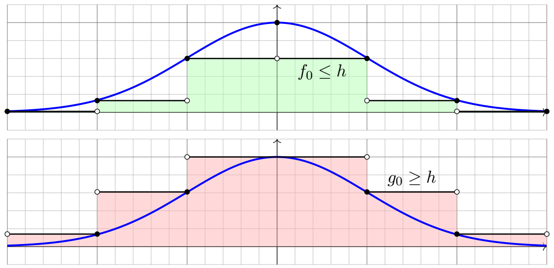
Kapitel A

Was sind und was sollen Integrale?



Alles messen, was messbar ist –
und messbar machen, was noch nicht messbar ist.

Galileo Galilei (1564–1642)

Inhalt dieses Kapitels A

Integration: Theorie und Anwendung

Bernhard Riemann
(1826–1866)

Emile Borel
(1871–1956)

Henri Lebesgue
(1875–1941)

Bildquelle: wikipedia.org

Integration ist ein mächtiges und allgegenwärtiges Werkzeug.
Wir werden der Reihe nach drei fundamentale Fragen klären:

1. Konstruktion: Was sind und was sollen Integrale?
2. Werkzeugkasten: Welche Rechenregeln gelten?
3. Training: Wie berechnen wir konkrete Beispiele?

Integration: Theorie und Anwendung

Differenziert und integriert wird seit Newton (1643–1727) und Leibniz (1646–1716). Ihre **Infinitesimalrechnung** ist überaus erfolgreich und wird systematisch weiterentwickelt. Die Integrationstheorie ist eine Errungenschaft des 19. Jahrhunderts (dank Riemann, Darboux, Jordan, …) und vollendet zu Beginn des 20. Jahrhunderts (dank Borel, Baire, Lebesgue, …).

Auch nach über hundert Jahren bewährt sie sich täglich in ihren zahlreichen **Anwendungen**, von der Fourier–Analyse in der Signalverarbeitung über die allgegenwärtige Wahrscheinlichkeitsrechnung bis zur Quantenphysik. Das wird auch in weiteren hundert Jahren noch so sein: Solide mathematische Arbeit hat einen extrem langen Nutzen. Die Investition lohnt sich!

Die Integration wird uns die ersten Wochen beschäftigen, ihre Anwendungen das gesamte Semester. Dieses Überblickskapitel gibt zunächst eine erste **Kurzanleitung** zur Integration. In der Praxis stehen Sie vor allem vor der letzten Frage (3): Zu einer vorgelegten Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ wollen Sie das Integral $\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x$ berechnen. Dazu brauchen Sie geeignete Werkzeuge, insbesondere ausreichend starke Rechenregeln (2). Um diese überhaupt erst zu erhalten und zu verstehen, müssen wir die erste Frage klären: (1) Was bedeutet Integration?

Zur Not kann man versuchen, sich allein auf die besonders relevante dritte Frage zu stützen und möglichst viele Beispiele auswendig zu lernen. Erfahrungsgemäß erscheinen diese dann jedoch unzusammenhängend und eher verwirrend. Es ist wesentlich effizienter, sich zuerst den nötigen Überblick zu verschaffen, um so allen Anwendungen gemeinsam die nötige Struktur zu geben. Eine **solide Grundlegung** ist wichtig, um zu wissen, wovon wir reden! Ich erkläre Ihnen hierzu eine Handvoll Prinzipien, auf denen die gesamte Integration aufbaut. In den folgenden Kapitel entwickeln wir hieraus praktische Rechenregeln, illustrative Beispiele und erste Anwendungen.

Ziele: grundlegende Integrationstechniken

Wir nutzen den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI):

$$\int_{x=a}^{b} F'(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \Big[F(x)\Big]_{x=a}^{b} := F(b) - F(a)$$

Bei absoluter Integrierbarkeit können wir iterierte Integrale nutzen:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n) \overset{\text{Fub}}{\underset{\text{C1E}}{=}} \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$$

Für C^1–Koordinatenwechsel $\Phi : X \xrightarrow{\sim} Y$ gilt der Transformationssatz:

$$\int_Y f(y)\,\mathrm{d}y \overset{\text{Trafo}}{\underset{\text{C2B}}{=}} \int_X f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)|\,\mathrm{d}x$$

Bei majorisierter Konvergenz vertauschen Grenzwert und Integral:

$$\int_\Omega \Big[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big]\,\mathrm{d}x \overset{\text{MaK}}{\underset{\text{D2D}}{=}} \lim_{n\to\infty} \Big[\int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}x\Big]$$

☺ Diese Sätze lassen sich oft anwenden und zur Berechnung nutzen.
⚠ Vorsichtsmaßnahmen sind nötig, die müssen Sie beherrschen.

Ziele: Differential- und Integralsätze

Der eindimensionale Hauptsatz hat mehrdimensionale Folgerungen!
Arbeitsintegral für orient. Kurven Γ und Skalarfelder $g : \mathbb{R}^3 \supseteq \Gamma \to \mathbb{R}$:

$$\int_\Gamma \operatorname{grad}(g) \bullet \mathrm{d}\Gamma \overset{\text{HDI}}{\underset{\text{E3C}}{=}} \sum\nolimits_{s\in\partial\Gamma} g(s)\,n(s)$$

Ist die Kurve Γ geschlossen, also $\partial\Gamma = \emptyset$, so folgt $\oint_\Gamma \operatorname{grad}(g) \bullet \mathrm{d}\Gamma = 0$.
Satz von Stokes für orient. Flächen S und Vektorfelder $f : \mathbb{R}^3 \supseteq S \to \mathbb{R}^3$:

$$\int_S \operatorname{rot}(f) \bullet \mathrm{d}S \overset{\text{Stokes}}{\underset{\text{G1A}}{=}} \int_{\Gamma=\partial S} f \bullet \mathrm{d}\Gamma$$

Ist die Fläche S geschlossen, also $\partial S = \emptyset$, so folgt $\oint_S \operatorname{rot}(f) \bullet \mathrm{d}S = 0$.
Satz von Gauß für Volumina $V \subseteq \mathbb{R}^3$ und Vektorfelder $f : \mathbb{R}^3 \supseteq V \to \mathbb{R}^3$:

$$\int_V \operatorname{div}(f)\,\mathrm{d}V \overset{\text{Gauß}}{\underset{\text{G3G}}{=}} \int_{S=\partial V} f \bullet \mathrm{d}S$$

Hierbei sind $\Gamma, S, V \Subset \mathbb{R}^3$ kompakt und stückweise glatt, f, g zumindest definiert auf einer offenen Umgebung und dort stetig differenzierbar.

Welche Anwendungen hat die Integration?

Damit haben wir die ersten wichtigen Themen genannt:

- Ein- und mehrdimensionale Integration.
- Integralsätze in der Ebene $\mathbb{R}^2$ und im Raum $\mathbb{R}^3$.
- Anwendungen in Natur- und Ingenieurwissenschaften.

Dank ihrer zahlreichen Anwendungen ist die Integration unentbehrliches Werkzeug und grundlegend in den Ingenieur- und Naturwissenschaften.
Erste wichtige Anwendungen werden wir in dieser Vorlesung vorstellen:

- Fourier–Reihen, Fourier– und Laplace–Transformation.
- Lösung gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen.
- Wahrscheinlichkeitsrechnung, kontinuierliche Verteilungen.

Die hier genannten Themen sind das umfassende Ziel dieser Vorlesung.
Der Weg ist steil, doch unser ambitioniertes Ziel ist überaus lohnend!

☺ Damit Sie diese Werkzeuge sicher und effizient nutzen können, werden wir zunächst die grundlegenden Rechenregeln darlegen.

Wozu brauchen Sie Definitionen und Sätze?

Sie können die Integration als eine Maschine auffassen: Aus jeder integrierbaren Funktion f macht sie eine Zahl $\int f$. Für die Praxis sollen Sie lernen, diese Maschine korrekt und effizient zu nutzen. Dazu müssen Sie ihren grundlegenden Aufbau und ihre Funktionsweise verstehen.

Dieses Kapitel gibt hierzu die **Kurzanleitung zur Integration**: Um überhaupt von Integralen sprechen zu können, erkläre ich hier zunächst, was Integrale sind und nach welchen Regeln sie funktionieren. Der Schnelldurchgang ist noch zu knapp, gibt aber einen guten ersten Überblick.

In den folgenden Kapiteln entwickeln wir **Rechentechniken**, wie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung B1I, den Satz von Fubini C1E, den Transformationssatz C2B, schließlich die Integralsätze von Gauß und Stokes. Alle diese Sätze und Rechenregeln beruhen auf der in diesem ersten Kapitel gegebenen Definition des Integrals und lassen sich daraus ableiten.

Für die Anwendung sollen Sie vor allem konkrete Beispiele beherrschen. Reicht es also, nur Beispiele zu lernen? Es ist wie mit den Spielregeln beim Sport (Handball, Cricket, Schach): Es ist mühsam, unsicher und ineffizient, diese nur durch Beobachten von Spielen zu erraten, zudem könnte man niemals sicher sein, wirklich alle Regeln zu kennen und zu verstehen.

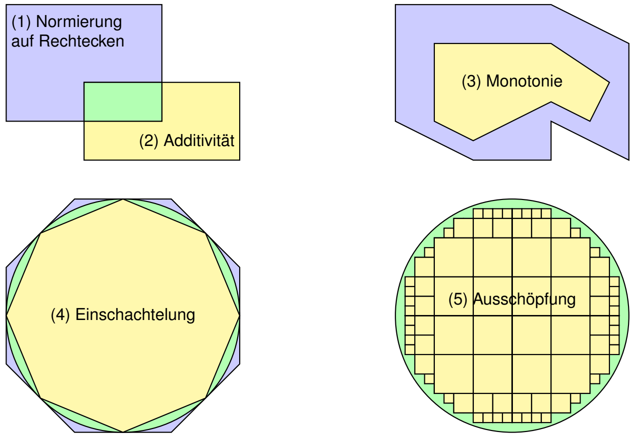
Daher ist es effizienter, von Anfang an die fundamentalen **Regeln** darzulegen und zugleich auch lehrreiche **Beispiele** zu untersuchen. Diesen werden wir uns in den folgenden Kapiteln widmen.

We think in generalities, but we live in detail.
(Alfred North Whitehead, 1861–1947)

Wie misst man Flächen- und Rauminhalt?

A101

Teilmengen $A \subseteq \mathbb{R}^2$ wollen wir ihren Flächeninhalt $\operatorname{vol}_2(A)$ zuweisen.
Problem: Nach welchen **Regeln**? Welche Mengen sind **messbar**?



Ebenso für den Rauminhalt $\operatorname{vol}_3(A)$ von Teilmengen $A \subseteq \mathbb{R}^3$, und allgemein für das n–dim. Volumen $\operatorname{vol}_n(A)$ von Teilmengen $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definition: Messbare Mengen und ihr Volumen

A102

Messbare Mengen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und ihr n–dimensionales Volumen $\operatorname{vol}_n(A) \in [0, \infty]$ definieren wir nach folgenden fünf Grundregeln:

(1) **Normierung:** Jeder n–dimensionale Quader $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist messbar, und sein Volumen $\operatorname{vol}(A)$ ist das Produkt seiner Seitenlängen.
☺ Speziell für die leere Menge $\emptyset$ folgt daraus $\operatorname{vol}(\emptyset) = 0$.

(2) **Additivität:** Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar, so auch $A \cup B$ und $A \cap B$, und für diese vier gilt $\operatorname{vol}(A) + \operatorname{vol}(B) = \operatorname{vol}(A \cup B) + \operatorname{vol}(A \cap B)$.
☺ Für $A \cap B = \emptyset$ folgt $\operatorname{vol}(A \sqcup B) = \operatorname{vol}(A) + \operatorname{vol}(B)$ dank $\operatorname{vol}(\emptyset) = 0$.

(3) **Monotonie:** Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar, so auch $C = B \setminus A$.
☺ Aus $A \subseteq B$ folgt $B = A \sqcup C$ und $\operatorname{vol}(A) \le \operatorname{vol}(B)$ dank Additivität (2).

(4) **Einschachtelung:** Gilt $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq C \subseteq \ldots \subseteq B_2 \subseteq B_1 \subseteq B_0$ mit A_k, B_k messbar und $\operatorname{vol}(B_k \setminus A_k) \searrow 0$, so ist auch C messbar.
☺ Dank Monotonie (3) folgt daraus $\operatorname{vol}(A_k) \nearrow \operatorname{vol}(C) \swarrow \operatorname{vol}(B_k)$.

(5) **Ausschöpfung:** Sind $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ messbar, so auch ihre Vereinigung $A = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots$, und dabei gilt $\operatorname{vol}(A_k) \nearrow \operatorname{vol}(A)$.

Grundlegende Eigenschaften des Volumens

A103
Ausführung

☺ Auf diesen fünf einfachen Grundregeln beruht die gesamte Integration! Damit berechnen wir den Flächeninhalt von Polgonen, Kreisen, etc. sowie den Rauminhalt von Polyedern, Kugeln, etc.

Im Prinzip ist damit alles über die Integration gesagt. Wir benötigen dennoch etwas mehr Zeit: Sie sollen die nötigen Rechentechniken beherrschen sowie wichtige Beispiele und Anwendungen.

Wir fragen als erstes: Ist das Ergebnis eindeutig, wohldefiniert, unabhängig vom Rechenweg? Die Eindeutigkeit ist für alles Weitere unabdingbar und keineswegs selbstverständlich. A409

Satz A1A: Lebesgue 1901

Mit diesen fünf Regeln können wir jeder messbaren Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eindeutig ihr Volumen $\operatorname{vol}_n(A) \in [0, \infty]$ zuweisen und somit ausrechnen.

Alle natürlich auftretenden Mengen sind auf diese Weise messbar:

- Alle offenen und alle abgeschlossenen Mengen in $\mathbb{R}^n$ sind messbar.
- Ist eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar, so auch ihr Komplement $\mathbb{R}^n \setminus A$.
- Sind die vorgelegten Mengen $A_0, A_1, A_2, \ldots \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar, so auch ihr Durchschnitt $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$ und ihre Vereinigung $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$.
- Für jede disjunkte Vereinigung gilt $\operatorname{vol}(\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} A_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \operatorname{vol}(A_k)$. Diese wichtige und nützliche Eigenschaft heißt **σ–Additivität**.

Grundlegende Eigenschaften eines Maßes

A104
Ausführung

Das n–dimensionale Volumen vol_n ist demnach ein σ–additives Maß im folgenden Sinne; die Bezeichnung „σ“ steht dabei für „abzählbar“.

Definition A1B: Maßraum

Ein **Maßraum** $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ besteht aus

- einer **Grundmenge** Ω,
- einer **σ–Algebra** $\mathscr{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ und
- einem **σ–additiven Maß** $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$

mit folgenden grundlegenden Eigenschaften, wie oben erklärt:

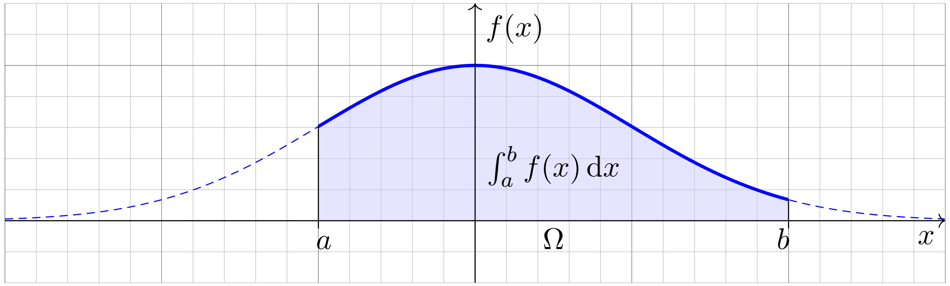
1. **Leere Menge:** Es gilt $\emptyset \in \mathscr{A}$ und $\mu(\emptyset) = 0$.
2. **Komplemente:** Aus $A \in \mathscr{A}$ folgt $(\Omega \setminus A) \in \mathscr{A}$.
3. **σ–Additivität:** Aus $A_0, A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}$ folgt $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathscr{A}$ sowie

$$\mu\Big(\bigsqcup_{k=0}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k) \quad \text{falls } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j.$$

Jeder messbaren Menge $A \subseteq \Omega$ wird ihr Maß $\mu(A) \in [0, \infty]$ zugeordnet. Diese Sichtweise nutzen wir später für Wahrscheinlichkeitsmaße (V1C).

Was sind und was sollen Integrale?

Beispiel: Wir integrieren $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$ über $\Omega = [-1, 2]$.



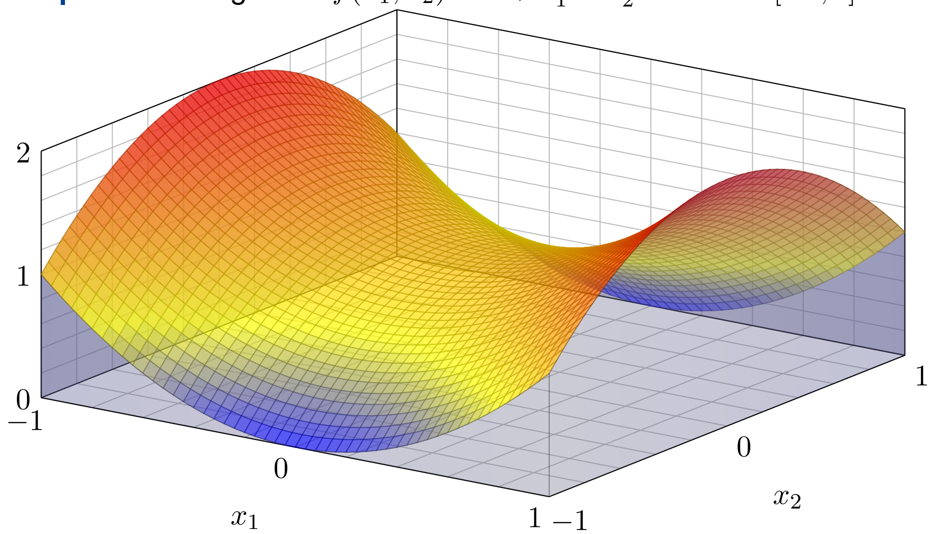
Zur Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ existiert eine Integralfunktion $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: x\mapsto\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ mit $F'=f$ dank Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (B1I). Leider ist F nicht elementar (B1P). Schon in solch einfachen Beispielen benötigen wir die geometrische Integraldefinition als Fläche!

