

# Höhere Mathematik 3 (vertieft)

für Luft- und Raumfahrttechnik (LRT)  
und Materialwissenschaft (MaWi)



Prof. Dr. Michael Eisermann  
Institut für Geometrie und Topologie (IGT)  
michael-eisermann.de/lehre/HM3

erkennen.  
verstehen.  
anwenden.



Universität Stuttgart

Wintersemester 2024/25  
Vollversion 26.02.2025

Für die Mitteilung von Unklarheiten und Fehlern aller Art  
sowie für Verbesserungsvorschläge bin ich stets dankbar!



Habe Mut, dich deines eigenen  
Verstandes zu bedienen!

Much to learn, you still have.  
This is just the beginning.



## Urheberrecht und Haftungsausschluss

002  
Überblick

Die hier angebotenen Inhalte sind urheberrechtlich geschützt. Sie dürfen zu nicht-kommerziellen Zwecken in der Lehre verwendet werden, sofern die Quelle wie folgt vollständig angegeben wird.

Prof. Dr. Michael Eisermann: Vorlesungsunterlagen zur Höheren Mathematik,  
Institut für Geometrie und Topologie (IGT), Universität Stuttgart,  
michael-eisermann.de/lehre/HM3

Diese Unterlagen dienen zur Vorlesung *Höhere Mathematik 3 (vertieft)*. Sie sind konzipiert für das Mathematik-Grundstudium in den Natur- und Ingenieurwissenschaften und vermitteln einschlägiges Basiswissen. Zusammen mit den Grundlagen umfassen sie über 800 Aufgaben mit Lösungen, die Schönsten davon entstanden in Zusammenarbeit mit Dr. Friederike Stoll.

Die Inhalte wurden vom Autor mit größter Sorgfalt für die Präsentation in der Lehre erstellt. Sie werden allein zu Lehrzwecken zur Verfügung gestellt, in der Hoffnung, dass sie zum Lernen und Üben nützen mögen, ohne jeden Anspruch auf Eignung zu irgendeinem anderen Zweck. Sie sind keine Handlungsanweisung oder Empfehlung. Nur eigenständiges Denken hilft!

*Kunst und Wissenschaft, Forschung und Lehre sind frei.* (GG Art. 5.3.1) Der Autor übernimmt keinerlei Gewähr für die angebotenen Informationen und Daten, deren Aktualität, Korrektheit, Vollständigkeit, Qualität oder irgendeine Nutzbarkeit außerhalb der Lehre. Haftungsansprüche für mögliche Schäden, materieller oder immaterieller Art, sind grundsätzlich ausgeschlossen.

Für Inhalte externer Quellen, insb. verlinkter Webseiten, ist stets deren Anbieter verantwortlich.

## Wie nutzen Sie dieses Vorlesungsskript?

003  
Überblick

*Es gibt nichts Praktischeres als eine gute Theorie.* (Immanuel Kant, 1724–1804)

Diese Folien dienen als Grundlage meiner Vorlesung. Wie von Studierenden gewünscht, können sie auch eigenständig genutzt werden, zum Nacharbeiten, zur Klausurvorbereitung, oder notfalls als Ersatz zur Vorlesung. Dazu sind *Definitionen* und *Sätze* mit zahlreichen *Übungen* verwoben; sie bilden daher kein knappes Nachschlageheft, sondern ein umfangreiches Lese- und Arbeitsbuch.

Die Vortragsfolien sind durch blaue Titelbalken leicht zu erkennen. Dem studentischen Wunsch folgend präsentiere ich vielfältige *Beispiele* und *Aufgaben mit Lösungen*, zudem *Erläuterungen*, *Erinnerungen* und *Ergänzungen*, instruktive *Rechnungen* und manchmal *Beweise*. Dies folgt der bewährten Erfahrung, dass die Leserin und der Leser leichter eine vorhandene Übung, Erklärung oder Illustration übergehen kann, als eine fehlende selbst (er)finden. Möge es beiden nützen!

Ich versuche, jedes Thema so einfach wie möglich darzustellen, doch so präzise und ausführlich wie es für ein solides Verständnis nötig ist. Erklärungen und Hinweise, die ich in der Vorlesung mündlich gebe, sind hier schriftlich ausgeführt; sie nützen mir als Erinnerung, den Leser:innen als Erläuterung. Eine ideale Mischung für alle und jeden gibt es leider nicht: Der Bedarf nach Umfang und Tiefe ist individuell unterschiedlich. Das Angebot ist reich. Dosieren Sie selbst!

Neben der *Vollversion* biete ich versuchsweise auch eine *Halbversion*, die mit der Axt auf halbe Länge gekürzt wurde, durch Löschung zahlreicher Beispiele und Aufgaben, Erinnerungen und Illustrationen, Ausführungen und Ergänzungen. Je nach Bedarf der Leser:in ist dies an manchen Stellen hilfreich, an anderen fehlt es. Wer es sich zutraut, nutzt die Vollversion und dosiert selbst.

## Wozu lernen Sie Mathematik?

005  
Überblick

*Hochtechnologie ist immer auch mathematische Technologie.*

Sie haben forschungsorientierte Studiengänge gewählt, Sie studieren ambitionierte Fächer, hierzu brauchen Sie handfeste Mathematik.

Was Sie hier lernen, können Sie überall nutzbringend anwenden. Mit diesen Werkzeugen können Sie auch dicke Bretter bohren.



Ohne  
Mathe:  
mühsam  
bis unmöglich



Mit Mathematik  
geht es besser!

Theorie und Anwendung sind keine Gegensätze, sie ergänzen sich und arbeiten wunderbar effizient zusammen wie linke und rechte Hand.

Mathematik ist zugleich abstrakte Theorie und konkrete Anwendung. Dank Abstraktion ist sie universell anwendbar: Das ist ihre Stärke!

## Wozu lernen Sie jetzt schon Mathematik?

007  
Überblick

*Frage nicht nur, was die HM jetzt schon für dich tun kann.  
Frage vor allem, was du jetzt schon für die HM tun kannst.*



*Wenn du ein Schiff bauen willst, lehre deine Leute nicht nur  
ihr Handwerk, sondern erwecke ihre Sehnsucht nach dem Meer!*

## Wozu benötigen Sie mathematische Methoden?

004  
Überblick

*Alles Leben ist Problemlösen.* (Sir Karl Popper, 1902–1994)

Verständnis und Beherrschung komplexer Zusammenhänge benötigen Empirie *und* Theorie, quantitative Modelle und sorgfältige Planung. Diese beruhen im Wesentlichen auf Mathematik. Der Beruf des Ingenieurs (m/w/d) und vieler anderer ist daher zunehmend mathematisch geprägt. Mathematische Methoden sind häufig Voraussetzung für den Erfolg technischer Entwicklungen; das gilt auch, wenn sie beim Endprodukt im Inneren wirken und oberflächlich nicht sichtbar sind. Deshalb nutzen Sie bereits im Studium vielfältige und umfangreiche mathematische Methoden, und hierzu legt Ihre Mathematikausbildung im Grundstudium das notwendige Fundament.

Es ist dabei völlig unmöglich, alle in späteren Anwendungen relevanten Techniken zu behandeln, sozusagen als Enzyklopädie auf Vorrat. Dazu sind die Anforderungsprofile allzu unterschiedlich: Was für den einen schon viel zu viel wäre, ist für die andere noch längst nicht umfassend genug. Zukünftige Ingenieur:innen sollen daher nicht nur die allgegenwärtigen Grundfertigkeiten lernen, sondern auch mathematische Denkweisen und systematische Problemlösung, um je nach Bedarf erforderliche neue Methoden selbstständig erwerben, vertiefen und anwenden zu können.

Es ist in hochqualifizierten Berufen unwahrscheinlich, dass Sie genau dieses oder jenes *Beispiel* wörtlich anwenden. Das gilt ganz allgemein, selbst für die bestmögliche Auswahl von Beispielen. Hingegen ist es wahrscheinlich, dass Sie diese oder ähnliche bewährte *Methoden* häufig nutzen. Sie sollen daher nicht nur *Beispiele* lernen, sondern zugleich möglichst vielseitige *Methoden!* Mathematik ist immer beides: sowohl abstrakte Theorie als auch konkrete Anwendung; sie sind keine Gegensätze, sie ergänzen sich, die eine kann nur mit der anderen dauerhaft erfolgreich sein.

## Wozu lernen Sie Mathematik?

006  
Überblick

*Mathematik ist Grundlage und Werkzeug aller modernen Technologie.*

Als Ingenieur:in brauchen Sie Ihr methodisches Handwerkszeug. Dazu gehört als harter Kern und Grundlage die Höhere Mathematik. Je anspruchsvoller die Aufgabe, desto wichtiger wird die Mathematik.

Sie können das begrüßen oder bejammern, es ist und bleibt Tatsache: Theorie ist nicht Ballast oder Schikane, sondern effizientes Werkzeug.

Viele von Ihnen wissen bereits, dass Sie mathematische Werkzeuge dringend brauchen. Andere finden es demnächst heraus, hoffentlich bereits in dieser Grundlagenvorlesung, andernfalls nachfolgend in Anwendungen und Vertiefungen in Studium und Beruf. Je früher und je gewissenhafter Sie Ihr Handwerkszeug erlernen, desto besser.

Die Mathematik bietet Ihnen extrem präzise und scharfe Werkzeuge. Zur effizienten Nutzung brauchen Sie einige grundlegende Kenntnisse. Greifen Sie nicht wahllos in die Kiste oder packen die Werkzeuge am falschen Ende: Wissen macht Ah! Unwissen macht Aua!

Vor uns liegt ein sehr anspruchsvolles und sehr lohnendes Semester. Ich beginne am Ende und will Ihnen zeigen, wo die Reise hingehet: Wozu nutzen Sie diese Methoden? Welche Aufgaben können Sie damit lösen, die jetzt noch außerhalb Ihrer Reichweite liegen?

## Wozu lernen Sie jetzt schon Mathematik?

008  
Überblick

*Dem Anwenden muss das Erkennen vorausgehen.* (Max Planck, 1858–1947)

Manche:r schimpft auf die „lästige Theorie“ und scheidet alsbald an allzu naiver Anwendung, getreu dem Slogan „Plane nicht, irre lieber!“. Manchmal geht das gut, aber meist leider nicht. Wem nichts besseres einfällt, der prangert pauschal die „Theorie“ des Studiums an und fordert unspezifisch aber publikumswirksam „Praxisbezug“. Hohle Sprüche werden gerne wiedergekaut.

Wer Mathematik anwendet, weiß es besser: Theorie ist keine Last, sondern wirksames Werkzeug. Gute Ingenieur:innen kennen die möglichen Methoden und entscheiden umsichtig und informiert. Die Erfahrung zeigt: Immer häufiger sind mathematische Methoden der Schlüssel zum Erfolg. Ambitionierte Studiengänge bauen daher konsequent auf umfassende mathematische Grundlagen.

Manche Studenten (m/w/d) des Ingenieurwesens skandieren die Forderung „Wir wollen keine Theorie, sondern nur Beispiele!“ Wenn das Ihre persönliche Überzeugung ist, überdenken Sie Ihre Studienwahl: Es gibt rein *anwendungsorientierte* Ausbildungen mit einem Minimum an Theorie. Für ein *forschungsorientiertes* Studium wäre das unzureichend, allzu einseitig und kurzichtig. Wie oben erklärt, sollen Sie nicht nur *Beispiele* lernen, sondern möglichst vielseitige *Methoden!*

Der Nutzen konkreter Beispiele zum Erlernen einer Methode steht außer Frage. Ebenso wichtig ist jedoch die zugrundeliegende Theorie: Sie ordnet und erklärt. Das ist meist ein zweiseitiger Vorgang: Diese Vorlesung rückt Beispiele soweit möglich in den Vordergrund, stellt aber auch die notwendige Theorie zur Verfestigung und Vertiefung bereit. Damit Sie sich diese Grundlagen möglichst gut aneignen können, werde ich Definitionen und Sätze explizit formulieren und ausführlich behandeln, und deren sichere Beherrschung später auch von Ihnen erwarten.

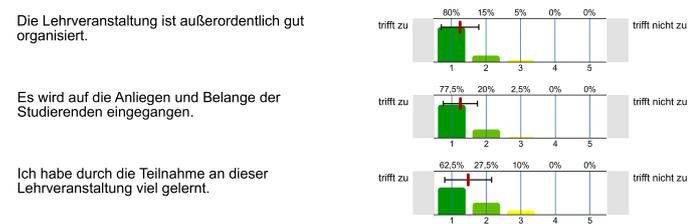
Als Ingenieur:in wollen Sie komplexe, praktische Probleme lösen. Dazu brauchen Sie theoretische Grundlagen und mathematische Methoden. Sie haben forschungsorientierte Studiengänge gewählt: LRT und MaWi. Je anspruchsvoller die Aufgabe, desto mathematischer die Werkzeuge! Genau zu diesem Ziel bietet und verlangt Ihr Studiengang die HM3. Mit Ihrem Engagement im Studium entscheiden Sie über Ihre Zukunft.

Die richtige Wahl: Aufwärtsspirale — engagiert mitarbeiten, gemeinsam lernen, erfolgreich studieren.

Die falsche Wahl: Abwärtsspirale — desinteressiert mitlaufen, planlos verträdeln, frustriert aufgeben.

- 1 spannende Themen, schöne und nützliche Mathematik.
2 klare Struktur, hervorragende Betreuung, faire Klausur.

In aller Bescheidenheit: Unsere HM3 ist sensationell gut.



Klar und ehrlich: Studieren heißt sich bemühen!



Website for 'Höhere Mathematik 3 vertieft - WiSe 24/25' with sections for Startseite, Vorlesung und integrierte Vortragsübung, Quizze, and Gruppenübungen.

Diagram comparing 'blauer Titelbalken = Vorlesung' and 'weißer Titelbalken = Hintergrund' with corresponding slide content.

In jeder Vorlesung werden etwa 20 bis 25 Vorlesungsfolien besprochen; diese bilden den blauen Faden, das Kernprogramm, unser Grundgerüst.

Die HM3 lässt niemanden kalt. Es gibt zu ihr nur zwei Ansichten: Die einen lieben die HM3, sie wissen bereits, dass sie Mathematik dringend benötigen...

Wir beantworten heute die großen Fragen des Lebens... zumindest für dieses Semester in der Höheren Mathematik 3:

Was kann ich wissen? Was soll ich tun? Was darf ich hoffen? Immanuel Kant (1724-1804)

Die HM3 ist für Sie nicht nur Verpflichtung, sondern auch Chance! Erkläre es mir, und ich werde es vergessen. Zeige es mir, und ich werde mich erinnern. Lass es mich tun, und ich werde es verstehen. Konfuzius (551-497 v.Chr.)

Warum erzähle ich Ihnen das? Sie können mit uns rechnen!

Ich möchte, dass Sie vernünftig handeln und erfolgreich studieren. Zu dieser Entscheidung gebe ich Ihnen die nötigen Informationen. Sie haben die Freiheit, unvernünftig zu handeln und zu scheitern.

Die Rückmeldungen sind insgesamt sehr positiv, die Befragungen sind sensationell gut, besonders für eine Grundvorlesung am Studienanfang und zudem gar in der Mathematik, als Service im Ingenieurwesen.

Dafür arbeite ich extrem hart, genauer gesagt: Ihr gesamtes HM3-Team! Von Ihnen erwarte ich dasselbe: ernsthaftes Engagement und Mitarbeit. Mir ist wichtig, diese Grundfrage anfangs ein für alle mal zu klären.

Quidquid agis, prudenter agas et respice finem! [Was immer du tust, handele klug und bedenke das Ende!]

Slide titled 'Das HM3-Rundum-Glücklich-Paket: die Vorlesungsfolien eingebettet in ein Lese- und Arbeitsbuch' by Prof. Dr. Michael Eisermann.

Die Folien erfüllen eine doppelte Funktion. Für meinen Vortrag erstelle ich die Folien zur visuellen Unterstützung und nutze sie als Grundlage. Diese Vortragsfolien sind durch blaue Titelbalken leicht zu erkennen.

Dieses Grundgerüst ergänze ich durch Hintergrundinformation in Form von Erläuterungen und Ausführungen, Erinnerungen und Ergänzungen, Aufgaben mit Lösungen, weiteren Beispielen und Rechnungen, etc.

Ich versuche, jedes Thema so klar und einfach wie möglich darzustellen, doch so präzise und ausführlich wie für ein solides Verständnis nötig ist. Erklärungen und Hinweise, die ich in der Vorlesung mündlich gebe, finden Sie hier zum Nachlesen noch einmal schriftlich ausgeführt.

### Kapitel A: Was sind und was sollen Integrale?

- A1 Konstruktion des Volumens
  - A1.1 Wie misst man Flächen- und Rauminhalt?
  - A1.2 Was sind und was sollen Integrale?
  - A1.3 Schreibweisen für Integrale
- A2 Reelle Zahlen und reelle Funktionen
  - A2.1 Der Körper ( $\mathbb{R}$ ,  $+$ ,  $\cdot$ ,  $<$ ) der reellen Zahlen
  - A2.2 Reelle Funktionen und ihre Operationen
  - A2.3 Absolute Summation von Reihen
- A3 Konstruktion des Integrals
  - A3.1 Treppenfunktionen und ihr Integral
  - A3.2 Einschachtelung und Ausschöpfung
  - A3.3 Absolut integrierbare Funktionen
- A4 Eigenschaften des Integrals
  - A4.1 Zerlegung und Betragsabschätzung
  - A4.2 Fast überall gleiche Funktionen
  - A4.3 Erste Beispiele und Verständnisfragen

### Kapitel B: Eindimensionale Integration

- B1 Integration durch Einschachtelung (nach Riemann)
  - B1.1 Treppenfunktionen und Integration durch Einschachtelung
  - B1.2 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
  - B1.3 Integrationsregeln und elementare Integralformeln
- B2 Integration durch Ausschöpfung (nach Lebesgue)
  - B2.1 Absolute Integration durch Ausschöpfung
  - B2.2 Der Hauptsatz für integrierbare Funktionen
  - B2.3 Uneigentliche Integrale und Cauchy-Hauptwert
- B3 Integrale und Reihen
  - B3.1 Vergleich von Integral und Reihe
  - B3.2 Stirling-Formel und Gamma-Funktion
  - B3.3 Konvergenzkriterien von Abel, Leibniz und Dirichlet
- B4 Fazit: Eindimensionale Integration
  - B4.1 Zusammenfassung und Verständnisfragen
  - B4.2 Beispiele zur uneigentlichen Integration
  - B4.3 Analytische und glatte Funktionen

### Kapitel C: Mehrdimensionale Integration

- C1 Der Satz von Fubini
  - C1.1 Iterierte Integrale für nicht-negative Funktionen
  - C1.2 Der Satz von Fubini für integrierbare Funktionen
  - C1.3 Integration über Normalbereiche
- C2 Der Transformationssatz
  - C2.1 Neue Variablen als geschickte Koordinaten
  - C2.2 Polarkoordinaten und das Gaußsche Integral
  - C2.3 Zylinder- und Kugelkoordinaten
- C3 Fazit: Hauptsatz, Fubini, Transformation
  - C3.1 Zusammenfassung
  - C3.2 Verständnisfragen
  - C3.3 Normalbereiche
- C4 Weitere Aufgaben und Anwendungen
  - C4.1 Trägheitsmoment von Zylinder und Kugel
  - C4.2 Warnende Gegenbeispiele zu Fubini
  - C4.3 Volumina, Polstellen, Integrierbarkeit

### Kapitel D: Integrale und Grenzwerte

- D1 Vertauschen von Integral und Reihe
  - D1.1 Absolute Konvergenz in  $L^1$
  - D1.2 Integration von Potenzreihen
- D2 Vertauschen von Integral und Limes
  - D2.1 Punktweise Konvergenz
  - D2.2 Majorisierte Konvergenz
- D3 Vertauschen von Integral und Ableitung
  - D3.1 Kompakte Integrationsbereiche
  - D3.2 Beliebige Integrationsbereiche
- D4 Weitere Aufgaben und Anwendungen
  - D4.1 Warnende Beispiele zur Vertauschung
  - D4.2 Berechnung von Integralen und Reihen
- D5 Kalkül der Distributionen
  - D5.1 Lösungen der Wärmeleitungsgleichung
  - D5.2 Distributionen und ihre Rechenregeln

### Kapitel E: Integralsätze in der Ebene

- E1 Die Integralsätze von Green und Gauß
  - E1.1 Wegintegrale und Kurvenintegrale
  - E1.2 Ebene Kompakta mit stückweise glattem Rand
  - E1.3 Der Integralsatz von Green: anschauen und nachrechnen!
  - E1.4 Der Integralsatz von Gauß: anschauen und nachrechnen!
- E2 Anwendungsbeispiele
  - E2.1 Schreibweise als Differentialform
  - E2.2 Die Greenschen Flächenformeln
  - E2.3 Arbeitsintegrale in der Thermodynamik
  - E2.4 Flächeninhalt und Schwerpunkt
- E3 Verständnisfragen und Aufgaben
  - E3.1 Sherlock Holmes: Which way did the bicycle go?
  - E3.2 Zwei prominente Vektorfelder: Wirbel und Quelle
  - E3.3 Der Hauptsatz für Arbeitsintegrale: HDI
  - E3.4 Lösung des Potentialproblems

### Kapitel F: Integralsätze für komplexe Funktionen

- F1 Crashkurs zum Residuensatz
- F2 Komplexe Funktionen und Potenzreihen
  - F2.1 Die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen
  - F2.2 Exponentialfunktion und Zweige des Logarithmus
  - F2.3 Laurent-Reihen, Polstellen und Residuen
- F3 Die Integralformel von Cauchy
  - F3.1 Integralsatz und Integralformel von Cauchy
  - F3.2 Fundamentalsatz der Algebra und Nullstellensuche
  - F3.3 Entwicklung in Potenzreihen und in Laurent-Reihen
- F4 Der Residuensatz und Anwendungen
  - F4.1 Das Residuum einer isolierten Singularität
  - F4.2 Der Residuensatz für Kompakta
  - F4.3 Anwendung auf reelle Integrale
- F5 Fazit: Residuenkalkül
  - F5.1 Verständnisfragen und Vertiefungen
  - F5.2 Anwendungsbeispiele zum Residuenkalkül

### Kapitel G: Integralsätze im Raum

- G1 Crashkurs zu Integralsätzen im Raum
  - G1.1 Flächenintegrale und Integralsätze im Raum
  - G1.2 Einführendes Beispiel zum Satz von Stokes
  - G1.3 Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß
- G2 Flächenintegrale im Raum
  - G2.1 Glatte Flächenstücke und Parametrisierungen
  - G2.2 Kugelsegment, Kugelkappe, Torusfläche
  - G2.3 Rotationskörper und Guldinsche Regeln
- G3 Integralsätze im Raum
  - G3.1 Die Integralsätze von Stokes und Gauß
  - G3.2 Anwendung: das archimedische Prinzip
  - G3.3 Numerik: Triangulierung und Linearisierung
- G4 Fazit: Integralsätze
  - G4.1 Zusammenfassung und Verständnisfragen
  - G4.2 Weitere Aufgaben und Anwendungen
  - G4.3 Geometrie auf gekrümmten Flächen

### Kapitel H: Erste Anwendungen der Integralsätze

- H1 Partielle Differentialgleichungen der Physik
  - H1.1 Eulers Kontinuitätsgleichung
  - H1.2 Fouriers Wärmeleitungsgleichung
  - H1.3 Newtons Gravitationsgesetz
  - H1.4 Maxwells Elektrodynamik
- H2 Vektorfelder und Potentiale
  - H2.1 Konservative Vektorfelder
  - H2.2 Rotationsfreie Vektorfelder
  - H2.3 Einfach zusammenhängende Gebiete
  - H2.4 Radialsymmetrische Felder und Potentiale
- H3 Fazit: Erste Anwendungen der Integralsätze
  - H3.1 Zusammenfassung und Verständnisfragen
  - H3.2 Weitere Aufgaben und Anwendungen
  - H3.3 Notwendige und hinreichende Kriterien
  - H3.4 Gegenläufige Wirbelfelder, Quadrupolis

### Kapitel I: Fourier–Analyse periodischer Funktionen

- I1 Die trigonometrische Orthonormalbasis
  - I1.1 Periodische Funktionen, erste Beispiele
  - I1.2 Periodische Fortsetzung, Spiegelung
  - I1.3 Skalarprodukt und Orthonormalbasis
- I2 Fourier–Analyse und das Dirichlet–Kriterium
  - I2.1 Fourier–Entwicklung der Sägezahnfunktion
  - I2.2 Das Konvergenz-Kriterium von Dirichlet
  - I2.3 Fourier–Entwicklung von Treppenfunktionen
- I3 Rechenregeln zu Integration und Glattheit
  - I3.1 Integrieren und Differenzieren
  - I3.2 Abklingen der Fourier–Koeffizienten
  - I3.3 Von Potenzreihen zu Fourier–Reihen
- I4 Fazit: Fourier–Analyse periodischer Funktionen
  - I4.1 Zusammenfassung und Verständnisfragen
  - I4.2 Weitere Aufgaben und Anwendungen

### Kapitel J: Die Fourier–Isometrie

- J1 Parseval–Gleichung und Fourier–Isometrie
  - J1.1 Die Energiegleichung und erste Anwendungsbeispiele
  - J1.2 Die Fourier–Isometrie zwischen Funktion und Spektrum
  - J1.3 Isoperimetrische Optimierung durch Fourier–Reihen
- J2 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz
  - J2.1 Punktweise Konvergenz nach Dirichlet
  - J2.2 Gleichmäßige Approximation nach Fejér
  - J2.3 Wann gilt punktweise Konvergenz fast überall?
- J3 Konvergenz im quadratischen Mittel
  - J3.1 Bestapproximation durch Orthogonalprojektion
  - J3.2 Konvergenz im quadratischen Mittel
  - J3.3 Vergleich der drei Konvergenzbegriffe
- J4 Fazit: Fourier–Analyse und Synthese
  - J4.1 Zusammenfassung
  - J4.2 Verständnisfragen

### Kapitel K: Fourier–Transformation

- K1 Erste Beispiele, Eigenschaften, Rechenregeln
  - K1.1 Von der Fourier–Reihe zum Fourier–Integral
  - K1.2 Einfache Beispiele und erste Eigenschaften
  - K1.3 Der Umkehrsatz für Fourier–Transformierte
- K2 Analytische Eigenschaften
  - K2.1 Rechenregeln der Fourier–Transformation
  - K2.2 Ableitung und Multiplikation
  - K2.3 Faltung und Produkt
- K3 Metrische Eigenschaften
  - K3.1 Energiegleichung und Fourier–Isometrie
  - K3.2 Die Unschärferelation für Fourier–Paare
  - K3.3 Bedeutung in der Quantenmechanik
- K4 Fazit: Fourier–Transformation
  - K4.1 Zusammenfassung
  - K4.2 Verständnisfragen
  - K4.3 Weitere Aufgaben

### Kapitel L: Laplace–Transformation

- L1 Die Laplace–Transformation
  - L1.1 Definition der Laplace–Transformation
  - L1.2 Linearität und Ableitungsregel
  - L1.3 Streckung, Dämpfung, Verschiebung
- L2 Anwendung auf Differentialgleichungen
  - L2.1 Tabelle einfacher Laplace–Transformierter
  - L2.2 Lösung von Differentialgleichungen
  - L2.3 Partialbruchzerlegung und Residuen
- L3 Weitere Eigenschaften und Anwendungen
  - L3.1 Rücktransformation und Injektivität
  - L3.2 Faltung und Integralregel
  - L3.3 Greensche Fundamentallösung
- L4 Fazit: Laplace–Transformation
  - L4.1 Vergleich von Laplace und Fourier
  - L4.2 Anwendung in der Systemtheorie
  - L4.3 Aufgaben zu Differentialgleichungen

### Kapitel M: Gewöhnliche Differentialgleichungen

- M1 Erste Beispiele von Differentialgleichungen
  - M1.1 Einfache Beispiele aus der Mechanik
  - M1.2 Separierbare Differentialgleichungen
  - M1.3 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen
- M2 Exakte Differentialgleichungen
  - M2.1 Exaktheit und Potential von  $f(x, y) + g(x, y) y' = 0$
  - M2.2 Lösung durch einen integrierenden Faktor
  - M2.3 Lineare Differentialgleichungen
- M3 Fazit: Existenz, Eindeutigkeit, Lösungsmethoden
  - M3.1 Zusammenfassung und Verständnisfragen
  - M3.2 Methodenvergleich: Viele Wege führen zum Ziel.
  - M3.3 Gut & schlecht gestellte Anfangswertprobleme
- M4 Weitere Aufgaben und Anwendungsbeispiele
  - M4.1 Umformung und Lösung durch Substitution
  - M4.2 Exakte Differentialgleichungen und Potentiale
  - M4.3 Qualitative Analyse, Runden und Eingrenzen

### Kapitel N: Differentialgleichungen höherer Ordnung

- N1 Harmonische Schwingungen
  - N1.1 Freie harmonische Schwingung
  - N1.2 Erzwungene harmonische Schwingung
- N2 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten
  - N2.1 Charakteristisches Polynom und Fundamentalsystem
  - N2.2 Lösungsansatz für spezielle rechte Seiten  $r(x)e^{\mu x}$
  - N2.3 Greensche Lösungsformel für beliebige rechte Seiten
- N3 Lineare Differentialgleichungen mit stetigen Koeffizienten
  - N3.1 Fundamentalmatrix und Variation der Konstanten
  - N3.2 Lösung durch Potenzreihenansatz
- N4 Die Euler–Lagrange–Differentialgleichung
  - N4.1 Optimierung durch Variationsrechnung
  - N4.2 Lösung des Brachistochrone-Problems
- N5 Fazit: Differentialgleichungen höherer Ordnung
  - N5.1 Zusammenfassung und Verständnisfragen
  - N5.2 Weitere Aufgaben und Methodenvergleich

### Kapitel O: Dynamische Systeme

- O1 Dynamische Systeme
  - O1.1 Der harmonische Oszillator als dynamisches System
  - O1.2 Gekoppelte Oszillatoren und Eigenfrequenzen
  - O1.3 Mathematisches Pendel und Energiefläche
  - O1.4 Das Näherungsverfahren von Runge–Kutta
- O2 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen
  - O2.1 Lokale Lösungen: Satz von Picard–Lindelöf
  - O2.2 Fortsetzungen und maximale Lösungskurven
  - O2.3 Sensible Abhängigkeit von den Anfangsdaten
  - O2.4 Aufgaben zu Existenz und Eindeutigkeit und Stabilität
- O3 Der Hauptsatz für lineare dynamische Systeme
  - O3.1 Affin/Lineare Struktur des Lösungsraumes
  - O3.2 Variation der Konstanten zur Partikulärlösung
  - O3.3 Matrizenkalkül und Exponentialfunktion
  - O3.4 Fundamentallösung homogener DGSysteme

### Kapitel P: Autonome Systeme, Gleichgewicht und Stabilität

- P1 Lineare DGSysteme mit konstanten Koeffizienten
  - P1.1 Gekoppelte Oszillatoren und stehende Wellen
  - P1.2 Lösungen mittels Eigenvektoren und Eigenfunktionen
  - P1.3 Lösungen mittels Hauptvektoren und Hauptfunktionen
  - P1.4 Von komplexen zu reellen Lösungen
- P2 Gleichgewichtslagen und In/Stabilität von Fixpunkten
  - P2.1 Linearisierung um Fixpunkte und In/Stabilität
  - P2.2 Räuber-Beute-Modell nach Lotka–Volterra
  - P2.3 Stabilitätsanalyse nach Lyapunov
  - P2.4 Hamiltonsche Dynamik und Stabilität
- P3 Fazit: Differentialgleichungssysteme
  - P3.1 Zusammenfassung und Verständnisfragen
  - P3.2 Reduktion der Ordnung und Methodenvergleich
  - P3.3 Beispiele zur Dynamik um Fixpunkte und In/Stabilität
  - P3.4 Invariante Mengen dank Tangentialbedingung

### Kapitel Q: Partielle Differentialgleichungen (PDE)

- Q1 Erste Beispiele partieller Differentialgleichungen
  - Q1.1 Partielle Ableitungen und der Satz von Schwarz
  - Q1.2 Cauchy–Riemann und Maxwell–Gleichungen
  - Q1.3 Konvektion–Diffusion und Navier–Stokes–Gleichungen
  - Q1.4 Ideale ebene Strömungen und holomorphe Funktionen
- Q2 Lineare PDE erster Ordnung
  - Q2.1 Lineare Differentialoperatoren
  - Q2.2 Lösung entlang charakteristischer Kurven
  - Q2.3 Die Charakteristikmethode und warnende Gegenbeispiele
  - Q2.4 Transportgleichung mit konstanten Koeffizienten
- Q3 Fazit: PDE erster Ordnung
  - Q3.1 Zusammenfassung und Verständnisfragen
  - Q3.2 Aufgaben zur Charakteristikmethode
  - Q3.3 Lösung durch Potenzreihenansatz
  - Q3.4 Methodenvergleich: Viele Wege führen zum Ziel.

### Kapitel R: Lineare PDE zweiter Ordnung

- R1 Lineare PDE zweiter Ordnung
  - R1.1 Lösung durch Fourier–Transformation
  - R1.2 Klassifikation linearer PDE zweiter Ordnung
  - R1.3 Trennung der Variablen durch Produktdansatz
- R2 Anwendung auf die Potentialgleichung
  - R2.1 Laplace–Gleichung auf einem Rechteck
  - R2.2 Eindeutigkeit und Minimum–Maximum–Prinzip
  - R2.3 Gut gestellt? Hadamards warnendes Gegenbeispiel
- R3 Anwendung auf die Wellengleichung
  - R3.1 Die harmonisch schwingende Saite
  - R3.2 Wellengleichung und die gezupfte Saite
  - R3.3 Die Energiemethode beweist die Eindeutigkeit.
- R4 Fazit: PDE zweiter Ordnung
  - R4.1 Zusammenfassung und Verständnisfragen
  - R4.2 Aufgaben zur Separationsmethode

### Kapitel S: Die Wärmeleitungsgleichung

- S1 Die Wärmeleitungsgleichung und ihre freien Lösungen
  - S1.1 Von der Wärmebilanz zur Differentialgleichung
  - S1.2 Wärmeleitungskern und Superposition
  - S1.3 Lösung durch Fourier–Transformation
- S2 Die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung als ARWP
  - S2.1 Wie schnell kühlt ein Stab über seine Enden ab?
  - S2.2 Was passiert bei gleichmäßigem Aufheizen?
  - S2.3 Was passiert bei Isolierung an den Rändern?
- S3 Existenz und Eindeutigkeit und Näherung des ARWP
  - S3.1 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen
  - S3.2 Energie und Minimum–Maximum–Prinzip
  - S3.3 Approximation durch finite Differenzen
- S4 Die dreidimensionale Wärmeleitungsgleichung als ARWP
  - S4.1 Wie schnell kühlt eine Kugel über ihren Rand ab?
  - S4.2 Anwendungsbeispiele aus Küche, Keller, Krimi
  - S4.3 Fazit: Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

### Kapitel T: Wahrscheinlichkeitsrechnung

- T1 Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume
  - T1.1 Zufall und Wahrscheinlichkeit: Grundbegriffe
  - T1.2 Rechnen mit Ereignissen: Wahrscheinlichkeitsräume
- T2 Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit
  - T2.1 Bedingte Wahrscheinlichkeiten, Formel von Bayes
  - T2.2 Stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen
- T3 Das Gesetz der großen Zahlen (GGZ)
  - T3.1 Zufallsvariablen, Erwartung und Varianz
  - T3.2 Die Ungleichungen von Pafnuty Chebychev
  - T3.3 Unabhängige Wiederholung: Gesetz der großen Zahlen
  - T3.4 Stochastische Abhängigkeit: Korrelation vs Kausalität
- T4 Fazit: Wahrscheinlichkeitsrechnung
  - T4.1 Weitere Aufgaben und Anwendungsbeispiele
  - T4.2 Sex: Was nützen dem Pfau seine Federn?
  - T4.3 Tischkicker: Das Runde muss ins Eckige.
  - T4.4 Google: die zufällige Irrfahrt im Internet

### Kapitel U: Kombinatorik und Näherungen

- U1 Produktexperimente
  - U1.1 Ausfallwahrscheinlichkeiten
  - U1.2 Prognosen zu Reaktorunfällen
  - U1.3 Kollision und Geburtstagsparadox
- U2 Kombinatorik und Urnenmodelle
  - U2.1 Kombinatorische Abzählformeln
  - U2.2 Schubfachmodelle:  $\{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$
  - U2.3 Urnenmodelle: Ziehung von  $k$  aus  $n$  Kugeln
- U3 Drei grundlegende stochastische Modelle
  - U3.1 Hypergeometrische Verteilung: Stichproben
  - U3.2 Binomialverteilung: unabhängige Versuche
  - U3.3 Poisson–Verteilung: bequeme Näherung
- U4 Fazit: hypergeometrisch, binomial, Poisson
  - U4.1 Verständnisfragen und weitere Aufgaben
  - U4.2 Poissons Gesetz der kleinen Zahlen
  - U4.3 Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion

### Kapitel V: Der lokale Grenzwertsatz

- V1 Kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen
  - V1.1 Kontinuierliche Verteilungen
  - V1.2 Wahrscheinlichkeitsräume
  - V1.3 Eindimensionale Normalverteilung
- V2 Erwartung, Varianz, Streuung
  - V2.1 Kumulative Verteilungsfunktion
  - V2.2 Zufallsvariablen, Erwartung und Varianz
  - V2.3 Verteilungen und ihre Kenngrößen
- V3 Der lokale Grenzwertsatz (LGS)
  - V3.1 Von der Binomial- zur Normalverteilung
  - V3.2 Der lokale Grenzwertsatz  $B(n, t) \approx N(\mu, \sigma^2)$
  - V3.3 Erste Anwendungsbeispiele
- V4 Fazit: der lokale Grenzwertsatz
  - V4.1 Zusammenfassung und Verständnisfragen
  - V4.2 Weitere Aufgaben und Anwendungsbeispiele
  - V4.3 Kleine Stichprobe und Intervallschätzung

### Kapitel W: Der zentrale Grenzwertsatz

- W1 Der zentrale Grenzwertsatz (ZGS)
  - W1.1 Stochastisch unabhängige Zufallsvariablen
  - W1.2 Beispiele und erste Beobachtungen
  - W1.3 Der zentrale Grenzwertsatz
- W2 Statistische Anwendungen
  - W2.1 Konfidenzintervalle
  - W2.2 Fehlerfortpflanzung
  - W2.3 Regressionsanalyse
- W3 Fazit: der zentrale Grenzwertsatz
  - W3.1 Zusammenfassung und Verständnisfragen
  - W3.2 Summen von Zufallsvariablen und Grenzwertsätze
  - W3.3 Weitere Aufgaben und Anwendungsbeispiele
- W4 Analytische Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung
  - W4.1 Laplace– und Fourier–Transformation von WMaßen
  - W4.2 Beweisidee des zentralen Grenzwertsatzes
  - W4.3 Entropie verstehen und anwenden

### Kapitel Z: Zusammenfassung

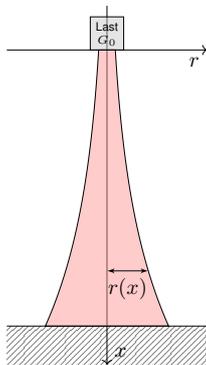
Das letzte Kapitel versammelt alle Kapitelzusammenfassungen und bietet so eine Zusammenschau der wichtigsten Ergebnisse, Sätze und Methoden dieser Vorlesung zur Höheren Mathematik. Im Laufe des Semesters führen wir Sie Schritt für Schritt dorthin.

Diese Zusammenfassung ist dazu nur eine Gedächtnisstütze; zum soliden Verständnis benötigen Sie alle Grundlagen und viel Übung! Erfahrung, Umsicht und Verständnis lassen sich nicht eintrichtern, sondern nur durch regelmäßige Übung erwerben. Also: Üben Sie!

—

Wir beginnen diese Vorlesung mit einem Kapitel zur Vorschau; dies gibt zunächst eine Übersicht der zentralen Themen der HM3 und dient somit zu einer ersten Orientierung und zu Ihrer Motivation.

Auch wenn Sie die nötigen Methoden jetzt noch nicht kennen, so können Sie doch sinngemäß erraten, welche Techniken Sie brauchen werden. Sie können jetzt schon die Ziele erkennen, auf die wir hinarbeiten. Diese Versprechen werde ich in den nächsten Wochen einlösen.



Der Eiffelturm in Paris am Abend des 14.08.2013, Höhe 324m



Der Burj Khalifa in Dubai, Höhe 830m, Bildquelle: wikimedia

**Aufgabe:** Konstruieren Sie eine Säule aus einem Material konstanter Dichte  $\rho$ , so dass der Druck (Last pro Fläche) überall konstant  $p$  ist.  
 Zahlenbeispiel: Beton  $\rho = 3\text{g/cm}^3$ , Last  $G_0 = 4600\text{kN}$ , Radius  $r_0 = 1\text{m}$ , Höhe 300m.  
 Unser Modell ist zwar extrem vereinfacht, aber es illustriert doch recht gut das Prinzip.

**Lösung:** In Höhe  $x$  haben wir den Radius  $r(x) > 0$  gemäß Skizze. Die Fläche ist  $A(x) = \pi r(x)^2$ , das Volumen  $V(x) = \int_{h=0}^x \pi r(h)^2 dh$ , das Gewicht  $G(x) = g\rho V(x)$ , der Druck  $G(x)/A(x) = p$ . Insgesamt:

$$g\rho \cdot \int_{h=0}^x \pi r(h)^2 dh = p \cdot \pi r(x)^2$$

Ableiten dieser Integralgleichung ergibt unsere Differentialgleichung:

$$g\rho \pi r(x)^2 = 2p \pi r(x) r'(x).$$

Diese ist elementar lösbar. Wir trennen die Variablen und integrieren:

$$\frac{r'(x)}{r(x)} = \frac{g\rho}{2p} =: c \Rightarrow \int_{h=0}^x \frac{r'(h)}{r(h)} dh = \int_{h=0}^x c dh \Rightarrow \ln r(x) - \ln r_0 = cx$$

Wir erhalten somit  $r(x) = r_0 e^{cx}$ . Der Radius wächst exponentiell!

Dank passender mathematischer Werkzeuge gelingt uns die Rechnung erfreulich leicht. Im Zahlenbeispiel gilt  $p \approx 1500\text{kN/m}^2$  und  $r(x) = 1\text{m} \cdot e^{x \cdot 0.01/\text{m}}$ , also  $r(300\text{m}) \approx 20\text{m}$ . Probe / Plausibilität: Die Druckfestigkeit liegt je nach Beton zwischen 10 und  $100\text{N/mm}^2$ . Unsere Rechnung illustriert das Grundprinzip. Anwendungen berechnet man noch viel genauer!

😊 Abstraktion ist die Kunst, Wichtiges von Unwichtigem zu trennen. Differentialgleichungen nutzen wir zur Formulierung der Naturgesetze, sie sind die universelle Sprache der Naturwissenschaft und der Technik. Damit können wir Probleme formulieren, strukturieren, verstehen, lösen.

**1. Grundlegendes Verständnis der vorliegenden Situation:**

Um Anwendungen in der Physik, Mechanik, Thermodynamik, Strömungslehre, etc. zu verstehen, benötigen Sie zunächst die erforderlichen Grundkenntnisse der betroffenen Anwendungsgebiete: Naturgesetze, grundlegende Modelle, geeignete Vereinfachungen, etc.

😊 Erst so können Sie die Situation quantitativ und präzise erfassen.

**2. Mathematische Modellierung der vorliegenden Situation:**

Durch geeignete Vereinfachung, Formalisierung und Abstraktion erhalten Sie ein mathematisches Modell. Dieses besteht aus den relevanten Größen und den zwischen ihnen gelten Beziehungen, meist geeignete Gleichungen, sehr häufig Differentialgleichungen.

😊 Hierzu nutzen Sie die Techniken Ihrer HM und weitere nach Bedarf.

**3. Lösung durch geeignete mathematische Werkzeuge:** Dazu lernen Sie hier die grundlegenden Rechentechniken. Das ist ein weites Gebiet! Je nach Ihren Anwendungen vertiefen Sie die nötigen Techniken zur numerischen Näherung, zu partiellen Differentialgleichungen, etc.

😊 Lösungen sind oft schwer zu finden, aber leicht zu überprüfen.

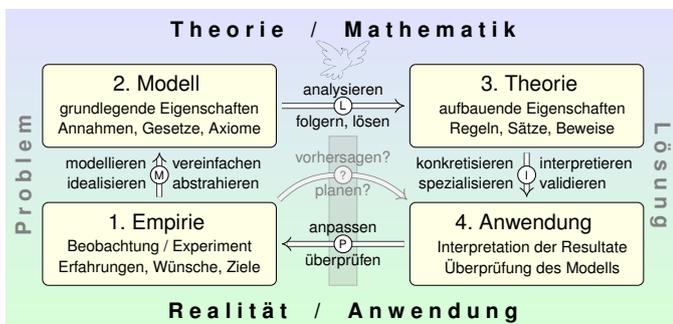
Zur Sorgfalt gehört, die gefundenen / benachbarte / alle Lösungen zu prüfen, zu diskutieren und umsichtig alle Sonderfälle zu beachten.

**4. Anpassung und Überprüfung anhand gegebener Daten:**

Ist eine mathematische Lösung oder numerische Näherung gelungen, so passen Sie schließlich die noch freien Parameter des Modells an die gegebenen Daten an und überprüfen soweit möglich die Vorhersagen des Modells durch Experimente, Messungen, Alternativmodelle, etc.

⚠ Falls nötig muss erneut ab (1) ein besseres Modell erstellt werden.

Diese Vorlesung konzentriert sich auf Lösungsmethoden (Schritt 3). Aus Ihren Vorlesungen kennen Sie bereits einige Anwendungen (1,2,4), viele weitere werden noch folgen. Nutzen Sie diese Querverbindungen!



Konkrete Anwendung benötigt abstrakte Kenntnisse; je anspruchsvoller, desto mathematischer! Alles Denken beruht auf Modellen; diese können *deskriptiv* oder *normativ* eingesetzt werden. Deskriptiv: beschreibend (Kettenlinie), erklärend (Planetenbewegung), vorhersagend (Wetter). Normativ: vorschreibend (Bauplan), planend (Raumsonde), gesetzgebend (Klimaschutz). Ingenieur:innen wollen beides, nicht nur passiv vorhersagen, sondern auch aktiv steuern und beeinflussen. Hierzu benötigen Sie ausreichend starke mathematische Werkzeuge.

Die Differential- und Integralrechnung kennen Sie aus der HM1&2 und wissen bereits, wie nützlich sie Ihnen jetzt schon in Anwendungen ist. Diese Techniken werden wir dieses Semester ausbauen und vertiefen: Integralrechnung und ihre Anwendung auf Differentialgleichungen.

Hierzu möchte ich gleich zu Beginn einige berühmte Anwendungen skizzieren, so dass Sie sich einen ersten Eindruck verschaffen können. Im obigen Beispiel suchen wir eine geeignete Form unseres Turmes. Es ist demnach nicht nur eine Zahl gesucht, sondern eine Funktion!

Die Aufgabe führt zu einer Differentialgleichung, also einer Gleichung, in der die gesuchte Funktion  $y(x)$  und ihre Ableitungen  $y'(x)$  auftreten. Viele Modelle in Naturwissenschaft und Technik haben diese Form: **Differentialgleichungen sind die Sprache der Naturgesetze.**

Auch wenn Sie die nötigen Methoden jetzt noch nicht kennen, so können Sie doch sinngemäß erraten, welche Techniken wir brauchen werden. Sie können so in etwa die Ziele erkennen, auf die wir hinarbeiten. Diese Versprechen werde ich in den nächsten Wochen einlösen.



Peter Breughel: Der Turmbau zu Babel, Bildquelle: wikimedia

*Ein hoher Turm braucht eine breite Basis.* Diese Aussage, Sie ahnen es, ist eine Metapher für Ihre Ausbildung als zukünftige Ingenieur:innen. Sie wollen hoch hinaus, zunächst fachlich im Studium, später beruflich. Hierzu legen Sie im Grundstudium ein solides und breites Fundament.

Gerade in grundlagen- und forschungsorientierten Studiengängen wie LRT und MaWi werden Sie ein sehr breites Spektrum mathematischer Techniken anwenden, je nach Ihrer späteren Spezialisierung.

Im Kleinen ist es auch ein Bild für den Aufbau der Höheren Mathematik: Nach zwei Semestern HM1&2 haben Sie solide Grundlagen, auf denen wir in der nun anschließenden HM3 aufbauen können und werden.

Auch in diesem Semester HM3 brauchen wir solide Fundamente: Alles dreht sich um (ein- und mehrdimensionale) Integration. Diese lege ich daher ausreichend breit und tragfähig an.

Der effiziente und strenge Aufbau der Mathematik ist ein Segen, bei sträflichen Lücken leider auch ein Fluch. Bitte nehmen Sie daher diesen Aufbau von Anfang an ernst, es wird Ihnen dauerhaft nützen!

**Aufgabe:** Formulieren Sie die Bewegungsgleichungen von  $n$  Körpern mit Masse  $m_k > 0$ , Position  $u_k(t) \in \mathbb{R}^3$  und Geschwindigkeit  $v_k(t) \in \mathbb{R}^3$ .

**Lösung:** Newtons Gravitationsgesetz ergibt die Differentialgleichungen

$$\dot{u}_k = v_k, \quad \dot{v}_k = f_k(u) := \sum_{j \neq k} \gamma m_j \frac{u_j - u_k}{|u_j - u_k|^3}.$$

Vorgegeben sind die Anfangsdaten  $u_k(0)$  und  $v_k(0)$  zur Zeit  $t = 0$ . Als Lösung gesucht ist die Bewegung  $(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{6n}$ . Erlaubt ein so komplexes System immer genau eine Lösung? Ja, das ist der zentrale  $\exists \& E$ -Satz! Kollision oder Expulsion nach  $\infty$  sind möglich: Eventuell existiert die Lösung nur für eine kurze Zeit  $T > 0$ . Für manche Startwerte sind Lösungen periodisch, oder beinahe: Zu unserem Glück!

- 😊 Den Fall  $n = 2$  lösen Kegelschnitte: Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln.
- 😞 Für  $n \geq 3$  lässt sich dieses DGSystem i.A. nicht geschlossen lösen!
- 😊 Euler-Verfahren: diskrete Zeitschritte  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ ,

$$u_k(t_{i+1}) \approx u_k(t_i) + v_k(t_i) \cdot (t_{i+1} - t_i),$$

$$v_k(t_{i+1}) \approx v_k(t_i) + f_k(u) \cdot (t_{i+1} - t_i).$$

Allein schon das obige Differentialgleichungssystem zu formulieren, ist eine Meisterleistung der Mathematik und Physik der Neuzeit. Wir nennen dies **Himmelsmechanik** und sind völlig zu Recht stolz auf sie: Mathematische Sprache und Werkzeuge erleuchten die gesamte Entwicklung und ebnen den Weg von Beobachtung über Erklärung und Berechnung bis zur Raumfahrt.

Auch nach über 300 Jahren sind Newtons Gleichungen immer noch nützlich wie am ersten Tag! Daten ändern sich, Methoden bleiben bestehen. Solide mathematische Arbeit hat eine extrem lange Wirksamkeit. Daher lohnt es sich auch für Sie heute, in mathematische Grundlagen zu investieren und diese wirksamen Werkzeuge zu erlernen, anzuwenden und fortzuführen.

Die drei Fälle  $n = 1$  und  $n = 2$  sowie  $n \geq 3$  sind sehr verschieden! Für einen einzigen Körper ( $n = 1$ ) enthalten Newtons Gleichungen  $\dot{u}_1 = v_1$  und  $\dot{v}_1 = 0$  keine gravitative Wechselwirkung. Ihre Lösung ist eine **geradlinige Bewegung**, nämlich  $u_1(t) = u_1(0) + v_1 t$ .

Ein Zwei-Körper-System ( $n = 2$ ) wie Sonne-Erde oder Erde-Mond ist bereits ausgesprochen interessant. Newton konnte seine Gleichungen hier gut lösen, sie ergeben Ellipsenbahnen und erklären die Keplerschen Gesetze. Allgemeiner sind auch Parabeln und Hyperbeln als Lösungen möglich, je nach Anfangsdaten  $u_1(0), v_1(0), u_2(0), v_2(0)$ . In allen Fällen gelingt die Lösung hier noch in geschlossener Form. Man nennt ein solches System **vollständig integrierbar**. [P270]

Newton betrachtete anschließend das Drei-Körper-System Sonne-Erde-Mond. Dies entzog sich jedoch hartnäckig einer Lösung und wurde zum berühmtesten offenen Problem der Mathematik. Das **Drei-Körper-Problem** gilt bis heute als eines der schwierigsten Probleme, die zahlreichen Anstrengungen zu seiner Lösung erfordern und erzeugen immer wieder wichtige neue Methoden.



Michael Faraday (1791-1867)



Königin Victoria (1819-1901)



James Clerk Maxwell (1831-1879)



elektrische Induktion

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi \rho, \quad \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0,$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}.$$

Jede:r Zuschauer:in konnte erkennen: Diese Grundlagenforschung war nicht bloß Spielerei, sondern eine phantastische neue Errungenschaft. Es braucht kaum Phantasie zur Anwendung: Mit Magneten und Spulen baut man Telegraphen, um Nachrichten blitzschnell zu übermitteln.

Aber die Geschichte ist noch nicht zu Ende, es kommt noch besser! Faradays Ergebnisse formulierte Maxwell 1865 in obigen Gleichungen. Erst seine einheitliche Theorie eröffnete völlig neue Anwendungen: Allein durch Rechnung erkannte er, was keiner zuvor gesehen hatte, und sagte die Möglichkeit elektromagnetischer Wellen voraus. Diese waren 1865 noch unbekannt und experimentell noch lange nicht zugänglich; ihr Nachweis gelang Heinrich Hertz 1886. Wir nutzen sie bis heute!

Maxwells Gleichungen sind abstrakt und nützlich. Damit erkannte er neue Zusammenhänge und neue Anwendungen. Selbst Faraday oder jeder noch so geschickte Experimentator hätte das nicht ahnen können. Erst das Wechselspiel von Theorie und Anwendung führt zum Erfolg!

- 😊 Dies ist das allgemeine Muster und Kennzeichen von Wissenschaft.

Das Verständnis der **Himmelsmechanik** markiert den Übergang vom Mittelalter zur Neuzeit.

Die Beobachtung des Nachthimmels und seiner Sterne fasziniert uns Menschen seit Alters her. Neben den zahlreichen „Fixsternen“ (weit entfernte Sterne) erkennen wir einige „Wandelsterne“ (Planeten unseres Sonnensystems). Ihre Bewegung lässt Regeln erahnen, doch für Wandelsterne scheinen diese zunächst kompliziert und verwirrend. Sie quantitativ zu erfassen und gründlich zu verstehen, ist einer der großen Triumphe menschlicher Neugier und systematischer Forschung!

Von der Erde besehen scheinen sich alle Sterne um uns zu drehen, doch die exakte Bewegung der Planeten erweist sich als schrecklich kompliziert. Kopernikus' heliozentrisches Modell (1543) ist einfacher, daher nützlicher: Die Bahnen der Planeten um die Sonne erweisen sich recht genau als Ellipsen. Diese Koordinatentransformation hat enorme Wirkung und schreibt Weltgeschichte!

Aus Tycho Brahes präzisen **Beobachtungsdaten** leitete Johannes Kepler drei Gesetze ab, die die Ellipsenbewegung der Planeten um die Sonne gut *beschreiben*. Eine *Erklärung* der Bewegungen durch einheitliche physikalische Prinzipien gelang erst Isaac Newton 1686 mit seinen Principia!

Die moderne Naturwissenschaft beginnt mit Newtons Formulierung der drei Bewegungsgesetze, des universellen Gravitationsgesetzes und seiner Lösung des Zwei-Körper-Problems. Mit einer Handvoll physikalischer Prinzipien und den passenden mathematischen Werkzeugen konnte er die Keplerschen Regeln *erklären*, ja *herleiten*. Newtons revolutionäre Idee: Überall im Universum gelten dieselben Gesetze! Newtons Mechanik erklärt die Schwerkraft hier auf Erden ebenso wie außerirdische Phänomene: den Umlauf der Planeten um die Sonne und des Mondes um die Erde, sogar die Gezeiten unserer Meere, ebenso die Coriolis-Kraft und das Foucaultsche Pendel.

Für künstliche Satelliten wird das **zirkuläre restringierte Drei-Körper-Problem** (CR3BP) sehr ausgiebig untersucht: Zwei massereiche Körper umrunden sich kreisförmig, während der dritte Körper nahezu masselos ist. Hier findet man die berühmten fünf Lagrange-Punkte. [P257]

Nur wenige und sehr spezielle Sonderfälle des  $n$ -Körper-Problems sind geschlossen lösbar. Auch diese haben ihren eigenen Reiz: Seit 1994 wurden zahlreiche **Choreographien** entdeckt, in denen  $n$  Körper symmetrisch angeordnet werden und dann periodische Bahnen durchlaufen. Für generische Anfangsdaten hingegen ist die Bewegung **chaotisch** und kann nur numerisch annähernd berechnet werden. 📺 *Solving the Three Body Problem*, youtu.be/et7XvBenEo8.

Zum Kontrast untersuchen und vergleichen wir zwei klassische Anwendungen der Mechanik: Einerseits gekoppelte **lineare Systeme** wie harmonische Oszillatoren [O101] [P101], andererseits Planetenbewegung und ähnliche **nicht-lineare Systeme**. Nicht-lineare Systeme sind schwierig und verhalten sich oft chaotisch. Lineare Systeme sind besonders gutartig und einfach zu lösen. Daher sollten Sie Linearität erkennen und wertschätzen, verstehen und nutzen lernen!

Auch nicht-lineare Systeme lassen sich mitunter gut lösen, wie einfache Beispiele zeigen. Dies sind aber Ausnahmen und seltene Glücksfälle. Typischerweise sind nicht-lineare Systeme nicht geschlossen lösbar. Es bleibt dann nur die **numerische Approximation** mit Hilfe geeigneter Näherungsverfahren, z.B. das Euler-Verfahren oder besser gleich das Runge-Kutta-Verfahren. Mehr hierzu erfahren Sie in der Numerik. Aufbauend auf den mathematischen Grundlagen können Sie die Numerik von Differentialgleichungen nutzen und wo nötig vertiefen.

Allgemeine Grundlagen und konkrete Anwendungen ergänzen sich wunderbar.

Michael Faraday (1791-1867) war ein englischer Physiker und gehört zu den einflussreichsten Wissenschaftlern der Menschheitsgeschichte. Er hatte kaum formale Ausbildung, aber eine präzise geometrische Anschauung. Seine experimentellen Ergebnisse fasste James Clerk Maxwell (1831-1879) zur elektromagnetischen Theorie zusammen.

Zu Lebzeiten war Faraday berühmt für seine öffentlichen Vorträge und Experimente zur Elektrizität, über die er an vorderster Front forschte. Zum Beispiel demonstrierte er anhand von Spulen und Magneten die Umwandlung von mechanischer Bewegung in Elektrizität und zurück. Das ist ein phantastischer und überaus nützlicher Zusammenhang!

Der Legende nach führte Faraday dies auch Königin Victoria vor, sie war amüsiert, aber auch skeptisch: „Elektrizität ist eine hübsche Spielerei, doch welchen Nutzen hat sie?“ Heutzutage scheint diese Frage naiv, geradezu ignorant; womöglich diente diese Konversation auch als intellektueller Schaukampf. Faraday antwortete diplomatisch und weitsichtig: „Madam, welchen Nutzen hat ein neugeborenes Baby?“

Mathematik ist zugleich abstrakte Theorie und konkrete Anwendung. Sie erklärt und quantifiziert Zusammenhänge: Das ist ihr Nutzen! Dank Abstraktion ist sie universell anwendbar: Das ist ihre Stärke! Sie ist schön und gut: ästhetische Kunst und nützliches Handwerk.

*Les mathématiques ont un triple but. Elles doivent fournir un instrument pour l'étude de la nature. Mais ce n'est pas tout: elles ont un but philosophique et, j'ose le dire, un but esthétique.*

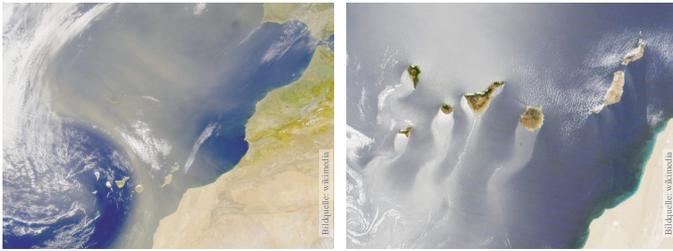
Henri Poincaré (1854-1912)

Das Wort „abstrakt“ missbraucht der Ignorant gern als Schimpfwort für alles, worüber ihm die Kenntnis fehlt oder wovor er die Mühe scheut.

Zur Klarstellung muss und will ich Partei ergreifen für die Abstraktion: Abstraktion strukturiert und vereinfacht: Eine allgemeine Tatsache ist oft leichter zu verstehen und zu erklären als ihre zahlreichen Spezialfälle. Denkökonomie: Daten ändern sich, Methoden bleiben bestehen.

- 😊 Daher betone ich konkrete historische Beispiele zum Wechselspiel von Theorie und Anwendung. Die Geschichte ist lehrreich und lohnend.

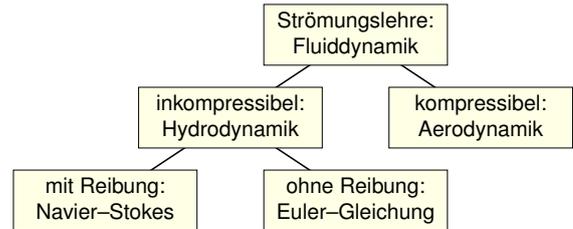
**Ziel:** Wie verhalten sich Strömungen? Welche Gleichungen gelten hier?



Luft- und Wasserströmung um die Kanarischen Inseln

(0) Wie beschreiben Sie eine Strömung in einem Gebiet  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  über ein Zeitintervall  $I = [t_0, t_1]$ ? Geschwindigkeit  $\vec{v}: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3: (t, \vec{x}) \mapsto \vec{v}(t, \vec{x})$  und Massendichte  $\rho: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}: (t, \vec{x}) \mapsto \rho(t, \vec{x})$  und evtl. weitere Daten. Die Massenstromdichte  $\rho\vec{v}: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  beschreibt den Massenfluss. Im Strömungsbereich  $\Omega$  werde Masse weder erzeugt noch vernichtet.

Die Strömungsmechanik untersucht die Bewegung von fluiden Medien. Sie ist grundlegend für die Meteorologie, beim Bau von Flugzeugen, Schiffen, Autos, ... bis hin zu Verbrennungsmotoren: Alles fließt!



Ein Fluid heißt inkompressibel, wenn seine Dichte nicht vom Druck abhängt. Zum Beispiel ist dies bei Wasser eine gute Näherung für die meisten Anwendungen. Noch einfacher ist zunächst, überall konstante Dichte anzunehmen. Anders als Flüssigkeiten sind Gase leicht komprimierbar, ihre Dichte ist etwa 1000mal geringer, ihre thermische Ausdehnung größer. Für ihre Bewegung aber gelten weitgehend die gleichen Gesetze, zumindest bei nicht allzu großen Drücken und Geschwindigkeiten. Wir wenden uns hier der allgemein gültigen Kontinuitätsgleichung zu.

**Aufgabe:** Welche Beziehung folgt aus der Massenerhaltung?

- Sei  $K \Subset \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  kompakt, etwa ein Würfel. Formulieren Sie die Massenbilanz für  $K$  in Worten und als Volumen-/Flussintegrale.
- Formen Sie dies um zu einem einzigen Volumenintegral.
- Folgern Sie hieraus die zugehörige Differentialgleichung.
- Was folgt für inkompressible Strömungen, also für  $\rho = \text{const}$ ?

**Lösung:** (1) Die über die Randfläche  $S = \partial K$  ausströmende Masse geht der Gesamtmasse in  $K$  verloren. Als Integralgleichung formuliert:

$$\frac{d}{dt} \iiint_K \rho \, dK + \iint_{S=\partial K} (\rho\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dS = 0$$

(2) Wir dürfen die Ableitung unter Integral ziehen dank Kompaktheit des Integrationsbereichs  $K$  und Stetigkeit der Ableitung  $\partial\rho/\partial t$ :

$$\frac{d}{dt} \iiint_K \rho \, dK \stackrel{\text{Kont.}}{=} \iiint_K \frac{\partial\rho}{\partial t} \, dK$$

Wir wollen auch das Flussintegral in diese Form bringen und dann beides zusammenfassen. Dies gelingt mit dem Satz von Gauß (G3G):

$$\iint_{S=\partial K} (\rho\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dS \stackrel{\text{Gauß}}{=} \iiint_K \text{div}(\rho\vec{v}) \, dK$$

Dank Linearität des Integrals erhalten wir ein einziges Volumenintegral:

$$\iiint_K \left[ \frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{v}) \right] \, dK = 0$$

(3) Diese lokale Massenbilanz gilt für jedes Kompaktum  $K \Subset \Omega$ . Das gilt genau dann, wenn der (stetige!) Integrand verschwindet:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{v}) = 0$$

Diese **Kontinuitätsgleichung** ist grundlegend für die Strömungslehre.

(4) Für inkompressible Strömungen gilt  $\rho = \text{const}$  und somit  $\text{div}\vec{v} = 0$ . Anschaulich: In jedes Volumen  $K$  fließt ebensoviel hinein wie heraus. Hierzu genügt allgemein bereits  $\partial_t\rho + \vec{v} \cdot \text{grad}\rho = 0$ . Sehen Sie warum?

Wir haben oben aus einer Integralgleichung (der Massenerhaltung) eine Differentialgleichung abgeleitet (die Kontinuitätsgleichung). Dahinter steckt folgendes einfache und sehr nützliche Prinzip:

◆ **Lemma H1A: Verschwindungslemma für Skalarfelder**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Gilt  $\int_K f(x) \, dx = 0$  für jeden (kleinen) kompakten Würfel  $K \Subset \Omega$ , so folgt  $f = 0$ .

**Aufgabe:** Begründen Sie dies mit Hilfe der Stetigkeit von  $f$ .

**Lösung:** Wir wollen  $f = 0$  zeigen.

Nehmen wir im Gegenteil an, es gälte  $f \neq 0$ .

Das bedeutet, es existiert ein Punkt  $a \in \Omega$  mit  $f(a) \neq 0$ .

Wir können  $f(a) > 0$  annehmen; der Fall  $f(a) < 0$  ist analog.

Sei also  $f(a) = 2b > 0$ . Da  $f$  stetig ist, existiert um  $a$  ein kleiner Würfel  $K \Subset \Omega$  mit Kantenlänge  $\varepsilon > 0$ , sodass  $f(x) \geq b$  für alle  $x \in K$  gilt. Hieraus folgt die Abschätzung  $\int_K f(x) \, dx \geq b \text{vol}_n(K) = b\varepsilon^n > 0$ .

☺ Wenn also  $\int_K f(x) \, dx = 0$  für alle Würfel  $K \Subset \Omega$  gilt, so folgt  $f = 0$ .

Dieses Prinzip gilt ebenso für Flussintegrale von Vektorfeldern:

◆ **Lemma H1B: Verschwindungslemma für Vektorfelder**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  offen und  $\vec{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  stetig. Gilt  $\int_S \vec{f}(x) \cdot \vec{n} \, dS = 0$  für jedes (kleine) achsenparallele Quadrat  $S \Subset \Omega$ , so folgt  $\vec{f} = 0$ .

**Aufgabe:** Begründen Sie dies mit Hilfe der Stetigkeit von  $\vec{f}$ .

**Lösung:** Wir wollen  $\vec{f} = 0$  zeigen.

Nehmen wir im Gegenteil an, es gälte  $\vec{f} \neq 0$ .

Das heißt, es existiert ein Punkt  $a \in \Omega$  mit  $f_i(a) \neq 0$  für ein  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

Wir können  $i = 3$  annehmen; die Fälle  $i = 1, 2$  sind analog.

Wir können  $f_3(a) > 0$  annehmen; der Fall  $f_3(a) < 0$  ist analog.

Sei also  $f_3(a) = 2b > 0$ . Da  $\vec{f}$  und somit  $f_1, f_2, f_3: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetig sind, existiert um  $a$  ein kleines Quadrat  $S \Subset \Omega$  parallel zur  $(x_1, x_2)$ -Ebene mit Kantenlänge  $\varepsilon > 0$ , sodass hierauf  $f_3(x) \geq b$  für alle  $x \in S$  gilt. Hieraus folgt die Abschätzung  $\int_S \vec{f}(x) \cdot \vec{n} \, dS \geq b \text{vol}_2(S) = b\varepsilon^2 > 0$ .

☺ Wenn  $\int_S \vec{f}(x) \cdot \vec{n} \, dS = 0$  für alle Quadrate  $S \Subset \Omega$  gilt, so folgt  $\vec{f} = 0$ .

Für **inkompressible Strömungen** gilt  $\rho = \text{const}$  und somit  $\text{div}\vec{v} = 0$ . Es handelt sich um eine grundlegende **Erhaltungsgleichung**. Diese beschreibt allerdings die Bewegung keineswegs vollständig. Dazu werden weitere Erhaltungsgrößen wie Impuls / Energie benötigt.

Die Impulserhaltung führt zu den **Navier-Stokes-Gleichungen**:

Sei  $\vec{\gamma}(t)$  die Bahn eines Teilchens der Strömung, d.h.  $\dot{\vec{\gamma}}(t) = \vec{v}(t, \vec{\gamma}(t))$ .

Newtons Gesetz „Kraft = Masse  $\times$  Beschleunigung“ besagt hier:

$$\rho \ddot{\vec{\gamma}}(t) = \vec{F}(t, \vec{\gamma}(t))$$

Einsetzen und ausrechnen der linken Seite nach Kettenregel:

$$\frac{d^2\gamma_i(t)}{dt^2} = \frac{d\dot{\gamma}_i(t)}{dt} = \frac{dv_i(t, \vec{\gamma}(t))}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial \gamma_k}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_k} v_k$$

Dies heißt **substantielle Ableitung** oder auch **konvektive Ableitung**.

Auf der rechten Seite setzt sich die Kraft  $\vec{F}$  zusammen aus der Reibung, dem inneren Druck und äußeren Kräften, zum Beispiel der Schwerkraft.

Massenerhaltung:  $\text{div}\vec{v} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0$

Impulserhaltung:  $\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \nu \Delta v_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i$

Anderung
Konvektion
Diffusion
interne Kraft
extern

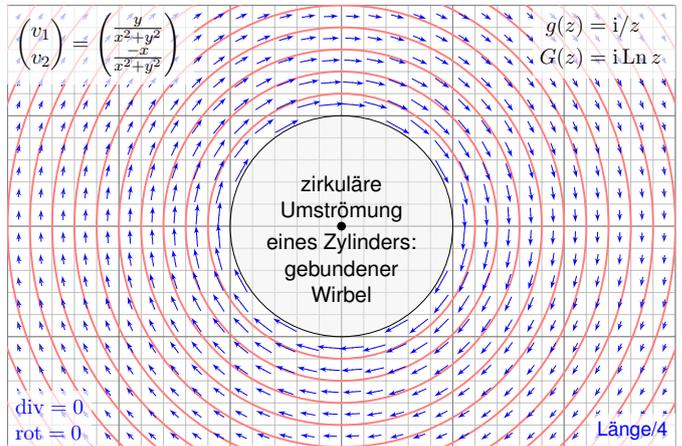
Diese  $1 + n$  Gleichungen beschreiben die Strömungsgeschwindigkeit  $\vec{v}: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  einer Flüssigkeit zur Zeit  $t \in I \subseteq \mathbb{R}$  am Ort  $\vec{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  in der Ebene ( $n=2$ ) oder im Raum ( $n=3$ ), mit konstanter Massendichte  $\rho \in \mathbb{R}$  und Viskosität  $\nu \in \mathbb{R}$ , Druck  $p: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und äußerer Kraft  $\vec{f}: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Sie sind zweiter Ordnung und nicht-linear in  $\vec{v}$ . Die Impulserhaltung ist Newtons Bewegungsgesetz: Links steht die Beschleunigung, als konvektive Ableitung. Rechts stehen die Kräfte durch Reibung  $\nu$ , Druck  $p$  und  $\vec{f}$ . Gegeben sind hierzu die äußere Kraft  $\vec{f}$  sowie die Anfangsgeschwindigkeiten  $\vec{v}(0, \vec{x})$  für  $\vec{x} \in \Omega$ . Gesucht sind die Funktionen  $\vec{v}$  und  $p$ . Im zweidimensionalen Falle ist die Lösbarkeit bewiesen, im dreidimensionalen Falle noch nicht! Die Navier-Stokes-Gleichungen illustrieren die Schwierigkeit partieller Differentialgleichungen: Über dreidimensionale Lösungen weiß man allgemein wenig, z.B. sind Existenz und Regularität ungeklärt – trotz größter Anstrengungen. Das Clay Mathematics Institute hat dies im Jahr 2000 als eines von sieben Millennium-Problemen ausgestellt, mit einem Preisgeld von 1 Million Dollar.

Komplexe Funktionen gehören zum mathematischen Grundwerkzeug. Auch darüber hinaus begegnen sie Ihnen häufig und nützen überall. Die vorsichtige Ingenieur:in fragt sich: Lohnt sich diese Investition? Ja! Ich greife vor und nenne zwei wunderschöne klassische Anwendungen. Wir können jede holomorphe Funktion  $f(x + iy) = u(x, y) - iv(x, y)$  als ein Vektorfeld  $(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\text{div}(u, v) = \text{rot}(u, v) = 0$  betrachten.

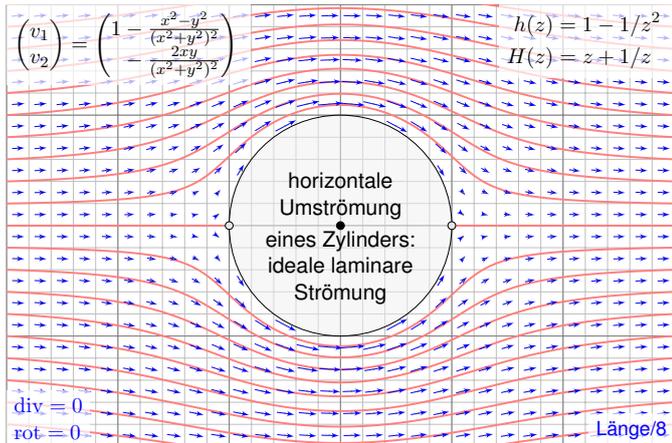
◆ **Satz Q1A: holomorphe Lösungen der Maxwell-Gleichung**  
Jedes ebene statische  $E$ -Feld  $\vec{E} : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  ohne Quellen entspricht einer holomorphen Funktion  $f = E_1 - iE_2 : \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  und umgekehrt.

◆ **Satz Q1B: holomorphe Lösungen der Navier-Stokes-Gleichung**  
Jede ebene stationäre Strömung  $v = (v_1, v_2) : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  konstanter Dichte, ohne Wirbel, ohne Reibung und ohne äußere Kräfte entspricht einer holomorphen Funktion  $f = v_1 - iv_2 : \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  und umgekehrt.

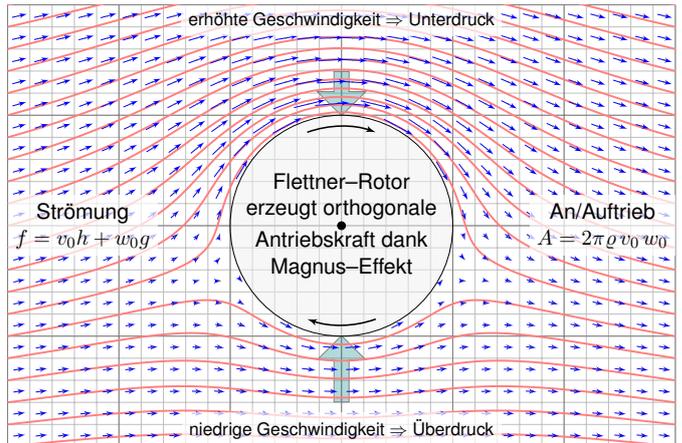
Vertiefungen und Anwendungen bieten die zugehörigen Vorlesungen.



😊 Holomorphe Funktionen beschreiben Strömungen: Wirbelfeld.



😊 Einfaches und intuitives Modell, exakte Lösung dank Holomorphie!



😊 So berechneten Kutta und Joukowski die dynamische Auftriebskraft!

Mathematik (gr. μαθηματικὴ τέχνη) ist die 'Kunst des Erkennens'; sie ist schöpferischer und systematischer Prozess zum Lösen von Problemen.

Sie ist die **Sprache** des strukturierten logischen Denkens und damit unverzichtbare **Grundlage** für Naturwissenschaft und Technik. Sie ist

- **Werkzeugkasten**, um relevante Probleme eigenständig zu lösen,
- **Wissensgebiet**, allgemeine Kulturtechnik, Schlüsseltechnologie,
- **Wissenschaft**, Ideenschmiede, lebendiges Forschungsgebiet.

Wie ist Mathematik? Anstrengend, aber lohnend!

- abstrakt & schwierig, aber durch Übung erlernbar
- nützlich & effizient, meist an Anwendungen orientiert
- klar & einfach, auch überraschend, kunstvoll, schön

Was bedeutet „Höhere Mathematik“?

- Fortführung der Schulmathematik an der Hochschule
- Grundlage der Ingenieur- und Naturwissenschaften
- Rechentechiken für praktische Anwendungen

Dieselben mathematischen Formeln und Gleichungen treten in immer neuen Zusammenhängen auf und beschreiben völlig unterschiedliche Phänomene! Statt eines „elektrischen Feldes  $\vec{E}$ “ erscheint nun das „Strömungsfeld  $\vec{v}$  einer Flüssigkeit“... oder allgemein ein „Vektorfeld  $f$ “: Abstraktion ist die Kunst, Wesentliches von Unwesentlichem zu trennen.

**Der Kontext ändert sich, aber die Rechnung ist immer dieselbe!**  
Mathematische Modelle haben somit ihre eigenständige Bedeutung und ihre Wichtigkeit, daher lohnt es sich, sie eigenständig und allgemein zu untersuchen. Genau dies wollen wir in dieser Vorlesung tun, damit Sie für alle Fälle gewappnet sind, auch für zukünftige Anwendungen!

*The enormous usefulness of mathematics in the natural sciences is something bordering on the mysterious and there is no rational explanation for it. [...]*

*The miracle of the appropriateness of the language of mathematics [...] is a wonderful gift which we neither understand nor deserve. We should be grateful for it and hope that it will remain valid in future research.*

Eugene Wigner (1902–1995), *The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences* (1960)

Jahrhunderte naturwissenschaftlicher und technischer Erfahrung lehren uns eindrücklich: **Mathematik ist die Sprache des Universums!**

Wir können diese Sprache verstehen und sprechen lernen. Wir können sie anwenden und damit gezielt Probleme lösen. Wie jede Sprache lernt man Mathematik durch Üben! Üben! Üben!

*Die Grenzen meiner Sprache bedeuten die Grenzen meiner Welt.*  
Ludwig Wittgenstein (1889–1951), *Tractatus Logico-Philosophicus* (1921)

Als eindringliches Beispiel nenne ich wie skizziert die Elektrodynamik. Faradays Ergebnisse formulierte Maxwell 1865 als Induktionsgesetz

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{1}{c} \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS \quad \text{bzw.} \quad \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0.$$

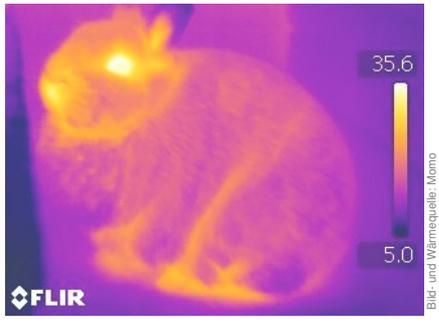
Maxwells einheitliche **Theorie** der Elektrodynamik eröffnete auch in der **Praxis** völlig neue Anwendungen. Dank seiner Gleichungen konnte er insbesondere die Möglichkeit elektromagnetischer Wellen vorhersagen. Diese waren 1865 noch unbekannt und experimentell nicht zugänglich; ihr Nachweis gelang Heinrich Hertz erst 1886. Wir nutzen sie bis heute!

„Wir haben doch Computer! Wozu lernen wir noch Mathematik?“  
Mathematische Modelle und Methoden erlernen Sie zunächst unter vereinfachten *Laborbedingungen*, in kleinem Maßstab, sozusagen unter dem Mikroskop. Unter *Industriebedingungen* ist ihre Vielfalt oft nur mit Computerhilfe voll auszuschöpfen. Umso wichtiger ist es, die Zusammenhänge und Mechanismen grundlegend zu verstehen: **Algorithmen und Programme übersetzen mathematische Modelle!**

Meist können Sie nicht in ein laufendes Programm eingreifen, um ad hoc mit Ihrer „Intuition“, „Anschauung“ oder „gesundem Menschenverstand“ zu korrigieren, was die „dumme Maschine“ alleine nicht richtig macht. Im Gegenteil müssen Sie vorher verstehen, wie ein Verfahren im Detail funktioniert, um korrekte Anweisungen zu formulieren. Hierzu müssen Sie sorgfältig arbeiten, akribisch jeden möglichen Fall berücksichtigen.

Sie müssen dem Computer genau sagen, was er tun soll, oft auch wie. Das Ergebnis müssen Sie kritisch prüfen, verstehen und interpretieren. Die Mathematik stellt hierzu alles Nötige zur Verfügung. — Sie wollen Computer korrekt und effizient nutzen? Dazu brauchen Sie Mathematik!

**Ziel:** Wie berechnen wir den Wärmefluss in einem Körper?



Wärmebilanz für  $K =$  Kaninchen bei  $t \in$  Winter

Wir betrachten ein Gebiet  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  und ein Zeitintervall  $I = [t_0, t_1]$  und suchen eine Beziehung zwischen Wärmeleistungsdichte  $q: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , Wärmedichte  $u: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und Wärmefluss  $\vec{f}: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

(2) Mit Gauß (G3G) verwandeln wir Flussintegrale in Volumenintegrale:

$$\iint_{S=\partial K} \vec{f}(t, x) \cdot \vec{n} \, dS \stackrel{\text{Gauß}}{\stackrel{\text{G3G}}{=}} \iiint_K \nabla \cdot \vec{f}(t, x) \, dx$$

Dürfen wir die Ableitung unters Integral ziehen?  $K$  kompakt,  $\partial_t u$  stetig!

$$\frac{d}{dt} \iiint_K u(t, x) \, dx \stackrel{\text{Kpkt}}{\stackrel{\text{Dsc}}{=}} \iiint_K \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) \, dx$$

Dank Linearität des Integrals erhalten wir ein einziges Volumenintegral:

$$\iiint_K \left[ \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + \nabla \cdot \vec{f}(t, x) - q(t, x) \right] dx = 0.$$

(3) Diese lokale Wärmebilanz gilt für jedes Kompaktum  $K \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ . Das gilt genau dann, wenn der (stetige!) Integrand verschwindet (H1A):

$$\partial_t u(t, x) + \nabla \cdot \vec{f}(t, x) = q(t, x)$$

Diese Gleichung gilt überall dort, wo etwas entsteht ( $q$ ), gespeichert wird ( $u$ ) und fließt ( $\vec{f}$ ). Die Wärmeleitungsgleichung heißt deshalb auch Diffusionsgleichung und tritt in vielfältigen Anwendungen auf. Wir werden sie am Ende des Semesters mit Fourier-Theorie lösen können. Spezialfall: Für  $q = 0$  sowie  $u = \rho$  und  $\vec{f} = \rho \vec{v}$  erhalten wir erneut die Kontinuitätsgleichung.

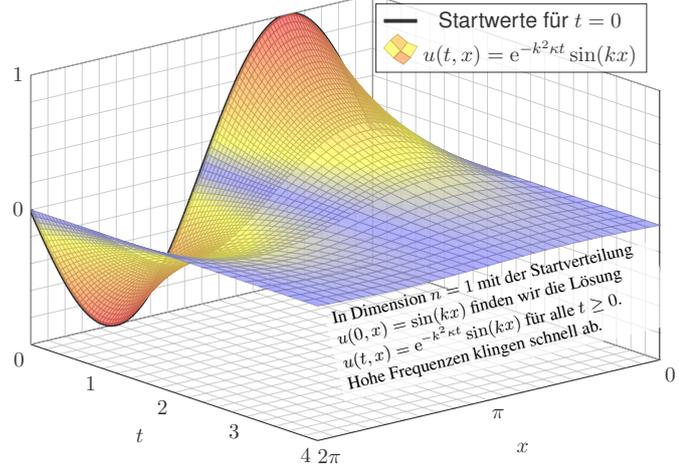
Was nützen uns solche Gleichungen? Welche Probleme lösen sie? Typische Anwendungen verlaufen nach dem obigen Muster:



In einigen Paradebeispielen gelingt uns eine **explizite Lösung**:  
 😊 exakt, übersichtlich, leicht zu verstehen, zu prüfen und zu nutzen!  
 😞 Solche Lösungen sind leider meist auf einfache Fälle beschränkt.

In komplizierteren Fällen bleibt (nur) die **numerische Approximation**:  
 😞 unübersichtlich, schwerer zu verstehen, zu prüfen und zu nutzen.  
 😊 Näherungen sind mit Computerhilfe in vielen Fällen durchführbar!

Auf beiden Wegen leisten Differentialgleichungen die Formulierung und anschließende Lösung des ursprünglichen (physikalischen) Problems. Meist geschieht dies eingebettet in einem Modellierungskreislauf. [105]



In Dimension  $n = 1$  mit der Startverteilung  $u(0, x) = \sin(kx)$  finden wir die Lösung  $u(t, x) = e^{-k^2 \kappa t} \sin(kx)$  für alle  $t \geq 0$ . Hohe Frequenzen klingen schnell ab.

**Aufgabe:** (1) Sei  $K \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  kompakt, etwa ein Würfel. Formulieren Sie die Wärmebilanz für  $K$  in Worten und als Volumen-/Flussintegrale. (2) Formen Sie dies um zu einem einzigen Volumenintegral. (3) Folgern Sie hieraus die zugehörige Differentialgleichung. (4) Vereinfachen Sie schließlich durch die Annahme  $\vec{f} = -\kappa \nabla u$ .

**Lösung:** (1) Für jedes Kompaktum  $K \in \Omega$  gilt die Wärmebilanz:

$$\begin{aligned} &\text{Von den Wärmequellen in } K \text{ zugeführte Energie} \\ &= \text{Zuwachs der in } K \text{ enthaltenen Wärmeenergie} \\ &+ \text{Wärmefluss über den Rand von } K \text{ nach außen} \end{aligned}$$

Als Integralgleichung formuliert bedeutet dies:

$$\iiint_K q(t, x) \, dx = \frac{d}{dt} \iiint_K u(t, x) \, dx + \iint_{S=\partial K} \vec{f}(t, x) \cdot \vec{n} \, dS$$

Alle Funktionen seien so oft stetig differenzierbar wie in der folgenden Rechnung benötigt. Ich greife hier schon mal vor:  $q$  sei stetig,  $f$  einmal stetig diff'bar,  $u$  zweimal stetig diff'bar.

(4) Wärme fließt von warm nach kalt, genauer  $\vec{f} = -\kappa \nabla u$ . Einsetzen:

$$\partial_t u(t, x) + \nabla \cdot [-\kappa \nabla u(t, x)] = q(t, x)$$

Mit dem Laplace-Operator  $\Delta = \nabla \cdot \nabla$  schreiben wir dies kurz

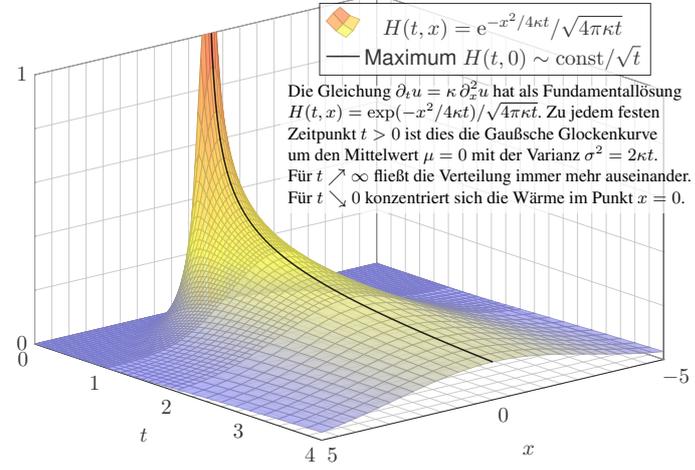
$$\partial_t u - \kappa \Delta u = q \quad \text{mit} \quad \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2.$$

Physikalische Begründung: Wärme ist (vereinfacht) proportional zur Temperatur  $T$ , genauer  $u = \rho c T$  mit Dichte  $\rho$  und Wärmekapazität  $c$ . Sie fließt proportional zur Temperaturdifferenz, also  $\vec{f} = -\lambda \nabla T$  mit Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$ . Demnach gilt  $\vec{f} = -\kappa \nabla u$  mit  $\kappa := \lambda / (\rho c)$ . [S223] Zur Vereinfachung sei hier die Temperaturleitfähigkeit  $\kappa(t, x)$  räumlich konstant und isotrop.

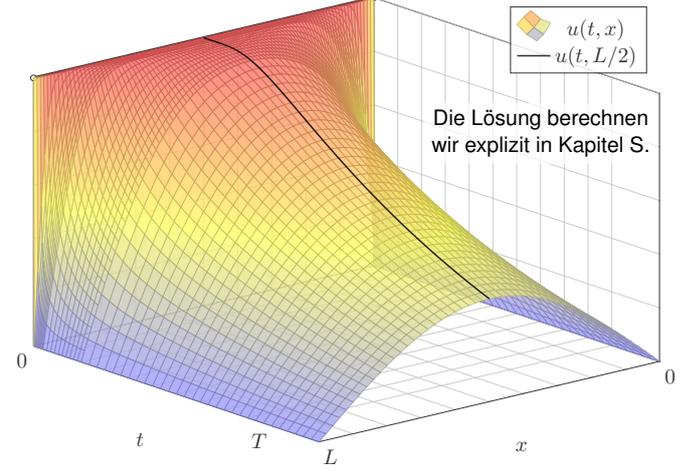
Wir erhalten so Fouriers berühmte **Wärmeleitungsgleichung** (1822):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \Delta u = q \quad \text{mit} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

Dies ist eine lineare partielle Differentialgleichung in  $u$  (links) mit Inhomogenität  $q$  (rechts). Sie beschreibt, wie sich die Wärme in einem Körper ausbreitet. Joseph Fourier (1768–1830) hat sie in seiner Arbeit *Théorie analytique de la chaleur* 1822 erstmals eingehend untersucht und hierzu die nach ihm benannte Fourier-Theorie entwickelt, mit der wir uns dieses Semester beschäftigen. Gesucht ist  $u$ , gegeben sind Anfangswerte und  $q$ . Wie sehen die Lösungen aus? Im homogenen Fall ohne Quellen ( $q = 0$ ) können wir die Fundamentallösung angeben! [B51B]



Die Gleichung  $\partial_t u = \kappa \partial_x^2 u$  hat als Fundamentallösung  $H(t, x) = \exp(-x^2/4\kappa t) / \sqrt{4\pi\kappa t}$ . Zu jedem festen Zeitpunkt  $t > 0$  ist dies die Gaußsche Glockenkurve um den Mittelwert  $\mu = 0$  mit der Varianz  $\sigma^2 = 2\kappa t$ . Für  $t \nearrow \infty$  fließt die Verteilung immer mehr auseinander. Für  $t \searrow 0$  konzentriert sich die Wärme im Punkt  $x = 0$ .



Die Lösung berechnen wir explizit in Kapitel 5.



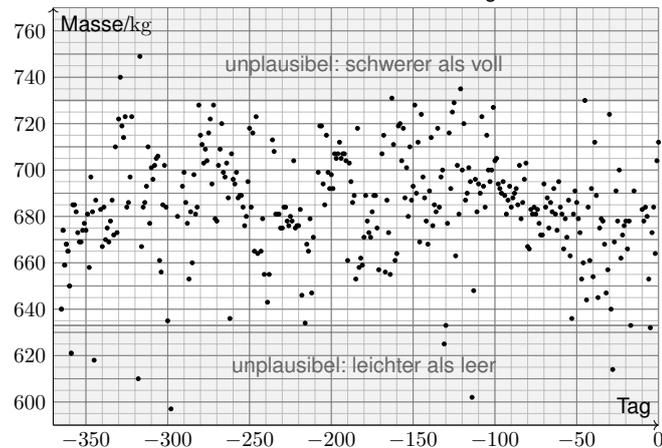
Missionen der ESA  
 Start Jun. 2003 in Baikonur  
 Mars-Orbit ab Jan. 2004  
 → Suche nach Wasser  
 Start Nov. 2005 in Baikonur  
 Venus-Orbit ab Apr. 2006  
 → Atmosphäre der Venus  
 Orbiter: Masse 633kg leer plus Treibstoff (MMH+NTO)  
 Acht Steuertriebwerke mit je 10N Schub (im Labor)  
 Fortsetzung oder Ende: Wie lange reicht der Sprit?

Siehe [en.wikipedia.org/wiki/Mars\\_Express](http://en.wikipedia.org/wiki/Mars_Express) und [/Venus\\_Express](http://en.wikipedia.org/wiki/Venus_Express)

Design erfordert Entscheidungen und meist Kompromisse. Die ESA hat auf Messgeräte für die Tankfüllung verzichtet. Zum geplanten Ende der Mission stellt sich die Frage: Kann die Mission verlängert werden? Ist dazu noch genug Treibstoff im Tank? Wie kann man das mit ausreichender Sicherheit herausfinden? Idee: Die ESA verfügt über alle bisherigen Positions- und Steuerdaten. Hieraus könnte man jeweils die Trägheit berechnen und indirekt die Gesamtmasse! Geht das?  
 Realistische Analogie: Heutige Autos haben eine Masse von etwa 1.2 bis 1.6 Tonnen bei einem Tankvolumen von 50 bis 70 Litern. Sie fahren ein Auto ohne Tankanzeige, die Tankfüllung erspüren Sie in Kurven, beim Gasgeben und Abbremsen. Ist das verrückt? Ja. Ist das möglich? Schwierig! Man muss genau und sehr häufig messen – und dann die Messfehler rausfiltern!  
 Vereinfachte Analogie: Sie haben eine Gasflasche für einen Herd oder Grill: Leergewicht 6kg, Inhalt 0-5kg Propan, ebenfalls ohne Anzeige des Füllstandes. Sie können durch Schütteln recht gut erspüren, wie voll die Gasflasche ist. Probieren Sie es bei Gelegenheit mal aus!  
 Jede Messung ist mit Fehlern behaftet: systematische müssen wir erkennen und dann korrigieren, bei zufälligen können wir dies nicht direkt! Wir müssen lernen, sie geschickt rauszufiltern, um ein möglichst verlässliches Ergebnis zu erhalten. Das ist das Ziel der mathematischen Statistik.  
 Es geht um rationale Entscheidungen unter Unsicherheit. Dafür genügt es nicht, eine willkürliche Schätzung auszuspecken! Die Anwendung ist ernst, es geht um Geld, wir müssen überzeugen. Wir wollen nicht nur eine gute Schätzung, sondern auch die Güte der Schätzung berechnen!  
 Hierzu will ich Sie mit meiner Einführung anleiten. Wer darüber hinaus ernsthafte statistische Analysen betreiben will/muss, kann sich darauf aufbauend in die Spezialliteratur einarbeiten.

Venus Express: Wieviel Treibstoff ist noch im Tank?

Aus Steuermanövern errechnete Masse für 366 Tage bis 31.12.2012.



Venus Express: Wieviel Treibstoff ist noch im Tank?

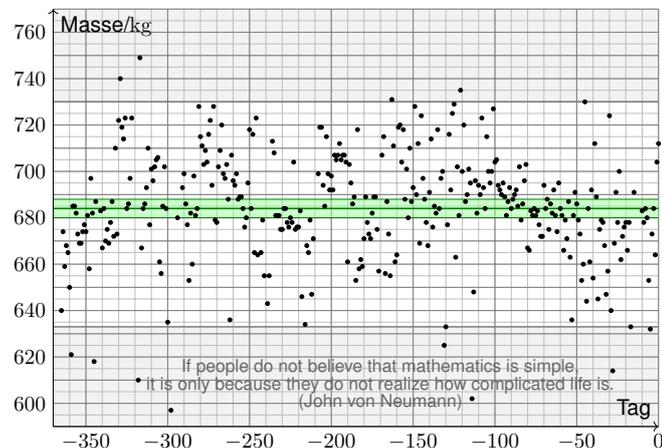
Impuls-Messungs-Methode (Impulse Measurement Method, IMM): Aus Positions- und Steuerdaten errechnet man Werte für die Masse; folgende Daten finden Sie unter [eiserm.de/lehre/HM3/VEX2012.txt](http://eiserm.de/lehre/HM3/VEX2012.txt).

Tag	Datum	Masse	Tag	Datum	Masse
1	01.01.2012	640	...	...	...
2	02.01.2012	674	364	29.12.2012	664
3	03.01.2012	659	365	30.12.2012	704
...	...	...	366	31.12.2012	712

**Datengewinnung** ist mühsam, erfordert Umsicht und Sachkenntnis! Diese Daten stellt uns freundlicherweise Herr Caglayan Gürbüz zur Verfügung. Er hat 2012 die Höhere Mathematik 3 gehört und am IRS / ESOC seine Bachelor-Arbeit zum Mars & Venus Express geschrieben.  
**Rationale Entscheidung:** Kann / sollte man die Mission verlängern? Grundlose Schätzungen sind sinnlos, wir brauchen Sicherheit!  
**Techniken:** Erwartung und Streuung, Stichproben und Schätzung, Gesetz der großen Zahlen, zentraler Grenzwertsatz, Konfidenzintervall  
 😊 *This is rocket science.* Mathematische Statistik zeigt, wie es geht.

Mathematische Statistik: Konfidenzintervalle

Jahresmittelwert der Gesamtmasse mit 3σ-Konfidenzintervall.

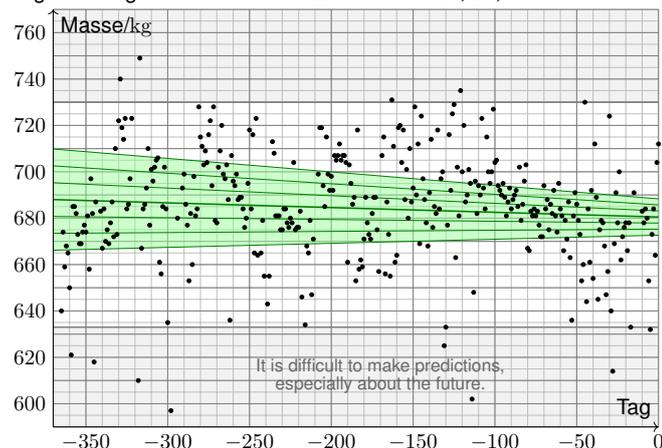


Mathematische Statistik: Konfidenzintervalle

**Aufgabe:** Wie groß war der Tankinhalt im Jahresmittel 2012? Geben Sie das 3σ-Konfidenzintervall an (für 99%ige Sicherheit).  
**Lösung:** Unser Datensatz liefert Mittelwert und Streuung: Der Stichprobenmittelwert ist  $\hat{m} = 684\text{kg}$ . Dies schätzt die Masse  $m$ . Die Stichprobenstreuung ist  $\hat{\sigma}_m = 24.6\text{kg}$ . Dies schätzt die Streuung. Bei  $n = 345$  Datenpunkten gilt  $\hat{\sigma}_{\hat{m}} = \hat{\sigma}_m / \sqrt{n} = 1.33\text{kg}$ . Großes  $n$  hilft! Das 3σ-Intervall  $[\hat{m} \pm 3\hat{\sigma}_{\hat{m}}] = [680; 688]\text{kg}$  ist erstaunlich schmal! Der Tankinhalt betrug demnach  $[47; 55]\text{kg}$  mit 99%iger Sicherheit.  
 😊 Messdaten sind voller Messfehler und anderer Ungenauigkeiten.  
 😊 Unsere Daten sind schmutzig doch glücklicherweise sehr zahlreich: Wir können Gesetze der großen Zahlen und Grenzwertsätze nutzen!  
 😊 Dank passender Technik können Sie so präzise Schlüsse ziehen! Dank Statistik fördern Sie Information zutage, die zuvor verborgen war.  
 ⚠ Jede Prognose ist höchstens so gut wie die zugrundeliegenden Daten! Zufällige Fehler können wir durch große Messreihen rausfiltern, systematische Fehler nicht! Hier helfen nur Umsicht und Sachkenntnis!

Mathematische Statistik: lineare Regression

Regressionsgerade mit Konfidenzintervallen: 1σ, 2σ, 3σ.



Mathematische Statistik: lineare Regression

**Aufgabe:** Wie groß war der Tankinhalt Ende 2012? Wie lange reicht es noch? Wie sicher ist Ihre Prognose?  
**Lösung:** Unser Datensatz liefert die Regressionsgerade  $y = \hat{a} + \hat{b}x$ : Ende 2012 ist die Gesamtmasse  $\hat{a} = 680.5\text{kg}$  mit Streuung  $\hat{\sigma}_{\hat{a}} = 2.6\text{kg}$ . Im Tank verbleiben  $\hat{t} = 47.5\text{kg}$  Treibstoff mit Streuung  $\hat{\sigma}_{\hat{t}} = 2.6\text{kg}$ . Der Verbrauch ist  $\hat{b} = -20.3\text{g/Tag}$  mit Streuung  $\hat{\sigma}_{\hat{b}} = 12.6\text{g/Tag}$ . Sehr grobe Prognose der verbleibenden Missionsdauer: 2300 Tage. Wie verlässlich ist diese Prognose aufgrund unserer Messdaten?  
 Mit 95% Sicherheit reicht der Treibstoff noch für über 930 Tage: Tank  $[\hat{t} \pm 2\hat{\sigma}_{\hat{t}}] \subseteq [42.3; 52.7]\text{kg}$ , Verbrauch  $[\hat{b} \pm 2\hat{\sigma}_{\hat{b}}] \subseteq [-45.5; 4.9]\text{g/Tag}$ .  
 Mit 99% Sicherheit reicht der Treibstoff noch für über 680 Tage: Tank  $[\hat{t} \pm 3\hat{\sigma}_{\hat{t}}] \subseteq [39.7; 55.3]\text{kg}$ , Verbrauch  $[\hat{b} \pm 3\hat{\sigma}_{\hat{b}}] \subseteq [-58.1; 17.5]\text{g/Tag}$ .  
 😊 Wir extrahieren sorgsam, was die vorliegenden Daten hergeben!  
 ⚠ Systematische Fehler? physikalische Annahmen? Alternativen? War 2012 ein typisches Jahr? Wenn man Sprit spart, reicht er länger! VEX wird 2013/14 tiefer in Atmosphäre abgesenkt, der Verbrauch steigt. Die Mission endet im Dezember 2014 wegen Treibstoffmangels. Wow!

Lineare Algebra und Geometrie:

- Reelle und komplexe Zahlen  $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$
- Euklidische Vektorräume  $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$
- Matrizen & lineare Gleichungssysteme  $Ax = y$
- Eigenvektoren und Diagonalisierung  $Av = \lambda v$
- Normalformen für Quadriken  $x^2 - y^2 = 1$

Analysis:

- Konvergenz von Folgen und Reihen  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$
- Funktionen, Grenzwerte und Stetigkeit  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
- Differential- und Integralrechnung  $\int_a^b f(x) dx = [F]_a^b$
- Differentialrechnung mehrerer Variablen  $\partial_x \partial_y f = \partial_y \partial_x f$
- Vektorfelder, Wegintegrale und Potentiale  $\text{rot grad } f = 0$

😊 Auf die Beherrschung all dieser Grundlagen können Sie stolz sein, als Handwerkszeug schon jetzt im Studium und ebenso später im Beruf!

Die Studierenden verfügen über grundlegende Kenntnisse

- der Integralrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher,
- gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen,
- Fourier-Reihen und Integraltransformationen sowie Stochastik.

**Sie können die behandelten Methoden selbstständig, sicher, kritisch, korrekt und kreativ anwenden.**

Sie besitzen die mathematische Grundlage für das Verständnis quantitativer Modelle aus den Ingenieurwissenschaften. Sie können sich mit Spezialist:innen aus dem ingenieurs- und naturwissenschaftlichen Umfeld über die benutzten mathematischen Methoden verständigen.

Konkrete Anwendung benötigt abstrakte Kenntnisse; je anspruchsvoller, desto mathematischer! Daher Ihr Ziel: Sie beherrschen Ihr Handwerk, verstehen die Grundlagen und wenden passende Werkzeuge fachgerecht an. Sie müssen dazu das Rad nicht neu erfinden: Ihr Studium bündelt die Erfahrung vieler Generationen. Diesen Erfahrungsschatz sollen sie kennen und nutzen lernen. Das gilt insbesondere für die Mathematik: Hier erlernen Sie Ihre Denk- und Rechenwerkzeuge. Man kann Techniken auch oberflächlich kennen, aber ohne Übung nicht effizient anwenden. Aus diesem Grund sollen sie jede Woche die Übungen ausgiebig und selbstkritisch nutzen!

Alle Informationen zur HM3 finden Sie in unserem liebevoll gestalteten Ilias-Kurs sowie ergänzend auf der öffentlichen Webseite der HM3.

**Vorlesung und Vortragsübung** ab dem 15.10.2024:

wöchentlich	Di	8:00 – 9:30	V 57.03
wöchentlich	Di	14:00 – 15:30	V 47.02
wöchentlich	Fr	11:30 – 13:00	V 47.01

**Gruppenübungen** ab der zweiten Vorlesungswoche, siehe Ilias.

Der **Übungsschein** ist Voraussetzung für die Abschlussklausur:

- mindestens 50% der Punkte in den wöchentlichen Quizzes,
- mindestens 50% der Punkte der schriftlichen Hausübungen.

**Scheinklausuren** bleiben sinnvoll, für die HM3 derzeit ausgesetzt.

**Klausur:** Anfang März / Anfang September

**Spacenight:** Mai 2025 Some dance to remember, some dance to forget.



Selbstverständliche Voraussetzungen:

- **Sichere Beherrschung** aller Grundlagen aus der HM1&2
- **Wöchentliche Bearbeitung** von Vorlesung, Quiz und Übungen

Die Höhere Mathematik 3 entspricht 9 LP: insgesamt 270h

- **Präsenz:** 15 Wochen à 2h Übung + 5h Vorlesung/VÜ = 105h
- **Individuelle Arbeit:** ca. ein weiterer Tag (7h) pro Woche = 105h
- **Wiederholung** zur Prüfungsvorbereitung: 1 bis 2 Wochen = 60h

Sie können Ihre Zeit anders aufteilen, aber viel Spielraum bleibt nicht. Es gilt die Erhaltung der Arbeit: Die 270 Stunden werden Sie brauchen!

**Beispiel:** Wer beschließt, Vorlesung und Übung zu schwänzen und jeweils nur das Übungsblatt in 2h abzuschreiben, der muss zur Klausur etwa 240h in Eigenregie nachholen, alleine! Das sind sechs Wochen konzentrierte Eigenarbeit ... und scheitert erfahrungsgemäß.

*Qui va lentement, va sûrement, et qui va sûrement, va loin.*  
[Wer langsam geht, geht sicher, und wer sicher geht, kommt weit.]

Die HM3 bietet viel und verlangt viel ... in kurzer Zeit (37 Termine):

- Mehrdimensionale Integration (4)  $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$
- Integralsätze in Ebene und Raum (7)  $\int_B df = \int_{\partial B} f$
- Fourier-Analyse und Laplace-Transformation (5)  $f(t) \sim \sum c_k e^{ikt}$
- Gewöhnliche Differentialgleichungen (8)  $u'(t) = f(t, u(t))$
- Partielle Differentialgleichungen (4)  $\partial_t u(t, x) = \partial_x^2 u(t, x)$
- Wahrscheinlichkeitsrechnung (8)  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

😊 Diese mächtigen Techniken sind in Anwendungen allgegenwärtig. Jedes dieser Themen verdient eigentlich seine eigene Vorlesung. ... Sie bekommen alles als „Best-of“ in einem einzigen Semester!

Aus dieser ambitionierten Zielsetzung ergibt sich die Vorgehensweise:

- **Selbstständig:** Es geht nicht nur um Auswendiglernen, sondern um Verstehen und unabhängige Urteilsfähigkeit.
- **Sicher:** Es geht nicht nur um Intuition oder Spekulieren, sondern um nachvollziehbare Argumente und Rechnungen.
- **Kritisch:** Es geht nicht nur um Glauben oder (Auto)Suggestion, sondern um (selbst)kritische Fragen und sorgfältige Antworten.
- **Korrekt:** Sie beherrschen Definitionen, Sätze, Methoden, Proben. Gegenbeispiele zeigen Fehlerquellen, die es zu vermeiden gilt.
- **Kreativ:** Es geht nicht nur um fertige Rezepte, sondern um eigenständige Anwendung.

Manche:r möchte Werkzeuge anwenden, auch ohne zu verstehen. „Echte Macher lesen keine Bedienungsanleitung.“ Für Low-Tech mag das vielleicht genügen, bei High-Tech sicher nicht. Auch im Studium lockt diese scheinbare Abkürzung: unverstandene Rezepte blind anwenden. Das ist weder selbstständig noch sicher, weder kritisch noch kreativ, und meist nicht korrekt! Kurzum: Ohne Grundlagenwissen tappen Sie im Dunkeln und können die Werkzeuge nicht richtig nutzen. Damit verbauen Sie sich den Weg zu effizienten Lösungen, oder schlimmer noch, treffen fatale Fehlentscheidungen. Seriöse Ingenieursarbeit braucht grundlegendes Verständnis!

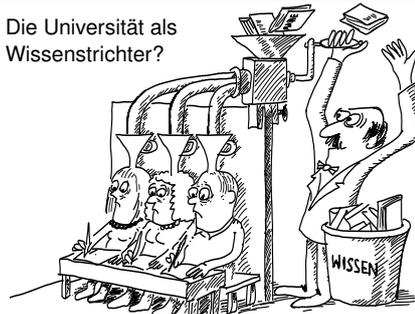
Wir führen das bewährte **Übungssystem** der HM1&2 in der HM3 fort: Sie bekommen Präsenzübungen (leicht, zum Einüben und Wiederholen) sowie Hausübungen (etwa mittelschwer, zum Trainieren und Vertiefen), darunter auch umfassendere, aus denen sich Klausuraufgaben ableiten.

Für Ihren Lernerfolg entscheidend ist, dass Sie sich gut vorbereiten, engagiert mitarbeiten und selbstständig Ihre Hausübungen bearbeiten. Das wöchentliche Quizz bildet die Brücke von der Vorlesung zur Übung: Hier wiederholen Sie wichtige Begriffe und verfestigen neue Techniken.

Ihre Ausbildung verfolgt ein doppeltes Ziel: **Wissen** und **Können**. Sie benötigen beides! Mit den Grundlagen der Vorlesung und dem Training der Übungen können Sie (klausur)typische Aufgaben lösen. Ohne Grundlagen oder ohne eigene Übung kommen Sie nicht weiter.

Das klingt sportlich und ist es auch: ideales wöchentliches Training. Es erfüllt den vehementen studentischen Wunsch nach regelmäßiger Übung klausurtypischer Aufgaben. Das ist anstrengend, aber lohnend! Wer die Mühe scheut und die Hilfe ausschlägt, dem ist nicht zu helfen.

Die Universität als Wissenstrichter?



Erwarten Sie nicht, dass irgendjemand Ihnen irgendetwas beibringen könnte — ohne Ihr Zutun. Ich kann Ihnen viel Spannendes erzählen, doch nur Sie selbst können sich Verständnis erarbeiten. Zwei Faktoren bestimmen Ihren Lernerfolg: extrinsische Anregung und intrinsische Motivation!

Diese Vorlesung wird Ihnen viele interessante Dinge zeigen, Phänomene und Beispiele erläutern, Argumente und Rechenregeln erklären. Wenn Sie möchten, kann das eine große Hilfe sein, doch letztlich müssen Sie selbst dieses Material eigenständig durcharbeiten, um es zu beherrschen.



Alice trifft Bob, der sich mit stumpfer Axt abmüht, einen Baum zu fällen. „Schärf deine Axt! Dann gelingt dir deine Arbeit leichter.“, rät Alice ihm. Das weist Bob zurück: „Dazu fehlt mir die Zeit, ich muss Bäume fällen!“ Das ist, kurz gesagt, die Entscheidung Ihres Studiums, ja Ihres Lebens.

😊 Genau dazu studieren Sie: Hier schärfen Sie Ihre Denk-Werkzeuge, um effizient arbeiten zu können. Alice hat das verstanden. „Das Studium ist abstrakter Quatsch und völlig nutzlos für die Praxis.“ Wenn das Bobs Überzeugung ist, dann bitte soll er konsequent sein und nicht studieren. Sie haben die Wahl, beide Alternativen sind gangbar. Vielleicht möchten Sie sich rasch in der viel gelobten „Praxis“ austoben und keine Zeit in die oft geschmähte „Theorie“ investieren. Auch mit stumpfer Axt können Sie Bäume fällen, mühsam zwar, doch für wenige kleine wird es reichen. Die Kunst des Lernens, ganz allgemein des vorausschauenden Planens, ist die Balance zwischen sofortigem Nutzen und langfristiger Investition. Wenn Sie richtig studieren, erreichen Sie beides, sowohl langfristigen Nutzen durch Wissen und Können als auch Freude schon beim Lernen. Das ist eine grundlegende Einsicht und vielfach bewährte Weisheit, so in dem lateinischen Motto *Festina lente*, übersetzt „Eile langsam!“, sinngemäß „Eile mit Weile!“. Jedes ernsthafte Vorhaben gelingt Ihnen am besten im richtigen Gleichgewicht zwischen zügig und sorgsam.

😊 Als Mahnung im Handwerk: *Measure twice, cut once!*  
Schlechte Vorbereitung verschwendet Zeit und Ressourcen.  
Als Motto der Navy Seals: *Slow is smooth, and smooth is fast!*  
Gute Vorbereitung sorgt für reibungslose, effiziente Abläufe.  
In seiner Fabel vom Hasen und der Schildkröte schreibt Jean de La Fontaine (1621–1695): *Rien ne sert de courir; il faut partir à point.*  
Es nützt nichts zu rennen; man muss rechtzeitig starten.  
Besonnenheit und Zielstrebigkeit setzen sich durch.  
😊 Was bedeutet das für Ihr Studium, speziell in dieser Veranstaltung?  
Anfangs fällt Ihnen die Anwendung vermutlich schwer. Jetzt wissen Sie, warum: Schärfen Sie Ihre Werkzeuge, lernen Sie Definitionen und Sätze, üben Sie Mathematik, das wirkt, so gelingen Ihnen die Anwendungen!  
Manche lebt achtsam, anderer schimpft achtlos auf die „lästige Theorie“ und scheitert alsbald an allzu naiver Anwendung, getreu dem Slogan „Plane nicht, irre lieber!“. Manchmal geht das gut, meist leider nicht.  
*Was immer du tust, handele klug und bedenke das Ende!*

Warum erzähle ich das? Die meisten Studierenden kommen an die Uni mit ihren eingefahrenen Gewohnheiten, manche gut und viele schlecht. Bitte studieren Sie selbstbewusst und selbstkritisch, legen Sie schlechte Gewohnheiten ab, erlernen Sie gute Gewohnheiten! Wir leiten Sie an und geben beste Praktiken weiter. Nehmen und wenden Sie dies an!  
*We must choose between what is easy and what is right.*  
Albus Dumbledore  
Die Schule hat Ihnen herzlich wenig Mathematik zugetraut. Anfangs mag das gefallen, es ist ja so leicht! Doch dann haben Sie sich entschieden, Ingenieurwesen oder Physik oder Mathe zu studieren, und darauf hatte die Schule Sie in keinsten Weise vorbereitet. Ihre Axt war leider stumpf!  
Manch verlockende „Abkürzung“ ist letztlich Irrweg und Vergeudung. Manch vermeintlicher „Umweg“ erweist sich als zielführend und effizient. In dieser gut durchdachten Vorlesung und den zugehörigen Übungen machen wir Sie mit den nötigen, scharfen Werkzeugen vertraut und leiten Sie an zum fachgerechten Gebrauch. Diese Mühe lohnt sich!

Ihr Ziel sind Erwerb von Techniken und Training Ihrer Fertigkeiten. Hierzu erkläre ich Ihnen, wie Sie erfolgreich Mathematik lernen.  
Die HM3 bietet viel und verlangt viel. Jede Woche erkläre ich Ihnen neue Werkzeuge, die Ihnen in vielfältigen Anwendungen nützen werden. Schon nach wenigen Wochen werden wir recht viel Gepäck beisammen haben. Wichtig ist daher, dass Sie im Semester nicht den Anschluss verlieren! Das 15wöchige Programm lässt sich unmöglich im Schnelldurchgang nachholen.  
Die genannten Themen der HM3 sind nützlich und vielseitig, diese Techniken werden überall in den Ingenieurwissenschaften genutzt, je nach Spezialisierung sogar noch wesentlich mehr. Andernorts reserviert man für die HM3&4 zwei Semester, in Stuttgart nur eins. Unser Programm ist daher sehr voll: Für jedes Thema stehen nur 2 bis 3 Wochen zur Verfügung. Die knappe Zeit müssen Sie nutzen. Vertrödeln Sie nicht das Semester, indem Sie nur mit einem Ohr zuhören; das bringt rein gar nichts – außer Ohrenkitzel und dem trügerischen Gefühl, irgendwie mitzulaufen.  
Die obige Rechnung ist keine Übertreibung:  
Sie brauchen ca. 7 Stunden Eigenarbeit jede Woche!  
Noch einmal quer gerechnet: Diese Veranstaltung macht fast ein Drittel Ihres Semesters aus. Bei einer Arbeitswoche von 6 Tagen müssen Sie zwei Tage für die Mathematik einplanen. Davon verbringen Sie bereits 7 Stunden mit Übung und Vorlesung. Der wichtigste Teil sind die verbleibenden ca. 7 Stunden eigene Arbeit! Wer nur einen Teil der Zeit investiert, wird auch nur einen Teil des Stoffes durcharbeiten. Das muss Ihnen klar sein, wenn Sie Ihre Zeit einteilen.

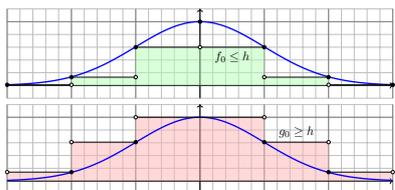
Engagieren Sie sich und nutzen Sie intensiv Ihre Studienzzeit! Ohne Fleiß und Ausdauer können Sie Wissen und Können nicht erwerben.  
**studēre** (lat.): sich bemühen, beschäftigen, streben, widmen, bilden. Partizip präs. aktiv: *studens* 'studierend' > der Student / die Studentin. Student / studierend ist, wer sich aktiv um seine Bildung bemüht. (Zur Wortbedeutung siehe [de.wiktionary.org/wiki/studieren](http://de.wiktionary.org/wiki/studieren).)  
In dieser Vorlesung präsentiere ich Ihnen nur wenige Definitionen und Sätze, dafür umso mehr Anwendungen in Form von Übungsaufgaben. Beides müssen Sie sorgfältig durcharbeiten, nur so verstehen und beherrschen Sie es. Alles können Sie selbst ausprobieren: Üben! Üben! Üben!  
Sie wünschen sich ausschließlich Beispiele ohne jede Theorie? Das reicht nur für den ersten Schritt und wird schnell ineffizient. Sie benötigen sowohl handfeste Beispiele als auch die zugrundeliegende Theorie, wie linke und rechte Hand! Beides zusammen garantiert Ihren Erfolg.  
Die Mathematik ist extrem klar strukturiert, das erleichtert das Lernen!  
Haben Sie keine Angst vor neuen Begriffen: Definitionen erklären, Beispiele illustrieren und Sätze bündeln die Rechenregeln.  
Ein gut verstandenes Beispiel nützt Ihnen mehr als ein schlecht verstandener Satz. Nutzen Sie ernsthaft die zahlreichen Aufgaben für Ihre eigene Übung!  
Erarbeiten Sie sich parallel dazu die nötigen Grundlagen und verfestigen Sie Ihr Wissen in Form von Definitionen und Sätzen. Ein gut verstandener Satz bündelt 1000 Beispiele.

Mancher lernt gut aus Büchern, eine andere besser aus Vorlesungen, eine dritte beginnt mit den Übungen, ein vierter mit den Klausuren. Alle schauen gerne Videos, das ist unterhaltsam und vielleicht auch hilfreich. Ihre individuellen Lernstrategien und Motivationen kennen Sie selbst am besten und sollten sie optimieren. Nehmen Sie die Herausforderung an und werden Sie aktiv!  
Die oben erklärte Struktur ist eine Besonderheit der Mathematik: Definition, Beispiel, Satz, Beweis, Anwendung, ... Sie hat sich aus guten Gründen so entwickelt: Sie strukturiert die Darstellung und betont das Wesentliche. Sie wird überall genutzt, weil sie sich bewährt. Es gibt keinen Grund, sie zu fürchten, im Gegenteil: Nutzen Sie sie als Hilfestellung!  
Das bloße Lesen / Hören / Zuschauen ist leider wenig ergiebig, dieser Eindruck bleibt passiv, oberflächlich und flüchtig. Klavierspielen lernen Sie nicht durch den Besuch von Konzerten! Sie müssen selbst aktiv werden und schrittweise lernen, Probleme eigenständig zu lösen. Es ist und bleibt eine menschliche Grundtatsache: Wir leben und streben, lernen und entwickeln uns, indem wir uns Erfahrungen, Wissen und Können aktiv und eigenständig aneignen.  
• Bilden Sie Lerngruppen, diskutieren Sie die Aufgaben und Ihre Lösungen!  
• Bleiben Sie neugierig, präzisieren Sie Ihre Ideen und klären Sie Ihre Fragen!  
• Arbeiten Sie mit Stift und Papier: Nicht abschreiben, eigenständig arbeiten!  
Besonders gut bewährt sich die Kombination aus kontinuierlicher eigener Vorbereitung und gemeinsamer Diskussion in der Gruppe. Genau darauf zielen unsere wöchentlichen Übungen. Vertrödeln Sie während des Semesters nicht diese entscheidende Hilfestellung.

Faire Klausur bedeutet: Ihr Erfolg ist proportional zu Ihrem Können. Klausur ist keine Lotterie: Ihr Können ist proportional zur Ihrer Übung.  
Für die Scheinklausuren verschlafen viele den Start ins Semester und zum wöchentlichen Lernen. Das Studium, insbesondere der Mathematik, erfordert Ausdauer, Fleiß und Disziplin. Nicht jeder ist dazu bereit, manche geben leichtfertig auf und schieben ins nächste Jahr. Tun Sie das nicht! In den Modulprüfungen hingegen waren die Klausurergebnisse der letzten Jahre erfreulich gut. Das ist kein Widerspruch, sondern das Ergebnis von einem Semester Vorbereitung und Training.  
Das Semester war anstrengend aber erfolgreich, alle konnten das spüren: Viele Teilnehmer:innen haben Vorlesung und Übungen engagiert genutzt und waren dementsprechend gut vorbereitet. Das zählt sich aus! Auch dieses Jahr gilt: Wer dabei bleibt und wöchentlich mitarbeitet, ist aller Erfahrung nach gut vorbereitet und hat schließlich wenig Schwierigkeiten mit der Klausur.  
Engagieren Sie sich ab der ersten Woche! Pokern Sie nicht auf eine knappe Vier, das geht meist schief. Seien Sie mutig und arbeiten Sie auf eine Zwei oder Drei, dann läuft's. Doppelter Vorteil: Die mathematischen Grundlagen, die Sie jetzt hier lernen, nützen Ihnen auch sonst überall!  
Wenn Sie durchfallen wollen, ignorieren Sie meine Ratschläge. Leider tun das einige, zu viele. Dann müssen Sie nächstes Jahr wieder ran oder Ihr Studium beenden. Manche finden Kamikaze scheinbar toll, ich kann davon nur abraten. Studieren Sie ernsthaft, studieren Sie richtig!  
Wir sorgen dafür, dass Sie in dieser Veranstaltung alles Nötige lernen und trainieren können. Nutzen Sie diese Chance und erfüllen Sie Ihren Teil! Verdienen Sie sich eine gute Note!

Kapitel A

Was sind und was sollen Integrale?



Alles messen, was messbar ist –  
und messbar machen, was noch nicht messbar ist.  
Galileo Galilei (1564–1642)

Inhalt dieses Kapitels A

- 1 Konstruktion des Volumens
  - Wie misst man Flächen- und Rauminhalt?
  - Was sind und was sollen Integrale?
  - Schreibweisen für Integrale
- 2 Reelle Zahlen und reelle Funktionen
  - Der Körper  $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$  der reellen Zahlen
  - Reelle Funktionen und ihre Operationen
  - Absolute Summation von Reihen
- 3 Konstruktion des Integrals
  - Treppenfunktionen und ihr Integral
  - Einschachtelung und Ausschöpfung
  - Absolut integrierbare Funktionen
- 4 Eigenschaften des Integrals
  - Zerlegung und Betragsabschätzung
  - Fast überall gleiche Funktionen
  - Erste Beispiele und Verständnisfragen

Integration: Theorie und Anwendung



Bernhard Riemann  
(1826–1866)



Emile Borel  
(1871–1956)



Henri Lebesgue  
(1875–1941)

Bildquelle: wikipedia.org

Integration ist ein mächtiges und allgegenwärtiges Werkzeug.  
Wir werden der Reihe nach drei fundamentale Fragen klären:

- 1 Konstruktion: Was sind und was sollen Integrale?
- 2 Werkzeugkasten: Welche Rechenregeln gelten?
- 3 Training: Wie berechnen wir konkrete Beispiele?

Integration: Theorie und Anwendung

Differenziert und integriert wird seit Newton (1643–1727) und Leibniz (1646–1716). Ihre **Infinitesimalrechnung** ist überaus erfolgreich und wird systematisch weiterentwickelt. Die Integrationstheorie ist eine Errungenschaft des 19. Jahrhunderts (dank Riemann, Darboux, Jordan, ...) und vollendet zu Beginn des 20. Jahrhunderts (dank Borel, Baire, Lebesgue, ...).

Auch nach über hundert Jahren bewährt sie sich täglich in ihren zahlreichen **Anwendungen**, von der Fourier-Analyse in der Signalverarbeitung über die allgegenwärtige Wahrscheinlichkeitsrechnung bis zur Quantenphysik. Das wird auch in weiteren hundert Jahren noch so sein: Solide mathematische Arbeit hat einen extrem langen Nutzen. Die Investition lohnt sich!

Die Integration wird uns die ersten Wochen beschäftigen, ihre Anwendungen das gesamte Semester. Dieses Überblickskapitel gibt zunächst eine erste **Kurzanleitung** zur Integration. In der Praxis stehen Sie vor allem vor der letzten Frage (3): Zu einer vorgelegten Funktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  wollen Sie das Integral  $\int_{\Omega} f(x) dx$  berechnen. Dazu brauchen Sie geeignete Werkzeuge, insbesondere ausreichend starke Rechenregeln (2). Um diese überhaupt erst zu erhalten und zu verstehen, müssen wir die erste Frage klären: (1) Was bedeutet Integration?

Zur Not kann man versuchen, sich allein auf die besonders relevante dritte Frage zu stützen und möglichst viele Beispiele auswendig zu lernen. Erfahrungsgemäß erscheinen diese dann jedoch unzusammenhängend und eher verwirrend. Es ist wesentlich effizienter, sich zuerst den nötigen Überblick zu verschaffen, um so allen Anwendungen gemeinsam die nötige Struktur zu geben. Eine **solide Grundlegung** ist wichtig, um zu wissen, wovon wir reden! Ich erkläre Ihnen hierzu eine Handvoll Prinzipien, auf denen die gesamte Integration aufbaut. In den folgenden Kapitel entwickeln wir hieraus praktische Rechenregeln, illustrative Beispiele und erste Anwendungen.

Ziele: grundlegende Integrationstechniken

Wir nutzen den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI):

$$\int_{x=a}^b F'(x) dx \stackrel{\text{HDI}}{=} \stackrel{\text{B11}}{=} [F(x)]_{x=a}^b := F(b) - F(a)$$

Bei absoluter Integrierbarkeit können wir iterierte Integrale nutzen:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{Pub}}{=} \stackrel{\text{C1E}}{=} \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Für  $C^1$ -Koordinatenwechsel  $\Phi: X \xrightarrow{\sim} Y$  gilt der Transformationssatz:

$$\int_Y f(y) dy \stackrel{\text{Trafo}}{=} \stackrel{\text{C2B}}{=} \int_X f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)| dx$$

Bei majorisierter Konvergenz vertauschen Grenzwert und Integral:

$$\int_{\Omega} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] dx \stackrel{\text{Mak}}{=} \stackrel{\text{D2D}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_{\Omega} f_n(x) dx \right]$$

- 😊 Diese Sätze lassen sich oft anwenden und zur Berechnung nutzen.
- ⚠️ Vorsichtsmaßnahmen sind nötig, die müssen Sie beherrschen.

Ziele: Differential- und Integralsätze

Der eindimensionale Hauptsatz hat mehrdimensionale Folgerungen!  
Arbeitsintegral für orient. Kurven  $\Gamma$  und Skalarfelder  $g: \mathbb{R}^3 \supseteq \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\int_{\Gamma} \text{grad}(g) \cdot d\Gamma \stackrel{\text{HDI}}{=} \stackrel{\text{E3c}}{=} \sum_{s \in \partial\Gamma} g(s) n(s)$$

Ist die Kurve  $\Gamma$  geschlossen, also  $\partial\Gamma = \emptyset$ , so folgt  $\oint_{\Gamma} \text{grad}(g) \cdot d\Gamma = 0$ .  
Satz von Stokes für orient. Flächen  $S$  und Vektorfelder  $f: \mathbb{R}^3 \supseteq S \rightarrow \mathbb{R}^3$ :

$$\int_S \text{rot}(f) \cdot dS \stackrel{\text{Stokes}}{=} \stackrel{\text{G1A}}{=} \int_{\Gamma=\partial S} f \cdot d\Gamma$$

Ist die Fläche  $S$  geschlossen, also  $\partial S = \emptyset$ , so folgt  $\oint_S \text{rot}(f) \cdot dS = 0$ .  
Satz von Gauß für Volumina  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  und Vektorfelder  $f: \mathbb{R}^3 \supseteq V \rightarrow \mathbb{R}^3$ :

$$\int_V \text{div}(f) dV \stackrel{\text{Gauß}}{=} \stackrel{\text{G3G}}{=} \int_{S=\partial V} f \cdot dS$$

Hierbei sind  $\Gamma, S, V \in \mathbb{R}^3$  kompakt und stückweise glatt,  $f, g$  zumindest definiert auf einer offenen Umgebung und dort stetig differenzierbar.

Welche Anwendungen hat die Integration?

Damit haben wir die ersten wichtigen Themen genannt:

- Ein- und mehrdimensionale Integration.
- Integralsätze in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  und im Raum  $\mathbb{R}^3$ .
- Anwendungen in Natur- und Ingenieurwissenschaften.

Dank ihrer zahlreichen Anwendungen ist die Integration unentbehrliches Werkzeug und grundlegend in den Ingenieur- und Naturwissenschaften.

Erste wichtige Anwendungen werden wir in dieser Vorlesung vorstellen:

- Fourier-Reihen, Fourier- und Laplace-Transformation.
- Lösung gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen.
- Wahrscheinlichkeitsrechnung, kontinuierliche Verteilungen.

Die hier genannten Themen sind das umfassende Ziel dieser Vorlesung. Der Weg ist steil, doch unser ambitioniertes Ziel ist überaus lohnend!

- 😊 Damit Sie diese Werkzeuge sicher und effizient nutzen können, werden wir zunächst die grundlegenden Rechenregeln darlegen.

Wozu brauchen Sie Definitionen und Sätze?

Sie können die Integration als eine Maschine auffassen: Aus jeder integrierbaren Funktion  $f$  macht sie eine Zahl  $\int f$ . Für die Praxis sollen Sie lernen, diese Maschine korrekt und effizient zu nutzen. Dazu müssen Sie ihren grundlegenden Aufbau und ihre Funktionsweise verstehen.

Dieses Kapitel gibt hierzu die **Kurzanleitung zur Integration**: Um überhaupt von Integralen sprechen zu können, erkläre ich hier zunächst, was Integrale sind und nach welchen Regeln sie funktionieren. Der Schnelldurchgang ist noch zu knapp, gibt aber einen guten ersten Überblick.

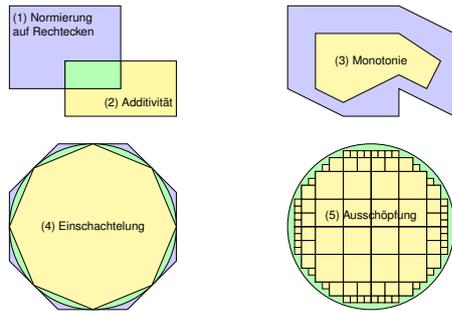
In den folgenden Kapiteln entwickeln wir **Rechentechniken**, wie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung B11, den Satz von Fubini C1E, den Transformationssatz C2B, schließlich die Integralsätze von Gauß und Stokes. Alle diese Sätze und Rechenregeln beruhen auf der in diesem ersten Kapitel gegebenen Definition des Integrals und lassen sich daraus ableiten.

Für die Anwendung sollen Sie vor allem konkrete Beispiele beherrschen. Reicht es also, nur Beispiele zu lernen? Es ist wie mit den Spielregeln beim Sport (Handball, Cricket, Schach): Es ist mühsam, unsicher und ineffizient, diese nur durch Beobachten von Spielen zu erraten, zudem könnte man niemals sicher sein, wirklich alle Regeln zu kennen und zu verstehen.

Daher ist es effizienter, von Anfang an die fundamentalen **Regeln** darzulegen und zugleich auch lehrreiche **Beispiele** zu untersuchen. Diesen werden wir uns in den folgenden Kapiteln widmen.

*We think in generalities, but we live in detail.*  
(Alfred North Whitehead, 1861–1947)

Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  wollen wir ihren Flächeninhalt  $\text{vol}_2(A)$  zuweisen.  
**Problem:** Nach welchen **Regeln**? Welche Mengen sind **messbar**?



Ebenso für den Rauminhalt  $\text{vol}_3(A)$  von Teilmengen  $A \subseteq \mathbb{R}^3$ , und allgemein für das  $n$ -dim. Volumen  $\text{vol}_n(A)$  von Teilmengen  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ .

Messbare Mengen  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  und ihr  $n$ -dimensionales Volumen  $\text{vol}_n(A) \in [0, \infty]$  definieren wir nach folgenden fünf Grundregeln:

- (1) **Normierung:** Jeder  $n$ -dimensionale Quader  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  ist messbar, und sein Volumen  $\text{vol}(A)$  ist das Produkt seiner Seitenlängen.  
 ☺ Speziell für die leere Menge  $\emptyset$  folgt daraus  $\text{vol}(\emptyset) = 0$ .
- (2) **Additivität:** Sind  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  messbar, so auch  $A \cup B$  und  $A \cap B$ , und für diese vier gilt  $\text{vol}(A) + \text{vol}(B) = \text{vol}(A \cup B) + \text{vol}(A \cap B)$ .  
 ☺ Für  $A \cap B = \emptyset$  folgt  $\text{vol}(A \sqcup B) = \text{vol}(A) + \text{vol}(B)$  dank  $\text{vol}(\emptyset) = 0$ .
- (3) **Monotonie:** Sind  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  messbar, so auch  $C = B \setminus A$ .  
 ☺ Aus  $A \subseteq B$  folgt  $B = A \sqcup C$  und  $\text{vol}(A) \leq \text{vol}(B)$  dank Additivität (2).
- (4) **Einschachtelung:** Gilt  $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq C \subseteq \dots \subseteq B_2 \subseteq B_1 \subseteq B_0$  mit  $A_k, B_k$  messbar und  $\text{vol}(B_k \setminus A_k) \searrow 0$ , so ist auch  $C$  messbar.  
 ☺ Dank Monotonie (3) folgt daraus  $\text{vol}(A_k) \nearrow \text{vol}(C) \searrow \text{vol}(B_k)$ .
- (5) **Ausschöpfung:** Sind  $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$  messbar, so auch ihre Vereinigung  $A = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \dots$ , und dabei gilt  $\text{vol}(A_k) \nearrow \text{vol}(A)$ .

☺ Auf diesen fünf einfachen Grundregeln beruht die gesamte Integration! Damit berechnen wir den Flächeninhalt von Polygonen, Kreisen, etc. sowie den Rauminhalt von Polyedern, Kugeln, etc. Im Prinzip ist damit alles über die Integration gesagt. Wir benötigen dennoch etwas mehr Zeit: Sie sollen die nötigen Rechentechniken beherrschen sowie wichtige Beispiele und Anwendungen. Wir fragen als erstes: Ist das Ergebnis eindeutig, wohldefiniert, unabhängig vom Rechenweg? Die Eindeutigkeit ist für alles Weitere unabdingbar und keineswegs selbstverständlich. [A409](#)

**Satz A1A: Lebesgue 1901**

Mit diesen fünf Regeln können wir jeder messbaren Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  eindeutig ihr Volumen  $\text{vol}_n(A) \in [0, \infty]$  zuweisen und somit ausrechnen. Alle natürlich auftretenden Mengen sind auf diese Weise messbar:

- Alle offenen und alle abgeschlossenen Mengen in  $\mathbb{R}^n$  sind messbar.
- Ist eine Menge  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  messbar, so auch ihr Komplement  $\mathbb{R}^n \setminus A$ .
- Sind die vorgelegten Mengen  $A_0, A_1, A_2, \dots \subseteq \mathbb{R}^n$  messbar, so auch ihr Durchschnitt  $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$  und ihre Vereinigung  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ .
- Für jede disjunkte Vereinigung gilt  $\text{vol}(\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} A_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \text{vol}(A_k)$ . Diese wichtige und nützliche Eigenschaft heißt  **$\sigma$ -Additivität**.

Das  $n$ -dimensionale Volumen  $\text{vol}_n$  ist demnach ein  $\sigma$ -additives Maß im folgenden Sinne; die Bezeichnung „ $\sigma$ “ steht dabei für „abzählbar“.

**Definition A1B: Maßraum**

Ein **Maßraum**  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  besteht aus

- einer **Grundmenge**  $\Omega$ ,
- einer  **$\sigma$ -Algebra**  $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$  und
- einem  **$\sigma$ -additiven Maß**  $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$

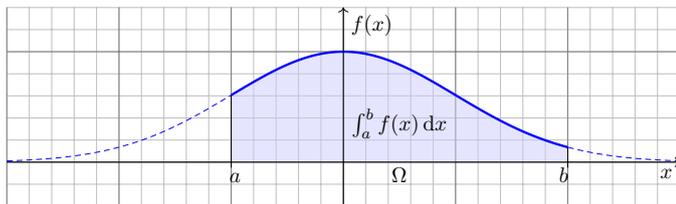
mit folgenden grundlegenden Eigenschaften, wie oben erklärt:

- 1 **Leere Menge:** Es gilt  $\emptyset \in \mathcal{A}$  und  $\mu(\emptyset) = 0$ .
- 2 **Komplemente:** Aus  $A \in \mathcal{A}$  folgt  $(\Omega \setminus A) \in \mathcal{A}$ .
- 3  **$\sigma$ -Additivität:** Aus  $A_0, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$  folgt  $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$  sowie

$$\mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k) \quad \text{falls } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j.$$

Jeder messbaren Menge  $A \subseteq \Omega$  wird ihr Maß  $\mu(A) \in [0, \infty]$  zugeordnet. Diese Sichtweise nutzen wir später für **Wahrscheinlichkeitsmaße (V1C)**.

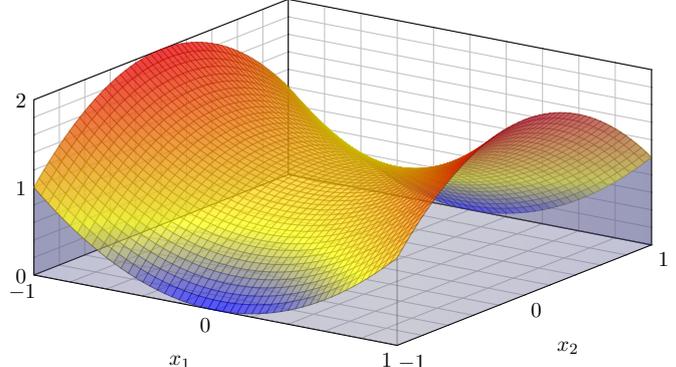
**Beispiel:** Wir integrieren  $f(x) = e^{-x^2/2}$  über  $\Omega = [-1, 2]$ .



Zur Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  existiert eine Integralfunktion  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  mit  $F' = f$  dank Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (B11). Leider ist  $F$  nicht elementar (B1P). Schon in solch einfachen Beispielen benötigen wir die geometrische Integraldefinition als Fläche!

**Grundidee:** Sei  $\Omega = [a, b]$  ein Intervall und  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Das Integral  $\int_a^b f(x) dx$  misst die Fläche unter dem Graphen von  $f$ .  
**Verallgemeinerung:** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Quader und  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Das Integral  $\int_{\Omega} f(x) dx$  misst das Volumen unter dem Graphen von  $f$ .

**Beispiel:** Wir integrieren  $f(x_1, x_2) = 1 + x_1^2 - x_2^2$  über  $\Omega = [-1, 1]^2$ .



Gesucht ist das Volumen unter dem Graphen, also  $\int_{\Omega} f(x) dx$ . Dieses sehr einfache Beispiel lässt sich auch ohne Rechnung lösen:  $\int_{\Omega} f(x) dx = 4$ . Können Sie es sehen? und ausrechnen? Solide Grundlagen helfen der geometrischen Anschauung und dann der formalen Ausführung!

Das Integral einer Funktion  $f: \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  schreiben wir wahlweise

$$\int_{\Omega} f = \int_{\Omega} f dx = \int_{\Omega} f(x) dx = \int_{x \in \Omega} f(x) dx.$$

Die Bezeichnung der Integrationsvariablen ist dabei willkürlich:

$$\int_{\Omega} f = \int_{\Omega} f(t) dt = \int_{\Omega} f(u) du = \int_{\Omega} f(\theta) d\theta = \dots$$

Speziell für  $\Omega = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$  und  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  schreiben wir auch:

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f = \int_a^b f(x) dx = \int_{x=a}^b f(x) dx = \dots$$

Zweidimensional, für  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  und  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , schreiben wir auch:

$$\int_{\Omega} f = \int_{\Omega} f(x, y) d(x, y) = \int_{(u,v) \in \Omega} f(u, v) d(u, v) = \dots$$

Dreidimensional, für  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  und  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , schreiben wir auch:

$$\int_{\Omega} f = \int_{\Omega} f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_{(u,v,w) \in \Omega} f(u, v, w) d(u, v, w) = \dots$$

Zwei- und dreidimensionale Integrale schreiben manche lieber so:

$$\iint_{\Omega} f = \iint_{\Omega} f(x, y) d(x, y) = \iint_{(u,v) \in \Omega} f(u, v) d(u, v) = \dots$$

$$\iiint_{\Omega} f = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) d(x, y, z) = \iiint_{(u,v,w) \in \Omega} f(u, v, w) d(u, v, w) = \dots$$

Diese dekorative Schreibweise betont, dass wir mit zwei- bzw. dreidimensionalen Integralen arbeiten, ist aber ansonsten entbehrlich: Der Integrationsbereich  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  weiß ja, in welcher Dimension  $n$  er lebt! Das bildhafte Symbol ist eine hilfreiche Gedächtnisstütze für die Leser:in, nicht mehr, nicht weniger. Das Integral ist unabhängig von der Schreibweise dasselbe wie zuvor. Redundanz schadet selten, oft bietet sie nützliche Erinnerung und willkommene Hilfestellung. Für die Praxis empfiehlt es sich, überflüssige Schnörkel wegzulassen und nur das Wesentliche so klar und präzise zu notieren, dass Lese- und Rechenfehler weitestgehend vermieden werden. Alle genannten Schreibweisen haben sich hierzu bewährt, alle erfordern Verständnis und Übung. Eine gute Notation vermeidet Fehler und Missverständnisse. Das ist nicht nur eine mathematische Frage, sondern vor allem eine der Klarheit, der Bequemlichkeit und der jeweiligen Tradition. Die wahre Kraft der Begriffe steckt nicht in ihrer *Schreibung*, sondern in ihrer *Bedeutung*! Das können wir nun klar und präzise formulieren dank Ihrer guten Grundlagen aus der HM1&2.

## Aufbau des Zahlensystems

A201  
Erinnerung

Unser Fundament ist das Zahlensystem  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ .

☐ Zur Wiederholung der Grundlagen siehe Stoppel, Höhere Mathematik 2, Kapitel 0 und 1. Aufbau: Die natürlichen Zahlen  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  dienen zum **Zählen**. Die ganzen Zahlen  $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$  lösen das Problem der Subtraktion. Die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q} = \{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$  lösen das Problem der Division. Sie bilden einen geordneten Körper  $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ , sind aber noch unvollständig: Zahlen wie  $\sqrt{2}, e, \pi$ , etc. sind nicht rational! Um dieses Problem zu lösen, müssen wir einen entscheidenden Schritt weiter gehen und die rationalen zu den reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  vervollständigen. Die reellen Zahlen dienen zum **Messen**. Sie sind die unabdingbare Grundlage der Analysis: Grenzwerte von Folgen und von Reihen, Ableitungen und Integrale, etc. ergeben erst auf Grundlage der reellen Zahlen einen Sinn.

**Die reellen Zahlen  $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$  sind ein geordneter Körper und zudem vollständig.**

Vollständigkeit bedeutet: Jede nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge  $M \subseteq \mathbb{R}$  besitzt in  $\mathbb{R}$  eine kleinste obere Schranke. Diese nennen wir das Supremum von  $M$  und bezeichnen sie mit  $\sup M$ . Gleiches gilt für die größte untere Schranke, das Infimum von  $M$ , geschrieben  $\inf M$ . Aus den Körperaxiomen, der Anordnung und der Vollständigkeit entspringen alle weiteren Eigenschaften der reellen Zahlen, sodann der komplexen Zahlen, der reellen und komplexen Funktionen, der Differential- und Integralrechnung, ... schließlich der gesamten Analysis!

**Die komplexen Zahlen  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  sind ein Körper und algebraisch abgeschlossen (F3C):**

In  $\mathbb{R}$  hat die Gleichung  $x^2 + 1 = 0$  keine Lösung. In  $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i]$  führen wir hierzu die Zahl  $i$  ein. Über  $\mathbb{C}$  zerfällt jedes Polynom  $f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$  in Linearfaktoren (F3C). Viele Rechnungen gelingen nur mit komplexen Zahlen, weitere werden so besonders effizient.

## Absolutbetrag und Abstand reeller Zahlen

A202  
Erinnerung

Die reellen Zahlen  $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$  sind ein vollständiger geordneter Körper. Aus der Anordnung gewinnen wir insbesondere den **Absolutbetrag**

$$|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto |x| := \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0, \\ -x & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Dies ist eine **Norm** mit folgenden Eigenschaften:

- **Definitheit:**  $|x| = 0$  genau dann, wenn  $x = 0$ .
- **Multiplikativität:**  $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- **Subadditivität:**  $|x + y| \leq |x| + |y|$

Dies wiederum definiert für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  den **Abstand**  $|a - b|$ .

- **Definitheit:**  $|a - b| = 0$  genau dann, wenn  $a = b$ .
- **Symmetrie:**  $|a - b| = |b - a|$  für alle  $a, b \in \mathbb{R}$ .
- **Dreiecksungleichung:**  $|a - c| \leq |a - b| + |b - c|$

Norm und Abstand werden wir später auf  $\mathbb{C}$  sowie  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{C}^n$  und noch allgemeinere Vektorräume übertragen, z.B. Funktionenräume. Diese können wir meist nicht sinnvoll anordnen, aber Norm, Abstand und Konvergenz dienen auch dort als zentrale Werkzeuge (C4J, U4B).

## Konvergenz reeller Zahlenfolgen

A203  
Erinnerung

Eine **Folge**  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reeller Zahlen ist eine Abbildung  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : n \mapsto a_n$ . Jeder natürlichen Zahl  $n \in \mathbb{N}$  wird eine reelle Zahl  $a_n \in \mathbb{R}$  zugeordnet.

Vorgelegt seien Schranken  $s, t \in \mathbb{R}$ . Gilt  $a_n \geq s$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so nennen wir die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **nach unten beschränkt** durch  $s$ . Gilt  $a_n \leq t$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so nennen wir die Folge **nach oben beschränkt** durch  $t$ .

**Definition A2A: Konvergenz einer reellen Zahlenfolge**

Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}$  **konvergiert** gegen eine reelle Zahl  $a \in \mathbb{R}$ , wenn der Abstand  $|a - a_n|$  schließlich beliebig klein wird, genauer:

Für jedes noch so kleine  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  existiert ein Index  $m \in \mathbb{N}$ , sodass für alle folgenden Indizes  $n \geq m$  die Ungleichung  $|a - a_n| \leq \varepsilon$  gilt.

In diesem Falle schreiben wir  $a_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$ , oder kurz  $a_n \rightarrow a$ . Den **Grenzwert** schreibt man  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , oder kurz  $\lim a_n = a$ .

**Beispiel:** Für  $|q| < 1$  gilt  $q^n \rightarrow 0$  sowie  $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \rightarrow \frac{1}{1-q}$ .

Die Folge  $x_0 = 0, x_1 = 0.9, x_2 = 0.99, x_3 = 0.999, \dots, x_n = 1 - 10^{-n}$  konvergiert gegen 1. Das ist das ganze Geheimnis hinter der Gleichung  $0.999999999 \dots = 1$ . Diese Erkenntnis ist keineswegs selbstverständlich!

## Uneigentliche Konvergenz gegen $\pm\infty$

A204  
Erinnerung

Jede in  $\mathbb{R}$  konvergente Folge ist beschränkt. Die Umkehrung gilt nicht: Die Folge  $(-1)^n$  ist beschränkt, konvergiert aber dennoch nicht in  $\mathbb{R}$ . Die Folge  $(1, 2, 3, \dots)$  wächst unbeschränkt und konvergiert nicht in  $\mathbb{R}$ . Auch die harmonische Reihe  $a_n = \sum_{k=1}^n 1/k$  wächst unbeschränkt. Diese Beispiele führen uns zur bestimmten Divergenz gegen  $\pm\infty$ :

**Definition A2B: uneigentliche Konvergenz, bestimmte Divergenz**

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}$  heißt **divergent**, wenn sie nicht konvergiert. Das heißt, es gibt keine reelle Zahl  $a \in \mathbb{R}$ , für die  $a_n \rightarrow a$  gilt.

Wir sagen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **divergiert (bestimmt)** gegen  $+\infty$  oder **konvergiert (uneigentlich)** gegen  $+\infty$ , wenn zu jeder Schranke  $s \in \mathbb{R}$  ein Index  $m \in \mathbb{N}$  existiert, sodass für alle  $n \geq m$  die Ungleichung  $a_n \geq s$  gilt.

Entsprechend sagen wir  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **divergiert (bestimmt)** gegen  $-\infty$  oder **konvergiert (uneigentlich)** gegen  $-\infty$ , wenn zu jeder Schranke  $s \in \mathbb{R}$  ein Index  $m \in \mathbb{N}$  existiert, sodass für alle  $n \geq m$  gilt  $a_n \leq s$ .

**Beispiele:**  $n^a \rightarrow 0$  für  $a < 0$ ,  $n^0 = 1 \rightarrow 1$  für  $a = 0$ ,  $n^a \rightarrow \infty$  für  $a > 0$ .

Es gilt  $\sum_{k=1}^n 1/k \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ , somit  $\sum_{k=1}^n 1/k^a \rightarrow \infty$  für  $a \leq 1$ .

## Die reelle Zahlengerade erweitert um $\pm\infty$

A205  
Erinnerung

Die reellen Zahlen  $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$  sind ein vollständiger geordneter Körper. Bei Grenzwerten und Integration müssen wir auch mit  $\pm\infty$  umgehen. Hierzu nutzen wir die **erweiterte Zahlengerade**  $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ .

Die Ordnung setzen wir fort durch  $-\infty < a < +\infty$  für alle  $a \in \mathbb{R}$ . Addition und Multiplikation setzen wir für  $\pm\infty$  und  $a, b \in \mathbb{R}$  fort:

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

+	$-\infty$	$b$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?0?
$a$	$-\infty$	$a + b$	$+\infty$
$+\infty$	?0?	$+\infty$	$+\infty$

$\cdot$	$-\infty$	$b < 0$	$b = 0$	$b > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	$-\infty$	$-\infty$
$a < 0$	$+\infty$	$a \cdot b$	0	$a \cdot b$	$-\infty$
$a = 0$	0	0	0	0	0
$a > 0$	$-\infty$	$a \cdot b$	0	$a \cdot b$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$

Grün: Verknüpfung in  $\mathbb{R}$ ; gelb: sinnvoll für die Grenzwertrechnung in  $\bar{\mathbb{R}}$ ; rot: nur für die Integralrechnung gebräuchlich.  $(\bar{\mathbb{R}}, +, \cdot)$  ist kein Körper!

⚠ Die Addition ist nicht assoziativ:  $(+\infty + -\infty) + 1 \neq +\infty + (-\infty + 1)$ .  
☺ Im Halbring  $([0, \infty], +, \cdot)$  gelten alle Eigenschaften außer Inverse.

## Die reelle Zahlengerade erweitert um $\pm\infty$

A206  
Erinnerung

☺ Für **Grenzwerte in  $\bar{\mathbb{R}}$**  gelten die nützlichen Rechenregeln

$$\begin{aligned} \lim(a_n + b_n) &= (\lim a_n) + (\lim b_n), \\ \lim(a_n \cdot b_n) &= (\lim a_n) \cdot (\lim b_n). \end{aligned}$$

☺ In den gelb markierten Fällen gilt dies auch noch für uneigentliche Grenzwerte. Das kennen Sie gut aus der Analysis und nutzen es seither.

⚠ **Vorsicht:** Die rot markierte Konvention  $0 \cdot (\pm\infty) = 0$  nutzen wir ausschließlich in der Integralrechnung; sie ist nur hier sinnvoll.

☹ Für die Konvergenzrechnung ist sie nutzlos! Warnende Beispiele:

Es gilt  $a_n = 6/n \rightarrow 0$  und  $b_n = 7n \rightarrow +\infty$ , aber  $a_n \cdot b_n \rightarrow 42$ .

Es gilt  $a_n = 6/n^2 \rightarrow 0$  und  $b_n = 7n \rightarrow +\infty$ , aber  $a_n \cdot b_n \rightarrow 0$ .

Es gilt  $a_n = 6/n \rightarrow 0$  und  $b_n = 7n^2 \rightarrow +\infty$ , aber  $a_n \cdot b_n \rightarrow +\infty$ .

☹ Die Konvention  $(+\infty) + (-\infty) = 0$  ist vollkommen willkürlich.

Es gilt  $a_n = n \rightarrow +\infty$  und  $b_n = 42 - n \rightarrow -\infty$ , aber  $a_n + b_n \rightarrow 42$ .

Es gilt  $a_n = n \rightarrow +\infty$  und  $b_n = \sqrt{n} - n \rightarrow -\infty$ , aber  $a_n + b_n \rightarrow +\infty$ .

Es gilt  $a_n = n \rightarrow +\infty$  und  $b_n = (-1)^n - n \rightarrow -\infty$ , aber  $a_n + b_n$  divergiert.

## Monotone Konvergenz reeller Zahlen

A207  
Erinnerung

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\bar{\mathbb{R}}$  heißt **monoton wachsend**, wenn gilt

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots$$

also  $a_m \leq a_n$  für alle  $m \leq n$ . Wir schreiben dann kurz  $a_n \nearrow$ .

- Ist die Folge in  $\mathbb{R}$  nicht nach oben beschränkt, so gilt  $a_n \rightarrow +\infty$ .
- Ist die Folge in  $\mathbb{R}$  nach oben beschränkt, so existiert eine kleinste obere Schranke in  $\mathbb{R}$ : Für  $a = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  gilt dann  $a_n \rightarrow a$ .

Zur Betonung der Monotonie schreiben wir  $a_n \nearrow a$  bzw.  $a_n \nearrow +\infty$ .

Entsprechend heißt  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\bar{\mathbb{R}}$  **monoton fallend**, wenn gilt

$$b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots$$

also  $b_m \geq b_n$  für alle  $m \leq n$ . Wir schreiben dann kurz  $b_n \searrow$ .

- Ist die Folge in  $\mathbb{R}$  nicht nach unten beschränkt, so gilt  $b_n \rightarrow -\infty$ .
- Ist die Folge in  $\mathbb{R}$  nach unten beschränkt, so existiert eine größte untere Schranke in  $\mathbb{R}$ : Für  $b = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  gilt dann  $b_n \rightarrow b$ .

Zur Betonung der Monotonie schreiben wir  $b_n \searrow b$  bzw.  $b_n \searrow -\infty$ .

## Limes superior und Limes inferior

A208  
Erinnerung

Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in der erweiterten Zahlengeraden  $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ .

Die Folge  $a_n = \inf_{k \geq n} x_k$  ist **monoton wachsend**, also gilt  $a_n \nearrow a \in \bar{\mathbb{R}}$ .

Die Folge  $b_n = \sup_{k \geq n} x_k$  ist **monoton fallend**, also gilt  $b_n \searrow b \in \bar{\mathbb{R}}$ .

Für die Folge  $(x_n)$  ist  $a$  der kleinste und  $b$  der größte Häufungspunkt.

**Beispiel:** Für  $x_n = (-1)^n$  gilt  $a_n = -1$  und  $b_n = +1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

**Definition A2C: Limes superior und Limes inferior**

Für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\bar{\mathbb{R}}$  definieren wir

$$\begin{aligned} \liminf x_n &:= \lim_{n \rightarrow \infty} (\inf_{k \geq n} x_k) \in \bar{\mathbb{R}}, \\ \limsup x_n &:= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{k \geq n} x_k) \in \bar{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

**Proposition A2D: Konvergenzkriterium in  $\bar{\mathbb{R}}$**

Genau dann konvergiert  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\bar{\mathbb{R}}$ , wenn  $\limsup x_n = \liminf x_n$  gilt.

Reelle Funktionen	A209 Erinnerung
<p>Sei <math>\Omega</math> eine Menge. Eine reelle Funktion <math>f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}</math> ordnet jedem <math>x \in \Omega</math> eine reelle Zahl <math>f(x)</math> zu. Diese Zuordnung schreiben wir <math>x \mapsto f(x)</math>. Die Menge aller reellen Funktionen <math>f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}</math> bezeichnen wir mit</p> $\mathbb{R}^\Omega = \text{Abb}(\Omega, \mathbb{R}) = \{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) \}.$ <p>Speziell für <math>\Omega = \{1, \dots, n\}</math> erhalten wir den vertrauten Raum</p> $\mathbb{R}^n = \text{Abb}(\{1, \dots, n\}, \mathbb{R}) = \{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \}.$ <p>Für <math>\Omega = \mathbb{N}</math> erhalten wir die Menge aller reellen Folgen</p> $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \text{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \{ (x_0, x_1, x_2, \dots) \mid x_0, x_1, x_2, \dots \in \mathbb{R} \}.$ <p>Für <math>\Omega = \mathbb{R}</math> erhalten wir die Menge aller reellen Funktionen</p> $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) \}.$ <p>Der Träger (engl. <i>support</i>) einer Funktion <math>f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}</math> ist die Teilmenge <math>\{ x \in \Omega \mid f(x) \neq 0 \}</math>, wo <math>f</math> nicht verschwindet, genauer ihr Abschluss</p> $\text{supp}(f) := \overline{\{ x \in \Omega \mid f(x) \neq 0 \}}.$ <p>Dasselbe vereinbaren wir für Funktionen mit Werten in <math>\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}</math> oder <math>\mathbb{R}^n</math> oder <math>\mathbb{C}</math> oder <math>\mathbb{C}^n</math> oder allgemein in einer beliebigen Zielmenge.</p>	

Punktweise Verknüpfung und Vergleich	A210 Erinnerung
<p>Für je zwei Funktionen <math>f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}</math> definieren wir ihre Summe</p> $f + g: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{durch} \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$ <p>punktweise für jedes <math>x \in \Omega</math>. Für jede Konstante <math>c \in \mathbb{R}</math> definieren wir</p> $cf: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{durch} \quad (cf)(x) = cf(x).$ <p>Hierdurch wird <math>(\mathbb{R}^\Omega, +, \cdot)</math> zu einem Vektorraum über <math>\mathbb{R}</math>. (Übung!) Ebenso definieren wir zu <math>f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}</math> das punktweise Produkt</p> $f \cdot g: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{durch} \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$ <p>Hierdurch wird <math>(\mathbb{R}^\Omega, +, \cdot)</math> sogar zu einer Algebra über <math>\mathbb{R}</math>. (Übung!) Dasselbe vereinbaren wir ebenso für Funktionen mit Werten in <math>\mathbb{C}</math>. Schließlich definieren wir auch die Relation <math>f \leq g</math> punktweise:</p> $f \leq g \quad :\iff \quad f(x) \leq g(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega.$ <p>Auch <math>\min(f, g), \max(f, g): \Omega \rightarrow \mathbb{R}</math> sind punktweise definiert durch</p> $\min(f, g)(x) = \min(f(x), g(x)), \quad \max(f, g)(x) = \max(f(x), g(x)).$ <p>Dasselbe vereinbaren wir für Funktionen mit Werten in <math>\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}</math>.</p>	

Monotone Konvergenz reeller Zahlen und Funktionen	A211 Erinnerung
<p>Die erweiterte Zahlengerade <math>\bar{\mathbb{R}}</math> vereinfacht Konvergenzaussagen:</p> <p><b>Satz A2E: Supremum und Infimum in <math>\bar{\mathbb{R}}</math></b></p> <p>Jede Teilmenge <math>M \subseteq \bar{\mathbb{R}}</math> hat ein Supremum und ein Infimum in <math>\bar{\mathbb{R}}</math>.</p> <p>Ist die Menge <math>M</math> leer, so gilt <math>\sup \emptyset = -\infty</math> und <math>\inf \emptyset = +\infty</math>.</p> <p><b>Satz A2F: monotone Konvergenz von Zahlenfolgen</b></p> <p>Jede wachsende Folge <math>a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots</math> in <math>\bar{\mathbb{R}}</math> konvergiert gegen einen Grenzwert <math>a \in \bar{\mathbb{R}}</math>. Wir schreiben hierfür kurz <math>a_k \nearrow a</math>.</p> <p>Für <math>b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots</math> in <math>\bar{\mathbb{R}}</math> gilt entsprechend <math>b_k \searrow b</math> mit <math>b \in \bar{\mathbb{R}}</math>.</p> <p><b>Satz A2G: monotone Konvergenz von Funktionenfolgen</b></p> <p>Jede wachsende Folge <math>f_0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots</math> von Funktionen <math>f_k: \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}</math> konvergiert punktweise gegen eine Grenzfunktion <math>f: \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}</math>. Das heißt, für jedes <math>x \in \Omega</math> gilt <math>f_k(x) \nearrow f(x)</math>, kurz <math>f_k \nearrow f</math>.</p> <p>Für <math>g_0 \geq g_1 \geq g_2 \geq \dots: \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}</math> gilt entsprechend <math>g_k \searrow g: \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}</math>.</p>	

Beispiele zur monotonen Konvergenz	A212 Erinnerung
<p><b>Aufgabe:</b> Untersuchen Sie Monotonie und Konvergenz der Folge <math>x^n</math> sowie der Funktionenfolge <math>f_n(x) = x^n</math> auf <math>[0, 1]</math>, <math>[1, \infty[</math>, <math>[0, \infty[ = \mathbb{R}_{\geq 0}</math>.</p> <p><b>Lösung:</b> (1) Für <math>x \in \mathbb{R}</math> betrachten wir die Folge <math>(x^n)_{n \in \mathbb{N}}</math>.  Für <math>x &gt; 1</math> gilt <math>x^n \nearrow +\infty</math> (monoton wachsend).  Für <math>x = 1</math> gilt <math>x^n = 1</math>, also <math>x^n \rightarrow 1</math> (konstant).  Für <math>0 \leq x &lt; 1</math> gilt <math>x^n \searrow 0</math> (monoton fallend).  Für <math>-1 &lt; x &lt; 0</math> gilt <math>x^n \rightarrow 0</math> aber nicht monoton.  Für <math>x = -1</math> konvergiert <math>x^n = (-1)^n</math> nicht.  Für <math>x &lt; -1</math> gilt absolut <math> x^n  \nearrow +\infty</math>, aber weder <math>x^n \rightarrow +\infty</math> noch <math>x^n \rightarrow -\infty</math>.</p> <p>(2) Für <math>f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}</math> mit <math>f_n(x) = x^n</math> gilt <math>f_n \searrow f</math> mit <math>f(x) = 0</math> für <math>0 \leq x &lt; 1</math>, und <math>f(1) = 1</math>.  Für <math>f_n: [1, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}</math> mit <math>f_n(x) = x^n</math> gilt <math>f_n \nearrow f</math> mit <math>f(x) = +\infty</math> für <math>x &gt; 1</math>, und <math>f(1) = 1</math>.  Für <math>f_n: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}</math> mit <math>f_n(x) = x^n</math> gilt <math>f_n \rightarrow f</math> punktweise, aber nicht monoton: weder <math>f_n \searrow f</math> noch <math>f_n \nearrow f</math>.</p>	

Von endlichen zu unendlichen Summen	A213 Erinnerung
<p>Um Reihen <math>\sum_{k=0}^{\infty} a_k</math> zu nutzen, müssen wir ihren Grenzwert erklären. Allgemeiner betrachten wir auch Reihen wie <math>\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k</math> oder <math>\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a_k</math>.  ☐ Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §1.8–1.9.</p> <p>Sei <math>\Omega</math> eine Menge, etwa <math>\mathbb{N}</math> oder <math>\mathbb{Z}</math>. Sei <math>f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}</math> eine Abbildung, d.h. jedem Element <math>x \in \Omega</math> wird eine reelle Zahl <math>f(x) \in \mathbb{R}</math> zugeordnet.</p> <p><b>Start:</b> Ist <math>E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq \Omega</math> eine endliche Menge, so definieren wir die Summe von <math>f</math> über <math>E</math> rekursiv durch wiederholtes Addieren:</p> $\sum_{x \in E} f(x) := f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n).$ <p>Dank Assoziativität und Kommutativität in <math>(\mathbb{R}, +)</math> ist diese Summe wohldefiniert, also unabhängig von Klammerung und Reihenfolge.</p> <p><b>Ziel:</b> Wie können wir unendliche Summen definieren? Da hierbei auch unendliche Werte auftreten können, betrachten wir Summen in <math>\bar{\mathbb{R}}</math>. Leider ist <math>(\bar{\mathbb{R}}, +, \cdot)</math> kein Körper; insb. ist die Addition nicht assoziativ: <math>(+\infty + -\infty) + 1 \neq +\infty + (-\infty + 1)</math>. Wir müssen also aufpassen!</p>	

Rechenregeln in $[0, \infty]$	A214 Erinnerung
<p>☺ Zur Vereinfachung summieren wir zunächst nur in <math>([0, \infty], +, \cdot, &lt;)</math>. Dies ist zwar kein Körper, aber immerhin ein <b>geordneter Halbring</b>: Die Addition ist assoziativ und kommutativ. Neutrales Element für die Addition ist 0. Die üblichen Rechenregeln gelten also bis auf Inverse.</p> <p>Die Multiplikation ist assoziativ und kommutativ. Neutrales Element für die Multiplikation ist 1. Die Multiplikation ist distributiv über die Addition.</p> <p>Die Anordnung von <math>[0, \infty]</math> ist verträglich mit Addition und Multiplikation: Für alle <math>a \leq a'</math> und <math>b \leq b'</math> in <math>[0, \infty]</math> gilt <math>a + a' \leq b + b'</math> und <math>a \cdot a' \leq b \cdot b'</math>.</p> <p>Sei <math>\Omega</math> eine Menge und <math>f: \Omega \rightarrow [0, \infty]</math> eine nicht-negative Funktion. Ist <math>E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq \Omega</math> endlich, so definieren wir die Summe</p> $\sum_{x \in E} f(x) := f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n).$ <p>Dank Assoziativität und Kommutativität in <math>([0, \infty], +)</math> ist diese Summe wohldefiniert, also unabhängig von Klammerung und Reihenfolge.</p>	

Summation in $[0, \infty]$	A215 Erinnerung
<p><b>Definition A2H: unendliche Summe in <math>[0, \infty]</math></b></p> <p>Sei <math>\Omega</math> eine Menge und <math>f: \Omega \rightarrow [0, \infty]</math> eine nicht-negative Funktion. Die Summe über <math>\Omega</math> ist das Supremum aller endlichen Teilsummen:</p> $\sum_{x \in \Omega} f(x) := \sup \left\{ \sum_{x \in E} f(x) \mid E \subseteq \Omega \text{ endlich} \right\}.$ <p><b>Normierung:</b> Gilt <math>f(a) = 1</math> für ein <math>a \in \Omega</math> und <math>f(x) = 0</math> für alle <math>x \neq a</math>, so folgt <math>\sum f = 1</math>.</p> <p><b>Linearität:</b> Für <math>f, g: \Omega \rightarrow [0, \infty]</math> und <math>a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}</math> gilt <math>\sum (af + bg) = a \sum f + b \sum g</math>.</p> <p><b>Ausschöpfung:</b> Für <math>f_0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots: \Omega \rightarrow [0, \infty]</math> mit <math>f_k \nearrow f</math> gilt <math>\sum f_k \nearrow \sum f</math>.</p> <p>Diese drei Eigenschaften charakterisieren die Summation: Normierung und Linearität bestimmen endliche Summen: Hat <math>\Omega \rightarrow [0, \infty]</math> endlichen Träger <math>\text{supp}(f) = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \Omega</math>, so gilt <math>\sum_{x \in \Omega} f(x) = f(x_1) + \dots + f(x_n)</math>. Ausschöpfung <math>f_n \nearrow f</math> leistet den Übergang zu abzählbar unendlichen Summen. Gilt <math>f(x) &gt; 0</math> für überabzählbar viele <math>x \in \Omega</math>, so folgt stets <math>\sum f = \infty</math>, denn es gibt eine Zahl <math>k \in \mathbb{N}_{\geq 1}</math>, für die die Menge <math>\{x \in \Omega \mid f(x) \geq 1/k\}</math> unendlich ist.</p>	

Summation in $[0, \infty]$	A216 Erinnerung
<p><b>Satz A2I: Umordnungssatz in <math>[0, \infty]</math></b></p> <p>Sei <math>f: \Omega \rightarrow [0, \infty]</math>. Für jede Zerlegung <math>\Omega = \bigsqcup_{i \in I} \Omega_i</math> gilt</p> $\sum_{x \in \Omega} f(x) = \sum_{i \in I} \left[ \sum_{x \in \Omega_i} f(x) \right].$ <p>☺ Eine besondere Summationsreihenfolge wird hier nicht benötigt: Bei Summation in <math>[0, \infty]</math> dürfen wir beliebig umgruppieren und umordnen! Hierbei ist <math>\Omega = \bigsqcup_{i \in I} \Omega_i</math> eine Zerlegung der Indexmenge <math>\Omega</math> in disjunkte Teilmengen <math>\Omega_i \subseteq \Omega</math>, also <math>\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega_i</math> und <math>\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset</math> für <math>i \neq j</math>.</p> <p>Der Umordnungssatz folgt aus unserer geschickten Konstruktion A2H: Dank Assoziativität und Kommutativität in <math>([0, \infty], +)</math> gilt die gewünschte Gleichheit zunächst für endliche Summen. Durch Übergang zum Supremum gilt die Gleichung dann auch für beliebige Familien in <math>[0, \infty]</math>.</p> <p><b>Beispiel:</b> Für jede Familie <math>(a_i)_{i \in \mathbb{N}}</math> mit <math>a_i \in [0, \infty]</math> gilt</p> $\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i = \sum_{j \in \mathbb{N}} (a_{2j} + a_{2j+1}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (a_{2k} + a_{4k+1} + a_{4k+3}).$ <p><b>Notation:</b> Jede Abbildung <math>f: \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}</math> können wir als Familie <math>(f(x))_{x \in \Omega}</math> betrachten. So schreiben wir zum Beispiel <math>a: I \rightarrow \bar{\mathbb{R}}</math> auch als <math>(a_i)_{i \in I}</math>.</p>	

**Beispiel:** Für  $0 \leq q < 1$  summieren wir  $(q^k)_{k \in \mathbb{N}}$ . Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt  

$$(q^0 + q^1 + \dots + q^n)(1 - q) = 1 - q^{n+1}.$$

Hieraus erhalten wir explizit Summenformel und Grenzwert:

$$q^0 + q^1 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \nearrow \frac{1}{1 - q}.$$

Für die Summe über  $\mathbb{N}$  erhalten wir so die bekannte Formel

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} q^k = \frac{1}{1 - q}.$$

😊 Die **geometrische Reihe** ist sehr einfach, doch ungemein nützlich. Sie ist die erste Reihe, für die wir Konvergenzverhalten und Grenzwert explizit bestimmen können. Durch Vergleich mit schwierigeren Reihen erhalten wir eine Fülle von Konvergenzkriterien und Abschätzungen!

Wir wollen als nächstes auch negative Summanden zulassen. Hierzu summieren wir Positivteil und Negativteil getrennt.

Jede Familie  $(a_i)_{i \in I}$  reeller Zahlen  $a_i \in \mathbb{R}$  können wir zerlegen in **Positivteil**  $a_i^+ = \max(0, a_i)$  und **Negativteil**  $a_i^- = \max(0, -a_i)$ . Wir erhalten hieraus  $a_i = a_i^+ - a_i^-$  und  $|a_i| = a_i^+ + a_i^-$ .

**Definition A2J:** absolut summierbare Familien in  $\mathbb{R}$

(1) Für jede Familie  $(a_i)_{i \in I}$  reeller Zahlen  $a_i \in \mathbb{R}$  gilt

$$\sum_{i \in I} |a_i| = \sum_{i \in I} a_i^+ + \sum_{i \in I} a_i^-.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so nennen wir  $(a_i)_{i \in I}$  **absolut summierbar**. In diesem Falle können wir die Summe von  $(a_i)_{i \in I}$  definieren durch

$$\sum_{i \in I} a_i := \sum_{i \in I} a_i^+ - \sum_{i \in I} a_i^-.$$

- 😊 Eine besondere Summationsreihenfolge wird hier nicht benötigt!
- 😊 Die so definierte Summation ist  $\mathbb{R}$ -linear. Der Nachweis ist länglich.
- 😊 Es gelten die Ihnen bereits vertrauten und bewährten Rechenregeln.

Jede Familie  $(c_i)_{i \in I}$  komplexer Zahlen  $c_i \in \mathbb{C}$  können wir zerlegen in **Realteil**  $a_i = \operatorname{Re} c_i$  und **Imaginärteil**  $b_i = \operatorname{Im} c_i$ , und beide sind reell. Es gilt  $c_i = a_i + ib_i$  und  $|c_i|^2 = |a_i|^2 + |b_i|^2$  und  $|a_i|, |b_i| \leq |c_i| \leq |a_i| + |b_i|$ .

**Definition A2K:** absolut summierbare Familien in  $\mathbb{C}$

Für jede Familie  $(c_i)_{i \in I}$  komplexer Zahlen  $c_i = a_i + ib_i \in \mathbb{C}$  gilt

$$\sum_{i \in I} |a_i|, \sum_{i \in I} |b_i| \leq \sum_{i \in I} |c_i| \leq \sum_{i \in I} |a_i| + \sum_{i \in I} |b_i|.$$

Sind diese Werte endlich, so nennen wir  $(c_i)_{i \in I}$  **absolut summierbar**. In diesem Falle können wir die Summe von  $(c_i)_{i \in I}$  definieren durch

$$\sum_{i \in I} c_i := \sum_{i \in I} a_i + i \sum_{i \in I} b_i.$$

- 😊 Eine besondere Summationsreihenfolge wird hier nicht benötigt!
- 😊 Die so definierte Summation ist  $\mathbb{C}$ -linear. Der Nachweis ist länglich.
- 😊 Es gelten die Ihnen bereits vertrauten und bewährten Rechenregeln.

**Satz A2L:** Majorantenkriterium für Reihen

Aus  $|c_i| \leq q_i$  folgt  $\sum_{i \in I} |c_i| \leq \sum_{i \in I} q_i$  dank Monotonie. Ist die zweite Summe endlich, so auch die erste, und  $(c_i)_{i \in I}$  ist absolut summierbar. Erfüllt  $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$  speziell  $|c_k| \leq Mq^k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , wobei  $q \in [0, 1]$ ,  $M \in \mathbb{R}$ , so ist  $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$  absolut summierbar:  $|\sum_{k \in \mathbb{N}} c_k| \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} |c_k| \leq M/(1 - q)$ .

**Satz A2M:** Konvergenzradius einer Potenzreihe

Für jede Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  definieren wir den **Konvergenzradius**

$$\rho := 1 / \limsup \sqrt[k]{|a_k|}.$$

Für  $|z| < \rho$  konvergiert die Reihe absolut, für  $|z| > \rho$  divergiert sie.

**Beweis:** Sei  $0 \leq \rho < \infty$  und  $|a_k| \rho^k \leq M$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Für  $|z| \leq q\rho$  mit  $0 \leq q < 1$  folgt  $|a_k z^k| = |a_k| \rho^k q^k \leq M q^k$ , also  $\sum_{k \in \mathbb{N}} |a_k z^k| \leq M/(1 - q)$ .

**Beispiel:** Die Exponentialreihe  $\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$  konvergiert absolut in jedem Punkt  $z \in \mathbb{C}$ : Hier gilt  $\sqrt[k]{1/k!} \searrow 0$ , Konvergenzradius  $\rho = \infty$ .

**Satz A2N:** großer Umordnungssatz

(1) Sei  $(a_i)_{i \in I}$  eine Familie in  $\mathbb{C}$ . Für jede Zerlegung  $I = \bigsqcup_{j \in J} I_j$  gilt

$$\sum_{i \in I} |a_i| = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} |a_i|.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so ist  $(a_i)_{i \in I}$  absolut summierbar, und es gilt

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} a_i.$$

**Beweis:** Die erste Gleichung ist unser obiger Umordnungssatz A2I für Familien in  $[0, \infty]$ . Für jede absolut summierbare Familie  $(a_i)_{i \in I}$  in  $\mathbb{R}$  folgt die zweite Gleichung aus der ersten:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} a_i &\stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{i \in I} a_i^+ - \sum_{i \in I} a_i^- \stackrel{\text{A2I}}{=} \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} a_i^+ - \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} a_i^- \\ &\stackrel{\text{Lin}}{=} \sum_{j \in J} \left[ \sum_{i \in I_j} a_i^+ - \sum_{i \in I_j} a_i^- \right] \stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} a_i \end{aligned}$$

Jede absolut summierbare Familie  $(c_i)_{i \in I}$  in  $\mathbb{C}$  zerlegen wir ebenso in Real- und Imaginärteil.

**Korollar A2O:** kleiner Umordnungssatz

(1) Sei  $(a_i)_{i \in I}$  eine Familie in  $\mathbb{C}$ . Für jede Bijektion  $\varphi: J \rightarrow I$  gilt

$$\sum_{i \in I} |a_i| = \sum_{j \in J} |a_{\varphi(j)}|.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so ist  $(a_i)_{i \in I}$  absolut summierbar, und es gilt

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} a_{\varphi(j)}.$$

**Beweis:** Der kleine Umordnungssatz A2O folgt aus dem großen A2N mittels  $I_j = \{\varphi(j)\}$ : Hier wird tatsächlich nur umgeordnet, aber nicht umgruppiert und nichts zusammengefasst.

- 😊 Der kleine Umordnungssatz ist analog zum Transformationssatz für Integrale (Satz C2B). Bei Integralen müssen wir zudem die Volumenverzerrung berücksichtigen; dazu später mehr.
- 😊 Der folgende Umordnungssatz ist analog zum Satz von Fubini für Integrale (Satz C1E). In allen Fällen ist die absolute Summierbarkeit bzw. absolute Integrierbarkeit wesentlich!
- ⚠ Ohne absolute Summierbarkeit gibt es drastische Gegenbeispiele! [C117]

Eine Doppelfolge  $(a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{C}$  ist eine Abbildung  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ . Jedem Indexpaar  $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  wird eine Zahl  $a_{ij} \in \mathbb{C}$  zugeordnet.

**Korollar A2P:** Cauchy-Umordnungssatz

(1) Für jede Doppelfolge  $(a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{C}$  gilt

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} |a_{ij}| = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} |a_{ij}| = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{i \in \mathbb{N}} |a_{ij}| = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{i+j=k} |a_{ij}|$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so ist  $(a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$  absolut summierbar, und es gilt

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{i \in \mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{i+j=k} a_{ij}.$$

**Beweis:** Der Cauchy-Umordnungssatz A2P folgt aus dem großen Umordnungssatz A2N, indem wir die Indexmenge  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  geeignet zerlegen. Am besten machen Sie sich Skizzen: Zunächst  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} J_i$  mit  $J_i = \{i\} \times \mathbb{N}$ , dann  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} I_j$  mit  $I_j = \mathbb{N} \times \{j\}$ , schließlich  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} D_k$  mit den Diagonalen  $D_k = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i + j = k\}$ .

⚠ Ohne absolute Summierbarkeit gibt es drastische Gegenbeispiele! [C117]

**Aufgabe:** Aus der Exponentialreihe folgt die **Funktionalgleichung**

$$\exp(z + w) = \exp(z) \exp(w) \quad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C}.$$

**Nachrechnen:** Dank Umordnungssatz und binomischer Formel gilt:

$$\begin{aligned} \exp(z) \exp(w) &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right) \left( \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{w^\ell}{\ell!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+\ell=n} \frac{z^k w^\ell}{k! \ell!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z + w)^n = \exp(z + w). \end{aligned}$$

😊 Dies entspricht dem **Potenzgesetz**, daher die Kurzschreibweise

$$e^z := \exp(z) \quad \text{und} \quad e^{z+w} = e^z e^w.$$

😊 Zusammen mit der wichtigen **Euler-Formel**  $\exp(iz) = \cos z + i \sin z$  erhalten wir hieraus sofort **Additionstheoreme** für  $\sin$  und  $\cos$ . [B125] (Wiederholen und beweisen Sie diese als lehrreiche Übung.)

**Definition A3A: Intervalle und ihre Länge**

Eine Teilmenge  $I \subseteq \mathbb{R}$  heißt **Intervall**, falls für alle  $a < x < b$  in  $\mathbb{R}$  mit  $a, b \in I$  auch  $x \in I$  gilt. Für  $a \leq b$  haben wir die **endlichen Intervalle**

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \quad ]a, b[ := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$

$$[a, b[ := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}, \quad ]a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\},$$

sowie die **unendlichen Intervalle** wie  $]-\infty, +\infty[ = \mathbb{R}$  und

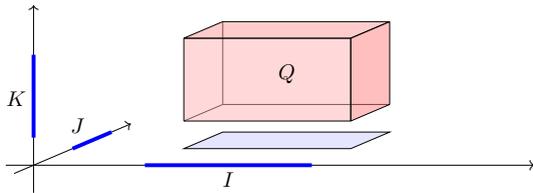
$$[a, +\infty[ := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}, \quad ]a, +\infty[ := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\},$$

$$]-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}, \quad ]-\infty, b[ := \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}.$$

Jedem Intervall  $I \neq \emptyset$  ordnen wir die **Länge**  $\text{vol}_1(I) := \sup I - \inf I$  zu. Der leeren Menge  $\emptyset \subseteq \mathbb{R}$  weisen wir die Länge  $\text{vol}_1(\emptyset) := 0$  zu.

Da  $(\mathbb{R}, <)$  vollständig ist, ist jedes Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  tatsächlich von einem dieser zehn Typen! Die endlichen Intervalle  $[a, b], ]a, b[, [a, b[, ]a, b]$  haben Länge  $b - a$ . Die Länge 0 haben neben  $\emptyset$  nur die einpunktigen Intervalle  $[a, a] = \{a\}$ . Alle unendlichen Intervalle haben die Länge  $+\infty$ . Das Intervall  $[a, b]$  ist kompakt. Die Intervalle  $]a, b[$  sowie  $]a, +\infty[$  und  $]-\infty, b[$  sind offen.

**Quader und ihr Rauminhalt**



Je drei Intervalle  $I, J, K \subseteq \mathbb{R}$  definieren einen achsenparallelen **Quader**

$$Q = I \times J \times K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in I, y \in J, z \in K\}.$$

Er hat den **Rauminhalt**  $\text{vol}_3(Q) := \text{vol}_1(I) \cdot \text{vol}_1(J) \cdot \text{vol}_1(K)$ .

Hat eines der Intervalle Länge 0, so hat der Quader den Rauminhalt 0. Haben alle Intervalle positive Länge, so hat  $Q$  positiven Rauminhalt. Ist zudem mindestens eines der Intervalle unendlich, so hat  $Q$  unendlichen Rauminhalt. Insbesondere gilt somit  $\text{vol}_3(\mathbb{R}^3) = +\infty$ . Sind alle drei Intervalle  $I, J, K$  endlich / kompakt / offen, so auch der Quader  $I \times J \times K$ . Die Dimensionen  $n = 1, 2, 3$  habe ich zur Betonung gesondert behandelt. Dasselbe Prinzip gilt in jeder Dimension! Das ist zwar schwer zu zeichnen, aber rechnen lässt sich damit ebenso gut.

**Grundidee: Das Integral misst das Volumen.**

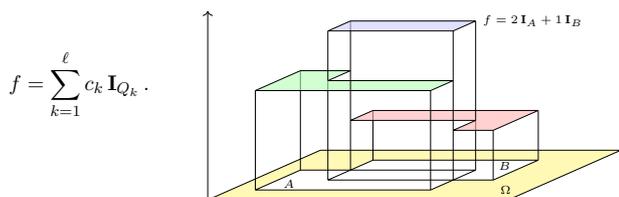


Die Mensa der Universität Stuttgart auf dem Campus Vaihingen aus Sicht der Mathematik (Pfaffenwaldring 57, 7. Stock)

Die Dachfläche können wir uns als Funktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  vorstellen. Das Integral  $\int_{\Omega} f$  misst das Volumen unter dem Funktionsgraphen. Dies lässt sich für Treppenfunktionen besonders leicht ausrechnen. Hierzu nutzen wir die folgende Notation und einfache Integralformel.

**Von Indikatorfunktionen zu Treppenfunktionen**

Zu Quadern  $Q_k \subseteq \Omega$  und  $c_k \in \mathbb{R}$  definieren wir die **Treppenfunktion**

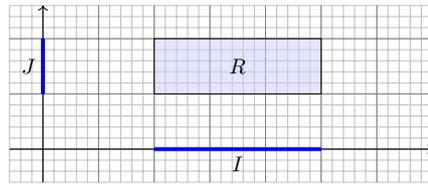


Das Integral misst das Volumen unter dem Funktionsgraphen, hier also

$$\int_{\Omega} f = \int_{\Omega} \left[ \sum_{k=1}^{\ell} c_k I_{Q_k} \right] = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \left[ \int_{\Omega} I_{Q_k} \right] = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \text{vol}_n(Q_k).$$

Die Menge  $T(\Omega)$  aller Treppenfunktionen ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Hierauf ist das Integral  $\int_{\Omega}: T(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  normiert, linear und monoton. Das ist anschaulich plausibel; wir rechnen es später sorgfältig nach: zunächst eindimensional B1A, dann induktiv mehrdimensional C1A.

**Rechtecke und ihr Flächeninhalt**



Je zwei Intervalle  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  definieren ein achsenparalleles **Rechteck**

$$R = I \times J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, y \in J\}.$$

Es hat den **Flächeninhalt**  $\text{vol}_2(R) := \text{vol}_1(I) \cdot \text{vol}_1(J)$ .

Hat eines der Intervalle Länge 0, so hat das Rechteck den Flächeninhalt 0. Haben beide Intervalle positive Länge, so hat  $R$  positiven Flächeninhalt. Ist zudem mindestens eines der Intervalle unendlich, so hat  $R$  unendlichen Flächeninhalt. Zum Beispiel gilt  $\text{vol}_2(\mathbb{R}^2) = +\infty$ , ebenso  $\text{vol}_2(\mathbb{R} \times [0, 1]) = +\infty$ , aber  $\text{vol}_2(\mathbb{R} \times \{a\}) = 0$ , gemäß der Konvention von Seite A205. Sind beide Intervalle  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  endlich / kompakt / offen, so auch das Rechteck  $I \times J \subseteq \mathbb{R}^2$ . Dasselbe Prinzip gilt in jeder Dimension! Zur Verdeutlichung skizziere ich Quader  $Q \subseteq \mathbb{R}^3$ .

**Quader in beliebiger Dimension**

**Definition A3B: n-dimensionale Quader und ihr Volumen**

Eine Teilmenge  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt achsenparalleler **Quader**, falls

$$Q = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$$

mit Intervallen  $I_1, I_2, \dots, I_n \subseteq \mathbb{R}$ . Sein **n-dimensionales Volumen** ist

$$\text{vol}_n(Q) := \text{vol}_1(I_1) \cdot \text{vol}_1(I_2) \cdot \dots \cdot \text{vol}_1(I_n).$$

Hat eines der Intervalle Länge 0, so hat der Quader das Volumen 0. Haben alle Intervalle positive Länge, so hat  $Q$  positives Volumen; ist zudem eines der Intervalle unendlich, so hat  $Q$  unendliches Volumen. Im Satz C1E von Fubini führen wir diese iterative Berechnung fort.

**Proposition A3C: Streckung und Verschiebung**

Für  $a \in \mathbb{R}$  und  $v \in \mathbb{R}^n$  gilt  $\text{vol}_n(aQ + v) = |a|^n \text{vol}_n(Q)$ .

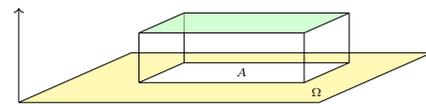
Übung: Zeigen Sie dies! Zu Streckung und Stauchung siehe Satz A41.

Im allgemeinen Transformationssatz C2B führen wir diese Idee fort.

**Indikatorfunktionen**

Die **Indikatorfunktion** einer Teilmenge  $A \subseteq \Omega$  definieren wir durch

$$\mathbf{I}_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \mathbf{I}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{für } x \notin A. \end{cases}$$



Das Integral misst das Volumen unter dem Funktionsgraphen, hier also

$$\int_{\Omega} \mathbf{I}_A = \text{vol}_n(A) \quad \text{und allgemein} \quad \int_{\Omega} c \mathbf{I}_A = c \text{vol}_n(A).$$

Dies ist die bewährte Regel „Volumen = Grundfläche mal Höhe“. Sie ist der Ausgangspunkt für die Integration, die wir nun ausführen. Hierzu betrachten wir Indikatorfunktionen als Quadern  $A \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  und bilden daraus die Treppenfunktionen als Linearkombinationen.

**Von Indikatorfunktionen zu Treppenfunktionen**

Treppenfunktionen  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sind Linearkombinationen von Indikatorfunktionen  $\mathbf{I}_Q$  endlicher Quader  $Q \subseteq \Omega$ . Anders gesagt, die Indikatorfunktionen  $\mathbf{I}_Q$  sind ein Erzeugendensystem von  $T(\Omega)$ .

Sie sind jedoch keine Basis: Die Darstellung  $f = \sum_{k=1}^r c_k \mathbf{I}_{Q_k}$  ist keineswegs eindeutig! Man kann jede Treppenfunktion  $f$  auf unendlich viele Weisen als Summe  $f = \sum_{k=1}^s c'_k \mathbf{I}_{Q'_k}$  schreiben.

Glücklicherweise ist das obige Integral  $\int f$  dennoch wohldefiniert, wie wir in B1A und C1A nachrechnen: Aus  $\sum_{k=1}^r c_k \mathbf{I}_{Q_k} = \sum_{k=1}^s c'_k \mathbf{I}_{Q'_k}$  folgt tatsächlich  $\sum_{k=1}^r c_k \text{vol}_n(Q_k) = \sum_{k=1}^s c'_k \text{vol}_n(Q'_k)$ . Alles wird gut!

Die Quader  $Q_k$  dürfen sich überlappen, man kann sie aber auch stets disjunkt wählen. Die Treppenfunktion  $f$  der obigen Skizze zum Beispiel kann man darstellen als Summe über zwei Rechtecke, oder auch als Summe über (mindestens fünf) disjunkte Rechtecke. Sehen Sie wie?

Hieraus folgen weitere schöne Eigenschaften: Mit  $f, g$  sind auch das Produkt  $f \cdot g$  sowie  $\min(f, g)$  und  $\max(f, g)$  Treppenfunktionen. Das Integral ist zudem monoton, das heißt, aus  $f \leq g$  folgt  $\int f \leq \int g$ .

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Quader. Messbare Funktionen  $f: \Omega \rightarrow [0, \infty]$  und ihr Integral  $\int_{\Omega} f \in [0, \infty]$  definieren wir nach folgenden fünf Grundregeln:

- (1) **Normierung:** Für jeden endlichen Quader  $A \subseteq \Omega$  ist die zugehörige Indikatorfunktion  $\mathbf{1}_A: \Omega \rightarrow [0, \infty]$  messbar, und es gilt  $\int_{\Omega} \mathbf{1}_A = \text{vol}_n(A)$ .  
 😊 Speziell für die Nullfunktion  $0 = \mathbf{1}_{\emptyset}$  folgt daraus  $\int_{\Omega} 0 = 0$ .
- (2) **Linearität:** Sind  $f, g$  messbar, so auch jede Positivkombination  $af + bg$  mit  $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , und es gilt  $\int_{\Omega} (af + bg) = a \int_{\Omega} f + b \int_{\Omega} g$ .
- (3) **Monotonie:** Sind  $f, g$  messbar, so auch  $h = \max(g - f, 0)$ .  
 😊 Aus  $f \leq g$  folgt  $h = g - f$  und  $\int_{\Omega} f \leq \int_{\Omega} g$  dank Additivität (2).
- (4) **Einschachtelung:** Gilt  $f_0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq h \leq \dots \leq g_2 \leq g_1 \leq g_0$  mit  $f_k, g_k$  messbar und  $\int_{\Omega} (g_k - f_k) \searrow 0$ , so ist auch  $h$  messbar.  
 😊 Dank Monotonie (3) folgt daraus  $\int_{\Omega} f_k \nearrow \int_{\Omega} h \searrow \int_{\Omega} g_k$ .
- (5) **Ausschöpfung:** Sind  $f_0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$  messbar mit  $f_k \nearrow f$ , so ist auch  $f$  messbar, und es gilt  $\int_{\Omega} f_k \nearrow \int_{\Omega} f$  (monotone Konvergenz).  
 😊 Genial einfach. Einfach genial. Das alles passt auf eine Postkarte.

Wir formulieren hier sorgsam, welche grundlegenden Eigenschaften (1–5) das Integral haben soll. Hieraus werden wir alle nötigen Rechenregeln ableiten, sowie zahlreiche Tricks und Kunstgriffe. Man könnte befürchten, dass wir hier zu wenig verlangen, und sich unser Integralbegriff später als unzureichend erweist. Die Erfahrung zeigt, dass dies nicht der Fall ist: Die obige Definition ist das Destillat einer jahrhundertelangen Entwicklung und hat sich als Grundlage überall bewährt.

Es könnte andererseits auch sein, dass wir hier zu viel verlangen, und sich diese Wünsche nicht erfüllen lassen. Was kann schiefgehen? Man könnte etwa befürchten, dass eine Funktion  $f$  auf einem Rechenweg das Integral  $\int_{\Omega} f = 42$  zugeordnet wird, und auf einem anderen Rechenweg das Integral  $\int_{\Omega} f = 17$ . Unsere Definition wäre dann in sich widersprüchlich und somit wertlos. Solche warnenden Beispiele begegnen uns tatsächlich bei falscher Anwendung des HDI [B415], des Satzes von Fubini [C409] [C413] oder Grenzwerten unter dem Integral [D107] [D409].

Kurz gesagt: Wir dürfen uns vieles wünschen, aber nicht alles ist erfüllbar. Vor allem müssen wir Mehrdeutigkeiten und Widersprüche vermeiden! Dies sicherzustellen, ist die Hauptaufgabe der mathematischen Ausarbeitung, die wir hier nicht unternehmen. Die folgenden Sätze besagen, dass die hier gegebene Definition tatsächlich zu einem wohldefinierten Integralbegriff führt. Immerhin können wir so die zugrundeliegenden Ideen präzise als Definitionen formulieren; das ist das bescheidene Ziel dieses Kapitels und die unverzichtbare Grundlage für alles Weitere.

*The method of postulating what we want has many advantages; they are the same as the advantages of theft over honest toil.*  
 (Bertrand Russell, 1872–1970, *Introduction to Mathematical Philosophy*)

Satz A3D: Treppenfunktionen und ihr Integral

Wünsche (1–3) lassen sich erfüllen. Die kleinste Funktionenmenge, für die dies möglich ist, sind die **Treppenfunktionen**  $f: \Omega \rightarrow [0, \infty[$ ,

$$f = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \mathbf{1}_{Q_k} \quad \text{mit } c_k \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ und } Q_k \subseteq \mathbb{R}^n \text{ endliche Quader.}$$

Hierauf ist das Integral eindeutig durch (1–3) bestimmt, denn es gilt

$$\int_{\Omega} f = \int_{\Omega} \left[ \sum_{k=1}^{\ell} c_k \mathbf{1}_{Q_k} \right] = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \left[ \int_{\Omega} \mathbf{1}_{Q_k} \right] = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \text{vol}_n(Q_k).$$

**Beweisidee:** Eigenschaften (1–3) ziehen die obige Summenformel für das Integral nach sich. Umgekehrt ist diese Summenformel auf Treppenfunktionen wohldefiniert und erfüllt (1–3). Wohldefiniertheit ist trickreich: Wir beweisen sie sorgsam zunächst für Treppenfunktionen in Dimension  $n = 1$  (Satz B1A), dann induktiv in jeder Dimension  $n = 2, 3, 4, \dots$  (Satz C1A). Treppenfunktionen sind ein guter Ausgangspunkt, reichen aber für realistische Anwendungen noch nicht aus. Zu allgemeineren Funktionen gelangen wir durch Grenzübergang (4) und (5).

Bestünde die Welt nur aus Treppenfunktionen, so wären wir jetzt fertig. Allgemeinere Funktionen  $f: \Omega \rightarrow [0, \infty]$  integrieren wir im Folgenden mit Hilfe von Treppenfunktionen durch Einschachtelung und Ausschöpfung. Wir nutzen zunächst die Einschachtelung (4): Zum kompakten Quader  $\Omega$  und jeder beschränkten Funktion  $f: \Omega \rightarrow [0, \infty[$  definieren wir ihr

$$\text{Unterintegral } I(f) := \sup \left\{ \sum_{k=1}^{\ell} a_k \text{vol}_n(A_k) \mid \sum_{k=1}^{\ell} a_k \mathbf{1}_{A_k} \leq f \right\} \in [0, \infty[,$$

$$\text{Oberintegral } J(f) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\ell} b_k \text{vol}_n(B_k) \mid f \leq \sum_{k=1}^{\ell} b_k \mathbf{1}_{B_k} \right\} \in [0, \infty[,$$

wobei  $A_k, B_k \subseteq \Omega$  Quader sind und  $a_k, b_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  für alle  $k = 1, \dots, \ell$ . Dank (3) folgt aus dieser Definition sofort die Ungleichung  $I(f) \leq J(f)$ . Wir nennen  $f$  **Riemann-integrierbar**, wenn hierbei  $I(f) = J(f)$  gilt; in diesem Falle definieren wir ihr **Integral** durch  $\int_{\Omega} f := I(f) = J(f)$ . Man prüft geduldig alle Forderungen nach: Die Riemann-integrierbaren Funktionen und ihr Integral erfüllen alle Axiome (1–4), wie gewünscht.

Satz A3E: Riemann 1854, Darboux 1875

Wünsche (1–4) lassen sich erfüllen. Die kleinste Funktionenmenge, für die dies möglich ist, sind die **Riemann-integrierbaren Funktionen**  $f: \Omega \rightarrow [0, \infty[$ . Hierauf ist das Integral eindeutig durch (1–4) bestimmt.

- 😊 Die Konstruktion über Riemann-Summen kennen Sie aus der HM2.
- 😊 Diese Menge enthält alle Treppenfunktionen und noch viel mehr, z.B. stetige Funktionen  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  auf kompakten Quadern  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ .
- 😞 Viele für uns wichtige Funktionen sind nicht Riemann-integrierbar.

Satz A3F: Charakterisierung R-integrierbarer Funktionen

Genau dann ist  $f$  Riemann-integrierbar, wenn  $f$  beschränktem Träger und beschränktem Wertebereich hat und zudem fast überall stetig ist.

Beschränkter Träger heißt: Es gibt einen kompakten Quader  $Q \in \Omega$ , sodass  $f(x) = 0$  für alle  $x \notin Q$  gilt. Beschränkter Wertebereich heißt: Es gibt ein kompaktes Intervall  $[a, b] \in \mathbb{R}$ , sodass  $f(\Omega) \subseteq [a, b]$  gilt. Insbesondere darf  $f$  keine Polstellen haben, sonst wäre sie unbeschränkt. Fast überall stetig heißt: Für die Menge  $U \subseteq \Omega$  der Unstetigkeitsstellen gilt  $\text{vol}_n(U) = 0$ .

Das Integrationsprinzip durch Einschachtelung geht zurück auf Bernhard Riemann: *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*, Habilitationsschrift 1854. Der Satz A3E von Riemann besagt, dass wir über Treppenfunktionen und Einschachtelung einen sinnvollen Integralbegriff erhalten. (Die Bedingung  $f \geq 0$  spielt hierbei noch keine Rolle.)

Das Einschachtelungsprinzip kann man direkt zur numerischen Näherung nutzen, insbesondere wenn eine exakte Rechnung zu aufwändig ist – oder in geschlossener Form gar unmöglich ist.

Satz A3F charakterisiert die Riemann-integrierbaren Funktionen. Einerseits ist diese Menge recht groß: Sie enthält alle stetigen Funktionen. Andererseits sind viele wichtige Funktionen nicht Riemann-integrierbar, insbesondere solche mit Polstellen oder unbeschränktem Träger. Man kann versuchen, „Integration light“ zu lehren, und zum Beispiel die Entwicklung bei Riemann im 19. Jahrhundert enden zu lassen. Selbst in einfachen Anwendungen wird jedoch mehr gebraucht! Deshalb will ich Ihnen die Errungenschaften des 20. Jahrhunderts mitgeben.

Das Integrationsprinzip durch Ausschöpfung geht zurück auf Henri Lebesgue: *Sur une généralisation de l'intégrale définie*, Comptes Rendus de l'Académie de Sciences 132 (1901), pp. 1025–1028. Der folgende Satz A3G von Lebesgue besagt, dass wir so einen sinnvollen und wohldefinierten Integralbegriff erhalten. Kurz gesagt: Lebesgue vervollständigt das von Riemann eingeführte Integral. Die Rechenregeln werden hierdurch wesentlich allgemeiner, flexibler und oft sogar einfacher! (Die Beweise sind etwas technischer, aber das ist hier nicht unsere Sorge.)

Die fünf Grundregeln erlauben im Prinzip bereits die Berechnung; *effiziente Rechenregeln* sind anschließend ein eigenes Thema. Wir werden einige davon in den nächsten Kapiteln erarbeiten.

Lassen sich die simplen aber strengen Anforderungen (1–5) erfüllen? Das ist keineswegs offensichtlich und war lange ein offenes Problem!

Henri Lebesgue verdanken wir folgende einfach-geniale Konstruktion: Wir erweitern endliche Riemann-Summen zu abzählbaren Reihen. Zu jeder nicht-negativen Funktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$  definieren wir ihr

$$\text{Unterintegral } I(f) := \sup \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{vol}_n(A_k) \mid \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathbf{1}_{A_k} \leq f \right\} \in [0, \infty[,$$

$$\text{Oberintegral } J(f) := \inf \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{vol}_n(B_k) \mid f \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k \mathbf{1}_{B_k} \right\} \in [0, \infty[,$$

wobei  $A_k, B_k \subseteq \Omega$  endliche Quader sind und  $a_k, b_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Man folgert aus dieser Definition zunächst die Ungleichung  $I(f) \leq J(f)$ . Die Funktion  $f$  nennen wir **Lebesgue-messbar**, wenn  $I(f) = J(f)$  gilt; in diesem Falle definieren wir ihr **Integral** durch  $\int_{\Omega} f := I(f) = J(f)$ . Man prüft geduldig alle Forderungen nach: Die Lebesgue-messbaren Funktionen und ihr Integral erfüllen alle Axiome (1–5), wie gewünscht.

Satz A3G: Lebesgue 1901

Wünsche (1–5) lassen sich erfüllen. Die kleinste Funktionenmenge, für die dies möglich ist, sind die **Lebesgue-messbaren Funktionen**  $f: \Omega \rightarrow [0, \infty]$ . Hierauf ist das Integral eindeutig durch (1–5) bestimmt.

😊 Die nächsten Kapitel entwickeln praktische Rechenmethoden.

Satz A3H: Messbarkeit ist unkaputtbar

- (a) Alle Treppenfunktionen und alle stetigen Funktionen sind messbar.
- (b) Mit  $f, g$  sind  $f + g$  und  $f \cdot g$  sowie  $\min(f, g)$  und  $\max(f, g)$  messbar.
- (c) Konvergiert  $f_k \rightarrow f$  und sind alle  $f_k$  messbar, so ist auch  $f$  messbar.

😊 Ganz einfach: Alle für uns wichtigen Funktionen sind messbar!

Die ersten beiden Aussagen gelten auch für Riemann-integrierbare Funktionen. Vollständigkeit unter Grenzübergängen gilt erst für die größere Klasse aller Lebesgue-messbaren Funktionen!

Im Folgenden werden wir Funktionen stets als messbar voraussetzen. Da wir in dieser Vorlesung keine einzige nicht-messbare Funktion sehen werden, könnte ich ebenso gut den vorsichtigen Zusatz „Sei  $f$  eine messbare Funktion...“ weglassen. Ich bringe das oft nicht übers Herz.

Bislang war der Integrationsbereich ein Quader  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , etwa  $\Omega = \mathbb{R}^n$ . Unsere Konstruktion gelingt ebenso für jede offene Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Integrale über beliebige Teilmengen  $A \subseteq \Omega$  erklären wir wie folgt:

**Definition A3I: Integration über beliebige Bereiche**

Zu jeder Funktion  $f: \Omega \supseteq A \rightarrow [0, \infty]$  definieren wir ihre **Fortsetzung**

$$\tilde{f}: \Omega \rightarrow [0, \infty] : x \mapsto \tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{für } x \notin A. \end{cases}$$

Wir nennen die Funktion  $f$  auf  $A$  **messbar**, wenn ihre Fortsetzung  $\tilde{f}$  auf  $\Omega$  messbar ist. In diesem Falle definieren wir ihr **Integral** durch

$$\int_A f(x) dx := \int_{\Omega} \tilde{f}(x) dx.$$

😊 Das nutzen wir häufig zur Integration über  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  in  $\Omega = \mathbb{R}^n$ . Damit lässt sich die Integration auf allgemeine Bereiche anwenden, insbesondere mit dem Satz von Fubini auf Normalbereiche (Kapitel C).

Wir betrachten einen Integrationsbereich  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , zum Beispiel  $\Omega = \mathbb{R}^n$ .

**Satz A3J: messbare Mengen und ihr Volumen**

Genau dann ist eine Menge  $A \subseteq \Omega$  messbar, wenn ihre Indikatorfunktion  $\mathbf{I}_A: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  messbar ist. In diesem Falle gilt für ihr Volumen

$$\text{vol}_n(A) = \int_A 1 dx := \int_{\Omega} \mathbf{I}_A(x) dx.$$

Ist die Funktion  $f: \Omega \rightarrow [0, \infty]$  messbar, so auch  $\mathbf{I}_A \cdot f$ , und es gilt

$$\int_A f(x) dx := \int_{\Omega} \mathbf{I}_A(x) f(x) dx.$$

Sind diese Integral endlich, so nennen wir  $A$  bzw.  $f$  über  $A$  integrierbar.

😊 Wenn Sie integrieren können, dann können Sie damit auch Volumina bestimmen. Die Indikatorfunktion  $\mathbf{I}_A$  schneidet außerhalb von  $A$  alles ab.  
😊 Oft integrieren wir statt über  $A$  lieber über die schönere Menge  $\Omega$ .

**Übung:** (1) Für je zwei Teilmengen  $A, B \subseteq \Omega$  gilt

$$\mathbf{I}_A \leq \mathbf{I}_B \quad \text{genau dann, wenn} \quad A \subseteq B.$$

(2) Für Schnitt und Vereinigung von Mengen gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{A \cap B} &= \min(\mathbf{I}_A, \mathbf{I}_B) = \mathbf{I}_A \cdot \mathbf{I}_B, \\ \mathbf{I}_{A \cup B} &= \max(\mathbf{I}_A, \mathbf{I}_B) = \mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B - \mathbf{I}_A \cdot \mathbf{I}_B. \end{aligned}$$

(3) Für Produkt und Summe von Indikatorfunktionen gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_A \cdot \mathbf{I}_B &= \mathbf{I}_{A \cap B}, \\ \mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B &= \mathbf{I}_{A \cup B} + \mathbf{I}_{A \cap B}. \end{aligned}$$

Bei disjunkter Vereinigung gilt  $A \cap B = \emptyset$ , und der letzte Term entfällt.

(4) Für das kartesische Produkt von zwei Mengen  $A \subseteq \mathbb{R}^p$  und  $B \subseteq \mathbb{R}^q$  sowie je zwei Punkte  $x \in \mathbb{R}^p$  und  $y \in \mathbb{R}^q$  gilt die Produktformel

$$\mathbf{I}_{A \times B}(x, y) = \mathbf{I}_A(x) \cdot \mathbf{I}_B(y).$$

Durch Integration erhalten wir hieraus die folgenden Rechenregeln.

Sind  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  messbar, so auch  $A \cap B$  und  $A \cup B$ , und es gilt

$$\text{vol}(A) + \text{vol}(B) = \text{vol}(A \cup B) + \text{vol}(A \cap B).$$

Bei disjunkter Vereinigung entfällt der letzte Term, daher gilt

$$\text{vol}(A \cup B) = \text{vol}(A) + \text{vol}(B) \quad \text{falls} \quad A \cap B = \emptyset.$$

Sind die Mengen  $A_1, A_2, A_3, \dots \subseteq \mathbb{R}^n$  messbar, so gilt

$$\text{vol}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) \leq \text{vol}(A_1) + \text{vol}(A_2) + \text{vol}(A_3) + \dots$$

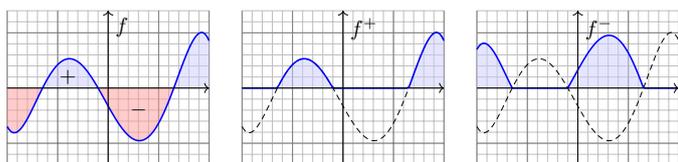
Gleichheit gilt, wenn alle  $A_1, A_2, A_3, \dots$  paarweise disjunkt sind.

$$A \subseteq B \implies \text{vol}(A) \leq \text{vol}(B).$$

Sind  $A \subseteq \mathbb{R}^p$  und  $B \subseteq \mathbb{R}^q$  messbar, so auch  $A \times B \subseteq \mathbb{R}^{p+q}$ , und es gilt

$$\text{vol}(A \times B) = \text{vol}(A) \cdot \text{vol}(B).$$

Bislang haben wir das Integral nur für nicht-negative Funktionen erklärt; das entspricht der Idee des Volumens und vereinfacht die Formulierung. Zu integrieren sei nun eine Funktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ . Wo immer  $f$  negativ ist, ist das Volumen negativ in Ansatz zu bringen.



Wir zerlegen  $f = f^+ - f^-$  in **Positivteil**  $f^+$  und **Negativteil**  $f^-$  gemäß

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } f(x) > 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{falls } f(x) < 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beim Integral soll  $f^-$  negativ zählen, also  $\int_{\Omega} f := \int_{\Omega} f^+ - \int_{\Omega} f^-$ .

⚠ Diese Differenz ist nur sinnvoll, wenn beide Integrale endlich sind.

**Definition A3K: absolut integrierbare Funktionen und ihr Integral**

Für jede Funktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  gilt  $f = f^+ - f^-$  und  $|f| = f^+ + f^-$ . Genau dann ist  $f$  **messbar**, wenn  $f^{\pm}: \Omega \rightarrow [0, \infty]$  messbar sind.

(1) In diesem Falle ist auch  $|f| = f^+ + f^-$  messbar, und somit gilt

$$\int_{\Omega} |f(x)| dx = \int_{\Omega} f^+(x) dx + \int_{\Omega} f^-(x) dx.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so nennen wir  $f$  (**absolut**) **integrierbar**. In diesem Falle können wir das Integral von  $f$  definieren durch

$$\int_{\Omega} f(x) dx := \int_{\Omega} f^+(x) dx - \int_{\Omega} f^-(x) dx.$$

⚠ Die Differenz  $\infty - \infty$  ist sinnlos! Zur Integration von  $f = f^+ - f^-$  müssen Positivteil  $f^+$  und Negativteil  $f^-$  endliche Integrale liefern.

😊 Das Kriterium  $\int_{\Omega} |f(x)| dx < \infty$  ist einfach, präzise und bequem. Geschickte Abschätzung vermeidet die mühsame Berechnung von  $f^{\pm}$ .

**Satz A3L: absolut integrierbare Funktionen und ihr Integral**

Wir betrachten einen Integrationsbereich  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , zum Beispiel  $\Omega = \mathbb{R}^n$ . Die Menge aller (messbaren und) absolut integrierbaren Funktionen

$$L^1(\Omega) = L^1(\Omega, \mathbb{R}) := \{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} |f(x)| dx < \infty \}$$

ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Hierauf ist das Integral eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung

$$L^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \int_{\Omega} f(x) dx.$$

Sie ist normiert, monoton, erfüllt Einschachtelung und Ausschöpfung. Durch diese fünf Eigenschaften ist das Integral eindeutig bestimmt.

😊 Damit haben wir die Konstruktion des Integrals abgeschlossen! Es erfüllt unsere Wunschliste und ist hierdurch eindeutig bestimmt. Das so definierte Integral ist tatsächlich  $\mathbb{R}$ -linear. Das ist eine erste wichtige Rechenregel! Der Nachweis ist einfach, aber etwas länglich. In den nächsten Kapiteln geht es um weitere praktische Rechenregeln. Die explizite Berechnung von Integralen erfordert Werkzeug und Übung!

Wir haben in diesem Kapitel folgende **Konstruktionsaufgabe** gelöst:

$$(\text{integrierbare Funktion } f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}) \mapsto (\text{Integral } \int_{\Omega} f(x) dx)$$

Wie definieren wir das Integral? **Geometrische Bedeutung!**

- Quader Volumen für Treppenfunktionen.
- Einschachtelung für stetige Funktionen.
- Ausschöpfung zwecks Vollständigkeit.

Welche Funktionen sind messbar? **Alle für uns wichtigen!**

- Alle Treppenfunktionen
- Alle stetigen Funktionen
- Vollständig unter Grenzübergang

Wie gehen wir effizient damit um? **Praktische Rechenregeln!**

- Hauptsatz der Differential und Integralrechnung (B1I)
- Fubini (C1E): Reduktion auf iterierte eindimensionale Integrale
- Transformationssatz (C2B): Wahl neuer Variablen als Koordinaten

Viele Anwendungen nutzen neben reellen auch komplexe Funktionen. Jede komplexe Funktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  können wir zerlegen in ihren

**Realteil**  $\text{Re } f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \text{Re } f(x)$  und  
**Imaginärteil**  $\text{Im } f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \text{Im } f(x)$ .

Hieraus lässt sich  $f$  zusammensetzen gemäß  $f = \text{Re } f + i \text{Im } f$ . Es gilt  $|f|^2 = |\text{Re } f|^2 + |\text{Im } f|^2$  und  $|\text{Re } f|, |\text{Im } f| \leq |f| \leq |\text{Re } f| + |\text{Im } f|$ .

**Definition A4A: absolut integrierbare Funktionen und ihr Integral**

Wir nennen  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  **messbar**, wenn  $\text{Re } f$  und  $\text{Im } f$  messbar sind.

Wir nennen  $f$  **integrierbar**, wenn  $\text{Re } f$  und  $\text{Im } f$  integrierbar sind.

Äquivalent hierzu: die Funktion  $f$  ist messbar und  $\int_{\Omega} |f| < \infty$ .

In diesem Falle können wir das Integral von  $f$  definieren durch

$$\int_{\Omega} f := \int_{\Omega} \text{Re } f + i \int_{\Omega} \text{Im } f.$$

Ebenso wie für reelle Funktionen  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  bilden auch für komplexe Funktionen  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  die absolut integrierbaren einen Vektorraum:

**Satz A4B: absolut integrierbare Funktionen und ihr Integral**

Wir betrachten einen Integrationsbereich  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , zum Beispiel  $\Omega = \mathbb{R}^n$ . Die Menge aller (messbaren und) absolut integrierbaren Funktionen

$$L^1(\Omega) = L^1(\Omega, \mathbb{C}) := \{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{\Omega} |f(x)| dx < \infty \}$$

ist ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum. Hierauf ist das Integral eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung

$$L^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}: f \mapsto \int_{\Omega} f(x) dx.$$

- ☺ Wegen  $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$  ist das reelle Integral ein Spezialfall des komplexen. Über  $\mathbb{R}$  nutzen wir zudem Monotonie, Einschachtelung, Ausschöpfung.
- ☺ Von  $\mathbb{R}$  zu  $\mathbb{C}$  genügt die Zerlegung in Real- und Imaginärteil, und die  $\mathbb{R}$ -Linearität überträgt unsere Rechenregeln aufs komplexe Integral.
- ☺ Das so definierte Integral ist tatsächlich  $\mathbb{C}$ -linear. Das ist eine sehr nützliche Rechenregel! Der Nachweis ist einfach, aber etwas länglich.

**Satz A4C: Zerlegung und Betragsabschätzung**

Seien  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  messbar und  $f: A \cup B \rightarrow \mathbb{C}$  absolut integrierbar.

(1) Das Integral ist linear; dank  $\mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B = \mathbf{I}_{A \cup B} + \mathbf{I}_{A \cap B}$  folgt daher:

$$\int_A f(x) dx + \int_B f(x) dx = \int_{A \cup B} f(x) dx + \int_{A \cap B} f(x) dx$$

(2) Im Falle  $\text{vol}_n(A \cap B) = 0$  entfällt der letzte Term. Insbesondere:

$$\int_{A \cup B} f(x) dx = \int_A f(x) dx + \int_B f(x) dx \quad \text{falls } A \cap B = \emptyset$$

(3) Für den Betrag des Integrals gilt folgende Abschätzung:

$$\left| \int_A f(x) dx \right| \leq \int_A |f(x)| dx \leq \sup_A |f| \cdot \text{vol}(A)$$

Bei diesem Produkt gilt die übliche Konvention  $\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty = 0$ .

**Aufgabe:** Rechnen Sie die Formeln aus A4C sorgfältig nach.

**Lösung:** (1) Mit  $A$  und  $B$  sind auch  $A \cup B$  und  $A \cap B$  messbar.

Wir setzen voraus, dass  $f$  auf  $A \cup B$  absolut integrierbar ist, also ebenso auf den Teilmengen  $A$  und  $B$  sowie  $A \cap B$  dank

$$\mathbf{I}_A \cdot |f|, \mathbf{I}_B \cdot |f|, \mathbf{I}_{A \cap B} \cdot |f| \leq \mathbf{I}_{A \cup B} \cdot |f|.$$

Für die Indikatorfunktionen wissen wir  $\mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B = \mathbf{I}_{A \cup B} + \mathbf{I}_{A \cap B}$ .

Multiplikation mit  $f$  und Linearität des Integrals ergeben sofort (1).

(2) Dies ist ein Spezialfall von (1) für  $\text{vol}_n(A \cap B) = 0$  dank (3).

(3) Ist  $f$  reell, so gilt  $-|f| \leq f \leq |f| \leq \sup |f|$ , dank Monotonie also

$$-\int_A |f(x)| dx \leq \int_A f(x) dx \leq \int_A |f(x)| dx \leq \sup_A |f| \cdot \text{vol}(A).$$

Im allgemeinen Fall ist  $f$  komplex. Sei  $z := \int f$ . Der Fall  $z = 0$  ist klar. Wir untersuchen den Fall  $z \neq 0$ . Für  $w := \bar{z}/|z|$  gilt  $wz = |z| \in \mathbb{R}$ , also:

$$\left| \int f \right| = w \int f = \int (wf) = \text{Re} \int (wf) = \int \text{Re}(wf) \leq \int |wf| = \int |f|$$

☺ Mengen  $N \subseteq \mathbb{R}^n$  vom Volumen Null sind meist vernachlässigbar.

**Definition A4D: Nullmenge**

Wir nennen  $N \subseteq \mathbb{R}^n$  eine **Nullmenge**, wenn  $\text{vol}_n(N) = 0$  gilt.

Aus den Rechenregeln für Integral und Volumen [A320] folgt für  $n \geq 1$ :

- Jede endliche / abzählbare Menge  $N \subseteq \mathbb{R}^n$  ist eine Nullmenge.
- Jeder Teilraum  $N \subseteq \mathbb{R}^n$  der Dimension  $< n$  ist eine Nullmenge.
- Jede abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist eine Nullmenge.
- Jede Teilmenge einer Nullmenge ist selbst eine Nullmenge.

**Satz A4E: Funktionen auf einer Nullmenge  $N \subseteq \mathbb{R}^n$**

Jede Funktion  $f: N \rightarrow \mathbb{R}$  ist integrierbar, und es gilt  $\int_N f(x) dx = 0$ .

Dasselbe gilt für Funktionen  $\tilde{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\tilde{f}(x) = 0$  für  $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$ .

**Beweis:** Dies folgt aus der Betragsabschätzung A4C:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x) dx \right| = \left| \int_N f(x) dx \right| \leq \sup |f| \cdot \text{vol}(N) = 0$$

**Definition A4F: Gleichheit fast überall**

Seien  $f, g: \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen. Es gilt  $f = g$  **fast überall**, wenn

$$N = \{ x \in \Omega \mid f(x) \neq g(x) \}$$

eine Nullmenge ist, also  $\text{vol}_n(N) = 0$  erfüllt. Das bedeutet  $f(x) = g(x)$  für alle  $x \in \Omega$  bis auf eine Ausnahmemenge  $N \subseteq \Omega$  vom Volumen Null.

☺ Wir dürfen integrierbare Funktionen auf jeder Nullmenge beliebig abändern, Integrierbarkeit und Integral bleiben dabei unverändert:

**Satz A4G: Verschwindungs- und Vergleichssatz**

- 1 Gilt  $f = g$  fast überall und ist  $f$  integrierbar, so auch  $g$ , und es gilt  $\int_A f = \int_A g$  für jede messbare Menge  $A \subseteq \Omega$ .
- 2 Genau dann gilt  $\int_{\Omega} |f| = 0$ , wenn  $f = 0$  fast überall gilt.
- 3 Seien  $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar. Genau dann gilt  $\int_A f = \int_A g$  für jede messbare Menge  $A \subseteq \Omega$ , wenn  $f = g$  fast überall gilt.

☺ Zwei fast überall gleiche Funktionen verhalten sich bei Integration genau gleich. Wir dürfen und werden sie meist als gleich betrachten.

**Beweis des Satzes:** (1) Gilt  $g = f$  fast überall, bis auf eine Nullmenge  $N \subseteq \Omega$ , so ist  $h := g - f$  fast überall Null, somit integrierbar (A4E), also auch  $g = f + h$ . Für  $A \subseteq \Omega$  messbar gilt  $\int_A g = \int_{A \setminus N} g + \int_N g = \int_{A \setminus N} f + \int_N g = \int_A f$ .

(2) Die Implikation „ $\Leftarrow$ “ folgt aus (1). Die Implikation „ $\Rightarrow$ “ sehen wir so: Sei  $\int_{\Omega} |f| = 0$ . Für  $A_k := \{ x \in \Omega \mid |f(x)| \geq \frac{1}{k} \}$  gilt  $0 \leq \text{vol}_n(A_k) \leq k \int_{\Omega} |f| = 0$ , also  $\text{vol}_n(A_k) = 0$ . Die Menge  $N := \{ x \in \Omega \mid f(x) \neq 0 \} = \{ x \in \Omega \mid |f(x)| > 0 \}$  ist abzählbare Vereinigung dieser Nullmengen,  $N = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ . Daraus folgt  $0 \leq \text{vol}_n(N) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}_n(A_k) = 0$ , siehe Seite A320, also  $\text{vol}_n(N) = 0$ . Alternativ: Aus  $A_k \supseteq N$  folgt  $0 = \text{vol}_n(A_k) \supseteq \text{vol}_n(N) = 0$ .

(3) Die Implikation „ $\Leftarrow$ “ folgt aus (1). Die Implikation „ $\Rightarrow$ “ sehen wir dank (2) so: Die Menge  $A = \{ x \in \Omega \mid f(x) > g(x) \}$  ist messbar, und es gilt  $\int_A (f - g) = 0$ , also ist  $A$  eine Nullmenge. Ebenso ist  $B = \{ x \in \Omega \mid g(x) > f(x) \}$  eine Nullmenge. Somit ist auch ihre Vereinigung  $N = A \cup B = \{ x \in \Omega \mid f(x) \neq g(x) \}$  eine Nullmenge.

Entsprechend definieren wir „ $f \leq g$  fast überall“ und „ $f \geq g$  fast überall“.

Ebenso sagen wir, es gilt **punktweise Konvergenz**  $f_k \rightarrow f$  fast überall, wenn die Menge  $N \subseteq \Omega$  aller Ausnahmepunkte eine Nullmenge ist, wenn also  $f_k(x) \rightarrow f(x)$  für alle  $x \in \Omega \setminus N$  gilt sowie  $\text{vol}_n(N) = 0$ .

☺ Für **stetige** Funktionen können wir diesen Test wie folgt verschärfen:

**Satz A4H: Verschwindungs- und Vergleichssatz**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Gilt  $f(a) \neq 0$  für ein  $a \in \Omega$ , dann existiert ein (beliebig kleiner) Quader  $Q \subseteq \Omega$  um  $a$  mit  $\int_Q f(x) dx \neq 0$ .

- 1 Gilt  $\int_Q f(x) dx = 0$  für alle Quader  $Q \subseteq \Omega$ , so folgt  $f = 0$ .
- 2 Sind  $g, h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und gilt  $\int_Q g(x) dx = \int_Q h(x) dx$  für alle Quader  $Q \subseteq \Omega$ , so folgt  $g = h$ , also  $g(x) = h(x)$  für alle  $x \in \Omega$ .

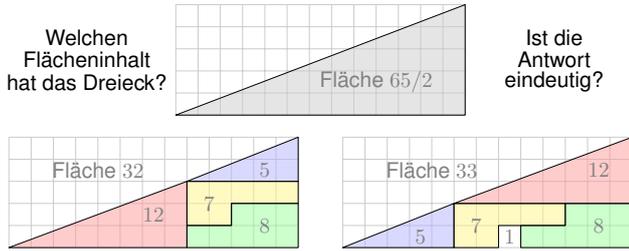
**Beweis:** Wir können  $f(a) = 2b > 0$  annehmen. (Für  $f(a) < 0$  betrachten wir  $-f$  statt  $f$ .) Da  $\Omega$  offen und  $f$  stetig ist, existiert um  $a$  ein kleiner Würfel  $Q \subseteq \Omega$  mit Kantenlänge  $\varepsilon > 0$ , sodass  $f(x) \geq b$  für alle  $x \in Q$  gilt. Das bedeutet  $f \cdot \mathbf{1}_Q \geq b \cdot \mathbf{1}_Q$ , dank Monotonie des Integrals also  $\int_Q f(x) dx \geq \int_Q b dx = b \text{vol}_n(Q) = b\varepsilon^n > 0$ . Hieraus folgt die Aussage (1).

Für (2) wenden wir (1) an auf die Differenz  $f = g - h$  und folgern  $f = 0$ . Das Argument gilt nicht nur für offene Mengen, sondern ebenso für jeden Quader  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$  mit nicht-leerem Inneren, und allgemeiner für jede Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , deren Randpunkte alle vom Inneren aus erreichbar sind: Gilt  $\int_Q f(x) dx = 0$  für alle Quader  $Q \subseteq \Omega$ , so gilt  $f = 0$  nach obigem Satz im Inneren von  $\Omega$ , und dank Stetigkeit auf seinem Abschluss, also ganz  $\Omega$ .

Verständnisfrage: das fehlende Quadrat

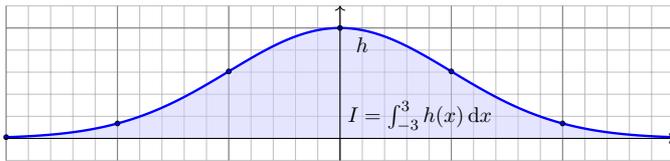
A409  
Übung

Wir können jeder messbaren Menge  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  ihren Flächeninhalt  $\text{vol}_2(A)$  zuordnen gemäß den fünf oben erklärten Grundregeln. **A102** Hieraus berechnen wir die Fläche von Rechtecken, Dreiecken, usw. Es ist bemerkenswert, dass das Ergebnis immer eindeutig ist, insbesondere unabhängig vom Rechenweg! Oder etwa doch nicht? Wir zerlegen das rechtwinklige Dreieck  $\Delta$  mit Kathetenlängen 13 und 5 wie skizziert und berechnen den Flächeninhalt  $\text{vol}_2(\Delta)$  auf drei Weisen:



Verständnisfrage: numerische Integration

A411  
Übung



Die Funktion  $h: [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  wächst auf  $[-3, 0]$  und fällt auf  $[0, 3]$ . Als Stützstellen haben wir nur die Daten  $h(0) = 1, h(\pm 1) \in [0.60, 0.61], h(\pm 2) \in [0.13, 0.14], h(\pm 3) \in [0.01, 0.02]$  jeweils auf  $10^{-2}$  genau.

**Aufgabe:** Wie groß ist  $I = \int_{-3}^3 h(x) dx$  mindestens? höchstens? Finden Sie die optimale Einschachtelung durch Treppenfunktionen!

**Lösung:** Die Monotonie von  $h$  und die gegebenen Stützstellen liefern  $f_0 \leq h \leq g_0$  mit  $f_0 = 0.01 \mathbf{I}_{[-3,-2]} + 0.13 \mathbf{I}_{[-2,-1]} + 0.60 \mathbf{I}_{[-1,0]} + \mathbf{I}_{(0)} + 0.60 \mathbf{I}_{[0,1]} + 0.13 \mathbf{I}_{[1,2]} + 0.01 \mathbf{I}_{[2,3]}$ ,  $g_0 = 0.02 \mathbf{I}_{[-3,-2]} + 0.14 \mathbf{I}_{[-2,-1]} + 0.61 \mathbf{I}_{[-1,-1]} + \mathbf{I}_{[-1,1]} + 0.61 \mathbf{I}_{[1,2]} + 0.14 \mathbf{I}_{[2,3]} + 0.02 \mathbf{I}_{[3]}$ . Dank Monotonie des Integrals erhalten wir die Schranken  $A_0 \leq I \leq B_0$ , hier mit den Werten  $A_0 = \int f_0(x) dx = 0.01 + 0.13 + 0.60 + 0.60 + 0.13 + 0.01 = 1.48$ ,  $B_0 = \int g_0(x) dx = 0.02 + 0.14 + 1.00 + 1.00 + 0.61 + 0.14 = 3.50$ . Dank richtiger Rundung ist diese Einschachtelung nachweislich korrekt und soweit optimal.

Verständnisfragen: Rechenregeln

A413  
Übung

**Aufgabe:** Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze Begründung (ein Ergebnis der Vorlesung oder ein Gegenbeispiel).

- (1) Gilt  $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) + g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx + \int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx$ ?
- (2) Gilt  $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \cdot \int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx$ ?
- (3) Aus  $f \leq g$  folgt  $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx$ ?
- (4) Aus  $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx$  folgt  $f \leq g$ ?
- (5) Gilt  $|\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx| = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx$ ? oder  $\geq$ ? oder  $\leq$ ?
- (6) Aus  $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx = 0$  folgt  $f = 0$ ? oder  $f = 0$  fast überall?
- (7) Aus  $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx = 0$  und  $f$  stetig folgt  $f = 0$ ?
- (8) Aus  $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = 0$  folgt  $f = 0$ ?

Hierbei seien  $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar. (Der Fall  $n = 1$  genügt, denn Skizzen sind dann leichter, der Fall  $n \geq 2$  verläuft jeweils genauso.)

**Lösung:** (1) Ja, das Integral ist linear. (2) Nein, Gegenbeispiel  $f = \mathbf{I}_{[0,1]}$  und  $g = \mathbf{I}_{[2,3]}$ . (3) Ja, das Integral ist monoton. (4) Nein, Gegenbeispiel  $f = \mathbf{I}_{[0,1]} - \mathbf{I}_{[1,2]}$  und  $g = 0$ . (5) Für  $f = \mathbf{I}_{[0,1]} - \mathbf{I}_{[1,2]}$  gilt „ $\leq$ “. Nur „ $\leq$ “ gilt immer. (6) Nein, Gegenbeispiel  $f = \mathbf{I}_{\{a\}}$ . Es gilt nur  $f = 0$  fast überall. (7) Ja, siehe oben. (8) Nein, Gegenbeispiel  $f = \mathbf{I}_{[0,1]} - \mathbf{I}_{[1,2]}$ .

Verständnisfragen: Nullmengen

A415  
Übung

- Aufgabe:** (1) Bestimmen Sie  $\text{vol}_1(\{a_1, \dots, a_n\}), \text{vol}_1(\mathbb{Q})$  und  $\text{vol}_1(\mathbb{R})$ . (2) Berechnen Sie  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx$ ; hierbei seien  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  in  $\mathbb{R}$  und die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  erfülle  $f(x) = 0$  für  $x \notin \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . (3) Berechnen Sie  $\int_{\mathbb{R}} g(x) dx$ ; hierbei sei die Funktion  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $g(x) = x$  für  $x \in \mathbb{N}$  und  $g(x) = 0$  für  $x \notin \mathbb{N}$ . (4) Bestimmen und vergleichen Sie das Volumen  $\text{vol}_2(\mathbb{R} \times \{a\})$  sowie

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{\mathbb{R} \times \{a\}}(x, y) dy dx := \int_{\mathbb{R}} f(x) dx, \quad f(x) := \int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{\mathbb{R} \times \{a\}}(x, y) dy,$$

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{\mathbb{R} \times \{a\}}(x, y) dx dy := \int_{\mathbb{R}} g(y) dy, \quad g(y) := \int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{\mathbb{R} \times \{a\}}(x, y) dx.$$

**Lösung:** (1) Für  $x \in \mathbb{R}^n$  ist  $\{x\} = [x_1, x_1] \times \dots \times [x_n, x_n]$  ein Quader mit  $\text{vol}_n(\{x\}) = 0$ . Aus der Additivität des Volumens folgt  $\text{vol}_n(\{a_1, \dots, a_n\}) = 0$  für jede endliche Menge. Die Menge  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen ist abzählbar, also  $\mathbb{Q} = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ . (Warum?) Durch Ausschöpfung folgt  $\text{vol}_1(\mathbb{Q}) = \lim \text{vol}_1(\{a_1, \dots, a_n\}) = \lim 0 = 0$ . (2) Es gilt  $f = \sum_{i=1}^n f(a_i) \mathbf{I}_{\{a_i\}}$ , dank Linearität  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \sum_{i=1}^n f(a_i) \text{vol}_1(\{a_i\}) = 0$ . (3) Wir schöpfen  $g$  aus durch die Funktionen  $g_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g_k(x) = x$  für  $x \in \{1, \dots, k\}$  und  $g_k(x) = 0$  sonst. Es gilt  $g_k \nearrow g$ , also  $\int_{\mathbb{R}} g(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g_k(x) dx = 0$  dank (2).

Verständnisfrage: das fehlende Quadrat

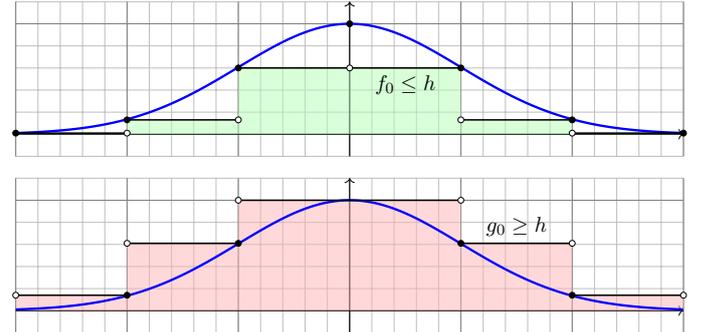
A410  
Übung

Für Volumen und Integral haben wir fünf Grundregeln: Normierung, Additivität / Linearität, Monotonie, Einschachtelung und Ausschöpfung. Satz A1A garantiert: Mit diesen fünf Grundregeln können wir jeder messbaren Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  eindeutig ihr Volumen  $\text{vol}_n(A) \in [0, \infty]$  zuweisen und ausrechnen. Allgemeiner garantiert Satz A3G: Mit diesen fünf Grundregeln können wir jeder messbaren Funktion  $f: \Omega \rightarrow [0, \infty]$  eindeutig ihr Integral  $\int_{\Omega} f(x) dx \in [0, \infty]$  zuweisen und ausrechnen. Die vorliegende Übung stellt diese zentrale Zusage auf die Probe! Sind die Sätze A1A und A3G falsch? Oder wo sonst liegt der Fehler?

**Lösung:** Die links gezeigten Mengen nennen wir  $A_5, A_7, A_8, A_{12}$ . Jede hat den angegebenen Flächeninhalt  $\text{vol}_2(A_k) = k$ . Je zwei sind fast disjunkt: Ihr Schnitt  $A_k \cap A_\ell$  ist eine Nullmenge, hat also Flächeninhalt  $\text{vol}_2(A_k \cap A_\ell) = 0$  für  $k \neq \ell$ . Dank unserer Rechenregeln erhalten wir für  $A = A_5 \cup A_7 \cup A_8 \cup A_{12}$  demnach den Flächeninhalt  $\text{vol}_2(A) = 5 + 7 + 8 + 12 = 32$ . Auf der rechten Seite betrachten wir entsprechend die Mengen  $B_1, B_5, B_7, B_8, B_{12}$ . Für ihre Vereinigung  $B = B_1 \cup B_5 \cup B_7 \cup B_8 \cup B_{12}$  erhalten wir  $\text{vol}_2(B) = 1 + 5 + 7 + 8 + 12 = 33$ . Für das Dreieck  $\Delta$  hingegen erhalten wir  $\text{vol}_2(\Delta) = 65/2 = 32.5$ . Die Skizze suggeriert  $A = \Delta = B$  und provoziert damit den Widerspruch. Bei genauerem Hinsehen erkennen Sie jedoch  $A \subsetneq \Delta \subsetneq B$ . Diese Einschachtelung zeigt  $\text{vol}_2(A) = 32 \leq \text{vol}_2(\Delta) \leq 33 = \text{vol}_2(B)$ . Alles wird gut! Der einzige Fehler liegt hier in der leichtfertigen Behauptung  $A = \Delta = B$ .

Verständnisfrage: numerische Integration

A412  
Übung



Allein aus diesen spärlichen Daten gewinnen wir eine (soweit optimale) Einschachtelung durch zwei Treppenfunktionen  $f_0 \leq h \leq g_0$ . Aus diesen berechnen wir möglichst genaue Ober- und Untergrenzen für das Integral  $I = \int_{-3}^3 h(x) dx$ . Die so berechneten Schranken sind leider noch sehr grob. Zwecks besserer Einschachtelung können wir die Rechnung durch weitere Stützstellen verfeinern und den verbleibenden Fehler beliebig klein machen, also  $B_n - A_n \searrow 0$  erreichen. Dies ist der erste Schritt in numerischer Integration; mehr hierzu erfahren Sie in der Numerik.

Verständnisfragen: Rechenregeln

A414  
Übung

Sie kennen und nutzen die Rechenregeln der reellen Zahlen  $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ : Assoziativität, Kommutativität, Neutrale, Inverse, Distributivität, Ordnung.

- Aufgabe:** (1) Formulieren Sie diese Rechenregeln einmal explizit aus. (2) Welche gelten noch für  $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ ? (3) Welche für  $([0, \infty], +, \cdot, <)$ ?

**Lösung:** (1) Zur Wiederholung zu  $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$  siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §0.2. Die erweiterte Zahlengerade  $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  haben wir auf Seite A205 erklärt: Addition, Multiplikation, Anordnung. Die kritischen Fälle sind  $0 \cdot (\pm\infty) = 0$  und  $(-\infty) = 0$ .

(2) Für  $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$  ist die Null neutral bei Addition. Die Eins ist neutral bei Multiplikation. Kommutativität gilt offensichtlich nach Tabelle. Alles andere ist jedoch nicht mehr gültig: Das Assoziativgesetz gilt in  $(\mathbb{R}, +)$  nicht, denn  $(\infty - \infty) + 1 = 0 + 1 = 1$  ist nicht gleich  $\infty + (-\infty + 1) = \infty - \infty = 0$ . Auch existiert zu  $\pm\infty$  in  $(\mathbb{R}, \cdot)$  kein multiplikatives Inverses. Das vertraute Distributivgesetz  $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$  gilt ebenfalls nicht, denn  $(\infty - 1) \cdot \infty = \infty \cdot \infty = \infty$  ist nicht gleich  $(\infty \cdot \infty) + (-1 \cdot \infty) = \infty - \infty = 0$ .

☹ Aus diesem Grund können wir in  $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$  nicht so schön einfach arbeiten wie in  $\mathbb{R}$ !

(3) Für  $([0, \infty], +, \cdot, <)$  gelten alle Rechenregeln, bis auf die Existenz der Inversen. Man prüft dies wie in (2) geduldig und gewissenhaft für jede Rechenregel einzeln nach.

☺ Aus diesem Grund können wir in  $[0, \infty]$  vernünftig arbeiten, zum Beispiel integrieren!

Verständnisfragen: Doppelintegrale

A416  
Übung

Wir untersuchen für  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  die Gültigkeit folgender Gleichung:

$$\int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx \stackrel{?}{=} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right) dy \stackrel{?}{=} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d(x, y)$$

Sie gilt für sehr viele Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  aber nicht für alle!

**Aufgabe:** (0) Gilt  $\mathbf{I}_{[a,b] \times [c,d]}(x, y) = \mathbf{I}_{[a,b]}(x) \cdot \mathbf{I}_{[c,d]}(y)$  für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ? Gilt für  $X \subseteq \mathbb{R}^p$  und  $Y \subseteq \mathbb{R}^q$  allgemein  $\mathbf{I}_{X \times Y}(x, y) = \mathbf{I}_X(x) \cdot \mathbf{I}_Y(y)$ ?

- (1) Berechnen und vergleichen Sie die drei obigen Integrale für die Indikatorfunktion  $f = \mathbf{I}_Q$  eines Rechtecks  $Q = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$ .
- (2) Gilt die Gleichung für alle Treppenfunktionen  $f = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \mathbf{I}_{Q_k}$ ? Bleibt sie erhalten bei Linearkombinationen  $f = \sum_{k=1}^n c_k f_k$ ?
- (3) Bleibt sie erhalten bei monotoner Konvergenz  $f_k \nearrow f$ ?
- (4) Skizzieren Sie  $f = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{I}_{[k, k+1] \times [k, k+1]} - \mathbf{I}_{[k+1, k+2] \times [k, k+1]}$ . **C414** Berechnen und vergleichen und bestaunen Sie die Doppelintegrale!

**Lösung:** Dies führen wir am Anfang von Kapitel C aus. Die Rechnungen beruhen allein auf der Definition des Integrals und sind schon jetzt unmittelbar möglich. Sie sind eine gute Übung, um sich mit dem zweidimensionalen Integral und dem Satz von Fubini vertraut zu machen!

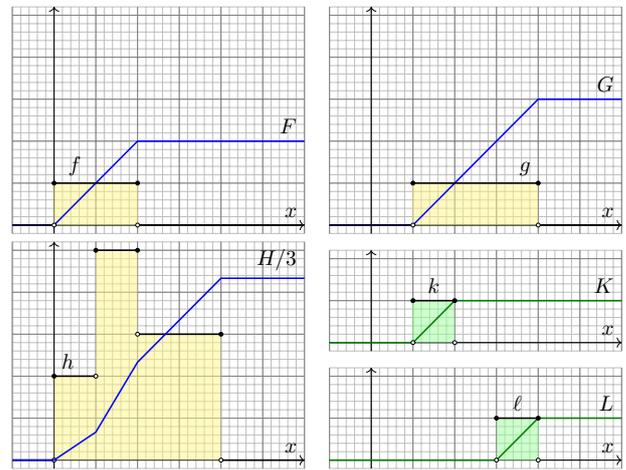
**Aufgabe:** Skizzieren Sie die Indikatorfunktion  $f = \mathbf{I}_{[0,2]}$ , sowie ihre Integralfunktion  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  und bestimmen Sie  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx$ .  
Dasselbe für  $g = \mathbf{I}_{[1,4]}$ , die Linearkombination  $h = 2f + 3g$ , das Produkt  $k = f \cdot g$ , die Skalierung  $\ell = f(2x - 6)$  und allgemein  $f(ax)$  und  $f(x + b)$ .  
Wie verhält sich das Integral  $\int_{\mathbb{R}} \dots dx$  unter diesen Operationen?

**Lösung:** Es gilt  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 2$  und  $\int_{\mathbb{R}} g(x) dx = 3$ . (Skizze!) Funktionen werden punktweise verknüpft, daher bleiben Summe und Produkt von Indikatorfunktionen stückweise konstant. Insbesondere sind auch Linearkombination  $h = 2f + 3g$  und Produkt  $k = f \cdot g$  wieder Treppenfunktionen, allerdings im Allgemeinen zu feineren Unterteilungen. (Skizze!)

Das Integral ist  $\mathbb{R}$ -linear, hier  $\int_{\mathbb{R}} 2f(x) + 3g(x) dx = 2 \int_{\mathbb{R}} f(x) dx + 3 \int_{\mathbb{R}} g(x) dx = 13$ . Das Integral ist insbesondere additiv, aber im Allgemeinen nicht multiplikativ! In unserem Beispiel gilt  $f \cdot g = \mathbf{I}_{[1,2]}$ , also  $\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x) dx = 1 \neq \int_{\mathbb{R}} f(x) dx \cdot \int_{\mathbb{R}} g(x) dx = 2 \cdot 3$ .

Bei  $f(x + b)$  wird  $f$  um  $b$  nach links (!) verschoben. Bei  $f(ax)$  wird  $f$  um  $a$  gestaucht (!), d.h.  $f(2x)$  hat die halbe Breite. Die Funktion  $f(2x - 6)$  entsteht aus  $f$  durch Verschieben um 6 nach rechts und anschließendes Stauchen um den Faktor 2. In unserem Beispiel  $f = \mathbf{I}_{[0,2]}$  gilt somit  $f(2x) = \mathbf{I}_{[0,1]}(x)$  und  $f(x - 6) = \mathbf{I}_{[6,8]}$  sowie  $f(2x - 6) = \mathbf{I}_{[3,4]}(x)$ . Skizze! Punktprobe!

Das Integral ist invariant unter Verschiebung, aber  $\int_{\mathbb{R}} f(ax) dx = |a|^{-1} \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$  für  $a \neq 0$ . Dies ist anschaulich der Flächeninhalt der in  $x$ -Richtung um den Faktor  $a$  gestauchten Funktion.



**Aufgabe:** Sei  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Quader und  $f = \mathbf{I}_Q$  seine Indikatorfunktion.  
(1) Sei  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}: g(x) = f(x - v)$  die um  $v \in \mathbb{R}^n$  verschobene Funktion. Ist auch  $g$  eine Indikatorfunktion? eines Quaders? Welches Quaders? Welche Beziehung gilt zwischen  $\int_{\mathbb{R}^n} f(x - v) dx$  und  $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$ ?  
(2) Sei  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}: h(x) = f(c^{-1}x)$  die um  $c \in \mathbb{R}_{>0}$  gestreckte Funktion. Ist auch  $h$  eine Indikatorfunktion? eines Quaders? Welches Quaders? Welche Beziehung gilt zwischen  $\int_{\mathbb{R}^n} f(c^{-1}x) dx$  und  $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$ ?

**Lösung:** (1) In Dimension  $n = 1$  betrachten wir Intervalle  $Q = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ : Genau dann gilt  $x - v \in [a, b]$ , wenn  $x \in [a + v, b + v]$  erfüllt ist.

Allgemein für jede Teilmenge  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$  und jeden Vektor  $v \in \mathbb{R}^n$  gilt  $x - v \in Q$  genau dann, wenn  $x \in Q + v := \{q + v \mid q \in Q\}$  erfüllt ist. Zum Quader  $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$  gilt hierbei  $Q + v = [a_1 + v_1, b_1 + v_1] \times \dots \times [a_n + v_n, b_n + v_n] \subseteq \mathbb{R}^n$ .

Für  $f = \mathbf{I}_Q$  gilt demnach  $g(x) = f(x - v) = \mathbf{I}_{Q+v}(x)$ , also  $g = \mathbf{I}_{Q+v}$ . Nach Definition A3B gilt  $\text{vol}_n(Q + v) = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n) = \text{vol}_n(Q)$ .

😊 Wir erhalten hier also  $\int_{\mathbb{R}^n} f(x - v) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$ . Gut zu wissen!

(2) In Dimension  $n = 1$  betrachten wir Intervalle  $Q = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ :  
Im Falle  $c > 0$  gilt  $c^{-1}x \in [a, b]$  genau dann, wenn  $x \in [ca, cb]$  erfüllt ist. Im Falle  $c < 0$  gilt  $c^{-1}x \in [a, b]$  genau dann, wenn  $x \in [cb, ca]$  erfüllt ist. Allgemein für jede Teilmenge  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$  und jeden Faktor  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  gilt  $c^{-1}x \in Q$  genau dann, wenn  $x \in cQ := \{cq \mid q \in Q\}$  erfüllt ist. Zum Quader  $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $c \in \mathbb{R}_{>0}$  ist hierbei  $cQ = [ca_1, cb_1] \times \dots \times [ca_n, cb_n] \subseteq \mathbb{R}^n$  der um  $c$  gestreckte Quader.  
Für  $c \in \mathbb{R}_{>0}$  gilt entsprechend  $cQ = [cb_1, ca_1] \times \dots \times [cb_n, ca_n] \subseteq \mathbb{R}^n$ : Die Streckung um den Faktor  $-1$  ist eine Punktspiegelung am Ursprung.  
Für  $f = \mathbf{I}_Q$  gilt demnach  $h(x) = f(c^{-1}x) = \mathbf{I}_{cQ}(x)$ , also  $g = \mathbf{I}_{cQ}$ .

Nach Definition A3B gilt für das Quadervolumen bei Streckung:

$$\begin{aligned} \text{vol}_n(cQ) &= |cb_1 - ca_1| \cdot \dots \cdot |cb_n - ca_n| \\ &= |c|^n (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n) = |c|^n \text{vol}_n(Q) \end{aligned}$$

😊 Wir erhalten hier also  $\int_{\mathbb{R}^n} f(c^{-1}x) dx = |c|^n \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$ . Ist das anschaulich klar? Machen Sie es sich klar!

**Satz A41:** Translationsinvarianz, Streckung und Stauchung

Gegeben sei eine messbare Funktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sowie ein beliebiger Streckfaktor  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und ein Verschiebungsvektor  $b \in \mathbb{R}^n$ .

(1) Dann ist auch die Funktion  $x \mapsto f(ax + b)$  messbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(ax + b)| dx = \frac{1}{|a|^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so ist  $f$  absolut integrierbar, und dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(ax + b) dx = \frac{1}{|a|^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx.$$

Verschiebung um einen Vektor  $b \in \mathbb{R}^n$  ändert den Wert des Integrals nicht. Stauchung um den Faktor  $a$  multipliziert das Integral mit  $1/|a|^n$ .

**Ausblick:** Transformation von Integralen werden wir in Kapitel C mit dem Transformationssatz wesentlich allgemeiner formulieren und zu einer zentralen praktischen Rechentechnik ausbauen. Speziell Verschiebung und Stauchung sind nützlich und dienen hier als erste schöne Illustration.

**Aufgabe:** Folgern Sie den Satz aus den fünf Grundregeln des Integrals:

- (1) Gilt die Aussage für Indikatorfunktionen  $f = \mathbf{I}_Q$  von Quadern?
- (2) Überträgt sie sich auf Treppenfunktionen  $f = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \mathbf{I}_{Q_k}$ ?
- (3) Bleibt sie erhalten bei Einschachtelung und Ausschöpfung?
- (4) Bleibt sie erhalten bei Zerlegung in Positiv- und Negativteil?

**Lösung:** (1) Ja, dies haben wir in der vorigen Aufgabe nachgerechnet. (2) Dank Linearität des Integrals gilt dann für jede Treppenfunktion:

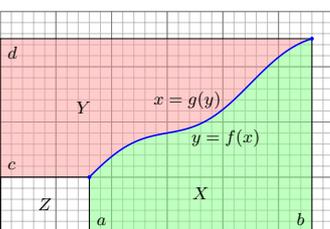
$$\begin{aligned} \int f(ax + b) dx &= \int \sum_{k=1}^{\ell} c_k \mathbf{I}_{Q_k}(ax + b) dx = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \int \mathbf{I}_{Q_k}(ax + b) dx \\ &= \sum_{k=1}^{\ell} \frac{c_k}{|a|^n} \int \mathbf{I}_{Q_k}(x) dx = \frac{1}{|a|^n} \sum_{k=1}^{\ell} c_k \int \mathbf{I}_{Q_k}(x) dx = \frac{1}{|a|^n} \int f(x) dx \end{aligned}$$

Die Aussage bleibt erhalten bei (3) Einschachtelung und Ausschöpfung und schließlich auch bei (4) Zerlegung in Positiv- und Negativteil. (Übung: Schreiben Sie dies wie in (2) ebenso geduldig aus.) Somit gilt die Aussage für alle messbaren Funktionen.

Die Funktion  $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$  sei stetig und streng monoton wachsend von  $f(a) = c$  nach  $f(b) = d$ , mit  $0 \leq a < b$  und  $0 \leq c < d$ . Dann existiert die Umkehrfunktion  $g: [c, d] \rightarrow [a, b]$  mit  $g \circ f = \text{id}_{[a,b]}$  und  $f \circ g = \text{id}_{[c,d]}$ . Auch  $g$  ist dann streng monoton wachsend, von  $g(c) = a$  nach  $g(d) = b$ .

**Aufgabe:** Die folgende Gleichung ist herzuleiten bzw. nachzuweisen:

$$\int_{x=a}^b f(x) dx + \int_{y=c}^d g(y) dy = bd - ac$$



**Lösung:** Die Graphik zeigt den geometrischen Beweis, ganz ohne Rechnung, gar ohne Worte. Falls gewünscht, hier die Worte: Das Rechteck  $Q = [0, b] \times [0, d] = X \cup Y \cup Z$  besteht aus  $X = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ ,  $Y = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, 0 \leq x \leq g(y)\}$  und  $Z = [0, a] \times [0, c]$ . Die drei Flächeninhalte addieren sich, denn  $X \cap Z = Y \cap Z = \emptyset$  und  $\text{vol}_2(X \cap Y) = 0$ . Mit  $\text{vol}_2(X) = \int_a^b f(x) dx$  und  $\text{vol}_2(Y) = \int_c^d g(y) dy$  folgt die Gleichung. (Allgemein: Youngs Integralgleichung C4K.)

Die Gleichung ist überraschend einfach, und der Beweis ist einfach-genial. Ist das nur ein naiver Taschenspielertrick, oder können wir die Rechnung begründen? Was genau benötigen wir dazu?

**Erste Methode:** Wir nutzen die (fast) disjunkte Vereinigung  $Q = X \cup Y \cup Z$  und „Das Integral ist der Flächeninhalt unter dem Graphen.“ Eine präzise, universelle Begründung liefert der Satz von Fubini C1E: Die zu messenden Mengen  $X$  und  $Y$  sowie  $X \cap Y$  sind Normalbereiche (C1G), daher gilt  $\text{vol}_2(X) = \int_a^b f(x) dx$  und  $\text{vol}_2(Y) = \int_c^d g(y) dy$  sowie  $\text{vol}_2(X \cap Y) = 0$ . (C1H)

**Zweite Methode:** Wir nutzen den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI, B11). Zu  $f$  und  $g$  existieren Stammfunktionen  $F$  und  $G$ . Die behauptete Formel besagt für  $x \in [a, b]$  gerade  $h(x) := F(x) - F(a) + G(f(x)) - G(f(a)) - xf(x) + af(a) \stackrel{!}{=} 0$ . Ableiten ergibt  $h'(x) = f(x) + g(f(x))f'(x) - f(x) - xf'(x) = 0$  dank Kettenregel und Produktregel. Somit ist  $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  konstant. Aus  $h(a) = 0$  folgt  $h = 0$ , also die behauptete Gleichung.

⚠ Hierzu müssen wir  $f$  als stetig differenzierbar voraussetzen. Steht die Formel erst einmal da, dann können wir sie so sehr leicht nachrechnen. Doch wie können wir sie überhaupt erst finden?

**Dritte Methode:** Zur Berechnung nutzen wir alle Regeln der Integrationskunst, wir substituieren  $y = f(x)$  und  $dy = f'(x) dx$ , nutzen die Eigenschaft  $g(f(x)) = x$  und integrieren partiell:

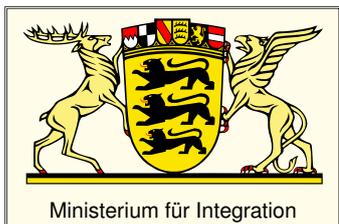
$$\begin{aligned} \int_{y=c}^d g(y) dy &\stackrel{\text{Subs}}{=} \int_{x=a}^b g(f(x))f'(x) dx &= \int_{x=a}^b xf'(x) dx \\ &\stackrel{\text{part}}{=} [xf(x)]_{x=a}^b - \int_{x=a}^b f(x) dx &= bd - ac - \int_{x=a}^b f(x) dx \end{aligned}$$

😊 Mehrere Wege führen also zum Ziel, alle sind lehrreich. Eine solide Grundlegung ist wichtig, damit wir genau wissen, wovon wir reden, und sicher rechnen können. Die Investition lohnt sich!

Kapitel B

Eindimensionale Integration

Differenzieren ist Handwerk,  
Integrieren ist Kunst.

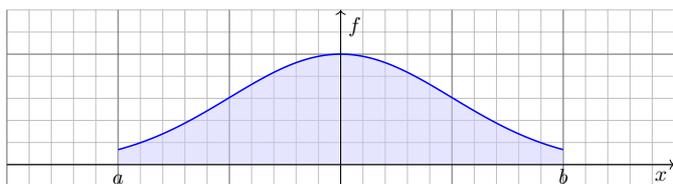


Inhalt dieses Kapitels B

- 1 Integration durch Einschachtelung (nach Riemann)
  - Treppenfunktionen und Integration durch Einschachtelung
  - Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
  - Integrationsregeln und elementare Integralformeln
- 2 Integration durch Ausschöpfung (nach Lebesgue)
  - Absolute Integration durch Ausschöpfung
  - Der Hauptsatz für integrierbare Funktionen
  - Uneigentliche Integrale und Cauchy-Hauptwert
- 3 Integrale und Reihen
  - Vergleich von Integral und Reihe
  - Stirling-Formel und Gamma-Funktion
  - Konvergenzkriterien von Abel, Leibniz und Dirichlet
- 4 Fazit: Eindimensionale Integration
  - Zusammenfassung und Verständnisfragen
  - Beispiele zur uneigentlichen Integration
  - Analytische und glatte Funktionen

Motivation und Zielsetzung

Das Integral  $\int_a^b f(x) dx$  misst die Fläche unter dem Graphen von  $f$ :



- 😊 Ist  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so reicht Einschachtelung zur Integration.
- 😊 Hieraus folgern wir nützliche Rechenregeln des Integrals:
  - Hauptsatz: Für  $F' = f$  gilt  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ .
  - Substitution:  $\int_a^b f(g(t)) g'(t) dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx$
  - Produktregel:  $\int_a^b f(x) g'(x) dx = [fg]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx$
- 😞 Manche Funktionen kann man so noch nicht integrieren.
- 😊 Für diese nutzen wir das Prinzip der Ausschöpfung.

Vorgehensweise

⚠ Das Integral  $\int_a^b f(x) dx$  ist zuerst Flächeninhalt und dann erst Stammfunktion, dank HDI! Aus Bequemlichkeit wird es oft umgekehrt dargestellt: Das ist gut gemeint, aber auch irreführend. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist keine *Definition* für das Integral, sondern eine *Folgerung*: Der HDI gilt nur eindimensional, für stetige Integranden auf einem Intervall  $[a, b]$ . Für die höherdimensionale Integration hat der Begriff der *Stammfunktion* zunächst keinen Sinn, *Flächeninhalt* und *Volumen* hingegen schon! Diese Sichtweise ist daher tragfähiger.

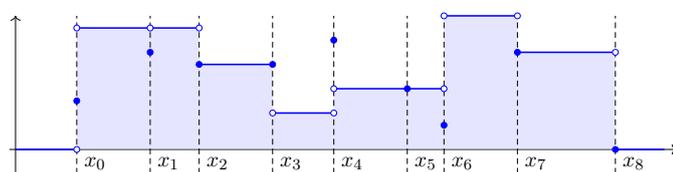
Wir beginnen mit eindimensionalen Treppenfunktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dank der Anordnung des reellen Zahlkörpers  $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$  sind diese sofort zugänglich. Hierauf können wir das Integral in der gewünschten Weise konstruieren und alle erhofften Eigenschaften nachrechnen (Satz B1A).

Getreu den im vorigen Kapitel A formulierten fünf grundlegenden Integrationsregeln erklären wir in diesem Kapitel die eindimensionale Integration durch *Einschachtelung* und *Ausschöpfung*. Es geht zunächst um die Grundlagen, die Sie aus der HM2 kennen und hier beherrschen müssen, sodann um die nötigen Vertiefungen sowie viele Beispiele. Damit soll dieses Kapitel den Weg ebnen zur mehrdimensionalen Integration, der wir uns in den folgenden Kapiteln widmen.

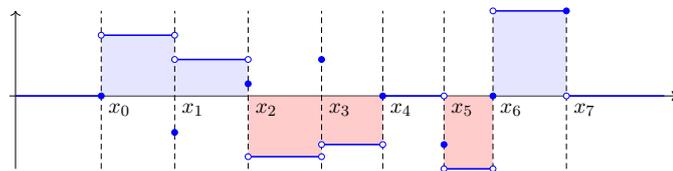
Für viele Anwendungen wichtig ist insbesondere das Zusammenspiel von *Integralen* und *Reihen*. Während es im Kapitel A zunächst um die *Definition* des Integrals ging, kommen wir in diesem Kapitel B zur Praxis des *Integrierens*. Das ist ein weites Feld, zu dem ich eine komprimierte Einführung gebe. Hier brauchen Sie Ihre Rechenfertigkeiten! Integrieren erfordert Geschick, Übung und Erfahrung, gemäß obigem Motto: *Differenzieren ist Handwerk, Integrieren ist Kunst*.

☐ Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, Kapitel 3.

Eindimensionale Treppenfunktionen



Treppenfunktionen sind stückweise konstant. Das Integral, also der Flächeninhalt unter dem Graphen, lässt sich hier leicht bestimmen als Summe der Rechteckflächen. Genau dies besagt die folgende Formel, und sie hat alle richtigen Eigenschaften! Pikantes Detail: In einzelnen Punkten  $x_0, x_1, \dots, x_\ell$  sind die Funktionswerte beliebig; sie fallen bei der Integration nicht ins Gewicht. Auf Intervallen, wo die Funktion negativ ist, wird der Flächeninhalt negativ in Ansatz gebracht.



Das Integral für eindimensionale Treppenfunktionen

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall. Eine Funktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Treppenfunktion**, wenn sie stückweise konstant ist. Ausführlich heißt das, es existiert eine Unterteilung  $U = \{x_0 < x_1 < \dots < x_\ell\} \subseteq \Omega$  und Werte  $f_1, \dots, f_\ell \in \mathbb{R}$ , so dass  $f(x) = f_k$  für  $x_{k-1} < x < x_k$ , sowie  $f(x) = 0$  für  $x < x_0$  und  $x > x_\ell$ . Bezüglich dieser Unterteilung  $U$  definieren wir das **Integral** von  $f$  durch

$$\int_{\Omega, U} f(x) dx := \sum_{k=1}^{\ell} f_k \cdot (x_k - x_{k-1}).$$

Satz B1A: Integration eindimensionaler Treppenfunktionen

Das Integral  $\int_{\Omega} f(x) dx$  ist wohldefiniert: Es hängt nur von der Funktion  $f$  ab, nicht jedoch von unserer willkürlichen Wahl einer Unterteilung  $U$ . Die Menge  $T(\Omega)$  aller Treppenfunktionen auf  $\Omega$  ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum; er wird erzeugt von den Indikatorfunktionen endlicher Intervalle  $Q \subseteq \Omega$ . Hierauf ist das Integral  $\int_{\Omega}: T(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  linear und normiert gemäß  $\int_{\Omega} \mathbf{I}_Q(x) dx = \text{vol}_1(Q)$  und wird hierdurch eindeutig bestimmt. Es ist zudem monoton: Aus  $f \leq g$  folgt  $\int_{\Omega} f(x) dx \leq \int_{\Omega} g(x) dx$ .

Das Integral für eindimensionale Treppenfunktionen

Zu jeder Treppenfunktion  $f$  existieren mehrere mögliche Unterteilungen  $U \subseteq \Omega$ , zum Beispiel können wir  $U$  durch weitere Zwischenstellen zu  $U' \supseteq U$  verfeinern. Das oben definierte Integral  $\int_{\Omega, U} f(x) dx$  ändert sich dadurch nicht! Dies wollen wir zur Sicherheit als erstes nachrechnen:

**Wohldefiniertheit:** Wir fügen zu  $U = \{x_0 < x_1 < \dots < x_\ell\}$  einen Teilungspunkt  $x_*$  hinzu,  $\{\dots < x_{k-1} < x_* < x_k < \dots\}$ . Das ändert die Terme der Summe, aber nicht ihr Ergebnis, denn  $f_k \cdot (x_* - x_{k-1}) + f_k \cdot (x_k - x_*) = f_k \cdot (x_* - x_{k-1} + x_k - x_*) = f_k \cdot (x_k - x_{k-1})$ .

Je zwei Unterteilungen  $U = \{x_0 < x_1 < \dots < x_\ell\}$  und  $U' = \{x'_0 < x'_1 < \dots < x'_m\}$  haben gemeinsame Verfeinerungen: Die kleinstmögliche ist ihre Vereinigung  $U \cup U'$ . Schrittweises Verfeinern zeigt dann  $\int_{\Omega, U} f(x) dx = \dots = \int_{\Omega, U \cup U'} f(x) dx = \dots = \int_{\Omega, U'} f(x) dx$ .

Die Wohldefiniertheit ist das Fundament. Daraus ergeben sich sofort folgende Eigenschaften:

**Normierung:** Für jedes Intervall  $Q = [a, b] \subseteq \Omega$  ist die Indikatorfunktion  $\mathbf{I}_Q: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Treppenfunktion zu  $U = \{a < b\}$ , und ihr Integral  $\int_{\Omega} \mathbf{I}_Q = b - a = \text{vol}_1(Q)$  misst die Länge.

**Skalierung:** Ist  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Treppenfunktion zur Unterteilung  $U = \{x_0 < x_1 < \dots < x_\ell\}$ , so auch jedes Vielfache  $cf: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $c \in \mathbb{R}$ , sogar zu derselben Unterteilung  $U$ , und es gilt  $\int_{\Omega} cf(x) dx = \sum_{k=1}^{\ell} (cf_k) (x_k - x_{k-1}) = c \sum_{k=1}^{\ell} f_k (x_k - x_{k-1}) = c \int_{\Omega} f(x) dx$ .

**Additivität:** Sind  $f, g$  Treppenfunktionen zu  $U, U'$ , so auch  $f + g$  zu  $U \cup U'$ , und das Integral ist additiv:  $\int_{\Omega} (f + g)(x) dx = \sum_{k=1}^{\ell} (f_k + g_k) (x_k - x_{k-1}) = \int_{\Omega} f(x) dx + \int_{\Omega} g(x) dx$ .

**Monotonie:** Sind  $f, g$  Treppenfunktionen, zur Unterteilung  $U \cup U'$ , und gilt  $f \leq g$ , so folgt die Ungleichung  $\int_{\Omega} f(x) dx = \sum_{k=1}^{\ell} f_k (x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{\ell} g_k (x_k - x_{k-1}) = \int_{\Omega} g(x) dx$ .

Treppenfunktionen und Indikatorfunktionen

Jede Indikatorfunktion  $\mathbf{I}_{Q_k}$  ist eine Treppenfunktion, also auch die Summe  $\sum_{k=1}^{\ell} c_k \mathbf{I}_{Q_k}$ . Umgekehrt lässt sich jede Treppenfunktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  so schreiben: Gilt  $f(x) = f_k$  für  $x_{k-1} < x < x_k$  und  $k = 0, \dots, \ell$ , sowie  $f(x) = 0$  für  $x < x_0$  und für  $x > x_\ell$ , so gilt

$$f = \sum_{k=1}^{\ell} f_k \mathbf{I}_{]x_{k-1}, x_k[} + \sum_{k=0}^{\ell} f(x_k) \mathbf{I}_{[x_k, x_k]}.$$

Jede Treppenfunktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist demnach von der Form  $f = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \mathbf{I}_{Q_k}$  mit  $c_k \in \mathbb{R}$  und endlichen Intervallen  $Q_k \subseteq \Omega$ . Anders gesagt, die Indikatorfunktionen  $\mathbf{I}_Q$  endlicher Intervalle  $Q \subseteq \Omega$  sind ein Erzeugendensystem von  $T(\Omega)$ . Vorsicht ist geboten: Sie sind keine Basis! Z.B. gilt  $\mathbf{I}_{[0,2[} = \mathbf{I}_{[0,1[} + \mathbf{I}_{[1,2[}$ , also sind diese drei Indikatorfunktionen linear abhängig.

Dennoch wollen und können wir hierauf das Integral erklären! Die obigen Rechnungen zeigen, dass das Ergebnis tatsächlich wohldefiniert ist. Dank Additivität, Skalierung, Normierung gilt:

$$\int_{\Omega} \left( \sum_{k=1}^{\ell} c_k \mathbf{I}_{Q_k} \right) = \sum_{k=1}^{\ell} \int_{\Omega} (c_k \mathbf{I}_{Q_k}) = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \int_{\Omega} \mathbf{I}_{Q_k} = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \text{vol}_1(Q_k).$$

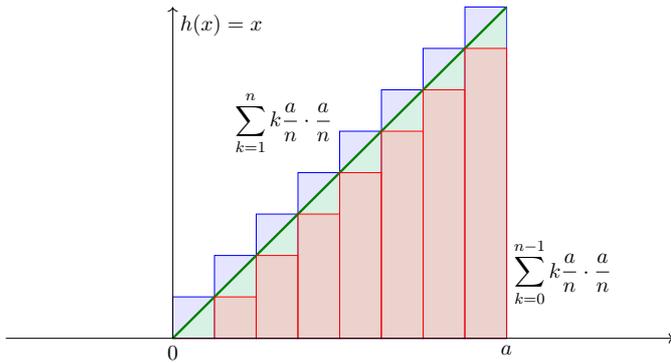
Für eindimensionale Treppenfunktionen ist damit alles geklärt. Wir werden diese Konstruktion im nächsten Kapitel C auf mehrdimensionale Treppenfunktionen verallgemeinern (Satz C1A).

Bestünde die Welt nur aus Treppenfunktionen, so wären wir jetzt fertig. Interessant sind aber vor allem Funktionen, die nicht so simpel sind wie Treppenfunktionen. Diese integrieren wir im Folgenden mit Hilfe von Treppenfunktionen durch Einschachtelung und Ausschöpfung.

Beispiel: Integration durch Einschachtelung

B105  
Beispiel

**Aufgabe:** Zu integrieren sei  $h: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x$ . Berechnen Sie Unter- und Obersummen bei äquidistanter Unterteilung sowie den Grenzwert.



**Lösung:** Für die Integrale gilt  $\frac{(n-1)n}{2} \frac{a^2}{n^2} \nearrow \frac{a^2}{2} \searrow \frac{n(n+1)}{2} \frac{a^2}{n^2}$ .

Beispiel: Integration durch Einschachtelung

B106  
Beispiel

**Ausführlich:** Wir nutzen  $\sum_{k=0}^{n-1} k = n(n-1)/2$ . (Übung: Rechnen Sie es nach per Induktion! Siehe HM1 Beispiel 1.2.2 oder später B305.)

Wir konstruieren Treppenfunktionen  $f_n, g_n: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f_n \leq h \leq g_n$ . Hierzu unterteilen wir das Intervall  $[0, a]$  durch  $x_k = k \frac{a}{n}$  mit  $k = 0, \dots, n$ . Sei  $f_n$  konstant auf  $]x_{k-1}, x_k[$  mit Wert  $\min_{[x_{k-1}, x_k]} h = x_{k-1}$ . Dann gilt:

$$\int_{x=0}^a f_n(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} k \frac{a}{n} \cdot \frac{a}{n} = \frac{(n-1)n}{2} \frac{a^2}{n^2} \nearrow \frac{1}{2} a^2$$

Sei  $g_n$  konstant auf  $]x_{k-1}, x_k[$  mit Wert  $\max_{[x_{k-1}, x_k]} h = x_k$ . Dann gilt:

$$\int_{x=0}^a g_n(x) dx = \sum_{k=1}^n k \frac{a}{n} \cdot \frac{a}{n} = \frac{n(n+1)}{2} \frac{a^2}{n^2} \searrow \frac{1}{2} a^2$$

Für  $n \rightarrow \infty$  gilt  $\int_0^a (g_n - f_n) \rightarrow 0$ , also ist  $h$  integrierbar. Wir erhalten:

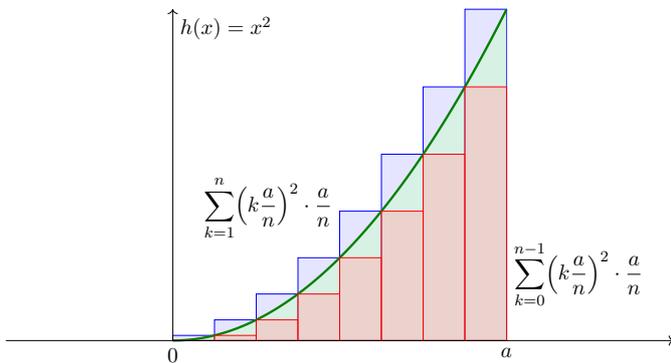
$$\int_0^a x dx = \frac{1}{2} a^2$$

☺ Dieses Ergebnis ist anschaulich-geometrisch klar. Sehen Sie wie?

Beispiel: Integration durch Einschachtelung

B107  
Beispiel

**Aufgabe:** Zu integrieren sei  $h: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^2$ . Berechnen Sie Unter- und Obersummen bei äquidistanter Unterteilung sowie den Grenzwert.



**Lösung:** Für die Integrale gilt  $\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \frac{a^3}{n^3} \nearrow \frac{a^3}{3} \searrow \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \frac{a^3}{n^3}$ .

Beispiel: Integration durch Einschachtelung

B108  
Beispiel

**Ausführlich:** Wir nutzen  $\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = (n-1)n(2n-1)/6$ . (Rechnen Sie es nach per Induktion! Siehe HM1 Beispiel 1.2.4 oder später B305.)

Wie zuvor unterteilen wir  $[0, a]$  durch  $x_k = k \frac{a}{n}$  mit  $k = 0, \dots, n$ . Sei  $f_n$  konstant auf  $]x_{k-1}, x_k[$  mit Wert  $\min_{[x_{k-1}, x_k]} h = x_{k-1}^2$ . Dann gilt:

$$\int_{x=0}^a f_n(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \frac{a^2}{n^2} \cdot \frac{a}{n} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \frac{a^3}{n^3} \nearrow \frac{1}{3} a^3$$

Sei  $g_n$  konstant auf  $]x_{k-1}, x_k[$  mit Wert  $\max_{[x_{k-1}, x_k]} h = x_k^2$ . Dann gilt:

$$\int_{x=0}^a g_n(x) dx = \sum_{k=1}^n k^2 \frac{a^2}{n^2} \cdot \frac{a}{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \frac{a^3}{n^3} \searrow \frac{1}{3} a^3$$

Für  $n \rightarrow \infty$  gilt  $\int_0^a (g_n - f_n) \rightarrow 0$ , also ist  $h$  integrierbar. Wir erhalten:

$$\int_0^a x^2 dx = \frac{1}{3} a^3$$

☺ Einschachtelung liefert für jede monotone (B1B) oder stetige (B1C) Funktion konvergente Abschätzungen durch untere & obere Schranken!

Integration durch Einschachtelung

B109  
Ausführung

Wir wollen  $h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  einschachteln durch Treppenfunktionen

$$f_0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq h \leq \dots \leq g_2 \leq g_1 \leq g_0.$$

Für  $A_k = \int_{\Omega} f_k(x) dx$  und  $B_k = \int_{\Omega} g_k(x) dx$  gilt dank Monotonie

$$A_0 \leq A_1 \leq A_2 \leq \dots \leq \dots \leq B_2 \leq B_1 \leq B_0.$$

Für  $k \rightarrow \infty$  erhalten wir hieraus die monotonen Grenzwerte

$$\int_{\Omega} f_k(x) dx = A_k \nearrow A \leq \int_{\Omega} h(x) dx \leq B \searrow B_k = \int_{\Omega} g_k(x) dx.$$

Die Gleichheit  $A = B$  bedeutet  $\int_{\Omega} [g_k(x) - f_k(x)] dx \searrow 0$ .

Das heißt, die Fläche zwischen  $f_k$  und  $g_k$  wird beliebig klein.

In diesem Falle nennen wir  $h$  **Riemann-integrierbar** und erhalten

$$\int_{\Omega} h(x) dx = A = B.$$

☺ Diese Integrationsmethode ist das **Prinzip der Einschachtelung**.

Das Ergebnis ist wohldefiniert, d.h. es hängt nur von der Funktion  $f$  ab, nicht jedoch von unserer willkürlichen Wahl einer Einschachtelung.

Einschachtelung monotoner Funktionen

B110  
Ausführung

Die beiden obigen Beispiele illustrieren zwei allgemeine Regeln: Monotone bzw. stetige Funktionen sind Riemann-integrierbar, d.h. sie lassen sich durch Treppenfunktionen beliebig genau einschachteln. Die Beweise sind leicht und verlaufen genau wie obige Beispiele:

**Satz B1B: Integration monotoner Funktionen**

Jede monotone Funktion  $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist Riemann-integrierbar.

**Beweis:** Wir nehmen  $h$  als monoton wachsend an, also nicht-fallend.

Das heißt ausführlich: Für alle  $s \leq t$  im Intervall  $[a, b]$  gilt  $h(s) \leq h(t)$ .

Wir konstruieren Treppenfunktionen  $f_n, g_n$  mit  $f_n \leq h \leq g_n$  wie folgt:

Wir unterteilen  $[a, b]$  durch  $x_k = a + k(b-a)/n$  mit  $k = 0, \dots, n$ .

Sei  $f_n$  konstant auf  $]x_{k-1}, x_k[$  mit Wert  $\min_{[x_{k-1}, x_k]} h = h(x_{k-1})$ .

Sei  $g_n$  konstant auf  $]x_{k-1}, x_k[$  mit Wert  $\max_{[x_{k-1}, x_k]} h = h(x_k)$ .

Nach Konstruktion sind dies Treppenfunktionen mit  $f_n \leq h \leq g_n$  und

$$\int_a^b g_n(x) - f_n(x) dx = \sum_{k=1}^n \frac{h(x_k) - h(x_{k-1})}{n} = \frac{h(b) - h(a)}{n} \searrow 0.$$

Einschachtelung stetiger Funktionen

B111  
Ausführung

**Satz B1C: Integration stetiger Funktionen**

Jede stetige Funktion  $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist Riemann-integrierbar.

**Beweis:** Da das Intervall  $[a, b]$  kompakt ist, ist  $h$  gleichmäßig stetig.

Das heißt ausführlich, für jedes noch so kleine  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$ , sodass für kleine Abstände  $|x - x'| \leq \delta$  stets  $|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$  folgt.

Wir konstruieren Treppenfunktionen  $f_n, g_n$  mit  $f_n \leq h \leq g_n$  wie folgt:

Wir unterteilen  $[a, b]$  durch  $x_k = a + k(b-a)/n$  mit  $k = 0, \dots, n$ .

Sei  $f_n$  konstant auf  $]x_{k-1}, x_k[$  mit Wert  $\min_{[x_{k-1}, x_k]} h$ .

Sei  $g_n$  konstant auf  $]x_{k-1}, x_k[$  mit Wert  $\max_{[x_{k-1}, x_k]} h$ .

Nach Konstruktion sind dies Treppenfunktionen mit  $f_n \leq h \leq g_n$ .

Es bleibt noch  $\int_a^b g_n(x) - f_n(x) dx \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  nachzuweisen.

Sei  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Dank gleichmäßiger Stetigkeit existiert dazu  $\delta > 0$ , sodass  $|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$  gilt für alle  $x, x' \in [a, b]$  mit  $|x - x'| \leq \delta$ .

Für  $(b-a)/n \leq \delta$  folgt  $g_n - f_n \leq \varepsilon$ , also  $\int_a^b g_n(x) - f_n(x) dx \leq \varepsilon \cdot (b-a)$ .

Für  $n \rightarrow \infty$  zeigt dies  $\int_a^b g_n(x) - f_n(x) dx \rightarrow 0$ , wie behauptet.

Stückweise Integration

B112  
Ausführung

**Satz B1D: stückweise Integration**

Sei  $a < b < c$ . Genau dann ist  $f: [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbar, wenn beide Einschränkungen  $f|_{[a,b]}$  und  $f|_{[b,c]}$  es sind; dann gilt

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

**Beweis:** Jede Einschachtelung von  $f: [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$  können wir verfeinern, indem wir der Unterteilung von  $[a, c]$  den Teilungspunkt  $b$  hinzufügen.

Die Gleichung gilt für Unter- und Obersummen, also auch im Grenzwert.

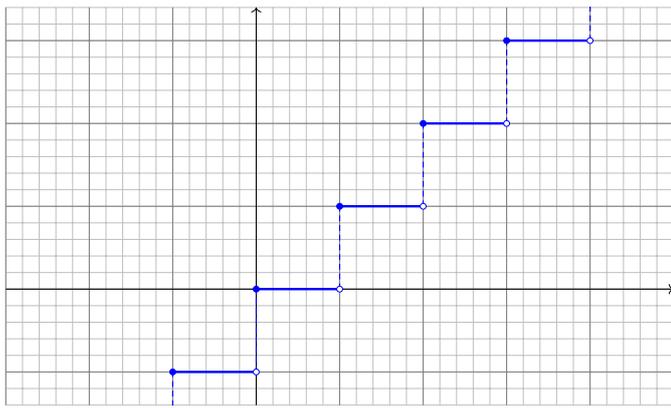
Für alle  $a \leq b$  vereinbaren wir zudem die Vorzeichenregel

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

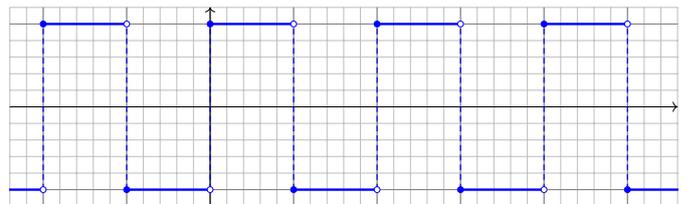
Ist  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar und  $a, b, c \in \Omega$ , so gilt

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

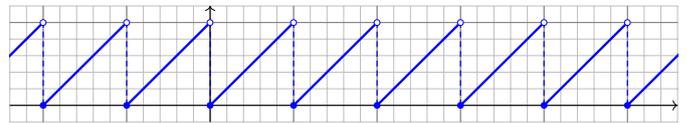
Die **Gauß-Klammer**  $[x] := \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$  ist stückweise stetig:



Die **Rechteckfunktion**  $r(x) = (-1)^{[x]}$  ist stückweise konstant.



Die **Sägezahnfunktion**  $s(x) = x - [x]$  ist stückweise affin-linear.



Diese Funktionen haben Sprungstellen und sind nur stückweise stetig.

**Definition B1E: stückweise stetige Funktionen**

(0) Eine Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **stückweise stetig**, wenn es eine Unterteilung  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_\ell = b$  und stetige Funktionen  $f_k: [x_{k-1}, x_k] \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, sodass  $f(x) = f_k(x)$  für alle  $x_{k-1} < x < x_k$  gilt.

(1) Gilt zudem  $f(x_k) = \frac{1}{2}[f_{k-1}(x_k) + f_k(x_k)]$  an jeder (eventuellen) Sprungstelle  $x_k$  für  $k = 1, \dots, \ell - 1$ , so nennen wir  $f$  **sprungnormiert**.

(2) Entsprechend nennen wir  $f$  **stückweise  $C^n$** , falls  $f_1, \dots, f_\ell \in C^n$  gilt. Hierbei ist  $C^n$  die Klasse der  $n$ -fach stetig differenzierbaren Funktionen. **Stückweise stetig diff'bar** bedeutet traditionell  $C^0$  und stückweise  $C^1$ .

(0) Äquivalente Definition: Die Funktion  $f$  ist auf jedem der offenen Intervalle  $]x_{k-1}, x_k[$  stetig, und  $f(x)$  hat an den Intervallgrenzen für  $x \searrow x_{k-1}$  sowie für  $x \nearrow x_k$  einen Grenzwert in  $\mathbb{R}$ .

Anschaulich gesagt:  $f$  hat nur endlich viele Sprungstellen und endliche Sprunghöhen. An den Intervallgrenzen  $x_0, x_1, \dots, x_\ell$  hingegen muss  $f$  nicht stetig sein. Die Funktionswerte  $f(x_k)$  sind beliebig; sie fallen bei der von uns anvisierten Integration ohnehin nicht ins Gewicht.

(1) Durch Korrektur an den Sprungstellen können wir  $f$  sprungnormieren. Das Integral ändert sich dadurch nicht. Die Normierung ist oft hilfreich, etwa bei Fourier-Reihen und -Integralen.

Es gibt gute Gründe, auch nicht-stetige Funktionen zu behandeln und integrieren zu lernen. In der Signalverarbeitung und Fourier-Analyse zum Beispiel betrachtet man auch Signale mit Sprungstellen, wie die oben gezeigte Rechteckfunktion oder die Sägezahnfunktion.

**Satz B1F: Integration stückweise stetiger Funktionen**

Jede stückweise stetige Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist integrierbar gemäß

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f_1(x) dx + \dots + \int_{x_{\ell-1}}^{x_\ell} f_\ell(x) dx.$$

Die Menge  $S([a, b])$  aller stückweise stetigen Funktionen  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist ein Vektorraum, und somit ein Untervektorraum in  $R([a, b])$ . Hierauf ist das Integral  $f \mapsto \int_a^b f(x) dx$  eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $S([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ .

Wie schon bei Treppenfunktionen gibt es für stückweise stetige Funktionen mehrere mögliche Unterteilungen, z.B. kann man jede Unterteilung durch Hinzunahme weiterer Stellen verfeinern. Der Wert des obigen Integrals als Summe über die Unterteilung ändert sich dadurch nicht!

Die Existenz der Grenzwerte an den Intervallgrenzen verhindert Polstellen und Schlimmeres. Gegenbeispiele sind  $f, g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = 1/\sqrt{|x|}$  und  $g(x) = \sin(\pi/|x|)$ . [B118] Diese sind stetig auf  $[-1, 0[$  und  $]0, 1]$ , aber **nicht** stückweise stetig auf  $[-1, 1]$ !

**Satz B1G: Charakterisierung R-integrierbarer Funktionen**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall. Die Menge  $R(\Omega)$  aller Riemann-integrierbaren Funktionen  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Hierauf ist das Integral

$$\int_\Omega : R(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \int_\Omega f(x) dx$$

linear, normiert, monoton, und erfüllt das Prinzip der Einschachtelung.

Hierbei ist  $R(\Omega)$  der kleinste Funktionenraum, für den dies möglich ist, und auf  $R(\Omega)$  ist das (Riemann-)Integral hierdurch eindeutig bestimmt.

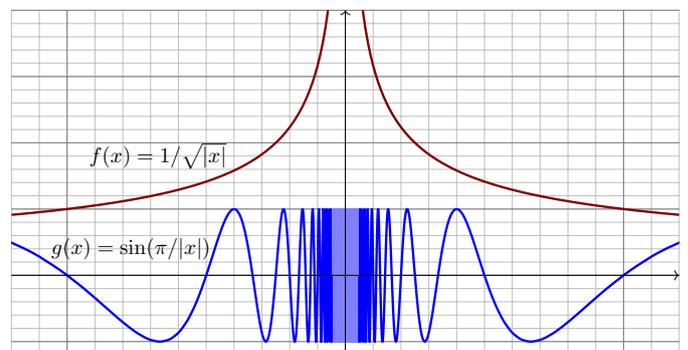
Jede stetige / monotone Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist R-integrierbar, ebenso jede stückweise stetige / stückweise monotone Funktion.

$$C([a, b]) := \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$

$$R([a, b]) \supseteq S([a, b]) := \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stückweise stetig}\}$$

$$T([a, b]) := \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ Treppenfunktion}\}$$

Nicht stückweise stetig sind z.B. folgende Funktionen  $f, g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ :



**Übung:** Die Funktion  $g$  ist Riemann-integrierbar, aber  $f$  hingegen nicht. Einschachtelung gelingt für  $f$  nicht, aber mit Ausschöpfung geht's. [B208]

**Satz B1H: Charakterisierung R-integrierbarer Funktionen**

Genau dann ist eine Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbar, wenn sie beschränkt ist und fast überall stetig (bis auf eine Nullmenge).

**Berühmte Beispiele:** Die **kleine Dirichlet-Funktion**  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{b} & \text{falls } x = \frac{a}{b} \text{ mit } a, b \in \mathbb{N} \text{ und } \text{ggT}(a, b) = 1. \end{cases}$$

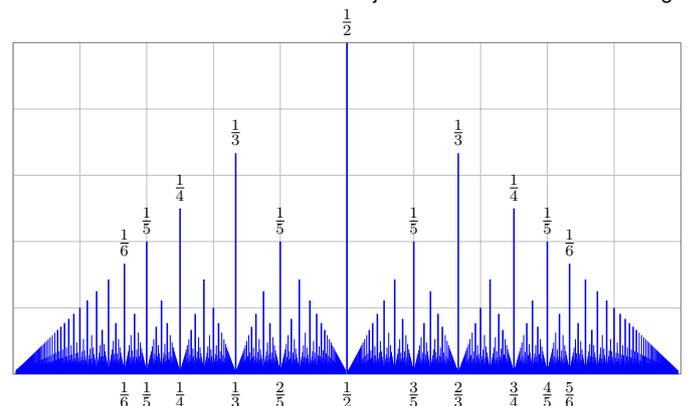
ist unstetig in jedem rationalen Punkt, jedoch stetig in jedem irrationalen. Sie ist also fast überall stetig und demnach auch Riemann-integrierbar. Übung: durch Treppenfunktionen einschachteln und Integral bestimmen.

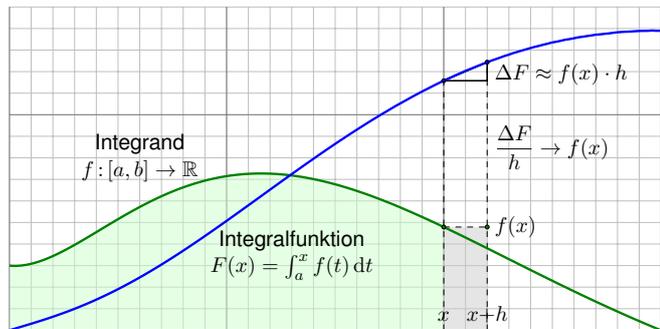
Die **Dirichlet-Funktion**  $f = \mathbf{I}_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Sie ist in jedem Punkt  $x \in [0, 1]$  unstetig also nicht Riemann-integrierbar. Übung: Einschachtelung misslingt hier, Ausschöpfung gelingt müheelos!

Für jeden gekürzten Bruch  $\frac{a}{b}$  sei  $g(\frac{a}{b}) = \frac{1}{b}$ , und  $g(x) = 0$  für  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Diese bemerkenswerte Funktion ist in jedem rationalen Punkt unstetig.





Der Hauptsatz besagt anschaulich: Die Steigung der Integralfunktion  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  ist der Wert  $f(x)$  des Integranden, also  $F'(x) = f(x)$ . Diese Beziehung wollen wir präzise formulieren und nutzen lernen.

□ Stoppel, Höhere Mathematik 2, §3.6. ● Hauptsatzkantate, [youtu.be/4n6aB4aasyg](https://youtu.be/4n6aB4aasyg).

Satz B11: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

Jede stetige Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist integrierbar. Ihre Integralfunktion

$$F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } F(x) := \int_a^x f(t) dt$$

ist differenzierbar, und für die Ableitung gilt  $F' = f$ . Ist umgekehrt  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar mit stetiger Ableitung  $f = F'$ , so gilt

$$\int_a^b f(x) dx = [F]_a^b \text{ mit } [F]_a^b := F(b) - F(a).$$

Diese Aussagen heißen auch 1. und 2. Hauptsatz. Im Falle  $F' = f$  bzw.  $F = \int f + \text{const}$  heißt  $F$  **Stammfunktion** zu  $f$ . Anwendungsbeispiele:

$$\int_{x=0}^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_{x=0}^{\pi} = 1 - (-1) = 2$$

$$\int_{x=0}^{\pi} x \sin x dx = [\sin x - x \cos x]_{x=0}^{\pi} = \pi - 0 = \pi$$

Viele wichtige Funktionen lassen sich als **Potenzreihen** darstellen:

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

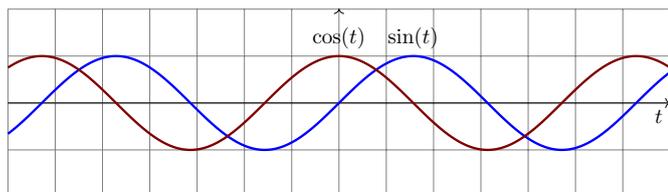
$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$$

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

$$\cosh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} z^{2k} = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots$$

$$\sinh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \dots$$

Jede dieser fünf Reihen hat unendlichen Konvergenzradius, sie konvergiert daher für jeden Parameter  $z \in \mathbb{R}$ , sogar  $z \in \mathbb{C}$ .



Die trigonometrischen Funktionen  $\sin, \cos$  heißen **Kreisfunktionen**, denn  $t \mapsto (\cos t, \sin t)$  parametrisiert die Kreislinie  $x^2 + y^2 = 1$ .

Sie sind periodisch mit Periode  $2\pi$ , wobei  $\pi = 3.14159265\dots$

Ausmultiplizieren der Euler-Formeln ergibt **Additionstheoreme**:

$$\sin(s+t) = \sin(s)\cos(t) + \cos(s)\sin(t),$$

$$\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$$

$$\cos(s+t) = \cos(s)\cos(t) - \sin(s)\sin(t),$$

$$\cos(2t) = \cos(t)^2 - \sin(t)^2 = 1 - 2\sin(t)^2.$$

Jede stetige Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist integrierbar, dank Satz B1c.

Wir definieren ihre **Integralfunktion**  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$F(x) = \int_{t=a}^x f(t) dt.$$

Für die Fläche über dem Intervall  $[x, x+h]$  finden wir

$$F(x+h) - F(x) = \int_{t=x}^{x+h} f(t) dt \approx f(x) \cdot h.$$

Genauer gilt folgende Einschachtelung:

$$h \cdot \min_{[x, x+h]} f \leq \int_{t=x}^{x+h} f(t) dt \leq h \cdot \max_{[x, x+h]} f.$$

Für  $h \rightarrow 0$  finden wir dank der Stetigkeit von  $f$  im Punkt  $x$  somit

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_{t=x}^{x+h} f(t) dt \rightarrow f(x).$$

Also gilt  $F'(x) = f(x)$ . Das eröffnet eine wunderbare Rechentechnik!

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} \quad (a \neq -1) \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$$

$$\int e^x dx = e^x \quad \int \ln x dx = x \ln x - x$$

$$\int \cos x dx = \sin x \quad \int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x \quad \int \sinh x dx = \cosh x$$

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2} dx = \tan x \quad \int \frac{1}{(\sin x)^2} dx = -\cot x$$

$$\int \frac{1}{(\cosh x)^2} dx = \tanh x \quad \int \frac{1}{(\sinh x)^2} dx = -\coth x$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \quad \int \frac{1}{1-x^2} dx = \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x \quad \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arsinh} x$$

😊 Übung: Machen Sie wie immer die Probe durch sorgfältiges Ableiten!

Aus diesen Potenzreihen lesen wir die **Euler-Formeln** ab:

$$\exp(iz) = \cos z + i \sin z, \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

$$\exp(z) = \cosh z + \sinh z, \quad \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Hieraus folgen sofort die geometrisch nützlichen Gleichungen

$$\cos(z)^2 + \sin(z)^2 = 1 \quad \text{sowie} \quad \cosh(z)^2 - \sinh(z)^2 = 1.$$

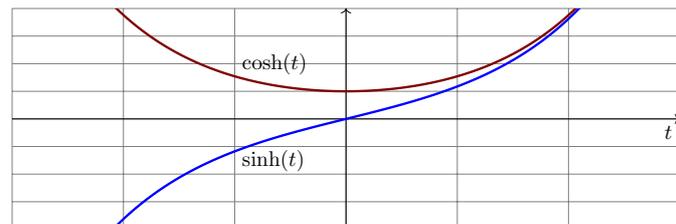
Auch die Ableitungen lesen wir direkt aus den Potenzreihen ab, denn Potenzreihen dürfen wir termweise ableiten und erhalten so:

$$\exp' = \exp, \quad \sin' = \cos, \quad \cos' = -\sin, \quad \sinh' = \cosh, \quad \cosh' = \sinh$$

Diese Funktionen sind daher auch bei der Integration sehr nützlich!

Ebenso nutzen wir ihre Umkehrfunktionen, eingeschränkt soweit nötig:

$$\ln, \arcsin, \arccos, \operatorname{arsinh}, \operatorname{arcosh}$$



Die Funktionen  $\sinh, \cosh$  heißen entsprechend **Hyperbelfunktionen**, denn  $t \mapsto (\cosh t, \sinh t)$  parametrisiert die Hyperbel  $x^2 - y^2 = 1, x > 0$ .

Ausmultiplizieren der Euler-Formeln ergibt **Additionstheoreme**:

$$\sinh(s+t) = \sinh(s)\cosh(t) + \cosh(s)\sinh(t),$$

$$\sinh(2t) = 2\sinh(t)\cosh(t)$$

$$\cosh(s+t) = \cosh(s)\cosh(t) + \sinh(s)\sinh(t),$$

$$\cosh(2t) = \cosh(t)^2 + \sinh(t)^2 = 2\cosh(t)^2 - 1.$$

**Korollar B1J: partielle Integration**

Für alle stetig differenzierbaren Funktionen  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$\int_{x=a}^b f(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)]_{x=a}^b - \int_{x=a}^b f'(x) g(x) dx.$$

Nachweis dank HDI: Es gilt  $[fg]' = f'g + fg'$ , also  $\int_a^b (f'g + fg') = [fg]_a^b$ . Dank Linearität des Integrals erhalten wir  $\int_a^b (f'g) + \int_a^b (fg') = [fg]_a^b$ .

😊 Zwecks Vereinfachung wählt man die Faktoren geschickt. Beispiel:

$$\int x^n \ln x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \int \frac{x^n}{n+1} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left( \ln x - \frac{1}{n+1} \right)$$

😊 Manchmal nützt als Trick, den Faktor 1 einzuführen. Beispiel:

$$\int (\ln x)^n dx = \int 1 \cdot (\ln x)^n dx = x \cdot (\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} dx$$

Letzteres behandelt man ebenso, bis man bei  $(\ln x)^0$  ankommt.

**Rekursion:** Manche Integrale muss man mehrfach partiell integrieren.

$$\int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx,$$

$$\int x^n \sin x dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x dx,$$

$$\int x^n \cos x dx = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x dx.$$

$$\int \sin(x)^n dx = -\frac{1}{n} \sin(x)^{n-1} \cos(x) + \frac{n-1}{n} \int \sin(x)^{n-2} dx$$

$$\int \cos(x)^n dx = +\frac{1}{n} \cos(x)^{n-1} \sin(x) + \frac{n-1}{n} \int \cos(x)^{n-2} dx$$

Für  $I_n = \int_{x=0}^{\pi/2} \sin(x)^n dx$  gilt  $I_0 = \frac{\pi}{2}$  und  $I_1 = 1$  und weiter  $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ :

$$\int_{x=0}^{\pi/2} \sin(x)^{2k} dx = \frac{\pi \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} = \frac{\pi}{2} \frac{(2k)!}{k! \cdot 2^{2k}}$$

$$\int_{x=0}^{\pi/2} \sin(x)^{2k+1} dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k+1)} = \frac{k! \cdot 2^{2k}}{(2k+1)!}$$

**Korollar B1K: Integration durch Substitution**

Für  $g: [a, b] \rightarrow [c, d]$  stetig differenzierbar und  $f: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig gilt

$$\int_{t=a}^b f(g(t)) g'(t) dt = \int_{u=g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

Nachweis dank HDI: Für  $F(s) = \int_c^s f(u) du$  gilt  $F(g(t))' = f(g(t)) g'(t)$ . Hieraus erhalten wir  $\int_a^b f(g(t)) g'(t) dt = [F(g(t))]_a^b = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$ .

Damit dies auch für  $g(b) < g(a)$  gilt, vereinbaren wir  $\int_\alpha^\beta := -\int_\beta^\alpha$ .

😊 Merkregel: Für  $u = g(t)$  gilt  $\frac{du}{dt} = g'(t)$ , also  $du = g'(t) dt$ . Beispiel:

$$\int_{t=0}^2 \cos(t^2 + 1) \cdot 2t dt = \int_{u=1}^5 \cos(u) du = [\sin(u)]_{u=1}^5 = \sin(5) - \sin(1)$$

Hier substituieren wir  $u = g(t) = t^2 + 1$ . Demnach gilt  $\frac{du}{dt} = g'(t) = 2t$ .

Die Integrationsgrenzen müssen von  $t$  nach  $u$  angepasst werden:

Wenn  $t$  von 0 bis 2 läuft, dann läuft  $u$  von  $g(0) = 1$  bis  $g(2) = 5$ .

Eine wichtige Anwendung ist die **logarithmische Ableitung**:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)|$$

Typische Beispiele, die Sie (er)kennen sollten:

$$\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{(x)'}{x} dx = \ln x \quad \text{für } x > 0$$

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{(\ln x)'}{\ln x} dx = \ln \ln x \quad \text{für } x > 1$$

$$\int \frac{1}{x \ln x \ln \ln x} dx = \int \frac{(\ln \ln x)'}{\ln \ln x} dx = \ln \ln \ln x \quad \text{für } x > e$$

$$\int \tan(x) dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = -\ln|\cos x|$$

$$\int \cot(x) dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} dx = \ln|\sin x|$$

📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §3.1–3.3.

Ein Polynom  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  abzuleiten ist leicht: Man erhält  $p'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}$ , also wieder ein Polynom. Ebenso leicht können wir integrieren und erhalten wieder ein Polynom:

$$\int p(x) dx = \text{const} + a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \dots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

Auch eine rationale Funktion  $r(x) = p(x)/q(x)$  abzuleiten ist leicht:

$$r'(x) = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{q(x)^2}$$

Für jede rationale Funktion  $r(x)$  ist die Ableitung  $r'(x)$  wieder rational, aber Stammfunktionen im Allgemeinen nicht! Manche Integrale führen zu  $\ln$  und  $\arctan$  und somit aus den rationalen Funktionen hinaus:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| \quad \text{und} \quad \int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x$$

😊 Das ist aber auch schon das Schlimmste, was passieren kann... Der folgende Satz erklärt, wie man rationale Funktionen integriert.

📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §3.4.

Jede rationale Funktion  $r(x) = p(x)/q(x)$  ist elementar integrierbar durch Partialbruchzerlegung und unsere Grundintegrale. Beispiele:

$$r(x) = \frac{4x^2 - 7x + 25}{x^3 - 6x^2 + 3x + 10} = \frac{2}{x+1} - \frac{3}{x-2} + \frac{5}{x-5}$$

$$\Rightarrow \int r(x) dx = 2 \ln|x+1| - 3 \ln|x-2| + 5 \ln|x-5|$$

$$r(x) = \frac{3x^2 - 3x - 10}{x^3 - 5x^2 + 11x - 15} = \frac{1}{x-3} + \frac{2x+5}{x^2+2x+5}$$

$$\Rightarrow \int r(x) dx = \ln|x-3| + \ln|x^2+2x+5| + \frac{7}{2} \arctan \frac{x-1}{2}$$

😊 Die Rechnung mag lang und mühsam sein, aber sie gelingt immer! Insbesondere kann ein Computer-Algebra-System sie für uns ausführen.

😊 Der folgende Satz liefert die elementaren Integrale der Partialbrüche. Der Fundamentalsatz der Algebra garantiert uns über  $\mathbb{R}$ , dass wir jede rationale Funktion als Summe solcher Partialbrüche schreiben können.

**Satz B1L: Integration rationaler Funktionen**

Jede rationale Funktion  $r(x) = p(x)/q(x)$  ist elementar integrierbar durch Partialbruchzerlegung (B1N) und folgende Grundintegrale:

$$\int \frac{a}{x-u} dx = a \ln|x-u|$$

$$\int \frac{a}{(x-u)^k} dx = \frac{-a}{(k-1)(x-u)^{k-1}} \quad (k \geq 2)$$

$$\int \frac{ax+b}{x^2+2vx+u} dx = \frac{a}{2} \ln|x^2+2vx+u| + \frac{b-av}{\sqrt{u-v^2}} \arctan \frac{x+v}{\sqrt{u-v^2}}$$

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+2vx+u)^k} dx = \frac{(b-av)x + (bv-au)}{2(k-1)(u-v^2)(x^2+2vx+u)^{k-1}} + \frac{(2k-3)(b-av)}{2(k-1)(u-v^2)} \int \frac{1}{(x^2+2vx+u)^{k-1}} dx$$

😊 Zum Nachweis genügt es, geduldig und gewissenhaft abzuleiten. Probe als Übung: Die Formeln sind furchteinflößend, aber elementar!

**Satz B1M: Fundamentalsatz der Algebra, reelle Zerlegung**

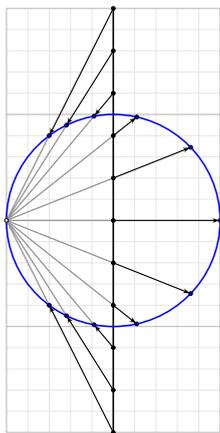
Jedes reelle Polynom  $q \in \mathbb{R}[x]^*$  lässt sich zerlegen in  $q = u \cdot q_1^{k_1} \cdots q_m^{k_m}$  mit  $u \in \mathbb{R}^*$  und affin-linearen Faktoren  $q_j(x) = x - u_j$  mit  $u_j \in \mathbb{R}$  oder quadratischen  $q_j(x) = x^2 + 2v_jx + u_j$  mit  $u_j, v_j \in \mathbb{R}$  und  $v_j^2 - u_j < 0$ . Hierbei können wir  $k_i \geq 1$  annehmen für alle  $i$  sowie  $q_i \neq q_j$  für  $i \neq j$ .

**Korollar B1N: reelle Partialbruchzerlegung**

Jede rationale Funktion  $\frac{p}{q} \in \mathbb{R}(x)$  ist Summe von Partialbrüchen

$$\frac{p}{q} = p_0 + \frac{p_{1,1}}{q_1} + \frac{p_{1,2}}{q_1^2} + \dots + \frac{p_{1,k_1}}{q_1^{k_1}} + \dots + \frac{p_{m,1}}{q_m} + \frac{p_{m,2}}{q_m^2} + \dots + \frac{p_{m,k_m}}{q_m^{k_m}}$$

mit Polynomen  $p_0, p_{i,j} \in \mathbb{R}[x]$  und  $\deg p_{i,j} < \deg q_i \leq 2$  wie oben. Zusammen mit Satz B1L gelingt so die elementare Integration.



Ein elegant-raffinerer Integrationsstrick wurde von Weierstraß entwickelt: Die **trigonometrische Generalsubstitution** löst eine große Familie von Integralen durch elementare Stammfunktionen.

Die Kreislinie  $S^1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \}$  parametrisieren wir **trigonometrisch** durch

$$]-\pi, \pi[ \xrightarrow{\sim} S^1 \setminus \{(-1, 0)\} : s \mapsto e^{is} = (\cos s, \sin s).$$

Alternativ gelingt dies auch **stereographisch**:

$$f: \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} S^1 \setminus \{(-1, 0)\} : t \mapsto \left( \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right),$$

$$g: S^1 \setminus \{(-1, 0)\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \frac{y}{1+x}.$$

Dies sind zueinander inverse Bijektionen, denn es gilt  $g(f(t)) = t$  und  $f(g(x, y)) = (x, y)$ . Übung!

Satz B10: rationale Integranden in  $\sin s$  und  $\cos s$

Beide Parametrisierungen können wir ineinander umrechnen gemäß

$$\sin s = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos s = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan s = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \cot s = \frac{1-t^2}{2t},$$

$$t = \tan(s/2), \quad dt = \frac{ds}{1+\cos(s)}, \quad s = 2 \arctan t, \quad ds = \frac{2 dt}{1+t^2}.$$

Sei  $R(x, y) = P(x, y)/Q(x, y)$  eine rationale Funktion, mit  $P, Q \in \mathbb{R}[x, y]$  und  $Q(\cos s, \sin s) \neq 0$  für alle  $s \in I \subseteq ]-\pi, \pi[$ . Auf  $I$  erhalten wir gemäß

$$\int R(\cos s, \sin s) ds = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2 dt}{1+t^2}$$

einen rationalen Integranden in  $t$ . Diesen können wir dank Satz B1L elementar integrieren und anschließend  $s = 2 \arctan t$  rücksostituieren.

**Übung:** Die Formeln liegen explizit vor; rechnen Sie alle sorgfältig nach!  
☺ Jede rationale Funktion in  $\sin s, \cos s$  wird so elementar integrierbar.

**Aufgabe:** Finden Sie auf dem Intervall  $I = ]0, \pi[$  Stammfunktionen zu

$$\frac{1}{\sin s} \quad \text{und} \quad \frac{2}{3 + \cos s} \quad \text{und} \quad \frac{1 - \sin s}{(1 - \cos s) \sin s}.$$

**Lösung:** Wir nutzen Weierstraß' trigonometrische Generalsubstitution:

$$\int \frac{ds}{\sin s} = \int \frac{(1+t^2)}{2t} \cdot \frac{2 dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln t = \ln \tan(s/2)$$

$$\int \frac{2}{3 + \cos s} ds = \int \frac{2}{3 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2 dt}{1+t^2} = \int \frac{2}{2 + t^2} dt$$

$$= \sqrt{2} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} \arctan\left(\frac{\tan(s/2)}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\int \frac{1 - \sin s}{(1 - \cos s) \sin s} ds = \int \frac{1}{2} t^{-1} - t^{-2} + \frac{1}{2} t^{-3} dt = \frac{1}{2} \ln t + t^{-1} - \frac{1}{4} t^{-2}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \tan(s/2) + \cot(s/2) - \frac{1}{4} \cot^2(s/2)$$

☺ Machen Sie wie immer die Probe durch sorgfältiges Ableiten!  
Die Rechnung mag länglich sein, aber sie ist vollkommen elementar.

Diese Substitution mutet zunächst an wie Magie, sie entspringt jedoch zwei sehr einfachen Parametrisierungen der Kreislinie  $x^2 + y^2 = 1$ :

$$(x, y) = (\cos s, \sin s) = \left( \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right)$$

☺ Dieser Trick funktioniert ebenso für die Hyperbel  $x^2 - y^2 = 1$ :

$$(x, y) = (\cosh s, \sinh s) = \left( \frac{1+t^2}{1-t^2}, \frac{2t}{1-t^2} \right)$$

Ebene Kurvenintegrale werden wir in Kapitel E ausführlicher behandeln, insbesondere auch die Frage nach geeigneten (Um)Parametrisierungen.

☺ Geschlossene Wegintegrale der Form

$$\int_{s=0}^{2\pi} R(\cos s, \sin s) ds$$

werden wir in Kapitel F mit dem Residuensatz berechnen (Satz F4H).

☺ Weierstraß' trigonometrische Generalsubstitution ist daher keine obscure Randerscheinung, sondern eine vielseitige Rechenmethode, die zahlreiche schöne Aspekte verbindet, geometrisch und analytisch.

Die einfachsten Funktionen sind **konstant**  $a_0$ , **affin-linear**  $a_0 + a_1x$ , **quadratisch**  $a_0 + a_1x + a_2x^2$ , **kubisch**  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, \dots$  **polynomiell**  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ , **rational**  $r(x) = p(x)/q(x)$ .

Die konstanten Funktionen bilden einen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum, ebenso die Menge aller affin-linearen Funktionen, quadratischen, kubischen, etc. Polynome bilden den Ring  $\mathbb{R}[x]$ , rationale Funktionen den Körper  $\mathbb{R}(x)$ .

Eine Funktion  $f(x)$  heißt **algebraisch**, wenn sie eine polynomielle Gleichung der Form  $p_n(x)f(x)^n + \dots + p_1(x)f(x) + p_0(x) = 0$  erfüllt, z.B. Kompositionen rationaler Ausdrücke von Wurzelfunktionen  $\sqrt[n]{x}$ . Die Funktion  $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$  etwa erfüllt  $f(x)^2 - 2xf(x) - 1 = 0$ .

Ist sie nicht algebraisch, so heißt  $f$  **transzendent**. Wichtige Beispiele sind  $\exp$  und  $\ln$ , die **trigonometrischen Funktionen**  $\sin, \cos, \tan, \cot$ , **Hyperbelfunktionen**  $\sinh, \cosh, \tanh, \coth$ , **Arkusfunktionen**  $\arcsin, \arccos, \arctan, \operatorname{arccot}, \operatorname{arsinh}, \operatorname{arcosh}, \operatorname{artanh}, \operatorname{arcoth}$ .

☺ All diese Funktionen nennen wir **elementare Grundfunktionen**. Diesen begegnen Sie in Theorie und Anwendungen besonders häufig.

**Elementare Funktionen** sind endliche Ausdrücke dieser Funktionen, also Konstanten,  $x, \exp(x), \ln(x), \dots$  und alles, was hieraus durch Grundrechenarten  $+, -, \cdot, /$  und Komposition  $\circ$  entsteht, jeweils auf offenen Definitionsintervallen. Beispiel:  $\sqrt[n]{x} = \exp(\ln(x)/n)$  für  $x > 0$ . Kurzum jede Funktion, die wir „geschlossen hinschreiben“ können.

Wir nennen  $f$  **elementar integrierbar**, wenn auch  $\int f$  elementar ist. Elementare Funktionen sind stetig und somit über  $[a, b]$  integrierbar. Sie sind abgeschlossen unter Ableitung, aber nicht unter Integration! Glücklicherweise haben obige Beispiele elementare Stammfunktionen.

Man sagt scherzhaft „Bronstein-integrierbar“, denn diese Funktionen lassen sich integrieren durch Nachschlagen in Integraltafeln wie dem umfangreichen *Taschenbuch der Mathematik* von I.N. Bronstein und K.A. Semendjajew. Noch bequemer sind Computer-Algebra-Systeme, die Integrationsregeln und Tafeln benutzerfreundlich implementieren.

⚠ Viele elementare Funktionen sind nicht elementar integrierbar! Prominente Beispiele sind  $\exp(-x^2/2)$  [B145] und  $\operatorname{si}(x) = \sin(x)/x$  [B149].

☐ Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §1.14. Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$  offen. Eine Funktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **analytisch** im Punkt  $x_0 \in \Omega$ , wenn sie sich lokal um  $x_0$  in eine konvergente Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$$

entwickeln lässt. Gilt dies in jedem Punkt, so heißt  $f$  analytisch auf  $\Omega$ .

Analytische Funktionen sind z.B.  $x \mapsto cx^a, e^x, \sin x, \cos x$ , und mit  $f, g$  auch  $f \pm g$  und  $f \cdot g$  und  $f/g$  sowie  $f \circ g$  und  $f^{-1}$  jeweils wo definiert; die Definitionsbereiche müssen ggf. geeignet eingeschränkt werden. Jede elementare Funktion ist analytisch, zudem viele weitere.

☺ Die analytischen Funktionen sind abgeschlossen unter **Integration**:

$$F(x) = \operatorname{const} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k-1}}{k} (x - x_0)^k$$

Potenzreihen dürfen wir termweise ableiten und erhalten  $F'(x) = f(x)$ .

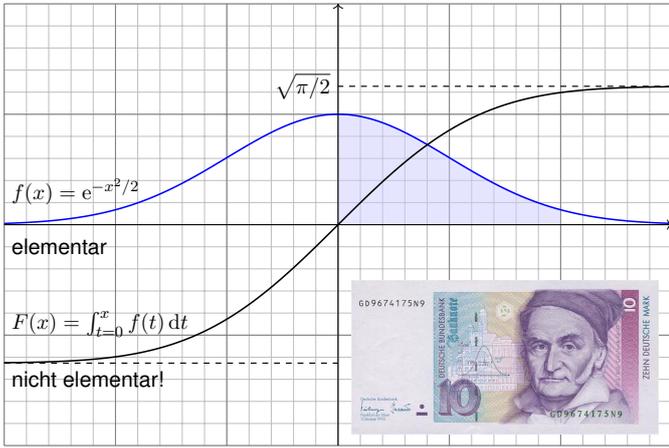
In der Mathematik versteht man unter einer **analytischen Funktion**  $f: \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  oder allgemeiner  $f: \mathbb{C}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  eine Abbildung, die sich lokal als konvergente Potenzreihe darstellen lässt, wie oben erklärt.

Außerhalb der Mathematik werden die Begriffe „elementare Funktion“ und „analytischer Ausdruck“ oft synonym verwendet. Diese Wortwahl ist sehr unglücklich und stiftet heillose Verwirrung. Daher verwende ich zur klaren Unterscheidung ausdrücklich den Begriff **elementare Funktion**.

Die elementaren Funktionen kennen und verstehen wir besonders gut, wir können gut mit ihnen rechnen, d.h. wir können sie zur Vereinfachung geschickt umformen, und so lässt sich manches Ergebnis schließlich „in geschlossener Form“ angeben. Das gelingt jedoch leider nicht immer!

Welche Funktionen man als elementar betrachtet, hängt vom Kontext ab. Zum Beispiel würde man die Gamma- und Bessel-Funktionen wohl dazuzählen, nicht aber (unvereinfachte) Grenzwerte und Integrale.

⚠ Klausuraufgaben verlangen häufig genau dies: „Integrieren Sie...“ bedeutet implizit „Geben Sie das Ergebnis in geschlossener Form an.“



Satz B1P: Liouville 1835

Die Glockenkurve  $f(x) = \exp(-x^2/2)$  ist analytisch, sogar **elementar**, aber ihre Integralfunktion  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$  ist **nicht elementar**.

- ☺ Die Gaußsche Glockenkurve  $f$  und ihre Integralfunktion  $F$  spielen eine zentrale Rolle in Theorie und vielen Anwendungen, insbesondere in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Hierzu müssen wir das Integral  $F(x)$  konkret berechnen, meist für kleine Werte wie  $x \in [-4, 4]$ .
- ☺ Wir werden später  $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}$  ausrechnen [C230] dank zweidimensionaler Integration, Fubini und Transformationsatz.
- ☹ Für  $F$  existiert keine elementare Formel. Auch dieses negative Ergebnis ist nützlich: Es hat keinen Sinn, sich vergebens abzumühen. Die umsichtige Ingenieur:in versteht, was *möglich* ist, und was *nicht*.
- ☺ Die Darstellung von  $f$  und  $F$  als Potenzreihe erlaubt eine elegante und extrem effiziente numerische Berechnung. Hierzu dient die folgende Aufgabe; damit können wir die Funktion  $F$  bequem tabellieren. [V114]

Stammfunktion der Glockenkurve als Potenzreihe

**Aufgabe:** (1) Entwickeln Sie die Funktion  $f(x) = e^{-x^2/2}$  und ihre Stammfunktion  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$  in Potenzreihen um  $x = 0$ .  
(2) Approximieren Sie  $F(x)$  durch ein geeignetes Polynom  $F_n(x)$  in allen Punkten  $x \in [-4, 4]$  bis auf einen Fehler  $\delta < \varepsilon = 10^{-7}$ .

**Lösung:** (1) Dank der Reihe  $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$  finden wir mühelos

$$f(x) = e^{-x^2/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! 2^k} x^{2k} \implies F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! 2^k (2k+1)} x^{2k+1}.$$

- ☺ Zur Probe nutzen wir umgekehrt den HDI, denn Potenzreihen dürfen wir termweises ableiten. Wir sehen  $F' = f$  und  $F(0) = 0$ , also  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ . [A] Analysis, Beispiel 3.8.5. Zur Vertauschung des Integrals mit einer absolut konvergenten Reihe siehe Seite D106.
- ☺ Jede Potenzreihe verhält sich in ihrem Konvergenzkreis wie ein Polynom unendlichen Grades. Damit können Sie rechnen, bequem und effizient, wie Sie dies in der HM2 gelernt haben. Ihre Investition in die mathematischen Grundlagen zahlt sich aus, bereits hier und immer wieder!
- ☺ Die Darstellung als Potenzreihe nutzen wir für viele Funktionen. Sie ist für alle praktischen wie theoretischen Belange beinahe ebenso gut wie eine Darstellung durch elementare Funktionen. Hier ist eine elementare Integration unmöglich, die analytische Integration gelingt jedoch leicht.

Stammfunktion der Glockenkurve als Potenzreihe

(2) Wir berechnen  $F(x)$  für  $x \in [-4, 4]$  auf  $10^{-7}$  genau. Hierzu nutzen wir die obige Reihe: Dies ist eine alternierende Reihe (à la Leibniz), hierfür kennen wir eine bequeme Fehlerschranke (Satz B3G). Für  $n \geq 8$  gilt

$$\left| F(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2^k k! (2k+1)} \right| = \left| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2^k k! (2k+1)} \right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{2^n n! (2n+1)}.$$

Wann ist  $n$  groß genug? Auswerten dieser Schranke ergibt

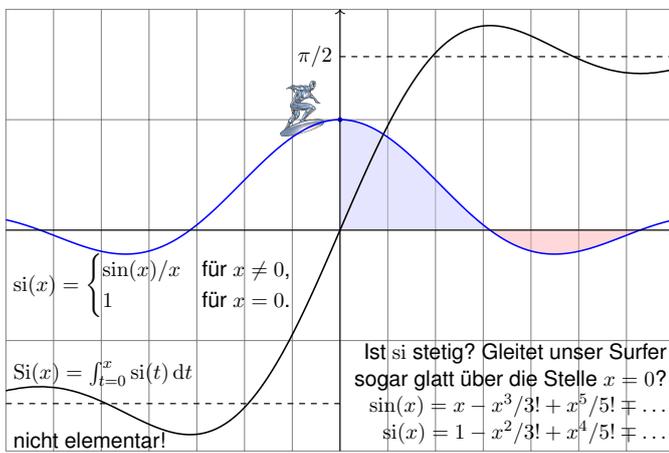
$$n = 30 : \frac{4^{61}}{2^{30} \cdot 30! \cdot 61} \approx 3 \cdot 10^{-7}, \quad n = 31 : \frac{4^{63}}{2^{31} \cdot 31! \cdot 63} \approx 0.8 \cdot 10^{-7}.$$

Eine geeignete Approximation ist demnach folgendes Polynom:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{30} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2^k k! (2k+1)} + \delta \quad \text{mit} \quad |\delta| \leq \frac{|x|^{63}}{2^{31} \cdot 31! \cdot 63} < 10^{-7}.$$

- ☺ Wir erhalten so alle Werte  $F(x)$  für  $x \in [-4, 4]$  auf  $10^{-7}$  genau. Diese Näherung kann nun ein Computer numerisch auswerten. [V114]

Spaltfunktion und Integralsinus



$$si(x) = \begin{cases} \sin(x)/x & \text{für } x \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

$$Si(x) = \int_{-\infty}^x si(t) dt$$

Ist  $si$  stetig? Gleitet unser Surfer sogar glatt über die Stelle  $x = 0$ ?  
 $\sin(x) = x - x^3/3! + x^5/5! \mp \dots$   
 $si(x) = 1 - x^2/3! + x^4/5! \mp \dots$

Integralsinus als Potenzreihe

Satz B1Q: Liouville 1835

Die Spaltfunktion  $si: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig, analytisch, sogar **elementar**, aber ihre Integralfunktion  $Si(x) = \int_{-\infty}^x si(t) dt$  ist **nicht elementar**.

