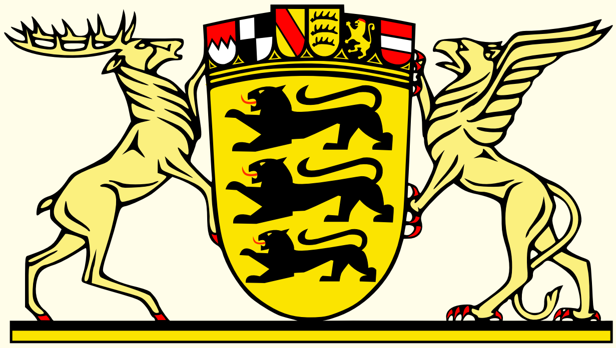
Kapitel B

Eindimensionale Integration

Differenzieren ist Handwerk,
Integrieren ist Kunst.

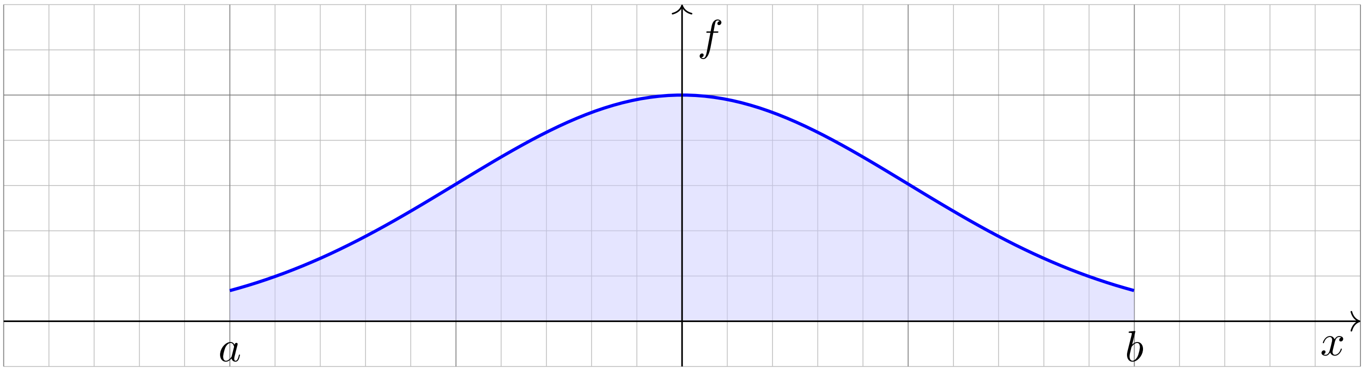


Ministerium für Integration

Inhalt dieses Kapitels B

Motivation und Zielsetzung

Das Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ misst die Fläche unter dem Graphen von f:



- 🙂 Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, so reicht Einschachtelung zur Integration.
- 🙂 Hieraus folgern wir nützliche Rechenregeln des Integrals:

  Hauptsatz: Für $F' = f$ gilt $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

  Substitution: $\int_a^b f(g(t))\,g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$

  Produktregel: $\int_a^b f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x = [fg]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$
- 🙁 Manche Funktionen kann man so noch nicht integrieren.
- 🙂 Für diese nutzen wir das Prinzip der Ausschöpfung.

Vorgehensweise

⚠ Das Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ist zuerst Flächeninhalt und dann erst Stammfunktion, dank HDI! Aus Bequemlichkeit wird es oft umgekehrt dargestellt: Das ist gut gemeint, aber auch irreführend.

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist keine *Definition* für das Integral, sondern eine *Folgerung*: Der HDI gilt nur eindimensional, für stetige Integranden auf einem Intervall $[a,b]$. Für die höherdimensionale Integration hat der Begriff der *Stammfunktion* zunächst keinen Sinn, *Flächeninhalt* und *Volumen* hingegen schon! Diese Sichtweise ist daher tragfähiger.

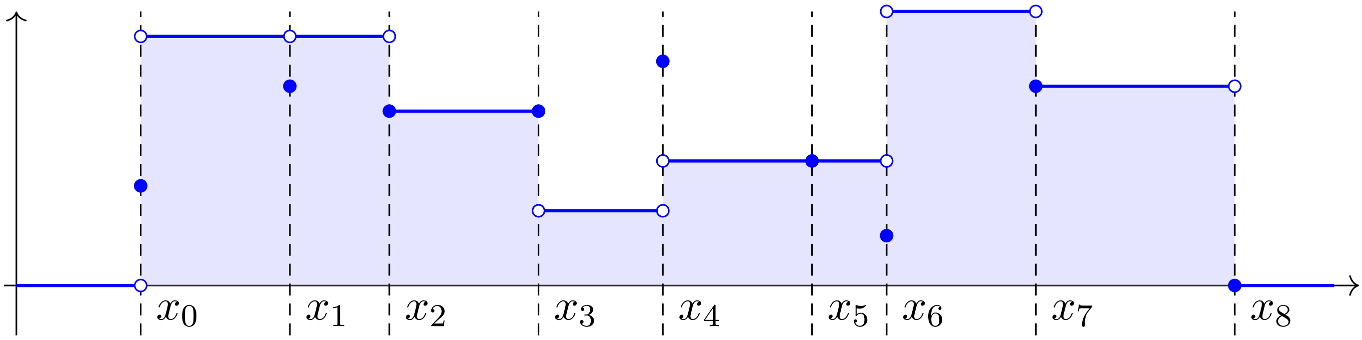
Wir beginnen mit eindimensionalen Treppenfunktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Dank der Anordnung des reellen Zahlkörpers $(\mathbb{R},+,\cdot,<)$ sind diese sofort zugänglich. Hierauf können wir das Integral in der gewünschten Weise konstruieren und alle erhofften Eigenschaften nachrechnen (Satz B1A).

Getreu den im vorigen Kapitel A formulierten fünf grundlegenden Integrationsregeln erklären wir in diesem Kapitel die eindimensionale Integration durch *Einschachtelung* und *Ausschöpfung*. Es geht zunächst um die Grundlagen, die Sie aus der HM2 kennen und hier beherrschen müssen, sodann um die nötigen Vertiefungen sowie viele Beispiele. Damit soll dieses Kapitel den Weg ebnen zur mehrdimensionalen Integration, der wir uns in den folgenden Kapiteln widmen.

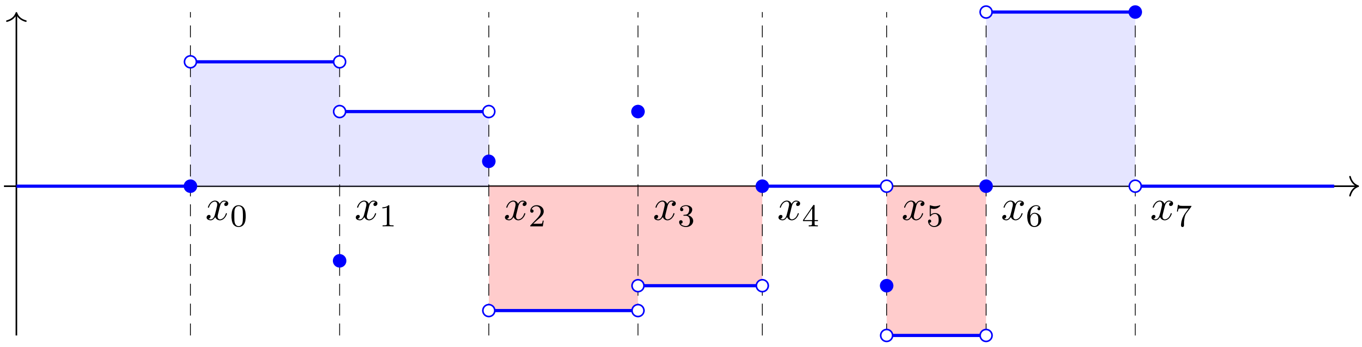
Für viele Anwendungen wichtig ist insbesondere das Zusammenspiel von *Integralen und Reihen*. Während es im Kapitel A zunächst um die *Definition* des Integrals ging, kommen wir in diesem Kapitel B zur Praxis des *Integrierens*. Das ist ein weites Feld, zu dem ich eine komprimierte Einführung gebe. Hier brauchen Sie Ihre Rechenfertigkeiten! Integrieren erfordert Geschick, Übung und Erfahrung, gemäß obigem Motto: *Differenzieren ist Handwerk, Integrieren ist Kunst.*

📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, Kapitel 3.

Eindimensionale Treppenfunktionen



Treppenfunktionen sind stückweise konstant. Das Integral, also der Flächeninhalt unter dem Graphen, lässt sich hier leicht bestimmen als Summe der Rechteckflächen. Genau dies besagt die folgende Formel, und sie hat alle richtigen Eigenschaften! Pikantes Detail: In einzelnen Punkten $x_0, x_1, \dots, x_\ell$ sind die Funktionswerte beliebig; sie fallen bei der Integration nicht ins Gewicht. Auf Intervallen, wo die Funktion negativ ist, wird der Flächeninhalt negativ in Ansatz gebracht.



Das Integral für eindimsionale Treppenfunktionen

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt **Treppenfunktion**, wenn sie stückweise konstant ist. Ausführlich heißt das, es existiert eine Unterteilung $U = \{x_0 < x_1 < \dots < x_\ell\} \subseteq \Omega$ und Werte $f_1, \dots, f_\ell \in \mathbb{R}$, so dass $f(x) = f_k$ für $x_{k-1} < x < x_k$, sowie $f(x) = 0$ für $x < x_0$ und $x > x_\ell$. Bezüglich dieser Unterteilung U definieren wir das **Integral** von f durch

$$\int_{\Omega,U} f(x)\,\mathrm{d}x := \sum_{k=1}^{\ell} f_k \cdot (x_k - x_{k-1}).$$

Satz B1A: Integration eindimensionaler Treppenfunktionen

Das Integral $\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x$ ist wohldefiniert: Es hängt nur von der Funktion f ab, nicht jedoch von unserer willkürlichen Wahl einer Unterteilung U.

Die Menge $T(\Omega)$ aller Treppenfunktionen auf Ω ist ein $\mathbb{R}$–Vektorraum; er wird erzeugt von den Indikatorfunktionen endlicher Intervalle $Q \subseteq \Omega$.

Hierauf ist das Integral $\int_\Omega : T(\Omega) \to \mathbb{R}$ linear und normiert gemäß $\int_\Omega \mathbf{I}_Q(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{vol}_1(Q)$ und wird hierdurch eindeutig bestimmt.

Es ist zudem monoton: Aus $f \le g$ folgt $\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_\Omega g(x)\,\mathrm{d}x$.

Das Integral für eindimensionale Treppenfunktionen

Zu jeder Treppenfunktion f existieren mehrere mögliche Unterteilungen $U \subseteq \Omega$, zum Beispiel können wir U durch weitere Zwischenstellen zu $U' \supseteq U$ verfeinern. Das oben definierte Integral $\int_{\Omega,U} f(x)\,\mathrm{d}x$ ändert sich dadurch nicht! Dies wollen wir zur Sicherheit als erstes nachrechnen:

Wohldefiniertheit: Wir fügen zu $U = \{x_0 < x_1 < \dots < x_\ell\}$ einen Teilungspunkt x_* hinzu, $\{\ldots < x_{k-1} < x_* < x_k < \ldots\}$. Das ändert die Terme der Summe, aber nicht ihr Ergebnis, denn $f_k \cdot (x_* - x_{k-1}) + f_k \cdot (x_k - x_*) = f_k \cdot (x_* - x_{k-1} + x_k - x_*) = f_k \cdot (x_k - x_{k-1})$.

Je zwei Unterteilungen $U = \{x_0 < x_1 < \dots < x_\ell\}$ und $U' = \{x'_0 < x'_1 < \dots < x'_m\}$ haben gemeinsame Verfeinerungen: Die kleinstmögliche ist ihre Vereinigung $U \cup U'$. Schrittweises Verfeinern zeigt dann $\int_{\Omega,U} f(x)\,\mathrm{d}x = \ldots = \int_{\Omega,U\cup U'} f(x)\,\mathrm{d}x = \ldots = \int_{\Omega,U'} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Die Wohldefiniertheit ist das Fundament. Daraus ergeben sich sofort folgende Eigenschaften:

Normierung: Für jedes Intervall $Q = [a,b] \subseteq \Omega$ ist die Indikatorfunktion $\mathbf{I}_Q : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion zu $U = \{a < b\}$, und ihr Integral $\int_\Omega \mathbf{I}_Q = b - a = \operatorname{vol}_1(Q)$ misst die Länge.

Skalierung: Ist $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion zur Unterteilung $U = \{x_0 < x_1 < \dots < x_\ell\}$, so auch jedes Vielfache $cf : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $c \in \mathbb{R}$, sogar zu derselben Unterteilung U, und es gilt $\int_\Omega cf(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\ell} (cf_k)\,(x_k - x_{k-1}) = c\sum_{k=1}^{\ell} f_k\,(x_k - x_{k-1}) = c\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x$.

Additivität: Sind f, g Treppenfunktionen zu U, U', so auch $f + g$ zu $U \cup U'$, und das Integral ist additiv: $\int_\Omega f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\ell} (f_k + g_k)\,(x_k - x_{k-1}) = \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega g(x)\,\mathrm{d}x$.

Monotonie: Sind f, g Treppenfunktionen, zur Unterteilung $U \cup U'$, und gilt $f \le g$, so folgt die Ungleichung $\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\ell} f_k(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^{\ell} g_k(x_k - x_{k-1}) = \int_\Omega g(x)\,\mathrm{d}x$.

Treppenfunktionen und Indikatorfunktionen

Jede Indikatorfunktion $\mathbf{I}_{Q_k}$ ist eine Treppenfunktion, also auch die Summe $\sum_{k=1}^{\ell} c_k\,\mathbf{I}_{Q_k}$. Umgekehrt lässt sich jede Treppenfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so schreiben: Gilt $f(x) = f_k$ für $x_{k-1} < x < x_k$ und $k = 0, \ldots, \ell$, sowie $f(x) = 0$ für $x < x_0$ und für $x > x_\ell$, so gilt

$$f = \sum_{k=1}^{\ell} f_k\,\mathbf{I}_{]x_{k-1},x_k[} + \sum_{k=0}^{\ell} f(x_k)\,\mathbf{I}_{[x_k,x_k]}\,.$$

Jede Treppenfunktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ist demnach von der Form $f = \sum_{k=1}^{\ell} c_k\,\mathbf{I}_{Q_k}$ mit $c_k \in \mathbb{R}$ und endlichen Intervallen $Q_k \subseteq \Omega$. Anders gesagt, die Indikatorfunktionen $\mathbf{I}_Q$ endlicher Intervalle $Q \subseteq \Omega$ sind ein Erzeugendensystem von $T(\Omega)$. Vorsicht ist geboten: Sie sind keine Basis! Z.B. gilt $\mathbf{I}_{[0,2[} = \mathbf{I}_{[0,1[} + \mathbf{I}_{[1,2[}$, also sind diese drei Indikatorfunktionen linear abhängig.

Dennoch wollen und können wir hierauf das Integral erklären! Die obigen Rechnungen zeigen, dass das Ergebnis tatsächlich wohldefiniert ist. Dank Additivität, Skalierung, Normierung gilt:

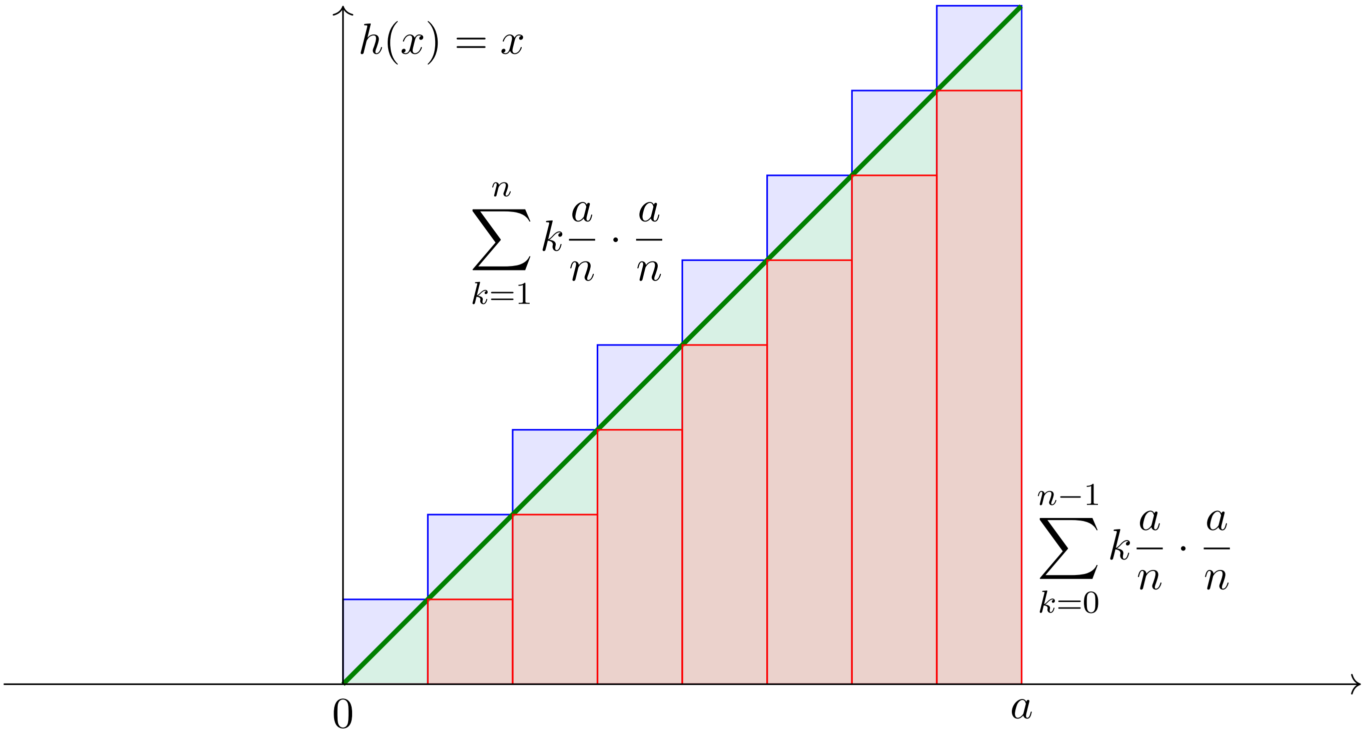
$$\int_\Omega \Bigl(\sum_{k=1}^{\ell} c_k\,\mathbf{I}_{Q_k}\Bigr) = \sum_{k=1}^{\ell} \int_\Omega \Bigl(c_k\,\mathbf{I}_{Q_k}\Bigr) = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \int_\Omega \mathbf{I}_{Q_k} = \sum_{k=1}^{\ell} c_k\,\operatorname{vol}_1(Q_k).$$

Für eindimensionale Treppenfunktionen ist damit alles geklärt. Wir werden diese Konstruktion im nächsten Kapitel C auf mehrdimensionale Treppenfunktionen verallgemeinern (Satz C1A).

Bestünde die Welt nur aus Treppenfunktionen, so wären wir jetzt fertig. Interessant sind aber vor allem Funktionen, die nicht so simpel sind wie Treppenfunktionen. Diese integrieren wir im Folgenden mit Hilfe von Treppenfunktionen durch Einschachtelung und Ausschöpfung.

Beispiel: Integration durch Einschachtelung

Aufgabe: Zu integrieren sei $h:[0,a]\to\mathbb{R}:x\mapsto x$. Berechnen Sie Unter- und Obersummen bei äquidistanter Unterteilung sowie den Grenzwert.



Lösung: Für die Integrale gilt $\frac{(n-1)n}{2}\frac{a^2}{n^2}\nearrow\frac{a^2}{2}\swarrow\frac{n(n+1)}{2}\frac{a^2}{n^2}$.

Beispiel: Integration durch Einschachtelung

Ausführlich: Wir nutzen $\sum_{k=0}^{n-1}k=n(n-1)/2$. (Übung: Rechnen Sie es nach per Induktion! Siehe HM1 Beispiel 1.2.2 oder später B305.)

Wir konstruieren Treppenfunktionen $f_n,g_n:[0,a]\to\mathbb{R}$ mit $f_n\le h\le g_n$. Hierzu unterteilen wir das Intervall $[0,a]$ durch $x_k=k\frac{a}{n}$ mit $k=0,\dots,n$. Sei f_n konstant auf $]x_{k-1},x_k[$ mit Wert $\min_{[x_{k-1},x_k]}h=x_{k-1}$. Dann gilt:

$$\int_{x=0}^{a}f_n(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n-1}k\frac{a}{n}\cdot\frac{a}{n}=\frac{(n-1)n}{2}\frac{a^2}{n^2}\nearrow\frac{1}{2}a^2$$

Sei g_n konstant auf $]x_{k-1},x_k[$ mit Wert $\max_{[x_{k-1},x_k]}h=x_k$. Dann gilt:

$$\int_{x=0}^{a}g_n(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}k\frac{a}{n}\cdot\frac{a}{n}=\frac{n(n+1)}{2}\frac{a^2}{n^2}\searrow\frac{1}{2}a^2$$

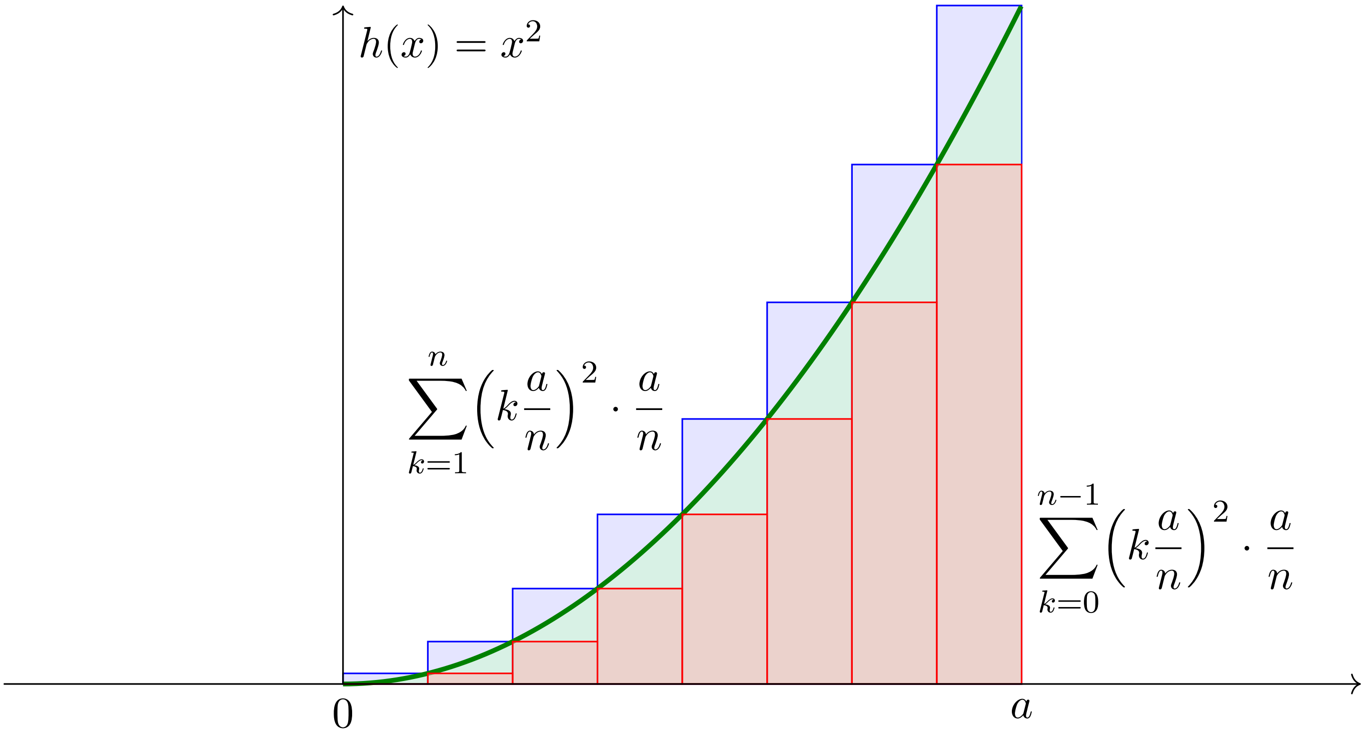
Für $n\to\infty$ gilt $\int_0^a(g_n-f_n)\to0$, also ist h integrierbar. Wir erhalten:

$$\boxed{\int_0^a x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}a^2}$$

🙂 Dieses Ergebnis ist anschaulich-geometrisch klar. Sehen Sie wie?

Beispiel: Integration durch Einschachtelung

Aufgabe: Zu integrieren sei $h : [0, a] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$. Berechnen Sie Unter- und Obersummen bei äquidistanter Unterteilung sowie den Grenzwert.



Lösung: Für die Integrale gilt $\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\frac{a^3}{n^3} \nearrow \frac{a^3}{3} \swarrow \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\frac{a^3}{n^3}$.

Beispiel: Integration durch Einschachtelung

Ausführlich: Wir nutzen $\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = (n-1)n(2n-1)/6$. (Rechnen Sie es nach per Induktion! Siehe HM1 Beispiel 1.2.4 oder später B305.)

Wie zuvor unterteilen wir $[0, a]$ durch $x_k = k\frac{a}{n}$ mit $k = 0, \dots, n$.
Sei f_n konstant auf $]x_{k-1}, x_k[$ mit Wert $\min_{[x_{k-1}, x_k]} h = x_{k-1}^2$. Dann gilt:

$$\int_{x=0}^{a} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \frac{a^2}{n^2} \cdot \frac{a}{n} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\frac{a^3}{n^3} \nearrow \frac{1}{3}a^3$$

Sei g_n konstant auf $]x_{k-1}, x_k[$ mit Wert $\max_{[x_{k-1}, x_k]} h = x_k^2$. Dann gilt:

$$\int_{x=0}^{a} g_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{a^2}{n^2} \cdot \frac{a}{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\frac{a^3}{n^3} \searrow \frac{1}{3}a^3$$

Für $n \to \infty$ gilt $\int_0^a (g_n - f_n) \to 0$, also ist h integrierbar. Wir erhalten:

$$\boxed{\int_0^a x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}a^3}$$

☺ Einschachtelung liefert für jede monotone (B1B) oder stetige (B1C) Funktion konvergente Abschätzungen durch untere & obere Schranken!

Integration durch Einschachtelung

Wir wollen $h:\Omega\to\mathbb{R}$ einschachteln durch Treppenfunktionen

$$f_0\le f_1\le f_2\le\dots\quad\le\quad h\quad\le\quad\dots\le g_2\le g_1\le g_0.$$

Für $A_k=\int_\Omega f_k(x)\,\mathrm{d}x$ und $B_k=\int_\Omega g_k(x)\,\mathrm{d}x$ gilt dank Monotonie

$$A_0\le A_1\le A_2\le\dots\quad\le\qquad\quad\le\quad\dots\le B_2\le B_1\le B_0.$$

Für $k\to\infty$ erhalten wir hieraus die monotonen Grenzwerte

$$\int_\Omega f_k(x)\,\mathrm{d}x=A_k\ \nearrow\ A\ \le\ \boxed{¿\int_\Omega h(x)\,\mathrm{d}x\ ?}\ \le\ B\ \swarrow\ B_k=\int_\Omega g_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

Die Gleichheit $A=B$ bedeutet $\int_\Omega\big[g_k(x)-f_k(x)\big]\,\mathrm{d}x\searrow 0$.
Das heißt, die Fläche zwischen f_k und g_k wird beliebig klein.
In diesem Falle nennen wir h **Riemann–integrierbar** und erhalten

$$\int_\Omega h(x)\,\mathrm{d}x=A=B.$$

🙂 Diese Integrationsmethode ist das **Prinzip der Einschachtelung**.
Das Ergebnis ist wohldefiniert, d.h. es hängt nur von der Funktion f ab, nicht jedoch von unserer willkürlichen Wahl einer Einschachtelung.

Einschachtelung monotoner Funktionen

Die beiden obigen Beispiele illustrieren zwei allgemeine Regeln: Monotone bzw. stetige Funktionen sind Riemann–integrierbar, d.h. sie lassen sich durch Treppenfunktionen beliebig genau einschachteln. Die Beweise sind leicht und verlaufen genau wie obige Beispiele:

Satz B1B: Integration monotoner Funktionen

Jede monotone Funktion $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist Riemann–integrierbar.

Beweis: Wir nehmen h als monoton wachsend an, also nicht-fallend.
Das heißt ausführlich: Für alle $s\le t$ im Intervall $[a,b]$ gilt $h(s)\le h(t)$.
Wir konstruieren Treppenfunktionen f_n,g_n mit $f_n\le h\le g_n$ wie folgt:
Wir unterteilen $[a,b]$ durch $x_k=a+k(b-a)/n$ mit $k=0,\dots,n$.
Sei f_n konstant auf $]x_{k-1},x_k[$ mit Wert $\min_{[x_{k-1},x_k]}h=h(x_{k-1})$.
Sei g_n konstant auf $]x_{k-1},x_k[$ mit Wert $\max_{[x_{k-1},x_k]}h=h(x_k)$.
Nach Konstruktion sind dies Treppenfunktionen mit $f_n\le h\le g_n$ und

$$\int_a^b g_n(x)-f_n(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^n\frac{h(x_k)-h(x_{k-1})}{n}=\frac{h(b)-h(a)}{n}\ \searrow\ 0.$$

Einschachtelung stetiger Funktionen

Satz B1C: Integration stetiger Funktionen

Jede stetige Funktion $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann–integrierbar.

Beweis: Da das Intervall $[a, b]$ kompakt ist, ist h gleichmäßig stetig. Das heißt ausführlich, für jedes noch so kleine $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass für kleine Abstände $|x - x'| \le \delta$ stets $|f(x) - f(x')| \le \varepsilon$ folgt.

Wir konstruieren Treppenfunktionen f_n, g_n mit $f_n \le h \le g_n$ wie folgt:
Wir unterteilen $[a, b]$ durch $x_k = a + k(b - a)/n$ mit $k = 0, \dots, n$.
Sei f_n konstant auf $]x_{k-1}, x_k[$ mit Wert $\min_{[x_{k-1}, x_k]} h$.
Sei g_n konstant auf $]x_{k-1}, x_k[$ mit Wert $\max_{[x_{k-1}, x_k]} h$.

Nach Konstruktion sind dies Treppenfunktionen mit $f_n \le h \le g_n$.
Es bleibt noch $\int_a^b g_n(x) - f_n(x)\,\mathrm{d}x \to 0$ für $n \to \infty$ nachzuweisen.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dank gleichmäßiger Stetigkeit existiert dazu $\delta > 0$, sodass $|f(x) - f(x')| \le \varepsilon$ gilt für alle $x, x' \in [a, b]$ mit $|x - x'| \le \delta$.
Für $(b - a)/n \le \delta$ folgt $g_n - f_n \le \varepsilon$, also $\int_a^b g_n(x) - f_n(x)\,\mathrm{d}x \le \varepsilon \cdot (b - a)$.
Für $n \to \infty$ zeigt dies $\int_a^b g_n(x) - f_n(x)\,\mathrm{d}x \to 0$, wie behauptet.

Stückweise Integration

Satz B1D: stückweise Integration

Sei $a < b < c$. Genau dann ist $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ Riemann–integrierbar, wenn beide Einschränkungen $f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ es sind; dann gilt

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Beweis: Jede Einschachtelung von $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ können wir verfeinern, indem wir der Unterteilung von $[a, c]$ den Teilungspunkt b hinzufügen. Die Gleichung gilt für Unter- und Obersummen, also auch im Grenzwert.