Grundidee: Sei $\Omega = [a, b]$ ein Intervall und $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Das Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ misst die Fläche unter dem Graphen von f.

Verallgemeinerung: Sei $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ ein Quader und $f:\Omega\to\mathbb{R}$ stetig. Das Integral $\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x$ misst das Volumen unter dem Graphen von f.

Was sind und was sollen Integrale?

Beispiel: Wir integrieren $f(x_1, x_2) = 1 + x_1^2 - x_2^2$ über $\Omega = [-1, 1]^2$.



Gesucht ist das Volumen unter dem Graphen, also $\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x$. Dieses sehr einfache Beispiel lässt sich auch ohne Rechnung lösen: $\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x = 4$. Können Sie es sehen? und ausrechnen? Solide Grundlagen helfen der geometrischen Anschauung und dann der formalen Ausführung!

Bewährte Schreibweisen und Gedächtnisstützen

Das Integral einer Funktion $f:\mathbb{R}^n\supseteq\Omega\to\mathbb{R}$ schreiben wir wahlweise

$$\int_\Omega f = \int_\Omega f\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x\in\Omega} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Die Bezeichnung der Integrationsvariablen ist dabei willkürlich:

$$\int_\Omega f = \int_\Omega f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\Omega f(u)\,\mathrm{d}u = \int_\Omega f(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \dots$$

Speziell für $\Omega = [a,b]\subseteq\mathbb{R}$ und $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ schreiben wir auch:

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x=a}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \dots$$

Zweidimensional, für $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ und $f:\Omega\to\mathbb{R}$, schreiben wir auch:

$$\int_\Omega f = \int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{(u,v)\in\Omega} f(u,v)\,\mathrm{d}(u,v) = \dots$$

Dreidimensional, für $\Omega\subseteq\mathbb{R}^3$ und $f:\Omega\to\mathbb{R}$, schreiben wir auch:

$$\int_\Omega f = \int_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_{(u,v,w)\in\Omega} f(u,v,w)\,\mathrm{d}(u,v,w) = \dots$$

Bewährte Schreibweisen und Gedächtnisstützen

Zwei- und dreidimensionale Integrale schreiben manche lieber so:

$$\iint\limits_\Omega f = \iint\limits_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \iint\limits_{(u,v)\in\Omega} f(u,v)\,\mathrm{d}(u,v) = \dots$$

$$\iiint\limits_\Omega f = \iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \iiint\limits_{(u,v,w)\in\Omega} f(u,v,w)\,\mathrm{d}(u,v,w) = \dots$$

Diese dekorative Schreibweise betont, dass wir mit zwei- bzw. dreidimensionalen Integralen arbeiten, ist aber ansonsten entbehrlich: Der Integrationsbereich $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ weiß ja, in welcher Dimension n er lebt! Das bildhafte Symbol ist eine hilfreiche Gedächtnisstütze für die Leser:in, nicht mehr, nicht weniger. Das Integral ist unabhängig von der Schreibweise dasselbe wie zuvor.

Redundanz schadet selten, oft bietet sie nützliche Erinnerung und willkommene Hilfestellung. Für die Praxis empfiehlt es sich, überflüssige Schnörkel wegzulassen und nur das Wesentliche so klar und präzise zu notieren, dass Lese- und Rechenfehler weitestgehend vermieden werden. Alle genannten Schreibweisen haben sich hierzu bewährt, alle erfordern Verständnis und Übung.

Eine gute Notation vermeidet Fehler und Missverständnisse. Das ist nicht nur eine mathematische Frage, sondern vor allem eine der Klarheit, der Bequemlichkeit und der jeweiligen Tradition. Die wahre Kraft der Begriffe steckt nicht in ihrer *Schreibung*, sondern in ihrer *Bedeutung*! Das können wir nun klar und präzise formulieren dank Ihrer guten Grundlagen aus der HM1&2.

Aufbau des Zahlensystems

Unser Fundament ist das Zahlensystem $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Zur Wiederholung der Grundlagen siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, Kapitel 0 und 1.
Aufbau: Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ dienen zum **Zählen**. Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ lösen das Problem der Subtraktion. Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \{\, a/b \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \,\}$ lösen das Problem der Division. Sie bilden einen geordneten Körper $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$, sind aber noch unvollständig: Zahlen wie $\sqrt{2}$, e, π, etc. sind nicht rational! Um dieses Problem zu lösen, müssen wir einen entscheidenden Schritt weiter gehen und die rationalen zu den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ vervollständigen. Die reellen Zahlen dienen zum **Messen**. Sie sind die unabdingbare Grundlage der Analysis: Grenzwerte von Folgen und von Reihen, Ableitungen und Integrale, etc. ergeben erst auf Grundlage der reellen Zahlen einen Sinn.

Die reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ sind ein geordneter Körper und zudem vollständig.
Vollständigkeit bedeutet: Jede nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ besitzt in $\mathbb{R}$ eine kleinste obere Schranke. Diese nennen wir das Supremum von M und bezeichnen sie mit $\sup M$. Gleiches gilt für die größte untere Schranke, das Infimum von M, geschrieben $\inf M$. Aus den Körperaxiomen, der Anordnung und der Vollständigkeit entspringen alle weiteren Eigenschaften der reellen Zahlen, sodann der komplexen Zahlen, der reellen und komplexen Funktionen, der Differential- und Integralrechnung, … schließlich der gesamten Analysis!

Die komplexen Zahlen $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sind ein Körper und algebraisch abgeschlossen (F3C):
In $\mathbb{R}$ hat die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ keine Lösung. In $\mathbb{C} = \mathbb{R}[\mathrm{i}]$ führen wir hierzu die Zahl i ein. Über $\mathbb{C}$ zerfällt *jedes* Polynom $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$ in Linearfaktoren (F3C). Viele Rechnungen gelingen nur mit komplexen Zahlen, weitere werden so besonders effizient.

Absolutbetrag und Abstand reeller Zahlen

Die reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ sind ein vollständiger geordneter Körper. Aus der Anordnung gewinnen wir insbesondere den **Absolutbetrag**

$$|{-}| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto |x| := \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0, \\ -x & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Dies ist eine **Norm** mit folgenden Eigenschaften:

- Definitheit: $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.
- Multiplikativität: $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- Subadditivität: $|x + y| \leq |x| + |y|$

Dies wiederum definiert für alle $a, b \in \mathbb{R}$ den **Abstand** $|a - b|$.

- Definitheit: $|a - b| = 0$ genau dann, wenn $a = b$.
- Symmetrie: $|a - b| = |b - a|$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.
- Dreiecksungleichung: $|a - c| \leq |a - b| + |b - c|$

Norm und Abstand werden wir später auf $\mathbb{C}$ sowie $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ und noch allgemeinere Vektorräume übertragen, z.B. Funktionenräume. Diese können wir meist nicht sinnvoll anordnen, aber Norm, Abstand und Konvergenz dienen auch dort als zentrale Werkzeuge (C4J, U4B).

Konvergenz reeller Zahlenfolgen

Eine **Folge** $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : n \mapsto a_n$. Jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ wird eine reelle Zahl $a_n \in \mathbb{R}$ zugeordnet.

Vorgelegt seien Schranken $s, t \in \mathbb{R}$. Gilt $a_n \geq s$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so nennen wir die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **nach unten beschränkt** durch s. Gilt $a_n \leq t$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so nennen wir die Folge **nach oben beschränkt** durch t.

Definition A2A: Konvergenz einer reellen Zahlenfolge

Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ **konvergiert** gegen eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$, wenn der Abstand $|a - a_n|$ schließlich beliebig klein wird, genauer:

Für jedes noch so kleine $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert ein Index $m \in \mathbb{N}$, sodass für alle folgenden Indizes $n \geq m$ die Ungleichung $|a - a_n| \leq \varepsilon$ gilt.

In diesem Falle schreiben wir $a_n \to a$ für $n \to \infty$, oder kurz $a_n \to a$. Den **Grenzwert** schreibt man $\lim_{n \to \infty} a_n = a$, oder kurz $\lim a_n = a$.
Beispiel: Für $|q| < 1$ gilt $q^n \to 0$ sowie $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \to \frac{1}{1 - q}$.
Die Folge $x_0 = 0,\ x_1 = 0.9,\ x_2 = 0.99,\ x_3 = 0.999,\ \dots,\ x_n = 1 - 10^{-n}$ konvergiert gegen 1. Das ist das ganze Geheimnis hinter der Gleichung $0.999999999\ldots = 1$. Diese Erkenntnis ist keineswegs selbstverständlich!

Uneigentliche Konvergenz gegen $\pm\infty$

Jede in $\mathbb{R}$ konvergente Folge ist beschränkt. Die Umkehrung gilt nicht: Die Folge $(-1)^n$ ist beschränkt, konvergiert aber dennoch nicht in $\mathbb{R}$.
Die Folge $(1, 2, 3, \dots)$ wächst unbeschränkt und konvergiert nicht in $\mathbb{R}$. Auch die harmonische Reihe $a_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$ wächst unbeschränkt. Diese Beispiele führen uns zur bestimmten Divergenz gegen $\pm\infty$:

Definition A2B: uneigentliche Konvergenz, bestimmte Divergenz

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ heißt **divergent**, wenn sie nicht konvergiert. Das heißt, es gibt keine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$, für die $a_n \to a$ gilt.

Wir sagen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **divergiert (bestimmt)** gegen $+\infty$ oder **konvergiert (uneigentlich)** gegen $+\infty$, wenn zu jeder Schranke $s \in \mathbb{R}$ ein Index $m \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geq m$ die Ungleichung $a_n \geq s$ gilt.

Entsprechend sagen wir $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **divergiert (bestimmt)** gegen $-\infty$ oder **konvergiert (uneigentlich)** gegen $-\infty$, wenn zu jeder Schranke $s \in \mathbb{R}$ ein Index $m \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geq m$ gilt $a_n \leq s$.

Beispiele: $n^a \to 0$ für $a < 0$, $n^0 = 1 \to 1$ für $a = 0$, $n^a \to \infty$ für $a > 0$.
Es gilt $\sum_{k=1}^{n} 1/k \to \infty$ für $n \to \infty$, somit $\sum_{k=1}^{n} 1/k^a \to \infty$ für $a \leq 1$.

Die reelle Zahlengerade erweitert um $\pm\infty$

Die reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ sind ein vollständiger geordneter Körper. Bei Grenzwerten und Integration müssen wir auch mit $\pm\infty$ umgehen. Hierzu nutzen wir die **erweiterte Zahlengerade** $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Die Ordnung setzen wir fort durch $-\infty < a < +\infty$ für alle $a \in \mathbb{R}$. Addition und Multiplikation setzen wir für $\pm\infty$ und $a, b \in \mathbb{R}$ fort:

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

$+$	$-\infty$	b	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$?0?$
a	$-\infty$	$a+b$	$+\infty$
$+\infty$	$?0?$	$+\infty$	$+\infty$

$\cdot$	$-\infty$	$b<0$	$b=0$	$b>0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	$-\infty$	$-\infty$
$a<0$	$+\infty$	$a \cdot b$	0	$a \cdot b$	$-\infty$
$a=0$	0	0	0	0	0
$a>0$	$-\infty$	$a \cdot b$	0	$a \cdot b$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$

Grün: Verknüpfung in $\mathbb{R}$; gelb: sinnvoll für die Grenzwertrechnung in $\bar{\mathbb{R}}$; rot: nur für die Integralrechnung gebräuchlich. $(\bar{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ ist kein Körper!

Die Addition ist nicht assoziativ: $(+\infty + -\infty) + 1 \neq +\infty + (-\infty + 1)$.

Im Halbring $([0, \infty], +, \cdot)$ gelten alle Eigenschaften außer Inverse.

Die reelle Zahlengerade erweitert um $\pm\infty$

Für **Grenzwerte in** $\mathbb{R}$ gelten die nützlichen Rechenregeln

$$\lim(a_n + b_n) = (\lim a_n) + (\lim b_n),$$
$$\lim(a_n \cdot b_n) = (\lim a_n) \cdot (\lim b_n).$$

In den gelb markierten Fällen gilt dies auch noch für uneigentliche Grenzwerte. Das kennen Sie gut aus der Analysis und nutzen es seither.

Vorsicht: Die rot markierte Konvention $0 \cdot (\pm\infty) = 0$ nutzen wir ausschließlich in der Integralrechnung; sie ist nur hier sinnvoll.

Für die Konvergenzrechnung ist sie nutzlos! Warnende Beispiele:
Es gilt $a_n = 6/n \to 0$ und $b_n = 7n \to +\infty$, aber $a_n \cdot b_n \to 42$.
Es gilt $a_n = 6/n^2 \to 0$ und $b_n = 7n \to +\infty$, aber $a_n \cdot b_n \to 0$.
Es gilt $a_n = 6/n \to 0$ und $b_n = 7n^2 \to +\infty$, aber $a_n \cdot b_n \to +\infty$.

Die Konvention $(+\infty) + (-\infty) = 0$ ist vollkommen willkürlich.
Es gilt $a_n = n \to +\infty$ und $b_n = 42 - n \to -\infty$, aber $a_n + b_n \to 42$.
Es gilt $a_n = n \to +\infty$ und $b_n = \sqrt{n} - n \to -\infty$, aber $a_n + b_n \to +\infty$.
Es gilt $a_n = n \to +\infty$ und $b_n = (-1)^n - n \to -\infty$, aber $a_n + b_n$ divergiert.

Monotone Konvergenz reeller Zahlen

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\bar{\mathbb{R}}$ heißt **monoton wachsend**, wenn gilt

$$a_0 \le a_1 \le a_2 \le \dots$$

also $a_m \le a_n$ für alle $m \le n$. Wir schreiben dann kurz $a_n \nearrow$.

- Ist die Folge in $\mathbb{R}$ nicht nach oben beschränkt, so gilt $a_n \to +\infty$.
- Ist die Folge in $\mathbb{R}$ nach oben beschränkt, so existiert eine kleinste obere Schranke in $\mathbb{R}$: Für $a = \sup\{\, a_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ gilt dann $a_n \to a$.

Zur Betonung der Monotonie schreiben wir $a_n \nearrow a$ bzw. $a_n \nearrow +\infty$.

Entsprechend heißt $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\bar{\mathbb{R}}$ **monoton fallend**, wenn gilt

$$b_0 \ge b_1 \ge b_2 \ge \dots$$

also $b_m \ge b_n$ für alle $m \le n$. Wir schreiben dann kurz $b_n \searrow$.

- Ist die Folge in $\mathbb{R}$ nicht nach unten beschränkt, so gilt $b_n \to -\infty$.
- Ist die Folge in $\mathbb{R}$ nach unten beschränkt, so existiert eine größte untere Schranke in $\mathbb{R}$: Für $b = \inf\{\, a_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ gilt dann $b_n \to b$.

Zur Betonung der Monotonie schreiben wir $b_n \searrow b$ bzw. $b_n \searrow -\infty$.

Limes superior und Limes inferior

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in der erweiterten Zahlengeraden $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
Die Folge $a_n = \inf_{k\ge n} x_k$ ist monoton wachsend, also gilt $a_n \nearrow a \in \bar{\mathbb{R}}$.
Die Folge $b_n = \sup_{k\ge n} x_k$ ist monoton fallend, also gilt $b_n \searrow b \in \bar{\mathbb{R}}$.
Für die Folge (x_n) ist a der kleinste und b der größte Häufungspunkt.
Beispiel: Für $x_n = (-1)^n$ gilt $a_n = -1$ und $b_n = +1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Definition A2C: Limes superior und Limes inferior

Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\bar{\mathbb{R}}$ definieren wir

$$\liminf x_n := \lim_{n\to\infty} \bigl(\inf_{k\ge n} x_k\bigr) \quad \in \quad \bar{\mathbb{R}},$$
$$\limsup x_n := \lim_{n\to\infty} \bigl(\sup_{k\ge n} x_k\bigr) \quad \in \quad \bar{\mathbb{R}}.$$

Proposition A2D: Konvergenzkriterium in $\bar{\mathbb{R}}$

Genau dann konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\bar{\mathbb{R}}$, wenn $\limsup x_n = \liminf x_n$ gilt.

