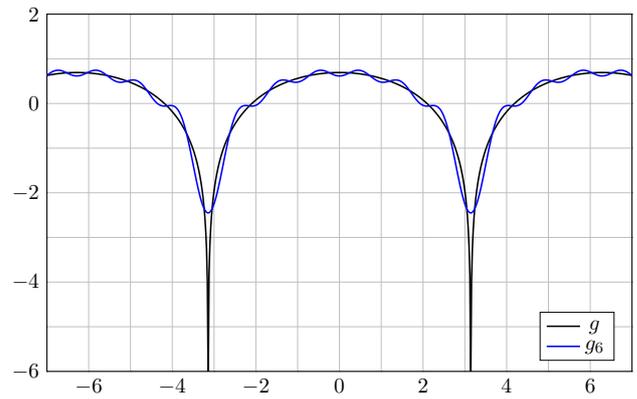
$$-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots = -\infty.$$

Hier divergiert also die trigonometrische Reihe, auch das ist möglich.

Die Funktion  $f$  ist  $2\pi$ -periodisch mit  $f(x) = x/2$  für  $-\pi < x < \pi$ . Sie hat Sprungstellen in  $x = \pm\pi$ . Das kennen und verstehen wir.



Auch die Funktion  $g(x) = \ln|2 \cos(x/2)|$  ist  $2\pi$ -periodisch. Sie hat Polstellen in  $x = \pm\pi$  und ist dennoch integrierbar!



Eindeutige Darstellung als trigonometrische Reihe

☺ Jede Laurent-Reihe  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k z^k$  definiert für  $z = e^{ix}$  mit  $x \in \mathbb{R}$  die trigonometrische Reihe  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$  mit Koeffizienten  $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ .

☺ Das wirft die Frage auf: Können wir sicher sein, dass dies zugleich die Fourier-Koeffizienten sind? Hierauf antwortet der folgende Satz:

Satz 13D: Eindeutigkeitsatz, de la Vallée-Poussin 1912

Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  sei  $2\pi$ -periodisch und auf  $[0, 2\pi]$  integrierbar mit

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \circlearrowleft \bullet \hat{f}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}, \text{ also } \hat{f}(k) := \frac{1}{2\pi} \int_{x=0}^{2\pi} e^{-ikx} f(x) dx.$$

Gegeben sei eine beliebige Folge  $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  komplexer Zahlen  $c_k \in \mathbb{C}$  mit

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \text{ also } f_n(x) := \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \rightarrow f(x) \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Dies gelte für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit höchstens abzählbar vielen Ausnahmen. Dann folgt  $c_k = \hat{f}(k)$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$ : Die Reihendarstellung ist eindeutig!

Eindeutige Darstellung als trigonometrische Reihe

**Aufgabe:** Beweisen Sie den Satz im Spezialfall  $\sum |c_k| < \infty$ . **Lösung:**

$$\begin{aligned} 2\pi \hat{f}(k) &\stackrel{\text{Def}}{=} \int_{x=0}^{2\pi} e^{-ikx} \left[ \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c_\ell e^{i\ell x} \right] dx \stackrel{\text{Lin}}{=} \int_{x=0}^{2\pi} \left[ \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c_\ell e^{i(\ell-k)x} \right] dx \\ &\stackrel{(\ast)}{=} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \left[ \int_{x=0}^{2\pi} c_\ell e^{i(\ell-k)x} dx \right] \stackrel{\text{Lin}}{=} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c_\ell \left[ \int_{x=0}^{2\pi} e^{i(\ell-k)x} dx \right] \stackrel{(\ast\ast)}{=} 2\pi c_k \end{aligned}$$

Dank absoluter Konvergenz  $\sum |c_k| < \infty$  nutzen wir (1) Vertauschung von Reihe und Integral [1106] und anschließend (2) Orthonormalität [1125].

☺ Es genügt die wesentlich schwächere Voraussetzung des Satzes; wir fordern nur  $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$  für alle bis auf abzählbar viele  $x \in \mathbb{R}$ . Das ist sehr praktisch. Der Beweis wird dadurch leider extrem schwierig.

⚠ Erstaunlicherweise kann man nicht „abzählbare Ausnahmемenge“ durch „Nullmenge“ ersetzen: Menshov konstruierte 1916 eine Reihe  $S(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$  mit  $c_0 = 1$ , die fast überall gegen  $f = 0$  konvergiert, bis auf eine Nullmenge. Dennoch sind nicht alle Koeffizienten  $c_k$  null!

Von Potenzreihen zu Fourier-Reihen

**Aufgabe:** (1) Für  $0 \leq r \leq 1$  zeige man wie in der vorigen Aufgabe:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} r^k \frac{\sin(kx)}{k} = \arcsin\left(\frac{r \sin(x)}{\sqrt{1+2r \cos(x)+r^2}}\right)$$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} r^k \frac{\cos(kx)}{k} = \ln \sqrt{1+2r \cos(x)+r^2}$$

(2) Wie glatt sind  $f$  und  $g$ ? Wie schnell klingen ihre Koeffizienten ab?

**Lösung:** (1) Aus obiger Skizze lesen wir die Polarkoordinaten ab:

$$\begin{aligned} \ln(1+r e^{ix}) &= \ln(\rho e^{i\varphi}) = \ln \rho + i\varphi \\ g(x) &= \operatorname{Re} \ln(1+r e^{ix}) = \ln \rho = \ln \sqrt{1+2r \cos(x)+r^2} \\ f(x) &= \operatorname{Im} \ln(1+r e^{ix}) = \varphi = \arcsin(r/\rho \cdot \sin x) \end{aligned}$$

☺ Das scheint kompliziert, aber geometrisch gesehen wird es leicht. Im Randfall  $r = 1$  erhalten wir die Formeln der vorigen Aufgabe.

Von Potenzreihen zu Fourier-Reihen

(2) Im Randfall  $r = 1$  kennen wir die Funktionen  $f$  und  $g$ : Die Sägezahnfunktion  $f$  ist unstetig, mit einer Sprungstelle in  $\pm\pi$ . Auch die Funktion  $g$  ist unstetig, mit einer Polstelle in  $\pm\pi$ .

Die Koeffizienten  $|c_k| = 1/k$  klingen in diesem Falle nur langsam ab. Insbesondere sind sie nicht absolut summierbar:  $\sum_k |c_k| = \infty$ .