**Aufgabe:** Entwickeln Sie  $si$  und  $Si$  als Potenzreihe. **Lösung:**

$$si(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k} \implies Si(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!(2k+1)} x^{2k+1}$$

Zur Probe nutzen wir umgekehrt den HDI, denn Potenzreihen dürfen wir termweises ableiten. Wir sehen  $Si' = si$  und  $Si(0) = 0$ , also  $Si(x) = \int_{-\infty}^x si(t) dt$ . [A] Analysis, Beispiel 3.8.7. Zur Vertauschung des Integrals mit einer absolut konvergenten Reihe siehe Seite D106.

- ☺ Die Darstellung als Potenzreihe nutzen wir für viele Funktionen. Sie ist für alle praktischen wie theoretischen Belange beinahe ebenso gut wie eine Darstellung durch elementare Funktionen. Die Spaltfunktion  $si$  und der Integralsinus  $Si$  treten zum Beispiel bei Beugung von Lichtwellen an einem Spalt auf. Äquivalent hierzu begegnet uns die Spaltfunktion als Fourier-Transformierte der Rechteckfunktion. [E107] Anwendung: So werden mikroskopisch kleine Strukturen gemessen. Wir werden etwas später sogar den Grenzwert  $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \frac{\sin(x)}{x} dx = \pi$  ausrechnen können, allerdings erst dank zweidimensionaler Integration, Integralsätzen und Residuenkalkül. [F425] Unerschrockenen gelingt dies auch eindimensional mit der Laplace-Transformation. [L409]

Elementar integrierbar oder nicht...?

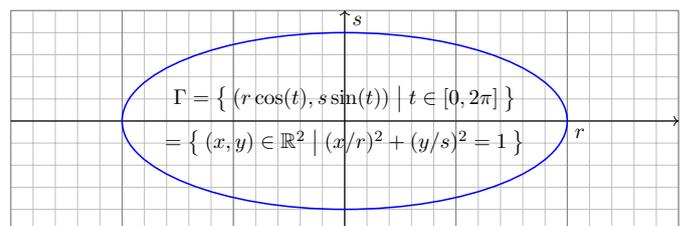
⚠ Elementare Fragen erfordern oft nicht-elementare Antworten. Elementare Integrierbarkeit sieht man dem Integranden nicht leicht an:

elementar integrierbar	nicht elementar integrierbar
$e^x$	$e^{x^2}, e^x/x$
$\ln x$	$\ln \ln x, \sqrt{\ln x}$
$\sin x, \cos x$	$\sin(x)/x$
$\sqrt{\tan x}$	$\sqrt{\cos x}$
$\ln(x)/x$	$\ln(x)/(x-1)$
$\sqrt{1+x^2}$	$\sqrt[3]{1+x^2}$
$x^x + x^x \ln x$	$x^x, x^x \ln x$
$x / \sqrt{x^4 + 10x^2 - 96x - 71}$	$x / \sqrt{x^4 + 10x^2 - 96x - 72}$

- ☺ Computer-Algebra-Systeme nutzen den **Algorithmus von Risch**: Er findet entweder eine elementare Stammfunktion, falls eine existiert, oder aber er erkennt ihre Nicht-Existenz. Das ist phantastisch-genial!

Die Kurvenlänge von Ellipsen

Die **Ellipse**  $\Gamma$  um den Nullpunkt  $(0, 0)$  mit Radien  $r, s > 0$ :



Der umschlossene **Flächeninhalt** ist  $\text{vol}_2(A) = \pi r s$ . (Warum?)  
Die **Kurvenlänge** von  $\Gamma$  ist gegeben durch das elliptische Integral

$$\text{vol}_1(\Gamma) = \int_{t=0}^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2(t) + s^2 \cos^2(t)} dt.$$

- Kurvenintegrale werden wir in Kapitel E noch ausführlicher behandeln. Für  $r \neq s$  lässt es sich nicht durch elementare Funktionen ausdrücken! Dies gelingt als Potenzreihe in der **Exzentrizität**  $\varepsilon := \sqrt{1 - s^2/r^2}$ . [E040]

Riemann-integrierbare Funktionen schachteln wir ein durch Treppenfunktionen (A3E). Diese Technik funktioniert bestens für stetige Funktionen, stößt aber schnell an ihre Grenzen:

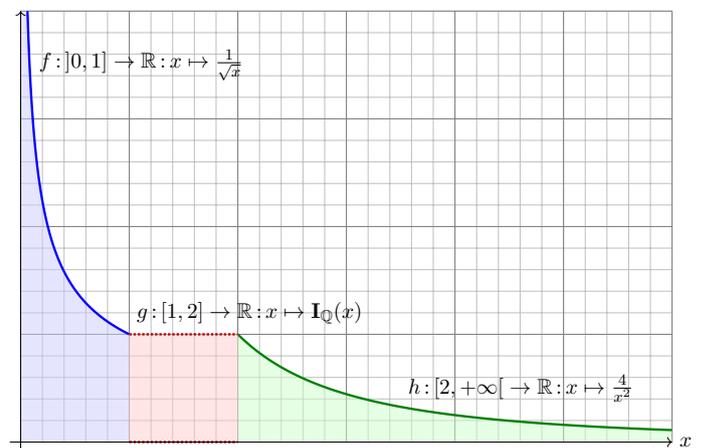
◆ **Satz A3F: Riemann-Integrierbarkeit, hier eindimensional**

Genau dann ist  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbar, wenn gilt:

- Die Funktion  $f$  hat beschränkten Träger: Es gibt ein endliches Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  sodass  $f(x) = 0$  für  $x \notin I$ .
- Die Funktion  $f$  hat beschränkten Wertebereich: Es gibt ein endliches Intervall  $J \subseteq \mathbb{R}$  sodass  $f(I) \subseteq J$ .
- Die Funktion  $f$  ist fast überall stetig: Für die Menge  $U \subseteq \mathbb{R}$  der Unstetigkeitsstellen gilt  $\text{vol}_1(U) = 0$ .

- 😊 Alle stetigen Funktionen  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sind Riemann-integrierbar.
- 😞 Viele Funktionen sind allein mit Einschachtelung nicht integrierbar.

Die nächste Seite zeigt drei typische Beispiele. Bei  $f$  ist der Wertebereich unbeschränkt, bei  $h$  hingegen der Träger: Diese lassen sich nicht durch Treppenfunktionen einschachteln! Die Funktion  $g$  ist in jedem Punkt unstetig: Zwar lässt sie sich durch Treppenfunktionen einschachteln, aber nicht beliebig genau, denn die Fläche dazwischen beträgt mindestens 1.



Die erweiterte Zahlengerade  $\bar{\mathbb{R}}$  vereinfacht Konvergenzaussagen:

◆ **Satz A2E: Supremum und Infimum in  $\bar{\mathbb{R}}$**

Jede Teilmenge  $M \subseteq \bar{\mathbb{R}}$  hat ein Supremum und ein Infimum in  $\bar{\mathbb{R}}$ .

Ist die Menge  $M$  leer, so gilt  $\sup \emptyset = -\infty$  und  $\inf \emptyset = +\infty$ .

◆ **Satz A2F: monotone Konvergenz von Zahlenfolgen**

Jede wachsende Folge  $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots$  in  $\bar{\mathbb{R}}$  konvergiert gegen einen Grenzwert  $a \in \bar{\mathbb{R}}$ . Wir schreiben hierfür kurz  $a_k \nearrow a$ .

Für  $b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots$  in  $\bar{\mathbb{R}}$  gilt entsprechend  $b_k \searrow b$  mit  $b \in \bar{\mathbb{R}}$ .

◆ **Satz A2G: monotone Konvergenz von Funktionenfolgen**

Jede wachsende Folge  $f_0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$  von Funktionen  $f_k: \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  konvergiert punktweise gegen eine Grenzfunktion  $f: \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ . Das heißt, für jedes  $x \in \Omega$  gilt  $f_k(x) \nearrow f(x)$ , kurz  $f_k \nearrow f$ .

Für  $g_0 \geq g_1 \geq g_2 \geq \dots: \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  gilt entsprechend  $g_k \searrow g: \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ .

Wir wollen  $f: \Omega \rightarrow [0, \infty]$  ausschöpfen durch messbare Funktionen

$$f_0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots \quad \text{mit} \quad f_k \nearrow f.$$

D.h. es gilt monotone Konvergenz  $f_k(x) \nearrow f(x)$  für jedes  $x \in \Omega$ .

Dank Monotonie des Integrals gilt dann

$$\int_{\Omega} f_0(x) dx \leq \int_{\Omega} f_1(x) dx \leq \int_{\Omega} f_2(x) dx \leq \dots$$

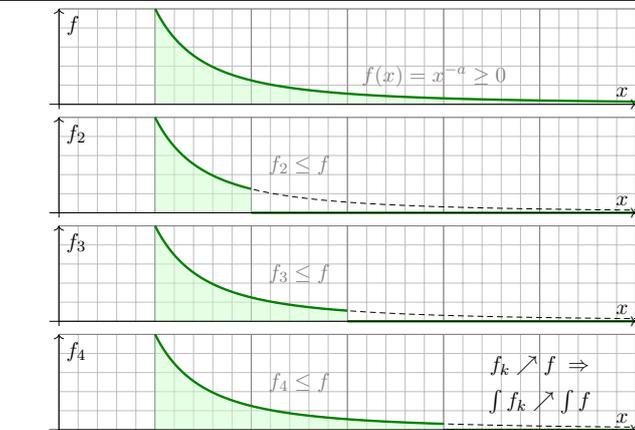
Hieraus folgt Konvergenz  $\int_{\Omega} f_k(x) dx \nearrow A$  gegen ein  $A \in [0, \infty]$ .

Auch die Grenzfunktion  $f$  ist dann messbar (A3G), und wir erhalten

$$\int_{\Omega} f(x) dx = A.$$

😊 Diese Integrationsmethode ist das **Prinzip der Ausschöpfung**.

Das Ergebnis ist wohldefiniert, d.h. es hängt nur von der Funktion  $f$  ab, nicht jedoch von unserer willkürlichen Wahl einer Ausschöpfung  $f_k \nearrow f$ .



☐ Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, Beispiel 3.7.8 und später B217. Die Funktion  $f$  ist nicht Riemann-integrierbar, da ihr Träger  $[1, +\infty[$  nicht beschränkt ist.

**Aufgabe:** Integriere  $f(x) = x^{-a}$  auf  $\Omega = [1, +\infty[$  durch Ausschöpfung.

**Lösung:** Für  $f_k = f \cdot \mathbf{I}_{[1, k]}$  gilt  $f_k \nearrow f$ . (1) Für  $a = 1$  finden wir

$$\int_{\Omega} f_k(x) dx \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{x=1}^k \frac{1}{x} dx \stackrel{\text{HDI}}{=} [\ln x]_{x=1}^k = \ln k \nearrow +\infty.$$

(2) Für  $a < 1$  fällt  $f$  noch langsamer:

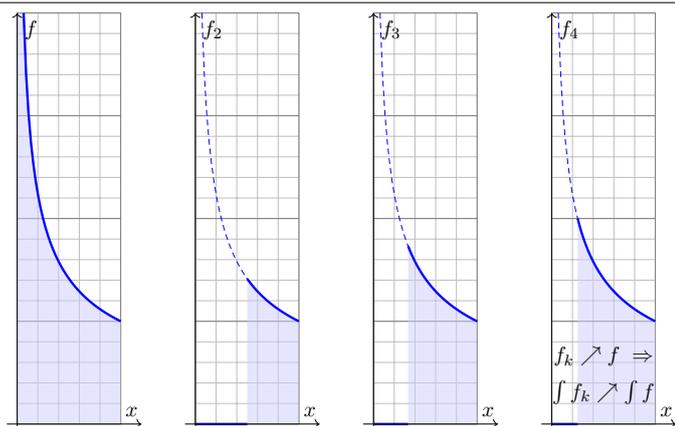
$$\int_{\Omega} f_k(x) dx \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{x=1}^k x^{-a} dx \stackrel{\text{HDI}}{=} \left[ \frac{x^{1-a}}{1-a} \right]_{x=1}^k = \frac{k^{1-a} - 1}{1-a} \nearrow +\infty$$

(3) Nur für  $a > 1$  fällt  $f$  schnell genug:

$$\int_{\Omega} f_k(x) dx \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{x=1}^k x^{-a} dx \stackrel{\text{HDI}}{=} \left[ \frac{x^{1-a}}{1-a} \right]_{x=1}^k = \frac{1 - k^{1-a}}{a-1} \nearrow \frac{1}{a-1}$$

Dank Ausschöpfung  $f_k \nearrow f$  gilt  $\int_{\Omega} f_k \nearrow \int_{\Omega} f$ . Wir erhalten also

$$\int_{x=1}^k \frac{1}{x^a} dx = \begin{cases} \ln k & \text{für } a = 1 \\ \frac{1 - k^{1-a}}{a-1} & \text{für } a \neq 1 \end{cases} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \begin{cases} +\infty & \text{für } a \leq 1, \\ \frac{1}{a-1} & \text{für } a > 1. \end{cases}$$



☐ Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, Beispiel 3.7.9 und später B217. Die Funktion  $f: ]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  ist nicht Riemann-integrierbar, da sie nicht beschränkt ist.

**Aufgabe:** Integriere  $f(x) = x^{-a}$  auf  $\Omega = ]0, 1]$  durch Ausschöpfung.

**Lösung:** Für  $f_k = f \cdot \mathbf{I}_{[1/k, 1]}$  gilt  $f_k \nearrow f$ . (1) Für  $a = 1$  finden wir

$$\int_{\Omega} f_k(x) dx \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{x=1/k}^1 \frac{1}{x} dx \stackrel{\text{HDI}}{=} [\ln x]_{x=1/k}^1 = \ln k \nearrow +\infty.$$

(2) Für  $a > 1$  wächst  $f$  sogar noch schneller:

$$\int_{\Omega} f_k(x) dx \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{x=1/k}^1 x^{-a} dx \stackrel{\text{HDI}}{=} \left[ \frac{x^{1-a}}{1-a} \right]_{x=1/k}^1 = \frac{k^{a-1} - 1}{a-1} \nearrow +\infty$$

(3) Nur für  $a < 1$  wächst  $f$  langsam genug:

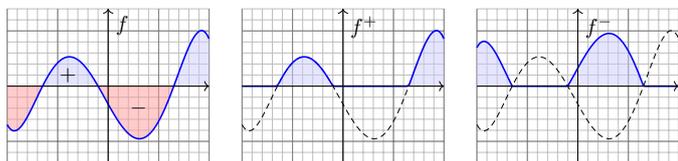
$$\int_{\Omega} f_k(x) dx \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{x=1/k}^1 x^{-a} dx \stackrel{\text{HDI}}{=} \left[ \frac{x^{1-a}}{1-a} \right]_{x=1/k}^1 = \frac{1 - k^{1-a}}{1-a} \nearrow \frac{1}{1-a}$$

Dank Ausschöpfung  $f_k \nearrow f$  gilt  $\int_{\Omega} f_k \nearrow \int_{\Omega} f$ . Wir erhalten also

$$\int_{x=1/k}^1 \frac{1}{x^a} dx = \begin{cases} \ln k & \text{für } a = 1 \\ \frac{1 - k^{1-a}}{1-a} & \text{für } a \neq 1 \end{cases} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \begin{cases} +\infty & \text{für } a \geq 1, \\ \frac{1}{1-a} & \text{für } a < 1. \end{cases}$$

## Absolut integrierbare Funktionen und ihr Integral

B209  
Erinnerung



Bislang haben wir positive Funktionen durch Ausschöpfung integriert. Das passt zur Idee des Volumens und vereinfacht die Formulierung. Für beliebige Funktionen  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  können wir wie folgt vorgehen: Wir zerlegen  $f = f^+ - f^-$  in **Positivteil**  $f^+$  und **Negativteil**  $f^-$  gemäß

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } f(x) > 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{falls } f(x) < 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für jede Funktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  gilt  $f = f^+ - f^-$  und  $|f| = f^+ + f^-$ . Umgekehrt gilt allgemein  $f^\pm = \max(0, \pm f) = \frac{1}{2}(|f| \pm f)$ . Für  $f(x) = \pm\infty$  nutzen wir die Konvention  $\infty - \infty = 0$ .

## Absolut integrierbare Funktionen und ihr Integral

B211  
Erinnerung

**Beispiel:** Für die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \sin(x)/x$  gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f^+(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f^-(x) dx = \infty.$$

Demnach ist  $f$  also nicht **absolut integrierbar**. (Seite B149 zeigt eine Skizze, die ausführliche Rechnung diskutieren wir auf Seite B421.) In diesem Fall hat es keinen Sinn, die Differenz  $\infty - \infty$  zu betrachten! Wir werden daher meist die **absolute Integrierbarkeit** voraussetzen. In diesem besten Falle haben  $f^+, f^-$  endliches Integral, und wir setzen

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f^+(x) dx - \int_{\mathbb{R}} f^-(x) dx.$$

Andernfalls haben viele Integrale zunächst keinen Sinn! Notfalls müssen wir **uneigentliche Integrale** oder den **Cauchy-Hauptwert** nutzen:

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x) dx \quad \text{oder} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx$$

Diese Konstruktionen sind etwas subtiler und leider weniger robust. [B417] Die beste und robusteste Eigenschaft ist die absolute Integrierbarkeit.

## Der Hauptsatz für stückweise stetige Funktionen

B213  
Ergänzung

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist das Arbeitspferd der eindimensionalen Integration. In vielen Anwendungen, auch später in dieser Vorlesung, werden zudem stückweise stetige Funktionen (B1E) integriert. Die Ausformulierung des Hauptsatzes ist hier nicht schwer:

**Satz B2C: Hauptsatz für stückweise stetige Funktionen**

Ist  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit stückweise stetiger Ableitung  $f = F'$ , so gilt

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Ist umgekehrt eine Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stückweise stetig, so ist

$$F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) := \int_a^x f(t) dt$$

stetig und erfüllt  $F'(x) = f(x)$  für alle bis auf endlich viele  $x \in [a, b]$ .

😊 Der Satz folgt aus dem HDI (B1i) durch stückweise Integration. Die folgende Optimierung ist technisch, zahlt sich aber später aus.

## Der Hauptsatz für integrierbare Funktionen

B215  
Ergänzung

😊 Die absolute Stetigkeit ist maßgeschneidert für den HDI, denn sie charakterisiert genau die Integralfunktionen:

**Satz B2E: Hauptsatz für absolut integrierbare Funktionen**

Ist  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  absolut stetig, so ist  $F$  fast überall differenzierbar, ihre Ableitung  $f = F': [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist absolut integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Ist umgekehrt eine Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  absolut integrierbar, so ist

$$F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) := \int_a^x f(t) dt$$

absolut stetig, fast überall differenzierbar, und fast überall gilt  $F' = f$ .

Hierzu definieren wir die Ableitungsfunktion  $F': [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  durch den Differentialquotient  $F'(x) = \lim_{\xi \rightarrow x} (F(\xi) - F(x)) / (\xi - x)$  für alle  $x \in [a, b]$ , in denen dieser Grenzwert existiert, und  $F'(x) := 0$  sonst.

## Absolut integrierbare Funktionen und ihr Integral

B210  
Erinnerung

Zur Erinnerung an A3K: In einer Dimension sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall.

**Definition B2A: absolut integrierbare Funktionen und ihr Integral**

Genau dann ist  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  **messbar**, wenn  $f^\pm: \Omega \rightarrow [0, \infty]$  messbar sind. (1) In diesem Fall ist auch  $|f| = f^+ + f^-$  messbar, und somit gilt

$$\int_{\Omega} |f(x)| dx = \int_{\Omega} f^+(x) dx + \int_{\Omega} f^-(x) dx.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so nennen wir  $f$  (**absolut**) **integrierbar**. In diesem Fall können wir das Integral von  $f$  definieren durch

$$\int_{\Omega} f(x) dx := \int_{\Omega} f^+(x) dx - \int_{\Omega} f^-(x) dx.$$

⚠ Die Differenz  $\infty - \infty$  ist sinnlos! Zur Integration von  $f = f^+ - f^-$  müssen Positivteil  $f^+$  und Negativteil  $f^-$  endliche Integrale liefern.

😊 Das Kriterium  $\int_{\Omega} |f(x)| dx < \infty$  ist einfach, präzise und bequem. Geschickte Abschätzung vermeidet die mühsame Berechnung von  $f^\pm$ .

## Absolut integrierbare Funktionen und ihr Integral

B212  
Erinnerung

Wir wollen möglichst allgemeine Funktionen  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  integrieren. Zudem sollen die Rechenregeln möglichst einfach und allgemein sein. Dies gelingt nach Lebesgue mit den absolut integrierbaren Funktionen. Zur Erinnerung an A3L: In einer Dimension sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall.

**Satz B2B: absolut integrierbare Funktionen und ihr Integral**

Wir betrachten ein Integrationsintervall  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ , etwa  $\Omega = \mathbb{R}$ . Die Menge aller (messbaren und) absolut integrierbaren Funktionen

$$L^1(\Omega) = L^1(\Omega, \mathbb{R}) := \{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} |f(x)| dx < \infty \}$$

ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Hierauf ist das Integral eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung

$$\int_{\Omega}: L^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}: f \mapsto \int_{\Omega} f(x) dx.$$

Sie ist normiert, monoton, erfüllt Einschachtelung und Ausschöpfung. Hierbei ist  $L^1(\Omega)$  der kleinste Funktionenraum, für den dies möglich ist, und auf  $L^1(\Omega)$  ist das (Lebesgue-)Integral hierdurch eindeutig bestimmt.

## Der Hauptsatz für integrierbare Funktionen

B213  
Ergänzung

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt viel allgemeiner für alle absolut integrierbaren Funktionen  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , egal ob stetig, stückweise stetig, oder sehr unstetig. Die Integralfunktion  $F$  ist dann nicht mehr überall differenzierbar, aber immerhin fast überall. Die genaue Formulierung beruht auf dem Begriff der absoluten Stetigkeit ([H] Heuser §131):

**Definition B2D: absolut stetige Funktionen**

Eine Funktion  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **absolut stetig**, wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, sodass gilt: Aus  $a \leq a_1 < b_1 \leq \dots \leq a_n < b_n \leq b$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und  $\sum_{k=1}^n |a_k - b_k| < \delta$  folgt  $\sum_{k=1}^n |F(a_k) - F(b_k)| < \varepsilon$ .

Für  $n = 1$  ist dies die gleichmäßige Stetigkeit; diese wird hier für  $n$  Intervalle verschärft. Absolute Stetigkeit liegt zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit, allgemein gilt nämlich: stetig differenzierbar  $\implies$  stetig und stückweise stetig differenzierbar  $\implies$  Lipschitz-stetig  $\implies$  absolut stetig  $\implies$  gleichmäßig stetig  $\implies$  stetig. Die Umkehrungen gelten im Allgemeinen nicht.

Lipschitz-Stetigkeit von  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  bedeutet, dass  $F$  beschränkte Differenzenquotienten hat, also  $|\frac{F(s) - F(t)}{s - t}| \leq L$  für eine Konstante  $L \in \mathbb{R}$  und alle  $s \neq t$  in  $[a, b]$ . Das ist oft nützlich.

Der folgende Satz von Lebesgue verallgemeinert den Hauptsatz B1i der Differential- und Integralrechnung von (stückweise) stetigen Integranden zu absolut integrierbaren Integranden. Dieses Ergebnis beinhaltet die Integralfunktionen aller stückweise stetigen Funktionen und auch sonst alle Funktionen, die uns im Folgenden begegnen werden.

## Der Hauptsatz für integrierbare Funktionen

B216  
Ergänzung

😊 Absolute Stetigkeit lässt sich somit leicht charakterisieren:

**Korollar B2F: absolut stetig und absolut integrierbar**

Genau dann ist  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  absolut stetig, wenn es eine absolut integrierbare Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gibt mit  $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t) dt$ .

😊 Die partielle Integration gilt in allgemeiner Fassung:

**Korollar B2G: partielle Integration, vgl. B1J**

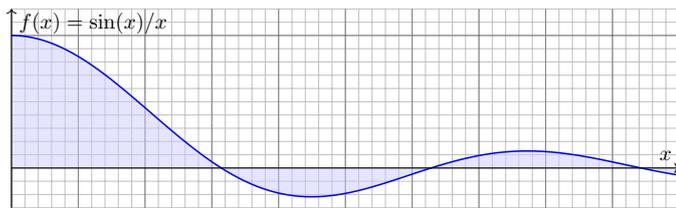
Sind  $F, G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  absolut stetig, so auch  $FG$ , fast überall gilt  $(FG)' = F'G + FG'$  und somit  $\int_a^b F G' = [FG]_a^b - \int_a^b F' G$ .

😊 Die Substitutionsregel gilt noch für monotone Parameterwechsel:

**Korollar B2H: Substitutionsregel, vgl. B1K**

Sei  $g: [a, b] \rightarrow [c, d]$  monoton und absolut stetig. Ist  $f: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  absolut integrierbar, so auch  $(f \circ g) \cdot g'$  und  $\int_a^b f(g(t)) g'(t) dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$ .

Zu integrieren sei  $f: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $-\infty < a < b \leq +\infty$ .



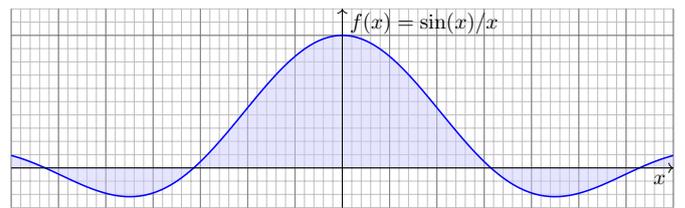
Die Funktion  $f$  sei auf jedem Teilintervall  $[a, \beta] \subseteq ]a, b[$  integrierbar. Wir nennen  $f$  **uneigentlich integrierbar** auf  $]a, b[$ , wenn der Grenzwert

$$\int_a^{\rightarrow b} f(x) dx := \lim_{\beta \nearrow b} \int_a^\beta f(x) dx$$

in  $\mathbb{R}$  existiert. Er heißt dann **uneigentliches Integral** von  $f$  auf  $]a, b[$ .

☐ Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §3.7.

Zu integrieren sei  $f: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ .



Die Funktion  $f$  sei auf jedem Teilintervall  $[\alpha, \beta] \subseteq ]a, b[$  integrierbar.

$$\int_{\rightarrow a}^{\rightarrow b} f(x) dx := \lim_{\alpha \searrow a} \int_\alpha^z f(x) dx + \lim_{\beta \nearrow b} \int_z^\beta f(x) dx$$

Wir nennen  $f$  **uneigentlich integrierbar**, wenn beide Grenzwerte in  $\mathbb{R}$  existieren. Ihre Summe heißt **uneigentliches Integral** von  $f$  auf  $]a, b[$ . Dies ist unabhängig von der Wahl des Teilungspunktes  $z \in ]a, b[$ .

Zur Integration über ganz  $\mathbb{R}$  haben wir drei nützliche Möglichkeiten:

(1) Bei **absoluter Integration** zerlegen wir  $f = f^+ - f^-$  und setzen

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx := \int_{\mathbb{R}} f^+(x) dx - \int_{\mathbb{R}} f^-(x) dx.$$

- ⚠ Hierzu müssen rechts beide Integrale endlich sein.
- 😊 Dieser Integrationsbegriff gilt allgemein über  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  (A3k).

(2) Das **uneigentliche Integral** von  $f$  ist die Summe der Grenzwerte

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^z f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_z^b f(x) dx.$$

- ⚠ Hierzu müssen beide Grenzwerte existieren und endlich sein.
- 😊 Existiert das Integral (1) so auch (2) und beide sind gleich. [B221]

(3) Der **Cauchy-Hauptwert** von  $f$  ist der Grenzwert (falls existent)

$$(CH) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx.$$

- 😊 Existiert das Integral (2) so auch (3) und beide sind gleich. [B223]
- ⚠ Die Umkehrungen (3)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (1) gelten im Allgemeinen nicht. [B417]

Diese drei Begriffe hängen eng miteinander zusammen:

$$\text{absolut} \not\Rightarrow \text{uneigentlich} \not\Rightarrow \text{Cauchy-Hauptwert}$$

Für das absolute Integral (1) von  $f = f^+ - f^-$  integrieren wir Positivteil  $f^+$  und Negativteil  $f^-$  getrennt. Sind beide Integrale endlich, so können wir ihre Differenz bilden, das Ergebnis ist das absolute Integral von  $f$ .

Sollte  $f$  nicht absolut integrierbar sein, so betrachten wir stattdessen allgemeiner (2) oder gar (3). Wir nehmen hierzu an, dass  $f$  wenigstens über jedem endlichen Intervall  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  absolut integrierbar ist.

Für das uneigentliche Integral (2) wählen wir einen Teilungspunkt  $z$ , zum Beispiel  $z = 0$ . (Das Ergebnis ist von dieser Wahl unabhängig.) Wenn beide Grenzwerte  $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^z f(x) dx$  und  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_z^b f(x) dx$  existieren, so nennen wir  $f$  uneigentlich integrierbar und definieren das uneigentliche Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  wie oben als ihre Summe.

Für den Cauchy-Hauptwert (3) bilden wir das Integral  $\int_{-r}^r f(x) dx$  über das symmetrische Intervall  $[-r, r]$  und bilden den Grenzwert  $r \rightarrow \infty$ . Wenn dieser existiert, so nennen wir ihn den Cauchy-Hauptwert.

**Satz B21:** Absolute impliziert uneigentliche Integrierbarkeit.

(1) Für jede messbare Funktion  $f: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  und  $z \in ]a, b[$  gilt

$$\lim_{\alpha \searrow a} \int_\alpha^z |f(x)| dx + \lim_{\beta \nearrow b} \int_z^\beta |f(x)| dx = \int_{]a,b[} |f(x)| dx.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so ist  $f$  absolut integrierbar, und es gilt

$$\lim_{\alpha \searrow a} \int_\alpha^z f(x) dx + \lim_{\beta \nearrow b} \int_z^\beta f(x) dx = \int_{]a,b[} f(x) dx.$$

Für nicht-negative Funktionen  $f \geq 0$  stimmen also beide Integrationsmethoden (absolut vs uneigentlich) überein und liefern dasselbe Ergebnis. Für absolut integrierbare Funktionen  $f$  ist die Definition  $\int f = \int f^+ - \int f^-$  die robustere Methode mit besseren Eigenschaften. Wenn sie möglich ist, so impliziert sie insbesondere die uneigentliche Integrierbarkeit. Wie unten erläutert gibt es jedoch auch Funktionen, die nicht absolut, sondern nur uneigentlich integrierbar sind. In solchen Notfällen müssen wir uns mit uneigentlichen Integralen begnügen, auch wenn sie weniger gute Eigenschaften haben. Das ist später für Fourier-Integrale immer wieder nützlich.

**Nachrechnen:** Sei  $\alpha_n \searrow a$  und  $\beta_n \nearrow b$  Folgen mit  $\alpha_n < z < \beta_n$ .

Sei zunächst  $f \geq 0$ . Für  $f_n = \mathbf{I}_{[\alpha_n, \beta_n]}$   $f$  gilt dann  $f_n \nearrow f$ , also

$$\int_{\alpha_n}^z f(x) dx = \int_{]a,z[} f_n(x) dx \nearrow \int_{]a,z[} f(x) dx,$$

$$\int_z^{\beta_n} f(x) dx = \int_{]z,b[} f_n(x) dx \nearrow \int_{]z,b[} f(x) dx.$$

Dies beweist die erste Gleichung. Ist  $f$  absolut integrierbar, so gilt

$$\int_{\alpha_n}^z f = \int_{\alpha_n}^z f^+ - \int_{\alpha_n}^z f^- \rightarrow \int_{]a,z[} f^+ - \int_{]a,z[} f^- = \int_{]a,z[} f,$$

$$\int_z^{\beta_n} f = \int_z^{\beta_n} f^+ - \int_z^{\beta_n} f^- \rightarrow \int_{]z,b[} f^+ - \int_{]z,b[} f^- = \int_{]z,b[} f.$$

Demnach existiert beide Grenzwerte, und es gilt die zweite Gleichung.

⚠ Ist  $f$  nicht absolut integrierbar, so existiert in manchen Fällen wenigstens noch das uneigentliche Integral. Das ist sein Zweck.

Der **Cauchy-Hauptwert** einer Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist

$$(CH) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx$$

insofern dieser Grenzwert in  $\mathbb{R}$  existiert. Diese Vereinbarung erlaubt uns, auch manch divergenten Integralen noch einen Wert zuzuordnen, sofern sich divergente Teile verschiedenen Vorzeichens gegenseitig aufheben.

**Satz B2J:** Absolute Integrierbarkeit impliziert Cauchy-Hauptwert.

(1) Für jede messbare Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r |f(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so ist  $f$  absolut integrierbar, und es gilt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx.$$

**Bemerkung:** In Definition und Satz nehmen wir stillschweigend an, dass die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  auf jedem Intervall  $[-r, r]$  integrierbar ist.

**Nachrechnen:** Sei  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge mit  $r_n \nearrow +\infty$ .

Sei zunächst  $f \geq 0$ . Für  $f_n = \mathbf{I}_{[-r_n, r_n]}$   $f$  gilt dann  $f_n \nearrow f$ , also

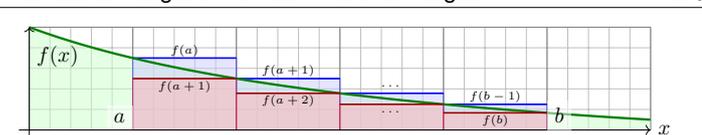
$$\int_{-r_n}^{r_n} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx \nearrow \int_{\mathbb{R}} f(x) dx.$$

Dies zeigt die erste Gleichung. Ist  $f$  auf  $\mathbb{R}$  absolut integrierbar, so gilt

$$\int_{-r_n}^{r_n} f = \int_{-r_n}^{r_n} f^+ - \int_{-r_n}^{r_n} f^- \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f^+ - \int_{\mathbb{R}} f^- = \int_{\mathbb{R}} f.$$

Demnach existiert dieser Grenzwert, und es gilt die zweite Gleichung.

⚠ Ist  $f$  weder absolut noch uneigentlich integrierbar, so existiert manchmal wenigstens noch der Cauchy-Hauptwert. Genau das ist sein Zweck. Er hat nicht ganz so gute Eigenschaften, ist aber besser als nichts.



**Satz B3A: monotoner Vergleich von Integral und Reihe**

Sei  $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  monoton fallend. Für alle  $a < b$  in  $\mathbb{N}$  gilt dann:

$$\sum_{k=a+1}^b f(k) \leq \int_{x=a}^b f(x) dx \leq \sum_{k=a}^{b-1} f(k)$$

Durch Umstellung ist hierzu äquivalent:

$$\int_{x=a}^b f(x) dx \leq \sum_{k=a}^{b-1} f(k) \leq f(a) + \int_{x=a}^{b-1} f(x) dx$$

- ☺ Reihe und Integral haben gleiches Konvergenzverhalten für  $b \rightarrow \infty$ .
- ☺ Beide können gegenseitig als Näherung genutzt werden.

**Konvergenz von Integralen und Reihen**

**Aufgabe:** (1) Finden Sie Stammfunktionen zu den Funktionen

$$\frac{1}{x^s}, \quad \frac{1}{x(\ln x)^s}, \quad \frac{1}{x \ln x (\ln \ln x)^s}$$

(2) Für welche Exponenten  $s \in \mathbb{R}$  konvergieren folgende Reihen?

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}, \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^s}, \quad \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k \ln k (\ln \ln k)^s}$$

**Lösung:** (1) Wir unterscheiden die Fälle  $s = 1$  und  $s \neq 1$ :

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(x), \quad \int \frac{dx}{x \ln x} = \ln \ln x, \quad \int \frac{dx}{x \ln x \ln \ln x} = \ln \ln \ln x$$

$$\int \frac{dx}{x^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s}, \quad \int \frac{dx}{x(\ln x)^s} = \frac{(\ln x)^{1-s}}{1-s}, \quad \int \frac{dx}{x \ln x (\ln \ln x)^s} = \frac{(\ln \ln x)^{1-s}}{1-s}$$

(2) Für  $s \leq 1$  divergieren die Integrale, also auch die Reihen (B3A). Für  $s > 1$  konvergieren die Integrale, also auch die Reihen. (Elementare Grenzwerte sind nur für spezielle Werte wie  $s = 2, 4, 6, 8, \dots$  bekannt.)

**HDI: diskrete Version für Summen**

**Aufgabe:** (1) Nennen und beweisen Sie die Summenformeln zu

$$\sum_{k=0}^{n-1} 1, \quad \sum_{k=0}^{n-1} k, \quad \sum_{k=0}^{n-1} k^2, \quad \sum_{k=0}^{n-1} k^3, \quad \dots$$

☐ Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, Beispiele 1.2.2 und 1.2.4.

- (2) Allgemein: Formulieren Sie die diskrete Version des HDI (Satz B11).  
 (3) Analog zu monoton fallenden Funktionen sei nun  $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  monoton wachsend. Formulieren und beweisen Sie (wie in Satz B3A) Ungleichungen zwischen Summe  $\sum_{k=m}^n f(k)$  und Integral  $\int_{x=a}^b f(x) dx$   
 (4) Beweisen Sie für jedes  $s \in \mathbb{R}_{>0}$  eine Ungleichung der Form

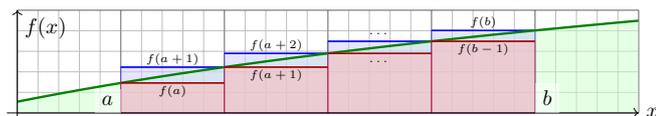
$$c_s (n-1)^{s+1} \leq \sum_{k=0}^{n-1} k^s \leq c_s n^{s+1}$$

mit einer passenden Konstanten  $c_s \in \mathbb{R}$ , und allgemeiner

$$c_s [(b-1)^{s+1} - (a-1)^{s+1}] \leq \sum_{k=a}^{b-1} k^s \leq c_s [b^{s+1} - a^{s+1}].$$

**Monotoner Vergleich von Summe und Integral**

(3) Wir machen eine Skizze und lesen die Ungleichungen ab:



**Satz B3C: monotoner Vergleich von Summe und Integral**

Sei  $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  monoton wachsend. Für alle  $a < b$  in  $\mathbb{N}$  gilt dann:

$$\sum_{k=a}^{b-1} f(k) \leq \int_{x=a}^b f(x) dx \leq \sum_{k=a+1}^b f(k)$$

Durch Umstellung ist hierzu äquivalent:

$$f(a) + \int_{x=a}^{b-1} f(x) dx \leq \sum_{k=a}^{b-1} f(k) \leq \int_{x=a}^b f(x) dx$$

**Übung:** Beweisen Sie die Sätze B3A, B3B, B3C sorgsam per Induktion.

**Anwendung auf die harmonische Reihe**

**Aufgabe:** Wir untersuchen die **harmonische Reihe**

$$H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

- Schachteln Sie den Wert  $H_n$  ein durch den Logarithmus  $\ln(n)$ .
- Folgern Sie das Konvergenzverhalten von  $H_n$  für  $n \rightarrow \infty$ .
- Bei welchem Index  $n$  überschreitet  $H_n$  den Wert 1000?

**Lösung:** (1) Für die Funktion  $f(x) = 1/x$  erhalten wir dank Satz B3A:

$$\ln(n) < \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$$

- ☺ Die harmonische Reihe wächst wie der natürliche Logarithmus!
- (2) Insbesondere erhalten wir die Divergenz  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ .
- (3) Bei  $n \approx e^{1000} \approx 2 \cdot 10^{434}$ . Wir werden das also sicher nie erleben!
- ☐ Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §1.8–§1.9.
- ☺ Den Vergleich von Summe und Integral nutzen wir ausgiebig für den lokalen Grenzwertsatz in der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Kapitel V).

**Approximation einer Dirichlet-Reihe durch Integrale**

**Aufgabe:** Berechnen Sie durch Summation näherungsweise den Wert

$$\zeta(3) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \quad \text{der Riemannschen Zeta-Funktion} \quad \zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

bis auf einen Fehler  $\leq \varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-6}$ , also sechs Nachkommastellen. Wie kontrollieren Sie den Fehler? Wie weit müssen Sie summieren?

**Lösung:** Wir berechnen die endlichen Summen  $s_n = \sum_{k=1}^n k^{-3}$  und wählen  $n$  so, dass der Rest  $\zeta(3) - s_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-3}$  kleiner als  $\varepsilon$  ist:

$$0 < \int_{x=n+1}^{\infty} x^{-3} dx < \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-3} < \int_{x=n}^{\infty} x^{-3} dx = \frac{1}{2n^2} \stackrel{!}{\leq} \varepsilon$$

Die Wahl  $n = 1000$  garantiert einen Fehler  $\leq 0.5 \cdot 10^{-6} = 0.0000005$ . Wir finden  $s_{1000} = 1.20205640\dots$ , also  $1.20205689 < \zeta(3) < 1.20205691$ .

- ☺ Noch besser:  $s_n + (n+1)^{-2}/2 \leq \zeta(3) \leq s_n + n^{-2}/2$ , Fehler  $< n^{-3}$ . Mit diesem raffinierten Trick genügt schon die Summation bis  $n = 100$ .
- ☺ Mit Fourier-Reihen (Kapitel I) finden wir  $\zeta(2) = \pi^2/6$ ,  $\zeta(4) = \pi^4/90$ ,  $\zeta(6) = \pi^6/945$ . Für  $\zeta(3)$ ,  $\zeta(5)$ ,  $\zeta(7)$  sind keine solchen Formeln bekannt.

**HDI: diskrete Version für Summen**

**Lösung:** (1) Wir kennen bzw. finden die Summenformeln

$$\sum_{k=0}^{n-1} 1 = n, \quad \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2},$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}, \quad \sum_{k=0}^{n-1} k^3 = \frac{n^2(n-1)^2}{4}.$$

(2) Liegt eine solche Formel  $\sum_{k=0}^{n-1} f(k) = [F]_0^n$  bereits (als Vermutung) vor, so gelingt der Beweis leicht durch folgende „diskrete Ableitung“:

**Satz B3B: HDI, diskrete Version für Summen**

Für  $f, F: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  gelte  $f(k) = F(k+1) - F(k)$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$ . Durch Summation erhalten wir hieraus die Teleskopsumme

$$\sum_{k=a}^{b-1} f(k) = \sum_{k=a}^{b-1} [F(k+1) - F(k)] = F(b) - F(a) =: [F]_a^b.$$

Beispiele sind  $f(k) = 1$ ,  $F(k) = k$  und  $f(k) = k$ ,  $F(k) = k(k-1)/2$  etc. wie oben angegeben. Man rechnet dies nun leicht / mechanisch nach.

**Monotoner Vergleich von Reihe und Integral**

(4) Wir wenden den Satz auf die Funktion  $f(x) = x^s$  mit  $s \geq 0$  an.

Dank der Stammfunktion  $\int x^s dx = x^{s+1}/(s+1)$  erhalten wir

$$\left[ \frac{x^{s+1}}{s+1} \right]_{a-1}^{b-1} \leq \sum_{k=a}^{b-1} k^s \leq \left[ \frac{x^{s+1}}{s+1} \right]_a^b.$$

Im Spezialfall  $a = 0$  und  $b = n - 1$  folgt hieraus

$$\frac{(n-1)^{s+1}}{s+1} \leq \sum_{k=0}^{n-1} k^s \leq \frac{n^{s+1}}{s+1}.$$

- ☺ Wir sehen insbesondere, dass wir die Konstante  $c_s = 1/(s+1)$  nicht anders wählen können, in diesem Sinne sind diese Schranken optimal.
- ☺ Wir erhalten so eine nützliche Näherungsformel für  $\sum_{k=0}^{n-1} k^s$ , genauer sogar eine Einschachtelung: verlässlich und beweisbar.
- ☺ Wenn's exakt sein muss, haben wir obige Summenformeln (1). Diese liefern den exakten Wert, sind dafür aber etwas mühsamer.

### Näherungsformel für die Fakultät $n!$

B309  
Erinnerung

☺ Mit Integralen können Sie nicht nur Flächeninhalte bestimmen, sondern auch Summen und Produkte berechnen oder approximieren. Als wichtiges Beispiel betrachten wir hier die Formel von Stirling.

Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ist die **Fakultät** definiert durch  $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ . Für  $n \rightarrow \infty$  suchen wir eine einfache, aber gute Näherungsformel.

$0! = 1$	$7! = 5\,040$	$14! = 87\,178\,291\,200$
$1! = 1$	$8! = 40\,320$	$15! = 1\,307\,674\,368\,000$
$2! = 2$	$9! = 362\,880$	$16! = 20\,922\,789\,888\,000$
$3! = 6$	$10! = 3\,628\,800$	$17! = 355\,687\,428\,096\,000$
$4! = 24$	$11! = 39\,916\,800$	$18! = 6\,402\,373\,705\,728\,000$
$5! = 120$	$12! = 479\,001\,600$	$19! = 121\,645\,100\,408\,832\,000$
$6! = 720$	$13! = 6\,227\,020\,800$	$20! = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000$

**Aufgabe:** (1) Gewinnen Sie Abschätzungen für  $n!$  (grobe Ungleichung) durch den Vergleich von Integral  $\int_{x=1}^n \ln x \, dx$  und Summe  $\sum_{k=1}^n \ln k$ .  
(2) Nutzen Sie die Trapezregel für eine bessere Näherung.

### Stirling-Formel: grobe Ungleichung

B310  
Erinnerung



**Lösung:** (1) Wir vergleichen Integral und Summe:

$$\int_1^n \ln x \, dx = [x \ln x - x]_1^n = n \ln n - n + 1$$

$$< \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln(n-1) + \ln n = \ln(n!)$$

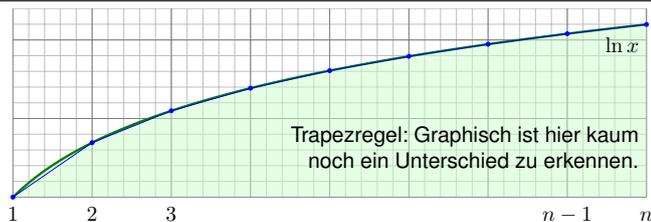
$$< \int_1^n \ln x \, dx + \ln n = (n+1) \ln n - n + 1$$

Dank Monotonie der Exponentialfunktion erhalten wir

$$e \left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < en \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

### Stirling-Formel: bessere Näherung

B311  
Erinnerung



Trapezregel: Graphisch ist hier kaum noch ein Unterschied zu erkennen.

(2) Für alle  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  gilt dank Trapezregel und Konkavität:

$$\int_1^n \ln x \, dx \gtrsim \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln(k) + \ln(k+1)}{2} = \ln(n!) - \frac{\ln(n)}{2}$$

Dank Monotonie der Exponentialfunktion erhalten wir

$$n! \lesssim e \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

☺ Diese Abschätzung ist um einen Faktor  $\sqrt{n}$  besser als die vorige. Bis auf den konstanten Faktor  $e$  ist dies die berühmte Stirling-Formel!

### Stirling-Formel: asymptotische Äquivalenz

B312  
Erinnerung

Die Ähnlichkeit von  $n!$  und  $\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$  haben wir oben erklärt durch Vergleich von Summe und Integral. Die dabei gefundene Konstante  $e \approx 2.7183$  ist allerdings noch etwas zu groß. Die richtige Konstante  $\sqrt{2\pi} \approx 2.5066$  werden wir später ausrechnen können, siehe D435.

#### Satz B3D: Stirling-Formel mit Fehlerschranke

Für  $n \rightarrow \infty$  gilt die asymptotische Äquivalenz

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Die Äquivalenz  $f(n) \sim g(n)$  bedeutet  $f(n)/g(n) \rightarrow 1$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Genauer gilt

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\varepsilon(n)}$$

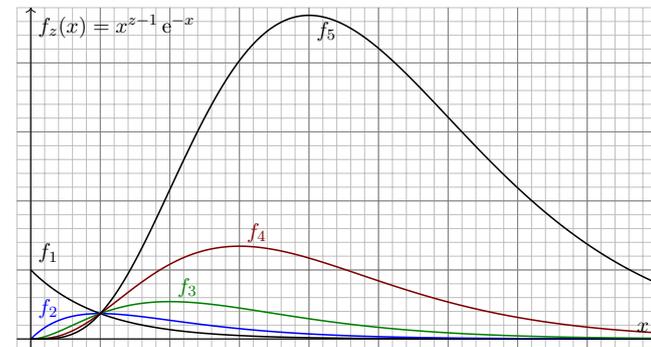
mit Fehlerschranke

$$0 \leq \frac{1}{12n+1} \leq \varepsilon(n) \leq \frac{1}{12n} \searrow 0$$

### Berechnung der Gamma-Funktion $\Gamma(n) = (n-1)!$

B313  
Erinnerung

Die **Gamma-Funktion** ist  $\Gamma: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}: z \mapsto \Gamma(z) := \int_{x=0}^{\infty} x^{z-1} e^{-x} \, dx$ . Dieses Integral konvergiert für alle  $z > 0$  und divergiert für  $z \leq 0$ . [B208]

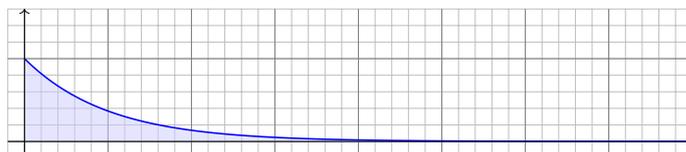


**Aufgabe:** Berechnen Sie  $\Gamma(1), \Gamma(2), \Gamma(3), \Gamma(4), \dots$ , allgemein  $\Gamma(n+1)$ . Zeigen Sie hierzu die Funktionalgleichung  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$  für  $z > 0$ .

### Berechnung der Gamma-Funktion $\Gamma(n) = (n-1)!$

B314  
Erinnerung

☞ Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, 3.7.13.



$$\Gamma(1) = \int_{x=0}^{\infty} e^{-x} \, dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} [-e^{-x}]_{x=0}^k = \lim_{k \rightarrow +\infty} (1 - e^{-k}) = 1$$



$$\Gamma(2) = \int_{x=0}^{\infty} x e^{-x} \, dx = [-x e^{-x}]_{x=0}^{\infty} + \int_{x=0}^{\infty} e^{-x} \, dx = 1$$

### Berechnung der Gamma-Funktion $\Gamma(n) = (n-1)!$

B315  
Erinnerung



$$\Gamma(3) = \int_{x=0}^{\infty} x^2 e^{-x} \, dx = [-x^2 e^{-x}]_{x=0}^{\infty} + 2 \int_{x=0}^{\infty} x e^{-x} \, dx = 2 \cdot 1 = 2$$



$$\Gamma(4) = \int_{x=0}^{\infty} x^3 e^{-x} \, dx = [-x^3 e^{-x}]_{x=0}^{\infty} + 3 \int_{x=0}^{\infty} x^2 e^{-x} \, dx = 3 \cdot 2 = 6$$

### Berechnung der Gamma-Funktion $\Gamma(n) = (n-1)!$

B316  
Erinnerung

Wir nutzen Ausschöpfung und partielle Integration:

$$\Gamma(z+1) = \int_{x=0}^{\infty} x^z e^{-x} \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{x=0}^k x^z e^{-x} \, dx$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( [-x^z e^{-x}]_{x=0}^k + z \int_{x=0}^k x^{z-1} e^{-x} \, dx \right)$$

$$= z \int_{x=0}^{\infty} x^{z-1} e^{-x} \, dx = z \Gamma(z).$$

#### Satz B3E: Funktionalgleichung der Gamma-Funktion

Für alle  $z > 0$  gilt

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z).$$

Mit  $\Gamma(1) = 1$  folgt per Induktion  $\Gamma(n+1) = n!$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Die Gamma-Funktion  $\Gamma: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  interpoliert in diesem Sinne die Fakultät  $!: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . Sie ist zudem logarithmisch konvex, d.h.  $\ln \Gamma$  ist konvex. Diese Eigenschaften charakterisieren die Gamma-Funktion (Satz von Bohr): Ist eine Funktion  $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  logarithmisch konvex und erfüllt  $f(1) = 1$  sowie  $f(z+1) = z f(z)$  für alle  $z > 0$ , dann folgt daraus bereits  $f = \Gamma$ .

## Konvergenz von Reihen

B317  
Erinnerung

**Aufgabe:** Wiederholen Sie aus der HM2 die Grundbegriffe zu Reihen:  
 □ Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §1.7–§1.9.  
 (1) Definieren Sie (**absolute**) **Konvergenz** und **Grenzwert** einer Reihe

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \quad \text{mit Termen } a_k \in \mathbb{C}.$$

Hängt die Konvergenz vom Startindex  $k_0$  ab? und der Grenzwert?  
 Was sagen Sie zur Behauptung  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = -1/12$ ?

(2) Untersuchen Sie Konvergenz und ggf. Grenzwert der Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad \text{für } z \in \mathbb{C}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^n}{k!} \quad \text{für } z \in \mathbb{C}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \quad \text{für } s \in \mathbb{R}.$$

Welche Kriterien für Konvergenz bzw. Divergenz kennen Sie?

(3) Untersuchen Sie Konvergenz und ggf. Grenzwert der Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Für  $x = 1$ ? Was besagt das Kriterium von Leibniz? Dirichlet? Abel?

## Konvergenz von Reihen

B318  
Erinnerung

**Lösung:** (1) Wir nutzen die Folge der **Partialsommen**  $s_n := \sum_{k=k_0}^n a_k$ .  
 Die Reihe **konvergiert** genau dann, wenn  $s_n$  für  $n \rightarrow \infty$  konvergiert.  
 Gilt Konvergenz  $s_n \rightarrow s$  für  $n \rightarrow \infty$ , so schreiben wir  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k = s$ .

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=k_0}^n a_k$$

Gemäß dieser Definition gilt  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = \infty$ . (Wer's anders will, muss eine andere Art der Konvergenz von Reihen vereinbaren.)

**Nullfolgenkriterium:** Konvergiert die Reihe  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ , so gilt  $a_k \rightarrow 0$ .  
 Die Umkehrung gilt nicht, siehe harmonische Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k = \infty$ .

☺ Dieses Kriterium ist notwendig, aber nicht hinreichend. [B302]

**Cauchy-Kriterium:** Die Reihe  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$  konvergiert genau dann, wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $k_1 \geq k_0$  existiert mit  $|\sum_{k=m}^n a_k| \leq \varepsilon$  für alle  $m, n \geq k_1$ .  
 ☺ Hieraus folgt das vielseitige Majoranten-Minoranten-Kriterium:

Die Reihe  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$  **konvergiert absolut**, wenn  $\sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k| < \infty$  gilt.  
 Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent, dank Cauchy-Kriterium.  
 Die Umkehrung gilt nicht, wie die beiden Reihen aus (3) in  $x = 1$  zeigen.

## Konvergenz von Reihen

B319  
Erinnerung

(2) Für  $|z| < 1$  konvergiert die **geometrische Reihe** und zwar absolut:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots = \frac{1}{1-z}$$

Für  $|z| \geq 1$  divergiert diese Reihe. (Die Funktion rechts ist zwar für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$  definiert, aber die Reihe links konvergiert nur für  $|z| < 1$ .)

☺ Hieraus folgt das **Quotienten-** und das **Wurzel-Kriterium**.

Für jedes  $z \in \mathbb{C}$  konvergiert die **Exponentialreihe** und zwar absolut:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots = \exp(z)$$

Die Reihe  $\sum k^{-s}$  konvergiert für  $s > 1$  und divergiert für  $s \leq 1$ . [B303]

(3) Diese beiden berühmten Reihen konvergieren, aber nicht absolut:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \ln 2$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots = \frac{\pi}{4} = \arctan(1)$$

## Konvergenz von Reihen

B320  
Erinnerung

Die Grenzwerte der beiden Reihen können wir wie folgt nachrechnen:

$$\ln 2 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \int_0^1 \left( \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x} \right) dx$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$$

$$\left| \ln 2 - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \right| = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^{n+1} dx = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^1 \left( \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2} \right) dx$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx$$

$$\left| \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \right| = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 x^{2n+2} dx = \frac{1}{2n+3} \rightarrow 0$$

## Abelscher Grenzwertsatz

B321  
Erinnerung

Beide Grenzwerte sind Spezialfälle eines allgemeinen Sachverhalts:

☺ Jede Potenzreihe ist stetig im **Inneren** ihres Konvergenzkreises.  
 Abels Grenzwertsatz ergänzt dies zur Stetigkeit in **Randpunkten!**

**Satz B3F: Abelscher Grenzwertsatz**

Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  eine konvergente Reihe komplexer Zahlen  $a_k \in \mathbb{C}$ .

Dann konvergiert die Potenzreihe  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  für alle  $x \in [0, 1]$  und die so definierte Funktion  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  ist stetig, sogar in  $x = 1$ .

Für  $x \nearrow 1$  konvergiert also  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  gegen  $f(1) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ .

**Beispiel:** Für alle  $x \in [0, 1[$  gilt die Reihenentwicklung

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots$$

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \dots$$

Für  $x \nearrow 1$  erhalten wir dank Abel die obigen Grenzwerte.

## Konvergenzkriterium von Leibniz

B322  
Erinnerung

Wir untersuchen die Konvergenz von Reihen und Integralen der Form

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_k,$$

$$(2) \quad \int_{x=0}^{\infty} e^{i\omega x} a(x) dx := \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{x=0}^r e^{i\omega x} a(x) dx, \quad \omega \neq 0.$$

**Satz B3G: Leibniz-Kriterium für Reihen**

Die Folge  $a_k \in \mathbb{R}$  sei monoton fallend gegen 0, kurz  $a_k \searrow 0$ , also  $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots$  und  $a_k \rightarrow 0$ . Dann konvergiert die Reihe (1), und wir haben die Fehlerschranke  $|\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k a_k| \leq a_n \searrow 0$ .

**Satz B3H: Leibniz-Kriterium für Integrale**

Die Funktion  $a: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  sei monoton fallend gegen 0, kurz  $a(x) \searrow 0$ . Dann konvergiert das Integral (2), ebenso mit  $\cos(\omega x)$  und  $\sin(\omega x)$ .

Das Leibniz-Kriterium zur Konvergenz von Reihen kennen Sie aus der HM2. Wir betrachten und beweisen im Folgenden gleich die Verallgemeinerung zum Konvergenzkriterium von Dirichlet.

## Konvergenzkriterium von Dirichlet

B323  
Ausführung

Wir untersuchen die Konvergenz von Reihen und Integralen der Form

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_k,$$

$$(2) \quad \int_{x=0}^{\infty} a(x) b(x) dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{x=0}^r a(x) b(x) dx.$$

**Satz B3I: Dirichlet-Kriterium für Reihen**

Die Folge  $a_k \in \mathbb{R}$  sei monoton fallend gegen 0, kurz  $a_k \searrow 0$ .

Die Folge  $b_k \in \mathbb{C}$  habe beschränkte Partialsommen  $B_n = \sum_{k=0}^{n-1} b_k$ , das heißt  $|B_n| \leq M$  für eine Konstante  $M \in \mathbb{R}$  und alle Indizes  $n \in \mathbb{N}$ . Dann konvergiert die Reihe (1) mit Fehler  $\leq 2M a_n \searrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

**Satz B3J: Dirichlet-Kriterium für Integrale**

Die Funktion  $a: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  sei monoton fallend gegen 0, kurz  $a(x) \searrow 0$ .

Die Funktion  $b: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$  sei auf jedem Intervall  $[0, r]$  integrierbar mit beschränkter Integralfunktion  $B(r) = \int_0^r b(x) dx$ , das heißt  $|B(r)| \leq M$ . Dann konvergiert das Integral (2) mit Fehler  $\leq 2M a(r) \searrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$ .

## Konvergenzkriterium von Dirichlet

B324  
Ausführung

**Beweis für Reihen:** Per Induktion zeigt man für alle  $n < p$  folgende **partielle Summation**:

$$\sum_{k=n}^{p-1} a_k b_k = \sum_{k=n}^{p-1} a_k (B_{k+1} - B_k) = a_p B_p - a_n B_n - \sum_{k=n}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) B_{k+1}$$

Dies ist im Betrag  $\leq 2a_n M \searrow 0$ , denn  $|a_p B_p| \leq a_p M$  und  $|a_n B_n| \leq a_n M$  sowie

$$\left| \sum_{k=n}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) B_{k+1} \right| \leq \sum_{k=n}^{p-1} |a_{k+1} - a_k| B_k \leq \sum_{k=n}^{p-1} (a_k - a_{k+1}) M = (a_n - a_p) M.$$

Dank Cauchy-Kriterium konvergiert die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$  gegen einen Grenzwert  $s \in \mathbb{R}$ . Zudem liefert unsere Rechnung die explizite Fehlerschranke  $|s - \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_k| \leq 2M a_n$ .

**Beweis für Integrale:** Zur technischen Vereinfachung der Rechnung nehmen wir zusätzlich  $a \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R})$  und  $b \in C^0(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{C})$  an. Wir können dann **partielle Integration** B1J nutzen:

$$\int_{x=r}^s a(x) b(x) dx = \int_{x=r}^s a(x) B'(x) dx = [a(x) B(x)]_r^s - \int_{x=r}^s a'(x) B(x) dx$$

Dies ist im Betrag  $\leq 2a(r)M$ , denn  $|a(s)B(s)| \leq a(s)M$  und  $|a(r)B(r)| \leq a(r)M$  sowie

$$\left| \int_{x=r}^s a'(x) B(x) dx \right| \leq \int_{x=r}^s |a'(x) B(x)| dx \leq \int_{x=r}^s -a'(x) M dx = [a(r) - a(s)] M.$$

Demnach konvergiert das Integral  $\int_{x=0}^{\infty} a(x) b(x) dx$  gegen einen Grenzwert  $I \in \mathbb{R}$ ; zudem erhalten wir die explizite Fehlerschranke  $|I - \int_{x=0}^r a(x) b(x) dx| \leq 2M a(r) \searrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$ .

## Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung B401 Fazit

Der **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung** B11 erklärt, in welchem Sinne Differenzieren und Integrieren einander umkehren: Jede stetige Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist integrierbar. Ihre Integralfunktion

$$F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) := \int_a^x f(t) dt$$

ist differenzierbar, und für die Ableitung gilt  $F' = f$ . Ist umgekehrt  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar mit stetiger Ableitung  $f = F'$ , so gilt

$$\int_a^b f(x) dx = [F]_a^b \quad \text{mit} \quad [F]_a^b := F(b) - F(a).$$

☺ Der HDI ist das Arbeitspferd der eindimensionalen Integration: die Berechnung vieler elementarer Integrale gelingt erst dank HDI. Dieser nützliche Zusammenhang gilt noch wesentlich allgemeiner:

- $f$  stetig  $\iff F$  stetig differenzierbar B123
- $f$  stückweise stetig  $\iff F$  stückweise stetig differenzierbar B213
- $f$  absolut integrierbar  $\iff F$  absolut stetig B214

## Partielle Integration und Substitution B403 Fazit

Aus der Produktregel folgt dank HDI die **partielle Integration** B129: Für alle stetig differenzierbaren Funktionen  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$\int_{x=a}^b f(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)]_{x=a}^b - \int_{x=a}^b f'(x) g(x) dx.$$

Aus der Kettenregel folgt dank HDI die **Substitutionsregel** B131: Für  $g: [a, b] \rightarrow [c, d]$  stetig differenzierbar und  $f: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig gilt

$$\int_{t=a}^b f(g(t)) g'(t) dt = \int_{u=g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

- ☺ Damit lassen sich bereits viele Integrale elementar berechnen.
- ☺ Jede rationale Funktion  $r(x) = p(x)/q(x)$  ist elementar integrierbar durch Partialbruchzerlegung und unsere Grundintegrale. B135
- ⚠ Viele elementare Funktionen sind nicht elementar integrierbar! Prominenteste Beispiele sind die Glockenkurve  $\exp(-x^2/2)$  B145 und die Spaltfunktion  $\text{si}(x) = \sin(x)/x$  B149. Hier nutzen wir Potenzreihen o.ä.

## Vergleich von Reihe und Integral B405 Fazit

Sei  $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  monoton fallend. Für alle  $a \leq b$  in  $\mathbb{N}$  gilt dann

$$\int_{x=a}^{b+1} f(x) dx \leq \sum_{k=a}^b f(k) \leq f(a) + \int_{x=a}^b f(x) dx.$$

Das ist oft eine nützliche Näherung: Wir ersetzen mühsame Summen durch bequeme Integral, oder auch umgekehrt je nach Anwendung. Durch Grenzübergang  $b \rightarrow \infty$  erhalten wir

$$\int_{x=a}^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{k=a}^{\infty} f(k) \leq f(a) + \int_{x=a}^{\infty} f(x) dx.$$

Insbesondere haben Reihe und Integral gleiches Konvergenzverhalten.

**Beispiel:** Für die Funktion  $f(x) = 1/x$  erhalten wir

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$$

☺ Die **harmonische Reihe** wächst wie der natürliche Logarithmus! Insbesondere erkennen wir die Divergenz  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ .

## Konvergenzkriterium von Leibniz B407 Fazit

Wir untersuchen die Konvergenz von Reihen und Integralen der Form

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_k,$$

$$(2) \quad \int_{x=0}^{\infty} e^{i\omega x} a(x) dx := \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{x=0}^r e^{i\omega x} a(x) dx, \quad \omega \neq 0.$$

(1) Die Folge  $a_k \in \mathbb{R}$  sei monoton fallend gegen 0, kurz  $a_k \searrow 0$ , also  $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots$  und  $a_k \rightarrow 0$ . Dann konvergiert die Reihe (1), und wir haben die Fehlerabschätzung  $|\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k a_k| \leq a_n \searrow 0$ .

(2) Die Funktion  $a: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  sei monoton fallend gegen 0, kurz  $a(x) \searrow 0$ . Dann konvergiert das Integral (2), ebenso mit  $\cos(\omega x)$  und  $\sin(\omega x)$ .

**Beispiel:** Das Leibniz-Kriterium sichert die Konvergenz von Reihen wie den beiden obigen  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k / (k+1)$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k / (2k+1)$ .

☹ Über den Grenzwert macht das Leibniz-Kriterium keine Aussage.  
☺ Immerhin erlaubt es praktische Näherungen mit Fehlerabschätzung! Für die Konvergenz trigonometrischer Reihen wie  $\sum_{k=1}^{\infty} e^{ikx}/k^a$  oder  $\sum_{k=1}^{\infty} \cos(kx)/k^a$  oder  $\sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx)/k^a$  nutzen wir folgendes Kriterium.

## Elementare Grundintegrale / Stammfunktionen B402 Fazit

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} \quad (a \neq -1) \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$$

$$\int e^x dx = e^x \quad \int \ln x dx = x \ln x - x$$

$$\int \cos x dx = \sin x \quad \int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x \quad \int \sinh x dx = \cosh x$$

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2} dx = \tan x \quad \int \frac{1}{(\sin x)^2} dx = -\cot x$$

$$\int \frac{1}{(\cosh x)^2} dx = \tanh x \quad \int \frac{1}{(\sinh x)^2} dx = -\coth x$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \quad \int \frac{1}{1-x^2} dx = \ln \sqrt{\left| \frac{x+1}{x-1} \right|}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x \quad \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \text{arsinh } x$$

☺ Probe als Übung: Integrale sind durch Ableiten leicht nachzuprüfen!

## Uneigentliche Integrale und Cauchy-Hauptwert B404 Fazit

Zur Integration über ganz  $\mathbb{R}$  haben wir drei nützliche Möglichkeiten:

(1) Bei **absoluter Integration** zerlegen wir  $f = f^+ - f^-$  und setzen

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx := \int_{\mathbb{R}} f^+(x) dx - \int_{\mathbb{R}} f^-(x) dx.$$

⚠ Hierzu müssen rechts beide Integrale endlich sein.

☺ Dieser Integrationsbegriff gilt allgemein über  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  (A3K).

(2) Das **uneigentliche Integral** von  $f$  ist die Summe der Grenzwerte

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^z f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_z^b f(x) dx.$$

⚠ Hierzu müssen beide Grenzwerte existieren und endlich sein.

☺ Existiert das Integral (1) so auch (2) und beide sind gleich. B221

(3) Der **Cauchy-Hauptwert** von  $f$  ist der Grenzwert (falls existent)

$$(CH) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx.$$

☺ Existiert das Integral (2) so auch (3) und beide sind gleich. B223

⚠ Die Umkehrungen (3)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (1) gelten im Allgemeinen nicht. B417

## Abelscher Grenzwertsatz B406 Fazit

☺ Jede Potenzreihe ist stetig im **Innern** ihres Konvergenzkreises. Abels Grenzwertsatz ergänzt dies zur Stetigkeit in **Randpunkten**:

Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  eine konvergente Reihe komplexer Zahlen  $a_k \in \mathbb{C}$ . Dann konvergiert die Potenzreihe  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  für alle  $x \in [0, 1]$  und die so definierte Funktion  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  ist stetig, sogar in  $x = 1$ . Für  $x \nearrow 1$  konvergiert also  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  gegen  $f(1) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ .

**Beispiel:** Für alle  $x \in [0, 1[$  gilt die Reihenentwicklung

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots$$

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \dots$$

Für  $x \nearrow 1$  erhalten wir dank Abel die beiden berühmten Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

## Konvergenzkriterium von Dirichlet B408 Fazit

Wir untersuchen die Konvergenz von Reihen und Integralen der Form

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_k,$$

$$(2) \quad \int_{x=0}^{\infty} a(x) b(x) dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{x=0}^r a(x) b(x) dx.$$

(1) Die Folge  $a_k \in \mathbb{R}$  sei monoton fallend gegen 0, kurz  $a_k \searrow 0$ . Die Folge  $b_k \in \mathbb{C}$  habe beschränkte Partialsummen  $B_n = \sum_{k=0}^{n-1} b_k$ , das heißt  $|B_n| \leq M$  für eine Konstante  $M \in \mathbb{R}$  und alle Indizes  $n \in \mathbb{N}$ . Dann konvergiert die Reihe (1) mit Fehler  $\leq 2M a_n \searrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

(2) Die Funktion  $a: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  sei monoton fallend gegen 0, kurz  $a(x) \searrow 0$ . Die Funktion  $b: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$  sei auf jedem Intervall  $[0, r]$  integrierbar mit beschränkter Integralfunktion  $B(r) = \int_0^r b(x) dx$ , das heißt  $|B(r)| \leq M$ . Dann konvergiert das Integral (2) mit Fehler  $\leq 2M a(r) \searrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$ .

☹ Über den Grenzwert macht das Dirichlet-Kriterium keine Aussage.  
☺ Immerhin erlaubt es praktische Näherungen mit Fehlerabschätzung!

**Integration mittels Substitution** B409  
Übung

**Aufgabe:** Berechnen Sie für  $x \in [-a, a]$  die folgende Stammfunktion:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \text{const}$$

(1) Wie prüfen Sie diese Gleichung? (2) Wie finden Sie sie?

**Lösung:** (1) Sie prüfen diese Gleichung durch sorgfältiges Ableiten.  
(2) Finden ist schwieriger als Prüfen! Wir substituieren  $x = a \sin(t)$ :

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2(t)} \cdot a \cos(t) dt \\ &= a^2 \int \cos(t)^2 dt \\ &= a^2 \int \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt \\ &= \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \sin(2t) + \text{const} \end{aligned}$$

**Integration mittels Substitution** B410  
Übung

Die Rücksubstitution  $t = \arcsin(x/a)$  erfordert Sorgfalt:

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \sin(2t) &= \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{2} \sin(t) \cos(t) \\ &= \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{2} \sin(t) \sqrt{1 - \sin^2(t)} \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{a^2}{2} \left(\frac{x}{a}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} \end{aligned}$$

☺ Das ist die ersehnte Formel. Probe durch sorgsames Ableiten (1).  
Fingerübung: Entwickeln Sie alle hier benötigten Identitäten aus den Euler-Formeln  $\cos(t) = (e^{it} + e^{-it})/2$  und  $\sin(t) = (e^{it} - e^{-it})/2i$ .  
Alternativ kann man solche Formeln nachschlagen in Integraltafeln wie dem umfangreichen *Taschenbuch der Mathematik* von I.N. Bronstein und K.A. Semendjajew. Noch bequemer sind Computer-Algebra-Systeme.  
⚠ Einfache Integrale sollten Sie erkennen und berechnen können.

**Integration mittels Substitution** B411  
Übung

**Aufgabe:** Berechnen Sie für  $x \in \mathbb{R}$  die folgende Stammfunktion:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 + x^2} dx &= \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right) + \text{const} \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) + \text{const} \end{aligned}$$

(1) Wie prüfen Sie diese Gleichung? (2) Wie finden Sie sie?

**Lösung:** (1) Sie prüfen diese Gleichung durch sorgfältiges Ableiten.  
(2) Finden ist schwieriger als Prüfen! Wir substituieren  $x = a \sinh(t)$ :

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 + x^2} dx &= \int \sqrt{a^2 + a^2 \sinh^2(t)} \cdot a \cosh(t) dt \\ &= a^2 \int \cosh(t)^2 dt \\ &= a^2 \int \frac{1 + \cosh(2t)}{2} dt \\ &= \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \sinh(2t) + \text{const} \end{aligned}$$

**Integration mittels Substitution** B412  
Übung

Die Rücksubstitution  $t = \operatorname{arsinh}(x/a)$  erfordert Sorgfalt:

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \sinh(2t) &= \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{2} \sinh(t) \cosh(t) \\ &= \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{2} \sinh(t) \sqrt{1 + \sinh^2(t)} \\ &= \frac{a^2}{2} \operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{a^2}{2} \left(\frac{x}{a}\right) \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} \\ &= \frac{a^2}{2} \operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} \end{aligned}$$

☺ Das ist die ersehnte Formel. Probe durch sorgsames Ableiten (1).  
Nützliche Fingerübung: Entwickeln Sie alle hier benötigten Identitäten aus den Formeln  $\cosh(t) = (e^t + e^{-t})/2$  und  $\sinh(t) = (e^t - e^{-t})/2$ .  
Mit der Mitternachtsformel erhalten Sie hieraus schließlich:  
$$\operatorname{arsinh}(t) = \ln(t + \sqrt{1 + t^2})$$
  
⚠ Einfache Integrale sollten Sie erkennen und berechnen können.

**Verständnisfragen: elementare Stammfunktionen** B413  
Übung

**Aufgabe:** Zu folgenden Funktionen sollten Sie Stammfunktionen auswendig kennen und auch durch Ableiten nachprüfen können.

$$\begin{aligned} \int x^a dx, \quad \int \frac{1}{x} dx, \quad \int e^x dx, \quad \int \ln x dx, \\ \int \sin x dx, \quad \int \cos x dx, \quad \int \sinh x dx, \quad \int \cosh x dx, \\ \int \frac{1}{(\cos x)^2} dx, \quad \int \frac{1}{(\sin x)^2} dx, \quad \int \frac{1}{(\cosh x)^2} dx, \quad \int \frac{1}{(\sinh x)^2} dx, \\ \int \frac{1}{1+x^2} dx, \quad \int \frac{1}{1-x^2} dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx. \end{aligned}$$

**Lösung:** Diese Stammfunktionen finden Sie auf Seite B124. Versuchen Sie, alle gewissenhaft durch Ableiten nachzuprüfen.  
☺ Umfassende Integraltafeln finden Sie online zum Beispiel unter [de.wikibooks.org/wiki/Formelsammlung\\_Mathematik:\\_Integrale](http://de.wikibooks.org/wiki/Formelsammlung_Mathematik:_Integrale). Heutzutage sind Computer-Algebra-Systeme der bequemste Zugang.  
⚠ Einfache Integrale sollen Sie sicher erkennen und selbst berechnen.

**Verständnisfragen: der Hauptsatz** B414  
Übung

Nochmal der Hauptsatz: Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $C^k = C^k(\Omega, \mathbb{R})$  die Menge aller  $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Aufgabe:** Differenzieren und Integrieren definieren zwei Abbildungen

$$\begin{aligned} D: C^1 \rightarrow C^0: f \mapsto f' \quad \text{mit} \quad f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}, \\ I: C^0 \rightarrow C^1: f \mapsto F \quad \text{mit} \quad F(x) = \int_{t=x_0}^x f(t) dt. \end{aligned}$$

(1) Gilt  $(D \circ I)f = f$  für  $f \in C^0$ ? Gilt  $(I \circ D)F = F - F(x_0)$  für  $F \in C^1$ ?  
(2) Sind  $C^1$  und  $C^0$  Vektorräume? Sind  $D$  und  $I$  lineare Abbildungen?  
(3) Was sind Bild und Kern von  $D$ ? Was sind Kern und Bild von  $I$ ?  
☺ Diese Sichtweise nutzen wir später für Differentialgleichungen.  
**Lösung:** (1) Das sind die beiden Aussagen des Hauptsatzes B11 (HDI).  
(2) Ja,  $C^1$  und  $C^0$  sind Vektorräume, und hierauf sind  $D$  und  $I$  linear.  
(3) Dank  $(D \circ I)f = f$  ist  $D$  surjektiv, also  $\text{Bild}(D) = C^0$ . Ebenso ist  $I$  injektiv, äquivalent hierzu gilt  $\text{Kern}(I) = \{0\}$ . Aus  $(I \circ D)F = F - F(x_0)$  folgt  $\text{Bild}(I) = \{F \in C^1 \mid F(x_0) = 0\}$ . Für  $DF = 0$  folgt  $F - F(x_0) = 0$ , demnach gilt  $\text{Kern}(D) = \{\text{const}\}$ .

**Verständnisfragen: mögliche Fehlerquellen** B415  
Übung

**Aufgabe:** Die Ableitung von  $-x^{-1}$  ist  $x^{-2}$ , also gilt  $\int 1/x^2 dx = -1/x$ . Was halten Sie von folgenden Rechnungen? Stimmt das Ergebnis?

(1)  $\int_{+1}^2 \frac{1}{x^2} dx \stackrel{?}{=} \left[\frac{-1}{x}\right]_{+1}^2 = -\frac{1}{2} + 1 = +\frac{1}{2}$

(2)  $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2} dx \stackrel{?}{=} \left[\frac{-1}{x}\right]_{-1}^2 = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$

(3)  $\int \frac{1}{x} dx = \int 1 \cdot \frac{1}{x} dx \stackrel{\text{part. HDI}}{=} x \cdot \frac{1}{x} - \int x \cdot \frac{-1}{x^2} dx = 1 + \int \frac{1}{x} dx$   
 $\Rightarrow 0 \stackrel{?}{=} 1$

**Lösung:** (1) Ja, dies gilt dank HDI für  $1/x^2$  auf dem Intervall  $[1, 2]$ .  
(2) Der HDI gilt nur auf Intervallen, aber auf  $[-1, 2] \setminus \{0\}$  gilt er nicht!  $1/x^2$  ist positiv, also auch  $\int_{-1}^2 1/x^2 dx$ ; genauer  $\int_{-1}^2 1/x^2 dx = \infty$ . ☹️ Obige Rechnung und das Ergebnis  $-3/2$  sind also kompletter Unsinn.  
(3) Lesen Sie Korollar B1J zur partiellen Integration nochmal genau!  
☺ Wir brauchen Rechenregeln, möglichst präzise formuliert als Sätze. Die Voraussetzungen klären, wann und wie wir sie anwenden können.

**Verständnisfragen: Funktionenklassen** B416  
Übung

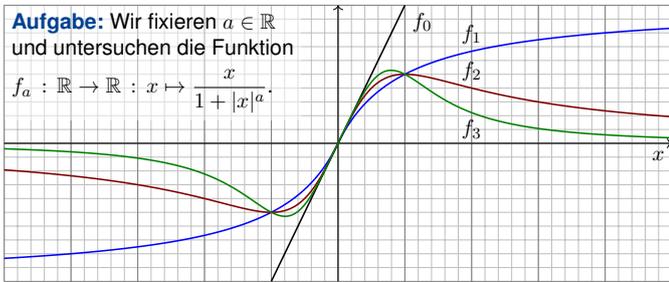
**Aufgabe:** Welche Aussagen über Funktionen  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sind wahr? Begründen Sie durch ein Ergebnis der Vorlesung oder Gegenbeispiel.

(1) Ist jede differenzierbare Funktion stetig? und umgekehrt?  
(2) Ist jede stetige Funktion integrierbar? und umgekehrt?  
(3) Jede rationale Funktion  $f$  ist diff'bar und  $f'$  ist rational.  
(4) Jede rationale Funktion  $f$  ist integrierbar und  $\int f$  ist rational.  
(5) Jede elementare Funktion  $f$  ist diff'bar und  $f'$  ist elementar.  
(6) Jede elementare Funktion  $f$  ist integrierbar und  $\int f$  ist elementar.  
(7) Jede analytische Funktion  $f$  ist diff'bar, und  $f'$  ist analytisch.  
(8) Jede analytische Funktion  $f$  ist integrierbar, und  $\int f$  ist analytisch.

**Lösung:** (1) Ja, dank Definition / Nein, Gegenbeispiel  $f(x) = |x|$ . (2) Ja, dank HDI / Nein, Gegenbsp.  $f = \mathbf{1}_{[0,1]}$ . (3) Ja/Ja, dank Quotientenregel. (4) Ja/Nein, Gegenbsp.  $\int 1/x dx = \ln|x|$ . (5) Ja/Ja: Jede elementare Grundfunktion [B14J](#) ist diff'bar, sogar analytisch, auf ihrem offenen (!) Definitionsintervall, mit elementarer Ableitung, somit auch Summe, Produkt, Komposition. Andernfalls erhalten wir Gegenbeispiele wie  $\sqrt{x}$  oder  $|x| = \sqrt{x^2}$ . (6) Ja/Nein,  $\exp(-x^2)$  und  $\sin(x)/x$  sind elementar, aber ihre Stammfunktionen nicht. (7) Ja/Ja. (8) Ja/Ja. Wiederholung!

**Aufgabe:** Wir fixieren  $a \in \mathbb{R}$  und untersuchen die Funktion

$$f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x}{1 + |x|^a}$$



- (1) Für welche  $a \in \mathbb{R}_{>0}$  ist  $f_a$  absolut integrierbar? (2) uneigentlich?
- (3) Für welche  $a \in \mathbb{R}$  existiert zu  $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  der Cauchy-Hauptwert?
- (4) Sind diese drei Integraldefinitionen translationsinvariant?

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x - x_0) dx \stackrel{?}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

(4) Das absolute Integral ist translationsinvariant dank Konstruktion. 😊 Dasselbe gilt auch für uneigentliche Integrale, denn das Ergebnis ist unabhängig vom willkürlich gewählten Teilungspunkt  $z \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x_0) dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^z f(x - x_0) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_z^b f(x - x_0) dx \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_{a-x_0}^{z-x_0} f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{z-x_0}^{b-x_0} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \end{aligned}$$

⚠ Der schwächere Cauchy-Hauptwert ist nicht translationsinvariant:

$$\begin{aligned} \int_{-r}^r \frac{x + x_0}{1 + |x + x_0|} dx &= \int_{-r+x_0}^{r+x_0} \frac{x}{1 + |x|} dx = \int_{r-x_0}^{r+x_0} \frac{x}{1 + x} dx \\ &= [x - \ln(1 + x)]_{r-x_0}^{r+x_0} = 2x_0 + \ln \frac{1 + r - x_0}{1 + r + x_0} \rightarrow 2x_0 \text{ für } r \rightarrow \infty \end{aligned}$$

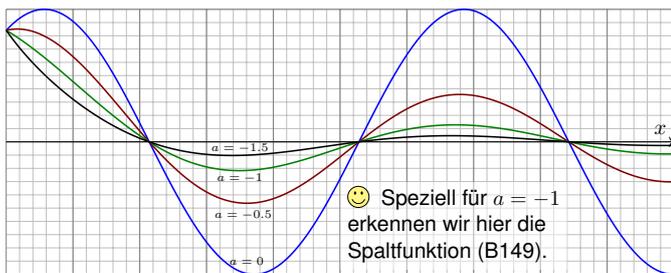
⚠ Nicht einmal seine Existenz bleibt unter Translation erhalten:

$$\int_{-r}^r x + x_0 dx = 2rx_0 \rightarrow \text{sign}(x_0) \cdot \infty \text{ für } r \rightarrow \infty$$

😊 Die beste und robusteste Eigenschaft ist absolute Integrierbarkeit.

**Aufgabe:** Wir untersuchen  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x^a \sin(x)$ .

- (1) Skizzieren Sie diese Funktion für verschiedene Parameter  $a \in \mathbb{R}$ .
- (2) Für welche Parameter  $a \in \mathbb{R}$  ist  $f$  absolut integrierbar?
- (3) Für welche Parameter  $a \in \mathbb{R}$  ist  $f$  uneigentlich integrierbar?



😊 Speziell für  $a = -1$  erkennen wir hier die Spaltfunktion (B149).

😊 Solche Integrale treten in der Fourier-Theorie häufig auf (Kapitel K). Die zugehörigen Konvergenzfragen sind knifflig, aber auch lohnend.

(3) Wir fragen nach der Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{x=1}^r x^a \sin(x) dx.$$

Für  $a \geq 0$  existiert dieser Grenzwert nicht: Dies sieht man wie zuvor mit dem Minorantenkriterium. Für  $a < 0$  hingegen existiert der Grenzwert!

Dies folgt bequem aus dem Konvergenzkriterium von Leibniz (B3H) bzw. allgemeiner aus dem Konvergenzkriterium von Dirichlet (B3I).

Konkret geht's so: Wir integrieren partiell und schauen genauer hin.

$$\begin{aligned} \int_{x=1}^r x^a \sin(x) dx &= [-x^a \cos(x)]_{x=1}^r + \int_{x=1}^r a x^{a-1} \cos(x) dx \\ &= \cos(1) - r^a \cos(r) + \int_{x=1}^r a x^{a-1} \cos(x) dx \end{aligned}$$

Es gilt  $r^a \cos(r) \rightarrow 0$  und das letzte Integral konvergiert absolut:

$$\int_{x=1}^r |a x^{a-1} \cos(x)| dx \leq \int_{x=1}^r -a x^{a-1} dx = [-x^a]_{x=1}^r = 1 - r^a \rightarrow 1$$

**Lösung:** (1) Für  $x \rightarrow \infty$  gilt  $f_a(x) \sim x^{1-a}$ . Genauer: Für  $x \geq 1$  gilt

$$\frac{x}{2x^a} \leq \frac{x}{1 + |x|^a} \leq \frac{x}{x^a}$$

Daher ist  $f_a$  absolut integrierbar für  $a > 2$ , aber nicht für  $a \leq 2$ .

Ausführlich: Für  $a > 2$  und  $x \geq 1$  nutzen wir das Majorantenkriterium:

$$\int_{x=1}^r \frac{x}{1 + |x|^a} dx \leq \int_{x=1}^r x^{1-a} dx = \left[ \frac{x^{2-a}}{2-a} \right]_{x=1}^r = \frac{r^{2-a} - 1}{2-a} \rightarrow \frac{1}{a-2} < \infty$$

Für  $a < 2$  und  $x \geq 1$  hingegen nutzen wir das Minorantenkriterium:

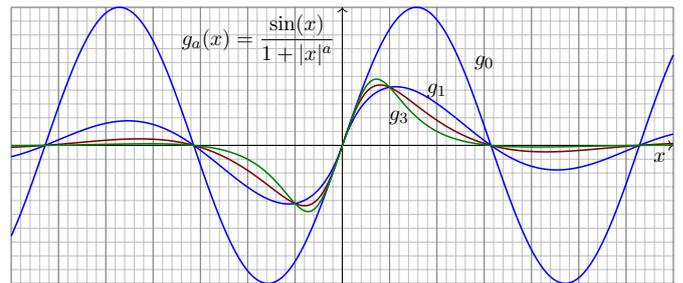
$$\int_{x=1}^r \frac{x}{1 + |x|^a} dx \geq \frac{1}{2} \int_{x=1}^r x^{1-a} dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{x^{2-a}}{2-a} \right]_{x=1}^r = \frac{r^{2-a} - 1}{2-a} \rightarrow \infty$$

Im Grenzfall  $a = 2$  ist das letzte Integral  $\frac{1}{2} \ln(r) \rightarrow \infty$ .

(2) Ebenso für uneigentliche Integrierbarkeit, denn  $f_a(x) \geq 0$  für  $x \geq 0$ .

(3) Der Cauchy-Hauptwert von  $f_a$  existiert offensichtlich für alle  $a \in \mathbb{R}$ :

$$\int_{-r}^r \frac{x}{1 + |x|^a} dx = 0 \implies \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \frac{x}{1 + |x|^a} dx = 0$$



**Aufgabe:** Wir untersuchen  $g_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g_a(x) = \sin(x)/(1 + |x|^a)$ . Für welche Werte  $a \in \mathbb{R}$  ist  $g_a$  absolut integrierbar? uneigentlich? CH?

**Lösung:** Absolut integrierbar für  $a > 1$ , aber nicht für  $a \leq 1$

Uneigentlich integrierbar für  $a > 0$ , aber nicht für  $a \leq 0$ .

Für jedes  $a$  existiert der Cauchy-Hauptwert und ist gleich 0.

Die ausführliche Rechnung verläuft analog zur folgenden Aufgabe.

(2) Wir fragen nach der Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{x=1}^r |x^a \sin(x)| dx.$$

Für  $a < -1$  folgt die Konvergenz aus dem Majorantenkriterium:

$$\int_{x=1}^r |x^a \sin(x)| dx \leq \int_{x=1}^r x^a dx = \left[ \frac{x^{a+1}}{a+1} \right]_1^r = \frac{r^{a+1} - 1}{a+1} \rightarrow \frac{-1}{a+1} < \infty$$

Für  $-1 \leq a \leq 0$  folgt die Divergenz aus dem Minorantenkriterium:

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |x^a \sin(x)| dx \geq (k\pi)^a \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(x)| dx \geq 2(k\pi)^a$$

Wir erhalten als untere Abschätzung eine divergente Reihe: [B303](#)

$$\int_{x=\pi}^{\infty} |x^a \sin(x)| dx = \sum_{k=2}^{\infty} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |x^a \sin(x)| dx \geq \sum_{k=2}^{\infty} 2(k\pi)^a = \infty$$

Für  $a > 0$  folgt die Divergenz ebenso aus dem Minorantenkriterium.

**Aufgabe:** Erklären Sie durch geeignete Sätze oder Gegenbeispiele:

(1) Damit die Reihe  $\sum_{k=a}^{\infty} f(k) = \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{k=a}^r f(k)$  konvergiert, ist das Kriterium  $f(k) \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$  (a) hinreichend? (b) notwendig?

(2) Damit das Integral  $\int_{x=a}^{\infty} f(x) dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{x=a}^r f(x) dx$  konvergiert, ist das Kriterium  $f(x) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \infty$  (a) hinreichend? (b) notwendig?

**Lösung:** (1) Das Kriterium  $f(k) \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$  ist nicht hinreichend, wie die harmonische Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$  zeigt. Es ist aber notwendig dank Cauchy-Kriterium, siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, Lemma 1.9.1.

(2) Das Kriterium  $f(x) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \infty$  ist auch für Integrale nicht hinreichend, wie (nochmals) das Beispiel  $\int_{x=1}^{\infty} x^{-1} dx$  zeigt. [B206](#)

Es ist auch nicht notwendig, wie das Fresnel-Integral  $\int_{x=1}^{\infty} \sin(x^2) dx$  zeigt! Wir substituieren  $u = x^2$ ; mit  $x = \sqrt{u}$  und  $dx = \frac{1}{2} u^{-1/2} du$  gilt:

$$\int_{x=1}^r \sin(x^2) dx = \int_{u=1}^{r^2} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}} du$$

Dieses Integral konvergiert für  $r \rightarrow \infty$ , wie die vorige Aufgabe zeigt.

Den Grenzwert berechnen wir später mit komplexer Integration. [F529](#)

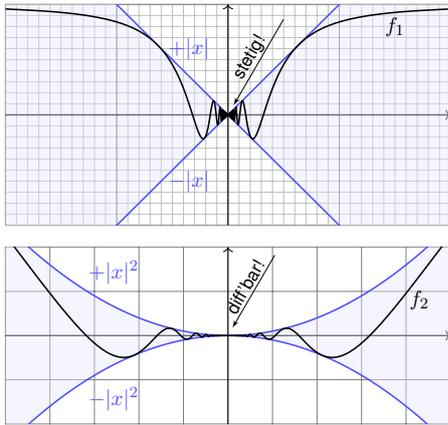
- Aufgabe:** (1) Nennen Sie eine Funktion  $f_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die stetig ist, aber (in mindestens einem Punkt) nicht differenzierbar, somit  $f_0 \in C^0 \setminus C^1$ .  
 (2) Nennen Sie eine Funktion  $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die einmal stetig differenzierbar ist, aber nicht zweimal, somit  $f_1 \in C^1 \setminus C^2$ .  
 (3) Nennen Sie für jedes  $n \in \mathbb{N}$  eine Funktion  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die  $n$ -mal stetig differenzierbar ist, aber nicht  $(n+1)$ -mal, somit  $f_n \in C^n \setminus C^{n+1}$ .

**Lösung:** (1) Die Betragsfunktion  $f_0(x) = |x|$  ist stetig, auch in  $x = 0$ . Sie ist aber im Punkt  $x = 0$  nicht differenzierbar (Skizze!), denn

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{f_0(x) - f_0(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{x}{x} = 1, \quad \lim_{x \nearrow 0} \frac{f_0(x) - f_0(0)}{x - 0} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{-x}{x} = -1.$$

- (2) Die Funktion  $f_1(x) = \int_{t=0}^x f_0(t) dt = \frac{1}{2}x|x|$  ist diff'bar mit  $f'_1 = f_0$  (dank HDI oder direkt), also stetig diff'bar, aber nicht zweimal diff'bar.  
 (3) Sei  $n \geq 1$ . Aus der gegebenen Funktion  $f_{n-1} \in C^{n-1} \setminus C^n$  gewinnen wir durch Integration die Funktion  $f_n(x) = \int_{t=0}^x f_{n-1}(t) dt$ . Dank HDI ist  $f_n$  diff'bar mit  $f'_n = f_{n-1}$ . Demnach gilt  $f_n \in C^n \setminus C^{n+1}$ , wie gewünscht. Angefangen mit  $f_0(x) = |x|$  erhalten wir induktiv  $f_n(x) = \frac{1}{n!}x^{n-1}|x|$ .

Schnelle Oszillation  $\sin(1/|x|)$  mit gedämpfter Amplitude  $|x|^\alpha$ :



**Aufgabe:** (1) Skizzieren Sie die Funktion  $f_1(x) = \text{dist}(x, \mathbb{Z})$ , also den Abstand von  $x \in \mathbb{R}$  zur nächsten ganzen Zahl  $a \in \mathbb{Z}$ . Skizzieren Sie ebenso  $f_n(x) = \text{dist}(x, \frac{1}{n}\mathbb{Z})$  für  $n = 2, 3, 4, 5$ .

- (2) Skizzieren Sie  $g_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n$ . Warum gilt  $g_n \nearrow g$ ?  
 (3) Berechnen Sie die Integrale  $\int_0^1 g_n(x) dx$  und schließlich  $\int_0^1 g(x) dx$ .

**Lösung:** (2) Wegen  $f_n \geq 0$  gilt  $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \dots$ . Wegen  $|f_n| \leq \frac{1}{2n!}$  gilt

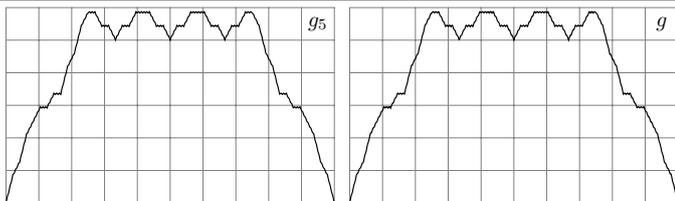
$$g_n(x) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k!} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k!} = \frac{1}{2} \left[ -1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \right] = \frac{e-1}{2} \approx 0.85914.$$

Für jedes feste  $x \in \mathbb{R}$  ist die Folge  $(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  monoton wachsend und beschränkt, also konvergent. Den Grenzwert bezeichnen wir mit  $g(x)$ .

(3) Wir sehen  $\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{4n!}$ , dank Linearität des Integrals also  $\int_0^1 g_n(x) dx = \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k!}$ , und dank monotoner Konvergenz schließlich

$$\int_0^1 g(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k!} = \frac{1}{4} \left[ -1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \right] = \frac{e-1}{4} \approx 0.42957.$$

😊 Unsere Integrationstechniken lösen auch dieses Problem elegant.



**Satz B4A: Takagi 1901**

Die so definierte **Takagi-Funktion**  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \text{dist}(x, \frac{1}{n!}\mathbb{Z})$  hat eine Reihe überaus bemerkenswerter Eigenschaften:

- 1 Die Funktion  $g$  ist stetig, aber in keinem Punkt differenzierbar.
- 2 Die Funktion  $g$  ist auf keinem Intervall  $[a, b]$  mit  $a < b$  monoton.
- 3 Sie nimmt in jedem Punkt  $x \in \mathbb{Q}$  ein striktes lokales Minimum an.

😊 Das klingt unglaublich, ist aber wahr! Wer hätte das gedacht? Das Beste daran: Alles ist explizit, Sie können es direkt nachrechnen.

📖 Siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, Kapitel 2, insb. 2.2.14. Für Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  kennen Sie die Begriffe **differenzierbar** und **stetig differenzierbar**. Sie fragen sich, worin der Unterschied besteht? Sehr gut! Solche Fragen klären Sie am besten durch gute Beispiele:

**Aufgabe:** Skizzieren Sie für einige Exponenten  $\alpha \in \mathbb{R}$  die Funktion

$$f_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \begin{cases} |x|^\alpha \sin(1/|x|) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(0) Ist  $f_\alpha$  auf  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  stetig ( $C^0$ )? stetig differenzierbar ( $C^1$ )? mehrfach ( $C^n$ )? sogar glatt ( $C^\infty$ )? oder gar analytisch ( $C^\omega$ )?

Für welche Exponenten  $\alpha$  ist diese Funktion (1) stetig, also  $f_\alpha \in C^0$ ?

(2) überall differenzierbar? (3) stetig differenzierbar, also  $f_\alpha \in C^1$ ?

(4) Nennen Sie eine Funktion  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die überall differenzierbar ist, aber deren Ableitungsfunktion  $g': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nicht überall stetig ist.

(5) Nennen Sie für jedes  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  eine Funktion  $g_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die  $n$ -mal differenzierbar ist, aber deren  $n$ -te Ableitung nicht stetig ist.

**Lösung:** (0) Auf  $\mathbb{R}^*$  ist  $f_\alpha$  stetig / differenzierbar / glatt / analytisch, denn  $f_\alpha$  ist Produkt und Komposition solcher Funktionen:  $x^\alpha$  und  $\sin(x)$ .

(1) Für  $\alpha > 0$  ist  $f_\alpha$  stetig im Punkt 0, denn  $|f_\alpha(x)| \leq |x|^\alpha \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow 0$ . Für  $\alpha \leq 0$  hingegen ist  $f_\alpha$  in 0 unstetig: Der Grenzwert existiert nicht!

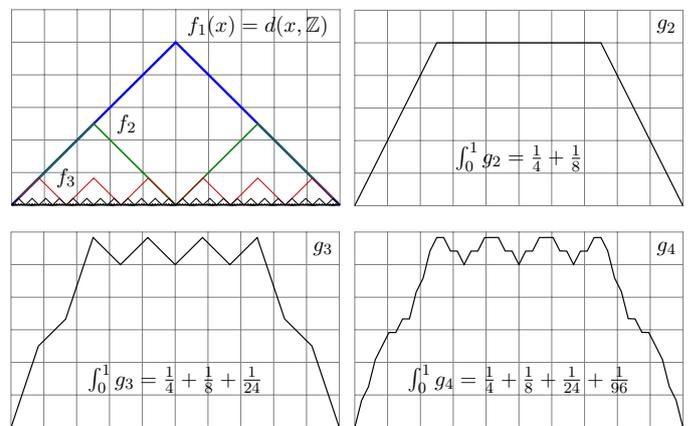
(2) Für  $\alpha > 1$  ist  $f_\alpha$  im Punkt 0 differenzierbar: Für  $x \searrow 0$  gilt  $(f_\alpha(x) - f_\alpha(0))/(x - 0) = x^{\alpha-1} \sin(1/x) \rightarrow 0$ , also  $f'_\alpha(0) = 0$ . Für  $\alpha \leq 1$  hingegen existiert dieser Grenzwert nicht!

(3) Für  $x > 0$  gilt  $f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin(1/x) - x^{\alpha-2} \cos(1/x)$ . Für  $1 < \alpha \leq 2$  ist demnach  $f_\alpha$  differenzierbar, aber  $f'_\alpha$  nicht stetig.

(4) Gemäß (3) ist  $g(x) = f_2(x) = x^2 \sin(1/x)$  ein einfaches Beispiel.

(5) Sei  $n \geq 2$ , und  $g_{n-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei  $(n-1)$ -mal differenzierbar, aber  $g_{n-1}^{(n-1)}$  sei nicht stetig. Durch Integration gewinnen wir die Funktion  $g_n(x) = \int_{t=0}^x g_{n-1}(t) dt$ . Dank HDI ist  $g_n$  diff'bar mit  $g'_n = g_{n-1}$ , also  $n$ -mal diff'bar, aber  $g_n^{(n)} = g_{n-1}^{(n-1)}$  ist nicht stetig, wie gewünscht.

Explizit gelingt  $g_n(0) = 0$  und  $g_n(x) = |x|^{2n} \sin(1/|x|)$  oder alternativ  $g_n(x) = |x|^{n+1} \sin(\ln|x|)$ : wie in (1–3) genügt sorgfältige Nachrechnen!



**Beweis:** (1a) Die Funktion  $f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig für jedes  $k \in \mathbb{N}$ , also auch  $g_n = \sum_{k=1}^n f_k$ . Zudem gilt  $0 \leq g(x) - g_n(x) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2k!} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ . Die Konvergenz  $g_n \rightarrow g$  ist also gleichmäßig auf  $\mathbb{R}$ . Daher ist auch die Grenzfunktion  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.

(1b) Sei  $x \in \mathbb{R}$ . Für  $n \in \mathbb{N}$  ist die Funktion  $f_n$  zwischen den Punkten  $\frac{1}{2n!}\mathbb{Z}$  stückweise affin mit Steigung  $\pm 1$ . Somit ist  $f_n$  affin auf  $[x - \frac{1}{4n!}, x]$  oder auf  $[x, x + \frac{1}{4n!}]$ . Für  $n \geq 3$  wählen wir  $h_n = \pm \frac{1}{(n+1)!}$  so, dass  $f_n$  zwischen  $x$  und  $x + h_n$  affin ist. Gleiches gilt dann für alle  $f_k$  mit  $1 \leq k \leq n$ . Für  $k \geq n+1$  hingegen gilt  $f_k(x + h_n) = f_k(x)$ . Der Differenzenquotient ist

$$q_n := \frac{f(x + h_n) - f(x)}{h_n} = \sum_{k=1}^n \frac{f_k(x + h_n) - f_k(x)}{h_n} = \sum_{k=1}^n \pm 1.$$

Daher hat die Folge  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  keinen Grenzwert. Das heißt,  $f$  ist in  $x$  nicht differenzierbar.

Aus (3) folgt (2); es reicht also, Aussage (3) zu zeigen. Jede rationale Zahl  $x \in \mathbb{Q}$  lässt sich schreiben als  $x = a/n!$  mit  $a \in \mathbb{Z}$  und  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ . (Warum?) Wir zeigen  $g(u) > g(x)$  für alle  $u \in \mathbb{R}$  mit  $0 < |u - x| < r := 1/(2n)!$ . Die Funktion  $g_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} f_k$  ist auf  $[x - r, x + r]$  stückweise affin, und die Steigung liegt überall zwischen  $1 - n$  und  $n - 1$ . Die Funktion  $h = \sum_{k=n}^{2n-1} f_k$  hingegen erfüllt  $h(u) = n|u - x|$  für alle  $u \in [x - r, x + r]$ . Demnach ist die Summe  $g_{2n-1} = g_{n-1} + h$  streng fallend auf  $[x - r, x]$  und streng wachsend auf  $[x, x + r]$ . Insbesondere ist  $x$  das strikte Minimum von  $g_{2n-1}$  eingeschränkt auf  $[x - r, x + r]$ . Für alle  $k \geq 2n$  gilt  $f_k(x) = 0$  und  $f_k(u) \geq 0$  für alle  $u$ . Deshalb ist  $x$  das strikte Minimum auch von  $g$  eingeschränkt auf die hinreichend kleine Umgebung  $[x - r, x + r]$ . □

**Satz B4B: Mittelwertsatz der Integralrechnung**

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar und  $g \geq 0$  (oder  $g \leq 0$ ). Dann existiert ein Punkt  $\xi \in [a, b]$  mit der Mittelwerteigenschaft

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx.$$

Im Spezialfall  $g = 1$  erhalten wir  $\int_a^b f(x) dx = f(\xi) \cdot (b - a)$ .

Im Falle  $\int_a^b g(x) dx = 1$  erhalten wir  $\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi)$ .

**Aufgabe:** Beweisen Sie diese Aussage!

**Lösung:** Auf dem kompakten Intervall  $[a, b]$  existieren  $m := \min f$  und  $M := \max f$ . Wegen  $g \geq 0$  auf ganz  $[a, b]$  gilt damit  $mg \leq fg \leq Mg$ . Das Integral ist monoton und linear, also folgt  $m \int g \leq \int fg \leq M \int g$ . Demnach existiert ein Faktor  $\mu \in [m, M]$  mit  $\int fg = \mu \int g$ . Wir nutzen den Zwischenwertsatz für die stetige Funktion  $f$ : Es existiert  $\xi \in [a, b]$  mit  $f(\xi) = \mu$ . Somit gilt  $\int fg = f(\xi) \int g$ .

**Satz B4C: Taylor–Polynom und Restglied**

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  sei  $(n + 1)$ -mal stetig diff'bar. Das  $n$ -te **Taylor–Polynom** von  $f$  zum Entwicklungspunkt  $a \in I$  ist

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

Für alle  $x \in I$  sei  $R_n(x) := f(x) - T_n(x)$  das **Restglied**. (1) Es gilt

$$R_n(x) = \int_{t=a}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \quad (\text{Integralform})$$

(2) Zu jedem  $x \in I$  existiert ein  $\xi$  zwischen  $a$  und  $x$  mit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad (\text{Lagrange–Form})$$

☺ Die Lagrange–Form des Restglieds gilt sogar, wenn  $f$  nur  $(n + 1)$ -mal differenzierbar ist, die Stetigkeit von  $f^{(n+1)}$  benötigen wir hierzu nicht. Der Beweis unter dieser schwächeren Voraussetzung ist allerdings etwas trickreicher, siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §2.6.

**Aufgabe:** Beweisen Sie Aussage (1) für  $n = 0, 1, 2, \dots$  per Induktion. Folgen Sie (2) mit dem Mittelwertsatz B4B der Integralrechnung.

**Lösung:** (1) Induktionsanfang: Der Fall  $n = 0$  ist der HDI

$$f(x) = f(a) + \int_{t=a}^x f'(t) dt = T_0(x) + R_0(x).$$

Induktionsschritt: Sei  $n \geq 1$  und Aussage (1) gelte für  $n - 1$ .

Wir haben also  $f(x) = T_{n-1}(x) + R_{n-1}(x)$  mit dem Restglied

$$\begin{aligned} R_{n-1}(x) &= \int_{t=a}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt \\ &= \left[ -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) \right]_{t=a}^x + \int_{t=a}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \\ &= \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_{t=a}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt. \end{aligned}$$

Hieraus folgt  $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$  wie in Aussage (1) behauptet.

☺ Somit gilt die Restgliedformel (1) für alle natürlichen Zahlen  $n \in \mathbb{N}$ .

(2) Sei zunächst  $x \geq a$ . Somit gilt  $(x - t)^n \geq 0$  für alle  $t \in [a, x]$ . Nach dem Mittelwertsatz B4B existiert ein  $\xi \in [a, x]$  mit

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \int_{t=a}^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt = f^{(n+1)}(\xi) \int_{t=a}^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt \\ &= f^{(n+1)}(\xi) \left[ -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_{t=a}^x = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \end{aligned}$$

Den Fall  $x \leq a$  mit  $(x - t)^n \leq 0$  oder  $\geq 0$  behandelt man ebenso:

Der Mittelwertsatz B4B gilt wörtlich genauso und garantiert  $\xi \in [x, a]$ .

☺ Somit gilt die Restgliedformel (2) für alle natürlichen Zahlen  $n \in \mathbb{N}$ .

Bereits der Fall  $n = 0$  ist sehr nützlich; wir halten ihn gesondert fest:

**Korollar B4D: Mittelwertsatz der Differentialrechnung**

Ist  $f : [a, x] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar, so existiert ein  $\xi \in [a, x]$  mit

$$f(x) = f(a) + f'(\xi)(x - a)$$



Wir suchen Funktionen  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit folgenden Eigenschaften:

- $f(x) = 0$  für  $x \leq 0$  und  $f(x) > 0$  für  $x > 0$ ,
- $g(x) > 0$  für  $0 < x < 1$  und  $g(x) = 0$  sonst,
- $h$  monoton mit  $h(x) = 0$  für  $x \leq 0$  und  $h(x) = 1$  für  $x \geq 1$ .

Wenn wir nur Stetigkeit ( $C^0$ ) verlangen, so ist die Lösung leicht: Hierzu genügen stückweise affin-lineare Funktionen wie skizziert.

☹ Diese Funktionen sind stetig, aber nicht differenzierbar.

Wir können zudem Differenzierbarkeit erreichen, genauer sogar  $C^k$ , indem wir stückweise Polynomfunktionen vom Grad  $k + 1$  verkleben.

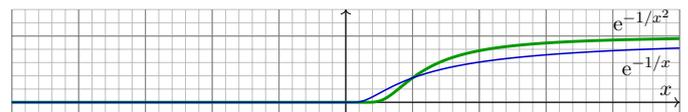
☺ Können wir auch  $C^\infty$ -glatte Funktionen  $f, g, h$  erreichen? Ja!

Das ist erstaunlich, die Ausführung ist keineswegs offensichtlich. Die folgende Aufgabe erklärt hierzu die klassische Konstruktion.

**Aufgabe:** (0) Skizzieren Sie für  $\alpha > 0$  die bemerkenswerte Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^\alpha} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

**Lösung:** Einige Auswertungen ergeben folgendes Bild für  $\alpha = 1, 2$ :



Diese bemerkenswerte Funktion hat erstaunliche Eigenschaften: Sie ist überall auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  analytisch, also lokal durch eine Potenzreihe darstellbar. Auf  $\mathbb{R}_{<0}$  ist dies trivial, auf  $\mathbb{R}_{>0}$  gilt es dank Komposition analytischer Funktionen. An der Klebestelle 0 ist die Funktion  $f$  immerhin noch  $C^\infty$ -glatt, aber nicht mehr analytisch. Diese berühmte Funktion dient uns hier zunächst als Werkzeug zur Illustration, später werden wir sie als Werkzeug nutzen, zur Konstruktion glatter Testfunktionen für Distributionen [529] und von exotischen Gegenbeispielen zu PDEs [510].

☐ Für die Funktion  $e^{-1/x^2}$  mit  $\alpha = 2$  siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, Beispiel 2.6.12. Sie begegnet uns auch als eine Lösung der rationalen Differentialgleichung  $x^3 y' = 2y$  [M321].

**Aufgabe:** Sei  $g : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto g(x) := c_1 x^{e_1} + c_2 x^{e_2} + \dots + c_n x^{e_n}$ , mit Koeffizienten  $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  und Exponenten  $e_1, e_2, \dots, e_n \in \mathbb{R}$ , und

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := \begin{cases} g(x) e^{-1/x^\alpha} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

(1) Ist  $f$  stetig? in  $x \neq 0$ ? in  $x = 0$ ? differenzierbar? in  $x \neq 0$ ? in  $x = 0$ ? Wie rechnet man die Ableitung aus? in  $x \neq 0$ ? in  $x = 0$ ? Zeigen Sie:

$$f'(x) = \begin{cases} [g'(x) + g(x) \cdot \alpha/x^{\alpha+1}] e^{-1/x^\alpha} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

(2) Ist  $f$  stetig diff'bar? zweimal? beliebig oft? also  $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ?

(3a) Berechnen Sie die Taylor–Reihe der Funktion  $f$  um  $x = 0$ .

(3b) Konvergiert die Taylor–Reihe? Konvergiert sie gegen  $f$ ?

(3c) Ist die Funktion  $f$  analytisch? in  $x \neq 0$ ? in  $x = 0$ ?

⚠ Nicht jede  $C^\infty$ -Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  lässt sich in eine Potenzreihe  $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$  entwickeln: Die zu  $f$  gehörige Taylor–Reihe kann divergieren! Selbst wenn sie konvergiert, so nicht unbedingt gegen  $f$ !

**Lösung:** (1) In jedem Punkt  $x \neq 0$  ist  $f$  stetig / glatt / analytisch, denn dort ist  $f$  eine Komposition stetiger / glatter / analytischer Funktionen. Die angegebene Ableitung  $f'(x)$  folgt aus Produkt- und Kettenregel. Es bleibt nur noch das Verhalten in  $x = 0$  zu klären. Für  $x \searrow 0$  gilt:

$$f(x) = g(x) \left/ \left( 1 + \frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{2!x^{2\alpha}} + \frac{1}{3!x^{3\alpha}} + \frac{1}{4!x^{4\alpha}} + \dots \right) \right. \rightarrow 0$$

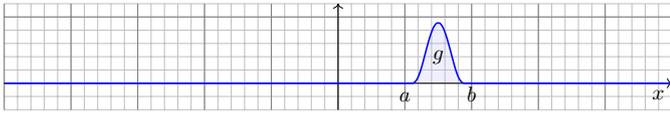
Für  $x \nearrow 0$  gilt  $f(x) = 0 \rightarrow 0$ . Somit ist  $f$  stetig in 0. Für  $x \searrow 0$  gilt:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{g(x)}{x} \left/ \left( 1 + \frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{2!x^{2\alpha}} + \dots \right) \right. \rightarrow 0$$

Rechtsseitig gilt  $f'(0+) = 0$ . Linksseitig gilt trivialerweise  $f'(0-) = 0$ . Also ist  $f$  tatsächlich differenzierbar in 0, und die Ableitung ist  $f'(0) = 0$ .

(2) Die Ableitung  $f'$  ist von derselben Form, dank (1) also differenzierbar. Per Induktion ist  $f$  somit beliebig oft differenzierbar, kurz  $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

(3) Für  $k \in \mathbb{N}$  gilt  $f^{(k)}(0) = 0$ . Die Taylor–Reihe in 0 ist also  $T(x) = 0$ . Sie konvergiert, aber nicht gegen  $f \neq 0$ ! Somit ist  $f$  in 0 nicht analytisch.



Gibt es  $C^\infty$ -glatte Funktionen  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(x) > 0$  für  $0 < x < 1$  und  $g(x) = 0$  sonst? Wie konstruiert man eine solche? Allgemein gefragt:

**Aufgabe:** (4) Vorgegeben seien  $a < b$  in  $\mathbb{R}$ . Konstruieren Sie eine stetige Funktion  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(x) > 0$  für  $a < x < b$  und  $g(x) = 0$  sonst. Gelingt dies glatt, also  $g \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ? analytisch, kurz  $g \in C^\omega(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ?

Bei Konstruktionsaufgaben geht es darum, eine Lösung mit den geforderten Eigenschaften zu konstruieren, und zwar möglichst explizit und direkt, und ihre Eigenschaften nachzuweisen. Natürlich kann man eine Skizze wie oben anfertigen und frech behaupten: „Voilà, hier ist eine Lösung!“ Es bleibt allerdings nachzuweisen, dass dies tatsächlich glatt möglich ist, also beliebig oft differenzierbar, selbst in den Klebestellen  $a$  und  $b$ . Genau hierzu dient diese Aufgabe. Dass dies keineswegs selbstverständlich ist, zeigt hier eindrücklich bereits die letzte Frage: Wenn wir analytische Funktionen  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fordern, so ist diese Konstruktion unmöglich! Wir müssen daher zunächst befürchten, dass dies auch für  $C^\infty$ -glatte Funktionen misslingt. Wir schaffen nun Klarheit, indem wir die Konstruktion solcher „Hutfunktionen“ ausführen.

**Lösung:** Stetig ist's jeweils leicht, zum Beispiel stückweise affin-linear.

Wir nutzen  $f$  aus der vorigen Aufgabe und  $g(x) := f((b-x)(x-a))$ . Diese Funktion ist glatt als Komposition glatter Funktionen.

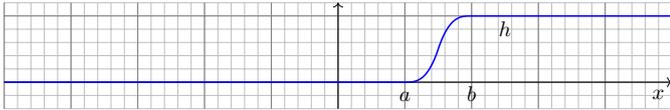
Ebenso möglich ist die Funktion  $g(x) = f(b-x)f(x-a)$ . Diese Funktion ist glatt als Produkt glatter Funktionen.

In beiden Fällen gilt  $g(x) > 0$  für  $a < x < b$  und  $g(x) = 0$  sonst.

Hingegen ist  $g$  nicht analytisch in den Klebestellen  $a$  und  $b$ , siehe (3).



Diese Zeichnungen stammen aus der berühmten Erzählung „Le Petit Prince“ des französischen Autors und Piloten Antoine de Saint-Exupéry (1900–1944). Das Bild links zeigt entgegen dem ersten Anschein keinen Hut, sondern eine Riesenschlange, die einen Elefanten verdaut (rechts). Er schreibt hierzu: „J'ai montré mon chef-d'œuvre aux grandes personnes et je leur ai demandé si mon dessin leur faisait peur. Elles m'ont répondu : « Pourquoi un chapeau ferait-il peur ? » Auch wir haben keine Angst vor Hutfunktionen, im Gegenteil nutzen wir diese wundersamen Wesen im Folgenden raffiniert zur Konstruktion weiterer erstaunlicher und nützlicher Funktionen.

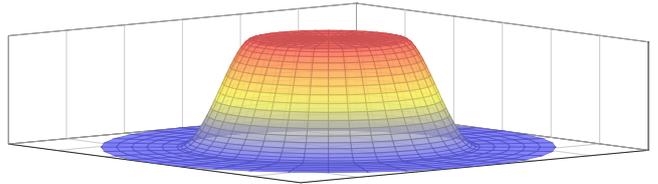


**Aufgabe:** (5) Vorgegeben seien  $a < b$  in  $\mathbb{R}$  wie zuvor. Konstruieren Sie eine stetige Funktion  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $h(x) = 0$  für  $x \leq a$  und  $h(x) = 1$  für  $x \geq b$  und strikt monoton auf  $[a, b]$ . Gelingt dies glatt? analytisch?

**Lösung:** Stetig ist's jeweils leicht, zum Beispiel stückweise affin-linear. Für  $C^\infty$ -glatte Funktionen nutzen wir eine glatte Funktion  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(x) > 0$  für  $a < x < b$  und  $g(x) = 0$  sonst aus der vorigen Aufgabe (4).

(5) Wir haben  $c := \int_a^b g(x) dx > 0$  und setzen  $h(x) := c^{-1} \int_a^x g(t) dt$ . Die Funktion  $h$  ist glatt dank HDI (B11) und erfüllt alle Forderungen. Hingegen ist  $h$  nicht analytisch in den Klebestellen  $a$  und  $b$ , siehe (4).

⚠ Glatte Funktionen sind flexibel, analytische Funktionen hingegen sind starr. Für Letztere gilt der Eindeutigkeitsatz: Haben zwei analytische Funktionen  $\varphi, \psi: \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}$  in einem Punkt  $x_0$  dieselben Ableitungen  $\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0)$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , so gilt  $\varphi(x) = \psi(x)$  für alle  $x \in I$ . Sind sie gleich auf einer beliebig kleinen Umgebung von  $x_0$ , so sind sie überall gleich.



**Satz B4E:** glatte Hutfunktionen auf Bällen

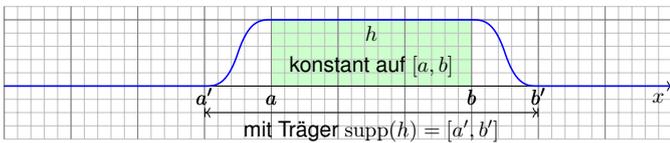
Gegeben seien Radien  $0 \leq a < b < \infty$ . Im  $\mathbb{R}^n$  definiert dies die Bälle

$$A = \bar{B}(0, a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq a^2\},$$

$$B = B(0, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 < b^2\}.$$

Hierzu können wir eine glatte Funktion  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  konstruieren mit  $h = 1$  auf  $A$  und  $h = 0$  außerhalb  $B$  sowie  $0 < h < 1$  auf  $B \setminus A$ .

**Beweis:** Das gelingt wie in (5) durch  $h(x_1, \dots, x_n) = g(x_1^2 + \dots + x_n^2)$  mit  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  glatt, wobei  $g(r) = 1$  für  $r \leq a^2$  und  $g(r) = 0$  für  $r \geq b^2$ .

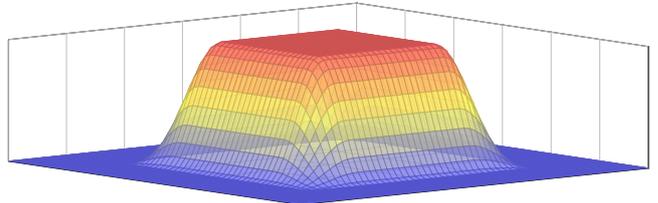


**Aufgabe:** (6) Vorgegeben seien nun  $a' < a \leq b < b'$  in  $\mathbb{R}$ . Konstruieren Sie eine  $C^\infty$ -glatte Funktion  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  wie skizziert: konstant  $h = 1$  auf dem Intervall  $[a, b]$  und  $h = 0$  außerhalb von  $]a', b'$  sowie strikt wachsend links auf  $]a', a]$  und strikt fallend rechts auf  $]b, b']$ .

**Lösung:** Stetig ist's jeweils leicht, zum Beispiel stückweise affin-linear. Für  $C^\infty$ -glatte Funktionen nutzen wir zwei glatte Funktionen aus (5):

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = 0$  für  $x \leq a'$  und  $f(x) = 1$  für  $x \geq a$ ,
- $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(x) = 0$  für  $x \leq b$  und  $g(x) = 1$  für  $x \geq b'$ .

Das Produkt  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: h(x) = f(x) \cdot (1 - g(x))$  erfüllt alle Forderungen: Die Funktion  $h$  ist offensichtlich glatt als Produkt glatter Funktionen, zudem gilt  $h = f$  auf  $]-\infty, b]$  und  $h = 1 - g$  auf  $[a, +\infty[$ .



**Satz B4F:** glatte Hutfunktionen auf Quadern

Seien  $a'_i < a_i \leq b_i < b'_i$  für  $i = 1, \dots, n$ . Im  $\mathbb{R}^n$  definiert dies die Quader

$$A = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n],$$

$$B = ]a'_1, b'_1[ \times \dots \times ]a'_n, b'_n[.$$

Hierzu können wir eine glatte Funktion  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  konstruieren mit  $h = 1$  auf  $A$  und  $h = 0$  außerhalb  $B$  sowie  $0 < h < 1$  auf  $B \setminus A$ .

**Beweis:** Dies gelingt wie in (6) durch  $h(x_1, \dots, x_n) = h_1(x_1) \cdot \dots \cdot h_n(x_n)$ . 😊 Das ähnelt einer Indikatorfunktion A306, doch mit glattem Übergang.

Glatte Funktionen  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sind bemerkenswert flexibel: Die vorigen Konstruktionen zeigen, dass die Menge  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  der glatten Funktionen mit kompaktem Träger erstaunlich reichhaltig ist. Eine erste Anwendung:

**Satz B4G:** Verschwindungs- und Vergleichssatz

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall, zum Beispiel  $\Omega = ]\alpha, \beta[$  oder  $\Omega = \mathbb{R}$ . Für jede stetige Funktion  $f: \mathbb{R} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sind dann äquivalent:

- 0  $f = 0$ , das heißt Gleichheit  $f(x) = 0$  in jedem Punkt  $x \in \Omega$ .
- 1  $\int_\Omega |f(x)| dx = 0$ , das heißt die  $L^1$ -Norm verschwindet.
- 2  $\int_A f(x) dx = 0$  für jedes kompakte Intervall  $A = [a, b] \Subset \Omega$ .
- 3  $\int_\Omega f(x) \varphi(x) dx = 0$  für jede Testfunktion  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ .

Für je zwei stetige Funktionen  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sind demnach äquivalent:

- 0  $f = g$ , das heißt Gleichheit  $f(x) = g(x)$  in jedem Punkt  $x \in \Omega$ .
- 1  $\int_\Omega |f(x) - g(x)| dx = 0$ , das heißt der  $L^1$ -Abstand verschwindet.
- 2  $\int_A f(x) dx = \int_A g(x) dx$  für jedes kompakte Intervall  $A \Subset \Omega$ .
- 3  $\int_\Omega f(x) \varphi(x) dx = \int_\Omega g(x) \varphi(x) dx$  für jede Testfunktion  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ .

**Aufgabe:** Erklären Sie diesen Satz anschaulich. Dann beweisen Sie ihn!

**Lösung:** Die Implikationen „(0)  $\Rightarrow$  (1,2,3)“ sind trivial. Wir zeigen die Umkehrungen durch Kontraposition: Angenommen  $f \neq 0$ , das heißt es gilt  $f(a) \neq 0$  für ein  $a \in \Omega$ . Wir dürfen  $f(a) = 2b > 0$  annehmen. (Im entgegengesetzten Falle  $f(a) < 0$  betrachten wir  $-f$  statt  $f$ .) Da  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$  offen und hierauf  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist, existiert  $\varepsilon > 0$  mit  $B := ]a - 2\varepsilon, a + 2\varepsilon[ \subseteq \Omega$  worauf  $f \geq b$  gilt. Sei  $A := [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ .

„(1)  $\Rightarrow$  (0)“: Es gilt  $\int_\Omega |f| \geq \int_A |f| \geq \int_A b = b \cdot \text{vol}_1(A) = 2\varepsilon b > 0$ .

„(2)  $\Rightarrow$  (0)“: Es gilt  $\int_A f \geq \int_A b = b \cdot \text{vol}_1(A) = 2\varepsilon b \neq 0$ .

„(3)  $\Rightarrow$  (0)“: Dank Satz B4E/B4F existiert eine  $C^\infty$ -Funktion  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit  $\varphi(x) = 1$  für  $x \in A$  und  $\varphi(x) = 0$  für  $x \in \Omega \setminus B$ .

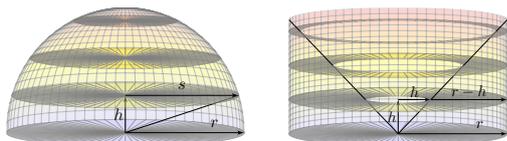
Dank Monotonie des Integrals gilt dann wie zuvor:

$$\int_\Omega f(x) \varphi(x) dx = \int_B f(x) \varphi(x) dx \geq \int_B b \varphi(x) dx > 2\varepsilon b > 0$$

😊 Wir können  $f = 0$  durch jedes dieser drei Kriterien (1,2,3) testen. Ebenso  $f = g$ , indem wir den Satz auf die Differenz  $f - g$  anwenden.

Kapitel C

Mehrdimensionale Integration



Wie machen wir's, daß alles frisch und neu  
Und mit Bedeutung auch gefällig sei? [...]  
Ein jeder sucht sich endlich selbst was aus.  
Wer vieles bringt, wird manchem etwas bringen;  
Und jeder geht zufrieden aus dem Haus.  
Johann Wolfgang von Goethe (1749–1832), Faust (1808)

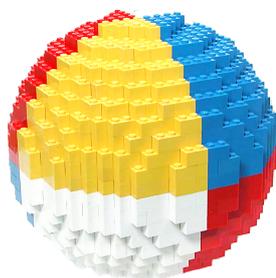
Inhalt dieses Kapitels C

- 1 Der Satz von Fubini
  - Iterierte Integrale für nicht-negative Funktionen
  - Der Satz von Fubini für integrierbare Funktionen
  - Integration über Normalbereiche
- 2 Der Transformationssatz
  - Neue Variablen als geschickte Koordinaten
  - Polarkoordinaten und das Gaußsche Integral
  - Zylinder- und Kugelkoordinaten
- 3 Fazit: Hauptsatz, Fubini, Transformation
  - Zusammenfassung
  - Verständnisfragen
  - Normalbereiche
- 4 Weitere Aufgaben und Anwendungen
  - Trägheitsmoment von Zylinder und Kugel
  - Warnende Gegenbeispiele zu Fubini
  - Volumina, Polstellen, Integrierbarkeit

Mehrdimensionales Volumen

C003  
Überblick

Das Integral misst das Volumen. Die Grundidee ist denkbar einfach: Jedem Quader  $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$  können wir unmittelbar sein Volumen zuordnen, nämlich das Produkt seiner Seitenlängen (A3B).



Wir wollen jedoch nicht nur das Volumen von Quadern messen, sondern von beliebigen Mengen:

Der disjunkten Vereinigung mehrerer Quader ordnen wir die Summe ihrer Volumina zu.

(Bei einer beliebigen Vereinigung ist zur Korrektur das Volumen der Überschneidungen abzuziehen.)

Damit können wir das Volumen beliebiger Mengen approximieren, und schließlich durch Grenzübergang sogar exakt bestimmen.

Mehrdimensionale Integration

C004  
Überblick

In Kapitel A haben wir grundlegend erklärt, was Integrale  $\int_{\Omega} f$  bedeuten. In Kapitel B haben wir eindimensionale Integrale  $\int_a^b f(x) dx$  berechnet, insb. dank des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung (B1). Für mehrdimensionale Integrale folgen nun zwei wichtige Techniken:

- Der Satz von Fubini C1E führt die  $n$ -dimensionale Integration zurück auf  $n$ -fach iterierte eindimensionale Integration. Das hilft.
- Der Transformationssatz C2B verallgemeinert die eindimensionale Substitution und ermöglicht, geschickte Koordinaten zu wählen.

Mit diesen drei Grundtechniken lassen sich bereits sehr viele Integrale effizient berechnen. Hierauf aufbauend kommen in den folgenden Kapiteln weitere bewährte und nützliche Rechentechniken hinzu:

- Vertauschung von Integralen und Grenzwerten (Kapitel D)
- Integralsätze von Gauß / Green / Stokes (Kapitel E, G, H)
- Wegintegrale holomorpher Funktionen und Residuen (Kapitel F)

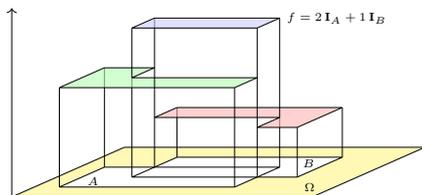
Damit haben Sie einen umfangreichen Werkzeugkasten zur Integration, der Ihnen als Grundlage für die meisten Anwendungen ausreichen wird.

Integration von Treppenfunktionen

C101  
Ausführung

Zu Quadern  $Q_k \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $c_k \in \mathbb{R}$  definieren wir die **Treppenfunktion**

$$f = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \mathbf{I}_{Q_k}.$$



All diese Treppenfunktionen bilden den  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $T_n = T(\mathbb{R}^n)$ . Das Integral  $T_n \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$  misst das Volumen unter dem Funktionsgraphen, also  $\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{I}_Q(x) dx = \text{vol}_n(Q)$  und linear fortgesetzt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[ \sum_{k=1}^{\ell} c_k \mathbf{I}_{Q_k}(x) \right] dx = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{I}_{Q_k}(x) dx = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \text{vol}_n(Q_k).$$

Treppenfunktionen sind ein nützliches Werkzeug zur Approximation weiterer Funktionen; ihr Integral ist dazu ein erster wichtiger Schritt.

Integration von Treppenfunktionen

C102  
Ausführung

Wir führen die  $n$ -dimensionale Konstruktion nun sorgfältig aus.

Satz C1A: Existenz und Eindeutigkeit des Integrals

(0) Es existiert genau eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $I_n : T_n \rightarrow \mathbb{R}$  mit der Normierung  $I_n(\mathbf{I}_Q) = \text{vol}_n(Q)$  für jeden endlichen Quader  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ . Diese Abbildung  $I_n$  ist zudem monoton: Aus  $f \leq g$  folgt  $I_n(f) \leq I_n(g)$ .  
(1) Das eindimensionale Integral  $I_1 : T_1 \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \int_{x \in \mathbb{R}} f(x) dx$  kennen wir bereits (Satz B1A). Hieraus gewinnen wir  $I_n : T_n \rightarrow \mathbb{R}$  iterativ gemäß

$$I_n(f) = \int_{x_1 \in \mathbb{R}} \int_{x_2 \in \mathbb{R}} \dots \int_{x_n \in \mathbb{R}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \dots dx_2 dx_1$$

Diese Konstruktion integriert  $n$ -fach eindimensionale Treppenfunktionen.

☺ Wir nutzen fortan die übliche Schreibweise  $\int_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) dx := I_n(f)$ .

☺ Linearität und Normierung garantieren genau die ersehnte Formel

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[ \sum_{k=1}^{\ell} c_k \mathbf{I}_{Q_k}(x) \right] dx \stackrel{\text{Lin}}{=} \sum_{k=1}^{\ell} c_k \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{I}_{Q_k}(x) dx \stackrel{\text{Norm}}{=} \sum_{k=1}^{\ell} c_k \text{vol}_n(Q_k).$$

Was bedeutet „wohldefiniert“?

C103  
Ausführung

Was genau ist hier zu beweisen? Ist die Aussage nicht trivial? Nein! Warum genügt nicht einfach die letzte Formel als Definition? Ich nenne drei Gegenbeispiele, um Sie vor naiver Formelgläubigkeit zu schützen! Wir wollen jeder Treppenfunktion  $f \in T_n$  eine Zahl zuordnen gemäß

$$f = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \mathbf{I}_{Q_k} \implies \begin{aligned} M(f) &:= \max\{c_1, \dots, c_{\ell}\}, \\ N(f) &:= \sum_{k=1}^{\ell} c_k^2 \text{vol}(Q_k), \\ Q(f) &:= \sum_{k=1}^{\ell} c_k \text{vol}(Q_k)^2. \end{aligned}$$

**Aufgabe:** Was ist hieran gefährlich falsch? Sind  $M, N, Q$  wohldefiniert? Versuchen Sie, diese Werte für folgende Funktionen zu bestimmen:

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \cdot \mathbf{I}_{[0,1]} &= (+1) \cdot \mathbf{I}_{[0,1]} + (-1) \cdot \mathbf{I}_{[0,1]} \\ f &= 2 \cdot \mathbf{I}_{[0,2]} + 3 \cdot \mathbf{I}_{[1,3]} &= 2 \cdot \mathbf{I}_{[0,1]} + 5 \cdot \mathbf{I}_{[1,2]} + 3 \cdot \mathbf{I}_{[2,3]} \\ g &= 7 \cdot \mathbf{I}_{[0,1]} - 6 \cdot \mathbf{I}_{[1,3]} &= 7 \cdot \mathbf{I}_{[0,1]} - 6 \cdot \mathbf{I}_{[1,2]} - 6 \cdot \mathbf{I}_{[2,3]} \end{aligned}$$

**Lösung:** Die Zuordnungen  $M, N, Q$  sind überhaupt nicht wohldefiniert!

⚠ Verschiedene Darstellungen / Schreibweisen derselben Funktion liefern verschiedene Ergebnisse: Das ergibt überhaupt keinen Sinn!

Was bedeutet „wohldefiniert“?

C104  
Ausführung

☺ Treppenfunktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sind Linearkombinationen von Indikatorfunktionen  $\mathbf{I}_Q$  endlicher Quader  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ . Anders gesagt, die Indikatorfunktionen  $\mathbf{I}_Q$  sind ein Erzeugendensystem von  $T_n$ .

☹ Sie sind jedoch keine Basis: Die Darstellung  $f = \sum_{k=1}^r c_k \mathbf{I}_{Q_k}$  ist keineswegs eindeutig! Wir können jede Treppenfunktion  $f$  auf unendlich viele Weisen als Summe  $f = \sum_{k=1}^s c'_k \mathbf{I}_{Q'_k}$  schreiben.

☹ Die Werte  $M, N, Q$  hängen nicht von der Funktion  $f$  ab, sondern von der (willkürlich gewählten!) Darstellung als Linearkombination.

☺ Glücklicherweise ist das obige Integral  $I_n : T_n \rightarrow \mathbb{R}$  wohldefiniert, und genau das ist die Aussage des zu beweisenden Satzes C1A: Aus  $\sum_{k=1}^r c_k \mathbf{I}_{Q_k} = \sum_{\ell=1}^s c'_\ell \mathbf{I}_{Q'_\ell}$  folgt  $\sum_{k=1}^r c_k \text{vol}_n(Q_k) = \sum_{\ell=1}^s c'_\ell \text{vol}_n(Q'_\ell)$ .

☺ Bemerkung: Die Quader  $Q_k$  dürfen sich überlappen, man kann sie aber auch stets disjunkt wählen. In diesem Falle gilt  $M(f) = \max f$  und  $N(f) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx$ . (Warum?) Auf **disjunkten** Linearkombinationen sind somit  $M$  und  $N$  wohldefiniert. Auch disjunkte Darstellungen sind jedoch noch keineswegs eindeutig. Das Beispiel  $Q$  ist selbst durch Disjunktheit nicht zu retten, da es sich bei Verfeinerung ändert.

**Integration von Treppenfunktionen** C105  
Ausführung

**Aufgabe:** Beweisen Sie Satz C1A! *Hinweis:* Sie müssen hierzu nichts neu erfinden, denn die Formulierung ist bereits vollkommen explizit; es genügt, alle Schritte geduldig und sorgsam nachzurechnen.

**Lösung:** Wir suchen eine Abbildung  $I_n: T_n \rightarrow \mathbb{R}$  mit den genannten Eigenschaften; sie soll linear und normiert und monoton sein.

Der Satz macht hierzu zwei Aussagen: Existenz und Eindeutigkeit. Das heißt, es gibt eine korrekte Lösung  $I_n$ , und zwar genau eine. Andernfalls wäre zu befürchten, dass es mehrere Lösungen gibt... oder auch gar keine! Hierzu verschaffen wir uns nun Klarheit.

(1) Die **Eindeutigkeit** ist hier besonders leicht: Gegeben seien zwei Abbildungen  $I_n, I'_n: T_n \rightarrow \mathbb{R}$ , beide seien (a) linear und (b) normiert. Für jede Treppenfunktion  $f = \sum_{k=1}^r c_k \mathbf{I}_{Q_k}$  folgt  $I_n(f) = I'_n(f)$ , denn

$$I_n(f) = I_n\left(\sum_{k=1}^r c_k \mathbf{I}_{Q_k}\right) \stackrel{(a)}{=} \sum_{k=1}^r c_k I_n(\mathbf{I}_{Q_k}) \stackrel{(b)}{=} \sum_{k=1}^r c_k \text{vol}_n(Q_k)$$

$$I'_n(f) = I'_n\left(\sum_{k=1}^r c_k \mathbf{I}_{Q_k}\right) \stackrel{(a)}{=} \sum_{k=1}^r c_k I'_n(\mathbf{I}_{Q_k}) \stackrel{(b)}{=} \sum_{k=1}^r c_k \text{vol}_n(Q_k)$$

☺ Das beweist  $I_n = I'_n$ : Es kann höchstens eine Lösung geben!

**Integration von Treppenfunktionen** C106  
Ausführung

(2) Wesentlich kniffliger ist es, die **Existenz** einer Lösung zu beweisen. Hierzu müssen wir tatsächlich eine Abbildung  $I_n: T_n \rightarrow \mathbb{R}$  **konstruieren**, die linear, normiert und monoton ist. Satz C1A erklärt, wie das gelingt:

(2a) Das eindimensionale Integral  $I_1: T_1 \rightarrow \mathbb{R}: f \mapsto \int_{x \in \mathbb{R}} f(x) dx$  kennen wir bereits aus Satz B1A: Unsere dortige Sorgfalt war gut investiert! Wir bilden damit das  $n$ -fach iterierte Integral wie in C1A angegeben:

(2b) Für jede  $n$ -dimensionale Treppenfunktion  $f \in T_n$  und  $u \in \mathbb{R}^{n-1}$  ist  $f_u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: v \mapsto f(u_1, \dots, u_{n-1}, v)$  eine eindim. Treppenfunktion: Für jeden Quader  $Q = Q^* \times [a, b]$  gilt  $\mathbf{I}_Q(u, v) = \mathbf{I}_{Q^*}(u) \cdot \mathbf{I}_{[a,b]}(v)$ . Aus  $f = \sum_{k=1}^r c_k \mathbf{I}_{Q_k} \in T_n$  folgt  $f_u = \sum_{k=1}^r c_k \mathbf{I}_{Q_k^*}(u) \mathbf{I}_{[a_k, b_k]} \in T_1$ .

(2c) Zur leichteren Schreibweise definieren wir hilfsweise die Abbildung  $J_n: T_n \rightarrow \text{Abb}(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R})$  als Integration über die letzte Variable, also:

$$J_n: f \mapsto f^*, \quad f^*(x_1, \dots, x_{n-1}) := \mathbf{I}_1[x_n \mapsto f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)]$$

$$= \int_{x_n \in \mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) dx_n$$

Wir wenden hier (2a) an, und dank (2b) dürfen wir dies auch.

**Integration von Treppenfunktionen** C107  
Ausführung

(2d) Die Abbildung  $I_1$  ist linear und monoton, also auch  $J_n$ .

(2e) Speziell für  $f = c \mathbf{I}_Q$  mit  $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_{n-1}, b_{n-1}] \times [a_n, b_n]$  gilt  $f^* = c^* \mathbf{I}_{Q^*}$  mit  $c^* = (b_n - a_n) c$  und  $Q^* = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_{n-1}, b_{n-1}]$ .

Für jede Treppenfunktion  $f = \sum_{k=1}^r c_k \mathbf{I}_{Q_k} \in T_n$  ist dank Linearität demnach  $J_n(f) = f^* = \sum_{k=1}^r c_k^* \mathbf{I}_{Q_k^*} \in T_{n-1}$  eine Treppenfunktion. Die einfache Integration liefert uns somit die Abbildung  $J_n: T_n \rightarrow T_{n-1}$ .

(2f) Dies können wir iterieren und erhalten so die  $n$ -fache Integration:

$$I_n: T_n \xrightarrow{J_n} T_{n-1} \xrightarrow{J_{n-1}} \dots \xrightarrow{J_2} T_1 \xrightarrow{J_1=I_1} \mathbb{R}$$

Jede der Abbildungen  $J_n, J_{n-1}, \dots, J_2, J_1 = I_1$  ist linear und monoton, also auch ihre Komposition  $I_n = I_1 \circ J_2 \circ \dots \circ J_{n-1} \circ J_n: T_n \rightarrow \mathbb{R}$ .

(2g) Für jeden Quader  $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_{n-1}, b_{n-1}] \times [a_n, b_n]$  gilt schließlich  $I_n(\mathbf{I}_Q) = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_{n-1} - a_{n-1}) \cdot (b_n - a_n) = \text{vol}_n(Q)$ .

☺ Damit haben wir aus  $I_1: T_1 \rightarrow \mathbb{R}$  explizit eine Abbildung  $I_n: T_n \rightarrow \mathbb{R}$  konstruiert, die alle Anforderungen erfüllt. Das beweist die Existenz!

**Integration von Treppenfunktionen** C108  
Ausführung

Aussagen zu **Existenz und Eindeutig** von Lösungen sind eine typisch mathematische Vorgehensweise und zur Grundlegung unentbehrlich. Muss die Ingenieur:in das wissen? Was genau kann sie hierbei lernen?

☺ Diese ausführliche Übung zeigt exemplarisch, wieviel Umsicht und Sorgfalt nötig sind, um eine nicht-triviale Konstruktionsaufgabe zu lösen. Das gilt selbst für die (scheinbar simple) lineare Abbildung  $I_n: T_n \rightarrow \mathbb{R}$ .

Aus der Linearen Algebra wissen Sie: Wenn Sie eine Basis  $(b_i)_{i \in I}$  von  $T_n$  haben, so genügt es, den Wert  $I_n(b_i)$  für jedes  $i \in I$  vorzuschreiben. Da sich jeder Vektor  $f \in T_n$  eindeutig als  $f = \sum_i \lambda_i b_i$  linearkombiniert, folgt hieraus  $I_n(f) = \sum_i \lambda_i I_n(b_i)$ , und dies konstruiert die Abbildung  $I_n$ .

⚠ Dieses einfache Argument steht uns hier leider nicht zur Verfügung: Das Erzeugendensystem  $(\mathbf{I}_Q)_{Q \subseteq \mathbb{R}^n}$  von  $T_n = T(\mathbb{R}^n)$  ist keine Basis; Darstellungen  $f = \sum_{k=1}^r c_k \mathbf{I}_{Q_k}$  sind keineswegs eindeutig! [C103]

Die Konstruktion muss daher den Relationen zwischen den Erzeugern  $\mathbf{I}_Q$  Rechnung tragen. Genau dies ist der Inhalt der Sätze B1A und C1A. Diese Überlegungen bauen wir nun zum Satz von Fubini aus.

**Fubini: Flächenintegral vs Doppelintegrale** C109  
Ausführung

Wir untersuchen für  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  die Gültigkeit der Fubini-Gleichung:

$$\int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right] dx \stackrel{?}{=} \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right] dy \stackrel{?}{=} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d(x, y)$$

Sie gilt für sehr viele Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , aber nicht für alle! [C117] [C414]

**Aufgabe:** (0) Gilt  $\mathbf{I}_{[a,b] \times [c,d]}(x, y) = \mathbf{I}_{[a,b]}(x) \cdot \mathbf{I}_{[c,d]}(y)$  für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ?

(1) Berechnen und vergleichen Sie die drei obigen Integrale für die Indikatorfunktion  $f = \mathbf{I}_Q$  eines Rechtecks  $Q = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$ .

(2) Gilt die Gleichung für alle Treppenfunktionen  $f = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{I}_{Q_k}$ ? Bleibt sie erhalten bei Linearkombinationen  $f = \sum_{k=1}^n c_k f_k$ ?

(3) Bleibt die Gleichung erhalten bei monotoner Konvergenz  $f_k \nearrow f$ ?

**Notation:** Bei doppelten oder mehrfachen Integralen lassen wir im Folgenden meist die Klammern weg und vereinbaren, dass zum ersten Integralzeichen  $\int_{x \in X}$  immer die letzte Integrationsvariable  $dx$  gehört.

☺ Das Symbolpaar  $\int_{x \in X} \dots dx$  wirkt somit immer als Klammer.

**Fubini: Flächenintegral vs Doppelintegrale** C110  
Ausführung

(0) Ja. Unterscheiden Sie die vier Fälle  $x \notin [a, b]$  und  $y \notin [c, d]$ .

(1) Damit können wir die iterierten Integrale leicht ausrechnen:

$$\int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_Q(x, y) dy \right] dx = \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{[a,b]}(x) \cdot \mathbf{I}_{[c,d]}(y) dy \right] dx$$

$$\stackrel{\text{Lin}}{=} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{[a,b]}(x) \cdot \left[ \int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{[c,d]}(y) dy \right] dx \stackrel{\text{Lin}}{=} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{[a,b]}(x) dx \cdot \int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{[c,d]}(y) dy$$

Dasselbe gilt bei umgekehrter Integrationsreihenfolge:

$$\int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_Q(x, y) dx \right] dy = \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{[a,b]}(x) \cdot \mathbf{I}_{[c,d]}(y) dx \right] dy$$

$$\stackrel{\text{Lin}}{=} \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{[a,b]}(x) dx \right] \cdot \mathbf{I}_{[c,d]}(y) dy \stackrel{\text{Lin}}{=} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{[a,b]}(x) dx \cdot \int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{[c,d]}(y) dy$$

Schließlich ist das Flächenintegral auf Rechtecken normiert:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{I}_Q(x, y) d(x, y) \stackrel{\text{Def}}{\stackrel{\text{A3G}}{=}} \text{vol}_2(Q) = (b-a)(d-c)$$

☺ Fubini gilt für  $f = \mathbf{I}_Q$  und jedes Rechteck  $Q = [a, b] \times [c, d]$ .

**Fubini: Flächenintegral vs Doppelintegrale** C111  
Ausführung

(2) Für jede Linearkombination  $f = \sum_{k=1}^n c_k f_k$  finden wir:

$$\int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^n c_k f_k(x, y) dy \right] dx \stackrel{\text{Lin}}{\stackrel{\text{A3L}}{=}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^n c_k \left[ \int_{\mathbb{R}} f_k(x, y) dy \right] dx$$

$$\stackrel{\text{Lin}}{\stackrel{\text{A3L}}{=}} \sum_{k=1}^n c_k \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} f_k(x, y) dy \right] dx$$

Dasselbe gilt bei umgekehrter Integrationsreihenfolge:

$$\int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^n c_k f_k(x, y) dx \right] dy \stackrel{\text{Lin}}{\stackrel{\text{A3L}}{=}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^n c_k \left[ \int_{\mathbb{R}} f_k(x, y) dx \right] dy$$

$$\stackrel{\text{Lin}}{\stackrel{\text{A3L}}{=}} \sum_{k=1}^n c_k \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} f_k(x, y) dx \right] dy$$

Schließlich ist auch das Flächenintegral linear:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \sum_{k=1}^n c_k f_k(x, y) d(x, y) \stackrel{\text{Lin}}{\stackrel{\text{A3L}}{=}} \sum_{k=1}^n c_k \int_{\mathbb{R}^2} f_k(x, y) d(x, y)$$

☺ Gilt Fubini für  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , so auch für jede Linearkombination  $f$ .

**Fubini: Flächenintegral vs Doppelintegrale** C112  
Ausführung

(3) Für  $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$  und monotone Konvergenz  $f_k \nearrow f$  gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right] dx = \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x, y) dy \right] dx$$

$$\stackrel{\text{MoK}}{\stackrel{\text{A3G}}{=}} \int_{\mathbb{R}} \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \int_{\mathbb{R}} f_k(x, y) dy \right] dx \stackrel{\text{MoK}}{\stackrel{\text{A3G}}{=}} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} f_k(x, y) dy \right] dx$$

Dasselbe gilt bei umgekehrter Integrationsreihenfolge:

$$\int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right] dy = \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x, y) dx \right] dy$$

$$\stackrel{\text{MoK}}{\stackrel{\text{A3G}}{=}} \int_{\mathbb{R}} \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \int_{\mathbb{R}} f_k(x, y) dx \right] dy \stackrel{\text{MoK}}{\stackrel{\text{A3G}}{=}} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} f_k(x, y) dx \right] dy$$

Auch für das Flächenintegral gilt bei monotoner Konvergenz:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x, y) d(x, y) \stackrel{\text{MoK}}{\stackrel{\text{A3G}}{=}} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} f_k(x, y) d(x, y)$$

☺ Gilt Fubini für  $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ , so auch für ihre Grenzfunktion  $f$ .



Bislang haben wir Fubini (Satz C1B) nur für nicht-negative Funktionen! Dank Zerlegung in Positiv- und Negativteil (A3K) folgt daraus allgemein:

**Satz C1E: Fubini 1907**

Seien  $X \subseteq \mathbb{R}^p$  und  $Y \subseteq \mathbb{R}^q$  messbare Teilmengen.

(1) Für jede messbare Funktion  $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R} = [-\infty, +\infty]$  gilt

$$\int_{X \times Y} |f(x, y)| d(x, y) = \int_X \int_Y |f(x, y)| dy dx = \int_Y \int_X |f(x, y)| dx dy.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so ist  $f$  absolut integrierbar, und dann gilt

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d(x, y) = \int_X \int_Y f(x, y) dy dx = \int_Y \int_X f(x, y) dx dy.$$

- 😊 Fubini reduziert mehrdimensionale Integrale auf eindimensionale.
- 😊 Wir brauchen absolute Integrierbarkeit: genau die, mehr nicht.
- 😊 Wir dürfen uns dann die bequemste Reihenfolge aussuchen.

😊 Fubini und die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge gilt

- für alle nicht-negativen Funktionen  $f: X \times Y \rightarrow [0, \infty]$ ,
- für alle absolut integrierbaren Funktionen  $f: X \times Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ ,
- zum Beispiel, wenn  $X, Y$  und  $f$  beschränkt sind,
- insbesondere für  $X, Y$  kompakt und  $f$  stetig.

⚠ Für die erhoffte Gleichheit sind diese Voraussetzungen wesentlich! Aufgaben am Kapitelende zeigen lehrreiche Gegenbeispiele. C409 C413 Zur korrekten Anwendung müssen Sie dieses Problem beherrschen.

Der Satz von Fubini ist ungemein praktisch, wie wir bereits gesehen haben, denn er erlaubt uns, die mehrdimensionale Integration auf die leichtere eindimensionale Integration zurückzuführen.

Der erste Teil des Satzes besagt ausführlicher: Die Funktion  $g_x: Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}}: y \mapsto |f(x, y)|$  ist für fast jedes  $x \in X$  messbar, eventuell mit Ausnahme einer Nullmenge  $N \subseteq X$ . Wir definieren  $G: X \rightarrow [0, \infty]$  durch  $G(x) := \int_Y |f(x, y)| dy$  für  $x \in X \setminus N$ , sowie  $G(x) = 0$  für  $x \in N$ . Dann ist  $G$  messbar, und es gilt  $\int_{X \times Y} |f(x, y)| d(x, y) = \int_X G(x) dx$ .

Der zweite Teil des Satzes besagt ausführlicher: Die Funktion  $f_x: Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}}: y \mapsto f(x, y)$  ist für fast jedes  $x \in X$  integrierbar, eventuell mit Ausnahme einer Nullmenge  $N \subseteq X$ . Die Funktion  $F: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  mit  $F(x) := \int_Y f(x, y) dy$  für alle  $x \in X \setminus N$ , sowie  $F(x) = 0$  für  $x \in N$ , ist integrierbar und erfüllt  $\int_{X \times Y} f(x, y) d(x, y) = \int_X F(x) dx$ . Ebenso für das zweite Integral.

**Aufgabe:** Berechnen Sie den Flächeninhalt der **Kreisscheibe**

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2 \} \\ = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -r \leq x \leq r, -\sqrt{r^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2} \}.$$

**Lösung:** Dank Fubini genügt eindimensionale Integration:

$$\text{vol}_2(D) \stackrel{\text{Def A3j}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_D(x, y) d(x, y) \stackrel{\text{Fub C1E}}{=} \int_{x \in \mathbb{R}} \int_{y \in \mathbb{R}} \mathbf{1}_D(x, y) dy dx \\ \stackrel{\text{Def B1k}}{=} \int_{x=-r}^r \int_{y=-\sqrt{r^2-x^2}}^{+\sqrt{r^2-x^2}} 1 dy dx \stackrel{\text{Def HD1}}{=} \int_{x=-r}^r 2\sqrt{r^2-x^2} dx$$

Substitution  $x = -r \cos(u)$  und  $dx = r \sin(u) du$  mit  $u \in [0, \pi]$ :

$$\stackrel{\text{Subs B1k}}{=} \int_{u=0}^{\pi} 2\sqrt{r^2 - r^2 \cos^2(u)} \cdot r \sin(u) du \stackrel{\text{Trig}}{=} r^2 \int_{u=0}^{\pi} 2 \sin(u)^2 du \\ \stackrel{\text{Trig}}{=} r^2 \int_{u=0}^{\pi} 1 - \cos(2u) du \stackrel{\text{HD1 B1l}}{=} r^2 \left[ u - \frac{1}{2} \sin(2u) \right]_{u=0}^{\pi} = \pi r^2$$

😊 Das Ergebnis kannten Sie bereits. Nun können Sie es ausrechnen!

**Aufgabe:** Berechnen Sie den Rauminhalt einer **Kugel** vom Radius  $r$ :

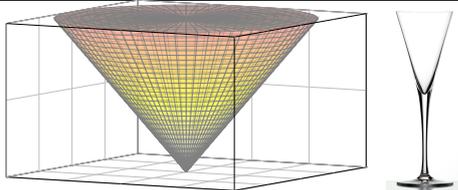
$$K = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2 \} \\ = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -r \leq z \leq r, x^2 + y^2 \leq r^2 - z^2 \}$$

**Lösung:** Dank Fubini und der vorigen Aufgabe finden wir:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{1}_K(x, y, z) d(x, y, z) \stackrel{\text{Fub C1E}}{=} \int_{z=-r}^r \int_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \mathbf{1}_K(x, y, z) d(x, y) dz \\ \stackrel{\text{so}}{=} \int_{z=-r}^r \pi(r^2 - z^2) dz \stackrel{\text{HD1 B1l}}{=} \pi \left[ zr^2 - \frac{1}{3}z^3 \right]_{z=-r}^r = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

- 😊 Die Rechnung fällt hier sogar noch einfacher aus als für die Kreisscheibe.
- 😊 Der Term  $r^3$  ist plausibel, denn die Kugel wächst in jede Richtung proportional zu  $r$ . Die Konstante  $\frac{4}{3}\pi$  hingegen kann man nicht raten. Wir gewinnen sie aus der Integration!
- 😊 Rekursiv können Sie mit derselben Rechnung in jeder Dimension  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  das Volumen der Kugel  $D_r^n = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq r^2 \}$  bestimmen: C425

$n$	0	1	2	3	4	5	6	...
$\text{vol}_n(D_r^n)$	1	$2r$	$\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$	$\frac{1}{2}\pi^2 r^4$	$\frac{8}{15}\pi^2 r^5$	$\frac{1}{6}\pi^3 r^6$	...



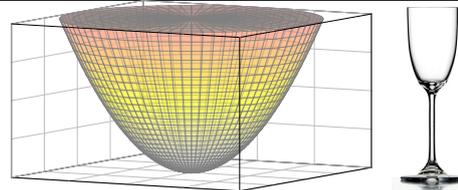
**Aufgabe:** Berechnen Sie das Volumen des **Kegels**

$$K = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq h, x^2 + y^2 \leq z^2 \}.$$

**Lösung:** Dank Fubini und geschickter Aufspaltung gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{1}_K(x, y, z) d(x, y, z) = \int_{z=0}^h \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_K(x, y, z) d(x, y) dz \\ = \int_0^h \pi z^2 dz = \left[ \frac{\pi}{3} z^3 \right]_{z=0}^h = \frac{\pi}{3} h^3.$$

😊 Glas: Um die doppelte Höhe zu erreichen, benötigen Sie achtmal soviel Flüssigkeit. Der Term  $h^3$  ist plausibel, denn der Kegel wächst in jede Richtung proportional zu  $h$ . Allgemein ist das Volumen eines dreidimensionalen Kegels  $\frac{1}{3}$  mal Grundfläche mal Höhe.



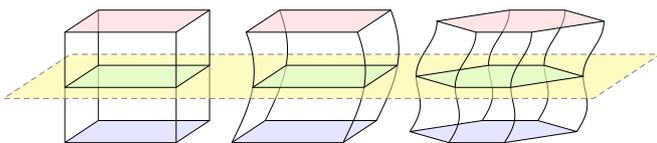
**Aufgabe:** Berechnen Sie das Volumen des **Rotationsparaboloids**

$$P = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq h, x^2 + y^2 \leq z \}.$$

**Lösung:** Dank Fubini und geschickter Aufspaltung gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{1}_P(x, y, z) d(x, y, z) = \int_{z=0}^h \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_P(x, y, z) d(x, y) dz \\ = \int_{z=0}^h \pi z dz = \left[ \frac{\pi}{2} z^2 \right]_{z=0}^h = \frac{\pi}{2} h^2.$$

😊 Glas: Um die doppelte Höhe zu erreichen, benötigen Sie viermal soviel Flüssigkeit. Der Term  $h^2$  ist kein Tippfehler, auch wenn man hier naiv vielleicht  $h^3$  erwarten würde! Anders als im vorigen Beispiel des Kegels wächst hier das Volumen tatsächlich nur mit  $h^2$ .



**Korollar C1F: Cavalieri 1635 / Spezialfall des Satzes von Fubini**

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Zu jedem  $t \in \mathbb{R}$  bezeichne  $A_t$  die Schnittmenge

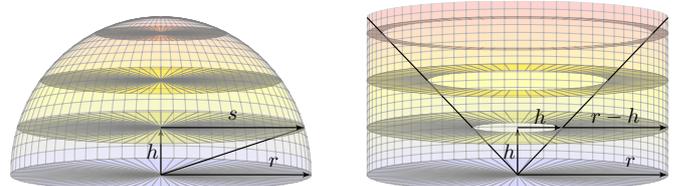
$$A_t = \{ (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x_1, \dots, x_{n-1}, t) \in A \}.$$

Dann gilt

$$\text{vol}_n(A) = \int_{\mathbb{R}} \text{vol}_{n-1}(A_t) dt.$$

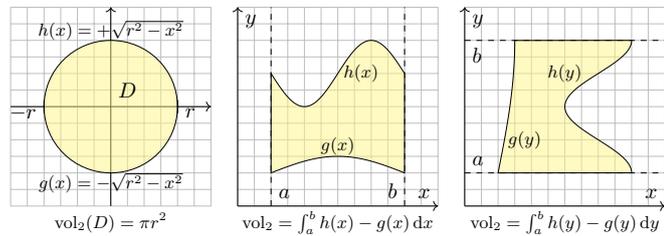
Dies erlaubt einfache Vergleiche wie skizziert: Sind  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  Mengen mit  $\text{vol}_{n-1}(A_t) = \text{vol}_{n-1}(B_t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ , so folgt  $\text{vol}_n(A) = \text{vol}_n(B)$ .

Das Prinzip von Cavalieri ist recht intuitiv. Manche nennen es den „Satz vom geschnittenen Brot“. Wir haben dieses Prinzip bereits bei den vorigen Volumenberechnungen angewendet. Manchmal können wir durch einen geschickten Vergleich das Volumen (fast) ohne Integral-Rechnung bestimmen. Das Kugelvolumen können wir dank Cavalieri geometrisch verstehen:



$$\text{Volumen der Halbkugel} = \text{Volumen des Zylinders minus Kegel} \\ = \pi r^2 \cdot r - \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r = \frac{2}{3}\pi r^3$$

Links: Auf der Höhe  $h$  ist der Kreisradius  $s$  gegeben durch  $s^2 = r^2 - h^2$ , die Kreisscheibe hat also den Flächeninhalt  $\pi s^2 = \pi r^2 - \pi h^2$ . Rechts: In Höhe  $h$  hat der Kreisring den Flächeninhalt  $\pi r^2 - \pi h^2$ . Nach dem Prinzip von Cavalieri haben somit beide Körper denselben Rauminhalt!



**Definition C1G: ebener Normalbereich**

Eine Teilmenge  $B \subseteq \mathbb{R}^2$  heißt **Normalbereich in y-Richtung**, wenn

$$B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x) \}.$$

mit  $g, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $g \leq h$ . Entsprechend **in x-Richtung**, wenn

$$B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq y \leq b, g(y) \leq x \leq h(y) \}.$$

Gilt beides, so nennen wir  $B \subseteq \mathbb{R}^2$  einen **Binormalbereich**.

**Satz C1H: Fubini für ebene Normalbereiche**

Jeder Normalbereich  $B \subseteq \mathbb{R}^2$  ist kompakt, somit messbar,  $\text{vol}_2(B) < \infty$ .

Sei  $f: B \rightarrow \mathbb{R}$  absolut integrierbar, z.B. beschränkt oder gar stetig.

Für  $B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x) \}$  gilt dank Fubini

$$\int_B f(x, y) d(x, y) = \int_{x=a}^b \int_{y=g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx.$$

Für  $B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq y \leq b, g(y) \leq x \leq h(y) \}$  gilt dank Fubini

$$\int_B f(x, y) d(x, y) = \int_{y=a}^b \int_{x=g(y)}^{h(y)} f(x, y) dx dy.$$

⚠ Zur Anwendung müssen Sie die Grenzen  $a, b, g, h$  des Bereichs  $B$  korrekt bestimmen. Manche Bereiche sind Normalbereiche sowohl in  $x$ - als auch in  $y$ -Richtung: Sie haben dann die Wahl und können sich den leichtesten Rechenweg aussuchen. Unsere Konstruktion des Integrals stellt sicher, dass das Ergebnis wohldefiniert ist, also unabhängig ist vom gewählten Rechenweg!

Integration über eine Kreisscheibe

**Aufgabe:** Integrieren Sie  $f(x, y) = x^2 + y^2$  über die Kreisscheibe

$$\begin{aligned} D &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2 \} \\ &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -r \leq x \leq r, -\sqrt{r^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2} \} \\ &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -r \leq y \leq r, -\sqrt{r^2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{r^2 - y^2} \} \end{aligned}$$

**Lösung:** Wir wählen eine Beschreibung als Normalbereich:

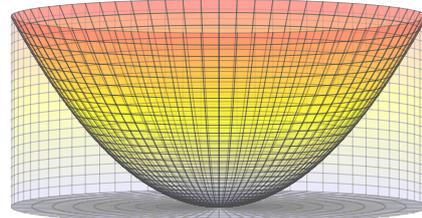
$$\begin{aligned} \int_D f(x, y) d(x, y) &= \int_{x^2 + y^2 \leq r} (x^2 + y^2) d(x, y) \\ &= \int_{x=-r}^r \int_{y=-\sqrt{r^2 - x^2}}^{\sqrt{r^2 - x^2}} (x^2 + y^2) dy dx = \int_{x=-r}^r \left[ x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=-\sqrt{r^2 - x^2}}^{\sqrt{r^2 - x^2}} dx \\ &= \int_{x=-r}^r \frac{2}{3} \sqrt{r^2 - x^2} (2x^2 + r^2) dx = \dots = \frac{\pi}{2} r^4 \end{aligned}$$

Wenn Sie Herausforderungen mögen, versuchen Sie doch mal, das letzte Integral auszurechnen. Wenn Sie es lieber bequem mögen: Später gelingt die Rechnung spürbar leichter mit dem Transformationssatz. Die Wahl eines geschickten Rechenweges erfordert Übung!

Integration über eine Kreisscheibe

Dieses Integral entspricht dem Trägheitsmoment eines Zylinders.

Anschaulich misst  $\int_D (x^2 + y^2) d(x, y)$  das Volumen der Menge  $Q$  zwischen der Kreisscheibe  $D \times \{0\}$  und der Fläche  $z = x^2 + y^2$ .



Das ist der Zylinder  $Z = D \times [0, r^2]$  ohne das Rotationsparaboloid

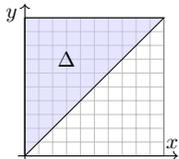
$$P = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq r^2 \}.$$

Hier gilt  $Z = Q \cup P$  mit  $\text{vol}_3(Q \cap P) = 0$ . Dank Additivität folgt

$$\text{vol}_3(Q) = \text{vol}_3(Z) - \text{vol}_3(P) = \pi r^4 - \frac{\pi}{2} r^4 = \frac{\pi}{2} r^4.$$

Die Qual der Wahl... der Integrationsreihenfolge

**Aufgabe:** Integrieren Sie  $f(x, y) = e^{-y^2/2}, \sin(y^2), \frac{e^{-y}}{y}, \frac{\sin(y)}{y}, \dots$  über



$$\Delta = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y \leq 1 \}.$$

**Lösung:** Normalbereich in y- und x-Richtung:

$$\begin{aligned} \Delta &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1 \} \\ &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y \}. \end{aligned}$$

☹ Der erste Anlauf ist nicht elementar integrierbar: Holzweg!

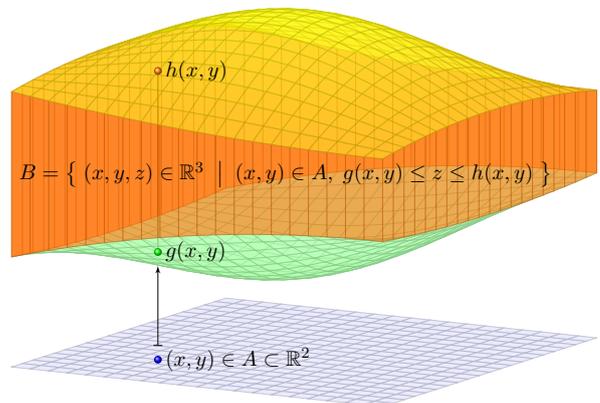
$$\int_{\Delta} f(x, y) d(x, y) \stackrel{\text{Fub}}{\stackrel{\text{C1E}}{=}} \int_{x=0}^1 \int_{y=x}^1 e^{-y^2/2} dy dx$$

☺ Bei umgekehrter Integrationsreihenfolge gelingt es jedoch leicht:

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} f(x, y) d(x, y) &\stackrel{\text{Fub}}{\stackrel{\text{C1E}}{=}} \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^y e^{-y^2/2} dx dy \stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B1I}}{=}} \int_{y=0}^1 \left[ x e^{-y^2/2} \right]_{x=0}^y dy \\ &= \int_{y=0}^1 y e^{-y^2/2} dy \stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B1I}}{=}} \left[ -e^{-y^2/2} \right]_{y=0}^1 = 1 - e^{-1/2} \approx 0.39347 \end{aligned}$$

Normalbereiche in höherer Dimension

Der Begriff der Normalbereiche überträgt sich in naheliegender Weise von ebenen Bereichen  $B \subseteq \mathbb{R}^2$  auf  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  in beliebiger Dimension:



$$B = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in A, g(x, y) \leq z \leq h(x, y) \}$$

Integration über Normalbereiche

**Definition C1I: Normalbereich**

Eine Menge  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt **Normalbereich** in  $k$ -ter Richtung, wenn

$$B = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \in A, g(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \leq x_k \leq h(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \}$$

mit  $A \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$  kompakt und stetigen Randfunktionen  $g, h: A \rightarrow \mathbb{R}$ .

In Worten: Die Grenzen für  $x_k$  hängen von den anderen Variablen ab.

**Satz C1J: Fubini für Normalbereiche**

Jeder Normalbereich  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  ist kompakt und somit auch messbar. Ist  $f: B \rightarrow \mathbb{R}$  absolut integrierbar, z.B. beschränkt oder gar stetig, dann

$$\int_B f(x) dx = \int_{u \in A} \int_{v=g(u)}^{h(u)} f(u_1, \dots, u_{k-1}, v, u_{k+1}, \dots, u_n) dv du$$

Ist auch  $A$  ein Normalbereich, so können wir das Verfahren iterieren... Die Grenzen jeder Variable  $x_k$  hängen von den vorigen  $x_1, \dots, x_{k-1}$  ab.

Integration über iterierte Normalbereiche

**Satz C1K: Fubini für iterierte Normalbereiche**

Das Integral jeder absolut integrierbaren Funktion  $f: B \rightarrow \mathbb{R}$  über

$$B = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid a_k(x_1, \dots, x_{k-1}) \leq x_k \leq b_k(x_1, \dots, x_{k-1}) \text{ für alle } k \}$$

lässt sich durch iterierte eindimensionale Integrale berechnen:

$$\int_B f(x) dx = \int_{x_1=a_1}^{b_1} \int_{x_2=a_2(x_1)}^{b_2(x_1)} \dots \int_{x_n=a_n(x_1, \dots, x_{n-1})}^{b_n(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \dots dx_2 dx_1.$$

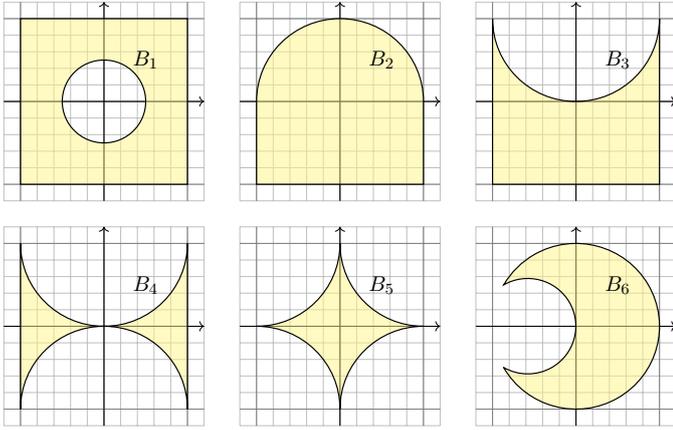
**Übung:** Zu  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  betrachten wir den  $n$ -dimensionalen Simplex

$$\Delta_r^n = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq r \}.$$

Skizzieren Sie  $\Delta_r^1, \Delta_r^2, \Delta_r^3$  und berechnen Sie rekursiv das Volumen

$$\text{vol}_n(\Delta_r^n) = \int_{x_n=0}^r \int_{x_{n-1}=0}^{x_n} \dots \int_{x_2=0}^{x_3} \int_{x_1=0}^{x_2} 1 dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} dx_n.$$

**Lösung:** Siehe Seite C425. Es gibt einige schöne Überraschungen!



**Lösung:** (1a) Die Skizze zeigt  $B_1 = [-1, 1]^2 \setminus B((0, 0), 1/2)$ .  
 (1b) Dies ist kein Normalbereich in  $y$ -Richtung: Der Schnitt von  $B_1$  mit der Geraden  $\{x = 0\}$  besteht aus zwei Intervallen, nicht aus einem! Ebenso ist  $B_1$  kein Normalbereich in  $x$ -Richtung: Symmetrie!  
 (1c) Hierzu müsste man  $B_1$  in Normalbereiche zerlegen, etwa so:

$$+ \int_{x=-1}^{x=-1/2} \int_{y=-1}^1 f(x, y) dy dx + \int_{x=-1/2}^{1/2} \int_{y=-1}^{-\sqrt{1/4-x^2}} f(x, y) dy dx$$

$$+ \int_{x=-1/2}^{1/2} \int_{y=\sqrt{1/4-x^2}}^1 f(x, y) dy dx + \int_{x=1/2}^1 \int_{y=-1}^1 f(x, y) dy dx$$

Genauso gelingt es in  $x$ -Richtung: Symmetrie! Eine Alternative wäre:

$$\int_{B_1} f(x, y) d(x, y) = \int_{[-1, 1]^2} f(x, y) d(x, y) - \int_{B((0, 0), 1/2)} f(x, y) d(x, y)$$

Hierzu muss  $f$  auf  $[-1, 1]^2$  gegeben und zudem absolut integrierbar ist. (Wenn Sie eine Polstelle umgehen müssen, dann hilft dieser Trick nicht.) Der weitere Rechenweg hängt vom gegebenen Integranden  $f$  ab.

(3a) Die Skizze zeigt  $B_3 = [-1, 1]^2 \setminus B((0, 1), 1)$ .  
 (3b) Dies ist ein Normalbereich in  $y$ -Richtung:

$$B_3 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq +1, -1 \leq y \leq 1 - \sqrt{1-x^2} \}$$

Hingegen ist  $B_3$  kein Normalbereich in  $x$ -Richtung: Für jedes  $c \in ]0, 1[$  besteht der Schnitt  $B_3 \cap \{y = c\}$  aus zwei Intervallen, nicht aus einem!  
 (Falls nötig oder gewünscht können wir  $B_3$  geeignet unterteilen, sodass zwei Normalbereiche in  $x$ -Richtung entstehen.)  
 (3c) Integrale über  $B_3$  können wie demnach wie folgt schreiben:

$$\int_{B_3} f(x, y) d(x, y) = \int_{x=-1}^1 \int_{y=-1}^{1-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx$$

Der weitere Rechenweg hängt vom gegebenen Integranden  $f$  ab.

(5a) Die Skizze zeigt  $B_5 = [-1, 1]^2 \setminus \bigcup B((\pm 1, \pm 1), 1)$ .  
 (5b) Dies ist ein Normalbereich in  $y$ -Richtung:

$$B_5 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, g(x) \leq y \leq h(x) \}$$

Wie finden wir  $g(x)$  und  $h(x)$ ? Die Kreisgleichung  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$  liefert den Viertelbogen oben rechts:  $y = 1 - \sqrt{1-(1-x)^2}$ . Demnach:

$$g(x) = \sqrt{1-(1-|x|)^2} - 1, \quad h(x) = 1 - \sqrt{1-(1-|x|)^2}$$

Genauso gelingt es in  $x$ -Richtung: Nutzen Sie die Symmetrie!  
 (5c) Integrale über  $B_5$  können wie demnach wie folgt schreiben:

$$\int_{B_5} f(x, y) d(x, y) = \int_{x=-1}^1 \int_{y=\sqrt{1-(1-|x|)^2}-1}^{1-\sqrt{1-(1-|x|)^2}} f(x, y) dy dx$$

$$= \int_{y=-1}^1 \int_{x=\sqrt{1-(1-|x|)^2}-1}^{1-\sqrt{1-(1-|x|)^2}} f(x, y) dx dy$$

Der weitere Rechenweg hängt vom gegebenen Integranden  $f$  ab.

Sehr oft müssen Sie zwischen Bild und Formel übersetzen, zwischen geometrischer und analytischer Beschreibung der Problemstellung. Die Analytische Geometrie gibt Ihnen hierzu Werkzeuge: Koordinaten! Diese nutzen Sie überall, zum Beispiel in der Konstruktionslehre bei der Bemessung und rechnerischen Auslegung der genutzten Bauteile. In Koordinaten sind Normalbereiche hierzu ein vielseitiges Werkzeug. Zur Illustration zeige ich einige Beispiele, von einfach bis knifflig:

**Aufgabe:** Die oben gezeigten kompakten Bereiche  $B_1, B_2, \dots, B_6 \subseteq \mathbb{R}^2$  entstehen durch Vereinigung und Differenz aus Rechtecken  $[a, b] \times [c, d]$  und Kreisscheiben  $\bar{B}((p, q), r)$  bzw. offen  $B((p, q), r)$ .  
 (a) Beschreiben Sie die Menge  $B_i$  als Vereinigung bzw. Differenz.  
 (b) Ist  $B_i$  ein Normalbereich in  $y$ -Richtung? oder in  $x$ -Richtung? Wenn ja, mit welchen Grenzen  $a, b, g, h$ ? *Explicit is beautiful!*  
 (c) Schreiben Sie  $\int_{B_i} f(x, y) d(x, y)$  soweit möglich als Doppelintegral. (Die konkrete Rechnung zu gegebenem  $f$  führen wir hier nicht aus; die Techniken zur eindimensionalen Integration kennen Sie bereits.)

(2a) Die Skizze zeigt  $B_2 = ([-1, 1] \times [-1, 0]) \cup \bar{B}((0, 0), 1)$ .  
 (2b) Dies ist ein Normalbereich in  $y$ -Richtung:

$$B_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq +1, -1 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \}$$

Es ist zudem ein Normalbereich in  $x$ -Richtung:

$$B_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq +1, g(y) \leq x \leq h(y) \}$$

Für  $-1 \leq y \leq 0$  gilt hierbei  $g(y) = -1$  und  $h(y) = +1$ ;  
 für  $0 \leq y \leq 1$  gilt  $g(y) = -\sqrt{1-y^2}$  und  $h(y) = \sqrt{1-y^2}$ .  
 (2c) Integrale über  $B_2$  können wie demnach wie folgt schreiben:

$$\int_{B_2} f(x, y) d(x, y) = \int_{x=-1}^1 \int_{y=-1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx$$

$$= \int_{y=-1}^0 \int_{x=-1}^1 f(x, y) dx dy + \int_{y=0}^1 \int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx dy$$

Vorteil: Das erste Doppelintegral ist etwas leichter auszuschreiben. Der weitere Rechenweg hängt vom gegebenen Integranden  $f$  ab.

(4a) Die Skizze zeigt  $B_4 = [-1, 1]^2 \setminus [B((0, 1), 1) \cup B((0, -1), 1)]$ .  
 (4b) Dies ist ein Normalbereich in  $y$ -Richtung:

$$B_4 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq +1, \sqrt{1-x^2} - 1 \leq y \leq 1 - \sqrt{1-x^2} \}$$

Hingegen ist  $B_4$  kein Normalbereich in  $x$ -Richtung: Für  $c \in [-1, 1] \setminus \{0\}$  besteht der Schnitt  $B_4 \cap \{y = c\}$  aus zwei Intervallen, nicht aus einem!  
 (Falls nötig oder gewünscht können wir  $B_4$  geeignet unterteilen, sodass zwei Normalbereiche in  $x$ -Richtung entstehen.)  
 (4c) Integrale über  $B_4$  können wie demnach wie folgt schreiben:

$$\int_{B_4} f(x, y) d(x, y) = \int_{x=-1}^1 \int_{y=\sqrt{1-x^2}-1}^{1-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx$$

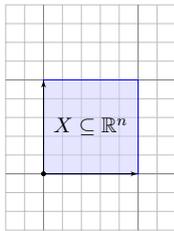
Der weitere Rechenweg hängt vom gegebenen Integranden  $f$  ab.

(6a) Die Skizze zeigt  $B_6 = \bar{B}((0, 0), 1) \setminus B((-r, 0), r)$  für  $r \approx 0.58$ .  
 (6b) Dies ist kein Normalbereich in  $y$ -Richtung: Der Schnitt von  $B_6$  mit der Geraden  $\{x = -0.5\}$  besteht aus zwei Intervallen, nicht aus einem! Ebenso ist  $B_6$  kein Normalbereich in  $x$ -Richtung: Der Schnitt von  $B_6$  mit der Geraden  $\{y = 0.5\}$  besteht aus einem Intervall und einem Punkt.  
 (6c) Wenn der Integrationsbereich  $B_6$  schon so mühsam ist, dann wohl auch das Integral  $\int_{B_6} f(x, y) d(x, y)$ . Oft hilft der folgende einfache Trick:

$$\int_{B_6} f(x, y) d(x, y) = \int_{\bar{B}((0, 0), 1)} f(x, y) d(x, y) - \int_A f(x, y) d(x, y)$$

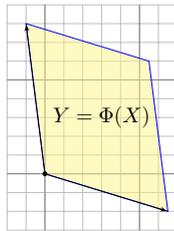
Hierzu nehmen wir an, dass unser Integrand  $f$  bereits auf der großen Kreisscheibe  $\bar{B}((0, 0), 1)$  gegeben ist und dort absolut integrierbar ist. (Wenn Sie eine Polstelle umgehen müssen, dann hilft dieser Trick nicht.)  
 Das letzte Integral geht nicht über die ganze Kreisscheibe  $B((-r, 0), r)$ , das wäre zuviel, sondern nur über  $A = \bar{B}((0, 0), 1) \cap B((-r, 0), r)$ ; dies kann man als  $y$ -Normalbereich darstellen, nach genauerer Rechnung.  
 Der weitere Rechenweg hängt vom gegebenen Integranden  $f$  ab.

Wie verhält sich das Volumen von  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  unter Transformationen?



Affin-lineare Abb.  
 $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$   
 $x \mapsto y = v + Tx$

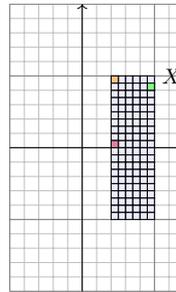
Beispiel:  $v = 0$   
 $T = \begin{pmatrix} 1.3 & -0.2 \\ -0.4 & 1.6 \end{pmatrix}$



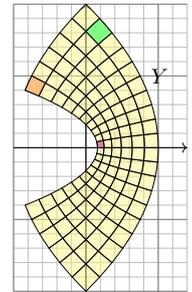
Wie verhält sich das Volumen unter affin-linearen Abbildungen?

$$\text{vol}_n(Y) = \text{vol}_n(X) \cdot |\det(T)|$$

☐ Siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §4.11. Das ist speziell für  $n = 2$  das Kreuzprodukt, für  $n = 3$  das Spatprodukt. Wir können die Formel dank Fubini und Substitution nachrechnen, siehe unten C2F. Beispiele: Für Drehungen gilt  $\det T = +1$ , für Spiegelungen  $\det T = -1$ . Für die allseitige Streckung mit konstantem Faktor  $a \in \mathbb{R}$  gilt  $\det T = a^n$ .



Stetig diff'bare Abbildung  
 $\Phi: \mathbb{R}^n \supseteq X \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}^n$   
 $\Phi(x+h) \approx \Phi(x) + \Phi'(x)h$   
 $\Phi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix}$   
 $\Phi' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{pmatrix}$   
 $\det \Phi' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 4(x_1^2 + x_2^2)$



Satz C2A: Transformationssatz für  $n$ -dimensionale Volumina  
 Seien  $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$  messbar und  $\Phi: X \rightarrow Y$  bijektiv und stetig diff'bar:

$$\text{vol}_n(Y) = \int_Y 1 \, dy = \int_X \underbrace{|\det \Phi'(x)|}_{\text{Fu}|\det} \, dx$$

Die Abbildung  $\Phi: X \rightarrow Y$  beschreibt einen **Koordinatenwechsel**: Sie ordnet jedem Punkt  $x \in X$  genau einen Bildpunkt  $y = \Phi(x) \in Y$  zu. **Bijektivität** bedeutet: Zu jedem  $y \in Y$  existiert genau ein Urbild  $x \in X$ . (Injektiv/surjektiv: Jedes  $y$  wird höchstens/mindestens einmal getroffen.)

Die Punkte  $y \in Y$  können wir also auf zwei Arten beschreiben: durch ihre kartesischen Koordinaten  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , wie immer, aber ebenso durch die krummlinigen Koordinaten  $y = \Phi(x_1, \dots, x_n)$ .

Was heißt hier  $\Phi: X \rightarrow Y$  stetig differenzierbar mit Ableitung  $\Phi'$ ? Wenn der Integrationsbereich  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  nicht offen ist, so verlangen wir  $\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar auf einer offenen Umgebung  $U \supseteq X$ .

Die Ableitung  $\Phi': U \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  ist dann die **Jacobi-Matrix**

$$\Phi' = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial (\Phi_1, \dots, \Phi_n)}{\partial (x_1, \dots, x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Die Funktion  $\det \Phi': U \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Funktionaldeterminante** von  $\Phi$ .

Der Betrag  $|\det \Phi'|$  misst die durch  $\Phi$  bewirkte **Volumenverzerrung**. Die hier als Beispiel gezeigte Abbildung  $x \mapsto y = \Phi(x)$  ist nicht linear. Wir sehen: Die Volumenverzerrung  $|\det \Phi'(x)|$  hängt vom Punkt  $x$  ab!

☺ Die Transformationsformel wird wunderbar anschaulich durch die Taylor-Entwicklung  $\Phi(x+h) \approx \Phi(x) + \Phi'(x)h$  bis zum linearen Term. Kleine Quader  $x + A$  werden abgebildet auf  $\Phi(A) \approx \Phi(x) + \Phi'(x)(A)$ , also  $\text{vol}_n(\Phi(A)) \approx \text{vol}_n(A) \cdot |\det \Phi'(x)|$  wie zuvor erklärt. Summation über eine Zerlegung in viele kleine Quader ergibt die obige Formel.

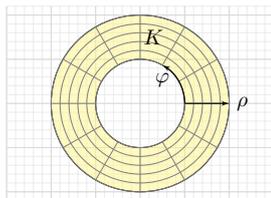
☺ Umparametrisierung: Der Satz erlaubt, im Integral zu geschickten Koordinaten zu wechseln und so die Rechnung zu vereinfachen. Vermutet wurde der Transformationssatz schon von Euler (1769) für Doppelintegrale und von Lagrange (1773) für Dreifachintegrale — und von allen ausgiebig genutzt. Ein strenger Beweis ist technisch schwierig und wurde erst über hundert Jahre später von Cartan (1890) entwickelt.

☺ Praktische Anwendung: Statt  $\Phi$  bijektiv genügt, dass  $\Phi$  injektiv ist bis auf eine Nullmenge in  $X$  und surjektiv bis auf eine Nullmenge in  $Y$ .

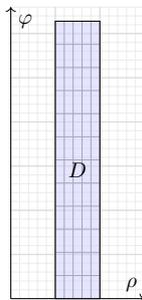
**Aufgabe:** Parametrisieren Sie den Kreisring

$$K = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid r_0^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_1^2 \}$$

in Polarkoordinaten. Berechnen Sie so seine Fläche.



$\Phi$



**Lösung:** Für  $K$  sind Polarkoordinaten besonders gut angepasst!

$$K = \{ (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \mid r_0 \leq \rho \leq r_1, 0 \leq \varphi < 2\pi \}$$

☺ Die Skizze zeigt die Volumenverzerrung proportional zu  $\det \Phi' = \rho$ . Die kleinen Rechtecke wiegen weniger, die großen Rechtecke mehr!

Als **Parametrisierung** nutzen wir (wie skizziert und vorgeschlagen)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \end{pmatrix} =: \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} \quad \text{mit } (\rho, \varphi) \in [r_0, r_1] \times [0, 2\pi[ =: D.$$

☺ Die Abbildung  $\Phi: D \rightarrow K$  ist bijektiv und stetig differenzierbar. Wir berechnen ihre **Jacobi-Matrix** und **Funktionaldeterminante**:

$$\Phi' \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} = \frac{\partial (x, y)}{\partial (\rho, \varphi)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix} \implies \det \Phi' \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} = \rho$$

Flächenberechnung dank **Transformationssatz** und **Fubini** und **HDI**:

$$\text{vol}_2(K) = \int_K 1 \, d(x, y) \stackrel{\text{Trafo C2A}}{=} \int_D \underbrace{\rho}_{\text{Fu}|\det} \, d(\rho, \varphi) \stackrel{\text{Fub C1E}}{=} \int_{\rho=r_0}^{r_1} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho \, d\varphi \, d\rho \stackrel{\text{HDI B11}}{=} \int_{\rho=r_0}^{r_1} 2\pi\rho \, d\rho \stackrel{\text{HDI B11}}{=} \left[ \pi\rho^2 \right]_{\rho=r_0}^{r_1} = \pi(r_1^2 - r_0^2)$$

☺ Plausibilitätsprüfung: Dasselbe Ergebnis folgt aus der Kreisfläche. ⚠ Es gilt  $\text{vol}_2(D) = 2\pi(r_1 - r_0)$ . Man beachte die Volumenverzerrung!

Auf dem Definitionsbereich  $D = [r_1, r_2] \times [0, 2\pi[$  definiert  $\Phi: D \rightarrow K$  eine Bijektion, wie im Satz verlangt. Ebenso  $[r_0, r_1] \times [-\pi, \pi[$ , oder

$$\begin{matrix} [r_0, r_1], & [r_0, r_1[, & ]r_0, r_1], & ]r_0, r_1[, \\ [0, 2\pi], & [0, 2\pi[, & ]0, 2\pi], & ]0, 2\pi[. \end{matrix}$$

⚠ Für manche dieser Wahlen ist  $\Phi$  nicht injektiv bzw. nicht surjektiv. Der Unterschied ist nur eine Menge vom Volumen 0, also unwesentlich.

**Aufgabe:** Was erhalten Sie bei den folgenden Polarkoordinaten?

$$\Phi_1: X_1 = [r_0, r_1] \times [0, \pi] \rightarrow K, \quad \Phi_7: X_7 = [r_0, r_1] \times [0, 7\pi] \rightarrow K.$$

Gilt hier die Volumenformel  $\text{vol}_2(K) = \int_X |\det \Phi'(x)| \, dx$ ? Begründung?

**Lösung:** Die Abbildung  $\Phi_1$  ist injektiv, aber nicht surjektiv: Nur der obere Halbring wird durchlaufen, daher wird auch nur seine Fläche integriert. Die Abbildung  $\Phi_7$  hingegen ist surjektiv, aber nicht injektiv: Der Kreisring wird dreimal durchlaufen, der obere Halbring sogar noch ein viertes Mal. Daher wird die Fläche drei bzw. viermal gezählt. So wird es nichts!

**Aufgabe:** Was passiert, wenn Sie im Transformationssatz für Volumina (C2A) bei der Funktionaldeterminante den Betrag weglassen?

$$\text{vol}_n(Y) = \int_Y 1 \, dy \stackrel{?}{=} \int_X \det \Phi'(x) \, dx$$

**Lösung:** Wir zerlegen den Integrationsbereich  $X$  in drei Teile:

$$\begin{aligned} X_0 &= \{ x \in X \mid \det \Phi'(x) = 0 \} \\ X_+ &= \{ x \in X \mid \det \Phi'(x) > 0 \} \\ X_- &= \{ x \in X \mid \det \Phi'(x) < 0 \} \end{aligned}$$

Über  $X_0$  verschwindet das rechte Integral, denn der Integrand ist Null. Das linke Integral verschwindet über  $Y_0 = \Phi(X_0)$ , da vom Volumen 0. Für die Einschränkung  $\Phi: X \setminus X_0 \rightarrow Y \setminus Y_0$  gilt überall  $\det \Phi' \neq 0$ . Das Integral über  $X_+$  wird wie zuvor positiv gezählt. Das Integral über  $X_-$  hingegen wird negativ gezählt, da wir es umgekehrt orientieren. Wenn wir also links das (unorientierte) positive Volumen von  $Y$  messen wollen, dann müssen wir rechts den Betrag der Determinante nehmen.

**Satz C2B: Transformationssatz für n-dimensionale Integrale**

Seien  $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$  messbar und  $\Phi: X \rightarrow Y$  bijektiv und stetig diff'bar.

(1) Ist  $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$  messbar, so auch  $(f \circ \Phi) \cdot \det \Phi': X \rightarrow \mathbb{R}$ , und es gilt

$$\int_Y |f(y)| dy = \int_X |f(\Phi(x))| \cdot |\det \Phi'(x)| dx.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so ist  $f$  absolut integrierbar, und dann gilt

$$\int_Y f(y) dy = \int_X f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)| dx.$$

**Merkregel analog zur Substitution:** Für  $y = \Phi(x)$  gilt  $dy = |\det \Phi'(x)| dx$ .

- 😊 Umparametrisierung: Der Satz erlaubt, im Integral zu geschickten Koordinaten zu wechseln und so unsere Rechnung zu vereinfachen.
- 😊 Praktische Anwendung: Statt  $\Phi$  bijektiv genügt, dass  $\Phi$  injektiv ist bis auf eine Nullmenge in  $X$  und surjektiv bis auf eine Nullmenge in  $Y$ .

**Aufgabe:** Folgern Sie in Dimension  $n = 1$  die obige Formel des Transformationssatzes C2B aus der Substitutionsregel B1K.

**Lösung:** Der HDI impliziert die bekannte Substitutionsregel B1K:

$$\int_{x=a}^b f(\Phi(x)) \Phi'(x) dx = \int_{y=\Phi(a)}^{\Phi(b)} f(y) dy.$$

Hierzu sei  $\Phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig diff'bar und  $f: \mathbb{R} \supseteq \Phi([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. In Satz C2B setzen wir zusätzlich  $\Phi: [a, b] \rightarrow [c, d]$  als bijektiv voraus. Wir unterscheiden daher zwei Fälle, je nachdem, ob  $\Phi$  wächst oder fällt.

(1) Ist  $\Phi: [a, b] \rightarrow [c, d]$  wachsend,  $\Phi' \geq 0$ ,  $\Phi(a) = c$ ,  $\Phi(b) = d$ , so gilt:

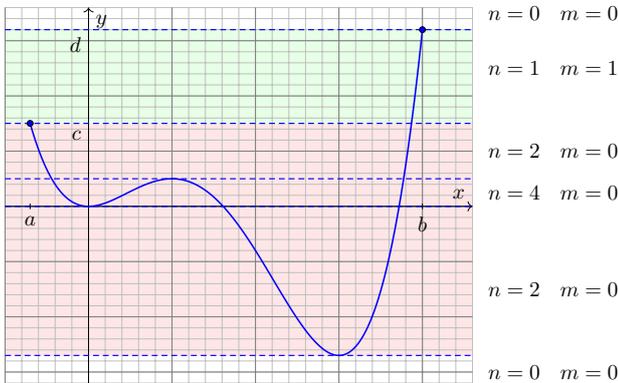
$$\int_{[a,b]} (f \circ \Phi) |\Phi'| = \int_a^b (f \circ \Phi) \Phi' = \int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} f = \int_{[c,d]} f$$

(2) Ist  $\Phi: [a, b] \rightarrow [c, d]$  fallend,  $\Phi' \leq 0$ ,  $\Phi(a) = d$ ,  $\Phi(b) = c$ , so gilt:

$$\int_{[a,b]} (f \circ \Phi) |\Phi'| = - \int_a^b (f \circ \Phi) \Phi' = - \int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} f = \int_{\Phi(b)}^{\Phi(a)} f = \int_{[c,d]} f$$

😊 In beiden Fällen gilt der Transformationssatz C2B wie angegeben.

**Aufgabe:** Untersuchen Sie (für  $f = 1$ ) die nicht-bijektive Transformation  $\Phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\Phi(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$  sowie  $a = -0.7, b = 4$ . Was sagt die Substitutionsregel? Was sagt der Transformationssatz?



**Lösung:** Die Funktion  $\Phi$  verläuft von  $c = \Phi(a) \approx 15$  nach  $d = \Phi(b) = 32$ , allerdings nicht monoton. Die Substitutionsregel B1K lässt sich dennoch anwenden. Für jede stetige Funktion  $f: \mathbb{R} \supseteq \Phi([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$  gilt demnach:

$$\int_{x=a}^b f(\Phi(x)) \Phi'(x) dx = \int_{y=c}^d f(y) dy.$$

Der Transformationssatz verlangt zudem Bijektivität; sie gilt hier nicht!

$$\int_{[a,b]} f(\Phi(x)) |\Phi'(x)| dx \neq \int_{[c,d]} f(y) dy.$$

Eine Kurvendiskussion liefert für  $\Phi$  den oben skizzierten Verlauf mit lok. Minimum in  $x = 0, \Phi(0) = 0$ , lok. Maximum in  $x = 1, \Phi(1) = 5$ , lok. Minimum in  $x = 3, \Phi(3) = -27$ . Somit durchläuft  $\Phi$  auch Punkte in  $[-27, c]$  zwei- bzw. viermal! Anders als die Substitutionsregel integriert die Transformationsformel (mit Betrag) sie fälschlicherweise mit auf.

In der orientierten Zählweise (ohne Betrag) bleibt in der Gesamtbilanz nur das Integral über  $[c, d]$ : Genau das besagt die Substitutionsregel!

Obiger Satz C2B verlangt **bijektive** Parametrisierungen  $\Phi: X \rightarrow Y$ , das heißt, zu jedem  $y \in Y$  existiert genau ein  $x \in X$  mit  $\Phi(x) = y$ .

😊 Geeignet umformuliert gilt der Satz auch ohne Bijektivität – und hat dieselben schönen Eigenschaften wie die Substitutionsregel für  $n = 1$ !

Zu jedem Punkt  $y \in Y$  zählen wir die **Urbilder** bezüglich  $f: X \rightarrow Y$ :

$$n: Y \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \quad n(y) := \#\{x \in X \mid f(x) = y, \det \Phi'(x) \neq 0\}$$

Genauer zählen wir zum Punkt  $y \in Y$  **positive und negative Urbilder**:

$$n_{\pm}: Y \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \quad n_{\pm}(y) := \#\{x \in X \mid f(x) = y, \det \Phi'(x) \gtrless 0\}$$

Wir erhalten so die **geometrische Vielfachheit**  $n = n_+ + n_-$  und die **algebraische Vielfachheit**  $m := n_+ - n_-$  aufgrund der Orientierung.

Beispiel: Die Werte sind in der vorigen Kurvendiskussion angegeben. Dies entspricht anschaulich der Durchlaufungsrichtung (hoch/runter).

**Satz C2C: Transformationssatz mit Orientierung**

Seien  $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$  messbar und  $\Phi: X \rightarrow Y$  stetig diff'bar. Dann sind

$$n_+: Y \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \quad n_+(y) := \#\{x \in X \mid f(x) = y, \det \Phi'(x) > 0\},$$

$$n_-: Y \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \quad n_-(y) := \#\{x \in X \mid f(x) = y, \det \Phi'(x) < 0\},$$

messbare Funktionen, ebenso  $n := n_+ + n_-$  und  $m := n_+ - n_-$ .

(1) Ist  $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$  messbar, so auch  $(f \circ \Phi) \cdot \det \Phi': X \rightarrow \mathbb{R}$ , und es gilt

$$\int_X |f(\Phi(x))| \cdot |\det \Phi'(x)| dx = \int_Y |f(y)| \cdot n(y) dy.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so gilt absolute Integrierbarkeit und

$$\int_X f(\Phi(x)) \cdot \det \Phi'(x) dx = \int_Y f(y) \cdot n(y) dy,$$

$$\int_X f(\Phi(x)) \cdot \det \Phi'(x) dx = \int_Y f(y) \cdot m(y) dy.$$

**Aufgabe:** Überprüfen Sie diesen Satz im obigen Beispiel:

$$\Phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2, \quad a = -0.7, \quad b = 4$$

Stimmen Substitutionsregel und Transformationsformel nun überein?

**Lösung:**  $\Phi$  verläuft von  $c = \Phi(a) \approx 15$  nach  $d = \Phi(b) = 32$ .

Die vertraute Substitutionsregel B1K besagt demnach:

$$\int_{x=a}^b f(\Phi(x)) \Phi'(x) dx = \int_{y=\Phi(a)}^{\Phi(b)} f(y) dy = \int_{y=c}^d f(y) dy.$$

Die algebraische Vielfachheit  $m$  ist  $m = 1$  auf  $[c, d]$  und  $m = 0$  sonst. Die orientierte Transformationsformel C2c besagt demnach:

$$\int_{[a,b]} f(\Phi(x)) \Phi'(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(y) \cdot m(y) dy = \int_{[c,d]} f(y) dy.$$

😊 Dank der algebraischen Vielfachheit  $m$  stimmen beide nun überein!

Die orientierten Formeln klären zwei Aspekte der Transformation:

(1) Der Transformationssatz verlangt  $\Phi: X \rightarrow Y$  bijektiv. Die orientierte Formulierung erlaubt beliebige  $\Phi$ , da nun die Vielfachheiten zählen.

(2) Der Transformationssatz nutzt zunächst nur  $|\det \Phi'|$ . Die orientierte Fassung unterscheidet positive Orientierung  $\det \Phi' > 0$  und negative Orientierung  $\det \Phi' < 0$  und zählt die Urbilder entsprechend.

Die beiden wichtigsten Spezialfälle kennen wir bereits:

Ist  $\Phi: X \rightarrow Y$  bijektiv und  $\det \Phi' > 0$ , so gilt  $n^+ = 1$  und  $n^- = 0$ .

Ist  $\Phi: X \rightarrow Y$  bijektiv und  $\det \Phi' < 0$ , so gilt  $n^+ = 0$  und  $n^- = 1$ .

Die Formulierung mit Orientierung und Vielfachheiten ist dann genau der obige Transformationssatz mit Absolutbetrag ohne Vielfachheiten.

Umgekehrt folgt aus der absoluten die orientierte Formel durch Zerlegen und Aufsummieren. Beide Sätze C2B und C2C sind demnach äquivalent.

Wir nutzen im Folgenden meist bijektive, positive Parametrisierungen. Diese Einschränkung vereinfacht die Formulierung wie oben diskutiert.

In Dimension  $n = 1$  ist uns der Transformationssatz C2B bereits vertraut. In Dimension  $n \geq 2$  rechnen wir ihn für einfache Transformationen nach:  
 😊 Hierzu genügen uns bereits Fubini (C1E) und Substitution (B1K).

Sei  $X = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$  ein Quader und  $\Phi: \mathbb{R}^n \supseteq X \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar mit  $\partial_i \Phi_i > 0$  sowie  $\partial_j \Phi_i = 0$  für  $j > i$ . Für  $n = 2$  kurz:

$$\Phi: \mathbb{R}^2 \supseteq X \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1(x_1, x_2) \\ \Phi_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} >0 & =0 \\ * & >0 \end{pmatrix} \implies \det \Phi' = \partial_1 \Phi_1 \cdot \partial_2 \Phi_2 > 0$$

Das heißt, die Jacobi-Matrix  $\Phi'$  soll eine untere Dreiecksmatrix sein.

**Lemma C2D: einfache Transformationen**

Für solch einfache Transformationen gilt die Formel C2B.

- Aufgabe:** (1) Beschreiben Sie das Bild  $Y = \Phi(X)$  als Normalbereich.  
 (2) Ist  $\Phi: X \rightarrow Y$  bijektiv? Auch wenn statt  $\partial_i \Phi_i > 0$  nur  $\partial_i \Phi_i \geq 0$  gilt?  
 (3) Folgern Sie die Transformationsformel aus Fubini und Substitution.

**Lösung:** Wir führen hier  $n = 2$  aus; der Fall  $n \geq 3$  verläuft genauso.

(1) Wegen  $\partial_2 \Phi_1 = 0$  hängt  $\Phi_1(x_1, x_2)$  nicht von  $x_2$  ab, wir schreiben kurz  $\Phi_1(x_1, x_2) = \Phi_1(x_1)$ . Wegen  $\partial_1 \Phi_1 > 0$  ist  $x_1 \mapsto \Phi_1(x_1)$  streng wachsend, somit bijektiv von  $[a_1, b_1]$  auf  $[c_1, d_1]$  mit  $c_1 = \Phi_1(a_1)$  und  $d_1 = \Phi_1(b_1)$ .

Zu jedem  $x_1 \in [a_1, b_1]$  ist die Funktion  $x_2 \mapsto \Phi_2(x_1, x_2)$  streng wachsend, somit bijektiv von  $[a_2, b_2]$  auf  $[c_2(x_1), d_2(x_1)]$  mit  $c_2(x_1) = \Phi_2(x_1, a_2)$  und  $d_2(x_1) = \Phi_2(x_1, b_2)$ . Das Bild  $Y = \Phi(X)$  ist daher ein Normalbereich:

$$Y = \Phi(X) = \{ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid c_1 \leq y_1 \leq d_1, g(y_1) \leq y_2 \leq h(y_1) \}$$

mit den Randfunktionen  $g(y_1) = c_2(\Phi_1^{-1}(y_1))$  und  $h(y_1) = d_2(\Phi_1^{-1}(y_1))$ .

(2) Ja,  $\Phi: X \rightarrow Y$  ist bijektiv: Surjektiv auf  $Y$  nach Konstruktion.

Zudem ist  $\Phi$  injektiv, denn es erhält die lexikographische Ordnung:

Für  $(x_1, x_2) \neq (x'_1, x'_2)$  unterscheiden wir zwei mögliche Fälle:

Für  $x_1 \leq x'_1$  gilt  $y_1 \leq y'_1$ . Für  $x_1 = x'_1$  gilt  $x_2 \leq x'_2$  und somit  $y_2 \leq y'_2$ .

Fordern wir nur  $\partial_1 \Phi_1 \geq 0$  und  $\partial_2 \Phi_2 \geq 0$ , so gilt statt „streng wachsend“ nur noch „schwach wachsend“, und  $\Phi: X \rightarrow Y$  ist i.A. nicht mehr bijektiv.

(3) Die Transformationsformel folgt nun dank Fubini und Substitution:

$$\int_Y f(y) dy \stackrel{\text{Fub C1E}}{=} \int_{y_1=c_1}^{d_1} \int_{y_2=g(y_1)}^{h(y_1)} f(y_1, y_2) dy_2 dy_1$$

$$\stackrel{\text{Subs B1K}}{=} \int_{x_1=a_1}^{b_1} \int_{y_2=\Phi_2(x_1, a_2)}^{\Phi_2(x_1, b_2)} f(\Phi_1(x_1), y_2) dy_2 \cdot \partial_1 \Phi_1(x_1) dx_1$$

$$\stackrel{\text{Subs B1K}}{=} \int_{x_1=a_1}^{b_1} \int_{x_2=a_2}^{a_2} f(\Phi_1(x_1), \Phi_2(x_1, x_2)) \cdot \partial_2 \Phi_2(x_1, x_2) dx_2 \cdot \partial_1 \Phi_1(x_1) dx_1$$

$$\stackrel{\text{Det}}{=} \int_{x_1=a_1}^{b_1} \int_{x_2=a_2}^{a_2} f(\Phi_1(x_1), \Phi_2(x_1, x_2)) \cdot |\det \Phi'(x_1, x_2)| dx_2 dx_1$$

$$\stackrel{\text{Fub C1E}}{=} \int_X f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)| dx$$

In dieser Rechnung nehmen wir  $f$  als stetig an: Die Integrationsbereiche  $Y$  und  $X$  sind kompakt, hierauf sind  $f$  bzw.  $(f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'|$  stetig und somit absolut integrierbar, daher können wir Fubini C1E anwenden. Ebenso können wir die Substitution B1K anwenden. Per Grenzübergang gilt die Transformationsformel dann für jede absolut integrierbare Funktion  $f$  wie in Satz C2B. Die Rechnung (3) gilt wörtlich genauso, wenn wir allgemeiner nur  $\partial_1 \Phi_1 \geq 0$  und  $\partial_2 \Phi_2 \geq 0$  fordern. Wenn wir auch dies noch fallen lassen, so erhalten wir die Formel aus Satz C2C.

**Lemma C2E: Komposition von Transformationen**

Gilt die Formel C2B für die Transformationen  $\Phi: X \rightarrow Y$  und  $\Psi: Y \rightarrow Z$ , dann gilt sie auch für ihre Komposition  $H = \Psi \circ \Phi: X \rightarrow Z$ .

**Aufgabe:** Rechnen Sie diese Aussage nach! Die Formel gilt also für alle Transformationen wie in der vorigen Aufgabe und ihre Kompositionen.

**Lösung:** Wir nehmen an, die Transformationsformel gilt für  $\Phi$  und  $\Psi$ :

$$\int_Z f(z) dz \stackrel{\text{Trafo C2B}}{=} \int_Y f(\Psi(y)) \cdot |\det \Psi'(y)| dy$$

$$\stackrel{\text{Trafo C2B}}{=} \int_X f(\Psi(\Phi(x))) \cdot |\det \Psi'(\Phi(x))| \cdot |\det \Phi'(x)| dx$$

$$\stackrel{\text{Komp}}{=} \int_X f(H(x)) \cdot |\det H'(x)| dx$$

Für  $H(x) = \Psi(\Phi(x))$  gilt die Kettenregel  $H'(x) = \Psi'(\Phi(x)) \cdot \Phi'(x)$  der Jacobi-Matrizen (Nachrechnen!), und die Determinante ist multiplikativ.

Sei  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Quader und  $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n: x \mapsto Ax + v$  affin-linear. Für  $n = 2$  betrachten wir folgende **elementaren Transformationen**:

- Verschiebung  $\Phi_0: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + v_1 \\ x_2 + v_2 \end{pmatrix}, \quad v \in \mathbb{R}^2$
- Streckung  $\Phi_1: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ bx_2 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}_{>0}$
- Scherung  $\Phi_2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ax_1 + x_2 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$
- Spiegelung  $\Phi_3: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

**Lemma C2F: affin-lineare Transformationen**

Für jede affin-lineare Transformation  $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  gilt die Formel C2B.

- Aufgabe:** (1) Zeigen Sie dies für die elementaren Transformationen!  
 (2) Dank Gauß-Algorithmus ist jede affin-lineare Transformation eine Komposition von elementaren. Folgern Sie hieraus das Lemma!

**Lösung:** (1) Die ersten drei Transformationen  $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2$  erfüllen unmittelbar die Bedingung  $\Phi' = \begin{pmatrix} >0 & =0 \\ * & >0 \end{pmatrix}$  des obigen Lemmas C2D. Demnach gilt hier die Transformationsformel C2B. (Wenn Sie möchten, können Sie diese Spezialfälle als Übung nochmal direkt nachrechnen.)

Wie untersuchen daher nur noch den verbleibenden letzten Fall  $\Phi_3$ . Es gilt  $\Phi_3: X \xrightarrow{\sim} Y$  mit  $X = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  und  $Y = [a_2, b_2] \times [a_1, b_1]$ . Die Jacobi-Matrix  $\Phi_3'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  hat Determinante  $\det \Phi_3'(x) = -1$ . Dank Fubini und den Substitutionen  $y_1 = x_2$  und  $y_2 = x_1$  finden wir:

$$\int_Y f(y_1, y_2) d(y_1, y_2) \stackrel{\text{Fub C1E}}{=} \int_{y_1=a_2}^{b_2} \int_{y_2=a_1}^{b_1} f(y_1, y_2) dy_2 dy_1$$

$$\stackrel{\text{Subs B1K}}{=} \int_{x_2=a_2}^{b_2} \int_{x_1=a_1}^{b_1} f(x_2, x_1) dx_1 dx_2$$

$$\stackrel{\text{Fub C1E}}{=} \int_X f(x_2, x_1) d(x_1, x_2)$$

$$\stackrel{\text{Fub C1E}}{=} \int_X f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)| dx$$

(2) Sei  $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n: x \mapsto Ax + v$  eine affin-lineare Transformation. Das Integral ist invariant unter Verschiebung  $\Psi: x \mapsto x + v$ , mit  $v \in \mathbb{R}^n$ . Wir untersuchen lineare Transformationen  $\Phi: x \mapsto Ax$ , mit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ :

Die vorigen Rechnungen zeigen die Transformationsformel C2B für

- 1 jede Diagonalmatrix  $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ ,
- 2 Scherung / die Addition einer Zeile zu einer anderen,
- 3 Spiegelung / die Vertauschung zweier Zeilen oder Spalten.

Mit dem Gauß-Algorithmus lässt sich jede Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  allein durch die beiden Operationen (2) und (3) auf Diagonalgestalt (1) bringen.

☐ Siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §4.7-4.12.

Für jede dieser elementaren Transformationen gilt die Formel C2B, dank Lemma C2E gilt sie dann auch für ihre Komposition A.

Somit gilt die erhoffte Formel C2B für jede affin-lineare Transformation  $\Phi: x \mapsto Ax + v$  mit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $v \in \mathbb{R}^n$ . 😊 Das wollten wir zeigen.

😊 Die Rechnung ist zwar länglich, aber elementar. Sie rechtfertigt die eingangs motivierte Volumenverzerrung affiner Transformationen. [C201]

Die vorigen Übungen und Lemmata zeigen wichtige Spezialfälle des Transformationssatzes C2B: Wir können sie explizit nachrechnen und erfahren dabei, *wie* und *warum* die angegebene Formel funktioniert.

Der Transformationssatz gilt für alle einfachen Transformationen (C2D) und für ihre Kompositionen (C2E). Es genügt demnach nachzuweisen, dass *jede* Transformation eine Komposition von einfachen ist.

Für affin-lineare Transformationen (C2F) haben wir dies mit Hilfe des Gauß-Algorithmus erledigt. Im allgemeinen Falle gelingt dies genauso, zumindest nach geeigneter Zerlegung. Die technischen Details sind etwas aufwändiger, ich begnüge mich hier daher mit dieser Skizze.

Anstelle eines Beweises möchte ich als versöhnliches Fazit festhalten:

- 😊 Der Transformationssatz ist geometrisch anschaulich und intuitiv.
  - 😊 Seine Voraussetzungen sind wichtig, aber sehr milde und oft erfüllt.
  - 😊 Er folgt aus Fubini und HDI, hier eindimensionale Substitution: Diese Kernidee können wir wie gezeigt direkt explizit nachrechnen!
- Nach diesen *Grundlagen* widmen wir uns nun den *Anwendungen*...

☺ Eine berühmte Anwendung der zweidimensionalen Integration:

**Aufgabe:** (1) Skizzieren Sie die **Gaußsche Glockenkurve**

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{-x^2/2}, \quad \text{sowie die Glockenfläche}$$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x, y) = f(x)f(y) \quad \text{für } x, y \in [-3, 3].$$

(2) Können Sie  $\int_a^b e^{-x^2/2} dx$  in geschlossener Form angeben?

(3) Berechnen Sie zur Funktion  $g$  das Flächenintegral

$$\int_K e^{-(x^2+y^2)/2} d(x, y)$$

über dem Kreisring  $K = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2 \}$ .

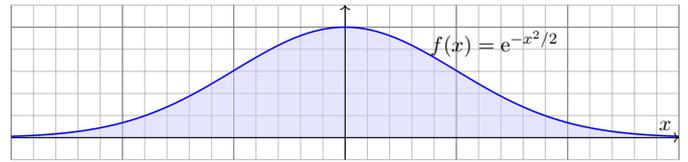
(4) Welches Integral erhalten Sie für  $a \rightarrow 0$  und  $b \rightarrow \infty$ ?

(5) Bestimmen Sie hiermit das Integral  $I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx$ .

☹ Dieses Integral konnten wir mit eindim. Integration nicht berechnen.

☺ Mit zweidimensionaler Integration hingegen gelingt es nun leicht!

**Lösung:** (1) Skizze der Gaußschen Glockenkurve:

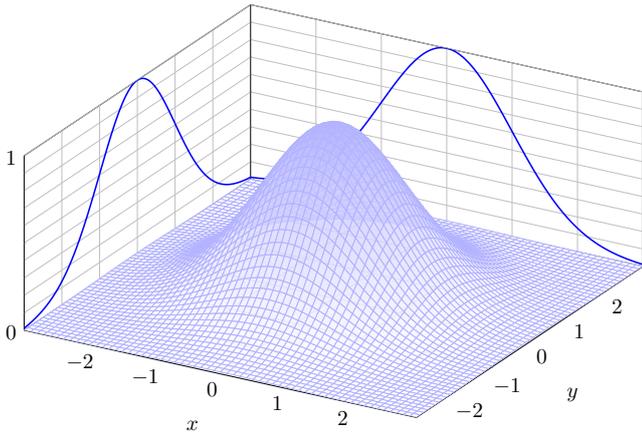


Ihre Streckungen und Verschiebungen heißen ebenfalls Glockenkurven. Sie spielen eine wichtige Rolle in der Wahrscheinlichkeitsrechnung beim zentralen Grenzwertsatz W1D; er wird uns in Kapitel W beschäftigen.

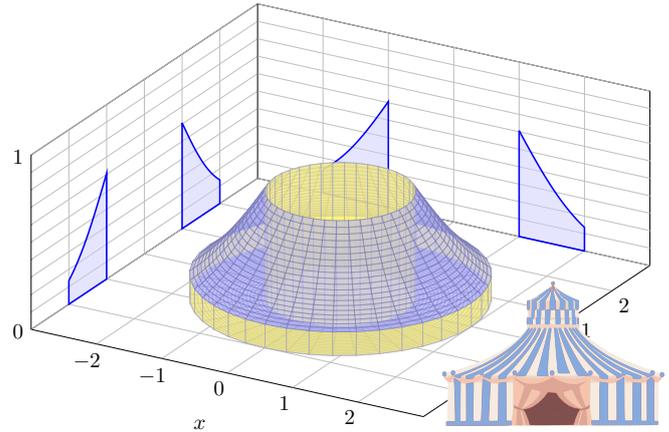
(2) Die Integralfunktion  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  erlaubt keine geschlossene Formel, ebensowenig die bestimmten Integrale  $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$ .

Ich warne vorsorglich vor einem verbreiteten Missverständnis: Die Funktion  $f$  ist stetig und somit integrierbar (Satz B1C), daher *existieren* die bestimmten Integrale  $\int_a^b f(t) dt$  und somit auch die Integralfunktion  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ . Allerdings kann diese nicht durch *elementare Funktionen* (also durch exp, log, sin, cos, ...) in geschlossener Form dargestellt werden. [B145] Das ist nachweislich unmöglich. Es ist aussichtslos danach zu suchen!

Skizze der Gaußschen Glockenfläche  $g(x, y) = e^{-(x^2+y^2)/2}$ :



Diese Funktion  $g$  wollen wir über den Kreisring  $K$  integrieren:



(3) In Polarkoordinaten  $(x, y) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$  gilt  $d(x, y) = \rho d(\rho, \varphi)$ . Die Integration gelingt dank Transformationsatz, Fubini und HDI:

$$\int_K e^{-(x^2+y^2)/2} d(x, y) \stackrel{\text{Trafo}}{\stackrel{\text{C2b}}{=}} \int_{[a,b] \times [0, 2\pi]} e^{-\rho^2/2} \cdot \underset{\text{Fu'det}}{\rho} d(\rho, \varphi)$$

$$\stackrel{\text{Fub}}{\stackrel{\text{C1e}}{=}} \int_{\rho=a}^b \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho e^{-\rho^2/2} d\varphi d\rho \stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} \int_{\rho=a}^b 2\pi \rho e^{-\rho^2/2} d\rho$$

$$\stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} \left[ -2\pi e^{-\rho^2/2} \right]_{\rho=a}^b = 2\pi \left( e^{-a^2/2} - e^{-b^2/2} \right)$$

(4) Für  $a \rightarrow 0$  und  $b \rightarrow \infty$  finden wir:

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2} d(x, y) = 2\pi$$

☹ Das eindim. Integral  $\int_a^b e^{-x^2/2} dx$  können wir nicht direkt angreifen.

☺ Das zweidim. Integral  $\int_K e^{-(x^2+y^2)/2} d(x, y)$  ist hingegen leicht dank des Faktors  $\rho$ . Vergessen Sie nie nie nie die Funktionaldeterminante!

(5) Schließlich gelingt uns so auch das eindimensionale Integral:

$$\left( \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx \right)^2 \quad \text{Kunstgriff: Statt } I \text{ berechnen wir } I^2!$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2} dy \stackrel{\text{Lin}}{\stackrel{\text{A3L}}{=}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \cdot \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2} dy \right) dx$$

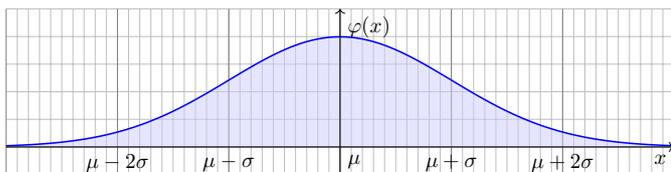
$$\stackrel{\text{Lin}}{\stackrel{\text{A3L}}{=}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \cdot e^{-y^2/2} dy dx \stackrel{\text{Exp}}{\stackrel{\text{C1e}}{=}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x^2+y^2)/2} dy dx$$

$$\stackrel{\text{Fub}}{\stackrel{\text{C1e}}{=}} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} e^{-(x^2+y^2)/2} d(x, y) \stackrel{(4)}{=} 2\pi$$

**Satz C2G: Gaußsches Integral**

Es gilt  $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$ .

☺ Dies ist ein eindimensionales Integral, aber allein mit eindim. Methoden schafft man es nicht. Erst durch die Berechnung als zweidimensionales Integral löst sich alles in Wohlgefallen auf!



Sei  $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$  mit  $\sigma > 0$ . Die Funktion  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

heißt (Dichte der) **Normalverteilung** mit Mittelwert  $\mu$  und Streuung  $\sigma$ .

Sie spielt in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine zentrale Rolle.

☺ Wahrscheinlichkeitsdichte:  $\varphi \geq 0$  und  $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = 1$

☺ Hier gilt Schwerpunkt = Mittelwert =  $\int_{\mathbb{R}} x \varphi(x) dx = \mu$ .

☺ Trägheitsmoment = Varianz =  $\int_{\mathbb{R}} (x - \mu)^2 \varphi(x) dx = \sigma^2$

Wir kennen die Gamma-Funktion [B313]

$$\Gamma: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}: z \mapsto \Gamma(z) = \int_{x=0}^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx.$$

**Aufgabe:** Berechnen Sie den Wert  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{x=0}^{\infty} x^{-1/2} e^{-x} dx$ .

**Lösung:** Die Substitution  $x = u^2$  und  $dx = 2u du$  ergibt:

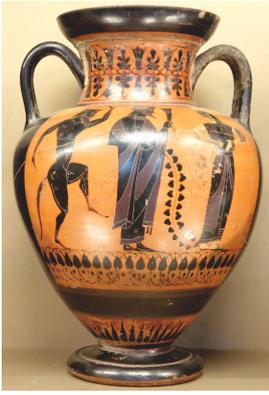
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{u=0}^{\infty} u^{-1} e^{-u^2} \cdot 2u du = 2 \int_{u=0}^{\infty} e^{-u^2} du$$

$$= \int_{u=-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{v=-\infty}^{\infty} e^{-v^2/2} dv = \sqrt{\pi}$$

☺ Dank der Funktionalgleichung  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$  aus Satz B3E folgt:

**Satz C2H: Gamma-Funktion an halbzahigen Stellen**

Es gilt  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$  und  $\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}$ .



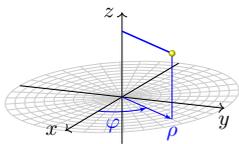
Griechische Amphore aus dem Louvre, Bildquelle: wikimedia.org



Stuttgarter Fernsehturm, Bildquelle: wikimedia.org

**Zylinderkoordinaten** eignen sich bei Rotationssymmetrie bezüglich einer Achse, zum Beispiel zur Parametrisierung von Rotationskörpern.

**Lösung:** Wir nutzen **Zylinderkoordinaten** um die  $z$ -Achse:



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} =: \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad D = \{ (\rho, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq z \leq b, r_0(z) \leq \rho \leq r_1(z), 0 \leq \varphi \leq 2\pi \}$$

Die **Funktionaldeterminante** ist wie zuvor bei Polarkoordinaten:

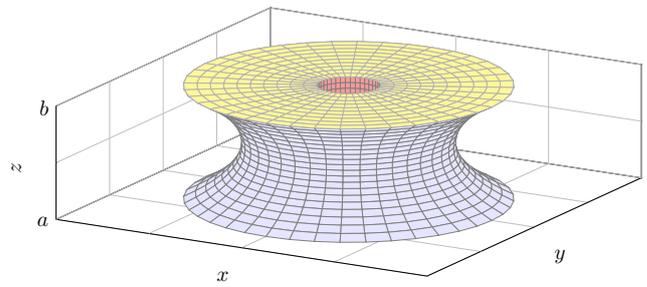
$$\Phi' \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, z)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \det \Phi' \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \rho$$

Wir erhalten folgende Parametrisierung unseres Rotationskörpers:

$$R = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq z \leq b, r_0(z)^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_1(z)^2 \}$$

$$= \{ (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \mid a \leq z \leq b, r_0(z) \leq \rho \leq r_1(z), 0 \leq \varphi \leq 2\pi \}$$

Anschauung: Die drei Spalten von  $\Phi'$  sind die Tangentialvektoren in Richtung  $\rho, \varphi, z$ . Diese drei stehen hier orthogonal zueinander. Die Determinante ist daher das Produkt ihrer Längen  $1, \rho, 1$ .



**Aufgabe:** Bestimmen Sie das Volumen des Rotationskörpers

$$R = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq z \leq b, r_0(z)^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_1(z)^2 \}$$

(1) in Zylinderkoordinaten und (2) mit Fubini (zum Vergleich).

(3) Was erhalten Sie für  $-1 \leq z \leq 1$  mit  $r_0 = 0$  und  $r_1(z) = \cosh(z)$ ?

(1) Volumenberechnung in Zylinderkoordinaten,  $d(x, y, z) = \rho d(z, \rho, \varphi)$ :

$$\text{vol}_3(R) = \int_R 1 d(x, y, z) \stackrel{\text{Trafo}}{\stackrel{\text{C2b}}{=}} \int_D \rho d(z, \rho, \varphi) \stackrel{\text{Fub}}{\stackrel{\text{C1E}}{=}} \int_{z=a}^b \int_{\rho=r_0(z)}^{r_1(z)} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho d\varphi d\rho dz$$

$$\stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} \int_{z=a}^b \int_{\rho=r_0(z)}^{r_1(z)} 2\pi \rho d\rho dz \stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} \int_{z=a}^b [\pi \rho^2]_{r_0(z)}^{r_1(z)} dz = \int_{z=a}^b \pi r_1(z)^2 - \pi r_0(z)^2 dz$$

(2) Mit Fubini und Kreisringen erhalten wir dasselbe Ergebnis:

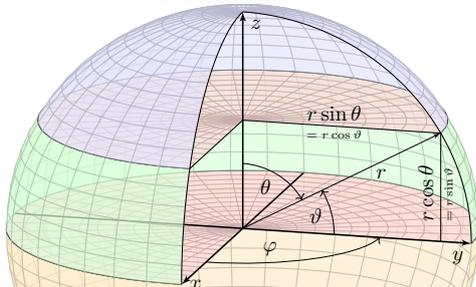
$$\text{vol}_3(R) \stackrel{\text{Fub}}{\stackrel{\text{C1E}}{=}} \int_{z=a}^b \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_R(x, y, z) d(x, y) dz \stackrel{\text{Kreis}}{\stackrel{\text{C205}}{=}} \int_{z=a}^b \pi r_1(z)^2 - \pi r_0(z)^2 dz$$

(3) Für  $r_0, r_1: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $r_0 = 0$  und  $r_1(z) = \cosh(z)$  erhalten wir:

$$\text{vol}_3(R) \stackrel{(\text{1})}{=} \int_{z=-1}^1 \pi \cosh(z)^2 dz \stackrel{\text{Hyp}}{=} \pi \int_{z=-1}^1 \frac{1}{2} \cosh(2z) + \frac{1}{2} dz$$

$$= \pi \left[ \frac{1}{4} \sinh(2z) + \frac{z}{2} \right]_{z=-1}^1 = \pi \left( \frac{1}{2} \sinh(2) + 1 \right) \approx 8.84$$

(Additionstheoreme für  $\cosh$  und  $\sinh$  oder einfach ausmultiplizieren.)

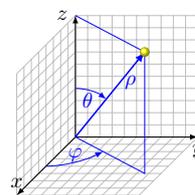


**Aufgabe:** Bestimmen Sie das Volumen der **Kugel** vom Radius  $r$ :

$$K = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2 \}$$

(1) in Kugelkoordinaten und (2) als Rotationskörper (zum Vergleich).

Der Poldistanzwinkel  $\theta$  läuft vom Nordpol  $\theta = 0$  zum Südpol  $\theta = \pi$ , die geographische Breite  $\vartheta = \pi/2 - \theta$  hingegen vom Äquator  $\vartheta = 0$  zu den Polen  $\vartheta = \pm \pi/2$ . Der Azimutwinkel  $\varphi$  ist nur bis auf Vielfache von  $2\pi$  bestimmt; als Standardbereich wählen wir  $[0, 2\pi]$ , alternativ  $[-\pi, \pi]$ .



Wir parametrisieren durch **Kugelkoordinaten**:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \rho \sin \theta \sin \varphi \\ \rho \cos \theta \end{pmatrix} =: \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$$

$$\Phi: D \rightarrow K \quad \text{mit} \quad D = \{ (\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \rho \leq r, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \}$$

Wir berechnen die **Jacobi-Matrix** und **Funktionaldeterminante**:

$$\Phi' \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi & -\rho \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies \det \Phi' = \rho^2 \sin \theta \quad (\text{Übung!})$$

☺ Hier ist  $(\rho, \theta, \varphi)$  ein rechtshändiges Koordinatensystem, det  $\Phi' \geq 0$ . Hingegen wäre  $(\rho, \varphi, \theta)$  linkshändig. Unser Integral ist nicht orientiert, also rechnen wir mit dem Absolutbetrag  $|\det \Phi'|$ . Anschauung: Die drei Spalten sind die Tangentialvektoren in Richtung  $\rho, \theta, \varphi$ . Diese drei stehen hier orthogonal zueinander. Die Determinante ist daher das Produkt ihrer Längen  $1, \rho, \rho \sin \theta$ .

**Lösung:** (1) Das Volumen berechnen wir in **Kugelkoordinaten**:

$$\text{vol}_3(K) = \int_K 1 d(x, y, z) \stackrel{\text{Trafo}}{\stackrel{\text{C2b}}{=}} \int_D \underbrace{\rho^2 \sin \theta}_{\text{Fu'det}} d(\rho, \theta, \varphi)$$

$$\stackrel{\text{Fub}}{\stackrel{\text{C1E}}{=}} \int_{\rho=0}^r \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho^2 \sin \theta d\varphi d\theta d\rho \stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} \int_{\rho=0}^r \int_{\theta=0}^{\pi} 2\pi \rho^2 \sin \theta d\theta d\rho$$

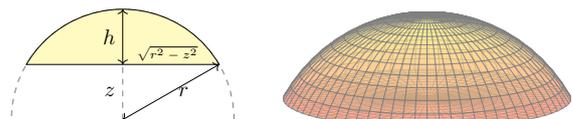
$$\stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} \int_{\rho=0}^r 2\pi [-\rho^2 \cos \theta]_{\theta=0}^{\pi} d\rho = \int_{\rho=0}^r 4\pi \rho^2 d\rho \stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} \left[ \frac{4\pi}{3} \rho^3 \right]_{\rho=0}^r = \frac{4\pi}{3} r^3$$

☺ Der Term  $r^3$  ist plausibel, denn die Kugel wächst in jede Richtung proportional zu  $r$ . Die Konstante  $\frac{4}{3}\pi$  hingegen kann man nicht raten, sondern nur durch Integration berechnen.

(2) Zum Vergleich die Rechnung als **Rotationskörper**:

$$\text{vol}_3(K) \stackrel{\text{Fub}}{\stackrel{\text{C1E}}{=}} \int_{z=-r}^r \pi(r^2 - z^2) dz \stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} \pi \left[ r^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{z=-r}^r = \frac{4\pi}{3} r^3$$

☺ Das Ergebnis ist dasselbe, nur der Rechenweg ändert sich. Sie haben hier freie Wahl! Die Kugel ist ein Rotationskörper, also bieten sich neben Kugel- auch Zylinderkoordinaten an. Je nach Problemstellung ist es eine Kunst, besonders gut angepasste Koordinaten zu wählen. Hier hilft nur Erfahrung; die erwerben Sie, wie immer im Leben, nur durch eigene Übung.



**Aufgabe:** Bestimmen Sie das Volumen des **Kugelsegments**

$$K = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, r - h \leq z \leq r \}$$

**Lösung:** Wir nutzen Zylinderkoordinaten und  $d(x, y, z) = \rho d(z, \rho, \varphi)$ :

$$\text{vol}_3(K) = \int_K 1 d(x, y, z) \stackrel{\text{Trafo}}{\stackrel{\text{Fub}}{=}} \int_{z=r-h}^r \int_{\rho=0}^{\sqrt{r^2-z^2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho d\varphi d\rho dz$$

$$\stackrel{\text{s.o.}}{=} \int_{z=r-h}^r \pi(r^2 - z^2) dz \stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} \pi \left[ r^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{z=r-h}^r = \dots = \pi h^2 \left( r - \frac{h}{3} \right)$$

Ist das plausibel? Wir machen die Probe für Halb- bzw. Vollkugel:

$$h = r \implies \text{vol}_3(K) = \frac{2\pi}{3} r^3, \quad h = 2r \implies \text{vol}_3(K) = \frac{4\pi}{3} r^3$$

☺ Vergessen Sie nie... nie... nie... die Funktionaldeterminante!

Auf  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  betrachten wir neben reellen auch komplexe Funktionen. Jede komplexe Funktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  können wir zerlegen in ihren

**Realteil**  $\operatorname{Re} f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \operatorname{Re} f(x)$ , und  
**Imaginärteil**  $\operatorname{Im} f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \operatorname{Im} f(x)$ .

Hieraus lässt sich  $f$  zusammensetzen gemäß  $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$ . Es gilt  $|f|^2 = |\operatorname{Re} f|^2 + |\operatorname{Im} f|^2$  und  $|\operatorname{Re} f|, |\operatorname{Im} f| \leq |f| \leq |\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f|$ .

Wir nennen  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  **messbar**, wenn  $\operatorname{Re} f$  und  $\operatorname{Im} f$  messbar sind. Wir nennen  $f$  **integrierbar**, wenn  $\operatorname{Re} f$  und  $\operatorname{Im} f$  integrierbar sind. Äquivalent hierzu: die Funktion  $f$  ist messbar und  $\int_{\Omega} |f| < \infty$ . In diesem Fall können wir das Integral von  $f$  definieren durch

$$\int_{\Omega} f := \int_{\Omega} \operatorname{Re} f + i \int_{\Omega} \operatorname{Im} f.$$

- ☺ Wegen  $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$  ist das reelle Integral ein Spezialfall des komplexen.
- ☺ Linearität überträgt unsere Rechenregeln aufs komplexe Integral.

Seien  $X \subseteq \mathbb{R}^p$  und  $Y \subseteq \mathbb{R}^q$  messbare Teilmengen, zum Beispiel Quader. Der Satz von Fubini C1E führt die Integration über  $X \times Y$  zurück auf die (iterierte aber jeweils einfache) Integration über  $X$  und über  $Y$ . Das hilft.

(1) Absolute Integration: Für jede messbare Funktion  $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$  gilt

$$\int_{X \times Y} |f(x, y)| d(x, y) = \int_X \int_Y |f(x, y)| dy dx = \int_Y \int_X |f(x, y)| dx dy.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so ist  $f$  absolut integrierbar, und dann gilt

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d(x, y) = \int_X \int_Y f(x, y) dy dx = \int_Y \int_X f(x, y) dx dy.$$

- ⚠ Hierzu ist die absolute Integrierbarkeit (1) wesentlich! Andernfalls ist das linke Integral nicht definiert und die rechten beiden evtl. verschieden. Für einfache, aber drastische Gegenbeispiele siehe C117, C409, C413. Diese Vorsichtsmaßnahme ist also nötig, die müssen Sie beherrschen.
- ☺ Absolute Integrierbarkeit und somit Vertauschbarkeit gilt, wenn  $X, Y$  und  $f$  beschränkt sind, also insbesondere für  $X, Y$  kompakt und  $f$  stetig.

Der Transformationssatz C2B verallgemeinert die eindimensionale Substitution: Wir wählen neue Variablen als geschickte Koordinaten.

Seien  $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$  messbar und  $\Phi: X \rightarrow Y$  bijektiv und stetig diff'bar. (1) Ist  $f: Y \rightarrow \mathbb{C}$  messbar, so auch  $(f \circ \Phi) \cdot \det \Phi': X \rightarrow \mathbb{C}$ , und es gilt

$$\int_Y |f(y)| dy = \int_X |f(\Phi(x))| \cdot |\det \Phi'(x)| dx.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so ist  $f$  absolut integrierbar, und dann gilt

$$\int_Y f(y) dy = \int_X f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)| dx.$$

- ⚠ Auch hier ist die absolute Integrierbarkeit (1) wesentlich! C413 Die Ableitung  $\Phi': X \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  ist die **Jacobi-Matrix**,  $\Phi' = (\partial_j \Phi_i)_{ij}$ . Die Funktion  $\det \Phi': X \rightarrow \mathbb{R}$  ist hierzu die **Funktionaldeterminante**. Ihr Betrag  $|\det \Phi'|$  misst die durch  $\Phi$  bewirkte **Volumenverzerrung**.
- ☺ Für eindimensionale Integrale entspricht dies der Substitutionsregel. Allerdings nehmen wir hier den Betrag und vergessen die Orientierung. Allgemeiner formuliert Satz C2c die orientierte Version mit Vorzeichen.

Fubini und Transformation sind zwei häufig genutzte Techniken. Zylinderkoordinaten sind eine einfache und häufige Anwendung. Zu Radien  $r_0, r_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  betrachten wir den Rotationskörper

$$K = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq z \leq b, r_0(z)^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_1(z)^2 \}.$$

Diesen können wir durch **Zylinderkoordinaten** parametrisieren:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} =: \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

mit den Grenzen  $a \leq z \leq b$  und  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  sowie  $r_0(z) \leq \rho \leq r_1(z)$ . Die Funktionaldeterminante ist hier wie zuvor  $\det \Phi' = \rho$ . (Übung!) Für jede absolut integrierbare Funktion  $f: K \rightarrow \mathbb{C}$  gilt somit:

$$\int_K f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} d(x, y, z) \stackrel{\text{Trafo}}{\underset{\text{Fub}}{=}} \int_{z=a}^b \int_{\rho=r_0(z)}^{r_1(z)} \int_{\varphi=0}^{2\pi} f \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \rho d\varphi d\rho dz \stackrel{\text{Fu'det}}{=} \int_K f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} d(x, y, z)$$

☺ Wir formulieren allgemeine Rechenregeln gleich reell und komplex. Der HDI gilt wörtlich für komplexe genauso wie für reelle Funktionen: Jede stetige Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ist integrierbar. Ihre Integralfunktion

$$F: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad F(x) := \int_a^x f(t) dt$$

ist differenzierbar, und für die Ableitung gilt  $F' = f$ . Ist umgekehrt  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  differenzierbar mit stetiger Ableitung  $f = F'$ , so gilt

$$\int_a^b f(x) dx = [F]_a^b \quad \text{mit} \quad [F]_a^b := F(b) - F(a).$$

**Beispiel:** Für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  gilt:

$$\int_{t=a}^b e^{i\omega t} dt = \left[ \frac{1}{i\omega} e^{i\omega t} \right]_{t=a}^b$$

☺ Alles gilt ebenso für  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^n$  und  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ , wobei komponentenweise integriert und differenziert wird.

Integration über Normalbereiche ist ein wichtiger Spezialfall und die wohl häufigste Anwendung des Satzes von Fubini:

Das Integral einer absolut integrierbaren Funktion  $f: B \rightarrow \mathbb{C}$  über

$$B = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid a_k(x_1, \dots, x_{k-1}) \leq x_k \leq b_k(x_1, \dots, x_{k-1}) \text{ für alle } k \}$$

lässt sich durch iterierte eindimensionale Integrale berechnen:

$$\int_B f(x) dx = \int_{x_1=a_1}^{b_1} \int_{x_2=a_2(x_1)}^{b_2(x_1)} \cdots \int_{x_n=a_n(x_1, \dots, x_{n-1})}^{b_n(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \cdots dx_2 dx_1$$

- ☺ Dies gilt ebenso bei jeder anderen Reihenfolge der Variablen. Sie haben hier also die Wahl der Integrationsreihenfolge.
- ⚠ Man muss hierzu allerdings die Integrationsgrenzen umschreiben! Geometrische Hilfe: Das gelingt einfach und sicher anhand einer Skizze.
- ⚠ Das Ergebnis ist dasselbe, aber der Rechenweg kann verschieden schwierig sein. Für ein bemerkenswertes Beispiel siehe C133.

Fubini und Transformation sind zwei häufig genutzte Techniken. Polarkoordinaten sind eine einfache und häufige Anwendung.

Zu Radien  $0 \leq r_0 < r_1 < \infty$  betrachten wir den Kreisring

$$K = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid r_0^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_1^2 \}.$$

Diesen können wir durch **Polarkoordinaten** parametrisieren:

$$\Phi: [r_0, r_1] \times [0, 2\pi] \rightarrow K \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \end{pmatrix} =: \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix}$$

Jacobi-Matrix und Funktionaldeterminante sind hier:

$$\Phi' = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \varphi)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix} \implies \det \Phi' = \rho$$

Für jede absolut integrierbare Funktion  $f: K \rightarrow \mathbb{C}$  gilt somit:

$$\int_K f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} d(x, y) \stackrel{\text{Trafo}}{\underset{\text{Fub}}{=}} \int_{\rho=r_0}^{r_1} \int_{\varphi=0}^{2\pi} f \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \end{pmatrix} \rho d\varphi d\rho \stackrel{\text{Fu'det}}{=} \int_K f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} d(x, y)$$

Fubini und Transformation sind zwei häufig genutzte Techniken. Kugelkoordinaten sind eine einfache und häufige Anwendung.

Zum Radius  $r > 0$  betrachten wir die Kugelschale

$$K = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r_0^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq r_1^2 \}.$$

Diese können wir durch **Kugelkoordinaten** parametrisieren:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \sin \theta \\ \rho \sin \varphi \sin \theta \\ \rho \cos \theta \end{pmatrix} =: \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$$

mit den Grenzen  $r_0 \leq \rho \leq r_1$  und  $0 \leq \theta \leq \pi$  sowie  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Die Funktionaldeterminante ist hier  $\det \Phi' = \rho^2 \sin \theta$ . (Übung!) Für jede absolut integrierbare Funktion  $f: K \rightarrow \mathbb{C}$  gilt somit:

$$\int_K f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} d(x, y, z) \stackrel{\text{Trafo}}{\underset{\text{Fub}}{=}} \int_{\rho=r_0}^{r_1} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} f \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \sin \theta \\ \rho \sin \varphi \sin \theta \\ \rho \cos \theta \end{pmatrix} \rho^2 \sin \theta d\varphi d\theta d\rho \stackrel{\text{Fu'det}}{=} \int_K f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} d(x, y, z)$$

Was besagt der Hauptsatz (HDI)? Unter welchen Voraussetzungen?  
 Was besagt der Satz von Fubini? Unter welchen Voraussetzungen?  
 Nennen Sie (mindestens) ein Beispiel, wo Vertauschung nicht gilt.  
 Was besagt der Transformationssatz? Welche Voraussetzungen?  
 Was ist und wozu dient hier die Funktionaldeterminante?

Formulieren Sie Polarkoordinaten, Zylinder- und Kugelkoordinaten.  
 Berechnen Sie ausführlich jeweils die Funktionaldeterminante.  
 Ist die Orientierung positiv? Welche Varianten sind nützlich:  
 verschiedene Achsen? verschiedene Winkelkonventionen?

Wir nutzen  $(x, y, z) = (\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) =: \Phi(\rho, \theta, \varphi)$ .  
 Welche Parameterbereiche  $D_i$  passen zur Kugel  $K$  vom Radius  $r$ ?

$$D_1 = [0, r] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi], \quad D_2 = [0, r] \times [0, \pi] \times [0, \pi],$$

$$D_3 = [0, r] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi], \quad D_4 = [0, r] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi].$$

Ist damit  $\Phi_i: D_i \rightarrow K$  surjektiv? injektiv? bis auf eine Nullmenge?

Was sind Normalbereiche? Wie können Sie hierüber integrieren?  
 Kann eine Menge  $B \subseteq \mathbb{R}^2$  auch zweifach ein Normalbereich sein,  
 also zugleich in  $x$ - und in  $y$ -Richtung? Kennen Sie Beispiele?

Warum ist folgende beliebte Vertauschung vollkommen unsinnig?

$$\int_{x=a}^b \int_{y=g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx \stackrel{?}{=} \int_{y=g(a)}^{h(a)} \int_{x=a}^b f(x, y) dx dy$$

Liefern die folgenden Integrale für  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  dasselbe Ergebnis?

$$\int_{0 \leq x \leq y \leq 1} f(x, y) d(x, y) \stackrel{?}{=} \int_{x=0}^1 \int_{y=x}^1 f(x, y) dy dx$$

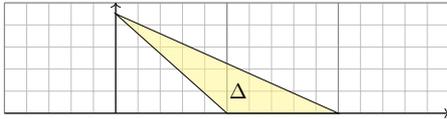
$$\int_{0 \leq x \leq y \leq 1} f(x, y) d(x, y) \stackrel{?}{=} \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^y f(x, y) dx dy$$

Wenn alle drei Integrale dasselbe ergeben, warum müssen Sie dennoch  
 manchmal verschiedene Integrationsreihenfolgen ausprobieren? [C133](#)

Normalbereiche

- Aufgabe:** (1) Skizzieren Sie das (ausgefüllte) Dreieck  $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$   
 mit den Eckpunkten  $(a, 0)$ ,  $(b, 0)$ ,  $(0, c)$ , wobei  $0 < a < b$  und  $0 < c$ .  
 (2) Ist  $\Delta$  ein Normalbereich in  $x$ -Richtung? in  $y$ -Richtung? Wie?  
 (3) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks als Doppelintegral.  
 Überprüfen Sie das Ergebnis mit Hilfe Ihrer Geometriekenntnisse.  
 (4) Die Massendichte  $\varrho: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  sei gegeben durch  $\varrho(x, y) = xy$ .  
 Berechnen Sie die Gesamtmasse  $M = \int_{\Delta} \varrho(x, y) d(x, y)$  des Dreiecks.

**Lösung:** (1) Ein solches Dreieck  $\Delta$  sieht etwa so aus:



- (2) Dies ist ein Normalbereich in  $x$ -Richtung mit den Randfunktionen  
 $g, h: [0, c] \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $g(y) = a - ya/c$  und  $h(y) = b - yb/c$ ,  
 und ebenso ein Normalbereich in  $y$ -Richtung mit den Randfunktionen  
 $g, h: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(x) = \max(0, c - xc/a)$  und  $h(x) = c - xc/b$ .

Normalbereiche

(3) Als Flächeninhalt finden wir dank Fubini für Normalbereiche:

$$\text{vol}_2(\Delta) = \int_{y=0}^c \int_{x=a-ya/c}^{b-yb/c} 1 dx dy = \int_{y=0}^c (b-a) - \frac{b-a}{c} y dy$$

$$= \left[ (b-a)y - \frac{b-a}{2c} y^2 \right]_{y=0}^c = \frac{(b-a)c}{2}$$

☺ Das ist die bekannte Formel „Grundseite mal Höhe durch zwei“.

(4) Die Gesamtmasse berechnen wir durch Integration der Dichte  $\varrho$ :

$$M = \int_{y=0}^c \int_{x=a-ya/c}^{b-yb/c} xy dx dy = \int_{y=0}^c \left[ \frac{x^2 y}{2} \right]_{x=a-ya/c}^{b-yb/c} dy$$

$$= \int_{y=0}^c \frac{b^2 - a^2}{2c^2} y^3 + \frac{a^2 - b^2}{c} y^2 + \frac{b^2 - a^2}{2} y dy$$

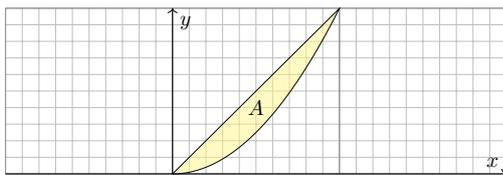
$$= \left[ \frac{b^2 - a^2}{8c^2} y^4 + \frac{a^2 - b^2}{3c} y^3 + \frac{b^2 - a^2}{4} y^2 \right]_{y=0}^c = \frac{(b^2 - a^2)c^2}{24}$$

☺ Ein Hoch auf Fubini! Anschließend genügen Geduld und Sorgfalt.

Normalbereiche

- Aufgabe:** (1) Skizzieren Sie das endliche Flächenstück  $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  
 das von der Geraden  $y = x$  und der Parabel  $y = x^2$  berandet wird.  
 (2) Ist  $A$  ein Normalbereich in  $x$ -Richtung? in  $y$ -Richtung? Wie?  
 (3) Berechnen Sie den Flächeninhalt  $\text{vol}_2(A)$  auf beide Weisen.  
 (4) Berechnen Sie den Schwerpunkt bei homogener Masseverteilung.

**Lösung:** (1) Unser Flächenstück  $A$  sieht so aus:



- (2) Dies ist ein Normalbereich in  $y$ -Richtung mit den Randfunktionen  
 $g, h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(x) = x^2$  und  $h(x) = x$ , und ebenso in  $x$ -Richtung  
 mit den Randfunktionen  $g, h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(y) = y$  und  $h(y) = \sqrt{y}$ .

Normalbereiche

(3) Als Flächeninhalt finden wir dank Fubini für Normalbereiche:

$$\text{vol}_2(A) = \int_{x=0}^1 \int_{y=x^2}^x 1 dy dx = \int_{x=0}^1 x - x^2 dx = \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^1 = \frac{1}{6}$$

Anders herum geht es auch, unter Beachtung der neuen Grenzen:

$$\text{vol}_2(A) = \int_{y=0}^1 \int_{x=y}^{\sqrt{y}} 1 dx dy = \int_{y=0}^1 \sqrt{y} - y dy = \left[ \frac{2y^{3/2}}{3} - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^1 = \frac{1}{6}$$

(4) Die Koordinaten des Schwerpunktes  $S(A) = (S_x, S_y)$  von  $A$  sind:

$$S_x = 6 \int_{x=0}^1 \int_{y=x^2}^x x dy dx = 6 \int_{x=0}^1 [xy]_{y=x^2}^x dx$$

$$= 6 \int_{x=0}^1 x^2 - x^3 dx = 6 \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_{x=0}^1 = \frac{1}{2}$$

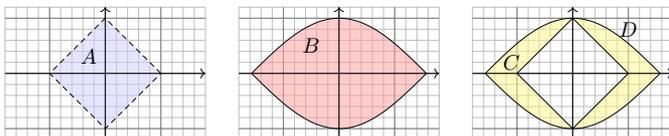
$$S_y = 6 \int_{x=0}^1 \int_{y=x^2}^x y dy dx = 6 \int_{x=0}^1 \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{y=x^2}^x dx$$

$$= 6 \int_{x=0}^1 \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} dx = 6 \left[ \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{10} \right]_{x=0}^1 = \frac{2}{5}$$

Normalbereiche

- Aufgabe:** (1) Skizzieren Sie  $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| < 1 \}$  und  
 $B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq \pi/2, |y| \leq \cos(x) \}$  sowie  $C = B \setminus A$ .  
 (2) Unterteilen Sie  $C$  in vier kongruente Binormalbereiche.  
 (3) Berechnen Sie den Flächeninhalt von  $C$  auf beide Weisen.  
 (4) Gegenprobe: Können Sie den Flächeninhalt auch direkt sehen?

**Lösung:** (1) Unsere Mengen  $A, B, C \subseteq \mathbb{R}^2$  sehen so aus:



(2) In jedem Quadranten erhalten wir einen Binormalbereich, etwa

$$D = C \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \pi/2, \max(0, 1-x) \leq y \leq \cos(x) \}$$

$$= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, 1-y \leq x \leq \arccos(y) \}$$

Normalbereiche

(3) Aus Symmetriegründen gilt  $\text{vol}_2(C) = 4 \text{vol}_2(D)$ .

Den Flächeninhalt von  $D$  berechnen wir mit Fubini:

$$\text{vol}_2(D) = \int_{x=0}^1 \int_{y=1-x}^{\cos(x)} 1 dy dx + \int_{x=1}^{\pi/2} \int_{y=0}^{\cos(x)} 1 dy dx$$

$$= \int_{x=0}^1 \cos(x) + x - 1 dx + \int_{x=1}^{\pi/2} \cos(x) dx$$

$$= \left[ \sin(x) + \frac{x^2}{2} - x \right]_{x=0}^1 + \left[ \sin(x) \right]_{x=1}^{\pi/2} = 1/2$$

Alternative: Wir integrieren zuerst über  $x$  und dann über  $y$ .

$$\text{vol}_2(D) = \int_{y=0}^1 \int_{x=1-y}^{\arccos(y)} 1 dx dy = \int_{y=0}^1 \arccos(y) + y - 1 dy$$

$$= \left[ y \arccos(y) - \sqrt{1-y^2} + \frac{y^2}{2} - y \right]_{y=0}^1 = 1/2$$

(4) Das Quadrat  $A$  mit Seitenlänge  $\sqrt{2}$  hat Flächeninhalt  $\text{vol}_2(A) = 2$ .  
 Der Flächeninhalt unter  $\cos(x)$  über  $[-\pi/2, \pi/2]$  ist 2, also  $\text{vol}_2(B) = 4$ .  
 Wegen  $C = B \setminus A$  und  $A \subseteq B$  gilt  $\text{vol}_2(B \setminus A) = \text{vol}_2(B) - \text{vol}_2(A) = 2$ .

**Masse, Schwerpunkt, Trägheitsmoment** C401  
Übung

**Aufgabe:** Gegeben sei ein (kompakter) Körper  $K \subseteq \mathbb{R}^3$  und seine (stetige) Massendichte  $\rho: K \rightarrow \mathbb{R}$ . Wie berechnen Sie daraus die Gesamtmasse, den Schwerpunkt und die Trägheitsmomente?

**Lösung:** (1) Berechnung der **Masse**  $m$  des Körpers  $K$  mit Dichte  $\rho$ :

$$m = m(K, \rho) = \int_K \rho(x_1, x_2, x_3) d(x_1, x_2, x_3)$$

(2) **Schwerpunkt**  $s = (s_1, s_2, s_3)$  des Körpers  $K$  mit Dichte  $\rho$ :

$$s_i = s_i(K, \rho) = \frac{1}{m} \int_K x_i \rho(x_1, x_2, x_3) d(x_1, x_2, x_3)$$

(3) **Trägheitsmoment**  $I_3$  des Körpers  $K$  bzgl. der  $x_3$ -Achse:

$$I_3 = I_3(K, \rho) = \int_K (x_1^2 + x_2^2) \rho(x_1, x_2, x_3) d(x_1, x_2, x_3)$$

😊 Ähnliche Rechnungen nutzen wir in der Wahrscheinlichkeitstheorie für Erwartung und Varianz einer stetigen WVerteilung  $\rho$  (s. Kapitel V).

**Trägheitsmoment eines Zylinders** C402  
Übung

**Aufgabe:** Berechnen Sie das Trägheitsmoment  $I_z(K)$  des Zylinders

$$K = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq r^2, 0 \leq z \leq h \}$$

bezüglich der  $z$ -Achse. Die Massendichte  $\rho$  auf  $K$  sei konstant.

**Lösung:** In Zylinderkoordinaten  $(x, y, z) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)$  gilt  $d(x, y, z) = \rho d(\rho, \varphi, z)$ . Für das Trägheitsmoment finden wir:

$$I_z(K) \stackrel{\text{Def}}{=} \int_K (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) d(x, y, z)$$

$$\stackrel{\text{Trafo}}{\text{Fub}}{=} \rho \cdot \int_{z=0}^h \int_{\rho=0}^r \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho^2 \cdot \underbrace{\rho}_{\text{Fu det}} d\varphi d\rho dz$$

$$\stackrel{\text{HDI}}{\text{Lin}}{=} \rho \cdot 2\pi h \int_{\rho=0}^r \rho^3 d\rho \stackrel{\text{HDI}}{\text{B11}}{=} \rho \cdot 2\pi h \cdot \frac{r^4}{4}$$

$$= \rho \cdot \underbrace{\pi r^2 h}_{= \text{vol}_3(K)} \cdot \frac{1}{2} r^2 = \frac{1}{2} m r^2$$

Das traditionelle Formelzeichen für die Dichte ist  $\rho$ . Als Integrationsvariable nutzen wir gerne  $\rho$ . Ungeschickt? Ich wollte keines von beiden ändern, also unterscheide ich sie in der Schreibweise.

**Trägheitsmoment einer Kugel** C403  
Übung

**Aufgabe:** Berechnen Sie das Trägheitsmoment  $I_z(K)$  der Kugel

$$K = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2 \}$$

(1) in Kugelkoordinaten und zum Vergleich (2) in Zylinderkoordinaten. Die Massendichte  $\rho$  auf  $K$  sei konstant (wie zuvor, zur Vereinfachung).

**Lösung:** (1) Für  $(x, y, z) = (\rho \cos \varphi \sin \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \theta)$  gilt  $d(x, y, z) = \rho^2 \sin(\theta) d(\rho, \theta, \varphi)$ . Für das Trägheitsmoment finden wir:

$$I_z(K) \stackrel{\text{Def}}{=} \int_K (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) d(x, y, z)$$

$$\stackrel{\text{Trafo}}{\text{Fub}}{=} \rho \cdot \int_{\rho=0}^r \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho^2 \sin(\theta)^2 \cdot \underbrace{\rho^2 \sin(\theta)}_{\text{Fu det}} d\varphi d\theta d\rho$$

$$\stackrel{\text{HDI}}{\text{Lin}}{=} \rho \cdot 2\pi \int_{\rho=0}^r \rho^4 d\rho \int_{\theta=0}^{\pi} \sin(\theta)^3 d\theta \stackrel{\text{HDI}}{\text{B130}}{=} \rho \cdot 2\pi \cdot \frac{r^5}{5} \cdot \frac{4}{3}$$

$$= \rho \cdot \underbrace{\frac{4}{3} \pi r^3}_{= \text{vol}_3(K)} \cdot \frac{2}{5} r^2 = \frac{2}{5} m r^2$$

**Trägheitsmoment einer Kugel** C404  
Übung

(2) Alternative Berechnung in Zylinderkoordinaten:

$$I_z(K) = \int_K (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) d(x, y, z)$$

$$= \rho \cdot \int_{z=-r}^r \int_{D(z)} (x^2 + y^2) d(x, y) dz$$

mit der Kreisscheibe  $D(z) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2 - z^2 \}$ ; das innere Integral erkennen wir geometrisch oder aus der vorigen Aufgabe!

$$I_z(K) = \rho \cdot \int_{z=-r}^r \frac{\pi}{2} (r^2 - z^2)^2 dz = \rho \cdot \frac{\pi}{2} \int_{z=-r}^r r^4 - 2r^2 z^2 + z^4 dz$$

$$= \rho \cdot \frac{\pi}{2} \left[ r^4 z - \frac{2}{3} r^2 z^3 + \frac{1}{5} z^5 \right]_{z=-r}^r = \rho \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{16}{15} r^5 = \dots = \frac{2}{5} m r^2$$

😊 Das Ergebnis ist dasselbe, nur der Rechenweg ändert sich. Jede:r hat die Wahl, sich die bequemste Rechnung auszusuchen.

😊 Einfache Körper wie Zylinder, Kugel, etc. kommen häufig vor, ihre Trägheitsmomente finden Sie daher in jeder guten Formelsammlung.

📺 Steve Mould: *The Turntable Paradox*, [youtu.be/3oM7hX3UUUEU](https://youtu.be/3oM7hX3UUUEU).

**Trägheitstensor eines starren Körpers** C405  
Ausführung

In kartesischen Koordinaten berechnet sich der **Schwerpunkt** durch

$$s = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \int_K \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rho(x, y, z) d(x, y, z).$$

Wie oben erklärt wird hierzu in jeder der drei Komponenten integriert, gewichtet durch die Massendichte  $\rho: K \rightarrow \mathbb{R}$ , normiert auf Masse 1. Meist legt man den Schwerpunkt in den Ursprung; dies gelingt durch die Verschiebung in Schwerpunktkoordinaten  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = (x - \bar{x}, y - \bar{y}, z - \bar{z})$ . Der **Trägheitstensor**  $\Theta$  der Körpers  $K$  ist dann gegeben durch:

$$\Theta = \int_K \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2 + z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \rho(x, y, z) d(x, y, z)$$

Auf der Diagonalen stehen die Trägheitsmomente bezüglich der drei Achsen  $(x, y, z)$ . Diese nennt man auch die **Hauptträgheitsmomente**. Außerhalb der Diagonalen stehen die **Deviationsmomente**.

**Hauptachsentransformation** C406  
Ausführung

😊 Der Trägheitstensor  $\Theta \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  ist eine **reelle symmetrische Matrix**. In der linearen Algebra (§5.4, Satz 5.4.2) haben Sie gelernt, dass und wie sich jede symmetrische Matrix diagonalisieren lässt: Sie können  $\Theta$  in einer geeigneten Basis  $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$  als Diagonalmatrix darstellen. Die Basiswechsellmatrix  $B \in \text{GL}_3 \mathbb{R}$  hat die Spalten  $b_1, b_2, b_3$ . In physikalischen Anwendungen verlangen wir in der Regel längen- und winkeltreue Transformationen. Hierzu muss  $B$  eine orthogonale Matrix sein, am besten mit positiver Determinante, also eine Drehung des  $\mathbb{R}^3$ . In der linearen Algebra haben Sie genau diesen Sachverhalt bewiesen! Wir können zu  $\Theta$  eine positive Orthonormalbasis  $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$  aus Eigenvektoren von  $\Theta$  berechnen. Für die Basiswechsellmatrix bedeutet das  $B \in \text{SO}_3 \mathbb{R}$ , also  $B^T B = 1$  und  $\det B = 1$ . Kurzum:

$$\exists B \in \text{SO}_3 \mathbb{R} : B^T \cdot \Theta \cdot B = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$$

😊 Diese Vereinfachung nennt man **Hauptachsentransformation**. Anschaulich können wir also jeden (!) Körper  $K$  so geschickt drehen, dass sein Trägheitstensor besonders einfach wird, nämlich diagonal.

**Trägheitstensor eines Quaders** C407  
Ausführung

**Aufgabe:** (1) Was ist der Schwerpunkt des achsenparallelen Quaders

$$Q = [0, a] \times [0, b] \times [0, c]?$$

Welchen Körper erhalten Sie nach Zentrierung?

(2) Berechnen Sie den Trägheitstensor des zentrierten Quaders

$$K = [-a/2, a/2] \times [-b/2, b/2] \times [-c/2, c/2].$$

Was sind in diesem Falle die Hauptträgheitsachsen?

**Lösung:** (1) Der Schwerpunkt ist  $S(Q) = (a/2, b/2, c/2)$ . Verschiebung in Schwerpunktkoordinaten ergibt  $K$ .

(2) Der Trägheitstensor des zentrierten Quaders  $K$  ist

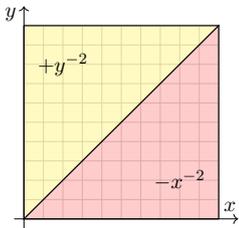
$$\Theta = \frac{m}{12} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 + c^2 \end{pmatrix}$$

**Trägheitstensor und Kreiselbewegung** C408  
Ausführung

😊 In diesem Falle sind die kartesischen Koordinatenachsen bereits die Hauptträgheitsachsen unseres Körpers  $K$ . Nach einer Drehung ist der Quader im Allgemeinen nicht mehr achsenparallel; die Matrix wäre wesentlich komplizierter: sowohl die Rechnung als auch das Ergebnis!

😊 Die Hauptträgheitsachsen eines Körpers sind mathematisch hilfreich und auch physikalisch relevant: Sie sind fix bei freier Kreiselbewegung, zudem stabil für das maximale und das minimale Trägheitsmoment, aber instabil für das mittlere: Kleine Störungen führen zum Torkeln! Probieren Sie es selbst aus: Das ist der berühmt-berüchtigte Tennisschlägereffekt, siehe Satz P2E und [en.wikipedia.org/wiki/Tennis\\_racket\\_theorem](https://en.wikipedia.org/wiki/Tennis_racket_theorem).

😊 Die Erde vollführt eine komplizierte Kreiselbewegung. Ihre Rotation äußert sich direkt in der Coriolis-Kraft (Foucaultsches Pendel, Zyklone). Die leichte Abplattung der Erde und die Anziehung der Sonne bewirken ein Drehmoment und somit eine Präzession der Erdachse (Periode von 26000 Jahren). Der Mond verursacht ebenso eine Nutation (19 Jahre). Diese Effekte beeinflussen das Klima und somit das Leben auf der Erde.



Sei  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} +y^{-2} & \text{für } 0 < x < y < 1, \\ -x^{-2} & \text{für } 0 < y < x < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

*Random fun fact* (von Sheldon Cooper): Die rot-gelbe Flagge steht im internationalen Flaggenalphabet für den Buchstaben O wie „Oscar“ und für „Person über Bord!“.

**Aufgabe:** (1) Man berechne und vergleiche und bestaune:

$$\int_{y=0}^1 \int_{x=0}^1 f(x, y) dx dy \stackrel{!}{=} \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 f(x, y) dy dx$$

(2) Widerspricht das Fubini? Ist  $f$  absolut integrierbar? Man berechne

$$\int_{[0,1]^2} |f(x, y)| d(x, y).$$

Wiederholen Sie sorgsam den Satz von Fubini C1B für nicht-negative Funktionen und allgemein C1E für absolut integrierbare Funktionen!

**Lösung:** (1a) Zu jedem  $y \in ]0, 1[$  berechnen wir das innere Integral:

$$\int_{x=0}^1 f(x, y) dx = \int_{x=0}^y y^{-2} dx + \int_{x=y}^1 -x^{-2} dx = +y^{-1} + [x^{-1}]_{x=y}^1 = +1$$

Für das erste Doppelintegral erhalten wir also

$$\int_{y=0}^1 \int_{x=0}^1 f(x, y) dx dy = \int_{y=0}^1 (+1) dy = +1.$$

(1b) Ebenso zu jedem  $x \in ]0, 1[$  berechnen wir das innere Integral:

$$\int_{y=0}^1 f(x, y) dy = \int_{y=0}^x -x^{-2} dy + \int_{y=x}^1 y^{-2} dy = -x^{-1} + [-y^{-1}]_{y=x}^1 = -1$$

Für das zweite Doppelintegral erhalten wir also

$$\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 f(x, y) dy dx = \int_{x=0}^1 (-1) dx = -1.$$

**⚠ Skandalös:** Die Integrationsreihenfolge ändert hier das Ergebnis! Das darf nicht sein, das Ergebnis einer Rechnung muss eindeutig sein, das heißt objektiv, unabhängig vom individuell gewählten Rechenweg.

(2) Dank Fubini C1B für nicht-negative Funktionen wissen wir:

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^2} |f(x, y)| d(x, y) &= \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^1 |f(x, y)| dx dy \\ &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 |f(x, y)| dy dx = +\infty. \end{aligned}$$

Zu jedem festen  $y \in ]0, 1[$  berechnen wir zunächst das innere Integral:

$$\int_{x=0}^1 |f(x, y)| dx = \int_{x=0}^y y^{-2} dx + \int_{x=y}^1 x^{-2} dx = 2y^{-1} - 1$$

Für das erste Doppelintegral erhalten wir also

$$\int_{y=0}^1 \int_{x=0}^1 |f(x, y)| dx dy = \int_{y=0}^1 2y^{-1} - 1 dy = +\infty.$$

**⚠** Die Funktion  $f: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ist demnach nicht absolut integrierbar! Das erklärt, warum wir den Satz von Fubini nicht auf  $f$  anwenden können: Die Voraussetzung  $\int |f(x, y)| d(x, y) < \infty$  ist nicht erfüllt!

**Aufgabe:** Sei  $Q = [0, 1]^2$  das Einheitsquadrat, zerlegt in die Dreiecke

$$\begin{aligned} D &= \{x \geq y\} = [(0, 0), (1, 0), (1, 1)], \\ E &= \{x \leq y\} = [(0, 0), (1, 1), (0, 1)]. \end{aligned}$$

Für  $x, y \in [0, 1]$  wollen wir  $f(x, y) = (x - y)/(x + y)^3$  definieren.

(0) Wo gilt  $f \geq 0$ ? Wo gilt  $f \leq 0$ ? Wo ist  $f$  nicht definiert?

(1) Kann  $f$  im Punkt  $(0, 0)$  stetig fortgesetzt werden?

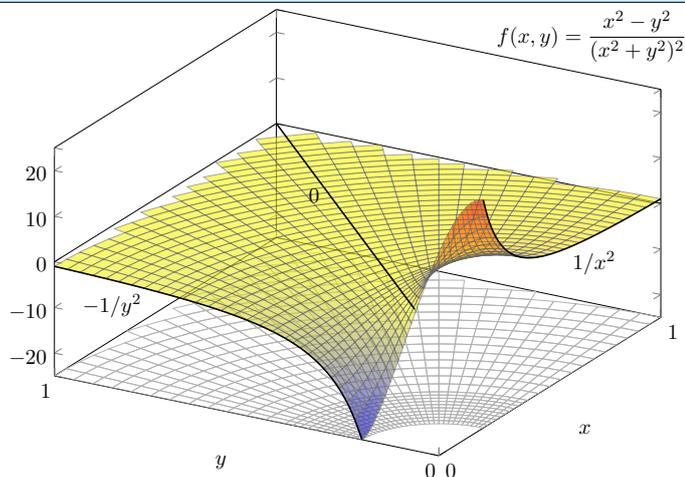
(2) Berechnen, vergleichen und bestaunen Sie die Doppelintegrale

$$\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 f(x, y) dy dx \quad \text{und} \quad \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^1 f(x, y) dx dy.$$

(3) Welche der folgenden Integrale sind definiert? Welche sind endlich?

$$\int_D f(x, y) d(x, y), \quad \int_Q |f(x, y)| d(x, y), \quad \int_Q f(x, y) d(x, y)$$

(4) Ist  $f$  auf  $Q$  absolut integrierbar? Ist Fubini anwendbar?



Die vorige Rechnung ist leicht, aber die Funktion  $f$  etwas künstlich: Sie ist stückweise definiert und zudem unstetig auf der Diagonalen. Ist dies möglich für eine *rationale* Funktion  $f(x, y) = P(x, y)/Q(x, y)$ , also einen Quotienten von Polynomen  $P$  und  $Q$ ? Erstaunlicherweise ja!

**⚠** Schon eine einzige Polstelle kann uns in Schwierigkeiten bringen:

**Aufgabe:** (1) Man berechne und vergleiche und bestaune:

$$\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy dx \stackrel{!}{=} \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$$

Als Integrand betrachten wir hier die rationale Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x, y) := \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \quad \text{und} \quad f(0, 0) := 0.$$

(2) Integrieren Sie  $f(x, y)$  über den Viertelkreis in Polarkoordinaten. Lässt sich hier die Transformationsformel anwenden? Warum / nicht?

(3) Ist  $f$  über  $[0, 1]^2$  absolut integrierbar? über  $[0, 1]^2 \setminus [0, \varepsilon]^2$  für  $\varepsilon > 0$ ?

**Lösung:** (1a) Zunächst berechnen wir das erste Integral:

$$\begin{aligned} \int_{y=0}^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy &\stackrel{\text{PBZ}}{\stackrel{\text{Probe!}}{=}} \left[ \frac{y}{x^2 + y^2} \right]_{y=0}^1 = \frac{1}{1 + x^2} \\ \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy dx &= \int_{x=0}^1 \frac{1}{1 + x^2} dx = \left[ \arctan(x) \right]_{x=0}^1 = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

(1b) Im zweiten Integral tauschen die Variablen  $x$  und  $y$  die Rollen:

$$\int_{y=0}^1 \int_{x=0}^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = -\frac{\pi}{4}.$$

**⚠** Die beiden Integrale vertauschen in diesem Falle also nicht! Und das bei denkbar einfachem Integranden: eine rationale Funktion!

😊 Der Integrand hat eine interessante geometrische Interpretation, wie die obige Rechnung bereits andeutet: Für  $x \neq 0$  bzw.  $y \neq 0$  gilt

$$f(x, y) = -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \arctan\left(\frac{x}{y}\right).$$

Daher können wir hier glücklicherweise alles explizit nachrechnen.

(2) In Polarkoordinaten  $(x, y) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$  erhalten wir

$$g(\rho, \varphi) := f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = \cos(2\varphi)/\rho^2.$$

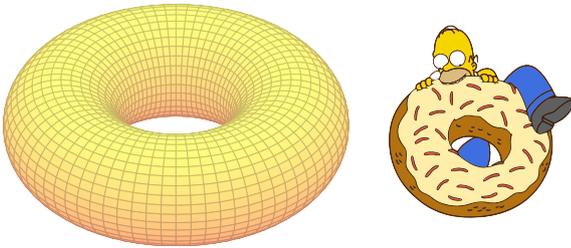
Additionstheoreme! Die Skizze zeigt  $f$ . Die nächste Katastrophe:

$$\int_{\rho=0}^r \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \frac{\cos(2\varphi)}{\rho^2} \cdot \rho d\varphi d\rho = 0$$

**⚠** Auch die Transformationsformel lässt sich hier nicht anwenden! Wir verlangen absolute Integrierbarkeit. Sonst ist Vorsicht geboten!  
(3) Wäre  $f: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  absolut integrierbar, so müssten nach Satz C1E von Fubini beide Integrationsreihenfolgen denselben Wert ergeben. Das ist hier nicht der Fall, also ist  $f$  nicht absolut integrierbar.

$$\int_{\rho=0}^r \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \frac{|\cos(2\varphi)|}{\rho} d\varphi d\rho = \int_{\rho=0}^r \frac{1}{\rho} d\rho = \infty$$

Die Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ist überall stetig bis auf den Punkt  $(0, 0)$ . Sie ist über jedem Kompaktum  $K \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  absolut integrierbar, insbesondere über  $[0, 1]^2 \setminus [0, \varepsilon]^2$  mit  $\varepsilon > 0$ . Das Problem sitzt um  $(0, 0)$ !



**Aufgabe:** Bestimmen Sie für  $0 < r < R$  das Volumen des Volltorus

$$V = \left\{ \left( \begin{array}{l} (R + \rho \sin \theta) \cos \varphi \\ (R + \rho \sin \theta) \sin \varphi \\ \rho \cos \theta \end{array} \right) =: \Phi \left( \begin{array}{l} \rho \\ \theta \\ \varphi \end{array} \right) \mid \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq r \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\}.$$

(1) in Toruskordinaten und (2) als Rotationskörper (zum Vergleich).

Der Volltorus  $V$  besteht aus dem Kreis  $K_R = \{ (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = R^2 \}$  sowie allen Punkten mit Abstand  $\leq r$  zu  $K_R$ . Die obige Abbildung skizziert dies für  $R = 2$  und  $r = 1$ .

**Lösung:** (1) Wir nutzen die angegebene Parametrisierung  $\Phi$ :

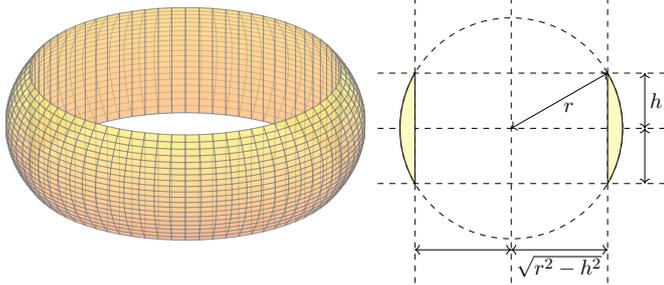
$$\Phi' = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi & -(R + \rho \sin \theta) \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi & (R + \rho \sin \theta) \cos \varphi \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det \Phi' = \rho (R + \rho \sin \theta) \quad (\text{plausibel, rechtshändig})$$

Volumenberechnung dank **Transformationssatz** und **Fubini** und **HDI**:

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(V) &= \int_V 1 \, d(x, y, z) = \int_{\rho=0}^r \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho (R + \rho \sin \theta) \, d\varphi \, d\theta \, d\rho \\ &= 2\pi \int_{\rho=0}^r [\rho (R\theta - \rho \cos \theta)]_{\theta=0}^{2\pi} \, d\rho = 2\pi \int_{\rho=0}^r \rho \cdot R \cdot 2\pi \, d\rho \\ &= (2\pi)^2 R \left[ \frac{\rho^2}{2} \right]_{\rho=0}^r = 2\pi R \cdot \pi r^2 \end{aligned}$$

☺ Dies entspricht der Guldinschen Volumenregel G2B für Rotationskörper:  $\pi r^2$  ist der Flächeninhalt des kleinen Kreises,  $2\pi R$  ist der bei Rotation zurückgelegte Weg seines Schwerpunkts.



**Aufgabe:** (1) Bestimmen Sie das Volumen des **Serviettenrings**

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, x^2 + y^2 \geq r^2 - h^2 \}$$

(2) Hängt das Volumen von der Höhe  $h$  ab? und vom Radius  $r$ ? Ist das plausibel? Prüfen Sie dies mit Hilfe der vorigen Aufgaben! [C240] (Einfache Körper taugen gut für Klausuraufgaben, etwa Februar 2013.)

**Lösung:** Für Rotationskörper können wir Zylinderkoordinaten nutzen:

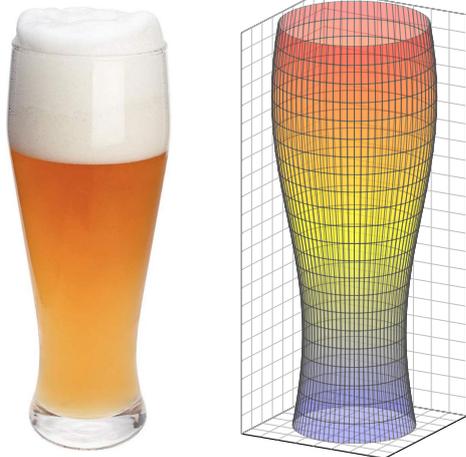
$$\begin{aligned} \text{vol}_3(S) &= \int_{z=-h}^h \int_{\rho=\sqrt{r^2-h^2}}^{\sqrt{r^2-z^2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho \, d\varphi \, d\rho \, dz \stackrel{\text{HDI}}{=} \int_{z=-h}^h \int_{\rho=\sqrt{r^2-h^2}}^{\sqrt{r^2-z^2}} 2\pi \rho \, d\rho \, dz \\ &\stackrel{\text{HDI}}{=} \int_{z=-h}^h \pi [\rho^2]_{\rho=\sqrt{r^2-h^2}}^{\sqrt{r^2-z^2}} \, dz = \pi \int_{z=-h}^h (r^2 - z^2) \, dz \\ &\stackrel{\text{HDI}}{=} \pi \left[ h^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{z=-h}^h = \frac{4\pi}{3} h^3 \quad (\text{Kugel vom Radius } h!) \end{aligned}$$

Das Volumen hängt nur von der Höhe  $h$  ab, aber nicht vom Radius  $r$ . Außerdem ist das zugleich das Volumen der Kugel vom Radius  $h$ . Das ist auf den ersten Blick höchst erstaunlich! Ist es plausibel?

- ☺ Für  $h = r$  erhalten wir das volle Kugelvolumen, wie es sein soll.
- ☺ Summe: Kugel [C239] = Zylinder + Segmente [C240] + Ring [C419]
- ☺ Alternative Rechnung mit Fubini, das gelingt ebenso leicht:

$$\text{vol}_3(S) = \int_{z=-h}^h \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_S(x, y, z) \, d(x, y) \, dz = \pi \int_{z=-h}^h (r^2 - z^2) - (r^2 - h^2) \, dz$$

📺 Ein schönes Video von Vsauce hierzu: [youtu.be/J51ncHP\\_BrY](https://youtu.be/J51ncHP_BrY).



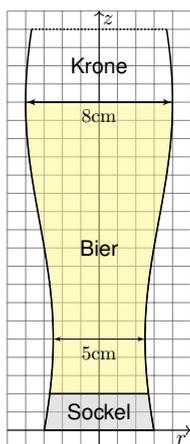
Viele Objekte unseres Alltags sind rotationssymmetrisch, aus praktischen Gründen der Herstellung oder der Nutzung, zum Beispiel rotierende Maschinenteile oder Werkstücke. Die Töpferscheibe wird seit Jahrtausenden genutzt. [C233]

Zur Beschreibung und Parametrisierung solcher Rotationskörper ist die Wahl von Zylinderkoordinaten meist natürlich und nützlich. Zur Illustration dieses Kapitels wollen wir dies an einem schönen (nicht ganz bierernsten) Anwendungsbeispiel durchrechnen.

Sie können das Volumen eines Weizenbierglases leicht experimentell messen: Hierzu genügen ein geeignetes Glas und eine Flasche Bier. Dies wird täglich hundertausendfach erprobt, zumeist erfolgreich.

📺 Hierzu ein Stuttgarter Science Pub: [youtu.be/c4\\_GFCiem1c](https://youtu.be/c4_GFCiem1c).

Wir wollen es zur Illustration unserer Techniken einmal ausrechnen. Danach werden Sie Weizenbiergläser mit anderen Augen sehen. Das Beste daran: Hier arbeiten Theorie und Praxis Hand in Hand. Das Ergebnis Ihrer Rechnung können Sie empirisch testen: Prost!



Weizenbiergläser sind hoch und geschwungen. Falls Sie auf einer Party zufällig Zeit dazu haben sollten, vermessen Sie ein Glas und erstellen Sie eine Parametrisierung: steigert den Nerd-Faktor! Für diese Vorlesung habe ich genau das getan:

Einige Messungen führen zu folgendem Modell:  $G = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 22, x^2 + y^2 \leq r(z)^2 \}$  mit einer Radiusfunktion  $r(z) = a + b \sin(cz + d)$ . Warum? Weil es gut passt. In Fourier we trust!

Alle Längen in cm, siehe nebenstehende Skizze: Der Durchmesser variiert von 5cm auf 5cm Höhe bis 8cm auf 18cm Höhe, Letzteres ist die Höhe des Füllstrichs. Der Glasboden innen liegt 2cm hoch. Diese Daten dürfen Sie gerne nachmessen!

**Aufgabe:** Berechnen Sie das Biervolumen. Prost! Ist das Ergebnis Ihrer Erfahrung nach plausibel?

**Lösung:** Die Messdaten kalibrieren die Parameter unseres Modells: Wir finden  $a = 13/4$  und  $b = 3/4$  sowie  $c = \pi/13$  und  $d = -\pi 23/26$ . Das gesuchte Volumen berechnen wir wie üblich dank Fubini:

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(B) &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{1}_B(x, y, z) \, d(x, y, z) = \int_{z=2}^{18} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_B(x, y, z) \, d(x, y) \, dz \\ &= \int_{z=2}^{18} \pi r(z)^2 \, dz = \pi \int_{z=2}^{18} [a + b \sin(cz + d)]^2 \, dz \\ &= \pi \int_{z=2}^{18} a^2 + 2ab \sin(cz + d) + b^2 \sin^2(cz + d) \, dz \\ &= \pi \int_{z=2}^{18} a^2 + 2ab \sin(cz + d) + \frac{b^2}{2} [1 - \cos(2cz + 2d)] \, dz \\ &= \pi \left[ a^2 z - \frac{2ab}{c} \cos(cz + d) + \frac{b^2}{2} z - \frac{b^2}{4c} \sin(2cz + 2d) \right]_{z=2}^{18} \\ &= 504.856 \quad (\text{Kalibrierung einsetzen und ausrechnen!}) \end{aligned}$$

☺ Das Ergebnis ist plausibel;  $500\text{cm}^3 = 0.5\text{l}$  ist für Weizenbier üblich. Im Rahmen der Messgenauigkeiten ist  $505\text{cm}^3$  erstaunlich präzise (1%).

**Aufgabe:** Zu  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  betrachten wir den  $n$ -dimensionalen Simplex

$$\Delta_r^n = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq r \}.$$

(1) Skizzieren Sie  $\Delta_r^1, \Delta_r^2, \Delta_r^3$  und berechnen Sie das Volumen

$$\text{vol}_n(\Delta_r^n) = \int_{x_n=0}^r \int_{x_{n-1}=0}^{x_n} \dots \int_{x_2=0}^{x_3} \int_{x_1=0}^{x_2} 1 \, dx_1 \, dx_2 \dots dx_{n-1} \, dx_n.$$

(2) Berechnen Sie das Volumen des  $n$ -dimensionalen Würfels

$$W_r^n = [-r, r]^n = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \dots, x_n \in [-r, r] \}.$$

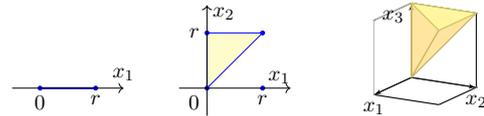
(3) Berechnen Sie das Volumen der  $n$ -dimensionalen Kugel

$$D_r^n = \bar{B}_{\mathbb{R}^n}(0, r) = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq r^2 \}.$$

Gilt  $\text{vol}_n(D_r^n) / \text{vol}_n(W_r^n) \searrow 0$ ? Ist das plausibel? (Vielleicht glauben Sie nur an Dimension 2 und 3, aber rechnen können Sie es ganz allgemein. Religiöse Bedenken oder gar Ausreden sind hier nicht angebracht.)

☺ Fassen Sie Mut und Zutrauen... auch zu hohen Dimensionen!

**Lösung:** (1) Wir machen eine Skizze, das hilft fast immer zur Klärung:



Die Eckpunkte des Tetraeders sind  $(0, 0, 0), (0, 0, r), (0, r, r), (r, r, r)$ .

$$\text{vol}_0(\Delta_r^0) = 1, \quad \text{vol}_1(\Delta_r^1) = r, \quad \text{vol}_2(\Delta_r^2) = \frac{r^2}{2}, \quad \text{vol}_3(\Delta_r^3) = \frac{r^3}{6}.$$

Wir vermuten  $\text{vol}_n(\Delta_r^n) = \frac{r^n}{n!}$  und bestätigen dies per Induktion:

$$\begin{aligned} \text{vol}_n(\Delta_r^n) &= \int_{x_n=0}^r \int_{x_{n-1}=0}^{x_n} \dots \int_{x_2=0}^{x_3} \int_{x_1=0}^{x_2} 1 \, dx_1 \, dx_2 \dots dx_{n-1} \, dx_n \\ &= \int_{x_n=0}^r \text{vol}_{n-1}(\Delta_{x_n}^{n-1}) \, dx_n = \int_{x_n=0}^r \frac{(x_n)^{n-1}}{(n-1)!} \, dx_n = \left[ \frac{(x_n)^n}{n!} \right]_{x_n=0}^r = \frac{r^n}{n!} \end{aligned}$$

☺ Plausibel: Der Würfel  $[0, r]^n$  zerlegt sich in  $n!$  kongruente Simplexe.

☺ **Random fun fact:** Die Summe ist  $\sum_{n=0}^{\infty} \text{vol}_n(\Delta_r^n) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n/n! = e^r$ .

(2) Für den Würfel  $W_r^n = [-r, r]^n$  gilt  $\text{vol}_n(W_r^n) = (2r)^n$ . Dies folgt direkt aus der Definition des Volumens, und ebenso mit Fubini per Induktion:

$$\text{vol}_n(W_r^n) = \int_{x_n=-r}^r \text{vol}_{n-1}(W_r^{n-1}) \, dx_n = \int_{x_n=-r}^r (2r)^{n-1} \, dx_n = (2r)^n$$

(3) Für die Kugel  $D_r^n$  gilt  $\text{vol}_n(D_r^n) = \tau_n r^n$  mit  $\tau_n := \text{vol}_n(D_1^n)$ .

$n$	0	1	2	3	4	5	6	...
$\text{vol}_n(D_r^n)$	1	$2r$	$\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$	$\frac{1}{2}\pi^2 r^4$	$\frac{8}{15}\pi^2 r^5$	$\frac{1}{6}\pi^3 r^6$	...

Wir berechnen die Konstante  $\tau_n$  rekursiv, wie zuvor erklärt: [C123](#)

$$\tau_n = \text{vol}_n(D_1^n) = \int_{x_n=-1}^1 \tau_{n-1}(\sqrt{1-x_n^2})^{n-1} \, dx_n = \tau_{n-1} \int_{x=0}^{\pi} \sin(x)^n \, dx$$

Hierzu substituieren wir  $x_n = -\cos(x)$  für  $x \in [0, \pi]$  und  $dx_n = \sin(x) \, dx$ . Das Wallis-Integral  $I_n = \int_{x=0}^{\pi} \sin(x)^n \, dx$  integrieren wir partiell [B130](#) bezüglich  $\sin(x)^{n-1} \cdot \sin(x)$  und nutzen  $\cos(x)^2 = 1 - \sin(x)^2$ :

$$\int \sin(x)^n \, dx = -\sin(x)^{n-1} \cos(x) + \int (n-1) \sin(x)^{n-2} (1 - \sin(x)^2) \, dx$$

Auflösen nach  $\int \sin(x)^n \, dx$  ergibt die schöne Rekursionsformel

$$\int \sin(x)^n \, dx = -\frac{1}{n} \sin(x)^{n-1} \cos(x) + \frac{n-1}{n} \int \sin(x)^{n-2} \, dx.$$

Für  $I_n = \int_{x=0}^{\pi} \sin(x)^n \, dx$  gilt  $I_0 = \pi$  und  $I_1 = 2$  und weiter  $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ :

$$\int_{x=0}^{\pi} \sin(x)^{2k} \, dx = \pi \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2k)} = \pi \cdot \frac{(2k)!}{k!^2 \cdot 2^{2k}},$$

$$\int_{x=0}^{\pi} \sin(x)^{2k+1} \, dx = 2 \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2k)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2k+1)} = 2 \cdot \frac{k!^2 \cdot 2^{2k}}{(2k+1)!}.$$

Es gilt  $I_n I_{n-1} = 2\pi/n$  und somit  $\tau_n = \tau_{n-2} \cdot 2\pi/n$ . Wir erhalten also

$$\tau_{2k} = \frac{\pi^k}{k!} \quad \text{und} \quad \tau_{2k+1} = \frac{2^{k+1}}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k+1)} \pi^k.$$

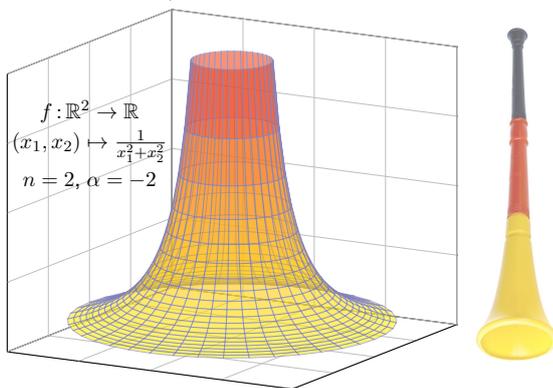
Die Gamma-Funktion fasst beide Fälle elegant zusammen (C2H):

$$\text{vol}_n(D_r^n) = \tau_n r^n \quad \text{mit} \quad \tau_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)}.$$

☺ **Random fun fact:** Es gilt  $\sum_{k=0}^{\infty} \text{vol}_n(D_r^{2k}) = \sum_{k=0}^{\infty} (\pi r^2)^k / k! = e^{\pi r^2}$ .

Für  $x \in \mathbb{R}^n$  nutzen wir die euklidische Norm  $|x| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ .

**Aufgabe:** Berechnen Sie  $\int_{a \leq |x| \leq b} |x|^\alpha \, dx$  und  $\int_{\mathbb{R}^n} |x|^\alpha \, dx$  für  $n = 1, 2, 3$ . Ist der Grenzwert für  $a \searrow 0$  endlich? und der Grenzwert für  $b \nearrow \infty$ ?



**Lösung:** Sei  $0 < a < b$ . (1) Für  $n = 1$  und  $\alpha \neq -1$  finden wir

$$\int_{a \leq |x| \leq b} |x|^\alpha \, dx = 2 \int_{x=a}^b x^\alpha \, dx = 2 \left[ \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_{x=a}^b = 2 \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

Im Sonderfall  $\alpha = -1$  finden wir entsprechend  $2(\ln b - \ln a) = 2 \ln(b/a)$ .

Der Grenzwert für  $a \searrow 0$  ist endlich für  $\alpha > -1$ , unendlich für  $\alpha \leq -1$ .

Der Grenzwert für  $b \nearrow \infty$  ist endlich für  $\alpha < -1$ , unendlich für  $\alpha \geq -1$ .

Das Integral  $\int_{\mathbb{R}} |x|^\alpha \, dx$  ist unendlich für jeden Exponenten  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

(2) In Dimension  $n = 2$  nutzen wir Polarkoordinaten:

$$\int_{a \leq |x| \leq b} |x|^\alpha \, dx = \int_{\rho=a}^b \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho^\alpha \cdot \underbrace{\rho}_{\text{Fu}|\text{det}} \, d\varphi \, d\rho = 2\pi \left[ \frac{\rho^{\alpha+2}}{\alpha+2} \right]_{\rho=a}^b$$

Im Sonderfall  $\alpha = -2$  finden wir ebenso  $2\pi(\ln b - \ln a) = 2\pi \ln(b/a)$ .

Der Grenzwert für  $a \searrow 0$  ist endlich für  $\alpha > -2$ , unendlich für  $\alpha \leq -2$ .

Der Grenzwert für  $b \nearrow \infty$  ist endlich für  $\alpha < -2$ , unendlich für  $\alpha \geq -2$ .

Das Integral  $\int_{\mathbb{R}^2} |x|^\alpha \, dx$  ist unendlich für jeden Exponenten  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

(3) In Dimension  $n = 3$  nutzen wir Kugelkoordinaten:

$$\int_{a \leq |x| \leq b} |x|^\alpha \, dx = \int_{\rho=a}^b \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho^\alpha \cdot \underbrace{\rho^2 \sin(\theta)}_{\text{Fu}|\text{det}} \, d\varphi \, d\theta \, d\rho = 4\pi \left[ \frac{\rho^{\alpha+3}}{\alpha+3} \right]_{\rho=a}^b$$

Im Sonderfall  $\alpha = -3$  finden wir ebenso  $4\pi(\ln b - \ln a) = 4\pi \ln(b/a)$ .

Der Grenzwert für  $a \searrow 0$  ist endlich für  $\alpha > -3$ , unendlich für  $\alpha \leq -3$ .

Der Grenzwert für  $b \nearrow \infty$  ist endlich für  $\alpha < -3$ , unendlich für  $\alpha \geq -3$ .

Das Integral  $\int_{\mathbb{R}^3} |x|^\alpha \, dx$  ist unendlich für jeden Exponenten  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

(4) Zur Information: In jeder Dimension  $n \geq 1$  gilt  $\text{vol}_n(D_r^n) = \tau_n r^n$  und

$$\int_{a \leq |x| \leq b} |x|^\alpha \, dx = \int_{\rho=a}^b r^\alpha \cdot n \tau_n r^{n-1} \, d\rho = n \tau_n \left[ \frac{\rho^{\alpha+n}}{\alpha+n} \right]_{\rho=a}^b$$

Im Sonderfall  $\alpha = -n$  finden wir ebenso  $n \tau_n (\ln b - \ln a) = n \tau_n \ln(b/a)$ .

☠ Das Integral  $\int_{\mathbb{R}^n} |x|^\alpha \, dx$  ist unendlich für jeden Exponenten  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

☺ Ob eine Polstelle von  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  lokal integrierbar ist, hängt von ihrer Ordnung ab — und bemerkenswerterweise auch von der Dimension  $n$ ! Wir halten die Ergebnisse dieser Aufgabe im folgenden Satz fest.

**Satz C4A:** lokale Integrierbarkeit einer Polstelle

Das globale  $n$ -dimensionale Integral  $\int_{\mathbb{R}^n} |x|^\alpha \, dx$  ist unendlich für jeden Exponenten  $\alpha \in \mathbb{R}$  und in jeder Dimension  $n \geq 1$ . Genauer gilt für  $r > 0$ :

Das Integral  $\int_{|x| \geq r} |x|^\alpha \, dx$  ist unendlich für  $\alpha \geq -n$ , endlich für  $\alpha < -n$ .

Lokal gilt:  $\int_{|x| \leq r} |x|^\alpha \, dx$  ist unendlich für  $\alpha \leq -n$ , endlich für  $\alpha > -n$ ,

$$\int_{|x| \leq r} |x|^\alpha \, dx = \begin{cases} 2 \frac{r^{\alpha+1}}{\alpha+1} & \text{in Dimension } n = 1, \\ 2\pi \frac{r^{\alpha+2}}{\alpha+2} & \text{in Dimension } n = 2, \\ 4\pi \frac{r^{\alpha+3}}{\alpha+3} & \text{in Dimension } n = 3, \\ n \tau_n \frac{r^{\alpha+n}}{\alpha+n} & \text{in jeder Dimension } n. \end{cases}$$

Die Funktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto |x|^\alpha$  ist **lokal integrierbar** für  $\alpha > -n$ . Wir präzisieren diesen nützlichen Begriff nachfolgend in Definition C4H. Ähnliche Fragen begegnen uns häufig, daher lohnt es, das passende Vokabular der  $L^p$ -Räume und geeignete Werkzeuge zu entwickeln.

**Lokal beschränkte Funktionen** C433  
Ergänzung

Im Folgenden sei  $\Omega$  eine Menge, etwa  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge. Wie üblich sei  $\mathbb{K}$  der reelle Körper  $\mathbb{R}$  oder der komplexe Körper  $\mathbb{C}$ .

**Definition C4B: lokal beschränkte Funktion**

(1) Eine Funktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  heißt **beschränkt**, wenn eine geeignete Konstante  $M \in \mathbb{R}$  existiert, sodass  $|f(x)| \leq M$  für alle  $x \in \Omega$  gilt. Die kleinste solche Schranke ist das **Supremum**

$$|f|_{\Omega} := \sup_{x \in \Omega} |f(x)| = \inf \{ M \in \mathbb{R} \mid \{ x \in \Omega \mid |f(x)| > M \} = \emptyset \}.$$

Die Menge aller beschränkten Funktionen auf  $\Omega$  schreiben wir

$$B(\Omega) = B(\Omega, \mathbb{K}) := \{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid |f|_{\Omega} < \infty \}.$$

(2) Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Wir nennen  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  **lokal beschränkt**, wenn  $f$  auf jedem Kompaktum  $K \Subset \Omega$  beschränkt ist, also  $|f|_K < \infty$  gilt. Die Menge dieser Funktionen schreiben wir  $B_{\text{loc}}(\Omega) = B_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{K})$ .

Der Buchstabe „B“ steht für *beschränkt*, engl. *bounded*, frz. *borné*, und in  $C(\Omega) = C(\Omega, \mathbb{K})$  steht das „C“ für *stetig*, engl. *continuous*, frz. *continu*.

**Lokal beschränkte Funktionen** C434  
Ergänzung

**Aufgabe:** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und nicht leer.

(1) Erklären Sie  $B(\Omega) \subseteq B_{\text{loc}}(\Omega) \supseteq C(\Omega)$  sowie  $B(\Omega) \not\subseteq C(\Omega)$ .

(2) Ist  $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto |x|^\alpha$  beschränkt? lokal beschränkt?

**Lösung:** (1a) Es gilt  $C(\Omega) \subseteq B_{\text{loc}}(\Omega)$ : Sei  $f \in C(\Omega)$ , also  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  stetig. Ist  $K \Subset \Omega$  kompakt, so nimmt die stetige Funktion  $|f|$  auf  $K$  ihr Maximum an, also  $|f|_K = \max_K |f| < \infty$ . Das zeigt  $f \in B_{\text{loc}}(\Omega)$ .

(1b) Umgekehrt gilt jedoch  $C(\Omega) \not\subseteq B_{\text{loc}}(\Omega)$ : Für jeden Punkt  $p \in \Omega$  ist die Indikatorfunktion  $f = \mathbf{I}_{\{p\}}$  beschränkt,  $|f|_{\Omega} = 1$ , aber unstetig.

(1c) Es gilt  $B(\Omega) \subseteq B_{\text{loc}}(\Omega)$ : Sei  $f \in B(\Omega)$ , also  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  beschränkt. Für jede Teilmenge  $K \subseteq \Omega$  gilt dann offensichtlich  $|f|_K \leq |f|_{\Omega} < \infty$ , insbesondere gilt dies für Kompakta  $K \Subset \Omega$ . Das zeigt  $f \in B_{\text{loc}}(\Omega)$ .

(1d) Umgekehrt gilt jedoch  $B(\Omega) \not\subseteq B_{\text{loc}}(\Omega)$ : Es gibt Funktionen, die lokal aber nicht global beschränkt sind. Auf  $\Omega = \mathbb{R}^n$  etwa genügt  $f(x) = |x|$ . Andernfalls genügt die Funktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto 1/|x-p|$  für einen Randpunkt  $p \in \partial\Omega$ ; sie ist auf ganz  $\Omega$  stetig, dank (1a) also lokal beschränkt, aber nicht beschränkt, denn für  $x \rightarrow p$  gilt  $f(x) \rightarrow \infty$ .

(2) Unbeschränkt für  $\alpha \neq 0$ , stetig auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , also lokal beschränkt!

**Lokal beschränkte Funktionen** C435  
Ergänzung

**Aufgabe:** (3) Zeigen Sie  $|\lambda f|_{\Omega} = |\lambda| \cdot |f|_{\Omega}$  für alle  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

(4) Zeigen Sie die Ungleichung  $|f+g|_{\Omega} \leq |f|_{\Omega} + |g|_{\Omega}$  für  $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ .

(5) Wie folgt aus (3,4), dass  $B(\Omega) = B(\Omega, \mathbb{K})$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum ist?

**Lösung:** (3) Aus  $|f(x)| \leq |f|_{\Omega}$  folgt  $|\lambda f(x)| = |\lambda| \cdot |f(x)| \leq |\lambda| \cdot |f|_{\Omega}$ . Das Supremum über alle  $x \in \Omega$  erfüllt demnach  $|\lambda f|_{\Omega} \leq |\lambda| \cdot |f|_{\Omega}$ .

(4) In jedem Punkt  $x \in \Omega$  gilt  $|f(x)| \leq |f|_{\Omega}$  und  $|g(x)| \leq |g|_{\Omega}$ . Daraus folgt unmittelbar  $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq |f|_{\Omega} + |g|_{\Omega}$ . Das Supremum über alle  $x \in \Omega$  erfüllt demnach  $|f+g|_{\Omega} \leq |f|_{\Omega} + |g|_{\Omega}$ .

(5) Die Menge  $\mathbb{K}^{\Omega} = \text{Abb}(\Omega, \mathbb{K}) = \{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{K} \}$  aller Funktionen von  $\Omega$  nach  $\mathbb{K}$  ist ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum bezüglich punktweiser Addition und punktweiser Multiplikation mit Skalaren, siehe Seite A210. Hierin ist die Teilmenge  $B(\Omega) = B(\Omega, \mathbb{K}) = \{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid |f|_{\Omega} < \infty \}$  ein Untervektorraum: Die Nullfunktion gehört zu  $B(\Omega)$ , da  $|0|_{\Omega} = 0 < \infty$ . Für jede Funktion  $f \in B(\Omega)$  und jeden Skalar  $\lambda \in \mathbb{K}$  gilt  $\lambda f \in B(\Omega)$ , denn  $|\lambda f|_{\Omega} = |\lambda| \cdot |f|_{\Omega} < \infty$  dank (3). Für je zwei Funktionen  $f, g \in B(\Omega)$  gilt  $f+g \in B(\Omega)$ , denn  $|f+g|_{\Omega} \leq |f|_{\Omega} + |g|_{\Omega} < \infty$  dank (4).

**Lokal beschränkte Funktionen** C436  
Ergänzung

**Aufgabe:** Funktionen  $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  können wir auch multiplizieren:

(6) Zeigen Sie die Ungleichung  $|f \cdot g|_{\Omega} \leq |f|_{\Omega} \cdot |g|_{\Omega}$  für  $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ .

(7) Ist  $B(\Omega)$  eine  $\mathbb{K}$ -Algebra, gilt also  $f \cdot g \in B(\Omega)$  für  $f, g \in B(\Omega)$ ?

(8) Ist auch  $B_{\text{loc}}(\Omega)$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum? und eine  $\mathbb{K}$ -Algebra?

**Lösung:** (6) In jedem Punkt  $x \in \Omega$  gilt  $|f(x)| \leq |f|_{\Omega}$  und  $|g(x)| \leq |g|_{\Omega}$ . Daraus folgt unmittelbar  $|f(x) \cdot g(x)| \leq |f(x)| \cdot |g(x)| \leq |f|_{\Omega} \cdot |g|_{\Omega}$ . Das Supremum über alle  $x \in \Omega$  erfüllt demnach  $|f \cdot g|_{\Omega} \leq |f|_{\Omega} \cdot |g|_{\Omega}$ .

(7) Für  $f, g \in B(\Omega)$  gilt  $f \cdot g \in B(\Omega)$ , denn  $|f \cdot g|_{\Omega} \leq |f|_{\Omega} \cdot |g|_{\Omega} < \infty$ . Somit ist  $B(\Omega)$  tatsächlich eine  $\mathbb{K}$ -Unteralgebra von  $\mathbb{K}^{\Omega} = \text{Abb}(\Omega, \mathbb{K})$ .

(8) Ja, auch  $B_{\text{loc}}(\Omega)$  ist ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und sogar eine  $\mathbb{K}$ -Algebra: Sind die Funktionen  $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  lokal beschränkt, also beschränkt auf jedem Kompaktum  $K \Subset \Omega$ , so gilt dies auch für  $\lambda f$  sowie  $f+g$  und  $f \cdot g$ . Es genügt, die Argumente (3–7) auf jedes Kompaktum  $K$  anzuwenden.

☺ Diese Aufgabe und ihre Lösung sind pedantisch und kleinschrittig, um die grundlegenden Begriffe und Argumente einmal einzuüben. Wie so oft gilt auch hier: Mit der nötigen Sorgfalt gelingt es leicht.

**Essentiell beschränkte Funktionen** C437  
Ergänzung

**Definition C4C: essentiell beschränkte Funktion**

Eine Funktion  $f: \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  heißt **essentiell beschränkt**, wenn eine Konstante  $M \in \mathbb{R}$  existiert, sodass  $|f(x)| \leq M$  für fast alle  $x \in \Omega$  gilt. Die kleinste solche Konstante ist das **essentielle Supremum**

$$\|f\|_{L^\infty} := \text{ess sup}_{x \in \Omega} |f(x)| = \inf \{ M \in \mathbb{R} \mid \text{vol}_n \{ x \in \Omega \mid |f(x)| > M \} = 0 \}.$$

Nach Änderung auf einer Nullmenge ist  $f$  beschränkt, also  $|f| \leq M$ . Die Menge aller essentiell beschränkten Funktionen schreiben wir

$$L^\infty(\Omega) = L^\infty(\Omega, \mathbb{K}) := \{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid \|f\|_{L^\infty} < \infty \}.$$

Verlangen wir dies nur lokal, für alle Kompakta  $K \Subset \Omega$ , so erhalten wir

$$L^\infty_{\text{loc}}(\Omega) = L^\infty_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{K}) := \{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid \|f\|_{L^\infty(K)} < \infty \text{ für alle } K \Subset \Omega \}.$$

Es genügt, dies auf Bällen  $K = \bar{B}(a, \varepsilon) \subseteq \Omega$  zu testen für  $a \in \Omega, \varepsilon > 0$ . Auf  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  reicht es, dies für  $K = \bar{B}(0, r)$  und  $r = 1, 2, 3, \dots$  zu testen.

**Essentiell beschränkte Funktionen** C438  
Ergänzung

**Aufgabe:** (1) Zur Illustration untersuchen wir  $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \sin(x)$  und  $g(x) = \sin(x) + x \mathbf{I}_{\mathbb{Z}\pi}(x)$  und  $h(x) = \mathbf{I}_{\mathbb{Q}^*}(x)/|x|$ . Bestimmen Sie hierzu jeweils inf und sup sowie ess inf und ess sup.

(2) Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Erklären Sie die folgenden Inklusionen:

$$\begin{array}{c} L^\infty(\Omega) \subsetneq L^\infty_{\text{loc}}(\Omega) \\ \cup \quad \not\subseteq \quad \cup \\ B(\Omega) \subsetneq B_{\text{loc}}(\Omega) \end{array}$$

(3) Zeigen Sie für alle  $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$  folgende Un/Gleichungen:

$$\begin{array}{l} \|\lambda \cdot f\|_{L^\infty} = |\lambda| \cdot \|f\|_{L^\infty} \\ \|f+g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty} + \|g\|_{L^\infty} \\ \|f \cdot g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty} \cdot \|g\|_{L^\infty} \end{array}$$

(4) Ist  $L^\infty(\Omega)$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum? eine  $\mathbb{K}$ -Algebra? und  $L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$ ?

(5) Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Beweisen oder widerlegen Sie die naheliegende Vermutung  $\text{ess sup } f = \sup f$  und  $\text{ess inf } f = \inf f$ .

**Essentiell beschränkte Funktionen** C439  
Ergänzung

**Lösung:** (1a) Für die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sin(x)$  gilt  $\inf f = -1$  und  $\sup f = +1$ , also  $|f|_{\mathbb{R}} = \sup |f| = 1$ , und  $f$  ist beschränkt, kurz  $f \in B(\mathbb{R})$ . Ebenso finden wir  $\text{ess inf } f = -1$  und  $\text{ess sup } f = +1$ , somit  $\|f\|_{L^\infty} = 1$ .

(1b) Für  $g$  gilt  $g(k\pi) = k\pi$  für  $k \in \mathbb{Z}$ , somit  $\inf g = -\infty$  und  $\sup g = +\infty$ , also  $|g|_{\mathbb{R}} = \sup |g| = \infty$ , demnach ist  $g$  unbeschränkt, kurz  $g \notin B(\mathbb{R})$ . Jedoch finden wir  $\text{ess inf } g = -1$  und  $\text{ess sup } g = +1$ , somit  $\|g\|_{L^\infty} = 1$ . Essentiell beschränkt: Nach Änderung auf der Nullmenge  $\mathbb{Z}\pi$  gilt  $g = f$ .

(1c) Für  $h$  gilt  $h(x) = 1/|x|$  für  $x \in \mathbb{Q}^*$  und  $h(x) = 0$  sonst, somit  $\inf h = 0$  und  $\sup h = +\infty$ , also  $|h|_{\mathbb{R}} = \sup |h| = \infty$ , und  $h$  ist unbeschränkt. Jedoch finden wir  $\text{ess inf } h = 0$  und  $\text{ess sup } h = 0$ , somit  $\|h\|_{L^\infty} = 0$ . Essentiell beschränkt: Nach Änderung auf der Nullmenge  $\mathbb{Q}$  gilt  $h = 0$ .

(2) Die vier angegebenen Inklusionen sind klar aufgrund der Definition. Die sechs negierten Inklusionen werden widerlegt durch Funktionen wie  $f(x) = |x|$  (horizontal) und  $g(x) = \mathbf{I}_{\mathbb{Q}^n \setminus \{0\}}(x)/|x|$  (vertikal) auf  $\Omega = \mathbb{R}^n$ . Für  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen variieren wir diese Gegenbeispiele: Es genügen  $f(x) = 1/|x-p|$  für einen Randpunkt  $p \in \partial\Omega$  oder  $g(x-p)$  für  $p \in \Omega$ .

**Essentiell beschränkte Funktionen** C440  
Ergänzung

(3) Zu  $\|f\|_{L^\infty} = M_1$  existiert eine Nullmenge  $N_1 \subseteq \Omega$ ,  $\text{vol}_n(N_1) = 0$ , sodass  $|f(x)| \leq M_1$  für  $x \in \Omega \setminus N_1$ ; zu  $\|g\|_{L^\infty} = M_2$  ebenso  $N_2 \subseteq \Omega$ . Für  $N = N_1 \cup N_2$  gilt dann  $0 \leq \text{vol}_n(N) \leq \text{vol}_n(N_1) + \text{vol}_n(N_2) = 0$ . Für alle  $x \in \Omega \setminus N$  gilt  $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M_1 + M_2$ . Das zeigt  $\|f+g\|_{L^\infty} = \text{ess sup} |f+g| \leq M_1 + M_2 = \|f\|_{L^\infty} + \|g\|_{L^\infty}$ . Ebenso gilt  $\|f \cdot g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty} \cdot \|g\|_{L^\infty}$  und  $\|\lambda \cdot f\|_{L^\infty} = |\lambda| \cdot \|f\|_{L^\infty}$ .

(4) Aus (3) folgt, dass  $L^\infty(\Omega)$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum ist und eine  $\mathbb{K}$ -Algebra, wie in der vorigen Aufgabe ausgeführt. Dasselbe gilt auch für  $L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$ .

(5) Die Ungleichung  $\text{ess sup } f \leq \sup f =: M$  gilt für jede Funktion  $f$ . Wir zeigen nun  $\text{ess sup } f \geq \sup f$  für jede stetige Funktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir nehmen  $M < \infty$  an; der Fall  $M = \infty$  verläuft anschließend genauso. Zu jedem noch so kleinen  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $x \in \Omega$  mit  $f(x) \geq M - \varepsilon/2$ . Da  $f$  stetig ist, existiert ein  $\delta > 0$ , sodass  $f > M - \varepsilon$  auf  $B(x, \delta)$  gilt. Wegen  $\text{vol}_n B(x, \delta) > 0$  muss demnach  $\text{ess sup } f > M - \varepsilon$  gelten. Da dies für alle  $\varepsilon > 0$  gilt, folgt  $\text{ess sup } f \geq M$ , wie behauptet.

☺ Für jede stetige Funktion  $f: \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  gilt  $\text{ess sup } f = \sup f$  und  $\text{ess inf } f = \inf f$ . Insbesondere folgt hieraus  $|f|_{\Omega} = \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ .

**Absolut integrierbare Funktionen** C441  
Erinnerung

**Definition C4D: absolut integrierbare Funktion**  
Eine messbare Funktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  heißt (absolut) **integrierbar**, wenn

$$\|f\|_{L^1} := \int_{\Omega} |f(x)| dx < \infty. \quad (\text{endliche } L^1\text{-Norm})$$

Die Menge aller absolut integrierbaren Funktionen auf  $\Omega$  ist

$$L^1 = L^1(\Omega) = L^1(\Omega, \mathbb{K}) := \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid \|f\|_{L^1} < \infty\}.$$

**Satz C4E: absolut integrierbare Funktion**  
Die Menge  $L^1(\Omega, \mathbb{K}) \subseteq \text{Abb}(\Omega, \mathbb{K})$  ist ein  $\mathbb{K}$ -Untervektorraum, denn für alle Funktionen  $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$  gelten die Un/Gleichungen

$$\begin{aligned} \|\lambda \cdot f\|_{L^1} &= |\lambda| \cdot \|f\|_{L^1}, \\ \|f + g\|_{L^1} &\leq \|f\|_{L^1} + \|g\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Hierauf ist das Integral  $L^1 \rightarrow \mathbb{K}: f \mapsto \int_{\Omega} f(x) dx$  definiert und  $\mathbb{K}$ -linear.

**Quadratisch integrierbare Funktionen** C442  
Erinnerung

**Definition C4F: quadratisch integrierbare Funktion**  
Eine Funktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  heißt **quadratisch integrierbar**, wenn

$$\|f\|_{L^2}^2 := \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < \infty. \quad (\text{endliche } L^2\text{-Norm})$$

Die Menge aller quadratisch integrierbaren Funktionen auf  $\Omega$  ist

$$L^2 = L^2(\Omega) = L^2(\Omega, \mathbb{K}) := \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid \|f\|_{L^2} < \infty\}.$$

**Satz C4G: quadratisch integrierbare Funktion**  
Die Menge  $L^2(\Omega, \mathbb{K}) \subseteq \text{Abb}(\Omega, \mathbb{K})$  ist ein  $\mathbb{K}$ -Untervektorraum dank

$$\begin{aligned} \|\lambda \cdot f\|_{L^2} &= |\lambda| \cdot \|f\|_{L^2}, \\ \|f + g\|_{L^2} &\leq \|f\|_{L^2} + \|g\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Wir haben  $\cdot: L^2 \times L^2 \rightarrow L^1$  dank Cauchy-Schwarz 11H (allgemein C4L):

$$\|f \cdot g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^2} \cdot \|g\|_{L^2}.$$

**Motivation zu Integralungleichungen** C443  
Ergänzung

Wir beschäftigen uns im Folgenden mit  $L^p$ -Normen und Ungleichungen nach Vorbild der zentralen Cauchy-Schwarz-Ungleichung (Satz 11H).  
Muss die Ingenieur:in das unbedingt wissen? Oder genügt es notfalls, eine freundliche Mathematiker:in zu fragen? Das hängt wie immer vom Anwendungsgebiet ab und den dort typischen Anforderungen...  
Im Allgemeinen hilft es, möglichst wirksame Werkzeuge zu kennen! Ein paar Worte zur Motivation scheinen mir daher angebracht.

Die Algebra lehrt zunächst das Lösen von gewissen **Gleichungen**, die Analysis erklärt und nutzt zudem vor allem **Ungleichungen**.  
Ich möchte sogar sagen: *Alle* Techniken der Analysis und Numerik beruhen letztlich auf Ungleichungen und (Fehler-)Abschätzungen, insbesondere bei allen Fragen zu Approximation und Konvergenz.  
Auch und ganz besonders für Integrale und Reihen wünschen wir uns daher möglichst vielseitige, bequeme und hilfreiche Abschätzungen.  
Die folgenden Definitionen erklären hierzu das nötige Vokabular, anschließend klären wir einige nützliche Ungleichungen.

**Lokal integrierbare Funktionen** C444  
Ergänzung

**Definition C4H: lokal integrierbare Funktion**  
Vorgegeben sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $1 \leq p < \infty$ . Wie üblich sei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ . Eine messbare Funktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  heißt  **$p$ -integrierbar**, wenn

$$\|f\|_{L^p}^p := \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty. \quad (\text{endliche } L^p\text{-Norm})$$

Für  $p = 1$  ist  $f$  absolut integrierbar, für  $p = 2$  quadratisch integrierbar, für  $p = \infty$  ersetzen wir das Integral durch das essentielle Supremum.  
Die Menge aller  $p$ -integrierbaren Funktionen auf  $\Omega$  ist

$$L^p = L^p(\Omega) = L^p(\Omega, \mathbb{K}) := \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid \|f\|_{L^p} < \infty\}.$$

Verlangen wir dies nur lokal, für alle Kompakta  $K \Subset \Omega$ , so erhalten wir

$$L^p_{\text{loc}}(\Omega) = L^p_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{K}) := \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid \|f\|_{L^p(K)} < \infty \text{ für alle } K \Subset \Omega\}.$$

Es genügt, dies auf Bällen  $K = \bar{B}(a, \varepsilon) \subseteq \Omega$  zu testen für  $a \in \Omega, \varepsilon > 0$ . Auf  $\Omega = \mathbb{R}^n$  reicht es, dies für  $K = \bar{B}(0, r)$  und  $r = 1, 2, 3, \dots$  zu testen.

**Vergleich der  $L^p$ -Funktionsräume** C445  
Ergänzung

Zwischen den  $L^p$ -Räumen bestehen folgende Beziehungen:

**Satz C4I: Vergleich der  $L^p$ -Räume**  
(1) Sei  $1 \leq p < q < \infty$ . Für  $f: \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  gelten die Abschätzungen

$$\|f\|_{L^p}^p \leq \text{vol}_n(\Omega) + \|f\|_{L^q}^q \quad \text{und} \quad \|f\|_{L^p}^p \leq \text{vol}_n(\Omega) \cdot \|f\|_{L^\infty}^p.$$

(2) Für  $1 < p < q < \infty$  und endliches Volumen  $0 < \text{vol}_n(\Omega) < \infty$ , insb. für alle Kompakta wie zum Beispiel  $\bar{B}(a, r)$ , gelten daher die Inklusionen

$$L^1(\Omega) \supseteq L^p(\Omega) \supseteq L^q(\Omega) \supseteq L^\infty(\Omega)$$

(3) Bei unendlichem Volumen, insbesondere für  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , gilt weder die Inklusion  $L^p(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$  noch die umgekehrte Inklusion  $L^p(\Omega) \supseteq L^q(\Omega)$ .

**Beispiel:** Für Fourier-Reihen spielt  $L^2([0, 2\pi])$  eine zentrale Rolle. Gemäß Satz C4I gilt hier  $L^1([0, 2\pi]) \supseteq L^2([0, 2\pi]) \supseteq L^\infty([0, 2\pi])$ .  
Die Fourier-Transformation nutzt entsprechend die Räume  $L^1(\mathbb{R})$  und  $L^2(\mathbb{R})$  und  $L^\infty(\mathbb{R})$ , doch hier gilt leider  $L^1(\mathbb{R}) \not\subseteq L^2(\mathbb{R}) \not\subseteq L^\infty(\mathbb{R})$ .

**Vergleich der  $L^p$ -Funktionsräume** C446  
Ergänzung

**Aufgabe:** Beweisen Sie (1) durch die Abschätzung  $|f|^p \leq 1 + |f|^q$ . Finden Sie Gegenbeispiele für die nicht geltenden Inklusionen (1, 2).  
**Lösung:** (1) Zwei Fälle: Für  $0 \leq a \leq 1$  gilt  $a^p \leq 1 \leq 1 + a^q$ . Für  $1 \leq a$  gilt  $1 \leq a^p \leq a^q$  wegen  $p \leq q$  und Monotonie der Funktion  $t \mapsto a^t = e^{t \ln a}$ . Integration von  $|f|^p \leq 1 + |f|^q$  über  $\Omega$  ergibt  $\|f\|_{L^p}^p \leq \text{vol}_n(\Omega) + \|f\|_{L^q}^q$ . Ist also  $\|f\|_{L^q}$  endlich, so auch  $\|f\|_{L^p}$ . Das bedeutet  $L^p(\Omega) \supseteq L^q(\Omega)$ .  
(2) Gegenbeispiele liefern Funktionen wie  $f(x) = |x|^{-n/q}$  (Satz C4A). Hierzu sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, nach Verschiebung  $\Omega \supseteq \bar{B}(0, r) =: K$  mit  $r > 0$ . Die Funktion  $f(x) = |x|^{-n/q} \mathbf{1}_K(x)$  ist nicht  $q$ -integrierbar,  $\|f\|_{L^q(\Omega)} = \infty$ , wohl aber  $p$ -integrierbar,  $\|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty$  für alle Exponenten  $p < q$ . Dies zeigt  $f \in L^p(\Omega)$  aber  $f \notin L^q(\Omega)$ , also  $L^p(\Omega) \not\subseteq L^q(\Omega)$ .  
(3) Wir nehmen zur Vereinfachung  $\Omega = \mathbb{R}^n$  an und setzen  $K = \bar{B}(0, 1)$ . Die Funktion  $f(x) = |x|^{-n/q} \mathbf{1}_K(x)$  erfüllt  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  aber  $f \notin L^q(\mathbb{R}^n)$ , wie bereits in (1) gesehen, somit gilt auch hier  $L^p(\mathbb{R}^n) \not\subseteq L^q(\mathbb{R}^n)$ .  
Für  $U = \mathbb{R}^n \setminus B(0, 1)$  und  $g(x) = |x|^{-n/p} \mathbf{1}_U(x)$  gilt  $\|g\|_{L^p} = \infty$  aber  $\|g\|_{L^q} < \infty$  für  $q > p$ , siehe Satz C4A, also  $g \notin L^p(\mathbb{R}^n)$  aber  $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ . Das zeigt  $L^p(\mathbb{R}^n) \not\supseteq L^q(\mathbb{R}^n)$ . (Allgemein:  $\text{vol}_n(\Omega) = \infty$  gelingt ähnlich.)

**Motivation zur Hölder-Minkowski-Ungleichung** C447  
Ergänzung

😊 Dank der  $\mathbb{K}$ -Vektorraumstruktur auf  $L^1 = L^1(\Omega, \mathbb{K})$  können wir Funktionen  $f, g \in L^1$  **linear kombinieren** und wissen  $\alpha f + \beta g \in L^1$ . Das Integral  $\int: L^1(\Omega, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  ist eine  $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung (A3L, A4B).  
Oft wollen / müssen wir Funktionen  $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  auch **multiplizieren**. Sei  $p, q \in [1, \infty]$  mit  $1/p + 1/q = 1$ , etwa  $(p, q) = (1, \infty), (2, 2), (\infty, 1)$ . Wir haben  $\cdot: L^p \times L^q \rightarrow L^1$  dank der **Hölder-Ungleichung** (C4L)

$$\|f \cdot g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}.$$

Für  $(p, q) = (1, \infty), (\infty, 1)$  ist die Hölder-Ungleichung leicht: Übung!  
Im Spezialfall  $p = q = 2$  ist dies die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.  
Wir haben  $+$ :  $L^p \times L^p \rightarrow L^p$  dank der **Minkowski-Ungleichung** (C4L)

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Für  $p = 1$  und  $p = \infty$  ist die Minkowski-Ungleichung leicht: Übung!  
Für  $1 < p < \infty$  werden wir sie anschließend ausführlich nachrechnen.  
😊 Diese allgemeinen Ungleichungen ersparen uns viel Arbeit, da wir nicht jedes mal erneut die Integrierbarkeit individuell prüfen müssen.