Für alle $a \le b$ vereinbaren wir zudem die Vorzeichenregel

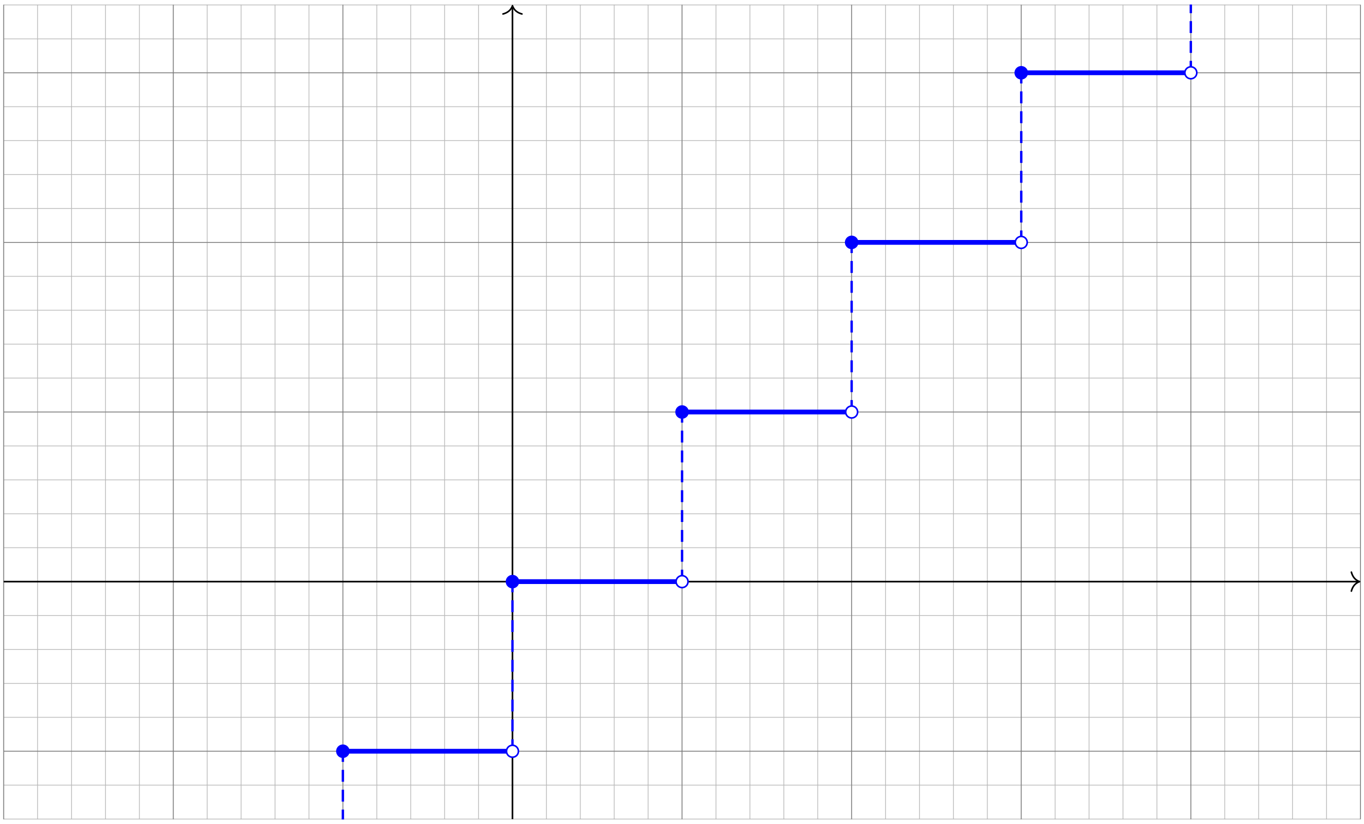
$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ integrierbar und $a, b, c \in \Omega$, so gilt

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

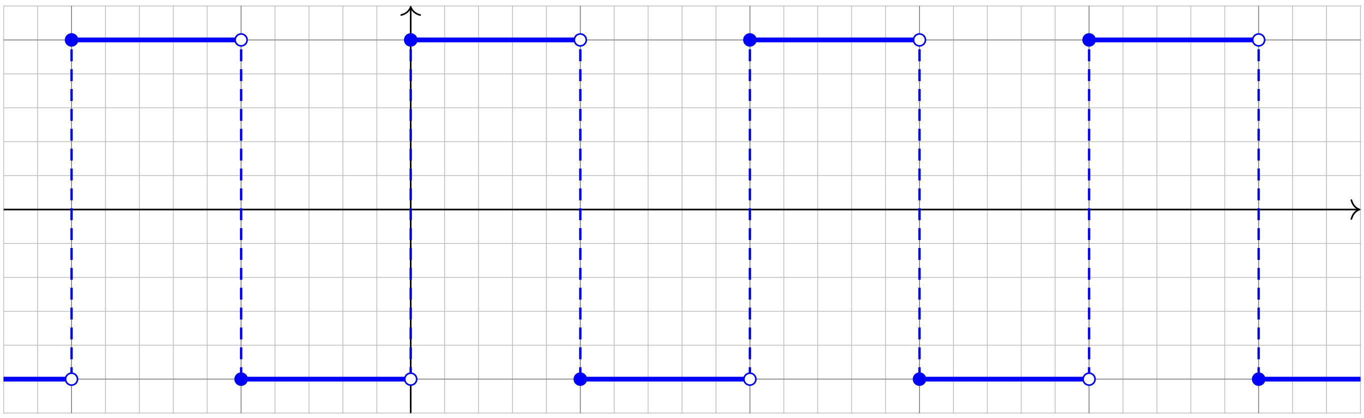
Stückweise stetige Funktionen

Die **Gauß–Klammer** $\lfloor x \rfloor := \max\{\, k \in \mathbb{Z} \mid k \le x \,\}$ ist stückweise stetig:

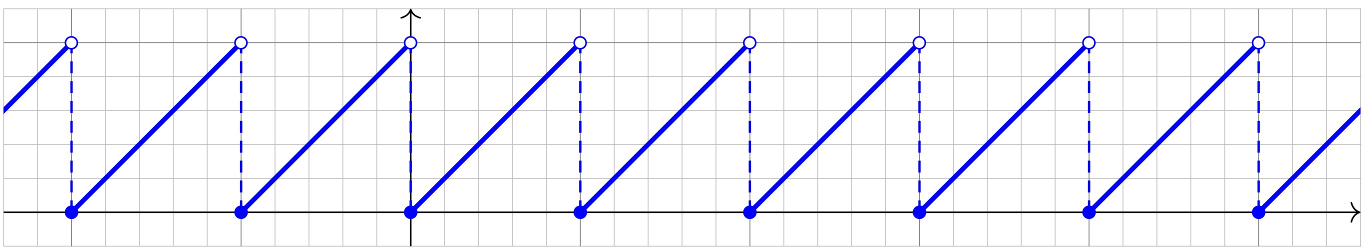


Stückweise stetige Funktionen

Die **Rechteckfunktion** $r(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$ ist stückweise konstant.



Die **Sägezahnfunktion** $s(x) = x - \lfloor x \rfloor$ ist stückweise affin-linear.



Diese Funktionen haben Sprungstellen und sind nur stückweise stetig.

Stückweise stetige Funktionen

Definition B1E: stückweise stetige Funktionen

(0) Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **stückweise stetig**, wenn es eine Unterteilung $a = x_0 < x_1 < \dots < x_\ell = b$ und stetige Funktionen $f_k : [x_{k-1}, x_k] \to \mathbb{R}$ gibt, sodass $f(x) = f_k(x)$ für alle $x_{k-1} < x < x_k$ gilt.

(1) Gilt zudem $f(x_k) = \frac{1}{2}\big[f_{k-1}(x_k) + f_k(x_k)\big]$ an jeder (eventuellen) Sprungstelle x_k für $k = 1, \dots, \ell - 1$, so nennen wir f **sprungnormiert**.

(2) Entsprechend nennen wir f **stückweise C^n**, falls $f_1, \dots, f_\ell \in C^n$ gilt. Hierbei ist C^n die Klasse der n-fach stetig differenzierbaren Funktionen. **Stückweise stetig diff'bar** bedeutet traditionell C^0 und stückweise C^1.

(0) Äquivalente Definition: Die Funktion f ist auf jedem der offenen Intervalle $]x_{k-1}, x_k[$ stetig, und $f(x)$ hat an den Intervallgrenzen für $x \searrow x_{k-1}$ sowie für $x \nearrow x_k$ einen Grenzwert in $\mathbb{R}$.

Anschaulich gesagt: f hat nur endlich viele Sprungstellen und endliche Sprunghöhen. An den Intervallgrenzen $x_0, x_1, \dots, x_\ell$ hingegen muss f nicht stetig sein. Die Funktionswerte $f(x_k)$ sind beliebig; sie fallen bei der von uns anvisierten Integration ohnehin nicht ins Gewicht.

(1) Durch Korrektur an den Sprungstellen können wir f sprungnormieren. Das Integral ändert sich dadurch nicht. Die Normierung ist oft hilfreich, etwa bei Fourier–Reihen und –Integralen.

Integration stückweise stetiger Funktionen

Es gibt gute Gründe, auch nicht-stetige Funktionen zu behandeln und integrieren zu lernen. In der Signalverarbeitung und Fourier–Analyse zum Beispiel betrachtet man auch Signale mit Sprungstellen, wie die oben gezeigte Rechteckfunktion oder die Sägezahnfunktion.

Satz B1F: Integration stückweise stetiger Funktionen

Jede stückweise stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar gemäß

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} f_1(x)\,\mathrm{d}x + \dots + \int_{x_{\ell-1}}^{x_\ell} f_\ell(x)\,\mathrm{d}x.$$

Die Menge $S([a, b])$ aller stückweise stetigen Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist ein Vektorraum, und somit ein Untervektorraum in $R([a, b])$. Hierauf ist das Integral $f \mapsto \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ eine $\mathbb{R}$–lineare Abbildung $S([a, b]) \to \mathbb{R}$.

Wie schon bei Treppenfunktionen gibt es für stückweise stetige Funktionen mehrere mögliche Unterteilungen, z.B. kann man jede Unterteilung durch Hinzunahme weiterer Stellen verfeinern. Der Wert des obigen Integrals als Summe über die Unterteilung ändert sich dadurch nicht!

Die Existenz der Grenzwerte an den Intervallgrenzen verhindert Polstellen und Schlimmeres. Gegenbeispiele sind $f, g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1/\sqrt{|x|}$ und $g(x) = \sin(\pi/|x|)$. B118
Diese sind stetig auf $[-1, 0[$ und $]0, 1]$, aber *nicht* stückweise stetig auf $[-1, 1]$!

Riemann–integrierbare Funktionen

Satz B1G: Charakterisierung R-integrierbarer Funktionen

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Die Menge $R(\Omega)$ aller Riemann–integrierbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{R}$–Vektorraum. Hierauf ist das Integral

$$\int_\Omega \;:\; R(\Omega) \to \mathbb{R} \;:\; f \mapsto \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x$$

linear, normiert, monoton, und erfüllt das Prinzip der Einschachtelung.

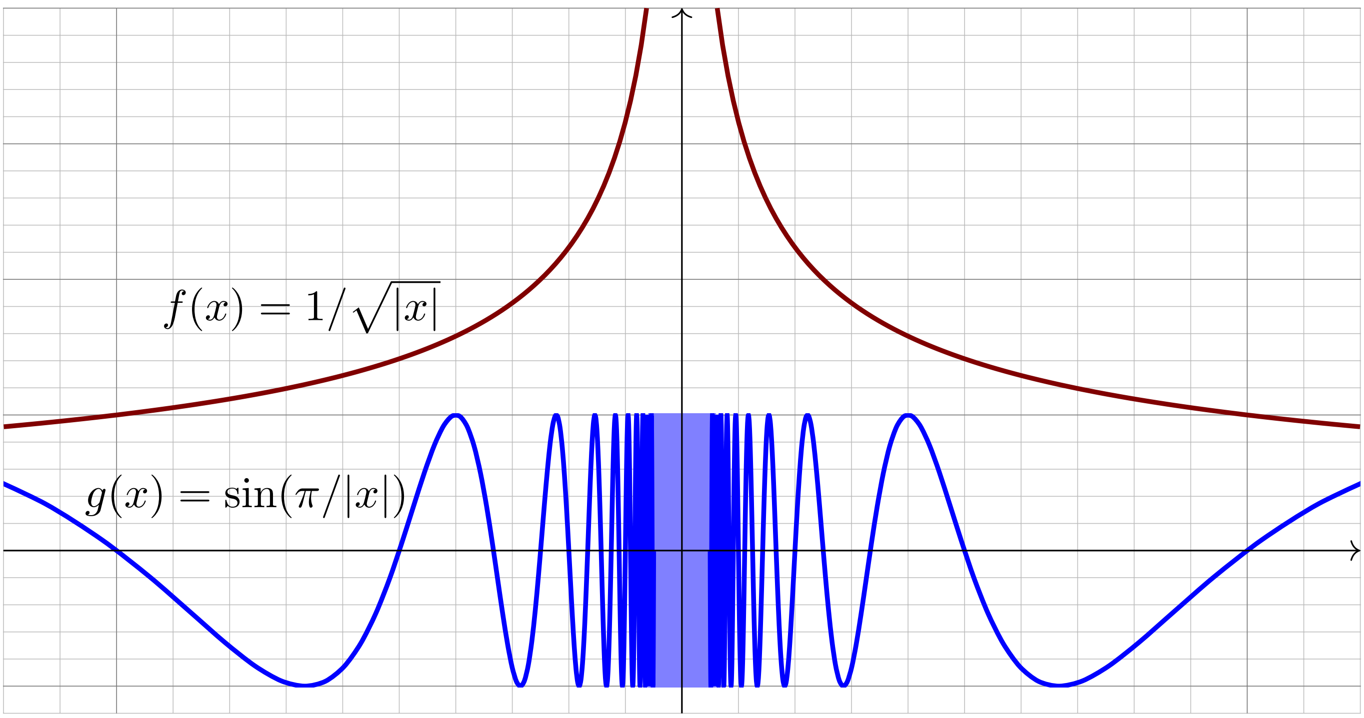
Hierbei ist $R(\Omega)$ der kleinste Funktionenraum, für den dies möglich ist, und auf $R(\Omega)$ ist das (Riemann–)Integral hierdurch eindeutig bestimmt.

Jede stetige / monotone Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist R-integrierbar, ebenso jede stückweise stetige / stückweise monotone Funktion.

$$\begin{array}{ccl} & & C([a,b]) := \{\, f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \,\} \\ & & \quad\cap\!\!\!\!\not\,\, \\ R([a,b]) & \supsetneq & S([a,b]) := \{\, f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stückweise stetig} \,\} \\ & & \quad\cup\!\!\!\!\not\,\, \\ & & T([a,b]) := \{\, f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ Treppenfunktion} \,\} \end{array}$$

Welche Funktionen sind Riemann–integrierbar?

Nicht stückweise stetig sind z.B. folgende Funktionen $f, g : [-1,1] \to \mathbb{R}$:



Übung: Die Funktion g ist Riemann–integrierbar, aber f hingegen nicht. Einschachtelung gelingt für f nicht, aber mit Ausschöpfung geht's. B208

Welche Funktionen sind Riemann–integrierbar?

Satz B1H: Charakterisierung R-integrierbarer Funktionen

Genau dann ist eine Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ Riemann–integrierbar, wenn sie beschränkt ist und fast überall stetig (bis auf eine Nullmenge).

Berühmte Beispiele: Die **kleine Dirichlet–Funktion** $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ mit

$$g(x)=\begin{cases}0 & \text{falls } x\in[0,1]\smallsetminus\mathbb{Q},\\ \frac{1}{b} & \text{falls } x=\frac{a}{b} \text{ mit } a,b\in\mathbb{N} \text{ und } \operatorname{ggT}(a,b)=1.\end{cases}$$

ist unstetig in jedem rationalen Punkt, jedoch stetig in jedem irrationalen. Sie ist also fast überall stetig und demnach auch Riemann–integrierbar. Übung: durch Treppenfunktionen einschachteln und Integral bestimmen.

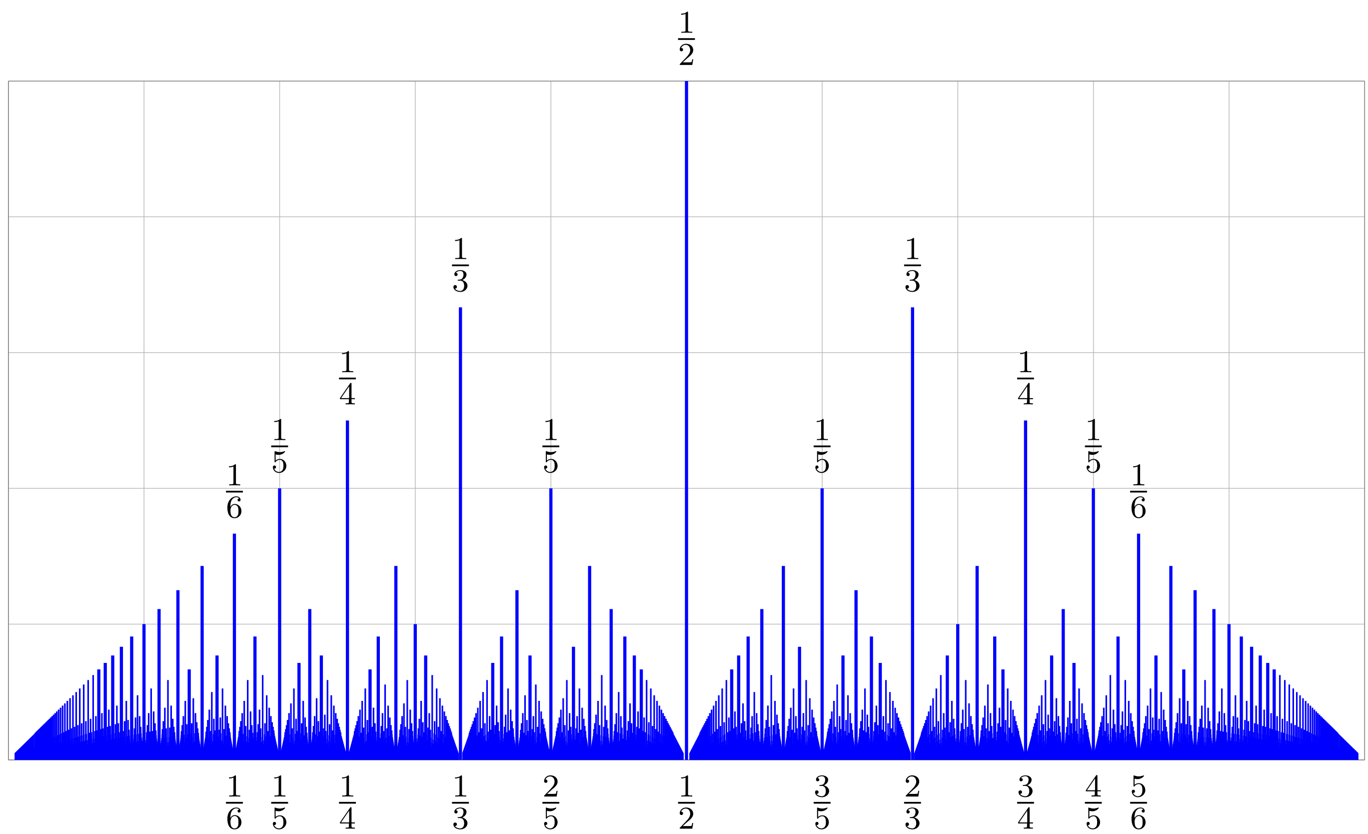
Die **Dirichlet–Funktion** $f=\mathbf{I}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}:[0,1]\to\mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{für } x\in\mathbb{Q},\\ 0 & \text{für } x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$

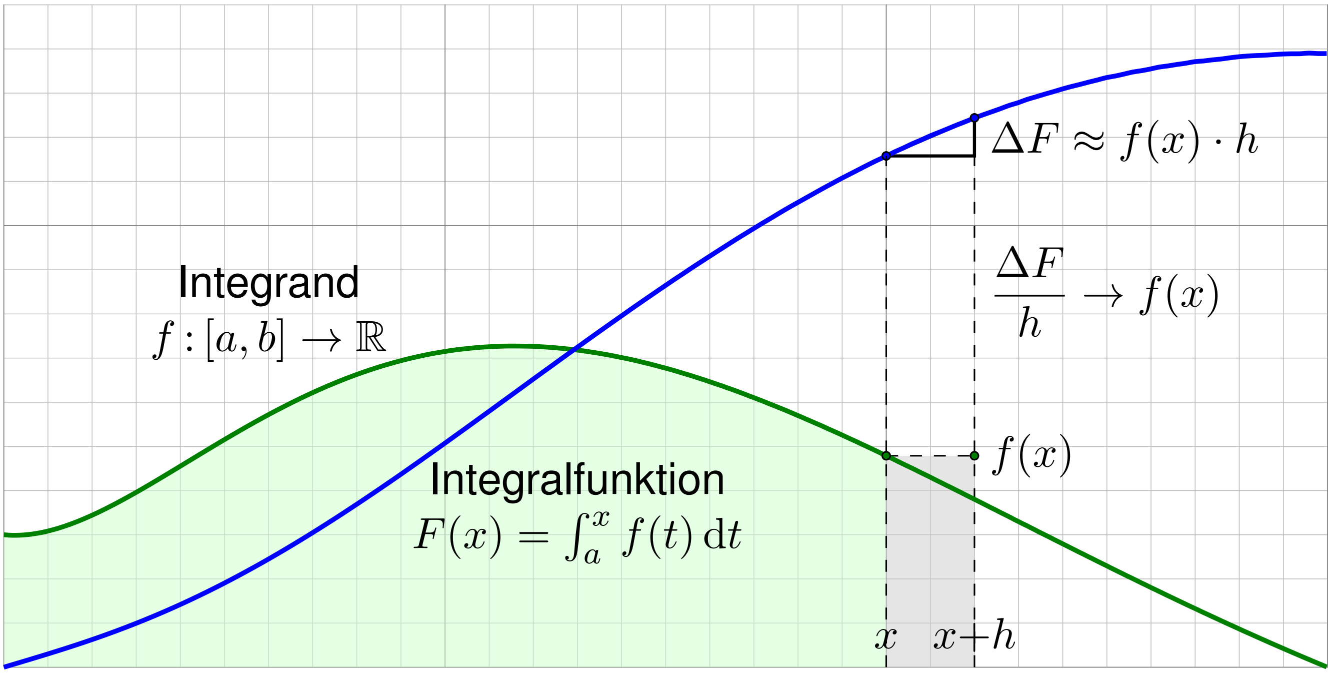
Sie ist in jedem Punkt $x\in[0,1]$ unstetig also nicht Riemann–integrierbar. Übung: Einschachtelung misslingt hier, Ausschöpfung gelingt mühelos!

Die kleine Dirichlet–Funktion

Für jeden gekürzten Bruch $\frac{a}{b}$ sei $g(\frac{a}{b})=\frac{1}{b}$, und $g(x)=0$ für $x\in\mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Q}$. Diese bemerkenswerte Funktion ist in jedem rationalen Punkt unstetig.



Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung



Der Hauptsatz besagt anschaulich: Die Steigung der Integralfunktion $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ ist der Wert $f(x)$ des Integranden, also $F'(x) = f(x)$. Diese Beziehung wollen wir präzise formulieren und nutzen lernen.

Stroppel, Höhere Mathematik 2, §3.6. Hauptsatzkantate, `youtu.be/4n6aB4aasyg`.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar, dank Satz B1c.

Wir definieren ihre **Integralfunktion** $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) = \int_{t=a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Für die Fläche über dem Intervall $[x, x + h]$ finden wir

$$F(x + h) - F(x) = \int_{t=x}^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \approx \quad f(x) \cdot h.$$

Genauer gilt folgende Einschachtelung:

$$h \cdot \min_{[x,x+h]} f \quad \le \quad \int_{t=x}^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \le \quad h \cdot \max_{[x,x+h]} f.$$

Für $h \to 0$ finden wir dank der Stetigkeit von f im Punkt x somit

$$\frac{F(x + h) - F(x)}{h} \quad = \quad \frac{1}{h} \int_{t=x}^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \to \quad f(x).$$

Also gilt $F'(x) = f(x)$. Das eröffnet eine wunderbare Rechentechnik!

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Satz B1I: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar. Ihre Integralfunktion

$$F : [a,b] \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

ist differenzierbar, und für die Ableitung gilt $F' = f$. Ist umgekehrt $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit stetiger Ableitung $f = F'$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F\Big]_a^b \quad \text{mit} \quad \Big[F\Big]_a^b := F(b) - F(a).$$

Diese Aussagen heißen auch 1. und 2. Hauptsatz. Im Falle $F' = f$ bzw. $F = \int f + \mathrm{const}$ heißt F **Stammfunktion** zu f. Anwendungsbeispiele:

$$\int_{x=0}^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = \Big[-\cos x\Big]_{x=0}^{\pi} = 1 - (-1) = 2$$

$$\int_{x=0}^{\pi} x \sin x\,\mathrm{d}x = \Big[\sin x - x\cos x\Big]_{x=0}^{\pi} = \pi - 0 = \pi$$

Grundintegrale: elementare Stammfunktionen

$$\int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} \quad (a \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x|$$

$$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \qquad \int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x \qquad \int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x$$

$$\int \cosh x\,\mathrm{d}x = \sinh x \qquad \int \sinh x\,\mathrm{d}x = \cosh x$$

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2}\,\mathrm{d}x = \tan x \qquad \int \frac{1}{(\sin x)^2}\,\mathrm{d}x = -\cot x$$

$$\int \frac{1}{(\cosh x)^2}\,\mathrm{d}x = \tanh x \qquad \int \frac{1}{(\sinh x)^2}\,\mathrm{d}x = -\coth x$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x \qquad \int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \ln\sqrt{\left|\tfrac{x+1}{x-1}\right|}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arsinh} x$$

🙂 Übung: Machen Sie wie immer die Probe durch sorgfältiges Ableiten!

Erinnerung: Kreis- und Hyperbelfunktionen

Viele wichtige Funktionen lassen sich als **Potenzreihen** darstellen:

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \qquad = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$$

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \qquad = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

$$\cosh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} z^{2k} \qquad = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots$$

$$\sinh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1} \qquad = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \dots$$

Jede dieser fünf Reihen hat unendlichen Konvergenzradius,
sie konvergiert daher für jeden Parameter $z \in \mathbb{R}$, sogar $z \in \mathbb{C}$.

Erinnerung: Kreis- und Hyperbelfunktionen

Aus diesen Potenzreihen lesen wir die **Euler–Formeln** ab:

$$\exp(\mathrm{i}z) = \cos z + \mathrm{i}\sin z, \qquad \cos(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}, \qquad \sin(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}},$$

$$\exp(z) = \cosh z + \sinh z, \quad \cosh(z) = \frac{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}{2}, \quad \sinh(z) = \frac{\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}}{2}.$$

Hieraus folgen sofort die geometrisch nützlichen Gleichungen

$$\cos(z)^2 + \sin(z)^2 = 1 \quad \text{sowie} \quad \cosh(z)^2 - \sinh(z)^2 = 1.$$

Auch die Ableitungen lesen wir direkt aus den Potenzreihen ab,
denn Potenzreihen dürfen wir termweise ableiten und erhalten so:

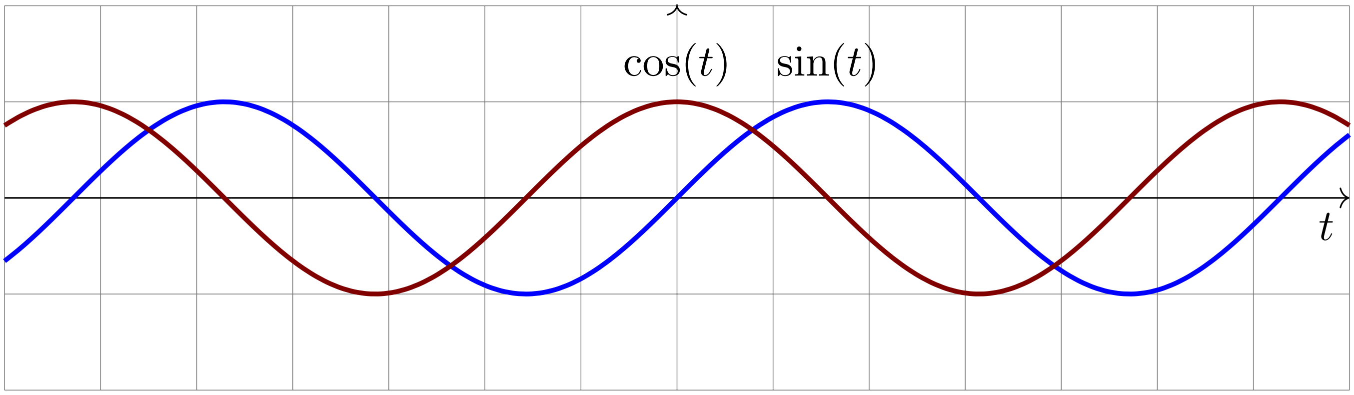
$$\exp' = \exp, \quad \sin' = \cos, \quad \cos' = -\sin, \quad \sinh' = \cosh, \quad \cosh' = \sinh$$

Diese Funktionen sind daher auch bei der Integration sehr nützlich!

Ebenso nutzen wir ihre Umkehrfunktionen, eingeschränkt soweit nötig:

$$\ln, \quad \arcsin, \quad \arccos, \quad \operatorname{arsinh}, \quad \operatorname{arcosh}$$

Erinnerung: Kreis- und Hyperbelfunktionen



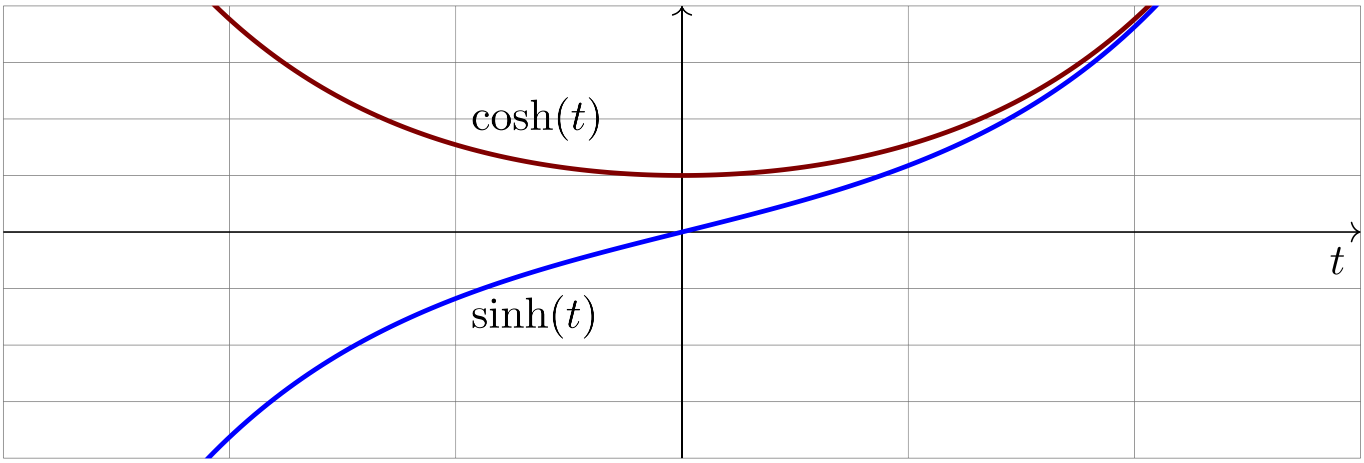
Die trigonometrischen Funktionen $\sin, \cos$ heißen **Kreisfunktionen**, denn $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ parametrisiert die Kreislinie $x^2 + y^2 = 1$.

Sie sind periodisch mit Periode 2π, wobei $\pi = 3.14159265\ldots$.

Ausmultiplizieren der Euler–Formeln ergibt **Additionstheoreme**:

$$\begin{aligned}
\sin(s+t) &= \sin(s)\cos(t) + \cos(s)\sin(t),\\
\sin(2t) &= 2\sin(t)\cos(t)\\
\cos(s+t) &= \cos(s)\cos(t) - \sin(s)\sin(t),\\
\cos(2t) &= \cos(t)^2 - \sin(t)^2 = 1 - 2\sin(t)^2.
\end{aligned}$$

Erinnerung: Kreis- und Hyperbelfunktionen



Die Funktionen $\sinh, \cosh$ heißen entsprechend **Hyperbelfunktionen**, denn $t \mapsto (\cosh t, \sinh t)$ parametrisiert die Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$, $x > 0$.

Ausmultiplizieren der Euler–Formeln ergibt **Additionstheoreme**:

$$\begin{aligned}
\sinh(s+t) &= \sinh(s)\cosh(t) + \cosh(s)\sinh(t),\\
\sinh(2t) &= 2\sinh(t)\cosh(t)\\
\cosh(s+t) &= \cosh(s)\cosh(t) + \sinh(s)\sinh(t),\\
\cosh(2t) &= \cosh(t)^2 + \sinh(t)^2 = 2\cosh(t)^2 - 1.
\end{aligned}$$

Produktregel ⇒ partielle Integration

Korollar B1J: partielle Integration

Für alle stetig differenzierbaren Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{x=a}^{b} f(x)\, g'(x)\, \mathrm{d}x = \Big[f(x)\, g(x)\Big]_{x=a}^{b} - \int_{x=a}^{b} f'(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x.$$

Nachweis dank HDI: Es gilt $[fg]' = f'g + fg'$, also $\int_a^b (f'g + fg') = [fg]_a^b$.
Dank Linearität des Integrals erhalten wir $\int_a^b (f'g) + \int_a^b (fg') = [fg]_a^b$.

🙂 Zwecks Vereinfachung wählt man die Faktoren geschickt. Beispiel:

$$\int x^n \ln x \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \int \frac{x^n}{n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right)$$

🙂 Manchmal nützt als Trick, den Faktor 1 einzuführen. Beispiel:

$$\int (\ln x)^n \,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot (\ln x)^n \,\mathrm{d}x = x \cdot (\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} \,\mathrm{d}x$$

Letzteres behandelt man ebenso, bis man bei $(\ln x)^0$ ankommt.

Beispiele zur partiellen Integration

Rekursion: Manche Integrale muss man mehrfach partiell integrieren.

$$\begin{aligned}
\int x^n \,\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x &= x^n \,\mathrm{e}^x - n \int x^{n-1} \,\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x,\\
\int x^n \sin x \,\mathrm{d}x &= -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x \,\mathrm{d}x,\\
\int x^n \cos x \,\mathrm{d}x &= x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x \,\mathrm{d}x.\\
\int \sin(x)^n \,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{n} \sin(x)^{n-1} \cos(x) + \frac{n-1}{n} \int \sin(x)^{n-2} \,\mathrm{d}x\\
\int \cos(x)^n \,\mathrm{d}x &= +\frac{1}{n} \cos(x)^{n-1} \sin(x) + \frac{n-1}{n} \int \cos(x)^{n-2} \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Für $I_n = \int_{x=0}^{\pi/2} \sin(x)^n \,\mathrm{d}x$ gilt $I_0 = \frac{\pi}{2}$ und $I_1 = 1$ und weiter $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$:

$$\begin{aligned}
\int_{x=0}^{\pi/2} \sin(x)^{2k} \,\mathrm{d}x &= \frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} = \frac{\pi}{2} \frac{(2k)!}{k!^2 \cdot 2^{2k}},\\
\int_{x=0}^{\pi/2} \sin(x)^{2k+1} \,\mathrm{d}x &= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k+1)} = \frac{k!^2 \cdot 2^{2k}}{(2k+1)!}.
\end{aligned}$$

Kettenregel $\Rightarrow$ Substitution

Korollar B1K: Integration durch Substitution

Für $g:[a,b]\to[c,d]$ stetig differenzierbar und $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ stetig gilt

$$\boxed{\int_{t=a}^{b} f(g(t))\,g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{u=g(a)}^{g(b)} f(u)\,\mathrm{d}u.}$$

Nachweis dank HDI: Für $F(s)=\int_c^s f(u)\,\mathrm{d}u$ gilt $F(g(t))'=f(g(t))\,g'(t)$. Hieraus erhalten wir $\int_a^b f(g(t))\,g'(t)\,\mathrm{d}t = [F(g(t))]_a^b = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,\mathrm{d}u$. Damit dies auch für $g(b)<g(a)$ gilt, vereinbaren wir $\int_\alpha^\beta := -\int_\beta^\alpha$.