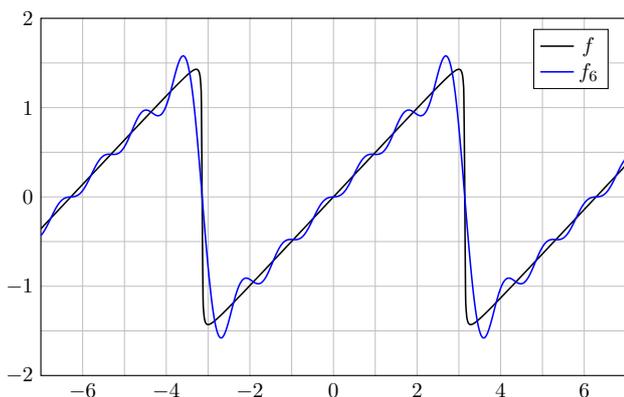
Im Falle  $0 \leq r < 1$  sind wir im Inneren des Konvergenzkreises: Hier sind die Funktionen  $f$  und  $g$  stetig und beliebig oft differenzierbar, sogar analytisch, d.h. in eine konvergente Potenzreihe entwickelbar.

Ihre Koeffizienten  $|c_k| = r^k/k$  klingen exponentiell ab! Insbesondere gilt  $\sum_k |k^d c_k| < \infty$  für jedes  $d \in \mathbb{N}$ .

☺ Dieses konkrete Beispiel illustriert die oben formulierten Sätze: Glattheit impliziert schnelles Abklingen der Fourier-Koeffizienten (13B), und umgekehrt garantiert schnelles Abklingen auch Glattheit (13C).

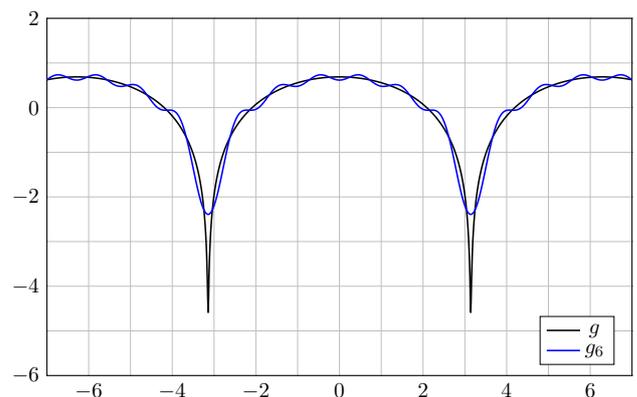
Von Potenzreihen zu Fourier-Reihen

Die Funktion  $f(x) = \arcsin(r \sin(x)/\sqrt{1+2r \cos(x)+r^2})$  für  $r = 0.99$ . Für  $r < 1$  ist  $f$  glatt. Für  $r \rightarrow 1$  erhalten wir die Sägezahnfunktion.



Von Potenzreihen zu Fourier-Reihen

Die Funktion  $g(x) = \ln \sqrt{1+2r \cos(x)+r^2}$  für  $r = 0.99$ . Für  $r < 1$  ist  $g$  glatt. Für  $r \rightarrow 1$  erhalten wir Pole wie oben gesehen.



Für Funktionen  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  definieren wir ihr **Skalarprodukt** durch

$$L^p \times L^q \rightarrow \mathbb{C} : (f, g) \mapsto \langle f | g \rangle := \frac{1}{b-a} \int_a^b \overline{f(t)} g(t) dt.$$

Der Integrand  $\overline{f}g$  sei absolut integrierbar, etwa  $f \in L^\infty$  beschränkt und  $g \in L^1$  absolut integrierbar, allgemein  $f \in L^p, g \in L^q$  mit  $1/p + 1/q = 1$ . Bei Periode  $T$  wählen wir ein beliebiges Intervall der Länge  $b - a = T$ . Dieses Periodenintegral ist invariant bei Verschieben oder Vervielfachen. Sei  $\omega = 2\pi/T$ . Als **Basisfunktion**  $e_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  definieren wir

$$e_k(t) := e^{ik\omega t} = \cos(k\omega t) + i \sin(k\omega t).$$

Für diese Funktionen gelten die **Orthonormalitätsrelationen**

$$\langle e_k | e_\ell \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell: \text{ paarweise Orthogonalität,} \\ 1 & \text{für } k = \ell: \text{ Normierung auf Länge 1.} \end{cases}$$

Ähnliche, etwas kompliziertere Formeln gelten für  $\cos(k\omega t)$  und  $\sin(k\omega t)$ .  
 ☺ Meist gehen wir mit  $x = \omega t$  zur Periode  $T = 2\pi$  und  $\omega = 1$  über.

**Trigonometrisches Polynom** nennt man jede  $\mathbb{C}$ -Linearkombination

$$f(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t).$$

☺ Die Menge aller Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ist ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum. Hierin ist die Teilmenge aller  $T$ -periodischen Funktionen ein Untervektorraum. Die Basisfunktion  $e_k$  spannen den Unterraum der trigon. Polynome auf. Jede solche Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  bestimmt ihre Koeffizienten gemäß

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} f(t) dt = \langle e^{ik\omega t} | f \rangle \text{ bzw.} \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_{t=0}^T \cos(k\omega t) f(t) dt = 2 \langle \cos(k\omega t) | f \rangle, \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_{t=0}^T \sin(k\omega t) f(t) dt = 2 \langle \sin(k\omega t) | f \rangle. \end{aligned}$$

☺ Formeln für  $c_k$  sind meist einfacher und übersichtlicher als für  $a_k, b_k$ .

Allgemein: Ist  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  periodisch und über  $[0, T]$  integrierbar, dann definieren wir durch obige Formeln die **Fourier-Koeffizienten** von  $f$ . Diese Koeffizienten von  $f$  fassen wir zur **Fourier-Reihe** zusammen:

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t).$$

⚠ Diese Reihe ist zunächst nur eine symbolische Schreibweise! Gelesen: „Die Funktion  $f$  hat die Fourier-Koeffizienten  $c_k$  bzw.  $a_k, b_k$ .“ Aufgrund der **Euler-Formel**  $e^{ik\omega t} = \cos(k\omega t) + i \sin(k\omega t)$  gilt dabei

$$\begin{aligned} a_k &= c_k + c_{-k}, & b_k &= i(c_k - c_{-k}), \\ c_k &= \frac{a_k - ib_k}{2}, & c_{-k} &= \frac{a_k + ib_k}{2}. \end{aligned}$$

Ist  $f$  **reell**, also  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , so gilt  $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ , also  $c_{-k} = \overline{c_k}$ .  
 Ist  $f$  **gerade**, so liefert  $f$  eine **Cosinusreihe**,  $b_k = 0, c_{-k} = c_k$ .  
 Ist  $f$  **ungerade**, so liefert  $f$  eine **Sinusreihe**,  $a_k = 0, c_{-k} = -c_k$ .