**Vektorräume und Vektornormen** C448  
Ergänzung

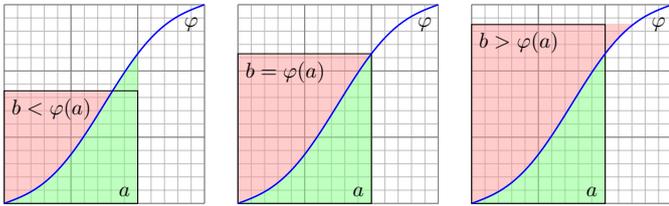
Über  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  kennen und lieben wir den  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V = \mathbb{K}^n$ . 1129  
Für  $u \in \mathbb{K}^n$  nutzen wir die euklidische Norm  $\|u\| := \sqrt{|u_1|^2 + \dots + |u_n|^2}$ . Diese erfreut sich folgender Eigenschaften für alle  $u, v \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$ :

(N1)  $\|v\| \geq 0$ , und  $\|v\| > 0$  für  $v \neq 0$  (positive Definitheit)  
(N2)  $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$  (Homogenität über  $\mathbb{K}$ )  
(N3)  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$  (Dreiecksungleichung)

Diese Rechenregeln nutzen wir oft. Sie verdienen einen Namen:

**Definition C4J: normierter  $\mathbb{K}$ -Vektorraum**  
Sei  $V$  ein Vektorraum über dem Körper  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ , zum Beispiel  $V = \mathbb{K}^n$ . Eine **Norm** auf  $V$  ist eine Abbildung  $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , die (N1–3) erfüllt.  
Dies induziert eine **Metrik**: Der Abstand zweier Vektoren  $u, v$  ist  $\|u - v\|$ . Die **Konvergenz**  $v_n \rightarrow v$  in  $(V, \|\cdot\|)$  ist definiert durch  $\|v_n - v\| \rightarrow 0$ .

**Beispiel:** In  $C(\Omega)$  mit Supremumsnorm  $|\cdot|_\Omega$  ist dies die gleichmäßige Konvergenz, mit der  $L^1$ -Norm  $\|\cdot\|_{L^1}$  hingegen die Konvergenz im Mittel. Minkowski besagt, dass  $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p})$  ein normierter Vektorraum ist.



Satz C4K: Youngs Integralungleichung

Sei  $\varphi: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{> 0}$  stetig, streng monoton, mit  $\varphi(0) = 0$  und  $\varphi(x) \nearrow \infty$  für  $x \nearrow \infty$ , zum Beispiel  $\varphi(x) = x^\alpha$  mit  $\alpha \in \mathbb{R}_{> 0}$ . Dann ist  $\varphi$  bijektiv, und ihre Umkehrfunktion  $\psi = \varphi^{-1}: \mathbb{R}_{> 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  hat dieselben Eigenschaften.

Für alle  $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  gilt dann, wie oben illustriert, folgende Ungleichung:

$$a \cdot b \leq \int_{x=0}^a \varphi(x) dx + \int_{y=0}^b \psi(y) dy$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn  $b = \varphi(a)$  gilt, siehe Skizze (und A423).

Beweis der Hölder-Ungleichung

**Beweis:** (1) Aus  $\|f\|_{L^p} = 0$  folgt  $f(x) = 0$  für fast alle  $x \in \Omega$  (Satz A4G), also  $f(x) \cdot g(x) = 0$ , somit  $\|f \cdot g\|_{L^1} = 0$ , und die Ungleichung ist erfüllt. Gleiches gilt falls  $\|g\|_{L^q} = 0$ . Im Folgenden sei  $\|f\|_{L^p} > 0$  und  $\|g\|_{L^q} > 0$ . Dank (0) haben wir in jedem Punkt  $x \in \Omega$  die Ungleichung

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p}} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q}} \leq \frac{|f(x)|^p}{p \|f\|_{L^p}^p} + \frac{|g(x)|^q}{q \|g\|_{L^q}^q}$$

Das Integral über  $x \in \Omega$  erhält diese Ungleichung dank Monotonie:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}} \int |f(x)g(x)| dx &\leq \frac{1}{p \|f\|_{L^p}^p} \int |f(x)|^p dx + \frac{1}{q \|g\|_{L^q}^q} \int |g(x)|^q dx \\ &= \frac{\|f\|_{L^p}^p}{p \|f\|_{L^p}^p} + \frac{\|g\|_{L^q}^q}{q \|g\|_{L^q}^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned}$$

Dies zeigt die ersehnte Hölder-Ungleichung  $\|f \cdot g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$ . Gilt  $|f(x)|^p = \text{const} \cdot |g(x)|^q$  für fast alle  $x \in \Omega$  gilt, so folgt Gleichheit  $\|f \cdot g\|_{L^1} = \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$ . Die Umkehrung führen wir nicht weiter aus.

(2) Für  $p = 1$  und  $p = \infty$  ist die Minkowski-Ungleichung leicht: Übung! Im Folgenden sei also  $1 < p, q < \infty$ . Wie zuvor gelte  $1/p + 1/q = 1$ .

Zusammenfassung: die  $L^p$ -Funktionsräume

Wie üblich sei  $\mathbb{K}$  der reelle Körper  $\mathbb{R}$  oder der komplexe Körper  $\mathbb{C}$ . Für  $1 \leq p \leq \infty$  und  $f: \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  definieren wir die  **$L^p$ -Norm**

$$\|f\|_{L^p} := \left[ \int_{x \in \Omega} |f(x)|^p dx \right]^{1/p} \quad \text{wobei} \quad \|f\|_{L^\infty} := \text{ess sup}_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

Die  **$L^p$ -integrierbaren** Funktionen bilden den  $\mathbb{K}$ -Vektorraum

$$L^p = L^p(\Omega) = L^p(\Omega, \mathbb{K}) := \{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid \|f\|_{L^p} < \infty \}.$$

Hier bedeutet  $L^1$  absolut integrierbar und  $L^\infty$  essentiell beschränkt. Gleichheit  $f = g$  in  $L^p(\Omega, \mathbb{K})$  bedeutet  $f(x) = g(x)$  für fast alle  $x \in \Omega$ . Für  $\emptyset < \text{vol}(\Omega) < \infty$  und  $1 < p < q < \infty$  gilt  $L^1 \supseteq L^p \supseteq L^q \supseteq L^\infty$ .

Für  $p, q \in [1, \infty]$  mit  $1/p + 1/q = 1$  erhalten wir die **bilineare Paarung**

$$\langle - | - \rangle: L^p \times L^q \rightarrow \mathbb{K} \quad \text{mit} \quad \langle f | g \rangle := \int_{x \in \Omega} \overline{f(x)} g(x) dx.$$

Das Produkt ist absolut integrierbar dank der **Hölder-Ungleichung:**

$$\|f \cdot g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$$

☺ Im Spezialfall  $p = q = 2$  ist dies die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

Vergleich der  $L^p$ - und  $\ell^p$ -Räume

Eine Abbildung  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}: k \mapsto f_k$  ist eine reelle Zahlenfolge  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . Für Fourier-Reihen betrachten wir  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ , also  $\Omega = \mathbb{Z}$  und  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Summen von Folgen verhalten sich wie Integrale von Funktionen:

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K} \qquad f: \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{K}$$

$$\|f\|_{\ell^1} := \sum_{x \in \Omega} |f(x)| \qquad \|f\|_{L^1} := \int_{x \in \Omega} |f(x)| dx$$

$$\|f\|_{\ell^2} := \left[ \sum_{x \in \Omega} |f(x)|^2 \right]^{1/2} \qquad \|f\|_{L^2} := \left[ \int_{x \in \Omega} |f(x)|^2 dx \right]^{1/2}$$

$$\|f\|_{\ell^p} := \left[ \sum_{x \in \Omega} |f(x)|^p \right]^{1/p} \qquad \|f\|_{L^p} := \left[ \int_{x \in \Omega} |f(x)|^p dx \right]^{1/p}$$

$$\|f\|_{\ell^\infty} := \sup_{x \in \Omega} |f(x)| \qquad \|f\|_{L^\infty} := \text{ess sup}_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

☺ Gut für uns: Es gelten im Wesentlichen dieselben Rechenregeln. Die Fourier-Isometrie  $\mathcal{F}: L^2([0, 2\pi], \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$  übersetzt verlustfrei zwischen Funktionen und Folgen! Wir führen dies in Kapitel I und J aus.

Die Hölder-Minkowski-Ungleichung

Satz C4L: Hölder-Minkowski-Ungleichung

(0) Sei  $1 < p < \infty$  und  $q = p/(p-1) > 1$ , sodass  $1/p + 1/q = 1$  gilt.

Satz C4K ergibt für  $\varphi(x) = x^{p-1}$  und  $\psi(y) = y^{q-1}$  die Ungleichung

$$a \cdot b \leq a^p/p + b^q/q$$

für alle  $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Gleichheit gilt genau dann, wenn  $a^p = b^q$ .

(1) Sei  $1 \leq p, q \leq \infty$  mit  $1/p + 1/q = 1$ , eventuell  $\{p, q\} = \{1, \infty\}$ .

Für  $f \in L^p(\Omega)$  und  $g \in L^q(\Omega)$  gilt  $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ , genauer:

$$\|f \cdot g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$$

Gleichheit gilt gdw  $|f(x)|^p = \text{const} \cdot |g(x)|^q$  für fast alle  $x \in \Omega$  gilt.

(2) Für  $1 \leq p \leq \infty$  und alle  $f, g \in L^p(\Omega)$  gilt  $f + g \in L^p(\Omega)$ , genauer:

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$$

Insbesondere ist  $L^p(\Omega, \mathbb{K})$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Norm  $\|-\|_{L^p}$ .

Genau dann gilt  $\|f\|_{L^p} = 0$ , wenn  $f(x) = 0$  für fast alle  $x \in \Omega$  gilt.

Beweis der Minkowski-Ungleichung

Seien  $f, g \in L^p$ . Die folgende grobe Abschätzung zeigt  $f + g \in L^p$ :

$$\begin{aligned} |f + g|^p &\leq (|f| + |g|)^p \leq (2 \max\{|f|, |g|\})^p \\ &= 2^p \max\{|f|^p, |g|^p\} \leq 2^p(|f|^p + |g|^p) \end{aligned}$$

Integration über  $x \in \Omega$  zeigt  $\|f + g\|_{L^p}^p \leq 2^p(\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p) < \infty$ .

Sei nun also  $0 < \|f + g\|_{L^p} < \infty$ . Wir nutzen die Hölder-Ungleichung:

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{L^p}^p &= \| |f + g|^p \|_{L^1} \\ &= \| |f + g| \cdot |f + g|^{p-1} \|_{L^1} \\ &\leq \| |f| \cdot |f + g|^{p-1} \|_{L^1} + \| |g| \cdot |f + g|^{p-1} \|_{L^1} \\ &\leq \|f\|_{L^p} \cdot \| |f + g|^{p-1} \|_{L^q} + \|g\|_{L^p} \cdot \| |f + g|^{p-1} \|_{L^q} \\ &= [\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}] \cdot \| |f + g|^{(p-1)q} \|_{L^1}^{1/q} \end{aligned}$$

Dank  $(p-1)q = p$  ist der letzte Faktor gleich  $\| |f + g|^{p-1} \|_{L^1}^{1/q} = \|f + g\|_{L^p}^{p/q}$ . Division ergibt die ersehnte Minkowski-Ungleichung für  $\|f + g\|_{L^p}$ .

Diskretes Analogon: die  $\ell^p$ -Folgenräume

Sei  $\Omega$  eine Menge, etwa  $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$  oder  $\Omega = \mathbb{N}$  oder  $\Omega = \mathbb{Z}$ .

Für  $1 \leq p \leq \infty$  und  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  definieren wir die  **$\ell^p$ -Norm**

$$\|f\|_{\ell^p} := \left[ \sum_{k \in \Omega} |f(k)|^p \right]^{1/p} \quad \text{wobei} \quad \|f\|_{\ell^\infty} := \sup_{k \in \Omega} |f(k)|.$$

Die  **$\ell^p$ -summierbaren** Folgen bilden den  $\mathbb{K}$ -Vektorraum

$$\ell^p = \ell^p(\Omega) = \ell^p(\Omega, \mathbb{K}) := \{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid \|f\|_{\ell^p} < \infty \}.$$

Demnach bedeutet  $\ell^1$  absolut summierbar,  $\ell^2$  quadratisch summierbar und  $\ell^\infty$  beschränkt. Für  $\Omega$  unendlich und  $1 \leq p < q \leq \infty$  gilt  $\ell^p \subsetneq \ell^q$ .

Für  $p, q \in [1, \infty]$  mit  $1/p + 1/q = 1$  erhalten wir die **bilineare Paarung**

$$\langle - | - \rangle: \ell^p \times \ell^q \rightarrow \mathbb{K} \quad \text{mit} \quad \langle f | g \rangle := \sum_{k \in \Omega} \overline{f(k)} g(k).$$

Das Produkt ist absolut summierbar dank der **Hölder-Ungleichung:**

$$\|f \cdot g\|_{\ell^1} \leq \|f\|_{\ell^p} \cdot \|g\|_{\ell^q}$$

☺ Im Spezialfall  $p = q = 2$  ist dies die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

Vergleich der  $L^p$ - und  $\ell^p$ -Räume

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung  $\|f \cdot g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^2} \cdot \|g\|_{L^2}$  und die Hölder-Minkowski-Ungleichung gelten nicht nur für Integrale, sondern wörtlich genauso für Summen und Reihen. Wir führen dies hier aus, als lehrreiche Übung zur Wiederholung und der sorgfältigen Argumentation.

**Übung:** (1) Wiederholen Sie die Definition von  $\|-\|_{L^p}$  und  $L^p(\Omega, \mathbb{K})$  und führen Sie die obige Definition von  $\|-\|_{\ell^p}$  und  $\ell^p(\Omega, \mathbb{K})$  aus.

(2) Warum ist  $L^p(\Omega, \mathbb{K})$  bzw.  $\ell^p(\Omega, \mathbb{K})$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum?

Die Fälle  $p = 1$  und  $p = \infty$  sind besonders leicht: Warum und wie?

Der Fall  $p = 2$  gelingt durch die Cauchy-Schwarz-Ungleichung: Wie?

Der allgemeine Fall  $1 < p < \infty$  benötigt Hölder-Minkowski (C4L):

Wiederholen Sie dies für  $L^p$  und beweisen Sie es analog für  $\ell^p$ .

(3) Für  $\emptyset < \text{vol}(\Omega) < \infty$  und  $1 < p < q < \infty$  gilt  $L^1 \supseteq L^p \supseteq L^q \supseteq L^\infty$ .

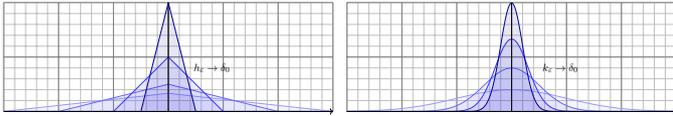
Diskret gilt  $\ell^1 \subsetneq \ell^q \subsetneq \ell^\infty$ , es genügt, dies für  $\Omega = \mathbb{N}$  zu diskutieren.

Hier unterscheiden sich die Räume  $L^p([0, 2\pi], \mathbb{C})$  und  $\ell^p(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$  für  $1 \leq p \leq \infty$ .

(4) Warum ist  $L^\infty(\Omega, \mathbb{K})$  eine  $\mathbb{K}$ -Algebra, nicht aber  $L^p(\Omega, \mathbb{K})$  für  $p < \infty$ ? Überraschung: Warum ist  $\ell^p(\Omega, \mathbb{K})$  eine  $\mathbb{K}$ -Algebra für alle  $1 \leq p \leq \infty$ ?

Kapitel D

Integrale und Grenzwerte



*Then I come along and try differentiating under the integral sign, and often it worked. So I got a great reputation for doing integrals, only because my box of tools was different from everybody else's, and they had tried all their tools on it before giving the problem to me.*  
 Richard Feynman (1918–1988), *Surely You're Joking, Mr. Feynman!* (1985)

Inhalt dieses Kapitels D

- 1 Vertauschen von Integral und Reihe
  - Absolute Konvergenz in  $L^1$
  - Integration von Potenzreihen
- 2 Vertauschen von Integral und Limes
  - Punktweise Konvergenz
  - Majorisierte Konvergenz
- 3 Vertauschen von Integral und Ableitung
  - Kompakte Integrationsbereiche
  - Beliebige Integrationsbereiche
- 4 Weitere Aufgaben und Anwendungen
  - Warnende Beispiele zur Vertauschung
  - Berechnung von Integralen und Reihen
- 5 Kalkül der Distributionen
  - Lösungen der Wärmeleitungsgleichung
  - Distributionen und ihre Rechenregeln

Wann vertauschen Integral und Limes?

Integration einer Reihe: Unter welchen Voraussetzungen gilt

$$\int_{\Omega} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right] dx = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \int_{\Omega} f_k(x) dx \right] ?$$

Stetigkeit des Integrals: Unter welchen Voraussetzungen gilt

$$\int_{\Omega} \left[ \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \right] dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \int_{\Omega} f_k(x) dx \right] ?$$

Ableitung des Integrals: Unter welchen Voraussetzungen gilt

$$\int_Y \left[ \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right] dy = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_Y f(x, y) dy \right] ?$$

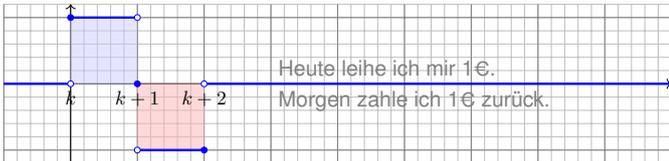
- ☺ Diese Rechentechniken sind oft hilfreich. Die wollen Sie nutzen.
  - ☹ Die Gleichungen gelten nicht immer! Das müssen Sie wissen.
  - ☺ Es gibt einfache Kriterien. Die sollen Sie beherrschen.
- Das zentrale Kriterium ist die majorisierte Integrierbarkeit.

Vorgehensweise

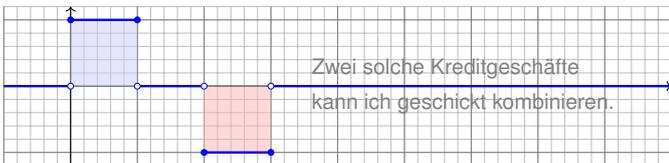
In Rechnungen möchten Sie oft Integral und Grenzwert vertauschen. In Anwendungen treten diese Umformungen häufig auf. Leider werden sie oft blind oder nach Gefühl angewendet, oder gar so getan, als gälten sie einfach immer. Das ist nicht richtig, wie wir an Beispielen sehen. Die Gleichungen gelten aber doch häufig genug, um nützlich zu sein, und zahlreiche Anwendungen illustrieren die Kraft dieser Methoden. Zur korrekten Verwendung benötigen Sie also geeignete Kriterien! Wir wollen daher in diesem Kapitel die Voraussetzungen erläutern und die ersehnten Rechenregeln ableiten. Als Mahnung zur Sorgfalt illustrieren einfache Gegenbeispiele, wann die Formeln nicht gelten. Als erste Warnung nenne ich folgenden beliebten Finanztrick: Am Tag 1 leihe ich mir 1 Euro, den ich dann am Tag 2 zurückzahle. Auch am Tag 2 leihe ich mir 1 Euro, den ich am Tag 3 zurückzahle. Dies setze ich nun unbegrenzt fort. Was ich leihe, zahle ich zurück... dennoch verschafft mir diese Reihe 1 Euro, den ich nie zurückzahle! Anschaulich: Die Schulden werden nach Unendlich verschoben. Vor dieser Methode möchte ich hier ausdrücklich warnen!

Kreative Kreditrechnung und Umordnungsschwindel

Kredit und Tilgung: Skizzieren Sie  $f_k = \mathbf{I}_{[k, k+1]} - \mathbf{I}_{[k+1, k+2]}$  für  $k \in \mathbb{N}$ .



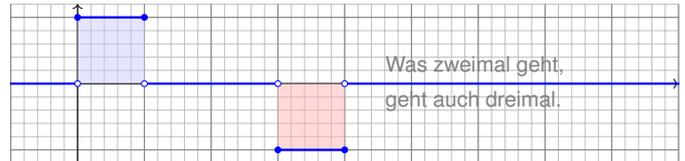
Offensichtlich gilt  $\int_{\mathbb{R}} f_k(x) dx = 0$ .



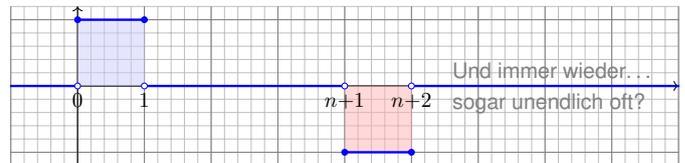
Auch für  $g_1 = f_0 + f_1$  ist das Integral Null.

Kreative Kreditrechnung und Umordnungsschwindel

Graph zu  $g_2 = f_0 + f_1 + f_2$ :



Graph zur Teleskopsumme  $g_n = f_0 + f_1 + \dots + f_n$ :



Das Integral  $\int_{\mathbb{R}} g_n(x) dx$  ist jeweils Null. Was passiert für  $n \rightarrow \infty$ ?

Kreative Kreditrechnung und Umordnungsschwindel

**Aufgabe:** Man berechne und vergleiche und bestaune:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[ \int_{\mathbb{R}} f_k(x) dx \right] \stackrel{?}{=} \int_{\mathbb{R}} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right] dx$$

**Lösung:** (a) Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  sehen wir (rechnerisch oder graphisch):

$$\int_{\mathbb{R}} f_k(x) dx = 0 \implies \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \int_{\mathbb{R}} f_k(x) dx \right] = 0$$

(b) Andererseits kennen wir für jedes  $x \in \mathbb{R}$  die Teleskopsumme

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x) = \mathbf{I}_{[0,1]}(x) - \mathbf{I}_{[n+1, n+2]}(x) \rightarrow \mathbf{I}_{[0,1]}(x).$$

Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  und  $n \rightarrow \infty$  gilt daher punktweise Konvergenz:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \mathbf{I}_{[0,1]}(x) \implies \int_{\mathbb{R}} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right] dx = 1$$

Kreative Kreditrechnung und Umordnungsschwindel

☹ Integral und Reihe vertauschen im Allgemeinen nicht! Dies ist ein sehr einfaches, doch frappierendes Beispiel: Für die Funktionen  $f_k = \mathbf{I}_{[k, k+1]} - \mathbf{I}_{[k+1, k+2]}$  gilt

$$\int_{\Omega} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right] dx \neq \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \int_{\Omega} f_k(x) dx \right].$$

Anschauliche Ursache: „Masse verschwindet nach Unendlich“.

⚠ Im Kreditbeispiel: Wir leihen uns Geld, das wir nie zurückzahlen. Wir vertrauen immer auf morgen, doch lösen das Versprechen nie ein. (Schneeballsystem, Ponzi-Betrug, „robbing Peter to pay Paul“)

⚠ In den meisten Anwendungen sollte diese Pathologie nicht auftreten. Wir müssen dazu die Erhaltung der Masse explizit sicherstellen, gegebenenfalls separat nachweisen oder ausdrücklich fordern.

☺ Mathematisch garantieren wir dies durch Fubini D1A oder allgemeiner den Satz von der majorisierten Konvergenz D2D. Damit lässt sich das Problem präzise benennen und lösen.

**Aufgabe:** Zeigen Sie  $\int_{\Omega} \sum_{k=0}^{\infty} f_k = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Omega} f_k$  für  $f_k : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ .  
**Lösung:** Dank Linearität des Integrals gilt für endliche Summen:

$$I_n := \int_{\Omega} \sum_{k=0}^n f_k = \sum_{k=0}^n \int_{\Omega} f_k$$

Dank  $f_k \geq 0$  gilt monotone Konvergenz  $\sum_{k=0}^n f_k \nearrow \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ , also

$$I_n = \int_{\Omega} \sum_{k=0}^n f_k \nearrow \int_{\Omega} \sum_{k=0}^{\infty} f_k =: A.$$

Aus  $\int_{\Omega} f_k \geq 0$  folgt ebenso die monotone Konvergenz der Reihe

$$I_n = \sum_{k=0}^n \int_{\Omega} f_k \nearrow \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Omega} f_k =: B.$$

Die Folge  $I_n$  kann nur einen Grenzwert haben! Wir folgern  $A = B$ :

$$\int_{\Omega} \sum_{k=0}^{\infty} f_k = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Omega} f_k$$

☺ Alles wird gut! Dies wollen wir nun als Satz zusammenfassen.

**Satz D1A:** Fubini für absolut konvergente Reihen

Sei  $f_0, f_1, f_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  eine Folge messbarer Funktionen. Dann gilt

$$\int_{\Omega} \sum_{k=0}^{\infty} |f_k| = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Omega} |f_k|.$$

Ist dieser Wert endlich, so ist  $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$  in fast allen Punkten  $x \in \Omega$  absolut konvergent, zudem über  $\Omega$  absolut integrierbar, und es gilt

$$\int_{\Omega} \sum_{k=0}^{\infty} f_k = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Omega} f_k.$$

☺ Beachten Sie die Parallele: Der Satz C1E von Fubini besagt dasselbe für Integrale.

**Beweis:** Die erste Gleichung haben wir gezeigt. Die Punkte  $x \in \Omega$  mit  $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)| = +\infty$  bilden eine Nullmenge  $N$ . Für alle  $x \in \Omega \setminus N$  gilt  $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)| < +\infty$ , und wir definieren  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$  durch diese absolut konvergente Reihe. Für  $x \in N$  setzen wir  $f(x) = 0$ . Die zweite Gleichung gilt für  $f_k : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ . Sie folgt für reelle Funktionen durch Zerlegung  $f_k = f_k^+ - f_k^-$ , und sodann für komplexe Funktionen durch Zerlegung  $f_k = \operatorname{Re} f_k + i \operatorname{Im} f_k$ .

Integration von Potenzreihen

**Aufgabe:** Gegeben sei eine konvergente Potenzreihe

$$f : ]-\rho, \rho[ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

- (1) Entwickeln Sie  $F(x) = \int_{t=0}^x f(t) dx$  ebenso als Potenzreihe.
- (2) Konkretes Beispiel: Entwickeln und integrieren Sie  $f(x) = e^{-x^2}$ .

**Lösung:** (1) Dank D1A dürfen wir Integral und Reihe vertauschen:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{t=0}^x f(t) dt = \int_{t=0}^x \left[ \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right] dt \stackrel{D1A}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \int_{t=0}^x a_k t^k dt \right] \\ &\stackrel{HDI}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k-1}}{k} x^k \end{aligned}$$

- ☺ Die Vertauschung gilt hier dank absoluter Konvergenz auf  $[0, x]$ .
- ☺ Probe durch termweises ableiten. (2) Konkretes Beispiel: [B145](#)

$$f(x) = e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k} \stackrel{()}{\implies} F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} x^{2k+1}.$$

Wann vertauschen Integral und Reihe?

Für  $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$  möchten wir Integral und Reihe vertauschen:

$$\int_{\Omega} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right] dx \stackrel{?}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \int_{\Omega} f_k(x) dx \right]$$

Hierfür haben wir folgende hinreichende Kriterien:

- Gleichheit gilt für  $f_k \geq 0$ : monotone Konvergenz! [A309](#)
- Gleichheit gilt für  $\int \sum |f_k| < \infty$  bzw. für  $\sum \int |f_k| < \infty$ , [D106](#)
- insbesondere für konvergente Potenzreihen,  $f_k(x) = a_k x^k$ . [D107](#)

- ⚠ Andernfalls ist Vorsicht geboten: Vertauschbarkeit gilt nicht immer!
- ⚠ Diese Kriterien sind hinreichend, aber i.A. nicht notwendig. [D429](#)

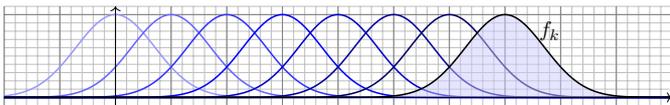
Im obigen Gegenbeispiel gilt  $\int f_k \neq \int \sum f_k$ . Die Konvergenz ist hier nicht monoton, denn  $f_k$  hat einen positiven und einen negativen Teil. Zudem gilt  $\int |f_k| = \int |f_n| = \infty$ . Unsere einfachen Kriterien sind hier demnach nicht anwendbar und lassen keinen Schluss zu. Wir haben daher  $\int f_k$  und  $\int \sum f_k$  getrennt ausgerechnet, um explizit vergleichen zu können: Bemerkenswerterweise gilt  $\sum_{k=0}^{\infty} (\int_{\mathbb{R}} f_k(x) dx) = 0$ , aber  $\int_{\mathbb{R}} (\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)) dx = 1$ . Konkrete Gegen/Beispiele wie diese sind lehrreich. Rechnen reinigt die Seele! Sätze klären und ordnen Phänomene und liefern universelle Werkzeuge.

Punktweise Konvergenz einer Funktionenfolge

**Definition D2A:** punktweise Konvergenz

Wir sagen, die Funktionenfolge  $f_k : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  **konvergiert punktweise** gegen die Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , wenn  $f_k(x) \rightarrow f(x)$  für jedes  $x \in \Omega$  gilt

- Aufgabe:** Skizzieren Sie  $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto e^{-(x-k)^2}$  für  $k \in \mathbb{N}$ .  
 (1) Konvergiert  $f_k$  punktweise? Gegen welche Grenzfunktion  $f$ ?  
 (2) Vergleichen Sie  $\int_{\mathbb{R}} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx$  und  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x) dx$ .



**Lösung:** (1) Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  und  $k \rightarrow \infty$  gilt  $f_k(x) \rightarrow 0$ . (2) Daher gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx = \int_{\mathbb{R}} 0 dx = 0 \neq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}$$

⚠ Anschauliche Ursache: „Masse verschwindet nach Unendlich“.

Punktweise Konvergenz einer Funktionenfolge

Dasselbe Problem entsteht für jede integrierbare Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) \rightarrow 0$  für  $|x| \rightarrow \infty$ , etwa die Indikatorfunktion  $f = \mathbf{I}_Q$  zu einer endlichen Quader  $Q$ , und ihre Verschiebungen  $f_k(x) = f(x - kv)$ .

In vielen Rechnungen stehen wir vor der Frage: Wie verhalten sich die Integrale  $\int_{\Omega} f_k$  und  $\int_{\Omega} f$  bei punktweiser Konvergenz  $f_k \rightarrow f$ ?

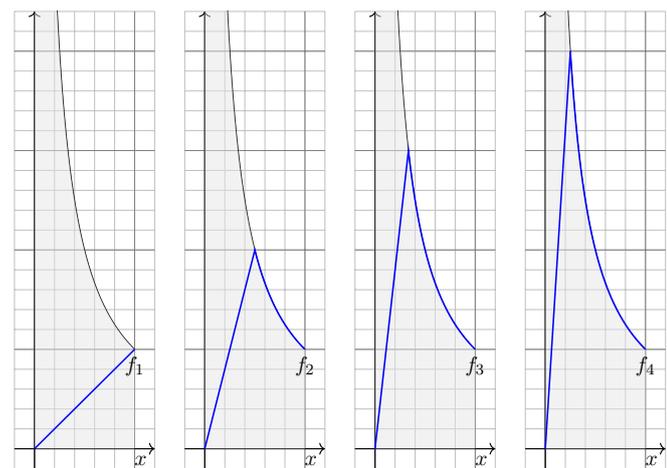
- ☹ Stetigkeit und Integrierbarkeit können verloren gehen!
- Die nachfolgende Aufgabe zeigt ein einfaches Beispiel.
- ☺ Messbarkeit ist unkaputtbar! Sind alle  $f_k$  messbar und konvergiert  $f_k \rightarrow f$  punktweise, dann ist auch die Grenzfunktion  $f$  messbar. [A316](#)

☺ Monotone Konvergenz funktioniert immer! [A309](#)  
 Aus monotoner Konvergenz  $0 \leq f_k \nearrow f$  folgt stets  $\int_{\Omega} f_k \nearrow \int_{\Omega} f$ .

☹ Im Allgemeinen folgt aus  $f_k \rightarrow f$  jedoch nicht  $\int_{\Omega} f_k \rightarrow \int_{\Omega} f$ .  
 Typisches Problem: „Masse verschwindet nach Unendlich“.

Unter welchen Voraussetzungen können wir  $\int_{\Omega} f_k \rightarrow \int_{\Omega} f$  schließen?  
 Als praktisches Kriterium werden wir die majorisierte Integrierbarkeit nutzen. Zur Motivation stelle ich ein paar warnende Beispiele voran.

Stetigkeit und Integrierbarkeit sind zerbrechlich!



Stetigkeit und Integrierbarkeit sind zerbrechlich!

**Aufgabe:** Skizzieren Sie für  $k = 1, 2, 3, \dots$  die Funktion

$$f_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} k^2 x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{k}, \\ \frac{1}{x} & \text{für } \frac{1}{k} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

- (1) Bestimmen Sie punktweise die Grenzfunktion  $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ .
- (2) Ist jede Funktion  $f_k$  stetig? integrierbar? und die Grenzfunktion  $f$ ?

**Lösung:** (1) Für festes  $x \in [0, 1]$  finden wir den Grenzwert

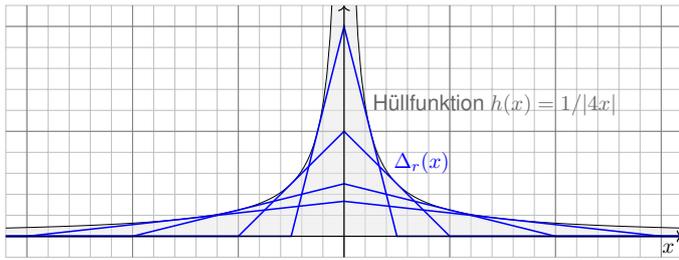
$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x) := \begin{cases} 1/x & \text{für } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(2) Jede der Funktionen  $f_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig und somit integrierbar. Die Grenzfunktion  $f$  hingegen ist weder stetig noch absolut integrierbar.

- ⚠ Sind alle Funktionen  $f_k$  stetig bzw. integrierbar, so kann man nicht auf die Stetigkeit bzw. Integrierbarkeit der Grenzfunktion  $f$  schließen!
- ⚠ Selbst wenn alle  $f_k$  und die Grenzfunktion  $f$  integrierbar sind, wie oben, gilt im Allgemeinen nicht die Konvergenz der Integralfolge!

**Aufgabe:** Skizzieren Sie für  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  die Dreiecksfunktion

$$\Delta_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \Delta_r(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| \geq r, \\ \frac{r-|x|}{r^2} & \text{für } |x| \leq r. \end{cases}$$



- (1) Berechnen Sie  $\lim_{r \rightarrow \infty} \Delta_r(x)$ . Gilt  $\lim_{r \rightarrow \infty} \int \Delta_r(x) dx = \int \lim_{r \rightarrow \infty} \Delta_r(x) dx$ ?
- (2) Berechnen Sie  $\lim_{r \rightarrow 0} \Delta_r(x)$ . Gilt  $\lim_{r \rightarrow 0} \int \Delta_r(x) dx = \int \lim_{r \rightarrow 0} \Delta_r(x) dx$ ?

**Lösung:** Für jedes  $r > 0$  gilt  $\int_{\mathbb{R}} \Delta_r(x) dx = 1$ .

(1) Für festes  $x \in \mathbb{R}$  und  $r \rightarrow \infty$  finden wir den Grenzwert

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Delta_r(x) = 0.$$

Die Grenzfunktion hat daher Integral 0. Demnach gilt:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int \Delta_r(x) dx = 1 \neq 0 = \int \lim_{r \rightarrow \infty} \Delta_r(x) dx$$

(2) Für festes  $x \in \mathbb{R}$  und  $r \rightarrow 0$  finden wir den Grenzwert

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Delta_r(x) = \Delta_0(x) := \begin{cases} \infty & \text{für } x = 0, \\ 0 & \text{für } x \neq 0. \end{cases}$$

Die Grenzfunktion hat daher Integral 0. Demnach gilt:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int \Delta_r(x) dx = 1 \neq 0 = \int \lim_{r \rightarrow 0} \Delta_r(x) dx$$

⚠ Die Ursache des Problems ist in beiden Fällen anschaulich klar: Masse „verschwindet nach Unendlich“ und fehlt daher im Integral.

**Definition D2B:** majorisierte Integrierbarkeit

Sei  $(f_i)_{i \in I}$  eine Familie messbarer Funktionen  $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $i \in I$ . Wir nennen  $h : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  **Majorante**, wenn  $|f_i| \leq h$  für alle  $i \in I$  gilt. Die Familie heißt **majorisiert integrierbar**, wenn eine integrierbare Majorante existiert, also  $h : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  mit  $|f_i| \leq h$  und  $\int_{\Omega} h < \infty$ .

- 😊 Die Integrierbarkeit  $\int_{\Omega} h < \infty$  der Majorante garantiert, dass keine Masse nach Unendlich verschwinden kann.
- 😊 Aus der Majoration  $|f_i| \leq h$  folgt  $\int_{\Omega} |f_i| \leq \int_{\Omega} h < \infty$ , insbesondere ist jede einzelne der Funktionen  $f_i$  integrierbar.
- ⚠ Selbst wenn jede einzelne Funktion  $f_i$  integrierbar ist, folgt daraus noch nicht, dass die gesamte Familie  $(f_i)_{i \in I}$  majorisiert integrierbar ist!
- Beispiel:** Zu  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  sei  $\Delta_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \max(0, \frac{r-|x|}{r^2})$ . Zur Familie  $(\Delta_r)_{r \in \mathbb{R}_{>0}}$  ist  $h(x) = 1/(4|x|)$  eine Majorante. Dies ist sogar die kleinste Majorante, denn  $\Delta_{2|x|}(x) = h(x)$ . Die Familie  $(\Delta_r)_{r \in \mathbb{R}_{>0}}$  ist daher nicht majorisiert integrierbar.

Das vorige Beispiel ist durchaus typisch:

**Proposition D2C:** Hüllfunktion

Eine Folge  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  messbarer Funktionen  $f_0, f_1, f_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  ist genau dann majorisiert integrierbar, wenn ihre **Hüllfunktion**

$$h = \sup_{k \in \mathbb{N}} |f_k| : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto h(x) = \sup_{k \in \mathbb{N}} |f_k(x)|,$$

absolut integrierbar ist, also  $\int_{\Omega} h < \infty$  erfüllt.

**Beweis:** Mit  $f_k$  ist auch  $|f_k|$  messbar, ebenso  $h_k = \max\{|f_0|, \dots, |f_k|\}$ . Somit ist auch die obige Hüllfunktion  $h := \lim h_k = \sup |f_k|$  messbar. Wegen  $|f_k| \leq h$  ist dies eine Majorante, und zwar die kleinst mögliche. Damit ist die behauptete Äquivalenz klar dank Monotonie des Integrals.

**Beispiel:** Für die wandernden Glockenkurven  $f_a(x) = s e^{-(x-a)^2}$  mit  $a \in \mathbb{R}$  ist die Hüllfunktion  $h = 1$ : Man betrachte hierzu obige Skizze. Die Familie  $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$  ist also nicht majorisiert integrierbar.

Unter welchen Vorsichtsmaßnahmen gilt folgende nützliche Formel?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx = \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

**Satz D2D:** majorisierte Konvergenz, Lebesgue 1901

- Sei  $f_0, f_1, f_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  eine Folge messbarer Funktionen.
- (1) Konvergiert  $f_n$  punktweise gegen  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , so ist auch  $f$  messbar.
- (2) Existiert eine **integrierbare Majorante**  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , mit  $|f_n| \leq h$  und  $\int_{\Omega} h < \infty$ , so ist  $f$  int'bar, es gilt  $\int_{\Omega} |f_n - f| \rightarrow 0$  und somit  $\int_{\Omega} f_n \rightarrow \int_{\Omega} f$ .
- 😊 Dies ist eine nützliche Stetigkeitseigenschaft des Integrals!
- ⚠ Die punktweise Konvergenz (1) allein genügt nicht, siehe Beispiele. Die integrierbare Majorante (2) ist daher wesentliche Voraussetzung: Die Majorante verhindert, dass Masse nach Unendlich verschwindet! In den obigen Beispielen war genau dies die Ursache des Problems.
- 😊 Anwendungsbeispiel:  $\text{vol}(\Omega) < \infty$  und  $|f_n| \leq M \in \mathbb{R}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

**Nachrechnen:** (1) Monotone Grenzwerte messbarer Funktionen sind messbar. [A309](#)  
Alle  $f_n$  sind messbar, also auch  $f_{n,k} := \min\{f_n, \dots, f_k\}$  und  $f_{n,k} \searrow g_n := \inf_{k \geq n} f_k$ . Es gilt  $g_n \nearrow \lim g_n = \lim \inf f_n = \lim f_n = f$  nach Voraussetzung, also ist auch  $f$  messbar.

(2) Wir beginnen mit der Ungleichung  $0 \leq |f_n - f| = |(f_n - f)| \leq |f_n - f|$ . Wir zeigen nun, dass die rechte Seite  $|f_n - f|$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen Null strebt. Die folgende Rechnung ist technisch, aber jeder einzelne Schritt ist leicht.

**Lemma von Fatou:** Sind  $f_n : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  messbar, dann gilt  $\int \lim \inf f_n \leq \lim \inf \int f_n$ .

**Beweis des Lemmas:** Für  $g_n := \inf_{k \geq n} f_k$  gilt  $g_n \leq f_n$  und  $g_n \nearrow g = \lim \inf f_n$ , also

$$\int \lim \inf f_n = \int \lim g_n \stackrel{\text{Mk}}{\text{A30}} \lim \int g_n = \lim \inf \int g_n \leq \lim \inf \int f_n.$$

**Beweis des Satzes der majorisierten Konvergenz:** Es gelte  $f_n \rightarrow f$  (zumindest fast überall). Aus  $|f_n| \leq h$  folgt  $|f| \leq h$  (fast überall), somit  $|f - f_n| \leq |f| + |f_n| \leq 2h$ . Mit Fatou folgt:

$$\begin{aligned} \int 2h &= \int \lim \inf (2h - |f_n - f|) \leq \lim \inf \int (2h - |f_n - f|) \\ &= \lim \inf \left( \int 2h - \int |f_n - f| \right) = \int 2h - \lim \sup \int |f_n - f| \end{aligned}$$

Wir setzen  $\int 2h$  als endlich voraus. Daher können wir diesen Wert auf beiden Seiten subtrahieren. Wir erhalten  $\lim \sup \int |f_n - f| \leq 0$ . Mit  $|f_n - f| \geq 0$  folgt schließlich  $\lim \int |f_n - f| = 0$ .

**Beispiel:** Sei  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge messbarer Funktionen  $g_k : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$\int_{\Omega} \sum_{k=0}^{\infty} |g_k| = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Omega} |g_k| < \infty.$$

Dank majorisierter Konvergenz erhalten wir erneut

$$\int_{\Omega} \sum_{k=0}^{\infty} g_k = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Omega} g_k.$$

Für  $n \rightarrow \infty$  gilt (fast überall) punktweise Konvergenz

$$f_n = \sum_{k=0}^n g_k \rightarrow f = \sum_{k=0}^{\infty} g_k.$$

Zudem ist  $h = \sum_{k=0}^{\infty} |g_k|$  eine Majorante für  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , und somit

$$\int_{\Omega} f_n = \int_{\Omega} \sum_{k=0}^n g_k \rightarrow \int_{\Omega} f = \int_{\Omega} \sum_{k=0}^{\infty} g_k.$$

Für  $f_n \rightarrow f$  möchten wir Integral und Limes vertauschen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx \stackrel{?}{=} \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

Dies ist eine starke und nützliche Stetigkeitseigenschaft des Integrals!

Hierfür haben wir folgende hinreichende Kriterien:

- Gleichheit gilt bei monotoner Konvergenz  $0 \leq f_n \nearrow f$ , [A309](#)
- bei majorisierter Konvergenz  $f_n \rightarrow f$  mit  $|f_n| \leq h$  und  $\int_{\Omega} h < \infty$ ,
- insbesondere, wenn  $\text{vol}(\Omega) < \infty$  und  $|f_n| \leq M \in \mathbb{R}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

- 😊 Dies verhindert, dass Masse nach Unendlich verschwindet.
- 😊 Sei  $h : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  integrierbar. Auf der Teilmenge aller messbaren Funktionen  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  mit Schranke  $|f| \leq h$  ist die Zuordnung  $f \mapsto \int_{\Omega} f$  folgenstetig: Aus punktweiser Konvergenz  $f_n \rightarrow f$  folgt  $\int_{\Omega} f_n \rightarrow \int_{\Omega} f$ .
- ⚠ Andernfalls ist Vorsicht geboten: Vertauschbarkeit gilt nicht immer! Wie zuvor gesehen können selbst einfache Beispiele fehlschlagen.

Ein **parameterabhängiges Integral** ist von der Form

$$F(x) = \int_Y f(x, y) dy \quad \text{mit } f: X \times Y \rightarrow \mathbb{C}.$$

Beispiele: (1) Wir kennen dies bereits von **Doppelintegralen**

$$\int_X \int_Y f(x, y) dy dx = \int_X F(x) dx.$$

(2) Das **Newton-Potential** einer Massenverteilung  $\rho: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  ist

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit } F(x) = \int_{y \in \mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)}{|y-x|} dy.$$

(3) Die **Fourier-Transformierte** einer Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ist

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit } F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y=-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} f(y) dy.$$

Ist  $F$  stetig? diff'bar? Wann dürfen wir  $\partial_x$  unter Integral ziehen?

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_Y f(x, y) dy \stackrel{?}{=} \int_Y \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) dy$$

Etwas allgemeiner und noch nützlicher sind Normalbereiche:

**Satz D3B: Leibniz-Regel für Parameterintegrale**

Seien  $g, h: [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit  $g \leq h$ . Auf dem Normalbereich

$$B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_0 \leq x \leq x_1, g(x) \leq y \leq h(x) \}$$

sei  $f: B \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Integration nach  $y$  ergibt die stetige Funktion

$$F: [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit } F(x) := \int_{y=g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy.$$

Sind zudem  $f, g, h$  stetig diff'bar bezüglich  $x$ , so auch  $F$ , und es gilt

$$F'(x) = h'(x) f(x, h(x)) - g'(x) f(x, g(x)) + \int_{y=g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy$$

☺ Bei festen Grenzen  $g(x) = y_0$  und  $h(x) = y_1$  erhalten wir Satz D3A.

☺ Als Spezialfall enthält Satz D3B den HDI:  $\frac{d}{dx} \int_{y=a}^x f(y) dy = f(x)$ .

Alles bleibt einfach, solange wir über Kompakta integrieren:

**Satz D3c: Parameterintegrale über Kompakta**

Sei  $X \subseteq \mathbb{R}^p$  offen,  $Y \subseteq \mathbb{R}^q$  kompakt. Ist  $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$  stetig, so auch

$$F: X \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit } F(x) := \int_Y f(x, y) dy.$$

Ist zudem  $f$  stetig diff'bar bezüglich  $x_j$ , so auch  $F$ , und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_j} F(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_Y f(x, y) dy = \int_Y \frac{\partial}{\partial x_j} f(x, y) dy.$$

In diesem Falle dürfen wir also die Ableitung unter das Integral ziehen.

☺ Die Stetigkeit von  $f$  bzw.  $\frac{\partial f}{\partial x}$  sind naheliegende Voraussetzungen.

☺ Die Kompaktheit von  $Y$  verhindert, dass Masse verschwindet!

Dies ist ein Spezialfall der noch allgemeineren Sätze D3D und D3E zur Stetigkeit und Ableitung von Parameterintegralen: Falls  $Y$  nicht kompakt ist, benötigen wir majorisierte Integrierbarkeit.

Wann dürfen wir Grenzwerte unter das Integral ziehen?

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_Y f(x, y) dy \stackrel{?}{=} \int_Y \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) dy = \int_Y f(x_0, y) dy$$

**Satz D3d: Stetigkeit von Parameterintegralen**

Sei  $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $X \subseteq \mathbb{R}^p$  offen und  $Y \subseteq \mathbb{R}^q$ . Zudem existiere

$$F(x) := \int_Y f(x, y) dy \quad \text{für jedes } x \in X.$$

Für die Stetigkeit von  $F: X \rightarrow \mathbb{C}$  haben wir folgende Kriterien:

- Sie gilt, wenn  $f$  stetig ist und  $Y$  kompakt, oder allgemeiner,
  - wenn  $f$  bezüglich  $x$  stetig ist und über  $Y$  majorisiert integrierbar.
- Majorante  $h: Y \rightarrow [0, \infty]$  mit  $|f(x, y)| \leq h(y)$  und  $\int_Y h(y) dy < \infty$

In diesem Fall dürfen wir den Grenzwert unter das Integral ziehen:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_Y f(x, y) dy \stackrel{!}{=} \int_Y \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) dy = \int_Y f(x_0, y) dy.$$

Wir beginnen mit Parameterintegralen der einfachsten Bauart:

**Satz D3A: Parameterintegrale auf Rechtecken**

Ist  $f: [x_0, x_1] \times [y_0, y_1] \rightarrow \mathbb{C}$  stetig, so auch die Funktion

$$F: [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit } F(x) := \int_{y=y_0}^{y_1} f(x, y) dy.$$

Ist zudem  $f$  stetig diff'bar bezüglich  $x$ , so auch  $F$ , und es gilt

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_{y=y_0}^{y_1} f(x, y) dy = \int_{y=y_0}^{y_1} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) dy.$$

In diesem Falle dürfen wir also die Ableitung unter das Integral ziehen.

☺ Die Stetigkeit von  $f$  bzw.  $\frac{\partial f}{\partial x}$  sind naheliegende Voraussetzungen.

☺ Die Kompaktheit von  $[y_0, y_1]$  verhindert, dass Masse verschwindet!

Dies ist ein Spezialfall der viel allgemeineren Sätze D3D und D3E zur Stetigkeit und Ableitung von Parameterintegralen. Wir beweisen sie nachfolgend dank majorisierter Integrierbarkeit.

☺ Wie zuvor können wir die Ableitung unter das Integral ziehen. Als Randterme kommen die Ableitungen der Intervallgrenzen hinzu!

**Beweis:** Zur Vereinfachung sei  $f$  auf ganz  $\mathbb{R}^2$  fortgesetzt zu einer stetigen Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ . Als Hilfsfunktion definieren wir

$$G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{durch } G(x, u, v) := \int_{y=u}^v f(x, y) dy.$$

Sie ist stetig in  $u, v, x$  dank Satz D3A, und sogar stetig differenzierbar nach  $u, v, x$  dank Satz D3A für  $x_0 \leq x \leq x_1$  und  $g(x) \leq u \leq v \leq h(x)$ . Somit ist die Verkettung  $F(x) = G(x, g(x), h(x))$  stetig in  $x$ , sogar  $C^1$ .

Für die Ableitung  $F'$  finden wir dank Kettenregel, Satz D3A und HDI:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{\partial G}{\partial x}(x, g(x), h(x)) + \frac{\partial G}{\partial u}(\dots) \frac{dg}{dx}(x) + \frac{\partial G}{\partial v}(\dots) \frac{dh}{dx}(x) \\ &= \int_{y=g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy - f(x, g(x)) g'(x) + f(x, h(x)) h'(x) \end{aligned}$$

☺ Für diese etwas längliche Ableitung genügen Geduld und Sorgfalt. Diese Leibniz-Formel nützt in vielen Rechnungen, zum Beispiel [N247](#).

**Beweis:** (1) Stetigkeit von  $F$  gilt dank majorisierter Konvergenz D2D: Der Ball  $\bar{B}(x_0, r) \subseteq X$  ist kompakt, ebenso  $K = \bar{B}(x_0, r) \times Y$ , hierauf ist die stetige Funktion  $f$  beschränkt,  $f(x, y) \leq h(y) := M = \max\{|f|_K\}$ , also  $f(x, -)$  majorisiert integrierbar dank  $\int_Y h(y) dy = M \text{vol}(Y) < \infty$ .

(2) Sei  $p = 1$  und  $x \in [a, b] \subseteq X$ . Dank HDI und Fubini berechnen wir

$$\begin{aligned} F(x) - F(a) &\stackrel{\text{HDI}}{=} \int_Y f(x, y) - f(a, y) dy \stackrel{\text{HDI}}{=} \int_Y \int_{t=a}^x \frac{\partial}{\partial t} f(t, y) dt dy \\ &\stackrel{\text{Fub}}{\stackrel{\text{CIE}}{=}} \int_{[a, x] \times Y} \frac{\partial}{\partial t} f(t, y) d(t, y) \stackrel{\text{Fub}}{\stackrel{\text{CIE}}{=}} \int_{t=a}^x \int_Y \frac{\partial}{\partial t} f(t, y) dy dt \end{aligned}$$

Nochmals dank HDI und Stetigkeit von  $\partial_1 f$  folgt hieraus

$$F'(x) \stackrel{\text{HDI}}{=} \int_Y \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) dy.$$

**Erläuterung:** Die Vertauschung von Ableitung und Integral (2) führen wir dank HDI zurück auf die Vertauschung von zwei Integralen. Der HDI lässt sich anwenden, da  $\partial_1 f$  stetig ist. Der Satz von Fubini lässt sich anwenden, da  $\partial_1 f$  stetig ist und somit absolut integrierbar auf  $[a, x] \times Y$ . Dank (1) ist  $t \mapsto \int_Y \frac{\partial}{\partial t} f(t, y) dy$  stetig, daher können wir im letzten Schritt den HDI anwenden.

**Nachrechnen:** Für  $x \rightarrow x_0$  gilt dank majorisierter Konvergenz D2D:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} F(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \int_Y f(x, y) dy \stackrel{(1)}{=} \int_Y \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) dy \\ &\stackrel{(2)}{=} \int_Y f(x_0, y) dy = F(x_0) \end{aligned}$$

**Erläuterung:** Wir sehen hieran, dass für die Stetigkeit von  $F$  im Punkt  $x_0 \in X$  genügen:

- Für jedes  $y \in Y$  ist die Abbildung  $f(-, y): X \rightarrow \mathbb{C}: x \mapsto f(x, y)$  in  $x_0$  stetig. Das bedeutet  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = f(x_0, y)$  für alle  $x \rightarrow x_0$  und festes  $y \in Y$ .  $\Rightarrow$  (2)
- Für alle  $x \in X$ , oder zumindest alle  $x$  in einer kleinen Umgebung  $\bar{B}(x_0, r)$  von  $x_0$ , ist die Abbildung  $f(x, -): Y \rightarrow \mathbb{C}: y \mapsto f(x, y)$  majorisiert integrierbar.  $\Rightarrow$  (1)

Diese Bedingungen sind automatisch erfüllt, wenn  $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und  $Y$  kompakt ist: Als Majorante wählen wir dann die Konstante  $M = \max\{|f(x, y)| \mid x \in \bar{B}(x_0, r), y \in Y\}$ . Hier ist  $\bar{B}(x_0, r) \subseteq X$  der abgeschlossene Ball mit Mittelpunkt  $x_0$  und Radius  $0 < r < \infty$ . Somit ist auch die Produktmenge  $\bar{B}(x_0, r) \times Y$  kompakt, und hierauf ist  $f$  beschränkt.

☺ Die Kompaktheit von  $Y$  bzw. die integrierbare Majorante verhindert, dass beim Grenzübergang Masse nach Unendlich verschwindet!

⚠ Andernfalls ist Vorsicht geboten: Stetigkeit gilt nicht immer! [D409](#)

**Ableitung von Parameterintegralen** D309

Wann dürfen wir die Ableitung unter das Integral ziehen?

$$F(x) = \int_Y f(x, y) dy \implies \frac{\partial}{\partial x_j} F(x) \stackrel{!}{=} \int_Y \frac{\partial}{\partial x_j} f(x, y) dy$$

**Satz D3E: Ableitung von Parameterintegralen**

Sei  $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $X \subseteq \mathbb{R}^p$  offen und  $Y \subseteq \mathbb{R}^q$ . Zudem existiere

$$F: X \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad F(x) := \int_Y f(x, y) dy.$$

Für die stetige Differenzierbarkeit von  $F$  haben wir folgende Kriterien:

- Sie gilt, wenn  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  stetig ist und  $Y$  kompakt, oder allgemeiner,
- wenn  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  bezüglich  $x_j$  stetig ist und über  $Y$  majorisiert int'bar.

Majorante  $h: Y \rightarrow [0, \infty]$  mit  $|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y)| \leq h(y)$  und  $\int_Y h(y) dy < \infty$

In diesem Fall dürfen wir die Ableitung unter das Integral ziehen:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} F(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_Y f(x, y) dy \stackrel{!}{=} \int_Y \frac{\partial}{\partial x_j} f(x, y) dy.$$

**Ableitung von Parameterintegralen** D310  
Erläuterung

**Nachrechnen:** Zur Vereinfachung sei  $p = 1$  und  $x \in [a, b] \subseteq X$ .

$$F(x) - F(a) \stackrel{\text{Lim}}{\text{A3L}} \int_Y f(x, y) - f(a, y) dy \stackrel{\text{HDI}}{\text{B11}} \int_Y \int_{t=a}^x \frac{\partial}{\partial t} f(t, y) dt dy$$

$$\stackrel{\text{Fub}}{\text{C1E}} \int_{[a, x] \times Y} \frac{\partial}{\partial t} f(t, y) d(t, y) \stackrel{\text{Fub}}{\text{C1E}} \int_{t=a}^x \int_Y \frac{\partial}{\partial t} f(t, y) dy dt$$

Nochmals dank HDI und Stetigkeit von  $\partial_1 f$  folgt hieraus

$$F'(x) \stackrel{\text{HDI}}{\text{B11}} \int_Y \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) dy.$$

**Erläuterung:** Die Vertauschung von Ableitung und Integral führen wir dank HDI zurück auf die Vertauschung von Integralen. Fubini lässt sich hier anwenden, da  $\partial_1 f$  majorisiert integrierbar ist und somit absolut integrierbar auf  $[a, x] \times Y$ : Für  $h: Y \rightarrow [0, \infty]$  mit  $\int_Y h(y) dy < \infty$  und  $|\partial_t f(x, y)| \leq h(y)$  gilt  $\int_{[a, x] \times Y} |\partial_t f(t, y)| d(t, y) \leq |x - a| \int_Y h(y) dy < \infty$ . Dank D3D ist  $t \mapsto \int_Y \partial_t f(t, y) dy$  stetig, daher können wir im letzten Schritt erneut den HDI anwenden.

😊 Die Kompaktheit von  $Y$  bzw. die integrierbare Majorante verhindert, dass beim Grenzübergang Masse nach Unendlich verschwindet!

⚠️ Andernfalls ist Vorsicht geboten: Vertauschbarkeit gilt nicht immer!

**Ableitung von Parameterintegralen** D311  
Ausführung

Als alternativen Beweis der Ableitungsformel weisen wir direkt folgende Gleichungen nach:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} F(x) \stackrel{(1)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x + te_j) - F(x)}{t} \stackrel{(2)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \int_Y \frac{f(x + te_j, y) - f(x, y)}{t} dy$$

$$\stackrel{(3)}{=} \int_Y \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + te_j, y) - f(x, y)}{t} dy \stackrel{(4)}{=} \int_Y \frac{\partial}{\partial x_j} f(x, y) dy$$

Gleichung (1) und (4) ist die Definition der partiellen Ableitung, (2) gilt dank Linearität des Integrals, also bleibt (3) zu zeigen. Dank der vorausgesetzten majorisierten Integrierbarkeit existiert eine Funktion  $h: Y \rightarrow [0, \infty]$  mit  $\int_Y h(y) dy < \infty$  und  $|\partial f / \partial x_j(x, y)| \leq h(y)$ .

Nach dem Mittelwertsatz der eindimensionalen Differentialrechnung (B4B) gilt

$$\frac{f(x + te_j, y) - f(x, y)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x + \tau e_j, y) \quad \text{für ein } \tau \in [0, t], \text{ also}$$

$$\left| \frac{f(x + te_j, y) - f(x, y)}{t} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x + \tau e_j, y) \right| \leq h(y).$$

Somit gilt (3) dank majorisierter Konvergenz. Hierfür genügen also folgende Voraussetzungen:

- Für jedes  $y \in Y$  ist die Abbildung  $x \mapsto f(x, y)$  nach  $x_j$  differenzierbar.
- Für die Ableitung  $\partial f / \partial x_j$  existiert eine integrierbare Majorante  $h$ , das heißt  $|\partial f / \partial x_j(x, y)| \leq h(y)$  und  $\int_Y h(y) dy < \infty$ .

Ist die Ableitung  $\partial f / \partial x_j$  zudem stetig in  $x_j$ , so auch die Ableitung  $\partial F / \partial x_j$ .

**Rückblick: Was haben wir erreicht?** D312  
Ausführung

Zum Abschluss blicken wir kurz zurück auf die Entwicklung der Integration in den Kapiteln A bis D. Die ursprünglich formulierten Ziele und Probleme liegen nun klar vor uns, ebenso die inzwischen zu ihrer Lösung bereitgestellten Werkzeuge und ihre ersten Anwendungen.

Wir wollen ein- und mehrdimensionale Integrale verstehen und berechnen, zunächst mittels Normierung, Linearität, Monotonie, sodann dank Einschachtelung und Ausschöpfung. Diese axiomatische Grundlage dient zur *Definition* und *Konstruktion* des Integrals.

Hieraus haben wir die wichtigsten Rechenregeln erarbeitet: eindimensional den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI), mehrdimensional den Satz von Fubini und den Transformationssatz, sowie allgemein die Grenzwertsätze der monotonen und majorisierten Konvergenz. Dies sind mächtige Werkzeuge, wie schon die bisherigen Beispiele belegen.

Wir wünschen uns möglichst einfache und vielseitige Rechenregeln der Art: „Aus  $f_n \rightarrow f$  folgt  $\int_\Omega f_n \rightarrow \int_\Omega f$ .“ Hierzu reicht die Integration stetiger Funktionen à la Riemann nicht aus, denn sie können beim Grenzübergang  $f_n \rightarrow f$  zerbrechen. Die Integration nach Lebesgue ist hier wesentlich robuster: Sind alle  $f_n$  messbar, dann auch die Grenzfunktion  $f$ . Wir erhalten auf diesem Weg einfache und vielseitige Grenzwertsätze, wie dieses Kapitel D eindrucksvoll zeigt.

Gegenbeispiele zeigen aber auch, dass man diese Rechenregeln nicht blind anwenden darf. Wenn man es experimentell angeht, sollte man sich zumindest der Risiken bewusst sein.

Für die Korrektheit des Ergebnisses haben wir nun einfache Kriterien, die Sie kennen und beherrschen sollen. Es lohnt sich! Hierzu dient die präzise Formulierung der Rechenregeln in Form von Sätzen: Das ist zugegeben etwas länglich, aber Qualität hat nun einmal ihren Preis.

**Wann vertauschen Integral und Reihe?** D313  
Fazit

Für  $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$  möchten wir Integral und Reihe vertauschen:

$$\int_\Omega \left( \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right) dx \stackrel{?}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \int_\Omega f_k(x) dx \right)$$

⚠️ Einfache Gegenbeispiele zeigen: Vertauschbarkeit gilt nicht immer!

Für die Vertauschbarkeit haben wir folgende **hinreichende Kriterien**:

- Gleichheit gilt für  $f_k \geq 0$ : monotone Konvergenz! [A309](#)
- Gleichheit gilt für  $\int \sum |f_k| < \infty$  bzw. für  $\sum \int |f_k| < \infty$ , [D106](#)
- insbesondere für konvergente Potenzreihen,  $f_k(x) = a_k x^k$ . [D107](#)

😊 Dieses einfache Kriterium ist in vielen Anwendungen nützlich. Es verhindert insbesondere, dass Masse nach Unendlich verschwindet.

⚠️ Andernfalls ist Vorsicht geboten: Vertauschbarkeit gilt nicht immer! Schon in einfachsten Gegenbeispielen gilt  $\int \sum f_k \neq \sum \int f_k$ . [D101](#)

⚠️ Diese Kriterien sind hinreichend, aber i.A. nicht notwendig. [D429](#)

Die majorisierte Konvergenz erlaubt genauere Aussagen.

**Wann vertauschen Integral und Limes?** D314  
Fazit

Für  $f_n \rightarrow f$  möchten wir Integral und Limes vertauschen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega f_n(x) dx \stackrel{?}{=} \int_\Omega \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

⚠️ Einfache Gegenbeispiele zeigen: Vertauschbarkeit gilt nicht immer!

Für die Vertauschbarkeit haben wir folgende **hinreichende Kriterien**:

- Gleichheit gilt bei monotoner Konvergenz  $0 \leq f_n \nearrow f$ , [A309](#)
- bei majorisierter Konvergenz  $f_n \rightarrow f$  mit  $|f_n| \leq h$  und  $\int_\Omega h < \infty$ ,
- insbesondere, wenn  $\text{vol}(\Omega) < \infty$  und  $|f_n| \leq M \in \mathbb{R}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

😊 Dies verhindert, dass Masse nach Unendlich verschwindet.

😊 Sei  $h: \Omega \rightarrow [0, \infty]$  integrierbar. Auf der Teilmenge aller messbaren Funktionen  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  mit Schranke  $|f| \leq h$  ist die Zuordnung  $f \mapsto \int_\Omega f$  folgenstetig: Aus punktwiser Konvergenz  $f_n \rightarrow f$  folgt  $\int_\Omega f_n \rightarrow \int_\Omega f$ . Dies ist eine starke und nützliche Stetigkeitseigenschaft des Integrals!

⚠️ Andernfalls ist Vorsicht geboten: Vertauschbarkeit gilt nicht immer! Wie zuvor gesehen können selbst einfache Beispiele fehlschlagen.

**Stetigkeit von Parameterintegralen** D315  
Fazit

Wir wollen Stetigkeit nutzen und Grenzwerte unter das Integral ziehen:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_Y f(x, y) dy \stackrel{?}{=} \int_Y \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) dy = \int_Y f(x_0, y) dy$$

⚠️ Einfache Gegenbeispiele zeigen: Vertauschbarkeit gilt nicht immer!

Sei  $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $X \subseteq \mathbb{R}^p$  offen und  $Y \subseteq \mathbb{R}^q$ . Zudem existiere

$$F: X \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad F(x) := \int_Y f(x, y) dy.$$

Für die Stetigkeit von  $F$  haben wir folgende **hinreichende Kriterien**:

- Sie gilt, wenn  $f$  stetig ist und  $Y$  kompakt, oder allgemeiner,
- wenn  $f$  bezüglich  $x$  stetig ist und über  $Y$  majorisiert integrierbar.

In diesem Fall dürfen wir den Grenzwert unter das Integral ziehen:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_Y f(x, y) dy \stackrel{!}{=} \int_Y \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) dy = \int_Y f(x_0, y) dy.$$

**Ableitung von Parameterintegralen** D316  
Fazit

Wir wollen differenzieren und die Ableitung unter das Integral ziehen:

$$F(x) = \int_Y f(x, y) dy \implies \frac{\partial}{\partial x_j} F(x) \stackrel{?}{=} \int_Y \frac{\partial}{\partial x_j} f(x, y) dy$$

⚠️ Einfache Gegenbeispiele zeigen: Vertauschbarkeit gilt nicht immer!

Sei  $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $X \subseteq \mathbb{R}^p$  offen und  $Y \subseteq \mathbb{R}^q$ . Zudem existiere

$$F: X \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad F(x) := \int_Y f(x, y) dy.$$

Für die stetige Differenzierbarkeit von  $F$  haben wir folgende Kriterien:

- Sie gilt, wenn  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  stetig ist und  $Y$  kompakt, oder allgemeiner,
- wenn  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  bezüglich  $x_j$  stetig ist und über  $Y$  majorisiert int'bar.

In diesem Fall dürfen wir die Ableitung unter das Integral ziehen:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} F(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_Y f(x, y) dy \stackrel{!}{=} \int_Y \frac{\partial}{\partial x_j} f(x, y) dy.$$

**Vertauschungssatz von Schwarz:**  $\partial_j \partial_i F = \partial_i \partial_j F$  D401  
Erläuterung

**Satz D4A: Vertauschbarkeit partieller Ableitungen, Schwarz 1873**

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und hierauf  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar. Für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  und  $a \in U$  gilt dann  $\partial_j \partial_i F(a) = \partial_i \partial_j F(a)$ .

Die Hesse-Matrix  $(\partial_j \partial_i F)_{i,j}: U \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  ist in jedem Punkt symmetrisch, das Gradientenfeld  $f = (\partial_1 F, \dots, \partial_n F): U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist somit rotationsfrei.

😊 Die Vertauschung  $\partial_j \partial_i = \partial_i \partial_j$  ist ungemein nützlich, und wir wollen sie eigentlich immer anwenden. Es gibt jedoch eine Voraussetzung!

⚠️ Wenn man die Bedingung  $F \in C^2(U, \mathbb{R})$ , also Existenz und Stetigkeit der zweiten Ableitungen, weiter abschwächt zur minimalen Bedingung „ $F$  ist zweimal partiell differenzierbar“, dann gilt die Vertauschbarkeit im Allgemeinen nicht! Es gibt dann Gegenbeispiele wie das folgende.

**Beweis des Satzes:** Wir dürfen  $n = 2$  sowie  $i = 1, j = 2$  annehmen. Nach Verschiebung dürfen wir zudem  $a = (0, 0) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$  annehmen. Da  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen ist, gibt es ein  $\delta > 0$ , sodass  $[0, \delta] \times [0, \delta] \subseteq U$  gilt. Für  $(x, y) \in U$  sei  $G_y(x) := F(x, y) - F(x, 0)$ . Dank Mittelwertsatz für  $x \mapsto G_y(x)$  gilt  $G_y(x) - G_y(0) = G_y'(\xi) \cdot x$  für ein geeignetes  $0 \leq \xi \leq x$ .

**Vertauschungssatz von Schwarz:**  $\partial_j \partial_i F = \partial_i \partial_j F$  D402  
Erläuterung

Wir untersuchen  $G_y'(\xi) = \partial_1 F(\xi, y) - \partial_1 F(\xi, 0)$ : Dank Mittelwertsatz für  $y \mapsto \partial_1 F(\xi, y)$  gilt  $G_y'(\xi) = \partial_1 F(\xi, y) - \partial_1 F(\xi, 0) = \partial_2 \partial_1 F(\xi, \eta) \cdot y$  für ein geeignetes  $0 \leq \eta \leq y$ . Wir erhalten also zu  $x, y \in [0, \delta]$  insgesamt:

$$F(x, y) - F(x, 0) - F(0, y) + F(0, 0) = \partial_2 \partial_1 F(\xi, \eta) \cdot xy$$

Wenn wir statt  $y$  zuerst  $x$  festhalten, dann erhalten wir ebenso:

$$F(x, y) - F(0, y) - F(x, 0) + F(0, 0) = \partial_1 \partial_2 F(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \cdot xy$$

Hierbei hängen  $(\xi, \eta), (\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \in [0, x] \times [0, y]$  wie erklärt von  $(x, y)$  ab. Für  $(x, y) \in ]0, \delta]^2 \subseteq U$  dividieren wir durch  $xy \neq 0$  und erhalten

$$\partial_2 \partial_1 F(\xi, \eta) = \partial_1 \partial_2 F(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}).$$

Im Grenzwert für  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  gilt  $(\xi, \eta) \rightarrow (0, 0)$  und  $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \rightarrow (0, 0)$ . Dank der Stetigkeit der zweiten Ableitungen  $\partial_2 \partial_1 F$  und  $\partial_1 \partial_2 F$  folgt

$$\partial_2 \partial_1 F(0, 0) = \partial_1 \partial_2 F(0, 0).$$

Damit ist die Vertauschbarkeit  $\partial_2 \partial_1 F = \partial_1 \partial_2 F$  bewiesen.

**Gegenbeispiel zur Vertauschbarkeit** D403  
Erläuterung

**Aufgabe:** Wir untersuchen die Funktion  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F(0, 0) = 0$  und

$$F(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \quad \text{für } (x, y) \neq (0, 0).$$

Berechnen Sie (1)  $f = \text{grad } F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  und (2)  $g = \text{rot } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Gilt  $\text{rot } \text{grad } F = 0$ ? Erklären Sie! Ist  $f$  stetig ( $C^0$ )? stetig diff'bar ( $C^1$ )? Vertauschen die partiellen Ableitungen? Gilt der Satz von Schwarz?

**Lösung:** (1) In jedem Punkt  $(x, y) \neq (0, 0)$  gilt dank Quotientenregel

$$f = (\partial_x F, \partial_y F) = \left( y \frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}, x \frac{x^4 - 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

Im Punkt  $(x, y) = (0, 0)$  müssen wir genauer hinschauen:

$$F(x, 0) = 0 \implies (\partial_x F)(0, 0) = 0$$

$$F(0, y) = 0 \implies (\partial_y F)(0, 0) = 0$$

Das Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist stetig: Die Kreislinie  $x^2 + y^2 = r^2$  ist kompakt, daher nimmt  $|x^4 \pm 4x^2y^2 - y^4|/r^4$  hierauf ein Maximum  $M(r)$  an. Zu verschiedenen Radien  $r > 0$  bleibt  $M(r)$  unverändert. Die Faktoren  $y, x$  sichern Konvergenz  $f(x, y) \rightarrow (0, 0)$  für  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ .

**Gegenbeispiel zur Vertauschbarkeit** D404  
Erläuterung

(2) Wir berechnen  $g = \text{rot } f = (\partial_x f_2 - \partial_y f_1) = (\partial_x \partial_y F - \partial_y \partial_x F)$ : Auf  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  gilt  $F \in C^2$ , also  $\text{rot } f = 0$  dank Schwarz (D4A). Übung: Sie können  $\partial_x f_2$  und  $\partial_y f_1$  explizit ausrechnen und vergleichen. Im Punkt  $(x, y) = (0, 0)$  müssen wir erneut genauer hinschauen:

$$f_2(x, 0) = \frac{+x^5}{x^4} = +x \implies (\partial_x f_2)(0, 0) = +1$$

$$f_1(0, y) = \frac{-y^5}{y^4} = -y \implies (\partial_y f_1)(0, 0) = -1.$$

Somit erhalten wir schließlich für jeden Punkt  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  die Rotation

$$g(x, y) = \text{rot}(f)(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 2 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

⚠️ Das Vektorfeld  $f$  hat ein Potential  $F$ , aber dennoch gilt  $\text{rot } f \neq 0$ .

**Erklärung:** Es mangelt an Differenzierbarkeit! (1) Die Funktion  $F$  ist  $C^1$ , aber nicht  $C^2$ , und die Vertauschbarkeit  $\partial_x \partial_y F = \partial_y \partial_x F$  gilt hier nicht! Der Satz von Schwarz gilt immer noch, lässt sich aber hier nicht anwenden. Auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  gilt  $F \in C^\infty$ , somit  $\partial_x \partial_y F = \partial_y \partial_x F$ . (2) Das Vektorfeld  $f = \text{grad } F$  ist stetig ( $C^0$ ) und differenzierbar, aber nicht stetig diff'bar ( $C^1$ ). Das bequeme Kriterium „exakt  $\implies$  rotationsfrei“ dank Schwarz lässt sich hier nicht anwenden!

**Vertauschbarkeit: Fubini impliziert Schwarz.** D405  
Erläuterung

Der Satz von Fubini (C1E) besagt in der einfachsten Form

$$\int_{x=a_1}^{b_1} \int_{y=a_2}^{b_2} g(x, y) dy dx = \int_{y=a_2}^{b_2} \int_{x=a_1}^{b_1} g(x, y) dx dy$$

für jede stetige Funktion  $g$  auf  $Q := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subseteq \mathbb{R}^2$ . Geometrisch ist das anschaulich: Beide Integrale ergeben das Volumen  $\int_Q g$  unter  $g$ . Der Satz von Schwarz (D4A) garantiert die Vertauschbarkeit

$$\partial_2 \partial_1 F = \partial_1 \partial_2 F$$

für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion  $F: \mathbb{R}^2 \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}$ . Das ist geometrisch weit weniger anschaulich. Wer Satz D4A für anschaulich oder gar selbstverständlich hält, der wiederhole und untersuche das Gegenbeispiel [D403](#) sowie den Beweis des Satzes! Fubini ist zentral für die mehrdimensionale Integralrechnung. Schwarz ist zentral für die mehrdimensionale Differentialrechnung. Der HDI (B11) übersetzt zwischen beiden: Fubini impliziert Schwarz!

**Vertauschbarkeit: Fubini impliziert Schwarz.** D406  
Erläuterung

Mit dem Satz von Fubini wollen die den Satz von Schwarz zeigen:

**Satz D4B: Vertauschbarkeit partieller Ableitungen**

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und hierauf  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige stetige Funktion. Seien  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  zwei Indizes. Wir setzen voraus: Die partiellen Ableitungen  $\partial_i F$  und  $\partial_j F$  sowie  $\partial_j \partial_i F$  existieren und sind stetig. Dann existiert auch die Ableitung  $\partial_i \partial_j F$ , und es gilt  $\partial_j \partial_i F = \partial_i \partial_j F$ .

😊 Diese Formulierung ist etwas genauer und stärker als Satz D4A: Wir verlangen nur die Existenz und Stetigkeit der Ableitungen  $\partial_i F$  und  $\partial_j F$  sowie  $\partial_j \partial_i F$ . Die Existenz und Stetigkeit der Ableitung  $\partial_i \partial_j F$  hingegen wird nicht gefordert, sondern gleich mit gefolgert!

**Aufgabe:** Wir dürfen  $n = 2$  sowie  $i = 1, j = 2$  annehmen. Zeigen Sie:

$$\int_{u=a_1}^x \int_{v=a_2}^y \partial_2 \partial_1 F(u, v) dv du = F(x, y) - F(a_1, y) - F(x, a_2) + F(a_1, a_2)$$

Nutzen Sie Fubini und berechnen Sie  $\partial_1 \partial_2 F = \partial_2 \partial_1 F$ . Erklären Sie in jedem Rechenschritt, welchen Satz / welche Rechenregel Sie benutzen!

**Vertauschbarkeit: Fubini impliziert Schwarz.** D407  
Erläuterung

**Lösung:** Wir zeigen die Behauptung in jedem Punkt  $a = (a_1, a_2) \in U$ . Da der Definitionsbereich  $U$  offen ist, können wir  $b_1 > a_1$  und  $b_2 > a_2$  hinreichend nahe wählen, so dass  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subseteq U$  gilt. Für alle  $x \in [a_1, b_1]$  und  $y \in [a_2, b_2]$  finden wir dank HDI (Satz B11):

$$\int_{u=a_1}^x \int_{v=a_2}^y \partial_2 \partial_1 F(u, v) dv du = \int_{u=a_1}^x \partial_1 F(u, y) - \partial_1 F(u, a_2) du = F(x, y) - F(a_1, y) - F(x, a_2) + F(a_1, a_2)$$

Hier nutzen wir zuerst, dass zu festem  $u$  die Abbildung  $v \mapsto \partial_1 F(u, v)$  stetig differenzierbar ist mit Ableitung  $v \mapsto \partial_2 \partial_1 F(u, v)$ , sodann dass die Abbildung  $u \mapsto F(u, y) - F(u, a_2)$  stetig differenzierbar ist mit Ableitung  $u \mapsto \partial_1 F(u, y) - \partial_1 F(u, a_2)$ . Daher dürfen wir in beiden Fällen den (zweiten) Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung anwenden! Dank Fubini (C1E) dürfen wir die Integrationsreihenfolge vertauschen:

$$\int_{v=a_2}^y \int_{u=a_1}^x \partial_2 \partial_1 F(u, v) du dv = F(x, y) - F(a_1, y) - F(x, a_2) + F(a_1, a_2)$$

**Vertauschbarkeit: Fubini impliziert Schwarz.** D408  
Erläuterung

Der Integrand  $v \mapsto \int_{u=a_1}^x \partial_2 \partial_1 F(u, v) du$  ist stetig dank Satz D3A. Dank dem (erstem) Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (B11) können wir daher das linke Integral nach  $y$  ableiten und erhalten:

$$\int_{u=a_1}^x \partial_2 \partial_1 F(u, y) du = \partial_2 F(x, y) - \partial_2 F(a_1, y)$$

Auch der Integrand  $u \mapsto \partial_2 \partial_1 F(u, y)$  ist stetig nach Voraussetzung. Dank dem (erstem) Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (B11) können wir daher das linke Integral nach  $x$  ableiten und erhalten:

$$\partial_2 \partial_1 F(x, y) = \partial_1 \partial_2 F(x, y)$$

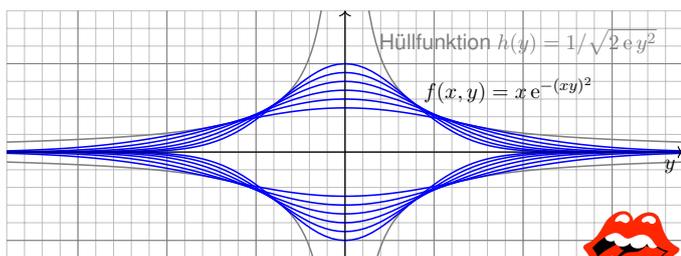
Dies gilt insbesondere im Punkt  $(x, y) = (a_1, a_2)$ , den wir beliebig vorgegeben haben. Somit gilt  $\partial_2 \partial_1 F = \partial_1 \partial_2 F$  auf ganz  $U$ .

😊 Diese sorgfältige aber leichte Rechnung zeigt: Fubini impliziert Schwarz. Umgekehrt impliziert ebenso Schwarz auch Fubini in der angegebenen einfachsten Form; dies führen wir hier nicht weiter aus.

**Aufgabe:** Man skizziere und berechne und vergleiche und bestaune:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \int_{\mathbb{R}} x e^{-(xy)^2} dy \right] \stackrel{?}{=} \int_{\mathbb{R}} \lim_{x \rightarrow 0} \left[ x e^{-(xy)^2} \right] dy$$

**Lösung:** (1) Skizze des Integranden  $f(x, y) = x e^{-(xy)^2}$ :



⚠ Der Integrationsbereich  $\mathbb{R}$  ist hier nicht kompakt. Die Hüllfunktion hat unendliches Integral. Also Vorsicht!

(2) Zur Integration substituieren wir  $u = xy$  und  $du = |x|dy$ :

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} x e^{-(xy)^2} dy = \text{sign}(x) \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du \stackrel{\text{Trafo}}{=} \text{sign}(x) \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du \stackrel{\text{Gauß}}{=} \text{sign}(x) \sqrt{\pi}$$

Für die Funktion  $g(u) = e^{-u^2}$  kennen wir das Integral  $\int_{\mathbb{R}} g(u) du = \sqrt{\pi}$ . Für festes  $x > 0$  ist  $f(x, y) = x g(xy)$  die vertikale Streckung um  $x$  und horizontale Stauchung um  $x$ , hat also genau dieselbe Fläche wie  $g$ ! Das Umklappen des Vorzeichens ist in der Skizze gut zu erkennen. Obwohl der Integrand  $f(x, y)$  stetig ist, ist das Integral  $F(x)$  unstetig!

$$\lim_{x \searrow 0} \left[ \int_{\mathbb{R}} x e^{-(xy)^2} dy \right] = \lim_{x \searrow 0} F(x) = \sqrt{\pi}, \text{ aber}$$

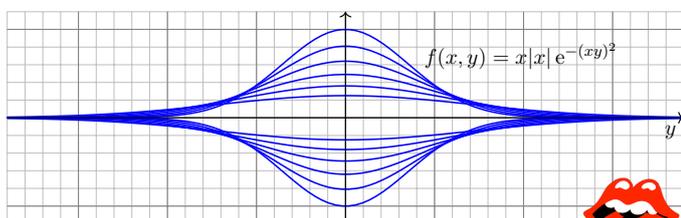
$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{x \searrow 0} \left[ x e^{-(xy)^2} \right] dy = \int_{\mathbb{R}} 0 dy = 0. \text{ Sapristi!}$$

⚠ Zur seriösen Rechnung muss man die Voraussetzungen beachten! Das Problem verschwindet unter einer integrierbaren Majorante (D3D).

**Aufgabe:** Man skizziere und berechne und vergleiche und bestaune:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_{\mathbb{R}} x|x| e^{-(xy)^2} dy \right] \stackrel{?}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} \left[ x|x| e^{-(xy)^2} \right] dy \text{ in } x = 0$$

**Lösung:** (1) Skizze des Integranden  $f(x, y) = x|x| e^{-(xy)^2}$ :



⚠ Der Integrationsbereich  $\mathbb{R}$  ist hier nicht kompakt. Wir treffen dieselben Probleme wie zuvor. Also Vorsicht! *You can't always get what you want, but you get what you need.*

(2) Die Funktion  $f(x, y) = x|x| g(xy)$  mit  $g(u) = e^{-u^2}$  ist stetig diff'bar. Das Integral berechnen wir dank Substitution  $u = xy$  und  $du = |x|dy$ :

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy = \int_{\mathbb{R}} x|x| g(xy) dy \stackrel{\text{Trafo}}{=} x \int_{\mathbb{R}} g(u) du \stackrel{\text{Gauß}}{=} x \sqrt{\pi}$$

Ableiten des Integranden hingegen liefert:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 2|x| g(xy) + x|x| y g'(xy)$$

Das verschwindet für  $x = 0$ . Wir erhalten also

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} \left[ x|x| e^{-(xy)^2} \right]_{x=0} dy = \int_{\mathbb{R}} 0 dy = 0, \text{ aber}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_{\mathbb{R}} x|x| e^{-(xy)^2} dy \right]_{x=0} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ x \sqrt{\pi} \right]_{x=0} = \sqrt{\pi}. \text{ Sapristi!}$$

⚠ Zur seriösen Rechnung muss man die Voraussetzungen beachten! Das Problem verschwindet unter einer integrierbaren Majorante (D3E).

**Verallgemeinerung:** Die Funktion  $g(u) = e^{-u^2}$  (Glockenkurve) dient in den beiden vorigen Aufgaben als schönes und konkretes Beispiel.

Das Phänomen besteht jedoch für jede Funktion  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Das Integral  $a := \int_{\mathbb{R}} g(u) du$  erfülle hierzu lediglich  $0 < a < \infty$ .

Selbst harmlose Funktionen wie die Glockenkurve  $g(u) = e^{-u^2}$  oder die Dreiecksfunktion  $g(u) = \Delta_1(u)$  illustrieren das Problem. [D205](#)

Diskutieren Sie den allgemeinen Fall nach diesem Vorbild:

**Aufgabe:** Man berechne und vergleiche und bestaune:

$$\lim_{x \searrow 0} \left[ \int_{\mathbb{R}} x g(xy) dy \right] \text{ und } \int_{\mathbb{R}} \lim_{x \searrow 0} \left[ x g(xy) \right] dy \text{ sowie}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_{\mathbb{R}} x|x| g(xy) dy \right] \text{ und } \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} \left[ x|x| g(xy) \right] dy \text{ in } x = 0.$$

Lässt sich Kompaktheit nutzen? Majorisierte Integrierbarkeit? Ist der Integrand stetig bzw. stetig diff'bar? Und das Integral?

**Lösung:** Zur Integration substituieren wir  $u = xy$  und  $du = |x|dy$ :

$$F(x) := \int_{\mathbb{R}} x g(xy) dy = \text{sign}(x) \int_{\mathbb{R}} g(u) |x| dy$$

$$= \text{sign}(x) \int_{\mathbb{R}} g(u) du = \text{sign}(x) a$$

Wie zuvor ist dieses Parameterintegral  $F(x)$  unstetig in  $x = 0$ . (Skizze!) Wir finden  $\lim_{x \searrow 0} \left[ \int_{\mathbb{R}} x g(xy) dy \right] = a$ , aber  $\int_{\mathbb{R}} \lim_{x \searrow 0} \left[ x g(xy) \right] dy = 0$ . Kompaktheit oder majorisierte Integrierbarkeit (D3D) gelten hier nicht!

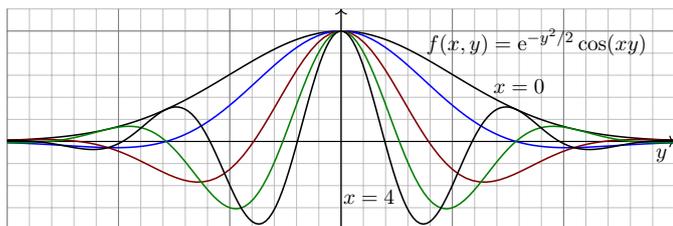
Entsprechendes gilt für die Ableitung von  $F(x) = \int_{\mathbb{R}} x|x| g(xy) dy$ . Die Rechnung der vorigen Aufgabe überträgt sich wörtlich:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_{\mathbb{R}} x|x| g(xy) dy \right]_{x=0} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ xa \right]_{x=0} = a, \text{ aber}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} \left[ x|x| g(xy) \right]_{x=0} dy = \int_{\mathbb{R}} 0 dy = 0. \text{ Sapristi!}$$

⚠ Vorsichtsmaßnahmen sind nötig, die müssen Sie beherrschen. Das Problem verschwindet unter einer integrierbaren Majorante (D3E).

😊 Nach den Warnungen hier ein gutartiges und nützliches Beispiel:



**Aufgabe:** (0) Skizzieren Sie die Funktion  $f(x, y) = e^{-y^2/2} \cos(xy)$ .

- Erlaubt  $\partial_x f(x, y)$  eine integrierbare Majorante  $h(y)$ ?
- Berechnen Sie das parameterabhängige Integral

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } F(x) = \int_{y=-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2} \cos(xy) dy.$$

**Hinweis:** Zeigen Sie  $F'(x) = -xF(x)$ , indem Sie die Ableitung  $\partial_x F(x)$  unter das Integral ziehen und partiell integrieren. Lösen Sie nach  $F$  auf.

**Lösung:** (1) Ableitung und integrierbare Majorante:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| = \left| e^{-y^2/2} \cdot (-y) \sin(xy) \right| \leq e^{-y^2/2} |y| =: h(y)$$

(2) Dank Vorbereitung (1) dürfen wir  $\partial_x$  unter das Integral ziehen:

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_{y=-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2} \cos(xy) dy \stackrel{\text{D3E}}{=} \int_{y=-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2} (-y) \sin(xy) dy$$

$$\stackrel{\text{part}}{=} \left[ e^{-y^2/2} \sin(xy) \right]_{y=-\infty}^{+\infty} - \int_{y=-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2} x \cos(xy) dy = -xF(x)$$

Demnach genügt  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  der Differentialgleichung  $F'(x) = -xF(x)$ .

Wir trennen die Variablen gemäß  $F'(x)/F(x) = -x$

und integrieren zu  $\ln F(x) - \ln F(0) = -x^2/2$ .

Wir erhalten die Lösung  $F(x) = F(0) e^{-x^2/2}$ .

Mit  $F(0) = \sqrt{2\pi}$  folgt  $F(x) = \sqrt{2\pi} e^{-x^2/2}$ .

😊 Leistungsstarke Theorie ermöglicht effiziente Berechnung.

**Berechnung der Gamma-Funktion: Feynman-Trick** D417  
Übung

**Aufgabe:** (1) Für  $t > 0$  berechne man das Integral

$$\int_{x=0}^{\infty} e^{-tx} dx.$$

(2) Durch Ableiten unter dem Integral berechne man

$$\int_{x=0}^{\infty} x^n e^{-tx} dx.$$

(3) Warum dürfen wir in (2) die Ableitung  $\partial_t$  unter das Integral ziehen?

Das Integral (2) ist die Laplace-Transformierte der Polynomfunktionen  $x \mapsto x^n$ , siehe Kapitel L. Die Rechnung gelingt mit partieller Integration [6316], etwas mühsam. Differenzieren ist leichter. Was soll Frage (3) bedeuten? Natürlich dürfen wir unter dem Integral nach  $t$  ableiten: Das ist ein freies Land, und niemand kann uns das Ableiten verbieten! Wir können erst nach  $t$  ableiten und dann über  $x$  integrieren oder umgekehrt. Es ist jedoch im Allgemeinen nicht klar, ob diese beiden Rechnungen dasselbe Ergebnis liefern. Der obige Satz D3E rechtfertigt hier die Gleichheit!

**Lösung:** (1) Integriert wird hier über  $x$  bei festem Parameter  $t$ :

$$\int_{x=0}^{\infty} e^{-tx} dx = \left[ -\frac{e^{-tx}}{t} \right]_{x=0}^{\infty} = \frac{1}{t}.$$

**Berechnung der Gamma-Funktion: Feynman-Trick** D418  
Übung

(2) Wenn wir  $\partial_t$  unter das Integral ziehen dürfen, so erhalten wir:

$$\int_{x=0}^{\infty} -x e^{-tx} dx \stackrel{D3E}{=} -\frac{1}{t^2} \quad \text{also} \quad \int_{x=0}^{\infty} x e^{-tx} dx = \frac{1}{t^2},$$

$$\int_{x=0}^{\infty} -x^2 e^{-tx} dx \stackrel{D3E}{=} -\frac{2}{t^3} \quad \text{also} \quad \int_{x=0}^{\infty} x^2 e^{-tx} dx = \frac{2}{t^3},$$

$$\int_{x=0}^{\infty} -x^3 e^{-tx} dx \stackrel{D3E}{=} -\frac{3!}{t^4} \quad \text{also} \quad \int_{x=0}^{\infty} x^3 e^{-tx} dx = \frac{3!}{t^4}.$$

Per Induktion erhalten wir daraus mühelos die ersehnte Antwort:

$$\int_{x=0}^{\infty} x^n e^{-tx} dx = \frac{n!}{t^{n+1}}, \quad \text{speziell} \quad \int_{x=0}^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!$$

(3) Für  $0 < a < b$  finden wir eine von  $t \in [a, b]$  unabhängige Majorante:

$$|-x^n e^{-tx}| \leq x^n e^{-ax} =: h(x) \leq \frac{\text{const}}{1+x^2} \quad \text{also} \quad \int_{x=0}^{\infty} h(x) dx < \infty$$

☺ Alle betrachteten Ableitungen sind (lokal) majorisiert integrierbar. Dank Satz D3E dürfen wir in (2) die Ableitung unter das Integral ziehen.

**Momente der Normalverteilung: Feynman-Trick** D419  
Übung

**Aufgabe:** (1) Für  $t > 0$  berechne man das Integral

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t\frac{x^2}{2}} dx.$$

(2) Durch Ableiten unter dem Integral berechne man

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^{2k} e^{-t\frac{x^2}{2}} dx.$$

(3) Warum dürfen wir in (2) die Ableitung  $\partial_t$  unter das Integral ziehen?

Die Funktion  $\varphi(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$  ist die Dichte der Standard-Normalverteilung, die in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine zentrale Rolle spielt. Das Integral über  $x\varphi(x)$  ist ihr Mittelwert (Schwerpunkt), hier = 0 aus Symmetriegründen. Das Integral über  $x^2\varphi(x)$  ist ihre Varianz (Trägheitsmoment). Allgemein nennt man das Integral über  $x^n\varphi(x)$  das  $n$ -te Moment.

Der zweite Parameter  $t$  wird hier trickreich eingeführt, um unterm Integral zu differenzieren, motiviert durch den Erfolg (2) und gerechtfertigt durch die integrierbare Majorante (3).

**Lösung:** (1) Wir substituieren durch  $u = \sqrt{t}x$  und  $du = \sqrt{t}dx$ , also

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = t^{-\frac{1}{2}}.$$

**Momente der Normalverteilung: Feynman-Trick** D420  
Übung

(2) Wenn wir  $\partial_t$  unter das Integral ziehen dürfen, so erhalten wir:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} -x^2 e^{-t\frac{x^2}{2}} dx \stackrel{D3E}{=} -\frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} \quad \text{also} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-t\frac{x^2}{2}} dx = t^{-\frac{3}{2}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} -x^4 e^{-t\frac{x^2}{2}} dx \stackrel{D3E}{=} -\frac{3}{2} t^{-\frac{5}{2}} \quad \text{also} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^4 e^{-t\frac{x^2}{2}} dx = 3 \cdot t^{-\frac{5}{2}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} -x^6 e^{-t\frac{x^2}{2}} dx \stackrel{D3E}{=} -\frac{3 \cdot 5}{2} t^{-\frac{7}{2}} \quad \text{also} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^6 e^{-t\frac{x^2}{2}} dx = 3 \cdot 5 \cdot t^{-\frac{7}{2}}.$$

Per Induktion erhalten wir daraus mühelos die ersehnte Antwort:

$$\int_{\mathbb{R}} x^{2k} e^{-t\frac{x^2}{2}} dx = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1) \cdot t^{-\frac{2k+1}{2}} \sqrt{2\pi}.$$

(3) Für  $0 < a < b$  finden wir eine von  $t \in [a, b]$  unabhängige Majorante:

$$|-x^{2n} e^{-tx^2/2}| \leq x^{2n} e^{-ax^2/2} =: h(x) \leq \frac{\text{const}}{1+x^2} \quad \text{also} \quad \int_{\mathbb{R}} h(x) dx < \infty$$

☺ Alle betrachteten Ableitungen sind (lokal) majorisiert integrierbar. Dank Satz D3E dürfen wir in (2) die Ableitung unter das Integral ziehen.

**Weitere schöne Anwendungsbeispiele zum Feynman-Trick** D421  
Übung

**Aufgabe:** Berechnen Sie (möglichst geschickt)

$$\int_{x=0}^1 x^5 dx, \quad \int_{x=0}^1 x^5 \ln(x) dx, \quad \int_{x=0}^1 x^5 \ln(x)^2 dx, \quad \int_{x=0}^1 x^5 \ln(x)^3 dx.$$

**Lösung:** Manchmal ist allgemeiner spürbar leichter! Wir berechnen

$$F(t) := \int_{x=0}^1 x^t dx = (t+1)^{-1} \quad \text{für } t > -1. \quad \xrightarrow{t=5} \frac{1}{6}$$

Wenn wir die Ableitung unter das Integral ziehen dürfen, so erhalten wir:

$$\int_{x=0}^1 x^t \ln(x) dx \stackrel{?}{=} F'(t) = -(t+1)^{-2} \quad \xrightarrow{t=5} -\frac{1}{36}$$

$$\int_{x=0}^1 x^t \ln(x)^2 dx \stackrel{?}{=} F''(t) = +2(t+1)^{-3} \quad \xrightarrow{t=5} \frac{1}{108}$$

$$\int_{x=0}^1 x^t \ln(x)^3 dx \stackrel{?}{=} F'''(t) = -6(t+1)^{-4} \quad \xrightarrow{t=5} -\frac{1}{216}$$

**Übung:** Erklären Sie die Gleichheiten „ $\stackrel{?}{=}$ “. Welche Sätze greifen hier? Alternativ können Sie hier partiell integrieren. Finden Sie das leichter?

**Weitere schöne Anwendungsbeispiele zum Feynman-Trick** D422  
Übung

**Aufgabe:** Berechnen Sie (möglichst geschickt)

$$\int_{x=0}^1 \frac{x^0 - 1}{\ln x} dx \quad \text{und} \quad \int_{x=0}^1 \frac{x^1 - 1}{\ln x} dx \quad \text{und} \quad \int_{x=0}^1 \frac{x^2 - 1}{\ln x} dx.$$

**Lösung:** Manchmal ist allgemeiner spürbar leichter! Wir berechnen

$$F(t) := \int_{x=0}^1 \frac{x^t - 1}{\ln x} dx \quad \text{für } t > -1.$$

Unser erstes Integral  $F(0) = 0$  ist leicht. Wir suchen nun  $F(1)$  und  $F(2)$ . Wenn wir die Ableitung unter das Integral ziehen dürfen, so erhalten wir:

$$F'(t) \stackrel{?}{=} \int_{x=0}^1 \partial_t \left[ \frac{x^t - 1}{\ln x} \right] dx = \int_{x=0}^1 x^t dx = \left[ \frac{x^{t+1}}{t+1} \right]_{x=0}^1 = \frac{1}{t+1}$$

Der HDI beschert uns nun das ersehnte Ergebnis:

$$F(t) = F(t) - F(0) = \int_{s=0}^t \frac{1}{s+1} ds = \left[ \ln(s+1) \right]_{s=0}^t = \ln(t+1)$$

**Übung:** Erklären Sie die Gleichheit „ $\stackrel{?}{=}$ “. Welche Sätze greifen hier?

**Ein kniffliges Anwendungsbeispiel zum Feynman-Trick** D423  
Ergänzung

**Aufgabe:** Berechnen Sie das berühmt-berüchtigte Dirichlet-Integral

$$I := \int_{x=0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

(1) als Parameterintegral  $F(t) := \int_{x=0}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} \cdot e^{-xt} dx$  à la Laplace und  
(2) als Doppelintegral mit  $\int_{t=0}^{\infty} e^{-xt} dt = 1/x$  dank Fubini. (Siehe F425)

**Lösung:** (1) Wenn wir die Ableitung unter das Integral ziehen dürfen:

$$F'(t) \stackrel{?}{=} \int_{x=0}^{\infty} -\sin(x) e^{-xt} dx \stackrel{(3)}{=} \frac{-1}{1+t^2}$$

Für  $t \rightarrow \infty$  gilt  $F(t) \rightarrow 0$ . Der HDI beschert uns das ersehnte Ergebnis:

$$I = F(0) \stackrel{?}{=} \int_{t=0}^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \left[ \arctan t \right]_{t=0}^{\infty} = \frac{\pi}{2}$$

(2) Wenn wir hier Integrale vertauschen dürfen, so erhalten wir:

$$I = \int_{x=0}^{\infty} \int_{t=0}^{\infty} \frac{\sin(x)}{e^{xt}} dt dx \stackrel{?}{=} \int_{t=0}^{\infty} \int_{x=0}^{\infty} \frac{\sin(x)}{e^{xt}} dx dt \stackrel{(3)}{=} \int_{t=0}^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$$

**Übung:** Erklären Sie die Gleichheiten „ $\stackrel{?}{=}$ “. Das ist nicht leicht! (L409)

**Ein kniffliges Anwendungsbeispiel zum Feynman-Trick** D424  
Ergänzung

**Aufgabe:** Wie löst man das hier auftretende Integral (3)? (Siehe L101)

**Lösung:** (3) Manchmal ist allgemeiner spürbar leichter, so auch hier. Wir fassen Mut und berechnen für  $a \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $b \in \mathbb{R}$  allgemein

$$U := \int_{x=0}^{\infty} e^{-ax} \cos(bx) dx \quad \text{und} \quad V := \int_{x=0}^{\infty} e^{-ax} \sin(bx) dx.$$

Dies sind der Realteil und der Imaginärteil der Exponentialfunktion!

$$U + iV = \int_{x=0}^{\infty} e^{(-a+ib)x} dx = \left[ \frac{e^{(-a+ib)x}}{-a+ib} \right]_{x=0}^{\infty} = \frac{1}{-a+ib} = \frac{a+ib}{a^2+b^2}$$

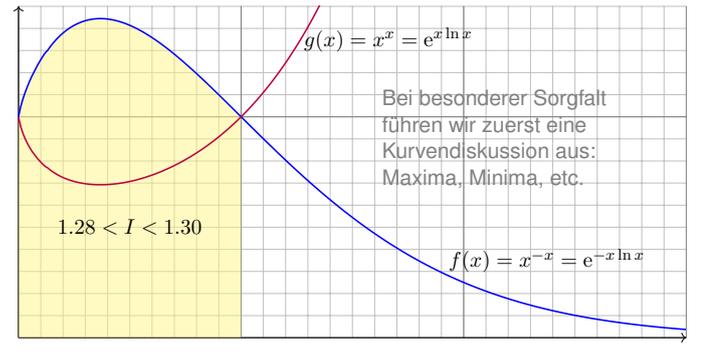
Daraus folgen die beiden gesuchten reellen Integrale:

$$U = \frac{a}{a^2+b^2} \quad \text{und} \quad V = \frac{b}{a^2+b^2}$$

☺ Wir tauschen *zwei* mühsame reelle Integrale gegen *ein* komplexes, und dieses gelingt spielend leicht. Integration ist eine Kunst, sie kann große Freude bereiten, doch sie erfordert auch Erfahrung und Übung, Geduld und Sorgfalt. Wir wollen die Techniken schrittweise ausbauen.

**Aufgabe:** (1) Skizzieren Sie die Funktion  $f(x) = x^{-x} = e^{-x \ln x}$  auf  $[0, 3]$ . Schätzen Sie damit graphisch-numerisch das Integral  $I = \int_0^1 x^{-x} dx$ .

**Lösung:** (1) Auswertung einiger Punkte ergibt das folgende Bild: Wir nutzen hierzu insbesondere den Grenzwert  $\lim_{x \searrow 0} [x^{-x}] = 1$ .



**Aufgabe:** (2) Zeigen Sie folgende erstaunliche Gleichung:

$$\int_{x=0}^1 x^{-x} dx = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-k}$$

Anleitung: (a) Setzen Sie für den Integranden die Exponentialreihe ein. (b) Vertauschen Sie Integral und Reihe. Warum gilt dabei Gleichheit? (c) Erinnern Sie sich an den Feynman-Trick D421 zur Berechnung von

$$\int_{x=0}^1 x^t (-\ln x)^k dx = \frac{k!}{(t+1)^{k+1}} \quad \text{für } t > -1 \text{ und } k \in \mathbb{N}.$$

(3) Berechnen Sie damit das Integral bis auf einen Fehler  $\varepsilon \leq 10^{-9}$ . (a) Für den Fehler bei Reihenabbruch gilt dank geometrischer Reihe:

$$\varepsilon_{n-1} := \sum_{k=n}^{\infty} k^{-k} < \sum_{k=n}^{\infty} n^{-k} = \frac{1}{n^n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \frac{1}{n^n(1-1/n)} \stackrel{!}{\leq} 10^{-9}$$

(b) Bis zu welchem Term müssen Sie numerisch summieren?

**Lösung:** (2) Wir nutzen sorgsam unsere Integrationswerkzeuge:

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^1 x^{-x} dx &= \int_{x=0}^1 e^{-x \ln x} dx \\ &\stackrel{(a)}{=} \int_{x=0}^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k (-\ln x)^k}{k!} dx \\ &\stackrel{(b)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{x=0}^1 x^k (-\ln x)^k dx \\ &\stackrel{(c)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-k} \end{aligned}$$

- 😊 Die einzige nicht-elementare Umformung ist die Vertauschung von Integral und Reihe (b). Die hier summierten Funktionen sind alle positiv, also ändert die Vertauschung das Ergebnis nicht, siehe Fubini D1A.
- 😊 Erfahrung zahlt sich aus: Das innere Integral (c) kennen wir bereits.

(3) Die Reihe konvergiert glücklicherweise extrem schnell! Es genügt, die ersten neun Terme ( $k = 1, 2, \dots, 9$ ) zu summieren:

$$\sum_{k=1}^9 k^{-k} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{27} + \frac{1}{256} + \frac{1}{3125} + \dots + \frac{1}{9^9} = 1.2912859969590 \dots$$

Der Fehler ist  $\varepsilon_9 = \sum_{k=10}^{\infty} k^{-k} < \frac{1}{0.9 \cdot 10^{10}} = 1.111 \dots \cdot 10^{-10} < 10^{-9}$ . Längere Summation liefert schnell und bequem weitere Dezimalstellen:

$$\int_{x=0}^1 x^{-x} dx = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-k} = 1.29128599706266 \dots$$

- 😊 Plausibilitätscheck: Die ersten zwei Nachkommastellen entsprechen unserer Graphik. Hier können Sie weitere numerische Methoden testen.
- 📺 *The Bernoulli Integral is ridiculous*, [youtu.be/PxyK\\_Tsnz10](https://youtu.be/PxyK_Tsnz10). Dort wird Schritt (2c) durch Substitution gelöst, das ist mühsamer. Wir genießen, leistungsstarke Theorie ermöglicht effiziente Berechnung.

**Aufgabe:** (1) Man berechne und vergleiche

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[ \int_{x=0}^{\infty} (-1)^k e^{-(k+1)x} dx \right], \quad \int_{x=0}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-(k+1)x} \right] dx.$$

(2) Gilt absolute Konvergenz? Was ist hierbei die Hüllfunktion? (3) Gilt majorisierte Integrierbarkeit? Was ist die Hüllfunktion?

**Lösung:** (1) Wir können beide Seiten direkt ausrechnen:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \int_{x=0}^{\infty} (-1)^k e^{-(k+1)x} dx \right] &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) \\ \int_{x=0}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-(k+1)x} \right] dx &= \int_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx \\ &= \int_{u=0}^1 \frac{1}{1+u} du = \left[ \ln(1+u) \right]_{u=0}^1 = \ln(2) \end{aligned}$$

😊 Dank unserer Integrations- und Summationstechniken gelingt die direkte Rechnung auf beiden Seiten. Demnach gilt Vertauschbarkeit.

(2) Als Hüllfunktion der absoluten Integranden finden wir:

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-(k+1)x} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$$

Diese ist nicht integrierbar; wir substituieren  $u = e^{-x}$  und erhalten:

$$\int_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} dx = \int_{u=0}^1 \frac{1}{1-u} dx = \left[ -\ln(1-u) \right]_{u=0}^1 = +\infty$$

(3) Mit alternierenden Vorzeichen hingegen finden wir dank Leibniz:

$$\left| \sum_{k=0}^n (-1)^k e^{-(k+1)x} \right| \leq e^{-x}$$

Die Hüllfunktion  $h(x) = e^{-x}$  ist viel sparsamer und bleibt integrierbar:

$$\int_{x=0}^{\infty} e^{-x} dx = \left[ -e^{-x} \right]_{x=0}^{\infty} = 1 < +\infty$$

Hier gilt nicht absolute Konvergenz, aber majorisierte Konvergenz! 😊 Dies genügt, um Integral und Reihe vertauschen zu dürfen (D2D).

**Aufgabe:** Die geometrische Reihe für  $q = \sin(x)^2/2 \in [0, 1/2]$  zeigt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(x)^{2k+1}}{2^k} = \frac{2 \sin(x)}{2 - \sin(x)^2}.$$

Integrieren Sie über  $[0, \pi/2]$  und berechnen Sie so die **Wallis-Reihe**:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2k+1)} = \frac{\pi}{2}$$

😊 Konvergiert die Reihe? Ist der Grenzwert plausibel? Die Majorante  $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 2$  beweist die Konvergenz gegen einen Grenzwert  $\in [1, 2]$ .

**Lösung:** Auf der rechten Seite erhalten wir dank Substitution

$$\int_{x=0}^{\pi/2} \frac{2 \sin(x)}{2 - \sin(x)^2} dx = \int_{x=0}^{\pi/2} \frac{2 \sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx = \left[ -2 \arctan(\cos(x)) \right]_{x=0}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}.$$

Links gilt dank absoluter Konvergenz der geometrischen Reihe:

$$\int_{x=0}^{\pi/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(x)^{2k+1}}{2^k} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x=0}^{\pi/2} \frac{\sin(x)^{2k+1}}{2^k} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k+1)}$$

Zur Erinnerung: Stammfunktionen zu  $\sin(x)^n$  und  $\cos(x)^n$  berechnen wir, wie bereits gesehen [B130](#), rekursiv durch partielle Integration:

$$\begin{aligned} \int \sin(x)^n dx &= -\frac{1}{n} \sin(x)^{n-1} \cos(x) + \frac{n-1}{n} \int \sin(x)^{n-2} dx \\ \int \cos(x)^n dx &= +\frac{1}{n} \cos(x)^{n-1} \sin(x) + \frac{n-1}{n} \int \cos(x)^{n-2} dx \end{aligned}$$

Für  $I_n = \int_{x=0}^{\pi/2} \sin(x)^n dx$  gilt  $I_0 = \frac{\pi}{2}$  und  $I_1 = 1$  und weiter  $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ :

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^{\pi/2} \sin(x)^{2k} dx &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2k)} = \frac{\pi}{2} \frac{(2k)!}{k!^2 \cdot 2^{2k}}, \\ \int_{x=0}^{\pi/2} \sin(x)^{2k+1} dx &= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2k)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2k+1)} = \frac{k!^2 \cdot 2^{2k}}{(2k+1)!}. \end{aligned}$$

- 😊 Einsetzen in obige Reihe beschert uns die schöne Wallis-Formel. Ist die Rechnung auch lang und mühsam, jeder Schritt ist klar und leicht.
- 😊 Leistungsstarke Theorie ermöglicht effiziente Berechnung.

**Stirlings Näherungsformel für  $n!$**

D433  
Ausführung

Für  $n \in \mathbb{N}$  ist die **Fakultät** definiert durch  $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$

$0! = 1$	$7! = 5\,040$	$14! = 87\,178\,291\,200$
$1! = 1$	$8! = 40\,320$	$15! = 1\,307\,674\,368\,000$
$2! = 2$	$9! = 362\,880$	$16! = 20\,922\,789\,888\,000$
$3! = 6$	$10! = 3\,628\,800$	$17! = 355\,687\,428\,096\,000$
$4! = 24$	$11! = 39\,916\,800$	$18! = 6\,402\,373\,705\,728\,000$
$5! = 120$	$12! = 479\,001\,600$	$19! = 121\,645\,100\,408\,832\,000$
$6! = 720$	$13! = 6\,227\,020\,800$	$20! = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000$

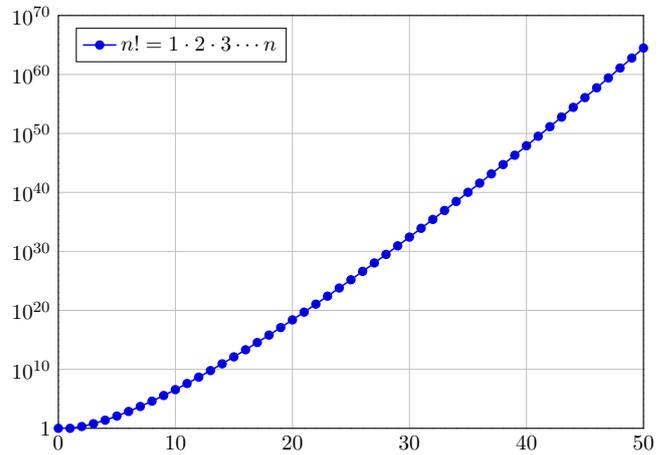
Für große  $n$  ist die exakte Berechnung mühsam und oft gar nicht nötig:  
Für  $n \rightarrow \infty$  suchen wir für  $n!$  eine einfache aber gute Näherungsformel.  
Unsere vorigen Abschätzungen [B3I2](#) legen folgende Asymptotik nahe:

$$n! \sim \text{const} \cdot \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Dies wollen wir nun nachrechnen und auch die Konstante bestimmen.

**Stirlings Näherungsformel für  $n!$**

D434  
Ausführung



**Stirlings Näherungsformel für  $n!$**

D435  
Ausführung

**Aufgabe:** Dank der Gamma-Funktion wissen wir  $n! = \int_{x=0}^{\infty} x^n e^{-x} dx$ . Bestimmen Sie hieraus den Grenzwert von  $n! / \sqrt{n} (n/e)^n$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Die grundlegende Idee erklärt das Video [youtu.be/JsUI40uS0TU](https://youtu.be/JsUI40uS0TU). Der genaue Grenzwert ist das Ziel der folgenden Rechnung.

**Anleitung:** Nutzen Sie hierzu die majorisierte Konvergenz dank der folgenden beiden Hilfsaussagen, die Sie anschließend nachrechnen:

(1) Punktweise für jedes  $t \in \mathbb{R}$  und  $n \rightarrow \infty$  gilt die Konvergenz

$$f_n(t) := \exp\left[n\left(\ln\left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right] \cdot \mathbf{I}_{[-\sqrt{n}, +\infty)}(t) \rightarrow e^{-t^2/2}.$$

(2) Zudem ist die Familie  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  majorisiert integrierbar.

**Lösung:** Einsetzen des Integrals und Umformen ergibt:

$$\frac{n!}{\sqrt{n} (n/e)^n} = \int_{x=0}^{\infty} \exp\left[n\left(\ln\left(\frac{x}{n}\right) + 1 - \frac{x}{n}\right)\right] \frac{dx}{\sqrt{n}}$$

**Stirlings Näherungsformel für  $n!$**

D436  
Ausführung

Substitution  $x = \sqrt{n}t + n$  bedeutet  $dx = \sqrt{n} dt$  und  $\frac{x}{n} = 1 + \frac{t}{\sqrt{n}}$ , also:

$$\frac{n!}{\sqrt{n} (n/e)^n} = \int_{t=-\sqrt{n}}^{\infty} \exp\left[n\left(\ln\left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right] dt = \int_{\mathbb{R}} f_n(t) dt$$

Uns interessiert hier das Verhalten für  $n \rightarrow \infty$ . Dank majorisierter Konvergenz (1-2) und Satz D2D vertauschen Limes und Integral:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(t) dt \stackrel{\text{MaK}}{\stackrel{\text{D2D}}{=}} \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt \stackrel{(\text{I})}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} dt \stackrel{\text{Gauß}}{\stackrel{\text{C2c}}{=}} \sqrt{2\pi}$$

Damit erhalten wir schließlich das Wachstumsverhalten der Fakultät  $n \mapsto n!$  durch die Stirling-Formel als asymptotische Näherung (B3D):

**Satz D4C: Stirling-Formel**

Für  $n \rightarrow \infty$  gilt der Grenzwert  $n! / \sqrt{n} (n/e)^n \rightarrow \sqrt{2\pi}$ .

Leistungstarke Theorie ermöglicht effiziente Berechnung.

**Übung:** Rechnen Sie die Voraussetzungen (1-2) sorgfältig nach.

**Newton-Potential und Gravitationsfeld**

D437  
Ausführung

**Beispiel:** Das **Newton-Potential** einer Masse  $m$  im Punkt  $y \in \mathbb{R}^3$  ist

$$(1) \quad F: \mathbb{R}^3 \setminus \{y\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) = \frac{m}{|y-x|}.$$

(Gravitationskonstante und etwaige Vorzeichen lasse ich hier weg.)  
Für jede diskrete Verteilung der Massen  $m_1, \dots, m_N$  in den Punkten  $y_1, \dots, y_N \in \mathbb{R}^3$  erhalten wir entsprechend die **Superposition** (Summe)

$$(2) \quad F: \mathbb{R}^3 \setminus \{y_1, \dots, y_N\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{|y_i-x|}.$$

Für eine kontinuierliche Verteilung betrachten wir eine integrierbare Massendichte  $\varrho: K \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem beliebigen Kompaktum  $K \subseteq \mathbb{R}^3$ . Außerhalb von  $K$  ist das Potential die **Superposition** (Faltung, D5E)

$$(3) \quad F: \mathbb{R}^3 \setminus K \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) = \int_{y \in K} \frac{\varrho(y)}{|y-x|} dy.$$

**Aufgabe:** (a) Berechnen Sie jeweils das **Gravitationsfeld**  $f = \text{grad } F$ .  
(b) Ist das Potential  $F$  auf  $\mathbb{R}^3 \setminus K$  harmonisch, gilt hier also  $\Delta F = 0$ ?  
Dürfen wir hier die Ableitungen unter das Integral ziehen? Warum?

**Newton-Potential und Gravitationsfeld**

D438  
Ausführung

Zur Erinnerung: Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  eine offene Teilmenge und  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ .

Für  $F \in C^1(U, \mathbb{R})$  ist der **Gradient**  $f = \text{grad } F: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  definiert durch

$$\text{grad } F = \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_2}, \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \right).$$

Für  $F \in C^2(U, \mathbb{R})$  gilt  $f \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ , und für die **Divergenz** von  $f$  folgt

$$\text{div } f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} = \Delta F.$$

Dies führt zum **Laplace-Operator**  $\Delta: C^2(U, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(U, \mathbb{R}): F \mapsto \Delta F$ ,

$$\Delta = \text{div} \circ \text{grad} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

Eine Funktion  $F$  mit der Eigenschaft  $\Delta F = 0$  heißt **harmonisch**.

Mit anderen Worten, die Funktion  $F: \mathbb{R}^3 \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}$  ist zweimal stetig differenzierbar und eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\Delta F = 0.$$

Dies ist die **homogene Potentialgleichung** oder **Laplace-Gleichung**.

**Newton-Potential und Gravitationsfeld**

D439  
Ausführung

**Lösung:** (1) Wir berechnen (a) und (b) zunächst für eine Punktmasse:

$$F(x) = \frac{m}{|y-x|} \Rightarrow f(x) = \text{grad } F(x) = m \frac{y-x}{|y-x|^3} \Rightarrow \Delta F = \text{div } f = 0$$

(1a) Nachrechnen für die  $i$ -te Koordinate  $f_i = \partial F / \partial x_i$ :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \sum_{j=1}^3 (y_j - x_j)^2 \right]^{-1/2} = \left[ \sum_{j=1}^3 (y_j - x_j)^2 \right]^{-3/2} (y_i - x_i) = \frac{y_i - x_i}{|y-x|^3}$$

(1b) Nochmaliges Ableiten ergibt analog:

$$\frac{\partial^2 F_i}{\partial x_i^2} = \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{y_i - x_i}{|y-x|^3} = \frac{-1}{|y-x|^3} + 3 \frac{(y_i - x_i)^2}{|y-x|^5}$$

Für den Laplace-Operator  $\Delta F = \text{div } f$  erhalten wir schließlich:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} = 0$$

Somit gilt  $\Delta F = 0$ : Die Funktion  $F: \mathbb{R}^3 \setminus \{y\} \rightarrow \mathbb{R}$  ist harmonisch!

**Newton-Potential und Gravitationsfeld**

D440  
Ausführung

(2) Für eine Summe von Punktmassen gilt dank Linearität der Ableitung:

$$F(x) = \sum_i \frac{m_i}{|y_i-x|} \Rightarrow f(x) = \sum_i m_i \frac{y_i-x}{|y_i-x|^3} \Rightarrow \Delta F = \text{div } f = 0$$

(3) Zur Massendichte  $\varrho: K \rightarrow \mathbb{R}$  erhalten wir die Superposition (Faltung)

$$F: \mathbb{R}^3 \setminus K \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) = \int_{y \in K} \frac{\varrho(y)}{|y-x|} dy.$$

(3a) Das zugehörige Gravitationsfeld  $f = \text{grad } F$  ist (dank Satz D3c)

$$f(x) = \text{grad} \int_K \frac{\varrho(y)}{|y-x|} dy \stackrel{\text{D3c}}{=} \int_K \text{grad} \frac{\varrho(y)}{|y-x|} dy = \int_K \frac{y-x}{|y-x|^3} \varrho(y) dy.$$

(3b) Somit ist das Newton-Potential  $F$  auf  $\mathbb{R}^3 \setminus K$  harmonisch, denn

$$\Delta F(x) = \Delta \int_K \frac{\varrho(y)}{|y-x|} dy \stackrel{\text{D3c}}{=} \int_K \Delta \frac{\varrho(y)}{|y-x|} dy = \int_K 0 dy = 0.$$

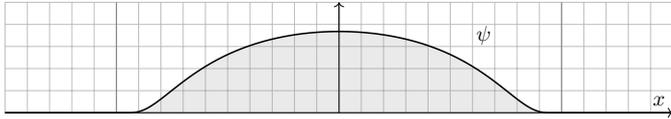
Ableitungen und Integral vertauschen, da der Integrationsbereich  $K$  kompakt ist und der Integrand in  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus K$  stetig differenzierbar (D3C).

**Aufgabe:** (1) Skizzieren Sie (für  $n = 1$ ) die Funktion

$$\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} e^{-1/(1-|x|^2)} & \text{für } |x| < 1, \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1. \end{cases}$$

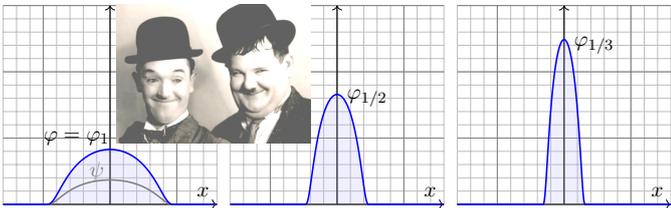
- (2) Warum ist das Integral  $c := \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx$  strikt positiv? Schätzen Sie diesen Wert graphisch-numerisch aus Ihrer Skizze (in Dimension  $n = 1$ ).  
 (3) Ist  $\psi$  glatt, also  $\psi \in C^\infty$ ? Was ist ihr Träger? Ist er kompakt?  
 (4) Das Vielfache  $\varphi := \psi/c$  hat die Gesamtmasse  $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$ . Skizzieren Sie die skalierte Funktion  $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \varphi(x/\varepsilon)/\varepsilon^n$  für  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ . Ist  $\varphi_\varepsilon$  ebenfalls glatt? Gilt weiterhin  $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$ ?

**Lösung:** (1) Auswertung einiger Punkte ergibt das folgende Bild:



(4) Sei  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ . Die skalierte Funktion  $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \varphi(x/\varepsilon)/\varepsilon^n$  ist glatt, erfüllt  $\varphi_\varepsilon \geq 0$  und  $\text{supp } \varphi_\varepsilon = \bar{B}(0, \varepsilon)$  sowie  $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x) dx = 1$ .

😊 Dies ist ein besonders anschaulicher Spezialfall des Transformationsatzes für  $n$ -dimensionale Integrale (C2B).



- 😊 Anschaulich: Für  $\varepsilon \searrow 0$  konzentriert sich  $\varphi_\varepsilon$  immer mehr um den Nullpunkt. Die korrekt gewählte Skalierung erhält die Gesamtmasse!  
 😊 Der Grenzwert für  $\varepsilon \searrow 0$  ergibt die ominöse **Dirac-Funktion** D553. Unter dem Integral hingegen erhalten wir das **Dirac-Funktional** D5L.

In diesem Kapitel geht es um **Integrale und Grenzwerte**. Eine wichtige und häufige Anwendung sind Mittelwerte durch gewichtete Integrale, etwa eine lokale Masseverteilung. Anschaulich-physikalisch entspricht dies einer Messung, etwa lokal in einem kleinen Ball um  $a$  mit Radius  $r$ . Uns interessiert der Grenzübergang  $r \searrow 0$ . Hierzu dient der folgende Mittelwertsatz; den eindimensionalen Fall B4B kennen Sie bereits.

**Satz D5A: Mittelwertsatz der mehrdim. Integralrechnung**

Sei  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Quader  $K = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$  mit  $a_i \leq b_i$  in  $\mathbb{R}$  oder ein Ball  $K = \bar{B}(a, r)$  um den Punkt  $a \in \mathbb{R}^n$  mit Radius  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ . Sei  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $g : K \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar und  $g \geq 0$  (oder  $g \leq 0$ ). Dann existiert ein Punkt  $\xi \in K$  mit der Mittelwerteigenschaft

$$\int_K f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_K g(x) dx.$$

Im Spezialfall  $g = 1$  erhalten wir  $\int_K f(x) dx = f(\xi) \cdot \text{vol}_n(K)$ .  
 Im Falle  $\int_K g(x) dx = 1$  erhalten wir  $\int_K f(x) g(x) dx = f(\xi)$ .

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  messbar mit  $0 < \text{vol}_n(\Omega) < \infty$  und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar. Wir definieren den **Mittelwert** von  $f$  auf  $\Omega$  durch das normierte Integral

$$\int_\Omega f(x) dx := \frac{1}{\text{vol}_n(\Omega)} \int_\Omega f(x) dx.$$

**Satz D5B: Jeder Stetigkeitspunkt ist ein Lebesgue-Punkt.**

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  lokal integrierbar, d.h. integrierbar auf jedem Ball  $\bar{B}(a, r)$ . Ist  $f$  in  $a$  stetig, so gelten für  $r \rightarrow 0$  die beiden Mittelwerteigenschaften

$$(1) \int_{\bar{B}(a,r)} f(x) dx \rightarrow f(a) \quad \text{und} \quad (2) \int_{\bar{B}(a,r)} |f(x) - f(a)| dx \rightarrow 0.$$

Allgemein gilt die Implikation (2)  $\Rightarrow$  (1), aber nicht umgekehrt (1)  $\Rightarrow$  (2). Meist nutzen bzw. fordern wir deshalb die stärkere Bedingung (2). Wir nennen  $a$  einen **Lebesgue-Punkt**, wenn (2) gilt; damit folgt (1).

**Aufgabe:** Rechnen Sie die Aussagen des Satzes sorgfältig nach! In welchen Punkten erfüllt  $f = \text{sign} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Eigenschaft (1) bzw. (2)?

(2) Das Integral entspricht der Fläche, hier gerundet etwa 44 Quadrate. Wir schätzen so  $c = \int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx \approx 0.44$ . Es gibt für dieses Integral keine geschlossene Formel als elementaren Ausdruck. Eine noch genauere Näherung  $c \approx 0.4439938 \dots$  erhält man durch numerische Integration. Allgemein in Dimension  $n \geq 1$  ist die Funktion  $\psi$  rotations-symmetrisch. Das Volumen  $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx$  lässt sich ebenso nur numerisch berechnen. Auf den genauen Wert kommt es uns im Folgenden nicht weiter an.

(3) Die Funktion  $\psi$  ist offensichtlich glatt im Gebiet  $|x| > 1$  und ebenso für  $|x| < 1$ . Entlang der Sphäre  $|x| = 1$  müssen wir genauer hinschauen! Von Seite B438 wiedererkennen wir die bemerkenswerte Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := \begin{cases} e^{-1/x} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

Dort haben wir sorgfältig nachgerechnet, dass  $f$  glatt ist. Somit ist auch  $\psi(x) = f(1 - x_1^2 - \dots - x_n^2)$  glatt, da Komposition glatter Funktionen. Der Träger  $\text{supp } \psi = \bar{B}(0, 1)$  ist der abgeschlossene Einheitsball, also kompakt. Die Skizze zeigt den eindimensionalen Fall  $\bar{B}(0, 1) = [-1, 1]$ .

Und die Moral von der Geschichte? Was nützen uns Hutfunktionen? In Kapitel B dienen sie zunächst als Werkstück zur Fingerübung, um daran unsere bisherigen Techniken zu testen und zu schärfen: Integration, Taylor-Reihen, glatte und analytische Funktionen, etc. . .

Glatte Funktionen sind flexibel, analytische Funktionen hingegen sind starr. Für Letztere gilt der Eindeutigkeitsatz: Haben zwei analytische Funktionen  $\varphi, \psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  in einem Punkt  $x_0$  dieselben Ableitungen  $\partial^\alpha \varphi(x_0) = \partial^\alpha \psi(x_0)$  für alle  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , so gilt  $\varphi(x) = \psi(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Ebenso: Stimmen zwei analytische Funktionen  $\varphi, \psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  auf einer (beliebig kleinen) offenen Menge  $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{R}^n$  überein, also  $\varphi|_U = \psi|_U$ , so gilt  $\varphi = \psi$  auf  $\mathbb{R}^n$ . Analytisch und kompakt getragen bedeutet Null!

Glatte Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  hingegen sind bemerkenswert flexibel: Die vorigen Konstruktionen zeigen, dass der Vektorraum  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  aller glatten Funktionen mit kompaktem Träger erstaunlich reichhaltig ist.

Insbesondere dienen glatte Hutfunktionen als Testfunktionen wie in B4G. In diesem Kapitel nutzen wir sie nun zur Konstruktion von Distributionen. Diese einfache Idee entfaltet sich zu einer wunderbaren Rechentechnik!

**Aufgabe:** Wiederholen Sie den eindimensionalen Mittelwertsatz B4B. Beweisen Sie nach diesem Vorbild den mehrdimensionalen Satz D5A.

**Lösung:** Die Menge  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  ist wegzusammenhängend und kompakt. Hierauf nimmt die stetige Funktion  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  ihr Minimum  $m = f(x_m)$  und ihr Maximum  $M = f(x_M)$  an, also  $m \leq f(x) \leq M$  für alle  $x \in K$ . Wegen  $g \geq 0$  folgt daraus  $m g(x) \leq f(x) g(x) \leq M g(x)$  für alle  $x \in K$ . Das Integral ist monoton und linear, also folgt  $m \int g \leq \int f g \leq M \int g$ . Demnach existiert ein Faktor  $\mu \in [m, M]$ , sodass  $\int f g = \mu \int g$  gilt.

Wir nutzen nun den Zwischenwertsatz für die stetige Funktion  $f$ : Es existiert ein Punkt  $\xi \in K$  mit  $f(\xi) = \mu$ . Somit gilt  $\int f g = f(\xi) \int g$ .  
 Genauer: Wir betrachten den Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow K : t \mapsto (1-t)x_m + tx_M$  von  $\gamma(0) = x_m$  nach  $\gamma(1) = x_M$ . Die Komposition  $\varphi = f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  verläuft stetig von  $\varphi(0) = m$  nach  $\varphi(1) = M$ . Also existiert ein  $\tau \in [0, 1]$  mit  $\varphi(\tau) = \mu$ . Der Punkt  $\xi = \gamma(\tau) \in K$  leistet demnach das Gewünschte.

😊 Statt Quader oder Ball genügt es, dass der Definitionsbereich  $K$  kompakt und wegzusammenhängend ist. Beides wird wirklich benötigt.

**Lösung:** Stetigkeit der Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  im Punkt  $a \in \mathbb{R}^n$  bedeutet: Zu jedem noch so kleinen  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  existiert ein Radius  $r_\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ , sodass für  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $|x - a| \leq r_\varepsilon$  stets  $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$  gilt. Für  $r \leq r_\varepsilon$  folgt:

$$\int_{\bar{B}(a,r)} |f(x) - f(a)| dx \leq \int_{\bar{B}(a,r)} \varepsilon dx = \varepsilon$$

Stetigkeit in  $a$  impliziert demnach (2). Allgemein folgt (1) aus (2):

$$\left| \int_{\bar{B}(a,r)} f(x) dx - f(a) \right| = \left| \int_{\bar{B}(a,r)} f(x) - f(a) dx \right| \leq \int_{\bar{B}(a,r)} |f(x) - f(a)| dx$$

Für  $r \rightarrow 0$  geht die rechte Seite gegen Null (2), also auch die linke (1).

⚠ Die umgekehrte Implikation „(1)  $\Rightarrow$  (2)“ gilt im Allgemeinen nicht. Als Gegenbeispiel betrachten wir  $f = \text{sign} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  im Punkt  $a = 0$ :

$$\int_{\bar{B}(0,r)} f(x) dx = \frac{1}{2r} \int_{-r}^r \text{sign}(x) dx = 0 \rightarrow f(0) = 0,$$

$$\int_{\bar{B}(0,r)} |f(x) - f(0)| dx = \frac{1}{2r} \int_{-r}^r |\text{sign}(x)| dx = 1 \not\rightarrow 0.$$

In jedem Punkt  $a \neq 0$  ist  $f$  stetig, also gilt (2) und somit auch (1).

**Aufgabe:** Skizzieren Sie für  $\varepsilon \searrow 0$  die folgenden Funktionen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$f_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{I}_{[0,\varepsilon]}, \quad g_\varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon} \mathbf{I}_{[-\varepsilon,\varepsilon]}, \quad h_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon - |x|}{\varepsilon^2} \mathbf{I}_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(x), \quad k_\varepsilon(x) = \frac{e^{-x^2/2\varepsilon^2}}{\varepsilon\sqrt{2\pi}}$$

(1) Berechnen Sie die punktweise Grenzfunktion  $f(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} f_\varepsilon(x)$ .  
 (2) Gilt  $\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$  für  $\varepsilon \searrow 0$ ? Wo liegt hier das Problem?  
 (3) Gilt  $\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx$  für jede Funktion  $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ ?  
 (4) Gilt  $\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx \rightarrow \varphi(0)$ , also  $f_\varepsilon \rightarrow \delta_0$  im Distributionensinne?  
 (5) Sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar mit Gesamtmasse  $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = 1$ .  
 Zu jedem  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  erfüllt  $f_\varepsilon(x) := f(x/\varepsilon)/\varepsilon^n$  ebenso  $\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x) dx = 1$ .  
 Gilt  $\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx \rightarrow \varphi(0)$ , also  $f_\varepsilon \rightarrow \delta_0$  im Distributionensinne?

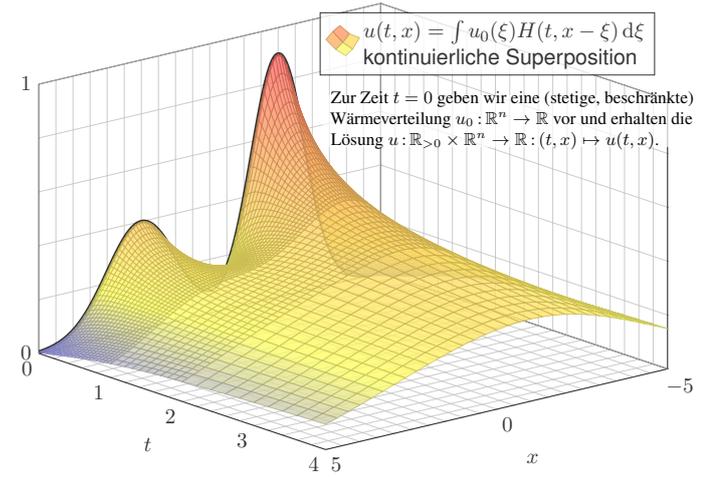
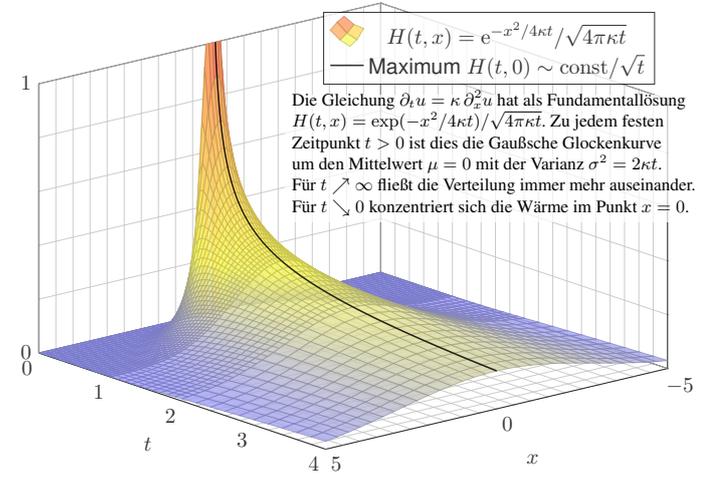
**Lösung:** (1) Wir finden  $f(0) = \infty$  und  $f(x) = 0$  für  $x \neq 0$ . (2) Daher gilt  $\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) dx = 1 \not\rightarrow 0 = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$ . Masse verschwindet nach Unendlich! Ebenso schlägt (3) fehl. Hingegen gilt (4) sobald  $\varphi$  stetig ist (im Punkt 0).  
 ☺ Dies ist genau die Rechnung, die uns zum HDI geführt hat! [B122]  
 Die anderen Beispiele sind analog, siehe Dreiecksfunktionen [D205] und Glockenfunktionen [D409]. Allgemein zu (5) gilt folgender Grenzwertsatz.

**Aufgabe:** Rechnen Sie die Aussagen des Satzes sorgfältig nach!  
**Lösung:** (1a) Zur Vereinfachung sei  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf ganz  $\mathbb{R}^n$ . Der Mittelwertsatz D5A der Integralrechnung garantiert dann

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \int_{\bar{B}(0,r_\varepsilon)} f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \varphi(\xi_\varepsilon).$$

Genauer: Zu jedem  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  existiert ein geeignetes  $\xi_\varepsilon \in \bar{B}(0, r_\varepsilon)$ . Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  gilt  $r_\varepsilon \rightarrow 0$ , also auch  $\xi_\varepsilon \rightarrow 0$  und somit  $\varphi(\xi_\varepsilon) \rightarrow \varphi(0)$ .

(1b) Wir setzen nun nur noch voraus, dass  $\varphi$  stetig im Punkt 0 ist. Sei  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ . Es existiert ein Radius  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ , sodass für  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $|x - 0| \leq r$  stets  $|\varphi(x) - \varphi(0)| \leq \delta$  gilt. Insbesondere ist  $\varphi$  auf  $\bar{B}(0, r_\varepsilon)$  beschränkt und somit absolut integrierbar. Dank  $r_\varepsilon \rightarrow 0$  existiert ein  $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ , sodass für  $\varepsilon$  mit  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  stets  $r_\varepsilon \leq r$  gilt. Damit folgt:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx - \varphi(0) \right| = \left| \int_{\bar{B}(0,r_\varepsilon)} f_\varepsilon(x) [\varphi(x) - \varphi(0)] dx \right| \leq \int_{\bar{B}(0,r_\varepsilon)} f_\varepsilon(x) |\varphi(x) - \varphi(0)| dx \leq \int_{\bar{B}(0,r_\varepsilon)} f_\varepsilon(x) \delta dx = \delta$$


Je nach Anwendung wird nicht über  $\bar{B}(a, r)$  gleichverteilt gemittelt, sondern gewichtet. Auch hierfür benötigen wir geeignete Werkzeuge:

**Satz D5C: Grenzwertsatz für gewichtete Mittelwerte**

(1) Für jedes  $\varepsilon > 0$  sei  $f_\varepsilon: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  eine Funktion mit Gesamtmasse  $\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x) dx = 1$  und Träger  $\text{supp}(f_\varepsilon) \subseteq \bar{B}(0, r_\varepsilon)$ , wobei  $r_\varepsilon \rightarrow 0$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Dann gilt  $\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx \rightarrow \varphi(0)$  für jede Testfunktion  $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$ . Hierzu genügt bereits, dass  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  im Punkt 0 stetig ist.

(2) Sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar mit Gesamtmasse  $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = 1$ . Zu jedem  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  erfüllt  $f_\varepsilon(x) := f(x/\varepsilon)/\varepsilon^n$  ebenso  $\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x) dx = 1$ . Damit gilt  $\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx \rightarrow \varphi(0)$  für jede Testfunktion  $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^n)$ . Hierzu genügt  $\varphi$  stetig in 0 und essentiell beschränkt,  $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

⚠ In vielen Anwendungen ist der Träger  $\text{supp}(f_\varepsilon)$  nicht kompakt; dann können wir (1) nicht nutzen, sondern benötigen den Fall (2).  
 ☺ In beiden Fällen (1) und (2) gilt  $f_\varepsilon \rightarrow \delta_0$  im Distributionensinne D51. Diese einfache Idee entfaltet sich zu einer wunderbaren Rechentechnik.

☺ Die erste Rechnung (1a) gelingt leicht dank Mittelwertsatz D5A. Der allgemeinere Fall (1b) ist mühsamer, gelingt aber letztlich genauso. Im Fall (2) hingegen ist der Träger  $\text{supp}(f_\varepsilon)$  nicht notwendig kompakt:

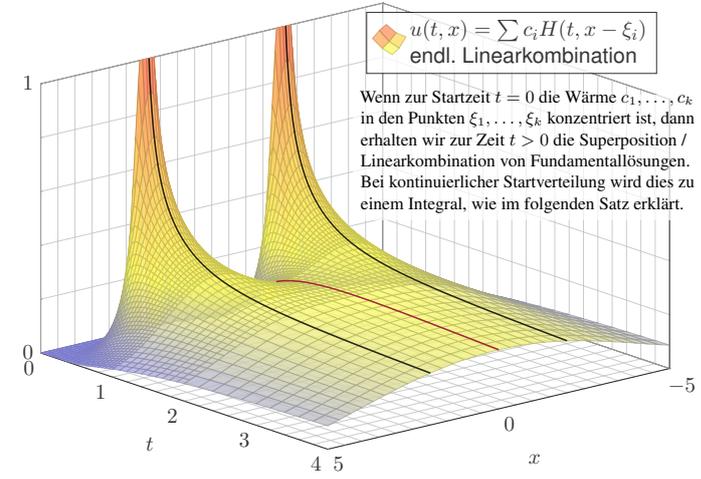
(2a) Zur Vereinfachung des Integrals nutzen wir die Substitution  $x = \varepsilon y$ :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\varepsilon^n} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \varphi(\varepsilon y) dy$$

Für den Grenzwert  $\varepsilon \searrow 0$  nutzen wir die majorisierte Konvergenz D2D: Die Majorante  $|f(y) \varphi(\varepsilon y)| \leq |f(y)| \cdot M$  mit  $M := \sup|\varphi|$  ist integrierbar. Für jeden Punkt  $y \in \mathbb{R}^n$  gilt  $\lim_{\varepsilon \searrow 0} f(y) \varphi(\varepsilon y) = f(y) \varphi(0)$ . Also folgt:

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \varphi(\varepsilon y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\varepsilon \searrow 0} [f(y) \varphi(\varepsilon y)] dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \varphi(0) dy = \varphi(0) \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy = \varphi(0)$$

(2b) Wir nutzen in (2a) nur  $M = \text{ess sup}|\varphi| < \infty$  und Stetigkeit in 0.



**Satz D5D: Lösungen der Wärmeleitungsgleichung**

(1) Die Wärmeleitungsgleichung  $\partial_t u = \kappa \Delta u$  hat als Fundamentallösung eine auseinanderfließende Glockenkurve, den **Wärmeleitungskern**

$$H: \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}: H(t, x) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi\kappa t})^n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\kappa t}\right).$$

Die Konstanten sichern die Normierung  $\int_{x \in \mathbb{R}^n} H(t, x) dx = 1$  für  $t > 0$ .

(2) Für  $t = 0$  sei die Wärmeverteilung  $u_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  vorgegeben,  $u_0 \in C_b$ . Für  $t > 0$  erhalten wir die Lösung durch **Superposition** (Faltung D5E):

$$u: \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}: u(t, x) = \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} H(t, x - \xi) u_0(\xi) d\xi$$

Sie erfüllt  $\partial_t u = \kappa \Delta u$  für  $t > 0$  sowie  $\lim_{t \searrow 0} u(t, x) = u_0(x)$ .

(3) Aus  $u(0, x) = \sin(kx)$  für  $t = 0$  folgt  $u(t, x) = e^{-k^2 \kappa t} \sin(kx)$  für  $t \geq 0$ . Aus  $u(0, x) = \sum_k c_k \sin(kx)$  folgt  $u(t, x) = \sum_k c_k e^{-k^2 \kappa t} \sin(kx)$  für  $t \geq 0$ . Die Wärmeleitung glättet: Hohe Frequenzen klingen extrem schnell ab.

**Lösungen der Wärmeleitungsgleichung** D517  
Ergänzung

**Aufgabe:** (1a) Berechnen Sie die Ableitungen  $\partial H/\partial t$  und  $\partial^2 H/\partial x_i^2$ . Prüfen Sie so nach, dass  $H$  tatsächlich die Gleichung  $\partial_t H = \kappa \Delta H$  löst.

**Lösung:** (1a) Wir untersuchen die Funktion  $H: \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$H(t, x_1, \dots, x_n) = (4\pi\kappa t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{4\kappa t}\right)$$

Wir leiten zweimal nach  $x_1, \dots, x_n$  und einmal nach  $t$  ab:

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = (4\pi\kappa t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\kappa t}\right) \frac{-x_i}{2\kappa t}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_i^2} = (4\pi\kappa t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\kappa t}\right) \left(\frac{x_i^2}{4\kappa^2 t^2} - 2\pi(4\pi\kappa t)^{-\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\kappa t}\right)\right)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = (4\pi\kappa t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\kappa t}\right) \left(-\frac{|x|^2}{4\kappa t^2} - 2\pi\kappa n(4\pi\kappa t)^{-\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\kappa t}\right)\right)$$

Die Summe ergibt das erhoffte Ergebnis  $\partial_t H = \kappa \Delta H$ :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 H}{\partial x_n^2}\right)$$

**Lösungen der Wärmeleitungsgleichung** D518  
Ergänzung

☺ Unsere Fundamentallösung  $H$  erfüllt  $(\partial_t - \kappa \Delta)H = 0$ . Diese schöne Funktion ist vollkommen explizit und sehr nützlich! Wir wollen uns mit ihr vertraut machen und hieraus weitere, gar alle Lösungen konstruieren.

**Aufgabe:** (1b) Skizzieren Sie  $H: \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  für  $n = 1$  und  $\kappa = 1$ .

(1c) Für alle  $t \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt  $H(t, x) \geq 0$  und  $\int_{\mathbb{R}^n} H(t, x) dx = 1$ . Für  $t \searrow 0$  ist die Verteilung  $H(t, x)$  beliebig eng um  $x = 0$  konzentriert.

(1d) Löst auch  $u(t, x) = \sum_{j=1}^N c_j H(t, x - \xi_j)$  die Gleichung  $\partial_t u = \kappa \Delta u$ ? Welche Startverteilung erhalten wir hier für  $t \searrow 0$ ?

(1e) Zu  $t = 0$  konzentrieren wir jeweils die Wärmemenge 1 in  $x = \pm 2$ . Wie fließt die Wärme? Welche Wärmedichte wird in  $x = 0$  erreicht?

**Lösung:** (1b) Unsere erste Graphik [D513](#) zeigt die Diffusion der Wärmemenge 1, die zur Zeit  $t = 0$  im Punkt  $x = 0$  konzentriert ist.

(1c) Für festes  $t > 0$  ist  $H(t, x)$  eine Gaußsche Glockenkurve mit Mittelwert  $\mu = 0$  und Streuung  $\sigma = \sqrt{2\kappa t}$ . [C231](#) Für  $t \searrow 0$  gilt  $\sigma \searrow 0$ : Anschaulich konzentriert sich die Verteilung beliebig eng um  $x = 0$ .

**Lösungen der Wärmeleitungsgleichung** D519  
Ergänzung

(1d) Jede Verschiebung  $H(t, x - \xi)$  nach  $\xi \in \mathbb{R}^n$  löst obige PDE, also auch jede Linearkombination  $u(t, x) = \sum_{j=1}^N c_j H(t, x - \xi_j)$ : Da unsere PDE linear ist, erhalten wir mühelos  $(\partial_t - \kappa \Delta)u = 0$ . Diese Lösung beginnt mit Wärmemenge  $c_j$  im Punkt  $\xi_j$  für  $j = 1, \dots, N$ . Damit können wir jede **diskrete Anfangsverteilung** lösen! Beispiel:

(1e) Die zweite Graphik [D514](#) zeigt die Diffusion der Wärmemenge 2, die zur Zeit  $t = 0$  in den Punkten  $x = \pm 2$  konzentriert ist. Für  $t > 0$  ist dies die Überlagerung von zwei Glockenkurven mit  $\mu = \pm 2$  und  $\sigma = \sqrt{2\kappa t}$ . Im Punkt  $x = 0$  steigt die Wärmemenge für  $0 \leq t \leq t_0$  und fällt für  $t \geq t_0$  gegen 0. Die expliziten Werte berechnet man durch Kurvendiskussion.

Eine **kontinuierliche Anfangsverteilung**  $u_0(x)$  führt entsprechend zu

$$u(t, x) = \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} H(t, x - \xi) u_0(\xi) d\xi.$$

Das ist die kontinuierliche Superposition von Fundamentallösungen. Auch diese Lösung  $u(t, x)$  wollen wir schließlich nachrechnen.

**Lösungen der Wärmeleitungsgleichung** D520  
Ergänzung

**Aufgabe:** (2) Rechnen Sie für jede Startverteilung  $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  nach, dass die angegebene Funktion  $u: \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung ist.

**Lösung:** (2a) Wir ziehen die **Ableitung unters Integral** und erhalten:

$$(\partial_t - \kappa \Delta)u(t, x) = \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} u_0(\xi) \underbrace{(\partial_t - \kappa \Delta)H(t, x - \xi)}_{= 0, \text{ Fundamentallösung!}} d\xi = 0$$

Ist dies gerechtfertigt? Ja, denn die partiellen Ableitungen aus (1) sind majorisiert integrierbar! Dies prüft man geduldig nach, siehe [D419](#).

(2b) Dank **Transformationsatz** gilt für  $\zeta = x - \xi$  und  $\xi = x - \zeta$ :

$$u(t, x) = \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} u_0(\xi) H(t, x - \xi) d\xi = \int_{\zeta \in \mathbb{R}^n} u_0(x - \zeta) H(t, \zeta) d\zeta$$

Damit prüfen wir schließlich die **Anfangswerte** für  $t = 0$  nach:

$$\lim_{t \searrow 0} u(t, x) = \lim_{t \searrow 0} \int_{\zeta \in \mathbb{R}^n} u_0(x - \zeta) H(t, \zeta) d\zeta = u_0(x)$$

Die Verteilung  $\zeta \mapsto H(t, \zeta)$  hat Gesamtmasse 1, für  $t \searrow 0$  beliebig eng um  $\zeta = 0$  konzentriert, das Integral geht daher gegen  $u_0(x)$ . Satz D5C: Hierzu sei  $u_0$  stetig (zumindest im Punkt  $x$ ) und (essentiell) beschränkt.

**Faltung von Funktionen: Motivation** D521  
Ergänzung

Die **Wärmeleitungsgleichung**  $\partial_t u = \kappa \Delta u$  hat die Fundamentallösung  $H: \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , wie oben erklärt. Zur Startverteilung  $u_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  erhalten wir die zugehörige Lösung  $u$  durch **Superposition** (Faltung)

$$u: \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}: u(t, x) = \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} H(t, x - \xi) u_0(\xi) d\xi.$$

Das **Newton-Potential** einer Masse  $m$  im Nullpunkt ist  $F(x) = m/|x|$ . Dies ist die Fundamentallösung der Potentialgleichung  $\Delta F = 0$  auf dem Gebiet  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . (Etwaige Konstanten und Vorzeichen lasse ich weg.) Für eine kontinuierliche Verteilung betrachten wir eine integrierbare Massendichte  $\rho: K \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem beliebigen Kompaktum  $K \subseteq \mathbb{R}^3$ . Außerhalb von  $K$  ist das Potential dann die **Superposition** (Faltung)

$$F: \mathbb{R}^3 \setminus K \rightarrow \mathbb{R}: F(x) = \int_{\xi \in K} \frac{\rho(\xi)}{|x - \xi|} d\xi.$$

Gleiches gilt für das elektrische Potential einer Ladungsverteilung und ebenso in zahlreichen ähnlichen Anwendungen der Potentialtheorie. Solche Integrale treten in vielen physikalisch-technischen Anwendungen auf, daher auch in der Mathematik. Damit wollen wir nun rechnen lernen.

**Faltung von Funktionen: Definition** D522  
Ergänzung

**Definition D5E: Faltung von Funktionen**

Zu Funktionen  $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  definieren wir ihre **Faltung**  $f * g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$(f * g)(x) := \int_{y \in \mathbb{R}^n} f(y) g(x - y) dy = \int_{y \in \mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) dy.$$

Hierzu verlangen wir jeweils, dass der Integrand absolut integrierbar ist, zumindest für fast alle  $x \in \mathbb{R}^n$ , also alle bis auf eine Nullmenge  $N \subseteq \mathbb{R}^n$ .

Die folgenden hilfreichen Sätze geben Auskunft, wann diese wesentliche Voraussetzung erfüllt ist, und welche Eigenschaften wir erwarten dürfen.

**Satz D5F: Faltung von  $L^1$ -Funktionen**

(0) Sind  $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  absolut integrierbar, dann auch  $a, b, c: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $a(x, y) = f(x)g(y)$ ,  $b(x, y) = f(y)g(x - y)$ ,  $c(x, y) = f(x - y)g(y)$ , denn für die  $L^1$ -Normen gilt  $\|a\|_{L^1} = \|b\|_{L^1} = \|c\|_{L^1} = \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1}$ .

(1) Das **Faltungsprodukt**  $*$ :  $L^1(\mathbb{R}^n) \times L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^1(\mathbb{R}^n): (f, g) \mapsto f * g$  erfüllt  $\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1}$ , ist bilinear, kommutativ und assoziativ.

**Faltung von Funktionen: Existenz** D523  
Ergänzung

**Aufgabe:** Rechnen Sie diese Un/Gleichungen sorgfältig nach!

**Lösung:** (0a) Wir nutzen unmittelbar den Satz C1E von Fubini:

$$\int_{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n}} |f(x) \cdot g(y)| d(x, y) \stackrel{\text{Fub}}{\stackrel{\text{C1E}}{=}} \int_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{y \in \mathbb{R}^n} |f(x)| \cdot |g(y)| dy dx$$

$$\stackrel{\text{Lin}}{\stackrel{\text{A3L}}{=}} \int_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| \cdot \int_{y \in \mathbb{R}^n} |g(y)| dy dx \stackrel{\text{Lin}}{\stackrel{\text{A3L}}{=}} \int_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| dx \cdot \int_{y \in \mathbb{R}^n} |g(y)| dy$$

Ebenso können wir umgekehrt erst über  $x$  und dann über  $y$  integrieren.

(0b) Für  $b(x, y) = f(y)g(x - y) = a(y, x - y) = a \circ \Phi(x, y)$  nutzen wir den Transformationsatz C2B mit  $\Phi(x, y) = (y, x - y)$  und  $|\det \Phi'| = 1$ .

(0c) Für  $c(x, y) = f(x - y)g(y) = a(x - y, y) = a \circ \Psi(x, y)$  nutzen wir den Transformationsatz C2B mit  $\Psi(x, y) = (x - y, y)$  und  $|\det \Psi'| = 1$ .

(1a) Dank (0) sind die beiden Integranden  $b$  und  $c$  absolut integrierbar. Dank Fubini C1E existiert für alle  $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$  das Integral über  $y \in \mathbb{R}^n$ . Die Ausnahmemenge  $N \subseteq \mathbb{R}^n$  ist vom Volumen Null, also  $\text{vol}_n(N) = 0$ .

(1b) Beide Integrale sind gleich dank Transformation C2B  $y = x - y'$ .

**Faltung von Funktionen:  $L^1$ -Norm** D524  
Ergänzung

(1c) Für die  $L^1$ -Norm der Faltung  $f * g$  gilt, wie bereits in (0) gesehen:

$$\|f * g\|_{L^1} \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{x \in \mathbb{R}^n} |(f * g)(x)| dx$$

$$\stackrel{\text{Def}}{=} \int_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \int_{y \in \mathbb{R}^n} f(y) g(x - y) dy \right| dx$$

$$\leq \int_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{y \in \mathbb{R}^n} |f(y)| \cdot |g(x - y)| dy dx$$

$$\stackrel{\text{Fub}}{\stackrel{\text{C1E}}{=}} \int_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{x \in \mathbb{R}^n} |f(y)| \cdot |g(x - y)| dx dy$$

$$\stackrel{\text{Lin}}{\stackrel{\text{A3L}}{=}} \int_{y \in \mathbb{R}^n} |f(y)| \cdot \int_{x \in \mathbb{R}^n} |g(x - y)| dx dy$$

$$\stackrel{\text{Trafo}}{\stackrel{\text{C2B}}{=}} \int_{y \in \mathbb{R}^n} |f(y)| \cdot \int_{x \in \mathbb{R}^n} |g(x)| dx dy$$

$$\stackrel{\text{Lin}}{\stackrel{\text{A3L}}{=}} \int_{y \in \mathbb{R}^n} |f(y)| dy \cdot \int_{x \in \mathbb{R}^n} |g(x)| dx = \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1}$$

(1d) Linearität: Das Integral  $L^1 \rightarrow \mathbb{C}: h \mapsto \int h(x) dx$  ist linear. Es folgt: Zu jedem festen  $g$  ist die Zuordnung  $f \mapsto f * g$  linear. Ebenso  $g \mapsto f * g$ .  
 Kommutativität: Dank (1b) gilt  $(f * g)(x) = (g * f)(x)$  für  $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$ .  
 😊 Hierfür genügt bereits die absolute Integrierbarkeit von  $b$  bzw.  $c$ .  
 (1e) Assoziativität: Wir setzen die Definition ein und rechnen geduldig:

$$\begin{aligned} ((f * g) * h)(x) &= \int_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{z \in \mathbb{R}^n} \overbrace{f(y-z) \cdot g(z)}^{(f * g)(y)} \cdot h(x-y) dy \\ &= \int_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{z \in \mathbb{R}^n} f(y-z) \cdot g(z) \cdot h(x-y) dz dy \\ (f * (g * h))(x) &= \int_{y' \in \mathbb{R}^n} f(x-y') \cdot \int_{z \in \mathbb{R}^n} \overbrace{g(z) \cdot h(y'-z)}^{(g * h)(y')} dz dy' \\ &= \int_{y' \in \mathbb{R}^n} \int_{z \in \mathbb{R}^n} f(x-y') \cdot g(z) \cdot h(y'-z) dz dy' \end{aligned}$$

Beide Integrale sind gleich: Dank Fubini können wir die Integration über  $y, y'$  nach innen ziehen und so die Substitution  $y' = x - y + z$  anwenden.

Satz D5G: Faltung: Beschränktheit, Stetigkeit und Ableitung

- (0) Für  $(f, g) \in L^\infty \times L^1$  ist  $f * g$  definiert und  $\|f * g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty} \cdot \|g\|_{L^1}$ .
- (1) Für  $(f, g) \in C_b \times L^1$  gilt  $f * g \in C_b$  und  $\|f * g\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|f\|_{\mathbb{R}^n} \cdot \|g\|_{L^1}$ .
- (2) Für  $(f, g) \in C_b^1 \times L^1$  bzw.  $L^1 \times C_b^1$  gilt  $f * g \in C_b^1$  und

$$\partial_i(f * g) = (\partial_i f) * g \quad \text{bzw.} \quad \partial_i(f * g) = f * (\partial_i g).$$

**Aufgabe:** Rechnen Sie diese Un/Gleichungen sorgfältig nach!

**Lösung:** (0) Es gilt  $|f(x)| \leq M := \|f\|_{L^\infty}$  für  $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$ ,  $\text{vol}_n(N) = 0$ .

$$\begin{aligned} |(f * g)(x)| &= \left| \int_{y \in \mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy \right| \leq \int_{y \in \mathbb{R}^n} |f(x-y) g(y)| dy \\ &\leq \int_{y \in \mathbb{R}^n} M \cdot |g(y)| dy = M \int_{y \in \mathbb{R}^n} |g(y)| dy = M \cdot \|g\|_{L^1} \end{aligned}$$

Dies zeigt die absolute Integrierbarkeit, also existiert die Faltung  $f * g$ .  
 Das essentielle Supremum über  $x \in \mathbb{R}^n$  ist  $\|f * g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty} \cdot \|g\|_{L^1}$ .  
 Genauso zeigen wir  $\|f * g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^\infty}$ , etwa dank  $f * g = g * f$ .

(1) Die Funktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  sei stetig und beschränkt, kurz  $f \in C_b$ .  
 Wir wollen den Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0}$  unter das Integral ziehen:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (f * g)(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x-y) g(y)] dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x_0 - y) g(y) dy = (f * g)(x_0) \end{aligned}$$

Ist das gerechtfertigt? Wir nutzen Satz D3D: Der Integrand  $f(x-y) g(y)$  ist in  $x$  stetig und in  $y$  integrierbar mit Majorante  $h(y) = |f|_{\mathbb{R}^n} \cdot |g(y)|$ .  
 Somit ist  $f * g$  stetig und nach (0) beschränkt:  $\|f * g\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|f\|_{\mathbb{R}^n} \cdot \|g\|_{L^1}$ .  
 Ebenso für  $f \in L^1$  und  $g \in C_b$  gilt  $f * g \in C_b$  und  $\|f * g\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{\mathbb{R}^n}$ .  
 Hierzu können wir auch die Kommutativität  $f * g = g * f$  nutzen.

- 😊 Ist einer der Faktoren  $f$  oder  $g$  stetig und beschränkt, so auch  $f * g$ . Das ist eine einfache Stetigkeitsregel, die sich häufig nutzen lässt.
- 😊 Slogan: Die Faltung  $f * g$  erbt die besten Eigenschaften von  $f$  und  $g$ , etwa Beschränktheit (0) oder Stetigkeit (1) oder Differenzierbarkeit (2).

(2) Die Funktionen  $f$  und  $\partial_i f$  seien stetig und beschränkt.  
 Wir wollen die Ableitung  $\partial_i$  unter das Integral ziehen:

$$\begin{aligned} \partial_i(f * g)(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_i} [f(x-y) g(y)] dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_i f)(x-y) g(y) dy = ((\partial_i f) * g)(x) \end{aligned}$$

Wir nutzen hierzu Satz D3E: Der Integrand  $(\partial_i f)(x-y) g(y)$  ist in  $x$  stetig und in  $y$  integrierbar mit Majorante  $h(y) = |\partial_i f|_{\mathbb{R}^n} \cdot |g(y)|$ .  
 😊 Wir erhalten  $\partial_i(f * g) = (\partial_i f) * g$  und  $|\partial_i(f * g)|_{\mathbb{R}^n} \leq |\partial_i f|_{\mathbb{R}^n} \cdot \|g\|_{L^1}$ .  
 Analog gilt  $\partial_i(f * g) = f * (\partial_i g)$  und  $|\partial_i(f * g)|_{\mathbb{R}^n} \leq \|\partial_i f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{\mathbb{R}^n}$ .  
 😊 Das sind hilfreiche Ableitungsregeln, die oft auftreten und nützen.  
 😊 Ist einer der beiden Faktoren  $f, g$  glatt, sagen wir  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , und jede Ableitung  $\partial^\alpha f$  beschränkt, so gilt dies auch für  $f * g$ .  
 😊 Slogan: Die Faltung  $f * g$  erbt die besten Eigenschaften von  $f$  und  $g$ , etwa Beschränktheit (0) oder Stetigkeit (1) oder Differenzierbarkeit (2).

Der Kalkül der Distributionen vereinfacht viele Rechnungen, manchen gibt er überhaupt erst einen wohldefinierten Sinn, oft stützt und präzisiert er wunderbar unsere physikalische Anschauung und die Anwendungen.  
 Wir können damit jeder stetigen Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Ableitung zuordnen, selbst wenn  $f$  klassisch nicht differenzierbar ist (wie B4A).  
 Hierzu verallgemeinern wir den Funktionsbegriff zu **Distributionen**, die man daher auch als **verallgemeinerte Funktionen** bezeichnet.  
 Die Idee ist einfach: Wir messen  $f$  durch **Testfunktionen**  $\varphi$  gemäß

$$\Lambda_f(\varphi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx.$$

Wir begreifen  $f$  also als lineare Abbildung  $\Lambda_f: \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx$ .  
 Ist  $\varphi$  glatt mit kompaktem Träger, so existiert dieses Integral immer.  
 Ist zudem auch  $f$  stetig differenzierbar, so gilt dank partieller Integration

$$\Lambda_{f'}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f'(x) \varphi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi'(x) dx.$$

Die Randterme  $[f\varphi]_{-r}^r$  verschwinden für jede Testfunktion  $\varphi$  und  $r \rightarrow \infty$ .  
 Die rechte Seite betrifft nur  $f$ , nicht  $f'$ , und gilt für alle Testfunktionen  $\varphi$ .

Dies legt nahe, die **Distributionsableitung** von  $f$  zu definieren durch

$$(\Lambda_f)'(\varphi) := - \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi'(x) dx.$$

Ist  $f$  stetig differenzierbar, so gilt  $(\Lambda_f)' = \Lambda_{f'}$ , wie oben gesehen, und die Distributionsableitung stimmt mit der klassischen Ableitung überein.  
 Dieser Ableitungsprozess lässt sich nun beliebig wiederholen:  
 Die  $k$ -te Distributionsableitung von  $f$  ist demnach

$$(\Lambda_f)^{(k)}(\varphi) := (-1)^k \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi^{(k)}(x) dx.$$

Wir können so jede stetige Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  auffassen als eine verallgemeinerte Funktion  $\Lambda_f$  (Distribution). Im Distributionensinne ist  $\Lambda_f$  beliebig oft differenzierbar. Die Ableitungen  $(\Lambda_f)^{(k)}$  sind Distributionen, im Allgemeinen sind sie jedoch keine klassischen Funktionen mehr.  
 Wir verlangen  $C^\infty$ -Glattheit nur für die Testfunktionen  $\varphi$ . Für unsere Funktion  $f$  hingegen genügt lokale Integrierbarkeit [C44]; wir fordern keinerlei Glattheit. Diese Sichtweise ist ebenso einfach wie genial!  
 Sie erfordert lediglich den Mut, Funktionen allgemeiner zu begreifen.

Damit erreichen wir folgende drastische Vereinfachungen:

- Jede stetige Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine Distribution, allgemeiner sogar jede lokal integrierbare Funktion (D5J).
- Jede Distribution ist differenzierbar im Distributionensinne, und ihre Ableitung ist selbst wiederum eine Distribution (D5N).
- Ist die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar, so gilt  $(\Lambda_f)' = \Lambda_{f'}$ : Klassische und Distributionsableitung sind dann identisch (D5N).
- Die klassischen Ableitungsregeln gelten weiterhin (D5o).
- Grenzübergänge und Ableitungen / Integrale vertauschen unter sehr allgemeinen Voraussetzungen (D5n).

Insbesondere bei **partiellen Differentialgleichungen** treten peinliche Schwierigkeiten auf, die erst mit Distributionen gelöst werden können.  
 Zum Beispiel erfüllt die klassische Ableitung die Vertauschungsregel  $\partial_i \partial_j \varphi = \partial_j \partial_i \varphi$  nur für hinreichend glatte Funktionen ( $C^2$ , siehe D4A).  
 Für Distributionen hingegen gilt sie immer! Sie erahnen hieran bereits, dass Distributionen wirklich das Leben vereinfachen. Genauer gesagt: Distributionen vervollständigen die Differential- und Integralrechnung.

Der **Kalkül der Distributionen** entspringt praktischen Bedürfnissen und entstand seit etwa 1900 in der Physik und den Ingenieurwissenschaften zunächst als nützliche Rechentechnik ohne theoretische Grundlage: Dort treten partielle Differentialgleichungen auf, die keine klassischen Lösungen haben, sehr wohl aber Lösungen im Distributionensinne. (Heaviside in den 1880er Jahren, Dirac und Sobolev in den 1930ern).

Aus diesem Grund sind Distributionen sehr natürlich und unumgänglich. In Physik und Elektrotechnik treten häufig das Dirac-Funktional  $\delta_0$  [D553] und die Heaviside-Funktion  $u = \mathbb{1}_{[0, \infty[}$  [D570] auf. Hier drängen sich die beliebten Rechenregeln  $\int_{-\infty}^x \delta_0(t) dt = u(x)$  und  $u'(x) = \delta_0(x)$  geradezu auf, sie haben aber klassisch überhaupt keinen Sinn. Erst Distributionen klären dieses Mysterium und lösen so alle Sorgen in Wohlgefallen auf.

Die **Theorie der Distributionen**, die den Kalkül begründet, rechtfertigt und vollendet, wurde erst in den 1940er Jahren von Laurent Schwartz entwickelt; sie dient bis heute als Grundstein und bewährt sich täglich. Hierfür erhielt er auf dem Internationalen Mathematikkongress 1950 die Fields-Medaille, eine der höchsten Auszeichnungen der Mathematik.

Wir suchen Lösungen  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  der eindim. **Wellengleichung**:

$$\partial_t^2 u(t, x) = c^2 \partial_x^2 u(t, x)$$

Diese fundamentale Gleichung beschreibt lineare Wellen aller Art, zum Beispiel eine schwingende Saite eines Musikinstruments. R301

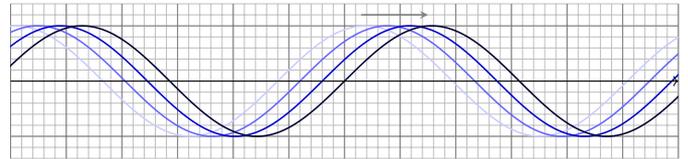
Wir wünschen uns hierzu eine allgemeine mathematische Theorie, die der physikalischen Anschauung und dem Experiment entspricht.

**Aufgabe:** (1) Ist  $u(t, x) = \sin(x - ct)$  eine Lösung? und  $\sin(x + ct)$ ? Was bedeuten diese Lösungen intuitiv / anschaulich / graphisch?

(2) Ist auch  $u(t, x) = f(x \pm ct)$  für  $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  eine Lösung? Etwa für die gaußsche Glockenkurve  $f(x) = e^{-x^2/2}$ ?

(3) Ist  $u(t, x) = f(x \pm ct)$  für jede stetige Funktion  $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  eine Lösung? Etwa für die Dreiecksfunktion  $f(x) = \max\{0, 1 - |x|\}$ ?

Ist aus physikalischer Sicht  $f \in C^2$  notwendig oder genügt  $f \in C^0$ ? Wie bringen Distributionen hier Theorie und Anwendung in Einklang?



**Lösung:** (1) Zunächst untersuchen wir die Funktion  $u(t, x) = \sin(x - ct)$ . Wir leiten zweimal ab und prüfen, ob die Wellengleichung erfüllt ist:

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) &= -c \cos(x - ct), & \partial_x u(t, x) &= + \cos(x - ct), \\ \partial_t^2 u(t, x) &= -c^2 \sin(x - ct), & \partial_x^2 u(t, x) &= - \sin(x - ct). \end{aligned}$$

Tatsächlich gilt  $\partial_t^2 u(t, x) = c^2 \partial_x^2 u(t, x)$ , wie gefordert.

😊 Anschaulich ist  $u(t, x) = \sin(x - ct)$  eine sinusförmige Welle, die sich mit konstanter Geschwindigkeit  $c$  nach rechts bewegt.

Entsprechend ist auch  $v(t, x) = \sin(x + ct)$  eine Lösung: Dies ist eine sinusförmige Welle, die sich mit Geschwindigkeit  $c$  nach links bewegt.



(2) Sodann untersuchen wir allgemein die Funktion  $u(t, x) = f(x - ct)$ . Wir leiten ab und prüfen, ob die ersehnte Wellengleichung erfüllt ist:

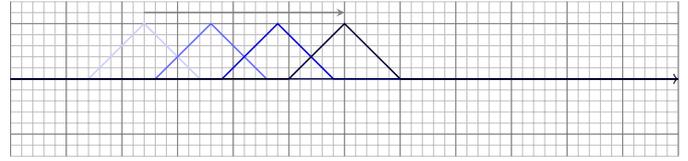
$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) &= -cf'(x - ct), & \partial_x u(t, x) &= f'(x - ct), \\ \partial_t^2 u(t, x) &= c^2 f''(x - ct), & \partial_x^2 u(t, x) &= f''(x - ct). \end{aligned}$$

Tatsächlich gilt dann  $\partial_t^2 u(t, x) = c^2 \partial_x^2 u(t, x)$ , wie gefordert.

Anschaulich ist diese Lösung  $u(t, x) = f(x \mp ct)$  eine  $f$ -förmige Welle, die sich mit konstanter Geschwindigkeit  $c$  nach rechts / links bewegt.

😊 Man spricht ganz anschaulich von einem **Wellenpaket** der Form  $f$ .

⚠️ Wir setzen vorsorglich  $f$  als zweimal stetig differenzierbar voraus.



(3) Die vorige Rechnung gilt für alle Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ; wir müssen allerdings  $f$  als zweimal stetig differenzierbar voraussetzen, damit wir die benötigten Ableitungen  $f'$  und  $f''$  definieren und nutzen können.

Die Dreiecksfunktion  $f(x) = \max\{0, 1 - |x|\}$  ist zwar stetig, aber nicht differenzierbar (in 0 und  $\pm 1$ ). Dennoch ist  $u(t, x) = f(x \pm ct)$  physikalisch durchaus sinnvoll. Unsere Theorie verlangt unnötige Einschränkungen!

😊 Die Theorie der Distributionen erlaubt, zu jeder stetigen Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die (Distributions-)Ableitungen  $f'$  und  $f''$  etc. zu definieren. In diesem Sinne löst  $u(t, x) = f(x \pm ct)$  tatsächlich die Wellengleichung!

😊 Dies vervollständigt die Lösungsmenge, wie physikalisch erwünscht! Wieder einmal liefert abstrakte Mathematik konkret nutzbare Werkzeuge.

Der erste Schritt ist die Festlegung geeigneter **Testfunktionen**:

Eine Funktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **glatt** (kurz  $C^\infty$ ), wenn sie **beliebig oft differenzierbar** ist, also alle Ableitungen  $\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} f$  existieren.

Sind  $f$  und  $g$  glatt, so auch  $\lambda f$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  sowie  $f + g$  und  $f \cdot g$ .

Die Menge  $C^\infty(\mathbb{R}^n) := C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  aller glatten Funktionen  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  bildet somit einen  **$\mathbb{R}$ -Vektorraum** und sogar eine  **$\mathbb{R}$ -Algebra** mit Eins.

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Der **Vektorraum der Testfunktionen** auf  $\Omega$  ist

$$\mathcal{D}(\Omega) := C_c^\infty(\Omega) := \{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \mid \text{supp}(\varphi) \subseteq \Omega \}.$$

Der **Träger** (engl. *support*) der Funktion  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist die Teilmenge  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) \neq 0\}$ , wo  $\varphi$  nicht verschwindet, genauer ihr Abschluss

$$\text{supp}(\varphi) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Wir schreiben  $K \subseteq \Omega$ , wenn  $K$  eine Teilmenge von  $\Omega$  ist, und  $K \Subset \Omega$ , wenn  $K$  zudem kompakt ist, also beschränkt und abgeschlossen in  $\mathbb{R}^n$ .

**Übung:** Ist auch  $\mathcal{D}(\Omega)$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum? eine  $\mathbb{R}$ -Algebra? mit Eins? Können Sie Beispiele  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  konstruieren? Siehe B4E und B4F!

Der zweite Schritt ist die Klärung des passenden **Konvergenzbegriffs**:

Für  $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $K \Subset \Omega$  nutzen wir die **Maximumsnorm**

$$|\varphi|_K := \max\{|\varphi(x)| \mid x \in K\}.$$

Wir nennen  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{D}(\Omega)$  eine **Nullfolge**, kurz  $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ , wenn gilt:

- 1  $\text{supp}(\varphi_k) \subseteq K$  für ein Kompaktum  $K \Subset \Omega$  und alle  $k \in \mathbb{N}$ ,
- 2  $|\partial^\nu \varphi_k|_K \rightarrow 0$  für jeden Multiindex  $\nu \in \mathbb{N}^n$  und  $k \rightarrow \infty$ .

(1) Alle Träger  $\text{supp}(\varphi_k)$  liegen in einem **gemeinsamen** Kompaktum  $K \Subset \Omega$ ; sie dürfen  $\Omega$  nicht ausschöpfen oder nach Unendlich entkommen. (2) Die Bedingung  $|\varphi_k|_K \rightarrow 0$  bedeutet, dass  $\varphi_k$  **gleichmäßig** gegen die Nullfunktion 0 konvergiert. Dies fordern wir zudem für alle Ableitungen  $(\partial^\nu \varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . Mit dieser strengen Forderung erreichen wir, dass der Ableitungsoperator stetig ist:

**Lemma D5H:** Auf Testfunktionen ist die Ableitung stetig!

Der Ableitungsoperator  $\partial^\alpha: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega)$  ist linear und zudem stetig, denn für jede Nullfolge  $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$  in  $\mathcal{D}(\Omega)$  gilt insbesondere  $\partial^\alpha \varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ .

Eine Abbildung  $\Lambda: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}: \varphi \mapsto \Lambda(\varphi)$  nennen wir **Funktional**. Ein lineares Funktional  $\Lambda$  ist **stetig**, wenn  $\Lambda$  jede Nullfolge  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{D}(\Omega)$  abbildet in eine Nullfolge  $(\Lambda(\varphi_k))_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}$ : Aus  $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$  in  $\mathcal{D}(\Omega)$  folgt  $\Lambda(\varphi_k) \rightarrow 0$  in  $\mathbb{R}$ . Solche Abbildungen heißen **Distributionen**.

Unsere Motivation und Vorbereitung führen zu folgender Präzisierung:

**Definition D5I:** Distributionen

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Der **Vektorraum der Testfunktionen** auf  $\Omega$  ist

$$\mathcal{D}(\Omega) := C_c^\infty(\Omega) := \{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \mid \text{supp}(\varphi) \subseteq \Omega \}.$$

Eine **Distribution** auf  $\Omega$  ist, dual hierzu, ein stetiges lineares Funktional  $\Lambda: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Stetigkeit von  $\Lambda$  bedeutet dabei, wie oben erklärt:

$$\text{Aus } \varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0 \text{ in } \mathcal{D}(\Omega) \text{ folgt } \Lambda(\varphi_k) \rightarrow 0 \text{ in } \mathbb{R}.$$

Den Vektorraum aller Distributionen auf  $\Omega$  bezeichnen wir mit

$$\mathcal{D}'(\Omega) := \{ \Lambda: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \mid \Lambda \text{ ist linear und stetig} \}.$$

Eine Folge  $(\Lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{D}'(\Omega)$  **konvergiert** gegen  $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$  **im Distributionensinne**, kurz  $\Lambda_k \xrightarrow{\mathcal{D}'} \Lambda$ , wenn gilt:

$$\Lambda_k(\varphi) \rightarrow \Lambda(\varphi) \text{ in } \mathbb{R} \text{ für jede Testfunktion } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Diese Definition fasst unsere mathematischen Vorüberlegungen zusammen und präzisiert sie — als Fundament für alles Folgende. Sie entspricht zudem sehr intuitiv dem physikalischen Messvorgang:

Angenommen, eine Funktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto f(x)$  beschreibt eine physikalische Größe  $f(x)$  als Funktion des Ortes  $x \in \mathbb{R}^n$ , etwa die Temperatur, die Massendichte oder die elektrische Ladungsdichte. Kein Messvorgang ist so präzise, dass er den Wert  $f(x)$  genau im Punkt  $x$  ermitteln könnte. Vielmehr liefert die Messung einen gemittelten Wert  $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx$ , wobei  $\varphi$  dem Messverfahren entspricht. Zur Illustration stellen wir uns  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  mit  $\varphi \geq 0$  und  $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$  vor. Je stärker  $\varphi$  um den Punkt  $x$  konzentriert ist, desto genauer entspricht die Messung dem Wert  $f(x)$ . Wir messen also  $f$ , indem wir mit Funktionen  $\varphi$  testen, und dies ist unser einziger Zugang zur Funktion  $f$ : Sie äußert sich allein durch ihr Wirkung auf Testfunktionen  $\varphi$ , nur darin besteht  $f$ , siehe D5K. Mit D5I erheben wir diese Sichtweise zur Definition: Eine Distribution  $\Lambda$  ordnet jeder Testfunktion  $\varphi$  eine reelle Zahl  $\Lambda(\varphi)$  zu, als Ergebnis der Messung. Diese Zuordnung  $\varphi \mapsto \Lambda(\varphi)$  soll linear und stetig in  $\varphi$  sein.

**Satz D5J: Lokal integrierbare Funktionen sind Distributionen.**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Jede lokal integrierbare Funktion  $f: \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definiert eine Distribution  $\Lambda_f: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}: \varphi \mapsto \Lambda_f(\varphi)$  durch das Integral

$$\Lambda_f(\varphi) := \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx.$$

Die Zuordnung  $L^1_{loc}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega): f \mapsto \Lambda_f$  ist linear und stetig, jedoch nicht injektiv. Der Kern sind die Nullfunktionen  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , also genau diejenigen Funktionen, die fast überall gleich Null sind. Für  $f, g \in C(\Omega)$  hingegen gilt  $\Lambda_f = \Lambda_g$  genau dann, wenn  $f = g$  gilt.

Jede Distribution  $\Lambda: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , die sich als  $\Lambda = \Lambda_f$  durch eine Funktion  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$  darstellen lässt, heißt **regulär**, andernfalls heißt  $\Lambda$  **singulär**.

☺ Mittels  $f \mapsto \Lambda_f$  betrachten wir jede lokal integrierbare Funktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  als Distribution und sagen hierzu „ $f$  im Distributionensinne“. Genau dann gilt  $\Lambda_f = \Lambda_g$  in  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , wenn fast überall  $f = g$  gilt (D5K).

**Aufgabe:** Rechnen Sie die hier gemachten Aussagen sorgfältig nach!

(2b) Die Abbildung  $\varphi \mapsto \Lambda_f(\varphi)$  ist stetig in  $\varphi$  dank obiger Abschätzung: Zu jeder Nullfolge  $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$  existiert ein gemeinsames Kompaktum  $K \Subset \Omega$  mit  $\text{supp}(\varphi_k) \subseteq K$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , und hierauf gilt gleichmäßige Konvergenz  $|\partial^\alpha \varphi_k|_K \rightarrow 0$  für jeden Multiindex  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  und  $k \rightarrow \infty$ . Hieraus folgt dank der oben erklärten Ungleichung:

$$\begin{aligned} |\Lambda_f(\varphi_k)| &= \left| \int_{\Omega} f(x) \varphi_k(x) dx \right| \leq \int_K |f(x) \varphi_k(x)| dx \\ &\leq \int_K |f(x)| dx \cdot |\varphi_k|_K \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Dies beweist die Stetigkeit: Aus  $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$  in  $\mathcal{D}(\Omega)$  folgt  $\Lambda(\varphi_k) \rightarrow 0$  in  $\mathbb{R}$ . Somit ist  $\varphi \mapsto \Lambda_f(\varphi)$  linear und stetig, also eine Distribution  $\Lambda_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ .

(3a) Die Zuordnung  $f \mapsto \Lambda_f$  ist linear in  $f$  dank Linearität des Integrals:

$$\begin{aligned} \Lambda_{\lambda f + \mu g}(\varphi) &= \int_{\Omega} [\lambda f(x) + \mu g(x)] \varphi(x) dx \\ &= \lambda \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx + \mu \int_{\Omega} g(x) \varphi(x) dx = \lambda \Lambda_f(\varphi) + \mu \Lambda_g(\varphi) \end{aligned}$$

**Satz D5K: Verschwindungs- und Vergleichssatz**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Für jede Funktion  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$  sind äquivalent:

- 0  $f = 0$  fast überall, das heißt  $\text{vol}_n(\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}) = 0$ .
- 1  $\int_{\Omega} |f(x)| dx = 0$ , das heißt die  $L^1$ -Norm verschwindet.
- 2  $\Lambda_f = 0$ , also  $\int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx = 0$  für jede Testfunktion  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ .
- 3  $\int_A f(x) dx = 0$  für jeden kompakten Quader  $A \subseteq \Omega$ .
- 4  $\int_A f(x) dx = 0$  für jede beschränkte messbare Menge  $A \subseteq \Omega$ .

Für je zwei Funktionen  $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$  sind demnach äquivalent:

- 0  $f = g$  fast überall, das heißt  $\text{vol}_n(\{x \in \Omega \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0$ .
- 1  $\int_{\Omega} |f(x) - g(x)| dx = 0$ , das heißt der  $L^1$ -Abstand verschwindet.
- 2  $\Lambda_f = \Lambda_g$ , also  $\int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx = \int_{\Omega} g(x) \varphi(x) dx$  für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ .
- 3  $\int_A f(x) dx = \int_A g(x) dx$  für jeden kompakten Quader  $A \subseteq \Omega$ .
- 4  $\int_A f(x) dx = \int_A g(x) dx$  für alle  $A \subseteq \Omega$  beschränkt und messbar.

In (2) genügen bereits  $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}(\Omega)$ , das sind Testfunktionen  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  in Produktform  $\varphi(x) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n)$ , wobei  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ .

„(3)  $\Rightarrow$  (4)“: Nach Voraussetzung (3) gilt  $\int_A f(x) dx = 0$  für alle kompakten Quader  $A_1, A_2, \dots \subseteq \Omega$ . Daraus folgt es für Vereinigungen:

$$\int_{A_1 \cup A_2} f(x) dx = \int_{A_1} f(x) dx + \int_{A_2} f(x) dx - \int_{A_1 \cap A_2} f(x) dx = 0$$

Per Induktion folgt dasselbe für jede  $k$ -fache Vereinigung:

$$\begin{aligned} \int_{A_1 \cup \dots \cup A_{k-1} \cup A_k} f(x) dx &= \int_{A_1 \cup \dots \cup A_{k-1}} f(x) dx + \int_{A_k} f(x) dx \\ &\quad - \int_{(A_1 \cap A_k) \cup \dots \cup (A_{k-1} \cap A_k)} f(x) dx = 0 \end{aligned}$$

Dank Grenzwertsatz D2b gilt dies für jede abzählbare Vereinigung  $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$  von Quadern  $A_k \subseteq K$  in einem Kompaktum  $K \subseteq \Omega$ :

$$\int_A f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_1 \cup \dots \cup A_k} f(x) dx = 0$$

Ebenso folgt  $\int_A f(x) dx = 0$  für jede beschränkte Borel-Menge  $A \subseteq \Omega$ .

(1) Jede Testfunktion  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  ist eine glatte Funktion  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit kompakten Träger  $K := \text{supp}(\varphi) \Subset \Omega$ . Unsere gegebene Funktion  $f: \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist lokal integrierbar, demnach gilt  $\int_K |f(x)| dx < \infty$ . Wir erhalten hieraus die folgende Schranke bezüglich  $L^1$ -Norm:

$$\int_{\Omega} |f(x) \varphi(x)| dx = \int_K |f(x)| \cdot |\varphi(x)| dx \leq \int_K |f(x)| dx \cdot |\varphi|_K < \infty$$

Insbesondere ist das Integral  $\Lambda_f(\varphi) := \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx$  wohldefiniert.

(2) Damit  $\Lambda_f$  eine Distribution ist, haben wir zweierlei sicherzustellen: Die Abbildung  $\varphi \mapsto \Lambda_f(\varphi)$  ist (a) linear in  $\varphi$  und zudem (b) stetig in  $\varphi$ .

(2a) Die Abbildung  $\varphi \mapsto \Lambda_f(\varphi)$  ist linear in  $\varphi$  dank Linearität des Integrals: Für alle  $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$  und  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  gilt nämlich:

$$\begin{aligned} \Lambda_f(\lambda \varphi + \mu \psi) &= \int_{\Omega} f(x) [\lambda \varphi(x) + \mu \psi(x)] dx \\ &= \lambda \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx + \mu \int_{\Omega} f(x) \psi(x) dx = \lambda \Lambda_f(\varphi) + \mu \Lambda_f(\psi) \end{aligned}$$

(3b) Die Zuordnung  $f \mapsto \Lambda_f$  ist stetig in  $f$  dank der obigen Abschätzung:

Seien  $f_0, f_1, f_2, \dots: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  lokal integrierbar. Auf jedem Kompaktum  $K \Subset \Omega$  gelte  $L^1$ -Konvergenz  $f_k \rightarrow 0$ , also  $\int_K |f_k| \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Dann folgt  $\Lambda_{f_k} \rightarrow \Lambda_0$ , denn  $|\Lambda_{f_k}(\varphi)| \leq \int_K |f_k(x)| dx \cdot |\varphi|_K \rightarrow 0$ .

(3c) Wir zeigen schließlich (wie in B4g) die Injektivität der Zuordnung

$$C(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega): f \mapsto \Lambda_f.$$

Dank Linearität (3a) genügt zu zeigen: Für jede stetige Funktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\Lambda_f = 0$  gilt  $f = 0$ . Äquivalent hierzu beweisen wir die Kontraposition: Für jede stetige Funktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f \neq 0$  gilt  $\Lambda_f \neq 0$ .

Angenommen  $f \neq 0$ , das heißt  $f(a) \neq 0$  für ein  $a \in \Omega$ . Wir dürfen  $f(a) = 2b > 0$  annehmen. (Für  $f(a) < 0$  betrachten wir  $-f$  statt  $f$ .) Da  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und hierauf  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist, existiert um  $a$  ein Ball  $B(a, 2\varepsilon) \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $\varepsilon > 0$ , sodass  $f(x) \geq b$  für alle  $x \in B(a, 2\varepsilon)$  gilt. Dank B4E existiert eine Hutfunktion  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit  $\text{supp}(\varphi) = \bar{B}(a, \varepsilon)$ . Wir erhalten  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  mit  $\Lambda_f(\varphi) \neq 0$ : Dank Monotonie und Linearität des Integrals gilt  $\int_{\Omega} f \varphi = \int_{\bar{B}(a, \varepsilon)} f \varphi \geq \int_{\bar{B}(a, \varepsilon)} b \varphi = b \int_{\bar{B}(a, \varepsilon)} \varphi > 0$ .

**Aufgabe:** Zeigen Sie die Implikationen (1)  $\Leftrightarrow$  (0)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (3)  $\Rightarrow$  (4)  $\Rightarrow$  (1).

**Lösung:** Die Implikationen „(0)  $\Rightarrow$  (1, 2, 3, 4)“ sind offensichtlich (A4g): Jeder Integrand ist fast überall Null, somit verschwindet das Integral.

„(1)  $\Rightarrow$  (0)“: Diese Umkehrung garantiert der Verschwindungssatz A4g.

„(2)  $\Rightarrow$  (3)“: Sei  $A = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq \Omega$  ein kompakter Quader.

Wäre die Indikatorfunktion  $\varphi := \mathbf{1}_A: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  hier als Testfunktion zulässig, so könnten wir (2) direkt auf  $\int_A f(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx$  anwenden.

Leider gilt  $\mathbf{1}_A \notin \mathcal{D}(\Omega)$ , doch wir können  $\varphi_k \searrow \mathbf{1}_A$  durch Testfunktionen  $\varphi_k \in \mathcal{D}(\Omega)$  approximieren und erhalten dank Grenzwertsatz D2d:

$$\int_A f(x) dx = \int_{\Omega} \lim_{k \rightarrow \infty} f(x) \varphi_k(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(x) \varphi_k(x) dx = 0$$

Ausführlich [B441]: Zum gegebenen Intervall  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  konstruieren wir eine glatte Hutfunktion  $\psi = \psi^{a,b}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\psi(x) = 1$  für  $a \leq x \leq b$  und  $\psi(x) = 0$  für  $x \leq a - 1/k$  und für  $x \geq b + 1/k$  sowie monoton wachsend auf  $[a - 1/k, a]$  und monoton fallend auf  $[b, b + 1/k]$ . Wir definieren  $\varphi_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  durch das Produkt  $\varphi_k(x_1, \dots, x_n) = \psi_k^{a_1, b_1}(x_1) \cdots \psi_k^{a_n, b_n}(x_n)$ .

Wir setzen hier die Funktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  nur als lokal integrierbar voraus. Die Beschränktheit von  $A$  ist daher technisch notwendig: Sie garantiert, dass  $A$  in einem geeigneten Kompaktum  $K \subseteq \Omega$  liegt; nur so können wir die Voraussetzung  $\int_K |f| < \infty$  und majorisierte Konvergenz D2b nutzen. Auch  $\int_A f(x) dx$  ist zunächst nur definiert für  $A$  beschränkt und messbar.

„(4)  $\Rightarrow$  (1)“: Wir zerlegen  $\Omega$  in die drei messbaren Teilmengen

$$\begin{aligned} A_+ &:= \{x \in \Omega \mid f(x) > 0\}, \\ A_- &:= \{x \in \Omega \mid f(x) < 0\}, \\ A_0 &:= \{x \in \Omega \mid f(x) = 0\}. \end{aligned}$$

Dank Voraussetzung (4) und monotoner Konvergenz folgt schließlich

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \cap \bar{B}(0, r)} |f(x)| dx &= \int_{A_+ \cap \bar{B}(0, r)} f(x) dx - \int_{A_- \cap \bar{B}(0, r)} f(x) dx = 0, \\ \int_{\Omega} |f(x)| dx &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Omega \cap \bar{B}(0, r)} |f(x)| dx = 0. \end{aligned}$$

☺ Wir können  $f = 0$  durch jedes dieser vier Kriterien (1–4) testen. Ebenso  $f = g$ , indem wir den Satz auf die Differenz  $f - g$  anwenden.

**Definition D5L: Dirac-Funktional**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge, und hierin sei  $p \in \Omega$  ein Punkt. Wie zuvor ist  $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$  der Vektorraum der Testfunktionen. Das **Dirac-Funktional**  $\delta_p$  ist die Auswertung im Punkt  $p$ , also

$$\delta_p : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \mapsto \varphi(p).$$

Für jeden Multiindex  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  definieren wir allgemeiner

$$\delta_p^\alpha : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(p).$$

**Aufgabe:** Sind dies Distributionen? Was ist hierfür zu prüfen?

**Lösung:** Nach Definition D5I müssen wir Linearität und Stetigkeit der Zuordnung  $\delta_p^\alpha : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(p)$  prüfen. Beides ist klar!

**Linearität:** Für je zwei Testfunktionen  $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$  und reelle Konstanten  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  gilt dank Linearität der Ableitung  $\delta_p^\alpha(\lambda\varphi + \mu\psi) = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha(\lambda\varphi + \mu\psi)(p) = \lambda\delta_p^\alpha(\varphi) + \mu\delta_p^\alpha(\psi)$ .

**Stetigkeit:** Sei  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{D}(\Omega)$  eine Nullfolge. Das heißt, es gibt ein Kompaktum  $K \Subset \Omega$  mit  $\text{supp}(\varphi_k) \subseteq K$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , und  $|\partial^\alpha \varphi_k|_K \rightarrow 0$  für jeden Multiindex  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  und  $k \rightarrow \infty$ . Hieraus folgt insbesondere  $|\delta_p^\alpha(\varphi_k)| = |\partial^\alpha \varphi_k(p)| \leq |\partial^\alpha \varphi_k|_K \rightarrow 0$ , also  $\delta_p^\alpha(\varphi_k) \rightarrow 0$ .

⚠ Es gibt keine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , die das Funktional  $\delta_p$  darstellt, also  $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx = \varphi(p)$  für alle Testfunktionen  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  erfüllt. Eine Massenverteilung mit Dichte  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  hat die Gesamtmasse

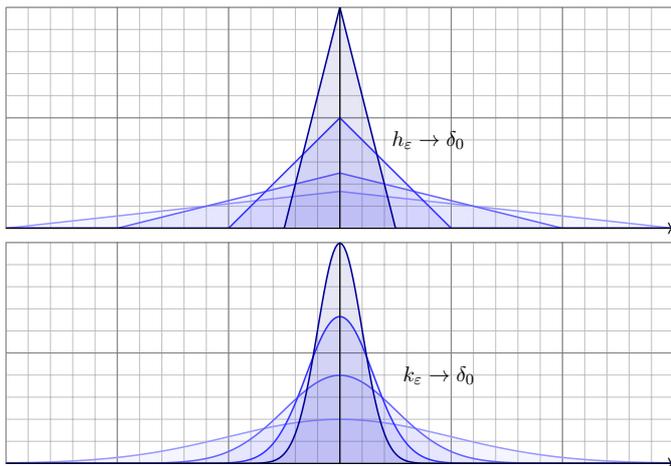
$$m = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx.$$

Wie beschreiben wir eine punktförmige Masse  $m$  im Punkt  $p \in \mathbb{R}^n$ ? In diesem Punkt herrscht dann wohl eine „unendlich große“ Dichte; naiv denken wir an  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = 0$  für  $x \neq p$  und  $f(p) = \infty$ .

⚠ Das Integral  $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$  ergibt immer Null, selbst wenn der Wert  $f(p)$  noch so unendlich ist, denn der Träger  $\{p\}$  ist eine Nullmenge. [A405](#)  
Was wir jedoch wollen, ist eine Punktmasse  $\delta_p$ , sodass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta_p(x) \varphi(x) dx = \varphi(p).$$

⚠ Keine Funktion kann das leisten: Hierzu benötigen wir Distributionen! Hingegen können wir  $\delta_p$  durch Funktionen  $f_\varepsilon \rightarrow \delta_p$  approximieren, indem wir die Masse 1 immer dichter um den Punkt  $p$  konzentrieren. Die folgenden Beispiele und Satz D5c präzisieren diese Anschauung.



**Aufgabe:** Skizzieren Sie für  $\varepsilon \searrow 0$  die folgenden Funktionen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$f_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{I}_{(0,\varepsilon]}, \quad g_\varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon} \mathbf{I}_{[-\varepsilon,\varepsilon]}, \quad h_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon - |x|}{\varepsilon^2} \mathbf{I}_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(x), \quad k_\varepsilon(x) = \frac{e^{-x^2/2\varepsilon^2}}{\varepsilon\sqrt{2\pi}}$$

- (1) Berechnen Sie die punktweise Grenzfunktion  $f(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} f_\varepsilon(x)$ .
- (2) Gilt  $\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$  für  $\varepsilon \searrow 0$ ? Wo liegt hier das Problem?
- (3) Gilt  $\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx$  jede Funktion  $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ ?
- (4) Gilt  $\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx \rightarrow \varphi(0)$ , also  $f_\varepsilon \rightarrow \delta_0$  im Distributionensinne?
- (5) Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar mit Gesamtmasse  $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = 1$ . Zu jedem  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  erfüllt  $f_\varepsilon(x) := f(x/\varepsilon)/\varepsilon^n$  ebenso  $\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x) dx = 1$ . Gilt  $\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx \rightarrow \varphi(0)$ , also  $f_\varepsilon \rightarrow \delta_0$  im Distributionensinne?

**Lösung:** (1) Wir finden  $f(0) = \infty$  und  $f(x) = 0$  für  $x \neq 0$ . (2) Daher gilt  $\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) dx = 1 \not\rightarrow 0 = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$ . Masse verschwindet nach Unendlich! Ebenso schlägt (3) fehl. Hingegen gilt (4) sobald  $\varphi$  stetig ist (im Punkt 0). 😊 Dies ist genau die Rechnung, die uns zum HDI geführt hat! [B122](#)  
Die anderen Beispiele sind analog, siehe Dreiecksfunktionen [D205](#) und Glockenfunktionen [D409](#). Allgemein zu (5) gilt der Grenzwertsatz D5c!

😊 Unsere Definition D5L ist einfach und klar: Das **Dirac-Funktional**

$$\delta_0 : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \mapsto \varphi(0).$$

ordnet jeder Testfunktion  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  ihre Auswertung  $\varphi(0) \in \mathbb{R}$  zu.

⚠ Manche sprechen stattdessen lieber von der **Dirac-Funktion**

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 0, \\ \infty & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Zudem wird die Gesamtmasse  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$  gefordert / vereinbart und die Rechenregel  $\int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx = \varphi(0)$  eingeführt / behauptet.

**Aufgabe:** Was ist hieran falsch? Wann & wie lässt sich das retten?

**Lösung:** Die Funktion  $f$  hat die ersehnten Eigenschaften nicht! Das lässt sich nicht retten, es hilft kein Jammern, Behaupten, Verhandeln.

⚠ Es gilt  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 0$  und  $\int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx = 0$  für alle Funktionen  $\varphi$ .

😊 Wir wollen  $\delta_0 : \varphi \mapsto \varphi(0)$ , also ist Definition D5L der richtige Weg! Alles andere ist naives Wunschenken, falsch und/oder unnützlich.

Die obige Dirac-Funktion  $f$  soll ein punktförmiges Teilchen modellieren, mit Masse 1 konzentriert im Nullpunkt, insbesondere  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$ .

⚠ Demnach entspräche  $5f$  einem Teilchen mit Masse 5 im Nullpunkt.

**Aufgabe:** Was ist hieran falsch? Wann & wie lässt sich das retten?

**Lösung:** Wir multiplizieren punktweise:  $5 \cdot 0 = 0$  und  $5 \cdot \infty = \infty$ . Demnach gilt  $5f = f$  und  $\int_{\mathbb{R}} 5f(x) dx = 1$ , aber  $5 \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 5$ . Das widerspricht grundlegend der Linearität des Integrals!

Nochmal: Die Funktion  $f$  hat die ersehnten Eigenschaften nicht!

😊 Auch hier ist Definition D5L der richtige Weg! Distributionen sind Funktionale, stetige lineare Abbildungen  $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ . Sie bilden selbst einen Vektorraum, indem wir sie punktweise addieren und mit Skalaren multiplizieren. Im Beispiel erhalten wir  $5\delta_0 : \varphi \mapsto 5\varphi(0)$ , wie gewünscht.

⚠ Anschauung, Intuition, Heuristik können helfen, wenn sie den Fakten entsprechen; sonst hindern sie das Verständnis mehr als sie nützen.

😊 Letztlich ist es egal, wie wir eine Distribution  $\Lambda$  veranschaulichen. Es zählt allein, was sie tut, also ihr Verhalten  $\varphi \mapsto \Lambda(\varphi)$  wie in D5L.

Die oben vorgeschlagene Dirac-Funktion  $f$  hat nicht die richtigen Eigenschaften. Gelingt uns dies mit irgendeiner anderen Funktion  $g$ ?

⚠ Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $p \in \Omega$ . Nehmen wir optimistisch an, es gäbe eine lokal integrierbare Funktion  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\int_{\Omega} g(x) \varphi(x) dx = \varphi(0)$  für jede Testfunktion  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ . Wie müsste solch ein  $g$  aussehen?

**Aufgabe:** (1) Es gilt  $g(x) = 0$  für fast alle  $x \in \Omega$ , das heißt,  $g$  ist eine Nullfunktion. Hinweis: Nutzen Sie den Verschwindungssatz D5k.

(2) Daraus folgt  $\int_{\mathbb{R}^n} g(x) \varphi(x) dx = 0$  für jede Testfunktion  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ , ganz im Widerspruch zu unserer Annahme! Es ist aussichtslos.

**Lösung:** (1) Auf der offenen Menge  $U = \Omega \setminus \{p\}$  verschwindet  $\delta_p$ : Für jede Testfunktion  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  mit  $\text{supp} \varphi \subseteq U$  gilt  $\delta_p(\varphi) = \varphi(p) = 0$ . Gilt  $\delta_p = \Lambda_g$  wie angenommen, so besagt der Verschwindungssatz D5k: Es gilt  $g(x) = 0$  für fast alle  $x \in U$ , somit für fast alle  $x \in \Omega = U \cup \{p\}$ .

(2) Aus  $g = 0$  fast überall folgt  $\Lambda_g = 0$ , also insbesondere  $\Lambda_g \neq \delta_0$ .

😊 Wir nutzen und erproben hier unsere Integrations-Werkzeuge: Die Dirac-Distribution  $\delta_p$  ist tatsächlich nicht regulär, sondern singular.

😊 Eine Distribution  $\Lambda$  ist ein **Funktional**  $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \mapsto \Lambda(\varphi)$ .

⚠ Manche schreiben diese Zuordnung traditionell als **Integral**:

$$\Lambda(\varphi) = \int_{\Omega} \Lambda(x) \varphi(x) dx$$

**Aufgabe:** Was ist hieran falsch? Wann & wie lässt sich das retten?

**Lösung:** Jede Distribution ist ein **Funktional**  $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ : Wir müssen sie mit Testfunktionen  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  füttern. Sie ist keine **Funktion**  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ : Wir können  $\Lambda$  nicht auf Punkten  $x \in \Omega$  auswerten! Das frisst sie nicht.

Der Integrand hat also keinen Sinn. Manche wollen das Integral dennoch beibehalten, und **definieren** es kurzerhand durch die linke Seite. Na gut. Etwas besser sieht es bei einer **regulären** Distribution  $\Lambda = \Lambda_f$  aus, gegeben durch  $\varphi \mapsto \Lambda_f(\varphi) = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx$ : Hier wird  $\Lambda$  konkret durch die (lokal integrierbare) Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dargestellt. Doch selbst hier hat ein einzelner Funktionswert  $f(x)$  keine Bedeutung, denn wir dürfen  $f$  beliebig abändern auf jeder Menge vom Volumen 0 (siehe Satz D5J). Erst bei stetigen Funktionen ist  $f$  eindeutig festgelegt, siehe Satz D5J.

D557  
Ergänzung

### Der Träger einer Distribution

Eine Distribution ist eine stetige lineare Abbildung  $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ ; sie ordnet jeder Testfunktion  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  ihren Wert  $\Lambda(\varphi) \in \mathbb{R}$  zu. Es hat keinerlei Sinn,  $\Lambda(x)$  in einem Punkt  $x \in \mathbb{R}^n$  auszuwerten! Immerhin können wir  $\Lambda$  auf jede offene Menge  $U \subseteq \Omega$  einschränken: Dank  $\mathcal{D}(U) \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$  erhalten wir  $\Lambda|_U := \Lambda|_{\mathcal{D}(U)} : \mathcal{D}(U) \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \mapsto \Lambda(\varphi)$ .

**Definition D5M: Träger einer Distribution**

Sei  $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Distribution. Sie **verschwindet** auf einer offenen Menge  $U \subseteq \Omega$ , kurz  $\Lambda|_U = 0$ , wenn  $\Lambda(\varphi) = 0$  für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(U)$  gilt. Sei  $V = \bigcup \{ U \subseteq \Omega \mid U \text{ offen und } \Lambda|_U = 0 \}$  die Vereinigung all dieser offenen Mengen. Dann ist auch  $V$  offen, und  $\Lambda$  verschwindet auf  $V$ . Somit ist  $V$  die größte offene Menge, auf der  $\Lambda$  verschwindet. Den **Träger**  $\text{supp } \Lambda := \Omega \setminus V$  definieren wir als das Komplement.

**Beispiele:** In den folgenden Aufgaben rechnen wir sorgfältig nach:

- Das Dirac-Funktional  $\delta_p^\alpha : \varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(p)$  hat den Träger  $\{p\}$ .
- Für jede stetige Funktion  $f \in C(\Omega) \subseteq L_{\text{loc}}^1(\Omega)$  hat die zugehörige Distribution  $\Lambda_f : \varphi \mapsto \int_\Omega f(x) \varphi(x) dx$  den Träger  $\text{supp}(f)$ .

D558  
Ergänzung

### Der Träger einer Distribution

**Aufgabe:** Zu  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $p \in \Omega$  untersuchen wir die Distributionen

$$\delta_p^\alpha : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(p).$$

- Konstruieren Sie zu jedem Multiindex  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  eine Testfunktion  $\varphi_\alpha \in \mathcal{D}(\Omega)$  mit  $\delta_p^\alpha(\varphi_\alpha) = 1$  und  $\delta_p^\nu(\varphi_\alpha) = 0$  für alle  $\nu \in \mathbb{N}^n \setminus \{\alpha\}$ .
- Ist die Familie  $(\delta_p^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$  in  $\mathcal{D}'(\Omega)$  linear unabhängig?
- Auf welchen offenen Mengen  $U \subseteq \Omega$  verschwindet  $\delta_p^\alpha$ ? Was ist die größte? Was bleibt als Träger  $\text{supp}(\delta_p^\alpha)$ ?

Wir untersuchen ebenso zu  $f \in C(\Omega) \subseteq L_{\text{loc}}^1(\Omega)$  die reguläre Distribution

$$\Lambda_f : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \mapsto \int_\Omega f(x) \varphi(x) dx.$$

- Für  $U \subseteq \Omega$  offen gilt  $\Lambda_f|_U = 0$  genau dann, wenn  $f|_U = 0$  gilt.
- Vereinigung dieser Mengen ist  $V = \Omega \setminus \text{supp}(f)$ .
- Als Träger bleibt  $\text{supp}(\Lambda_f) = \text{supp}(f)$ .

D559  
Ergänzung

### Der Träger einer Distribution

**Lösung:** (1) Nach Verschiebung dürfen wir  $p = 0 \in \Omega$  annehmen. Für  $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$  finden wir  $\partial^\alpha x^\alpha = \alpha! := \alpha_1! \dots \alpha_n!$ . Die Funktion  $g_\alpha(x) = (-1)^{|\alpha|} x^\alpha / \alpha!$  erfüllt  $\delta_0^\alpha(g_\alpha) = 1$  und  $\delta_0^\nu(g_\alpha) = 0$  für alle  $\nu \neq \alpha$ . Sie ist glatt,  $g_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ , aber ihr Träger  $\text{supp}(g_\alpha) = \mathbb{R}^n$  nicht kompakt. Wir wählen eine Hutfunktion  $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$  mit  $\psi = 1$  auf  $\bar{B}(0, \varepsilon) \in \Omega$ . Dann ist  $\varphi_\alpha := g_\alpha \cdot \psi$  glatt mit kompaktem Träger  $\text{supp } \varphi_\alpha = \text{supp } \psi$ . Auf  $\bar{B}(0, \varepsilon)$  gilt  $\varphi_\alpha = g_\alpha$ , also  $\delta_0^\alpha(\varphi_\alpha) = 1$  und  $\delta_0^\nu(\varphi_\alpha) = 0$  für alle  $\nu \neq \alpha$ .

(2) Ja, dank (1) ist die Familie  $(\delta_p^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$  in  $\mathcal{D}'(\Omega)$  linear unabhängig! Angenommen, in  $\mathcal{D}'$  gäbe es eine Linearkombination  $\sum \lambda_\nu \delta_p^\nu = 0$  mit Koeffizienten  $\lambda_\nu \in \mathbb{R}$ , von denen nur endlich viele ungleich Null sind. Wir haben zu zeigen, dass alle Koeffizienten  $\lambda_\nu$  gleich Null sind. Angewendet auf die Testfunktion  $\varphi_\alpha$  erhalten wir sofort  $\lambda_\alpha = 0$ .

(3) Gilt  $p \in U$  so verschwindet  $\delta_p^\alpha$  nicht auf  $U$ , denn dank (1) existiert eine Testfunktion  $\varphi_\alpha \in \mathcal{D}(U)$  mit  $\delta_p^\alpha(\varphi_\alpha) = 1 \neq 0$ . Gilt hingegen  $p \notin U$ , so gilt  $\delta_p^\alpha(\varphi) = 0$  für jede Testfunktion  $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ , denn  $p \notin \text{supp } \varphi$ . Die größte offene Menge, auf der  $\delta_p^\alpha$  verschwindet, ist also  $V = \Omega \setminus \{p\}$ . Als Träger von  $\delta_p^\alpha$  bleibt folglich nur noch  $\text{supp}(\delta_p^\alpha) = \Omega \setminus V = \{p\}$ .

D560  
Ergänzung

### Der Träger einer Distribution

(4) Wir überlegen uns zunächst  $\Lambda_f|_U = \Lambda_{f|_U}$ : Für  $\varphi \in \mathcal{D}(U)$  gilt nämlich:

$$\Lambda_f|_U(\varphi) = \int_\Omega f(x) \varphi(x) dx = \int_U f(x) \varphi(x) dx = \Lambda_{f|_U}(\varphi)$$

Dank Satz D5J wissen wir:  $\Lambda_f|_U = \Lambda_{f|_U} = 0$  bedeutet  $f|_U = 0$ .

Wir wiederholen dieses einfache aber zentrale Argument. Wir beweisen die Kontraposition: Angenommen, es gälte  $f|_U \neq 0$ , das heißt  $f(a) \neq 0$  für ein  $a \in U$ . Wir dürfen  $f(a) = 2b > 0$  annehmen. (Im entgegengesetzten Fall  $f(a) < 0$  betrachten wir  $-f$  statt  $f$ .) Da  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist, existiert um  $a$  ein Ball  $B(a, 2\varepsilon) \subseteq U$  mit  $\varepsilon > 0$ , sodass  $f(x) \geq b$  für alle  $x \in B(a, 2\varepsilon)$  gilt. Dank B4E existiert eine Hutfunktion  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit dem Träger  $\text{supp}(\varphi) = \bar{B}(a, \varepsilon)$ . Wir erhalten  $\varphi \in \mathcal{D}(U)$  mit  $\Lambda_f(\varphi) \neq 0$ : Dank Monotonie und Linearität des Integrals gilt  $\int_\Omega f \varphi = \int_{\bar{B}(a, \varepsilon)} f \varphi \geq \int_{\bar{B}(a, \varepsilon)} b \varphi = b \int_{\bar{B}(a, \varepsilon)} \varphi > 0$ . Das zeigt  $\Lambda_f|_U \neq 0$ .

In Worten: Die Distribution  $\Lambda_f$  verschwindet auf der offenen Menge  $U \subseteq \Omega$  genau dann, wenn die Funktion  $f \in C(\Omega)$  auf  $U$  verschwindet. Die anschließenden Aussagen (5) und (6) sind dann klar aufgrund der Definition des Trägers der Funktion  $f$  als Abschluss

$$\text{supp}(f) := \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}.$$

☺ Damit können wir den Träger in den folgenden Beispielen ablesen.

D561  
Ergänzung

### Distribution oder nicht?

**Aufgabe:** Welche der folgenden Zuordnungen  $A, B, C, \dots : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine Distribution? Was ist ihr Träger? Ist sie regulär oder singular? Falls möglich, stellen Sie sie durch eine Funktion  $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$  dar.

$$A : \varphi \mapsto \sum_{k=1}^n \varphi(k), \quad B : \varphi \mapsto \sum_{k=1}^n \varphi(0)^k, \quad C : \varphi \mapsto \sum_{k=1}^n \varphi(k)^0,$$

$$D : \varphi \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(k), \quad E : \varphi \mapsto \sum_{k \in \mathbb{N}} \varphi^{(k)}(0), \quad F : \varphi \mapsto \sum_{k \in \mathbb{N}} \varphi^{(k)}(k),$$

$$G : \varphi \mapsto \int_a^b \varphi(x) dx, \quad H : \varphi \mapsto \int_0^\infty e^x \varphi(x) dx, \quad I : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx,$$

$$J : \varphi \mapsto \int_a^b \varphi'(x) dx, \quad K : \varphi \mapsto \int_0^\infty e^x \varphi'(x) dx, \quad L : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x) dx,$$

$$M : \varphi \mapsto \int_0^\infty x^a \varphi(x) dx, \quad N : \varphi \mapsto \int_0^\infty x^a \varphi'(x) dx, \quad O : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} |x| \varphi''(x) dx$$

D562  
Ergänzung

### Distribution oder nicht?

$A = \sum_{k=1}^n \delta_k$  ist eine singuläre Distribution, getragen auf  $\{1, 2, \dots, n\}$ .  
 $B$  ist für  $n \geq 2$  nicht linear in  $\varphi$ , also keine Distribution.  
 $C = n$  ist für  $n \geq 1$  nicht linear, also keine Distribution.  
 $D = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k$  ist eine singuläre Distribution, getragen auf der Menge  $\mathbb{Z}$ . Jede Testfunktion  $\varphi$  hat kompakten Träger, also ist die Summe endlich.  
 $E$  ist nicht einmal wohldefiniert, da die Reihe divergieren kann.  
**Beispiel:** Sei  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Testfunktion mit  $\psi(x) = 1$  für  $x \in [-1, 1]$ . Für  $\varphi(x) = e^x \psi(x)$  gilt  $\varphi^{(k)}(x) = e^x$  für alle  $x \in [-1, 1]$  und  $k \in \mathbb{N}$ .  
 $F = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k^k$  ist eine singuläre Distribution, getragen auf der Menge  $\mathbb{N}$ . Jede Testfunktion  $\varphi$  hat kompakten Träger, also ist die Summe endlich.  
 $G = \Lambda_f$  mit  $f = \mathbf{1}_{[a,b]} \in L^1(\mathbb{R})$  ist eine reguläre Distribution, getragen auf dem kompakten Intervall  $[a, b]$ .  
 $H = \Lambda_f$  mit  $f(x) = \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x) e^x$  ist eine reguläre Distribution,  $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$ , getragen auf  $[0, \infty[$ . Für jede Testfunktion  $\varphi$  ist das Integral endlich.  
 $I = \Lambda_f$  mit  $f = 1 \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$  ist eine reguläre Distribution, getragen auf  $\mathbb{R}$ .

D563  
Ergänzung

### Distribution oder nicht?

$J = \delta_b - \delta_a$  ist eine singuläre Distribution, getragen auf  $\{a, b\}$ .  
Für  $K$  nutzen wir partielle Integration. Für  $\text{supp } \varphi \subseteq [-r, r]$  gilt:

$$\int_0^\infty e^x \varphi'(x) dx = \int_0^r e^x \varphi'(x) dx = \left[ e^x \varphi(x) \right]_0^r - \int_0^r e^x \varphi(x) dx = e^r \varphi(r) - \int_0^r e^x \varphi(x) dx = -\varphi(0) - \int_0^r e^x \varphi(x) dx$$

$K = -\delta_0 - \Lambda_f$  mit  $f(x) = \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x) e^x$  ist eine singuläre Distribution, getragen auf  $[0, \infty[$ . Sie hat einen singulären und einen regulären Teil.  
 $L = 0$  ist die triviale Distribution, denn für  $\text{supp } \varphi \subseteq [-r, r]$  gilt:

$$\int_{-\infty}^\infty \varphi'(x) dx = \int_{-r}^r \varphi'(x) dx = \left[ \varphi(x) \right]_{-r}^r = 0$$

Für Exponenten  $a > -1$  ist  $x^a$  lokal integrierbar [B208]; also ist  $M = \Lambda_f$  mit  $f(x) = \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x) x^a$  eine reguläre Distribution, getragen auf  $[0, \infty[$ .  
Für  $a \leq -1$  hingegen ist  $M$  nicht einmal wohldefiniert, denn es gilt  $\int_0^\varepsilon x^a dx = \infty$  [B208] und ebenso  $\int_0^\varepsilon x^a \varphi(x) dx = \pm \infty$  für  $\varphi(0) \neq 0$ .

D564  
Ergänzung

### Distribution oder nicht?

Für  $a = 0$  gilt  $N = -\delta_0$ . Für  $a > 0$  und  $\text{supp } \varphi \subseteq [-r, r]$  gilt:

$$\int_0^\infty x^a \varphi'(x) dx = \int_0^r x^a \varphi'(x) dx = \left[ x^a \varphi(x) \right]_0^r - \int_0^r a x^{a-1} \varphi(x) dx = x^a \varphi(x) \Big|_0^r - a \int_0^r x^{a-1} \varphi(x) dx$$

Für jeden Exponenten  $a > 0$  ist demnach  $N = -a \Lambda_f$  mit  $f(x) = \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x) x^{a-1}$  eine reguläre Distribution, getragen auf  $[0, \infty[$ .  
Für  $-1 < a \leq 0$  ist  $N$  eine wohldefinierte Distribution, aber singular.  
Für  $a \leq -1$  ist  $N$  nicht wohldefiniert, genauso wie oben für  $M$  erklärt.  
 $O = 2\delta_0$  ist eine singuläre Distribution getragen auf  $\{0\}$ .  
Für  $\text{supp } \varphi \subseteq [-r, r]$  zerlegen wir  $\int_{\mathbb{R}} |x| \varphi''(x) dx$  in zwei Integrale:

$$\int_0^r (+x) \varphi''(x) dx = + \left[ x \varphi'(x) \right]_0^r - \int_0^r \varphi'(x) dx = \left[ \varphi(x) \right]_0^r = \varphi(0)$$

$$\int_{-r}^0 (-x) \varphi''(x) dx = - \left[ x \varphi'(x) \right]_{-r}^0 + \int_{-r}^0 \varphi'(x) dx = \left[ \varphi(x) \right]_{-r}^0 = \varphi(0)$$

Distributionen sind beliebig oft differenzierbar.

**Satz D5N: Distributionsableitung**  
 Sei  $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Distribution und  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  ein Multiindex.  
 (1) Wir erhalten erneut eine Distribution durch die Ableitung  

$$\partial^\alpha \Lambda := \Lambda \circ (-\partial)^\alpha : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|} \Lambda(\partial^\alpha \varphi).$$
  
 (2) Hat  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  die stetige Ableitung  $\partial^\alpha f$ , so gilt  $\partial^\alpha \Lambda_f = \Lambda_{\partial^\alpha f}$ .  
 Distributions- und klassische Ableitung stimmen hier also überein.  
 (3) Konvergenz  $\Lambda_n \rightarrow \Lambda$  in  $\mathcal{D}'(\Omega)$  für  $n \rightarrow \infty$  impliziert  $\partial^\alpha \Lambda_n \rightarrow \partial^\alpha \Lambda$ .  
 Das bedeutet: Auf Distributionen ist die Ableitung  $\Lambda \mapsto \partial^\alpha \Lambda$  stetig!

**Aufgabe:** Rechnen Sie alle Aussagen des Satzes sorgfältig nach!  
**Lösung:** (1) Die Ableitung  $\partial^\alpha : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega)$  ist linear und stetig (D5H),  
 ebenso  $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , also auch ihre Komposition  $\partial^\alpha \Lambda = \Lambda \circ (-\partial)^\alpha$ .  
 (2) Umwälzen wie in D5P mit partieller Integration ergibt wie erwartet  
 $(\partial^\alpha \Lambda_f)(\varphi) = \int_\Omega f(x) (-\partial)^\alpha \varphi(x) dx = \int_\Omega (\partial^\alpha f)(x) \varphi(x) dx = \Lambda_{\partial^\alpha f}(\varphi)$ .  
 (3) Wir haben  $\Lambda_n(\varphi) \rightarrow \Lambda(\varphi)$  für jede Testfunktion  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  nach D5I,  
 insbesondere  $[\partial^\alpha \Lambda_n](\varphi) = \Lambda_n[(-\partial)^\alpha \varphi] \rightarrow \Lambda[(-\partial)^\alpha \varphi] = [\partial^\alpha \Lambda](\varphi)$ .

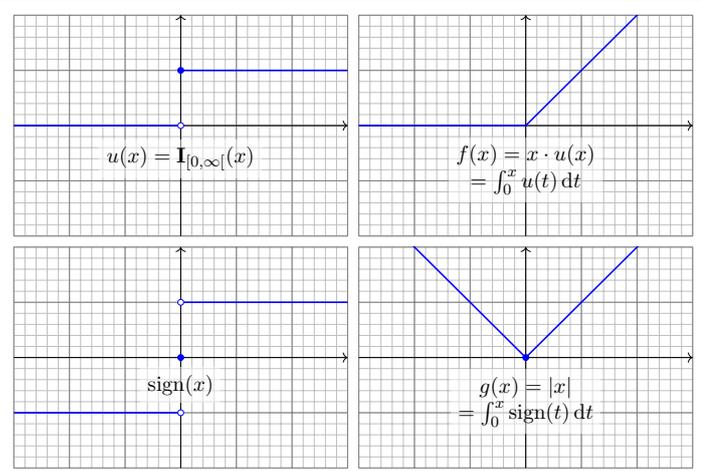
⚠ Das Produkt von zwei Distributionen ergibt keine Distribution:  
 Die Zuordnung  $\Lambda_1 \cdot \Lambda_2 : \varphi \mapsto \Lambda_1(\varphi) \cdot \Lambda_2(\varphi)$  ist nicht linear in  $\varphi$ .  
 Immerhin gelingt das Produkt von Distribution und glatter Funktion:

**Satz D5O: Produkt von Distribution und glatter Funktion**  
 Sei  $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Distribution und  $g \in C^\infty(\Omega)$  eine glatte Funktion.  
 (1) Wir erhalten erneut eine Distribution durch ihr Produkt  

$$\Lambda \cdot g : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \mapsto \Lambda(g \cdot \varphi)$$
  
 (2) Konsistenz: Für jede reguläre Distribution gilt  $(\Lambda_f) \cdot g = \Lambda_{(f \cdot g)}$ .  
 (3) Das so definierte Produkt  $\cdot : \mathcal{D}'(\Omega) \times C^\infty(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$  ist bilinear,  
 es gilt  $\Lambda \cdot 1 = \Lambda$  und  $(\Lambda \cdot g) \cdot h = \Lambda \cdot (g \cdot h)$  sowie die Leibniz-Regel  

$$\partial_i(\Lambda \cdot g) = (\partial_i \Lambda) \cdot g + \Lambda \cdot (\partial_i g).$$

😊 Wie  $\mathcal{D}(\Omega)$  ist auch  $\mathcal{D}'(\Omega)$  ein Vektorraum über dem Grundkörper  $\mathbb{R}$ .  
 😊 Wie  $\mathcal{D}'(\Omega)$  wird nun auch  $\mathcal{D}'(\Omega)$  ein Modul über der Algebra  $C^\infty(\Omega)$ .



**Stammfunktion der Sprungfunktion  $u = \mathbf{I}_{[0, \infty[}$**   
**Aufgabe:** (0) Skizzieren Sie die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x \cdot u(x)$ .  
 (1) In welchen Punkten ist  $f$  stetig? (links/rechtsseitig) differenzierbar?  
 (2) Berechnen Sie  $f' = u$  und  $f'' = \delta_0$  im Distributionensinne.  
**Lösung:** (1) Die Funktion  $f$  ist stetig, das heißt in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$ .  
 In jedem Punkt  $x \neq 0$  ist  $f$  differenzierbar, und dort gilt  $f'(x) = u(x)$ .  
 Die Ableitung von  $f$  im Punkt  $x = 0$  ist rechtsseitig  $f'(0+) = 1$  und linksseitig  $f'(0-) = 0$ , also ist hier die Ableitung  $f'(0)$  nicht definiert.  
 (2) Wir berechnen die Wirkung der Ableitung  $\partial \Lambda_f := -\Lambda_f \circ \partial$  auf  
 Testfunktionen  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , also  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  glatt mit kompaktem Träger.  
 Sei also  $\varphi(x) = 0$  für  $|x| \geq r$ . Dank partieller Integration finden wir:  

$$(\partial \Lambda_f)(\varphi) = - \int_{\mathbb{R}} f(x) \partial \varphi(x) dx = - \int_{x=0}^r x \varphi'(x) dx$$

$$= - [x \varphi(x)]_{x=0}^r + \int_{x=0}^r \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} u(x) \varphi(x) dx$$
  
 😊 Somit sind  $\partial \Lambda_f = \Lambda_u : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  dieselbe Distribution (D5I).  
 Physikalische Anschauung: ruckartige Beschleunigung / Stoß.  
 Geometrische Anschauung: Krümmung konzentriert in einer Ecke.

Ableitung und Konvergenz von Distributionen

**Aufgabe:** Skizzieren Sie die reellen Funktionen  $f_n, g_n, h_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  
 $f_n(x) = \sin(nx)/n$  und  $g_n(x) = \cos(nx)$  und  $h_n(x) = -\sin(nx) \cdot n$ .  
 (1) Gilt gleichmäßige Konvergenz  $f_n \rightarrow 0$ ? und  $g_n \rightarrow 0$ ? und  $h_n \rightarrow 0$ ?  
 (2) Konvergieren die zugehörigen Distributionen in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  gegen Null?  
**Lösung:** (1) Für die Supremumsnorm finden wir  $\|f_n\|_{\mathbb{R}} = 1/n \searrow 0$ , also  
 $f_n \rightarrow 0$  gleichmäßig. Hingegen gilt  $\|g_n\|_{\mathbb{R}} = 1 \not\rightarrow 0$  und  $\|h_n\|_{\mathbb{R}} = n \nearrow \infty$ .  
 (2) In  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  gilt  $\Lambda_{f_n} \rightarrow 0$ : Jede Testfunktion  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  hat kompakten  
 Träger  $K := \text{supp}(\varphi) \Subset \mathbb{R}$  und erfüllt somit  $|\varphi|_K < \infty$ . Demnach gilt:

$$|\Lambda_{f_n}(\varphi)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \varphi(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)| \cdot |\varphi(x)| dx$$

$$\leq \text{vol}_1(K) \cdot \|f_n\|_K \cdot |\varphi|_K = \text{vol}_1(K) \cdot \frac{1}{n} \cdot |\varphi|_K \rightarrow 0$$

Dank Satz D5N folgt  $\Lambda_{g_n} = \Lambda_{f'_n} = \Lambda'_{f_n} \rightarrow 0$  und  $\Lambda_{h_n} = \Lambda_{f''_n} = \Lambda''_{f_n} \rightarrow 0$ .  
 😊 Die Funktionen  $h_n$  oszillieren immer schneller und stärker, doch der  
 Mittelwert  $\int_{\mathbb{R}} h_n(x) \varphi(x) dx$  schluckt Oszillationen und geht gegen Null.  
 😊 Sie können es direkt nachrechnen: zweimal partiell integrieren!

Produkt von Distribution und glatter Funktion

**Aufgabe:** Rechnen Sie alle Aussagen des Satzes sorgfältig nach!  
**Lösung:** (1) Für  $g \in C^\infty(\Omega)$  und  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$  gilt  $g \cdot \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ .  
 Hierauf können wir  $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$  auswerten, somit ist  $\Lambda \cdot g$  wohldefiniert.  
 Die Zuordnung  $\varphi \mapsto \Lambda(g \cdot \varphi)$  ist linear und stetig, also eine Distribution.  
 (2) Es gilt  $(\Lambda_f \cdot g)(\varphi) = \Lambda_f(g \cdot \varphi) = \int_\Omega f(x) g(x) \varphi(x) dx = \Lambda_{f \cdot g}(\varphi)$ .  
 (3) Die behaupteten Rechenregeln werden offensichtlich, sobald man sie  
 ausschreibt; wir rechnen hier exemplarisch nur die Leibniz-Regel nach.  
 Für  $g \in C^\infty(\Omega)$  und  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$  gilt  $g \cdot \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ , wie gesehen, und  
 die übliche Leibniz-Regel  $\partial_i(g \cdot \varphi) = (\partial_i g) \cdot \varphi + g \cdot (\partial_i \varphi)$ . Daraus folgt:

$$[\partial_i(\Lambda \cdot g)](\varphi) = [\Lambda \cdot g](\partial_i \varphi)$$

$$= \Lambda[g \cdot (\partial_i \varphi)] = \Lambda[(\partial_i g) \cdot \varphi + g \cdot (\partial_i \varphi)]$$

$$= \Lambda[(\partial_i g) \cdot \varphi] + \Lambda[g \cdot (\partial_i \varphi)] = \Lambda[(\partial_i g) \cdot \varphi] + (\partial_i \Lambda)(g \cdot \varphi)$$

$$= [\Lambda \cdot (\partial_i g)](\varphi) + [(\partial_i \Lambda) \cdot g](\varphi) = [\Lambda \cdot (\partial_i g) + (\partial_i \Lambda) \cdot g](\varphi)$$

Da dies für jede Testfunktion  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$  gilt, schließen wir  

$$\partial_i(\Lambda \cdot g) = \Lambda \cdot (\partial_i g) + (\partial_i \Lambda) \cdot g.$$

Ableitung der Sprungfunktion  $u = \mathbf{I}_{[0, \infty[}$

Eine schlagartige Impulsübertragung oder das instantane Anschalten  
 eines Stromes beschreiben wir durch die Heaviside-Sprungfunktion  

$$u = \mathbf{I}_{[0, \infty[} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ 1 & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$
  
 ⚠ In jedem Punkt  $x \neq 0$  ist  $u$  differenzierbar, und dort gilt  $u'(x) = 0$ .  
 Dennoch ist  $u$  nicht differenzierbar: Die Ableitung im Punkt  $x = 0$  ist  
 rechtsseitig Null und linksseitig „unendlich“, also  $u'(0)$  nicht definiert.

**Aufgabe:** Es gilt  $u' = \delta_0$  im Distributionensinne (aber  $\partial \Lambda_u \neq \Lambda_{\partial u}$ ).  
**Lösung:** Wir berechnen die Wirkung der Ableitung  $\partial \Lambda_u := -\Lambda_u \circ \partial$  auf  
 Testfunktionen  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , also  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  glatt mit kompaktem Träger.  
 Sei  $\text{supp } \varphi \subseteq [-r, r]$ , also  $\varphi(x) = 0$  für  $|x| \geq r$ . Dank HDI finden wir:  

$$(\partial \Lambda_u)(\varphi) = - \int_{\mathbb{R}} u(x) \partial \varphi(x) dx = - \int_{x=0}^r \varphi'(x) dx = \varphi(0) - \varphi(r) = \varphi(0)$$
  
 😊 Somit sind  $\partial \Lambda_u = \delta_0 : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  dieselbe Distribution (D5I).

Ableitung der Betragsfunktion  $x \mapsto |x|$

**Aufgabe:** (0) Skizzieren Sie die Betragsfunktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto |x|$ .  
 (1) In welchen Punkten ist  $g$  stetig? (links/rechtsseitig) differenzierbar?  
 (2) Berechnen Sie  $g' = \text{sign}$  und  $g'' = 2\delta_0$  im Distributionensinne.  
**Lösung:** (1) Die Funktion  $g$  ist stetig, das heißt in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$ .  
 In jedem Punkt  $x \neq 0$  ist  $g$  differenzierbar, und dort gilt  $g'(x) = \text{sign}(x)$ .  
 Die Ableitung von  $g$  im Punkt  $x = 0$  ist rechtsseitig  $g'(0+) = +1$  und  
 linksseitig  $g'(0-) = -1$ , also ist hier die Ableitung  $g'(0)$  nicht definiert.  
 (2) Wir berechnen die Wirkung der Ableitung  $\partial \Lambda_g := -\Lambda_g \circ \partial$  auf  
 Testfunktionen  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , also  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  glatt mit kompaktem Träger.  
 Sei also  $\varphi(x) = 0$  für  $|x| \geq r$ . Dank partieller Integration finden wir:  

$$(\partial \Lambda_g)(\varphi) = - \int_{\mathbb{R}} |x| \varphi'(x) dx = \int_{-r}^0 x \varphi'(x) dx - \int_0^r x \varphi'(x) dx$$

$$= [x \varphi(x)]_{-r}^0 - \int_{-r}^0 \varphi(x) dx - [x \varphi(x)]_0^r + \int_0^r \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \text{sign}(x) \varphi(x) dx$$
  
 😊 Somit sind  $\partial \Lambda_g = \Lambda_{\text{sign}} : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  dieselbe Distribution (D5I).  
 Im Distributionensinne gilt  $\text{sign} = 2u - 1$  und somit  $\text{sign}' = 2\delta_0$ .

**Lemma D5P: Umwälzen der Ableitung**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar mit stetiger Ableitung  $g = \partial_i f$ . Für jede Testfunktion  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}) = C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$  gilt dann:

$$\int_{\Omega} \partial_i f(x) \varphi(x) dx = - \int_{\Omega} f(x) \partial_i \varphi(x) dx$$

**Beweis:** Wir nutzen Fubini C1E und partielle Integration B1J:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g(x) \varphi(x) dx &\stackrel{\text{Null Forts.}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_1 f(x) \varphi(x) dx \\ &\stackrel{\text{Fub. C1E}}{=} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \partial_1 f(x) \varphi(x) dx_1 d(x_2, \dots, x_n) \\ &\stackrel{\text{HDI B1I}}{=} - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \partial_1 \varphi(x) dx_1 d(x_2, \dots, x_n) \\ &\stackrel{\text{Fub. C1E}}{=} - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \partial_1 \varphi(x) dx \stackrel{\text{Null Forts.}}{=} - \int_{\Omega} f(x) \partial_i \varphi(x) dx \end{aligned}$$

Die rechte Seite betrifft nur  $f$ , nicht  $f'$ , und gilt für alle Testfunktionen  $\varphi$ . Wir erheben die Gleichung nun zur Definition der schwachen Ableitung.

**Lösung:** (1) Die Antwort ist leicht, da wir genügend Beispiele kennen: Die Heaviside-Funktion  $u = \mathbf{I}_{[0, \infty]}$  ist lokal integrierbar,  $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Ihre Distributionsableitung  $\partial \Lambda_u = \delta_0$  ist das Dirac-Funktional. [D570](#)  
Die Distribution  $\delta_0$  ist jedoch nicht regulär, wie wir bereits wissen: Keine Funktion  $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  erfüllt  $\Lambda_g = \delta_0$ ! [D555](#)

Auch die Signumfunktion  $f = \text{sign}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist lokal integrierbar, besitzt aber wegen  $\partial \Lambda_f = 2\delta_0$  keine schwache Ableitung. [D572](#)

(2) Falls eine schwache Ableitung  $g$  existiert, so ist  $g$  nicht eindeutig, denn wir können  $g(x)$  in einem beliebigen Punkt  $x \in \Omega$  ändern.

Genauer: Wir dürfen die Funktion  $g \in L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R})$  auf jeder Nullmenge  $N \subseteq \Omega$ ,  $\text{vol}_n(N) = 0$ , beliebig ändern. Gilt  $\tilde{g} = g$  auf  $\Omega \setminus N$ , so folgt  $\tilde{g} \in L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R})$ , und mit  $g$  ist auch  $\tilde{g}$  eine schwache Ableitung von  $f$ .

Immerhin ist das auch schon das Schlimmste, was passieren kann: Sind  $g, \tilde{g} \in L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R})$  schwache Ableitungen zu  $f$ , so gilt  $g(x) = \tilde{g}(x)$  für fast alle  $x \in \Omega$ , dank  $\partial_i \Lambda_f = \Lambda_g = \Lambda_{\tilde{g}}$  und Vergleichssatz D5k.

Einzelne Funktionswerte  $g(x)$  haben leider keine Bedeutung! [D556](#)

Jede reguläre Distribution  $\Lambda: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  wird durch eine lokal integrierbare Funktion  $f$  dargestellt, also  $\Lambda: \varphi \mapsto \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx$ . Wir wissen also recht konkret, wie eine solche Distribution aussieht.  
Wir wollen auch singuläre Distributionen ähnlich konkret darstellen. Obige Liste zeigt konkrete Beispiele. Gibt es eine allgemeine Formel? Genau dies leisten schrittweise die folgenden drei Darstellungssätze. Die Konstruktionen sind länglich und werden hier nicht ausgeführt.

**Satz D5R: Darstellung punktuell getragener Distributionen**

Zu  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  sei  $c_\alpha \in \mathbb{R}$  gegeben. Die Zuordnung  $\Lambda: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\Lambda: \varphi \mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha \partial^\alpha \varphi(p)$$

ist eine Distribution mit Träger  $\text{supp } \Lambda = \{p\}$ . Umgekehrt gilt:

Jede Distribution  $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$  mit Träger  $\text{supp } \Lambda = \{p\}$  hat die obige Form mit eindeutigen Konstanten  $c_\alpha \in \mathbb{R}$  und einem geeigneten Grad  $N \in \mathbb{N}$ .

**Lösung:** (1) Aus vorigen Aufgaben wissen wir  $\int_{\mathbb{R}} |x| \varphi''(x) dx = 2\varphi(0)$ . Die Funktion  $f(x) = |x|$  ist stetig, aber ihr Träger ist nicht kompakt. Wir wählen eine Hutfunktion  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  mit  $\psi(x) = 1$  für  $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$  und  $\psi(x) = 0$  für  $|x| \geq 2\varepsilon$ , also  $\text{supp } \psi \subseteq [-2\varepsilon, 2\varepsilon]$ . Damit erreichen wir:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= (\psi \cdot \varphi)(0) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} |x| (\psi \cdot \varphi)''(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{1}{2} |x| \psi''(x)}_{=: f_0(x)} \varphi(x) + \underbrace{|x| \psi'(x)}_{=: f_1(x)} \varphi'(x) + \underbrace{\frac{1}{2} |x| \psi(x)}_{=: f_2(x)} \varphi''(x) dx \end{aligned}$$

Somit gilt  $\delta_0 = \Lambda_{f_0} + \partial \Lambda_{f_1} + \partial^2 \Lambda_{f_2}$ , oder kurz  $\delta_0 = f_0 + \partial f_1 + \partial^2 f_2$ . Notgedrungen ragen die Funktionen  $f_\alpha$  etwas über  $\text{supp } \varphi = \{0\}$  hinaus, und ihre Konstruktion ist nicht eindeutig im Gegensatz zu Satz D5R.

(2) Die Integralfunktion  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  ist absolut stetig (B2E), und fast überall gilt  $F' = f$ . Dank partieller Integration (B2G) gilt auch hier:

$$\Lambda_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} F'(x) \varphi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} F(x) \varphi'(x) dx = (\partial \Lambda_F)(\varphi)$$

Hat  $\Lambda_f$  kompakten Träger, so können wir  $F$  wie in (1) abschneiden.

**Definition D5Q: schwache Ableitung**

Seien  $f, g \in L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R})$ . Wir nennen  $g$  eine **schwache Ableitung** von  $f$  nach  $x_i$ , wenn für jede Testfunktion  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$  obige Gleichung gilt:

$$\int_{\Omega} g(x) \varphi(x) dx = - \int_{\Omega} f(x) \partial_i \varphi(x) dx$$

Das bedeutet  $f, g \in L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R})$  und  $\partial_i \Lambda_f = \Lambda_g$  im Distributionensinne. In diesem Falle schreiben wir kurz  $g = \partial_i f$  **im schwachen Sinne** und nennen die Funktion  $f$  **schwach ableitbar** (differenzierbar) nach  $x_i$ .

**Aufgabe:** Es gelten einige grundsätzliche Regeln der Vorsicht:

- (1) Nennen Sie Funktionen  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  aus Ihrem Beispielfundus, die keine schwache Ableitung  $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  erlauben.
- (2) Falls eine schwache Ableitung  $g$  existiert, ist  $g(x)$  dann eindeutig bestimmt in jedem Punkt  $x \in \Omega$ ? zumindest in fast allen Punkten  $x \in \Omega$ ? Warum hat es daher keinen Sinn, vom Funktionswert  $g(x)$  zu sprechen? ☺ Die schwache Ableitung hat keinen Wert... und ist dennoch nützlich!

**Aufgabe:** (1) Skizzieren Sie die reellen Funktionen  $f_1, f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f_1(x) = x \mathbf{I}_{[0, \infty]}(x)$  und  $f_2(x) = |x|$ . Ist  $f_2$  differenzierbar? Genauer: In welchen Punkten ist die Funktion  $f_i$  differenzierbar, in welchen nicht?

- (2) Sei  $U_i \subseteq \mathbb{R}$  die Menge der Differenzierbarkeitsstellen von  $f_i$ . Bestimmen Sie hierauf die Ableitung  $f'_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}$ . Ist sie stetig?
- (3) Geben Sie schwache Ableitungen  $g_1, g_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  an, falls möglich, oder erklären Sie, warum es keine schwache Ableitung geben kann.
- (4) Sind die schwachen Ableitungen eindeutig? Geben Sie Varianten an!

**Lösung:** (1) Die Skizzen sehen Sie auf Seite D569. Beide Funktionen  $f_1, f_2$  sind in 0 nicht differenzierbar, überall sonst hingegen schon.

- (2) Auf  $U_1 = U_2 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  sind  $f'_1 = \mathbf{I}_{]0, \infty[}$  und  $f'_2 = \text{sign}$  stetig!
- (3) Wir setzen  $g_i(x) = f'_i(x)$  für  $x \neq 0$  willkürlich fort durch  $g_i(0) = 42$ . Dann ist  $g_i$  eine schwache Ableitung von  $f_i$ , siehe Seite D571 / D572.
- (4) Der Wert  $g_i(0)$  ist willkürlich. Wir können  $g_i$  auch in jedem anderen Punkt ändern. Soll die schwache Ableitung  $g_i$  zudem stetig sein auf  $U_i = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , dann gibt es auf  $U_i$  nur die angegebene Lösung (D5J).

**Satz D5S: Darstellung kompakt getragener Distributionen**

Zu  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  sei  $f_\alpha \in C_c(\Omega)$  gegeben. Die Zuordnung  $\Lambda: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\Lambda: \varphi \mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \int_{\Omega} f_\alpha(x) \partial^\alpha \varphi(x) dx$$

ist eine Distribution mit kompakten Träger  $\text{supp } \Lambda \Subset \Omega$ . Umgekehrt gilt: Jede Distribution  $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$  mit kompaktem Träger hat die obige Form mit geeigneten Funktionen  $f_\alpha \in C_c(\Omega)$  und endlichem Grad  $N \in \mathbb{N}$ .

☺ Für jede kompakt getragene Distribution  $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$  gilt also

$$\Lambda = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} (-\partial)^\alpha f_\alpha \quad \text{mit} \quad f_\alpha \in C_c(\Omega).$$

**Aufgabe:** Vergleichen Sie Satz D5S mit bisherigen Darstellungen:

- (1) Stellen Sie die Distribution  $\delta_0: \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}: \varphi \mapsto \varphi(0)$  wie in D5s dar.
- (2) Stellen Sie reguläre Distributionen  $\Lambda_f$  mit  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$  ebenso dar!

**Satz D5T: Darstellung beliebiger Distributionen**

Zu  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  sei  $f_\alpha \in C(\Omega)$  gegeben, und die Familie sei lokal endlich: Jedes Kompaktum  $K \Subset \Omega$  schneidet  $\text{supp } f_\alpha$  nur für endlich viele  $\alpha$ . Dann ist die Zuordnung  $\Lambda: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  mit

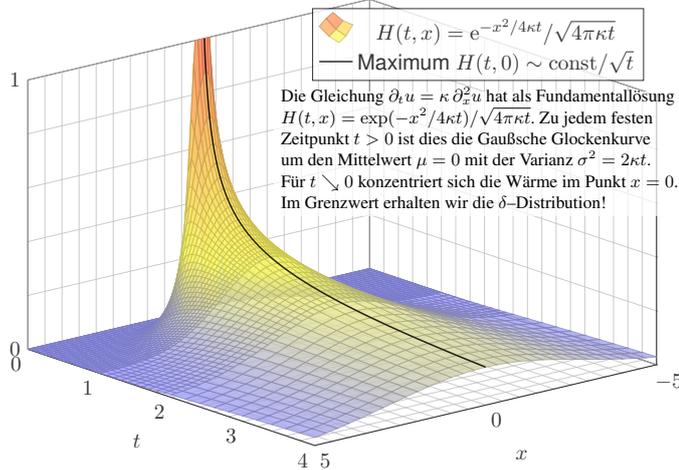
$$\Lambda: \varphi \mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \int_{\Omega} f_\alpha(x) \partial^\alpha \varphi(x) dx$$

eine Distribution. Die Reihe konvergiert, denn jede Testfunktion  $\varphi$  hat kompakten Träger, und somit ist die Summe in jedem Einzelfall endlich. Umgekehrt gilt: Jede Distribution  $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$  hat die obige Form mit einer geeigneten, lokal endlichen Familie stetiger Funktionen  $f_\alpha \in C(\Omega)$ .

☺ In diesem Sinne entstehen alle Distributionen bereits aus stetigen Funktionen und ihren (Distributions-)Ableitungen. Kurz und knapp:

$$\Lambda = \sum_{\alpha} (-\partial)^\alpha f_\alpha \quad \text{mit} \quad f_\alpha \in C(\Omega) \text{ lokal endlich}$$

☺ Distribution wirken so nicht mehr abstrakt, sondern ganz konkret.



Distributionen begegnen Ingenieur:innen meist dort, wo die klassischen Methoden an ihre Grenzen stoßen. Wenn eine bewährte Technik dort nicht mehr anwendbar ist, dann sollten wir sie ehrlicherweise auch nicht naiv einsetzen, sondern durch eine besser passende Technik ergänzen. Dieses Problem ist bei partiellen Differentialgleichungen unvermeidlich. Von den vielen Anwendungen möchte ich die Wärmeleitungsgleichung und ihre Fundamentallösung hervorheben und exemplarisch diskutieren. Fourier beschäftigte sich Anfang des 19. Jahrhunderts mit Fragen der Wärmeleitung und beschrieb dies als Differentialgleichung  $\partial_t u = \kappa \Delta u$ . (Wir entwickeln hierzu in den Kapitel E bis H die nötigen Integralsätze.) Zur Berechnung konkreter Anwendungsbeispiele entwickelte Fourier seine Theorie der Fourier-Reihen, mit überwältigendem Erfolg! Sie werden bis heute als Allzweckwerkzeug überall genutzt. Allein schon die Grundlegung dieser Theorie war für die Analysis des 19. Jahrhunderts eine enorme Herausforderung und führte zur Klärung wichtiger Fragen: Was sind Mengen und Funktionen? Wie integriert man sie? Was bedeutet Konvergenz? (Wir führen dies in Kapitel I bis L aus.)

Die Entwicklung der Mathematik steht in enger Wechselwirkung mit der ihrer Anwendungsgebiete. Ein Paradebeispiel ist die Entstehung der Differential- und Integralrechnung: Sie ist Teil der wissenschaftlichen Revolution des 17. Jahrhunderts und beantwortete dringende Fragen aus Astronomie, Mechanik und Optik (Galilei, Kepler, Newton, Leibniz). Umgekehrt hat die Analysis in den Ingenieur- und Naturwissenschaften neue Wege eröffnet und viele Anwendungen überhaupt erst ermöglicht: Ihre Methoden prägen bis heute das wissenschaftliche Denken wie kein anderes mathematisches Gebiet. Seit dem 18. Jahrhundert bis heute werden Naturgesetze meist als Differentialgleichungen beschrieben, auch in Ihrem Studium und später in Ihrem Beruf als Ingenieur:in. (Wir führen Differentialgleichungen in den Kapiteln M bis S aus.) Seit jeher entwickelt die Analysis dabei eine erstaunliche Dynamik: Neue (physikalische) Probleme treten auf, neue (mathematische) Methoden werden entwickelt. Hierzu zählen insbesondere auch die Distributionen: Die mathematische Theorie beantwortet praktische Bedürfnisse aus der Physik und den Ingenieurwissenschaften.

Physiker:innen und Ingenieur:innen nutzen Distributionen seit ca. 1900, um ganz naiv-konkret-anschauliche Phänomene zu formulieren, etwa eine „punktförmige Masse“ oder eine „schlagartige Impulsübertragung“. Das scheint anschaulich klar, doch wie Sie wissen, genügt das nicht: Sie sollen nicht nur fühlen, sondern zudem auch rechnen können! Der Wärmeleitungskern  $H(t, x)$  hat in  $(0, 0)$  eine Polstelle. Anschaulich konzentriert sich zur Zeit  $t = 0$  die gesamte Wärme im Punkt  $x = 0$ . Hier herrscht „unendliche Wärmedichte“. Wie sollen wir damit rechnen? Für  $t \searrow 0$  nähert sich die Wärmeverteilung der Dirac-Funktion (D553). Diese beschreibt die physikalische Situation leider überhaupt nicht, ihre naive Verwendung stiftet Verwirrung und provoziert Fehlentscheidungen. Der Distributionenkalkül ist maßgeschneidert für solche Extremfälle. Dank der soliden Vorbereitung in diesem Kapitel können wir nun zum Abschluss den Wärmeleitungskern vollständig erklären und einfach nachrechnen! Ähnliche Anwendungen werden uns in den folgenden Kapiteln öfters begegnen. Für eine vertiefte Behandlung von partiellen Differentialgleichungen sind Distributionen ein zentrales Werkzeug.

Satz D5U: Wärmeleitungskern

(0) Sei  $\kappa > 0$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Den **Wärmeleitungskern** definieren wir durch

$$H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : H(t, x) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi\kappa t})^n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\kappa t}\right)$$

für  $t > 0$  und  $H(t, x) = 0$  für  $t \leq 0$ . Außerhalb der Polstelle  $(0, 0)$  ist  $H$  glatt ( $C^\infty$ ), für  $t \leq 0$  konstant und für  $t > 0$  analytisch ( $C^\omega$ ).

(1) Im Distributionensinne ist  $H$  eine **Fundamentallösung** gemäß

$$(\partial_t - \kappa \Delta)H = \delta_{(0,0)}.$$

(2) Ist für  $t = 0$  die Wärmeverteilung  $u_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  vorgegeben,  $u_0 \in C_b$ , so erhalten wir die Lösung durch **Superposition** (Faltung, siehe D5E)

$$u : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : u(t, x) = \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} H(t, x - \xi) u_0(\xi) d\xi.$$

Sie erfüllt  $\partial_t u = \kappa \Delta u$  für  $t > 0$  sowie  $\lim_{t \searrow 0} u(t, x) = u_0(x)$ .

**Aufgabe:** (0) Skizzieren Sie  $H$ ; wiederholen Sie bisherige Ergebnisse.

- (1) In welchen Punkten  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  ist  $H$  stetig? glatt? analytisch?
- (2) Sei  $L = \partial_t - \kappa \Delta$ . In welchen Punkten  $(t, x)$  gilt  $LH(t, x) = 0$ ?
- (3) Ist  $H$  auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  absolut integrierbar? wenigstens lokal integrierbar?
- (4) Wann dürfen wir den Operator  $L$  zu  $L^* = -\partial_t - \kappa \Delta$  umwälzen:

$$\int [LH(t, x)] \varphi(t, x) d(t, x) = \int H(t, x) [L^* \varphi(t, x)] d(t, x)?$$

- (5) Wo verschwindet demnach die Distribution  $(\partial_t - \kappa \Delta)\Lambda_H$ ?
- (6) Berechnen Sie schließlich  $\varphi \mapsto \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n} H(t, x) [L^* \varphi(t, x)] d(t, x)$ .

**Lösung:** (0) Seite D513: Für festes  $t > 0$  ist  $x \mapsto H(t, x)$  die Gaußsche Glockenkurve mit Mittelwert  $\mu = 0$  und Streuung  $\sigma = \sqrt{2\kappa t}$ . Für  $t \nearrow \infty$  fließt sie auseinander, für  $t \searrow 0$  konzentriert sie sich um den Nullpunkt. (1) Für  $t < 0$  und  $t > 0$  ist  $H$  analytisch ( $C^\omega$ ), also lokal als konvergente Potenzreihe darstellbar, da Komposition analytischer Funktionen. Auf  $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0)\}$  ist  $H$  beliebig oft differenzierbar ( $C^\infty$ ); dies beweist man genauso wie für die Funktion  $f(t) = e^{-1/t}$ . [B438] Im Punkt  $(0, 0)$  liegt eine Polstelle vor wegen  $H(t, 0) = (4\pi\kappa t)^{-n/2}$ .

(2) Außerhalb der Polstelle, also auf ganz  $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0)\}$ , gilt  $(\partial_t - \kappa \Delta)H = 0$ , wie wir bereits nachgerechnet haben (D5D).

(3) Es gilt  $H \geq 0$ , wir können also den Absolutbetrag weglassen. Für jedes  $t > 0$  gilt  $\int_{\mathbb{R}^n} H(t, x) dx = 1$ : Gaußsches Integral (C2G). Sei  $-\infty < a < 0 < b$ . Wir nutzen den Satz von Fubini (C1E):

$$\int_{]a, b[ \times \mathbb{R}^n} H(t, x) d(t, x) = \int_{t=a}^b \int_{x \in \mathbb{R}^n} H(t, x) dx dt = \int_{t=0}^b 1 dt = b$$

Somit ist  $H$  überall auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  lokal integrierbar, aber nicht global.

(4) Sei  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$  eine Testfunktion: glatt mit kompaktem Träger. Auf  $U$  ist  $H$  glatt, dort können wir die Ableitung umwälzen (D5N): Die Formel gilt demnach falls  $\text{supp } \varphi \in U$ , also  $(0, 0) \notin \text{supp } \varphi$ . ⚠️ Sonst gilt sie nicht. Links steht 0, rechts erwarten wir  $\varphi(0, 0)$ !

(5) Auf  $U$  finden wir die Ableitung  $L\Lambda_H = \Lambda_{LH} = \Lambda_0 = 0$ . ⚠️ Die Ableitung  $h = LH$  ist nur auf  $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0)\}$  definiert; dort ist sie gleich Null. Das ist vergleichbar mit der Dirac-Funktion! Egal, wie wir  $h(0, 0)$  setzen, immer gilt  $\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n} h(t, x) \varphi(t, x) d(t, x) = 0$ , also  $\Lambda_{LH} = \Lambda_h = 0$ . Wir sehen jedoch gleich  $\Lambda_{LH} \neq \Lambda_{LH} = \delta_{(0,0)}$ .

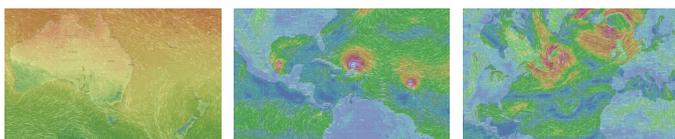
(6) Sei  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ . Für den Träger gelte  $\text{supp}(\varphi) \subseteq [-T, T] \times \mathbb{R}^n$ . Wir integrieren über  $V = ]\tau, T[ \times \mathbb{R}^n$  für  $\tau > 0$  und untersuchen  $\tau \searrow 0$ :

$$\begin{aligned} \int_{t=\tau}^T \int_{x \in \mathbb{R}^n} H(t, x) [\kappa \Delta \varphi(t, x)] dx dt &\stackrel{(a)}{=} \int_{t=\tau}^T \int_{x \in \mathbb{R}^n} [\kappa \Delta H(t, x)] \varphi(t, x) dx dt \\ &\stackrel{(b)}{=} \int_{t=\tau}^T \int_{x \in \mathbb{R}^n} [\partial_t H(t, x)] \varphi(t, x) dx dt \\ \int_{] \tau, T[ \times \mathbb{R}^n} H(t, x) [L^* \varphi(t, x)] d(t, x) &\stackrel{(c)}{=} - \int_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{t=\tau}^T \partial_t [H(t, x) \varphi(t, x)] dt dx \\ &\stackrel{(d)}{=} \int_{x \in \mathbb{R}^n} H(\tau, x) \varphi(\tau, x) dx \stackrel{(e)}{=} \int_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{e^{-|x|^2/4\kappa\tau}}{(\sqrt{4\pi\kappa\tau})^n} \varphi(\tau, x) dx \\ &\stackrel{(f)}{=} \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} \frac{e^{-|\xi|^2/2}}{(\sqrt{2\pi})^n} \varphi(\tau, \xi \sqrt{2\tau}) dx \stackrel{(g)}{=} \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} \frac{e^{-|\xi|^2/2}}{(\sqrt{2\pi})^n} \varphi(0, 0) dx = \varphi(0, 0) \end{aligned}$$

(a) Zu festem  $t$  dürfen wir  $\Delta = \partial_{x_1}^2 + \dots + \partial_{x_n}^2$  umwälzen. (b) Auf  $V$  gilt  $\kappa \Delta H = \partial_t H$ . (c) Wir nutzen erneut den Satz von Fubini. Für  $L^* = -\partial_t - \kappa \Delta$  wälzen wir  $-\kappa \Delta$  um und nutzen  $\partial_t [H \varphi] = [\partial_t H] \varphi + H [\partial_t \varphi]$  und HDI (d). (f) Wir substituieren  $\xi = x/\sqrt{2\kappa\tau}$  und nutzen den Transformationssatz. (g) Wir nutzen majorisierte Konvergenz. Alles wird gut!

Kapitel E

Integralsätze in der Ebene



Wahrlich es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen,  
nicht das Besitzen, sondern das Erwerben,  
nicht das Da-Seyn, sondern das Hinkommen,  
was den grössten Genuss gewährt.

Carl Friedrich Gauß (1777–1855)

Vollversion • michael-eisermann.de/lehre/HM3 • 26.02.2025

Inhalt dieses Kapitels E

E002

- 1 Die Integralsätze von Green und Gauß
  - Wegintegrale und Kurvenintegrale
  - Ebene Kompakta mit stückweise glattem Rand
  - Der Integralsatz von Green: anschauen und nachrechnen!
  - Der Integralsatz von Gauß: anschauen und nachrechnen!
- 2 Anwendungsbeispiele
  - Schreibweise als Differentialform
  - Die Greenschen Flächenformeln
  - Arbeitsintegrale in der Thermodynamik
  - Flächeninhalt und Schwerpunkt
- 3 Verständnisfragen und Aufgaben
  - Sherlock Holmes: Which way did the bicycle go?
  - Zwei prominente Vektorfelder: Wirbel und Quelle
  - Der Hauptsatz für Arbeitsintegrale: HDI
  - Lösung des Potentialproblems

Motivation und Zielsetzung

E003  
Überblick

Unser Vorbild ist der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:  
Für jede stetig differenzierbare Funktion  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f = F'$  gilt

$$\text{HDI: } \int_{x=a}^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Das ist eine bemerkenswerte Gesetzmäßigkeit: Das Integral über das Intervall  $[a, b]$  lässt sich entlang des Randes  $\partial[a, b] = \{a, b\}$  bestimmen!

Der HDI vereinfacht enorm die Berechnung bestimmter Integrale, oft ermöglicht er sogar explizite Integrale in geschlossener Form. Der HDI (B1I) ist daher zentral für die eindimensionale Integration; zusammen mit Fubini (C1E) und Transformationsatz (C2B) liefert er die Grundtechniken zur Berechnung mehrdimensionaler Integrale.

Der HDI lässt sich verallgemeinern von Dimension 1 auf 2 und 3 usw. Die so entstehenden **Integralsätze** von Green, Gauß und Stokes ermöglichen die Umformung und Berechnung von Integralen.

Was sind Kurven und Flächen im  $\mathbb{R}^n$ ?

E005  
Erinnerung

Der Zahlengerade  $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$  betrachten wir als (reell) **eindimensional**, die euklidische Ebene  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  betrachten wir als **zweidimensional**, den euklidischen Raum  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$  entsprechend **n-dimensional**.

Der fundamentale Begriff der **Dimension** entspringt hier der linearen Algebra, genauer gesagt der **linearen Unabhängigkeit** von Vektoren: Im  $\mathbb{R}^n$  ist  $e_1, e_2, \dots, e_n$  die Standardbasis, und **jede** Basis hat Länge  $n$ . Dies setzen wir in Geometrie, Differential- und Integralrechnung fort:

Eine **Kurve** ist eine „eindimensionale“ Teilmenge  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ , eine **Fläche** ist eine „zweidimensionale“ Teilmenge  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , usw. Anschaulich mag das klar scheinen, aber wir wollen explizit rechnen! Wie das genau funktioniert, werden wir im Folgenden ausführen.

Unser Ziel ist insbesondere, über Kurven und Flächen zu integrieren. Die hierzu benötigten Grundlagen behandeln wir zunächst für Kurven. Die hier geltenden **Integralsätze** sind Gegenstand dieses Kapitels E. In Kapitel G wenden wir uns dann Flächenintegralen im Raum zu.

☐ Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §4–5.

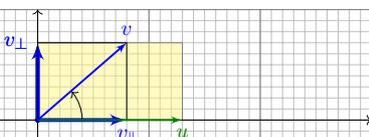
Skalarprodukt und Kreuzprodukt in der Ebene

E007  
Erinnerung

Die Geometrie der Ebene ist verhältnismäßig einfach und übersichtlich. Für  $u, v \in \mathbb{R}^2$  sind **Skalarprodukt** und **Kreuzprodukt** gegeben durch

$$\begin{aligned} u \cdot v &= u_1 v_1 + u_2 v_2 = |u| \cdot |v| \cdot \cos \angle(u, v), \\ u \times v &= u_1 v_2 - u_2 v_1 = |u| \cdot |v| \cdot \sin \angle(u, v). \end{aligned}$$

Geometrische Erklärung:



Für  $u = (u_1, 0)$  längs der x-Achse ist die **cos-sin-Formel** klar.

Allgemein können wir jedes vorgegebene Paar von Vektoren  $u, v \in \mathbb{R}^2$  so drehen, dass  $u = (u_1, 0)$  längs der x-Achse liegt: Beide Produkte sind invariant unter Drehungen, das heißt, es gilt  $(Au) \cdot (Av) = u \cdot v$  und  $(Au) \times (Av) = u \times v$  für jede orthogonale Matrix  $A \in \text{SO}_2\mathbb{R}$ .

Vorgehensweise

E004  
Überblick

Wir beginnen dieses Kapitel E mit Kurvenintegralen, als Wiederholung und Vertiefung dieser wichtigen Integrationstechnik aus der HM2. Wir erklären insbesondere die Unabhängigkeit von Parametrisierungen, sodass wir von Wegintegralen zu Kurvenintegralen übergehen können. Anschließend werden wir in diesem Kapitel die Integralsätze von Green und Gauß für ebene Vektorfelder  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  kennen und nutzen lernen. Das Prinzip ist genial einfach, doch wie immer erfordert es Übung.

Im folgenden Kapitel F werden wir dies auf komplexe Funktionen  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  anwenden. Ziel ist dabei der Residuensatz von Cauchy.

Im anschließenden dritten Kapitel G diskutieren wir die Integralsätze von Gauß und Stokes für räumliche Vektorfelder  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Das abschließende vierte Kapitel H der Reihe diskutiert physikalische Anwendungen: die Kontinuitätsgleichung in der Strömungslehre, Fouriers Wärmeleitungsgleichung, Newtons Gravitationsgesetz und Maxwells Gleichungen der Elektrodynamik.

Skalarprodukt, Norm, Abstand im  $\mathbb{R}^n$

E006  
Erinnerung

Das **euklidische Skalarprodukt** von zwei Vektoren  $u, v \in \mathbb{R}^n$  ist

$$u \cdot v = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n.$$

Übliche Schreibweisen:  $u \cdot v = u \cdot v = u^T v = \langle u | v \rangle = \langle u, v \rangle = \dots$

Für jeden Vektor  $u \in \mathbb{R}^n$  gilt somit  $\langle u | u \rangle = u_1^2 + \dots + u_n^2 \geq 0$ .

Die **euklidische Norm** des Vektors  $u \in \mathbb{R}^n$  ist definiert durch

$$|u| = \sqrt{\langle u | u \rangle} = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}.$$

Übliche Schreibweisen:  $|u| = |u|_2 = \|u\| = \|u\|_2 = \dots$

Der **euklidische Abstand** zwischen zwei Punkten  $u, v \in \mathbb{R}^n$  ist

$$|u - v| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}.$$

Beispiel: Der Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n: t \mapsto u + tv$  hat die Geschwindigkeit  $\gamma'(t) = v$  und die Länge  $\int_{t=a}^b |\gamma'(t)| dt = (b - a) \cdot |v| = |\gamma(b) - \gamma(a)|$ .

Alternative Schreibweisen für Vektoren  $u \in \mathbb{R}^n$  und ihre Länge  $|u| \in \mathbb{R}$ : Vektorpfeil  $\vec{u}$  und  $u = |\vec{u}|$  oder Unterstrich  $\underline{u}$  und  $u = |\underline{u}|$ , oder Fettdruck.

Skalarprodukt und Kreuzprodukt in der Ebene

E008  
Erinnerung

Die vier Fälle  $\angle(u, v) \in \{0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ\}$  sind besonders wichtig:

parallel:  $u \parallel v \iff u \cdot v = \pm |u| \cdot |v| \iff u \times v = 0$

senkrecht:  $u \perp v \iff u \cdot v = 0 \iff u \times v = \pm |u| \cdot |v|$

Bezüglich  $u$  zerlegen wir den Vektor  $v = v_{\parallel} + v_{\perp}$  in seinen tangentialen Anteil  $v_{\parallel}$  parallel zu  $u$  und seinen normalen Anteil  $v_{\perp}$  senkrecht zu  $u$ .

Diese orthogonale Zerlegung von  $v$  bezüglich  $u$  ist (für  $u \neq 0$ ) eindeutig; sie ist der Anfang des berühmten Gram-Schmidt-Verfahrens, gemäß

$$v_{\parallel} = \frac{u \cdot v}{u \cdot u} u \quad \text{und} \quad v_{\perp} = v - v_{\parallel}, \quad \text{somit} \quad u \cdot v_{\perp} = 0.$$

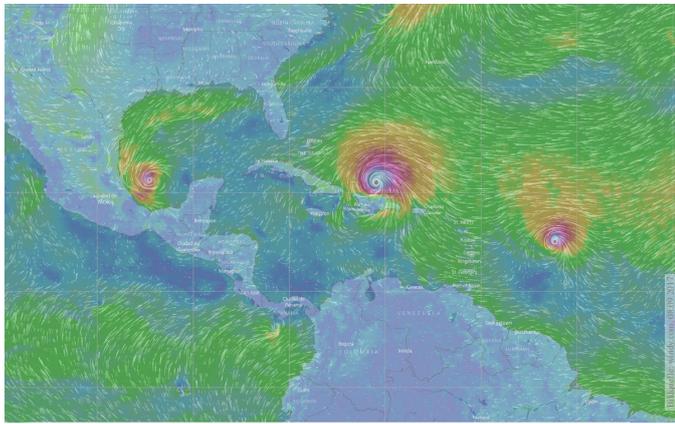
Damit erhalten wir allgemein folgende geometrische Umformulierung:

$$u \cdot v = \pm |u| \cdot |v_{\parallel}| \quad (\text{positiv / negativ parallel})$$

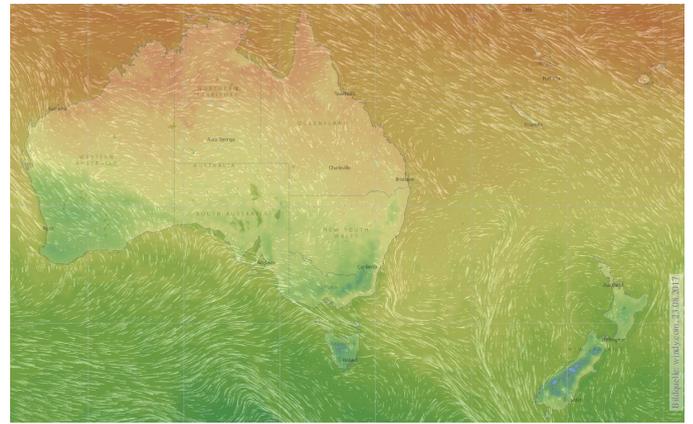
$$u \times v = \pm |u| \cdot |v_{\perp}| \quad (\text{positiv / negativ orthogonal})$$

😊 Das Skalarprodukt  $u \cdot v$  misst von  $v$  nur den tangentialen Anteil  $v_{\parallel}$  parallel zu  $u$  (bzw. symmetrisch hierzu den Anteil von  $u$  parallel zu  $v$ ).

😊 Das Kreuzprodukt  $u \times v$  misst von  $v$  nur den normalen Anteil  $v_{\perp}$  senkrecht zu  $u$  (bzw. symmetrisch hierzu von  $u$  senkrecht zu  $v$ ).



Skalarfeld  $g: \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto g(x, y)$ , z.B. Temperatur, Luftdruck.  
 Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2: (x, y) \mapsto (f_1(x, y), f_2(x, y))$ , z.B. Wind, etc.



Vektorfelder treten in vielen naturwissenschaftlichen Modellen auf.  
 Hierbei gelten gewisse Gesetze, die wir verstehen und nutzen wollen.

Skalarfelder, Gradient, Taylor-Entwicklung

Wir betrachten zunächst ein ebenes **Skalarfeld**

$$g: \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto g(x, y).$$

Jedem Punkt  $(x, y) \in \Omega$  wird eine Zahl  $g(x, y) \in \mathbb{R}$  zugeordnet; der Definitionsbereich  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  sei hierbei eine offene Teilmenge. Unser Skalarfeld  $g$  ist dann nichts weiter als eine reelle Funktion. Wir können die Funktion  $g$  als eine Fläche über  $\Omega$  veranschaulichen: Der Wert  $z = g(x, y)$  ist dann die Höhe über dem Punkt  $(x, y)$ .

Wir nehmen an, dass  $g$  stetig partiell differenzierbar ist, kurz  $C^1$ . Die Ableitung  $\partial_1 g(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$  ist die Steigung in  $x$ -Richtung. Die Ableitung  $\partial_2 g(x, y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$  ist die Steigung in  $y$ -Richtung. Dies definiert zwei neue Funktionen  $\partial_1 g, \partial_2 g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Der **Gradient**

$$g' = \text{grad } g = (\partial_1 g, \partial_2 g): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2: (x, y) \mapsto (\partial_1 g(x, y), \partial_2 g(x, y))$$

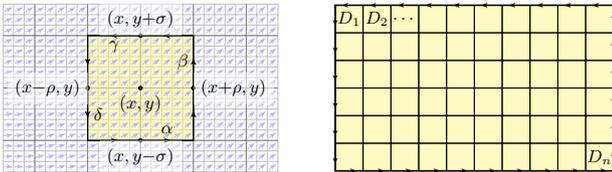
weist in Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion  $g$ .

Der Gradient ist der lineare Term der **Taylor-Entwicklung**

$$g(x+a) = g(x) + \sum_{i=1}^n \partial_i g(x) a_i + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \partial_j \partial_i g(x) a_i a_j + \dots$$

Die Rotation  $\text{rot}(f)$  misst die Wirbeldichte.

Wir betrachten ein  $C^1$ -Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  auf einem Rechteck  $D = [x-\rho, x+\rho] \times [y-\sigma, y+\sigma] \subseteq \Omega$  mit den (kleinen) Radien  $\rho, \sigma > 0$ .



**Aufgabe:** (1) Berechnen Sie (in erster Näherung) das **Arbeitsintegral**  $I_D = \int_{\partial D} f(s) \cdot ds$  von  $f$  längs des Randes  $\partial D$ , als Summe der Kanten.  
 (2) Erklären Sie für  $(\rho, \sigma) \rightarrow 0$  den Grenzwert  $I_D / \text{vol}_2(D) \rightarrow \text{rot } f(x, y)$ . Die Rotation  $\text{rot}(f)$  misst also die **lokale Wirbeldichte** des Feldes  $f$ .  
 (3) Erklären Sie durch Zerlegung und Grenzübergang: Die **Zirkulation** von  $f$  auf jedem beliebigen Rechteck  $D$  erhalten wir durch die Integrale

$$\int_{\partial D} f(s) \cdot ds = \int_D \text{rot } f(x, y) \, d(x, y).$$

Die Divergenz  $\text{div}(f)$  misst die Quelledichte.

**Aufgabe:** (4) Berechnen Sie (in erster Näherung) das **Flussintegral**  $J_D = \int_{\partial D} f(s) \times ds$  von  $f$  über den Rand  $\partial D$ , als Summe der Kanten.  
 (5) Erklären Sie für  $(\rho, \sigma) \rightarrow 0$  den Grenzwert  $J_D / \text{vol}_2(D) \rightarrow \text{div } f(x, y)$ . Die Divergenz  $\text{div}(f)$  misst also die **lokale Quelledichte** des Feldes  $f$ .  
 (6) Erklären Sie durch Zerlegung und Grenzübergang: Die **Quellstärke** von  $f$  auf jedem beliebigen Rechteck  $D$  erhalten wir durch die Integrale

$$\int_{\partial D} f(s) \times ds = \int_D \text{div } f(x, y) \, d(x, y).$$

☺ Die hier anschaulich gefundenen Integralsätze von Green (3) und Gauß (6) gelten nicht nur für jedes Rechteck  $D$ , sondern allgemein für jedes Kompaktum  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  mit stückweise glattem Rand, zum Beispiel Polygone, Kreise, Ellipsen, sogar mit Löchern... kurzum: nahezu immer.

⚠ Wichtig ist, dass  $D$  kompakt ist. Andernfalls existieren eventuell die Integrale über  $D$  oder  $\partial D$  nicht, oder die Bilanzgleichungen (3) und (6) sind verletzt. Eine genauere Analyse solcher Fälle folgt in Kapitel F im Rahmen des Residuensatzes für komplexe Funktionen.

Vektorfelder, Jacobi-Matrix, Divergenz, Rotation

Wir betrachten nun ein ebenes **Vektorfeld**

$$f: \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2: (x, y) \mapsto f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)).$$

Jedem Punkt  $(x, y) \in \Omega$  wird ein Vektor  $f(x, y) \in \mathbb{R}^2$  zugeordnet, mit Komponenten  $f_1(x, y) \in \mathbb{R}$  und  $f_2(x, y) \in \mathbb{R}$ . Seine **Jacobi-Matrix** ist

$$f' = \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial x & \partial f_1 / \partial y \\ \partial f_2 / \partial x & \partial f_2 / \partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 \end{pmatrix}.$$

Wir definieren die **Quelldichte** oder **Divergenz**  $\text{div } f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\text{div } f := \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}.$$

Wir definieren die **Wirbeldichte** oder **Rotation**  $\text{rot } f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\text{rot } f := \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}.$$

📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §5.2. In diesem Kapitel E geht es zunächst nur um ebene Vektorfelder. Dreidimensionale Vektorfelder behandeln wir später in Kapitel G.

Die Rotation  $\text{rot}(f)$  misst die Wirbeldichte.

**Lösung:** (1) Wir nutzen die Taylor-Entwicklung bis zur ersten Ordnung:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} f(s) \cdot ds &\approx +f_1(x, y-\sigma) \cdot 2\rho \approx +[f_1(x, y) + \partial_2 f_1(x, y) \cdot (-\sigma)] \cdot 2\rho \\ \int_{\beta} f(s) \cdot ds &\approx +f_2(x+\rho, y) \cdot 2\sigma \approx +[f_2(x, y) + \partial_1 f_2(x, y) \cdot (+\rho)] \cdot 2\sigma \\ \int_{\gamma} f(s) \cdot ds &\approx -f_1(x, y+\sigma) \cdot 2\rho \approx -[f_1(x, y) + \partial_2 f_1(x, y) \cdot (+\sigma)] \cdot 2\rho \\ \int_{\delta} f(s) \cdot ds &\approx -f_2(x-\rho, y) \cdot 2\sigma \approx -[f_2(x, y) + \partial_1 f_2(x, y) \cdot (-\rho)] \cdot 2\sigma \end{aligned}$$

Die Summe ergibt das Arbeitsintegral  $I_D$  von  $f$  entlang des Randes  $\partial D$ :  $I_D = \int_{\partial D} f(s) \cdot ds \approx [\partial_1 f_2(x, y) - \partial_2 f_1(x, y)] \cdot 4\rho\sigma = \text{rot } f(x, y) \cdot \text{vol}_2(D)$ .

(2) Für  $(\rho, \sigma) \rightarrow 0$  gilt  $I_D / \text{vol}_2(D) \rightarrow \text{rot } f(x, y)$ ; der Fehler in obiger Näherung ist höherer Ordnung in  $\rho, \sigma$  und verschwindet für  $(\rho, \sigma) \rightarrow 0$ .

(3) Wir zerlegen  $D = D_1 \cup \dots \cup D_n$  in Teilrechtecke und summieren: Links erhalten wir das Arbeitsintegral von  $f$  entlang  $\partial D$ ; Arbeitsintegrale längs innerer Kanten sind gegenläufig und heben sich paarweise auf! Rechts erhalten wir  $\sum_k \text{rot } f(x_k, y_k) \text{vol}_2(D_k) \rightarrow \int_D \text{rot } f(x, y) \, d(x, y)$ .

☺ Diese erste Näherung hilft zur Anschauung und erklärt die Intuition. Die genaue Rechnung (ohne Näherung) führen wir auf Seite E141 aus.

Die Divergenz  $\text{div}(f)$  misst die Quelledichte.

**Lösung:** (4) Wir nutzen die Taylor-Entwicklung bis zur ersten Ordnung:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} f(s) \times ds &\approx -f_2(x, y-\sigma) \cdot 2\rho \approx -[f_2(x, y) + \partial_2 f_2(x, y) \cdot (-\sigma)] \cdot 2\rho \\ \int_{\beta} f(s) \times ds &\approx +f_1(x+\rho, y) \cdot 2\sigma \approx +[f_1(x, y) + \partial_1 f_1(x, y) \cdot (+\rho)] \cdot 2\sigma \\ \int_{\gamma} f(s) \times ds &\approx +f_2(x, y+\sigma) \cdot 2\rho \approx +[f_2(x, y) + \partial_2 f_2(x, y) \cdot (+\sigma)] \cdot 2\rho \\ \int_{\delta} f(s) \times ds &\approx -f_1(x-\rho, y) \cdot 2\sigma \approx -[f_1(x, y) + \partial_1 f_1(x, y) \cdot (-\rho)] \cdot 2\sigma \end{aligned}$$

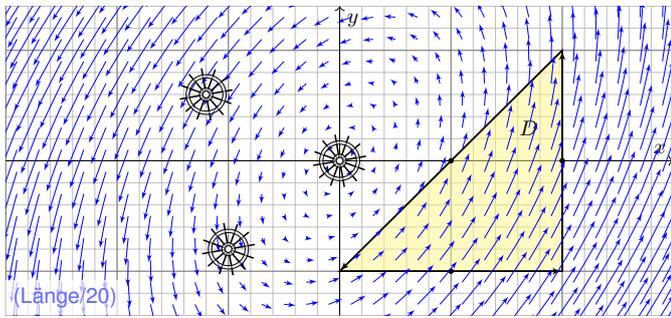
Die Summe ergibt das Flussintegral  $J_D$  von  $f$  über den Rand  $\partial D$ :

$$J_D = \int_{\partial D} f(s) \times ds \approx [\partial_1 f_1(x, y) + \partial_2 f_2(x, y)] \cdot 4\rho\sigma = \text{div } f(x, y) \cdot \text{vol}_2(D)$$

(5) Für  $(\rho, \sigma) \rightarrow 0$  gilt  $J_D / \text{vol}_2(D) \rightarrow \text{div } f(x, y)$ ; der Fehler in obiger Näherung ist höherer Ordnung in  $\rho, \sigma$  und verschwindet für  $(\rho, \sigma) \rightarrow 0$ .

(6) Wir zerlegen  $D = D_1 \cup \dots \cup D_n$  in Teilrechtecke und summieren: Links erhalten wir das Flussintegral von  $f$  über  $\partial D$ ; Flussintegrale über innere Kanten sind gegenläufig und heben sich paarweise auf! Rechts erhalten wir  $\sum_k \text{div } f(x_k, y_k) \text{vol}_2(D_k) \rightarrow \int_D \text{div } f(x, y) \, d(x, y)$ .

☺ Diese erste Näherung hilft zur Anschauung und erklärt die Intuition. Die genaue Rechnung (ohne Näherung) führen wir auf Seite E145 aus.



**Aufgabe:** (1) Zeichnen Sie das Dreieck  $D = [(0, -1), (2, -1), (2, 1)]$ . und skizzieren Sie hierauf das Vektorfeld  $f(x, y) = (x - 2y, 3x - y)$ .  
 (2) Berechnen Sie die Wirbelstärke  $\int_D \text{rot}(f) d(x, y)$  auf  $D$  sowie  
 (3) das Arbeitsintegral  $\int_{\partial D} f(s) \cdot ds$  entlang des Randes  $\partial D$ .  
 Was schätzen Sie vorab: Vorzeichen? Größenordnung? exakte Werte?

**Lösung:** (2) Die Wirbeldichte  $\text{rot}(f)$  und die Wirbelstärke auf  $D$  sind:  

$$\text{rot}(f) = \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 = 3 - (-2) = 5$$

$$\int_D \text{rot}(f) d(x, y) = 5 \text{ vol}_2(D) = 5 \cdot 2 = 10$$
 (3) Die Kurve  $\Gamma = \partial D$  ist polygonal und das Vektorfeld  $f$  ist linear in  $x, y$ . In diesem Spezialfall können wir das Arbeitsintegral einfach summieren:

	Schwerpunkt $s_k$	Vektor $f(s_k)$	Tangente $t_k$	Länge $ \Gamma_k $	Arbeit
$\Gamma_1$	(1, -1)	(3, 4)	(1, 0)	2	6
$\Gamma_2$	(2, 0)	(2, 6)	(0, 1)	2	12
$\Gamma_3$	(1, 0)	(1, 3)	$(-1, -1)/\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	-8

Wir erhalten so:  

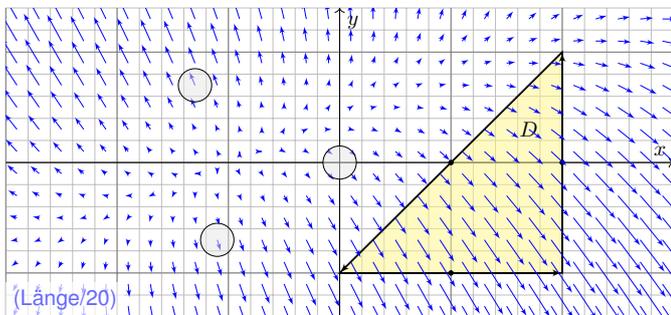
$$\int_{\partial D} f(s) \cdot ds \stackrel{\text{Lin}}{=} \sum_k f(s_k) \cdot t_k |\Gamma_k| = 10$$
 Die Gesamtsumme ist 10: Beim Umlauf um  $\partial D$  wird Arbeit verrichtet.  
 😊 Gemäß Skizze ist dies plausibel, insb. stimmen die Vorzeichen!

Vektorfelder und Arbeitsintegrale kennen Sie bereits aus der HM2. Dies wollen wir anschaulich verstehen und präzise berechnen lernen. Anschließend wollen und werden wir damit komplexere Probleme lösen. Ich beginne hier ganz bewusst mit einem besonders simplen Beispiel. Es ist stark vereinfacht und soll zunächst nur das Prinzip erläutern: Wir können die Lösung hier gut visualisieren und direkt ausrechnen.  
 Anschauliche Beschreibung: Sie beobachten die Strömung einer dünnen Flüssigkeitsschicht auf einer Platte. Die Geschwindigkeit in jedem Punkt wird dann beschrieben durch das Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .  
 Alternativ: Sie beobachten ein ebenes Kraftfeld  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , etwa ein elektrisches Feld in der Ebene  $\mathbb{R}^2$ . Die Kraft in jedem Punkt wird dann beschrieben durch das Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .  
 Wieviel Arbeit wird gewonnen bzw. verrichtet, wenn Sie ein Probeteilchen in diesem Feld bewegen entlang des Randes  $\partial D$ ?  
 😊 Das Ergebnis hängt von der Wirbeldichte  $\text{rot}(f) = \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1$  ab. Wir können sie in jedem Punkt durch ein kleines Schaufelrad messen.

😊 Die Gleichheit ist kein Zufall, sondern illustriert den Satz von Green!  

$$\int_{(x,y) \in D} \text{rot} f(x, y) d(x, y) = \int_{s \in \partial D} f(s) \cdot ds$$
 Links steht das Flächenintegral der Wirbeldichte von  $f$  auf  $D$ . Rechts steht das Arbeitsintegral von  $f$  entlang der Randkurve  $\partial D$ .  
 Integralsatz von Green: Beide Integrale ergeben denselben Wert!  
 😊 Die obige Summenformel ist exakt bis zu 1. Ordnung, der Fehler ist 2. Ordnung. [E027](#) In unserem Beispiel verschwindet der Fehler vollkommen, da wir ein lineares Vektorfeld über einen polygonalen Weg integrieren.  
 😊 Allgemein nutzen wir den Grenzübergang von Summe zu Integral:  

$$\sum_k f(s_k) \cdot t_k |\Gamma_k| = \sum_k f(s_k) \cdot \Delta s_k \rightarrow \int_{s \in \Gamma} f(s) \cdot ds = \int_{s \in \Gamma} f(s) \cdot t(s) |ds|$$
 😊 Solche Kurvenintegrale kennen Sie bereits aus Ihrer Vorlesung HM2. Diese Begriffe und Techniken werden wir nun fortsetzen und ausbauen.



**Aufgabe:** (1) Zeichnen Sie das Dreieck  $D = [(0, -1), (2, -1), (2, 1)]$  und skizzieren Sie das Vektorfeld  $f(x, y) = (x - y + 1, 3y - x - 1)$ .  
 (2) Berechnen Sie die Quellstärke  $\int_D \text{div}(f) d(x, y)$  auf  $D$  sowie  
 (3) das Flussintegral  $\int_{\partial D} f(s) \times ds$  entlang des Randes  $\partial D$ .  
 Was schätzen Sie vorab: Vorzeichen? Größenordnung? exakte Werte?

**Lösung:** (2) Die Quelledichte  $\text{div}(f)$  und die Quellstärke auf  $D$  sind:  

$$\text{div}(f) = \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 = 1 + 3 = 4$$

$$\int_D \text{div}(f) d(x, y) = 4 \text{ vol}_2(D) = 4 \cdot 2 = 8$$
 (3) Die Kurve  $\partial D$  ist polygonal und das Vektorfeld  $f$  affin-linear in  $x, y$ . In diesem Spezialfall können wir das Flussintegral einfach summieren:

	Schwerpunkt $s_k$	Vektor $f(s_k)$	Normale $n_k$	Länge $ \Gamma_k $	Fluss
$\Gamma_1$	(1, -1)	(3, -5)	(0, -1)	2	10
$\Gamma_2$	(2, 0)	(3, -3)	(1, 0)	2	6
$\Gamma_3$	(1, 0)	(2, -2)	$(-1, 1)/\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	-8

Wir erhalten so:  

$$\int_{\partial D} f(s) \times ds \stackrel{\text{Lin}}{=} \sum_k f(s_k) \cdot n_k |\Gamma_k| = 8$$
 Die Gesamtsumme des Flusses ist 8: Aus  $D$  fließt mehr raus als rein.  
 😊 Gemäß Skizze ist dies plausibel, insb. stimmen die Vorzeichen!

Strömungen haben im allgemeinen Wirbel, auch Quellen und Senken. Dies wollen wir anschaulich verstehen und präzise berechnen lernen. Anschließend wollen und werden wir damit komplexere Probleme lösen. Ich beginne auch hier bewusst mit einem besonders simplen Beispiel. Es ist stark vereinfacht und soll zunächst nur das Prinzip erläutern: Wir können die Lösung hier gut visualisieren und direkt ausrechnen.  
 Anschauliche Beschreibung: Sie beobachten die Strömung einer dünnen Flüssigkeitsschicht auf einer Platte. Die Geschwindigkeit in jedem Punkt wird dann beschrieben durch das Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .  
 Die Platte ist porös, an manchen Stellen quillt Flüssigkeit heraus, dies entspricht Quellen mit  $\text{div}(f) > 0$ . An anderen Stellen dringt Flüssigkeit in die Platte ein, dies entspricht Senken mit  $\text{div}(f) < 0$ .  
 Wieviel Flüssigkeit entsteht insgesamt im Dreieck  $D$ ?  
 Wieviel fließt insgesamt über den Rand  $\partial D$ ?  
 😊 Das Ergebnis hängt von der Quelledichte  $\text{div}(f) = \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2$  ab. Wir messen sie in jedem Punkt als Fluss aus einem kleinen Gefäß.

😊 Die Gleichheit ist kein Zufall, sondern illustriert den Satz von Gauß!  

$$\int_{(x,y) \in D} \text{div} f(x, y) d(x, y) = \int_{s \in \partial D} f(s) \times ds$$
 Links steht das Flächenintegral der Quelledichte von  $f$  auf  $D$ . Rechts steht das Flussintegral von  $f$  über die Randkurve  $\partial D$ .  
 Integralsatz von Gauß: Beide Integrale ergeben denselben Wert!  
 😊 Die obige Summenformel ist exakt bis zu 1. Ordnung, der Fehler ist 2. Ordnung. [E027](#) In unserem Beispiel verschwindet der Fehler, da wir ein affin-lineares Vektorfeld über einen polygonalen Weg integrieren.  
 😊 Allgemein nutzen wir den Grenzübergang von Summe zu Integral:  

$$\sum_k f(s_k) \cdot n_k |\Gamma_k| = \sum_k f(s_k) \times \Delta s_k \rightarrow \int_{s \in \Gamma} f(s) \times ds = \int_{s \in \Gamma} f(s) \cdot n(s) |ds|$$
 😊 Solche Kurvenintegrale kennen Sie bereits aus Ihrer Vorlesung HM2. Diese Begriffe und Techniken werden wir nun fortsetzen und ausbauen.

Kurven  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$  parametrisieren wir (stückweise  $C^1$ ) durch  $\gamma: [a, b] \rightarrow \Gamma$ . Am Punkt  $s = \gamma(t)$  heftet das infinitesimale Wegelement  $ds = \gamma'(t) dt$ .

Kurvenlänge  $\int_{\Gamma} |d\Gamma| = \int_{s \in \Gamma} |ds| := \int_{t=a}^b |\gamma'(t)| dt$

Kurvenintegral  $\int_{\Gamma} g |d\Gamma| = \int_{s \in \Gamma} g(s) |ds| := \int_{t=a}^b g(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt$

Arbeitsintegral  $\int_{\Gamma} f \cdot d\Gamma = \int_{s \in \Gamma} f(s) \cdot ds := \int_{t=a}^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$

Flussintegral  $\int_{\Gamma} f \times d\Gamma = \int_{s \in \Gamma} f(s) \times ds := \int_{t=a}^b f(\gamma(t)) \times \gamma'(t) dt$

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  eine kompakte Fläche mit stückw. glatter Randkurve  $\partial D$ . Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^2$  gilt dann

Satz von Green:  $\int_{(x,y) \in D} \text{rot } f(x,y) d(x,y) = \int_{s \in \partial D} f(s) \cdot ds,$

Satz von Gauß:  $\int_{(x,y) \in D} \text{div } f(x,y) d(x,y) = \int_{s \in \partial D} f(s) \times ds.$

Wir wollen die Linearisierung der vorigen Aufgaben rechtfertigen. Jedes **Geradenstück**  $\Gamma$  von  $p$  nach  $q$  im  $\mathbb{R}^2$  können wir parametrisieren durch einen affin-linearen Weg  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\gamma(t) = (1-t)p + tq$ . Zudem sei auch das Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  **affin-linear**, das heißt

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 \end{pmatrix}.$$

**Übung:** In diesem Falle gelten folgende nützliche Vereinfachungen:

- (1) Die Länge ist  $\text{vol}_1(\Gamma) = |q - p|$  und der Schwerpunkt  $\bar{s} = \frac{1}{2}(p + q)$ .
- (2) Einheitstangente ist  $t = (q - p)/|q - p|$ , Normale  $n = \circlearrowleft t = (t_2, -t_1)$ .
- (3) Arbeits- und Flussintegral von  $f$  über  $\Gamma$  vereinfachen sich zu

$$\int_{\Gamma} f \cdot d\Gamma = f(\bar{s}) \cdot t \text{vol}_1(\Gamma) = f(\bar{s}) \cdot (q - p),$$

$$\int_{\Gamma} f \times d\Gamma = f(\bar{s}) \cdot n \text{vol}_1(\Gamma) = f(\bar{s}) \times (q - p).$$

- (4) Schließlich sind  $\text{rot}(f) = a_{21} - a_{12}$  und  $\text{div}(f) = a_{11} + a_{22}$  konstant.

😊 Statt Integralen benötigen wir hier also nur die Grundrechenarten!

Ein **Weg** im Raum  $\mathbb{R}^n$  ist eine stetige Abbildung

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n: t \mapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}.$$

Die von  $\gamma$  parametrisierte **Kurve** ist die Menge aller Bildpunkte,

$$\Gamma = \gamma([a, b]) = \{ \gamma(t) \mid a \leq t \leq b \} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

⚠️ Dieselbe Kurve lässt sich durch mehrere Wege beschreiben! [E033](#)

📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §5.3-5.4.

Jedem Parameterwert  $t \in [a, b]$  wird ein Bildpunkt  $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$  zugeordnet. Durchläuft  $t$  das Intervall  $[a, b]$ , so durchläuft  $\gamma(t)$  die Kurve  $\Gamma$ . Stetigkeit bedeutet hierbei: Für  $t \rightarrow t_0$  gilt  $|\gamma(t) - \gamma(t_0)| \rightarrow 0$ . Äquivalent hierzu: Jede Koordinate  $\gamma_1, \dots, \gamma_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig.

Physikalische Interpretation: Der Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  beschreibt die Bahn (Trajektorie) eines Teilchens in der Ebene  $\mathbb{R}^2$ , im Raum  $\mathbb{R}^3$ , oder allgemein in einem Zustandsraum  $\mathbb{R}^n$ . Zur Zeit  $t \in [a, b]$  befindet es sich im Punkt  $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ . Beispiel: Which way did the bicycle go? [E309](#)

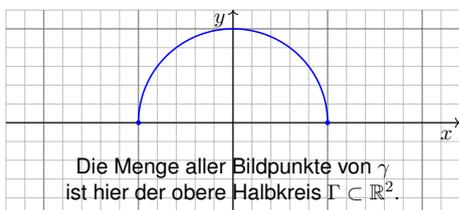
Jeder Weg  $\gamma$  ist eine **Abbildung**, die so beschriebene Kurve  $\Gamma$  ist nur eine **Menge**. Beide Begriffe müssen wir fein säuberlich auseinanderhalten! Wir interessieren uns meist für die Kurve  $\Gamma$ , aber nur mit dem Weg  $\gamma$  können wir rechnen, zum Beispiel differenzieren und integrieren.

Jede stetige Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert den zugehörigen Weg

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto (t, f(t)).$$

Die zugehörige Kurve  $\Gamma = \{ (t, f(t)) \mid t \in [a, b] \}$  ist der **Graph** von  $f$ .

Beispiel: Die stetige Funktion  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}: t \mapsto \sqrt{1-t^2}$  liefert den zugehörigen Weg  $\gamma: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto (t, \sqrt{1-t^2})$ .



⚠️ Dieselbe Kurve lässt sich durch mehrere Wege beschreiben! [E033](#)  
Zur Berechnung wählen wir eine möglichst geschickte Parametrisierung.

😊 Diese Sätze sind die zweidimensionale Fortsetzung des HDI: Der Integralsatz von Green / Gauß übersetzt zweidimensionale Integrale über eine kompakte Fläche  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  in eindimensionale Integrale entlang der Randkurve  $\partial D$ . Diese Integrationstechnik ist sehr oft nützlich!

Die Randkurve  $\partial D$  parametrisieren wir (stückweise) durch reguläre Wege  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Das Kurvenelement  $ds = \gamma'(t) dt$  stellen wir uns als ein kleines Wegstück vor und  $|ds|$  als seine Länge. Der Vektor  $ds$  liegt tangential an der Kurve. Das Skalarprodukt  $f(s) \cdot ds = f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$  misst den tangentialen Anteil von  $f$  längs der Kurve, das Kreuzprodukt  $f(s) \times ds = f(\gamma(t)) \times \gamma'(t) dt$  den normalen Anteil senkrecht hierzu.

Wir integrieren längs  $\gamma$  und addieren alle Beiträge. Links steht die bequeme, parameterfreie Abkürzung für das Integral über die Kurve  $\Gamma$ .

Warum so kompliziert? Wir interessieren uns letztlich für die Kurve  $\Gamma$ , aber nur mit Wegen  $\gamma$  können wir rechnen: differenzieren / integrieren. Die Wahl einer Parametrisierung  $\gamma$  ist unentbehrliche Rechentechnik. Die Rechenwege sind verschieden, alle führen zum selben Ergebnis! Erst diese Gewissheit rechtfertigt die abkürzende Schreibweise links.

😊 Für jedes **Geradenstück**  $\Gamma$  und jedes **affin-lineare Vektorfeld**  $f$  gelten die vereinfachten Formeln (3) exakt, d.h. ohne Näherungsfehler. Durch Summation gilt die Gleichung (3) auch für **Polygonzüge**  $\Gamma$ .

Warum haben wir Kurvenintegrale dann nicht gleich so definiert? Die vereinfachte Rechnung benötigt die spezielle Voraussetzung! Nicht jede Kurve  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$  ist polygonal, und nicht jedes Vektorfeld  $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist linear. Im Allgemeinen ist die exakte Rechnung nicht so einfach; hier nutzen wir gewinnbringend unsere Integrationsmethoden!

**Numerik:** Ist das Kurvenstück  $\Gamma$  klein, so weicht das Vektorfeld  $f$  auf  $\Gamma$  nur wenig von der Linearisierung um den Schwerpunkt  $\bar{s}$  ab. Für  $f(x) \approx Ax + b$  ist Formel (3) dann eine brauchbare Näherung. In der **Taylor-Entwicklung** treten im Allgemeinen höhere Terme auf: Die Formel (3) ist exakt bis zu 1. Ordnung, der Fehler ist 2. Ordnung.

😊 Die Kurvensummen  $\sum_k f(\bar{s}_k) \cdot t_k \text{vol}_1(\Gamma_k)$  konvergieren bei immer feineren Unterteilungen gegen das Kurvenintegral  $\int_{s \in \Gamma} f(s) \cdot t(s) |ds|$ . Ebenso konvergiert  $\sum_k f(\bar{s}_k) \cdot n_k \text{vol}_1(\Gamma_k)$  gegen  $\int_{s \in \Gamma} f(s) \cdot n(s) |ds|$ .

Der Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n: t \mapsto \gamma(t)$  heißt **stetig differenzierbar**, kurz  $C^1$ , wenn jede Koordinatenfunktion  $\gamma_1, \dots, \gamma_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig diff'bar ist.

Die Ableitung  $\gamma': [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist dann der **Geschwindigkeitsvektor**

$$\gamma'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \begin{pmatrix} \gamma_1(t+h) - \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t+h) - \gamma_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \vdots \\ \gamma'_n(t) \end{pmatrix}.$$

Die euklidische Norm  $|\gamma'(t)| \in \mathbb{R}$  ist die **Absolutgeschwindigkeit**.

Der Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt **doppelpunktfrei**, wenn für  $s \neq t$  stets  $\gamma(s) \neq \gamma(t)$  gilt. Anders gesagt, die Abbildung  $\gamma$  ist **injektiv**.

Der Weg  $\gamma$  heißt **regulär**, wenn  $\gamma$  injektiv ist und stetig diff'bar mit  $\gamma'(t) \neq 0$  für alle  $t \in [a, b]$ . Seine Bildmenge  $\Gamma$  heißt dann **glatte Kurve**.

Ein **parametrisiertes Kurvenstück**  $(\Gamma, \gamma)$  ist eine glatte Kurve  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$  mit einer Parametrisierung durch einen regulären Weg  $\gamma: [a, b] \xrightarrow{\sim} \Gamma$ .

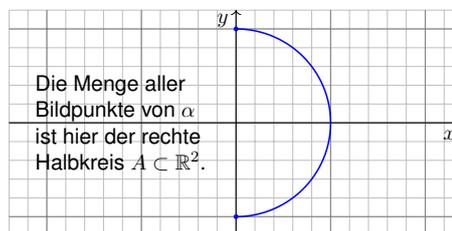
Reguläre Wege sind die beste Wahl zur Parametrisierung von Kurven. Die Forderung ist streng, in vielen Rechnungen genügt etwas weniger: Der Weg  $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt **semiregulär**, wenn er regulär auf  $[a, b]$  ist. Im folgenden Beispiel [E033](#) sind  $\beta$  und  $\gamma$  regulär, aber  $\alpha$  nur semiregulär.

Manchmal verwenden wir als Variable statt  $x$  besser  $y$ :

$$\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2: s \mapsto (g(s), s)$$

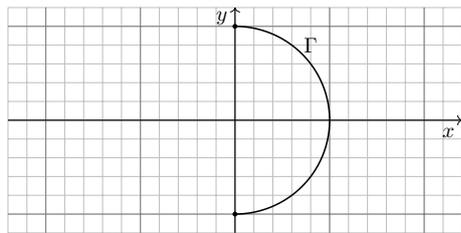
Die beiden Koordinaten  $x$  und  $y$  tauschen hier ihre Rollen.

Wir zeichnen das Beispiel  $\alpha: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2: s \mapsto (\sqrt{1-s^2}, s)$ :



⚠️ Dieselbe Kurve lässt sich durch mehrere Wege beschreiben! [E033](#)  
Zur Berechnung wählen wir eine möglichst geschickte Parametrisierung.

Einführendes Beispiel: Länge eines Halbkreises



**Aufgabe:** Beschreiben Sie  $\Gamma$  implizit als Lösungsmenge sowie explizit durch drei verschiedene Parametrisierungen. Berechnen Sie die Länge.

**Lösung:** (0) Implizite Beschreibung als Lösung von Un/Gleichungen:

$$\Gamma = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, x \geq 0 \}$$

Welche Parametrisierungen sind geeignet? Welche sind geschickt? Ist das Ergebnis unabhängig von der gewählten Parametrisierung?

Einführendes Beispiel: Länge eines Halbkreises

(1) Algebraische Parametrisierung durch Auflösen der Gleichung:

$$\alpha: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \alpha(s) = (\sqrt{1-s^2}, s), \quad \alpha'(s) = \left( \frac{-s}{\sqrt{1-s^2}}, 1 \right),$$

$$\ell(\alpha) = \int_{s=-1}^{+1} |\alpha'(s)| ds = \int_{s=-1}^{+1} \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = \left[ \arcsin(s) \right]_{s=-1}^{+1} = \pi$$

(2) Polarkoordinaten liefern eine weitere Parametrisierung von  $\Gamma$ :

$$\beta: [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \beta(t) = (\cos t, \sin t), \quad \beta'(t) = (-\sin t, \cos t),$$

$$\ell(\beta) = \int_{t=-\pi/2}^{+\pi/2} |\beta'(t)| dt = \int_{t=-\pi/2}^{+\pi/2} 1 dt = \pi$$

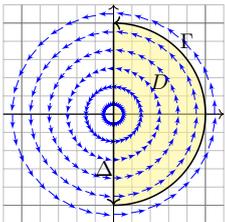
(3) Rationale Parametrisierung durch Weierstraß-Substitution [E137]:

$$\gamma: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(u) = \left( \frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1+u^2} \right), \quad \gamma'(u) = \left( \frac{-4u}{(1+u^2)^2}, \frac{2(1-u^2)}{(1+u^2)^2} \right),$$

$$\ell(\gamma) = \int_{u=-1}^{+1} |\gamma'(u)| du = \int_{u=-1}^{+1} \frac{2 du}{1+u^2} = \left[ 2 \arctan(u) \right]_{u=-1}^{+1} = \pi$$

☺ Die Wahl einer Parametrisierung ist nötig zur konkreten Rechnung. Die Rechenwege sind verschieden. Alle führen zum selben Ergebnis!

Einführendes Beispiel: Arbeitsintegral



**Aufgabe:** Berechnen Sie das Arbeitsintegral  $\int_{\Gamma} f \cdot d\Gamma$  des Vektorfeldes  $f(x, y) = (-y, x)$  längs des positiv orientierten Halbkreises  $\Gamma$ , des Durchmessers  $\Delta$ , sowie  $\int_D \text{rot}(f) d(x, y)$ .

Ist das Ergebnis unabhängig von der für die Kurve  $\Gamma$  gewählten Parametrisierung? Kann man es ohne Rechnung direkt sehen? Was ändert sich mit der Orientierung?

**Lösung:** Für  $\Gamma$  wählen wir eine Parametrisierung und rechnen es aus:

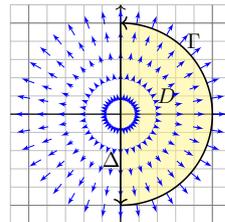
$$\int_{\Gamma} f \cdot d\Gamma = \int_{t=-\pi/2}^{+\pi/2} f(\beta(t)) \cdot \beta'(t) dt = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \pi$$

Ebenso  $\int_{\Delta} f \cdot d\Delta = 0$ . Es gilt  $\text{rot}(f) = 2$ , also  $\int_D \text{rot}(f) d(x, y) = \pi$ .

Das Vektorfeld  $f$  können wir uns als Kraftfeld vorstellen. Der Weg  $\beta$  beschreibt die Bewegung eines Proben teilchens. Die dabei geleistete Arbeit berechnen wir gemäß Arbeit = Kraft · Weg. Wir verwenden das Skalarprodukt, da nur der tangentielle Anteil der Kraft in Wegrichtung zählt.

☺ Jede andere Parametrisierung der Kurve  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$  führt zum selben Ergebnis! (Übung)  
 ⚠ Umgekehrte Orientierung / Durchlaufung kehrt das Vorzeichen um! (Anschauung)

Einführendes Beispiel: Flussintegral



**Aufgabe:** Berechnen Sie das Flussintegral  $\int_{\Gamma} f \times d\Gamma$  des Vektorfeldes  $f(x, y) = (x, y)$  über den positiv orientierten Halbkreis  $\Gamma$  und den Durchmesser  $\Delta$ , sowie  $\int_D \text{div}(f) d(x, y)$ .

Ist das Ergebnis unabhängig von der für die Kurve  $\Gamma$  gewählten Parametrisierung? Kann man es ohne Rechnung direkt sehen? Was ändert sich mit der Orientierung?

**Lösung:** Für  $\Gamma$  wählen wir eine Parametrisierung und rechnen es aus:

$$\int_{\Gamma} f \times d\Gamma = \int_{t=-\pi/2}^{+\pi/2} f(\beta(t)) \times \beta'(t) dt = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \pi$$

Ebenso  $\int_{\Delta} f \times d\Delta = 0$ . Es gilt  $\text{div}(f) = 2$ , also  $\int_D \text{div}(f) d(x, y) = \pi$ .

Das Vektorfeld  $f$  können wir uns als Strömungsgeschwindigkeit einer Flüssigkeit vorstellen. Der Weg  $\beta$  beschreibt eine Kurve. Das Integral ergibt die hierüber fließende Flüssigkeitsmenge. Wir verwenden das Kreuzprodukt, da nur der normale Anteil senkrecht zur Wegrichtung zählt.

☺ Jede andere Parametrisierung der Kurve  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$  führt zum selben Ergebnis! (Übung)  
 ⚠ Umgekehrte Orientierung / Durchlaufung kehrt das Vorzeichen um! (Anschauung)

Reelle Quadriken in der Ebene  $\mathbb{R}^2$

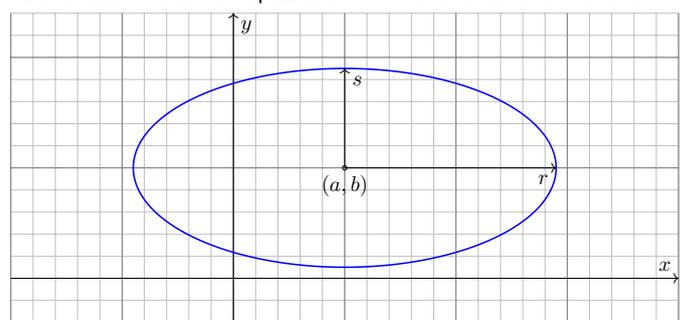
Kreis / Ellipse $x^2 + 4y^2 = 1$		Punkt $x^2 + y^2 = 0$	
Hyperbel $4x^2 - 3y^2 = 1$		schneidendes Geradenpaar $x^2 - y^2 = 0$	
leere Menge $x^2 + y^2 = -1$		paralleles Geradenpaar $4x^2 = 1$	
Parabel $x^2 = 2y$		Gerade $x^2 = 0$	

Beispiel: Kreis und Ellipse

**Beispiel:** Die Ellipse um  $(a, b)$  mit Radien  $(r, s)$  ist die Menge

$$\Gamma = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left( \frac{x-a}{r} \right)^2 + \left( \frac{y-b}{s} \right)^2 = 1 \right\}.$$

Im besonders einfachen Spezialfall  $r = s$  erhalten wir einen **Kreis**.



⚠ Dieselbe Kurve  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$  lässt sich durch mehrere Wege beschreiben!

Beispiel: Kreis und Ellipse

**Aufgabe:** Wir betrachten die oben angegebene Ellipse  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ . Man parametrisiere sie (1) algebraisch durch Auflösen der Gleichung, (2) trigonometrisch in Polarkoordinaten, (3) rational nach Weierstraß.

**Lösung:** (1) Auflösen nach  $x$  (alternativ nach  $y$ ) liefert zwei Zweige:

$$\alpha_{\pm}: [-1, +1] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto (a + rt, b \pm s\sqrt{1-t^2})$$

Das Bild jedes Weges  $\alpha_{\pm}$  liegt in der Menge  $\Gamma$ , denn  $(x, y) = \alpha_{\pm}(t)$  erfüllt die Gleichung! Jede der beiden Abbildungen  $\alpha_{\pm}$  ist injektiv; um ganz  $\Gamma$  zu durchlaufen brauchen wir beide!

(2) In Polarkoordinaten gelingt es in einem Stück:

$$\beta: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto (a + r \cos t, b + s \sin t)$$

Das Bild des Weges  $\beta$  liegt in der Menge  $\Gamma$ , denn  $(x, y) = \beta(t)$  erfüllt die Gleichung! Die Abbildung  $\beta$  ist zudem surjektiv und fast injektiv, bis auf den Doppelpunkt  $\beta(-\pi) = \beta(\pi)$ .

(3) Rationale Parametrisierung durch Weierstraß-Substitution: [E033]

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto \left( a + r \frac{1-t^2}{1+t^2}, b + s \frac{2t}{1+t^2} \right)$$

Das Bild des Weges  $\gamma$  liegt in der Menge  $\Gamma$ , denn  $(x, y) = \gamma(t)$  erfüllt die Gleichung! Die Abbildung  $\gamma$  ist zudem injektiv und fast surjektiv, bis auf den fehlenden Punkt  $(-1, 0)$ .

Beispiel: Kreis und Ellipse

Die **Kurvenlänge der Ellipse**  $\Gamma$  ist gegeben durch folgendes Integral:

$$\begin{aligned} \text{vol}_1(\Gamma) &= \int_{t=0}^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2(t)^2 + s^2 \cos^2(t)^2} dt \\ &= 2r \int_{t=0}^{\pi} \sqrt{\sin^2(t)^2 + (s/r)^2 \cos^2(t)^2} dt \\ &= 2r \int_{t=0}^{\pi} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2(t)^2} dt \end{aligned}$$

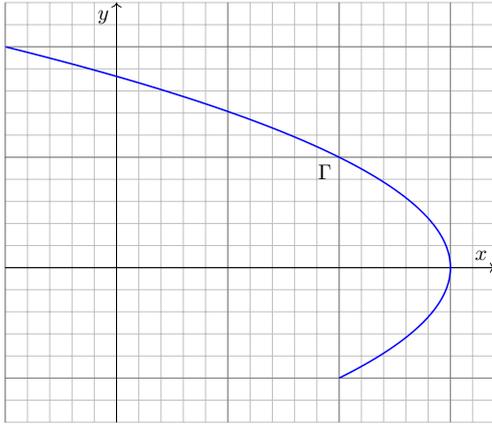
Der Wert  $\varepsilon := \sqrt{1 - s^2/r^2}$  heißt **Exzentrizität** der Ellipse  $\Gamma$ .

☺ Für  $r = s$  gilt  $\varepsilon = 0$  und wir erhalten die Länge der Kreislinie  $2\pi r$ .

⚠ Für  $r > s$  hingegen gilt  $0 < \varepsilon < 1$ , und das obige Integral für  $\text{vol}_1(\Gamma)$  lässt sich nicht geschlossen durch elementare Funktionen ausdrücken!

☺ Den Integranden können wir in eine Potenzreihe in  $\varepsilon$  entwickeln. Hieraus erhalten wir (nach längerer Rechnung) die Reihenentwicklung

$$\text{vol}_1(\Gamma) = 2\pi r \left[ 1 - \frac{1^2}{2^2} \varepsilon^2 - \frac{1^2 3^2}{2^2 4^2} \frac{\varepsilon^4}{3} - \frac{1^2 3^2 5^2}{2^2 4^2 6^2} \frac{\varepsilon^6}{5} - \frac{1^2 3^2 5^2 7^2}{2^2 4^2 6^2 8^2} \frac{\varepsilon^8}{7} - \dots \right].$$



**Aufgabe:** Beschreiben Sie die Parabel  $\Gamma$  implizit als Lösungsmenge sowie explizit durch (mind. zwei) verschiedene Parametrisierungen.

**Lösung:** Wir lesen  $x = 3 - y^2$  ab. Das gezeigte Parabelstück ist also

$$\Gamma = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y^2 = 3, -1 \leq y \leq 2 \}.$$

Diese Kurve können wir bequem parametrisieren durch den Weg

$$\alpha : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (3 - t^2, t).$$

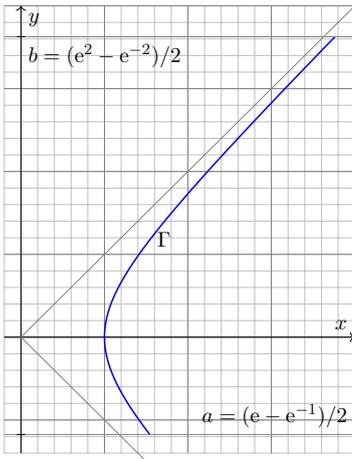
Mühsamer aber möglich ist die Parametrisierung beider Zweige:

$$\beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (2 + t, -\sqrt{1-t}),$$

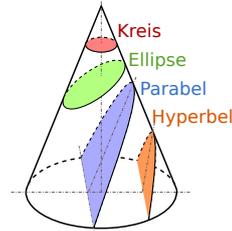
$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (3 - 4t, 2\sqrt{t}).$$

⚠ Dieselbe Kurve  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$  lässt sich durch mehrere Wege beschreiben! Zur Berechnung wählen wir eine möglichst geschickte Parametrisierung.

😊 Das Ergebnis (wie Kurvenlänge und Integrale) ist davon unabhängig. Jede/r darf sich die für sie/ihn bequemste Parametrisierung aussuchen.



Ebene Quadriken sind Kegelschnitte:



Besonders schön sind Lichtkegel:



**Aufgabe:** Beschreiben Sie die Hyperbel  $\Gamma$  implizit als Lösungsmenge sowie explizit durch (mind. zwei) verschiedene Parametrisierungen.

**Lösung:** Wir lesen  $x^2 = 1 + y^2$  ab. Das gezeigte Hyperbelstück ist also

$$\Gamma = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1, a \leq y \leq b \}.$$

Diese Kurve können wir bequem parametrisieren durch den Weg

$$\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 : s \mapsto (\sqrt{1+s^2}, s).$$

In vielen Fällen sind hier Hyperbelfunktionen bequemer:

$$\beta : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cosh t, \sinh t)$$

Alternativ können wir auch hier eine rationale Parametrisierung finden:

$$\gamma : [a', b'] \rightarrow \mathbb{R}^2 : u \mapsto \left( \frac{1+u^2}{1-u^2}, \frac{2u}{1-u^2} \right)$$

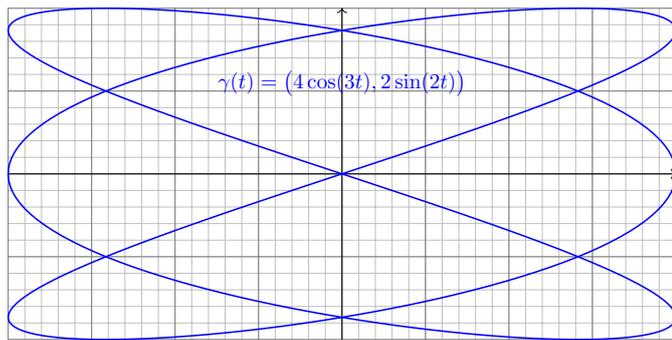
Zur Berechnung wählen wir eine möglichst geschickte Parametrisierung.

😊 Das Ergebnis (wie Kurvenlänge und Integrale) ist davon unabhängig. Jede/r darf sich die für sie/ihn bequemste Parametrisierung aussuchen.

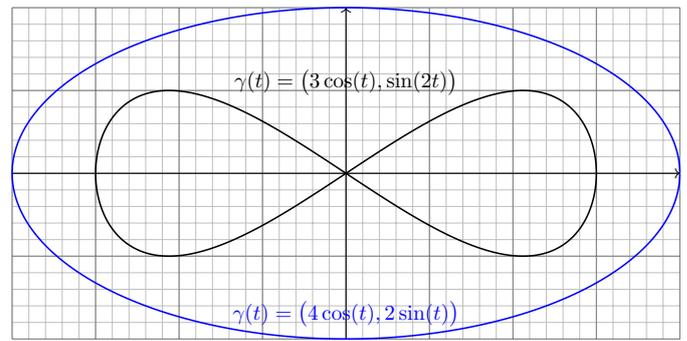
**Lissajous-Kurven** werden parametrisiert durch Wege der Form

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (a \sin(kt + \alpha), b \sin(\ell t + \beta)).$$

Solch ein Weg  $\gamma$  hat i.A. Doppelpunkte, ist also nicht injektiv.

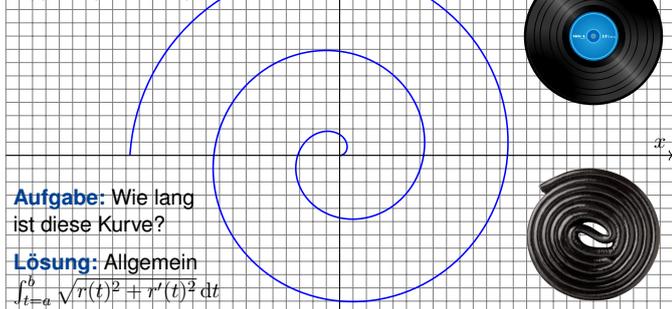


Lissajous-Kurven und ihre Verwandten sind recht häufig anzutreffen. Sie entstehen aus harmonischen Schwingungen in  $x$ - und  $y$ -Richtung. Einfachste Spezialfälle sind der gute alte Kreis und zudem die Ellipsen:



Jede stetige Radiusfunktion  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert einen spiralförmigen Weg in Polarkoordinaten durch  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto r(t)(\cos t, \sin t)$ .

**Beispiel:**  $\gamma : [0, 5\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $\gamma(t) = t(\cos t, \sin t)$



**Aufgabe:** Wie lang ist diese Kurve?

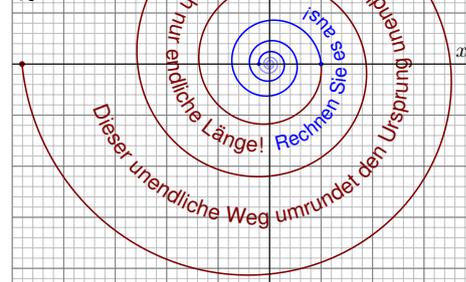
**Lösung:** Allgemein

$$\int_a^b \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2} dt$$

Dank B411 gilt  $\int_{t=0}^{5\pi} \sqrt{1+t^2} dt = \frac{1}{2} [t\sqrt{1+t^2} + \operatorname{arsinh}(t)]_{t=0}^{5\pi} \approx 125.34$ .

**Aufgabe:** Zeichnen Sie  $\gamma(t) = e^{-\lambda t}(\cos t, \sin t)$  für  $\lambda = 1/10$  und  $|t| \leq 5\pi$ . Wie lang ist der Weg von  $t = 0$  bis  $t \rightarrow \infty$ ? Warum ist das erstaunlich?

**Lösung:** Wir finden  
 $\ell = \int_{t=0}^{\infty} |\gamma'(t)| dt$   
 $= \int_0^{\infty} \sqrt{1+\lambda^{-2}} dt$   
 $\approx 10.05$

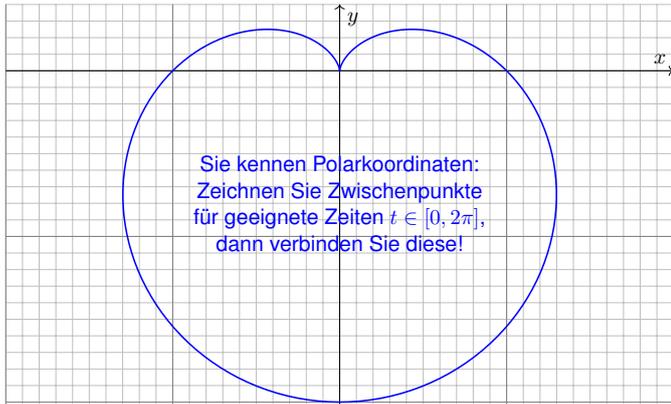


Bildquelle: wikimedia.org

Beispiel: Herzkurve / Kardioid

E049  
Ausführung

**Aufgabe:** Zeichnen Sie  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (1 - \sin t)(\cos t, \sin t)$ .



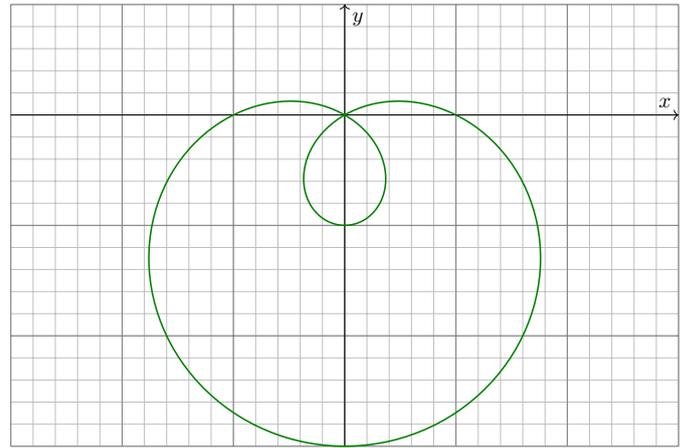
Sie kennen Polarkoordinaten:  
Zeichnen Sie Zwischenpunkte  
für geeignete Zeiten  $t \in [0, 2\pi]$ ,  
dann verbinden Sie diese!