☺ Merkregel: Für $u=g(t)$ gilt $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=g'(t)$, also $\mathrm{d}u=g'(t)\,\mathrm{d}t$. Beispiel:

$$\int_{t=0}^{2}\cos(t^2+1)\cdot 2t\,\mathrm{d}t = \int_{u=1}^{5}\cos(u)\,\mathrm{d}u = \Big[\sin(u)\Big]_{u=1}^{5} = \sin(5)-\sin(1)$$

Hier substituieren wir $u=g(t)=t^2+1$. Demnach gilt $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=g'(t)=2t$. Die Integrationsgrenzen müssen von t nach u angepasst werden: Wenn t von 0 bis 2 läuft, dann läuft u von $g(0)=1$ bis $g(2)=5$.

Beispiele zur Substitution

Eine wichtige Anwendung ist die **logarithmische Ableitung**:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)|$$

Typische Beispiele, die Sie (er)kennen sollten:

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(x)'}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x \quad \text{für } x>0$$

$$\int \frac{1}{x\,\ln x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(\ln x)'}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln\ln x \quad \text{für } x>1$$

$$\int \frac{1}{x\,\ln x\,\ln\ln x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(\ln\ln x)'}{\ln\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln\ln\ln x \quad \text{für } x>\mathrm{e}$$

$$\int \tan(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x|$$

$$\int \cot(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x|$$

📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §3.1–3.3.

Integration rationaler Funktionen

Ein Polynom $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ abzuleiten ist leicht: Man erhält $p'(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1}$, also wieder ein Polynom. Ebenso leicht können wir integrieren und erhalten wieder ein Polynom:

$$\int p(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{const} + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \dots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

Auch eine rationale Funktion $r(x) = p(x)/q(x)$ abzuleiten ist leicht:

$$r'(x) = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{q(x)^2}$$

Für jede rationale Funktion $r(x)$ ist die Ableitung $r'(x)$ wieder rational, aber Stammfunktionen im Allgemeinen nicht! Manche Integrale führen zu $\ln$ und $\arctan$ und somit aus den rationalen Funktionen hinaus:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| \quad \text{und} \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \arctan x$$

🙂 Das ist aber auch schon das Schlimmste, was passieren kann… Der folgende Satz erklärt, wie man rationale Funktionen integriert.

Integration rationaler Funktionen

📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §3.4. Jede rationale Funktion $r(x) = p(x)/q(x)$ ist elementar integrierbar durch Partialbruchzerlegung und unsere Grundintegrale. Beispiele:

$$r(x) = \frac{4x^2 - 7x + 25}{x^3 - 6x^2 + 3x + 10} = \frac{2}{x+1} - \frac{3}{x-2} + \frac{5}{x-5}$$

$$\Longrightarrow \int r(x)\,\mathrm{d}x = 2\ln|x+1| - 3\ln|x-2| + 5\ln|x-5|$$

$$r(x) = \frac{3x^2 - 3x - 10}{x^3 - 5x^2 + 11x - 15} = \frac{1}{x-3} + \frac{2x+5}{x^2+2x+5}$$

$$\Longrightarrow \int r(x)\,\mathrm{d}x = \ln|x-3| + \ln|x^2+2x+5| + \frac{7}{2}\arctan\frac{x-1}{2}$$

🙂 Die Rechnung mag lang und mühsam sein, aber sie gelingt immer! Insbesondere kann ein Computer-Algebra-System sie für uns ausführen.

🙂 Der folgende Satz liefert die elementaren Integrale der Partialbrüche. Der Fundamentalsatz der Algebra garantiert uns über $\mathbb{R}$, dass wir jede rationale Funktion als Summe solcher Partialbrüche schreiben können.

Integration rationaler Funktionen

Satz B1L: Integration rationaler Funktionen

Jede rationale Funktion $r(x) = p(x)/q(x)$ ist elementar integrierbar durch Partialbruchzerlegung (B1N) und folgende Grundintegrale:

$$\int \frac{a}{x-u}\,\mathrm{d}x = a\ln|x-u|$$

$$\int \frac{a}{(x-u)^k}\,\mathrm{d}x = \frac{-a}{(k-1)(x-u)^k} \qquad (k \ge 2)$$

$$\int \frac{ax+b}{x^2+2vx+u}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2}\ln|x^2+2vx+u| + \frac{b-av}{\sqrt{u-v^2}}\arctan\frac{x+v}{\sqrt{u-v^2}}$$

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+2vx+u)^k}\,\mathrm{d}x = \frac{(b-av)x+(bv-au)}{2(k-1)(u-v^2)(x^2+2vx+u)^{k-1}} + \frac{(2k-3)(b-av)}{2(k-1)(u-v^2)}\int \frac{1}{(x^2+2vx+u)^{k-1}}\,\mathrm{d}x$$

🙂 Zum Nachweis genügt es, geduldig und gewissenhaft abzuleiten. Probe als Übung: Die Formeln sind furchteinflößend, aber elementar!

Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen

Satz B1M: Fundamentalsatz der Algebra, reelle Zerlegung

Jedes reelle Polynom $q \in \mathbb{R}[x]^*$ lässt sich zerlegen in $q = u\, q_1^{k_1} \cdots q_m^{k_m}$ mit $u \in \mathbb{R}^*$ und affin-linearen Faktoren $q_j(x) = x - u_j$ mit $u_j \in \mathbb{R}$ oder quadratischen $q_j(x) = x^2 + 2v_j x + u_j$ mit $u_j, v_j \in \mathbb{R}$ und $v_j^2 - u_j < 0$.

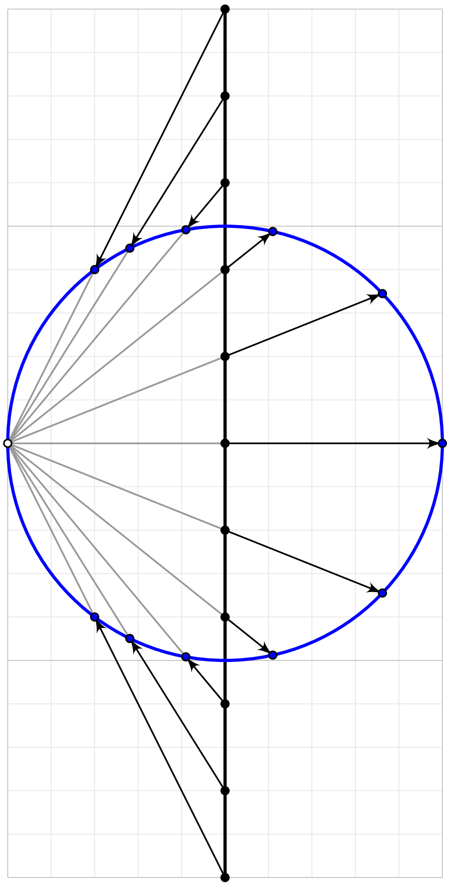
Hierbei können wir $k_i \ge 1$ annehmen für alle i sowie $q_i \ne q_j$ für $i \ne j$.

Korollar B1N: reelle Partialbruchzerlegung

Jede rationale Funktion $\frac{p}{q} \in \mathbb{R}(x)$ ist Summe von Partialbrüchen

$$\begin{aligned}\frac{p}{q} = p_0 &+ \frac{p_{1,1}}{q_1} + \frac{p_{1,2}}{q_1^2} + \dots + \frac{p_{1,k_1}}{q_1^{k_1}}\\ &+ \dots\\ &+ \frac{p_{m,1}}{q_m} + \frac{p_{m,2}}{q_m^2} + \dots + \frac{p_{m,k_m}}{q_m^{k_m}}\end{aligned}$$

mit Polynomen $p_0, p_{i,j} \in \mathbb{R}[x]$ und $\deg p_{i,j} < \deg q_i \le 2$ wie oben. Zusammen mit Satz B1L gelingt so die elementare Integration.



Ein elegant-raffinierter Integrationstrick wurde von Weierstraß entwickelt: Die **trigonometrische Generalsubstitution** löst eine große Familie von Integralen durch elementare Stammfunktionen.

Die Kreislinie $\mathbb{S}^1 = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \,\}$ parametrisieren wir **trigonometrisch** durch

$$\left]-\pi,\pi\right[\xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1 \smallsetminus \{(-1,0)\} : s \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}s} = (\cos s, \sin s).$$

Alternativ gelingt dies auch **stereographisch**:

$$f : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1 \smallsetminus \{(-1,0)\} : t \mapsto \Big(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\Big),$$

$$g : \mathbb{S}^1 \smallsetminus \{(-1,0)\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \frac{y}{1+x}.$$

Dies sind zueinander inverse Bijektionen, denn es gilt $g(f(t)) = t$ und $f(g(x,y)) = (x,y)$. Übung!

Satz B1O: rationale Integranden in $\sin s$ und $\cos s$

Beide Parametrisierungen können wir ineinander umrechnen gemäß

$$\sin s = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos s = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan s = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \cot s = \frac{1-t^2}{2t},$$

$$t = \tan(s/2), \quad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}s}{1+\cos(s)}, \quad s = 2\arctan t, \quad \mathrm{d}s = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

Sei $R(x,y) = P(x,y)/Q(x,y)$ eine rationale Funktion, mit $P, Q \in \mathbb{R}[x,y]$ und $Q(\cos s, \sin s) \neq 0$ für alle $s \in I \subseteq \left]-\pi,\pi\right[$. Auf I erhalten wir gemäß

$$\int R(\cos s, \sin s)\,\mathrm{d}s = \int R\Big(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\Big)\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

einen rationalen Integranden in t. Diesen können wir dank Satz B1L elementar integrieren und anschließend $s = 2\arctan t$ rücksubstituieren.

Übung: Die Formeln liegen explizit vor; rechnen Sie alle sorgfältig nach!

🙂 Jede rationale Funktion in $\sin s$, $\cos s$ wird so elementar integrierbar.

Weierstraß' trigonometrische Generalsubstitution

Aufgabe: Finden Sie auf dem Intervall $I = \,]0,\pi[$ Stammfunktionen zu

$$\frac{1}{\sin s} \quad \text{und} \quad \frac{2}{3+\cos s} \quad \text{und} \quad \frac{1-\sin s}{(1-\cos s)\sin s}.$$

Lösung: Wir nutzen Weierstraß' trigonometrische Generalsubstitution:

$$\int \frac{\mathrm{d}s}{\sin s} = \int \frac{(1+t^2)}{2t}\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln t = \ln\tan(s/2)$$

$$\int \frac{2}{3+\cos s}\,\mathrm{d}s = \int \frac{2}{3+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int \frac{2}{2+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \sqrt{2}\arctan\Big(\frac{t}{\sqrt{2}}\Big) = \sqrt{2}\arctan\Big(\frac{\tan(s/2)}{\sqrt{2}}\Big)$$

$$\int \frac{1-\sin s}{(1-\cos s)\sin s}\,\mathrm{d}s = \int \frac{1}{2}t^{-1} - t^{-2} + \frac{1}{2}t^{-3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln t + t^{-1} - \frac{1}{4}t^{-2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\tan(s/2) + \cot(s/2) - \frac{1}{4}\cot^2(s/2)$$

🙂 Machen Sie wie immer die Probe durch sorgfältiges Ableiten! Die Rechnung mag länglich sein, aber sie ist vollkommen elementar.

Weierstraß' trigonometrische Generalsubstitution

Diese Substitution mutet zunächst an wie Magie, sie entspringt jedoch zwei sehr einfachen Parametrisierungen der Kreislinie $x^2+y^2=1$:

$$(x,y) = (\cos s, \sin s) = \Big(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\Big)$$

🙂 Dieser Trick funktioniert ebenso für die Hyperbel $x^2-y^2=1$:

$$(x,y) = (\cosh s, \sinh s) = \Big(\frac{1+t^2}{1-t^2}, \frac{2t}{1-t^2}\Big)$$

Ebene Kurvenintegrale werden wir in Kapitel E ausführlicher behandeln, insbesondere auch die Frage nach geeigneten (Um)Parametrisierungen.

🙂 Geschlossene Wegintegrale der Form

$$\int_{s=0}^{2\pi} R(\cos s, \sin s)\,\mathrm{d}s$$

werden wir in Kapitel F mit dem Residuensatz berechnen (Satz F4H).

🙂 Weierstraß' trigonometrische Generalsubstitution ist daher keine obskure Randerscheinung, sondern eine vielseitige Rechenmethode, die zahlreiche schöne Aspekte verbindet, geometrisch und analytisch.

Algebraische und transzendente Funktionen

Die einfachsten Funktionen sind **konstant** a_0, **affin-linear** $a_0 + a_1 x$, **quadratisch** $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, **kubisch** $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$, ... **polynomiell** $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, **rational** $r(x) = p(x)/q(x)$. Die konstanten Funktionen bilden einen $\mathbb{R}$–Vektorraum, ebenso die Menge aller affin-linearen Funktionen, quadratischen, kubischen, etc. Polynome bilden den Ring $\mathbb{R}[x]$, rationale Funktionen den Körper $\mathbb{R}(x)$.

Eine Funktion $f(x)$ heißt **algebraisch**, wenn sie eine polynomielle Gleichung der Form $p_n(x) f(x)^n + \dots + p_1(x) f(x) + p_0(x) = 0$ erfüllt, z.B. Kompositionen rationaler Ausdrücke von Wurzelfunktionen $\sqrt[n]{x}$. Die Funktion $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ etwa erfüllt $f(x)^2 - 2x f(x) - 1 = 0$.

Ist sie nicht algebraisch, so heißt f **transzendent**. Wichtige Beispiele sind $\exp$ und $\ln$, die **trigonometrischen Funktionen** $\sin$, $\cos$, $\tan$, $\cot$, **Hyperbelfunktionen** $\sinh$, $\cosh$, $\tanh$, $\coth$, **Arkusfunktionen** $\arcsin$, $\arccos$, $\arctan$, arccot, **Areafunktionen** arsinh, arcosh, artanh, arcoth.

All diese Funktionen nennen wir **elementare Grundfunktionen**. Diesen begegnen Sie in Theorie und Anwendungen besonders häufig.

Elementare Funktionen

Elementare Funktionen sind endliche Ausdrücke dieser Funktionen, also Konstanten, x, $\exp(x)$, $\ln(x)$, ... und alles, was hieraus durch Grundrechenarten $+, -, \cdot, /$ und Komposition $\circ$ entsteht, jeweils auf offenen Definitionsintervallen. Beispiel: $\sqrt[n]{x} = \exp(\ln(x)/n)$ für $x > 0$. Kurzum jede Funktion, die wir „geschlossen hinschreiben“ können.

Wir nennen f **elementar integrierbar**, wenn auch $\int f$ elementar ist. Elementare Funktionen sind stetig und somit über $[a, b]$ integrierbar. Sie sind abgeschlossen unter Ableitung, aber nicht unter Integration! Glücklicherweise haben obige Beispiele elementare Stammfunktionen.

Man sagt scherzhaft „Bronstein–integrierbar“, denn diese Funktionen lassen sich integrieren durch Nachschlagen in Integraltafeln wie dem umfangreichen *Taschenbuch der Mathematik* von I.N. Bronstein und K.A. Semendjajew. Noch bequemer sind Computer-Algebra-Systeme, die Integrationsregeln und Tafeln benutzerfreundlich implementieren.

Viele elementare Funktionen sind nicht elementar integrierbar! Prominente Beispiele sind $\exp(-x^2/2)$ B145 und $\operatorname{si}(x) = \sin(x)/x$ B149.

Analytische Funktionen

Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §1.14.
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ offen. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt **analytisch** im Punkt $x_0 \in \Omega$, wenn sie sich lokal um x_0 in eine konvergente Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

entwickeln lässt. Gilt dies in jedem Punkt, so heißt f analytisch auf Ω.

Analytische Funktionen sind z.B. $x \mapsto cx^a$, e^x, $\sin x$, $\cos x$, und mit f, g auch $f \pm g$ und $f \cdot g$ und f/g sowie $f \circ g$ und f^{-1} jeweils wo definiert; die Definitionsbereiche müssen ggf. geeignet eingeschränkt werden. Jede elementare Funktion ist analytisch, zudem viele weitere.

Die analytischen Funktionen sind abgeschlossen unter **Integration**:

$$F(x) = \mathrm{const} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k-1}}{k} (x - x_0)^k$$

Potenzreihen dürfen wir termweise ableiten und erhalten $F'(x) = f(x)$.

Analytische vs elementare Funktionen

In der Mathematik versteht man unter einer **analytischen Funktion** $f : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \to \mathbb{R}$ oder allgemeiner $f : \mathbb{C}^n \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$ eine Abbildung, die sich lokal als konvergente Potenzreihe darstellen lässt, wie oben erklärt.

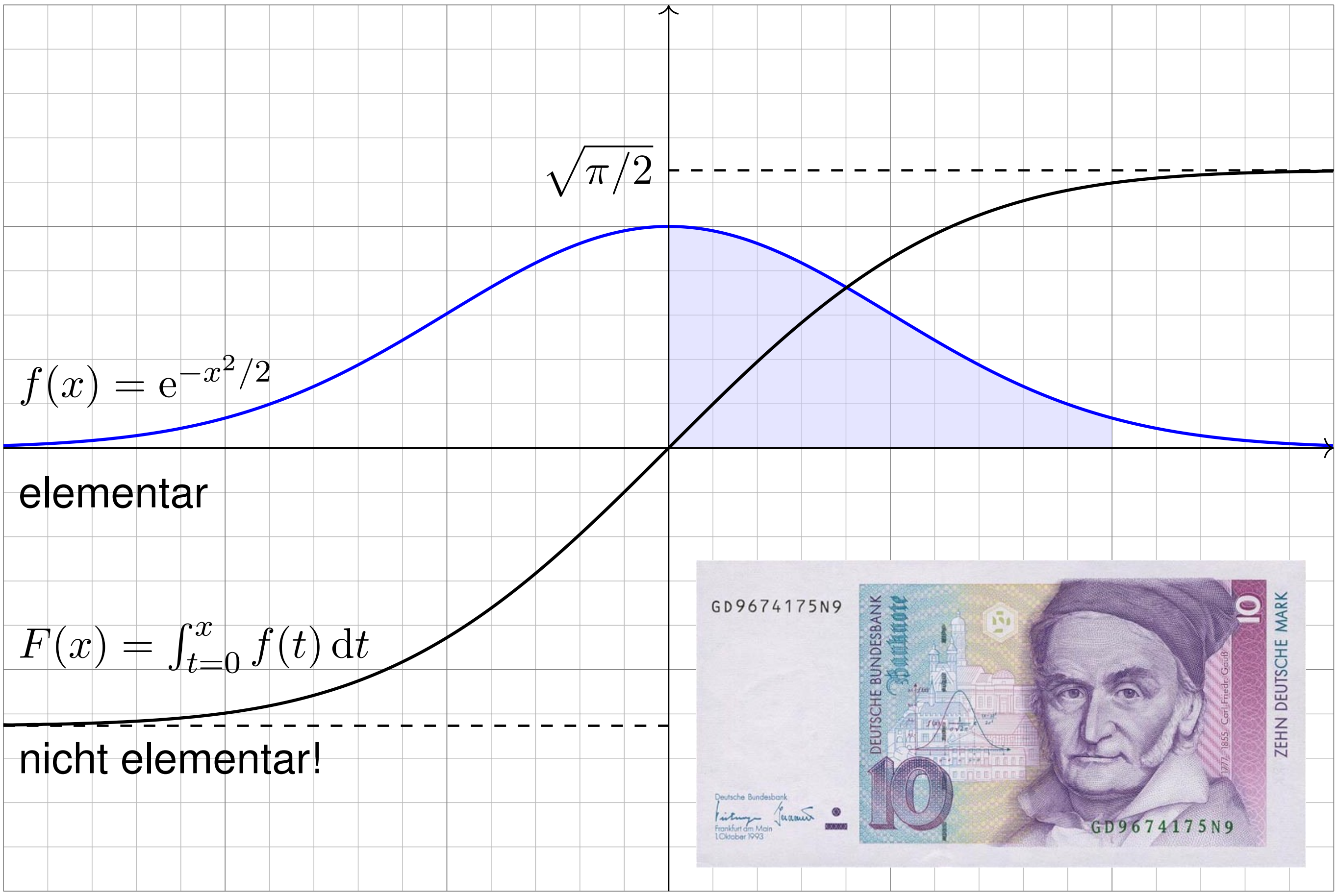
Außerhalb der Mathematik werden die Begriffe „elementare Funktion“ und „analytischer Ausdruck“ oft synonym verwendet. Diese Wortwahl ist sehr unglücklich und stiftet heillose Verwirrung. Daher verwende ich zur klaren Unterscheidung ausdrücklich den Begriff **elementare Funktion**.

Die elementaren Funktionen kennen und verstehen wir besonders gut, wir können gut mit ihnen rechnen, d.h. wir können sie zur Vereinfachung geschickt umformen, und so lässt sich manches Ergebnis schließlich „in geschlossener Form“ angeben. Das gelingt jedoch leider nicht immer!

Welche Funktionen man als elementar betrachtet, hängt vom Kontext ab. Zum Beispiel würde man die Gamma– und Bessel–Funktionen wohl dazuzählen, nicht aber (unvereinfachte) Grenzwerte und Integrale.

Klausuraufgaben verlangen häufig genau dies: „Integrieren Sie. . . “ bedeutet implizit „Geben Sie das Ergebnis in geschlossener Form an.“

Gaußsche Glockenkurve und Fehlerintegral



Stammfunktion der Glockenkurve als Potenzreihe

Satz B1P: Liouville 1835

Die Glockenkurve $f(x) = \exp(-x^2/2)$ ist analytisch, sogar **elementar**, aber ihre Integralfunktion $F(x) = \int_{t=0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ ist **nicht elementar**.

🙂 Die Gaußsche Glockenkurve f und ihre Integralfunktion F spielen eine zentrale Rolle in Theorie und vielen Anwendungen, insbesondere in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Hierzu müssen wir das Integral $F(x)$ konkret berechnen, meist für kleine Werte wie $x \in [-4, 4]$.

🙂 Wir werden später $\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$ ausrechnen C230 dank zweidimensionaler Integration, Fubini und Transformationssatz.

☹️ Für F existiert keine elementare Formel. Auch dieses negative Ergebnis ist nützlich: Es hat keinen Sinn, sich vergebens abzumühen. Die umsichtige Ingenieur:in versteht, was *möglich* ist, und was *nicht*.

🙂 Die Darstellung von f und F als Potenzreihe erlaubt eine elegante und extrem effiziente numerische Berechnung. Hierzu dient die folgende Aufgabe; damit können wir die Funktion F bequem tabellieren. V114

Stammfunktion der Glockenkurve als Potenzreihe

Aufgabe: (1) Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$ und ihre Stammfunktion $F(x) = \int_{t=0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ in Potenzreihen um $x = 0$.

(2) Approximieren Sie $F(x)$ durch ein geeignetes Polynom $F_n(x)$ in allen Punkten $x \in [-4, 4]$ bis auf einen Fehler $\delta < \varepsilon = 10^{-7}$.

Lösung: (1) Dank der Reihe $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ finden wir mühelos

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,2^k}\,x^{2k} \quad \Longrightarrow \quad F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,2^k\,(2k+1)}\,x^{2k+1}.$$

☺ Zur Probe nutzen wir umgekehrt den HDI, denn Potenzreihen dürfen wir termweises ableiten. Wir sehen $F' = f$ und $F(0) = 0$, also $F(x) = \int_{t=0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$. 📖 Analysis, Beispiel 3.8.5. Zur Vertauschung des Integrals mit einer absolut konvergenten Reihe siehe Seite D106.

☺ Jede Potenzreihe verhält sich in ihrem Konvergenzkreis wie ein Polynom unendlichen Grades. Damit können Sie rechnen, bequem und effizient, wie Sie dies in der HM2 gelernt haben. Ihre Investition in die mathematischen Grundlagen zahlt sich aus, bereits hier und immer wieder!

☺ Die Darstellung als Potenzreihe nutzen wir für viele Funktionen. Sie ist für alle praktischen wie theoretischen Belange beinahe ebenso gut wie eine Darstellung durch elementare Funktionen. Hier ist eine elementare Integration unmöglich, die analytische Integration gelingt jedoch leicht.

Stammfunktion der Glockenkurve als Potenzreihe

(2) Wir berechnen $F(x)$ für $x \in [-4, 4]$ auf 10^{-7} genau. Hierzu nutzen wir die obige Reihe: Dies ist eine alternierende Reihe (à la Leibniz), hierfür kennen wir eine bequeme Fehlerschranke (Satz B3G). Für $n \ge 8$ gilt

$$\left| F(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2^k k!(2k+1)} \right| = \left| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2^k k!(2k+1)} \right| \le \frac{|x|^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)}.$$

Wann ist n groß genug? Auswerten dieser Schranke ergibt

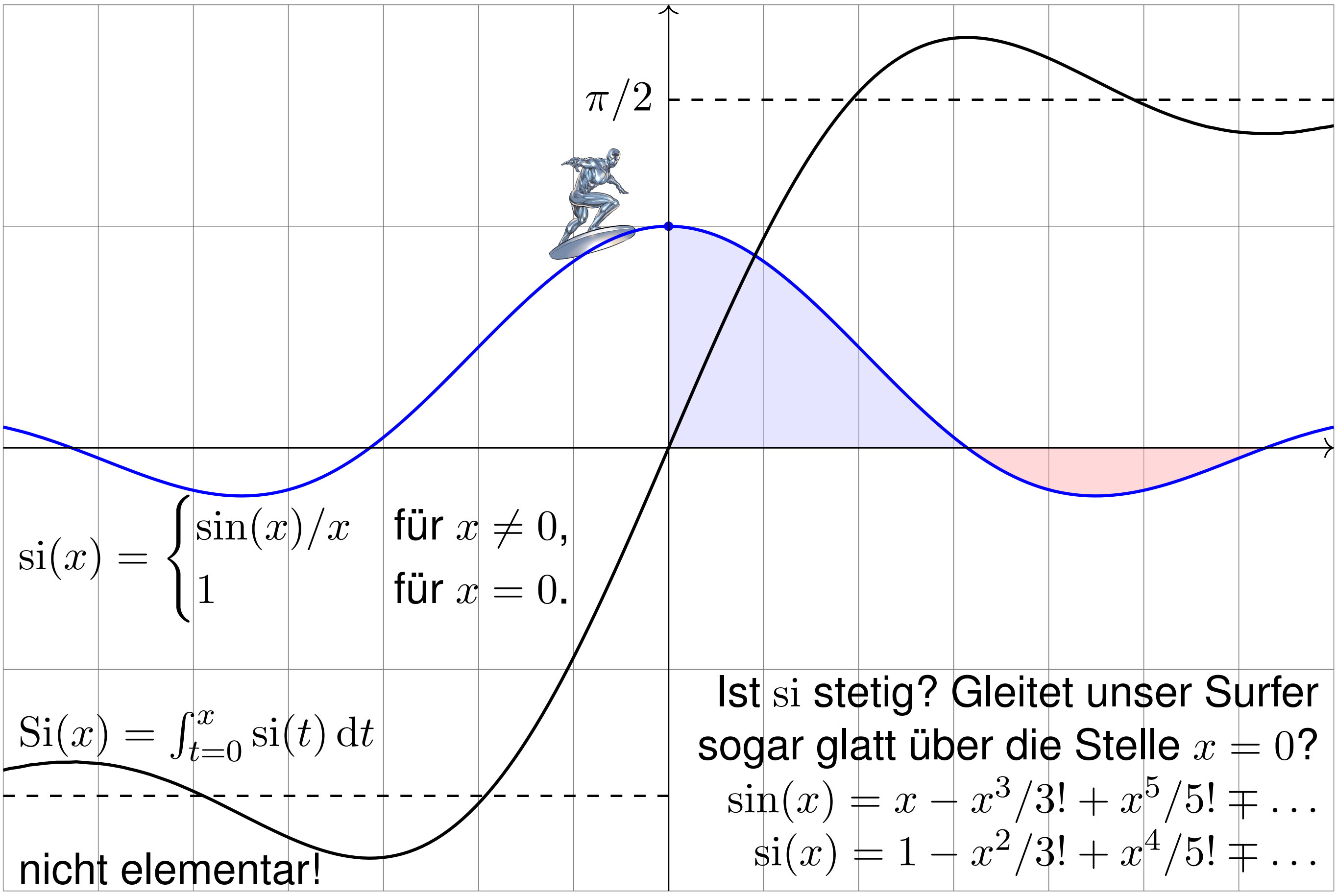
$$n = 30: \quad \frac{4^{61}}{2^{30} \cdot 30! \cdot 61} \gtrapprox 3 \cdot 10^{-7}, \qquad n = 31: \quad \frac{4^{63}}{2^{31} \cdot 31! \cdot 63} \lessapprox 0.8 \cdot 10^{-7}.$$

Eine geeignete Approximation ist demnach folgendes Polynom:

$$\boxed{F(x) = \sum_{k=0}^{30} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2^k k!(2k+1)} + \delta \quad \text{mit} \quad |\delta| \le \frac{|x|^{63}}{2^{31} \cdot 31! \cdot 63} < 10^{-7}.}$$

☺ Wir erhalten so alle Werte $F(x)$ für $x \in [-4, 4]$ auf 10^{-7} genau. Diese Näherung kann nun ein Computer numerisch auswerten. V114

Spaltfunktion und Integralsinus



Integralsinus als Potenzreihe

Satz B1Q: Liouville 1835

Die Spaltfunktion $\mathrm{si} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig, analytisch, sogar **elementar**, aber ihre Integralfunktion $\mathrm{Si}(x) = \int_{t=0}^{x} \mathrm{si}(t)\,\mathrm{d}t$ ist **nicht elementar**.

Aufgabe: Entwickeln Sie si und Si als Potenzreihe. **Lösung:** :

$$\mathrm{si}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Si}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!(2k+1)} x^{2k+1}$$

Zur Probe nutzen wir umgekehrt den HDI, denn Potenzreihen dürfen wir termweises ableiten. Wir sehen $\mathrm{Si}' = \mathrm{si}$ und $\mathrm{Si}(0) = 0$, also $\mathrm{Si}(x) = \int_{t=0}^{x} \mathrm{si}(t)\,\mathrm{d}t$. 📖 Analysis, Beispiel 3.8.7. Zur Vertauschung des Integrals mit einer absolut konvergenten Reihe siehe Seite D106.

🙂 Die Darstellung als Potenzreihe nutzen wir für viele Funktionen. Sie ist für alle praktischen wie theoretischen Belange beinahe ebenso gut wie eine Darstellung durch elementare Funktionen. Die Spaltfunktion si und der Integralsinus Si treten zum Beispiel bei Beugung von Lichtwellen an einem Spalt auf. Äquivalent hierzu begegnet uns die Spaltfunktion als Fourier–Transformierte der Rechteckfunktion. K107 Anwendung: So werden mikroskopisch kleine Strukturen gemessen. Wir werden etwas später sogar den Grenzwert $\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \pi$ ausrechnen können, allerdings erst dank zweidimensionaler Integration, Integralsätzen und Residuenkalkül. F425 Unerschrockenen gelingt dies auch eindimensional mit der Laplace–Transformation. L409

Elementar integrierbar oder nicht. . . ?