Zur Funktion  $f$  ist  $f_n(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega t}$  ihr  $n$ -tes **Fourier-Polynom**. Wir sagen, die Fourier-Reihe von  $f$  **konvergiert im Punkt**  $t \in \mathbb{R}$ , wenn die Zahlenfolge  $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{C}$  für  $n \rightarrow \infty$  konvergiert. Beispiel: Ist  $f$  im Punkt  $t$  differenzierbar, so folgt  $f_n(t) \rightarrow f(t)$ . Allgemeiner gilt Satz 12A:  
 (1) Angenommen,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  erfüllt die Dirichlet-Bedingung im Punkt  $t$ , d.h. beide Grenzwerte  $f(t \pm)$  und beide Ableitungen  $f'(t \pm)$  existieren. Dann konvergiert in diesem Punkt  $t$  die Fourier-Reihe  $f_n(t)$  gemäß

$$f_n(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega t} \rightarrow \frac{1}{2} [f(t+) + f(t-)] \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

(2) Ist  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und stückweise stetig differenzierbar mit  $|f'| \leq L$ , so konvergiert die Fourier-Reihe  $f_n \rightarrow f$  sogar gleichmäßig auf ganz  $\mathbb{R}$ :

$$|f_n(t) - f(t)| \leq 2L/\omega \cdot \ln(n)/n \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

(3) Ist  $f$  mindestens  $d$ -mal stetig differenzierbar, so ist die gleichmäßige Konvergenz entsprechend schneller gemäß  $|f_n - f| \leq \text{const} \cdot \ln(n)/n^d$ .

Für unsere Sägezahnfunktion [1205] finden wir:

$$f(x) = 2 \left[ \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \dots \right]$$

Für die Parabelfunktion  $F(x) = \int_{t=0}^x f(t) dt$  folgt [1321]:

$$F(x) = \frac{\pi^2}{6} - 2 \left[ \cos x - \frac{1}{2^2} \cos 2x + \frac{1}{3^2} \cos 3x - \frac{1}{4^2} \cos 4x + \dots \right]$$

Für unsere Rechteckfunktion [1225] finden wir:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left[ \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x + \dots \right]$$

Für die Dreieckfunktion  $F(x) = \int_{t=0}^x f(t) dt$  folgt [1309]:

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[ \cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \frac{1}{7^2} \cos 7x + \dots \right]$$

☺ Es gilt Konvergenz in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$ : Wir schreiben „=“ statt „~“.  
 ☺ Wir sehen explizit, wie schnell die Fourier-Koeffizienten abklingen.

⚠ Fourier-Reihen können wir **nicht immer termweise ableiten!** [1319]  
 ☺ Hingegen können wir sie **immer termweise integrieren!** [1318]  
 Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  periodisch und integrierbar, und  $F(t) := C + \int_{u=0}^t f(u) du$ . Genau dann ist  $F$  periodisch, wenn  $\int_{u=0}^T f(u) du = 0$ . In diesem Fall gilt:

$$f(t) \sim \sum_{k \neq 0} c_k e^{ik\omega t} \iff F(t) \sim C_0 + \sum_{k \neq 0} \frac{c_k}{ik\omega} e^{ik\omega t}$$

☺ Wir können die Umkehrung sorgsam als Ableitungsregel für  $F$  lesen: Hierzu sei  $F$  **absolut stetig** mit  $F' = f$ , also  $F(t) = F(0) + \int_{u=0}^t f(u) du$ . Zum Beispiel genügt:  $F$  stetig und stückweise stetig differenzierbar.

**Glattheit** entspricht schnellem **Abklingen** der Fourier-Koeffizienten: Für jede integrierbare Funktion  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  gilt  $|c_k| \rightarrow 0$  für  $|k| \rightarrow \infty$ . Ist  $f$  mindestens  $d$ -mal stetig differenzierbar, so gilt sogar  $|k^d c_k| \rightarrow 0$ . Umgekehrt: Gilt  $\sum |c_k| < \infty$ , zum Beispiel  $|c_k| \leq c/|k|^\alpha$  für  $\alpha > 1$ , so konvergiert  $\sum c_k e_k$  gleichmäßig gegen eine stetige Funktion  $f$ . Gilt sogar  $\sum |k^d c_k| < \infty$ , so ist  $f$  mindestens  $d$ -mal stetig diff'bar.

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  absolut integrierbar auf  $[0, T]$  und  $T$ -periodisch. Wir entwickeln  $f$  in **Harmonische** zur Grundfrequenz  $\omega = 2\pi/T$ :

$$f \circ \bullet \hat{f}, \quad \hat{f}(k) := \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} f(t) dt, \quad f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ik\omega t}.$$

Diese **Analyse** zerlegt das Signal  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  in sein Spektrum  $\hat{f}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ . Die Reihe ist wie zuvor zunächst nur eine symbolische Schreibweise; wir schreiben Gleichheit nur im Falle der (punktweisen) Konvergenz. Für diese Fourier-Analyse gelten folgende nützliche Rechenregeln:

Linearität:	$a f \circ \bullet a \hat{f},$	$f + g \circ \bullet \hat{f} + \hat{g},$
Symmetrie:	$f(-t) \circ \bullet \hat{f}(-k),$	$\overline{f(t)} \circ \bullet \overline{\hat{f}(-k)},$
Verschiebung:	$f(t-a) \circ \bullet e^{-ik\omega a} \hat{f}(k),$	$e^{i\ell\omega t} f(t) \circ \bullet \hat{f}(k-\ell),$
Produkte:	$f \cdot g \circ \bullet \hat{f} * \hat{g},$	$f * g \circ \bullet \hat{f} \cdot \hat{g}.$

☺ Diese nützlichen Eigenschaften vereinfachen unsere Rechnungen. Linearität, Symmetrie und Verschiebung rechnet man leicht nach.

Die Fourier-Analyse übersetzt das punktweise Produkt  $h = f \cdot g$  der Signale in das Faltungsprodukt  $\hat{h} = \hat{f} * \hat{g}$  der Spektren:

$$h = f \cdot g \circ \bullet \hat{h} = \hat{f} * \hat{g} \text{ mit } \hat{h}(k) = \sum_{m+n=k} \hat{f}(m) \hat{g}(n)$$

Konvergenz und Summierbarkeit sind garantiert falls  $\hat{f}, \hat{g} \in \ell^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ : Aus  $\sum |\hat{f}(m)| < \infty$  und  $\sum |\hat{g}(n)| < \infty$  folgt dann  $\sum |\hat{h}(k)| < \infty$ .