Welche Werte schätzen Sie für Länge und Flächeninhalt? Rechnung ab Seite E217...

Beispiel: Limaçon

E050  
Ausführung

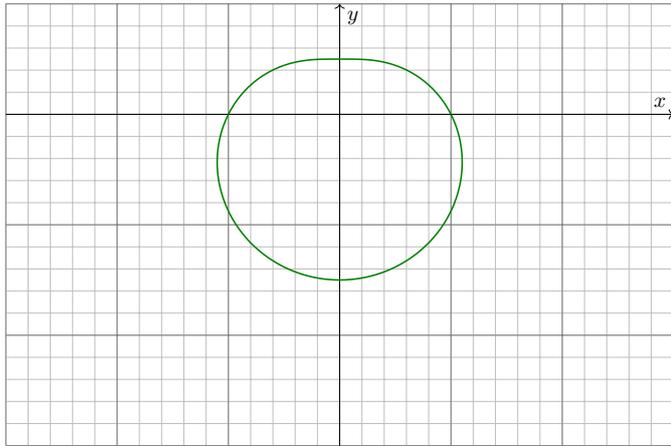
**Aufgabe:** Zeichnen Sie  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (1 - 2 \sin t)(\cos t, \sin t)$ .



Beispiel: Limaçon

E051  
Ausführung

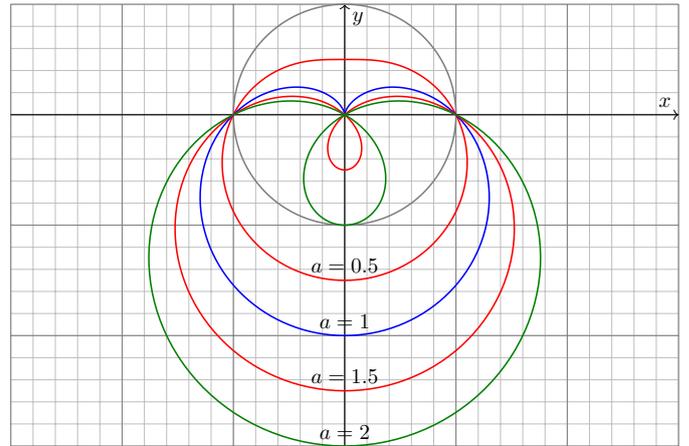
**Aufgabe:** Zeichnen Sie  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (1 - \frac{1}{2} \sin t)(\cos t, \sin t)$ .



Beispiel: Limaçon

E052  
Ausführung

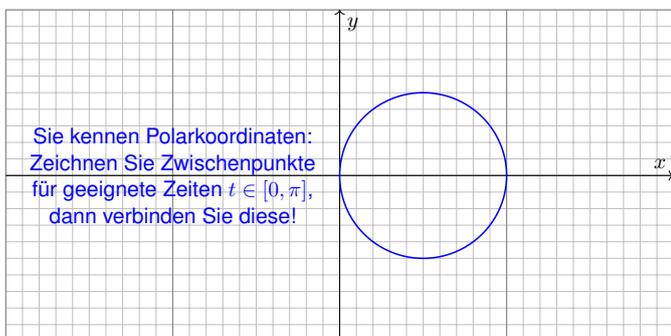
**Aufgabe:** Zeichnen Sie  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (1 - a \sin t)(\cos t, \sin t)$ .



Beispiel: Lemniscate

E053  
Ausführung

**Aufgabe:** Zeichnen Sie  $\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\gamma(t) = \cos(t)(\cos t, \sin t)$ .



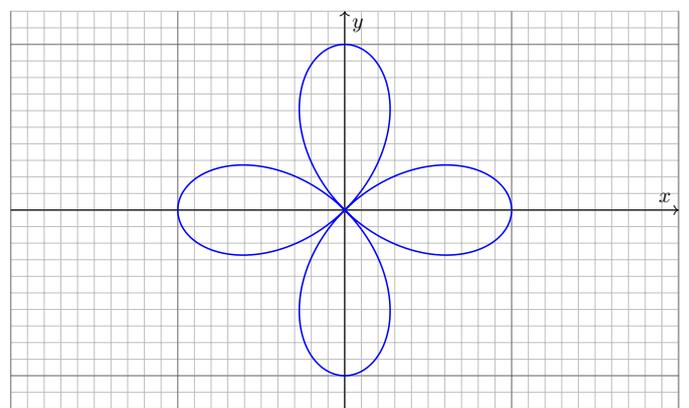
Sie kennen Polarkoordinaten:  
Zeichnen Sie Zwischenpunkte  
für geeignete Zeiten  $t \in [0, \pi]$ ,  
dann verbinden Sie diese!

Können Sie diese überraschende Graphik auch rechnerisch erklären?  
Add'theoreme:  $\cos^2(t) = 1/2 + \cos(2t)/2$  und  $\cos(t) \sin(t) = \sin(2t)/2$

Beispiel: Lemniscate

E054  
Ausführung

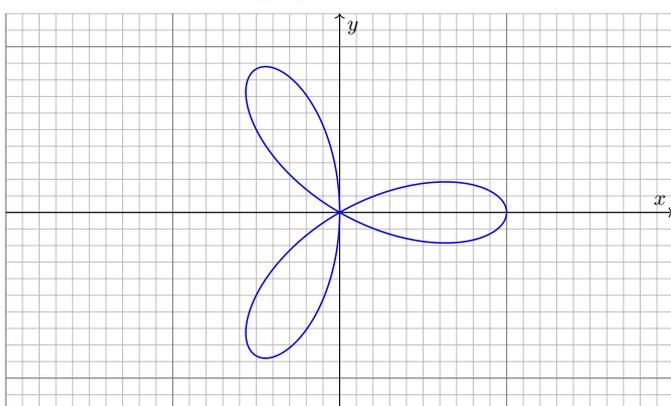
**Aufgabe:** Zeichnen Sie  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\gamma(t) = \cos(2t)(\cos t, \sin t)$ .



Beispiel: Lemniscate

E055  
Ausführung

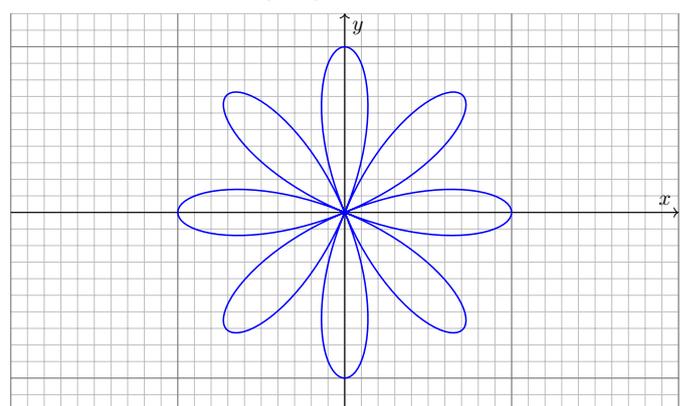
**Aufgabe:** Zeichnen Sie  $\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\gamma(t) = \cos(3t)(\cos t, \sin t)$ .



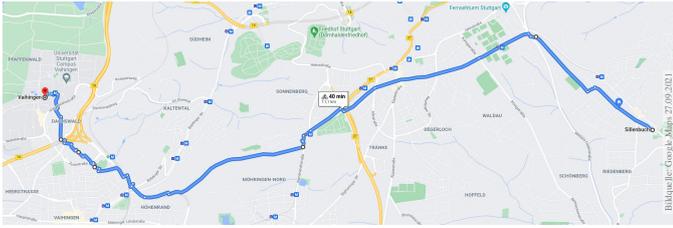
Beispiel: Lemniscate

E056  
Ausführung

**Aufgabe:** Zeichnen Sie  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\gamma(t) = \cos(4t)(\cos t, \sin t)$ .



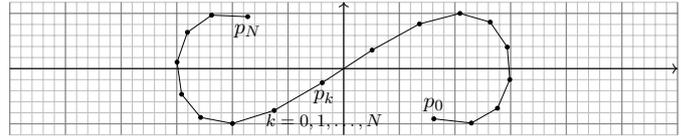
Rektifizieren bedeutet *gerade machen*: Anschaulich messen wir den Weg  $\gamma$  mit einem Faden, den wir anschließend gerade ausstrecken. Beispiele begegnen uns überall, etwa in Geoinformationssystemen:



Wegintegrale spielen in Theorie und Anwendung eine wichtige Rolle. Hierzu müssen wir zuerst klären, wie man die Länge von Wegen misst.

Dies geschieht in drei Schritten: Durch Summation für polygonale Wege, durch Grenzübergang für beliebige stetige Wege, und schließlich durch Integration dank Weglängenformel E1B für stetig differenzierbare Wege.

Gegeben seien **Zeitpunkte**  $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = b$  in  $\mathbb{R}$  sowie eine Folge von **Bildpunkten**  $p_0, p_1, p_2, \dots, p_N$  im Raum  $\mathbb{R}^n$ .



Diese Daten definieren den **Polygonzug**  $\gamma = [t_0 \ t_1 \ t_2 \ \dots \ t_N; p_0 \ p_1 \ p_2 \ \dots \ p_N]$ .

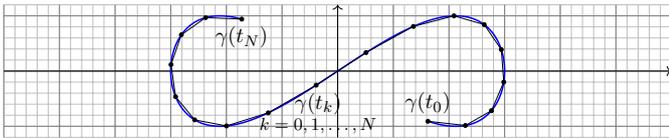
Dies ist der Weg  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , der  $\gamma(t_k) = p_k$  affin-linear verbindet:

$$\gamma(t) = \frac{t_k - t}{t_k - t_{k-1}} p_{k-1} + \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} p_k \quad \text{für } t \in [t_{k-1}, t_k].$$

Seine **Weglänge** definieren wir als Summe der Schrittlängen:

$$\ell(\gamma) := \sum_{k=1}^N |p_k - p_{k-1}|$$

Dies ist wohldefiniert, zusätzliche Teilungspunkte ändern nichts.



Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Weg. Zu  $P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = b\}$  gehören die Punkte  $p_0 = \gamma(t_0), p_1 = \gamma(t_1), p_2 = \gamma(t_2), \dots, p_N = \gamma(t_N)$ . Die Länge des approximierenden Polygonzuges  $[p_0 \ p_1 \ p_2 \ \dots \ p_N]$  ist

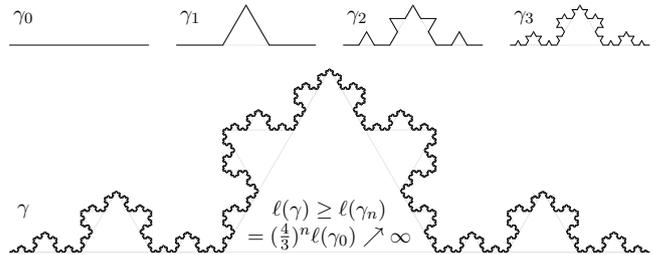
$$\ell(\gamma, P) := \sum_{k=1}^N |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|.$$

Für jede Verfeinerung  $P' \supseteq P$  gilt die Ungleichung  $\ell(\gamma, P') \geq \ell(\gamma, P)$ . Die **Weglänge** von  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  definieren wir als den Grenzwert

$$\ell(\gamma) := \sup \{ \ell(\gamma, P) \mid P \text{ Partition von } [a, b] \}.$$

Der Weg  $\gamma$  heißt **rektifizierbar**, wenn er endliche Länge hat,  $\ell(\gamma) < \infty$ .

Ein beliebtes und erstaunliches Beispiel ist die Koch-Kurve:



Der so als Limes  $\gamma_n \rightarrow \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  entstehende Weg ist injektiv, stetig, aber nirgends differenzierbar... und dieser Weg hat unendliche Länge! Wir können dies nun nachrechnen und bestaunen: Um die Koch-Kurve abzumessen, genügt kein endlicher Faden, egal wie lang er sein möge.

☺ Technische Anwendung z.B. als fraktale Antenne, Multiresonanz.

**Satz E1A: Eigenschaften der Weglänge**

Die **Länge** eines Weges  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist definiert durch

$$\ell(\gamma) := \sup \{ \ell(\gamma, P) \mid P \text{ Partition von } [a, b] \}.$$

**Positivität:** Für jeden Weg  $\gamma$  gilt  $\ell(\gamma) \geq |\gamma(a) - \gamma(b)| \geq 0$ .

**Definitheit:** Genau dann gilt  $\ell(\gamma) = 0$ , wenn  $\gamma$  konstant ist.

**Additivität:** Für alle  $a \leq t \leq b$  gilt  $\ell(\gamma|_{[a,b]}) = \ell(\gamma|_{[a,t]}) + \ell(\gamma|_{[t,b]})$ .

**Stetigkeit:** Für jeden rektifizierbaren Weg ist die Weglängenfunktion

$$s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : t \mapsto \ell(\gamma|_{[a,t]})$$

stetig und monoton wachsend. Ist  $\gamma$  injektiv, so ist  $s$  streng wachsend.

**Ableitung:** Ist der Weg  $\gamma$  stetig differenzierbar, so auch  $s$ , und es gilt

$$s'(t) = |\gamma'(t)| \quad \text{also} \quad s(t) = \int_a^t |\gamma'(\tau)| d\tau$$

Hieraus lässt sich die Länge  $\ell(\gamma)$  bequem als Integral gewinnen (E1B).

**Beweis:** Für jeden stetig differenzierbaren Weg  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  zeigen wir  $s'(t) = |\gamma'(t)|$ . Sei  $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b\}$ . Dank HDI gilt für jedes  $k = 1, \dots, N$ :

$$|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| = \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(t) dt \right| \leq \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma'(t)| dt.$$

Durch Summation über  $k$  erhalten wir:

$$\ell(\gamma, P) = \sum_{k=1}^N |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma'(t)| dt = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

Es gilt also  $\ell(\gamma) \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt < \infty$ , somit ist der Weg  $\gamma$  rektifizierbar.

Wir betrachten die Weglängenfunktion  $s(t) = \ell(\gamma|_{[a,t]})$ . Für alle  $a \leq t < t+h \leq b$  gilt

$$s(t+h) - s(t) = \ell(\gamma|_{[t,t+h]}) \geq |\gamma(t+h) - \gamma(t)|.$$

Zusammen mit obiger Abschätzung erhalten wir die doppelte Ungleichung

$$\left| \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} \right| \leq \frac{s(t+h) - s(t)}{h} \leq \frac{1}{h} \int_{\tau=t}^{t+h} |\gamma'(\tau)| d\tau.$$

Für  $h \rightarrow 0$  geht die linke Seite gegen  $|\gamma'(t)|$ . Dank HDI gilt dies auch für die rechte Seite. Somit ist  $s$  differenzierbar mit  $s'(t) = |\gamma'(t)|$ . Wegen  $s(a) = 0$  folgt  $s(t) = \int_a^t |\gamma'(\tau)| d\tau$ . Dasselbe gilt, falls  $\gamma$  stückweise stetig differenzierbar oder auch nur absolut stetig ist.

**Satz E1B: Weglängenintegral**

Für jeden stückweise stetig differenzierbaren Weg  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  gilt

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Insbesondere gilt für die Weglänge die einfache Abschätzung

$$0 \leq |\gamma(b) - \gamma(a)| \leq \ell(\gamma) \leq (b-a) \max_{[a,b]} |\gamma'| < \infty.$$

Diese Integralformel ist in jedes Auto eingebaut: Das Tachometer zeigt die Momentangeschwindigkeit  $|\gamma'(t)|$  zum Zeitpunkt  $t$ ; integriert über das Zeitintervall  $[t_0, t]$  wird hieraus die zurückgelegte Weglänge  $\int_{t_0}^t |\gamma'(\tau)| d\tau$ .

Auch die Ungleichungen entsprechen unmittelbarer Erfahrung:

Wenn Sie drei Stunden lang höchstens 130km/h fahren, dann legen Sie höchstens die Weglänge 390km zurück, eventuell auch weniger.

Mutig haben wir die Weglänge für alle stetigen Wege  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  definiert. Diese Definition ist schön und gut, doch zunächst verrät sie uns noch nicht, wie man die Länge effizient *berechnet*. Für Polygonzüge ist es leicht, für krummlinige Wege aber keineswegs. Hier helfen uns die obigen Sätze: Für *stetig differenzierbare* Wege können wir damit die Weglänge als Integral schreiben. So wird die Berechnung der Weglänge unseren allgemeinen Integrationswerkzeugen zugänglich.

**Parametrisierung nach Weglänge:** Jeden injektiven Weg  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  endlicher Länge  $\ell$  können wir nach Weglänge parametrisieren: Die Weglängenfunktion  $s(t) = \ell(\gamma|_{[a,t]})$  ist dann nämlich eine stetige Bijektion  $s : [a, b] \rightarrow [0, \ell]$ . Der durch seine Länge parametrisierte Weg  $c : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $c(\lambda) := \gamma(s^{-1}(\lambda))$  erfüllt dann  $\ell(c|_{[0,\lambda]}) = \lambda$  für alle  $\lambda \in [0, \ell]$ .

Ist zudem  $\gamma$  stetig differenzierbar, so gilt  $|c'(t)| = 1$ , das heißt, der Punkt  $c(t) \in \mathbb{R}^n$  bewegt sich mit konstanter Absolutgeschwindigkeit, nur die Bewegungsrichtung  $c'(t)$  ist noch variabel.

**Absolut stetige Wege:** Im obigen Beweis haben wir den HDI in beide Richtungen angewendet. Hierzu haben wir vereinfachend angenommen, dass  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar ist; es genügt bereits stückweise stetig differenzierbar (B2C) oder auch nur absolut stetig (B2E):

Ist jede Koordinatenfunktion  $\gamma_1, \dots, \gamma_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stückweise  $C^1$  / absolut stetig, so existieren ihre Ableitungen  $\gamma_1', \dots, \gamma_n'$  in fast allen Punkten  $t \in [a, b]$ , sie sind absolut integrierbar, somit auch die Norm  $|\gamma'|$ . Damit gilt  $\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(\tau)| d\tau$  und  $\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt < \infty$ .

Ist umgekehrt  $\gamma$  rektifizierbar, so ist die Weglängenfunktion absolut stetig. Ist  $\gamma$  zudem injektiv, so können wir nach Weglänge parametrisieren und erhalten einen absolut stetigen Weg  $c$ .

Verschiedene Wege können dieselbe Kurve parametrisieren!  
Wir betrachten nochmals den Halbkreis des einführenden Beispiels:

$$\Gamma = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, x \geq 0 \}$$

Wir vergleichen unsere drei Parametrisierungen

$$\alpha : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 : s \mapsto \alpha(s) = (\sqrt{1-s^2}, s),$$

$$\beta : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto \beta(t) = (\cos t, \sin t),$$

$$\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 : u \mapsto \gamma(u) = (\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1+u^2}).$$

Die ersten beiden sind äquivalent vermöge der Umparametrisierungen

$$\beta(t) = \alpha(\sin t), \quad \alpha(s) = \beta(\arcsin s).$$

Die letzten beiden sind äquivalent vermöge der Umparametrisierungen

$$\beta(t) = \gamma(\tan(t/2)), \quad \gamma(u) = \beta(2 \arctan(u)).$$

**Übung:** Prüfen Sie diese vier Gleichungen durch Einsetzen!

Eine **Umparametrisierung** ist eine stetige Bijektion  $\Phi : [a, b] \rightarrow [\tilde{a}, \tilde{b}]$ . Dank Kompaktheit ist die Umkehrfunktion  $\Phi^{-1} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow [a, b]$  stetig.

Für eine **reguläre Umparametrisierung** verlangen wir zudem, dass beide Bijektionen  $\Phi$  und  $\Phi^{-1}$  stetig differenzierbar sind.

☐ Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §2.3. Genau dann ist  $\Phi$  regulär, wenn  $\Phi$  stetig diff'bar ist mit  $\Phi'(x) \neq 0$  für alle  $x \in [a, b]$ . Dank Kettenregel ist dann auch  $\Phi^{-1}$  stetig diff'bar mit  $(\Phi^{-1})'(\tilde{x}) = \Phi'(x)^{-1}$  für alle  $x \in [a, b]$  und  $\tilde{x} = \Phi(x)$ .

Wege  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\tilde{\gamma} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißen **äquivalent** vermöge einer Umparametrisierung  $\Phi$ , wenn  $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \Phi$  gilt, also  $\gamma \circ \Phi^{-1} = \tilde{\gamma}$ .

Im Beispiel sind  $\alpha, \beta, \gamma$  äquivalent und  $\beta, \gamma$  sogar regulär äquivalent.

**Satz E1c: Invarianz der Länge bei Umparametrisierung**

Äquivalente Wege haben dieselbe Bildmenge und dieselbe Länge.

**Beweis:** Jede Umparametrisierung  $\Phi : [a, b] \rightarrow [\tilde{a}, \tilde{b}]$  ist strikt wachsend oder strikt fallend. Zur Partition  $P$  von  $[a, b]$  gehört die Partition  $\tilde{P} = \Phi(P)$  von  $[\tilde{a}, \tilde{b}]$  mit  $\ell(\gamma, P) = \ell(\tilde{\gamma}, \tilde{P})$ . Ebenso von  $\tilde{P}$  zu  $P = \Phi^{-1}(\tilde{P})$ . Hieraus folgt  $\ell(\gamma) = \sup\{\ell(\gamma, P)\} = \sup\{\ell(\tilde{\gamma}, \tilde{P})\} = \ell(\tilde{\gamma})$ .

Definition der Kurvenlänge

Je zwei injektive Wege  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\tilde{\gamma} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit demselben Bild  $\Gamma$  sind äquivalent vermöge  $\Phi = \tilde{\gamma}^{-1} \circ \gamma$ .

Satz E1c garantiert die Gleichheit  $\ell(\gamma) = \ell(\tilde{\gamma})$  der Weglängen.

Wir können somit die Länge  $\text{vol}_1(\Gamma)$  der Kurve  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$  definieren:

**Definition E1D: Länge einer Kurve**

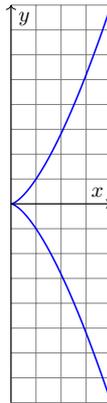
Wir definieren die **Länge der Kurve**  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$  durch

$$\text{vol}_1(\Gamma) := \ell(\gamma) \quad \text{mit } \gamma : [a, b] \rightarrow \Gamma \text{ stetig und bijektiv.}$$

Das Ergebnis ist unabhängig von unserer Wahl der Parametrisierung  $\gamma$ : Die Länge  $\text{vol}_1(\Gamma)$  ist eine wohldefinierte Eigenschaft der Kurve  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ .

Zunächst ist  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$  nur eine nackte Menge ohne jede Struktur. Für  $\Gamma$  hat es daher keinen Sinn nach Stetigkeit oder Differenzierbarkeit oder Länge zu fragen: Diesen Fragen müssen wir erst durch die Wahl einer Parametrisierung  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Gamma$  einen Sinn geben! Hierzu verlangen wir, dass es eine stetige und bijektive Parametrisierung  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Gamma$  gibt. Diese ist dann eindeutig bis auf Äquivalenz, und somit  $\ell(\gamma)$  unabhängig von der Wahl von  $\gamma$ . Somit ist die Länge eine Eigenschaft der Kurve  $\Gamma$  und nicht bloß des zur Parametrisierung genutzten Weges  $\gamma$ .

Beispiel: Länge der Neilschen Parabel



**Aufgabe:** Man zeichne und messe die **Neilsche Parabel**

$$\Gamma = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 = y^2 \leq 64 \}.$$

**Lösung:** Wir parametrisieren  $\Gamma$ , zum Beispiel durch

$$\gamma : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t^2, t^3).$$

Diese Abbildung ist stetig, injektiv, mit Bildmenge  $\Gamma$ . Also

$$\begin{aligned} \text{vol}_1(\Gamma) &\stackrel{\text{Def E1D}}{=} \ell(\gamma) \stackrel{\text{Satz E1B}}{=} \int_{-2}^2 |\gamma'(t)| dt = \int_{-2}^2 |(2t, 3t^2)| dt \\ &= \int_{-2}^2 \sqrt{4t^2 + 9t^4} dt = \int_0^2 \sqrt{4 + 9t^2} \cdot 2t dt \\ &\stackrel{\text{Subst B1K}}{=} \int_0^4 \sqrt{4 + 9u} du \stackrel{\text{HDI B11}}{=} \frac{2}{27} \left[ (4 + 9u)^{3/2} \right]_0^4 = \frac{16}{27} (10\sqrt{10} - 1). \end{aligned}$$

☺ Jede andere Parametrisierung liefert genau dasselbe Ergebnis! Sie muss nur bijektiv und stetig sein, fürs Integral zudem stetig diff'bar.

Länge einer Kettenlinie (Katenoid)

**Aufgabe:** (1) Berechnen Sie die Potenzreihen der Funktionen

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Zeigen Sie  $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$  sowie  $\cosh' = \sinh$  und  $\sinh' = \cosh$ .

(2) Skizzieren Sie die Funktion  $g(x) = \cosh(x) - 1$  für  $-2 \leq x \leq 2$ .

(3) Der Graph  $\Gamma$  ist eine ebene Kurve. Berechnen Sie die Länge  $\text{vol}_1(\Gamma)$ .

**Lösung:** (1) Wir setzen  $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$  ein und rechnen's aus:

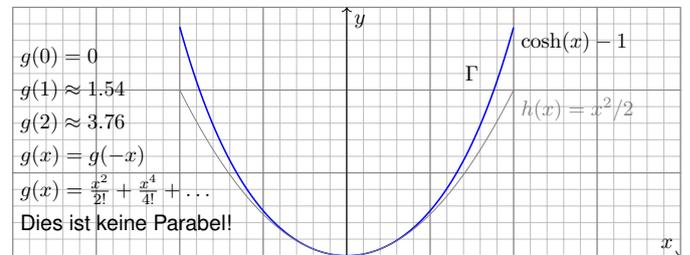
$$\cosh(x) = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j}}{(2j)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\sinh(x) = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

☺ Dies sind elementare mathematische Funktionen:  $\cosh$  heißt **Kettenlinie, Katenoid** oder **Seilkurve**: Sie entsteht, wenn man eine Kette an ihren Enden aufhängt unter Einfluss der Schwerkraft. [M107](#)  
Umgekehrt ist sie die optimale Form eines selbsttragenden Bogens.

Länge einer Kettenlinie (Katenoid)

(2) Skizze des Funktionsgraphen  $\Gamma$  zu  $g(x) = \cosh(x) - 1$ :



(3) Die Parametrisierung  $\gamma : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\gamma(t) = (t, g(t))$  ergibt

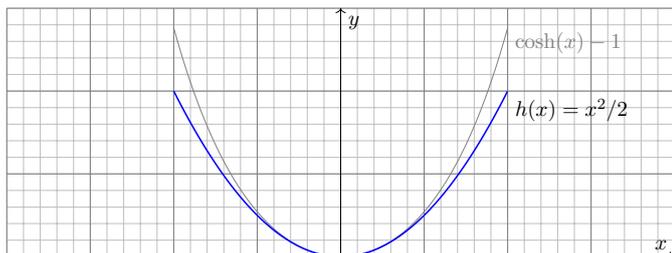
$$\begin{aligned} \text{vol}_1(\Gamma) &\stackrel{\text{Def E1D}}{=} \ell(\gamma) \stackrel{\text{Satz E1B}}{=} \int_{-2}^2 |\gamma'(t)| dt = \int_{-2}^2 \sqrt{1 + \sinh^2(t)} dt = \int_{-2}^2 \cosh(t) dt \\ &\stackrel{\text{HDI B11}}{=} \left[ \sinh(t) \right]_{-2}^2 = 2 \sinh(2) \approx 7.25372 \end{aligned}$$

☺ Vergleich mit der Skizze: Dieser Wert für  $\text{vol}_1(\Gamma)$  ist plausibel.

Länge einer Parabel

**Aufgabe:** (1) Skizzieren Sie die Funktion  $h(x) = x^2/2$  für  $-2 \leq x \leq 2$ .  
(2) Der Graph  $\Gamma$  ist eine ebene Kurve. Berechnen Sie die Länge  $\text{vol}_1(\Gamma)$ .

**Lösung:** (1) Skizze des Funktionsgraphen  $\Gamma$  zu  $h(x) = x^2/2$ :



☺ Das ist die gute alte Parabel, die jeder aus seiner Schulzeit kennt. Nun wollen und können wir endlich ihre Länge berechnen.

⚠ Man beachte Ähnlichkeiten und Unterschiede zu  $\cosh(x) - 1$ . Der Fehler  $x^4/4! + \dots$  macht sich für große  $x$  immer stärker bemerkbar.

Länge einer Parabel

(2) Die Parametrisierung  $\gamma : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\gamma(t) = (t, h(t))$  ergibt

$$\begin{aligned} \text{vol}_1(\Gamma) &\stackrel{\text{Def E1D}}{=} \ell(\gamma) \stackrel{\text{Satz E1B}}{=} \int_{-2}^2 |\gamma'(t)| dt = \int_{-2}^2 \sqrt{1 + t^2} dt \quad (\text{Subst } t = \sinh u) \\ &\stackrel{\text{HDI B11}}{=} \left[ \frac{1}{2} t \sqrt{1 + t^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arsinh}(t) \right]_{-2}^2 \quad (\text{siehe B411}) \\ &= \left[ \frac{1}{2} t \sqrt{1 + t^2} + \frac{1}{2} \ln(t + \sqrt{1 + t^2}) \right]_{-2}^2 \quad (\text{Probe: ableiten!}) \\ &= 2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5}) \approx 5.91577 \quad (\text{Plausibilitätscheck!}) \end{aligned}$$

⚠ Die Funktion  $h(x) = x^2/2$  ist viel einfacher als  $g(x) = \cosh(x) - 1$ , aber die Integration der Weglänge ist tatsächlich etwas schwieriger. Unverhofft treten auch hier die Hyperbelfunktionen  $\sinh$  und  $\cosh$  auf, nicht in der Aufgabenstellung, aber anschließend durch Substitution.

☺ Vergleich mit der Skizze: Dieser Wert für  $\text{vol}_1(\Gamma)$  ist plausibel. Die Diagonale von  $(0, 0)$  nach  $(2, 2)$  hat die Länge  $2\sqrt{2} \approx 2.82843$ . Der Parabelbogen hat die etwas größere Länge  $\frac{1}{2} \text{vol}_1(\Gamma) \approx 2.95788$ .

**Definition E1E: Weglänge und Wegintegral**

Sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetig diff'barer Weg mit Bildkurve  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ .

Die **Weglänge** ist (wie oben erklärt) gegeben durch

$$\ell(\gamma) = \int_{\gamma} |d\gamma| := \int_{t=a}^b |\gamma'(t)| dt.$$

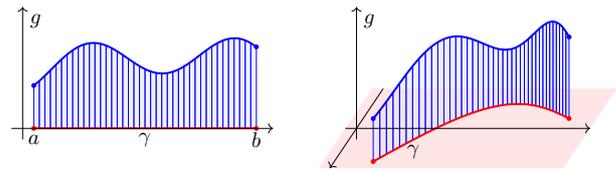
Wir definieren das **Wegintegral** einer Funktion  $g: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\int_{\gamma} g |d\gamma| := \int_{t=a}^b g(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt,$$

Zur Abkürzung schreiben wir hier  $d\gamma = \gamma'(t) dt$  und  $|d\gamma| = |\gamma'(t)| dt$ .

☐ Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §5.3–5.4. Anschaulich stellen wir uns  $g: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  als Massenverteilung auf der Kurve  $\Gamma$  vor; das Integral ergibt die Gesamtmasse. Die Abkürzungen links dient der bequemen und übersichtlichen Schreibweise, die ausführliche Formel rechts erklärt, wie Sie es explizit ausrechnen. Das ist der Sinn dieser Definition.

**Beispiel:** Sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow [a, b]: x \mapsto x$ , und  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann misst  $\int_{\gamma} g |d\gamma| = \int_{[a,b]} g(x) dx$  die Fläche unter  $g$  über  $[a, b]$ .



Im allgemeinen Fall  $\gamma: [a, b] \rightarrow \Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $g: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  gilt ebenso: Das Integral  $\int_{\gamma} g |d\gamma|$  misst die Fläche unter  $g$  über dem Weg  $\gamma$ .

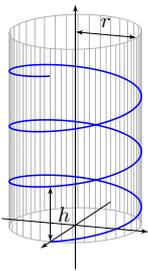
Man nennt  $d\gamma$  anschaulich ein „infinitesimales Wegelement“:

Das Integral  $\int_{\gamma} g |d\gamma|$  summiert die Beiträge  $g |d\gamma|$  über den Weg  $\gamma$ .

Vektorielles Wegelement (mit Richtung)  $\gamma'(t) dt = d\gamma = ds = \dots$

Skalares Wegelement (nur Länge)  $|\gamma'(t)| dt = |d\gamma| = |ds| = \dots$

**Beispiel: Schraubenlinie**



**Aufgabe:** Rektifizieren Sie die **Schraubenlinie**

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ mit } \gamma(t) = (r \cos(2\pi t), r \sin(2\pi t), ht).$$

Hierbei ist  $r$  der Radius und  $h$  die Ganghöhe.

**Lösung:** Der Geschwindigkeitsvektor ist

$$\gamma'(t) = (-2\pi r \sin(2\pi t), 2\pi r \cos(2\pi t), h).$$

Seine Norm ist die absolute Geschwindigkeit

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{(2\pi r)^2 + h^2}.$$

Die Weglänge der Schraubenlinie (nach  $u$  Umläufen) ist demnach

$$\ell(\gamma|_{[0,u]}) = \int_{t=0}^u |\gamma'(t)| dt = u \sqrt{(2\pi r)^2 + h^2}.$$

☺ Wir können diese Formel ohne Integration auch leicht geometrisch verstehen, indem wir einen Umlauf auf dem Zylindermantel auf das Rechteck  $[0, 2\pi r] \times [0, h]$  abrollen. (Skizze!) Das Abrollen des Zylinders ist *lokal isometrisch*, bewahrt also Abstände ohne Verzerrung.

**Beispiel: Schraubenlinie**

**Aufgabe:** Ein Draht  $\Gamma$  folgt der obigen Schraubenlinie  $\gamma: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Die Temperaturverteilung sei  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y, z) \mapsto 300 + x - y + 5z$ . Berechnen Sie die mittlere Temperatur entlang des Drahtes.

**Lösung:** Wir berechnen zunächst das Wegintegral:

$$\begin{aligned} \int_{s \in \Gamma} T(s) ds &\stackrel{\text{Param}}{=} \int_{\gamma} T(\gamma) d\gamma \stackrel{\text{Param}}{=} \int_{t=0}^3 T(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt \\ &= \int_{t=0}^3 (300 + r \cos(2\pi t) - r \sin(2\pi t) + 5ht) \sqrt{(2\pi r)^2 + h^2} dt \\ &= 3 \sqrt{(2\pi r)^2 + h^2} \left( 300 + 5h \cdot \frac{3}{2} \right) \end{aligned}$$

Geteilt durch die Weglänge erhalten wir die mittlere Temperatur:

$$\frac{1}{\text{vol}_1(\Gamma)} \int_{s \in \Gamma} T(s) ds = 300 + 5h \cdot \frac{3}{2}$$

☺ Auch dieses Ergebnis können wir leicht überprüfen: Das hier als Beispiel betrachtete Temperaturfeld  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  ist affin-linear in den Koordinaten  $x, y, z$ . Daher ist die mittlere Temperatur entlang  $\gamma$  gleich der Temperatur im Schwerpunkt  $(0, 0, h \cdot 3/2)$  der Kurve.

**Arbeitsintegral und Flussintegral**

**Definition E1F: Arbeitsintegral und Flussintegral**

Sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetig diff'barer Weg mit Bildkurve  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ .

Das **Arbeitsintegral** eines Vektorfeldes  $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist

$$\int_{\gamma} f \cdot d\gamma := \int_{t=a}^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Speziell in der Ebene ( $n = 2$ ) definieren wir zudem das **Flussintegral**

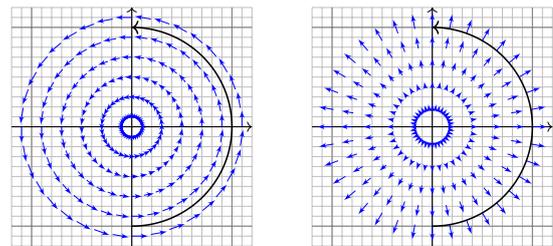
$$\int_{\gamma} f \times d\gamma := \int_{t=a}^b f(\gamma(t)) \times \gamma'(t) dt.$$

Zur Abkürzung schreiben wir  $d\gamma = \gamma'(t) dt$ . Ist der Weg  $\gamma$  geschlossen, also  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , so schreiben wir statt  $\int_{\gamma}$  auch dekorativ betonend  $\oint_{\gamma}$ .

Die Abkürzungen links dient der bequemen und übersichtlichen Schreibweise, die ausführliche Formel rechts erklärt Ihnen, wie Sie es explizit ausrechnen. Das ist der Sinn dieser Definition.

**Geometrisch-physikalische Interpretation**

Das Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  können wir uns als Kraftfeld vorstellen. Der Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  beschreibt die Bewegung eines Teilchens. Die dabei geleistete Arbeit berechnen wir gemäß **Arbeit = Kraft · Weg**. Das Skalarprodukt zählt nur den tangentialen Anteil in Wegrichtung.



Das Vektorfeld  $f$  können wir uns auch als Strömungsgeschwindigkeit einer Flüssigkeit vorstellen. In der Ebene ergibt das Flussintegral die über  $\gamma$  (von links nach rechts) fließende Flüssigkeitsmenge. Das Kreuzprodukt zählt den normalen Anteil senkrecht zur Wegrichtung.

**Beispiel: Schraubenlinie**

**Aufgabe:** Wir betrachten erneut die obige Schraubenlinie [E119](#)

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ mit } \gamma(t) = \begin{pmatrix} r \cos(2\pi t) \\ r \sin(2\pi t) \\ ht \end{pmatrix}.$$

(1) Berechnen Sie längs  $\gamma$  das Arbeitsintegral des Wirbelfeldes

$$f: \mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\} \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ mit } f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Berechnen Sie  $\text{rot}(f)$ . Besitzt  $f$  auf  $\mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\}$  ein Potential?

☺ Potentiale und Arbeitsintegrale sind zentrale Techniken für viele physikalisch-technische Anwendungen. Sie kennen diese Themen aus Ihrer Vorlesung HM2. Wir diskutieren das Potentialproblem ab Seite E341 und lösen es im  $\mathbb{R}^2$  für Kreisscheiben, Rechtecke und sternförmige Gebiete. Den allgemeinen Fall im  $\mathbb{R}^n$  behandeln wir in Kapitel H.

**Beispiel: Schraubenlinie**

**Lösung:** (1) Wir berechnen das Arbeitsintegral von  $f$  längs  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(s) \cdot ds &\stackrel{\text{Param}}{=} \int_{\gamma} f(\gamma) \cdot d\gamma \stackrel{\text{Param}}{=} \int_{t=a}^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_{t=a}^b \begin{pmatrix} -\sin(2\pi t)/r \\ \cos(2\pi t)/r \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\pi r \sin(2\pi t) \\ 2\pi r \cos(2\pi t) \\ h \end{pmatrix} dt \\ &= \int_{t=a}^b 2\pi dt = 2\pi(b-a) \end{aligned}$$

☺ Dieses Arbeitsintegral zählt die Umläufe von  $\gamma$  um die  $z$ -Achse. Das Ergebnis ist unabhängig vom Radius  $r$  und von der Ganghöhe  $h$ .

(2) Unser  $f$  ist die dreidimensionale Version des Wirbelfeldes. [E345](#) Die Rotation  $\text{rot}(f) = 0$  kennen wir bereits bzw. berechnen sie erneut.

⚠ Dennoch hat  $f$  kein Potential, denn das Arbeitsintegral längs geschlossener Kurven ist nicht Null, wie (1) für  $h = 0$  zeigt.

Bisher haben wir über explizit gegebene Wege  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  integriert. Wir wissen: Je zwei reguläre Wege  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\tilde{\gamma}: [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit selbem Bild  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$  sind regulär äquivalent vermöge  $\Phi = \gamma^{-1} \circ \tilde{\gamma}$ . Somit können wir das **Kurvenintegral** von  $g: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  definieren durch

$$\int_{\Gamma} g |d\Gamma| = \int_{s \in \Gamma} g(s) |ds| := \int_{\gamma} g |d\gamma| = \int_a^b g(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt.$$

Für Arbeits- und Flussintegrale sei die Kurve  $\Gamma$  zusätzlich **orientiert**. Dann können wir diese Integrale für  $f: \mathbb{R}^n \supseteq \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$  definieren durch

$$\int_{\Gamma} f \cdot d\Gamma = \int_{s \in \Gamma} f \cdot ds := \int_{\gamma} f \cdot d\gamma = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt,$$

$$\int_{\Gamma} f \times d\Gamma = \int_{s \in \Gamma} f(s) \times ds := \int_{\gamma} f \times d\gamma = \int_a^b f(\gamma(t)) \times \gamma'(t) dt.$$

☺ Diese Integrale sind invariant unter Umparametrisierung von  $\gamma$  und somit wohldefiniert für die (orientierte) glatte Kurve  $\Gamma$ . Links steht die bequeme, parameterfreie Abkürzung.

Umkehrung von Wegen

Zu jedem Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist der **umgekehrte Weg**  $\tilde{\gamma}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  definiert durch  $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(a + b - t)$ . Anschaulich ist das die Zeitumkehr: Der Weg  $\tilde{\gamma}$  verläuft vom Ziel  $\tilde{\gamma}(a) = \gamma(b)$  zurück zum Start  $\tilde{\gamma}(b) = \gamma(a)$ . Mit  $\gamma$  ist auch  $\tilde{\gamma}$  stetig bzw. stetig diff'bar, es gilt  $\Gamma = \Gamma$  und  $\ell(\tilde{\gamma}) = \ell(\gamma)$ .

**Beispiel:** Zum positiven Umlauf  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2: \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$  finden wir den umgekehrten Weg  $\tilde{\gamma}: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2: \tilde{\gamma}(t) = (\cos t, -\sin t)$ .

**Aufgabe:** Wie verändern sich Weg-, Arbeits- und Flussintegrale?

**Lösung:** Wegintegrale bleiben bei Wegumkehr unverändert:

$$\int_{\tilde{\gamma}} g |d\tilde{\gamma}| = \int_{\gamma} g |d\gamma|.$$

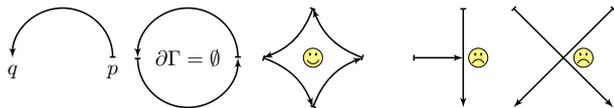
Arbeits- und Flussintegrale hingegen ändern ihr Vorzeichen:

$$\int_{\tilde{\gamma}} f \cdot d\tilde{\gamma} = - \int_{\gamma} f \cdot d\gamma,$$

$$\int_{\tilde{\gamma}} f \times d\tilde{\gamma} = - \int_{\gamma} f \times d\gamma.$$

Stückweise glatte Kurven

Für jede glatte Kurve  $\Gamma = \gamma([a, b]) \subseteq \mathbb{R}^n$  entspricht die Wahl einer **Orientierung** einer Durchlaufungsrichtung. Gleichwertig hierzu ist die Angabe von **Startpunkt**  $p = \gamma(a)$  und **Zielpunkt**  $q = \gamma(b)$ . Ihr **Rand**  $\partial\Gamma$  besteht dann aus  $\partial_{-}\Gamma = \{p\}$  und  $\partial_{+}\Gamma = \{q\}$ .



Eine Teilmenge  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$  nennen wir **stückweise glatte Kurve**, wenn es glatte Kurven  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$  gibt, sodass  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_k$  gilt. Eine Orientierung von  $\Gamma$  besteht aus Orientierungen von  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ . Zudem verlangen wir: Liegt ein  $s \in \Gamma$  in mehreren Kurven  $\Gamma_k$ , dann nur in zweien und zwar einmal als Zielpunkt und einmal als Startpunkt. Innere Randpunkte treten also stets doppelt auf und heben sich auf. Die verbleibenden einzelnen Randpunkte bilden den **Rand**  $\partial\Gamma$ . Im Falle  $\partial\Gamma = \emptyset$  nennen wir die Kurve  $\Gamma$  **geschlossen**, siehe Skizze. Für das Integral  $\int_{\Gamma}$  schreiben wir dann auch dekorativ betonend  $\oint_{\Gamma}$ .

Unterteilung von Wegen

Sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stückweise stetig differenzierbarer Weg. Jeder Punkt  $z \in [a, b]$  definiert eine Unterteilung des Weges  $\gamma$  in zwei Teilwege  $\gamma_1 = \gamma|_{[a, z]}$  und  $\gamma_2 = \gamma|_{[z, b]}$ , kurz  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ . Länge, Weg-, Arbeits- und Flussintegrale sind hierbei additiv:

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} g |d\gamma| = \int_{\gamma_1} g |d\gamma| + \int_{\gamma_2} g |d\gamma|,$$

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f \cdot d\gamma = \int_{\gamma_1} f \cdot d\gamma + \int_{\gamma_2} f \cdot d\gamma,$$

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f \times d\gamma = \int_{\gamma_1} f \times d\gamma + \int_{\gamma_2} f \times d\gamma.$$

☺ Diese einfache Beobachtung nützt oft in konkreten Rechnungen: Je nach Bedarf können wir den Integrationsweg in Teilwege zerlegen. So wird das Gesamtproblem in mehrere kleinere Teilprobleme zerlegt.

☺ Diese Invarianz unter Verfeinerung erklärt auch, warum die oben definierten Kurvenintegrale (E1G) überhaupt wohldefiniert sind, also unabhängig von unserer (meist willkürlichen) Wahl einer Unterteilung.

Invarianz unter Umparametrisierung

**Aufgabe:** Zur Berechnung eines Kurvenintegrals über  $\Gamma$  wählen wir eine Parametrisierung  $\gamma: [a, b] \xrightarrow{\sim} \Gamma$ , regulär aber ansonsten beliebig. Ist das Ergebnis dasselbe für *jede* Parametrisierung  $\tilde{\gamma}: [\tilde{a}, \tilde{b}] \xrightarrow{\sim} \Gamma$ ? Warum?

**Lösung:** Für das Integral über den Weg  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \Phi$  rechnen wir nach:

$$\int_{\tilde{\gamma}} g |d\tilde{\gamma}| = \int_{t=\tilde{a}}^{\tilde{b}} g(\tilde{\gamma}(t)) |\tilde{\gamma}'(t)| dt = \int_{t=\tilde{a}}^{\tilde{b}} g(\gamma(\Phi(t))) |\gamma'(\Phi(t))| \cdot |\Phi'(t)| dt$$

$$\stackrel{\text{Subs}}{=} \int_{u=\Phi(\tilde{a})}^{\Phi(\tilde{b})} g(\gamma(u)) |\gamma'(u)| du = \int_{\gamma} g |d\gamma| \quad \text{Substitution } u = \Phi(t)$$

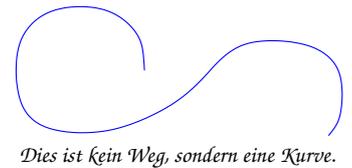
☺ Das hatten wir erhofft! Für Arbeitsintegrale gilt entsprechend:

$$\int_{\tilde{\gamma}} f \cdot d\tilde{\gamma} = \int_{t=\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(\tilde{\gamma}(t)) \cdot \tilde{\gamma}'(t) dt = \int_{t=\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(\gamma(\Phi(t))) \cdot \gamma'(\Phi(t)) \cdot \Phi'(t) dt$$

$$\stackrel{\text{Subs}}{=} \int_{u=\Phi(\tilde{a})}^{\Phi(\tilde{b})} f(\gamma(u)) \cdot \gamma'(u) du = \text{sign}(\Phi') \int_{\gamma} f \cdot d\gamma$$

⚠ Das Vorzeichen  $\text{sign}(\Phi') = \pm 1$  gilt, je nachdem ob die Wege  $\gamma$  und  $\tilde{\gamma}$  gleichsinnig oder gegensinnig verlaufen. Gleiches gilt für Flussintegrale.

Nochmal zur Betonung: Weg  $\neq$  Kurve



René Magritte (1898–1967), *La trahison des images* (Der Verrat der Bilder)

Jeder Weg ist eine stetige Abbildung  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Die so beschriebene Kurve ist die Menge  $\Gamma = \{ \gamma(t) \mid a \leq t \leq b \} \subseteq \mathbb{R}^n$ . Beide Begriffe müssen wir fein säuberlich auseinanderhalten! Ein erster wichtiger Teil unserer Arbeit war es, diesen Unterschied zu verstehen und zu nutzen.

Der Grund: Für die Abbildung  $\gamma$  haben wir passende *Werkzeuge*. Wir fragen und beantworten: Ist die Abbildung  $\gamma$  stetig? Ist die Abbildung  $\gamma$  differenzierbar? Ist die Abbildung  $\gamma$  injektiv?

Hingegen ist  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$  eine nackte Menge, zunächst ohne Struktur. Für  $\Gamma$  hat es keinen Sinn nach Stetigkeit, Differenzierbarkeit oder Injektivität zu fragen: Dem müssen wir erst durch die Wahl einer Parametrisierung  $\gamma: [a, b] \rightarrow \Gamma$  einen Sinn geben! Erst mit dem Weg  $\gamma$  können wir rechnen.

In der Anwendung interessieren wir uns meist nur für die Kurve  $\Gamma$ . Für die Berechnung von Integralen jedoch ist zusätzlich eine Parametrisierung  $\gamma$  notwendig. Ihre Wahl ist willkürlich, doch das Endergebnis ist glücklicherweise von der Wahl der Parametrisierung unabhängig.

Integration über stückweise glatte Kurven

Definition E1G: Kurvenintegrale

Sei  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$  eine **stückweise glatte Kurve**, stückweise parametrisiert durch reguläre Wege  $\gamma_1: I_1 \rightarrow \Gamma_1, \dots, \gamma_k: I_k \rightarrow \Gamma_k$  wie oben erklärt. Dann können wir das **Kurvenintegral** von  $g: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  definieren durch

$$\int_{\Gamma} g |d\Gamma| := \int_{\gamma_1} g |d\gamma_1| + \dots + \int_{\gamma_k} g |d\gamma_k|.$$

Für **Arbeits- und Flussintegral** sei die Kurve  $\Gamma$  zusätzlich **orientiert**. Dann können wir diese Integrale für  $f: \mathbb{R}^n \supseteq \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$  definieren durch

$$\int_{\Gamma} f \cdot d\Gamma := \int_{\gamma_1} f \cdot d\gamma_1 + \dots + \int_{\gamma_k} f \cdot d\gamma_k,$$

$$\int_{\Gamma} f \times d\Gamma := \int_{\gamma_1} f \times d\gamma_1 + \dots + \int_{\gamma_k} f \times d\gamma_k.$$

☺ Dies ist wohldefiniert, das heißt, das Ergebnis ist unabhängig von der Wahl der Unterteilung von  $\Gamma$  und der Parametrisierungen  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ .

Unterteilung von Kurven

**Aufgabe:** Vorgelegt sei eine stückweise glatte Kurve  $\Gamma$  mit stückweise regulärer Parametrisierung  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  sowie eine zweite  $\beta_1, \dots, \beta_{\ell}$ . Liefern beide dasselbe Ergebnis für das Kurvenintegral? Warum?

$$\int_{\alpha_1} g |d\alpha_1| + \dots + \int_{\alpha_k} g |d\alpha_k| \stackrel{?}{=} \int_{\beta_1} g |d\beta_1| + \dots + \int_{\beta_{\ell}} g |d\beta_{\ell}|$$

**Lösung:** Durch Einfügen von Teilungspunkten gelangen wir zu einer gemeinsamen Unterteilung  $\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_m$  und  $\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_m$ . Hierbei gilt:

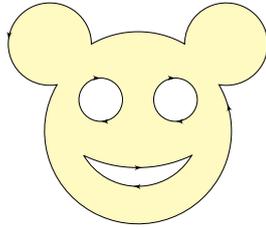
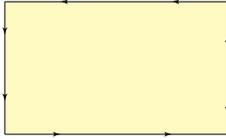
$$\int_{\alpha_1} g |d\alpha_1| + \dots + \int_{\alpha_k} g |d\alpha_k| = \int_{\tilde{\alpha}_1} g |d\tilde{\alpha}_1| + \dots + \int_{\tilde{\alpha}_m} g |d\tilde{\alpha}_m|$$

$$\int_{\beta_1} g |d\beta_1| + \dots + \int_{\beta_{\ell}} g |d\beta_{\ell}| = \int_{\tilde{\beta}_1} g |d\tilde{\beta}_1| + \dots + \int_{\tilde{\beta}_m} g |d\tilde{\beta}_m|$$

Nun sind zudem je zwei Wege  $\tilde{\alpha}_j$  und  $\tilde{\beta}_j$  regulär äquivalent: Dank [E126] stimmen die Integrale überein, und somit auch das Gesamtergebnis.

☺ Entsprechendes gilt für Arbeits- und Flussintegrale, siehe [E126]. Man beachte hierbei: Bei Orientierungsumkehr wechselt das Vorzeichen!

Typisches Beispiel und Modell ist ein Rechteck  $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ .



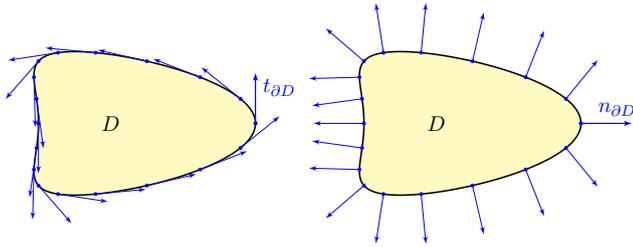
**Definition E1H: Kompaktum mit stückweise glattem Rand**

$D \subseteq \mathbb{R}^2$  heißt **Kompaktum mit stückweise glattem Rand**, wenn gilt:

- $D$  ist kompakt, und der Rand  $\partial D$  ist eine stückweise glatte Kurve.
- In jedem regulären Randpunkt  $s \in \partial D$  liegt das Innere von  $D$  auf der einen Seite von  $\partial D$  und das Äußere auf der anderen Seite.

Der Rand ist **positiv orientiert**, wenn  $D$  stets links von  $\partial D$  liegt.

Die freundliche Stimme in der S-Bahn sagt: „on the left in the direction of travel!“.



Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \partial D$  reguläre Parametrisierung eines Randstücks. Ihre Orientierung sei so gewählt, dass  $D$  links von  $\gamma$  liegt. Im Punkt  $s = \gamma(t)$  mit  $a < t < b$  definieren wir den

$$\text{Einheitstangentenvektor } t_{\partial D}(s) = \frac{ds}{|ds|} := \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}.$$

Geometrische Charakterisierung: In  $s \in \partial D$  ist der Vektor  $t_{\partial D}(s)$  tangential zum Rand  $\partial D$ , hat Norm 1 und positive Umlaufrichtung.

Zur Erinnerung: Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  offen und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein  $C^1$ -Vektorfeld. Wir definieren seine **Quelldichte** oder **Divergenz**  $\text{div } f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sowie seine **Wirbelldichte** oder **Rotation**  $\text{rot } f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\text{div } f := \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad \text{rot } f := \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}.$$

☐ Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §5.2. Dreidimensionale Vektorfelder behandeln wir später in Kapitel G. Nach unseren Vorarbeiten können wir nun folgenden Satz aussprechen:

**Satz E11: Integralsätze von Green und Gauß**

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Kompaktum mit stückweise glattem Rand  $\partial D$ . Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  gilt dann

$$\begin{aligned} \text{Satz von Green: } & \int_{(x,y) \in D} \text{rot } f(x,y) \, d(x,y) = \int_{s \in \partial D} f(s) \cdot ds, \\ \text{Satz von Gauß: } & \int_{(x,y) \in D} \text{div } f(x,y) \, d(x,y) = \int_{s \in \partial D} f(s) \times ds. \end{aligned}$$

☺ Der Satz von Gauß gibt der Divergenz eine anschauliche Deutung, eine koordinatenfreie Formulierung und eine intrinsische Interpretation:

**Aufgabe:** Die **Divergenz**  $\text{div}(f)$  heißt auch **Quelldichte** von  $f$ . Warum? Wir betrachten eine Kreisscheibe  $D = \overline{B}(a, \varepsilon)$  um  $a \in \mathbb{R}^2$  mit Radius  $\varepsilon > 0$  und Flächeninhalt  $\text{vol}_2(D) = \pi \varepsilon^2$ , oder zum Beispiel ein Quadrat

$$D = [a_1 - \varepsilon/2, a_1 + \varepsilon/2] \times [a_2 - \varepsilon/2, a_2 + \varepsilon/2]$$

mit Mittelpunkt  $a \in \mathbb{R}^2$ , Seitenlänge  $\varepsilon > 0$ , Flächeninhalt  $\text{vol}_2(D) = \varepsilon^2$ . Die **Quellstärke** des Feldes  $f$  auf  $D$  ist das Flussintegral  $\int_{\partial D} f(s) \times ds$ . Dies misst, wieviel  $f$  über  $\partial D$  herausfließt. Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  erhalten wir

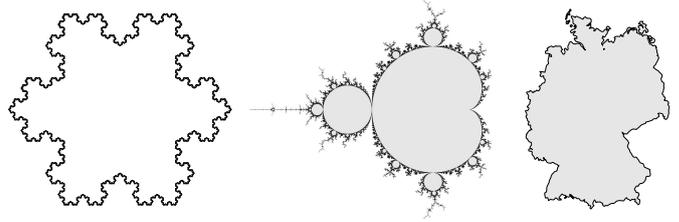
$$\frac{1}{\text{vol}_2(D)} \int_{\partial D} f(s) \times ds = \frac{1}{\text{vol}_2(D)} \int_D \text{div } f(x,y) \, d(x,y) \rightarrow \text{div } f(a).$$

Die Divergenz  $\text{div}(f)$  im Punkt  $a$  misst also die **lokale Quelldichte**. Die **globale Quellstärke** von  $f$  auf  $D$  erhalten wir durch Integration:

$$\int_D \text{div } f(x,y) \, d(x,y) = \int_{\partial D} f(s) \times ds$$

☺ Was in dieser Gesamtbilanz entsteht, fließt über den Rand.

Erinnerung:  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  kompakt bedeutet beschränkt und abgeschlossen. Halbebene  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$  und Quadrant  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0\}$  haben zwar jeweils stückweise glatten Rand, sind aber nicht kompakt. Es gibt auch ebene Kompakta, deren Rand nicht stückweise glatt ist:



Die Koch-Kurve und die Mandelbrot-Menge sind als Fraktale zu populärem Ruhm gelangt. Diese Objekte sind faszinierend, aber mangels Differenzierbarkeit schwierig zu behandeln; unsere Methoden reichen hierzu noch nicht. Wir konzentrieren uns daher auf Kompakta mit stückweise glattem Rand: Diese sind flexibel genug, um in Anwendungen als realistisches Modell zu dienen, aber noch einfach genug, um bequem und effizient rechnen zu können. Die Erfahrung zeigt: Als vereinfachte Näherung an eine komplexe Realität reichen sie oft aus.

Zu  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  ist  $\circ(x, y) := (y, -x)$  der um  $90^\circ$  gedrehte Vektor. Aus dem Einheitstangentenvektor gewinnen wir so den

$$\text{Einheitsnormalenvektor } n_{\partial D}(s) = \circ t_{\partial D}(s) = \frac{\circ ds}{|ds|} := \frac{\circ \gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}.$$

Geometrische Charakterisierung: In  $s \in \partial D$  steht der Vektor  $n_{\partial D}(s)$  senkrecht auf den Rand  $\partial D$ , hat Norm 1 und zeigt von  $D$  nach außen. Tangente und -normale definieren auf dem Rand  $\partial D$  zwei Vektorfelder

$$t_{\partial D}, n_{\partial D} : \partial D \setminus \{\text{Ecken}\} \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Diese sind wohldefiniert, d.h. von der Parametrisierung  $\gamma$  unabhängig. Das **Arbeitsintegral** und das **Flussintegral** von  $f$  über  $\partial D$  sind damit

$$\begin{aligned} \int_{s \in \partial D} f(s) \cdot ds &= \int_{s \in \partial D} f(s) \cdot t_{\partial D}(s) |ds|, \\ \int_{s \in \partial D} f(s) \times ds &= \int_{s \in \partial D} f(s) \cdot n_{\partial D}(s) |ds|. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen nutzen alle bisher bereitgestellten Integralbegriffe: Sie vergleichen Flächenintegrale (links) und Kurvenintegrale (rechts). Die Gleichheit dieser beiden ist ebenso erstaunlich wie nützlich.

Wir können uns  $f$  als Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit vorstellen. Im Punkt  $(x, y)$  beschreibt die Quelldichte  $\text{div } f(x, y)$ , wie viel Flüssigkeit entsteht; das Flächenintegral ist somit die Quellstärke von  $f$  auf ganz  $D$ . Das Flussintegral von  $f$  über den Rand  $\partial D$  misst, wieviel herausfließt.

☺ Beide ergeben dank Gauß denselben Wert!

Im Punkt  $(x, y)$  beschreibt  $\text{rot } f(x, y)$ , mit welcher Winkelgeschwindigkeit eine mitschwimmende Probe rotiert. Anschaulich kann man dies durch ein kleines Schaufelrad messen. Das Flächenintegral über  $D$  ist somit die Wirbelstärke von  $f$  auf ganz  $D$ , und das Arbeitsintegral über  $\partial D$  ist die Zirkulation des Vektorfeldes  $f$  entlang des Randes  $\partial D$ .

☺ Beide ergeben dank Green denselben Wert!

Wir können diese Gleichungen nun durch Beispiele illustrieren und durch direktes Nachrechnen sogar allgemein beweisen!

☺ Der Satz von Green gibt der Rotation eine anschauliche Deutung, eine koordinatenfreie Formulierung und eine intrinsische Interpretation:

**Aufgabe:** Die **Rotation**  $\text{rot}(f)$  heißt auch **Wirbelldichte** von  $f$ . Warum? Wir betrachten eine Kreisscheibe  $D = \overline{B}(a, \varepsilon)$  um  $a \in \mathbb{R}^2$  mit Radius  $\varepsilon > 0$  und Flächeninhalt  $\text{vol}_2(D) = \pi \varepsilon^2$ , oder zum Beispiel ein Quadrat

$$D = [a_1 - \varepsilon/2, a_1 + \varepsilon/2] \times [a_2 - \varepsilon/2, a_2 + \varepsilon/2]$$

mit Mittelpunkt  $a \in \mathbb{R}^2$ , Seitenlänge  $\varepsilon > 0$ , Flächeninhalt  $\text{vol}_2(D) = \varepsilon^2$ . Die **Zirkulation** des Feldes  $f$  auf  $D$  ist das Arbeitsintegral  $\int_{\partial D} f(s) \cdot ds$ . Dies misst, wieviel  $f$  entlang  $\partial D$  zirkuliert. Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  erhalten wir

$$\frac{1}{\text{vol}_2(D)} \int_{\partial D} f(s) \cdot ds = \frac{1}{\text{vol}_2(D)} \int_D \text{rot } f(x,y) \, d(x,y) \rightarrow \text{rot } f(a).$$

Die Rotation  $\text{rot}(f)$  im Punkt  $a$  misst also die **lokale Wirbelldichte**. Die **globale Zirkulation** von  $f$  auf  $D$  erhalten wir durch Integration:

$$\int_D \text{rot } f(x,y) \, d(x,y) = \int_{\partial D} f(s) \cdot ds$$

☺ Was in dieser Gesamtbilanz entsteht, zirkuliert entlang des Randes.

### Der Integralsatz von Green

E141  
Übung

Für  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  kompakt mit stückweise glattem Rand  $\partial D$  besagt Green:

$$\int_{(x,y) \in D} \text{rot } f(x,y) \, d(x,y) = \int_{s \in \partial D} f(s) \cdot ds.$$

Waren unsere wenigen Beispiele bisher nur Zufall? Haben wir vielleicht Ausnahmen oder nötige Voraussetzungen vergessen? Wie können wir sicher sein, dass die Gleichung wirklich immer und überall anwendbar ist? Um hierbei sicher zu gehen, sollten wir sie einmal explizit nachrechnen!

**Aufgabe:** Rechnen Sie die Greensche Gleichung nach...

(1) Für  $f = (f_1, 0)$  horizontal und jeden Normalbereich in  $y$ -Richtung

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x) \}.$$

(2) Für  $f = (0, f_2)$  vertikal und jeden Normalbereich in  $x$ -Richtung

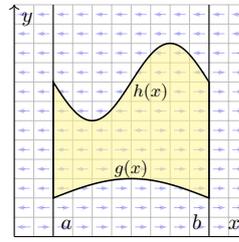
$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq y \leq b, g(y) \leq x \leq h(y) \}.$$

(3) Allgemein für  $f = (f_1, f_2)$  und jeden Binormalbereich  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ .  
Z.B. ein Rechteck, eine Kreisscheibe, jedes konvexe Kompaktum.

(4) Gilt Green für jedes Kompaktum  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ , zerlegt wie in (3)?  
Z.B. einen Kreisring oder eine Kreisscheibe mit mehreren Löchern.

### Der Integralsatz von Green

E142  
Übung



**Lösung:** (1) Horizontales Vektorfeld; zum Arbeitsintegral entlang  $\partial D$  tragen hier nur unterer und oberer Rand bei.

$$\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \alpha(t) = (t, g(t)), \\ \alpha'(t) = (1, g'(t)).$$

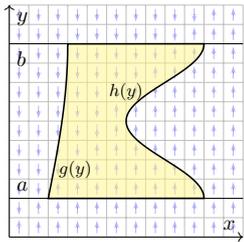
$$\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \beta(t) = (t, h(t)), \\ \beta'(t) = (1, h'(t)).$$

Für  $f = (f_1, 0) : \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^2$  folgt Green aus Fubini und dem HDI:

$$\int_{(x,y) \in D} \text{rot } f(x,y) \, d(x,y) \stackrel{\text{Fub}}{\stackrel{\text{CIH}}{=}} \int_{x=a}^b \int_{y=g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \, dy \, dx \\ \stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{BI1}}{=}} \int_{x=a}^b f_1(x, g(x)) - f_1(x, h(x)) \, dx \\ \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{\alpha} f \cdot d\alpha - \int_{\beta} f \cdot d\beta \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{\partial D} f(s) \cdot ds$$

### Der Integralsatz von Green

E143  
Übung



(2) Ebenso für jedes vertikale Vektorfeld; zum Arbeitsintegral entlang  $\partial D$  tragen hier nur linker und rechter Rand bei.

$$\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \alpha(t) = (g(t), t), \\ \alpha'(t) = (g'(t), 1).$$

$$\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \beta(t) = (h(t), t), \\ \beta'(t) = (h'(t), 1).$$

Für  $f = (0, f_2) : \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^2$  folgt Green aus Fubini und dem HDI:

$$\int_{(x,y) \in D} \text{rot } f(x,y) \, d(x,y) \stackrel{\text{Fub}}{\stackrel{\text{CIH}}{=}} \int_{y=a}^b \int_{x=g(y)}^{h(y)} \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \, dx \, dy \\ \stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{BI1}}{=}} \int_{y=a}^b f_2(h(y), y) - f_2(g(y), y) \, dy \\ \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{\beta} f \cdot d\beta - \int_{\alpha} f \cdot d\alpha \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{\partial D} f(s) \cdot ds$$

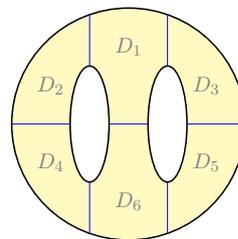
### Der Integralsatz von Green

E144  
Übung

(3) Für Binormalbereiche folgt aus den Rechnungen (1) und (2):

$$\int_D \text{rot}(f_1, f_2) \, d(x,y) \stackrel{\text{Lin}}{\stackrel{\text{A3L}}{=}} \int_D \text{rot}(f_1, 0) \, d(x,y) + \int_D \text{rot}(0, f_2) \, d(x,y) \\ \stackrel{(1,2)}{=} \int_{\partial D} (f_1, 0) \cdot ds + \int_{\partial D} (0, f_2) \cdot ds \stackrel{\text{Lin}}{\stackrel{\text{A3L}}{=}} \int_{\partial D} (f_1, f_2) \cdot ds$$

(4) Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Kompaktum mit stückweise glattem Rand  $\partial D$ .



Wir zerlegen  $D$  in Binormalbereiche  $D_k$ :

$$\int_D \text{rot}(f) \, d(x,y) \stackrel{\text{Lin}}{\stackrel{\text{A4c}}{=}} \sum_k \int_{D_k} \text{rot}(f) \, d(x,y) \\ \stackrel{(3)}{=} \sum_k \int_{\partial D_k} f(s) \cdot ds \stackrel{!}{=} \int_{\partial D} f(s) \cdot ds$$

⚠ Arbeitsintegrale längs innerer Kanten sind gegenläufig und heben sich paarweise auf!

😊 Somit gilt der Satz von Green auch für  $D$ .

### Der Integralsatz von Gauß

E145  
Übung

Für  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  kompakt mit stückweise glattem Rand  $\partial D$  besagt Gauß:

$$\int_{(x,y) \in D} \text{div } f(x,y) \, d(x,y) = \int_{s \in \partial D} f(s) \times ds.$$

Waren unsere wenigen Beispiele bisher nur Zufall? Haben wir vielleicht Ausnahmen oder nötige Voraussetzungen vergessen? Wie können wir sicher sein, dass die Gleichung wirklich immer und überall anwendbar ist? Um hierbei sicher zu gehen, sollten wir sie einmal explizit nachrechnen!

**Aufgabe:** Rechnen Sie die Gaußsche Gleichung nach...

(1) Für  $f = (0, f_2)$  vertikal und jeden Normalbereich in  $y$ -Richtung

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x) \}.$$

(2) Für  $f = (f_1, 0)$  horizontal und jeden Normalbereich in  $x$ -Richtung

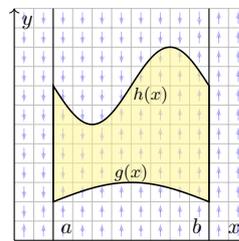
$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq y \leq b, g(y) \leq x \leq h(y) \}.$$

(3) Allgemein für  $f = (f_1, f_2)$  und jeden Binormalbereich  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ .  
Z.B. ein Rechteck, eine Kreisscheibe, jedes konvexe Kompaktum.

(4) Gilt Gauß für jedes Kompaktum  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ , zerlegt wie in (3)?  
Z.B. einen Kreisring oder eine Kreisscheibe mit mehreren Löchern.

### Der Integralsatz von Gauß

E146  
Übung



**Lösung:** (1) Vertikales Vektorfeld; zum Flussintegral über  $\partial D$  tragen hier nur unterer und oberer Rand bei.

$$\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \alpha(t) = (t, g(t)), \\ \alpha'(t) = (1, g'(t)).$$

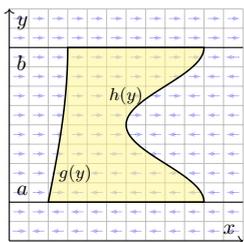
$$\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \beta(t) = (t, h(t)), \\ \beta'(t) = (1, h'(t)).$$

Für  $f = (0, f_2) : \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^2$  folgt Gauß aus Fubini und dem HDI:

$$\int_{(x,y) \in D} \text{div } f(x,y) \, d(x,y) \stackrel{\text{Fub}}{\stackrel{\text{CIH}}{=}} \int_{x=a}^b \int_{y=g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \, dy \, dx \\ \stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{BI1}}{=}} \int_{x=a}^b f_2(x, h(x)) - f_2(x, g(x)) \, dx \\ \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{\alpha} f \times d\alpha - \int_{\beta} f \times d\beta \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{\partial D} f(s) \times ds$$

### Der Integralsatz von Gauß

E147  
Übung



(2) Ebenso für jedes horizontale Vektorfeld; zum Flussintegral von  $f$  über  $\partial D$  tragen hier nur linker und rechter Rand bei.

$$\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \alpha(t) = (g(t), t), \\ \alpha'(t) = (g'(t), 1).$$

$$\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \beta(t) = (h(t), t), \\ \beta'(t) = (h'(t), 1).$$

Für  $f = (f_1, 0) : \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^2$  folgt Gauß aus Fubini und dem HDI:

$$\int_{(x,y) \in D} \text{div } f(x,y) \, d(x,y) \stackrel{\text{Fub}}{\stackrel{\text{CIH}}{=}} \int_{y=a}^b \int_{x=g(y)}^{h(y)} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \, dx \, dy \\ \stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{BI1}}{=}} \int_{y=a}^b f_1(h(y), y) - f_1(g(y), y) \, dy \\ \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{\beta} f \times d\beta - \int_{\alpha} f \times d\alpha \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{\partial D} f(s) \times ds$$

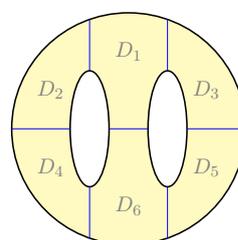
### Der Integralsatz von Gauß

E148  
Übung

(3) Für Binormalbereiche folgt aus den Rechnungen (1) und (2):

$$\int_D \text{div}(f_1, f_2) \, d(x,y) \stackrel{\text{Lin}}{\stackrel{\text{A3L}}{=}} \int_D \text{div}(f_1, 0) \, d(x,y) + \int_D \text{div}(0, f_2) \, d(x,y) \\ \stackrel{(1,2)}{=} \int_{\partial D} (f_1, 0) \times ds + \int_{\partial D} (0, f_2) \times ds \stackrel{\text{Lin}}{\stackrel{\text{A3L}}{=}} \int_{\partial D} (f_1, f_2) \times ds$$

(4) Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Kompaktum mit stückweise glattem Rand  $\partial D$ .

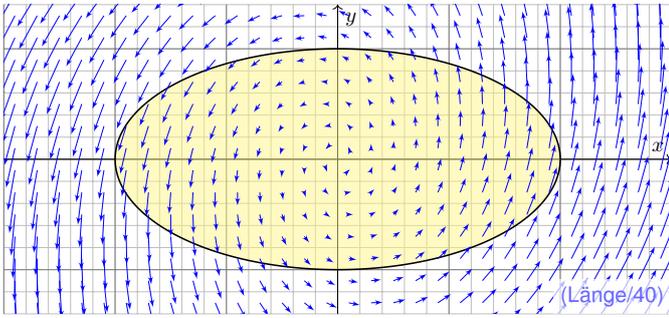


Wir zerlegen  $D$  in Binormalbereiche  $D_k$ :

$$\int_D \text{div}(f) \, d(x,y) \stackrel{\text{Lin}}{\stackrel{\text{A4c}}{=}} \sum_k \int_{D_k} \text{div}(f) \, d(x,y) \\ \stackrel{(3)}{=} \sum_k \int_{\partial D_k} f(s) \times ds \stackrel{!}{=} \int_{\partial D} f(s) \times ds$$

⚠ Flussintegrale längs innerer Kanten sind gegenläufig und heben sich paarweise auf!

😊 Somit gilt der Satz von Gauß auch für  $D$ .



**Aufgabe:** (1) Skizzieren Sie das ebene Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $f(x, y) = (x - 3y, 5x + y)$  sowie die Kurve  $\Gamma = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 = 4 \}$ . Berechnen Sie (2) das Flussintegral sowie (3) das Arbeitsintegral von  $f$  über  $\Gamma$ .

**Lösung:** Wir wählen eine Parametrisierung für die Ellipse  $\Gamma$ , etwa  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \Gamma$ ,  $\gamma(t) = (2 \cos t, \sin t)$ ,  $\gamma'(t) = (-2 \sin t, \cos t)$ . Sie berandet  $D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 4 \}$  mit  $\text{vol}_2(D) = 2\pi$ . (Transformationsatz: Streckung um den Faktor 2 in  $x$ -Richtung.)

(2) Für das Flussintegral von  $f$  über  $\Gamma$  nach außen erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f \times d\Gamma &\stackrel{\text{Param}}{=} \int_{\gamma} f \times d\gamma \stackrel{\text{Param}}{=} \int_{t=0}^{2\pi} f(\gamma(t)) \times \gamma'(t) dt \\ &\stackrel{\text{Param}}{=} \int_{t=0}^{2\pi} \begin{pmatrix} 2 \cos t - 3 \sin t \\ 10 \cos t + \sin t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_{t=0}^{2\pi} 2 \cos(t)^2 + 2 \sin(t)^2 + 17 \sin t \cos t dt = 4\pi \end{aligned}$$

Leichter mit Gauß: Dank konstanter Divergenz  $\text{div}(f) = 2$  erhalten wir

$$\int_{\partial D} f(s) \times ds \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_D \text{div}(f) d(x, y) = 2 \text{vol}_2(D) = 4\pi.$$

(3) Für das Arbeitsintegral von  $f$  längs  $\Gamma$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f \cdot d\Gamma &\stackrel{\text{Param}}{=} \int_{\gamma} f \cdot d\gamma \stackrel{\text{Param}}{=} \int_{t=0}^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &\stackrel{\text{Param}}{=} \int_{t=0}^{2\pi} \begin{pmatrix} 2 \cos t - 3 \sin t \\ 10 \cos t + \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_{t=0}^{2\pi} 6 \sin(t)^2 + 10 \cos(t)^2 - 3 \sin t \cos t dt = 16\pi \end{aligned}$$

☺ Erinnerung  $\int_{t=0}^{2\pi} \sin(t)^2 = \int_{t=0}^{2\pi} \cos(t)^2 = \pi$  und  $\int_{t=0}^{2\pi} \sin(t) \cos(t) = 0$ .  
⚠ Hierbei orientieren wir die Kurve  $\Gamma$  positiv, das umlaufene Gebiet liegt also stets links der Kurve. Bei umgekehrter Durchlaufung wechselt das Arbeitsintegral sein Vorzeichen, statt  $+16\pi$  erhielten wir also  $-16\pi$ .  
Leichter mit Green: Dank konstanter Rotation  $\text{rot}(f) = 8$  erhalten wir

$$\int_{\partial D} f(s) \cdot ds \stackrel{\text{Green}}{=} \int_D \text{rot}(f) d(x, y) = 8 \text{vol}_2(D) = 16\pi.$$

☺ Dank der Integralsätze können wir uns jeweils aussuchen, ob wir lieber ein Flächenintegral oder ein Kurvenintegral ausrechnen wollen. Je nach Anwendung kann das eine oder das andere vorteilhaft sein. Das ist die Stärke und der Nutzen unserer Integralsätze!

☺ Plausibilitätsprüfung: Den exakten Wert des Integrals können wir jeweils nur durch Ausrechnen gewinnen, aber das richtige Vorzeichen können wir in diesem Beispiel bereits an der obigen Skizze erkennen! Bitte nutzen Sie dies, um Rechenfehler zu erkennen und zu vermeiden.

☺ Das Ergebnis der Kurvenintegrale über die Kurve  $\Gamma$  ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung  $\gamma: [a, b] \rightarrow \Gamma$ . Das ist wesentlich: Andere Parametrisierungen  $\tilde{\gamma}: [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow \Gamma$  sind ebenso möglich, gehen andere Rechenwege, doch enden alle schließlich beim selben Ergebnis.

⚠ Bitte beachten Sie, dass wir  $\Gamma = \partial D$  stets positiv orientieren! Nur so erhalten wir das Flussintegral über  $\Gamma$  nach außen und passend dazu das Arbeitsintegral längs  $\Gamma$  in positivem Umlaufsinn, wie vereinbart. Umgekehrte Orientierung / Durchlaufung kehrt das Vorzeichen um!

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Kompaktum mit stückweise glattem Rand  $\partial D$ . Für alle stetig differenzierbaren Vektorfelder  $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}^2$  gilt:

Satz von Green:  $\int_{(x,y) \in D} \text{rot } g(x, y) d(x, y) = \int_{s \in \partial D} g(s) \cdot ds,$

Satz von Gauß:  $\int_{(x,y) \in D} \text{div } f(x, y) d(x, y) = \int_{s \in \partial D} f(s) \times ds.$

Den Rand  $\partial D$  parametrisieren wir (stückweise) durch  $\gamma: [a, b] \rightarrow \partial D$ . Für  $s = (x, y) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  gilt  $ds = (dx, dy) = (\gamma_1'(t) dt, \gamma_2'(t) dt)$ . Wir erhalten so die äquivalente Schreibweise als Differentialform:

Green:  $\int_{(x,y) \in D} \frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y} d(x, y) = \int_{(x,y) \in \partial D} g_1 dx + g_2 dy,$

Gauß:  $\int_{(x,y) \in D} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} d(x, y) = \int_{(x,y) \in \partial D} f_1 dy - f_2 dx.$

☺ Beide Sätze sind äquivalent mittels  $(g_1, g_2) = \circlearrowleft(f_1, f_2) = (-f_2, f_1)$ .

Die Integralsätze sind eine bemerkenswerte Gesetzmäßigkeit: Das Flächenintegral über den gesamten Bereich  $D$  lässt sich durch das entsprechende Wegintegral entlang des Randes  $\partial D$  bestimmen! Zur Berechnung von Integralen können wir daher beide ausspielen: Ist das Flächenintegral einfacher, so nutzen wir ersteres. Ist das Randintegral einfacher, so nutzen wir zweiteres.

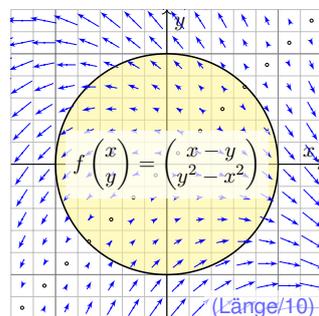
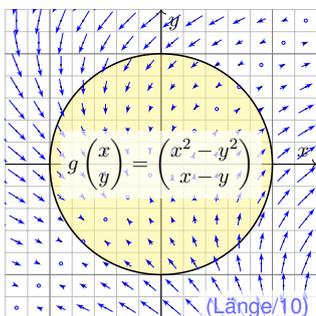
Die Schreibweise als Differentialform ist häufig bequem und wird daher in vielen Anwendungen verwendet, wie z.B. in der Thermodynamik. Wir nutzen hierbei die Konvention  $ds = (dx, dy) = (\gamma_1'(t) dt, \gamma_2'(t) dt)$ . Das ergibt sich ganz natürlich aus  $s = (x, y) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ . Die Schreibweise  $dx$  und  $dy$  ist daher bequem und üblich.

In der Ebene sind beide Sätze offensichtlich äquivalent. Die Sätze von Gauß und Stokes im Raum behandeln wir im übernächsten Kapitel G. Im  $\mathbb{R}^3$  unterscheiden sich Arbeitsintegrale über Kurven (Dimension 1) deutlich von Flussintegralen über Flächen (Wände, Codimension 1). In der Ebene  $\mathbb{R}^2$  hingegen fallen beide Sichtweisen zusammen.

**Aufgabe:** Für  $D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}$  berechne man

$$\int_{(x,y) \in \partial D} \underbrace{(x^2 - y^2)}_{= g_1 = -f_2} dx + \underbrace{(x - y)}_{= g_2 = f_1} dy$$

**Skizze:** Zwei Interpretationen, als Arbeitsintegral und als Flussintegral:



**Randintegral:** Wir wählen  $\gamma: [-\pi, \pi] \rightarrow \partial D$  mit  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ . Hieraus folgt  $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$ , also  $dx = -\sin t dt$ ,  $dy = \cos t dt$ .

$$\begin{aligned} &\int_{\partial D} (x^2 - y^2) dx + (x - y) dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(t)^2 - \sin(t)^2) (-\sin t) + (\cos t - \sin t) \cos t dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{-\cos(t)^2 \sin(t)}_{\text{ungerade}} + \underbrace{\sin(t)^3}_{\text{ungerade}} + \underbrace{\cos(t)^2 - \sin(t) \cos(t)}_{\text{ungerade}} dt = \pi \end{aligned}$$

Rechentrick: Ungerade Integranden liefern über  $[-\pi, \pi]$  das Integral Null. Auch  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)^2 dt = \pi$  können Sie geometrisch sehen.

**Flächenintegral:** Mit Green / Gauß und Polarkoordinaten erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{(x,y) \in \partial D} \underbrace{(x^2 - y^2)}_{= g_1 = -f_2} dx + \underbrace{(x - y)}_{= g_2 = f_1} dy &= \int_D \underbrace{1 + 2y}_{= \text{rot } g = \text{div } f} d(x, y) \\ &= \int_{\rho=0}^1 \int_{\varphi=0}^{2\pi} (1 + 2\rho \sin \varphi) \rho d\varphi d\rho = 2\pi \int_{\rho=0}^1 \rho d\rho = \pi \end{aligned}$$

**Aufgabe:** (1) Berechnen Sie die Rotation der ebenen Vektorfelder

$$f(x, y) = (0, x), \quad g(x, y) = (-y, 0), \quad h(x, y) = \frac{1}{2}(-y, x).$$

(2) Wie berechnen Sie hiermit zu einem (einfach geschlossenen) Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  den Flächeninhalt des umlaufenen Bereichs  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ?

**Lösung:** (1) Wir finden  $\text{rot}(f) = 1$ . (2) Dank des Satzes von Green folgt:

$$\text{vol}_2(D) = \int_D \text{rot}(f) \, d(x, y) = \int_{\partial D} f(s) \cdot ds = \int_{\partial D} x \, dy = \int_{t=a}^b \gamma_1(t) \gamma_2'(t) \, dt$$

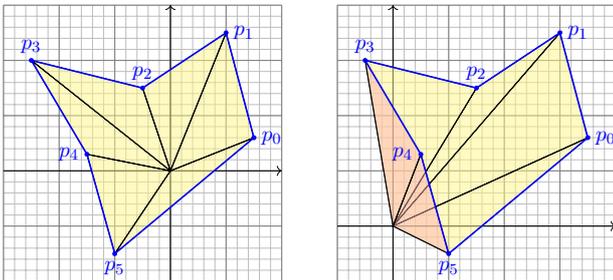
Hier ist  $s = (x, y) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  und  $ds = (dx, dy) = (\gamma_1'(t) dt, \gamma_2'(t) dt)$ . Ebenso  $\text{rot}(g) = 1$  und  $\text{rot}(h) = 1$ . Wir erhalten folgende drei Formeln:

**Satz E2A: Greensche Flächenformeln**

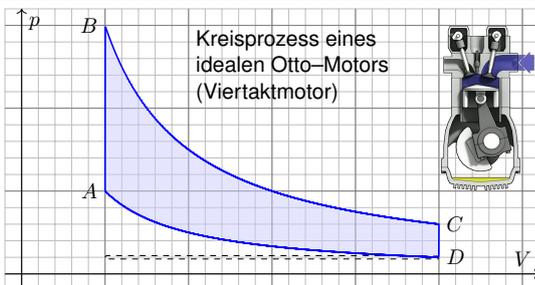
Für jedes Kompaktum  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  mit stückweise glattem Rand  $\partial D$  gilt

$$\text{vol}_2(D) = \int_{\partial D} x \, dy = \int_{\partial D} -y \, dx = \frac{1}{2} \int_{\partial D} x \, dy - y \, dx.$$

CAD-Programme nutzen die Greenschen Flächenformeln ebenfalls: Hierzu betrachten wir den Polygonzug  $\gamma = [p_0 \ p_1 \ \dots \ p_n]$  mit Eckpunkten  $p_1, p_2, \dots, p_n = p_0 \in \mathbb{R}^2$ , einfach geschlossen und positiv orientiert. Für den umschlossenen Flächeninhalt suchen wir einfache Formeln.



**Aufgabe:** Übersetzen Sie Greens Flächenintegrale in Summen. Lässt sich das Ergebnis elementar-geometrisch begründen?



Bei einer Volumenänderung  $dV$  wird die Arbeit  $dW = p \, dV$  verrichtet. Beim Prozess  $\gamma: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n: t \mapsto (p(t), V(t), \dots)$  also insgesamt

$$W = \int_{\gamma} dW = \int_{\gamma} p \, dV = \int_{t=t_0}^{t_1} p(t) V'(t) \, dt.$$

Bei einem **Kreisprozess** gilt  $\gamma(t_1) = \gamma(t_0)$ . Die dabei geleistete Arbeit  $W$  ist der Flächeninhalt des umlaufenen Bereichs in der  $V$ - $p$ -Ebene.

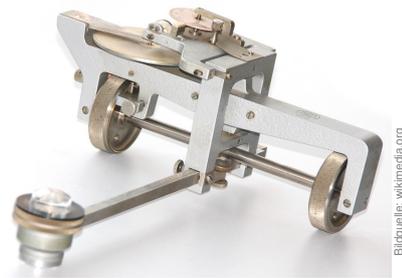
Die Schreibweise des Punktes  $s = (x, y) \in \Gamma$  und des infinitesimalen Kurvenelementes  $ds = (dx, dy)$  als Differentialform längs der Kurve  $\Gamma$  ist in Anwendungen wie der Thermodynamik bequem und nützlich.

Dies hat einen einfachen aber wichtigen Grund. Prof. Hermann Karcher (Universität Bonn) erklärte das Problem und seine Lösung sehr treffend in seiner Notiz *Differentialformen für die Thermodynamik*:

*Die Vektoranalysis lebt davon, dass wir den Raum  $\mathbb{R}^3$  nicht bloß als Vektorraum, sondern als euklidischen Raum, mit einem Skalarprodukt, betrachten und nutzen können. In der Thermodynamik gibt es jedoch kein Skalarprodukt, das eine physikalische Bedeutung hätte. Deshalb können Kurvenintegrale nicht Integranden haben, die Skalarprodukt aus einem Vektorfeld mit dem Tangentialvektor der Kurve sind. Wir müssen daher lernen, die Ableitung von Funktionen und deren Anwendung auf Tangentialvektoren von Kurven ohne ein bequemes Skalarprodukt zu beschreiben. Genau hierzu dienen Differentialformen.*

☺ Darum ist diese Notation so beliebt: Sie ist präzise und bequem.

Greens Flächenformeln sind ein schöner und bemerkenswerter Satz: Die umlaufene Fläche lässt sich bestimmen allein aus der Randkurve!



Ein **Planimeter** ermittelt Flächeninhalte, z.B. auf einer Landkarte, indem man den Rand der zu messenden Fläche mit einem Fahrstift abfährt. Dabei integriert eine geeignete Mechanik präzise den Flächeninhalt! Sie können es sogar selbst bauen, siehe YouTube > lego planimeter

**Lösung:** Der Flächeninhalt des umschlossenen Bereichs  $D$  ist [E027](#):

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(D) &= \frac{1}{2} \int_{\partial D} x \, dy - y \, dx = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} p_k \times (p_{k+1} - p_k) \quad (1) \\ &= \int_{\partial D} x \, dy = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (x_k + x_{k+1}) \cdot (y_{k+1} - y_k) \quad (2) \\ &= \int_{\partial D} -y \, dx = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (y_k + y_{k+1}) \cdot (x_k - x_{k+1}) \quad (3) \end{aligned}$$

- (1) Die orientierte Fläche des Dreiecks  $[0, p_k, p_{k+1}]$  ist  $\frac{1}{2} p_k \times (p_{k+1} - p_k)$ . Positiv orientierte Dreiecke liefern einen positiven Flächeninhalt (gelb), Negativ orientierte Dreiecke liefern einen negativen Flächeninhalt (rot).
- (2) Dies erhält man durch Integration längs des Weges  $\gamma$ , oder direkt: Hierbei ist  $\frac{1}{2} (x_k + x_{k+1}) \cdot (y_{k+1} - y_k)$  nämlich die orientierte Fläche des Trapezes mit Eckpunkten  $(x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1}), (x_{k+1}, 0), (x_k, 0)$ .
- (3) Dies ist Fall (2) mit Trapezen über der  $y$ -Achse statt der  $x$ -Achse.

Der Kreisprozess eines **Otto-Motors** verläuft idealisiert wie skizziert: Verdichten: Der Kolben komprimiert Kraftstoff-Luft-Gemisch von  $D$  bis  $A$ . Arbeitstakt: Bei  $A$  wird das Gas gezündet, der Druck steigt schlagartig bis  $B$  an, dadurch dehnt sich der Kolben bis  $C$  aus und verrichtet Arbeit. Zwei weitere Takte: Ausstoß des Abgases, Ansaugen des Gemisches. Der **Wirkungsgrad** des Motors ist die geleistete Arbeit dividiert durch die eingesetzte Verbrennungsenergie, also den Treibstoffverbrauch.

Den Zustand des Systems zur Zeit  $t \in [t_0, t_1]$  beschreiben wir dabei durch den Druck  $p(t)$ , das Volumen  $V(t)$  und evtl. weitere Größen.

Eine **Zustandsfunktion** hängt nur vom Zustand des Systems ab, nicht jedoch von der Historie, also dem durchlaufenen Weg: Zum Beispiel ist die Wärmeenergie eines idealen Gases gleich  $U = \frac{3}{2} pV = \frac{3}{2} \nu RT$ . Hier ist  $U$  = Wärmemenge,  $p$  = Druck,  $V$  = Volumen,  $\nu$  = Stoffmenge,  $R$  = universelle Gaskonstante,  $T$  = absolute Temperatur. Der Faktor  $3/2$  entspricht der mikroskopischen Struktur eines einatomigen Gases.

Eine **Prozessfunktion** hingegen hängt vom durchlaufenen Weg ab, wie zum Beispiel die geleistete Arbeit  $W$  in der obigen Formel.

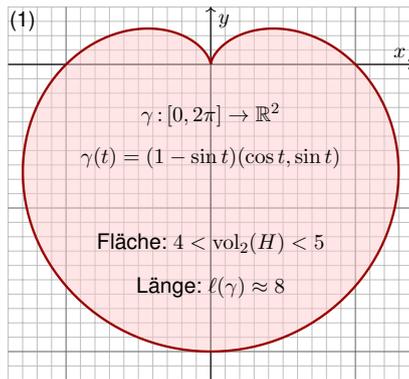
**Aufgabe:** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Kompaktum mit stückweise glattem Rand. Für seinen Schwerpunkt  $s_D = (x_D, y_D)$  zeige man mit Green (E11):

$$\begin{aligned} x_D &= \frac{-1}{\text{vol}_2(D)} \int_{\partial D} xy \, dx = \frac{-1}{\text{vol}_2(D)} \int_{t=a}^b \gamma_1(t) \gamma_2(t) \gamma_1'(t) \, dt, \\ y_D &= \frac{1}{\text{vol}_2(D)} \int_{\partial D} xy \, dy = \frac{1}{\text{vol}_2(D)} \int_{t=a}^b \gamma_1(t) \gamma_2(t) \gamma_2'(t) \, dt. \end{aligned}$$

**Lösung:** Dank des Satzes von Green finden wir

$$\begin{aligned} - \int_{\partial D} xy \, dx &= \int_{\partial D} (-xy, 0) \cdot (dx, dy) \stackrel{\text{Green}}{=} \int_D \text{rot}(-xy, 0) \, d(x, y) \\ &= \int_D x \, d(x, y) = x_D \cdot \text{vol}_2(D), \\ \int_{\partial D} xy \, dy &= \int_{\partial D} (0, xy) \cdot (dx, dy) \stackrel{\text{Green}}{=} \int_D \text{rot}(0, xy) \, d(x, y) \\ &= \int_D y \, d(x, y) = y_D \cdot \text{vol}_2(D). \end{aligned}$$

**Aufgabe:** (1) Zeichnen Sie  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto (1 - \sin t)(\cos t, \sin t)$ . Welche Werte schätzen Sie hieraus für Länge und Flächeninhalt?

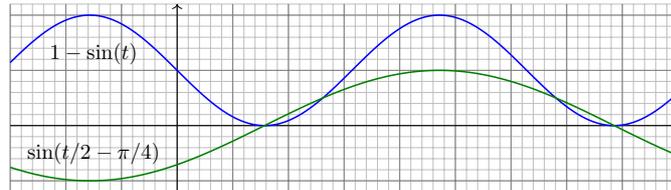


Heutzutage nutzt man Computer zur numerischen Approximation. Früher löste man solche Quadraturaufgaben näherungsweise so: Man zeichne die Figur, schneide sie aus und wiege sie sorgfältig. Das Gewicht ist dann der gesuchte Flächeninhalt mal Gewicht pro Einheitsfläche (üblich 80g/m<sup>2</sup>).



- Aufgabe:** (1) Zeichnen Sie  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto (1 - \sin t)(\cos t, \sin t)$ .  
 (2) Berechnen Sie die Länge der Kurve  $\Gamma = \{ \gamma(t) \mid 0 \leq t \leq 2\pi \}$ .  
 (3) Ist der umlaufene Bereich  $H \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Normalbereich?  
 (4) Berechnen Sie den Flächeninhalt  $\text{vol}_2(H)$ . Welche Methode ist hierzu am geschicktesten: Fubini? Transformation? Green?

**Hinweis:** Sie können  $1 - \sin(t) = 2 \sin(t/2 - \pi/4)^2$  zeigen und nutzen.



Wie findet man diese Gleichung? Die Skizze zu  $1 - \sin(t)$  lässt sie erahnen. Wie prüft man sie? Sie finden  $2 \sin(x) \sin(y) = \cos(x - y) - \cos(x + y)$  in Ihrer Liste der trigonometrischen Additionstheoreme und erhalten so  $2 \sin(t/2 - \pi/4)^2 = 1 - \cos(t - \pi/2) = 1 - \sin(t)$ .

(2) Länge des Weges  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto \gamma(t) = (1 - \sin t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ :

$$\gamma'(t) = -\cos t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + (1 - \sin t) \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad (\text{Produktregel})$$

$$\gamma'(t) \cdot \gamma'(t) = \cos^2 t + (1 - \sin t)^2 = \cos^2 t + 1 - 2 \sin t + \sin^2 t$$

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{2(1 - \sin t)} = \sqrt{4 \sin^2(t/2 - \pi/4)} = 2 |\sin(t/2 - \pi/4)|$$

$$\ell(\gamma) = \int_{t=0}^{2\pi} |\gamma'(t)| dt = 2 \int_{t=0}^{2\pi} |\sin(t/2 - \pi/4)| dt = 4 \int_{u=-\pi/4}^{3\pi/4} |\sin(u)| du$$

$$= -4 \int_{u=-\pi/4}^0 \sin(u) du + 4 \int_{u=0}^{3\pi/4} \sin(u) du \quad (\text{Negativ- \& Positivteil})$$

$$= 4 [\cos(u)]_{u=-\pi/4}^0 - 4 [\cos(u)]_{u=0}^{3\pi/4} = 4 \left( \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right] - \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right] \right) = 8$$

Zur Berechnung von  $|\gamma'(t)|^2$  nutzen wir Pythagoras, oder entdecken ihn hier erneut, denn die Vektoren  $(\cos t, \sin t)$  und  $(-\sin t, \cos t)$  sind orthonormal! Diese Abkürzung nutzen wir gleich noch einmal im Integral (4). Den Flächeninhalt  $\int_{u=-\pi/4}^{3\pi/4} |\sin(u)| du = 2$  können Sie wie oben ausrechnen oder graphisch ablesen: Skizzieren Sie  $|\sin(u)|$  und schauen Sie scharf hin!

(3) Der umlaufene Bereich  $H$  ist ein Normalbereich in  $y$ -Richtung, also  $H = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x) \}$ . Diese Darstellung ist jedoch mühsam: Sie müssten  $a, b$  sowie  $g(x), h(x)$  explizit ausrechnen. Die Flächenberechnung mittels Fubini scheint daher eher umständlich. Wir versuchen es auf einem leichteren Weg mit dem Satz von Green!

(4) Für  $f(x, y) = \frac{1}{2}(-y, x)$  gilt  $\text{rot } f = 1$ . Dank Green erhalten wir:

$$\text{vol}_2(H) = \int_H \text{rot}(f) d(x, y) = \int_\gamma f \cdot d\gamma = \int_{t=0}^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{t=0}^{2\pi} (1 - \sin t) \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \left[ -\cos t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + (1 - \sin t) \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right] dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{t=0}^{2\pi} (1 - \sin t)^2 dt = \frac{1}{2} \int_{t=0}^{2\pi} 1 - 2 \sin t + \sin^2 t dt = \frac{1}{2} (2\pi + \pi)$$

$$= \frac{3}{2} \pi \approx 4.7124$$

😊 Plausibilitätsprüfung: Aus der Skizze schätzen wir  $4 < \text{vol}_2(H) < 5$ .

Gegeben sei eine stetige Radiusfunktion  $r: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}: t \mapsto r(t)$ , etwa  $r(t) = 1 - \sin t$  wie oben für die Kardioiden. Dies definiert den Weg  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto \gamma(t) = r(t)(\cos t, \sin t)$  und den umlaufenen Bereich  $A = \{ \rho \gamma(t) \mid 0 \leq t \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 1 \}$ .

**Aufgabe:** (5) Formulieren Sie allgemein den Flächeninhalt  $\text{vol}_2(A)$  mit (a) dem Satz von Green und alternativ (b) dem Transformationssatz.

**Lösung:** (5a) Wir nutzen  $f(x, y) = \frac{1}{2}(-y, x)$  mit  $\text{rot } f = 1$  wie zuvor:

$$\text{vol}_2(A) = \int_A \text{rot}(f) d(x, y) = \int_\gamma f \cdot d\gamma = \int_{t=0}^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{t=0}^{2\pi} r(t) \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \left[ r'(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + r(t) \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right] dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{t=0}^{2\pi} r(t)^2 dt$$

😊 Dieses Integral haben wir in (4) für  $r(t) = 1 - \sin t$  ausgerechnet.

(5b) Wir nutzen für den Bereich  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  die Parametrisierung

$$\Phi: [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho r(\varphi) \cos(\varphi) \\ \rho r(\varphi) \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\Phi' \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \varphi)} = \begin{pmatrix} r(\varphi) \cos(\varphi) & \rho [r'(\varphi) \cos(\varphi) - r(\varphi) \sin(\varphi)] \\ r(\varphi) \sin(\varphi) & \rho [r'(\varphi) \sin(\varphi) + r(\varphi) \cos(\varphi)] \end{pmatrix}$$

$$\det \Phi' \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} = \rho r(\varphi)^2 \quad \text{Funktionaldeterminante der Jacobi-Matrix}$$

Nach Konstruktion ist diese Abbildung  $\Phi$  surjektiv auf  $A$ , kurz  $\Phi(D) = A$ . Sie ist im Wesentlichen injektiv, fürs Integral ist der Fehler unerheblich. Dank Transformationssatz C2B erhalten wir daraus den Flächeninhalt:

$$\text{vol}_2(A) = \int_A 1 d(x, y) = \int_D |\det \Phi'(\rho, \varphi)| d(\rho, \varphi)$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^1 \rho r(\varphi)^2 d\rho d\varphi = \frac{1}{2} \int_{t=0}^{2\pi} r(\varphi)^2 d\varphi$$

😊 Das ist genau das Integral, das wir bereits in (5a) erhalten haben. Zu gegebener Radiusfunktion  $\varphi \mapsto r(\varphi)$  rechnet man dies weiter aus.

Alternative: Dasselbe Ergebnis erhalten wir direkt in Polarkoordinaten  $\Psi: E \rightarrow \mathbb{R}^2: (\rho, \varphi) \mapsto (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$ , aber mit dem Parameterbereich  $E = \{ (\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq r(\varphi) \}$ : einfach nachrechnen!

**Aufgabe:** (6) Formulieren Sie den Schwerpunkt  $(x_A, y_A)$  des Bereichs  $A$  mit (a) dem Transformationssatz und alternativ (b) dem Satz von Green.

**Lösung:** (6a) Wir nutzen die Parametrisierung  $\Phi: D \rightarrow A$  und erhalten:

$$x_A \text{vol}_2(A) = \int_A x d(x, y) = \int_D \underbrace{\rho r(\varphi) \cos(\varphi)}_x \cdot \underbrace{\rho r(\varphi)^2}_{\text{Fu/det}} d(\rho, \varphi)$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^1 \rho^2 r(\varphi)^3 \cos(\varphi) d\rho d\varphi = \frac{1}{3} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r(\varphi)^3 \cos(\varphi) d\varphi$$

$$y_A \text{vol}_2(A) = \int_A y d(x, y) = \frac{1}{3} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r(\varphi)^3 \sin(\varphi) d\varphi$$

(6b) Die Greenschen Schwerpunktsformeln E216 ergeben dasselbe, aber erst nach partieller Integration und geeigneter Vereinfachung. In diesem Falle scheint der Transformationssatz etwas direkter.

**Aufgabe:** (7) Berechnen Sie den Schwerpunkt  $(x_H, y_H)$  der Herzfläche.

**Lösung:** (7) Es gilt  $x_H = 0$ , denn  $H$  ist symmetrisch bezüglich  $x \mapsto -x$ . Alternativ können Sie auch (6) nutzen und es ausführlich nachrechnen. Für  $y_H$  nutzen wir unsere Vorarbeit (6) und setzen  $r(\varphi) = 1 - \sin \varphi$  ein:

$$y_H \cdot 3 \text{vol}_2(H) = \int_{\varphi=0}^{2\pi} r(\varphi)^3 \sin \varphi d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} (1 - \sin \varphi)^3 \sin \varphi d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=-\pi}^{\pi} (1 - 3 \sin \varphi + 3 \sin^2 \varphi - \sin^3 \varphi) \sin \varphi d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=-\pi}^{\pi} -3 \sin^2 \varphi - \sin^4 \varphi d\varphi \quad (\text{nur gerade Terme!})$$

$$= -3\pi - \frac{3}{4}\pi = -\frac{15}{4}\pi$$

$$y_H = -\frac{15}{4}\pi \bigg/ \frac{9}{2}\pi = -\frac{5}{6}$$

😊 Plausibilitätsprüfung: Das passt recht gut zu unserer Skizze.

Häufig müssen Sie zwischen Formel und Bild übersetzen, zwischen algebraischer und geometrischer Beschreibung. So auch hier:

**Aufgabe:** (1) Skizzieren Sie das Bild des Weges

$$\gamma : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto \gamma(t) = |t| \cdot (\cos t, \sin t).$$

Schätzen Sie die Weglänge und den umschlossenen Flächeninhalt.

(2) Berechnen Sie zum Vektorfeld  $f(x, y) = (-y, x)$  das Arbeitsintegral  $\int_{\gamma} f(s) \cdot ds$  entlang des Weges  $\gamma$ .

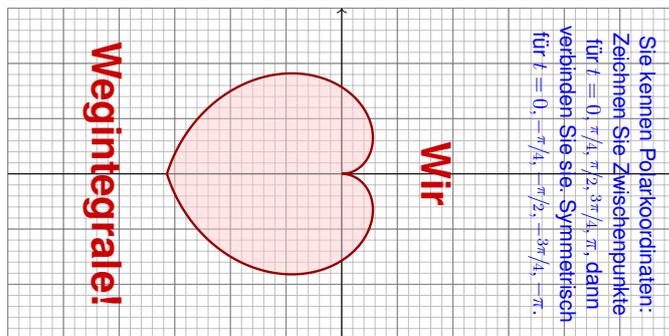
(3) Berechnen Sie den Flächeninhalt der vom Weg  $\gamma$  umschlossenen Fläche  $H \subseteq \mathbb{R}^2$ . Ist Ihr Ergebnis plausibel?

(4) Berechnen Sie schließlich das Arbeitsintegral  $\int_{\gamma} g(s) \cdot ds$  des Vektorfeldes  $g(x, y) = (x^2 + 4y, 10x + e^y)$  längs  $\gamma$ .

(5) Berechnen Sie die Weglänge  $\ell(\gamma)$ . Ist Ihr Ergebnis plausibel? Formelsammlung: Die folgende Stammfunktion (B411) ist hilfreich.

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + \text{const}$$

**Lösung:** (1) Wir beginnen mit der Skizze, das hilft zur Anschauung!



Der Weg  $\gamma$  hat Länge  $\ell(\gamma) \approx 12$ . Die vom Weg  $\gamma$  umschlossene Fläche  $H = \{ \rho \cdot (\cos \varphi, \sin \varphi) \mid -\pi \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \rho \leq |\varphi| \}$  hat Flächeninhalt  $\text{vol}_2(H) \approx 10$ . Die genauen Werte berechnen wir in (3) bzw. (5).

(2) Wir nutzen direkt die Definition des Arbeitsintegrals:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(s) \cdot ds &= \int_{t=-\pi}^{\pi} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_{t=-\pi}^{\pi} |t| \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \left[ \text{sign}(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + |t| \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right] \\ &= \int_{t=-\pi}^{\pi} t^2 dt = \left[ \frac{t^3}{3} \right]_{t=-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^3}{3} \approx 20.67 \end{aligned}$$

Die Betragsfunktion  $t \mapsto |t|$  im Punkt  $t \neq 0$  erfüllt  $\frac{d}{dt}|t| = \text{sign}(t) \in \{\pm 1\}$ . Wer den Betrag vermeiden will, zerlegt das Integral in  $\int_{-\pi}^0$  und  $\int_0^{\pi}$ .

(3) Wir nutzen den Satz von Green, hier als Flächenformel dank (2):

$$\text{vol}_2(H) = \int_H 1 d(x, y) dx = \frac{1}{2} \int_H \text{rot}(f) d(x, y) = \frac{1}{2} \int_{\gamma} f(s) \cdot ds = \frac{\pi^3}{3}$$

Alternativ können Sie den Flächeninhalt  $\text{vol}_2(H)$  ebenso mit dem Transformationssatz in Polarkoordinaten ausrechnen. Dies wurde in der vorigen Aufgabe zur Kardioide ausgeführt.

(4) Wir nutzen wieder den Satz von Green, diesmal umgekehrt zu (3):

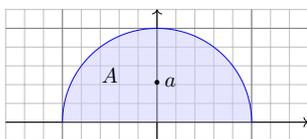
$$\int_{\gamma} g(s) \cdot ds = \int_H \text{rot}(g) d(x, y) = \int_H 6 d(x, y) = 6 \text{vol}_2(H) = 2\pi^3 \approx 62$$

(5) Wir berechnen schließlich die Weglänge (mittels B411):

$$\begin{aligned} \ell(\gamma) &= \int_{t=-\pi}^{\pi} |\gamma'(t)| dt = 2 \int_{t=0}^{\pi} \sqrt{1+t^2} dt \\ &= \left[ t\sqrt{1+t^2} + \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \right]_{t=0}^{\pi} \\ &= \pi\sqrt{1+\pi^2} + \ln(\pi + \sqrt{1+\pi^2}) \\ &\approx 12.2198 \end{aligned}$$

😊 Das Ergebnis ist anschaulich plausibel, es entspricht der Skizze. Die genauen Werte hingegen kann man nicht raten, nur berechnen.

😊 Mit den geeigneten Werkzeugen gelingt Ihnen die Lösung leicht. Ihre Integrationstechniken bieten Ihnen extrem effiziente Methoden.



**Aufgabe:** Berechnen Sie den Schwerpunkt  $(0, a)$  der Halbkreisfläche

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2, y \geq 0 \}.$$

(1) direkt mit Fubini und Transformationssatz sowie (2) mit Green. [E216](#)

(3) Plausibilitätscheck: Versuchen Sie zuerst, den Wert  $a$  zu schätzen!

**Lösung:** (1) Wir wissen  $\text{vol}_2(A) = \frac{\pi}{2}r^2$  und berechnen  $a$ :

$$\begin{aligned} a \text{vol}_2(A) &= \int_{(x,y) \in A} y d(x, y) = \int_{\rho=0}^r \int_{\varphi=0}^{\pi} \rho \sin \varphi \cdot \rho d\varphi d\rho \\ &= \int_{\rho=0}^r \rho^2 \left[ -\cos \varphi \right]_{\varphi=0}^{\pi} d\rho = 2 \left[ \frac{\rho^3}{3} \right]_{\rho=0}^r = \frac{2}{3}r^3 \end{aligned}$$

Der Schwerpunkt  $(0, a)$  hat also Abstand  $a = \frac{4}{3\pi}r$  vom Durchmesser.

(2) Wir parametrisieren die Halbkreislinie  $\Gamma$  durch  $\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t)$  und nutzen die Greensche Schwerpunktsformel:

$$\begin{aligned} a \text{vol}_2(A) &= \int_{\partial A} xy dy = \int_{\Gamma} xy dy + \int_{\Delta} xy dy = \int_{t=0}^{2\pi} \gamma_1(t) \gamma_2(t) \gamma_2'(t) dt \\ &= \int_{t=0}^{2\pi} r \cos(t) r \sin(t) r \cos(t) dt = r^3 \int_{t=0}^{2\pi} \sin(t) \cos(t)^2 dt \\ &= r^3 \left[ -\frac{1}{3} \cos(t)^3 \right]_{t=0}^{\pi} = r^3 \cdot \frac{2}{3} \end{aligned}$$

😊 Wir erhalten auch hier den Abstand  $a = \frac{4}{3\pi}r$  vom Durchmesser.

Der Rand  $\partial A$  der Halbkreisfläche besteht aus der Halbkreislinie  $\Gamma$  und dem Durchmesser  $\Delta$ . Der Integrationsweg über den Durchmesser trägt wegen  $y = 0$  ( $dy = 0$ ) nichts bei. Daher haben wir nur über  $\Gamma$  integriert.

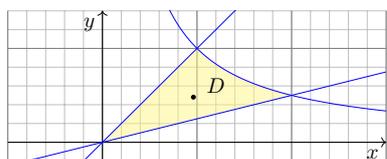
😊 Plausibilitätsprüfung: Der Wert  $a = \frac{4}{3\pi} \approx 0.424$  entspricht der Skizze für einen Halbkreis vom Radius  $r = 1$ ; anschaulich ist das plausibel.

**Aufgabe:** (1) Skizzieren Sie den beschränkten Bereich  $D \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}^2$ , der von den Kurven  $y = x$  und  $y = 1/x$  und  $y = x/4$  begrenzt wird.

(2) Bestimmen Sie den Flächeninhalt sowie den Schwerpunkt von  $D$  mit Hilfe der Greenschen Flächen- und Schwerpunktsformeln. [E216](#)

(3) Plausibilitätscheck: Versuchen Sie zuerst, die Werte zu schätzen!

**Lösung:** (1)



Das Gebiet  $D$  wird von den folgenden drei Wegen begrenzt:

$$\alpha : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \alpha(t) = (t, t/4)$$

$$\beta : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \beta(t) = (t, 1/t)$$

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t, t)$$

Der positiv orientierte Rand  $\partial D$  wird parametrisiert durch  $\alpha \cup -\beta \cup -\gamma$ .

(2) Flächeninhalt und Schwerpunkt von  $D$  berechnen wir nach Green:

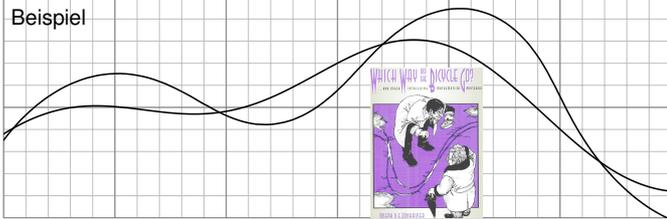
$$\begin{aligned} \text{vol}_2(D) &= \int_{\partial D} x dy = \int_0^2 t \cdot \frac{1}{4} dt - \int_1^2 t \cdot \frac{-1}{t^2} dt - \int_0^1 t \cdot t dt \\ &= \left[ \frac{t^2}{8} \right]_0^2 + \left[ \ln t \right]_1^2 - \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \ln 2 \approx 0.693 \\ x_D &= \frac{-1}{\text{vol}_2(D)} \int_{\partial D} xy dx = \frac{-1}{\ln 2} \left( \int_0^2 t \frac{t}{4} dt - \int_1^2 t \frac{1}{t} dt - \int_0^1 t^2 dt \right) \\ &= \frac{-1}{\ln 2} \left( \left[ \frac{t^3}{12} \right]_0^2 - \left[ t \right]_1^2 - \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^1 \right) = \frac{2}{3 \ln 2} \approx 0.962 \\ y_D &= \frac{1}{\text{vol}_2(D)} \int_{\partial D} xy dy = \frac{1}{\ln 2} \left( \int_0^2 t \frac{t}{4} dt - \int_1^2 t \frac{1}{t^2} dt - \int_0^1 t t dt \right) \\ &= \frac{1}{\ln 2} \left( \left[ \frac{t^3}{48} \right]_0^2 - \left[ \frac{1}{t} \right]_1^2 - \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^1 \right) = \frac{1}{3 \ln 2} \approx 0.481 \end{aligned}$$

😊 Plausibilitätsprüfung: Die Werte entsprechen recht gut der Skizze.

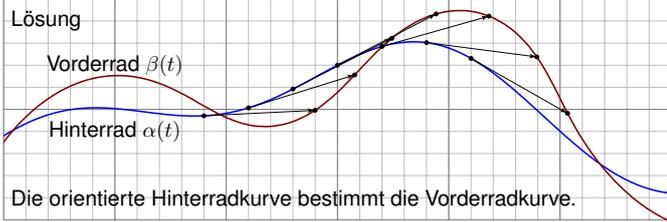
Sherlock Holmes: Which way did the bicycle go?

E309  
Ausführung

Beispiel



Lösung



Sherlock Holmes: Which way did the bicycle go?

E310  
Ausführung

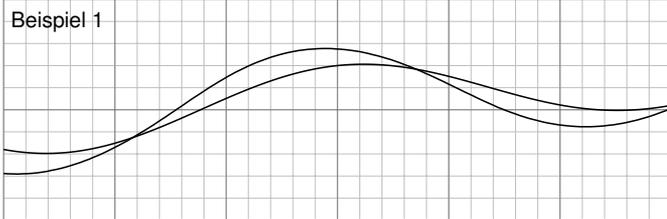
Das folgende geometrische Rätsel geht zurück auf eine Kurzgeschichte von Sir Arthur Conan Doyle: *The Adventure of the Priory School* (1904). Sherlock Holmes und Dr. Watson untersuchen Spuren eines Fahrrads. „Leider wissen wir nicht einmal, in welche Richtung das Fahrrad fuhr.“ — „Elementary, my dear Watson.“ Kann der Meisterdetektiv allein aus den beiden Radkurven die Fahrtrichtung rekonstruieren? Wie geht das?

**Aufgabe:** (1) Angenommen die Wege  $\alpha, \beta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  beschreiben die Position des Hinter- und Vorderrads zu jedem Zeitpunkt  $t \in [a, b]$ . Welche Beziehung besteht dann zwischen den Wegen  $\alpha$  und  $\beta$ ?  
 (2) Nachträglich sehen wir nicht die zeitlich parametrisierte Bewegung, sondern nur deren Spuren, also die Menge  $\alpha([a, b]) \cup \beta([a, b]) \subseteq \mathbb{R}^2$ . Diese enthalten viel weniger Information, wie Watson richtig bemerkt, zum Beispiel nicht die Zeit, die Geschwindigkeit, die Orientierung, etc. Kann Holmes dennoch die Fahrtrichtung rekonstruieren? Wie geht das?  
 (3) Implizit werden hier einige vereinfachende Annahmen gemacht. Formulieren Sie die Annahmen möglichst explizit. Ist die Lösung in den Beispielen eindeutig? Wann ist sie es nicht? Kommt das praktisch vor?

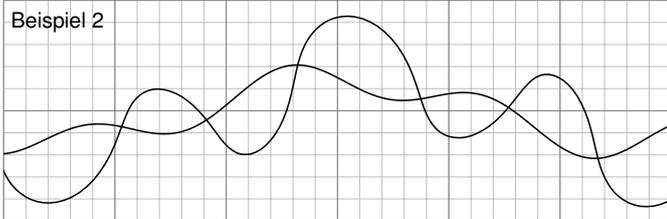
Sherlock Holmes: Which way did the bicycle go?

E311  
Ausführung

Beispiel 1



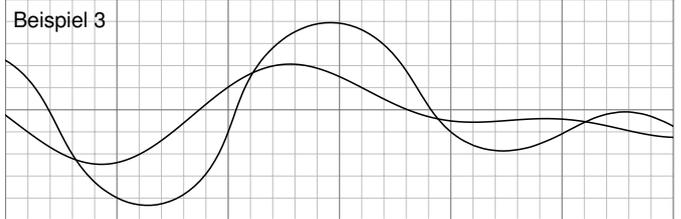
Beispiel 2



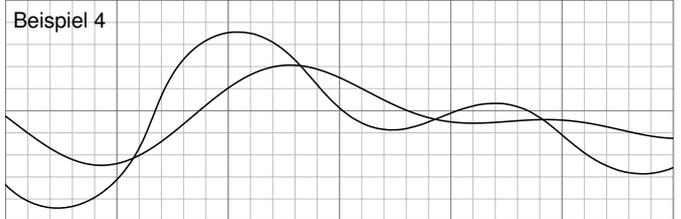
Sherlock Holmes: Which way did the bicycle go?

E312  
Ausführung

Beispiel 3



Beispiel 4



Sherlock Holmes: Which way did the bicycle go?

E313  
Ausführung

**Lösung:** (1) Die Hinterradkurve  $\alpha$  bestimmt die Vorderradkurve  $\beta$  gemäß „Vorderrad = Hinterrad + Radstand · Einheitstangente“:

$$\beta(t) = \alpha(t) + L \cdot \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}$$

(2) Auch ohne Parametrisierung lässt sich die Orientierung (meistens) allein aus den Kurven  $A = \alpha([a, b])$  und  $B = \beta([a, b])$  rekonstruieren. Die entscheidende Erkenntnis ist, dass die Einheitstangente  $\pm t_A(p)$  nur von der Kurve  $A$  abhängt, und nicht von ihrer Parametrisierung  $\alpha$ . Im Punkt  $p \in A$  betrachten wir die beiden Einheitstangenten  $\pm t_A(p)$ : Liegt  $p \pm L \cdot t_A(p)$  nicht auf  $B$ , so scheidet diese Orientierung aus. Entsprechend für  $q \in B$  mit den beiden Einheitstangenten  $\pm t_B(q)$ : Liegt  $q \pm L \cdot t_B(q)$  nicht auf  $A$ , so scheidet diese Orientierung aus.

☺ Meist muss man nur wenige Punkte prüfen, um bereits drei der vier Möglichkeiten auszuschließen. Die Tangenten kann man graphisch ausreichend genau abtragen. (Oft fällt auf, dass das Vorderrad stärker oszilliert, aber manchmal ist das weniger offensichtlich oder hilfreich.)

Sherlock Holmes: Which way did the bicycle go?

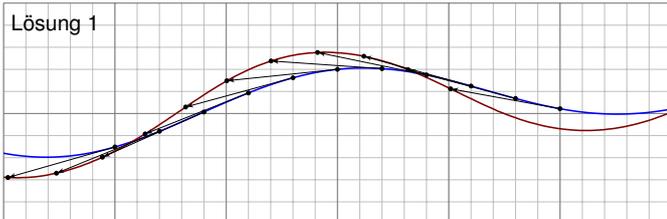
E314  
Ausführung

☺ Aus der Physik des Fahrrads folgt sofort die obige Formel! Praktische Probe: Auf DIN A4 ausdrucken und mit Playmobil-Fahrrad abfahren.  
 (3) Wir nehmen folgendes an: Die Spuren stammen tatsächlich von einem handelsüblichen Fahrrad; wir schließen zum Beispiel aus, dass es zwei Einräder gewesen sind. Als Position  $\alpha(t)$  des Hinterrades bzw.  $\beta(t)$  Vorderrades notieren wir jeweils den Berührungspunkt auf dem Boden. Das Fahrrad fährt nur vorwärts. Die Bewegung jedes Rades ist stets tangential zur Radrichtung, ohne Drift. Das Vorderrad ist beweglich, das Hinterrad hingegen starr, beide sind in einem festen Abstand  $L$ . Dieser Radstand ist etwa  $L \approx 1.1\text{m}$ , in den Beispielskizzen ist  $L = 1$ . Wir nehmen hierbei  $\alpha'(t) \neq 0$  für alle  $t \in [a, b]$  an, das Fahrrad bleibt also niemals stehen. Sonst könnte es viel kompliziertere Dinge tun! Auch Details wie Drift und ähnliches wollen wir hier vernachlässigen. Die Rekonstruktion versagt auch manchmal, zum Beispiel für zwei übereinanderliegende Geraden oder für zwei konzentrische Kreise. Von diesen einfachen und seltenen Ausnahmen abgesehen gelingt die Rekonstruktion in allen praktischen Beispielen: einfach. genial.

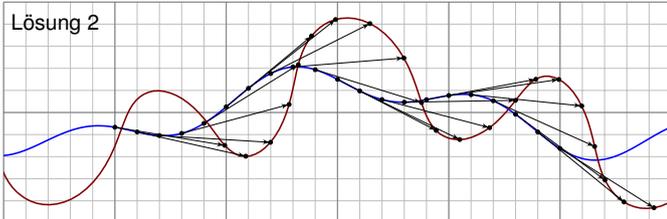
Sherlock Holmes: Which way did the bicycle go?

E315  
Ausführung

Lösung 1



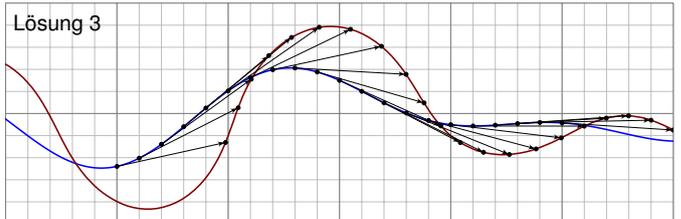
Lösung 2



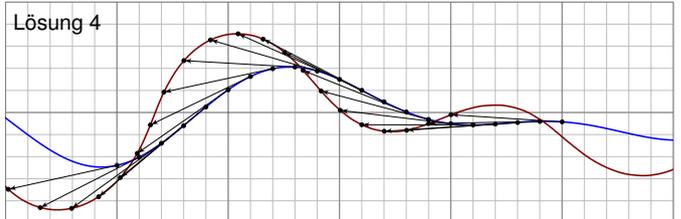
Sherlock Holmes: Which way did the bicycle go?

E316  
Ausführung

Lösung 3



Lösung 4



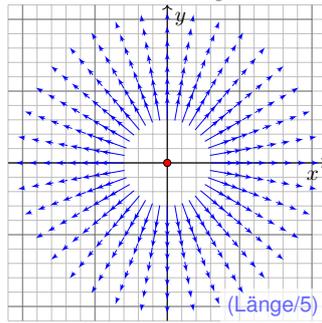
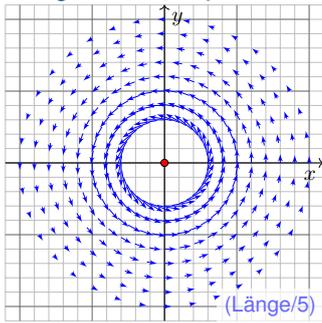
**Aufgabe:** (1) Skizzieren Sie die Vektorfelder  $f, g: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \quad g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Wie beschreiben Sie anschaulich Wirbelstärke und Quellstärke?

**Lösung:** Wirbelfeld  $f$ :

Quellenfeld  $g$ :



☺ Müssten wir zwei ebene Vektorfelder als die wichtigsten wählen, dann diese: Sie erklären, was die Welt im Innersten zusammenhält.

📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §5. Das Lehrbuch zur HM2 endet mit genau diesem Vektorfeld  $f$ .

☺ Physikalisch gesehen ist  $f$  das magnetische Feld eines Stroms und  $g$  das elektrische Feld einer Ladung in 0. (Denken Sie dreidimensional an einen langen Draht auf der  $z$ -Achse.) Komplex ist  $g$  die Funktion  $1/\bar{z} = 1/(x - iy) = (x + iy)/(x^2 + y^2)$ , und  $f = ig$  ist um  $90^\circ$  gedreht.

Das Vektorfeld  $g$  ist radial, sein Betrag (die Länge) nimmt mit  $1/r$  ab. Das Vektorfeld  $f$  ist tangential an Kreislinien, jeweils um  $90^\circ$  gedreht.

⚠ Im Nullpunkt  $(x, y) = (0, 0)$  befindet sich eine interessante Polstelle! Daher sind die Vektorfelder  $f, g$  nur auf  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  definiert.

☺ Diese Felder sind sowohl divergenzfrei als auch rotationsfrei! Das entspricht den Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen für  $1/z$ , die wir in Kapitel F für holomorphe Funktionen erklären und nutzen.

**Aufgabe:** (1) Skizzieren Sie die Vektorfelder  $f, g: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ .  
 (2) Berechnen Sie Divergenz und Rotation dieser Vektorfelder, sowie  
 (3) die Arbeits- und Flussintegrale über  $\gamma(t) = r(t)(\cos \varphi(t), \sin \varphi(t))$   
 (4) und über den Rand  $\partial D$  eines beliebigen Kompaktums  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ .  
 Welche Werte erwarten Sie nach Anschauung der Skizzen?

**Lösung:** (2) Gewissenhaftes Ableiten nach der Quotientenregel ergibt:

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{-(-y)(2x)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{-x(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

$$\operatorname{rot} f = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{(x^2 + y^2) - x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{-(x^2 + y^2) - (-y)(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

$$\operatorname{rot} g = \frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y} = \frac{-y(2x)}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{-x(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

$$\operatorname{div} g = \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} = \frac{(x^2 + y^2) - x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{(x^2 + y^2) - y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

Wie kann das sein? Das Vektorfeld  $g$  hat offensichtlich eine Quelle im Nullpunkt  $(0, 0)$ , aber überall sonst verschwindet die Divergenz  $\operatorname{div}(g)$ .

⚠ Im Nullpunkt  $(x, y) = (0, 0)$  hat das Vektorfeld  $g$  eine Polstelle! Die Quelledichte konzentriert sich im Nullpunkt; dort sind  $g$  und  $\operatorname{div}(g)$  nicht definiert, aber wir können und werden drumherum integrieren!

Der Satz von Gauß lässt sich hier nicht direkt anwenden, denn die Funktion  $g$  ist im Ursprung  $(0, 0) \in D$  nicht definiert (Polstelle). Zwar ist  $g$  überall sonst auf ganz  $D \setminus \{(0, 0)\}$  definiert, aber dieser Bereich ist nicht kompakt! Eindimensional siehe [E415]. Als Distribution gilt wirklich  $\operatorname{div}(g) = 2\pi \delta_{(0,0)}$ . [E329] In diesem allgemeineren Sinne bleibt der Satz von Gauß gültig.

Ebenso gilt: Das Vektorfeld  $f$  rotiert offensichtlich um den Nullpunkt  $(x, y) = (0, 0)$ , aber überall sonst verschwindet die Rotation  $\operatorname{rot}(f)$ .

⚠ Im Nullpunkt  $(x, y) = (0, 0)$  hat das Vektorfeld  $f$  eine Polstelle! Die Zirkulation konzentriert sich im Nullpunkt; dort sind  $f$  und  $\operatorname{rot}(f)$  nicht definiert, aber wir können und werden drumherum integrieren!

Der Satz von Green lässt sich hier nicht direkt anwenden, denn die Funktion  $f$  ist im Ursprung  $(0, 0) \in D$  nicht definiert (Polstelle). Zwar ist  $f$  überall sonst auf ganz  $D \setminus \{(0, 0)\}$  definiert, aber dieser Bereich ist nicht kompakt! Eindimensional siehe [E415]. Als Distribution gilt wirklich  $\operatorname{rot}(f) = 2\pi \delta_{(0,0)}$ . [E329] In diesem allgemeineren Sinne bleibt der Satz von Green gültig.

(3) Wir schreiben den Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  in Polarkoordinaten:

$$\gamma(t) = r(t) \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{pmatrix}, \quad \gamma'(t) = r'(t) \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{pmatrix} + r(t) \varphi'(t) \begin{pmatrix} -\sin \varphi(t) \\ \cos \varphi(t) \end{pmatrix}.$$

Für das Arbeits- und Flussintegral von  $f$  entlang  $\gamma$  finden wir sodann:

$$\int_{\gamma} f \cdot d\gamma = \int_{t=a}^b \begin{pmatrix} -\sin \varphi(t) \\ \cos \varphi(t) \end{pmatrix} \cdot \left[ r'(t) \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{pmatrix} + \varphi'(t) \begin{pmatrix} -\sin \varphi(t) \\ \cos \varphi(t) \end{pmatrix} \right] dt$$

$$= \int_{t=a}^b \varphi'(t) dt = \varphi(b) - \varphi(a) \quad \text{Winkelzuwachs entlang } \gamma$$

$$\int_{\gamma} f \times d\gamma = \int_{t=a}^b \begin{pmatrix} -\sin \varphi(t) \\ \cos \varphi(t) \end{pmatrix} \times \left[ r'(t) \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{pmatrix} + \varphi'(t) \begin{pmatrix} -\sin \varphi(t) \\ \cos \varphi(t) \end{pmatrix} \right] dt$$

$$= \int_{t=a}^b -\frac{r'(t)}{r(t)} dt = \left[ -\ln r(t) \right]_{t=a}^b = \ln \frac{r(a)}{r(b)} = 0 \quad \text{falls } r(a) = r(b)$$

☺ Beide Rechnungen entsprechen der Anschauung unserer Skizzen!

Für das Fluss- und Arbeitsintegral von  $g$  finden wir ebenso:

$$\int_{\gamma} g \times d\gamma = \int_{t=a}^b \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{pmatrix} \times \left[ \frac{r'(t)}{r(t)} \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{pmatrix} + \varphi'(t) \begin{pmatrix} -\sin \varphi(t) \\ \cos \varphi(t) \end{pmatrix} \right] dt$$

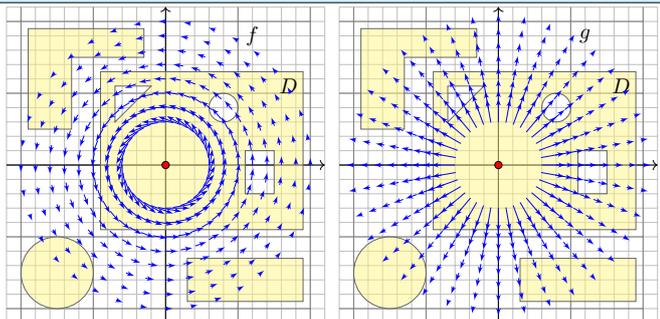
$$= \int_{t=a}^b \varphi'(t) dt = \varphi(b) - \varphi(a) \quad \text{Winkelzuwachs entlang } \gamma$$

$$\int_{\gamma} g \cdot d\gamma = \int_{t=a}^b \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{pmatrix} \cdot \left[ \frac{r'(t)}{r(t)} \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{pmatrix} + \varphi'(t) \begin{pmatrix} -\sin \varphi(t) \\ \cos \varphi(t) \end{pmatrix} \right] dt$$

$$= \int_{t=a}^b \frac{r'(t)}{r(t)} dt = \left[ \ln r(t) \right]_{t=a}^b = \ln \frac{r(b)}{r(a)} = 0 \quad \text{falls } r(a) = r(b)$$

☺ Beide Rechnungen entsprechen der Anschauung unserer Skizzen!

☺ Das Arbeitsintegral  $\int_{\gamma} f \cdot d\gamma$  bzw. das Flussintegral  $\int_{\gamma} g \times d\gamma$  misst die Winkeländerung. Für jeden geschlossenen Weg  $\gamma$  mit  $\gamma(a) = \gamma(b)$  zählen diese Integrale die Umläufe um den Nullpunkt, während die Integrale  $\int_{\gamma} f \times d\gamma$  und  $\int_{\gamma} g \cdot d\gamma$  wegen  $r(a) = r(b)$  verschwinden.



(4) Für  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  kompakt mit stückw. glattem Rand  $\partial D \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  gilt

$$\int_{\partial D} f(s) \times ds = \int_{\partial D} g(s) \cdot ds = 0 \quad \text{da die Kurve } \partial D \text{ geschlossen ist,}$$

$$\int_{\partial D} f(s) \cdot ds = \int_{\partial D} g(s) \times ds = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \notin D: \partial D \text{ umläuft } 0 \text{ nicht,} \\ 2\pi & \text{falls } 0 \in \dot{D}: \partial D \text{ umläuft } 0 \text{ einmal.} \end{cases}$$

☺ Dies ist die reelle Form des Cauchyschen Residuensatzes F4D. Physikalisch entspricht dies magnetischen / elektrischen Feldern. [H153]

Die erste Gleichung folgt direkt aus unserer Rechnung (3): Für geschlossene Kurven gilt  $r(a) = r(b)$ , also  $\ln[r(a)/r(b)] = 0$ . Für Kreislinien sieht man dieses Ergebnis direkt in obiger Skizze.

Die zweite Gleichung ist wesentlich interessanter! Der erste Fall folgt mit (2) dank Green / Gauß. Unsere Rechnung (3) klärt  $D = \bar{B}(0, r)$  für  $r > 0$ . (Diesen Spezialfall sieht man auch direkt!)

Im allgemeinen Fall  $0 \in \dot{D}$  wählen wir  $r > 0$  mit  $\bar{B}(0, r) \subseteq \dot{D}$ : Dann ist  $E = D \setminus B(z_0, r)$  kompakt mit Rand  $\partial E = \partial D \cup \partial B(0, r)$ . Da auf  $E$  kein Pol vorliegt, gilt  $\int_{\partial D} - \int_{\partial B(0, r)} = \int_{\partial E} = 0$  dank (2). Hieraus erhalten wir schließlich  $\int_{\partial D} = \int_{\partial B(0, r)} = 2\pi$  dank (3).

☺ Diese schönen und einfachen Gleichungen gelten immer, egal wie kompliziert der Bereich  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  und seine Randkurve  $\partial D$  auch sind. Alles ist schön und gut. Unseren Integralsätzen sei Dank!

Zur Anschauung und Erinnerung: Das ebene Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  können wir als Strömungsgeschwindigkeit einer Flüssigkeit visualisieren. Wir denken an eine dünne Schicht, zum Beispiel die Wetterkarte. E009

Dreidimensionale Felder  $F: \mathbb{R}^3 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  behandeln wir in Kapitel G. Wenn  $F$  nicht von  $z$  abhängt und auch keinen  $z$ -Anteil hat, dann gilt  $F(x, y, z) = (f_1(x, y), f_2(x, y), 0)$ , und  $f$  ist ein ebenes Vektorfeld. Dies dient zur Vereinfachung bei der Umströmung eines Profils.

Strömungen haben im allgemeinen Wirbel, auch Quellen und Senken. Dies wollen wir anschaulich verstehen und präzise berechnen lernen, differentiell durch Divergenz  $\text{div}(f)$  und Rotation  $\text{rot}(f)$ , sowie integral als Fluss und Arbeit. Hierzu nutzen wir die Sätze von Gauß und Green.

Das Quellenfeld und das Wirbelfeld sind hierzu zentrale Beispiele! Sie dienen als Prototyp für typische Situationen; durch Überlagerung (Linearkombination) können wir hieraus weitere Modelle konstruieren.

😊 Von ebenen Strömungen  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  gelangen wir so zu komplexen Funktionen  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Die physikalischen Eigenschaften der Strömung übersetzen sich direkt in mathematische Eigenschaften der Funktion  $f$ .

Die komplexe Funktion  $h: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto 1/z = \bar{z}/|z|^2$  ist zentral für die Funktionentheorie. In reellen Koordinaten ausgeschrieben gilt:

$$h: z \mapsto \frac{1}{z}, \quad x + iy \mapsto \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

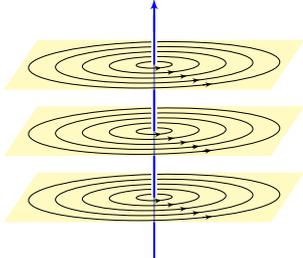
Komplex-konjugiert erhalten wir genau unser Quellenfeld:

$$g: z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}, \quad x + iy \mapsto \frac{1}{x - iy} = \frac{x + iy}{x^2 + y^2}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit  $i$  (Drehung um  $90^\circ$ ) ergibt unser Wirbelfeld:

$$f: z \mapsto \frac{i}{z}, \quad x + iy \mapsto \frac{i}{x - iy} = \frac{-y + ix}{x^2 + y^2}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

😊 Komplexe Funktionen  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  beschreiben ebene Strömungen und werden hierzu vielfach genutzt. Geeignete Modelle gewinnen wir durch Überlagerung (Linearkombination, Laurent-Reihen), zum Beispiel die idealisierte Umströmung von Flügelprofilen. Wo diese Idealisierung nicht ausreicht, nutzt man numerische Näherungen und Computer.



Die Magnetostatik untersucht zeitlich konstante elektrische Ströme und das von ihnen erzeugte, zeitlich konstante Magnetfeld  $\vec{B}(x, y, z)$ , z.B. Dauermagnet, Erdmagnetfeld und Kompass, etc.

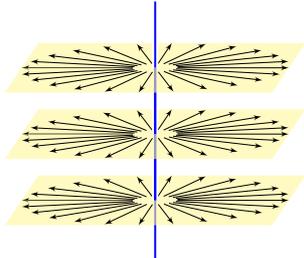
Einfaches Beispiel: Der konstante Strom  $j$  sei konzentriert auf die  $z$ -Achse, die wir uns als einen unendlich dünnen Leiter vorstellen.

Das magnetische Feld ist dann zirkulär um die  $z$ -Achse (gemäß der Rechte-Hand-Regel) mit Stärke  $|\vec{B}| = \text{const}/r$  und wird singular auf der  $z$ -Achse. Das Randintegral berechnen wir für eine Kreisscheibe  $S$  um die  $z$ -Achse.

**Beispiel:** Magnetisches Feld eines Stroms  $j$  entlang der  $z$ -Achse:

$$\vec{B}(x, y, z) = \frac{2j/c}{x^2 + y^2} (-y, x, 0) \implies \oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{4\pi j}{c}$$

😊 Außerhalb der  $z$ -Achse  $(0, 0, z)$  gilt Rotationsfreiheit,  $\text{rot } \vec{B} = 0$ , und Quellenfreiheit,  $\text{div } \vec{B} = 0$ , wie in der vorigen Aufgabe nachgerechnet. Die dekorative Schreibweise „ $\oint$ “ soll betonen bzw. daran erinnern, dass wir hier einen geschlossenen Weg betrachten.



Die Elektrostatik untersucht ruhende elektrische Ladungen und das von ihnen erzeugte, zeitlich konstante elektrische Feld  $\vec{E}(x, y, z)$ .

Einfaches Beispiel: Die Ladungsdichte  $2q$  sei konzentriert auf die  $z$ -Achse, die wir uns als einen unendlich dünnen Leiter vorstellen.

Das elektrische Feld ist dann radial nach außen gerichtet mit Stärke  $|\vec{E}| = \text{const}/r$  und wird singular auf der  $z$ -Achse. Das Flussintegral berechnen wir in der Ebene (bei festem  $z$ ) für eine Kreisscheibe  $D$  vom Radius  $r$  um  $0$  bzw. im Raum für den Zylinder  $Z = D \times [a, b]$ .

**Beispiel:** Elektrisches Feld einer Ladungsdichte  $q$  entlang der  $z$ -Achse:

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{2q}{x^2 + y^2} (x, y, 0) \implies \iint_{\partial Z} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = 4\pi q(b - a)$$

😊 Außerhalb der  $z$ -Achse  $(0, 0, z)$  gilt Quellenfreiheit,  $\text{div } \vec{E} = 0$ , und Rotationsfreiheit,  $\text{rot } \vec{E} = 0$ , wie in der vorigen Aufgabe nachgerechnet. Die dekorative Schreibweise „ $\iint$ “ soll betonen bzw. daran erinnern, dass wir hier eine geschlossene Fläche betrachten.

Wir untersuchen weiterhin das Wirbelfeld  $f$  und das Quellenfeld  $g$ :

$$f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \quad g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

⚠ Im Punkt  $(0, 0)$  liegt eine Polstelle. Wir setzen  $f, g$  hier beliebig fort, etwa  $f(0, 0) = g(0, 0) = (0, 0)$ . Bei der Integration spielt ein einzelner Punkt keine Rolle: Das Problem liegt im Verhalten um den Nullpunkt!

😊 In solchen Fällen helfen uns Theorie und Kalkül der Distributionen. Sie erklären und präzisieren unsere physikalische Anschauung:

**Satz E3A: Wirbel und Quelle**  
Im Distributionensinne gilt  $\text{rot}(f) = 2\pi\delta_0$  und  $\text{div}(g) = 2\pi\delta_0$ .

Auf ganz  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  wissen wir bereits  $\text{rot}(f) = 0$  und  $\text{div}(g) = 0$ . Demnach sind  $\text{rot}(f)$  und  $\text{div}(g)$  höchstens im Nullpunkt getragen, nach dem Darstellungssatz D5R also von der Form  $\sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha \delta_0^\alpha$ . Die Konstanten  $c_\alpha$  müssen wir allerdings noch ausrechnen!

😊 Die Rechnung gelingt leicht dank unserer Integralsätze!

**Aufgabe:** (1) Welche der Funktionen  $1/(x^2 + y^2)$  und  $x/(x^2 + y^2)$  und  $y/(x^2 + y^2)$  sind absolut integrierbar auf  $\bar{B}(0, r)$ , also lokal integrierbar? Untersuchen Sie allgemein  $h(x, y) = x^\alpha y^\beta / (x^2 + y^2)^{\gamma/2}$  für  $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ .

Hinweis: Integrieren Sie für  $0 < \varepsilon < r$  zunächst über den Kreisring  $\bar{K}(0, \varepsilon, r) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varepsilon \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq r \}$ . Untersuchen Sie  $\varepsilon \searrow 0$ .

**Erinnerung:** Klassisch, also für stetig differenzierbare Vektorfelder  $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ , gilt  $\text{rot}(f) = \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1$  und  $\text{div}(g) = \partial_1 g_1 + \partial_2 g_2$ . Im vorliegenden Beispiel liegt jedoch eine Polstelle im Punkt  $(0, 0)$  vor! Im Distributionensinne wälzen wir die Ableitungen von  $f$  bzw.  $g$  auf die glatte Testfunktion  $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  und erhalten so die Distributionen

$$\text{rot}(f) : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} -f_2 \partial_1 \varphi + f_1 \partial_2 \varphi d(x, y),$$

$$\text{div}(g) : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} -g_1 \partial_1 \varphi - g_2 \partial_2 \varphi d(x, y).$$

(2) Dank (1) existieren diese beiden Integrale. Berechnen Sie diese! Arbeiten Sie zunächst auf  $\bar{K} = \bar{K}(0, \varepsilon, r)$ : (a) Berechnen Sie  $\text{rot}(\varphi f)$ . (b) Nutzen Sie unsere Integralsätze! (c) Betrachten Sie dann  $\varepsilon \searrow 0$ .

**Lösung:** (1) Wir integrieren für  $0 < \varepsilon < r$  zunächst über den Kreisring:

$$\int_{\bar{B}(0, r)} |h(x, y)| d(x, y) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\bar{K}(0, \varepsilon, r)} |h(x, y)| d(x, y)$$

Wir nutzen Polarkoordinaten  $(x, y) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ , Fubini und HDI:

$$\int_{\rho=\varepsilon}^r \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\rho^{|\alpha|} |\cos \theta|^\alpha \cdot \rho^{|\beta|} |\sin \theta|^\beta}{\rho^\gamma} \cdot \frac{\rho}{|\text{Fu}|\text{det}} d\theta d\rho$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} |\cos \theta|^\alpha |\sin \theta|^\beta d\theta \cdot \int_{\rho=\varepsilon}^r \rho^{\sigma+1} d\rho = c \cdot \left[ \frac{\rho^{\sigma+2}}{\sigma+2} \right]_{\rho=\varepsilon}^r$$

Wir haben  $c := \int_{\theta=0}^{2\pi} |\cos \theta|^\alpha |\sin \theta|^\beta d\theta > 0$  (ein Wert der Beta-Funktion). Zur Abkürzung schreiben wir die Exponentensumme hier  $\sigma := \alpha + \beta - \gamma$ . Im Sonderfall  $\sigma = -2$  finden wir ebenso  $c(\ln r - \ln \varepsilon) = c \ln(r/\varepsilon)$ . Der Grenzwert für  $\varepsilon \searrow 0$  ist endlich für  $\sigma > -2$ , unendlich für  $\sigma \leq -2$ .

**Satz E3B: absolute Integrierbarkeit von Polstellen**  
Die Funktion  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $h(x, y) = x^\alpha y^\beta / (x^2 + y^2)^{\gamma/2}$  ist genau dann lokal integrierbar, wenn die Exponentensumme  $\alpha + \beta - \gamma > -2$  erfüllt.

(2a) Sei  $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ , das heißt  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar mit kompaktem Träger,  $\text{supp}(\varphi) \subseteq \bar{B}(0, r)$  für  $r$  groß. Auf  $\bar{K}(0, \varepsilon, r)$  gilt:

$$\text{rot}(\varphi f) = \partial_1(\varphi f_2) - \partial_2(\varphi f_1) = \underbrace{(\partial_1 \varphi) f_2 - (\partial_2 \varphi) f_1}_{= \text{grad}(\varphi) \times f, \text{ unser Integrand!}} + \underbrace{\varphi (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1)}_{= \text{rot}(f) = 0}$$

(2b) Wir wenden den Integralsatz von Green auf  $\varphi f: \bar{K}(0, \varepsilon, r) \rightarrow \mathbb{R}^2$  an:

$$I(\varepsilon) := \int_{\bar{K}} -(\partial_1 \varphi) f_2 + (\partial_2 \varphi) f_1 d(x, y) \stackrel{(2a)}{=} - \int_{\bar{K}} \text{rot}(\varphi f) d(x, y)$$

$$\stackrel{\text{Green}}{=} - \int_{\partial \bar{K}} \varphi f \cdot ds = \underbrace{\int_{\partial B(0, \varepsilon)} \varphi(s) f(s) \cdot ds}_{\text{innerer Rand}} - \underbrace{\int_{\partial B(0, r)} \varphi(s) f(s) \cdot ds}_{= 0, \text{ da hier } \varphi(s) = 0}$$

(2c) Dank Mittelwertsatz B4B existiert  $s_\varepsilon \in \partial B(0, \varepsilon)$  sodass gilt:

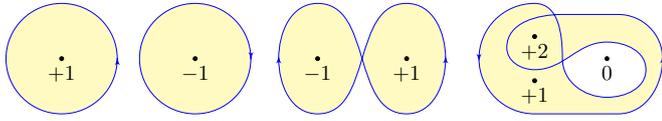
$$I(\varepsilon) := \int_{\partial B(0, \varepsilon)} \varphi(s) f(s) \cdot ds = \varphi(s_\varepsilon) \int_{\partial B(0, \varepsilon)} f(s) \cdot ds = \varphi(s_\varepsilon) \cdot 2\pi$$

Für  $\varepsilon \searrow 0$  gilt  $s_\varepsilon \rightarrow 0$ , also  $I(\varepsilon) \rightarrow 2\pi\varphi(0)$ . Im Distributionensinne (D5) gilt somit  $\text{rot}(f) = 2\pi\delta_0$ , denn  $\int_{\mathbb{R}^2} -f_2(\partial_1 \varphi) + f_1(\partial_2 \varphi) d(x, y) = 2\pi\varphi(0)$ .

**Aufgabe:** (Der Cauchy-Index bzw. die Umlaufzahl in der Ebene)  
(1) Für jeden geschlossenen Weg  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  ist der **Index**

$$\text{ind}_0(\gamma) := \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{x \, dy - y \, dx}{x^2 + y^2}$$

eine ganze Zahl; sie zählt die Umläufe von  $\gamma$  um den Nullpunkt.  
(Die dekorative Schreibweise „ $\oint_{\gamma}$ “ statt „ $\int_{\gamma}$ “ soll betonen bzw. daran erinnern, dass wir hier einen geschlossenen Weg  $\gamma$  betrachten.)



☺ Dieses prominente Beispiel ist das Arbeitsintegral des Wirbelfeldes  $f$  und das Flussintegral des Quellenfeldes  $g$  der vorigen Aufgabe. [E317]  
Die komplexe Formulierung nutzen wir im Residuenkalkül. [F409]

**Nachrechnen:** Zu  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  und  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  erhalten wir

$$\gamma : [a, b] \rightarrow U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} : t \mapsto r(t) (\cos \varphi(t), \sin \varphi(t)).$$

Jeder Weg  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  lässt sich so in Polarkoordinaten darstellen.  
Es gilt  $\gamma(b) = \gamma(a)$  gdw  $r(b) = r(a)$  und  $\varphi(b) = \varphi(a) + 2\pi\ell$  mit  $\ell \in \mathbb{Z}$ .  
Diese Zahl  $\ell$  ist die Anzahl der Umläufe von  $\gamma$  um den Nullpunkt.

Sei  $f(x, y) = (-y, x)/(x^2 + y^2)$ . Für  $f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$  finden wir

$$\left\langle \frac{1}{r(t)} \begin{pmatrix} -\sin \varphi(t) \\ \cos \varphi(t) \end{pmatrix} \middle| r'(t) \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{pmatrix} + r(t) \varphi'(t) \begin{pmatrix} -\sin \varphi(t) \\ \cos \varphi(t) \end{pmatrix} \right\rangle = \varphi'(t).$$

Demnach misst der Integrand  $f \cdot d\gamma = d\varphi$  die Winkeländerung:

$$\int_{\gamma} f \cdot d\gamma = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b \varphi'(t) dt = \varphi(b) - \varphi(a)$$

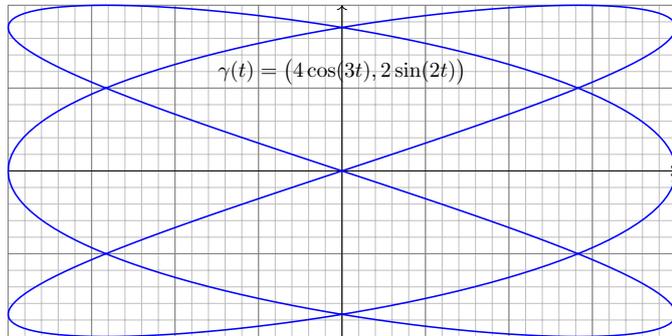
Geteilt durch  $2\pi$  erhalten wir die Zahl  $\ell$  der Umläufe um den Ursprung.

☺ Damit sehen wir diesem Integral das Ergebnis geometrisch an.

**Aufgabe:** (2) Bestimmen Sie zum folgenden Weg  $\gamma$  die Umlaufzahl

$$\text{ind}_p(\gamma) := \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{(x-a) \, dy - (y-b) \, dx}{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

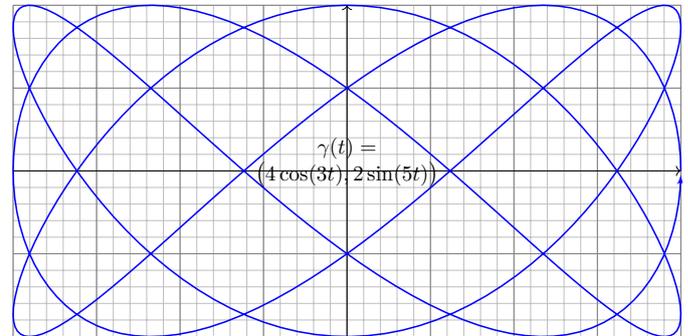
für jeden Punkt  $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ , der nicht auf der Kurve liegt.



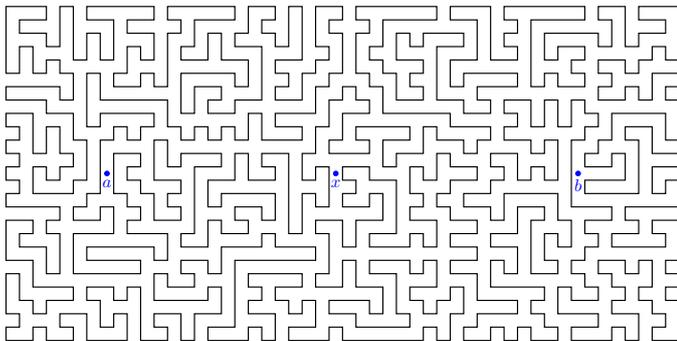
**Aufgabe:** (3) Bestimmen Sie zum folgenden Weg  $\gamma$  die Umlaufzahl

$$\text{ind}_p(\gamma) := \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{(x-a) \, dy - (y-b) \, dx}{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

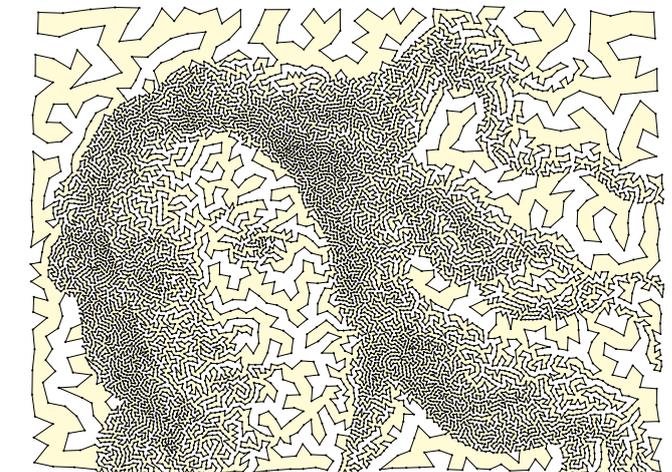
für jeden Punkt  $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ , der nicht auf der Kurve liegt.



Wir betrachten die folgende einfach geschlossene Kurve  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ :



Können Sie die Punkte  $a$  mit  $b$  durch einen Weg in  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  verbinden?  
und  $a$  mit  $c$ ? und  $b$  mit  $c$ ? Wie kann man das effizient feststellen?



Gegeben seien Zeitpunkte  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  in  $\mathbb{R}$  sowie eine Folge von Bildpunkten  $p_0, p_1, \dots, p_n$  in der Ebene  $\mathbb{R}^2$ . [E102]

Diese Daten definieren den Polygonzug  $\gamma = [t_0 \ t_1 \ \dots \ t_n] : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Wir nehmen an, dass  $\gamma$  einfach geschlossen ist, also  $\gamma(a) = \gamma(b)$  erfüllt, aber sonst keine Doppelpunkte hat. Dann gilt folgender schöne Satz:

**Jordanscher Kurvensatz:** Jede einfach geschlossene Kurve  $\Gamma = \gamma([a, b])$  zerlegt die Ebene in zwei zusammenhängende Gebiete,  $\mathbb{C} \setminus \Gamma = A \cup B$ , mit  $A$  unbeschränkt (außen) und  $B$  beschränkt (innen).

**Aufgabe:** (1) Zeichnen Sie möglichst komplizierte Beispiele einfach geschlossener Polygonzüge. Wählen Sie zufällig einen Punkt  $q \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ : Wie können Sie in Ihren Beispielen feststellen, ob  $q$  zum Inneren  $B$  gehört oder zum Äußeren  $A$ ? Wie gelingt dies möglichst effizient?

(2) Wie kann man durch ein Integral / eine Summe feststellen, ob ein gegebener Punkt  $q \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  zum Inneren oder zum Äußeren gehört? Dieses Problem und seine Lösung tritt z.B. in CAD-Programmen auf. Versuchen Sie einen Algorithmus zu formulieren / zu programmieren.

**Lösung:** (1) Zeichnen Sie ein paar Beispiele, es macht Spaß!

(2) Wir berechnen die Umlaufzahl des Weges  $\gamma$  um den Punkt  $q$ :

$$\text{ind}_q(\gamma) = \text{ind}_0(\gamma - q) = \sum_{k=1}^n \angle(p_{k-1}, q, p_k)$$

Dies ergibt immer ein Vielfaches von  $2\pi$ , dank der vorigen Aufgabe.  
Da der Weg  $\gamma$  einfach geschlossen ist, parametrisiert er den Rand  $\partial B$ .  
Dank der vorigen Aufgaben sind somit nur drei Werte möglich:

$$\text{ind}_q(\gamma) = \begin{cases} \pm 2\pi & \text{falls } \gamma \text{ den Punkt } q \text{ positiv/negativ umläuft,} \\ 0 & \text{falls } \gamma \text{ den Punkt } q \text{ nicht umläuft.} \end{cases}$$

In den ersten beiden Fällen liegt  $q$  im Inneren, sonst im Äußeren.

Für die schnelle Berechnung per Computer kann man die Formel noch weiter optimieren. Das ist Grundlage aller graphischen Oberflächen (CAD, GIS, etc): Jeder Mausclick löst eine solche Berechnung aus!

Auch in Spielen werden Objekte eines 3D-Szenarios, etwa simpliziale Flächen, auf die Bildebene projiziert; zur realistischen Anzeige müssen insbesondere Überschneidungen erkannt und korrekt behandelt werden.

**Wiederholung:** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet. Was versteht man unter...  
 (1) einem Skalarfeld  $F$  auf  $U$ ? (2) einem Vektorfeld  $f$  auf  $U$ ?  
 (3) dem Gradienten von  $F$ ? (4) einem Potential zu  $f$ ?  
 (5) Was besagt der HDI für ein Vektorfeld  $f$  mit Potential  $F$ ?  
 (6) Was gilt demnach für Arbeitsintegrale geschlossener Wege?

- (1) Ein **Skalarfeld** auf  $U$  ist eine stetige Abbildung  $F: \mathbb{R}^n \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}$ .
- (2) Ein **Vektorfeld** auf  $U$  ist eine stetige Abbildung  $f: \mathbb{R}^n \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^n$ .
- (3) Zu jedem stetig diff'baren Skalarfeld  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$  ist der **Gradient**

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ gegeben durch } f = F' = \text{grad } F = \left( \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right).$$

- (4) Ein **Potential** zu  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist ein Skalarfeld  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F' = f$ .
- (5) Für jeden stückweise stetig diff'baren Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  gilt dann:

$$\int_{\gamma} f \cdot d\gamma \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{t=a}^b F'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \stackrel{\text{KR}}{=} \int_{t=a}^b \frac{dF(\gamma(t))}{dt} dt \stackrel{\text{HDI}}{=} F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

- (6) Ist  $f = F'$  und  $\gamma$  geschlossen, also  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , so folgt  $\oint_{\gamma} f \cdot d\gamma = 0$ .

Der Hauptsatz für Arbeitsintegrale

Unser Vorbild ist der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:  
 Für jede stetig diff'bare Funktion  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit Ableitung  $f = F'$  gilt

$$\text{HDI: } \int_{s=a}^b f(s) ds = F(b) - F(a)$$

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\Gamma \subseteq U$  eine orientierte, stückweise glatte Kurve.  
 Die Orientierung teilt die Randpunkte  $s \in \partial\Gamma$  in Start- und Zielpunkte;  
 Startpunkte zählen negativ,  $n(s) = -1$ , Zielpunkte positiv,  $n(s) = +1$ .  
 Gegeben sei zudem eine stetig differenzierbare Funktion  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ .

Satz E3c: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

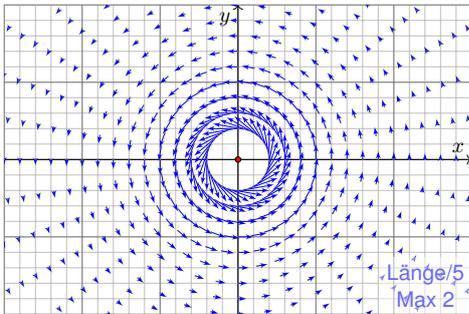
Für das Arbeitsintegral jedes Gradientenfeldes  $f = F' = \text{grad } F$  gilt:

$$\int_{s \in \Gamma} f(s) \cdot ds = \sum_{s \in \partial\Gamma} F(s) n(s)$$

Ist die Kurve  $\Gamma$  geschlossen, also  $\partial\Gamma = \emptyset$ , so folgt  $\oint_{\Gamma} f(s) \cdot ds = 0$ .

Zentrales Beispiel: das Wirbelfeld

**Aufgabe:** (1) Sei  $a \in \mathbb{R}$ . Skizzieren Sie das zirkuläre Vektorfeld  
 $f: U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $f(x, y) = (-y, x)/(x^2 + y^2)^{a/2}$ .



Das Vektorfeld  $f$  ist tangential zum Kreis und hat Norm  $|f(x, y)| = r^{1-a}$ .  
 Im Nullpunkt hat  $f$  für  $a > 1$  eine Polstelle, stetig fortsetzbar für  $a < 1$ .

Zentrales Beispiel: das Wirbelfeld

**Aufgabe:** Wir untersuchen  $f(x, y) = (-y, x)/(x^2 + y^2)$ .  
 Dies ist das obige Wirbelfeld im besonders interessanten Fall  $a = 2$ .

- (5) Ist  $F = \arctan(y/x)$  ein Potential zu  $f$ ? Auf welchem Gebiet?
- (6) Ist  $G = -\arctan(x/y)$  ein Potential zu  $f$ ? Auf welchem Gebiet?
- (7) Bestimmen Sie  $\int_{\Gamma} f(s) \cdot ds$  für eine beliebige Kurve  $\Gamma$  von  $p$  nach  $q$ , die ganz in einer Halbebene liegt, etwa in  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ .
- (8) Bestimmen Sie  $\oint_{\partial Q} f(s) \cdot ds$  für  $Q = [a, b] \times [c, d]$  mit  $0 \notin Q$  bzw.  $0 \in \overset{\circ}{Q}$ .

**Lösung:** (5) Wir nutzen direkt die Definition und machen die Probe:

$$\begin{aligned} \partial_x \arctan\left(\frac{y}{x}\right) &= \frac{1}{1 + (y/x)^2} \cdot \frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \\ \partial_y \arctan\left(\frac{y}{x}\right) &= \frac{1}{1 + (y/x)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{+x}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Dies ist ein Potential zu  $f$  auf der Halbebene  $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$  und auf  $\mathbb{R}_{<0} \times \mathbb{R}$ .  
 Auf der Geraden  $x = 0$  ist  $F$  nicht definiert, auch nicht stetig fortsetzbar.

- (6) Ebenso ist  $-\arctan(x/y)$  ein Potential auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$  und auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{<0}$ .

(1–2) Jedem Punkt  $x \in U$  aus dem Definitionsgebiet  $U$  wird eine reelle Zahl  $F(x) \in \mathbb{R}$  bzw. ein Vektor  $f(x) \in \mathbb{R}^n$  zugeordnet. Wir nehmen meist stillschweigend an, dass diese Zuordnungen stetig / stetig diff'bar sind.  
 (3–4) In Dimension  $n = 1$  ist  $f = F'$  **Ableitung** und  $F$  **Stammfunktion**. Potentiale sind nur bis auf additive Konstanten eindeutig bestimmt.

(5) Das Arbeitsintegral eines Gradientenfeldes  $f = F'$  hängt nur vom **Start**  $p = \gamma(a)$  und **Ziel**  $q = \gamma(b)$  ab, ansonsten aber nicht vom Weg  $\gamma$ . Physikalisch entspricht dies der Energieerhaltung: Die zur Bewegung entlang  $\gamma$  aufgebrauchte Arbeit wird als Lageenergie gespeichert.  
 (6) So kann man feststellen, ob ein Vektorfeld  $f$  ein Potential hat: Aus  $\oint_{\gamma} f \cdot d\gamma \neq 0$  folgt, dass das Feld  $f$  kein Potential haben kann.

Wir nennen ein Vektorfeld  $f$  **konservativ**, wenn  $\oint_{\gamma} f \cdot d\gamma = 0$  gilt. Das bedeutet, längs geschlossener Wege wird keine Arbeit verrichtet. Jede an einer Stelle des Weges aufgewandte Energie wird an anderer Stelle zurückgewonnen, die Gesamtenergie bleibt schließlich erhalten.

Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §5. Das Potentialproblem lösen wir in Kapitel H und nutzen dies in Kapitel M zur Lösung von exakten Differentialgleichungen.

Der Hauptsatz für Arbeitsintegrale

Dies ist ein erster wichtiger Integralsatz! In Worten: Das Arbeitsintegral jedes Gradientenfeldes  $f = F'$  entlang jeder Kurve  $\Gamma$  ist gleich der Differenz des Potentials  $F$  in den Start- und Zielpunkten der Kurve  $\Gamma$ .

**Aufgabe:** Begründen Sie diese Integralformel E3c möglichst detailliert. Wie allgemein darf die Kurve  $\Gamma$  hierbei sein? glatt? stückweise?

**Lösung:** Wir unterteilen  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_k$  in endlich viele glatte Kurven und parametrisieren jede durch einen regulären Weg  $\gamma_1: [a_1, b_1] \rightarrow \Gamma_1, \dots, \gamma_k: [a_k, b_k] \rightarrow \Gamma_k$ . Für das gesuchte Arbeitsintegral über  $\Gamma$  gilt dann:

$$\int_{\Gamma} f \cdot d\Gamma = \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} f \cdot d\gamma_i = \sum_{i=1}^k F(\gamma(b_i)) - F(\gamma(a_i)) = \sum_{s \in \partial\Gamma} F(s) n(s)$$

Hier durchläuft jeder Weg  $\gamma_i$  seine Kurve  $\Gamma_i$  gemäß der vorgegebenen Orientierung vom Startpunkt  $p_i = \gamma(a_i)$  zum Zielpunkt  $q_i = \gamma(b_i)$ . Jeder innere Punkt  $s$  tritt dabei zweimal auf: einmal als Ziel  $s = q_i$  und einmal als Start  $s = p_j$ . In der Summe heben sich beide Beiträge auf! In der Gesamtsumme bleibt nur der Rand von  $\Gamma$ , also  $\sum_{s \in \partial\Gamma} F(s) n(s)$ .

Zentrales Beispiel: das Wirbelfeld

- (2) Berechnen Sie das Arbeitsintegral von  $f$  entlang des Weges

$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ mit } \gamma(t) = (r \cos t, r \sin t).$$

- (3) Berechnen Sie  $\text{rot}(f)$ . Für welche  $a$  ist  $\text{rot}(f)$  konstant? Null?
- (4) Für welche  $a$  existiert zu  $f$  ein Potential  $F: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ?

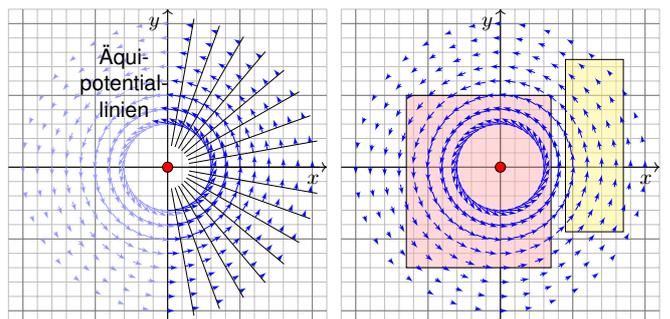
**Lösung:** (2) Wir berechnen das Arbeitsintegral von  $f$  entlang  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f \cdot d\gamma &= \int_{t=0}^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_{t=0}^{2\pi} \frac{1}{r^a} \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_{t=0}^{2\pi} r^{2-a} dt = 2\pi r^{2-a}. \end{aligned}$$

- (3) Wir finden  $\text{rot}(f) = \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 = (2-a)/(x^2 + y^2)^{a/2}$ . Die Rotation ist konstant für  $a \in \{0, 2\}$ , und Null nur für  $a = 2$ .
- (4) Das Feld  $f$  erlaubt kein Potential auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , denn  $\oint_{\gamma} f \cdot d\gamma \neq 0$ . **⚠** Für  $a = 2$  ist das Feld  $f$  rotationsfrei, besitzt aber kein Potential!

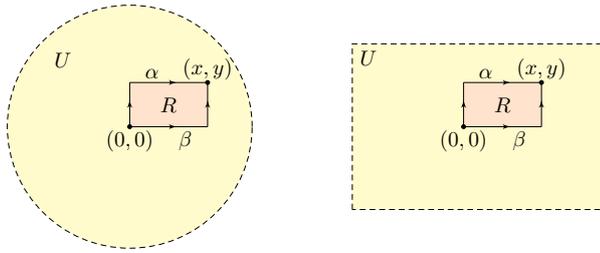
Zentrales Beispiel: das Wirbelfeld

- (7) Das Arbeitsintegral  $\int_{\Gamma} f(s) \cdot ds = \angle(p, q)$  misst die Winkeländerung!



- (8a) Für  $0 \notin Q$  liegt  $Q$  ganz in einer Halbebene, also  $\oint_{\partial Q} f(s) \cdot ds = 0$ .
- (8b) Für  $0 \in \overset{\circ}{Q}$  umläuft  $\partial Q$  einmal den Ursprung, also  $\oint_{\partial Q} f(s) \cdot ds = 2\pi$ .
- 😊** Das Integral  $\frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} f(s) \cdot ds$  zählt die Umläufe von  $\Gamma$  um den Ursprung!

Sei  $U = B(z, r) \subseteq \mathbb{R}^2$  die offene Kreisscheibe um  $z$  vom Radius  $r > 0$ . Nach Verschieben dürfen wir  $z = (0, 0)$  annehmen, also  $U = B(0, r)$ .



Sei  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$  stetig. Wir betrachten die skizzierten Wege  $\alpha, \beta$  von  $(0, 0)$  nach  $(x, y)$  und definieren  $G, H: U \rightarrow \mathbb{R}$  durch die Hakenintegrale

$$G(x, y) := \int_{\alpha} f(s) \cdot ds \quad \text{und} \quad H(x, y) := \int_{\beta} f(s) \cdot ds.$$

Wir wollen untersuchen, wann  $G$  bzw.  $H$  ein Potential zu  $f$  ist.

**Lösung:** (1) Die beiden Wegintegrale bedeuten ausgeschrieben:

$$G(x, y) := \int_{\alpha} f(s) \cdot ds = \int_{t=0}^y f_2(0, t) dt + \int_{t=0}^x f_1(t, y) dt$$

$$H(x, y) := \int_{\beta} f(s) \cdot ds = \int_{t=0}^x f_1(t, 0) dt + \int_{t=0}^y f_2(x, t) dt$$

Dank HDI (Satz B11) gilt  $\partial_x G(x, y) = f_1(x, y)$  und  $\partial_y H(x, y) = f_2(x, y)$ .

⚠ Zu  $\partial_y G$  und  $\partial_x H$  wissen wir noch nichts. Wir können nicht unter dem Integral ableiten, solange wir nur  $f \in C^0$  wissen. Für  $f \in C^1$  siehe (4).

(2) Die Äquivalenzen zeigen wir durch (A)  $\Rightarrow$  (B)  $\Rightarrow$  (C)  $\Rightarrow$  (A):

„(A)  $\Rightarrow$  (B)“: Das ist der HDI für Arbeitsintegrale (Satz E3c).

„(B)  $\Rightarrow$  (C)“: Für das Rechteck  $R = [0, x] \times [0, y] \subseteq U$  finden wir:

$$H(x, y) - G(x, y) = \int_{\beta} f(s) \cdot ds - \int_{\alpha} f(s) \cdot ds = \oint_{\partial R} f(s) \cdot ds = 0$$

„(C)  $\Rightarrow$  (A)“: Dank (1) und  $G = H$  gilt  $\text{grad } G = f$ , also ist  $G$  ein Potential.

😊 Notwendig und hinreichend für die Existenz eines Potentials zu  $f$  ist demnach, dass beide Hakenintegrale  $G$  und  $H$  übereinstimmen.

**Aufgabe:** Wir untersuchen das Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$f(x, y) = (axy, x^2 - bye^{-y^2/2}).$$

(1) Für welche Parameter  $a, b \in \mathbb{R}$  erlaubt  $f$  ein Potential  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ? Nur für diese Fälle wird  $f$  im Folgenden noch genauer untersucht:

(2) Bestimmen Sie  $F(x, y)$  durch (a) koordinatenweise Integration und (b) jedes der beiden Hakenintegrale von  $(0, 0)$  nach  $(x, y)$ . Ergeben beide Hakenintegrale dasselbe Ergebnis? Warum?

(3) Berechnen Sie das Arbeitsintegral von  $f$  entlang  $\alpha, \beta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\alpha(t) = (\cos(\pi t)^4, t - t^3)$  und  $\beta(t) = (\sin(\pi t/2)^6, t^6 + t^3 - t)$ .

**Lösung:** (1) Wir prüfen zunächst das notwendige Kriterium:

$$\text{rot}(f) = \partial_x f_2 - \partial_y f_1 = 2x - ax \stackrel{!}{=} 0$$

Für  $a \neq 2$  gilt  $\text{rot}(f) \neq 0$  und somit kann  $f$  kein Potential haben. (E3D)

Für  $a = 2$  gilt  $\text{rot}(f) = 0$  und  $f$  hat (zumindest lokal) ein Potential. (E3D)

😊 Glücklicherweise ist das Gebiet  $\mathbb{R}^2$  hier ein Rechteck. Dank E3D gilt: Für  $a = 2$  hat das Vektorfeld  $f$  ein Potential  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\text{grad } F = f$ .

(2b) Wir berechnen das Hakenintegral von  $(0, 0)$  über  $(0, y)$  nach  $(x, y)$ :

$$G(x, y) = \int_{t=0}^y f_2(0, t) dt + \int_{t=0}^x f_1(t, y) dt = \int_{t=0}^y -bt e^{-t^2/2} dt + \int_{t=0}^x aty dt$$

$$= [be^{-t^2/2}]_{t=0}^y + \left[\frac{a}{2}t^2y\right]_{t=0}^x = be^{-y^2/2} - b + \frac{a}{2}x^2y$$

Probe:  $\partial_x G = axy = f_1$ , aber  $\partial_y G = \frac{a}{2}x^2 - bye^{-y^2/2} \stackrel{!}{=} f_2$  erfordert  $a = 2!$

Wir berechnen das Hakenintegral von  $(0, 0)$  über  $(x, 0)$  nach  $(x, y)$ :

$$H(x, y) = \int_{t=0}^x f_1(t, 0) dt + \int_{t=0}^y f_2(x, t) dt = \int_{t=0}^x x^2 - bt e^{-t^2/2} dt$$

$$= [x^2t + be^{-t^2/2}]_{t=0}^y = x^2y + be^{-y^2/2} - b$$

Probe:  $\partial_y H = x^2 - bye^{-y^2/2} = f_2$ , aber  $\partial_x H = 2xy \stackrel{!}{=} f_1$  erfordert  $a = 2!$  Die Haken umlaufen das Rechteck  $R = [0, x] \times [0, y]$ . Dank Green gilt:

$$H(x, y) - G(x, y) = \oint_{\partial R} f(s) \cdot ds = \int_R \text{rot } f(x, y) d(x, y) \stackrel{!}{=} 0$$

😊 Nur im Falle  $\text{rot}(f) = 0$  gilt  $G = H$  und wir erhalten ein Potential! Dieses allgemeine Prinzip wurde in der vorigen Aufgabe ausgeführt.

😊 Die folgenden Rechnungen lösen das zweidim. Potentialproblem: Wann existiert ein Potential zu  $f$ ? Wie können wir eins berechnen?

**Aufgabe:** (1) Schreiben Sie die obigen Wegintegrale explizit aus. Berechnen Sie so die partiellen Ableitungen  $\partial_x G = f_1$  und  $\partial_y H = f_2$ .

(2) Sind die folgenden Aussagen äquivalent? Warum?

- (A) Das Vektorfeld  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$  erlaubt ein Potential  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ .
- (B) Es gilt  $\oint_{\partial R} f(s) \cdot ds = 0$  für jedes Rechteck  $R = [a, b] \times [c, d] \subseteq U$ .
- (C) Es gilt  $G = H$ , also  $G(x, y) = H(x, y)$  für jeden Punkt  $(x, y) \in U$ .

(3) Welche Implikationen gelten zur lokalen Potentialbedingung?

- (A') Zu  $f$  existiert lokal ein Potential: Zu jedem  $p \in U$  existiert  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  und ein  $C^1$ -Potential  $F: U \supseteq B(p, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F' = f|_{B(p, \varepsilon)}$ .

(4) Sei zudem  $f \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$ . Welche Implikationen gelten für  $\text{rot}(f)$ ?

- (B') Die Rotation  $\text{rot}(f) = \partial_x f_2 - \partial_y f_1$  verschwindet auf ganz  $U$ .

(5) Welche dieser Implikationen gelten noch, wenn  $U$  ein Rechteck ist?

(6) Welche gelten, wenn  $U$  ein beliebiges Gebiet ist, evtl. mit Löchern?

(3) Klar ist (A)  $\Rightarrow$  (A'). Es gilt (A')  $\Rightarrow$  (B) durch Unterteilung in genügend kleine Rechtecke und Summation, somit (A')  $\Rightarrow$  (B)  $\Rightarrow$  (C)  $\Rightarrow$  (A').

(4) Die Implikation „(B')  $\Rightarrow$  (B)“ folgt aus dem Satz von Green (E11).

Die Umkehrung „(B)  $\Rightarrow$  (B')“ folgt durch Grenzübergang. [E140]

😊 Die lokale Bedingung (B') ist leicht zu prüfen: Es genügt, abzuleiten! Das ist meist leichter, als die Gleichheit aller Hakenintegrale zu prüfen.

(5) Alle Argumente gelten wörtlich genauso für jedes Rechteck  $U \subseteq \mathbb{R}^2$ .

**Satz E3D: Potentiale auf einfachen Gebieten**

Unser Gebiet  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  sei eine Kreisscheibe oder ein Rechteck. Ein  $C^1$ -Vektorfeld  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$  erlaubt genau dann ein Potential, wenn die Rotation  $\text{rot}(f) = \partial_x f_2 - \partial_y f_1$  auf ganz  $U$  verschwindet. In diesem Fall liefern die obigen Hakenintegrale  $G = H$  ein Potential.

(6) Die Integrale  $G, H$  und die Bedingung (C) haben keinen Sinn, wenn die Integrationswege  $\alpha, \beta$  aus dem Definitionsgebiet von  $f$  hinauslaufen.

⚠ Die erhoffte Implikation (B')  $\Rightarrow$  (A) gilt im Allgemeinen nicht, wie das Wirbelfeld [E317] eindrücklich zeigt. Das ist ein weitverbreiteter Irrglauben!

(2) Zu  $f(x, y) = (axy, x^2 - bye^{-y^2/2})$  suchen wir  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F' = f$ .

😊 Nur für  $a = 2$  lohnt die Suche: Dank (1) existiert dann eine Lösung! Wir lassen aus Neugier auch  $a \neq 2$  zu und sehen dann wo's scheitert.

(2a) Koordinatenweise Integration; die erste Gleichung  $\partial_x F = f_1$  liefert:

$$\partial_x F(x, y) \stackrel{!}{=} axy \implies F(x, y) = \int axy dx = \frac{a}{2}x^2y + c(y)$$

Die Integrationskonstante  $c(y)$  hängt nur noch von  $y$  ab.

Die zweite Gleichung  $\partial_y F = f_2$  liefert anschließend:

$$\partial_y F(x, y) = \frac{a}{2}x^2 + c'(y) \stackrel{!}{=} x^2 - bye^{-y^2/2} \quad \text{Löse nach } c(y)!$$

$$\implies c'(y) = \frac{2-a}{2}x^2 - bye^{-y^2/2} \quad \text{Erfordert } a = 2!$$

$$\implies c(y) = \int -bye^{-y^2/2} dy = be^{-y^2/2} + \text{const}$$

😊 Wir erhalten für  $a = 2$  das Potential  $F(x, y) = x^2y + be^{-y^2/2} + \text{const}$ . Die Probe ist wie immer schnell und sicher: Gilt tatsächlich  $\text{grad } F = f$ ?

Wir finden  $\partial_x F = 2xy = f_1$  und  $\partial_y F = x^2 - bye^{-y^2/2} = f_2$ . Alles ist gut.

⚠ Für  $a \neq 2$  scheitert diese Rechnung; gemäß (1) auch jede andere!

⚠ Die Integrationswege  $\alpha$  und  $\beta$  sind hier kompliziert; das war Absicht. Die direkte Berechnung der Arbeitsintegrale  $\int_{\alpha} f(s) \cdot ds$  und  $\int_{\beta} f(s) \cdot ds$  ist zwar möglich aber mühsam – und dadurch lang und fehleranfällig.

😊 Dank unserer Vorarbeit können wir das Potential  $F$  nutzen!

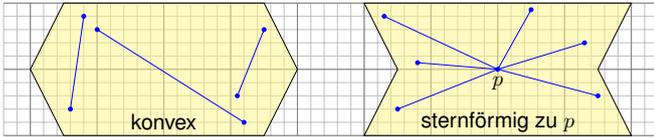
(3a) Der Weg  $\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  läuft von  $\alpha(0) = (1, 0)$  nach  $\alpha(1) = (1, 0)$ . Dank HDI gilt  $\int_{\alpha} f(s) \cdot ds = \int_{t=0}^1 F'(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = [F(\alpha(t))]_{t=0}^1 = 0$ .

😊 Hierzu genügt Existenz (1) von  $F$ , die Berechnung (2) ist entbehrlich. Wir können direkt Green anwenden:  $\int_{\alpha} f(s) \cdot ds = \int_D \text{rot}(f) d(x, y) = 0$ .

(3b) Der Weg  $\beta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  läuft von  $\beta(0) = (0, 0)$  nach  $\beta(1) = (1, 1)$ . Dank HDI gilt  $\int_{\beta} f(s) \cdot ds = F(\beta(1)) - F(\beta(0)) = b/\sqrt{e}$ . Wunderbar!

😊 Konservativ: Für jedes Gradientenfeld  $f = F'$  ist die Berechnung von Arbeitsintegralen denkbar einfach: Das Ergebnis hängt nur von Anfangs- und Endpunkt ab und ist ansonsten unabhängig vom Integrationsweg!

😊 Arbeitsintegrale illustrieren den praktischen Nutzen von Potentialen. Eine weitere wichtige Anwendung von Potentialen präsentiert Kapitel M bei der Lösung exakter Differentialgleichungen  $f(x, y) + g(x, y) y' = 0$ .

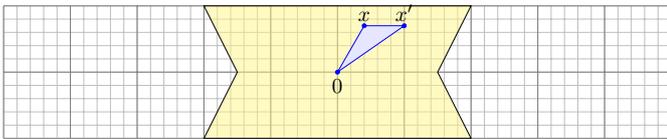


Eine Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt **konvex**, wenn zu je zwei Punkten  $p, q \in U$  ihre Verbindungsstrecke  $[p, q] = \{ (1-t)p + tq \mid 0 \leq t \leq 1 \}$  in  $U$  liegt. Das ist die Bildmenge des Weges  $\gamma_{p,q}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n: t \mapsto (1-t)p + tq$ . Das Wegintegral entlang dieses direkten, affin-linearen Weges ist:

$$\int_{[p,q]} f(s) \cdot ds := \int_{\gamma_{p,q}} f(s) \cdot ds = \int_{t=0}^1 f((1-t)p + tq) \cdot (q-p) dt$$

Wir nennen  $U$  **sternförmig** bezüglich eines festen Zentrums  $p \in U$ , wenn zu jedem Punkt  $q \in U$  die Verbindungsstrecke  $[p, q]$  in  $U$  liegt. Nach Verschieben dürfen wir  $p = 0$  annehmen; das ist oft bequemer. Zu jedem Punkt  $q \in U$  verläuft der Weg  $\gamma_q: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n: t \mapsto tq$  in  $U$ .

(1) Für  $f = \text{grad } F \in C^1$  gilt  $F \in C^2$ , also  $\partial_j f_i = \partial_j \partial_i F = \partial_i \partial_j F = \partial_i f_j$ .  
(2a) Wir vergleichen  $F(x)$  und  $F(x')$  wobei  $x' = x + he_i$  und  $[x, x'] \subseteq U$ .

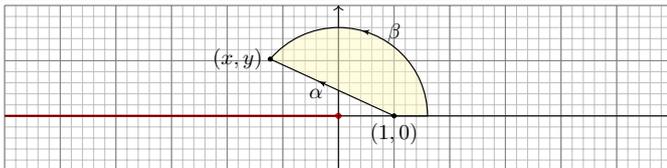
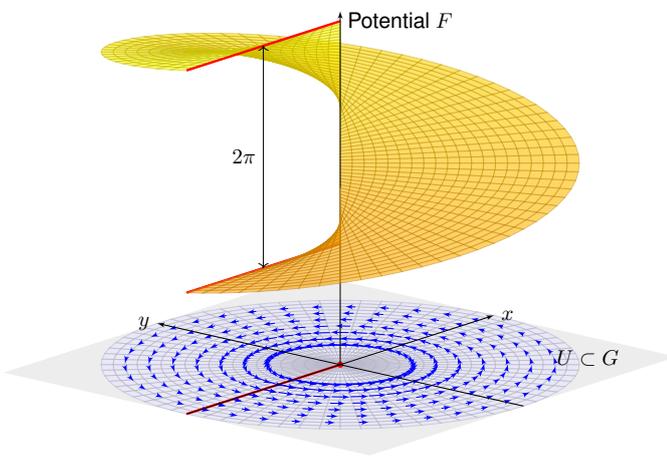


Das Dreieck  $\Delta = [0, x', x]$  liegt ganz in  $U$ . Dank Green (E11) gilt:

$$\begin{aligned} \int_{[0,x']} f(s) \cdot ds + \int_{[x',x]} f(s) \cdot ds + \int_{[x,0]} f(s) \cdot ds \\ = \int_{\partial \Delta} f(s) \cdot ds = \int_{\Delta} \text{rot}(f) dx = 0 \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir die partielle Ableitung  $\partial_i F = f_i$  wie erhofft:

$$\frac{F(x + he_i) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_{[x,x']} f(s) \cdot ds = \frac{1}{h} \int_{t=0}^h f_i(x + he_i) dt \rightarrow f_i(x)$$



(3) Nach Satz E3E erhalten wir ein Potential  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \int_{\alpha} f(s) \cdot ds = \int_{t=0}^1 f \begin{pmatrix} (1-t) + tx \\ ty \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} dt.$$

Um die Rechnung zu vereinfachen, nutzen wir Polarkoordinaten. Sei  $(x, y) = r(\cos \varphi, \sin \varphi) \in U$  mit  $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$  und  $\varphi \in ]-\pi, \pi[$ . Als Integrationsweg  $\beta$  gehen wir von  $(1, 0)$  nach  $(r, 0)$  und dann auf dem Kreis zu  $(x, y)$ . Die Wege  $\alpha$  und  $\beta$  beranden ein Kompaktum  $D$ , also:

$$\int_{\beta} f(s) \cdot ds - \int_{\alpha} f(s) \cdot ds = \oint_{\partial D} f(s) \cdot ds = \int_D \text{rot } f(x, y) d(x, y) = 0$$

Das **Potentialproblem**: Wir suchen ein Potential zu  $f: \mathbb{R}^n \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^n$ .  
(1) Die Bedingung  $\text{rot}(f) = 0$  ist **notwendig**, aber im Allgemeinen nicht hinreichend. (2) Auf sternförmigen Gebieten  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  ist sie notwendig und **hinreichend**, insbesondere auf Bällen und Quadern (Satz E3D).

Satz E3E: Potentiale auf sternförmigen Gebieten

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f: \mathbb{R}^n \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein  $C^1$ -Vektorfeld.

(1) Wenn  $f$  ein Potential  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$  erlaubt, also  $f = \text{grad } F$ , dann ist  $f$  rotationsfrei, also  $\partial_j f_i = \partial_i f_j$  für alle  $i, j = 1, \dots, n$ .

(2) Ist umgekehrt  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  rotationsfrei und  $U$  sternförmig um 0, dann erhalten wir ein Potential durch folgendes Arbeitsintegral:

$$F(x) = \int_{[0,x]} f(s) \cdot ds = \int_{t=0}^1 f(tx) \cdot x dt = \sum_{j=1}^n \int_{t=0}^1 x_j f_j(tx) dt$$

**Aufgabe:** Folgen Sie Aussage (1) aus dem Satz von Schwarz (D4A). Berechnen Sie (2) zuerst (a) für  $n = 2$  geometrisch mit Green, dann (b) analytisch durch Ableiten unterm Integral. Warum ist das erlaubt?

(2b) Wir berechnen  $\partial_i F$  durch Ableiten unter dem Integral (Satz D3C):

$$\begin{aligned} \partial_i F(x) &= \partial_i \int_{t=0}^1 \left[ \sum_{j=1}^n x_j f_j(tx) \right] dt && \text{Ableiten unterm Integral} \\ &= \int_{t=0}^1 \partial_i \left[ \sum_{j=1}^n x_j f_j(tx) \right] dt && \text{Produkt- und Kettenregel} \\ &= \int_{t=0}^1 f_i(tx) + \sum_{j=1}^n tx_j (\partial_i f_j)(tx) dt && \text{Voraussetzung } \partial_i f_j = \partial_j f_i \\ &= \int_{t=0}^1 f_i(tx) + \sum_{j=1}^n tx_j (\partial_j f_i)(tx) dt && \text{Explizite Stammfunktion!} \\ &= \int_{t=0}^1 \frac{d}{dt} [t f_i(tx)] dt = [t f_i(tx)]_{t=0}^1 = f_i(x) \end{aligned}$$

Der Integrand  $(x, t) \mapsto x \cdot f(tx)$  ist stetig differenzierbar bezüglich  $x_i$ . Integriert wird bezüglich  $t \in [0, 1]$  über ein Kompaktum. Daher können wir Satz D3C anwenden und dürfen die Ableitung unter Integral ziehen.

**Aufgabe:** Auf  $G := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  betrachten wir erneut das Wirbelfeld

$$f: \mathbb{R}^2 \supseteq G \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Sei  $U = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_{\leq 0} \times \{0\})$  die Ebene ohne die negative  $x$ -Achse.

- (0) Ist  $G$  offen? konvex? sternförmig? Erlaubt  $f$  ein Potential auf  $G$ ?
- (1) Ist  $U$  offen? konvex? sternförmig? bezüglich welcher Zentren  $p \in \mathbb{R}^2$ ?
- (2) Erlaubt  $f|_U$  ein Potential auf  $U$ ?
- (3) Wenn ja, berechnen Sie eins!
- (4) Erlaubt  $f$  ein Potential auf einem größeren Gebiet  $V$  mit  $U \subsetneq V \subseteq G$ ?

**Lösung:** (0) Die Menge  $G$  ist offen, nicht konvex, nicht sternförmig. Das Feld  $f$  erlaubt kein Potential wegen  $\oint f(s) \cdot ds \neq 0$ , siehe oben.

- (1) Die Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  ist offen, nicht konvex aber sternförmig: Als Zentrum eignet sich jeder Punkt  $p = (x, 0)$  mit  $x \in \mathbb{R}_{>0}$ . (Skizze!) Anschaulich: Vom Punkt  $p$  aus sieht man jeden anderen Punkt  $q \in U$ .
- (2) Wir finden  $\text{rot}(f) = 0$ . Wir wenden Satz E3D an: Zum rotationsfreien Vektorfeld  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ , eingeschränkt auf das sternförmige Gebiet  $U$ , existiert ein Potential  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass  $\text{grad } F = f|_U$  gilt.

Durch diese Vereinfachung erhalten wir unser Potential besonders leicht:

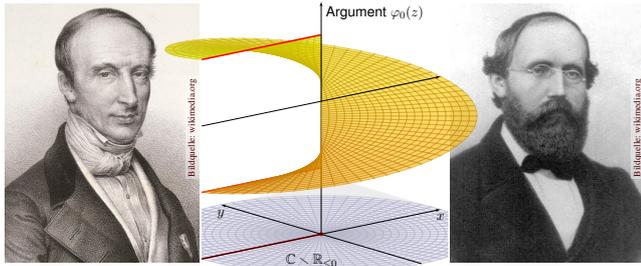
$$\begin{aligned} F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= F \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} = \int_{\alpha} f(s) \cdot ds = \int_{\beta} f(s) \cdot ds \\ &= \int_{\rho=1}^r f \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} d\rho + \int_{\theta=0}^{\varphi} f \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix} d\theta \\ &= \int_{\rho=1}^r 0 d\rho + \int_{\theta=0}^{\varphi} 1 d\theta = \varphi \end{aligned}$$

☺ Das Potential hat die Form einer Wendelfläche, siehe obige Skizze. Die Äquipotentiallinien von  $F$  sind die radialen Strahlen  $\mathbb{R}_{>0} \cdot (x, y)$ . Der Gradient  $f = \text{grad } F$  ist senkrecht hierzu, und zwar vom Betrag  $1/r$ . Eine Wendeltreppe ist innen steiler als außen, proportional zu  $1/r$ .

(4) Für jedes größere Gebiet  $U \subsetneq V \subseteq G$  gilt  $(-r, 0) \in V$  für ein  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ ; es enthält den geschlossenen Weg  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto r(\cos t, \sin t)$ . Für das Arbeitsintegral gilt dann  $\oint_{\gamma} f(s) \cdot ds = 2\pi$ , wie wir bereits wissen. Also kann  $f$  kein Potential  $F: V \rightarrow \mathbb{R}$  haben! Demnach hat das oben konstruierte Potential  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$  einen maximalen Definitionsbereich.

Kapitel F

Integralsätze für komplexe Funktionen



Augustin Louis Cauchy (1789–1857)

Bernhard Riemann (1826–1866)

Inhalt dieses Kapitels F

- 1 Crashkurs zum Residuensatz
- 2 Komplexe Funktionen und Potenzreihen
  - Die Cauchy–Riemann–Differentialgleichungen
  - Exponentialfunktion und Zweige des Logarithmus
  - Laurent–Reihen, Polstellen und Residuen
- 3 Die Integralformel von Cauchy
  - Integralsatz und Integralformel von Cauchy
  - Fundamentalsatz der Algebra und Nullstellensuche
  - Entwicklung in Potenzreihen und in Laurent–Reihen
- 4 Der Residuensatz und Anwendungen
  - Das Residuum einer isolierten Singularität
  - Der Residuensatz für Kompakta
  - Anwendung auf reelle Integrale
- 5 Fazit: Residuenkalkül
  - Verständnisfragen und Vertiefungen
  - Anwendungsbeispiele zum Residuenkalkül

Motivation und Zielsetzung

F003 Überblick

Für  $f : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  gelten die Integralsätze E11 von Green und Gauß:

$$\int_D \text{rot}(f) \, d(x, y) = \int_{\partial D} f \cdot ds, \quad \int_D \text{div}(f) \, d(x, y) = \int_{\partial D} f \times ds$$

Diese wenden wir nun auf komplexe Funktionen  $f : \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  an. Erfreulicherweise gewinnen wir mit komplexen Integralen auch reelle:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ux)}{x} \, dx = \pi \text{sign}(u) \quad \text{für alle } u \in \mathbb{R},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ux)}{x^2 + 1} \, dx = \pi e^{-|u|} \quad \text{für alle } u \in \mathbb{R},$$

$$\int_{t=0}^{\pi} \frac{1}{a + \cos t} \, dt = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}} \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}_{>1}.$$

Solche Integrale sind mit reellen Methoden nur schwer zu berechnen. Mit dem Residuensatz für komplexe Funktionen gelingen sie leicht!

Diese Technik wird oft angewendet, auch im Verlauf dieser Vorlesung, insbesondere für Fourier– und Laplace–Integrale (Kapitel K und L).

Vorgehensweise

F004 Überblick

Wir betrachten die komplexe Zahlenebene  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$  und hierauf komplexe Funktionen  $f : \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , die wir entlang von Wegen  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  integrieren gemäß  $\int_{\gamma} f(z) \, dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) \, dt$ .

Ebenso übertragen wir den Begriff der Differenzierbarkeit aus dem Reellen ins Komplexe und erleben einige schöne Überraschungen! Zur Orientierung skizziere ich zu Beginn als Crashkurs die wichtigsten Begriffe und typische Anwendungen zur Berechnung (reeller) Integrale.

Der Höhepunkt sind Cauchys Residuensatz und seine Anwendungen, die für (komplexe und reelle) Integrale neue Rechentechniken eröffnen. Auf dem Weg durch die *komplexe Ebene* gewinnen wir *reelle Integrale!*

Jacques Hadamard (1865–1963) sagte treffend: „Der kürzeste und beste Weg zwischen zwei reellen Wahrheiten führt oft durchs Imaginäre.“

(Im Original so schön: „La voie la plus courte et la meilleure entre deux vérités du domaine réel passe souvent par le domaine imaginaire.“)

☞ Meyberg–Vachener: *Höhere Mathematik*, Band 2. Zur Vertiefung Jänich: *Funktionentheorie* und Remmert: *Funktionentheorie*.

Anwendung auf ideale ebene Strömungen

F005 Erläuterung

Komplexe Funktionen gehören zum mathematischen Grundwerkzeug. In diesem Kapitel werden wir damit phantastische Integrale berechnen. Auch darüber hinaus begegnen sie Ihnen häufig und nützen überall.

Die vorsichtige Ingenieur:in fragt sich: Lohnt sich diese Investition? Ja! Ich greife vor und nenne zwei wunderschöne klassische Anwendungen.

Wir können jede holomorphe Funktion  $f(x + iy) = u(x, y) - iv(x, y)$  als ein Vektorfeld  $(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\text{div}(u, v) = \text{rot}(u, v) = 0$  betrachten.

◆ Satz Q1A: holomorphe Lösungen der Maxwell–Gleichung

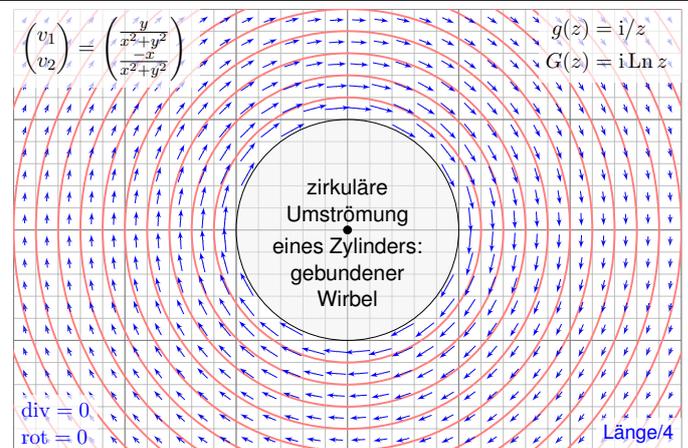
Jedes ebene statische  $E$ -Feld  $\vec{E} : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  ohne Quellen entspricht einer holomorphen Funktion  $f = E_1 - iE_2 : \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  und umgekehrt.

◆ Satz Q1B: holomorphe Lösungen der Navier–Stokes–Gleichung

Jede ebene stationäre Strömung  $v = (v_1, v_2) : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  konstanter Dichte, ohne Wirbel, ohne Reibung und ohne äußere Kräfte entspricht einer holomorphen Funktion  $f = v_1 - iv_2 : \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  und umgekehrt.

Anwendung auf ideale ebene Strömungen

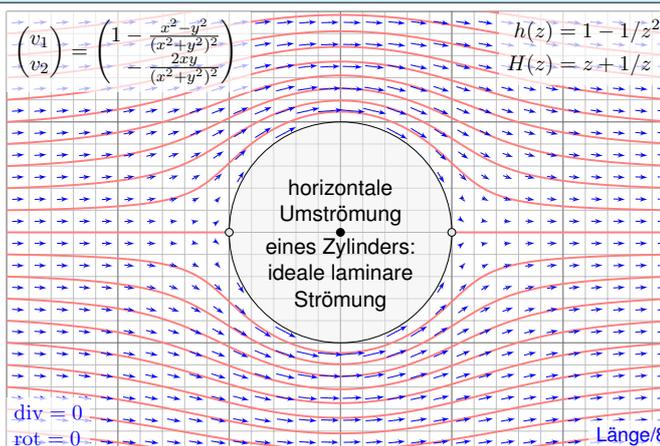
F006



😊 Holomorphe Funktionen beschreiben Strömungen: Wirbelfeld.

Anwendung auf ideale ebene Strömungen

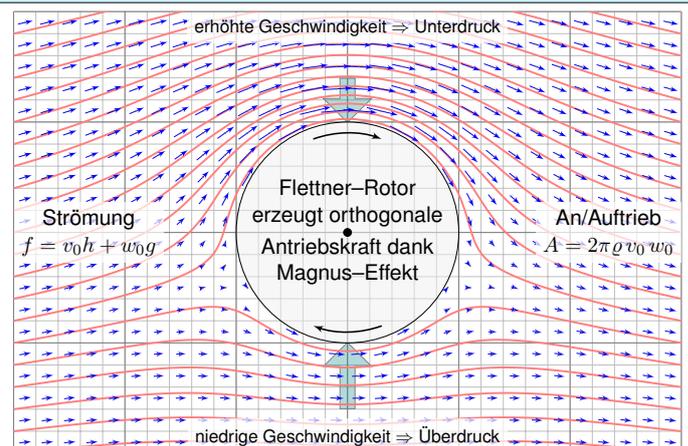
F007



😊 Einfaches und intuitives Modell, exakte Lösung dank Holomorphie!

Anwendung auf ideale ebene Strömungen

F008



😊 So berechneten Kutta und Joukowski die dynamische Auftriebskraft!

☐ Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §1.7.  
Auf der Menge  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$  definieren wir die **Addition**  $+: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  und die komplexe **Multiplikation**  $\cdot: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$(x, y) + (u, v) := (x + u, y + v),$$

$$(x, y) \cdot (u, v) := (xu - yv, xv + yu).$$

Man prüft nach, dass  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  ein **Körper** ist. Additiv neutral ist  $(0, 0)$ , multiplikativ neutral ist  $(1, 0)$ , multiplikative Inversion ist gegeben durch

$$(x, y) \cdot \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = (1, 0).$$

Für  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt  $(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$  und  $(a, 0) \cdot (b, 0) = (a \cdot b, 0)$ . Wir können und werden daher den Körper  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  der reellen Zahlen mittels  $a \mapsto (a, 0)$  identifizieren mit dem Teilkörper  $\mathbb{R} \times \{0\}$  in  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ . Wir schreiben kurz  $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$  und betrachten  $\mathbb{C}$  als **Körpererweiterung**.

😊 Geometrisch stellen wir  $\mathbb{C}$  als komplexe Zahlenebene dar. Addition ist die für Vektoren übliche. Die Multiplikation ist eine Drehstreckung.

Die Gleichung  $z^2 + 1 = 0$  ist in  $\mathbb{R}$  nicht lösbar, in  $\mathbb{C}$  hingegen schon: Die komplexe Zahl  $i = (0, 1)$  hat die ersehnte Eigenschaft  $i^2 = (-1, 0)$ . Jede komplexe Zahl  $z \in \mathbb{C}$  schreibt sich eindeutig  $z = (x, y) = x + iy$ . Wir nennen  $\operatorname{Re}(z) := x$  den **Realteil** und  $\operatorname{Im}(z) := y$  den **Imaginärteil**. Die zu  $z = x + iy$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$  **komplex konjugierte Zahl** ist  $\bar{z} = x - iy$ . Es gilt  $w + \bar{z} = \bar{w} + z$  und  $w \cdot \bar{z} = \bar{w} \cdot z$ , sowie  $z\bar{z} = x^2 + y^2$  und somit

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}, \quad \text{das heißt} \quad \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Die Länge  $|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$  heißt **Betrag** oder **Norm** von  $z$ . Das **komplexe Skalarprodukt** von  $w = u + iv$  und  $z = x + iy$  ist

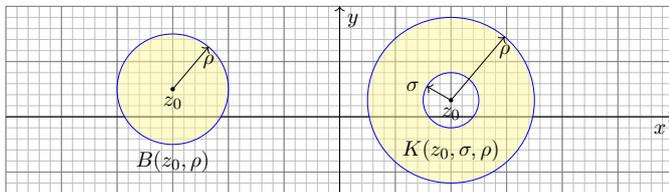
$$\langle w \mid z \rangle := \bar{w}z = (u - iv)(x + iy) = (ux + vy) + i(uy - vx)$$

Realteil ist das reelle Skalarprodukt, Imaginärteil ist das Kreuzprodukt:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ux + vy, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = uy - vx.$$

😊 Algebraische Aussagen und Rechnungen in  $\mathbb{C}$  entsprechen so geometrischen Aussagen und Rechnungen in der Ebene  $\mathbb{R}^2$ . [E007]

Wir identifizieren  $\mathbb{C} = \{ x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \}$  mit  $\mathbb{R}^2 = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$ . Der Betrag  $|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$  entspricht der euklidischen Norm. Der Abstand  $|w - z|$  entspricht somit dem euklidischen Abstand.



Zu jedem Punkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  und Radien  $0 \leq \sigma < \rho \leq \infty$  in  $\mathbb{R}$  betrachten wir die **offene Kreisscheibe**  $B(z_0, \rho) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \rho \}$  sowie den **offenen Kreisring**  $K(z_0, \sigma, \rho) = \{ z \in \mathbb{C} \mid \sigma < |z - z_0| < \rho \}$ .

Beispiele: Für  $\rho = \infty$  ist  $B(z_0, \infty) = \mathbb{C}$  die gesamte Ebene; für  $\rho = 0$  ist  $B(z_0, 0) = \emptyset$  leer. Ebenso für  $\sigma \geq \rho$  ist  $K(z_0, \sigma, \rho) = \emptyset$  leer. Für  $0 = \sigma < \rho$  ist  $K(z_0, 0, \rho) = B(z_0, \rho) \setminus \{z_0\}$  die Kreisscheibe ohne den Mittelpunkt  $z_0$ . Insbesondere gilt  $K(z_0, 0, \infty) = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ .

Eine Teilmenge  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  heißt **offen**, wenn zu jedem ihrer Punkte  $z_0 \in \Omega$  ein positiver Radius  $\varepsilon > 0$  existiert, sodass  $B(z_0, \varepsilon) \subseteq \Omega$  gilt. Das heißt anschaulich: Um jeden Punkt  $z_0 \in \Omega$  ist noch ein bisschen Platz in  $\Omega$ .

Ein **Gebiet** ist eine offene und zusammenhängende Teilmenge  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ : Je zwei Punkte  $p, q \in \Omega$  lassen sich durch einen Weg in  $\Omega$  verbinden. Wichtige Beispiele für Gebiete sind offene Kreisscheiben und Kreisinge.

Eine Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  komplexer Zahlen  $z_n \in \mathbb{C}$  **konvergiert** gegen den Grenzwert  $z \in \mathbb{C}$ , wenn  $|z_n - z| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  gilt. Für  $z_n = x_n + iy_n$  und  $z = x + iy$  ist dies gleichbedeutend mit  $x_n \rightarrow x$  und  $y_n \rightarrow y$ .

Eine komplexe Funktion  $f: \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  ordnet jeder komplexen Zahl  $z \in \Omega$  eine komplexe Zahl  $f(z) \in \mathbb{C}$  zu. Wir sagen,  $f$  ist **stetig** in  $z$ , wenn für jede Folge  $z_n \rightarrow z$  in  $\Omega$  auch  $f(z_n) \rightarrow f(z)$  in  $\mathbb{C}$  gilt.

Wir zerlegen  $f$  in **Realteil**  $u = \operatorname{Re}(f)$  und **Imaginärteil**  $v = \operatorname{Im}(f)$ .

Für die Funktionen  $u, v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  gilt  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ .

Die Stetigkeit von  $f$  ist dann äquivalent zur Stetigkeit von  $u$  und  $v$ .

**Definition F1A: komplexes Wegintegral**

Sei  $f: \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und  $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$  stückweise stetig differenzierbar. Das **komplexe Wegintegral** von  $f$  entlang  $\gamma$  ist

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_{t=a}^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Einfache Merkregel zur Schreibweise: Für  $z = \gamma(t)$  gilt  $dz = \gamma'(t) dt$ .

Der Integrand  $g(t) = f(\gamma(t)) \gamma'(t)$  ist eine stetige Funktion  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ . Diese zerlegen wir gemäß  $g = g_1 + ig_2$  mit  $g_1, g_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  in Realteil  $g_1 = \operatorname{Re}(g)$  und Imaginärteil  $g_2 = \operatorname{Im}(g)$  und definieren das Integral

$$\int_{t=a}^b g(t) dt := \int_{t=a}^b g_1(t) dt + i \int_{t=a}^b g_2(t) dt$$

😊 Jedes komplexe Integral fasst also zwei reelle Integrale zusammen. Die komplexe Schreibweise ist sehr effizient, bequem und übersichtlich.

Es lohnt, diese beiden reellen Integrale noch genauer anzuschauen. . . Wir integrieren  $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$  längs  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ , also:

$$f(\gamma(t)) \gamma'(t) = (u + iv)(x' + iy') = (ux' - vy') + i(uy' + vx')$$

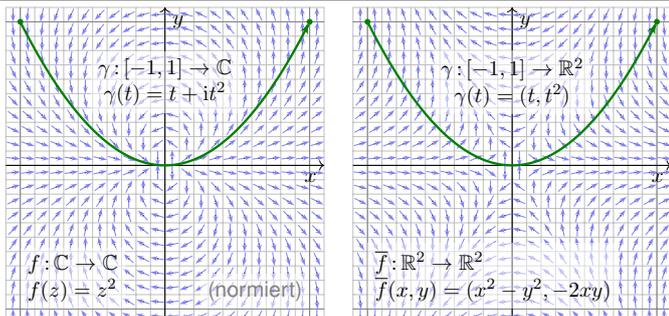
Das komplexe Wegintegral fasst zwei reelle Wegintegrale zusammen, das Arbeitsintegral und das Flussintegral des Vektorfeldes  $\vec{f} = (u, -v)$ :

$$\operatorname{Re} \int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b ux' - vy' dt = \int_{\gamma} (u, -v) \cdot (x', y') dt = \int_{\gamma} (u, -v) \cdot d\gamma_{\text{Arbeitsintegral}}$$

$$\operatorname{Im} \int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b uy' + vx' dt = \int_{\gamma} (u, -v) \times (x', y') dt = \int_{\gamma} (u, -v) \times d\gamma_{\text{Flussintegral}}$$

⚠ Man beachte das Vorzeichen: Es ist unschön, aber unvermeidlich. Es passt zum oben erklärten komplexen Skalarprodukt  $\langle w \mid z \rangle = \bar{w}z$ .

😊 Wir werden hierauf den Integralsatz von Green / Gauß anwenden und ernten den Integralsatz von Cauchy F3A für holomorphe Funktionen.



**Aufgabe:** (1) Berechnen Sie das komplexe Wegintegral  $\int_{\gamma} f(z) dz$  von  $f(z) = z^2$  längs des Weges  $\gamma: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}: t \mapsto \gamma(t) = t + it^2$ . Ist das Ergebnis plausibel / kompatibel mit der obigen Skizze?

(2) Was erhalten Sie für andere Wege mit denselben Endpunkten?

(3) Gilt für  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  allgemein  $\int_{\gamma} F'(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$ ?

**Lösung:** (1) Wir integrieren  $f(x + iy) = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$  entlang des Weges  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$  mit  $x(t) = t$  und  $y(t) = t^2$ :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{-1}^1 f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_{-1}^1 [t^2 - 5t^4] + i[4t^3 - 2t^5] dt = \left[ \frac{1}{3}t^3 - t^5 + it^4 + \frac{i}{3}t^6 \right]_{t=-1}^1 = -\frac{4}{3} \quad (\text{Vorzeichen ist plausibel!})$$

(2) Probieren Sie andere Wege aus, Sie erhalten dasselbe! Warum? Die Stammfunktion  $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto z^3/3$  erfüllt  $F'(z) = z^2$  (F2A), also

$$\int_{\gamma} z^2 dz = \left[ \frac{z^3}{3} \right]_{z=i-1}^{z=i+1} = \frac{(i+1)^3}{3} - \frac{(i-1)^3}{3} = \frac{-2+2i}{3} - \frac{2+2i}{3} = -\frac{4}{3}.$$

für jeden Weg  $\gamma: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  von  $\gamma(-1) = i - 1$  nach  $\gamma(1) = i + 1$ .

(3) Dank Kettenregel und HDI rechnen wir dies auch hier leicht nach:

$$\int_{\gamma} F'(z) dz = \int_{t=a}^b F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_{t=a}^b [F(\gamma(t))]'' dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

😊 Wir nutzen die komplexe Ableitung F2A und ihre Rechenregeln F2B!

**Aufgabe:** (1) Integrieren Sie  $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto f(z) = z^k$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  entlang der Kreislinie  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}: t \mapsto \gamma(t) = r e^{it}$  mit Radius  $r > 0$ .

**Lösung:** (0) Vorbereitung: Für jede ganze Zahl  $a \in \mathbb{Z}$  berechnen wir

$$\int_{t=0}^{2\pi} e^{iat} dt \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{t=0}^{2\pi} \cos(at) dt + i \int_{t=0}^{2\pi} \sin(at) dt \stackrel{\text{HDI}}{=} \begin{cases} 0 & \text{für } a \neq 0, \\ 2\pi & \text{für } a = 0. \end{cases}$$

😊 In der Fourier-Theorie entspricht dies der Orthonormalität. [1125]

(1) Wir nutzen die Definition F1A des komplexen Wegintegrals:

$$\oint_{\gamma} z^k dz \stackrel{\text{Def}}{=} \oint_{\gamma} f(z) dz \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{t=0}^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{t=0}^{2\pi} (r e^{it})^k \cdot (r e^{it})' dt$$

$$= \int_{t=0}^{2\pi} r^k e^{ikt} \cdot r i e^{it} dt \stackrel{\text{Lin}}{=} i r^{k+1} \int_{t=0}^{2\pi} e^{i(k+1)t} dt \stackrel{\text{HDI}}{=} \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq -1, \\ 2\pi i & \text{für } k = -1. \end{cases}$$

😊 Nur  $z^{-1}$  liefert einen Beitrag! Plausibel: Für jedes  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$  hat  $f(z) = z^k$  die Stammfunktion  $z^{k+1}/(k+1)$ : Das Wegintegral hängt daher nur von Start und Ziel ab, geschlossene Wegintegrale sind daher Null!

**Aufgabe:** Rechnen Sie diese grundlegenden Integrale sorgsam nach!

**Lösung:** (1) Wir verschieben  $\gamma(t) = z_0 + r e^{it}$  zurück zu  $\delta(t) = r e^{it}$ :

$$\oint_{\gamma} (z - z_0)^k dz = \oint_{\delta} z^k dz = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq -1, \\ 2\pi i & \text{für } k = -1. \end{cases}$$

(2) Wir nutzen die Linearität des Integrals und erhalten:

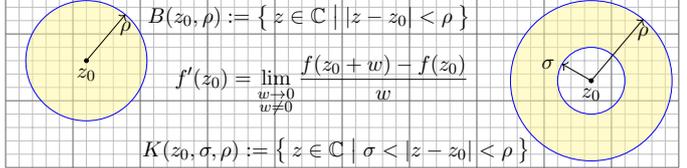
$$\oint_{\gamma} \left[ \sum_{k=-n}^n a_k (z - z_0)^k \right] dz \stackrel{\text{Lin}}{=} \sum_{k=-n}^n a_k \left[ \oint_{\gamma} (z - z_0)^k dz \right] \stackrel{\text{Res}}{=} 2\pi i \cdot \underbrace{a_{-1}}_{\text{Residuum}}$$

😊 Die Wegintegrale  $\oint_{\gamma} (z - z_0)^k dz$  haben wir zuvor in (1) ausgerechnet: Für  $k \neq -1$  existiert eine Stammfunktion, daher  $\oint_{\gamma} (z - z_0)^k dz = 0$ .

😊 Beim Wegintegral des Laurent-Polynoms  $f(z) = \sum_{k=-n}^n a_k (z - z_0)^k$  um den Punkt  $z_0$  zählt nur der Koeffizient mit Hausnummer  $-1$ .

😊 Beim Wegintegral von  $f$  um  $z_0$  bleibt nur der Term  $2\pi i a_{-1}$  zurück. Deshalb heißt  $a_{-1}$  das **Residuum** (das 'Zurückbleibende') von  $f$  in  $z_0$ .

(3) Wir dürfen Integral und Grenzwert  $n \rightarrow \infty$  vertauschen (Satz D1A).



$B(z_0, \rho) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \rho\}$

$f'(z_0) = \lim_{\substack{w \rightarrow 0 \\ w \neq 0}} \frac{f(z_0 + w) - f(z_0)}{w}$

$K(z_0, \sigma, \rho) := \{z \in \mathbb{C} \mid \sigma < |z - z_0| < \rho\}$

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen. Eine komplexe Funktion  $f = u + iv: \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **holomorph**, wenn sie komplex differenzierbar ist und  $f': \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  stetig.

⇔ **Cauchy-Riemann-Gleichungen**  $\partial_x u = \partial_y v$  und  $\partial_x v = -\partial_y u$ .

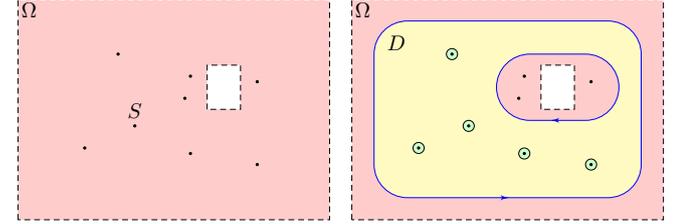
⇔ Die **Strömung**  $\vec{f} = (u, -v): \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  erfüllt  $\text{div } \vec{f} = \text{rot } \vec{f} = 0$ .

⇔ Auf jeder Kreisscheibe  $B(z_0, \rho) \subseteq \Omega$  gleicht  $f$  einer **Potenzreihe**.

⇔ Auf jedem Kreisring  $K(z_0, \sigma, \rho) \subseteq \Omega$  gleicht  $f$  einer **Laurent-Reihe**:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit} \quad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

Der Koeffizient  $\text{res}_{z_0}(f) := a_{-1}$  ist das **Residuum** von  $f$  im Punkt  $z_0$ .



◆ **Satz F4D: Residuensatz für Kompakta, Cauchy 1825**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f: \Omega \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph auf  $\Omega$  bis auf eine Menge  $S$  isolierter Singularitäten. Sei  $D \subseteq \Omega$  kompakt mit stückweise glattem Rand, wobei  $\partial D \cap S = \emptyset$ . Dann gilt:

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i \sum_{s \in \tilde{D}} \text{res}_s(f)$$

😊 Links muss man integrieren, rechts nur Residuen summieren!

**Satz F1B: die fundamentalen Integrale der Funktionentheorie**

Um den Punkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  und mit Radius  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  betrachten wir den Weg

$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}: t \mapsto \gamma(t) = z_0 + r e^{it}.$$

(1) Für jede ganze Zahl  $k \in \mathbb{Z}$  gilt die **Residuumsformel**:

$$\oint_{\gamma} (z - z_0)^k dz = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq -1, \\ 2\pi i & \text{für } k = -1. \end{cases}$$

(2) Für jedes **Laurent-Polynom**  $f(z) = \sum_{k=-n}^n a_k (z - z_0)^k$  folgt:

$$\oint_{\gamma} \left[ \sum_{k=-n}^n a_k (z - z_0)^k \right] dz = 2\pi i a_{-1}$$

(3) Dasselbe gilt für jede konvergente **Laurent-Reihe**, also  $n \rightarrow \infty$ , denn wir dürfen Integral und Grenzwert vertauschen dank Satz D1A.

**Aufgabe:** Gegeben sei ein geschlossener Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  in komplexen Polarkoordinaten  $\gamma(t) = r(t) e^{i\varphi(t)}$ . Zeigen und erklären Sie:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} z^{-1} dz = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{2\pi} = \text{Umlaufzahl von } \gamma \text{ um } 0$$

**Lösung:** Wir nutzen die Polarkoordinaten  $\gamma(t) = r(t) e^{i\varphi(t)}$  und rechnen:

$$\oint_{\gamma} z^{-1} dz = \int_{t=a}^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt = \int_{t=a}^b \frac{r'(t)}{r(t)} + i\varphi'(t) dt = [\ln r(t)]_a^b + i[\varphi(t)]_a^b$$

😊 Der Realteil verschwindet für geschlossene Wege,  $\gamma(a) = \gamma(b)$ . Der Imaginärteil zählt die Umläufe von  $\gamma$  um den Nullpunkt. [E333]

Zum Vergleich in kartesischen Koordinaten  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ :

$$\text{Im} \oint_{\gamma} z^{-1} dz = \int_{t=a}^b \frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2} dt = \int_{t=a}^b \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_{t=a}^b \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} dt$$

😊 Dieses Arbeits- und Flussintegral kennen wir bereits gut! [E317]

Alle analytischen Funktionen sind holomorph. Erinnerung:  $f$  analytisch heißt, dass sich  $f$  lokal als konvergente Potenzreihen darstellen lässt. Erstaunlicherweise gilt die Umkehrung, also holomorph  $\Leftrightarrow$  analytisch! Insbesondere: einmal komplex diff'bar impliziert beliebig oft diff'bar!

Ist  $f: \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph auf einer Kreisscheibe  $B(z_0, \rho) \subseteq \Omega$ , so lässt sie sich dort als konvergente **Potenzreihe** darstellen (Satz F3E):

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit} \quad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz.$$

Wir können ebenso auch Singularitäten (insb. Polstellen) behandeln: Ist  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph auf einem Kreisring  $K(z_0, \sigma, \rho) \subseteq \Omega$ , so lässt sie sich dort als konvergente **Laurent-Reihe** darstellen (Satz F3F):

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (z - z_0)^{-k}$$

Dies ist die Summe einer Potenzreihe in  $u = (z - z_0)$  als Nebenteil und in  $v = (z - z_0)^{-1}$  als Hauptteil. Letztere kodiert die Singularität in  $z_0$ .

Anschaulich können wir uns  $f: \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  als zweidimensionales elektromagnetisches Feld vorstellen. Eine Polstelle im Punkt  $s \in \Omega$  entspricht einem Teilchen mit seiner Ladung  $\text{res}_s(f)$ : das Residuum!

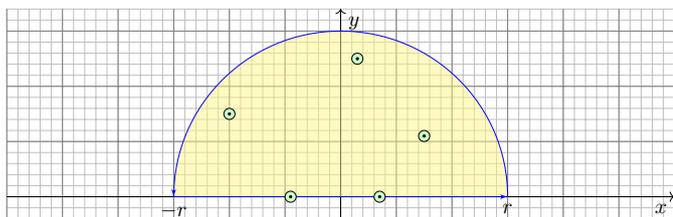
Für das Feld  $(z - z_0)^{-k}$  haben wir oben das Wegintegral ausgerechnet: Längs der Kreislinie  $\gamma(t) = z_0 + r e^{it}$  erhalten wir  $\oint (z - z_0)^{-1} dz = 2\pi i$ . Für alle  $k \neq -1$  hingegen verschwindet das Integral:  $\oint (z - z_0)^k dz = 0$ .

Dasselbe gilt nun für jede holomorphe Funktion / Laurent-Reihe um  $z_0$ : Das Wegintegral von  $f$  längs des Weges  $\gamma$  um  $z_0$  ist  $2\pi i \text{res}_{z_0}(f)$ . Mit diesem Integral messen wir demnach die Ladung im Punkt  $z_0$ .

Umläuft  $\gamma$  mehrere Singularitäten, so addieren sich die Residuen: Jede Singularität  $s$  liefert ihren Beitrag  $2\pi i \text{res}_s(f)$  zum Integral. Der Raum dazwischen ist Vakuum und liefert keinen Beitrag.

Dies ist eine wunderbare Eigenschaft holomorpher Funktionen.

Reelle Anwendung: Die Halbebene ist nicht kompakt, aber für schnell genug abklingende Funktionen können wir den Residuensatz hierauf ausdehnen. Auch einfache Polstellen auf  $\mathbb{R}$  können wir zulassen:



◆ Satz F4k: Fourier-Integrale rationaler Funktionen

Sei  $f(z) = p(z)/q(z)$  eine rationale Funktion; reelle Polstellen  $z \in \mathbb{R}$  seien höchstens einfach. Für  $\deg(q) \geq \deg(p) + 2$  und  $u \geq 0$  gilt dann:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iux} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im}(s)>0} \text{res}_{z=s} [f(z) e^{iuz}] + \pi i \sum_{\text{Im}(s)=0} \text{res}_{z=s} [f(z) e^{iuz}]$$

Diese Gleichung gilt auch noch im Falle  $\deg(q) \geq \deg(p) + 1$  und  $u > 0$ .

**Aufgabe:** Berechnen Sie für  $u \in \mathbb{R}$  das reelle Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ux)}{x} dx = \pi \text{sign}(u).$$

**Lösung:** Der Integrand ist der Imaginärteil der holomorphen Funktion

$$f(z) = \frac{e^{iuz}}{z} = \frac{\cos(uz)}{z} + i \frac{\sin(uz)}{z}.$$

Für  $u > 0$  können wir daher den Residuensatz anwenden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iux}}{x} dx \stackrel{\text{Res}}{=} \pi i \text{res}_{z=0} \left[ \frac{e^{iuz}}{z} \right] = \pi i \text{res}_{z=0} \left[ z^{-1} + \frac{i u}{1!} z^0 - \frac{u^2}{2!} z^1 + \dots \right] = \pi i.$$

Als Real- und Imaginärteil erhalten wir die reellen Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ux)}{x} dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ux)}{x} dx = \pi.$$

Für  $u < 0$  kehrt sich das Vorzeichen um. Für  $u = 0$  ist alles klar.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx = \frac{\pi}{ab(a+b)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ux)}{x^4 + 4} dx = \frac{\pi}{4} e^{-|u|} (\cos|u| + \sin|u|)$$

**Aufgabe:** (1) Wie erklären / begründen Sie die Konvergenz dieser Integrale? Gilt sie absolut? uneigentlich? als Cauchy-Hauptwert? [B219]  
(2) Welche können Sie bereits mit elementaren Methoden berechnen?  
☺ Die fehlenden gewinnen Sie mit den Methoden dieses Kapitels!

**Lösung:** Zum ersten Integranden  $f(x) = 1/(x^2 + a^2)$  finden Sie (dank Substitution) leicht die Stammfunktion  $F(x) = \arctan(x/a)/a$ . Damit gelingt das erste Integral. Das zweite und dritte sind elementar kaum zugänglich, aber ganz bequem mit dem Residuenkalkül. [F429] [F431] Unser Universalwerkzeug ist der Residuensatz hier für Fourier-Integrale rationaler Funktionen (F4K).

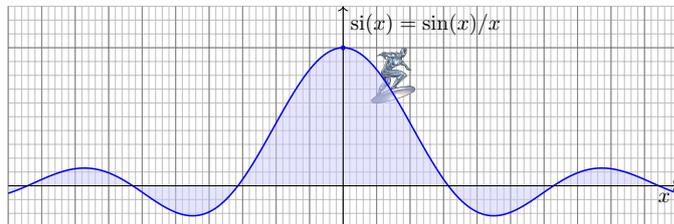
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots = 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} = 1.6449340668 \dots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \mp \dots = -\frac{\pi^2}{12} = -0.8224670334 \dots$$

**Aufgabe:** (1) Wie erklären / begründen Sie die Konvergenz dieser Reihen? Gilt absolute Konvergenz? oder zumindest uneigentlich?  
(2) Welche können Sie bereits mit elementaren Methoden berechnen?  
☺ Die fehlenden gewinnen Sie mit den Methoden dieses Kapitels!

**Lösung:** Den ersten Summanden  $f(k) = 1/(k^2 + k) = 1/k - 1/(k+1)$  zerlegen Sie sogleich routiniert in Partialbrüche und finden so die diskrete Stammfunktion  $F(x) = -1/k$ , siehe B3b. Damit gelingt die erste Summe leicht als Teleskop. Die zweite und dritte sind elementar kaum zugänglich, doch Sie berechnen beide Reihen bequem mit dem Residuenkalkül, siehe Satz F51.



Wir betrachten erneut die Spaltfunktion  $\text{si} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\text{si}(x) = \begin{cases} \sin(x)/x & \text{für } x \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Ihre Integralfunktion  $\text{Si}(x) = \int_{t=0}^x \text{si}(t) dt$  ist nicht elementar. [B149]  
Nun endlich können wir  $\text{si} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  über ganz  $\mathbb{R}$  integrieren:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \frac{\sin(x)}{x} dx \stackrel{?}{=} \pi$$

☺ Dieses Integral konnten wir zuvor noch nicht ausrechnen [B149], jetzt aber ganz leicht! Diese vielseitige Rechentechnik führen wir in §F4 aus. Dieses eindimensionale reelle Integral war zunächst außerhalb unserer Reichweite. Erst durch die effiziente Behandlung als zweidimensionales komplexes Integral löst sich nun alles in Wohlgefallen auf!

☺ Der Residuensatz ist ein allgemeines und mächtiges Werkzeug. Die obigen Beispiele motivieren, welche Aspekte wir nun klären müssen, wenn wir den mathematischen Begriffen auf den Grund gehen wollen: Der Residuensatz gilt nur für **holomorphe Funktionen**  $f : \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . Wie können wir diese Eigenschaft definieren und bequem erkennen? Wie entwickelt man eine holomorphe Funktion auf  $B(z_0, \rho)$  in eine konvergente **Potenzreihe**? auf  $K(z_0, \sigma, \rho)$  in eine **Laurent-Reihe**? Wie definieren wir das **Residuum**? Wie berechnen wir es effizient? Wie können wir schließlich den **Residuensatz** beweisen und nutzen?

☺ Dieses Kapitel entwickelt die nötigen Grundlagen (§F2–§F3) und einige wichtige Anwendungen des Residuenkalküls (§F4–§F5).

$$\int_{x=0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{x=0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$$

$$\int_{x=0}^{\infty} \cos(x^2) dx = \int_{x=0}^{\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

**Aufgabe:** (1) Wie erklären / begründen Sie die Konvergenz dieser Integrale? Gilt absolute Konvergenz? oder zumindest uneigentlich?  
(2) Welche können Sie bereits mit elementaren Methoden berechnen?  
☺ Die fehlenden gewinnen Sie mit den Methoden dieses Kapitels!

**Lösung:** Zum ersten Integranden  $f(x) = 1/(1+x^2)$  erkennen Sie direkt die Stammfunktion  $F(x) = \arctan(x)$ . Damit gelingt das erste Integral leicht. Die letzten drei sind elementar kaum zugänglich, doch Sie berechnen alle erfreulich einfach mit dem Residuenkalkül. [F434] [F529] Die letzten beiden sind die Fresnel-Integrale, die wir bereits seit Kapitel B suchen. [B424]

☺ Diese phantastischen Rechnungen illustrieren das Eingangszitat:

*La voie la plus courte et la meilleure entre deux vérités du domaine réel passe souvent par le domaine imaginaire.*

[Der kürzeste und beste Weg zwischen zwei reellen Wahrheiten führt oft durchs Imaginäre.]

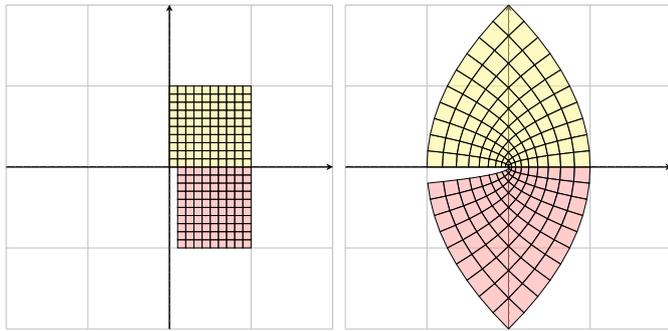
Jacques Hadamard (1865–1963)

Damit beschließe ich diesen kurzen Crashkurs zum ersten Überblick. Sie erahnen nun, was Sie mit dem Residuensatz berechnen können, und dass sich das Erlernen dieses wunderbaren Kalküls lohnt.

Holomorphe Funktionen haben viel zu bieten, der Mathematiker:in ebenso wie der Physiker:in und der Ingenieur:in. Wir wollen uns nun diese effizienten Rechentechniken Schritt für Schritt erarbeiten.

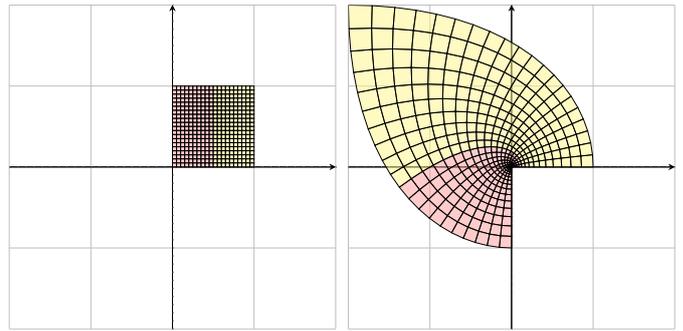
Ich hoffe, wie so oft, Sie sind bis in die Haarspitzen motiviert. Der Weg ist steil, aber das Ziel ist lohnend!

**Beispiel:**  $f(z) = z^2$ , also  $f(x + iy) = (x^2 - y^2) + i(2xy)$



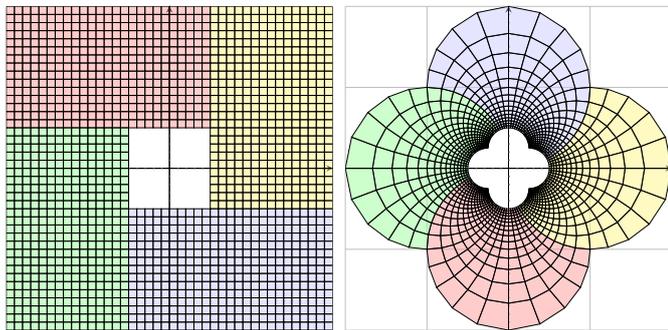
In Polardarstellung gilt  $f(re^{i\varphi}) = r^2 e^{2i\varphi}$ . Im Ursprung sieht man die Winkelverdopplung. Außerhalb bleiben Winkel erhalten, und kleine Quadrate werden in kleine Quadrate überführt.

**Beispiel:**  $f(z) = z^3$ , also  $f(x + iy) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$



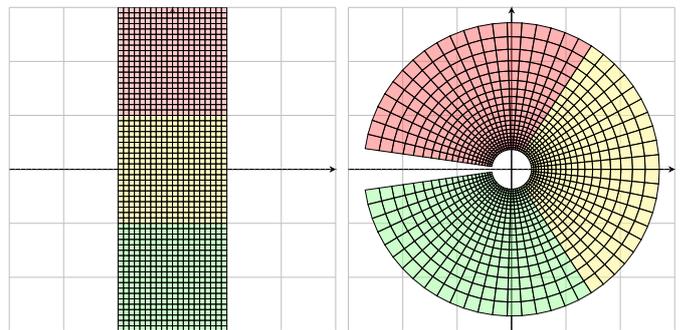
In Polardarstellung gilt  $f(re^{i\varphi}) = r^3 e^{3i\varphi}$ . Im Ursprung sieht man die Winkelverdreifachung. Außerhalb bleiben Winkel erhalten, und kleine Quadrate werden in kleine Quadrate überführt.

**Beispiel:**  $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$ , also  $f(x + iy) = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2}$



In Polardarstellung gilt  $f(re^{i\varphi}) = r^{-1} e^{-i\varphi}$ . Geometrisch entspricht diese Abbildung einer Spiegelung am Einheitskreis ( $r \mapsto r^{-1}$ ) sowie einer an der reellen Achse ( $e^{i\varphi} \mapsto e^{-i\varphi}$ ).

**Beispiel:**  $f(z) = \exp(z)$ , also  $f(x + iy) = e^x \cos y + i e^x \sin y$



Das entspricht der Polardarstellung mit Radius  $e^x$  und Winkel  $y$ . Für jede komplexe Zahl  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  existiert  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  sodass  $w = \exp(z) = e^x (\cos y + i \sin y)$  gilt. Genau dann gilt  $\exp(z) = \exp(\tilde{z})$ , wenn  $z - \tilde{z} = k \cdot 2\pi i$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$ . (Satz F2K)

**Definition F2A: komplexe Ableitung**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  eine komplexe Funktion. Wir betrachten

$$\lim_{\substack{z_n \rightarrow z \\ z_n \in \Omega \setminus \{z\}}} \frac{f(z_n) - f(z)}{z_n - z}$$

Wir nennen  $f$  im Punkt  $z \in \Omega$  **komplex differenzierbar**, wenn dieser Grenzwert existiert für jede Folge  $z_n \rightarrow z$  mit  $z_n \in \Omega$  und  $z_n \neq z$ .

Dieser Grenzwert heißt dann die **komplexe Ableitung**, geschrieben

$$f'(z) = \lim_{\substack{\zeta \rightarrow z \\ \zeta \neq z}} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} = \lim_{\substack{w \rightarrow 0 \\ w \neq 0}} \frac{f(z+w) - f(z)}{w}$$

**Beispiel:** Für  $f(z) = z^2$  gilt  $f'(z) = 2z$ , denn  $\frac{\zeta^2 - z^2}{\zeta - z} = \zeta + z \rightarrow 2z$ .

**Allgemein:** Für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $f(z) = z^n$  gilt  $f'(z) = n z^{n-1}$ , denn

$$\frac{\zeta^n - z^n}{\zeta - z} = \sum_{k=1}^n \zeta^{k-1} z^{n-k} \rightarrow n z^{n-1} \text{ für } \zeta \rightarrow z.$$

**Satz F2B: komplexe Ableitungsregeln**

Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit, aber nicht umgekehrt. Die Ableitung ist linear und erfüllt Produkt- und Kettenregel:

$$[af]'(z) = a f'(z) \text{ für } a \in \mathbb{C}, \quad [f \cdot g]'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z),$$

$$[f + g]'(z) = f'(z) + g'(z), \quad [h \circ g]'(z) = h'(g(z)) \cdot g'(z).$$

Hierbei seien  $f, g$  im Punkt  $z \in \mathbb{C}$  komplex diff'bar und  $h$  im Punkt  $g(z)$ . Der Nachweis dieser Regeln verläuft wörtlich wie im reellen Fall. Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §2.2.

**Aufgabe:** Für  $f(z) = z^{-n}$  folgt  $f'(z) = -n z^{-n-1}$  in jedem Punkt  $z \neq 0$ .

**Lösung:** Aus  $z^n \cdot f(z) = 1$  folgt dank Produktregel

$$n z^{n-1} \cdot f(z) + z^n \cdot f'(z) = 0.$$

Diese Gleichung lösen wir auf zu  $f'(z) = -n z^{-1} f(z) = -n z^{-n-1}$ .

**Definition F2C: Holomorphie**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen. Eine komplexe Funktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **holomorph**, wenn sie auf ganz  $\Omega$  komplex differenzierbar ist und  $f': \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  stetig.

**Aufgabe:** Ist jedes komplexe Polynom holomorph?

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$

**Lösung:** Ja,  $f$  ist auf ganz  $\mathbb{C}$  holomorph mit der Ableitung

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + \dots + n a_n z^{n-1}.$$

**Aufgabe:** Ist jedes komplexe Laurent-Polynom holomorph?

$$f(z) = a_{-n} z^{-n} + \dots + a_{-1} z^{-1} + a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

**Lösung:** Ja,  $f$  ist auf  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  holomorph mit der Ableitung

$$f'(z) = -n a_{-n} z^{-n-1} - \dots - a_{-1} z^{-2} + a_1 + \dots + n a_n z^{n-1}.$$

☺ Gleiches gilt für konvergente (Laurent-)Potenzreihen, also  $n \rightarrow \infty$ .

**Korollar F2D: Eigenschaften holomorpher Funktionen**

Holomorphe Funktionen  $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  sind insbesondere stetig. Linearkombination, Multiplikation und Komposition holomorpher Funktionen ergeben wieder holomorphe Funktionen. Dabei gilt:

$$[af]' = a f', \quad [f \cdot g]' = f'g + f g',$$

$$[f + g]' = f' + g', \quad [h \circ g]' = (h' \circ g) \cdot g'.$$

☺ Soweit verhält sich die komplexe Ableitung genau wie die reelle. Insbesondere für (Laurent-)Polynome gelten dieselben Rechenregeln. Wir wollen dies gleich auch für (Laurent-)Potenzreihen festhalten.

⚠ Wir werden sodann als fundamentalen Unterschied zu  $\mathbb{R}$  ausnutzen, dass wir in  $\mathbb{C}$  in zwei linear unabhängige Richtungen ableiten können. Dies impliziert die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen und wird unsere Integralsätze in der Ebene (Green / Gauß) zum Einsatz bringen. Dadurch entfalten sich viel stärkere Gesetzmäßigkeiten als im Reellen.

Sei  $f : \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  im Punkt  $z \in \mathbb{C}$  **komplex differenzierbar**:

$$f'(z) = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(z+w) - f(z)}{w}$$

Dann ist  $f$  im Punkt  $z \in \mathbb{C}$  insbesondere partiell differenzierbar:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(z+r) - f(z)}{r} = \frac{\partial f}{\partial x}(z), \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(z+is) - f(z)}{is} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z)$$

Beide stimmen mit  $f'(z)$  überein! Für  $f = u + iv$  gilt also

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z) = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z) - i \frac{\partial u}{\partial y}(z)$$

Dies sind die **Cauchy–Riemann–Differentialgleichungen**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

☺ Dieses Kriterium ist nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend. Damit können wir leicht überprüfen, ob  $f : \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph ist!

**Satz F2E: Cauchy–Riemann–Differentialgleichungen**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen. Die komplexe Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  zerlegen wir in  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  mit  $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann sind äquivalent:

- 1 Die Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  ist holomorph, das heißt auf ganz  $\Omega$  komplex differenzierbar mit stetiger Ableitung  $f'$ .
- 2 Die Funktionen  $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sind stetig partiell differenzierbar und erfüllen die Cauchy–Riemann–Differentialgleichungen.

**Nachrechnen:** Die Implikation „(1)  $\Rightarrow$  (2)“ haben wir ausgerechnet.

Die Umkehrung „(2)  $\Leftarrow$  (1)“ erhalten wir aus der Taylor–Formel:

Für  $w = r + is$  gilt  $f(z+w) = f(z) + \partial_x f(z)r + \partial_y f(z)s + o(|w|)$ . Dank  $\partial_y f = i\partial_x f$  folgt  $f(z+w) = f(z) + \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)f(z)w + o(|w|)$ . Für  $w \rightarrow 0$  gilt somit  $(f(z+w) - f(z))/w \rightarrow \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)f(z)$ .

☺ Einfach und praktisch: Die Cauchy–Riemann–Differentialgleichungen übersetzen verlustfrei komplexe in reelle Differenzierbarkeit und zurück! Wir nennen  $\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$  die Wirtinger–Ableitung nach  $z$ , siehe F2F.

Es gibt mehrere äquivalente Formulierungen der CR–Gleichungen

$$\partial_x u = \partial_y v, \quad \partial_x v = -\partial_y u$$

Sie besagen, dass die Jacobi–Matrix eine ganz spezielle Form hat:

$$J = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

☺ Die Determinante ist  $a^2 + b^2 = |f'(z)|^2 \geq 0$ . Es handelt sich um eine Drehung gefolgt von einer Streckung um den Faktor  $|f'(z)|$ . Dies erklärt, warum im Falle  $f'(z) \neq 0$  die Abbildung  $f$  die Winkel erhält und kleine Quadrate in kleine Quadrate überführt, wie in obigen Graphiken gezeigt.

Das Vektorfeld  $\vec{f} = (u, -v) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist divergenz- und rotationsfrei:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u, -v) &= +\partial_x u - \partial_y v = 0, \\ \operatorname{rot}(u, -v) &= -\partial_x v - \partial_y u = 0. \end{aligned}$$

☺ Genau diese Eigenschaft nutzen wir im Residuensatz, siehe F3A.

**Aufgabe:** (1) Ist die Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto z^2$  holomorph?

(2) Ist  $f(z) = \bar{z}$  holomorph? (3) und  $e^{x+iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y$ ?

**Lösung:** (1) Wir finden  $u(x, y) = (x^2 - y^2)$  und  $v(x, y) = 2xy$  und somit

$$\begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \quad \text{also} \quad \begin{cases} \operatorname{div}(u, -v) = +\partial_x u - \partial_y v = 0, \\ \operatorname{rot}(u, -v) = -\partial_x v - \partial_y u = 0. \end{cases}$$

Die Funktion  $f(z) = z^2$  ist holomorph. ☺ Das wussten wir schon!

(2) Wir finden  $u(x, y) = x$  und  $v(x, y) = -y$  und somit

$$\begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{also} \quad \begin{cases} \operatorname{div}(u, -v) = +\partial_x u - \partial_y v = 2, \\ \operatorname{rot}(u, -v) = -\partial_x v - \partial_y u = 0. \end{cases}$$

Die Funktion  $f(z) = \bar{z}$  ist nicht holomorph. ☺ Erstes Gegenbeispiel!

(3) Auch  $e^{x+iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y$  ist holomorph:

$$\begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} \quad \text{also} \quad \begin{cases} \operatorname{div}(u, -v) = 0, \\ \operatorname{rot}(u, -v) = 0. \end{cases}$$

☺ Das folgt auch direkt aus der Exponentialreihe  $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$ .

**Satz F2F: Wirtinger–Ableitungen**

Wir definieren die **Wirtinger–Ableitungen** nach  $z$  und  $\bar{z}$  durch

$$\partial_z := \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y) \quad \text{und} \quad \partial_{\bar{z}} := \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$$

(0) Es gilt  $\partial_z z = 1$  und  $\partial_z \bar{z} = 0$  sowie  $\partial_{\bar{z}} z = 0$  und  $\partial_{\bar{z}} \bar{z} = 1$ .

(1) Ist  $f : \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  komplex differenzierbar, so gilt

$$f' = \partial_z f \quad \text{und} \quad \partial_{\bar{z}} f = 0$$

(2) Ist umgekehrt  $f : \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  nach  $x$  und  $y$  partiell differenzierbar, so sind die Cauchy–Riemann–Gleichungen F2E äquivalent zu  $\partial_{\bar{z}} f = 0$ .

**Beweis:** Für  $f = u + iv$  rechnen wir gewissenhaft nach:

$$\begin{aligned} \partial_z f &= \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)(u + iv) = \frac{1}{2}(\partial_x u + \partial_y v) + \frac{i}{2}(\partial_x v - \partial_y u) \\ \partial_{\bar{z}} f &= \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)(u + iv) = \frac{1}{2}(\partial_x u - \partial_y v) + \frac{i}{2}(\partial_x v + \partial_y u) \end{aligned}$$

☺ Somit ist  $\partial_{\bar{z}} f = 0$  äquivalent zu den Cauchy–Riemann–Gleichungen  $\partial_x u = \partial_y v, \partial_x v = -\partial_y u$ . Ist  $f$  komplex differenzierbar, so folgt  $\partial_z f = f'$ .

**Satz F2G: inhomogener Integralsatz von Cauchy**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen und darauf  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  stetig partiell differenzierbar. Für jedes Kompaktum  $D \subseteq \Omega$  mit stückweise glattem Rand gilt:

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 2i \int_D \partial_{\bar{z}} f(x, y) d(x, y)$$

**Beweis:** (2) Für  $f = u + iv$  und  $dz = dx + i dy$  rechnen wir nach:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} f(z) dz &\stackrel{\text{Def F1A}}{=} \int_{\partial D} (u dx - v dy) + i \int_{\partial D} (u dy + v dx) \\ &\stackrel{\text{Green/Gauß}}{=} \int_D \operatorname{rot}(u, -v) d(x, y) + i \int_D \operatorname{div}(u, -v) d(x, y) \\ &\stackrel{\text{Def F2F}}{=} 2i \int_D \partial_{\bar{z}} f(x, y) d(x, y) \end{aligned}$$

☺ Ist  $f$  holomorph, so gilt  $\partial_{\bar{z}} f = 0$ , und das Integral verschwindet! (F3A) Erfreulicherweise gilt sogar die Umkehrung, siehe den folgenden Satz.

**Satz F2H: Äquivalente Kriterien für Holomorphie**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen. Die komplexe Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  zerlegen wir in  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  mit  $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann sind äquivalent:

- 1 **Holomorphie:** Die Funktion  $f$  ist holomorph, das heißt auf ganz  $\Omega$  komplex differenzierbar mit stetiger Ableitung  $f'$ .
- 2 **Komplexe Differenzierbarkeit:** Die Funktion  $f$  ist auf ganz  $\Omega$  komplex differenzierbar (ohne die Stetigkeit von  $f'$  zu verlangen).
- 3 **Analytizität:** Die Funktion  $f$  lässt sich in jedem Punkt  $z_0 \in \Omega$  in eine konvergente Potenzreihe entwickeln,  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ .
- 4 **Glattheit:** Die Funktion  $f$  ist beliebig oft komplex differenzierbar.
- 5 **Cauchy–Riemann:** Die Funktionen  $u, v$  sind stetig partiell differenzierbar und erfüllen  $\partial_x u = \partial_y v$  und  $\partial_x v = -\partial_y u$ .
- 6 **Looman–Menchoff:** Die Funktion  $f$  ist stetig, die Ableitungen  $\partial_x f$  und  $\partial_y f$  existieren und erfüllen  $\partial_x f + i\partial_y f = 0$ , kurz  $\partial_{\bar{z}} f = 0$ .
- 7 **Morera:** Die Funktion  $f$  ist stetig und für jedes Rechteck  $R \subseteq \Omega$  verschwindet das komplexe Wegintegral  $\oint_{\partial R} f(z) dz = 0$ .

☺ Zu prüfen ist, ob eine vorgelegte Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph ist. Je nach Bedarf können wir hierzu jedes dieser sieben Kriterien nutzen! Das öffnet mehrere Zugänge zu den Werkzeugen der Funktionentheorie.

Diese sieben Bedingungen scheinen zunächst sehr verschieden und unterschiedlich stark. Es ist daher überaus bemerkenswert, dass all diese Bedingungen äquivalent sind zur Holomorphie (1).

Die Eigenschaft der Holomorphie ist demnach robust und fundamental. Wir haben bereits die Äquivalenz (1)  $\Leftrightarrow$  (5) nachgerechnet. (Satz F2E) Wir werden weiter unten die Äquivalenz (1)  $\Leftrightarrow$  (3) zeigen. (Satz F3E) Die Implikationen (3)  $\Rightarrow$  (4)  $\Rightarrow$  (1) sind dann klar (dank Satz F2J).

Die weiteren Kriterien nenne ich hier nur zur Illustration und Abrundung. Zum Beispiel garantieren (1)  $\Leftrightarrow$  (2) und (5)  $\Leftrightarrow$  (6), dass wir die Stetigkeit der Ableitungen nicht gesondert fordern bzw. nachweisen müssen (F5c). Formulierung (7) kommt ohne Ableitung nur mit Integralen aus (F5B).

☞ Ausführliche Beweise und Erläuterungen finden Sie in den meisten Einführungen zur Funktionentheorie, etwa von Jänich oder Remmert.

**Von Polynomen zu Reihen** F217  
Erinnerung

Besonders schöne und einfache Funktionen sind **Polynome**:

$$f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$

Manchmal benötigen wir etwas allgemeiner auch **Laurent-Polynome**:

$$f(z) = \sum_{k=-n}^n a_k z^k = a_{-n} z^{-n} + a_{-n+1} z^{1-n} + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n$$

😊 Wir vollziehen mutig und umsichtig den Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$ .

Besonders schöne und einfache Funktionen sind **Potenzreihen**:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

Manchmal benötigen wir etwas allgemeiner auch **Laurent-Reihen**:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k = \dots + a_{-2} z^{-2} + a_{-1} z^{-1} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

😊 Für die Konvergenz und das Rechnen gibt es einfache Regeln.

**Potenzreihen: Beispiele** F218  
Erinnerung

Viele wichtige Funktionen lassen sich als Potenzreihen darstellen:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots \quad \text{für } |z| < 1,$$

$$\ln(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} z^k = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots \quad \text{für } |z| < 1,$$

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots \quad \text{für } z \in \mathbb{C},$$

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \quad \text{für } z \in \mathbb{C},$$

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \quad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

Hieraus folgen die **Euler-Formel**  $\exp(iz) = \cos z + i \sin z$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ , das **Potenzgesetz**  $e^{z+w} = e^z e^w$  [F222], speziell  $e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$ , sowie die **Additionstheoreme** für  $\sin$  und  $\cos$  [B125], und vieles mehr.

**Potenzreihen: Konvergenzradius** F219  
Erinnerung

**Satz F2I: Konvergenz von Potenzreihen**

Eine **Potenzreihe** ist eine (zunächst formale) Reihe der Form

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Sie ist gegeben durch ihren **Entwicklungspunkt**  $z_0 \in \mathbb{C}$  und ihre **Koeffizienten**  $a_k \in \mathbb{C}$  für  $k \in \mathbb{N}$ . Ihr **Konvergenzradius** ist

$$\rho := 1 / \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \in [0, \infty].$$

Die Reihe **konvergiert** absolut für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z - z_0| < \rho$ . Hingegen **divergiert** die Reihe für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z - z_0| > \rho$ .

Für Randpunkte  $|z - z_0| = \rho$  kann beides passieren; hier ist keine einfache Aussage möglich. (Antworten über das subtile Verhalten auf dem Kreisrand gibt die Theorie der Fourier-Reihen. Allgemein gehört die Konvergenz solcher Reihen zu den schwierigsten Fragen der Analysis.) Im Falle  $\rho = \infty$  ist  $B(z_0, \infty) = \mathbb{C}$  die gesamte Ebene, und die Reihe konvergiert überall. Im Falle  $\rho = 0$  ist  $B(z_0, 0)$  leer und die Reihe konvergiert nur im Entwicklungspunkt  $z_0$ .

**Potenzreihen: Ableitung** F220  
Erinnerung

😊 Potenzreihen verhalten sich wie Polynome (von unendlichem Grad). Auf ihrem Konvergenzgebiet können wir mit Potenzreihen gut rechnen, wie üblich addieren, multiplizieren, verknüpfen, insbesondere ableiten.

**Satz F2J: Ableitung von Potenzreihen**

Sei  $\Omega = B(z_0, \rho)$  mit  $0 < \rho \leq \infty$ . Jede konvergente Potenzreihe

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{für alle } z \in \Omega,$$

ist auf  $\Omega$  holomorph. Ihre Ableitung ist gegeben durch

$$f': \Omega \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1} \quad \text{für alle } z \in \Omega.$$

Auch diese ist auf  $\Omega$  holomorph, somit ist  $f$  beliebig oft differenzierbar. Die Funktion  $f$  bestimmt die Koeffizienten vermöge  $a_k = f^{(k)}(z_0)/k!$ . Unsere Potenzreihe ist somit die Taylor-Reihe der Funktion  $f$ .

**Rechnen mit Potenzreihen** F221  
Erinnerung

☞ Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §1.14. Nach Verschieben können wir als Entwicklungspunkt  $z_0 = 0$  annehmen:

$$f: B(z_0, \rho) \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{wird verschoben zu}$$

$$\tilde{f}: B(0, \rho) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \tilde{f}(z) = f(z_0 + z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

**Aufgabe:** Wie werden Potenzreihen addiert bzw. multipliziert?  
**Lösung:** Addition erfolgt wie üblich bei konvergenten Reihen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) z^k$$

Multiplikation dank Umordnungssatz A2N für abs. konvergente Reihen:

$$\left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i \right) \cdot \left( \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{i+j=k} a_i b_j \right) z^k.$$

**Die komplexe Exponentialfunktion** F222  
Erinnerung

**Aufgabe:** Aus der Exponentialreihe folgt die **Funktionalgleichung**

$$\exp(z+w) = \exp(z) \exp(w) \quad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C}.$$

**Nachrechnen:** Dank Umordnungssatz und binomischer Formel gilt:

$$\begin{aligned} \exp(z) \exp(w) &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right) \left( \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{w^\ell}{\ell!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+\ell=n} \frac{z^k w^\ell}{k! \ell!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n = \exp(z+w). \end{aligned}$$

😊 Dies entspricht dem **Potenzgesetz**, daher die Kurzschreibweise

$$e^z := \exp(z) \quad \text{und} \quad e^{z+w} = e^z e^w.$$

😊 Zusammen mit der wichtigen **Euler-Formel**  $\exp(iz) = \cos z + i \sin z$  erhalten wir hieraus sofort **Additionstheoreme** für  $\sin$  und  $\cos$ . [B125] (Wiederholen und beweisen Sie diese als lehrreiche Übung.)

**Die komplexe Exponentialfunktion** F223  
Erinnerung

**Aufgabe:** Aus der Exponentialreihe folgt die **Ableitungsregel**

$$\frac{d}{dz} \exp(az) = a \exp(az).$$

**Nachrechnen:** Dank Ableitungsregel F2J für Potenzreihen gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \exp(az) &= \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dz} \frac{a^k z^k}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k z^{k-1}}{(k-1)!} = a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k z^k}{k!} = a \exp(az). \end{aligned}$$

In Kurzschreibweise erhalten wir die vertraute Formel

$$\frac{d}{dz} e^{az} = a e^{az}.$$

😊 Das ist eine charakteristische Eigenschaft der Exponentialfunktion. Wir werden sie insbesondere für Differentialgleichungen ausnutzen!

**Die komplexe Exponentialfunktion** F224  
Erinnerung

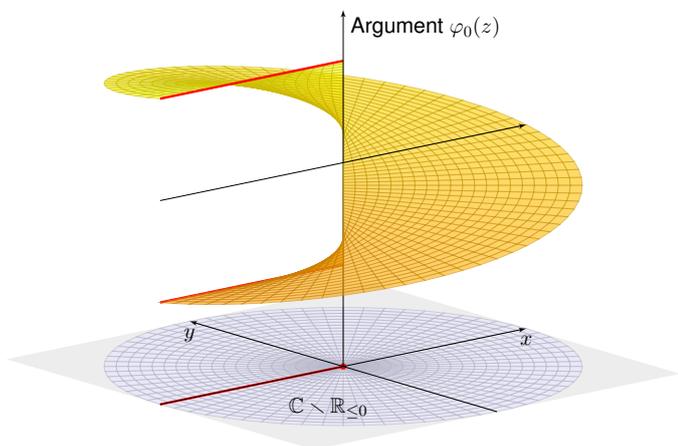
**Satz F2K: Bild und Kern der Exponentialfunktion**

(1) Für jede komplexe Zahl  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  existiert  $w = u + iv \in \mathbb{C}$ , sodass  $z = \exp(w) = e^u (\cos v + i \sin v)$  gilt, also eine Polardarstellung von  $z$ .  
(2) Genau dann gilt  $\exp(w) = \exp(\tilde{w})$ , wenn  $w - \tilde{w} = k \cdot 2\pi i$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$ .  
(3) Lokal um den Entwicklungspunkt 1 ist der komplexe Logarithmus

$$\ln: B(1, 1) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \ln(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} z^k$$

eine Umkehrfunktion, das heißt  $\exp(\ln(1+z)) = 1+z$  für alle  $|z| < 1$ .

Aussage (1) bedeutet: Die komplexe Exponentialfunktion  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ist surjektiv. Wir können daher jede komplexe Zahl  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  in komplexen Polarkoordinaten darstellen. Aussage (2) besagt, dass  $\exp$  nicht injektiv ist, und benennt den Kern  $\ker(\exp) = \mathbb{Z}2\pi i$ . Das ist äquivalent zur vertrauten Periodizität der reellen Winkelfunktion  $\cos, \sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Im reellen Fall ist  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  bijektiv und erlaubt eine Umkehrfunktion  $\ln: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ . Im komplexen Fall ist dies global auf  $\mathbb{C}$  unmöglich, da  $\exp$  nach (2) nicht bijektiv ist, aber es gelingt immerhin lokal mit Hilfe der in (3) angegebenen Potenzreihe: Dies rechnet man (etwas mühsam) nach durch Einsetzen der beiden Potenzreihen, oder (viel einfacher) durch Ableiten:  $f(z) = \exp(\ln(1+z))/(1+z)$  erfüllt  $f(0) = 1$  und  $f'(z) = 0$ . Berechnen Sie's zur Übung!



Die reelle Exponentialfunktion  $\exp: (\mathbb{R}, 0, +) \rightarrow (\mathbb{R}_{>0}, 1, \cdot)$  ist bijektiv, ihre Umkehrfunktion ist der reelle Logarithmus  $\ln: (\mathbb{R}_{>0}, 1, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}, 0, +)$ .  
 Die komplexe Exponentialfunktion  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ist surjektiv:  $w = u + iv \mapsto e^{u+iv} = e^u(\cos v + i \sin v)$  beschert uns Polarkoordinaten! Sie ist jedoch nicht injektiv, ganz im Gegenteil: Sie hat Periode  $2\pi i$  (F2K).  
 Zu  $z \in \mathbb{C}^*$  gibt es also nicht nur einen Logarithmus  $w \in \mathbb{C}$  mit  $e^w = z$ , sondern unendlich viele, nämlich  $\exp^{-1}(\{z\}) = \{w + k \cdot 2\pi i \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .  
 Man könnte nun für jedes  $z \in \mathbb{C}^*$  willkürlich einen Logarithmus  $w \in \mathbb{C}$  mit  $e^w = z$  wählen, aber das kann global auf  $\mathbb{C}^*$  nicht stetig gelingen! Zwecks Stetigkeit müssen wir das Definitionsgebiet einschränken:

**Definition F2L: Zweige des komplexen Logarithmus**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^*$  ein Gebiet, also eine offene zusammenhängende Menge.  
 Eine stetige Funktion  $f: \mathbb{C}^* \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $e^{f(z)} = z$  heißt ein **Zweig des Logarithmus** auf  $\Omega$  oder auch **eine Logarithmusfunktion** auf  $\Omega$ .  
 Eine stetige Funktion  $\varphi: \mathbb{C}^* \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $z = |z|e^{i\varphi(z)}$  heißt ein **Zweig des Arguments** auf  $\Omega$  oder auch **eine Argumentfunktion** auf  $\Omega$ .

**Aufgabe:** (1) Wie entsprechen sich Argument und Logarithmus? (2) Sind sie auf  $\Omega$  eindeutig? (3) bis auf eine additive Konstante?  
**Lösung:** (1) Ist  $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Argumentfunktion, so ist  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(z) = \ln|z| + i\varphi(z)$  eine Logarithmusfunktion. Ist umgekehrt  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  eine Logarithmusfunktion, so gilt  $z = e^{f(z)} = e^{\operatorname{Re} f(z)} e^{i \operatorname{Im} f(z)}$  für  $z \in \Omega$ , also folgt  $|z| = e^{\operatorname{Re} f(z)}$ , und  $\varphi(z) = \operatorname{Im} f(z)$  ist eine Argumentfunktion.  
 (2) Ist  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  eine Logarithmusfunktion auf  $\Omega$ , so auch  $g = f + 2\pi i k$  für jede Konstante  $k \in \mathbb{Z}$ , denn  $g$  ist stetig und  $e^{g(z)} = e^{f(z)} e^{2\pi i k} = z$ .  
 ⚠ Da es auf  $\Omega$  mehrere Logarithmusfunktionen gibt, sagen wir betont **eine** Logarithmusfunktion und bewusst nicht „die“ Logarithmusfunktion.  
 (3) Seien umgekehrt  $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  zwei Logarithmusfunktionen auf  $\Omega$ . In jedem  $z \in \Omega$  folgt  $e^{g(z)-f(z)} = e^{g(z)} e^{-f(z)} = e^{g(z)}/e^{f(z)} = z/z = 1$ . Dank Satz F2K gilt demnach  $g(z) - f(z) = k(z) \cdot 2\pi i$  für ein  $k(z) \in \mathbb{Z}$ . Mit  $f, g$  ist auch  $k = (g - f)/2\pi i: \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$  stetig, also lokal konstant. Da wir  $\Omega$  als zusammenhängend voraussetzen, ist  $k$  konstant.  
 😊 Kennen wir also auf  $\Omega$  eine Logarithmusfunktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , so kennen wir bereits **alle**, nämlich  $f_k = f + k \cdot 2\pi i$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Übung:** Prüfen und erklären Sie die folgenden Konstruktionen!

**Satz F2M: Zweige des komplexen Logarithmus**

Die folgenden Abbildungen sind **Argumentfunktionen**:

$$g_0: \mathbb{C}_{\operatorname{Re}>0} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x + iy \mapsto \arctan(y/x)$$

$$g_{\pi/2}: \mathbb{C}_{\operatorname{Im}>0} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x + iy \mapsto +\pi/2 - \arctan(x/y)$$

$$g_{-\pi/2}: \mathbb{C}_{\operatorname{Im}<0} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x + iy \mapsto -\pi/2 - \arctan(x/y)$$

$$\varphi_0: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_0(z) = \begin{cases} g_0(z) & \text{für } \operatorname{Re}(z) > 0, \\ g_{\pi/2}(z) & \text{für } \operatorname{Im}(z) > 0, \\ g_{-\pi/2}(z) & \text{für } \operatorname{Im}(z) < 0. \end{cases}$$

Wir erhalten den sogenannten **Hauptzweig der Logarithmusfunktion**  $\ln_0: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\ln_0(z) = \ln|z| + i\varphi_0(z)$ . Zu jedem Winkel  $\theta \in \mathbb{R}$  existiert entsprechend genau ein **Zweig der Logarithmusfunktion**  $\ln_\theta: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \cdot e^{i\theta} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\ln_\theta(e^{i\theta}) = i\theta$ , nämlich  $\ln_\theta(z) = \ln_0(z e^{-i\theta}) + i\theta$ . Er bijiziert den Sektor  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \cdot e^{i\theta}$  auf den Streifen  $\mathbb{R} \times ]\theta - \pi, \theta + \pi[$ .

**Aufgabe:** Wie finden Sie Nullstellen quadratischer Polynome  $p \in \mathbb{C}[z]$ ?  
**Lösung:** Zu gegebenen Nullstellen  $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$  bilden wir das Polynom

$$p(z) = (z - z_1)(z - z_2) = az^2 + bz + c \in \mathbb{C}[z]$$

mit  $a = 1$  und  $b = -z_1 - z_2$  und  $c = z_1 z_2$ . Sind umgekehrt  $a, b, c \in \mathbb{C}$  mit  $a \neq 0$  vorgelegt, so finden wir beide Nullstellen  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  von  $p$  durch

$$\{z_1, z_2\} = \left\{ \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}.$$

Wir stehen daher vor der Aufgabe, zu jeder komplexen Zahl  $z \in \mathbb{C}$  eine  $n$ -te Wurzel zu konstruieren, also eine komplexe Zahl  $w \in \mathbb{C}$  mit  $w^n = z$ . Für  $n = 2$  gelingt dies leicht wie folgt: Für  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $y \geq 0$  setzen wir

$$z = x \pm iy \mapsto w = \sqrt{\frac{|z| + x}{2}} \pm i \sqrt{\frac{|z| - x}{2}}.$$

😊 Wir nutzen die reelle Wurzelfunktion  $\sqrt{\cdot}: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  und erhalten eine stetige komplexe Wurzelfunktion  $\sqrt{\cdot}: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{<0} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $(\sqrt{z})^2 = z$ .  
 ⚠ Für  $z \in \mathbb{R}_{<0}$  ist die Zuordnung  $z \mapsto \pm i\sqrt{|z|}$  zweideutig bzw. unstetig.

**Aufgabe:** (1) Für  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  ist die reelle Potenzfunktion  $p: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  mit  $x \mapsto x^n$  bijektiv, ihre Umkehrfunktion ist die Wurzelfunktion  $y \mapsto \sqrt[n]{y}$ .  
 (2) Die komplexe Potenzfunktion  $p: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  mit  $w \mapsto w^n$  ist surjektiv aber nicht injektiv: Zu  $z \in \mathbb{C}^*$  existieren genau  $n$  Wurzeln  $w$  mit  $w^n = z$ .  
**Lösung:** (1) Die Funktion  $p$  ist stetig, monoton dank  $p'(x) = nx^{n-1} > 0$  für  $x > 0$ , also insbesondere injektiv. Zudem gilt  $p(0) = 0$  und  $p(x) \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow \infty$ . Dank des Zwischenwertsatzes ist  $p: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  surjektiv.  
 (2) Zu jedem  $z \in \mathbb{C}^*$  existiert ein Logarithmus  $a \in \mathbb{C}$  mit  $e^a = z$  (F2K). Für  $w = e^{a/n}$  gilt demnach  $w^n = (e^{a/n})^n = e^a = z$ . Jede andere Wahl  $a' = a + 2\pi i k$  führt zu  $w' = w e^{2\pi i k/n}$ , wobei  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

**Definition F2N: Zweige der  $n$ -ten Wurzelfunktion**

Eine stetige Funktion  $g: \mathbb{C}^* \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}^*$  mit  $g(z)^n = z$  heißt ein **Zweig der  $n$ -ten Wurzel** auf  $\Omega$  oder auch **eine  $n$ -te Wurzelfunktion** auf  $\Omega$ .

Jede Logarithmusfunktion  $f: \mathbb{C}^* \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $e^{f(z)} = z$ , nach F2M etwa  $f = \ln_\theta$ , beschert uns eine Wurzelfunktion  $g(z) = e^{f(z)/n}$  mit  $g(z)^n = z$ . Die anderen Zweige erhalten wir durch  $e^{(f(z)+2\pi i k)/n} = g(z) e^{2\pi i k/n}$ .

**Aufgabe:** Für jede komplexe Zahl  $z \in \mathbb{C}^*$  gilt  $z \cdot 1/z = 1$ , also scheinbar

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{z \cdot 1/z} \stackrel{?}{=} \sqrt{z} \cdot \sqrt{1/z}.$$

Was erhalten Sie für  $z = 1$ ? Was geht schief für  $z = -1$ ? Gilt etwa

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} \stackrel{?}{=} \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i \cdot i = -1 \quad ?$$

Beobachten Sie diese Gleichung längs des Weges  $z = \gamma(t) = e^{\pi i t}$ .

**Lösung:** Das Problem ist die Mehrdeutigkeit der komplexen Wurzeln! Wir betrachten den Weg  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$  mit  $\gamma(t) = e^{\pi i t}$  von  $\gamma(0) = 1$  nach  $\gamma(1) = -1$ . Für das Inverse gilt demnach  $1/\gamma(t) = e^{-\pi i t}$ . (Skizze!) Längs des Weges ziehen wir stetig die Wurzel gemäß  $\sqrt{\gamma(t)} = e^{\pi i t/2}$  und entsprechend  $\sqrt{1/\gamma(t)} = e^{-\pi i t/2}$ . Während des gesamten Weges gilt  $\sqrt{\gamma(t)} \cdot \sqrt{1/\gamma(t)} = 1$ . Am Endpunkt  $t = 1$  erhalten wir die Gleichung

$$1 = \sqrt{\gamma(1)} \cdot \sqrt{1/\gamma(1)} = i \cdot (-i).$$

Für andere Wege erhält man alternativ  $1 = (-i) \cdot i$ . 😊 Alles wird gut. Dies ist die Methode der analytischen Fortsetzung längs eines Weges.

**Aufgabe:** (1) Jeden Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^*$  mit Startpunkt  $\gamma(a) = z_0 = e^{w_0}$  können wir eindeutig hochheben zu einem Weg  $\ln \gamma := \tilde{\gamma}: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  mit Startpunkt  $\tilde{\gamma}(a) = w_0$  und  $e^{\tilde{\gamma}(t)} = \gamma(t)$  für alle  $t \in [a, b]$ , nämlich:

$$\tilde{\gamma}(t) := w_0 + \int_{\gamma|_{[a,t]}} \frac{dz}{z} = w_0 + \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)} ds.$$

Für jeden anderen Weg  $\hat{\gamma}$  mit  $e^{\hat{\gamma}} = \gamma$  gilt  $\hat{\gamma} = \tilde{\gamma} + k \cdot 2\pi i$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$ .

(2) Jeden Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^*$  mit Startpunkt  $\gamma(a) = z_0 = w_0^n$  können wir eindeutig hochheben zu einem Weg  $\tilde{\gamma}_n = \sqrt[n]{\gamma}: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^*$  mit Startpunkt  $\tilde{\gamma}_n(a) = w_0$  und der Wurzeleigenschaft  $(\tilde{\gamma}_n(t))^n = \gamma(t)$  für alle  $t \in [a, b]$ , nämlich  $\tilde{\gamma}_n(t) = e^{(\tilde{\gamma}(t)+2\pi i k)/n}$  für ein geeignetes  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ .

**Lösung:** (1) Für  $t = a$  gilt  $\tilde{\gamma}(a) = w_0$ . Es bleibt,  $e^{\tilde{\gamma}} = \gamma$  nachzuprüfen. Die Funktion  $h(t) = \gamma(t) e^{-\tilde{\gamma}(t)}$  erfüllt  $h(a) = 1$  und dank HDI zudem  $h'(t) = [\gamma'(t) - \gamma(t)\tilde{\gamma}'(t)] e^{-\tilde{\gamma}(t)} = 0$  für alle  $t \in [a, b]$ , also  $h(t) = 1$ . Aus  $e^{\tilde{\gamma}(t)} = e^{\tilde{\gamma}(a)} = \gamma(t)$  für alle  $t \in [a, b]$  folgt  $e^{\tilde{\gamma}(t)-\tilde{\gamma}(a)} = e^{\tilde{\gamma}(t)}/e^{\tilde{\gamma}(a)} = 1$ , also  $\tilde{\gamma}(t) - \tilde{\gamma}(a) = k(t) \cdot 2\pi i$  für ein  $k(t) \in \mathbb{Z}$ . Mit  $\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}$  ist auch die Differenz  $k = (\tilde{\gamma} - \tilde{\gamma})/2\pi i: [a, b] \rightarrow \mathbb{Z}$  stetig, also konstant.

**Motivation:** Wir wollen Funktionen auch um Polstellen entwickeln. Zum Beispiel  $z^{-1}$  oder  $z^{-n}$  oder  $e^{1/z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k!}$  entwickelt in  $z_0 = 0$ .

**Definition F20: Laurent-Reihe**

Eine **Laurent-Reihe** ist eine (zunächst formale) Reihe der Form

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(z-z_0)^k.$$

Sie ist gegeben durch ihren **Entwicklungspunkt**  $z_0 \in \mathbb{C}$  und ihre **Koeffizienten**  $a_k \in \mathbb{C}$  für  $k \in \mathbb{Z}$ . Ihr **Hauptteil** und **Nebenteil** sind

$$f_H(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z-z_0)^{-k}, \quad f_N(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k.$$

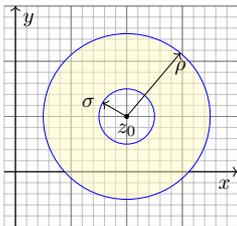
Der Nebenteil ist eine Potenzreihe in  $u = (z-z_0)$ , der Hauptteil ist demnach eine Potenzreihe in  $v = (z-z_0)^{-1}$ . Für beide gelten die Rechenregeln für Potenzreihen, wie wir sie oben ausgeführt haben.

Gilt  $a_k = 0$  für alle  $k < 0$ , so haben wir eine **Potenzreihe** vorliegen; für die Koeffizienten gilt dann  $f(z_0) = a_0$  und  $f^{(k)}(z_0) = k! a_k$ .

Treten auch negative Potenzen  $(z-z_0)^k$  mit  $k < 0$  auf, so können wir in die Laurent-Reihe nicht den Entwicklungspunkt  $z_0$  einsetzen!

Man nennt  $z_0$  eine **Singularität** und unterscheidet drei Typen:

- Wir nennen  $z_0$  eine **hebbare Singularität**, wenn  $a_k = 0$  für  $k < 0$ . In diesem Fall verschwindet der Hauptteil, kurz  $f_H = 0$ , und der verbleibende Nebenteil  $f = f_N$  ist eine Potenzreihe um  $z_0$ .  
**Beispiel:**  $f(z) = \sin(z)/z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k} / (2k+1)!$  in  $z_0 = 0$
- Wir nennen  $z_0$  eine **Polstelle  $n$ -ter Ordnung** ( $n \geq 1$ ), wenn  $a_{-n} \neq 0$  aber  $a_k = 0$  für alle Indizes  $k < -n$  gilt.  
**Beispiel:**  $f(z) = z^{-n} e^z = \sum_{k=-n}^{\infty} z^k / (k+n)!$  in  $z_0 = 0$
- Wir nennen  $z_0$  eine **wesentliche Singularität**, wenn  $a_k \neq 0$  für unendlich viele Indizes  $k < 0$  gilt.  
**Beispiel:**  $f(z) = e^{1/z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} / k!$  in  $z_0 = 0$



Der Nebenteil konvergiert für  $|z-z_0| < \rho$  mit

$$\rho := 1 / \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \in [0, \infty].$$

Der Hauptteil konvergiert für  $|z-z_0| > \sigma$  mit

$$\sigma := \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_{-k}|} \in [0, \infty].$$

Die Laurent-Reihe konvergiert somit auf dem offenen Kreisring

$$K(z_0, \sigma, \rho) := \{z \in \mathbb{C} \mid \sigma < |z-z_0| < \rho\},$$

wo sowohl der Hauptteil konvergiert als auch der Nebenteil.

⚠ Für  $\sigma > \rho$  ist  $K(z_0, \sigma, \rho)$  leer und die Reihe konvergiert nirgends! Das ist unglücklich, aber möglich. Im Folgenden benötigen wir  $\sigma < \rho$ .

😊 Auf ihrem Konvergenzgebiet können wir mit Laurent-Reihen wie üblich rechnen: Addition, Multiplikation, Komposition, Ableitung, ...

**Satz F2P: Ableitung von Laurent-Reihen**

Sei  $\Omega = K(z_0, \sigma, \rho)$  mit  $0 \leq \sigma < \rho \leq \infty$ . Jede Laurent-Reihe

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \quad \text{für alle } z \in \Omega,$$

ist auf  $\Omega$  holomorph. Ihre Ableitung ist gegeben durch

$$f': \Omega \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad f'(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k a_k(z-z_0)^{k-1} \quad \text{für alle } z \in \Omega.$$

Auch diese ist auf  $\Omega$  holomorph, somit ist  $f$  beliebig oft differenzierbar. Eine Stammfunktion zu  $f$  existiert genau dann, wenn  $a_{-1} = 0$ , nämlich

$$F: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad F(z) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq -1}}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (z-z_0)^{k+1} \quad \text{für alle } z \in \Omega.$$

**Aufgabe:** Entwickeln Sie die Funktion  $f: \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}: f(z) = 1/(1-z)$  auf  $B(0, 1)$  in eine Potenzreihe, auf  $K(0, 1, \infty)$  in eine Laurent-Reihe.

**Lösung:** (1) Die **geometrische Reihe** ist die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \quad \text{für } |z| < 1$$

mit Entwicklungspunkt  $z_0 = 0$  und Koeffizienten  $a_k = 1$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Die Polstelle von  $1/(1-z)$  in  $z = 1$  begrenzt den Konvergenzkreis. Die Reihe konvergiert daher nur für  $|z| < 1$  und divergiert für  $|z| \geq 1$ .

(2) Die Funktion  $f(z) = 1/(1-z)$  hingegen existiert auch für  $|z| > 1$ . Wir können sie auf  $K(0, 1, \infty)$  in eine **Laurent-Reihe** entwickeln. Statt in Potenzen von  $z$  entwickeln wir in Potenzen von  $1/z$ :

$$\frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z} = \frac{-1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} -z^{-k-1} \quad \text{für } |z| > 1$$

Diese Laurent-Reihe konvergiert für  $|z| > 1$  und divergiert für  $|z| \leq 1$ .

**Aufgabe:** Entwickeln Sie die Funktion  $f: \mathbb{C} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}: f(z) = 1/(z-a)$  auf  $B(0, |a|)$  in eine Potenzreihe, auf  $K(0, |a|, \infty)$  in eine Laurent-Reihe.

**Lösung:** (1) Auf  $B(0, |a|)$  erhalten wir die Potenzreihe

$$\frac{1}{z-a} = \frac{-1}{a} \cdot \frac{1}{1-z/a} = \frac{-1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{a^k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-a^{-k-1}) z^k \quad \text{für } |z| < |a|.$$

(2) Auf  $K(0, |a|, \infty)$  erhalten wir die Laurent-Reihe

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-a/z} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k-1} \quad \text{für } |z| > |a|.$$

Zusammenfassend gilt also

$$\frac{1}{z-a} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} (-a^{-k-1}) z^k & \text{für } |z| < |a|, \\ \sum_{k=-1}^{\infty} a^{-k-1} z^k & \text{für } |z| > |a|. \end{cases}$$

**Aufgabe:** Entwickeln Sie die rationale Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 5z + 6}$$

als Laurent-Reihe auf  $B(0, 2)$ , auf  $K(0, 2, 3)$  sowie auf  $K(0, 3, \infty)$ .

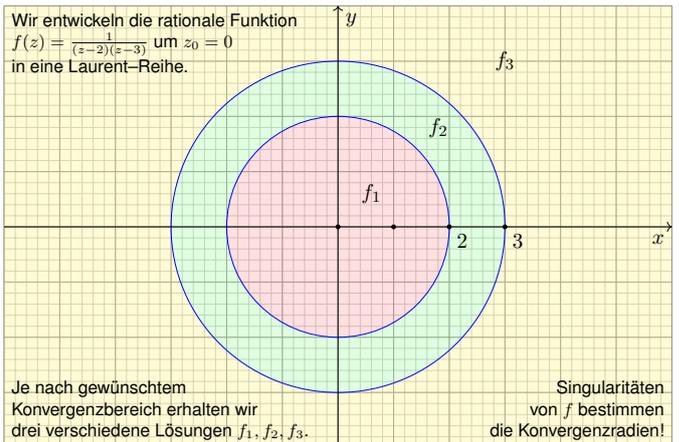
**Lösung:** Am leichtesten gelingt dies mit der Partialbruchzerlegung:

$$f(z) = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2}$$

Dank der vorigen Aufgabe erhalten wir drei gesuchten Entwicklungen:

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{-k-1} - 3^{-k-1}) z^k & \text{für } |z| < 2, \\ f_2(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} (-2^{-k-1}) z^k + \sum_{k=0}^{\infty} (-3^{-k-1}) z^k & \text{für } 2 < |z| < 3, \\ f_3(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} (3^{-k-1} - 2^{-k-1}) z^k & \text{für } 3 < |z|. \end{cases}$$

Wir entwickeln die rationale Funktion  $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$  um  $z_0 = 0$  in eine Laurent-Reihe.



Je nach gewünschtem Konvergenzbereich erhalten wir drei verschiedene Lösungen  $f_1, f_2, f_3$ . Singularitäten von  $f$  bestimmen die Konvergenzradien!

**Satz F2Q: Koeffizienten einer Laurent-Reihe**

Sei  $f : K(z_0, \sigma, \rho) \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch die Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Für jeden Radius  $r$  mit  $\sigma < r < \rho$  und jeden Index  $\ell \in \mathbb{Z}$  gilt dann

$$a_\ell = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{\ell+1}} dz.$$

- ☺ Für Potenzreihen (F2J) genügt ableiten, denn  $a_k = f^{(k)}(z_0)/k!$ . Bei Laurent-Reihen extrahiert das Integral für uns die Koeffizienten.
- ☺ Natürlich bestimmen die Koeffizienten  $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  die Funktion  $f$ . Dank F2Q bestimmt die Funktion  $f$  alle Koeffizienten  $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ .
- ☺ Umgekehrt können wir dies nutzen, um jede holomorphe Funktion  $f : K(z_0, \sigma, \rho) \rightarrow \mathbb{C}$  in eine Laurent-Reihe zu entwickeln (Satz F3E).

**Nachrechnen:** Wir setzen ein und rechnen es aus (dank Satz F1B):

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{\ell+1}} dz &= \int_{\partial B(z_0, r)} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-\ell-1} \right] dz \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left[ \int_{\partial B(z_0, r)} (z - z_0)^{k-\ell-1} dz \right] = 2\pi i a_\ell \end{aligned}$$

Wir erahnen hier bereits die Magie der komplexen Funktionen. Alles wird klar und einfach dank unserer gründlichen Vorbereitung:

- ☺ Reihe und Integral vertauschen dank absoluter Konvergenz (D1A). Die Integrale  $\int_{\partial B(z_0, r)} (z - z_0)^k$  haben wir oben ausgerechnet (F1B).
- ☺ Beim Wegintegral von  $f$  um  $z_0$  bleibt nur der Term  $2\pi i a_{-\ell-1}$  zurück. Deshalb heißt  $a_{-\ell-1}$  das **Residuum** (das 'Zurückbleibende') von  $f$  in  $z_0$ .
- ☺ Division durch  $(z - z_0)^\ell$  verschiebt alle Exponenten der Reihe, so dass der gewünschte Koeffizient  $a_\ell$  nun zum Residuum wird.

**Aufgabe:** Sei  $a \in \mathbb{C}$  und  $n, k \in \mathbb{N}$  sowie  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ . Berechnen Sie

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, r)} \frac{(z+a)^n}{z^{k+1}} dz.$$

**Lösung:** Für  $(z+a)^n$  nutzen wir den binomischen Lehrsatz. Es gilt

$$(z+a)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} z^j a^{n-j}, \quad \text{also} \quad \frac{(z+a)^n}{z^{k+1}} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} z^{j-k-1} a^{n-j}.$$

Das Integral gelingt leicht dank Linearität und obiger Formeln:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, r)} \frac{(z+a)^n}{z^{k+1}} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, r)} \left[ \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} z^{j-k-1} a^{n-j} \right] dz \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} \cdot \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, r)} z^{j-k-1} dz \right] = \binom{n}{k} a^{n-k} \end{aligned}$$

☺ Wir integrieren hier ein Laurent-Polynom, die Konvergenz spielt daher zunächst noch keine Rolle. Es genügt die Linearität des Integrals.

**Aufgabe:** Sei  $a \in \mathbb{C}$  und  $k \in \mathbb{N}$  sowie  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ . Berechnen Sie

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, r)} \frac{e^{az}}{z^{k+1}} dz.$$

**Lösung:** Dank Exponentialreihe gilt

$$e^{az} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^j}{j!} z^j.$$

Das Integral gelingt leicht dank obiger Formeln:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, r)} \frac{e^{az}}{z^{k+1}} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, r)} \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^j}{j!} z^{j-k-1} \right] dz \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^j}{j!} \cdot \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, r)} z^{j-k-1} dz \right] = \frac{a^k}{k!} \end{aligned}$$

☺ Wir integrieren hier eine Laurent-Reihe. Sie konvergiert absolut in jedem Punkt  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Daher vertauschen Reihe und Integral. [E106](#)

**Satz F3A: Integralsatz von Cauchy**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen und darauf  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion. Für jedes Kompaktum  $D \subseteq \Omega$  mit stückweise glattem Rand gilt:

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 0$$

**Nachrechnen:** Für  $f = u + iv$  und  $dz = dx + i dy$  rechnen wir nach:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} f(z) dz &\stackrel{\text{Def}}{\stackrel{\text{F1A}}{=}} \int_{\partial D} (u dx - v dy) + i(u dy + v dx) \\ &\stackrel{\text{Green}}{\stackrel{\text{Gauß}}{=}} \int_D \text{rot}(u, -v) d(x, y) + i \int_D \text{div}(u, -v) d(x, y) \stackrel{\text{CR}}{\stackrel{\text{F2E}}{=}} 0 \end{aligned}$$

Das ist die Grundlage des Residuensatzes F4D: gar keine Singularitäten! Für Anwendungen der Strömungsmechanik, wie die Kutta-Formel Q1C, schwächen wir die Voraussetzungen etwas ab: Es genügt  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und auf  $\mathring{D}$  holomorph. *Beweisidee:* Wir parametrisieren  $\partial D$  durch  $\delta$ . Zu  $\varepsilon > 0$  finden wir ein Kompaktum  $C \Subset D$  mit stückweise glattem Rand, parametrisiert durch  $\gamma$  mit  $|\int_\gamma f - \int_\delta f| \leq \varepsilon$ . Dank F3A gilt  $\int_\gamma f = 0$ . Aus  $|\int_\delta f| \leq \varepsilon$  für alle  $\varepsilon > 0$  folgt  $\int_\delta f = 0$ .

**Satz F3B: Integralformel von Cauchy**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Sei  $D \subseteq \Omega$  kompakt mit stückweise glattem Rand. Für jeden Punkt  $z_0 \in \Omega \setminus \partial D$  gilt dann

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \begin{cases} f(z_0) & \text{für } z_0 \in \mathring{D}, \\ 0 & \text{für } z_0 \notin D. \end{cases}$$

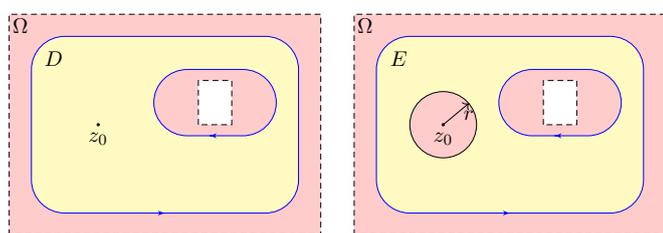
☺ Das ist ein bemerkenswerter Integralsatz. Die Funktionswerte  $f(z_0)$  auf dem Rand  $\partial D$  bestimmen bereits alle Werte  $f(z_0)$  im Inneren  $\mathring{D}$ ! Einfache Anwendungsbeispiele: Für  $f = 1$  erhalten wir erneut

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{1}{z - z_0} dz = \mathbf{I}_D(z_0) = \begin{cases} 1 & \text{für } z_0 \in \mathring{D}, \\ 0 & \text{für } z_0 \notin D. \end{cases}$$

Das verallgemeinert die fundamentalen Integrale (Satz F1B) sowie die reellen Arbeits- und Flussintegrale [E317](#). Weitere Anwendungsbeispiele:

$$\int_{\partial B(0,1)} \frac{e^z}{z} dz = 2\pi i e^0 = 2\pi i, \quad \int_{\partial B(0,1)} \frac{1}{z \cos z} dz = \frac{2\pi i}{\cos(0)} = 2\pi i$$

**Beweis:** Wir folgern die Integralformel F3B aus dem Integralsatz F3A. Der Integrand  $h(z) = f(z)/(z - z_0)$  ist holomorph auf  $\Omega \setminus \{z_0\}$  (F2D). Erster Fall: Für  $z_0 \notin D$  ist  $h$  holomorph auf  $D$ , also  $\int_{\partial D} h(z) dz = 0$ . Das ist Cauchys Integralsatz F3A, reell also Green und Gauß!



Zweiter Fall: Für  $z_0 \in \mathring{D}$  wählen wir  $r > 0$  so klein, dass  $\bar{B}(z_0, r) \subseteq \mathring{D}$ . Die Restmenge  $E = D \setminus B(z_0, r)$  ist kompakt mit stückweise glattem Rand  $\partial E = \partial D \cup \partial B(z_0, r)$ . *Orientierung:* Die Kreislinie  $\partial B(z_0, r)$  wird hier im Uhrzeigersinn (!) durchlaufen, sodass  $E$  links davon liegt.

Da  $h$  auf  $E$  holomorph ist, gilt dank Cauchys Integralsatz F3A:

$$0 = \int_{\partial E} h(z) dz = \int_{\partial D} h(z) dz - \int_{\partial B(z_0, r)} h(z) dz$$

Das gesuchte Integral können wir durch diesen Trick ausrechnen:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{t=0}^{2\pi} \frac{f(z_0 + r e^{it})}{r e^{it}} \cdot r i e^{it} dt \\ &= i \int_{t=0}^{2\pi} f(z_0 + r e^{it}) dt \xrightarrow{r \rightarrow 0} 2\pi i f(z_0). \end{aligned}$$

Da die linke Seite gar nicht von  $r$  abhängt, schließen wir daraus

$$\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0).$$

☺ Dank unserer Werkzeuge ist die Rechnung kurz und schmerzlos. Wir brauchen: komplexe Wegintegrale (F1A), holomorphe Funktionen (F2c) und hierzu äquivalent Cauchy-Riemann (F2E), sowie Integralsätze in der Ebene: Green & Gauß (E11) und hierzu äquivalent Cauchy (F3A).

Satz F3C: Fundamentalsatz der Algebra

Zu jedem Polynom  $f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$  vom Grad  $n$ , mit beliebigen komplexen Koeffizienten  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ ,  $a_n \neq 0$ , existieren genau  $n$  komplexe Nullstellen  $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ , sodass gilt:

$$f(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

Das ist ein schöner und nützlicher Satz! Noch schöner und noch nützlicher wäre es, zudem noch die Lage der Nullstellen zu erfahren. Nur für sehr kleine Grade gelingt dies leicht und explizit: Für  $n = 1$  führt die Nullstellensuche zur linearen Gleichung  $a_0 + a_1z = 0$ , also  $z = -a_0/a_1$ .

Für  $n = 2$  haben wir eine quadratische Gleichung  $a_0 + a_1z + a_2z^2 = 0$ , die wir mit der allseits beliebigen Mitternachtsformel lösen können:  $z_{1,2} = (-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}) / (2a_2)$ . Das ist eine nicht-triviale Konstruktion, vor allem durch das Wurzelziehen in  $\mathbb{C}$ . Wie geht das nochmal? [F229]

Für Grad  $n = 3$  und  $n = 4$  gibt es ähnliche Formeln (von Cardano und Ferrari) mit dritten bzw. vierten Wurzeln. Diese Formeln sind leider etwas komplizierter und werden daher selten genutzt.

Für Grad  $n \geq 5$  existieren keine solchen Wurzelformeln mehr! Wir müssen uns im Allgemeinen damit begnügen, die Lage der Nullstellen näherungsweise zu bestimmen. Dies hinreichend genau und möglichst effizient zu erreichen, ist das Grundproblem bei der numerischen Nullstellensuche.

Nullstellensuche für Polynome

Der Fundamentalsatz der Algebra verkündet „das Vorhandensein eines Schatzes, ohne jedoch zu verraten, an welchem Ort [...] Nicht das Existenztheorem ist das Wertvolle, sondern die im Beweise geführte Konstruktion.“ (Hermann Weyl) Die Suche der Nullstellen ist eine ungleich schwierigere Frage und für Anwendungen ungemein wichtig. Hierzu dient folgende Präzisierung:

Satz F3D: Lokalisieren der Nullstellen

Sei  $f(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$  ein Polynom mit  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ . Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  kompakt mit stückweise glatterm Rand, z.B. ein Rechteck, wobei keine Nullstellen von  $f$  auf dem Rand  $\partial D$  liegen. Dann gilt:

$$\#_{\text{mult}} \left\{ z \in \overset{\circ}{D} \mid f(z) = 0 \right\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

**Nachrechnen:** Dank F3C gilt  $f(z) = a_n(z - z_1) \cdots (z - z_n)$ , also

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z - z_1} + \dots + \frac{1}{z - z_n} \quad \text{dank Produktregel.}$$

😊 Das Wegintegral zählt die Nullstellen! [youtu.be/b7FxFpSqfK0Y](https://youtu.be/b7FxFpSqfK0Y)

Entwicklung als Potenzreihe

Satz F3E: Entwicklung als Potenzreihe

Sei  $f: B(z_0, \rho) \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, also stetig komplex differenzierbar. Für einen beliebigen Radius  $r$  mit  $0 < r < \rho$  und  $k \in \mathbb{N}$  definieren wir

$$a_k := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz.$$

Dank Cauchys Integralsatz F3A ist das Ergebnis unabhängig von  $r$ . Diese Koeffizienten stellen  $f$  als Potenzreihe dar, das heißt, es gilt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \quad \text{für alle } z \in B(z_0, \rho).$$

Insbesondere ist  $f$  beliebig oft komplex differenzierbar, und es gilt:

$$f^{(k)}(z_0) = k! a_k = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

Entwicklung als Laurent-Reihe

Satz F3F: Entwicklung als Laurent-Reihe

Sei  $f: K(z_0, \sigma, \rho) \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, also stetig komplex differenzierbar. Für einen beliebigen Radius  $r$  mit  $\sigma < r < \rho$  und  $k \in \mathbb{Z}$  definieren wir

$$a_k := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz.$$

Dank Cauchys Integralsatz F3A ist das Ergebnis unabhängig von  $r$ . Diese Koeffizienten stellen  $f$  als Laurent-Reihe dar, das heißt, es gilt

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \quad \text{für alle } z \in K(z_0, \sigma, \rho).$$

Insbesondere ist  $f$  auf  $K(z_0, \sigma, \rho)$  beliebig oft komplex differenzierbar.

😊 Die Konvergenz der Reihe wird garantiert für alle  $z \in K(z_0, \sigma, \rho)$ .

😊 Gilt  $a_k = 0$  für alle  $k < 0$ , so haben wir wie zuvor eine Potenzreihe. Die Funktion  $f$  lässt sich dann auf ganz  $B(z_0, \rho)$  holomorph fortsetzen.

Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra dank Umlaufzahl:

Angenommen,  $f$  hat keine Nullstelle in  $\mathbb{C}$ , also  $f(z) \neq 0$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Dann ist der Quotient  $h(z) = f'(z)/f(z)$  auf ganz  $\mathbb{C}$  holomorph.

(0) Cauchys Integralsatz F3A garantiert  $\int_{\partial B(0, r)} h(z) dz = 0$  für alle  $r > 0$ .

(1) Für  $z = r e^{it}$  und  $r \rightarrow \infty$  gilt folgender Grenzwert gleichmäßig in  $t$ :

$$h(z)z = \frac{f'(z)z}{f(z)} = \frac{na_nz^n + (n-1)a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z}{a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0} \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} n.$$

Für den Integrationsweg  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\gamma(t) = r e^{it}$  folgt dank D3C:

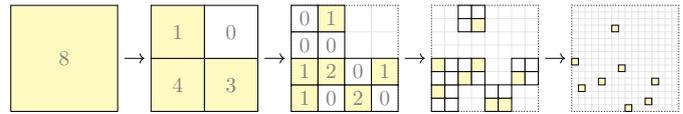
$$0 = \int_{\gamma} h(z) dz = \int_{t=0}^{2\pi} h(r e^{it}) r e^{it} i dt \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \int_{t=0}^{2\pi} n dt = 2\pi n$$

(2) Beides ist nur für  $n = 0$  möglich. Das bedeutet: Jedes komplexe Polynom  $f$  von Grad  $n \geq 1$  hat mindestens eine Nullstelle  $z_n \in \mathbb{C}$ .

Polynomdivision ergibt  $f(z) = g(z)(z - z_n)$  mit  $g \in \mathbb{C}[z]$  von Grad  $n - 1$ . Die vollständige Zerlegung erhalten wir durch wiederholtes Abspalten.

Nullstellensuche für Polynome

Hieraus erhalten wir **Weyls Algorithmus zur Nullstellensuche**:



Die Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sind uns gegeben, gesucht sind die Nullstellen  $z_1, \dots, z_n$ . Insbesondere sieht man dem Polynom  $f$  die Anzahl seiner Nullstellen in  $D$  nicht direkt an. Das Kurvenintegral von  $f'/f$  über  $\partial D$  hingegen können wir aus den Koeffizienten berechnen, z.B. algebraisch durch euklidische Polynomdivision (Algorithmus von Sturm) oder numerisch durch geschickte Approximation des Integrals. Genau hierin liegt der algorithmische Nutzen!

Zum Beginn der Rechnung wählen wir ein Quadrat  $D = [-r, r]^2$ , das alle  $n$  Nullstellen enthält, etwa  $r = \sum_{k=0}^n |a_k|/|a_n|$ . Dieses Quadrat unterteilen wir in vier gleich große Teilquadrate. In jedem können wir dank obiger Formel F3D exakt die Anzahl der Wurzeln von  $f$  bestimmen. Wir behalten nur die nicht-leeren Quadrate und unterteilen diese weiter, bis alle Nullstellen hinreichend genau lokalisiert sind. Dies ist völlig analog zur reellen Intervallhalbierung.

Algorithmen dieser Art gehören zu den schnellsten Nullstellenfindern. Hat man auf diese Weise alle Nullstellen von  $f$  lokalisiert und ausreichend genau voneinander getrennt, so kann man zum Newton-Verfahren übergehen. Dieses lokale Iterationsverfahren muss in unmittelbarer Nähe einer Nullstelle gestartet werden, konvergiert dann aber sehr schnell gegen diese Nullstelle.

Entwicklung als Potenzreihe

**Beweis:** Nach Verschieben können wir  $z_0 = 0$  annehmen. [F221]

Zum Punkt  $z \in B(0, \rho)$  wählen wir einen Radius  $r$  mit  $|z| < r < \rho$ .

Wir nutzen die geometrische Reihe [F238]: Für  $|z| < r = |\zeta|$  gilt

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{1}{1 - (z/\zeta)} = \frac{1}{\zeta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\zeta^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\zeta^{k+1}}.$$

Auf  $\overline{B}(0, r)$  wenden wir Cauchys Integralformel F3B an:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, r)} f(\zeta) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\zeta^{k+1}} \right) d\zeta \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta \right) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k. \end{aligned}$$

Summe und Integral vertauschen dank absoluter Konvergenz. [D106]

Entwicklung als Laurent-Reihe

**Beweis:** Nach Verschieben können wir  $z_0 = 0$  annehmen. [F221]

Zu  $z \in K(0, \sigma, \rho)$  wählen wir Radien  $s, r$  mit  $\sigma < s < |z| < r < \rho$ .

Auf  $\overline{K}(0, s, r)$  wenden wir Cauchys Integralformel F3B an:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, s)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Das Integral über  $\partial B(0, r)$  liefert wie oben die Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ .

Für  $\partial B(0, s)$  nutzen wir die geometrische Reihe, diesmal für  $|z| < |z|$ :

$$\frac{-1}{\zeta - z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - (\zeta/z)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta^k}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta^k}{z^{k+1}} = \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{z^k}{\zeta^{k+1}}.$$

Das Integral über  $\partial B(0, s)$  liefert dann den Hauptteil:

$$\begin{aligned} \frac{-1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, s)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, s)} f(\zeta) \left( \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{z^k}{\zeta^{k+1}} \right) d\zeta \\ &= \sum_{k=-1}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, s)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta \right) z^k = \sum_{k=-1}^{\infty} a_k z^k. \end{aligned}$$

**Definition F4A: Residuum**

Sei  $f$  holomorph auf  $B(z_0, \rho) \setminus \{z_0\} = K(z_0, 0, \rho)$  mit  $\rho > 0$ .  
 Hierauf ist  $f$  eine Laurent-Reihe  $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ .  
 Das **Residuum** von  $f$  im Punkt  $z_0$  ist somit gegeben durch

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} f(z) dz \quad \text{für } 0 < r < \rho.$$

**Beispiel:** Berechnen Sie das Residuum im Punkt  $z_0 = 0$  von...

- $f(z) = az^{-1}, \quad \operatorname{res}_0(f) = a$
- $f(z) = az^k \quad \text{mit } k \neq -1, \quad \operatorname{res}_0(f) = 0$
- $f(z) = \exp(a/z) = 1 + az^{-1} + \frac{a^2}{2!}z^{-2} + \frac{a^3}{3!}z^{-3} + \dots, \quad \operatorname{res}_0(f) = a$
- $f(z) = z^2 \exp(a/z) = z^2 + az + \frac{a^2}{2!}z^0 + \frac{a^3}{3!}z^{-1} + \dots, \quad \operatorname{res}_0(f) = a^3/6$
- $f(z) = \exp(z)/z^3 = z^{-3} + z^{-2} + \frac{1}{2!}z^{-1} + \frac{1}{3!}z^0 + \dots, \quad \operatorname{res}_0(f) = 1/2$
- $f(z) = \cos(z)/z^2 = z^{-2} - \frac{1}{2!}z^0 + \frac{1}{4!}z^2 - \frac{1}{6!}z^4 + \dots, \quad \operatorname{res}_0(f) = 0$

**Satz F4c: Residuum einer mehrfachen Polstelle**

Sei  $f$  holomorph auf  $B(z_0, \rho) \setminus \{z_0\} = K(z_0, 0, \rho)$  mit  $\rho > 0$ .  
 Zudem existiere der Grenzwert  $\lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^n f(z)]$  in  $\mathbb{C}$ .  
 Dann hat  $f$  in  $z_0$  höchstens einen **Pol  $n$ -ter Ordnung**, und es gilt

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(n-1)!} \left( \frac{d}{dz} \right)^{n-1} [(z - z_0)^n f(z)].$$

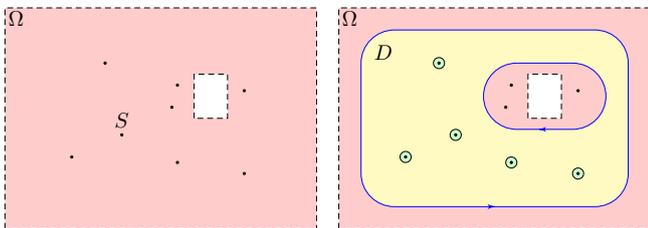
Für einfache Polstellen ( $n = 1$ ) erhalten wir obige Formel:

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0) f(z)]$$

Für zweifache Polstellen ( $n = 2$ ) wird einmal abgeleitet:

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz} [(z - z_0)^2 f(z)]$$

**Beispiel:** Für  $f(z) = \exp(z)/z^n$  und  $z_0 = 0$  gilt  $\operatorname{res}_0(f) = 1/(n-1)!$ .  
 Alternativ als Reihe:  $f(z) = z^{-n} + \dots + z^{-1}/(n-1)! + z^0/n! + \dots$



**Satz F4D: Residuensatz für Kompakta, Cauchy 1825**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f: \Omega \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph auf  $\Omega$  bis auf eine Menge  $S$  isolierter Singularitäten. Sei  $D \subseteq \Omega$  kompakt mit stückweise glattem Rand, wobei  $\partial D \cap S = \emptyset$ . Dann gilt:

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i \sum_{s \in \mathring{D}} \operatorname{res}_s(f)$$

☺ Links muss man integrieren, rechts nur Residuen summieren!

**Nachrechnen:** Seien  $s_1, \dots, s_n$  die Singularitäten im Inneren von  $D$ .  
 Es gibt nur endlich viele, da jede isoliert liegt und  $D$  kompakt ist.

Wir wählen  $r > 0$  so klein, dass die abgeschlossenen Kreisscheiben  $\bar{B}(s_1, r), \dots, \bar{B}(s_n, r)$  ganz im Inneren von  $D$  liegen und disjunkt sind.

$$\int_{\partial B(s_k, r)} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_{s_k}(f).$$

Die Restmenge  $E = D \setminus [B(s_1, r) \cup \dots \cup B(s_n, r)]$  ist kompakt mit stückweise glattem Rand  $\partial E = \partial D \cup \partial B(s_1, r) \cup \dots \cup \partial B(s_n, r)$ .  
 Positive Orientierung bezüglich  $E$  bedeutet: Die Kreislinien  $\partial B(s_k, r)$  werden im Uhrzeigersinn durchlaufen, damit  $E$  links davon liegt.

Da  $f$  auf  $E$  holomorph ist, gilt nach dem Integralsatz von Cauchy

$$0 = \int_{\partial E} f(z) dz = \int_{\partial D} f(z) dz - \sum_{k=1}^n \int_{\partial B(s_k, r)} f(z) dz.$$

Die Vorzeichen entsprechen der positiven Orientierung des Randes.

**Satz F4B: Residuum einer einfachen Polstelle**

(1) Sei  $f$  holomorph auf  $B(z_0, \rho) \setminus \{z_0\} = K(z_0, 0, \rho)$  mit  $\rho > 0$ .  
 Zudem existiere der Grenzwert  $\lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)f(z)]$  in  $\mathbb{C}$ .  
 Dann hat  $f$  in  $z_0$  höchstens einen **einfachen Pol**, und es gilt

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)f(z)].$$

(2) Sei speziell  $f = p/q$  Quotient zweier holomorpher Funktionen mit einfachem Pol in  $z_0$ , d.h.  $p(z_0) \neq 0, q(z_0) = 0, q'(z_0) \neq 0$ . Dann gilt:

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) \stackrel{(1)}{=} \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)f(z)] \stackrel{(2)}{=} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{p(z)}{\frac{q(z) - q(z_0)}{z - z_0}} \stackrel{(2)}{=} \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

**Beispiel:** Sei  $f(z) = \exp(az)/z = z^{-1} + az^0 + \frac{a^2}{2!}z^1 + \frac{a^3}{3!}z^2 + \dots$ .  
 Für  $p(z) = \exp(az)$  und  $q(z) = z$  folgt  $\operatorname{res}_0(f) = p(0)/q'(0) = 1$ .

☺ Dies vereinfacht die Berechnung von Residuen einfacher Pole.  
 Die letzte Formel entspricht der beliebten Regel von L'Hospital.

Das Residuum von  $f$  in  $z_0$  ist definiert als Laurent-Koeffizient  $a_{-1}$  bzw. als Wegintegral um  $z_0$ .  
 In einer **wesentlichen Singularität** wie  $f(z) = \exp(1/z)$  in  $z_0 = 0$  ist dies der einzige Zugang.  
 In einer **Polstelle** können wir das Residuum auf verschiedene, meist leichtere Weisen berechnen.

**Nachrechnen:** Wir entwickeln  $f$  um  $z_0$  in eine Laurent-Reihe (F3F):

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$$

Wenn  $\lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^n f(z)]$  existiert, dann gilt  $a_k = 0$  für  $k < -n$ .

Multiplikation mit  $(z - z_0)^n$  liefert zunächst die Potenzreihe

$$(z - z_0)^n f(z) = a_{-n}(z - z_0)^0 + \dots + a_{-1}(z - z_0)^{n-1} + a_0(z - z_0)^n + \dots$$

Nach  $(n - 1)$ -maligem Ableiten bleibt nur noch die Potenzreihe

$$\left( \frac{d}{dz} \right)^{n-1} [(z - z_0)^n f(z)] = (n - 1)! a_{-1}(z - z_0)^0 + n! a_0(z - z_0)^1 + \dots$$

Für  $z \rightarrow z_0$  erhalten wir schließlich  $(n - 1)! a_{-1}$ , wie gewünscht.

☺ In Worten: Multiplikation mit  $(z - z_0)^n$  löscht zunächst den Pol, anschließend verschiebt die  $(n - 1)$ -fache Ableitung  $a_{-1}$  in Grad 0.

☺ Damit erreichen wir den Höhepunkt unserer Integrationstheorie komplexer Funktionen! Wir wissen nun, was holomorphe Funktionen sind und wie man sie dank Cauchy-Riemann-Gleichungen erkennt.  
 Wir wissen zudem, wie man mit isolierten Singularitäten umgeht und ihr Residuum ausrechnet. Die nötigen Wegintegrale und Integralsätze in der Ebene haben wir im letzten Kapitel E kennen und nutzen gelernt.

Damit halten wir alle Zutaten für den Residuensatz in Händen!

Jede holomorphe Funktion  $f: \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  erfüllt die CR-Gleichungen.  
 Für  $f = u + iv$  ist dies gleichbedeutend zu  $\operatorname{rot}(u, -v) = \operatorname{div}(u, -v) = 0$ .  
 Dank Integralsatz gilt  $\int_{\partial D} f(z) dz = 0$  für jedes Kompaktum  $D \subseteq \Omega$ .

Was passiert nun, wenn  $f$  isolierte Singularitäten  $s \in \mathring{D}$  hat?

Jede Singularität  $s$  liefert ihren Beitrag  $2\pi i \operatorname{res}_s(f)$  zum Integral!  
 Der Raum dazwischen ist „Vakuum“ und liefert keinen Beitrag.

Anschaulich können wir uns  $f: \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  als zweidimensionales elektromagnetisches Feld vorstellen. Eine Polstelle im Punkt  $s \in \Omega$  entspricht einem Teilchen mit einer gewissen Ladung  $a_{-1} = \operatorname{res}_s(f)$ .

Cauchys Residuensatz ist der Höhepunkt unserer Integrationstheorie komplexer Funktionen. Er beruht auf Cauchys Integralsatz F3A und Cauchys Integralformel F3B und enthält diese als Spezialfälle:

**Korollar F4E: Spezialfälle des Residuensatzes**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion.

(1) Für jedes Kompaktum  $D \subseteq \Omega$  mit stückweise glattem Rand gilt

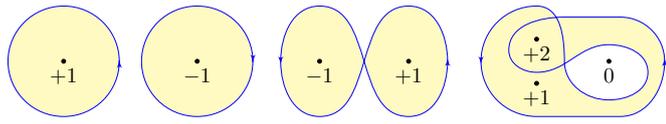
$$\int_{\partial D} f(z) dz = 0.$$

(2) Für jeden Punkt  $z_0 \in \Omega \setminus \partial D$  und  $k \in \mathbb{N}$  gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \begin{cases} \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0) & \text{für } z_0 \in \mathring{D}, \\ 0 & \text{für } z_0 \notin D. \end{cases}$$

Im ersten Integral hat der Integrand  $f(z)$  keine Singularität, im zweiten hat  $f(z)/(z - z_0)^{k+1}$  eine Polstelle in  $z_0$  mit Residuum  $f^{(k)}(z_0)/k!$ .

Bislang kennen wir den Residuensatz für Kompakta (F4D). Er gilt auch für beliebige geschlossene Wege (F4G). Hierzu zählen wir die Umläufe:



**Lemma F4F: Cauchy-Index = Umlaufzahl in der Ebene**  
Für jeden geschlossenen Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$  ist der **Index**

$$\text{ind}_{z_0}(\gamma) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz$$

eine ganze Zahl; sie zählt die Umläufe von  $\gamma$  um den Punkt  $z_0$ .

- 😊 Dieses Integral hat eine einfache geometrische Interpretation.
- 😊 Die reelle Formulierung kennen wir bereits als Arbeitsintegral des Wirbelfeldes bzw. als Flussintegral des Quellenfeldes. [E333]

**Aufgabe:** Rechnen Sie die im Lemma gemachten Aussagen nach!  
**Lösung:** Wir rechnen in Polarkoordinaten  $\gamma(t) = z_0 + r(t) e^{i\varphi(t)}$ . Hierzu seien  $r: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  und  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stückw. stetig diff'bar. Da der Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$  geschlossen sein soll, gilt  $\gamma(a) = \gamma(b)$ . Insbesondere sind die Beträge  $r(a) = |\gamma(a)|$  und  $r(b) = |\gamma(b)|$  gleich. Hingegen folgt aus  $e^{i\varphi(a)} = e^{i\varphi(b)}$  nur  $\varphi(b) = \varphi(a) + 2\pi\ell$  mit  $\ell \in \mathbb{Z}$ . Diese Zahl  $\ell$  ist die Anzahl der Umläufe von  $\gamma$  um den Punkt  $z_0$ . Einsetzen von  $z = \gamma(t)$  und  $dz = \gamma'(t) dt$  in die Indexformel liefert:

$$\begin{aligned} \text{ind}_{z_0}(\gamma) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{t=a}^b \frac{1}{\gamma(t) - z_0} \gamma'(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{t=a}^b \frac{1}{r(t) e^{i\varphi(t)}} [r'(t) e^{i\varphi(t)} + r(t) e^{i\varphi(t)} i\varphi'(t)] dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{t=a}^b \frac{r'(t)}{r(t)} + i\varphi'(t) dt = \frac{1}{2\pi i} [\ln r(t) + i\varphi(t)]_{t=a}^b \\ &= \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{2\pi} = \ell \quad \text{😊 Das ist die Umlaufzahl!} \end{aligned}$$

**Satz F4G: Residuensatz für geschlossene Wege**  
Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f: \Omega \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph auf  $\Omega$  bis auf eine Menge  $S$  isolierter Singularitäten. Sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega \setminus S$  ein geschlossener Weg, sodass  $\text{ind}_z(\gamma) = 0$  für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ . (Das gilt insbesondere, wenn  $\gamma$  in  $\Omega$  zusammenziehbar ist.) Dann gilt:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{s \in S} \text{res}_s(f) \text{ind}_s(\gamma)$$

Anstelle eines (oft komplizierten) Kurvenintegrals links muss man rechts nur Residuen und Umlaufzahlen bestimmen, was meist leichter ist. Die Summe ist endlich, denn  $\gamma$  umläuft nur endlich viele Singularitäten; für alle anderen gilt  $\text{ind}_s(\gamma) = 0$ , sie tragen nichts zur Summe bei.

Dieser Satz verallgemeinert den vorigen Residuensatz F4D für Kompakta: Der Rand  $\partial K$  eines Kompaktums  $K$  umläuft jeden inneren Punkt genau einmal, äußere Punkte umläuft er nicht. Daher tritt im Residuensatz für Kompakta die Vielfachheit durch den Index nicht explizit auf.

Die allgemeine Formulierung für beliebige geschlossene Wege ist manchmal flexibler. Die Skizze zum Lemma F4F und die folgende Aufgabe zeigen einige einfache Beispiele.

**Aufgabe:** Überprüfen Sie diesen Satz für die Funktion  $f(z) = (z - z_0)^k$  und den Weg  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\gamma(t) = z_0 + r e^{it}$  mit Umlaufzahl  $\ell \in \mathbb{Z}$ .  
**Lösung:** Wir berechnen zunächst die rechte Seite. Wir wissen bereits

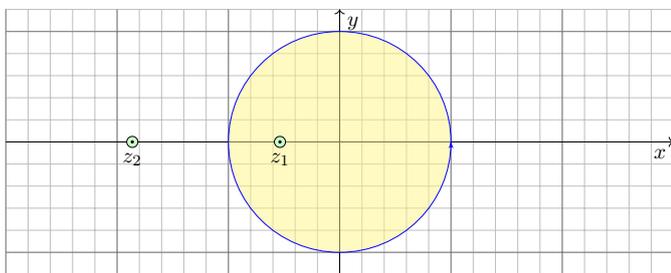
$$\text{ind}_0(\gamma) = \ell \quad \text{und} \quad \text{res}_0(f) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = -1, \\ 0 & \text{für } k \neq -1. \end{cases}$$

Für das Wegintegral von  $f$  entlang  $\gamma$  erhalten wir laut Satz

$$\int_{\gamma} z^k dz = 2\pi i \text{res}_0(z^k) \text{ind}_0(\gamma) = \begin{cases} 2\pi i \ell & \text{für } k = -1, \\ 0 & \text{für } k \neq -1. \end{cases}$$

Die Polstelle  $z_0 = 0$  wird hier genau  $\ell$  mal umlaufen. Der Beitrag  $2\pi i \text{res}_0(z^k)$  wird dementsprechend  $\ell$  mal gezählt. Zur Probe berechnen wir die linke Seite direkt nach Definition:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (z - z_0)^k dz &= \int_{t=0}^{2\pi} (\gamma(t) - z_0)^k \gamma'(t) dt = \int_{t=0}^{2\pi} r^k e^{ik\ell t} \cdot r e^{it} \cdot i dt \\ &= i \ell r^{k+1} \int_{t=0}^{2\pi} e^{i(k+1)\ell t} dt = \begin{cases} 2\pi i \ell & \text{für } k = -1, \\ 0 & \text{für } k \neq -1. \end{cases} \end{aligned}$$



**Aufgabe:** (1) Berechnen Sie für  $a > 1$  das komplexe Wegintegral

$$\int_{\partial B(0,1)} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} = \frac{\pi i}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

Dabei ist  $\partial B(z_0, r)$  die Kreislinie um  $z_0$  mit Radius  $r$ . Wir parametrisieren sie mathematisch positiv durch  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}: t \mapsto \gamma(t) = z_0 + r e^{it}$ .

**Lösung:** Unser Integrand  $f(z)$  hat zwei Polstellen  $z_1, z_2$ , beide **einfach**:

$$\begin{aligned} z_2 &= -a - \sqrt{a^2 - 1} < -1 < z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1} < 0 \\ f(z) &= \frac{1}{z^2 + 2az + 1} = \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)} \stackrel{\text{PBZ}}{=} \frac{r_1}{z - z_1} + \frac{r_2}{z - z_2} \\ r_1 &= \text{res}_{z_1}(f) \stackrel{\text{Res}}{=} \lim_{z \rightarrow z_1} [(z - z_1)f(z)] = \frac{1}{z_1 - z_2} = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - 1}} \\ r_2 &= \text{res}_{z_2}(f) \stackrel{\text{Res}}{=} \lim_{z \rightarrow z_2} [(z - z_2)f(z)] = \frac{1}{z_2 - z_1} = \frac{-1}{2\sqrt{a^2 - 1}} \end{aligned}$$

Der Residuensatz beschert uns somit ein erstes schönes Integral:

$$\int_{\partial B(0,1)} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} \stackrel{\text{Res}}{=} \sum_{z_1} 2\pi i \text{res}_{z_1}(f) = \frac{\pi i}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

- 😊 Links muss man integrieren, rechts nur Residuen summieren!
- 😊 Zur Berechnung von Residuen haben wir effiziente Formeln. [F402]
- 😊 Der Residuenkalkül nützt uns auch bei der Partialbruchzerlegung!

**Aufgabe:** (2) Berechnen Sie für  $a > 1$  ebenso das reelle Integral

$$\int_{t=0}^{\pi} \frac{1}{a + \cos t} dt = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

**Lösung:** Wir nutzen die Euler-Formel  $z = e^{it} = \cos t + i \sin t$ , also

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}$$

Einsetzen in den Integranden ergibt

$$\frac{1}{a + \cos t} = \left( a + \frac{z + z^{-1}}{2} \right)^{-1} = \left( \frac{z^2 + 2az + 1}{2z} \right)^{-1} = \frac{2z}{z^2 + 2az + 1}$$

Wir integrieren längs der Kreislinie  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}: t \mapsto \gamma(t) = e^{it}$ .

Für  $z = \gamma(t) = e^{it}$  gilt  $dz = \gamma'(t) dt = i e^{it} dt$ , also  $dt = dz / (iz)$ , somit:

$$\int_{t=0}^{2\pi} \frac{dt}{a + \cos t} = \int_{t=0}^{2\pi} \frac{2z dt}{z^2 + 2az + 1} = \frac{2}{i} \int_{\partial B(0,1)} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} \stackrel{()}{=} \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

😊 Das gesuchte Integral über die halbe Periode ist genau die Hälfte.

😊 Dieser Trick funktioniert für alle Integrale  $\int_{t=0}^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt$ : Wir substituieren  $z = e^{it} = \cos t + i \sin t$  und  $dz = i e^{it} dt = iz dt$ .