Reelle Funktionen

Sei Ω eine Menge. Eine reelle Funktion $f:\Omega \to \mathbb{R}$ ordnet jedem $x \in \Omega$ eine reelle Zahl $f(x)$ zu. Diese Zuordnung schreiben wir $x \mapsto f(x)$. Die Menge aller reellen Funktionen $f:\Omega \to \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit

$$\mathbb{R}^\Omega = \operatorname{Abb}(\Omega, \mathbb{R}) = \{\, f:\Omega \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) \,\}.$$

Speziell für $\Omega = \{1, \dots, n\}$ erhalten wir den vertrauten Raum

$$\mathbb{R}^n = \operatorname{Abb}(\{1,\dots,n\}, \mathbb{R}) = \{\, (x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \,\}.$$

Für $\Omega = \mathbb{N}$ erhalten wir die Menge aller reellen Folgen

$$\mathbb{R}^\mathbb{N} = \operatorname{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \{\, (x_0, x_1, x_2, \dots) \mid x_0, x_1, x_2, \dots \in \mathbb{R} \,\}.$$

Für $\Omega = \mathbb{R}$ erhalten wir die Menge aller reellen Funktionen

$$\mathbb{R}^\mathbb{R} = \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{\, f:\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) \,\}.$$

Der Träger (engl. *support*) einer Funktion $f:\Omega \to \mathbb{R}$ ist die Teilmenge $\{\, x \in \Omega \mid f(x) \neq 0 \,\}$, wo f nicht verschwindet, genauer ihr Abschluss

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{\, x \in \Omega \mid f(x) \neq 0 \,\}}.$$

Dasselbe vereinbaren wir für Funktionen mit Werten in $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ oder $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{C}^n$ oder allgemein in einer beliebigen Zielmenge.

Punktweise Verknüpfung und Vergleich

Für je zwei Funktionen $f, g:\Omega \to \mathbb{R}$ definieren wir ihre Summe

$$f + g:\Omega \to \mathbb{R} \quad \text{durch} \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

punktweise für jedes $x \in \Omega$. Für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$cf:\Omega \to \mathbb{R} \quad \text{durch} \quad (cf)(x) = cf(x).$$

Hierdurch wird $(\mathbb{R}^\Omega, +, \cdot)$ zu einem Vektorraum über $\mathbb{R}$. (Übung!)
Ebenso definieren wir zu $f, g:\Omega \to \mathbb{R}$ das punktweise Produkt

$$f \cdot g:\Omega \to \mathbb{R} \quad \text{durch} \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Hierdurch wird $(\mathbb{R}^\Omega, +, \cdot)$ sogar zu einer Algebra über $\mathbb{R}$. (Übung!)
Dasselbe vereinbaren wir ebenso für Funktionen mit Werten in $\mathbb{C}$.
Schließlich definieren wir auch die Relation $f \le g$ punktweise:

$$f \le g \quad :\Longleftrightarrow \quad f(x) \le g(x) \text{ für alle } x \in \Omega.$$

Auch $\min(f,g), \max(f,g):\Omega \to \mathbb{R}$ sind punktweise definiert durch

$$\min(f,g)(x) = \min(f(x), g(x)), \qquad \max(f,g)(x) = \max(f(x), g(x)).$$

Dasselbe vereinbaren wir für Funktionen mit Werten in $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Monotone Konvergenz reeller Zahlen und Funktionen

Die erweiterte Zahlengerade $\bar{\mathbb{R}}$ vereinfacht Konvergenzaussagen:

Satz A2E: Supremum und Infimum in $\bar{\mathbb{R}}$

Jede Teilmenge $M \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ hat ein Supremum und ein Infimum in $\bar{\mathbb{R}}$.

Ist die Menge M leer, so gilt $\sup \emptyset = -\infty$ und $\inf \emptyset = +\infty$.

Satz A2F: monotone Konvergenz von Zahlenfolgen

Jede wachsende Folge $a_0 \le a_1 \le a_2 \le \dots$ in $\bar{\mathbb{R}}$ konvergiert gegen einen Grenzwert $a \in \bar{\mathbb{R}}$. Wir schreiben hierfür kurz $a_k \nearrow a$.

Für $b_0 \ge b_1 \ge b_2 \ge \dots$ in $\bar{\mathbb{R}}$ gilt entsprechend $b_k \searrow b$ mit $b \in \bar{\mathbb{R}}$.

Satz A2G: monotone Konvergenz von Funktionenfolgen

Jede wachsende Folge $f_0 \le f_1 \le f_2 \le \dots$ von Funktionen $f_k:\Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ konvergiert punktweise gegen eine Grenzfunktion $f:\Omega \to \bar{\mathbb{R}}$.
Das heißt, für jedes $x \in \Omega$ gilt $f_k(x) \nearrow f(x)$, kurz $f_k \nearrow f$.

Für $g_0 \ge g_1 \ge g_2 \ge \dots : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ gilt entsprechend $g_k \searrow g:\Omega \to \bar{\mathbb{R}}$.

Beispiele zur monotonen Konvergenz

Aufgabe: Untersuchen Sie Monotonie und Konvergenz der Folge x^n sowie der Funktionenfolge $f_n(x) = x^n$ auf $[0,1]$, $[1,\infty[$, $[0,\infty[= \mathbb{R}_{\ge 0}$.

Lösung: (1) Für $x \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Folge $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Für $x > 1$ gilt $x^n \nearrow +\infty$ (monoton wachsend).
Für $x = 1$ gilt $x^n = 1$, also $x^n \to 1$ (konstant).
Für $0 \le x < 1$ gilt $x^n \searrow 0$ (monoton fallend).
Für $-1 < x < 0$ gilt $x^n \to 0$ aber nicht monoton.
Für $x = -1$ konvergiert $x^n = (-1)^n$ nicht.
Für $x < -1$ gilt absolut $|x^n| \nearrow +\infty$,
aber weder $x^n \to +\infty$ noch $x^n \to -\infty$.

(2) Für $f_n:[0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = x^n$ gilt $f_n \searrow f$
mit $f(x) = 0$ für $0 \le x < 1$, und $f(1) = 1$.

Für $f_n:[1,\infty[\to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = x^n$ gilt $f_n \nearrow f$
mit $f(x) = +\infty$ für $x > 1$, und $f(1) = 1$.

Für $f_n:\mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = x^n$ gilt $f_n \to f$ punktweise,
aber nicht monoton: weder $f_n \searrow f$ noch $f_n \nearrow f$.

Von endlichen zu unendlichen Summen

Um Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ zu nutzen, müssen wir ihren Grenzwert erklären. Allgemeiner betrachten wir auch Reihen wie $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k$ oder $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k$.
📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §1.8–1.9.

Sei Ω eine Menge, etwa $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{Z}$. Sei $f:\Omega\to\mathbb{R}$ eine Abbildung, d.h. jedem Element $x\in\Omega$ wird eine reelle Zahl $f(x)\in\mathbb{R}$ zugeordnet.

Start: Ist $E=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}\subseteq\Omega$ eine endliche Menge, so definieren wir die Summe von f über E rekursiv durch wiederholtes Addieren:

$$\sum_{x\in E} f(x) := f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n).$$

Dank Assoziativität und Kommutativität in $(\mathbb{R},+)$ ist diese Summe wohldefiniert, also unabhängig von Klammerung und Reihenfolge.

Ziel: Wie können wir unendliche Summen definieren? Da hierbei auch unendliche Werte auftreten können, betrachten wir Summen in $\bar{\mathbb{R}}$.

Leider ist $(\bar{\mathbb{R}},+,\cdot)$ kein Körper; insb. ist die Addition nicht assoziativ: $(+\infty+-\infty)+1\neq+\infty+(-\infty+1)$. Wir müssen also aufpassen!

Rechenregeln in $[0,\infty]$

🙂 Zur Vereinfachung summieren wir zunächst nur in $([0,\infty],+,\cdot,<)$. Dies ist zwar kein Körper, aber immerhin ein **geordneter Halbring**:

Die Addition ist assoziativ und kommutativ. Neutrales Element für die Addition ist 0. Die üblichen Rechenregeln gelten also bis auf Inverse.

Die Multiplikation ist assoziativ und kommutativ. Neutrales Element für die Multiplikation ist 1. Die Multiplikation ist distributiv über die Addition.

Die Anordnung von $[0,\infty]$ ist verträglich mit Addition und Multiplikation: Für alle $a\le a'$ und $b\le b'$ in $[0,\infty]$ gilt $a+a'\le b+b'$ und $a\cdot a'\le b\cdot b'$.

Sei Ω eine Menge und $f:\Omega\to[0,\infty]$ eine nicht-negative Funktion. Ist $E=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}\subseteq\Omega$ endlich, so definieren wir die Summe

$$\sum_{x\in E} f(x) := f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n).$$

Dank Assoziativität und Kommutativität in $([0,\infty],+)$ ist diese Summe wohldefiniert, also unabhängig von Klammerung und Reihenfolge.

Summation in $[0,\infty]$

Definition A2H: unendliche Summe in $[0,\infty]$

Sei Ω eine Menge und $f:\Omega\to[0,\infty]$ eine nicht-negative Funktion. Die Summe über Ω ist das Supremum aller endlichen Teilsummen:

$$\boxed{\sum_{x\in\Omega} f(x) := \sup\Big\{ \sum_{x\in E} f(x) \,\Big|\, E\subseteq\Omega \text{ endlich} \Big\}.}$$

Normierung:
Gilt $f(a)=1$ für ein $a\in\Omega$ und $f(x)=0$ für alle $x\neq a$, so folgt $\sum f=1$.

Linearität:
Für $f,g:\Omega\to[0,\infty]$ und $a,b\in\mathbb{R}_{\ge0}$ gilt $\sum(af+bg)=a\sum f+b\sum g$.

Ausschöpfung:
Für $f_0\le f_1\le f_2\le\dots\le f:\Omega\to[0,\infty]$ mit $f_k\nearrow f$ gilt $\sum f_k\nearrow\sum f$.

Diese drei Eigenschaften charakterisieren die Summation: Normierung und Linearität bestimmen endliche Summen: Hat $\Omega\to[0,\infty]$ endlichen Träger $\operatorname{supp}(f)=\{x_1,\dots,x_n\}\subseteq\Omega$, so gilt $\sum_{x\in\Omega} f(x)=f(x_1)+\dots+f(x_n)$. Ausschöpfung $f_n\nearrow f$ leistet den Übergang zu abzählbar unendlichen Summen. Gilt $f(x)>0$ für überabzählbar viele $x\in\Omega$, so folgt stets $\sum f=\infty$, denn es gibt eine Zahl $k\in\mathbb{N}_{\ge1}$, für die die Menge $\{\,x\in\Omega \mid f(x)\ge 1/k\,\}$ unendlich ist.

Summation in $[0,\infty]$

Satz A2I: Umordnungssatz in $[0,\infty]$

Sei $f:\Omega\to[0,\infty]$. Für jede Zerlegung $\Omega=\bigsqcup_{i\in I}\Omega_i$ gilt

$$\sum_{x\in\Omega} f(x) = \sum_{i\in I}\Big[\sum_{x\in\Omega_i} f(x)\Big].$$

🙂 Eine besondere Summationsreihenfolge wird hier nicht benötigt: Bei Summation in $[0,\infty]$ dürfen wir beliebig umgruppieren und umordnen! Hierbei ist $\Omega=\bigsqcup_{i\in I}\Omega_i$ eine Zerlegung der Indexmenge Ω in disjunkte Teilmengen $\Omega_i\subseteq\Omega$, also $\Omega=\bigcup_{i\in I}\Omega_i$ und $\Omega_i\cap\Omega_j=\emptyset$ für $i\neq j$.

Der Umordnungssatz folgt aus unserer geschickten Konstruktion A2H: Dank Assoziativität und Kommutativität in $([0,\infty],+)$ gilt die gewünschte Gleichheit zunächst für endliche Summen. Durch Übergang zum Supremum gilt die Gleichung dann auch für beliebige Familien in $[0,\infty]$.

Beispiel: Für jede Familie $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $a_i\in[0,\infty]$ gilt

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i = \sum_{j\in\mathbb{N}}(a_{2j}+a_{2j+1}) = \sum_{k\in\mathbb{N}}(a_{2k}+a_{4k+1}+a_{4k+3}).$$

Notation: Jede Abbildung $f:\Omega\to\bar{\mathbb{R}}$ können wir als Familie $(f(x))_{x\in\Omega}$ betrachten. So schreiben wir zum Beispiel $a:I\to\bar{\mathbb{R}}$ auch als $(a_i)_{i\in I}$.

Zentrales Beispiel: die geometrische Reihe

Beispiel: Für $0 \le q < 1$ summieren wir $(q^k)_{k\in\mathbb{N}}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(q^0 + q^1 + \dots + q^n)(1-q) = 1 - q^{n+1}.$$

Hieraus erhalten wir explizit Summenformel und Grenzwert:

$$q^0 + q^1 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \nearrow \quad \frac{1}{1-q}.$$

Für die Summe über $\mathbb{N}$ erhalten wir so die bekannte Formel

$$\boxed{\sum_{k\in\mathbb{N}} q^k = \frac{1}{1-q}.}$$

🙂 Die **geometrische Reihe** ist sehr einfach, doch ungemein nützlich. Sie ist die erste Reihe, für die wir Konvergenzverhalten und Grenzwert explizit bestimmen können. Durch Vergleich mit schwierigeren Reihen erhalten wir eine Fülle von Konvergenzkriterien und Abschätzungen!

Wir wollen als nächstes auch negative Summanden zulassen. Hierzu summieren wir Positivteil und Negativteil getrennt.

Absolut summierbare Familien in $\mathbb{R}$

Jede Familie $(a_i)_{i\in I}$ reeller Zahlen $a_i \in \mathbb{R}$ können wir zerlegen in **Positivteil** $a_i^+ = \max(0, a_i)$ und **Negativteil** $a_i^- = \max(0, -a_i)$. Wir erhalten hieraus $a_i = a_i^+ - a_i^-$ und $|a_i| = a_i^+ + a_i^-$.

Definition A2J: absolut summierbare Familien in $\mathbb{R}$

(1) Für jede Familie $(a_i)_{i\in I}$ reeller Zahlen $a_i \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sum_{i\in I} |a_i| = \sum_{i\in I} a_i^+ + \sum_{i\in I} a_i^- .$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so nennen wir $(a_i)_{i\in I}$ **absolut summierbar**. In diesem Falle können wir die Summe von $(a_i)_{i\in I}$ definieren durch

$$\boxed{\sum_{i\in I} a_i := \sum_{i\in I} a_i^+ - \sum_{i\in I} a_i^- .}$$

🙂 Eine besondere Summationsreihenfolge wird hier nicht benötigt!
🙂 Die so definierte Summation ist $\mathbb{R}$–linear. Der Nachweis ist länglich.
🙂 Es gelten die Ihnen bereits vertrauten und bewährten Rechenregeln.

Absolut summierbare Familien in $\mathbb{C}$

Jede Familie $(c_i)_{i\in I}$ komplexer Zahlen $c_i \in \mathbb{C}$ können wir zerlegen in **Realteil** $a_i = \operatorname{Re} c_i$ und **Imaginärteil** $b_i = \operatorname{Im} c_i$, und beide sind reell. Es gilt $c_i = a_i + \mathrm{i} b_i$ und $|c_i|^2 = |a_i|^2 + |b_i|^2$ und $|a_i|, |b_i| \le |c_i| \le |a_i| + |b_i|$.

Definition A2K: absolut summierbare Familien in $\mathbb{C}$

Für jede Familie $(c_i)_{i\in I}$ komplexer Zahlen $c_i = a_i + \mathrm{i} b_i \in \mathbb{C}$ gilt

$$\sum_{i\in I} |a_i|, \sum_{i\in I} |b_i| \quad\le\quad \sum_{i\in I} |c_i| \quad\le\quad \sum_{i\in I} |a_i| + \sum_{i\in I} |b_i|.$$

Sind diese Werte endlich, so nennen wir $(c_i)_{i\in I}$ **absolut summierbar**. In diesem Falle können wir die Summe von $(c_i)_{i\in I}$ definieren durch

$$\boxed{\sum_{i\in I} c_i := \sum_{i\in I} a_i + \mathrm{i} \sum_{i\in I} b_i .}$$

🙂 Eine besondere Summationsreihenfolge wird hier nicht benötigt!
🙂 Die so definierte Summation ist $\mathbb{C}$–linear. Der Nachweis ist länglich.
🙂 Es gelten die Ihnen bereits vertrauten und bewährten Rechenregeln.

Anwendung: Potenzreihen

Satz A2L: Majorantenkriterium für Reihen

Aus $|c_i| \le q_i$ folgt $\sum_{i\in I} |c_i| \le \sum_{i\in I} q_i$ dank Monotonie. Ist die zweite Summe endlich, so auch die erste, und $(c_i)_{i\in I}$ ist absolut summierbar.

Erfüllt $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ speziell $|c_k| \le M q^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, wobei $q \in [0,1[$, $M \in \mathbb{R}$, so ist $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ absolut summierbar: $\left|\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k\right| \le \sum_{k\in\mathbb{N}} |c_k| \le M/(1-q)$.

Satz A2M: Konvergenzradius einer Potenzreihe

Für jede Potenzreihe $\sum_{k=0}^\infty a_k z^k$ definieren wir den **Konvergenzradius**

$$\boxed{\rho := 1 / \limsup \sqrt[k]{|a_k|}.}$$

Für $|z| < \rho$ konvergiert die Reihe absolut, für $|z| > \rho$ divergiert sie.

Beweis: Sei $0 \le \rho < \infty$ und $|a_k| \rho^k \le M$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Für $|z| \le q\rho$ mit $0 \le q < 1$ folgt $|a_k z^k| = |a_k| \rho^k q^k \le M q^k$, also $\sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k z^k| \le M/(1-q)$.

Beispiel: Die Exponentialreihe $\exp(z) = \sum_{k=0}^\infty z^k/k!$ konvergiert absolut in jedem Punkt $z \in \mathbb{C}$: Hier gilt $\sqrt[k]{1/k!} \searrow 0$, Konvergenzradius $\rho = \infty$.