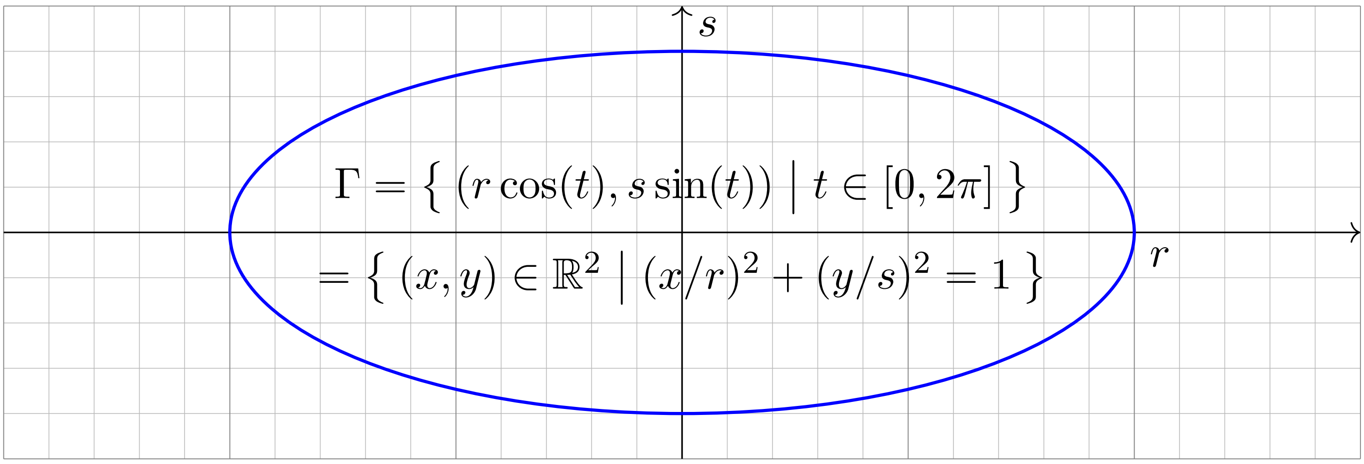
⚠ Elementare Fragen erfordern oft nicht-elementare Antworten.
Elementare Integrierbarkeit sieht man dem Integranden nicht leicht an:

elementar integrierbar	nicht elementar integrierbar
e^x	e^{x^2}, e^x/x
$\ln x$	$\ln\ln x$, $\sqrt{\ln x}$
$\sin x$, $\cos x$	$\sin(x)/x$
$\sqrt{\tan x}$	$\sqrt{\cos x}$
$\ln(x)/x$	$\ln(x)/(x-1)$
$\sqrt{1+x^2}$	$\sqrt[3]{1+x^2}$
$x^x + x^x \ln x$	x^x, $x^x \ln x$
$x \,/\, \sqrt{x^4 + 10x^2 - 96x - 71}$	$x \,/\, \sqrt{x^4 + 10x^2 - 96x - 72}$

☺ Computer-Algebra-Systeme nutzen den **Algorithmus von Risch**: Er findet entweder eine elementare Stammfunktion, falls eine existiert, oder aber er erkennt ihre Nicht-Existenz. Das ist phantastisch-genial!

Die Kurvenlänge von Ellipsen

Die **Ellipse** Γ um den Nullpunkt $(0,0)$ mit Radien $r, s > 0$:



Der umschlossene **Flächeninhalt** ist $\operatorname{vol}_2(A) = \pi r s$. (Warum?)
Die **Kurvenlänge** von Γ ist gegeben durch das elliptische Integral

$$\operatorname{vol}_1(\Gamma) = \int_{t=0}^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin(t)^2 + s^2 \cos(t)^2}\, dt.$$

Kurvenintegrale werden wir in Kapitel E noch ausführlicher behandeln. Für $r \neq s$ lässt es sich nicht durch elementare Funktionen ausdrücken! Dies gelingt als Potenzreihe in der **Exzentrizität** $\varepsilon := \sqrt{1 - s^2/r^2}$. E040

Viele Funktionen sind nicht Riemann–integrierbar.

Riemann–integrierbare Funktionen schachteln wir ein durch Treppenfunktionen (A3E). Diese Technik funktioniert bestens für stetige Funktionen, stößt aber schnell an ihre Grenzen:

♦ Satz A3F: Riemann–Integrierbarkeit, hier eindimensional

Genau dann ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann–integrierbar, wenn gilt:

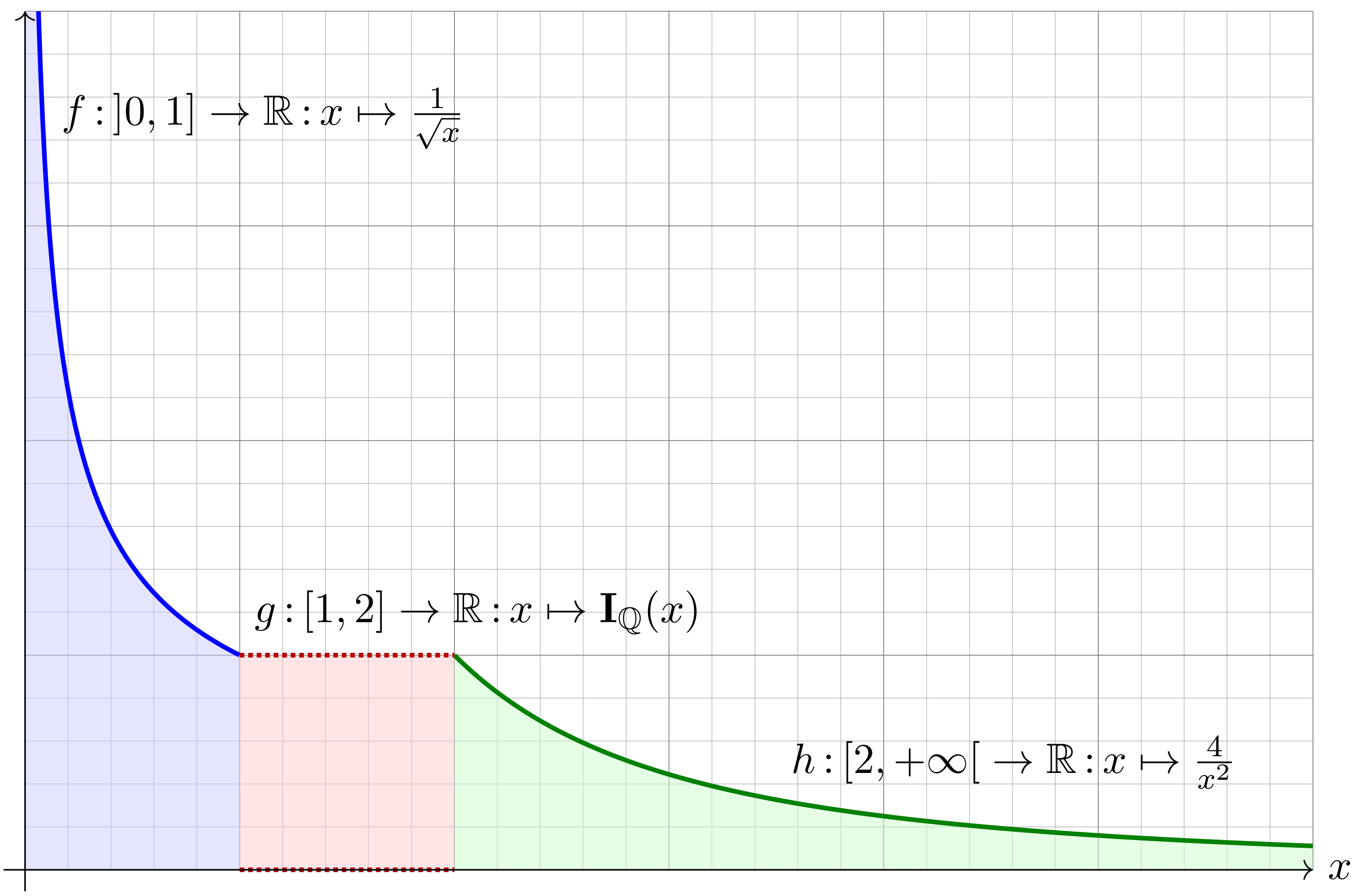
- Die Funktion f hat beschränkten Träger:
  Es gibt ein endliches Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ sodass $f(x) = 0$ für $x \notin I$.
- Die Funktion f hat beschränkten Wertebereich:
  Es gibt ein endliches Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ sodass $f(I) \subseteq J$.
- Die Funktion f ist fast überall stetig:
  Für die Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ der Unstetigkeitsstellen gilt $\operatorname{vol}_1(U) = 0$.

🙂 Alle stetigen Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sind Riemann–integrierbar.

☹ Viele Funktionen sind allein mit Einschachtelung nicht integrierbar.

Die nächste Seite zeigt drei typische Beispiele. Bei f ist der Wertebereich unbeschränkt, bei h hingegen der Träger: Diese lassen sich nicht durch Treppenfunktionen einschachteln! Die Funktion g ist in jedem Punkt unstetig: Zwar lässt sie sich durch Treppenfunktionen einschachteln, aber nicht beliebig genau, denn die Fläche dazwischen beträgt mindestens 1.

Viele Funktionen sind nicht Riemann–integrierbar.



Erinnerung: Monotone Konvergenz

Die erweiterte Zahlengerade $\bar{\mathbb{R}}$ vereinfacht Konvergenzaussagen:

♦ Satz A2E: Supremum und Infimum in $\bar{\mathbb{R}}$

Jede Teilmenge $M \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ hat ein Supremum und ein Infimum in $\bar{\mathbb{R}}$.

Ist die Menge M leer, so gilt $\sup \emptyset = -\infty$ und $\inf \emptyset = +\infty$.

♦ Satz A2F: monotone Konvergenz von Zahlenfolgen

Jede wachsende Folge $a_0 \le a_1 \le a_2 \le \dots$ in $\bar{\mathbb{R}}$ konvergiert gegen einen Grenzwert $a \in \bar{\mathbb{R}}$. Wir schreiben hierfür kurz $a_k \nearrow a$.

Für $b_0 \ge b_1 \ge b_2 \ge \dots$ in $\bar{\mathbb{R}}$ gilt entsprechend $b_k \searrow b$ mit $b \in \bar{\mathbb{R}}$.

♦ Satz A2G: monotone Konvergenz von Funktionenfolgen

Jede wachsende Folge $f_0 \le f_1 \le f_2 \le \dots$ von Funktionen $f_k : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ konvergiert punktweise gegen eine Grenzfunktion $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$.
Das heißt, für jedes $x \in \Omega$ gilt $f_k(x) \nearrow f(x)$, kurz $f_k \nearrow f$.

Für $g_0 \ge g_1 \ge g_2 \ge \dots : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ gilt entsprechend $g_k \searrow g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$.

Integration durch Ausschöpfung

Wir wollen $f : \Omega \to [0, \infty]$ ausschöpfen durch messbare Funktionen

$$f_0 \le f_1 \le f_2 \le \dots \quad \text{mit} \quad f_k \nearrow f.$$

D.h. es gilt monotone Konvergenz $f_k(x) \nearrow f(x)$ für jedes $x \in \Omega$.

Dank Monotonie des Integrals gilt dann

$$\int_\Omega f_0(x)\,\mathrm{d}x \le \int_\Omega f_1(x)\,\mathrm{d}x \le \int_\Omega f_2(x)\,\mathrm{d}x \le \dots$$

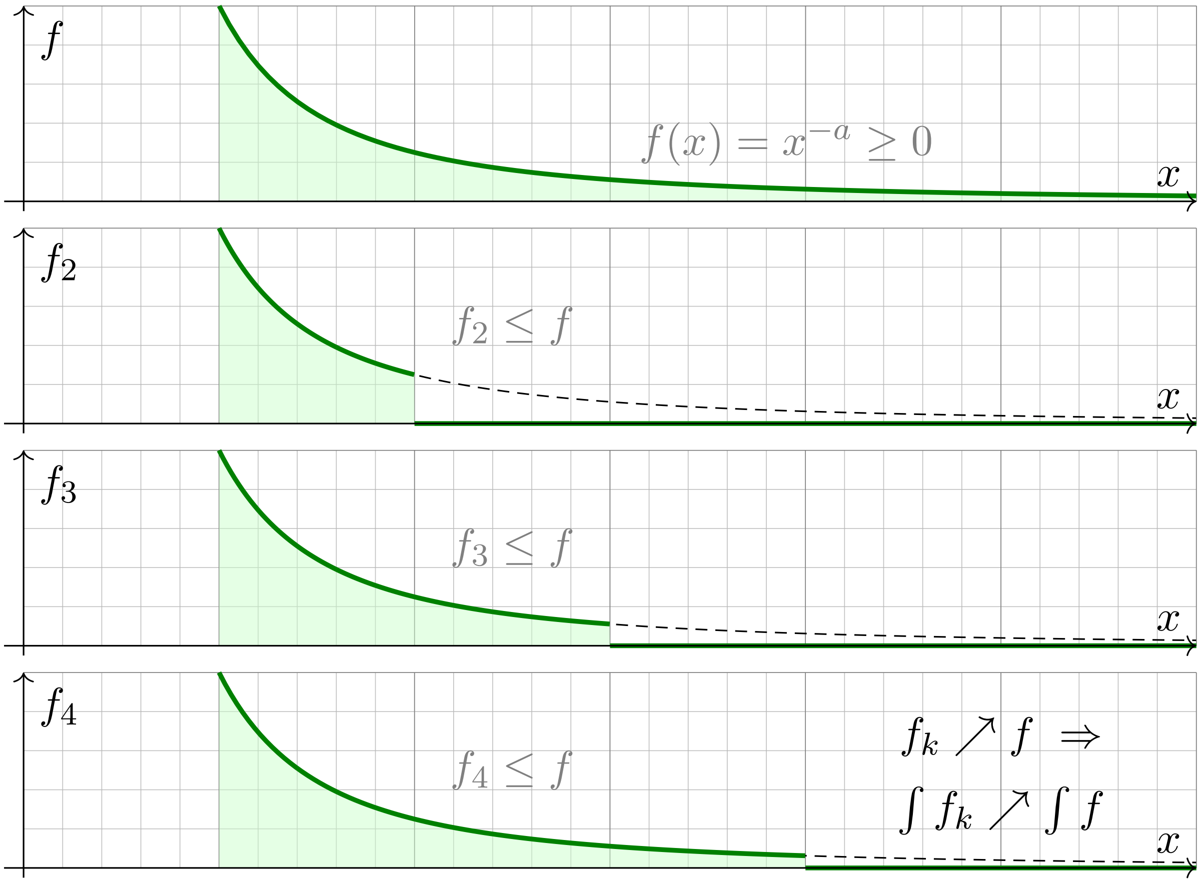
Hieraus folgt Konvergenz $\int_\Omega f_k(x)\,\mathrm{d}x \nearrow A$ gegen ein $A \in [0, \infty]$.

Auch die Grenzfunktion f ist dann messbar (A3G), und wir erhalten

$$\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x = A.$$

🙂 Diese Integrationsmethode ist das **Prinzip der Ausschöpfung**.
Das Ergebnis ist wohldefiniert, d.h. es hängt nur von der Funktion f ab, nicht jedoch von unserer willkürlichen Wahl einer Ausschöpfung $f_k \nearrow f$.

Beispiel: Integration durch Ausschöpfung



📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, Beispiel 3.7.8 und später B217. Die Funktion f ist nicht Riemann–integrierbar, da ihr Träger $[1, +\infty[$ nicht beschränkt ist.

Beispiel: Integration durch Ausschöpfung

Aufgabe: Integriere $f(x) = x^{-a}$ auf $\Omega = [1, +\infty[$ durch Ausschöpfung.

Lösung: Für $f_k = f \cdot \mathbf{I}_{[1,k]}$ gilt $f_k \nearrow f$. (1) Für $a = 1$ finden wir

$$\int_\Omega f_k(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Def}}{=} \int_{x=1}^{k} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \overset{\text{HDI}}{=} \Big[\ln x\Big]_{x=1}^{k} = \ln k \nearrow +\infty.$$

(2) Für $a < 1$ fällt f noch langsamer:

$$\int_\Omega f_k(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Def}}{=} \int_{x=1}^{k} x^{-a}\,\mathrm{d}x \overset{\text{HDI}}{=} \left[\frac{x^{1-a}}{1-a}\right]_{x=1}^{k} = \frac{k^{1-a}-1}{1-a} \nearrow +\infty$$

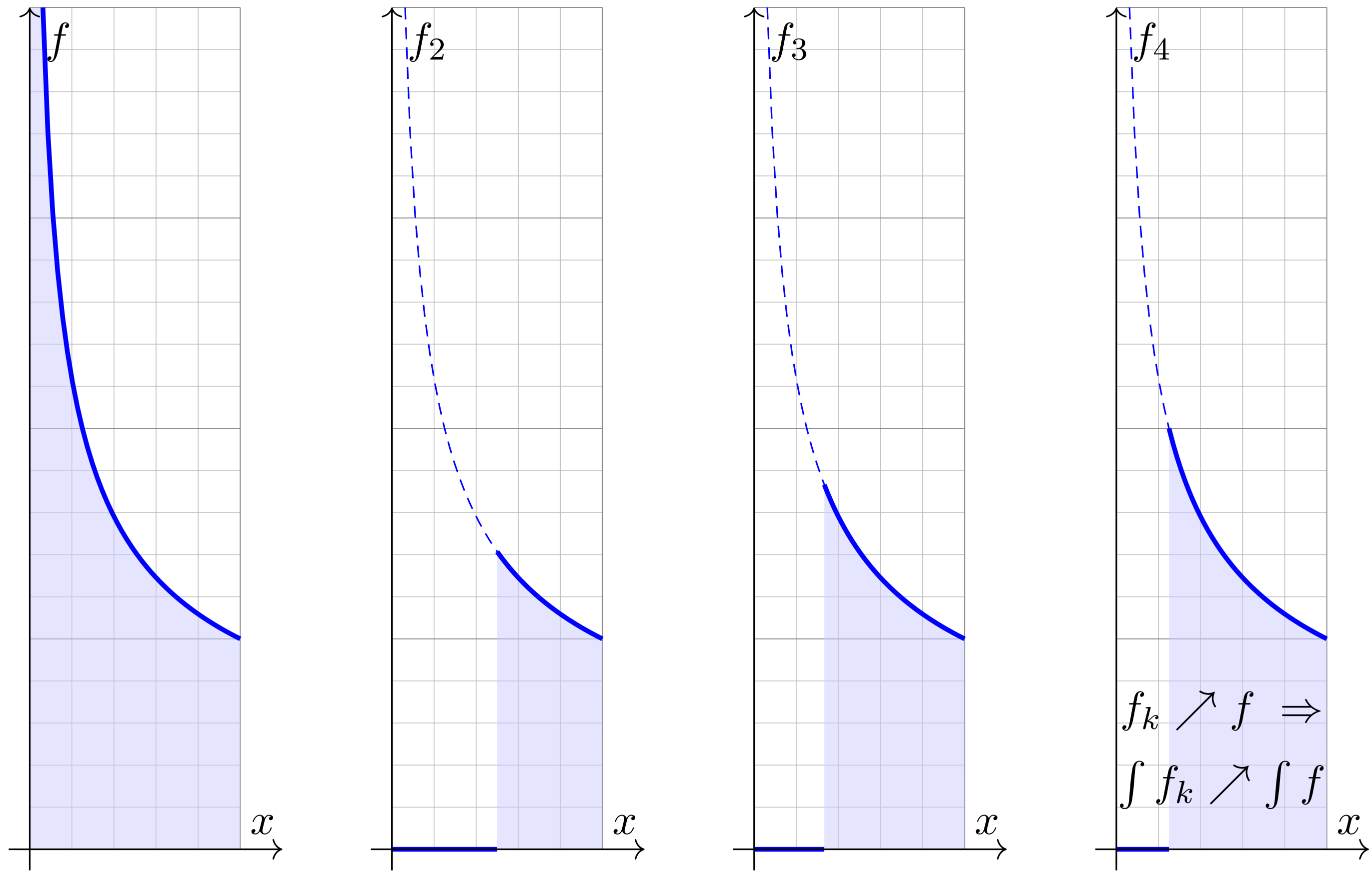
(3) Nur für $a > 1$ fällt f schnell genug:

$$\int_\Omega f_k(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Def}}{=} \int_{x=1}^{k} x^{-a}\,\mathrm{d}x \overset{\text{HDI}}{=} \left[\frac{x^{1-a}}{1-a}\right]_{x=1}^{k} = \frac{1-k^{1-a}}{a-1} \nearrow \frac{1}{a-1}$$

Dank Ausschöpfung $f_k \nearrow f$ gilt $\int_\Omega f_k \nearrow \int_\Omega f$. Wir erhalten also

$$\boxed{\int_{x=1}^{k} \frac{1}{x^a}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \ln k & \text{für } a = 1 \\ \frac{1-k^{1-a}}{a-1} & \text{für } a \neq 1 \end{cases} \xrightarrow{k\to\infty} \begin{cases} +\infty & \text{für } a \le 1, \\ \frac{1}{a-1} & \text{für } a > 1. \end{cases}}$$

Beispiel: Integration durch Ausschöpfung



📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, Beispiel 3.7.9 und später B217.
Die Funktion $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ ist nicht Riemann–integrierbar, da sie nicht beschränkt ist.

Beispiel: Integration durch Ausschöpfung

Aufgabe: Integriere $f(x) = x^{-a}$ auf $\Omega =]0,1]$ durch Ausschöpfung.

Lösung: Für $f_k = f \cdot \mathbf{I}_{[1/k,1]}$ gilt $f_k \nearrow f$. (1) Für $a = 1$ finden wir

$$\int_\Omega f_k(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Def}}{=} \int_{x=1/k}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \overset{\text{HDI}}{=} \Big[\ln x\Big]_{x=1/k}^{1} = \ln k \nearrow +\infty.$$

(2) Für $a > 1$ wächst f sogar noch schneller:

$$\int_\Omega f_k(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Def}}{=} \int_{x=1/k}^{1} x^{-a}\,\mathrm{d}x \overset{\text{HDI}}{=} \left[\frac{x^{1-a}}{1-a}\right]_{x=1/k}^{1} = \frac{k^{a-1}-1}{a-1} \nearrow +\infty$$

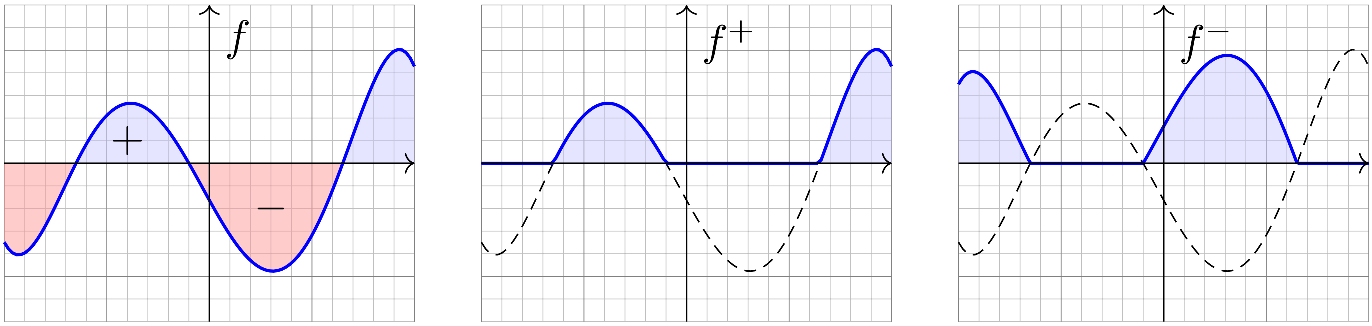
(3) Nur für $a < 1$ wächst f langsam genug:

$$\int_\Omega f_k(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Def}}{=} \int_{x=1/k}^{1} x^{-a}\,\mathrm{d}x \overset{\text{HDI}}{=} \left[\frac{x^{1-a}}{1-a}\right]_{x=1/k}^{1} = \frac{1-k^{a-1}}{1-a} \nearrow \frac{1}{1-a}$$

Dank Ausschöpfung $f_k \nearrow f$ gilt $\int_\Omega f_k \nearrow \int_\Omega f$. Wir erhalten also

$$\boxed{\int_{x=1/k}^{1} \frac{1}{x^a}\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{ll} \ln k & \text{für } a = 1 \\ \frac{1-k^{a-1}}{1-a} & \text{für } a \neq 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{k\to\infty} \left\{\begin{array}{ll} +\infty & \text{für } a \geq 1, \\ \frac{1}{1-a} & \text{für } a < 1. \end{array}\right.}$$

Absolut integrierbare Funktionen und ihr Integral



Bislang haben wir positive Funktionen durch Ausschöpfung integriert. Das passt zur Idee des Volumens und vereinfacht die Formulierung.

Für beliebige Funktionen $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ können wir wie folgt vorgehen: Wir zerlegen $f = f^+ - f^-$ in **Positivteil** f^+ und **Negativteil** f^- gemäß

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } f(x) > 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{falls } f(x) < 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für jede Funktion $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ gilt $f = f^+ - f^-$ und $|f| = f^+ + f^-$.
Umgekehrt gilt allgemein $f^\pm = \max(0, \pm f) = \frac{1}{2}(|f| \pm f)$.
Für $f(x) = \pm\infty$ nutzen wir die Konvention $\infty - \infty = 0$.

Absolut integrierbare Funktionen und ihr Integral

Zur Erinnerung an A3K: In einer Dimension sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall.

Definition B2A: absolut integrierbare Funktionen und ihr Integral

Genau dann ist $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ **messbar**, wenn $f^\pm : \Omega \to [0, \infty]$ messbar sind.
(1) In diesem Fall ist auch $|f| = f^+ + f^-$ messbar, und somit gilt

$$\int_\Omega \bigl|f(x)\bigr| \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f^+(x) \,\mathrm{d}x + \int_\Omega f^-(x) \,\mathrm{d}x.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so nennen wir f **(absolut) integrierbar**.
In diesem Fall können wir das Integral von f definieren durch

$$\boxed{\int_\Omega f(x) \,\mathrm{d}x := \int_\Omega f^+(x) \,\mathrm{d}x - \int_\Omega f^-(x) \,\mathrm{d}x.}$$

⚠ Die Differenz $\infty - \infty$ ist sinnlos! Zur Integration von $f = f^+ - f^-$ müssen Positivteil f^+ und Negativteil f^- endliche Integrale liefern.

☺ Das Kriterium $\int_\Omega |f(x)| \,\mathrm{d}x < \infty$ ist einfach, präzise und bequem. Geschickte Abschätzung vermeidet die mühsame Berechnung von $f^\pm$.

Absolut integrierbare Funktionen und ihr Integral

Beispiel: Für die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=\sin(x)/x$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f^+(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f^-(x)\,\mathrm{d}x = \infty.$$

Demnach ist f also nicht *absolut integrierbar*. (Seite B149 zeigt eine Skizze, die ausführliche Rechnung diskutieren wir auf Seite B421.) In diesem Fall hat es keinen Sinn, die Differenz $\infty-\infty$ zu betrachten!

Wir werden daher meist die **absolute Integrierbarkeit** voraussetzen. In diesem besten Falle haben f^+, f^- endliches Integral, und wir setzen

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} f^-(x)\,\mathrm{d}x.$$

Andernfalls haben viele Integrale zunächst keinen Sinn! Notfalls müssen wir **uneigentliche Integrale** oder den **Cauchy–Hauptwert** nutzen:

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad\text{oder}\quad \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^r f(x)\,\mathrm{d}x$$

Diese Konstruktionen sind etwas subtiler und leider weniger robust. B417
Die beste und robusteste Eigenschaft ist die absolute Integrierbarkeit.

Absolut integrierbare Funktionen und ihr Integral

Wir wollen möglichst allgemeine Funktionen $f:\Omega\to\bar{\mathbb{R}}$ integrieren. Zudem sollen die Rechenregeln möglichst einfach und allgemein sein. Dies gelingt nach Lebesgue mit den absolut integrierbaren Funktionen. Zur Erinnerung an A3L: In einer Dimension sei $\Omega\subseteq\mathbb{R}$ ein Intervall.

Satz B2B: absolut integrierbare Funktionen und ihr Integral

Wir betrachten ein Integrationsintervall $\Omega\subseteq\mathbb{R}$, etwa $\Omega=\mathbb{R}$. Die Menge aller (messbaren und) absolut integrierbaren Funktionen

$$L^1(\Omega) = L^1(\Omega,\mathbb{R}) := \left\{\, f:\Omega\to\mathbb{R} \;\middle|\; \textstyle\int_\Omega |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty \,\right\}$$

ist ein $\mathbb{R}$–Vektorraum. Hierauf ist das Integral eine $\mathbb{R}$–lineare Abbildung

$$\textstyle\int_\Omega \;:\; L^1(\Omega)\to\mathbb{R} \;:\; f\mapsto \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Sie ist normiert, monoton, erfüllt Einschachtelung und Ausschöpfung.

Hierbei ist $L^1(\Omega)$ der kleinste Funktionenraum, für den dies möglich ist, und auf $L^1(\Omega)$ ist das (Lebesgue–)Integral hierdurch eindeutig bestimmt.

Der Hauptsatz für stückweise stetige Funktionen

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist das Arbeitspferd der eindimensionalen Integration. In vielen Anwendungen, auch später in dieser Vorlesung, werden zudem stückweise stetige Funktionen (B1E) integriert. Die Ausformulierung das Hauptsatzes ist hier nicht schwer:

Satz B2C: Hauptsatz für stückweise stetige Funktionen

Ist $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit stückweise stetiger Ableitung $f = F'$, so gilt

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Ist umgekehrt eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stückweise stetig, so ist

$$F : [a, b] \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

stetig und erfüllt $F'(x) = f(x)$ für alle bis auf endlich viele $x \in [a, b]$.

Der Satz folgt aus dem HDI (B1I) durch stückweise Integration. Die folgende Optimierung ist technisch, zahlt sich aber später aus.

Der Hauptsatz für integrierbare Funktionen

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt viel allgemeiner für alle absolut integrierbaren Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, egal ob stetig, stückweise stetig, oder sehr unstetig. Die Integralfunktion F ist dann nicht mehr überall differenzierbar, aber immerhin fast überall. Die genaue Formulierung beruht auf dem Begriff der absoluten Stetigkeit (Heuser §131):

Definition B2D: absolut stetige Funktionen

Eine Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **absolut stetig**, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass gilt: Aus $a \le a_1 < b_1 \le \dots \le a_n < b_n \le b$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $\sum_{k=1}^n |a_k - b_k| < \delta$ folgt $\sum_{k=1}^n |F(a_k) - F(b_k)| < \varepsilon$.

Für $n = 1$ ist dies die gleichmäßige Stetigkeit; diese wird hier für n Intervalle verschärft. Absolute Stetigkeit liegt zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit, allgemein gilt nämlich: stetig differenzierbar $\Longrightarrow$ stetig und stückweise stetig differenzierbar $\Longrightarrow$ Lipschitz–stetig $\Longrightarrow$ absolut stetig $\Longrightarrow$ gleichmäßig stetig $\Longrightarrow$ stetig. Die Umkehrungen gelten im Allgemeinen nicht.

Lipschitz–Stetigkeit von $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ bedeutet, dass F beschränkte Differenzenquotienten hat, also $\left|\frac{F(s)-F(t)}{s-t}\right| \le L$ für eine Konstante $L \in \mathbb{R}$ und alle $s \ne t$ in $[a, b]$. Das ist oft nützlich.

Der folgende Satz von Lebesgue verallgemeinert den Hauptsatz B1I der Differential- und Integralrechnung von (stückweise) stetigen Integranden zu absolut integrierbaren Integranden. Dieses Ergebnis beinhaltet die Integralfunktionen aller stückweise stetigen Funktionen und auch sonst alle Funktionen, die uns im Folgenden begegnen werden.

Der Hauptsatz für integrierbare Funktionen

☺ Die absolute Stetigkeit ist maßgeschneidert für den HDI, denn sie charakterisiert genau die Integralfunktionen:

Satz B2E: Hauptsatz für absolut integrierbare Funktionen

Ist $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ absolut stetig, so ist F fast überall differenzierbar, ihre Ableitung $f=F':[a,b]\to\mathbb{R}$ ist absolut integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b)-F(a).$$

Ist umgekehrt eine Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ absolut integrierbar, so ist

$$F:[a,b]\to\mathbb{R}\quad\text{mit}\quad F(x):=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

absolut stetig, fast überall differenzierbar, und fast überall gilt $F'=f$.

Hierzu definieren wir die Ableitungsfunktion $F':[a,b]\to\mathbb{R}$ durch den Differentialquotienten $F'(x)=\lim_{\xi\to x}(F(\xi)-F(x))/(\xi-x)$ für alle $x\in[a,b]$, in denen dieser Grenzwert existiert, und $F'(x):=0$ sonst.

Der Hauptsatz für integrierbare Funktionen

☺ Absolute Stetigkeit lässt sich somit leicht charakterisieren:

Korollar B2F: absolut stetig und absolut integrierbar

Genau dann ist $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ absolut stetig, wenn es eine absolut integrierbare Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ gibt mit $F(x)=F(a)+\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

☺ Die partielle Integration gilt in allgemeiner Fassung:

Korollar B2G: partielle Integration, vgl. B1J

Sind $F,G:[a,b]\to\mathbb{R}$ absolut stetig, so auch FG, fast überall gilt $(FG)'=F'G+FG'$ und somit $\int_a^b FG'=[FG]_a^b-\int_a^b F'G$.

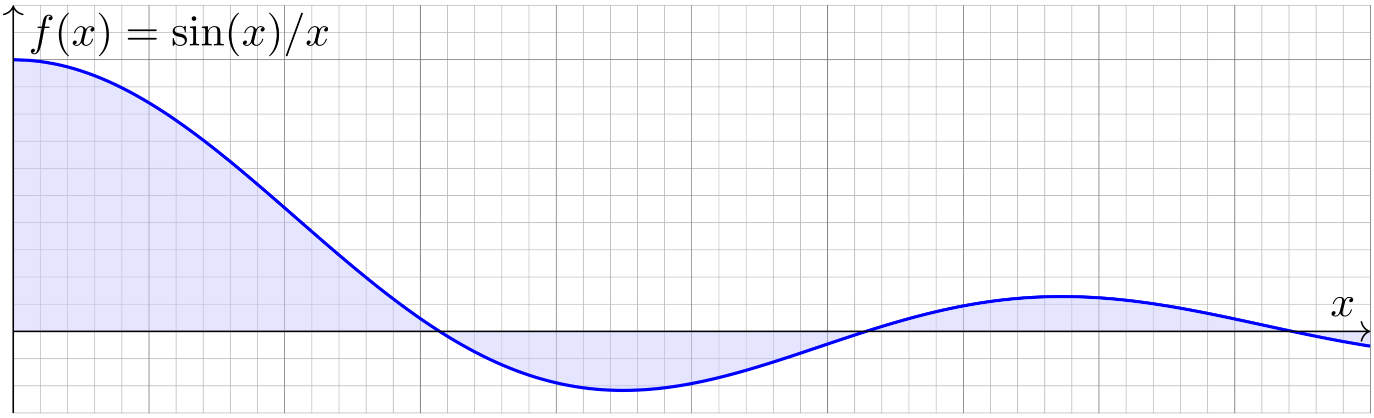
☺ Die Substitutionsregel gilt noch für monotone Parameterwechsel:

Korollar B2H: Substitutionsregel, vgl. B1K

Sei $g:[a,b]\to[c,d]$ monoton und absolut stetig. Ist $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ absolut integrierbar, so auch $(f\circ g)\cdot g'$ und $\int_a^b f(g(t))\,g'(t)\,\mathrm{d}t=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,\mathrm{d}u$.