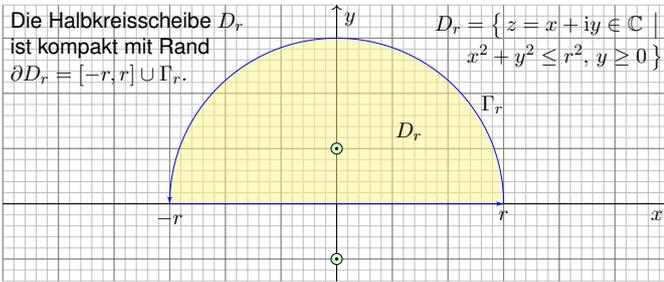
**Satz F4H: rationale Integranden in  $\cos t$  und  $\sin t$**   
Sei  $R(x, y) = P(x, y)/Q(x, y)$  eine rationale Funktion, mit  $P, Q \in \mathbb{C}[x, y]$  und  $Q(\cos t, \sin t) \neq 0$  für  $t \in \mathbb{R}$ . Dann ergibt die Weierstraß-Substitution

$$f(z) := \frac{1}{iz} R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \in \mathbb{C}(z)$$

eine rationale Funktion in  $z$  ohne Polstellen auf  $\partial B(0, 1)$ , und es gilt

$$\int_{t=0}^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt \stackrel{\text{Subs}}{=} \int_{\partial B(0,1)} f(z) dz \stackrel{\text{Res}}{=} \sum_{s \in B(0,1)} 2\pi i \text{res}_s(f)$$

Diese Formel erhält man wie in der vorigen Aufgabe. Kennt man die Polstellen von  $f$  in  $B(0, 1)$ , so kann man hieraus die Summe der Residuen ableiten. Damit lassen sich alle Integranden der Form  $R(\cos t, \sin t)$  über  $[0, 2\pi]$  integrieren: Das Problem reduziert sich auf die Nullstellensuche des Nennerpolynoms von  $f$  (F3D). Alternativ können wir hier reell rechnen und mit Weierstraß' trigonometrischer Generalsubstitution sogar eine Stammfunktion bestimmen, siehe Satz B10.



**Aufgabe:** Berechnen Sie für  $u \in \mathbb{R}$  das reelle Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ux)}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-|u|}.$$

**Anleitung:** (1) Integrieren Sie  $f(z) = e^{iuz}/(z^2 + 1)$  über  $[-r, r]$  und  $\Gamma_r$ .  
(2) Für  $u \geq 0$  und  $r \rightarrow \infty$  verschwindet das Integral über  $\Gamma_r$ . Warum?

(2) Für das Integral längs  $\Gamma_r$  suchen wir eine geeignete Majorante:

$$\left| \int_{\Gamma_r} \frac{e^{iuz}}{z^2 + 1} dz \right| \leq \int_{\Gamma_r} \frac{|e^{iuz} e^{-uy}|}{|z^2 + 1|} |dz| \leq \int_{\Gamma_r} \frac{1}{r^2 - 1} |dz| = \frac{\pi r}{r^2 - 1} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$$

Im Zähler gilt  $|e^{iuz}| = |e^{iux}| \cdot |e^{-uy}| \leq 1$  dank  $u, y \geq 0$ . Im Nenner gilt  $|z^2| = |z^2 + 1 - 1| \leq |z^2 + 1| + |1|$ , also  $|z^2 + 1| \geq |z^2| - 1 = r^2 - 1$ . Allgemein gilt die umgekehrte Dreiecksungleichung  $|z - w| \geq ||z| - |w||$ . Als Grenzwert für  $u \geq 0$  und  $r \rightarrow \infty$  erhalten wir somit das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iux}}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-u}.$$

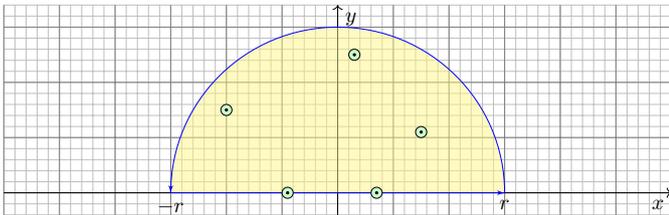
Als Real- und Imaginärteil erhalten wir die reellen Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ux)}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-u} \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ux)}{x^2 + 1} dx = 0.$$

Beide sind absolut konvergent. Das zweite verschwindet da ungerade.

☺ Für  $u \leq 0$  erhalten wir dank Symmetrie dasselbe Integral:  $\pi e^{-|u|}$ .

☺ Diese Berechnung funktioniert für alle Integrale dieser Form:



Wir betrachten eine rationale Funktion  $f(z) = p(z)/q(z)$  mit Polynomen  $p, q \in \mathbb{C}[z]$  und  $\deg(q) \geq \deg(p) + 2$ . Der Beitrag des Halbkreises  $\Gamma_r$  vom Radius  $r$  geht wie gesehen gegen Null. Falls Polstellen auf der reellen Achse  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  liegen, so setzen wir diese Pole als einfach voraus.

Um nicht durch diese Polstellen zu laufen, machen wir um jede wie skizziert einen halbkreisförmigen Umweg vom Radius  $\rho$ . Für  $\rho \rightarrow 0$  ist der Beitrag genau das halbe Residuum, wie wir nun nachrechnen.

☺ Diese Berechnung funktioniert für alle Integrale von dieser Form!  
Einfache Merkregel: Polstellen auf der reellen Achse zählen nur halb.

**Satz F4k: Fourier-Integrale rationaler Funktionen**

Sei  $f(z) = p(z)/q(z)$  eine rationale Funktion; hat  $f$  Polstellen in  $\mathbb{R}$ , so soll jede höchstens einfach sein. Für  $\deg(q) \geq \deg(p) + 2$  gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{Im}(s) > 0} \text{res}_s(f) + \pi i \sum_{\text{Im}(s) = 0} \text{res}_s(f)$$

Für  $\deg(q) \geq \deg(p) + 1$  und alle  $u > 0$  bzw.  $u < 0$  gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iux} dx = +2\pi i \sum_{\text{Im}(s) > 0} \text{res}_{z=s} [f(z) e^{iuz}] + \pi i \sum_{\text{Im}(s) = 0} \text{res}_{z=s} [f(z) e^{iuz}]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iux} dx = -2\pi i \sum_{\text{Im}(s) < 0} \text{res}_{z=s} [f(z) e^{iuz}] - \pi i \sum_{\text{Im}(s) = 0} \text{res}_{z=s} [f(z) e^{iuz}]$$

☺ Für  $u = 0$  können wir den HDI nutzen dank  $\arctan(x)' = 1/(x^2 + 1)$ . Für  $u > 0$  hingegen gelingt uns die Berechnung erst komplex mit dem Residuensatz F4d. Für  $u < 0$  erhalten wir genau dasselbe Integral.

**Lösung:** (1) Wir untersuchen die holomorphe Funktion

$$f(z) = \frac{e^{iuz}}{z^2 + 1} = \frac{e^{iuz}}{(z - i)(z + i)}.$$

Ihre Singularitäten  $\pm i$  sind einfache Polstellen. Demnach gilt

$$\text{res}_{+i}(f) \stackrel{\text{Res}}{=} \lim_{z \rightarrow +i} [(z - i)f(z)] = \frac{e^{-u}}{2i}, \quad \text{res}_{-i}(f) = -\frac{e^u}{2i}.$$

Wir betrachten die obere Halbkreisfläche  $D_r$  vom Radius  $r > 1$ . Der Rand von  $D_r$  besteht aus  $[-r, r]$  und dem oberen Halbkreis  $\Gamma_r$ . In  $D_r$  liegt nur die Singularität  $+i$ . Dank Residuensatz erhalten wir:

$$\int_{-r}^r \frac{e^{iux}}{x^2 + 1} dx + \int_{\Gamma_r} \frac{e^{iuz}}{z^2 + 1} dz = \int_{\partial D_r} \frac{e^{iuz}}{z^2 + 1} dz \stackrel{\text{Res}}{=} 2\pi i \text{res}_i(f) = \pi e^{-u}.$$

☺ Der Residuensatz vereinfacht unsere Rechnung entscheidend!

☺ Die obige Abschätzung ist oft nützlich und verdient einen Namen:

**Lemma F4l: Jordan-Lemma**

Für den Halbkreis  $\Gamma_r := \{ r e^{it} \mid t \in [0, \pi] \}$  und  $M_r := \max_{z \in \Gamma_r} |f(z)|$  gilt

$$\left| \int_{\Gamma_r} f(z) dz \right| \leq \pi r M_r \quad \text{und} \quad \left| \int_{\Gamma_r} f(z) e^{iuz} dz \right| \leq \frac{\pi}{u} M_r \quad \text{für } u > 0.$$

Dies geht gegen 0 für  $r \rightarrow \infty$ , falls  $r M_r \rightarrow 0$  bzw.  $M_r \rightarrow 0$  gilt.

**Nachrechnen:** Die erste Ungleichung ist klar. Die zweite folgt so:

$$\left| \int_{\Gamma_r} f(z) e^{iuz} dz \right| \leq \int_{\Gamma_r} |f(z) e^{iuz}| |dz| \leq \int_{t=0}^{\pi} |f(r e^{it}) e^{ur(i \cos t - \sin t)}| |ri e^{it}| dt$$

$$= r \int_{t=0}^{\pi} |f(r e^{it})| e^{-ur \sin t} dt \leq r M_r \int_{t=0}^{\pi} e^{-ur \sin t} dt = 2r M_r \int_{t=0}^{\pi/2} e^{-ur \sin t} dt$$

$$\leq 2r M_r \int_{t=0}^{\pi/2} e^{-ur \frac{2t}{\pi}} dt = \frac{\pi}{u} M_r \left[ -e^{-ur \frac{2t}{\pi}} \right]_{t=0}^{\pi/2} = \frac{\pi}{u} M_r (1 - e^{-ur}) \leq \frac{\pi}{u} M_r$$

Wir nutzen die Abschätzung  $\sin t \geq 2t/\pi$ ; machen Sie dazu eine Skizze!

☺ Um reellen Polstellen auszuweichen, nutzen wir folgenden Trick:

**Lemma F4j: teilweises Umlaufen einer einfachen Polstelle**

Ist  $s \in \mathbb{C}$  eine einfache Polstelle von  $f$ , so gilt für kleine Kreisbögen  $\gamma_\rho: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\gamma(t) = s + \rho e^{it}$  vom Radius  $\rho > 0$  der Grenzwert

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} f(z) dz = i(\beta - \alpha) \text{res}_s(f).$$

**Nachrechnen:** Um die Polstelle  $s$  gilt  $f(z) = a/(z - s) + g(z)$  mit einer holomorphen Funktion  $g$ . Für die gesuchten Integrale gilt deshalb:

$$\left| \int_{\gamma_\rho} g(z) dz \right| \leq \ell(\gamma_\rho) \max_{z \in \overline{B}(s, \rho)} |g(z)| \leq \rho(\beta - \alpha) \cdot \text{const} \rightarrow 0$$

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{a}{z - s} dz = \int_{t=\alpha}^{\beta} \frac{a}{\rho e^{it}} \rho i e^{it} dt = ia \int_{t=\alpha}^{\beta} dt = i(\beta - \alpha) a$$

Damit lassen sich auch einfache Polstellen auf dem Rand behandeln!  
Für mehrfache Polstellen hingegen divergiert das Integral für  $\rho \rightarrow 0$ !

☺ Diese Integrationstechnik ist sehr nützlich und wird oft angewendet, insbesondere für Fourier- und Laplace-Integrale (Kapitel K und L). Wie ist das Integral auf der linken Seite der Gleichung zu verstehen?

Liegen Polstellen  $s_1 < \dots < s_n$  auf der reellen Achse, so betrachten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[ \int_{-r}^{s_1 - \frac{1}{r}} f + \int_{s_1 + \frac{1}{r}}^{s_2 - \frac{1}{r}} f + \dots + \int_{s_{n-1} + \frac{1}{r}}^{s_n - \frac{1}{r}} f + \int_{s_n + \frac{1}{r}}^r f \right]$$

Der Integrand  $f$  ist nicht absolut integrierbar, denn in der Nähe einer  $n$ -fachen reellen Polstelle  $s \in \mathbb{R}$  gilt  $f(x) \sim a/(x - s)^n$ , und wir wissen

$$\int_{s - \frac{1}{r}}^{s + \frac{1}{r}} \frac{1}{(x - s)^n} dx = \infty \quad \text{für alle } n \geq 1 \text{ (B208)}.$$

Glücklicherweise heben sich für  $n = 1$  Positivteil und Negativteil auf:

$$\int_{s - \frac{1}{r}}^{s + \frac{1}{r}} \frac{1}{x - s} dx = 0 \quad \text{als Cauchy-Hauptwert.}$$

Daher konvergiert das oben angegebene Integral für  $r \rightarrow \infty$ .

Die Zählung der Residuen folgt nun aus dem vorigen Lemma F4j.

**Aufgabe:** Berechnen Sie für  $u \in \mathbb{R}$  das reelle Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ux)}{x} dx = \pi \operatorname{sign}(u).$$

- (1) In welchem Sinne konvergiert dieses Integral? absolut? uneigentlich?  
 (2) Warum ist das Integral für alle  $u > 0$  gleich? Substitution  $s = ux!$

**Lösung:** [F115] Für  $u > 0$  können wir den Residuensatz anwenden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iux}}{x} dx \stackrel{\text{Res}}{\underset{\text{F4k}}{=}} \pi i \operatorname{res}_{z=0} \left[ \frac{e^{iuz}}{z} \right] = \pi i \operatorname{res}_{z=0} \left[ z^{-1} + \frac{i u}{1!} z^0 - \frac{u^2}{2!} z^1 + \dots \right] = \pi i.$$

Als Real- und Imaginärteil erhalten wir die reellen Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ux)}{x} dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ux)}{x} dx = \pi.$$

Für  $u < 0$  kehrt sich das Vorzeichen um. Für  $u = 0$  ist alles klar.

☺ Der Residuensatz ist ein allgemeines und mächtiges Werkzeug.

⚠ Die Spaltfunktion  $\operatorname{si}(x) = \sin(x)/x$  ist zwar stetig und somit über jedem endlichen Intervall  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  integrierbar [B149], aber sie ist nicht elementar integrierbar, d.h. ihre Stammfunktion  $\operatorname{Si}(x)$  ist nicht elementar.

⚠ Die Integranden sind nicht absolut integrierbar [B421], das heißt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\cos x}{x} \right| dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \infty$$

☺ Das Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x)/x dx$  existiert nur uneigentlich, das heißt

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_{x=a}^0 \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{x=0}^b \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Das Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x)/x dx$  existiert sogar nur als Cauchy-Hauptwert:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^{-1/r} \frac{\cos x}{x} dx = -\infty, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{1/r}^r \frac{\cos x}{x} dx = +\infty,$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[ \int_{-r}^{-1/r} \frac{\cos x}{x} dx + \int_{1/r}^r \frac{\cos x}{x} dx \right] = 0.$$

Letzteres ist klar, da der Integrand  $\cos(x)/x$  eine ungerade Funktion ist.

Die Spaltfunktion  $\operatorname{si}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\operatorname{si}(x) = \sin(x)/x$  für  $x \neq 0$  und  $\operatorname{si}(0) = 1$  ist auf ganz  $\mathbb{R}$  stetig, auch in  $x = 0$ . Sie ist der Realteil der holomorphen Funktion  $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto e^{iz}/z$ , mit einfacher Polstelle in  $z = 0$ .

☺ Das haben wir in der vorigen Aufgabe zur Berechnung ausgenutzt.

Zunächst scheint die Wahl der Funktion  $f$  vielleicht etwas willkürlich.

Könnte man hier auch andere komplexe Fortsetzungen wählen?

**Aufgabe:** Die Spaltfunktion  $\operatorname{si}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\operatorname{si}(x) = \sin(x)/x$  für  $x \neq 0$  und  $\operatorname{si}(0) = 1$  ist auf  $\mathbb{R}$  der Realteil der holomorphen Funktion  $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$g(z) = \frac{\sin(z)}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \frac{z^8}{9!} - \frac{z^{10}}{11!} + \dots$$

Lässt sich hierauf der Residuensatz anwenden und folgendes nutzen?

$$(*) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(s) > 0} \operatorname{res}_s(g) + \pi i \sum_{\operatorname{Im}(s) = 0} \operatorname{res}_s(g)$$

Ist das nicht gerade unserer Residuenformel aus Satz F4k?

**Lösung:** Nein, die vermutete Formel (\*) gilt hier offensichtlich nicht!

Nachrechnen: Links steht  $\pi$ , rechts steht 0, da  $g$  keine Singularitäten hat.

Woran liegt's? Zunächst sollten Sie die Voraussetzungen von Satz F4k nochmal genau lesen.

Die geforderten Bedingungen sind für unsere Funktion  $g$  nicht erfüllt, also sollten wir die Formel nicht anwenden!

Was ist der eigentliche geometrische Grund? Der Residuensatz F4D gilt für Randintegrale  $\oint_{\partial D} f(z) dz$  von Kompakta  $D$ .

Die Halbebene  $\mathbb{C}_{\operatorname{Im} \geq 0}$  hat als Rand die reelle Achse  $\mathbb{R}$ , ist aber offensichtlich nicht kompakt!

Warum gilt Satz F4k trotzdem so schön und einfach? Er ist raffiniert und zur Anwendung sollten Sie seine Herleitung verstehen:

Als Kompakta nutzen wir Halbkreisscheiben  $D_r$ . Die Bedingungen stellen sicher, dass das Wegintegral über den oberen Halbkreis  $\Gamma_r$  verschwindet für  $r \rightarrow 0$ .

Hierzu nutzen wir das einfache, aber wirksame Jordan-Lemma F4I.

☺ Allein in diesem günstigen Falle können wir den Residuensatz für die obere Halbebene  $\mathbb{C}_{\operatorname{Im} \geq 0}$  und ihren Rand  $\mathbb{R}$  ohne Korrektur direkt nutzen.

⚠ Für die obige Funktion  $g(z) = \sin(z)/z$  gilt dies alles leider nicht!

**Aufgabe:** Berechnen Sie für  $a, b > 0$  das reelle Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx.$$

**Lösung:** Der Integrand  $f(z) = 1/(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)$  hat Pole in  $\pm ai, \pm bi$ .

☺ Das reelle Integrale wird bestimmt durch die komplexen Polstellen!

**Erster Fall:**  $a \neq b$ , also einfache Pole. Die Residuen sind dann

$$\operatorname{res}_{ai}(f) \stackrel{\text{Res}}{\underset{\text{F4b}}{=}} \lim_{z \rightarrow ai} [(z - ai)f(z)] = \lim_{z \rightarrow ai} \frac{1}{(z + ai)(z^2 + b^2)} = \frac{1}{2ai(b^2 - a^2)}$$

$$\operatorname{res}_{bi}(f) \stackrel{\text{Res}}{\underset{\text{F4b}}{=}} \lim_{z \rightarrow bi} [(z - bi)f(z)] = \lim_{z \rightarrow bi} \frac{1}{(z^2 + a^2)(z + bi)} = \frac{1}{(a^2 - b^2)2bi}$$

Dank Residuensatz erhalten wir unser reelles Integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \stackrel{\text{Res}}{\underset{\text{F4k}}{=}} 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(s) > 0} \operatorname{res}_s(f) = \frac{2\pi i}{2ai(b^2 - a^2)} + \frac{2\pi i}{2bi(a^2 - b^2)} = \frac{\pi(a - b)}{ab(a^2 - b^2)} = \frac{\pi}{ab(a + b)}$$

Im Falle  $a = b$  erwarten wir dasselbe, rechnen's aber ausführlich nach:

**Zweiter Fall:**  $a = b$ , also zweifache Pole in  $\pm ai$ . Das Residuum ist dann

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{ai}(f) &\stackrel{\text{Res}}{\underset{\text{F4c}}{=}} \lim_{z \rightarrow ai} \frac{d}{dz} [(z - ai)^2 f(z)] = \lim_{z \rightarrow ai} \frac{d}{dz} \left[ \frac{1}{(z + ai)^2} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow ai} \frac{-2}{(z + ai)^3} = \frac{-2}{(2ai)^3} = \frac{1}{4a^3 i}. \end{aligned}$$

Dank Residuensatz erhalten wir unser reelles Integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \stackrel{\text{Res}}{\underset{\text{F4k}}{=}} 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(s) > 0} \operatorname{res}_s(f) = 2\pi i \frac{1}{4a^3 i} = \frac{\pi}{2a^3}$$

☺ Stetigkeit! Der zweite Fall  $a = b$  folgt aus dem ersten Fall  $a \neq b$ :

Dank Satz D3D dürfen wir den Grenzwert  $\lim_{b \rightarrow a}$  unters Integral ziehen.

Zusammenfassend erhalten wir für alle  $a, b > 0$  die Gleichung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx = \frac{\pi}{ab(a + b)}.$$

**Aufgabe:** (1) Berechnen Sie die Residuen der rationalen Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + 4}.$$

**Lösung:** Der Nenner hat in  $\pm 1 \pm i$  vier einfache Nullstellen:

$$f(z) = \frac{1}{(z - 1 - i)(z - 1 + i)(z + 1 - i)(z + 1 + i)}.$$

Erinnerung [F230]:  $z^4 + 4 = 0$  heißt  $z^4 = 4e^{\pi i + 2\pi i k}$  für  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ , Wurzel  $z = \sqrt[4]{2} e^{(\pi + 2\pi i k)/4}$ , also  $z \in \{\pm 1 \pm i\}$ . Machen Sie eine Skizze!

Für  $f = p/q$  mit einfacher Polstelle  $s$  gilt  $\operatorname{res}_s(p/q) = p(s)/q'(s)$ :

$$\operatorname{res}_{(1+i)}(f) \stackrel{\text{Res}}{\underset{\text{F4b}}{=}} \lim_{z \rightarrow 1+i} \left[ \frac{1}{4z^3} \right] = \frac{1}{8(-1+i)} = -\frac{1+i}{16}, \quad \operatorname{res}_{(1-i)}(f) = -\frac{1-i}{16},$$

$$\operatorname{res}_{(-1+i)}(f) \stackrel{\text{Res}}{\underset{\text{F4b}}{=}} \lim_{z \rightarrow -1+i} \left[ \frac{1}{4z^3} \right] = \frac{1}{8(1+i)} = \frac{1-i}{16}, \quad \operatorname{res}_{(-1-i)}(f) = \frac{1+i}{16}.$$

Diese Vorbereitung nutzen wir für die folgende Integration.

**Aufgabe:** (2) Berechnen Sie für  $u \in \mathbb{R}$  das reelle Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ux)}{x^4 + 4} dx.$$

**Lösung:** Auf den Fall  $u \geq 0$  wenden wir den Residuensatz an:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iux}}{x^4 + 4} dx \stackrel{\text{Res}}{\underset{\text{F4k}}{=}} 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(s) > 0} \operatorname{res}_s \left( \frac{e^{iuz}}{z^4 + 4} \right)$$

$$\stackrel{(\text{I})}{\underset{\text{F4b}}{=}} 2\pi i \left[ -\frac{1+i}{16} \cdot e^{iu(1+i)} + \frac{1-i}{16} \cdot e^{iu(-1+i)} \right]$$

$$= \frac{\pi}{8} \left[ (1-i)e^{-u+iu} + (1+i)e^{-u-iu} \right]$$

$$= \frac{\pi}{4} \operatorname{Re} \left[ (1-i)e^{-u+iu} \right] = \frac{\pi}{4} e^{-u} (\cos u + \sin u)$$

Für  $u \leq 0$  ist das Integral dasselbe. Zusammengefasst erhalten wir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ux)}{x^4 + 4} dx = \frac{\pi}{4} e^{-|u|} (\cos|u| + \sin|u|)$$

**Satz F4L: Integrale über die reelle Halbachse**

Sei  $f(z) = p(z)/q(z)$  rational mit  $p, q \in \mathbb{C}[z]$  und  $\deg q \geq \deg p + 2$ , aber ohne Polstellen in  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ , gekürzt also  $q(x) \neq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Dann gelten folgende Formeln für Integrale über die reelle Halbachse:

$$\int_{x=0}^{\infty} f(x) dx = - \sum_{s \neq 0} \operatorname{res}_{z=s} [f(z) \ln(z)]$$

$$\int_{x=0}^{\infty} f(x) \ln(x) dx = - \frac{1}{2} \sum_{s \neq 0} \operatorname{res}_{z=s} [f(z) \ln(z)^2] - \pi i \int_{x=0}^{\infty} f(x) dx$$

$$\int_{x=0}^{\infty} f(x) x^\alpha dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \sum_{s \neq 0} \operatorname{res}_{z=s} [f(z) z^\alpha] \quad \text{für } 0 < \alpha < 1$$

Hierbei nutzen wir für jede komplexe Zahl  $z = r e^{i\varphi}$  mit  $0 < r < \infty$  und  $0 \leq \varphi < 2\pi$  ihren komplexen Logarithmus mit  $\ln z := \ln r + i\varphi$ . Auf  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$  entspricht dies dem Nebenzweig  $\ln = \ln_r$  aus Satz F2M. Für  $\alpha \in \mathbb{R}$  setzen wir  $z^\alpha := e^{\alpha \ln z}$ . Auf  $\mathbb{R}_{> 0}$  sind das die üblichen reellen Definitionen; ihre komplexen Fortsetzungen sind unstetig quer zu  $\mathbb{R}_{> 0}$ .

(2) Auch das zweite Integral können wir noch elementar berechnen:

$$\int_{x=0}^{\infty} \frac{1}{(x+1)^2} dx = \left[ \frac{-1}{x+1} \right]_{x=0}^{\infty} = 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+1} = 1$$

😊 Die Voraussetzungen des Satzes F4L sind hier erfüllt. Das Residuum gibt hier tatsächlich die richtige Antwort:

$$\operatorname{res}_{z=-1} \left[ \frac{\ln(z)}{(z+1)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \ln(z) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{z} = -1$$

(3) Auch das dritte Integral können wir noch elementar berechnen:

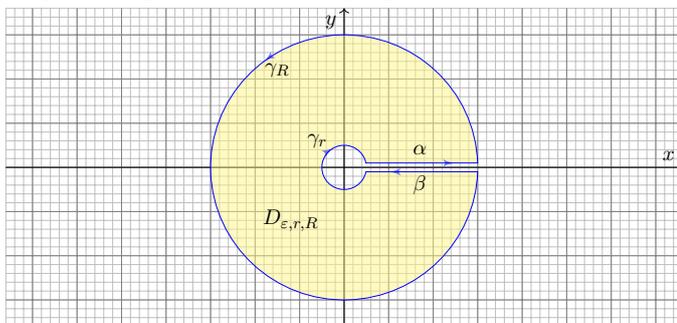
$$\int_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \left[ \arctan(x) \right]_{x=0}^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x) - 0 = \frac{\pi}{2}$$

😊 Die Voraussetzungen des Satzes F4L sind hier erfüllt. Die Residuen der beiden Polstellen  $z_1 = +i$  und  $z_2 = -i$  geben die richtige Antwort:

$$\operatorname{res}_{z=z_k} \left[ \frac{\ln(z)}{z^2+1} \right] = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{\ln(z)}{\frac{d}{dz}(z^2+1)} = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{\ln(z)}{2z} = \frac{\ln(z_k)}{2z_k}, \quad \text{also}$$

$$\operatorname{res}_{z=+i} \left[ \frac{\ln(z)}{z^2+1} \right] = \frac{\pi i \cdot 1/2}{2i} = \frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{res}_{z=-i} \left[ \frac{\ln(z)}{z^2+1} \right] = \frac{\pi i \cdot 3/2}{-2i} = -\frac{3\pi}{4}$$

**Aufgabe:** Berechnen Sie die Integrale aus Satz F4L mit folgendem Integrationsweg und den Grenzübergängen  $\varepsilon \rightarrow 0, r \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$ .



Die Wege  $\gamma_r$  und  $\gamma_R$  verlaufen auf Kreisen um 0 mit den Radien  $r < R$ . Die Wege  $\gamma_+$  und  $\gamma_-$  verlaufen im Abstand  $\varepsilon > 0$  parallel zur  $x$ -Achse. Sei  $\gamma = \alpha * \gamma_R * \beta * \gamma_r$  der geschlossene Weg um das Gebiet  $D_{\varepsilon, r, R}$ .

(2) Wir integrieren  $F(z) = f(z) \ln(z)^2$ . Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  erhalten wir:

$$\int_{\alpha} f(z) \ln(z)^2 dz \rightarrow \int_{x=r}^R f(x) \ln(x)^2 dx$$

$$\int_{\beta} f(z) \ln(z)^2 dz \rightarrow \int_{x=R}^r f(x) [\ln(x) + 2\pi i]^2 dx$$

Für  $r \rightarrow 0$  bzw.  $R \rightarrow \infty$  finden wir:

$$\left| \int_{\gamma_r} f(z) \ln(z)^2 dz \right| \leq \int_{t=0}^{2\pi} |f(r e^{it}) t^2 \cdot r i e^{it}| dt \leq \text{const} \cdot r \rightarrow 0$$

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) \ln(z)^2 dz \right| \leq \int_{t=0}^{2\pi} |f(R e^{it}) t^2 \cdot R i e^{it}| dt \leq \frac{\text{const}}{R^2} \cdot R \rightarrow 0$$

Da  $\hat{D}_{\varepsilon, r, R}$  schließlich alle Singularitäten von  $f$  umfasst, erhalten wir:

$$2\pi i \sum_{s \neq 0} \operatorname{res}_{z=s} [f(z) \ln(z)^2] = \int_{\gamma} f(z) \ln(z)^2 dz \rightarrow \int_{x=0}^{\infty} f(x) [4\pi^2 - 4\pi i \ln(x)] dx$$

😊 Das ist die zweite Residuenformel des Satzes F4L.

Wir werden diesen Satz anschließend als Übungsaufgabe beweisen. Zuvor betrachten wir einfache Anwendungsbeispiele zur Illustration.

**Aufgabe:** Berechnen Sie folgende Integrale. Ist der Satz anwendbar?

(1)  $\int_0^{\infty} \frac{1}{x+1} dx$ , (2)  $\int_0^{\infty} \frac{1}{(x+1)^2} dx$ , (3)  $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$ , (4)  $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^3+1} dx$

**Lösung:** (1) Das erste Integral können wir elementar berechnen:

$$\int_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x+1} dx = \left[ \ln(x+1) \right]_{x=0}^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x+1) - \ln(1) = \infty$$

⚠ Die Voraussetzungen des Satzes F4L sind hier nicht erfüllt, denn der Integrand  $f(z) = 1/(z+1)$  fällt nicht schnell genug ab.

⚠ Das Residuum gibt hier sicher nicht die richtige Antwort!

$$\operatorname{res}_{z=-1} \left[ \frac{\ln(z)}{z+1} \right] = \lim_{z \rightarrow -1} \ln(z) = \pi i$$

(4) Das vierte Integral können wir nicht mehr elementar berechnen. Wir nutzen deshalb Satz F4L. Alle Voraussetzungen sind hier erfüllt:

Es ist  $z^3 + 1 = (z + z_1)(z - z_2)(z - z_3)$  mit den drei Nullstellen

$$z_1 = -1 = e^{\pi i}, \quad z_2 = e^{\pi i/3} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad z_3 = e^{5\pi i/3} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

$$\ln(z_1) = \pi i, \quad \ln(z_2) = \pi i/3, \quad \ln(z_3) = \pi i \cdot 5/3$$

Die Residuen der Funktion  $F(z) = f(z) \ln(z)$  sind demnach

$$\operatorname{res}_{z=z_k} \left[ \frac{\ln(z)}{z^3+1} \right] = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{\ln(z)}{\frac{d}{dz}(z^3+1)} = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{\ln(z)}{3z^2} = \frac{\ln(z_k)}{3z_k^2}, \quad \text{also}$$

$$\operatorname{res}_{z_1}(F) = \frac{i}{3}, \quad \operatorname{res}_{z_2}(F) = \pi \frac{\sqrt{3}-i}{18}, \quad \operatorname{res}_{z_3}(F) = -\pi \frac{5(\sqrt{3}+i)}{18}$$

😊 Dank Satz F4L erhalten wir den Wert des gesuchten Integrals:

$$\int_{x=0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$$

**Lösung:** (1) Wir integrieren  $F(z) = f(z) \ln(z)$ . Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  erhalten wir:

$$\int_{\alpha} f(z) \ln(z) dz \rightarrow \int_{x=r}^R f(x) \ln(x) dx$$

$$\int_{\beta} f(z) \ln(z) dz \rightarrow \int_{x=R}^r f(x) [\ln(x) + 2\pi i] dx$$

Für  $r \rightarrow 0$  bzw.  $R \rightarrow \infty$  finden wir:

$$\left| \int_{\gamma_r} f(z) \ln(z) dz \right| \leq \int_{t=0}^{2\pi} |f(r e^{it}) t \cdot r i e^{it}| dt \leq \text{const} \cdot r \rightarrow 0$$

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) \ln(z) dz \right| \leq \int_{t=0}^{2\pi} |f(R e^{it}) t \cdot R i e^{it}| dt \leq \frac{\text{const}}{R^2} \cdot R \rightarrow 0$$

Da  $\hat{D}_{\varepsilon, r, R}$  schließlich alle Singularitäten von  $f$  umfasst, erhalten wir:

$$2\pi i \sum_{s \neq 0} \operatorname{res}_{z=s} [f(z) \ln(z)] = \int_{\gamma} f(z) \ln(z) dz \rightarrow -2\pi i \int_{x=0}^{\infty} f(x) dx$$

😊 Das ist die erste Residuenformel des Satzes F4L.

(3) Wir integrieren  $F(z) = f(z) z^\alpha$ . Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  erhalten wir:

$$\int_{\alpha} f(z) z^\alpha dz \rightarrow \int_{x=r}^R f(x) x^\alpha dx$$

$$\int_{\beta} f(z) z^\alpha dz \rightarrow \int_{x=R}^r f(x) x^\alpha e^{2\pi i \alpha} dx$$

Für  $r \rightarrow 0$  bzw.  $R \rightarrow \infty$  finden wir:

$$\left| \int_{\gamma_r} f(z) z^\alpha dz \right| \leq \int_{t=0}^{2\pi} |f(r e^{it}) r^\alpha e^{i t \alpha} \cdot r i e^{it}| dt \leq \text{const} \cdot r^{1+\alpha} \rightarrow 0$$

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) z^\alpha dz \right| \leq \int_{t=0}^{2\pi} |f(R e^{it}) R^\alpha e^{i t \alpha} \cdot R i e^{it}| dt \leq \frac{\text{const}}{R^2} \cdot R^{1+\alpha} \rightarrow 0$$

Da  $\hat{D}_{\varepsilon, r, R}$  schließlich alle Singularitäten von  $f$  umfasst, erhalten wir:

$$2\pi i \sum_{s \neq 0} \operatorname{res}_{z=s} [f(z) z^\alpha] = \int_{\gamma} f(z) z^\alpha dz \rightarrow (1 - e^{2\pi i \alpha}) \int_{x=0}^{\infty} f(x) x^\alpha dx$$

😊 Das ist die dritte Residuenformel des Satzes F4L.

**Holomorphe Funktionen und Laurent-Reihen** F501  
Fazit

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen. Der Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$  sei stückweise stetig diff'bar. Das **komplexe Wegintegral** einer stetigen Funktion  $f: \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  ist

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_{t=a}^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt. \quad \text{Merkregel: } z = \gamma(t), dz = \gamma'(t) dt$$

Eine komplexe Funktion  $f = u + iv: \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **holomorph**, wenn sie auf ganz  $\Omega$  komplex differenzierbar ist und  $f': \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  stetig.

⇔ **Cauchy-Riemann-Gleichungen**  $\partial_x u = \partial_y v$  und  $\partial_x v = -\partial_y u$ .

⇔ Die **Strömung**  $\vec{f} = (u, -v): \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  erfüllt  $\operatorname{div} \vec{f} = \operatorname{rot} \vec{f} = 0$ .

⇔ Auf jeder Kreisscheibe  $B(z_0, \rho) \subseteq \Omega$  gleicht  $f$  einer **Potenzreihe**:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit} \quad a_k := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$$

⇔ Auf jedem Kreisring  $K(z_0, \sigma, \rho) \subseteq \Omega$  gleicht  $f$  einer **Laurent-Reihe**:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit} \quad a_k := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$$

Der Koeffizient  $\operatorname{res}_{z_0}(f) := a_{-1}$  heißt das **Residuum** von  $f$  in  $z_0$ .

**Der Residuensatz für Kompakta** F502  
Fazit

Wir nutzen den Satz von Green / Gauß in der komplexen Ebene  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ . Für holomorphe Funktionen erhalten wir so den **Residuensatz F40**:

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f: \Omega \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph auf  $\Omega$  bis auf eine Menge  $S$  isolierter Singularitäten. Sei  $D \subseteq \Omega$  kompakt mit stückweise glattem Rand, wobei  $\partial D \cap S = \emptyset$ . Dann gilt

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i \sum_{s \in \tilde{D}} \operatorname{res}_s(f).$$

Das **Residuum** von  $f: K(s, 0, \rho) \rightarrow \mathbb{C}$  im Punkt  $s$  ist definiert durch

$$\operatorname{res}_s(f) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(s, r)} f(z) dz \quad \text{für } 0 < r < \rho.$$

Ist  $s$  eine **höchstens  $n$ -fache Polstelle** von  $f$ , so gilt

$$\operatorname{res}_s(f) = \lim_{z \rightarrow s} \frac{1}{(n-1)!} \left( \frac{d}{dz} \right)^{n-1} [(z-s)^n f(z)].$$

Für  $f = p/q$  mit **einfacher Polstelle**  $s$  gilt  $\operatorname{res}_s(p/q) = p(s)/q'(s)$ .

☺ Damit lassen sich Residuen in Polstellen meist leicht berechnen.

**Residuenkalkül für reelle Integrale** F503  
Fazit

(1) Sei  $R(x, y) = P(x, y)/Q(x, y)$  eine rationale Funktion mit Nenner  $Q(\cos t, \sin t) \neq 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Dann ergibt die Weierstraß-Substitution

$$f(z) := \frac{1}{iz} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)$$

eine rationale Funktion in  $z$  ohne Polstellen auf  $\partial B(0, 1)$ , und es gilt

$$\int_{t=0}^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = \int_{\partial B(0,1)} f(z) dz = 2\pi i \sum_{s \in B(0,1)} \operatorname{res}_s(f).$$

(2) Sei  $f(z) = p(z)/q(z)$  eine rationale Funktion; reelle Polstellen  $z \in \mathbb{R}$  seien höchstens einfach. Für  $\deg(q) \geq \deg(p) + 2$  und  $u \geq 0$  gilt dann:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iux} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(s)>0} \operatorname{res}_s[f(z) e^{iuz}] + \pi i \sum_{\operatorname{Im}(s)=0} \operatorname{res}_s[f(z) e^{iuz}]$$

Diese Gleichung gilt auch noch im Falle  $\deg(q) \geq \deg(p) + 1$  und  $u > 0$ .

**Residuenkalkül für reelle Integrale** F504  
Fazit

(3) Sei  $f(z) = p(z)/q(z)$  rational mit  $p, q \in \mathbb{C}[z]$  und  $\deg q \geq \deg p + 2$ , aber ohne Polstellen in  $\mathbb{R}_{>0}$ , gekürzt also  $q(x) \neq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}_{>0}$ . Dann gelten folgende Formeln für Integrale über die reelle Halbachse:

$$\int_{x=0}^{\infty} f(x) dx = - \sum_{s \neq 0} \operatorname{res}_{z=s} [f(z) \ln(z)]$$

$$\int_{x=0}^{\infty} f(x) \ln(x) dx = -\frac{1}{2} \sum_{s \neq 0} \operatorname{res}_{z=s} [f(z) \ln(z)^2] - \pi i \int_{x=0}^{\infty} f(x) dx$$

$$\int_{x=0}^{\infty} f(x) x^\alpha dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \sum_{s \neq 0} \operatorname{res}_{z=s} [f(z) z^\alpha] \quad \text{für } 0 < \alpha < 1$$

Hierbei nutzen wir für jede komplexe Zahl  $z = r e^{i\varphi}$  mit  $0 < r < \infty$  und  $0 \leq \varphi < 2\pi$  ihren komplexen Logarithmus mit  $\ln z := \ln r + i\varphi$ . Auf  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{>0}$  entspricht dies dem Nebenweg  $\ln = \ln_\pi$  aus Satz F2M. Für  $\alpha \in \mathbb{R}$  setzen wir  $z^\alpha := e^{\alpha \ln z}$ . Auf  $\mathbb{R}_{>0}$  sind das die üblichen reellen Definitionen; ihre komplexen Fortsetzungen sind unstetig quer zu  $\mathbb{R}_{>0}$ .

**Verständnisfragen: komplexe Potenzen** F505  
Übung

**Aufgabe:** Die folgende Rechnung beweist  $0 = 1$ . Wo stecken Fehler?

Für alle  $k \in \mathbb{Z}$  gilt:

$$e^{2\pi i k} = 1 \quad (1)$$

Multiplikation von (1) mit  $e \implies e^{2\pi i k + 1} = e \quad (2)$

Einsetzen von (2) in (1)  $\implies (e^{2\pi i k + 1})^{2\pi i k} = 1 \quad (3)$

Potenzgesetz  $(e^w)^z = e^{wz} \implies e^{-4\pi^2 k^2 + 2\pi i k} = 1 \quad (4)$

Potenzgesetz  $e^{w+z} = e^w \cdot e^z \implies e^{-4\pi^2 k^2} \cdot e^{2\pi i k} = 1 \quad (5)$

Anwendung von (1)  $\implies e^{-4\pi^2 k^2} = 1 \quad (6)$

Grenzwert für  $k \rightarrow \infty \implies 0 = 1 \quad (7)$

⚠ Das ist eine lehrreiche Übung, bitte versuchen Sie zuerst selbst, den Fehler einzugrenzen! Die Gleichungen (1) und (2) sind tatsächlich gültig, auch (3)  $1^z = 1$  scheint noch in Ordnung, obschon die Bedeutung von  $a^z$  für  $a, z \in \mathbb{C}$  unklar ist. Die letzte Gleichung (7) ist offensichtlich falsch, ebenso (6), (5), (4). Die Implikationen (4)  $\implies$  (5)  $\implies$  (6)  $\implies$  (7) sind alle einwandfrei, sie starten leider bei einer falschen Aussage (4). Der einzige Fehler liegt also bei (3)  $\implies$  (4). In  $\mathbb{C}$  sind Logarithmen und Potenzen nicht eindeutig, daher ist extreme Vorsicht geboten! F506

**Verständnisfragen: komplexe Potenzen** F506  
Übung

**Aufgabe:** (1) Es gilt  $1^z = 1$  für alle  $z \in \mathbb{R}$ , also wohl auch für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Aus  $e^{2\pi i} = 1$  folgt  $1 = 1^i = (e^{2\pi i})^i = e^{-2\pi} \approx 0.002 < 1$ . Fehler?

(2) Für  $a \in \mathbb{C}$  und  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir  $a^0 := 1$  und rekursiv  $a^{n+1} := a^n \cdot a$ . Für  $a \in \mathbb{C}^*$  setzen wir  $a^{-n} = 1/a^n$ . Welche Potenzgesetze gelten hier?

(3) Für  $a \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $z \in \mathbb{R}$  sei  $a^z := e^{z \ln a}$ . Welche Regeln gelten?

(4) Für  $a \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $z \in \mathbb{C}$  sei  $a^z := e^{z \ln a}$ . Welche Regeln gelten?

(5) Ist  $a^z := e^{z \ln a}$  eine brauchbare Definition für alle  $a, z \in \mathbb{C}$ ?

⚠ Die Potenzgesetze lassen sich nicht naiv von  $\mathbb{R}$  auf  $\mathbb{C}$  fortsetzen! Vielleicht empfinden Sie die Redlichkeit und Sorgfalt als übertrieben, die ich für komplexe Logarithmen F225 und Wurzeln F229 aufwende. Die drastischen Beispiele sollen Sie gegen gefährliche Sorglosigkeit impfen.

(2) Für  $a \in (\mathbb{C}^*, \cdot, 1)$  und  $z \in \mathbb{Z}$  gelten alle üblichen Potenzgesetze:

$$1^z = 1, \quad (ab)^z = a^z b^z, \quad a^0 = 1, \quad a^{w+z} = a^w \cdot a^z, \quad a^1 = a, \quad (a^w)^z = a^{wz}.$$

Allgemeiner als  $(\mathbb{R}^*, \cdot, 1)$  und  $(\mathbb{C}^*, \cdot, 1)$  gilt dies für jede kommutative Gruppe  $(G, \cdot, 1)$ .

(3) Auch für  $a \in (\mathbb{R}_{>0}, \cdot, 1)$  und  $z \in \mathbb{R}$  gelten alle sechs Potenzgesetze. (So sind Sie's gewohnt.)

(4) Für  $a \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $z \in \mathbb{C}$  gelten diese Regeln bis auf die letzte! Als Gegenbeispiel siehe (1).

(5) Nein, denn für  $a \in \mathbb{C}$  sind  $\ln a$  und somit  $e^{z \ln a}$  nicht eindeutig! Als Gegenbeispiel siehe (1).

**Zweige des komplexen Logarithmus** F507  
Übung

**Satz F5A: Existenz von Logarithmusfunktionen**

Für jedes Gebiet  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^*$  sind äquivalent:

- Auf  $\Omega$  existiert eine Logarithmusfunktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ .
- Auf  $\Omega$  hat  $1/z$  eine Stammfunktion  $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g'(z) = 1/z$ .
- Es gilt  $\oint_{\gamma} 1/z dz = 0$  für jeden geschlossenen Weg  $\gamma$  in  $\Omega$ . Das heißt, der Nullpunkt wird von Wegen in  $\Omega$  nicht umlaufen.

**Aufgabe:** Beweisen Sie sorgfältig die Äquivalenzen (1)  $\Leftrightarrow$  (2)  $\Leftrightarrow$  (3). Das ist das zentrale Beispiel für das ebene Potentialproblem. E361

**Lösung:** (1)  $\implies$  (2): Wir zeigen  $f'(z) = 1/z$  mit der Definition F2A. Sei  $z_n \rightarrow z$  eine konvergente Folge in  $\Omega$ . Für die Bildfolge  $w_n = f(z_n)$  und  $w = f(z)$  gilt dann  $w_n \rightarrow w$  dank Stetigkeit von  $f$ . Hieraus folgt:

$$\frac{f(z) - f(z_n)}{z - z_n} = \frac{w - w_n}{e^w - e^{w_n}} = \left[ \frac{e^w - e^{w_n}}{w - w_n} \right]^{-1} \rightarrow [e^w]^{-1} = \frac{1}{z}$$

Somit ist  $f$  für alle  $z \in \Omega$  differenzierbar mit Ableitung  $f'(z) = 1/z$ . Da somit auch  $f'$  stetig ist, ist  $f$  holomorph gemäß Definition F2C.

**Zweige des komplexen Logarithmus** F508  
Übung

(2)  $\implies$  (1): Dank Produktregel gilt  $[z e^{-g(z)}]' = [1 - z g'(z)] e^{-g(z)} = 0$ . Demnach ist  $z e^{-g(z)} \neq 0$  konstant, also  $z e^{-g(z)} = e^c$  für ein  $c \in \mathbb{C}$ . Somit ist  $f(z) = g(z) + c$  eine Logarithmusfunktion, wie behauptet.

(2)  $\implies$  (3): Sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$  ein geschlossener Weg, also  $\gamma(a) = \gamma(b)$ . Dank HDI verschwindet das Wegintegral  $\oint_{\gamma} 1/z dz = [g(z)]_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} = 0$ .

(3)  $\implies$  (2): Wir fixieren einen Basispunkt  $z_0 \in \Omega$ . Zu jedem Punkt  $z \in \Omega$  existiert ein Weg  $\alpha: [0, 1] \rightarrow \Omega$  von  $\alpha(0) = z_0$  nach  $\alpha(1) = z$ , da wir  $\Omega$  als zusammenhängend voraussetzen. Wir definieren nun  $g(z) := \int_{\alpha} 1/z dz$ . Wegen  $\oint 1/z dz = 0$  ist dies wohldefiniert, das heißt:  $g(z)$  hängt nur von  $z$  ab und nicht von der willkürlichen Wahl des Integrationsweges  $\alpha$ . Dank HDI gilt dann  $g'(z) = 1/z$ . (Cauchy-Riemann, analog zu H2A.)

**Beispiel:** Den Hauptzweig  $\ln_0: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \rightarrow \mathbb{C}$  des Logarithmus erhalten wir durch  $\ln_0(z) = \int_{[1, z]} 1/z dz$ . Hierzu wählen wir den direkten Weg  $[1, z]$  von 1 nach  $z$ ; jeder andere Weg in  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$  ergibt dasselbe. E363

Für den Zweig  $\ln_\pi: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$  gilt ebenso  $\ln_\pi(z) = i\pi + \int_{[-1, z]} 1/z dz$ .

**Aufgabe:** (1) Ist  $f(z) = 1/z$  holomorph? (2) Ist  $g(z) = 1/\bar{z}$  holomorph? (3) Für welche Konstanten  $a \in \mathbb{R}$  ist die Funktion  $h: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$h(x + iy) = \frac{x}{x^2 + y^2} + ai \frac{y}{x^2 + y^2} \text{ holomorph?}$$

**Lösung:** (1) Es gilt  $f(z) = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2}$ .

Wir prüfen die Cauchy–Riemann–Gleichungen. . . Diese sind erfüllt:

$$\begin{aligned} \partial_x u &= \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & \partial_x v &= \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \partial_y u &= \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, & \partial_y v &= \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Alternativ & kürzer:  $f(z) = 1/z$  ist eine Laurent–Reihe, also holomorph.

(2) Für  $g(z) = u(x, y) - iv(x, y)$  hingegen gilt Cauchy–Riemann nicht!

(3) Für  $h(z) = u(x, y) - iav(x, y)$  gilt Cauchy–Riemann nur bei  $a = -1$ !

☺ Die Cauchy–Riemann–Gleichungen F2E sind bequem und hilfreich.

Holomorphe und harmonische Funktionen

Zur Erinnerung: Der **Laplace–Operator** in der Ebene ist  $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ . Eine  $C^2$ –Funktion  $u: \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **harmonisch**, wenn  $\Delta u = 0$  gilt.

**Aufgabe:** (1) Ist  $f: \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, dann sind Realteil  $u = \operatorname{Re} f$  und Imaginärteil  $v = \operatorname{Im} f$  harmonisch. Prominente Beispiele sind:

$$e^x \cos y, \quad e^x \sin y, \quad \log|z|, \quad \arctan(y/x).$$

(2) Kann  $h: \mathbb{C}_{\operatorname{Re}>0} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph sein mit  $h(x + iy) = x^x + iv(x, y)$ ?

**Lösung:** (1) Jede holomorphe Funktion  $f$  ist beliebig oft diff'bar (F3E), somit auch  $u, v$ . Wir können den Satz von Schwarz (D4A) anwenden. Dank Cauchy–Riemann–Gleichungen  $\partial_x u = \partial_y v$  und  $\partial_y u = -\partial_x v$  gilt

$$\begin{aligned} \Delta u &= \partial_x \partial_x u + \partial_y \partial_y u = +\partial_x \partial_y v - \partial_y \partial_x v = 0, \\ \Delta v &= \partial_x \partial_x v + \partial_y \partial_y v = -\partial_x \partial_y u + \partial_y \partial_x u = 0. \end{aligned}$$

(2) Nach (1) müsste  $u(x, y) = x^x$  harmonisch sein, ist sie aber nicht:

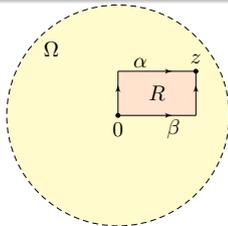
$$\begin{aligned} \partial_x x^x &= \partial_x (e^{x \ln x}) = e^{x \ln x} \cdot (x/x + \ln x) = x^x (1 + \ln x), \\ \partial_x^2 x^x &= \partial_x (x^x (1 + \ln x)) = x^x ((1 + \ln x)^2 + 1/x) = \Delta u. \end{aligned}$$

Daher gilt  $\Delta u \neq 0$ , z.B. für  $x = 1$ . Also kann  $h$  nicht holomorph sein!

Holomorphie als Integralbedingung

**Satz F5B: Integralkriterium, Morera 1886**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Genau dann ist  $f$  holomorph, wenn  $\oint_{\partial R} f(z) dz = 0$  gilt für jedes Rechteck  $R = [a, b] \times [c, d] \subseteq \Omega$ .



Erinnerung:  $f$  holomorph bedeutet stetig komplex differenzierbar (F2C). Diese Bedingung ist extrem stark:  $f$  lässt sich lokal in eine Potenzreihe entwickeln und ist somit sogar beliebig oft differenzierbar (Satz F3E). Die zweite Bedingung nutzt nur die Stetigkeit von  $f$  und eine einfache Integralbedingung. Die Äquivalenz ist daher überaus bemerkenswert!

Holomorphie als Integralbedingung

**Lösung:** „ $\Rightarrow$ “: Ist  $f$  holomorph, so folgt  $\int_{\partial D} f(z) dz = 0$  dank Cauchys Integralsatz F3A für jedes Kompaktum  $D \subseteq \Omega$  mit  $\partial D$  stückweise glatt.

☺ Dies gilt insbesondere für jedes Rechteck  $R = [a, b] \times [c, d] \subseteq \Omega$ .

„ $\Leftarrow$ “: Für die Holomorphie genügt es,  $B(z_0, r) \subseteq \Omega$  zu betrachten: Differenzierbarkeit (komplex oder reell) ist eine lokale Eigenschaft.

Nach Einschränken und Verschieben dürfen wir  $\Omega = B(0, r)$  annehmen. Die Funktionen  $F, G: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  definieren wir dann durch obige Integrale. Für  $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und  $h \rightarrow 0$  finden wir dank HDI folgende Grenzwerte:

$$\begin{aligned} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} &= \frac{1}{h} \int_{t=x}^{x+h} f(t+iy) dt \rightarrow f(x+iy) = f(z) \\ \frac{G(z+ih) - G(z)}{h} &= \frac{1}{h} \int_{t=y}^{y+h} f(x+it) i dt \rightarrow if(x+iy) = if(z) \end{aligned}$$

☺ Somit existiert die Ableitung  $\partial_x F(x + iy)$  und ist gleich  $f(x + iy)$ . Ebenso existiert die Ableitung  $\partial_y G(x + iy)$  und ist gleich  $if(x + iy)$ .

**Aufgabe:** Wir untersuchen  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  und  $g: \mathbb{C}_{\operatorname{Re}>0} \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch

$$f(x + iy) = x^3 y^2 + ix^2 y^3, \quad g(x + iy) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

(1) In welchen Punkten  $(x, y)$  sind  $f, g$  partiell differenzierbar?

(2) In welchen Punkten  $(x, y)$  sind  $f, g$  komplex differenzierbar?

(3) Begründen oder widerlegen Sie:  $g$  ist holomorph mit  $g'(z) = 1/z$ .

**Lösung:** (1) Die Funktionen  $f, g$  sind überall stetig partiell diff'bar:

$$\begin{aligned} \partial_x f(x, y) &= 3x^2 y^2 + 2ixy^3, & \partial_y f(x, y) &= 2x^3 y + 3ix^2 y^2, \\ \partial_x g(x, y) &= \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2}, & \partial_y g(x, y) &= \frac{y}{x^2 + y^2} + i \frac{x}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

(2) Für  $f$  ist Cauchy–Riemann äquivalent zu  $2xy^3 = -2x^3 y$ , also  $xy(y^2 + x^2) = 0$ . Das ist nur auf den Achsen  $x = 0$  und  $y = 0$  erfüllt.

Die Funktion  $g$  erfüllt die Cauchy–Riemann–Gleichungen überall, ist also komplex differenzierbar, und somit holomorph auf  $\mathbb{C}_{\operatorname{Re}>0}$ .

(3) Diese Rechnungen zeigen:  $g$  ist holomorph mit  $g'(z) = 1/z$ .

☺ Wie in Satz F2M ist  $g$  der Hauptzweig des Logarithmus auf  $\mathbb{C}_{\operatorname{Re}>0}$ .

Komplexe Funktionen und Wegintegrale

**Aufgabe:** Sei  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto |z|$ . Berechnen Sie die Wegintegrale

(1)  $\int_{\alpha} f(z) dz$  auf direktem Wege  $\alpha$  von 1 nach  $-1$  auf der  $x$ –Achse,

(2)  $\int_{\beta} f(z) dz$  von 1 nach  $-1$  aber über den oberen Halbkreis  $\beta$ .

(3) Kann demnach die Funktion  $f$  holomorph sein?

**Lösung:** (1) Für  $\alpha: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\alpha(t) = -t$  gilt  $\alpha'(t) = -1$  und somit

$$\int_{\alpha} f(z) dz = \int_{-1}^1 |t| \cdot (-1) dt = 2 \int_0^1 -t dt = \left[-t^2\right]_0^1 = -1$$

(2) Für  $\beta: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\beta(t) = e^{it}$  gilt  $f(\beta(t)) = |\beta(t)| = 1$  und somit

$$\int_{\beta} f(z) dz = \int_0^{\pi} 1 \cdot \beta'(t) dt = \left[\beta(t)\right]_0^{\pi} = -2$$

(3) Der Weg  $\alpha$  umgekehrt orientiert und  $\beta$  parametrisieren den Rand des Halbkreises. Wäre  $f$  holomorph, dann folgte dank Residuensatz

$$\int_{\beta} f(z) dz - \int_{\alpha} f(z) dz = 0.$$

☺ Dieses Integralkriterium ist sogar äquivalent zur Holomorphie (F5B).

Holomorphie als Integralbedingung

☺ Manchmal ist das Integralkriterium leichter zu handhaben als das Ableitungskriterium; dazu nützt dieser Satz. Anwendung: Angenommen,  $f_1, f_2, f_3, \dots: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  konvergieren lokal gleichmäßig gegen  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . Sind alle  $f_k$  stetig, so auch  $f$ . Sind alle  $f_k$  holomorph, so auch  $f$ .

**Aufgabe:** Beweisen Sie Satz F5B anhand folgender Rechnungen:

(1) Die Implikation „ $\Rightarrow$ “ kennen wir bereits viel allgemeiner: Woher?

(2) Zur Umkehrung „ $\Leftarrow$ “ genügt es,  $\Omega = B(0, r)$  zu betrachten: Warum? Hierauf definieren wir  $F, G: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  durch die beiden Hakenintegrale:

$$\begin{aligned} F(x + iy) &:= \int_{\alpha} f(z) dz = \int_{t=0}^y f(it) i dt + \int_{t=0}^x f(t + iy) dt \\ &\stackrel{!}{=} G(x + iy) := \int_{\beta} f(z) dz = \int_{t=0}^x f(t) dt + \int_{t=0}^y f(x + it) i dt \end{aligned}$$

(a) Berechnen Sie hiermit die partiellen Ableitungen  $\partial_x F$  und  $\partial_y G$ .

(b) Warum gilt  $F = G$ ? (c) Erfüllt  $F$  die Cauchy–Riemann–Gleichungen?

(d) Ist  $F$  holomorph? und damit auch die komplexe Ableitung  $f = F'$ ?

Holomorphie als Integralbedingung

⚠ Für  $\partial_y F(x + iy)$  und  $\partial_x G(x + iy)$  läuft es nicht so einfach! Wir können nicht unter den Integralen ableiten, da wir über  $f$  noch nichts wissen.

☺ Wir nutzen nun unsere Voraussetzung  $\oint_{\partial R} f(z) dz = 0$  speziell für das Rechteck  $R = [0, x] \times [0, y] \subseteq \Omega$ , wie in der Skizze gezeigt:

$$G(x + iy) - F(x + iy) = \int_{\beta} f(z) dz - \int_{\alpha} f(z) dz = \oint_{\partial R} f(z) dz = 0$$

Dies gilt für alle Punkte  $(x + iy) \in \Omega$ , also folgt  $F = G$  auf ganz  $\Omega$ .

Somit existiert die Ableitung  $\partial_y F(x + iy)$  und ist gleich  $if(x + iy)$ .

Damit ist  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  stetig partiell differenzierbar und erfüllt die Cauchy–Riemann–Gleichungen, denn  $\partial_x F = f = -i(if) = -i\partial_y F$ .

Dank Satz F2E ist demnach unsere Funktion  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph!

Dank Entwicklungssatz F3E können wir  $F$  in eine konvergente Potenzreihe  $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  entwickeln. Somit ist  $F$  beliebig oft komplex differenzierbar, und auch die Ableitung  $f = F'$  ist holomorph.

☺ Unsere sorgfältige Rechnung beweist die ersehnte Umkehrung „ $\Leftarrow$ “.

Erinnerung: Eine komplexe Funktion  $f: \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  ist **holomorph**, wenn  $f$  komplex differenzierbar ist und ihre Ableitung  $f': \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. In Definition F2c war es bequem, die Stetigkeit von  $f'$  zu fordern. Fordern ist immer bequem, doch nachweisen / überprüfen ist lästig.

😊 Die Stetigkeit von  $f'$  müssen wir nicht fordern, wir können sie folgern:

**Satz F5c: komplexe Differenzierbarkeit, Goursat 1883**

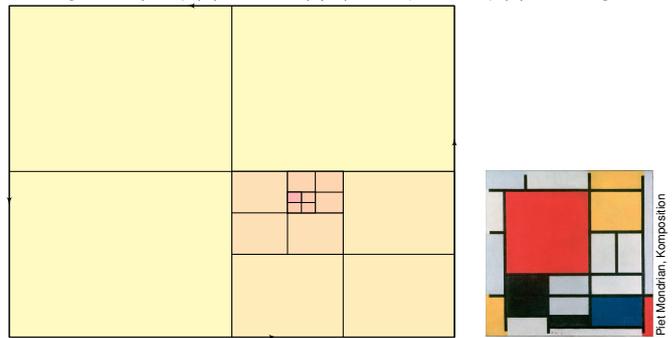
Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  komplex differenzierbar in jedem Punkt  $z \in \Omega$ , das heißt, es existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten:

$$f'(z) = \lim_{\Omega \setminus \{z\} \ni \zeta \rightarrow z} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$$

Dann ist  $f$  bereits holomorph auf ganz  $\Omega$ , also sogar komplex analytisch, und somit insbesondere beliebig oft komplex differenzierbar.

😊 Dank Satz F5c müssen Sie in der Praxis weniger nachweisen! Sie mögen einwenden, dass diese Frage eher eine Spitzfindigkeit ist, aber es ist beruhigend zu wissen und erleichtert tatsächlich Ihre Arbeit.

⚠️ Aus reeller Differenzierbarkeit von  $f$  folgt nicht Stetigkeit von  $f'$ , wie das Gegenbeispiel  $f(x) = x^2 \sin(1/x)$  für  $x \neq 0$  und  $f(0) = 0$  zeigt. B426



Für die Anwendung unserer Integralsätze (Cauchy F3A, Gauß & Green, letztlich also HDI) fehlt uns hier leider die Stetigkeit von  $f'$ . Wir haben nur sehr schwache Voraussetzungen und müssen genauer hinsehen.

😊 Der folgende Beweis ist ein Juwel an Sorgfalt und Scharfsinn.

**Beweis:** Komplexe Differenzierbarkeit von  $f$  impliziert Stetigkeit von  $f$ . Nach dem Integralkriterium F5B von Morera genügt es daher zu zeigen:

$$I(R) := \oint_{\partial R} f(z) dz \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{für jedes Rechteck } R = [a, b] \times [c, d] \subseteq \Omega.$$

Wir beginnen mit einem Rechteck  $R_0 \subseteq \Omega$  und zeigen nun  $|I(R_0)| = 0$ .

Wir unterteilen  $R_0$  in vier gleich große Teilrechtecke  $A, B, C, D$ . Es gilt  $I(R_0) = I(A) + I(B) + I(C) + I(D)$ . Wir wählen ein  $R_1 \in \{A, B, C, D\}$  mit maximalem Betrag  $|I(R_1)|$ . So erhalten wir  $|I(R_0)| \leq 4|I(R_1)|$ .

So fortfahrend erhalten wir durch Viertelung immer kleinere Rechtecke  $R_0 \supseteq R_1 \supseteq R_2 \supseteq \dots \supseteq R_n \supseteq \dots$  mit  $|I(R_0)| \leq 4^n |I(R_n)|$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Diese Intervallschachtelung konvergiert gegen einen Punkt  $z$  mit  $z \in R_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , kurz  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} R_n = \{z\}$ , dank Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$ . Nach Voraussetzung ist  $f$  in  $z$  differenzierbar. Für  $\zeta \in \Omega$  gilt demnach

$$f(\zeta) = f(z) + f'(z)(\zeta - z) + (\zeta - z)g(\zeta)$$

mit einer stetigen Funktion  $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  und  $g(z) = 0$ .

Das Polynom  $\zeta \mapsto f(z) + f'(z)(\zeta - z)$  ist holomorph in  $\zeta$ , demnach gilt

$$\oint_{\partial R_n} f(z) + f'(z)(\zeta - z) d\zeta = 0.$$

Für unser Integral bleibt also nur noch:

$$I(R_n) := \oint_{\partial R_n} f(\zeta) d\zeta = \oint_{\partial R_n} (\zeta - z)g(\zeta) d\zeta$$

Seinen Absolutbetrag schätzen wir grob ab:

$$|I(R_n)| \leq \ell(\partial R_n) \cdot \max_{\zeta \in \partial R_n} |\zeta - z| \cdot \max_{\zeta \in \partial R_n} |g(\zeta)|$$

Der Abstand von  $z, \zeta \in R_n$  ist beschränkt durch  $|\zeta - z| \leq \ell(\partial R_n)$ .

Für die Randlängen gilt  $\ell(\partial R_n) = \frac{1}{2}\ell(\partial R_{n-1}) = \dots = 2^{-n}\ell(\partial R_0)$ .

Zusammenfassend erhalten wir also die Abschätzungen:

$$|I(R_0)| \leq 4^n |I(R_n)| \leq 4^n \ell(\partial R_n)^2 \max_{\zeta \in \partial R_n} |g(\zeta)| = \ell(\partial R_0)^2 \max_{\zeta \in \partial R_n} |g(\zeta)|$$

Für  $n \rightarrow \infty$  geht der letzte Term gegen 0. Somit folgt  $|I(R_0)| = 0$ .

**Satz F5d: Charakterisierung von Gebieten**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  eine offene Menge und nicht leer. Dann sind äquivalent:

- (1)  $\Omega$  ist wegzusammenhängend: Je zwei Punkte  $x, y \in \Omega$  sind verbindbar durch einen Weg  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega$  von  $\gamma(0) = x$  nach  $\gamma(1) = y$ .
- (2) Jede stetige Funktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  hat als Bild  $f(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall.
- (3) Jede stetige Funktion  $f: \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  ist konstant.
- (4)  $\Omega$  ist zusammenhängend: Für jede Zerlegung  $\Omega = U \sqcup V$  in zwei disjunkte offene Mengen  $U$  und  $V$  gilt entweder  $U = \emptyset$  oder  $V = \emptyset$ .

Bedingung (1) ist am anschaulichsten. Hingegen scheint (4) zunächst weniger anschaulich aber in Beweisen oft die geschickteste Sichtweise.

**Beweis:** „(1)  $\Rightarrow$  (2)“: Seien  $a, b \in I$  Bildwerte, also  $a = f(x)$  und  $b = f(y)$  für  $x, y \in \Omega$ . Nach (1) existiert ein Weg  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega$  von  $\gamma(0) = x$  nach  $\gamma(1) = y$ . Die Komposition  $g = f \circ \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig, also ein Weg in  $\mathbb{R}$  von  $g(0) = a$  nach  $g(1) = b$ . Nach dem Zwischenwertsatz wird jeder Wert zwischen  $a$  und  $b$  angenommen. Somit ist  $f(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall.

„(2)  $\Rightarrow$  (3)“: Das Bild  $f(\Omega) \subseteq \{0, 1\}$  muss nach (2) ein Intervall sein. Also gilt entweder  $f(\Omega) = \{0\}$  oder  $f(\Omega) = \{1\}$ , und  $f$  ist konstant.

„(3)  $\Rightarrow$  (4)“: Angenommen wir haben eine offene Zerlegung  $\Omega = U \sqcup V$ . Wir definieren  $f: \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  durch  $f(z) = 0$  für  $z \in U$  und  $f(z) = 1$  für  $z \in V$ . Diese Funktion ist stetig, denn sie ist lokal konstant.

Nach (3) ist  $f$  konstant. Es bleibt somit nur  $U = \emptyset$  oder  $V = \emptyset$ .

„(4)  $\Rightarrow$  (1)“: Wir wählen einen Startpunkt  $x \in \Omega$ . Sei  $V$  die Menge aller Punkte  $y \in \Omega$ , die sich durch einen Weg in  $\Omega$  mit  $x$  verbinden lassen. Diese Menge ist offen, denn um jeden Punkt  $y \in V$  existiert eine kleine Kreisscheibe  $B(y, r) \subseteq \Omega$  mit Radius  $r > 0$ , und alle Punkte  $z \in B(y, r)$  lassen sich mit  $y$  verbinden, also auch mit  $x$ , also  $B(y, r) \subseteq V$ . (Skizze!)

Das Komplement  $U = \Omega \setminus V$  besteht aus den Punkten  $y \in \Omega$ , die sich nicht durch einen Weg in  $\Omega$  mit  $x$  verbinden lassen. Aus demselben Grund wie oben ist auch  $U$  offen. Nach (4) gilt  $U = \emptyset$ , denn  $x \in V \neq \emptyset$ . Also  $V = \Omega$ , das heißt, in  $\Omega$  ist jeder Punkt  $y$  mit  $x$  verbindbar.

😊 Somit sind alle vier Bedingungen (1)–(4) äquivalent.

Holomorphe, also komplex differenzierbare Funktionen  $f: \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  sind rigide: Wenn wir  $f$  in einer kleinen Umgebung  $B(z_0, \varepsilon) \subseteq \Omega$  kennen, so bestimmt dies  $f$  bereits auf dem gesamten Gebiet  $\Omega$ ! Genauer gilt:

**Satz F5e: Identitätssatz für holomorphe Funktionen**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet, also offen und zusammenhängend und  $\Omega \neq \emptyset$ .

Für je zwei holomorphe Funktionen  $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  sind äquivalent:

- (1) Es gilt  $f = g$ , also Gleichheit  $f(z) = g(z)$  in allen Punkten  $z \in \Omega$ .
- (2) Die Menge  $\{z \in \Omega \mid f(z) = g(z)\}$  hat einen Häufungspunkt  $z_0 \in \Omega$ .
- (3) Es gilt  $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$  in einem Punkt  $z_0 \in \Omega$  und für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

⚠️ Für reell differenzierbare Funktionen gilt nichts dergleichen (B438): Es gibt glatte Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , also beliebig oft reell differenzierbar, mit  $f(x) = 0$  für  $x \leq 0$  aber  $f(x) > 0$  für alle  $x > 0$ . Bemerkenswert!

😊 Der Identitätssatz (1)  $\Leftrightarrow$  (3) gilt auch für reell-analytische Funktionen, also Funktionen  $f: \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ , die sich lokal um jeden Punkt  $x \in \Omega$  in eine konvergente Potenzreihe entwickeln lassen. Die Äquivalenz zu Bedingung (2) hingegen gilt nur (reell oder komplex) eindimensional.

**Beweis:** „(1)  $\Rightarrow$  (2)“: Jeder Punkt  $z_0 \in \Omega$  ist Häufungspunkt von  $\Omega$ .

„(2)  $\Rightarrow$  (3)“: Mit  $f, g$  ist auch die Funktion  $h = f - g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Nach (2) hat  $M = \{z \in \Omega \mid h(z) = 0\}$  einen Häufungspunkt  $z_0 \in \Omega$ .

Angenommen  $h^{(n)}(z_0) \neq 0$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Wir betrachten das kleinste  $n$ , also  $h(z) = (z - z_0)^n h_n(z)$  mit  $h_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $h_n(z_0) \neq 0$ . Dank Stetigkeit von  $h_n$  folgt  $h(z) \neq 0$  für alle  $z \in B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$ .

Also liegt der Punkt  $z_0$  isoliert in  $M$  und ist kein Häufungspunkt von  $M$ . An diesem Widerspruch zerbricht unsere Annahme  $h^{(n)}(z_0) \neq 0$ .

Also gilt  $h^{(n)}(z_0) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , somit  $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ .

„(3)  $\Rightarrow$  (1)“: Wir betrachten die Differenz  $h = f - g$  und hierzu die Menge  $A = \{z \in \Omega \mid \forall n \in \mathbb{N}: h^{(n)}(z) = 0\}$ . Die Menge  $A$  ist abgeschlossen, denn  $h^{(n)}$  ist stetig. Sie ist auch offen, denn um jeden Punkt  $z \in A \subseteq \Omega$  können wir  $h$  in eine auf  $B(z, \varepsilon)$  konvergente Reihe entwickeln; diese ist die Nullreihe, also  $B(z, \varepsilon) \subseteq A$ . Wir erhalten so die offene Zerlegung  $\Omega = A \sqcup (\Omega \setminus A)$ . Da  $\Omega$  zusammenhängend ist und  $z_0 \in A$ , folgt  $A = \Omega$ .

**Warnung:** Für (2)  $\Rightarrow$  (3) muss der Häufungspunkt in  $\Omega$  liegen und nicht etwa auf dem Rand! Typisches Gegenbeispiel: Die Funktion  $f(z) = \sin(1/z)$  ist holomorph auf  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und verschwindet in  $z = 1/(k\pi)$  für  $k = 1, 2, 3, \dots$  mit Häufungspunkt 0. Dennoch gilt  $f \neq 0$ .

- Aufgabe:** Sei  $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion.
- (1) Lässt sich  $f$  durch eine Laurent-Reihe  $f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k z^k$  darstellen? Wenn ja, wie berechnet man die hier benötigten Koeffizienten  $a_k \in \mathbb{C}$ ?
  - (2) Angenommen,  $f$  ist beschränkt auf  $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \rho \leq |z| < \infty\}$ . Welche der Koeffizienten  $a_k$  müssen hierzu verschwinden? Warum?
  - (3) Angenommen,  $f$  ist beschränkt auf  $B = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| \leq \sigma\}$ . Welche der Koeffizienten  $a_k$  müssen hierzu verschwinden? Warum?
  - (4) Folgern Sie damit folgenden Satz von Joseph Liouville (1809–1882):

**Satz F5F: Liouville**  
Sei  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Ist  $f$  beschränkt, so ist  $f$  konstant.  
Allgemeiner: Gilt  $|f(z)| \leq M|z|^n$  für Konstanten  $M \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| \geq \rho$ , so ist  $f$  ein Polynom vom Grad  $\leq n$ .

- (5) Sei  $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ein Polynom, also  $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ . Angenommen,  $p$  hat keine Nullstellen, also  $p(z) \neq 0$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Ist  $f(z) = 1/p(z)$  dann holomorph? und beschränkt? also konstant? Folgern Sie hieraus erneut den Fundamentalsatz der Algebra (F3C).

- Lösung:** (1) Ja, genau das garantiert Cauchys Entwicklungssatz F3F. Die Koeffizienten  $a_k \in \mathbb{C}$  erhalten wir durch das komplexe Wegintegral
- $$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0,r)} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{t=0}^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{(re^{it})^{k+1}} ri e^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{(re^{it})^k} dt$$
- mit  $z = re^{it}$  und  $dz = ri e^{it} dt$ . Dies gilt für jeden Radius  $r > 0$ .
- (2) Angenommen, es gilt  $|f(z)| \leq M$  für ein  $M \in \mathbb{R}$  und alle  $z$  mit  $|z| \geq \rho$ .
- $$|a_k| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{(re^{it})^k} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \left| \frac{f(re^{it})}{(re^{it})^k} \right| dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \frac{M}{r^k} dt \leq \frac{M}{r^k}$$
- Dies gilt für jeden Radius  $r \geq \rho$ . Für  $k \geq 1$  und  $r \rightarrow \infty$  folgt damit  $a_k = 0$ . Umgekehrt ist klar: Gilt  $a_k = 0$  für alle  $k \geq 1$ , so ist  $f$  beschränkt auf  $A$ .
- (3) Angenommen, es gilt  $|f(z)| \leq M$  für ein  $M \in \mathbb{R}$  und alle  $0 < |z| \leq \sigma$ . Für  $r \rightarrow 0$  schließen wir wörtlich wie in (2): Für  $k \leq -1$  folgt  $a_k = 0$ .
- (4) Es gilt (3) und wegen  $|f(z)| \leq M|z|^n$  zudem (2) für alle  $k \geq n + 1$ .
- (5) Mit  $p(z) \neq 0$  ist  $f(z) = 1/p(z)$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  definiert und holomorph nach Quotientenregel. Zudem ist  $f$  beschränkt, also konstant,  $p(z) = a_0$ .  
☺ Jedes nicht-konstante Polynom hat demnach Nullstellen in  $\mathbb{C}$ .

**Satz F5G: Riemannscher Hebbarkeitssatz**  
Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $s \in \Omega$  ein Punkt. Sei  $f: \Omega \setminus \{s\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und zudem beschränkt auf einer kleinen Umgebung  $B(s, r) \setminus \{s\} \subseteq \Omega$ . Dann erlaubt  $f$  eine holomorphe Fortsetzung  $\tilde{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  im Punkt  $s$ .

Wir können also  $f$  in den Punkt  $s$  hinein holomorph fortsetzen, somit die Lücke im Definitionsgebiet schließen und die Singularität in  $s$  beheben.

- Aufgabe:** Beweisen Sie diesen Satz mit den vorigen Rechnungen.
- Lösung:** Nach Verschieben können wir  $s = 0$  annehmen.  
Auf  $B(0, r) \setminus \{0\}$  gilt  $f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k z^k$  dank Entwicklungssatz F3F.  
Nach Voraussetzung gilt  $|f(z)| \leq M$  für ein  $M \in \mathbb{R}$  und alle  $0 < |z| < r$ .

$$|a_k| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{t=0}^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{(re^{it})^k} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \left| \frac{f(re^{it})}{(re^{it})^k} \right| dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \frac{M}{r^k} dt \leq \frac{M}{r^k}$$

Für  $k \leq -1$  und  $r \rightarrow 0$  folgt  $a_k = 0$ . Wir haben also  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ . Diese Potenzreihe ist auf ganz  $B(0, r)$  konvergent und holomorph.

**Satz F5H: Mittelwertegenschaft und Maximumsprinzip**  
Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. (1) Für  $\bar{B}(z_0, r) \subseteq \Omega$  gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.$$

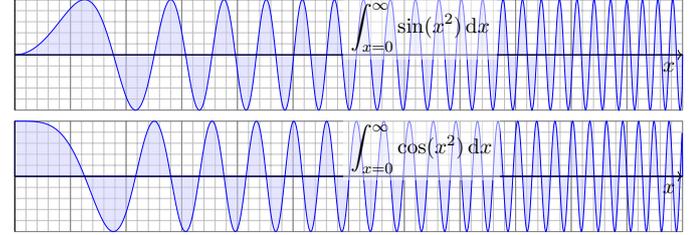
- Das Integral rechts ist der Mittelwert von  $f$  auf der Kreislinie  $\partial B(z_0, r)$ .  
(2) Nimmt  $|f(z)|$  in  $z_0 \in \Omega$  ein lokales Maximum an, so ist  $f$  konstant.

- Aufgabe:** Beweisen Sie diesen Satz mit den vorigen Rechnungen.  
**Lösung:** (1) Das ist der Entwicklungssatz F3F in  $z_0$  im Spezialfall  $k = 0$ .  
(2) Sei  $|f(z)| \leq |f(z_0)| =: M$  für alle  $z \in \bar{B}(z_0, r) \subseteq \Omega$  mit  $r > 0$ . Damit:

$$M = |f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{it})| dt \leq M \quad \text{für } 0 \leq \rho \leq r.$$

Gälte hierbei in einem Punkt die strikte Ungleichung  $|f(z_0 + \rho e^{it})| < M$ , so auch in einer Umgebung, und das Integral fiel insgesamt  $< M$  aus. Also ist  $f$  konstant auf  $\bar{B}(z_0, r)$ , also dank Identitätssatz F5E auf ganz  $\Omega$ .

**Aufgabe:** Ziel der Aufgabe ist die Berechnung der **Fresnel-Integrale**:

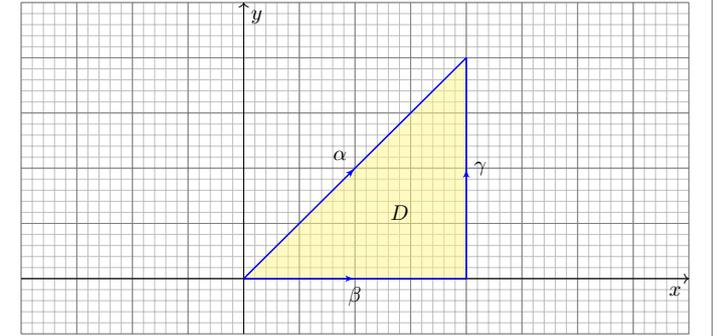


- Bislang konnten wir nur die Konvergenz sicherstellen. Immerhin! [B424](#)  
Mit komplexer Integration können wir nun den Grenzwert ausrechnen:
- (1) Wiederholen Sie die Berechnung des Integrals  $\int_{x=0}^{\infty} e^{-x^2} dx$ .
  - (2) Gilt  $\int_{\alpha} e^{-z^2} dz = \int_{\beta} e^{-z^2} dz + \int_{\gamma} e^{-z^2} dz$  für die Integrationswege  $\alpha, \beta, \gamma: [0, r] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\alpha(t) = t(1+i)$ ,  $\beta(t) = t$ ,  $\gamma(t) = r + it$ ?
  - (3) Gilt  $\int_{\gamma} e^{-z^2} dz \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$ ? Finden Sie eine Abschätzung.
  - (4) Folgern Sie hieraus den Wert der beiden Fresnel-Integrale.

- (1) Aus Kapitel C kennen wir das Gaußsche Integral (Satz C2G):

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}, \quad \int_{x=0}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

- (2) Wir betrachten die angegebenen Integrationswege  $\alpha, \beta, \gamma$ :



- (2) Die Wege  $\beta, \gamma$  und (umgekehrt)  $\alpha$  umlaufen das Dreieck  $D \subseteq \mathbb{C}$ . Da  $f$  auf ganz  $D$  holomorph ist, folgt  $\int_{\partial D} f(z) dz = 0$ , ausgeschrieben:

$$\int_{\alpha} e^{-z^2} dz = \int_{\beta} e^{-z^2} dz + \int_{\gamma} e^{-z^2} dz$$

Dies folgt aus Cauchys Integralsatz F3A, oder ebenso aus dem noch allgemeineren Residuensatz F4D, da  $f$  keine Singularitäten hat.

- (3) Für  $r \rightarrow \infty$  wollen wir die Konvergenz  $\int_{\gamma} e^{-z^2} dz \rightarrow 0$  zeigen:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} e^{-z^2} dz \right| &= \left| \int_{t=0}^r e^{-(r+it)^2} dt \right| \leq \int_{t=0}^r |e^{t^2 - r^2 - 2itr}| dt \\ &= \int_{t=0}^r e^{t^2 - r^2} dt \leq \int_{t=0}^r e^{tr - r^2} dt \\ &= \left[ \frac{e^{tr - r^2}}{r} \right]_{t=0}^r = \frac{1 - e^{-r^2}}{r} \leq \frac{1}{r} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

☺ Das Integral entlang  $\gamma$  fällt schließlich nicht mehr ins Gewicht.

- (4) Für  $r \rightarrow \infty$  wissen wir  $\int_{\beta} e^{-z^2} dz \rightarrow \sqrt{\pi}/2$  dank (1). Dank (3) gilt  $\int_{\gamma} e^{-z^2} dz \rightarrow 0$ . Mit (2) folgt  $\int_{\alpha} e^{-z^2} dz \rightarrow \sqrt{\pi}/2$ . Ausgeschrieben bedeutet das:

$$\int_{\alpha} e^{-z^2} dz = \int_{t=0}^r e^{-2it^2} (1+i) dt = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_{x=0}^{\sqrt{2}r} e^{-ix^2} dx$$

Wir substituieren hier  $t = x/\sqrt{2}$  und  $dt = dx/\sqrt{2}$ .  
Für  $r \rightarrow \infty$  erhalten wir folgenden Grenzwert:

$$\int_{x=0}^{\infty} e^{-ix^2} dx = \int_{x=0}^{\infty} \cos(x^2) - i \sin(x^2) dx = \frac{1-i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Der Vergleich der Real- und Imaginärteile ergibt:

$$\int_{x=0}^{\infty} \cos(x^2) dx = \int_{x=0}^{\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

☺ Eine geschickte Wahl des Integrationsweges wirkt Wunder.

**Aufgabe:** (1) Die folgenden Funktionen  $h_i: \mathbb{C} \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$  sind holomorph bis auf isolierte Singularitäten. Bestimmen Sie jeweils alle Residuen:

(a)  $h_1(z) = \frac{z^2}{z^4 - 1}$ , (b)  $h_2(z) = \frac{z}{(2z^2 + 5z + 2)^2}$ ,  
 (c)  $h_3(z) = \frac{e^{\pi z}}{4z^2 - 4z + 5}$ , (d)  $h_4(z) = \frac{\cos z}{z^{k+1}}$  für  $k \in \mathbb{N}$ .

Das ist die Hauptarbeit dieser Aufgabe. Sie sollen Residuen verstehen und die Werkzeuge zu ihrer Berechnung möglichst effizient einsetzen. Im zweiten Teil nutzen Sie die Residuen zur Berechnung von Integralen: Sei  $\gamma_1$  der positiv orientierte Rand des Rechtecks mit Ecken  $\pm \frac{3}{2} \pm \frac{i}{2}$  und  $\gamma_2$  der Rand der Kreisscheibe  $B(-1/2, 1)$ . Bestimmen Sie die Integrale

(2)  $\int_{\gamma_j} h_i(z) dz$  für  $i = 1, 2, 3, 4$  und  $j = 1, 2$ ,  
 (3)  $\int_{t=0}^{2\pi} \frac{1}{(4 \cos t + 5)^2} dt$  und (4)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 - 1} dx$ .

In welchem Sinne konvergiert das letzte Integral? absolut? uneigentlich?

**Lösung:** (1) Wir berechnen zunächst die Residuen mit F4B bzw. F4C.

(a) Die Funktion  $h_1(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)}$  hat einfache Pole:

$\text{res}_{z_0} h_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2}{\frac{d}{dz}(z^4 - 1)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2}{4z^3} = \frac{1}{4z_0}$  für  $z_0 = \pm 1, \pm i$ , also  
 $\text{res}_{+1} h_1 = +\frac{1}{4}$ ,  $\text{res}_{-1} h_1 = -\frac{1}{4}$ ,  $\text{res}_{+i} h_1 = -\frac{i}{4}$ ,  $\text{res}_{-i} h_1 = +\frac{i}{4}$

(b) Für  $h_2$  faktorisieren wir den Nenner (dank Mitternachtsformel) gemäß

$2z^2 + 5z + 2 = 2(z+2)(z+1/2)$ .

Die Funktion  $h_2(z) = \frac{z}{4(z+2)^2(z+1/2)^2}$  hat in  $-2, -1/2$  doppelte Pole:

$\text{res}_{-2} h_2 = \lim_{z \rightarrow -2} \frac{d}{dz} \left[ \frac{z}{4(z+1/2)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow -2} \frac{4(z+1/2)^2 - z \cdot 8(z+1/2)}{(4(z+1/2)^2)^2} = -\frac{5}{27}$   
 $\text{res}_{-1/2} h_2 = \lim_{z \rightarrow -1/2} \frac{d}{dz} \left[ \frac{z}{4(z+2)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow -1/2} \frac{4(z+2)^2 - z \cdot 8(z+2)}{(4(z+2)^2)^2} = +\frac{5}{27}$

(c) Wir untersuchen die Funktion

$h_3(z) = \frac{e^{\pi z}}{4z^2 - 4z + 5}$ .

Wir faktorisieren den Nenner (dank Mitternachtsformel) gemäß

$4z^2 - 4z + 5 = 4[z - (1/2 + i)][z - (1/2 - i)]$ .

Für die einfachen Pole  $1/2 \pm i$  berechnen wir die Residuen vermöge

$\text{res}_{z_0} h_3 = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{e^{\pi z}}{\frac{d}{dz}(4z^2 - 4z + 5)} = \frac{e^{\pi z_0}}{8z_0 - 4}$  für  $z_0 = 1/2 \pm i$ , alternativ

$\text{res}_{\frac{1}{2}+i} h_3 = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}+i} \frac{e^{\pi z}}{4[z - (1/2 - i)]} = \frac{e^{\pi(\frac{1}{2}+i)}}{4(1/2 + i - 1/2 + i)} = \frac{-e^{\pi/2}}{8i} = +\frac{i e^{\pi/2}}{8}$ ,

$\text{res}_{\frac{1}{2}-i} h_3 = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}-i} \frac{e^{\pi z}}{4[z - (1/2 + i)]} = \frac{e^{\pi(\frac{1}{2}-i)}}{4(1/2 - i - 1/2 + i)} = \frac{-e^{\pi/2}}{-8i} = -\frac{i e^{\pi/2}}{8}$ .

(d) Wir untersuchen die Funktion  $h_4(z) = \cos(z)/z^{k+1}$  für  $k \in \mathbb{N}$ .

Die einzige Polstelle von  $h_4$  ist  $z_0 = 0$ ; sie hat die Ordnung  $k+1$ .

Satz F4c für die Residuen mehrfacher Polstellen ergibt dann

$\text{res}_{z=0} h_4(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{k!} \left( \frac{d}{dz} \right)^k [z^{k+1} h_4(z)] = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!} & \text{falls } k = 2\ell \text{ gerade.} \end{cases}$

😊 Die Ableitungen sind zu unserem Glück hier sehr übersichtlich.

Alternativ entwickeln wir  $h_4$  in eine Laurent-Reihe um  $z_0 = 0$ :

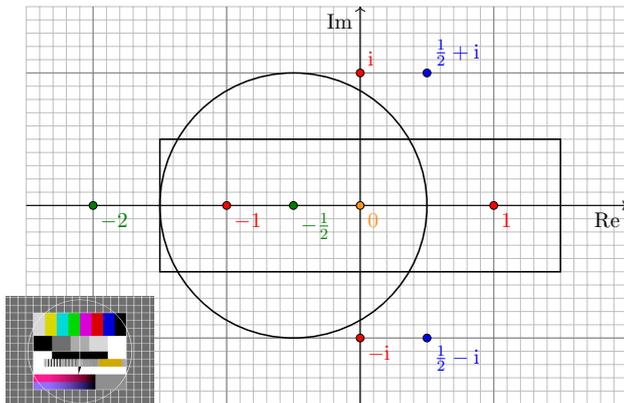
$h_4(z) = \frac{1}{z^{k+1}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!} z^{2\ell} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!} z^{2\ell-k-1}$

Das Residuum ist dann der Koeffizient vor  $z^{-1}$ , also

$\text{res}_{z=0} h_4(z) = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!} & \text{falls } k = 2\ell \text{ gerade.} \end{cases}$

😊 Die Reihenentwicklung ist zu unserem Glück hier sehr übersichtlich.

(2) Dank Residuensatz F4D müssen wir zur Berechnung der Integrale nur die Residuen aufsummieren, die im Rechteck bzw. im Kreis liegen.



Die Pole innerhalb des Rechtecks sind:  $0$  und  $-1/2$  und  $\pm 1$ .

Die Pole innerhalb des Kreises sind:  $0$  und  $-1/2$  und  $-1$ .

Dank Residuensatz F4D erhalten wir schließlich die acht Integrale

$\int_{\gamma_1} h_1(z) dz = 2\pi i [\text{res}_{+1} h_1 + \text{res}_{-1} h_1] = 0$ ,  
 $\int_{\gamma_2} h_1(z) dz = 2\pi i [\text{res}_{-1} h_1] = -\frac{1}{2}\pi i$ ,  
 $\int_{\gamma_1} h_2(z) dz = \int_{\gamma_2} h_2(z) dz = 2\pi i [\text{res}_{-1/2} h_2] = \frac{10}{27}\pi i$ ,  
 $\int_{\gamma_1} h_3(z) dz = \int_{\gamma_2} h_3(z) dz = 0$ ,  
 $\int_{\gamma_1} h_4(z) dz = \int_{\gamma_2} h_4(z) dz = 2\pi i [\text{res}_0 h_4] = \begin{cases} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!} & \text{für } k = 2\ell, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

😊 Es genügt jeweils, die Residuen aus Teil (1) zu summieren.

(3) Gesucht ist das reelle Integral

$\int_{t=0}^{2\pi} \frac{1}{(4 \cos t + 5)^2} dt$ .

Dies berechnen wir als komplexes Integral mit Hilfe von Satz F4H:

Der Integrand ist  $R(x, y) = 1/(4x + 5)^2$  mit  $x = \cos t$  und  $y = \sin t$ .

Wir nutzen die Euler-Formel  $z = e^{it} = \cos t + i \sin t$  und substituieren

$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}$ ,  $\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}$ ,

$f(z) = \frac{1}{iz} \cdot \frac{1}{(2(z + z^{-1}) + 5)^2} = -i \frac{z}{(2z^2 + 5z + 2)^2} = -i h_2(z)$

Hier ist  $-1/2$  die einzige Polstelle in  $B(0, 1)$ . Dank F4H erhalten wir:

$\int_{t=0}^{2\pi} \frac{1}{(4 \cos t + 5)^2} dt = \int_{\partial B(0,1)} f(z) dz = 2\pi i \cdot (-i) \text{res}_{-1/2} h_2 = \frac{10}{27}\pi$

😊 Links muss man integrieren, rechts nur Residuen summieren!

(4) Gesucht ist das reelle Integral

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 - 1} dx$ .

Dies berechnen wir mit Hilfe des Residuensatzes F4K und Teil (1):

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 - 1} dx = 2\pi i \text{res}_i h_1 + \pi i \text{res}_1 h_1 + \pi i \text{res}_{-1} h_1$   
 $= 2\pi i \left[ -\frac{i}{4} \right] + \pi i \left[ \frac{1}{4} \right] + \pi i \left[ -\frac{1}{4} \right] = \frac{\pi}{2}$ .

😊 Links muss man integrieren, rechts nur Residuen summieren!

⚠ Der Integrand ist weder absolut noch uneigentlich integrierbar. Unter dem Integral verstehen wir daher den Cauchy-Hauptwert:

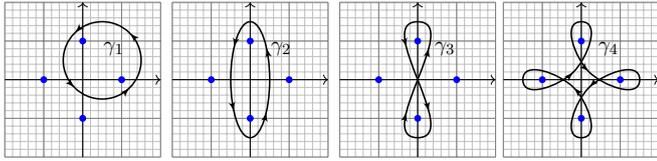
$\lim_{r \rightarrow \infty} \left( \int_{-r}^{-1/r} \frac{x^2}{x^4 - 1} dx + \int_{-1/r}^{1/r} \frac{x^2}{x^4 - 1} dx + \int_{1/r}^r \frac{x^2}{x^4 - 1} dx \right)$

😊 Mit dieser Vorsichtsmaßnahme gelingt die Rechnung wie erhofft.

**Aufgabe:** (1) Berechnen Sie das Wegintegral

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{1}{z^4 - 1} dz$$

für jeden der folgenden geschlossenen Wege  $\gamma_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ .



Die markierten Punkte sind die Polstellen des Integranden. Ausführlich:

(2) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung über  $\mathbb{R}$  und über  $\mathbb{C}$

(3) Berechnen Sie alle Polstellen und dort jeweils das Residuum.

Welche Reihenfolge der Rechnungen (1,2,3) scheint Ihnen geschickt?

**Lösung:** Seit diesem Kapitel verfügen wir über effiziente Werkzeuge zur Berechnung von Residuen, daher bietet sich die Reihenfolge (3,2,1) an.

(3) Die Nullstellen von  $z^4 - 1$  sind die vierten Einheitswurzeln  $\pm 1, \pm i$ . Im Falle einfacher Polstellen, wie hier, können wir Satz F4B nutzen:

$$\operatorname{res}_{z=z_0} \left[ \frac{p(z)}{q(z)} \right] = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

Wir erhalten so bequem und effizient die gesuchten vier Residuen:

$$\operatorname{res}_{(+1)}(f) = \lim_{z \rightarrow +1} \left[ \frac{1}{4z^3} \right] = +\frac{1}{4}$$

$$\operatorname{res}_{(-1)}(f) = \lim_{z \rightarrow -1} \left[ \frac{1}{4z^3} \right] = -\frac{1}{4}$$

$$\operatorname{res}_{(+i)}(f) = \lim_{z \rightarrow +i} \left[ \frac{1}{4z^3} \right] = +\frac{i}{4}$$

$$\operatorname{res}_{(-i)}(f) = \lim_{z \rightarrow -i} \left[ \frac{1}{4z^3} \right] = -\frac{i}{4}$$

☺ Der Residuenkalkül gelingt uns leicht dank effizienter Werkzeuge!

(2) Wir zerlegen den Nenner in seine Linearfaktoren über  $\mathbb{C}$ :

$$z^4 - 1 = (z - 1)(z + 1)(z - i)(z + i)$$

Alle Faktoren sind einfach. Die Partialbruchzerlegung (kurz PBZ) der Funktion  $1/(z^4 - 1)$  hat daher die besonders einfache Form

$$\frac{1}{z^4 - 1} = \frac{a}{z - 1} + \frac{b}{z + 1} + \frac{c}{z - i} + \frac{d}{z + i}$$

Die Konstanten  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  sind hierbei noch zu berechnen, etwa durch Koeffizientenvergleich, oder bequem und mühelos dank Residuen:

$$\frac{1}{z^4 - 1} = \frac{1}{4(z - 1)} - \frac{1}{4(z + 1)} + \frac{i}{4(z - i)} - \frac{i}{4(z + i)}$$

Umgekehrt lassen sich aus der PBZ auch direkt die Residuen ablesen. Über  $\mathbb{R}$  fassen wir  $(z - i)(z + i) = z^2 + 1$  zusammen und erhalten:

$$\frac{1}{z^4 - 1} = \frac{1}{4(z - 1)} - \frac{1}{4(z + 1)} - \frac{1}{2(z^2 + 1)}$$

☺ Der Residuenkalkül nützt uns auch bei der Partialbruchzerlegung!

(1) Wir nutzen Residuen (3) bzw. Partialbrüche (2): Für die Wegintegrale genügt es jeweils, die Umläufe um jede Polstelle zu zählen! (Satz F4G)

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{1}{z^4 + 1} dz = +\operatorname{res}_{(+1)}(f) + \operatorname{res}_{(+i)}(f) = \frac{1+i}{4}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{1}{z^4 + 1} dz = +\operatorname{res}_{(+1)}(f) + \operatorname{res}_{(-1)}(f) = 0$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_3} \frac{1}{z^4 + 1} dz = +\operatorname{res}_{(+1)}(f) - \operatorname{res}_{(-1)}(f) = \frac{i}{2}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_4} \frac{1}{z^4 + 1} dz = +\operatorname{res}_{(+1)}(f) + \operatorname{res}_{(-1)}(f) + \operatorname{res}_{(+i)}(f) + \operatorname{res}_{(-i)}(f) = 0$$

☺ Der Residuenkalkül löst selbst komplizierte Integrale sehr leicht.

Für Laurent-Polynome berechnen wir Wegintegrale leicht direkt (F1B); dank Linearität gelingt es hier ebenso für eine Summe solcher Terme. Viele Rechnungen lösen Sie so bequem, sicher, routiniert: Sie müssen schließlich nur noch die Umläufe von  $\gamma$  zählen und dabei das Vorzeichen beachten; wie üblich läuft mathematisch positiv *gegen* den Uhrzeiger.

**Aufgabe:** (1) Bestimmen Sie alle Polstellen und Residuen von

$$f(z) = \frac{nz^{n-1}}{z^n - w^n} \quad \text{für } w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

(2) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung über  $\mathbb{C}$  und über  $\mathbb{R}$ .

(3) Berechnen Sie das Wegintegral  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(0,r)} f(z) dz$  für  $r > |w|$ .

(4) Zum Vergleich: Was gilt für  $w = 0$ ? Ist das kohärent?

**Lösung:** (1) Die Lösungen von  $z^n = 1$  sind die  $n$ -ten Einheitswurzeln  $z_k = \zeta_n^k = e^{2\pi i k/n}$  für  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . (Machen Sie sich eine Skizze!) Die Lösungen von  $z^n = w^n$  sind somit  $z_k = \zeta_n^k w$  für  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . Im Falle einfacher Polstellen, wie hier, können wir Satz F4B nutzen:

$$\operatorname{res}_{z=z_0} \left[ \frac{p(z)}{q(z)} \right] = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

Wir erhalten so bequem und effizient die Residuen:

$$\operatorname{res}_{z=z_k} \left[ \frac{nz^{n-1}}{z^n - w^n} \right] = \lim_{z \rightarrow z_k} \left[ \frac{nz^{n-1}}{nz^{n-1}} \right] = 1$$

(2) Wir zerlegen den Nenner in Linearfaktoren:  $z^n - w^n = \prod_{k=0}^{n-1} (z - \zeta_n^k w)$ . Alle Faktoren sind einfach, die PBZ hat die besonders einfache Form

$$\frac{nz^{n-1}}{z^n - w^n} = \frac{c_0}{z - w} + \frac{c_1}{z - \zeta_n w} + \frac{c_2}{z - \zeta_n^2 w} + \dots + \frac{c_{n-1}}{z - \zeta_n^{n-1} w}$$

Die Konstanten erhalten wir mühelos dank Residuen, nämlich  $c_k = 1$ .

$$\frac{nz^{n-1}}{z^n - w^n} = \frac{1}{z - w} + \frac{1}{z - \zeta_n w} + \frac{1}{z - \zeta_n^2 w} + \dots + \frac{1}{z - \zeta_n^{n-1} w}$$

Umgekehrt lassen sich aus der PBZ auch direkt die Residuen ablesen. Über  $\mathbb{R}$  kombinieren wir je zwei komplex Konjugierte, wobei  $w \in \mathbb{R}$ :

$$\frac{1}{z - \zeta_n^k w} + \frac{1}{z - \zeta_n^{-k} w} = \frac{2z - 2 \cos(2\pi k/n) w}{z^2 - 2 \cos(2\pi k/n) zw + w^2} \quad \text{für } 0 < k < n/2$$

(3) Für  $r > |w|$  gilt  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(0,r)} f(z) dz = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{res}_{z_k}(f) = n$ , siehe F3D.

(4) Für  $w = 0$  finden wir direkt  $f(z) = n/z$  und  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(0,r)} f(z) dz = n$ . Anschaulich: Alle  $n$  Polstellen fusionieren, die Residuen addieren sich. Stetigkeit: Dank Satz D3C dürfen wir  $\lim_{w \rightarrow 0}$  unter Integral ziehen.

**Aufgabe:** (1) Bestimmen Sie alle Polstellen und Residuen von

$$f_1(z) = \frac{6z^5}{z^6 + 1}, \quad f_2(z) = \frac{6z^5 e^z}{z^6 + 1}, \quad f_3(z) = \frac{1}{\sin(\pi z)}, \quad f_4(z) = \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}.$$

(2) Bestimmen Sie – soweit möglich – die Partialbruchzerlegung von  $f_k$ .

(3) Berechnen Sie das Wegintegral  $\oint_{\partial B(0,4)} f_k(z) dz$  und ganz allgemein  $\oint_{\partial D} f_k(z) dz$  für jedes Kompaktum  $D \subseteq \mathbb{C}$  mit stückweise glattem Rand.

**Lösung:** (1a) Die Nullstellen des Nenners  $z^6 + 1$  sind  $z_k = e^{\pi i(2k+1)/6}$  für  $k = 0, 1, \dots, 5$ , kartesisch  $\pm i$  und  $(\pm\sqrt{3} \pm i)/2$ . Machen Sie eine Skizze! Alle Polstellen sind einfach; dank Satz F4B gilt  $\operatorname{res}_{z=z_k} [f_1(z)] = 1$ .

(2a) Die Partialbruchzerlegung hat die besonders einfache Form

$$\frac{6z^5}{z^6 + 1} = \frac{1}{z - z_0} + \frac{1}{z - z_1} + \dots + \frac{1}{z - z_5}$$

(3a) Es gilt  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} f_1(z) dz = \# [D \cap \{z_0, z_1, \dots, z_5\}]$  wie in Satz F3D.

Für  $f_2(z) = f_1(z) e^z$  gelten die Rechnungen entsprechend angepasst.

(1c) Die Funktion  $f_3(z) = 1/\sin(\pi z)$  hat einfache Polstellen in  $n \in \mathbb{Z}$ . Dank F4B gilt  $\operatorname{res}_{z=n} [f_3(z)] = \lim_{z \rightarrow n} [1/\sin(\pi z)]' = (-1)^n/\pi$ .

(1d) Auch  $f_4(z) = \cos(\pi z)/\sin(\pi z)$  hat einfache Polstellen in  $n \in \mathbb{Z}$ . Dank F4B gilt  $\operatorname{res}_{z=n\pi} [f_4(z)] = \lim_{z \rightarrow n\pi} [\cos(\pi z)/\sin(\pi z)]' = 1/\pi$ .

(3) Hieraus folgt das Wegintegral  $\oint_{\partial D} f_k(z) dz$  wie in Satz F4D / F3D.

(2) **Wenn** sich  $f_3, f_4$  als Reihen  $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n/(z - n)$  absolut konvergent darstellen lassen, **dann** liefert der Residuenkalkül die Koeffizienten:

$$\csc(\pi z) := \frac{1}{\sin(\pi z)} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{z - n} = \frac{1}{\pi z} + \frac{2z}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 - n^2}$$

$$\cot(\pi z) := \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z - n} = \frac{1}{\pi z} + \frac{2z}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2}$$

Nun müssen wir noch umgekehrt die vermuteten Formeln nachprüfen:

☺ Für jedes  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  sind die Reihen rechts absolut konvergent, denn für  $n \rightarrow \infty$  gilt  $1/(n^2 - z^2) \sim 1/n^2$ , und wir wissen  $\sum 1/n^2 < \infty$ .

☺ Die Grenzwerte dieser Reihen sind tatsächlich  $\csc(\pi z)$  bzw.  $\cot(\pi z)$ . Diese Rechnung erfordert etwas Sorgfalt und wird in [F554] ausgeführt.

**Residuen zur Berechnung von Reihen** F549  
Ergänzung

Bisher haben wir meist holomorphe Funktion  $f: \mathbb{C} \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$  betrachtet, die nur eine **endliche** Menge  $S \subseteq \mathbb{C}$  von Singularitäten aufweisen, wie rationale Funktionen  $f(z) = p(z)/q(z)$  mit Polynomen  $p, q \in \mathbb{C}[z]$ . Wir nutzen nun auch holomorphe Funktionen  $g: \mathbb{C} \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$  wie zum Beispiel  $g(z) = f(z) \cos(\pi z) / \sin(\pi z)$  mit unendlich vielen Singularitäten, insbesondere um Reihen wie  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$  berechnen zu können.

Die Menge  $S$  heißt **diskret**, wenn jeder ihrer Punkt  $s$  in  $S$  isoliert ist. In einer Menge  $S \subseteq \mathbb{C}$  nennen wir einen Punkt  $s \in S$  **isoliert**, wenn ein hinreichend kleiner Radius  $\varepsilon > 0$  existiert, sodass  $B(s, \varepsilon) \cap S = \{s\}$  gilt. Andernfalls sagen wir, dass sich die Punkte der Menge  $S$  um  $s$  **häufen**. Allgemein nennen wir  $a \in \mathbb{C}$  einen **Häufungspunkt** der Menge  $S$ , wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  die Menge  $B(a, \varepsilon) \cap S$  unendlich viele Punkte enthält.

Jede endliche Menge  $S \subseteq \mathbb{C}$  ist diskret; unendliche können diskret sein wie  $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{C}$  oder auch nicht diskret wie  $\{1/2, 1/3, 1/4, \dots, 0\}$  oder  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{C}$ . Sind  $g, h: \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph mit  $h \neq 0$ , so ist die Nullstellenmenge  $\{z \in \mathbb{C} \mid h(z) = 0\}$  diskret dank Satz F5E (somit höchstens abzählbar), und dasselbe gilt folglich für die Singularitätenmenge von  $f = g/h$ .

**Residuen zur Berechnung von Reihen** F550  
Ergänzung

**Aufgabe:** (1) Bestimmen Sie alle Nullstellen  $z \in \mathbb{C}$  der Funktionen

$$\sin, \cos: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Zeigen und nutzen Sie für  $z = x + iy$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$  die Gleichungen

$$|\sin(z)|^2 = \sin(x)^2 + \sinh(y)^2, \quad |\cos(z)|^2 = \cos(x)^2 + \sinh(y)^2.$$

Der Quotient  $h(z) = \cos(z)/\sin(z)$  ist beschränkt durch

$$|h(z)|^2 \leq \frac{\cos(x)^2 + \sinh(y)^2}{\sin(x)^2 + \sinh(y)^2} \leq \frac{\cos(x)^2}{\sin(x)^2 + \sinh(y)^2} + 1$$

(2) Bestimmen Sie alle Residuen der Funktion  $h(z) = \cos(z)/\sin(z)$ .

**Lösung:** (1) Aus der reellen Analysis wissen wir  $\sin(z) = 0$  für  $z \in \mathbb{Z}\pi$  und  $\cos(z) = 0$  für  $z \in \pi/2 + \mathbb{Z}\pi$ . Weitere Nullstellen  $z \in \mathbb{C}$  gibt es nicht! Die hierzu nützlichen Un/Gleichungen rechnet man geduldig nach.

(2) Die Funktion  $h(z) = \cos(z)/\sin(z)$  hat einfache Polstellen in  $z = k\pi$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ . Dank F4B gilt  $\text{res}_{z=k\pi} [h(z)] = \lim_{z \rightarrow k\pi} [\cos(z)/\sin'(z)] = 1$ .

**Residuen zur Berechnung von Reihen** F551  
Ergänzung

**Aufgabe:** (3) Bestimmen Sie alle Residuen der holomorphen Funktion

$$g: \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}, \quad g(z) = \frac{\cos(\pi z)}{z^2 \sin(\pi z)}.$$

**Lösung:** (3) In  $k \in \mathbb{Z}$  mit  $k \neq 0$  liegt eine einfache Polstelle vor (F4B):

$$\text{res}_{z=k} \left[ \frac{\cos(\pi z)}{z^2 \sin(\pi z)} \right] = \lim_{z \rightarrow k} \left[ \frac{\cos(\pi z)}{2z \sin(\pi z) + \pi z^2 \cos(\pi z)} \right] = \frac{1}{\pi k^2}$$

Im Nullpunkt  $z = 0$  hingegen liegt eine dreifache Polstelle vor (F4C):

$$\frac{d}{dz} \frac{z \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \frac{\cos(\pi z) - \pi z \sin(\pi z)}{\sin(\pi z)^2}$$

$$\frac{d^2}{dz^2} \frac{z \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \frac{-2\pi \cos(\pi z) + 2\pi^2 z \sin(\pi z)}{\sin(\pi z)^3} = \frac{2\pi^2 z \cos(\pi z) - 2\pi \sin(\pi z)}{\sin(\pi z)^3}$$

$$= \frac{2\pi^2 z [1 - \frac{1}{2!} \pi^2 z^2 + O(z^4)] - 2\pi [\pi z - \frac{1}{3!} \pi^3 z^3 + O(z^5)]}{\pi^3 z^3 + O(z^5)} = -\frac{2\pi}{3} + O(z^2)$$

$\text{res}_{z=0} \left[ \frac{\cos(\pi z)}{z^2 \sin(\pi z)} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left[ \frac{z \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \right] = -\frac{\pi}{3}$  😊 Alles wird gut.

😊 Noch leichter gelingt's mit der geometrischen Reihe, siehe F554.

**Residuen zur Berechnung von Reihen** F552  
Ergänzung

**Aufgabe:** Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $Q_n \subseteq \mathbb{C}$  das Quadrat mit Ecken  $(\pm 1 \pm i)(n + 1/2)$ .

(4) Berechnen Sie  $\int_{\partial Q_n} g(z) dz$  und (5) den Grenzwert für  $n \rightarrow \infty$ .

(6) Folgern Sie hieraus den Grenzwert der Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ .

**Lösung:** (4) Dank Residuensatz und der vorigen Aufgabe (3) gilt:

$$\int_{\partial Q_n} g(z) dz = 2\pi i \sum_{k=-n}^n \text{res}_k(g) = -\frac{\pi}{3} + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi k^2}$$

(5) Für  $n \geq 1$  und alle  $z \in Q_n$  gilt  $|\cos(\pi z)/\sin(\pi z)| \leq 2$ . Für  $n \rightarrow \infty$  folgt

$$\left| \int_{\partial Q_n} g(z) dz \right| \leq \int_{\partial Q_n} |g(z)| \cdot |dz| \leq \int_{\partial Q_n} \frac{2}{n^2} \cdot |dz| \leq \frac{8(2n+1)}{n^2} \rightarrow 0.$$

(6) Für die obige Reihe erhalten wir schließlich

$$-\frac{\pi}{3} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k^2} = 0 \quad \text{also} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} = 1.6449340668 \dots$$

Die Konvergenz ist leicht zu zeigen [B303], nun können wir auch den Grenzwert berechnen! Dies ist ein berühmtes Problem und wurde erst 1734 von Leonhard Euler gelöst (noch vage). In Kapitel I gelingt es noch leichter mit den starken Werkzeugen der Fourier-Theorie. [B21]

**Berechnung von Reihen durch Residuen** F553  
Ergänzung

**Satz F5I: Berechnung von Reihen durch Residuen**

Sei  $f(z) = p(z)/q(z)$  eine rationale Funktion. Wir können und werden  $p/q$  als gekürzt annehmen, mit teilerfremden Polynomen  $p, q \in \mathbb{C}[z]$ . Ihre Singularitätenmenge ist demnach  $S = \{z \in \mathbb{C} \mid q(z) = 0\}$ .

(1) Unter der Voraussetzung  $\deg(q) \geq \deg(p) + 2$  gilt:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus S} f(k) = -\pi \sum_{s \in S} \text{res}_{z=s} \left[ f(z) \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \right]$$

(2) Unter der schwächeren Voraussetzung  $\deg(q) \geq \deg(p) + 1$  gilt:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus S} (-1)^k f(k) = -\pi \sum_{s \in S} \text{res}_{z=s} \left[ \frac{f(z)}{\sin(\pi z)} \right]$$

😊 Links steht eine unendliche Reihe, rechts nur eine endliche Summe.  
 😊 Die Konvergenz ist leicht, nun können wir den Grenzwert berechnen!  
 😊 Die vorige Aufgabe zeigt das bemerkenswerte Beispiel  $f(z) = 1/z^2$ .

**Berechnung von Reihen durch Residuen** F554  
Ergänzung

**Aufgabe:** (a) Berechnen Sie mit diesem Satz die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k/k^2$ .

(b) Berechnen Sie die Reihen  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{w-n}$  und  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{w-n}$  für  $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ .

**Lösung:** (a) Wir wenden die Formel (2) auf die Funktion  $f(z) = 1/z^2$  an. In  $z = 0$  hat  $1/z^2 \sin(z)$  eine dreifache Polstelle. Statt wie zuvor Satz F4C zu nutzen, können wir auch direkt die Laurent-Reihe entwickeln:

$$\frac{1}{z^2 \sin(\pi z)} = \frac{1}{\pi z^3 (1 - q)} \quad \text{mit } q = \frac{1}{3!} \pi^2 z^2 - \frac{1}{5!} \pi^4 z^4 + O(z^6)$$

$$= \frac{1}{\pi z^3} [1 + q + q^2 + q^3 + \dots] = \frac{1}{\pi z^3} [1 + \frac{1}{3!} \pi^2 z^2 + O(z^4)]$$

$$= \frac{1}{\pi} z^{-3} + \frac{\pi}{6} z^{-1} + O(z) \quad \Rightarrow \quad \text{res}_{z=0} \left[ \frac{1}{z^2 \sin(\pi z)} \right] = \frac{\pi}{6}$$

Dank Satz F5I (2) schließen wir:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \mp \dots = -\frac{\pi^2}{12} = -0.8224670334 \dots$$

(b) Wir wenden den Satz F5I auf die Funktion  $f(z) = 1/(w-z)$  an und erhalten sofort  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{w-n} = \frac{\pi \cos(\pi w)}{\sin(\pi w)}$  sowie  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{w-n} = \frac{\pi}{\sin(\pi w)}$ .

**Berechnung von Reihen durch Residuen** F555  
Ergänzung

**Aufgabe:** Erklären und begründen Sie den allgemeinen Satz F5I nach dem Vorbild der Spezialfälle der vorigen Aufgaben.

**Lösung:** Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $Q_n \subseteq \mathbb{C}$  das Quadrat mit Ecken  $(\pm 1 \pm i)(n + 1/2)$ . Wir wählen  $n$  so groß, dass  $Q_n$  die Singularitätenmenge  $S$  von  $f$  enthält.

(1) Für  $g(z) = f(z) \cos(\pi z) / \sin(\pi z)$  ergibt Cauchys Residuensatz F4D:

$$\int_{\partial Q_n} g(z) dz = 2\pi i \sum_{s \in Q_n} \text{res}_s(g)$$

Für  $n \rightarrow \infty$  verschwindet das Integral, denn

$$\left| \int_{\partial Q_n} g(z) dz \right| \leq \max_{z \in \partial Q_n} |f(z)| \int_{\partial Q_n} \left| \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \right| \cdot |dz| \leq \frac{c}{n^2} \cdot 8(2n+1) \rightarrow 0.$$

Mit den Residuen in  $k \in \mathbb{Z} \setminus S$  folgt die gewünschte Gleichung:

$$0 = \sum_{s \in \mathbb{C}} \text{res}_s(g) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus S} \text{res}_k(g) + \sum_{s \in S} \text{res}_s(g)$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus S} \frac{f(k)}{\pi} + \sum_{s \in S} \text{res}_{z=s} \left[ f(z) \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \right]$$

**Berechnung von Reihen durch Residuen** F556  
Ergänzung

(2) Für  $g(z) = f(z) / \sin(\pi z)$  ergibt Cauchys Residuensatz F4D:

$$\int_{\partial Q_n} g(z) dz = 2\pi i \sum_{s \in Q_n} \text{res}_s(g)$$

Für  $n \rightarrow \infty$  verschwindet das Integral, denn nach Rechnung gilt

$$\left| \int_{\partial Q_n} g(z) dz \right| \leq \max_{z \in \partial Q_n} |f(z)| \int_{\partial Q_n} \left| \frac{1}{\sin(\pi z)} \right| \cdot |dz| \leq \frac{\text{const}}{n} \rightarrow 0.$$

(Die Schranke  $\int_{\partial Q_n} |dz|/|\sin(\pi z)| \leq \text{const}$  ist leider etwas mühsam.) Jede Polstelle in  $k \in \mathbb{Z} \setminus S$  ist höchstens einfach. Dank F4B gilt:

$$\text{res}_{z=k} \left[ \frac{f(z)}{\sin(\pi z)} \right] = \frac{f(k)}{\pi \cos(\pi k)} = \frac{(-1)^k}{\pi} f(k)$$

Mit den Residuen in  $k \in \mathbb{Z} \setminus S$  folgt die gewünschte Gleichung:

$$0 = \sum_{s \in \mathbb{C}} \text{res}_s(g) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus S} \text{res}_k(g) + \sum_{s \in S} \text{res}_s(g)$$

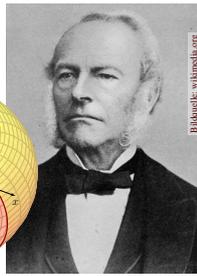
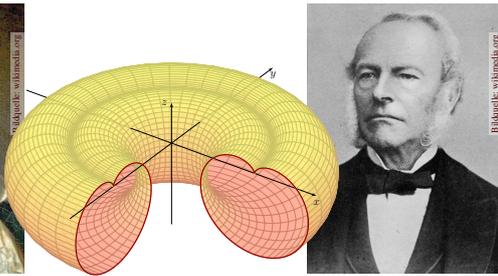
$$= \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus S} \frac{(-1)^k}{\pi} f(k) + \sum_{s \in S} \text{res}_{z=s} \left[ \frac{f(z)}{\sin(\pi z)} \right]$$

Kapitel G

Integralsätze im Raum



Carl Friedrich Gauß  
(1777–1855)



Sir George Stokes  
(1819–1903)

Vollversion • michael-eisermann.de/lehre/HM3 • 26.02.2025

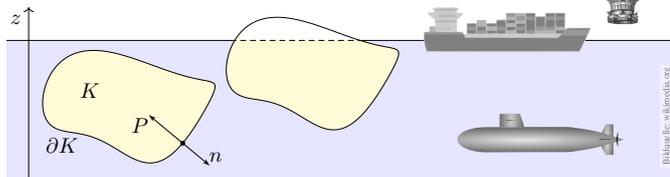
Inhalt dieses Kapitels G

- 1 Crashkurs zu Integralsätzen im Raum
  - Flächenintegrale und Integralsätze im Raum
  - Einführendes Beispiel zum Satz von Stokes
  - Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß
- 2 Flächenintegrale im Raum
  - Glatte Flächenstücke und Parametrisierungen
  - Kugelsegment, Kugelkappe, Torusfläche
  - Rotationskörper und Guldinsche Regeln
- 3 Integralsätze im Raum
  - Die Integralsätze von Stokes und Gauß
  - Anwendung: das archimedische Prinzip
  - Numerik: Triangulierung und Linearisierung
- 4 Fazit: Integralsätze
  - Zusammenfassung und Verständnisfragen
  - Weitere Aufgaben und Anwendungen
  - Geometrie auf gekrümmten Flächen

Klassische Anwendung: archimedisches Prinzip

G101  
Überblick

Satz des Archimedes: Die Auftriebskraft eines Körpers  $K$  gleicht dem Gewicht  $g \rho \text{vol}_3(K)$  des verdrängten Mediums.



Es besteht eine bemerkenswerte Beziehung zwischen dem Rand  $\partial K$  (nur hier wirkt der Druck) und dem Inneren von  $K$  (nur dieses verdrängt das Fluid). Solche Gesetzmäßigkeiten begegnen Ihnen häufig in Naturwissenschaft und Technik und sind ungemein nützlich: Es handelt sich um eine typische Anwendung unserer Integralsätze. Diese wollen wir nun kennen und nutzen lernen!

Archimedes von Syrakus (287–212 v. Chr.) war ein genialer Mathematiker, Physiker, Ingenieur. Für König Hieron sollte er prüfen, ob dessen Krone aus reinem Gold bestand oder gestreckt war, ohne sie zu beschädigen! Das archimedische Prinzip soll er beim Bade entdeckt haben. In seiner Begeisterung sprang er aus dem Wasser und rannte nackt durch Syrakus (γυμνος [gymnos], 'nackt', siehe Gymnasium). Sein Ausruf gilt bis heute als Sinnbild für plötzliche Erkenntnis: ἐὕρηκα [heureka], 'Ich habe es gefunden!', frei übersetzt: 'Verflüxt, wo ist mein Handtuch?'

Erinnerung: Integralsätze in Dimension 1 und 2

G102  
Überblick

Unser Vorbild ist der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: Für jede stetig differenzierbare Funktion  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f = F'$  gilt

$$\text{HDI: } \int_{x=a}^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Das ist eine bemerkenswerte Gesetzmäßigkeit: Das Integral über das Intervall  $[a, b]$  lässt sich entlang des Randes  $\partial[a, b] = \{a, b\}$  bestimmen! Ebenso in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  kennen wir bereits zwei solche Integralsätze; auch hier lassen sich Flächenintegrale durch Randintegrale bestimmen:

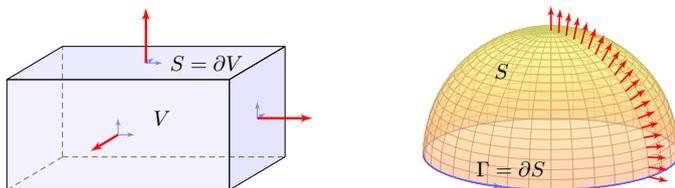
$$\text{Satz von Gauß: } \int_{(x,y) \in D} \text{div } f(x, y) d(x, y) = \int_{s \in \partial D} f(s) \times ds,$$

$$\text{Satz von Green: } \int_{(x,y) \in D} \text{rot } g(x, y) d(x, y) = \int_{s \in \partial D} g(s) \cdot ds.$$

Dasselbe gilt sinngemäß im Raum  $\mathbb{R}^3$ , allgemein in jeder Dimension. Hier lassen sich Volumenintegrale durch Randintegrale bestimmen. Die hierzu nötigen Flächenintegrale erklären wir in diesem Kapitel.

Integralsätze im Raum: Gauß und Stokes

G103



Sei  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  kompakt mit stückweise glatter Randfläche  $S = \partial V$ .

$$\text{Satz von Gauß: } \int_{v \in V} \text{div } f(v) dV = \int_{s \in S = \partial V} f(s) \cdot dS$$

Sei  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  eine stückw. glatte Fläche, orientiert mit Randkurve  $\Gamma = \partial S$ .

$$\text{Satz von Stokes: } \int_{s \in S} \text{rot } f(s) \cdot dS = \int_{s \in \Gamma = \partial S} f(s) \cdot d\Gamma$$

😊 Dies ist die 3dim. Fortsetzung der 2dim. Sätze von Gauß & Green. Die Orientierungen von  $S$  und  $\Gamma$  sind wie in der Skizze angegeben.

Integralsätze im Raum: der Satz von Stokes

G104  
Erläuterung

Hierbei sei  $f: \mathbb{R}^3 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Jedem Punkt  $v \in \Omega$  wird ein Vektor  $f(v) \in \mathbb{R}^3$  zugeordnet. Dies können wir uns z.B. als Strömungsgeschwindigkeit einer Flüssigkeit vorstellen. Die Integralsätze haben dann folgende anschauliche Bedeutung:

Die Divergenz  $\text{div } f(v)$  ist die Quellichte des Feldes  $f$  im Punkt  $v \in \Omega$ . Das Volumenintegral  $\int_{v \in V} \text{div } f(v) dV$  misst die Quellstärke von  $f$  auf  $V$ . Rechts steht das Flussintegral von  $f$  über die Randfläche  $S = \partial V$ .

**Die Quellbilanz im Volumen  $V$  fließt über die Randfläche  $\partial V$ .**

Die Rotation  $\text{rot } f(s)$  ist die Wirbelichte des Feldes  $f$  im Punkt  $s \in \Omega$ . Das Flächenintegral  $\int_{s \in S} \text{rot } f(s) \cdot dS$  misst die Zirkulation von  $f$  auf  $S$ . Rechts steht das Arbeitsintegral von  $f$  längs der Randkurve  $\Gamma = \partial S$ .

**Die Rotation auf der Fläche  $S$  zirkuliert längs der Randkurve  $\partial S$ .**

Es ist recht leicht und sehr hilfreich, eine Anschauung zu entwickeln. Um zudem die Integralsätze wie oben präzise formulieren zu können, müssen wir Kurven- und Flächenintegral einführen und verstehen: Sie sollen schließlich nicht nur anschauen, sondern auch rechnen!

Kurven- und Flächenintegrale

G105

Kurven  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$  parametrisieren wir (stückw.  $C^1$ ) durch  $\gamma: \mathbb{R} \supseteq [a, b] \rightarrow \Gamma$ . Am Punkt  $s = \gamma(t)$  heftet das infinitesimale Wegelement  $d\Gamma = \gamma'(t) dt$ .

**Kurven- und Arbeitsintegral** über das Kurvenstück  $\Gamma$  sind dann:

$$\int_{s \in \Gamma} g(s) |d\Gamma| := \int_{t=a}^b g(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt \quad \text{„1. Art“}$$

$$\int_{s \in \Gamma} f(s) \cdot d\Gamma := \int_{t=a}^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \quad \text{„2. Art“}$$

für ( $C^0$ ) Skalarfelder  $g: \mathbb{R}^3 \supseteq \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  bzw. Vektorfelder  $f: \mathbb{R}^3 \supseteq \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Flächen  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  parametrisieren wir (stückw.  $C^1$ ) durch  $\Phi: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow S$ . Hierbei ist  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  ein ebenes Kompaktum mit stückweise glattem Rand. An  $s = \Phi(x, y)$  heftet das inf. Flächenelement  $dS = (\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi) d(x, y)$ .

**Flächen- und Flussintegral** über das Flächenstück  $S$  sind dann:

$$\int_{s \in S} g(s) |dS| := \int_{(x,y) \in D} g(\Phi(x, y)) \cdot |\partial_x \Phi(x, y) \times \partial_y \Phi(x, y)| d(x, y)$$

$$\int_{s \in S} f(s) \cdot dS := \int_{(x,y) \in D} f(\Phi(x, y)) \cdot (\partial_x \Phi(x, y) \times \partial_y \Phi(x, y)) d(x, y)$$

Kurven- und Flächenintegrale

G106  
Erläuterung

Ist  $g: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  eine Massendichte (Masse pro Länge), so ist  $\int_{\Gamma} g |d\Gamma|$  die Gesamtmasse. Im Spezialfall  $g = 1$  erhalten wir die Gesamtlänge  $\ell(\Gamma)$ . Das Kurvenelement  $d\Gamma = \gamma'(t) dt$  interpretieren wir als kleines Wegstück. Seine Länge ist  $|d\Gamma|$ , und der Vektor  $d\Gamma$  liegt im Punkt  $s$  tangential an  $\Gamma$ . Das Skalarprodukt  $f(s) \cdot d\Gamma = f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$  ist der tangentielle Anteil von  $f$  längs der Kurve („Kraft mal Weg“). Wir integrieren alle Beiträge.

Ist  $g: S \rightarrow \mathbb{R}$  eine Massendichte (Masse pro Fläche), so ist  $\int_S g |dS|$  die Gesamtmasse. Im Fall  $g = 1$  erhalten wir den Flächeninhalt  $\text{vol}_2(S)$ .

Das Flächenelement  $dS$  stellen wir uns als ein kleines Flächenstück vor. Sein Flächeninhalt ist  $|dS|$ , und der zugehörige Vektor  $dS$  steht im Punkt  $s$  senkrecht auf der Fläche  $S$ . Im Flussintegral ist das Skalarprodukt  $f(s) \cdot dS$  somit der normale Anteil von  $f$  senkrecht zur Fläche  $S$ .

Wozu dient  $\Phi$ ? Meist interessiert uns letztlich nur die Fläche  $S \subseteq \mathbb{R}^3$ , aber nur Parametrisierungen können wir differenzieren und integrieren. Die Wahl einer Parametrisierung  $\Phi$  ist unentbehrliche Rechentchnik; das Ergebnis ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung!

**Aufgabe:** Erklären Sie, warum/wie Green ein Spezialfall von Stokes ist.  
**Green:** Für  $S \subseteq \mathbb{R}^2$  kompakt mit stückw. glatter Randkurve  $\Gamma = \partial S$  gilt

$$\int_{s \in S} \text{rot } f(s) \cdot ds = \int_{s \in \Gamma} f(s) \cdot d\Gamma.$$

**Stokes:** Diese Gleichung gilt genauso für orientierte Flächen  $S \subseteq \mathbb{R}^3$ . Die Zerlegung  $ds = n(s) |ds|$  ergibt die gleichwertige Formulierung

$$\int_{s \in S} \text{rot } f(s) \cdot n(s) |ds| = \int_{s \in \Gamma} f(s) \cdot d\Gamma.$$

Erinnerung: Für jedes  $C^1$ -Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^3 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  definieren wir

$$\text{rot}(f) = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3 \\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 \end{pmatrix}.$$

Die Ebene betten wir ein als  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^3$  und erhalten demnach  $\text{rot}(f_1, f_2, 0) = (0, 0, \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1)$  und das Flächenelement  $(0, 0, ds)$ .  
 ☺ Der Satz von Green ist der ebene Spezialfall des Satzes von Stokes.

Die nördliche Hemisphäre ist  $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2, z \geq 0\}$ . Diese Fläche parametrisieren wir durch Kugelkoordinaten  $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ :

$$s = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \stackrel{\text{Param}}{=} \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \mid 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right\}$$

Wir berechnen die Tangentialvektoren und den Normalenvektor:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi \\ -r \sin \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 \sin^2 \theta \cos \varphi \\ r^2 \sin^2 \theta \sin \varphi \\ r^2 \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}$$

Für die gesuchte Zirkulation von  $f$  auf der Fläche  $S$  erhalten wir somit:

$$\int_{s \in S} \text{rot } f(s) \cdot ds \stackrel{\text{Param}}{=} \int_{(\theta, \varphi) \in D} \text{rot } f(\Phi(\theta, \varphi)) \cdot \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) d(\theta, \varphi)$$

$$\stackrel{\text{Fub}}{\stackrel{\text{CI E}}{=}} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{\theta=0}^{2\pi} -2r^2 \sin^2 \theta \cos \varphi + 2r^2 \sin^2 \theta \sin \varphi + 2r^2 \sin \theta \cos \theta d\varphi d\theta$$

$$\stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{BI I}}{=}} 4\pi r^2 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta \stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{BI I}}{=}} 4\pi r^2 \left[ \frac{1}{2} \sin^2(\theta) \right]_{\theta=0}^{\pi/2} = 2\pi r^2$$

Das Ergebnis der vorigen Aufgabe ist kein Zufall, sondern illustriert einen allgemeinen Sachverhalt: den Integralsatz von Stokes im  $\mathbb{R}^3$ . Wir können ihn nun in voller Schönheit formulieren und nachrechnen:

**Satz G1A: Integralsatz von Stokes**

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Kompaktum mit stückweise glatter Randkurve  $\partial D$ . Sei  $\Phi: D \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$  eine (zweimal) stetig differenzierbare Abbildung. Die Einschränkung  $\gamma = \Phi|_{\partial D}$  parametrisiert die Randkurve  $\Phi(\partial D)$ . Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^3 \supseteq S \rightarrow \mathbb{R}^3$  gilt dann

$$\int_{s \in D} \text{rot}(f)(\Phi(s)) \cdot d\Phi = \int_{s \in \partial D} f(\gamma(s)) \cdot d\gamma.$$

Hierbei nutzen wir die oben vereinbarten sinnfälligen Abkürzungen: Am Punkt  $\gamma(s)$  heftet das infinitesimale Wegelement  $d\gamma = \gamma'(s) ds$ , an  $\Phi(s)$  heftet das inf. Flächenelement  $d\Phi = (\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi) d(x, y)$ . Die Randkurve  $\partial D$  wird hierbei wie immer positiv orientiert, sodass beim Umlauf  $D$  stets links von  $\partial D$  liegt.

Den Satz von Green in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  haben wir nachgerechnet. [E141]

**Aufgabe:** Der Satz von Stokes im  $\mathbb{R}^3$  folgt aus dem von Green im  $\mathbb{R}^2$ !

**Nachrechnen:** Das 3dim. Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^3 \supseteq S \rightarrow \mathbb{R}^3$  auf der Fläche  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  ziehen wir mittels der Parametrisierung  $\Phi: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$  zurück zu einem 2dim. Vektorfeld  $g: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Hierzu setzen wir

$$g := (\langle f \circ \Phi \mid \partial_1 \Phi \rangle, \langle f \circ \Phi \mid \partial_2 \Phi \rangle).$$

Für die beiden Vektorfelder  $f$  und  $g$  gilt dank Kettenregel

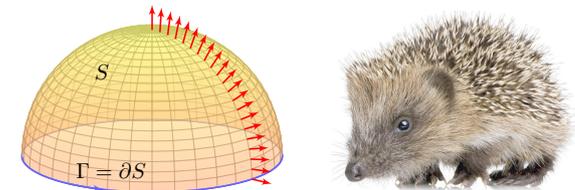
$$\int_{s \in \partial D} \underbrace{f(\gamma(s)) \cdot d\gamma}_{\text{Wegintegral im } \mathbb{R}^3} = \int_{s \in \partial D} \underbrace{g(s) \cdot ds}_{\text{Wegintegral im } \mathbb{R}^2}.$$

Wir berechnen sogleich  $\text{rot}(g) = \langle \text{rot}(f) \circ \Phi \mid \partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi \rangle$ , also

$$\int_{(x,y) \in D} \underbrace{\text{rot}(f)(\Phi(x,y)) \cdot d\Phi}_{\text{Flächenintegral im } \mathbb{R}^3} = \int_{(x,y) \in D} \underbrace{\text{rot}(g) d(x,y)}_{\text{Flächenintegral im } \mathbb{R}^2}.$$

☺ Damit folgt der Satz von Stokes aus dem Satz von Green!

☺ Der Stokesche Satz überträgt den Greenschen Satz von  $\mathbb{R}^2$  auf  $\mathbb{R}^3$ :



**Aufgabe:** Sei  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  die nördliche Hemisphäre vom Radius  $r$  mit dem Äquator  $\Gamma = \partial S$  als Randkurve. Berechnen Sie  $\int_S \text{rot}(f) \cdot ds$  und  $\int_{\Gamma} f \cdot d\Gamma$  für das Vektorfeld  $f(x, y, z) = (z - y, x + z, -x - y)$ .

**Lösung:** Wir berechnen zunächst die Rotation des Vektorfeldes

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z - y \\ x + z \\ -x - y \end{pmatrix} \implies \text{rot}(f) = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die Randkurve  $\Gamma = \partial S$  ist der Äquator,  $\partial S = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = r^2\}$ . Diese Kurve parametrisieren wir durch den Weg  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

$$s = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \stackrel{\text{Param}}{=} \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ 0 \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \pi/2 \\ t \end{pmatrix} = \gamma(t).$$

Für das gesuchte Arbeitsintegral längs  $\Gamma$  erhalten wir somit

$$\int_{s \in \Gamma} f(s) \cdot d\Gamma \stackrel{\text{Param}}{=} \int_{t=0}^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

$$= \int_{t=0}^{2\pi} \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \\ -r \cos t - r \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_{t=0}^{2\pi} r^2 dt = 2\pi r^2.$$

☺ Die Gleichheit ist kein Zufall, sondern illustriert den Satz von Stokes:

$$\int_{s \in S} \text{rot } f(s) \cdot ds = \int_{s \in \Gamma} f(s) \cdot d\Gamma$$

Das ist eine bemerkenswerte Gleichheit: Links steht das Flussintegral der Rotation  $\text{rot}(f)$  über das parametrisierte Flächenstück  $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ , rechts das Arbeitsintegral von  $f$  längs des Randweges  $\gamma: \partial D \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Hierzu muss  $\Phi$  nicht regulär sein, stetig differenzierbar reicht. Ist die Parametrisierung  $\Phi$  zudem regulär, also injektiv und überall  $\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi \neq 0$ , so ist das Bild  $S = \Phi(D)$  ein glattes Flächenstück und alle regulären Parametrisierungen von  $S$  sind untereinander äquivalent durch Umparametrisierung. (Wir setzen gleiche Orientierung voraus.) Wie wir später nachrechnen werden, ergeben dann alle regulären Parametrisierungen  $\Phi: D \rightarrow S$  dasselbe Ergebnis, sowohl beim Flächenintegral über  $S$  als auch beim Randintegral über  $\Gamma = \partial S$ . Dies kürzen wir ab durch die parameterunabhängigen Schreibweise

$$\int_{s \in S} \text{rot } f(s) \cdot ds = \int_{s \in \Gamma} f(s) \cdot d\Gamma.$$

So formulieren wir es in Satz G3E, kurz und bequem. Satz G1A ist etwas allgemeiner, da wir hier noch keine Injektivität oder Regularität fordern.

Zur Vereinfachung setzen wir  $\Phi$  als zweimal stetig differenzierbar voraus. Wir können dann den Satz von Schwarz (D4A) nutzen:  $\partial_2 \partial_1 \Phi_i = \partial_1 \partial_2 \Phi_i$ . Die Umrechnung von  $\text{rot}(g)$  in  $\text{rot}(f)$  gelingt uns nun dank Kettenregel. Wir müssen dabei allerdings über alle Indizes sorgfältig buchführen:

$$\begin{aligned} \text{rot}(g) &= \partial_1 g_2 - \partial_2 g_1 \\ &= \partial_1 \langle f \circ \Phi \mid \partial_2 \Phi \rangle - \partial_2 \langle f \circ \Phi \mid \partial_1 \Phi \rangle \\ &= \partial_1 \sum_i f_i \circ \Phi \cdot \partial_2 \Phi_i - \partial_2 \sum_i f_i \circ \Phi \cdot \partial_1 \Phi_i \\ &= + \sum_i \sum_j \partial_j f_i \circ \Phi \cdot \partial_1 \Phi_j \cdot \partial_2 \Phi_i + \sum_i f_i \circ \Phi \cdot \partial_1 \partial_2 \Phi_i \\ &\quad - \sum_i \sum_j \partial_j f_i \circ \Phi \cdot \partial_2 \Phi_j \cdot \partial_1 \Phi_i - \sum_i f_i \circ \Phi \cdot \partial_2 \partial_1 \Phi_i \\ &= \sum_i \sum_j \partial_j f_i \circ \Phi \cdot \partial_1 \Phi_j \cdot \partial_2 \Phi_i - \partial_i f_j \circ \Phi \cdot \partial_1 \Phi_j \cdot \partial_2 \Phi_i \\ &= \sum_{i < j} (\partial_i f_j - \partial_j f_i) \circ \Phi \cdot (\partial_1 \Phi_i \cdot \partial_2 \Phi_j - \partial_1 \Phi_j \cdot \partial_2 \Phi_i) \\ &= \langle \text{rot}(f) \circ \Phi \mid \partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi \rangle \end{aligned}$$

**Übung:** Wer dieser Kurzschreibweise nicht traut, kann mit etwas Fleiß alle Summen sorgfältig ausschreiben und die behaupteten Gleichungen nachprüfen. Rechnen reinigt die Seele!

**Aufgabe:** (1) Skizzieren Sie zu gegebenem  $r > 0$  den Körper

$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, z \geq 0 \}$$

(2) Beschreiben Sie den Körper  $V$  explizit durch Parametrisierungen als Normalbereich in  $z$ -Richtung, in Zylinder- und in Kugelkoordinaten.

(3) Berechnen Sie den Rauminhalt  $\text{vol}_3(V)$  je nach Parametrisierung. Ist das Ergebnis unabhängig von der gewählten Parametrisierung?

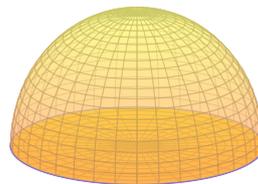
(4) Beschreiben Sie die Randfläche  $S = \partial V$  implizit / explizit wie in (2).

(5) Bestimmen Sie in jedem Randpunkt  $s$  den nach außen zeigenden Einheitsnormalenvektor  $n_{\partial V}(s)$  sowie  $dS$  je nach Parametrisierung.

(6) Berechnen Sie den Flächeninhalt  $\text{vol}_2(S)$  je nach Parametrisierung. Ist das Ergebnis unabhängig von der gewählten Parametrisierung?

(7) Berechnen Sie die Divergenz des Vektorfeldes  $f(x, y, z) = (x, y, z)$ , das Volumenintegral  $\int_V \text{div}(f) d(x, y, z)$  und das Flussintegral  $\int_S f \cdot dS$ .

☺ Diese Aufgabe bietet Gelegenheit, die bisherigen Integrations-techniken zu wiederholen und die neuen Flächenintegrale einzuüben.



(1) Zu  $r > 0$  betrachten wir die nördliche Halbkugel  $V$ :

(2) Wir können  $V$  auf verschiedene Weisen parametrisieren:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2 \\ z \geq 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} 0 \leq \rho \leq r \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq \sqrt{r^2 - \rho^2} \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} 0 \leq z \leq r \\ 0 \leq \rho \leq \sqrt{r^2 - z^2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \rho \sin \theta \sin \varphi \\ \rho \cos \theta \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} 0 \leq \rho \leq r \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{matrix} \right\}$$

(3a) Parametrisierung  $\Phi: \mathbb{R}^3 \supseteq D \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^3$  als  $z$ -Normalbereich:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} 0 \leq \rho \leq r \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq \sqrt{r^2 - \rho^2} \end{matrix} \right\}$$

Wir berechnen Jacobi-Matrix und Funktionaldeterminante:

$$\Phi' = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, z)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \det \Phi' = \rho$$

Volumenberechnung dank Transformationssatz, Fubini und HDI:

$$\text{vol}_3(V) = \int_V 1 d(x, y, z) \stackrel{\text{Trafo C2b}}{=} \int_D |\det \Phi'| d(\rho, \varphi, z)$$

$$\stackrel{\text{Fub C1e}}{=} \int_{\rho=0}^r \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{\sqrt{r^2 - \rho^2}} \rho dz d\varphi d\rho \stackrel{\text{HDI B11}}{=} \int_{\rho=0}^r 2\pi \rho \sqrt{r^2 - \rho^2} d\rho$$

$$\stackrel{\text{HDI B11}}{=} \left[ -\frac{2\pi}{3} (r^2 - \rho^2)^{3/2} \right]_{\rho=0}^r = \frac{2\pi}{3} r^3$$

☺ Das Ergebnis ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung!

(3b) Alternativ, Parametrisierung  $\Phi: D \rightarrow V$  in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} 0 \leq z \leq r \\ 0 \leq \rho \leq \sqrt{r^2 - z^2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{matrix} \right\}$$

Jacobi-Matrix  $\Phi'$  und Funktionaldeterminante  $\det \Phi' = \rho$  wie zuvor. Volumenberechnung dank Transformationssatz, Fubini und HDI:

$$\text{vol}_3(V) = \int_V 1 d(x, y, z) \stackrel{\text{Trafo C2b}}{=} \int_D |\det \Phi'| d(\rho, \varphi, z)$$

$$\stackrel{\text{Fub C1e}}{=} \int_{z=0}^r \int_{\rho=0}^{\sqrt{r^2 - z^2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho d\varphi d\rho dz \stackrel{\text{HDI B11}}{=} \int_{z=0}^r \int_{\rho=0}^{\sqrt{r^2 - z^2}} 2\pi \rho d\rho dz$$

$$\stackrel{\text{HDI B11}}{=} \int_{z=0}^r \pi [\rho^2]_{\rho=0}^{\sqrt{r^2 - z^2}} dz = \int_{z=0}^r \pi (r^2 - z^2) dz$$

$$\stackrel{\text{HDI B11}}{=} \pi \left[ r^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{z=0}^r = \frac{2\pi}{3} r^3$$

☺ Das Ergebnis ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung!

(3c) Zum Vergleich, Parametrisierung  $\Phi: D \rightarrow V$  in Kugelkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \rho \sin \theta \sin \varphi \\ \rho \cos \theta \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} 0 \leq \rho \leq r \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{matrix} \right\}$$

Jacobi-Matrix  $\Phi'$  und Funktionaldeterminante  $\det \Phi' = \rho^2 \sin \theta$ :

Volumenberechnung dank Transformationssatz, Fubini und HDI:

$$\text{vol}_3(V) = \int_V 1 d(x, y, z) \stackrel{\text{Trafo C2b}}{=} \int_D |\det \Phi'| d(\rho, \theta, \varphi)$$

$$\stackrel{\text{Fub C1e}}{=} \int_{\rho=0}^r \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho^2 \sin \theta d\varphi d\theta d\rho \stackrel{\text{HDI B11}}{=} \int_{\rho=0}^r \int_{\theta=0}^{\pi/2} 2\pi \rho^2 \sin \theta d\theta d\rho$$

$$\stackrel{\text{HDI B11}}{=} \int_{\rho=0}^r 2\pi [-\rho^2 \cos \theta]_{\theta=0}^{\pi/2} d\rho \stackrel{\text{HDI B11}}{=} \int_{\rho=0}^r 2\pi \rho^2 d\rho$$

$$\stackrel{\text{HDI B11}}{=} \frac{2\pi}{3} [\rho^3]_{\rho=0}^r = \frac{2\pi}{3} r^3$$

☺ Das Ergebnis ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung!

**Aufgabe:** (1) Skizzieren Sie zu gegebenem  $r > 0$  den Körper

$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, z \geq 0 \}$$

(2) Beschreiben Sie den Körper  $V$  explizit durch Parametrisierungen als Normalbereich in  $z$ -Richtung, in Zylinder- und in Kugelkoordinaten.

(3) Berechnen Sie den Rauminhalt  $\text{vol}_3(V)$  je nach Parametrisierung. Ist das Ergebnis unabhängig von der gewählten Parametrisierung?

(4) Beschreiben Sie die Randfläche  $S = \partial V$  implizit / explizit wie in (2).

(5) Bestimmen Sie in jedem Randpunkt  $s$  den nach außen zeigenden Einheitsnormalenvektor  $n_{\partial V}(s)$  sowie  $dS$  je nach Parametrisierung.

(6) Berechnen Sie den Flächeninhalt  $\text{vol}_2(S)$  je nach Parametrisierung. Ist das Ergebnis unabhängig von der gewählten Parametrisierung?

(7) Berechnen Sie die Divergenz des Vektorfeldes  $f(x, y, z) = (x, y, z)$ , das Volumenintegral  $\int_V \text{div}(f) d(x, y, z)$  und das Flussintegral  $\int_S f \cdot dS$ .

☺ Diese Aufgabe bietet Gelegenheit, die bisherigen Integrations-techniken zu wiederholen und die neuen Flächenintegrale einzuüben.

(4) Zur Halbkugel  $V$  besteht die Randfläche  $S = \partial V = A \cup B$  aus der äquatorialen Kreisscheibe  $A$  und der nördlichen Hemisphäre  $B$ .

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid x^2 + y^2 \leq r^2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} 0 \leq \rho \leq r \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{matrix} \right\}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \\ z \geq 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} 0 \leq \rho \leq r \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ z = \sqrt{r^2 - \rho^2} \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} 0 \leq z \leq r \\ \rho = \sqrt{r^2 - z^2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \rho \sin \theta \sin \varphi \\ \rho \cos \theta \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} \rho = r \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{matrix} \right\}$$

☺ Im Inneren des Körpers haben wir drei Freiheitsgrade, z.B.  $\rho, \theta, \varphi$ , auf der Randfläche entsprechend nur noch zwei, z.B.  $\theta, \varphi$ .

Das entspricht dem Unterschied zwischen dreidimensionalen Körpern (Volumen) und zweidimensionalen Objekten (Flächen). Hinschauen!

(5a) In jedem Punkt  $s \in A$  sehen wir die äußere Einheitsnormale

$$n_{\partial V}(s) = (0, 0, -1) \quad (\text{senkrecht auf } A, \text{ Länge } 1, \text{ aus } V \text{ heraus}).$$

Wir nutzen die Parametrisierung  $\Phi: D \rightarrow A$  in Polarkoordinaten:

$$s = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} 0 \leq \rho \leq r \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{matrix} \right\}.$$

Die beiden Tangentialvektoren und der Normalenvektor sind:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\rho \sin \varphi \\ \rho \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \end{pmatrix}.$$

(6a) Hieraus erhalten wir erneut den wohlbekannten Flächeninhalt:

$$\text{vol}_2(A) = \int_A |dA| \stackrel{\text{Param}}{=} \int_D \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right| d(\rho, \varphi) = \int_{\rho=0}^r \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho d\varphi d\rho = \pi r^2$$

☺ Die Formel für  $dA$  beinhaltet die 2dim. Funktionaldeterminante. Die Norm  $|d\Phi| = \rho$  ist die Flächenverzerrung der Parametrisierung  $\Phi$ . Der Vektor  $d\Phi$  steht senkrecht auf der Fläche  $A$ , hier in  $V$  hinein.

**Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß** G123  
Ausführung

(7a) Das Flussintegral des Vektorfeldes  $f$  über die Kreisscheibe  $A$  ist:

$$\int_{s \in A} f(s) \cdot dA \stackrel{\text{Param}}{=} \int_D f(\Phi(\rho, \varphi)) \cdot \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) d(\rho, \varphi)$$

$$= \int_D \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho \end{pmatrix} d(\rho, \varphi) = 0$$

😊 Anschauung: Das Feld  $f$  ist tangential zu  $A$ , daher  $f(s) \cdot dA = 0$ .

(7) Das Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  und seine Divergenz:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \implies \operatorname{div}(f) = 1 + 1 + 1 = 3$$

😊 In diesem Beispiel ist  $\operatorname{div}(f)$  konstant und daher das Integral besonders leicht: Die Quellstärke von  $f$  auf dem Bereich  $V$  ist

$$\int_V \operatorname{div}(f) d(x, y, z) = \int_V 3 d(x, y, z) = 3 \operatorname{vol}_3(V) = 2\pi r^3.$$

Wo fließt dieser Überschuss hin? Über  $A$  sicher nicht! Also über  $B$ ...

**Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß** G124  
Ausführung

(5b) In jedem Punkt  $s \in B$  sehen wir die äußere Einheitsnormale

$$n_{\partial V}(s) = s/|s| = s/r \quad (\text{senkrecht auf } B, \text{ Länge } 1, \text{ aus } V \text{ heraus}).$$

Wir nutzen obige Parametrisierung  $\Phi: D \rightarrow B$  in Polarkoordinaten:

$$s = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ \sqrt{r^2 - \rho^2} \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq r \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\}.$$

Die beiden Tangentialvektoren und der Normalenvektor sind:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ -\rho/\sqrt{r^2 - \rho^2} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\rho \sin \varphi \\ \rho \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} \rho^2 \cos \varphi / \sqrt{r^2 - \rho^2} \\ \rho^2 \sin \varphi / \sqrt{r^2 - \rho^2} \\ \rho \end{pmatrix} = \frac{\rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix}$$

😊 Dieser Normalenvektor zeigt nach außen, aber mit variabler Länge. Die Norm  $|d\Phi|$  ist die Flächenverzerrung der Parametrisierung  $\Phi$ .

**Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß** G125  
Ausführung

(6b) Hieraus erhalten wir den Flächeninhalt der Hemisphäre  $B$ :

$$\operatorname{vol}_2(B) = \int_B |dB| \stackrel{\text{Param}}{=} \int_D \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right| d(\rho, \varphi) = \int_D \frac{r\rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} d(\rho, \varphi)$$

$$= \int_{\rho=0}^r \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{r\rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} d\varphi d\rho = 2\pi r \left[ -\sqrt{r^2 - \rho^2} \right]_{\rho=0}^r = 2\pi r^2$$

(7b) Das Flussintegral des Vektorfeldes  $f$  über die Hemisphäre  $B$  ist:

$$\int_{s \in B} f(s) \cdot dB \stackrel{\text{Param}}{=} \int_D f(\Phi(\rho, \varphi)) \cdot \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) d(\rho, \varphi)$$

$$= \int_D \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ \sqrt{r^2 - \rho^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \rho^2 \cos \varphi / \sqrt{r^2 - \rho^2} \\ \rho^2 \sin \varphi / \sqrt{r^2 - \rho^2} \\ \rho \end{pmatrix} d(\rho, \varphi)$$

$$= \dots = \int_D \frac{r^2 \rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} d(\rho, \varphi) = 2\pi r^3 \quad (\text{wie 6b})$$

**Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß** G126  
Ausführung

😊 Anschauung: Das Vektorfeld  $f$  steht überall senkrecht auf  $B$  und hat dort Länge  $r$ . Hieraus folgt das Flussintegral direkt und mühelos:

$$\int_B f \cdot dB = \int_{s \in B} f(s) \cdot n_{\partial V}(s) |dB| = \int_B r |dB| = r \cdot \operatorname{vol}_2(B) = r \cdot 2\pi r^2$$

**Bilanz** zur Halbkugel  $V$  und ihrer Randfläche  $S = \partial V = A \cup B$ :

$$\operatorname{vol}_3(V) = \int_V |dV| = \frac{2\pi}{3} r^3, \quad \int_V \operatorname{div}(f) dV = 2\pi r^3,$$

$$\operatorname{vol}_2(A) = \int_A |dA| = \pi r^2, \quad \int_{s \in A} f(s) \cdot dA = 0,$$

$$\operatorname{vol}_2(B) = \int_B |dB| = 2\pi r^2, \quad \int_{s \in B} f(s) \cdot dB = 2\pi r^3.$$

😊 Die Gleichheit ist kein Zufall, sondern illustriert den Satz von Gauß:

$$\int_{v \in V} \operatorname{div} f(v) dV = \int_{s \in S} f(s) \cdot dS$$

**Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß** G127  
Ausführung

😊 Wir können die Hemisphäre  $B$  auf viele Weisen parametrisieren!

(5c) Alternativ die Parametrisierung  $\Phi: D \rightarrow B$  in Zylinderkoordinaten:

$$s = \Phi \begin{pmatrix} z \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{r^2 - z^2} \cos \varphi \\ \sqrt{r^2 - z^2} \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ \varphi \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 0 \leq z \leq r \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\}.$$

Die beiden Tangentialvektoren und der Normalenvektor sind:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \begin{pmatrix} -z/\sqrt{r^2 - z^2} \cos \varphi \\ -z/\sqrt{r^2 - z^2} \sin \varphi \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sqrt{r^2 - z^2} \sin \varphi \\ \sqrt{r^2 - z^2} \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sqrt{r^2 - z^2} \cos \varphi \\ -\sqrt{r^2 - z^2} \sin \varphi \\ -z \end{pmatrix} = -\Phi(z, \varphi)$$

⚠ Der Normalenvektor  $d\Phi$  zeigt in  $V$  hinein, Rechte-Hand-Regel. Die Norm  $|d\Phi| = r$  ist die Flächenverzerrung der Parametrisierung  $\Phi$ .

**Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß** G128  
Ausführung

(6c) Hieraus erhalten wir den Flächeninhalt der Hemisphäre  $B$ :

$$\operatorname{vol}_2(B) = \int_B |dB| = \int_D \left| \frac{\partial \Phi}{\partial z} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right| d(z, \varphi) = \int_D r d(z, \varphi)$$

$$= \int_{z=0}^r \int_{\varphi=0}^{2\pi} r d\varphi dz = \int_{z=0}^r 2\pi r dz = 2\pi r^2$$

(7c) Das Flussintegral des Vektorfeldes  $f$  über die Hemisphäre  $B$  ist:

$$\int_{s \in B} f(s) \cdot dB \stackrel{\text{Param}}{=} \int_D f(\Phi(z, \varphi)) \cdot \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) d(z, \varphi)$$

$$= \int_D \begin{pmatrix} \sqrt{r^2 - z^2} \cos \varphi \\ \sqrt{r^2 - z^2} \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{r^2 - z^2} \cos \varphi \\ -\sqrt{r^2 - z^2} \sin \varphi \\ -z \end{pmatrix} d(z, \varphi)$$

$$= \dots = \int_D -r^2 d(z, \varphi) = -2\pi r^3 \quad (\text{wie 6c})$$

⚠ Der Normalenvektor  $d\Phi$  zeigt in  $V$  hinein; Rechte-Hand-Regel. Der Flächeninhalt  $\int |d\Phi|$  ist von der Orientierung unabhängig. Das Flussintegral wechselt das Vorzeichen bei Orientierungsumkehr.

**Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß** G129  
Ausführung

😊 Wir können die Hemisphäre  $B$  auf viele Weisen parametrisieren!

(5d) Zum Vergleich schließlich in Kugelkoordinaten  $\Phi: D \rightarrow B$ :

$$s = \Phi \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\}.$$

Die beiden Tangentialvektoren und der Normalenvektor sind:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi \\ -r \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} r^2 \sin^2 \theta \cos \varphi \\ r^2 \sin^2 \theta \sin \varphi \\ r^2 \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} = r \sin \theta \cdot \Phi(\theta, \varphi)$$

😊 Der Normalenvektor  $d\Phi$  zeigt aus  $V$  heraus, Rechte-Hand-Regel. Die Norm  $|d\Phi| = r^2 \sin \theta$  ist wie immer die Flächenverzerrung.

**Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß** G130  
Ausführung

(6d) Hieraus erhalten wir den Flächeninhalt der Hemisphäre  $B$ :

$$\operatorname{vol}_2(B) = \int_B |dB| = \int_D \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right| d(\theta, \varphi) = \int_D r^2 \sin \theta d(\theta, \varphi)$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2 \sin \theta d\varphi d\theta = 2\pi r^2 \left[ -\cos \theta \right]_{\theta=0}^{\pi/2} = 2\pi r^2$$

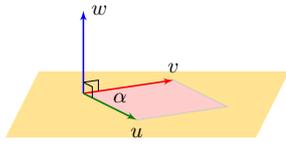
(7d) Das Flussintegral des Vektorfeldes  $f$  über die Hemisphäre  $B$  ist:

$$\int_{s \in B} f(s) \cdot dB \stackrel{\text{Param}}{=} \int_D f(\Phi(\theta, \varphi)) \cdot \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) d(\theta, \varphi)$$

$$= \int_D \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r^2 \sin^2 \theta \cos \varphi \\ r^2 \sin^2 \theta \sin \varphi \\ r^2 \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} d(\theta, \varphi)$$

$$= \dots = \int_D r^3 \sin \theta d(\theta, \varphi) = 2\pi r^3 \quad (\text{wie 6d})$$

😊 Der Normalenvektor  $d\Phi$  zeigt aus  $V$  heraus; Rechte-Hand-Regel. Der Flächeninhalt  $\int |d\Phi|$  ist von der Orientierung unabhängig. Das Flussintegral wechselt das Vorzeichen bei Orientierungsumkehr.



Erinnerung: Das **Kreuzprodukt** zweier Vektoren  $u, v \in \mathbb{R}^3$  ist

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor  $w = u \times v$  steht senkrecht auf den Vektoren  $u, v$ . Die Orientierung von  $(u, v, w)$  entspricht der Rechte-Hand-Regel.

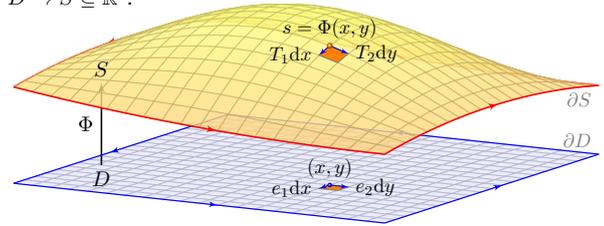
Die Norm  $|w|$  ist der Flächeninhalt des von den Vektoren  $u$  und  $v$  aufgespannten Parallelogramms, also  $|w| = |u| \cdot |v| \cdot \sin \angle(u, v)$ .

Daher gilt  $w = 0$  genau dann, wenn  $u$  und  $v$  linear abhängig sind, und umgekehrt  $w \neq 0$  genau dann, wenn  $u$  und  $v$  linear unabhängig sind.

Die Abbildung  $(u, v) \mapsto u \times v$  ist antisymmetrisch,  $v \times u = -(u \times v)$ , und bilinear, also  $u \times (av + bv') = a(u \times v) + b(u \times v')$ , ebenso in  $u$ .

☐ Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §3.10.

Ein **parametrisiertes Flächenstück** ist eine stetig diff'bare Abbildung  $\Phi: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ .



Am Punkt  $s = \Phi(x, y)$  heften die **Tangentialvektoren**

$$T_1 := \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) \quad \text{und} \quad T_2 := \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y).$$

Der zugehörige **Normalenvektor** ist das Kreuzprodukt  $N = T_1 \times T_2$ . Der **Flächeninhalt** eines kleinen Flächenelements  $dS$  ist daher

$$\text{vol}_2 \Phi \left( [x, x + dx] \times [y, y + dy] \right) \approx \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) \right| dx dy$$

Hier sei der Definitionsbereich  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  kompakt mit stückweise glattem Rand, z.B. ein Rechteck  $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ , eine Kreisscheibe, etc. Zur Vereinfachung werden wir  $D$  als zusammenhängend annehmen. Die Abbildung  $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  sei stetig diff'bar, wo nötig sogar zweimal.

Die Flächenparametrisierung  $\Phi: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^3$  heißt **regulär**, wenn sie injektiv ist und  $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) \neq 0$  in jedem Punkt  $(x, y) \in D$  erfüllt. Das Bild  $S = \Phi(D) \subseteq \mathbb{R}^3$  nennen wir dann ein **glattes Flächenstück**. Der Rand  $\partial S := \Phi(\partial D)$  ist somit eine stückweise glatte Kurve im  $\mathbb{R}^3$ .

**Beispiel:** Jede stetig diff'bare Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$  definiert ein reguläres Flächenstück  $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\Phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$ . Tangentialvektoren sind  $\partial_x \Phi = (1, 0, \partial_x f)$  und  $\partial_y \Phi = (0, 1, \partial_y f)$ , sie ergeben den Normalenvektor  $\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi = (-\partial_x f, -\partial_y f, 1)$ .

**Beispiel:** Sei  $\varphi: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^2$  injektiv und stetig diff'bar mit  $\det \varphi' > 0$ . Sei  $\Phi: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^3$  gegeben durch  $\Phi(x, y) = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), c)$ . Die Tangentialvektoren  $\partial_x \Phi = (\partial_x \varphi_1, \partial_x \varphi_2, 0)$ ,  $\partial_y \Phi = (\partial_y \varphi_1, \partial_y \varphi_2, 0)$  ergeben den senkrechten Normalenvektor  $\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi = (0, 0, \det \varphi')$ .

Reguläre Parametrisierungen haben besonders gute geometrische Eigenschaften und entsprechen unserer Anschauung: Die Regularität stellt sicher, dass die Bildmenge  $S = \Phi(D) \subseteq \mathbb{R}^3$  eine glatte Fläche ist.

Die Forderung  $\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi \neq 0$  bedeutet, dass die Tangentialvektoren  $\partial_x \Phi$  und  $\partial_y \Phi$  linear unabhängig sind, also eine Tangentialebene an  $S$  aufspannen, und somit  $S$  überall eine eindeutige Normalenrichtung hat.

Diese Forderung ist streng, in vielen Rechnungen genügt weniger: Wir nennen  $\Phi$  **semiregulär**, wenn  $\Phi$  regulär auf dem Inneren  $\mathring{D}$  ist. Wir fordern Injektivität und  $\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi \neq 0$  dann nur im Inneren  $\mathring{D}$ , auf dem Rand  $\partial D$  benötigen und fordern wir dies dann nicht mehr.

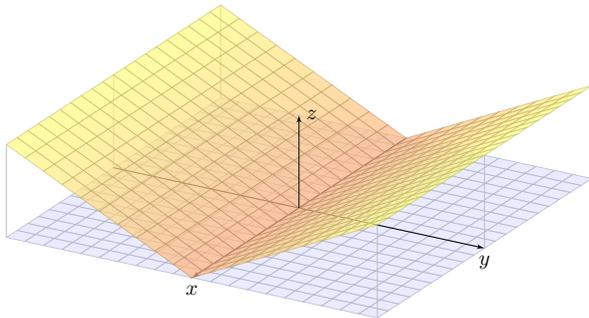
**Aufgabe:** In der vorigen Aufgabe nutzen wir drei Parametrisierungen der Hemisphäre. Welche sind regulär? Welche sind semiregulär?

**Lösung:** Keine ist regulär: (5b) ist injektiv, aber auf  $\partial D$  divergiert  $\partial_\rho \Phi$ . Anschaulich plausibel: Die Flächenverzerrung wird hier beliebig groß. Hingegen sind (5c) und (5d) stetig diff'bar, aber auf  $\partial D$  nicht injektiv. 😊 Alle drei sind jedoch semiregulär, und das genügt zur Integration!

**Aufgabe:** Über dem Quadrat  $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$  liegt der Graph

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1, z = |y| \}.$$

Skizzieren Sie  $S$  und geben Sie eine stetige Bijektion  $\Phi: D \rightarrow S$  an und stetig differenzierbar? Wird  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  somit zu einer glatten Fläche?



**Lösung:** Die Fläche  $S$  kann  $C^0$ -parametrisiert werden, etwa durch

$$\Psi: \mathbb{R}^2 \supseteq D \xrightarrow{\sim} S \subseteq \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \Psi(x, y) = (x, y, |y|).$$

Dies ist eine Bijektion von  $D$  auf  $S$ , aber nicht differenzierbar (in  $y = 0$ ). Die Fläche  $S$  kann ebenso  $C^1$ -parametrisiert werden, etwa durch

$$\Phi: \mathbb{R}^2 \supseteq D \xrightarrow{\sim} S \subseteq \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \Phi(x, t) = (x, t|t|, t^2).$$

Auch  $\Phi$  ist eine Bijektion des Definitionsbereichs  $D$  auf die Fläche  $S$ . Sie ist offensichtlich stetig und zudem stetig differenzierbar mit

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2|t| \\ 2t \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2t \\ 2|t| \end{pmatrix}.$$

Der Tangentialvektor  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$  verschwindet für  $t = 0$ , entlang der  $x$ -Achse.

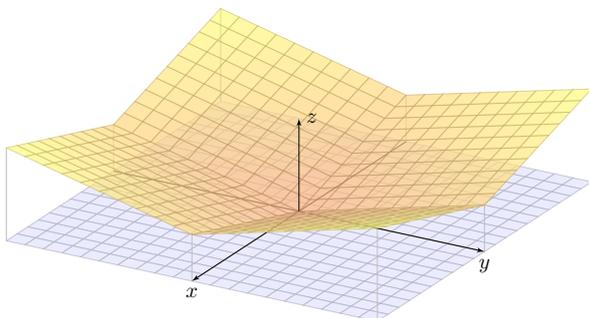
⚠️ Erstaunlich: Ein stetig differenzierbar parametrisiertes Flächenstück  $\Phi: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow S$  kann also, wie hier gesehen, durchaus Knicke haben!

😊 Glattheit verlangt überall linear unabhängige Tangentialvektoren!

**Aufgabe:** Über dem Quadrat  $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$  liegt der Graph

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1, z = |x| + |y| \}.$$

Skizzieren Sie  $S$  und geben Sie eine stetige Bijektion  $\Phi: D \rightarrow S$  an und stetig differenzierbar? Wird  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  somit zu einer glatten Fläche?



**Lösung:** Die Fläche  $S$  kann  $C^0$ -parametrisiert werden, etwa durch

$$\Psi: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \Psi(x, y) = (x, y, |x| + |y|).$$

Die Fläche  $S$  kann ebenso  $C^1$ -parametrisiert werden, etwa durch

$$\Phi: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \Psi(s, t) = (s|s|, t|t|, s^2 + t^2).$$

Dies ist eine Bijektion des Definitionsbereichs  $D$  auf die Fläche  $S$ . Sie ist offensichtlich stetig und zudem stetig differenzierbar mit

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = \begin{pmatrix} 2|s| \\ 0 \\ 2s \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2|t| \\ 2t \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \begin{pmatrix} +4s|t| \\ -4|s|t \\ +4|s|t \end{pmatrix}.$$

Der Tangentialvektor  $\frac{\partial \Phi}{\partial s}$  verschwindet für  $s = 0$ , entlang der  $y$ -Achse. Der Tangentialvektor  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$  verschwindet für  $t = 0$ , entlang der  $x$ -Achse.

⚠️ Erstaunlich: Ein stetig differenzierbar parametrisiertes Flächenstück  $\Phi: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$  kann durchaus Knicke und sogar Ecken haben!

😊 Glattheit verlangt überall linear unabhängige Tangentialvektoren!

**Integration über parametrisierte Flächenstücke** G209

Weiterhin sei  $\Phi: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$  ein parametrisiertes Flächenstück. Für das **vektorielle** bzw. **skalare Flächenelement** schreiben wir

$$d\Phi := \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{pmatrix} d(x, y) \quad \text{und} \quad |d\Phi| = \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right| d(x, y).$$

Der **Flächeninhalt** des parametrisierten Flächenstücks  $\Phi$  ist

$$\text{vol}_2(\Phi) := \int_D |d\Phi| = \int_{(x,y) \in D} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) \right| d(x, y).$$

Das **Flächenintegral** eines Skalarfeldes  $g: \mathbb{R}^3 \supseteq S \rightarrow \mathbb{R}$  ist

$$\int_D g |d\Phi| := \int_{(x,y) \in D} g(\Phi(x, y)) \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) \right| d(x, y).$$

Das **Flussintegral** eines Vektorfeldes  $f: \mathbb{R}^3 \supseteq S \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist

$$\int_D f \cdot d\Phi := \int_{(x,y) \in D} \left\langle f(\Phi(x, y)) \mid \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) \right\rangle d(x, y).$$

**Integration über parametrisierte Flächenstücke** G210 Erläuterung

Links steht die bequeme **Kurzschreibweise**, rechts steht, wie Sie dies explizit ausrechnen mit dem Flächenelement  $d\Phi = (\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi) d(x, y)$ : Das Flächenelement  $d\Phi = n |d\Phi|$  steht für ein kleines Flächenstück; sein Flächeninhalt ist  $|d\Phi|$ , der Vektor  $n$  steht senkrecht zur Fläche. So kommen wir, wie oben erklärt, von der Geometrie zum Integral.

Einfachstes Beispiel für ein **Flächenintegral** ist der Flächeninhalt  $\int_D |d\Phi|$ : Anschaulich summiert dieses Integral alle Flächenelemente. Allgemein ist das Integral  $\int_D g |d\Phi|$  ein durch  $g: S \rightarrow \mathbb{R}$  gewichteter Flächeninhalt. Wir können uns  $g$  als Massendichte vorstellen (Masse pro Fläche); das Flächenintegral über  $S$  ergibt so die Gesamtmasse auf  $S$ .

Das **Flussintegral**  $\int_D f \cdot d\Phi$  misst, wieviel  $f$  durch  $\Phi$  fließt: Der Vektor  $d\Phi$  steht senkrecht zur Fläche, somit ist das Skalarprodukt  $f \cdot d\Phi$  der normale Anteil von  $f$  senkrecht zur Fläche. Sind  $f$  und  $d\Phi$  parallel, so multipliziert man die Länge  $|f|$  mit  $|d\Phi|$ . Im Allgemeinen sind  $f$  und  $d\Phi$  nicht parallel; es zählt dann nur der Anteil von  $f$  in Normalenrichtung: Die oben erklärte Zerlegung  $d\Phi = n |d\Phi|$  ergibt  $f \cdot d\Phi = (f \cdot n) |d\Phi|$ .

**Orientierungsumkehr einer parametrisierten Fläche** G211 Ausführung

Flächenintegrale formulieren wir wie oben zunächst für parametrisierte Flächenstücke  $\Phi: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Wir wollen nun nachrechnen, dass sie invariant sind unter (orientierungstreuer) Umparametrisierung.

**Beispiel:** Zur Parametrisierung  $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  erhalten wir die umgekehrte Parametrisierung  $\bar{\Phi}: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$  durch Vertauschung der Variablen:

$$\bar{D} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y, x) \in D \}$$

$$\bar{\Phi}: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \bar{\Phi}(x, y) = \Phi(y, x)$$

Beide parametrisieren dieselbe Menge  $S = \Phi(D) = \bar{\Phi}(\bar{D})$ , aber mit umgekehrter Orientierung: Das Kreuzprodukt wechselt sein Vorzeichen! Flächenintegrale bleiben bei Orientierungsumkehr unverändert:

$$\int_{\bar{D}} g |d\bar{\Phi}| = \int_D g |d\Phi|$$

Flussintegrale hingegen wechseln das Vorzeichen:

$$\int_{\bar{D}} f \cdot d\bar{\Phi} = - \int_D f \cdot d\Phi.$$

**Orientierungsumkehr einer parametrisierten Fläche** G212 Ausführung

Als Beispiel betrachten wir Kugelkoordinaten  $\Phi: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ :

$$\Phi \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\}$$

Die beiden Tangentialvektoren und der Normalenvektor sind:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi \\ -r \sin \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 \sin^2 \theta \cos \varphi \\ r^2 \sin^2 \theta \sin \varphi \\ r^2 \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}$$

Durch Vertauschung erhalten wir  $\bar{\Phi}: \bar{D} \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$  mit

$$\bar{\Phi} \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \bar{D} = \left\{ \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \end{array} \right\}.$$

Die beiden Tangentialvektoren und der Normalenvektor sind nun

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi \\ -r \sin \theta \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} r^2 \sin^2 \theta \cos \varphi \\ r^2 \sin^2 \theta \sin \varphi \\ r^2 \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}.$$

**Invarianz unter Umparametrisierung** G213 Ausführung

Wir wollen verschiedene Parametrisierungen  $\Phi: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$  und  $\bar{\Phi}: \mathbb{R}^2 \supseteq \bar{D} \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$  derselben Fläche  $S$  miteinander vergleichen. Eine **Umparametrisierung** ist eine stetige Bijektion  $H: \bar{D} \rightarrow D$ . Für eine **reguläre Umparametrisierung** verlangen wir zudem, dass sowohl  $H$  als auch  $H^{-1}: D \rightarrow \bar{D}$  stetig differenzierbar sind. Wir nennen  $\bar{\Phi}: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$  und  $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  **äquivalent** vermöge einer Umparametrisierung  $H$ , wenn  $\bar{\Phi} = \Phi \circ H$  gilt, also  $\bar{\Phi} \circ H^{-1} = \Phi$ .

**Satz G2A: Transformationssatz für Flächenintegrale**

Äquivalente Flächenparametrisierungen  $\bar{\Phi} = \Phi \circ H$  haben dieselbe Bildmenge  $S = \Phi(D) = \bar{\Phi}(\bar{D})$  und denselben Flächeninhalt. Es gilt

$$\partial_1 \bar{\Phi} \times \partial_2 \bar{\Phi} = (\partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi) \circ H \cdot \det H'.$$

Daher sind Flächenintegrale invariant unter Umparametrisierung:

$$\int_{\bar{D}} g |d\bar{\Phi}| = \int_D g |d\Phi|, \quad \int_{\bar{D}} f \cdot d\bar{\Phi} = \text{sign}(\det H') \int_D f \cdot d\Phi$$

**Invarianz unter Umparametrisierung** G214 Ausführung

**Aufgabe:** Rechnen Sie dies nach mit Hilfe des Transformationsatzes!

**Nachrechnen** der ersten Koordinate von  $\partial_1 \bar{\Phi} \times \partial_2 \bar{\Phi}$  dank Kettenregel:

$$\begin{aligned} (\partial_1 \bar{\Phi} \times \partial_2 \bar{\Phi})_1 &= \partial_1 \bar{\Phi}_2 \cdot \partial_2 \bar{\Phi}_3 - \partial_1 \bar{\Phi}_3 \cdot \partial_2 \bar{\Phi}_2 \\ &= \partial_1(\Phi_2 \circ H) \cdot \partial_2(\Phi_3 \circ H) - \partial_1(\Phi_3 \circ H) \cdot \partial_2(\Phi_2 \circ H) \\ &= +(\partial_1 \Phi_2 \circ H \cdot \partial_1 H_1 + \partial_2 \Phi_2 \circ H \cdot \partial_1 H_2) \\ &\quad \cdot (\partial_1 \Phi_3 \circ H \cdot \partial_2 H_1 + \partial_2 \Phi_3 \circ H \cdot \partial_2 H_2) \\ &\quad - (\partial_1 \Phi_3 \circ H \cdot \partial_1 H_1 + \partial_2 \Phi_3 \circ H \cdot \partial_1 H_2) \\ &\quad \cdot (\partial_1 \Phi_2 \circ H \cdot \partial_2 H_1 + \partial_2 \Phi_2 \circ H \cdot \partial_2 H_2) \\ &= (\partial_1 \Phi_2 \cdot \partial_2 \Phi_3 - \partial_1 \Phi_3 \cdot \partial_2 \Phi_2) \circ H \\ &\quad \cdot (\partial_1 H_1 \cdot \partial_2 H_2 - \partial_2 H_1 \cdot \partial_1 H_2) \\ &= (\partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi)_1 \circ H \cdot \det H' \end{aligned}$$

Gleiches gilt für die Koordinaten  $(\partial_1 \bar{\Phi} \times \partial_2 \bar{\Phi})_2$  und  $(\partial_1 \bar{\Phi} \times \partial_2 \bar{\Phi})_3$ . Hieraus folgt die Behauptung  $\partial_1 \bar{\Phi} \times \partial_2 \bar{\Phi} = (\partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi) \circ H \cdot \det H'$ .

**Invarianz unter Umparametrisierung** G215 Ausführung

**Flächenintegral** eines Skalarfeldes  $g: \mathbb{R}^3 \supseteq S \rightarrow \mathbb{R}$  über  $\bar{\Phi} = \Phi \circ H$ :

$$\begin{aligned} \int_{\bar{D}} g |d\bar{\Phi}| &\stackrel{(1)}{=} \int_{\bar{D}} (g \circ \bar{\Phi}) \cdot |\partial_1 \bar{\Phi} \times \partial_2 \bar{\Phi}| d(\bar{x}, \bar{y}) \\ &\stackrel{(2)}{=} \int_{\bar{D}} (g \circ \Phi \circ H) \cdot (|\partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi| \circ H) \cdot |\det H'| d(\bar{x}, \bar{y}) \\ &\stackrel{(3)}{=} \int_D (g \circ \Phi) \cdot |\partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi| d(x, y) \stackrel{(4)}{=} \int_D g |d\Phi| \end{aligned}$$

Gleichungen (1) und (4) sind die Definition des Flächenintegrals bezüglich  $\bar{\Phi}$  und  $\Phi$ , (2) folgt aus der Kettenregel wie oben erklärt, und (3) ist der Transformationssatz C2B angewendet auf  $H: \bar{D} \rightarrow D$ .

😊 Zur Berechnung des Integrals müssen wir eine Parametrisierung wählen, doch das Ergebnis ist von dieser willkürlich Wahl unabhängig. Jede:r darf sich die jeweils bequemste Parametrisierung aussuchen.

😊 Statt Regularität der gesamten Umparametrisierung  $H: \bar{D} \rightarrow D$  genügt es, dies im Inneren zu fordern: Dank  $\text{vol}_2(\partial \bar{D}) = \text{vol}_2(\partial D) = 0$  tragen die Ränder nichts zu den Flächenintegralen bei, siehe Satz C2B.

**Invarianz unter Umparametrisierung** G216 Ausführung

**Flussintegral** eines Vektorfeldes  $f: \mathbb{R}^3 \supseteq S \rightarrow \mathbb{R}^3$  über  $\bar{\Phi} = \Phi \circ H$ :

$$\begin{aligned} \int_{\bar{D}} f \cdot d\bar{\Phi} &\stackrel{(1)}{=} \int_{\bar{D}} \left\langle f \circ \bar{\Phi} \mid \partial_1 \bar{\Phi} \times \partial_2 \bar{\Phi} \right\rangle d(\bar{x}, \bar{y}) \\ &\stackrel{(2)}{=} \int_{\bar{D}} \left\langle f \circ \Phi \circ H \mid (\partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi) \circ H \right\rangle \cdot \det H' d(\bar{x}, \bar{y}) \\ &\stackrel{(3)}{=} \text{sign}(\det H') \int_D \left\langle f \circ \Phi \mid \partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi \right\rangle d(x, y) \\ &\stackrel{(4)}{=} \text{sign}(\det H') \int_D f \cdot d\Phi \end{aligned}$$

⚠ Das hier auftretende Vorzeichen  $\text{sign}(\det H') = \pm 1$  gilt, je nachdem ob die Parametrisierungen  $\Phi$  und  $\bar{\Phi}$  gleichsinnig oder gegensinnig sind.

😊 Das Ergebnis ist ansonsten von der Parametrisierung unabhängig. Jede:r darf sich die jeweils bequemste Parametrisierung aussuchen.

😊 Statt Regularität der gesamten Umparametrisierung  $H: \bar{D} \rightarrow D$  genügt es, dies im Inneren zu fordern: Dank  $\text{vol}_2(\partial \bar{D}) = \text{vol}_2(\partial D) = 0$  tragen die Ränder nichts zu den Flächenintegralen bei, siehe Satz C2B.

**Aufgabe:** (1) Skizzieren Sie zu  $0 \leq h \leq r$  das **Kugelsegment**

$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, r-h \leq z \leq r \}$$

(2) Beschreiben Sie den Körper  $V$  explizit durch Parametrisierungen in Zylinderkoordinaten sowie als Normalbereich in  $z$ -Richtung.

(3) Berechnen Sie den Rauminhalt  $\text{vol}_3(V)$  je nach Parametrisierung. Ist das Ergebnis unabhängig von der gewählten Parametrisierung?

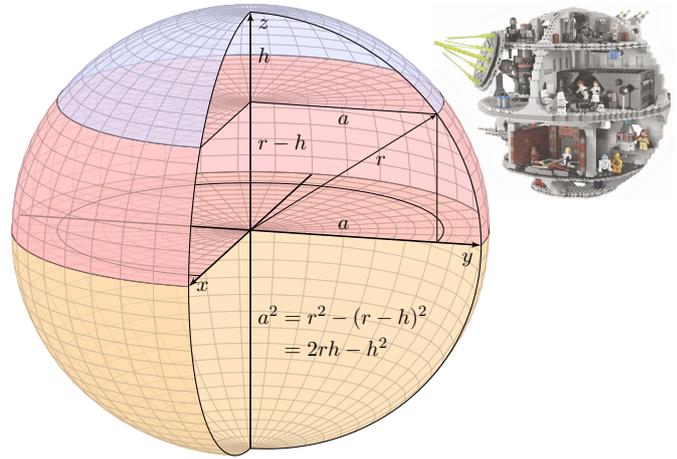
(4) Beschreiben Sie ebenso explizit wie in (2) die **Kugelkappe**

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2, r-h \leq z \leq r \}$$

(5) Bestimmen Sie in jedem Punkt  $s \in S$  den nach außen zeigenden Einheitsnormalenvektor  $n(s)$  sowie  $dS$  je nach Parametrisierung.

(6) Berechnen Sie den Flächeninhalt  $\text{vol}_2(S)$  je nach Parametrisierung. Ist das Ergebnis unabhängig von der gewählten Parametrisierung?

😊 Diese Aufgaben bieten Gelegenheit, die bisherigen Volumen-Integrale zu wiederholen und die neuen Flächenintegrale einzüben.



(2) Der Körper  $V$  ist implizit durch Un/Gleichungen gegeben:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2 \\ r-h \leq z \leq r \end{array} \right\}$$

Wir können ihn explizit in Zylinderkoordinaten parametrisieren:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} r-h \leq z \leq r \\ 0 \leq \rho \leq \sqrt{r^2 - z^2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\}$$

Wir können ihn ebenso als Normalbereich in  $z$ -Richtung beschreiben:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq a \\ r-h \leq z \leq \sqrt{r^2 - \rho^2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\}$$

😊 Das Ergebnis ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung: Jede andere Parametrisierung geht evtl. einen anderen Rechenweg, endet aber beim selben Ergebnis. Wir wählen geschickte Parameter!

(3a) Parametrisierung  $\Phi: D \rightarrow V$  in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} r-h \leq z \leq r \\ 0 \leq \rho \leq \sqrt{r^2 - z^2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\}$$

Jacobi-Matrix  $\Phi'$  und Funktionaldeterminante  $\det \Phi' = \rho$  wie zuvor. Volumenberechnung dank Transformationssatz, Fubini und HDI:

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(V) &= \int_V 1 \, d(x, y, z) \stackrel{\text{Trafo}}{\stackrel{\text{C2b}}{=}} \int_D |\det \Phi'| \, d(\rho, \varphi, z) \\ &\stackrel{\text{Fub}}{\stackrel{\text{C1e}}{=}} \int_{z=r-h}^r \int_{\rho=0}^{\sqrt{r^2-z^2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho \, d\varphi \, d\rho \, dz \stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} \int_{z=r-h}^r \int_{\rho=0}^{\sqrt{r^2-z^2}} 2\pi \rho \, d\rho \, dz \\ &\stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} \int_{z=r-h}^r \pi [\rho^2]_{\rho=0}^{\sqrt{r^2-z^2}} \, dz = \int_{z=r-h}^r \pi (r^2 - z^2) \, dz \\ &\stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} \pi \left[ r^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{z=r-h}^r = \pi h^2 \left( r - \frac{h}{3} \right) \end{aligned}$$

😊 Ist das plausibel? Das Ergebnis stimmt zumindest für  $h = 0, r, 2r$ .

😊 Wir können den Körper  $V$  auf viele Weisen parametrisieren!

(3b) Alternativ, Parametrisierung  $\Phi: D \rightarrow V$  als  $z$ -Normalbereich:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq a \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ r-h \leq z \leq \sqrt{r^2 - \rho^2} \end{array} \right\}$$

Jacobi-Matrix  $\Phi'$  und Funktionaldeterminante  $\det \Phi' = \rho$  wie zuvor. Volumenberechnung dank Transformationssatz, Fubini und HDI:

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(V) &= \int_V 1 \, d(\rho, \varphi, z) \stackrel{\text{Trafo}}{\stackrel{\text{C2b}}{=}} \int_D |\det \Phi'| \, d(\rho, \varphi, z) \stackrel{\text{Fub}}{\stackrel{\text{C1e}}{=}} \\ &\int_{\rho=0}^a \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=r-h}^{\sqrt{r^2-\rho^2}} \rho \, dz \, d\varphi \, d\rho = \dots = \pi h^2 \left( r - \frac{h}{3} \right) \end{aligned}$$

😊 Das Ergebnis ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung! Jede:r darf den eigenen Rechenweg wählen: sorgfältig und korrekt, und nach Möglichkeit auch geschickt und bequem.

(4) Die Kugelkappe  $S$  ist implizit durch Un/Gleichungen gegeben:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \\ r-h \leq z \leq r \end{array} \right\}$$

Wir können  $S$  explizit in Zylinderkoordinaten parametrisieren:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} r-h \leq z \leq r \\ \rho = \sqrt{r^2 - z^2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\}$$

Wir können  $S$  ebenso als Graph einer Funktion  $f(x, y)$  beschreiben:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq a \\ z = \sqrt{r^2 - \rho^2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\}$$

😊 Im Inneren des Körpers haben wir drei Freiheitsgrade, z.B.  $z, \rho, \varphi$ , auf der Randfläche entsprechend nur noch zwei, z.B.  $z, \varphi$  oder  $\rho, \varphi$ .

(5a) Parametrisierung  $\Phi: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$  in Zylinderkoordinaten:

$$s = \Phi \begin{pmatrix} z \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{r^2 - z^2} \cos \varphi \\ \sqrt{r^2 - z^2} \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ \varphi \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} r-h \leq z \leq r \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\}$$

Die beiden Tangentialvektoren und der Normalenvektor sind:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \begin{pmatrix} -z/\sqrt{r^2-z^2} \cos \varphi \\ -z/\sqrt{r^2-z^2} \sin \varphi \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sqrt{r^2-z^2} \sin \varphi \\ \sqrt{r^2-z^2} \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sqrt{r^2-z^2} \cos \varphi \\ -\sqrt{r^2-z^2} \sin \varphi \\ -z \end{pmatrix} = -\Phi(z, \varphi)$$

⚠ Der Normalenvektor  $d\Phi$  zeigt in  $V$  hinein, Rechte-Hand-Regel. Die Norm  $|d\Phi| = r$  ist die Flächenverzerrung der Parametrisierung  $\Phi$ .

(6a) Hieraus erhalten wir den Flächeninhalt der Kugelkappe  $S$ :

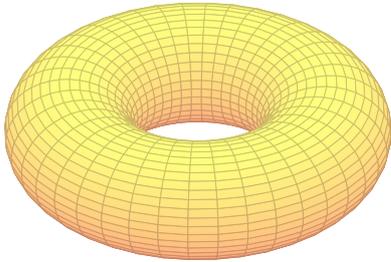
$$\begin{aligned} \text{vol}_2(S) &= \int_S |dS| = \int_D \left| \frac{\partial \Phi}{\partial z} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right| d(z, \varphi) = \int_D r \, d(z, \varphi) \\ &= \int_{z=r-h}^r \int_{\varphi=0}^{2\pi} r \, d\varphi \, dz = \int_{z=r-h}^r 2\pi r \, dz = 2\pi r h \end{aligned}$$

😊 Das ist eine bemerkenswert einfache Formel! Ist Sie plausibel? Das Ergebnis stimmt zumindest für  $h = 0, r, 2r$  (Hemi-/Sphäre).

😊 Das Ergebnis ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung: Jede andere Parametrisierung geht evtl. einen anderen Rechenweg, endet aber beim selben Ergebnis. Wir wählen geschickte Parameter!

😊 Den Spezialfall der Hemisphäre haben wir oben schon gerechnet [G127]. Statt über  $0 \leq z \leq r$  integrieren wir nur über  $r-h \leq z \leq r$ .

Die alternativen Rechnungen (5b,6b) in der zweiten Parametrisierung führe ich hier nicht aus. Sie verlaufen wie oben für die Hemisphäre vorgeführt [G124]: Statt über  $0 \leq \rho \leq r$  integrieren wir nur über  $0 \leq \rho \leq a$ .

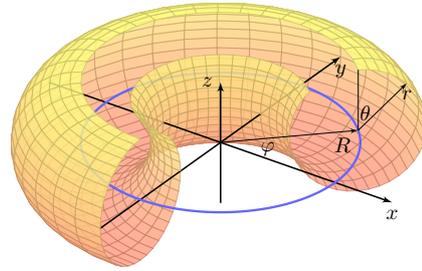


**Aufgabe:** Sei  $0 < r < R$ . Wir betrachten den Volltorus  $V$  mit

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} (R + \rho \sin \theta) \cos \varphi \\ (R + \rho \sin \theta) \sin \varphi \\ \rho \cos \theta \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} 0 \leq \rho \leq r \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{matrix} \right\}.$$

- Parametrisieren Sie die Torusfläche  $T = \partial V$  und skizzieren Sie die Teilfläche  $T' \subseteq T$  für die Werte  $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3}{2}\pi$  und  $0 \leq \theta \leq \frac{7}{4}\pi$ .
- Bestimmen Sie den Flächeninhalt  $\text{vol}_2(T)$  der Torusfläche  $T$ .

**Lösung:**



Für  $\rho = 0$  erhalten wir die blaue Kreislinie  $K$  vom Radius  $R$ , und der Volltorus  $V$  besteht aus allen Punkten mit Abstand höchstens  $r$  zu  $K$ .

☺ Im Sonderfall  $R = 0$  und  $r > 0$  erhalten wir Kugelkoordinaten.

Die Randfläche  $T = \partial V$  des Volltorus erhalten wir für  $\rho = r$ :

$$T = \partial V = \left\{ \begin{pmatrix} (R + r \sin \theta) \cos \varphi \\ (R + r \sin \theta) \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{matrix} \right\}$$

☺ Im Inneren des Körpers haben wir drei Freiheitsgrade, hier  $\rho, \theta, \varphi$ , auf der Randfläche  $\{\rho = r\}$  entsprechend nur noch zwei, hier  $\theta, \varphi$ .

(2) Parametrisierung  $\Phi: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow T \subseteq \mathbb{R}^3$  in Toruskoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R + r \sin \theta) \cos \varphi \\ (R + r \sin \theta) \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{matrix} \right\}$$

☺ Wir parametrisieren hier die gesamte Torusfläche. Wenn die Problemstellung anderes verlangt, dann passen Sie die Parameter entsprechend an, etwa  $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3}{2}\pi$  und  $0 \leq \theta \leq \frac{7}{4}\pi$  in obiger Skizze.

Tangentialvektoren, Normalenvektor, Flächenelement:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi \\ -r \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -(R + r \sin \theta) \sin \varphi \\ (R + r \sin \theta) \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \implies$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} r(R + r \sin \theta) \sin \theta \cos \varphi \\ r(R + r \sin \theta) \sin \theta \sin \varphi \\ r(R + r \sin \theta) \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right| = r(R + r \sin \theta)$$

Das Flächenelement  $|\text{d}\Phi| = r(R + r \sin \theta)$  misst die durch  $\Phi$  bewirkte Flächenverzerrung. Ihre Berechnung ist hier etwas länglich, aber leicht.

Hiermit berechnen wir den Flächeninhalt:

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(T) &\stackrel{\text{Def}}{=} \int_D |\text{d}\Phi| \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{(\theta, \varphi) \in D} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta, \varphi) \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) \right| \text{d}(\theta, \varphi) \\ &\stackrel{\text{Fub}}{\stackrel{\text{CIE}}{=}} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r(R + r \sin \theta) \text{d}\varphi \text{d}\theta \\ &\stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} 2\pi \int_{\theta=0}^{2\pi} r(R + r \sin \theta) \text{d}\theta \\ &\stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} 2\pi r \cdot 2\pi R \end{aligned}$$

☺ Dies illustriert die Guldinsche Flächenregel G2B für die Mantelfläche  $M$  eines Rotationskörpers:

$$\text{vol}_2(M) = \text{vol}_1(\Gamma) \cdot 2\pi d(\Gamma)$$

**Aufgabe:** (3) Bestimmen Sie das Volumen  $\text{vol}_3(V)$  des Volltorus. Hierzu müssen Sie für  $V$  zunächst geeignete Koordinaten wählen. Hinweis und Präzisierung: Wählen Sie zunächst Toruskoordinaten.

**Lösung:** Parametrisierung  $\Phi: \mathbb{R}^3 \supseteq D \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^3$  in Toruskoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R + \rho \sin \theta) \cos \varphi \\ (R + \rho \sin \theta) \sin \varphi \\ \rho \cos \theta \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} 0 \leq \rho \leq r \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{matrix} \right\}$$

Jacobi-Matrix  $\Phi'$  und Funktionaldeterminante  $\det \Phi'$ :

$$\Phi' = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi & -(R + \rho \sin \theta) \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi & (R + \rho \sin \theta) \cos \varphi \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det \Phi' = \dots \dots = \rho(R + \rho \sin \theta) \quad (\text{plausibel, rechtshändig})$$

Diese Determinante misst die durch  $\Phi$  bewirkte Volumenverzerrung. Rechnen Sie diese Determinante zur Übung sorgfältig aus.

Volumenberechnung dank Transformationsatz, Fubini und HDI:

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(V) &\stackrel{\text{Def}}{=} \int_V 1 \text{d}(x, y, z) \stackrel{\text{Trafo}}{\stackrel{\text{C2B}}{=}} \int_D |\det \Phi'| \text{d}(\rho, \theta, \varphi) \\ &\stackrel{\text{Fub}}{\stackrel{\text{CIE}}{=}} \int_{\rho=0}^r \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho(R + \rho \sin \theta) \text{d}\varphi \text{d}\theta \text{d}\rho \\ &\stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} 2\pi \int_{\rho=0}^r \int_{\theta=0}^{2\pi} \rho(R + \rho \sin \theta) \text{d}\theta \text{d}\rho \\ &\stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} 4\pi^2 \int_{\rho=0}^r \rho R \text{d}\rho \\ &\stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} \pi r^2 \cdot 2\pi R \end{aligned}$$

☺ Dies illustriert die Guldinsche Volumenregel G2B für den Rauminhalt eines Rotationskörpers  $K$ :

$$\text{vol}_3(K) = \text{vol}_2(A) \cdot 2\pi d(A)$$

**Aufgabe:** (4) Parametrisieren Sie den Volltorus in Zylinderkoordinaten. Bestimmen Sie so erneut das Volumen  $\text{vol}_3(V)$  des Volltorus und vergleichen Sie das Ergebnis mit der vorigen Rechnung aus (3).

**Lösung:** Die Parametrisierung  $\Phi: \mathbb{R}^3 \supseteq D \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^3$  ist nun:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix},$$

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} -r \leq z \leq r \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ R - \sqrt{r^2 - z^2} \leq \rho \leq R + \sqrt{r^2 - z^2} \end{matrix} \right\}$$

Jacobi-Matrix  $\Phi'$  und Funktionaldeterminante  $\det \Phi' = \rho$  wie immer.

Die Determinante misst die durch  $\Phi$  bewirkte Volumenverzerrung. Ihre Berechnung ist hier besonders leicht und wohlbekannt von Polar- und Zylinderkoordinaten. Dafür ist die Integration etwas länger.

Volumenberechnung dank Transformationsatz, Fubini und HDI:

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(V) &\stackrel{\text{Def}}{=} \int_V 1 \text{d}(x, y, z) \stackrel{\text{Trafo}}{\stackrel{\text{C2B}}{=}} \int_D |\det \Phi'| \text{d}(\rho, \varphi, z) \\ &\stackrel{\text{Fub}}{\stackrel{\text{CIE}}{=}} \int_{z=-r}^r \int_{\rho=R-\sqrt{r^2-z^2}}^{R+\sqrt{r^2-z^2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho \text{d}\varphi \text{d}\rho \text{d}z \\ &\stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} 2\pi \int_{z=-r}^r \int_{\rho=R-\sqrt{r^2-z^2}}^{R+\sqrt{r^2-z^2}} \rho \text{d}\rho \text{d}z \\ &\stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} \pi \int_{z=-r}^r \left[ \rho^2 \right]_{\rho=R-\sqrt{r^2-z^2}}^{R+\sqrt{r^2-z^2}} \text{d}z \\ &= \pi \int_{z=-r}^r 4R\sqrt{r^2 - z^2} \text{d}z \\ &\stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} 2\pi R \cdot \pi r^2 \end{aligned}$$

☺ Dies illustriert die Guldinsche Volumenregel G2B.

## Guldinsche Regeln für Rotationskörper

G233

Die folgenden Rechenregeln sind besonders einfach und häufig nützlich. Sie sind benannt nach Paul Guldin (1577–1643), waren aber bereits in der Antike bekannt, etwa Pappos von Alexandria (um 300 n. Chr.).

### Satz G2B: Guldinsche Regeln für Rotationskörper

Der Körper  $R \subseteq \mathbb{R}^3$  entstehe durch Rotation einer ebenen Fläche  $A$  um eine disjunkte Achse in derselben Ebene. Für sein **Volumen** gilt dann:

$$\text{vol}_3(R) = \text{vol}_2(A) \cdot 2\pi d(A)$$

Hierbei ist  $\text{vol}_2(A)$  der Flächeninhalt der rotierten Fläche  $A$  und  $d(A)$  der Abstand ihres Schwerpunktes zur Drehachse.

Die **Mantelfläche**  $M = \partial R$  hat den Flächeninhalt

$$\text{vol}_2(M) = \text{vol}_1(\Gamma) \cdot 2\pi d(\Gamma).$$

Hierbei ist  $\text{vol}_1(\Gamma)$  die Länge der rotierten Randkurve  $\Gamma = \partial A$  und  $d(\Gamma)$  der Abstand ihres Schwerpunktes zur Drehachse.

## Guldinsche Regeln für Rotationskörper

G234  
Ausführung

**Aufgabe:** Parametrisieren Sie  $R$  und  $M$  in Zylinderkoordinaten und beweisen Sie die Guldinschen Regeln durch explizites Nachrechnen.

### Nachrechnen der Guldinschen Volumenformel:

Wir parametrisieren den Körper  $R$  durch  $\Phi: [0, 2\pi] \times A \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \varphi \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\varphi, r, z)} = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ r \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Funktionaldeterminante ist  $\det \Phi' = -r$  und das Volumen somit

$$\text{vol}_3(R) = \int_{(r,z) \in A} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r \, d\varphi \, d(r, z) = 2\pi \int_{(r,z) \in A} r \, d(r, z).$$

Der Abstand des Flächenschwerpunktes von der Drehachse ist

$$d(A) = \frac{1}{\text{vol}_2(A)} \int_{(r,z) \in A} r \, d(r, z).$$

Daraus erhalten wir die **Guldinsche Volumenformel**:

$$\text{vol}_3(R) = \text{vol}_2(A) \cdot 2\pi d(A)$$

## Guldinsche Regeln für Rotationskörper

G235  
Ausführung

### Nachrechnen der Guldinschen Flächenformel:

Die Kurve  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$  parametrisieren wir durch einen Weg

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}, \quad \gamma(t) = (r(t), z(t))$$

Die rotierte Mantelfläche  $M$  parametrisieren wir durch

$$\Phi: D = [0, 2\pi] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Phi \begin{pmatrix} \varphi \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t) \cos \varphi \\ r(t) \sin \varphi \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

Tangentialvektoren, Normalenvektor, Flächenelement:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r(t) \sin \varphi \\ r(t) \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \begin{pmatrix} r'(t) \cos \varphi \\ r'(t) \sin \varphi \\ z'(t) \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \begin{pmatrix} r(t) z'(t) \cos \varphi \\ r(t) z'(t) \sin \varphi \\ -r(t) r'(t) \end{pmatrix}, \quad \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right| = r(t) \sqrt{r'(t)^2 + z'(t)^2}$$

## Guldinsche Regeln für Rotationskörper

G236  
Ausführung

Als Flächeninhalt der Mantelfläche  $M$  erhalten wir:

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(M) &= \int_D |d\Phi| = \int_{(\varphi,t) \in D} r(t) \sqrt{r'(t)^2 + z'(t)^2} \, d(\varphi, t) \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{t=a}^b r(t) |d\gamma(t)| \, d\varphi = 2\pi \int_{t=a}^b r(t) |d\gamma(t)| \end{aligned}$$

Der Abstand des Kurvenschwerpunktes von der Drehachse ist

$$d(\Gamma) = \frac{1}{\text{vol}_1(\Gamma)} \int_{t=a}^b r(t) |d\gamma(t)|.$$

Daraus erhalten wir die **Guldinsche Flächenformel**:

$$\text{vol}_2(M) = \text{vol}_1(\Gamma) \cdot 2\pi d(\Gamma).$$

😊 Besonders einfach werden die Guldinschen Regeln, wenn  $A$  und  $\Gamma$  symmetrisch sind, wie etwa der Kreis (G225) oder die Herzkurve (G425), bezüglich einer Achse im Abstand  $d$  parallel zur Rotationsachse.

## Volltorus und Torusfläche

G237  
Beispiel

**Aufgabe:** Bestimmen Sie mit den Guldinschen Regeln das Volumen  $\text{vol}_3(V)$  des Volltorus sowie den Flächeninhalt  $\text{vol}_2(T)$  der Torusfläche.

**Lösung:** (1) Mit  $\text{vol}_2(A) = \pi r^2$  und  $d(A) = R$  gilt

$$\text{vol}_3(V) = \text{vol}_2(A) \cdot 2\pi d(A) = \pi r^2 \cdot 2\pi R = 2\pi^2 r^2 R$$

(2) Mit  $\text{vol}_1(\Gamma) = 2\pi r$  und  $d(\Gamma) = R$  gilt

$$\text{vol}_2(T) = \text{vol}_1(\Gamma) \cdot 2\pi d(\Gamma) = 2\pi r \cdot 2\pi R = 4\pi^2 r R$$

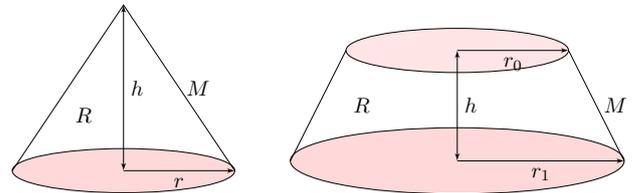
Sei  $\Gamma$  die Kreislinie vom Radius  $r$  um  $(R, 0, 0)$  in der  $x$ - $z$ -Ebene. Diese rotieren wir um die  $z$ -Achse und erhalten die Torusfläche  $T$ . Die Kurve  $\Gamma$  hat Länge  $2\pi r$  und den Schwerpunkt  $(R, 0, 0)$ . Somit hat die Torusfläche  $T$  den Flächeninhalt  $\text{vol}_2(T) = 4\pi^2 r R$ .

Die von  $\Gamma$  berandete Kreisfläche  $A$  hat den Flächeninhalt  $\pi r^2$ . Ihr Schwerpunkt ist der Kreismittelpunkt, also ebenfalls  $(R, 0, 0)$ . Somit hat der Volltorus  $V$  den Rauminhalt  $\text{vol}_3(V) = 2\pi^2 r^2 R$ .

😊 So kann man sich Torusvolumen und Flächeninhalt leicht merken!

## Gerader Kegel und Kegelstumpf

G238  
Ausführung



**Aufgabe:** Bestimmen Sie das Volumen eines geraden Kegels bzw. eines Kegelstumpfes sowie den Flächeninhalt seiner Mantelfläche.

**Lösung:** Dank der Guldinschen Flächenformel finden wir:

$$\text{vol}_2(M) = \pi r \sqrt{h^2 + r^2} \quad \text{bzw.} \quad \text{vol}_2(M) = \pi(r_0 + r_1) \sqrt{h^2 + (r_1 - r_0)^2}$$

Dank der Guldinschen Volumenformel und Ergänzung finden wir:

$$\text{vol}_3(R) = \frac{1}{2} h r \cdot 2\pi \frac{r}{3} = \frac{\pi}{3} h r^2 \quad \text{bzw.} \quad \text{vol}_3(R) = \frac{\pi}{3} h(r_1^2 + r_1 r_0 + r_0^2)$$

## Vollkugel und Kugelfläche

G239  
Ausführung



**Aufgabe:** Sei  $(0, a)$  der Schwerpunkt der Halbkreisfläche

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2, y \geq 0 \}$$

und  $(0, b)$  der Schwerpunkt der Halbkreislinie

$$\Gamma = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2, y \geq 0 \}.$$

Berechnen Sie diese (1) mit Guldin sowie (2) direkt durch Integration.

**Lösung:** (1) Aus  $\text{vol}_2(A) = \frac{\pi}{2} r^2$  und  $\text{vol}_1(\Gamma) = \pi r$  folgt dank Guldin:

$$\frac{\pi}{2} r^2 \cdot 2\pi a \stackrel{!}{=} \frac{4}{3} \pi r^3 \quad \implies \quad a = \frac{4}{3\pi} r \quad \text{wobei} \quad \frac{4}{3\pi} \approx 0.42441$$

$$\pi r \cdot 2\pi b \stackrel{!}{=} 4\pi r^2 \quad \implies \quad b = \frac{2}{\pi} r \quad \text{wobei} \quad \frac{2}{\pi} \approx 0.63662$$

## Vollkugel und Kugelfläche

G240  
Ausführung

(2) Zum Vergleich berechnen wir die beiden Schwerpunkte direkt durch Integration und nutzen Polarkoordinaten. (Für  $A$  können wir alternativ auch die Greensche Schwerpunktfelml nutzen, siehe E305.)

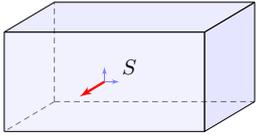
$$\begin{aligned} a \, \text{vol}_2(A) &= \int_{(x,y) \in A} y \, d(x, y) \stackrel{\text{Polar}}{\stackrel{\text{C2b}}{=}} \int_{\rho=0}^r \int_{\varphi=0}^{\pi} \rho \sin \varphi \cdot \rho \, d\varphi \, d\rho \\ &= \int_{\rho=0}^r \rho^2 \left[ -\cos \varphi \right]_{\varphi=0}^{\pi} d\rho = 2 \left[ \frac{\rho^3}{3} \right]_{\rho=0}^r = \frac{2}{3} r^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b \, \text{vol}_1(\Gamma) &= \int_{(x,y) \in \Gamma} y \, d\Gamma \stackrel{\text{Polar}}{\stackrel{\text{C2b}}{=}} \int_{\varphi=0}^{\pi} r \sin \varphi \cdot r \, d\varphi \\ &= r^2 \left[ -\cos \varphi \right]_{\varphi=0}^{\pi} = 2r^2 \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir erneut die Koordinaten  $a = \frac{4}{3\pi} r$  und  $b = \frac{2}{\pi} r$ .

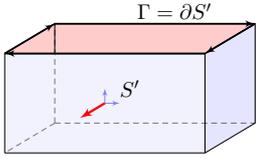
😊 Die Guldinschen Regeln können wir in beide Richtungen lesen: Sobald wir zwei der drei Größen kennen, erhalten wir daraus die dritte.

Glatte Flächen sind schön, aber oft zu restriktiv. Typisches Beispiel und Modell ist die Oberfläche eines Quaders  $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ .



Die Oberfläche eines Quaders.

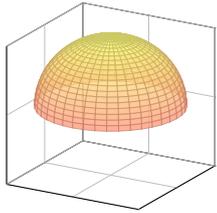
Dies ist eine stückweise glatte Fläche  $S = \partial Q \subseteq \mathbb{R}^3$ , zusammengesetzt aus sechs regulären Flächenstücken. Sie hat keinen Rand, geschrieben  $\partial S = \emptyset$ , und ist orientierbar durch die nach außen zeigende Normale.



Die Quaderfläche ohne Deckel.

Diese Teilfläche  $S' \subseteq S$  lässt sich zusammensetzen aus fünf regulären Flächenstücken. Sie ist orientierbar durch die nach außen zeigende Normale. Ihre Randkurve  $\Gamma = \partial S'$  sind die vier Kanten des oben entstehenden Rechtecks mit der gezeigten positiven Orientierung.

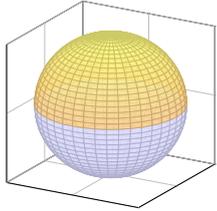
Rechte-Hand-Regel: Die Orientierung der Fläche  $S$  definiert eine zugehörige positive Orientierung der Randkurve  $\Gamma = \partial S$ .



Eine Hemisphäre.

Die Hemisphäre lässt sich als ein reguläres Flächenstück parametrisieren, zum Beispiel durch stereographische Projektion vom Südpol auf die Äquatorebene.

Die Hemisphäre ist orientierbar durch die nach außen zeigende Normale. Sie hat den Äquator als Rand, und die Rechte-Hand-Regel definiert seine Orientierung.

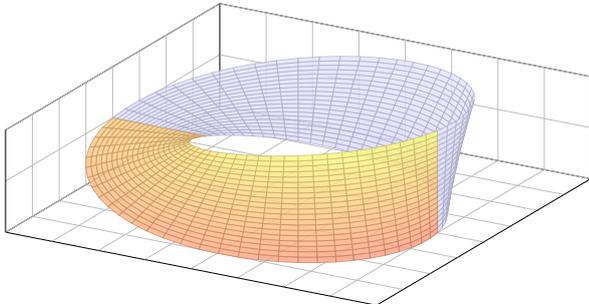


Die Oberfläche einer Kugel.

Die Sphäre  $S$  lässt sich nicht als ein einziges reguläres Flächenstück parametrisieren, aber sie lässt sich aus zwei regulären Flächenstücken zusammensetzen, z.B. aus zwei Hemisphären. Sie ist orientierbar durch die nach außen zeigende Normale. Sie hat keinen Rand,  $\partial S = \emptyset$ .

Dies nennen wir eine „geschlossene Fläche“: Die Sphäre ist kompakt und ohne Rand.

Es gibt auch nicht-orientierbare Flächen. Hier das einfachste Beispiel:



$$M = \left\{ \begin{pmatrix} (3 + r \sin \frac{\varphi}{2}) \cos \varphi \\ (3 + r \sin \frac{\varphi}{2}) \sin \varphi \\ r \cos \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ -1 \leq r \leq 1 \end{matrix} \right\}$$

⚠ Auf solche Flächen lässt sich der Satz von Stokes **nicht** anwenden!



(19) Bundesrepublik Deutschland  
Deutsches Patent- und Markenamt

(10) DE 20 2004 005 763 U1 2004.08.19

(12)

**Gebrauchsmusterschrift**

(22) Anmeldetag: 13.04.2004  
(47) Eintragungstag: 15.07.2004  
(43) Bekanntmachung im Patentblatt: 19.08.2004

(51) Int. Cl.: F16F 1/00

(71) Name und Wohnsitz des Inhabers:  
Haitovs, Leopolds, 60385 Frankfurt, DE

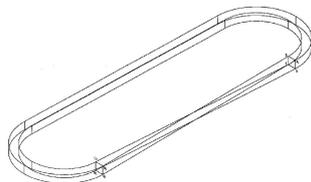
(74) Name und Wohnsitz des Vertreters:  
Schweizer, P., Rechtsanw., 86150 Augsburg

Die folgenden Angaben sind den vom Anmelder eingereichten Unterlagen entnommen

(54) Bezeichnung: **Antriebsriemen**

(57) Hauptanspruch: **Antriebsriemen**, der als ein Ring aus einem Band gemacht ist, dessen Oberfläche für ein Zusammenwirken mit einigen Antriebs scheiben bestimmt ist, dadurch gekennzeichnet, dass der genannte Ring als **Möbius-Band (einseitige Fläche)** gemacht ist.

**Der krasse Geheimtipp zur Konstruktion?**



Eine Teilmenge  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  nennen wir **stückweise glatte Fläche**, wenn es glatte Flächenstücke  $S_1, \dots, S_k \subseteq \mathbb{R}^3$  gibt, sodass  $S = S_1 \cup \dots \cup S_k$  gilt.

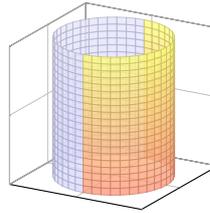
Wie im obigen Modell verlangen wir dabei geometrische Vorkehrungen: Die Flächenstücke schneiden sich höchstens längs ihrer Randkurven. Im Inneren jeder Kante schneiden sich höchstens zwei Flächenstücke. Nur in Eckpunkten können mehrere Flächenstücke zusammenstoßen.

Innere Kanten treten also stets doppelt auf und heben sich auf. Die verbleibenden einzelnen Kanten bilden den **Rand**  $\partial S$ .

Im Falle  $\partial S = \emptyset$  nennen wir die Fläche  $S$  **geschlossen**. Jede geschlossene Fläche ist kompakt und ohne Rand.

Ein **Orientierung** von  $S$  besteht aus Orientierungen der Flächenstücke  $S_1, \dots, S_k$ , die wie gezeigt in gemeinsamen Kanten gegenläufig sind.

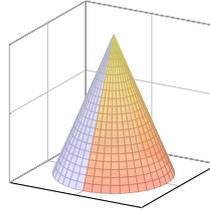
Dies definiert die Orientierung des Randes  $\partial S$  im Satz von Stokes: Beim Zusammensetzen einer stückweise glatten Fläche heben sich innere Kanten paarweise auf, denn sie sind gegenläufig orientiert. Es bleibt die positiv orientierte Randkurve  $\Gamma = \partial S$ .



Der Mantel eines Zylinders.

Der Zylinder mantel ist ein reguläres Flächenstück, zum Beispiel parametrisiert durch einen Kreisring. Er lässt sich ebenso durch zwei Rechtecke regulär parametrisieren, wie in der Skizze angedeutet.

Der Zylinder mantel ist orientierbar durch die nach außen zeigende Normale. Er hat zwei Kreislinien als Rand, und die Rechte-Hand-Regel definiert ihre Orientierungen.



Der Mantel eines Kegels.

Der Kegelmantel lässt sich durch zwei Dreiecke regulär parametrisieren, wie in der Skizze angedeutet.

Der Kegelmantel ist orientierbar durch die nach außen zeigende Normale. Er hat eine Kreislinie als Rand, und die Rechte-Hand-Regel definiert ihre Orientierung.

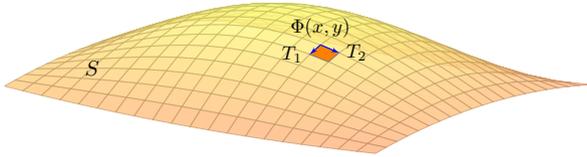
Das **Möbius-Band** ist eine simple, aber bemerkenswerte Fläche! Sie zeigt Eigenschaften, die man zuerst für unmöglich halten würde. Es erlaubt uns, eine bessere Vorstellung von Flächen zu entwickeln. Die Mittelachse ( $r = 0$ ) besteht aus einer Kreislinie, hier vom Radius 3. Um diese windet sich das Möbius-Band in halber Drehung, also 180°. Aus Papier hergestellt erhalten wir eine Fläche mit nur einer Seite! Sie lässt sich aus zwei regulären Flächenstücken zusammensetzen, je durch Rechtecke parametrisiert, etwa  $0 \leq \varphi \leq \pi$  und  $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$ , doch die Orientierungen passen nicht zusammen. Das bedeutet: Das Möbius-Band ist eine glatte Fläche, aber nicht orientierbar!

Dieses Band wurde 1858 unabhängig voneinander von dem Göttinger Mathematiker und Physiker Johann Benedict Listing und dem Leipziger Mathematiker und Astronomen August Ferdinand Möbius beschrieben. Das Möbius-Band ist das universelle Modell einer nicht-orientierbaren Fläche: Eine beliebige Fläche  $S$  ist genau dann nicht-orientierbar, wenn sie ein Möbius-Band enthält (als eingebettete Teilfläche).

Ist **Mathematik** eine Tätigkeit des Erfindens oder des Entdeckens? Diese uralte Debatte ist nicht nur philosophisch bedeutsam, sondern auch ökonomisch: Technische **Erfindungen** können patentiert werden, nicht aber **Entdeckungen**. Daher sind wissenschaftliche Theorien grundsätzlich nicht patentierbar. Das betrifft auch mathematische Methoden bis hin zu Algorithmen und Computerprogrammen.

Das Möbius-Band zeigt eine erstaunliche mathematische **Anwendung**: Die elfseitige Gebrauchsmusterschrift findet man beim Deutschen Patent- und Markenamt unter [register.dpma.de/DPMAregister/pat/PatSchrifteneinsicht?docId=DE202004005763U1](http://register.dpma.de/DPMAregister/pat/PatSchrifteneinsicht?docId=DE202004005763U1). Sie beginnt so:

„Beschreibung: Die Erfindung gehört zum Maschinenbau, insb. zu den Antriebsriemen. [...] Der Nachteil der bekannten Antriebsriemen ist eine geringe Betriebszeit durch den Verschleiß der Arbeitsflächen. [...] Um den genannten Nachteil zu beseitigen wäre es zweckdienlich, nicht nur eine Oberfläche des Riemens als Arbeitsoberfläche zu benutzen, sondern möglichst alle Oberflächen des Riemens. Dafür sollte man den Riemen nach Art des Möbius-Bandes verdrehen. [...]“



Sei  $\Phi: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$  eine reguläre Parametrisierung. An jedem Bildpunkt  $s = \Phi(x, y)$  heften linear unabhängige Tangentialvektoren

$$T_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) \quad \text{und} \quad T_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y).$$

Der zugehörige Normalenvektor  $N = T_1 \times T_2$  ist daher nicht Null. Dies definiert das **Einheitsnormalenfeld**  $n: S \rightarrow \mathbb{R}^3$  durch

$$n(s) = \frac{N(x, y)}{|N(x, y)|}$$

Die Vektoren  $T_1, T_2, N$  ändern sich je nach Wahl der Parametrisierung! Die Einheitsnormale  $n$  bleibt jedoch gleich – bis auf das Vorzeichen.

**Satz G3A: Umparametrisierung, gleichsinnig vs gegensinnig**

Je zwei reguläre Parametrisierungen  $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  und  $\tilde{\Phi}: \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit demselben Bild  $S$  sind äquivalent vermöge  $H = \tilde{\Phi}^{-1} \circ \Phi$ .

Ihre Orientierung ist entweder **gleichsinnig** oder **gegensinnig**, also entweder  $\tilde{n}(y) = n(y)$  in jedem Punkt  $y = \Phi(x) = \tilde{\Phi}(\tilde{x})$  oder aber  $\tilde{n}(y) = -n(y)$  in jedem Punkt  $y = \Phi(x) = \tilde{\Phi}(\tilde{x})$ .

**Beispiel:** Die Kugelfläche (Sphäre) können wir parametrisieren durch

$$\Phi \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \tilde{\Phi} \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} D &= [0, \pi] \times [0, 2\pi], \\ \tilde{D} &= [0, 2\pi] \times [0, \pi]. \end{aligned}$$

Hier gilt  $d\Phi = -d\tilde{\Phi}$ , die Parametrisierungen sind also gegensinnig.

**Definition G3B: Orientierung eines glatten Flächenstücks**

Eine glattes Flächenstück  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  wird **orientiert** durch die Wahl eines der beiden möglichen Einheitsnormalenfelder  $n: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

**Definition G3C: Flächen- und Flussintegral**

Sei  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  ein glattes Flächenstück (noch ohne Parametrisierung). Wir wählen eine (semi)reguläre Parametrisierung  $\Phi: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow S$ . Das **Flächenintegral** eines Skalarfeldes  $g: \mathbb{R}^3 \supseteq S \rightarrow \mathbb{R}$  ist

$$\int_S g |dS| := \int_D g |d\Phi| = \int_D g(\Phi(x, y)) \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right| dx dy.$$

Im Spezialfall  $g = 1$  erhalten wir den **Flächeninhalt**  $\text{vol}_2(S)$ .

Für Flussintegrale sei die Fläche  $S$  zusätzlich **orientiert**. Das **Flussintegral** eines Vektorfeldes  $f: \mathbb{R}^3 \supseteq S \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist

$$\int_S f \cdot dS := \int_D f \cdot d\Phi = \int_D \left\langle f(\Phi(x, y)) \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\rangle dx dy.\right.$$

Dies ist wohldefiniert (G2A), unabhängig von der Parametrisierung  $\Phi$ .

☺ Jede:r darf sich die jeweils bequemste Parametrisierung aussuchen.

Wir vollziehen damit für Flächen dieselbe Abstraktion wie für Kurven: Zunächst ist  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  nur eine nackte Menge ohne Struktur. Für diese hat es keinen Sinn nach Differenzierbarkeit oder Flächeninhalt zu fragen: Diesen Fragen müssen wir erst durch eine Parametrisierung  $\Phi: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$  einen Sinn geben! Hierzu verlangen wir, dass  $\Phi$  (semi)regulär ist.

In der praktischen Anwendung interessieren wir uns meist nur für die Fläche  $S$ . Für ihre Handhabung und die Berechnung von Integralen jedoch ist zusätzlich eine Parametrisierung  $\Phi$  notwendig. Die Wahl von  $\Phi$  ist willkürlich, doch glücklicherweise ist das Endergebnis von der Parametrisierung unabhängig: Je zwei (semi)reguläre Parametrisierungen  $\Phi: D \rightarrow S$  und  $\tilde{\Phi}: \tilde{D} \rightarrow S$  derselben Fläche  $S$  sind (semi)regulär äquivalent vermöge  $H = \tilde{\Phi}^{-1} \circ \Phi$ . Sie liefern somit dieselben Flächen- und Flussintegrale, wie oben ausführlich nachgerechnet.

Bei Flächen wie bei Kurven muss bei Integralen 2. Art die Orientierung angegeben werden. Wir benutzen hier die stillschweigende Voraussetzung, dass die Parameterbereiche  $D$  und  $\tilde{D}$  wegzusammenhängend sind. Zwei Parametrisierungen  $\Phi: D \rightarrow S$  und  $\tilde{\Phi}: \tilde{D} \rightarrow S$  sind dann entweder überall gleichsinnig oder überall gegensinnig. (Gibt es mehrere Wegkomponenten, so kann man auf jeder Komponente eine der beiden möglichen Orientierungen wählen.)

Jede reguläre Parametrisierung von  $S$  liefert eine reguläre Parametrisierung des Randes  $\partial S$ . In der Praxis nutzen wir neben regulären Parametrisierungen häufig auch semireguläre Parametrisierungen: Diese sind allgemeiner und flexibler, und daher meist bequemer. Sie können am Rand  $\partial D$  irregulär sein, aber das Innere  $\tilde{D} = D \setminus \partial D$  genügt für die Berechnung von Flächenintegralen: Wegen  $\text{vol}_2(\partial D) = 0$  trägt der Rand hierzu nichts bei.

**Definition G3D: Flächen- und Flussintegral**

Sei  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  eine stückweise glatte Fläche. Wir wählen (semi)reguläre Parametrisierungen  $\Phi_1: \mathbb{R}^2 \supseteq D_1 \rightarrow \mathbb{R}^3, \dots, \Phi_k: \mathbb{R}^2 \supseteq D_k \rightarrow \mathbb{R}^3$ , sodass  $S = \Phi_1(D_1) \cup \dots \cup \Phi_k(D_k)$  gilt und  $\Phi_i(\tilde{D}_i) \cap \Phi_j(\tilde{D}_j) = \emptyset$  für  $i \neq j$ .

Das **Flächenintegral** eines Skalarfeldes  $g: \mathbb{R}^3 \supseteq S \rightarrow \mathbb{R}$  ist

$$\int_S g |dS| := \int_{D_1} g |d\Phi_1| + \dots + \int_{D_k} g |d\Phi_k|.$$

Für Flussintegrale sei die Fläche  $S$  zusätzlich **orientiert**. Das **Flussintegral** eines Vektorfeldes  $f: \mathbb{R}^3 \supseteq S \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist

$$\int_S f \cdot dS := \int_{D_1} f \cdot d\Phi_1 + \dots + \int_{D_k} f \cdot d\Phi_k.$$

☺ Dies ist wohldefiniert, das heißt, das Ergebnis ist unabhängig von der Wahl der Zerlegung von  $S$  und der Parametrisierungen  $\Phi_k$ .

**Aufgabe:** Vorgelegt sei eine stückweise glatte Fläche  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  mit stückweise (semi)regulärer Parametrisierung  $\Phi_i: D_i \rightarrow \mathbb{R}^3$  für  $i = 1, \dots, k$  sowie eine zweite  $\Psi_j: E_j \rightarrow \mathbb{R}^3$  für  $j = 1, \dots, \ell$ .

Warum liefern beide dasselbe Ergebnis für das Flächenintegral?

$$\int_{D_1} g |d\Phi_1| + \dots + \int_{D_k} g |d\Phi_k| \stackrel{?}{=} \int_{E_1} g |d\Psi_1| + \dots + \int_{E_\ell} g |d\Psi_\ell|$$

**Lösung:** Auf den paarweisen Schnitten  $S_{ij} = \Phi_i(\tilde{D}_i) \cap \Psi_j(\tilde{E}_j)$  erhalten wir stückweise Parametrisierungen  $\Phi_{ij}: D_{ij} \rightarrow S_{ij}$  und  $\Psi_{ij}: E_{ij} \rightarrow S_{ij}$ . Diese sind jeweils semiregulär äquivalent. Wir haben die Zerlegungen

$$S = \bigsqcup_i \Phi_i(D_i) = \bigsqcup_{i,j} \Phi_{ij}(D_{ij}) = \bigsqcup_{j,i} \Psi_{ji}(E_{ij}) = \bigsqcup_j \Psi_j(E_j)$$

jeweils bis auf Nullmengen (vom Flächeninhalt 0). Hieraus folgt:

$$\sum_i \int_{D_i} g |d\Phi_i| = \sum_i \sum_j \int_{D_{ij}} g |d\Phi_{ij}| = \sum_j \sum_i \int_{E_{ij}} g |d\Phi_{ij}| = \sum_j \int_{E_j} g |d\Psi_j|$$

☺ Gleiches gilt für Flussintegrale: Das Ergebnis ist also wohldefiniert. Jede:r darf sich die jeweils bequemste Parametrisierung aussuchen.

**Satz G3E: Integralsatz von Stokes**

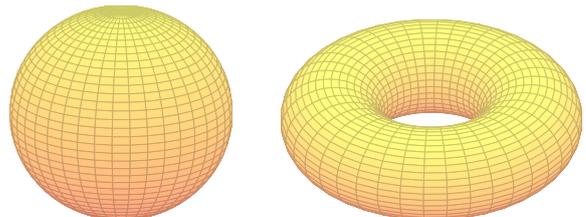
Sei  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  eine stückweise glatte, orientierte Fläche. Ihre Randkurve  $\Gamma = \partial S$  ist dann ebenso stückweise glatt und werde positiv orientiert. Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^3 \supseteq S \rightarrow \mathbb{R}^3$  gilt dann

$$\int_{s \in S} \text{rot } f(s) \cdot dS = \int_{s \in \Gamma} f(s) \cdot d\Gamma.$$

Die Zerlegung  $dS = n(s) |dS|$  ergibt die gleichwertige Formulierung

$$\int_{s \in S} \text{rot } f(s) \cdot n(s) |dS| = \int_{s \in \Gamma} f(s) \cdot d\Gamma.$$

**Beweis:** Die Gleichung gilt für jedes reguläre Flächenstück  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  und folgt aus dem entsprechenden Satz von Green in der Ebene, siehe G1A. Für stückweise glatte Flächen addieren sich die Flächenintegrale. Die Kurvenintegrale längs innerer Kanten heben sich paarweise auf, da sie gegenläufig orientiert sind. Bleibt der positiv orientierte Rand  $\Gamma = \partial S$ .



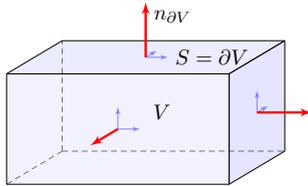
**Beispiel:** Ist die Fläche  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  geschlossen, also  $\partial S = \emptyset$ , so gilt

$$\int_{s \in S} \text{rot } f(s) \cdot dS \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{s \in \partial S} f(s) \cdot ds \stackrel{\partial S = \emptyset}{=} 0$$

☺ Dies gilt für die Randfläche  $S = \partial V$  jedes Kompaktums  $V \subseteq \mathbb{R}^3$ . ☺ Integralsätze können Rechnungen dramatisch vereinfachen!

Das Flussintegral links kann beliebig kompliziert sein; rechts beim Randintegral sehen wir das Ergebnis auf einen Blick! Einfaches Beispiel: Die (dreidim.) Vollkugel  $K$  hat als (zweidim.) Randfläche die Sphäre  $S = \partial K$ . Die (zweidim.) Sphäre  $S$  wiederum hat als (eindim.) Randkurve die leere Menge,  $\partial S = \emptyset$ . Ebenso für den Volltorus  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  und die Torusfläche  $S = \partial V$ .

Typisches Beispiel ist ein Quader  $V = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ .



**Definition G3F:** Kompaktum mit stückweise glattem Rand

$V \subseteq \mathbb{R}^3$  heißt **Kompaktum mit stückweise glattem Rand**, wenn gilt:

- $V$  ist kompakt und der Rand  $\partial V$  ist eine stückweise glatte Fläche.
- In jedem regulären Punkt  $s \in \partial V$  liegt das Innere von  $V$  auf der einen Seite von  $\partial V$  und das Äußere von  $V$  auf der anderen Seite.

Der Rand  $\partial V$  ist **positiv orientiert**, wenn  $n_{\partial V}$  stets nach außen zeigt.

**Satz G3G:** Integralsatz von Gauß im Raum

Sei  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  kompakt mit stückweise glatter Randfläche  $S = \partial V$ , orientiert durch den von  $V$  nach außen weisenden Normalenvektor. Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld  $f: V \rightarrow \mathbb{R}^3$  gilt dann

$$\int_{v \in V} \operatorname{div} f(v) \, dV = \int_{s \in S} f(s) \cdot dS.$$

Die Zerlegung  $dS = n(s) |dS|$  ergibt die gleichwertige Formulierung

$$\int_{v \in V} \operatorname{div} f(v) \, dV = \int_{s \in S} f(s) \cdot n(s) |dS|.$$

Links steht das Volumenintegral der Quelldichte  $\operatorname{div}(f)$  über  $V$ . Wie üblich bezeichnet  $dV = d(x, y, z)$  das Volumenelement.

Rechts steht das Flussintegral von  $f$  über die Randfläche  $S = \partial V$ . Das Flächenelement  $dS = (\partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi) d(x, y)$  sei positiv orientiert: Der Normalenvektor  $dS$  senkrecht auf  $\partial V$  zeigt stets aus  $V$  heraus.

Den Satz von Gauß rechnen wir nach wie in der Ebene (Seite E145):

**Aufgabe:** Rechnen Sie die Gleichung des Gaußschen Satzes nach...

(1) Für  $f = (0, 0, f_3)$  und jeden Normalbereich in  $z$ -Richtung

$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in A, g(x, y) \leq z \leq h(x, y) \}.$$

Hierbei sei  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Kompaktum mit stückweise glattem Rand sowie  $g, h: A \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbare Funktionen mit  $g \leq h$ .

(2) Ebenso für  $(0, f_2, 0)$  in  $y$ -Richtung und  $(f_1, 0, 0)$  in  $x$ -Richtung.

(3) Für  $f = (f_1, f_2, f_3)$  und jeden Trinormalbereich  $V \subseteq \mathbb{R}^3$ .

Z.B. ein Quader, eine Kugel, oder jedes konvexe Kompaktum.

(4) Gilt die Gleichung für jeden Bereich  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  zerlegt wie in (3)?

Z.B. eine Kugelschale oder ein Quader mit mehreren Löchern.

**Lösung:** Zum Flussintegral tragen nur oberer und unterer Deckel bei:

$$O = \{ (x, y, h(x, y)) \mid (x, y) \in A \}, \quad n_O = (-\partial_x h, -\partial_y h, +1),$$

$$U = \{ (x, y, g(x, y)) \mid (x, y) \in A \}, \quad n_U = (+\partial_x g, +\partial_y g, -1).$$

(1) Für  $f = (0, 0, f_3)$  folgt Gauß aus Fubini und HDI (wie auf Seite E145):

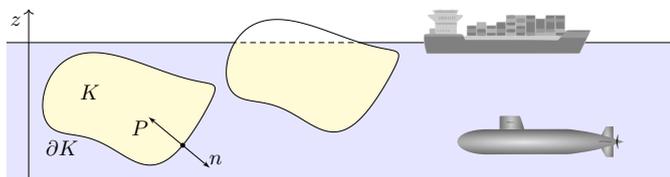
$$\begin{aligned} \int_{v \in V} \operatorname{div} f(v) \, dV &\stackrel{\text{Fub}}{\stackrel{\text{CIE}}{=}} \int_{(x,y) \in A} \int_{z=g(x,y)}^{h(x,y)} \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z) \, dz \, d(x, y) \\ &\stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{BII}}{=}} \int_{(x,y) \in A} f_3(x, y, h(x, y)) - f_3(x, y, g(x, y)) \, d(x, y) \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} \int_{s \in O} f(s) \cdot dO + \int_{s \in U} f(s) \cdot dU \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{s \in S = \partial V} f \cdot dS \end{aligned}$$

(3) Somit gilt der Satz von Gauß für jedes Vektorfeld  $f = (f_1, f_2, f_3)$ , wenn  $V$  ein Trinormalbereich ist, also in  $x$ - und  $y$ - und  $z$ -Richtung:

$$\begin{aligned} \int_V \operatorname{div}(f) \, dV &\stackrel{\text{Lin}}{\stackrel{\text{A3L}}{=}} \int_V \operatorname{div}(f_1, 0, 0) \, dV + \int_V \operatorname{div}(0, f_2, 0) \, dV + \int_V \operatorname{div}(0, 0, f_3) \, dV \\ &\stackrel{(1,2)}{=} \int_{\partial V} (f_1, 0, 0) \cdot dS + \int_{\partial V} (0, f_2, 0) \cdot dS + \int_{\partial V} (0, 0, f_3) \cdot dS \stackrel{\text{Lin}}{\stackrel{\text{A3L}}{=}} \int_{\partial V} f \cdot dS \end{aligned}$$

(4) Der allgemeine Fall folgt durch Zerlegung von  $V$  in Normalbereiche. Alle Volumenintegrale addieren sich, und ebenso alle Flächenintegrale. Innere Flächen heben sich paarweise auf, es bleibt nur der Rand  $\partial V$ .

**Aufgabe:** Integrieren Sie die Auftriebskraft, die auf den Körper  $K$  wirkt.



Folgern Sie daraus den Satz des Archimedes: Die Auftriebskraft des Körpers  $K$  gleicht dem Gewicht  $g \varrho \operatorname{vol}_3(K)$  des verdrängten Mediums.

Es besteht eine bemerkenswerte Beziehung zwischen dem Rand  $\partial K$  (nur hier wirkt der Druck) und dem Inneren von  $K$  (nur dieses verdrängt das Fluid). Wir können dies nun exakt berechnen! Zur Vereinfachung nehmen wir an, die Flüssigkeit habe konstante Dichte  $\varrho > 0$ . Die Schwerkraft wirkt nach unten in negativer  $z$ -Richtung, wie in der Skizze angedeutet. Der Körper liege ganz in der Flüssigkeit; ihre Oberfläche sei  $z = 0$ . Längs des Randes  $\partial K$  übt die Flüssigkeit einen Druck aus. Dieser nimmt linear mit der Tiefe  $z$  zu, entsprechend der darüber liegenden Wassersäule. Der Absolutbetrag des Drucks in Tiefe  $z$  ist demnach  $|P| = g \varrho |z|$ . Konkrete Werte sind in unserem Beispiel  $\varrho_{\text{Wasser}} = 1000 \text{ kg/m}^3$  und  $g_{\text{Erde}} = 9.81 \text{ m/s}^2$ , somit  $g \varrho = 9810 \text{ N/m}^3$ .

**Lösung:** In jedem Randpunkt  $s = (x, y, z) \in \partial K$  sei  $n(s)$  die äußere Einheitsnormale. Hier herrscht folgender Druck (= Kraft pro Fläche):

$$\text{skalar } |P(s)| = g \varrho |z|, \quad \text{vektoriell } P(s) = g \varrho z \cdot n(s)$$

Die Vektoren  $P$  und  $n$  sind entgegengesetzt; das Vorzeichen steckt im Faktor  $z < 0$ . Dadurch erfährt der Körper  $K$  die folgende Auftriebskraft:

$$F = \int_{s \in \partial K} P(s) |dS| = g \varrho \int_{s \in \partial K} z n(s) |dS|$$

Ihre Komponenten  $F = (F_x, F_y, F_z)$  berechnen wir mit Gauß:

$$\int_{\partial K} z n_x |dS| = \int_{\partial K} \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot n |dS| \stackrel{\text{Gauß}}{\stackrel{\text{G3G}}{=}} \int_K \operatorname{div} \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} d(x, y, z) = 0$$

$$\int_{\partial K} z n_y |dS| = \int_{\partial K} \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ 0 \end{pmatrix} \cdot n |dS| \stackrel{\text{Gauß}}{\stackrel{\text{G3G}}{=}} \int_K \operatorname{div} \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ 0 \end{pmatrix} d(x, y, z) = 0$$

$$\int_{\partial K} z n_z |dS| = \int_{\partial K} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \cdot n |dS| \stackrel{\text{Gauß}}{\stackrel{\text{G3G}}{=}} \int_K \operatorname{div} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} d(x, y, z) = \operatorname{vol}_3(K)$$

Das archimedische Prinzip gilt auch für Körper, die nur teilweise in die Flüssigkeit eintauchen: Es zählt das eingetauchte Volumen. (Warum?) Ein Schiff verdrängt Wasser, erhält dadurch Auftrieb und schwimmt!

Der hier angenommene Druckverlauf gilt bei konstanter Dichte, in einem inkompressiblen Medium. Er gilt annähernd auch in Luft (und anderen Gasen) bei nicht allzu großen Höhenunterschieden. Er gilt insbesondere für realistisch große Luftschiffe oder Ballone.

Schließlich löste Archimedes mit Hilfe der Wasserverdrängung das Problem der Dichtemessung und konnte den Goldschmied des Königs als Betrüger entlarven. Gibt es eine schönere historische Anwendung der HM3 für Materialwissenschaftler und Luft- und Raumfahrtstechniker?

Damit sind wir schließlich zum Ausgangsbeispiel zurückgekehrt: dem archimedischen Prinzip, das wir nun mathematisch verstehen. Die Anordnung der Themen gleicht somit einem geschlossenen Weg. Das Wegintegral über dieses Kapitel ist aber nicht Null, denn wir haben sehr wohl wertvolle Arbeit verrichtet und neue Erkenntnisse gewonnen!

**Aufgabe:** Wieviel Prozent eines Eisberges liegen unter Wasser? Speziell für  $\varrho_{\text{Eis}} = 918 \text{ kg/m}^3$  und  $\varrho_{\text{Wasser}} = 1025 \text{ kg/m}^3$ ? Allgemein? Wie hängt das Ergebnis von der Form des Eisberges ab?

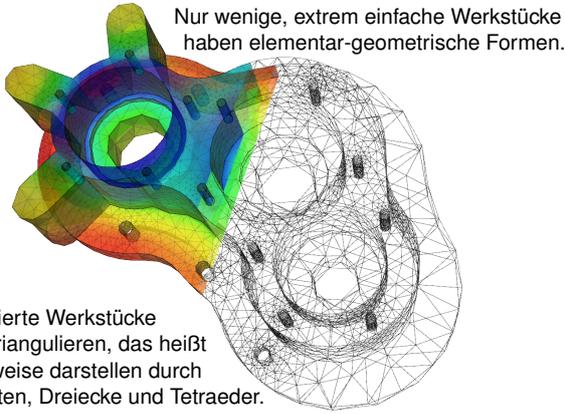
**Lösung:** Sei  $E$  der Eisberg, unter Wasser liege der Teil  $U \subseteq E$ . Wir nehmen Gleichgewicht an, d.h. der Eisberg sinkt oder steigt nicht. Das Gewicht  $\operatorname{vol}_3(E) \varrho_{\text{Eis}} g$  gleicht dem Auftrieb  $\operatorname{vol}_3(U) \varrho_{\text{Wasser}} g$ . Also

$$\frac{\operatorname{vol}_3(U)}{\operatorname{vol}_3(E)} = \frac{\varrho_{\text{Eis}}}{\varrho_{\text{Wasser}}} \approx 0.90$$

Mit anderen Worten, etwa 90% des Eisberges liegen unter Wasser, nur die verbleibenden 10% sind über Wasser sichtbar. Daher der sprichwörtliche Ausdruck: „Wir sehen nur die Spitze des Eisberges.“

Der genaue Wert hängt nur von den Materialkonstanten ab, also der Massendichte des Eises  $\varrho_{\text{Eis}}$  und des Wassers  $\varrho_{\text{Wasser}}$ . Hingegen ist die Form des Eisberges unerheblich. Alles ist schön und einfach!

😊 Der Integralsatz von Gauß und somit auch der archimedische Satz sind auf alle Körper mit stückweise glatter Randfläche anwendbar!



Nur wenige, extrem einfache Werkstücke haben elementar-geometrische Formen.

- ☺ Komplizierte Werkstücke kann man triangulieren, das heißt näherungsweise darstellen durch Ecken, Kanten, Dreiecke und Tetraeder.
- ☺ Diese Darstellung ist eine sehr effiziente Datenstruktur und eignet sich besonders gut zu numerischen Berechnungen auf einem Computer.

Das Flächenstück  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  liege ganz in einer Ebene  $E$ , wie etwa jedes Dreieck  $S = [P, Q, R]$  einer Triangulierung. Zudem sei das Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  affin-linear, das heißt

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + b = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3 \end{pmatrix}.$$

Dann gelten folgende nützliche Vereinfachungen:

- (1) Ebene Integration liefert den Flächeninhalt  $\text{vol}_2(S)$ .
- (2) Der Schwerpunkt  $\bar{s}$  von  $S$  liegt in derselben Ebene  $E$ .
- (3) Die Einheitsnormale  $n: S \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist konstant und senkrecht auf  $E$ .
- (4) Das Flussintegral von  $f$  durch  $S$  schließlich vereinfacht sich zu

$$\int_{s \in S} f(s) \cdot n(s) |dS| = f(\bar{s}) \cdot n \text{vol}_2(S).$$

- (5) Dank Linearität von  $f$  ist  $\text{div}(f) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$  konstant.
- ☺ Statt Integralen benötigen wir hier also nur Grundrechenarten!

**Aufgabe:** Rechnen Sie diese vereinfachenden Formeln nach.

**Lösung:** (1–3) Wir können unser Koordinatensystem so wählen, dass  $S$  ganz in der  $x$ - $y$ -Ebene liegt, also  $S \subseteq \{ (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \}$ .

Die Parametrisierung  $\Phi: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3: (x, y) \mapsto (x, y, 0)$  ergibt

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Flächenintegrale über  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  sind demnach genau dasselbe wie gewöhnliche zweidimensionale Integrale über  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ .

(4) In unseren geschickt gewählten Koordinaten gilt schließlich:

$$\begin{aligned} \int_{s \in S} f(s) \cdot n(s) |dS| &\stackrel{\text{Def}}{=} \int_{(x,y) \in D} [a_{31}x + a_{32}y + b_3] d(x,y) \\ &\stackrel{\text{Lin}}{=} [a_{31}\bar{s}_x + a_{32}\bar{s}_y + b_3] \text{vol}_2(D) \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} f(\bar{s}) \cdot n \text{vol}_2(S) \end{aligned}$$

☺ Für jede ebene Fläche  $S$  und jedes affin-lineare Vektorfeld  $f$  gilt die vereinfachte Formel (4) exakt, ohne jeden Näherungsfehler. Die vorige Aufgabe rechnet diese erfreuliche Vereinfachung nach.

Warum haben wir Flächenintegrale dann nicht gleich so definiert? Die vereinfachte Rechnung benötigt die genannten Voraussetzung! Nicht jede Fläche  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  ist eben. Nicht jedes Vektorfeld  $f: S \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist affin-linear; allgemein ist die exakte Rechnung daher nicht so einfach.

Ist das Flächenstück  $S$  klein genug, so weicht das Vektorfeld  $f$  auf der Fläche  $S$  nur wenig von der Linearisierung um den Schwerpunkt  $\bar{s}$  ab. Für  $f(x) \approx Ax + b$  ist unsere Formel (4) dann eine einfache Näherung. In der Taylor-Entwicklung treten im Allgemeinen höhere Terme auf: Die Formel (4) ist exakt bis zu 1. Ordnung, der Fehler ist 2. Ordnung.

☺ Die Flächensummen  $\sum_k f(\bar{s}_k) \cdot n_k \text{vol}_2(S_k)$  konvergieren bei immer feineren Unterteilungen gegen das Flächenintegral  $\int_{s \in S} f(s) \cdot n(s) |dS|$ . Die Numerik entwickelt hierzu Methoden, wie man Näherungsfehler kontrolliert, und möglichst kostengünstig möglichst klein bekommt.

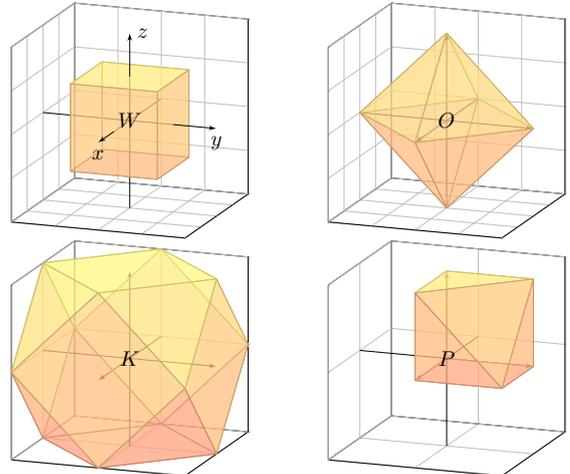
**Aufgabe:** (1) Skizzieren Sie die folgenden Körper:

$$\begin{aligned} W &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1 \} \\ O &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| + |y| + |z| \leq 2 \} \\ K &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x|, |y|, |z| \leq 1, |x| + |y| + |z| \leq 2 \} \\ P &= \{ (x, y, z) \in [0, 1]^3 \mid x + y + z \leq 2 \} \end{aligned}$$

- (2) Bestimmen Sie den Rauminhalt  $\text{vol}_3(P)$  des Körpers  $P$ .
- (3) Bestimmen Sie für jede Seite  $S_1, \dots, S_7$  von  $P$  den Fluss des Vektorfeldes  $f(x, y, z) = (3x + 1, 12y + 4, 36z + 6)$  durch  $S_k$ .
- (4) Berechnen und vergleichen Sie  $\int_P \text{div}(f) d(x, y, z)$  und  $\int_{\partial P} f \cdot dS$ .
- (5) Führen Sie alle Rechnungen ebenso für  $W$  und  $O$  und  $K$  aus.

Das ist der diskrete Charme dieser Aufgabe: Sie können dies ohne komplizierte Integrale direkt mit elementarer Geometrie lösen. Auch diesen Spezialfall sollten Sie kennen und beherrschen.

**Fun fact:** Der Würfel  $W$  (Hexaeder, Sechseckflächner) und das Oktaeder  $O$  (Achtflächner) sind regulär, also vollkommen symmetrisch. Es gibt nur drei weitere Körper dieser Art: das Tetraeder (Vierflächner), das Dodekaeder (Zwölfflächner) und das Ikosaeder (Zwanzigflächner). Können Sie diese ebenfalls so konkret angeben, durch Koordinaten ihrer Eckpunkte? Das ist knifflig!



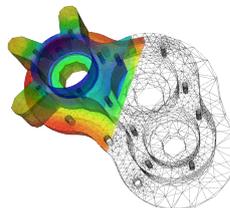
- Lösung:** (1) Die obige Skizze zeigt die Polyeder  $W, O, K$  und  $P$ .
- (2) Für das Polyeder  $P$  gilt  $\text{vol}_3(P) = 5/6$  und  $\text{vol}_2(\partial P) = (9 + \sqrt{3})/2$ .
  - (3) Wir bestimmen für jede Seite  $S_1, \dots, S_7$  von  $P$  den Fluss des Vektorfeldes  $f(x, y, z) = (3x + 1, 12y + 4, 36z + 6)$  durch  $S_k$ .

Flächenstück / Typ	Schwerpunkt $\bar{s}_k$	Normale $n_k$	Inhalt	Fluss
$S_1$ Quadrat	$(0, 1/2, 1/2)$	$(-1, 0, 0)$	1	-1
$S_2$ Quadrat	$(1/2, 0, 1/2)$	$(0, -1, 0)$	1	-4
$S_3$ Quadrat	$(1/2, 1/2, 0)$	$(0, 0, -1)$	1	-6
$S_4$ rechth. Dreieck	$(1, 1/3, 1/3)$	$(+1, 0, 0)$	1/2	2
$S_5$ rechth. Dreieck	$(1/3, 1, 1/3)$	$(0, +1, 0)$	1/2	8
$S_6$ rechth. Dreieck	$(1/3, 1/3, 1)$	$(0, 0, +1)$	1/2	21
$S_7$ gleichs. Dreieck	$(2/3, 2/3, 2/3)$	$(1, 1, 1)/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/2$	45/2

- (4) Wir finden  $\int_P \text{div}(f) d(x, y, z) = 51 \text{vol}_3(P) = 42.5 = \int_{\partial P} f \cdot dS$ .
- (5) Für  $W, O, K$  verlaufen alle Rechnung genauso (etwas länglich).

**Polyeder** faszinieren immer wieder: Der Würfel  $W$  und das Oktaeder  $O$  gehören zu den fünf platonischen, das Kuboktaeder  $K$  zu den dreizehn archimedischen Körpern. Unser Polyeder  $P$  ist weniger regelmäßig.

☺ Wir kommen ohne Integrale aus, weil das Vektorfeld  $f$  affin-linear ist. Ist  $f$  hingegen nicht linear, aber die Flächenstücke sind klein genug, so erhalten wir auf diese Weise wenigstens eine brauchbare **Näherung**.



☺ Auch extrem komplizierte Körper wie z.B. Maschinenteile können Sie so **triangulieren**, das heißt, Sie konstruieren sie explizit aus Ecken, Kanten, Dreiecken und Tetraedern.

☺ Diese Datenstruktur ist für Computer ideal. (Das Beispiel zeigt ein Pumpengehäuse, für das der Wärmefluss berechnet werden soll.)

Hieraus lassen sich nun Weglängen, Flächen- und Rauminhalte sowie Flussintegrale bestimmen, zumindest näherungsweise. Die Rechnung verläuft genau wie im obigen Beispiel, nur die Datenmenge ist größer.

**Kurvenintegrale** G401  
Fazit

Ein **Weg** ist eine stetige Abbildung  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , hier meist  $n \in \{2, 3\}$ . Er parametrisiert die **Kurve**  $\Gamma = \{\gamma(t) \mid a \leq t \leq b\} \subseteq \mathbb{R}^n$  als Bildmenge. Der Weg heißt **regulär**, wenn  $\gamma$  injektiv ist und stetig differenzierbar mit  $\gamma'(t) \neq 0$  für alle  $t \in [a, b]$ . Seine Bildmenge  $\Gamma$  heißt dann **glatte Kurve**. Am Punkt  $s = \gamma(t)$  heftet das infinitesimale **Wegelement**  $ds = \gamma'(t) dt$ . Das **Kurvenintegral** eines Skalarfeldes  $g: \mathbb{R}^n \supseteq \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  entlang  $\gamma$  ist

$$\int_{\Gamma} g |d\Gamma| = \int_{s \in \Gamma} g(s) |ds| := \int_{t=a}^b g(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)| dt.$$

Speziell für  $g = 1$  erhalten wir so die Länge  $\text{vol}_1(\Gamma) = \ell(\gamma)$  der Kurve  $\Gamma$ . Das **Arbeitsintegral** eines Vektorfeldes  $f: \mathbb{R}^n \supseteq \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$  entlang  $\gamma$  ist

$$\int_{\Gamma} f \cdot d\Gamma = \int_{s \in \Gamma} f(s) \cdot ds := \int_{t=a}^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Das Arbeitsintegral wechselt das Vorzeichen bei Orientierungsumkehr.

😊 Diese Integrale sind invariant bei (positiver) Umparametrisierung und somit wohldefiniert für jede (orientierte) stückweise glatte Kurve  $\Gamma$ .

**Glatte Flächenstücke** G402  
Fazit

$D \subseteq \mathbb{R}^2$  heißt **Kompaktum mit stückweise glattem Rand**, wenn gilt:

- $D$  ist kompakt und der Rand  $\partial D$  ist eine stückweise glatte Kurve.
- In jedem regulären Randpunkt  $s \in \partial D$  liegt das Innere von  $D$  auf der einen Seite von  $\partial D$  und das Äußere auf der anderen Seite.

Beispiele: Rechtecke, Polygone, Kreisscheiben, Kreisinge, ...

Der Rand ist **positiv orientiert**, wenn  $D$  stets links von  $\partial D$  liegt. Die Einheitstangente  $t_{\partial D}: \partial D \rightarrow \mathbb{R}^2$  zeigt in Richtung der Orientierung, die Einheitsnormale  $n_{\partial D} = \circlearrowleft t_{\partial D}: \partial D \rightarrow \mathbb{R}^2$  zeigt überall aus  $D$  heraus.

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  zusammenhängend kompakt mit stückweise glattem Rand. Ein parametrisiertes **Flächenstück** ist eine  $C^1$ -Abbildung  $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Senkrecht auf den **Tangentenvektoren**  $\partial_x \Phi(x, y)$  und  $\partial_y \Phi(x, y)$  steht der **Normalenvektor**  $\partial_x \Phi(x, y) \times \partial_y \Phi(x, y)$  für  $(x, y) \in D$ . Die Parametrisierung  $\Phi$  heißt **regulär**, wenn sie injektiv ist und zudem  $\partial_x \Phi(x, y) \times \partial_y \Phi(x, y) \neq 0$  in jedem Punkt  $(x, y) \in D$  erfüllt.

Das Bild  $S = \Phi(D) \subseteq \mathbb{R}^3$  heißt dann **glattes Flächenstück**. Der Rand  $\partial S := \Phi(\partial D)$  ist dann eine stückweise glatte Kurve.

**Flächenintegrale** G403  
Fazit

Flächen  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  parametrisieren wir (stückweise) durch  $\Phi: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow S$ . An  $s = \Phi(x, y)$  heftet das inf. Flächenelement  $dS = (\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi) d(x, y)$ . Das **Flächenintegral** eines Skalarfeldes  $g: \mathbb{R}^3 \supseteq S \rightarrow \mathbb{R}$  entlang  $\Phi$  ist

$$\int_{s \in S} g(s) |dS| := \int_{(x,y) \in D} g(\Phi(x, y)) \cdot |\partial_x \Phi(x, y) \times \partial_y \Phi(x, y)| d(x, y).$$

Speziell für  $g = 1$  erhalten wir den Inhalt  $\text{vol}_2(\Phi) = \text{vol}_2(S)$  der Fläche  $S$ . Das **Flussintegral** eines Vektorfeldes  $f: \mathbb{R}^3 \supseteq S \rightarrow \mathbb{R}^3$  entlang  $\Phi$  ist

$$\int_{s \in S} f(s) \cdot dS := \int_{(x,y) \in D} f(\Phi(x, y)) \cdot (\partial_x \Phi(x, y) \times \partial_y \Phi(x, y)) d(x, y).$$

Der Normalenvektor  $\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi$  im Punkt  $\Phi(x, y)$  steht senkrecht auf  $S$ . Für das Flussintegral zählt daher nur der Anteil von  $f$  senkrecht zu  $S$ . Das Flussintegral wechselt das Vorzeichen bei Orientierungsumkehr.

😊 Diese Integrale sind invariant bei (positiver) Umparametrisierung, somit wohldefiniert für jede (orientierte) stückweise glatte Fläche  $S$ .

**Kompakta mit stückweise glattem Rand** G404  
Fazit

Hier ist  $|dS| = |d\Phi| = |\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi| d(x, y)$  das **skalare Flächenelement** und  $dS = d\Phi = (\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi) d(x, y)$  das **vektorielle Flächenelement**. Die Zerlegung  $dS = n(s) |dS|$  definiert die Einheitsnormale  $n: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Diese definiert für jedes Flächenstück eine der beiden Orientierungen. Für stückweise glatte Flächen verlangen wir, dass die Orientierungen einzelner Flächenstücke am gemeinsamen Rand zusammenpassen.

😊 Zur numerischen Approximation können wir die Kurve / Fläche triangulieren und das Vektorfeld linearisieren / Taylor-entwickeln. Für Polygone [E017] oder Polyeder [G325] und lineare Vektorfelder ist dies exakt.

$V \subseteq \mathbb{R}^3$  heißt **Kompaktum mit stückweise glattem Rand**, wenn gilt:

- $V$  ist kompakt und der Rand  $\partial V$  ist eine stückweise glatte Fläche.
- In jedem regulären Punkt  $s \in \partial V$  liegt das Innere von  $V$  auf der einen Seite von  $\partial V$  und das Äußere von  $V$  auf der anderen Seite.

Beispiele: Quader, Polyeder, Vollkugeln, Kugelschalen, Volltori, ...

Der Rand  $\partial V$  ist **positiv orientiert**, wenn  $n_{\partial V}$  stets nach außen zeigt. Die Einheitsnormale ist der Einheitsvektor in Richtung  $d\Phi = n_{\partial V} |d\Phi|$ .

**Der HDI als eindimensionaler Integralsatz** G405  
Fazit

Unsere Integralsätze beruhen alle auf dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI, Satz B11) und verallgemeinern diesen:

**1dim:** Jedes kompakte Intervall  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  hat als Rand  $\partial[a, b] = \{a, b\}$ . Der Startpunkt zählt negativ,  $n(a) = -1$ , der Zielpunkt positiv,  $n(b) = +1$ . Für jede stetig differenzierbare Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gilt dann

$$\int_{s \in [a,b]} f'(s) ds \stackrel{\text{HDI}}{=} \sum_{s \in \{a,b\}} f(s) n(s) = f(b) - f(a).$$

**Allgemein:** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Zudem sei  $\Gamma \subseteq \Omega$  eine stückweise glatte und orientierte Kurve. Für das Arbeitsintegral von  $f' = \text{grad } f$  entlang  $\Gamma$  gilt dann:

$$\int_{s \in \Gamma} f'(s) \cdot ds \stackrel{\text{HDI}}{=} \sum_{s \in \partial \Gamma} f(s) n(s)$$

Die Orientierung teilt die Randpunkte  $s \in \partial \Gamma$  in Start- und Zielpunkte; Startpunkte zählen negativ,  $n(s) = -1$ , Zielpunkte positiv,  $n(s) = +1$ . Ist die Kurve  $\Gamma$  geschlossen, also  $\partial \Gamma = \emptyset$ , so folgt  $\oint_{s \in \Gamma} f'(s) \cdot ds = 0$ .

**Der Integralsatz von Gauß** G406  
Fazit

😊 Der Satz von Gauß in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  und im Raum  $\mathbb{R}^3$  besagt: Das Volumenintegral der Divergenz  $\text{div}(f)$  über das Kompaktum  $V$  ist gleich dem Flussintegral von  $f$  nach außen über die Randfläche  $\partial V$ .

**2dim:** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  kompakt mit stückweise glatter Randkurve  $\Gamma = \partial D$ . Sei  $n: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^2: s \mapsto n(s)$  die nach außen weisende Einheitsnormale. Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^2$  gilt dann

$$\int_{(x,y) \in D} \text{div } f(x, y) d(x, y) \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_{s \in \Gamma} f(s) \cdot n(s) |ds| = \int_{s \in \Gamma} f(s) \times ds.$$

**3dim:** Sei  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  kompakt mit stückweise glatter Randfläche  $S = \partial V$ . Sei  $n: S \rightarrow \mathbb{R}^3: s \mapsto n(s)$  die nach außen weisende Einheitsnormale. Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^3 \supseteq V \rightarrow \mathbb{R}^3$  gilt dann

$$\int_{(x,y,z) \in V} \text{div } f(x, y, z) d(x, y, z) \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_{s \in S} f(s) \cdot n(s) |dS| = \int_{s \in S} f(s) \cdot dS.$$

Gleichwertige Schreibweise mit  $n(s) |ds| = \circlearrowleft ds$  bzw.  $dS = n(s) |dS|$ .

**Der Integralsatz von Green und Stokes** G407  
Fazit

😊 Der Satz von Green in der Ebene bzw. von Stokes im Raum: Das Flächenintegral der Rotation  $\text{rot}(f)$  über die Fläche  $S$  ist gleich dem Arbeitsintegral von  $f$  entlang der Randkurve  $\partial S$ .

**2dim:** Sei  $S \subseteq \mathbb{R}^2$  kompakt mit stückweise glatter Randkurve  $\Gamma = \partial S$ . Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^2 \supseteq S \rightarrow \mathbb{R}^2$  gilt dann

$$\int_{s \in S} \text{rot } f(s) \cdot dS \stackrel{\text{Green}}{=} \int_{s \in \Gamma} f(s) \cdot ds.$$

**3dim:** Allgemeiner gilt dies für jede stückweise glatte, orientierte Fläche  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  und jedes stetig differenzierbare Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^3 \supseteq S \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Die Zerlegung  $dS = n(s) |dS|$  ergibt das gleichwertige Flächenintegral

$$\int_{s \in S} \text{rot } f(s) \cdot n(s) |dS| \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{s \in \Gamma} f(s) \cdot ds.$$

Die stückweise glatte Randkurve  $\Gamma = \partial S$  sei hierbei positiv orientiert. Liegt die Fläche  $S$  in einer Ebene, so reduziert sich Stokes zu Green.

**Zusammenfassung und Rückblick** G408  
Fazit

Diese Integralsätze sind gut und schön! Geht es auch einfacher? Nein, denn Sie sollen nicht nur fühlen, sondern auch rechnen können! Zur präzisen Formulierung und konkreten Berechnung benötigen Sie daher alle Werkzeuge für Kurven-, Flächen- und Volumenintegrale. Hierzu brauchen Sie solide Grundlagen und effiziente Methoden: Definitionen & Sätze, Beispiele & Rechenricks... sowie Übung!

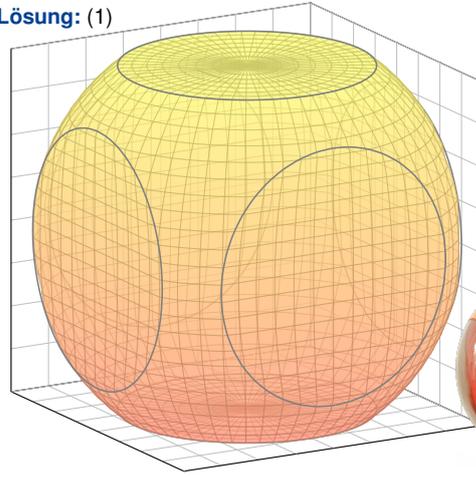
Nochmal die Lernziele laut Modulhandbuch:

- Die Studierenden verfügen über grundlegende Kenntnisse zur Integralrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher. [...]
- Sie sind in der Lage, die behandelten Methoden selbstständig, sicher, kritisch, korrekt und kreativ anzuwenden.
- Sie besitzen die mathematische Grundlage für das Verständnis quantitativer Modelle aus den Ingenieurwissenschaften.
- Sie können sich mit Spezialist:innen aus dem ingenieurs- und naturwissenschaftlichen Umfeld über die benutzten mathematischen Methoden verständigen.

**Aufgabe:** (0) Rezitieren Sie möglichst präzise unsere Integralsätze. Wie bestimmen Sie möglichst allgemein  $\text{div rot}(g)$  und  $\text{rot grad}(h)$ ?

- (1) Skizzieren Sie  $V = \{ (x, y, z) \in [-4, 4]^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 25 \}$ .
- (2) Schätzen und bestimmen Sie das Volumen  $\text{vol}_3(V)$  des Körpers  $V$  sowie den Flächeninhalt  $\text{vol}_2(S)$  seiner Randfläche  $S = \partial V$ .
- (3) In welchen Punkten  $s \in S$  ist die Randfläche  $S = \partial V$  nicht glatt? Geben Sie überall sonst den äußeren Einheitsnormalenvektor an.
- (4) Berechnen Sie zu  $f(x, y, z) = (x, 2y, e^{xy})$  das Flussintegral  $\int_S f \cdot dS$ . Lässt sich der Satz von Stokes anwenden? der Satz von Gauß?
- (5) Wir betrachten das Vektorfeld  $g(x, y, z) = (x, y, z)/(x^2 + y^4 + z^6)$ . Bestimmen Sie zum Vektorfeld  $f = \text{rot}(g)$  das Flussintegral  $\int_S f \cdot dS$ . Lässt sich der Satz von Stokes anwenden? der Satz von Gauß?
- (6) Wir betrachten  $g(x, y, z) = (\cos(xyz), \sin(xyz), \exp(x^2 + y^4 + z^6))$ . Bestimmen Sie zum Vektorfeld  $f = \text{rot}(g)$  das Flussintegral  $\int_S f \cdot dS$ . Lässt sich der Satz von Stokes anwenden? der Satz von Gauß?

**Lösung:** (1)



Luigi Colani (1928–2019), Kugellampe UFO

(2) Der Körper  $V$  ist eine sechsseitig abgestumpfte Vollkugel vom Radius  $r = 5$ ; ihr fehlen sechs Kugelsegmente der Höhe  $h = 1$ :  $\text{G217}$

$$\text{vol}_3(V) \stackrel{\text{G217}}{=} \frac{4}{3}\pi r^3 - 6 \cdot \pi h^2 \left( r - \frac{h}{3} \right) = \frac{416}{3}\pi \approx 436$$

$$\text{vol}_2(S) \stackrel{\text{G217}}{=} 4\pi r^2 - 6 \cdot 2\pi r h + 6 \cdot \pi h^2 = 94\pi \approx 295$$

😊 Plausibel?  $\text{vol}_3([-4, 4]^3) = 8^3 = 512$ ,  $\text{vol}_2(\partial([-4, 4]^3)) = 6 \cdot 8^2 = 384$ .

- (3) Die Randfläche  $S = \partial V$  ist nicht glatt in den sechs Kreislinien  $\Gamma_z^\pm = \{ z = \pm 4, x^2 + y^2 = 9 \}$  und  $\Gamma_y^\pm = \{ y = \pm 4, x^2 + z^2 = 9 \}$  und  $\Gamma_x^\pm = \{ x = \pm 4, y^2 + z^2 = 9 \}$ . Überall sonst ist die Fläche  $S$  glatt. In  $s \in \{ z = \pm 4, x^2 + y^2 < 9 \}$  ist die Einheitsnormale  $n(s) = (0, 0, \pm 1)$ . In  $s \in \{ y = \pm 4, x^2 + z^2 < 9 \}$  ist die Einheitsnormale  $n(s) = (0, \pm 1, 0)$ . In  $s \in \{ x = \pm 4, y^2 + z^2 < 9 \}$  ist die Einheitsnormale  $n(s) = (\pm 1, 0, 0)$ . In jedem anderen Punkt  $s \in \partial S$  ist die Einheitsnormale  $n(s) = s/5$ . Hier gilt  $|s|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 25$  und  $-4 < x, y, z < 4$ . In einer kleinen Umgebung eines solchen Punktes  $s$  sieht die Fläche  $S$  genauso aus wie die Sphäre vom Radius 5, daher ist der Einheitsnormale hier  $s/|s| = s/5$ .

- (4) Die direkte Berechnung von  $\int_S f \cdot dS$  ist möglich... aber mühsam. 😊 Dank Gauß gilt  $\int_S f \cdot dS = \int_V \text{div}(f) dV = 3 \text{vol}_3(V) = 416\pi$ . ⚠️ Stokes ist hier nicht anwendbar, denn uns fehlt  $g$  mit  $f = \text{rot}(g)$ .
- (5) Die direkte Berechnung von  $\int_S f \cdot dS$  ist möglich... aber mühsam. 😊 Dank Stokes gilt  $\int_S f \cdot dS = \int_S \text{rot}(g) \cdot dS = \int_{\partial S} g \cdot ds = 0$  da  $\partial S = \emptyset$ . ⚠️ Gauß ist hier nicht anwendbar, denn  $f$  ist nicht auf ganz  $V$  definiert.
- (6) Die direkte Berechnung von  $\int_S f \cdot dS$  ist möglich... aber mühsam. 😊 Dank Stokes gilt  $\int_S f \cdot dS = \int_S \text{rot}(g) \cdot dS = \int_{\partial S} g \cdot ds = 0$  da  $\partial S = \emptyset$ . 😊 Auch Gauß lässt sich anwenden:  $\int_S f \cdot dS = \int_V \text{div}(f) dV = 0$ . 😊 Diese Beispiele illustrieren erneut den Nutzen unserer Integralsätze: Manche Rechnung löst man besser mit Anschauung und Verständnis! 😊 Wer eindimensional integrieren will, der sollte den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI) kennen und nutzen! Wer mehrdimensional integrieren will, der sollte die entsprechenden Integralsätze von Gauß, Green und Stokes kennen und nutzen!



**Aufgabe:** Ein bewohnter Iglu werde beschrieben durch die Menge

$$I = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0 \}.$$

Der Wärmefluss im Iglu sei gegeben durch das Vektorfeld

$$f(x, y, z) = (x, y, 4z + x^2 + y^2 - 4).$$

- (1) Wieviel Wärme entsteht im Iglu  $I$  insgesamt?
- (2) Wieviel Wärme fließt durch den Boden  $B$  nach unten?
- (3) Wieviel Wärme fließt durch die Kuppel  $K$  nach außen?

**Lösung:** (1) Das Vektorfeld  $f$  hat konstante Quelledichte  $\text{div}(f) = 6$ . Dies entspricht homogener Wärmeezeugung im Inneren des Iglu. Die Gesamtmenge der im Iglu entstehenden Wärme ist demnach

$$\int_I \text{div}(f) dI = 6 \cdot \text{vol}_3(I) = 6 \cdot \frac{2}{3}\pi 2^3 = 32\pi.$$

(2) Der Boden des Iglu ist die Kreisscheibe

$$B = \{ (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4 \}.$$

Die äußere Einheitsnormale ist hier konstant  $n_B = (0, 0, -1)$ . Also

$$\int_B f \cdot n_B d(x, y) \stackrel{\text{Def}}{=} \int_B (4 - x^2 - y^2) d(x, y) \quad \text{Flussintegral über } B$$

$$\stackrel{\text{Trafo}}{\stackrel{\text{C2b}}{=}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^2 (4 - \rho^2) \rho d\rho d\varphi \quad \text{Polarkoordinaten}$$

$$\stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} 2\pi \left[ 2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} \right]_{\rho=0}^2 = 2\pi(8 - 4) = 8\pi.$$

😊 Hier ist „ $B \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ “ bereits eben, dies nutzen wir zur Parametrisierung.

(3a) Die Kuppel des Iglu ist die obere Hemisphäre

$$K = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0 \}.$$

Wir sparen uns viel Arbeit durch den Satz von Gauß:

$$\int_I \text{div}(f) dI \stackrel{\text{Gauß}}{\stackrel{\text{G3a}}{=}} \int_{S=\partial I} f \cdot dS \stackrel{\text{Def}}{=} \int_B f \cdot dB + \int_K f \cdot dK$$

Hieraus lesen wir ab:  $\int_K f \cdot dK = 32\pi - 8\pi = 24\pi$ . (Dieser Iglu verliert demnach dreimal mehr Wärme über die Kuppel als über den Boden.)

(3b) Alternativ integrieren wir, etwa in Kugelkoordinaten  $\Phi: D \rightarrow K$ :

$$s = \Phi \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \mid 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right\}.$$

Die beiden Tangentialvektoren und der Normalenvektor sind:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi \\ -r \sin \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 \sin^2 \theta \cos \varphi \\ r^2 \sin^2 \theta \sin \varphi \\ r^2 \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}$$

😊 Der Normalenvektor  $d\Phi$  zeigt aus  $V$  heraus, Rechte-Hand-Regel.

Das Flussintegral des Vektorfeldes  $f$  über die Kuppel  $K$  ist demnach:

$$\int_{s \in K} f(s) \cdot dK = \int_D f(\Phi(\theta, \varphi)) \cdot \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) d(\theta, \varphi)$$

$$= \int_D \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ 4r \cos \theta + r^2 \sin^2 \theta - 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r^2 \sin^2 \theta \cos \varphi \\ r^2 \sin^2 \theta \sin \varphi \\ r^2 \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} d(\theta, \varphi)$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} r^3 \sin^3 \theta + 4r^3 \sin \theta \cos^2 \theta + r^4 \sin^3 \theta \cos \theta - 4r^2 \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi$$

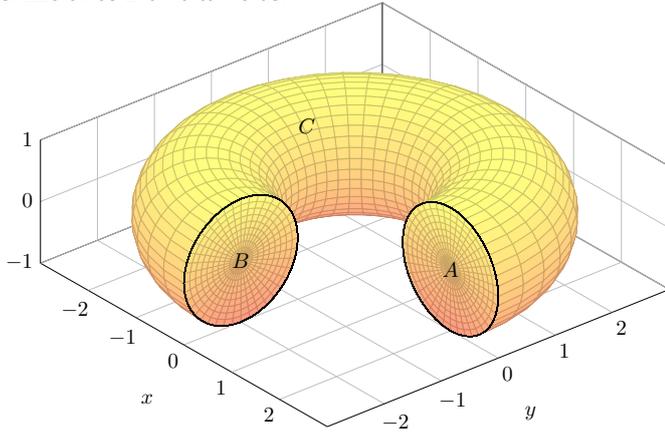
Spätestens hier verfluchen wir unsere Wahl dieses Rechenweges... Umso mehr preisen wir den wunderbar nützlichen Satz von Gauß!

Zum Glück sind dies Standardintegrale der Form  $\int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin^p \theta \cos^q \theta d\theta$ . Geduldiges Ausrechnen / Nachschlagen ergibt (für den Radius  $r = 2$ ):

$$\int_{s \in K} f(s) \cdot dK = \dots = \frac{\pi}{2} r^2 (r^2 + 8r - 8) = 24\pi$$

😊 Diese Beispiel illustriert erneut den Nutzen unserer Integralsätze.

Skizze eines Dreiviertel-Torus:



**Aufgabe:** Sei  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  der oben skizzierte Dreiviertel-Volltorus.

- (1) Parametrisieren Sie den Körper  $V$  in Toruskoordinaten, sowie die Kreisscheiben  $A$  und  $B$  und die Mantelfläche  $C$ .
- (2) Bestimmen Sie Volumen  $\text{vol}_3(V)$  und Oberflächeninhalt  $\text{vol}_2(\partial V)$ .
- (3) Berechnen Sie die Divergenz und die Rotation des Vektorfeldes

$$f(x, y, z) = (x, y, x^2 + 4(y + 2)^3).$$

- (4) Berechnen Sie den Fluss von  $f$  durch  $S = \partial V$  nach außen.
- (5a) Berechnen Sie den Fluss von  $\text{rot}(f)$  durch  $A$  nach außen.
- (5b) Berechnen Sie den Fluss von  $\text{rot}(f)$  durch  $B$  nach außen.
- (5c) Folgern Sie den Fluss von  $\text{rot}(f)$  durch  $C$  nach außen

☺ Diese Aufgabe übt, Flächen- und Volumenintegrale möglichst effizient einzusetzen. Zur Vereinfachung nutzen wir womöglich die Integralsätze und für Rotationskörper auch die Guldinschen Regeln.

(1) In Toruskoordinaten mit  $R = 2$  und  $r = 1$  wird  $V$  beschrieben durch

$$V = \left\{ \left( \begin{array}{l} (R + \rho \sin \theta) \cos \varphi \\ (R + \rho \sin \theta) \sin \varphi \\ \rho \cos \theta \end{array} \right) \mid \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq r \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq 3\pi/2 \end{array} \right\}.$$

Die Randfläche  $S = \partial V$  besteht aus der Kreisscheibe  $A$  für  $\varphi = 0$ , der Kreisscheibe  $B$  für  $\varphi = 3\pi/2$ , sowie der Mantelfläche  $C$  für  $\rho = r$ :

$$A = \left\{ \left( \begin{array}{l} R + \rho \sin \theta \\ 0 \\ \rho \cos \theta \end{array} \right) \mid \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq r \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array} \right\}$$

$$B = \left\{ \left( \begin{array}{l} 0 \\ -R - \rho \sin \theta \\ \rho \cos \theta \end{array} \right) \mid \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq r \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array} \right\}$$

$$C = \left\{ \left( \begin{array}{l} (R + r \sin \theta) \cos \varphi \\ (R + r \sin \theta) \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{array} \right) \mid \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq 3\pi/2 \end{array} \right\}$$

(2) Nach den Guldinschen Regeln G2B finden wir:

$$\text{vol}_3(V) = \frac{3}{4} \cdot \pi r^2 \cdot 2\pi R = 3\pi^2$$

$$\text{vol}_2(\partial V) = \pi r^2 + \pi r^2 + \frac{3}{4} \cdot 2\pi r \cdot 2\pi R = 2\pi r^2 + 3\pi^2 r R$$

(3) Wir berechnen  $\text{div}(f) = 2$  und  $\text{rot}(f) = (12(y + 2)^2, -2x, 0)$ .

(4) Das Flussintegral gelingt am einfachsten mit dem Satz von Gauß:

$$\int_S f \cdot dS = \int_V \text{div}(f) dV = \int_V 2 dV = 2 \text{vol}_3(V) = 6\pi^2.$$

Wir könnten das Flussintegral  $\int_S f \cdot dS$  auch direkt ausrechnen, indem wir über  $A$  und  $B$  und  $C$  integrieren. Das ist aber mühsamer. Wer keine länglichen Rechnungen scheut, versuche dies als Übung!

☺ Leistungsstarke Theorie ermöglicht effiziente Berechnung. Wir lassen die Integralsätze einen großen Teil der Arbeit erledigen.

(5a) Hier hilft kein Trick, wir müssen einfach die Definition nutzen und ausrechnen. ... Normalenvektor zu  $\Phi(\rho, \theta) = (2 + \rho \sin \theta, 0, \rho \cos \theta)$ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \rho \cos \theta \\ 0 \\ -\rho \sin \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho \\ 0 \end{pmatrix}$$

Plausibilitätscheck: Dies ist die äußere Einheitsnormale  $(0, -1, 0)$  mal der Funktionaldeterminante  $\rho$ . Als Flussintegral erhalten wir demnach:

$$\begin{aligned} \int_A \text{rot}(f) \cdot dA &= \int_A 2x |dA| = \int_{\rho=0}^1 \int_{\theta=0}^{2\pi} 2(2 + \rho \sin \theta) \rho d\theta d\rho \\ &= \int_{\rho=0}^1 8\pi \rho d\rho = [4\pi \rho^2]_{\rho=0}^1 = 4\pi \end{aligned}$$

(5b) Hier hilft kein Trick, wir müssen einfach die Definition nutzen und ausrechnen. ... Normalenvektor zu  $\Phi(\rho, \theta) = (0, -2 - \rho \sin \theta, \rho \cos \theta)$ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho \cos \theta \\ -\rho \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Plausibilitätscheck: Dies ist die äußere Einheitsnormale  $(1, 0, 0)$  mal der Funktionaldeterminante  $\rho$ . Als Flussintegral erhalten wir demnach:

$$\begin{aligned} \int_B \text{rot}(f) \cdot dB &= \int_B 12(y + 2)^2 |dB| = \int_{\rho=0}^1 \int_{\theta=0}^{2\pi} 12\rho^3 \sin^2 \theta d\theta d\rho \\ &= \int_{\rho=0}^1 12\pi \rho^3 d\rho = [3\pi \rho^4]_{\rho=0}^1 = 3\pi \end{aligned}$$

(5c) Mantelfläche  $C$ ? Nach dem Integralsatz von Stokes gilt

$$\int_A \text{rot}(f) \cdot dA + \int_B \text{rot}(f) \cdot dB + \int_C \text{rot}(f) \cdot dC \stackrel{\text{Def}}{=} \int_S \text{rot}(f) \cdot dS \stackrel{\text{Stokes}}{\stackrel{\text{G3E}}{=}} \int_{\partial S} f \cdot ds \stackrel{\partial S = \emptyset}{=} 0$$

☺ Ohne weitere Mühe folgt  $\int_C \text{rot}(f) \cdot dC = -7\pi$ . Dies folgt ebenso aus dem Integralsatz von Gauß, denn  $\text{div} \text{rot}(f) = 0$ . Das Flussintegral  $\int_C \text{rot}(f) \cdot dC$  kann man auch direkt ausrechnen, das ist aber mühsamer.

**Aufgabe:** (1) Seien  $r, h > 0$  reelle Zahlen. Skizzieren Sie den Körper  $V \subseteq \mathbb{R}^3$ , der begrenzt wird durch  $z = 0$  und  $z = h$  und  $x^2 + y^2 = r^2$ .

(2) Berechnen Sie zum Vektorfeld  $f(x, y, z) = (x^4 y, -2x^3 y^2, z^2)$  die Divergenz und den Fluss von  $f$  durch den Rand  $\partial V$  nach außen.

**Lösung:** (1) Der angegebene Körper  $V$  ist ein Zylinder der Höhe  $h$  über einer Kreisscheibe  $D$  vom Radius  $r$  als Grundfläche:

$$V = \left\{ \left( \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right) \mid \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leq r^2 \\ 0 \leq z \leq h \end{array} \right\} = \left\{ \left( \begin{array}{l} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{array} \right) \mid \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq r \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq h \end{array} \right\}$$

(2) Die Divergenz ist leicht auszurechnen:

$$\text{div} f(x, y, z) = 4x^3 y - 4x^3 y + 2z = 2z$$

Wir könnten das Flussintegral  $\int_{\partial V} f \cdot dS$  direkt ausrechnen, indem wir die Randfläche  $S = \partial V$  in Mantel, Deckel und Boden zerlegen, usw. Wer keine länglichen Rechnungen scheut, versuche dies als Übung!

Alternativ können wir den Satz von Gauß anwenden: Die Divergenz ist hier leicht, und der Rotationskörper  $V$  ist einfach zu beschreiben! Das Volumenintegral gelingt leicht in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} f \cdot dS &\stackrel{\text{Gauß}}{\stackrel{\text{G3G}}{=}} \int_V \text{div}(f) dV \stackrel{\text{Trafo}}{\stackrel{\text{C2B}}{=}} \int_{\rho=0}^r \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^h 2z \cdot \rho dz d\varphi d\rho \\ &\stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} \int_{\rho=0}^r \int_{\varphi=0}^{2\pi} [z^2 \rho]_{z=0}^h d\varphi d\rho = \int_{\rho=0}^r \int_{\varphi=0}^{2\pi} h^2 \rho d\varphi d\rho \\ &\stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} \int_{\rho=0}^r 2\pi h^2 \rho d\rho \stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} \pi h^2 r^2 \end{aligned}$$

Ebenso leicht gelingt das Integral in kartesischen Koordinaten:

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} f \cdot dS &\stackrel{\text{Gauß}}{\stackrel{\text{G3G}}{=}} \int_V \text{div}(f) dV \stackrel{\text{Fub}}{\stackrel{\text{C1E}}{=}} \int_{(x,y) \in D} \int_{z=0}^h 2z dz d(x, y) \\ &\stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} \int_{(x,y) \in D} [z^2]_{z=0}^h d(x, y) = \int_{(x,y) \in D} h^2 d(x, y) \\ &\stackrel{\text{Lim}}{\stackrel{\text{A3L}}{=}} h^2 \int_{(x,y) \in D} d(x, y) = \pi h^2 r^2 \end{aligned}$$

Die folgende Aufgabe übt den sicheren Umgang mit Rotationskörpern. Sie kennen bereits den Torus (G225), wir variieren nun dieses Thema:

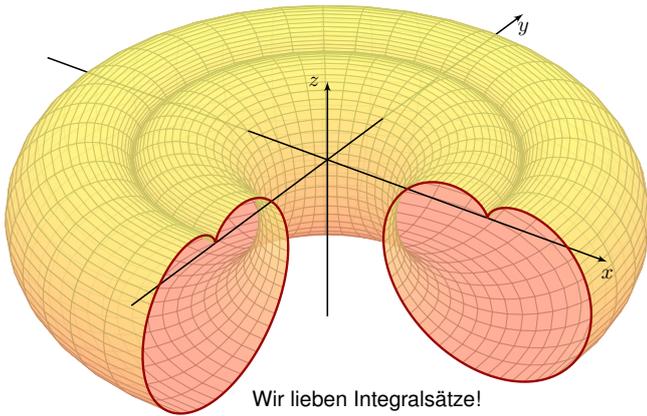
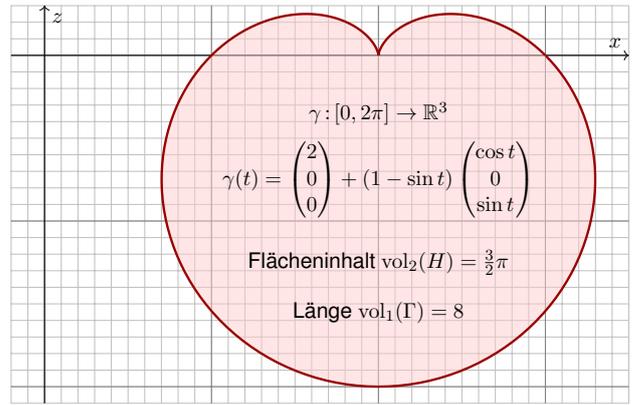
**Aufgabe:** (1) Zeichnen Sie in der  $x$ - $z$ -Ebene die Herzkurve

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (1 - \sin t) \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Wie berechnen Sie hieraus die Länge der durchlaufenen Kurve  $\Gamma$  und den Flächeninhalt des umlaufenen Bereichs  $H$  in der  $x$ - $z$ -Ebene?

- (2) Zeichnen und parametrisieren Sie den Rotationskörper  $R$ , der aus  $H$  durch Rotation um die  $z$ -Achse entsteht, sowie seine Mantelfläche  $M$ .
- (3) Bestimmen Sie das Volumen  $\text{vol}_3(R)$  und den Flächeninhalt  $\text{vol}_2(M)$ . Welche Rechenwege kennen Sie? Welcher scheint am effizientesten?
- (4) Berechnen Sie zum Vektorfeld  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (0, 0, z)$  das Flussintegral durch die Mantelfläche  $M = \partial R$  nach außen:
  - (a) direkt durch Einsetzen in die Definition und (b) per Integralsatz.

**Lösung:** (1) Die Herzkurve kennen wir aus Kapitel E (Seite E217).



(2) Dank (1) sind Zeichnung und Parametrisierungen leicht:

$$\Psi : \mathbb{R}^3 \supseteq [0, 2\pi] \times H \rightarrow R : \Psi \begin{pmatrix} \varphi \\ x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \varphi \\ x \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Phi : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow M : \Phi \begin{pmatrix} \varphi \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \cos \varphi \\ \gamma_1(t) \sin \varphi \\ \gamma_3(t) \end{pmatrix}$$

(3) Mit (2) können wir das Volumen und den Flächeninhalt ausrechnen. Wesentlich leichter gelingt dies mit den Guldinschen Regeln (G2B):

$$\text{vol}_3(R) = \text{vol}_2(H) \cdot 2\pi d(H) = \frac{3}{2}\pi \cdot 4\pi = 6\pi^2$$

$$\text{vol}_2(M) = \text{vol}_1(\Gamma) \cdot 2\pi d(\Gamma) = 8 \cdot 4\pi = 32\pi$$

Warum geht das so einfach? Hier helfen geometrisches Verständnis und die passenden Sätze! Wir kennen aus Kapitel E die Länge  $\text{vol}_1(\Gamma) = 8$  der Herzkurve  $\Gamma$  und den Flächeninhalt  $\text{vol}_2(H) = \frac{3}{2}\pi$  der so umlaufenen Herzfläche  $H$ , siehe Seite E217. Aufgrund der Symmetrie von  $\Gamma$  und  $H$  müssen wir ihre Schwerpunkte nicht mühsam berechnen, sondern können aus unserer Skizze sofort ihren Abstand zur Rotationsachse ablesen:  $d(\Gamma) = d(H) = 2$ .

(4) Physikalische Interpretation: Das Vektorfeld  $f(x, y, z) = (0, 0, z)$  entspricht der Auftriebskraft (genauer dem Druck, also Kraft pro Fläche) in einem homogenen Medium konstanter Dichte, etwa Wasser oder Luft. Wir haben also genau die Situation des archimedischen Prinzips! [G321](#)

Daher stehen wir im Folgenden vor zwei möglichen Rechnungen. Wir verstehen beide sowohl mathematisch als auch physikalisch:

- (a) Wir können direkt die Definition des Flussintegrals einsetzen; wir erhalten dann den Fluss, hier interpretiert als Gesamtkraft.
- (b) Wir können den Integralsatz von Gauß zur Umrechnung nutzen; wir erhalten dann die Auftriebskraft des verdrängten Volumens.

Die Sichtweise (a) ist physikalisch motiviert: Der Wert interessiert uns! Die Sichtweise (b) ist leichter auszurechnen und zu verstehen: Das hilft!

😊 Leistungsstarke Theorie ermöglicht effiziente Berechnung. Wir lassen die Integralsätze einen großen Teil der Arbeit erledigen.

(4a) Zunächst die direkte Lösung durch Einsetzen in die Definition. Wir berechnen die Tangentialvektoren und den Normalenvektor:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \begin{pmatrix} -\gamma_1(t) \sin \varphi \\ \gamma_1(t) \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \cos \varphi \\ \gamma_1'(t) \sin \varphi \\ \gamma_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ -\gamma_1'(t) \gamma_1(t) \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir das Flussintegral

$$\int_M f \cdot dM = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_3(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ -\gamma_1'(t) \gamma_1(t) \end{pmatrix} dt d\varphi$$

$$= -2\pi \int_{t=0}^{2\pi} \gamma_1(t) \gamma_1'(t) \gamma_3(t) dt$$

Wir setzen nun die Parametrisierung des Randes ein:

$$\gamma_1(t) = 2 + \cos t + \sin t \cos t$$

$$\gamma_3(t) = \sin t + \sin^2 t$$

Wir erhalten einen etwas länglichen Integranden:

$$\int_{t=0}^{2\pi} \gamma_1(t) \gamma_1'(t) \gamma_3(t) dt$$

$$= \int_{t=0}^{2\pi} [2 + \cos t - \sin t \cos t] \cdot [-\sin t - \cos^2 t + \sin^2 t] \cdot [\sin t - \sin^2 t] dt$$

Hier hilft sorgsames Ausmultiplizieren und geduldiges Integrieren. . . Versuchen Sie es! Es ist vielleicht nicht spaßig, aber doch lehrreich. . . Einige Integrale sind Null aus Symmetriegründen. Es bleibt schließlich:

$$\int_{t=0}^{2\pi} \gamma_1(t) \gamma_1'(t) \gamma_3(t) dt = -3\pi$$

- 😊 Für das gesuchte Flussintegral erhalten wir so  $\int_M f \cdot dM = 6\pi^2$ .
- 😞 Das war leider mühsam. Gibt es einen leichteren Weg? Ja!

(4b) Das Integral gelingt am einfachsten mit dem Satz von Gauß:

$$\int_M f \cdot dM = \int_R \text{div}(f) d(x, y, z) = \int_R 1 d(x, y, z) = \text{vol}_3(R) = 6\pi^2$$

In Worten: Das Flussintegral von  $f$  über die Randfläche  $M = \partial R$  nach außen ist gleich dem Volumenintegral von  $\text{div } f$  über den Körper  $R$ . Wegen  $\text{div } f = 1$  ist Letzteres hier einfach nur das Volumen  $\text{vol}_3(R)$ .

- 😊 Diese Umformung vereinfacht erheblich unsere Rechnung.
- 😊 Sie illustriert zudem nochmal das archimedische Prinzip.

Damit endet dieses Kapitel wie es begann, nämlich mit anschaulichen, konkreten, handfesten physikalischen Anwendungen. Die Integralsätze von Gauß und Stokes sind grundlegende Rechenregeln und Hilfsmittel. Sie werden überall in den Natur- und Ingenieurwissenschaften genutzt. Zur Illustration und zur Einübung gebe ich hierzu im nächsten Kapitel weitere physikalisch-technische Anwendungsbeispiele.

**Aufgabe:** Für je zwei Vektoren  $u, v \in \mathbb{R}^3$  gilt

$$|u \times v|^2 = \det \begin{pmatrix} u \cdot u & v \cdot u \\ u \cdot v & v \cdot v \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie dies (1) durch geduldiges Ausrechnen sowie (2) geometrisch.

**Lösung:** (1) Wir rechnen in kartesischen Koordinaten:

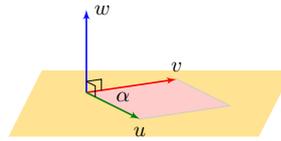
$$u \times v = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

$$|u \times v|^2 = +u_2^2 v_3^2 + u_3^2 v_2^2 - 2u_2 v_2 u_3 v_3 + u_3^2 v_1^2 + u_1^2 v_3^2 - 2u_1 v_1 u_3 v_3 + u_1^2 v_2^2 + u_2^2 v_1^2 - 2u_1 v_1 u_2 v_2$$

$$\det \begin{pmatrix} u \cdot u & v \cdot u \\ u \cdot v & v \cdot v \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 & u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \\ u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 & v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \end{pmatrix}$$

☺ Ausmultiplizieren und vereinfachen: Beide stimmen überein!

(2) Ausrechnen ist gut, zudem wollen wir geometrisches Verständnis:



Das Kreuzprodukt  $w = u \times v$  steht senkrecht auf den Vektoren  $u, v$ . Seine Norm  $|w| = |u| \cdot |v| \cdot \sin \angle(u, v)$  ist der Flächeninhalt des von  $u, v$  aufgespannten Parallelogramms.

Stehen  $u$  und  $v$  senkrecht, also  $u \cdot v = 0$ , so folgt  $|w| = |u| \cdot |v|$ , somit

$$|u \times v|^2 = \det \begin{pmatrix} u \cdot u & 0 \\ 0 & v \cdot v \end{pmatrix}.$$

Andernfalls orthogonalisieren wir  $v$  bezüglich  $u$  durch  $v' = v - \lambda u$  mit  $\lambda = (v \cdot u)/(u \cdot u)$ . Dadurch wird die Matrix diagonal, denn  $u \cdot v' = 0$ ; Kreuzprodukt und Determinante bleiben unverändert erhalten.

☺ Das Kreuzprodukt nützt uns nur für Flächen im  $\mathbb{R}^3$ . Die Gramsche Determinante hingegen nützt in jeder Dimension. Anwendung / Ausblick: So integrieren wir im  $\mathbb{R}^n$  auf  $k$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten.

Sei  $\Phi: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$  ein parametrisiertes Flächenstück. Die **erste Fundamentalform** von  $\Phi$  ist die folgende Matrix:

$$g^\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad g^\Phi = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \partial_x \Phi \cdot \partial_x \Phi & \partial_y \Phi \cdot \partial_x \Phi \\ \partial_x \Phi \cdot \partial_y \Phi & \partial_y \Phi \cdot \partial_y \Phi \end{pmatrix}$$

Sie gibt an, wie die Tangentialebene an  $(x, y)$  in  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  abgebildet wird auf die Tangentialebene am Punkt  $s = \Phi(x, y)$  in der Bildfläche  $S \subseteq \mathbb{R}^3$ . Wir nennen  $g^\Phi$  auch den **metrischen Tensor** der Parametrisierung  $\Phi$ . Er beschreibt vollständig die innere Geometrie der Fläche  $S \subseteq \mathbb{R}^3$ .

**Aufgabe:** Wie liest man der ersten Fundamentalform  $g^\Phi$  ab, (1) ob  $\Phi$  flächentreu ist? (2) winkeltreu? (3) längentreu? Welche Beziehung gilt?

**Lösung:** (1) Flächentreue folgt aus der (Gramschen) Determinante:

$$\Phi \text{ ist flächentreu} \iff \det(g^\Phi) = 1$$

Genauer und allgemeiner: Der Faktor  $\sqrt{|\det(g^\Phi)|} = |\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi|$  ist die Flächenverzerrung, wie wir in der vorigen Aufgabe ausgerechnet haben.

(2) Für Winkeltreue müssen  $\partial_x \Phi$  und  $\partial_y \Phi$  senkrecht stehen und gleiche Länge  $\lambda$  haben (sonst stehen die Diagonalen nicht mehr senkrecht):

$$\Phi \text{ ist winkeltreu (konform)} \iff g^\Phi = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

(3) Die Länge eines Weges  $\gamma: [a, b] \rightarrow D \subseteq \mathbb{R}^2$  mit  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  ist

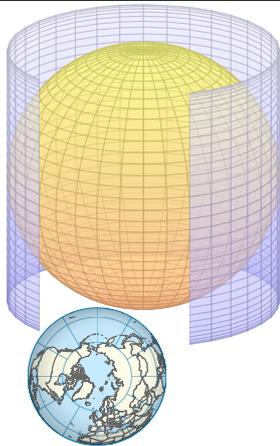
$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt.$$

Die Länge des Weges  $\Phi \circ \gamma: [a, b] \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$  ist entsprechend

$$\ell(\Phi \circ \gamma) = \int_a^b |\Phi'(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t)| dt = \int_a^b \sqrt{g_{11} \dot{x}(t)^2 + 2g_{12} \dot{x}(t) \dot{y}(t) + g_{22} \dot{y}(t)^2} dt.$$

Gleichheit für alle Wege  $\gamma$  gilt nur, falls  $g_{11} = g_{22} = 1$  und  $g_{12} = g_{21} = 0$ :

$$\Phi \text{ ist längentreu (isometrisch)} \iff g^\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \Phi \text{ ist winkel- und flächentreu}$$



Lambert-Projektion (1772)  
flächentreu, aber nicht winkeltreu



Mercator-Projektion (1569)  
winkeltreu, aber nicht flächentreu

Fun fact: Grönland (2.2 Mio km<sup>2</sup>) passt 14mal in Afrika (30.3 Mio km<sup>2</sup>).

**Aufgabe:** Wir wickeln das Rechteck  $D = [0, 2\pi] \times [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$  auf den Zylinder  $Z = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, -1 \leq z \leq 1 \} \subseteq \mathbb{R}^3$ .

(1) Formulieren Sie explizit diese Parametrisierung  $\Phi: D \rightarrow Z$ .

(2) Ist  $\Phi$  flächentreu? oder winkeltreu? oder gar längentreu?

**Lösung:** (1) Wir bestimmen Parametrisierung und Tangentialvektoren:

$$\Phi: D = [0, 2\pi] \times [-1, 1] \rightarrow Z, \quad \Phi(\varphi, z) = (\cos \varphi, \sin \varphi, z)$$

$$\partial_\varphi \Phi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0), \quad \partial_z \Phi = (0, 0, 1)$$

(2) Die erste Fundamentalform beschreibt die geometrische Verzerrung:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_\varphi \Phi \cdot \partial_\varphi \Phi & \partial_z \Phi \cdot \partial_\varphi \Phi \\ \partial_\varphi \Phi \cdot \partial_z \Phi & \partial_z \Phi \cdot \partial_z \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Daher ist  $\Phi$  längentreu, somit insbesondere winkel- und flächentreu.

Zum Vergleich nochmal die Flächenverzerrung übers Kreuzprodukt:

$$\partial_\varphi \Phi \times \partial_z \Phi = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) \Rightarrow |\partial_\varphi \Phi \times \partial_z \Phi| = 1$$

Intrinsisch gesehen ist der Zylinder  $Z$  flach, seine Geometrie ist lokal dieselbe wie die des ebenen Rechtecks  $D$ , nicht aber seine Lage im  $\mathbb{R}^3$ .

**Aufgabe:** (Lambert-Projektion) Wir projizieren den Zylinder  $Z$  axial auf die Einheitskugel  $S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \} \subseteq \mathbb{R}^3$ .

(1) Formulieren Sie diese Abbildung  $\Phi: D = [0, 2\pi] \times [-1, 1] \rightarrow S$ .

(2) Ist  $\Phi$  flächentreu? oder winkeltreu? oder gar längentreu?

**Lösung:** (1) Wir bestimmen Parametrisierung und Tangentialvektoren:

$$\Phi(\varphi, z) = (\sqrt{1-z^2} \cos \varphi, \sqrt{1-z^2} \sin \varphi, z)$$

$$\partial_\varphi \Phi(\varphi, z) = (-\sqrt{1-z^2} \sin \varphi, \sqrt{1-z^2} \cos \varphi, 0)$$

$$\partial_z \Phi(\varphi, z) = (-z/\sqrt{1-z^2} \cos \varphi, -z/\sqrt{1-z^2} \sin \varphi, 1)$$

(2) Die erste Fundamentalform beschreibt die geometrische Verzerrung:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_\varphi \Phi \cdot \partial_\varphi \Phi & \partial_z \Phi \cdot \partial_\varphi \Phi \\ \partial_\varphi \Phi \cdot \partial_z \Phi & \partial_z \Phi \cdot \partial_z \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-z^2 & 0 \\ 0 & 1/(1-z^2) \end{pmatrix}$$

Daher ist  $\Phi$  flächentreu, aber nicht winkeltreu (auch nicht längentreu). Intrinsisch gesehen ist der Zylinder  $Z$  flach, die Kugel  $S$  gekrümmt. Keine Abbildung  $Z \rightarrow S$  ist sowohl flächen- als auch winkeltreu.

**Aufgabe:** (Mercator-Projektion) Wir projizieren den unendlichen Zylinder  $Z' = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 \}$  zentral auf die Sphäre  $S$ .

(1) Formulieren Sie diese Abbildung  $\Phi: D = [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \rightarrow S$ .

(2) Ist  $\Phi$  flächentreu? oder winkeltreu? oder gar längentreu?

**Lösung:** (1) Wir bestimmen Parametrisierung und Tangentialvektoren:

$$\Phi(\varphi, z) = (\cos \varphi, \sin \varphi, z)/\sqrt{1+z^2}$$

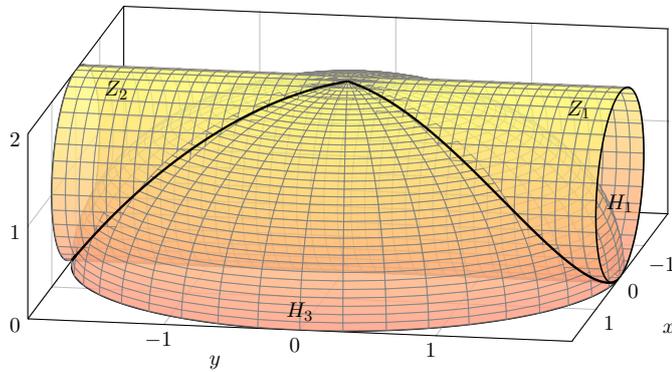
$$\partial_\varphi \Phi(\varphi, z) = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)/\sqrt{1+z^2}$$

$$\partial_z \Phi(\varphi, z) = (-z \cos \varphi, -z \sin \varphi, 1)/(1+z^2)^{3/2}$$

(2) Die erste Fundamentalform beschreibt die geometrische Verzerrung:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_\varphi \Phi \cdot \partial_\varphi \Phi & \partial_z \Phi \cdot \partial_\varphi \Phi \\ \partial_\varphi \Phi \cdot \partial_z \Phi & \partial_z \Phi \cdot \partial_z \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/(1+z^2) & 0 \\ 0 & 1/(1+z^2) \end{pmatrix}$$

Daher ist  $\Phi$  winkeltreu, aber nicht flächentreu (auch nicht längentreu). Nahe des Äquators ist  $\Phi$  nahezu isometrisch, also auch flächentreu. Nahe den Polen wird die Flächenverzerrung dramatisch (siehe Skizze).



Die vorigen Aufgaben üben die Schritte von Un/Gleichungen zum Bild und zur Parametrisierung. In dieser Aufgabe beginnen wir mit dem Bild. Sie ist eine Variante einer architektonisch-geometrischen Fragestellung, die Vincenzo Viviani, ein Schüler Galileos, 1692 vorschlug und löste.

- Aufgabe:** (1) Beschreiben Sie gemäß obiger Skizze den Zylinder  $Z$  und die Hemisphäre  $H$  in  $\mathbb{R}^3$  durch geeignete Un/Gleichungen.  
 (2) Parametrisieren Sie die Schnittkurve  $\Gamma = Z \cap H$  und berechnen Sie ihre Länge  $\text{vol}_1(\Gamma)$  soweit möglich (bis zu einem elliptischen Integral).  
 (3) Die Kurve  $\Gamma$  zerlegt die Fläche  $Z$ : Parametrisieren Sie jedes der drei Flächenstücke  $Z_1, Z_2, Z_3$  und berechnen Sie den Flächeninhalt  $\text{vol}_2(Z_i)$ . Erstes Wunder: Der Flächeninhalt  $\text{vol}_2(Z_3)$  ist rational, sogar ganzzahlig.  
 (4) Berechnen Sie ebenso  $H_1$  (in  $x$ - $z$ -Polarkoordinaten) und damit  $H_3$ . Zweites Wunder: Es gilt  $\text{vol}_2(Z_1) = \text{vol}_2(H_1)$  und  $\text{vol}_2(Z_3) = 2 \text{vol}_2(H_3)$ .  
 (5) Das zweite Wunder folgt geometrisch aus der Lambert-Projektion.  
 😊 Geometrisches Verständnis überprüft bzw. ersetzt die Rechnung.

**Lösung:** (1) Der vorgelegten Skizze entnehmen wir:

$$Z = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2 \leq y \leq 2, x^2 + (z-1)^2 = 1 \}$$

$$H = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0 \}$$

- (2) Wir wählen  $z = 1 + \cos(t)$  und  $x = \sin(t)$  auf  $Z$ . Auf  $H$  erhalten wir:  
 $y^2 = 4 - x^2 - z^2 = 2 - 2 \cos(t) = 4 \sin^2(t/2)$

Der Weg  $\gamma: [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\gamma(t) = (\sin(t), 2 \sin(t/2), 1 + \cos(t))$  durchläuft  $\Gamma = Z \cap H$  einmal komplett, tatsächlich beide Schleifen.

$$\gamma'(t) = (\cos(t), \cos(t/2), -\sin(t))$$

$$|\gamma'(t)|^2 = \cos^2(t) + \cos^2(t/2) + \sin^2(t) = 1 + \cos(t/2)^2$$

$$\text{vol}_1(\Gamma) = \int_0^{4\pi} \sqrt{1 + \cos(t/2)^2} dt \approx 15.2808$$

Dieses elliptische Integral können wir leider nur numerisch auswerten. Plausibilitätscheck: Schraubenlinie (kürzester Weg)  $4\sqrt{\pi^2 + 2^2} \approx 14.897$ .

(3) Wir berechnen den Flächeninhalt des rechten Flächenstücks:

$$Z_1 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + (z-1)^2 = 1, \sqrt{4-x^2-z^2} \leq y \leq 2 \}$$

$$\text{vol}_2(Z_1) = \int_{t=0}^{2\pi} [2 - 2 \sin(t/2)] dt = [2t + 4 \cos(t/2)]_{t=0}^{2\pi} = 4\pi - 4 - 4 = 4\pi - 8 \approx 4.566 \quad (\text{plausibel nach Skizze})$$

Ebenso erhalten wir für das linke und mittlere Flächenstück  $Z_2$  und  $Z_3$  die Flächeninhalte  $\text{vol}_2(Z_2) = 4(\pi - 2)$  und  $\text{vol}_2(Z_3) = 16$ . Rational!

(4) Wir berechnen den Flächeninhalt des rechten Flächenstücks:

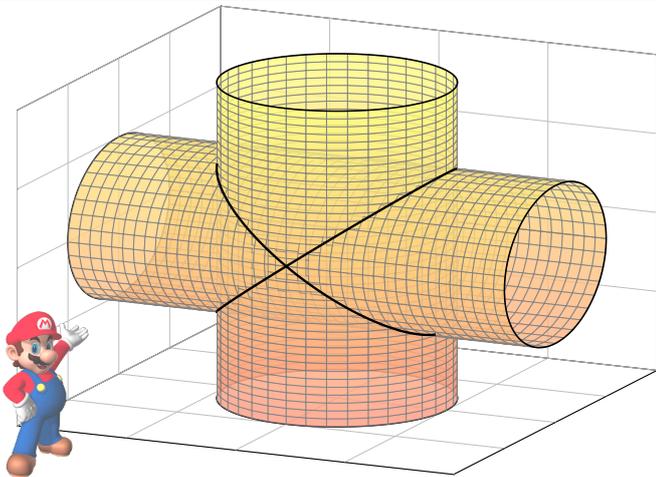
$$H_1 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + (z-1)^2 \leq 1, x^2 + y^2 + z^2 = 4 \}$$

$$\Phi \begin{pmatrix} \varphi \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \sqrt{4-\rho^2} \\ \rho \sin \varphi \end{pmatrix} \quad \text{auf } D = \left\{ \begin{pmatrix} \varphi \\ \rho \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \rho \leq 2 \sin \varphi \right\}$$

$$\partial_\varphi \Phi \times \partial_\rho \Phi = \begin{pmatrix} -\rho \sin \varphi \\ 0 \\ +\rho \cos \varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ -\rho/\sqrt{4-\rho^2} \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho^2/\sqrt{4-\rho^2} \cos \varphi \\ \rho \\ \rho^2/\sqrt{4-\rho^2} \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(H_1) &= \int_D |\partial_\varphi \Phi \times \partial_\rho \Phi| d(\varphi, \rho) = \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\rho=0}^{2 \sin \varphi} \frac{2\rho}{\sqrt{4-\rho^2}} d\rho d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{\pi} [-2\sqrt{4-\rho^2}]_{\rho=0}^{2 \sin \varphi} d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\pi} 4 - 4|\cos \varphi| d\varphi \\ &= 8 \int_{\varphi=0}^{\pi/2} 1 - \cos \varphi d\varphi = 8 [\varphi - \sin \varphi]_{\varphi=0}^{\pi/2} = 4\pi - 8 \approx 4.566 \end{aligned}$$

Aus  $\text{vol}_2(H) = 8\pi = 2 \text{vol}_2(H_1) + 2 \text{vol}_2(H_3)$  folgt  $\text{vol}_2(H_3) = 8$ . Rational!



**Aufgabe:** (1) Skizzieren Sie die beiden Zylinder

$$Z_1 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, -2 \leq z \leq 2 \},$$

$$Z_2 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \leq 1, -2 \leq y \leq 2 \}.$$

- (2) Berechnen Sie das Volumen der Schnittmenge  $K = Z_1 \cap Z_2$ . Beschreiben Sie  $K$  hierzu möglichst explizit als Normalbereich.  
 (3) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Randfläche  $\partial K$ . Parametrisieren Sie  $\partial K$  hierzu stückweise als Graph.  
 (4) In welchen Punkten ist die betrachtete Randfläche  $\partial K$  nicht glatt? Geometrisch: Wo erlaubt  $\partial K$  keine eindeutige Tangentialebene?  
 (5) Welche Form haben die beiden Schnittkurven  $\partial Z_1 \cap \partial Z_2$ ? Finden Sie implizite Gleichungen bzw. explizite Parametrisierungen.

😊 Dieser Durchdringungskörper ist nicht leicht zu visualisieren. Mit unseren Methoden gelingt die Rechnung dennoch leicht! Das ist ein halbwegs realistisches Beispiel eines Werkstücks: nicht ganz trivial aber noch gut mit Stift und Papier zu berechnen.

**Lösung:** (1) Die Skizze gibt einen Überblick, was zu beachten ist.

(2) Für  $K$  müssen wir nur  $x^2 + y^2 \leq 1$  und  $x^2 + z^2 \leq 1$  erfüllen, also:

$$-1 \leq x \leq 1, \quad -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, \quad -\sqrt{1-x^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2}$$

Hieraus erhalten wir das Volumen ganz leicht als iteriertes Integral:

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(K) &= \int_K 1 d(x, y, z) = \int_{x=-1}^1 \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{z=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 dz dy dx \\ &= \int_{x=-1}^1 \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2\sqrt{1-x^2} dy dx = \int_{x=-1}^1 4(1-x^2) dx \\ &= [4x - \frac{4}{3}x^3]_{x=-1}^1 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \quad (\text{rational, ohne } \pi) \end{aligned}$$

Plausibilitätscheck: Das ist größer als das Kugelvolumen  $\frac{4}{3}\pi r^3 \approx 4.189$ .

(3) Wir parametrisieren das obere der vier Flächenstücke als Graph:

$$\Phi: \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \right\} = D \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3, \quad \Phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1-x^2} \end{pmatrix}$$

Zur Flächenparametrisierung  $\Phi$  berechnen wir den Normalenvektor:

$$\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -x/\sqrt{1-x^2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/\sqrt{1-x^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Seine Länge (euklidische Norm) ist das Flächenelement:

$$|\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi|^2 = \frac{x^2}{1-x^2} + 0^2 + 1^2 = \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{1-x^2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

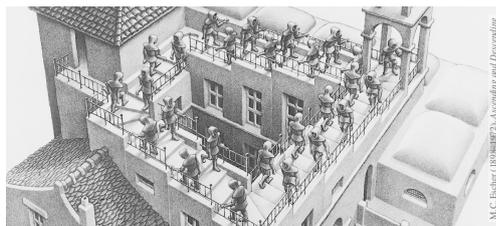
Den Flächeninhalt von  $S$  erhalten wir hieraus durch Integration:

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(S) &= \int_D |\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi| d(x, y) = \int_{x=-1}^1 \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dy dx \\ &= \int_{x=-1}^1 2 dx = 4 \quad \text{Am Ende geht's überraschend leicht!} \end{aligned}$$

Dank Symmetrie erhalten wir schließlich  $\text{vol}_2(\partial K) = 4 \text{vol}_2(S) = 16$ . Plausibilitätscheck: Das ist größer als die Kugeloberfläche  $4\pi r^2 \approx 12.567$ .

Kapitel H

Erste Anwendungen der Integralsätze



Alles sollte so einfach wie möglich gemacht werden  
— aber nicht noch einfacher.

Albert Einstein (1879–1955)

Inhalt dieses Kapitels H

- 1 Partielle Differentialgleichungen der Physik
  - Eulers Kontinuitätsgleichung
  - Fouriers Wärmeleitungsgleichung
  - Newtons Gravitationsgesetz
  - Maxwells Elektrodynamik
- 2 Vektorfelder und Potentiale
  - Konservative Vektorfelder
  - Rotationsfreie Vektorfelder
  - Einfach zusammenhängende Gebiete
  - Radialsymmetrische Felder und Potentiale
- 3 Fazit: Erste Anwendungen der Integralsätze
  - Zusammenfassung und Verständnisfragen
  - Weitere Aufgaben und Anwendungen
  - Notwendige und hinreichende Kriterien
  - Gegenläufige Wirbelfelder, Quadrupolis

Motivation und Zielsetzung

Nahezu jedes naturwissenschaftlich-technische Gebiet nutzt Integrale und Integralsätze. Im ersten Teil dieses Kapitels wenden wir sie zur Illustration auf vier zentrale und physikalisch relevante Probleme an:

- 1 Eulers Kontinuitätsgleichung:  
Wie verhalten sich strömende Flüssigkeiten?
- 2 Fouriers Wärmeleitungsgleichung:  
Wie berechnet man den Wärmefluss in einem Körper?
- 3 Newtons Gravitationsgesetz:  
Wie berechnet man das Gravitationsfeld einer Masse?
- 4 Maxwells Elektrodynamik:  
Wie breiten sich elektromagnetische Wellen aus?

Diese Problemstellungen sind auch mathematisch von zentraler Bedeutung, denn sie führen uns zu den drei Grundtypen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Diese werden wir mit weiteren Werkzeugen in späteren Kapiteln immer besser behandeln können. Mit unseren bisherigen Techniken wollen dies jetzt vorbereiten.

Motivation und Zielsetzung

Im zweiten Teil dieses Kapitels greifen wir das Potentialproblem auf, das Sie bereits aus der HM2 kennen: Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Unter welchen Bedingungen erlaubt ein Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^n \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Potential?

Wir suchen also zu  $f$  eine Stammfunktion  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\text{grad } F = f$ . Wenn dies möglich ist, so nennen wir  $f$  exakt (oder ein Gradientenfeld). Nicht jedes Vektorfeld  $f$  kommt solcherart von einem Potential. Wir fragen daher: Wie können wir feststellen, ob  $f$  exakt ist? Und wenn ja, wie können wir ein Potential berechnen?

Die Antwort hängt, wie Sie aus der HM2 wissen, zunächst vom Vektorfeld  $f$  ab: die lokale Integrabilitätsbedingung  $\text{rot}(f) = 0$  ist notwendig. Überraschenderweise ist sie noch nicht hinreichend: Die Antwort hängt zudem von der globalen Gestalt des Gebiets  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  ab! Mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes können wir dieses Problem nun vollständig lösen für konvexe Gebiete  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und allgemeiner für alle einfach zusammenhängenden Gebiete. Potentiale nützen uns überall, etwa in Kapitel M zur Lösung von exakten Differentialgleichungen.

Differentialoperatoren und Integralsätze

Wir nutzen hier zur Übung die dekorative Schreibweise der Physik. Als Abkürzung nützlich ist der **Nabla-Operator**  $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ .

Gradient:  $\text{grad } g = \nabla g = \left( \frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}, \frac{\partial g}{\partial x_3} \right)$

Rotation:  $\text{rot } \vec{f} = \nabla \times \vec{f} = \left( \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)$

Divergenz:  $\text{div } \vec{f} = \nabla \cdot \vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$

Laplace:  $\Delta g = \nabla^2 g = \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_3^2}$

Unsere **Integralsätze** schreiben wir dann in folgender Form:

HDI:  $\int_{\Gamma} (\nabla g) \cdot d\vec{s} = g(\vec{p}_{\text{Ziel}}) - g(\vec{p}_{\text{Start}})$

Stokes:  $\iint_S (\nabla \times \vec{f}) \cdot \vec{n} \, dS = \oint_{\partial S} \vec{f} \cdot d\vec{s}$

Gauß:  $\iiint_V \nabla \cdot \vec{f} \, dV = \iint_{\partial V} \vec{f} \cdot \vec{n} \, dS$

Differentialoperatoren und Integralsätze

Wer seriös arbeitet, gibt immer auch Definitions- und Wertebereich an: Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  ein Gebiet, also eine offene zusammenhängende Menge. Wir betrachten hier die Ortsvariable  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$  und ein stetig diff'bares Skalarfeld  $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  bzw. Vektorfeld  $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Das heißt, jedem Punkt  $\vec{x} \in \Omega$  wird eine Zahl  $g(\vec{x}) \in \mathbb{R}$  bzw. ein Vektor  $\vec{f}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^3$  zugeordnet. Die oben definierten Ableitungen sind demnach Skalarfelder  $\nabla \cdot \vec{f}, \Delta g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  bzw. Vektorfelder  $\nabla \times \vec{f}, \nabla g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Für den HDI sei  $\Gamma \subseteq \Omega$  eine stückweise glatte Kurve vom Startpunkt  $\vec{p} \in \Omega$  zum Zielpunkt  $\vec{q} \in \Omega$  mit vektoriellm Wegelement  $d\vec{s} = \vec{t} \, ds$ , also Einheitsstangente  $\vec{t} \in \mathbb{R}^3$  und skalarem Wegelement  $ds$ . Für Stokes sei  $S \subseteq \Omega$  eine stückweise glatte Fläche mit vektoriellm Flächenelement  $d\vec{S} = \vec{n} \, dS$ , also Einheitsnormale  $\vec{n}$  und skalarem Flächenelement  $dS$ . Für Gauß schließlich sei  $V \subseteq \Omega$  ein Kompaktum mit stückweise glatter Randfläche  $\partial V$  und dem üblichen Volumenelement  $dV = d(x_1, x_2, x_3)$ .

Dekoration als Gedächtnisstütze: Mehrfache Integralsymbole erinnern an die Dimension, der Krinkel an geschlossene Kurven bzw. Flächen. Unabhängig von der Schreibweise ist das Integral dasselbe wie zuvor.

Differentialoperatoren und Integralsätze

Wir nutzen in diesem Abschnitt §H1 diese dekorative Schreibweise, da sie insbesondere in der Physik gerne verwendet wird. In der Literatur finden Sie beide Notationen, daher sollten Sie beide problemlos lesen und verstehen — und gegebenenfalls ineinander übersetzen können.

Die eindimensionale **Differential- und Integralrechnung** führt wie gesehen direkt zur zwei- und dreidimensionalen **Vektoranalysis**. Die hier betonte Dimension 3 ist vor allem physikalisch motiviert; analoge Sätze und Rechentechniken gelten in jeder Dimension.

**Integralsätze** erlauben und erklären die nötigen Umrechnungen. In den vorigen Kapiteln haben wir die hierzu nötigen Kurven-, Flächen- und Volumenintegrale und hierbei geltenden Integralsätze diskutiert. In diesem Kapitel stelle ich einige klassische Anwendungen vor.

Nahezu alle Gesetzmäßigkeiten in Naturwissenschaft und Technik formuliert man üblicherweise als Integral- und Differentialgleichungen. Die in obigen Formeln zusammengefassten Rechentechniken sind daher Grundwerkzeuge für Ingenieur:innen und Naturwissenschaftler:innen.

Differentialoperatoren und Integralsätze

Unsere drei Differentialoperatoren auf  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  bilden folgende Sequenz:

$$0 \rightarrow C^\infty(\Omega, \mathbb{R}) \xrightarrow{\text{grad}} C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3) \xrightarrow{\text{rot}} C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3) \xrightarrow{\text{div}} C^\infty(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow 0$$

Folgende Identitäten nützen bei Potentialproblemen und Umformungen:

$$\begin{aligned} \text{rot grad } g &= 0 & \text{d.h.} \quad \nabla \times (\nabla g) &= 0 \\ \text{div rot } \vec{f} &= 0 & \text{d.h.} \quad \nabla \cdot (\nabla \times \vec{f}) &= 0 \\ \text{div grad } g &= \Delta g & \text{d.h.} \quad \nabla \cdot (\nabla g) &= \Delta g \\ \text{rot rot } \vec{f} &= \text{grad div } \vec{f} - \Delta \vec{f} & \text{d.h.} \quad \nabla \times (\nabla \times \vec{f}) &= \nabla(\nabla \cdot \vec{f}) - \nabla^2 \vec{f} \end{aligned}$$

**Aufgabe:** Rechnen Sie dies nach für zweimal stetig diff'bare Felder. Warum und wo genau benötigen Sie hier den Satz von Schwarz (D4A)?