Umgekehrt gilt: Die Fourier-Analyse übersetzt das Faltungsprodukt  $h = f * g$  der Signale in das punktweise Produkt  $\hat{h} = \hat{f} \cdot \hat{g}$  der Spektren:

$$h = f * g \circ \bullet \hat{h} = \hat{f} \cdot \hat{g} \text{ mit } h(t) = \frac{1}{T} \int_{u=0}^T f(u) g(t-u) du.$$

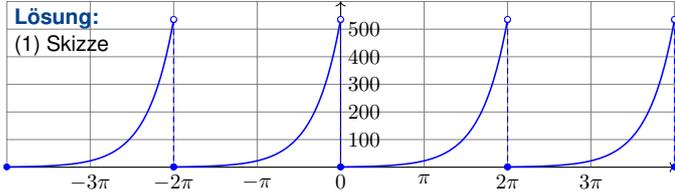
Konvergenz und Integrierbarkeit sind garantiert falls  $f, g \in L^1([0, T], \mathbb{C})$ : Aus  $\int_{u=0}^T |f(u)| du < \infty$  und  $\int_{u=0}^T |g(v)| dv < \infty$  folgt  $\int_{t=0}^T |h(t)| dt < \infty$ .

- Aufgabe:** (typische Klausuraufgabe, so zum Beispiel September 2012)  
Die Funktion  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei  $2\pi$ -periodisch mit  $g(x) = e^x$  für  $0 \leq x < 2\pi$ .
- (1) Skizzieren Sie die Funktion  $g$  auf dem Intervall  $[-4\pi, 4\pi]$ .
  - (2) Bestimmen Sie die Grenzwerte  $g(x \pm)$  und Ableitungen  $g'(x \pm)$ .
  - (3) Bestimmen Sie zu  $g$  die Fourier-Reihe  $g(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ .
  - (4) Warum und wogegen konvergiert die Reihe in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$ ?
  - (5) Bestimmen Sie so den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \frac{1}{26} + \frac{1}{37} + \dots$$

**Lösung:**

(1) Skizze



(3c) Zum Vergleich rechnen wir reell. Partielle Integration liefert:

$$\int_{x=0}^{2\pi} \cos(kx) e^x dx = \left[ \cos(kx) e^x \right]_0^{2\pi} + k \int_{x=0}^{2\pi} \sin(kx) e^x dx$$

$$\int_{x=0}^{2\pi} \sin(kx) e^x dx = \left[ \sin(kx) e^x \right]_0^{2\pi} - k \int_{x=0}^{2\pi} \cos(kx) e^x dx$$

Das sieht zirkulär aus, aber erstet wie Phönix aus der Asche:

$$\int_{x=0}^{2\pi} \cos(kx) e^x dx = (e^{2\pi} - 1) - k^2 \int_{x=0}^{2\pi} \cos(kx) e^x dx$$

$$\int_{x=0}^{2\pi} \sin(kx) e^x dx = k(1 - e^{2\pi}) - k^2 \int_{x=0}^{2\pi} \sin(kx) e^x dx$$

Das können wir nun nach den gesuchten Integralen auflösen:

$$\int_{x=0}^{2\pi} \cos(kx) e^x dx = \frac{e^{2\pi} - 1}{1 + k^2}, \quad \text{also } a_k = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi(k^2 + 1)}$$

$$\int_{x=0}^{2\pi} \sin(kx) e^x dx = \frac{k(1 - e^{2\pi})}{1 + k^2}, \quad \text{also } b_k = \frac{k(1 - e^{2\pi})}{\pi(k^2 + 1)}$$

Beide Rechenwege sind ähnlich lang, die Wahl ist Geschmackssache.

(2) Für  $0 < x < 2\pi$  gilt  $g(x \pm) = e^x$  und  $g'(x \pm) = e^x$ . Am Rand gilt  $g(0+) = 1$  und  $g'(0+) = 1$  sowie  $g(2\pi-) = e^{2\pi}$  und  $g'(2\pi-) = e^{2\pi}$ .  
☺ Alles setzt sich  $2\pi$ -periodisch fort, also  $g(0-) = g'(0-) = e^{2\pi}$ .

(3a) Die Integration gelingt hier am einfachsten komplex:

$$\int_{x=0}^{2\pi} e^{-ikx} e^x dx = \int_{x=0}^{2\pi} e^{(1-ik)x} dx = \left[ \frac{e^{(1-ik)x}}{1-ik} \right]_{x=0}^{2\pi} = \frac{e^{2\pi} - 1}{1-ik}$$

Damit erhalten wir die komplexen Fourier-Koeffizienten:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{x=0}^{2\pi} e^{-ikx} g(x) dx = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi(1-ik)}, \quad g(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi(1-ik)} e^{ikx}$$

(3b) Zum Vergleich die Koeffizienten der Co/Sinus-Reihe:

$$c_k = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi(1-ik)} = \frac{(e^{2\pi} - 1)(1+ik)}{2\pi(1+k^2)} = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi(1+k^2)} - i \frac{k(1 - e^{2\pi})}{2\pi(1+k^2)}$$

$$a_k = c_k + c_{-k} = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi(k^2 + 1)}, \quad b_k = i(c_k - c_{-k}) = \frac{k(1 - e^{2\pi})}{\pi(k^2 + 1)}$$

⚠ Für  $g'(x) = g(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$  gilt die Ableitungsregel I3A nicht!

(4) Dirichlet (Satz I2A) garantiert Konvergenz in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \stackrel{!}{=} \frac{g(x+) + g(x-)}{2}$$

(5) Speziell in der Sprungstelle  $x = 0$  finden wir:

$$\frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi(k^2 + 1)} \stackrel{!}{=} \frac{1 + e^{2\pi}}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 1} = \frac{1}{2} + \frac{\pi e^{\pi} + e^{-\pi}}{2(e^{\pi} - e^{-\pi})} = \frac{1 + \pi \coth(\pi)}{2} = 2.07667 \dots$$

Auflösen nach der Reihe und vereinfachen liefert schließlich:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 1} = \frac{1}{2} + \frac{\pi e^{\pi} + e^{-\pi}}{2(e^{\pi} - e^{-\pi})} = \frac{1 + \pi \coth(\pi)}{2} = 2.07667 \dots$$

☺ Dank unseres Integrationswerkzeugs sind die Rechnungen leicht. Mit Fourier-Analyse gelingt uns die Berechnung schwieriger Reihen! Das bequeme Dirichlet-Kriterium garantiert die punktweise Konvergenz.