Der Umordnungssatz

Satz A2N: großer Umordnungssatz

(1) Sei $(a_i)_{i\in I}$ eine Familie in $\mathbb{C}$. Für jede Zerlegung $I = \bigsqcup_{j\in J} I_j$ gilt

$$\sum_{i\in I} |a_i| = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} |a_i|.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so ist $(a_i)_{i\in I}$ absolut summierbar, und es gilt

$$\boxed{\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} a_i.}$$

Beweis: Die erste Gleichung ist unser obiger Umordnungssatz A2I für Familien in $[0,\infty]$. Für jede absolut summierbare Familie $(a_i)_{i\in I}$ in $\mathbb{R}$ folgt die zweite Gleichung aus der ersten:

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I} a_i &\overset{\text{Def}}{=} \sum_{i\in I} a_i^+ - \sum_{i\in I} a_i^- \overset{\text{A2I}}{=} \sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} a_i^+ - \sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} a_i^- \\ &\overset{\text{Lin}}{=} \sum_{j\in J}\Big[\sum_{i\in I_j} a_i^+ - \sum_{i\in I_j} a_i^-\Big] \overset{\text{Def}}{=} \sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} a_i\end{aligned}$$

Jede absolut summierbare Familie $(c_i)_{i\in I}$ in $\mathbb{C}$ zerlegen wir ebenso in Real- und Imaginärteil.

Der Umordnungssatz

Korollar A2O: kleiner Umordnungssatz

(1) Sei $(a_i)_{i\in I}$ eine Familie in $\mathbb{C}$. Für jede Bijektion $\varphi : J \to I$ gilt

$$\sum_{i\in I} |a_i| = \sum_{j\in J} |a_{\varphi(j)}|.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so ist $(a_i)_{i\in I}$ absolut summierbar, und es gilt

$$\boxed{\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J} a_{\varphi(j)}.}$$

Beweis: Der kleine Umordnungssatz A2O folgt aus dem großen A2N mittels $I_j = \{\varphi(j)\}$: Hier wird tatsächlich nur umgeordnet, aber nicht umgruppiert und nichts zusammengefasst.

☺ Der kleine Umordnungssatz ist analog zum Transformationssatz für Integrale (Satz C2B). Bei Integralen müssen wir zudem die Volumenverzerrung berücksichtigen; dazu später mehr.

☺ Der folgende Umordnungssatz ist analog zum Satz von Fubini für Integrale (Satz C1E). In allen Fällen ist die absolute Summierbarkeit bzw. absolute Integrierbarkeit wesentlich!

⚠ Ohne absolute Summierbarkeit gibt es drastische Gegenbeispiele! C117

Der Umordnungssatz

Eine Doppelfolge $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ ist eine Abbildung $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{C}$. Jedem Indexpaar $(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ wird eine Zahl $a_{ij}\in\mathbb{C}$ zugeordnet.

Korollar A2P: Cauchy–Umordnungssatz

(1) Für jede Doppelfolge $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ gilt

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} |a_{ij}| = \sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} |a_{ij}| = \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{i\in\mathbb{N}} |a_{ij}| = \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{i+j=k} |a_{ij}|$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so ist (a_{ij}) absolut summierbar, und es gilt

$$\boxed{\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{i\in\mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{i+j=k} a_{ij}.}$$

Beweis: Der Cauchy–Umordnungssatz A2P folgt aus dem großen Umordnungssatz A2N, indem wir die Indexmenge $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ geeignet zerlegen. Am besten machen Sie sich Skizzen: Zunächst $\mathbb{N}\times\mathbb{N} = \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} J_i$ mit $J_i = \{i\}\times\mathbb{N}$, dann $\mathbb{N}\times\mathbb{N} = \bigsqcup_{j\in\mathbb{N}} I_j$ mit $I_j = \mathbb{N}\times\{j\}$, schließlich $\mathbb{N}\times\mathbb{N} = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} D_k$ mit den Diagonalen $D_k = \{\,(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid i+j=k\,\}$.

⚠ Ohne absolute Summierbarkeit gibt es drastische Gegenbeispiele! C117

Anwendung auf die Exponentialfunktion

Aufgabe: Aus der Exponentialreihe folgt die **Funktionalgleichung**

$$\boxed{\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w) \quad \text{für alle} \quad z,w\in\mathbb{C}.}$$

Nachrechnen: Dank Umordnungssatz und binomischer Formel gilt:

$$\begin{aligned}\exp(z)\exp(w) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{w^\ell}{\ell!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k+\ell=n}\frac{z^k}{k!}\frac{w^\ell}{\ell!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z+w)^n = \exp(z+w).\end{aligned}$$

☺ Dies entspricht dem **Potenzgesetz**, daher die Kurzschreibweise

$$\mathrm{e}^z := \exp(z) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z\,\mathrm{e}^w.$$

☺ Zusammen mit der wichtigen **Euler–Formel** $\exp(\mathrm{i}z) = \cos z + \mathrm{i}\sin z$ erhalten wir hieraus sofort **Additionstheoreme** für $\sin$ und $\cos$. B125
(Wiederholen und beweisen Sie diese als lehrreiche Übung.)

Intervalle und ihre Länge

Definition A3A: Intervalle und ihre Länge

Eine Teilmenge $I \subseteq \mathbb{R}$ heißt **Intervall**, falls für alle $a < x < b$ in $\mathbb{R}$ mit $a, b \in I$ auch $x \in I$ gilt. Für $a \le b$ haben wir die **endlichen Intervalle**

$$[a,b] := \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b \,\}, \qquad]a,b[:= \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \,\},$$
$$[a,b[:= \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b \,\}, \qquad]a,b] := \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b \,\},$$

sowie die **unendlichen Intervalle** wie $]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$ und

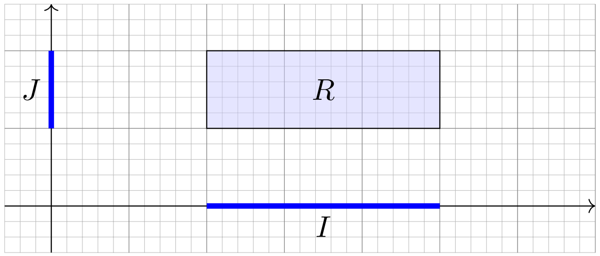
$$[a,+\infty[:= \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \le x \,\}, \qquad]a,+\infty[:= \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x \,\},$$
$$]-\infty,b] := \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \le b \,\}, \qquad]-\infty,b[:= \{\, x \in \mathbb{R} \mid x < b \,\}.$$

Jedem Intervall $I \ne \emptyset$ ordnen wir die **Länge** $\mathrm{vol}_1(I) := \sup I - \inf I$ zu. Der leeren Menge $\emptyset \subseteq \mathbb{R}$ weisen wir die Länge $\mathrm{vol}_1(\emptyset) := 0$ zu.

Da $(\mathbb{R}, <)$ vollständig ist, ist jedes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ tatsächlich von einem dieser zehn Typen! Die endlichen Intervalle $[a,b]$, $]a,b[$, $[a,b[$, $]a,b]$ haben Länge $b-a$. Die Länge 0 haben neben $\emptyset$ nur die einpunktigen Intervalle $[a,a] = \{a\}$. Alle unendlichen Intervalle haben die Länge $+\infty$.

Das Intervall $[a,b]$ ist kompakt. Die Intervalle $]a,b[$ sowie $]a,+\infty[$ und $]-\infty,b[$ sind offen.

Rechtecke und ihr Flächeninhalt



Je zwei Intervalle $I, J \subseteq \mathbb{R}$ definieren ein achsenparalleles **Rechteck**

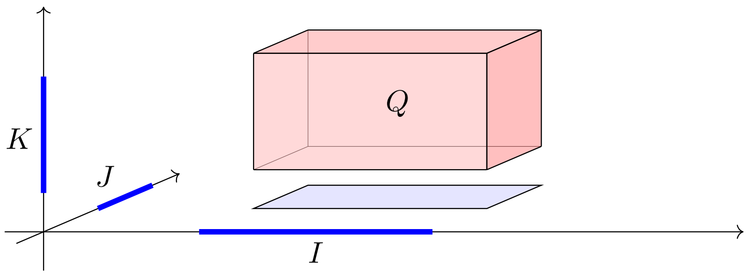
$$R = I \times J = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I,\ y \in J \,\}.$$

Es hat den **Flächeninhalt** $\mathrm{vol}_2(R) := \mathrm{vol}_1(I) \cdot \mathrm{vol}_1(J)$.

Hat eines der Intervalle Länge 0, so hat das Rechteck den Flächeninhalt 0. Haben beide Intervalle positive Länge, so hat R positiven Flächeninhalt. Ist zudem mindestens eines der Intervalle unendlich, so hat R unendlichen Flächeninhalt. Zum Beispiel gilt $\mathrm{vol}_2(\mathbb{R}^2) = +\infty$, ebenso $\mathrm{vol}_2(\mathbb{R} \times [0,1]) = +\infty$, aber $\mathrm{vol}_2(\mathbb{R} \times \{a\}) = 0$, gemäß der Konvention von Seite A205. Sind beide Intervalle $I, J \subseteq \mathbb{R}$ endlich / kompakt / offen, so auch das Rechteck $I \times J \subseteq \mathbb{R}^2$.

Dasselbe Prinzip gilt in jeder Dimension! Zur Verdeutlichung skizziere ich Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^3$.

Quader und ihr Rauminhalt



Je drei Intervalle $I, J, K \subseteq \mathbb{R}$ definieren einen achsenparallelen **Quader**

$$Q = I \times J \times K = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in I,\ y \in J,\ z \in K \,\}.$$

Er hat den **Rauminhalt** $\mathrm{vol}_3(Q) := \mathrm{vol}_1(I) \cdot \mathrm{vol}_1(J) \cdot \mathrm{vol}_1(K)$.

Hat eines der Intervalle Länge 0, so hat der Quader den Rauminhalt 0. Haben alle Intervalle positive Länge, so hat Q positiven Rauminhalt. Ist zudem mindestens eines der Intervalle unendlich, so hat Q unendlichen Rauminhalt. Insbesondere gilt somit $\mathrm{vol}_3(\mathbb{R}^3) = +\infty$. Sind alle drei Intervalle I, J, K endlich / kompakt / offen, so auch der Quader $I \times J \times K$.

Die Dimensionen $n = 1, 2, 3$ habe ich zur Betonung gesondert behandelt. Dasselbe Prinzip gilt in jeder Dimension! Das ist zwar schwer zu zeichnen, aber rechnen lässt sich damit ebenso gut.

Quader in beliebiger Dimension

Definition A3B: n–dimensionale Quader und ihr Volumen

Eine Teilmenge $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt achsenparalleler **Quader**, falls

$$Q = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$$

mit Intervallen $I_1, I_2, \dots, I_n \subseteq \mathbb{R}$. Sein n–dimensionales **Volumen** ist

$$\mathrm{vol}_n(Q) := \mathrm{vol}_1(I_1) \cdot \mathrm{vol}_1(I_2) \cdots \mathrm{vol}_1(I_n).$$

Hat eines der Intervalle Länge 0, so hat der Quader das Volumen 0. Haben alle Intervalle positive Länge, so hat Q positives Volumen; ist zudem eines der Intervalle unendlich, so hat Q unendliches Volumen.

☺ Im Satz C1E von Fubini führen wir diese iterative Berechnung fort.

Proposition A3C: Streckung und Verschiebung

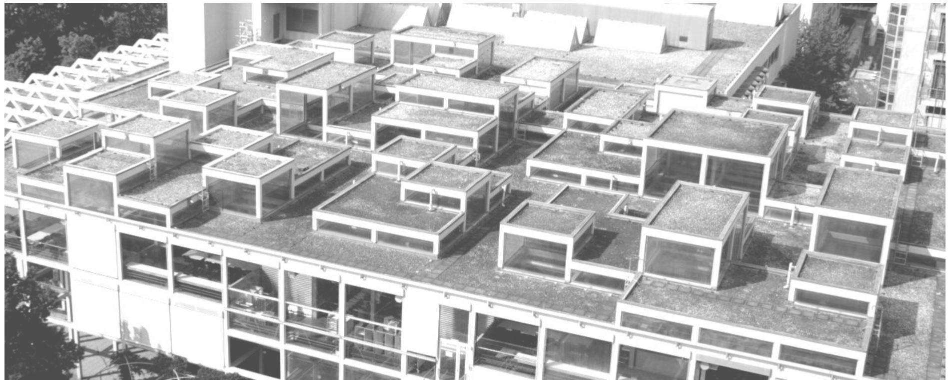
Für $a \in \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}^n$ gilt $\mathrm{vol}_n(aQ + v) = |a|^n \, \mathrm{vol}_n(Q)$.

Übung: Zeigen Sie dies! Zu Streckung und Stauchung siehe Satz A4I.

☺ Im allgemeinen Transformationssatz C2B führen wir diese Idee fort.

Grundidee: Das Integral misst das Volumen.

A305



Die Mensa der Universität Stuttgart auf dem Campus Vaihingen
aus Sicht der Mathematik (Pfaffenwaldring 57, 7. Stock)

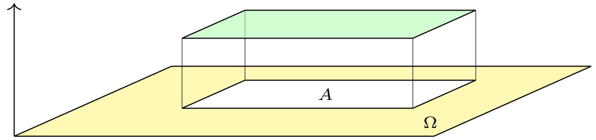
Die Dachfläche können wir uns als Funktion $f:\Omega\to\mathbb{R}_{\ge 0}$ vorstellen. Das Integral $\int_\Omega f$ misst das Volumen unter dem Funktionsgraphen. Dies lässt sich für Treppenfunktionen besonders leicht ausrechnen. Hierzu nutzen wir die folgende Notation und einfache Integralformel.

Indikatorfunktionen

A306

Die **Indikatorfunktion** einer Teilmenge $A\subseteq\Omega$ definieren wir durch

$$\mathbf{I}_A\,:\,\Omega\to\mathbb{R}\,:\,x\mapsto\mathbf{I}_A(x)=\begin{cases}1 & \text{für } x\in A,\\ 0 & \text{für } x\notin A.\end{cases}$$



Das Integral misst das Volumen unter dem Funktionsgraphen, hier also

$$\int_\Omega \mathbf{I}_A=\mathrm{vol}_n(A)\quad\text{und allgemein}\quad\int_\Omega c\,\mathbf{I}_A=c\,\mathrm{vol}_n(A).$$

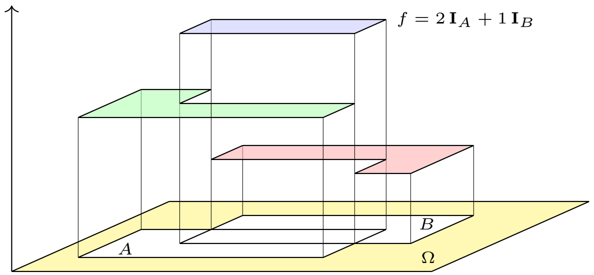
🙂 Dies ist die bewährte Regel „Volumen = Grundfläche mal Höhe“. Sie ist der Ausgangspunkt für die Integration, die wir nun ausführen. Hierzu betrachten wir Indikatorfunktionen von Quadern $A\subseteq\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ und bilden daraus die Treppenfunktionen als Linearkombinationen.

Von Indikatorfunktionen zu Treppenfunktionen

A307

Zu Quadern $Q_k\subseteq\Omega$ und $c_k\in\mathbb{R}$ definieren wir die **Treppenfunktion**

$$f=\sum_{k=1}^{\ell}c_k\,\mathbf{I}_{Q_k}.$$



Das Integral misst das Volumen unter dem Funktionsgraphen, hier also

$$\int_\Omega f\;=\;\int_\Omega\Bigg[\sum_{k=1}^{\ell}c_k\,\mathbf{I}_{Q_k}\Bigg]\;=\;\sum_{k=1}^{\ell}c_k\Bigg[\int_\Omega\mathbf{I}_{Q_k}\Bigg]\;=\;\sum_{k=1}^{\ell}c_k\,\mathrm{vol}_n(Q_k).$$

🙂 Die Menge $T(\Omega)$ aller Treppenfunktionen ist ein $\mathbb{R}$–Vektorraum. Hierauf ist das Integral $\int_\Omega:T(\Omega)\to\mathbb{R}$ normiert, linear und monoton. Das ist anschaulich plausibel; wir rechnen es später sorgfältig nach: zunächst eindimensional B1A, dann induktiv mehrdimensional C1A.

Von Indikatorfunktionen zu Treppenfunktionen

A308
Ausführung

Treppenfunktionen $f:\Omega\to\mathbb{R}$ sind Linearkombinationen von Indikatorfunktionen $\mathbf{I}_Q$ endlicher Quader $Q\subseteq\Omega$. Anders gesagt, die Indikatorfunktionen $\mathbf{I}_Q$ sind ein Erzeugendensystem von $T(\Omega)$.

Sie sind jedoch keine Basis: Die Darstellung $f=\sum_{k=1}^{r}c_k\,\mathbf{I}_{Q_k}$ ist keineswegs eindeutig! Man kann jede Treppenfunktion f auf unendlich viele Weisen als Summe $f=\sum_{k=1}^{s}c'_k\,\mathbf{I}_{Q'_k}$ schreiben.

Glücklicherweise ist das obige Integral $\int f$ dennoch wohldefiniert, wie wir in B1A und C1A nachrechnen: Aus $\sum_{k=1}^{r}c_k\,\mathbf{I}_{Q_k}=\sum_{k=1}^{s}c'_k\,\mathbf{I}_{Q'_k}$ folgt tatsächlich $\sum_{k=1}^{r}c_k\,\mathrm{vol}_n(Q_k)=\sum_{k=1}^{s}c'_k\,\mathrm{vol}_n(Q'_k)$. Alles wird gut!

Die Quader Q_k dürfen sich überlappen, man kann sie aber auch stets disjunkt wählen. Die Treppenfunktion f der obigen Skizze zum Beispiel kann man darstellen als Summe über zwei Rechtecke, oder auch als Summe über (mindestens fünf) disjunkte Rechtecke. Sehen Sie wie?