**Lösung:** Wir setzen die Definition ein und rechnen es sorgsam aus:

$$\text{rot grad } g = (\partial_2 \partial_3 g - \partial_3 \partial_2 g, \partial_3 \partial_1 g - \partial_1 \partial_3 g, \partial_1 \partial_2 g - \partial_2 \partial_1 g)$$

Wenn  $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar ist, so können wir den Satz von Schwarz anwenden: Es gilt  $\partial_i \partial_j g = \partial_j \partial_i g$ , also  $\text{rot grad } g = 0$ . Die anderen Gleichungen rechnet man ebenso geduldig nach. Übung!

**Ziel:** Wie verhalten sich Strömungen? Welche Gleichungen gelten hier?



Luft- und Wasserströmung um die Kanarischen Inseln

(0) Wie beschreiben Sie eine Strömung in einem Gebiet  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  über ein Zeitintervall  $I = [t_0, t_1]$ ? Geschwindigkeit  $\vec{v}: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3: (t, \vec{x}) \mapsto \vec{v}(t, \vec{x})$  und Massendichte  $\rho: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}: (t, \vec{x}) \mapsto \rho(t, \vec{x})$  und evtl. weitere Daten. Die Massenstromdichte  $\rho\vec{v}: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  beschreibt den Massenfluss. Im Strömungsbereich  $\Omega$  werde Masse weder erzeugt noch vernichtet.

**Aufgabe:** Welche Beziehung folgt aus der Massenerhaltung?

- Sei  $K \Subset \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  kompakt, etwa ein Würfel. Formulieren Sie die Massenbilanz für  $K$  in Worten und als Volumen-/Flussintegrale.
- Formen Sie dies um zu einem einzigen Volumenintegral.
- Folgern Sie hieraus die zugehörige Differentialgleichung.
- Was folgt für inkompressible Strömungen, also für  $\rho = \text{const}$ ?

**Lösung:** (1) Die über die Randfläche  $S = \partial K$  ausströmende Masse geht der Gesamtmasse in  $K$  verloren. Als Integralgleichung formuliert:

$$\frac{d}{dt} \iiint_K \rho \, dK + \iint_{S=\partial K} (\rho\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dS = 0$$

(2) Wir dürfen die Ableitung unters Integral ziehen dank Kompaktheit des Integrationsbereichs  $K$  und Stetigkeit der Ableitung  $\partial\rho/\partial t$ :

$$\frac{d}{dt} \iiint_K \rho \, dK \stackrel{\text{Kont.}}{=} \iiint_K \frac{\partial\rho}{\partial t} \, dK$$

Wir haben oben aus einer Integralgleichung (der Massenerhaltung) eine Differentialgleichung abgeleitet (die Kontinuitätsgleichung). Dahinter steckt folgendes einfache und sehr nützliche Prinzip:

**Lemma H1A: Verschwindungslemma für Skalarfelder**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Gilt  $\int_K f(x) \, dx = 0$  für jeden (kleinen) kompakten Würfel  $K \Subset \Omega$ , so folgt  $f = 0$ .

**Aufgabe:** Begründen Sie dies mit Hilfe der Stetigkeit von  $f$ .

**Lösung:** Wir wollen  $f = 0$  zeigen.

Nehmen wir im Gegenteil an, es gälte  $f \neq 0$ .

Das bedeutet, es existiert ein Punkt  $a \in \Omega$  mit  $f(a) \neq 0$ .

Wir können  $f(a) > 0$  annehmen; der Fall  $f(a) < 0$  ist analog.

Sei also  $f(a) = 2b > 0$ . Da  $f$  stetig ist, existiert um  $a$  ein kleiner Würfel  $K \Subset \Omega$  mit Kantenlänge  $\varepsilon > 0$ , sodass  $f(x) \geq b$  für alle  $x \in K$  gilt. Hieraus folgt die Abschätzung  $\int_K f(x) \, dx \geq b \, \text{vol}_n(K) = b\varepsilon^n > 0$ .

☺ Wenn also  $\int_K f(x) \, dx = 0$  für alle Würfel  $K \Subset \Omega$  gilt, so folgt  $f = 0$ .

Für **inkompressible Strömungen** gilt  $\rho = \text{const}$  und somit  $\text{div } \vec{v} = 0$ . Es handelt sich um eine grundlegende **Erhaltungsgleichung**. Diese beschreibt allerdings die Bewegung keineswegs vollständig. Dazu werden weitere Erhaltungsgrößen wie Impuls / Energie benötigt.

Die Impulserhaltung führt zu den **Navier–Stokes–Gleichungen**:

Sei  $\vec{\gamma}(t)$  die Bahn eines Teilchens der Strömung, d.h.  $\dot{\vec{\gamma}}(t) = \vec{v}(t, \vec{\gamma}(t))$ .

Newtons Gesetz „Kraft = Masse  $\times$  Beschleunigung“ besagt hier:

$$\rho \ddot{\vec{\gamma}}(t) = \vec{F}(t, \vec{\gamma}(t))$$

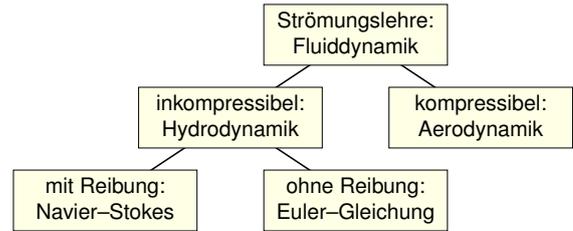
Einsetzen und ausrechnen der linken Seite nach Kettenregel:

$$\frac{d^2\gamma_i(t)}{dt^2} = \frac{d\dot{\gamma}_i(t)}{dt} = \frac{dv_i(t, \vec{\gamma}(t))}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial \gamma_k}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_k} v_k$$

Dies heißt **substantielle Ableitung** oder auch **konvektive Ableitung**.

Auf der rechten Seite setzt sich die Kraft  $\vec{F}$  zusammen aus der Reibung, dem inneren Druck und äußeren Kräften, zum Beispiel der Schwerkraft.

Die Strömungsmechanik untersucht die Bewegung von fluiden Medien. Sie ist grundlegend für die Meteorologie, beim Bau von Flugzeugen, Schiffen, Autos, ... bis hin zu Verbrennungsmotoren: Alles fließt!



Ein Fluid heißt inkompressibel, wenn seine Dichte nicht vom Druck abhängt. Zum Beispiel ist dies bei Wasser eine gute Näherung für die meisten Anwendungen. Noch einfacher ist zunächst, überall konstante Dichte anzunehmen. Anders als Flüssigkeiten sind Gase leicht komprimierbar, ihre Dichte ist etwa 1000mal geringer, ihre thermische Ausdehnung größer. Für ihre Bewegung aber gelten weitgehend die gleichen Gesetze, zumindest bei nicht allzu großen Drücken und Geschwindigkeiten. Wir wenden uns hier der allgemein gültigen Kontinuitätsgleichung zu.

Wir wollen auch das Flussintegral in diese Form bringen und dann beides zusammenfassen. Dies gelingt mit dem Satz von Gauß (G3G):

$$\iint_{S=\partial K} (\rho\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dS \stackrel{\text{Gauß}}{=} \iiint_K \text{div}(\rho\vec{v}) \, dK$$

Dank Linearität des Integrals erhalten wir ein einziges Volumenintegral:

$$\iiint_K \left[ \frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{v}) \right] \, dK = 0$$

(3) Diese lokale Massenbilanz gilt für jedes Kompaktum  $K \Subset \Omega$ .

Das gilt genau dann, wenn der (stetige!) Integrand verschwindet:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{v}) = 0$$

Diese **Kontinuitätsgleichung** ist grundlegend für die Strömungslehre.

(4) Für inkompressible Strömungen gilt  $\rho = \text{const}$  und somit  $\text{div } \vec{v} = 0$ . Anschaulich: In jedes Volumen  $K$  fließt ebensoviel hinein wie heraus. Hierzu genügt allgemein bereits  $\partial_t \rho + \vec{v} \cdot \text{grad } \rho = 0$ . Sehen Sie warum?

Dieses Prinzip gilt ebenso für Flussintegrale von Vektorfeldern:

**Lemma H1B: Verschwindungslemma für Vektorfelder**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  offen und  $\vec{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  stetig. Gilt  $\int_S \vec{f}(x) \cdot \vec{n} \, dS = 0$  für jedes (kleine) achsenparallele Quadrat  $S \Subset \Omega$ , so folgt  $\vec{f} = 0$ .

**Aufgabe:** Begründen Sie dies mit Hilfe der Stetigkeit von  $\vec{f}$ .

**Lösung:** Wir wollen  $\vec{f} = 0$  zeigen.

Nehmen wir im Gegenteil an, es gälte  $\vec{f} \neq 0$ .

Das heißt, es existiert ein Punkt  $a \in \Omega$  mit  $f_i(a) \neq 0$  für ein  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

Wir können  $i = 3$  annehmen; die Fälle  $i = 1, 2$  sind analog.

Wir können  $f_3(a) > 0$  annehmen; der Fall  $f_3(a) < 0$  ist analog.

Sei also  $f_3(a) = 2b > 0$ . Da  $\vec{f}$  und somit  $f_1, f_2, f_3: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetig sind, existiert um  $a$  ein kleines Quadrat  $S \Subset \Omega$  parallel zur  $(x_1, x_2)$ -Ebene mit Kantenlänge  $\varepsilon > 0$ , sodass hierauf  $f_3(x) \geq b$  für alle  $x \in S$  gilt. Hieraus folgt die Abschätzung  $\int_S \vec{f}(x) \cdot \vec{n} \, dS \geq b \, \text{vol}_2(S) = b\varepsilon^2 > 0$ .

☺ Wenn  $\int_S \vec{f}(x) \cdot \vec{n} \, dS = 0$  für alle Quadrate  $S \Subset \Omega$  gilt, so folgt  $\vec{f} = 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Massenerhaltung: } \quad \text{div } \vec{v} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0 \\ \text{Impulserhaltung: } \quad \frac{\partial v_i}{\partial t} &+ \sum_{k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \nu \Delta v_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i \end{aligned}$$

Anderung
Konvektion
Diffusion
interne Kraft
extern

Diese  $1 + n$  Gleichungen beschreiben die Strömungsgeschwindigkeit  $\vec{v}: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  einer Flüssigkeit zur Zeit  $t \in I \subseteq \mathbb{R}$  am Ort  $\vec{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  in der Ebene ( $n=2$ ) oder im Raum ( $n=3$ ), mit konstanter Massendichte  $\rho \in \mathbb{R}$  und Viskosität  $\nu \in \mathbb{R}$ , Druck  $p: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und äußerer Kraft  $\vec{f}: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Sie sind zweiter Ordnung und nicht-linear in  $\vec{v}$ . Die Impulserhaltung ist Newtons Bewegungsgesetz: Links steht die Beschleunigung, als konvektive Ableitung. [H11] Rechts stehen die Kräfte durch Reibung  $\nu$ , Druck  $p$  und  $\vec{f}$ . Gegeben sind hierzu die äußere Kraft  $\vec{f}$  sowie die Anfangsgeschwindigkeiten  $\vec{v}(0, \vec{x})$  für  $\vec{x} \in \Omega$ . Gesucht sind die Funktionen  $\vec{v}$  und  $p$ . Im zweidimensionalen Falle ist die Lösbarkeit bewiesen, im dreidimensionalen Falle noch nicht! Die Navier–Stokes–Gleichungen illustrieren die Schwierigkeit partieller Differentialgleichungen: Über dreidimensionale Lösungen weiß man allgemein wenig, z.B. sind Existenz und Regularität ungeklärt – trotz größter Anstrengungen. Das Clay Mathematics Institute hat dies im Jahr 2000 als eines von sieben Millennium-Problemen ausgestellt, mit einem Preisgeld von 1 Million Dollar.

**Ziel:** Wie berechnen wir den Wärmefluss in einem Körper?



Wärmebilanz für  $K =$  Kaninchen bei  $t \in$  Winter

Wir betrachten ein Gebiet  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  und ein Zeitintervall  $I = [t_0, t_1]$  und suchen eine Beziehung zwischen Wärmeleistungsdichte  $q: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , Wärmedichte  $u: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und Wärmefluss  $\vec{f}: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

- Aufgabe:** (1) Sei  $K \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  kompakt, etwa ein Würfel. Formulieren Sie die Wärmebilanz für  $K$  in Worten und als Volumen-/Flussintegrale. (2) Formen Sie dies um zu einem einzigen Volumenintegral. (3) Folgern Sie hieraus die zugehörige Differentialgleichung. (4) Vereinfachen Sie schließlich durch die Annahme  $\vec{f} = -\kappa \nabla u$ .

**Lösung:** (1) Für jedes Kompaktum  $K \in \Omega$  gilt die Wärmebilanz:

$$\begin{aligned} &\text{Von den Wärmequellen in } K \text{ zugeführte Energie} \\ &= \text{Zuwachs der in } K \text{ enthaltenen Wärmeenergie} \\ &+ \text{Wärmefluss über den Rand von } K \text{ nach außen} \end{aligned}$$

Als Integralgleichung formuliert bedeutet dies:

$$\iint_K q(t, x) dx = \frac{d}{dt} \iiint_K u(t, x) dx + \iint_{S=\partial K} \vec{f}(t, x) \cdot \vec{n} dS$$

Alle Funktionen seien so oft stetig differenzierbar wie in der folgenden Rechnung benötigt. Ich greife hier schon mal vor:  $q$  sei stetig,  $f$  einmal stetig diff'bar,  $u$  zweimal stetig diff'bar.

(2) Mit Gauß (G3G) verwandeln wir Flussintegrale in Volumenintegrale:

$$\iint_{S=\partial K} \vec{f}(t, x) \cdot \vec{n} dS \stackrel{\text{Gauß}}{\stackrel{\text{G3G}}{=}} \iiint_K \nabla \cdot \vec{f}(t, x) dx$$

Dürfen wir die Ableitung unter Integral ziehen?  $K$  kompakt,  $\partial_t u$  stetig!

$$\frac{d}{dt} \iiint_K u(t, x) dx \stackrel{\text{Kpkt}}{\stackrel{\text{D3c}}{=}} \iiint_K \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) dx$$

Dank Linearität des Integrals erhalten wir ein einziges Volumenintegral:

$$\iiint_K \left[ \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + \nabla \cdot \vec{f}(t, x) - q(t, x) \right] dx = 0.$$

(3) Diese lokale Wärmebilanz gilt für jedes Kompaktum  $K \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ . Das gilt genau dann, wenn der (stetige!) Integrand verschwindet (H1A):

$$\partial_t u(t, x) + \nabla \cdot \vec{f}(t, x) = q(t, x)$$

Diese Gleichung gilt überall dort, wo etwas entsteht ( $q$ ), gespeichert wird ( $u$ ) und fließt ( $\vec{f}$ ). Die Wärmeleitungsgleichung heißt deshalb auch Diffusionsgleichung und tritt in vielfältigen Anwendungen auf. Wir werden sie am Ende des Semesters mit Fourier-Theorie lösen können. Spezialfall: Für  $q = 0$  sowie  $u = \rho$  und  $\vec{f} = \rho \vec{v}$  erhalten wir erneut die Kontinuitätsgleichung.

(4) Wärme fließt von warm nach kalt, genauer  $\vec{f} = -\kappa \nabla u$ . Einsetzen:

$$\partial_t u(t, x) + \nabla \cdot [-\kappa \nabla u(t, x)] = q(t, x)$$

Mit dem Laplace-Operator  $\Delta = \nabla \cdot \nabla$  schreiben wir dies kurz

$$\partial_t u - \kappa \Delta u = q \quad \text{mit} \quad \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2.$$

Physikalische Begründung: Wärme ist (vereinfacht) proportional zur Temperatur  $T$ , genauer  $u = \rho c T$  mit Dichte  $\rho$  und Wärmekapazität  $c$ . Sie fließt proportional zur Temperaturdifferenz, also  $\vec{f} = -\lambda \nabla T$  mit Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$ . Demnach gilt  $\vec{f} = -\kappa \nabla u$  mit  $\kappa := \lambda / (\rho c)$ . Zur Vereinfachung sei hier die Temperaturleitfähigkeit  $\kappa(t, x)$  räumlich konstant und isotrop.

Wir erhalten so Fouriers berühmte **Wärmeleitungsgleichung** (1822):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \Delta u = q \quad \text{mit} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

Dies ist eine lineare partielle Differentialgleichung in  $u$  (links) mit Inhomogenität  $q$  (rechts). Sie beschreibt, wie sich die Wärme in einem Körper ausbreitet. Joseph Fourier (1768–1830) hat sie in seiner Arbeit *Théorie analytique de la chaleur* 1822 erstmals eingehend untersucht und hierzu die nach ihm benannte Fourier-Theorie entwickelt, mit der wir uns dieses Semester beschäftigen. Gesucht ist  $u$ , gegeben sind Anfangswerte und  $q$ . Wie sehen die Lösungen aus? Im homogenen Fall ohne Quellen ( $q = 0$ ) können wir die Fundamentallösung angeben! [518]

Was nützen uns solche Gleichungen? Welche Probleme lösen sie?

Typische Anwendungen verlaufen nach dem obigen Muster:



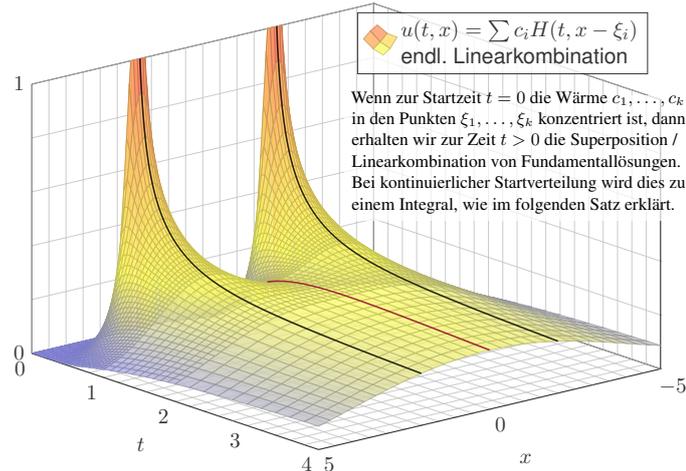
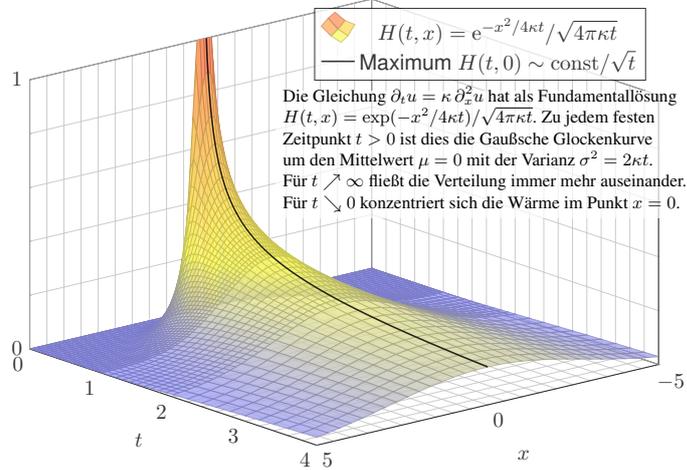
In einigen Paradebeispielen gelingt uns eine **explizite Lösung**:

- 😊 exakt, übersichtlich, leicht zu verstehen, zu prüfen und zu nutzen!
- 😞 Solche Lösungen sind leider meist auf einfache Fälle beschränkt.

In komplizierteren Fällen bleibt (nur) die **numerische Approximation**:

- 😞 unübersichtlich, schwerer zu verstehen, zu prüfen und zu nutzen.
- 😊 Näherungen sind mit Computerhilfe in vielen Fällen durchführbar!

Auf beiden Wegen leisten Differentialgleichungen die Formulierung und anschließende Lösung des ursprünglichen (physikalischen) Problems. Meist geschieht dies eingebettet in einem Modellierungskreislauf. [105]



◆ **Satz D5D: Lösungen der Wärmeleitungsgleichung**

(1) Die Wärmeleitungsgleichung  $\partial_t u = \kappa \Delta u$  hat als Fundamentallösung eine auseinanderfließende Glockenkurve, den **Wärmeleitungskern**

$$H: \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}: H(t, x) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi\kappa t})^n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\kappa t}\right).$$

Die Konstanten sichern die Normierung  $\int_{x \in \mathbb{R}^n} H(t, x) dx = 1$  für  $t > 0$ .

(2) Für  $t = 0$  sei die Wärmeverteilung  $u_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  vorgegeben,  $u_0 \in C_b$ . Für  $t > 0$  erhalten wir die Lösung durch **Superposition** (Faltung D5E):

$$u: \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}: u(t, x) = \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} H(t, x - \xi) u_0(\xi) d\xi.$$

Sie erfüllt  $\partial_t u = \kappa \Delta u$  für  $t > 0$  sowie  $\lim_{t \searrow 0} u(t, x) = u_0(x)$ .

(3) Aus  $u(0, x) = \sin(kx)$  für  $t = 0$  folgt  $u(t, x) = e^{-k^2 \kappa t} \sin(kx)$  für  $t \geq 0$ . Aus  $u(0, x) = \sum_k c_k \sin(kx)$  folgt  $u(t, x) = \sum_k c_k e^{-k^2 \kappa t} \sin(kx)$  für  $t \geq 0$ . Die Wärmeleitung glättet: Hohe Frequenzen klingen extrem schnell ab.

Für  $u: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  untersuchen wir die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) &= \kappa \partial_x^2 u(t, x) \quad \text{für alle } t \geq 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= u_0(x) \quad \text{Anfangswerte für } t = 0. \end{aligned}$$

**Aufgabe:** Approximieren Sie die Differentialquotienten  $\partial_t$  sowie  $\partial_x$  und  $\partial_x^2$  durch Differenzenquotienten zwecks numerischer Lösung. **Lösung:**

$$\begin{aligned} \partial_x u(t, x) &\approx \frac{u(t, x + \Delta x/2) - u(t, x - \Delta x/2)}{\Delta x} \\ \partial_x^2 u(t, x) &\approx \frac{\partial_x u(t, x + \Delta x/2) - \partial_x u(t, x - \Delta x/2)}{\Delta x} \\ &\approx \frac{u(t, x - \Delta x) - 2u(t, x) + u(t, x + \Delta x)}{(\Delta x)^2} \end{aligned}$$

Hier sind  $\Delta x > 0$  und  $\Delta t > 0$  Schrittweiten, nicht der Laplace-Operator. Die Wärmeleitungsgleichung  $\partial_t u = \kappa \partial_x^2 u$  besagt dann näherungsweise:

$$u(t + \Delta t, x) \approx u(t, x) + \frac{\kappa \Delta t}{(\Delta x)^2} [u(t, x - \Delta x) - 2u(t, x) + u(t, x + \Delta x)]$$

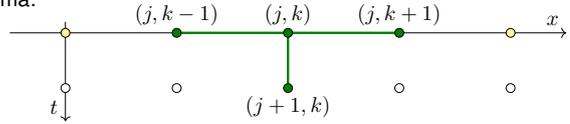
Gegeben sei für  $t = 0$  die (diskretisierte) Startverteilung

$$v(0, x) = v_0(x) \quad \text{mit } v_0: \mathbb{Z}\Delta x \rightarrow \mathbb{R}.$$

Wir berechnen die (diskretisierte) Verteilung  $v: \mathbb{N}\Delta t \times \mathbb{Z}\Delta x \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$v(t + \Delta t, x) := v(t, x) + \frac{\kappa \Delta t}{(\Delta x)^2} [v(t, x - \Delta x) - 2v(t, x) + v(t, x + \Delta x)]$$

Schema:



Mit dieser einfachen Methode können Sie den Wärmefluss für  $t > 0$  näherungsweise bestimmen: Aus der Startverteilung  $v_0$  zur Zeit  $t = 0$  berechnen Sie die Verteilung  $v_1$  zur Zeit  $t = 1\Delta t$ , daraus  $v_2$  zur Zeit  $t = 2\Delta t$  usw. Die Methode ist wenig aufwändig, außerdem direkt und explizit, das heißt, es müssen keine Gleichungssysteme gelöst werden. Sie ist leicht zu implementieren und wird häufig auf die Wärmeleitungsgleichung und ähnliche Diffusionsprobleme angewendet. In der Numerik lernen Sie noch weit bessere Verfahren, diese sind raffinierter, aber aufwändiger.

**Aufgabe:** Simulieren Sie den Wärmefluss auf einem kreisförmigen Kupferdraht der Länge  $L = 1$  mit  $\kappa = 0.02$  und  $\Delta t = 0.1$  und  $\Delta x = 0.1$ . Zur Zeit  $t = 0$  sei die Wärmemenge 1 im Punkt  $x = 0.5$  konzentriert.

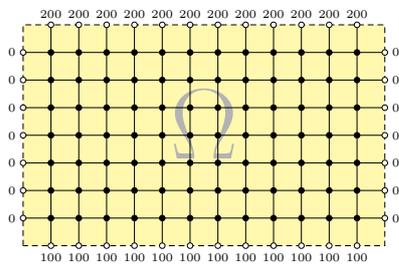
(1) Programmieren Sie die Rechnung. (Tabellenkalkulation genügt; Sie finden dieses Beispiel unter [eiserm.de/lehre/HM3/Irrfahrt.ods](http://eiserm.de/lehre/HM3/Irrfahrt.ods).)

(2) Erwarten Sie die Erhaltung der Gesamtwärmemenge? Gilt dies?  
(3) Welche Verteilung erwarten Sie für große Werte von  $t$ ? Gilt dies?

**Lösung:** (1) Sie finden die Tabelle auf der nächsten Seite. (2) Das ist physikalisch plausibel. Glücklicherweise erhält unser Algorithmus in jedem Schritt die Gesamtwärme! (3) Wir erwarten die Gleichverteilung: In jedem Punkt  $x \in \{0.0, 0.1, \dots, 0.9\}$  gilt  $v(t, x) \rightarrow 0.1$  für  $t \rightarrow \infty$ .

😊 Die Rechnung lässt sich auch stochastisch interpretieren [T445] als zufällige Irrfahrt (engl. *random walk*) mit Parameter  $p := \kappa \Delta t / (\Delta x)^2$ . Zur Zeit  $t$  befinden Sie sich im Punkt  $x$  mit Wkt  $v(t, x)$ . Im Zeitschritt  $\Delta t$  gehen Sie jeweils mit Wkt  $p$  einen Schritt  $\pm \Delta x$  nach rechts / links, mit Wkt  $1 - 2p$  bleiben Sie stehen. Die Diffusion der Wahrscheinlichkeiten folgt dann genau der obigen diskreten Gleichung. Siehe die Tabelle!

$x =$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$t = 0.0$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.200	0.600	0.200	0.000	0.000	0.000
0.2	0.000	0.000	0.000	0.040	0.240	0.440	0.240	0.040	0.000	0.000
0.3	0.000	0.000	0.008	0.072	0.240	0.360	0.240	0.072	0.008	0.000
0.4	0.000	0.002	0.019	0.093	0.230	0.312	0.230	0.093	0.019	0.002
0.5	0.001	0.005	0.030	0.106	0.219	0.279	0.219	0.106	0.030	0.005
0.6	0.002	0.009	0.040	0.113	0.209	0.255	0.209	0.113	0.040	0.009
0.7	0.005	0.014	0.049	0.118	0.199	0.237	0.199	0.118	0.049	0.014
0.8	0.009	0.019	0.056	0.120	0.190	0.221	0.190	0.120	0.056	0.019
0.9	0.013	0.024	0.061	0.121	0.182	0.209	0.182	0.121	0.061	0.024
1.0	0.017	0.029	0.066	0.121	0.175	0.198	0.175	0.121	0.066	0.029
1.1	0.022	0.034	0.070	0.121	0.169	0.189	0.169	0.121	0.070	0.034
1.2	0.027	0.039	0.073	0.120	0.164	0.181	0.164	0.120	0.073	0.039
1.3	0.032	0.043	0.076	0.120	0.159	0.174	0.159	0.120	0.076	0.043
1.4	0.036	0.047	0.078	0.119	0.154	0.168	0.154	0.119	0.078	0.047
1.5	0.041	0.051	0.080	0.117	0.150	0.162	0.150	0.117	0.080	0.051
1.6	0.045	0.055	0.082	0.116	0.146	0.157	0.146	0.116	0.082	0.055
1.7	0.049	0.058	0.083	0.115	0.142	0.153	0.142	0.115	0.083	0.058
1.8	0.053	0.061	0.085	0.114	0.139	0.148	0.139	0.114	0.085	0.061
1.9	0.056	0.064	0.086	0.113	0.136	0.145	0.136	0.113	0.086	0.064
2.0	0.059	0.067	0.087	0.112	0.133	0.141	0.133	0.112	0.087	0.067



Wir betrachten ein Bauteil  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  aus wärmeleitendem Material. An den Rändern liegen die Temperaturen  $0^\circ\text{C}$ ,  $100^\circ\text{C}$ ,  $200^\circ\text{C}$  an.

**Aufgabe:** (1) Diskretisieren Sie wie oben die Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u(t, x, y) = \kappa [\partial_x^2 u(t, x, y) + \partial_y^2 u(t, x, y)], \quad u(0, x, y) = u_0(x, y).$$

(2) Lösen Sie die Gleichung numerisch! Was ist der stationäre Zustand? Hierzu sei  $\Delta x = \Delta y$ , und  $\Delta t$  wählen wir so, dass  $\kappa \Delta t / (\Delta x)^2 = 1/4$  gilt.

**Lösung:** (1) Wir diskretisieren und nähern die partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} \partial_x u(t, x, y) &\approx \frac{u(t, x + \Delta x/2, y) - u(t, x - \Delta x/2, y)}{\Delta x} \\ \partial_x^2 u(t, x, y) &\approx \frac{\partial_x u(t, x + \Delta x/2, y) - \partial_x u(t, x - \Delta x/2, y)}{\Delta x} \\ &\approx \frac{u(t, x - \Delta x, y) - 2u(t, x, y) + u(t, x + \Delta x, y)}{(\Delta x)^2} \end{aligned}$$

Diese Näherungen kennen wir bereits. [H121] Ebenso verfahren wir für  $\partial_y^2$ . Die Wärmeleitungsgleichung  $\partial_t u = \kappa [\partial_x^2 u + \partial_y^2 u]$  nähern wir durch:

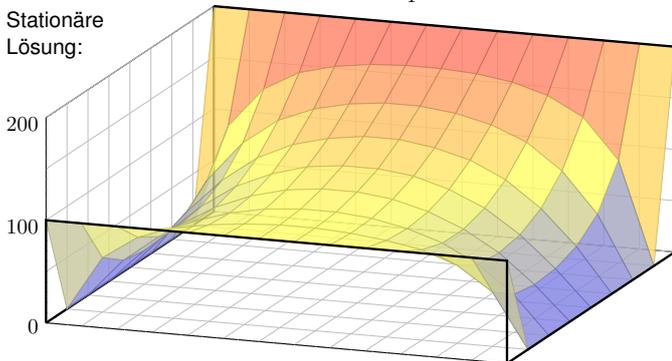
$$\begin{aligned} v(t + \Delta t, x, y) &= v(t, x, y) + \Delta t \partial_t v(t, x, y) \\ &= v(t, x, y) + \frac{\kappa \Delta t}{(\Delta x)^2} [v(t, x - \Delta x, y) - 2v(t, x, y) + v(t, x + \Delta x, y)] \\ &\quad + \frac{\kappa \Delta t}{(\Delta y)^2} [v(t, x, y - \Delta y) - 2v(t, x, y) + v(t, x, y + \Delta y)] \end{aligned}$$

Hier sind  $\Delta t, \Delta x, \Delta y > 0$  Schrittweiten, nicht der Laplace-Operator.

Im konkreten Beispiel arbeiten wir mit  $(x, y) \in \{1, \dots, 12\} \times \{1, \dots, 7\}$ , Zeitschritt  $\Delta t = 1$  und  $\kappa = 1/4$ . Wir erhalten die Mittelwerteneigenschaft:

$$v(t+1, x, y) = \frac{v(t, x-1, y) + v(t, x+1, y) + v(t, x, y-1) + v(t, x, y+1)}{4}$$

Stationäre Lösung:



😊 Ausgehend vom gegebenem Startzustand  $v(0, x, y)$  können wir so die zeitliche Entwicklung berechnen. Nochmal zur Betonung: Die diskrete Lösung  $v(t, x, y)$  ist nur eine grobe Näherung der kontinuierlichen Lösung  $u(t, x, y)$ . In der Numerik erfahren Sie mehr zu Fehlerschranken und noch besseren Methoden. Viele davon stehen als Softwarebibliotheken zur Verfügung.

😊 Unsere Näherung ist auf den folgenden Seiten numerisch illustriert. Die Rechnung beginnt mit einer (beliebigen!) Startverteilung zur Zeit  $t = 0$  und konvergiert recht schnell gegen die (eindeutige!) stationäre Lösung: Zwischen  $t = 50$  und  $t = 80$  ist kaum noch ein Unterschied. Das ist für den Computer einfach und schnell zu rechnen; eine Tabellenkalkulation genügt.

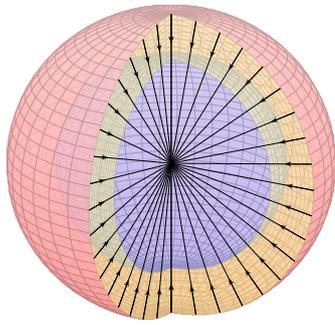
😊 Die stationäre Lösung befindet sich im Gleichgewicht, erfüllt also die **Mittelwerteneigenschaft**

$$\bar{v}(x, y) = \frac{\bar{v}(x-1, y) + \bar{v}(x+1, y) + \bar{v}(x, y-1) + \bar{v}(x, y+1)}{4}$$

😊 Der stationäre Zustand  $\bar{v}$  lässt sich auch stochastisch interpretieren [T445] als Ergebnis einer zufälligen Irrfahrt (engl. *random walk*): Auf einem Spielfeld  $\Omega \subset \mathbb{Z}^2$  ziehen Sie jeweils mit Wkt  $p := \kappa \Delta t / (\Delta x)^2$ , hier  $p = 1/4$ , nach links / rechts / oben / unten. Das Spiel endet mit den Gewinnen am Rand. Die Gewinnererwartung auf jedem Feld  $(x, y)$  ist der Wert  $\bar{v}(x, y)$ .

😊 Dieses einfache Beispiel illustriert das allgemeine und überall wichtige **Dirichlet-Problem**. Die Berechnung von  $\bar{v}$  führt zu einem linearen Gleichungssystem mit  $7 \times 12 = 84$  Unbekannten! Für diese finden wir genau 84 Gleichungen. Die Gleichgewichtslösung  $\bar{v}$  ist tatsächlich eindeutig, und die iterative Berechnung als Wärmefluss liefert eine erstaunlich gute numerische Methode.





**Ziel:** Wie berechnet man das Gravitationsfeld eines Planeten? Wir betrachten das Gravitationsfeld einer Masse  $m = 1$  im Punkt  $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$ :

$$\vec{f}: \mathbb{R}^3 \setminus \{y\} \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ \vec{f}(\vec{x}) = m \frac{\vec{y} - \vec{x}}{|\vec{y} - \vec{x}|^3}.$$

Das Feld  $\vec{f}$  ist radial auf den Punkt  $\vec{y}$  gerichtet und klingt ab mit  $1/r^2$ .

Das bringt bemerkenswerte Eigenschaften mit sich!

- Aufgabe:** (1) Berechnen Sie die Divergenz des Vektorfeldes  $\vec{f}$ ,  
 (2) das Flussintegral von  $\vec{f}$  über die Sphäre  $S = \partial B(\vec{y}, r)$  und  
 (3) über den Rand  $\partial D$  eines beliebigen Kompaktums  $D$ .  
 Wie lässt sich der Integralsatz von Gauß hier nutzen?

**Lösung:** (1) Auf ganz  $\mathbb{R}^3 \setminus \{y\}$  finden wir  $\text{div } \vec{f} = 0$ , denn

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{y_i - x_i}{|y - x|^3} = \frac{-1}{|y - x|^3} + \frac{3(y_i - x_i)^2}{|y - x|^5} \Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = 0.$$

(2) Den Fluss über die Sphäre  $\partial B(\vec{y}, r)$  berechnen wir dank Symmetrie:

$$\int_{\partial B(\vec{y}, r)} \vec{f} \cdot dS = \int_{\partial B(\vec{y}, r)} \vec{f} \cdot \vec{n}_S |dS| = \int_{\partial B(\vec{y}, r)} \frac{-1}{r^2} |dS| = -4\pi$$

(3) Für jedes Kompaktum  $D$  mit stückweise glattem Rand  $\partial D$  folgt

$$\int_{\partial D} \vec{f} \cdot dS = \begin{cases} 0 & \text{für } \vec{y} \notin D \\ -4\pi & \text{für } \vec{y} \in D \end{cases} = -4\pi \mathbf{1}_D(\vec{y})$$

**Nachrechnen dank Gauß:** (1) Das Feld  $\vec{f}(\vec{x})$  ist divergenzfrei, nur der Pol im Punkt  $\vec{x} = \vec{y}$  wirkt als Quelle bzw. Senke. Das ist die räumliche Entsprechung des ebenen Residuensatzes.

(2) Dank Kugelsymmetrie gelingt die Integration mühelos, sogar ohne Parametrisierung!

(3) Im Falle  $\vec{y} \notin D$  gilt  $\int_{\partial D} \vec{f} \cdot dS = \int_D \text{div}(\vec{f}) d\vec{x} = 0$  dank (1). Im Falle  $\vec{y} \in D$  wählen wir eine kleine Kugel  $\bar{B}(\vec{y}, r) \subseteq D$ . Mit  $D$  ist auch  $E = D \setminus B(\vec{y}, r)$  kompakt mit stückweise glattem Rand  $\partial E = \partial D \cup -\partial B(\vec{y}, r)$ . Wegen  $\vec{y} \notin E$  gilt  $\int_{\partial E} \vec{f} \cdot dS = \int_E \text{div}(\vec{f}) d\vec{x} = 0$  dank (1) und somit  $\int_{\partial D} \vec{f} \cdot dS = \int_{\partial B(\vec{y}, r)} \vec{f} \cdot dS = -4\pi$  dank (2).

Das **Newton-Potential** [D437] einer Masse  $m$  im Punkt  $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$  ist

$$u: \mathbb{R}^3 \setminus \{y\} \rightarrow \mathbb{R}: u(\vec{x}) = \frac{m}{|\vec{y} - \vec{x}|}.$$

(Gravitationskonstante und etwaige Vorzeichen lasse ich hier weg.)

Ein Planet ist keine Punktmasse: Wir betrachten eine Massendichte  $\varrho: K \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem Kompaktum  $K \subseteq \mathbb{R}^3$ . Außerhalb ist das Potential

$$u: \mathbb{R}^3 \setminus K \rightarrow \mathbb{R}: u(\vec{x}) = \int_{\vec{y} \in K} \frac{\varrho(\vec{y})}{|\vec{y} - \vec{x}|} d\vec{y}.$$

Das ist die kontinuierliche Superposition (Faltung) von Punktpotentialen. Gleiches gilt für das elektrische Potential einer Ladungsverteilung und ebenso in zahlreichen ähnlichen Anwendungen der Potentialtheorie.

- Aufgabe:** (1) Berechnen Sie jeweils das **Gravitationsfeld**  $\vec{f} = \text{grad } u$ .  
 (2) Ist das Potential  $u$  auf  $\mathbb{R}^3 \setminus K$  harmonisch, gilt hier also  $\Delta u = 0$ ?  
 (3) Warum / Dürfen Sie hier die Ableitungen unters Integral ziehen?

**Lösung:** Für eine Punktmasse rechnen wir  $\Delta u$  wie oben explizit aus:

$$u(\vec{x}) = \frac{m}{|\vec{y} - \vec{x}|} \Rightarrow \vec{f}(\vec{x}) = \text{grad } u(\vec{x}) = m \frac{\vec{y} - \vec{x}}{|\vec{y} - \vec{x}|^3} \Rightarrow \Delta u = \text{div } \vec{f} = 0.$$

(1) Für eine kontinuierliche Dichte  $\varrho: K \rightarrow \mathbb{R}$  erhalten wir

$$u: \mathbb{R}^3 \setminus K \rightarrow \mathbb{R}: u(\vec{x}) = \int_{\vec{y} \in K} \frac{\varrho(\vec{y})}{|\vec{y} - \vec{x}|} d\vec{y}.$$

Das zugehörige Gravitationsfeld  $f = \text{grad } u$  ist dann (dank Satz D3c)

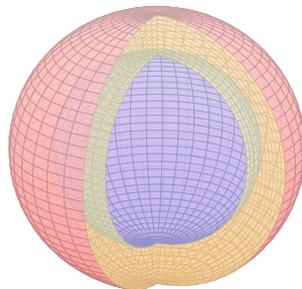
$$\vec{f}(\vec{x}) = \text{grad} \int_K \frac{\varrho(\vec{y})}{|\vec{y} - \vec{x}|} d\vec{y} \stackrel{\text{D3c}}{=} \int_K \text{grad} \frac{\varrho(\vec{y})}{|\vec{y} - \vec{x}|} d\vec{y} = \int_K \frac{\vec{y} - \vec{x}}{|\vec{y} - \vec{x}|^3} \varrho(\vec{y}) d\vec{y}.$$

(2) Somit ist das Newton-Potential  $u$  auf  $\mathbb{R}^3 \setminus K$  harmonisch, denn

$$\Delta u(\vec{x}) = \Delta \int_K \frac{\varrho(\vec{y})}{|\vec{y} - \vec{x}|} d\vec{y} \stackrel{\text{D3c}}{=} \int_K \Delta \frac{\varrho(\vec{y})}{|\vec{y} - \vec{x}|} d\vec{y} = \int_K 0 d\vec{y} = 0.$$

(3) Ableitungen und Integral vertauschen, da der Integrationsbereich  $K$  kompakt ist und der Integrand in  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus K$  stetig differenzierbar (D3c).

Wir betrachten die Kugelschale  $K = \{ \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \mid r_0 \leq |\vec{y}| \leq r_1 \}$  mit den Radien  $0 \leq r_0 < r_1$  und konstanter Massendichte  $\varrho \in \mathbb{R}$ .



**Aufgabe:** (1) Berechnen Sie das Gravitationspotential  $u(\vec{x})$  im Punkt  $\vec{x} = (0, 0, R)$  mittels Kugelkoordinaten  $\vec{y} = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$ .

- (2) Welches Gravitationsfeld  $\vec{f} = \text{grad } u$  herrscht außerhalb ( $|\vec{x}| \geq r_1$ )? Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Potential einer Punktmasse!  
 (3) Welches Gravitationsfeld  $\vec{f} = \text{grad } u$  herrscht innerhalb ( $|\vec{x}| \leq r_0$ )? Wie interpretieren Sie dieses bemerkenswerte Ergebnis geometrisch?

**Hinweis:** Der Ansatz ist klar, die Rechnung ist aber nicht leicht. Man berechne  $|\vec{y} - \vec{x}|^2 = r^2 - 2rR \cos \theta + R^2$  und substituiere  $t = -\cos \theta$ .

**Lösung:** (1) Zu berechnen ist das Integral

$$u(\vec{x}) = \int_{\vec{y} \in K} \frac{\varrho}{|\vec{y} - \vec{x}|} d\vec{y}.$$

Für die Integration über  $\vec{y} \in K$  nutzen wir Kugelkoordinaten

$$\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) =: \Phi(r, \theta, \varphi).$$

Wir kennen die Funktionaldeterminante  $\det \Phi' = r^2 \sin \theta$ , also

$$d(y_1, y_2, y_3) = r^2 \sin \theta d(r, \theta, \varphi).$$

Wegen Rotationssymmetrie hängt  $u(\vec{x})$  nur vom Radius  $|x|$  ab. Es genügt daher,  $u(\vec{x})$  etwa längs der  $z$ -Achse zu berechnen. Wir fixieren deshalb den Punkt  $\vec{x} = (0, 0, R)$  mit  $R = |x| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

Der Abstand  $|\vec{y} - \vec{x}|$  ist in dieser Parametrisierung

$$\begin{aligned} |\vec{y} - \vec{x}|^2 &= r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + (r \cos \theta - R)^2 \\ &= r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta - 2rR \cos \theta + R^2 \\ &= r^2 - 2rR \cos \theta + R^2. \end{aligned}$$

Damit berechnen wir unser Integral in Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} u(\vec{x}) &= \int_{\vec{y} \in K} \frac{\varrho}{|\vec{y} - \vec{x}|} d\vec{y} \\ &= \int_{r=r_0}^{r_1} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\varrho r^2 \sin \theta}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta}} d\varphi d\theta dr \\ &= \int_{r=r_0}^{r_1} 2\pi \varrho r^2 \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin \theta}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta}} d\theta dr \end{aligned}$$

Das innere Integral berechnen wir mit  $t = -\cos \theta$  und  $dt = \sin \theta d\theta$  zu

$$\begin{aligned} \int_{t=-1}^1 \frac{1}{\sqrt{r^2 + R^2 + 2rRt}} dt &= \left[ \frac{1}{rR} \sqrt{r^2 + R^2 + 2rRt} \right]_{t=-1}^1 \\ &= \frac{1}{rR} \left[ \sqrt{r^2 + R^2 + 2rR} - \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR} \right] \\ &= \frac{1}{rR} (|r + R| - |r - R|) = \begin{cases} 2/r & \text{für } r \geq R, \\ 2/R & \text{für } r \leq R. \end{cases} \end{aligned}$$

(2) Außerhalb der Kugelschale  $K$  gilt  $R \geq r_1$  und somit

$$u(\vec{x}) = \frac{1}{R} \int_{r=r_0}^{r_1} 4\pi \varrho r^2 dr = \frac{M}{R}.$$

Dies ist das Potential einer punktförmigen Masse  $M$  im Ursprung. Außerhalb  $K$  herrscht das Gravitationsfeld  $\vec{f} = \text{grad } u = M\vec{x}/|x|^3$ .

(3) Innerhalb der Kugelschale  $K$  gilt  $R \leq r_0$  und somit

$$u(\vec{x}) = \int_{r=r_0}^{r_1} 4\pi \varrho r dr = \text{const.}$$

Dieses Potential hängt hier nicht weiter von  $\vec{x}$  ab. Somit verschwindet das Gravitationsfeld  $\vec{f} = \text{grad } u = 0$  im Inneren der Kugelschale.

**Geometrische Erklärung:** Auf jeden inneren Punkt wirken entgegengesetzte Kräfte gegenüberliegender kleiner Flächenstücke im Abstand  $a$  bzw.  $b$ . Die Fläche wächst mit  $a^2$  bzw.  $b^2$ , die Kraft nimmt ab mit  $1/a^2$  bzw.  $1/b^2$ , also sind beide Kräfte gleich groß und heben sich auf.

**Bemerkung:** Für den verbleibenden Fall  $r_0 < R < r_1$  zählt nur die Masse  $m = \frac{4}{3}\pi \varrho (R^3 - r_0^3)$  der Kugelschale vom Radius  $r_0$  bis zu  $R$ . [H147]

Die Massendichte  $\varrho: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  erzeugt das Gravitationsfeld

$$\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \vec{f}(\vec{x}) \stackrel{(1)}{=} \int_{\vec{y} \in \mathbb{R}^3} \frac{\vec{y} - \vec{x}}{|\vec{y} - \vec{x}|^3} \varrho(\vec{y}) d\vec{y}.$$

Zwecks Integrierbarkeit sei  $\varrho$  beschränkt und absolut integrierbar (H1D).

**Aufgabe:** Berechnen Sie den Fluss von  $\vec{f}$  durch den Rand  $S = \partial D$  eines Kompaktums  $D \subseteq \mathbb{R}^3$  (mit Fubini und der vorigen Aufgabe).

**Lösung:** Der Fluss aus  $D$  ist proportional zur Gesamtmasse in  $D$ :

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \vec{f} \cdot dS &\stackrel{(1)}{=} \int_{\vec{x} \in \partial D} \left( \int_{\vec{y} \in \mathbb{R}^3} \frac{\vec{y} - \vec{x}}{|\vec{y} - \vec{x}|^3} \varrho(\vec{y}) d\vec{y} \right) \cdot dS \\ &\stackrel{(2)}{=} \int_{\vec{y} \in \mathbb{R}^3} \left( \int_{\vec{x} \in \partial D} \frac{\vec{y} - \vec{x}}{|\vec{y} - \vec{x}|^3} \cdot dS \right) \varrho(\vec{y}) d\vec{y} \\ &\stackrel{(3)}{=} \int_{\vec{y} \in \mathbb{R}^3} (-4\pi) \mathbf{I}_D(\vec{y}) \varrho(\vec{y}) d\vec{y} = -4\pi \int_{\vec{y} \in D} \varrho(\vec{y}) d\vec{y} \end{aligned}$$

Hierzu muss  $\varrho$  ausreichend gutartig sein, sodass in (1) absolute Integrierbarkeit gilt. Gleichung (2) ist dann Fubini und (3) haben wir zuvor ausgerechnet. Ist zudem  $f$  stetig differenzierbar, so folgt  $\text{div } f = -4\pi\varrho$  nach Gauß. Der Regularitätssatz H1D präzisiert die Voraussetzungen.

**Aufgabe:** Berechnen Sie das Gravitationsfeld  $\vec{f}$  einer Kugelschale  $K = \{ \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \mid r_0 \leq |\vec{y}| \leq r_1 \}$  mit  $0 \leq r_0 < r_1$  und konstanter Dichte  $\varrho$ .

**Erste Lösung:** direkt durch Integration, mühsam aber lehrreich. [H141]

**Zweite Lösung:** Mit dem Integralsatz von Gauß geht es viel leichter.

Das Feld  $\vec{f}$  ist kugelsymmetrisch, das heißt  $\vec{f}(\vec{x}) = g(|\vec{x}|) \cdot \vec{x}/|\vec{x}|$ .

Aus  $\vec{B}(\vec{0}, r) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\vec{x}| \leq r \}$  fließt  $\int_{\partial B(\vec{0}, r)} \vec{f} \cdot dS = 4\pi r^2 g(r)$ .

Dank Gauß gilt andererseits  $\int_{\partial B(\vec{0}, r)} \vec{f} \cdot dS = -4\pi \int_{\vec{B}(\vec{0}, r)} \varrho(\vec{y}) d\vec{y}$ .

$$\text{Gravitationsstärke:} \quad g(r) = \frac{-1}{r^2} \int_{\vec{B}(\vec{0}, r)} \varrho(\vec{y}) d\vec{y}$$

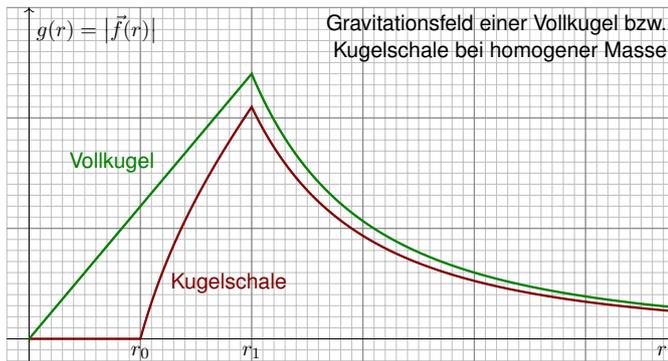
Für  $r > r_1$  gilt  $g(r) = -m/r^2$ : Wie eine Punktmasse im Ursprung.

Für  $r < r_0$  gilt  $g(r) = 0$ : Hier heben sich entgegengesetzte Kräfte auf.

Für  $r_0 \leq r \leq r_1$  gilt  $g(r) = -\varrho \frac{4\pi}{3r^2} (r^3 - r_0^3)$ : Wie Punktmasse, aufgeteilt.

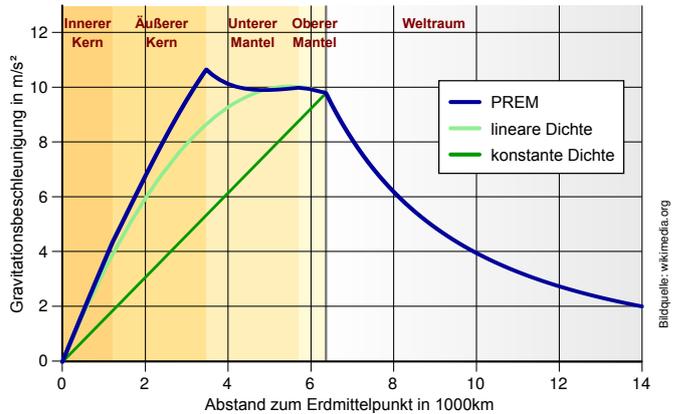
Spezialfall Vollkugel: Für  $0 = r_0 \leq r \leq r_1$  ist  $g(r) = -\varrho \frac{4\pi}{3} r$  linear.

☺ Der Integralsatz von Gauß vereinfacht die Rechnung erheblich!



Wir sehen in diesem Beispiel sehr schön, dass  $f$  stetig ist, wie im folgenden Satz H1D erklärt, und sogar stetig diff'bar wo  $\varrho$  dies ist. Wir sehen aber auch, dass  $f$  nicht überall differenzierbar ist. Um realistische Beispiele wie dieses technisch korrekt zu behandeln, lohnt sich unsere Mühe!

Gravitationsfeld der Erde gemäß *Preliminary Reference Earth Model*:



**Satz H1D: Regularität des Gravitationsfeldes**

(1) Die Dichte  $\varrho: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  sei beschränkt und absolut integrierbar, zum Beispiel stetig mit kompaktem Träger. Dann definiert sie ein Gravitationsfeld  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  durch das absolut konvergente Integral

$$f(x) = \int_{y \in \mathbb{R}^3} \frac{y - x}{|y - x|^3} \varrho(y) dy.$$

(2) Das Vektorfeld  $f$  ist stetig und für jedes Kompaktum  $D \subseteq \mathbb{R}^3$  gilt

$$\int_{\partial D} f \cdot dS = -4\pi \int_D \varrho(y) dy.$$

(3) Ist  $\varrho$  auf  $B(x_0, r)$  stetig differenzierbar, so auch  $f$ , und dort gilt

$$\text{div } f = -4\pi\varrho.$$

(4) Ist insbesondere  $\varrho = 0$  auf  $B(x_0, r)$ , so gilt dort  $\text{div } f = 0$ .

⚠ Der Integrand hat einen Pol für  $y = x$ . Es ist ein Wunder, dass das Integral dennoch konvergiert und  $f$  sogar stetig bzw. stetig diff'bar ist.

☺ Die Aussage (4) ist leicht, wie oben gesehen: Liegt  $x$  außerhalb des Trägers von  $\varrho$ , so treten im Integranden keine Polstellen auf.

Regularitätsbeweise (zu Stetigkeit, Differenzierbarkeit, etc.) wie der folgende sind meist subtil. Physikalisch relevante Anwendungsbeispiele wie das Gravitationsfeld eines Planeten sind aber ein hervorragender Test, um unsere Techniken daran zu erproben. Nur für Unerschrockene!

**Beweis des Satzes:** (1) Die Dichte  $\varrho: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  sei beschränkt und absolut integrierbar: Es gibt Konstanten  $L, M \in \mathbb{R}$ , sodass  $|\varrho(x)| \leq L$  für alle  $x \in \mathbb{R}^3$  sowie  $\int_{\mathbb{R}^3} |\varrho(x)| dx \leq M$ . Für alle  $x \in \mathbb{R}^3$  garantiert dies die absolute Integrierbarkeit, denn für jeden Radius  $R > 0$  gilt:

$$\begin{aligned} \int_{|y-x| < R} \frac{|\varrho(y)|}{|y-x|^2} dy &\leq \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{L}{r^2} \cdot r^2 \sin \theta d\varrho d\theta dr \leq 4\pi LR < \infty \\ \int_{|y-x| \geq R} \frac{|\varrho(y)|}{|y-x|^2} dy &\leq \int_{|y-x| \geq R} \frac{|\varrho(y)|}{R^2} dy \leq \frac{1}{R^2} \int_{\mathbb{R}^3} |\varrho(y)| dy \leq M/R^2 < \infty \end{aligned}$$

Damit ist das Faltungsintegral  $f(x) = \int_{y \in \mathbb{R}^3} (y - x)/|y - x|^3 \cdot \varrho(y) dy$  absolut konvergent.

(4) Gilt  $\varrho = 0$  auf einem kleinen Ball  $B(x_0, r)$ , so können wir dort unter dem Integral ableiten: Das Vektorfeld  $f$  ist auf  $B(x_0, r)$  beliebig oft differenzierbar, und es gilt  $\text{div } f = 0$ . [H139]

(2) Wir beweisen die Stetigkeit von  $f$  in  $x_0 \in \mathbb{R}^3$ . Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig vorgegeben. Hierzu finden wir  $\delta > 0$ , sodass für  $|x - x_0| < \delta$  stets  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$  gilt: Wir zerlegen  $\varrho = \varrho_0 + \varrho_1$  mit  $\varrho_0 = \varrho \cdot \mathbf{I}_{B(x_0, \delta_0)}$ , also  $\varrho_1 = 0$  auf  $B(x_0, \delta_0)$ . Hierzu gehört die Zerlegung  $f = f_0 + f_1$  der zugehörigen Vektorfelder. Dank (1) haben wir die Schranke  $|f_0| \leq 4\pi L\delta_0 + L \frac{4\pi}{3} \delta_0^3 / \delta_0^2 = \varepsilon/3$  für  $\delta_0 = \varepsilon / (16\pi L)$ . Das verbleibende Vektorfeld  $f_1$  ist stetig auf  $B(x_0, \delta_0)$ , sogar  $C^\infty$  wie oben für (4) erklärt; daher existiert  $\delta_1 > 0$ , sodass für  $|x - x_0| < \delta_1$  stets  $|f_1(x) - f_1(x_0)| < \varepsilon/3$  gilt. Wir setzen  $\delta := \min\{\delta_0, \delta_1\} > 0$ . Für jedes  $x \in \mathbb{R}^3$  mit  $|x - x_0| < \delta$  gilt dann

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f_0(x) - f_0(x_0) + f_1(x) - f_1(x_0)| \\ &\leq |f_0(x)| + |f_0(x_0)| + |f_1(x) - f_1(x_0)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 < \varepsilon. \end{aligned}$$

(3) Zur Differenzierbarkeit: Sei  $\varrho$  auf  $B(x_0, r)$  stetig differenzierbar und  $0 < r' < r$ . Wir können die Dichte  $\varrho = \varrho_0 + \varrho_1$  so zerlegen, dass  $\varrho_0$  stetig differenzierbar ist mit  $\varrho_0 = 0$  außerhalb  $B(x_0, r)$  sowie  $\varrho_0 = \varrho$  auf  $B(x_0, r')$ , also  $\varrho_1 = 0$  auf  $B(x_0, r')$ . Hierzu gehört die Zerlegung  $f = f_0 + f_1$ , und  $f_1$  ist  $C^\infty$  auf  $B(x_0, r')$  dank (4). Zudem gilt

$$f_0(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{y - x}{|y - x|^3} \varrho_0(y) dy = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{z}{|z|^3} \varrho_0(x + z) dz.$$

Das Gebiet  $B(x_0, r)$  ist beschränkt, zudem ist  $\partial\varrho_0/\partial x_i$  stetig und beschränkt: Dank Ableitung unter dem Integral ist  $f_0$  auf  $B(x_0, r)$  stetig differenzierbar. Demnach ist  $f$  auf  $B(x_0, r')$  stetig differenzierbar, und dies gilt für alle  $r' < r$ .

**Satz H1E: Lösungen der Potentialgleichung**

Die dreidimensionale **Laplace-Gleichung**  $\Delta u = 0$  auf  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  hat als sogenannte Fundamentallösung das **Newton-Potential**:

$$N: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{-1}{4\pi \cdot |x|}$$

Dies entspricht der Gravitation einer Punktmasse im Ursprung; die Konstanten wählen wir zur Normierung  $\int_{\partial B(0, r)} \text{grad } N \cdot dS = 1$ .

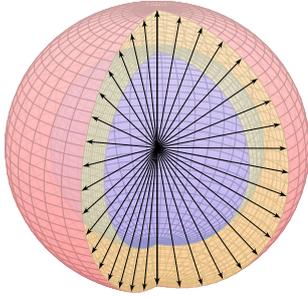
Die Massendichte  $\varrho: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  sei beschränkt und absolut integrierbar. Die **Poisson-Gleichung**  $\Delta u = \varrho$  wird gelöst durch **Superposition**:

$$u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \int_{\mathbb{R}^3} N(x - y) \varrho(y) dy$$

Das Potential  $u$  ist dann stetig differenzierbar. Für sein Gradientenfeld  $f = \text{grad } u$  und jedes Kompaktum  $D \subseteq \mathbb{R}^3$  gilt  $\int_{\partial D} f \cdot dS = \int_D \varrho(y) dy$ . Ist  $\varrho$  auf  $B(x_0, r)$  stetig differenzierbar, so auch  $f$ , und  $\Delta u = \text{div } f = \varrho$ .

## Elektrostatik: elektrisches Feld einer Punktladung

H153  
Ergänzung



Die Elektrostatik untersucht ruhende elektrische Ladungen und das von ihnen erzeugte, zeitlich konstante elektrische Feld  $\vec{E}(x, y, z)$ .

Fundamentales Beispiel: Die Ladung  $q \in \mathbb{R}$  sei konzentriert auf den Nullpunkt, den wir uns als unendlich kleines, geladenes Teilchen vorstellen. Das elektrische Feld ist dann radial mit Stärke  $|\vec{E}| = \text{const}/r^2$  und hat einen Pol im Ursprung. Das Flussintegral berechnen wir etwa für eine Kugel  $V = \bar{B}(0, r)$  vom Radius  $r$  um 0.

Das entspricht dem Gravitationsfeld einer Punktmasse. [H137](#) Die Anwendungen ändern sich, die mathematischen Methoden bleiben.

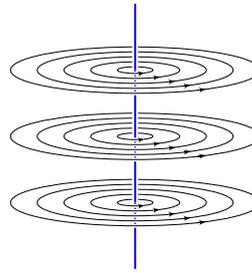
**Beispiel:** Elektrisches Feld einer Punktladung  $q$  im Ursprung:

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{q}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}(x, y, z) \implies \iint_{\partial V} \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = 4\pi q$$

☺ Außerhalb des Ursprungs  $(0, 0, 0)$  gilt Quellenfreiheit,  $\text{div } \vec{E} = 0$ , und Rotationsfreiheit,  $\text{rot } \vec{E} = 0$ . Erinnerung: Rechnen Sie dies erneut nach!

## Magnetostatik: magnetisches Feld eines Stromes

H154  
Ergänzung



Die Magnetostatik untersucht zeitlich konstante elektrische Ströme und das von ihnen erzeugte, zeitlich konstante Magnetfeld  $\vec{B}(x, y, z)$ . z.B. Dauermagnet, Erdmagnetfeld und Kompass, etc.

Einfaches Beispiel: Der konstante Strom  $j \in \mathbb{R}$  sei konzentriert auf die  $z$ -Achse, die wir uns als unendlich dünnen und langen Leiter vorstellen. Das magnetische Feld ist dann zirkulär um die  $z$ -Achse (gemäß der Rechte-Hand-Regel) mit Stärke  $|\vec{B}| = \text{const}/r$  und wird singularär auf der  $z$ -Achse. Das Randintegral berechnen wir für eine Kreisscheibe  $S$  um die  $z$ -Achse.

**Beispiel:** Magnetisches Feld eines Stroms  $j$  entlang der  $z$ -Achse:

$$\vec{B}(x, y, z) = \frac{2j/c}{x^2 + y^2}(-y, x, 0) \implies \oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{4\pi}{c} j$$

☺ Außerhalb der  $z$ -Achse  $(0, 0, z)$  gilt Rotationsfreiheit,  $\text{rot } \vec{B} = 0$ , und Quellenfreiheit,  $\text{div } \vec{B} = 0$ . Erinnerung: Rechnen Sie dies erneut nach!

**Übung:** Dies sind die beiden zentralen Beispiele! Rechnen Sie nach, dass diese beiden Felder die folgenden Maxwell-Gleichungen erfüllen.

## Maxwell-Gleichungen (im Vakuum) als Integralgleichungen

H155  
Ergänzung

Coulomb Ladungsgesetz  $\iint_{\partial V} \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V 4\pi \rho \, dV$

Faraday Induktionsgesetz  $\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{1}{c} \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} \, dS$

Gauß Quellenfreiheit  $\iint_{\partial V} \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = 0$

Ampère Durchflutungsgesetz  $\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{c} \iint_S \left( 4\pi \vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} \, dS$

Hier ist  $\vec{E}$  das elektrische Feld,  $\vec{B}$  das magnetische,  $\rho$  die Ladungsdichte,  $\vec{J}$  die Stromdichte. Dies sind lineare Integralgleichungen, äquivalent hierzu sind lineare Differentialgleichungen in  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  mit Quelltermen  $\rho$  und  $\vec{J}$  auf der rechten Seite. Sie besagen: (1) Die Quellen des  $E$ -Feldes sind die Ladungen  $\rho$ . (2) Die Wirbelbedichte des  $E$ -Feldes entspricht der zeitlichen Änderung des  $B$ -Feldes. (3) Das  $B$ -Feld ist quellenfrei, es gibt keine magnetischen Monopole. (4) Die Wirbelbedichte des  $B$ -Feldes entspricht der Stromdichte  $\vec{J}$  plus der zeitlichen Änderung des  $E$ -Feldes. Für zeitlich konstante Felder entkoppeln die Gleichungen wie oben gesehen.

☐ Zum Einstieg konsultiere man [de.wikipedia.org/wiki/Maxwell-Gleichungen](http://de.wikipedia.org/wiki/Maxwell-Gleichungen), zur Vertiefung etwa Jackson: *Klassische Elektrodynamik*, de Gruyter, 4. Auflage 2006.

📺 Up and Atom: *Maxwell's Equations - Beginner's Guide*. [youtu.be/F3QHUVr8d8I](https://youtu.be/F3QHUVr8d8I)

## Maxwell-Gleichungen als Differentialgleichungen

H156  
Ergänzung

**Aufgabe:** (1) Folgern Sie die zugehörigen Differentialgleichungen.

**Lösung:** Wir formen um mit Hilfe unserer Integralsätze:

$$\iint_{\partial V} \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS \stackrel{\text{Gauß}}{\stackrel{G3G}{=}} \iiint_V (\nabla \cdot \vec{E}) \, dV$$

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{s} \stackrel{\text{Stokes}}{\stackrel{G1A}{=}} \iint_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{n} \, dS$$

$$\iint_{\partial V} \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS \stackrel{\text{Gauß}}{\stackrel{G3G}{=}} \iiint_V (\nabla \cdot \vec{B}) \, dV$$

$$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{s} \stackrel{\text{Stokes}}{\stackrel{G1A}{=}} \iint_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot \vec{n} \, dS$$

Für jedes kompakte Volumen  $V$  und Flächenstück  $S$  gilt demnach

$$\iiint_V [\nabla \cdot \vec{E} - 4\pi \rho] \, dV = 0, \quad \iint_S \left[ \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] \cdot \vec{n} \, dS = 0,$$

$$\iint_{\partial V} [\nabla \cdot \vec{B}] \, dV = 0, \quad \iint_S \left[ \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} \vec{J} \right] \cdot \vec{n} \, dS = 0.$$

Dies gilt genau dann, wenn die Integranden verschwinden (H1A, H1B).

## Elektrodynamik: Maxwellsche Gleichungen

H157  
Ergänzung

Wir erhalten die Maxwell-Gleichungen als Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 4\pi \rho, & \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, & \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{J}. \end{aligned}$$

Die integrale und die differentielle Formulierung sind äquivalent! Je nach Anwendungen ist die eine oder die andere geschickter. Das spüren Sie sehr deutlich beim Nachrechnen der beiden zentralen Beispiele: Auf  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  bzw.  $\mathbb{R}^3 \setminus \{z\text{-Achse}\}$  ist die differentielle Form bequemer. (Warum?) Um den Nullpunkt bzw. die Achse nutzen Sie besser die integrale Form. (Warum?)

**Aufgabe:** (2) Folgern Sie die Ladungserhaltung (Kontinuitätsgleichung):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

**Nachrechnen:** Wir nutzen Schwarz,  $\text{div rot} = 0$ , hier  $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = 0$ , angewendet auf die erste und vierte Gleichung (Coulomb und Ampère):

$$4\pi \frac{\partial \rho}{\partial t} \stackrel{(1)}{=} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{E} \stackrel{\text{D4A}}{=} \nabla \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \stackrel{(4)}{=} \nabla \cdot \left[ \nabla \times c\vec{B} - 4\pi \vec{J} \right] \stackrel{\text{D4A}}{=} -4\pi \nabla \cdot \vec{J}$$

## Elektrodynamik: Maxwellsche Gleichungen

H158  
Ergänzung

**Aufgabe:** (3) Folgern Sie die elektromagnetischen Wellengleichungen:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= 4\pi \nabla \rho + \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}, \\ \nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} &= -4\pi \nabla \times \vec{J}. \end{aligned}$$

Für  $\rho = 0$  und  $\vec{J} = 0$  bleiben demnach die freien Wellengleichungen:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{E} = 0, \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{B} = 0.$$

**Nachrechnen:** Wir nutzen  $\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla \times \left[ \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B} \\ &= 4\pi \nabla \rho - \nabla^2 \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \end{aligned}$$

Ebenso erhalten wir die magnetische Wellengleichung.

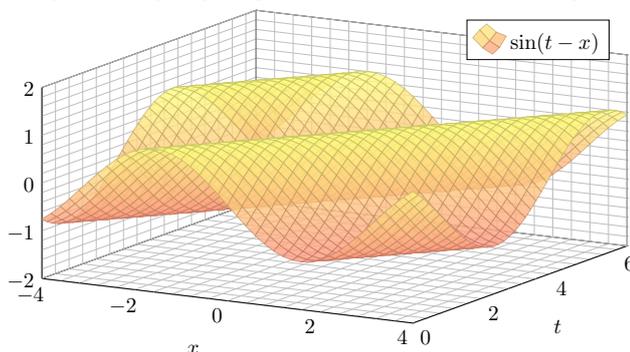
## Elektrodynamik: Maxwellsche Gleichungen

H159  
Ergänzung

Die Wellengleichung  $(c^{-2} \partial_0^2 - \partial_1^2 - \dots - \partial_n^2)u = 0$  wird gelöst durch Wellenfunktionen  $u(t, \vec{x}) = f(c|\vec{\xi}|t - \vec{\xi} \cdot \vec{x})$  mit  $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  und  $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$ .

**Aufgabe:** (4) Rechnen Sie nach, dass  $u$  tatsächlich eine Lösung ist.

**Lösung:** (4) Nun genügt sorgsames Ableiten mit der Kettenregel.



## Elektrodynamik: Maxwellsche Gleichungen

H160  
Ergänzung

Die Maxwellschen Gleichungen sind lineare partielle Differentialgleichung in  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  mit Inhomogenitäten in  $\rho$  und  $\vec{J}$  auf der rechten Seite. Die hieraus abgeleiteten Wellengleichungen beschreiben, wie sich elektromagnetische Wellen in Raum und Zeit ausbreiten, siehe Seite D533.

Viele berühmte Wissenschaftler des 19. Jahrhunderts waren an der spektakulären Erforschung des Elektromagnetismus beteiligt und haben Teile dieser Gleichungen experimentell und theoretisch untersucht. Doch erst James Clerk Maxwell (*A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*, 1865) konnte sie zu einem konsistenten Gesamtsystem von acht Gleichungen zusammenfügen; diese haben wir oben ausgeschrieben als zwei skalare und zwei vektorielle Gleichungen.

Damit brachte Maxwell die intuitiv-qualitativen Beschreibungen in die mathematisch-quantitative Form der Vektorfelder und eröffnete so theoretische wie praktische Berechnungen. Maxwells mathematische Theorie gab alle zuvor gefundenen Phänomene präzise wieder, zudem konnte sie völlig neue vorhersagen: elektromagnetische Wellen! Diese waren 1865 experimentell noch lange nicht zugänglich; dies gelang Heinrich Hertz 1886. Erst Maxwells theoretischer Durchbruch ermöglichte den technologischen Fortschritt, von dem wir bis heute profitieren!

Jede Lösung  $u(t, \vec{x}) = f(c|\vec{\xi}|t - \vec{\xi} \cdot \vec{x})$  ist eine Welle, in Form der Funktion  $f$ , die sich mit Lichtgeschwindigkeit  $c$  in Richtung  $\vec{\xi}$  ausbreitet. (Klassisch sollte  $f$  mindestens zweimal stetig differenzierbar sein, etwa  $f = \sin$ , notfalls nutzen wie die Ableitung im Distributionensinne.)

Maxwells Gleichungen haben eine besondere Symmetrie: Sie enthalten die Invarianz der Lichtgeschwindigkeit  $c$  unabhängig vom Betrachter, auch in bewegten Bezugssystemen. Diese erstaunliche Tatsache führte direkt zu Einsteins Spezieller Relativitätstheorie (1905).

Wir führen die Diskussion von Feldern und Potentialen fort (E341).

**Wiederholung:** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet. Was versteht man unter...

- (1) einem Skalarfeld  $F$  auf  $U$ ? (2) einem Vektorfeld  $f$  auf  $U$ ?
- (3) dem Gradienten von  $F$ ? (4) einem Potential zu  $f$ ?
- (5) Was besagt der HDI für ein Vektorfeld  $f$  mit Potential  $F$ ?
- (6) Was gilt demnach für Arbeitsintegrale geschlossener Wege?

- (1) Ein **Skalarfeld** auf  $U$  ist eine stetige Abbildung  $F: \mathbb{R}^n \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}$ .
- (2) Ein **Vektorfeld** auf  $U$  ist eine stetige Abbildung  $f: \mathbb{R}^n \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^n$ .
- (3) Zu jedem stetig diff'baren Skalarfeld  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$  ist der **Gradient**

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ gegeben durch } f = F' = \text{grad } F = \left( \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right).$$

- (4) Ein **Potential** zu  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist ein Skalarfeld  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F' = f$ .
- (5) Für jeden stückweise stetig diff'baren Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  gilt dann:

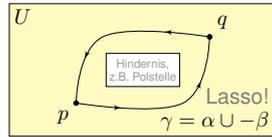
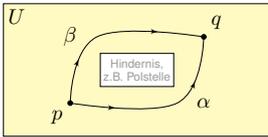
$$\int_{\gamma} f \cdot d\gamma \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{t=a}^b F'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \stackrel{\text{KR}}{=} \int_{t=a}^b \frac{dF(\gamma(t))}{dt} dt \stackrel{\text{HDI}}{=} F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

- (6) Ist  $f = F'$  und  $\gamma$  geschlossen, also  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , so folgt  $\oint_{\gamma} f \cdot d\gamma = 0$ .

Exakte und konservative Vektorfelder

Ein Vektorfeld  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt **exakt**, oder **Gradientenfeld**, wenn es ein Potential erlaubt, also ein Skalarfeld  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F' = f$  existiert. Das ist das Potentialproblem. Wie können wir es konkret anpacken?

Ein Vektorfeld  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt **konservativ**, oder **global wirbelfrei**, wenn  $\oint_{\gamma} f \cdot d\gamma = 0$  für jeden geschlossenen Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  gilt.



Konservativ: Das Arbeitsintegral hängt nur von Start  $p$  und Ziel  $q$  ab, nicht vom Integrationsweg, denn  $\int_{\alpha} f \cdot d\alpha - \int_{\beta} f \cdot d\beta = \oint_{\gamma} f \cdot d\gamma = 0$ .

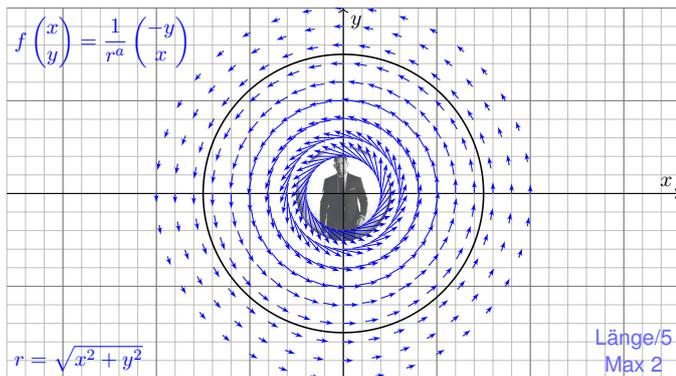
Satz H2A: Hauptsatz: exakt  $\Leftrightarrow$  konservativ

- (1) Besitzt das Vektorfeld  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Potential, so ist  $f$  konservativ.
- (2) Ist umgekehrt  $f$  konservativ, so ist  $F(x) = \int_{s=p}^x f(s) \cdot ds$  ein Potential.

Zentrales Beispiel: das Wirbelfeld

**Aufgabe:** (1) Sei  $a \in \mathbb{R}$ . Skizzieren Sie das zirkuläre Vektorfeld

$$f: U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ mit } f(x, y) = (-y, x) / (x^2 + y^2)^{a/2}.$$



Zentrales Beispiel: das Wirbelfeld

Wie kann das sein? Das Vektorfeld  $f$  rotiert offensichtlich um den Nullpunkt, aber für  $a = 2$  verschwindet die Rotation  $\text{rot}(f)$  überall.

⚠ Im Nullpunkt  $(x, y) = (0, 0)$  hat das Vektorfeld  $f$  eine Polstelle! Die Zirkulation konzentriert sich im Nullpunkt; dort sind  $f$  und  $\text{rot}(f)$  nicht definiert, aber wir können und werden drumherum integrieren!

😊 Unsere Rechnung nutzt die Symmetrie und kommt ohne explizite Parametrisierung aus. Alternativ können wir die Kreislinie  $\partial B(0, r)$  explizit parametrisieren, etwa durch den Weg  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t)$ . Damit berechnen wir das Arbeitsintegral:

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(0,r)} f(s) \cdot ds &= \int_{\gamma} f \cdot d\gamma = \int_{t=0}^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_{t=0}^{2\pi} \frac{1}{r^a} \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \end{pmatrix} dt = \int_{t=0}^{2\pi} r^{2-a} dt = 2\pi r^{2-a}. \end{aligned}$$

Für  $a = 0$  gilt  $\text{rot}(f) = 2$  und das Arbeitsintegral ist gleich  $2 \text{vol}_2 B(0, r)$ . Für  $a = 2$  gilt  $\text{rot}(f) = 0$  und das Arbeitsintegral ist unabhängig von  $r$ .

😊 Beide Phänomene erklären sich durch den Satz von Green.

Potentiale und Gradientenfelder

(1–2) Jedem Punkt  $x \in U$  aus dem Definitionsgebiet  $U$  wird eine reelle Zahl  $F(x) \in \mathbb{R}$  bzw. ein Vektor  $f(x) \in \mathbb{R}^n$  zugeordnet. Wir nehmen meist stillschweigend an, dass diese Zuordnungen stetig / stetig diff'bar sind.

(3–4) In Dimension  $n = 1$  ist  $f = F'$  **Ableitung** und  $F$  **Stammfunktion**. Potentiale sind nur bis auf additive Konstanten eindeutig bestimmt.

(5) Das Arbeitsintegral eines Gradientenfeldes  $f = F'$  hängt nur vom **Start**  $p = \gamma(a)$  und **Ziel**  $q = \gamma(b)$  ab, ansonsten aber nicht vom Weg  $\gamma$ .

Physikalisch entspricht dies der Energieerhaltung: Die zur Bewegung entlang  $\gamma$  aufgebrauchte Arbeit wird als Lageenergie gespeichert.

(6) So kann man feststellen, ob ein Vektorfeld  $f$  ein Potential hat: Aus  $\oint_{\gamma} f \cdot d\gamma \neq 0$  folgt, dass das Feld  $f$  kein Potential haben kann.

Wir nennen ein Vektorfeld  $f$  **konservativ**, wenn  $\oint_{\gamma} f \cdot d\gamma = 0$  gilt.

Das bedeutet, längs geschlossener Wege wird keine Arbeit verrichtet. Jede an einer Stelle des Weges aufgewandte Energie wird an anderer Stelle zurückgewonnen, die Gesamtenergie bleibt schließlich erhalten.

☐ Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §5. Das Potentialproblem lösen wir in Kapitel E und hier allgemein. Wir nutzen es in Kapitel M für exakte Differentialgleichungen.

Exakte und konservative Vektorfelder

**Nachrechnen:** (1) Aus  $f = F'$  folgt  $\oint_{\gamma} f \cdot d\gamma = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$ .

(2) Wir können und werden  $U$  als wegzusammenhängend annehmen. Wir wählen einen Fußpunkt  $p \in U$  und definieren  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$F(x) := \int_{s=p}^x f(s) \cdot ds = \int_{\alpha} f \cdot d\alpha = \int_{t=0}^1 f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt.$$

Hier ist  $\alpha: [0, 1] \rightarrow U$  von  $\alpha(0) = p$  nach  $\alpha(1) = x$  ein beliebiger (!) Weg.

😊 Der Wert  $F(x)$  ist wohldefiniert, also unabhängig vom willkürlich gewählten Weg  $\alpha$ , da wir unser Vektorfeld  $f$  konservativ voraussetzen.

Ist  $F$  ein Potential zu  $f$ ? Gilt wirklich  $\partial_i F = f_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$ ?

Für jeden Punkt  $x \in U$  und  $h > 0$  mit  $[x, x + he_i] \subseteq U$  finden wir:

$$F(x + he_i) \stackrel{②}{=} F(x) + \int_{t=0}^h f_i(x + te_i) dt$$

$$\partial_i F(x) \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{d}{dh} F(x + he_i) \stackrel{\text{HDI}}{=} f_i(x)$$

😊 Somit gilt  $F' = f$  wie gewünscht, das heißt,  $F$  ist ein Potential zu  $f$ .

Zentrales Beispiel: das Wirbelfeld

**Aufgabe:** Wir betrachten  $f(x, y) = (-y, x) / r^a$  mit  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

(2) Berechnen Sie  $|f(x, y)|$  und das Arbeitsintegral längs  $\partial B(0, r)$ .

(3) Berechnen Sie  $\text{rot}(f)$ . Für welche  $a$  ist  $\text{rot}(f)$  konstant? Null?

(4) Für welche  $a$  existiert zu  $f$  ein Potential  $F: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ?

**Lösung:** (2) Wir finden  $|f(x, y)| = r^{1-a}$ . Da  $f$  überall tangential ist:

$$\oint_{\partial B(0,r)} f(s) \cdot ds = \oint_{\partial B(0,r)} f(s) \cdot t_{\partial B} |ds| = \oint_{\partial B(0,r)} r^{1-a} |ds| = 2\pi r^{2-a}$$

(3) Wir finden  $\text{rot}(f) = \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 = \dots = (2 - a) / r^a$ .

Die Rotation ist konstant für  $a \in \{0, 2\}$ , und Null nur für  $a = 2$ .

(4) Das Feld  $f$  erlaubt kein Potential auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , denn es gilt

$$\oint_{\partial B(0,r)} f(s) \cdot ds \neq 0.$$

😊 Das Vektorfeld ist nicht konservativ, also auch kein Gradientenfeld.

⚠ Für  $a = 2$  ist das Feld  $f$  rotationsfrei, besitzt dennoch kein Potential!

Rotationsfreie Vektorfelder und Potentiale

**Wiederholung:** ☐ Stroppel, Höhere Mathematik 2, Satz 4.3.10.

(1) Wann heißt ein  $C^1$ -Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^n \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^n$  rotationsfrei?

(2) Was besagt der Satz von Schwarz (D4A) für partielle Ableitungen?

(3) Ist Rotationsfreiheit für Exaktheit notwendig? (4) hinreichend?

(5) Auf welchen Gebieten  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  gilt „rotationsfrei = exakt“?

(1) Ein  $C^1$ -Vektorfeld  $f$  heißt **rotationsfrei**, wenn  $\partial_j f_i = \partial_i f_j$  gilt. Das bedeutet, die Jacobi-Matrix  $(\partial_j f_i)_{i,j}$  ist symmetrisch.

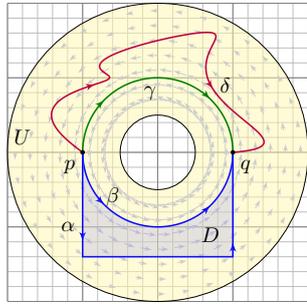
In Dimension  $n = 2, 3$  ist dies gleichbedeutend mit  $\text{rot}(f) = 0$ .

(2) Jede  $C^2$ -Funktion  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$  erfüllt  $\partial_j \partial_i F = \partial_i \partial_j F$  für alle  $i, j$ . Jedes  $C^1$ -Gradientenfeld  $f = (\partial_1 F, \dots, \partial_n F)$  ist somit rotationsfrei.

(3) Für jedes  $C^1$ -Vektorfeld  $f$  gilt: Exaktheit impliziert Rotationsfreiheit. Existiert nämlich ein Potential  $F$  mit  $\partial_i F = f_i$ , so folgt  $\partial_j f_i = \partial_i f_j$ .

(4) Aus  $\partial_j f_i \neq \partial_i f_j$  folgt, dass das Feld  $f$  kein Potential haben kann. Aber allein aus  $\partial_j f_i = \partial_i f_j$  folgt noch nicht, dass  $f$  ein Potential hat!

(5) Ist das Gebiet  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  einfach zusammenhängend, so erlaubt jedes rotationsfreie Vektorfeld  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Potential  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ .



Sei  $f: \mathbb{R}^n \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Vektorfeld. Wir integrieren entlang der Wege  $\alpha, \beta: [a, b] \rightarrow U$  von  $p$  nach  $q$ . Die Ergebnisse sind i.A. verschieden! Hat  $f$  ein Potential  $F$ , so ist jedes Arbeitsintegral gleich  $F(q) - F(p)$ . Aus  $\text{rot}(f) = 0$  und  $\alpha \cup -\beta = \partial D$  folgt  $\int_{\alpha} f \cdot d\alpha = \int_{\beta} f \cdot d\beta$  dank Stokes. 😊 In dieser glücklichen Situation müssen wir viel weniger rechnen!

Wege  $\alpha$  und  $\beta$  heißen **homotop** in  $U$ , wenn sie sich stetig ineinander deformieren lassen — innerhalb von  $U$  und bei festen Endpunkten.

**Satz H2B: Rotationsfreiheit impliziert Homotopieinvarianz.**

Ist das Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^n \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^n$  rotationsfrei, so liefern homotope Wege  $\alpha, \beta: [a, b] \rightarrow U$  dasselbe Arbeitsintegral  $\int_{\alpha} f \cdot d\alpha = \int_{\beta} f \cdot d\beta$ .

Zwei Wege sind homotop, wenn sie sich stetig ineinander deformieren lassen. Um damit auch rechnen zu können, definieren wir es genauer:

**Definition H2C: Homotopie mit festen Endpunkten**

Eine **Homotopie** ist eine stetige Abbildung  $H: [0, 1] \times [a, b] \rightarrow U$ . Für jedes  $s \in [0, 1]$  definiert  $H_s(t) := H(s, t)$  einen Weg  $H_s: [a, b] \rightarrow U$ . Für eine **Homotopie von  $\alpha$  nach  $\beta$**  verlangen wir  $H_0 = \alpha$  und  $H_1 = \beta$  sowie selben Start  $H_s(a) = p$  und selbes Ziel  $H_s(b) = q$  für alle  $s \in [0, 1]$ .

Somit ist  $H_s$  für  $s \in [0, 1]$  eine Familie von Wegen, die  $H_0 = \alpha$  stetig in  $H_1 = \beta$  deformiert, innerhalb des Gebietes  $U$ , bei festen Endpunkten.

Die Homotopie  $H$  parametrisiert  $H$  ein Flächenstück mit Rand  $\alpha \cup -\beta$ , die anderen Kanten  $[0, 1] \times \{a, b\}$  des Rechtecks sind konstante Wege. Das Flächenstück muss dabei nicht regulär oder injektiv sein.

Im obigen Beispiel sind  $\alpha$  und  $\beta$  in  $U$  homotop, aber nicht  $\beta$  und  $\gamma$ . Warum? Wir sehen  $\beta \neq \gamma$  an den unterschiedlichen Integralen! Diese Beobachtungen präzisieren wir durch Satz H2B.

Wir können nun die behauptete Homotopieinvarianz nachrechnen:

**Beweis des Satzes H2B:** Die Wege  $\alpha, \beta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  seien homotop, das heißt, es existiert eine Homotopie  $H: [0, 1] \times [a, b] \rightarrow U$ . Dies ist ein parametrisiertes Flächenstück mit parametrisiertem Rand  $\partial H = \alpha \cup -\beta$ . Die anderen Kanten  $[0, 1] \times \{a, b\}$  des Rechtecks sind konstante Wege. Wir dürfen  $H$  als stückweise  $C^2$  annehmen. Dank Stokes (G1A) gilt dann

$$\int_{\beta} f \cdot d\beta - \int_{\alpha} f \cdot d\alpha = \int_H \text{rot}(f) \cdot dH = 0.$$

Diese Rechnung gelingt für  $n = 2$  und  $n = 3$  mit Stokes. In beliebiger Dimension verläuft das Argument im Prinzip genauso, wir haben aber unsere Integralsätze nur für  $n \leq 3$  formuliert.

**Beispiel:** Für Wege  $\gamma: [a, b] \rightarrow U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  messen wir den Winkelzuwachs [E37] durch

$$W(\gamma) := \int_{\gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}.$$

Dieses Arbeitsintegral ist homotopieinvariant, bei festem Start und Ziel, da unser Vektorfeld rotationsfrei ist. Nicht-homotope Weg unterscheiden wir hier leicht durch ihre Integrale!

**Variante:** Für die Homotopie geschlossener Wege genügt  $H(s, a) = H(s, b)$  für alle  $s \in [0, 1]$ .

**Satz H2D: Homotopie von Wegen in einem Kreisring**

Sei  $U = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma^2 < x^2 + y^2 < \rho^2 \}$  ein Kreisring,  $0 < \sigma < \rho$ . Je zwei Wege  $\gamma_0, \gamma_1: [a, b] \rightarrow U$  mit gleichem Start  $p = \gamma_0(a) = \gamma_1(a)$  und Ziel  $q = \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$  sind genau dann homotop im Kreisring  $U$ , wenn sie die gleiche Umlaufzahl haben, also  $W(\gamma_0) = W(\gamma_1)$  gilt.

**Beweis:** „ $\Rightarrow$ “: Die Invarianz von  $W(\gamma_s)$  haben wir eben nachgerechnet. Für die Umkehrung „ $\Leftarrow$ “ schreiben wir die Wege in Polarkoordinaten:

$$\gamma_0(t) = r_0(t) e^{i\varphi_0(t)} \quad \text{und} \quad \gamma_1(t) = r_1(t) e^{i\varphi_1(t)}$$

Wegen  $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$  können wir gleiche Startwinkel  $\varphi_0(a) = \varphi_1(a)$  wählen, und  $W(\gamma_0) = W(\gamma_1)$  impliziert dann gleiche Zielwinkel:

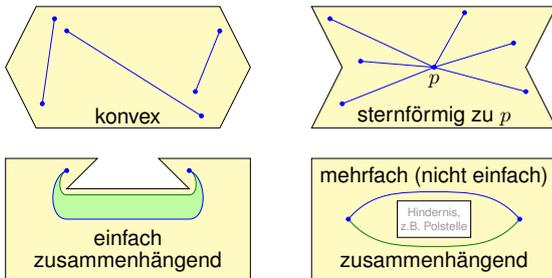
$$\varphi_0(b) = \varphi_0(a) + W(\gamma_0) = \varphi_1(a) + W(\gamma_1) = \varphi_1(b)$$

Wir erhalten eine Homotopie  $H$  von  $\gamma_0$  nach  $\gamma_1$  innerhalb  $U$  durch

$$H_s(t) = [(1-s)r_0(t) + sr_1(t)] e^{i[(1-s)\varphi_0(t) + s\varphi_1(t)]}$$

Was ist hierzu zu prüfen? Dies ist eine stetig Abbildung  $H: [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $H_0 = \gamma_0$  und  $H_1 = \gamma_1$ . Ihr Bild liegt in  $U$ , denn die Radien bleiben zwischen den Grenzen  $\sigma$  und  $\rho$ .

Wir verstehen Kreisringe und gehen nun zu allgemeineren Gebieten:



Will man prüfen, ob ein Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^n \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^n$  konservativ ist, so muss man  $\oint_{\gamma} f \cdot d\gamma = 0$  nachweisen für *alle* geschlossenen Wege in  $U$ ! Ist  $f$  rotationsfrei, so genügt jeweils ein Weg in jeder Homotopieklasse. Hier spielt die Form des Gebietes  $U$  eine entscheidende Rolle! Ganz einfach wird es, wenn alle Wege untereinander homotop sind.

Eine Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt **konvex**, wenn zu je zwei Punkten  $p, q \in U$  ihre Verbindungsstrecke  $[p, q] = \{ (1-s)p + sq \mid 0 \leq s \leq 1 \}$  in  $U$  liegt. Wir nennen  $U$  **sternförmig** bezüglich eines festen Zentrums  $p \in U$ , wenn zu jedem Punkt  $q \in U$  die Verbindungsstrecke  $[p, q]$  in  $U$  liegt. Wir nennen  $U$  (**weg**)**zusammenhängend**, wenn zu je zwei Punkten  $p, q \in U$  ein Weg  $\alpha: [0, 1] \rightarrow U$  von  $\alpha(0) = p$  nach  $\alpha(1) = q$  existiert. Zudem heißt  $U$  **einfach zusammenhängend**, wenn zudem je zwei Wege  $\alpha, \beta: [0, 1] \rightarrow U$  mit gleichem Start und Ziel homotop in  $U$  sind. Äquivalent als Lasso: Jeder geschlossene Weg  $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$  lässt sich auf einen Punkt zusammenziehen (durch eine Homotopie in  $U$ ).

**Aufgabe:** Zeigen Sie für jedes Gebiet  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  die Implikationen  $U$  konvex  $\implies U$  sternförmig  $\implies U$  einfach zusammenhängend.

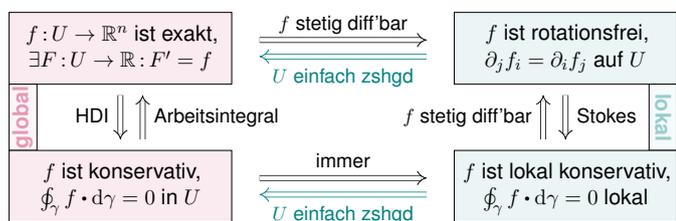
**Lösung:** (1) Ist  $U$  konvex, so eignet sich jeder Punkt  $p \in U$  als Zentrum. (2) Sei  $U$  sternförmig zu  $p$  und  $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$  ein geschlossener Weg. Wir können  $\gamma(0) = \gamma(1) = p$  annehmen, notfalls dorthin verschieben. Wir finden die Homotopie  $H_s(t) = (1-s)p + s\gamma(t)$ . Skizzieren Sie's!

**Satz H2E: Potentiale auf einfach zusammenhängenden Gebieten**

Unser Gebiet  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  sei einfach zusammenhängend, z.B. konvex oder sternförmig zu  $p$ . Ein  $C^1$ -Vektorfeld  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  erlaubt genau dann ein Potential  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ , wenn  $f$  rotationsfrei ist, also  $\partial_j f_i = \partial_i f_j$  erfüllt.

In diesem Fall erhalten wir ein Potential durch das Arbeitsintegral

$$F(x) = \int_{s=p}^x f(s) \cdot ds = \int_{t=a}^b f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \alpha: [a, b] \rightarrow U \text{ und} \\ \alpha(a) = p, \alpha(b) = x. \end{cases}$$



Gegeben sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetiges Vektorfeld. Problem: Wie prüfen Sie, ob  $f$  exakt ist? Wie finden Sie ein Potential?  
 😊 Notwendiges Kriterium, für  $f \in C^1$ , ist Rotationsfreiheit  $\partial_j f_i = \partial_i f_j$ .  
 😊 Auf jedem einfach zusammenhängenden Gebiet ist sie hinreichend!  
 😊 Das Arbeitsintegral  $F(x) = c + \int_{s=p}^x f(s) \cdot ds$  liefert uns ein Potential  $F: \mathbb{R}^n \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Eichung  $F(p) = c$  legt das Potential eindeutig fest.  
 😊 Die Wahl des Integrationsweges  $\alpha$  vom Fußpunkt  $p$  zum Ziel  $x$  in  $U$  ist beliebig: Je zwei sind homotop und ergeben dasselbe Integral (H2B).  
 😊 Zwecks leichter Integration wählt man  $\alpha$  möglichst geschickt, etwa  $\alpha: [0, 1] \rightarrow U$  mit  $\alpha(t) = (1-t)p + tx$  falls  $U$  sternförmig zu  $p$  ist.  
 😊 Speziell für Quader kann man auch ein Hakenintegral nutzen:

$$F(x) = \int_{t=p_1}^{x_1} f_1(t, p_2, p_3) dt + \int_{t=p_2}^{x_2} f_2(x_1, t, p_3) dt + \int_{t=p_3}^{x_3} f_3(x_1, x_2, t) dt$$

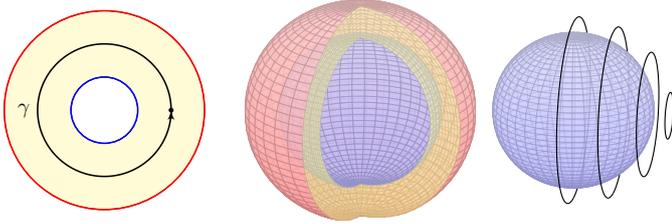
⚠ Nach der Rechnung die Probe nicht vergessen: Gilt  $F' = f$ ?

Für die Rotationsfreiheit verlangen wir, dass  $f$  stetig differenzierbar ist. Alle anderen Begriffe und Implikationen gelten für stetige Vektorfelder; sie benötigen keine Ableitung, nur Integrale.

**Aufgabe:** Skizzieren Sie zu Radien  $0 \leq \sigma < \rho \leq \infty$

- den Kreisring  $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma < |x| < \rho\}$ ,
- die Kugelschale  $K = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \sigma < |x| < \rho\}$ .
- einen Volltorus  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  und seinen Außenraum  $U = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{V}$ .

Sind diese Gebiete konvex? sternförmig? zshgd? einfach zshgd?  
Unter welchen Voraussetzungen hat ein Vektorfeld hierauf ein Potential?



Die Kugelschale ist einfach zusammenhängend, der Kreisring nicht!  
Jeder geschlossene Weg  $\gamma: [0, 1] \rightarrow K$  ist in  $K$  zusammenziehbar!

⚠ Einfach zusammenhängend bedeutet nicht unbedingt „ohne Löcher“.

Die Kugelschale ist nicht konvex oder sternförmig, aber einfach zshgd.  
(Anschaulich ist das klar, die Konstruktion von Homotopien ist trickreich.)

Gegeben sei hierauf ein stetig differenzierbares Vektorfeld  $f: K \rightarrow \mathbb{R}^3$ .  
Zum Feld  $f: K \rightarrow \mathbb{R}^3$  suchen wir ein Potential  $F: K \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F' = f$ .

**Wann existiert ein Potential?** Genau dann, wenn  $\text{rot}(f) = 0$ .

Die Bedingung  $\text{rot}(f) = 0$  ist immer notwendig nach dem Satz von Schwarz. Die Kugelschale  $K$  ist einfach zusammenhängend, dank Satz H2E ist somit  $\text{rot}(f) = 0$  hier auch hinreichend!

**Wie berechnen Sie ein Potential?** Durch das Arbeitsintegral

$$F(x) = \int_{s=p}^x f(s) \cdot ds = \int_{\gamma} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$$

längs eines Weges  $\gamma: [a, b] \rightarrow K$  vom Fußpunkt  $\gamma(a) = p$  nach  $\gamma(b) = x$ .

Hierbei ist der Fußpunkt  $p \in K$  einmal frei wählbar und wird dann im Folgenden festgehalten.  
Ebenso ist der Integrationsweg  $\gamma$  in  $K$  frei wählbar, z.B. ein Hakenintegral in Kugelkoordinaten:  
Hier ist es leicht, der Parameterbereich für  $(r, \theta, \varphi) \in [\sigma, \rho] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$  ist ein Quader!

**Nach der Rechnung die Probe nicht vergessen!** Gilt  $F' = f$ ?

Der Kreisring  $A$  ist zusammenhängend, aber nicht einfach zshgd:  
Der Weg  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow A: t \mapsto (r \cos t, r \sin t)$  ist nicht zusammenziehbar.

(Anschaulich ist das klar, Beweis durch Integral über das Wirbelfeld!)

Gegeben sei hierauf ein stetig differenzierbares Vektorfeld  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ .  
Zum Feld  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^2$  suchen wir ein Potential  $F: A \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F' = f$ .

**Wann existiert ein Potential?** Notwendig ist wie immer  $\text{rot}(f) = 0$ .  
Hinreichend ist  $\text{rot}(f) = 0$  und  $\oint_{\gamma} f \cdot d\gamma = 0$  für den obigen Weg  $\gamma$ .

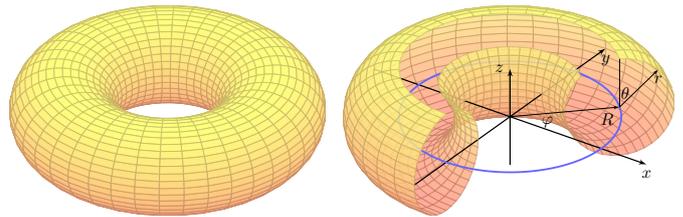
Wir müssen hier also nicht alle (unendliche viele) Wege nachprüfen, sondern nur einen.  
Verschwindet das Arbeitsintegral längs  $\gamma$ , dann auch für alle anderen geschlossenen Wege:  
Unser Vektorfeld  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist dann konservativ und somit exakt dank Satz H2A!

**Wie berechnen Sie ein Potential?** Durch das Arbeitsintegral

$$F(x) = \int_{s=p}^x f(s) \cdot ds = \int_{\gamma} f_1 dx + f_2 dy$$

längs eines Weges  $\gamma: [a, b] \rightarrow A$  vom Fußpunkt  $\gamma(a) = p$  nach  $\gamma(b) = x$ .

Hierbei ist der Fußpunkt  $p \in A$  einmal frei wählbar und wird dann im Folgenden festgehalten.  
Ebenso ist der Integrationsweg  $\gamma$  in  $A$  frei wählbar, z.B. ein Hakenintegral in Polarkoordinaten:  
Hier ist es leicht, denn der Parameterbereich für  $(r, \varphi) \in [\sigma, \rho] \times [0, 2\pi]$  ist ein Rechteck!



Der Volltorus  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  ist zusammenhängend, aber nicht einfach zshgd.  
Seine Seele (die blaue Kreislinie) ist in  $V$  nicht zusammenziehbar.

Dasselbe gilt, dual hierzu, für den Außenraum  $U = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{V}$ .

Anwendung / Anschauung: Wir stellen uns den Torus  $V$  als einen stromdurchflossenen Leiter vor,  
etwa als eine Spule mit Wicklung um die  $z$ -Achse. Der Außenraum  $U$  ist leer, insbesondere  
fließt hier keinerlei Strom. Wir untersuchen die Maxwell-Gleichungen (H57) im statischen Fall  
 $\partial_t E = \partial_t B = 0$ : Es gilt  $\text{div} B = 0$  und auf  $U$  zudem  $\text{rot} B = 0$ , dennoch gilt  $\oint_{\gamma} B(s) \cdot ds \neq 0$ ;  
genau dies beobachtet man bei Gleichstrommagneten. Bei Wechselstrom (dynamischer Fall)  
nutzt man  $\text{rot} E = -\partial_t B/c$  zur Induktion in einer zweiten Spule (Transformator).

Gegeben ist ein  $C^1$ -Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^n \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , gesucht ist ein Potential.

**Aufgabe:** Formulieren Sie Ihren Algorithmus zur Nutzung der Kriterien  
(1) „Auf  $U$  gilt  $\text{rot} f = 0$ .“ und (2) „ $U$  ist einfach zusammenhängend.“  
sowie (3) „Es gilt  $\oint_{\gamma} f \cdot d\gamma = 0$  für jeden geschlossenen Weg  $\gamma$  in  $U$ .“

Wie können Sie im positiven Falle ein solches Potential  $F$  berechnen?  
Warum sind Potentiale zu  $f$  nicht eindeutig? Wie finden Sie alle?

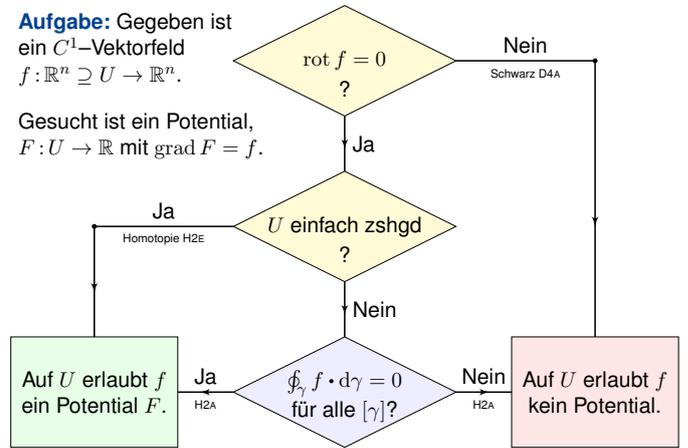
Kriterien an $f$ und $U$	$U$ einfach zusammenhängend	$U$ nicht einfach zusammenhängend
$\text{rot} f \neq 0$ $J(f)$ asymmetrisch	Auf $U$ erlaubt $f$ kein Potential.	Auf $U$ erlaubt $f$ kein Potential.
$\text{rot} f = 0$ $J(f)$ symmetrisch	Auf $U$ erlaubt $f$ ein Potential $F$ .	Beides ist möglich. Prüfe $\oint_{\gamma} f \cdot d\gamma = 0$ .

⚠ Die vollständige Lösung des Problems erfordert mehrere Kriterien, einige notwendig, andere hinreichend. Diese Zusammenfassung hilft.

**Aufgabe:** Gegeben ist ein  $C^1$ -Vektorfeld

$f: \mathbb{R}^n \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Gesucht ist ein Potential,  
 $F: U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\text{grad} F = f$ .



Zur Vereinfachung nehmen wir an, die Menge  $U$  ist offen und zshgd.  
Hierauf ist unser Vektorfeld  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar, kurz  $C^1$ .  
Wir wollen klären, ob  $f$  ein Potential erlaubt,  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\text{grad} F = f$ .  
Notwendig ist  $\text{rot} f = 0$ : Aus  $f = \text{grad} F$  folgt  $\text{rot} f = \text{rot} \text{grad} F = 0$   
dank Schwarz (D4A). Gilt also  $\text{rot} f \neq 0$ , so kann  $f$  kein Potential haben.

Nach diesem ersten Hindernis kommt das zweite: Wir nehmen nun  $\text{rot} f = 0$  an; hinreichend ist dann  $U$  einfach zusammenhängend (H2E).

😊 Damit lassen sich viele Fälle schnell und einfach entscheiden:

Notwendig ist  $\text{rot} f = 0$ , hinreichend ist  $\text{rot} f = 0$  und  $U$  einfach zshgd.

😊 Gilt  $\text{rot} f = 0$ , aber  $U$  ist nicht einfach zshgd, so prüfen wir genauer.

Wir testen aus jeder Homotopieklasse  $[\gamma]$  einen geschlossenen Weg  $\gamma$ .

Gilt  $\oint_{\gamma} f \cdot \gamma \neq 0$ , so kann  $f$  kein Potential haben (H2A). Gilt  $\oint_{\gamma} f \cdot \gamma = 0$  für jeden geschlossenen Weg  $\gamma$  in  $U$ , so hat  $f$  ein Potential (H2A), nämlich:

$$F(x) = \int_{s=p}^x f(s) \cdot ds$$

😊 Der Wert  $F(x)$  ist wohldefiniert, unabhängig vom gewählten Weg.

Wie beweisen Sie, dass  $f$  kein Potential haben kann? Ganz einfach:  
Sie zeigen  $\text{rot} f \neq 0$ , oder  $\oint_{\gamma} f \cdot \gamma \neq 0$  für einen geschlossenen Weg  $\gamma$ .

Wie beweisen Sie, dass  $f$  ein Potential hat? Es gibt drei Möglichkeiten:

- Sie legen ein Potential  $F$  explizit vor und weisen  $F' = f$  nach.
- Es genügt,  $\text{rot} f = 0$  auszurechnen und nachzuweisen, dass das Gebiet  $U$  einfach zusammenhängend ist, etwa konvex oder sternförmig.
- Gelingt dies nicht, so müssen Sie schlimmstenfalls nachrechnen, dass hier  $\oint_{\gamma} f \cdot \gamma = 0$  gilt für jeden geschlossenen Weg  $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$ .  
Bei  $\text{rot} f = 0$  genügt ein Repräsentant  $\gamma$  aus jeder Homotopieklasse.

Angenommen, es gilt  $\oint_{\gamma} f \cdot \gamma = 0$  für jeden geschlossenen Weg  $\gamma$  in  $U$ .  
Wie konstruieren Sie dann zu  $f$  ein Potential  $F$ ? Als Arbeitsintegral:

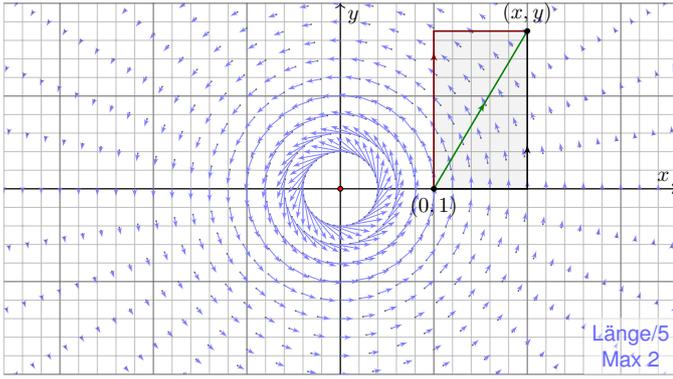
$$F(x) = \int_{s=p}^x f(s) \cdot ds$$

Wie prüfen Sie, ob eine gegebene Funktion  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$  ein Potential ist?

😊 Die direkte Probe genügt:  $\text{grad} F$  ausrechnen und mit  $f$  vergleichen.

**Fortsetzung & Schluss:** Wir betrachten das zirkuläre Vektorfeld

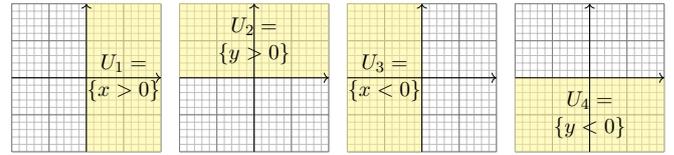
$$f: U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ mit } f(x, y) = (-y, x)/(x^2 + y^2)^{a/2}.$$



Inwiefern liegt das Problem am Definitionsgebiet  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ?

- ⚠ Das Gebiet  $U$  ist nicht einfach zusammenhängend. (Loch in 0)
- Lässt sich Green anwenden:  $\int_{\partial B(0,r)} f(s) \cdot ds = \int_{\bar{B}(0,r)} \text{rot}(f) d(x, y)$
- ⚠ Offenbar nicht: Im Punkt 0 ist  $f$  und somit  $\text{rot}(f)$  nicht definiert!
- Der punktierte Integrationsbereich  $\bar{B}(0, r) \setminus \{0\}$  ist nicht kompakt.

**Aufgabe:** Statt  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  betrachten wir vier offene Halbebenen:



- (5) Für welche  $a$  erlaubt  $f_i = f|_{U_i}: U_i \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein Potential  $F_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}$ ?
- (6) Bestimmen Sie jeweils zu  $f_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^2$  alle Potentiale  $F_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}$ .
- (7) Existieren Potentiale  $F_{12}: U_1 \cup U_2 \rightarrow \mathbb{R}$ ?  $F_{123}: U_1 \cup U_2 \cup U_3 \rightarrow \mathbb{R}$ ?
- Warum konstruieren wir so nicht auch ein Potential  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ ?

(5) Wir finden  $\text{rot}(f) = (2 - a)/(x^2 + y^2)^{a/2}$ .  
Zur Exaktheit ist  $\text{rot}(f) = 0$  notwendig, also  $a = 2$ .  
Das ist die notwendige lokale Bedingung, unabhängig vom Gebiet.  
Zudem ist  $U_i$  konvex (H2E): Für  $a = 2$  existiert ein Potential  $F_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}$ .

Ist ein Potential  $F$  zu  $f$  vorgelegt, so ist die Probe leicht: Es genügt, geduldig nachzurechnen, ob  $\partial_i F = f_i$  gilt. Aber wie finden wir  $F$ ?

(6) Wir bestimmen ein Potential  $F_1: U_1 \rightarrow \mathbb{R}$  dank Arbeitsintegral (H2A):

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= \int_{s=(1,0)}^{(x,0)} f(s) \cdot ds + \int_{s=(x,0)}^{(x,y)} f(s) \cdot ds = 0 + \int_{t=0}^y f(x, t) \cdot (0, 1) dt \\ &= \int_{t=0}^y \frac{x}{x^2 + t^2} dt = \int_{t=0}^y \frac{1}{1 + (t/x)^2} d(t/x) = \int_{u=0}^{y/x} \frac{1}{1 + u^2} du \\ &= [\arctan(u)]_{u=0}^{y/x} = \arctan(y/x) \end{aligned}$$

Probe:  $\partial_x \arctan(y/x) = -y/(x^2 + y^2), \quad \partial_y \arctan(y/x) = x/(x^2 + y^2).$

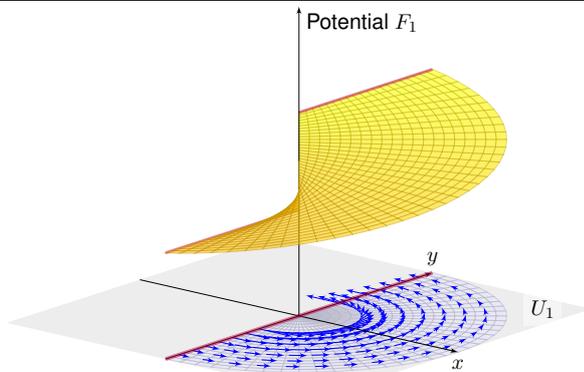
Ebenso finden wir  $F_2(x, y) = -\arctan(x/y) + \text{const}$  auf  $U_2$  und weiter  $F_3(x, y) = \arctan(y/x) + \text{const}$  sowie  $F_4(x, y) = -\arctan(x/y) + \text{const}$ .  
Auf jedem dieser (konvexen!) Gebiete  $U_i$  erlaubt  $f$  ein Potential  $F_i$ .

(7) Die folgenden Abbildungen skizzieren diese Potentiale  $F_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}$ .  
Je drei dieser Potentiale lassen sich verkleben, aber nicht alle vier!

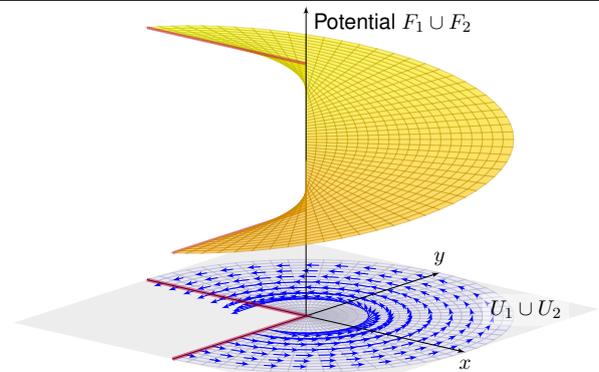
Wir beginnen mit  $F_1 = \arctan(y/x)$  und  $F_2 = -\arctan(x/y) + c$ .  
Diese stimmen auf  $U_1 \cap U_2$  überein für  $c = \pi/2$ : Punktprobe in  $(1, 1)$ .  
Ebenso  $F_3 = \arctan(y/x) + \pi$ . Wir erhalten  $F: U_1 \cup U_2 \cup U_3 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Im letzten Schritt finden wir ebenso  $F_4 = -\arctan(x/y) + 3\pi/2$ .  
Dies schließt sich nicht: Auf  $U_4 \cap U_1$  bleibt die Differenz  $F_4 - F_1 = 2\pi$ !  
Das entspricht dem Integral  $\oint_{\partial B(0,r)} f(s) \cdot ds = 2\pi$ , wie zuvor gesehen.

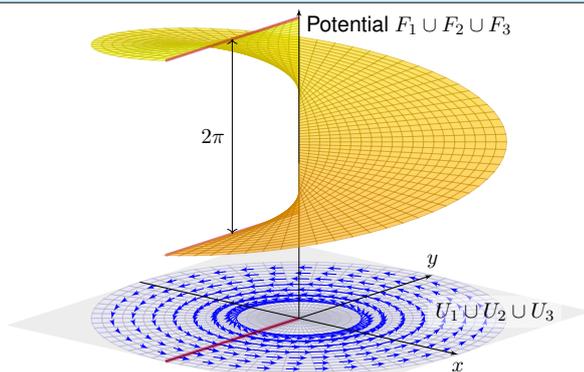
Das Bild von M.C. Escher illustriert diese bemerkenswerte Situation: Das Gravitationsfeld ist konservativ: Sie können nicht ständig bergab laufen, auch nicht ständig bergauf! Denken Sie etwa ans Wandern im Gebirge. In einer kreisförmigen Gegenströmung hingegen können Sie stets gegen den Strom schwimmen, so wie hier im Wirbelfeld.



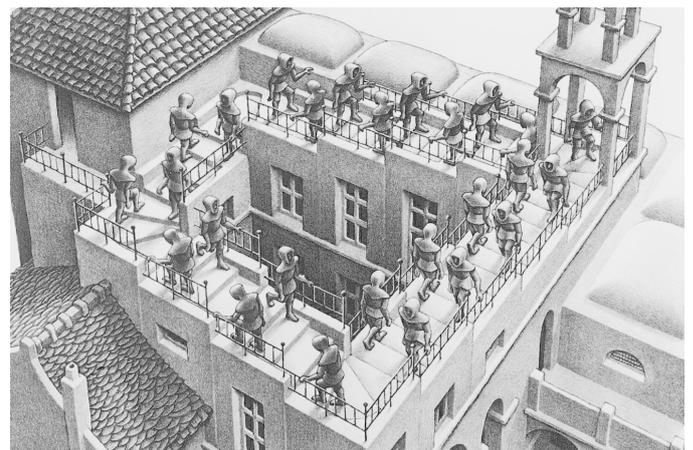
Unser Vektorfeld  $f: U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  erfüllt  $\text{rot}(f) = 0$  auf ganz  $U$ .  
Die offene Halbebene  $U_1$  ist konvex, hierauf hat  $f$  also ein Potential  $F_1$ .  
Die obige Rechnung zeigt alle Lösungen:  $F_1(x, y) = \arctan(y/x) + \text{const}$



Unser Vektorfeld  $f: U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  erfüllt  $\text{rot}(f) = 0$  auf ganz  $U$ .  
Die Vereinigung  $U_1 \cup U_2$  ist sternförmig, hierauf hat  $f$  ein Potential.  
Wir passen die Integrationskonstanten an und verkleben  $F_1$  und  $F_2$ .



Auch  $U_1 \cup U_2 \cup U_3$  ist sternförmig: Wir erhalten die Ebene  $\mathbb{R}^2$  minus eine Halbgerade. Auch hierauf hat  $f$  ein Potential: die Wendelfläche!  
Diese schließt sich nicht, daher erhalten wir kein Potential  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ .



**Rückblick: Die drei Aspekte des Integrals** H233  
Erinnerung

1. Über jedem Intervall  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  haben wir das **unorientierte Integral**

$$\int_{[a,b]} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad \text{für } a \leq b \text{ in } \mathbb{R}.$$

2. Für das **orientierte Integral** vereinbaren wir zudem

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx \quad \text{für } a, b \in \mathbb{R}.$$

3. Das **unbestimmte Integral** ist eine Stammfunktion (Potential):

$$F = \int f(x) dx \quad \text{bedeutet} \quad F' = f.$$

In Dimension 1 leistet der HDI die Übersetzung dieser drei Konzepte.  
In Dimension  $\geq 2$  laufen diese drei Aspekte zunächst auseinander:

1. Volumen und mehrdimensionales Integral (unorientiert, Kapitel A–D)
2. Wegintegral und Flächenintegral (orientiert, siehe die vorigen Kapitel E–G)
3. Vektorfelder und Potentiale: Diesen Punkt haben wir in diesem Kapitel H geklärt.

Differentialformen fügen diese drei Sichtweisen wieder zu einer einheitlichen Theorie, siehe Burg–Haf–Meister–Wille, *Vektoranalysis* aus ihrer Reihe HM für Ingenieur:innen. Wir gehen hier nicht darauf ein, sondern lösen bescheiden aber konkret lediglich das Potentialproblem (3).

**Zentrales Beispiel: das Newton–Potential** H234  
Erinnerung

Wichtige Beispiele und Anwendungen von Potentialen liefert die Physik. Das **Newton–Potential** einer Masse  $m$  im Punkt  $y \in \mathbb{R}^3$  ist

$$F: \mathbb{R}^3 \setminus \{y\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) = \frac{m}{|y-x|}$$

(bis auf Konstanten & Vorzeichen). Das zugehörige **Gravitationsfeld** ist

$$f: \mathbb{R}^3 \setminus \{y\} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad f(x) = \text{grad } F(x) = m \frac{y-x}{|y-x|^3}.$$

Für jede beschränkte **Massenverteilung**  $\rho: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  haben wir

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) = \int_{y \in K} \frac{\rho(y)}{|y-x|} dy.$$

Das zugehörige Gravitationsfeld ist dann die **Superposition** (Faltung)

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad f(x) = \text{grad } F(x) = \int_{y \in K} \frac{y-x}{|y-x|^3} \rho(y) dy.$$

Hier nutzen wir das Ableiten unter dem Integral, genauer Satz H1D.

**Radialsymmetrische Felder und Potentiale** H235  
Ausführung

**Aufgabe:** Zu  $x \in \mathbb{R}^n$  sei  $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$  die euklidische Norm.

- (1) Berechnen Sie  $\text{grad } F$  zur Funktion  $F: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto |x|$  sowie  $F(x) = 1/|x|^\alpha$  und  $F(x) = G(|x|)$  mit  $G: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig diff'bar.
- (2) Skizzieren Sie  $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n: x \mapsto x/|x|$  sowie  $f(x) = x/|x|^\alpha$  und allgemein  $f(x) = g(|x|) \cdot x/|x|$  mit  $g: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.
- (3) Berechnen Sie die Rotation  $\partial_j f_i - \partial_i f_j$  des Vektorfeldes  $f$ .
- (4) Wann hat  $f$  ein Potential? (5) Finden Sie ein Potential  $F$  zu  $f$ .

**Lösung:** (1) Wir schreiben alles geduldig aus und leiten ab:

$$|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \partial_i |x| = x_i/|x|, \quad \text{grad } |x| = x/|x|$$

Dank Kettenregel folgt  $\text{grad } G(|x|) = G'(|x|) \cdot x/|x|$ . Speziell im Beispiel:

$$F(x) = |x|^{-\alpha}, \quad \partial_i F(x) = -\alpha x_i |x|^{-\alpha-2}, \quad \text{grad } F(x) = -\alpha x/|x|^{\alpha+2}$$

(2) Skizzieren! Für  $n = a = 2$  ist  $f(x) = x/|x|^2$  das ebene Quellenfeld. [E317](#)  
Der dreidimensionale Fall  $n = a = 3$  entspricht einer Punktladung. [H153](#)

**Radialsymmetrische Felder und Potentiale** H236  
Ausführung

(3) Sei  $g$  stetig differenzierbar und  $i \neq j$ . Aus  $f_i(x) = g(|x|) \cdot x_i/|x|$  folgt

$$\partial_j f_i(x) = g'(|x|) \cdot \frac{x_j}{|x|} \cdot \frac{x_i}{|x|} - g(|x|) \cdot \frac{x_i x_j}{|x|^3} = \left[ g'(|x|) - \frac{g(|x|)}{|x|} \right] \cdot \frac{x_i x_j}{|x|^2},$$

also  $\partial_j f_i - \partial_i f_j = 0$ . Für  $f(x) = x/|x|^\alpha$  gilt  $\partial_j f_i(x) = -\alpha x_i x_j / |x|^{\alpha+2}$ .

(4) Wie immer ist  $\text{rot}(f) = 0$  notwendig für die Existenz eines Potentials. Für  $n \geq 3$  ist  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  einfach zusammenhängend, also ist  $\text{rot}(f) = 0$  auch hinreichend. Auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  müssen wir noch genauer hinschauen: Dank  $\oint_{\partial B(0,1)} f(s) \cdot ds = 0$  verschwindet auch das zweite Hindernis!

(5) Zu  $f(x) = g(|x|) \cdot x/|x|$  finden wir mit (1) das Potential  $F(x) = G(|x|)$  mit  $G(r) = \int_1^r g(\rho) d\rho$ . Das beantwortet zugleich (4) und (3). Speziell:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2-a)|x|^{a-2}} & \text{für } a \neq 2 \\ \ln|x| & \text{für } a = 2 \end{cases} \implies \text{grad } F(x) = \frac{x}{|x|^a}$$

Im Beispiel  $n = a = 3$  finden wir das Newton–Potential  $F(x) = -1/|x|$ . Unsere allgemeine Rechnung gilt in jeder Dimension, siehe Satz R1B.

**Radialsymmetrische Felder und Potentiale** H237  
Ausführung

**Aufgabe:** Wir setzen die vorige Aufgabe fort.

- (6) Berechnen Sie  $\text{div}(f)$  zu  $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $f(x) = x/|x|^\alpha$ . Für welche  $n \in \mathbb{N}$  und  $a \in \mathbb{R}$  ist dieses Feld  $f$  divergenzfrei?
- (7) Berechnen Sie zu  $f$  das Flussintegral über die Sphäre  $r\mathbb{S}^{n-1}$ .
- (8) Allgemeiner sei  $g: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  gegeben durch  $f(x) = g(|x|) \cdot x/|x|$ . Für welche  $g$  ist das Feld  $f$  divergenzfrei?
- (9) Sei schließlich  $G: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Für welche  $G$  ist die Funktion  $F: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto F(x) = G(|x|)$  harmonisch?

**Lösung:** (6a) Wie immer leiten wir geduldig ab und berechnen  $\text{div}(f)$ :

$$f_i(x) = x_i(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\partial_i f_i(x) = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-\frac{\alpha}{2}} - \alpha x_i^2 (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-\frac{\alpha+2}{2}}$$

$$\text{div } f(x) = (n-a)(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-\frac{\alpha}{2}}$$

(6b) Dies verschwindet genau für  $a = n$ . In jeder Dimension  $n$  finden wir das uns vertraute Quellenfeld  $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n: x \mapsto f(x) = x/|x|^n$ .

**Radialsymmetrische Felder und Potentiale** H238  
Ausführung

(7a) Im Raum  $\mathbb{R}^n$  betrachten wir die Sphäre  $r\mathbb{S}^{n-1}$  vom Radius  $r > 0$ . In jedem Punkt  $s \in r\mathbb{S}^{n-1}$  ist die Einheitsnormale  $n(s) = s/|s|$ . Der Fluss des Vektorfeldes  $f(x) = x/|x|^\alpha$  ist demnach:

$$\int_{r\mathbb{S}^{n-1}} f(s) \cdot n(s) dS = \int_{r\mathbb{S}^{n-1}} \frac{s}{|s|^\alpha} \cdot \frac{s}{|s|} dS = r^{1-\alpha} \int_{r\mathbb{S}^{n-1}} dS = r^{1-\alpha} \text{vol}_{n-1}(r\mathbb{S}^{n-1}) = r^{1-\alpha} r^{n-1} \text{vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) = r^{n-\alpha} \text{vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$$

(7b) Damit beantworten wir erneut die Frage nach der Divergenzfreiheit: Wir nehmen  $\text{div}(f) = 0$  an. Auf der Kugelschale  $K(0, r_1, r_2)$  gilt:

$$\int_{r_2\mathbb{S}^{n-1}} f(s) \cdot n(s) dS - \int_{r_1\mathbb{S}^{n-1}} f(s) \cdot n(s) dS = \int_{K(0, r_1, r_2)} \text{div } f(x) dx = 0$$

Die Funktion  $r \mapsto r^{n-\alpha}$  ist demnach konstant, folglich muss  $a = n$  gelten. Umgekehrt erfüllt  $f(x) = x/|x|^n$  tatsächlich  $\text{div}(f) = 0$ , dank (6).

😊 Die Rechnung in (6) gelingt durch sorgfältiges Ableiten, die Rechnung in (7) geometrisch durch das Flussintegral.

**Radialsymmetrische Felder und Potentiale** H239  
Ausführung

(8a) Der Fluss des Vektorfeldes  $f(x) = g(|x|) \cdot x/|x|$  über  $r\mathbb{S}^{n-1}$  ist:

$$\int_{r\mathbb{S}^{n-1}} f(s) \cdot n(s) dS = \int_{r\mathbb{S}^{n-1}} g(|s|) \frac{s}{|s|} \cdot \frac{s}{|s|} dS = g(r) \int_{r\mathbb{S}^{n-1}} dS = g(r) \text{vol}_{n-1}(r\mathbb{S}^{n-1}) = g(r) r^{n-1} \text{vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$$

(8b) Wir nehmen nun  $\text{div}(f) = 0$  an. Auf der Kugelschale  $K(0, r_1, r_2)$  gilt:

$$\int_{r_2\mathbb{S}^{n-1}} f(s) \cdot n(s) dS - \int_{r_1\mathbb{S}^{n-1}} f(s) \cdot n(s) dS = \int_{K(0, r_1, r_2)} \text{div } f(x) dx = 0$$

Die Funktion  $r \mapsto g(r) r^{n-1}$  ist demnach konstant, also  $g(r) = c/r^{n-1}$ . Wenn  $f(x) = g(|x|) \cdot x/|x|$  divergenzfrei ist, dann gilt  $f(x) = c \cdot x/|x|^n$ . Umgekehrt erfüllt  $f(x) = c \cdot x/|x|^n$  tatsächlich  $\text{div}(f) = 0$ , siehe (6).

😊 Die in (6,7) gefundenen Lösungen  $f(x) = c \cdot x/|x|^n$  sind demnach die einzigen radialsymmetrischen Vektorfelder mit  $\text{div}(f) = 0$ ! Wir haben also tatsächlich alle solchen Lösungen gefunden.

😊 Dies sind genau die physikalisch beobachteten Felder.

**Radialsymmetrische Felder und Potentiale** H240  
Ausführung

(9) Der Laplace–Operator ist  $\Delta = \nabla^2 = \text{div} \circ \text{grad} = \partial_1^2 + \dots + \partial_n^2$ . Wir berechnen zu  $F$  zunächst den Gradienten  $f = \text{grad } F$  wie in (1): Aus  $F(x) = G(|x|)$  folgt  $f(x) = g(|x|) \cdot x/|x|$  mit  $g = G'$ . Dank (8) wissen wir, dass  $\text{div}(f) = 0$  genau für  $g(r) = c/r^{n-1}$  gilt. Im Falle  $n \neq 2$  finden wir  $G(r) = 1/r^{n-2}$  mit  $G'(r) = (2-n)/r^{n-1}$ . Im Falle  $n = 2$  finden wir  $G(r) = \ln r$  mit  $G'(r) = 1/r$ .

Zusammenfassend halten wir folgendes Ergebnis fest:

**Satz H2F: radialsymmetrische harmonische Funktionen**

Sei  $F: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  radialsymmetrisch, also  $F(x) = G(|x|)$ . Genau dann ist  $F$  harmonisch,  $\Delta F = 0$ , wenn für geeignete  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt:

$$F(x) = a + \begin{cases} b/|x|^{n-2} & \text{für } n \neq 2, \\ b \ln|x| & \text{für } n = 2. \end{cases}$$

Sei  $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  radialsymmetrisch, also  $f(x) = g(|x|) \cdot x/|x|$ . Genau dann ist  $f$  divergenzfrei,  $\text{div } f = 0$ , wenn  $f(x) = \text{const} \cdot x/|x|^n$ .

**Physikalische Anwendungen der Integralsätze** H301  
Fazit

**Strömungslehre:** Die Massenbilanz als Integralgleichung:

$$\frac{d}{dt} \iiint_K \rho dK + \iint_{S=\partial K} (\rho \vec{v} \cdot \vec{n}) dS = 0$$

Hieraus erhalten wir dank Gauß die **Kontinuitätsgleichung**:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad \text{bei } \rho = \text{const also } \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

**Wärmeleitung:** Die Wärmebilanz als Integralgleichung:

$$\iiint_K q(t, x) dx = \frac{d}{dt} \iiint_K u(t, x) dx + \iint_{S=\partial K} \vec{f}(t, x) \cdot \vec{n} dS$$

Hieraus erhalten wir Fouriers berühmte **Wärmeleitungsgleichung**:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \Delta u = q \quad \text{mit} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

☺ Diese Differentialgleichung können wir lösen, exakt oder numerisch.

**Physikalische Anwendungen der Integralsätze** H302  
Fazit

**Elektrodynamik:** Die Maxwell-Gleichungen als Integralgleichungen:

Coulomb Ladungsgesetz  $\iint_{\partial V} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V 4\pi \rho dV$

Faraday Induktionsgesetz  $\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{1}{c} \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS$

Gauß Quellenfreiheit  $\iint_{\partial V} \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0$

Ampère Durchflutungsgesetz  $\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{c} \iint_S \left( 4\pi \vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} dS$

Dank Gauß und Stokes erhalten wir hieraus Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 4\pi \rho, & \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, & \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{J}. \end{aligned}$$

☺ Daraus folgen insbesondere Ladungserhaltung und Wellengleichung.

**Exakte und konservative Vektorfelder** H303  
Fazit

Ein Vektorfeld  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt **exakt**, oder **Gradientenfeld**, wenn es ein Potential erlaubt, also ein Skalarfeld  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F' = f$  existiert.

$$f = F' = \operatorname{grad} F = (\partial_1 F, \dots, \partial_n F) = \left( \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right).$$

☺ Für jeden stückweise stetig diff'baren Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  gilt dann:

$$\int_\gamma f \cdot d\gamma = \int_{t=a}^b F'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_{t=a}^b \frac{dF(\gamma(t))}{dt} dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Ist der Weg  $\gamma$  geschlossen,  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , so folgt demnach  $\oint_\gamma f \cdot d\gamma = 0$ .

Ein Vektorfeld  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt **konservativ**, oder **global wirbelfrei**, wenn  $\oint_\gamma f \cdot d\gamma = 0$  für jeden geschlossenen Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  gilt.

☺ Das garantiert: Arbeitsintegrale hängen nur von Start und Ziel ab.

Diese beiden Begriffe erweisen sich als äquivalent (Hauptsatz H2A):

- (1) Besitzt das Vektorfeld  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Potential, so ist  $f$  konservativ.
- (2) Ist umgekehrt  $f$  konservativ, so ist  $F(x) = \int_{s=p}^x f(s) \cdot ds$  ein Potential.

☺ Der Wert  $F(x)$  ist wohldefiniert, unabhängig vom gewählten Weg  $\gamma$ .

**Konstruktion von Potentialen** H304  
Fazit

Lösung des Potentialproblems bei einfachem Zusammenhang (H2E):  
Unser Gebiet  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  sei einfach zusammenhängend, z.B. konvex oder sternförmig zu  $p$ . Ein  $C^1$ -Vektorfeld  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  erlaubt genau dann ein Potential  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ , wenn  $f$  rotationsfrei ist, also  $\partial_j f_i = \partial_i f_j$  erfüllt.

In diesem Fall erhalten wir ein Potential durch das Arbeitsintegral

$$F(x) = \int_{s=p}^x f(s) \cdot ds = \int_{t=a}^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \gamma: [a, b] \rightarrow U, \\ \gamma(a)=p, \gamma(b)=x. \end{cases}$$

$f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist exakt, $\exists F: U \rightarrow \mathbb{R}: F' = f$	$\xrightarrow[\text{U einfach zshgd}]{f \text{ stetig diff'bar}}$	$f$ ist rotationsfrei, $\partial_j f_i = \partial_i f_j$ auf $U$
global	$\Downarrow$ HDI $\Updownarrow$ Arbeitsintegral	$\Downarrow$ Stokes
$f$ ist konservativ, $\oint_\gamma f \cdot d\gamma = 0$ in $U$	$\xrightarrow[\text{U einfach zshgd}]{\text{immer}}$	$f$ ist lokal konservativ, $\oint_\gamma f \cdot d\gamma = 0$ lokal
		lokal

**Zusammenfassung und Verständnisfragen** H305  
Fazit

**Aufgabe:** Unter welchen Voraussetzungen gilt...?

- (1)  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$
- (2)  $\int_X \int_Y f(x, y) dy dx = \int_Y \int_X f(x, y) dx dy$
- (3)  $\int_Y f(y) dy = \int_X f(\Phi(x)) |\det \Phi'(x)| dx$
- (4)  $\int_\Omega \sum_{k=0}^n f_k(x) dx = \sum_{k=0}^n \int_\Omega f_k(x) dx$
- (5)  $\int_\Omega \sum_{k=0}^\infty f_k(x) dx = \sum_{k=0}^\infty \int_\Omega f_k(x) dx$
- (6)  $\int_\Omega \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_\Omega f_k(x) dx$
- (7)  $\frac{d}{dx} \int_Y f(x, y) dy = \int_Y \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) dy$

**Zusammenfassung und Verständnisfragen** H306  
Fazit

- (1) Voraussetzungen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung [B123], kurz HDI: Die Funktion  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  sei stetig differenzierbar mit Ableitung  $f = F'$ . (Es genügt  $F$  stetig und stückweise stetig differenzierbar [B213], oder noch allgemeiner  $F$  absolut stetig [B214].)
- (2) Gegenbeispiele [C414]: Vertauschbarkeit gilt nicht immer! Voraussetzungen des Satzes von Fubini [B121]:  $f: X \times Y \rightarrow [0, \infty]$  sei messbar oder  $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$  absolut integrierbar.
- (3) Voraussetzungen des Transformationssatzes [B209]: Die Mengen  $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$  seien messbar,  $f: Y \rightarrow [0, \infty]$  messbar oder  $f: Y \rightarrow \mathbb{C}$  absolut integrierbar,  $\Phi: X \rightarrow Y$  stetig differenzierbar und bijektiv (zumindest injektiv und surjektiv bis auf Ausnahmengen vom Volumen Null).
- (4) Das Integral ist linear! Die Behauptung gilt unter den üblichen Vorsichtsmaßnahmen:  $f_k: \Omega \rightarrow [0, \infty]$  messbar oder  $f_k: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  absolut integrierbar.
- (5) Gegenbeispiele [B101]: Für Reihen, also unendliche Summen, gilt Vertauschung nicht immer! Hinreichend ist  $f_k: \Omega \rightarrow [0, \infty]$  messbar oder  $L^1$ -Konvergenz  $\sum_{k=0}^\infty \int_\Omega |f_k| \leq \infty$ . [B106]
- (6) Für Grenzwerte und Integrale gilt Vertauschung nicht immer! [B201] Voraussetzungen für den Satz der majorisierten Konvergenz [B209]: Hinreichend ist punktweise Konvergenz  $f_k \rightarrow f$  (fast überall) und eine absolut integrierbare Majorante  $g$  mit  $|f_k| \leq g$  (fast überall) für alle  $k$ .
- (7) Gegenbeispiele [B409]: Leider kann man nicht immer die Ableitung unter das Integral ziehen! Hinreichend ist insb.  $Y$  kompakt und  $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und stetig nach  $x$  differenzierbar. Allgemein wie bei der majorisierten Konvergenz [B309]: Für jedes  $x$  ist  $y \mapsto f(x, y)$  integrierbar über  $y$ , für fast jedes  $y$  ist  $x \mapsto f(x, y)$  stetig differenzierbar nach  $x$ , und zudem existiert eine integrierbare Majorante  $g(y)$ , das heißt,  $|(\partial f_y / \partial x_j)(x, y)| \leq g(y)$  für alle  $x$  und fast alle  $y$ .

**Zusammenfassung und Verständnisfragen** H307  
Fazit

**Aufgabe:** Was ist ein Skalarfeld  $g$ ? ein Vektorfeld  $f$ ?  
Unter welchen Voraussetzungen gilt...?

- (1)  $\partial_i \partial_j g = \partial_j \partial_i g$
- (2)  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} g = 0$
- (3)  $\operatorname{div} \operatorname{rot} f = 0$
- (4)  $\int_{s \in \Gamma} \operatorname{grad} g(s) \cdot ds = \sum_{s \in \partial \Gamma} g(s) n(s)$
- (5)  $\int_{s \in S} \operatorname{rot} f(s) \cdot dS = \int_{s \in \partial S} f(s) \cdot ds$
- (6)  $\int_{v \in V} \operatorname{div} f(v) dV = \int_{s \in \partial V} f(s) \cdot dS$

Erklären Sie Bedeutung, Definition und Funktionsweise dieser Formeln.  
Welche physikalischen und mathematischen Anwendungen kennen Sie?

**Zusammenfassung und Verständnisfragen** H308  
Fazit

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  ein Gebiet, also eine offene zusammenhängende Teilmenge. Hierauf betrachten wir ein Skalarfeld  $g$ , also eine stetige Abbildung  $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , sowie ein Vektorfeld  $f$ , also eine stetige Abbildung  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Sind diese zudem stetig differenzierbar, so definieren wir wie üblich die Ableitungen  $\operatorname{grad}$ ,  $\operatorname{rot}$ ,  $\operatorname{div}$ , siehe zum Beispiel die Wiederholung zu Beginn von Kapitel H.

Aussage (1) gilt für alle zweimal stetig differenzierbaren Funktionen  $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ : Das ist der Satz von Schwarz (D4A). Damit rechnet man die angegebenen Identitäten (2) und (3) leicht nach. [H104]

Die Gleichungen (4-6) sind unsere Integralsätze. Hierzu seien  $f$  und  $g$  stetig differenzierbar. (Etwas weniger genügt, zum Beispiel Lipschitz-stetig und somit fast überall differenzierbar.)

Für den HDI (4) sei  $\Gamma \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  eine stückweise glatte Kurve vom Startpunkt  $p$  zum Zielpunkt  $q$  mit vektoriellem Wegelement  $ds$ . Hierzu sei  $\Gamma$  orientiert; genau wie beim eindimensionalen HDI werten wir Startpunkte negativ,  $n(p) = -1$ , und Zielpunkte positiv,  $n(q) = +1$ . Allgemein kann eine solche Kurve  $\Gamma$  mehrere Komponenten und mehrere Randpunkte  $s \in \partial \Gamma$  haben.

Für Stokes (5) sei  $S \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  eine orientierte, stückweise glatte Fläche mit vektoriellem Flächenelement  $dS = n |dS|$ , also Einheitsnormale  $n: S \rightarrow \mathbb{R}^3$  und skalarem Flächenelement  $|dS|$ . Die Randkurve  $\Gamma = \partial S$  ist dann ebenfalls stückweise glatt und wird positiv orientiert gemäß der Rechte-Hand-Regel. (Für ebene Flächen  $S \subseteq \mathbb{R}^2$  entspricht der Satz von Stokes im Raum  $\mathbb{R}^3$  dem Satz von Green in der Ebene  $\mathbb{R}^2$ , siehe Kapitel E. Beide sind äquivalent.)

Für Gauß (6) schließlich sei  $V \subseteq \Omega$  ein Kompaktum mit stückweise glatter Randfläche  $\partial V$  und dem üblichen euklidischen Volumenelement  $dV = d(x_1, x_2, x_3)$ . Die Randfläche  $S = \partial V$  wird orientiert durch die nach außen weisende Einheitsnormale  $n: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ , so dass  $dS = n |dS|$ .

## Zusammenfassung und Verständnisfragen

H309  
Fazit

- Aufgabe:** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  eine Gerade,  $D$  eine Kreisscheibe um 0 sowie  $K$  eine Kugel um 0. Begründen oder widerlegen Sie:
- (1) Jeder stetige Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  hat endliche Länge.
  - (2) Jeder stetig diff'bare Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  hat endliche Länge.
  - (3) Für  $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\operatorname{div}(f) = 0$  gilt  $\int_{\partial D} f(s) \times ds = 0$ .
  - (4) Für  $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\operatorname{rot}(f) = 0$  gilt  $\int_{\partial D} f(s) \cdot ds = 0$ .
  - (5) Für  $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\operatorname{rot}(f) = 0$  gilt  $\int_{\partial D} f(s) \cdot ds = 0$ .
  - (6) Für  $f: \mathbb{R}^3 \setminus A \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\operatorname{rot}(f) = 0$  gilt  $\int_{\partial D} f(s) \cdot ds = 0$ .
  - (7) Für  $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\operatorname{div}(f) = 0$  gilt  $\int_{\partial K} f(s) \cdot dS = 0$ .
  - (8) Für  $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $f(x) = \operatorname{const} \cdot x/|x|^n$  gilt  $\operatorname{div}(f) = 0$ .
  - (9) Für  $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\operatorname{div}(f) = 0$  gilt  $f(x) = \operatorname{const} \cdot x/|x|^n$ .
  - (10) Wikipedia zu *Konservative Kraft* (aufgerufen 11.11.2024): „Äquivalent sind: 1. Die Arbeit entlang jeder beliebigen geschlossenen Kurve innerhalb des Feldes ist gleich Null. [...] 4. Das Feld ist auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet definiert und [dort rotationsfrei].“

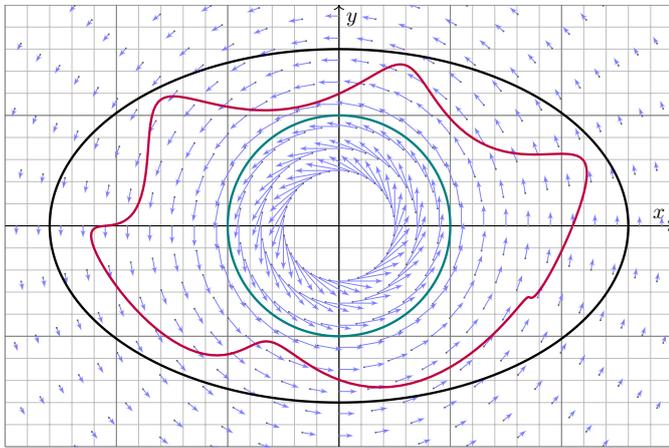
## Zusammenfassung und Verständnisfragen

H311  
Fazit

- Aufgabe:** Begründen Sie durch ein Ergebnis Ihrer Vorlesung oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel aus Ihrem Fundus:
- (1) Jedes Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  hat ein Potential.
  - (2) Jedes Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  hat ein Potential.
  - (3) Jedes Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\operatorname{rot}(f) = 0$  hat ein Potential.
  - (4) Jedes Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\partial_i f_j = \partial_j f_i$  hat ein Potential.
  - (5) Jedes Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\operatorname{rot}(f) = 0$  hat ein Potential.
  - (6) Jedes Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\operatorname{rot}(f) = 0$  hat ein Potential.
  - (7) Jedes Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^3 \setminus A \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\operatorname{rot}(f) = 0$  hat ein Potential. Hierbei sei  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  eine Gerade, etwa die  $z$ -Achse.
  - (8) Jedes Feld  $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n: f(x) = g(|x|) \cdot x/|x|$  hat ein Potential.
  - (9) Wikipedia zu *Rotation eines Vektorfeldes* (aufgerufen 11.11.2021): „Die Divergenz der Rotation eines Vektorfeldes ist gleich null. Umgekehrt ist in einfach zusammenhängenden Gebieten [im  $\mathbb{R}^3$ ] ein Feld, dessen Divergenz gleich null ist, die Rotation eines anderen Vektorfeldes.“

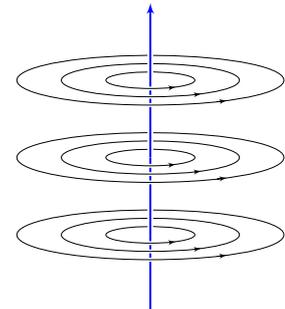
## Homotopieinvarianz: zweidimensional

H313  
Ausführung



## Homotopieinvarianz: dreidimensional

H315  
Ausführung



- Ein elektrischer Strom längs der  $z$ -Achse erzeugt das Magnetfeld
- $$f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2}(-y, x, 0).$$
- Das Definitionsgebiet ist hier
- $$U = (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) \times \mathbb{R}$$
- Ein geschlossener Weg  $\alpha: [0, 1] \rightarrow U$  verlaufe dreimal rechtshändig um die  $z$ -Achse. (Machen Sie eine Skizze!)

- Aufgabe:** Berechnen Sie  $\operatorname{rot}(f)$  und das Arbeitsintegral von  $f$  längs  $\alpha$ . Warum ist die grobe Verlaufsskizze von  $\alpha$  hierzu ausreichend genau?
- Lösung:** Es gilt  $\operatorname{rot}(f) = 0$ . Daher ist  $\oint_{\alpha} f \cdot d\alpha$  homotopieinvariant. Wir ersetzen  $\alpha$  durch den hierzu homotopen Weg  $\beta: [0, 1] \rightarrow U$  mit  $\beta(t) = (\cos(6\pi t), \sin(6\pi t))$ . Es folgt  $\oint_{\alpha} f \cdot d\alpha = \oint_{\beta} f \cdot d\beta = 6\pi$ .

## Zusammenfassung und Verständnisfragen

H310  
Fazit

- Aussage (1) gilt nicht. Die Kochkurve ist ein beliebtes Gegenbeispiel. [E104]
- Aussage (2) gilt dank der Integralformel  $\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$  für die Weglänge. [E107]
- Aussage (3) gilt nicht immer! Gegenbeispiel ist das Quellenfeld  $f(x, y) := (x, y)/(x^2 + y^2)$ . [E317] Hier gilt  $\operatorname{div}(f) = 0$  auf ganz  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  und dennoch  $\int_{\partial D} f(s) \times ds = 2\pi$ .
- Aussage (4) gilt nicht immer! Gegenbeispiel ist das Wirbelfeld  $f(x, y) := (-y, x)/(x^2 + y^2)$ . [E317] Hier gilt  $\operatorname{rot}(f) = 0$  auf ganz  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  und dennoch  $\int_{\partial D} f(s) \cdot ds = 2\pi$ .
- Aussage (5) gilt dank Stokes und der Geometrie des Raumes: Wir haben  $\partial D = \partial S$  für eine Hemisphäre  $S \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , also  $\int_{\partial D} f(s) \cdot ds = \int_{\partial S} f(s) \cdot ds = \int_S \operatorname{rot}(f) \cdot dS = 0$ . Allgemein: Das Gebiet  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  ist zwar nicht konvex oder sternförmig, aber dennoch einfach zusammenhängend! Das bedeutet, jede geschlossene Kurve  $\Gamma$  in  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  ist zusammenziehbar, somit verschwindet längs  $\Gamma$  das Arbeitsintegral jedes rotationsfreien Vektorfeldes.
- Aussage (6) gilt nicht immer! Gegenbeispiel ist das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters  $A$ , etwa das Wirbelfeld  $f(x, y, z) = (-y, x, 0)/(x^2 + y^2)$  um die  $z$ -Achse  $A$ . [H154] Hier gilt  $\operatorname{rot}(f) = 0$  auf ganz  $\mathbb{R}^3 \setminus A$  und dennoch  $\int_{\partial D} f(s) \cdot ds = 2\pi$ .
- Aussage (7) gilt nicht immer! Gegenbeispiel ist das Feld einer im Ursprung konzentrierten Masse oder Ladung, also das Quellenfeld  $f(x, y, z) = (x, y, z)/(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$ . [H37] Hier gilt  $\operatorname{div}(f) = 0$  auf ganz  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  und dennoch  $\int_{\partial K} f(s) \cdot dS = 4\pi$ .
- Aussage (8) rechnet man leicht nach. [H27] Die Umkehrung (9) ist falsch, zum Beispiel erfüllt jedes konstante Vektorfeld  $f$  auch  $\operatorname{div}(f) = 0$ . Wenn wir jedoch verlangen, dass  $f$  divergenzfrei und zudem *radialsymmetrisch* ist, so folgt tatsächlich  $f(x) = \operatorname{const} \cdot x/|x|^n$ , siehe Satz H2F.

## Zusammenfassung und Verständnisfragen

H312  
Fazit

- Aussage (1) gilt immer: Dank HDI ist  $F(x) = \int_{t=0}^x f(t) dt$  eine Stammfunktion, also  $F' = f$ .
- Aussage (2) gilt nicht immer: Notwendiges Kriterium ist  $\operatorname{rot}(f) = 0$ . Beispiel: Das Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $f(x, y) = (-y, x)$  erfüllt  $\operatorname{rot}(f) = 2 \neq 0$ . Demnach erlaubt  $f$  kein Potential, das heißt, es gibt keine Funktion  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\operatorname{grad} F = f$ . Unnötig danach zu suchen!
- Aussagen (3) und (4) gelten immer: Auf einfach zusammenhängenden Gebieten (wie  $\mathbb{R}^n$ ) ist für  $C^1$ -Vektorfelder  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  das notwendige Kriterium  $\operatorname{rot}(f) = 0$  auch hinreichend. [H215]
- Aussage (5) gilt nicht immer. Unser zentrales Gegenbeispiel ist das Wirbelfeld. [H205] Hier gilt  $\operatorname{rot}(f) = 0$  auf ganz  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , aber dennoch  $\oint_{\partial B(0, r)} f(s) \cdot ds = 2\pi$ .
- Aussage (6) gilt immer, denn im Gegensatz zur punktierten Ebene  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  ist der punktierte Raum  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  einfach zusammenhängend. Hier ist  $\operatorname{rot}(f) = 0$  hinreichend. [H215]
- Aussage (7) gilt nicht immer. Gegenbeispiel ist das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters  $A$ , etwa das Wirbelfeld  $f(x, y, z) = (-y, x, 0)/(x^2 + y^2)$  um die  $z$ -Achse  $A$ . Hier gilt  $\operatorname{rot}(f) = 0$  auf ganz  $\mathbb{R}^3 \setminus A$ , aber dennoch  $\oint_{\partial D} f(s) \cdot ds = 2\pi$ . [H154]
- (8) Zu  $f(x) = g(|x|) \cdot x/|x|$  mit  $g$  stetig finden wir explizit das Potential  $F(x) = G(|x|)$  mit  $G(r) = \int_1^r g(\rho) d\rho$ . Leiten Sie es geduldig ab, Sie finden  $\operatorname{grad} F = f$ . Somit  $\operatorname{rot} f = 0$ . [H104]
- (9) Ja. [H104] Nein! Prominentes Gegenbeispiel: Das Gebiet  $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  ist einfach zshg. [H217] Das (Gravitations-)Vektorfeld  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3: x \mapsto x/|x|^3$  erfüllt  $\operatorname{div}(f) = 0$  auf ganz  $U$ . [H137] Für jede Sphäre  $S$  um 0 gilt  $\int_S f \cdot dS = 4\pi > 0$ . [H37] Somit ist  $f = \operatorname{rot}(g)$  unmöglich! [G316] Dank  $\partial S = \emptyset$  und dem Satz von Stokes (G3E) gilt nämlich  $\int_S \operatorname{rot}(g) \cdot dS = \int_{\partial S} g \cdot ds = 0$ .

## Homotopieinvarianz: zweidimensional

H314  
Ausführung

- Aufgabe:** Berechnen Sie mit Hilfe der Homotopieinvarianz das Integral

$$\int_{t=0}^{2\pi} \frac{ab}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt.$$

Was erhalten Sie speziell für  $a = b = 1$ ? Was gilt allgemein für  $a, b > 0$ ?

- Lösung:** Dies ist das Arbeitsintegral des rotationsfreien Vektorfeldes  $f(x, y) = (-y, x)/(x^2 + y^2)$  längs der Ellipse  $\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t)$ . Der Integrationsweg  $\alpha$  ist im Definitionsgebiet  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  homotop zum kreisförmigen Integrationsweg  $\beta(t) = (\cos t, \sin t)$ . Damit finden wir:

$$\int_{t=0}^{2\pi} \frac{ab}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt = \int_{\alpha} f \cdot d\alpha = \int_{\beta} f \cdot d\beta = \int_{t=0}^{2\pi} 1 dt = 2\pi$$

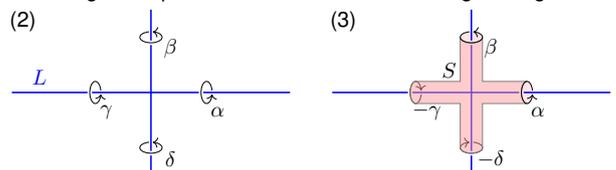
- 😊 Die Homotopieinvarianz vereinfacht die Rechnung erheblich! Unter allen homotopen Wegen suchen wir uns den leichtesten aus.
- 😊 Geometrisches Verständnis ermöglicht & vereinfacht die Rechnung. Das ist die Stärke und typische Anwendung der Integralsätze!
- 😊 Genau dieser Trick und ganz speziell dieses Beispiel liegen dem Residuenkalkül zu Grunde, dessen erstaunliche Kraft wir schätzen.

## Anwendung des Satzes von Stokes

H316  
Ausführung

- Aufgabe:** (1) Skizzieren Sie  $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 y^2 + z^2 = 0\}$ .
- (2) Hat jedes rotationsfreie Vektorfeld  $f: U = \mathbb{R}^3 \setminus L \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein Potential?
- (3) Beranden  $\alpha, \beta, \gamma, \delta: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\alpha(t), \gamma(t) = (\pm 3, \cos t, \sin t)$  und  $\beta(t), \delta(t) = (\sin t, \pm 3, \cos t)$  eine orientierte Fläche  $S \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus L$ ?
- (4) Sei  $f: U = \mathbb{R}^3 \setminus L \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein rotationsfreies Feld. Angenommen es gilt  $\oint_{\alpha} f = 3, \oint_{\beta} f = 7, \oint_{\gamma} f = 6$ . Was folgt für das vierte Integral  $\oint_{\delta} f$ ?

- Lösung:** (1) Die Menge  $L$  ist die Vereinigung der  $x$ - und  $y$ -Achse.
- (2) Nein. Gegenbeispiele erhalten wir wie in der vorigen Aufgabe.



- (4) Wir sehen  $\partial S = \alpha \cup \beta \cup (-\gamma) \cup (-\delta)$ . Dank Stokes gilt demnach  $\oint_{\alpha} f + \oint_{\beta} f - \oint_{\gamma} f - \oint_{\delta} f = \int_S \operatorname{rot}(f) \cdot dS = 0$ . Hieraus folgt  $\oint_{\delta} f = 4$ .

Potentialproblem auf  $\mathbb{R}^3$

H317  
Übung

**Aufgabe:** Gegeben sei  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $f(x, y, z) = (\alpha y, x - \beta z, z - y)$ .  
 (1) Für welche Konstanten  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ist dieses Vektorfeld  $f$  exakt?  
 (2) Falls existent, finden Sie  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F' = f$  und  $F(2, 2, 2) = 0$ .

**Lösung:** (1) Als notwendiges Kriterium berechnen wir die Rotation:  

$$\text{rot}(f)_1 = \partial_y f_3 - \partial_z f_2 = \beta - 1$$

$$\text{rot}(f)_2 = \partial_z f_1 - \partial_x f_3 = 0$$

$$\text{rot}(f)_3 = \partial_x f_2 - \partial_y f_1 = 1 - \alpha$$

Demnach ist  $f$  rotationsfrei nur für  $\alpha = \beta = 1$ . Das Gebiet  $\mathbb{R}^3$  ist konvex, dank Satz H2E ist das Vektorfeld  $f(x, y, z) = (y, x - z, z - y)$  exakt.

(2) Wir integrieren  $f$  koordinatenweise zu einem Potential  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ :  

$$\partial_x F(x, y, z) = y \Rightarrow F(x, y, z) = xy + a(y, z)$$

$$\partial_y F(x, y, z) = x - z \Rightarrow F(x, y, z) = xy - yz + b(z)$$

$$\partial_z F(x, y, z) = z - y \Rightarrow F(x, y, z) = xy - yz + \frac{1}{2}z^2 + c$$

**Probe:** Die Funktion  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F(x, y, z) = xy - yz + \frac{1}{2}z^2 - 2$  erfüllt  $F(2, 2, 2) = 0$  sowie  $\partial_x F = y$  und  $\partial_y F = x - z$  und  $\partial_z F = z - y$ .

Potentialproblem auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$

H318  
Übung

**Aufgabe:** Auf  $U = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y > 0, z > 0 \}$  betrachten wir  

$$f: \mathbb{R}^3 \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (\ln(y/z), ax/y, bx/z).$$

(1) Für welche Konstanten  $a, b \in \mathbb{R}$  ist dieses Vektorfeld  $f$  exakt?  
 (2) Bestimmen Sie in diesen Fällen ein Potential  $F$  mit  $F(1, 1, 1) = 1$ .

**Lösung:** (1) Als notwendiges Kriterium berechnen wir die Rotation:  

$$\text{rot}(f)_1 = \partial_y f_3 - \partial_z f_2 = \partial_y(bx/z) - \partial_z(ax/y) = 0,$$

$$\text{rot}(f)_2 = \partial_z f_1 - \partial_x f_3 = \partial_z(\ln(y/z)) - \partial_x(bx/z) = -1/z - b/z \stackrel{!}{=} 0,$$

$$\text{rot}(f)_3 = \partial_x f_2 - \partial_y f_1 = \partial_x(ax/y) - \partial_y(\ln(y/z)) = a/y - 1/y = 0.$$

Demnach ist  $f$  rotationsfrei nur für  $(a, b) = (+1, -1)$ . Das Gebiet  $U$  ist konvex, dank Satz H2E ist  $f(x, y, z) = (\ln(y/z), +x/y, -x/z)$  exakt.

(2) Als Potential finden wir durch koordinatenweise Integration  

$$F(x, y, z) = x \ln(y/z) + c.$$

Machen Sie die Probe! Um  $F(1, 1, 1) = 1$  zu erhalten, wählen wir  $c = 1$ .

Potentialproblem auf Kreisring und Kreisscheibe

H319  
Übung

**Aufgabe:** Bestimmen Sie alle Potentiale des ebenen Vektorfeldes

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{2}{x^2 + y^2 - 1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{a}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

**Lösung:** Wir berechnen zunächst die Rotation... Überall gilt  $\text{rot}(f) = 0$ . Wir sehen  $\oint_{\partial B(0,r)} f(s) \cdot ds = 2\pi a$ . Für  $a \neq 0$  existiert kein Potential! Im Folgenden sei daher  $a = 0$ . Auf der Kreislinie  $x^2 + y^2 = 1$  wird der erste Nenner Null. Der Definitionsbereich zerfällt somit in zwei Gebiete

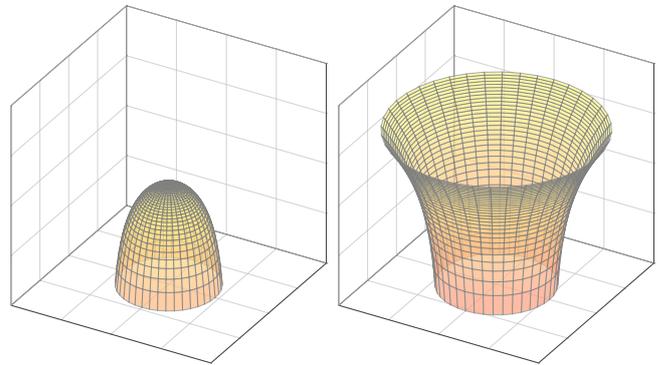
$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1 \}, \quad B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \}.$$

Das Gebiet  $A$  ist ein Kreisring (hier mit Radien 1 und  $\infty$ ). Das Integral längs Kreisen um 0 verschwindet, da  $f$  radial ist. Auf  $A$  finden wir das Potential  $F_A(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1) + c_A$ . Probe! Das Gebiet  $B$  ist eine Kreisscheibe, auch hierauf hat  $f$  ein Potential. Auf  $B$  finden wir das Potential  $F_B(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2) + c_B$ . Probe! Insgesamt erhalten wir also  $F(x, y) = \ln|x^2 + y^2 - 1| + c_A \mathbf{1}_A + c_B \mathbf{1}_B$ .

Potentialproblem auf Kreisring und Kreisscheibe

H320  
Übung

Die beiden Zweige des Potentials  $F(x, y) = \ln|x^2 + y^2 - 1|$  auf den beiden Gebieten  $A$  und  $B$  sehen etwa wie folgt aus. Wir haben eine Singularität  $F(x, y) \rightarrow -\infty$  entlang der Kreislinie  $x^2 + y^2 = 1$ .



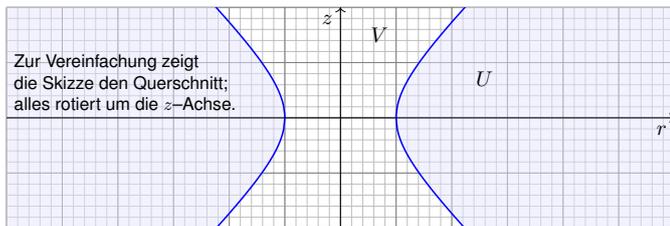
Notwendige und hinreichende Kriterien

H321  
Ausführung

**Aufgabe:** (Ausführung zur Klausur vom Februar 2018)  
 (0) Skizzieren Sie  $U = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \geq 1 + z^2 \}$ .  
 (1) Hat jedes rotationsfreie Vektorfeld  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein Potential?  
 Sei  $V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1 + z^2 \}$  das Komplement von  $U$ .  
 (2) Hat jedes rotationsfreie Vektorfeld  $f: V \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein Potential?

Geben Sie explizit ein Gegenbeispiel, falls es eines gibt, andernfalls erklären Sie die Konstruktion eines Potentials.

**Lösung:** (0) Eine Skizze hilft wie immer enorm:



Notwendige und hinreichende Kriterien

H322  
Ausführung

(1) Nein. Ein konkretes Gegenbeispiel ist das Wirbelfeld um die  $z$ -Achse, explizit etwa  $f(x, y, z) = (-y, x, 0)/(x^2 + y^2)$ . Auf ganz  $U$  gilt  $\text{rot } f = 0$ , aber dennoch gilt  $\oint_{\gamma} f(s) \cdot ds \neq 0$  entlang  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow U: t \mapsto (2 \cos t, 2 \sin t, 0)$ . Demnach hat  $f$  kein Potential! Die Bedingung  $\text{rot } f = 0$  ist zwar immer *notwendig* für ein Potential, aber *hinreichend* erst auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet.

☺ Unser Gebiet  $U$  ist nicht einfach zusammenhängend: Die beiden Rechnungen  $\text{rot } f = 0$  und  $\oint_{\gamma} f(s) \cdot ds \neq 0$  beweisen, dass sich der Weg  $\gamma$  in  $U$  nicht zusammenziehen lässt! (Satz H2B)

(2) Ja. Die Menge  $V$  ist zwar nicht konvex, aber immerhin sternförmig zum Ursprung  $(0, 0, 0)$  und somit einfach zusammenhängend.

Zu jedem vorgelegten Vektorfeld  $f: V \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\text{rot } f = 0$  erhalten wir ein Potential  $F: V \rightarrow \mathbb{R}$  als Arbeitsintegral, am einfachsten direkt von  $(0, 0, 0)$  nach  $(x, y, z)$ , oder von  $(0, 0, 0)$  über  $(0, 0, z)$  nach  $(x, y, z)$ .

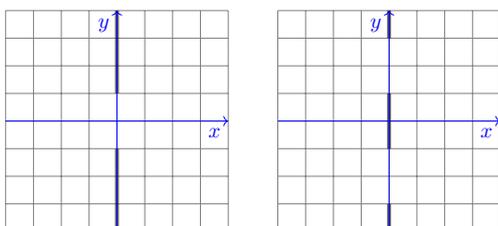
☺ Dank Rotationsfreiheit von  $f$  und einfachem Zusammenhang von  $V$  ist das Ergebnis  $F(x, y, z)$  vom gewählten Integrationsweg unabhängig.

Notwendige und hinreichende Kriterien

H323  
Ausführung

**Aufgabe:** (Ausführung zur Klausur vom September 2018)  
 (1) Im Raum  $\mathbb{R}^3$  betrachten wir  $E = \{ (0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |y| \geq 1 \}$ , eine Ebene mit Einzelspalt, und ihr Komplement  $U = \mathbb{R}^3 \setminus E$ . Hat jedes rotationsfreie Vektorfeld  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein Potential?  
 (2) Wir betrachten  $D = \{ (0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |y| \leq 1 \text{ oder } |y| \geq 3 \}$ , eine Ebene mit Doppelspalt, und ihr Komplement  $V = \mathbb{R}^3 \setminus D$ . Hat jedes rotationsfreie Vektorfeld  $f: V \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein Potential?

**Lösung:** Eine Skizze hilft wie immer enorm:



Notwendige und hinreichende Kriterien

H324  
Ausführung

(1) Ja. Die Menge  $U$  ist zwar nicht konvex, aber immerhin sternförmig zum Ursprung  $(0, 0, 0)$ , und somit ist  $U$  einfach zusammenhängend.

Zu jedem vorgelegten Vektorfeld  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\text{rot } f = 0$  erhalten wir ein Potential  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$  als Arbeitsintegral, am einfachsten direkt von  $(0, 0, 0)$  nach  $(x, y, z)$ , oder von  $(0, 0, 0)$  über  $(0, 0, z)$  nach  $(x, y, z)$ .

☺ Dank Rotationsfreiheit von  $f$  und einfachem Zusammenhang von  $U$  ist das Ergebnis  $F(x, y, z)$  vom gewählten Integrationsweg unabhängig.

(2) Nein. Ein konkretes Gegenbeispiel ist das Wirbelfeld um die  $z$ -Achse, also explizit  $f(x, y, z) = (-y, x, 0)/(x^2 + y^2)$ .

Auf ganz  $V$  gilt  $\text{rot } f = 0$ , aber dennoch gilt  $\oint_{\gamma} f(s) \cdot ds \neq 0$  entlang  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow V: t \mapsto (2 \cos t, 2 \sin t, 0)$ . Demnach hat  $f$  kein Potential!

☺ Das lässt sich physikalisch messen im **Aharonov-Bohm-Effekt**, laut *New Scientist* eines der „sieben Wunder der Quantenmechanik“.

☺ Unser Gebiet  $V$  ist also nicht einfach zusammenhängend. Die Bedingung  $\text{rot } f = 0$  ist zwar immer *notwendig* für ein Potential, aber *hinreichend* erst auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet.

Potentialproblem für gegenläufige Wirbelfelder

H325 Übung

**Aufgabe:** Auf dem Gebiet  $U = \mathbb{R}^2 \setminus ([-1, 1] \times \{0\})$  betrachten wir

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{(x-1)^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x-1 \end{pmatrix}, \quad g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{-1}{(x+1)^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x+1 \end{pmatrix},$$

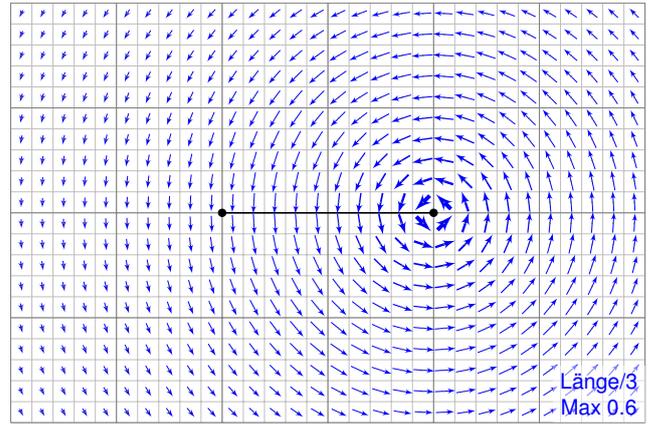
- (1) Skizzieren Sie die Felder  $f$ ,  $g$  und ihre Superposition  $h = f + g$ .
- (2) Bestimmen Sie die Rotation. (3) Besitzt  $f$  ein Potential?  $g$ ? und  $h$ ?
- (4) Bestimmen Sie möglichst explizit ein Potential, falls existent.

**Lösung:** (1) Das Feld  $f$  ist das rechtsdrehende Wirbelfeld um  $(1, 0)$ . Entsprechend ist  $g$  das linksdrehende Wirbelfeld um den Pol  $(-1, 0)$ . Ihre Superposition  $h = f + g$  ergibt sich durch punktweise Addition. (Beispiele: Wirbelschlepe eines Flugzeugs, Magnetfeld einer Spule)  
 (2) Wir wissen bereits  $\text{rot}(f) = 0$  und  $\text{rot}(g) = 0$  und somit  $\text{rot}(h) = 0$ . Wir nutzen die Linearität der Ableitung:  $\text{rot}(f + g) = \text{rot}(f) + \text{rot}(g)$ .  
 (3) Das Feld  $f$  hat auf  $U$  kein Potential, denn  $\oint_{\partial B(0,2)} f(s) \cdot ds = 2\pi \neq 0$ . Ebenso hat  $g$  auf  $U$  kein Potential, denn  $\oint_{\partial B(0,2)} g(s) \cdot ds = -2\pi \neq 0$ .  
 😊 Das Feld  $h$  hingegen hat auf unserem Gebiet  $U$  ein Potential!

Potentialproblem für gegenläufige Wirbelfelder

H326 Übung

Das rechtsdrehende Wirbelfeld  $f$  um den Punkt  $(1, 0)$ .

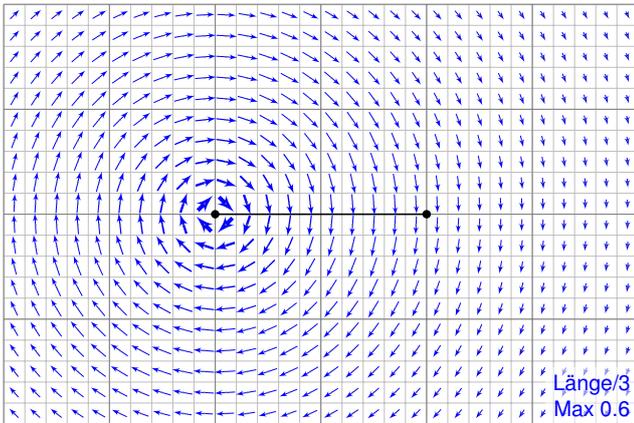


Länge/3  
Max 0.6

Potentialproblem für gegenläufige Wirbelfelder

H327 Übung

Das linksdrehende Wirbelfeld  $g$  um den Punkt  $(-1, 0)$ .

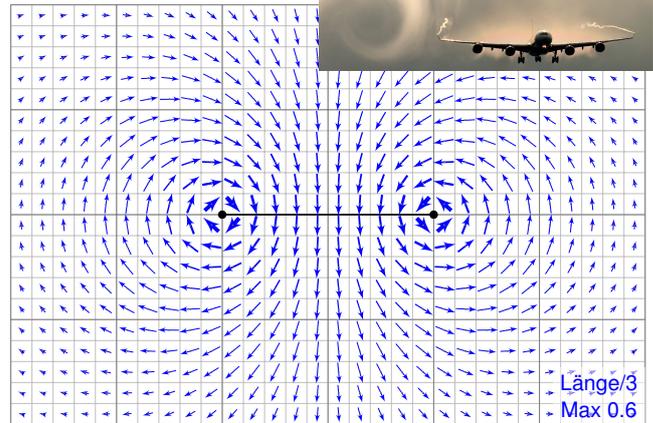


Länge/3  
Max 0.6

Potentialproblem für gegenläufige Wirbelfelder

H328 Übung

Die Superposition  $h = f + g$ .



Länge/3  
Max 0.6

Potentialproblem für gegenläufige Wirbelfelder

H329 Übung

Wie kann man zu  $h : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein Potential  $H : U \rightarrow \mathbb{R}$  konstruieren? Für  $f$  und  $g$  kennen wir jeweils Potentiale  $F_i$  und  $G_i$  auf Halbebenen. Hieraus erhalten wir jeweils Potentiale  $H_i = F_i + G_i$  zu  $h = f + g$ :

$$U_1 = \{x > +1\} : H_1(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x-1}\right) - \arctan\left(\frac{y}{x+1}\right) + \text{const}$$

$$U_2 = \{y > 0\} : H_2(x, y) = \arctan\left(\frac{x+1}{y}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{y}\right) + \text{const}$$

$$U_3 = \{x < -1\} : H_3(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x-1}\right) - \arctan\left(\frac{y}{x+1}\right) + \text{const}$$

$$U_4 = \{y < 0\} : H_4(x, y) = \arctan\left(\frac{x+1}{y}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{y}\right) + \text{const}$$

Wir versuchen, diese zusammenzukleben... und erleben ein Wunder: Setzt man alle Konstanten Null, so passen  $H_1, H_2, H_3, H_4$  zusammen! Die Sprungstelle  $[-1, 1] \times \{0\}$  ist hier aus  $U$  ausgenommen.  
 Wir machen die Punktprobe: Es gilt  $H_1(2, 0) = 0$  sowie  $H_2(2, y) \rightarrow 0$  für  $y \searrow 0$  und  $H_4(2, y) \rightarrow 0$  für  $y \nearrow 0$ . Ebenso gilt  $H_3(-2, 0) = 0$  sowie  $H_2(-2, y) \rightarrow 0$  für  $y \searrow 0$  und  $H_4(-2, y) \rightarrow 0$  für  $y \nearrow 0$ . Alles wird gut!

Potentialproblem für gegenläufige Wirbelfelder

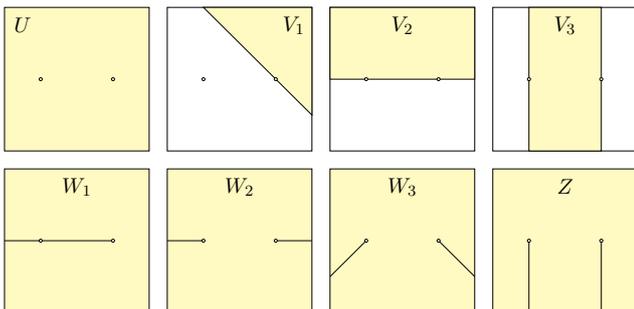
H330 Übung

Das Wirbelfeld  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  hat kein Potential auf  $U$ , ebensowenig das gegenläufige Wirbelfeld  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Erstaunlicherweise hat für  $a, b \in \mathbb{R}$  ihre Superposition  $h = af + bg$  genau dann ein Potential, wenn  $a = b$  gilt.

Einfach zusammenhängende Gebiete

H331 Übung

**Aufgabe:** Welche der folgenden Gebiete in  $U = ]-2, 2[^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\}$  sind konvex? sternförmig? einfach zusammenhängend?



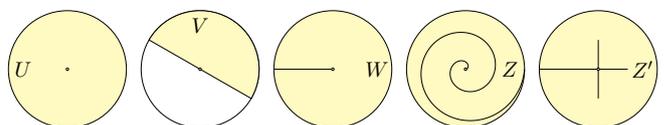
Das Gebiet  $U$  ist weder konvex noch sternförmig, nicht einmal einfach zusammenhängend, wie wir aus unserem zentralen Beispiel wissen! Die Gebiete  $V_1, V_2, V_3$  sind konvex,  $W_1, W_2, W_3$  sind nicht konvex aber sternförmig, und  $Z$  nicht sternförmig aber einfach zusammenhängend.

Einfach zusammenhängende Gebiete

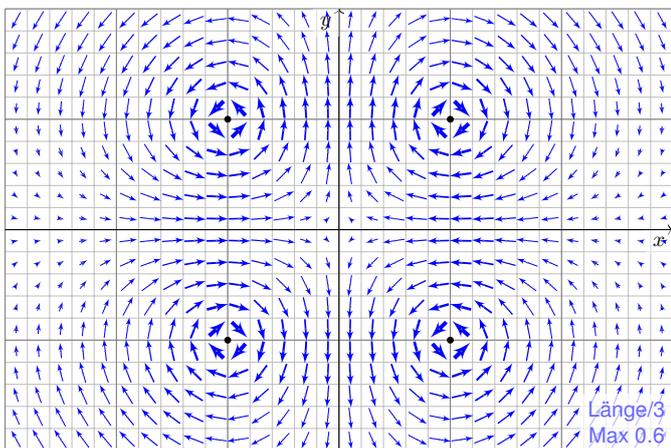
H332 Übung

**Aufgabe:** Wir betrachten das Gebiet  $U = B(0, 2) \setminus \{(0, 0)\}$ .  
 (1) Ist  $U$  konvex? sternförmig? einfach zusammenhängend?  
 Finden Sie, jeweils maximal, (2) ein konvexes Gebiet  $V \subseteq U$ , (3) ein sternförmiges Gebiet  $W \subseteq U$ , sowie (4) ein einfach zusammenhängendes Gebiet  $Z \subseteq U$ , das nicht sternförmig ist.

**Lösung:** Für  $U = B(0, 2) \setminus \{(0, 0)\}$  betrachte man folgende Skizzen:



Das Gebiet  $U$  ist weder konvex noch sternförmig, nicht einmal einfach zusammenhängend, wie wir aus unserem zentralen Beispiel wissen! Offensichtlich ist  $V$  konvex und sogar maximal mit dieser Eigenschaft. Entsprechend ist  $W$  nicht konvex aber sternförmig bezüglich  $(1, 0)$ , zudem maximal mit dieser Eigenschaft. Die Gebiete  $Z$  und  $Z'$  sind nicht sternförmig, aber immerhin einfach zusammenhängend. Zudem ist  $Z$  maximal mit dieser Eigenschaft, aber  $Z'$  nicht.



**Aufgabe:** Auf dem Gebiet  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1, \pm 1)\}$  untersuchen wir

$$f : \mathbb{R}^2 \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{(x^2-1)^2 + (y^2-1)^2} \begin{pmatrix} +2x(y^2-1) \\ -2y(x^2-1) \end{pmatrix}$$

- (1) Seien  $x, y \in \mathbb{R}$ . Berechnen Sie das Arbeitsintegral  $\int f(s) \cdot ds$ 
  - (a) für den geraden Weg  $\alpha$  von  $(0, y)$  nach  $(x, y)$ , wobei  $y \neq \pm 1$ ,
  - (b) für den geraden Weg  $\beta$  von  $(x, 0)$  nach  $(x, y)$ , wobei  $x \neq \pm 1$ .
- (2) Sei  $Q \subseteq \mathbb{R}^2$  das Quadrat mit den Ecken  $(0, 0), (2, 0), (2, 2), (0, 2)$ . Berechnen Sie das Arbeitsintegral  $\oint_{\partial Q} f(s) \cdot ds$ . Nutzen Sie hierzu

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} +\pi/2 - \arctan x & \text{falls } x > 0, \\ -\pi/2 - \arctan x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

- (3) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix  $f'$ . (a) Ist unser Vektorfeld  $f$  divergenzfrei? und rotationsfrei? (b) Besitzt  $f$  ein Potential auf  $U$ ?
- (c) Berechnen Sie das Arbeitsintegral  $\oint_{\partial B((1,1),r)} f(s) \cdot ds$  für  $0 < r < 2$ .
- (4) Besitzt  $f$  ein Potential auf  $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \pm 1, |y| \geq 1\}$ ? Falls ja, berechnen Sie dies als Arbeitsintegral von  $(0, 0)$  nach  $(x, y)$ .

Die Lösung dieser Aufgabe sollen Sie *berechnen* und dann *bewundern*. Zur Unterstützung Ihrer Anschauung, als Ermutigung und zur Probe der sorgsamten Rechnung skizziere ich nachfolgend die Potentialflächen. Die ersten beiden Graphiken zeigen die Funktionen

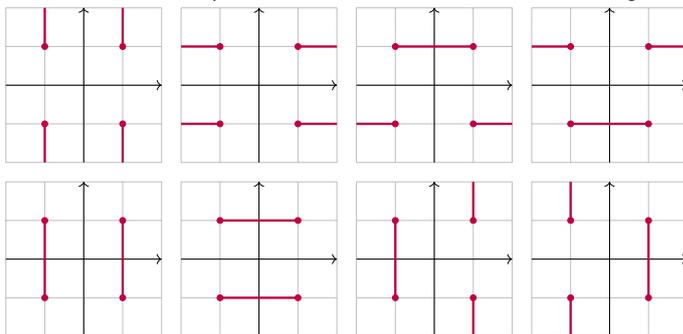
$$+\arctan\left(\frac{x^2-1}{y^2-1}\right) \quad \text{und} \quad -\arctan\left(\frac{y^2-1}{x^2-1}\right).$$

Die roten Linien markieren die Definitionslücken  $y = \pm 1$  bzw.  $x = \pm 1$ : Unsere Lösungsfunktion kann hier nicht stetig fortgesetzt werden!

Die letzten Graphiken zeigen eine hieraus zusammengesetzte Fläche; die Verschiebungen entstehen durch geeignete additive Konstanten. Hierdurch können wir die zuvor konstruierten Flächenstücke glatt zu einem Gesamtkunstwerk verkleben. Das Ergebnis ist sensationell, erhellend und schön anzuschauen. Sie dürfen stolz darauf sein.

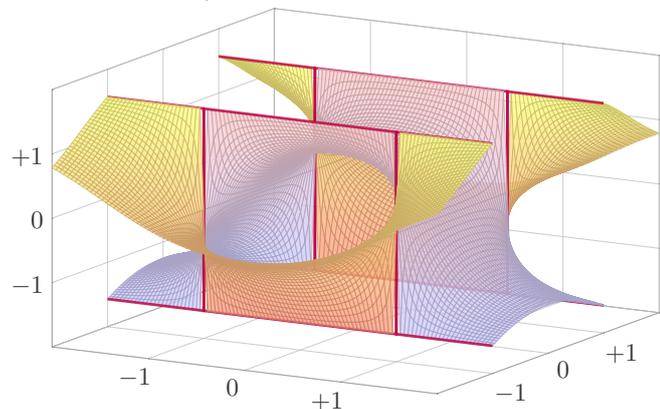
Die so entstehende Potentialfläche über  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1, \pm 1)\}$  ist aber leider keine Funktion! Die gesuchte Potentialfunktion über  $V$  ist nur ein Teil dieser Fläche: Welcher Teil? Das hängt von der „Aufschneidung“ ab.

Beispiele: Auf folgenden Gebieten erlaubt das Vektorfeld  $f$  ein Potential. Die letzten sechs Beispiele sind dabei nicht einfach zusammenhängend!

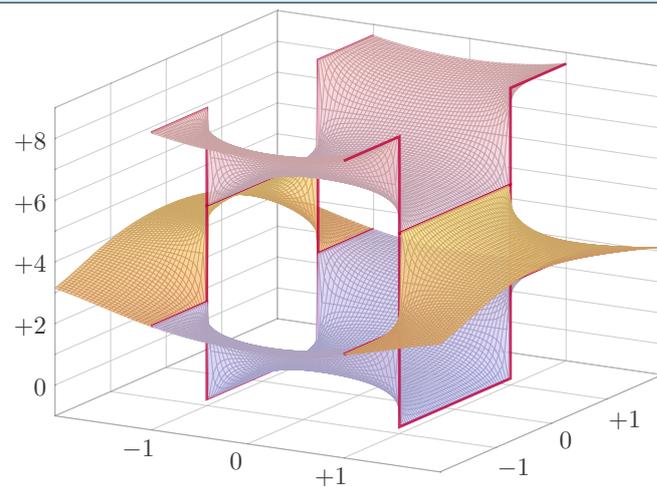
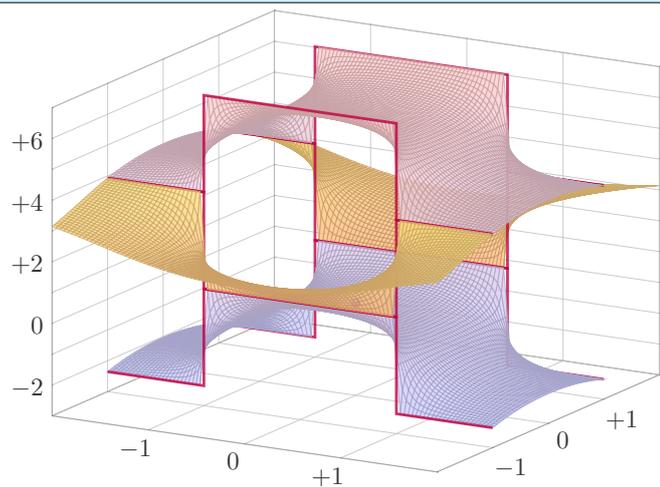
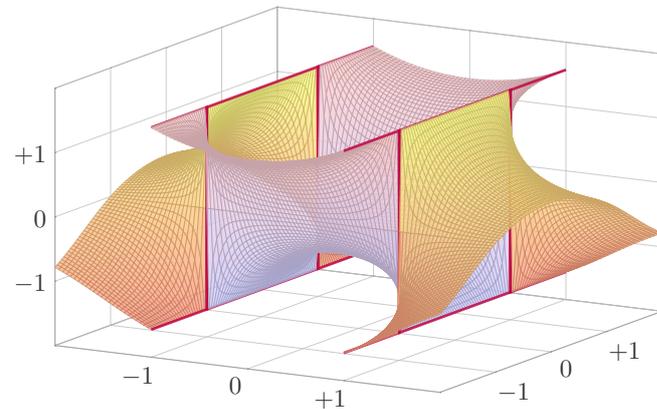


Es gibt unzählige weitere Beispiele geeigneter Gebiete  $U \subseteq \mathbb{R}^2$ , auf denen das Vektorfeld  $f|_U$  ein Potential  $F_U$  erlaubt, mit  $\text{grad } F_U = f|_U$ . Obacht! Es gibt ebenso unzählige Beispiele ungeeigneter Gebiete.

Die Funktion  $\arctan\left(\frac{x^2-1}{y^2-1}\right)$  springt bei  $|y| = 1$  zwischen  $\pm \frac{\pi}{2}$ .

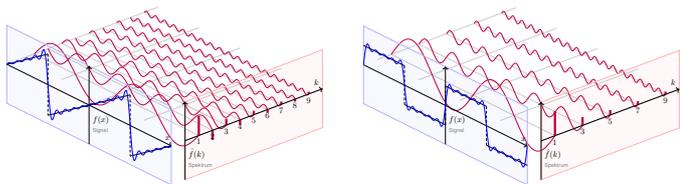


Die Funktion  $\arctan\left(\frac{y^2-1}{x^2-1}\right)$  springt bei  $|x| = 1$  zwischen  $\mp \frac{\pi}{2}$ .



Kapitel I

Fourier-Analyse periodischer Funktionen



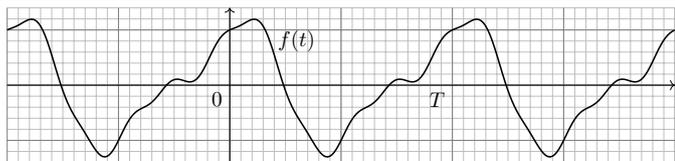
*L'analyse mathématique est aussi étendue que la nature elle-même [...]. Elle rapproche les phénomènes les plus divers, et découvre les analogies secrètes qui les unissent.*

Joseph Fourier (1768–1830), *Théorie analytique de la chaleur* (1822)

Inhalt dieses Kapitels I

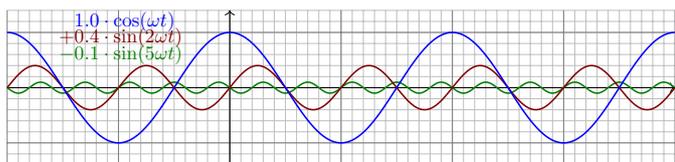
- Die trigonometrische Orthonormalbasis
  - Periodische Funktionen, erste Beispiele
  - Periodische Fortsetzung, Spiegelung
  - Skalarprodukt und Orthonormalbasis
- Fourier-Analyse und das Dirichlet-Kriterium
  - Fourier-Entwicklung der Sägezahnfunktion
  - Das Konvergenz-Kriterium von Dirichlet
  - Fourier-Entwicklung von Treppenfunktionen
- Rechenregeln zu Integration und Glattheit
  - Integrieren und Differenzieren
  - Abklingen der Fourier-Koeffizienten
  - Von Potenzreihen zu Fourier-Reihen
- Fazit: Fourier-Analyse periodischer Funktionen
  - Zusammenfassung und Verständnisfragen
  - Weitere Aufgaben und Anwendungen

Motivation zu Fourier-Reihen



Vorgelegt sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit Periode  $T$ , also Grundfrequenz  $\omega = 2\pi/T$ . Ziel: Wir zerlegen das Signal  $f$  in harmonische Schwingungen gemäß

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \underbrace{a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t)}_{\text{Grundschwingung}} + \underbrace{a_2 \cos(2\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) + \dots}_{\text{Oberschwingungen}}$$



Motivation zu Fourier-Reihen

Periodische Vorgänge sind überall: Jahreszeiten, Tag & Nacht, Puls, Schwingungen, Schall... Ihr Innenohr ermittelt eine Fourier-Analyse. Zerlegung (Analyse) in harmonische Schwingungen gelingt für praktisch alle periodischen Funktionen, egal wie kapriziös sie auch sein mögen! Diese sensationelle Entdeckung trug Fourier 1807 der Akademie vor. Dirichlet klärte 1829 grundlegende Fragen zur Konvergenz (Synthese).

Die Fourier-Analyse hat zahlreiche wichtige technische Anwendungen:

- Digitalisierung von Ton- und Bilddaten (FFT, MP3, JPEG, MPEG).
- Datenkompression, Herausfiltern relevanter Frequenzbereiche.
- Datenanalyse, Mustererkennung, z.B. Spracherkennung.
- Zerlegen von komplizierten Funktionen in einfache Basisfunktionen.
- Optimale  $L^2$ -Approximation, Lösung von Differentialgleichungen.

Wir behandeln hierzu ausführlich die mathematischen Grundlagen:

- Wie berechnet man zur Funktion  $f$  ihre Fourier-Koeffizienten?
- Konvergiert die Fourier-Reihe? Wie? Wann? Wo? Wogegen?

▶ 3Blue1Brown: *But what is a Fourier series?* [youtu.be/r6sGWTCMz2k](https://youtu.be/r6sGWTCMz2k)

Periodische Funktionen

Jede Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  können wir als **Signal** betrachten: Jedem Zeitpunkt  $t \in \mathbb{R}$  wird ein reeller Wert  $f(t) \in \mathbb{R}$  zugeordnet. Diese Zuordnung ist zunächst beliebig und muss nicht stetig sein. Es ist nützlich, auch komplexe Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  zu untersuchen; das kostet keinerlei Mehraufwand und vereinfacht viele Rechnungen.

Definition 11A: periodische Funktion

Eine Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  hat **Periode**  $T \in \mathbb{R}_{>0}$ , wenn gilt:

$$f(t+T) = f(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}$$

Das bedeutet, die Funktionswerte wiederholen sich im Abstand von  $T$ . Hierzu sagen wir auch kurz, die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ist  **$T$ -periodisch**.

In diesem Fall gilt  $f(t+nT) = f(t)$  für alle ganzen Zahlen  $n \in \mathbb{Z}$ .

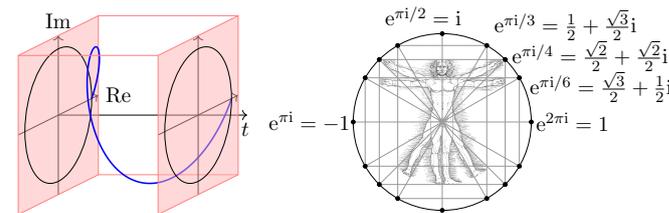
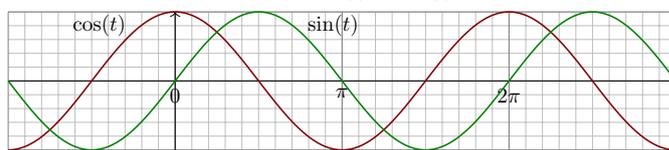
Mit  $T$  sind somit auch alle Vielfachen  $2T, 3T, 4T, \dots$  Perioden.

Die kleinste Periode nennt man gelegentlich auch **Minimalperiode**.

Diese zusätzliche Bedingung spielt im Folgenden meist keine Rolle.

Periodische Funktionen

**Leitbeispiel:** Die Funktion  $e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$  hat Periode  $T = 2\pi$ .

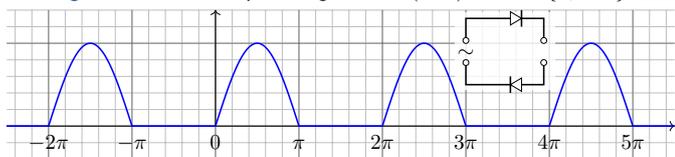


Die Funktionen  $\cos(k\omega t)$  und  $\sin(k\omega t)$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  haben Periode  $T = 2\pi/\omega$ , ebenso die komplexe Funktion  $e_k(t) := e^{ik\omega t} = \cos(k\omega t) + i \sin(k\omega t)$ .

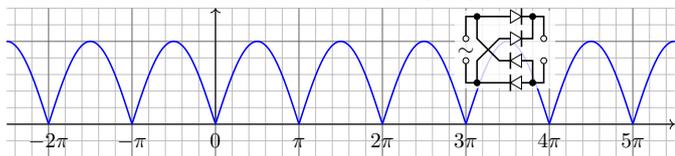
Periodische Funktionen: Beispiele

Legen wir die Spannung  $\sin t$  an einen Gleichrichter, so erhalten wir...

**Einweg-Gleichrichter:** Spannungsverlauf  $(\sin t)^+ = \max\{0, \sin t\}$ . [1417]



**Zweiweg-Gleichrichter:** Spannungsverlauf  $|\sin t|$  mit Periode  $\pi$ . [1417]

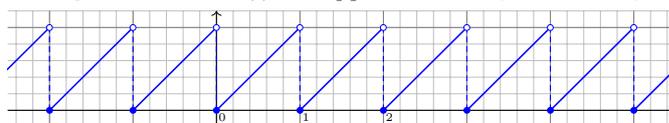


Diese Funktionen sind stetig aber nicht differenzierbar (in  $t \in \pi\mathbb{Z}$ ).

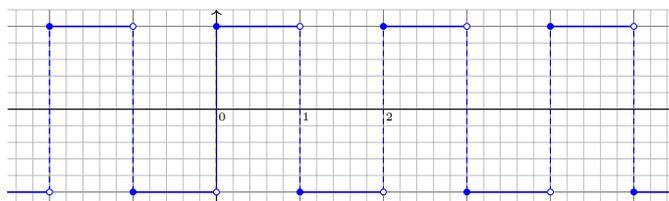
Periodische Funktionen: Beispiele

Die **Gauß-Klammer**  $[x] := \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$  bedeutet Abrunden.

Die **Sägezahnfunktion**  $s(t) = t - [t]$  hat Periode 1 (und 2, 3, 4, ...).

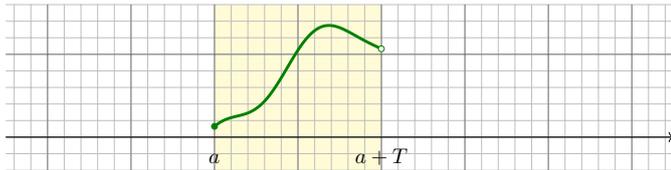


Die **Rechteckfunktion**  $r(t) = (-1)^{[t]}$  hat Periode 2 (und 4, 6, 8, ...).

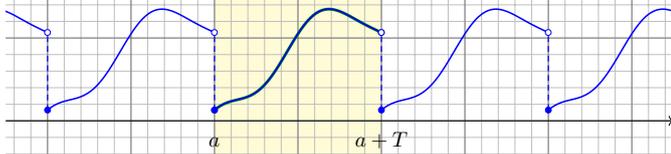


Diese Funktionen sind unstetig (in  $t \in \mathbb{Z}$ ) aber stückweise stetig (B1E).

**Aufgabe:** Setzen Sie die folgende Funktion  $T$ -periodisch fort.



**Lösung:** Hier gilt  $f(t+T) = f(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ , und so setzen wir  $f$  fort:



Jede  $T$ -periodische Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ist eindeutig durch ihre Werte auf einem beliebigen Periodenintervall  $[a, a+T[$  bestimmt. Ausführlich:

**Aufgabe:** Gegeben sei  $g: [a, a+T[ \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $a \in \mathbb{R}$  und  $T > 0$ . Dazu existiert genau eine  $T$ -periodische Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f|_{[a, a+T[} = g$ .  
(1) Warum gilt hier Eindeutigkeit? (2) Wie beweist man die Existenz?

**Lösung:** Zur Vereinfachung können wir alles nach  $a = 0$  verschieben.  
(1) Eindeutigkeit: Jede reelle Zahl  $t \in \mathbb{R}$  schreibt sich eindeutig als

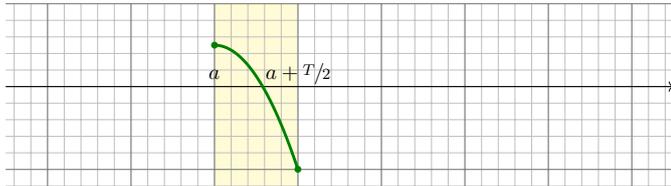
$$t = q \cdot T + r \quad \text{mit } q \in \mathbb{Z} \text{ und } 0 \leq r < T.$$

Ausführlich: Quotient  $q = \lfloor t/T \rfloor \in \mathbb{Z}$  und Rest  $r = t - qT \in [0, T[$ .  
Damit berechnet sich  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eindeutig aus  $g: [0, T[ \rightarrow \mathbb{C}$  gemäß

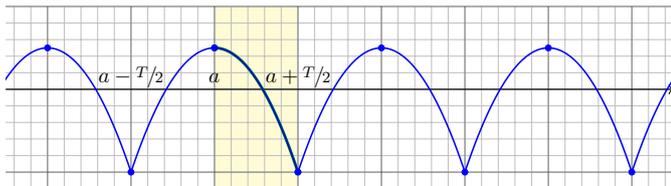
$$f(t) = f(t - qT) = f(r) = g(r).$$

(2) Existenz: Aus den vorgegebenen Daten  $g: [0, T[ \rightarrow \mathbb{C}: r \mapsto g(r)$  konstruieren wir explizit die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}: t \mapsto g(t - \lfloor t/T \rfloor \cdot T)$ . Diese Funktion  $f$  ist tatsächlich  $T$ -periodisch und erfüllt  $f|_{[a, a+T[} = g$ .

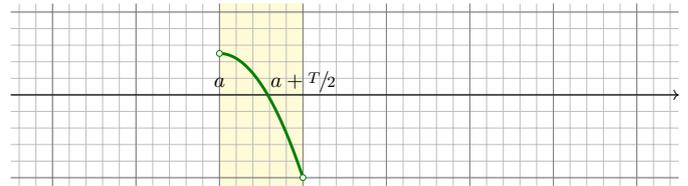
**Aufgabe:** Setzen Sie die Funktion (bzgl.  $a$ ) gerade  $T$ -periodisch fort.



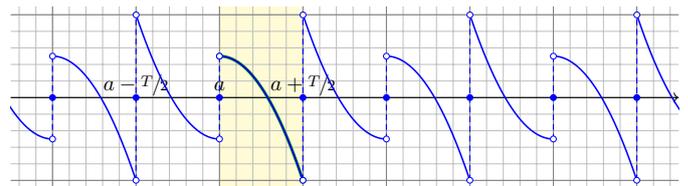
**Lösung:** Hier gilt  $f(t+T) = f(t)$  und  $f(a-t) = f(a+t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ :



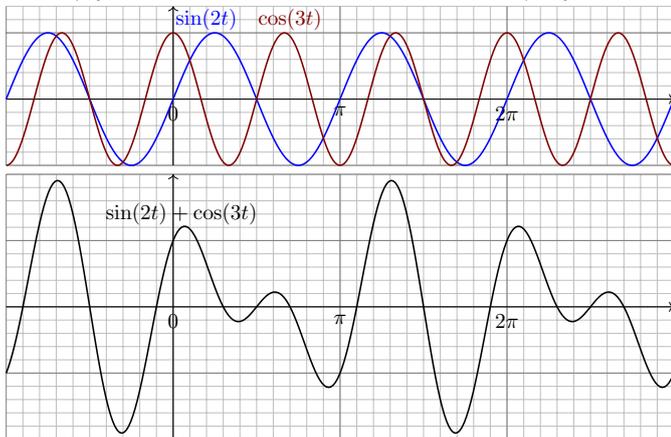
**Aufgabe:** Setzen Sie die Funktion (bzgl.  $a$ ) ungerade  $T$ -periodisch fort.



**Lösung:** Hier gilt  $f(t+T) = f(t)$  und  $f(a-t) = -f(a+t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ :



Haben  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  Periode  $T$ , dann auch ihre Summe  $f+g$ .

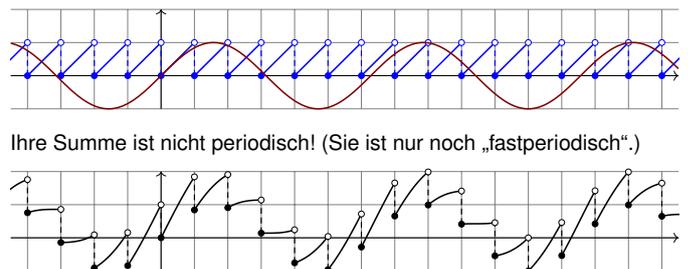


**Aufgabe:** Sind  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  periodisch, dann auch ihre Summe?

**Lösung:** Nein! Hierzu müssen  $f, g$  eine gemeinsame Periode haben.

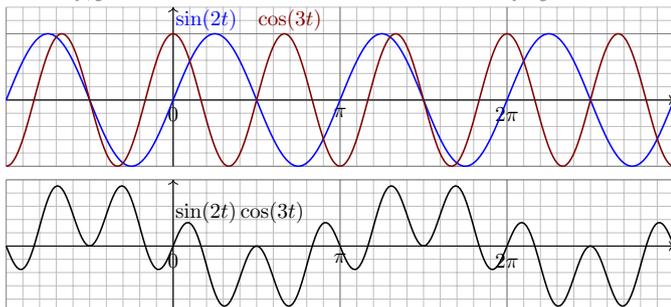
⚠ Bei der obigen Summe haben  $f$  und  $g$  eine gemeinsame Periode. Das ist auch nötig, andernfalls ist die Summe nicht mehr periodisch!

**Beispiel:** Die Sägezahnfunktion  $s(t) = t - \lfloor t \rfloor$  hat Periode  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Die Funktion  $t \mapsto \sin(t)$  hat Perioden  $2\pi n$ , aber keine mit  $s$  gemeinsam:



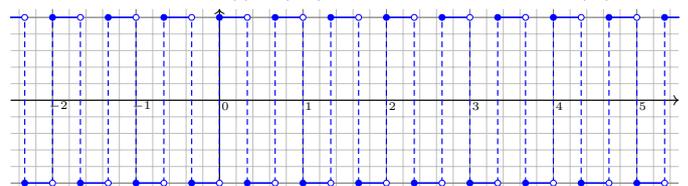
Ihre Summe ist nicht periodisch! (Sie ist nur noch „fastperiodisch“.)

Haben  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  Periode  $T$ , dann auch ihr Produkt  $f \cdot g$ .

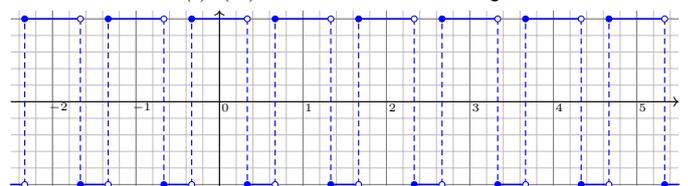


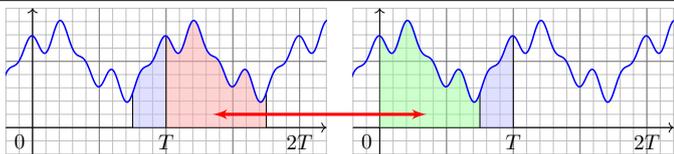
Der Funktionenraum  $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) := \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \}$  ist ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum, sogar eine Algebra, bezüglich der punktweisen Verknüpfungen. Darin liegt die Menge  $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{C})^{\mathbb{Z}T} := \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \forall t \in \mathbb{R}: f(t+T) = f(t) \}$  aller  $T$ -periodischen Funktionen als Untervektorraum und Unter algebra: Summen und Produkte  $T$ -periodischer Funktionen sind  $T$ -periodisch.

Hat  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  Periode  $T$ , dann auch  $g(t) = f(kt)$  für  $k \in \mathbb{N}$ . Beispiel: Die Rechteckfunktion  $r(t) = (-1)^{\lfloor t \rfloor}$  hat Periode 2, ebenso  $r(3t)$ :



Auch ihr Produkt  $r(t)r(3t)$  hat Periode 2. Es hat sogar Periode 1!





**Lemma 11B: Integral  $T$ -periodischer Funktionen**

Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  sei  $T$ -periodisch und auf  $[0, T]$  integrierbar. Zur Integration können wir ein beliebiges Periodenintervall wählen:

$$\int_{t=a}^{a+T} f(t) dt = \int_{t=0}^T f(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt.$$

**Nachrechnen:** Wie skizziert sei  $0 < a < T$ , allgemein geht's genauso. Dank Periodizität gilt  $\int_{t=T}^{T+a} f(t) dt = \int_{t=0}^a f(t) dt$ , dank Additivität also

$$\int_a^{a+T} f = \int_a^T f + \int_T^{T+a} f = \int_a^T f + \int_0^a f = \int_0^a f + \int_a^T f = \int_0^T f.$$

Umparametrisieren auf Periode  $2\pi$

😊 Jede  $T$ -periodische Funktion können wir zu Periode  $2\pi$  umparametrisieren. Letztere sind für uns besonders bequem.

**Proposition 11D: Umparametrisierung auf Periode  $2\pi$**

Sei  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}: t \mapsto \varphi(t)$  eine Funktion mit Periode  $T > 0$  und Grundfrequenz  $\omega = 2\pi/T$ . Wir setzen  $x = \omega t$ , also  $t = x/\omega$ .

Dann hat die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}: f(x) = \varphi(t) = \varphi(x/\omega)$  Periode  $2\pi$ , denn für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $f(x + 2\pi) = \varphi(t + T) = \varphi(t) = f(x)$ .

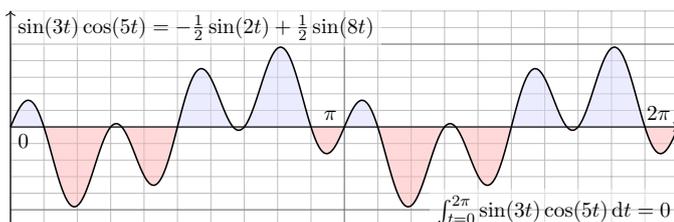
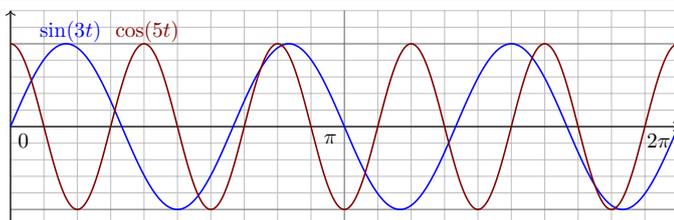
Das Skalarprodukt bleibt dank Substitutionsregel B1K unverändert.

Für  $t = x/\omega$  und  $dt = dx/\omega$  sowie  $\varphi(t) = f(x)$  und  $\psi(t) = g(x)$  gilt:

$$\langle \varphi | \psi \rangle_T = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \overline{\varphi(t)} \psi(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{x=0}^{2\pi} \overline{f(x)} g(x) dx = \langle f | g \rangle_{2\pi}$$

Wir betrachten im Folgenden meist  $2\pi$ -periodische Funktionen. Dann ist  $\omega = 1$ , und unsere Formeln werden kürzer und einfacher. In konkreten Anwendungen ist die Frequenz  $\omega$  meist fest vorgegeben. Die Umrechnung gelingt jedenfalls leicht wie oben in 11D festgehalten.

Orthogonalität trigonometrischer Funktionen



Skalarprodukt  $T$ -periodischer Funktionen

**Definition 11c: Skalarprodukt periodischer Funktionen**

Für Funktionen  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  definieren wir ihr **Skalarprodukt** durch

$$L^p \times L^q \rightarrow \mathbb{C}: (f, g) \mapsto \langle f | g \rangle := \frac{1}{b-a} \int_{t=a}^b \overline{f(t)} g(t) dt.$$

Der Integrand  $\overline{f}g$  sei absolut integrierbar, etwa  $f \in L^\infty$  beschränkt und  $g \in L^1$  absolut integrierbar, allgemein  $f \in L^p, g \in L^q$  mit  $1/p + 1/q = 1$ . Bei Periode  $T > 0$  integrieren wir über ein Intervall mit  $b - a \in \mathbb{N}_{\geq 1} \cdot T$ . Das Periodenintegral ist invariant bei Verschiebung und Vervielfachung.

**Symmetrie:** Vertauschen bedeutet konjugieren,  $\langle g | f \rangle = \overline{\langle f | g \rangle}$ .

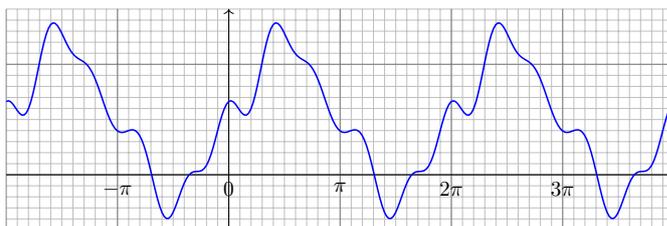
**Linearität** im zweiten Faktor, konjugiert im ersten: Für alle  $\alpha \in \mathbb{C}$  gilt

$$\langle f | g_1 + g_2 \rangle = \langle f | g_1 \rangle + \langle f | g_2 \rangle, \quad \langle f | \alpha g \rangle = \alpha \langle f | g \rangle, \\ \langle f_1 + f_2 | g \rangle = \langle f_1 | g \rangle + \langle f_2 | g \rangle, \quad \langle \alpha f | g \rangle = \overline{\alpha} \langle f | g \rangle.$$

**Positivität:** Für jede stetige Funktion  $f \neq 0$  gilt  $\langle f | f \rangle > 0$ . Allgemein gilt  $\langle f | f \rangle \geq 0$ , und aus  $\langle f | f \rangle = 0$  folgt  $f(t) = 0$  für fast alle  $t \in [a, b]$ .

Trigonometrische Polynome

Beispiel:  $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin(x) - \frac{1}{7} \sin(3x) + \frac{2}{15} \cos(5x) + \frac{3}{100} \cos(6x)$



**Trigonometrisches Polynom** nennen wir jede endliche Summe

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega t}.$$

zu gegebenen Koeffizienten  $a_k, b_k \in \mathbb{C}, b_0 = 0$  bzw.  $c_{\pm k} = (a_k \mp ib_k)/2$ .

😊 Beide Schreibweisen sind nützlich, die komplexe ist oft bequemer.

Orthogonalität trigonometrischer Funktionen

**Aufgabe:** Integrieren Sie für  $k, \ell \in \mathbb{N}$  folgende Funktionen über  $[0, T]$ :

$$\cos(k\omega t) \cos(\ell\omega t), \quad \sin(k\omega t) \sin(\ell\omega t), \quad \sin(k\omega t) \cos(\ell\omega t).$$

Wir erinnern hierzu an die stets nützlichen Additionstheoreme

$$\cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)], \\ \sin(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)], \\ \sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)].$$

Leiten Sie zunächst diese Additionstheoreme aus der Euler-Formel  $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$  und dem Exponentialgesetz  $e^{i\alpha+i\beta} = e^{i\alpha} e^{i\beta}$  ab.

**Lösung:** Zur Berechnung nutzen wir folgende Grundintegrale

$$\int_{t=0}^T \sin(n\omega t) dt = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}, \\ \int_{t=0}^T \cos(n\omega t) dt = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq 0, \\ T & \text{für } n = 0. \end{cases}$$

Orthogonalität trigonometrischer Funktionen

Die Orthogonalität folgt dann durch direktes Nachrechnen.

$$\int_{t=0}^T \cos(k\omega t) \cos(\ell\omega t) dt = \frac{1}{2} \int_{t=0}^T \cos((k - \ell)\omega t) + \cos((k + \ell)\omega t) dt \\ = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell, \\ T/2 & \text{für } k = \ell \geq 1, \\ T & \text{für } k = \ell = 0. \end{cases}$$

$$\int_{t=0}^T \sin(k\omega t) \sin(\ell\omega t) dt = \frac{1}{2} \int_{t=0}^T \cos((k - \ell)\omega t) - \cos((k + \ell)\omega t) dt \\ = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell, \\ T/2 & \text{für } k = \ell \geq 1, \\ 0 & \text{für } k = \ell = 0. \end{cases}$$

$$\int_{t=0}^T \sin(k\omega t) \cos(\ell\omega t) dt = \frac{1}{2} \int_{t=0}^T \sin((k - \ell)\omega t) + \sin((k + \ell)\omega t) dt = 0$$

😊 Das ist schön. Alles wird noch schöner und übersichtlicher für die komplexe Funktion  $e^{ik\omega t} = \cos(k\omega t) + i \sin(k\omega t)$ , siehe nächste Aufgabe.

Für Funktionen  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit Periode  $T$  nutzen wir das **Skalarprodukt**

$$\langle f | g \rangle := \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \overline{f(t)} g(t) dt.$$

Sei  $\omega = 2\pi/T$ . Als **Basisfunktion**  $e_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  definieren wir

$$e_k(t) := e^{ik\omega t} = \cos(k\omega t) + i \sin(k\omega t).$$

Ihre Linearkombinationen sind die **trigonometrischen Polynome**:

$$f(t) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ik\omega t}, \quad g(t) = \sum_{\ell=-n}^n \widehat{g}(\ell) e^{i\ell\omega t} \quad \text{mit} \quad \widehat{f}(k), \widehat{g}(\ell) \in \mathbb{C}.$$

**Aufgabe:** Wie bestimmt die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ihr Spektrum  $\widehat{f}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ ? Wir nutzen Orthonormalität: Berechnen Sie hierzu die Skalarprodukte

- (0)  $\langle 1 | e_n \rangle$ , (1)  $\langle e_k | e_\ell \rangle$ , (2)  $\langle e_k | g \rangle$ , (3)  $\langle f | g \rangle$ , (4)  $\langle f | f \rangle$ .  
 (5) Entwickeln Sie  $f(t) = \sin^2 t$  und  $g(t) = \cos^3 t$  in Fourier-Polynome.  
 (6) Berechnen Sie daraus  $\frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \sin^4 t dt$  und  $\frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \cos^6 t dt$ .

(2) **Fourier** — Dank Linearität und Orthonormalität erhalten wir:

$$\langle e_k | g \rangle \stackrel{\text{Def}}{=} \left\langle e_k \left| \sum_{\ell=-n}^n \widehat{g}(\ell) e_\ell \right. \right\rangle \stackrel{\text{Lin}}{=} \sum_{\ell=-n}^n \widehat{g}(\ell) \langle e_k | e_\ell \rangle \stackrel{(1)}{=} \widehat{g}(k)$$

☺ Das Skalarprodukt filtert den gewünschten Koeffizienten heraus!

(3) **Parseval** — Dank Bilinearität und Orthonormalität erhalten wir:

$$\langle f | g \rangle \stackrel{\text{Def}}{=} \left\langle \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e_k \left| \sum_{\ell=-n}^n \widehat{g}(\ell) e_\ell \right. \right\rangle \stackrel{\text{Lin}}{=} \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) \langle e_k | \sum_{\ell=-n}^n \widehat{g}(\ell) e_\ell \rangle$$

$$\stackrel{\text{Lin}}{=} \sum_{k=-n}^n \sum_{\ell=-n}^n \widehat{f}(k) \widehat{g}(\ell) \langle e_k | e_\ell \rangle \stackrel{(1)}{=} \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) \widehat{g}(k).$$

☺ Diese Rechnung gilt allgemein für Orthonormalbasen wie im  $\mathbb{R}^n$ .

(4) **Energiegleichung** — Für das Normquadrat gilt Pythagoras (I11):

$$\langle f | f \rangle \stackrel{(3)}{=} \sum_{k=-n}^n |\widehat{f}(k)|^2$$

☺ Das Normquadrat ist die Summe der Koeffizientenquadrate.

**Satz I1E: trigonometrische Orthonormalbasis**

Die Menge aller Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ist ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum. Hierin ist die Teilmenge aller  $T$ -periodischen Funktionen ein Untervektorraum. Als Basisfunktion  $e_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  und  $\omega = 2\pi/T$  definieren wir

$$e_k(t) := e^{ik\omega t} = \cos(k\omega t) + i \sin(k\omega t).$$

Diese erzeugen den Unterraum  $V = \{ \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega t} \mid n \in \mathbb{N}, c_k \in \mathbb{C} \}$  der trigonometrischen Polynome. Hierauf haben wir das Skalarprodukt

$$V \times V \rightarrow \mathbb{C} : (f, g) \mapsto \langle f | g \rangle := \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \overline{f(t)} g(t) dt.$$

Damit gelten die Orthonormalitätsrelationen

$$\langle e_k | e_\ell \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell: \text{ paarweise Orthogonalität,} \\ 1 & \text{für } k = \ell: \text{ Normierung auf Länge 1.} \end{cases}$$

- ☺ Dieselben Gleichungen nutzen wir allgemein für Fourier-Reihen.
- ☺ Das Fourier-Integral filtert den gewünschten Koeffizienten heraus!
- ☺ Das Skalarprodukt beschert uns Struktur, Klarheit und Übersicht.
- ☺ Die Orthonormalität der Basis  $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  vereinfacht die Rechnung.

**Korollar I1F: Jede Funktion bestimmt ihre Koeffizienten.**

(2) Die Funktionen  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  seien gegeben als Fourier-Polynome

$$f(t) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ik\omega t} \quad \text{und} \quad g(t) = \sum_{k=-n}^n \widehat{g}(k) e^{ik\omega t}.$$

(2a) Aus  $\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k)$  für alle  $k = -n, \dots, n$  folgt offensichtlich  $f = g$ .

(2b) Umgekehrt folgt aus  $f = g$  auch  $\widehat{f} = \widehat{g}$ , dank der Fourier-Integrale:

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} g(t) dt = \widehat{g}(k)$$

☺ Koeffizientenvergleich! Dazu genügt bereits  $f = g$  fast überall. (A4G)

**Lösung:** (0) Wir berechnen  $\langle 1 | e_n \rangle$ . Für  $n = 0$  ist es besonders leicht:

$$\langle 1 | e_0 \rangle \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{T} \int_{t=0}^T 1 \cdot e^{i0\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T 1 dt = 1.$$

Für  $n \in \mathbb{Z}$  mit  $n \neq 0$  nutzen wir den HDI und  $\omega T = 2\pi$ :

$$\langle 1 | e_n \rangle \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{T} \int_{t=0}^T 1 \cdot e^{in\omega t} dt \stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} \frac{1}{T} \left[ \frac{1}{in\omega} e^{in\omega t} \right]_{t=0}^T = 0.$$

(1) **Orthonormalität** — Wir berechnen die gesuchten Skalarprodukte:

$$\langle e_k | e_\ell \rangle \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \overline{e_k(t)} e_\ell(t) dt \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} e^{i\ell\omega t} dt$$

$$\stackrel{\text{Exp}}{=} \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{i(\ell-k)\omega t} dt \stackrel{(0)}{=} \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell, \\ 1 & \text{für } k = \ell. \end{cases}$$

☺ Die Basis  $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  ist orthonormal bezüglich des Skalarprodukts! Das ist analog zur Geometrie des euklidischen Raumes  $\mathbb{R}^n$  bzw.  $\mathbb{C}^n$ .

☺ Im Komplexen ist alles halb so schwer und doppelt so schön!

(5) Wir entwickeln  $f$  und  $g$  dank der Euler-Formel  $e^{it} = \cos t + i \sin t$ :

$$f(t) = \sin(t)^2 = \left( \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^2 = -\frac{1}{4} e^{2it} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{-2it} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2t)$$

$$g(t) = \cos(t)^3 = \left( \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} e^{3it} + \frac{3}{8} e^{it} + \frac{3}{8} e^{-it} + \frac{1}{8} e^{-3it}$$

$$= \frac{3}{4} \cos(t) + \frac{1}{4} \cos(3t)$$

☺ Dank Orthonormalität (1) lesen wir die Fourier-Koeffizienten ab (2).

(6) Wir nutzen die Energiegleichung (4) und Fourier-Koeffizienten (5):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \sin^4 t dt \stackrel{\text{Def}}{=} \langle f | f \rangle \stackrel{(4)}{=} \sum_{k=-n}^n |\widehat{f}(k)|^2 \stackrel{(5)}{=} \frac{3}{8}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \cos^6 t dt \stackrel{\text{Def}}{=} \langle g | g \rangle \stackrel{(4)}{=} \sum_{k=-n}^n |\widehat{g}(k)|^2 \stackrel{(5)}{=} \frac{5}{16}$$

☺ Die Energiegleichung gilt allgemein für Fourier-Reihen! (Satz J1A)

**Korollar I1F: Fourier-Koeffizienten durch Skalarprodukt**

(1) Wir betrachten ein trigonometrisches Polynom:

$$f(t) = \sum_{\ell=-n}^n c_\ell e^{i\ell\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{\ell=1}^n a_\ell \cos(\ell\omega t) + b_\ell \sin(\ell\omega t)$$

Die Funktion  $f$  bestimmt die Koeffizienten durch Fourier-Integrale:

$$c_k = \langle e_k | f \rangle = \langle e^{ik\omega t} | f \rangle = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} f(t) dt,$$

bzw.

$$a_k = \langle 2 \cos(k\omega t) | f \rangle = \frac{2}{T} \int_{t=0}^T \cos(k\omega t) f(t) dt,$$

$$b_k = \langle 2 \sin(k\omega t) | f \rangle = \frac{2}{T} \int_{t=0}^T \sin(k\omega t) f(t) dt.$$

☺ Die Formeln für die Koeffizienten  $c_k$  sind besonders schön, da die Funktionen  $e_k(t) = e^{ik\omega t}$  orthonormal sind. Hingegen sind  $\cos(k\omega t)$  und  $\sin(k\omega t)$  zwar orthogonal, aber mit  $L^2$ -Norm  $\sqrt{2}/2$  statt Normierung 1.

**Korollar I1F: Norm und Skalarprodukt**

(3) Koeffizienten  $\widehat{f}(k), \widehat{g}(k) \in \mathbb{C}$  definieren trigonometrische Polynome

$$f(t) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ik\omega t} \quad \text{und} \quad g(t) = \sum_{k=-n}^n \widehat{g}(k) e^{ik\omega t}.$$

Für ihre Norm und ihr Skalarprodukt gilt nach Pythagoras (I11)

$$\frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-n}^n |\widehat{f}(k)|^2, \quad \text{kurz} \quad \|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{\ell^2},$$

$$\frac{1}{T} \int_{t=0}^T \overline{f(t)} g(t) dt = \sum_{k=-n}^n \overline{\widehat{f}(k)} \widehat{g}(k), \quad \text{kurz} \quad \langle f | g \rangle_{L^2} = \langle \widehat{f} | \widehat{g} \rangle_{\ell^2}.$$

☺ Diese Isometrie ist eine zentrale Eigenschaft der Fourier-Theorie. Für trigonometrische Polynome folgt dies direkt aus der Orthonormalität der Basis  $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ . Erfreulicherweise gilt dies nach Vervollständigung ganz allgemein für alle quadrat-integrierbaren Funktionen! (Satz J1A)

Fourier–Theorie führt uns wie durch Zauberhand zu Skalarprodukten. Wir erinnern uns dazu an grundlegende Begriffe und Rechentechniken.

☐ Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §3.5.

Das **euklidische Skalarprodukt** von zwei Vektoren  $u, v \in \mathbb{R}^n$  ist

$$\langle u | v \rangle = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n.$$

Übliche Schreibweisen:  $\langle u | v \rangle = \langle u, v \rangle = u \cdot v = u \cdot v = u^T v = \dots$

Für jeden Vektor  $u \in \mathbb{R}^n$  gilt somit  $\langle u | u \rangle = u_1^2 + \dots + u_n^2 \geq 0$ .

Die **euklidische Norm** des Vektors  $u \in \mathbb{R}^n$  ist definiert durch

$$|u| = \sqrt{\langle u | u \rangle} = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}.$$

Übliche Schreibweisen:  $|u| = |u|_2 = \|u\| = \|u\|_2 = \dots$

Der **euklidische Abstand** zwischen zwei Punkten  $u, v \in \mathbb{R}^n$  ist

$$|u - v| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}.$$

Das **hermitesche Skalarprodukt** von zwei Vektoren  $u, v \in \mathbb{C}^n$  ist

$$\langle u | v \rangle = \overline{u_1} v_1 + \dots + \overline{u_n} v_n.$$

Übliche Schreibweisen:  $\langle u | v \rangle = \langle u, v \rangle = u \cdot v = u \cdot v = \overline{u}^T v = \dots$

Für jeden Vektor  $u \in \mathbb{C}^n$  gilt somit  $\langle u | u \rangle = |u_1|^2 + \dots + |u_n|^2 \geq 0$ .

Die **hermitesche Norm** des Vektors  $u \in \mathbb{C}^n$  ist definiert durch

$$|u| = \sqrt{\langle u | u \rangle} = \sqrt{|u_1|^2 + \dots + |u_n|^2}.$$

Übliche Schreibweisen:  $|u| = |u|_2 = \|u\| = \|u\|_2 = \dots$

Der **hermitesche Abstand** zwischen zwei Punkten  $u, v \in \mathbb{C}^n$  ist

$$|u - v| = \sqrt{|u_1 - v_1|^2 + \dots + |u_n - v_n|^2}.$$

⚠ Im komplexen Skalarprodukt muss ein Faktor konjugiert werden, damit  $\langle u | u \rangle \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  gilt. Ich konjugiere systematisch den ersten, andere Autoren den zweiten. In der Literatur werden beide Konventionen genutzt, sie gehen durch Vertauschen und Konjugation ineinander über.

**Definition 11G: Skalarprodukt**

Ein **Skalarprodukt** auf einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  ist eine Abbildung

$$\langle - | - \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K} : (u, v) \mapsto \langle u | v \rangle,$$

die (konjugiert) symmetrisch, bilinear und positiv ist.

Ein Skalarprodukt ermöglicht uns, in  $V$  Winkel und Längen zu messen. Damit gewinnen wir auf  $V$  die üblichen geometrischen Werkzeuge:

- **Orthogonalität:**  $u, v \in V$  stehen senkrecht, wenn  $\langle u | v \rangle = 0$ .
- **Norm:** Die Länge eines Vektors  $v \in V$  ist  $\|v\| = \sqrt{\langle v | v \rangle}$ .
- **Cauchy–Schwarz–Ungleichung:** Es gilt  $|\langle u | v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ .
- **Winkel:**  $\langle u | v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\alpha)$  mit  $\alpha = \angle(u, v) \in [0, \pi]$ .
- **Dreiecksungleichung:** Es gilt  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ .
- **Metrik:** Der Abstand zweier Vektoren  $u, v$  ist  $\|u - v\|$ .
- **Konvergenz**  $v_n \rightarrow v$  ist definiert durch  $\|v_n - v\| \rightarrow 0$ .

😊 Diese Begriffe kennen Sie bereits aus dem  $\mathbb{R}^n$ . Erstaunlicherweise nützen Sie ebenso für Funktionen als Grundlage der Fourier–Theorie!

**Nachrechnen:** (1) Für  $v = 0$  ist die Ungleichung offenbar richtig. Wir dürfen daher  $v \neq 0$  annehmen, dank Positivität also  $\langle v | v \rangle > 0$ . Wir setzen  $z = au - bv$  mit  $a, b \in \mathbb{C}$  und berechnen das Normquadrat:

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle z | z \rangle &= \langle au - bv | au - bv \rangle \\ &= |a|^2 \langle u | u \rangle - \overline{a} b \langle u | v \rangle - a \overline{b} \langle v | u \rangle + |b|^2 \langle v | v \rangle \end{aligned}$$

Wir wählen nun geschickte Koeffizienten  $a = \langle v | v \rangle$  und  $b = \langle v | u \rangle$ :

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle v | v \rangle [\langle u | u \rangle \langle v | v \rangle - 2|\langle u | v \rangle|^2 + |\langle u | v \rangle|^2] \\ = \langle v | v \rangle [\langle u | u \rangle \langle v | v \rangle - |\langle u | v \rangle|^2] \end{aligned}$$

Wegen  $\langle v | v \rangle > 0$  erhalten wir die gewünschte Ungleichung:

$$\langle u | u \rangle \langle v | v \rangle - |\langle u | v \rangle|^2 \geq 0$$

(2) Bei Gleichheit gilt  $\langle z | z \rangle = 0$ , also  $z = au + bv = 0$ , somit  $u = (b/a)v$ . Umgekehrt folgt aus linearer Abhängigkeit  $u = \lambda v$  die Gleichheit, denn

$$\begin{aligned} |\langle u | v \rangle|^2 &= |\langle \lambda v | v \rangle|^2 = |\lambda|^2 \langle v | v \rangle^2, \\ \langle u | u \rangle \langle v | v \rangle &= \langle \lambda v | \lambda v \rangle \langle v | v \rangle = |\lambda|^2 \langle v | v \rangle^2. \end{aligned}$$

Überall in Naturwissenschaft und Technik sind komplexe Zahlen nützlich. Gerade in der Fourier–Theorie vereinfachen sie viele Rechnungen: Im Komplexen ist alles halb so schwer und doppelt so schön!

Jede **komplexe Zahl**  $z \in \mathbb{C}$  schreibt sich eindeutig als

$$z = x + iy \quad \text{mit} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Die **Konjugation**  $\bar{\cdot} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist definiert durch

$$z = x + iy \quad \mapsto \quad \bar{z} = x - iy.$$

Für das Produkt von  $\bar{z}$  und  $z$  gilt demnach

$$\bar{z} \cdot z = (x - iy)(x + iy) = x^2 + y^2 \geq 0.$$

Hieraus gewinnen wir die **Norm** von  $z \in \mathbb{C}$  mittels

$$|z| = \sqrt{\bar{z} \cdot z} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

😊 Somit entspricht diese Norm auf  $\mathbb{C}$  der euklidischen Norm auf  $\mathbb{R}^2$ .

☐ Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §1.7.

☐ Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §3.6. Soweit möglich behandeln wir den reellen und komplexen Fall parallel: Im Folgenden steht  $\mathbb{K}$  entweder für den Körper  $\mathbb{R}$  oder den Körper  $\mathbb{C}$ .

Das Skalarprodukt auf  $V = \mathbb{K}^n$  erfreut sich folgender Eigenschaften:

- 1 (konjugierte) **Symmetrie:** Für alle  $u, v \in V$  gilt  $\langle v | u \rangle = \overline{\langle u | v \rangle}$ .
- 2 **Linearität im zweiten Faktor:** Für alle  $\alpha \in \mathbb{K}$  gilt

$$\langle u | v_1 + v_2 \rangle = \langle u | v_1 \rangle + \langle u | v_2 \rangle, \quad \langle u | \alpha v \rangle = \alpha \langle u | v \rangle.$$

Dank Symmetrie folgt (konjugierte) **Linearität im ersten Faktor:**

$$\langle u_1 + u_2 | v \rangle = \langle u_1 | v \rangle + \langle u_2 | v \rangle, \quad \langle \alpha u | v \rangle = \overline{\alpha} \langle u | v \rangle.$$

Wegen der Konjugation heißt dies auch **semilinear** oder **antilinear**.

Beides zusammen besagt: Über  $\mathbb{R}$  ist  $\langle - | - \rangle$  **bilinear**, über  $\mathbb{C}$  nur konjugiert bilinear, genannt **sesquilinear** (lat. *sesqui* 'anderthalb'). Aus Symmetrie folgt  $\langle v | v \rangle \in \mathbb{R}$ , und aus Linearität  $\langle 0 | 0 \rangle = 0$ .

- 3 **Positivität:** Für jeden Vektor  $v \in V \setminus \{0\}$  gilt  $\langle v | v \rangle > 0$ .

😊 Wir benötigen nur diese drei einfachen Eigenschaften, mehr nicht.

☐ Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §3.6.

**Satz 11H: Cauchy–Schwarz– und Dreiecksungleichung**

Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle - | - \rangle$ .

- (1) Für alle  $u, v \in V$  gilt die **Cauchy–Schwarz–Ungleichung:**

$$|\langle u | v \rangle|^2 \leq \langle u | u \rangle \langle v | v \rangle$$

- (2) Gleichheit gilt genau dann, wenn  $u, v$  linear abhängig sind.

- (3) Für die Norm  $\|u\| = \sqrt{\langle u | u \rangle}$  ist die Ungleichung (1) äquivalent zu:

$$|\langle u | v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

- (4) Für alle  $u, v \in V$  folgt hieraus die **Dreiecksungleichung**

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

- (5) Für den Abstand gilt demnach  $\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|$ .

(4) Schließlich zeigen wir die Dreiecksungleichung, die dem Abstand zugrundeliegt. Sie besagt geometrisch: Der Abstand von  $x$  nach  $z$  ist kleiner oder gleich der Länge des Umweges von  $x$  über  $y$  nach  $z$ .

Die Rechnung beruht auf der Cauchy–Schwarz–Ungleichung (1):

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle u + v | u + v \rangle = \langle u | u \rangle + \langle u | v \rangle + \langle v | u \rangle + \langle v | v \rangle \\ &= \|u\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle u | v \rangle) + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2|\langle u | v \rangle| + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2\|u\| \|v\| + \|v\|^2 \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt dank Monotonie der Wurzelfunktion  $x \mapsto \sqrt{x}$ .

😊 Beachten Sie, dass wir für das Skalarprodukt nur voraussetzen, dass es (konjugiert) symmetrisch, bilinear und positiv ist (11G). Genau diese und keine weiteren Eigenschaften haben wir in der Rechnung benötigt. Das macht Skalarprodukte wunderbar flexibel und vielseitig einsetzbar.

**Satz I1I: Pythagoras und Fouriër-Koeffizienten**  
 Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ .  
 (1) Sind  $u_1, \dots, u_n$  orthogonal, also  $\langle u_k | u_\ell \rangle = 0$  für  $k \neq \ell$ , so gilt  

$$\|u_1 + \dots + u_n\|^2 = \|u_1\|^2 + \dots + \|u_n\|^2.$$
  
 (2) Sind  $e_1, \dots, e_n$  orthonormal und  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ , so gilt demnach  

$$\|c_1 e_1 + \dots + c_n e_n\|^2 = |c_1|^2 + \dots + |c_n|^2.$$
  
 (3) Für jede Linearkombination  $f = \sum_{\ell=1}^n c_\ell u_\ell$  und  $u_k \neq 0$  gilt  

$$c_k = \langle u_k | f \rangle / \langle u_k | u_k \rangle.$$

☺ Der klassische Satz des Pythagoras ist der erste interessante Fall, nämlich die Ebene  $V = \mathbb{R}^2$  über  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  mit euklidischem Skalarprodukt. Er gilt ebenso für  $V = \mathbb{K}^n$  über  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  in jeder Dimension  $n \in \mathbb{N}$  und wörtlich genauso für trigonometrische Polynome wie oben in Satz I1F (auch wenn Pythagoras sicher nie an diese Allgemeinheit gedacht hat).

**Satz I1J: Laplace 1816, Gram 1883, Schmidt 1907**  
 Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ .  
 Sei  $b_1, \dots, b_n \in V$  eine Basis des Unterraums  $U_n = \langle b_1, \dots, b_n \rangle_{\mathbb{K}}$ .  
 (1) Daraus erhalten wir rekursiv die Orthogonalbasis  $u_1, \dots, u_n$  durch  

$$u_n := b_n - \sum_{k=1}^{n-1} u_k \lambda_k \quad \text{mit} \quad \lambda_k = \frac{\langle u_k | b_n \rangle}{\langle u_k | u_k \rangle}.$$
  
 (2) Optional können wir  $u_n$  ersetzen durch  $u'_n = \mu_n u_n$  mit  $\mu_n \in \mathbb{K}^\times$ .  
 (3) Normiert zu  $e_k := u_k / \|u_k\|$  erhalten wir eine Orthonormalbasis:  

$$\langle u_k | u_\ell \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell, \\ \|u_k\|^2 > 0 & \text{für } k = \ell, \end{cases} \quad \text{und} \quad \langle e_k | e_\ell \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell, \\ 1 & \text{für } k = \ell. \end{cases}$$

☺ Das Gram-Schmidt-Verfahren ist einfach, aber wirkungsvoll.  
 ☐ Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §5.5.

Die Orthogonalität von  $(e_k = e^{ikx})_{k \in \mathbb{Z}}$  haben wir oben direkt berechnet. Diese fundamentale Eigenschaft hat einen tieferen, allgemeinen Grund:  
**Aufgabe:** (1) Der Ableitungsoperator  $\frac{1}{i} \frac{d}{dx}$  ist hermitisch:  

$$\left\langle \frac{1}{i} \frac{d}{dx} f \mid g \right\rangle = \left\langle f \mid \frac{1}{i} \frac{d}{dx} g \right\rangle$$
  
 (2) Für den Operator  $\frac{1}{i} \frac{d}{dx}$  ist  $e_k$  Eigenfunktion zum Eigenwert  $k$ :  

$$\frac{1}{i} \frac{d}{dx} e^{ikx} = k e^{ikx}$$
  
 (3) Demnach sind alle Eigenfunktionen  $e_k$  untereinander orthogonal.  
**Lösung:** (1) Für  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  stetig diff'bar und  $2\pi$ -periodisch gilt:  

$$\left\langle f \mid \frac{1}{i} \frac{d}{dx} g \right\rangle = \frac{1}{i} \int_0^{2\pi} \overline{f} g' = \frac{1}{i} [\overline{f} g]_0^{2\pi} - \frac{1}{i} \int_0^{2\pi} \overline{f}' g = \left\langle \frac{1}{i} \frac{d}{dx} f \mid g \right\rangle$$
  
 Aussage (2) ist klar. Damit folgt (3) wie für Matrizen bekannt. [I143]  
 Die Entwicklung nach Eigenfunktionen ist ein universelles Prinzip und nützt uns vor allem für Differentialgleichungen. Die Fouriër-Theorie diagonalisiert den Ableitungsoperator  $\frac{1}{i} \frac{d}{dx}$ . Die Entwicklung nach seinen Eigenfunktionen  $e^{ikx}$  für  $k \in \mathbb{Z}$  ist die Fouriër-Reihe.

**Aufgabe:** Jeder hermitesche Operator  $A: V \rightarrow V$  hat nur reelle Eigenwerte und orthogonale Eigenräume:  
 (1) Für jeden Vektor  $v \in V$  gilt zunächst  $\langle v | Av \rangle \in \mathbb{R}$ .  
 (2) Sei  $v \in V$  ein Eigenvektor,  $Av = \lambda v$  mit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Dann gilt  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  
 (3) Seien  $u, v \in V$  Eigenvektoren,  $Au = \lambda u$  und  $Av = \mu v$  mit  $\lambda \neq \mu$ . Dann sind  $u$  und  $v$  orthogonal, also  $\langle u | v \rangle = 0$ .  
**Lösung:** (1)  $\langle v | Av \rangle = \langle Av | v \rangle = \overline{\langle v | Av \rangle}$ . Wir rechnen (2) nach:  

$$\lambda \langle v | v \rangle = \langle v | \lambda v \rangle = \langle v | Av \rangle = \langle Av | v \rangle = \langle \lambda v | v \rangle = \overline{\lambda} \langle v | v \rangle$$
  
 Wegen  $v \neq 0$  und Positivität gilt  $\langle v | v \rangle > 0$ , also  $\lambda = \overline{\lambda}$ . Ebenso (3):  

$$\lambda \langle u | v \rangle = \langle \lambda u | v \rangle = \langle Au | v \rangle = \langle u | Av \rangle = \langle u | \mu v \rangle = \mu \langle u | v \rangle$$
  
 Also  $(\lambda - \mu) \langle u | v \rangle = 0$ . Wegen  $\lambda - \mu \neq 0$  folgt somit  $\langle u | v \rangle = 0$ .  
 Slogan: Hermitesche Operatoren verhalten sich wie reelle Zahlen.  
 Genauer: wie reelle Diagonalmatrizen. Wir erinnern an folgenden Satz:

**Aufgabe:** Rechnen Sie diese allgemeinen Regeln nach.  
**Lösung:** (1) Die Norm erhalten wir aus dem Skalarprodukt:  

$$\|\sum_k u_k\|^2 = \langle \sum_k u_k | \sum_\ell u_\ell \rangle = \sum_k \sum_\ell \langle u_k | u_\ell \rangle = \sum_k \|u_k\|^2$$
  
 (2) Speziell für  $u_k = c_k e_k$  mit  $\|e_k\| = 1$  gilt  $\|u_k\|^2 = |c_k|^2 \|e_k\|^2 = |c_k|^2$ . Hieraus folgt  $\|c_1 e_1 + \dots + c_n e_n\|^2 = |c_1|^2 + \dots + |c_n|^2$  wie behauptet.  
 (3) Die Koeffizientenformel folgt dank Orthogonalität (1) gemäß  

$$\langle u_k | f \rangle = \langle u_k | \sum_\ell c_\ell u_\ell \rangle = \sum_\ell c_\ell \langle u_k | u_\ell \rangle = c_k \langle u_k | u_k \rangle.$$
  
 Dank  $u_k \neq 0$  wissen wir  $\langle u_k | u_k \rangle > 0$ , somit  $c_k = \langle u_k | f \rangle / \langle u_k | u_k \rangle$ .  
 ☺ Das Skalarprodukt filtert den gewünschten Koeffizienten heraus! Diese Rechenregeln sind in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  und im Raum  $\mathbb{R}^3$  anschaulich vertraut, sie gelten genauso in jedem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt. Selbst für unendlich-dimensionale Vektorräume, etwa  $V = L^2([0, T], \mathbb{C})$  für die Fouriër-Theorie, erweist sich dies als ausgesprochen nützlich!

**Aufgabe:** Alles steht explizit da. Rechnen Sie es sorgsam nach!  
**Lösung:** (1) Wir führen Induktion über  $n$ . Für  $n = 1$  ist die Aussage klar. Sei nun  $n \geq 2$ . Im Unterraum  $U_{n-1} \leq V$  haben wir die gegebene Basis  $(b_1, \dots, b_{n-1})$  bereits zur Orthogonalbasis  $(u_1, \dots, u_{n-1})$  transformiert. Im Unterraum  $U_n$  erhalten wir aus der Basis  $(b_1, \dots, b_{n-1}, b_n)$  zunächst  $(u_1, \dots, u_{n-1}, b_n)$  und dann  $(u_1, \dots, u_{n-1}, u_n)$  mit  $u_n := b_n - \sum_{k=1}^{n-1} u_k \lambda_k$ . Für alle  $j = 1, \dots, n-1$  gilt  $\langle u_j | u_n \rangle = \langle u_j | b_n \rangle - \langle u_j | u_j \rangle \lambda_j = 0$ . Dies verschwindet genau für  $\lambda_j = \langle u_j | b_n \rangle / \langle u_j | u_j \rangle$ . Voilà!  
 (2) Basiseigenschaft und Orthogonalität bleiben nach Skalierung von  $u_n$  zu  $u'_n = \mu_n u_n$  mit  $\mu_n \in \mathbb{K}^\times$ . Das verschafft uns zusätzlichen Spielraum.  
 (3) Da  $(u_1, \dots, u_n)$  eine Basis von  $U_n$  ist, gilt insbesondere  $u_n \neq 0$ . Normierung zu  $e_n := u_n / \|u_n\|$  liefert also eine Orthonormalbasis.  
 ☺ Dieses Verfahren funktioniert genauso, wenn  $b_1, \dots, b_n$  nur ein Erzeugendensystem von  $U_n$  ist, aber nicht notwendig linear unabhängig. Wenn bei der Orthonormalisierung  $u_n = 0$  auftritt, so ist  $b_n$  eine Linearkombination von  $b_1, \dots, b_{n-1}$  und wird ganz einfach aus der Liste gelöscht. Auf diese Weise können wir aus jedem Erzeugendensystem eine Orthonormalbasis extrahieren.

☐ Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §6.4. Reelle Matrizen mit der Eigenschaft  $A = A^T$  nennt man *symmetrisch*. Im Komplexen muss man *transponieren* und *konjugieren*. Ausführlich:  
 Zur Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ist  $A^* := \overline{A}^T$  die **hermitesch-konjugierte Matrix**. Für Spaltenvektoren  $u, v \in \mathbb{C}^n$  gilt  $\langle u | v \rangle = \overline{u}^T v$ , und daher  

$$\langle u | Av \rangle = \overline{u}^T Av = \overline{A}^T \overline{u}^T v = \langle A^* u | v \rangle.$$
  
 Wir nennen die Matrix  $A$  **hermitesch**, wenn  $A^* = A$  gilt, gleichbedeutend also  $\langle u | Av \rangle = \langle Au | v \rangle$  für alle  $u, v \in \mathbb{C}^n$ .  
**Beispiel:** Sei  $V_n = \{ \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \mid c_k \in \mathbb{C} \}$  der  $\mathbb{C}$ -Vektorraum der trigonometrischen Polynome vom Grad  $\leq n$  und  $A = \frac{1}{i} \frac{d}{dx}: V_n \rightarrow V_n$  der Ableitungsoperator. Bezüglich der Basis  $(e_{-n}, e_{-n+1}, \dots, e_{n-1}, e_n)$  von  $V_n$  entspricht  $A$  der Diagonalmatrix  $\text{diag}(-n, -n+1, \dots, n-1, n)$ .  
**Allgemein:** Sei  $V$  ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ . Sei  $A: V \rightarrow V$  eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung (auch „Operator“ genannt). Wir nennen  $A$  **hermitesch**, wenn  $\langle u | Av \rangle = \langle Au | v \rangle$  für alle  $u, v \in V$ .

**Satz I1K: Diagonalisierung hermitescher Matrizen**  
 Jede hermitesche Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ist orthogonal diagonalisierbar: Es gibt eine orthogonale Basis  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{C}^n$  aus Eigenvektoren.  
**Beweis:** Induktion über  $n = \dim V$ : Für  $n = 1$  ist alles klar. Sei  $n \geq 2$ . Sei  $\lambda \in \mathbb{R}$  ein Eigenwert und  $v \in V$  ein zugehöriger Eigenvektor. Der hierzu orthogonale Unterraum ist  $W = \{ w \in V \mid \langle v | w \rangle = 0 \}$ . Es gilt  $A(W) \subseteq W$ , das heißt, für alle  $w \in W$  gilt  $Aw \in W$ , denn  

$$\langle v | Aw \rangle = \langle Av | w \rangle = \langle \lambda v | w \rangle = \lambda \langle v | w \rangle = 0.$$
  
 Es gilt  $\dim W = n - 1$ . Nach Induktionsvoraussetzung existiert eine orthogonale Basis  $v_1, \dots, v_{n-1}$  von  $W$  aus Eigenvektoren. Somit ist  $v_1, \dots, v_{n-1}, v$  eine orthogonale Basis von  $V$ .  
 ☺ Ähnliches gilt für den Ableitungsoperator  $\frac{1}{i} \frac{d}{dx}$  und die Entwicklung nach den Eigenfunktionen  $e^{ikx}$  in eine Fouriër-Reihe. Der Vektorraum  $L^2$  ist allerdings unendlich-dimensional, ein entscheidender Unterschied.

Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  sei  $T$ -periodisch und auf  $[0, T]$  abs. integrierbar. Wir entwickeln  $f$  in **Harmonische** zur Grundfrequenz  $\omega = 2\pi/T$ :

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} \quad \text{mit} \quad c_k := \langle e_k | f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-ik\omega t} f(t) dt$$

Hier ist  $c_k \in \mathbb{C}$  die Amplitude (und Phase) der  $k$ -ten Schwingung  $e^{ik\omega t}$ . Dank **Euler-Formel**  $e^{ik\omega t} = \cos(k\omega t) + i \sin(k\omega t)$  ist hierzu äquivalent:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \quad \text{mit Koeffizienten}$$

$$a_k := \frac{2}{T} \int_0^T \cos(k\omega t) f(t) dt = c_k + c_{-k}, \quad c_k = \frac{a_k - ib_k}{2},$$

$$b_k := \frac{2}{T} \int_0^T \sin(k\omega t) f(t) dt = i(c_k - c_{-k}), \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}.$$

☺ Für  $x = \omega t$  erhalten wir Periode  $2\pi$  und Grundfrequenz 1.

Das  $T$ -periodische **Signal**  $f$  zerlegen wir so in sein **Spektrum**  $\hat{f}$ :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad \circ \bullet \quad \hat{f}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \hat{f}(k) = c_k := \frac{1}{T} \int_0^T e^{-ik\omega t} f(t) dt$$

In Grad  $\leq n$  approximieren wir  $f$  durch das **Fourier-Polynom**  $f_n$ :

$$f_n(t) := \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$$

Für  $n \rightarrow \infty$  erhalten wir (zumindest formal) die **Fourier-Reihe**:

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$$

Gelesen: „Die Funktion  $f$  hat die Fourier-Koeffizienten  $c_k$  bzw.  $a_k, b_k$ .“  
Für trigonometrische Polynome ist die Reihe endlich, sonst unendlich!  
☺ Für die Konvergenz dieser Reihe gibt es effiziente Kriterien. [I216]

Zur **Fourier-Analyse** benötigen wir nur die **absolute Integrierbarkeit**, also  $\int_0^T |f(t)| dt < \infty$ . Wegen  $|e^{-ik\omega t}| = 1$  ist dann  $e^{-ik\omega t} f(t)$  über  $[0, T]$  absolut integrierbar, und obiges Integral definiert  $c_k \in \mathbb{C}$  für jedes  $k \in \mathbb{Z}$ .

Das **trigonometrische Polynom**  $f_n$  dient uns als Approximation an  $f$ . Die **Fourier-Reihe** ist jedoch zunächst nur eine bequeme Schreibweise: Wir wissen noch nicht, ob und in welchem Sinne die Reihe konvergiert!

Zur **Konvergenz** benötigen wir etwas stärkere Voraussetzungen an  $f$ , etwa quadratische Integrierbarkeit  $\int_0^T |f(t)|^2 dt < \infty$ , siehe Kapitel J. Selbst wenn die Fourier-Reihe in einem Punkt  $t \in [0, 2\pi]$  konvergiert, muss der Grenzwert nicht der Funktionswert  $f(t)$  sein. Dazu genügen stärkere Forderungen, etwa **Differenzierbarkeit** im Punkt  $t$  (Satz I2A). Nur im Falle der Konvergenz in jedem Punkt  $t \in \mathbb{R}$  schreiben wir

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$$

Das nennen wir die **Fourier-Synthese**, also das Zusammensetzen der Teilschwingungen zwecks Rekonstruktion der ursprünglichen Funktion  $f$ .

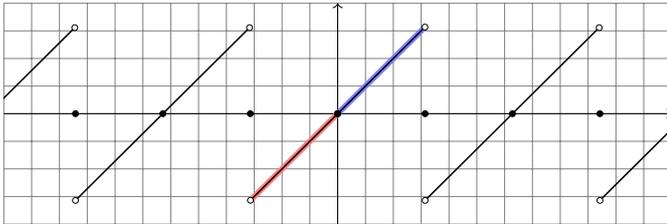
Das Konvergenzproblem ist analog zur Taylor-Reihe von  $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ :

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad \text{mit Taylor-Koeffizienten} \quad c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

Das bedeutet zunächst nur:  $f$  hat die Taylor-Koeffizienten  $c_k$  (B438). Konvergenz: Für  $n \rightarrow \infty$  muss das Restglied verschwinden:  $R_n(z) \rightarrow 0$ .

In diesem Kapitel berechnen wir zunächst zentrale Beispiele von Fourier-Reihen: Sägezahn-, Rechteck- und Treppenfunktion etc. Die hierbei beobachteten Eigenschaften und Rechentechniken formulieren wir parallel hierzu allgemein als Sätze / Rechenregeln. Das dient ganz konkret dazu, nützliche Tricks und Abkürzungen zu erklären und für Anwendungen bereit zu stellen. Insbesondere aber klären wir, wann, wo und wogegen die Fourier-Reihe konvergiert. Im nächsten Kapitel übertragen wir die geometrischen Begriffe des  $\mathbb{R}^n$  wie Skalarprodukt, Norm und Abstand, auf quadratisch integrierbare Funktionen und ihre Fourier-Reihen. Das ist eine überaus nützliche Betrachtungsweise und der natürliche Rahmen der Fourier-Theorie.

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ungerade und  $2\pi$ -periodisch mit  $f(x) = x$  für  $0 < x < \pi$ .  
**Aufgabe:** (0) Skizzieren Sie  $f$ . (1) Berechnen Sie die Fourier-Reihe.



⚠ Wir wissen zunächst nur  $f(x) = x$  für  $0 < x < \pi$ . Da  $f$  ungerade ist, also  $f(-x) = -f(x)$ , folgt  $f(0) = 0$  und  $f(x) = x$  für  $-\pi < x < 0$ . Dies setzen wir  $2\pi$ -periodisch fort. Insbesondere folgt  $f(\pm\pi) = 0$ .

☺ Die Funktionsskizze ist für die Rechnung hilfreich. Wer schon die Funktion nicht zeichnen kann, dem misslingt wohl auch das Integral.

(1) Der nullte Fourier-Koeffizient  $c_0$  ist der Mittelwert über eine Periode:

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0 \quad (\text{siehe Skizze})$$

Für  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  rechnen wir komplex und nutzen partielle Integration:

$$c_k \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} x dx \stackrel{\text{part}}{=} \frac{1}{2\pi} \left( \left[ \frac{i}{k} e^{-ikx} x \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{i}{k} e^{-ikx} dx \right)$$

$$= \frac{i}{k} \cdot \frac{e^{-\pi ik} \pi + e^{\pi ik} \pi}{2\pi} = \frac{i}{k} \cdot \frac{(-1)^k + (-1)^k}{2} = (-1)^k \frac{i}{k}$$

Damit haben wir die Funktion  $f$  in ihre Fourier-Reihe entwickelt:

$$f(x) \sim \sum_{k \neq 0} (-1)^k \frac{i}{k} e^{ikx} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \sin(kx)$$

$$= 2 \left[ \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \dots \right]$$

☺ Da  $f$  ungerade ist, erhalten wir  $c_{-k} = -c_k$ , also eine Sinus-Reihe.

Umrechnung der Koeffizienten für die Co/Sinus-Reihe:

$$a_k = c_k + c_{-k} = 0, \quad b_k = i(c_k - c_{-k}) = (-1)^{k+1} \frac{2}{k}.$$

Zum Vergleich nochmal direkt die Integrale für  $a_k, b_k$  mit  $k \geq 1$ :

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(kx) dx \quad (\text{ungerader Integrand})$$

$$= \frac{1}{\pi} \left( \left[ x \frac{\sin(kx)}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(kx)}{k} dx \right) = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(kx) dx \quad (\text{gerader Integrand})$$

$$= \frac{1}{\pi} \left( \left[ x \frac{-\cos(kx)}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(kx)}{k} dx \right) = (-1)^{k+1} \frac{2}{k}$$

Zur Berechnung von  $a_k, b_k$  sind zwei Integrale nötig, für  $c_k$  nur eins. Man spart ein wenig, doch der Rechenweg ist Geschmackssache. Die Umrechnung zwischen  $a_k, b_k$  und  $c_k$  gelingt jedenfalls leicht.

☺ Die Fourier-Koeffizienten  $a_k, b_k, c_k$  sind hier leicht zu berechnen. Da  $f$  reell ist, gilt  $a_k, b_k \in \mathbb{R}$  und  $c_{-k} = \overline{c_k}$ . Da  $f$  ungerade, gilt  $a_k = 0$ . Die folgenden Graphiken zeigen hierzu die **Fourier-Polynome**  $f_n$ . Wir wollen verstehen, in welchem Sinne  $f_n \rightarrow f$  konvergiert.

☺ Für jeden Punkt  $x \in \mathbb{R}$  gilt augenscheinlich  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ : In den Punkten  $x = 0$  und  $x = \pi$  ist dies klar, ansonsten keineswegs! Die Koeffizienten klingen nur langsam ab ( $\sim 1/k$ ), das heißt auch hohe Frequenzen tragen noch deutlich bei: Die Fourier-Reihe ist „rau“.

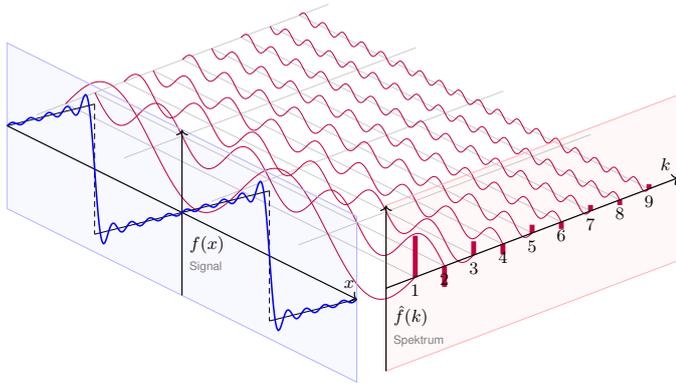
⚠ Wir sehen recht eindringlich das sogenannte **Gibbs-Phänomen**: Die Funktionen  $f_n$  überschwingen in Sprungstellen um ca. 9%.

☹ Es gilt daher **keine gleichmäßige Konvergenz**  $f_n \rightarrow f$  auf  $\mathbb{R}$ : Ein kleiner  $\varepsilon$ -Schlauch um  $f$  enthält nicht alle  $f_n$  für  $n \geq n_0$ .

☺ Auf jedem Intervall  $I = [-\pi + \delta, \pi - \delta]$  **abseits der Sprungstellen** konvergiert  $f_n$  gleichmäßig gegen  $f$ : Zu jedem  $\varepsilon > 0$  liegen schließlich alle  $f_n$  im  $\varepsilon$ -Schlauch um  $f$  auf  $I$ . Auch das ist bemerkenswert!

## Fourier-Entwicklung der Sägezahnfunktion

I209  
Beispiel

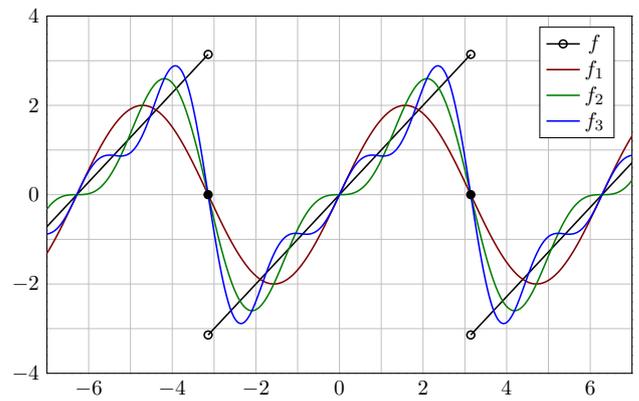


$$f(x) = 2 \left[ \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{5} \sin 5x \mp \dots \right]$$

## Fourier-Entwicklung der Sägezahnfunktion

I210  
Beispiel

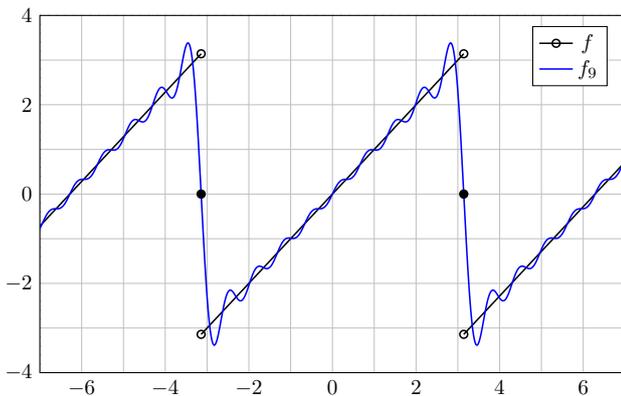
Die ersten Fourier-Polynome  $f_1, f_2, f_3, \dots$  ähneln  $f$  zunächst nur grob:



## Fourier-Entwicklung der Sägezahnfunktion

I211  
Beispiel

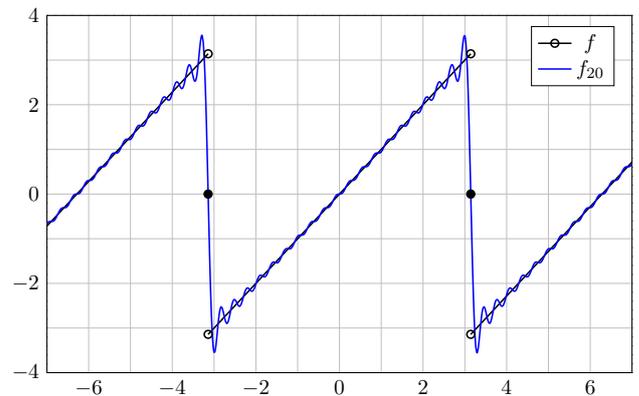
Das Fourier-Polynom  $f_9$  von Grad 9 liegt schon näher bei  $f$ :



## Fourier-Entwicklung der Sägezahnfunktion

I212  
Beispiel

Das Überspringen bleibt auch bei höherem Approximationsgrad:



## Punktweise & gleichmäßige Konvergenz von Fourier-Reihen

I213  
Erläuterung

Wir untersuchen die zentrale Frage: Konvergiert die Fourier-Reihe? Wir approximieren  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit Periode  $T$  durch Fourier-Polynome

$$f_n(t) := \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega t} \quad \text{mit} \quad c_k := \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} f(t) dt.$$

Wir sagen, die Fourier-Reihe von  $f$  **konvergiert im Punkt**  $t \in \mathbb{R}$ , wenn die Zahlenfolge  $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{C}$  für  $n \rightarrow \infty$  konvergiert.

Sie **konvergiert im Punkt**  $t$  **gegen**  $f(t)$ , wenn  $f_n(t) \rightarrow f(t)$  gilt. In diesem Falle (und sorgsamerweise nur dann) schreiben wir

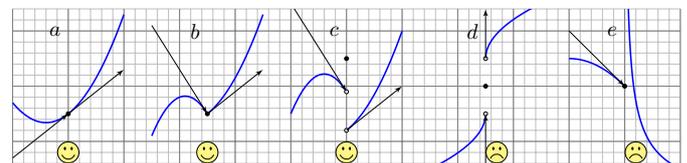
$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega t} \quad \text{oder kurz} \quad f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}.$$

⚠ Fourier vermutete zunächst Konvergenz  $f_n \rightarrow f$  für jede Funktion  $f$ . Das ist jedoch nicht immer der Fall. Wir brauchen praktische Kriterien!

😊 Wir nutzen hierzu das Dirichlet-Kriterium: Ein wenig Regularität von  $f$  im Punkt  $t \in \mathbb{R}$  garantiert die erhoffte Konvergenz  $f_n(t) \rightarrow f(t)$ !

## Punktweise & gleichmäßige Konvergenz von Fourier-Reihen

I214



Links-/rechtsseitiger Grenzwert und Ableitungen von  $f$  im Punkt  $t$ :

$$\begin{aligned} f(t-) &:= \lim_{\tau \nearrow t} f(\tau), & f(t+) &:= \lim_{\tau \searrow t} f(\tau), \\ f'(t-) &:= \lim_{\tau \nearrow t} \frac{f(\tau) - f(t-)}{\tau - t}, & f'(t+) &:= \lim_{\tau \searrow t} \frac{f(\tau) - f(t+)}{\tau - t}. \end{aligned}$$

Die **Dirichlet-Bedingung** fordert, dass alle vier Grenzwerte existieren. Wir nennen  $f$  **sprungnormiert** im Punkt  $t$ , falls  $f(t) = \frac{1}{2}[f(t-) + f(t+)]$ .

Zur Erinnerung: Genau dann ist  $f$  stetig in  $t$ , wenn  $f(t) = f(t-) = f(t+)$  gilt.

Beispiele  $a, b$  sind stetig,  $c, d$  haben eine Sprungstelle,  $d$  ist sprungnormiert,  $c$  nicht.

Beispiele  $a, b, c$  haben beidseitige Ableitungen,  $d$  hingegen nicht (senkrechte Tangente).

Beispiel  $e$  hat rechtsseitig eine Polstelle, hier sind Ableitung und Sprungnormierung sinnlos.

## Punktweise & gleichmäßige Konvergenz von Fourier-Reihen

I215  
Erläuterung

**Stetigkeit** im Punkt  $t \in \mathbb{R}$  ist äquivalent zu  $f(t) = f(t-) = f(t+)$ .

Im Falle  $f(t-) \neq f(t+)$  hat  $f$  in  $t$  eine **Sprungstelle** (siehe Skizze).

**Differenzierbarkeit** im Punkt  $t$  impliziert Stetigkeit und ist äquivalent zu Dirichlet mit  $f(t) = f(t-) = f(t+)$  und  $f'(t-) = f'(t+) = f'(t)$ .

Zu einer vorgelegten Funktion  $f$  stellt sich die konkrete Frage:

In welchen Punkten konvergiert die Fourier-Reihe? und wogegen?

Das Kriterium von Dirichlet gibt hierauf eine sehr praktische Antwort:

Ist  $f$  im Punkt  $t$  differenzierbar, so konvergiert die Fourier-Reihe gegen den Wert  $f(t)$ . Das gilt auch dann noch, wenn  $f$  in  $t$  stetig ist und beide links-/rechtsseitige Ableitungen existieren. Sogar Sprungstellen können wir so noch gut behandeln: Die Fourier-Reihe konvergiert dann gegen den Mittelwert! Um all diese Fälle präzise zu klären, muss man nur die vier geforderten (links-/rechtsseitigen) Grenzwerte von  $f$  sicherstellen.

😊 Die Dirichlet-Bedingung ist recht milde: Sie erlaubt Sprungstellen und verhindert lediglich, dass unsere Funktion  $f$  allzu wild oszilliert. Für viele praktische Fälle ist das ausreichend — und sehr bequem!

## Punktweise & gleichmäßige Konvergenz von Fourier-Reihen

I216

**Satz I2A: Dirichlet-Kriterium für Fourier-Reihen**, siehe J2A & J2B

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  abs. integrierbar auf  $[0, T]$  und  $T$ -periodisch,  $\omega = 2\pi/T$ .

(1) Angenommen,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  erfüllt die Dirichlet-Bedingung im Punkt  $t$ , d.h. beide Grenzwerte  $f(t\pm)$  und beide Ableitungen  $f'(t\pm)$  existieren.

Dann konvergiert in diesem Punkt  $t$  die Fourier-Reihe  $f_n(t)$  gemäß

$$f_n(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega t} \rightarrow \frac{1}{2}[f(t+) + f(t-)] \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty.$$

⚠ Der Funktionswert  $f(t)$  im Punkt  $t$  spielt dabei gar keine Rolle.

(1a) Speziell gilt  $f_n(t) \rightarrow f(t)$  falls  $f$  in  $t$  zudem sprungnormiert ist.

(1b) Ist  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  stückweise stetig differenzierbar und überall stetig bzw. sprungnormiert, dann konvergiert  $f_n(t) \rightarrow f(t)$  in jedem Punkt  $t \in \mathbb{R}$ .

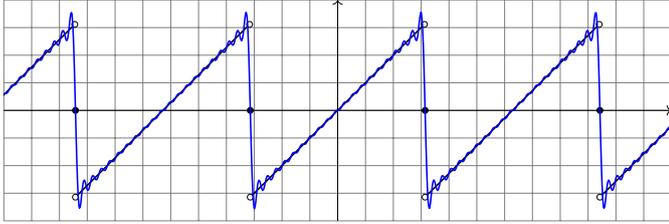
(2) Ist  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und stückweise stetig differenzierbar mit  $|f'| \leq L$ , so konvergiert die Fourier-Reihe  $f_n \rightarrow f$  sogar gleichmäßig auf ganz  $\mathbb{R}$ :

$$|f_n(t) - f(t)| \leq 2L/\omega \cdot \ln(n)/n \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty$$

Punktweise Konvergenz von Fourier-Reihen

I217  
Beispiel

☺ Das Dirichlet-Kriterium I2A können wir auf die Sägezahnfunktion anwenden und die Konvergenz ihrer Fourier-Reihe vollständig klären! Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ungerade und  $2\pi$ -periodisch mit  $f(x) = x$  für  $0 < x < \pi$ .



- Aufgabe:** (2) Bestimmen Sie  $f(x \pm)$  und  $f'(x \pm)$  in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$ .  
 (3) In welchen Punkten  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert  $f_n(x)$  für  $n \rightarrow \infty$ ? Wogegen?  
 (4) Wogegen konvergiert  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \dots$ ?

Punktweise Konvergenz von Fourier-Reihen

I218  
Beispiel

**Lösung:** (2) Auf  $]-\pi, \pi[$  gilt  $f(x) = x$ . In jedem Punkt  $x \in ]-\pi, \pi[$  ist  $f$  stetig,  $f(x \pm) = f(x)$ , und zudem differenzierbar,  $f'(x \pm) = f'(x) = 1$ . Alles wiederholt sich  $2\pi$ -periodisch, auf  $]\pi, 3\pi[$ ,  $]\pi, 5\pi[$ , etc.

In unserem Beispiel ist  $\pi$  die einzige Sprungstelle (modulo  $2\pi\mathbb{Z}$ ):

$$f(\pi-) = \lim_{t \nearrow \pi} f(t) = \lim_{t \nearrow \pi} [t] = +\pi$$

$$f(\pi+) = \lim_{t \searrow \pi} f(t) = \lim_{t \searrow \pi} [t - 2\pi] = -\pi$$

Auch in der Sprungstelle existieren die einseitigen Ableitungen:

$$f'(\pi-) = \lim_{t \nearrow \pi} \frac{f(t) - f(\pi-)}{t - \pi} = \lim_{t \nearrow \pi} \frac{t - \pi}{t - \pi} = \lim_{t \nearrow \pi} 1 = 1$$

$$f'(\pi+) = \lim_{t \searrow \pi} \frac{f(t) - f(\pi+)}{t - \pi} = \lim_{t \searrow \pi} \frac{(t - 2\pi) - (-\pi)}{t - \pi} = \lim_{t \searrow \pi} 1 = 1$$

- ☺ Das zeigt: Unsere Funktion  $f$  erfüllt die **Dirichlet-Bedingung!** (I2A)  
 ☺ Zudem ist  $f$  **sprungnormiert**, das heißt  $f(x) = \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]$ . Das gilt in  $x = \pm\pi$  dank  $f(\pm\pi) = 0$ , aber ebenso für  $-\pi < x < \pi$ .

Punktweise Konvergenz von Fourier-Reihen

I219  
Beispiel

(3) Dank (2) können wir das Dirichlet-Kriterium (I2A) nutzen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \sin(kx) \stackrel{\text{Dirichlet}}{\stackrel{\text{I2A}}{=}} f(x) = \begin{cases} x & \text{für } -\pi < x < \pi, \\ 0 & \text{für } x = \pm\pi. \end{cases}$$

(4) Speziell für  $x = \pi/3$  kennen wir folgende nützliche Werte:

$k$	0	1	2	3	4	5	...
$\cos(k\pi/3)$	1	1/2	-1/2	-1	-1/2	1/2	...
$\sin(k\pi/3)$	0	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$	0	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$	...

Damit können wir Reihe und Funktion auswerten und vergleichen:

$$\sqrt{3} \left[ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \dots \right] \stackrel{(*)}{=} f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

☺ Hieraus erhalten wir den gesuchten Grenzwert der Reihe:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \dots = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = 0.6045997880\dots$$

☺ Dass diese Reihe konvergiert wissen wir dank Leibniz-Kriterium B3G. Nun können wir sogar ihren Grenzwert berechnen, exakt und explizit!

Punktweise Konvergenz von Fourier-Reihen

I220  
Beispiel

☺ Das praktische Dirichlet-Kriterium I2A bestätigt unsere Anschauung! Wir gewinnen explizite Grenzwerte und können damit exakt rechnen. Das ist ein mächtiges Werkzeug, wie wir schon in dieser Aufgabe sehen:

⚠ Für die letzte Rechnung (4) benötigen wir  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dies stellen wir im vorigen Teil durch das Dirichlet-Kriterium sicher (3). Hierzu müssen wir nur die geforderten Grenzwerte von  $f$  sichern (2).

Diese Vorgehensweise ist typisch und besteht aus zwei Teilen:

Zur **Fourier-Analyse** berechnen wir die Fourier-Koeffizienten (1):

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x) dx$$

Zur **Fourier-Synthese** bestimmen wir zum betrachteten Punkt  $x \in \mathbb{R}$ , ob und wogegen die Fourier-Reihe  $f_n(x)$  für  $n \rightarrow \infty$  konvergiert (2-4).

⚠ Nur im Falle der Konvergenz in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$  schreiben wir:

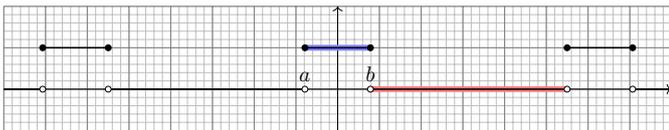
$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

Fourier-Entwicklung von Treppenfunktionen

I221  
Beispiel

Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei  $2\pi$ -periodisch mit  $f = \mathbb{I}_{[a,b]}$  auf  $[a, a+2\pi]$ . Hierbei seien die Werte  $a < b < a + 2\pi$  beliebig vorgegeben. Später wollen wir insbesondere  $-a = b = \pi/4$  betrachten.

**Aufgabe:** (0) Skizzieren Sie  $f$ . (1) Berechnen Sie die Fourier-Reihe.



☺ Wir berechnen hier die Fourier-Reihe einer Indikatorfunktion. Durch Linearkombination erhalten wir beliebige Treppenfunktionen!

- (2) Bestimmen Sie  $f(x \pm)$  und  $f'(x \pm)$  für jeden Punkt  $x \in \mathbb{R}$ .  
 (3) In welchen Punkten  $x$  konvergiert  $f_n(x)$  für  $n \rightarrow \infty$ ? Wogegen?  
 (4) Welche Werte haben Funktion und Reihe für  $x = b = -a$ ?  
 (5) Wogegen konvergiert  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \dots$ ?

Fourier-Entwicklung von Treppenfunktionen

I222  
Beispiel

(1) Der Fourier-Koeffizient  $c_0$  ist der Mittelwert über eine Periode:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{x=a}^{a+2\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{x=a}^b 1 dx = \frac{b-a}{2\pi} \quad (\text{siehe Skizze})$$

Für  $k \neq 0$  rechnen wir komplex und finden:

$$c_k \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{x=a}^b e^{-ikx} dx \stackrel{\text{HD1}}{\stackrel{\text{BH}}{=}} \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{-1}{ik} e^{-ikx} \right]_a^b = \frac{e^{-ika} - e^{-ikb}}{2\pi ik}$$

Die Fourier-Reihe, zunächst formal (ohne Anspruch auf Konvergenz):

$$f(x) \sim \frac{b-a}{2\pi} + \sum_{k \neq 0} \frac{e^{-ika} - e^{-ikb}}{2\pi ik} e^{ikx}$$

☹ Ohne Werkzeug ist dieser Reihe kaum anzusehen, ob und wogegen sie konvergiert. ☺ Hier rettet uns das Dirichlet-Kriterium! (Satz I2A)

(2) Die Funktion  $f$  ist konstant auf  $]a, b[$  und auf  $]b, a + 2\pi[$ . Hier ist  $f$  stetig, also  $f(x \pm) = f(x)$ , und differenzierbar,  $f'(x \pm) = f'(x) = 0$ .

In  $x \in \{a, b\}$  hat  $f$  eine Sprungstelle, mit  $f(a+) = f(b-) = 1$  und  $f(a-) = f(b+) = 0$  sowie einseitigen Ableitungen  $f'(x \pm) = 0$ .

Fourier-Entwicklung von Treppenfunktionen

I223  
Beispiel

(3) Dank (2) können wir das Dirichlet-Kriterium (I2A) nutzen:

$$\frac{b-a}{2\pi} + \sum_{k \neq 0} \frac{e^{-ika} - e^{-ikb}}{2\pi ik} e^{ikx} \stackrel{\text{Dirichlet}}{\stackrel{\text{I2A}}{=}} \begin{cases} 1 & \text{für } a < x < b, \\ 0 & \text{für } b < x < a + 2\pi, \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = a \text{ und für } x = b. \end{cases}$$

(4) Im symmetrischen Fall  $a = -b$  vereinfacht sich diese Reihe zu:

$$\frac{b}{\pi} + \sum_{k \neq 0} \frac{\sin(kb)}{k\pi} e^{ikx} = \frac{b}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \frac{\sin(kb)}{k\pi} \cos(kx)$$

☺ Da  $f$  gerade ist, erhalten wir  $c_{-k} = c_k$ , also eine Cosinus-Reihe.

⚠ In der Sprungstelle gilt  $f(\pm b) = 1$ . Die Reihe ergibt hingegen:

$$\frac{b}{\pi} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kb)}{k\pi} \cos(kb) \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} \implies \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kb)}{k} \cos(kb) = \frac{\pi}{4} - \frac{b}{2}$$

☺ Den Wert dieser Reihe verdanken wir Dirichlet! Speziell für  $b = \pi/2$  sehen wir ihn direkt, denn hier gilt  $\sin(kb) \cos(kb) = 0$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$ .

Fourier-Entwicklung von Treppenfunktionen

I224  
Beispiel

(5) Speziell für  $x = b = \pi/4$  kennen wir folgende nützliche Werte:

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$\cos(k\pi/4)$	+1	$+\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$+\frac{\sqrt{2}}{2}$	...
$\sin(k\pi/4)$	0	$+\frac{\sqrt{2}}{2}$	+1	$+\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	...

Für ungerade  $k = 2j + 1$  gilt  $2 \sin(k\pi/4) \cos(k\pi/4) = (-1)^j$ , sonst = 0. Wir setzen also  $x = b = \pi/4$  in unsere Reihe ein und vereinfachen:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right) \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} \implies \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j+1} = \frac{\pi}{4}$$

☺ Hieraus erhalten wir den gesuchten Grenzwert der Reihe:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots = \frac{\pi}{4} = 0.7853981633\dots$$

☺ Das ist die Leibniz-Reihe, die wir bereits von Seite B319 kennen. Für  $x = b = \pi/3$  erhält man übrigens die Reihe der vorigen Aufgabe.

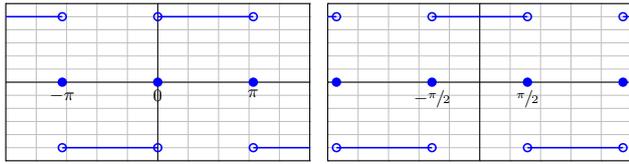
### Fourier-Entwicklung der Rechteckfunktion

I225  
Beispiel

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ungerade und  $2\pi$ -periodisch mit  $f(x) = 1$  für  $0 < x < \pi$ .  
Hierzu sei  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(x) = f(x + \pi/2)$  die Verschiebung um  $\pi/2$ .

**Aufgabe:** (0) Skizzieren Sie  $f, g$ . (1) Berechnen Sie die Fourier-Reihen.  
(2) Konvergiert die Fourier-Reihe in jedem Punkt gegen die Funktion?

**Lösung:** Der vorigen Aufgabe entnehmen wir bzw. rechnen direkt aus:



$f$  ungerade  $\sim$  Sinusreihe       $g$  gerade  $\sim$  Cosinusreihe

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left[ \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x + \frac{1}{9} \sin 9x + \dots \right]$$

$$g(x) = \frac{4}{\pi} \left[ \cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x - \frac{1}{7} \cos 7x + \frac{1}{9} \cos 9x \mp \dots \right]$$

### Fourier-Entwicklung der Rechteckfunktion

I226  
Beispiel

(0) Skizze! (1) Wir rechnen geduldig oder nutzen die vorige Aufgabe.  
(2) Dank Dirichlet I2A gilt  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  und  $g_n(x) \rightarrow g(x)$  in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$ , hier sogar in den Sprungstellen da sprungnormiert.

☺ Wir erkennen hier besonders schön folgende Symmetrieregeln:

Für jede **reelle** Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt  $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ , also  $c_{-k} = \overline{c_k}$ .

Ist  $f$  **gerade**, also  $f(-x) = f(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , so gilt

$$b_k = 0, \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(kx) f(x) dx, \quad c_{-k} = c_k.$$

Also  $f \sim$  **Cosinusreihe**. Für reelle Funktionen heißt das  $c_k \in \mathbb{R}$ .

Ist  $f$  **ungerade**, also  $f(-x) = -f(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , so gilt

$$a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(kx) f(x) dx, \quad c_{-k} = -c_k.$$

Also  $f \sim$  **Sinusreihe**. Für reelle Funktionen heißt das  $c_k \in i\mathbb{R}$ .

☺ Mit dieser einfachen Beobachtung lässt sich dank Symmetrie die Rechnung halbieren oder Ergebnisse auf Plausibilität prüfen.

### Fourier-Entwicklung der Rechteckfunktion

I227  
Beispiel

Zur Illustration nochmal ausführlich die Rechnung für  $f$ :

Der nullte Fourier-Koeffizient ist der Mittelwert über eine Periode:

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) dx = 0 \quad (\text{ungerader Integrand})$$

Berechnung der Fourier-Koeffizienten für  $k \geq 1$ :

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) \cos(kx) dx = 0 \quad (\text{ungerader Integrand})$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) \sin(kx) dx \quad (\text{gerader Integrand})$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(kx) dx = \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{\cos(kx)}{k} \right]_0^\pi$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1 - \cos(k\pi)}{k} \right] = \begin{cases} 0 & \text{für } k \text{ gerade,} \\ \frac{4}{k\pi} & \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

☺ Dank Symmetrie sparen wir hier 50% des Rechenaufwands.

### Fourier-Entwicklung der Rechteckfunktion

I228  
Beispiel

Zum Vergleich das Integral für  $c_k$  mit  $k \neq 0$ :

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi e^{-ikx} f(x) dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^\pi e^{-ikx} dx - \int_{-\pi}^0 e^{-ikx} dx \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^\pi e^{-ikx} dx - \int_0^\pi e^{ikx} dx \right]$$

$$= \frac{1}{i\pi} \int_0^\pi \sin(kx) dx = \frac{1}{i\pi} \left[ -\frac{\cos(kx)}{k} \right]_0^\pi dx$$

$$= \frac{1}{i\pi} \left[ \frac{1 - \cos(k\pi)}{k} \right] = \begin{cases} \frac{2}{i\pi k} & \text{für } k \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{für } k \text{ gerade.} \end{cases}$$

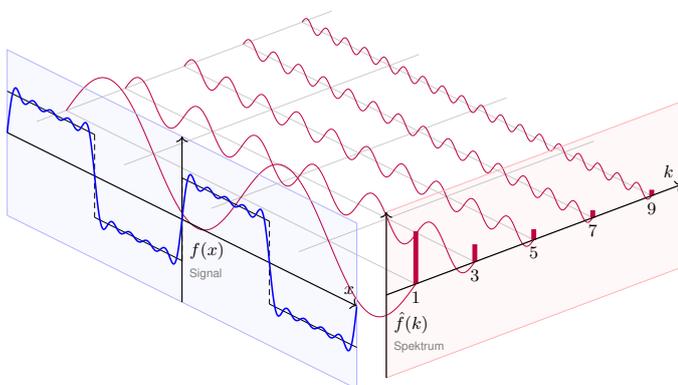
Oder umgerechnet für die Co/Sinus-Reihe:

$$a_k = c_k + c_{-k} = 0, \quad b_k = i(c_k - c_{-k}) = \begin{cases} \frac{4}{k\pi} & \text{für } k \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{für } k \text{ gerade.} \end{cases}$$

☺ Die komplexwertige Rechnung bringt hier keine weitere Ersparnis.

### Fourier-Entwicklung der Rechteckfunktion

I229  
Beispiel

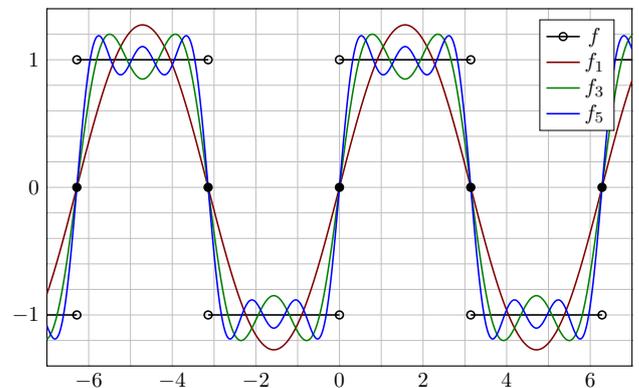


$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left[ \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x + \frac{1}{9} \sin 9x + \dots \right]$$

### Fourier-Entwicklung der Rechteckfunktion

I230  
Beispiel

Die ersten Fourier-Polynome  $f_1, f_3, f_5, \dots$  ähneln  $f$  zunächst nur grob:

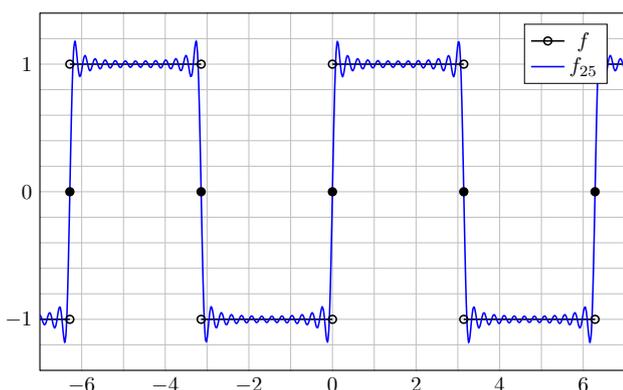


Die Fourier-Polynome  $f_n$  höheren Grades liegen immer näher an  $f$ .

### Fourier-Entwicklung der Rechteckfunktion

I231  
Beispiel

Das Überschwingen bleibt auch bei höherem Approximationsgrad:



Dieses **Gibbs-Phänomen** tritt allgemein an jeder Sprungstelle auf!

### Fourier-Entwicklung der Rechteckfunktion

I232  
Beispiel

☺ Was erkennen wir an diesen Fourier-Polynomen  $f_1, f_2, f_3, \dots$ ?

Für große  $n$  ähnelt das Fourier-Polynom  $f_n$  immer mehr der Funktion  $f$ .  
Das Dirichlet-Kriterium I2A garantiert uns die **punktwise Konvergenz!**  
In jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$  gilt Konvergenz  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  für  $n \rightarrow \infty$ .

An jeder Sprungstelle passiert jedoch etwas höchst Bemerkenswertes:  
Die Fourier-Polynome  $f_n$  können dem Sprung nur folgen, indem sie etwa 9% über das Ziel hinausschießen. Auch für Approximationen größerer Ordnung bleibt dieses **Gibbs-Phänomen** bestehen.

Anschaulich: Wenn wir um  $f$  einen sehr schmalen Schlauch legen, so liegt darin **keines** der Fourier-Polynome  $f_n$ . Das bedeutet, die Konvergenz  $f_n \rightarrow f$  gilt hier punktwise, aber nicht gleichmäßig!  
Der Abstand  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|$  wird nicht beliebig klein.

Auf jedem kompakten Intervall  $[a, b]$  mit  $0 < a < b < \pi$  fern der Sprungstellen ist unsere Funktion  $f$  jedoch stetig, sogar stetig differenzierbar.  
Auf  $[a, b]$  konvergieren die Fourier-Polynome  $f_n$  gleichmäßig gegen  $f$ .  
Ein Überschwingen findet auf  $[a, b]$  nicht statt, nur in den Sprungstellen!

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  absolut integrierbar auf  $[0, T]$  und  $T$ -periodisch.  
Wir entwickeln  $f$  in **Harmonische** zur Grundfrequenz  $\omega = 2\pi/T$ :

$$f \circ \bullet \hat{f}, \quad \hat{f}(k) := \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} f(t) dt, \quad f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ik\omega t}.$$

Diese **Analyse** zerlegt das Signal  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  in sein Spektrum  $\hat{f}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ .  
Die Reihe ist wie zuvor zunächst nur eine symbolische Schreibweise;  
wir schreiben Gleichheit nur im Falle der (punktweisen) Konvergenz.  
Für diese Fourier-Analyse gelten folgende nützliche Rechenregeln:

Linearität:  $a f \circ \bullet a \hat{f}, \quad f + g \circ \bullet \hat{f} + \hat{g},$   
Symmetrie:  $f(-t) \circ \bullet \hat{f}(-k), \quad \overline{f(t)} \circ \bullet \overline{\hat{f}(-k)},$   
Verschiebung:  $f(t-a) \circ \bullet e^{-ik\omega a} \hat{f}(k), \quad e^{i\ell\omega t} f(t) \circ \bullet \hat{f}(k-\ell),$   
Produkte:  $f \cdot g \circ \bullet \hat{f} * \hat{g}, \quad f * g \circ \bullet \hat{f} \cdot \hat{g}.$

Linearität folgt unmittelbar aus der Linearität des Integrals.  
Die weiteren Regeln erhalten wir jeweils durch Substitution:

$$\frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} f(-t) dt = \frac{1}{T} \int_{s=0}^T e^{ik\omega s} f(s) ds = \hat{f}(-k)$$

$$\frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} \overline{f(t)} dt = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{ik\omega t} f(t) dt = \overline{\hat{f}(-k)}$$

$$\frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} f(t-a) dt = \frac{1}{T} \int_{s=-a}^{T-a} e^{-ik\omega(s+a)} f(s) ds = e^{-ik\omega a} \hat{f}(k)$$

$$\frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} e^{i\ell\omega t} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-i(k-\ell)\omega t} f(t) dt = \hat{f}(k-\ell)$$

☺ Meist gehen wir mit  $x = \omega t$  zur Periode  $T = 2\pi$  und  $\omega = 1$  über.  
In diesem Spezialfall sind alle Formeln etwas kürzer und einfacher.  
In konkreten Anwendungen ist die Frequenz  $\omega$  meist fest vorgegeben.  
Die Umrechnung gelingt jedenfalls leicht wie oben in 11D festgehalten.

Wir entwickeln periodische Funktionen  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  in Fourier-Reihen

$$f(t) \sim \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}(m) e^{im\omega t} \quad \text{und} \quad g(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}(n) e^{in\omega t}.$$

Für  $h = f \cdot g$  erhalten wir formal (ohne Anspruch auf Konvergenz):

$$h(t) \sim \sum_m \sum_n \hat{f}(m) e^{im\omega t} \cdot \hat{g}(n) e^{in\omega t} = \sum_k \left[ \sum_{m+n=k} \hat{f}(m) \hat{g}(n) \right] e^{ik\omega t}$$

Das legt folgende einfache Produktregel nahe:

$$h = f \cdot g \circ \bullet \hat{h} = \hat{f} * \hat{g} \quad \text{mit} \quad \hat{h}(k) = \sum_{m+n=k} \hat{f}(m) \hat{g}(n)$$

☺ Konvergenz ist sichergestellt falls  $\sum |\hat{f}(m)| < \infty$  und  $\sum |\hat{g}(n)| < \infty$ .  
☺ Die Fourier-Analyse übersetzt so das punktweise Produkt  $h = f \cdot g$  der Signale, also  $h(t) = f(t) \cdot g(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ , in das Faltungsprodukt  $\hat{h} = \hat{f} * \hat{g}$  der Spektren; das kennen wir von Polynomen und Reihen!

☺ Umgekehrt gilt: Die Fourier-Analyse übersetzt das Faltungsprodukt  $h = f * g$  der Signale in das punktweise Produkt  $\hat{h} = \hat{f} \cdot \hat{g}$  der Spektren.  
Das Faltungsprodukt  $h = f * g$  der Signale ist hierbei definiert durch

$$h(t) := \frac{1}{T} \int_{u=0}^T f(u)g(t-u) du = \frac{1}{T} \int_{v=0}^T f(t-v)g(v) dv.$$

☺ Integrierbarkeit gilt falls  $\int_0^T |f(t)| dt < \infty$  und  $\int_0^T |g(t)| dt < \infty$ .  
Die Fourier-Koeffizienten berechnen wir hieraus wie folgt:

$$\hat{h}(k) \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{T^2} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} \int_{u=0}^T f(u)g(t-u) du dt$$

$$\stackrel{\text{Fub}}{=} \frac{1}{T^2} \int_{u=0}^T \int_{t=0}^T e^{-ik\omega u} f(u) \cdot e^{-ik\omega(t-u)} g(t-u) dt du$$

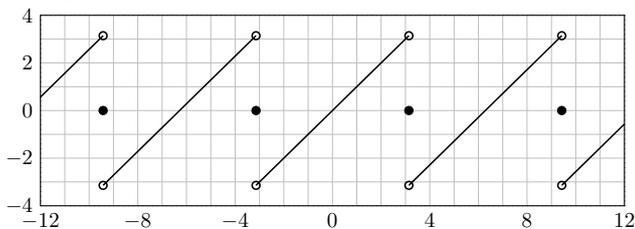
$$\stackrel{\text{Subst}}{=} \frac{1}{T} \int_{u=0}^T e^{-ik\omega u} f(u) du \cdot \frac{1}{T} \int_{v=0}^T e^{-ik\omega v} g(v) dv \stackrel{\text{Def}}{=} \hat{f}(k) \cdot \hat{g}(k)$$

☺ Die Fourier-Analyse  $f, g \circ \bullet \hat{f}, \hat{g}$  ist demnach dank  $f * g \circ \bullet \hat{f} \cdot \hat{g}$  ein Algebra-Homomorphismus von  $(L^1([0, T], \mathbb{C}), *)$  nach  $(\ell^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{C}), \cdot)$ .

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ungerade und  $2\pi$ -periodisch mit  $f(x) = x$  für  $0 < x < \pi$ .

**Aufgabe:** (1) Skizzieren Sie  $f(x)$  und nennen Sie die Fourier-Reihe.

**Lösung:** Sie können dies nochmal berechnen oder wiedererkennen:



$$f(x) = 2 \left[ \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \dots \right]$$

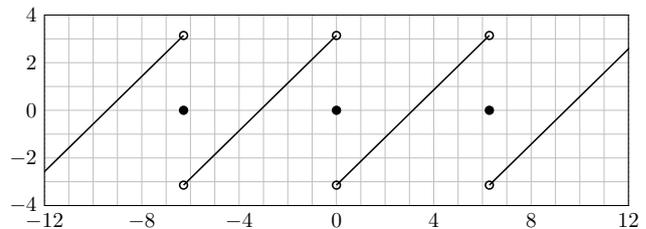
☺ Dies ist unsere gute alte Sägezahnfunktion von Seite I205.

**Übung:** zur Wiederholung: Rechnen Sie die Koeffizienten selbst aus!

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ungerade und  $2\pi$ -periodisch mit  $f(x) = x$  für  $0 < x < \pi$ .

**Aufgabe:** (2) Skizzieren Sie  $f(x - \pi)$  und nennen Sie die Fourier-Reihe.

**Lösung:** Sie können dies nochmal berechnen oder wiedererkennen:



$$f(x - \pi) = 2 \left[ -\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x - \dots \right]$$

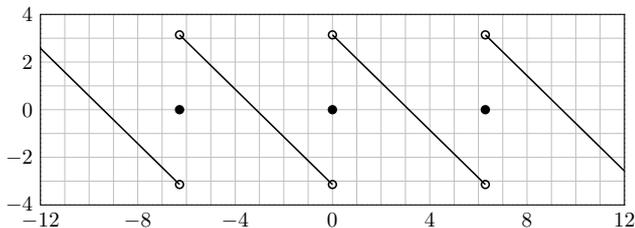
☺ Dies ist die um  $\pi$  nach rechts verschobene Sägezahnfunktion.

**Übung:** Was ergibt eine beliebige Verschiebung  $f(x+a)$  um  $a \in \mathbb{R}$ ?

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ungerade und  $2\pi$ -periodisch mit  $f(x) = x$  für  $0 < x < \pi$ .

**Aufgabe:** (3) Skizzieren Sie  $f(\pi - x)$  und nennen Sie die Fourier-Reihe.

**Lösung:** Sie können dies nochmal berechnen oder wiedererkennen:



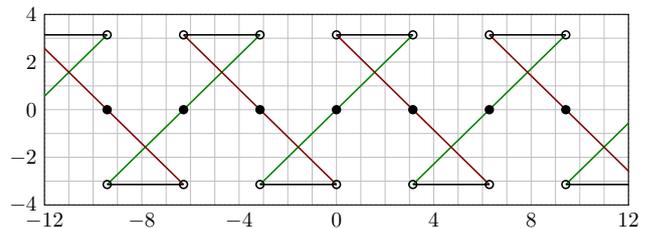
$$f(\pi - x) = 2 \left[ \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{4} \sin 4x + \dots \right]$$

☺ Diese Spiegelung ergibt eine fallende Sägezahnfunktion.

**Übung:** Was ergibt eine beliebige Spiegelung  $f(a-x)$  für  $a \in \mathbb{R}$ ?

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ungerade und  $2\pi$ -periodisch mit  $f(x) = x$  für  $0 < x < \pi$ .

**Aufgabe:** (4) Skizzieren Sie  $g(x) = f(x) + f(\pi - x)$  und nennen Sie die Fourier-Reihe. **Lösung:** Wir nutzen geschickt die Linearkombination:



$$f(x) + f(\pi - x) = 4 \left[ \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x + \dots \right]$$

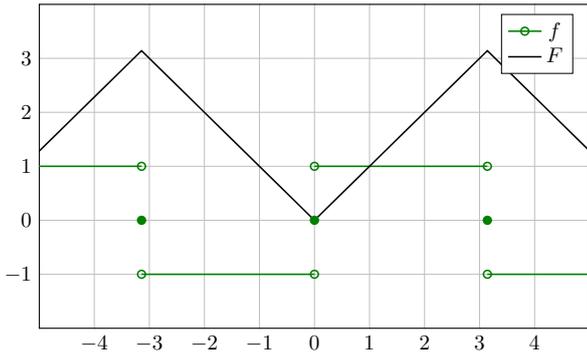
☺ Die Summe ist unsere gute alte Rechteckfunktion von Seite I225!

**Übung:** Was ergibt die Linearkombination  $f(x) + f(a-x)$  für  $a \in \mathbb{R}$ ?

### Fourier-Entwicklung der Dreieckfunktion

I309  
Beispiel

**Aufgabe:** Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ungerade,  $2\pi$ -periodisch,  $f(x) = 1$  für  $0 < x < \pi$ . Die Integralfunktion  $F(x) = \int_{t=0}^x f(t) dt$  ist periodisch.  
 (0) Skizzieren Sie  $f$  und  $F$ . (1) Berechnen Sie die Fourier-Reihen.  
 (2) Wogegen konvergieren  $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$  und  $1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} \pm \dots$ ?



### Fourier-Entwicklung der Dreieckfunktion

I310  
Beispiel

**Lösung:** Auf  $[-\pi, \pi]$  finden wir  $F(x) = |x|$ , dann  $2\pi$ -periodisch.  
 (1) Die Fourier-Reihe der Rechteckfunktion  $f = F'$  kennen wir bereits:

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \left[ \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x + \frac{1}{9} \sin 9x + \dots \right]$$

Aus  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  erhalten wir dank Integration (I3A) mühelos:

$$F(x) \sim C_0 - \frac{4}{\pi} \left[ \cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \frac{1}{7^2} \cos 7x + \dots \right]$$

Der nulle Fourier-Koeffizient  $C_0$  ist der Mittelwert über eine Periode:

$$C_0 \stackrel{\text{Det}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

Dank Dirichlet I2A haben wir Konvergenz in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$ . Also:

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[ \cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \frac{1}{7^2} \cos 7x + \dots \right]$$

### Fourier-Entwicklung der Dreieckfunktion

I311  
Beispiel

Zum Vergleich die direkte Berechnung der Fourier-Koeffizienten:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(kx) dx \quad (\text{gerader Integrand}) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(kx) dx \quad (\text{partielle Integration}) \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \left[ x \frac{\sin(kx)}{k} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(kx)}{k} dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\cos(kx)}{k^2} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\cos(k\pi) - 1}{k^2} \right] = \begin{cases} 0 & \text{für } k \text{ gerade,} \\ -\frac{4}{\pi k^2} & \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin(kx) dx = 0 \quad (\text{ungerader Integrand})$$

Daraus erhalten wir die ersehnte Co/Sinus-Reihe:

$$F(x) \sim \frac{\pi}{2} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2j+1)^2} \cos((2j+1)x)$$

### Fourier-Entwicklung der Dreieckfunktion

I312  
Beispiel

Zum Vergleich direkt das Integral für  $C_k$  mit  $k \neq 0$ :

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} |x| dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{\pi} e^{-ikx} x dx - \int_{-\pi}^0 e^{-ikx} x dx \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{\pi} e^{-ikx} x dx + \int_0^{\pi} e^{ikx} x dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(kx) x dx = \dots \text{ wie oben } \dots \\ &= \begin{cases} -\frac{2}{\pi k^2} & \text{für } k \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{für } k \text{ gerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

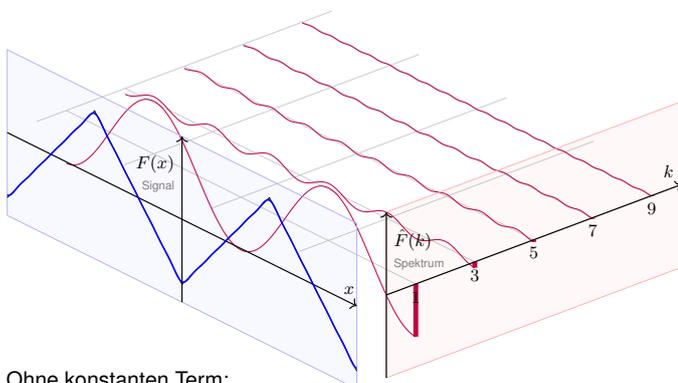
Oder umgerechnet für die Co/Sinus-Reihe:

$$B_k = i(C_k - C_{-k}) = 0, \quad A_k = C_k + C_{-k} = \begin{cases} -\frac{4}{\pi k^2} & \text{für } k \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{für } k \text{ gerade.} \end{cases}$$

☺ Die komplexwertige Rechnung bringt hier keine weitere Ersparnis.

### Fourier-Entwicklung der Dreieckfunktion

I313  
Beispiel



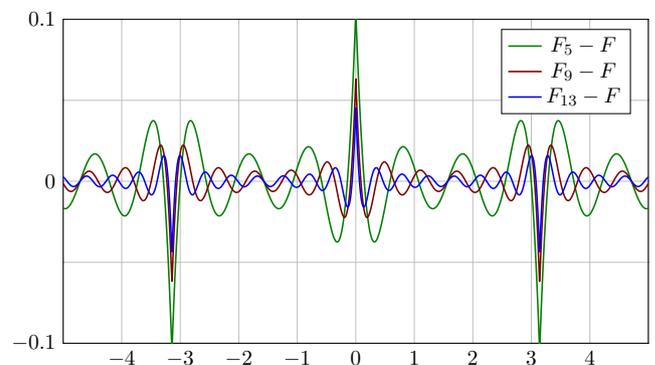
Ohne konstanten Term:

$$F(x) = -\frac{4}{\pi} \left[ \cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \frac{1}{7^2} \cos 7x + \frac{1}{9^2} \cos 9x + \dots \right]$$

### Fourier-Entwicklung der Dreieckfunktion

I314  
Beispiel

Die Fourier-Polynome  $F_n$  konvergieren gleichmäßig gegen  $F$ :



Zur besseren Sichtbarkeit zeichne ich die Differenz  $F_n - F$  vergrößert. Dieser Fehler liegt in einem  $\epsilon$ -Schlauch mit  $\epsilon \leq 2 \max |F'| \ln(n)/n$ . (I2A)

### Fourier-Entwicklung der Dreieckfunktion

I315  
Beispiel

☺ Was erkennen wir an diesen Fourier-Polynomen  $F_1, F_2, F_3, \dots$ ?  
 Schon die ersten Fourier-Polynome  $F_n$  liegen recht nahe bei  $F$ .  
 Das **Dirichlet-Kriterium** I2A garantiert uns Konvergenz in jedem Punkt!

Noch besser: Wenn wir um  $F$  einen Schlauch der Breite  $\epsilon > 0$  legen, so liegen darin alle Fourier-Polynome  $F_n$  für ausreichend großes  $n$ :  
 Die Fourier-Polynome  $F_n$  **konvergieren gleichmäßig** gegen  $F$ !

Dies ist kein Zufall, sondern illustriert den Satz I2A von Dirichlet:  
 $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ist stetig und stückweise stetig differenzierbar mit  $|F'| \leq 1$ .  
 Aus der Skizze lesen wir  $|F_{13} - F| \leq F_{13}(0) < 0.05$  ab. Satz I2A sagt  $|F_{13} - F| \leq 2 \max |F'| \ln(13)/13 < 0.4$  voraus: Diese allgemeine und einfache Fehlerschranke ist korrekt, hier um den Faktor 8 zu großzügig.  
 Das ist durchaus respektabel, dafür ist unsere Schranke bequem und der Beweis relativ leicht (ausgeführt ab Seite J201 im nächsten Kapitel).

Als Kontrast illustrieren die obige Sägezahn- und Rechteckfunktion das Gibbs-Phänomen in jeder Sprungstelle. Hier kann bestenfalls noch punktweise Konvergenz vorliegen, aber keine gleichmäßige.

### Fourier-Entwicklung der Dreieckfunktion

I316  
Beispiel

(2a) Ausgewertet im Punkt  $x = 0$  finden wir:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[ 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right] \stackrel{\text{Dirichlet}}{\text{I2A}} F(0) = 0$$

Hieraus folgt:

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8} = 1.2337005501 \dots$$

(2b) Ausgewertet im Punkt  $x = \pi/4$  finden wir:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \left[ 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots \right] \stackrel{\text{Dirichlet}}{\text{I2A}} F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Hieraus folgt:

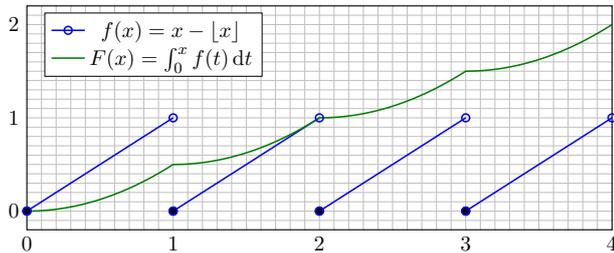
$$1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8\sqrt{2}} = 0.8723580249 \dots$$

☺ Dank passender Werkzeuge war die Rechnung schließlich leicht. Erneut gelingt uns damit die Berechnung schwieriger Reihen! Aus der Reihe  $A := \sum_{j=0}^{\infty} 1/(2j+1)^2 = \pi^2/8$  folgt zudem  $B := \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$ , denn  $B = A + B/4$ . Dies löst das berühmte **Basler Problem**. [I324]

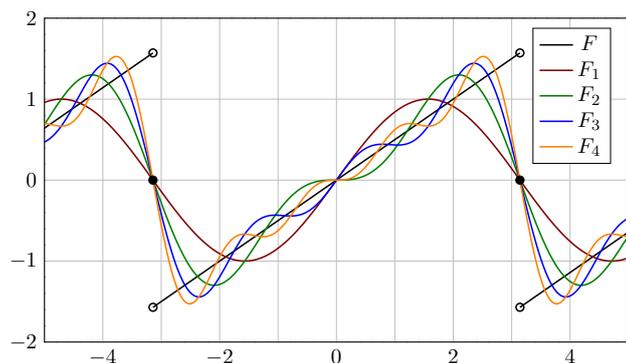
Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine  $T$ -periodische Funktion und differenzierbar. Dann ist die **Ableitung**  $f'$  ebenfalls  $T$ -periodisch, soweit klar. Hingegen ist die **Integralfunktion**  $F(x) = \int_{t=0}^x f(t) dt$  dann und nur dann periodisch, wenn  $\int_{t=0}^T f(t) dt = 0$  gilt:

$$F(x+T) - F(x) = \int_{t=x}^{x+T} f(t) dt \stackrel{|||}{=} \int_{t=0}^T f(x) dx \stackrel{!}{=} 0$$

Ein illustratives Gegenbeispiel liefert folgende Sägezahnfunktion:



Warnung zur Ableitung von Fourier-Reihen

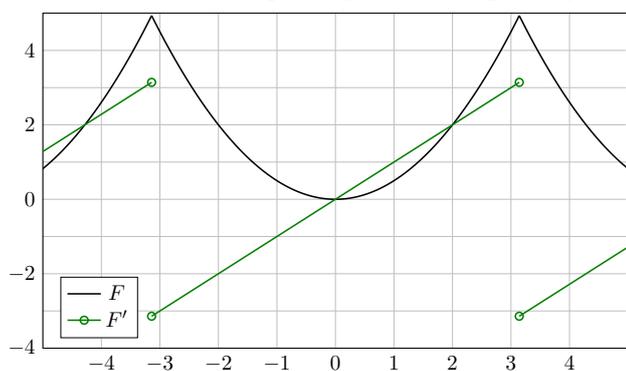


Wir vergleichen die Fourier-Reihen von  $F$  und der Ableitung  $f = F'$ .

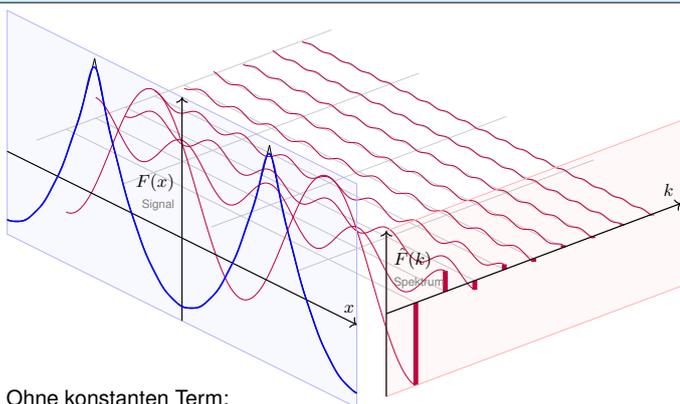
**Aufgabe:** Impliziert  $F(x) \sim \sum_k C_k e^{ikx}$  immer  $f(x) \sim \sum_k ikC_k e^{ikx}$ ? Die Fourier-Polynome  $F_n$  sind beliebig diff'bar. Gilt  $F_n'(0) \rightarrow F'(0)$ ?

Fourier-Entwicklung der Parabelfunktion

**Aufgabe:** Sei  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  von Periode  $2\pi$  mit  $F(x) = x^2/2$  für  $|x| \leq \pi$ . (0) Skizzieren Sie  $F$  und  $F'$ . (1) Berechnen Sie die Fourier-Reihen. (2) Wogegen konvergieren  $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \pm \dots$  und  $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \pm \dots$ ?



Fourier-Entwicklung der Parabelfunktion



Ohne konstanten Term:

$$F(x) = -2 \left[ \cos x - \frac{1}{2^2} \cos 2x + \frac{1}{3^2} \cos 3x - \frac{1}{4^2} \cos 4x + \frac{1}{5^2} \cos 5x \mp \dots \right]$$

Satz I3A: termweise Integration von Fourier-Reihen

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  integrierbar auf  $[0, T]$  und  $T$ -periodisch. Die zugehörige Integralfunktion  $F(t) := C + \int_{\tau=0}^t f(\tau) d\tau$  ist genau dann periodisch, wenn  $F(T) - F(0) = \int_{\tau=0}^T f(\tau) d\tau$  verschwindet. In diesem Falle gilt:

$$c_k = \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} f(t) dt = \left[ e^{-ik\omega t} F(t) \right]_{t=0}^T + ik\omega \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} F(t) dt = ik\omega C_k$$

= 0 da T-periodisch

Das heißt, wir dürfen Fourier-Reihen termweise integrieren:

$$f(t) \sim c_0 + \sum_{k \neq 0} c_k e^{ik\omega t} \iff F(t) \sim C_0 + \sum_{k \neq 0} \frac{c_k}{ik\omega} e^{ik\omega t}$$

Integrationskonstante durch Punktprobe:  $F(0) = C = C_0 + \sum_{k \neq 0} \frac{c_k}{ik\omega}$

😊 Wir können die Umkehrung sorgsam als Ableitungsregel für  $F$  lesen: Hierzu sei  $F$  **absolut stetig** mit  $F' = f$ , also  $F(t) = F(0) + \int_{u=0}^t f(u) du$ .

Warnung zur Ableitung von Fourier-Reihen

**Lösung:** Dank Dirichlet-Kriterium I2A wissen wir für  $-\pi < x < \pi$ :

$$F(x) = \frac{x}{2} = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots$$

Die naive Ableitungsregel gilt hier keineswegs:

$$f(x) = 1/2 \not\sim \cos x - \cos 2x + \cos 3x - \cos 4x + \dots$$

😞 In  $x = 0$  gilt  $F_n'(0) = 1$  für  $n$  ungerade und  $F_n'(0) = 0$  für  $n$  gerade. Siehe Graphik! Die Zahlenfolge  $0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$  konvergiert nicht!

😞 Die Ableitungen  $F_n'(0)$  konvergieren nicht gegen  $F'(0) = 1/2$ ! Sie erkennen das Problem sehr deutlich an den obigen Graphen.

⚠ Hier gilt nicht  $F(t) = F(0) + \int_{u=0}^t f(u) du$  wie im Satz I3A verlangt. Bitte lesen Sie Sätze sorgsam und gründlich, wie immer, so auch hier. Nur wer sein Werkzeug beherrscht, rechnet korrekt und effizient.

😊 Satz I3A garantiert: Integrieren ist besser als Differenzieren! Für die Ableitungsregel gemäß Satz I3A muss  $F$  absolut stetig sein. Zum Beispiel genügt:  $F$  stetig und stückweise stetig differenzierbar.

Fourier-Entwicklung der Parabelfunktion

**Lösung:** Die Fourier-Reihe von  $F$  kann man direkt berechnen... oder bequemer und schneller aus  $F(x) = \int_{t=0}^x F'(t) dt$  ablesen.

(1) Die Ableitung  $f = F'$  ist  $2\pi$ -periodisch mit  $f(x) = x$  für  $-\pi < x < \pi$ . Das ist unsere Sägezahnfunktion [205]. Für diese wissen wir bereits:

$$f(x) \sim 2 \left[ \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \dots \right]$$

Aus  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  erhalten wir dank Integrationsregel I3A mühelos:

$$F(x) \sim C_0 - 2 \left[ \cos x - \frac{1}{2^2} \cos 2x + \frac{1}{3^2} \cos 3x - \frac{1}{4^2} \cos 4x + \dots \right]$$

Der nullte Fourier-Koeffizient  $C_0$  ist der Mittelwert über eine Periode:

$$C_0 \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{2} dx = \frac{1}{12\pi} [x^3]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{6}$$

Dank Dirichlet I2A haben wir Konvergenz in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$ . Also:

$$F(x) = \frac{\pi^2}{6} - 2 \left[ \cos x - \frac{1}{2^2} \cos 2x + \frac{1}{3^2} \cos 3x - \frac{1}{4^2} \cos 4x \pm \dots \right]$$

Fourier-Entwicklung der Parabelfunktion

(2a) Ausgewertet im Punkt  $x = 0$  finden wir:

$$\frac{\pi^2}{6} - 2 \left[ 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \pm \dots \right] \stackrel{\text{Dirichlet I2A}}{=} F(0) = 0$$

Hieraus erhalten wir den Grenzwert der folgenden Reihe:

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \pm \dots = \frac{\pi^2}{12} = 0.8224670334 \dots$$

(2b) Ausgewertet im Punkt  $x = \pi$  finden wir:

$$\frac{\pi^2}{6} + 2 \left[ 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \right] \stackrel{\text{Dirichlet I2A}}{=} F(\pi) = \frac{\pi^2}{2}$$

Hieraus erhalten wir die Lösung des berühmten **Basler Problems**:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} = 1.6449340668 \dots$$

In der HM2 konnten Sie schon zeigen, dass diese Reihe konvergiert. (Wiederholung: Wie? B3A) Nun können wir endlich ihren Grenzwert berechnen! Dieses berühmte Problem wurde 1644 von Pietro Mengoli gestellt und 90 Jahre später 1735 von Leonhard Euler gelöst (zunächst noch vage). Dank starker Fourier-Theorie fällt uns das Ergebnis in den Schoß! 📺 [youtu.be/d-03eB9sf1s](https://youtu.be/d-03eB9sf1s)

Für unsere Sägezahnfunktion [1205] finden wir:

$$f(x) = 2 \left[ \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \dots \right]$$

Für die Parabelfunktion  $F(x) = \int_{t=0}^x f(t) dt$  folgt [1321]:

$$F(x) = \frac{\pi^2}{6} - 2 \left[ \cos x - \frac{1}{2^2} \cos 2x + \frac{1}{3^2} \cos 3x - \frac{1}{4^2} \cos 4x + \dots \right]$$

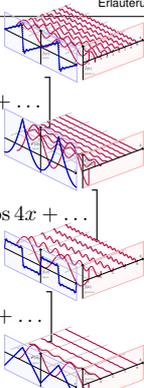
Für unsere Rechteckfunktion [1225] finden wir:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left[ \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x + \dots \right]$$

Für die Dreieckfunktion  $F(x) = \int_{t=0}^x f(t) dt$  folgt [1309]:

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[ \cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \frac{1}{7^2} \cos 7x + \dots \right]$$

😊 Glattheit entspricht schnellem Abklingen der Fourier-Koeffizienten!



😊 Glattheit impliziert schnelles Abklingen der Fourier-Koeffizienten:

**Satz I3B: Riemann–Lebesgue–Lemma**

Ist  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  absolut integrierbar, so sind die Fourier-Koeffizienten  $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{x=0}^{2\pi} e^{-ikx} f(x) dx$  eine Nullfolge, das heißt  $|c_k| \rightarrow 0$  für  $|k| \rightarrow \infty$ . Demnach ist  $F(x) = C + \int_{t=0}^x f(t) dt$  absolut stetig und erfüllt  $|kC_k| \rightarrow 0$ . Entsteht  $F$  aus  $f$  durch  $d$ -fache Integration, so gilt sogar  $|k^d C_k| \rightarrow 0$ .

😊 Umgekehrt garantiert schnelles Abklingen auch Glattheit (s.a. J3C):

**Satz I3C: Abklingen und gleichmäßige Konvergenz**

Sei  $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  eine beliebige Folge komplexer Zahlen  $c_k \in \mathbb{C}$ . Im Falle  $\sum_k |c_k| < \infty$  gilt gleichmäßige Konvergenz gegen die stetige Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}: x \mapsto f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \quad \text{und} \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{x=0}^{2\pi} e^{-ikx} f(x) dx.$$

Gilt sogar  $\sum_k |k^d c_k| < \infty$ , so ist  $f$  mindestens  $d$ -mal stetig diff'bar. Letzteres ist zum Beispiel erfüllt, wenn  $|c_k| \leq c/|k|^{d+\alpha}$  mit  $\alpha > 1$  gilt.

😊 Slogan und Merkregel: Integrieren glättet, Differenzieren raut auf. Das schlägt sich unmittelbar in den Fourier-Koeffizienten nieder. Wir kennen hierfür bereits einige eindrückliche Beispiele:

**Aufgabe:** Prüfen und interpretieren Sie diese Kriterien zum Abklingen (Satz I3B und Satz I3C) an unseren vier bisherigen Beispielen.

**Lösung:** Die Beispiele liegen wunderbar explizit vor uns:

- (1) Die Sägezahnfunktion  $f$  ist unstetig, mit Sprungstellen in  $\pi + 2\pi\mathbb{Z}$ . Ihre Fourier-Koeffizienten erfüllen  $|c_k| = 1/|k| \rightarrow 0$ , aber  $\sum_k |c_k| = \infty$ .
- (2) Ihre Integralfunktion  $F$  ist stetig, und hier gilt  $\sum_k |C_k| < \infty$ . Hingegen ist  $F$  nicht stetig diff'bar, und es gilt  $\sum_k |kC_k| = \infty$ .

Treppenfunktionen [1221] liefern weitere Beispiele:

- (3) Die Rechteckfunktion  $g$  ist nicht stetig, mit Sprungstellen in  $\pi\mathbb{Z}$ . Ihre Fourier-Koeffizienten erfüllen  $|c_k| \leq 1/|k| \rightarrow 0$ , aber  $\sum_k |c_k| = \infty$ .
- (4) Die Dreieckfunktion  $G$  ist stetig, und hier gilt  $\sum_k |C_k| < \infty$ . Hingegen ist  $G$  nicht stetig diff'bar, und es gilt  $\sum_k |kC_k| = \infty$ .

**Beweisidee des Riemann–Lebesgue–Lemmas I3B:**

Das Abklingen  $|c_k| \rightarrow 0$  gilt für jede Treppenfunktion. [1221] Per Approximation gilt es dann für jede integrierbare Funktion.

Die Folgerung für  $d$ -fache Integrale  $F^{(d)} = f$  ist dann klar dank I3A: Aus  $f(x) \sim \sum c_k e^{ikx}$  folgt  $F(x) \sim \sum (ik)^{-d} c_k e^{ikx}$ , also  $c_k = (ik)^d C_k$ .

⚠ Die Umkehrung gilt nicht! Für  $b_k = 1/\ln k$  gilt  $|b_k| \rightarrow 0$ , die Reihe  $f(x) = \sum_{k=2}^{\infty} b_k \sin(kx)$  konvergiert für alle  $x \in \mathbb{R}$  (Dirichlet B3). Aber diese Funktion  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  ist nicht absolut integrierbar! Das Problem ist, dass die Koeffizienten  $b_k$  zu langsam abklingen.

**Beweisidee zur gleichmäßigen Konvergenz in Satz I3C:**

Der gleichmäßige Limes stetiger Funktionen ist eine stetige Funktion. Genau dies wenden wir hier auf die Reihe  $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$  an. Gilt sogar  $\sum_k |k^d c_k| < \infty$ , so wenden wir dies auf die  $d$ -te Ableitung an.

⚠ Punktweise oder gar gleichmäßige Konvergenz sind etwas besonderes: Es gibt stetige Funktionen  $f$ , deren Fourier-Reihe  $f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$  in unendlich vielen Punkten  $x \in \mathbb{R}$  divergiert!

**Aufgabe:** (1) Entwickeln Sie  $\exp(w)$  und  $\ln(1+z)$  in Potenzreihen. (2) Berechnen Sie geometrisch möglichst explizit die reellen Funktionen

$$f(x) = \text{Im} \ln(1 + e^{ix}) \quad \text{und} \quad g(x) = \text{Re} \ln(1 + e^{ix}).$$

- (3) Entwickeln Sie  $f$  und  $g$  in trigonometrischen Reihen.
- (4) Wogegen konvergieren  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$  und  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ ?