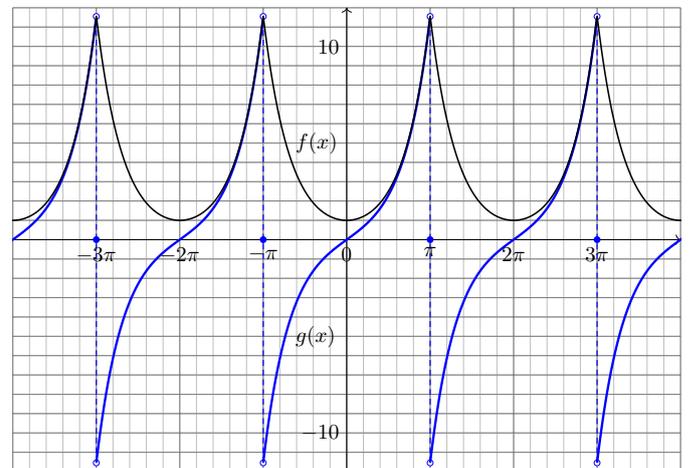
**Aufgabe:** Die Funktionen  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  seien  $2\pi$ -periodisch und sprungnormiert und auf dem Intervall  $]-\pi, \pi[$  gegeben durch

$$f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad g(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

- (1) Skizzieren Sie  $f$  und  $g$  auf dem Intervall  $[-4\pi, 4\pi]$ .
- (2) Entwickeln Sie  $f$  und  $g$  in ihre (reellen) Fourier-Reihen.
- (3) In welchen Punkten konvergieren die Fourier-Reihen? Wogegen?
- (4) Werten Sie die Fourier-Reihen in geeigneten Punkten  $x \in [-\pi, \pi]$  aus und bestimmen Sie so explizit den Grenzwert der Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1 + k^2} \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k + 1)}{1 + (2k + 1)^2}$$

(5) Bestimmen Sie die Ableitungen  $f', g'$  und ihre Fourier-Reihen. In welchem Fall gilt die Ableitungsregel I3A? In welchem nicht? Das Ergebnis ist erstaunlich. Erklären Sie es möglichst genau!



(2) Wir berechnen die Fourier-Reihen von  $e^x$  und  $e^{-x}$  auf  $]-\pi, \pi[$ :

$$u_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} e^x dx = \frac{e^{(1-ik)\pi} - e^{-(1-ik)\pi}}{2\pi(1-ik)} = (-1)^k \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi(1-ik)}$$

$$v_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} e^{-x} dx = \frac{e^{(1+ik)\pi} - e^{-(1+ik)\pi}}{2\pi(1+ik)} = (-1)^k \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi(1+ik)}$$

Symmetrie nutzen! Hieraus folgen die Fourier-Reihen von  $f$  und  $g$ :

$$\frac{u_k \pm v_k}{2} = (-1)^k \frac{\sinh(\pi)}{2\pi} \left[ \frac{1+ik}{1+k^2} \pm \frac{1-ik}{1+k^2} \right]$$

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k \sinh(\pi)}{\pi(1+k^2)} e^{ikx} = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2 \sinh(\pi)}{\pi(1+k^2)} \cos(kx)$$

$$g(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k ik \sinh(\pi)}{\pi(1+k^2)} e^{ikx} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2k \sinh(\pi)}{\pi(1+k^2)} \sin(kx)$$

(3) Dank Dirichlet-Kriterium I2A konvergieren die Fourier-Reihen  $f_n \rightarrow f$  und  $g_n \rightarrow g$  in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$ , erstere sogar gleichmäßig. In den Sprungstellen  $x \in \pi(2\mathbb{Z} + 1)$  gilt  $g_n(x) \rightarrow \frac{1}{2}[g(x+) + g(x-)] = 0$ .

(4) Wir werten  $f(x)$  in  $x = 0$  aus und  $g(x)$  in  $x = \pi/2$ :

$$1 = f(0) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2 \sinh(\pi)}{\pi(1+k^2)}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(1+k^2)} = \frac{\pi}{2 \sinh(\pi)} - \frac{1}{2} = -0.36398 \dots$$

$$\sinh(\pi/2) = g(\pi/2) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{2(2j+1) \sinh(\pi)}{\pi(1+(2j+1)^2)}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (2j+1)}{1+(2j+1)^2} = \frac{\pi \sinh(\pi/2)}{2 \sinh(\pi)} = 0.31301 \dots$$

(5) Außerhalb der Sprungstellen  $\pi(2\mathbb{Z} + 1)$  gilt  $f' = g$  und  $g' = f$ . Die Funktion  $f$  ist absolut stetig, das heißt  $f(t) = f(0) + \int_{u=0}^t f'(u) du$ , also können wir die Fourier-Reihe formal ableiten gemäß Satz I3A. Hingegen ist  $g$  nicht absolut stetig, denn  $g(t) \neq g(0) + \int_{u=0}^t g'(u) du$ , und Satz I3A ist hier nicht anwendbar. Wir können beides direkt nachprüfen!

Beim Lösen partieller Differentialgleichungen §236 mit Anfangs- und Randwerten (ARWP) begegnen uns Probleme von folgender Art:

**Aufgabe:** (1) Entwickeln Sie die gegebene Funktion  $g: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(x) = x(\pi - x)$  in (a) eine Cosinusreihe und (b) eine Sinusreihe:

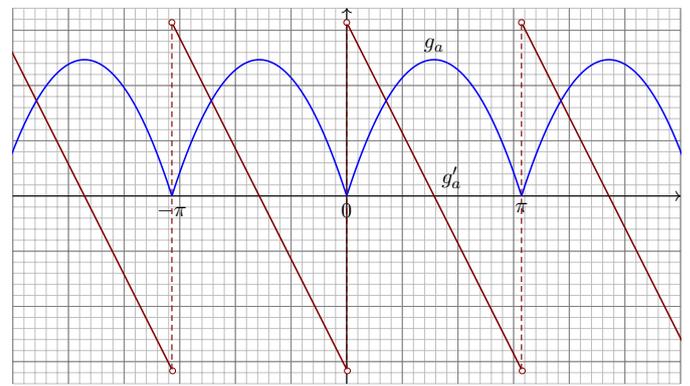
$$g(x) \stackrel{!}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx), \quad g(x) \stackrel{!}{=} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

(c) Welche Fourier-Reihe hat die  $2\pi$ -periodische Fortsetzung  $g_c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g_c(x) = x(\pi - x)$  für  $0 \leq x \leq \pi$  und  $g_c(x) = 0$  für  $-\pi \leq x \leq 0$ ?