Hieraus folgen weitere schöne Eigenschaften: Mit f,g sind auch das Produkt $f\cdot g$ sowie $\min(f,g)$ und $\max(f,g)$ Treppenfunktionen. Das Integral ist zudem monoton, das heißt, aus $f\le g$ folgt $\int f\le\int g$.

Definition: messbare Funktionen und ihr Integral

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader. Messbare Funktionen $f:\Omega \to [0,\infty]$ und ihr Integral $\int_\Omega f \in [0,\infty]$ definieren wir nach folgenden fünf Grundregeln:

(1) **Normierung:** Für jeden endlichen Quader $A \subseteq \Omega$ ist die zugehörige Indikatorfunktion $\mathbf{I}_A : \Omega \to [0,\infty]$ messbar, und es gilt $\int_\Omega \mathbf{I}_A = \mathrm{vol}_n(A)$.
☺ Speziell für die Nullfunktion $0 = \mathbf{I}_\emptyset$ folgt daraus $\int_\Omega 0 = 0$.

(2) **Linearität:** Sind f, g messbar, so auch jede Positivkombination $af + bg$ mit $a, b \in \mathbb{R}_{\ge 0}$, und es gilt $\int_\Omega (af + bg) = a \int_\Omega f + b \int_\Omega g$.

(3) **Monotonie:** Sind f, g messbar, so auch $h = \max(g - f, 0)$.
☺ Aus $f \le g$ folgt $h = g - f$ und $\int_\Omega f \le \int_\Omega g$ dank Additivität (2).

(4) **Einschachtelung:** Gilt $f_0 \le f_1 \le f_2 \le \dots \le h \le \dots \le g_2 \le g_1 \le g_0$ mit f_k, g_k messbar und $\int_\Omega (g_k - f_k) \searrow 0$, so ist auch h messbar.
☺ Dank Monotonie (3) folgt daraus $\int_\Omega f_k \nearrow \int_\Omega h \swarrow \int_\Omega g_k$.

(5) **Ausschöpfung:** Sind $f_0 \le f_1 \le f_2 \le \dots$ messbar mit $f_k \nearrow f$, so ist auch f messbar, und es gilt $\int_\Omega f_k \nearrow \int_\Omega f$ (monotone Konvergenz).
☺ Genial einfach. Einfach genial. Das alles passt auf eine Postkarte.

Ist diese Definition gut und sinnvoll?

Wir formulieren hier sorgsam, welche grundlegenden Eigenschaften (1–5) das Integral haben soll. Hieraus werden wir alle nötigen Rechenregeln ableiten, sowie zahlreiche Tricks und Kunstgriffe. Man könnte befürchten, dass wir hier zu wenig verlangen, und sich unser Integralbegriff später als unzureichend erweist. Die Erfahrung zeigt, dass dies nicht der Fall ist: Die obige Definition ist das Destillat einer jahrhundertelangen Entwicklung und hat sich als Grundlage überall bewährt.

Es könnte andererseits auch sein, dass wir hier zu viel verlangen, und sich diese Wünsche nicht erfüllen lassen. Was kann schiefgehen? Man könnte etwa befürchten, dass einer Funktion f auf einem Rechenweg das Integral $\int_\Omega f = 42$ zugeordnet wird, und auf einem anderen Rechenweg das Integral $\int_\Omega f = 17$. Unsere Definition wäre dann in sich widersprüchlich und somit wertlos. Solche warnenden Beispiele begegnen uns tatsächlich bei falscher Anwendung des HDI B415, des Satzes von Fubini C409 C413 oder Grenzwerten unter dem Integral D101 D409.

Kurz gesagt: Wir dürfen uns vieles wünschen, aber nicht alles ist erfüllbar. Vor allem müssen wir Mehrdeutigkeiten und Widersprüche vermeiden! Dies sicherzustellen, ist die Hauptaufgabe der mathematischen Ausarbeitung, die wir hier nicht unternehmen. Die folgenden Sätze besagen, dass die hier gegebene Definition tatsächlich zu einem wohldefinierten Integralbegriff führt. Immerhin können wir so die zugrundliegenden Ideen präzise als Definitionen formulieren; das ist das bescheidene Ziel dieses Kapitels und die unverzichtbare Grundlage für alles Weitere.

The method of postulating what we want has many advantages;
they are the same as the advantages of theft over honest toil.
(Bertrand Russell, 1872–1970, *Introduction to Mathematical Philosophy*)

Wünsche (1–3) lassen sich erfüllen.

Satz A3D: Treppenfunktionen und ihr Integral

Wünsche (1–3) lassen sich erfüllen. Die kleinste Funktionenmenge, für die dies möglich ist, sind die **Treppenfunktionen** $f:\Omega \to [0,\infty[$,

$$f = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \mathbf{I}_{Q_k} \quad \text{mit } c_k \in \mathbb{R}_{\ge 0} \text{ und } Q_k \subseteq \mathbb{R}^n \text{ endliche Quader.}$$

Hierauf ist das Integral eindeutig durch (1–3) bestimmt, denn es gilt

$$\int_\Omega f = \int_\Omega \left[\sum_{k=1}^{\ell} c_k \mathbf{I}_{Q_k}\right] = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \left[\int_\Omega \mathbf{I}_{Q_k}\right] = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \,\mathrm{vol}_n(Q_k).$$

Beweisidee: Eigenschaften (1–3) ziehen die obige Summenformel für das Integral nach sich. Umgekehrt ist diese Summenformel auf Treppenfunktionen wohldefiniert und erfüllt (1–3). Wohldefiniertheit ist trickreich: Wir beweisen sie sorgsam zunächst für Treppenfunktionen in Dimension $n = 1$ (Satz B1A), dann induktiv in jeder Dimension $n = 2, 3, 4, \dots$ (Satz C1A).

Treppenfunktionen sind ein guter Ausgangspunkt, reichen aber für realistische Anwendungen noch nicht aus. Zu allgemeineren Funktionen gelangen wir durch Grenzübergang (4) und (5).

Wünsche (1–4) lassen sich erfüllen.

Bestünde die Welt nur aus Treppenfunktionen, so wären wir jetzt fertig. Allgemeinere Funktionen $f:\Omega \to [0,\infty]$ integrieren wir im Folgenden mit Hilfe von Treppenfunktionen durch Einschachtelung und Ausschöpfung.

Wir nutzen zunächst die Einschachtelung (4): Zum kompakten Quader Ω und jeder beschränkten Funktion $f:\Omega \to [0,\infty[$ definieren wir ihr

$$\text{Unterintegral } I(f) := \sup\left\{ \sum_{k=1}^{\ell} a_k \,\mathrm{vol}_n(A_k) \;\middle|\; \sum_{k=1}^{\ell} a_k \mathbf{I}_{A_k} \le f \right\} \in [0,\infty[,$$

$$\text{Oberintegral } J(f) := \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\ell} b_k \,\mathrm{vol}_n(B_k) \;\middle|\; f \le \sum_{k=1}^{\ell} b_k \mathbf{I}_{B_k} \right\} \in [0,\infty[,$$

wobei $A_k, B_k \subseteq \Omega$ Quader sind und $a_k, b_k \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ für alle $k = 1, \dots, \ell$. Dank (3) folgt aus dieser Definition sofort die Ungleichung $I(f) \le J(f)$.

Wir nennen f **Riemann–integrierbar**, wenn hierbei $I(f) = J(f)$ gilt; in diesem Falle definieren wir ihr **Integral** durch $\int_\Omega f := I(f) = J(f)$.

Man prüft geduldig alle Forderungen nach: Die Riemann–integrierbaren Funktionen und ihr Integral erfüllen alle Axiome (1–4), wie gewünscht.

Wünsche (1–4) lassen sich erfüllen.

Satz A3E: Riemann 1854, Darboux 1875

Wünsche (1–4) lassen sich erfüllen. Die kleinste Funktionenmenge, für die dies möglich ist, sind die **Riemann–integrierbaren Funktionen** $f : \Omega \to [0, \infty[$. Hierauf ist das Integral eindeutig durch (1–4) bestimmt.

☺ Die Konstruktion über Riemann–Summen kennen Sie aus der HM2.

☺ Diese Menge enthält alle Treppenfunktionen und noch viel mehr, z.B. stetige Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ auf kompakten Quadern $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$.

☹ Viele für uns wichtige Funktionen sind nicht Riemann–integrierbar.

Satz A3F: Charakterisierung R-integrierbarer Funktionen

Genau dann ist f Riemann–integrierbar, wenn f beschränkten Träger und beschränkten Wertebereich hat und zudem fast überall stetig ist.

Beschränkter Träger heißt: Es gibt einen kompakten Quader $Q \Subset \Omega$, sodass $f(x) = 0$ für alle $x \notin Q$ gilt. Beschränkter Wertebereich heißt: Es gibt ein kompaktes Intervall $[a, b] \Subset \mathbb{R}$, sodass $f(\Omega) \subseteq [a, b]$ gilt. Insbesondere darf f keine Polstellen haben, sonst wäre sie unbeschränkt. Fast überall stetig heißt: Für die Menge $U \subseteq \Omega$ der Unstetigkeitsstellen gilt $\mathrm{vol}_n(U) = 0$.

Von Riemann zu Lebesgue

Das Integrationsprinzip durch Einschachtelung geht zurück auf Bernhard Riemann: *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*, Habilitationsschrift 1854. Der Satz A3E von Riemann besagt, dass wir über Treppenfunktionen und Einschachtelung einen sinnvollen Integralbegriff erhalten. (Die Bedingung $f \geq 0$ spielt hierbei noch keine Rolle.)

Das Einschachtelungsprinzip kann man direkt zur numerischen Näherung nutzen, insbesondere wenn eine exakte Rechnung zu aufwändig ist – oder in geschlossener Form gar unmöglich ist.

Satz A3F charakterisiert die Riemann–integrierbaren Funktionen. Einerseits ist diese Menge recht groß: Sie enthält alle stetigen Funktionen. Andererseits sind viele wichtige Funktionen nicht Riemann–integrierbar, insbesondere solche mit Polstellen oder unbeschränktem Träger.

Man kann versuchen, „Integration light" zu lehren, und zum Beispiel die Entwicklung bei Riemann im 19. Jahrhundert enden zu lassen. Selbst in einfachen Anwendungen wird jedoch mehr gebraucht! Deshalb will ich Ihnen die Errungenschaften des 20. Jahrhunderts mitgeben.

Das Integrationsprinzip durch Ausschöpfung geht zurück auf Henri Lebesgue: *Sur une généralisation de l'intégrale définie*, Comptes Rendus de l'Académie de Sciences 132 (1901), pp. 1025–1028. Der folgende Satz A3G von Lebesgue besagt, dass wir so einen sinnvollen und wohldefinierten Integralbegriff erhalten. Kurz gesagt: Lebesgue vervollständigt das von Riemann eingeführte Integral. Die Rechenregeln werden hierdurch wesentlich allgemeiner, flexibler und oft sogar einfacher! (Die Beweise sind etwas technischer, aber das ist hier nicht unsere Sorge.)

Die fünf Grundregeln erlauben *im Prinzip* bereits die Berechnung; *effiziente Rechenregeln* sind anschließend ein eigenes Thema. Wir werden einige davon in den nächsten Kapiteln erarbeiten.

Wünsche (1–5) lassen sich erfüllen.

Lassen sich die simplen aber strengen Anforderungen (1–5) erfüllen? Das ist keineswegs offensichtlich und war lange ein offenes Problem!

Henri Lebesgue verdanken wir folgende einfach-geniale Konstruktion: Wir erweitern endliche Riemann–Summen zu abzählbaren Reihen. Zu jeder nicht-negativen Funktion $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ definieren wir ihr

$$\text{Unterintegral}\quad I(f) := \sup\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k \,\mathrm{vol}_n(A_k) \;\middle|\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathbf{I}_{A_k} \leq f \right\} \in [0, \infty],$$

$$\text{Oberintegral}\quad J(f) := \inf\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} b_k \,\mathrm{vol}_n(B_k) \;\middle|\; f \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k \mathbf{I}_{B_k} \right\} \in [0, \infty],$$

wobei $A_k, B_k \subseteq \Omega$ endliche Quader sind und $a_k, b_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Man folgert aus dieser Definition zunächst die Ungleichung $I(f) \leq J(f)$.

Die Funktion f nennen wir **Lebesgue–messbar**, wenn $I(f) = J(f)$ gilt; in diesem Falle definieren wir ihr **Integral** durch $\int_\Omega f := I(f) = J(f)$.

Man prüft geduldig alle Forderungen nach: Die Lebesgue–messbaren Funktionen und ihr Integral erfüllen alle Axiome (1–5), wie gewünscht.

Wünsche (1–5) lassen sich erfüllen.

Satz A3G: Lebesgue 1901

Wünsche (1–5) lassen sich erfüllen. Die kleinste Funktionenmenge, für die dies möglich ist, sind die **Lebesgue–messbaren Funktionen** $f : \Omega \to [0, \infty]$. Hierauf ist das Integral eindeutig durch (1–5) bestimmt.

☺ Die nächsten Kapitel entwickeln praktische Rechenmethoden.

Satz A3H: Messbarkeit ist unkaputtbar

(a) Alle Treppenfunktionen und alle stetigen Funktionen sind messbar.
(b) Mit f, g sind $f + g$ und $f \cdot g$ sowie $\min(f, g)$ und $\max(f, g)$ messbar.
(c) Konvergiert $f_k \to f$ und sind alle f_k messbar, so ist auch f messbar.

☺ Ganz einfach: Alle für uns wichtigen Funktionen sind messbar!

Die ersten beiden Aussagen gelten auch für Riemann–integrierbare Funktionen. Vollständigkeit unter Grenzübergängen gilt erst für die größere Klasse aller Lebesgue–messbaren Funktionen!

Im Folgenden werden wir Funktionen stets als messbar voraussetzen. Da wir in dieser Vorlesung keine einzige nicht-messbare Funktion sehen werden, könnte ich ebenso gut den vorsichtigen Zusatz „Sei f eine messbare Funktion. . . " weglassen. Ich bringe das oft nicht übers Herz.

Integration über beliebige Bereiche

Bislang war der Integrationsbereich ein Quader $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, etwa $\Omega = \mathbb{R}^n$. Unsere Konstruktion gelingt ebenso für jede offene Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Integrale über beliebige Teilmengen $A \subseteq \Omega$ erklären wir wie folgt:

Definition A3I: Integration über beliebige Bereiche

Zu jeder Funktion $f : \Omega \supseteq A \to [0, \infty]$ definieren wir ihre **Fortsetzung**

$$\tilde{f} : \Omega \to [0, \infty] : x \mapsto \tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{für } x \notin A. \end{cases}$$

Wir nennen die Funktion f auf A **messbar**, wenn ihre Fortsetzung $\tilde{f}$ auf Ω messbar ist. In diesem Falle definieren wir ihr **Integral** durch

$$\boxed{\int_A f(x)\,\mathrm{d}x := \int_\Omega \tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x.}$$

☺ Das nutzen wir häufig zur Integration über $A \subseteq \mathbb{R}^n$ in $\Omega = \mathbb{R}^n$. Damit lässt sich die Integration auf allgemeine Bereiche anwenden, insbesondere mit dem Satz von Fubini auf Normalbereiche (Kapitel C).

Volumen als Integral

Wir betrachten einen Integrationsbereich $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, zum Beispiel $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Satz A3J: messbare Mengen und ihr Volumen

Genau dann ist eine Menge $A \subseteq \Omega$ messbar, wenn ihre Indikatorfunktion $\mathbf{I}_A : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar ist. In diesem Falle gilt für ihr Volumen

$$\boxed{\operatorname{vol}_n(A) = \int_A 1\,\mathrm{d}x := \int_\Omega \mathbf{I}_A(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Ist die Funktion $f : \Omega \to [0, \infty]$ messbar, so auch $\mathbf{I}_A \cdot f$, und es gilt

$$\boxed{\int_A f(x)\,\mathrm{d}x := \int_\Omega \mathbf{I}_A(x)\,f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Sind diese Integral endlich, so nennen wir A bzw. f über A integrierbar.

☺ Wenn Sie integrieren können, dann können Sie damit auch Volumina bestimmen. Die Indikatorfunktion $\mathbf{I}_A$ schneidet außerhalb von A alles ab.

☺ Oft integrieren wir statt über A lieber über die schönere Menge Ω.

Rechenregeln für Indikatorfunktionen

Übung: (1) Für je zwei Teilmengen $A, B \subseteq \Omega$ gilt

$$\mathbf{I}_A \le \mathbf{I}_B \quad \text{genau dann, wenn} \quad A \subseteq B.$$

(2) Für Schnitt und Vereinigung von Mengen gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{A\cap B} &= \min(\mathbf{I}_A, \mathbf{I}_B) = \mathbf{I}_A \cdot \mathbf{I}_B, \\ \mathbf{I}_{A\cup B} &= \max(\mathbf{I}_A, \mathbf{I}_B) = \mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B - \mathbf{I}_A \cdot \mathbf{I}_B\,. \end{aligned}$$

(3) Für Produkt und Summe von Indikatorfunktionen gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_A \cdot \mathbf{I}_B &= \mathbf{I}_{A\cap B}, \\ \mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B &= \mathbf{I}_{A\cup B} + \mathbf{I}_{A\cap B}\,. \end{aligned}$$

Bei disjunkter Vereinigung gilt $A \cap B = \emptyset$, und der letzte Term entfällt.