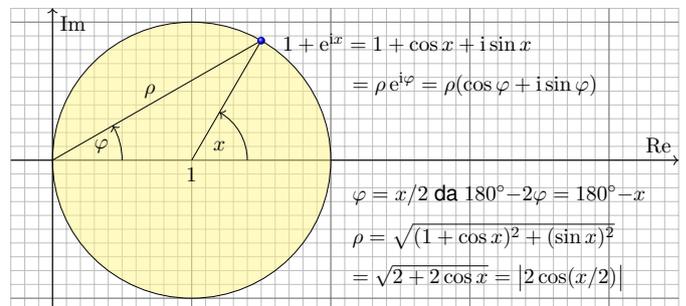
**Lösung:** (1) Für Exponential- und Logarithmusfunktion wissen wir

$$\exp(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} \quad \text{und} \quad \ln(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^k}{k},$$

mit Konvergenzradien  $\infty$  bzw. 1. Es gilt  $\exp \ln(1+z) = 1+z$ , also  $1+z = \exp(w) \Leftrightarrow w = \ln(1+z)$  für  $|z| < 1, -\pi/2 < \text{Im} w < \pi/2$ .

Dies gilt auch noch auf dem Rand für  $|z| = 1$  mit  $z \neq 1$ . (Satz B3F)

😊 Zum Hauptzweig des komplexen Logarithmus siehe F225.



(2) Aus der Skizze lesen wir die komplexen Polarkoordinaten ab:

$$\begin{aligned} \ln(1 + e^{ix}) &= \ln(\rho e^{i\varphi}) = \ln \rho + i\varphi \quad \text{mit } -\pi/2 < \varphi < \pi/2 \\ f(x) &= \text{Im} \ln(1 + e^{ix}) = \varphi = x/2 \quad \text{für } -\pi < x < \pi \\ g(x) &= \text{Re} \ln(1 + e^{ix}) = \ln \rho = \ln |2 \cos(x/2)| \end{aligned}$$

(3) Die Potenzreihe für  $\ln(1+z)$  liefert:

$$\begin{aligned} \ln(1 + e^{ix}) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} e^{ikx} \\ f(x) = \text{Im} \ln(1 + e^{ix}) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx) \\ g(x) = \text{Re} \ln(1 + e^{ix}) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cos(kx) \end{aligned}$$

Die Grenzwerte dieser Reihen haben wir eben ausgerechnet:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin(kx)}{k} &= \frac{x}{2} \quad \text{für } -\pi < x < \pi \\ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\cos(kx)}{k} &= \ln |2 \cos(x/2)| \end{aligned}$$

😊 Diese Sinus-Reihe ist unsere gute alte Sägezahnfunktion [1205].

(4) Damit haben wir  $f$  und  $g$  in trigonometrische Reihen entwickelt:

$$\begin{aligned} \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots &= \begin{cases} x/2 & \text{für } -\pi < x < \pi, \\ 0 & \text{für } x = \pm\pi. \end{cases} \\ \cos x - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} - \frac{\cos 4x}{4} + \dots &= \begin{cases} \ln |2 \cos(x/2)|, & \\ -\infty & \text{für } x = \pm\pi. \end{cases} \end{aligned}$$

Im Punkt  $x = \pi/2$  wird die erste zu folgender Leibniz-Reihe [B319]:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

Im Punkt  $x = 0$  wird die zweite zu folgender Leibniz-Reihe [B319]:

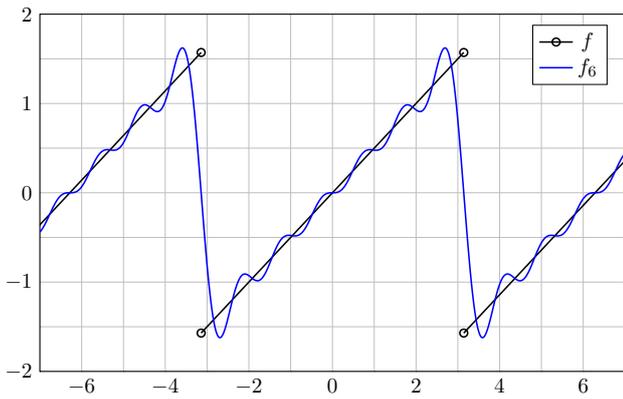
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2$$

In der Polstelle  $x = \pi$  finden wir die harmonische Reihe [B302]

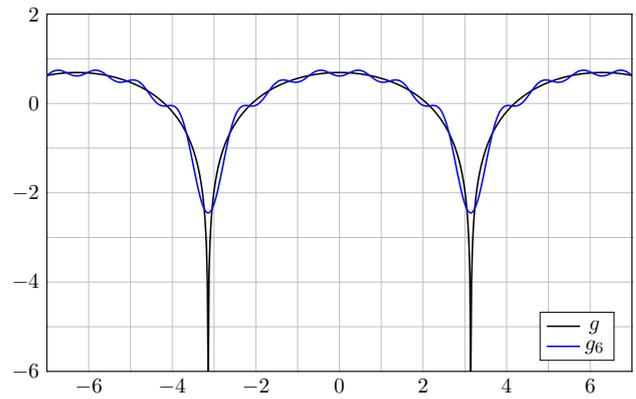
$$-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots = -\infty.$$

Hier divergiert also die trigonometrische Reihe, auch das ist möglich.

Die Funktion  $f$  ist  $2\pi$ -periodisch mit  $f(x) = x/2$  für  $-\pi < x < \pi$ . Sie hat Sprungstellen in  $x = \pm\pi$ . Das kennen und verstehen wir.



Auch die Funktion  $g(x) = \ln|2 \cos(x/2)|$  ist  $2\pi$ -periodisch. Sie hat Polstellen in  $x = \pm\pi$  und ist dennoch integrierbar!



Eindeutige Darstellung als trigonometrische Reihe

☺ Jede Laurent-Reihe  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k z^k$  definiert für  $z = e^{ix}$  mit  $x \in \mathbb{R}$  die trigonometrische Reihe  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$  mit Koeffizienten  $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ .

☺ Das wirft die Frage auf: Können wir sicher sein, dass dies zugleich die Fourier-Koeffizienten sind? Hierauf antwortet der folgende Satz:

Satz 13D: Eindeutigkeitsatz, de la Vallée-Poussin 1912

Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  sei  $2\pi$ -periodisch und auf  $[0, 2\pi]$  integrierbar mit

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \circlearrowleft \bullet \hat{f}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}, \text{ also } \hat{f}(k) := \frac{1}{2\pi} \int_{x=0}^{2\pi} e^{-ikx} f(x) dx.$$

Gegeben sei eine beliebige Folge  $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  komplexer Zahlen  $c_k \in \mathbb{C}$  mit

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \text{ also } f_n(x) := \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \rightarrow f(x) \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Dies gelte für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit höchstens abzählbar vielen Ausnahmen. Dann folgt  $c_k = \hat{f}(k)$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$ : Die Reihendarstellung ist eindeutig!

Eindeutige Darstellung als trigonometrische Reihe

**Aufgabe:** Beweisen Sie den Satz im Spezialfall  $\sum |c_k| < \infty$ . **Lösung:**

$$\begin{aligned} 2\pi \hat{f}(k) &\stackrel{\text{Def}}{=} \int_{x=0}^{2\pi} e^{-ikx} \left[ \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c_\ell e^{i\ell x} \right] dx \stackrel{\text{Lin}}{=} \int_{x=0}^{2\pi} \left[ \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c_\ell e^{i(\ell-k)x} \right] dx \\ &\stackrel{(\ast)}{=} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \left[ \int_{x=0}^{2\pi} c_\ell e^{i(\ell-k)x} dx \right] \stackrel{\text{Lin}}{=} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c_\ell \left[ \int_{x=0}^{2\pi} e^{i(\ell-k)x} dx \right] \stackrel{(\ast\ast)}{=} 2\pi c_k \end{aligned}$$

Dank absoluter Konvergenz  $\sum |c_k| < \infty$  nutzen wir (1) Vertauschung von Reihe und Integral [1106] und anschließend (2) Orthonormalität [1125].

☺ Es genügt die wesentlich schwächere Voraussetzung des Satzes; wir fordern nur  $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$  für alle bis auf abzählbar viele  $x \in \mathbb{R}$ . Das ist sehr praktisch. Der Beweis wird dadurch leider extrem schwierig.

⚠ Erstaunlicherweise kann man nicht „abzählbare Ausnahmемenge“ durch „Nullmenge“ ersetzen: Menshov konstruierte 1916 eine Reihe  $S(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$  mit  $c_0 = 1$ , die fast überall gegen  $f = 0$  konvergiert, bis auf eine Nullmenge. Dennoch sind nicht alle Koeffizienten  $c_k$  null!

Von Potenzreihen zu Fourier-Reihen

**Aufgabe:** (1) Für  $0 \leq r \leq 1$  zeige man wie in der vorigen Aufgabe:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} r^k \frac{\sin(kx)}{k} = \arcsin\left(\frac{r \sin(x)}{\sqrt{1 + 2r \cos(x) + r^2}}\right)$$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} r^k \frac{\cos(kx)}{k} = \ln \sqrt{1 + 2r \cos(x) + r^2}$$

(2) Wie glatt sind  $f$  und  $g$ ? Wie schnell klingen ihre Koeffizienten ab?

**Lösung:** (1) Aus obiger Skizze lesen wir die Polarkoordinaten ab:

$$\begin{aligned} \ln(1 + r e^{ix}) &= \ln(\rho e^{i\varphi}) = \ln \rho + i\varphi \\ g(x) = \operatorname{Re} \ln(1 + r e^{ix}) &= \ln \rho = \ln \sqrt{1 + 2r \cos(x) + r^2} \\ f(x) = \operatorname{Im} \ln(1 + r e^{ix}) &= \varphi = \arcsin(r/\rho \cdot \sin x) \end{aligned}$$

☺ Das scheint kompliziert, aber geometrisch gesehen wird es leicht. Im Randfall  $r = 1$  erhalten wir die Formeln der vorigen Aufgabe.

Von Potenzreihen zu Fourier-Reihen

(2) Im Randfall  $r = 1$  kennen wir die Funktionen  $f$  und  $g$ : Die Sägezahnfunktion  $f$  ist unstetig, mit einer Sprungstelle in  $\pm\pi$ . Auch die Funktion  $g$  ist unstetig, mit einer Polstelle in  $\pm\pi$ .

Die Koeffizienten  $|c_k| = 1/k$  klingen in diesem Falle nur langsam ab. Insbesondere sind sie nicht absolut summierbar:  $\sum_k |c_k| = \infty$ .

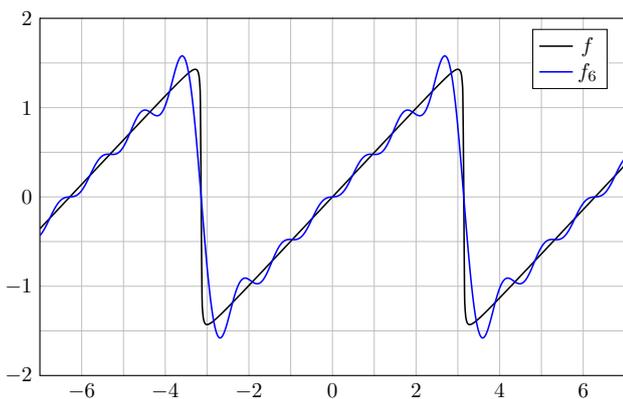
Im Falle  $0 \leq r < 1$  sind wir im Inneren des Konvergenzkreises: Hier sind die Funktionen  $f$  und  $g$  stetig und beliebig oft differenzierbar, sogar analytisch, d.h. in eine konvergente Potenzreihe entwickelbar.

Ihre Koeffizienten  $|c_k| = r^k/k$  klingen exponentiell ab! Insbesondere gilt  $\sum_k |k^d c_k| < \infty$  für jedes  $d \in \mathbb{N}$ .

☺ Dieses konkrete Beispiel illustriert die oben formulierten Sätze: Glattheit impliziert schnelles Abklingen der Fourier-Koeffizienten (13B), und umgekehrt garantiert schnelles Abklingen auch Glattheit (13C).

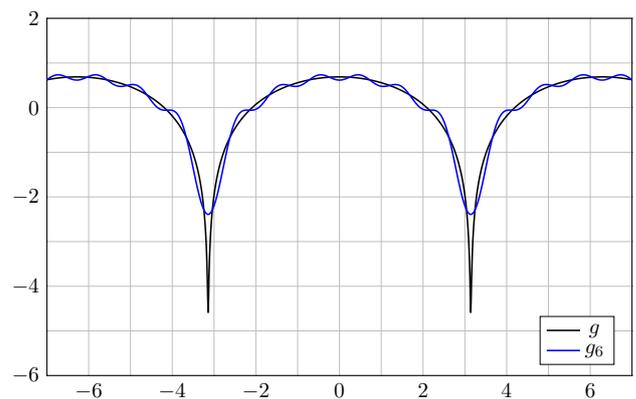
Von Potenzreihen zu Fourier-Reihen

Die Funktion  $f(x) = \arcsin(r \sin(x)/\sqrt{1 + 2r \cos(x) + r^2})$  für  $r = 0.99$ . Für  $r < 1$  ist  $f$  glatt. Für  $r \rightarrow 1$  erhalten wir die Sägezahnfunktion.



Von Potenzreihen zu Fourier-Reihen

Die Funktion  $g(x) = \ln \sqrt{1 + 2r \cos(x) + r^2}$  für  $r = 0.99$ . Für  $r < 1$  ist  $g$  glatt. Für  $r \rightarrow 1$  erhalten wir Pole wie oben gesehen.



Für Funktionen  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  definieren wir ihr **Skalarprodukt** durch

$$L^p \times L^q \rightarrow \mathbb{C} : (f, g) \mapsto \langle f | g \rangle := \frac{1}{b-a} \int_a^b \overline{f(t)} g(t) dt.$$

Der Integrand  $\overline{f}g$  sei absolut integrierbar, etwa  $f \in L^\infty$  beschränkt und  $g \in L^1$  absolut integrierbar, allgemein  $f \in L^p, g \in L^q$  mit  $1/p + 1/q = 1$ . Bei Periode  $T$  wählen wir ein beliebiges Intervall der Länge  $b - a = T$ . Dieses Periodenintegral ist invariant bei Verschieben oder Vervielfachen. Sei  $\omega = 2\pi/T$ . Als **Basisfunktion**  $e_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  definieren wir

$$e_k(t) := e^{ik\omega t} = \cos(k\omega t) + i \sin(k\omega t).$$

Für diese Funktionen gelten die **Orthonormalitätsrelationen**

$$\langle e_k | e_\ell \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell: \text{ paarweise Orthogonalität,} \\ 1 & \text{für } k = \ell: \text{ Normierung auf Länge 1.} \end{cases}$$

Ähnliche, etwas kompliziertere Formeln gelten für  $\cos(k\omega t)$  und  $\sin(k\omega t)$ .

☺ Meist gehen wir mit  $x = \omega t$  zur Periode  $T = 2\pi$  und  $\omega = 1$  über.

**Trigonometrisches Polynom** nennt man jede  $\mathbb{C}$ -Linearkombination

$$f(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t).$$

☺ Die Menge aller Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ist ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum. Hierin ist die Teilmenge aller  $T$ -periodischen Funktionen ein Untervektorraum. Die Basisfunktion  $e_k$  spannen den Unterraum der trigon. Polynome auf. Jede solche Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  bestimmt ihre Koeffizienten gemäß

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} f(t) dt = \langle e^{ik\omega t} | f \rangle \text{ bzw.} \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_{t=0}^T \cos(k\omega t) f(t) dt = 2 \langle \cos(k\omega t) | f \rangle, \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_{t=0}^T \sin(k\omega t) f(t) dt = 2 \langle \sin(k\omega t) | f \rangle. \end{aligned}$$

☺ Formeln für  $c_k$  sind meist einfacher und übersichtlicher als für  $a_k, b_k$ .

Allgemein: Ist  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  periodisch und über  $[0, T]$  integrierbar, dann definieren wir durch obige Formeln die **Fourier-Koeffizienten** von  $f$ . Diese Koeffizienten von  $f$  fassen wir zur **Fourier-Reihe** zusammen:

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t).$$

⚠ Diese Reihe ist zunächst nur eine symbolische Schreibweise! Gelesen: „Die Funktion  $f$  hat die Fourier-Koeffizienten  $c_k$  bzw.  $a_k, b_k$ .“ Aufgrund der **Euler-Formel**  $e^{ik\omega t} = \cos(k\omega t) + i \sin(k\omega t)$  gilt dabei

$$\begin{aligned} a_k &= c_k + c_{-k}, & b_k &= i(c_k - c_{-k}), \\ c_k &= \frac{a_k - ib_k}{2}, & c_{-k} &= \frac{a_k + ib_k}{2}. \end{aligned}$$

Ist  $f$  **reell**, also  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , so gilt  $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ , also  $c_{-k} = \overline{c_k}$ .

Ist  $f$  **gerade**, so liefert  $f$  eine **Cosinusreihe**,  $b_k = 0, c_{-k} = c_k$ .

Ist  $f$  **ungerade**, so liefert  $f$  eine **Sinusreihe**,  $a_k = 0, c_{-k} = -c_k$ .

Zur Funktion  $f$  ist  $f_n(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega t}$  ihr  $n$ -tes **Fourier-Polynom**.

Wir sagen, die Fourier-Reihe von  $f$  **konvergiert im Punkt**  $t \in \mathbb{R}$ , wenn die Zahlenfolge  $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{C}$  für  $n \rightarrow \infty$  konvergiert. Beispiel: Ist  $f$  im Punkt  $t$  differenzierbar, so folgt  $f_n(t) \rightarrow f(t)$ . Allgemeiner gilt Satz 12A:

(1) Angenommen,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  erfüllt die Dirichlet-Bedingung im Punkt  $t$ , d.h. beide Grenzwerte  $f(t \pm)$  und beide Ableitungen  $f'(t \pm)$  existieren. Dann konvergiert in diesem Punkt  $t$  die Fourier-Reihe  $f_n(t)$  gemäß

$$f_n(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega t} \rightarrow \frac{1}{2} [f(t+) + f(t-)] \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

(2) Ist  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und stückweise stetig differenzierbar mit  $|f'| \leq L$ , so konvergiert die Fourier-Reihe  $f_n \rightarrow f$  sogar gleichmäßig auf ganz  $\mathbb{R}$ :

$$|f_n(t) - f(t)| \leq 2L/\omega \cdot \ln(n)/n \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

(3) Ist  $f$  mindestens  $d$ -mal stetig differenzierbar, so ist die gleichmäßige Konvergenz entsprechend schneller gemäß  $|f_n - f| \leq \text{const} \cdot \ln(n)/n^d$ .

Für unsere Sägezahnfunktion [1205] finden wir:

$$f(x) = 2 \left[ \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \dots \right]$$

Für die Parabelfunktion  $F(x) = \int_{t=0}^x f(t) dt$  folgt [1321]:

$$F(x) = \frac{\pi^2}{6} - 2 \left[ \cos x - \frac{1}{2^2} \cos 2x + \frac{1}{3^2} \cos 3x - \frac{1}{4^2} \cos 4x + \dots \right]$$

Für unsere Rechteckfunktion [1225] finden wir:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left[ \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x + \dots \right]$$

Für die Dreieckfunktion  $F(x) = \int_{t=0}^x f(t) dt$  folgt [1309]:

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[ \cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \frac{1}{7^2} \cos 7x + \dots \right]$$

☺ Es gilt Konvergenz in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$ : Wir schreiben „=“ statt „~“.

☺ Wir sehen explizit, wie schnell die Fourier-Koeffizienten abklingen.

⚠ Fourier-Reihen können wir **nicht immer termweise ableiten!** [1319]

☺ Hingegen können wir sie **immer termweise integrieren!** [1318]

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  periodisch und integrierbar, und  $F(t) := C + \int_{u=0}^t f(u) du$ . Genau dann ist  $F$  periodisch, wenn  $\int_{u=0}^T f(u) du = 0$ . In diesem Fall gilt:

$$f(t) \sim \sum_{k \neq 0} c_k e^{ik\omega t} \iff F(t) \sim C_0 + \sum_{k \neq 0} \frac{c_k}{ik\omega} e^{ik\omega t}$$

☺ Wir können die Umkehrung sorgsam als Ableitungsregel für  $F$  lesen: Hierzu sei  $F$  **absolut stetig** mit  $F' = f$ , also  $F(t) = F(0) + \int_{u=0}^t f(u) du$ . Zum Beispiel genügt:  $F$  stetig und stückweise stetig differenzierbar.

**Glattheit** entspricht schnellem **Abklingen** der Fourier-Koeffizienten: Für jede integrierbare Funktion  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  gilt  $|c_k| \rightarrow 0$  für  $|k| \rightarrow \infty$ . Ist  $f$  mindestens  $d$ -mal stetig differenzierbar, so gilt sogar  $|k^d c_k| \rightarrow 0$ .

Umgekehrt: Gilt  $\sum |c_k| < \infty$ , zum Beispiel  $|c_k| \leq c/|k|^\alpha$  für  $\alpha > 1$ , so konvergiert  $\sum c_k e_k$  gleichmäßig gegen eine stetige Funktion  $f$ . Gilt sogar  $\sum |k^d c_k| < \infty$ , so ist  $f$  mindestens  $d$ -mal stetig diff'bar.

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  absolut integrierbar auf  $[0, T]$  und  $T$ -periodisch. Wir entwickeln  $f$  in **Harmonische** zur Grundfrequenz  $\omega = 2\pi/T$ :

$$f \circ \bullet \hat{f}, \quad \hat{f}(k) := \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} f(t) dt, \quad f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ik\omega t}.$$

Diese **Analyse** zerlegt das Signal  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  in sein Spektrum  $\hat{f}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ . Die Reihe ist wie zuvor zunächst nur eine symbolische Schreibweise; wir schreiben Gleichheit nur im Falle der (punktweisen) Konvergenz. Für diese Fourier-Analyse gelten folgende nützliche Rechenregeln:

Linearität:	$a f \circ \bullet a \hat{f},$	$f + g \circ \bullet \hat{f} + \hat{g},$
Symmetrie:	$f(-t) \circ \bullet \hat{f}(-k),$	$\overline{f(t)} \circ \bullet \overline{\hat{f}(-k)},$
Verschiebung:	$f(t-a) \circ \bullet e^{-ik\omega a} \hat{f}(k),$	$e^{i\ell\omega t} f(t) \circ \bullet \hat{f}(k-\ell),$
Produkte:	$f \cdot g \circ \bullet \hat{f} * \hat{g},$	$f * g \circ \bullet \hat{f} \cdot \hat{g}.$

☺ Diese nützlichen Eigenschaften vereinfachen unsere Rechnungen. Linearität, Symmetrie und Verschiebung rechnet man leicht nach.

Die Fourier-Analyse übersetzt das punktweise Produkt  $h = f \cdot g$  der Signale in das Faltungsprodukt  $\hat{h} = \hat{f} * \hat{g}$  der Spektren:

$$h = f \cdot g \circ \bullet \hat{h} = \hat{f} * \hat{g} \text{ mit } \hat{h}(k) = \sum_{m+n=k} \hat{f}(m) \hat{g}(n)$$

Konvergenz und Summierbarkeit sind garantiert falls  $\hat{f}, \hat{g} \in \ell^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ : Aus  $\sum |\hat{f}(m)| < \infty$  und  $\sum |\hat{g}(n)| < \infty$  folgt dann  $\sum |\hat{h}(k)| < \infty$ .

Umgekehrt gilt: Die Fourier-Analyse übersetzt das Faltungsprodukt  $h = f * g$  der Signale in das punktweise Produkt  $\hat{h} = \hat{f} \cdot \hat{g}$  der Spektren:

$$h = f * g \circ \bullet \hat{h} = \hat{f} \cdot \hat{g} \text{ mit } h(t) = \frac{1}{T} \int_{u=0}^T f(u) g(t-u) du.$$

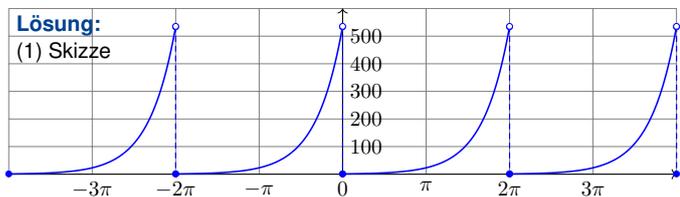
Konvergenz und Integrierbarkeit sind garantiert falls  $f, g \in L^1([0, T], \mathbb{C})$ : Aus  $\int_{u=0}^T |f(u)| du < \infty$  und  $\int_{v=0}^T |g(v)| dv < \infty$  folgt  $\int_{t=0}^T |h(t)| dt < \infty$ .

- Aufgabe:** (typische Klausuraufgabe, so zum Beispiel September 2012)  
 Die Funktion  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei  $2\pi$ -periodisch mit  $g(x) = e^x$  für  $0 \leq x < 2\pi$ .
- Skizzieren Sie die Funktion  $g$  auf dem Intervall  $[-4\pi, 4\pi]$ .
  - Bestimmen Sie die Grenzwerte  $g(x \pm)$  und Ableitungen  $g'(x \pm)$ .
  - Bestimmen Sie zu  $g$  die Fourier-Reihe  $g(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ .
  - Warum und wogegen konvergiert die Reihe in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$ ?
  - Bestimmen Sie so den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \frac{1}{26} + \frac{1}{37} + \dots$$

**Lösung:**

(1) Skizze



(3c) Zum Vergleich rechnen wir reell. Partielle Integration liefert:

$$\int_{x=0}^{2\pi} \cos(kx) e^x dx = \left[ \cos(kx) e^x \right]_0^{2\pi} + k \int_{x=0}^{2\pi} \sin(kx) e^x dx$$

$$\int_{x=0}^{2\pi} \sin(kx) e^x dx = \left[ \sin(kx) e^x \right]_0^{2\pi} - k \int_{x=0}^{2\pi} \cos(kx) e^x dx$$

Das sieht zirkulär aus, aber erstet wie Phönix aus der Asche:

$$\int_{x=0}^{2\pi} \cos(kx) e^x dx = (e^{2\pi} - 1) - k^2 \int_{x=0}^{2\pi} \cos(kx) e^x dx$$

$$\int_{x=0}^{2\pi} \sin(kx) e^x dx = k(1 - e^{2\pi}) - k^2 \int_{x=0}^{2\pi} \sin(kx) e^x dx$$

Das können wir nun nach den gesuchten Integralen auflösen:

$$\int_{x=0}^{2\pi} \cos(kx) e^x dx = \frac{e^{2\pi} - 1}{1 + k^2}, \quad \text{also } a_k = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi(k^2 + 1)}$$

$$\int_{x=0}^{2\pi} \sin(kx) e^x dx = \frac{k(1 - e^{2\pi})}{1 + k^2}, \quad \text{also } b_k = \frac{k(1 - e^{2\pi})}{\pi(k^2 + 1)}$$

Beide Rechenwege sind ähnlich lang, die Wahl ist Geschmackssache.

(2) Für  $0 < x < 2\pi$  gilt  $g(x \pm) = e^x$  und  $g'(x \pm) = e^x$ . Am Rand gilt  $g(0+) = 1$  und  $g'(0+) = 1$  sowie  $g(2\pi-) = e^{2\pi}$  und  $g'(2\pi-) = e^{2\pi}$ .  
 ☺ Alles setzt sich  $2\pi$ -periodisch fort, also  $g(0-) = g'(0-) = e^{2\pi}$ .

(3a) Die Integration gelingt hier am einfachsten komplex:

$$\int_{x=0}^{2\pi} e^{-ikx} e^x dx = \int_{x=0}^{2\pi} e^{(1-ik)x} dx = \left[ \frac{e^{(1-ik)x}}{1-ik} \right]_{x=0}^{2\pi} = \frac{e^{2\pi} - 1}{1-ik}$$

Damit erhalten wir die komplexen Fourier-Koeffizienten:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{x=0}^{2\pi} e^{-ikx} g(x) dx = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi(1-ik)}, \quad g(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi(1-ik)} e^{ikx}$$

(3b) Zum Vergleich die Koeffizienten der Co/Sinus-Reihe:

$$c_k = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi(1-ik)} = \frac{(e^{2\pi} - 1)(1+ik)}{2\pi(1+k^2)} = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi(1+k^2)} - i \frac{k(1 - e^{2\pi})}{2\pi(1+k^2)}$$

$$a_k = c_k + c_{-k} = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi(k^2 + 1)}, \quad b_k = i(c_k - c_{-k}) = \frac{k(1 - e^{2\pi})}{\pi(k^2 + 1)}$$

⚠ Für  $g'(x) = g(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$  gilt die Ableitungsregel I3A nicht!

(4) Dirichlet (Satz I2A) garantiert Konvergenz in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \stackrel{!}{=} \frac{g(x+) + g(x-)}{2}$$

(5) Speziell in der Sprungstelle  $x = 0$  finden wir:

$$\frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi(k^2 + 1)} \stackrel{!}{=} \frac{1 + e^{2\pi}}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 1} = \frac{1}{2} + \frac{\pi e^{\pi} + e^{-\pi}}{2(e^{\pi} - e^{-\pi})} = \frac{1 + \pi \coth(\pi)}{2} = 2.07667 \dots$$

Auflösen nach der Reihe und vereinfachen liefert schließlich:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 1} = \frac{1}{2} + \frac{\pi e^{\pi} + e^{-\pi}}{2(e^{\pi} - e^{-\pi})} = \frac{1 + \pi \coth(\pi)}{2} = 2.07667 \dots$$

☺ Dank unseres Integrationswerkzeugs sind die Rechnungen leicht. Mit Fourier-Analyse gelingt uns die Berechnung schwieriger Reihen! Das bequeme Dirichlet-Kriterium garantiert die punktweise Konvergenz.

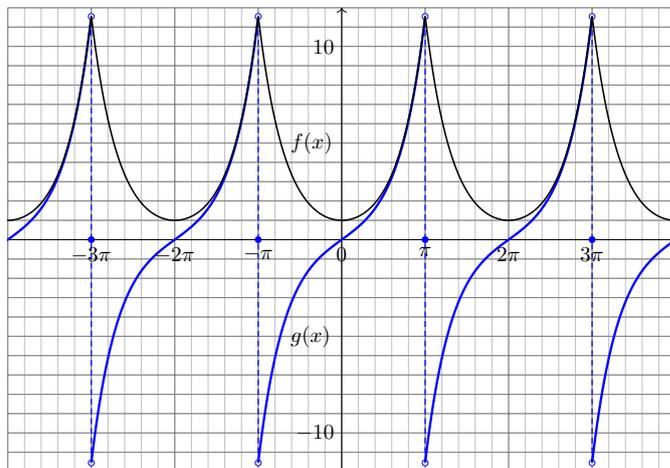
**Aufgabe:** Die Funktionen  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  seien  $2\pi$ -periodisch und sprungnormiert und auf dem Intervall  $]-\pi, \pi[$  gegeben durch

$$f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad g(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

- Skizzieren Sie  $f$  und  $g$  auf dem Intervall  $[-4\pi, 4\pi]$ .
- Entwickeln Sie  $f$  und  $g$  in ihre (reellen) Fourier-Reihen.
- In welchen Punkten konvergieren die Fourier-Reihen? Wogegen?
- Werten Sie die Fourier-Reihen in geeigneten Punkten  $x \in [-\pi, \pi]$  aus und bestimmen Sie so explizit den Grenzwert der Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1 + k^2} \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k + 1)}{1 + (2k + 1)^2}$$

(5) Bestimmen Sie die Ableitungen  $f', g'$  und ihre Fourier-Reihen. In welchem Fall gilt die Ableitungsregel I3A? In welchem nicht? Das Ergebnis ist erstaunlich. Erklären Sie es möglichst genau!



(2) Wir berechnen die Fourier-Reihen von  $e^x$  und  $e^{-x}$  auf  $]-\pi, \pi[$ :

$$u_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} e^x dx = \frac{e^{(1-ik)\pi} - e^{-(1-ik)\pi}}{2\pi(1-ik)} = (-1)^k \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi(1-ik)}$$

$$v_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} e^{-x} dx = \frac{e^{(1+ik)\pi} - e^{-(1+ik)\pi}}{2\pi(1+ik)} = (-1)^k \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi(1+ik)}$$

Symmetrie nutzen! Hieraus folgen die Fourier-Reihen von  $f$  und  $g$ :

$$\frac{u_k \pm v_k}{2} = (-1)^k \frac{\sinh(\pi)}{2\pi} \left[ \frac{1+ik}{1+k^2} \pm \frac{1-ik}{1+k^2} \right]$$

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k \sinh(\pi)}{\pi(1+k^2)} e^{ikx} = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2 \sinh(\pi)}{\pi(1+k^2)} \cos(kx)$$

$$g(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k ik \sinh(\pi)}{\pi(1+k^2)} e^{ikx} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2k \sinh(\pi)}{\pi(1+k^2)} \sin(kx)$$

(3) Dank Dirichlet-Kriterium I2A konvergieren die Fourier-Reihen  $f_n \rightarrow f$  und  $g_n \rightarrow g$  in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$ , erstere sogar gleichmäßig. In den Sprungstellen  $x \in \pi(2\mathbb{Z} + 1)$  gilt  $g_n(x) \rightarrow \frac{1}{2}[g(x+) + g(x-)] = 0$ .

(4) Wir werten  $f(x)$  in  $x = 0$  aus und  $g(x)$  in  $x = \pi/2$ :

$$1 = f(0) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2 \sinh(\pi)}{\pi(1+k^2)}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(1+k^2)} = \frac{\pi}{2 \sinh(\pi)} - \frac{1}{2} = -0.36398 \dots$$

$$\sinh(\pi/2) = g(\pi/2) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{2(2j+1) \sinh(\pi)}{\pi(1+(2j+1)^2)}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (2j+1)}{1+(2j+1)^2} = \frac{\pi \sinh(\pi/2)}{2 \sinh(\pi)} = 0.31301 \dots$$

(5) Außerhalb der Sprungstellen  $\pi(2\mathbb{Z} + 1)$  gilt  $f' = g$  und  $g' = f$ . Die Funktion  $f$  ist absolut stetig, das heißt  $f(t) = f(0) + \int_{u=0}^t f'(u) du$ , also können wir die Fourier-Reihe formal ableiten gemäß Satz I3A. Hingegen ist  $g$  nicht absolut stetig, denn  $g(t) \neq g(0) + \int_{u=0}^t g'(u) du$ , und Satz I3A ist hier nicht anwendbar. Wir können beides direkt nachprüfen!

Beim Lösen partieller Differentialgleichungen §236 mit Anfangs- und Randwerten (ARWP) begegnen uns Probleme von folgender Art:

**Aufgabe:** (1) Entwickeln Sie die gegebene Funktion  $g: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(x) = x(\pi - x)$  in (a) eine Cosinusreihe und (b) eine Sinusreihe:

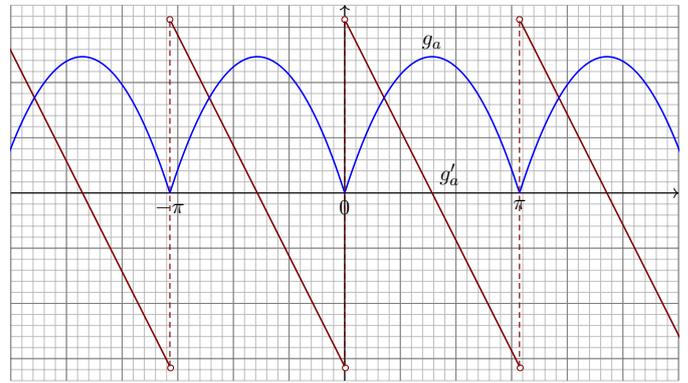
$$g(x) \stackrel{!}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx), \quad g(x) \stackrel{!}{=} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

(c) Welche Fourier-Reihe hat die  $2\pi$ -periodische Fortsetzung  $g_c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g_c(x) = x(\pi - x)$  für  $0 \leq x \leq \pi$  und  $g_c(x) = 0$  für  $-\pi \leq x \leq 0$ ?

(2) In welchen Punkten  $x \in [0, \pi]$  konvergieren diese Reihen? Wogegen? Konvergieren diese Reihen gleichmäßig auf  $[0, \pi]$  gegen die Funktion  $g$ ?

(3) Punktprobe: Bestimmen Sie durch geeignete Auswertung die Reihen  $\sum_{j=1}^{\infty} 1/j^2 = \pi^2/6$ ,  $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j/j^2 = -\pi^2/12$ ,  $\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j/(2j+1)^3 = \pi^3/32$ .

Wie ist in (1) die Entwicklung in verschiedene Fourier-Reihen möglich? Man beachte, dass die Funktion  $g$  zunächst nur auf  $[0, \pi]$  gegeben ist. Je nach Aufgabe kann  $g$  daher verschieden auf  $\mathbb{R}$  fortgesetzt werden!



Die gerade  $2\pi$ -periodische Fortsetzung  $g_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  von  $g: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ . Aufgrund der Spiegelsymmetrie von  $g$  ist  $g_a$  hier zudem  $\pi$ -periodisch. Die Ableitung  $g'_a: \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi \rightarrow \mathbb{R}$  ist ungerade. Wir kennen sie bereits!

**Lösung:** (1a) Zwecks Cosinusreihe setzen wir  $g$  gerade fort zu  $g_a$ :

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) g_a(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(kx) g(x) dx$$

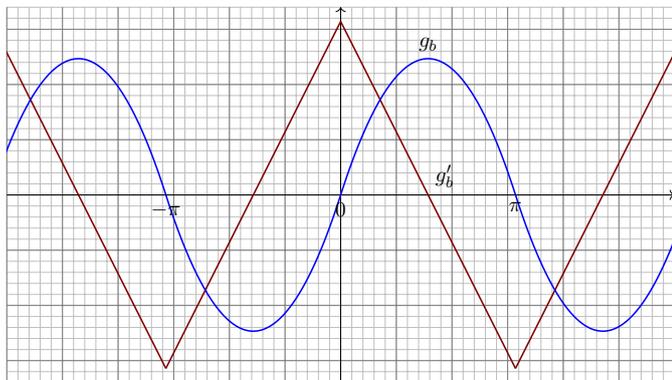
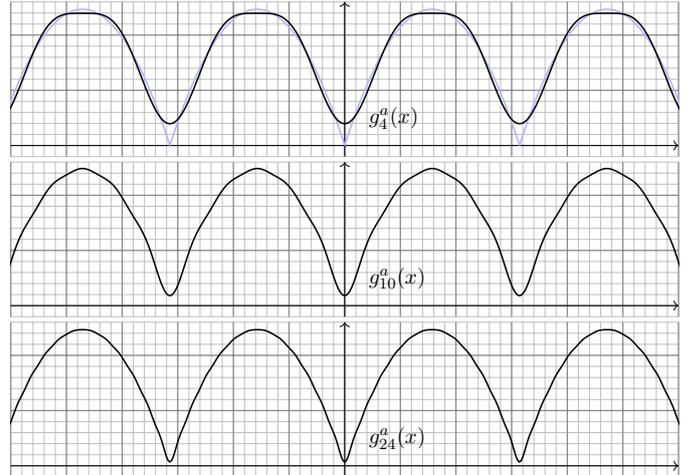
$$= \begin{cases} \pi^2/3 & \text{für } k=0, \text{ also } a_0 = \pi^2/3, \\ -4/k^2 & \text{für } k \geq 2 \text{ gerade, } a_{2j} = -1/j^2, \\ 0 & \text{für } k \geq 1 \text{ ungerade, } a_{2j+1} = 0 \text{ (Symmetrie!)} \end{cases}$$

Das kann man direkt ausrechnen durch zweimalige partielle Integration. Alternativ integrieren wir gemäß I3A die Sägezahnfunktion  $g'_a$  §307:

$$g'_a(x) \sim \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{j} \sin(2jx) \iff g_a(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{-1}{j^2} \cos(2jx)$$

(2a) Dank Dirichlet-Kriterium I2A konvergiert diese Fourier-Reihe in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$  gegen  $g_a(x)$ , sogar gleichmäßig auf ganz  $\mathbb{R}$ . Dies gilt somit insbesondere auf dem ursprünglichen Intervall  $[0, \pi]$ .

(3a) Die Auswertung im Punkt  $x=0$  ergibt  $g(0) = 0 = \pi^2/6 - \sum_{j=1}^{\infty} 1/j^2$ , also  $\sum_{j=1}^{\infty} 1/j^2 = \pi^2/6$ . In  $x = \pi/2$  finden wir  $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j/j^2 = -\pi^2/12$ .



Die ungerade  $2\pi$ -periodische Fortsetzung  $g_b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  von  $g: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Ableitung  $g'_b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist folglich gerade. Wir kennen sie bereits! Achtung: Nur auf den ersten Blick ähnelt  $g_b$  der Sinusfunktion.

(1b) Zwecks Sinusreihe setzen wir  $g$  ungerade fort zu  $g_b$ :

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) g_b(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(kx) g(x) dx$$

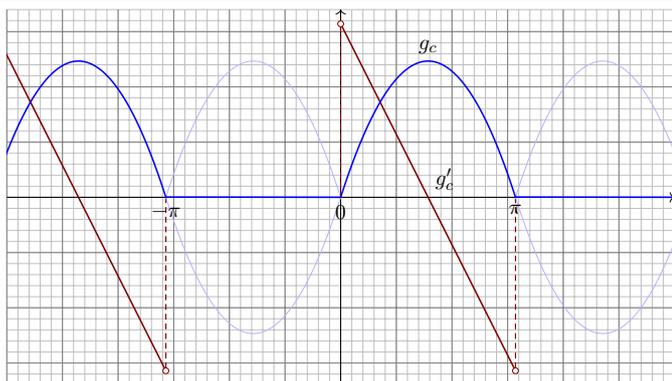
$$= \begin{cases} \frac{8}{\pi k^2} & \text{für } k \geq 1 \text{ ungerade, } b_{2j+1} = \frac{8}{\pi(2j+1)^3}, \\ 0 & \text{für } k \geq 0 \text{ gerade, } b_{2j} = 0 \text{ (Symmetrie!)} \end{cases}$$

Das kann man direkt ausrechnen durch zweimalige partielle Integration. Alternativ integrieren wir gemäß I3A die Dreieckfunktion  $g'_b$  §309:

$$g'_b(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\cos((2j+1)x)}{(2j+1)^2} \iff g_b(x) = c_0 + \frac{8}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sin((2j+1)x)}{(2j+1)^3}$$

(2b) Dank Dirichlet-Kriterium I2A konvergiert diese Fourier-Reihe in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$  gegen  $g_b(x)$ , sogar gleichmäßig auf ganz  $\mathbb{R}$ . Dies gilt somit insbesondere auf dem ursprünglichen Intervall  $[0, \pi]$ .

(3b) Auswertung in  $x = \pi/2$  ergibt  $g(\pi/2) = \pi^2/4 = \frac{8}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j/(2j+1)^3$ . Diese Punktprobe beschert uns  $\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j/(2j+1)^3 = \pi^3/32$ .



Eine weitere  $2\pi$ -periodische Fortsetzung  $g_c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  von  $g: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir nutzen unsere Vorarbeit und betrachten  $g_c = (g_a + g_b)/2$  als eine Überlagerung: Die beiden Summanden  $g_a$  und  $g_b$  kennen wir bereits!

(1c) Wir betrachten  $g_c = \frac{1}{2}(g_a + g_b)$ . Aus (1a) und (1b) folgt sofort:

$$g_c(x) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{-1}{2j^2} \cos(2jx) + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2j+1)^3} \sin((2j+1)x)$$

Diese Fourier-Reihe kann man wie immer durch Integration ausrechnen. Nach unserer Vorarbeit ist es viel leichter, die Linearität auszunutzen!

(2c) Dank Dirichlet-Kriterium I2A konvergiert diese Fourier-Reihe in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$  gegen  $g_c(x)$ , sogar gleichmäßig auf ganz  $\mathbb{R}$ .

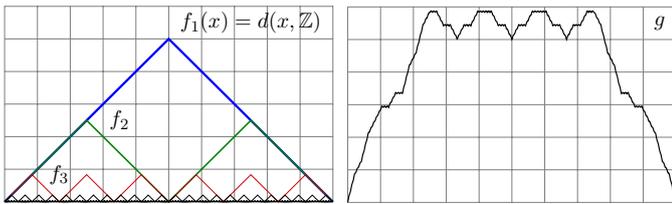
(3c) Die Auswertung im Punkt  $x=0$  ergibt  $g(0) = 0 = \frac{\pi^2}{12} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2j^2}$ . Diese Punktprobe beschert uns erneut die Reihe  $\sum_{j=1}^{\infty} 1/j^2 = \pi^2/6$ . Auch im Punkt  $x = \pi/2$  gelingt uns die Punktprobe ebenso wie zuvor:

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j^2} + \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)^3} = \frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^2}{24} + \frac{\pi^2}{8}$$

😊 Punktproben beschert uns neue Reihen oder zeigen Rechenfehler, zum Beispiel eine vergessene oder falsch berechnete Konstante  $c_0$ .

😊 Zur Kontrolle hilft auch die graphische Darstellung der ersten Terme.

**Aufgabe:** (0) Wiederholen Sie die Konstruktion der Takagi-Funktion  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \text{dist}(x, \frac{1}{n}\mathbb{Z})$  und ihre Eigenschaften (Satz B4A).



- (1) Wie lässt sich diese Funktion  $g$  in eine Fourier-Reihe entwickeln?
- (2) Konvergiert die Fourier-Reihe überall gegen  $g$ ? sogar gleichmäßig?
- (3) Berechnen Sie explizit die ersten sechs Fourier-Koeffizienten!

**Lösung:** (0) Wir beginnen mit der Dreiecksfunktion  $f_1(x) = \text{dist}(x, \mathbb{Z})$ . Dies ist der Abstand von  $x \in \mathbb{R}$  zur nächsten ganzen Zahl  $a \in \mathbb{Z}$ . Hieraus gewinnen wir  $f_n(x) = \text{dist}(x, \frac{1}{n}\mathbb{Z})$  für  $n = 2, 3, 4, 5$  sowie die Summen  $g_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n$  und schließlich die Reihe  $g = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ .

(1) Wir wollen die Rechnung vereinfachen und gehen geschickt vor. Die Dreiecksfunktion  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  kennen wir bereits von Seite 1309: Auf  $[-\pi, \pi]$  gilt  $F(x) = |x|$ , dann  $2\pi$ -periodisch. Wir finden:

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[ \cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \frac{1}{7^2} \cos 7x + \dots \right]$$

Unsere Funktion  $f_1(t) = F(2\pi t)/2\pi$  ist entsprechend skaliert:

$$f_1(t) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{k \text{ ungerade}} \frac{\cos[k2\pi t]}{k^2} = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\cos[(2j+1)2\pi t]}{(2j+1)^2}$$

Punktprobe: Für  $t = 0$  erhalten wir  $f(0) = 0$ , also  $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ . Für  $f_n(t) = \text{dist}(t, \frac{1}{n}\mathbb{Z})$  gilt  $f_n(t) = f_1(n!t)/n!$ . So erhalten wir:

$$f_n(t) = \frac{1}{4n!} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\cos[(2j+1)n!2\pi t]}{(2j+1)^2 n!}$$

☺ Wir müssen hier nicht erneut integrieren, wiederverwenden genügt.

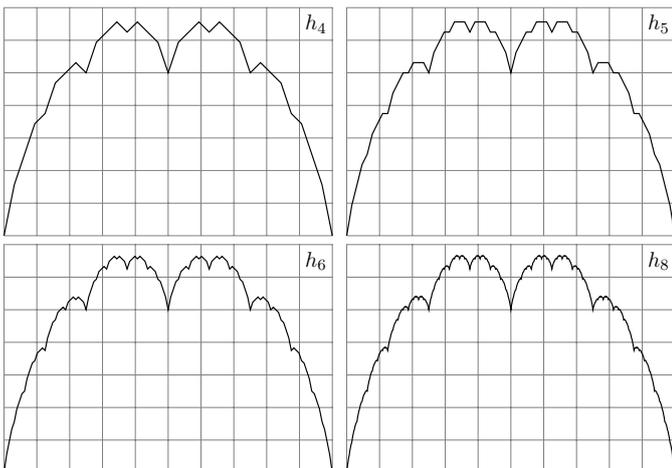
☹ Die Rechnung (1–2) ist zunächst leicht und elegant, aber die explizite Berechnung der Koeffizienten (3) ist für meinen Geschmack unschön.

☺ Wir wollen dieses Beispiel modifizieren und weiter vereinfachen. Auch die folgende Funktion  $h$  ist in keinem Punkt differenzierbar und auf keinem Intervall monoton, genauso wie  $g$  in Satz B4A.

**Aufgabe:** (4) Skizzieren Sie  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \text{dist}(x, 2^{-n}\mathbb{Z})$ .  
(5) Entwickeln Sie  $h$  möglichst explizit in eine Fourier-Reihe.

**Lösung:** (4) Wir gehen wie oben vor: Wir skizzieren zunächst die Funktionen  $f_n(x) = \text{dist}(x, 2^{-n}\mathbb{Z})$  für  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  und ihre Summen  $h_n = f_0 + f_1 + \dots + f_n$ . Im Grenzwert erhalten wir  $h_n \nearrow h = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ .

☺ Die so definierte Funktion  $h$  heißt auch **Blancmange-Kurve**, da sie an die gleichnamige Süßspeise in Puddingform erinnert. Es ist überaus bemerkenswert, dass wir auch eine extrem raue Funktion wie diese bequem und direkt in ihre Fourier-Reihe entwickeln können.



◆ Satz B4A: Takagi 1901

Die so definierte **Takagi-Funktion**  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \text{dist}(x, \frac{1}{n}\mathbb{Z})$  hat eine Reihe überaus bemerkenswerter Eigenschaften:

- 1 Die Funktion  $g$  ist stetig, aber in keinem Punkt differenzierbar.
- 2 Die Funktion  $g$  ist auf keinem Intervall  $[a, b]$  mit  $a < b$  monoton.
- 3 Sie nimmt in jedem Punkt  $x \in \mathbb{Q}$  ein striktes lokales Minimum an.

Die Funktion  $g$  ist demnach extrem rau. Können wir sie dennoch in eine Fourier-Reihe entwickeln? Wie bestimmen wir  $g(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}$ ? Die Funktion  $g$  hat die Periode  $T = 1$ , also die Grundfrequenz  $\omega = 2\pi$ . Zudem ist die Funktion  $g$  stetig, ihre Fourier-Koeffizienten sind demnach

$$c_k = \int_{t=0}^1 e^{-2\pi i k t} g(t) dt.$$

Also, ja, das gelingt im Prinzip, ... aber welche Werte  $c_k$  erhalten wir? Konvergiert die Fourier-Reihe überall gegen  $g$ ? sogar gleichmäßig?

(2) So finden wir die Reihendarstellung unserer Takagi-Funktion:

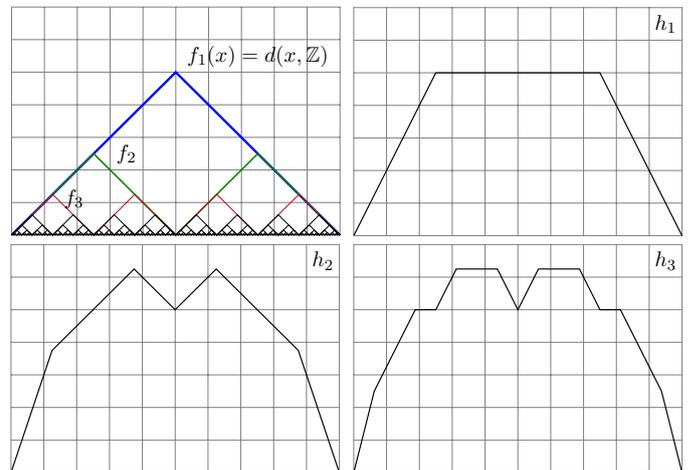
$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n!} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\cos[(2j+1)n!2\pi t]}{(2j+1)^2 n!}$$

Die Konvergenz gilt hierbei absolut, sie ist sogar gleichmäßig auf  $\mathbb{R}$ . Wir dürfen daher die beiden Reihen vertauschen und erhalten:

$$g(t) = \frac{e-1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2j+1)n!2\pi t]}{(2j+1)^2 n!} \stackrel{!}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(2\pi k t)$$

(3) Jede ganze Zahl  $k \in \mathbb{N}_{>1}$  schreibt sich auf höchstens zwei Weisen als  $k = n!(2j+1)$ . Die Koeffizienten  $a_k$  können wir daraus leicht ablesen:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{e-1}{2}, & a_1 &= -\frac{2}{\pi^2 1^2}, & a_2 &= -\frac{2}{\pi^2 1^2 2!} = -\frac{1}{\pi^2}, \\ a_3 &= -\frac{2}{\pi^2 3^2}, & a_4 &= 0, \\ a_5 &= -\frac{2}{\pi^2 5^2}, & a_6 &= -\frac{2}{\pi^2} \left[ \frac{1}{3^2 2!} + \frac{1}{1^2 3!} \right] = -\frac{4}{9\pi^2}, \dots \end{aligned}$$



(5) Wie zuvor in (1–2) finden wir die Reihendarstellung dieser Funktion:

$$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\cos[(2j+1)2^n 2\pi t]}{(2j+1)^2 2^n}$$

Die Konvergenz gilt hierbei absolut, sie ist sogar gleichmäßig auf  $\mathbb{R}$ . Wir dürfen daher die beiden Reihen vertauschen und erhalten:

$$h(t) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos[(2j+1)2^n 2\pi t]}{(2j+1)^2 2^n} \stackrel{!}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(2\pi k t)$$

Jede ganze Zahl  $k \in \mathbb{N}_{>1}$  schreibt sich eindeutig als  $k = 2^n(2j+1)$  mit  $n, j \in \mathbb{N}$ . Die Koeffizienten  $a_k$  können wir daraus leicht ablesen: Für  $k = 0$  gilt  $a_0 = 1/2$ , und für  $k = 2^n(2j+1)$  mit  $n, j \in \mathbb{N}$  gilt

$$a_k = -\frac{2}{\pi^2 2^n (2j+1)^2}.$$

☺ Für das Abklingverhalten  $a_k \rightarrow 0$  gilt demnach  $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{2^n(2j+1)^2} \leq \frac{1}{k}$ . Das passt zu einer stetigen, aber nirgends differenzierbaren Funktion.

Kapitel J

Die Fourier–Isometrie



*L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques.*

Joseph Fourier (1768–1830), *Théorie analytique de la chaleur* (1822)

Inhalt dieses Kapitels J

- 1 Parseval–Gleichung und Fourier–Isometrie
  - Die Energiegleichung und erste Anwendungsbeispiele
  - Die Fourier–Isometrie zwischen Funktion und Spektrum
  - Isoperimetrische Optimierung durch Fourier–Reihen
- 2 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz
  - Punktweise Konvergenz nach Dirichlet
  - Gleichmäßige Approximation nach Fejér
  - Wann gilt punktweise Konvergenz fast überall?
- 3 Konvergenz im quadratischen Mittel
  - Bestapproximation durch Orthogonalprojektion
  - Konvergenz im quadratischen Mittel
  - Vergleich der drei Konvergenzbegriffe
- 4 Fazit: Fourier–Analyse und Synthese
  - Zusammenfassung
  - Verständnisfragen

Motivation und Zielsetzung

**Fourier–Analyse** zerlegt das Signal  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ins Spektrum  $\hat{f}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ :

$$f \circlearrowleft \hat{f}, \quad \hat{f}(k) := \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} f(t) dt, \quad f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ik\omega t}.$$

Hierzu sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  absolut integrierbar auf  $[0, T]$  und  $T$ -periodisch. Der Fourier–Koeffizient  $\hat{f}(k)$  ist die Amplitude der Schwingung  $e^{ik\omega t}$ . Somit ist  $\hat{f}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  das Spektrum zur Grundfrequenz  $\omega = 2\pi/T$ .

**Fourier–Synthese:** Zu gegebenem Spektrum  $\hat{f}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  betrachten wir die zugehörigen Teilschwingungen  $\hat{f}(k) e^{ik\omega t}$  und rekonstruieren hieraus durch Überlagerung die Funktion  $f(x) = \sum_k \hat{f}(k) e^{ik\omega t}$ , falls konvergent. Konvergiert die Reihe? In welchem Sinne? Mit welchem Grenzwert?

Bislang nutzen wir **punktweise und gleichmäßige Konvergenz** (I2A). In diesem Kapitel geht es um **Konvergenz im quadratischen Mittel**. Für typische Anwendungen sind diese drei die zentralen Techniken. Wir nutzen zwei zentrale Sätze: Dirichlet I2A und Fischer–Riesz J1A.

Motivation und Zielsetzung

Im vorigen Kapitel haben wir einzelne Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  untersucht. In diesem Kapitel betrachten wir den Vektorraum aller Funktionen. Diese mutige Sichtweise verschafft uns einen besseren Überblick: Wir nutzen unser Wissen über Lineare Algebra und Skalarprodukte.

Die  $T$ -periodischen Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  bilden einen Vektorraum, ebenso bilden die Koeffizientenfolgen  $\hat{f}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  einen Vektorraum: Addition und Skalarmultiplikation sind jeweils punktweise erklärt, dies nutzen und schätzen wir bereits als praktische Rechenregeln.

Die Fourier–Analyse ist eine lineare Abbildung  $\mathcal{F}: f \mapsto \hat{f}$ . Die Fourier–Synthese ist eine lineare Abbildung  $\mathcal{F}^{-1}: \hat{f} \mapsto f$ . Auf welchen Funktionenräumen sollten wir diese nun betrachten? Die Isometrie  $L^2 \leftrightarrow \ell^2$  ist überraschend einfach und überaus nützlich!

Kurzum: Wir transformieren hier nicht nur einzelne Funktionen, sondern untersuchen, wie sich die Fourier–Analyse  $\mathcal{F}: L^2 \rightarrow \ell^2$  und die Fourier–Synthese  $\mathcal{F}^{-1}: \ell^2 \rightarrow L^2$  als lineare Abbildungen verhalten. Eine anschauliche Anwendung ist die isoperimetrische Ungleichung J1B.

Satz von Parseval: die Energiegleichung

Wir führen die Untersuchungen des vorangegangenen Kapitels I fort. Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  absolut integrierbar auf  $[0, T]$  und  $T$ -periodisch. Die **Fourier–Analyse** zerlegt das Signal  $f$  in sein Spektrum  $\hat{f}$ :

$$f \circlearrowleft \hat{f}, \quad \hat{f}(k) := \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} f(t) dt, \quad f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ik\omega t}.$$

Für die punktweise bzw. gleichmäßige Konvergenz dieser Reihe haben wir das praktische Dirichlet–Kriterium I2A, das wir in §J2 beweisen. In §J3 führen wir diese Fourier–Analyse weiter aus und beweisen: Dabei gilt die **Parseval–Gleichung**, auch **Energiegleichung** genannt:

$$\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{\ell^2} \quad \text{also} \quad \frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2$$

Genau dann ist die Funktion  $f$  quadrat-integrierbar,  $\int_0^T |f(t)|^2 dt < \infty$ , wenn die Koeffizientenfolge  $\hat{f}$  quadrat-summierbar ist,  $\sum_k |\hat{f}(k)|^2 < \infty$ .

Satz von Parseval: die Energiegleichung

😊 Die komplexe Schreibweise ist meist kürzer und übersichtlicher. Für reelle Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nutzen wir auch die Co/Sinus-Reihe:

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$$

Dank der einfachen Umrechnung  $c_{\pm k} = \frac{1}{2}(a_k \mp ib_k)$  erhalten wir:

$$\frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2$$

**Nachrechnen:** Es gilt  $|c_0|^2 = \frac{1}{4}a_0^2$  und  $|c_{\pm k}|^2 = \frac{1}{4}(a_k^2 + b_k^2)$  für  $k \neq 0$ ; jeder Summand tritt jeweils einmal für  $+k$  und einmal für  $-k$  auf.

😊 Wie so oft ist die komplexe Gleichung eleganter und leichter. Ich gebe beide Formeln an, damit Sie sie leicht zur Hand haben.

Physikalisch bedeutet die Parseval–Gleichung eine Energieerhaltung: Die Gesamtenergie des Signals  $f$  (als Integral auf der linken Seite) ist die Summe der Energien aller Teilschwingungen  $\hat{f}(k) e_k$  (rechte Seite).

Satz von Parseval: die Energiegleichung

Analogie: In der Physik ist  $\frac{m}{2}|v|^2$  die kinetische Energie einer Masse  $m$  mit Geschwindigkeit  $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ , also  $v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$ . Da unsere Basis  $(e_1, e_2, e_3)$  orthonormal ist, gilt  $|v|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$ : Die Gesamtenergie ist daher die Summe der Teilenergien!

Für trigonometrische Polynome, also endliche Summen statt Reihen, folgt die Parseval–Gleichung direkt aus dem Satz des Pythagoras: [I12T1](#) Die Gesamtlänge (aka Norm) des Vektors  $f$  zum Quadrat (linke Seite) ist gleich der Quadratsumme seiner Koordinaten  $\hat{f}(k)$  (rechte Seite).

Der Raum  $L^2$  entsteht als Abschluss der trigonometrischen Polynome: Die Funktionen  $e_k(t) = e^{ik\omega t}$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  bilden eine Hilbert–Basis (J3E), also ein vollständiges Orthonormalsystem für den Raum  $L^2([0, T], \mathbb{C})$  mit dem Skalarprodukt  $\langle f | g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \overline{f(t)} g(t) dt$ , wie oben erklärt.

Alternativ führt folgende Sichtweise und Rechnung ebenfalls zum Ziel: Wie in den folgenden Beispielen gilt Parseval für Rechteckfunktionen. Per Linearkombination gilt Parseval dann für alle Treppenfunktionen. Per Grenzübergang gilt Parseval für alle integrierbaren Funktionen!

Satz von Parseval: die Energiegleichung

Wir können uns  $f$  zum Beispiel als ein akustisches Signal vorstellen. Die Fourier–Analyse  $f \mapsto \hat{f}$  zerlegt das Signal  $f$  in sein Spektrum  $\hat{f}$ . Die Fourier–Synthese  $\hat{f} \mapsto f$  rekonstruiert aus dem Spektrum das ursprüngliche Signal. Dabei geht keinerlei Information verloren!

Anwendung: Aus dem Spektrum können wir Frequenzen leicht ausfiltern, abschwächen oder verstärken. Die Fußball-Weltmeisterschaft 2010 etwa war geprägt vom Brummen der Vuvuzela. Ihre Grundfrequenz liegt bei ca. 230Hz, dazu kommen noch Obertöne. Diese Frequenzen lassen sich gezielt herausfiltern durch (digitale) Fourier–Analyse–Synthese.

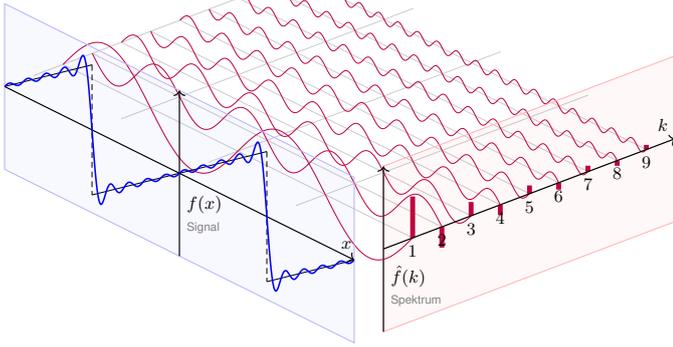


Der klare Vorteil: Man kann die störenden Frequenzen gezielt dämpfen; das Getröte ist trotz Filter zwar noch zu hören, doch spürbar gemindert. So kann die Fernsehzuschauer:in den Stadionjubiläum wieder genießen.

Wieviel Energie geht dem Signal hierdurch verloren? Genau die Energie der herausgefilterten Frequenzen. Ein Jubel für die Energiegleichung!

**Aufgabe:** Berechnen Sie beide Seiten der Energiegleichung für

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \sin(kx) = \begin{cases} x & \text{für } -\pi < x < \pi, \\ 0 & \text{für } x = \pm\pi. \end{cases}$$



**Lösung:** Wir berechnen beide Seiten der Energiegleichung

$$\frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2.$$

Das Integral ergibt:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

Die Reihe ergibt:

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

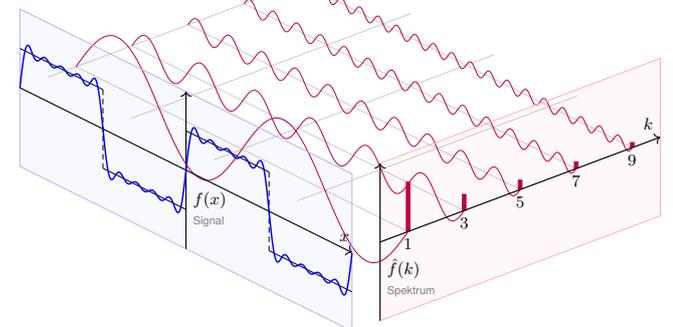
Dies entspricht der bemerkenswerten Gleichung [1321]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

☺ Diese Reihe haben wir im vorigen Kapitel ausgerechnet.

**Aufgabe:** Berechnen Sie beide Seiten der Energiegleichung für

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left[ \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right] = \begin{cases} +1 & \text{für } 0 < x < \pi, \\ -1 & \text{für } -\pi < x < 0, \\ 0 & \text{für } x \in \{0, \pm\pi\}. \end{cases}$$



**Lösung:** Wir berechnen beide Seiten der Energiegleichung

$$\frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2.$$

Das Integral ergibt:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = 1$$

Die Reihe ergibt:

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{8}{\pi^2(2j+1)^2}$$

Dies entspricht der bemerkenswerten Gleichung [1309]

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Diesen Wert können Sie alternativ auch aus  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$  ableiten. Sehen Sie wie?  
*Hinweis:* Sie können die ungeraden und die geraden Terme getrennt summieren und erhalten  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \sum_{j=0}^{\infty} 1/(2j+1)^2 + \sum_{j=1}^{\infty} 1/(2j)^2$ , die letzte Reihe ist gleich  $\frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ .

Die **quadrat-integrierbaren** Funktionen bilden den  $\mathbb{C}$ -Vektorraum

$$L^2 = L^2([0, T], \mathbb{C}) := \left\{ f : [0, T] \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{t=0}^T |f(t)|^2 dt < \infty \right\}.$$

Hierauf haben wir als **Skalarprodukt** und **Norm** die Integrale

$$\langle f | g \rangle_{L^2} := \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \overline{f(t)} g(t) dt \quad \text{und} \quad \|f\|_{L^2}^2 := \frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f(t)|^2 dt.$$

Die **quadrat-summierbaren** Folgen bilden den  $\mathbb{C}$ -Vektorraum

$$\ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) := \left\{ \hat{f} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 < \infty \right\}.$$

Hierauf haben wir als **Skalarprodukt** und **Norm** die Summen

$$\langle \hat{f} | \hat{g} \rangle_{\ell^2} := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(k)} \hat{g}(k) \quad \text{und} \quad \|\hat{f}\|_{\ell^2}^2 := \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2.$$

Das Produkt ist absolut integrierbar/summierbar dank Cauchy-Schwarz.

☺ Beide Vektorräume  $L^2$  und  $\ell^2$  scheinen zunächst sehr verschieden. Die Fourier-Isometrie enthüllt jedoch das Gegenteil: Sie sind isomorph!

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  abs. integrierbar auf  $[0, T]$  und  $T$ -periodisch,  $\omega = 2\pi/T$ .

Die **Fourier-Analyse** zerlegt das Signal  $f$  in sein Spektrum  $\hat{f}$ :

$$f \circ \bullet \hat{f}, \quad \hat{f}(k) := \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} f(t) dt, \quad f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ik\omega t}.$$

Es gilt die **Parseval-Gleichung**, auch **Energiegleichung** genannt:

$$\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{\ell^2} \quad \text{also} \quad \frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2$$

Dank dieser Gleichung gilt  $f \in L^2$  genau dann, wenn  $\hat{f} \in \ell^2$  gilt.

Für  $f, g \in L^2$  gilt die **Parseval-Gleichung** zudem für Skalarprodukte:

$$\langle f | g \rangle_{L^2} = \langle \hat{f} | \hat{g} \rangle_{\ell^2} \quad \text{also} \quad \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \overline{f(t)} g(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(k)} \hat{g}(k)$$

☺ Diese Beziehungen fassen wir in folgendem Satz zusammen:

Fourier-Analyse und -Synthese sind zueinander inverse Isometrien.

**Satz J1A: Fourier-Isometrie, Fischer-Riesz 1907**

Jeder Funktion  $f \in L^2$  ordnen wir ihre Fourier-Koeffizienten  $\hat{f} \in \ell^2$  zu:

$$\mathcal{F} : L^2([0, T], \mathbb{C}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) : f \mapsto \hat{f} \quad \text{mit} \quad \hat{f}(k) = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} f(t) dt$$

Umgekehrt definiert jede Koeffizientenfolge  $\hat{f} \in \ell^2$  eine Funktion  $f \in L^2$ :

$$\mathcal{F}^{-1} : \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \rightarrow L^2([0, T], \mathbb{C}) : \hat{f} \mapsto f \quad \text{mit} \quad f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ik\omega t}$$

Diese Abbildungen sind  $\mathbb{C}$ -linear und zueinander inverse Isometrien.

Norm und Skalarprodukt bleiben erhalten dank Parseval-Gleichung:

$$\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{\ell^2} \quad \text{also} \quad \frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2,$$

$$\langle f | g \rangle_{L^2} = \langle \hat{f} | \hat{g} \rangle_{\ell^2} \quad \text{also} \quad \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \overline{f(t)} g(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(k)} \hat{g}(k).$$

Diese Fourier-Isometrie ist der Höhepunkt unserer kurzen Einführung zu Fourier-Reihen. Sie perfektioniert die ersehnte Analyse / Synthese:

$$(\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}) : L^2([0, T], \mathbb{C}) \cong \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) : f \leftrightarrow \hat{f}$$

Diese Beziehung ist höchst erstaunlich und ungemein praktisch: Aus dem Signal  $f$  gewinnen wir das Spektrum  $\hat{f}$  und umgekehrt.

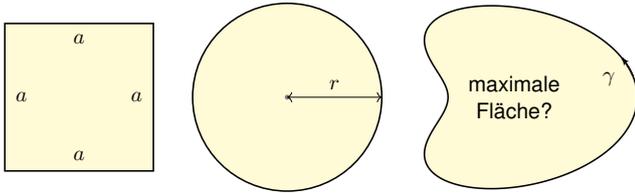
Aus  $f \in L^2 \subseteq L^1$  folgt  $\hat{f} \in \ell^2 \subseteq \ell^\infty$  dank Energiegleichung. Umgekehrt: Für  $\hat{f} \in \ell^2 \supseteq \ell^1$  konvergieren die Polynome  $f_n(t) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{ik\omega t}$  in  $L^2 \supseteq L^\infty$  gegen eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  dank Vollständigkeit von  $L^2$ .

Aus der Energiegleichung folgt die allgemeine Parseval-Gleichung. Damit das Integral einen Sinn hat, muss  $f, g$  absolut integrierbar sein. Damit die Reihe einen Sinn hat, muss  $\hat{f}, \hat{g}$  absolut summierbar sein. Beides wird garantiert durch die Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\|f \cdot g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^2} \cdot \|g\|_{L^2}, \quad \|\hat{f} \cdot \hat{g}\|_{\ell^1} \leq \|\hat{f}\|_{\ell^2} \cdot \|\hat{g}\|_{\ell^2}$$

Ungleichungen und Konvergenzbegriffe werden nachfolgend ausgeführt. Doch zuerst präsentiere ich eine elegante geometrische Anwendung.

Wieviel Fläche  $F$  können Sie mit einem Zaun der Länge  $L$  umgrenzen?



- Aufgabe:** (0) Wie verhalten sich  $L$ ,  $F$  und  $F/L^2$  bei Streckung um  $\lambda$ ?  
 (1) Welche Fläche  $F_{\square}$  erreichen Sie mit einem Quadrat von Umfang  $L$ ?  
 (2) Welche Fläche  $F_{\circ}$  erreichen Sie mit einem Kreis von Umfang  $L$ ?  
 (3) Geht noch mehr? Wie sehen optimale Kurven aus?

- Lösung:** (0)  $L$  wächst linear,  $F$  quadratisch,  $F/L^2$  bleibt konstant.  
 (1) Seitenlänge  $a = L/4$ , Fläche  $F_{\square} = a^2 = L^2/16$ . Das ist schon gut.  
 (2) Radius  $r = L/2\pi$ , Fläche  $F_{\circ} = \pi r^2 = L^2/4\pi$ . Das ist noch besser!

(1) Wir entwickeln  $\gamma, \gamma' : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  in ihre Fourier-Reihen

$$\gamma(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikt} \quad \text{und} \quad \gamma'(t) \sim \sum_{k \neq 0} ik c_k e^{ikt}.$$

Wir lesen diese Beziehung von rechts nach links als Integration (I3A). Dank Energiegleichung und Parametrisierung nach Weglänge folgt:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 |c_k|^2 \stackrel{(\text{E})}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \underbrace{|\gamma'(t)|^2}_{=1} dt = 1$$

(2) Die umschlossene Fläche berechnen wir mit Green und Parseval:

$$\begin{aligned} F &\stackrel{(\text{G})}{=} \frac{1}{2} \int_{t=0}^{2\pi} \gamma_1 \gamma_2' - \gamma_2 \gamma_1' dt = \frac{1}{2} \int_{t=0}^{2\pi} \text{Im} \left[ (\gamma_1 - i\gamma_2)(\gamma_1' + i\gamma_2') \right] dt \\ &= \pi \text{Im} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \bar{\gamma} \gamma' dt \right] \stackrel{(\text{P})}{=} \pi \text{Im} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{c}_k \cdot ik c_k \right] = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} k |c_k|^2 \end{aligned}$$

Gleichung (G) ist die Greensche Formel [E209] für den Flächeninhalt.

Das isoperimetrische Problem ist eine klassische Optimierungsaufgabe: Wieviel Fläche  $F$  können Sie mit einem Zaun der Länge  $L$  umgrenzen? Die Lösung mit Fourier-Reihen grenzt an Zauberei! Was passiert hier?

Nach ersten Beispielen wollen wir *alle* Möglichkeiten erkunden. Wir wollen alle periodischen Funktionen  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  untersuchen und zu gegebenem Umfang  $L$  die größtmögliche Fläche  $F$  finden.

Der Raum aller Funktionen ist allerdings sehr unübersichtlich. Die Fourier-Isometrie übersetzt dies in ein Problem über Reihen. Dieses ist wesentlich übersichtlicher und kann leicht gelöst werden.

Dabei haben wir die Fourier-Isometrie voll ausgenutzt: Die Übersetzung bewahrt alle wesentlichen Informationen! Dieses schöne Ergebnis bildet eine würdige Illustration: Transformation zur Vereinfachung ist durchaus typisch.

☺ Darum geht es in Mathematik und Wissenschaft allgemein: Zusammenhänge verstehen und geeignete Werkzeuge entwickeln, um damit konkrete Probleme zu lösen, effizient, sicher, korrekt.



Ein klassisches Optimierungsproblem: Der Legende nach wurde Karthago gegründet durch die phönizische Königin Elissa, römisch Dido genannt. Der lokale Herrscher versprach ihr dazu so viel Land, wie sie mit einer Kuhhaut umspannen könne. Diese schnitt Dido in dünne Streifen der Gesamtlänge  $\ell$  und maß die Grenze des zukünftigen Karthago ab, das auf einer Seite durch die gerade Mittelmeerküste begrenzt wird.

- Aufgabe:** (1) Welche Kurve wählt Dido, um die Fläche zu maximieren?  
 (2) Und wenn zwei Küstenpunkte der Stadtgrenze vorgegeben sind?  
 ☺ Intuition ist gut, aber vage. Schlüssige Argumente sind besser.

(1) Wir betrachten die Fläche, die von einer Geraden  $G$  und einem Weg  $\gamma$  der Länge  $\ell$  begrenzt wird. Durch Spiegelung an  $G$  erweitern wir  $\gamma$  zu einem geschlossenen Weg. Dabei verdoppeln sich die Länge und der umschlossene Flächeninhalt. Nach der isoperimetrischen Ungleichung folgt  $2F \leq (2\ell)^2/(4\pi)$ , also  $F \leq \ell^2/(2\pi)$ . Nur für einen Halbkreis erhalten wir Gleichheit.

(2) Wir fixieren zwei Punkte  $A$  und  $B$  mit Abstand  $< \ell$  auf der Geraden  $G$  und verlangen, dass  $\gamma$  von  $A$  nach  $B$  läuft. Sei  $\Gamma$  der Kreisbogen der Länge  $\ell$  von  $A$  nach  $B$ . Wir vergleichen den von  $\gamma$  und  $\Gamma$  umschlossenen Flächeninhalt, jeweils ergänzt durch den fehlenden Kreisbogen jenseits  $G$ . Die isoperimetrische Ungleichung besagt, dass der Flächeninhalt genau für  $\gamma = \Gamma$  maximal ist.

Wie beschreiben wir einen geschlossenen Weg  $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ ? Sei  $\gamma'$  absolut integrierbar mit  $\gamma(t) = \gamma(0) + \int_0^t \gamma'(\tau) d\tau$  und  $\gamma(L) = \gamma(0)$ . Wir parametrisieren nach Weglänge, mit konstanter Geschwindigkeit  $|\gamma'(t)| = 1$  für alle  $t$ . Nach Skalierung können wir  $L = 2\pi$  annehmen. Beispiel: Der Kreis  $\gamma(t) = c_0 + c_1 e^{it}$  mit  $c_0, c_1 \in \mathbb{C}$  und  $|c_1| = 1$ . Die umschlossene Fläche ist  $F = \frac{1}{2} \text{Im} \int_{t=0}^{2\pi} \bar{\gamma} \gamma' dt = \pi$ .



- Aufgabe:** Untersuchen Sie die Fourier-Entwicklung  $\gamma(t) = \sum_k c_k e^{ikt}$ .  
 (1) Entwickeln Sie  $\gamma'$  und berechnen Sie  $\sum_k k^2 |c_k|^2$  dank Parseval.  
 (2) Berechnen Sie die von  $\gamma$  umschlossene Fläche  $F$  mit Green.  
 (3) Gilt immer  $F \leq \pi$ ? (4) Für welche Kurven gilt Gleichheit?

(3) Wir vergleichen unsere Fläche  $F$  mit der Kreisfläche  $\pi$ :

$$|F| \stackrel{(\text{I})}{=} \left| \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} k |c_k|^2 \right| \leq \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k| \cdot |c_k|^2 \quad \text{und} \quad \pi \stackrel{(\text{II})}{=} \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 \cdot |c_k|^2$$

Die erste Reihe ist termweise kleiner-gleich der zweiten:

$$|F| - \pi \leq \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{(|k| - k^2)}_{\leq 0} |c_k|^2 \leq 0.$$

Also gilt  $|F| \leq \pi$ : Die Kreisfläche kann nicht übertroffen werden!

(4) Gleichheit gilt nur, wenn  $c_k = 0$  für alle  $k \notin \{-1, 0, 1\}$ . Also

$$\gamma(t) = c_{-1} e^{-it} + c_0 + c_1 e^{it} \quad \text{mit} \quad |c_1|^2 + |c_{-1}|^2 \stackrel{(\text{II})}{=} 1.$$

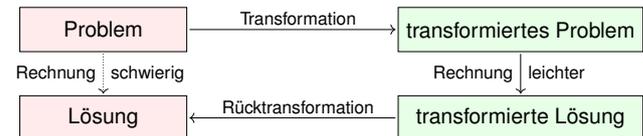
Aus  $F = +\pi$  folgt  $|c_1|^2 - |c_{-1}|^2 \stackrel{(\text{II})}{=} +1$ , also  $|c_1| = 1$  und  $|c_{-1}| = 0$ .

Aus  $F = -\pi$  folgt  $|c_1|^2 - |c_{-1}|^2 \stackrel{(\text{II})}{=} -1$ , also  $|c_1| = 0$  und  $|c_{-1}| = 1$ .

☺ Das heißt, nur Kreise  $\gamma(t) = c_0 + e^{i(\alpha \pm t)}$  maximieren die Fläche! Alle anderen Kurven umschließen strikt kleineren Flächeninhalt.

Wieviel Fläche  $F$  können Sie mit einem Zaun der Länge  $L$  umgrenzen?

☺ Fourier transformiert ein schwieriges Problem in ein leichtes!



☺ Wir haben so den Beweis von Hurwitz (1902) nachgerechnet:

**Satz J1B: isoperimetrische Ungleichung**

Sei  $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein geschlossener Weg, also  $\gamma(0) = \gamma(L)$ . Zudem sei  $\gamma$  stückweise stetig differenzierbar und habe Länge  $L$ .

Für den umschlossenen Flächeninhalt  $F$  gilt immer  $F \leq F_{\circ} = L^2/4\pi$ . Gleichheit gilt nur, wenn  $\gamma$  einen Kreis vom Umfang  $L$  beschreibt.

Das ist anschaulich plausibel und nun auch nachvollziehbar bewiesen!

Wer Freude am Knobeln hat, mag vielleicht folgende Varianten untersuchen: Sie verfügen über einen Zaun der Länge  $L$ , entweder starr (ein Geradensegment) oder flexibel (eine stückweise stetig differenzierbare Kurve). In einem großen rechteckigen Garten möchten Sie einen Bereich für Ihre Kaninchen einzäunen. Welche Fläche ist hier höchstens möglich? Welche Zaunkurve maximiert die Fläche? Was gilt für einen kreisförmigen Garten? Was gilt für ein parabelförmig auslaufendes Ende des Gartens? Machen Sie sich Skizzen und argumentieren Sie umsichtig!

Zum Ausklang nenne ich noch ein einfaches, aber erhellendes Zahlenbeispiel. Es ist eine schöne, leichte Aufgabe, doch sie erfordert geometrischen Sachverstand und quantitativen Vergleich. Mit den nützlichen Werkzeugen Ihrer Vorlesung zur HM3 gelingt Ihnen die Lösung nun leicht:

**Aufgabe:** (nach einer Klausuraufgabe vom Februar 2012)

(1) Können Sie mit 12m Zaun eine Fläche von 12m<sup>2</sup> umschließen?

(2) Können Sie mit 13m Zaun eine Fläche von 13m<sup>2</sup> umschließen?

**Lösung:** Wir wissen, dass der Kreis den Flächeninhalt  $F$  maximiert:

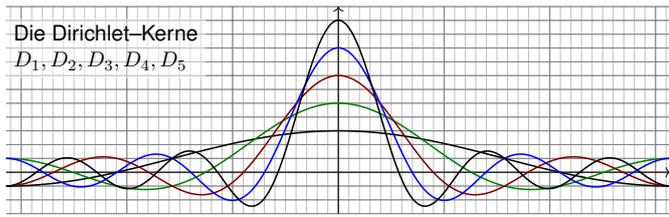
$$F \leq F_{\circ} = L^2/4\pi, \quad \text{und Gleichheit gilt nur für den Kreis (J1B).}$$

(1) Für  $L = 12$  finden wir  $F_{\circ} = L^2/4\pi < 12$ . (Es gilt  $12 < 4\pi < 13$ .)

(2) Für  $L = 13$  erreicht der Kreis die Fläche  $F_{\circ} = L^2/4\pi > 13$ .

Der Satz von Dirichlet I2A ist der Grundstein der Fourier-Reihen. Wir rechnen ihn nun geduldig nach. Nur für Unerschrockene!

Die Dirichlet-Kerne  
 $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5$



**Aufgabe:** (1) Rechnen Sie die Formel für den **Dirichlet-Kern** nach:

$$D_n(x) := \sum_{k=-n}^n e^{ikx} = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}$$

(2) Für das  $n$ -te Fourier-Polynom von  $f$  folgt die **Faltungformel**:

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt$$

**Lösung:** (1) Wir nutzen die geometrische Reihe für  $z = e^{ix}$ :

$$(e^{-ix/2} - e^{+ix/2}) \sum_{k=-n}^n e^{ikx} = e^{-i(n+1/2)x} - e^{+i(n+1/2)x}$$

$$D_n(x) = \frac{e^{-i(n+1/2)x} - e^{+i(n+1/2)x}}{e^{-ix/2} - e^{+ix/2}} = \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}$$

(2) Das  $n$ -te Fourier-Polynom von  $f$  ist definiert durch

$$f_n(x) := \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \quad \text{mit den Koeffizienten} \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} f(t) dt.$$

Wir setzen ein und fassen dank Linearität zusammen:

$$2\pi f_n(x) \stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{k=-n}^n \left[ \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} f(t) dt \right] e^{ikx} \stackrel{\text{Lin}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \sum_{k=-n}^n e^{ik(x-t)} \right] dt$$

$$\stackrel{\text{Def}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt \quad \stackrel{\text{Subst}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-s) D_n(s) ds$$

**Satz J2A:** Konvergenz in einem vorgegebenen Punkt

Angenommen,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  erfüllt die Dirichlet-Bedingung im Punkt  $x$ , d.h. beide Grenzwerte  $f(x\pm)$  und beide Ableitungen  $f'(x\pm)$  existieren. Dann konvergiert im Punkt  $x$  die Fourier-Reihe  $f_n(x)$  gemäß

$$f_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \rightarrow \frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)] \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

**Beweis:** Dank unserer obigen Vorbereitungen (1) und (2) wissen wir:

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)}{\sin(t/2)} \sin((n+1/2)t) dt$$

Die Konvergenz für  $n \rightarrow \infty$  beweisen wir durch folgende Grenzwerte:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 f(x+t) D_n(t) dt \rightarrow \frac{1}{2} f(x-),$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt \rightarrow \frac{1}{2} f(x+).$$

Wir zeigen den rechten Grenzwert. Hierzu nutzen wir die Funktion

$$g: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}: t \mapsto \begin{cases} \frac{f(x+t)-f(x+)}{\sin(t/2)} & \text{für } 0 < t \leq \pi, \\ 0 & \text{für } -\pi \leq t \leq 0. \end{cases}$$

Für  $t \searrow 0$  gilt  $g(t) \rightarrow 2f'(x+)$ . Demnach ist mit  $f$  auch  $g$  integrierbar.

Für  $D_n(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kt)$  gilt  $\int_0^{\pi} D_n(t) dt = \int_0^{\pi} D_n(t) dt = \pi$ .

$$\frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt - \frac{1}{2} f(x+) = \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{\pi} [f(x+t) - f(x+)] D_n(t) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x+)}{\sin(t/2)} \sin((n+1/2)t) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin((n+1/2)t) dt \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

Der letzte Grenzwert ist das Riemann-Lebesgue-Lemma I3B.

**Aufgabe:** (3) Zeigen Sie für  $0 \leq t \leq s \leq \pi$  die Ungleichungen

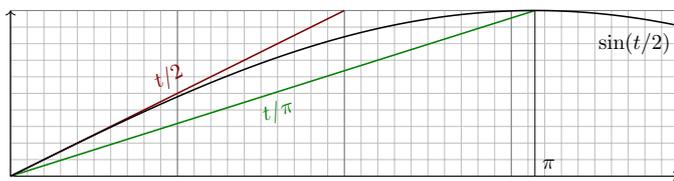
$$\frac{t}{\pi} \leq \sin\left(\frac{t}{2}\right) \leq \frac{t}{2} \quad \text{und} \quad \frac{t}{\sin(t/2)} \leq \frac{s}{\sin(s/2)}$$

(4) Sei  $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  absolut stetig mit  $f(0) = 0$  und  $|f'| \leq L$ .

Zeigen Sie für  $f(t)$  und  $g(t) = f(t)/\sin(t/2)$  die Schranken

$$|f(t)| \leq Lt, \quad |g(t)| \leq L\pi, \quad |g'(t)| \leq \frac{4L}{t}.$$

**Lösung:** (3) Kurvendiskussion:  $\sin(t/2)$  ist konkav auf  $[0, \pi]$ .



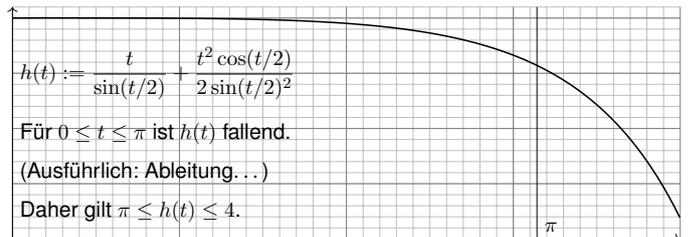
(4) Mit  $f(0) = 0$  und  $|f'| \leq L$  gilt

$$|f(t)| = \left| \int_{\tau=0}^t f'(\tau) d\tau \right| \leq \int_{\tau=0}^t |f'(\tau)| d\tau \leq \int_{\tau=0}^t L d\tau = Lt,$$

$$|g(t)| = \left| \frac{f(t)}{\sin(t/2)} \right| = \frac{|f(t)|}{|\sin(t/2)|} \leq \frac{Lt}{\sin(t/2)} \leq \frac{Ls}{\sin(s/2)} \leq L\pi,$$

$$|g'(t)| = \left| \frac{f'(t)}{\sin(t/2)} - \frac{f(t) \cos(t/2)/2}{\sin^2(t/2)} \right| \leq \frac{L}{\sin(t/2)} + \frac{Lt \cos(t/2)}{2 \sin^2(t/2)} \leq \frac{4L}{t}.$$

Die letzte Ungleichung erhalten wir durch eine Kurvendiskussion:



**Satz J2B:** gleichmäßige Konvergenz mit Fehlerschranke

Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  sei periodisch und absolut stetig mit  $|f'| \leq L$ . Dann konvergieren die Fourier-Polynome  $f_n$  gleichmäßig gegen  $f$ : Für alle  $x \in \mathbb{R}$  und  $n \geq 7$  gilt die explizite Fehlerschranke

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 2L \cdot \ln(n)/n \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

**Beweis:** Nach Verschiebung dürfen wir  $x = 0$  und  $f(x) = 0$  annehmen. Dank unserer obigen Vorbereitungen (1) und (2) wissen wir:

$$f_n(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{\sin(t/2)} \sin((n+1/2)t) dt$$

Wir zerlegen dies in  $\int_{-\pi}^{-\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\pi}$  für  $\varepsilon = \pi/(2n+1)$ . Dank (4) gilt:

$$\int_0^{\varepsilon} \left| \frac{f(t)}{\sin(t/2)} \right| \sin((n+1/2)t) dt \leq \frac{L\varepsilon}{\sin(\varepsilon/2)} \int_0^{\varepsilon} \sin((n+1/2)t) dt$$

$$= \frac{L\varepsilon}{\sin(\varepsilon/2)} \cdot \left[ -\frac{\cos((n+1/2)t)}{n+1/2} \right]_0^{\varepsilon} = \frac{L}{2n+1} \cdot \frac{2\pi/(2n+1)}{\sin(\pi/(4n+2))}$$

Für  $\int_{-\varepsilon}^0$  gilt dieselbe Schranke. Für  $\int_{\varepsilon}^{\pi}$  nutzen wir partielle Integration:

$$\int_{\varepsilon}^{\pi} f(t) D_n(t) dt = \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{f(t)}{\sin(t/2)} \sin((n+1/2)t) dt$$

$$= \left[ -\frac{f(t)}{\sin(t/2)} \frac{\cos((n+1/2)t)}{n+1/2} \right]_{\varepsilon}^{\pi} + \int_{\varepsilon}^{\pi} \left[ \frac{f(t)}{\sin(t/2)} \right]' \frac{\cos((n+1/2)t)}{n+1/2} dt$$

Für  $\varepsilon = \pi/(2n+1)$  verschwindet die Auswertung  $[\dots]_{\varepsilon}^{\pi}$ . Mit (4) bleibt:

$$\left| \int_{\varepsilon}^{\pi} f(t) D_n(t) dt \right| \leq \int_{\varepsilon}^{\pi} \left| \left[ \frac{f(t)}{\sin(t/2)} \right]' \right| \cdot \frac{1}{n+1/2} dt$$

$$\leq \frac{2}{2n+1} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{4L}{t} dt = \frac{8L}{2n+1} [\ln \pi - \ln \varepsilon] = \frac{8L}{2n+1} \ln(2n+1)$$

Für  $\int_{-\pi}^{-\varepsilon}$  gilt dieselbe Schranke. Für den Gesamtfehler erhalten wir:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{L}{2n+1} \left[ \frac{2/(2n+1)}{\sin(\pi/(4n+2))} + \frac{8}{\pi} \ln(2n+1) \right] \leq 2L \cdot \frac{\ln n}{n}$$

Die letzte Ungleichung gilt für  $n \geq 7$ , erneut dank Kurvendiskussion.

### Gleichmäßige Approximation nach Fejér

J209  
Ergänzung

- ☺ Die Fourier-Polynome  $f_n$  zu  $f$  sind die  $L^2$ -Bestapproximation. [J310]
- ☺ Das Dirichlet-Kriterium J2A / I2A sichert punktweise Konvergenz.
- ☺ Ist  $f$  absolut stetig mit  $|f'| \leq L$ , so gilt gleichmäßige Konvergenz auf ganz  $\mathbb{R}$  gemäß  $|f_n - f| \leq 2L \cdot \ln(n)/n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ , siehe J2B / I2A.
- ☹ Ohne Differenzierbarkeit geht's nicht: Es gibt stetige Funktionen  $f$ , deren Fourier-Reihe  $f_n(x)$  in allen Punkten  $x \in \mathbb{Q}$  divergiert. [J218]

Geniale Lösung: Lipót Fejér nutzte statt  $f_n$  das arithmetische Mittel

$$f_n^* := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_n = \sum_{k=-n}^n \frac{n-|k|}{n} c_k e^{ikx}.$$

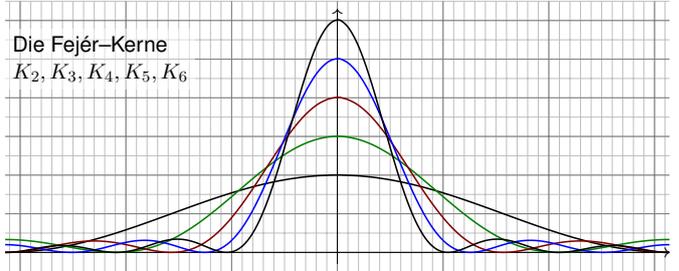
- ☺ Diese Gewichtung dämpft Oszillationen und konvergiert immer:

#### Satz J2c: Gleichmäßige Approximation, Fejér 1911

Vorgelegt sei eine beliebige stetige Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  von Periode  $T$ . Die Fejér-Polynome  $f_n^*$  konvergieren gleichmäßig gegen  $f$ , das heißt: Der maximale Abstand wird beliebig klein,  $\max|f_n^* - f| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

### Gleichmäßige Approximation nach Fejér

J210  
Ergänzung



**Aufgabe:** (1) Berechnen Sie **Dirichlet-Kern** und **Fejér-Kern**:

$$D_n(x) := \sum_{k=-n}^n e^{ikx} \quad \text{und} \quad K_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x)$$

(2) Für das  $n$ -te Fejér-Polynom von  $f$  folgt die **Faltungformel**:

$$f_n^*(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_n(x-t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K_n(t) dt$$

### Gleichmäßige Approximation nach Fejér

J211  
Ergänzung

**Lösung:** (1) Wir kennen bereits die Dirichlet-Kerne [J201]:

$$D_n(x) = \frac{e^{i(n+1/2)x} - e^{-i(n+1/2)x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} = \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}$$

Aufsummieren führt uns glücklich zu einer Teleskopsumme:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{i(k+1/2)x} - e^{-i(k+1/2)x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} \cdot \frac{e^{ix/2} - e^{-ix/2}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{i(k+1)x} - e^{ikx} + e^{-i(k+1)x} - e^{-ikx}}{(e^{ix/2} - e^{-ix/2})^2} \\ &= \frac{e^{inx} - 2 + e^{-inx}}{(e^{ix/2} - e^{-ix/2})^2} = \frac{\sin(nx/2)^2}{\sin(x/2)^2} = \frac{1 - \cos(nx)}{1 - \cos(x)} \end{aligned}$$

- ☺ Beide Kerne sind normiert:  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt = 1$ . Anders als der Dirichlet-Kern  $D_n$  erfüllt der Fejér-Kern zudem  $K_n \geq 0$ .

### Gleichmäßige Approximation nach Fejér

J212  
Ergänzung

(2) Das  $n$ -te Fourier-Polynom von  $f$  ist definiert durch

$$f_n(x) := \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \quad \text{mit den Koeffizienten} \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} f(t) dt.$$

Wir setzen ein und fassen dank Linearität zusammen [J201]:

$$f_n(x) \stackrel{\text{Lin}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt \stackrel{\text{Subs}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-s) D_n(s) ds$$

Das  $n$ -te Fejér-Polynom von  $f$  ist das arithmetische Mittel:

$$\begin{aligned} f_n^*(x) &\stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k(x) \stackrel{\text{Lin}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x-t) \right] dt \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_n(x-t) dt \stackrel{\text{Subs}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-s) K_n(s) ds \end{aligned}$$

- ☺ Diese Integraldarstellung nutzen wir nun zur Fehlerabschätzung.

### Gleichmäßige Approximation nach Fejér

J213  
Ergänzung

#### Beweis des Approximationssatzes von Fejér:

Der Fejér-Kern erfüllt  $K_n \geq 0$  und  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt = 1$ . Zudem gilt:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} K_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{t=\delta}^{\pi} \frac{\sin(nt/2)^2}{n \sin(t/2)^2} dt \leq \frac{1}{\pi} \int_{t=\delta}^{\pi} \frac{1}{n(t/\pi)^2} dt \\ &= \frac{1}{n} \int_{t=\delta}^{\pi} \frac{\pi}{t^2} dt = \frac{1}{n} \left[ -\frac{\pi}{t} \right]_{t=\delta}^{\pi} = \frac{1}{n} \left[ \frac{\pi}{\delta} - 1 \right] < \frac{\pi}{n\delta} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Das bedeutet, die Gesamtmasse 1 konzentriert sich um 0.

Wir müssen nur noch das Verhalten für  $|t| < \delta$  kontrollieren.

Hierzu genügt uns die vorausgesetzte Stetigkeit der Funktion  $f$ .

Dank Kompaktheit des Periodenintervalls  $[-\pi, \pi]$  ist die Funktion  $f$  sogar gleichmäßig stetig: Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\delta \in ]0, \pi[$  so, dass für alle  $x \in \mathbb{R}$  und  $|t| < \delta$  die Schranke  $|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon/2$  gilt.

Damit erhalten wir mühelos folgende Schranke:

$$0 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t| < \delta} |f(x-t) - f(x)| K_n(t) dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t| < \delta} \frac{\varepsilon}{2} K_n(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

### Gleichmäßige Approximation nach Fejér

J214  
Ergänzung

Nach diesen länglichen, aber elementaren Vorbereitungen können wir nun den Approximationsfehler der Fejér-Polynome  $f_n^*$  abschätzen:

$$\begin{aligned} |f_n^*(x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x-t) - f(x)] K_n(t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| K_n(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|t| < \delta} \frac{\varepsilon}{2} K_n(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} 2 \max|f| K_n(t) dt \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2\pi \max|f|}{n\delta} < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq \frac{4\pi}{\varepsilon} \max|f| \end{aligned}$$

Ausführlich gesagt: Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein Index  $n_0 \in \mathbb{N}$ , sodass für alle  $n \geq n_0$  die gleichmäßige Fehlerschranke  $|f_n^* - f| < \varepsilon$  gilt.

Das beweist die Aussage des Satzes: Die Fejér-Polynome  $f_n^*$  konvergieren gleichmäßig gegen die vorgegebene Funktion  $f$ .

- ☺ Die Konvergenz kann sehr langsam sein, aber sie gilt immer! Je glatter die Funktion  $f$ , desto schneller die Konvergenz.

### Gleichmäßige Approximation nach Fejér

J215  
Ergänzung

Ist  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  absolut stetig mit  $|f'| \leq L$ , so wissen wir [I216]:

$$|f_n(x) - f(x)| < 2L \cdot \ln(n)/n \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

**Aufgabe:** Die Fejér-Polynome konvergieren ebenso schnell:

$$|f_n^*(x) - f(x)| < 4L \cdot \ln(n)/n \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

**Lösung:** Wir führen die Rechnung des vorigen Beweises fort:

$$\begin{aligned} |f_n^*(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| K_n(t) dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} L|t| K_n(t) dt \leq \frac{L}{\pi} \int_0^{\pi} t \frac{\sin(nt/2)^2}{n \sin(t/2)^2} dt \\ &\leq \frac{L}{\pi} \int_0^{\delta} t \cdot 4n dt + \frac{L}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} \frac{t}{n(t/\pi)^2} dt = \frac{Ln}{\pi} 2\delta^2 + \frac{L\pi}{n} (\ln \pi - \ln \delta) \\ &= \frac{L}{n} \left[ \frac{\pi}{2} + \pi(\ln 2 + \ln n) \right] < 4L \frac{\ln n}{n} \quad (\text{Skizze!}) \end{aligned}$$

In der letzten Zeile setzen wir  $\delta = \pi/2n$  und verlangen  $n \geq 80$ . (Die Konstante 4 lässt sich noch verbessern, das ist aber mühsam.)

### Gleichmäßige Approximation nach Fejér

J216  
Ergänzung

☺ Fejérs Trick lässt sich allgemein zur Summation anwenden: Für schwach divergente Reihen wird damit Konvergenz erzwungen! Für  $a_k \in \mathbb{C}$  konvergiert die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  gegen  $s$ , kurz  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s$ , wenn die Folge der Partialsummen  $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$  gegen  $s$  konvergiert. Dann konvergieren auch die Mittelwerte  $s_n^* = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} s_k$  gegen  $s$ , etwas langsamer, aber Konvergenz und Grenzwert sind dieselben. Umgekehrt kann aber  $s_n^*$  konvergieren, selbst wenn  $s_n$  divergiert:

**Aufgabe:** Wir betrachten  $a_k = (-1)^k (k+1)^c$ . Für welche  $c \in \mathbb{R}$  konvergiert die Folge  $s_n$ ? und  $s_n^*$ . Was passiert speziell für  $c = 0$ ?

**Lösung:** Für  $c = 0$  divergiert die Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$ . Hingegen konvergiert die Folge  $(s_n^*)_{n \in \mathbb{N}} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \dots) \rightarrow \frac{1}{2}$ .

Die Folge  $s_n$  konvergiert für  $c < 0$  dank Leibniz (Satz B3G) und divergiert für  $c \geq 0$  dank Cauchy. Die Folge  $s_n^*$  konvergiert für  $c \leq 0$  wie gesehen.

**Aufgabe:** Für jede stetige Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  garantiert Fejérs Satz: Falls die Fourier-Reihe  $f_n(x)$  im Punkt  $x$  konvergiert, dann gegen  $f(x)$ .

**Lösung:** Aus  $f_n(x) \rightarrow s$  folgt  $f(x) = \lim f_n^*(x) = \lim f_n(x) = s$ .

### Wann gilt punktweise Konvergenz fast überall?

J217  
Ergänzung

In unseren (noch sehr bescheidenen) Beispielen sind wir von einer (harmlosen) Funktion  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  ausgegangen und haben eine (harmlose) Fourier-Reihe  $f \sim \sum c_k e_k$  erhalten. Wenn wir diese Reihe nun in einem Punkt  $x \in \mathbb{R}$  auswerten, so erhalten wir  $f(x) = \sum c_k e^{ikx}$  für fast jedes  $x \in \mathbb{R}$ . Das ist eine wichtige und nützliche Eigenschaft!

☺ Dies gilt insbesondere für jede stückweise stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion  $f$  dank des Dirichlet-Kriteriums I2A.

⚠ Die Konvergenz einer Fourier-Reihe müssen wir jeweils prüfen. Punktweise Konvergenz ist keineswegs selbstverständlich:

#### Satz J2D: Kolmogorov 1923

Es gibt integrierbare Funktionen  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ , d.h.  $\int_{x=0}^{2\pi} |f(x)| dx < \infty$ , deren Fourier-Reihe  $\sum_k c_k e^{ikx}$  in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$  divergiert.

Diese Frage war lange offen, und Kolmogorovs Antwort kam als Schock. Dieser Satz dient uns hier nur als Warnung vor naiven Trugschlüssen. Solche Beispiele sind eher exotisch, wie uns folgender Satz versichert.

### Wann gilt punktweise Konvergenz fast überall?

J218  
Ergänzung

Punktweise Konvergenz ist keineswegs selbstverständlich, aber... ☺ Ein klein wenig mehr als Integrierbarkeit genügt fast überall:

#### Satz J2E: Carleson 1966, Hunt 1968

Gilt  $\int_{x=0}^{2\pi} |f(x)|^p dx < \infty$  für ein  $p > 1$ , so konvergiert die Fourier-Reihe fast überall gegen  $f$ , d.h. in allen  $x \in \mathbb{R} \setminus N$  außer einer Nullmenge  $N$ .

☺ Dies gilt insbesondere für jede stetige Funktion. Die Konvergenz in einem vorgegebenen Punkt  $x \in \mathbb{R}$  garantiert das Dirichlet-Kriterium I2A.

⚠ Konvergenz in *allen* Punkten hingegen wäre zu viel verlangt:

#### Satz J2F: Kahane & Katznelson 1966

Zu jeder Nullmenge  $N \subseteq \mathbb{R}$  existiert eine stetige Funktion, deren Fourier-Reihe in allen Punkten  $x \in N$  divergiert.

Diese Sätze sind extrem schwierig zu beweisen und dienen hier nur zur Illustration — und als Warnung vor allzu naiven Trugschlüssen. Das folgende schön-konkrete Beispiel illustriert die Problematik.

### Fejérs Gegenbeispiel: divergente Fourier-Reihe

J219  
Ergänzung

Gibt es stetige periodische Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , deren Fourier-Reihe nicht konvergiert? Können wir solche Beispiele konkret angeben? Ja!



#### Satz J2G: Fejér 1911

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gerade,  $2\pi$ -periodisch und für  $0 \leq x \leq \pi$  gegeben durch

$$f(x) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \sin((i^{2^i} + 1/2) \cdot x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx).$$

Die Funktion  $f$  ist stetig, aber in  $x = 0$  divergiert ihre Fourier-Reihe.

Das Dirichlet-Kriterium I2A gibt hinreichende Kriterien zur Konvergenz. Dies ist hier jedoch nicht erfüllt, denn  $f'(0+) = +\infty$  und  $f'(0-) = -\infty$ . Tatsächlich divergiert  $f_n(0)$  für  $n \rightarrow \infty$ , wie wir nun nachrechnen.

### Fejérs Gegenbeispiel: divergente Fourier-Reihe

J220  
Ergänzung



#### Satz J2H: Fejér 1911

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gerade,  $2\pi$ -periodisch und für  $0 \leq x \leq \pi$  gegeben durch

$$f(x) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \sin((i^{i^2} + 1/2) \cdot x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx).$$

Die Funktion  $f$  ist stetig, aber in  $x = 0$  divergiert ihre Fourier-Reihe.

☺ In fast jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$  gilt Konvergenz  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  (J2E).

☺ Die Fejér-Polynome  $f_n^*$  konvergieren gleichmäßig gegen  $f$  (J2C).

Die Divergenz ist entsprechend subtil; wir rechnen sie jetzt nach.

### Fejérs Gegenbeispiel: divergente Fourier-Reihe

J221  
Ergänzung

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gerade,  $2\pi$ -periodisch und für  $0 \leq x \leq \pi$  gegeben durch

$$f(x) := \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \sin(\omega_i x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx).$$

mit Frequenzen  $\omega_i \in \mathbb{N} + 1/2$ , Amplituden  $\mu_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  und  $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i < \infty$ . Dies garantiert gleichmäßige Konvergenz, und  $f$  ist stetig (I3C).

**Aufgabe:** (1) Für  $k, \ell \in \mathbb{N}$  finden wir das Integral

$$\lambda_{k,\ell} := \int_{x=0}^{\pi} \cos(kx) \sin((\ell + 1/2)x) dx = \frac{\ell + 1/2}{(\ell + 1/2)^2 - k^2}.$$

(2) Für die Fourier-Koeffizienten folgt  $a_k = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \omega_i / (\omega_i^2 - k^2)$ .

(3) Für  $\sigma_{n,\ell} := \sum_{k=0}^n \lambda_{k,\ell}$  gilt  $\sigma_{n,\ell} \geq 0$  und  $\sigma_{n,n} \geq \frac{1}{2} \ln(n + 1/2)$ .

(4) Für  $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$  und  $n = \ell_i = \omega_i - 1/2$  gilt  $s_n \geq \frac{1}{2} \mu_i \ln \omega_i$ .

(5) Wir können  $\mu_i$  und  $\omega_i$  so wählen, dass die Folge  $s_n$  divergiert.

☺ Die Funktion  $f$  ist stetig, aber in  $x = 0$  divergiert ihre Fourier-Reihe!

### Fejérs Gegenbeispiel: divergente Fourier-Reihe

J222  
Ergänzung

**Lösung:** (1) Wir nutzen die trigonometrischen Additionstheoreme:

$$\begin{aligned} & \int_{x=0}^{\pi} \cos(kx) \sin((\ell + 1/2)x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{x=0}^{\pi} \sin((\ell + k + 1/2)x) + \sin((\ell - k + 1/2)x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{-\cos((\ell + k + 1/2)x)}{\ell + k + 1/2} + \frac{-\cos((\ell - k + 1/2)x)}{\ell - k + 1/2} \right]_{x=0}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\ell + k + 1/2} + \frac{1}{\ell - k + 1/2} \right] = \frac{\ell + 1/2}{(\ell + 1/2)^2 - k^2} \end{aligned}$$

(2) Da die Funktion  $f$  gerade ist, finden wir  $b_k = 0$  und

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_{x=0}^{\pi} \cos(kx) f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_{x=0}^{\pi} \cos(kx) \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \sin(\omega_i x) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \int_{x=0}^{\pi} \cos(kx) \sin(\omega_i x) dx = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \frac{\omega_i}{\omega_i^2 - k^2} \end{aligned}$$

### Fejérs Gegenbeispiel: divergente Fourier-Reihe

J223  
Ergänzung

(3) Für  $k \leq \ell$  gilt  $\lambda_{k,\ell} \geq 0$ , für  $n \leq \ell$  also  $\sigma_{n,\ell} \geq 0$ . Für  $n \geq \ell$  finden wir:

$$\begin{aligned} 2\sigma_{n,\ell} &= 2 \sum_{k=0}^n \frac{\ell + 1/2}{(\ell + 1/2)^2 - k^2} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\ell + k + 1/2} + \frac{1}{\ell - k + 1/2} \\ &= \sum_{j=\ell}^{\ell+n} \frac{1}{j + 1/2} + \sum_{j=\ell-n}^{\ell} \frac{1}{j + 1/2} = \frac{1}{\ell + 1/2} + \sum_{j=\ell-n}^{\ell+n} \frac{1}{j + 1/2} \\ &= \frac{1}{\ell + 1/2} + \sum_{j=n-\ell}^{n+\ell} \frac{1}{j + 1/2} \geq 0 \end{aligned}$$

Durch Vergleich von Summe und Integral finden wir genauer:

$$2\sigma_{n,\ell} \geq \int_{t=n-\ell+1/2}^{n+\ell+3/2} \frac{1}{t} dt = \ln \left( \frac{n + \ell + 3/2}{n - \ell + 1/2} \right)$$

Speziell für  $n = \ell$  finden wir damit die behauptete untere Schranke:

$$2\sigma_{n,n} \geq \ln(4n + 3) \geq \ln(n + 1/2)$$

### Fejérs Gegenbeispiel: divergente Fourier-Reihe

J224  
Ergänzung

(4) Für die  $n$ -te Partialsumme finden wir somit:

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k \stackrel{(1)}{=} \sum_{k=0}^n \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \frac{\omega_i}{\omega_i^2 - k^2} \stackrel{\text{LIM}}{=} \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \sum_{k=0}^n \frac{\omega_i}{\omega_i^2 - k^2} \stackrel{(3)}{=} \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \sigma_{n,\ell_i}$$

Für alle Terme gilt  $\mu_i \sigma_{n,\ell_i} \geq 0$ . Speziell für  $n = \ell_i = \omega_i - 1/2$  folgt:

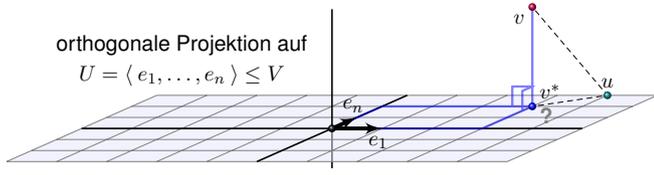
$$s_n = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \sigma_{n,\ell_i} \geq \frac{2}{\pi} \mu_i \sigma_{n,n} \geq \frac{2}{\pi} \mu_i \cdot \frac{1}{2} \ln \omega_i = \frac{\mu_i \ln \omega_i}{\pi}$$

(5) Wir wählen nun die Frequenzen  $\omega_i \in \mathbb{N} + 1/2$  und die Amplituden  $\mu_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  so, dass  $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i < \infty$  gilt, aber  $\mu_i \ln \omega_i \rightarrow \infty$ . Beispiele:

$$\mu_i = \frac{1}{2^i}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1, \quad \omega_i = i^{(2^i)} + \frac{1}{2}, \quad \ln \omega_i \geq 2^i \ln i$$

$$\mu_i = \frac{1}{i^2}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \omega_i = i^{(i^2)} + \frac{1}{2}, \quad \ln \omega_i \geq i^2 \ln i$$

☺ Die Funktion  $f$  ist stetig, aber in  $x = 0$  divergiert ihre Fourier-Reihe!



**Approximation:** Zu  $v \in V$  suchen wir den / einen Vektor  $v^* \in U$ , der  $v$  am nächsten liegt. Existenz? Eindeutig? Effektiv? Effizient?  
 Hierzu sei  $V$  ein Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  über  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ .  
 Darin sei  $U \leq V$  ein endlich-dim. Untervektorraum,  $\dim U = n < \infty$ .  
**Lösung:** Wir erzeugen  $U$  durch eine Basis, orthonormalisieren diese zu  $e_1, \dots, e_n$  (I1J) und berechnen die Orthogonalprojektion von  $v$  auf  $U$ .  
 Schon der Fall  $V = \mathbb{R}^2$  und  $n = 1$  (oder  $V = \mathbb{R}^3$  und  $n = 1, 2$ ) ist interessant und Ihnen vielleicht noch aus der Schule vertraut. Die obige Skizze und die folgenden Argumente gelten aber ganz allgemein: Der Raum  $V$  darf beliebig groß sein, zum Beispiel ein Funktionenraum; lediglich der Unterraum  $U$  soll zur Vereinfachung endlich-dimensional bleiben, zum Beispiel der Unterraum  $U$  aller trigonometrischen Polynome vom Grad  $\leq k$ , mit  $n = \dim U = 1 + 2k$ .

**Übung:** Wie berechnen Sie im Raum  $\mathbb{R}^3$  den euklidischen Abstand des Punktes  $p$  zu einer Geraden  $G = \langle u_1 \rangle$ ? zu einer Ebenen  $E = \langle u_1, u_2 \rangle$ ? Welche Rechentechniken und Beweisargumente kennen Sie hierzu?

**Beispiel:** Vorgelegt ist eine Funktion  $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , etwa  $f(x) = x^2$ . Zu  $n \in \mathbb{N}$  gesucht ist die/eine Bestapproximation  $f_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ , die den mittleren quadratischen Fehler  $\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f(x)|^2 dx$  minimiert.

**Aufgabe:** Wie bestimmen Sie die Parameter  $c_k \in \mathbb{C}$  möglichst effizient?  
**Lösung:** Als Fourier-Koeffizienten, also  $c_k = \langle e_k | f \rangle$ ! Dass dies eine optimale Lösung ist, sogar die einzige, verdanken wir folgendem Satz.

Den Approximationsfehler, also die verbleibende Differenz  $f_n - f$ , können wir auf viele verschiedene Weisen messen und bewerten, etwa durch das Supremum  $\sup |f_n - f|$  oder  $\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f(x)|^p dx$ . Diese Normen sind in Analysis, Numerik und Optimierung wichtig, erfordern jedoch sehr aufwändig maßgeschneiderte Methoden. Nur für  $p = 2$  haben wir eine so schöne und einfache Antwort!

**Satz J3A: Gauß 1795, Bessel 1818**

Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  mit einem Skalarprodukt  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ . Sei  $U \leq V$  ein Unterraum mit einer Orthonormalbasis  $e_1, \dots, e_n$  oder allgemein einer Orthogonalbasis mit  $\langle e_k | e_k \rangle > 0$  für alle  $k = 1, \dots, n$ .

(1) **Orthogonalprojektion:** Zu jedem  $v \in V$  existiert genau ein Vektor  $v^* = \sum_{k=1}^n e_k v_k \in U$  mit  $(v - v^*) \perp U$ . Dieser ist explizit gegeben durch

$$v_k = \langle e_k | v \rangle / \langle e_k | e_k \rangle, \quad \text{seine Fourier-Koeffizienten.}$$

(2) **Bestapproximation:** Für alle Konkurrenten  $u \in U \setminus \{v^*\}$  gilt

$$\|v - u\|^2 = \|v - v^*\|^2 + \|v^* - u\|^2 > \|v - v^*\|^2.$$

(3) **Bessel-Gleichung:** Dank  $v = v^* + (v - v^*)$  und Pythagoras I11 gilt

$$\|v\|^2 = \|v^*\|^2 + \|v - v^*\|^2 \quad (\text{Approximationsfehler})$$

(4) **Bessel-Ungleichung:** Es folgt  $\|v^*\|^2 = \sum_{k=1}^n \|e_k\|^2 |v_k|^2 \leq \|v\|^2$ .

**Beweis:** (1) Genau dann gilt  $(v - v^*) \perp U$ , wenn für  $k = 1, \dots, n$  gilt:

$$0 = \langle e_k | v - v^* \rangle = \langle e_k | v \rangle - \sum_j \langle e_k | e_j \rangle v_j = \langle e_k | v \rangle - \langle e_k | e_k \rangle v_k$$

Es gibt genau eine Lösung:  $v^* = \sum_{k=1}^n e_k v_k$  mit  $v_k = \langle e_k | v \rangle / \langle e_k | e_k \rangle$ .

(2) Für jeden Konkurrenten  $u \in U$  gilt  $u = v^* + \sum_k e_k \mu_k$  mit  $\mu \in \mathbb{K}^n$ , also

$$\|v - u\|^2 \stackrel{\text{Def}}{=} \|(v - v^*) - \sum_k e_k \mu_k\|^2 \stackrel{\text{I11}}{=} \|v - v^*\|^2 + \sum_k \|e_k\|^2 |\mu_k|^2$$

(3) Dies folgt aus der orthogonalen Zerlegung  $v = v^* + (v - v^*)$ .  $\square$

😊 Approximation interessiert uns in jedem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  mit Norm. Speziell für ein Skalarprodukt genügt hierzu die Orthogonalprojektion! Dazu formuliere ich den Satz umsichtig mit minimalen Voraussetzungen:

Für die Aussagen (1–3) genügt eine hermitesche Form  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ . Dank der vorausgesetzten Orthonormalbasis  $e_1, \dots, e_n$  ist sie positiv definit auf  $U$ . Für (1) genügt uns  $\langle e_k | e_k \rangle \neq 0$ , erst für (2) benötigen wir  $\langle e_k | e_k \rangle > 0$ . Für die Ungleichung (4) genügt, dass  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  auf  $V$  positiv semidefinit ist.

Für jede Folge  $\hat{f}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  definieren wir die **Quadrat-Norm**

$$\|\hat{f}\|_{\ell^2}^2 := \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 \quad \text{also} \quad \|\hat{f}\|_{\ell^2} := \left[ \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 \right]^{1/2}.$$

Die **quadrat-summierbaren** Folgen bilden den  $\mathbb{C}$ -Vektorraum

$$\ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z}) = \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) := \left\{ \hat{f}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \mid \|\hat{f}\|_{\ell^2} < \infty \right\}.$$

Auf  $\ell^2$  haben wir  $\cdot: \ell^2 \times \ell^2 \rightarrow \mathbb{C}$  und somit das **Skalarprodukt**

$$\langle \cdot | \cdot \rangle: \ell^2 \times \ell^2 \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \langle \hat{f} | \hat{g} \rangle := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{\hat{f}(k)} \hat{g}(k).$$

Dies ist absolut summierbar dank **Cauchy-Schwarz-Ungleichung:**

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k) \cdot \hat{g}(k)| \leq \|\hat{f}\|_{\ell^2} \cdot \|\hat{g}\|_{\ell^2}$$

😊 Für endliche Summen kennen wir das vom Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$ . Für unendliche Reihen folgt die Ungleichung durch Grenzübergang.

Für  $1 \leq p \leq \infty$  und  $\hat{f}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  definieren wir die  **$\ell^p$ -Norm**

$$\|\hat{f}\|_{\ell^p} := \left[ \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^p \right]^{1/p} \quad \text{wobei} \quad \|\hat{f}\|_{\ell^\infty} := \sup_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|.$$

Die  **$\ell^p$ -summierbaren Folgen** bilden den  $\mathbb{C}$ -Vektorraum

$$\ell^p = \ell^p(\mathbb{Z}) = \ell^p(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) := \left\{ \hat{f}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \mid \|\hat{f}\|_{\ell^p} < \infty \right\}.$$

Demnach bedeutet  $\ell^1$  absolut summierbar und  $\ell^\infty$  beschränkt. Für  $1 < p < q < \infty$  gelten dabei die Inklusionen  $\ell^1 \subsetneq \ell^p \subsetneq \ell^q \subsetneq \ell^\infty$ .

Dank **Minkowski-Ungleichung** C4L ist  $\ell^p$  ein Vektorraum und normiert. Für  $p, q \in [1, \infty]$  mit  $1/p + 1/q = 1$  gilt die **Hölder-Ungleichung** C4L:

$$\|\hat{f} \cdot \hat{g}\|_{\ell^1} \leq \|\hat{f}\|_{\ell^p} \cdot \|\hat{g}\|_{\ell^q}$$

Im Spezialfall  $p = q = 2$  ist dies die **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**. Das Produkt  $\cdot: \ell^p \times \ell^q \rightarrow \ell^1$  stiftet somit die **bilineare Paarung**

$$\langle \cdot | \cdot \rangle: \ell^p \times \ell^q \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \langle \hat{f} | \hat{g} \rangle := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{\hat{f}(k)} \hat{g}(k).$$

Für  $f: \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  messbar definieren wir die **Quadrat-Norm**

$$\|f\|_{L^2}^2 := \int_{x \in \Omega} |f(x)|^2 dx \quad \text{also} \quad \|f\|_{L^2} := \left[ \int_{x \in \Omega} |f(x)|^2 dx \right]^{1/2}.$$

Die **quadrat-integrierbaren** Funktionen bilden den  $\mathbb{C}$ -Vektorraum

$$L^2 = L^2(\Omega) = L^2(\Omega, \mathbb{C}) := \left\{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid \|f\|_{L^2} < \infty \right\}.$$

Auf  $L^2$  haben wir  $\cdot: L^2 \times L^2 \rightarrow \mathbb{C}$  und somit das **Skalarprodukt**

$$\langle \cdot | \cdot \rangle: L^2 \times L^2 \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \langle f | g \rangle := \int_{x \in \Omega} \overline{f(x)} g(x) dx.$$

Dies ist absolut integrierbar dank **Cauchy-Schwarz-Ungleichung:**

$$\int_{x \in \Omega} |f(x) \cdot g(x)| dx \leq \|f\|_{L^2} \cdot \|g\|_{L^2}$$

😊 Für Treppenfunktionen  $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  ist dies eine endliche Summe. Für  $f, g \in L^2(\Omega, \mathbb{C})$  folgt die Ungleichung daraus durch Grenzübergang.

Für  $1 \leq p \leq \infty$  und  $f: \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  definieren wir die  **$L^p$ -Norm**

$$\|f\|_{L^p} := \left[ \int_{x \in \Omega} |f(x)|^p dx \right]^{1/p} \quad \text{wobei} \quad \|f\|_{L^\infty} := \text{ess sup}_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

Die  **$L^p$ -integrierbaren Funktionen** bilden den  $\mathbb{C}$ -Vektorraum

$$L^p = L^p(\Omega) = L^p(\Omega, \mathbb{C}) := \left\{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid \|f\|_{L^p} < \infty \right\}.$$

Demnach bedeutet  $L^1$  absolut integrierbar und  $L^\infty$  essentiell beschränkt. Gleichheit  $f = g$  in  $L^p(\Omega, \mathbb{C})$  bedeutet  $f(x) = g(x)$  für fast alle  $x \in \Omega$ . Für  $0 < \text{vol}(\Omega) < \infty$  und  $1 < p < q < \infty$  folgt  $L^1 \supsetneq L^p \supsetneq L^q \supsetneq L^\infty$ .

Dank **Minkowski-Ungleichung** C4L ist  $L^p$  ein Vektorraum und normiert. Für  $p, q \in [1, \infty]$  mit  $1/p + 1/q = 1$  gilt die **Hölder-Ungleichung** C4L:

$$\|f \cdot g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$$

Im Spezialfall  $p = q = 2$  ist dies die **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**. Das Produkt  $\cdot: L^p \times L^q \rightarrow L^1$  stiftet somit die **bilineare Paarung**

$$\langle \cdot | \cdot \rangle: L^p \times L^q \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \langle f | g \rangle := \int_{x \in \Omega} \overline{f(x)} g(x) dx.$$

Wir wenden Bessels Approximationssatz auf Fourier-Polynome an. Für quadrat-integrierbare  $f, g: [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$  ist das **Skalarprodukt**

$$\langle f | g \rangle_{L^2} := \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \overline{f(t)} g(t) dt.$$

Die zugehörige **Norm** ist definiert durch  $\|f\|_{L^2} = \sqrt{\langle f | f \rangle}$ , also

$$\|f\|_{L^2} := \left[ \frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f(t)|^2 dt \right]^{1/2}.$$

Der **mittlere quadratische Abstand** zwischen  $f, g$  ist definiert durch

$$\|f - g\|_{L^2} := \left[ \frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f(t) - g(t)|^2 dt \right]^{1/2}.$$

Der punktweise Abstand  $|f(t) - g(t)|^2$  wird hier über  $[0, T]$  integriert. Das Quadrat gewichtet dabei große Abweichungen stärker als kleine. Der Faktor  $1/T$  normiert und vereinfacht zudem die Fourier-Formeln. Die abschließende Wurzel sorgt dafür, dass die Norm homogen ist, also tatsächlich  $\|\alpha \cdot f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$  für alle  $\alpha \in \mathbb{C}$  erfüllt.

**Satz J3B: Bestapproximation durch Fourier-Polynome**

Sei  $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$  quadrat-integrierbar, das heißt  $\int_0^T |f(t)|^2 dt < \infty$ .

(1) Sei  $f_n = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega t}$  eine Approximation durch ein beliebiges trigonometrisches Polynom vom Grad  $n$  mit Koeffizienten  $c_k \in \mathbb{C}$ .

**Bessel-Ungleichung:** Der mittlere quadratische Fehler  $\|f - f_n\|$  wird genau dann minimal, wenn  $f_n$  das Fourier-Polynom zu  $f$  ist, also

$$c_k = \langle e_k | f \rangle = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} f(t) dt.$$

Der mittlere quadratische Fehler ist dann  $\|f - f_n\|^2 = \|f\|^2 - \|f_n\|^2$ .

(2) Für  $n \rightarrow \infty$  gilt Konvergenz  $\|f - f_n\| \searrow_0$  im quadratischen Mittel. Für die Normen folgt  $\|f_n\| \nearrow \|f\|$  und somit die Energiegleichung:

$$\frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f_n(t)|^2 dt = \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \nearrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f(t)|^2 dt$$

**Aufgabe:** Zeigen Sie dies für jede stetige Funktion  $f$  durch Vergleich von quadratischer Bestapproximation  $f_n$  und Fejér-Approximation  $f_n^*$ .  
😊 Zusammen sind diese Approximationssätze extrem wirkungsvoll.

**Lösung:** Teil (1) ist die Anwendung von Bessels Approximationssatz J3A auf den Vektorraum  $L^2([0, T], \mathbb{C})$  und trigonometrische Polynome.

(2) Für die Fejér-Approximation  $f_n^*$  gilt  $\max |f_n^* - f| \rightarrow 0$  dank J2C. Die quadratische Bestapproximation sind die Fourier-Polynome  $f_n$ , daher gilt  $\|f_n - f\|_{L^2} \leq \|f_n^* - f\|_{L^2}$ . Ausgeschrieben bedeutet das:

$$\frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f_n(t) - f(t)|^2 dt \leq \frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f_n^*(t) - f(t)|^2 dt \leq (\max |f_n^* - f|)^2 \rightarrow 0$$

Monotonie  $\|f_{n+1} - f\|_{L^2} \leq \|f_n - f\|_{L^2}$  ist klar, somit gilt  $\|f_n - f\|_{L^2} \searrow_0$ . Dank Aussage (1) folgt die monotone Konvergenz  $\|f_n\|_{L^2} \nearrow \|f\|_{L^2}$ .

😊 Die Fejér-Approximation J2C stellt sicher, dass trigonometrische Polynome dicht liegen im Raum  $C([0, 2\pi], \mathbb{C})$  der stetigen Funktionen.

Die Konvergenz  $\|f_n\|_{L^2}^2 \nearrow \|f\|_{L^2}^2$  bedeutet ausgeschrieben:

$$A_n := \frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f_n(t)|^2 dt \nearrow \frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f(t)|^2 dt =: A$$

Offensichtlich gilt für die Koeffizientensummen entsprechendes:

$$B_n := \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \nearrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 =: B$$

Die Energiegleichung  $A_n = B_n$  gilt für jedes trigonometrische Polynom dank Pythagoras [1125]. Damit folgt die Energiegleichung  $A = B$  für  $f$ .

😊 Damit ist die Energiegleichung (2) für stetige Funktionen bewiesen. Das war das Ziel dieser Aufgabe (als leichtere, teilweise Lösung).

😊 Hieraus folgt der Satz J3B allgemein durch Vervollständigung: Die stetigen Funktionen liegen dicht in  $L^2([0, T], \mathbb{C})$  bezüglich  $L^2$ -Norm.

😊 Der folgende Satz fasst dieses Ergebnis zusammen und erweitert zudem die Energiegleichung zur Parseval-Gleichung für Skalarprodukte.

**Satz J3C: Energiegleichung und Satz von Parseval**

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  absolut integrierbar auf  $[0, T]$  und  $T$ -periodisch. Wir zerlegen  $f$  in **Harmonische** zur Grundfrequenz  $\omega = 2\pi/T$ :

$$f \rightsquigarrow \hat{f}, \quad \hat{f}(k) := \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} f(t) dt, \quad f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ik\omega t}.$$

Es gilt die **Parseval-Gleichung**, auch **Energiegleichung** genannt:

$$\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{\ell^2} \quad \text{also} \quad \frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2$$

Dank dieser Gleichung gilt  $f \in L^2$  genau dann, wenn  $\hat{f} \in \ell^2$  gilt. Für  $f, g \in L^2$  gilt die **Parseval-Gleichung** zudem für Skalarprodukte:

$$\langle f | g \rangle = \langle \hat{f} | \hat{g} \rangle \quad \text{also} \quad \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \overline{f(t)} g(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(k)} \hat{g}(k)$$

**Aufgabe:** Rechnen Sie die Parseval-Gleichung mit Fubini nach im Spezialfall  $f \in L^1$  und  $\hat{g} \in \ell^1$ , somit  $g(t) = \sum_k \hat{g}(k) e^{ik\omega t} \in L^\infty$ .

**Lösung:** Wir setzen ein und rechnen's geduldig aus:

$$\begin{aligned} \langle f | g \rangle_{L^2} &\stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \overline{f(t)} g(t) dt \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \overline{f(t)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{g}(k) e^{ik\omega t} dt \\ &\stackrel{\text{Lin}}{=} \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\omega t} \overline{f(t)} \hat{g}(k) dt \stackrel{\text{Fub}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} \overline{f(t)} dt \right] \hat{g}(k) \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(k)} \hat{g}(k) \stackrel{\text{Def}}{=} \langle \hat{f} | \hat{g} \rangle_{\ell^2} \end{aligned}$$

😊 Speziell für  $f = g$  erhalten wir die Energiegleichung  $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{\ell^2}$ . Für  $f \in L^1$  und  $\hat{f} \in \ell^1$  ist damit die Energiegleichung erneut bewiesen.

Für  $f \in L^2$  folgt sie durch Grenzübergang, wie in Satz J3B ausgeführt. Für  $f, g \in L^2$  folgt  $\hat{f}, \hat{g} \in \ell^2$ , und obige Gleichungen bestehen weiter.

Für Skalarprodukte erhalten wir dies durch Polarisieren der Norm.

😊 Wir kennen die folgenden Beziehungen, die eine bemerkenswerte Dualität zwischen  $L^p$ -Funktionen und  $\ell^q$ -Folgen illustrieren:

(1a) Für  $f \in L^1$  wissen wir  $\hat{f} \in \ell^\infty$ , genauer  $\hat{f}(k) \leq \|f\|_{L^1}$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$ . Dank Riemann-Lebesgue gilt zudem Abklingen  $|\hat{f}(k)| \rightarrow 0$  für  $|k| \rightarrow \infty$ .

(1b) Zu  $\hat{f} \in \ell^1$  konvergiert  $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e_k$  in  $L^\infty$ , sogar gleichmäßig. Insbesondere gilt dann  $\|f\|_{L^\infty} \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)| \cdot \|e_k\|_{L^\infty} = \|\hat{f}\|_{\ell^1}$ .

(2) Der zentrale Fall: Für  $f \in L^2$  gilt  $\hat{f} \in \ell^2$  und die Fourier-Isometrie

$$\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{\ell^2} \quad \text{also} \quad \frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2.$$

Diese Fälle behandeln die wichtigen Extreme  $(p, q) = (1, \infty)$  und den symmetrischen Fall  $(p, q) = (2, 2)$ . Sie werden durch folgenden Satz von Young und Hausdorff zusammengefasst und verallgemeinert.

**Satz J3D: Young 1913, Hausdorff 1923**

Wir fixieren  $p, q$  mit  $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$  und  $1/p + 1/q = 1$ , zum Beispiel  $(p, q) = (1, \infty)$  oder  $p = q = 2$  wie oben.

(1) Aus  $f \in L^p$  folgt  $\hat{f} \in \ell^q$ , genauer gilt die Ungleichung

$$\|\hat{f}\|_{\ell^q} \leq \|f\|_{L^p} \quad \text{also} \quad \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^q \right)^{1/q} \leq \left( \frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

(2) Umgekehrt: Für  $c \in \ell^p$  konvergiert die Folge  $f_n = \sum_{k=-n}^n c_k e_k$  gegen eine Funktion  $f$  in  $L^q$ . Für diese gilt  $\hat{f} = c$ , genauer gilt die Ungleichung

$$\|f\|_{L^q} \leq \|c\|_{\ell^p} \quad \text{also} \quad \left( \frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f(t)|^q dt \right)^{1/q} \leq \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^p \right)^{1/p}.$$

⚠ Die Aussagen werden falsch, wenn wir  $p$  und  $q$  vertauschen. In beiden Teilen geht das Argument von  $1 \leq p \leq 2$  nach  $2 \leq q \leq \infty$ . Ich nenne diesen Satz hier nur zur Illustration — und ohne Beweis.

Wollen wir eine Fourier-Reihe in einem einzelnen Punkt auswerten, so müssen wir uns die Frage der punktweisen Konvergenz stellen! Das Dirichlet-Kriterium I2A liefert uns hierzu ein bequemes und doch starkes Werkzeug. Es erlaubt insbesondere die Berechnung von einigen Reihengrenzwerten, die sonst nur schwer zu bekommen sind.

Wir kennen zudem die gleichmäßige Konvergenz  $f_n \rightarrow f$  auf  $X$ : Hier liegt Konvergenz in allen Punkten  $x \in X$  vor und zudem eine gleichmäßige Fehlerschranke  $\sup|f_n - f| \rightarrow 0$ . Das ist die stärkste und wirksamste Forderung, für manche Anwendungen jedoch leider zu stark.

Fourier-Reihen nutzen das Skalarprodukt periodischer Funktionen. Es liegt daher nahe, die Güte der Approximation von  $f$  durch  $f_n$  mit der zugehörigen Norm des mittleren quadratischen Abstands zu messen:

$$\|f_n - f\|_{L^2([0,T],\mathbb{C})}^2 = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f_n(t) - f(t)|^2 dt$$

Für die Konvergenz von Fourier-Reihen ist dieser Abstands begriff der natürlichste: Bezüglich der  $L^2$ -Norm sind alle Formeln am einfachsten.

Wir fassen die Beziehungen dieser drei Konvergenzarten zusammen. Seien  $f_0, f_1, f_2, \dots, f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  Funktionen auf einer Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ .

Gleichmäßige Konvergenz:  
 $\sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$

$\text{vol } \Omega < \infty \Downarrow \Uparrow \Uparrow \Downarrow \text{immer}$

Konvergenz im  
quadratischen Mittel:  
 $\int_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)|^2 dx \rightarrow 0$

Punktweise Konvergenz:  
 $f_n(x) \rightarrow f(x)$   
in jedem Punkt  $x \in \Omega$

☺ Die Implikation „gleichmäßig  $\Rightarrow L^p$ “ folgt sofort aus der Ungleichung

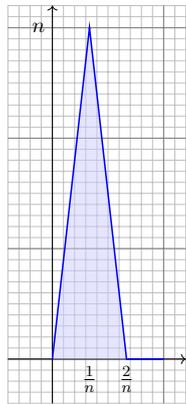
$$\int_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)|^p dx \leq \text{vol}(\Omega) \cdot (\sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)|)^p \rightarrow 0.$$

☺ Die Implikation „gleichmäßig  $\Rightarrow$  punktweise“ ist klar: Für  $x \in \Omega$  gilt

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0.$$

⚠ Die Umkehrungen gelten nicht, siehe Gegenbeispiele. J319 J320

⚠ Aus punktweiser Konvergenz  $f_n \rightarrow f$ , also  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  für alle  $x$ , folgt nicht die Konvergenz im quadratischen Mittel!



Gegenbeispiel „wachsende Zacken“:

Für  $n \geq 2$  sei  $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 2n - n^2 x & \text{für } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}, \\ 0 & \text{für } \frac{2}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

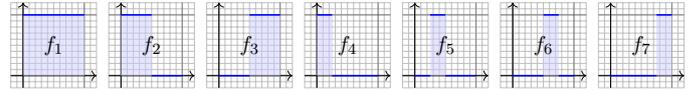
Für jeden Punkt  $x \in [0, 1]$  gilt  $f_n(x) \rightarrow 0$ .

Hingegen gilt  $\int_0^1 |f_n(x)| dx = 1$  sowie

$$\int_0^1 |f_n(x)|^2 dx = \frac{2}{3} n \rightarrow \infty \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Es gilt  $f_n(x) \rightarrow 0$  in jedem Punkt  $x \in [0, 1]$ , aber  $\max|f_n - 0| \rightarrow \infty$  im maximalen Abstand ( $L^\infty$ ) sowie  $\|f_n - 0\|_{L^1} = 1$  im mittleren Abstand ( $L^1$ ) und  $\|f_n - 0\|_{L^2} \rightarrow \infty$  im quadratischen Mittel ( $L^2$ ).

⚠ Aus Konvergenz im quadratischen Mittel  $\|f - f_n\|_{L^2} \rightarrow 0$  folgt nicht gleichmäßige Konvergenz, ja nicht einmal punktweise  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ : Es kann sein, dass die Folge  $f_n(x)$  in keinem Punkt  $x$  konvergiert!



Gegenbeispiel „wandernde Blöcke“: Wir zerlegen das Intervall  $I_1 = [0, 1]$  in zwei Hälften  $I_2 = [0, 1/2]$  und  $I_3 = [1/2, 1]$ , und diese wiederum in  $I_4 = [0, 1/4]$  und  $I_5 = [1/4, 1/2]$  sowie  $I_6 = [1/2, 3/4]$  und  $I_7 = [3/4, 1]$ , usw. Hierzu betrachten wir die Folge der Indikatorfunktionen

$$f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}: f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in I_n, \\ 0 & \text{für } x \notin I_n. \end{cases}$$

Die Quadrat-Norm  $\|f_n\|_{L^2} = \text{vol } I_n$  (Länge von  $I_n$ ) konvergiert gegen 0. Jedoch konvergiert  $f_n(x)$  für  $n \rightarrow \infty$  in keinem Punkt  $x$ : Die Folge  $f_n(x)$  besteht nämlich aus vielen Nullen und immer mal wieder einer 1.

☺ Die trigonometrischen Funktionen  $e^{ik\omega t}$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  sind vollständig: Sie lassen sich durch keine hierzu orthogonale Funktion  $f$  erweitern!

**Satz J3E: Vollständigkeit der trigonometrischen Basis**

Sei  $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  integrierbar auf  $[0, T]$  und  $T$ -periodisch. (1) Gilt

$$\int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} f(t) dt = 0$$

für alle  $k \in \mathbb{Z}$ , so folgt  $f(t) = 0$  für fast alle  $t \in \mathbb{R}$ . (2) Gilt

$$\int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} g(t) dt = \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} h(t) dt$$

für alle  $k \in \mathbb{Z}$ , so folgt  $g(t) = h(t)$  für fast alle  $t \in \mathbb{R}$ .

☺ Nochmal anders gesagt: Die Fourier-Analyse  $f \mapsto \hat{f}$  ist injektiv. Haben zwei Funktionen  $g, h$  dasselbe Spektrum  $\hat{g} = \hat{h}$ , so folgt  $g = h$ . (Das heißt: Gleichheit gilt überall bis auf eine Menge vom Maß Null.)

**Aufgabe:** Zeigen Sie diesen Satz im Spezialfall stetiger Funktionen  $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit dem Approximationssatz von Fejér (Satz J2C).

**Lösung:** (1) Die Voraussetzung bedeutet  $\hat{f}(k) = 0$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$ .

Für die Fourier-Polynome gilt demnach  $f_n = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Für die Fejér-Polynome gilt dann ebenso  $f_n^* = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Der Approximationssatz von Fejér garantiert uns dann

$$\max|f| = \max|f - f_n^*| \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Das bedeutet  $\max|f| = 0$ , also  $f(t) = 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  wie behauptet.

☺ Jede stetige Funktion  $f \neq 0$  hat demnach ein Spektrum  $\hat{f} \neq 0$ , das heißt, es können nicht alle Fourier-Koeffizienten verschwinden.

(2) Aussage (1) angewendet auf  $f = g - h$  liefert  $f = 0$ , also  $g = h$ .

☺ Haben stetige Funktionen dasselbe Spektrum, so sind sie gleich. Umgekehrt bedeutet das, für stetige Funktionen  $g \neq h$  gilt  $\hat{g} \neq \hat{h}$ .

☺ Hieraus folgt der Satz für alle integrierbaren Funktionen durch Vervollständigung: Die stetigen Funktionen liegen dicht in  $L^1([0, T], \mathbb{C})$ .

**Satz J3F: Vollständigkeit**

(1) Wir haben folgende lineare Abbildung  $L^2([0, T], \mathbb{C}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ :

Gilt  $\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt < \infty$ , so bilden die Fourier-Koeffizienten

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} f(t) dt$$

eine Zahlenfolge  $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  mit  $\sum_k |c_k|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt < \infty$ .

(2) Wir haben folgende lineare Abbildungen  $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \rightarrow L^2([0, T], \mathbb{C})$ :

Gilt  $\sum_k |c_k|^2 < \infty$ , so konvergiert die trigonometrische Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} \text{ im quadratischen Mittel}$$

gegen eine Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_k |c_k|^2 < \infty$ .

**Satz J3G: Vollständigkeit**

(1) Wir haben folgende lineare Abbildung  $L^1([0, T], \mathbb{C}) \rightarrow \ell^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ :

Gilt  $\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)| dt \leq M < \infty$ , so bilden die Fourier-Koeffizienten

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} f(t) dt$$

eine Zahlenfolge  $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  mit der gleichmäßigen Schranke  $|c_k| \leq M$ .

(2) Wir haben folgende lineare Abbildungen  $\ell^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \rightarrow L^\infty([0, T], \mathbb{C})$ :

Gilt  $\sum_k |c_k| \leq M < \infty$ , so konvergiert die trigonometrische Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} \text{ gleichmäßig}$$

gegen eine stetige Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $|f| \leq M$ .

Es gilt die **Parseval-Gleichung**, auch **Energiegleichung** genannt:

$$\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{\ell^2} \quad \text{also} \quad \frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2$$

Ist dieser Wert endlich, so ist die Funktion  $f$  quadrat-integrierbar, kurz  $f \in L^2$ , und die Koeffizientenfolge  $\hat{f}$  ist quadrat-summierbar, kurz  $\hat{f} \in \ell^2$ . Alternativ nutzen wir die Co/Sinus-Reihe mit  $c_{\pm k} = \frac{1}{2}(a_k \mp ib_k)$ :

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$$

$$\frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2.$$

Für  $f, g \in L^2$  gilt die **Parseval-Gleichung** zudem für Skalarprodukte:

$$\langle f | g \rangle = \langle \hat{f} | \hat{g} \rangle \quad \text{also} \quad \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \overline{f(t)} g(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(k)} \hat{g}(k)$$

Die **Fourier-Isometrie** J1A ist folgende Analyse / Synthese:

$$(\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}) : L^2([0, T], \mathbb{C}) \cong \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) : f \leftrightarrow \hat{f}$$

Jeder Funktion  $f \in L^2$  ordnen wir ihre Fourier-Koeffizienten  $\hat{f} \in \ell^2$  zu:

$$\mathcal{F} : L^2 \rightarrow \ell^2 : f \mapsto \hat{f} \quad \text{mit} \quad \hat{f}(k) = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} f(t) dt$$

Umgekehrt definiert jede Koeffizientenfolge  $\hat{f} \in \ell^2$  eine Funktion  $f \in L^2$ :

$$\mathcal{F}^{-1} : \ell^2 \rightarrow L^2 : \hat{f} \mapsto f \quad \text{mit} \quad f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ik\omega t}$$

Diese Abbildungen sind  $\mathbb{C}$ -linear und zueinander inverse Isometrien zwischen dem Funktionenraum  $L^2([0, T], \mathbb{C})$  und Folgenraum  $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ .

😊 Funktionen  $f \in L^2$  und Folgen  $\hat{f} \in \ell^2$  entsprechen sich verlustfrei. Norm und Skalarprodukt bleiben erhalten dank Parseval-Gleichung.

😊 Eine Anwendung ist die **isoperimetrische Ungleichung** J1B: Allein der Kreis maximiert den umschlossenen Flächeninhalt  $F$ .

Die **quadrat-integrierbaren** Funktionen bilden den  $\mathbb{C}$ -Vektorraum

$$L^2 = L^2([0, T], \mathbb{C}) := \left\{ f : [0, T] \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{t=0}^T |f(t)|^2 dt < \infty \right\}.$$

Hierauf haben wir als **Skalarprodukt** und **Norm** die Integrale

$$\langle f | g \rangle_{L^2} := \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \overline{f(t)} g(t) dt \quad \text{und} \quad \|f\|_{L^2} := \frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f(t)|^2 dt.$$

Die **quadrat-summierbaren** Folgen bilden den  $\mathbb{C}$ -Vektorraum

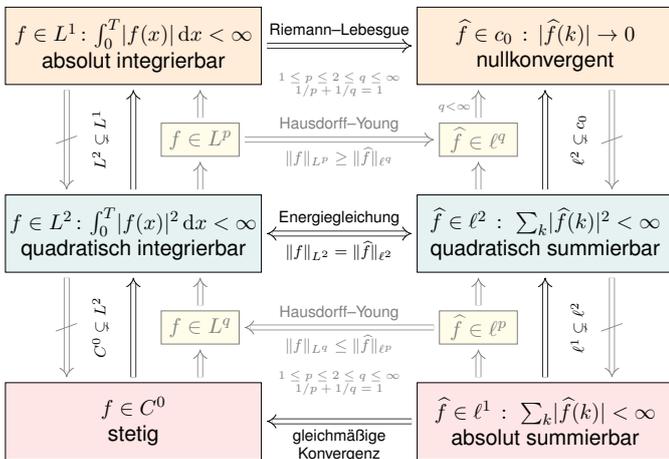
$$\ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) := \left\{ \hat{f} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 < \infty \right\}.$$

Hierauf haben wir als **Skalarprodukt** und **Norm** die Summen

$$\langle \hat{f} | \hat{g} \rangle_{\ell^2} := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(k)} \hat{g}(k) \quad \text{und} \quad \|\hat{f}\|_{\ell^2} := \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2.$$

Das Produkt ist absolut integrierbar/summierbar dank Cauchy-Schwarz.

😊 Beide Vektorräume  $L^2$  und  $\ell^2$  scheinen zunächst sehr verschieden. Die Fourier-Isometrie enthüllt jedoch das Gegenteil: Sie sind isomorph!



Von oben nach unten werden die Bedingungen strikt stärker. Die Implikationen gehen daher immer nur von unten nach oben. Die Umkehrungen gelten nicht, wie geeignete Gegenbeispiele zeigen.

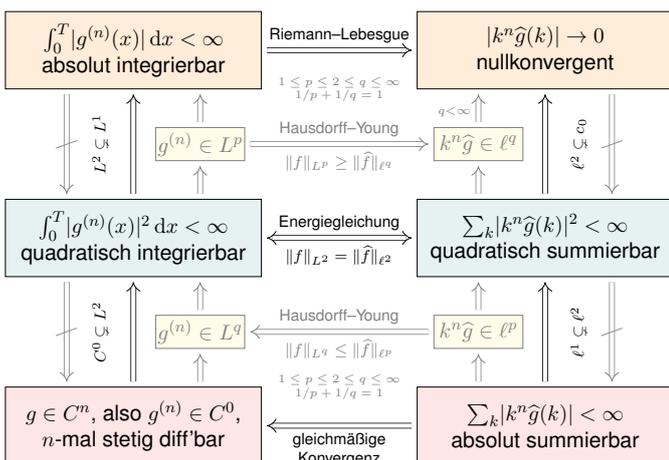
In der oberen Hälfte gehen Implikationen von links nach rechts: Schwache Bedingungen an  $f$  garantieren schwache Folgerungen für  $\hat{f}$ .

In der unteren Hälfte gehen Implikationen von rechts nach links: Erst starke Bedingungen an  $\hat{f}$  garantieren starke Folgerungen für  $f$ .

In der Mitte steht der symmetrische Fall  $p = q = 2$ : Die Energiegleichung  $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{\ell^2}$  garantiert die nützliche Äquivalenz  $f \in L^2 \iff \hat{f} \in \ell^2$ . Die  $L^2$ -Theorie ist daher zentral: die schönste, beste und einfachste.

Ergänzend nenne ich zudem die Hausdorff-Young-Ungleichungen: Sie interpolieren zwischen  $(p, q) = (1, \infty)$  und dem zentralen Fall  $(p, q) = (2, 2)$  durch  $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$  mit  $1/p + 1/q = \infty$ .

Dasselbe Diagramm gilt für  $g \in C^n$  und die  $n$ -fache Ableitung  $f = g^{(n)}$ , allgemein für  $g \in AC^n$ , also  $g \in C^{n-1}$  und  $g^{(n-1)} \in AC$  absolut stetig.



Wir fassen die Beziehungen dieser drei Konvergenzarten zusammen. Seien  $f_0, f_1, f_2, \dots, f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  Funktionen auf einer Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ .

$$\text{Gleichmäßige Konvergenz: } \sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$$

$$\text{vol } \Omega < \infty \quad \Downarrow \quad \Uparrow \quad \Uparrow \quad \Downarrow \text{immer}$$

$$\begin{matrix} \text{Konvergenz im quadratischen Mittel:} & \iff & \text{Punktweise Konvergenz:} \\ \int_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)|^2 dx \rightarrow 0 & & f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ in jedem Punkt } x \in \Omega \end{matrix}$$

😊 Die Implikation „gleichmäßig  $\Rightarrow L^p$ “ folgt sofort aus der Ungleichung

$$\int_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)|^p dx \leq \text{vol}(\Omega) \cdot (\sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)|)^p \rightarrow 0.$$

😊 Die Implikation „gleichmäßig  $\Rightarrow$  punktweise“ ist klar: Für  $x \in \Omega$  gilt

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0.$$

⚠ Die Umkehrungen gelten nicht, siehe Gegenbeispiele. [J319](#) [J320](#)

**Verständnisfragen zur Wiederholung** J409  
Übung

**Aufgabe:** Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze Begründung (ein Ergebnis der Vorlesung oder ein Gegenbeispiel).

- Was bedeutet punktweise Konvergenz der Fourier-Reihe von  $f$ ? Was sagt das Dirichlet-Kriterium über Konvergenz und Grenzwert?
- Angenommen  $f$  ist nicht nur stetig, sondern stückw. stetig diff'bar. Konvergiert die Fourier-Reihe gleichmäßig gegen  $f$ ? Wie schnell?
- Was besagt Pythagoras für Norm und Skalarprodukt? Allgemein: Was besagt die Parseval-Gleichung für Norm und Skalarprodukt?
- Wie definieren Sie die Räume  $L^p$  und  $\ell^p$  für  $1 \leq p \leq \infty$ ? Erklären Sie insb. die wichtigsten Fälle  $L^1, L^2, L^\infty$  und  $\ell^1, \ell^2, \ell^\infty$ .
- In welchem Sinne ist das Fourier-Polynom  $f_n$  vom Grad  $n$  die beste Approximation an die Funktion  $f$  in  $L^2([0, T], \mathbb{C})$ ? In welchem Sinne konvergieren die Funktionen  $f_n$  gegen  $f$ ?
- Nennen Sie eine Folge  $\hat{f}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  in  $\ell^2$  aber nicht in  $\ell^1$ . Gilt umgekehrt  $\ell^1 \subseteq \ell^2$ ? (Beweis oder Gegenbeispiel)

**Verständnisfragen zur Wiederholung** J410  
Übung

- Nennen Sie eine Funktion  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  in  $L^1$  aber nicht in  $L^2$ . Gilt umgekehrt  $L^2 \subseteq L^1$ ? (Beweis oder Gegenbeispiel)
- Wie definieren Sie die Fourier-Abbildungen (Analyse / Synthese)
 
$$\mathcal{F}: L^1 \rightarrow \ell^\infty \quad \text{und} \quad \mathcal{F}^{-1}: \ell^1 \rightarrow L^\infty?$$

Wie definieren Sie als symmetrische Fassung die Fourier-Isometrie

$$\mathcal{F}: L^2 \rightarrow \ell^2 \quad \text{und} \quad \mathcal{F}^{-1}: \ell^2 \rightarrow L^2?$$

- Wie ändert sich das Spektrum  $\hat{f}$ , wenn Sie  $f$  in einem Punkt  $t \in \mathbb{R}$  abändern? in endlich vielen Punkten? auf einer Menge vom Maß Null?
- Was bedeutet: Aus dem Signal  $f$  gewinnen Sie das Spektrum  $\hat{f}$  und umgekehrt rekonstruieren Sie aus dem Spektrum  $\hat{f}$  das Signal  $f$ ?
- Wie lösen Fourier-Reihen das isoperimetrische Problem? Inwiefern transformieren sie ein schwieriges Problem in ein leichtes?
- Welchen Flächeninhalt können Sie mit einem Zaun der Länge  $L$  höchstens umgrenzen? Welche Kurven maximieren die Fläche?

**Verständnisfragen zur Energiegleichung** J411  
Übung

**Aufgabe:** Seien  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  periodisch und absolut integrierbar.

- Wiederholen Sie möglichst präzise den Satz von Parseval (J3C).
- Seien  $f, g$  stetig. (a) Gilt  $\hat{f} = 0 \Rightarrow f = 0$  und (b)  $\hat{f} = \hat{g} \Rightarrow f = g$ ?
- Dieselbe Fragen für  $f, g$  stückweise stetig und (3) sprungnormiert.
- Allgemein: (a) Folgt aus  $\hat{f} = 0$  stets  $f = 0$ , zumindest fast überall? (b) Folgt aus  $\hat{f} = \hat{g}$  stets  $f = g$ , zumindest fast überall?

**Lösung:** (1a) Ja: Dank Parseval gilt  $\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 = 0$ . Aus dem Integral  $\int_0^T |f(t)|^2 dt = 0$  und der Stetigkeit von  $f$  folgt  $f = 0$ . Ausführlich siehe Satz J3E und den anschließenden Beweis.

- Ja, dies folgt aus (1a) angewendet auf die Differenz  $f - g$ .
- Nein: Wie zuvor gilt  $\int_0^T |f(t)|^2 dt = 0$ , allerdings dürfen wir nun  $f$  an endlich vielen Stellen ändern. Dann gilt weiterhin  $\hat{f} = 0$  aber  $f \neq 0$ .
- Ja, die Sprungnormierung stellt die Eindeutigkeit wieder her.
- Ja, aus  $\int_0^T |f(t)|^2 dt = 0$  folgt  $f(x) = 0$  für fast alle  $x \in \mathbb{R}$ , das heißt alle  $x$  außerhalb einer vernachlässigbaren Menge  $N \subseteq \mathbb{R}$ ,  $\text{vol}_1(N) = 0$ .

**Verständnisfragen zur Energiegleichung** J412  
Übung

**Aufgabe:** (1) Ist  $\sum_{k=1}^\infty \sin(kx)$  Fourier-Reihe einer int'baren Funktion? (2) Ist die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \sum_{k=1}^\infty \sin(kx)/\sqrt{k}$  stetig? (3) Vorgelegt sei die trigonometrische Reihe  $f(x) = \sum_{k=1}^\infty k^{-a} \sin(kx)$ . Für welche  $a \in \mathbb{R}$  konvergiert  $f$  in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$ ? Für welche  $a \in \mathbb{R}$  ist  $f$  zudem quadrat-integrierbar? stetig? stetig differenzierbar? (4) Dieselben Fragen für  $f(x) = \sum_{k=2}^\infty \sin(kx)/(k^a \ln(k)^b)$  oder  $f(x) = \sum_{k=3}^\infty \sin(kx)/(k^a \ln(k)^b \ln(\ln k)^c)$  mit  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

**Lösung:** (1) Nein nach Riemann-Lebesgue I3B, denn  $b_k = 1 \not\rightarrow 0$ . (2) Nein, denn  $\sum_{k=1}^\infty 1/k = \infty$ . Ausführlicher gilt folgendes: (3) Diese trig. Reihe konvergiert für  $a > 0$  in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$ : In  $x = 0, \pi/2, \pi, \dots$  folgt dies aus dem Leibniz-Kriterium (Satz B3G), und allgemein für  $x \in \mathbb{R}$  aus Dirichlets Verallgemeinerung (Satz B3I). Für  $f \in L^2$  ist  $a > 1/2$  notwendig und hinreichend dank Parseval (J3C). Für  $f \in C^0$  ist  $a > 1/2$  notwendig und  $a > 1$  hinreichend (Satz I3C). Für  $f \in C^1$  ist  $a > 3/2$  notwendig und  $a > 2$  hinreichend (Satz I3C). (4) Analog zu (3); zur Konvergenz dieser Reihen siehe B303.

**Verständnisfragen zu Glattheit und Abklingen** J413  
Übung

**Aufgabe:** Vorgegeben sei ein Exponent  $a \in \mathbb{R}$ . (1) Ist  $\sum_{k=1}^\infty k^{-a} e^{ikx}$  die Fourier-Reihe einer stetigen  $2\pi$ -periodischen Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ? (2) Falls ja, wie oft ist  $f$  stetig differenzierbar? mindestens? höchstens?

**Lösung:** Wir nutzen die obigen Kriterien zu Konvergenz und Stetigkeit. Die Reihe  $\sum_{k=1}^\infty |k^{-a}|$  divergiert für  $a \leq 1$  und konvergiert für  $a > 1$ .

- Für  $a > 1$  gilt  $\sum_{k=1}^\infty |k^{-a}| < \infty$ , somit konvergieren die Funktionen  $f_n(x) = \sum_{k=1}^n k^{-a} e^{ikx}$  gleichmäßig gegen  $f(x) = \sum_{k=1}^\infty k^{-a} e^{ikx}$ . Alle Funktionen  $f_n$  sind stetig, also auch die Grenzfunktion  $f$ . Die Antwort lautet hier also: Ja,  $f(x) = \sum_{k=1}^\infty k^{-a} e^{ikx}$  ist stetig.
- Für  $a \leq 1$  gilt  $\sum_{k=1}^\infty |k^{-a}| = \infty$ . Angenommen es gäbe eine stetige und  $2\pi$ -periodische Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(x) \sim \sum_{k=1}^\infty k^{-a} e^{ikx}$ . Dank  $f \in C^0([0, 2\pi], \mathbb{C}) \subseteq L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$  folgt dann  $\int_{x=0}^{2\pi} |f(x)| dx < \infty$  und dank Energiegleichung  $\sum_{k=1}^\infty |k^{-a}|^2 < \infty$ , also  $2a > 1$ . Für  $a \leq 1/2$  ist die Antwort also: Nein,  $f$  kann nicht stetig sein. Für  $1/2 < a \leq 1$  lassen unsere Kriterien keinen Schluss zu.

**Verständnisfragen zu Glattheit und Abklingen** J414  
Übung

- Wir nehmen  $a > 1$  an und untersuchen  $f(x) = \sum_{k=1}^\infty k^{-a} e^{ikx}$ . Durch Ableiten und Integrieren erhalten wir dank (1) sofort:
  - Aus  $a > n + 1$  folgt  $f \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ : Für  $a > n + 1$  ist  $f$  mindestens  $n$ -mal stetig differenzierbar.
  - Aus  $f \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  folgt  $a > n + 1/2$ : Für  $a \leq n + 1/2$  ist  $f$  höchstens  $(n - 1)$ -mal stetig differenzierbar.

Zusammenfassend bleiben damit zwei Möglichkeiten:

- $a \in ]n + 1, n + 3/2]$   $\implies f \in C^n \setminus C^{n+1}$ , das heißt:  $f$  ist  $n$ -mal stetig differenzierbar, aber nicht  $(n + 1)$ -mal.
- $a \in ]n + 3/2, n + 2]$   $\implies f \in C^n \setminus C^{n+2}$ , das heißt:  $f$  ist  $n$ -mal stetig differenzierbar, höchstens aber  $(n + 1)$ -mal.

😊 Unsere bequemen Kriterien liefern uns recht präzise Aussagen: einfacher Plausibilitätscheck und schnelle Vorabinformation.  
 ☹️ Es bleibt eine (kleine) Lücke. Falls dies wirklich nötig sein sollte, so müssen wir hierzu die gegebene Funktion  $f$  genauer untersuchen.

**Verständnisfragen zu Glattheit und Abklingen** J415  
Übung

**Aufgabe:** Für  $C^\infty$ -glatte Funktionen klingen die Fourier-Koeffizienten extrem schnell ab; hierzu gilt erfreulicherweise auch die Umkehrung:

- Ist  $\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} e^{ikx}$  die Fourier-Reihe einer glatten Funktion?
- Ist  $\sum_{k=0}^\infty 2^{-k} e^{ikx}$  die Fourier-Reihe einer glatten Funktion?
- Was gilt für  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$  mit  $|c_k| \leq q^k$  und  $0 < q < 1$ ?

**Lösung:** Ja, in beiden Fällen ist die so dargestellte Funktion glatt:

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} e^{ikx} = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} (e^{ix})^k = \exp(e^{ix}) = f(x)$$

$$\sum_{k=0}^\infty 2^{-k} e^{ikx} = \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{e^{ix}}{2}\right)^k = \frac{1}{1 - e^{ix}/2} = g(x)$$

Die Funktionen  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  sind  $2\pi$ -periodisch und  $C^\infty$ -glatt.

- Dasselbe gilt allgemein: Die Laurent-Reihe  $h(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k z^k$  konvergiert auf dem Kreisring  $U = K(0, q^{-1}, q) \subseteq \mathbb{C}$ . Die so definierte Funktion  $h: \mathbb{C} \supseteq U \rightarrow \mathbb{C}$  ist  $C^\infty$ -glatt, sogar analytisch / holomorph. Somit ist insbesondere auch  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}: x \mapsto h(e^{ix}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$  glatt.

**Verständnisfragen zu Glattheit und Abklingen** J416  
Übung

😊 Schnelles Abklingen der Fourier-Koeffizienten entspricht Glattheit der Funktion. Sie kennen hierzu das  $L^2$ -Kriterium  $\sum |c_k|^2 < \infty$  sowie das  $C^n$ -Kriterium  $\sum |c_k| k^n < \infty$ , wie oben erklärt und illustriert.

😊 In unserem vorliegenden Beispiel klingen die Koeffizienten extrem schnell ab, so dass das  $C^\infty$ -Kriterium für jedes  $n \in \mathbb{N}$  erfüllt ist: Die so dargestellte Funktion  $f$  ist also tatsächlich  $C^\infty$ -glatt.

😊 Besser noch können Sie die Reihe sogar explizit ausrechnen: Sie erkennen hier die Exponentialreihe bzw. die geometrische Reihe!

Gleiches gilt für jede Potenzreihe im Inneren ihres Konvergenzkreises, allgemein jede Laurent-Reihe im Inneren ihres Konvergenzkreisrings. Auch hier lohnt sich Ihre Investition in mathematische Allgemeinbildung.

😊 Glattheit der Funktion  $f$  und Abklingen der Fourier-Koeffizienten  $\hat{f}$  können Sie leicht prüfen, selbst in vielen schwierigen Situationen, in denen Sie  $f$  nicht genau kennen oder analysieren können.

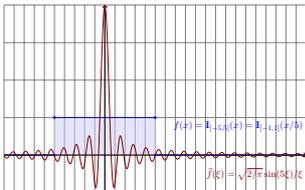
😊 Unsere bequemen Kriterien liefern uns recht präzise Aussagen: einfacher Plausibilitätscheck und schnelle Vorabinformation.

Kapitel K

Fourier–Transformation



Joseph Fourier (1768–1830)



Inhalt dieses Kapitels K

- 1 Erste Beispiele, Eigenschaften, Rechenregeln
  - Von der Fourier–Reihe zum Fourier–Integral
  - Einfache Beispiele und erste Eigenschaften
  - Der Umkehrsatz für Fourier–Transformierte
- 2 Analytische Eigenschaften
  - Rechenregeln der Fourier–Transformation
  - Ableitung und Multiplikation
  - Faltung und Produkt
- 3 Metrische Eigenschaften
  - Energiegleichung und Fourier–Isometrie
  - Die Unschärferelation für Fourier–Paare
  - Bedeutung in der Quantenmechanik
- 4 Fazit: Fourier–Transformation
  - Zusammenfassung
  - Verständnisfragen
  - Weitere Aufgaben

Motivation: von Fourier–Reihe zu Fourier–Integral

Die Funktion  $f : [-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{C}$  zerlegen wir in ihre **Fourier–Reihe**:

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ixk \cdot 2\pi/T} \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{1}{T} \int_{x=-T/2}^{T/2} e^{-ixk \cdot 2\pi/T} f(x) dx$$

Sei  $\Delta\xi = 2\pi/T = \omega$ . Wir betrachten  $\xi = k\Delta\xi$  als **diskrete Variable**:

$$g(\xi) = \int_{x=-T/2}^{T/2} e^{-ix\xi} f(x) dx \quad \text{und} \quad f(x) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}\Delta\xi} g(\xi) e^{ix\xi} \Delta\xi$$

Für nicht-periodische Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  betrachten wir  $T \rightarrow \infty$ . Dann gilt  $\Delta\xi \rightarrow 0$ , und somit wird  $\xi$  eine **kontinuierliche Variable**. Heuristisch wird so aus der Fourier–Reihe das **Fourier–Integral**:

$$g(\xi) = \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x) dx \quad \text{und} \quad f(x) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

Diese Formel mit  $2\pi$  vor dem letzten Integral ist die Konvention der Physik, siehe Laplace [L406]. Ich verwende in diesem Kapitel die symmetrische, in der Mathematik übliche Normierung  $\sqrt{2\pi}$ .

Motivation: von Fourier–Reihe zu Fourier–Integral

Das erklärt Anschauung und Heuristik, Definitionen und Sätze folgen. Die Fourier–Analyse hat zahlreiche wichtige technische Anwendungen:

- Digitalisierung und Datenkompression (FFT, MP3, JPEG, MPEG).
- Datenanalyse, Mustererkennung, z.B. Spracherkennung.

Sie ist zudem ein universelles Werkzeug der Mathematik:

- Zerlegen von komplizierten Funktionen in einfache Basisfunktionen.
- Optimale  $L^2$ –Approximation, Lösung von Differentialgleichungen.

3B1B: *But what is the Fourier transform?* [youtu.be/spUNpyF58BY](https://youtu.be/spUNpyF58BY)  
D. Gabor, Nobelpreis 1971 für Holographie! [youtu.be/EmKQsSD1aa4](https://youtu.be/EmKQsSD1aa4)

😊 Fourier–Integrale können wir oft ausrechnen dank Integralsätzen wie dem Residuensatz. Hier zahlt sich unsere solide Vorbereitung aus!

⚠ In der Literatur gibt es mindestens drei Konventionen für den Faktor  $2\pi$  vor dem Integral oder im Exponenten. Beim sorgfältigen Vergleich muss man jeweils nachschauen, welche Normierung zugrunde liegt. Wir beginnen daher, wie es sich gehört, mit einer präzisen Definition.

Fourier–Transformation

Definition K1A: Fourier–Transformation

Die **Fourier–Transformierte** einer Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ist

$$\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \hat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx.$$

Wir nennen  $f$  **Fourier–transformierbar**, falls diese Integrale existieren. Für  $f \in L^1$ , also  $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty$ , ist der Integrand absolut integrierbar. Allgemein nutzen wir Cauchy–Hauptwert B219 und Residuenkalkül F4k.

Die so definierte Zuordnung  $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$  heißt **Fourier–Transformation**.

Die **inverse Fourier–Transformation**  $\mathcal{F}^{-1} : \hat{f} \mapsto f$  ist definiert durch

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

Auch hierzu fordern bzw. sichern wir die Transformierbarkeit von  $\hat{f}$ . Dies kürzen wir ab als **Transformationspaar**  $f \circ \hat{f}$  bzw.  $\hat{f} \circ f$ .

Fourier–Transformation

Periodische Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  stellen wir als **Fourier–Reihe** dar, also eine **diskrete Überlagerung** von harmonischen Schwingungen. Hier hingegen stellen wir  $f$  dar als ein **Fourier–Integral**, also eine **kontinuierliche Überlagerung** harmonischer Schwingungen  $\hat{f}(\xi) e^{i\xi x}$ . Somit ist  $\hat{f}$  die **Dichtefunktion** der in  $f$  enthaltenen Harmonischen.

In der Signalverarbeitung zerlegt die Fourier–Transformation das **Signal**  $f$  in sein **Spektrum**  $\hat{f}$ . Man nennt dann  $x$  meist die **Zeitvariable** und  $f(x)$  die Funktion im **Zeitbereich**. Als Gegenstück hierzu heißt  $\xi$  die **Frequenzvariable** und die Transformierte  $\hat{f}(\xi)$  **Spektralfunktion**.

In (quanten-)physikalischen Anwendungen betrachtet man  $x$  als **Ort** und  $\xi$  als **Impuls**. Dies sind **konjugierte Variablen** in der klassischen, hamiltonschen Mechanik (s. P2F). In der Quantenmechanik übersetzt dann die Fourier–Transformation zwischen Orts- und Impulsdarstellung.

Hin- und Rücktransformation sind konjugiert gemäß  $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = \overline{\mathcal{F}(f)}$ .

⚠ Verschiedene Autoren verwenden hier verschiedene Konventionen. Der obige Faktor  $1/\sqrt{2\pi}$  führt zu einer symmetrischen Umkehrformel.

Fourier–Transformation und Cauchy–Hauptwert

Wir setzen stillschweigend voraus, dass  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  auf jedem endlichen Intervall  $[-r, r]$  integrierbar ist. Bei Polstellen, etwa  $f(x) = e^{ix}/(x-s)$  in  $x = s$ , betrachten wir das uneigentliche Integral  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-r}^{s-\varepsilon} + \int_{s+\varepsilon}^r$ .

Als Integral über  $\mathbb{R}$  vereinbaren wir hier den **Cauchy–Hauptwert**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx := \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r e^{-i\xi x} f(x) dx.$$

Dieses Integral existiert, wenn  $f$  auf ganz  $\mathbb{R}$  absolut integrierbar ist, also  $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty$  erfüllt, aber auch noch in weiteren Fällen.

Als Beispiel betrachten wir unten die **Spaltfunktion**  $\text{si} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\text{si}(x) = \begin{cases} \sin(x)/x & \text{für } x \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Diese ist über  $\mathbb{R}$  nicht absolut integrierbar,  $\int_{\mathbb{R}} |\text{si}(x)| dx = \infty$ . [B421] Glücklicherweise existiert noch der obige Cauchy–Hauptwert [K107] analog zur Summierbarkeit der Leibniz–Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}/k$ . [B322]

Linearität der Fourier–Transformation

😊 Aus der Linearität des Integrals folgt unmittelbar:

Satz K1B: Linearität

Die Fourier–Transformation ist linear:

$$\mathcal{F}[af + bg] = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g)$$

für alle  $\mathcal{F}$ –transformierbaren Funktionen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  und  $a, b \in \mathbb{C}$ .

$$f \circ \hat{f}, g \circ \hat{g} \implies af + bg \circ \hat{af + b\hat{g}}$$

**Nachrechnen:** Dank Linearität des Integrals gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(af + bg)(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} [af(x) + bg(x)] dx \\ &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx + \frac{b}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} g(x) dx \\ &= a\hat{f}(\xi) + b\hat{g}(\xi) \end{aligned}$$

**Beispiel: Rechteckfunktion**  $\circ \rightarrow$  **Spaltfunktion** K107  
Beispiel

**Aufgabe:** Wir betrachten ein reelles Intervall  $[a, b] = [c - r, c + r]$ .  
 (1) Fourier-transformieren Sie die Rechteckfunktion  $f(x) = \mathbf{I}_{[a,b]}(x)$ .  
 (2) Berechnen Sie aus der Transformierten  $\hat{f}$  die Rücktransformierte.

**Lösung:** (1) Im Punkt  $\xi = 0$  ist die Rechnung besonders leicht:  

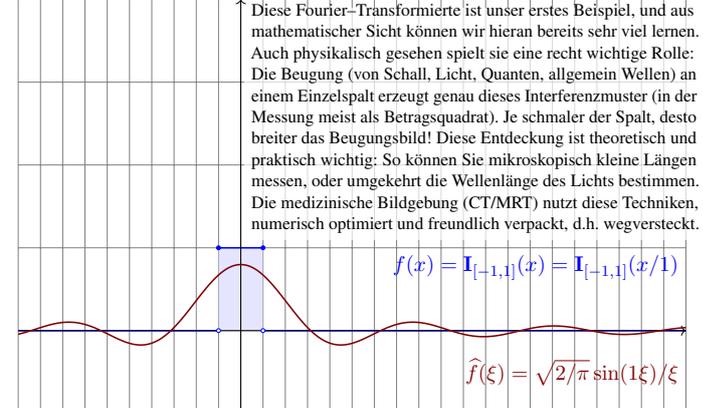
$$\hat{f}(0) \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=a}^b 1 dx = \frac{b-a}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} r$$
 Für  $\xi \neq 0$  rechnen wir geduldig und finden die **Spaltfunktion** [B149]:  

$$\hat{f}(\xi) \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=a}^b e^{-i\xi x} dx \stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi} \right]_{x=a}^b$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-i\xi c} e^{i\xi r} - e^{-i\xi r}}{2i} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-i\xi c} \sin(\xi r)}{\xi}$$
 (Verschiebung) (Spaltfunktion)

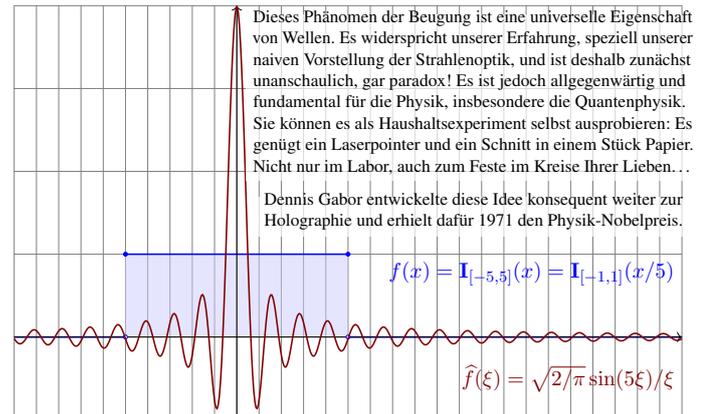
☺ Insbesondere ist  $\hat{f}$  stetig, auch im Punkt  $\xi = 0$ : Entwickeln Sie hierzu  $\sin(\xi r)$  als Potenzreihe um  $\xi = 0$ , nutzen die Regel von L'Hospital oder direkt die Ableitung  $\sin(\xi r)/\xi = (\sin(\xi r) - \sin(0r))/(\xi - 0) \rightarrow r \cos(0)$ .

**Beispiel: Rechteckfunktion**  $\circ \rightarrow$  **Spaltfunktion** K108  
Beispiel



☺ Wir sehen hier die **Unschärferelation**: Ist  $f$  schmal, so ist  $\hat{f}$  breit. Beugung am Einzelspalt erzeugt dieses Interferenzmuster (quadrirt).

**Beispiel: Rechteckfunktion**  $\circ \rightarrow$  **Spaltfunktion** K109  
Beispiel



☺ Wir sehen hier die **Unschärferelation**: Ist  $\hat{f}$  schmal, so ist  $f$  breit. Anwendung: So können Sie mikroskopisch kleine Strukturen messen.

**Beispiel: Rechteckfunktion**  $\circ \rightarrow$  **Spaltfunktion** K110  
Beispiel

(2) Die Fourier-Transformierte von  $f = \mathbf{I}_{[a,b]}$  ist  

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\xi a} - e^{-i\xi b}}{i\xi}$$
 Erinnerung an Seite F425: Mit dem Residuenkalkül bestimmen wir  

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\xi u}}{\xi} d\xi \stackrel{\text{Res}}{\stackrel{\text{F4k}}{=}} \text{sign}(u) \text{res}_{z=0} \left( \frac{e^{izu}}{z} \right) = \text{sign}(u)$$
 Zu  $\hat{f}$  berechnen wir damit die **inverse Fourier-Transformation**:  

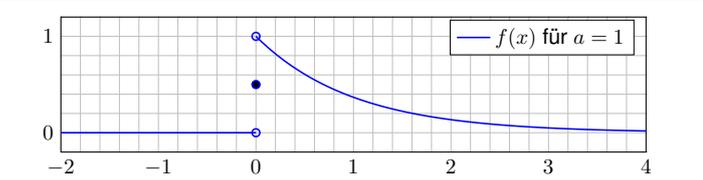
$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\xi a} - e^{-i\xi b}}{i\xi} e^{i\xi x} d\xi$$

$$\stackrel{\text{Lin}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\xi(x-a)}}{\xi} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\xi(x-b)}}{\xi} d\xi \stackrel{\text{Res}}{=} \begin{cases} 0 & \text{für } x \notin [a, b], \\ 1 & \text{für } x \in ]a, b[, \\ \frac{1}{2} & \text{für } x \in \{a, b\}. \end{cases}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \quad \bullet \quad \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \quad \bullet \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

☺ Wir erhalten die ursprüngliche Funktion  $f$ , aber sprungnormiert!

**Fourier-Transformation der Exponentialverteilung** K111  
Beispiel



**Aufgabe:** Sei  $a > 0$ . Berechnen Sie folgende Fourier-Transformation:  

$$\begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ e^{-ax} & \text{für } x > 0 \\ 1/2 & \text{für } x = 0 \end{cases} = f(x) \quad \circ \rightarrow \quad \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a + i\xi}$$

**Lösung:** Wir setzen die Definition ein und rechnen es aus:  

$$\sqrt{2\pi} \hat{f}(\xi) \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{x=0}^{\infty} e^{-i\xi x} e^{-ax} dx$$

$$\stackrel{\text{Exp}}{=} \int_{x=0}^{\infty} e^{-(a+i\xi)x} dx \stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} \left[ -\frac{e^{-(a+i\xi)x}}{a+i\xi} \right]_{x=0}^{\infty} = \frac{1}{a+i\xi}$$

**Fourier-Transformation der Exponentialverteilung** K112  
Beispiel

**Aufgabe:** Berechnen Sie die Rücktransformation.  
**Lösung:** Wir nutzen den Residuenkalkül, hier erneut Satz F4k:  

$$f(x) \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\xi x}}{a + i\xi} d\xi$$

$$\stackrel{\text{Lin}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\xi x}}{\xi - ia} d\xi \stackrel{\text{Res}}{\stackrel{\text{F4k}}{=}} \begin{cases} e^{-ax} & \text{für } x > 0 \text{ (Residuum in } \xi = ia), \\ 0 & \text{für } x < 0 \text{ (keine Sing. in } \mathbb{C}_{\text{Im} \leq 0}). \end{cases}$$
 Den Fall  $x = 0$  müssen wir separat weiterrechnen:  

$$f(0) \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi - ia} d\xi \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi + ia}{\xi^2 + a^2} d\xi \text{ (gerader Anteil)}$$

$$\stackrel{\text{Lin}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{\xi^2 + a^2} d\xi \stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} \frac{1}{2\pi} \left[ \arctan(x/a) \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2}$$
 ☺ Wir erhalten genau die Exponentialverteilung der vorigen Aufgabe! Insbesondere gilt: In  $x = 0$  ist die Rücktransformierte sprungnormiert. Zur Bequemlichkeit haben wir deshalb auch  $f$  gleich so eingerichtet.

**Fourier-Transformation der Cauchy-Verteilung** K113  
Beispiel

**Aufgabe:** Sei  $a > 0$ . Fourier-transformieren Sie  $g(x) = e^{-a|x|}$ .  
**Lösung:** Direkt ausrechnen... oder besser gleich Linearität nutzen:  

$$\begin{cases} e^{-ax} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \\ 1/2 & \text{für } x = 0 \end{cases} = f(x) \quad \circ \rightarrow \quad \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a + i\xi}$$

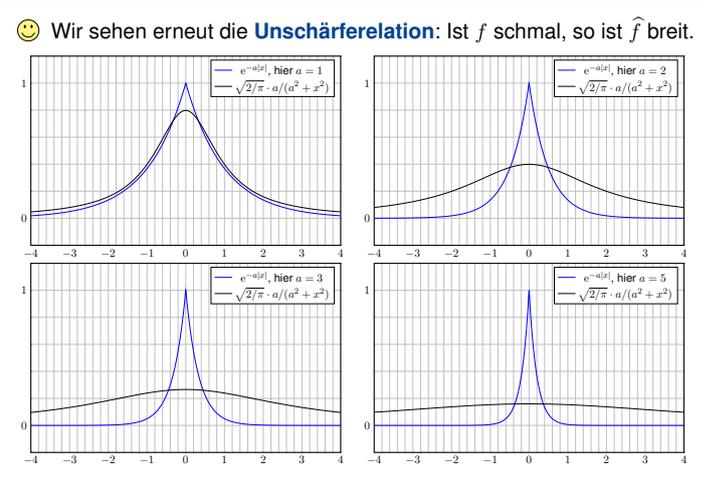
$$\Rightarrow g(x) = f(x) + f(-x) \quad \circ \rightarrow \quad \hat{g} = \hat{f}(\xi) + \hat{f}(-\xi)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{a + i\xi} + \frac{1}{a - i\xi} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a}{a^2 + \xi^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + \xi^2}$$

☺ Die Rücktransformation gelingt ebenso: Wir haben oben bereits  $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = f$  ausgerechnet. Daraus folgt  $\mathcal{F}^{-1}(\hat{g}) = g$  dank Linearität.  
 ☺ Dies folgt ebenso aus jedem der beiden folgenden Umkehrsätze, da die Funktion  $f$  und ihre Transformierte  $\hat{f}$  alle Bedingungen erfüllen.

**Fourier-Transformation der Cauchy-Verteilung** K114  
Beispiel



😊 Unsere Beispiele illustrieren folgende allgemeine Regel:

**Satz K1c: Eigenschaften der Fourier-Transformierten**

Ist  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  absolut integrierbar, also  $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty$ , dann gilt:

(1) Die Fourier-Transformierte  $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ist stetig und beschränkt:

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}$$

(2) Sie verschwindet im Unendlichen (Riemann-Lebesgue-Lemma):

$$|\hat{f}(\xi)| \rightarrow 0 \quad \text{für } |\xi| \rightarrow \infty$$

(3) Zudem gilt die Plancherel-Gleichung (Energiegleichung):

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

(1) Sei  $f$  absolut integrierbar. Die Beschränktheit von  $\hat{f}$  ist dann klar:

$$|\hat{f}(\xi)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{|e^{-i\xi x}|}_{\leq 1} \cdot |f(x)| dx$$

Zur gleichmäßigen Stetigkeit von  $\hat{f}(\xi)$  betrachten wir

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\xi + \eta) - \hat{f}(\xi)| &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} [e^{-i(\xi+\eta)x} - e^{-i\xi x}] f(x) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{|e^{-i\xi x}|}_{=1} \cdot \underbrace{|e^{-i\eta x} - 1|}_{=: g_{\eta}(x)} \cdot |f(x)| dx. \end{aligned}$$

In jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $e^{-i\eta x} \rightarrow 1$  für  $\eta \rightarrow 0$ , demnach also  $g_{\eta}(x) \rightarrow 0$ . Zudem ist  $g_{\eta}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt durch die integrierbare Funktion  $2|f|$ . Dank majorisierter Konvergenz [D209] vertauschen Integral und Limes:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} g_{\eta}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{\eta \rightarrow 0} g_{\eta}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} 0 dx = 0$$

Somit gilt  $|\hat{f}(\xi + \eta) - \hat{f}(\xi)| \rightarrow 0$ , also  $\hat{f}(\xi + \eta) \rightarrow \hat{f}(\xi)$  für  $\eta \rightarrow 0$ .

**Satz K1D: Umkehrsatz im Spezialfall  $L^1 \circ \bullet L^1$**

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  absolut integrierbar mit Fourier-Transformierter

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx.$$

Dann ist die Funktion  $\hat{f}$  stetig. Ist umgekehrt auch  $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  absolut integrierbar und  $f$  stetig, so gilt in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$  die Umkehrformel

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

⚠ Der Satz fordert die strenge Voraussetzung, dass  $f, \hat{f} \in L^1 \cap C^0$  gilt, also beide Funktionen sowohl stetig als auch absolut integrierbar sind. Als Gegenleistung garantiert er die Umkehrformel in *jedem* Punkt!

- 😊 Die Cauchy-Verteilung [K113] erfüllt Voraussetzung und Folgerung.
- 😊 Für die Spaltfunktion [K107] gilt nur  $f \in L^1 \setminus C^0$  und  $\hat{f} \in C^0 \setminus L^1$ .

**Satz K1E: Umkehrformel für sprungnormierte Funktionen**

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  absolut integrierbar mit Fourier-Transformierter

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx.$$

Zudem sei  $f$  stückweise stetig differenzierbar und sprungnormiert,

$$f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Dann gilt für jeden Punkt  $x \in \mathbb{R}$  die Umkehrformel

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

Für solche Funktionen ist die Transformation  $f \circ \bullet \hat{f}$  also umkehrbar.

😊 Einfachster Fall: Ist  $f$  stetig in  $x$ , so ist  $f(x) = f(x_{\pm})$  sprungnormiert.

Die Fourier-Transformierte haben wir oben sehr allgemein definiert: Für das Integral fordern wir nur die Existenz des Cauchy-Hauptwerts. Das hat den Vorteil, auf möglichst viele Funktionen anwendbar zu sein; genau das nutzen wir bereits in unseren ersten Beispielrechnungen.

Gute Eigenschaften hat die  $\mathcal{F}$ -Transformation aber erst für absolut integrierbare Funktionen,  $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , also solche mit  $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty$ . Das ist eine Einschränkung, garantiert uns aber starke Folgerungen. Meist werden wir uns also auf diesen besonders gutartigen Fall stützen.

Im Satz ist die absolute Integrierbarkeit von  $f$  wesentlich, andernfalls kann die Transformierte  $\hat{f}$  auch unstetig sein, wie in obigen Beispielen: Die Spaltfunktion  $\hat{f}(\xi) = \sqrt{2/\pi} \sin(\xi)/\xi$  ist nicht absolut integrierbar,  $\hat{f} \in L^2 \setminus L^1$ , und tatsächlich ist die (Rück)Transformierte nicht stetig.

(3) Die Plancherel-Gleichung erweitert die Fourier-Isometrie J1A. Sie besagt: Genau dann ist  $f$  quadrat-integrierbar, wenn  $\hat{f}$  dies ist, und die Integrale über  $|f|^2$  und  $|\hat{f}|^2$  sind gleich (Energiegleichung). Wir zeigen dies etwas später gegen Ende des Kapitels (Satz K3A).

(2) Die Transformierte von  $f(x) = \mathbf{I}_{[a,b]}(x)$  verschwindet im Unendlichen:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=a}^b e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\xi b} - e^{-i\xi a}}{-i\xi} \rightarrow 0 \quad \text{für } |\xi| \rightarrow \infty$$

Dank Linearität gilt dies somit für alle Treppenfunktionen. Jede absolut integrierbare Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  können wir durch Treppenfunktionen approximieren: Zu  $\varepsilon > 0$  existiert eine Treppenfunktion  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$\|f - g\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| dx \leq \varepsilon.$$

Damit liegen auch die Transformierten  $\hat{f}$  und  $\hat{g}$  nahe beieinander:

$$|\hat{f}(\xi) - \hat{g}(\xi)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} [f(x) - g(x)] dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| dx \leq \varepsilon$$

Aus  $|\hat{f}(\xi)| \leq |\hat{g}(\xi)| + \varepsilon$  und  $|\hat{g}(\xi)| \rightarrow 0$  erhalten wir

$$\limsup_{|\xi| \rightarrow \infty} |\hat{f}(\xi)| \leq \limsup_{|\xi| \rightarrow \infty} |\hat{g}(\xi)| + \varepsilon = \varepsilon.$$

Da dies für alle  $\varepsilon > 0$  gilt, folgern wir  $\limsup_{|\xi| \rightarrow \infty} |\hat{f}(\xi)| = 0$ .

Wir sprechen von **Fourier-Analyse** und **Fourier-Synthese**:

- Die Analyse  $\mathcal{F}: f \mapsto \hat{f}$  zerlegt das Signal  $f$  in sein Spektrum  $\hat{f}$ .
- Die Synthese  $\mathcal{F}^{-1}: \hat{f} \mapsto f$  integriert das Spektrum  $\hat{f}$  zum Signal  $f$ .

Dies ist analog zu Fourier-Reihen, dort mit diskretem Spektrum. Für die Ausdehnung  $\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}: L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  siehe Seite K301.

**Beispiel:** Die Umkehrformel für Glockenkurven können wir explizit nachrechnen [K128]. Hier sind  $f$  und  $\hat{f}$  stetig und absolut integrierbar.

**Beweisidee:** Der Satz gilt für Glockenkurven [K128], also auch für ihre Linearkombination [K106]. Jede absolut integrierbare Funktion lässt sich so approximieren. Durch Grenzübergang gilt er dann für alle  $f, \hat{f} \in L^1$ .

**Bemerkung:** Dieser Umkehrsatz ist ein wichtiger erster Schritt. In vielen Anwendungen jedoch ist  $f$  nicht stetig oder  $\hat{f}$  nicht absolut integrierbar. Wir möchten daher ein Kriterium, das auch Sprungstellen behandelt. Der nächste Satz liefert diese praktische und bequeme Erweiterung. Wir finden wieder die Sprungnormierung wie bei Fourier-Reihen.

😊 Dies haben wir in unseren Beispielen beobachtet, etwa K107:

Die Umkehrformel gilt für Indikatorfunktionen  $f = \mathbf{I}_{[a,b]}$  mit  $a < b$  in  $\mathbb{R}$ : Hier können wir beide  $\mathcal{F}$ -Transformationen explizit nachrechnen!

😊 Dank Linearität gilt der Satz somit für alle Treppenfunktionen.

**Beweis:** Eine Rechnung für den allgemeinen Fall finden Sie bei Meyberg-Vachener, *Höhere Mathematik 2*, §11.6, Satz 6.3.

Wir werden den Satz hier durch weitere Rechenbeispiele illustrieren. Das ersetzt nicht den Beweis, trainiert aber unsere Rechentechniken.

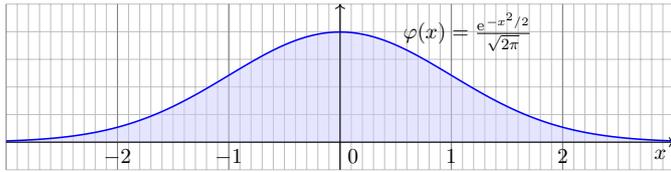
**Bemerkung:** Der Satz entspricht dem Dirichlet-Kriterium I2A für Fourier-Reihen: Ist  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  periodisch, stückweise stetig diff'bar und sprungnormiert, so gilt für die Fourier-Koeffizienten  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ :

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ik\omega t} \quad \circ \bullet \quad \hat{f}(k) = \frac{1}{T} \int_{t=-T/2}^{T/2} e^{-ik\omega t} f(t) dt.$$

Wir schreiben „ $f(t) = \dots$ “ und nicht bloß „ $f(t) \sim \dots$ “, denn die Reihe konvergiert in jedem Punkt  $t$  und hat als Grenzwert tatsächlich  $f(t)$ .

Wir erinnern an die Dichte der **Standard-Normalverteilung**

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$



- 😊 Wahrscheinlichkeitsdichte:  $\varphi \geq 0$  und  $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = 1$
  - 😊 Hier gilt Schwerpunkt = Mittelwert =  $\int_{\mathbb{R}} x \varphi(x) dx = 0$ ,
  - 😊 Trägheitsmoment = Varianz =  $\int_{\mathbb{R}} (x - \mu)^2 \varphi(x) dx = 1$ .
- Sie spielt in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine zentrale Rolle. Auch für die Fourier-Transformation ist sie ein zentrales Beispiel.

**Wiederholung:** Berechnen Sie das Gaußsche Integral [C230]

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}.$$

**Lösung:** Wir nutzen Fubini und Transformation in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} dt \right)^2 &= \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx \right) \cdot \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2} dy \right) \\ \stackrel{\text{Lin}}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \cdot \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2} dy \right) dx &\stackrel{\text{Lin}}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \cdot e^{-y^2/2} dy dx \\ \stackrel{\text{Exp}}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x^2+y^2)/2} dy dx &\stackrel{\text{Fub}}{=} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} e^{-(x^2+y^2)/2} d(x, y) \\ \stackrel{\text{Polar}}{=} \int_{\mathbb{R}_{>0} \times [0, 2\pi]} e^{-\rho^2/2} \rho d(\rho, \varphi) &\stackrel{\text{Fub}}{=} \int_{\rho=0}^{\infty} \int_{\varphi=0}^{2\pi} e^{-\rho^2/2} \rho d\varphi d\rho \\ \stackrel{\text{Lin}}{=} 2\pi \int_{\rho=0}^{\infty} \rho e^{-\rho^2/2} d\rho &\stackrel{\text{HDI}}{=} 2\pi \left[ -e^{-\rho^2/2} \right]_{\rho=0}^{\infty} = 2\pi \end{aligned}$$

**Satz K1F:** Fouriertransformierte der Standard-Normalverteilung

Für die Normalverteilung gilt  $\varphi \circ \bullet \varphi$ , also  $e^{-x^2/2} \circ \bullet e^{-\xi^2/2}$ .

😊 Die Fourier-Transformierte der Standard-Normalverteilung  $\varphi$  ist... sie selbst, also  $\hat{\varphi} = \varphi$ ! Auch die Rücktransformation von  $\hat{\varphi}$  ergibt  $\varphi$ . Dies gelingt mit Cauchy-Integralsatz [K128] oder Ableitung [D415].

- Aufgabe:** (1) Berechnen Sie den Wert  $\hat{\varphi}(0) = 1/\sqrt{2\pi}$  sowie  
 (2)  $\hat{\varphi}'(\xi) = -\xi \hat{\varphi}(\xi)$  durch Ableitung unter dem Integral.  
 (3) Berechnen Sie hieraus die Funktion  $\hat{\varphi}(\xi) = e^{-\xi^2/2}/\sqrt{2\pi}$ .

**Lösung:** (1) Die Fourier-Transformierte ist definiert durch

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \varphi(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} e^{-x^2/2} dx.$$

Den Wert für  $\xi = 0$  kennen wir dank des Gaußschen Integrals:

$$\hat{\varphi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

(2) Wir berechnen  $\hat{\varphi}'$  durch Differenzieren unter dem Integral:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}'(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \frac{d}{d\xi} \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ e^{-i\xi x} e^{-x^2/2} \right] dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} (-ix) e^{-i\xi x} e^{-x^2/2} dx \quad (\dots \text{ partielle Integration. } \dots) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \underbrace{i e^{-i\xi x} e^{-x^2/2}}_{=0} \right]_{x \rightarrow -\infty}^{\infty} - \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} \xi e^{-i\xi x} e^{-x^2/2} dx = -\xi \hat{\varphi}(\xi) \end{aligned}$$

(3) Demnach genügt  $\hat{\varphi}$  der Differentialgleichung  $\hat{\varphi}'(\xi) = -\xi \hat{\varphi}(\xi)$ .

Wir trennen die Variablen gemäß  $\hat{\varphi}'(\xi)/\hat{\varphi}(\xi) = -\xi$

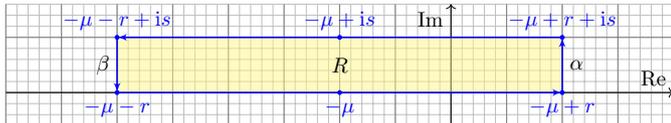
und integrieren zu  $\ln \hat{\varphi}(\xi) - \ln \hat{\varphi}(0) = -\xi^2/2$ .

Wir erhalten so die Lösung  $\hat{\varphi}(\xi) = \hat{\varphi}(0) e^{-\xi^2/2}$ .

Mit  $\hat{\varphi}(0) = 1/\sqrt{2\pi}$  folgt  $\hat{\varphi}(\xi) = (1/\sqrt{2\pi}) e^{-\xi^2/2}$ .

😊 Diese Rechnung gelingt dank unserer Integrationswerkzeuge! Mit Satz K2A wird diese Rechnung ein eleganter Vierzeiler. [K207] Wir rechnen es nochmal alternativ mit dem Cauchy-Integralsatz.

**Aufgabe:** Vergleichen Sie  $\int_{-r}^r e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx$  mit  $\int_{-r}^r e^{-(x-\mu+is)^2/2\sigma^2} dx$  dank des Cauchy-Integralsatzes und zeigen Sie Gleichheit für  $r \rightarrow \infty$ .



**Lösung:** Dies sind Wegintegrale der holomorphen Funktion  $e^{-z^2/2\sigma^2}$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial R} e^{-z^2/2\sigma^2} dz = \int_{x=-r}^r e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx - \int_{x=-r}^r e^{-(x-\mu+is)^2/2\sigma^2} dx \\ &\quad + \int_{\alpha} e^{-z^2/2\sigma^2} dz + \int_{\beta} e^{-z^2/2\sigma^2} dz \\ &\rightarrow \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx - \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-(x-\mu+is)^2/2\sigma^2} dx \end{aligned}$$

😊 Die Wegintegrale längs  $\alpha$  und  $\beta$  verschwinden für  $r \rightarrow \infty$ , denn  $|\int_{\alpha} e^{-z^2/2\sigma^2} dz| \leq \int_{\alpha} |e^{-z^2/2\sigma^2}| \cdot |d\alpha| \leq s e^{-\text{Re}(is-\mu+r)^2/2\sigma^2} \rightarrow 0$ .

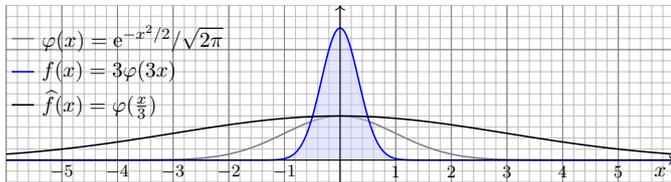
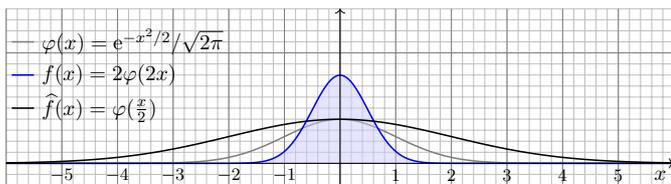
**Aufgabe:** Fourier-transformieren Sie die Normalverteilung

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \circ \bullet \hat{f}(\xi) = e^{-i\mu\xi} \varphi(\sigma\xi).$$

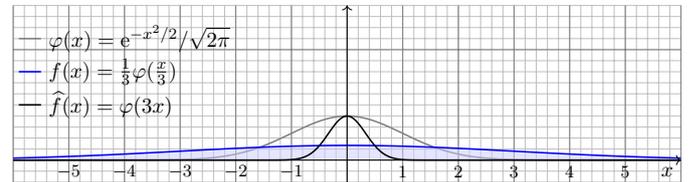
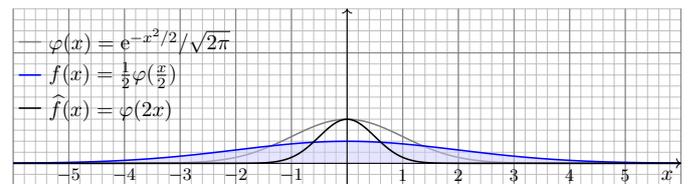
**Lösung:** Wir setzen die Definition ein und rechnen es aus:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &\stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx \\ &\stackrel{\text{qE}}{=} \frac{1}{2\pi\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-(x-\mu+i\sigma^2\xi)^2/2\sigma^2}}_{\text{quadratische Ergänzung}} \underbrace{e^{-i\mu\xi - \sigma^2\xi^2/2}}_{\text{Rest ohne } x} dx \\ &\stackrel{\text{Lin}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\mu\xi - \sigma^2\xi^2/2} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\mu+i\sigma^2\xi)^2/2\sigma^2} dx \\ &\stackrel{\text{Res}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\mu\xi - \sigma^2\xi^2/2} = e^{-i\mu\xi} \varphi(\sigma\xi) \end{aligned}$$

😊 Die Rücktransformierte  $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = f$  berechnen Sie ebenso leicht.



- 😊 Der Flächeninhalt  $\int_{\mathbb{R}} a\varphi(ax) dx = 1$  bleibt unverändert.
- 😊 Wir sehen die Unschärferelation: Ist  $f$  schmal, so ist  $\hat{f}$  breit.



- 😊 Der Flächeninhalt  $\int_{\mathbb{R}} a\varphi(ax) dx = 1$  bleibt unverändert.
- 😊 Wir sehen die Unschärferelation: Ist  $f$  breit, so ist  $\hat{f}$  schmal.

Für die Transformation  $f(x) \circ \rightarrow \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx$  gilt:

$$\begin{aligned}
 af(x) &\circ \rightarrow a\hat{f}(\xi), & f(x) + g(x) &\circ \rightarrow \hat{f}(\xi) + \hat{g}(\xi), \\
 f(-x) &\circ \rightarrow \hat{f}(-\xi), & \overline{f(x)} &\circ \rightarrow \overline{\hat{f}(\xi)}, \\
 f(ax) &\circ \rightarrow \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right), & \frac{1}{|a|} f\left(\frac{x}{a}\right) &\circ \rightarrow \hat{f}(a\xi), \\
 f(x-a) &\circ \rightarrow e^{-i\xi a} \hat{f}(\xi), & e^{iax} f(x) &\circ \rightarrow \hat{f}(\xi-a), \\
 \partial_x f(x) &\underset{K2A}{\circ} \rightarrow i\xi \hat{f}(\xi), & x f(x) &\underset{K2A}{\circ} \rightarrow i\partial_\xi \hat{f}(\xi), \\
 (f * g)(x) &\underset{K2B}{\circ} \rightarrow \sqrt{2\pi} \cdot \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi), & f(x) \cdot g(x) &\underset{K2B}{\circ} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\hat{f} * \hat{g})(\xi).
 \end{aligned}$$

- ⚠ Die letzten vier erfordern  $L^1$ -Voraussetzungen, siehe K2A und K2B.
- 😊 Glattheit der Funktion  $f$  entspricht schnellem Abklingen von  $\hat{f}$ .
- 😊 Schnelles Abklingen der Funktion  $f$  entspricht Glattheit von  $\hat{f}$ .

**Konjugation:**

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \overline{f(x)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} f(x) dx.$$

**Streckung:** Substitution mit  $y = ax$  für  $a \neq 0$  liefert

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(ax) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi y/a} f(y) \frac{dy}{|a|}.$$

**Ortsverschiebung:** Substitution mit  $y = x - a$  liefert

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x-a) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi(y+a)} f(y) dy.$$

**Phasenverschiebung:** Multiplikation mit  $e^{iax}$  liefert

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} e^{iax} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi-a)x} f(x) dx.$$

**Aufgabe:** Wir wissen bereits

$$f(x) = \mathbf{I}_{[-1,1]}(x) \circ \rightarrow \hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\xi)}{\xi}.$$

Was erhalten Sie bei Streckung um  $a > 0$  und Verschiebung um  $c \in \mathbb{R}$ ?

**Lösung:** Bei Streckung um  $a > 0$  gilt

$$f(x/a) = \mathbf{I}_{[-a,a]}(x) \circ \rightarrow a \hat{f}(a\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(a\xi)}{\xi}.$$

Bei Verschiebung um  $c \in \mathbb{R}$  gilt

$$\mathbf{I}_{[-a,a]}(x-c) = \mathbf{I}_{[-a-c, c+a]}(x) \circ \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-ic\xi} \frac{\sin(a\xi)}{\xi}.$$

- 😊 Dies können Sie wie oben auch direkt nachrechnen: Wiederholung! Wir sehen erneut die **Unschärferelation**: Ist  $f$  schmal, so ist  $\hat{f}$  breit. Die Ortsverschiebung in  $x$  entspricht der Phasenverschiebung in  $\xi$ .

**Aufgabe:** Wir wissen bereits

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \circ \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/2}.$$

Was erhalten Sie bei Streckung um  $\sigma > 0$  und Verschiebung um  $\mu \in \mathbb{R}$ ?

**Lösung:** Bei Streckung um  $\sigma > 0$  gilt

$$\frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \circ \rightarrow \varphi(\sigma\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\sigma^2\xi^2/2}.$$

Bei Verschiebung um  $\mu \in \mathbb{R}$  gilt

$$\frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \circ \rightarrow e^{-i\mu\xi} \varphi(\sigma\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\mu\xi - \sigma^2\xi^2/2}.$$

- 😊 Dies können Sie wie oben auch direkt nachrechnen: Wiederholung! Wir sehen erneut die **Unschärferelation**: Ist  $f$  schmal, so ist  $\hat{f}$  breit. Die Ortsverschiebung in  $x$  entspricht der Phasenverschiebung in  $\xi$ .

**Satz K2A: Ableitung und Multiplikation**

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  absolut integrierbar mit  $\mathcal{F}$ -Transformierter  $f \circ \rightarrow \hat{f}$ .

(1) Ist  $f$  absolut stetig und  $\partial_x f$  über  $\mathbb{R}$  absolut integrierbar, so gilt

$$\partial_x f(x) \circ \rightarrow i\xi \hat{f}(\xi).$$

(2) Ist  $x f(x)$  über  $\mathbb{R}$  absolut integrierbar, so ist  $\hat{f}$  stetig diff'bar und

$$x f(x) \circ \rightarrow i\partial_\xi \hat{f}(\xi).$$

Die  $\mathcal{F}$ -Transformation  $f \circ \rightarrow \hat{f}$  verwandelt die Ableitung  $\partial_x$  in die Multiplikation mit  $i\xi$ , und Multiplikation mit  $x$  in die Ableitung  $i\partial_\xi$ . Diese Formeln können wir mehrfach anwenden auf  $\partial_x^n f(x)$  und  $x^n f(x)$ .

- 😊 Glattheit der Funktion  $f$  entspricht schnellem Abklingen von  $\hat{f}$ : Ist  $\partial_x^n f(x)$  stetig und absolut integrierbar, so folgt  $\xi^n \hat{f}(\xi) \rightarrow 0$ .
- 😊 Schnelles Abklingen der Funktion  $f$  entspricht Glattheit von  $\hat{f}$ . Ist  $x^n f(x)$  absolut integrierbar, so ist  $\hat{f}(\xi)$   $n$ -mal stetig differenzierbar.

**Nachrechnen:** (1) Für  $f' = \partial_x f$  erhalten wir dank partieller Integration

$$\begin{aligned}
 \widehat{f'}(\xi) &\stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f'(x) dx \quad \text{Das schreit nach partieller Integration!} \\
 &\stackrel{\text{B2a}}{\stackrel{L^1}{=}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \underbrace{e^{-i\xi x} f(x)}_{f(x) \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \pm\infty} \right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-i\xi) e^{-i\xi x} f(x) dx \stackrel{\text{Def}}{=} i\xi \hat{f}(\xi).
 \end{aligned}$$

Für  $s, t \geq x$  gilt  $|f(s) - f(t)| = \left| \int_s^t f'(u) du \right| \leq \int_s^t |f'(u)| du \leq \int_x^\infty |f'(u)| du$ . Für  $x \rightarrow \infty$  geht Letzteres gegen 0, somit erfüllt  $f(x)$  die Cauchy-Bedingung und besitzt einen Grenzwert. Ebenso für  $x \rightarrow -\infty$ . Beide Grenzwerte sind Null, andernfalls wäre  $f$  nicht absolut integrierbar.

(2) Dank  $\int_{\mathbb{R}} |x f(x)| dx < \infty$  dürfen wir  $\partial_\xi$  unters Integral ziehen:

$$\begin{aligned}
 \widehat{x f(x)}(\xi) &\stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} x f(x) dx \stackrel{\text{Diff}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} i\partial_\xi e^{-i\xi x} f(x) dx \\
 &\stackrel{\text{D3e}}{\stackrel{L^1}{=}} i\partial_\xi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx \stackrel{\text{Def}}{=} i\partial_\xi \hat{f}(\xi)
 \end{aligned}$$

- 😊 Alles gelingt dank unserer starken Werkzeuge. ⚠ Die technischen Vorkehrungen sind wirklich nötig, sonst verwickelt sich die Rechnung in verheerende Widersprüche. [K409]

**Beispiel:** Wir betrachten erneut die Standard-Normalverteilung:

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Die oben durchgeführten Rechnungen für  $\widehat{\varphi} = \hat{\varphi}$  waren lehrreich, aber eher mühsam. Die folgende Aufgabe macht es uns wesentlich leichter:

**Aufgabe:** Rechnen Sie folgende Schritte nach und begründen Sie:

- (1) Die Funktion  $\varphi$  erfüllt die Differentialgleichung  $\partial_x \varphi(x) + x \varphi(x) = 0$ .
- (2) Die  $\mathcal{F}$ -Transformierte erfüllt somit ebenfalls  $\xi \hat{\varphi}(\xi) + \partial_\xi \hat{\varphi}(\xi) = 0$ .
- (3) Wir trennen die Variablen gemäß  $\widehat{\varphi'(\xi)}/\widehat{\varphi}(\xi) = -\xi$ , integrieren zu  $\ln \widehat{\varphi}(\xi) - \ln \widehat{\varphi}(0) = -\xi^2/2$  und erhalten die Lösung  $\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\varphi}(0) e^{-\xi^2/2}$ .
- (4) Mit dem Anfangswert  $\widehat{\varphi}(0) = 1/\sqrt{2\pi}$  folgt  $\widehat{\varphi}(\xi) = (1/\sqrt{2\pi}) e^{-\xi^2/2}$ .

**Lösung:** Die ausführliche Aufgabenstellung enthält bereits die Antwort: Wir überprüfen (1) durch Ableiten, damit folgt (2) mühelos aus Satz K2A. (3) Diese Differentialgleichung haben wir bereits auf Seite K126 gelöst. (4) Den Wert  $\widehat{\varphi}(0) = 1/\sqrt{2\pi}$  haben wir oben auf Seite K124 berechnet.

**Aufgabe:** Zu  $f(x) = e^{-x^2/2}$  kennen wir bereits  $\hat{f}(\xi) = e^{-\xi^2/2}$ . (5) Fourier-transformieren Sie  $g(x) = x e^{-x^2/2}$  und  $h(x) = x^2 e^{-x^2/2}$ .

- 😊 **Bemerkung:** Wir können die Fourier-Integrale direkt ausrechnen. ..
- 😊 Das ist allerdings mühsam. Versuchen Sie es einmal als Übung!
- 😊 Es ist viel leichter, scharf hinzusehen und geschickt zu rechnen:

**Lösung:** (5a) Wir nutzen die Multiplikationsregel aus Satz K2A:

$$\begin{aligned}
 f(x) = e^{-x^2/2} &\circ \rightarrow \hat{f}(\xi) = e^{-\xi^2/2} \\
 g(x) = x f(x) &\circ \rightarrow i\partial_\xi \hat{f}(\xi) = -i\xi e^{-\xi^2/2} \\
 h(x) = x^2 f(x) &\circ \rightarrow (i\partial_\xi)^2 \hat{f}(\xi) = (1 - \xi^2) e^{-\xi^2/2}
 \end{aligned}$$

(5b) Alternativ nutzen wir die Ableitungsregel aus Satz K2A:

$$\begin{aligned}
 f(x) = e^{-x^2/2} &\circ \rightarrow \hat{f}(\xi) = e^{-\xi^2/2} \\
 g(x) = -\partial_x f(x) &\circ \rightarrow -i\xi \hat{f}(\xi) = -i\xi e^{-\xi^2/2} \\
 h(x) = \partial_x^2 f(x) + f(x) &\circ \rightarrow (i\xi)^2 \hat{f}(\xi) + \hat{f}(\xi) = (1 - \xi^2) e^{-\xi^2/2}
 \end{aligned}$$

**Übung:** Sind die  $L^1$ -Voraussetzungen von Satz K2A hier erfüllt?

**Satz K2B: Faltung und Produkt**

(0) Sind  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  absolut integrierbar, so auch ihre **Faltung**

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(x-s) ds.$$

(1) Unter Fourier-Transformation wird sie zum punktweisen **Produkt**:

$$(f * g)(x) \circ \bullet \sqrt{2\pi} \cdot \widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{g}(\xi)$$

(2) Umgekehrt wird das punktweise Produkt zur Faltung:

$$f(x) \cdot g(x) \circ \bullet \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\widehat{f} * \widehat{g})(\xi)$$

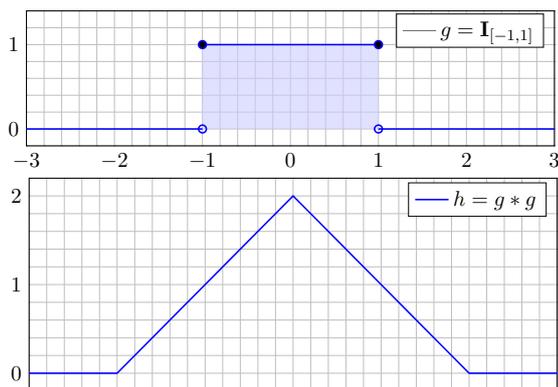
⚠ Den Faktor  $\sqrt{2\pi}$  empfinde ich hier als störend, aber er folgt aus unserer in Definition K1A festgelegten Normierung. Andere Konventionen sind hier bequemer, dafür andernorts lästiger.

**Aufgabe:** Rechnen Sie diese beiden Transformationsregeln nach!

**Nachrechnen:** (1) Dank Fubini und Substitution  $x = s + t$  gilt:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{g}(\xi) &\stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{s \in \mathbb{R}} e^{-i\xi s} f(s) ds \cdot \int_{t \in \mathbb{R}} e^{-i\xi t} g(t) dt \\ &\stackrel{\text{Lin}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{t \in \mathbb{R}} \int_{s \in \mathbb{R}} e^{-i\xi(s+t)} f(s) g(t) ds dt \\ &\stackrel{\text{Subs}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{t \in \mathbb{R}} \int_{x \in \mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x-t) g(t) dx dt \\ &\stackrel{\text{Fub}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{x \in \mathbb{R}} \int_{t \in \mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x-t) g(t) dt dx \\ &\stackrel{\text{Lin}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{x \in \mathbb{R}} e^{-i\xi x} \cdot \left[ \int_{t \in \mathbb{R}} f(x-t) g(t) dt \right] dx \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{x \in \mathbb{R}} e^{-i\xi x} \cdot (f * g)(x) dx \qquad \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{f * g}(\xi) \end{aligned}$$

(2) Die umgekehrte Formel zeigen Sie wörtlich genauso: Übung! Zur Faltung setzen wir nun  $\widehat{f}$  und  $\widehat{g}$  als absolut integrierbar voraus.



☺ Faltung glättet! Hier ist  $g$  unstetig, hingegen  $h = g * g$  stetig,  $g * g * g$  sogar stetig differenzierbar, etc. Dies entspricht dem schnellen Abklingen der  $\mathcal{F}$ -Transformierten:  $\widehat{g}$  geht gegen Null wie  $1/\xi$ , hingegen  $\widehat{h} = \widehat{g}^2$  wie  $1/\xi^2$ , dann  $\widehat{g}^3$  sogar wie  $1/\xi^3$ , etc.

**Aufgabe:** Zu  $g = \mathbf{I}_{[-a,a]}$  bestimme man  $h = g * g$  und  $\widehat{h}$  sowie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\xi a)^2}{\xi^2} d\xi.$$

**Lösung:** Hier ist  $g = \mathbf{I}_{[-a,a]}$  die Rechteckfunktion mit Breite  $2a$ . Die Faltung  $h = g * g$  ist dann die Dreieckfunktion mit Breite  $4a$ :

$$\begin{aligned} (g * g)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{I}_{[-a,a]}(x-t) \cdot \mathbf{I}_{[-a,a]}(t) dt = \int_{-a}^a \mathbf{I}_{[x-a, x+a]}(t) dt \\ &= \text{vol}_1([x-a, x+a] \cap [-a, a]) = \begin{cases} 2a - |x| & \text{für } |x| \leq 2a, \\ 0 & \text{für } |x| \geq 2a. \end{cases} \end{aligned}$$

Die  $\mathcal{F}$ -Transformierte der Faltung  $h = g * g$  ist das Produkt

$$\widehat{h}(\xi) = \sqrt{2\pi} \widehat{g}(\xi)^2 = \sqrt{2\pi} \frac{2}{\pi} \frac{\sin(\xi a)^2}{\xi^2} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\xi a)^2}{\xi^2}.$$

Dank Umkehrformel K1E von  $\widehat{h}$  zu  $h$  im Punkt  $x = 0$  gilt

$$2a = h(0) \stackrel{!}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\xi) d\xi = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\xi a)^2}{\xi^2} d\xi.$$

Die quadrat-integrierbaren Funktionen bilden den Vektorraum

$$L^2 = L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) := \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

Auf diesem definieren wir Skalarprodukt und Norm durch

$$\langle f | g \rangle_{L^2} := \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} g(x) dx, \quad \|f\|_{L^2}^2 := \langle f | f \rangle = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx.$$

**Satz K3A: Plancherel 1910**

Für die Fourier-Transformation  $\mathcal{F}: f \mapsto \widehat{f}$  gilt allgemein  $\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2}$ . Speziell für quadrat-integrierbare Funktionen erhalten wir die Isometrie

$$\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \quad \langle f | g \rangle = \langle \widehat{f} | \widehat{g} \rangle, \quad \|f\| = \|\widehat{f}\|.$$

☺ Physikalisch bedeutet dies Energieerhaltung: Das Energieintegral  $\int |f(x)|^2$  des Signals ist gleich dem Integral  $\int |\widehat{f}(\xi)|^2$  der Energiedichte.

☺ Für Fourier-Reihen gilt entsprechend die Parseval-Gleichung [\[4110\]](#)

$$\mathcal{F}: L^2([0, 2\pi], \mathbb{C}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}), \quad \langle f | g \rangle = \langle \widehat{f} | \widehat{g} \rangle, \quad \|f\| = \|\widehat{f}\|.$$

**Aufgabe:** Beweisen Sie den Satz für  $f \circ \bullet \widehat{f}, g \circ \bullet \widehat{g}$  mit  $f, \widehat{g} \in L^1$ .

**Nachrechnen:** Seien  $f$  und  $\widehat{g}$  absolut integrierbar. Fubini ergibt dann:

$$\begin{aligned} \langle f | g \rangle &\stackrel{\text{Def}}{=} \int_{x \in \mathbb{R}} \overline{f(x)} g(x) dx \qquad \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{x \in \mathbb{R}} \overline{f(x)} \left[ \int_{y \in \mathbb{R}} \widehat{g}(y) e^{ixy} dy \right] dx \\ &\stackrel{\text{Lin}}{=} \int_{x \in \mathbb{R}} \int_{y \in \mathbb{R}} \overline{f(x)} e^{ixy} \widehat{g}(y) dy dx \qquad \stackrel{\text{Fub}}{=} \int_{y \in \mathbb{R}} \int_{x \in \mathbb{R}} e^{-ixy} \overline{f(x)} \widehat{g}(y) dx dy \\ &\stackrel{\text{Lin}}{=} \int_{y \in \mathbb{R}} \left[ \int_{x \in \mathbb{R}} e^{-ixy} \overline{f(x)} dx \right] \widehat{g}(y) dy \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{y \in \mathbb{R}} \overline{\widehat{f}(y)} \widehat{g}(y) dy \stackrel{\text{Def}}{=} \langle \widehat{f} | \widehat{g} \rangle \end{aligned}$$

Speziell für  $f = g$  erhalten wir die Energiegleichung  $\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2}$ .

Demnach ist  $\widehat{f}$  genau dann quadrat-integrierbar, wenn  $f$  dies ist.

Für alle Funktionen  $f, \widehat{g} \in L^1 \cap L^2$  ist damit der Satz bewiesen.

Im allgemeinen Fall  $f \in L^2$  wählen wir eine approximierende Funktionenfolge  $f_n \in L^1 \cap L^2$  mit  $\|f - f_n\|_{L^2} \rightarrow 0$  und definieren  $\mathcal{F}(f) := \lim \mathcal{F}(f_n)$ . Dank Energiegleichung für alle  $f_n$  liegt das Ergebnis  $f$  wieder in  $L^2$  und ist von der Wahl der Approximation  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  unabhängig. So setzen wir die Fourier-Transformation fort von  $\mathcal{F}: L^2 \cap L^1 \rightarrow L^2 \cap L^\infty$  zu  $\mathcal{F}: L^2 \rightarrow L^2$ . Diese Fortsetzung ist eine Isometrie, das heißt, die Energiegleichung bleibt dabei erhalten.

**Aufgabe:** Wenden Sie Plancherel (K3A) an auf die Spaltfunktion

$$f(x) = \mathbf{I}_{[-a,a]} \circ \bullet \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\xi a)}{\xi} \quad \text{und berechnen Sie} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\xi a)^2}{\xi^2} d\xi.$$

**Lösung:** Die linke Seite der Plancherel-Gleichung ist

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-a}^a 1 dx = 2a.$$

Die rechte Seite der Plancherel-Gleichung ist

$$\|\widehat{f}\|_{L^2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\xi a)^2}{\xi^2} d\xi.$$

Die Gleichung  $\|f\|_{L^2}^2 = \|\widehat{f}\|_{L^2}^2$  liefert das gesuchte Integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\xi a)^2}{\xi^2} d\xi = a\pi$$

☺ Dasselbe Ergebnis erhalten wir aus der Hutfunktion. [\[K413\]](#)

**Aufgabe:** Bestimmen Sie mit Plancherel (K3A) den Wert des Integrals

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{ab}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx \quad \text{für } a, b > 0.$$

**Lösung:** Wir erkennen und nutzen die Fourier-Transformierte

$$f_a(x) = e^{-a|x|} \circ \bullet \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\xi^2 + a^2} = \widehat{f}_a(\xi).$$

Plancherel transformiert ein schweres Integral in ein leichtes:

$$\begin{aligned} I &\stackrel{\text{Def}}{=} \frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{R}} \overline{\widehat{f}_a(\xi)} \cdot \widehat{f}_b(\xi) d\xi \stackrel{\text{K3A}}{=} \frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{R}} \overline{f_a(x)} \cdot f_b(x) dx \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} \frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-(a+b)|x|} dx \stackrel{\text{Sym}}{=} \pi \int_{x=0}^{\infty} e^{-(a+b)x} dx \\ &\stackrel{\text{HDI}}{=} \pi \left[ \frac{-1}{a+b} e^{-(a+b)x} \right]_{x=0}^{\infty} = \frac{\pi}{a+b} \end{aligned}$$

☺ Dasselbe Ergebnis erhalten wir mit dem Residuensatz. [\[F429\]](#)

**Die Unschärferelation für Fourier-Paare** K305  
Ergänzung

Sei  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  quadrat-integrierbar, also  $\|g\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx < \infty$ .  
Division  $f = g/\|g\|_{L^2}$  durch die Norm normiert unsere Funktion zu

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = 1.$$

Wir interpretieren  $|f(x)|^2$  als Wahrscheinlichkeitsdichte auf  $\mathbb{R}$  (Kapitel V).  
Die Varianz ist die mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert  $\mu$ :

$$\mu := \int_{\mathbb{R}} x |f(x)|^2 dx, \quad \mathbf{V}(f) := \int_{\mathbb{R}} (x - \mu)^2 |f(x)|^2 dx$$

Dank Plancherel gilt  $\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = 1$ , also ist auch  $|\widehat{f}(x)|^2$  eine WDichte.

$$\widehat{\mu} := \int_{\mathbb{R}} \xi |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi, \quad \mathbf{V}(\widehat{f}) := \int_{\mathbb{R}} (\xi - \widehat{\mu})^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

Nach Verschiebung dürfen wir  $\mu = 0$  und  $\widehat{\mu} = 0$  annehmen. K201  
Die Varianz ist ein bewährtes Maß für die Breite der WVerteilung.  
Diese wollen wir untersuchen und die Unschärferelation verstehen.

**Die Unschärferelation für Fourier-Paare** K306  
Ergänzung

**Aufgabe:** Führen Sie dies für die Glockenkurve  $g(x) = e^{-x^2/2\sigma^2}$  aus.  
Berechnen Sie die Varianzen  $\mathbf{V}(f)$  und  $\mathbf{V}(\widehat{f})$  sowie  $\mathbf{V}(f) \cdot \mathbf{V}(\widehat{f})$ .

**Lösung:** Wir normieren  $g$  und transformieren:

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{\sigma\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad \circ \bullet \quad \sqrt{\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{\sigma^2 \xi^2}{2}} := \widehat{f}(\xi).$$

Das Absolutquadrat definiert jeweils eine Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$|f(x)|^2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}, \quad |\widehat{f}(\xi)|^2 = \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} e^{-\sigma^2 \xi^2},$$

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = 1,$$

$$\int_{\mathbb{R}} x |f(x)|^2 dx = 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \xi |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = 0,$$

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx = \frac{\sigma^2}{2}, \quad \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{2\sigma^2}.$$

☺ Für die Varianzen gilt somit  $\mathbf{V}(f) \cdot \mathbf{V}(\widehat{f}) = 1/4$ .

**Die Unschärferelation für Fourier-Paare** K307  
Ergänzung

In unseren Beispielen sehen wir explizit die Unschärferelation:  
Ist die Funktion  $f$  schmal, so ist ihre Transformierte  $\widehat{f}$  breit.  
Dies gilt immer und lässt sich sogar quantitativ präzisieren:

**Satz K3B: Unschärferelation**  
Für jede quadrat-integrierbare Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  gilt

$$\mathbf{V}(f) \cdot \mathbf{V}(\widehat{f}) \geq \frac{1}{4}.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn  $f$  und somit  $\widehat{f}$  eine Glockenkurve ist.

In der Quantenmechanik ist  $|f(x)|^2$  die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Aufenthaltsort eines Teilchens, und dual hierzu ist  $|\widehat{f}(\xi)|^2$  die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Impuls. Die obige Ungleichung ist (bis auf Konstanten) Heisenbergs Unschärferelation. Sie besagt: Ist der Ort scharf bestimmt, so ist der Impuls unscharf, und umgekehrt. Diese Unschärferelation rührt nicht von unvollkommenen Messinstrumenten her, sondern ist prinzipieller Natur. Sie wurde 1927 von Werner Heisenberg in der von ihm (und anderen) entwickelten Quantenmechanik formuliert. Wir erkennen sie hier als eine grundsätzliche Eigenschaft der Fourier-Transformation.

**Die Unschärferelation für Fourier-Paare** K308  
Ergänzung

**Nachrechnen:** Aus  $\widehat{f}'(\xi) = i\xi \widehat{f}(\xi)$  und Plancherel-Gleichung folgt:

$$\int_{\mathbb{R}} |\xi \widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}'(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx.$$

Hierzu sei  $f$  absolut stetig und  $f'$  absolut integrierbar. K205  
Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung I134 erhalten wir:

$$\mathbf{V}(f) \cdot \mathbf{V}(\widehat{f}) = \int_{\mathbb{R}} |x f(x)|^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx \geq \left| \int_{\mathbb{R}} x \overline{f(x)} f'(x) dx \right|^2 \geq \frac{1}{4}$$

Für das letzte Integral nutzen wir partielle Integration:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \overline{f(x)} f'(x) dx = \left[ x \overline{f(x)} f(x) \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} f(x) + x \overline{f'(x)} f(x) dx$$

$$\implies 2 \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} x \overline{f(x)} f'(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = -1$$

Hierzu sei  $|x f(x)|^2 \rightarrow 0$  für  $|x| \rightarrow \infty$ . Mit beiden zusätzlichen Annahmen gilt die Unschärferelation. Diese Funktionen liegen dicht in  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .  
Per Grenzübergang gilt die Ungleichung daher für alle  $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

**Die Unschärferelation in der Quantenmechanik** K309  
Ergänzung

Die Quantenmechanik war und ist eine bahnbrechende Entdeckung.  
Rasant hat sie im Laufe des 20. Jahrhunderts die Physik revolutioniert.  
Ihre Anwendungen reichen vom Laser bis zur Kernspinresonanz,  
vom Transistor bis zum Computer, von Atomuhr bis Atombombe.  
Sie prägt bis heute unsere technikbasierte Gesellschaft.

Für technisch gebildete Menschen gehören daher die Grundideen der Quantenmechanik zur Allgemeinbildung. Zur Illustration füge ich deshalb ein paar Bemerkungen zur physikalischen Sichtweise an.  
Wer in der Chemie oder der Physik der Quantenmechanik begegnet, darf sich freuen, dies hier als grob vereinfachte Skizze wiederzufinden.

Im Rahmen Ihrer Ausbildung möchte ich erneut betonen: Erfolgreiche Entwicklung/Anwendung ist engstens verwoben mit der erfolgreichen Entwicklung/Anwendung passender mathematischer Werkzeuge.  
Das hat sich in allen Bereichen als Erfahrungstatsache erhärtet, und genau deshalb lernen und nutzen Sie Höhere Mathematik.

**Die Unschärferelation in der Quantenmechanik** K310  
Ergänzung

Wir betrachten den Vektorraum  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  aller quadrat-integrierbaren Funktionen  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , also  $\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx < \infty$ , mit Skalarprodukt

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi(x)} \psi(x) dx.$$

Wie zuvor normieren wir  $\psi$  durch die Bedingung  $\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx = 1$  und interpretieren die Funktion  $|\psi(x)|^2$  als Wahrscheinlichkeitsdichte.  
Der **Ortsoperator** ist die Multiplikation mit  $x$ . Bezüglich  $\psi$  gilt dann

$$\langle x \rangle := \langle \psi | x \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} x |\psi(x)|^2 dx.$$

Dies ist der Erwartungswert der WVerteilung  $|\psi|^2$ , ihr Schwerpunkt.  
Der **Impulsoperator** ist  $p = -i\hbar \partial_x$ . Dank Fourier-Isometrie K3A gilt

$$\langle p \rangle := \langle \psi | p \psi \rangle \stackrel{\text{Z}}{=} \langle \widehat{\psi} | \hbar \xi \widehat{\psi} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \hbar \xi |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi.$$

Dies ist der Erwartungswert des Impulses bzgl. der WVerteilung  $|\widehat{\psi}|^2$ .  
Im Experiment sind die gemessenen **Observablen**  $x$  und  $p$  zufällig!

**Die Unschärferelation in der Quantenmechanik** K311  
Ergänzung

Ort  $x$  und Impuls  $p$  wirken als **Operatoren** auf Funktionen  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ .  
Beide Operatoren sind **hermitesch** bezüglich des Skalarprodukts: I141

$$\langle \varphi | x \psi \rangle = \langle x \varphi | \psi \rangle, \quad \langle \varphi | p \psi \rangle = \langle p \varphi | \psi \rangle.$$

Sie haben reelle Eigenwerte und orthogonale Eigenfunktionen. I142  
Ortsoperator  $x$  und Impulsoperator  $p$  kommutieren jedoch nicht, denn

$$x p \psi = -i\hbar x \partial_x \psi \quad \text{aber} \quad p x \psi = -i\hbar \partial_x(x\psi) = -i\hbar \psi - i\hbar x \partial_x \psi.$$

Wir schreiben dies kurz als **Kommutator**  $[x, p] := xp - px = i\hbar$ .

Wir müssen voraussetzen, dass sowohl  $\psi$  als auch  $x\psi$  und  $\partial_x \psi$  in  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  liegen. Um dies zu iterieren nutzen wir den Schwartz-Raum  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \subseteq L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ : Er besteht aus allen beliebig diff'baren Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\sup |x^m \partial^n f| < \infty$  für alle  $m, n \in \mathbb{N}$ . Zum Beispiel erfüllen Glockenkurven  $f(x) = \exp(-(x-\mu)^2/2\sigma^2)$  diese Bedingung, ebenso jede glatte Funktion mit kompaktem Träger. Die Schwartz-Funktionen liegen dicht in  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .  
Damit sind  $x, p: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  Operatoren auf  $\mathcal{S}$ . Gleiches gilt für die Transformation  $\mathcal{F}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ .  
Für Schwarz-Funktionen sind alle Bedingungen erfüllt und alle Rechenregeln besonders einfach.  
Zum Beispiel sind Wellenfunktionen  $e^{i\omega x}$  Eigenfunktionen von  $p$ , denn  $p e^{i\omega x} = \hbar \omega e^{i\omega x}$ .  
Diese liegen leider nicht in  $L^2$ , wir denken daher an  $e^{i\omega x} \exp(-x^2/2\sigma^2)$  für sehr großes  $\sigma$ .  
Solche Dämpfung wird stillschweigend verwendet, damit die nötigen Integrale konvergieren.

**Die Unschärferelation in der Quantenmechanik** K312  
Ergänzung

Seien  $A$  und  $B$  zwei hermitesche Operatoren, etwa  $A = x$  und  $B = p$ .  
 $\langle A^2 \rangle := \langle \psi | A^2 \psi \rangle = \langle A \psi | A \psi \rangle, \quad \langle B^2 \rangle := \langle \psi | B^2 \psi \rangle = \langle B \psi | B \psi \rangle.$   
Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung liefert dann

$$\langle A \psi | A \psi \rangle \langle B \psi | B \psi \rangle \geq |\langle A \psi | B \psi \rangle|^2 = |\langle \psi | A B \psi \rangle|^2 = |\langle AB \rangle|^2.$$

Wir zerlegen  $AB = \frac{1}{2}\{A, B\} + \frac{1}{2}[A, B]$  in die Summanden

$$\{A, B\} = AB + BA \quad \text{und} \quad [A, B] = AB - BA.$$

Der Antikommutator  $\{A, B\}$  ist hermitesch, also  $\langle \{A, B\} \rangle$  reell, der Kommutator  $[A, B]$  ist antihermitesch, also  $\langle [A, B] \rangle$  imaginär.

$$|\langle AB \rangle| = \left| \frac{1}{2} \langle \{A, B\} \rangle + \frac{1}{2} \langle [A, B] \rangle \right| \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|$$

Zusammengefasst erhalten wir die allgemeine Unschärferelation:

$$\langle A^2 \rangle \langle B^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2$$

Speziell für  $x$  und  $p$  wissen wir  $[x, p] = i\hbar$ , also  $\langle x^2 \rangle \langle p^2 \rangle \geq \hbar^2/4 > 0$ .  
Das Produkt der beiden Streuungen ist demnach mindestens  $\hbar/2$ .

Die **Fourier-Transformierte** von  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ist definiert durch

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx \quad \text{für } \xi \in \mathbb{R}.$$

Wir fordern hierzu, dass  $f$  auf jedem Intervall  $[-r, r]$  integrierbar ist. Unter dem Integral über  $\mathbb{R}$  verstehen wir hier den **Cauchy-Hauptwert**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx := \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r e^{-i\xi x} f(x) dx.$$

Die Zuordnung  $\mathcal{F}: f \mapsto \hat{f}$  heißt **Fourier-Transformation**. Die **inverse Fourier-Transformation**  $\mathcal{F}^{-1}: \hat{f} \mapsto f$  ist

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Dies kürzen wir ab als **Fourier-Transformationspaar**  $f \circ \hat{f}$ . Die Fourier-Transformation ist linear, kurz  $a f + b g \circ a \hat{f} + b \hat{g}$ .

Beispiele:

$$e^{-x^2/2} \circ e^{-\xi^2/2}$$

$$e^{-a|x|} \circ \sqrt{2/\pi} a/(a^2 + \xi^2)$$

$$\mathbf{1}_{[-r,r]}(x) \circ \sqrt{2/\pi} \sin(\xi r)/\xi$$

Ist  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  absolut integrierbar, also  $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty$ , dann gilt: Die Fourier-Transformierte  $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ist stetig und beschränkt:

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}$$

Sie verschwindet im Unendlichen (Riemann-Lebesgue-Lemma):

$$|\hat{f}(\xi)| \rightarrow 0 \quad \text{für } |\xi| \rightarrow \infty$$

Zudem gilt die Plancherel-Gleichung (Energiegleichung):

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

Für die Transformation  $f(x) \circ \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx$  gilt:

$$a f(x) \circ a \hat{f}(\xi), \quad f(x) + g(x) \circ \hat{f}(\xi) + \hat{g}(\xi),$$

$$f(-x) \circ \hat{f}(-\xi), \quad \overline{f(x)} \circ \overline{\hat{f}(-\xi)},$$

$$f(ax) \circ \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right), \quad \frac{1}{|a|} f\left(\frac{x}{a}\right) \circ \hat{f}(a\xi),$$

$$f(x-a) \circ e^{-i\xi a} \hat{f}(\xi), \quad e^{iax} f(x) \circ \hat{f}(\xi-a),$$

$$\partial_x f(x) \circ_{K2A} i\xi \hat{f}(\xi), \quad x f(x) \circ_{K2A} i \partial_{\xi} \hat{f}(\xi),$$

$$(f * g)(x) \circ_{K2B} \sqrt{2\pi} \cdot \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi), \quad f(x) \cdot g(x) \circ_{K2B} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\hat{f} * \hat{g})(\xi).$$

- ⚠ Die letzten vier erfordern  $L^1$ -Voraussetzungen, siehe K2A und K2B.
- 😊 Glattheit der Funktion  $f$  entspricht schnellem Abklingen von  $\hat{f}$ .
- 😊 Schnelles Abklingen der Funktion  $f$  entspricht Glattheit von  $\hat{f}$ .

Sind  $f, \hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  absolut integrierbar und stetig, so gilt punktweise

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi = f(x) \circ \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx.$$

Die linke Gleichung gilt, ebenso punktweise, wenn  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  absolut integrierbar ist und stückweise stetig differenzierbar und sprungnormiert.

Die quadrat-integrierbaren Funktionen bilden den  $\mathbb{C}$ -Vektorraum

$$L^2 = L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) := \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \right\}.$$

Die Fourier-Transformation definiert eine Isometrie  $\mathcal{F}: L^2 \rightarrow L^2$ , also

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \quad \text{und} \quad \langle f | g \rangle = \langle \hat{f} | \hat{g} \rangle \quad \text{für } f, g \in L^2.$$

Unschärfe ist anschaulich: Ist  $f$  schmal, so ist  $\hat{f}$  breit, und umgekehrt. Quantitativ: Für alle  $f \in L^2$  gilt die Unschärferelation  $\mathbf{V}(f) \cdot \mathbf{V}(\hat{f}) \geq \frac{1}{4}$ . Optimalfall: Gleichheit gilt genau dann, wenn  $f$  eine Glockenkurve ist.

**Aufgabe:** Die Transformationen  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{F}^{-1}$  sind zueinander invers; kleine Unebenheiten sind leider unvermeidbar, die sollten Sie kennen:

(1) Integrale: Nennen Sie absolut integrierbare Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit Fourier-Transformierter  $\hat{f}$ , deren Rücktransformation nicht in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$  gegen den ursprünglichen Funktionswert  $f(x)$  konvergiert.

Unter welchen Voraussetzungen gilt's in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$ ?

(2) Reihen: Nennen Sie  $2\pi$ -periodische und absolut integrierbare Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , deren Fourier-Reihe  $f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$  nicht in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$  gegen den Funktionswert  $f(x)$  konvergiert.

Unter welchen Voraussetzungen gilt's in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$ ?

**Lösung:** Rechteckfunktionen  $\mathbf{1}_{[a,b]}$  sind unvermeidliche Kandidaten: Hin- und Rücktransformation liefert die sprungnormierte Funktion.

Allgemein können wir jede Funktion  $f$  in einem Punkt  $x \in \mathbb{R}$  beliebig abändern, Integral und Fourier-Transformierte ändern sich dadurch nicht, aber die Konvergenz in diesem Punkt gegen  $f(x)$  geht verloren. (Das gilt allgemeiner für alle  $x \in N$  in einer Nullmenge,  $\text{vol}_1(N) = 0$ .)

**Aufgabe:** Wie verhalten sich die Transformationen  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{F}^{-1}$ ...

- 1 bei Linearkombinationen von Funktionen?
- 2 bei Streckung und Verschiebung?
- 3 bei Ableitung von Funktionen?
- 4 bei Produkten von Funktionen?

Welche Voraussetzungen werden jeweils benötigt?

- 5 Ist für jede reelle Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  auch  $\hat{f}$  reell? Welche zusätzliche Symmetrie garantiert dies?
- 6 Ist für jede Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Transformierte  $\hat{f}$  stetig? Welche zusätzliche Voraussetzung garantiert dies?
- 7 Was besagt das Riemann-Lebesgue-Lemma?
- 8 Was besagt der Satz von Plancherel? im Vergleich zu Parseval?
- 9 Was besagt die Unschärferelation? Qualitativ? Quantitativ?

**Lösung:** Lesen Sie das obige Fazit... und noch einmal das Kapitel! Dort finden Sie die allgemeinen Regeln und zahlreiche Beispiele.

**Aufgabe:** (1) Was genau besagt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung? Wann genau gilt Gleichheit? Können Sie Ihre Antworten beweisen?

(2) Die Unschärferelation K3B beruht im Wesentlichen auf der Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Wann genau gilt hier Gleichheit?

**Lösung:** (1) Wir erinnern an Satz 11H: In jedem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  mit Skalarprodukt  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  gilt  $|\langle u | v \rangle|^2 \leq \langle u | u \rangle \langle v | v \rangle$  für alle  $u, v \in V$ . Gleichheit gilt genau dann, wenn  $u, v$  über  $\mathbb{K}$  linear abhängig sind.

(2) Die Unschärferelation  $\mathbf{V}(f) \cdot \mathbf{V}(\hat{f}) \geq \frac{1}{4}$  beruht auf der CSU (K3B):

$$\mathbf{V}(f) \cdot \mathbf{V}(\hat{f}) = \int_{\mathbb{R}} |x f(x)|^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |\xi \hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |x f(x)|^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx \geq \left| \int_{\mathbb{R}} x \overline{f(x)} \cdot f'(x) dx \right|^2 = \dots \geq \frac{1}{4}$$

Bei Gleichheit müssen  $x \overline{f(x)}$  und  $f'(x)$  linear abhängig sein, also  $f'(x) = \lambda x f(x)$  für ein  $\lambda \in \mathbb{C}$  gelten. Wir integrieren  $f'(x)/f(x) = \lambda x$  zu  $\ln f(x) = c + \lambda x^2/2$  und erhalten  $f(x) = C e^{\lambda x^2/2}$ . Dies ist quadrat-integrierbar für  $\lambda < 0$ . Gleichheit gilt daher nur für Glockenkurven! **K306**

**Aufgabe:** Die folgende Rechnung beweist  $0 = 1$ . Wo stecken Fehler?

$$\text{Für alle } k \in \mathbb{Z} \text{ gilt:} \quad e^{2\pi i k} = 1 \quad (1)$$

$$\text{Multiplikation von (1) mit } e \quad \implies \quad e^{2\pi i k + 1} = e \quad (2)$$

$$\text{Einsetzen von (2) in (1)} \quad \implies \quad (e^{2\pi i k + 1})^{2\pi i k} = 1 \quad (3)$$

$$\text{Potenzgesetz } (e^w)^z = e^{wz} \quad \implies \quad e^{-4\pi^2 k^2 + 2\pi i k} = 1 \quad (4)$$

$$\text{Potenzgesetz } e^{w+z} = e^w \cdot e^z \quad \implies \quad e^{-4\pi^2 k^2} \cdot e^{2\pi i k} = 1 \quad (5)$$

$$\text{Anwendung von (1)} \quad \implies \quad e^{-4\pi^2 k^2} = 1 \quad (6)$$

$$\text{Grenzwert für } k \rightarrow \infty \quad \implies \quad 0 = 1 \quad (7)$$

⚠ Das ist eine lehrreiche Übung, bitte versuchen Sie zuerst selbst, den Fehler einzugrenzen! Die Gleichungen (1) und (2) sind tatsächlich gültig, auch (3)  $1^z = 1$  scheint noch in Ordnung, obschon die Bedeutung von  $a^z$  für  $a, z \in \mathbb{C}$  unklar ist. Die letzte Gleichung (7) ist offensichtlich falsch, ebenso (6), (5), (4). Die Implikationen (4)  $\implies$  (5)  $\implies$  (6)  $\implies$  (7) sind alle einwandfrei, sie starten leider bei einer falschen Aussage (4). Der einzige Fehler liegt also bei (3)  $\implies$  (4). In  $\mathbb{C}$  sind Logarithmen und Potenzen nicht eindeutig, daher ist extreme Vorsicht geboten! **F506**

**Aufgabe:** Stimmen die folgenden Rechnungen? Wo stecken Fehler?

$$(1) \left. \begin{array}{l} e^{-ax} \text{ für } x > 0 \\ 0 \text{ für } x < 0 \end{array} \right\} = f(x) \quad \circ \bullet \quad \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a + i\xi}$$

$$\Rightarrow -af(x) = f'(x) \quad \circ \bullet \quad i\xi \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i\xi}{a + i\xi}$$

$$\Rightarrow f(x) \quad \circ \bullet \quad \text{Whaaa?} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i\xi/a}{a + i\xi}$$

$$(2) e^{-a|x|} = g(x) \quad \circ \bullet \quad \hat{g}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + \xi^2}$$

$$\Rightarrow a^2 e^{-a|x|} = g''(x) \quad \circ \bullet \quad (i\xi)^2 \hat{g}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{-a\xi^2}{a^2 + \xi^2}$$

$$\Rightarrow g(x) \quad \circ \bullet \quad \text{Whaaa?} \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{-\xi^2/a}{a^2 + \xi^2}$$

⚠ Unsere Ableitungsregel K2A verlangt absolute Stetigkeit, diese ist links jedoch nicht erfüllt. Umgekehrt verlangt die Multiplikationsregel absolute Integrierbarkeit, diese ist rechts verletzt. Tatsächlich führen die obigen, allzu naiven Rechnungen zu dramatisch falschen Ergebnissen!

**Aufgabe:** Fourier-transformieren Sie die Funktionen  $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(x) = x$  und  $h(x) = x^2$  für  $|x| \leq a$ , fortgesetzt durch Null für  $|x| > a$ .

**Bemerkung:** Wir können die Fourier-Integrale mühsam ausrechnen...

☺ Es ist viel effizienter, scharf hinzusehen und geschickt zu rechnen: Wie / Können Sie hier die Multiplikations/Ableitungsregel anwenden?

**Lösung:** Wir können Satz K2A(2) auf  $f = \mathbf{I}_{[-a,a]}$  anwenden:

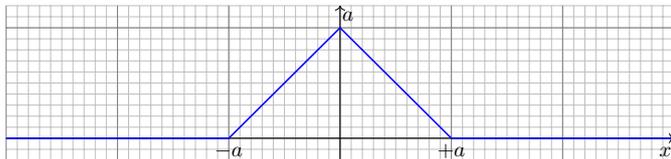
$$f(x) = \mathbf{I}_{[-a,a]}(x) \quad \circ \bullet \quad \hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(a\xi)}{\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \xi^k,$$

$$g(x) = x f(x) \quad \circ \bullet \quad i\partial_\xi \hat{f}(\xi) = i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a\xi \cos(a\xi) - \sin(a\xi)}{\xi^2}$$

$$h(x) = x^2 f(x) \quad \circ \bullet \quad -\partial_\xi^2 \hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(a^2 \xi^2 - 2) \sin(a\xi) + 2a\xi \cos(a\xi)}{\xi^3}$$

☺ Für jedes  $m \in \mathbb{N}$  ist das Produkt  $x^m f(x)$  über  $\mathbb{R}$  absolut integrierbar. Die rechte Seite  $\hat{f}$  ist beliebig oft differenzierbar, gar analytisch, genauer: darstellbar als eine auf  $\mathbb{R}$  konvergente Potenzreihe. Versuchen Sie es! Sie finden  $c_{2n} = (-1)^n \sqrt{2/\pi} a^{2n+1} / (2n+1)!$  und  $c_{2n+1} = 0$  für  $n \in \mathbb{N}$ .

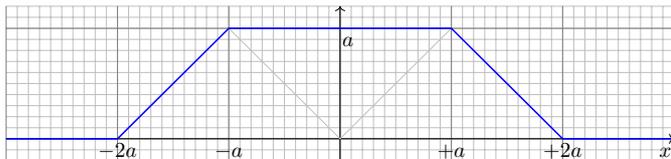
**Aufgabe:** Fourier-transformieren Sie die folgende Hutfunktion  $H_a$ :



- Nutzen Sie die Ableitung  $H'_a$  und deren  $\mathcal{F}$ -Transformierte.
- Alternativ hilft die Faltung  $H_a = g * g$  mit  $g = \mathbf{I}_{[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]}$ . [K211](#)
- Alternativ setzen Sie die Definition ein und rechnen es geduldig aus. Plausibilitätscheck: Gilt  $H_{2a}(x) = H_a(x+a) + 2H_a(x) + H_a(x-a)$ ? Durch Rücktransformation bestimmen Sie  $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(\xi a)^2 / \xi^2 d\xi$ . [K211](#)

Der direkte Ansatz (3) liegt am nächsten, führt aber zu einer etwas mühsamen Integration. Als Training sollten Sie dies einmal durchrechnen: Das ist eine sehr lehrreiche Übung. Wenn einem nichts besseres einfällt, dann ist dies auch die einzig gangbare Methode. Meist ist es günstiger wie in (1) oder (2), neue Funktionen auf alte zurückzuführen. Das geht oft schneller. Genau hierfür haben wir die Rechenregeln entwickelt!

**Aufgabe:** Fourier-transformieren Sie die Trapezfunktion  $T_a$ :



- Nutzen Sie die Ableitung  $T'_a$  und deren  $\mathcal{F}$ -Transformierte.
- Alternativ hilft die Summe  $T_a(x) = H_a(x+a) + H_a(x) + H_a(x-a)$ .
- Alternativ setzen Sie die Definition ein und rechnen es geduldig aus.

Der direkte Ansatz (3) liegt am nächsten, führt aber zu einer etwas mühsamen Integration. Als Training sollten Sie dies einmal durchrechnen: Das ist eine sehr lehrreiche Übung. Wenn einem nichts besseres einfällt, dann ist dies auch die einzig gangbare Methode. Meist ist es günstiger wie in (1) oder (2), neue Funktionen auf alte zurückzuführen. Das geht oft schneller. Genau hierfür haben wir die Rechenregeln entwickelt!

☺ Es ist effizienter, scharf hinzusehen und geschickt zu rechnen! Je mehr Werkzeuge Sie benutzen und nutzen können, desto besser.

**Aufgabe:** Fourier-transformieren Sie die Funktionen

$$e^{-|x|}, \quad x e^{-|x|}, \quad -\text{sign}(x) e^{-|x|}.$$

**Bemerkung:** Sie können die Fourier-Integrale direkt ausrechnen...

☹ Das ist allerdings mühsam. Versuchen Sie es einmal als Übung!

☺ Es ist viel leichter, scharf hinzusehen und geschickt zu rechnen:

**Lösung:** Die erste kennen wir bereits, die anderen folgern wir: Zur Anwendung von Satz K2A sind hier alle Voraussetzungen erfüllt.

$$e^{-|x|} = f(x) \quad \circ \bullet \quad \hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1 + \xi^2}$$

$$x e^{-|x|} = x f(x) \quad \circ \bullet \quad i\partial_\xi \hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{-2i\xi}{(1 + \xi^2)^2}$$

$$-\text{sign}(x) e^{-|x|} = \partial_x f(x) \quad \circ \bullet \quad i\xi \hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{i\xi}{1 + \xi^2}$$

☺ Allgemein für  $g(x) = p(x) f(x)$  finden wir ebenso  $\hat{g}(\xi) = p(i\partial_\xi) \hat{f}(\xi)$ , wobei  $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$  ein beliebiges Polynom ist.

**Aufgabe:** Bestimmen Sie mit Plancherel (K3A) den Wert des Integrals

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix} \sin(x)}{x + x^3} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix} \sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{1 + x^2} dx.$$

**Lösung:** Wir erkennen und nutzen die Fourier-transformierten

$$f(x) = \mathbf{I}_{[-1,1]}(x) \quad \circ \bullet \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\xi)}{\xi} = \hat{f}(\xi),$$

$$g(x) = e^{-|x|} \quad \circ \bullet \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1 + \xi^2} = \hat{g}(\xi).$$

Plancherel transformiert ein schweres Integral in ein leichtes:

$$I \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi} \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi) d\xi \stackrel{\text{K3A}}{=} \frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{R}} f(x-1) \cdot g(x) dx$$

$$\stackrel{\text{Def}}{=} \frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{[0,2]}(x) \cdot e^{-|x|} dx \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{\pi}{2} \int_{x=0}^2 e^{-x} dx$$

$$\stackrel{\text{HDI}}{=} \frac{\pi}{2} \left[ -e^{-x} \right]_{x=0}^2 = \frac{\pi}{2} \left[ 1 - e^{-2} \right] = 1.35821 \dots$$

**Lösung:** (1) Außer in den Punkten  $\{-a, 0, a\}$  ist  $H_a$  differenzierbar:

$$H'_a(x) = \mathbf{I}_{[-a,0]}(x) - \mathbf{I}_{[0,a]}(x)$$

$$\widehat{H'_a}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i}{\xi} \left[ (1 - e^{ia\xi}) - (e^{-ia\xi} - 1) \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i}{\xi} \left[ 2 - 2\cos(a\xi) \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{4i}{\xi} \sin\left(\frac{a\xi}{2}\right)^2$$

Dank Ableitungsregel  $\partial_x H_a(x) \circ \bullet i\xi \widehat{H_a}(\xi)$  erhalten wir:

$$\widehat{H_a}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2}{\xi^2} \sin\left(\frac{a\xi}{2}\right)^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos(a\xi)}{\xi^2}$$

☺ Dasselbe Ergebnis erhalten wir durch Faltung [K211](#) oder direkt. Plausibilität: Es gilt  $H_{2a}(x) = H_a(x+a) + 2H_a(x) + H_a(x-a)$  und

$$\widehat{H_{2a}}(\xi) = \widehat{H_a}(\xi) (e^{ia\xi} + 2 + e^{-ia\xi}) \text{ nach Verschiebungsregel}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2}{\xi^2} \sin\left(\frac{a\xi}{2}\right)^2 (2 + 2\cos(a\xi)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2}{\xi^2} \sin(a\xi)^2$$

**Lösung:** (1) Außer in den Punkten  $\{\pm 2a, \pm a\}$  ist  $T_a$  differenzierbar:

$$T'_a(x) = \mathbf{I}_{[-2a,-a]}(x) - \mathbf{I}_{[a,2a]}(x)$$

$$\widehat{T'_a}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i}{\xi} \left[ (e^{ia\xi} - e^{2ia\xi}) - (e^{-2ia\xi} - e^{-ia\xi}) \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i}{\xi} \left[ 2\cos(a\xi) - 2\cos(2a\xi) \right]$$

Dank Ableitungsregel  $\partial_x T_a(x) \circ \bullet i\xi \widehat{T_a}(\xi)$  erhalten wir:

$$\widehat{T_a}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\xi^2} \left[ \cos(a\xi) - \cos(2a\xi) \right]$$

(2) Aus der Summe  $T_a(x) = H_a(x+a) + H_a(x) + H_a(x-a)$  folgt

$$\widehat{T_a}(\xi) = \widehat{H_a}(\xi) (e^{ia\xi} + 1 + e^{-ia\xi}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2}{\xi^2} \sin\left(\frac{a\xi}{2}\right)^2 (1 + 2\cos(a\xi))$$

☺ Beide Lösungen aus (1) und (2) sehen zunächst verschieden aus. Beide Funktionen sind aber tatsächlich gleich dank Additionstheorem.

## Faltung von Normalverteilungen

K417  
Übung

Die Normalverteilung  $\varphi = N(\mu, \sigma^2)$  ist gegeben durch

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

**Aufgabe:** Für die Faltung von Normalverteilungen gilt:

$$N(\mu_1, \sigma_1^2) * N(\mu_2, \sigma_2^2) = N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

Zeigen Sie dies (1) durch Fourier-Transformation und (2) direkt.

**Lösung:** (1) Wir kennen die Fourier-Transformierten [K128] [K201]:

$$\begin{aligned} f &= N(\mu_1, \sigma_1^2) & \xrightarrow{\circ} & \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\mu_1\xi - \frac{\sigma_1^2\xi^2}{2}} \\ g &= N(\mu_2, \sigma_2^2) & \xrightarrow{\circ} & \hat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\mu_2\xi - \frac{\sigma_2^2\xi^2}{2}} \\ h &= N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2) & \xleftarrow{\circ} & \hat{h}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i(\mu_1+\mu_2)\xi - \frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\xi^2}{2}} \end{aligned}$$

Wir nutzen hierzu dankend die Faltung K2B und die Umkehrung K1D.

## Faltung von Normalverteilungen

K418  
Übung

(2) Wir rechnen alles direkt aus. Zur Vereinfachung sei  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ .

$$h(x) = \int_{u=-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u) du = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{u=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x-u)^2}{2\sigma_2^2}} du$$

Zum Vergleich fügen wir den erhofften Faktor ein:

$$h(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \cdot \frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sigma_1\sigma_2\sqrt{2\pi}} \int_{u=-\infty}^{\infty} e^{\frac{x^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} - \frac{u^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x-u)^2}{2\sigma_2^2}} du$$

Dies vereinfachen wir weiter mit  $\sigma^2 := \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$  und  $\mu := \frac{\sigma_1^2x}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$ :

$$h(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{u=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du$$

☺ Zu dieser Rechnung benötigen Sie vor allem Mut und Geduld.

▶ 3Blue1Brown betont und nutzt die Rotationssymmetrie: *A pretty reason why Gaussian + Gaussian = Gaussian.* [youtu.be/d\\_qvLDhkg00](https://youtu.be/d_qvLDhkg00).

## Transformation von Differentialgleichungen

K419  
Übung

Wir untersuchen die homogene **Wärmeleitungsgleichung** [S101]

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) &= \kappa \partial_x^2 u(t, x) & \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= u_0(x) & \text{für } t = 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Aufgabe:** Lösen Sie dies durch Fourier-Transformation bezüglich  $x$ .

Hierzu gibt es Voraussetzungen: Satz K2A erfordert, dass  $u$  zweimal stetig nach  $x$  differenzierbar ist und  $\partial_x^2 u$  absolut integrierbar. Das ist am Ende noch zu überprüfen, siehe hierzu Satz D5D.

**Lösung:** Die  $\mathcal{F}$ -Transformierte  $\hat{u}(t, \xi)$  erfüllt  $\partial_t \hat{u}(t, \xi) = -\kappa \xi^2 \hat{u}(t, \xi)$ .

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung in  $t$  mit Parameter  $\xi$ .

Wir trennen die Variablen gemäß  $[\partial_t \hat{u}(t, \xi)] / \hat{u}(t, \xi) = -\kappa \xi^2$

und integrieren von 0 bis  $t$  zu  $\ln \hat{u}(t, \xi) - \ln \hat{u}(0, \xi) = -\kappa \xi^2 t$ .

Wir erhalten so die Lösung  $\hat{u}(t, \xi) = e^{-\kappa \xi^2 t} \hat{u}_0(\xi)$  für alle  $t \geq 0$ .

Rücktransformation  $e^{-\kappa \xi^2 t} \xrightarrow{\circ} e^{-x^2/4\kappa t} / \sqrt{2\kappa t}$  und Faltung ergibt:

$$u(t, x) = \int_{y \in \mathbb{R}} \frac{e^{-(x-y)^2/4\kappa t}}{\sqrt{4\pi\kappa t}} u_0(y) dy \quad \text{für } t > 0.$$

## Transformation von Differentialgleichungen

K420  
Übung

☺ Das Ergebnis entspricht unserer in Satz D5D präsentierten Lösung: Die Wärmeleitungsgleichung  $\partial_t u = \kappa \partial_x^2 u$  hat als Fundamentallösung eine auseinanderfließende Glockenkurve, den **Wärmeleitungskern**

$$H : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : H(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\kappa t}\right).$$

Die Konstanten sichern die Normierung  $\int_{\mathbb{R}} H(t, x) dx = 1$ . (Gauß C2G)

Für  $t = 0$  sei die Wärmeverteilung  $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vorgegeben, mit  $u_0 \in C_b$ .

Für  $t > 0$  erhalten wir die Lösung durch **Superposition** (Faltung D5E):

$$u(t, x) = \int_{y \in \mathbb{R}} u_0(x-y) H(t, y) dy = \int_{z \in \mathbb{R}} u_0(z) H(t, x-z) dz.$$

☺ Stehen die Formeln schon da, so genügt geduldiges Nachrechnen: Machen Sie die Probe und zeigen Sie  $\partial_t u = \kappa \partial_x^2 u$  durch Ableiten. [D517]

☺ Die Fourier-Transformation bietet eine elegant-effiziente Herleitung. Anschließend sammeln und prüfen wir die Voraussetzungen (D5D, D5U).

## Transformation von Differentialgleichungen

K421  
Übung

**Aufgabe:** Finden Sie eine quadrat-integrierbare Funktion

$$u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad u(x) - u''(x) = e^{-|x|}.$$

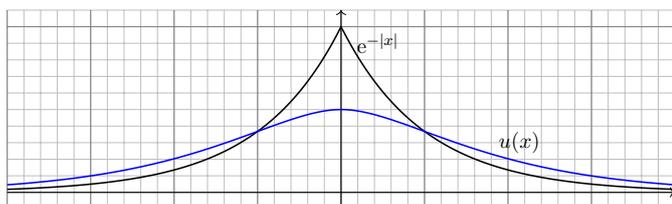
Lösen Sie diese Gleichung durch Fourier-Transformation:

(1) Zu welcher Gleichung für  $\hat{u}$  wird diese DG transformiert?

(2) Lösen Sie nach  $\hat{u}$  auf und berechnen die Rücktransformierte  $u$ .

(3) Probe: Erfüllt die gefundene Funktion  $u$  die Gleichung?

(4) Ist die gefundene Funktion  $u$  die einzige Lösung?



## Transformation von Differentialgleichungen

K422  
Übung

**Lösung:** (1) Wir Fourier-transformieren die Summanden:

$$u(x) \xrightarrow{\circ} \hat{u}(\xi)$$

$$u''(x) \xrightarrow{\circ} (i\xi)^2 \hat{u}(\xi)$$

$$f(x) = e^{-|x|} \xrightarrow{\circ} \hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\xi^2}$$

Die transformierte Gleichung für  $\hat{u}$  lautet also

$$\hat{u}(\xi) + \xi^2 \hat{u}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\xi^2}$$

Diese können wir leicht nach  $\hat{u}$  auflösen:

$$\hat{u}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\xi^2} \cdot \frac{1}{1+\xi^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \hat{f}(\xi) \cdot \hat{f}(\xi)$$

☺ Integraltransformationen (hier Fourier, später Laplace) machen aus Differentialgleichungen einfache algebraische Gleichungen. Wunderbar! Diese können wir leicht lösen. Dann bleibt noch die Rücktransformation.

## Transformation von Differentialgleichungen

K423  
Übung

(2) Dank Faltungsformel finden wir  $u = \frac{1}{2} f * f$ . Für  $x \geq 0$  gilt:

$$\begin{aligned} (f * f)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} e^{-|x-t|} dt = \int_{-\infty}^x e^{-t} e^{-(x-t)} dt + \int_x^{\infty} e^{-|t|+x-t} dt \\ &= e^{-x} \int_{-\infty}^x e^{-t+t} dt + e^x \int_x^{\infty} e^{-2t} dt \end{aligned}$$

Für die letzten beiden Integrale gilt:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x e^{-t+t} dt &= \int_{-\infty}^0 e^{2t} dt + \int_0^x e^0 dt = \frac{1}{2} + x \\ \int_x^{\infty} e^{-2t} dt &= \frac{-1}{2} [e^{-2t}]_x^{\infty} = \frac{1}{2} e^{-2x} \end{aligned}$$

Für  $x \geq 0$  erhalten wir somit folgendes Ergebnis:

$$u(x) = \frac{1}{2} \left[ e^{-x} \left( \frac{1}{2} + x \right) + e^x \frac{1}{2} e^{-2x} \right] = \frac{1}{2} (1+x) e^{-x}.$$

Da die Funktion  $u = \frac{1}{2} f * f$  gerade ist, folgt schließlich

$$u(x) = \frac{1}{2} (1+|x|) e^{-|x|}.$$

## Transformation von Differentialgleichungen

K424  
Übung

(3) Wir machen die Probe. Für  $x \geq 0$  gilt

$$u(x) = \frac{1}{2} (1+x) e^{-x}, \quad u'(x) = \frac{-1}{2} x e^{-x}, \quad u''(x) = \frac{-1}{2} (1-x) e^{-x}.$$

Hier gilt  $u(x) - u''(x) = e^{-x} = e^{-|x|}$ . Für  $x \leq 0$  gilt

$$u(x) = \frac{1}{2} (1-x) e^x, \quad u'(x) = \frac{-1}{2} x e^x, \quad u''(x) = \frac{-1}{2} (1+x) e^x.$$

Hier gilt  $u(x) - u''(x) = e^x = e^{-|x|}$ . Somit ist  $u$  quadrat-integrierbar, zweimal stetig differenzierbar und erfüllt die Differentialgleichung.

(4) Die homogene Gleichung  $u - u'' = 0$  hat die allgemeine Lösung

$$u_h(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x} \quad \text{mit} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Allgemeine Lösung der Gleichung  $u(x) - u''(x) = e^{-|x|}$  ist demnach

$$u(x) + u_h(x) = \frac{1}{2} (1+|x|) e^{-|x|} + \alpha e^x + \beta e^{-x}.$$

Quadrat-integrierbar ist diese Funktion nur für  $\alpha = \beta = 0$ .

☺ Die Laplace-Transformation (Kapitel L) geht hier weiter!

Kapitel L

Laplace-Transformation

Die Laplace-Transformation verwandelt Anfangswertprobleme für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten in algebraische Gleichungen. Sie erfreut sich besonders bei Physikern und Ingenieuren einer großen Beliebtheit.

Harro Heuser (1927–2011)

I am, and will ever be, a white-socks, pocket protector, nerdy engineer, born under the second law of thermodynamics, steeped in steam tables, in love with free-body diagrams, transformed by Laplace and propelled by compressible flow.

Neil Armstrong (1930–2012)

Vollversion michael-eisermann.de/lehre/HM3 26.02.2025

Inhalt dieses Kapitels L

L002

- Die Laplace-Transformation
  - Definition der Laplace-Transformation
  - Linearität und Ableitungsregel
  - Streckung, Dämpfung, Verschiebung
- Anwendung auf Differentialgleichungen
  - Tabelle einfacher Laplace-Transformierter
  - Lösung von Differentialgleichungen
  - Partialbruchzerlegung und Residuen
- Weitere Eigenschaften und Anwendungen
  - Rücktransformation und Injektivität
  - Faltung und Integralregel
  - Greensche Fundamentallösung
- Fazit: Laplace-Transformation
  - Vergleich von Laplace und Fourier
  - Anwendung in der Systemtheorie
  - Aufgaben zu Differentialgleichungen

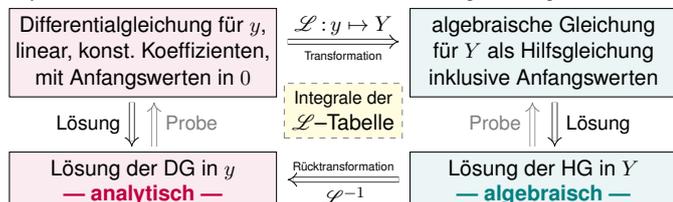
Motivation und Zielsetzung

L003 Überblick

Die Laplace-Transformierte von  $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$  ist die Funktion

$$F(s) := \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad \text{für } s \in \mathbb{C}_{\text{Re} > \sigma}.$$

Laplace-Transformation kann lineare Differentialgleichungen lösen:



- 😊 Die Methode der Laplace-Transformation ist dann effizient, wenn Sie jeden der drei Schritte effizient ausführen können.
- 😊 Ausführliche  $\mathcal{L}$ -Tabellen finden Sie in Lehrbüchern, Formelsammlungen und Computer-Algebra-Systemen.

Vorgehensweise

L004 Überblick

Differentialgleichungen lassen sich mittels Integraltransformationen in algebraische Gleichungen verwandeln und so manchmal lösen. Zu dieser formalen „Übersetzung“ dient die Laplace-Transformation. Ihr Vorteil ist eine Reihe einfacher Rechenregeln (die „Grammatik“) mit umfangreichen Tabellen von  $\mathcal{L}$ -Integralen (sozusagen die „Vokabeln“). Diese Formalisierung erübrigt praktisch jede Integralberechnung, zumindest in gutartigen Fällen und mit hinreichender Erfahrung. Theorie und Anwendung der  $\mathcal{L}$ -Transformation sind ein weites Feld. Sie wird in der Regelungstechnik und Kybernetik ausgiebig genutzt. Ich will daher eine erste Idee dieser vielseitigen Methode vermitteln, sodass Sie sich ein Bild machen und informiert entscheiden können. Hierzu werde ich die nötigen Grundlagen erklären, damit Sie sogleich Anwendungen auf Differentialgleichungen verstehen und nutzen können.   
 ☞ Wenn Sie dieses Thema vertiefen möchten, empfehlen sich die Klassiker von Gustav Doetsch: *Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*, 3. Auflage 1976, und *Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation*, 5. Auflage 1985.

Erste Beispiele zur Laplace-Transformation

L101 Beispiel

**Aufgabe:** Laplace-transformieren Sie  $f(t) = e^{at}$  mit  $a = \sigma + i\omega \in \mathbb{C}$ .

**Lösung:** Wir setzen die Definition ein und rechnen es einfach aus:

$$F(s) \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{t=0}^{\infty} e^{(a-s)t} dt \stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} \left[ \frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \right]_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{s-a}$$

Das Integral existiert nur für  $\text{Re}(s) > \sigma$ . Wir erhalten folgende Tabelle:

$f(t) \circ \bullet F(s)$		für $\text{Re}(s) > \sigma$
$1 \circ \bullet \frac{1}{s}$		für $\text{Re}(s) > 0$
$e^{at} \circ \bullet \frac{1}{s-a}$		für $\text{Re}(s) > \text{Re}(a)$
$e^{i\omega t} \circ \bullet \frac{1}{s-i\omega} = \frac{s+i\omega}{s^2+\omega^2}$		für $\text{Re}(s) > 0$
$\cos(\omega t) \circ \bullet \frac{s}{s^2+\omega^2}$ (Realteil)		für $\text{Re}(s) > 0$
$\sin(\omega t) \circ \bullet \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ (Imaginärteil)		für $\text{Re}(s) > 0$

Erste Beispiele zur Laplace-Transformation

L102 Beispiel

**Aufgabe:** Laplace-transformieren Sie  $f(t) = t^n$  für  $n \geq 0$  mit Hilfe der Gamma-Funktion [B313]. Was erhalten Sie für  $n \in \mathbb{N}$ ? Für  $n = 1/2$ ?

**Lösung:** Für  $\text{Re}(s) > 0$  setzen wir die Definition ein und rechnen's aus:

$$\begin{aligned} f(t) = t^n \quad \circ \bullet \quad F(s) &= \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} t^n dt \\ &= \frac{1}{s^n} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} (st)^n dt = \frac{1}{s^{n+1}} \int_{x=0}^{\infty} e^{-x} x^n dx \\ &= \frac{1}{s^{n+1}} \Gamma(n+1) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Aus  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$  folgt  $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$  und somit  $\mathcal{L}(\sqrt{t}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} s^{-3/2}$ .

Wir substituieren  $x = st$ , also  $dx = s dt$  bzw.  $dt = s^{-1} dx$ . Die Werte  $\Gamma(n+1) = n!$  haben wir bereits berechnet, durch wiederholte partielle Integration [B316] und durch Ableiten unterm Integral [B417]. Einen alternativen Rechenweg ohne Gamma-Funktion nutzen wir auf Seite L113. Aus dem Gaußschen Integral [C222] folgt  $\Gamma(\frac{1}{2})$  und rekursiv die halbzahigen Werte  $\Gamma(\frac{3}{2})$  usw. Die Gamma-Funktion ist eine der Grundfunktionen der Analysis und tritt in erstaunlich vielen verschiedenen Rechnungen auf. Es hilft daher, wenn Sie sie erkennen und nutzen lernen.   
 ☞ Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, Bemerkung 3.7.13.

Konvergenz des Laplace-Integrals

L103 Ausführung

⚠ Manche Funktionen lassen sich nicht  $\mathcal{L}$ -transformieren! Das ist zwar bedauerlich, aber leider nicht zu ändern.

- Aufgabe:** (1) Lässt sich  $f(t) = 1/t$  laplace-transformieren? (2) Lässt sich  $g(t) = \exp(t^2)$  laplace-transformieren?

**Lösung:** Wir setzen die Definition ein und rechnen es aus:

$$F(s) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_{t=0}^{\infty} \frac{e^{-st}}{t} dt = +\infty$$

$$G(s) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} g(t) dt = \int_{t=0}^{\infty} e^{t^2-st} dt = +\infty$$

- ☹ Diese Integrale konvergieren für keinen Parameterwert  $s \in \mathbb{R}$ !
- (1) Die Polstelle von  $f(t) = 1/t$  in  $t = 0$  verhindert die Konvergenz.
- (2) Die Funktion  $g(t) = \exp(t^2)$  wächst für  $t \rightarrow \infty$  super-exponentiell.
- 😊 Die Laplace-Transformation gelingt nur für gutartige Funktionen. Glücklicherweise sind diese ausreichend für viele Anwendungen.

Konvergenz des Laplace-Integrals

L104 Ausführung

Wir setzen im Folgenden voraus, dass die zu transformierende Funktion  $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$  höchstens exponentiell wächst. Ausführlich bedeutet das:

$$|f(t)| \leq c e^{\sigma t} \quad \text{für alle } t \geq 0 \text{ und geeignete Konstanten } c, \sigma \in \mathbb{R}.$$

- Aufgabe:** (1) Das Laplace-Integral konvergiert für  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\text{Re}(s) > \sigma$ . (2) Zudem gilt  $|F(s)| \leq c/(\text{Re}(s) - \sigma)$ , also  $F(s) \rightarrow 0$  für  $\text{Re}(s) \rightarrow +\infty$ .

**Lösung:** (1) Wir wenden das Majorantenkriterium an auf die Funktion

$$|f(t) e^{-st}| = |f(t)| e^{-\text{Re}(s)t} \leq c e^{(\sigma - \text{Re}(s))t}.$$

Die Funktion  $e^{-\lambda t}$  mit  $\lambda = \text{Re}(s) - \sigma$  ist über  $[0, \infty[$  integrierbar:

$$\int_{t=0}^{\infty} |f(t) e^{-st}| dt \leq \int_{t=0}^{\infty} c e^{-\lambda t} dt = \frac{c}{\lambda} < \infty.$$

- (2) Hieraus folgt sofort die Betragsabschätzung  $|F(s)| \leq c/(\text{Re}(s) - \sigma)$ . Insbesondere folgt hieraus das Abklingen  $F(s) \rightarrow 0$  für  $\text{Re}(s) \rightarrow +\infty$ .

Definition L1A: Laplace-Transformation

Das Laplace-Integral von  $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$  zum Parameter  $s \in \mathbb{C}$  ist

$$F(s) := \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{t=0}^r e^{-st} f(t) dt.$$

Die (Laplace-) Konvergenzabszisse von  $f$  ist der kritische Wert

$$\sigma := \inf \{ s \in \mathbb{R} \mid \text{Das obige Laplace-Integral konvergiert} \}.$$

Das schnelle Abklingen des Faktors  $e^{-st}$  erzwingt die Konvergenz: Das Integral konvergiert für  $\text{Re}(s) > \sigma$  und divergiert für  $\text{Re}(s) < \sigma$ .

Die Funktion  $F: \mathbb{C}_{\text{Re} > \sigma} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt Laplace-Transformierte von  $f$ . Schreibweise  $F = \mathcal{L}(f)$ , kurz  $f(t) \circ \bullet F(s)$  oder  $F(s) \bullet \circ f(t)$ .

Satz L1B: Holomorphie der Laplace-Transformierten

Die Funktion  $F$  ist holomorph mit  $\partial_s^n F(s) \bullet \circ (-t)^n f(t)$  für  $n \in \mathbb{N}$ .

Zur Integration setzen wir stillschweigend voraus, dass  $f$  auf jedem endlichen Intervall  $[0, r]$  integrierbar ist, also  $\int_0^r |f(t)| dt < \infty$  erfüllt. Für jeden Parameter  $s \in \mathbb{R}$  gilt dann ebenfalls  $\int_0^r |e^{-st} f(t)| dt < \infty$ . Wir erhalten also ein wohldefiniertes Parameterintegral  $\int_0^r e^{-st} f(t) dt$ .

Das Laplace-Integral existiert, wenn der obige Grenzwert für  $r \rightarrow \infty$  existiert, geschrieben  $F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r e^{-st} f(t) dt$ . Dies gilt, wenn  $f$  höchstens exponentiell wächst, wie oben erklärt.

Der Faktor  $e^{-st}$  dämpft den Integranden  $f(t)$  exponentiell und erzwingt die Integrierbarkeit für ausreichend großes  $\text{Re}(s) > \sigma$ . Bei  $\sigma = -\infty$  haben wir Konvergenz für alle  $s \in \mathbb{C}$ , bei  $\sigma = +\infty$  für kein  $s \in \mathbb{C}$ .

Zur Holomorphie prüfen wir geduldig nach, dass wir dank majorisierter Integrierbarkeit die Ableitung nach  $s$  unter das Integral ziehen dürfen.

😊 Dank Satz L1B ist  $F$  beliebig oft differenzierbar, sogar analytisch:  $F: \mathbb{C}_{\text{Re} > \sigma} \rightarrow \mathbb{C}$  lässt sich (lokal) in eine Potenzreihe entwickeln (F3E).

😊 Oft lässt sich die Funktion  $F$  holomorph auf die gesamte Ebene  $\mathbb{C}$  fortsetzen mit Ausnahme einiger Polstellen, wie in obigen Beispielen.

Die Laplace-Transformierte ist holomorph.

**Aufgabe:** Wir wollen die Ableitung  $\partial_s$  unter das Integral ziehen:

$$F(s) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt \implies F'(s) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} (-t) f(t) dt$$

Warum dürfen wir das hier? Finden Sie eine geeignete Majorante!

😊 Zur Erinnerung und als Vorbild: Die entsprechende Aufgabe für die Gamma-Funktion haben wir auf Seite D417 gelöst.

Wir setzen weiterhin voraus, dass  $f$  höchstens exponentiell wächst, das heißt  $|f(t)| \leq c e^{\sigma t}$  für alle  $t \geq 0$  und geeignete Konstanten  $c, \sigma \in \mathbb{R}$ .

**Lösung:** Wir nutzen die Ableitung von Parameterintegralen (D3E). Zunächst ist der Integrand  $f(t) e^{-st}$  stetig differenzierbar nach  $s$ . Zudem ist die Ableitung  $-t f(t) e^{-st}$  majorisiert integrierbar:

Für alle  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\text{Re}(s) \geq \sigma_0 > \sigma$  gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} |-t f(t) e^{-st}| &= |t| \cdot |f(t)| \cdot |e^{-st}| \leq c t e^{\sigma t} e^{-\text{Re}(s)t} \\ &\leq c t e^{\sigma t - \text{Re}(s)t} \leq c t e^{(\sigma - \sigma_0)t} =: h(t). \end{aligned}$$

Die Laplace-Transformierte ist holomorph.

Die Majorante  $h(t) = c t e^{-\lambda t}$  mit  $\lambda = \sigma_0 - \sigma > 0$  ist unabhängig von  $s$ . Sie ist zudem über  $[0, \infty[$  integrierbar: Dank partieller Integration gilt

$$\int_{t=0}^r t e^{-\lambda t} dt = \left[ -t \lambda^{-1} e^{-\lambda t} - \lambda^{-1} e^{-\lambda t} \right]_{t=0}^r \rightarrow \lambda^{-2} \quad \text{für } r \rightarrow \infty.$$

Demnach ist die Ableitung  $-t f(t) e^{-st}$  majorisiert integrierbar.

😊 Alle Voraussetzungen zur Ableitung von Parameterintegralen (D3E) sind also erfüllt, und wir dürfen die Ableitung  $\partial_s$  unter das Integral ziehen.

😊 Somit ist die Funktion  $F: \mathbb{C}_{\text{Re} > \sigma} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph (F2C), denn  $F$  ist auf ganz  $\mathbb{C}_{\text{Re} > \sigma}$  komplex differenzierbar und die Ableitung  $F'$  ist stetig.

😊 Genau dies haben wir in obigen Beispielen bereits beobachtet! Unsere Rechnung zeigt, dass dies kein Zufall ist, sondern immer gilt.

😊 Hier zählt sich unsere solide Vorbereitung aus: Wir können unsere Werkzeuge für holomorphe Funktionen gewinnbringend einsetzen, insbesondere den Residuensatz zur Laplace-Umkehrformel L3A.

Linearität der Laplace-Transformation

Wir suchen weitere hilfreiche Eigenschaften der  $\mathcal{L}$ -Transformation

$$f(t) \circ \bullet F(s) = \mathcal{L}(f)(s) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Satz L1C: Linearität

Die Laplace-Transformation ist linear:

$$\mathcal{L}[a f + b g] = a \mathcal{L}(f) + b \mathcal{L}(g)$$

für alle  $\mathcal{L}$ -transformierbaren Funktionen  $f, g: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$  und  $a, b \in \mathbb{C}$ .

$$f \circ \bullet F, \quad g \circ \bullet G \implies a f + b g \circ \bullet a F + b G$$

Die Schreibweise  $f \circ \bullet F$  bedeutet, dass  $f$  transformierbar ist mit  $\mathcal{L}$ -Transformierter  $F$ , und  $g \circ \bullet G$  bedeutet, dass  $g$  transformierbar ist mit  $\mathcal{L}$ -Transformierter  $G$ . Genauer ist  $F(s)$  definiert für  $\text{Re}(s) > \sigma_f$  und  $G(s)$  für  $\text{Re}(s) > \sigma_g$ . Dann ist ihre Summe  $F + G$  zumindest definiert für alle  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\text{Re}(s) > \sigma = \max(\sigma_f, \sigma_g)$ , und in diesem Bereich gilt Linearität. Meist unterdrückt man die explizite Nennung des Definitionsbereichs. In den Beispielen haben  $F$  und  $G$  häufig Polstellen in  $\mathbb{C}$  und erinnern uns daran, dass sie nur für große  $s$  definiert sind.

Linearität der Laplace-Transformation

**Aufgabe:** Berechnen Sie geschickt die  $\mathcal{L}$ -Transformierten von

$$\cosh(at), \quad \sinh(at), \quad \cos(\omega t), \quad \sin(\omega t).$$

**Lösung:**  $\mathcal{L}$ -Integrale ausrechnen... oder gleich Linearität nutzen:

$$\begin{aligned} f(t) \circ \bullet F(s) & \quad \text{für } s > \sigma \\ e^{at} \circ \bullet \frac{1}{s-a} & \quad \text{für } s > \text{Re}(a) \\ \cosh(at) = \frac{1}{2} [e^{at} + e^{-at}] \circ \bullet \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \right] & = \frac{s}{s^2 - a^2} \\ \sinh(at) = \frac{1}{2} [e^{at} - e^{-at}] \circ \bullet \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a} \right] & = \frac{a}{s^2 - a^2} \\ \cos(\omega t) = \frac{1}{2} [e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}] \circ \bullet \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s-i\omega} + \frac{1}{s+i\omega} \right] & = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \\ \sin(\omega t) = \frac{1}{2i} [e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}] \circ \bullet \frac{1}{2i} \left[ \frac{1}{s-i\omega} - \frac{1}{s+i\omega} \right] & = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Ableitungsregel der Laplace-Transformation

**Aufgabe:** Berechnen Sie  $\mathcal{L}(f')$ ,  $\mathcal{L}(f'')$ ,  $\mathcal{L}(f''')$  usw. aus  $\mathcal{L}(f)$ .

**Lösung:** (1) Wir nutzen die Definition und partielle Integration:

$$\begin{aligned} f'(t) \circ \bullet \mathcal{L}(f')(s) & \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} f'(t) dt \quad \text{partielle Integration!} \\ & \stackrel{\text{B1}}{\stackrel{\text{L1}}{=}} \left[ e^{-st} f(t) \right]_{t=0}^{\infty} - \int_{t=0}^{\infty} -s e^{-st} f(t) dt \\ & = s \mathcal{L}(f)(s) - f(0) \end{aligned}$$

Hierzu sei  $f$  absolut stetig und für  $s > \sigma$  gelte  $e^{-st} f(t) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ .

(2) Für die zweite Ableitung  $f'' = (f')'$  wenden wir dies erneut an:

$$\begin{aligned} f''(t) \circ \bullet \mathcal{L}(f'')(s) & \stackrel{\text{L1}}{=} s \mathcal{L}(f')(s) - f'(0) \\ & \stackrel{\text{L1}}{=} s [s \mathcal{L}(f)(s) - f(0)] - f'(0) \\ & = s^2 \mathcal{L}(f)(s) - s f(0) - f'(0) \end{aligned}$$

😊 Alle weiteren Ableitungen folgen nun ebenso per Induktion...

Ableitungsregel der Laplace-Transformation

Satz L1D: Ableitungsregel der Laplace-Transformation

Sind  $f, f', f'', \dots, f^{(n)}: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und  $\mathcal{L}$ -transformierbar, so gilt

$$\begin{aligned} f(t) \circ \bullet F(s) \\ f'(t) \circ \bullet s F(s) - f(0) \\ f''(t) \circ \bullet s^2 F(s) - s f(0) - f'(0) \\ f'''(t) \circ \bullet s^3 F(s) - s^2 f(0) - s f'(0) - f''(0) \\ f^{(4)}(t) \circ \bullet s^4 F(s) - s^3 f(0) - s^2 f'(0) - s f''(0) - f'''(0) \\ \dots \\ f^{(n)}(t) \circ \bullet s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \end{aligned}$$

😊 Die erste Gleichung haben wir oben durch partielle Integration direkt nachgewiesen. Alle weiteren Gleichungen ergeben sich per Induktion durch Anwendung dieser Formel.

😊 Ableitungen nach  $t$  werden zu polynomiellen Ausdrücken in  $s$ . Hierin liegt der ungemein praktische Nutzen der  $\mathcal{L}$ -Transformation für das Lösen von Differentialgleichungen.

**Aufgabe:** Berechnen Sie dank Ableitungsregel die  $\mathcal{L}$ -Transformierte

$$t^n \circ \bullet \frac{n!}{s^{n+1}} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

**Lösung:** Wir haben bereits  $1 \circ \bullet 1/s$  berechnet.  $\mathcal{L}107$

Für  $f(t) = t^n$  gilt  $f^{(n)}(t) = n!$ , dank Linearität also

$$f^{(n)}(t) \circ \bullet n!/s.$$

Andererseits liefert die Ableitungsregel für  $f(t) \circ \bullet F(s)$  hier

$$f^{(n)}(t) \circ \bullet s^n F(s) \text{ da } f(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0.$$

Wir erhalten  $n!/s = s^n F(s)$ , also  $F(s) = n!/s^{n+1}$ , wie behauptet.

☺ Wir können das Laplace-Integral auch direkt ausrechnen wie auf Seite L102. Dies führt zu wiederholter partieller Integration für die Gamma-Funktion wie auf Seite B316 erklärt.

☺ Wir haben stattdessen unsere Rechnung gleich so formuliert, dass wir die Ableitungsregel geschickt ausnutzen können. Damit wird der Rechenweg wesentlich kürzer und leichter!

☺ Auch hier führt Differenzieren der Funktion  $f$  auf einfache algebraische Operationen der Bildfunktion  $F = \mathcal{L}(f)$ . Dies ist die Eigenart und der Nutzen der Laplace-Transformation.

Wir betrachten  $f(t) \circ \bullet F(s)$ . Für die **Ableitung von  $F$**  gilt:  $\mathcal{L}107$

$$\frac{d}{ds} F(s) = \int_{t=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} e^{-st} f(t) dt = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} (-t) f(t) dt = \mathcal{L}[-t f(t)]$$

**Dämpfung:** Für alle Exponenten  $a \in \mathbb{C}$  gilt

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} e^{at} f(t) dt = \int_{t=0}^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt = F(s-a).$$

**Streckung:** Substitution mit  $\tau = at$  und  $a > 0$  liefert

$$\mathcal{L}[f(at)] = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} f(at) dt = \int_{\tau=0}^{\infty} \frac{1}{a} e^{-s\tau/a} f(\tau) d\tau = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right).$$

**Verschiebung:** Substitution mit  $\tau = t - a$  und  $a \geq 0$  liefert

$$\mathcal{L}[f(t-a)] = \int_{t=a}^{\infty} e^{-st} f(t-a) dt = \int_{\tau=0}^{\infty} e^{-s\tau - as} f(\tau) d\tau = e^{-as} F(s).$$

⚠ Hierbei gelte  $f(t) = 0$  für alle  $t \leq 0$ , also  $f(t-a) = 0$  für alle  $t \leq a$ . Die Heaviside-Sprungfunktion  $u = \mathbf{1}_{[0, \infty[}$  bedeutet Anschalten bei  $t = 0$ . Für unsere Funktion schreiben wir  $f(t)u(t)$ , verschoben  $f(t-a)u(t-a)$ .

**Satz L1E: Transformationsregeln**

Sei  $f(t) \circ \bullet F(s)$ . Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt die **Multiplikationsregel:**

$$t^n f(t) \circ \bullet (-1)^n F^{(n)}(s)$$

Für alle  $a \in \mathbb{C}$  gilt die **Dämpfungsregel:**

$$e^{at} f(t) \circ \bullet F(s-a)$$

Für alle  $a \in \mathbb{R}_{>0}$  gilt die **Streckungsregel:**

$$f(at) \circ \bullet \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Sei  $f(t) = 0$  für  $t \leq 0$ . Für alle  $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  gilt die **Verschiebungsregel:**

$$f(t-a) \circ \bullet e^{-as} F(s)$$

Dies schreibt man zur Betonung  $f(t-a) \mathbf{1}_{[0, \infty[}(t-a) \circ \bullet e^{-as} F(s)$ .

**Aufgabe:** Berechnen Sie geschickt die  $\mathcal{L}$ -Transformierten von

$$t^n e^{at}, \quad \sin(\omega t) e^{at}, \quad \cos(\omega t) e^{at}.$$

**Lösung:** Mit Dämpfungsregel:

$$\mathcal{L}(t^n e^{at})(s) = \mathcal{L}(t^n)(s-a) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t) e^{at})(s) = \mathcal{L}(\sin \omega t)(s-a) = \frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}(\cos(\omega t) e^{at})(s) = \mathcal{L}(\cos \omega t)(s-a) = \frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$$

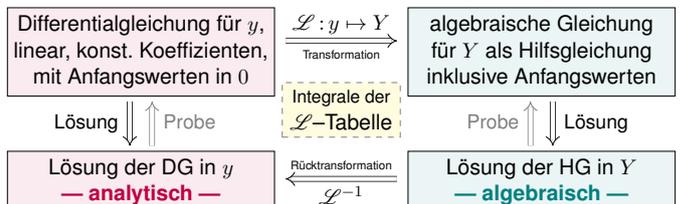
Die erste Formel gewinnen wir auch mit Multiplikationsregel:

$$\mathcal{L}(t^n e^{at})(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \frac{1}{s-a} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

☺ Die  $\mathcal{L}$ -Transformation gehorcht einfachen Regeln. Zusammen mit einer Tabelle grundlegender  $\mathcal{L}$ -Integrale erübrigt sich häufig jede Integralsberechnung — zumindest mit hinreichender Erfahrung.

$f(t)_{t \geq 0}$	$F(s)_{\operatorname{Re}(s) > \sigma}$	$f(t)_{t \geq 0}$	$F(s) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt$
1	$\frac{1}{s}$	$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}$	$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$f(at), a > 0$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as} F(s)$

Laplace-Transformation kann lineare Differentialgleichungen lösen:



☺ Die Laplace-Transformation verwandelt etwas kompliziertes in etwas einfaches, nämlich Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen.

Die Lösung der Hilfsgleichung ist oft einfach und beruht hauptsächlich auf Bruchrechnung: Partialbruchzerlegung der berechneten Funktionen.

☺ Die Methode der Laplace-Transformation ist dann effizient, wenn Sie jeden der drei Schritte effizient ausführen können.

☺ Ausführliche  $\mathcal{L}$ -Tabellen finden Sie in Lehrbüchern, Formelsammlungen und Computer-Algebra-Systemen.

**Aufgabe:** Lösen Sie durch  $\mathcal{L}$ -Transformation die Differentialgleichung

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 2e^{-t} \text{ mit } y(0) = -1, y'(0) = 1.$$

**Lösung:** (1) Wir Laplace-transformieren dank  $\mathcal{L}$ -Tabelle:

$$\begin{aligned} y(t) &\circ \bullet Y(s) && = Y(s) \\ y'(t) &\circ \bullet sY(s) - y(0) && = sY(s) + 1 \\ y''(t) &\circ \bullet s^2 Y(s) - sy'(0) - y''(0) && = s^2 Y(s) + s - 1 \\ e^{-t} &\circ \bullet 1/(s+1) \end{aligned}$$

Dank Linearität transformieren wir die DG zur **Hilfsgleichung**

$$\underbrace{(s^2 + 2s + 1)}_{\text{char. Polynom}} Y(s) + \underbrace{s + 1}_{\text{Anfangsdaten}} = \underbrace{\frac{2}{s+1}}_{\text{rechte Seite}}$$

Die Anfangswerte werden schon im ersten Schritt in die  $\mathcal{L}$ -Transformation eingearbeitet und somit nur die spezielle Lösung des AWP angestreut. Die allgemeine Lösung der Gleichung  $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 2e^{-t}$  wird hier nicht benötigt (und auch nicht nebenbei gefunden). In diesem Beispiel liegt Resonanz vor; die  $\mathcal{L}$ -Transformation verarbeitet das automatisch.

(2) **Auflösung** der Hilfsgleichung nach  $Y$  und Partialbruchzerlegung:

$$Y(s) = \frac{\frac{2}{s+1} - (s+1)}{s^2 + 2s + 1} = \frac{2 - (s+1)^2}{(s+1)^3} \stackrel{\text{PBZ}}{=} \frac{2}{(s+1)^3} - \frac{1}{s+1}$$

(3) **Rücktransformation** von  $Y$  zu  $y$  dank  $\mathcal{L}$ -Tabelle:

$$Y(s) = \frac{2}{(s+1)^3} - \frac{1}{s+1} \circ \bullet t^2 e^{-t} - e^{-t} = y(t)$$

(4) Wir machen die **Probe:** Lösen ist schwer, prüfen ist leicht!

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= (t^2 - 1)e^{-t} \\ y'(t) &= (-t^2 + 2t + 1)e^{-t} \\ y''(t) &= (t^2 - 4t + 1)e^{-t} \end{aligned} \right\} \implies y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 2e^{-t}$$

☺ Die Funktion  $y$  erfüllt die Differentialgleichung mit Anfangsdaten!

Die Methode der Laplace-Transformation ist effizient, wenn Sie jeden der drei Schritte (1–3) schnell und sicher ausführen können. Hierzu nutzen Tabellen, vor allem aber viel Erfahrung! Daher zahlt sich die  $\mathcal{L}$ -Methode vor allem bei längerem Gebrauch aus; bei nur gelegentlicher Anwendung zeigt sie sich dem Amateur eher abweisend. Das müssen Sie selbst ausprobieren. Diese Differentialgleichung lösen wir später erneut mit anderen Methoden, siehe Seite N517.

**Partialbruchzerlegung und Residuen** L205  
Ausführung

Sei  $q(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ns^n \in \mathbb{C}[s]$  ein Polynom vom Grad  $n$ . Wir zerlegen  $q$  in Linearfaktoren: Dank Fundamentalsatz der Algebra (F3c) existieren  $n$  komplexe Nullstellen  $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ , sodass gilt:

$$q(s) = a_n(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_n) = a_n \prod_{k=1}^n (s - z_k)$$

Wir betrachten eine rationale Funktion  $p/q$  mit Zählerpolynom  $p \in \mathbb{C}[s]$ . Nach Polynomdivision können und werden wir  $\deg p < \deg q$  annehmen.

**Einfacher Fall:** Angenommen  $q$  hat nur einfache Nullstellen, d.h.  $z_i \neq z_j$  für  $i \neq j$ . Dann hat die Partialbruchzerlegung von  $p/q$  folgende Form:

$$\frac{p(s)}{q(s)} = \frac{c_1}{s - z_1} + \frac{c_2}{s - z_2} + \dots + \frac{c_n}{s - z_n} = \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{s - z_k}$$

Wir wollen die Koeffizienten  $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{C}$  bestimmen. Die primitive Methode besteht darin, die Summe auf den gemeinsamen Nenner  $q(s)$  zu bringen und dann den Zähler mit  $p(s)$  zu vergleichen. Das führt auf ein lineares Gleichungssystem. ... Noch effizienter geht es wie folgt.

**Partialbruchzerlegung und Residuen** L206  
Ausführung

Multiplikation mit dem  $k$ -ten Linearfaktor  $(s - z_k)$  ergibt:

$$\frac{p(s)(s - z_k)}{q(s)} = c_k + \sum_{j \neq k} c_j \frac{s - z_k}{s - z_j}$$

Für  $s \rightarrow z_k$  geht die rechte Seite gegen  $c_k$ . Für die linke Seite gilt:

$$\frac{p(s)(s - z_k)}{q(s)} = \frac{p(s)}{\frac{q(s) - q(z_k)}{s - z_k}} \rightarrow \frac{p(z_k)}{q'(z_k)}$$

Für die Koeffizienten  $c_1, c_2, \dots, c_n$  erhalten wir so die praktische Formel

$$c_k = \frac{p(z_k)}{q'(z_k)}$$

Ausgeschrieben erhalten wir die ersehnte Partialbruchzerlegung:

$$\frac{p(s)}{q(s)} = \sum_{k=1}^n \frac{p(z_k)}{q'(z_k)} \frac{1}{s - z_k}, \quad \text{speziell} \quad \frac{1}{q(s)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{q'(z_k)} \frac{1}{s - z_k}$$

☺ Wir nutzen diesen Trick für Residuen einfacher Polstellen (F4B)

**Partialbruchzerlegung und Residuen** L207  
Ausführung

**Allgemeiner Fall:** Wir sammeln mehrfache Faktoren von  $q$  gemäß

$$q(s) = a_n(s - z_1)^{n_1}(s - z_2)^{n_2} \cdots (s - z_\ell)^{n_\ell}$$

mit Nullstellen  $z_i \neq z_j$  für  $i \neq j$  und Vielfachheiten  $n_1, n_2, \dots, n_\ell \geq 1$ . (Für den Gesamtgrad gilt weiterhin  $\deg(q) = n = n_1 + n_2 + \dots + n_\ell$ .) Dann hat die Partialbruchzerlegung von  $p/q$  die allgemeine Form:

$$\frac{p(s)}{q(s)} = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{\nu=1}^{n_k} \frac{c_{k,\nu}}{(s - z_k)^\nu}$$

☺ Für jedes  $k = 1, \dots, \ell$  ist die Summe  $H_k(s) = \sum_{\nu=1}^{n_k} c_{k,\nu}(s - z_k)^{-\nu}$  der **Hauptteil** der Laurent-Reihe von  $p/q$  im Entwicklungspunkt  $z_k$ , und entsprechend ist  $N_k(s) = \sum_{j \neq k} H_j(s)$  dann ihr **Nebenteil** (F20). (Für die reelle Zerlegung fasst man komplex konjugierte zusammen.)

Wir wollen wie zuvor die Koeffizienten  $c_{k,\nu} \in \mathbb{C}$  bestimmen. Auch hier ist die primitive Methode des Koeffizientenvergleichs immer möglich, doch das lineare Gleichungssystem ist bei höherem Grad meist umständlich. Das folgende Verfahren ist etwas raffinierter und meist effizienter.

**Partialbruchzerlegung und Residuen** L208  
Ausführung

Multiplikation mit dem  $k$ -ten Faktor  $(s - z_k)^{n_k}$  ergibt:

$$\frac{p(s)(s - z_k)^{n_k}}{q(s)} = c_{k,1}(s - z_k)^{n_k-1} + c_{k,2}(s - z_k)^{n_k-2} + \dots + c_{k,n_k} + N_k(s)(s - z_k)^{n_k}$$

Der Nenner  $r_k(s) = q(s)/(s - z_k)^{n_k}$  entsteht aus  $q(s)$  durch Kürzung. Die Koeffizienten  $c_{k,1}, c_{k,2}, \dots, c_{k,n_k}$  erhalten wir wieder durch Ableiten:

$$c_{k,\nu} = \lim_{s \rightarrow z_k} \frac{1}{(n_k - \nu)!} \left( \frac{d}{ds} \right)^{n_k - \nu} \left[ \frac{p(s)}{q(s)/(s - z_k)^{n_k}} \right]$$

☺ Speziell für eine einfache Polstelle ( $n_k = 1$ ) gilt wie zuvor:

$$c_k = c_{k,1} = \frac{q(z_k)}{r_k(z_k)} = \frac{p(z_k)}{q'(z_k)}$$

☺ Wir nutzen diesen Trick für Residuen mehrfacher Polstellen (F4C):

$$\text{res}_{z_0}(f) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(n-1)!} \left( \frac{d}{dz} \right)^{n-1} \left[ (z - z_0)^n f(z) \right]$$

☺ Der Residuensatz ist allgemeiner; über rationale Funktionen hinaus gilt er sogar für alle holomorphen Funktionen mit isolierten Polstellen.

**Umkehrformel zur Laplace-Transformation** L301  
Ausführung

**Satz L3A: Umkehrformel zur Laplace-Transformation**

Zu  $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$  betrachten wir die Laplace-Transformierte:

$$f \circ \bullet \rightarrow F \quad \text{mit} \quad F(s) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad \text{Re}(s) > \sigma$$

Aus  $F: \mathbb{C}_{\text{Re} > \sigma} \rightarrow \mathbb{C}$  lässt sich  $f$  rekonstruieren, denn es gilt:

$$F \bullet \rightarrow f \quad \text{mit} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{(s+ix)t} F(s+ix) dx$$

für  $\text{Re}(s) > \sigma$  und fast alle  $t \geq 0$ , und immer wo  $f$  stetig diff'bar ist. Insbesondere ist  $\mathcal{L}$  injektiv, das heißt, aus  $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$  folgt  $f = g$ . (Wir identifizieren Funktionen, die nur auf einer Nullmenge differieren.)

Residuen: Hat  $F$  in  $\mathbb{C}$  nur isolierte Singularitäten und klingt ab, so gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{(s+ix)t} F(s+ix) dx = \sum_{z_0 \in \mathbb{C}} \text{res}_{z=z_0} [e^{zt} F(z)].$$

**Umkehrformel zur Laplace-Transformation** L302  
Ausführung

☺ Die Umkehrformel zeigt, dass die Rücktransformation prinzipiell immer möglich ist. Zur praktischen Berechnung ist es meist am effizientesten, die  $\mathcal{L}$ -Tabelle rückwärts zu lesen.

Das Fourier-Integral dieser Umkehrformel ist recht raffiniert und bedarf einiger Erläuterungen. (Eine Diskussion findet sich in Doetschs Einführung §24, §27.) Die Umkehrformel gilt in allen Punkten  $t \geq 0$ , in denen  $f$  stetig diff'bar ist. Sie gilt auch in Sprungstellen, in denen  $f$  links- und rechtsseitige Ableitungen besitzt, wenn wir gemäß  $f(t) = \frac{1}{2}[f(t+) + f(t-)]$  sprungnormieren.

Ganz ohne Voraussetzungen gilt sie natürlich nicht: Wir können  $f$  auf einer Nullmenge ändern, ohne die Integrale zu verändern. Zur Vereinfachung betrachten wir Funktionen als gleich, wenn sie sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden; dann gilt die Umkehrformel für fast alle  $t \geq 0$ .

Die Laplace-Transformierte  $F: \mathbb{C}_{\text{Re} > \sigma} \rightarrow \mathbb{C}$  ist holomorph. Eventuelle Singularitäten der Fortsetzung  $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  können daher nur für  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\text{Re}(s) \leq \sigma$  vorliegen. Das Integral

$$f(t) = \frac{e^{st}}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{ixt} F(s+ix) dx = \sum_{z_0 \in \mathbb{C}} \text{res}_{z=z_0} [e^{zt} F(z)]$$

können wir bereits als Fourier-Rücktransformation behandeln. Dank Residuensatz sind wir sogar in der glücklichen Lage, einfache Integrale dieser Bauart explizit ausrechnen zu können.

Wir nehmen an, dass  $F$  auf ganz  $\mathbb{C}$  fortgesetzt werden kann bis auf isolierte Singularitäten. Als Integrationsweg wählen wir dann das Segment von  $s - ir$  nach  $s + ir$  gefolgt von dem linken Halbkreis von  $s + ir$  zurück nach  $s - ir$ . Wenn das Wegintegral von  $F$  über solche Halbkreise für  $r \rightarrow \infty$  verschwindet, dann gilt die genannte Residuenformel.

**Beispiel zur Umkehrformel** L303  
Ausführung

**Aufgabe:** Mittels Umkehrformel bestimme man die Urbildfunktion  $f$  zu

$$F(s) = \frac{1}{s-a} \quad \text{für} \quad \text{Re}(s) > \text{Re}(a), \quad a \in \mathbb{C}.$$

**Lösung:** Laut  $\mathcal{L}$ -Umkehrformel berechnen wir das Integral

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{(s+ix)t} F(s+ix) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{e^{(s+ix)t}}{s-a+ix} dx.$$

Wir wenden den Residuensatz an. Einzige Polstelle ist  $z_0 = i(s-a)$ :

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{e^{(s+ix)t}}{s-a+ix} dx = 2\pi i \text{res}_{z=z_0} \left[ \frac{e^{(s+iz)t}}{s-a+iz} \right]$$

$$= 2\pi i \lim_{z \rightarrow z_0} \left[ (z - z_0) \frac{e^{(s+iz)t}}{i(z - z_0)} \right] = 2\pi e^{at}.$$

Wir erhalten also  $f(t) = e^{at}$ . Die Probe ist leicht:  $\mathcal{L}(f) = F$ .

☺ Es lebe der Residuensatz! Noch einfacher geht's mit  $\mathcal{L}$ -Tabelle! Diese erübrigt häufig die explizite und mühsame Integralberechnung.

**Beispiel zur Umkehrformel** L304  
Ausführung

**Aufgabe:** Bestimmen Sie die Urbildfunktion  $f$  zu

$$F(s) = \frac{1}{1+s^3} \quad \text{für} \quad s > -1.$$

**Lösung:** (1) Wir wenden direkt den Residuensatz an:

$$f(t) = \sum_{z_0 \in \mathbb{C}} \text{res}_{z=z_0} [e^{zt} F(z)]$$

Die Polstellen  $z_1 = -1$  und  $z_{2,3} = e^{\pm i\pi/3} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$  sind einfach. Die Residuen rechnen wir geduldig aus:

$$f(t) = \sum_{k=1}^3 \frac{e^{z_k t}}{3z_k^2} = \frac{1}{3} \left[ e^{-t} - e^{t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \sqrt{3}e^{t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right]$$

(2) Alternativ in Partialbrüche zerlegen und  $\mathcal{L}$ -Tabelle nachschlagen:

$$\frac{1}{1+s^3} = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{s+1} - \frac{(1-i\sqrt{3})/2}{s-(1-i\sqrt{3})/2} - \frac{(1+i\sqrt{3})/2}{s-(1+i\sqrt{3})/2} \right] \bullet \rightarrow f(t)$$

Die Rücktransformation führt gelegentlich zu folgendem Problem:  
 $F(s)$  und  $G(s)$  finden wir in der Tabelle, nicht aber  $H(s) = F(s)G(s)$ .  
 Die Anwendbarkeit der  $\mathcal{L}$ -Tabelle erweitern wir dann durch Faltung:

**Satz L3B: Faltungsregel der Laplace-Transformation**

Zu den Funktionen  $f, g: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$  definieren wir ihre Faltung durch

$$(f * g)(t) := \int_{u=0}^t f(u)g(t-u) du = \int_{v=0}^t f(t-v)g(v) dv.$$

Die  $\mathcal{L}$ -Transformation überführt die Faltung ins punktweise Produkt:

$$(f * g)(t) \circ \bullet (F \cdot G)(s)$$

Speziell für  $g(t) = 1 \circ \bullet 1/s = G(s)$  erhalten wir die Integralregel:

$$\int_{u=0}^t f(u) du \circ \bullet F(s)/s$$

**Aufgabe:** Rechnen Sie die Faltungsregel nach!

**Nachrechnen:** Zur Vereinfachung setzen wir  $f, g$  fort zu  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(t) = g(t) = 0$  für  $t < 0$ . Dank Fubini und Substitution  $v = t - u$  gilt:

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &\circ \bullet H(s) = \int_{t \in \mathbb{R}} e^{-st} \cdot (f * g)(t) dt \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} \int_{t \in \mathbb{R}} e^{-st} \cdot \left[ \int_{u \in \mathbb{R}} f(u)g(t-u) du \right] dt \\ &\stackrel{\text{Lin}}{=} \int_{t \in \mathbb{R}} \int_{u \in \mathbb{R}} e^{-st} f(u)g(t-u) du dt \\ &\stackrel{\text{Fub}}{=} \int_{u \in \mathbb{R}} \int_{t \in \mathbb{R}} e^{-st} f(u)g(t-u) dt du \\ &\stackrel{\text{Subs}}{=} \int_{u \in \mathbb{R}} \int_{v \in \mathbb{R}} e^{-s(u+v)} f(u)g(v) dv du \\ &\stackrel{\text{Lin}}{=} \int_{u \in \mathbb{R}} e^{-su} f(u) du \cdot \int_{v \in \mathbb{R}} e^{-sv} g(v) dv \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} F(s) \cdot G(s) \end{aligned}$$

**Aufgabe:** Nutzen Sie das Faltungsintegral zur Rücktransformation von

$$H(s) = \frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2} \circ \bullet h(t) = ?$$

**Lösung:** Wir zerlegen  $H$  in ein Produkt bekannter Funktionen:

$$H(s) = \frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \cdot \frac{1}{s^2 + \omega^2}$$

Die beiden Faktoren können wir leicht rücktransformieren:

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \circ \bullet \cos(\omega t) = f(t)$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + \omega^2} \circ \bullet \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) = g(t)$$

$$H(s) = (F \cdot G)(s) \circ \bullet (f * g)(t) = h(t)$$

😊 Die  $\mathcal{L}$ -Tabelle erleichtert uns den Großteil der Arbeit.

Es bleibt schließlich nur noch, die Faltung  $h = f * g$  zu berechnen:

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau = \frac{1}{\omega} \int_0^t \cos(\omega t - \omega\tau) \sin(\omega\tau) d\tau$$

Dank Additionstheorem  $2 \cos(\alpha) \sin(\beta) = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$  folgt:

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\omega} \int_0^t \sin(\omega t) - \sin(\omega t - 2\omega\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2\omega} t \sin(\omega t) - \frac{1}{4\omega^2} \left[ \cos(\omega t - 2\omega\tau) \right]_{\tau=0}^t \\ &= \frac{1}{2\omega} t \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Wir machen die Probe! Hier hilft die letzte Regel unserer  $\mathcal{L}$ -Tabelle:

$$t \sin(\omega t) \circ \bullet -\frac{d}{ds} \left[ \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right] = \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$$

😊 Das ist Satz L1B. Wer's sofort sieht, kann's auch so berechnen.

Zu lösen sei eine lineare Differentialgleichung mit Anfangswerten:

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) &= b(t), \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(0) &= y_0^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Gegeben sind hierzu konstante Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ .  
 Die rechte Seite  $b: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$  sei stetig und  $\mathcal{L}: b(t) \circ \bullet B(s)$ .

Das **charakteristische Polynom** unserer Gleichung ist

$$q(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0.$$

Die Differentialgleichung schreiben wir damit kurz  $q(\partial_t)y(t) = b(t)$ .

Laplace transformiert dies mit AW zu folgender **Hilfsgleichung**:

$$q(s)Y(s) = B(s) + \begin{cases} + y_0 & (s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2} + \dots + a_2s + a_1) \\ + y'_0 & (s^{n-2} + a_{n-1}s^{n-3} + \dots + a_2) \\ + \dots \\ + y_0^{(n-2)} & (s + a_{n-1}) \\ + y_0^{(n-1)} & \end{cases}$$

**Aufgabe:** Lösen Sie den homogenen Fall ( $b = 0$ ) und zwar speziell:

$$\begin{aligned} u^{(n)}(t) + a_{n-1}u^{(n-1)}(t) + \dots + a_1u'(t) + a_0u(t) &= 0, \\ u(0) = u'(0) = \dots = u^{(n-2)}(0) = 0 \quad \text{und} \quad u^{(n-1)}(0) &= 1. \end{aligned}$$

**Lösung:** Laplace transformiert dies zu  $q(s)U(s) = 1$ , also  $U(s) = 1/q(s)$ .

Zur Rücktransformation  $U(s) \circ \bullet u(t)$  zerlegen wir  $1/q(s)$  wie oben:

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{q'(z_k)} e^{z_k t} \quad \text{im einfachen Fall bzw. allgemein:} \\ u(t) &= \sum_{k=1}^{\ell} \left[ c_{k,1} + c_{k,2} \frac{t}{1!} + c_{k,3} \frac{t^2}{2!} + \dots + c_{k,n_k} \frac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!} \right] e^{z_k t} \end{aligned}$$

Die Koeffizienten  $c_{k,\nu}$  der Partialbruchzerlegung finden wir wie [L205].  
 Diese Funktion  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt die **Greensche Fundamentallösung** unserer homogenen linearen Differentialgleichung  $q(\partial_t)u(t) = 0$ .  
 Wir nutzen sie in Kapitel N zur Greenschen Lösungsformel N2F.

Wir lösen nun die homogene Gleichung mit beliebigen Anfangswerten:

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) &= 0, \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(0) &= y_0^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Diese könnten wir wie zuvor  $\mathcal{L}$ -transformieren und in Partialbrüche zerlegen. Es geht aber noch einfacher: Dank der Fundamentallösung  $u(t)$  können wir die gesuchte Lösung nämlich sofort hinschreiben:

$$\begin{aligned} y(t) = & y_0 \left[ u^{(n-1)}(t) + a_{n-1}u^{(n-2)}(t) + \dots + a_2u'(t) + a_1u(t) \right] \\ & + y'_0 \left[ u^{(n-2)}(t) + a_{n-1}u^{(n-3)}(t) + \dots + a_2u(t) \right] \\ & + \dots \\ & + y_0^{(n-2)} \left[ u'(t) + a_{n-1}u(t) \right] \\ & + y_0^{(n-1)} u(t) \end{aligned}$$

**Aufgabe:** Machen Sie die Probe! Lösen  $u, u', \dots, u^{(n-1)}$  die DG? Ist jede Zeile eine Lösung der DG? Mit welchen Anfangswerten?

Wir nutzen weiter unsere Fundamentallösung  $u(t) \circ \bullet U(s) = 1/q(s)$ .

**Aufgabe:** Lösen Sie schließlich die inhomogene Differentialgleichung

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) &= b(t), \\ y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-2)}(0) = y^{(n-1)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

mit verschwindenden Anfangswerten. **Lösung:** Laplace transformiert zu

$$q(s)Y(s) = B(s), \quad \text{also} \quad Y(s) = \frac{1}{q(s)} B(s) = U(s)B(s).$$

Dank Faltungssatz L3B erhalten wir die Rücktransformation:

$$Y(s) \circ \bullet y(t) = (u * b)(t) = \int_{\tau=0}^t u(t-\tau)b(\tau) d\tau$$

😊 Dies ist die Greensche Lösungsformel N2F. Kapitel N diskutiert Differentialgleichungen genauer und gibt zahlreiche Rechenbeispiele.

😊 Steht die Lösungsformel erst einmal da, so können wir sie auch ohne  $\mathcal{L}$ -Transformation direkt anwenden: Wir müssen uns lediglich die Fundamentallösung  $u(t)$  beschaffen. Rechnen Sie's nach! [N247]

## Die Laplace-Transformation

L401  
Fazit

Die **Laplace-Transformierte** von  $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$  ist definiert durch

$$f(t) \circ \bullet F(s) := \mathcal{L}(f)(s) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Die **Konvergenzabszisse** ist  $\sigma := \inf\{s \in \mathbb{R} \mid F(s) \text{ konvergiert}\}$ . Das Integral konvergiert für alle  $s > \sigma$  und divergiert für alle  $s < \sigma$ . Es definiert eine holomorphe Funktion  $F: \mathbb{C}_{\text{Re} > \sigma} \rightarrow \mathbb{C}$ . Umgekehrt gilt

$$F(s) \bullet \circ f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{(s+ix)t} F(s+ix) dx$$

für jedes  $s > \sigma$  und fast alle  $t \geq 0$ , und immer wo  $f$  stetig diff'bar ist. Insbesondere ist  $\mathcal{L}$  injektiv, das heißt, aus  $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$  folgt  $f = g$ . (Wir identifizieren Funktionen, die nur auf einer Nullmenge differieren.)  
Residuen: Hat  $F$  in  $\mathbb{C}$  nur isolierte Singularitäten und klingt ab, so gilt

$$\mathcal{L}^{-1}(F)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{(s+ix)t} F(s+ix) dx = \sum_{z_0 \in \mathbb{C}} \text{res}_{z=z_0} [e^{zt} F(z)].$$

## Unsere kleine $\mathcal{L}$ -Tabelle: Vokabeln und Grammatik

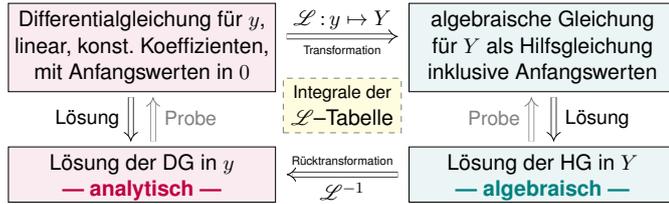
L402  
Fazit

$f(t)_{t \geq 0}$	$F(s)_{\text{Re}(s) > \sigma}$	$f(t)_{t \geq 0}$	$F(s) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt$
1	$\frac{1}{s}$	$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}$	$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$f(at), a > 0$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as} F(s)$

## Anwendung auf Differentialgleichungen

L403  
Fazit

Laplace-Transformation kann lineare Differentialgleichungen lösen:



Anstatt das Anfangswertproblem im Original direkt zu lösen, machen wir den gezeigten Umweg über den Bildraum; das ist manchmal leichter.

😊 Die Methode der Laplace-Transformation ist dann effizient, wenn Sie jeden der drei Schritte effizient ausführen können.

😊 Ausführliche  $\mathcal{L}$ -Tabellen finden Sie in Lehrbüchern, Formelsammlungen und Computer-Algebra-Systemen.

😊 Zudem nutzen wir die obigen Rechenregeln für  $\mathcal{L}$  und  $\mathcal{L}^{-1}$ , sowie Basisalgorithmen wie Partialbruchzerlegung (PBZ), etc.

## Zusammenfassung und Verständnisfragen

L404  
Fazit

**Aufgabe:** Begründen Sie durch ein Ergebnis Ihrer Vorlesung oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel aus Ihrem Fundus:

- (1) Jede Funktion  $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$  ist  $\mathcal{L}$ -transformierbar.
- (2) Welche Bedingungen garantieren  $\mathcal{L}$ -Transformierbarkeit?
- (3) Ist jede  $\mathcal{L}$ -Transformierte  $F: \mathbb{C}_{\text{Re} > \sigma} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph? Warum?
- (4) Lässt sich jede  $\mathcal{L}$ -Transformierte  $F$  holomorph auf  $\mathbb{C}$  fortsetzen?
- (5) Ist die Transformation  $f \circ \bullet F = \mathcal{L}(f)$  linear? Ist sie injektiv?
- (6) Lässt sich  $F$  zu  $f$  rücktransformieren? Wie? Inwiefern eindeutig?
- (7) Ist jede rationale Funktion  $F = P/Q$  eine  $\mathcal{L}$ -Transformierte? Wie?

**Lösung:** (1) Nein, einfache Gegenbeispiele sind  $f(t) = 1/t$  und  $f(t) = \exp(t^2)$ . [L103]  
(2) Wir fordern, dass  $f$  auf jedem endlichen Intervall  $[0, r]$  integrierbar ist und höchstens exponentiell wächst gemäß  $|f(t)| \leq c e^{\sigma t}$  für alle  $t \geq 0$  und Konstanten  $c, \sigma \in \mathbb{R}$ . [L04]  
(3) Ja, wir ziehen die Ableitung unters Integral (L1B) dank majorisierter Integrierbarkeit (D3E).  
(4) Nein, schon für  $1 \circ \bullet 1/s$  müssen wir mit Polstellen rechnen. (Es gibt noch schlimmeres.)  
(5) Ja, die Transformation  $f \circ \bullet F = \mathcal{L}(f)$  ist linear (L1C). Sie ist im Wesentlichen injektiv:  
(6) Die Umkehrformel  $F \mapsto f = \mathcal{L}^{-1}(F)$  bestimmt  $f$  zumindest fast überall (Satz L3A): Wir können  $f$  auf jeder Menge vom Maß 0 beliebig ändern, ohne das Integral  $F(s)$  zu beeinflussen. Eindeutigkeit gilt, wenn  $f$  stückweise stetig differenzierbar ist und zudem sprungnormiert.  
(7) Nein, für  $s \rightarrow \infty$  muss  $F(s) \rightarrow 0$  gelten! [L04] Für  $\deg P < \deg Q$  gelingt's mit PBZ.

## Laplace-Integrale und Potenzreihen

L405  
Ausführung

**Aufgabe:** (Erinnerung an die HM2) Wir betrachten die Potenzreihe

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^k \quad \text{mit } z \in \mathbb{C} \text{ und Koeffizienten } f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}.$$

Für welche  $z \in \mathbb{C}$  konvergiert sie? Was passiert für  $z = e^{ix}$ ? für  $z = e^{-s}$ ?

**Lösung:** Die Reihe konvergiert für  $|z| < \rho$  und divergiert für  $|z| > \rho$ , wobei  $\rho = 1/\limsup \sqrt[k]{|f(k)|}$  der Konvergenzradius dieser Reihe ist. Für  $x \in \mathbb{R}$  durchläuft  $z = e^{ix}$  den Kreis; wir erhalten eine Fourier-Reihe! In komplexen Polarkoordinaten schreiben wir  $z = e^{-s}$  und erhalten

$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) e^{-sk} \quad \text{mit } s \in \mathbb{C}.$$

Diese Reihe konvergiert für  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\text{Re}(s) > -\ln \rho$  und divergiert für  $\text{Re}(s) < -\ln \rho$ . Der Konvergenzradius wird zur Konvergenzabszisse. Die Laplace-Transformation ersetzt diese Summe durch das Integral

$$F(s) = \int_{t=0}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad \text{mit } s \in \mathbb{C}.$$

😊 Daher verhalten sich Laplace-Integrale und Potenzreihen ähnlich, insbesondere bei Konvergenzverhalten und Holomorphie. (Satz L1B)

## Vergleich von Laplace und Fourier

L406  
Ausführung

**Aufgabe:** Für  $f \circ \bullet F$  ist  $\hat{f}(\omega) = F(i\omega)/\sqrt{2\pi}$  die  $\mathcal{F}$ -Transformierte.