(2) In welchen Punkten  $x \in [0, \pi]$  konvergieren diese Reihen? Wogegen? Konvergieren diese Reihen gleichmäßig auf  $[0, \pi]$  gegen die Funktion  $g$ ?

(3) Punktprobe: Bestimmen Sie durch geeignete Auswertung die Reihen  $\sum_{j=1}^{\infty} 1/j^2 = \pi^2/6$ ,  $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j/j^2 = -\pi^2/12$ ,  $\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j/(2j+1)^3 = \pi^3/32$ .

Wie ist in (1) die Entwicklung in verschiedene Fourier-Reihen möglich? Man beachte, dass die Funktion  $g$  zunächst nur auf  $[0, \pi]$  gegeben ist. Je nach Aufgabe kann  $g$  daher verschieden auf  $\mathbb{R}$  fortgesetzt werden!



Die gerade  $2\pi$ -periodische Fortsetzung  $g_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  von  $g: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ . Aufgrund der Spiegelsymmetrie von  $g$  ist  $g_a$  hier zudem  $\pi$ -periodisch. Die Ableitung  $g'_a: \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi \rightarrow \mathbb{R}$  ist ungerade. Wir kennen sie bereits!

**Lösung:** (1a) Zwecks Cosinusreihe setzen wir  $g$  gerade fort zu  $g_a$ :

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) g_a(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(kx) g(x) dx$$

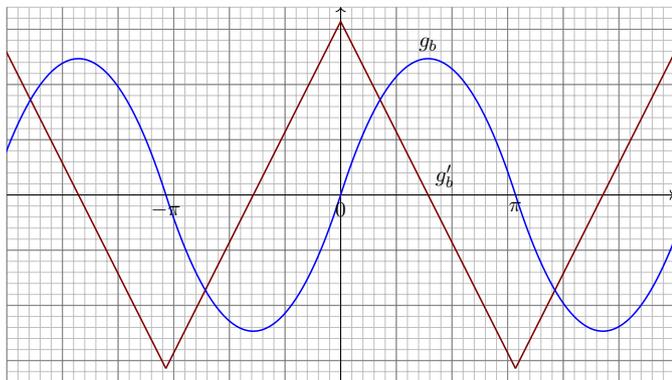
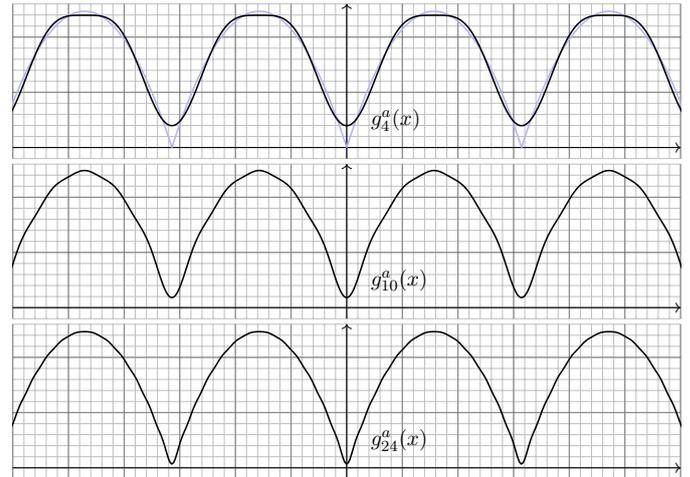
$$= \begin{cases} \pi^2/3 & \text{für } k=0, \text{ also } a_0 = \pi^2/3, \\ -4/k^2 & \text{für } k \geq 2 \text{ gerade, } a_{2j} = -1/j^2, \\ 0 & \text{für } k \geq 1 \text{ ungerade, } a_{2j+1} = 0 \text{ (Symmetrie!)} \end{cases}$$

Das kann man direkt ausrechnen durch zweimalige partielle Integration. Alternativ integrieren wir gemäß I3A die Sägezahnfunktion  $g'_a$  §307:

$$g'_a(x) \sim \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{j} \sin(2jx) \iff g_a(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{-1}{j^2} \cos(2jx)$$

(2a) Dank Dirichlet-Kriterium I2A konvergiert diese Fourier-Reihe in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$  gegen  $g_a(x)$ , sogar gleichmäßig auf ganz  $\mathbb{R}$ . Dies gilt somit insbesondere auf dem ursprünglichen Intervall  $[0, \pi]$ .

(3a) Die Auswertung im Punkt  $x=0$  ergibt  $g(0) = 0 = \pi^2/6 - \sum_{j=1}^{\infty} 1/j^2$ , also  $\sum_{j=1}^{\infty} 1/j^2 = \pi^2/6$ . In  $x = \pi/2$  finden wir  $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j/j^2 = -\pi^2/12$ .



Die ungerade  $2\pi$ -periodische Fortsetzung  $g_b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  von  $g: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Ableitung  $g'_b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist folglich gerade. Wir kennen sie bereits! Achtung: Nur auf den ersten Blick ähnelt  $g_b$  der Sinusfunktion.

(1b) Zwecks Sinusreihe setzen wir  $g$  ungerade fort zu  $g_b$ :

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) g_b(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(kx) g(x) dx$$

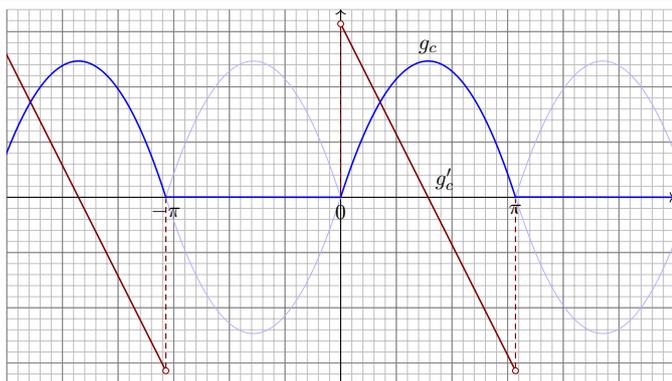
$$= \begin{cases} \frac{8}{\pi k^2} & \text{für } k \geq 1 \text{ ungerade, } b_{2j+1} = \frac{8}{\pi(2j+1)^3}, \\ 0 & \text{für } k \geq 0 \text{ gerade, } b_{2j} = 0 \text{ (Symmetrie!)} \end{cases}$$

Das kann man direkt ausrechnen durch zweimalige partielle Integration. Alternativ integrieren wir gemäß I3A die Dreieckfunktion  $g'_b$  §309:

$$g'_b(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\cos((2j+1)x)}{(2j+1)^2} \iff g_b(x) = 0 + \frac{8}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sin((2j+1)x)}{(2j+1)^3}$$

(2b) Dank Dirichlet-Kriterium I2A konvergiert diese Fourier-Reihe in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$  gegen  $g_b(x)$ , sogar gleichmäßig auf ganz  $\mathbb{R}$ . Dies gilt somit insbesondere auf dem ursprünglichen Intervall  $[0, \pi]$ .