Uneigentliche Integrale: einseitig

Zu integrieren sei $f : [a, b[\to \bar{\mathbb{R}}$, wobei $-\infty < a < b \leq +\infty$.



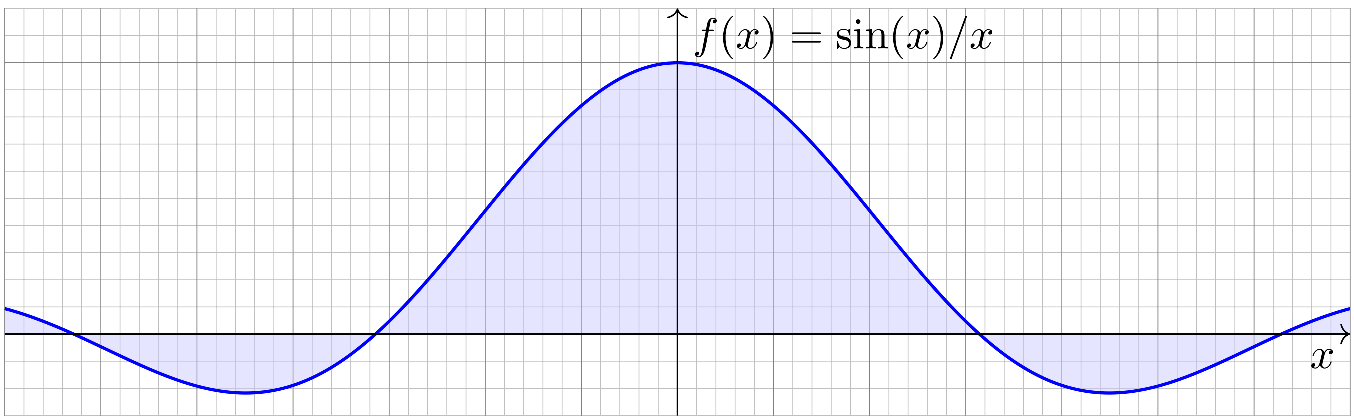
Die Funktion f sei auf jedem Teilintervall $[a, \beta] \subseteq [a, b[$ integrierbar.
Wir nennen f **uneigentlich integrierbar** auf $[a, b[$, wenn der Grenzwert

$$\int_a^{\to b} f(x)\,\mathrm{d}x \quad := \quad \lim_{\beta \nearrow b} \int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$$

in $\mathbb{R}$ existiert. Er heißt dann **uneigentliches Integral** von f auf $[a, b[$.
Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §3.7.

Uneigentliches Integral: beidseitig

Zu integrieren sei $f :]a, b[\to \bar{\mathbb{R}}$, wobei $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.



Die Funktion f sei auf jedem Teilintervall $[\alpha, \beta] \subseteq]a, b[$ integrierbar.

$$\int_{\to a}^{\to b} f(x)\,\mathrm{d}x \quad := \quad \lim_{\alpha \searrow a} \int_\alpha^z f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\beta \nearrow b} \int_z^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$$

Wir nennen f **uneigentlich integrierbar**, wenn beide Grenzwerte in $\mathbb{R}$ existieren. Ihre Summe heißt **uneigentliches Integral** von f auf $]a, b[$.
Dies ist unabhängig von der Wahl des Teilungspunktes $z \in]a, b[$.

Uneigentliche Integrale und Cauchy–Hauptwert

Zur Integration über ganz $\mathbb{R}$ haben wir drei nützliche Möglichkeiten:

(1) Bei **absoluter Integration** zerlegen wir $f = f^+ - f^-$ und setzen

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x := \int_{\mathbb{R}} f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} f^-(x)\,\mathrm{d}x.$$

⚠ Hierzu müssen rechts beide Integrale endlich sein.

☺ Dieser Integrationsbegriff gilt allgemein über $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ (A3K).

(2) Das **uneigentliche Integral** von f ist die Summe der Grenzwerte

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{a\to-\infty} \int_a^z f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty} \int_z^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

⚠ Hierzu müssen beide Grenzwerte existieren und endlich sein.

☺ Existiert das Integral (1) so auch (2) und beide sind gleich. B221

(3) Der **Cauchy–Hauptwert** von f ist der Grenzwert (falls existent)

$$(\mathrm{CH}) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

☺ Existiert das Integral (2) so auch (3) und beide sind gleich. B223

⚠ Die Umkehrungen (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) gelten im Allgemeinen nicht. B417

Uneigentliche Integrale und Cauchy–Hauptwert

Diese drei Begriffe hängen eng miteinander zusammen:

$$\text{absolut} \;\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}\; \text{uneigentlich} \;\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}\; \text{Cauchy–Hauptwert}$$

Für das absolute Integral (1) von $f = f^+ - f^-$ integrieren wir Positivteil f^+ und Negativteil f^- getrennt. Sind beide Integrale endlich, so können wir ihre Differenz bilden, das Ergebnis ist das absolute Integral von f.

Sollte f nicht absolut integrierbar sein, so betrachten wir stattdessen allgemeiner (2) oder gar (3). Wir nehmen hierzu an, dass f wenigstens über jedem endlichen Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ absolut integrierbar ist.

Für das uneigentliche Integral (2) wählen wir einen Teilungspunkt z, zum Beispiel $z = 0$. (Das Ergebnis ist von dieser Wahl unabhängig.) Wenn beide Grenzwerte $\lim_{a\to-\infty} \int_a^z f(x)\,\mathrm{d}x$ und $\lim_{b\to+\infty} \int_z^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existieren, so nennen wir f uneigentlich integrierbar und definieren das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ wie oben als ihre Summe.

Für den Cauchy–Hauptwert (3) bilden wir das Integral $\int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x$ über das symmetrische Intervall $[-r, r]$ und bilden den Grenzwert $r \to \infty$. Wenn dieser existiert, so nennen wir ihn den Cauchy–Hauptwert.

Absolute impliziert uneigentliche Integrierbarkeit

Satz B2I: Absolute impliziert uneigentliche Integrierbarkeit.

(1) Für jede messbare Funktion $f :]a,b[\to \bar{\mathbb{R}}$ und $z \in]a,b[$ gilt

$$\lim_{\alpha \searrow a} \int_\alpha^z |f(x)| \,\mathrm{d}x + \lim_{\beta \nearrow b} \int_z^\beta |f(x)| \,\mathrm{d}x = \int_{]a,b[} |f(x)| \,\mathrm{d}x.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so ist f absolut integrierbar, und es gilt

$$\lim_{\alpha \searrow a} \int_\alpha^z f(x) \,\mathrm{d}x + \lim_{\beta \nearrow b} \int_z^\beta f(x) \,\mathrm{d}x = \int_{]a,b[} f(x) \,\mathrm{d}x.$$

Für nicht-negative Funktionen $f \ge 0$ stimmen also beide Integrationsmethoden (absolut vs uneigentlich) überein und liefern dasselbe Ergebnis. Für absolut integrierbare Funktionen f ist die Definition $\int f = \int f^+ - \int f^-$ die robustere Methode mit besseren Eigenschaften. Wenn sie möglich ist, so impliziert sie insbesondere die uneigentliche Integrierbarkeit. Wie unten erläutert gibt es jedoch auch Funktionen, die nicht absolut, sondern nur uneigentlich integrierbar sind. In solchen Notfällen müssen wir uns mit uneigentlichen Integralen begnügen, auch wenn sie weniger gute Eigenschaften haben. Das ist später für Fourier–Integrale immer wieder nützlich.

Absolute impliziert uneigentliche Integrierbarkeit

Nachrechnen: Sei $\alpha_n \searrow a$ und $\beta_n \nearrow b$ Folgen mit $\alpha_n < z < \beta_n$. Sei zunächst $f \ge 0$. Für $f_n = \mathbf{I}_{[\alpha_n, \beta_n]} f$ gilt dann $f_n \nearrow f$, also

$$\int_{\alpha_n}^z f(x) \,\mathrm{d}x = \int_{]a,z]} f_n(x) \,\mathrm{d}x \quad \nearrow \quad \int_{]a,z]} f(x) \,\mathrm{d}x,$$
$$\int_z^{\beta_n} f(x) \,\mathrm{d}x = \int_{[z,b[} f_n(x) \,\mathrm{d}x \quad \nearrow \quad \int_{[z,b[} f(x) \,\mathrm{d}x.$$

Dies beweist die erste Gleichung. Ist f absolut integrierbar, so gilt

$$\int_{\alpha_n}^z f = \int_{\alpha_n}^z f^+ - \int_{\alpha_n}^z f^- \quad \to \quad \int_{]a,z]} f^+ - \int_{]a,z]} f^- = \int_{]a,z]} f,$$
$$\int_z^{\beta_n} f = \int_z^{\beta_n} f^+ - \int_z^{\beta_n} f^- \quad \to \quad \int_{[z,b[} f^+ - \int_{[z,b[} f^- = \int_{[z,b[} f.$$

Demnach existiert beide Grenzwerte, und es gilt die zweite Gleichung.

⚠ Ist f nicht absolut integrierbar, so existiert in manchen Fällen wenigstens noch das uneigentliche Integral. Das ist sein Zweck.

Uneigentliches Integral: Cauchy–Hauptwert

Der **Cauchy–Hauptwert** einer Funktion $f:\mathbb{R}\to\bar{\mathbb{R}}$ ist

$$\text{(CH)} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x$$

insofern dieser Grenzwert in $\mathbb{R}$ existiert. Diese Vereinbarung erlaubt uns, auch manch divergenten Integralen noch einen Wert zuzuordnen, sofern sich divergente Teile verschiedenen Vorzeichens gegenseitig aufheben.

Satz B2J: Absolute Integrierbarkeit impliziert Cauchy–Hauptwert.

(1) Für jede messbare Funktion $f:\mathbb{R}\to\bar{\mathbb{R}}$ gilt

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so ist f absolut integrierbar, und es gilt

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Uneigentliches Integral: Cauchy–Hauptwert

Bemerkung: In Definition und Satz nehmen wir stillschweigend an, dass die Funktion $f:\mathbb{R}\to\bar{\mathbb{R}}$ auf jedem Intervall $[-r,r]$ integrierbar ist.

Nachrechnen: Sei $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $r_n \nearrow +\infty$.
Sei zunächst $f\ge 0$. Für $f_n = \mathbf{I}_{[-r_n,r_n]}\, f$ gilt dann $f_n \nearrow f$, also

$$\int_{-r_n}^{r_n} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,\mathrm{d}x \quad \nearrow \quad \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

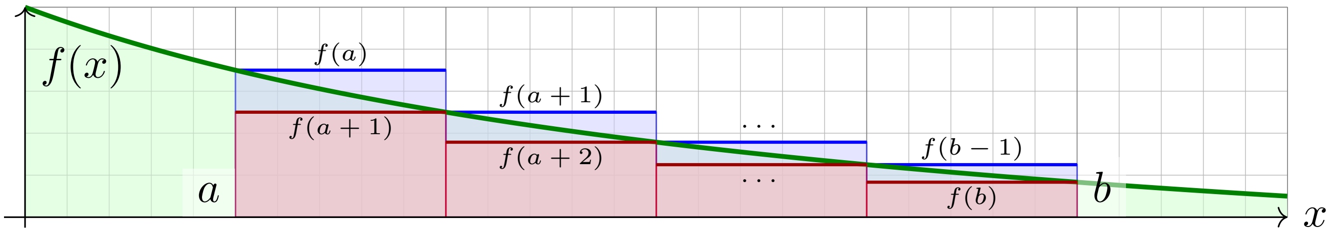
Dies zeigt die erste Gleichung. Ist f auf $\mathbb{R}$ absolut integrierbar, so gilt

$$\int_{-r_n}^{r_n} f = \int_{-r_n}^{r_n} f^+ - \int_{-r}^{r} f^- \quad \to \quad \int_{\mathbb{R}} f^+ - \int_{\mathbb{R}} f^- = \int_{\mathbb{R}} f.$$

Demnach existiert dieser Grenzwert, und es gilt die zweite Gleichung.

⚠ Ist f weder absolut noch uneigentlich integrierbar, so existiert manchmal wenigstens noch der Cauchy–Hauptwert. Genau das ist sein Zweck. Er hat nicht ganz so gute Eigenschaften, ist aber besser als nichts.

Monotoner Vergleich von Summe und Integral



Satz B3A: monotoner Vergleich von Integral und Reihe

Sei $f : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ monoton fallend. Für alle $a < b$ in $\mathbb{N}$ gilt dann:

$$\sum_{k=a+1}^{b} f(k) \quad \le \quad \int_{x=a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \le \quad \sum_{k=a}^{b-1} f(k)$$

Durch Umstellung ist hierzu äquivalent:

$$\int_{x=a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \le \quad \sum_{k=a}^{b-1} f(k) \quad \le \quad f(a) + \int_{x=a}^{b-1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

🙂 Reihe und Integral haben gleiches Konvergenzverhalten für $b \to \infty$.
🙂 Beide können gegenseitig als Näherung genutzt werden.

Anwendung auf die harmonische Reihe

Aufgabe: Wir untersuchen die **harmonische Reihe**

$$H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

(1) Schachteln Sie den Wert H_n ein durch den Logarithmus $\ln(n)$.
(2) Folgern Sie das Konvergenzverhalten von H_n für $n \to \infty$.
(3) Bei welchem Index n überschreitet H_n den Wert 1000?

Lösung: (1) Für die Funktion $f(x) = 1/x$ erhalten wir dank Satz B3A:

$$\ln(n) \quad < \quad \ln(n+1) \quad \le \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \le \quad 1 + \ln(n)$$

🙂 Die harmonische Reihe wächst wie der natürliche Logarithmus!

(2) Insbesondere erhalten wir die Divergenz $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to \infty$ für $n \to \infty$.

(3) Bei $n \approx \mathrm{e}^{1000} \approx 2 \cdot 10^{434}$. Wir werden das also sicher nie erleben!

📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §1.8–§1.9.

🙂 Den Vergleich von Summe und Integral nutzen wir ausgiebig für den lokalen Grenzwertsatz in der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Kapitel V).

Konvergenz von Integralen und Reihen

Aufgabe: (1) Finden Sie Stammfunktionen zu den Funktionen

$$\frac{1}{x^s}, \qquad \frac{1}{x\,(\ln x)^s}, \qquad \frac{1}{x\,\ln x\,(\ln\ln x)^s}.$$

(2) Für welche Exponenten $s \in \mathbb{R}$ konvergieren folgende Reihen?

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\,(\ln k)^s}, \qquad \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k\,\ln k\,(\ln\ln k)^s}$$

Lösung: (1) Wir unterscheiden die Fälle $s = 1$ und $s \neq 1$:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln(x), \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \ln\ln x, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\ln\ln x} = \ln\ln\ln x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s}, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^s} = \frac{(\ln x)^{1-s}}{1-s}, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x(\ln\ln x)^s} = \frac{(\ln\ln x)^{1-s}}{1-s}$$

(2) Für $s \le 1$ divergieren die Integrale, also auch die Reihen (B3A). Für $s > 1$ konvergieren die Integrale, also auch die Reihen. (Elementare Grenzwerte sind nur für spezielle Werte wie $s = 2, 4, 6, 8, \dots$ bekannt.)

Approximation einer Dirichlet–Reihe durch Integrale

Aufgabe: Berechnen Sie durch Summation näherungsweise den Wert

$$\zeta(3) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \quad \text{der Riemannschen Zeta–Funktion} \quad \zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

bis auf einen Fehler $\le \varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-6}$, also sechs Nachkommastellen. Wie kontrollieren Sie den Fehler? Wie weit müssen Sie summieren?

Lösung: Wir berechnen die endlichen Summen $s_n = \sum_{k=1}^{n} k^{-3}$ und wählen n so, dass der Rest $\zeta(3) - s_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-3}$ kleiner als ε ist:

$$0 \;<\; \int_{x=n+1}^{\infty} x^{-3}\,\mathrm{d}x \;<\; \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-3} \;<\; \int_{x=n}^{\infty} x^{-3}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{2n^2} \;\overset{!}{\le}\; \varepsilon$$

Die Wahl $n = 1000$ garantiert einen Fehler $\le 0.5 \cdot 10^{-6} = 0.0000005$. Wir finden $s_{1000} = 1.20205640\dots$, also $1.20205689 < \zeta(3) < 1.20205691$.

Noch besser: $s_n + (n+1)^{-2}/2 \le \zeta(3) \le s_n + n^{-2}/2$, Fehler $< n^{-3}$. Mit diesem raffinierten Trick genügt schon die Summation bis $n = 100$.

Mit Fourier–Reihen (Kapitel I) finden wir $\zeta(2) = \pi^2/6$, $\zeta(4) = \pi^4/90$, $\zeta(6) = \pi^6/945$. Für $\zeta(3)$, $\zeta(5)$, $\zeta(7)$ sind keine solchen Formeln bekannt.

HDI: diskrete Version für Summen

Aufgabe: (1) Nennen und beweisen Sie die Summenformeln zu

$$\sum_{k=0}^{n-1} 1, \qquad \sum_{k=0}^{n-1} k, \qquad \sum_{k=0}^{n-1} k^2, \qquad \sum_{k=0}^{n-1} k^3, \qquad \dots$$

📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, Beispiele 1.2.2 und 1.2.4.

(2) Allgemein: Formulieren Sie die diskrete Version des HDI (Satz B1I).

(3) Analog zu monoton fallenden Funktionen sei nun $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ monoton wachsend. Formulieren und beweisen Sie (wie in Satz B3A) Ungleichungen zwischen Summe $\sum_{k=m}^{n} f(k)$ und Integral $\int_{x=a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$

(4) Beweisen Sie für jedes $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Ungleichung der Form

$$c_s\,(n-1)^{s+1} \quad\leq\quad \sum_{k=0}^{n-1} k^s \quad\leq\quad c_s\,n^{s+1}$$

mit einer passenden Konstanten $c_s \in \mathbb{R}$, und allgemeiner

$$c_s\left[(b-1)^{s+1} - (a-1)^{s+1}\right] \quad\leq\quad \sum_{k=a}^{b-1} k^s \quad\leq\quad c_s\left[b^{s+1} - a^{s+1}\right].$$

HDI: diskrete Version für Summen

Lösung: (1) Wir kennen bzw. finden die Summenformeln

$$\sum_{k=0}^{n-1} 1 = n, \qquad \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2},$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}, \qquad \sum_{k=0}^{n-1} k^3 = \frac{n^2(n-1)^2}{4}.$$

(2) Liegt eine solche Formel $\sum_{k=0}^{n-1} f(k) = [F]_0^n$ bereits (als Vermutung) vor, so gelingt der Beweis leicht durch folgende „diskrete Ableitung“:

Satz B3B: HDI, diskrete Version für Summen

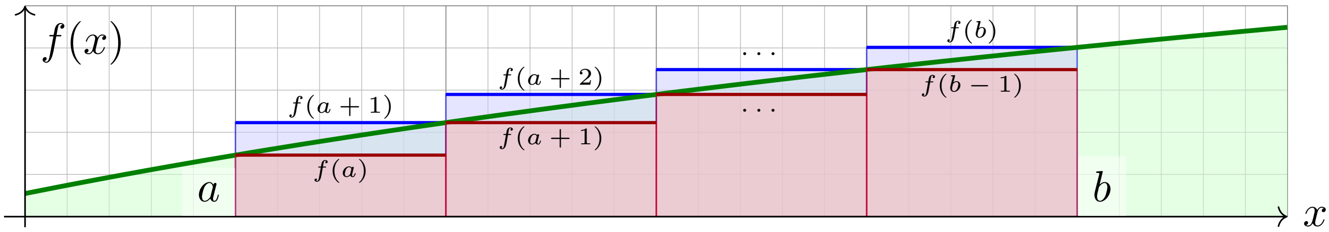
Für $f, F : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ gelte $f(k) = F(k+1) - F(k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Durch Summation erhalten wir hieraus die Teleskopsumme

$$\sum_{k=a}^{b-1} f(k) = \sum_{k=a}^{b-1}\big[F(k+1) - F(k)\big] = F(b) - F(a) =: \big[F\big]_a^b.$$

Beispiele sind $f(k) = 1$, $F(k) = k$ und $f(k) = k$, $F(k) = k(k-1)/2$ etc. wie oben angegeben. Man rechnet dies nun leicht / mechanisch nach.

Monotoner Vergleich von Summe und Integral

(3) Wir machen eine Skizze und lesen die Ungleichungen ab:



Satz B3c: monotoner Vergleich von Summe und Integral

Sei $f:\mathbb{R}_{\ge 0}\to\mathbb{R}_{\ge 0}$ monoton wachsend. Für alle $a<b$ in $\mathbb{N}$ gilt dann:

$$\sum_{k=a}^{b-1} f(k) \quad\le\quad \int_{x=a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \quad\le\quad \sum_{k=a+1}^{b} f(k)$$

Durch Umstellung ist hierzu äquivalent:

$$f(a)+\int_{x=a}^{b-1} f(x)\,\mathrm{d}x \quad\le\quad \sum_{k=a}^{b-1} f(k) \quad\le\quad \int_{x=a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Übung: Beweisen Sie die Sätze B3a, B3b, B3c sorgsam per Induktion.

Monotoner Vergleich von Reihe und Integral

(4) Wir wenden den Satz auf die Funktion $f(x)=x^s$ mit $s\ge 0$ an.
Dank der Stammfunktion $\int x^s\,\mathrm{d}x = x^{s+1}/(s+1)$ erhalten wir

$$\left[\frac{x^{s+1}}{s+1}\right]_{a-1}^{b-1} \quad\le\quad \sum_{k=a}^{b-1} k^s \quad\le\quad \left[\frac{x^{s+1}}{s+1}\right]_{a}^{b}.$$

Im Spezialfall $a=0$ und $b=n-1$ folgt hieraus

$$\frac{(n-1)^{s+1}}{s+1} \quad\le\quad \sum_{k=0}^{n-1} k^s \quad\le\quad \frac{n^{s+1}}{s+1}.$$

☺ Wir sehen insbesondere, dass wir die Konstante $c_s=1/(s+1)$ nicht anders wählen können, in diesem Sinne sind diese Schranken optimal.

☺ Wir erhalten so eine nützliche Näherungsformel für $\sum_{k=0}^{n-1} k^s$, genauer sogar eine Einschachtelung: verlässlich und beweisbar.

☺ Wenn's exakt sein muss, haben wir obige Summenformeln (1). Diese liefern den exakten Wert, sind dafür aber etwas mühsamer.

Näherungsformel für die Fakultät $n!$

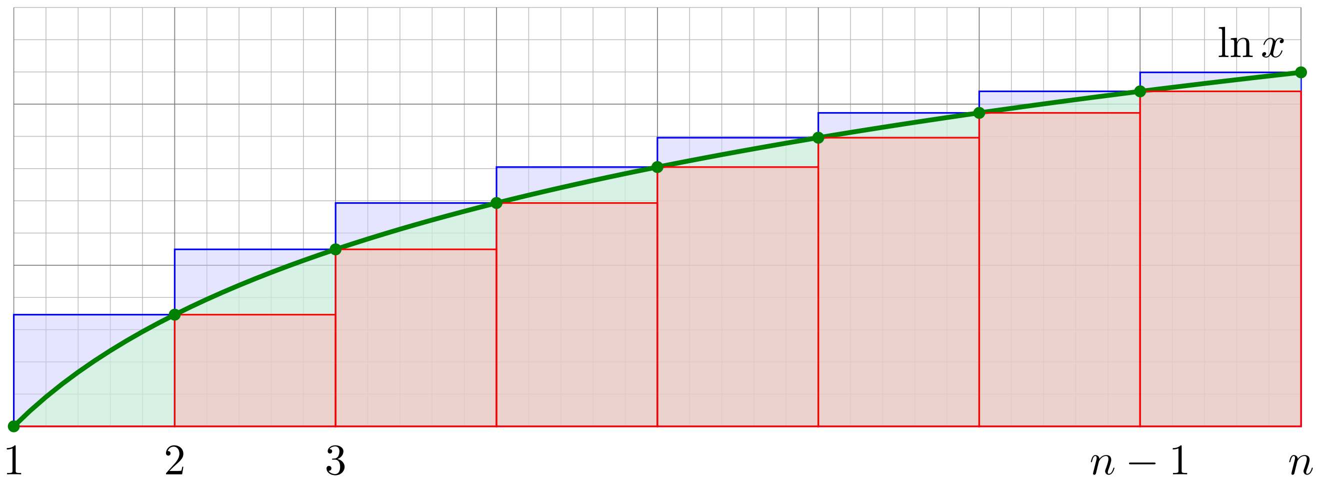
Mit Integralen können Sie nicht nur Flächeninhalte bestimmen, sondern auch Summen und Produkte berechnen oder approximieren. Als wichtiges Beispiel betrachten wir hier die Formel von Stirling.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die **Fakultät** definiert durch $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$. Für $n \to \infty$ suchen wir eine einfache, aber gute Näherungsformel.

$0! = 1$	$7! = 5\,040$	$14! = 87\,178\,291\,200$
$1! = 1$	$8! = 40\,320$	$15! = 1\,307\,674\,368\,000$
$2! = 2$	$9! = 362\,880$	$16! = 20\,922\,789\,888\,000$
$3! = 6$	$10! = 3\,628\,800$	$17! = 355\,687\,428\,096\,000$
$4! = 24$	$11! = 39\,916\,800$	$18! = 6\,402\,373\,705\,728\,000$
$5! = 120$	$12! = 479\,001\,600$	$19! = 121\,645\,100\,408\,832\,000$
$6! = 720$	$13! = 6\,227\,020\,800$	$20! = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000$

Aufgabe: (1) Gewinnen Sie Abschätzungen für $n!$ (grobe Ungleichung) durch den Vergleich von Integral $\int_{x=1}^{n} \ln x \,\mathrm{d}x$ und Summe $\sum_{k=1}^{n} \ln k$.
(2) Nutzen Sie die Trapezregel für eine bessere Näherung.

Stirling–Formel: grobe Ungleichung



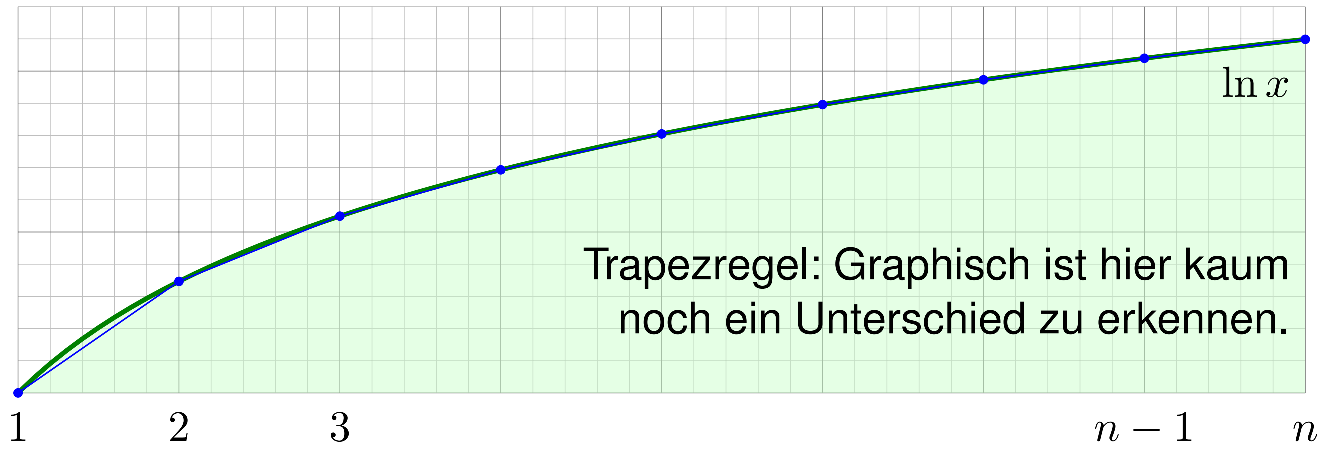
Lösung: (1) Wir vergleichen Integral und Summe:

$$\begin{aligned} & \int_1^n \ln x \,\mathrm{d}x = \big[x \ln x - x\big]_1^n = n \ln n - n + 1 \\ < \quad & \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln(n-1) + \ln n = \ln(n!) \\ < \quad & \int_1^n \ln x \,\mathrm{d}x + \ln n = (n+1) \ln n - n + 1 \end{aligned}$$

Dank Monotonie der Exponentialfunktion erhalten wir

$$\mathrm{e} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \;<\; n! \;<\; \mathrm{e}\, n \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

Stirling–Formel: bessere Näherung



(2) Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gilt dank Trapezregel und Konkavität:

$$\int_1^n \ln x \,\mathrm{d}x \;\gtrapprox\; \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln(k) + \ln(k+1)}{2} \;=\; \ln(n!) - \frac{\ln(n)}{2}$$

Dank Monotonie der Exponentialfunktion erhalten wir

$$n! \lessapprox \mathrm{e}\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

Diese Abschätzung ist um einen Faktor $\sqrt{n}$ besser als die vorige. Bis auf den konstanten Faktor e ist dies die berühmte Stirling–Formel!

Stirling–Formel: asymptotische Äquivalenz

Die Ähnlichkeit von $n!$ und $\sqrt{n}(\frac{n}{\mathrm{e}})^n$ haben wir oben erklärt durch Vergleich von Summe und Integral. Die dabei gefundene Konstante $\mathrm{e} \approx 2.7183$ ist allerdings noch etwas zu groß. Die richtige Konstante $\sqrt{2\pi} \approx 2.5066$ werden wir später ausrechnen können, siehe D435.

Satz B3D: Stirling–Formel mit Fehlerschranke

Für $n \to \infty$ gilt die asymptotische Äquivalenz

$$\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.}$$

Die Äquivalenz $f(n) \sim g(n)$ bedeutet $f(n)/g(n) \to 1$ für $n \to \infty$.