(4) Für das kartesische Produkt von zwei Mengen $A \subseteq \mathbb{R}^p$ und $B \subseteq \mathbb{R}^q$ sowie je zwei Punkte $x \in \mathbb{R}^p$ und $y \in \mathbb{R}^q$ gilt die Produktformel

$$\mathbf{I}_{A\times B}(x, y) = \mathbf{I}_A(x) \cdot \mathbf{I}_B(y).$$

Durch Integration erhalten wir hieraus die folgenden Rechenregeln.

Rechenregeln für das Volumen

Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar, so auch $A \cap B$ und $A \cup B$, und es gilt

$$\boxed{\operatorname{vol}(A) + \operatorname{vol}(B) = \operatorname{vol}(A \cup B) + \operatorname{vol}(A \cap B).}$$

Bei disjunkter Vereinigung entfällt der letzte Term, daher gilt

$$\boxed{\operatorname{vol}(A \cup B) = \operatorname{vol}(A) + \operatorname{vol}(B) \quad \text{falls} \quad A \cap B = \emptyset.}$$

Sind die Mengen $A_1, A_2, A_3, \ldots \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar, so gilt

$$\boxed{\operatorname{vol}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) \le \operatorname{vol}(A_1) + \operatorname{vol}(A_2) + \operatorname{vol}(A_3) + \ldots.}$$

Gleichheit gilt, wenn alle $A_1, A_2, A_3, \ldots$ paarweise disjunkt sind.

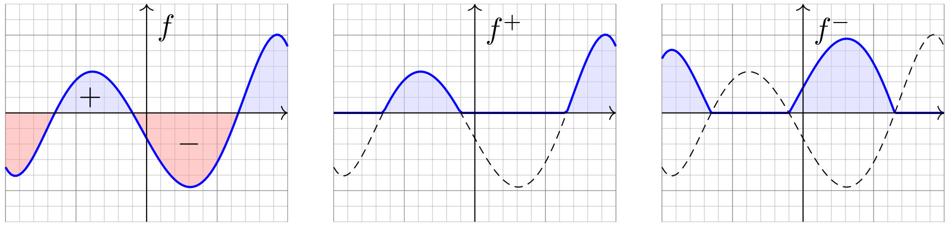
$$\boxed{A \subseteq B \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{vol}(A) \le \operatorname{vol}(B).}$$

Sind $A \subseteq \mathbb{R}^p$ und $B \subseteq \mathbb{R}^q$ messbar, so auch $A \times B \subseteq \mathbb{R}^{p+q}$, und es gilt

$$\boxed{\operatorname{vol}(A \times B) = \operatorname{vol}(A) \cdot \operatorname{vol}(B).}$$

Positive und negative Beiträge zum Integral

Bislang haben wir das Integral nur für nicht-negative Funktionen erklärt; das entspricht der Idee des Volumens und vereinfacht die Formulierung. Zu integrieren sei nun eine Funktion $f:\Omega\to\bar{\mathbb{R}}$, wobei $\bar{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. Wo immer f negativ ist, ist das Volumen negativ in Ansatz zu bringen.



Wir zerlegen $f=f^+-f^-$ in **Positivteil** f^+ und **Negativteil** f^- gemäß

$$f^+(x)=\begin{cases} f(x) & \text{falls } f(x)>0,\\ 0 & \text{sonst,}\end{cases}\qquad f^-(x)=\begin{cases} -f(x) & \text{falls } f(x)<0,\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Beim Integral soll f^- negativ zählen, also $\int_\Omega f := \int_\Omega f^+ - \int_\Omega f^-$.

⚠ Diese Differenz ist nur sinnvoll, wenn beide Integrale endlich sind.

Absolut integrierbare Funktionen und ihr Integral

Definition A3K: absolut integrierbare Funktionen und ihr Integral

Für jede Funktion $f:\Omega\to\bar{\mathbb{R}}$ gilt $f=f^+-f^-$ und $|f|=f^++f^-$. Genau dann ist f **messbar**, wenn $f^\pm:\Omega\to[0,\infty]$ messbar sind.
(1) In diesem Falle ist auch $|f|=f^++f^-$ messbar, und somit gilt

$$\int_\Omega |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f^+(x)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega f^-(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so nennen wir f **(absolut) integrierbar**. In diesem Falle können wir das Integral von f definieren durch

$$\boxed{\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x := \int_\Omega f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega f^-(x)\,\mathrm{d}x.}$$

⚠ Die Differenz $\infty-\infty$ ist sinnlos! Zur Integration von $f=f^+-f^-$ müssen Positivteil f^+ und Negativteil f^- endliche Integrale liefern.

🙂 Das Kriterium $\int_\Omega |f(x)|\,\mathrm{d}x<\infty$ ist einfach, präzise und bequem. Geschickte Abschätzung vermeidet die mühsame Berechnung von $f^\pm$.

Absolut integrierbare Funktionen und ihr Integral

Satz A3L: absolut integrierbare Funktionen und ihr Integral

Wir betrachten einen Integrationsbereich $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$, zum Beispiel $\Omega=\mathbb{R}^n$. Die Menge aller (messbaren und) absolut integrierbaren Funktionen

$$L^1(\Omega)=L^1(\Omega,\mathbb{R}) := \left\{\, f:\Omega\to\mathbb{R} \;\middle|\; \int_\Omega |f(x)|\,\mathrm{d}x<\infty \,\right\}$$

ist ein $\mathbb{R}$–Vektorraum. Hierauf ist das Integral eine $\mathbb{R}$–lineare Abbildung

$$L^1(\Omega)\to\mathbb{R} \;:\; f\mapsto \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Sie ist normiert, monoton, erfüllt Einschachtelung und Ausschöpfung. Durch diese fünf Eigenschaften ist das Integral eindeutig bestimmt.

🙂 Damit haben wir die Konstruktion des Integrals abgeschlossen! Es erfüllt unsere Wunschliste und ist hierdurch eindeutig bestimmt.

Das so definierte Integral ist tatsächlich $\mathbb{R}$–linear. Das ist eine erste wichtige Rechenregel! Der Nachweis ist einfach, aber etwas länglich.

In den nächsten Kapiteln geht es um weitere praktische Rechenregeln. Die explizite Berechnung von Integralen erfordert Werkzeug und Übung!

Das Integral als Konstruktionsaufgabe

Wir haben in diesem Kapitel folgende **Konstruktionsaufgabe** gelöst:

$$(\text{integrierbare Funktion } f:\Omega\to\mathbb{R}) \quad\mapsto\quad (\text{Integral } \textstyle\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x)$$

Wie definieren wir das Integral? **Geometrische Bedeutung!**

- Quadervolumen für Treppenfunktionen.
- Einschachtelung für stetige Funktionen.
- Ausschöpfung zwecks Vollständigkeit.

Welche Funktionen sind messbar? **Alle für uns wichtigen!**

- Alle Treppenfunktionen
- Alle stetigen Funktionen
- Vollständig unter Grenzübergang

Wie gehen wir effizient damit um? **Praktische Rechenregeln!**

- Hauptsatz der Differential und Integralrechnung (B1I)
- Fubini (C1E): Reduktion auf iterierte eindimensionale Integrale
- Transformationssatz (C2B): Wahl neuer Variablen als Koordinaten

Komplexe Funktionen und ihr Integral

Viele Anwendungen nutzen neben reellen auch komplexe Funktionen. Jede komplexe Funktion $f:\Omega\to\mathbb{C}$ können wir zerlegen in ihren

Realteil $\operatorname{Re} f \,:\, \Omega\to\mathbb{R} \,:\, x\mapsto \operatorname{Re} f(x)$ und
Imaginärteil $\operatorname{Im} f \,:\, \Omega\to\mathbb{R} \,:\, x\mapsto \operatorname{Im} f(x)$.

Hieraus lässt sich f zusammensetzen gemäß $f=\operatorname{Re} f+\mathrm{i}\operatorname{Im} f$.
Es gilt $|f|^2=|\operatorname{Re} f|^2+|\operatorname{Im} f|^2$ und $|\operatorname{Re} f|,|\operatorname{Im} f|\le|f|\le|\operatorname{Re} f|+|\operatorname{Im} f|$.

Definition A4A: absolut integrierbare Funktionen und ihr Integral

Wir nennen $f:\Omega\to\mathbb{C}$ **messbar**, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ messbar sind.
Wir nennen f **integrierbar**, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ integrierbar sind.
Äquivalent hierzu: die Funktion f ist messbar und $\int_\Omega |f|<\infty$.
In diesem Falle können wir das Integral von f definieren durch

$$\boxed{\int_\Omega f := \int_\Omega \operatorname{Re} f + \mathrm{i}\int_\Omega \operatorname{Im} f.}$$

Komplexe Funktionen und ihr Integral

Ebenso wie für reelle Funktionen $f:\Omega\to\mathbb{R}$ bilden auch für komplexe Funktionen $f:\Omega\to\mathbb{C}$ die absolut integrierbaren einen Vektorraum:

Satz A4B: absolut integrierbare Funktionen und ihr Integral

Wir betrachten einen Integrationsbereich $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$, zum Beispiel $\Omega=\mathbb{R}^n$. Die Menge aller (messbaren und) absolut integrierbaren Funktionen

$$L^1(\Omega)=L^1(\Omega,\mathbb{C}) := \left\{\, f:\Omega\to\mathbb{C} \;\middle|\; \int_\Omega |f(x)|\,\mathrm{d}x<\infty \,\right\}$$

ist ein $\mathbb{C}$–Vektorraum. Hierauf ist das Integral eine $\mathbb{C}$–lineare Abbildung

$$L^1(\Omega)\to\mathbb{C} \,:\, f\mapsto \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x.$$

🙂 Wegen $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$ ist das reelle Integral ein Spezialfall des komplexen. Über $\mathbb{R}$ nutzen wir zudem Monotonie, Einschachtelung, Ausschöpfung.

🙂 Von $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{C}$ genügt die Zerlegung in Real- und Imaginärteil, und die $\mathbb{R}$–Linearität überträgt unsere Rechenregeln aufs komplexe Integral.

🙂 Das so definierte Integral ist tatsächlich $\mathbb{C}$–linear. Das ist eine sehr nützliche Rechenregel! Der Nachweis ist einfach, aber etwas länglich.

Zerlegung und Betragsabschätzung

Satz A4C: Zerlegung und Betragsabschätzung

Seien $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ messbar und $f:A\cup B\to\mathbb{C}$ absolut integrierbar.
(1) Das Integral ist linear; dank $\mathbf{I}_A+\mathbf{I}_B=\mathbf{I}_{A\cup B}+\mathbf{I}_{A\cap B}$ folgt daher:

$$\boxed{\int_A f(x)\,\mathrm{d}x+\int_B f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{A\cup B} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{A\cap B} f(x)\,\mathrm{d}x}$$

(2) Im Falle $\operatorname{vol}_n(A\cap B)=0$ entfällt der letzte Term. Insbesondere:

$$\boxed{\int_{A\cup B} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_A f(x)\,\mathrm{d}x+\int_B f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{falls } A\cap B=\emptyset}$$

(3) Für den Betrag des Integrals gilt folgende Abschätzung:

$$\boxed{\left|\int_A f(x)\,\mathrm{d}x\right| \;\le\; \int_A |f(x)|\,\mathrm{d}x \;\le\; \sup_A |f|\cdot\operatorname{vol}(A)}$$

Bei diesem Produkt gilt die übliche Konvention $\infty\cdot 0=0\cdot\infty=0$.

Zerlegung und Betragsabschätzung

Aufgabe: Rechnen Sie die Formeln aus A4C sorgfältig nach.

Lösung: (1) Mit A und B sind auch $A\cup B$ und $A\cap B$ messbar. Wir setzen voraus, dass f auf $A\cup B$ absolut integrierbar ist, also ebenso auf den Teilmengen A und B sowie $A\cap B$ dank

$$\mathbf{I}_A\cdot|f|,\quad \mathbf{I}_B\cdot|f|,\quad \mathbf{I}_{A\cap B}\cdot|f| \quad\le\quad \mathbf{I}_{A\cup B}\cdot|f|.$$

Für die Indikatorfunktionen wissen wir $\mathbf{I}_A+\mathbf{I}_B=\mathbf{I}_{A\cup B}+\mathbf{I}_{A\cap B}$. Multiplikation mit f und Linearität des Integrals ergeben sofort (1).

(2) Dies ist ein Spezialfall von (1) für $\operatorname{vol}_n(A\cap B)=0$ dank (3).

(3) Ist f reell, so gilt $-|f|\le f\le|f|\le\sup|f|$, dank Monotonie also

$$-\int_A |f(x)|\,\mathrm{d}x \le \int_A f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_A |f(x)|\,\mathrm{d}x \le \sup_A|f|\cdot\operatorname{vol}(A).$$

Im allgemeinen Fall ist f komplex. Sei $z:=\int f$. Der Fall $z=0$ ist klar. Wir untersuchen den Fall $z\ne 0$. Für $w:=\overline{z}/|z|$ gilt $wz=|z|\in\mathbb{R}$, also:

$$\left|\int f\right| = w\int f = \int(wf) = \operatorname{Re}\int(wf) = \int \operatorname{Re}(wf) \le \int|wf| = \int|f|$$

Nullmengen sind vernachlässigbar.

☺ Mengen $N \subseteq \mathbb{R}^n$ vom Volumen Null sind meist vernachlässigbar.

Definition A4D: Nullmenge

Wir nennen $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine **Nullmenge**, wenn $\operatorname{vol}_n(N) = 0$ gilt.

Aus den Rechenregeln für Integral und Volumen A320 folgt für $n \geq 1$:

- Jede endliche / abzählbare Menge $N \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine Nullmenge.
- Jeder Teilraum $N \subseteq \mathbb{R}^n$ der Dimension $< n$ ist eine Nullmenge.
- Jede abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist eine Nullmenge.
- Jede Teilmenge einer Nullmenge ist selbst eine Nullmenge.

Satz A4E: Funktionen auf einer Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}^n$

Jede Funktion $f : N \to \bar{\mathbb{R}}$ ist integrierbar, und es gilt $\int_N f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
Dasselbe gilt für Funktionen $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ mit $\tilde{f}(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \smallsetminus N$.

Beweis: Dies folgt aus der Betragsabschätzung A4C:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x \right| = \left| \int_N f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \sup|f| \cdot \operatorname{vol}(N) = 0$$

Fast überall gleiche Funktionen

Definition A4F: Gleichheit fast überall

Seien $f, g : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ Funktionen. Es gilt $f = g$ **fast überall**, wenn

$$N = \{\, x \in \Omega \mid f(x) \neq g(x) \,\}$$

eine Nullmenge ist, also $\operatorname{vol}_n(N) = 0$ erfüllt. Das bedeutet $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \Omega$ bis auf eine Ausnahmemenge $N \subseteq \Omega$ vom Volumen Null.

☺ Wir dürfen integrierbare Funktionen auf jeder Nullmenge beliebig abändern, Integrierbarkeit und Integral bleiben dabei unverändert:

Satz A4G: Verschwindungs- und Vergleichssatz

1. Gilt $f = g$ fast überall und ist f integrierbar, so auch g, und es gilt $\int_A f = \int_A g$ für jede messbare Menge $A \subseteq \Omega$.
2. Genau dann gilt $\int_\Omega |f| = 0$, wenn $f = 0$ fast überall gilt.
3. Seien $f, g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ integrierbar. Genau dann gilt $\int_A f = \int_A g$ für jede messbare Menge $A \subseteq \Omega$, wenn $f = g$ fast überall gilt.

Fast überall gleiche Funktionen

☺ Zwei fast überall gleiche Funktionen verhalten sich bei Integration genau gleich. Wir dürfen und werden sie meist als gleich betrachten.

Beweis des Satzes: (1) Gilt $g = f$ fast überall, bis auf eine Nullmenge $N \subseteq \Omega$, so ist $h := g - f$ fast überall Null, somit integrierbar (A4E), also auch $g = f + h$. Für $A \subseteq \Omega$ messbar gilt $\int_A g = \int_{A \smallsetminus N} g + \int_N g = \int_{A \smallsetminus N} f + \int_N g = \int_A f$.

(2) Die Implikation „$\Leftarrow$" folgt aus (1). Die Implikation "$\Rightarrow$" sehen wir so: Sei $\int_\Omega |f| = 0$. Für $A_k := \{\, x \in \Omega \mid |f(x)| \geq \frac{1}{k} \,\}$ gilt $0 \leq \operatorname{vol}_n(A_k) \leq k \int |f| = 0$, also $\operatorname{vol}_n(A_k) = 0$. Die Menge $N := \{\, x \in \Omega \mid f(x) \neq 0 \,\} = \{\, x \in \Omega \mid |f(x)| > 0 \,\}$ ist abzählbare Vereinigung dieser Nullmengen, $N = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$. Daraus folgt $0 \leq \operatorname{vol}_n(N) \leq \sum_{k=1}^\infty \operatorname{vol}_n(A_k) = 0$, siehe Seite A320, also $\operatorname{vol}_n(N) = 0$. Alternativ: Aus $A_k \nearrow N$ folgt $0 = \operatorname{vol}_n(A_k) \nearrow \operatorname{vol}_n(N) = 0$.

(3) Die Implikation „$\Leftarrow$" folgt aus (1). Die Implikation "$\Rightarrow$" sehen wir dank (2) so: Die Menge $A = \{\, x \in \Omega \mid f(x) > g(x) \,\}$ ist messbar, und es gilt $\int_A (f - g) = 0$, also ist A eine Nullmenge. Ebenso ist $B = \{\, x \in \Omega \mid g(x) > f(x) \,\}$ eine Nullmenge. Somit ist auch ihre Vereinigung $N = A \cup B = \{\, x \in \Omega \mid f(x) \neq g(x) \,\}$ eine Nullmenge.