(3b) Auswertung in  $x = \pi/2$  ergibt  $g(\pi/2) = \pi^2/4 = \frac{8}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j/(2j+1)^3$ . Diese Punktprobe beschert uns  $\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j/(2j+1)^3 = \pi^3/32$ .



Eine weitere  $2\pi$ -periodische Fortsetzung  $g_c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  von  $g: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir nutzen unsere Vorarbeit und betrachten  $g_c = (g_a + g_b)/2$  als eine Überlagerung: Die beiden Summanden  $g_a$  und  $g_b$  kennen wir bereits!

(1c) Wir betrachten  $g_c = \frac{1}{2}(g_a + g_b)$ . Aus (1a) und (1b) folgt sofort:

$$g_c(x) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{-1}{2j^2} \cos(2jx) + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2j+1)^3} \sin((2j+1)x)$$

Diese Fourier-Reihe kann man wie immer durch Integration ausrechnen. Nach unserer Vorarbeit ist es viel leichter, die Linearität auszunutzen!

(2c) Dank Dirichlet-Kriterium I2A konvergiert diese Fourier-Reihe in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$  gegen  $g_c(x)$ , sogar gleichmäßig auf ganz  $\mathbb{R}$ .

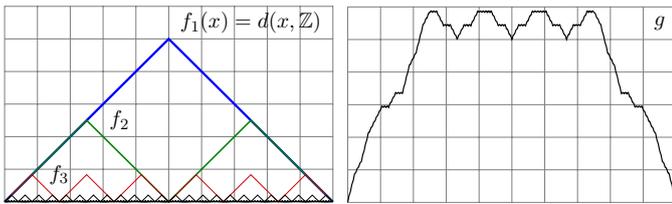
(3c) Die Auswertung im Punkt  $x=0$  ergibt  $g(0) = 0 = \frac{\pi^2}{12} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2j^2}$ . Diese Punktprobe beschert uns erneut die Reihe  $\sum_{j=1}^{\infty} 1/j^2 = \pi^2/6$ . Auch im Punkt  $x = \pi/2$  gelingt uns die Punktprobe ebenso wie zuvor:

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j^2} + \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)^3} = \frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^2}{24} + \frac{\pi^2}{8}$$

😊 Punktproben beschert uns neue Reihen oder zeigen Rechenfehler, zum Beispiel eine vergessene oder falsch berechnete Konstante  $c_0$ .

😊 Zur Kontrolle hilft auch die graphische Darstellung der ersten Terme.

**Aufgabe:** (0) Wiederholen Sie die Konstruktion der Takagi-Funktion  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \text{dist}(x, \frac{1}{n}\mathbb{Z})$  und ihre Eigenschaften (Satz B4A).



- (1) Wie lässt sich diese Funktion  $g$  in eine Fourier-Reihe entwickeln?
- (2) Konvergiert die Fourier-Reihe überall gegen  $g$ ? sogar gleichmäßig?
- (3) Berechnen Sie explizit die ersten sechs Fourier-Koeffizienten!

**Lösung:** (0) Wir beginnen mit der Dreiecksfunktion  $f_1(x) = \text{dist}(x, \mathbb{Z})$ . Dies ist der Abstand von  $x \in \mathbb{R}$  zur nächsten ganzen Zahl  $a \in \mathbb{Z}$ . Hieraus gewinnen wir  $f_n(x) = \text{dist}(x, \frac{1}{n}\mathbb{Z})$  für  $n = 2, 3, 4, 5$  sowie die Summen  $g_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n$  und schließlich die Reihe  $g = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ .

(1) Wir wollen die Rechnung vereinfachen und gehen geschickt vor. Die Dreiecksfunktion  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  kennen wir bereits von Seite 1309: Auf  $[-\pi, \pi]$  gilt  $F(x) = |x|$ , dann  $2\pi$ -periodisch. Wir finden:

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[ \cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \frac{1}{7^2} \cos 7x + \dots \right]$$

Unsere Funktion  $f_1(t) = F(2\pi t)/2\pi$  ist entsprechend skaliert:

$$f_1(t) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{k \text{ ungerade}} \frac{\cos[k2\pi t]}{k^2} = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\cos[(2j+1)2\pi t]}{(2j+1)^2}$$

Punktprobe: Für  $t = 0$  erhalten wir  $f(0) = 0$ , also  $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ . Für  $f_n(t) = \text{dist}(t, \frac{1}{n}\mathbb{Z})$  gilt  $f_n(t) = f_1(n!t)/n!$ . So erhalten wir:

$$f_n(t) = \frac{1}{4n!} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\cos[(2j+1)n!2\pi t]}{(2j+1)^2 n!}$$

☺ Wir müssen hier nicht erneut integrieren, wiederverwenden genügt.

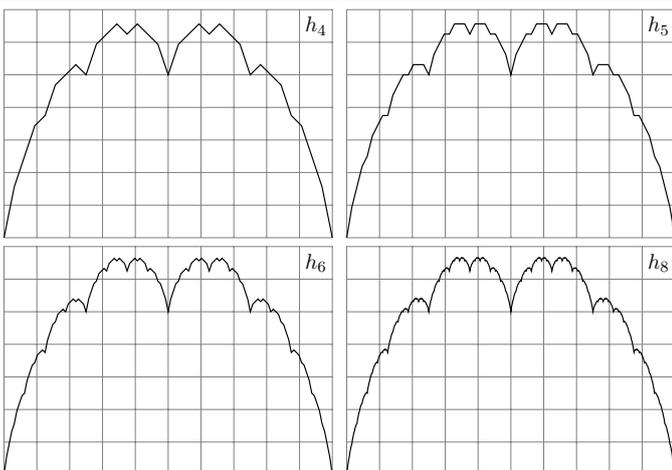
☹ Die Rechnung (1–2) ist zunächst leicht und elegant, aber die explizite Berechnung der Koeffizienten (3) ist für meinen Geschmack unschön.