Genauer gilt

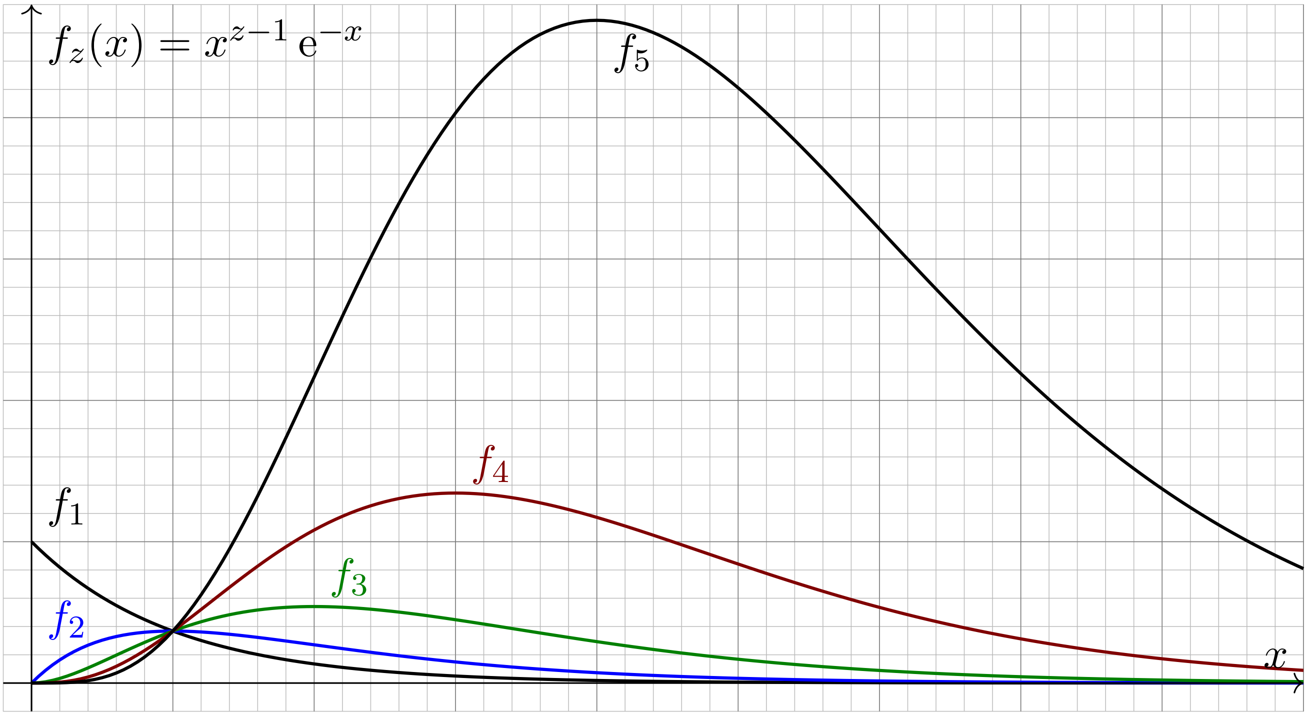
$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \cdot \mathrm{e}^{\varepsilon(n)}$$

mit Fehlerschranke

$$0 \leq \frac{1}{12n+1} \leq \varepsilon(n) \leq \frac{1}{12n} \searrow 0.$$

Berechnung der Gamma-Funktion $\Gamma(n) = (n-1)!$

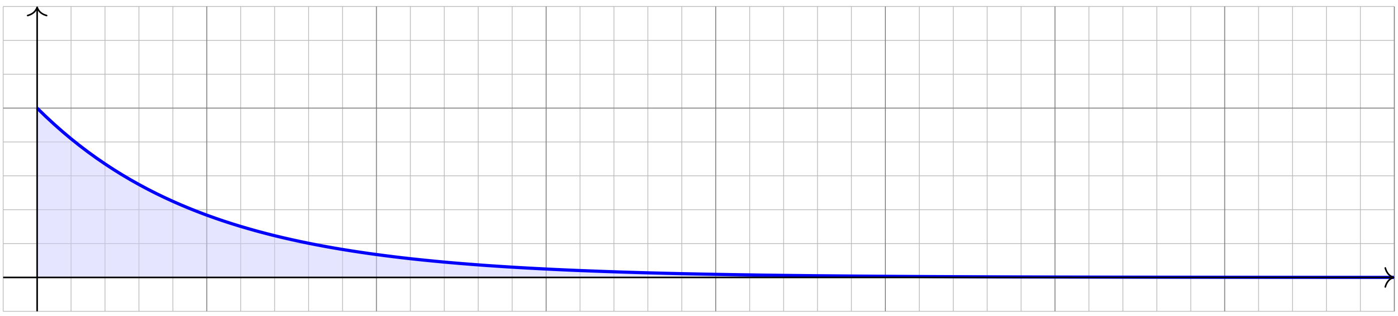
Die **Gamma-Funktion** ist $\Gamma : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0} : z \mapsto \Gamma(z) := \int_{x=0}^{\infty} x^{z-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.
Dieses Integral konvergiert für alle $z > 0$ und divergiert für $z \le 0$. B208



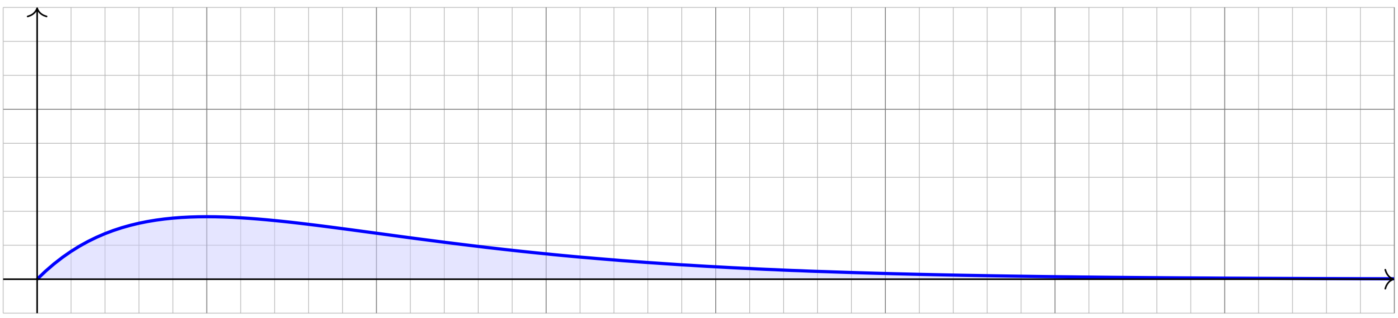
Aufgabe: Berechnen Sie $\Gamma(1), \Gamma(2), \Gamma(3), \Gamma(4), \dots$, allgemein $\Gamma(n+1)$.
Zeigen Sie hierzu die Funktionalgleichung $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ für $z > 0$.

Berechnung der Gamma-Funktion $\Gamma(n) = (n-1)!$

📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, 3.7.13.

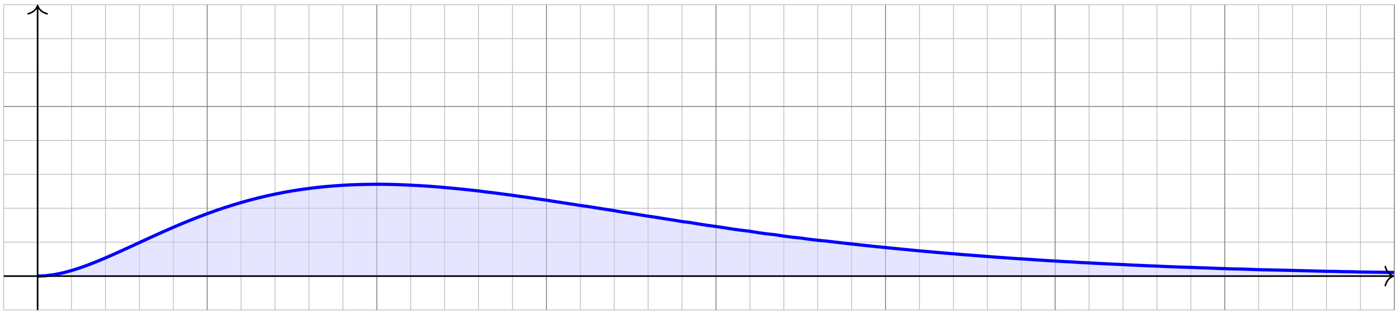


$$\Gamma(1) = \int_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to+\infty} \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_{x=0}^{k} = \lim_{k\to+\infty} \Big(1 - \mathrm{e}^{-k}\Big) = 1$$

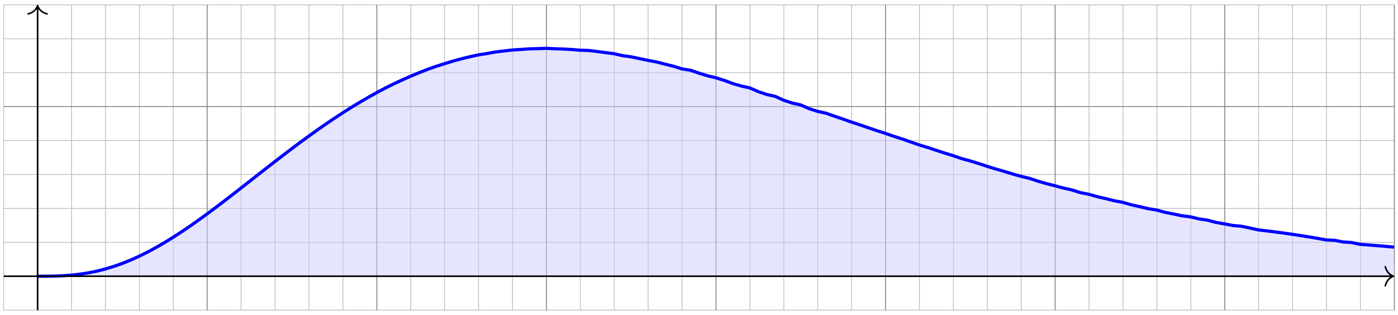


$$\Gamma(2) = \int_{x=0}^{\infty} x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \Big[-x\,\mathrm{e}^{-x}\Big]_{x=0}^{\infty} + \int_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$$

Berechnung der Gamma-Funktion $\Gamma(n) = (n-1)!$



$$\Gamma(3) = \int_{x=0}^{\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \Big[-x^2\,\mathrm{e}^{-x}\Big]_{x=0}^{\infty} + 2\int_{x=0}^{\infty} x^1\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 2\cdot 1 = 2$$



$$\Gamma(4) = \int_{x=0}^{\infty} x^3\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \Big[-x^3\,\mathrm{e}^{-x}\Big]_{x=0}^{\infty} + 3\int_{x=0}^{\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 3\cdot 2 = 6$$

Berechnung der Gamma-Funktion $\Gamma(n) = (n-1)!$

Wir nutzen Ausschöpfung und partielle Integration:

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \int_{x=0}^{\infty} x^z\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_{x=0}^{k} x^z\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{k\to\infty}\left(\Big[-x^z\,\mathrm{e}^{-x}\Big]_{x=0}^{k} + z\int_{x=0}^{k} x^{z-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= z\int_{x=0}^{\infty} x^{z-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = z\,\Gamma(z).
\end{aligned}$$

Satz B3E: Funktionalgleichung der Gamma-Funktion

Für alle $z > 0$ gilt

$$\boxed{\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z).}$$

Mit $\Gamma(1) = 1$ folgt per Induktion $\Gamma(n+1) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die Gamma-Funktion $\Gamma : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ interpoliert in diesem Sinne die Faktultät $! : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Sie ist zudem logarithmisch konvex, d.h. $\ln\Gamma$ ist konvex. Diese Eigenschaften charakterisieren die Gamma-Funktion (Satz von Bohr): Ist eine Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ logarithmisch konvex und erfüllt $f(1) = 1$ sowie $f(z+1) = z\,f(z)$ für alle $z > 0$, dann folgt daraus bereits $f = \Gamma$.

Aufgabe: Wiederholen Sie aus der HM2 die Grundbegriffe zu Reihen:
Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §1.7–§1.9.

(1) Definieren Sie **(absolute) Konvergenz** und **Grenzwert** einer Reihe

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \qquad \text{mit Termen } a_k \in \mathbb{C}.$$

Hängt die Konvergenz vom Startindex k_0 ab? und der Grenzwert?
Was sagen Sie zur Behauptung $1+2+3+4+5+\dots = -1/12$?

(2) Untersuchen Sie Konvergenz und ggf. Grenzwert der Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad \text{für } z \in \mathbb{C}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^n}{k!} \quad \text{für } z \in \mathbb{C}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \quad \text{für } s \in \mathbb{R}.$$

Welche Kriterien für Konvergenz bzw. Divergenz kennen Sie?

(3) Untersuchen Sie Konvergenz und ggf. Grenzwert der Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Für $x=1$? Was besagt das Kriterium von Leibniz? Dirichlet? Abel?

Lösung: (1) Wir nutzen die Folge der **Partialsummen** $s_n := \sum_{k=k_0}^{n} a_k$.
Die Reihe **konvergiert** genau dann, wenn s_n für $n \to \infty$ konvergiert.
Gilt Konvergenz $s_n \to s$ für $n \to \infty$, so schreiben wir $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k = s$.

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=k_0}^{n} a_k$$

Gemäß dieser Definition gilt $1+2+3+4+5+\dots = \infty$. (Wer's anders will, muss eine andere Art der Konvergenz von Reihen vereinbaren.)

Nullfolgenkriterium: Konvergiert die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$, so gilt $a_k \to 0$.
Die Umkehrung gilt nicht, siehe harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k = \infty$.
🙂 Dieses Kriterium ist notwendig, aber nicht hinreichend. B302

Cauchy–Kriterium: Die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $k_1 \ge k_0$ existiert mit $\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| \le \varepsilon$ für alle $m, n \ge k_1$.
🙂 Hieraus folgt das vielseitige Majoranten-Minoraten-Kriterium:

Die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ **konvergiert absolut**, wenn $\sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k| < \infty$ gilt.
Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent, dank Cauchy–Kriterium.
Die Umkehrung gilt nicht, wie die beiden Reihen aus (3) in $x=1$ zeigen.

Konvergenz von Reihen

(2) Für $|z| < 1$ konvergiert die **geometrische Reihe** und zwar absolut:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots \quad = \frac{1}{1-z}$$

Für $|z| \ge 1$ divergiert diese Reihe. (Die Funktion rechts ist zwar für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ definiert, aber die Reihe links konvergiert nur für $|z| < 1$.)

☺ Hieraus folgt das **Quotienten-** und das **Wurzel-Kriterium**.

Für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die **Exponentialreihe** und zwar absolut:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots = \exp(z)$$

Die Reihe $\sum k^{-s}$ konvergiert für $s > 1$ und divergiert für $s \le 1$. B303

(3) Diese beiden berühmten Reihen konvergieren, aber nicht absolut:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \quad = \ln 2$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots = \frac{\pi}{4} = \arctan(1)$$

Konvergenz von Reihen

Die Grenzwerte der beiden Reihen können wir wie folgt nachrechnen:

$$\ln 2 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x} \right) \mathrm{d}x$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

$$\left| \ln 2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \right| = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \to 0$$

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2} \right) \mathrm{d}x$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\left| \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \right| = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 x^{2n+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n+3} \to 0$$

Abelscher Grenzwertsatz

Beide Grenzwerte sind Spezialfälle eines allgemeinen Sachverhalts:

🙂 Jede Potenzreihe ist stetig im **Inneren** ihres Konvergenzkreises.
Abels Grenzwertsatz ergänzt dies zur Stetigkeit in **Randpunkten**!

Satz B3F: Abelscher Grenzwertsatz

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe komplexer Zahlen $a_k \in \mathbb{C}$.
Dann konvergiert die Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ für alle $x \in [0,1]$ und die so definierte Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ ist stetig, sogar in $x = 1$.
Für $x \nearrow 1$ konvergiert also $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ gegen $f(1) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Beispiel: Für alle $x \in [0,1[$ gilt die Reihenentwicklung

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \quad = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots$$

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \dots$$

Für $x \nearrow 1$ erhalten wir dank Abel die obigen Grenzwerte.

Konvergenzkriterium von Leibniz

Wir untersuchen die Konvergenz von Reihen und Integralen der Form

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_k,$$

$$(2) \qquad \int_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\, a(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{r\to\infty} \int_{x=0}^{r} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\, a(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \omega \ne 0.$$

Satz B3G: Leibniz–Kriterium für Reihen

Die Folge $a_k \in \mathbb{R}$ sei monoton fallend gegen 0, kurz $a_k \searrow 0$,
also $a_0 \ge a_1 \ge a_2 \ge \dots$ und $a_k \to 0$. Dann konvergiert die Reihe (1),
und wir haben die Fehlerschranke $\left|\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k a_k\right| \le a_n \searrow 0$.

Satz B3H: Leibniz–Kriterium für Integrale

Die Funktion $a : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}$ sei monoton fallend gegen 0, kurz $a(x) \searrow 0$,
Dann konvergiert das Integral (2), ebenso mit $\cos(\omega x)$ und $\sin(\omega x)$.

Das Leibniz–Kriterium zur Konvergenz von Reihen kennen Sie aus der HM2. Wir betrachten und beweisen im Folgenden gleich die Verallgemeinerung zum Konvergenzkriterium von Dirichlet.

Konvergenzkriterium von Dirichlet

Wir untersuchen die Konvergenz von Reihen und Integralen der Form

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, b_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, b_k,$$

$$(2) \qquad \int_{x=0}^{\infty} a(x)\, b(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty} \int_{x=0}^{r} a(x)\, b(x)\, \mathrm{d}x.$$

Satz B3I: Dirichlet–Kriterium für Reihen

Die Folge $a_k \in \mathbb{R}$ sei monoton fallend gegen 0, kurz $a_k \searrow 0$.
Die Folge $b_k \in \mathbb{C}$ habe beschränkte Partialsummen $B_n = \sum_{k=0}^{n-1} b_k$,
das heißt $|B_n| \le M$ für eine Konstante $M \in \mathbb{R}$ und alle Indizes $n \in \mathbb{N}$.
Dann konvergiert die Reihe (1) mit Fehler $\le 2M a_n \searrow 0$ für $n \to \infty$.

Satz B3J: Dirichlet–Kriterium für Integrale

Die Funktion $a : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}$ sei monoton fallend gegen 0, kurz $a(x) \searrow 0$.
Die Funktion $b : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{C}$ sei auf jedem Intervall $[0, r]$ integrierbar mit beschränkter Integralfunktion $B(r) = \int_0^r b(x)\, \mathrm{d}x$, das heißt $|B(r)| \le M$.
Dann konvergiert das Integral (2) mit Fehler $\le 2M a(r) \searrow 0$ für $r \to \infty$.

Konvergenzkriterium von Dirichlet

Beweis für Reihen: Per Induktion zeigt man für alle $n < p$ folgende **partielle Summation**:

$$\sum_{k=n}^{p-1} a_k b_k = \sum_{k=n}^{p-1} a_k (B_{k+1} - B_k) = a_p B_p - a_n B_n - \sum_{k=n}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) B_{k+1}$$

Dies ist im Betrag $\le 2 a_n M \searrow 0$, denn $|a_p B_p| \le a_p M$ und $|a_n B_n| \le a_n M$ sowie

$$\Biggl| \sum_{k=n}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) B_{k+1} \Biggr| \le \sum_{k=n}^{p-1} \bigl| (a_{k+1} - a_k) B_k \bigr| \le \sum_{k=n}^{p-1} (a_k - a_{k+1}) M = (a_n - a_p) M.$$

Dank Cauchy–Kriterium konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{n-1} a_k b_k$ gegen einen Grenzwert $s \in \mathbb{R}$.
Zudem liefert unsere Rechnung die explizite Fehlerschranke $|s - \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_k| \le 2M a_n$.

Beweis für Integrale: Zur technischen Vereinfachung der Rechnung nehmen wir zusätzlich $a \in C^1(\mathbb{R}_{\ge 0}, \mathbb{R})$ und $b \in C^0(\mathbb{R}_{\ge 0}, \mathbb{C})$ an. Wir können dann **partielle Integration** B1J nutzen:

$$\int_{x=r}^{s} a(x)\, b(x)\, \mathrm{d}x = \int_{x=r}^{s} a(x)\, B'(x)\, \mathrm{d}x = \Bigl[a(x)\, B(x) \Bigr]_r^s - \int_{x=r}^{s} a'(x)\, B(x)\, \mathrm{d}x$$

Dies ist im Betrag $\le 2a(r)M$, denn $|a(s)B(s)| \le a(s)M$ und $|a(r)B(r)| \le a(r)M$ sowie

$$\biggl| \int_{x=r}^{s} a'(x)\, B(x)\, \mathrm{d}x \biggr| \le \int_{x=r}^{s} |a'(x)\, B(x)|\, \mathrm{d}x \le \int_{x=r}^{s} -a'(x) M\, \mathrm{d}x = \bigl[a(r) - a(s) \bigr] M.$$

Demnach konvergiert das Integral $\int_{x=0}^{r} a(x)\, b(x)\, \mathrm{d}x$ gegen einen Grenzwert $I \in \mathbb{R}$; zudem erhalten wir die explizite Fehlerschranke $|I - \int_{x=0}^{r} a(x)\, b(x)\, \mathrm{d}x| \le 2M a(r) \searrow 0$ für $r \to \infty$.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Der **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung** B1I erklärt, in welchem Sinne Differenzieren und Integrieren einander umkehren:

Jede stetige Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist integrierbar. Ihre Integralfunktion

$$F:[a,b]\to\mathbb{R}\quad\text{mit}\quad F(x):=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

ist differenzierbar, und für die Ableitung gilt $F'=f$. Ist umgekehrt $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ differenzierbar mit stetiger Ableitung $f=F'$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\Big[F\Big]_a^b\quad\text{mit}\quad\Big[F\Big]_a^b:=F(b)-F(a).$$

☺ Der HDI ist das Arbeitspferd der eindimensionalen Integration: die Berechnung vieler elementarer Integrale gelingt erst dank HDI.

Dieser nützliche Zusammenhang gilt noch wesentlich allgemeiner:

f stetig	$\Longleftrightarrow$	F stetig differenzierbar	B123
f stückweise stetig	$\Longleftrightarrow$	F stückweise stetig differenzierbar	B213
f absolut integrierbar	$\Longleftrightarrow$	F absolut stetig	B214

Elementare Grundintegrale / Stammfunktionen

$$\int x^a\,\mathrm{d}x=\frac{x^{a+1}}{a+1}\quad(a\neq-1)\qquad\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln|x|$$

$$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\qquad\int\ln x\,\mathrm{d}x=x\ln x-x$$

$$\int\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x\qquad\int\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x$$

$$\int\cosh x\,\mathrm{d}x=\sinh x\qquad\int\sinh x\,\mathrm{d}x=\cosh x$$

$$\int\frac{1}{(\cos x)^2}\,\mathrm{d}x=\tan x\qquad\int\frac{1}{(\sin x)^2}\,\mathrm{d}x=-\cot x$$

$$\int\frac{1}{(\cosh x)^2}\,\mathrm{d}x=\tanh x\qquad\int\frac{1}{(\sinh x)^2}\,\mathrm{d}x=-\coth x$$

$$\int\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\arctan x\qquad\int\frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\ln\sqrt{\left|\tfrac{x+1}{x-1}\right|}$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=\arcsin x\qquad\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x=\operatorname{arsinh} x$$

☺ Probe als Übung: Integrale sind durch Ableiten leicht nachzuprüfen!

Partielle Integration und Substitution

Aus der Produktregel folgt dank HDI die **partielle Integration** B129:
Für alle stetig differenzierbaren Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{x=a}^{b} f(x)\, g'(x)\, \mathrm{d}x = \Big[f(x)\, g(x)\Big]_{x=a}^{b} - \int_{x=a}^{b} f'(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x.$$

Aus der Kettenregel folgt dank HDI die **Substitutionsregel** B131:
Für $g : [a, b] \to [c, d]$ stetig differenzierbar und $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ stetig gilt

$$\int_{t=a}^{b} f(g(t))\, g'(t)\, \mathrm{d}t = \int_{u=g(a)}^{g(b)} f(u)\, \mathrm{d}u.$$

☺ Damit lassen sich bereits viele Integrale elementar berechnen.

☺ Jede rationale Funktion $r(x) = p(x)/q(x)$ ist elementar integrierbar durch Partialbruchzerlegung und unsere Grundintegrale. B135

⚠ Viele elementare Funktionen sind nicht elementar integrierbar! Prominenteste Beispiele sind die Glockenkurve $\exp(-x^2/2)$ B145 und die Spaltfunktion $\mathrm{si}(x) = \sin(x)/x$ B149. Hier nutzen wir Potenzreihen o.ä.

Uneigentliche Integrale und Cauchy–Hauptwert

Zur Integration über ganz $\mathbb{R}$ haben wir drei nützliche Möglichkeiten:

(1) Bei **absoluter Integration** zerlegen wir $f = f^+ - f^-$ und setzen

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{d}x := \int_{\mathbb{R}} f^+(x)\, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} f^-(x)\, \mathrm{d}x.$$

⚠ Hierzu müssen rechts beide Integrale endlich sein.

☺ Dieser Integrationsbegriff gilt allgemein über $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ (A3κ).

(2) Das **uneigentliche Integral** von f ist die Summe der Grenzwerte

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \mathrm{d}x := \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{z} f(x)\, \mathrm{d}x + \lim_{b \to +\infty} \int_{z}^{b} f(x)\, \mathrm{d}x.$$

⚠ Hierzu müssen beide Grenzwerte existieren und endlich sein.

☺ Existiert das Integral (1) so auch (2) und beide sind gleich. B221

(3) Der **Cauchy–Hauptwert** von f ist der Grenzwert (falls existent)

$$(\mathrm{CH}) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \mathrm{d}x := \lim_{r \to \infty} \int_{-r}^{r} f(x)\, \mathrm{d}x.$$

☺ Existiert das Integral (2) so auch (3) und beide sind gleich. B223

⚠ Die Umkehrungen (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) gelten im Allgemeinen nicht. B417

Vergleich von Reihe und Integral

Sei $f:\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ monoton fallend. Für alle $a\leq b$ in $\mathbb{N}$ gilt dann

$$\int_{x=a}^{b+1} f(x)\,\mathrm{d}x \quad\leq\quad \sum_{k=a}^{b} f(k) \quad\leq\quad f(a)+\int_{x=a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Das ist oft eine nützliche Näherung: Wir ersetzen mühsame Summen durch bequeme Integral, oder auch umgekehrt je nach Anwendung. Durch Grenzübergang $b\to\infty$ erhalten wir

$$\int_{x=a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \quad\leq\quad \sum_{k=a}^{\infty} f(k) \quad\leq\quad f(a)+\int_{x=a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Insbesondere haben Reihe und Integral gleiches Konvergenzverhalten.

Beispiel: Für die Funktion $f(x)=1/x$ erhalten wir

$$\ln(n+1) \quad\leq\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \quad\leq\quad 1+\ln(n)$$

🙂 Die **harmonische Reihe** wächst wie der natürliche Logarithmus! Insbesondere erkennen wir die Divergenz $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\to\infty$ für $n\to\infty$.

Abelscher Grenzwertsatz

🙂 Jede Potenzreihe ist stetig im **Inneren** ihres Konvergenzkreises. Abels Grenzwertsatz ergänzt dies zur Stetigkeit in **Randpunkten**:

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe komplexer Zahlen $a_k\in\mathbb{C}$. Dann konvergiert die Potenzreihe $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ für alle $x\in[0,1]$ und die so definierte Funktion $f:[0,1]\to\mathbb{C}$ ist stetig, sogar in $x=1$. Für $x\nearrow 1$ konvergiert also $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ gegen $f(1)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Beispiel: Für alle $x\in[0,1[$ gilt die Reihenentwicklung

$$\ln(1+x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}x^{k+1} \qquad = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\dots$$

$$\arctan(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1} \qquad = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\frac{x^{11}}{11}+\dots$$

Für $x\nearrow 1$ erhalten wir dank Abel die beiden berühmten Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}=\ln(2) \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi}{4}.$$

Konvergenzkriterium von Leibniz

Wir untersuchen die Konvergenz von Reihen und Integralen der Form

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_k,$$

$$(2) \qquad \int_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\, a(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{r\to\infty} \int_{x=0}^{r} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\, a(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \omega \neq 0.$$

(1) Die Folge $a_k \in \mathbb{R}$ sei monoton fallend gegen 0, kurz $a_k \searrow 0$, also $a_0 \ge a_1 \ge a_2 \ge \dots$ und $a_k \to 0$. Dann konvergiert die Reihe (1), und wir haben die Fehlerabschätzung $|\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k a_k| \le a_n \searrow 0$.

(2) Die Funktion $a : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}$ sei monoton fallend gegen 0, kurz $a(x) \searrow 0$, Dann konvergiert das Integral (2), ebenso mit $\cos(\omega x)$ und $\sin(\omega x)$.

Beispiel: Das Leibniz–Kriterium sichert die Konvergenz von Reihen wie den beiden obigen $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k/(k+1)$ und $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k/(2k+1)$.

☹ Über den Grenzwert macht das Leibniz–Kriterium keine Aussage.

☺ Immerhin erlaubt es praktische Näherungen mit Fehlerabschätzung!

Für die Konvergenz trigonometrischer Reihen wie $\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}/k^a$ oder $\sum_{k=1}^{\infty} \cos(kx)/k^a$ oder $\sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx)/k^a$ nutzen wir folgendes Kriterium.

Konvergenzkriterium von Dirichlet

Wir untersuchen die Konvergenz von Reihen und Integralen der Form

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, b_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, b_k,$$

$$(2) \qquad \int_{x=0}^{\infty} a(x)\, b(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty} \int_{x=0}^{r} a(x)\, b(x)\,\mathrm{d}x.$$

(1) Die Folge $a_k \in \mathbb{R}$ sei monoton fallend gegen 0, kurz $a_k \searrow 0$.
Die Folge $b_k \in \mathbb{C}$ habe beschränkte Partialsummen $B_n = \sum_{k=0}^{n-1} b_k$, das heißt $|B_n| \le M$ für eine Konstante $M \in \mathbb{R}$ und alle Indizes $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Reihe (1) mit Fehler $\le 2M a_n \searrow 0$ für $n \to \infty$.

(2) Die Funktion $a : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}$ sei monoton fallend gegen 0, kurz $a(x) \searrow 0$.
Die Funktion $b : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{C}$ sei auf jedem Intervall $[0, r]$ integrierbar mit beschränkter Integralfunktion $B(r) = \int_0^r b(x)\,\mathrm{d}x$, das heißt $|B(r)| \le M$. Dann konvergiert das Integral (2) mit Fehler $\le 2M a(r) \searrow 0$ für $r \to \infty$.

☹ Über den Grenzwert macht das Dirichlet–Kriterium keine Aussage.

☺ Immerhin erlaubt es praktische Näherungen mit Fehlerabschätzung!

Integration mittels Substitution

Aufgabe: Berechnen Sie für $x \in [-a, a]$ die folgende Stammfunktion:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\Big(\frac{x}{a}\Big) + \text{const}$$

(1) Wie prüfen Sie diese Gleichung? (2) Wie finden Sie sie?

Lösung: (1) Sie prüfen diese Gleichung durch sorgfältiges Ableiten.
(2) Finden ist schwieriger als Prüfen! Wir substituieren $x = a\sin(t)$:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \sqrt{a^2 - a^2\sin(t)^2} \cdot a\cos(t)\,\mathrm{d}t \\
&= a^2 \int \cos(t)^2\,\mathrm{d}t \\
&= a^2 \int \frac{1 + \cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin(2t) + \text{const}
\end{aligned}$$

Integration mittels Substitution

Die Rücksubstitution $t = \arcsin(x/a)$ erfordert Sorgfalt:

$$\begin{aligned}
\frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin(2t) &= \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{2}\sin(t)\cos(t) \\
&= \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{2}\sin(t)\sqrt{1 - \sin(t)^2} \\
&= \frac{a^2}{2}\arcsin\Big(\frac{x}{a}\Big) + \frac{a^2}{2}\Big(\frac{x}{a}\Big)\sqrt{1 - \Big(\frac{x}{a}\Big)^2} \\
&= \frac{a^2}{2}\arcsin\Big(\frac{x}{a}\Big) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}
\end{aligned}$$

🙂 Das ist die ersehnte Formel. Probe durch sorgsames Ableiten (1).

Fingerübung: Entwickeln Sie alle hier benötigten Identitäten aus den Euler–Formeln $\cos(t) = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})/2$ und $\sin(t) = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})/2\mathrm{i}$.

Alternativ kann man solche Formeln nachschlagen in Integraltafeln wie dem umfangreichen *Taschenbuch der Mathematik* von I.N. Bronstein und K.A. Semendjajew. Noch bequemer sind Computer-Algebra-Systeme.

⚠ Einfache Integrale sollten Sie erkennen und berechnen können.

Integration mittels Substitution

Aufgabe: Berechnen Sie für $x \in \mathbb{R}$ die folgende Stammfunktion:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arsinh}\Big(\frac{x}{a}\Big) + \text{const}\\ &= \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\Big(x+\sqrt{a^2+x^2}\Big) + \text{const}\end{aligned}$$

(1) Wie prüfen Sie diese Gleichung? (2) Wie finden Sie sie?

Lösung: (1) Sie prüfen diese Gleichung durch sorgfältiges Ableiten.
(2) Finden ist schwieriger als Prüfen! Wir substituieren $x = a\sinh(t)$:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \sqrt{a^2+a^2\sinh(t)^2}\cdot a\cosh(t)\,\mathrm{d}t\\ &= a^2\int \cosh(t)^2\,\mathrm{d}t\\ &= a^2\int \frac{1+\cosh(2t)}{2}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sinh(2t) + \text{const}\end{aligned}$$

Integration mittels Substitution

Die Rücksubstitution $t = \operatorname{arsinh}(x/a)$ erfordert Sorgfalt:

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sinh(2t) &= \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{2}\sinh(t)\cosh(t)\\ &= \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{2}\sinh(t)\sqrt{1+\sinh(t)^2}\\ &= \frac{a^2}{2}\operatorname{arsinh}\Big(\frac{x}{a}\Big) + \frac{a^2}{2}\Big(\frac{x}{a}\Big)\sqrt{1+\Big(\frac{x}{a}\Big)^2}\\ &= \frac{a^2}{2}\operatorname{arsinh}\Big(\frac{x}{a}\Big) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}\end{aligned}$$

Das ist die ersehnte Formel. Probe durch sorgsames Ableiten (1).

Nützliche Fingerübung: Entwickeln Sie alle hier benötigten Identitäten aus den Formeln $\cosh(t) = (\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t})/2$ und $\sinh(t) = (\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t})/2$.
Mit der Mitternachtsformel erhalten Sie hieraus schließlich:

$$\operatorname{arsinh}(t) = \ln\big(t+\sqrt{1+t^2}\big)$$

Einfache Integrale sollten Sie erkennen und berechnen können.

Verständnisfragen: elementare Stammfunktionen

Aufgabe: Zu folgenden Funktionen sollten Sie Stammfunktionen auswendig kennen und auch durch Ableiten nachprüfen können.

$$\int x^a \,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x, \qquad \int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x, \qquad \int \ln x \,\mathrm{d}x,$$

$$\int \sin x \,\mathrm{d}x, \qquad \int \cos x \,\mathrm{d}x, \qquad \int \sinh x \,\mathrm{d}x, \qquad \int \cosh x \,\mathrm{d}x,$$

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2} \,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{(\sin x)^2} \,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{(\cosh x)^2} \,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{(\sinh x)^2} \,\mathrm{d}x,$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{1-x^2} \,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \,\mathrm{d}x.$$

Lösung: Diese Stammfunktionen finden Sie auf Seite B124. Versuchen Sie, alle gewissenhaft durch Ableiten nachzuprüfen.

Umfassende Integraltafeln finden Sie online zum Beispiel unter `de.wikibooks.org/wiki/Formelsammlung_Mathematik:_Integrale`. Heutzutage sind Computer-Algebra-Systeme der bequemste Zugang.

Einfache Integrale sollen Sie sicher erkennen und selbst berechnen.

Verständnisfragen: der Hauptsatz

Nochmal der Hauptsatz: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $C^k = C^k(\Omega, \mathbb{R})$ die Menge aller k-mal stetig differenzierbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Aufgabe: Differenzieren und Integrieren definieren zwei Abbildungen

$$D : C^1 \to C^0 : F \mapsto f \quad \text{mit} \quad f(x) = \lim_{t \to x} \frac{F(t) - F(x)}{t - x},$$

$$I : C^0 \to C^1 : f \mapsto F \quad \text{mit} \quad F(x) = \int_{t=x_0}^{x} f(t) \,\mathrm{d}t.$$

(1) Gilt $(D \circ I)f = f$ für $f \in C^0$? Gilt $(I \circ D)F = F - F(x_0)$ für $F \in C^1$?
(2) Sind C^1 und C^0 Vektorräume? Sind D und I lineare Abbildungen?
(3) Was sind Bild und Kern von D? Was sind Kern und Bild von I?