Entsprechend definieren wir „$f \leq g$ fast überall" und „$f \geq g$ fast überall". Ebenso sagen wir, es gilt punktweise Konvergenz $f_k \to f$ fast überall, wenn die Menge $N \subseteq \Omega$ aller Ausnahmepunkte eine Nullmenge ist, wenn also $f_k(x) \to f(x)$ für alle $x \in \Omega \smallsetminus N$ gilt sowie $\operatorname{vol}_n(N) = 0$.

Messung stetiger Funktionen durch Integrale

☺ Für *stetige* Funktionen können wir diesen Test wie folgt verschärfen:

Satz A4H: Verschwindungs- und Vergleichssatz

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Gilt $f(a) \neq 0$ für ein $a \in \Omega$, dann existiert ein (beliebig kleiner) Quader $Q \subseteq \Omega$ um a mit $\int_Q f(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$.

1. Gilt $\int_Q f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ für alle Quader $Q \subseteq \Omega$, so folgt $f = 0$.
2. Sind $g, h : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig und gilt $\int_Q g(x)\,\mathrm{d}x = \int_Q h(x)\,\mathrm{d}x$ für alle Quader $Q \subseteq \Omega$, so folgt $g = h$, also $g(x) = h(x)$ für alle $x \in \Omega$.

Beweis: Wir können $f(a) = 2b > 0$ annehmen. (Für $f(a) < 0$ betrachten wir $-f$ statt f.) Da Ω offen und f stetig ist, existiert um a ein kleiner Würfel $Q \subseteq \Omega$ mit Kantenlänge $\varepsilon > 0$, sodass $f(x) \geq b$ für alle $x \in Q$ gilt. Das bedeutet $f \cdot \mathbf{I}_Q \geq b \cdot \mathbf{I}_Q$, dank Monotonie des Integrals also $\int_Q f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_Q b\,\mathrm{d}x = b \operatorname{vol}_n(Q) = b\varepsilon^n > 0$. Hieraus folgt die Aussage (1).

Für (2) wenden wir (1) an auf die Differenz $f = g - h$ und folgern $f = 0$. □

Das Argument gilt nicht nur für offene Mengen, sondern ebenso für jeden Quader $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit nicht-leerem Inneren, und allgemeiner für jede Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, deren Randpunkte alle vom Inneren aus erreichbar sind: Gilt $\int_Q f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ für alle Quader $Q \subseteq \Omega$, so gilt $f = 0$ nach obigem Satz im Inneren von Ω, und dank Stetigkeit auf seinem Abschluss, also ganz Ω.

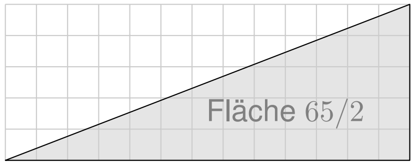
Verständnisfrage: das fehlende Quadrat

Wir können jeder messbaren Menge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ihren Flächeninhalt $\operatorname{vol}_2(A)$ zuordnen gemäß den fünf oben erklärten Grundregeln. A102 Hieraus berechnen wir die Fläche von Rechtecken, Dreiecken, usw.

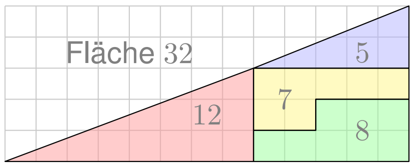
Es ist bemerkenswert, dass das Ergebnis immer eindeutig ist, insbesondere unabhängig vom Rechenweg! Oder etwa doch nicht?

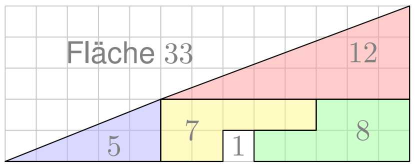
Wir zerlegen das rechtwinklige Dreieck Δ mit Kathetenlängen 13 und 5 wie skizziert und berechnen den Flächeninhalt $\operatorname{vol}_2(\Delta)$ auf drei Weisen:

Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck?



Ist die Antwort eindeutig?





Verständnisfrage: das fehlende Quadrat

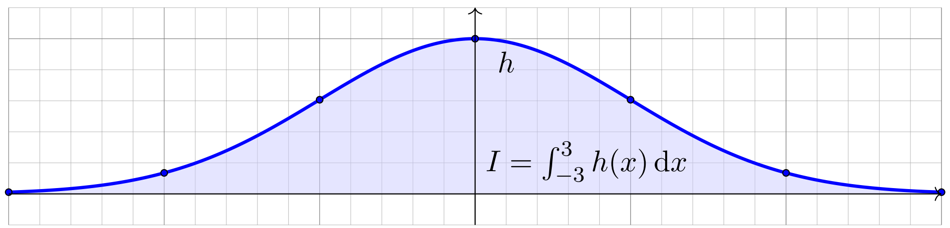
Für Volumen und Integral haben wir fünf Grundregeln: Normierung, Additivität / Linearität, Monotonie, Einschachtelung und Ausschöpfung. Satz A1A garantiert: Mit diesen fünf Grundregeln können wir jeder messbaren Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eindeutig ihr Volumen $\operatorname{vol}_n(A) \in [0,\infty]$ zuweisen und ausrechnen. Allgemeiner garantiert Satz A3G: Mit diesen fünf Grundregeln können wir jeder messbaren Funktion $f:\Omega \to [0,\infty]$ eindeutig ihr Integral $\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x \in [0,\infty]$ zuweisen und ausrechnen.

Die vorliegende Übung stellt diese zentrale Zusage auf die Probe! Sind die Sätze A1A und A3G falsch? Oder wo sonst liegt der Fehler?

Lösung: Die links gezeigten Mengen nennen wir A_5, A_7, A_8, A_{12}. Jede hat den angegebenen Flächeninhalt $\operatorname{vol}_2(A_k) = k$. Je zwei sind fast disjunkt: Ihr Schnitt $A_k \cap A_\ell$ ist eine Nullmenge, hat also Flächeninhalt $\operatorname{vol}_2(A_k \cap A_\ell) = 0$ für $k \neq \ell$. Dank unserer Rechenregeln erhalten wir für $A = A_5 \cup A_7 \cup A_8 \cup A_{12}$ demnach den Flächeninhalt $\operatorname{vol}_2(A) = 5+7+8+12 = 32$. Auf der rechten Seite betrachten wir entsprechend die Mengen $B_1, B_5, B_7, B_8, B_{12}$. Für ihre Vereinigung $B = B_1 \cup B_5 \cup B_7 \cup B_8 \cup B_{12}$ erhalten wir $\operatorname{vol}_2(B) = 1+5+7+8+12 = 33$.

Für das Dreieck Δ hingegen erhalten wir $\operatorname{vol}_2(\Delta) = 65/2 = 32.5$. Die Skizze suggeriert $A = \Delta = B$ und provoziert damit den Widerspruch. Bei genauerem Hinsehen erkennen Sie jedoch $A \subsetneq \Delta \subsetneq B$. Diese Einschachtelung zeigt $\operatorname{vol}_2(A) = 32 \le \operatorname{vol}_2(\Delta) \le 33 = \operatorname{vol}_2(B)$. Alles wird gut! Der einzige Fehler liegt hier in der leichtfertigen Behauptung $A = \Delta = B$.

Verständnisfrage: numerische Integration

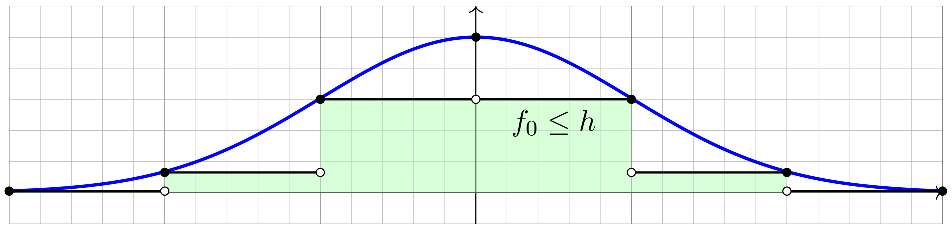


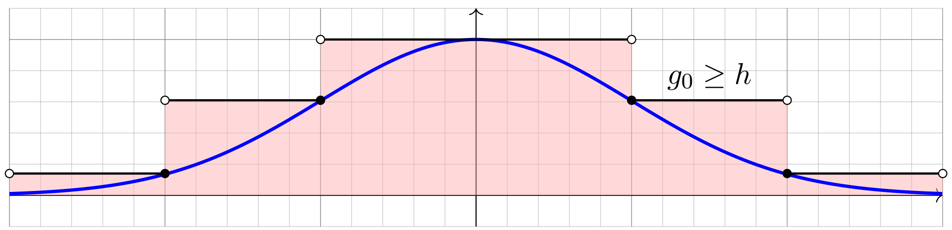
Die Funktion $h:[-3,3] \to \mathbb{R}$ wächst auf $[-3,0]$ und fällt auf $[0,3]$. Als Stützstellen haben wir nur die Daten $h(0) = 1$, $h(\pm 1) \in [0.60, 0.61]$, $h(\pm 2) \in [0.13, 0.14]$, $h(\pm 3) \in [0.01, 0.02]$ jeweils auf 10^{-2} genau.

Aufgabe: Wie groß ist $I = \int_{-3}^{3} h(x)\,\mathrm{d}x$ mindestens? höchstens? Finden Sie die optimale Einschachtelung durch Treppenfunktionen!

Lösung: Die Monotonie von h und die gegebenen Stützstellen liefern $f_0 \le h \le g_0$ mit
$f_0 = 0.01\,\mathbf{I}_{[-3,-2[} + 0.13\,\mathbf{I}_{[-2,-1[} + 0.60\,\mathbf{I}_{[-1,0[} + \mathbf{I}_{\{0\}} + 0.60\,\mathbf{I}_{]0,1]} + 0.13\,\mathbf{I}_{]1,2]} + 0.01\,\mathbf{I}_{]2,3]}$,
$g_0 = 0.02\,\mathbf{I}_{\{-3\}} + 0.14\,\mathbf{I}_{]-3,-2]} + 0.61\,\mathbf{I}_{]-2,-1]} + \mathbf{I}_{]-1,1[} + 0.61\,\mathbf{I}_{[1,2[} + 0.14\,\mathbf{I}_{[2,3[} + 0.02\,\mathbf{I}_{\{3\}}$.
Dank Monotonie des Integrals erhalten wir die Schranken $A_0 \le I \le B_0$, hier mit den Werten
$A_0 = \int f_0(x)\mathrm{d}x = 0.01 + 0.13 + 0.60 + 0.60 + 0.13 + 0.01 = 1.48$,
$B_0 = \int g_0(x)\mathrm{d}x = 0.14 + 0.61 + 1.00 + 1.00 + 0.61 + 0.14 = 3.50$.
Dank richtiger Rundung ist diese Einschachtelung nachweislich korrekt und soweit optimal.

Verständnisfrage: numerische Integration





Allein aus diesen spärlichen Daten gewinnen wir eine (soweit optimale) Einschachtelung durch zwei Treppenfunktionen $f_0 \le h \le g_0$. Aus diesen berechnen wir möglichst genaue Ober- und Untergrenzen für das Integral $I = \int_{-3}^{3} h(x)\,\mathrm{d}x$. Die so berechneten Schranken sind leider noch sehr grob. Zwecks besserer Einschachtelung können wir die Rechnung durch weitere Stützstellen verfeinern und den verbleibenden Fehler beliebig klein machen, also $B_n - A_n \searrow 0$ erreichen. Dies ist der erste Schritt in numerischer Integration; mehr hierzu erfahren Sie in der Numerik.

Verständnisfragen: Rechenregeln

Aufgabe: Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze Begründung (ein Ergebnis der Vorlesung oder ein Gegenbeispiel).

(1) Gilt $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) + g(x) \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \,\mathrm{d}x$?

(2) Gilt $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot g(x) \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \,\mathrm{d}x \cdot \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \,\mathrm{d}x$?

(3) Aus $f \le g$ folgt $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \,\mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \,\mathrm{d}x$?

(4) Aus $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \,\mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \,\mathrm{d}x$ folgt $f \le g$?

(5) Gilt $\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \,\mathrm{d}x\right| = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \,\mathrm{d}x$? oder $\ge$? oder $\le$?

(6) Aus $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \,\mathrm{d}x = 0$ folgt $f = 0$? oder $f = 0$ fast überall?

(7) Aus $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \,\mathrm{d}x = 0$ und f stetig folgt $f = 0$?

(8) Aus $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \,\mathrm{d}x = 0$ folgt $f = 0$?

Hierbei seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar. (Der Fall $n = 1$ genügt, denn Skizzen sind dann leichter, der Fall $n \ge 2$ verläuft jeweils genauso.)

Lösung: (1) Ja, das Integral ist linear. (2) Nein, Gegenbeispiel $f = \mathbf{I}_{[0,1]}$ und $g = \mathbf{I}_{[2,3]}$.
(3) Ja, das Integral ist monoton. (4) Nein, Gegenbeispiel $f = \mathbf{I}_{[0,1]} - \mathbf{I}_{[1,2]}$ und $g = 0$.
(5) Für $f = \mathbf{I}_{[0,1]} - \mathbf{I}_{[1,2]}$ gilt „$<$“. Nur „$\le$“ gilt immer. (6) Nein, Gegenbeispiel $f = \mathbf{I}_{\{a\}}$.
Es gilt nur $f = 0$ fast überall. (7) Ja, siehe oben. (8) Nein, Gegenbeispiel $f = \mathbf{I}_{[0,1]} - \mathbf{I}_{[1,2]}$.

Verständnisfragen: Rechenregeln

Sie kennen und nutzen die Rechenregeln der reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$: Assoziativität, Kommutativität, Neutrale, Inverse, Distributivität, Ordnung.

Aufgabe: (1) Formulieren Sie diese Rechenregeln einmal explizit aus.
(2) Welche gelten noch für $(\bar{\mathbb{R}}, +, \cdot, <)$? (3) Welche für $([0, \infty], +, \cdot, <)$?

Lösung: (1) Zur Wiederholung zu $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §0.2.
Die erweiterte Zahlengerade $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ haben wir auf Seite A205 erklärt: Addition, Multiplikation, Anordnung. Die kritischen Fälle sind $0 \cdot (\pm\infty) = 0$ und $\infty + (-\infty) = 0$.

(2) Für $(\bar{\mathbb{R}}, +, \cdot, <)$ ist die Null neutral bei Addition. Die Eins ist neutral bei Multiplikation. Kommutativität gilt offensichtlich nach Tabelle. Alles andere ist jedoch nicht mehr gültig: Das Assoziativgesetz gilt in $(\bar{\mathbb{R}}, +)$ nicht, denn $(\infty - \infty) + 1 = 0 + 1 = 1$ ist nicht gleich $\infty + (-\infty + 1) = \infty - \infty = 0$. Auch existiert zu $\pm\infty$ in $(\bar{\mathbb{R}}, \cdot)$ kein multiplikatives Inverses. Das vertraute Distributivgesetz $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ gilt ebenfalls nicht, denn $(\infty - 1) \cdot \infty = \infty \cdot \infty = \infty$ ist nicht gleich $(\infty \cdot \infty) + (-1 \cdot \infty) = \infty - \infty = 0$.

☹ Aus diesem Grund können wir in $(\bar{\mathbb{R}}, +, \cdot, <)$ nicht so schön einfach arbeiten wie in $\mathbb{R}$!

(3) Für $([0, \infty], +, \cdot, <)$ gelten alle Rechenregeln, bis auf die Existenz der Inversen.
Man prüft dies wie in (2) geduldig und gewissenhaft für jede Rechenregel einzeln nach.

☺ Aus diesem Grund können wir in $[0, \infty]$ vernünftig arbeiten, zum Beispiel integrieren!

Verständnisfragen: Nullmengen

Aufgabe: (1) Bestimmen Sie $\mathrm{vol}_1(\{a_1, \dots, a_n\})$, $\mathrm{vol}_1(\mathbb{Q})$ und $\mathrm{vol}_1(\mathbb{R})$.

(2) Berechnen Sie $\int_{\mathbb{R}} f(x) \,\mathrm{d}x$; hierbei seien $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ in $\mathbb{R}$ und die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle $f(x) = 0$ für $x \notin \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

(3) Berechnen Sie $\int_{\mathbb{R}} g(x) \,\mathrm{d}x$; hierbei sei die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) = x$ für $x \in \mathbb{N}$ und $g(x) = 0$ für $x \notin \mathbb{N}$.

(4) Bestimmen und vergleichen Sie das Volumen $\mathrm{vol}_2(\mathbb{R} \times \{a\})$ sowie

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{\mathbb{R} \times \{a\}}(x, y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x := \int_{\mathbb{R}} f(x) \,\mathrm{d}x, \quad f(x) := \int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{\mathbb{R} \times \{a\}}(x, y) \,\mathrm{d}y,$$
$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{\mathbb{R} \times \{a\}}(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y := \int_{\mathbb{R}} g(y) \,\mathrm{d}y, \quad g(y) := \int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{\mathbb{R} \times \{a\}}(x, y) \,\mathrm{d}x.$$

Lösung: (1) Für $x \in \mathbb{R}^n$ ist $\{x\} = [x_1, x_1] \times \dots \times [x_n, x_n]$ ein Quader mit $\mathrm{vol}_n(\{x\}) = 0$.
Aus der Additivität des Volumens folgt $\mathrm{vol}_n(\{a_1, \dots, a_n\}) = 0$ für jede *endliche* Menge.
Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist *abzählbar*, also $\mathbb{Q} = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$. (Warum?)
Durch Ausschöpfung folgt $\mathrm{vol}_1(\mathbb{Q}) = \lim \mathrm{vol}_1(\{a_1, \dots, a_n\}) = \lim 0 = 0$.