☺ Wir wollen dieses Beispiel modifizieren und weiter vereinfachen. Auch die folgende Funktion  $h$  ist in keinem Punkt differenzierbar und auf keinem Intervall monoton, genauso wie  $g$  in Satz B4A.

**Aufgabe:** (4) Skizzieren Sie  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \text{dist}(x, 2^{-n}\mathbb{Z})$ .  
(5) Entwickeln Sie  $h$  möglichst explizit in eine Fourier-Reihe.

**Lösung:** (4) Wir gehen wie oben vor: Wir skizzieren zunächst die Funktionen  $f_n(x) = \text{dist}(x, 2^{-n}\mathbb{Z})$  für  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  und ihre Summen  $h_n = f_0 + f_1 + \dots + f_n$ . Im Grenzwert erhalten wir  $h_n \nearrow h = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ .

☺ Die so definierte Funktion  $h$  heißt auch **Blancmange-Kurve**, da sie an die gleichnamige Süßspeise in Puddingform erinnert. Es ist überaus bemerkenswert, dass wir auch eine extrem raue Funktion wie diese bequem und direkt in ihre Fourier-Reihe entwickeln können.



◆ Satz B4A: Takagi 1901

Die so definierte **Takagi-Funktion**  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \text{dist}(x, \frac{1}{n}\mathbb{Z})$  hat eine Reihe überaus bemerkenswerter Eigenschaften:

- 1 Die Funktion  $g$  ist stetig, aber in keinem Punkt differenzierbar.
- 2 Die Funktion  $g$  ist auf keinem Intervall  $[a, b]$  mit  $a < b$  monoton.
- 3 Sie nimmt in jedem Punkt  $x \in \mathbb{Q}$  ein striktes lokales Minimum an.

Die Funktion  $g$  ist demnach extrem rau. Können wir sie dennoch in eine Fourier-Reihe entwickeln? Wie bestimmen wir  $g(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}$ ? Die Funktion  $g$  hat die Periode  $T = 1$ , also die Grundfrequenz  $\omega = 2\pi$ . Zudem ist die Funktion  $g$  stetig, ihre Fourier-Koeffizienten sind demnach

$$c_k = \int_{t=0}^1 e^{-2\pi i k t} g(t) dt.$$

Also, ja, das gelingt im Prinzip, ... aber welche Werte  $c_k$  erhalten wir? Konvergiert die Fourier-Reihe überall gegen  $g$ ? sogar gleichmäßig?

(2) So finden wir die Reihendarstellung unserer Takagi-Funktion:

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n!} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\cos[(2j+1)n!2\pi t]}{(2j+1)^2 n!}$$

Die Konvergenz gilt hierbei absolut, sie ist sogar gleichmäßig auf  $\mathbb{R}$ . Wir dürfen daher die beiden Reihen vertauschen und erhalten:

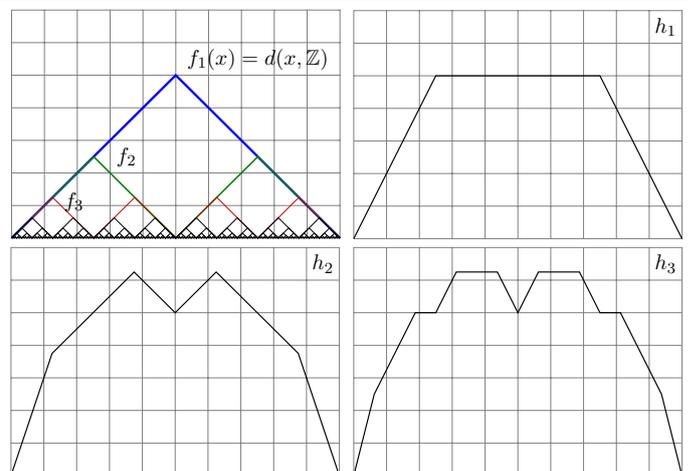
$$g(t) = \frac{e-1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2j+1)n!2\pi t]}{(2j+1)^2 n!} \stackrel{!}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(2\pi k t)$$

(3) Jede ganze Zahl  $k \in \mathbb{N}_{>1}$  schreibt sich auf höchstens zwei Weisen als  $k = n!(2j+1)$ . Die Koeffizienten  $a_k$  können wir daraus leicht ablesen:

$$a_0 = \frac{e-1}{2}, \quad a_1 = -\frac{2}{\pi^2 1^2}, \quad a_2 = -\frac{2}{\pi^2 1^2 2!} = -\frac{1}{\pi^2},$$

$$a_3 = -\frac{2}{\pi^2 3^2}, \quad a_4 = 0,$$

$$a_5 = -\frac{2}{\pi^2 5^2}, \quad a_6 = -\frac{2}{\pi^2} \left[ \frac{1}{3^2 2!} + \frac{1}{1^2 3!} \right] = -\frac{4}{9\pi^2}, \quad \dots$$



(5) Wie zuvor in (1–2) finden wir die Reihendarstellung dieser Funktion:

$$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\cos[(2j+1)2^n 2\pi t]}{(2j+1)^2 2^n}$$

Die Konvergenz gilt hierbei absolut, sie ist sogar gleichmäßig auf  $\mathbb{R}$ . Wir dürfen daher die beiden Reihen vertauschen und erhalten:

$$h(t) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos[(2j+1)2^n 2\pi t]}{(2j+1)^2 2^n} \stackrel{!}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(2\pi k t)$$

Jede ganze Zahl  $k \in \mathbb{N}_{>1}$  schreibt sich eindeutig als  $k = 2^n(2j+1)$  mit  $n, j \in \mathbb{N}$ . Die Koeffizienten  $a_k$  können wir daraus leicht ablesen: Für  $k = 0$  gilt  $a_0 = 1/2$ , und für  $k = 2^n(2j+1)$  mit  $n, j \in \mathbb{N}$  gilt

$$a_k = -\frac{2}{\pi^2 2^n (2j+1)^2}.$$

☺ Für das Abklingverhalten  $a_k \rightarrow 0$  gilt demnach  $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{2^n(2j+1)^2} \leq \frac{1}{k}$ . Das passt zu einer stetigen, aber nirgends differenzierbaren Funktion.