Diese Sichtweise nutzen wir später für Differentialgleichungen.

Lösung: (1) Das sind die beiden Aussagen des Hauptsatzes B1I (HDI).
(2) Ja, C^1 und C^0 sind Vektorräume, und hierauf sind D und I linear.
(3) Dank $(D \circ I)f = f$ ist D surjektiv, also $\operatorname{Bild}(D) = C^0$.
Ebenso ist I injektiv, äquivalent hierzu gilt $\operatorname{Kern}(I) = \{0\}$.
Aus $(I \circ D)F = F - F(x_0)$ folgt $\operatorname{Bild}(I) = \{\, F \in C^1 \mid F(x_0) = 0 \,\}$.
Für $DF = 0$ folgt $F - F(x_0) = 0$, demnach gilt $\operatorname{Kern}(D) = \{\mathrm{const}\}$.

Verständnisfragen: mögliche Fehlerquellen

Aufgabe: Die Ableitung von $-x^{-1}$ ist x^{-2}, also gilt $\int 1/x^2 \,\mathrm{d}x = -1/x$.
Was halten Sie von folgenden Rechnungen? Stimmt das Ergebnis?

(1) $$\int_{+1}^{2} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \overset{?}{=} \left[\frac{-1}{x}\right]_{+1}^{2} = -\frac{1}{2} + 1 = +\frac{1}{2}$$

(2) $$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \overset{?}{=} \left[\frac{-1}{x}\right]_{-1}^{2} = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$$

(3) $$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \underset{\text{B1J}}{\overset{\text{part}}{=}} x \cdot \frac{1}{x} - \int x \cdot \frac{-1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1 + \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow \qquad 0 \overset{?}{=} 1$$

Lösung: (1) Ja, dies gilt dank HDI für $1/x^2$ auf dem Intervall $[1,2]$.

(2) Der HDI gilt nur auf Intervallen, aber auf $[-1,2] \setminus \{0\}$ gilt er nicht!
$1/x^2$ ist positiv, also auch $\int_{-1}^{2} 1/x^2 \,\mathrm{d}x$; genauer $\int_{-1}^{2} 1/x^2 \,\mathrm{d}x = \infty$. B208
Obige Rechnung und das Ergebnis $-3/2$ sind also kompletter Unsinn.

(3) Lesen Sie Korollar B1J zur partiellen Integration nochmal genau!

🙂 Wir brauchen Rechenregeln, möglichst präzise formuliert als Sätze.
Die Voraussetzungen klären, wann und wie wir sie anwenden können.

Verständnisfragen: Funktionenklassen

Aufgabe: Welche Aussagen über Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sind wahr?
Begründen Sie durch ein Ergebnis der Vorlesung oder Gegenbeispiel.

(1) Ist jede differenzierbare Funktion stetig? und umgekehrt?

(2) Ist jede stetige Funktion integrierbar? und umgekehrt?

(3) Jede rationale Funktion f ist diff'bar und f' ist rational.

(4) Jede rationale Funktion f ist integrierbar und $\int f$ ist rational.

(5) Jede elementare Funktion f ist diff'bar und f' ist elementar.

(6) Jede elementare Funktion f ist integrierbar und $\int f$ ist elementar.

(7) Jede analytische Funktion f ist diff'bar, und f' ist analytisch.

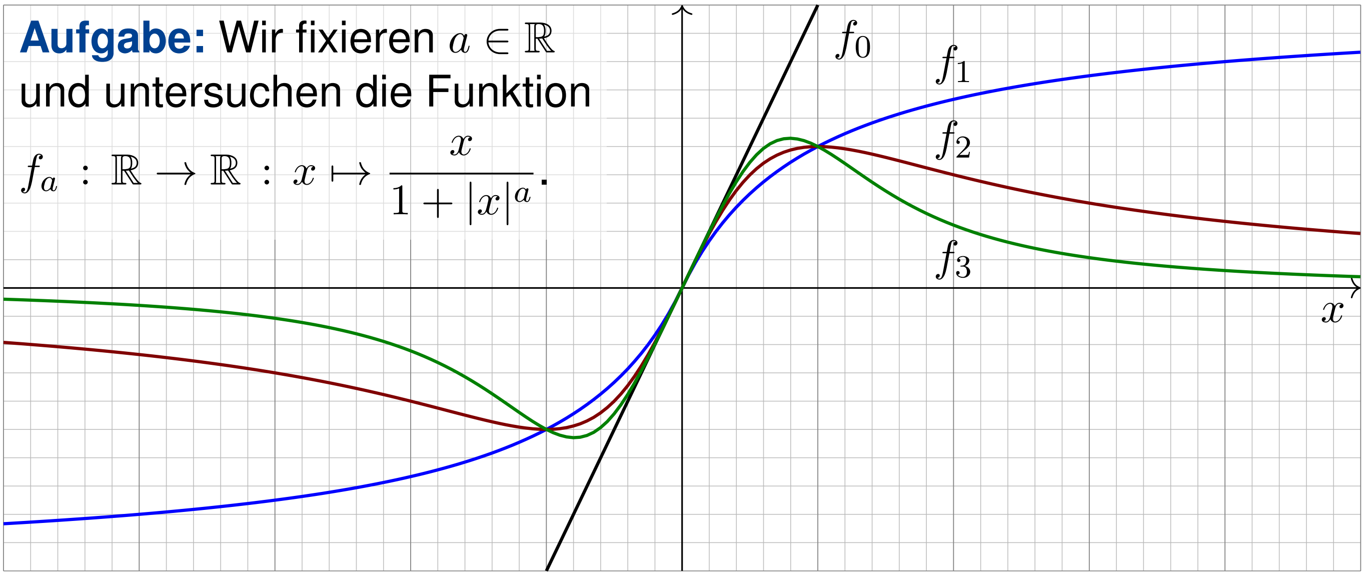
(8) Jede analytische Funktion f ist integrierbar, und $\int f$ ist analytisch.

Lösung: (1) Ja, dank Definition / Nein, Gegenbeispiel $f(x) = |x|$. (2) Ja, dank HDI / Nein, Gegenbsp. $f = \mathbf{I}_{[0,1]}$. (3) Ja/Ja, dank Quotientenregel. (4) Ja/Nein, Gegenbsp. $\int 1/x \,\mathrm{d}x = \ln|x|$. (5) Ja/Ja: Jede elementare Grundfunktion B141 ist diff'bar, sogar analytisch, auf ihrem offenen (!) Definitionsintervall, mit elementarer Ableitung, somit auch Summe, Produkt, Komposition. Andernfalls erhalten wir Gegenbeispiele wie $\sqrt{x}$ oder $|x| = \sqrt{x^2}$. (6) Ja/Nein, $\exp(-x^2)$ und $\sin(x)/x$ sind elementar, aber ihre Stammfunktionen nicht. (7) Ja/Ja. (8) Ja/Ja. Wiederholung!

Beispiele zur uneigentlichen Integration

Aufgabe: Wir fixieren $a \in \mathbb{R}$ und untersuchen die Funktion

$$f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x}{1+|x|^a}.$$



(1) Für welche $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist f_a absolut integrierbar? (2) uneigentlich?

(3) Für welche $a \in \mathbb{R}$ existiert zu $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Cauchy–Hauptwert?

(4) Sind diese drei Integraldefinitionen translationsinvariant?

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x - x_0)\,\mathrm{d}x \quad \overset{?}{=} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Beispiele zur uneigentlichen Integration

Lösung: (1) Für $x \to \infty$ gilt $f_a(x) \sim x^{1-a}$. Genauer: Für $x \geq 1$ gilt

$$\frac{x}{2x^a} \quad \leq \quad \frac{x}{1+|x|^a} \quad \leq \quad \frac{x}{x^a}$$

Daher ist f_a absolut integrierbar für $a > 2$, aber nicht für $a \leq 2$.

Ausführlich: Für $a > 2$ und $x \geq 1$ nutzen wir das Majorantenkriterium:

$$\int_{x=1}^{r} \frac{x}{1+|x|^a}\,\mathrm{d}x \leq \int_{x=1}^{r} x^{1-a}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{2-a}}{2-a}\right]_{x=1}^{r} = \frac{r^{2-a}-1}{2-a} \to \frac{1}{a-2} < \infty$$

Für $a < 2$ und $x \geq 1$ hingegen nutzen wir das Minorantenkriterium:

$$\int_{x=1}^{r} \frac{x}{1+|x|^a}\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{2}\int_{x=1}^{r} x^{1-a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{x^{2-a}}{2-a}\right]_{x=1}^{r} = \frac{r^{2-a}-1}{2-a} \to \infty$$

Im Grenzfall $a = 2$ ist das letzte Integral $1/2\ln(r) \to \infty$.

(2) Ebenso für uneigentliche Integrierbarkeit, denn $f_a(x) \geq 0$ für $x \geq 0$.

(3) Der Cauchy–Hauptwert von f_a existiert offensichtlich für alle $a \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-r}^{r} \frac{x}{1+|x|^a}\,\mathrm{d}x = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \frac{x}{1+|x|^a}\,\mathrm{d}x = 0$$

Beispiele zur uneigentlichen Integration

(4) Das absolute Integral ist translationsinvariant dank Konstruktion.

☺ Dasselbe gilt auch für uneigentliche Integrale, denn das Ergebnis ist unabhängig vom willkürlich gewählten Teilungspunkt $z \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-x_0)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^z f(x-x_0)\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_z^b f(x-x_0)\,\mathrm{d}x$$
$$= \lim_{a\to-\infty}\int_{a-x_0}^{z-x_0} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_{z-x_0}^{b-x_0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

⚠ Der schwächere Cauchy–Hauptwert ist nicht translationsinvariant:

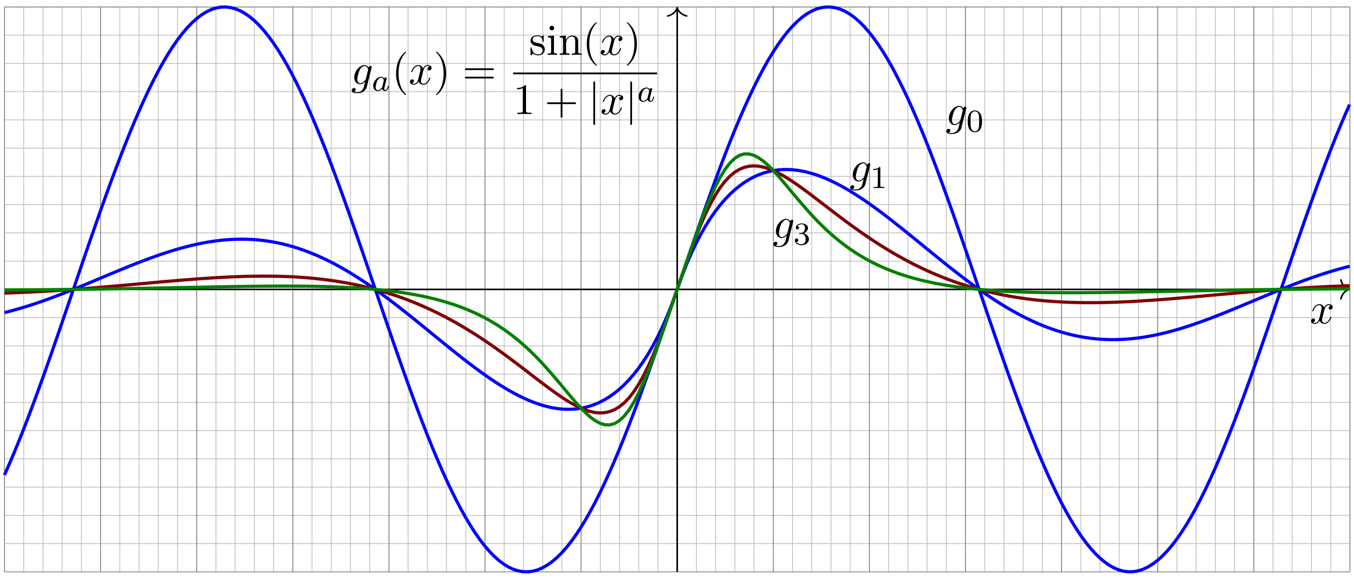
$$\int_{-r}^{r} \frac{x+x_0}{1+|x+x_0|}\,\mathrm{d}x = \int_{-r+x_0}^{r+x_0} \frac{x}{1+|x|}\,\mathrm{d}x = \int_{r-x_0}^{r+x_0} \frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \Big[x - \ln(1+x)\Big]_{r-x_0}^{r+x_0} = 2x_0 + \ln\frac{1+r-x_0}{1+r+x_0} \to 2x_0 \quad \text{für } r\to\infty$$

⚠ Nicht einmal seine Existenz bleibt unter Translation erhalten:

$$\int_{-r}^{r} x + x_0\,\mathrm{d}x = 2rx_0 \to \operatorname{sign}(x_0)\cdot\infty \quad \text{für } r\to\infty$$

☺ Die beste und robusteste Eigenschaft ist absolute Integrierbarkeit.

Beispiele zur uneigentlichen Integration



Aufgabe: Wir untersuchen $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g_a(x) = \sin(x)/(1+|x|^a)$. Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ ist g_a absolut integrierbar? uneigentlich? CH?

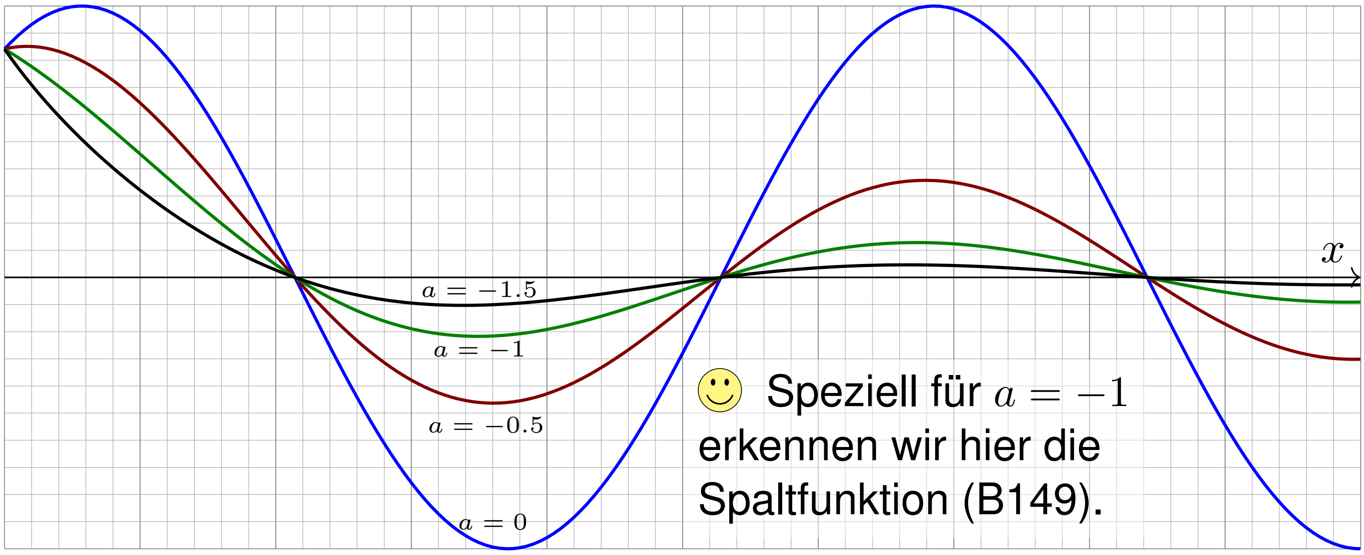
Lösung: Absolut integrierbar für $a > 1$, aber nicht für $a \le 1$
Uneigentlich integrierbar für $a > 0$, aber nicht für $a \le 0$.
Für jedes a existiert der Cauchy–Hauptwert und ist gleich 0.
Die ausführliche Rechnung verläuft analog zur folgenden Aufgabe.

Aufgabe: Wir untersuchen $f : [1,\infty] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^a \sin(x)$.

(1) Skizzieren Sie diese Funktion für verschiedene Parameter $a \in \mathbb{R}$.

(2) Für welche Parameter $a \in \mathbb{R}$ ist f absolut integrierbar?

(3) Für welche Parameter $a \in \mathbb{R}$ ist f uneigentlich integrierbar?



Speziell für $a = -1$ erkennen wir hier die Spaltfunktion (B149).

Solche Integrale treten in der Fourier–Theorie häufig auf (Kapitel K). Die zugehörigen Konvergenzfragen sind knifflig, aber auch lohnend.

(2) Wir fragen nach der Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{r\to\infty} \int_{x=1}^{r} \bigl|x^a \sin(x)\bigr| \,\mathrm{d}x.$$

Für $a < -1$ folgt die Konvergenz aus dem Majorantenkriterium:

$$\int_{x=1}^{r} \bigl|x^a \sin(x)\bigr| \,\mathrm{d}x \le \int_{x=1}^{r} x^a \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{a+1}}{a+1}\right]_1^r = \frac{r^{a+1}-1}{a+1} \to \frac{-1}{a+1} < \infty$$

Für $-1 \le a \le 0$ folgt die Divergenz aus dem Minorantenkriterium:

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \bigl|x^a \sin(x)\bigr| \,\mathrm{d}x \ge (k\pi)^a \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \bigl|\sin(x)\bigr| \,\mathrm{d}x \ge 2(k\pi)^a$$

Wir erhalten als untere Abschätzung eine divergente Reihe: $\boxed{\text{B303}}$

$$\int_{x=\pi}^{\infty} \bigl|x^a \sin(x)\bigr| \,\mathrm{d}x = \sum_{k=2}^{\infty} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \bigl|x^a \sin(x)\bigr| \,\mathrm{d}x \ge \sum_{k=2}^{\infty} 2(k\pi)^a = \infty$$

Für $a > 0$ folgt die Divergenz ebenso aus dem Minorantenkriterium.

Absolute und uneigentliche Integrierbarkeit

(3) Wir fragen nach der Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{r\to\infty}\int_{x=1}^{r} x^a \sin(x)\,\mathrm{d}x.$$

Für $a \ge 0$ existiert dieser Grenzwert nicht: Dies sieht man wie zuvor mit dem Minorantenkriterium. Für $a < 0$ hingegen existiert der Grenzwert!

Dies folgt bequem aus dem Konvergenzkriterium von Leibniz (B3H) bzw. allgemeiner aus dem Konvergenzkriterium von Dirichlet (B3I).

Konkret geht's so: Wir integrieren partiell und schauen genauer hin.

$$\begin{aligned}\int_{x=1}^{r} x^a \sin(x)\,\mathrm{d}x &= \Big[-x^a\cos(x)\Big]_{x=1}^{r} + \int_{x=1}^{r} a x^{a-1}\cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \cos(1) - r^a\cos(r) + \int_{x=1}^{r} a x^{a-1}\cos(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Es gilt $r^a\cos(r) \to 0$ und das letzte Integral konvergiert absolut:

$$\int_{x=1}^{r} \left|a x^{a-1}\cos(x)\right|\mathrm{d}x \le \int_{x=1}^{r} -a x^{a-1}\,\mathrm{d}x = \Big[-x^a\Big]_{x=1}^{r} = 1 - r^a \to 1$$

Integrierbarkeit und Konvergenzkriterien

Aufgabe: Erklären Sie durch geeignete Sätze oder Gegenbeispiele:

(1) Damit die Reihe $\sum_{k=a}^{\infty} f(k) = \lim_{r\to\infty}\sum_{k=a}^{r} f(k)$ konvergiert, ist das Kriterium $f(k) \to 0$ für $k \to \infty$ (a) hinreichend? (b) notwendig?

(2) Damit das Integral $\int_{x=a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty}\int_{x=a}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert, ist das Kriterium $f(x) \to 0$ für $x \to \infty$ (a) hinreichend? (b) notwendig?

Lösung: (1) Das Kriterium $f(k) \to 0$ für $k \to \infty$ ist nicht hinreichend, wie die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ zeigt. Es ist aber notwendig dank Cauchy–Kriterium, siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, Lemma 1.9.1.

(2) Das Kriterium $f(x) \to 0$ für $x \to \infty$ ist auch für Integrale nicht hinreichend, wie (nochmals) das Beispiel $\int_{x=1}^{\infty} x^{-1}\,\mathrm{d}x$ zeigt. B206

Es ist auch nicht notwendig, wie das Fresnel–Integral $\int_{x=1}^{\infty}\sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ zeigt! Wir substituieren $u = x^2$; mit $x = \sqrt{u}$ und $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}u^{-1/2}\,\mathrm{d}u$ gilt:

$$\int_{x=1}^{r}\sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \int_{u=1}^{r^2}\frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

Dieses Integral konvergiert für $r \to \infty$, wie die vorige Aufgabe zeigt. Den Grenzwert berechnen wir später mit komplexer Integration. F529

Verständnisfragen: Differenzierbarkeit

Aufgabe: (1) Nennen Sie eine Funktion $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die stetig ist, aber (in mindestens einem Punkt) nicht differenzierbar, somit $f_0 \in C^0 \setminus C^1$.

(2) Nennen Sie eine Funktion $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die einmal stetig differenzierbar ist, aber nicht zweimal, somit $f_1 \in C^1 \setminus C^2$.

(3) Nennen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die n-mal stetig differenzierbar ist, aber nicht $(n+1)$-mal, somit $f_n \in C^n \setminus C^{n+1}$.

Lösung: (1) Die Betragsfunktion $f_0(x) = |x|$ ist stetig, auch in $x = 0$. Sie ist aber im Punkt $x = 0$ nicht differenzierbar (Skizze!), denn

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{f_0(x) - f_0(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{x}{x} = 1, \qquad \lim_{x \nearrow 0} \frac{f_0(x) - f_0(0)}{x - 0} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{-x}{x} = -1.$$

(2) Die Funktion $f_1(x) = \int_{t=0}^{x} f_0(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}x|x|$ ist diff'bar mit $f_1' = f_0$ (dank HDI oder direkt), also stetig diff'bar, aber nicht zweimal diff'bar.

(3) Sei $n \geq 1$. Aus der gegebenen Funktion $f_{n-1} \in C^{n-1} \setminus C^n$ gewinnen wir durch Integration die Funktion $f_n(x) = \int_{t=0}^{x} f_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t$. Dank HDI ist f_n diff'bar mit $f_n' = f_{n-1}$. Demnach gilt $f_n \in C^n \setminus C^{n-1}$, wie gewünscht. Angefangen mit $f_0(x) = |x|$ erhalten wir induktiv $f_n(x) = \frac{1}{n!}x^{n-1}|x|$.

Verständnisfragen: stetige Differenzierbarkeit

📖 Siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, Kapitel 2, insb. 2.2.14.
Für Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kennen Sie die Begriffe **differenzierbar** und **stetig differenzierbar**. Sie fragen sich, worin der Unterschied besteht? Sehr gut! Solche Fragen klären Sie am besten durch gute Beispiele:

Aufgabe: Skizzieren Sie für einige Exponenten $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} |x|^\alpha \sin(1/|x|) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(0) Ist f_α auf $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig (C^0)? stetig differenzierbar (C^1)? mehrfach (C^n)? sogar glatt (C^∞)? oder gar analytisch (C^ω)?

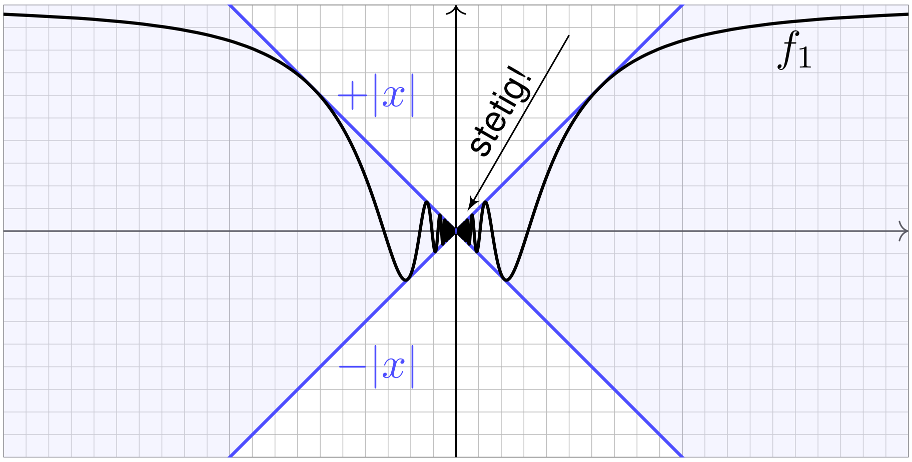
Für welche Exponenten α ist diese Funktion (1) stetig, also $f_\alpha \in C^0$? (2) überall differenzierbar? (3) stetig differenzierbar, also $f_\alpha \in C^1$?

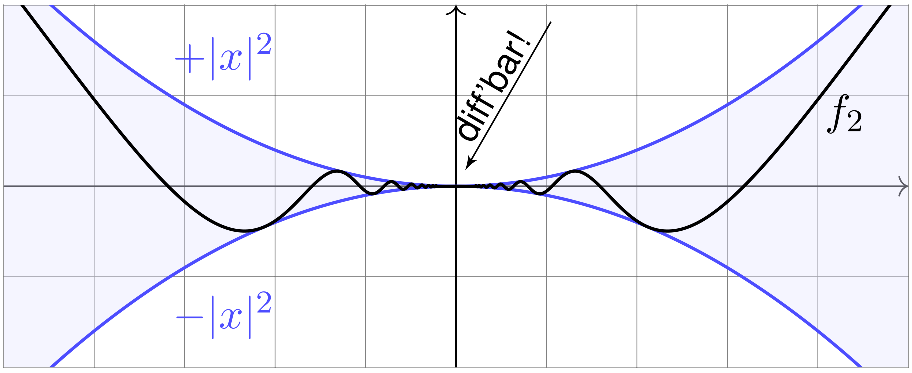
(4) Nennen Sie eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die überall differenzierbar ist, aber deren Ableitungsfunktion $g' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht überall stetig ist.

(5) Nennen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ eine Funktion $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die n-mal differenzierbar ist, aber deren n-te Ableitung nicht stetig ist.

Verständnisfragen: stetige Differenzierbarkeit

Schnelle Oszillation $\sin(1/|x|)$ mit gedämpfter Amplitude $|x|^\alpha$:





Verständnisfragen: stetige Differenzierbarkeit

Lösung: (0) Auf $\mathbb{R}^*$ ist f_α stetig / differenzierbar / glatt / analytisch, denn f_α ist Produkt und Komposition solcher Funktionen: x^α und $\sin(x)$.

(1) Für $\alpha > 0$ ist f_α stetig im Punkt 0, denn $|f_\alpha(x)| \le |x|^\alpha \to 0$ für $x \to 0$. Für $\alpha \le 0$ hingegen ist f_α in 0 unstetig: Der Grenzwert existiert nicht!

(2) Für $\alpha > 1$ ist f_α im Punkt 0 differenzierbar: Für $x \searrow 0$ gilt $(f_\alpha(x) - f_\alpha(0))/(x - 0) = x^{\alpha-1}\sin(1/x) \to 0$, also $f'_\alpha(0) = 0$. Für $\alpha \le 1$ hingegen existiert dieser Grenzwert nicht!

(3) Für $x > 0$ gilt $f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}\sin(1/x) - x^{\alpha-2}\cos(1/x)$. Für $1 < \alpha \le 2$ ist demnach f_α differenzierbar, aber f'_α nicht stetig.

(4) Gemäß (3) ist $g(x) = f_2(x) = x^2\sin(1/x)$ ein einfaches Beispiel.

(5) Sei $n \ge 2$, und $g_{n-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei $(n-1)$-mal differenzierbar, aber $g_{n-1}^{(n-1)}$ sei nicht stetig. Durch Integration gewinnen wir die Funktion $g_n(x) = \int_{t=0}^{x} g_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t$. Dank HDI ist g_n diff'bar mit $g'_n = g_{n-1}$, also n-mal diff'bar, aber $g_n^{(n)} = g_{n-1}^{(n-1)}$ ist nicht stetig, wie gewünscht.
Explizit gelingt $g_n(0) = 0$ und $g_n(x) = |x|^{2n}\sin(1/|x|)$ oder alternativ $g_n(x) = |x|^{n+1}\sin(\ln|x|)$: wie in (1–3) genügt sorgfältige Nachrechnen!

Takagi: stetig aber nirgends differenzierbar

Aufgabe: (1) Skizzieren Sie die Funktion $f_1(x) = \operatorname{dist}(x, \mathbb{Z})$, also den Abstand von $x \in \mathbb{R}$ zur nächsten ganzen Zahl $a \in \mathbb{Z}$. Skizzieren Sie ebenso $f_n(x) = \operatorname{dist}(x, \frac{1}{n!}\mathbb{Z})$ für $n = 2, 3, 4, 5$.

(2) Skizzieren Sie $g_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n$. Warum gilt $g_n \nearrow g$?

(3) Berechnen Sie die Integrale $\int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x$ und schließlich $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

Lösung: (2) Wegen $f_n \ge 0$ gilt $0 \le g_1 \le g_2 \le \dots$. Wegen $|f_n| \le \frac{1}{2n!}$ gilt

$$g_n(x) \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k!} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k!} = \frac{1}{2}\left[-1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\right] = \frac{\mathrm{e}-1}{2} \approx 0.85914.$$

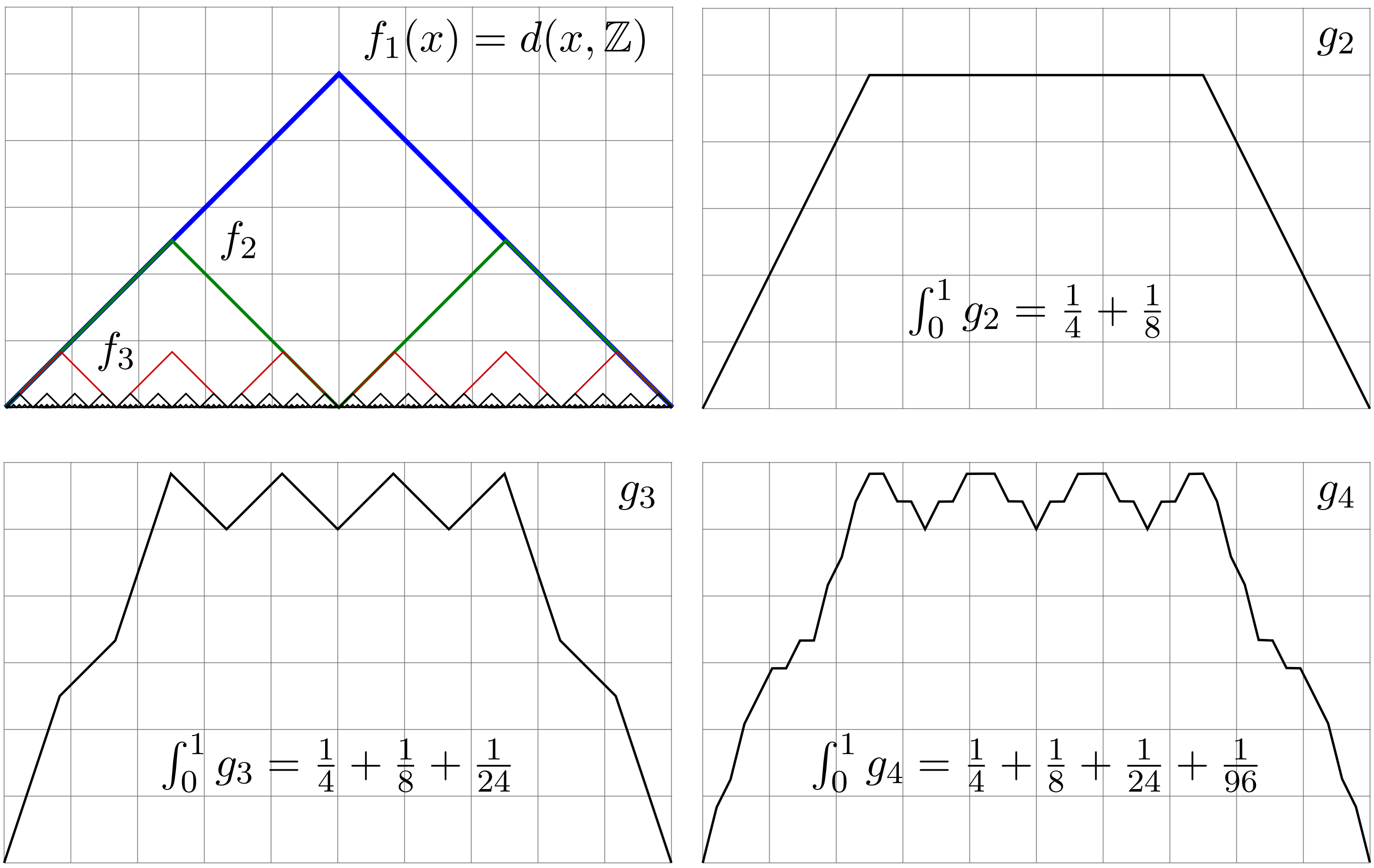
Für jedes feste $x \in \mathbb{R}$ ist die Folge $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und beschränkt, also konvergent. Den Grenzwert bezeichnen wir mit $g(x)$.