(2) Es gilt $f = \sum_{i=1}^n f(a_i) \,\mathbf{I}_{\{a_i\}}$, dank Linearität $\int_{\mathbb{R}} f(x) \,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n f(a_i) \,\mathrm{vol}_1(\{a_i\}) = 0$.

(3) Wir schöpfen g aus durch die Funktionen $g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g_k(x) = x$ für $x \in \{1, \dots, k\}$ und $g_k(x) = 0$ sonst. Es gilt $g_k \nearrow g$, also $\int_{\mathbb{R}} g(x) \,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_k(x) \,\mathrm{d}x = 0$ dank (2).

Verständnisfragen: Doppelintegrale

Wir untersuchen für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Gültigkeit folgender Gleichung:

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \stackrel{?}{=} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \stackrel{?}{=} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \,\mathrm{d}(x, y)$$

Sie gilt für sehr viele Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ aber nicht für alle!

Aufgabe: (0) Gilt $\mathbf{I}_{[a,b]\times[c,d]}(x, y) = \mathbf{I}_{[a,b]}(x) \cdot \mathbf{I}_{[c,d]}(y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$? Gilt für $X \subseteq \mathbb{R}^p$ und $Y \subseteq \mathbb{R}^q$ allgemein $\mathbf{I}_{X\times Y}(x, y) = \mathbf{I}_X(x) \cdot \mathbf{I}_Y(y)$?

(1) Berechnen und vergleichen Sie die drei obigen Integrale für die Indikatorfunktion $f = \mathbf{I}_Q$ eines Rechtecks $Q = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$.

(2) Gilt die Gleichung für alle Treppenfunktionen $f = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \,\mathbf{I}_{Q_k}$? Bleibt sie erhalten bei Linearkombinationen $f = \sum_{k=1}^{n} c_k f_k$?

(3) Bleibt sie erhalten bei monotoner Konvergenz $f_k \nearrow f$?

(4) Skizzieren Sie $f = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{I}_{[k,k+1]\times[k,k+1]} - \mathbf{I}_{[k+1,k+2]\times[k,k+1]}$. C414
Berechnen und vergleichen und bestaunen Sie die Doppelintegrale!

Lösung: Dies führen wir am Anfang von Kapitel C aus. Die Rechnungen beruhen allein auf der Definition des Integrals und sind schon jetzt unmittelbar möglich. Sie sind eine gute Übung, um sich mit dem zweidimensionalen Integral und dem Satz von Fubini vertraut zu machen!

Verständnisfragen: Dehnübungen

Aufgabe: Skizzieren Sie die Indikatorfunktion $f = \mathbf{I}_{[0,2]}$ sowie ihre Integralfunktion $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ und bestimmen Sie $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Dasselbe für $g = \mathbf{I}_{[1,4]}$, die Linearkombination $h = 2f + 3g$, das Produkt $k = f \cdot g$, die Skalierung $\ell = f(2x-6)$ und allgemein $f(ax)$ und $f(x+b)$.

Wie verhält sich das Integral $\int_{\mathbb{R}} \dots \,\mathrm{d}x$ unter diesen Operationen?

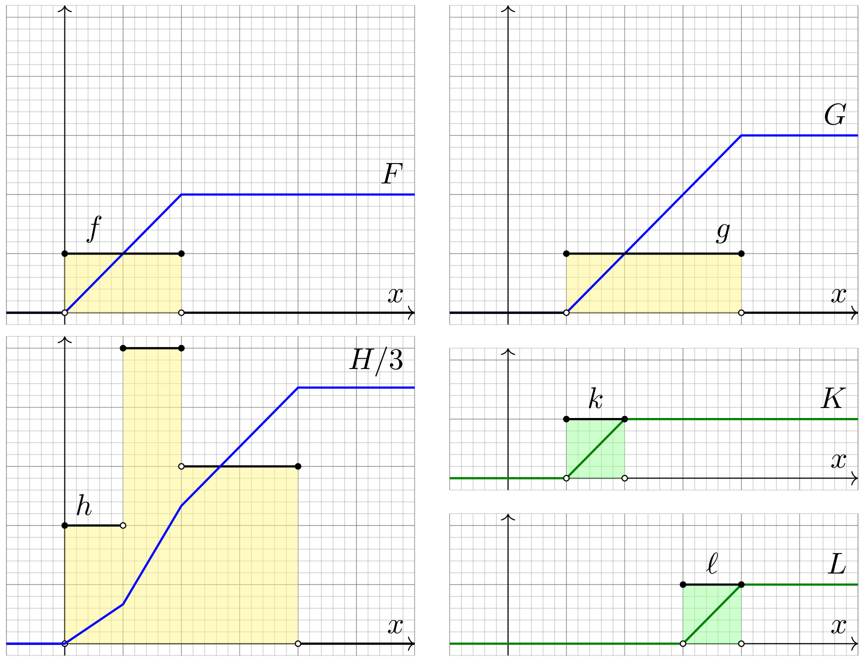
Lösung: Es gilt $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ und $\int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{d}x = 3$. (Skizze!) Funktionen werden punktweise verknüpft, daher bleiben Summe und Produkt von Indikatorfunktionen stückweise konstant. Insbesondere sind auch Linearkombination $h = 2f + 3g$ und Produkt $k = f \cdot g$ wieder Treppenfunktionen, allerdings im Allgemeinen zu feineren Unterteilungen. (Skizze!)

Das Integral ist $\mathbb{R}$–linear, hier $\int_{\mathbb{R}} 2f(x) + 3g(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{d}x = 13$. Das Integral ist insbesondere additiv, aber im Allgemeinen nicht multiplikativ! In unserem Beispiel gilt $f \cdot g = \mathbf{I}_{[1,2]}$, also $\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 1 \neq \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{d}x = 2 \cdot 3$.

Bei $f(x+b)$ wird f um b nach links (!) verschoben. Bei $f(ax)$ wird f um a gestaucht (!), d.h. $f(2x)$ hat die halbe Breite. Die Funktion $f(2x-6)$ entsteht aus f durch Verschieben um 6 nach rechts und anschließendes Stauchen um den Faktor 2. In unserem Beispiel $f = \mathbf{I}_{[0,2]}$ gilt somit $f(2x) = \mathbf{I}_{[0,1]}(x)$ und $f(x-6) = \mathbf{I}_{[6,8]}$ sowie $f(2x-6) = \mathbf{I}_{[3,4]}(x)$. Skizze! Punktprobe!

Das Integral ist invariant unter Verschiebung, aber $\int_{\mathbb{R}} f(ax)\,\mathrm{d}x = |a|^{-1}\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x$ für $a \neq 0$. Dies ist anschaulich der Flächeninhalt der in x–Richtung um den Faktor a gestauchten Funktion.

Verständnisfragen: Dehnübungen



Verständnisfragen: Verschiebung und Skalierung

Aufgabe: Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f = \mathbf{I}_Q$ seine Indikatorfunktion.

(1) Sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : g(x) = f(x - v)$ die um $v \in \mathbb{R}$ verschobene Funktion. Ist auch g eine Indikatorfunktion? eines Quaders? Welches Quaders? Welche Beziehung gilt zwischen $\int_{\mathbb{R}^n} f(x-v)\,\mathrm{d}x$ und $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x$?

(2) Sei $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : g(x) = f(c^{-1}x)$ die um $c \in \mathbb{R}_{>0}$ gestreckte Funktion. Ist auch h eine Indikatorfunktion? eines Quaders? Welches Quaders? Welche Beziehung gilt zwischen $\int_{\mathbb{R}^n} f(c^{-1}x)\,\mathrm{d}x$ und $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x$?

Lösung: (1) In Dimension $n = 1$ betrachten wir Intervalle $Q = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$: Genau dann gilt $x - v \in [a,b]$, wenn $x \in [a+v, b+v]$ erfüllt ist.

Allgemein für jede Teilmenge $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ und jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ gilt $x - v \in Q$ genau dann, wenn $x \in Q + v := \{\, q + v \mid q \in Q \,\}$ erfüllt ist.

Zum Quader $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$ und $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt hierbei $Q + v = [a_1 + v_1, b_1 + v_1] \times \dots \times [a_n + v_n, b_n + v_n] \subseteq \mathbb{R}^n$.

Für $f = \mathbf{I}_Q$ gilt demnach $g(x) = f(x - v) = \mathbf{I}_{Q+v}(x)$, also $g = \mathbf{I}_{Q+v}$. Nach Definition A3B gilt $\mathrm{vol}_n(Q + v) = (b_1 - a_1)\cdots(b_n - a_n) = \mathrm{vol}_n(Q)$.

🙂 Wir erhalten hier also $\int_{\mathbb{R}^n} f(x-v)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x$. Gut zu wissen!

Verständnisfragen: Verschiebung und Skalierung

(2) In Dimension $n = 1$ betrachten wir Intervalle $Q = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$:
Im Falle $c > 0$ gilt $c^{-1}x \in [a,b]$ genau dann, wenn $x \in [ca, cb]$ erfüllt ist.
Im Falle $c < 0$ gilt $c^{-1}x \in [a,b]$ genau dann, wenn $x \in [cb, ca]$ erfüllt ist.

Allgemein für jede Teilmenge $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ und jeden Faktor $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt $c^{-1}x \in Q$ genau dann, wenn $x \in c\,Q := \{\, cq \mid q \in Q \,\}$ erfüllt ist.

Zum Quader $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist hierbei $c\,Q = [ca_1, cb_1] \times \dots \times [ca_n, cb_n] \subseteq \mathbb{R}^n$ der um c gestreckte Quader.

Für $c \in \mathbb{R}_{\leq 0}$ gilt entsprechend $c\,Q = [cb_1, ca_1] \times \dots \times [cb_n, ca_n] \subseteq \mathbb{R}^n$: Die Streckung um den Faktor -1 ist eine Punktspiegelung am Ursprung.

Für $f = \mathbf{I}_Q$ gilt demnach $h(x) = f(c^{-1}x) = \mathbf{I}_{c\,Q}(x)$, also $g = \mathbf{I}_{c\,Q}$. Nach Definition A3B gilt für das Quadervolumen bei Streckung:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{vol}_n(c\,Q) &= |cb_1 - ca_1| \cdots |cb_n - ca_n| \\
&= |c|^n (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n) = |c|^n \,\mathrm{vol}_n(Q)
\end{aligned}
$$

🙂 Wir erhalten hier also $\int_{\mathbb{R}^n} f(c^{-1}x)\,\mathrm{d}x = |c|^n \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x$. Ist das anschaulich klar? Machen Sie es sich klar!

Translationsinvarianz, Streckung und Stauchung

Satz A4I: Translationsinvarianz, Streckung und Stauchung

Gegeben sei eine messbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sowie ein beliebiger Streckfaktor $a \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ und ein Verschiebungsvektor $b \in \mathbb{R}^n$.
(1) Dann ist auch die Funktion $x \mapsto f(ax+b)$ messbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \big|f(ax+b)\big| \,\mathrm{d}x = \frac{1}{|a|^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \,\mathrm{d}x.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so ist f absolut integrierbar, und dann gilt

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^n} f(ax+b) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{|a|^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \,\mathrm{d}x.}$$

Verschiebung um einen Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ ändert den Wert des Integrals nicht. Stauchung um den Faktor a multipliziert das Integral mit $1/|a|^n$.

Ausblick: Transformation von Integralen werden wir in Kapitel C mit dem Transformationssatz wesentlich allgemeiner formulieren und zu einer zentralen praktischen Rechentechnik ausbauen. Speziell Verschiebung und Stauchung sind nützlich und dienen hier als erste schöne Illustration.

Translationsinvarianz, Streckung und Stauchung

Aufgabe: Folgern Sie den Satz aus den fünf Grundregeln des Integrals:
(1) Gilt die Aussage für Indikatorfunktionen $f = \mathbf{I}_Q$ von Quadern?
(2) Überträgt sie sich auf Treppenfunktionen $f = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \mathbf{I}_{Q_k}$?
(3) Bleibt sie erhalten bei Einschachtelung und Ausschöpfung?
(4) Bleibt sie erhalten bei Zerlegung in Positiv- und Negativteil?

Lösung: (1) Ja, dies haben wir in der vorigen Aufgabe nachgerechnet.
(2) Dank Linearität des Integrals gilt dann für jede Treppenfunktion:

$$\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \int \sum_{k=1}^{\ell} c_k \mathbf{I}_{Q_k}(ax+b)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \int \mathbf{I}_{Q_k}(ax+b)\mathrm{d}x$$
$$= \sum_{k=1}^{\ell} \frac{c_k}{|a|^n} \int \mathbf{I}_{Q_k}(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{|a|^n} \sum_{k=1}^{\ell} c_k \int \mathbf{I}_{Q_k}(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{|a|^n} \int f(x)\mathrm{d}x$$

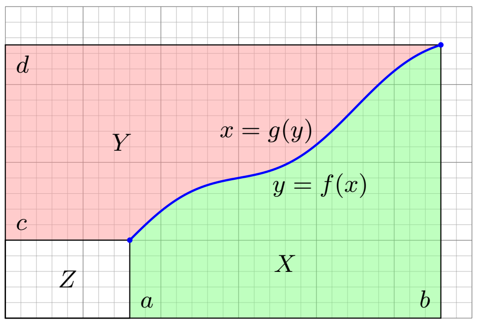
Die Aussage bleibt erhalten bei (3) Einschachtelung und Ausschöpfung und schließlich auch bei (4) Zerlegung in Positiv- und Negativteil.
(Übung: Schreiben Sie dies wie in (2) ebenso geduldig aus.)
Somit gilt die Aussage für alle messbaren Funktionen.

Integral der Umkehrfunktion: von $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ zu $\int_c^d f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y$

Die Funktion $f : [a,b] \to [c,d]$ sei stetig und streng monoton wachsend von $f(a) = c$ nach $f(b) = d$, mit $0 \le a < b$ und $0 \le c < d$. Dann existiert die Umkehrfunktion $g : [c,d] \to [a,b]$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_{[a,b]}$ und $f \circ g = \mathrm{id}_{[c,d]}$. Auch g ist dann streng monoton wachsend, von $g(c) = a$ nach $g(d) = b$.

Aufgabe: Die folgende Gleichung ist herzuleiten bzw. nachzuweisen:

$$\boxed{\int_{x=a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{y=c}^{d} g(y)\,\mathrm{d}y = bd - ac}$$



Lösung: Die Graphik zeigt den geometrischen Beweis, ganz ohne Rechnung, gar ohne Worte. Falls gewünscht, hier die Worte: Das Rechteck $Q = [0,b] \times [0,d] = X \cup Y \cup Z$ besteht aus $X = \{\, (x,y) \mid a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x) \,\}$, $Y = \{\, (x,y) \mid c \le y \le d,\ 0 \le x \le g(y) \,\}$ und $Z = [0,a[\times [0,c[$. Die drei Flächeninhalte addieren sich, denn $X \cap Z = Y \cap Z = \emptyset$ und $\mathrm{vol}_2(X \cap Y) = 0$. Mit $\mathrm{vol}_2(X) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ und $\mathrm{vol}_2(Y) = \int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y$ folgt die Gleichung. (Allgemein: Youngs Integralungleichung C4K)

Integral der Umkehrfunktion: von $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ zu $\int_c^d f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y$

Die Gleichung ist überraschend einfach, und der Beweis ist einfach-genial. Ist das nur ein naiver Taschenspielertrick, oder können wir die Rechnung begründen? Was genau benötigen wir dazu?

Erste Methode: Wir nutzen die (fast) disjunkte Vereinigung $Q = X \cup Y \cup Z$ und „Das Integral ist der Flächeninhalt unter dem Graphen.“ Eine präzise, universelle Begründung liefert der Satz von Fubini C1E: Die zu messenden Mengen X und Y sowie $X \cap Y$ sind Normalbereiche (C1G), daher gilt $\mathrm{vol}_2(X) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ und $\mathrm{vol}_2(Y) = \int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y$ sowie $\mathrm{vol}_2(X \cap Y) = 0$. (C1H)

Zweite Methode: Wir nutzen den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI, B1I). Zu f und g existieren Stammfunktionen F und G. Die behauptete Formel besagt für $x \in [a,b]$ gerade $h(x) := F(x) - F(a) + G(f(x)) - G(f(a)) - xf(x) + af(a) \stackrel{!}{=} 0$. Ableiten ergibt $h'(x) = f(x) + g(f(x))f'(x) - f(x) - xf'(x) = 0$ dank Kettenregel und Produktregel. Somit ist $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ konstant. Aus $h(a) = 0$ folgt $h = 0$, also die behauptete Gleichung.

⚠ Hierzu müssen wir f als stetig differenzierbar voraussetzen. Steht die Formel erst einmal da, dann können wir sie so sehr leicht *nachrechnen*. Doch wie können wir sie überhaupt erst *finden*?

Dritte Methode: Zur Berechnung nutzen wir alle Regeln der Integrationskunst, wir substituieren $y = f(x)$ und $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$, nutzen die Eigenschaft $g(f(x)) = x$ und integrieren partiell:

$$\begin{aligned} \int_{y=c}^{d} g(y)\,\mathrm{d}y &\overset{\text{Subs}}{\underset{\text{B1K}}{=}} \int_{x=a}^{b} g(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x &&= \int_{x=a}^{b} xf'(x)\,\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{part}}{\underset{\text{B1J}}{=}} \big[xf(x)\big]_{x=a}^{b} - \int_{x=a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x &&= bd - ac - \int_{x=a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

☺ Mehrere Wege führen also zum Ziel, alle sind lehrreich. Eine solide Grundlegung ist wichtig, damit wir genau wissen, wovon wir reden, und sicher rechnen können. Die Investition lohnt sich!