(3) Wir sehen $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4n!}$, dank Linearität des Integrals also $\int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k!}$, und dank monotoner Konvergenz schließlich

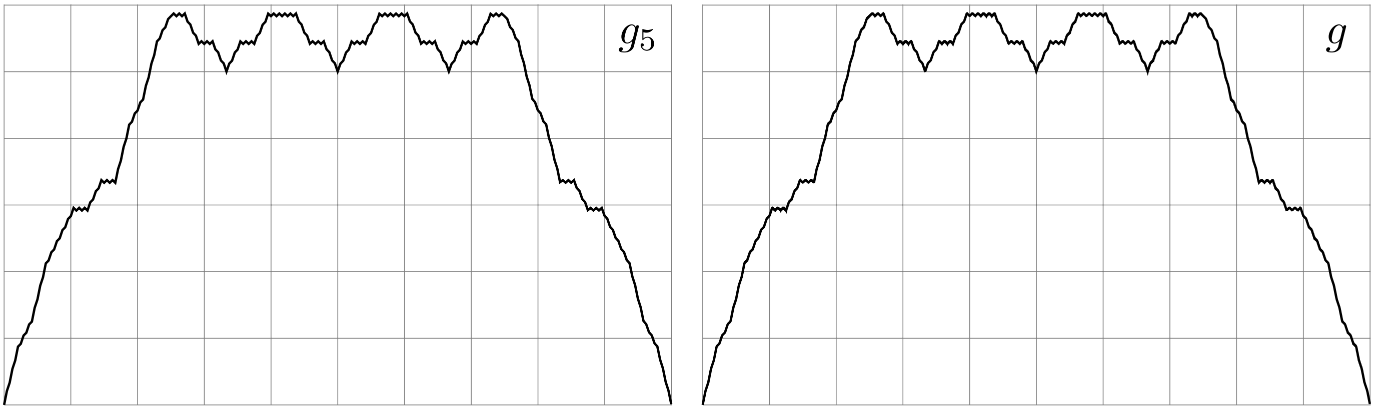
$$\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k!} = \frac{1}{4}\left[-1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\right] = \frac{\mathrm{e}-1}{4} \approx 0.42957.$$

☺ Unsere Integrationstechniken lösen auch dieses Problem elegant.

Takagi: stetig aber nirgends differenzierbar



Takagi: stetig aber nirgends differenzierbar



Satz B4A: Takagi 1901

Die so definierte **Takagi–Funktion** $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{dist}(x,\frac{1}{n!}\mathbb{Z})$ hat eine Reihe überaus bemerkenswerter Eigenschaften:

1. Die Funktion g ist stetig, aber in keinem Punkt differenzierbar.
2. Die Funktion g ist auf keinem Intervall $[a,b]$ mit $a<b$ monoton.
3. Sie nimmt in jedem Punkt $x\in\mathbb{Q}$ ein striktes lokales Minimum an.

☺ Das klingt unglaublich, ist aber wahr! Wer hätte das gedacht? Das Beste daran: Alles ist explizit, Sie können es direkt nachrechnen.

Takagi: stetig aber nirgends differenzierbar

Beweis: (1a) Die Funktion $f_k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist stetig für jedes $k\in\mathbb{N}$, also auch $g_n=\sum_{k=1}^{n}f_k$. Zudem gilt $0\le g(x)-g_n(x)\le\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2k!}\le\frac{1}{k!}\searrow 0$. Die Konvergenz $g_n\to g$ ist also gleichmäßig auf $\mathbb{R}$. Daher ist auch die Grenzfunktion $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig.

(1b) Sei $x\in\mathbb{R}$. Für $n\in\mathbb{N}$ ist die Funktion f_n zwischen den Punkten $\frac{1}{2n!}\mathbb{Z}$ stückweise affin mit Steigung ±1. Somit ist f_n affin auf $[x-\frac{1}{4n!},x]$ oder auf $[x,x+\frac{1}{4n!}]$. Für $n\ge 3$ wählen wir $h_n=\pm\frac{1}{(n+1)!}$ so, dass f_n zwischen x und $x+h_n$ affin ist. Gleiches gilt dann für alle f_k mit $1\le k\le n$. Für $k\ge n+1$ hingegen gilt $f_k(x+h_n)=f_k(x)$. Der Differenzenquotient ist

$$q_n:=\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{f_k(x+h_n)-f_k(x)}{h_n}=\sum_{k=1}^{n}\pm1.$$

Daher hat die Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keinen Grenzwert. Das heißt, f ist in x nicht differenzierbar.

Aus (3) folgt (2); es reicht also, Aussage (3) zu zeigen. Jede rationale Zahl $x\in\mathbb{Q}$ lässt sich schreiben als $x=a/n!$ mit $a\in\mathbb{Z}$ und $n\in\mathbb{N}_{\ge1}$. (Warum?) Wir zeigen $g(u)>g(x)$ für alle $u\in\mathbb{R}$ mit $0<|u-x|<r:=1/(2n)!$. Die Funktion $g_{n-1}=\sum_{k=1}^{n-1}f_k$ ist auf $[x-r,x+r]$ stückweise affin, und die Steigung liegt überall zwischen $1-n$ und $n-1$. Die Funktion $h=\sum_{k=n}^{2n-1}f_k$ hingegen erfüllt $h(u)=n|u-x|$ für alle $u\in[x-r,x+r]$. Demnach ist die Summe $g_{2n-1}=g_{n-1}+h$ streng fallend auf $[x-r,x]$ und streng wachsend auf $[x,x+r]$. Insbesondere ist x das strikte Minimum von g_{2n-1} eingeschränkt auf $[x-r,x+r]$. Für alle $k\ge 2n$ gilt $f_k(x)=0$ und $f_k(u)\ge0$ für alle u. Deshalb ist x das strikte Minimum auch von g eingeschränkt auf die hinreichend kleine Umgebung $[x-r,x+r]$. □

Der Mittelwertsatz der Integralrechnung

Satz B4B: Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $g \geq 0$ (oder $g \leq 0$). Dann existiert ein Punkt $\xi \in [a, b]$ mit der Mittelwerteigenschaft

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x.$$

Im Spezialfall $g = 1$ erhalten wir $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = f(\xi) \cdot (b - a)$.
Im Falle $\int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x = 1$ erhalten wir $\int_a^b f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x = f(\xi)$.

Aufgabe: Beweisen Sie diese Aussage!

Lösung: Auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ existieren $m := \min f$ und $M := \max f$. Wegen $g \geq 0$ auf ganz $[a, b]$ gilt damit $mg \leq fg \leq Mg$.
Das Integral ist monoton und linear, also folgt $m \int g \leq \int fg \leq M \int g$.
Demnach existiert ein Faktor $\mu \in [m, M]$ mit $\int fg = \mu \int g$.
Wir nutzen den Zwischenwertsatz für die stetige Funktion f:
Es existiert $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = \mu$. Somit gilt $\int fg = f(\xi) \int g$.

Taylor–Polynom und Restglied

Satz B4C: Taylor–Polynom und Restglied

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ sei $(n + 1)$-mal stetig diff'bar. Das n-te **Taylor–Polynom** von f zum Entwicklungspunkt $a \in I$ ist

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

Für alle $x \in I$ sei $R_n(x) := f(x) - T_n(x)$ das **Restglied**. (1) Es gilt

$$R_n(x) = \int_{t=a}^{x} \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, \mathrm{d}t \qquad \text{(Integralform)}$$

(2) Zu jedem $x \in I$ existiert ein ξ zwischen a und x mit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1} \qquad \text{(Lagrange–Form)}$$

🙂 Die Lagrange–Form des Restglieds gilt sogar, wenn f nur $(n + 1)$-mal differenzierbar ist; die Stetigkeit von $f^{(n+1)}$ benötigen wir hierzu nicht. Der Beweis unter dieser schwächeren Voraussetzung ist allerdings etwas trickreicher, siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §2.6.

Aufgabe: Beweisen Sie Aussage (1) für $n = 0, 1, 2, \dots$ per Induktion. Folgern Sie (2) mit dem Mittelwertsatz B4B der Integralrechnung.

Lösung: (1) Induktionsanfang: Der Fall $n = 0$ ist der HDI

$$f(x) = f(a) + \int_{t=a}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t = T_0(x) + R_0(x).$$

Induktionsschritt: Sei $n \ge 1$ und Aussage (1) gelte für $n-1$.
Wir haben also $f(x) = T_{n-1}(x) + R_{n-1}(x)$ mit dem Restglied

$$\begin{aligned} R_{n-1}(x) &= \int_{t=a}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[-\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\Big]_{t=a}^{x} + \int_{t=a}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_{t=a}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Hieraus folgt $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ wie in Aussage (1) behauptet.
🙂 Somit gilt die Restgliedformel (1) für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$.

(2) Sei zunächst $x \ge a$. Somit gilt $(x-t)^n \ge 0$ für alle $t \in [a, x]$.
Nach dem Mittelwertsatz B4B existiert ein $\xi \in [a, x]$ mit

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \int_{t=a}^{x} f^{(n+1)}(t)\,\frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t = f^{(n+1)}(\xi) \int_{t=a}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t \\ &= f^{(n+1)}(\xi) \Big[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\Big]_{t=a}^{x} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \end{aligned}$$

Den Fall $x \le a$ mit $(x-t)^n \le 0$ oder ≥ 0 behandelt man ebenso:
Der Mittelwertsatz B4B gilt wörtlich genauso und garantiert $\xi \in [x, a]$.
🙂 Somit gilt die Restgliedformel (2) für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$.

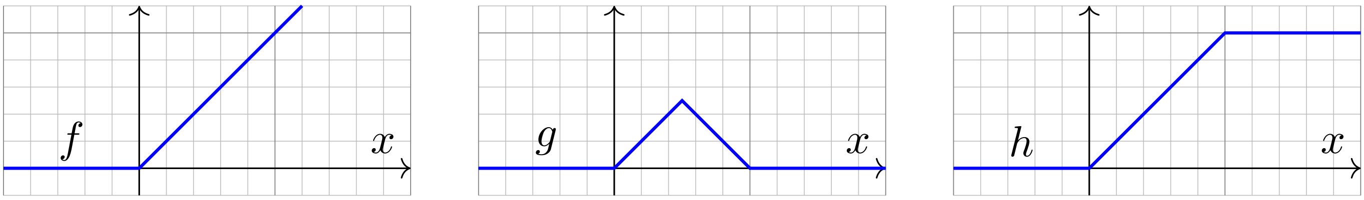
Bereits der Fall $n = 0$ ist sehr nützlich; wir halten ihn gesondert fest:

Korollar B4D: Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Ist $f : [a, x] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so existiert ein $\xi \in [a, x]$ mit

$$f(x) = f(a) + f'(\xi)(x-a)$$

Polygonzüge sind stetig, aber nicht glatt.



Wir suchen Funktionen $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

- $f(x) = 0$ für $x \le 0$ und $f(x) > 0$ für $x > 0$,
- $g(x) > 0$ für $0 < x < 1$ und $g(x) = 0$ sonst,
- h monoton mit $h(x) = 0$ für $x \le 0$ und $h(x) = 1$ für $x \ge 1$.

Wenn wir nur Stetigkeit (C^0) verlangen, so ist die Lösung leicht: Hierzu genügen stückweise affin-lineare Funktionen wie skizziert.

☹ Diese Funktionen sind stetig, aber nicht differenzierbar.

Wir können zudem Differenzierbarkeit erreichen, genauer sogar C^k, indem wir stückweise Polynomfunktionen vom Grad $k+1$ verkleben.

☺ Können wir auch C^∞–glatte Funktionen f, g, h erreichen? Ja!

Das ist erstaunlich, die Ausführung ist keineswegs offensichtlich. Die folgende Aufgabe erklärt hierzu die klassische Konstruktion.

Diese Funktion ist glatt, aber nicht analytisch.

Aufgabe: (0) Skizzieren Sie für $\alpha > 0$ die bemerkenswerte Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^\alpha} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \le 0. \end{cases}$$

Lösung: Einige Auswertungen ergeben folgendes Bild für $\alpha = 1, 2$:

Diese bemerkenswerte Funktion hat erstaunliche Eigenschaften: Sie ist überall auf $\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ analytisch, also lokal durch eine Potenzreihe darstellbar. Auf $\mathbb{R}_{<0}$ ist dies trivial, auf $\mathbb{R}_{>0}$ gilt es dank Komposition analytischer Funktionen. An der Klebestelle 0 ist die Funktion f immerhin noch C^∞–glatt, aber nicht mehr analytisch. Diese berühmte Funktion dient uns hier zunächst als Werkstück zur Illustration, später werden wir sie als Werkzeug nutzen, zur Konstruktion glatter Testfunktionen für Distributionen D529 und von exotischen Gegenbeispielen zu PDEs S108.

📖 Für die Funktion e^{-1/x^2} mit $\alpha = 2$ siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, Beispiel 2.6.12. Sie begegnet uns auch als eine Lösung der rationalen Differentialgleichung $x^3 y' = 2y$ M321.

Ist diese Funktion wirklich glatt?

Aufgabe: Sei $g:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}:x\mapsto g(x):=c_1x^{e_1}+c_1x^{e_2}+\dots+c_nx^{e_n}$, mit Koeffizienten $c_1,c_2,\dots,c_n\in\mathbb{R}$ und Exponenten $e_1,e_2,\dots,e_n\in\mathbb{R}$, und

$$f\,:\,\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,:\,x\mapsto f(x):=\begin{cases} g(x)\,\mathrm{e}^{-1/x^\alpha} & \text{für } x>0,\\ 0 & \text{für } x\le 0.\end{cases}$$

(1) Ist f stetig? in $x\ne 0$? in $x=0$? differenzierbar? in $x\ne 0$? in $x=0$? Wie rechnet man die Ableitung aus? in $x\ne 0$? in $x=0$? Zeigen Sie:

$$f'(x)=\begin{cases} \left[g'(x)+g(x)\cdot\alpha/x^{\alpha+1}\right]\mathrm{e}^{-1/x^\alpha} & \text{für } x>0,\\ 0 & \text{für } x\le 0.\end{cases}$$

(2) Ist f stetig diff'bar? zweimal? beliebig oft? also $f\in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$?
(3a) Berechnen Sie die Taylor–Reihe der Funktion f um $x=0$.
(3b) Konvergiert die Taylor–Reihe? Konvergiert sie gegen f?
(3c) Ist die Funktion f analytisch? in $x\ne 0$? in $x=0$?

⚠ Nicht jede C^∞–Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ lässt sich in eine Potenzreihe $f(x)=\sum_{n=0}^\infty a_nx^n$ entwickeln: Die zu f gehörige Taylor–Reihe kann divergieren! Selbst wenn sie konvergiert, so nicht unbedingt gegen f!

Ist diese Funktion wirklich glatt?

Lösung: (1) In jedem Punkt $x\ne 0$ ist f stetig / glatt / analytisch, denn dort ist f eine Komposition stetiger / glatter / analytischer Funktionen. Die angegebene Ableitung $f'(x)$ folgt aus Produkt- und Kettenregel. Es bleibt nur noch das Verhalten in $x=0$ zu klären. Für $x\searrow 0$ gilt:

$$f(x)=g(x)\Big/\left(1+\frac{1}{x^\alpha}+\frac{1}{2!x^{2\alpha}}+\frac{1}{3!x^{3\alpha}}+\frac{1}{4!x^{4\alpha}}+\dots\right)\ \to\ 0$$

Für $x\nearrow 0$ gilt $f(x)=0\to 0$. Somit ist f stetig in 0. Für $x\searrow 0$ gilt:

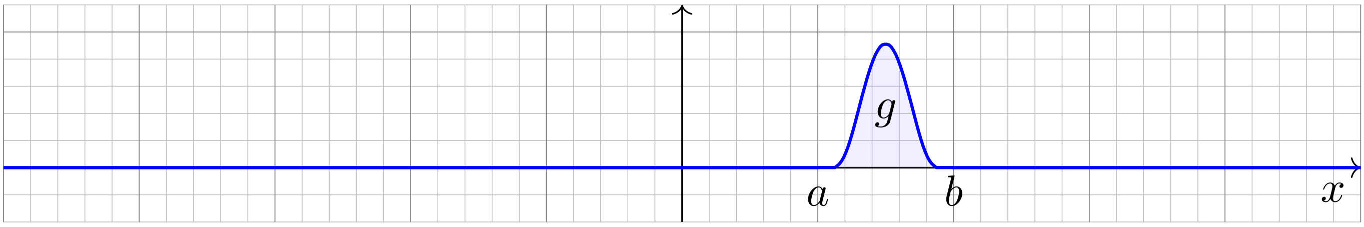
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}=\frac{g(x)}{x}\Big/\left(1+\frac{1}{x^\alpha}+\frac{1}{2!x^{2\alpha}}+\dots\right)\ \to\ 0$$

Rechtsseitig gilt $f'(0+)=0$. Linksseitig gilt trivialerweise $f'(0-)=0$. Also ist f tatsächlich differenzierbar in 0, und die Ableitung ist $f'(0)=0$.

(2) Die Ableitung f' ist von derselben Form, dank (1) also differenzierbar. Per Induktion ist f somit beliebig oft differenzierbar, kurz $f\in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(3) Für $k\in\mathbb{N}$ gilt $f^{(k)}(0)=0$. Die Taylor–Reihe in 0 ist also $T(x)=0$. Sie konvergiert, aber nicht gegen $f\ne 0$! Somit ist f in 0 nicht analytisch.

Hutfunktionen: glatt mit kompaktem Träger



Gibt es C^∞–glatte Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) > 0$ für $0 < x < 1$ und $g(x) = 0$ sonst? Wie konstruiert man eine solche? Allgemein gefragt:

Aufgabe: (4) Vorgegeben seien $a < b$ in $\mathbb{R}$. Konstruieren Sie eine stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) > 0$ für $a < x < b$ und $g(x) = 0$ sonst. Gelingt dies glatt, also $g \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$? analytisch, kurz $g \in C^\omega(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Bei Konstruktionsaufgaben geht es darum, eine Lösung mit den geforderten Eigenschaften zu konstruieren, und zwar möglichst explizit und direkt, und ihre Eigenschaften nachzuweisen. Natürlich kann man eine Skizze wie oben anfertigen und frech behaupten: „Voilà, hier ist eine Lösung!“ Es bleibt allerdings nachzuweisen, dass dies tatsächlich glatt möglich ist, also beliebig oft differenzierbar, selbst in den Klebestellen a und b. Genau hierzu dient diese Aufgabe. Dass dies keineswegs selbstverständlich ist, zeigt hier eindrücklich bereits die letzte Frage: Wenn wir analytische Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fordern, so ist diese Konstruktion unmöglich! Wir müssen daher zunächst befürchten, dass dies auch für C^∞–glatte Funktionen misslingt. Wir schaffen nun Klarheit, indem wir die Konstruktion solcher „Hutfunktionen“ ausführen.

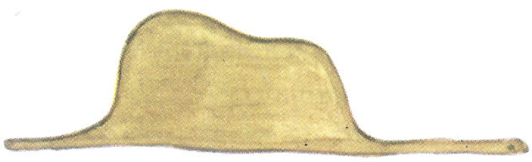
Hutfunktionen: glatt mit kompaktem Träger

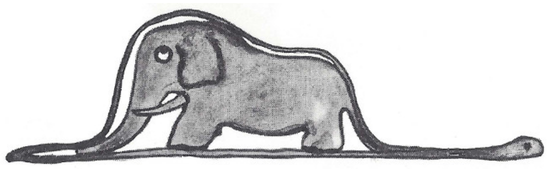
Lösung: Stetig ist’s jeweils leicht, zum Beispiel stückweise affin-linear.

Wir nutzen f aus der vorigen Aufgabe und $g(x) := f((b-x)(x-a))$. Diese Funktion ist glatt als Komposition glatter Funktionen.

Ebenso möglich ist die Funktion $g(x) = f(b-x)\,f(x-a)$. Diese Funktion ist glatt als Produkt glatter Funktionen.

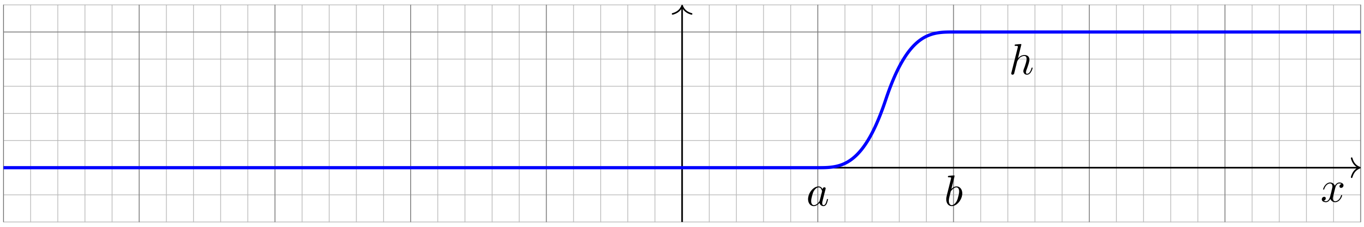
In beiden Fällen gilt $g(x) > 0$ für $a < x < b$ und $g(x) = 0$ sonst. Hingegen ist g nicht analytisch in den Klebestellen a und b, siehe (3).





Diese Zeichnungen stammen aus der berühmten Erzählung „Le Petit Prince“ des französischen Autors und Piloten Antoine de Saint-Exupéry (1900–1944). Das Bild links zeigt entgegen dem ersten Anschein keinen Hut, sondern eine Riesenschlange, die einen Elefanten verdaut (rechts). Er schreibt hierzu: *J’ai montré mon chef-d’œuvre aux grandes personnes et je leur ai demandé si mon dessin leur faisait peur. Elles m’ont répondu : « Pourquoi un chapeau ferait-il peur ? »* Auch wir haben keine Angst vor Hutfunktionen, im Gegenteil nutzen wir diese wundersamen Wesen im Folgenden raffiniert zur Konstruktion weiterer erstaunlicher und nützlicher Funktionen.

Hutfunktionen: glatt mit kompaktem Träger



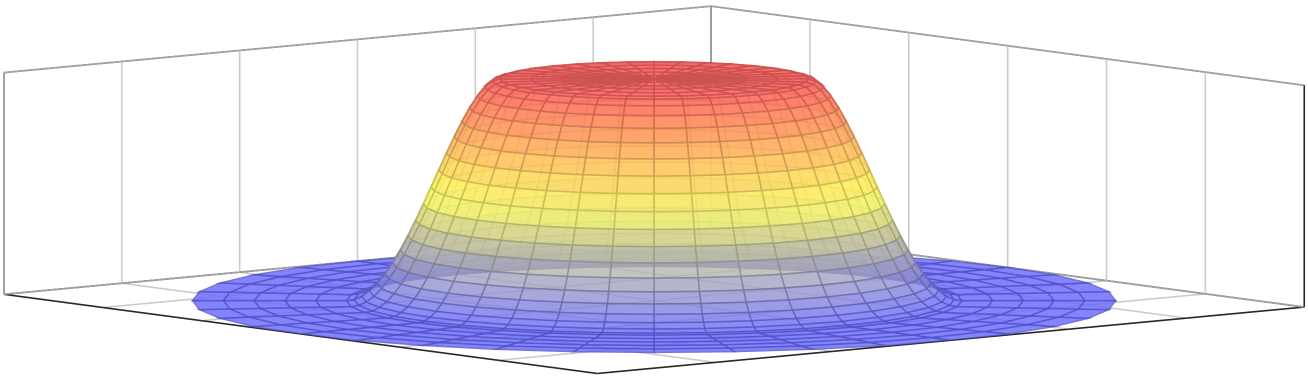
Aufgabe: (5) Vorgegeben seien $a < b$ in $\mathbb{R}$ wie zuvor. Konstruieren Sie eine stetige Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = 0$ für $x \le a$ und $h(x) = 1$ für $x \ge b$ und strikt monoton auf $[a, b]$. Gelingt dies glatt? analytisch?

Lösung: Stetig ist's jeweils leicht, zum Beispiel stückweise affin-linear. Für C^∞–glatte Funktionen nutzen wir eine glatte Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) > 0$ für $a < x < b$ und $g(x) = 0$ sonst aus der vorigen Aufgabe (4).

(5) Wir haben $c := \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > 0$ und setzen $h(x) := c^{-1} \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$. Die Funktion h ist glatt dank HDI (B1I) und erfüllt alle Forderungen. Hingegen ist h nicht analytisch in den Klebestellen a und b, siehe (4).

⚠ Glatte Funktionen sind flexibel, analytische Funktionen hingegen sind starr. Für Letztere gilt der Eindeutigkeitssatz: Haben zwei analytische Funktionen $\varphi, \psi : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}$ in einem Punkt x_0 dieselben Ableitungen $\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so gilt $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle $x \in I$. Sind sie gleich auf einer beliebig kleinen Umgebung von x_0, so sind sie überall gleich.

Glatte Hutfunktionen auf Bällen



Satz B4E: glatte Hutfunktionen auf Bällen

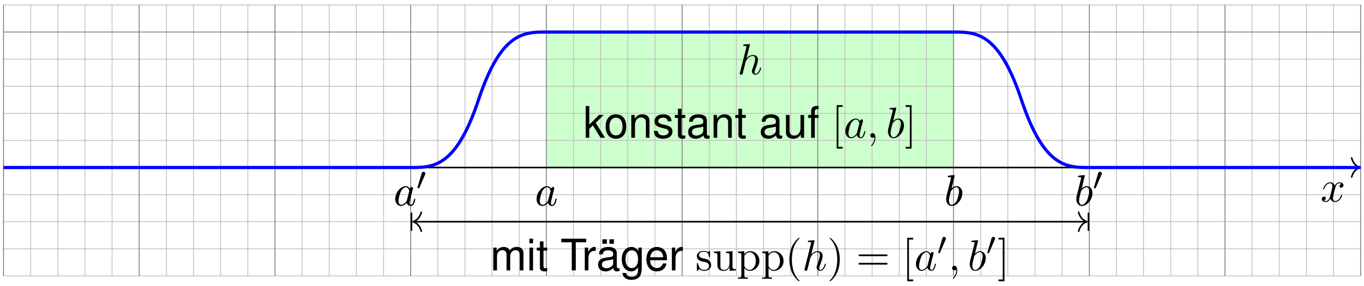
Gegeben seien Radien $0 \le a < b < \infty$. Im $\mathbb{R}^n$ definiert dies die Bälle

$$A = \bar{B}(0, a) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \le a^2 \,\},$$
$$B = B(0, b) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 < b^2 \,\}.$$

Hierzu können wir eine glatte Funktion $h : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ konstruieren mit $h = 1$ auf A und $h = 0$ außerhalb B sowie $0 < h < 1$ auf $B \smallsetminus A$.

Beweis: Das gelingt wie in (5) durch $h(x_1, \dots, x_n) = g(x_1^2 + \dots + x_n^2)$ mit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt, wobei $g(r) = 1$ für $r \le a^2$ und $g(r) = 0$ für $r \ge b^2$.

Glatte Hutfunktionen auf Intervallen



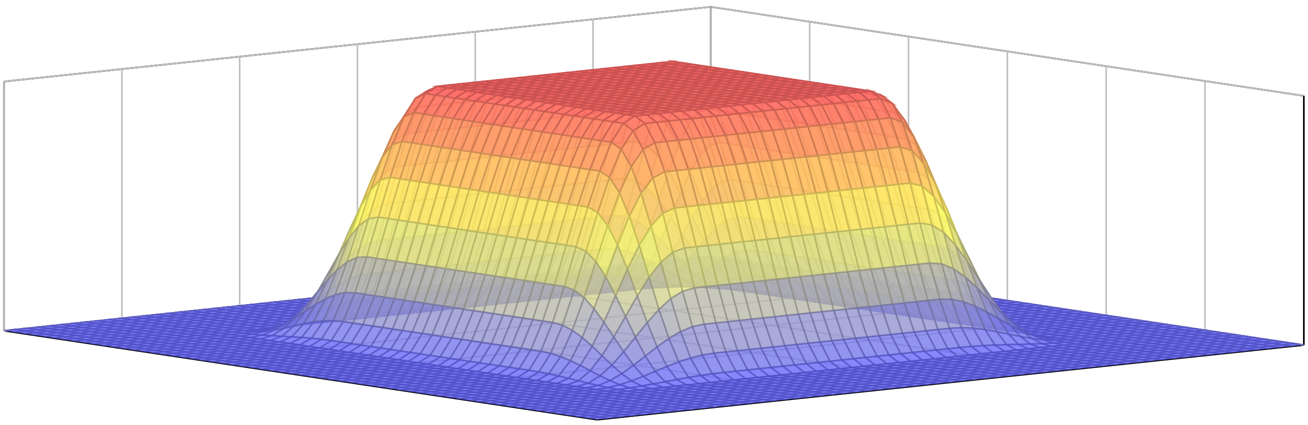
Aufgabe: (6) Vorgegeben seien nun $a' < a \le b < b$ in $\mathbb{R}$.
Konstruieren Sie eine C^∞–glatte Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie skizziert: konstant $h = 1$ auf dem Intervall $[a, b]$ und $h = 0$ außerhalb von $]a', b'[$ sowie strikt wachsend links auf $[a', a]$ und strikt fallend rechts auf $[b, b']$.

Lösung: Stetig ist's jeweils leicht, zum Beispiel stückweise affin-linear. Für C^∞–glatte Funktionen nutzen wir zwei glatte Funktionen aus (5):

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $x \le a'$ und $f(x) = 1$ für $x \ge a$,
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = 0$ für $x \le b$ und $g(x) = 1$ für $x \ge b'$.

Das Produkt $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : h(x) = f(x) \cdot (1 - g(x))$ erfüllt alle Forderungen: Die Funktion h ist offensichtlich glatt als Produkt glatter Funktionen, zudem gilt $h = f$ auf $]-\infty, b]$ und $h = 1 - g$ auf $[a, +\infty[$.

Glatte Hutfunktionen auf Quadern



Satz B4F: glatte Hutfunktionen auf Quadern

Seien $a'_i < a_i \le b_i < b'_i$ für $i = 1, \dots, n$. Im $\mathbb{R}^n$ definiert dies die Quader

$$A = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n],$$
$$B =]a'_1, b'_1[\times \dots \times]a'_n, b'_n[.$$

Hierzu können wir eine glatte Funktion $h : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ konstruieren mit $h = 1$ auf A und $h = 0$ außerhalb B sowie $0 < h < 1$ auf $B \smallsetminus A$.

Beweis: Dies gelingt wie in (6) durch $h(x_1, \dots, x_n) = h_1(x_1) \cdots h_n(x_n)$.
🙂 Das ähnelt einer Indikatorfunktion A306, doch mit glattem Übergang.

Glatte Hutfunktionen als Testfunktionen

Glatte Funktionen $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sind bemerkenswert flexibel: Die vorigen Konstruktionen zeigen, dass die Menge $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ der glatten Funktionen mit kompaktem Träger erstaunlich reichhaltig ist. Eine erste Anwendung:

Satz B4G: Verschwindungs- und Vergleichssatz

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, zum Beispiel $\Omega = \,]\alpha,\beta[$ oder $\Omega = \mathbb{R}$. Für jede stetige Funktion $f:\mathbb{R} \supseteq \Omega \to \mathbb{R}$ sind dann äquivalent:

0 $f = 0$, das heißt Gleichheit $f(x) = 0$ in jedem Punkt $x \in \Omega$.

1 $\int_\Omega |f(x)|\,\mathrm{d}x = 0$, das heißt die L^1–Norm verschwindet.

2 $\int_A f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ für jedes kompakte Intervall $A = [a,b] \Subset \Omega$.

3 $\int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$ für jede Testfunktion $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Für je zwei stetige Funktionen $f,g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind demnach äquivalent:

0 $f = g$, das heißt Gleichheit $f(x) = g(x)$ in jedem Punkt $x \in \Omega$.

1 $\int_\Omega |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x = 0$, das heißt der L^1–Abstand verschwindet.

2 $\int_A f(x)\,\mathrm{d}x = \int_A g(x)\,\mathrm{d}x$ für jedes kompakte Intervall $A \Subset \Omega$.

3 $\int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega g(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ für jede Testfunktion $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Glatte Hutfunktionen als Testfunktionen

Aufgabe: Erkären Sie diesen Satz anschaulich. Dann beweisen Sie ihn!

Lösung: Die Implikationen „(0) ⇒ (1,2,3)“ sind trivial. Wir zeigen die Umkehrungen durch Kontraposition: Angenommen $f \ne 0$, das heißt es gilt $f(a) \ne 0$ für ein $a \in \Omega$. Wir dürfen $f(a) = 2b > 0$ annehmen. (Im entgegengesetzen Falle $f(a) < 0$ betrachten wir $-f$ statt f.) Da $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ offen und hierauf $f:\Omega \to \mathbb{R}$ stetig ist, existiert $\varepsilon > 0$ mit $B := \,]a-2\varepsilon, a+2\varepsilon[\, \subseteq \Omega$ worauf $f \ge b$ gilt. Sei $A := [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$.

„(1) ⇒ (0)“: Es gilt $\int_\Omega |f| \ge \int_A |f| \ge \int_A b = b\,\mathrm{vol}_1(A) = 2\varepsilon b > 0$.

„(2) ⇒ (0)“: Es gilt $\int_A f \ge \int_A b = b\,\mathrm{vol}_1(A) = 2\varepsilon b \ne 0$.

„(3) ⇒ (0)“: Dank Satz B4E / B4F existiert eine C^∞–Funktion $\varphi:\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ mit $\varphi(x) = 1$ für $x \in A$ und $\varphi(x) = 0$ für $x \in \Omega \smallsetminus B$. Dank Monotonie des Integrals gilt dann wie zuvor:

$$\int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_B f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x \ge \int_B b\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x > 2\varepsilon b > 0$$

☺ Wir können $f = 0$ durch jedes dieser drei Kriterien (1,2,3) testen. Ebenso $f = g$, indem wir den Satz auf die Differenz $f - g$ anwenden.