**Lösung:** Wir setzen  $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$  für  $t < 0$  trivial fort durch  $f(t) = 0$ . Die Laplace-Transformierte von  $f$  ist die Funktion  $F: \mathbb{C}_{\text{Re} > \sigma} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$F(s) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_{t=-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Das ist nur für solche  $s \in \mathbb{C}$  definiert, für die das Integral konvergiert. Ist  $f$  absolut integrierbar, so konvergiert das Integral für alle  $\text{Re}(s) \geq 0$ . Für imaginäres  $s = i\omega$  mit  $\omega \in \mathbb{R}$  erhalten wir so das Fourier-Integral

$$F(i\omega) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt = \int_{t=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt.$$

Das entspricht (bis auf Normierung) der Fourier-Transformierten

$$\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \hat{f}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt.$$

😊 Laplace beinhaltet Fourier demnach als Spezialfall.

## Vergleich von Laplace und Fourier

L407  
Ausführung

**Aufgabe:** Erklären Sie mit Fourier-Theorie die Laplace-Umkehrformel.

**Lösung:** Physikalische Interpretation: Für  $s, \omega \in \mathbb{R}$  ist das Integral

$$F(s + i\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \cdot e^{-st} f(t) dt$$

die Spektralfunktion der gedämpften Zeitfunktion  $g(t) = e^{-st} f(t)$ .

Diese Sicht erklärt die Rücktransformation durch die Umkehrformel:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} e^{(s+i\omega)t} F(s+i\omega) d\omega$$

Das ist genau die Umkehrformel der Fourier-Transformation!

Die Integrale konvergieren für  $\text{Re}(s) > \sigma$ , und dann gilt Satz K1E:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(s+i\omega)t} F(s+i\omega) d\omega = \frac{e^{st}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \hat{g}(\omega) d\omega = e^{st} g(t) = f(t)$$

Hier gelten die üblichen Vorsichtsmaßnahmen der Fourier-Theorie: Die Gleichheit gilt für fast alle  $t \geq 0$ , und immer wo  $f$  stetig diff'bar ist.

## Vergleich von Laplace und Fourier

L408  
Ausführung

**Aufgabe:** Lässt sich jede Funktion  $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$  fourier-transformieren? und laplace-transformieren? Warum ist Letzteres allgemeiner?

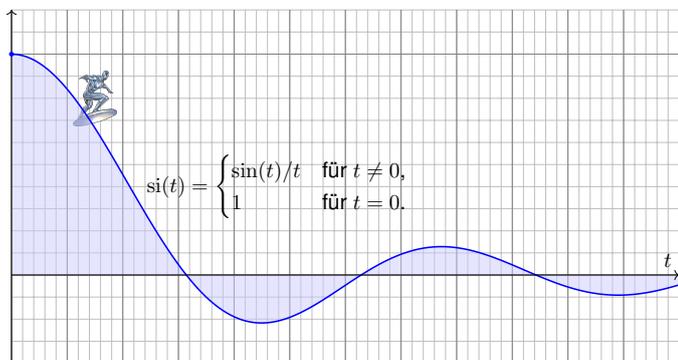
**Lösung:** Zur Konvergenz des Fourier-Integrals setzen wir  $f$  als absolut integrierbar voraus. Für den Cauchy-Hauptwert genügt etwas weniger, doch für gute, robuste Eigenschaften benötigen wir  $\int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt < \infty$ .

Dies trifft jedoch für viele einfache und geläufige Funktionen gar nicht zu:  $f(t) = 1$ ,  $f(t) = \sin(t)$  oder Polynome  $f(t) = \sum a_k t^k$  erfüllen dies nicht! Diese Funktionen sind daher zunächst nicht Fourier-transformierbar.

😊 Beim Laplace-Integral ist die Lage von Anfang an spürbar besser: Für hinreichend großes  $s$  klingt der Integrand  $e^{-st} f(t)$  schnell genug ab. Genauer: Für  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\text{Re}(s) > \sigma$  konvergiert das Laplace-Integral. Wir setzen hierzu voraus, dass  $f(t)$  höchstens exponentiell wächst.

So ist die Laplace-Transformierte  $F(s)$  nicht nur für reelle Parameter  $s \in \mathbb{R}_{> \sigma}$  definiert, sondern für alle komplexen Parameter  $s \in \mathbb{C}_{\text{Re} > \sigma}$ . Die Funktion  $F: \mathbb{C}_{\text{Re} > \sigma} \rightarrow \mathbb{C}$  ist sogar holomorph! (Satz L1B)

😊 Damit stehen uns die mächtigen Werkzeuge holomorpher Funktionen zur Verfügung, insbesondere Laurent-Reihen und der Residuensatz.



Die Spaltfunktion  $si$  und das Dirichlet-Integral  $\int_{t=0}^{\infty} si(t) dt$  begegnen uns häufig in der Physik, der Signalverarbeitung oder der Fourier-Analyse. Wir sind mutig und wollen zu  $si$  die Laplace-Transformierte berechnen.

Wir untersuchen erneut die **Spaltfunktion**  $si: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}: t \mapsto \sin(t)/t$ , wie immer stetig fortgesetzt durch  $si(0) = 1$ . Die Funktion ist elementar, nicht jedoch ihre Stammfunktion, der **Integralsinus**  $Si(t) = \int_{\tau=0}^t si(\tau) d\tau$ . Daher konnten wir das Dirichlet-Integral  $\int_{t=0}^{\infty} si(t) dt$  mit elementaren Integrationsmethoden (aus der HM2) zunächst nicht ausrechnen. [B149] Dies gelang uns trickreich erst später mit dem **Residuensatz**. [F115] [F425] Solch knifflige Integrale treten in Natur- und Ingenieurwissenschaften häufig auf. Sie sind daher ein guter Test für unsere Rechenmethoden. Erfreulicherweise stellt sich heraus, dass wir dieses schwierige Integral ganz wunderbar mit der Laplace-Transformation berechnen können!

$$f(t) = \frac{\sin(t)}{t} \quad \circ \bullet \quad F(s) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

Der Dämpfungsfaktor  $e^{-st}$  hat hier zwei nützliche Eigenschaften: Erstens garantiert er absolute Konvergenz für  $s > 0$ , so wie erwartet. Zweitens beschert uns die partielle Ableitung  $\partial_s$  den hilfreichen Faktor  $t$ . Für  $s > 0$  können wir die Integration damit entscheidend vereinfachen.

**Aufgabe:** Berechnen Sie für  $s \in \mathbb{R}_{>0}$  die Laplace-Transformierte

$$F(s) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

- Anleitung: (1) Zeigen Sie  $|F(s)| \leq 1/s$ . Für  $s \nearrow \infty$  folgt also  $F(s) \rightarrow 0$ .  
 (2) Berechnen Sie die Ableitung  $F'(s)$  und damit  $F(s)$  für alle  $s \in \mathbb{R}_{>0}$ . (Nehmen Sie dazu vorläufig an, dass Sie die Ableitung unter das Integral ziehen dürfen, und zeigen Sie anschließend, warum.)  
 (3) Angenommen,  $F$  ist stetig in  $s = 0$ , also  $F(s) \rightarrow F(0)$  für  $s \searrow 0$ . Folgern Sie unter dieser Annahme den Wert des Integrals

$$F(0) = \int_{t=0}^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

**Lösung:** (1) Für  $s \in \mathbb{R}_{>0}$  nutzen wir die üblichen Abschätzungen:

$$|F(s)| \leq \int_{t=0}^{\infty} \left| e^{-st} \frac{\sin(t)}{t} \right| dt \leq \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt = \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \right]_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{s}$$

(2) In jedem Punkt  $s \in \mathbb{R}_{>0}$  finden wir die Ableitung wie folgt:

$$\begin{aligned} F'(s) &= \frac{d}{ds} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} \frac{\sin(t)}{t} dt && \text{Wir ziehen die Ableitung...} \\ &= \int_{t=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} \left[ e^{-st} \frac{\sin(t)}{t} \right] dt && \text{unter das Integral [L414]...} \\ &= \int_{t=0}^{\infty} -e^{-st} \sin(t) dt && \text{und vereinfachen!} \\ &= \frac{-1}{s^2 + 1} && \text{dank } \mathcal{L}\text{-Tabelle} \end{aligned}$$

Daraus folgt  $F(s) = c - \arctan(s)$  mit einer Integrationskonstanten  $c \in \mathbb{R}$ . Für  $s \nearrow \infty$  wissen wir aus (1) bereits  $F(s) \rightarrow 0$ . Daraus folgt  $c = \pi/2$ .

(3) Wir nehmen an, dass  $F$  in 0 stetig ist, also  $F(s) \nearrow F(0)$  für  $s \searrow 0$ . Damit erhalten wir  $F(0) = \lim_{s \searrow 0} F(s) = \pi/2 - \arctan(0) = \pi/2$ .

⚠ Die Stetigkeit von  $F$  ist keineswegs selbstverständlich und auch nicht leicht zu beweisen. Zur Vereinfachung haben wir sie in (3) vorausgesetzt.

**Satz L4A: Laplace-Transformation der Spaltfunktion**

Die Laplace-Transformation der Spaltfunktion ist

$$f(t) = \frac{\sin t}{t} \quad \circ \bullet \quad F(s) = \frac{\pi}{2} - \arctan(s).$$

Ausführlich bedeutet das: Für jedes  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  gilt die Gleichung

$$F(s) := \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2} - \arctan(s).$$

😊 Plausibilitätscheck: Die Regel  $t f(t) \circ \bullet F'(s)$  ist hier erfüllt. [L201] Nochmal gelingt der Trick nicht:  $\sin(t)/t^2$  ist nicht  $\mathcal{L}$ -transformierbar.

- Aufgabe:** Gehen Sie die bisherige Rechnung (1-3) kritisch durch:  
 (4) Warum dürfen wir in (2) die Ableitung unter das Integral ziehen?  
 (5) Warum gilt in (3) Stetigkeit in  $s = 0$ , also  $F(s) \rightarrow F(0)$  für  $s \searrow 0$ ?  
 (a) Majorisierte Konvergenz? (b) Ausrechnen? (c) Dirichlet-Kriterium?  
 ⚠ Diese Sorgfalt ist nötig, wird aber meist missachtet, siehe D423.

**Lösung:** Für alle  $s \in \mathbb{R}_{>0}$  haben wir die Gleichung in der vorigen Aufgabe (1-2) nachgerechnet; das gelingt sogar erstaunlich leicht. (4) Die entscheidende Umformung ist folgende Ableitung:

$$F'(s) = \frac{d}{ds} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} \frac{\sin(t)}{t} dt \stackrel{?}{=} \int_{t=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} \left[ e^{-st} \frac{\sin(t)}{t} \right] dt$$

- 😊 Das ist eine Variante des beliebten Feynman-Tricks, siehe D423.  
 ⚠ Diese Umformung gilt nicht immer, wir müssen genau hinschauen!  
 😊 Zur Ableitung unter dem Integral nutzen wir bequem den Satz D3E. Für alle  $s \geq s_0 > 0$  finden wir eine integrierbare Majorante:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial s} g(s,t) \right| &= \left| e^{-st} \sin(t) \right| \leq e^{-st} \leq e^{-s_0 t} =: h(t) \\ \int_{t=0}^{\infty} h(t) dt &= \left[ -\frac{1}{s_0} e^{-s_0 t} \right]_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{s_0} < \infty \end{aligned}$$

😊 Leistungsstarke Theorie ermöglicht effiziente Berechnung: Dank Satz D3E dürfen wir die Ableitung  $\partial_s$  unter das Integral ziehen.

(5a) Zur Stetigkeit von  $F$  in  $s = 0$  benötigen wir folgenden Grenzwert:

$$\lim_{s \searrow 0} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} \frac{\sin(t)}{t} dt \stackrel{?}{=} \int_{t=0}^{\infty} \lim_{s \searrow 0} e^{-st} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_{t=0}^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

- 😊 Zur Stetigkeit von Parameterintegralen kennen wir Satz D3D: Unser Integrand  $g(s,t) = e^{-st} si(t)$  ist stetig in  $s$  (und auch in  $t$ ), ...  
 😞 aber leider um den Punkt  $s = 0$  nicht majorisiert integrierbar über  $t$ : Die kleinste Majorante  $h(t) = |si(t)| = |\sin(t)/t|$  ist nicht integrierbar!  
 ⚠ Der beliebte und bequeme Satz D3D lässt sich hier nicht anwenden. Es gelingt nicht alles auf Anhieb, auch das ist lehrreich und heilsam. Das bedeutet noch nicht, dass  $F$  unstetig ist. Die Frage bleibt offen.

(5b) Einerseits haben wir für  $s \searrow 0$  den Grenzwert  $F(s) \nearrow \pi/2$ , denn die Funktion  $s \mapsto \pi/2 - \arctan(s)$  ist stetig, auch in  $s = 0$ . Andererseits kennen wir das Integral  $F(0) = \pi/2$  dank F425.

😊 Diese explizite Rechnung zeigt die Stetigkeit von  $F$  im Punkt  $s = 0$ . Geht das auch direkt, ohne Residuenkalkül? Ja, das geht auch direkt...

(5c) Für  $f(t) = \sin(t)/t$  müssen wir etwas tiefer in die Trickkiste greifen:

**Satz L4B: Stetigkeit  $F(s) \rightarrow F(0)$  für  $s \searrow 0$**

Sei  $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$  absolut integrierbar über  $[0, r]$  für jedes  $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Für  $r \rightarrow \infty$  existiere der Grenzwert  $\int_{t=0}^r f(t) dt \rightarrow \int_{t=0}^{\infty} f(t) dt =: F(0)$ . Dank Dirichlet-Kriterium B3J konvergiert auch  $\int_{t=0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt =: F(s)$  für alle  $s > 0$ , und im Grenzwert für  $s \searrow 0$  gilt  $F(s) \rightarrow F(0)$ .

**Beweis:** Sei  $\varepsilon > 0$ . Für alle  $s, r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  gilt:

$$\begin{aligned} |F(0) - F(s)| &\stackrel{\text{lim}}{=} \left| \int_{t=0}^r (1 - e^{-st}) f(t) dt + \int_{t=r}^{\infty} f(t) dt - \int_{t=r}^{\infty} e^{-st} f(t) dt \right| \\ &\leq (1 - e^{-sr}) \int_{t=0}^r |f(t)| dt + \left| \int_{t=r}^{\infty} f(t) dt \right| + \left| \int_{t=r}^{\infty} e^{-st} f(t) dt \right| \end{aligned}$$

Wir wählen  $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  so groß, dass die letzten beiden Summanden  $\leq \varepsilon/3$  ausfallen. Dann wählen wir  $\delta > 0$  so klein, dass für alle  $s \in [0, \delta]$  auch der erste Summand  $\leq \varepsilon/3$  ausfällt. Somit gilt  $|F(0) - F(s)| \leq \varepsilon$ . □

Ziel der **Systemtheorie** ist es, komplexe (meist technische) Systeme zu beschreiben, zu analysieren, zu steuern und zu optimieren, etwa in der Kybernetik, Regelungstechnik, Signalverarbeitung, Kommunikation uvm.

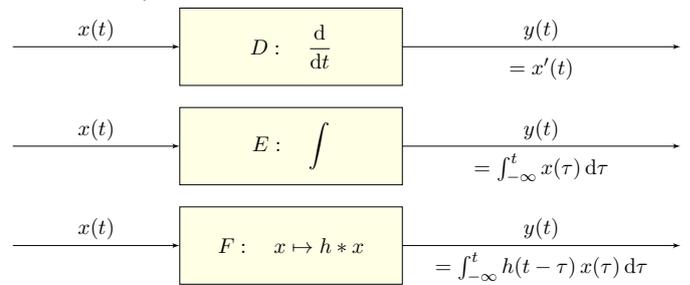


Typische Beispiele sind mechanische Systeme oder elektrische Schaltkreise (aus Widerständen, Kapazitäten, Induktivitäten, etc), allgemein auch chemische, biologische, ... gar soziale Systeme.

Auf jedes Eingangssignal  $x(t)$  antwortet das System mit einem bestimmten Ausgangssignal  $y(t)$ . Das System entspricht somit einer Zuordnung Eingabe  $\mapsto$  Ausgabe oder Anregung  $\mapsto$  Antwort.

Wir betrachten hierzu reelle oder komplexe Funktionen  $x, y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  und schreiben kurz  $x(t) \mapsto y(t)$ . Den Parameter  $t \in \mathbb{R}$  betrachten wir als Zeit. Zum Eingang  $x$  möchten wir den Ausgang  $y$  berechnen, oder umgekehrt zum gewünschten Ergebnis  $y$  die hierzu nötige Aktion  $x$  bestimmen.

Einfache Beispiele:



Vereinbarung: Im ersten Falle sei  $x$  differenzierbar, im zweiten über  $\mathbb{R}_{\leq t}$  absolut integrierbar, im dritten auch  $h$ . Es handelt sich um die Faltung  $y(t) = \int_{-\infty}^t h(t-\tau) x(\tau) d\tau$ , wenn wir  $h(t) = 0$  für  $t < 0$  voraussetzen. Mit  $h(t) = 1$  für  $t \geq 0$  erhalten wir aus dem dritten den zweiten Fall.

Wichtige Eigenschaften für ein solches System  $x(t) \mapsto y(t)$  sind:

**Linearität:** Aus  $x_k(t) \mapsto y_k(t)$  folgt  $\sum_k c_k x_k(t) \mapsto \sum_k c_k y_k(t)$ .

**Zeitinvarianz:** Aus  $x(t) \mapsto y(t)$  folgt  $x(t-t_0) \mapsto y(t-t_0)$ .

**Kausalität:** Aus  $x(t) = 0$  für  $t < t_0$  folgt  $y(t) = 0$  für  $t < t_0$ .

**Stabilität:** Es gilt  $\|y\|_{L^1([0,t])} \leq K(t) \cdot \|x\|_{L^1([0,t])}$  mit  $K: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

**Definition L4c: LTI-System**

Erfüllt das vorliegende System  $x(t) \mapsto y(t)$  Linearität und Zeitinvarianz, so nennen wir es kurz ein LZI-System, geläufiger jedoch auf englisch **linear time invariant system**, kurz ein **LTI-System**.

😊 LTI-Systeme gelten als relativ einfach und leicht zu lösen – im Gegensatz zu nicht-linearen und zeitabhängigen Systemen!

**Aufgabe:** Welche dieser Eigenschaften haben die vorigen Beispiele?

**Lösung:** (1) Linear, zeitinvariant, kausal, nicht stabil für  $x(t) = \sin(\omega t)$ . (2,3) Linear und zeitinvariant sind klar, kausal dank  $h(t) = 0$  für  $t < 0$ , stabil gdw  $K(t) = \|h\|_{L^1([0,t])} = \int_0^t |h(\tau)| d\tau < \infty$  für alle  $t \geq 0$ .

Aufgrund der Kausalität betrachten wir meist nur Funktionen der Form  $x, y, h: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$  und setzen diese für  $t < 0$  trivial fort durch  $t \mapsto 0$ .

Das System beschreiben wir dann durch das Faltungsprodukt

$$x(t) \mapsto y(t) = (h * x)(t) := \int_{\tau=0}^t h(t-\tau) x(\tau) d\tau.$$

Laplace transformiert die Faltung zum punktweisen Produkt: [L305]

$$X(s) \mapsto Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$

Fourier transformiert dies ebenso, wobei wir  $\hat{x}(\omega) = X(i\omega)$  betrachten:

$$X(i\omega) \mapsto Y(i\omega) = H(i\omega) \cdot X(i\omega)$$

Bezeichnungen: Wir nennen  $h(t)$  die **Impulsantwort** des Systems,  $H(s)$  die **Übertragungsfunktion** und  $H(i\omega)$  die **Frequenzantwort**.

😊 Mit diesen mathematischen Werkzeugen kann man nun technische oder allgemeine Systeme beschreiben, analysieren, steuern, optimieren. Mehr hierzu lernen Sie zum Beispiel in der Regelungstechnik. [L429] [N241]

Wir betrachten einen kurzen Impuls der Länge  $\varepsilon > 0$  und Stärke  $1/\varepsilon$ :

$$\delta_\varepsilon: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \mathbf{I}_{[0,\varepsilon]}(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{für } 0 \leq t < \varepsilon, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Breite  $\varepsilon$  und Höhe  $1/\varepsilon$  sind so eingerichtet, dass der Impuls immer dieselbe Gesamtstärke  $\int_{\mathbb{R}} \delta_\varepsilon(t) dt = 1$  hat. Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  erhalten wir so eine beliebig kurze, schlagartige Übertragung des Einheitsimpulses. Bei einem mechanischen System denken wir an einen Hammerschlag.

**Aufgabe:** Konvergiert  $\delta_\varepsilon$  punktweise? Gegen welche Funktion  $f$ ?

Erfüllt auch die Grenzfunktion noch die Bedingung  $\int_{\mathbb{R}} f(t) dt = 1$ ?

**Lösung:** Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  konvergiert  $\delta_\varepsilon$  punktweise gegen die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \quad \text{mit} \quad f(t) = \begin{cases} \infty & \text{für } t = 0, \\ 0 & \text{für } t \neq 0. \end{cases}$$

⚠ Es gilt  $\int_{\mathbb{R}} f(t) dt = 0$ : „Die Masse verschwindet nach Unendlich.“ Anschaulich will man sowohl  $\delta_\varepsilon \rightarrow \delta_0$  als auch  $\int_{\mathbb{R}} \delta_0(t) dt = 1$  verwenden. Hierzu sind **punktweise Konvergenz** und **Dirac-Funktion**  $f$  ungeeignet! Die korrekte Behandlung gelingt erst durch **Distributionen** (Kapitel D).

Wir betrachten wie zuvor ein System  $x(t) \mapsto y(t)$  von der Form

$$x(t) \mapsto y(t) = (h * x)(t) := \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(t-\tau) x(\tau) d\tau.$$

Zur Vereinfachung denken wir an eine stetige Funktion  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ .

**Aufgabe:** Berechnen Sie zur Anregung  $\delta_\varepsilon(t)$  die Antwort  $h_\varepsilon(t)$  und bestimmen Sie den (punktweisen) Grenzwert für  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Lösung:** Wir setzen die Definition ein und rechnen es geduldig aus:

$$\delta_\varepsilon(t) \mapsto h_\varepsilon(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(t-\tau) \delta_\varepsilon(\tau) d\tau = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau=0}^{\varepsilon} h(t-\tau) d\tau \rightarrow h(t)$$

HDI (B1): Der Grenzübergang für  $\varepsilon \rightarrow 0$  gelingt leicht dank Stetigkeit. Allgemein nutzen wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung (B4B).

Allgemein könnte die Funktion  $h$  zum Beispiel Sprungstellen haben, dann gilt der genannte Grenzwert nicht mehr ohne Weiteres. Für jede (lokal) integrierbare Funktion  $h$  gilt der Grenzwert jedoch für fast alle  $t$ .

Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  interpretieren wir  $\delta_\varepsilon \rightarrow \delta_0$  als beliebig kurzen Einheitsimpuls. Die Antwort des Systems ist  $h_\varepsilon(t) \rightarrow h(t)$ , wie oben ausgerechnet. Daher nennt man  $h(t)$  auch die **Impulsantwort** des Systems.

😊 Allein aus  $h(t)$  können wir das Systemverhalten rekonstruieren!

**Aufgabe:** Gegeben sei ein LTI-System mit Impulsantwort  $h_\varepsilon(t) \rightarrow h(t)$ . Welche Antwort  $y(t)$  gibt das System auf eine Treppenfunktion  $x(t)$ ?

**Lösung:** Jede Treppenfunktion  $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ist Summe kleiner Impulse.

Für die Unterteilung  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$  mit  $\varepsilon_k = t_{k+1} - t_k$  gelte:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{\varepsilon_k}(t - t_k) x(t_k) \varepsilon_k$$

Auf diese Anregung  $x(t)$  antwortet unser LTI-System demnach mit:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} h_{\varepsilon_k}(t - t_k) x(t_k) \varepsilon_k$$

😊 Wir nutzen hierzu nur die Linearität und die Zeitinvarianz! Das genügt, um die Antwort auf Treppenfunktionen zu bestimmen.

**Aufgabe:** Wie folgt mit  $L^1$ -Stabilität die allgemeine Systemantwort?

**Lösung:** Jede integrierbare Funktion  $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  kann in der  $L^1$ -Norm approximiert werden durch geeignete Treppenfunktionen  $x_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Das heißt  $x = x_n + f_n$  mit Fehlerschranke  $\|f_n\|_{L^1([0,t])} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Auf die Anregung  $x(t)$  antwortet unser LTI-System  $y = y_n + f_n^*$ , mit Fehlerschranke  $\|f_n^*\|_{L^1([0,t])} \leq K(t) \cdot \|f_n\|_{L^1([0,t])} \rightarrow 0$ .

Die Antwort  $x_n \mapsto y_n$  haben wir oben ausgerechnet dank Linearität und Zeitinvarianz. Für  $n \rightarrow \infty$  gilt  $x_n \rightarrow x$  und  $y_n \rightarrow y$ , also schließlich

$$y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(t-\tau) x(\tau) d\tau.$$

😊 Allein aus der Impulsantwort  $h(t)$  folgt dank Linearität, Zeitinvarianz und  $L^1_{loc}$ -Stabilität die allgemeine Systemantwort durch die Faltung

$$x(t) \mapsto y(t) = (h * x)(t) := \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(t-\tau) x(\tau) d\tau.$$

Das erlaubt eine bequeme Beschreibung aller stabilen LTI-Systeme: Es genügt nach einem Hammerschlag dem Echo  $h$  zu lauschen.

**Aufgabe:** Lösen Sie durch  $\mathcal{L}$ -Transformation die Differentialgleichung

$$u'''(t) - u(t) = 1 \quad \text{mit} \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = u''(0) = 1.$$

- (1) Laplace-transformieren Sie diese Gleichung mittels  $\mathcal{L} : u \mapsto U$ .
- (2) Lösen Sie die so erhaltene Hilfsgleichung nach  $U$  auf.
- (3) Bestimmen Sie die Rücktransformation  $\mathcal{L}^{-1} : U \mapsto u$ .
- (4) Machen Sie die Probe: Erfüllt  $u$  die Differentialgleichung?

**Lösung:** (1) Wir Laplace-transformieren dank  $\mathcal{L}$ -Tabelle:

$$\begin{aligned} u(t) &\circ \bullet U(s) &&= U(s) \\ u'(t) &\circ \bullet sU(s) - u(0) &&= sU(s) \\ u''(t) &\circ \bullet s^2U(s) - su(0) - u'(0) &&= s^2U(s) - 1 \\ u'''(t) &\circ \bullet s^3U(s) - s^2u(0) - su'(0) - u''(0) &&= s^3U(s) - s - 1 \\ 1 &\circ \bullet s^{-1} \end{aligned}$$

Dank Linearität transformieren wir die DG zur **Hilfsgleichung**

$$s^3U(s) - s - 1 - U(s) = s^{-1}.$$

(2) **Auflösung** der Hilfsgleichung nach  $U$ :

$$\begin{aligned} (s^3 - 1)U(s) &= \underbrace{s+1}_{\text{char. Polynom}} + \underbrace{s^{-1}}_{\text{rechte Seite}} \\ \Rightarrow U(s) &= \frac{s+1+s^{-1}}{s^3-1} = \frac{s^2+s+1}{s(s-1)(s^2+s+1)} = \frac{1}{s(s-1)} \end{aligned}$$

(3) **Rücktransformation** von  $U$  zu  $u$  dank  $\mathcal{L}$ -Tabelle:

$$U(s) = \frac{1}{s(s-1)} \stackrel{\text{PBZ}}{=} \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} \circ \bullet e^t - 1 = u(t)$$

(4) Machen Sie die **Probe!** Lösen ist schwer, prüfen ist leicht. Die Funktion  $u$  erfüllt die Differentialgleichung mit Anfangsdaten!

☺ Die Laplace-Transformation verwandelt etwas kompliziertes in etwas einfaches. Die Transformation entnimmt man am besten einer der umfangreichen  $\mathcal{L}$ -Tabellen.

⚠ Zur Rücktransformation nutzen wir die Partialbruchzerlegung. Das ist Routinearbeit. Die Anfangswerte werden schon im ersten Schritt in die  $\mathcal{L}$ -Transformation eingearbeitet.

Vergleichen Sie diesen Rechenweg mit den Methoden aus Kapitel N. Alle Wege führen zum selben Ergebnis, aber man muss die jeweils gewählte Methode einüben, um sie zu beherrschen.

**Aufgabe:** Lösen Sie durch  $\mathcal{L}$ -Transformation die Differentialgleichung

$$u''(t) + 2u'(t) + 10u(t) = 2 \cos(t) + 9 \sin(t) \quad \text{mit} \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 4.$$

- (1) Laplace-transformieren Sie diese Gleichung mittels  $\mathcal{L} : u \mapsto U$ .
- (2) Lösen Sie die so erhaltene Hilfsgleichung nach  $U$  auf.
- (3) Bestimmen Sie die Rücktransformation  $\mathcal{L}^{-1} : U \mapsto u$ .
- (4) Machen Sie die Probe: Erfüllt  $u$  die Differentialgleichung?

**Lösung:** (1) Wir Laplace-transformieren dank  $\mathcal{L}$ -Tabelle:

$$\begin{aligned} u(t) &\circ \bullet U(s) &&= U(s) \\ u'(t) &\circ \bullet sU(s) - u(0) &&= sU(s) \\ u''(t) &\circ \bullet s^2U(s) - su(0) - u'(0) &&= s^2U(s) - 4 \\ \cos(\omega t) &\circ \bullet \frac{s}{s^2 + \omega^2} && \sin(\omega t) \circ \bullet \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Dank Linearität transformieren wir die DG zur **Hilfsgleichung**

$$s^2U(s) - 4 + 2sU(s) + 10U(s) = \frac{2s}{s^2+1} + \frac{9}{s^2+1}.$$

(2) **Auflösung** der Hilfsgleichung nach  $U$  und Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned} (s^2 + 2s + 10)U(s) &= \underbrace{4}_{\text{char. Polynom}} + \underbrace{\frac{2s+9}{s^2+1}}_{\text{rechte Seite}} \\ \Rightarrow U(s) &= \frac{4}{s^2+2s+10} + \frac{2s+9}{(s^2+1)(s^2+2s+10)} \\ &\stackrel{\text{PBZ}}{=} \frac{4}{s^2+2s+10} + \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+2s+10} \end{aligned}$$

(3) **Rücktransformation** von  $U$  zu  $u$  dank  $\mathcal{L}$ -Tabelle:

$$U(s) = \frac{3}{(s+1)^2+3^2} + \frac{1}{s^2+1} \circ \bullet e^{-t} \sin(3t) + \sin(t) = u(t)$$

(4) Wir machen die **Probe!** Lösen ist schwer, prüfen ist leicht!

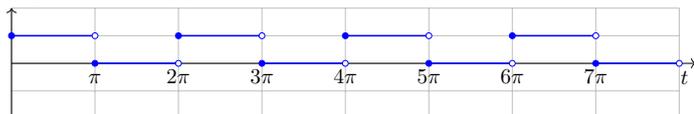
$$\begin{aligned} u(t) &= +e^{-t} \sin(3t) + \sin(t) \\ u'(t) &= -e^{-t} \sin(3t) + 3e^{-t} \cos(3t) + \cos(t) \\ u''(t) &= -8e^{-t} \sin(3t) - 6e^{-t} \cos(3t) - \sin(t) \end{aligned}$$

☺ Die Funktion  $u$  erfüllt die Differentialgleichung mit Anfangsdaten!

**Aufgabe:** Zu lösen sei die Gleichung der erzwungenen Schwingung

$$y''(t) + y(t) = f(t) \quad \text{mit} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Die anregende Kraft  $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  sei die  $2\pi$ -periodische Impulsfunktion gegeben durch  $f(t) = 1$  für  $0 \leq t < \pi$  und  $f(t) = 0$  für  $\pi \leq t < 2\pi$ .



- (1) Berechnen Sie die Greensche Fundamentallösung dieser Gleichung, also  $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $u''(t) + u(t) = 0$  sowie  $u(0) = 0$  und  $u'(0) = 1$ .
- (2) Lösen Sie die inhomogene Gleichung durch die Faltung  $y = u * f$ . Erklären Sie an diesem Beispiel das Phänomen der Resonanz.
- (3) Skizzieren Sie die Anregung  $f$  und die Antwort  $y$ . Probe! Wo liegen Schwierigkeiten? Ist Ihre Lösung dennoch sinnvoll?

**Lösung:** (1) Wir Laplace-transformieren dank  $\mathcal{L}$ -Tabelle:

$$\begin{aligned} u(t) &\circ \bullet U(s) &&= U(s) \\ u'(t) &\circ \bullet sU(s) - u(0) &&= sU(s) \\ u''(t) &\circ \bullet s^2U(s) - su(0) - u'(0) &&= s^2U(s) - 1 \end{aligned}$$

Die Hilfsgleichung  $(s^2 + 1)U(s) = 1$  lösen wir auf zu  $U(s) = 1/(s^2 + 1)$ . Die Rücktransformation ergibt  $u(t) = \sin(t)$ . Machen Sie die Probe!

☺ Wer die Lösung sofort sieht oder wiedererkennt, kann hier abkürzen.

(2) Wir Laplace-transformieren dank  $\mathcal{L}$ -Tabelle:

$$\begin{aligned} y(t) &\circ \bullet Y(s) &&= Y(s) \\ y'(t) &\circ \bullet sY(s) - y(0) &&= sY(s) \\ y''(t) &\circ \bullet s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) &&= s^2Y(s) \end{aligned}$$

Die Hilfsgleichung  $(s^2 + 1)Y(s) = F(s)$  ergibt  $Y(s) = U(s)F(s)$ .

Die Transformation  $f \circ \bullet F$  müssen wir nicht explizit berechnen:

☺ Als Rücktransformation erhalten wir die Faltung  $y = u * f$ .

Dank Faltungssatz erhalten wir so die gesuchte Lösung:

$$y(t) = \int_{\tau=0}^t \sin(t-\tau)f(\tau) d\tau$$

Dies rechnen wir schließlich geduldig aus. Für  $t \in [2k\pi, (2k+1)\pi]$  gilt:

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{\ell=0}^{k-1} \int_{\tau=2\ell\pi}^{(2\ell+1)\pi} \sin(t-\tau) d\tau + \int_{\tau=2k\pi}^t \sin(t-\tau) d\tau \\ &= \sum_{\ell=0}^{k-1} [\cos(t-\tau)]_{\tau=2\ell\pi}^{(2\ell+1)\pi} + [\cos(t-\tau)]_{\tau=2k\pi}^t = 1 - (2k+1) \cos(t) \end{aligned}$$

Für  $t \in [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$  finden wir ebenso  $y(t) = -(2k+2) \cos(t)$ .

(3) Probe: Auf jedem dieser Intervalle gilt  $y'' + y = 1$  bzw.  $y'' + y = 0$ .

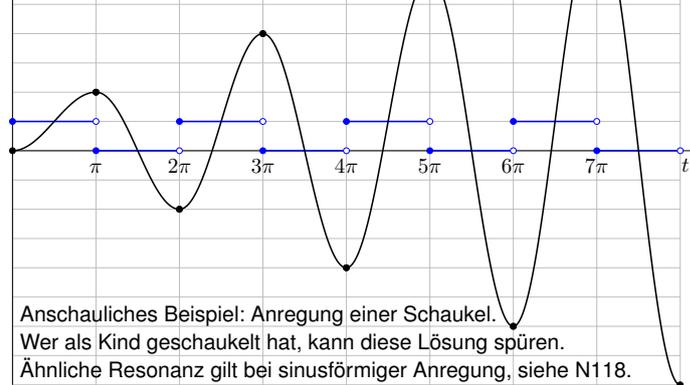
⚠ Die hier vorgegebene rechte Seite  $f$  ist nur stückweise stetig. Die Lösung  $y$  ist daher nicht  $C^2$ , sondern nur  $C^1$  und stückweise  $C^2$ .

☺ Die Differentialgleichung gilt für alle  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  bis auf abzählbar viele Ausnahmestellen, hier  $t \in \{\pi, 2\pi, 3\pi, \dots\}$ . Das muss uns genügen.

Skizze unserer berechneten Lösung  $y : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ :

Die Amplitude wächst linear mit der Zeit.

Wir sehen wunderbar die Resonanz!



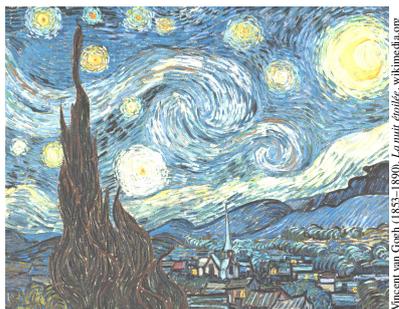
Anschauliches Beispiel: Anregung einer Schaukel.

Wer als Kind geschaukelt hat, kann diese Lösung spüren.

Ähnliche Resonanz gilt bei sinusförmiger Anregung, siehe N118.

## Kapitel M

## Gewöhnliche Differentialgleichungen

Vincent van Gogh (1853–1890). *La nuit étoilée*, wikimedia.org

Vollversion

michael-eisermann.de/lehre/HM3

26.02.2025

## Inhalt dieses Kapitels M

M002

- 1 Erste Beispiele von Differentialgleichungen
  - Einfache Beispiele aus der Mechanik
  - Separierbare Differentialgleichungen
  - Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen
- 2 Exakte Differentialgleichungen
  - Exaktheit und Potential von  $f(x, y) + g(x, y) y' = 0$
  - Lösung durch einen integrierenden Faktor
  - Lineare Differentialgleichungen
- 3 Fazit: Existenz, Eindeutigkeit, Lösungsmethoden
  - Zusammenfassung und Verständnisfragen
  - Methodenvergleich: Viele Wege führen zum Ziel.
  - Gut & schlecht gestellte Anfangswertprobleme
- 4 Weitere Aufgaben und Anwendungsbeispiele
  - Umformung und Lösung durch Substitution
  - Exakte Differentialgleichungen und Potentiale
  - Qualitative Analyse, Runden und Eingrenzen

## Wie löst man Differentialgleichungen?

M003  
Überblick

Beispiele gewöhnlicher Differentialgleichungen (kurz DG, engl. ODE):

- 1 Erster Ordnung:  $y'(x) = y(x)$
- 2 Zweiter Ordnung:  $y''(x) + 4y(x) = 0$
- 3 Dritter Ordnung:  $y'''(x)y'(x) - y''(x)^2 + (1+x^2)y(x)^2 = 0$

Gesucht ist jeweils eine Funktion  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ , deren Ableitungen die geforderte Gleichung für alle  $x \in I$  erfüllen.

Wie sehen mögliche Lösungen in diesen Beispielen aus?

- 1  $y(x) = 0$ , oder  $y(x) = e^x$ , allgemein  $y(x) = a e^x$  mit  $a \in \mathbb{R}$ . Probe!
- 2  $\sin(2x)$ ,  $\cos(2x)$ , allgemein  $y(x) = a \sin(2x) + b \cos(2x)$ . Probe!
- 3 Eine mögliche Lösung ist  $y(x) = e^{-x^2/2}$ . Machen Sie die Probe!

😊 Lösungen sind oft schwer zu finden, aber leicht zu überprüfen.

Jede ernsthafte Rechnung schließt deshalb mit einer Probe durch Einsetzen und Nachrechnen, wenigstens mit Plausibilitätsprüfung!

Wir behandeln die Grundfragen gewöhnlicher Differentialgleichungen:

Wie viele Lösungen gibt es? Wie findet man eine? womöglich gar alle?

## Wozu dienen Differentialgleichungen?

M004  
Überblick

## Differentialgleichungen sind die Sprache der Naturgesetze.

- Oft ist der unabhängige Parameter  $x \in \mathbb{R}$  die Zeit.
- Die abhängige Größe  $y(x) \in \mathbb{R}^n$  ist der Zustand zur Zeit  $x$ .
- Die Gleichung  $y'(x) = f(x, y(x))$  ist das Bewegungsgesetz für  $y$ .
- Die Anfangsdaten  $y(x_0) = y_0$  sind der Startpunkt  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ .

Viele Modelle in Naturwissenschaft und Technik haben diese Form!

Was benötigen Sie zur Lösung von Differentialgleichungen?

- Leistungsstarke Lösungstheorie als verlässliche Grundlage
- Erprobte Rezepte für spezielle Klassen von Gleichungen
- Wie immer Übung und Erfahrung, Geschick und Ausdauer

Trotz allgemeiner Lösungstheorie und -methoden hat jede DG ihre Eigenarten: Wir müssen genau hinschauen und sorgfältig arbeiten!

Zur Sorgfalt gehört, die gefundenen / benachbarte / alle Lösungen zu prüfen, zu skizzieren, zu diskutieren und alle Sonderfälle zu beachten.

📖 Zur Vertiefung und für zahlreiche Anwendungsbeispiele siehe H. Heuser: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Vieweg, 6. Aufl. 2009

## Gewöhnliche und partielle DG

M005  
AusführungEine **Differentialgleichung** ist eine Gleichung für eine Funktion  $y(x)$ , in der auch ihre Ableitungen  $y', y'', \dots$  auftreten. Wir unterscheiden:

- $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gewöhnliche Differentialgleichung in  $x, y, y', y'', \dots$
- $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  System gewöhnlicher DG in  $x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n, \dots$
- $y: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  partielle Differentialgleichung in  $x_1, \dots, x_m, y, \partial_i y, \dots$
- $y: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  System partieller DG in  $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n, \partial_i y_j, \dots$

Dies wird häufig genutzt und ist eine mathematische Grundtechnik aller Naturwissenschaftler:innen und Ingenieur:innen. Prominente Beispiele:

- Dynamik, Newton  $\ddot{q} = f(q)$ , Hamilton  $\dot{q}_i = \partial H / \partial p_i, \dot{p}_i = -\partial H / \partial q_i$ .
- Strömung, Cauchy–Riemann  $\partial_x u = \partial_y v, \partial_x v = -\partial_y u$ . Navier–Stokes.
- Wärmeleitung, Wellen-, Potential-, Maxwell–Gleichungen, uvm.

Zu partiellen Differentialgleichungen kommen wir später ab Kapitel Q.

Es gibt darüber hinaus auch stochastische Differentialgleichungen, in die Zufallsvariablen als Parameter eingehen. Dies wird zum Beispiel in der Finanzmathematik zur Modellierung von Börsenkursen genutzt.

## Explizite Differentialgleichungen

M007  
AusführungGegeben sei eine stetige Funktion  $f: \mathbb{R}^{n+1} \supseteq G \rightarrow \mathbb{R}$ . Dies definiert die zugehörige **explizite Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung**

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Sie heißt algebraisch, analytisch, etc., falls die Funktion  $f$  dies ist. Eine **Lösung** dieser Differentialgleichung auf einem Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  ist eine  $n$ -mal diff'bare Funktion  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass für alle  $x \in I$  gilt:

$$(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \in G,$$

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)).$$

Sind zudem noch **Anfangsdaten** gegeben, also ein Startpunkt

$$(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in G,$$

so soll die Lösung  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  durch diesen Punkt laufen, das heißt

$$x_0 \in I, y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Diese Problemstellung heißt explizites **Anfangswertproblem** (AWP).

## Implizite Differentialgleichungen

M006  
AusführungGegeben sei eine stetige Funktion  $F: \mathbb{R}^{n+2} \supseteq G \rightarrow \mathbb{R}$ . Dies definiert die zugehörige **implizite Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung**:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$$

Sie heißt algebraisch, analytisch, etc., falls die Funktion  $F$  dies ist. Eine **Lösung** dieser Differentialgleichung auf einem Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  ist eine  $n$ -mal diff'bare Funktion  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass für alle  $x \in I$  gilt:

$$(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x), y^{(n)}(x)) \in G,$$

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x), y^{(n)}(x)) = 0.$$

Sind zudem noch **Anfangsdaten** gegeben, also ein Startpunkt

$$(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n) \in G,$$

so soll die Lösung  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  durch diesen Punkt laufen, das heißt

$$x_0 \in I, y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, y^{(n)}(x_0) = y_n.$$

Diese Problemstellung heißt implizites **Anfangswertproblem** (AWP). Kann man die DG nach  $y^{(n)}$  auflösen, so erhält man eine **explizite DG**.

## Differentialgleichungen erster Ordnung

M008  
AusführungGegeben sei eine stetige Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \supseteq G \rightarrow \mathbb{R}$ . Dies definiert die zugehörige **explizite Differentialgleichung erster Ordnung**:

$$y' = f(x, y).$$

Gesucht sind alle diff'baren Funktionen  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem (maximalen) Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ , die obige Gleichung erfüllen, d.h. für alle  $x \in I$  gilt

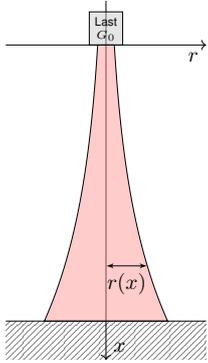
$$(x, y(x)) \in G \quad \text{und} \quad y'(x) = f(x, y(x)).$$

Die erste Forderung besagt, dass der Graph von  $y$  in  $G$  liegt, kurz  $y \subseteq G$ . Die zweite: In jedem Punkt  $(x, y) \in G$  schreibt  $f(x, y)$  die Steigung vor. Anders gesagt, die Lösung  $x \mapsto (x, y(x))$  verläuft ganz im Gebiet  $G$  und erfüllt dort die Bedingung  $y' = f(x, y)$ . Äquivalente Schreibweisen:

$$y' = f(x, y), \quad y'(x) = f(x, y(x)), \quad \dot{y} = f(t, y), \quad \dot{y}(t) = f(t, y(t)),$$

$$u' = f(x, u), \quad u'(x) = f(x, u(x)), \quad \dot{x} = f(t, x), \quad \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad \dots$$

⚠ Der Kontext gibt an, was der unabhängige Parameter ist  $(x, t, \dots)$  und was die hiervon abhängige, gesuchte Funktion ist  $(y, u, \dots)$ .



Der Eiffelturm in Paris am Abend des 14.08.2013, Höhe 324m



Der Burj Khalifa in Dubai, Höhe 830m, Bildquelle: wikimedia

**Aufgabe:** Konstruieren Sie eine Säule aus einem Material konstanter Dichte  $\rho$ , so dass der Druck (Last pro Fläche) überall konstant  $p$  ist.  
 Zahlenbeispiel: Beton  $\rho = 3\text{g/cm}^3$ , Last  $G_0 = 4600\text{kN}$ , Radius  $r_0 = 1\text{m}$ , Höhe  $300\text{m}$ .  
 Unser Modell ist zwar extrem vereinfacht, aber es illustriert doch recht gut das Prinzip.

**Lösung:** In Höhe  $x$  haben wir den Radius  $r(x) > 0$  gemäß Skizze. Die Fläche ist  $A(x) = \pi r(x)^2$ , das Volumen  $V(x) = \int_{h=0}^x \pi r(h)^2 dh$ , das Gewicht  $G(x) = g\rho V(x)$ , der Druck  $G(x)/A(x) = p$ . Insgesamt:

$$g\rho \cdot \int_{h=0}^x \pi r(h)^2 dh = p \cdot \pi r(x)^2$$

Ableiten dieser Integralgleichung ergibt unsere Differentialgleichung:

$$g\rho \pi r(x)^2 = 2p\pi r(x) r'(x).$$

Diese ist elementar lösbar. Wir trennen die Variablen und integrieren:

$$\frac{r'(x)}{r(x)} = \frac{g\rho}{2p} =: c \Rightarrow \int_{h=0}^x \frac{r'(h)}{r(h)} dh = \int_{h=0}^x c dh \Rightarrow \ln r(x) - \ln r_0 = cx$$

Wir erhalten somit  $r(x) = r_0 e^{cx}$ . Der Radius wächst exponentiell!

Dank passender mathematischer Werkzeuge gelingt uns die Rechnung erfreulich leicht. Im Zahlenbeispiel gilt  $p \approx 1500\text{kN/m}^2$  und  $r(x) = 1\text{m} \cdot e^{0.01x/\text{m}}$ , also  $r(300\text{m}) \approx 20\text{m}$ . Probe / Plausibilität: Die Druckfestigkeit liegt je nach Beton zwischen 10 und  $100\text{N/mm}^2$ . Unsere Rechnung illustriert das Grundprinzip. Anwendungen berechnet man noch viel genauer!

☺ Abstraktion ist die Kunst, Wichtiges von Unwichtigem zu trennen. Differentialgleichungen nutzen wir zur Formulierung der Naturgesetze, sie sind die universelle Sprache der Naturwissenschaft und der Technik. Damit können wir Probleme formulieren, strukturieren, verstehen, lösen.

**1. Grundlegendes Verständnis der vorliegenden Situation:**

Um Anwendungen in der Physik, Mechanik, Thermodynamik, Strömungslehre, etc. zu verstehen, benötigen Sie zunächst die erforderlichen Grundkenntnisse der betroffenen Anwendungsgebiete: Naturgesetze, grundlegende Modelle, geeignete Vereinfachungen, etc.

☺ Erst so können Sie die Situation quantitativ und präzise erfassen.

**2. Mathematische Modellierung der vorliegenden Situation:**

Durch geeignete Vereinfachung, Formalisierung und Abstraktion erhalten Sie ein mathematisches Modell. Dieses besteht aus den relevanten Größen und den zwischen ihnen gelten Beziehungen, meist geeignete Gleichungen, sehr häufig Differentialgleichungen.

☺ Hierzu nutzen Sie die Techniken Ihrer HM und weitere nach Bedarf.

**3. Lösung durch geeignete mathematische Werkzeuge:** Dazu lernen Sie hier die grundlegenden Rechentechniken. Das ist ein weites Gebiet! Je nach Ihren Anwendungen vertiefen Sie die nötigen Techniken zur numerischen Näherung, zu partiellen Differentialgleichungen, etc.

☺ Lösungen sind oft schwer zu finden, aber leicht zu überprüfen.

Zur Sorgfalt gehört, die gefundenen / benachbarte / alle Lösungen zu prüfen, zu diskutieren und umsichtig alle Sonderfälle zu beachten.

**4. Anpassung und Überprüfung anhand gegebener Daten:**

Ist eine mathematische Lösung oder numerische Näherung gelungen, so passen Sie schließlich die noch freien Parameter des Modells an die gegebenen Daten an und überprüfen soweit möglich die Vorhersagen des Modells durch Experimente, Messungen, Alternativmodelle, etc.

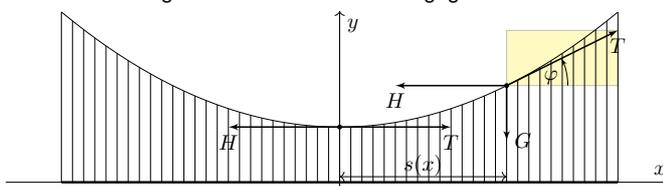
⚠ Falls nötig muss erneut ab (1) ein besseres Modell erstellt werden.

Diese Vorlesung konzentriert sich auf Lösungsmethoden (Schritt 3). Aus Ihren Vorlesungen kennen Sie bereits einige Anwendungen (1,2,4), viele weitere werden noch folgen. Nutzen Sie diese Querverbindungen!



Golden Gate Bridge, San Francisco

**Aufgabe:** Eine Hängebrücke trägt eine schwere Fahrbahn der Dichte  $\rho$  mit leichten Kabeln. Bestimmen Sie deren Verlauf als Funktionsgraph. Wir vernachlässigen das Gewicht der Kabel gegenüber der Fahrbahn.



**Lösung:** Wir suchen die Funktion  $y(x)$ . Wie in der Skizze haben wir die Steigung  $y'(x) = \tan \varphi(x)$  und die Fahrbahnlänge  $s(x) = x - x_0$ . In jedem Punkt  $(x, y(x))$  des Kabels herrscht **Kräftegleichgewicht**:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -g\rho s(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -H \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T \cos \varphi(x) \\ T \sin \varphi(x) \end{pmatrix} = 0$$

Aus  $H = T \cos \varphi(x)$  und  $g\rho s(x) = T \sin \varphi(x)$  folgt

$$y'(x) = \tan \varphi(x) = \frac{\sin \varphi(x)}{\cos \varphi(x)} = \frac{g\rho}{H} s(x) = 2a(x - x_0).$$

☺ Als Lösungen dieser DG  $y'(x) = 2a(x - x_0)$  finden wir die Parabeln

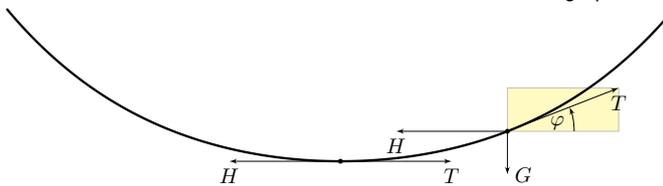
$$y(x) = a(x - x_0)^2 + y_0.$$

Wir brauchen effiziente Methoden zur systematischen Lösung! Machen Sie die Probe! Dies ist tatsächlich die allgemeine Lösung. Die Parameter  $a, x_0, y_0$  passen wir den gegebenen Daten an. Genauere Statik: alle Teile, diskretisieren, lineares Gleichungssystem. Dynamik: Schwingungen, Wind, Erdbeben, etc. Stochastische Last: Wölbung für leer, mittlere und maximale Last.



Indiana Jones and the Temple of Doom

**Aufgabe:** Eine homogene Kette der Dichte  $\rho$  hängt frei und ruhig an ihren Enden. Bestimmen Sie ihren Verlauf als Funktionsgraph.



**Lösung:** Wir suchen die Funktion  $y(x)$ . Wie in der Skizze haben wir die Steigung  $y'(x) = \tan \varphi(x)$  und Kettenlänge  $s(x) = \int_{t=x_0}^x \sqrt{1 + y'(t)^2} dt$ . In jedem Punkt  $(x, y(x))$  der Kette herrscht **Kräftegleichgewicht**:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -g\rho s(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -H \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T \cos \varphi(x) \\ T \sin \varphi(x) \end{pmatrix} = 0$$

Aus  $H = T \cos \varphi(x)$  und  $g\rho s(x) = T \sin \varphi(x)$  folgt

$$y'(x) = \tan \varphi(x) = \frac{g\rho}{H} s(x) = a^{-1} \int_{t=x_0}^x \sqrt{1 + y'(t)^2} dt.$$

Ableiten dieser Integralgleichung ergibt die Differentialgleichung

$$y''(x) = a^{-1} \sqrt{1 + y'(x)^2} \quad \text{bzw.} \quad z'(x) = a^{-1} \sqrt{1 + z(x)^2}.$$

☺ Als Lösungen dieser DG finden wir die Hyperbelfunktionen:

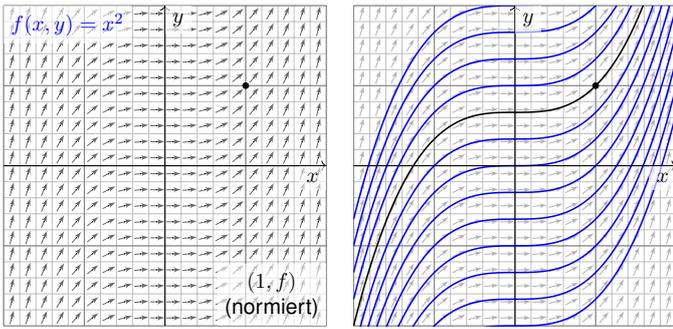
$$z(x) = \sinh\left(\frac{x - x_0}{a}\right) \quad \text{also} \quad y(x) = a \cosh\left(\frac{x - x_0}{a}\right) + y_0$$

Wir brauchen effiziente Methoden zur systematischen Lösung! Machen Sie die Probe! Dies ist tatsächlich die allgemeine Lösung. Die Parameter  $a, x_0, y_0$  passen wir den gegebenen Daten an. Für unsere Stift- und Papier-Rechnung vereinfachen wir stark, gerade das schult unsere Intuition!

Ein erstes Beispiel: Richtungsfeld und Lösungsschar

M109  
Beispiel

**Aufgabe:** Welche Funktionen  $y: \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}$  erfüllen  $y'(x) = x^2$ ? zudem  $y(1) = 1$ ? Skizze? Was ist jeweils das maximale Definitionsintervall  $I$ ?



Wir skizzieren das Richtungsfeld zu  $f(x, y) = x^2$  auf dem Gebiet  $G = \mathbb{R}^2$ : Lösungskurven  $x \mapsto (x, y(x))$  sind tangential zum Vektorfeld  $(1, f(x, y))$ . Sie erkennen so den qualitativen Verlauf der Lösungen  $y(x) = x^3/3 + c$ .

Separation der Variablen und Integration

M110  
Beispiel

☺ Geometrisch ist dies ein Strömungsfeld: Lassen wir ein Teilchen in diesem Strom schwimmen, so ist seine Trajektorie eine Lösungskurve!

**Lösung:** Die Variablen sind getrennt. Wir können direkt integrieren:

$$y'(x) = x^2$$

$$\implies \int y'(x) dx = \int x^2 dx + \text{const}$$

$$\implies y(x) = x^3/3 + c \quad \text{Probe!}$$

Die Probe ist leicht: Ableiten genügt... Es gilt tatsächlich  $y'(x) = x^2$ . Unsere Rechnung beweist, dass wir alle Lösungen gefunden haben! Die Integrationskonstante  $c \in \mathbb{R}$  können wir hierbei frei wählen.

☺ Das AWP  $y'(x) = x^2$  mit  $y(1) = 1$  wird einzig gelöst durch

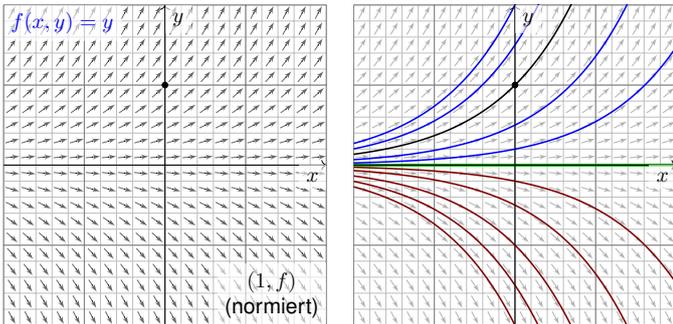
$$y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto y(x) = (x^3 + 2)/3.$$

Ist ein beliebiger Anfangswert  $y(x_0) = y_0$  vorgegeben, so ist die einzige Lösung  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto y(x) = (x^3 - x_0^3)/3 + y_0$ . Machen Sie die Probe! Jede andere Lösung ist Einschränkung  $y|_J$  auf ein Intervall,  $1 \in J \subseteq \mathbb{R}$ .

Die Wachstumsgleichung: Richtungsfeld und Lösungsschar

M111  
Beispiel

**Aufgabe:** Welche Funktionen  $y: \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}$  erfüllen  $y'(x) = y(x)$ ? und  $y(0) = 1$ ? Skizze? Was ist jeweils das maximale Definitionsintervall  $I$ ?



Wir skizzieren das Richtungsfeld zu  $f(x, y) = y$  auf dem Gebiet  $G = \mathbb{R}^2$ : Lösungskurven  $x \mapsto (x, y(x))$  sind tangential zum Vektorfeld  $(1, f(x, y))$ . Sie erkennen so den qualitativen Verlauf der Lösungen  $y(x) = c \cdot e^x$ .

Separation der Variablen und Integration

M112  
Beispiel

☺ Anders als die ersten drei Aufgaben aus der Mechanik sind diese Aufgaben kontextfrei: Zu lösen ist eine gegebene Gleichung, so einfach.

**Lösung:** Eine Lösung ist  $y(x) = 0$ . Für  $y > 0$  integrieren wir:

$$y'(x) = y(x)$$

$$\implies \frac{y'(x)}{y(x)} = 1 \implies \int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \int 1 dx + \text{const}$$

$$\implies \ln y(x) = x + \text{const} \implies y(x) = c \cdot e^x \quad \text{Probe!}$$

Die Probe ist leicht: Ableiten genügt... Es gilt tatsächlich  $y'(x) = y(x)$ . Die Integrationskonstante  $c = e^{\text{const}} > 0$  können wir hierbei frei wählen. Ebenso verfahren wir im Falle  $y < 0$  und erhalten  $y(x) = c \cdot e^x$  mit  $c < 0$ . Unsere Rechnung beweist, dass wir alle Lösungen gefunden haben!

☺ Das AWP  $y'(x) = y(x)$  mit  $y(0) = 1$  wird einzig gelöst durch

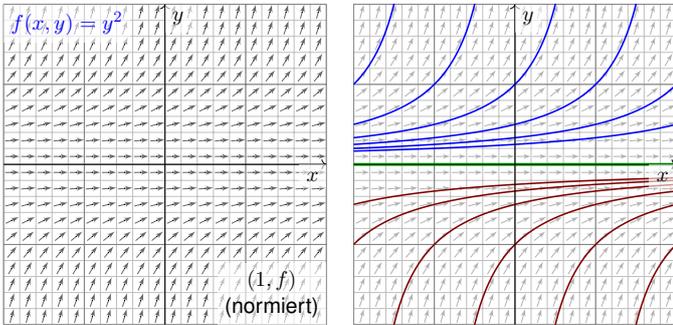
$$y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto y(x) = e^x.$$

☺ Ist ein beliebiger Anfangswert  $y(x_0) = y_0$  vorgegeben, so ist die einzige Lösung  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto y(x) = y_0 e^{x-x_0}$ . Machen Sie die Probe! Jede andere Lösung ist Einschränkung  $y|_J$  auf ein Intervall,  $0 \in J \subseteq \mathbb{R}$ .

Die Explosionsgleichung: Richtungsfeld und Lösungsschar

M113  
Beispiel

**Aufgabe:** Welche Funktionen  $y: \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}$  erfüllen  $y'(x) = y(x)^2$ ? Skizze? Finden Sie zu jeder Lösung das maximale Definitionsintervall  $I$ .



Wir skizzieren das Richtungsfeld zu  $f(x, y) = y^2$  auf dem Gebiet  $G = \mathbb{R}^2$ : Lösungskurven  $x \mapsto (x, y(x))$  sind tangential zum Vektorfeld  $(1, f(x, y))$ . Sie erkennen so den qualitativen Verlauf der Lösungen  $y(x) = 1/(c-x)$ .

Separation der Variablen und Integration

M114  
Beispiel

**Lösung:** Eine Lösung ist  $y(x) = 0$ . Für  $y \neq 0$  integrieren wir:

$$y'(x) = y(x)^2$$

$$\implies \frac{y'(x)}{y(x)^2} = 1 \implies \int \frac{y'(x)}{y(x)^2} dx = \int 1 dx + \text{const}$$

$$\implies -y(x)^{-1} = x + \text{const} \implies y(x) = \frac{1}{c-x} \quad \text{Probe!}$$

⚠ Polstelle: Jede Lösung „explodiert“. Die beiden Zweige haben zwar dieselbe Formel, aber sonst nichts miteinander zu tun! Wenn dies Ihr physikalisches System beschreibt, dann geht es bei der Polstelle kaputt!

☺ Zu jeder Konstanten  $c \in \mathbb{R}$  erhalten wir hier zwei Lösungen:

$$y_c^+: ]-\infty, c[ \rightarrow \mathbb{R}_{>0}: x \mapsto y_c^+(x) = 1/(c-x),$$

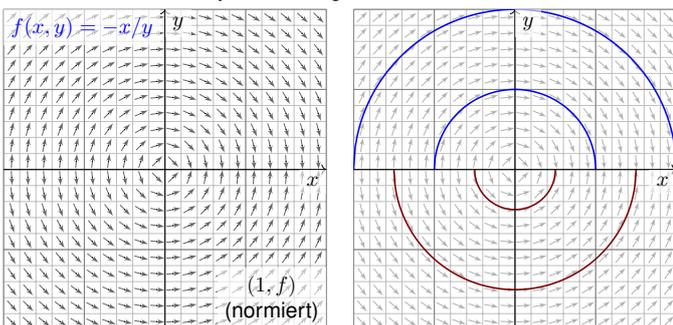
$$y_c^-: ]c, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}_{<0}: x \mapsto y_c^-(x) = 1/(c-x).$$

☺ Durch jeden Startpunkt  $(x_0, y_0)$  läuft genau eine maximale Lösung, nämlich die Funktion  $y: \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto y(x) = y_0/(1 - (x-x_0)y_0)$  auf dem Definitionsintervall  $I = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-x_0)y_0 < 1\}$ . Probe!

Die Kreisgleichung: Richtungsfeld und Lösungsschar

M115  
Beispiel

**Aufgabe:** Welche Funktionen  $y: \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}$  erfüllen  $y'(x) = -x/y(x)$ ? Skizze? Finden Sie zu jeder Lösung das maximale Definitionsintervall  $I$ .



Wir skizzieren hier das Richtungsfeld zu  $f(x, y) = -x/y$  auf  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ . Lösungskurven  $x \mapsto (x, y(x))$  sind tangential zum Vektorfeld  $(1, f(x, y))$ . Sie erkennen den qualitativen Verlauf der Lösungen  $y(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ .

Separation der Variablen und Integration

M116  
Beispiel

**Lösung:** Wir trennen die Variablen und integrieren:

$$y'(x) = -x/y(x)$$

$$\implies y(x)y'(x) = -x \implies \int y(x)y'(x) dx = \int -x dx + c$$

$$\implies y(x)^2/2 = -x^2/2 + c \implies y(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

Für  $c < 0$  gibt es keine Lösungen; wir wählen daher  $c = r^2/2$ ,  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ . Zu jedem Radius  $r > 0$  beschreibt die Lösung  $y_r^+(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$  den oberen Halbkreis und entsprechend  $y_r^-(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$  den unteren. Die Probe ist leicht: Ableiten genügt. Es gilt tatsächlich  $y'(x) = -x/y(x)$ . Unsere Rechnung beweist, dass wir alle Lösungen gefunden haben!

☺ Durch jeden Startpunkt  $(x_0, y_0 \neq 0)$  läuft genau eine max. Lösung,

$$y: ]-r, r[ \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto y(x) = \text{sign}(y_0)\sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{mit} \quad r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}.$$

Bemerkenswert: Sie existiert nur auf dem endlichen Intervall  $I = ]-r, r[$ . Hier explodiert nicht  $y(x)$ , sondern nur die Steigung  $y'(x)$  für  $x \rightarrow \pm r$ .

**Aufgabe:** Alle bisherigen Beispiele nutzen als Lösungsmethode die **Trennung der Variablen**. Formulieren Sie diese als allgemeine Regel.

**Lösung:** Eine **separierbare Differentialgleichung** ist von der Form

$$y' = g(x)h(y) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0.$$

Lösungsmethode: Wir trennen die Variablen gemäß  $y'/h(y) = g(x)$ , wobei wir  $h(y) \neq 0$  annehmen müssen, und integrieren anschließend:

$$\int_{t=x_0}^x \frac{y'(t)}{h(y(t))} dt \stackrel{!}{=} \int_{t=x_0}^x g(t) dt =: G(x)$$

Auf der linken Seite substituieren wir  $u = y(t)$  und  $du = y'(t) dt$ :

$$\int_{t=x_0}^x \frac{y'(t)}{h(y(t))} dt = \int_{u=y_0}^y \frac{1}{h(u)} du =: H(y)$$

Somit gilt  $H(y(x)) \stackrel{!}{=} G(x)$ , und Auflösen ergibt  $y(x) = H^{-1}(G(x))$ .

😊 Diese Methode fassen wir allgemein im folgenden Satz zusammen.

**Satz M1A: Lösung separierbarer Differentialgleichungen**

Zu lösen sei die separierbare Differentialgleichung

$$y' = g(x)h(y) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0.$$

Gegeben sind hierzu stetige Funktionen  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $h: J \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  auf Intervallen  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  sowie die Anfangswerte  $x_0 \in I$  und  $y_0 \in J$ .

Wir definieren Stammfunktionen  $G: I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $H: J \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$G(x) := \int_{t=x_0}^x g(t) dt \quad \text{und} \quad H(y) := \int_{u=y_0}^y \frac{1}{h(u)} du.$$

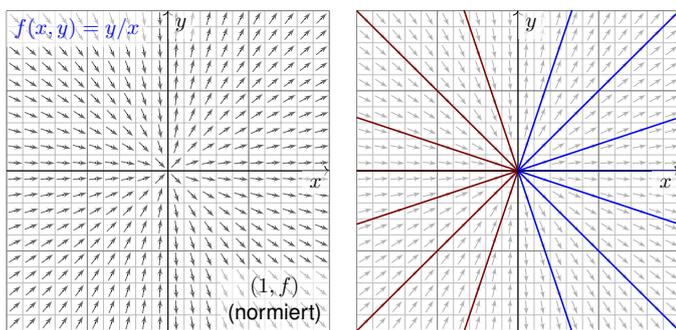
Die Funktion  $H$  ist streng monoton, also bijektiv auf ihr Bild  $H(J) \subseteq \mathbb{R}$ . Sei  $I_0 \subseteq I$  ein hinreichend kleines Intervall um  $x_0 \in I_0$  mit  $G(I_0) \subseteq H(J)$ . Unser AWP erlaubt genau eine Lösung  $y: \mathbb{R} \supseteq I_0 \rightarrow J \subseteq \mathbb{R}$ , nämlich

$$y(x) = H^{-1}(G(x)).$$

😊 Lösungsformel 😊 Eindeutigkeit 😊 Stetig abhängig von  $(x_0, y_0)$

**Die Geradengleichung: Richtungsfeld und Lösungsschar**

**Aufgabe:** Welche Funktionen  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  erfüllen  $xy'(x) = y(x)$ ? Wie viele Lösungen laufen durch einen gegebenen Startpunkt  $(x_0, y_0)$ ?



Die **implizite DG**  $xy' = y$  ist definiert in allen Punkten  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Auf  $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$  ist sie äquivalent zur **expliziten DG**  $y' = y/x$ .

**Separation der Variablen und Integration**

**Lösung:** Wir nehmen zunächst  $x, y > 0$  an und trennen die Variablen:

$$\begin{aligned} xy'(x) &= y(x) \\ \Rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} &= \frac{1}{x} & \Rightarrow \int \frac{y'(x)}{y(x)} dx &= \int \frac{1}{x} dx + \text{const} \\ \Rightarrow \ln y(x) &= \ln x + \text{const} & \Rightarrow y(x) &= a \cdot x \end{aligned}$$

Unsere Rechnung beweist, dass wir tatsächlich alle Lösungen  $y(x) > 0$  für  $x > 0$  gefunden haben. Für  $x < 0$  oder  $y < 0$  verfahren wir ebenso.

Die explizite DG  $y'(x) = y(x)/x$  wird gelöst durch die Halbgeraden

$$\begin{aligned} y_a^+ : \mathbb{R}_{>0} &\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto a \cdot x, \quad a \in \mathbb{R}, \\ y_b^- : \mathbb{R}_{<0} &\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto b \cdot x, \quad b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Die implizite DG  $xy'(x) = y(x)$  wird gelöst durch die Geraden

$$y_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto c \cdot x, \quad c \in \mathbb{R}.$$

- 😊 Durch jeden Startpunkt  $(x_0 \neq 0, y_0)$  läuft genau eine Lösung  $y_c$ .
- ⚠ Durch den Startpunkt  $(0, 0)$  laufen unendlich viele Lösungen!
- ⚠ Durch jeden Startpunkt  $(0, y_0 \neq 0)$  läuft gar keine Lösung!

**Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen**

Problem? Bevor wir rechnen, präzisieren wir das Ziel! Probe? Liegt eine vermeintliche Lösung vor, so sind genau diese Eigenschaften zu prüfen!

**Definition M1B:** explizite DG und Anfangswertproblem

Eine **explizite Differentialgleichung erster Ordnung** hat die Form

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \text{kurz} \quad y' = f(x, y).$$

Gegeben ist als **rechte Seite** eine stetige Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \supseteq G \rightarrow \mathbb{R}$ . Eine **Lösung** dieser Differentialgleichung auf einem Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  ist eine (stetig) differenzierbare Funktion  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ , die für alle  $x \in I$  die Bedingungen  $(x, y(x)) \in G$  und  $y'(x) = f(x, y(x))$  erfüllt.

Sind zudem **Anfangsdaten**  $(x_0, y_0) \in G$  gegeben, so soll die Lösung  $y$  durch diesen Punkt laufen, das heißt  $x_0 \in I$  und  $y(x_0) = y_0$  erfüllen. Ein solches Anfangswertproblem heißt **gut gestellt**, wenn genau eine Lösung  $y$  existiert und stetig von den Anfangsdaten  $(x_0, y_0)$  abhängt.

**Beispiel:** Separierbare DG sind gut gestellt dank unseres Satzes M1A.

**Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen**

Existieren Lösungen? Überblick verschafft uns der grundlegende Satz:

**Satz M1C: Cauchy Existenz- und Eindeutigkeitsatz, kurz  $\exists \& E$**

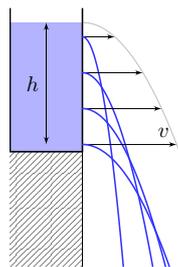
Sei  $f: \mathbb{R}^2 \supseteq G \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Zu lösen sei die Differentialgleichung

$$y' = f(x, y) \quad \text{mit Anfangswert} \quad y(x_0) = y_0.$$

- (1) Zu jedem Startpunkt  $(x_0, y_0) \in \overset{\circ}{G}$  existieren Lösungen  $y: \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}$ . Jede kann beidseitig bis zum Rand  $\partial G$  (oder  $\infty$ ) fortgesetzt werden.
- (2) Ist  $f(x, y)$  stetig diff'bar nach  $y$ , so ist die Lösung durch  $(x_0, y_0) \in \overset{\circ}{G}$  eindeutig bestimmt. Lokal hängt sie stetig differenzierbar von  $(x_0, y_0)$  ab.

Wir werden diesen grundlegenden Satz in Kapitel O weiter ausführen und dort auch beweisen. Existenz bedeutet nach M1B: Es gibt ein Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  um  $x_0$  und eine Funktion  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $y(x_0) = y_0$  sowie  $(x, y(x)) \in G$  und  $y'(x) = f(x, y(x))$  für alle  $x \in I$ . Jede solche Lösung kann beidseitig fortgesetzt werden bis sie den Rand von  $G$  erreicht oder nach  $\infty$  entkommt. Lässt sie sich nicht weiter fortsetzen, so heißt sie maximale Lösung. Folgendes Beispiel zeigt, dass es zu  $(x_0, y_0)$  auch mehrere Lösungen geben kann. Das Problem ist dann schlecht gestellt. Eindeutigkeit bedeutet: Sind  $u: I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $v: J \rightarrow \mathbb{R}$  Lösungen mit  $u(x_0) = v(x_0) = y_0$ , so gilt  $u = v$  auf dem gemeinsamen Intervall  $I \cap J$ . Sind  $u, v$  maximal, so gilt zudem  $I = J$ .

**Warnendes Beispiel: Torricellis Eimer als Wasseruhr**



**Torricellis Gesetz:** Wasser fließt aus einem Zylinder mit der Geschwindigkeit  $v = \sqrt{2gh}$ . Hierbei ist  $h$  die Pegelhöhe,  $g = 9.81 \text{m/s}^2$  die Erdbeschleunigung, also  $v$  die Geschwindigkeit eines Wassertropfens im freien Fall aus Höhe  $h$ .

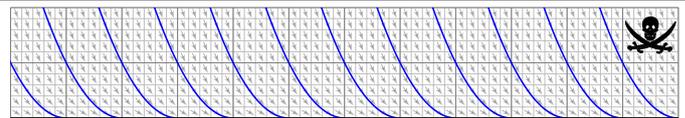
**Energiegleichung in der Strömungslehre!**

en.wikipedia.org/wiki/Torricelli's\_law und /Water\_clock: Wie funktioniert eine Wasseruhr? Zeit  $t \in \mathbb{R}$ , Wasserhöhe  $y(t) \geq 0$  über der Öffnung.

Der Pegel  $y$  erfüllt **Torricellis Differentialgleichung**  $y'(t) = -a\sqrt{y(t)}$ . Die Konstante  $a > 0$  hängt von der Größe (und Form) der Öffnung ab. In folgender Rechnung nehmen wir zur Vereinfachung  $a = 2$  an.

**Aufgabe:** Welche Funktionen  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  erfüllen  $y'(t) = -2\sqrt{y(t)}$ ? Hier ist  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  und  $f(t, y) = -2\sqrt{y}$ . Was sagt der  $\exists \& E$ -Satz? Welche Anfangswertprobleme  $y(t_0) = y_0$  sind hier gut gestellt? Physik will Determinismus; Mathematik bietet Existenz & Eindeutigkeit!

**Warnendes Beispiel: Torricellis Eimer als Wasseruhr**



**Lösung:** Die Nullfunktion  $y(t) = 0$  ist eine Lösung. Sei also  $y > 0$ .

Separation  $y'(t)/\sqrt{y(t)} = -1$  und Integration zu  $\sqrt{y(t)} = c - t \geq 0$ .

Wir finden die Lösung  $y_c(t) = (c - t)^2$  für  $t \leq c$ . Für  $t > c$  gilt das nicht:

😊 Der Eimer bleibt leer und füllt sich nicht wieder! Maximale Lösung:

$$y_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : t \mapsto y_c(t) = \begin{cases} (c - t)^2 & \text{für } t \leq c, \\ 0 & \text{für } t \geq c. \end{cases}$$

- 😊 Jedes AWP  $y(t_0) = y_0 > 0$  hat genau eine maximale Lösung!
  - ⚠ Jedes AWP  $y(t_0) = 0$  hat unendlich viele Lösungen ( $y_c$  mit  $c \leq t_0$ ).
- Letzteres ist schlecht gestellt. Anschaulich: Ist der Eimer einmal leer, so erkennen wir nicht mehr, wann er ausfließt! Mathematische Warnung: Für  $y > 0$  ist  $f(t, y) = -2\sqrt{y}$  stetig nach  $y$  diff'bar, für  $y = 0$  aber nicht!

### Exakte Differentialgleichungen: erstes Beispiel

M201  
Beispiel

Zwecks Illustration beginne ich mit einem sehr einfachen Beispiel.

**Aufgabe:** Wir betrachten erneut  $y'(x) = -x/y(x)$ , umgeschrieben zu

$$2x + 2y(x) \cdot y'(x) = 0.$$

Dieser Typ von Differentialgleichung hat die allgemeine Form

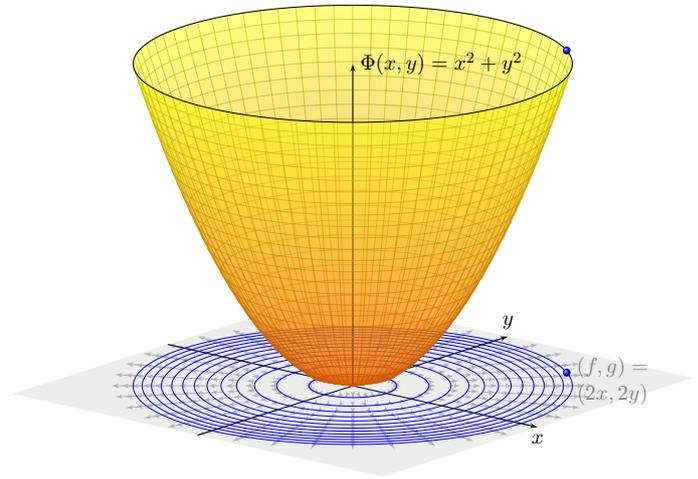
$$\begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = 0 \quad \text{hier mit} \quad \begin{cases} f(x, y) = 2x, \\ g(x, y) = 2y. \end{cases}$$

- (1) Wie liegen die Lösungen  $x \mapsto (x, y(x))$  zum Vektorfeld  $(f, g)$ ?
- (2) Finden und skizzieren Sie ein Potential  $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  zu  $(f, g)$ .
- (3) Gewinnen Sie aus den Niveaulinien von  $\Phi$  die Lösungen der DG.
- (4) Finden Sie die maximalen Lösungen mit  $y(3) = 4$  bzw.  $y(1) = -1$ .

**Lösung:** (1) Jede Lösung verläuft senkrecht zum Vektorfeld  $(f, g)$ .  
 (2) Notwendiges Kriterium: Gilt  $\text{rot}(f, g) = 0$ , also  $\partial_y f = \partial_x g$ ? Ja! Zudem ist  $\mathbb{R}^2$  einfach zusammenhängend, also existiert ein Potential. Wir finden  $\Phi(x, y) = x^2 + y^2 (+ \text{const})$ . Probe:  $\text{grad } \Phi = (2x, 2y)$ .

### Exakte Differentialgleichungen: erstes Beispiel

M202  
Beispiel



### Exakte Differentialgleichungen: erstes Beispiel

M203  
Beispiel

(3) Die Niveaulinien des Potentials  $\Phi$  sind Kreise um den Nullpunkt. Diese stehen senkrecht zum radialen Gradientenfeld  $\text{grad } \Phi = (f, g)$ . Die allgemeinen Lösungen  $y(x)$  der DG sind somit Halbkreise: Zu jedem Radius  $r > 0$  hat die DG demnach die beiden Lösungen

$$y_r^\pm: ]-r, r[ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \pm \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Probe: Erfüllt diese Funktion tatsächlich  $2x + 2y(x) \cdot y'(x) = 0$ ? Ja! Der folgende Satz versichert uns, dass wir so alle Lösungen finden. Das Definitionsintervall von  $y_r^\pm$  haben wir jeweils maximal gewählt.

(4a) Auflösen von  $\Phi(x, y(x)) = x^2 + y(x)^2 \stackrel{!}{=} \Phi(3, 4) = 25$  ergibt

$$y(x) = +\sqrt{25 - x^2} \quad \text{für } -5 < x < 5.$$

(4b) Auflösen von  $\Phi(x, y(x)) = x^2 + y(x)^2 \stackrel{!}{=} \Phi(1, -1) = 2$  ergibt

$$y(x) = -\sqrt{2 - x^2} \quad \text{für } -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}.$$

Die Konstante und das Vorzeichen werden jeweils so bestimmt, dass die Lösung durch den vorgegebenen Punkt  $y(3) = 4$  bzw.  $y(1) = -1$  läuft.

### Exakte Differentialgleichungen: erstes Beispiel

M204  
Ausführung

😊 Das Potential  $\Phi$  und die Lösungen  $x \mapsto (x, y(x))$  sind anschaulich: Analytische Lösung und geometrische Interpretation ergänzen sich!

Wir nutzen hierzu die geometrischen Eigenschaften des Gradienten: Der Gradient  $\text{grad } \Phi = (f, g)$  zeigt in Richtung des steilsten Anstiegs. In jedem Punkt steht er senkrecht zur Niveaulinie (Äquipotentialkurve).

📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §4.9.

😊 Die Differentialgleichung  $f(x, y) + g(x, y) y' = 0$  bedeutet: Jede Lösung  $x \mapsto (x, y(x))$  verläuft senkrecht zum Vektorfeld  $(f, g)$ . Der Satz M2A garantiert, dass die Lösungen genau die Niveaulinien von  $\Phi$  sind, also keine Lösungen hinzukommen oder verloren gehen.

😊 Potential und Lösungen können wir meist gut berechnen! Hier nutzen wir unsere Integralsätze und Techniken aus Kapitel H: Notwendig ist zunächst die Rotationsfreiheit  $\text{rot}(f, g) = 0$ . Auf einfach zusammenhängenden (z.B. konvexen) Gebieten ist dies hinreichend.

😊 Sind die Voraussetzungen zur Existenz eines Potentials gesichert, so können wir  $(f, g)$  zu einem Potential integrieren und die DG lösen!

### Exakte Differentialgleichungen: die Idee

M205  
Ausführung

Die Trennung der Variablen ist nützlich, aber leider nicht immer möglich. Hier hilft das allgemeinere Lösungsverfahren für **exakte DG** weiter: Angenommen  $y: \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y(x)$ , erfüllt eine Gleichung

$$\Phi(x, y(x)) = \text{const}$$

für eine Funktion  $\Phi: \mathbb{R}^2 \supseteq G \rightarrow \mathbb{R}$ . Für die Ableitung nach  $x$  gilt dann

$$\frac{d}{dx} \Phi(x, y(x)) = 0.$$

Sind  $\Phi(x, y)$  und  $y(x)$  stetig differenzierbar, so gilt dank Kettenregel

$$\partial_x \Phi(x, y(x)) \cdot 1 + \partial_y \Phi(x, y(x)) \cdot y'(x) = 0.$$

Eine Differentialgleichung dieser Form heißt **exakt** mit Potential  $\Phi$ . Lösungen  $x \mapsto (x, y(x))$  sind dann **Äquipotentialkurven** von  $\Phi$  (M2A).

😊 In Anwendungen verläuft die Rechnung typischerweise umgekehrt: Die Differentialgleichung ist gegeben, wir prüfen Exaktheit, bestimmen ein Potential  $\Phi$  und lösen schließlich die Gleichung  $\Phi(x, y) = c$  nach  $y$ . Meist wird ein Anfangswert  $(x_0, y_0)$  vorgeben und somit  $c = \Phi(x_0, y_0)$ .

### Exakte Differentialgleichungen: die Methode

M206

#### Satz M2A: Lösung exakter Differentialgleichung

Jedes stetige Vektorfeld  $(f, g): \mathbb{R}^2 \supseteq G \rightarrow \mathbb{R}^2, G$  offen, definiert eine DG

$$f(x, y) + g(x, y) y' = 0.$$

Diese DG heißt **exakt**, wenn ein Potential  $\Phi$  zu  $(f, g)$  existiert, also eine  $C^1$ -Funktion  $\Phi: \mathbb{R}^2 \supseteq G \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\text{grad } \Phi = (f, g)$ , d.h.  $\partial_x \Phi = f, \partial_y \Phi = g$ . Die Lösungen der DG sind dann die Äquipotentialkurven von  $\Phi$ :

- (1) Eine differenzierbare Funktion  $y: \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann Lösung der Differentialgleichung, wenn  $\Phi(x, y(x)) = \text{const}$  für alle  $x \in I$  gilt.
- (2) Zu jedem Punkt  $(x_0, y_0) \in G$  mit  $g(x_0, y_0) \neq 0$  existiert ein offenes Intervall  $I$  um  $x_0$  und genau eine Lösung  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $y(x_0) = y_0$ .

😊 Implizite Lösung    😊 Eindeutigkeit    😊 Stetig abhängig von  $(x_0, y_0)$   
 😊 Explizit: Wir können  $\Phi(x, y(x)) = c := \Phi(x_0, y_0)$  nach  $y(x)$  auflösen, zumindest lokal falls  $g(x_0, y_0) \neq 0$  dank Satz über implizite Funktionen. Wie leicht die explizite Auflösung gelingt, hängt vom Einzelfall ab.

### Exakte Differentialgleichungen: die Methode

M207  
Ausführung

**Aufgabe:** Rechnen Sie die Äquivalenz (1) nach, also „ $\Rightarrow$ “ und „ $\Leftarrow$ “.

**Lösung:** (1a) Die Implikation „ $\Leftarrow$ “ besagt, dass jede Äquipotentialkurve  $y$  mit  $\Phi(x, y(x)) = \text{const}$  die DG löst. Dank Kettenregel gilt wie gesehen:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx} \Phi(x, y(x)) = \partial_x \Phi(x, y(x)) \cdot 1 + \partial_y \Phi(x, y(x)) \cdot y'(x) \\ &= f(x, y(x)) + g(x, y(x)) y'(x) \end{aligned}$$

(1b) Die Implikation „ $\Rightarrow$ “ besagt, dass jede Lösung  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  der DG eine Äquipotentialkurve von  $\Phi$  ist. Für  $a, b \in I$  gilt nämlich dank HDI:

$$\begin{aligned} \Phi(b, y(b)) - \Phi(a, y(a)) &= \int_{x=a}^b \frac{d}{dx} [\Phi(x, y(x))] dx \\ &= \int_{x=a}^b f(x, y(x)) + g(x, y(x)) y'(x) dx = \int_{x=a}^b 0 dx = 0. \end{aligned}$$

😊 Demnach sind die Lösungskurven  $x \mapsto y(x)$  genau die Niveaulinien! Dank (2) ist das Niveau tatsächlich eine **Linie** (und kein **Plateau** o.ä.): Wir erhalten die eindeutige Lösung  $y$  durch Auflösen von  $\Phi(x, y) = c$ .

### Wie löst man exakte Differentialgleichungen?

M208  
Ausführung

Seien  $f, g: \mathbb{R}^2 \supseteq G \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Die Differentialgleichung

$$f(x, y) + g(x, y) y' = 0$$

ist genau dann exakt, wenn das zugehörige Vektorfeld

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \supseteq G \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$$

exakt ist, also ein Potential  $\Phi: G \rightarrow \mathbb{R}$  besitzt. Zur Erinnerung (H2E):

$(f, g)$ ist exakt, d.h. $\exists \Phi: \partial_x \Phi = f, \partial_y \Phi = g$	$\xLeftrightarrow[G \text{ einfach zshgd}]{(f, g) \text{ stetig diff'bar}}$	$f$ ist rotationsfrei, d.h. $\partial_x g = \partial_y f$
--	---	--

😊 Ein Potential  $\Phi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (f, g) \cdot d\gamma$  konstruieren wir durch das Arbeitsintegral: wegunabhängig da  $\text{rot}(f, g) = 0$  und  $G$  einfach zshgd. Zur praktischen Berechnung eignet sich koordinatenweise Integration.

😊 Bei der Anwendung auf DG muss  $G$  notfalls eingeschränkt werden, z.B. ein kleines Rechteck um  $(x_0, y_0)$ , damit  $G$  einfach zshgd wird (E3D).

## Was ist ein integrierender Faktor?

M209

Unser Ziel und Slogan: Was noch nicht exakt ist, wird exakt gemacht!  
Sei  $(f, g) : \mathbb{R}^2 \supseteq G \rightarrow \mathbb{R}^2$  stetig. Zu lösen sei die Differentialgleichung

$$f(x, y) + g(x, y) y' = 0.$$

☺ Mit einem Potential  $\Phi$  zu  $(f, g)$  können wir diese DG lösen, wie zuvor.  
Wenn nicht? Multiplikation mit  $\lambda \neq 0$  ergibt die äquivalente Gleichung

$$\lambda(x, y) f(x, y) + \lambda(x, y) g(x, y) y' = 0.$$

Diese beiden Differentialgleichungen haben genau dieselben Lösungen!  
Anschaulich: Die Richtung von  $(f, g)$  bleibt, nur die Länge wird skaliert.  
Falls  $(f, g)$  selbst schon ein Potential hat, dann genügt der Faktor  $\lambda = 1$ .  
Andernfalls wollen wir  $(f, g)$  umformen, um eine exakte DG zu erhalten:

### Definition M2B: integrierender Faktor

Eine Funktion  $\lambda : G \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  heißt **integrierender Faktor** zu  $(f, g)$ , wenn das skalierte Vektorfeld  $(\lambda f, \lambda g) : G \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein Potential hat.

## Integrierender Faktor: ein einfaches Beispiel

M210

**Aufgabe:** Wir betrachten das Vektorfeld  $(f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 y^3 + y \\ x^3 y^2 - x \end{pmatrix}.$$

Existiert ein Potential? Ist  $\lambda(x, y) = (xy)^{-1}$  ein integrierender Faktor?

**Lösung:** (1) Wir prüfen als erstes die Rotation:

$$\text{rot}(f, g) = \partial_x g - \partial_y f = (3x^2 y^2 - 1) - (3x^2 y^2 + 1) = -2 \neq 0$$

Das Vektorfeld  $(f, g)$  erlaubt demnach kein Potential.

(2) Multiplikation mit  $\lambda(x, y) = (xy)^{-1}$  skaliert unser Vektorfeld zu

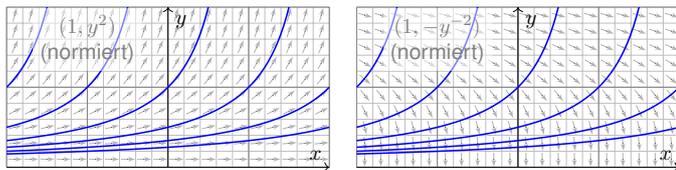
$$\begin{pmatrix} \lambda f \\ \lambda g \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x y^2 + 1/x \\ x^2 y - 1/y \end{pmatrix}, \quad \text{rot}(\lambda f, \lambda g) = 2xy - 2xy = 0.$$

⚠ Hierzu müssen wir das Gebiet  $\mathbb{R}^2$  auf  $x, y \neq 0$  einschränken!  
Auf diesem ist  $\lambda(x, y) = (xy)^{-1}$  ein integrierender Faktor für  $(f, g)$ .  
Als Potential finden wir  $\Phi(x, y) = x^2 y^2 / 2 + \ln|x| - \ln|y|$  für  $x, y \neq 0$ .

## Exakt verallgemeinert separierbar.

M211  
Beispiel

**Beispiel:** Wir können  $y' = y^2$  umschreiben zu  $1 - y'/y^2 = 0$ .  
Wir gelangen so von einer separierbaren zu einer exakten DG!



**Aufgabe:** Auf einem Rechteck  $G = I \times J \subseteq \mathbb{R}^2$  betrachten wir die DG

$$(1) \quad y' = g(x) h(y) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0.$$

Diese können wir äquivalent umwandeln zu

$$(2) \quad g(x) h(y) - y' = 0 \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0.$$

Ist diese DG exakt? Ist  $\lambda(x, y) = 1/h(y)$  ein integrierender Faktor?  
Lösen Sie so (2). Vergleichen Sie mit der Separationsmethode für (1).

## Exakt verallgemeinert separierbar.

M212  
Beispiel

**Lösung:** Das Vektorfeld  $(g(x)h(y), -1)$  ist i.A. nicht exakt, denn

$$\partial_y [g(x)h(y)] = g(x)h'(y) \neq \partial_x [-1] = 0.$$

Durch Multiplikation mit  $\lambda(x, y) = 1/h(y)$  erhalten wir eine exakte DG:

$$g(x) + \frac{-1}{h(y)} y' = 0, \quad \text{denn} \quad \partial_y [g(x)] = \partial_x \left[ \frac{-1}{h(y)} \right] = 0.$$

Als Potential findet wir  $\Phi(x, y) = G(x) - H(y)$  mit

$$G(x) := \int_{t=x_0}^x g(t) dt \quad \text{und} \quad H(y) := \int_{u=y_0}^y \frac{1}{h(u)} du.$$

☺ Auflösen von  $G(x) - H(y) = 0$  liefert  $y(x) = H^{-1}(G(x))$  wie zuvor.  
In diesem Spezialfall erhalten wir erneut die Separationsmethode M1A.

☺ Jede separierbare DG lässt sich so in eine exakte DG umformen.  
Wie zuvor müssen wir hierzu  $h(y) \neq 0$  für alle  $y \in J$  voraussetzen.

☺ Umgekehrt ist nicht jede exakte DG auch separierbar. [M215](#) [M316](#)  
Exakte DG erweitern daher wesentlich unseren Werkzeugkasten!

## Wie berechnet man einen integrierenden Faktor?

M213

Bedingung für einen integrierenden Faktor zum Vektorfeld  $(f, g)$ :

$$\partial_y [\lambda(x, y) f(x, y)] = \partial_x [\lambda(x, y) g(x, y)]$$

☹ Dies ist eine partielle Differentialgleichung für  $\lambda(x, y)$ :

$$(\partial_y \lambda) f + \lambda (\partial_y f) = (\partial_x \lambda) g + \lambda (\partial_x g)$$

Leider gibt es keine allgemeine Methode zur Lösung dieser Gleichung.

☺ In wichtigen Spezialfällen gibt es jedoch integrierende Faktoren, die nur von einer Variablen abhängen, also nur von  $x$  oder nur von  $y$ .

**Aufgabe:** Lösen Sie diese Gleichung für  $\lambda = \lambda(x)$ , also  $\partial_y \lambda = 0$ .

**Lösung:** Die obige Gleichung vereinfacht sich für  $\lambda(x)$  zu:

$$\lambda(x) \partial_y f(x, y) = \lambda'(x) g(x, y) + \lambda(x) \partial_x g(x, y)$$

Wir lösen nach  $\lambda$  auf und erhalten folgende gewöhnliche DG:

$$\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = \frac{\partial_y f(x, y) - \partial_x g(x, y)}{g(x, y)} = -\frac{\text{rot}(f, g)}{g}(x, y)$$

☺ Dies ist lösbar, wenn auch die rechte Seite nur von  $x$  abhängt!

## Integrierende Faktoren in nur einer Variablen

M214

### Satz M2C: integrierende Faktoren in nur einer Variablen

Für jeden nur von  $x$  abhängigen integrierenden Faktor  $\lambda = \lambda(x)$  gilt:

$$\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = \frac{\partial_y f(x, y) - \partial_x g(x, y)}{g(x, y)}, \quad \text{kurz:} \quad \frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = -\frac{\text{rot}(f, g)}{g}(x, y)$$

Für jeden nur von  $y$  abhängigen integrierenden Faktor  $\lambda = \lambda(y)$  gilt:

$$\frac{\lambda'(y)}{\lambda(y)} = \frac{\partial_x g(x, y) - \partial_y f(x, y)}{f(x, y)}, \quad \text{kurz:} \quad \frac{\lambda'(y)}{\lambda(y)} = +\frac{\text{rot}(f, g)}{f}(x, y)$$

Dies ist lösbar, wenn auch die rechte Seite nur von  $x$  bzw.  $y$  abhängt.

Ob eine dieser Lösungen möglich ist, muss man ausprobieren. Die Vorgehensweise ist wie folgt:  
Auf einem einfach-zusammenhängenden Gebiet  $G$  ist das Vektorfeld  $(f, g)$  genau dann exakt, wenn  $\text{rot}(f, g) = 0$  gilt. Diese sehr einfache Bedingung wird man deshalb als erstes prüfen.  
Ist  $\text{rot}(f, g) \neq 0$ , so kann man hoffen, dass die Rotation wie oben formuliert ein Vielfaches von  $g$  oder von  $f$  ist. Dann greifen obige Kriterien: Wir können einen integrierenden Faktor  $\lambda$  berechnen, das Vektorfeld durch  $\lambda$  korrigieren und schließlich zu einem Potential integrieren.

## Beispielrechnung für einen integrierenden Faktor

M215  
Beispiel

**Aufgabe:** Lösen Sie für  $x > 0$  die Differentialgleichung

$$[1 - x^2 y(x)] + [x^2 y(x) - x^3] y'(x) = 0.$$

(1) Ist sie separierbar? (2) exakt? (3) Existiert ein integrierender Faktor?  
(4) Finden Sie ein Potential und (5) damit alle Lösungskurven  $x \mapsto y(x)$ .

**Lösung:** (1) Separierbar?  $f(x, y) = \frac{x^2 y - 1}{x^2 y - x^3} = g(x) h(y)$ : Nein! Beweis?

Es gilt  $f(1, 3)f(2, 4) = \frac{2}{2} \cdot \frac{15}{8} = \frac{15}{8}$ , aber  $f(1, 4)f(2, 3) = \frac{3}{3} \cdot \frac{11}{4} = \frac{11}{4}$ . [M316](#)

(2) Exakt? Hier ist  $f(x, y) = 1 - x^2 y$  und  $g(x, y) = x^2 y - x^3$ , also

$$\text{rot}(f, g) = \partial_x g - \partial_y f = (2xy - 3x^2) + x^2 = 2xy - 2x^2 \neq 0$$

Die DG ist demnach leider nicht exakt. Glücklicherweise gilt jedoch

$$-\frac{\text{rot}(f, g)}{g} = -\frac{2xy - 2x^2}{x^2 y - x^3} = -\frac{2x(y - x)}{x^2(y - x)} = -\frac{2}{x}.$$

(3) Daher gibt es einen nur von  $x$  abhängigen integrierenden Faktor:

$$\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = -\frac{2}{x} \Rightarrow \ln|\lambda(x)| = -2 \ln|x| + \text{const} \Rightarrow \lambda(x) = c x^{-2}$$

## Beispielrechnung für einen integrierenden Faktor

M216  
Beispiel

Die Konstante  $c$  ist für den Multiplikator unerheblich. Wir setzen  $c = 1$ .

(4) Wir berechnen ein Potential zum reskalierten Vektorfeld

$$\begin{pmatrix} \lambda f \\ \lambda g \end{pmatrix} : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^{-2} - y \\ y - x \end{pmatrix}.$$

Nun gilt  $\text{rot}(\lambda f, \lambda g) = 0$ . Probe! Wir integrieren koordinatenweise:

$$\partial_x \Phi(x, y) \stackrel{!}{=} x^{-2} - y \Rightarrow \Phi(x, y) = \int x^{-2} - y dx = -x^{-1} - xy + c(y).$$

$$\partial_y \Phi(x, y) = -x + c'(y) \stackrel{!}{=} y - x \Rightarrow c(y) = \int y dy = y^2/2 + \text{const}$$

Wir finden so das Potential  $\Phi(x, y) = y^2/2 - xy - 1/x$ . Probe!

(5) Die Lösungskurven  $x \mapsto y(x)$  der DG sind die Niveaulinien von  $\Phi$ :

$$y(x)^2/2 - xy(x) - 1/x = c.$$

Auflösen nach  $y$  ergibt  $y(x) = x \pm \sqrt{x^2 + 2/x + 2c}$ . Die Probe ist leicht!

**M217**  
Ausführung

Lineare Differentialgleichung: homogen

Zu lösen sei die **homogene lineare Differentialgleichung**

$$y'(x) = a(x)y(x).$$

Hierbei ist  $a: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf einem Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  sowie  $x_0 \in I$ .

**Aufgabe:** Bestimmen Sie die Menge  $L$  aller Lösungen  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ . Ist  $L$  ein reeller Untervektorraum in  $C(I, \mathbb{R})$ ? Welcher Dimension?

**Lösung:** Die Nullfunktion  $y = 0$  löst  $y'(x) = a(x)y(x)$ . Wir nehmen  $y(x) \neq 0$  an, sodass wir durch  $y(x)$  dividieren können: Separation  $y'(x)/y(x) = a(x)$  und Integration zu  $\ln|y(x)| = A(x) + C$  liefert  $|y(x)| = e^{A(x)+C}$  also  $y(x) = \pm e^C e^{A(x)}$  mit der Stammfunktion

$$A: I \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto A(x) := \int_{t=x_0}^x a(t) dt$$

Wir erhalten somit alle Lösungen  $y_c(x) = c e^{A(x)}$  mit  $c \in \mathbb{R}$ . Probe!

😊 Diese Lösungsformel gilt für  $c > 0$  und  $c < 0$  ebenso wie für  $c = 0$ .

**M218**  
Ausführung

Lineare Differentialgleichung: homogen

Ist unsere Lösungsmenge  $L = \{y_c = c e^A \mid c \in \mathbb{R}\}$  bereits vollständig? Wir nutzen den Eindeutigkeitsatz M1c oder rechnen es direkt nach:

Angenommen, irgendeine Funktion  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  erfüllt  $y'(x) = a(x)y(x)$ . Wir betrachten den Quotienten  $q(x) = y(x)/y_1(x)$  und leiten ab:

$$q'(x) = \frac{y'(x)y_1(x) - y(x)y_1'(x)}{y_1(x)^2} = \frac{a(x)y(x) \cdot y_1(x) - y(x) \cdot a(x)y_1(x)}{y_1(x)^2} = 0$$

Auf dem Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  folgt aus  $q' = 0$ , dass die Funktion  $q$  konstant ist. Demnach gilt  $y = c y_1 = y_c$ . Wir kennen also tatsächlich **alle** Lösungen!

😊 Alle Lösungen sind Vielfache der Fundamentallösung  $e^{A(x)}$ . Anders gesagt, die Lösungsmenge  $\{y_c: I \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto c e^{A(x)} \mid c \in \mathbb{R}\}$  ist hier ein reeller Vektorraum der Dimension 1 mit Basis  $y_1(x) = e^{A(x)}$ .

😊 Die lineare Struktur ist später für DG  $n$ -ter Ordnung sehr nützlich: In diesem Fall ist die Lösungsmenge ein Vektorraum der Dimension  $n$ . Die Konstruktion einer Basis, also eines „Fundamentalsystems“ von Lösungen der DG, gestaltet die Rechnung besonders übersichtlich.

**M219**  
Ausführung

Lineare Differentialgleichung: homogen

Da lineare Differentialgleichungen häufig vorkommen, halten wir fest:

**Satz M2D: Lösungsformel für homogene lineare DG**

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $a: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $x_0 \in I$  und  $y_0 \in \mathbb{R}$ . Zu lösen ist

$$y'(x) = a(x)y(x) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0.$$

Es existiert genau eine Lösung  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ , und diese ist gegeben durch

$$y(x) = e^{A(x)} y_0 \quad \text{mit} \quad A(x) = \int_{t=x_0}^x a(t) dt.$$

😊 Lösungsformel    😊 Eindeutigkeit    😊 Stetig abhängig von  $(x_0, y_0)$

😊 Die Lösungsmenge  $L_0 = \{e^A y_0 \mid y_0 \in \mathbb{R}\}$  ist ein 1-dim. Vektorraum! Das heißt: Linearkombinationen von Lösungen sind wieder Lösungen. Die Zuordnung  $\mathbb{R} \rightarrow L_0: y_0 \mapsto e^A y_0$  ist ein Vektorraumisomorphismus.

😊 Die gesamte Lösungsmenge wird damit besonders übersichtlich und wesentlich einfacher zu beschreiben als bei nicht-linearen Problemen!

**M220**  
Ausführung

Lineare Differentialgleichung: homogen

**Aufgabe:** Welche der folgenden DG sind (homogen) linear?

$$y' = y, \quad y' = y/x, \quad y' = -xy, \quad y' = xy, \quad y' = x, \quad y' = x^2, \quad y' = y^2.$$

Für lineare finde man alle Lösungen und die spezielle durch  $(x_0, y_0)$ . Ist auch für die nicht-linearen die Lösungsmenge ein Vektorraum?

**Lösung:** Unter den bisher diskutierten DG sind folgende linear:

Lineare DG	⇒	allgemeine Lösung,	AWP zu $(x_0, y_0)$
$y' = y$	⇒	$y(x) = c \cdot e^x,$	$y(x) = y_0 \cdot e^{(x-x_0)}$
$y' = y/x$	⇒	$y(x) = c \cdot x,$	$y(x) = y_0 \cdot x/x_0$
$y' = -xy$	⇒	$y(x) = c \cdot e^{-x^2/2},$	$y(x) = y_0 \cdot e^{(x_0^2 - x^2)/2}$
$y' = xy$	⇒	$y(x) = c \cdot e^{x^2/2},$	$y(x) = y_0 \cdot e^{(x^2 - x_0^2)/2}$

Hingegen sind die DG  $y' = x$  oder  $y' = x^2$  oder  $y' = y^2$  nicht linear. Wir kennen hierzu die Lösungsmengen: sie bilden keinen Vektorraum!

**M221**

Lineare Differentialgleichung: inhomogen

**Aufgabe:** Lösen Sie die **inhomogene lineare Differentialgleichung**

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0.$$

**Lösung:** (0) Direkt integrierbar? Nur für  $a = 0$ . Im Folgenden sei  $a \neq 0$ . (1) Separierbar? Nur für  $b = ka$  mit  $k \in \mathbb{R}$ . (2) Exakt? Leider auch nicht:  $\frac{-a(x)y - b(x)}{f(x,y)} + \frac{1}{g(x,y)} y' = 0 \implies \text{rot}(f, g) = \partial_x g - \partial_y f = a \neq 0$

(3) Integrierender Faktor? Löse  $\lambda'(x)/\lambda(x) = -\text{rot}(f, g)/g = -a(x)!$  Integration ergibt  $A(x) = \int_{t=x_0}^x a(t) dt$  und  $\lambda(x) = e^{-A(x)} > 0$ . Also:

$$-[e^{-A(x)} a(x)y(x) + e^{-A(x)} b(x)] + [e^{-A(x)}] y'(x) = 0$$

Diese DG ist exakt. (Probe!) Hierzu finden wir das Potential

$$\Phi(x, y) = e^{-A(x)} y - \int_{t=x_0}^x e^{-A(t)} b(t) dt. \quad (\text{Probe!})$$

Auflösen der Gleichung  $\Phi(x, y) = \Phi(x_0, y_0) = y_0$  nach  $y$  liefert

$$y(x) = e^{A(x)} \int_{t=x_0}^x e^{-A(t)} b(t) dt + e^{A(x)} y_0. \quad (\text{Probe!})$$

**M222**

Lineare Differentialgleichung: inhomogen

**Satz M2E: Lösungsformel für lineare DG 1. Ordnung**

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $a, b: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, sowie  $x_0 \in I$  und  $y_0 \in \mathbb{R}$ . Die homogene DG  $y'(x) = a(x)y(x)$  mit  $y(x_0) = y_0$  wird gelöst durch  $y_1(x) = e^{A(x)} y_0$  mit  $A(x) = \int_{x_0}^x a(t) dt$ . Zur inhomogenen Gleichung

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0$$

existiert genau eine Lösung  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ , und diese ist gegeben durch

$$y(x) = e^{A(x)} \int_{t=x_0}^x e^{-A(t)} b(t) dt + e^{A(x)} y_0.$$

😊 Lösungsformel    😊 Eindeutigkeit    😊 Stetig abhängig von  $(x_0, y_0)$

😊 Für  $a = 0$  ist's der HDI.    😊 Für  $b = 0$  entfällt der inhomogene Term.

😊 Die Lösungsmenge  $L_b = \{y_b + e^A y_0 \mid y_0 \in \mathbb{R}\}$  ist ein affiner Raum. „Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen“.

😊 Diese Lösungsformel gilt allgemein für lineare DG-Systeme (O3D).

**M223**  
Beispiel

Lineare Differentialgleichung: erstes Beispiel

**Aufgabe:** Lösen Sie für  $x > 0$  die Differentialgleichung

$$y' = y/x + x^3 \quad \text{mit} \quad y(1) = y_0.$$

**Lösung:** Diese DG ist linear mit  $a(x) = 1/x$  und  $b(x) = x^3$ .

$$A(x) = \int_{t=1}^x a(t) dt = \int_{t=1}^x \frac{1}{t} dt = [\ln t]_{t=1}^x = \ln x.$$

Der integrierende Faktor ist  $e^{-A(x)} = 1/x$ . Damit finden wir:

$$\int_{t=1}^x e^{-A(t)} b(t) dt = \int_{t=1}^x t^{-1} \cdot t^3 dt = \int_{t=1}^x t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{t=1}^x = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}$$

Als Lösung unserer Differentialgleichung gewinnen wir schließlich:

$$y(x) = e^{A(x)} \int_{t=x_0}^x e^{-A(t)} b(t) dt + e^{A(x)} y_0 = \frac{x^4 - x}{3} + x y_0$$

😊 Die Probe ist leicht! Sorgfältig einsetzen und ableiten...  
Vergleichen Sie dies mit der obigen homogenen DG  $y' = y/x$ .

**M224**  
Beispiel

Lineare Differentialgleichung: zweites Beispiel

**Aufgabe:** Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' = -xy + x^3 \quad \text{mit} \quad y(0) = y_0.$$

**Lösung:** Diese DG ist linear mit  $a(x) = -x$  und  $b(x) = x^3$ .

$$A(x) = \int_{t=0}^x a(t) dt = \int_{t=0}^x -t dt = \left[-\frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^x = -\frac{x^2}{2}$$

Der integrierende Faktor ist  $e^{-A(x)} = e^{x^2/2}$ . Damit finden wir:

$$\int_{t=0}^x e^{-A(t)} b(t) dt = \int_{t=0}^x e^{t^2/2} t^3 dt \quad \text{Subs} \begin{cases} u = t^2/2, \\ du = t dt \end{cases}$$

$$\stackrel{\text{Subs}}{=} \int_{u=0}^{x^2/2} e^u \cdot 2u du \stackrel{\text{part}}{=} [e^u (2u - 2)]_{u=0}^{x^2/2} = e^{x^2/2} (x^2 - 2) + 2$$

Als Lösung unserer Differentialgleichung gewinnen wir schließlich:

$$y(x) = e^{A(x)} \int_{t=x_0}^x e^{-A(t)} b(t) dt + e^{A(x)} y_0 = \frac{x^2 - 2 + 2e^{-x^2/2}}{e^{x^2/2}} + e^{-x^2/2} y_0$$

😊 Die Probe ist leicht! Sorgfältig einsetzen und ableiten...

**Elementar lösbare Differentialgleichungen** M301  
Fazit

Sei  $f: \mathbb{R}^2 \supseteq G \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Zu lösen sei die **Differentialgleichung**

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0.$$

Qualitativer Überblick dank **Existenz- und Eindeutigkeitsatz M1c**:

- (1) Im Inneren  $G$  existieren Lösungen und laufen bis zum Rand  $\partial G$ .
- (2) Ist  $f$  stetig diff'bar nach  $y$ , so ist die Lösung durch  $(x_0, y_0) \in G$  eindeutig bestimmt und hängt stetig von diesen Anfangswerten ab.

Elementar lösen können wir vor allem **exakte Differentialgleichungen**:

- $f(x, y) + g(x, y)y' = 0$  ist exakt, wenn  $(f, g) = \text{grad } \Phi$ . M206

Wichtige **Spezialfälle** hiervon sind:

- $y' = f(x)$  durch Integration dank HDI. B123
- $y' = g(x)h(y)$  durch Trennung der Variablen. M118
- $y' = a(x)y + b(x)$  lineare DG, explizite Lösungsformel. M222

Durch **Substitution** hierauf zurückführbar sind:

- $y' = f(ax + by + c)$  mit Substitution  $v = ax + by + c$ . M409
- $y' = f(y/x)$  Ähnlichkeits-DG, mit Substitution  $v = y/x$ . M411
- $y' = a(x)y + b(x)y^n$  Bernoulli-DG, mit Substitution  $v = y^{1-n}$ . M413

**Existenz, Eindeutigkeit, Lösungsmethoden** M302  
Fazit

Kapitel M präsentiert die wichtigsten Lösungsmethoden für gewöhnliche eindimensionale Differentialgleichungen sowie Anwendungsbeispiele. Zahlreiche Aufgaben üben, illustrieren und vertiefen diese Techniken. Das ist für Differentialgleichungen unentbehrlich: Üben, üben, üben! Eine Lösung zu finden ist schwer, sie zu überprüfen ist meist leicht. Deshalb sollen Sie am Ende jeder Rechnung die Probe machen!

Trotz allgemeiner Lösungstheorie und -methoden hat jede DG ihre Eigenarten: Man muss genau hinschauen und sorgfältig arbeiten! Insbesondere ist zu klären und bei jeder Rechnung zu beachten, auf welchem Gebiet  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  die DG definiert und Lösungen gesucht sind. Bei allen Umformungen ist sicherzustellen oder nachträglich zu prüfen, dass keine fiktiven Lösungen hinzukommen oder echte verloren gehen. Zur Sorgfalt gehört, die gefundenen / benachbarte / alle Lösungen zu prüfen, zu skizzieren, zu diskutieren und alle Sonderfälle zu beachten.

Zur Vertiefung und für zahlreiche Anwendungsbeispiele siehe H. Heuser: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Vieweg, 6. Aufl. 2009

**Zusammenfassung und Verständnisfragen** M303  
Fazit

**Aufgabe:** Begründen Sie durch ein Ergebnis Ihrer Vorlesung oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel aus Ihrem Fundus:

- (1) Sei  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Zu jedem Startpunkt  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  existiert ein Intervall  $[x_0, x_1]$  mit  $x_1 > x_0$  und eine Funktion  $y: [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $y(x_0) = y_0$  und  $y'(x) = f(x, y(x))$  für alle  $x \in [x_0, x_1]$ .
- (2) Sei  $f: [x_0, x_1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $y_0 \in \mathbb{R}$ . Dann existiert eine Lösung  $y: [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $y(x_0) = y_0$  und  $y'(x) = f(x, y(x))$  für alle  $x \in [x_0, x_1]$ .
- (3) Sei  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Für je zwei Funktionen  $y, \tilde{y}: [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $y(x_0) = \tilde{y}(x_0) = y_0$  sowie  $y'(x) = f(x, y(x))$  und  $\tilde{y}'(x) = f(x, \tilde{y}(x))$  für alle  $x \in [x_0, x_1]$  gilt Gleichheit  $y(x) = \tilde{y}(x)$  für alle  $x \in [x_0, x_1]$ .
- (4) Sei  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und nach  $y$  stetig differenzierbar. Für je zwei Lösungen wie in (3) gilt Gleichheit  $y(x) = \tilde{y}(x)$  für alle  $x \in [x_0, x_1]$ .
- (5) Ist jede separierbare DG exakt? bis auf integrierenden Faktor?
- (6) Ist jede lineare DG exakt? bis auf einen integrierenden Faktor?
- (7) Ist jede exakte DG separierbar? Ist jede exakte DG linear? Nennen Sie eine exakte DG, die weder separierbar noch linear ist.

**Zusammenfassung und Verständnisfragen** M304  
Fazit

**Lösung:** (1) Ja, das ist die Existenzaussage des  $\exists$ &E-Satzes M1c. (2) Nein, wir können das Lösungsintervall  $[x_0, x_1]$  nicht vorschreiben: Die Lösung  $y$  startet in  $y(x_0) = y_0$ , kann aber noch vor Erreichen von  $x_1$  an den Rand gelangen M115 oder nach Unendlich entkommen M113. (3) Nein, die Stetigkeit der rechten Seite  $f$  allein reicht hierzu nicht. Ein anschauliches Gegenbeispiel ist Torricellis Wasseruhr  $y' = \sqrt{|y|}$  M123; ganz ähnlich ist  $y' = \sqrt[3]{y(x)^2}$  M325 und allgemein  $y' = |y|^\alpha$  O233. (4) Ja, das ist die Eindeutigkeitsaussage des  $\exists$ &E-Satzes M1c. (5) Die separierbare DG  $y' = g(x)h(y)$  schreiben wir  $g(x)h(y) - y' = 0$ . In dieser Form ist sie exakt nur für  $g(x) = 0$  oder  $h'(y) = 0$ . Sie wird exakt durch Multiplikation mit dem integrierenden Faktor  $1/h(y)$ . M211 (6) Die lineare DG  $y' = a(x)y + b(x)$  schreiben wir  $a(x)y + b(x) - y' = 0$ . In dieser Form ist sie exakt nur für  $a(x) = 0$ . Sie wird exakt durch Multiplikation mit dem integrierenden Faktor  $e^{-A(x)}$  mit  $A' = a$ . M221 (7) Nicht jede exakte DG ist separierbar, ebenso ist nicht jede linear. Beispiele sind leicht zu konstruieren:  $x + y^2 + 2xyy' = 0$  für  $x, y > 0$  ist exakt, aber  $y' = 1/2(y/x + 1/y)$  ist weder linear noch separierbar. M316

**Separierbare Differentialgleichungen** M305  
Fazit

Satz M1A erklärt die Lösung **separierbarer Differentialgleichungen**:

$$y' = g(x)h(y) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0$$

Gegeben sind hierzu stetige Funktionen  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $h: J \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  auf Intervallen  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  sowie Anfangswerte  $x_0 \in I$  und  $y_0 \in J$ . Wir definieren Stammfunktionen  $G: I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $H: J \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$G(x) := \int_{t=x_0}^x g(t) dt \quad \text{und} \quad H(y) := \int_{u=y_0}^y \frac{1}{h(u)} du.$$

Die Funktion  $H$  ist streng monoton, also bijektiv auf ihr Bild  $H(J) \subseteq \mathbb{R}$ . Sei  $I_0 \subseteq I$  ein hinreichend kleines Intervall um  $x_0 \in I_0$  mit  $G(I_0) \subseteq H(J)$ . Das AWP erlaubt genau eine Lösung  $y: \mathbb{R} \supseteq I_0 \rightarrow J \subseteq \mathbb{R}$ , nämlich

$$y(x) = H^{-1}(G(x)).$$

😊 Lösungsformel   😊 Eindeutigkeit   😊 Stetig abhängig von  $(x_0, y_0)$   
😊 Die Probe ist leicht! Einsetzen und sorgfältig nachrechnen. . .

**Lineare Differentialgleichungen** M306  
Fazit

Satz M2E erklärt die Lösungsformel für **lineare DG erster Ordnung**:

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0$$

Hierzu sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $a, b: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $x_0 \in I$  und  $y_0 \in \mathbb{R}$ . Die homogene DG  $y'(x) = a(x)y(x)$  mit  $y(x_0) = y_0$  wird gelöst durch  $y_1(x) = e^{A(x)}y_0$  mit  $A(x) = \int_{x_0}^x a(t) dt$ . Zur inhomogenen Gleichung existiert genau eine Lösung  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ , und diese ist gegeben durch

$$y(x) = e^{A(x)} \int_{t=x_0}^x e^{-A(t)} b(t) dt + e^{A(x)} y_0.$$

😊 Lösungsformel   😊 Eindeutigkeit   😊 Stetig abhängig von  $(x_0, y_0)$   
😊 Für  $a = 0$  ist's der HDI.   😊 Für  $b = 0$  entfällt der inhomogene Term.  
😊 Die Lösungsmenge  $\{y_b + e^A y_0 \mid y_0 \in \mathbb{R}\}$  ist ein affiner Raum. „Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen“.  
😊 Diese Lösungsformel gilt allgemein für lineare DGSsysteme (O3D).  
😊 Die Probe ist leicht! Einsetzen und sorgfältig nachrechnen. . .

**Exakte Differentialgleichungen** M307  
Fazit

Jedes stetige Vektorfeld  $(f, g): \mathbb{R}^2 \supseteq G \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $G$  offen, definiert eine DG

$$f(x, y) + g(x, y)y' = 0.$$

Diese DG heißt **exakt**, wenn ein Potential  $\Phi$  zu  $(f, g)$  existiert, also eine  $C^1$ -Funktion  $\Phi: \mathbb{R}^2 \supseteq G \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\text{grad } \Phi = (f, g)$ , d.h.  $\partial_x \Phi = f$ ,  $\partial_y \Phi = g$ .

Satz M2A erklärt die Lösungskurven exakter Differentialgleichung: Die Lösungen  $x \mapsto (x, y(x))$  der DG sind Äquipotentialkurven von  $\Phi$ .

- (1) Eine differenzierbare Funktion  $y: \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann Lösung der Differentialgleichung, wenn  $\Phi(x, y(x)) = \text{const}$  für alle  $x \in I$  gilt.
- (2) Zu jedem Punkt  $(x_0, y_0) \in G$  mit  $g(x_0, y_0) \neq 0$  existiert ein offenes Intervall  $I$  um  $x_0$  und eine eindeutige Lösung  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $y(x_0) = y_0$ .

😊 Implizite Lösung   😊 Eindeutigkeit   😊 Stetig abhängig von  $(x_0, y_0)$   
😊 Explizit: Wir können  $\Phi(x, y(x)) = c := \Phi(x_0, y_0)$  nach  $y(x)$  auflösen, zumindest lokal falls  $g(x_0, y_0) \neq 0$  dank Satz über implizite Funktionen. Wie leicht die explizite Auflösung gelingt, hängt vom Einzelfall ab.

**Integrierende Faktoren** M308  
Fazit

Eine Funktion  $\lambda: G \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  heißt **integrierender Faktor** zu  $(f, g)$ , wenn das skalierte Vektorfeld  $(\lambda f, \lambda g): G \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein Potential hat. Beispiele: Separierbar  $\lambda(y) = 1/h(y)$  M211, linear  $\lambda(x) = e^{-A(x)}$  M221.

Satz M2c erklärt integrierende Faktoren in nur einer Variablen: Für jeden nur von  $x$  abhängigen integrierenden Faktor  $\lambda = \lambda(x)$  gilt:

$$\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = \frac{\partial_y f(x, y) - \partial_x g(x, y)}{g(x, y)}, \quad \text{kurz:} \quad \frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = -\frac{\text{rot}(f, g)}{g}(x, y)$$

Für jeden nur von  $y$  abhängigen integrierenden Faktor  $\lambda = \lambda(y)$  gilt:

$$\frac{\lambda'(y)}{\lambda(y)} = \frac{\partial_x g(x, y) - \partial_y f(x, y)}{f(x, y)}, \quad \text{kurz:} \quad \frac{\lambda'(y)}{\lambda(y)} = +\frac{\text{rot}(f, g)}{f}(x, y)$$

Dies ist lösbar, wenn auch die rechte Seite nur von  $x$  bzw.  $y$  abhängt. Ob eine dieser Lösungen möglich ist, muss man jeweils ausprobieren.

😊 Vorgehensweise: Man prüft zunächst  $\text{rot}(f, g) = 0$ . Falls möglich, berechnet man ein Potential  $\Phi$  zu  $(f, g)$ , notfalls nur lokal um  $(x_0, y_0)$ . Andernfalls versucht man einen der beiden obigen Korrekturfaktoren  $\lambda$ .

Methodenvergleich: Viele Wege führen zum Ziel.

M309  
Übung

**Aufgabe:** Wir untersuchen erneut (nach M119) die Differentialgleichung

$$y(x) - x \cdot y'(x) = 0.$$

Diese DG ist besonders einfach, an ihr testen wir all unsere Methoden.

- (1) Ist diese Differentialgleichung separierbar? Ist sie exakt?
- (2) Wird die DG exakt durch den Faktor  $\lambda(x, y) = (xy)^{-1}$ ? Finden und skizzieren Sie ein Potential für  $x > 0$  und  $y > 0$ .
- (3) Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung. Finden Sie die maximale Lösung zum Anfangswert  $y(1) = \pi$ .
- (4) Welche Anfangswertprobleme  $(x_0, y_0)$  sind hier gut gestellt? Hängt die Lösung stetig von den Anfangswerten  $(x_0, y_0)$  ab?
- (5) Ist die DG  $y' = y/x$  linear? Was ergibt die Lösungsformel? Gibt es einen int. Faktor, der nur von  $x$  abhängt? nur von  $y$ ?
- (6) Wird die DG exakt durch den Faktor  $\lambda(x, y) = 1/(x^2 + y^2)$ ? Finden und skizzieren Sie ein Potential! Auf welchem Gebiet geht das?

Methodenvergleich: Viele Wege führen zum Ziel.

M310  
Übung

**Lösung:** (1) Diese DG ist separierbar. Wir können sie durch Trennung der Variablen integrieren, siehe M119. Sie ist jedoch nicht exakt:

$$\underbrace{(+y)}_{f(x,y)} + \underbrace{(-x)}_{g(x,y)} y'(x) = 0 \implies \text{rot}(f, g) = \partial_x g - \partial_y f = -2 \neq 0$$

- (2) Die äquivalente DG  $1/x - y'/y = 0$  ist exakt! Wir finden das Potential  $\Phi(x, y) = \ln x - \ln y = \ln(x/y)$  für  $x, y > 0$ . Lösungskurven  $\ln(x/y) = \text{const}$ , also  $y(x) = cx$  für  $x, c > 0$ . Probe!

(3) Die explizite DG  $y'(x) = y(x)/x$  wird gelöst durch die Halbgeraden  $y_c^+ : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto c \cdot x$ , sowie  $y_c^- : \mathbb{R}_{<0} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto c \cdot x$  mit  $c \in \mathbb{R}$ .

Die implizite DG  $x y'(x) = y(x)$  wird gelöst durch die Geraden  $y_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y(x) = c \cdot x$ . Durch  $(1, \pi)$  läuft die Lösung  $y(x) = \pi x$ .

- (4) Durch jeden Startpunkt  $(x_0 \neq 0, y_0)$  läuft genau eine Lösung  $y_c$ , nämlich die mit  $c = y_0/x_0$ , und diese hängt stetig von  $(x_0, y_0)$  ab. Durch den Startpunkt  $(0, 0)$  laufen unendlich viele Lösungen! Durch den Startpunkt  $(0, y_0 \neq 0)$  läuft gar keine Lösung!

Methodenvergleich: Viele Wege führen zum Ziel.

M311  
Übung

(5) Die DG  $y' = y/x$  ist linear mit  $a(x) = 1/x$  und  $b(x) = 0$ . Lösung:

$$y(x) = y(1) e^{A(x)} \quad \text{mit} \quad A(x) = \int_{t=1}^x a(t) dt = \ln x \quad \text{also} \quad y(x) = cx.$$

Dies entspricht den Lösungen aus (2), fortgesetzt wie in (3). Der int. Faktor  $e^{-A(x)} = 1/x$  führt zur exakten DG  $y/x^2 - y'/x = 0$ . Der int. Faktor  $1/y$  führt zur exakten DG  $1/x - y'/y = 0$  wie in (2).

(6) Wir dividieren durch  $x^2 + y^2$  und erhalten das Wirbelfeld:

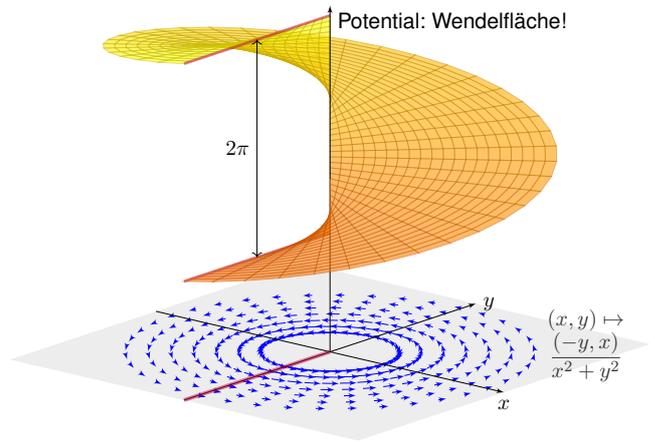
$$\underbrace{\frac{-y}{x^2 + y^2}}_{f(x,y)} + \underbrace{\frac{x}{x^2 + y^2}}_{g(x,y)} y'(x) = 0$$

Auf der punktierten Ebene  $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  sind beide DG äquivalent. Die zweite erfüllt nun zudem die notwendige Bedingung  $\text{rot}(f, g) = 0$ .

⚠ Das Gebiet  $G$  ist nun nicht mehr einfach zusammenhängend! Potentiale sind Teile einer Wendelfläche: Diese schließt sich nicht! Äquipotentialkurven sind Halbgeraden, wie in obigen Lösungen.

Methodenvergleich: Viele Wege führen zum Ziel.

M312  
Übung



Separation der Variablen: wann und wie?

M313  
Ausführung

Wie können wir bequem feststellen, ob  $y' = f(x, y)$  separierbar ist? Wie können wir andernfalls nachweisen, dass dies unmöglich ist?

**Satz M3A: Kriterium für Separierbarkeit**

Gegeben sei  $f : \mathbb{R}^2 \supseteq I \times J \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Äquivalent sind:

- (0) Die Funktion  $f$  lässt sich als Produkt  $f(x, y) = g(x)h(y)$  separieren mit stetigen Faktoren  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $h : J \rightarrow \mathbb{R}$ .
- (1) Für je zwei Punkte  $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in I \times J$  ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} f(x_0, y_0) & f(x_0, y_1) \\ f(x_1, y_0) & f(x_1, y_1) \end{pmatrix}$$

singulär, ausgeschrieben  $f(x_0, y_0)f(x_1, y_1) = f(x_1, y_0)f(x_0, y_1)$ .

- (2) Für jeden Punkt  $(x_0, y_0) \in I \times J$  mit  $f(x_0, y_0) \neq 0$  gilt

$$f(x, y) = \frac{f(x, y_0) \cdot f(x_0, y)}{f(x_0, y_0)} = g(x)h(y)$$

etwa mit  $g : I \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x, y_0)$  und  $h : J \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto f(x_0, y)/f(x_0, y_0)$ .

Separation der Variablen: wann und wie?

M314  
Ausführung

**Nachrechnen:** „(0)  $\implies$  (1)“: Angenommen es gilt  $f(x, y) = g(x)h(y)$ . Die Zeilenvektoren  $g(x_0) \cdot (h(y_0), h(y_1))$  und  $g(x_1) \cdot (h(y_0), h(y_1))$  sind dann linear abhängig, also  $\det A = 0$ . Gleiches gilt für Spaltenvektoren.

„(1)  $\implies$  (2)“: Aus  $f(x_0, y_0)f(x, y) = f(x, y_0)f(x_0, y)$  für alle  $(x, y) \in I \times J$  folgt die Aussage (2), indem wir durch  $f(x_0, y_0) \neq 0$  dividieren.

„(2)  $\implies$  (0)“: Im Falle  $f = 0$  genügen  $g = 0$  und  $h = 1$ . Andernfalls gibt es einen Punkt  $(x_0, y_0) \in I \times J$  mit  $f(x_0, y_0) \neq 0$ , sodass wir (2) anwenden können. Nach Konstruktion sind  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $h : J \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.

Die Äquivalenz (0)  $\Leftrightarrow$  (1)  $\Leftrightarrow$  (2) löst die eingangs gestellten Fragen:

😊 Wenn Sie  $f(x, y)$  separieren wollen, dann zeigt (2) explizit wie: So konstruieren Sie bequem die gewünschten Faktoren  $g$  und  $h$ .

😊 Wenn dies nicht möglich sein sollte, dann zeigt (1) das Hindernis: Es genügt ein einziges Gegenbeispiel bestehend aus zwei Punkten  $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in I \times J$  mit  $f(x_0, y_0)f(x_1, y_1) \neq f(x_1, y_0)f(x_0, y_1)$ .

Dann wissen Sie sicher, dass  $y' = f(x, y)$  nicht separiert werden kann, und verschwenden keine kostbare Zeit mit langer, erfolgloser Suche.

Lineare Differentialgleichungen: wann und wie?

M315  
Ausführung

Wie können wir bequem feststellen, ob  $y' = f(x, y)$  linear ist? Wie können wir andernfalls nachweisen, dass dies unmöglich ist?

**Satz M3B: Kriterium für Linearität**

Gegeben sei  $f : \mathbb{R}^2 \supseteq I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Äquivalent sind:

- (0) Die Zuordnung  $(x, y) \mapsto f(x, y)$  ist affin-linear in  $y$ , das heißt: Für alle  $(x, y) \in I \times \mathbb{R}$  gilt  $f(x, y) = a(x)y + b(x)$ , wobei  $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig sind.
- (1) Für jeden Punkt  $(x, y) \in I \times \mathbb{R}$  gilt  $f(x, y) = f(x, 1)y + f(x, 0)(1 - y)$ .
- (2) Für  $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $a(x) = f(x, 1) - f(x, 0)$  und  $b(x) = f(x, 0)$  gilt  $f(x, y) = a(x)y + b(x)$  in jedem Punkt  $(x, y) \in I \times \mathbb{R}$ .

😊 Wenn Sie  $f(x, y)$  linear schreiben wollen, dann zeigt (2) explizit wie: So konstruieren Sie bequem die gewünschten Funktionen  $a$  und  $b$ .

😊 Wenn dies nicht möglich sein sollte, dann zeigt (1) das Hindernis: Es genügt ein Gegenbeispiel mit  $f(x, y) \neq f(x, 1)y + f(x, 0)(1 - y)$ .

Dann wissen Sie sicher, dass  $y' = f(x, y)$  nicht linear sein kann, und verschwenden keine weitere Zeit mit erfolgloser Suche.

Linear oder separierbar, beides oder keines?

M316  
Ausführung

**Aufgabe:** Welche der folgenden Differentialgleichungen  $y' = f_i(x, y)$  sind linear? separierbar? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

$$f_1(x, y) = \frac{x^2 y^2 + 2x^2 + xy^3 + 2xy - 3y^2 - 6}{y^2 + 2}, \quad f_2(x, y) = \frac{x^2 y - 1}{x^2 y - x^3}$$

**Lösung:** (1) Ist  $f_1$  affin-linear in  $y$ , also  $f_1(x, y) = a(x)y + b(x)$ , dann mit  $f_1(x, 0) = x^2 - 3 = b(x)$  und  $f_1(x, 1) = x + x^2 - 3$ , also  $a(x) = x$ . Tatsächlich können wir den angegebenen Bruch wesentlich kürzen:

$$f_1(x, y) = \frac{(x^2 + xy - 3)(y^2 + 2)}{y^2 + 2} = \underbrace{x}_{a(x)} y + \underbrace{x^2 - 3}_{b(x)}$$

Ist  $f_1$  separierbar? Nach einigen Proben sehen wir: Nein! Gegenbeispiel  $f_1(0, 0)f_1(1, 1) = (-3) \cdot (-1) = 3$  und  $f_1(1, 0)f_1(0, 1) = (-2) \cdot (-3) = 6$ .

(2) Wäre  $(x, y) \mapsto f_2(x, y)$  affin-linear in  $y$ , dann speziell auch für  $x = 2$ , also  $y \mapsto (4y - 1)/(4y - 8)$ . Dies hat jedoch eine Polstelle in  $y = 2$ !

Ist  $f_2$  separierbar? Nach einigen Proben sehen wir: Nein! Gegenbeispiel: Es gilt  $f_2(1, 2)f_2(-1, 3) = \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ , aber  $f_2(-1, 2)f_2(1, 3) = \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ .

Showdown: eine Handvoll Differentialgleichungen

M317



**Aufgabe:** Mit welchen unserer Methoden können Sie folgende Differentialgleichungen lösen? Lösen Sie jede DG mit einem (jedem) der möglichen Verfahren. Machen Sie die Probe!

Gleichung \ Verfahren	Separation (M1A, M3A)	exakte DG (M2A, M2C)	lineare DG (M2E, M3B)
(1) $yy' + 2 \sin(x) = 0$	✓	✓	-
(2) $y' = x + y$	-	-	✓
(3) $y' = y^2 \sin(x)$	✓	-	-
(4) $4 - \frac{y^2}{x^2} + 2\frac{y}{x}y' = 0$	-	✓	-
(5) $y' = \frac{y}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$	✓	-	✓

Showdown: eine Handvoll Differentialgleichungen

M319 Übung

Integrierender Faktor ist hier  $A(x) = \int_{t=x_0}^x a(t) dt = \int_{t=x_0}^x 1 dt = x - x_0$ :

$$y(x) = e^{A(x)} \int_{t=x_0}^x e^{-A(t)} b(t) dt + e^{A(x)} y_0 = e^{x-x_0} \int_{t=x_0}^x e^{x_0-t} t dt + e^{x-x_0} y_0$$

$$= e^{x-x_0} \left[ -(e^{x_0-t})(1+t) \right]_{t=x_0}^x + e^{x-x_0} y_0 = -(1+x) + e^{x-x_0}(1+x_0+y_0)$$

Probe:  $y'(x) = -1 + e^{x-x_0}(1+x_0+y_0)$  erfüllt  $y'(x) = x + y$ .

(3) Die DG  $y' = y^2 \sin(x)$  ist nicht exakt (M2A) und nicht linear (M3B), aber separierbar. Eine offensichtliche Lösung ist  $y = 0$ . Für  $y \neq 0$  gilt:

$$y'(x) = y(x)^2 \sin(x) \implies \frac{y'(x)}{y(x)^2} = \sin(x)$$

$$\implies \int \frac{y'(x)}{y(x)^2} dx = \int \sin(x) dx \implies -\frac{1}{y(x)} = -\cos(x) + \text{const}$$

$$\implies \frac{1}{y(x)} = \cos(x) + c \implies y(x) = \frac{1}{\cos(x) + c}$$

Probe:  $y'(x) = \sin(x)/(\cos(x) + c)^2$  erfüllt  $y'(x) = y(x)^2 \sin(x)$ .

Rationale DG mit nicht-analytischen Lösungen

M321 Ausführung

**Aufgabe:** Wir suchen alle Funktionen  $y: \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$x^3 y'(x) = 2y(x) \text{ für alle } x \in I.$$

(1) Klassifizieren Sie diese Differentialgleichung nach unserem Katalog: Ordnung, implizit / explizit, algebraisch, linear, separierbar, exakt, ...

Finden Sie Lösungen  $y: \mathbb{R}_{<0} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $y(-1) = a/e$  und  $y: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $y(1) = b/e$ , wobei  $a, b \in \mathbb{R}$ . Sind diese Lösungen eindeutig? Skizze!

(2) Lassen sich diese lokalen Lösungen zu einer globalen Lösung  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  auf ganz  $\mathbb{R}$  fortsetzen? Welcher Wert  $y(0)$  muss zur Stetigkeit gewählt werden? Ist  $y$  dann differenzierbar? sogar stetig differenzierbar?

(3) Zu welchen Anfangswerten  $y(x_0) = y_0$  existieren globale Lösungen  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ? Sind diese eindeutig? Genauer: Durch welche Punkte  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  läuft genau eine Lösung / unendliche viele / gar keine?

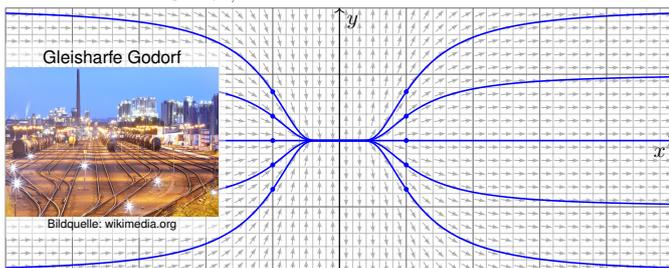
(4) Sind die Lösungen  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  unendlich oft differenzierbar? Sind sie analytisch? Finden Sie alle analytischen Lösungen!

☐ Siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, Beispiel 2.6.12, sowie [B438]. Obige Differentialgleichung [M119] ist ähnlich, aber weniger dramatisch.

Rationale DG mit nicht-analytischen Lösungen

M323 Ausführung

Skizze der Lösungen  $y_{a,b}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  für verschiedene Werte  $a, b \in \mathbb{R}$ :



(3) Durch Punkte  $(x_0, y_0)$  mit  $x_0 = 0$  und  $y_0 \neq 0$  geht keine Lösung. Durch jeden anderen Punkt verlaufen unendlich viele Lösungen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ !

Zu  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x^3 y'(x) = 2y(x)$  ist kein Anfangswertproblem  $y(x_0) = y_0$  gut gestellt. Die Einschränkung von  $y$  auf  $\mathbb{R}_{<0}$  ist die eindeutige Lösung des AWP  $y(-1) = a/e$  auf  $\mathbb{R}_{<0}$ . Die Einschränkung von  $y$  auf  $\mathbb{R}_{>0}$  ist die eindeutige Lösung des AWP  $y(+1) = b/e$  auf  $\mathbb{R}_{>0}$ . Erst die Wahl beider Parameter  $a, b \in \mathbb{R}$  legt die globale Lösung  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eindeutig fest. Die Funktion  $y$  ist auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  analytisch, an der Klebestelle 0 noch glatt, aber nicht analytisch.

Showdown: eine Handvoll Differentialgleichungen

M318 Übung

(1) Die Differentialgleichung  $yy' + 2 \sin(x) = 0$  ist nicht linear (M3B), aber exakt (M2A): Es gilt Rotationsfreiheit  $\partial_x y = 0 = \partial_y \sin(x)$ , und das (implizit gegebene) Definitionsgebiet  $\mathbb{R}^2$  ist einfach zusammenhängend. Zum Vektorfeld  $(f, g)$  mit  $f(x, y) = 2 \sin(x)$  und  $g(x, y) = y$  finden wir das Potential  $\Phi(x, y) = y^2/2 - 2 \cos(x)$ . Auflösen von  $\Phi(x, y(x)) = c$  ergibt die Lösungen  $y(x) = \pm \sqrt{4 \cos(x) + c}$ , wobei  $c > -4$ .

Diese DG kann ebenso durch Separation (M1A) gelöst werden:

$$y(x) y'(x) = -2 \sin(x)$$

$$\implies \int y(x) y'(x) dx = \int -2 \sin(x) dx$$

$$\implies \frac{y(x)^2}{2} = 2 \cos(x) + \text{const}$$

$$\implies y(x) = \pm \sqrt{4 \cos(x) + c}$$

Probe:  $y'(x) = \mp 2 \sin(x) / \sqrt{4 \cos(x) + c}$  erfüllt  $y(x) y'(x) + 2 \sin(x) = 0$ .

(2) Die zweite Differentialgleichung  $y' = x + y$  ist nicht exakt (M2A), denn  $\partial_x(1) = 0 \neq -1 = \partial_y(-x - y)$ , und auch nicht separierbar (M3A). Sie ist offensichtlich linear (M2E), und zwar mit  $a(x) = 1$  und  $b(x) = x$ .

Showdown: eine Handvoll Differentialgleichungen

M320 Übung

(4) Die Differentialgleichung  $4 - y^2/x^2 + 2yy'/x = 0$  ist weder linear (M3B), noch separierbar (M3A), aber exakt (M2A): Wir finden das Potential  $\Phi(x, y) = 4x + y^2/x$ . Auflösen von  $4x + y(x)^2/x = c$  ergibt  $y(x) = \pm \sqrt{cx - 4x^2}$ . Probe:  $y'(x) = \pm(c-8x)/2\sqrt{cx-4x^2}$  erfüllt die DG.

(5) Die DG  $y' = y/\sqrt{x} + 1/\sqrt{x}$  ist nicht exakt (M2A), aber linear (M2E) und separierbar (M1A): Eine Lösung ist  $y = -1$ . Für  $y \neq -1$  finden wir:

$$y'(x) = \frac{y(x)+1}{\sqrt{x}} \implies \frac{y'(x)}{y(x)+1} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\implies \int \frac{y'(x)}{y(x)+1} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \implies \ln|y(x)+1| = 2\sqrt{x} + \text{const}$$

$$\implies |y(x)+1| = e^{2\sqrt{x} + \text{const}} \implies y(x) = c e^{2\sqrt{x}} - 1$$

Der Faktor  $c = \pm e^{\text{const}}$  kann Werte in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  annehmen; im Fall  $c = 0$  finden wir erneut  $y(x) = -1$ . Probe:  $y'(x) = c e^{2\sqrt{x}} / \sqrt{x}$  erfüllt die DG.

Die Lösungsformel M2E für lineare DG liefert dasselbe Ergebnis; diese Rechnung führe ich hier nicht aus, sondern empfehle sie als Übung.

Rationale DG mit nicht-analytischen Lösungen

M322 Ausführung

**Lösung:** (1) Diese DG ist von erster Ordnung, implizit, algebraisch, d.h. von der Form  $F(x, y, y') = 0$  mit einem Polynom  $F$  in  $x, y, y'$ . Die explizite Gleichung  $y'(x) = 2x^{-3}y(x)$  für  $x \neq 0$  ist linear in  $y$ . Die Gleichung kann für  $x \neq 0$  und  $y \neq 0$  separiert werden:

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{2}{x^3} \implies \int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \int \frac{2}{x^3} dx$$

$$\implies \ln y(x) = -1/x^2 + c \implies y(x) = C e^{-1/x^2}$$

Lokale Lösungen sind  $y: \mathbb{R}_{<0} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto a e^{-1/x^2}$  mit  $y(-1) = a/e$  und  $y: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto b e^{-1/x^2}$  mit  $y(1) = b/e$ . Beide sind jeweils eindeutig.

(2) Für  $x \nearrow 0$  gilt  $a e^{-1/x^2} \rightarrow 0$ . Für  $x \searrow 0$  gilt  $b e^{-1/x^2} \rightarrow 0$ . Wir setzen:

$$y_{a,b}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto y(x) = \begin{cases} a e^{-1/x^2} & \text{für } x < 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ b e^{-1/x^2} & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Diese Funktion ist stetig und sogar stetig differenzierbar (siehe unten).

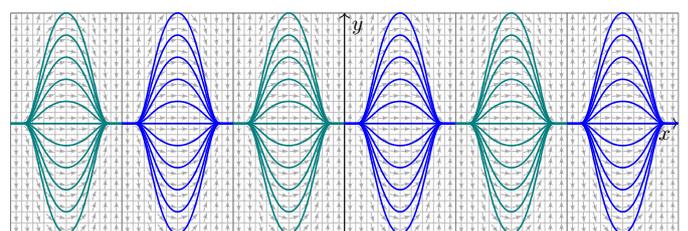
☺ Damit sind alle Lösungen unserer Differentialgleichung gefunden!

Rationale DG mit nicht-analytischen Lösungen

M324 Ausführung

(4) Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = e^{-1/x^2}$  für  $x > 0$  und  $f(x) = 0$  für  $x \leq 0$  ist beliebig oft diff'bar und in jedem Punkt  $x \neq 0$  analytisch. [B438]

Jede Lösung  $y_{a,b}(x) = a f(-x) + b f(x)$  ist beliebig oft differenzierbar. Sie ist analytisch nur für  $a = b = 0$ , also die Nullfunktion  $y_{0,0} = 0$ .



☺ Ebenso lösen wir  $\sin(x)^3 y'(x) = 2 \cos(x) y(x)$  zu  $y(x) = a e^{-1/\sin(x)^2}$ . Das erinnert an kosmologische Modelle vom Big Bang zum Big Crunch: Dazwischen ist die Entwicklung deterministisch, darüber hinaus wird alle Information vollständig gelöscht (als vage, aber eindrückliche Analogie).

**Aufgabe:** Finden Sie alle maximalen Lösungen

- (1)  $y: I \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  mit  $y'(x) = \sqrt[3]{y(x)^2}$ ,
- (2)  $y: I \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit  $y'(x) = \sqrt[3]{y(x)^2}$ ,
- (3)  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $y'(x) = \sqrt[3]{y(x)^2}$ .

- (a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld und mögliche Lösungskurven.
- (b) Qualitative Lösung: Welche AWP  $y(x_0) = y_0$  sind gut gestellt?
- (c) Quantitative Lösung: Berechnen Sie alle maximalen Lösungen.

**Lösung:** (1c) Für  $y > 0$  ist unsere DG äquivalent zu  $y' = y^{2/3}$ .  
Separation  $y^{-3/2} y' = 1$  und Integration zu  $3y^{1/3} = x - b$ .

Auflösen liefert  $y(x) = (x - b)^3/27$  für  $x > b$ . Probe!

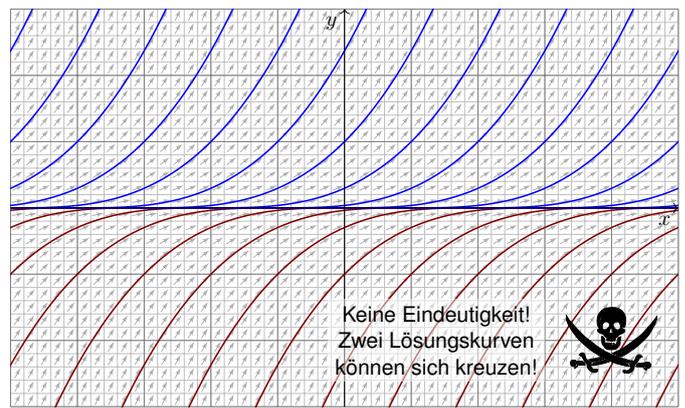
(1b) Zu jedem  $b \in \mathbb{R}$  erhalten wir somit die maximale Lösung

$$y_b: ]b, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}_{>0}, \quad y_b(x) = (x - b)^3/27.$$

Durch jeden Startpunkt  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$  läuft genau eine Lösung.

😊 Hier ist demnach jedes AWP  $y(x_0) = y_0 > 0$  gut gestellt.

(1a) Eine Skizze der gefundenen Lösungen schafft wie immer Überblick:



(2c) Für  $y \geq 0$  ist zudem die konstante Funktion  $y(x) = 0$  eine Lösung.  
Für  $y > 0$  kennen wir die Lösungen  $y_b(x) = (x - b)^3/27$  für  $x > b$ .  
Jede lässt sich eindeutig fortsetzen zur maximalen Lösung

$$y_b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}: x \mapsto y_b(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq b, \\ (x - b)^3/27 & \text{für } x \geq b. \end{cases}$$

(2b) Durch jeden Startpunkt  $(x_0, y_0)$  mit  $y_0 > 0$  läuft genau eine Lösung.  
Durch jeden Punkt  $(x_0, 0)$  hingegen laufen unendlich viele Lösungen!

⚠️ Jedes AWP  $y(x_0) = y_0 > 0$  ist gut gestellt, aber  $y(x_0) = 0$  schlecht.

Ohne Vorsichtsmaßnahmen sind Lösungen nicht immer eindeutig, d.h. zum selben Anfangswert kann es verschiedene Lösungen geben.

Wir haben dieses Problem bereits für die Wasseruhr [M123](#) diskutiert. Die Gleicharhe [M321](#) illustriert ebenso das Mehrdeutigkeitsproblem. Der vorliegende Fall ist ähnlich. Aber es kommt noch schlimmer. . .

(3c) Für  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist die konstante Funktion  $y(x) = 0$  eine Lösung.

Für  $y > 0$  kennen wir die Lösung  $y(x) = (x - b)^3/27$  für  $x > b$ .

Für  $y < 0$  finden wir ebenso  $y(x) = (x - a)^3/27$  für  $x < a$ . Probe!

Für alle  $a \leq b$  in  $\mathbb{R}$  setzen wir diese zusammen zur maximalen Lösung

$$y_{a,b}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto y_{a,b}(x) = \begin{cases} (x - a)^3/27 & \text{für } x \leq a, \\ 0 & \text{für } a \leq x \leq b, \\ (x - b)^3/27 & \text{für } x \geq b. \end{cases}$$

Hierbei lassen wir auch die Sonderfälle  $a = -\infty$  und  $b = +\infty$  zu.

(3b) Hier ist kein Anfangswertproblem  $y'(x_0) = y_0$  gut gestellt.

⚠️ Durch jeden Punkt  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  laufen unendlich viele Lösungen.

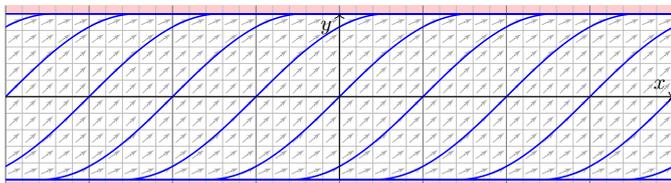
∃&E: Die rechte Seite ist nach  $y$  stetig diff'bar mit  $\partial_y(y^{2/3}) = \frac{2}{3}y^{-1/3}$ . Dies gilt nur für  $y \neq 0$ . Auf der  $x$ -Achse gilt dieses Kriterium nicht mehr! In solch kritischen Punkten ist Vorsicht und besondere Sorgfalt geboten.

**Aufgabe:** Wir lösen die implizite Differentialgleichung  $(y')^2 + y^2 = 1$  für  $y' > 0$  bzw.  $y' \geq 0$  auf zu den expliziten Differentialgleichungen

- (1)  $y'(x) = \sqrt{1 - y(x)^2}$  für  $-1 < y < 1$ ,
- (2)  $y'(x) = \sqrt{1 - y(x)^2}$  für  $-1 \leq y \leq 1$ .

- (a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld und mögliche Lösungskurven.
- (b) Qualitative Lösung: Welche AWP  $y(x_0) = y_0$  sind gut gestellt?
- (c) Quantitative Lösung: Berechnen Sie alle maximalen Lösungen.

**Lösung:** (a) Richtungsfeld und Lösungsskizzen auf  $G = \mathbb{R} \times [-1, +1]$ :



(b) Zum Überblick suchen wir zunächst die **qualitative Lösung**:

Die rechte Seite  $f(x, y) = \sqrt{1 - y^2}$  ist stetig auf ganz  $G = \mathbb{R} \times [-1, 1]$ . Der ∃&E-Satz garantiert hier zumindest die **Existenz** von Lösungen. Das heißt: Zu jedem Anfangswert  $(x_0, y_0)$  mit  $x_0 \in \mathbb{R}$  und  $-1 \leq y_0 \leq 1$  existiert **mindestens** eine Lösung; diese läuft beidseitig bis zum Rand.

Wir untersuchen genauer die Ableitung  $\partial_y f(x, y) = -y/\sqrt{1 - y^2}$ . Die Funktion  $f$  ist stetig diff'bar auf dem Inneren  $G^\circ = \mathbb{R} \times ]-1, 1[$ . Der Satz garantiert hier **Existenz und Eindeutigkeit** von Lösungen. Das heißt: Zu jedem Anfangswert  $(x_0, y_0)$  mit  $x_0 \in \mathbb{R}$  und  $-1 < y_0 < 1$  existiert **genau eine** Lösung; diese läuft beidseitig bis zum Rand.

😊 Diesen ersten Überblick verschaffen wir uns ganz ohne Rechnung! Manchmal ist das auch schon alles, was wir wollen. . . oder können.

⚠️ Die mangelnde Ableitung  $\partial_y f$  auf dem Rand  $y = \pm 1$  mahnt uns zu Vorsicht: Möglicherweise geht die Eindeutigkeit hier verloren.

⚠️ Auf dem Rand macht der ∃&E-Satz keine Aussage mehr. Wir lösen die Gleichung und schauen genauer hin. . .

(c) Nun berechnen wir explizit die **quantitative Lösung**:

(1c) Für  $-1 < y < 1$  gilt  $\sqrt{1 - y^2} \neq 0$ , und wir können dividieren: Separation  $y'/\sqrt{1 - y^2} = 1$  und Integration zu  $\arcsin(y) = x - c$  liefert  $y(x) = \sin(x - c)$  unter der Bedingung  $x \in ]c - \pi/2, c + \pi/2[$ .

(2c) Für jedes  $c \in \mathbb{R}$  erhalten wir so die maximale Lösung

$$y_c: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]: x \mapsto y_c(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x \leq c - \pi/2, \\ \sin(x - c) & \text{für } c - \pi/2 \leq x \leq c + \pi/2, \\ +1 & \text{für } x \geq c + \pi/2. \end{cases}$$

Auch die konstanten Funktionen  $y(x) = \pm 1$  sind Lösungen ( $c = \mp\infty$ ).

😊 Zu jedem AWP  $(x_0, y_0)$  mit  $|y_0| < 1$  existiert genau eine Lösung  $y_c$ . Für genau eine Verschiebung  $c \in \mathbb{R}$  läuft  $y_c$  durch den Punkt  $(x_0, y_0)$ .

⚠️ Zum AWP  $(x_0, y_0)$  mit  $y_0 = +1$  existieren unendlich viele Lösungen. Nämlich die konstante Lösung  $y = +1$  sowie alle  $y_c$  mit  $c \leq x_0 - \pi/2$ .

⚠️ Zum AWP  $(x_0, y_0)$  mit  $y_0 = -1$  existieren unendlich viele Lösungen. Nämlich die konstante Lösung  $y = -1$  sowie alle  $y_c$  mit  $c \geq x_0 + \pi/2$ .

Zur Illustration habe ich hier vornehmlich Beispiele vorgestellt, die sich möglichst leicht und in geschlossener Form lösen lassen. Für viele Differentialgleichungen ist keine geschlossene Lösung möglich! Zum Beispiel hat  $y'(x) = e^{-x^2/2}$  mit  $y(0) = 0$  die eindeutige Lösung

$$y(x) = \int_{t=0}^x e^{-t^2/2} dt.$$

Für dieses Integral gibt es nachweislich keine elementare Formel. [B145](#) In solchen Fällen greifen wir auf numerische Methoden zurück. [B147](#) Damit lässt sich nahezu jede praktische Frage ebenso gut handhaben.

Bevor man jedoch solcherart numerische Approximation unternimmt, muss man sicherstellen, dass die DG gut gestellt ist, also das Problem überhaupt eine eindeutige Lösung hat, die man approximieren könnte.

Die Sorgfalt gebietet daher, das Problem zunächst qualitativ zu lösen, also Existenz, Eindeutigkeit und Stabilität der Lösung sicherzustellen, und den Verlauf der Lösung möglichst präzise einzugrenzen. [M445](#) Erst dann darf man sich getrost numerischen Näherungen zuwenden.

## Exponentielles Wachstum: Medikamente und Drogen

M401  
Übung

Ab Zeitpunkt  $t = 0 \text{ min}$  wird per Infusion ein Medikament verabreicht. Der Durchfluss ist auf  $b = 6 \text{ mg/min}$  eingestellt. Der Körper baut in jeder Minute 5% des im Blut vorhandenen Medikaments ab ( $a = 0.05/\text{min}$ ).

**Aufgabe:** (1) Beschreiben Sie die Medikamentenmenge  $y(t)$  im Blut durch eine Differentialgleichung. Probe: Gelten in dieser Gleichung die richtigen physikalischen Einheiten? (2) Skizzieren Sie das Vektorfeld. (3) Lösen Sie diese Differentialgleichung. Ist die Lösung eindeutig? (4) Wie verhält sich  $y(t)$  für  $t \rightarrow \infty$ ? Ist dies plausibel?

😊 Das ist ein besonders einfaches Modell, aber sehr häufig verwendet. Es gilt ebenso beim Konsum einer Droge, etwa Alkohol, die über einen längeren Zeitraum konstant zugeführt und zugleich abgebaut wird.

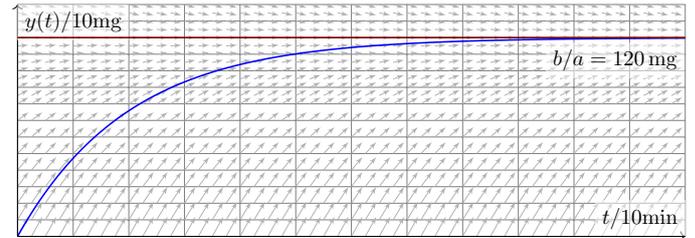
Im Gegensatz zu den vorigen Aufgaben ist hier die Differentialgleichung in der Aufgabenstellung noch nicht gegeben, sondern muss als erstes gefunden und anschließend gelöst werden. Diese Art Problemstellung ist wesentlich realistischer, daher interessanter, aber meist auch spürbar schwieriger; wir illustrieren dies nur an besonders einfachen Fällen.

□ H. Heuser: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Vieweg 2009

## Exponentielles Wachstum: Medikamente und Drogen

M402  
Übung

**Lösung:** (1) Wir messen die Zeit  $t$  in Minuten. Für die Medikamentenmenge  $y(t) \in \mathbb{R}$  finden wir die Gleichung  $y'(t) = b - a y(t)$  mit  $y(0) = 0$ . Diese DG ist linear und inhomogen, allgemeine Lösung siehe M221.



(3) Wir lösen die DG hier durch die Substitution  $u(t) = b/a - y(t)$  und finden  $u'(t) = -y'(t) = a y(t) - b = -a u(t)$  mit  $u(0) = b/a$ . Die Lösung  $u(t) = (b/a) e^{-at}$  und  $y(t) = (b/a)(1 - e^{-at})$  ist dann direkt klar.

(4) Für  $t \rightarrow \infty$  gilt  $y(t) \rightarrow b/a$ . 😊 Wir sehen dies leicht auch direkt: Im Gleichgewicht wird gleich viel zugeführt ( $+b$ ) wie abgebaut ( $-a \cdot b/a$ ).

## Exponentielles Wachstum: heißer Kaffee

M403  
Übung

Ein Kaffee wird bei  $100^\circ\text{C}$  gebrüht. Die Raumtemperatur beträgt  $20^\circ\text{C}$ . Abkühlung reduziert die Temperaturdifferenz um 7% pro Minute.

**Aufgabe:** (1) Beschreiben Sie die Temperatur  $y(t)$  des Kaffees durch eine Differentialgleichung. Probe: Gelten in dieser Gleichung die richtigen physikalischen Einheiten? (2) Skizzieren Sie das Vektorfeld. (3) Lösen Sie diese Differentialgleichung. Ist die Lösung eindeutig?

(4) Wie verhält sich  $y(t)$  für  $t \rightarrow \infty$ ? Ist dies physikalisch plausibel? (5) Wann hat der Kaffee  $60^\circ\text{C}$  erreicht? 😊 Das ist die Halbwertszeit. (6) Sie sind in Eile und haben nur 5min Wartezeit zur Verfügung. Ist es besser, die Milch am Anfang oder am Ende zuzugeben? (konkretes Zahlenbeispiel: 75% Kaffee, 25% Milch zu  $8^\circ\text{C}$ ).

😊 Das ist eine klassische Aufgabe, mit unserem Werkzeug sollte sie leicht fallen. Es gelten dieselben Bemerkungen wie zur vorigen Aufgabe. In Frage (6) stecken zahlreiche implizite Annahmen, wie die Form der Tasse und die Art des Wärmeaustauschs; erklären Sie diese explizit! Die konkreten Zahlen sind etwas willkürlich, dafür aber einfach genug. Je nach Situation werden Sie deutlich andere Konstanten messen.

## Exponentielles Wachstum: heißer Kaffee

M404  
Übung

**Lösung:** (1) Wir starten bei  $y_0 = 100^\circ\text{C}$  und nähern uns  $y_\infty = 20^\circ\text{C}$  gemäß der Gleichung  $y'(t) = -\lambda[y(t) - y_\infty]$  mit  $\lambda = 0.07/\text{min}$ .

(3) Die Lösung  $y(t) = y_\infty + (y_0 - y_\infty) e^{-\lambda t}$  ist leicht zu sehen.

(4) Für  $t \rightarrow \infty$  gilt  $y(t) \rightarrow y_\infty$ , wie anschaulich zu erwarten war.

(5) Bei  $60^\circ\text{C}$  wurde die Hälfte der Temperaturdifferenz abgebaut:

$$y(T) \stackrel{!}{=} 60^\circ \text{ bedeutet } 1/2 = e^{-\lambda T}, \text{ also } -\ln 2 = -\lambda T \text{ und somit } T = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0.693}{0.07/\text{min}} \approx 9.9 \text{ min, Merkregel: } \frac{70\%}{\text{Zerfallsrate}}$$

(6a) Erst die Milch zugeben, dann den Milchkaffee abkühlen lassen:

$$y(0 \text{ min}) = 0.75 \cdot 100^\circ\text{C} + 0.25 \cdot 8^\circ\text{C} = 77.0^\circ\text{C}$$

$$y(5 \text{ min}) = 20^\circ\text{C} + 57^\circ\text{C} \cdot e^{-0.35} \approx 60.2^\circ\text{C}$$

(6b) Erst den Kaffee abkühlen lassen, dann die Milch zugeben:

$$y(5 \text{ min}) = 20^\circ\text{C} + 80^\circ\text{C} \cdot e^{-0.35} \approx 76.4^\circ\text{C}$$

$$\text{Mischung} = 0.75 \cdot 76.4^\circ\text{C} + 0.25 \cdot 8^\circ\text{C} \approx 59.3^\circ\text{C}$$

😊 Wenn Sie Ihren Milchkaffee weniger heiß wollen, dann geben Sie die Milch erst am Ende hinzu. Der Unterschied ist allerdings kaum spürbar.

## Die logistische Differentialgleichung

M405  
Übung

Wir untersuchen die Größe  $y(x) \in \mathbb{R}_{>0}$  einer Population (z.B. Bakterien, Pflanzen, Tiere, ...) im Verlauf der Zeit  $x \in \mathbb{R}_{>0}$ . Das einfachste Modell ist eine Wachstumsrate  $y'(x)$  proportional zur Populationsgröße  $y(x)$ :

$$y'(x) = \lambda y(x), \quad y(0) = y_0$$

Die Lösung  $y(x) = y_0 e^{\lambda x}$  ist exponentielles Wachstum. Für  $\lambda > 0$  und  $y_0 > 0$  wächst  $y(x)$  unbeschränkt. Realistischer ist folgendes Modell: Wegen beschränkter Ressourcen gibt es eine maximale Größe  $K$  der Population. Ihr Wachstum wird gebremst durch den Faktor  $1 - y(x)/K$ :

$$y'(x) = \lambda y(x)(1 - y(x)/K), \quad y(0) = y_0$$

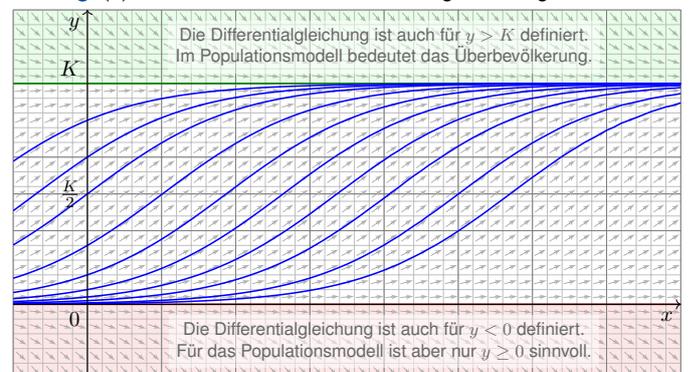
Dies ist die **logistische Differentialgleichung**. Sie ist ein einfaches nicht-lineares Modellbeispiel und Spezialfall der Bernoulli-Gleichung.

**Aufgabe:** (1) Skizzieren Sie das zugehörige Vektorfeld. (2) Bestimmen Sie alle Fixpunkte (= konstante Lösungen). (3) Bei Start in  $y(0) \in ]0, K[$ , bleibt jede Lösung beschränkt? (4) Existiert eine Lösung für alle  $x \geq 0$ , also  $y: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ ? Ist sie eindeutig? (5) Wie verhält sie sich für kleine  $y$ ? (6) für  $x \rightarrow \infty$ ? (7) Berechnen Sie die Lösung  $y(x)$  schließlich explizit.

## Die logistische Differentialgleichung

M406  
Übung

**Lösung:** (1) Skizze des Vektorfeldes und einiger Lösungskurven:



(2) Fixpunkte von  $y' = \lambda y(1 - y/K)$  sind Nullstellen der rechten Seite, also  $y = 0$  (keine Population) und  $y = K$  (maximale Populationsgröße).

## Die logistische Differentialgleichung

M407  
Übung

(3) Dank (2) haben wir die konstanten Lösungen  $u(x) = 0$  und  $v(x) = K$ . Jede Lösung  $y: ]0, x_1[ \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $y(0) \in ]0, K[$  ist somit im Intervall  $]0, K[$  gefangen: Dank Eindeutigkeitsatz M1c kann sie  $u$  und  $v$  nicht kreuzen.

(4) Da eine Lösung  $y: ]0, x_1[ \rightarrow ]0, K[$  keine Polstellen hat, lässt sie sich für alle  $x \geq 0$  fortsetzen (M1c) zu genau einer Lösung  $y: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow ]0, K[$ .

(5) Für  $y/K \approx 0$  gilt  $y' \approx \lambda y$ : Kleine Populationen wachsen demnach zunächst exponentiell; die Maximalgröße  $K$  hat noch kaum Einfluss. Nahe der Maximalgröße  $y \approx K$  gilt  $y' \approx 0$ , das Wachstum stagniert.

Aus  $y' = \lambda y - (\lambda/K)y^2$  folgt  $y'' = \lambda y' - 2(\lambda/K)yy'$ . Für  $0 < y < K$  haben wir  $y' > 0$ , also  $y'' > 0$  für  $0 < y < K/2$  und  $y'' < 0$  für  $K/2 < y < K$ .

Bis zur Hälfte der Maximalgröße haben wir demnach beschleunigtes Wachstum ( $y'' > 0$ ), oberhalb der Hälfte gebremstes Wachstum ( $y'' < 0$ ).

(6) Für  $0 < y < K$  gilt  $y' > 0$ , wir erwarten daher  $y(x) \nearrow K$  für  $x \rightarrow \infty$ . Dank Bolzano-Weierstraß konvergiert  $y(x)$  für  $x \rightarrow \infty$ . Sei  $c = \lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$  der Grenzwert. Aus  $y'(x) = \lambda y(x)(1 - y(x)/K)$  folgt  $\lim_{x \rightarrow \infty} y'(x) = \lambda c(1 - c/K)$ . Dieser Wert muss Null sein, andernfalls wäre  $y'(x) > m > 0$  für  $x \geq x_0$ , und  $y(x) \geq m(x - x_0)$  würde die Schranke  $K$  überschreiten. Also gilt  $\lambda c(1 - c/K) = 0$ , das heißt  $c = 0$  oder  $c = K$ . Für  $0 < y_0 < K$  haben wir also tatsächlich Konvergenz  $y(x) \nearrow K$  für  $x \rightarrow \infty$ .

## Die logistische Differentialgleichung

M408  
Übung

😊 Die vorhergehenden Überlegungen klären das qualitative Verhalten.

(7) Wir lösen die logistische Gleichung  $y'(x) = \lambda y(x) - (\lambda/K)y(x)^2$  schließlich explizit. Sie ist vom Bernoulli-Typ M413: Wir substituieren deshalb  $v(x) = y(x)^{-1}$  und erhalten eine lineare DG für  $v(x)$ :

$$v'(x) = -y(x)^{-2} y'(x) = -\lambda y(x)^{-1} + \lambda/K = \lambda/K - \lambda v(x)$$

Diese wird gelöst durch  $v(x) = 1/K - c e^{-\lambda x}$ , analog zu M401, also:

$$y(x) = \frac{1}{v(x)} = \frac{1}{1/K - c e^{-\lambda x}}$$

Der Anfangswert  $y(0) = y_0$  bestimmt  $c = 1/K - 1/y_0$ . Wir erhalten:

$$y(x) = \frac{K}{1 + (K/y_0 - 1) e^{-\lambda x}}$$

😊 Die Lösung gelingt leicht — jedoch erst mit passenden Methoden.

😊 Machen Sie die Probe durch Einsetzen in die Differentialgleichung!

😊 Geduldige Kurvendiskussion bestätigt alle Vorhersagen aus (2–6).

😊 Diese Gleichung tritt auch beim Massenwirkungsgesetz auf. O153  
Dort lösen wir sie alternativ durch Separation und Partialbruchzerlegung.

### Substitution: linearer Term

M409  
Beispiel

In günstigen Fällen lässt sich  $y' = f(x, y)$  vereinfachen und lösen durch eine geschickte Substitution  $y(x) = \varphi(v(x))$  und  $y'(x) = \varphi'(v(x)) v'(x)$ .

**Beispiel:** Seien  $a, b, c \in \mathbb{R}$  Konstanten. Zu lösen sei die DG

$$y' = f(ax + by + c).$$

Für  $v(x) = ax + by(x) + c$  gilt  $v'(x) = a + by'(x) = a + bf(v(x))$ , also

$$v' = a + bf(v).$$

😊 Diese DG in  $v$  ist separierbar und kann so gelöst werden. [M118](#)

**Aufgabe:** Bestimmen Sie alle Lösungen von  $y' = (x + y - 1)^2$ . Maximales Definitionsintervall? Sind alle AWP  $y(x_0) = y_0$  gut gestellt?

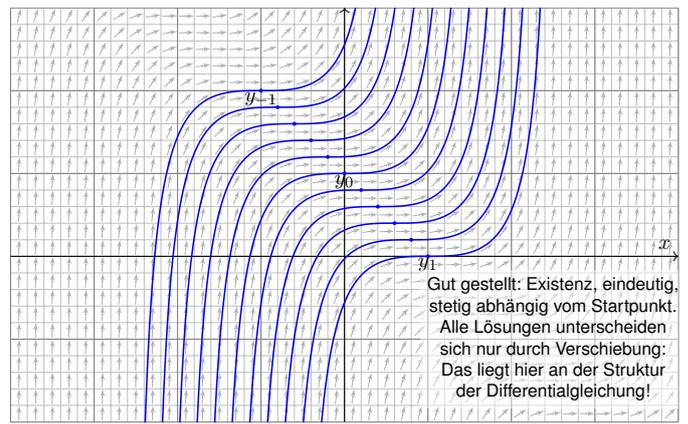
**Lösung:** Die Substitution  $v = x + y - 1$  führt zu  $v' = 1 + v^2$ . Separation  $v'/(1 + v^2) = 1$  und Integration zu  $\arctan(v) = x - c$  liefert  $v = \tan(x - c)$  unter der Bedingung  $x \in ]c - \pi/2, c + \pi/2[$ . Rücksubstitution ergibt  $y(x) = 1 - x + \tan(x - c)$ . Probe!

😊 Damit sind alle Lösungen  $y$  gefunden. Durch jeden Punkt  $(x_0, y_0)$  geht genau eine Lösung: In diesem Beispiel sind alle AWP gut gestellt!

### Skizze der gefundenen Lösungen

M410  
Beispiel

Lösungen  $y_c: ]c - \pi/2, c + \pi/2[ \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $y_c(x) = 1 - x + \tan(x - c)$ .



### Substitution: Ähnlichkeits-Differentialgleichung

M411  
Beispiel

Eine **Ähnlichkeits-Differentialgleichung** ist von der Form

$$y' = f(y/x).$$

Hierbei muss  $x \neq 0$  gelten. Für  $y = xv$  gilt  $y' = v + xv' = f(v)$ , also

$$v' = \frac{f(v) - v}{x}.$$

😊 Diese DG in  $v$  ist separierbar und kann so gelöst werden. [M118](#)  
Hierbei wird durch  $f(v) - v$  dividiert, also muss dies  $\neq 0$  sein.

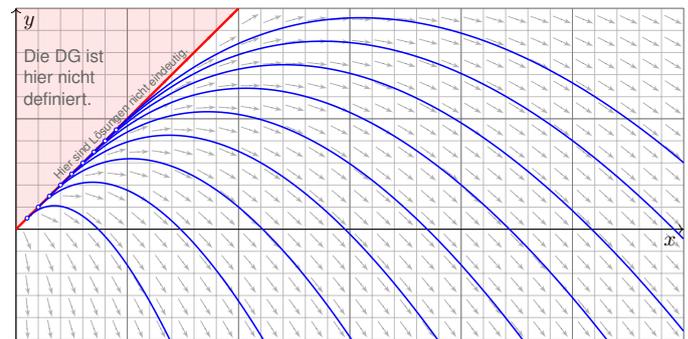
**Aufgabe:** Lösen Sie  $y' = y/x - \sqrt{1 - y/x}$  für  $x > 0$  und  $y < x$ . Was ist zu jeder Lösung  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  das maximale Definitionsintervall? Erhalten wir zusätzliche Lösungen, wenn wir auch  $y \leq x$  zulassen?

**Lösung:** Die Substitution  $v = y/x$  führt zu  $v' = -\sqrt{1 - v}/x$ . Ausführlich: Wir haben hier  $f(v) = v - \sqrt{1 - v}$  und nutzen die obige Vorbereitung. Separation  $-v'/\sqrt{1 - v} = 1/x$  und Integration zu  $2\sqrt{1 - v} = \ln x - \ln c$  liefert  $v = 1 - \ln(x/c)^2/4$  unter der Bedingung  $x > c > 0$ . Rücksubstitution ergibt  $y(x) = x(1 - \ln(x/c)^2/4)$ . Probe!

### Skizze der gefundenen Lösungen

M412  
Beispiel

Lösungen  $y_c: ]c, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $y_c(x) = x(1 - \ln(x/c)^2/4)$  und  $c \in \mathbb{R}_{>0}$ .



⚠️ Unsere Rechnung nutzt  $x > 0$  und  $y < x$ : Hier gilt  $v = y/x < 1$ , und wir können durch  $\sqrt{1 - v}$  dividieren. Durch jeden Anfangswert  $(x_0, y_0)$  mit  $y_0 < x_0$  läuft genau eine Lösung. Im Sonderfall  $v = 1$  ist auch  $y(x) = x$  eine Lösung, wie man durch Einsetzen in die DG sieht. Durch jeden Anfangswert  $(x_0, y_0)$  mit  $0 < x_0 = y_0$  laufen unendlich viele Lösungen!

### Substitution: Bernoulli-Differentialgleichung

M413  
Beispiel

Seien  $a, b: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $n \neq 1$ . Zu lösen sei die **Bernoulli-Gleichung**

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y(x)^n.$$

Im Falle  $y \neq 0$  ist diese DG äquivalent zu  $y'y^{-n} = a(x)y^{1-n} + b(x)$ . Für  $v = y^{1-n}$  gilt  $v' = (1 - n)y'y^{-n}$ . Wir erhalten so die lineare DG

$$\frac{1}{1 - n}v'(x) = a(x)v(x) + b(x).$$

**Aufgabe:** Lösen Sie  $y' = y/x - y^2$  für  $x > 0$  mit  $y(1) = 1$ .

**Lösung:** Die Substitution  $y = 1/v$  führt zu  $v' = -v/x + 1$ . Diese DG in  $v$  ist linear mit  $a(x) = -1/x$  und  $b(x) = 1$ . Wir finden  $A(x) = -\ln x$ . Der integrierende Faktor ist hier  $e^{-A(x)} = x$ , also

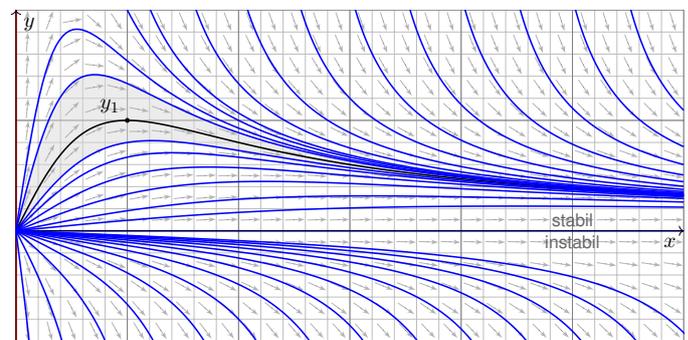
$$v(x) = e^{A(x)} \int e^{-A(x)} b(x) dx = \frac{1}{x} \int x dx = \frac{x^2 + c}{2x}.$$

Rücksubstitution ergibt  $y(x) = 2x/(x^2 + c)$ . Die Probe ist leicht! Der Anfangswert  $y(1) = 1$  bestimmt die Konstante  $c = 1$ .

### Skizze der gefundenen Lösungen

M414  
Beispiel

Lösungen  $y_c: \mathbb{R}_{>0} \setminus \{\sqrt{-c}\} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $y_c(x) = 2x/(x^2 + c)$  und  $c \in \mathbb{R}$ .



😊 Wir können die Differentialgleichung  $y' = y/x - y^2$  auch vereinfachen und qualitativ lösen: Für kleine  $x > 0$  ähnelt unsere DG  $y' = y/x - y^2$  der Geradengleichung  $y' = y/x$ . [M119](#)  
Für große  $x \rightarrow \infty$  ähnelt unsere DG  $y' = y/x - y^2$  eher der Gleichung  $y' = -y^2$ . [M113](#)  
Das Ab- und Aufrunden einer Differentialgleichung ist oft eine hilfreiche Technik. [M445](#)

### Nochmal Trennung der Variablen

M415  
Übung

**Aufgabe:** Bestimmen Sie alle Lösungen  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  der DG

$$y' = \frac{3}{2}x^2 y^3 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1.$$

Maximales Definitionsintervall? Sind alle AWP  $y(x_0) = y_0$  gut gestellt?

**Lösung:** Für  $y > 0$  separieren wir  $-2y'/y^3 = -3x^2$  und integrieren:

$$\int -2 \frac{y'(x)}{y^3(x)} dx = \int -3x^2 dx + \text{const} \\ \implies y(x)^{-2} = c^3 - x^3 \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}$$

Auflösen nach  $y$  ergibt die Lösungen

$$y_c: ]-\infty, c[ \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad y_c(x) = \frac{1}{\sqrt{c^3 - x^3}}.$$

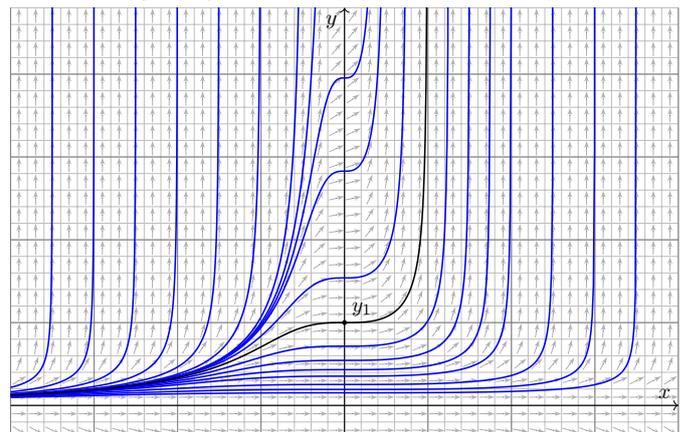
Die Lösung  $y_c$  existiert nur für  $x < c$ ; bei  $x = c$  liegt eine Polstelle vor! Probe! Der Anfangswert  $y(0) = 1$  bestimmt den Parameter  $c = 1$ .

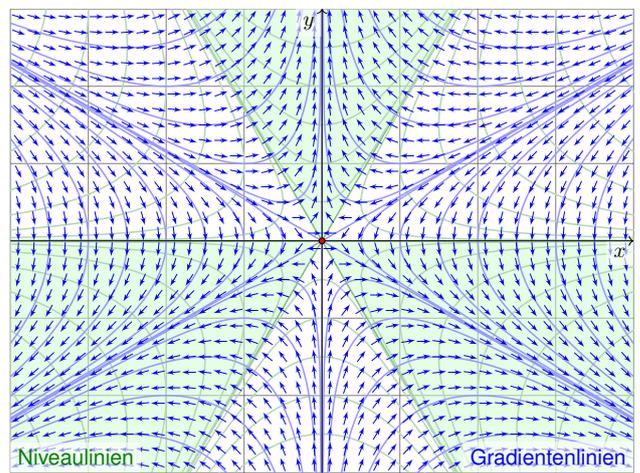
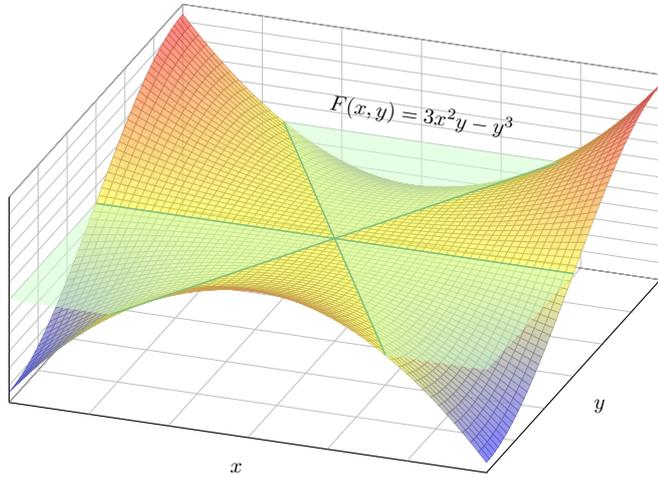
⚠️ Weitere Lösungen sind 0 und  $-y_c$ . Durch jeden Punkt  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  geht genau eine Lösung: In diesem Beispiel sind alle AWP gut gestellt!

### Skizze der gefundenen Lösungen

M416  
Übung

Lösungen  $y_c: ]-\infty, c[ \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $y_c(x) = 1/\sqrt{c^3 - x^3}$  und  $c \in \mathbb{R}$ .





Der Graph der Polynomfunktion  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto 3x^2y - y^3$  ist der berühmte **Affensattel**. Die zweite Skizze zeigt das (normierte negative) Gradientenfeld  $G = -\text{grad } F / |\text{grad } F|$ . Demnach weist  $G(x, y)$  in jedem Punkt  $(x, y) \neq (0, 0)$  in Richtung des steilsten Abstiegs auf der Fläche.

**Übung:** Wir untersuchen  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto ax^2y - y^3$  mit  $a \in \mathbb{R}$ .

- (1) Berechnen Sie zu  $F$  das Gradientenfeld  $\text{grad } F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .
- (2) Finden Sie eine (möglichst einfache) Differentialgleichung für die Niveaulinien, also Kurven  $x \mapsto y(x)$ , die stets auf gleicher Höhe bleiben. Ist diese Differentialgleichung exakt? Mit welchem Potential?
- (3) Finden Sie eine (möglichst einfache) Differentialgleichung für die Gradientenlinien, also Kurven  $x \mapsto y(x)$ , die stets dem steilsten Abstieg folgen. Interpretieren Sie dies geometrisch und physikalisch-dynamisch. Ist diese Differentialgleichung exakt? Mit welchem Potential?
- (4) Für welche (zweimal diff'baren) Funktionen  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ist neben der Niveaugleichung (2) auch die Gradientengleichung (3) eine exakte DG? Wie hängt das zusammen mit harmonischen / holomorphen Funktionen?

**Übung:** Sei  $a \in \mathbb{R}_{>0}$ . Zu lösen ist die implizite Differentialgleichung

$$3y^2 - ax^2 + 2axy \cdot y' = 0 \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0.$$

Die vorige Aufgabe erklärt die geometrisch-physikalische Anschauung. Das kann Ihnen helfen! Der wichtige Spezialfall  $a = 3$  entspricht einer Potentialströmung. Wir untersuchen hier  $a > 0$ . Diese Gleichung ist auf ganz  $\mathbb{R}^2$  definiert. Unsere Rechnung zwingt uns zu Fallunterscheidungen, wir müssen dann geeignet einschränken und konzentrieren uns daher auf  $x > 0$  und  $y > 0$ . Die anderen Fälle sind analog, für die Sonderfälle  $x = 0$  oder  $y = 0$  müssen wir genauer hinschauen.

- (1) Formulieren Sie diese DG in expliziter Form. Für welche Startpunkte  $(x_0, y_0)$  garantiert der  $\exists\&E$ -Satz eine eindeutige Lösung? (Und sonst?)
- (2) Lösen die Geraden  $y_{\pm}(x) = \pm cx$  mit  $c := 1/\sqrt{2+3/a}$  unsere DG? Begründen oder widerlegen Sie folgende Schranke: Aus  $|y(x_0)| < cx_0$  für ein  $x_0 \in I$  folgt  $|y(x)| < cx$  für alle  $x \in I$ , also  $y_- < y < y_+$  auf  $I$ . Was bedeutet das geometrisch-physikalisch in den obigen Graphiken?
- (3) Lösen Sie die Differentialgleichung mit einer unserer Methoden:
  - (a) durch einen integrierenden Faktor (ausgehend von der implizten DG),
  - (b) als Ähnlichkeitsdifferentialgleichung (durch Substitution  $u = y/x$ ),
  - (c) als Bernoulli-DG (durch Substitution  $v = y^{1-n}$  mit geeignetem  $n$ ).

**Aufgabe:** Lösen Sie die Differentialgleichung

$$1 - 2xy^2 + 2(1 - x^2)y y' = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1.$$

Ist sie exakt? Was ist die maximale Lösung? Inwiefern ist diese stabil? Was bewirkt eine kleine Störung des Anfangswerts  $y(0) = 1 \pm \epsilon$ ?

**Lösung:** Diese DG ist exakt:  $\text{rot} = 0$ . (Wäre sie noch nicht exakt, so suchen wir zuerst einen integrierenden Faktor.) Sie ist Ableitung von

$$x + (1 - x^2)y^2 = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Machen Sie die Probe! (Sie wissen bereits, wie man solche Potentiale ausrechnet; so gelingt es auch hier. Übung!) Auflösen nach  $y$  ergibt:

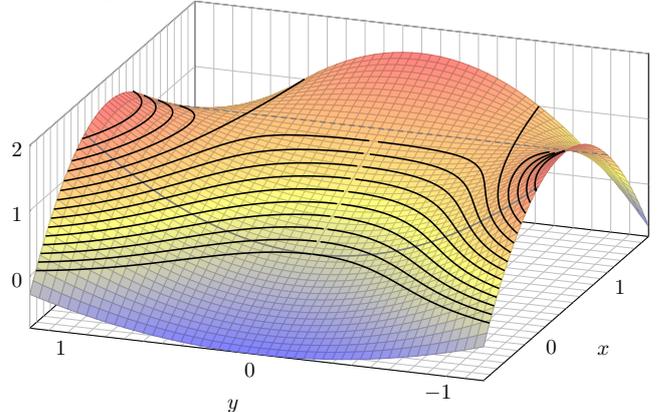
$$y(x) = \pm \sqrt{\frac{c-x}{1-x^2}} \quad \text{für} \quad -1 < x < \min\{1, c\}$$

Das AWP  $y(0) = 1$  wird gelöst für  $c = 1$ . Die maximale Lösung ist hier

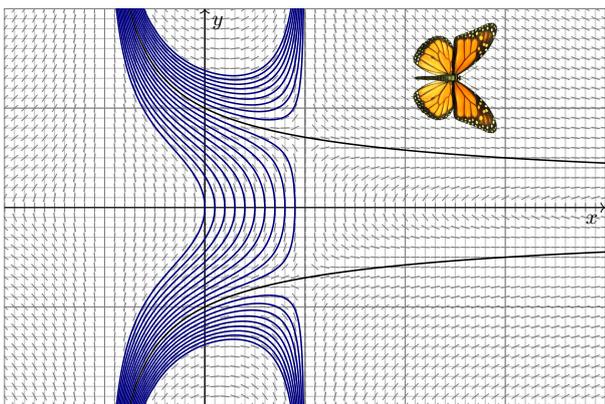
$$y: ]-1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}.$$

Machen Sie die Probe durch Einsetzen in unsere Differentialgleichung!

Das Potential  $\Phi(x, y) = x + (1 - x^2)y^2$  lässt sich veranschaulichen: Die Lösungen  $y(x)$  der DG sind die Niveaulinien des Potentials  $\Phi$ .



Lösungen  $y(x) = \pm \sqrt{(c-x)/(1-x^2)}$  zu Anfangswerten  $y(0) = y_0$ :



Anfangsdaten sind oft zufälligen kleinen Schwankungen unterworfen, etwa durch kleine äußere Störungen oder ungenaue Messdaten. Wir sehen hier eine Illustration des berühmten Schmetterlingseffekts. Der Verlauf der Lösung hängt empfindlich vom Startwert  $y_0 = y(0)$  ab:

- Zu  $|y_0| > 1$  existiert die Lösung nur für  $-1 < x < 1$  und läuft dann in die Polstelle bei  $x = \pm 1$ .
- Zu  $0 < |y_0| < 1$  existiert die Lösung nur für  $-1 < x < \sqrt{|y_0|}$ , danach wird der Radikand negativ.

Nur für  $y_0 = \pm 1$  existiert die Lösung  $y(x) = \pm 1/\sqrt{1+x}$  für alle  $x > -1$ .

Was sagt das über die Stabilität von Lösungen unter kleinen Störungen? Lösungen durch benachbarte Punkte haben nur endliche Lebenszeit: Entweder sie explodieren bei  $x = 1$  oder sie kollabieren schon zuvor.

⚠ Wenn diese DG ein physikalisches System beschreibt, etwa ein kritisches Bauteil eines Flugzeugs, dann haben Sie Grund zur Sorge! Daher fordern wir Stetigkeit / Stabilität für gut gestellte Probleme (M1B).

**Aufgabe:** Lösen Sie die Differentialgleichung

$$x \sin(y) y' = x + \cos(y) \quad \text{mit} \quad y(1) = y_0 \in [0, \pi].$$

Ist sie exakt? Was ist die maximale Lösung? Inwiefern ist diese stabil? Was bewirkt eine kleine Störung des Anfangswerts  $y(1) = \frac{2}{3}\pi \pm \varepsilon$ ?

**Lösung:** Wir prüfen diese DG auf Exaktheit:

$$\underbrace{[x + \cos(y)]}_{f(x,y)} + \underbrace{[-x \sin(y)]}_{g(x,y)} y' = 0$$

Hierzu muss die Rotation  $\text{rot}(f, g) = \partial_x g - \partial_y f$  verschwinden:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\sin y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\sin y.$$

😊 Wir haben Glück, diese DG ist exakt:  $\text{rot}(f, g) = 0$ . (Wäre sie noch nicht exakt, so müssten wir zuerst einen integrierenden Faktor suchen.)

😊 Das Gebiet  $\mathbb{R}^2$  ist einfach-zusammenhängend. Also hat unser Vektorfeld  $(f, g): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein Potential  $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Es bleibt uns nun, eins zu berechnen... Diese Fragestellung können Sie bereits lösen!

Integration: Wegen  $\partial_x \Phi(x, y) \stackrel{!}{=} f(x, y) = x + \cos y$  versuchen wir

$$\Phi(x, y) = \int x + \cos y \, dx = \frac{1}{2}x^2 + x \cos y + c(y).$$

Die Integrationskonstante  $c(y)$  hängt nur von  $y$  ab. Weiterhin:

$$\partial_y \Phi(x, y) = -x \sin y + c'(y) \stackrel{!}{=} g(x, y) = -x \sin y$$

Aus  $c'(y) = 0$  folgt  $c(y) = \text{const.}$  So finden wir das Potential

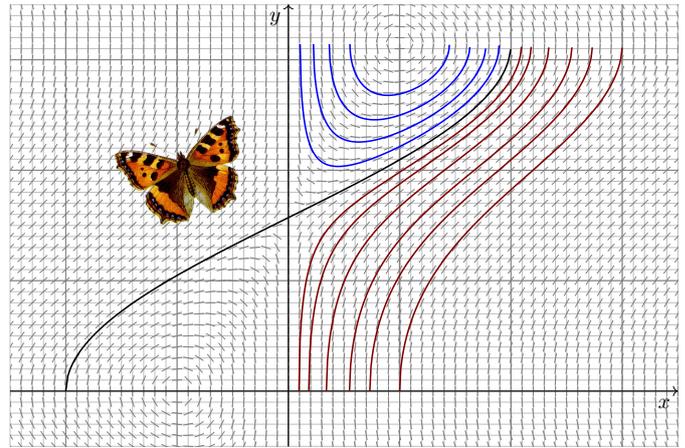
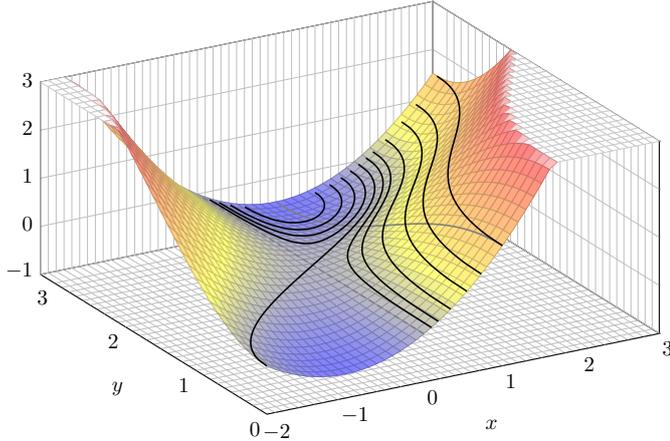
$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + x \cos y \quad (+\text{const.}) \quad (\text{Probe!})$$

Auflösen von  $\Phi(x, y) = c$  nach  $y$  ergibt  $\cos y = c/x - x/2$ , also

$$y(x) = \arccos\left(\frac{c}{x} - \frac{x}{2}\right). \quad (\text{Probe!})$$

Der Anfangswert  $y(1) = y_0 \in [0, \pi]$  bestimmt  $c = \frac{1}{2} + \cos(y_0) \in [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ .  
Für  $c = 0$  existiert die Lösung  $y(x) = \arccos(-x/2)$  für  $x \in [-2, +2]$ .  
Für  $-\frac{1}{2} \leq c < 0$  existiert die Lösung nur für  $x \in [1 \mp \sqrt{2c+1}] \subseteq [0, 2]$ .  
Für  $0 < c \leq \frac{3}{2}$  existiert die Lösung für  $x \in [\sqrt{2c+1} \mp 1]$ . (Skizze!)

Skizze des Potentials  $\Phi(x, y)$ . Die Lösungen  $y(x)$  sind die Niveaulinien!



**Aufgabe:** Lösen Sie die Differentialgleichung

$$[y - \cos(x)] y y' = -\sin(x) y^2 \quad \text{mit} \quad y(0) = 3.$$

Ist sie exakt? Existiert ein integrierender Faktor? maximale Lösung? Für welche Startwerte  $y(0) = y_0$  existieren Lösungen  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ?

**Lösung:** Wir prüfen diese DG auf Exaktheit:

$$\underbrace{[\sin(x) y^2]}_{f(x,y)} + \underbrace{[y - \cos(x)] y}_{g(x,y)} y' = 0$$

Existiert ein Potential  $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\text{grad } \Phi = (f, g)$ ? Leider nein:

$$\partial_x g(x, y) = \sin(x) y, \quad \partial_y f(x, y) = 2 \sin(x) y, \quad \text{rot}(f, g) = -\sin(x) y \neq 0.$$

Wir suchen einen integrierenden Faktor  $\lambda(x)$ :

$$\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} \stackrel{!}{=} -\frac{\text{rot}(f, g)}{g} = \frac{\sin(x) y}{y - \cos(x)} \implies \text{nicht lösbar}$$

☹ Die linke Seite hängt nur von  $x$  ab, die rechte auch noch von  $y$ .

Wir suchen einen integrierenden Faktor  $\lambda(y)$ :

$$\frac{\lambda'(y)}{\lambda(y)} \stackrel{!}{=} \frac{\text{rot}(f, g)}{f} = \frac{-1}{y} \implies \ln \lambda(y) = c - \ln y \implies \lambda(y) = \frac{C}{y}$$

Dank dieses Faktors  $\lambda(y)$  erhalten wir die exakte Differentialgleichung

$$[2 \sin(x) y] + 2[y - \cos(x)] y' = 0.$$

Wir berechnen ein Potential  $\Phi$  durch koordinatenweise Integration:

$$\partial_x \Phi(x, y) = 2y \sin(x) \implies \Phi(x, y) = c(y) - 2y \cos(x)$$

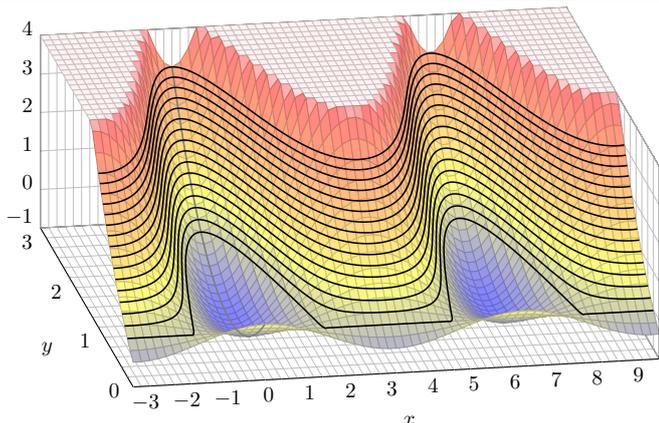
$$\partial_y \Phi(x, y) = 2y - 2 \cos(x) \implies \Phi(x, y) = y^2 - 2y \cos(x) \quad (+\text{const.})$$

Lösungskurven erfüllen  $y^2 - 2y \cos(x) = \Phi(x, y_0) = c$ , also

$$y(x) = \cos(x) \pm \sqrt{\cos(x)^2 + c}.$$

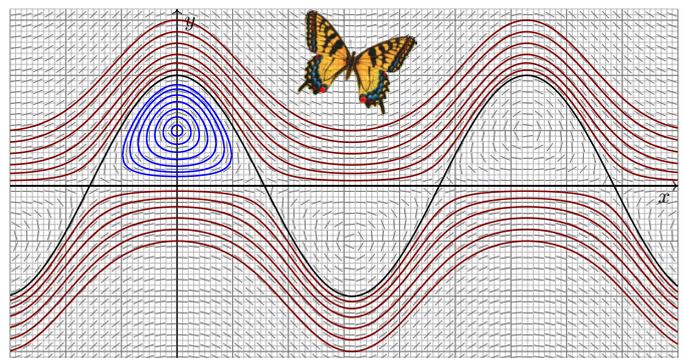
Der AW  $y(0) = 3$  bestimmt den Parameter  $c = 3$ . Machen Sie die Probe!

😊 Diese und die vorige Aufgabe sind eng verwandt; sehen Sie wie?



⚠ Auf dem kritischen Niveau  $\Phi = 0$  kreuzen sich zwei Lösungskurven: Dort gilt Eindeutigkeit nicht, der  $\exists \& E$ -Satz lässt sich nicht anwenden!

Lösungen  $y(x) = \cos(x) \pm \sqrt{\cos(x)^2 + c}$  zu Anfangswerten  $y(0) = y_0$ :



😊 Zu  $y(0) = y_0 \geq 2$  existiert genau eine Lösung  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ebenso zu  $y_0 \leq 0$ , aber für  $0 < y_0 < 2$  bleibt die Lösung im Potentialtopf gefangen!

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall, hierauf  $a, b: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $x_0 \in I$  und  $y_0 \in \mathbb{R}$ .  
Zu lösen sei eine **lineare Differentialgleichung**, zunächst homogen

$$y'(x) = a(x)y(x) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0.$$

Die Lösung ist eindeutig (Satz M2D), und wir kennen sie explizit:

$$y(x) = e^{A(x)} y_0 \quad \text{mit} \quad A(x) = \int_{t=x_0}^x a(t) dt.$$

Zu lösen sei nun allgemeiner die **inhomogene Differentialgleichung**

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0.$$

Das inhomogene Problem ist schwieriger: Wie finden wir eine Lösung? Gibt es ein allgemeines Verfahren? eine übersichtliche Lösungsformel? Wir haben dies oben mit einem integrierenden Faktor über eine exakte Differentialgleichung gelöst (Satz M2E). Lineare Differentialgleichungen treten häufig auf und sind daher recht wichtig. Zur Übung lösen wir die inhomogene Gleichung mit einer zweiten, nützlichen Rechenmethode.

Die Idee der **Variation der Konstanten** geht auf Lagrange zurück: Wenn  $y_0(x) = e^{A(x)} c_0$  mit konstantem  $c_0 \in \mathbb{R}$  die homogene DG löst, dann löst vielleicht der Ansatz  $y(x) = e^{A(x)} c(x)$  die inhomogene DG. 😊 Das ist zunächst nur ein Ansatz, aber einen Versuch ist es wert!

**Aufgabe:** Setzen Sie  $y(x) = e^{A(x)} c(x)$  ein und bestimmen Sie  $c(x)$ . Können Sie so die Existenz / Eindeutigkeit einer Lösung garantieren?

**Lösung:** Wir leiten den Ansatz ab; gemäß Produktregel erhalten wir

$$y'(x) = [e^{A(x)} c(x)]' = a(x) e^{A(x)} c(x) + e^{A(x)} c'(x).$$

Einsetzen in unsere Gleichung  $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$  ergibt

$$a(x) e^{A(x)} c(x) + e^{A(x)} c'(x) \stackrel{!}{=} a(x) e^{A(x)} c(x) + b(x).$$

Vergleich beider Seiten liefert  $e^{A(x)} c'(x) = b(x)$ , also  $c'(x) = e^{-A(x)} b(x)$ .

😊 Wir erleben ein nützliches Wunder: Diese Differentialgleichung für die gesuchte Funktion  $c$  können wir direkt durch Integration lösen:

$$c(x) = \int_{t=x_0}^x e^{-A(t)} b(t) dt + c(x_0)$$

Damit finden wir zu unserer inhomogenen Gleichung die Lösung

$$y(x) = e^{A(x)} c(x) = e^{A(x)} \left[ \int_{t=x_0}^x e^{-A(t)} b(t) dt + c(x_0) \right]$$

Zunächst können wir hierbei die Integrationskonstante  $c(x_0)$  frei wählen. Wir passen sie schließlich den gegebenen Anfangsdaten  $y(x_0) = y_0$  an: Für  $x = x_0$  gilt  $A(x_0) = 0$  und  $y(x_0) = c(x_0)$ ; wir setzen also  $c(x_0) = y_0$ . Zusammenfassend erhalten wir erneut die Lösungsformel aus Satz M2E:

Die homogene DG  $y'(x) = a(x)y(x)$  mit  $y(x_0) = y_0$  wird gelöst durch  $y_1(x) = e^{A(x)} y_0$  mit  $A(x) = \int_{x_0}^x a(t) dt$ . Zur inhomogenen Gleichung

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0$$

finden wir durch Variation der Konstanten die Lösung  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$y(x) = e^{A(x)} \left[ \int_{t=x_0}^x e^{-A(t)} b(t) dt + y_0 \right].$$

😊 Diese Rechenmethode heißt „Variation der Konstanten“; das klingt widersinnig (Oxymoron), beschreibt aber sehr treffend unser Vorgehen.

😊 Sie zeigt die Existenz einer Lösung dank expliziter Lösungsformel. Die Ansatzmethode garantiert leider nicht die Eindeutigkeit der Lösung: Denkbar wären auch andere Ansätze und evtl. noch weitere Lösungen.

😊 Cauchys  $\exists\&E$ -Satz M1c sichert hier die Eindeutigkeit — und auch die Existenz, dank expliziter Lösungsformel wissen wir noch mehr.

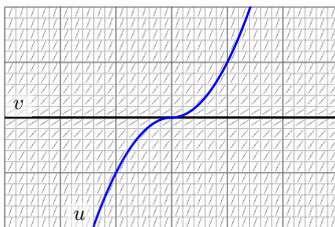
😊 Der Rechenweg mit einem integrierenden Faktor über eine exakte Differentialgleichung liefert dieselbe Lösungsformel und somit auch die Existenz; zudem liefert er die Eindeutigkeit als Dreingabe gratis mit.

**Übung:** Schreiben Sie beide Rechenwege selbständig auf (d.h. ohne Vorlage). Beide sind nahezu gleich, nur die Sichtweise ist verschieden.

😊 Exakte Differentialgleichungen stehen in höherer Dimension nicht mehr zur Verfügung, wohl aber die Variation der Konstanten. [N311] [O311]

Das Ergebnis ist bemerkenswert: Dieser Kunstgriff gelingt immer!

Als Ingenieur:in wollen bzw. müssen Sie oft DGLen lösen! Bevor Sie vermeintlichen Lösungen (mit dem Computer) nachgehen, stehen Sie vor dem Grundproblem: Wie viele Lösungen gibt es? Wenn Sie dies ignorieren, dann stellen Sie sich die falschen Fragen! Und der Computer wird Ihnen numerische Halluzinationen vorgaukeln.



Kreuzung =  
mehrdeutig!

**Aufgabe:** Wir untersuchen Funktionen  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $y'(x) = 2 \cdot \sqrt{|y(x)|}$ . Können sich Lösungen  $u, v$  kreuzen, von  $u(-1) < v(-1)$  zu  $u(1) > v(1)$ ?

**Lösung:** Erschreckend, aber ja! Zum Beispiel  $v(x) = 0$  und  $u(x) = x|x|$ .

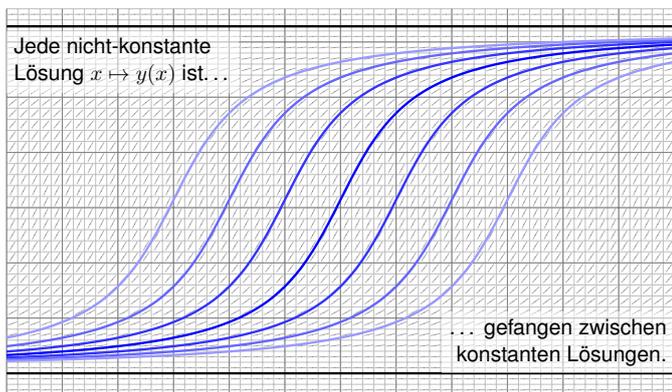
**Zusatz:** Führen Sie dies sorgsam aus. Zu jeder Lösung  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gibt es Werte  $a \leq b$  in  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , so dass  $y(x) = 0$  für  $a \leq x \leq b$  gilt, sowie  $y(x) = -(a-x)^2$  für  $x \leq a$  und  $y(x) = (x-b)^2$  für  $x \geq b$ .

(1) Warum sind dies tatsächlich Lösungen? Machen Sie die Probe!  
(2) Warum sind dies alle Lösungen? Nutzen Sie den  $\exists\&E$ -Satz M1c!

😊 Meist wollen Sie nicht nur die Existenz, sondern auch und vor allem die Eindeutigkeit. Genau dazu nutzen Sie den  $\exists\&E$ -Satz. Daraus folgt insbesondere, dass Überkreuzungen unmöglich sind. Hier jedoch ist der Satz nicht anwendbar! Unser Gegenbeispiel schafft wohlthuend Klarheit.

*Fun fact:* Im Februar 2025, anlässlich unserer Klausur, habe ich ChatGPT diese Aufgabe gestellt. Hierzu plauderte es fröhlich: „1. Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen. Da die rechte Seite der Differentialgleichung  $f(y) = 2\sqrt{|y|}$  nicht lipschitz-stetig ist bei  $y = 0$  (sie hat dort eine Singularität), kann der klassische Satz von Picard–Lindelöf nicht direkt auf globale Eindeutigkeit angewendet werden.“ Alle Achtung! „Dies bedeutet, dass es potenziell mehrere Lösungen für dieselbe Anfangsbedingung geben könnte.“ Kluge Worte, hier ist Vorsicht geboten! Nach einigen Rechnungen behauptet es jedoch frech: „4. Fazit. Da die Lösungen durch ihre Startwerte eindeutig bestimmt sind und keine zwei Lösungen mit  $u(-1) < v(-1)$  zu  $u(1) > v(1)$  übergehen können, können sich zwei Lösungen nicht kreuzen.“ Das ist nun offensichtlich falsch!

**Aufgabe:** (1) Ist jede Funktion  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $y' = 1 - \cos(y)$  beschränkt?  
(0) Wie viele Lösungen  $y$  existieren zu jedem Startwert  $y(x_0) = y_0$ ?



**Lösung:** (0) Die rechte Seite  $f(y) = 1 - \cos(y)$  unserer Gleichung  $y' = f(y)$  ist stetig differenzierbar nach  $y$ , also greift der  $\exists\&E$ -Satz M1c.

(1) Wir haben die konstanten Lösungen  $u_k(x) = 2\pi k$  für jedes  $k \in \mathbb{Z}$ . Jede andere Lösung  $y$  startet zwischen zwei konstanten Lösungen  $u_k$  und  $u_{k+1}$ , kann diese **nicht** kreuzen, bleibt also dazwischen beschränkt!

😊 Diese Differentialgleichung sieht schlimm aus, und das soll sie auch! Mit dem  $\exists\&E$ -Satz gelingt dennoch alles schnell, leicht und effizient.

😊 Bonus: Als glücklicher Zufall lässt sich diese DG sogar explizit lösen, durch  $y(x) = -2 \arccot(x - \cot(y(0)/2))$ . Finden ist schwer, Probe leicht!

*Fun fact:* Im Februar 2025, anlässlich unserer Klausur, habe ich ChatGPT diese Aufgabe gestellt. „Die rechte Seite der Differentialgleichung ist gegeben durch  $f(y) = 1 - \cos(y)$ . Daraus folgt  $0 \leq y'(x) \leq 2$ . Das bedeutet, dass die Funktion  $y(x)$  monoton wachsend ist. Zudem ist das Wachstum durch  $y'(x) \leq 2$  nach oben beschränkt.“ So weit, so gut, doch dann halluziniert es: „Beispiel für eine unbeschränkte Lösung: Betrachten wir die Anfangsbedingung  $y(0) = 0$ . Dann haben wir  $y'(0) = 1 - \cos(0) = 0$ . Da  $y'(x) \geq 0$ , beginnt  $y(x)$  zunächst mit einer horizontalen Tangente, wächst aber durch  $y'(x) > 0$  für alle  $y \neq 2\pi k$ . Durch numerische oder qualitative Betrachtung kann man zeigen, dass  $y(x)$  für große  $x$  gegen  $\infty$  divergiert.“ Schade, das ist nun offensichtlich Unsinn. Hier kann sich die KI in den nächsten Jahren noch stark verbessern.

⚠ Häufig lassen sich selbst einfache Differentialgleichungen nicht elementar lösen, also durch keine geschlossene Formel. Wir nutzen dann qualitative Garantien und anschließend numerische Näherungen.

**Aufgabe:** Vorgelegt sei eine explizite Differentialgleichung

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

mit stetiger rechter Seite  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Begründen Sie durch ein Ergebnis der Vorlesung oder widerlegen Sie durch ein passendes Gegenbeispiel:

- (1) Ist die rechte Seite  $f$  elementar / linear / algebraisch / analytisch, so gilt dasselbe für jede Lösung  $y: \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}$  der Differentialgleichung.
- (2) Welche Form von Schranke für  $y$  folgt aus  $|f(x, y)| \leq M \in \mathbb{R}$ ?
- (3) Läuft durch jeden Startpunkt  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  eine Lösung  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ?
- (4) Welche zusätzlichen Bedingungen wären hier zu fordern / prüfen?
- (5) Können sich verschiedene Lösungen  $u \neq v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  schneiden? Gibt es gar kreuzende Lösungen  $u, v$  mit  $u(a) < v(a)$  aber  $u(b) > v(b)$ ?
- (6) Welche zusätzlichen Bedingungen wären hier zu fordern / prüfen?

**Aufgabe:** Skizzieren Sie das ebene Vektorfeld zur Differentialgleichung

$$y' = f(x, y) := \sin(y) \sqrt[3]{\cos(x)^2 / (1 + x + y)}$$

Explizite Lösungen sind hier wohl kaum zu erwarten. Was tun Sie dann?

- (1) Lässt sich der  $\exists\&E$ -Satz hier anwenden? Warum und wie genau?
- (2) Können sich verschiedene Lösungen  $u \neq v: I \rightarrow \mathbb{R}$  schneiden?
- (3) Ist die konstante Nullfunktion  $\tilde{y}(x) = 0$  eine Lösung dieser DG? Wie viele Nullstellen hat demnach jede andere Lösung  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ?
- (4) Für welche Startpunkte  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  ist jede Lösung konstant?
- (5) Für welche Startpunkte  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  ist jede Lösung beschränkt?
- (6) Durch welche Startpunkte  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  läuft eine Lösung  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ?
- (7) Welches Verhalten haben Lösungen  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  für  $x \rightarrow \infty$ ?

**Lösung:** (1) Ja, der  $\exists\&E$ -Satz M1c lässt sich hier anwenden. Genauer: Die rechte Seite  $f(x, y)$  ist stetig und zudem in  $y$  stetig differenzierbar. (Zwar nicht in  $x$ , aber das wird von Satz M1c auch nicht gefordert.)

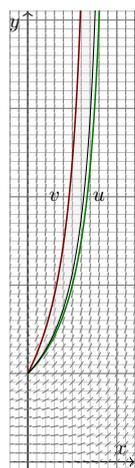
Wir betrachten ein Anfangswertproblem, wie üblich von der Form

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0.$$

- ☹ Oft können (oder wollen) wir Lösungen  $y$  nicht explizit ausrechnen.
- 😊 Wir wollen (oder müssen) dann  $y$  wenigstens geschickt eingrenzen.

**Aufgabe:** (1) Lösen Sie für  $x \geq 0$  das AWP  $u'(x) = u(x)^2$ ,  $u(0) = 1$ :  
 (a) Finden Sie eine maximale Lösung  $u: [0, x_1[ \rightarrow \mathbb{R}$ . Ist  $u$  eindeutig?  
 (b) Was ist hier die Intervallgrenze  $x_1$ ? Was passiert für  $x \nearrow x_1$ ?  
 (2) Lösen Sie für  $x \geq 0$  ebenso das AWP  $v'(x) = 1 + v(x)^2$ ,  $v(0) = 1$ .  
 (3) Untersuchen Sie qualitativ das AWP  $y'(x) = x^2 + y(x)^2$ ,  $y(0) = 1$ .  
 Hinweis: Können Sie (3) ebenso leicht explizit lösen wie (1) und (2)?  
 Wie helfen (1,2) zur Eingrenzung von (3)? Formulieren Sie eine Regel!

**Riccati-Gleichungen**  $y'(x) = a(x) + b(x)y(x) + c(x)y(x)^2$  bilden eine umfangreiche Klasse; sie enthält lineare  $y'(x) = a(x) + b(x)y(x)$  und Bernoulli-DG  $y'(x) = b(x)y(x) + c(x)y(x)^2$ . Eine geschlossene Lösung durch elementare Funktionen ist im Allgemeinen nicht möglich. In solchen Fällen hilft die allgemeine Technik der Eingrenzung: einfach und effizient!



(3) Das Problem  $y'(x) = x^2 + y(x)^2$  mit Start in  $y(0) = 1$  können wir leider nicht so einfach und explizit lösen.

Satz M1c garantiert zunächst Existenz und Eindeutigkeit: Es gibt genau eine maximale Lösung  $y: [0, x_1[ \rightarrow \mathbb{R}$ . [M122](#)

Satz M4c erlaubt den Vergleich der (noch unbekannt)en Lösung  $y$  mit Unterlosungen  $u$  und Oberlösungen  $v$ :

😊 Wir erhalten ohne numerische Mühe die Eingrenzung

$$\frac{1}{1-x} \leq y(x) \leq \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Wir finden Polstellen in  $0.785 \approx \pi/4 \leq x_1 \leq 1$ : Die Lösung  $y$  lebt also mindestens bis 0.785, jedoch höchstens bis 1.

Auch die Lösung  $y$  explodiert: Für  $x \nearrow x_1$  gilt  $y(x) \nearrow \infty$ .

😊 In vielen Fällen genügt diese grobe Information.

Andernfalls unternehmen wir eine numerische Näherung.

Der Ansatz  $w(x) = 1/(1+ax)$  liefert bessere Oberlösungen für  $a \geq 17/16$ . Die obige Skizze zeigt, wie erstaunlich genau diese Eingrenzung bereits ist.

**Lösung:** (1) Die DG  $y' = y$  ist linear / algebraisch, die Lösung  $y(x) = e^x$  aber nicht. Die rechte Seite von  $y'(x) = e^{-x^2/2}$  ist elementar, die Lösung  $y(x) = \int_0^x e^{-t^2/2} dt$  aber nicht. ☹ Ist  $f$  jedoch analytisch, also lokal in eine konvergente Potenzreihe entwickelbar, so auch jede Lösung  $y$ .

(2) Für  $x_1 < x_2$  in  $I$  gilt  $y(x_1) - y(x_2) = \int_{x_1}^{x_2} y'(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx$ , somit die Schranke  $|y(x_1) - y(x_2)| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(x, y)| dx \leq M \cdot |x_1 - x_2|$ .

(3) Nein, Lösungen können explodieren / in Polstellen laufen. [M113](#) [M409](#)

(4) Für  $|f(x, y)| \leq M$  oder allgemeiner  $|f(x, y)| \leq a(x)|y| + b(x)$  [M455](#) haben Lösungen  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $y'(x) = f(x, y(x))$  niemals Polstellen.

😊 Dank Existenzsatz M1c läuft durch jeden Startpunkt  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  mindestens eine maximale Lösung  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Eventuell auch mehrere:

(5) Ja, ein Gegenbeispiel ist die Wasseruhr  $y'(x) = -a\sqrt{y(x)}$ . [M123](#)

Wir kennen weitere drastische Beispiele: [M321](#) [M325](#) [M329](#) [M411](#) [M429](#) [M437](#)

(6) Die Stetigkeit der rechten Seite  $f$  genügt nicht, um die Eindeutigkeit von Lösungen zu gegebenen Anfangswerten  $y(x_0) = y_0$  zu garantieren.

😊 Der Eindeutigkeitssatz M1c verlangt noch stetige Differenzierbarkeit von  $f(x, y)$  nach  $y$ ; dann ist jedes Anfangswertproblem eindeutig lösbar!

(2) Nein, verschiedene Lösungen können sich nicht schneiden!

Angenommen, für zwei Punkte  $a < b$  in  $I$  gälte  $u(a) < v(a)$  aber  $u(b) \geq v(b)$ . Dank Zwischenwertsatz gilt Gleichheit  $u(t) = v(t)$  für mindestens ein  $t \in ]a, b[$ . Dank Eindeutigkeit (1) wäre dann aber  $u = v$ , im Widerspruch zu  $u(a) < v(a)$ .

(3) Ja! Einsetzen ergibt sofort: Die Nullfunktion ist eine Lösung.

Dank (2) haben andere Lösungen demnach keine Nullstellen!

(4) Die rechte Seite verschwindet genau für  $y = k\pi$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ .

Jede konstante Funktion  $y(x) = k\pi$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  löst  $y' = f(x, y)$ .

(5) Jede Lösung  $y: [x_0, x_1[ \rightarrow \mathbb{R}$  erfüllt  $y_0 = y(x_0) \in [(k-1)\pi, k\pi[ =: J$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$ . Dank (2,4) bleibt  $y(x)$  für alle  $x$  im Intervall  $J$  gefangen.

(6) Der  $\exists\&E$ -Satz M1c garantiert die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  für ein (kleines) Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Dank (5) ist die Lösung  $y$  beschränkt, sie kann also insbesondere keine Polstellen entwickeln. Dank M1c lässt sie sich in beide Richtungen fortsetzen zu  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

(7) Durch jeden Startpunkt  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  verläuft genau eine Lösung  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Diese ist beschränkt, denn sie verläuft ganz in  $[(k-1)\pi, k\pi[$ .

**Lösung:** (1a) Wir lösen  $u'(x) = u(x)^2$ . Die triviale Lösung ist  $u = 0$ . Für  $u(x) > 0$  trennen wir die Variablen und integrieren:

$$\begin{aligned} \frac{u'(x)}{u(x)^2} = 1 &\implies \int \frac{u'(x)}{u(x)^2} dx = \int 1 dx + \text{const} \\ \implies -u(x)^{-1} = x + \text{const} &\implies u(x) = \frac{1}{c-x} \end{aligned}$$

Hierbei ist  $c \in \mathbb{R}_{>0}$  eine Konstante und  $u(0) = 1/c$ . Durch den Startwert  $u(0) = 1$  verläuft somit als einzige Lösung  $u: [0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto 1/(1-x)$ .

(1b) Die Lösung explodiert in endlicher Zeit: Für  $x \nearrow 1$  gilt  $u(x) \nearrow \infty$ . Das maximale Definitionsintervall ist  $[0, 1[$  wegen der Polstelle in 1.

(2a) Auch für  $v'(x) = 1 + v(x)^2$  trennen wir die Variablen und integrieren:

$$\begin{aligned} \frac{v'(x)}{1+v(x)^2} = 1 &\implies \int \frac{v'(x)}{1+v(x)^2} dx = \int 1 dx + \text{const} \\ \implies \arctan(v(x)) = x + \text{const} &\implies v(x) = \tan(x+c) \end{aligned}$$

Durch  $v(0) = 1$  geht  $v: [0, \pi/4[ \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \tan(x + \pi/4)$  als einzige Lösung.

(2b) Diese Lösung explodiert noch schneller: Für  $x \nearrow \pi/4$  gilt  $v(x) \nearrow \infty$ .

Die hier benutzte **Rundungsregel** ist ebenso einfach wie genial: Wir können  $y'(x) = f(x, y(x))$  mit  $y(x_0) = y_0$  wie folgt eingrenzen.

1 Wir runden  $f$  und  $y_0$  geschickt ab zu  $f^\downarrow \leq f$  und  $y_0^\downarrow \leq y_0$  und lösen das leichtere Problem  $u(x) = f^\downarrow(x, u(x))$  mit  $u(x_0) = y_0^\downarrow$ .

2 Wir runden  $f$  und  $y_0$  geschickt auf zu  $f^\uparrow \geq f$  und  $y_0^\uparrow \geq y_0$  und lösen das leichtere Problem  $v(x) = f^\uparrow(x, v(x))$  mit  $v(x_0) = y_0^\uparrow$ .

Der folgende Satz M4c erfüllt unsere Hoffnung, denn es gilt  $u \leq y \leq v$ . Satz M4d erklärt alles nötige für die strikten Ungleichungen  $u < y < v$ .

Hier sind Geschick und Kreativität gefordert: Die gewählten Rundungen  $f^\downarrow \leq f \leq f^\uparrow$  sollen möglichst nahe bei  $f$  liegen, aber leichter lösbar sein.

**Aufgabe:** (4) Der Ansatz  $w(x) = \frac{1}{1+ax}$  liefert bessere Oberlösungen.

**Lösung:** (4) Wir finden  $w'(x) = aw(x)^2$ . Wir wünschen  $w(x) \geq y(x)$ . Hierzu genügt  $w'(x) \geq x^2 + w(x)^2$ , eingesetzt also  $(a-1)w(x)^2 \geq x^2$ . Wir nutzen  $w(x) \geq u(x) = 1/(1-x)$ , wollen also  $(a-1)/(1-x)^2 \geq x^2$ . Es genügt  $(a-1) \geq 1/16 \geq x^2(1-x)^2$ , wir finden so  $a = 17/16$ . Probe: Es gilt  $w'(x) = aw(x)^2 \geq x^2 + w(x)^2$ , dank M4c also  $w \geq y$ .

Wir betrachten ein Anfangswertproblem, wie üblich von der Form

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0.$$

**Satz M4c: Eingrenzung durch Unter/Oberlösungen**

Die Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \supseteq I \times K \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto f(x, y)$  sei stetig und in  $y$  stetig differenzierbar;  $I = [x_0, x_1]$  und  $K$  seien kompakte Intervalle. Seien  $y, u, v: I \rightarrow K$  differenzierbar, sodass für alle  $x \in I$  gilt:

- (a)  $y$  ist eine **Lösung** des AWP:  $y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0$
- (b)  $u$  ist eine **Unterlösung**:  $u'(x) \leq f(x, u(x)), \quad u(x_0) \leq y_0$
- (c)  $v$  ist eine **Oberlösung**:  $v'(x) \geq f(x, v(x)), \quad v(x_0) \geq y_0$

Dann gilt:  $u(x) \leq y(x) \leq v(x)$  für alle  $x \in I$

Alein aus (a,b) folgt bereits  $u \leq y$ , und mit  $u(x_0) < y_0$  sogar  $u < y$ .  
Alein aus (a,c) folgt bereits  $y \leq v$ , und mit  $v(x_0) > y_0$  sogar  $v > y$ .

😊 Der Satz ist bequem und intuitiv plausibel. Der Beweis ist trickreich.

**Beweis:** (1) Wir zeigen zunächst: Aus (b,c) und  $u \geq v$  folgt  $u = v$ .

Die Ableitung  $\partial f / \partial y$  ist stetig und  $I \times K \subseteq \mathbb{R}^2$  kompakt, also gilt eine Schranke  $\partial f / \partial y \leq M < \infty$ . Für jedes  $x \in I$  folgt dank  $u \geq v$  in  $K$  und Mittelwertsatz  $f(x, u) - f(x, v) = (\partial f / \partial y)(x, \zeta) \cdot (u - v) \leq M \cdot (u - v)$ . Die Hilfsfunktion  $\varphi(x) = [u(x) - v(x)] e^{-M(x-x_0)} \geq 0$  ist differenzierbar:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= [u'(x) - v'(x)] e^{-M(x-x_0)} - M [u(x) - v(x)] e^{-M(x-x_0)} \\ &\leq ([f(x, u(x)) - f(x, v(x))] - M [u(x) - v(x)]) e^{-M(x-x_0)} \leq 0 \end{aligned}$$

Es gilt  $u(x_0) = v(x_0)$ , also  $\varphi(x_0) = 0$ , sowie  $\varphi' \leq 0$ , also  $\varphi = 0$ .

(2) Mit (1) folgern wir die Eingrenzung  $u \leq y \leq v$ . Zunächst  $u \leq v$ :

Angenommen, die Ungleichung  $u \leq v$  gälte nicht auf ganz  $I = [x_0, x_1]$ . Dann gäbe es ein Intervall  $[a, b] \subseteq I$  mit  $u(a) = v(a)$  und  $u > v$  auf  $]a, b[$ . Mit (1) folgt aus  $u \geq v$  auf  $]a, b[$  aber  $u = v$  auf  $[a, b]$ , ein Widerspruch! Also gilt  $u \leq v$  auf ganz  $[x_0, x_1]$ . Hieraus folgt schließlich der Satz M4c: Statt  $(u, v)$  vergleichen wir nun  $(u, y)$  und  $(y, v)$  und erhalten  $u \leq y \leq v$ .

Satz M4c beinhaltet insbesondere die Eindeutigkeit der Lösung  $y$ . **M122**  
Ohne stetige Ableitung  $\partial f / \partial y$  gelten diese Aussagen nicht mehr! **M325**  
Setzen wir  $f$  nur als stetig voraus, so gilt immerhin noch folgendes:

**Satz M4d: Eingrenzung durch Unter/Oberlösungen**

Sei  $f: \mathbb{R}^2 \supseteq G \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $I = [x_0, x_1] \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $y, u, v: I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbare Funktionen mit Graph in  $G$ , sodass für alle  $x \in I$  gilt:

- (a)  $y$  ist eine **Lösung** des AWP:  $y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0$
- (b)  $u$  ist eine **strikte Unterlösung**:  $u'(x) < f(x, u(x)), \quad u(x_0) \leq y_0$
- (c)  $v$  ist eine **strikte Oberlösung**:  $v'(x) > f(x, v(x)), \quad v(x_0) \geq y_0$

Dann gilt:  $u(x) < y(x) < v(x)$  für alle  $x \in ]x_0, x_1[$

Alein aus (a,b) folgt bereits  $u < y$ . Allein aus (a,c) folgt bereits  $y < v$ .

In Satz M4c ist die Bedingung an  $f$  streng, aber die Ungleichungen schwach (in Voraussetzung und Schlussfolgerung). In Satz M4d ist die Bedingung an  $f$  schwach, aber alle Ungleichungen sind strikt. Das AWP kann hier mehrere Lösungen  $y$  haben, doch alle liegen zwischen  $u$  und  $v$ ! Für die qualitative Beschreibung von Lösungen sind diese Abschätzungen ungemein nützlich.

**Lemma M4E: Du musst steigen oder sinken. . .**

Sei  $g: \mathbb{R} \supseteq [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(a) = g(b) = 0$  differenzierbar in  $a$  bzw.  $b$ .

$$\begin{aligned} g'(a) > 0 &\not\Rightarrow g > 0 \text{ auf } ]a, a + \varepsilon[ & g'(b) < 0 &\not\Rightarrow g > 0 \text{ auf } ]b - \varepsilon, b[ \\ &\Downarrow \neq & &\Downarrow \neq \\ g'(a) \geq 0 &\Leftarrow g \geq 0 \text{ auf } [a, a + \varepsilon[ & g'(b) \leq 0 &\Leftarrow g \geq 0 \text{ auf } ]b - \varepsilon, b]. \end{aligned}$$

**Übung:** Rechnen Sie diese Implikationen nach: Nutzen Sie direkt den Differenzenquotienten! Die Umkehrungen gelten nicht: Gegenbeispiele!

**Beweis des Satzes:** Aus  $u(x_0) < y(x_0)$  folgt  $u < y$  auf  $[x_0, x_0 + \varepsilon[$ . Bei  $u(x_0) = y(x_0)$  nutzen wir das Lemma für  $g = y - u: [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Es gilt  $g(x_0) = 0$  und  $g'(x_0) > 0$ , also  $g > 0$  auf  $]x_0, x_0 + \varepsilon[$ , d.h.  $u < y$ .

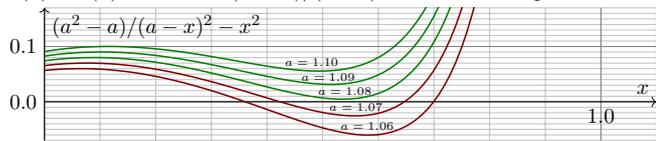
Wir zeigen  $u < y$  auf ganz  $]x_0, x_1[$ . Angenommen, dies gälte nicht. Dann sei  $\xi := \inf\{x \in [x_0 + \varepsilon, x_1] \mid u(x) \geq y(x)\}$ . Damit gilt  $u < y$  auf  $]x_0, \xi[$  und  $u(\xi) = y(\xi)$ . Das Lemma zeigt  $u'(\xi) \geq y'(\xi)$ . Nach (a,b) gilt aber  $u'(\xi) < f(\xi, u(\xi)) = f(\xi, y(\xi)) = y'(\xi)$ , ein Widerspruch! Wir schließen, dass  $u < y$  auf  $]x_0, x_1[$  gelten muss. Ebenso folgt die Ungleichung  $y < v$ .

Wir untersuchen das AWP  $y(0) = 1$  und  $y'(x) = y(x)^2 - x^2$  für  $x \geq 0$ .

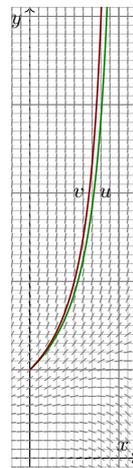
- Aufgabe:** (1) Gibt es eine eindeutige maximale Lösung  $y: [0, x_1[ \rightarrow \mathbb{R}$ ? Existiert sie zumindest für  $0 \leq x < 1$ ? Explodiert sie in endlicher Zeit?  
(2) Vergleichen Sie mit dem AWP  $v(0) = 1$  und  $v'(x) = v(x)^2$  für  $x \geq 0$ .  
(3) Gilt  $y(x) \geq u(x) := a/(a-x)$ ? Probieren Sie  $a = 1.07$  und  $a = 1.08$ .

**Lösung:** (1) Ja, dank  $\exists \& E$ -Satz M1c. (2) Es gilt  $f^\dagger(x, y) := y^2 - f(x, y)$ . Die Oberlösung  $v(x) = 1/(1-x)$  zeigt  $y(x) \leq v(x)$  dank Satz M4c. Die Lösung  $y$  existiert demnach mindestens auf dem Intervall  $[0, 1[$ .

(3) Für  $u(x) = a/(a-x)$  gilt  $u(0) = 1$  und  $u'(x) = a/(a-x)^2$ . Wir wollen  $u'(x) \leq u(x)^2 - x^2$ , also  $(a^2 - a)/(a-x)^2 - x^2 \geq 0$ . Dies gilt für  $a \geq 1.08$ :



Somit ist  $u(x) = 1.08/(1.08-x)$  eine Unterlösung. Dank Satz M4c gilt  $y(x) \geq u(x)$ . Die Lösung  $y$  explodiert in endlicher Zeit, bei  $x_1 \in [1, 1.08]$ .



Das AWP  $y'(x) = y(x)^2 - x^2, y(0) = 1$  können wir nicht elementar lösen, d.h. explizit als geschlossene Formel.

Satz M1c garantiert zunächst Existenz und Eindeutigkeit: Es gibt genau eine maximale Lösung  $y: [0, x_1[ \rightarrow \mathbb{R}$ . **M122**

Das ist schön und gut. Wie berechnen wir genaueres?

Satz M4c erlaubt den Vergleich der (noch unbekannt) Lösung  $y$  mit Unterlösungen  $u$  und Oberlösungen  $v$ :

😊 Wir erhalten ohne numerische Mühe die Eingrenzung

$$\frac{1.08}{1.08-x} \leq y(x) \leq \frac{1}{1-x}.$$

Satz M4d garantiert die strikten Ungleichungen für  $x > 0$ .

Wir finden Polstellen in  $1 \leq x_1 \leq 1.08$ : Unsere Lösung  $y$  lebt also mindestens bis 1, jedoch höchstens bis 1.08.

😊 In vielen Fällen genügt diese grobe Information.

Andernfalls unternehmen wir eine numerische Näherung.

**Aufgabe:** Sei  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, aber nicht notwendig differenzierbar.

Wir untersuchen das AWP  $y(x_0) = y_0$  und  $y'(x) = f(x, y(x))$  für  $x \geq x_0$  und wollen das Wachstum bequem abschätzen: Es gelte  $|y_0| \leq c$  und eine in  $|y|$  lineare Schranke  $|f(x, y)| \leq a(x)|y| + b(x)$  mit  $a, b \geq 0$  stetig.

- (1) Lösen Sie zunächst  $u'(x) = a(x)u(x) + b(x)$  mit  $u(x_0) = c$ , speziell
- (2) für  $a, b \geq 0$  konstant. Sind die Lösungen  $u$  eindeutig? (3) Existieren sie für alle Zeit  $x \geq x_0$ ? Oder enden sie vorzeitig in einer Polstelle?
- (4) Welche Schranken folgen für  $y$ ? (5) Sind die Lösungen  $y$  eindeutig?
- (6) Existieren sie für alle Zeit  $x \geq x_0$ ? Oder enden sie evtl. vorzeitig?

**Lösung:** (1) Wir runden auf: Zur linearen DG  $u'(x) = a(x)u(x) + b(x)$  mit  $u(x_0) = c$  ist die Lösungen eindeutig und explizit bekannt (M2E):

$$u(x) = e^{A(x)} \left[ \int_{t=x_0}^x e^{-A(t)} b(t) dt + c \right] \geq 0 \quad \text{mit} \quad A(x) = \int_{t=x_0}^x a(t) dt$$

(2) Speziell für  $a, b$  konstant gilt  $A(x) = a(x-x_0)$  und somit

$$u(x) = e^{a(x-x_0)} \left[ \int_{t=x_0}^x e^{-a(t-x_0)} b dt + c \right] = e^{a(x-x_0)} (c + b/a) - b/a.$$

Im Sonderfall  $a = 0$  erhalten wir noch einfacher  $u(x) = b(x-x_0) + c$ .

(3) Die Lösung  $u$  existiert für alle Zeit  $x \geq x_0$ . Sie hat keine Polstellen!

(4) Wir zeigen  $y(x) \leq u(x)$  für alle  $x \geq x_0$ . Für  $x \geq x_0$  mit  $y(x) \leq 0$  ist dies klar, denn  $u(x) \geq 0$ . Für  $x \geq x_0$  mit  $y(x) \geq 0$  nutzen wir Satz M4c:

Es gilt  $y'(x) = f(x, y(x)) \leq a(x)y(x) + b(x)$ . Es folgt  $y(x) \leq u(x)$ , denn  $y$  ist eine Unterlösung zu  $u$ . Genauer sei  $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots$  mit  $y|_{[x_0, x_1]} \geq 0$  und  $y|_{[x_1, x_2]} < 0$  und  $y|_{[x_2, x_3]} \geq 0$  etc. Auf  $[x_0, x_1]$  nutzen wir  $y(x_0) \leq c = u(x_0)$ . Auf  $[x_2, x_3]$  nutzen wir  $y(x_2) = 0 \leq u(x_2)$ , usw.

Hieraus folgt  $y(x) \leq u(x)$  für alle  $x \geq x_0$ . Wörtlich dieselbe Rechnung für  $-y$  und  $-f$  statt  $y$  und  $f$  zeigt  $-y \leq u$ . Somit gilt insgesamt  $|y| \leq u$ .

(5) Nein, Lösungen sind im Allgemeinen nicht eindeutig! **M123 M325**  
Wir verlangen hier nur, dass  $f$  stetig ist; um den Eindeutigkeitsatz M1c anwenden zu können, müsste  $f$  zudem in  $y$  stetig differenzierbar sein.

(6) Jede Lösung  $y$  lässt sich für alle Zeit fortsetzen zu  $y: [x_0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ .

😊 Die Ungleichung  $|y| \leq u$  liefert eine bequeme explizite Schranke und garantiert insbesondere, dass  $y$  keine Polstellen entwickelt.

### Fluchtgeschwindigkeit und Flugbahn eines Geschosses

M457  
Übung

- Aufgabe:** (1) Formulieren Sie die radiale Flugbewegung  $r: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  einer Punktmasse  $m$  im Schwerfeld eines Planeten mit Masse  $M$ .  
 (2) Multiplizieren Sie mit  $m\dot{r}(t)$ , integrieren Sie zur Energiegleichung.  
 (3) Was ist die Fluchtgeschwindigkeit  $v_F$ ? Im Spezialfall der Erde?  
 (4) Wie verläuft in diesem Grenzfall die Flugbahn  $r(t)$ ?

**Lösung:** (1) Die Bewegungsgleichung ist nach Newton

$$\ddot{r}(t) = -\gamma M/r(t)^2, \quad r(0) = R > 0, \quad \dot{r}(0) = v_0 > 0.$$

Wie üblich ist hier  $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$  die Gravitationskonstante.

Newtons Bewegungsgesetz (in seiner allgemeinen Form) ist Grundlage der Himmelsmechanik. Im Allgemeinen benötigt man für solche DG numerische Methoden. In unserem Spezialfall (4) jedoch können wir sie exakt lösen! Das ist bemerkenswert, und diese Technik sollten Sie kennen.

☺ Das Zweikörperproblem lässt sich exakt lösen: Kepler um 1600 empirisch, Newton 1687 mathematisch, Bahnen sind Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln. Es ist oft eine nützliche Näherung.

⚠ Für drei und mehr Körper lässt sich die Lösung nicht mehr elementar formulieren, die Differentialgleichung kann im Allgemeinen nur noch numerisch gelöst werden. ☹

### Fluchtgeschwindigkeit und Flugbahn eines Geschosses

M459  
Übung

- (4) Im Grenzfall  $E = 0$  vereinfacht sich unsere Differentialgleichung zu

$$\dot{r}(t) = \sqrt{2\gamma M} r(t)^{-1/2}, \quad r(0) = R.$$

Diese DG lösen wir durch Trennung der Variablen und Integration:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\tau=0}^t \dot{r}(\tau) r(\tau)^{1/2} d\tau &= \int_{\tau=0}^t \sqrt{2\gamma M} d\tau \\ \Rightarrow \left[ \frac{2}{3} r(\tau)^{3/2} \right]_{\tau=0}^t &= \sqrt{2\gamma M} \cdot t \\ \Rightarrow r(t)^{3/2} - R^{3/2} &= \frac{3}{2} \sqrt{2\gamma M} \cdot t \\ \Rightarrow r(t) &= \left( \frac{3v_F}{2} \cdot t + R \right)^{2/3} R^{1/3} \end{aligned}$$

☺ Diese Funktion löst die ursprüngliche Bewegungsgleichung mit den AW  $r(0) = R$  und  $\dot{r}(0) = v_F$  sowie  $r(t) \rightarrow \infty$  und  $\dot{r}(t) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ . Die Geschwindigkeit  $v_F$  genügt also tatsächlich, um dem Schwerfeld der Masse  $M$  zu entfliehen! Somit ist  $v_F$  die Fluchtgeschwindigkeit.

### Die Raketengrundgleichung nach Ziolkowsky

M461  
Übung

- Aufgabe:** (1) Eine Rakete mit Masse  $m(t)$  und Geschwindigkeit  $v(t)$  wird angetrieben durch konstanten Massenausstoß  $\mu = -\dot{m} = \dots \text{kg/s}$  mit Geschwindigkeit  $v_b = 3500 \text{m/s}$ . Die Rakete bestehe anfangs zu 99% aus Brennstoff. Was ist die Endgeschwindigkeit (ohne weitere Kräfte)?

**Lösung:** (1) Die Impulserhaltung ergibt folgende Bilanz:

$$0 = dp = \underbrace{d(mv)}_{\text{Rakete}} - \underbrace{(dm)(v - v_b)}_{\text{ausgestoßene Masse}} = m \cdot dv + dm \cdot v_b$$

Division durch  $dt$ , Trennung der Variablen, Integration bis Brennschluss:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{v}(t) &= -v_b \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} \\ \Rightarrow \int_{t=t_0}^{t_1} \dot{v}(t) dt &= -v_b \int_{t=t_0}^{t_1} \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} dt \\ \Rightarrow v(t_1) - v(t_0) &= -v_b \left[ \ln m(t) \right]_{t=t_0}^{t_1} = v_b \ln \frac{m(t_0)}{m(t_1)} \end{aligned}$$

Zahlenbeispiel  $= 3.5 \text{km/s} \cdot \ln(100) \approx 16.1 \text{km/s}$

### Vision, Berechnung, Realisierung

M463  
Übung

Konstantin Ziolkowski (1857–1935) arbeitete als Mathematiklehrer, seine wissenschaftlichen Studien veröffentlichte er als Amateur. Aufgrund seiner Berechnungen erkannte er, dass damals mögliche Feststoffraketen zum Erreichen des Weltraums zu schwach wären, und schlug zum Antrieb Flüssigtreibstoff vor (Wasserstoff, Sauerstoff, Kohlenwasserstoffe). Er veröffentlichte 1903 die Raketengrundgleichung und leitete daraus das Prinzip der Mehrstufenrakete ab.

Zahlenbeispiel für eine zweistufige Rakete: erste Stufe voll 50t, leer 5t, zweite Stufe voll 10t, leer 1t, Nutzlast 1t, Startgeschwindigkeit  $v(t_0) = 0$ , Endgeschwindigkeit  $v_{\text{end}} = v(t_1)$ :

$$\frac{v_{\text{end}}}{v_b} = \ln \frac{50 + 10 + 1}{5 + 10 + 1} + \ln \frac{10 + 1}{1 + 1} \approx 1.34 + 1.70 = 3.03$$

Zum Vergleich eine einstufige Rakete mit gleicher Treibstoff- und Strukturmasse:

$$\frac{v_{\text{end}}}{v_b} = \ln \frac{50 + 10 + 1}{5 + 1 + 1} \approx 2.16$$

Bei sonst gleichen Daten erreicht die einstufige Rakete also eine geringere Endgeschwindigkeit. Das ist anschaulich plausibel, da mehr (überflüssige) Strukturmasse beschleunigt werden muss. Die Raketengrundgleichung und die abgeleitete Rechnung präzisieren dieses Phänomen.

Die Raketengrundgleichung folgt aus Impulserhaltung und einer einfachen Differentialgleichung. Sie ist grundlegend für Trägerraketen, da hier die Treibstoffmasse groß ist, und die Gesamtmasse während des Fluges stark abnimmt. Ingegnen ist für Orbiter wie den Mars- oder Venus-Express (Seite W221) der Verlust der Treibstoffmasse vernachlässigbar im Vergleich zur Gesamtmasse.

### Fluchtgeschwindigkeit und Flugbahn eines Geschosses

M458  
Übung

- (2) Wir multiplizieren die DG mit  $m\dot{r}(t)$  und erhalten

$$m\dot{r}(t)\ddot{r}(t) + \frac{\gamma m M \dot{r}(t)}{r(t)^2} = 0.$$

Durch Integration von 0 bis  $t$  erhalten wir die äquivalente Gleichung

$$\frac{1}{2} m \dot{r}(t)^2 - \frac{\gamma m M}{r(t)} = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{\gamma m M}{R} =: E.$$

- ☺ Die Summe aus kinetischer und potentieller Energie ist konstant! Das Bewegungsgesetz impliziert Energieerhaltung (und umgekehrt).  
 (3) Wir suchen die Geschwindigkeit  $v_0$  zur Flucht  $r(t) \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow \infty$ . Notwendig hierzu ist nach obiger Energieformel  $E \geq 0$ , also

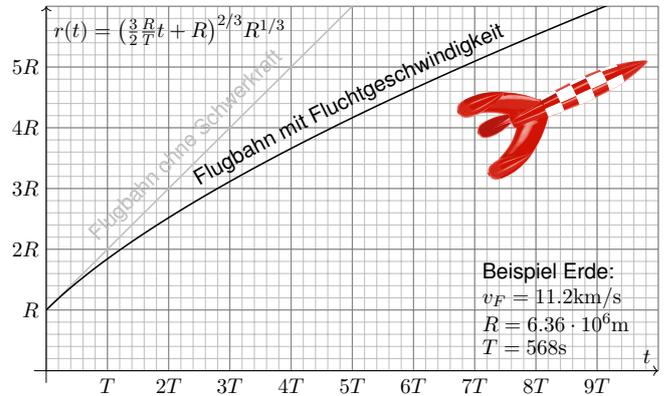
$$v_0 \geq v_F := \sqrt{2\gamma M/R}$$

- Beispiel Erde:  $M = 5.97 \cdot 10^{24} \text{kg}$ ,  $R = 6.36 \cdot 10^6 \text{m}$ ,  $v_F = 11.2 \text{km/s}$ .  
 ☺ Dies ist die berühmte Fluchtgeschwindigkeit von der Erdoberfläche. Zum Vergleich: 11 200m/s ist etwa 33-fache Schallgeschwindigkeit.

### Fluchtgeschwindigkeit und Flugbahn eines Geschosses

M460  
Übung

Skizze der gefundenen Lösung (in natürlichen Einheiten):



### Die Raketengrundgleichung nach Ziolkowsky

M462  
Übung

- Aufgabe:** (2) Bei welcher Brenndauer kann man so der Erde entfliehen? (Senkrechter Start, keine Luftreibung, keine Zentrifugalkraft etc.)

**Lösung:** Von (1) subtrahieren wir die Erdbeschleunigung  $g \approx 9.81 \text{m/s}^2$ :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{v}(t) &= -v_b \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} - g \\ \Rightarrow v(t_1) - v(t_0) &= v_b \ln \frac{m(t_0)}{m(t_1)} - g(t_1 - t_0) \end{aligned}$$

Bei vertikalem Start im Schwerfeld der Erde addiert sich der freie Fall. Zur Vereinfachung nehmen wir geringe Flughöhe an, somit konstantes  $g$ . (In Wirklichkeit nimmt die Erdbeschleunigung  $g(R/R)^{-2}$  deutlich ab; leider ist die genauere Gleichung auch mühsamer zu integrieren...)

Ich begnüge mich hier mit einer groben **Überschlagsrechnung**.

Hinreichend kurze Brenndauer  $T = t_1 - t_0$  zur Flucht:

$$gT < 16.1 \text{km/s} - 11.2 \text{km/s} \approx 4900 \text{m/s}$$

$$\Rightarrow T < 500 \text{s}$$

### Vision, Berechnung, Realisierung

M464  
Übung

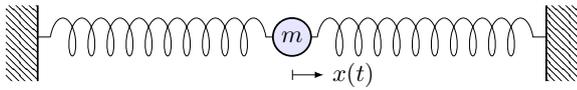
An der Geschichte der Raumfahrt sehen wir exemplarisch eine einhundertjährige Entwicklung von futuristischer Vision über die mathematische Theorie bis hin zur technischen Realisierung. Ich betone nochmals: Ohne Vision keine Theorie, ohne Theorie keine erfolgreiche Anwendung.

Jules Verne (1828–1905) war ein französischer Schriftsteller und ein Begründer der Science-Fiction-Literatur. Die Abenteuer seiner Helden thematisieren den rasanten Fortschritt und neue technische Möglichkeiten seiner Epoche und nehmen viele zukünftige Entwicklungen vorweg: *Cinq semaines en ballon* (Fünf Wochen im Ballon, 1863), *De la Terre à la Lune* (Von der Erde zum Mond, 1865), *Autour de la Lune* (Reise um den Mond, 1869), *Vingt mille lieues sous les mers* (Zwanzigtausend Meilen unter dem Meer, 1869). Sein größter Erfolg war der Roman *Le Tour du monde en 80 jours* (In 80 Tagen um die Welt, 1872), der bis heute populär ist.

Konstantin Ziolkowski (1857–1935) war ein russischer Mathematiker und Physiker, Amateur und Wegbereiter der Raumfahrt. Er vollzog den Schritt von *Fiction* zu *Science*: Angeregt durch Jules Verne Erzählungen, schrieb Ziolkowski selbst Geschichten über interplanetare Raumfahrt. Dazu untersuchte er zunehmend die physikalisch-technischen Probleme von Raumflügen, lang bevor sie realisiert werden konnten. Er befasste sich mit Fragen des Betriebs von Raumstationen, der industriellen Nutzung des Weltraums, und schlug den Weltraumlift vor, um Objekte möglichst günstig direkt in den geostationären Orbit zu befördern. Er hat jedoch nie eine Rakete gebaut und schien bei vielen seiner Theorien nicht davon auszugehen, dass sie jemals umgesetzt würden. Sein technischer Weitblick wurde erst spät gegen Ende seines Lebens erkannt und inspirierte nachfolgende Wissenschaftler wie Hermann Oberth (1894–1989) und Werner von Braun (1912–1977). Den Beginn der Raumfahrt (Sputnik 1957, Juri Gagarin 1961) erlebte er nicht.

Kapitel N

Differentialgleichungen höherer Ordnung



Une loi (physique), pour nous, [...] est une relation constante entre le phénomène d'aujourd'hui et celui de demain; en un mot, c'est une équation différentielle.

Henri Poincaré (1854–1912), *La valeur de la science* (1905)

Inhalt dieses Kapitels N

- 1 Harmonische Schwingungen
  - Freie harmonische Schwingung
  - Erzwungene harmonische Schwingung
- 2 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten
  - Charakteristisches Polynom und Fundamentalsystem
  - Lösungsansatz für spezielle rechte Seiten  $r(x) e^{\mu x}$
  - Greensche Lösungsformel für beliebige rechte Seiten
- 3 Lineare Differentialgleichungen mit stetigen Koeffizienten
  - Fundamentalmatrix und Variation der Konstanten
  - Lösung durch Potenzreihenansatz
- 4 Die Euler–Lagrange–Differentialgleichung
  - Optimierung durch Variationsrechnung
  - Lösung des Brachistochrone-Problems
- 5 Fazit: Differentialgleichungen höherer Ordnung
  - Zusammenfassung und Verständnisfragen
  - Weitere Aufgaben und Methodenvergleich

Einleitung und Überblick

Im vorigen Kapitel haben wir Differentialgleichungen  $y'(x) = f(x, y(x))$  erster Ordnung in einer Dimension kennen und geschickt lösen gelernt. Unsere Techniken wollen wir nun auf DG **höherer Ordnung** erweitern:

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

Wichtig und noch gut lösbar sind **lineare Differentialgleichungen**:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x)$$

Im Falle  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$  haben wir **konstante Koeffizienten**.

Für lineare DG sind zwei strukturelle Aspekte grundlegend (Satz N3A):

- Die Lösungsmenge einer linearen Differentialgleichung  $Ly = b$  ist immer ein **Vektorraum** ( $b = 0$ ) bzw. ein **affiner Raum** ( $b \neq 0$ ).
- Dieser Raum hat immer **Dimension  $n$** : Dies folgt aus Existenz und Eindeutigkeit der Lösung zu gegebenen Anfangsdaten (N3A).

Das strukturiert und vereinfacht das Problem, alle Lösungen zu finden! Die lineare Struktur war schon für lineare DG erster Ordnung sichtbar, doch erst hier für lineare DG höherer Ordnung spielt die Lineare Algebra eine zentrale Rolle und entfaltet ihre ordnende Kraft in voller Schönheit.

Einleitung und Überblick

Im nächsten Kapitel werden wir allgemeiner mehrdimensionale, gekoppelte Differentialgleichungssysteme untersuchen und lösen.

Jede (lineare) Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung ist äquivalent zu einem (linearen)  $n$ -dimensionalen DGS-System erster Ordnung. Somit können wir alle Techniken des nächsten Kapitels anwenden!

Theoretisch ist damit bereits alles geklärt. Da aber DG höherer Ordnung in der Praxis häufig auftreten, wollen wir hier schon die grundlegenden Rechentechniken möglichst anwendungsfreundlich ausarbeiten.

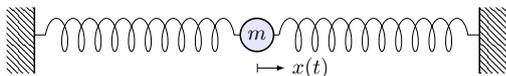
Für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten gelingt uns dies vollständig. Dieses Kapitel präsentiert hierzu eine Handvoll erfolgreicher Ansätze und illustriert diese durch zahlreiche Beispiele.

Wann wie welcher Ansatz zum Ziel führt, erklärt Ihnen die Theorie! Um die unzähligen Beispiele und alle möglichen Komplikationen zu verstehen, sollten Sie daher unbedingt die Grundlagen beherrschen.

Für Vertiefung und zahlreiche schöne Anwendungsbeispiele siehe H. Heuser: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Vieweg, 6. Aufl. 2009

Beispiel: mechanische Schwingung

Schwingung einer Masse an einer Feder:



Zeit  $t \in \mathbb{R}$ , Auslenkung  $x(t)$  aus Ruhelage, Rückstellkraft  $F_1 = -kx$ , zusätzlich noch Reibung / viskoser Strömungswiderstand  $F_2 = -c\dot{x}$ .

Newtons Bewegungsgesetz  $m\ddot{x} = F_1 + F_2$ , also  $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ .

Dies führt zu einer **linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung**

$$\ddot{x}(t) + 2\delta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

mit konstanten Koeffizienten  $\delta = c/2m \geq 0$  und  $\omega_0^2 = k/m$ ,  $\omega_0 \geq 0$ .

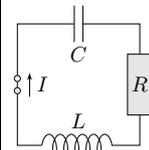
Bei äußerer Anregung durch eine Kraft  $F(t) = m f(t)$  gilt:

$$\ddot{x}(t) + 2\delta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t)$$

Allgemein suchen wir alle möglichen Lösungen  $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: t \mapsto x(t)$ , speziell die Lösung  $x$  zu vorgegebenen Anfangswerten  $x(t_0)$  und  $\dot{x}(t_0)$ .

Beispiel: elektrischer Schwingkreis

Diese Differentialgleichung begegnet uns in sehr vielen Situationen. Sie ist daher grundlegend wichtig in Naturwissenschaft und Technik.



Elektrischer Schwingkreis (RLC), Radioempfänger:

Beziehungen zwischen Strom  $I$  und Spannung  $U$ :

- Ohmscher Widerstand:  $U_R = RI$ ,
- Selbstinduktivität der Spule:  $U_L = L\dot{I}$ ,
- Kapazität des Kondensators:  $I = C\dot{U}_C$ .

In Reihe summieren sich diese Spannungen zu  $U_L + U_R + U_C = \text{const.}$  Die Ableitung ergibt  $\dot{U}_L + \dot{U}_R + \dot{U}_C = 0$ , also  $L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = 0$ .

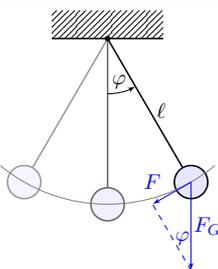
Dies führt zur selben **Differentialgleichung zweiter Ordnung**

$$\ddot{x}(t) + 2\delta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

mit  $x(t) = I(t)$  sowie  $\delta = \frac{R}{2L}$  und  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ . Bei äußerer Anregung gilt:

$$\ddot{x}(t) + 2\delta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t)$$

Beispiel: das mathematische Pendel



Die Rückstellkraft ist hier nicht-linear:

$$F(t) = -m \cdot g \cdot \sin \varphi(t)$$

- $m$  = Masse des Pendelkörpers
- $g = 9.81 \text{m/s}^2$  Erdbeschleunigung
- $F_G = mg$  Gravitationskraft zur Masse  $m$
- $\ell$  = Länge des Pendelstabes
- $\varphi(t)$  = Winkel auslenkung
- $\ell \varphi(t)$  = Auslenkung

Newtons Bewegungsgesetz  $F(t) = m \ell \ddot{\varphi}(t)$  führt zu

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{\ell} \sin \varphi(t).$$

Anders als vorige ist dies eine **nicht-lineare Differentialgleichung**. Gegeben sind die anfängliche Position  $\varphi(0)$  und Geschwindigkeit  $\dot{\varphi}(0)$ . Fragen: Wie sieht die Trajektorie aus? Wie lang dauert eine Periode?

Beispiel: Pendel bei kleinen Amplituden

Wir vereinfachen etwas: punktförmige Masse des Pendelkörpers, vernachlässigbare Masse des Stabes, reibungsfreie Aufhängung, etc. Für kleine Auslenkungen gilt  $\sin(\varphi) \approx \varphi$ . (Faustregel für  $|\varphi| < 5^\circ$ ) Dies führt uns zur **linearisierten Differentialgleichung**:

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{\ell} \varphi(t)$$

Diese Differentialgleichung ist viel einfacher, denn sie ist linear in  $\varphi$ :

$$\ddot{\varphi}(t) = -\omega^2 \varphi(t) \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Dies ist die Bewegungsgleichung eines **harmonischen Oszillators**:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t + \alpha), \quad \dot{\varphi}(t) = -\varphi_0 \omega \sin(\omega t + \alpha).$$

Für kleine Auslenkungen ist demnach die Periodendauer  $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ . Die Anfangsdaten bestimmen die Auslenkung  $\varphi_0$  und die Phase  $\alpha$ .

Für große Auslenkungen brauchen wir eine genauere Rechnung! Die Lösung ist schwieriger und wird im nächsten Kapitel diskutiert. [O133](#)

**Aufgabe:** Finden Sie alle Lösungen  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  der Differentialgleichung

$$\ddot{u}(t) + 2\delta \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0.$$

Wir nennen dies die Gleichung des **harmonischen Oszillators** mit **Dämpfung**  $\delta \geq 0$  und **ungedämpfter Eigenfrequenz**  $\omega_0 > 0$ .

Dies ist eine lineare DG zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. In diesem einfachen aber wichtigen Spezialfall zeigen sich bereits die allgemeinen Techniken dieses Kapitels, die wir anschließend ausführen.

**Lösung:** Der Exponentialansatz  $u(t) = e^{\lambda t}$  führt zur char. Gleichung

$$(\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2) e^{\lambda t} = 0 \iff \lambda = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \in \mathbb{C}.$$

Je nach Diskriminante beobachten wir verschiedene Reaktionen:  
 $\delta < \omega_0$ : **schwache Dämpfung**, zwei komplex-konjugierte Nullstellen  
 $\delta > \omega_0$ : **starke Dämpfung**, zwei reelle Nullstellen  $\lambda_1 < -\delta < \lambda_2 < 0$   
 $\delta = \omega_0$ : **kritische Dämpfung**, doppelte reelle Nullstelle  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$

Schwache Dämpfung:  $\delta < \omega_0$

Im Fall  $0 < \delta < \omega_0$  gibt es **zwei komplex-konjugierte Nullstellen**

$$\lambda_{1/2} = -\delta \pm i\omega \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad 0 < \omega \leq \omega_0.$$

Die komplexen Lösungen  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  der Differentialgleichung sind

$$u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{mit} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

😊 Diese Lösungen bilden einen zweidimensionalen  $\mathbb{C}$ -Vektorraum. Der Körper  $\mathbb{C}$  vereinfacht die Rechnung. Physikalische Anwendungen fordern jedoch reelle Lösungen. Dazu rechnen wir die **komplexe Basis**  $u_{1/2} = e^{-\delta t \pm i\omega t} = v_1 \pm i v_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  um in die **reelle Basis**  $v_{1/2}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $v_1 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) = e^{-\delta t} \cos(\omega t)$  und  $v_2 = \frac{1}{2i}(u_1 - u_2) = e^{-\delta t} \sin(\omega t)$ . Die reellen Lösungen  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  der Differentialgleichung sind demnach

$$u(t) = e^{-\delta t} [\alpha_1 \cos(\omega t) + \alpha_2 \sin(\omega t)] \quad \text{mit} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

😊 Diese Lösungen bilden einen zweidimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.  
 😊 Für  $\delta = 0$  haben wir die **ungedämpfte Schwingung** mit  $\omega = \omega_0$ ,

Physikalische Anwendungen fordern meist **reelle Lösungen**  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Oft vereinfachen sich Rechnungen und die Formulierung von Sätzen, wenn wir allgemeiner auch **komplexe Lösungen**  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  zulassen und anschließend in reelle Lösungen umrechnen, falls gewünscht.

Die Bewegung  $u(t)$  wird durch die Startwerte  $u(0)$  und  $\dot{u}(0)$  festgelegt. Die Anfangswerte sind beliebig, wir haben daher **zwei Freiheitsgrade**.

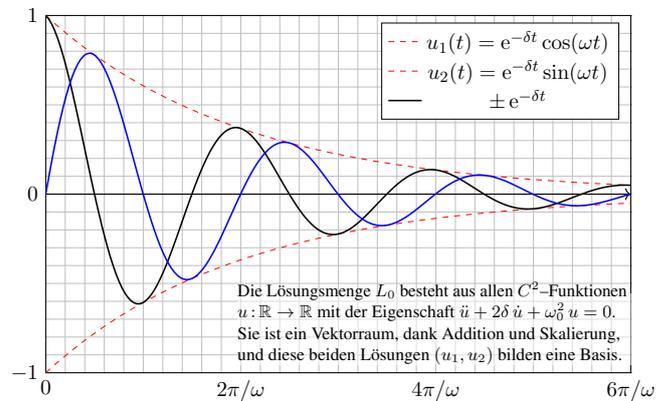
Als Lösungsraum erwarten wir einen **Vektorraum der Dimension 2**: Diese mathematische Aussage formulieren wir später als Satz N3A. Im nächsten Kapitel werden wir sie verallgemeinern und beweisen.

Das **charakteristische Polynom** dieser DG ist  $p(x) = x^2 + 2\delta x + \omega_0^2$ . Die Lösungsformel beschert uns die Nullstellen:  $\lambda_{1/2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$  und so **linear unabhängige Lösungen**  $u_1(t) = e^{\lambda_1 t}$  und  $u_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ . Hierbei unterscheiden wir den komplexen Fall  $\delta < \omega_0$  und den reellen Fall  $\delta > \omega_0$ ; anschließend lösen wir auch den kritischen Fall  $\delta = \omega_0$ .

Wir diskutieren zunächst die homogenen Gleichung: rechte Seite  $f = 0$ , anschließend eine harmonische Anregung der Form  $f(t) = \cos(\omega_1 t)$ .

Schwache Dämpfung:  $\delta < \omega_0$

Die Masse wird durch die Federkraft zur Ruhelage zurückgezogen, aufgrund ihrer Trägheit schwingt die Masse jedoch darüber hinaus.



Starke Dämpfung:  $\delta > \omega_0$

Im Fall  $\delta > \omega_0$  gibt es **zwei reelle Nullstellen**  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ , nämlich

$$\lambda_1 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} < -\delta < \lambda_2 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} < 0.$$

Hierzu gehören die Lösungen  $e^{\lambda_1 t}$  und  $e^{\lambda_2 t}$  als Eigenfunktionen. Die allgemeine Lösung erhalten wir durch Linearkombination:

$$u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

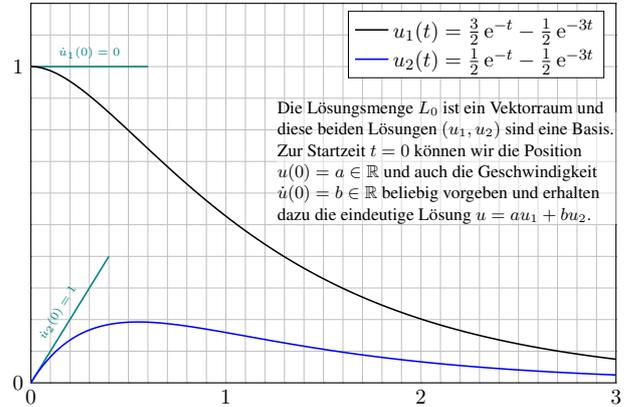
😊 Diese Lösungen bilden einen zweidimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum: Für reelle Lösungen  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dürfen wir die Konstanten  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  frei wählen, für komplexe Lösungen  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  entsprechend  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ .

**Zahlenbeispiel:** Die Differentialgleichung  $\ddot{u}(t) + 4\dot{u}(t) + 3u(t) = 0$  führt zur Gleichung  $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$ , also  $\lambda_1 = -3$  und  $\lambda_2 = -1$ .

Die DG hat als reelle Lösungen  $u(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-t}$  mit  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Anfangswerte  $u(0) = 1$  und  $\dot{u}(0) = 0$  führen zu  $u(t) = \frac{3}{2} e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-3t}$ . Anfangswerte  $u(0) = 0$  und  $\dot{u}(0) = 1$  führen zu  $u(t) = \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-3t}$ .

Starke Dämpfung:  $\delta > \omega_0$

Dies nennt man auch den **Kriechfall**: Es gibt keine Schwingung, das System kriecht nach einer Auslenkung zur Ruhelage zurück.



Kritische Dämpfung:  $\delta = \omega_0$

Im Fall  $\delta = \omega_0$  gibt es eine **doppelte reelle Nullstelle**  $\lambda = -\delta$ .

Wir finden die Lösung  $e^{\lambda t}$  und zusätzlich  $t e^{\lambda t}$  als Hauptfunktionen. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist in diesem Fall:

$$u(t) = e^{\lambda t} (c_1 + c_2 t)$$

😊 Diese Lösungen bilden einen zweidimensionalen Vektorraum: Für reelle Lösungen  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dürfen wir die Konstanten  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  frei wählen, für komplexe Lösungen  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  entsprechend  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ .

**Nachrechnen:** Zu lösen ist hier  $\ddot{u}(t) - 2\lambda \dot{u}(t) + \lambda^2 u(t) = 0$ . Linearfaktorzerlegung  $(\partial_t - \lambda)(\partial_t - \lambda) u(t) = 0$ . Einsetzen:

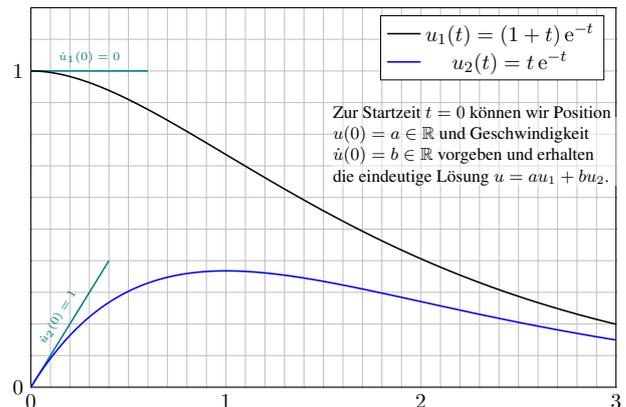
$$(\partial_t - \lambda)(\partial_t - \lambda) [e^{\lambda t}] = (\partial_t - \lambda) [\lambda e^{\lambda t} - \lambda e^{\lambda t}] = (\partial_t - \lambda) [0] = 0$$

$$(\partial_t - \lambda)(\partial_t - \lambda) [t e^{\lambda t}] = (\partial_t - \lambda) [e^{\lambda t} + \lambda t e^{\lambda t} - \lambda t e^{\lambda t}] = (\partial_t - \lambda) [e^{\lambda t}] = 0$$

😊 Damit sind zwei linear unabhängige Lösungen gefunden.

Kritische Dämpfung:  $\delta = \omega_0$

Dies nennt man den **aperiodischen Grenzfall**: Er liegt genau auf der Grenze zwischen gedämpfter Schwingung und Kriechfall.



**Aufgabe:** Bei Anregung durch  $f(t) = a \cos(\omega_1 t)$  ist als DG zu lösen

$$\ddot{u}(t) + 2\delta \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = a \cos(\omega_1 t).$$

Gesucht ist eine reelle Lösung der Form  $u(t) = A \cos(\omega t - \varphi)$ , also Frequenz  $\omega \in \mathbb{R}$ , Amplitude  $A \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  und Phase  $\varphi \in \mathbb{R}$ .

**Lösung:** Dies ist der Realteil der komplexen Differentialgleichung

$$\ddot{z}(t) + 2\delta \dot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = a e^{i\omega_1 t}.$$

Der Exponentialansatz  $z(t) = c e^{i\omega t}$  führt uns zur Gleichung

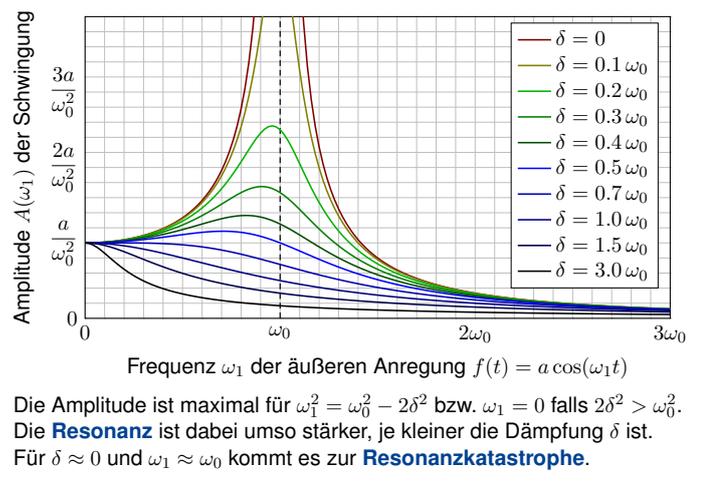
$$[-\omega^2 + 2\delta i\omega + \omega_0^2] c e^{i\omega t} \stackrel{!}{=} a e^{i\omega_1 t}.$$

Damit finden wir  $\omega = \omega_1$  und  $c = a / (\omega_0^2 - \omega_1^2 + 2\delta i\omega_1) = A e^{-i\varphi}$ .

😊 Das System reagiert mit derselben Frequenz wie die Anregung! In der Polardarstellung  $c = A e^{-i\varphi}$  erhalten wir  $z(t) = A e^{i(\omega_1 t - \varphi)}$  mit

$$A = \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2 \omega_1^2}}, \quad \varphi = \arctan \frac{2\delta \omega_1}{\omega_0^2 - \omega_1^2} + \begin{cases} 0 & \text{für } \omega_1 < \omega_0, \\ \pi & \text{für } \omega_1 > \omega_0. \end{cases}$$

😊 Damit haben wir die reelle Lösung  $u(t) = A \cos(\omega t - \varphi)$  gefunden.



**Satz N1A: freie harmonische Schwingung**  
Gegeben seien reelle Konstanten  $\delta, \omega_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  sowie  $\omega_1, a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

(1) Die **homogene lineare Differentialgleichung**

$$\ddot{u}(t) + 2\delta \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0$$

hat einen zweidim. **linearen Lösungsraum**; die allgemeine Lösung ist

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) \quad \text{mit freien Konstanten } c_1, c_2 \in \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

$$= \begin{cases} e^{-\delta t} [c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)] & \text{für } \delta < \omega_0 \text{ und } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \\ e^{-\delta t} [c_1 e^{-\lambda t} + c_2 e^{\lambda t}] & \text{für } \delta > \omega_0 \text{ und } \lambda = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \\ e^{-\delta t} [c_1 + c_2 t] & \text{für } \delta = \omega_0 \text{ (kritische Dämpfung)}. \end{cases}$$

Diese Lösungen sind reell, also eine Basis über  $\mathbb{R}$ , ebenso über  $\mathbb{C}$ .

**Anfangswerte**  $u(t_0)$  und  $\dot{u}(t_0)$  können beliebig vorgegeben werden: Sie legen die freien Konstanten  $c_1, c_2$  eindeutig fest (und umgekehrt).

Typische Beispiele: Bei **schwacher Dämpfung**  $0 < \delta < \omega_0$  gilt

$$u(t) = \underbrace{A \cos(\omega_1 t - \varphi)}_{\text{periodische Lösung}} + \underbrace{e^{-\delta t} [c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)]}_{\text{Einschwingvorgang } \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty}.$$

Nach Einschwingzeit sehen wir nur noch die periodische Lösung  $u_0$ : Das System reagiert mit der erzwungenen Frequenz  $\omega_1$  der Anregung, mit konstanter Amplitude  $A$  und Phasenverschiebung  $\varphi$  wie berechnet.

Für  $\omega_1 \rightarrow 0$  gilt  $A \rightarrow a/\omega_0^2$ : Niedrige Frequenzen werden gedämpft.  
Für  $\omega_1 \rightarrow \infty$  gilt  $A \rightarrow 0$ : Hohe Frequenzen werden verschluckt.  
Der Sonderfall  $\delta = 0$  und  $\omega_1 = \omega_0$  führt zur **Resonanz(katastrophe)**:

$$u(t) = \underbrace{\frac{a}{2\omega_0} t \sin(\omega_0 t)}_{\text{wächst unbeschränkt}} + \underbrace{c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t)}_{\text{periodisch, insbesondere beschränkt}}$$

Manchmal ist genau dies erwünscht, etwa beim Radioempfang.  
🎵 *How I broke a wine glass with my voice.* [youtu.be/0c27GxSD\\_bI](https://youtu.be/0c27GxSD_bI)  
😊 Mit unseren Techniken lösen Sie alle Fälle vollständig und explizit.

⚠ Im Sonderfall  $\delta = 0$  und  $\omega_1 = \omega_0$  schlägt unser Ansatz  $c e^{i\omega t}$  fehl!

$$\ddot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = [\omega_0^2 - \omega^2] c e^{i\omega t} \neq a e^{i\omega_0 t}$$

Zur Gleichheit muss  $\omega = \omega_0$  gelten, aber dann verschwindet  $[\omega_0^2 - \omega^2]$ . In obiger Formel für  $c$  ist das genau die Polstelle! Modifizierter Ansatz:

$$z(t) = ct e^{i\omega t}, \quad \dot{z}(t) = c e^{i\omega t} + c t i\omega e^{i\omega t}, \quad \ddot{z}(t) = 2ci\omega e^{i\omega t} - c t \omega^2 e^{i\omega t}$$

$$\implies \ddot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = [2i\omega + t(\omega_0^2 - \omega^2)] c e^{i\omega t} \stackrel{!}{=} a e^{i\omega_0 t}$$

Durch Vergleich finden wir die Werte  $\omega = \omega_0$  und  $c = a/(2i\omega_0)$ . Also:

$$z(t) = \frac{at e^{i\omega_0 t}}{2i\omega_0} = \frac{at \cos(\omega_0 t) + iat \sin(\omega_0 t)}{2i\omega_0} = \frac{at}{2\omega_0} \sin(\omega_0 t) - i \frac{at}{2\omega_0} \cos(\omega_0 t)$$

Der Realteil  $u(t) = (a/2\omega_0) t \sin(\omega_0 t)$  löst  $\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = a \cos(\omega_0 t)$ .

⚠ Das System reagiert mit derselben Frequenz  $\omega$  wie die Anregung, aber die Amplitude wächst unbeschränkt: Wir nennen dies **Resonanz**. Anschaulich: Jedes Kind lernt dieses Phänomen beim Schaukeln. [L429]  
Die Anregungsfrequenz trifft genau eine Eigenfrequenz des Systems!

Erzwungene Schwingungen sind ein weit verbreitetes Phänomen:

- Mechanik: Schaukel, Brücke bei gleichmäßigen Schritten / Wind, Vibrationen von Fahrzeugteilen bei bestimmten Drehzahlen,
- Akustik: Tonerzeugung in Musikinstrumenten, Resonanzkörper, Mitschwingen einer nicht gespielten Saite oder einer Stimmgabel,
- Elektrotechnik: elektrischer Schwingkreis, Radioempfang, WLAN,
- Hydromechanik: Tideresonanz der Ozeane und großen Meere.

Auch die (Hochschul-)Didaktik zeigt Resonanzphänomene: Jede Lernende folgt ihrem eigenen kognitiven Bewegungsgesetz (Rückstellkraft, Trägheit, Vergessen), wird von außen durch die Lehrende angeregt auf einer vorgegebenen Frequenz (als erzwungene Bewegung, extrinsisch). Trifft die anregende Frequenz in etwa eine Eigenfrequenz (intrinsisches Interesse), so kommt es zur Resonanz: Das ist die ideale Lern- und Lehrsituation! Anregung mit zu niedriger oder zu hoher Frequenz hingegen zeigt kaum Wirkung. Auch das kennen Sie aus eigener Erfahrung.

Bei hunderten Teilnehmer:innen sind die individuellen Eigenfrequenzen meist sehr breit gestreut. Egal auf welcher Frequenz ich sende, nur bei einem kleinen Teil bringt es eine Saite zum Klingen. Dieses Phänomen ist mir schmerzhaft bewusst, aber unter den gegebenen Bedingungen wohl unvermeidlich. Das erklärt auch die Bedeutung, sich aufeinander einzustellen. Ich versuche, auf verschiedenen Frequenzen zu senden, und lausche den Reaktionen. Das eigentlich Erstaunliche ist nicht, wie oft die Übertragung misslingt, sondern dass sie manchmal tatsächlich funktioniert.

**Satz N1A: erzwungene harmonische Schwingung**  
(2) Die **inhomogene lineare Differentialgleichung**

$$\ddot{u}(t) + 2\delta \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = a \cos(\omega_1 t)$$

hat einen zweidim. **affinen Lösungsraum**; die allgemeine Lösung ist

$$u(t) = u_0(t) + c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) \quad \text{mit freien Konstanten } c_1, c_2 \in \mathbb{K} \text{ und}$$

$$u_0(t) = \begin{cases} A \cos(\omega_1 t - \varphi) & \text{für } \delta > 0 \text{ oder } \omega_1 \neq \omega_0 \text{ (generisch N113),} \\ \frac{a}{2\omega_1} t \sin(\omega_1 t) & \text{für } \delta = 0 \text{ und } \omega_1 = \omega_0 \text{ (Resonanz N114).} \end{cases}$$

Amplitude  $A = a / \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2 \omega_1^2}$ ,  
Phase  $\varphi = \arctan [2\delta \omega_1 / (\omega_0^2 - \omega_1^2)] + \pi$ .

„Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen“  
**Anfangswerte**  $u(t_0)$  und  $\dot{u}(t_0)$  können beliebig vorgegeben werden: Sie legen die freien Konstanten  $c_1, c_2$  eindeutig fest (und umgekehrt).

Die allgemeine Lösung / Schwingung  $u: I \rightarrow \mathbb{R}$  ist die **Überlagerung** einer inhomogenen Lösung / **erzwungenen Schwingung**  $u_0$  und einer homogenen Lösung / **freien Schwingung**  $c_1 u_1 + c_2 u_2$ .

Die Konstanten  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  ergeben sich aus Anfangsdaten  $u(t_0), \dot{u}(t_0)$ . Bei Dämpfung  $\delta > 0$  klingen  $u_1(t) \rightarrow 0$  und  $u_2(t) \rightarrow 0$  exponentiell ab. Der Einfluss der Startwerte ist nach gewisser **Einschwingzeit** kaum noch spürbar, es bleibt schließlich nur die **periodische Lösung**  $u_0$ .

Im dämpfungsfreien Fall  $\delta = 0$  klingen die freien Schwingungen  $u_1(t) = \cos(\omega_0 t)$  und  $u_2(t) = \sin(\omega_0 t)$  nicht ab. Zudem führt eine äußere Anregung mit Frequenz  $\omega_1 = \omega_0$  zur **Resonanzkatastrophe**: Die Amplitude der Schwingung wächst (theoretisch) unbegrenzt. [L429]

Für **praktische Zwecke** gilt dies bereits für  $\delta \approx 0$ : Die Schwingungen  $u_1, u_2$  klingen sehr langsam ab, bei realistischer Beobachtungsdauer sind Dämpfungsverluste kaum wahrnehmbar. Bei Anregung mit  $\omega_1 \approx \omega_0$  kommt es zu sehr starker Resonanz, die Amplitude der erzwungenen Schwingung wächst schließlich über die Belastbarkeit des Materials.

Wir betrachten eine **lineare DG mit konstanten Koeffizienten**:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1y'(x) + a_0y(x) = b(x)$$

Hier sind  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  konstant und  $b: \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{K}$  stetig. Den wichtigen Spezialfall  $n = 2$  haben wir bereits eingangs ausgeführt.

Wir lösen zunächst die **homogene Differentialgleichung** mit  $b = 0$ .

**Exponentialansatz:**  $y(x) = e^{\lambda x}$ ,  $y' = \lambda y$ ,  $y'' = \lambda^2 y$ , ...,  $y^{(n)} = \lambda^n y$ . Einsetzen in die DG ergibt  $(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda x} = 0$ .

Genau dann erfüllt  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}: x \mapsto y(x) = e^{\lambda x}$  die homogene DG, wenn  $\lambda \in \mathbb{C}$  eine Nullstelle des **charakteristischen Polynoms** ist:

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

Wir zerlegen  $p \in \mathbb{C}[x]$  in Linearfaktoren:  $p(x) = (x - \lambda_1)^{k_1} \dots (x - \lambda_\ell)^{k_\ell}$  mit Nullstellen  $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell \in \mathbb{C}$  und ihren Vielfachheiten  $k_1, \dots, k_\ell \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ . Diese Nullstellen seien paarweise verschieden, also  $\lambda_i \neq \lambda_j$  für  $i \neq j$ . Fundamentalsatz F3C: Über  $\mathbb{C}$  ist die Zerlegung immer möglich!

**Satz N2A:** komplexe und reelle Fundamentallösungen

Zu lösen sei  $p(\partial)y = 0$  mit  $p(x) = (x - \lambda_1)^{k_1} \dots (x - \lambda_\ell)^{k_\ell} \in \mathbb{C}[x]$ .

(1) Hierzu haben wir  $n$  linear unabhängige **Fundamentallösungen**

$$e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, x^2 e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{k_1-1} e^{\lambda_1 x}, \dots$$

$$e^{\lambda_\ell x}, x e^{\lambda_\ell x}, x^2 e^{\lambda_\ell x}, \dots, x^{k_\ell-1} e^{\lambda_\ell x}.$$

(2) Ist  $p \in \mathbb{R}[x]$  reell und  $\lambda = \sigma + i\omega$  mit  $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$  und  $\omega \neq 0$  eine  $k$ -fache Nullstelle, so gilt dies auch für die komplex-konjugierte Zahl  $\bar{\lambda} = \sigma - i\omega$ . Durch Basiswechsel [N107] erhalten wir  $n$  **reelle Fundamentallösungen**:

$$\left\{ e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda x} \right\} \xleftrightarrow{\text{Basiswechsel}} \left\{ e^{\sigma x} \cos(\omega x), \dots, x^{k-1} e^{\sigma x} \cos(\omega x) \right.$$

$$\left. e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda x} \right\} \xleftrightarrow{\text{Basiswechsel}} \left\{ e^{\sigma x} \sin(\omega x), \dots, x^{k-1} e^{\sigma x} \sin(\omega x) \right\}$$

(3) Diese  $n$  Lösungen  $y_1, \dots, y_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  sind  $\mathbb{K}$ -linear unabhängig.

(4) Jede Lösung  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  der homogenen DG  $p(\partial)y = 0$  hat die Form  $y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$  mit  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ . Kurz: Lösungsraum  $L_0 \cong \mathbb{K}^n$ .

**Aufgabe:** Lösen Sie (a) allgemein und (b) das Anfangswertproblem

$$y'' + 3y' + 2y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

**Lösung:** (a) Das char. Polynom unserer Gleichung  $p(\partial)y = 0$  ist

$$p(x) = x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2).$$

Nullstellen:  $-1, -2$ . Als Fundamentallösungen der DG erhalten wir

$$y_1(x) = e^{-x}, \quad y_2(x) = e^{-2x}.$$

Diese sind linear unabhängig. Die allgemeine reelle Lösung ist also

$$y(x) = \alpha_1 e^{-x} + \alpha_2 e^{-2x} \quad \text{mit} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Die Anfangsdaten bestimmen eindeutig die freien Konstanten:

$$\left. \begin{aligned} y(0) = \alpha_1 + \alpha_2 &= 1 \\ y'(0) = -\alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = -1 \end{cases}$$

Die gesuchte Lösung des AWP ist also  $y(x) = 2e^{-x} - e^{-2x}$ . Probe! Das entspricht einem harmonischen Oszillator mit starker Dämpfung.

**Aufgabe:** Lösen Sie (a) allgemein und (b) das Anfangswertproblem

$$y'' + 2y' + y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

**Lösung:** (a) Das char. Polynom unserer Gleichung  $p(\partial)y = 0$  ist

$$p(x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2.$$

Doppelte Nullstelle  $-1$ . Als Fundamentallösungen der DG erhalten wir

$$y_1(x) = e^{-x}, \quad y_2(x) = x e^{-x}.$$

Probe:  $y_2'(x) = (1-x)e^{-x}$ ,  $y_2''(x) = (x-2)e^{-x}$ ,  $y_2'' + 2y_2' + y_2 = 0$ .

Diese sind linear unabhängig. Die allgemeine reelle Lösung ist also

$$y(x) = e^{-x}(\alpha_1 + \alpha_2 x) \quad \text{mit} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Die Anfangsdaten bestimmen eindeutig die freien Konstanten:

$$\left. \begin{aligned} y(0) = \alpha_1 &= 1 \\ y'(0) = -\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

Die gesuchte Lösung des AWP ist also  $y(x) = e^{-x}(1+x)$ . Probe! Das entspricht einem harmonischen Oszillator mit kritischer Dämpfung.

**Aufgabe:** Lösen Sie (a) allgemein und (b) das Anfangswertproblem

$$u''' - 7u' + 6u = 0 \quad \text{mit} \quad u(0) = 3, \quad u'(0) = 5, \quad u''(0) = 8.$$

(c) Berechnen Sie das Fundamentalsystem  $u_1, u_2, u_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1' & u_2' & u_3' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' \end{pmatrix} (0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Lösung:** (a) Das char. Polynom unserer Gleichung  $p(\partial)y = 0$  ist

$$p(x) = x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x-2)(x+3).$$

Die Nullstellen des char. Polynoms  $p$  sind hier 1, 2, -3. Die Probe ist wie immer leicht! In Übungs- oder Klausuraufgaben wird man eine Nullstelle  $\lambda$  raten und dann den Linearfaktor  $(x - \lambda)$  durch Polynomdivision abspalten, bis man auf ein Polynom vom Grad  $\leq 2$  kommt. Diese künstliche Situation ist hoffnungslos unrealistisch aber leider üblich. Wenn Ihnen ein freilaufendes Polynom in der Natur begegnet, werden Sie seine Nullstellen nicht raten können. Es bleibt oft nur ihre näherungsweise Bestimmung durch geeignete numerische Methoden.

Als Fundamentallösungen der DG erhalten wir somit  $e^x, e^{2x}, e^{-3x}$ .

Die allgemeine Lösung ist  $\alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x} + \alpha_3 e^{-3x}$  mit  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ .

(c) Unsere drei Fundamentallösungen  $y_1(x) = e^x, y_2(x) = e^{2x}, y_3(x) = e^{-3x}$  fassen wir zur **Fundamentalmatrix** zusammen:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & e^{2x} & e^{-3x} \\ e^x & 2e^{2x} & -3e^{-3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{-3x} \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist stets **invertierbar**, speziell für  $x = 0$  finden wir:

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow Y(0)^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 30 & -5 & -5 \\ -12 & 8 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

**Basiswechsel** von der alten Basis  $y_1, y_2, y_3$  zur neuen Basis  $u_1, u_2, u_3$ :

$$Y(x)Y(0)^{-1} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1' & u_2' & u_3' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = +\frac{30}{20}y_1 - \frac{12}{20}y_2 + \frac{2}{20}y_3 \\ u_2 = -\frac{5}{20}y_1 + \frac{8}{20}y_2 - \frac{3}{20}y_3 \\ u_3 = -\frac{5}{20}y_1 + \frac{4}{20}y_2 + \frac{1}{20}y_3 \end{cases}$$

(b) Die gesuchte Lösung des AWP ist  $u(x) = 3u_1 + 5u_2 + 8u_3$ . Probe!

**Aufgabe:** Lösen Sie (a) allgemein und (b) das Anfangswertproblem

$$y'' + 2y' + 5y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$$

**Lösung:** (a) Das charakteristische Polynom ist  $p(x) = x^2 + 2x + 5$ .

Die Nullstellen  $\lambda_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$  sind komplex-konjugiert.

Komplexes Fundamentalsystem:  $e^{(-1+2i)x}, e^{(-1-2i)x}$

Komplexe Lösungen:  $z(x) = c_1 e^{(-1+2i)x} + c_2 e^{(-1-2i)x}$  mit  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

Reelles Fundamentalsystem:  $e^{-x} \cos(2x), e^{-x} \sin(2x)$

Reelle Lösungen:  $y(x) = \alpha_1 e^{-x} \cos(2x) + \alpha_2 e^{-x} \sin(2x)$  mit  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

(b) Die Anfangsdaten bestimmen eindeutig die freien Konstanten:

$$\left. \begin{aligned} y(0) = \alpha_1 &= 1 \\ y'(0) = -\alpha_1 + 2\alpha_2 &= 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 2 \end{cases}$$

Probe! Die Lösung des Anfangswertproblems ist demnach

$$y(x) = e^{-x}(\cos(2x) + 2\sin(2x)).$$

☺ Über die komplexe Lösung kommt man zur selben Lösung.

**Aufgabe:** Finden Sie ein reelles Fundamentalsystem der Gleichung

$$y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0.$$

**Lösung:** Das char. Polynom unserer Gleichung  $p(\partial)y = 0$  ist

$$p(x) = x^4 + 8x^2 + 16 = (x^2 + 4)^2 = (x - 2i)^2(x + 2i)^2.$$

Doppelte Nullstellen  $2i, -2i$ . Ein komplexes Fundamentalsystem ist

$$e^{2ix}, e^{-2ix}, x e^{2ix}, x e^{-2ix}.$$

Probe! Hieraus gewinnen wir das reelle Fundamentalsystem

$$\cos(2x), \sin(2x), x \cos(2x), x \sin(2x).$$

**Basiswechsel!** Jede reelle Lösung hat demnach die Form

$$y(x) = \cos(2x)(\alpha_1 + \alpha_2 x) + \sin(2x)(\alpha_3 + \alpha_4 x)$$

mit eindeutig bestimmten Konstanten  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ .

☺ Wie immer gilt: **Anfangswerte**  $y(x_0), y'(x_0), y''(x_0), y'''(x_0) \in \mathbb{R}$  zu einem Startzeitpunkt  $x_0$  können beliebig vorgegeben werden; sie legen die freien Konstanten  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$  eindeutig fest.

**Lineare Differentialoperatoren** N209  
Ausführung

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $\mathbb{K}^I$  die Menge aller Funktionen  $f, g: I \rightarrow \mathbb{K}$ . Ihre Summe  $f + g: I \rightarrow \mathbb{K}$  ist  $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$  für jedes  $x \in I$ . Die Skalierung  $\alpha f: I \rightarrow \mathbb{K}$  mit  $\alpha \in \mathbb{K}$  ist  $(\alpha f)(x) := \alpha f(x)$  für alle  $x \in I$ . Dies definiert den  **$\mathbb{K}$ -Vektorraum**  $(\mathbb{K}^I, +, \cdot)$  aller Funktionen  $I \rightarrow \mathbb{K}$ .

Sei  $C^n(I, \mathbb{K})$  die Teilmenge aller  $n$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen  $f: I \rightarrow \mathbb{K}$ . Dies ist ein **Untervektorraum** von  $(\mathbb{K}^I, +, \cdot)$ . Die Ableitung  $\partial: C^n \rightarrow C^{n-1}: f \mapsto f'$  ist eine  **$\mathbb{K}$ -lineare Abbildung**, das heißt  $\partial(\alpha f + \beta g) = \alpha(\partial f) + \beta(\partial g)$  für alle  $f, g \in C^n$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ . Gleiches gilt auch für die  $k$ -fache Ableitung  $\partial^k: C^n \rightarrow C^{n-k}: f \mapsto f^{(k)}$ . Hierbei ist  $\partial^0 = \text{id}: f \mapsto f$  die identische Abbildung („nullmal ableiten“).

Auch das **Produkt**  $f \cdot g$  zweier Funktionen definieren wir punktweise. Damit wird  $(\mathbb{K}^I, +, \cdot)$  zu einem Ring, ebenso die Teilmenge  $C^n(I, \mathbb{K})$ . Zu  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in C^0(I, \mathbb{K})$  betrachten wir den **Differentialoperator**

$$L = a_0 \partial^0 + a_1 \partial^1 + \dots + a_{n-1} \partial^{n-1} + \partial^n: C^n \rightarrow C^0 \quad \text{mit}$$

$$f \mapsto Lf = a_0 f + a_1 f' + \dots + a_{n-1} f^{(n-1)} + f^{(n)}.$$

Dies ist eine  $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung, d.h.  $L(\alpha f + \beta g) = \alpha(Lf) + \beta(Lg)$ .

**Lineare Differentialoperatoren** N210  
Ausführung

Jede lineare DG hat die Form  $Ly = b$ . Gegeben ist hierzu  $L: C^n \rightarrow C^0$  und die rechte Seite  $b \in C^0$ ; gesucht sind alle Lösungen  $y \in C^n$ .

Die homogene Gleichung  $Ly = 0$  zu lösen bedeutet, den **Kern** von  $L$  zu bestimmen. Dank Existenz- und Eindeigkeitsatz N3A ist  $L: C^n \rightarrow C^0$  surjektiv, und es gilt  $\dim_{\mathbb{K}} \ker L = n$ . Wir suchen eine **Basis** für  $\ker L$ .

Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Wir nennen  $v_1, \dots, v_\ell \in V$  **linear abhängig** über  $\mathbb{K}$ , wenn es  $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell \in \mathbb{K}$  gibt, sodass  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_\ell v_\ell = 0$  gilt, wobei mindestens einer der Koeffizienten  $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$  ungleich 0 ist.

Hingegen heißt die Familie  $v_1, \dots, v_\ell \in V$  **linear unabhängig**, wenn  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_\ell v_\ell = 0$  nur für  $\alpha_1 = \dots = \alpha_\ell = 0$  möglich ist. Dies ist äquivalent zur Bedingung des **Koeffizientenvergleichs**: Aus  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_\ell v_\ell = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_\ell v_\ell$  folgt  $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_\ell = \beta_\ell$ .

**Beispiel:** Zu  $a < b$  in  $\mathbb{R}$  betrachten wir den Vektorraum  $C^0([a, b], \mathbb{K})$ . Hierin sind die Monomfunktionen  $1, x, x^2, \dots, x^n$  linear unabhängig: Es gilt  $\alpha_0 1 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n = 0$  nur für  $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ . Aus  $\alpha_0 1 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n = \beta_0 1 + \beta_1 x + \dots + \beta_n x^n$  folgt somit die Gleichheit aller Koeffizienten, also  $\alpha_0 = \beta_0, \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$ .

**Lineare Unabhängigkeit** N211  
Ausführung

**Satz N2B: lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren**

Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum, sei  $L: V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung mit Eigenvektoren  $v_1, \dots, v_n \in V$ , also  $Lv_k = \lambda_k v_k$  und  $v_k \neq 0$ .

Sind die Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  paarweise verschieden, also  $\lambda_i \neq \lambda_j$  für  $i \neq j$ , dann sind die Eigenvektoren  $v_1, \dots, v_n \in V$  linear unabhängig. Für die Eigenräume  $E_i = \ker(L - \lambda_i)$  erhalten wir  $E_1 \oplus \dots \oplus E_n \subset V$ .

**Beweis:** Wir führen Induktion über die Länge  $n$  der Familie  $v_1, \dots, v_n$ . Induktionsanfang  $n = 1$ : Wegen  $v_1 \neq 0$  folgt aus  $\alpha_1 v_1 = 0$  sofort  $\alpha_1 = 0$ . Induktionsschritt: Gilt  $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ , so betrachten wir

$$0 = Lv - \lambda_n v$$

$$= \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_n)v_1 + \dots + \alpha_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)v_{n-1} + \alpha_n(\lambda_n - \lambda_n)v_n.$$

Nach Induktionsvoraussetzung sind  $v_1, \dots, v_{n-1}$  linear unabhängig. Hieraus folgt  $\alpha_j(\lambda_j - \lambda_n) = 0$  für alle  $j = 1, \dots, n-1$ . Wegen  $\lambda_j \neq \lambda_n$  folgt  $\alpha_j = 0$ . Nun bleibt  $v = \alpha_n v_n = 0$ : Wegen  $v_n \neq 0$  folgt auch  $\alpha_n = 0$ .

**Lineare Unabhängigkeit** N212  
Ausführung

☺ Für die Arbeit mit Differentialgleichungen beschert uns dieser Satz ein besonders praktisches Kriterium für die lineare Unabhängigkeit!

**Beispiele:** Wir betrachten ein Intervall  $I = [a, b]$  mit  $a < b$  und hierzu den Vektorraum  $C^\infty(I, \mathbb{K})$  aller beliebig oft diff'baren Funktionen.

- Die Exponentialfunktionen  $e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$  sind linear unabhängig: Sie sind Eigenvektoren des Differentialoperators  $\partial$  zu  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .
- Ebenso sind die Monome  $1, x, x^2, \dots, x^n$  linear unabhängig: Sie sind Eigenvektoren des Diff'operators  $x\partial$  zu  $0, 1, 2, \dots, n$ .
- Auch die Funktionen  $e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \dots, x^n e^{\lambda x}$  sind linear unabhängig: Sie sind Eigenvektoren des Diff'operators  $x(\partial - \lambda)$  zu  $0, 1, \dots, n$ .

**Allgemeiner:** Hauptvektoren  $\mathbb{P}[119]$  zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig. Der Beweis ist analog und nur etwas länger.

☺ Zu Verständnis und Lösung von Differentialgleichungen arbeiten Analysis und Lineare Algebra wunderbar zusammen. Hier lohnt sich erneut Ihre Investition in die mathematischen Grundlagen der HM1&2!

**Konstante Koeffizienten** N213  
Ausführung

Einsetzen von  $\partial$  in das Polynom  $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in \mathbb{C}[x]$  gibt

$$L = p(\partial) = a_0 \partial^0 + a_1 \partial^1 + \dots + a_{n-1} \partial^{n-1} + \partial^n: C^n \rightarrow C^0 \quad \text{mit}$$

$$f \mapsto Lf = p(\partial)f = a_0 f + a_1 f' + \dots + a_{n-1} f^{(n-1)} + f^{(n)}.$$

Jede lineare DG mit konstanten Koeffizienten hat somit die Form

$$p(\partial)y = b$$

mit rechter Seite  $b: I \rightarrow \mathbb{K}$ , und speziell  $b = 0$  im homogenen Fall. Gesucht sind alle Lösungen  $y: I \rightarrow \mathbb{K}$  dieser linearen Gleichung.

Die homogene Differentialgleichung  $p(\partial)y = 0$  zu lösen bedeutet, den Kern der linearen Abbildung  $p(\partial): C^n \rightarrow C^0$  zu bestimmen.

Das kennen Sie gut für lineare Abbildungen  $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$  und nutzen effiziente Rechentechniken: Wir können Gleichungen durch Matrizen darstellen und durch den Gauß-Algorithmus lösen. Auch für Differentialgleichungen nutzen wir geschickt die lineare Struktur. Allerdings ist der Raum  $C^n$  nicht endlich-dimensional und Matrizen stehen deshalb leider nicht zur Verfügung. Doch dank des Existenz- und Eindeigkeitsatzes N3A für Differentialgleichungen gilt immer  $\dim \ker p(\partial) = n$ . Zudem ist die Abbildung  $p(\partial): C^n \rightarrow C^0$  surjektiv, d.h. zu jeder rechten Seite  $b$  existiert mindestens eine Lösung, und damit ein affiner Lösungsraum der Dimension  $n$ .

**Konstante Koeffizienten** N214  
Ausführung

**Lemma N2C: Komposition linearer Differentialoperatoren**

Seien  $p(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$  und  $q(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$  Polynome in  $\mathbb{K}[x]$ . Dann gilt  $p(\partial) \circ q(\partial) = (p \cdot q)(\partial)$ ; Komposition entspricht Multiplikation.

**Nachrechnen:** Für jede Funktion  $f \in C^{m+n}(I, \mathbb{K})$  gilt

$$p(\partial)q(\partial)f = \sum_j a_j \partial^j [\sum_k b_k f^{(k)}] = \sum_j \sum_k a_j b_k f^{(j+k)} = (p \cdot q)(\partial)f.$$

☺ Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten verhalten sich wie Polynome! Dies können und werden wir bei Rechnungen nutzen.

⚠ Diese Rechnung nutzt aus, dass die Koeffizienten konstant sind! Andernfalls ist die Komposition von Operatoren nicht mehr kommutativ:

**Beispiel:** Wir betrachten  $p = \partial: f(x) \mapsto f'(x)$  und  $q = x: f \mapsto x \cdot f(x)$ .

$$\left. \begin{aligned} (p \circ q)f(x) &= \partial(xf(x)) = f(x) + xf'(x) \\ (q \circ p)f(x) &= x(\partial f(x)) = xf'(x) \end{aligned} \right\} \implies p \circ q - q \circ p = 1$$

In der Quantenmechanik ist  $p$  der Impulsoperator und  $q$  der Ortsoperator. Sie kommutieren nicht! Das ist die Ursache der Unschärferelation. **[K309]**

**Lösungen bei mehrfachen Nullstellen** N215  
Ausführung

**Satz N2D: Eigenwerte und Lösungen**

Sei  $\lambda$  eine  $k$ -fache Nullstelle des Polynoms  $p \in \mathbb{C}[x]$ , also

$$p(x) = p_1(x)(x - \lambda)^k \quad \text{mit einem Polynom } p_1 \in \mathbb{C}[x].$$

Dann erlaubt  $p(\partial)y = 0$  die  $k$  linear unabhängigen Lösungen

$$e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda x}.$$

**Nachrechnen:** Für jede Funktion  $y(x) = q(x)e^{\lambda x}$  gilt:

$$(\partial - \lambda)[q(x)e^{\lambda x}] = q'(x)e^{\lambda x} + q(x)\lambda e^{\lambda x} - \lambda q(x)e^{\lambda x} = q'(x)e^{\lambda x}$$

Bei  $k$ -facher Anwendung erhalten wir  $(\partial - \lambda)^k [q(x)e^{\lambda x}] = q^{(k)}(x)e^{\lambda x}$ . Dies verschwindet genau dann, wenn  $q$  ein Polynom vom Grad  $< k$  ist.

**Vorschau:** Wir erkennen hier zudem die Hauptvektorkette (siehe P1C)

$$0 \xrightarrow{\partial - \lambda} e^{\lambda x} \xrightarrow{\partial - \lambda} x e^{\lambda x} \xrightarrow{\partial - \lambda} \frac{x^2}{2} e^{\lambda x} \xrightarrow{\partial - \lambda} \frac{x^3}{3!} e^{\lambda x} \xrightarrow{\partial - \lambda} \dots \xrightarrow{\partial - \lambda} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} e^{\lambda x}$$

☺ Die Linearfaktorzerlegung von  $p$  ergibt so  $n$  unabhängige Lösungen!

**Lösungen bei mehrfachen Nullstellen** N216  
Ausführung

**Aufgabe:** Lösen Sie (a) allgemein und (b) das Anfangswertproblem

$$y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 2.$$

**Lösung:** (a) Char. Polynom  $p(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x + 2)^3$ .  
Fundamentallösungen:  $e^{-2x}, x e^{-2x}, x^2 e^{-2x}$ . Allgemeine Lösung:

$$y(x) = [c_0 + c_1 x + c_2 x^2] e^{-2x}$$

$$y'(x) = [c_1 - 2c_0 + (2c_2 - 2c_1)x - 2c_2 x^2] e^{-2x}$$

$$y''(x) = [(2c_2 - 4c_1 + 4c_0) + (\dots)x + (\dots)x^2] e^{-2x}$$

(b) Die Anfangsdaten bestimmen eindeutig die freien Konstanten:

$$\left. \begin{aligned} y(0) = c_0 &= 1 \\ y'(0) = c_1 - 2c_0 &= 2 \\ y''(0) = 2c_2 - 4c_1 + 4c_0 &= 2 \end{aligned} \right\} \implies \begin{cases} c_0 = 1 \\ c_1 = 4 \\ c_2 = 7 \end{cases}$$

☺ Die Lösung unseres AWP ist also  $y(x) = (7x^2 + 4x + 1)e^{-2x}$ . Probe!

**Lösungsansatz für spezielle rechte Seiten** N217

**Satz N2E: Lösungsansatz für spezielle rechte Seiten**  
 (1) Seien  $p, r \in \mathbb{C}[x]$  Polynome. Zu lösen sei die Differentialgleichung

$$p(\partial)y(x) = r(x)e^{\mu x}.$$

Ist  $\mu$  eine  $k$ -fache Nullstelle von  $p$ , so existiert eine Lösung der Form

$$y_b(x) = q(x)x^k e^{\mu x}$$

mit einem eindeutigen Polynom  $q \in \mathbb{C}[x]$  vom Grad  $\deg q = \deg r$ . Hier ist  $k = 0$  erlaubt; bei  $k > 0$  spricht man von  $k$ -facher **Resonanz**.  
 (2) Speziell  $p(\partial)y(x) = e^{\mu x}$  wird gelöst durch  $y_b(x) = e^{\mu x} x^k / p^{(k)}(\mu)$ .

😊 Sie finden  $q$  geduldig durch Einsetzen und Koeffizientenvergleich.  
 😊 Der Ansatz funktioniert ebenso für  $r(x) = r(x)e^{0x}$  mit  $\mu = 0$  sowie

$$r(x)e^{\sigma x} \cos(\omega x) = r(x) \cdot \frac{1}{2} [e^{(\sigma+i\omega)x} + e^{(\sigma-i\omega)x}],$$

$$r(x)e^{\sigma x} \sin(\omega x) = r(x) \cdot \frac{1}{2i} [e^{(\sigma+i\omega)x} - e^{(\sigma-i\omega)x}].$$

**Lösungsansatz für spezielle rechte Seiten** N218  
Ausführung

**Vorbereitung:** Wir wollen Differentialoperatoren geschickt nutzen. Dank Produktregel  $\partial(f \cdot g) = (\partial f) \cdot g + f \cdot (\partial g)$  finden wir:

$$\partial [e^{\mu x} q(x)] = e^{\mu x} [(\partial + \mu) q(x)]$$

$$\partial^k [e^{\mu x} q(x)] = e^{\mu x} [(\partial + \mu)^k q(x)]$$

Für jedes Polynom  $p \in \mathbb{C}[x]$  gilt somit

$$p(\partial) [e^{\mu x} q(x)] = e^{\mu x} [p(\partial + \mu) q(x)]$$

Kurz  $e^{-\mu x} p(\partial) e^{\mu x} = p(\partial + \mu)$ . Als Beispiele haben wir insbesondere:

$$(\partial - \lambda) [e^{\mu x} q(x)] = e^{\mu x} [(\partial - \lambda + \mu) q(x)]$$

$$(\partial - \lambda)^k [e^{\mu x} q(x)] = e^{\mu x} [(\partial - \lambda + \mu)^k q(x)]$$

Die Vertauschungsregel vereinfacht die Rechnungen sowohl in folgenden Beispielen als auch im anschließenden Beweis. Dieser Rechenrick ist eine nützliche Abkürzung aber keine Pflicht: Sie können die Ableitung  $p(\partial)$  immer auch direkt ausrechnen; zur Vorbereitung können Sie einmal beides ausprobieren und dann entscheiden, welcher Rechenweg für Sie einfacher ist.

**Lösungsansatz für spezielle rechte Seiten** N219  
Ausführung

**Beweis des Satzes:** Der Satz erklärt ein Lösungsrezept: „Wenn die Aufgabe soundso gegeben ist, dann sieht die Lösung soundso aus.“ Wir zeigen, dass der genannte Ansatz tatsächlich immer gelingt. Hierzu betrachten wir die Menge aller Polynome vom Grad  $< n$ :

$$\mathbb{C}[x]_{<n} = \{ a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} \mid a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C} \}.$$

Dies ist ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum der Dimension  $n$ . Die  $k$ -fache Ableitung  $\partial^k : \mathbb{C}[x]_{<n} \rightarrow \mathbb{C}[x]_{<n-k}$  ist surjektiv. Ihr Kern ist der Unterraum  $\mathbb{C}[x]_{<k}$ . Für  $\lambda \neq 0$  gilt  $(\partial - \lambda) : \mathbb{C}[x]_{<n} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[x]_{<n}$ : Dieser Operator erhält den Grad, hat also trivialen Kern, ist somit injektiv, dank Dimensionsformel auch surjektiv und somit ein Vektorraumisomorphismus. Alternative und noch konkretere Sichtweise: Bezüglich der Monombasis  $x^0, x^1, \dots, x^{n-1}$  schreibt sich  $\partial - \lambda$  als obere Dreiecksmatrix mit Determinante  $(-\lambda)^n$ . Nach Voraussetzung gilt  $p(x) = \tilde{p}(x)(x - \mu)^k$  mit  $\tilde{p}(\mu) \neq 0$ , also

$$p(\partial) [e^{\mu x} x^k q(x)] = e^{\mu x} p(\partial + \mu) [x^k q(x)] = e^{\mu x} \tilde{p}(\partial + \mu) \partial^k [x^k q(x)].$$

Zunächst senkt  $\partial^k$  den Grad um  $k$ , sodann erhält  $\tilde{p}(\partial + \mu)$  den Grad.

**Lösungsansatz für spezielle rechte Seiten** N220  
Ausführung

Zusammenfassend erhalten wir also die Vektorraumisomorphismen

$$\partial^k : x^k \mathbb{C}[x]_{<n} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[x]_{<n},$$

$$p(\partial) : e^{\mu x} x^k \mathbb{C}[x]_{<n} \xrightarrow{\sim} e^{\mu x} \mathbb{C}[x]_{<n}.$$

Für unsere Differentialgleichung bedeutet das ausführlich folgendes: Zu jedem Polynom  $r(x) = r_0 + r_1 x + \dots + r_{n-1} x^{n-1} \in \mathbb{C}[x]_{<n}$  existiert genau ein Polynom  $q(x) = q_0 + q_1 x + \dots + q_{n-1} x^{n-1} \in \mathbb{C}[x]_{<n}$ , das unsere Differentialgleichung  $p(\partial)[e^{\mu x} x^k q(x)] = e^{\mu x} r(x)$  löst. Das war zu zeigen.

😊 Die praktische Berechnung gelingt durch Koeffizientenvergleich: Die lineare Abbildung  $q \mapsto r$  können wir leicht ausrechnen, für ihre Umkehrung  $r \mapsto q$  nutzen wir die Methoden der linearen Algebra.

Dies gelingt besonders leicht im wichtigen Spezialfall  $p(\partial)y(x) = e^{\mu x}$ :

$$p(\partial) [e^{\mu x} x^k] = e^{\mu x} \tilde{p}(\partial + \mu) \partial^k x^k = e^{\mu x} \tilde{p}(\partial + \mu) k! = e^{\mu x} \tilde{p}(\mu) k!$$

$$p^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \partial^j \tilde{p}(x) \cdot \partial^{k-j} (x - \mu)^k \Rightarrow p^{(k)}(\mu) = \tilde{p}(\mu) k!$$

😊 Somit wird  $p(\partial)y(x) = e^{\mu x}$  gelöst durch  $y_b(x) = e^{\mu x} x^k / p^{(k)}(\mu)$ .

**Spezielle rechte Seite mit einfacher Resonanz** N221  
Übung

**Aufgabe:** Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 2y(x) = x e^{2x}.$$

**Lösung:** Char. Polynom  $p(x) = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$ . Fundamentalsystem der homogenen Gleichung:  $e^{-x}, e^{2x}$ . Wir lösen  $p(\partial)y(x) = x e^{2x}$  für  $\mu = 2$ . (spezielle rechte Seite) Hier ist  $\mu = 2$  eine einfache Nullstelle von  $p$ . (Vielfachheit  $k = 1$ ) Gemäß Satz N2E gelingt  $y_b(x) = q(x)e^{2x}$  mit  $q(x) = c_1 x + c_2 x^2$ . Einsetzen in die DG und geduldiges Ausrechnen liefert:

$$p(\partial)y_b(x) = (\partial + 1)(\partial - 2) [q(x)e^{2x}] = e^{2x} (\partial + 3)\partial q(x)$$

$$= e^{2x} [q''(x) + 3q'(x)] = e^{2x} (2c_2 + 3c_1 + 6c_2 x) \stackrel{!}{=} x e^{2x}$$

Koeffizientenvergleich:  $c_2 = 1/6$  und  $c_1 = -1/9$ . Allgemeine Lösung:

$$y(x) = \alpha_1 e^{-x} + \left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{9}x + \alpha_2\right) e^{2x}$$

Machen Sie die Probe: in DG einsetzen und geduldig ausrechnen!

**Spezielle rechte Seite mit einfacher Resonanz** N222  
Ausführung

Zu lösen ist hier  $p(\partial)y(x) = x e^{\mu x}$  mit einfacher Nullstelle  $\mu$ . Dank Satz N2E wissen wir, wie eine Lösung zu finden ist: Wir setzen  $(c_1 + c_2 x) x e^{2x}$  ein und vergleichen die Koeffizienten. Sie benötigen nur den richtigen Ansatz N2E und sorgsam Rechnen.

😊 Der obige Satz N2E garantiert, dass unser Ansatz gelingt. Die Rechnung mag länglich sein, aber jeder Schritt ist einfach... und am Ende geht alles auf. Das ist der Nutzen dieses Satzes! Für spezielle rechte Seiten  $r(x)e^{\mu x}$  ist damit das Problem gelöst.

⚠ Die schöne simple Lösungsformel (2) greift hier leider nicht! Speziell  $p(\partial)y(x) = e^{\mu x}$  wird gelöst durch  $y_b(x) = e^{\mu x} x^k / p^{(k)}(\mu)$ . Für  $p(\partial)y(x) = x e^{\mu x}$  müssen wir den ausführlichen Weg gehen. Der Ansatz (1) gelingt immer, speziell für (2) kann abgekürzt werden.

Wie immer gilt auch hier: Die **Anfangswerte**  $y(x_0), y'(x_0) \in \mathbb{R}$  zu einem Startzeitpunkt  $x_0 \in \mathbb{R}$  können beliebig vorgegeben werden; sie legen die freien Konstanten  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  eindeutig fest (und auch umgekehrt). Ihre Berechnung gelingt durch ein lineares Gleichungssystem.

**Spezielle rechte Seite mit doppelter Resonanz** N223  
Übung

**Aufgabe:** Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 10e^{-2x}.$$

**Lösung:** Char. Polynom  $p(x) = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$ . Fundamentalsystem der homogenen Gleichung:  $e^{-2x}, x e^{-2x}$ . Wir lösen  $p(\partial)y(x) = 10e^{-2x}$  für  $\mu = -2$ . (spezielle rechte Seite) Hier ist  $\mu = -2$  eine doppelte Nullstelle von  $p$ . (Vielfachheit  $k = 2$ ) Gemäß Satz N2E gelingt der Ansatz  $y_b(x) = c x^2 e^{-2x}$ . Einsetzen liefert

$$p(\partial)y_b(x) = (\partial + 2)^2 [c x^2 e^{-2x}]$$

$$= e^{-2x} \cdot \partial^2 (c x^2) = e^{-2x} \cdot 2c \stackrel{!}{=} 10e^{-2x}.$$

Koeffizientenvergleich:  $c = 5$ . Die allgemeine Lösung ist demnach

$$y(x) = (5x^2 + \alpha_1 x + \alpha_2) e^{-2x}.$$

Machen Sie die Probe: in DG einsetzen und geduldig ausrechnen!

**Anfangswerte**  $y(x_0)$  und  $y'(x_0)$  können beliebig vorgegeben werden: Sie legen die freien Konstanten  $\alpha_1, \alpha_2$  eindeutig fest (und umgekehrt).

**Spezielle rechte Seite mit doppelter Resonanz** N224  
Übung

Wir haben hier  $c x^2 e^{-2x}$  angesetzt und Koeffizienten verglichen. Der obige Satz N2E nennt für diesen Fall eine Lösungsformel: Speziell  $p(\partial)y(x) = e^{\mu x}$  wird gelöst durch  $y_b(x) = e^{\mu x} x^k / p^{(k)}(\mu)$ . Wir können den gesuchten Koeffizienten  $c$  also auch direkt durch die Formel  $c = 10/p''(-2)$  berechnen; die Wahl ist Geschmackssache. Wir führen diese alternative Rechnung als lehrreiche Übung aus:

$$p(x) = x^2 + 4x + 4, \quad p(-2) = 0,$$

$$p'(x) = 2x + 4, \quad p'(-2) = 0,$$

$$p''(x) = 2, \quad p''(-2) = 2.$$

Wir erhalten  $c = 10/p''(-2) = 5$ , also  $y_b(x) = 5x^2 e^{-2x}$  wie zuvor.

😊 Beide Ergebnisse stimmen überein. Die Wahl des Rechenweges ist Geschmackssache, beide sind hier in etwa gleich lang: Das liegt an der besonders einfachen Form des charakteristischen Polynoms  $p(x)$ .

⚠ Im Allgemeinen ist die Lösungsformel  $y_b(x) = e^{\mu x} x^k / p^{(k)}(\mu)$  kürzer und leichter. Die vorige Aufgabe illustriert dies recht gut.

**Spezielle rechte Seite mit & ohne Resonanz** N225  
Ausführung

**Aufgabe:** Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = b(x)$$

mit rechten Seiten  $b(x) = 0, 24e^{2x}, 24xe^{2x}, e^{-2x}, e^{\pm ix}, \cos(x)$ .

**Lösung:** (a) Das char. Polynom unserer Gleichung  $p(\partial)y = 0$  ist

$$p(x) = x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2).$$

Nullstellen  $-1, -2$ . Fundamentallösungen unserer DG sind  $e^{-x}, e^{-2x}$ . Die allgemeine Lösung ist demnach  $y(x) = \alpha_1 e^{-x} + \alpha_2 e^{-2x}$ .

(b) Wir lösen  $p(\partial)y(x) = 24e^{\mu x}$  für  $\mu = 2$ . (spezielle rechte Seite)  
Dies ist keine Nullstelle von  $p$  (Vielfachheit  $k = 0$ ), genauer  $p(2) = 12$ . Gemäß Satz N2E gelingt der Ansatz  $y_b(x) = ce^{2x}$ . Einsetzen in die DG:

$$y_b''(x) + 3y_b'(x) + 2y_b(x) = p(2)ce^{2x} \stackrel{!}{=} 24e^{2x}$$

Koeffizientenvergleich:  $c = 2$ . Die allgemeine Lösung ist demnach

$$y(x) = 2e^{2x} + \alpha_1 e^{-x} + \alpha_2 e^{-2x}.$$

**Spezielle rechte Seite mit & ohne Resonanz** N226  
Ausführung

(c) Wir lösen  $p(\partial)y(x) = 24xe^{\mu x}$  für  $\mu = 2$ . (spezielle rechte Seite)  
Dies ist keine Nullstelle von  $p$ . Gemäß Satz N2E gelingt der Ansatz

$$y_b(x) = (c_0 + c_1x)e^{2x}$$

$$y_b'(x) = (2c_0 + c_1 + 2c_1x)e^{2x}$$

$$y_b''(x) = (4c_0 + 4c_1 + 4c_1x)e^{2x}$$

$$y_b''(x) + 3y_b'(x) + 2y_b(x) = [(12c_0 + 7c_1) + 12c_1x]e^{2x} \stackrel{!}{=} 24xe^{2x}$$

Koeffizientenvergleich:  $c_1 = 2$  und  $c_0 = -\frac{7}{6}$ .  
Unser Partikulärlösung ist also  $y_b(x) = (2x - \frac{7}{6})e^{2x}$ .  
Machen Sie die Probe! Die allgemeine Lösung ist demnach

$$y(x) = (2x - \frac{7}{6})e^{2x} + \alpha_1 e^{-x} + \alpha_2 e^{-2x}.$$

**Anfangswerte**  $y(x_0)$  und  $y'(x_0)$  können beliebig vorgegeben werden: Sie legen die freien Konstanten  $\alpha_1, \alpha_2$  eindeutig fest (und umgekehrt).

**Spezielle rechte Seite mit & ohne Resonanz** N227  
Ausführung

(d) Wir lösen  $p(\partial)y(x) = e^{\mu x}$  für  $\mu = -2$ . (spezielle rechte Seite)  
Einfache Nullstelle (Vielfachheit  $k = 1$ ):  $p(-2) = 0, p'(-2) = -1$ .  
Partikulärlösung:  $y_b(x) = e^{-2x}x/(-1)$ . Allgemeine Lösung:

$$y(x) = \alpha_1 e^{-x} + (\alpha_2 - x)e^{-2x}.$$

😊 Machen Sie die Probe! Ebenso findet man  $y_b$  durch den Ansatz  $y_b(x) = cx e^{-2x}$ , Einsetzen in die DG und Koeffizientenvergleich.  
Wir führen dies als lehrreiche Übung aus, analog zu Teil (c):

$$y_b(x) = cx e^{-2x}$$

$$y_b'(x) = c(1 - 2x)e^{-2x}$$

$$y_b''(x) = c(-4 + 4x)e^{-2x}$$

$$y_b''(x) + 3y_b'(x) + 2y_b(x) = -ce^{-2x} \stackrel{!}{=} e^{-2x}$$

Koeffizientenvergleich:  $c = -1$ . Partikulärlösung:  $y_b(x) = -x e^{-2x}$ .  
😊 Die obige Lösungsformel kürzt diese Rechnung beträchtlich ab.

**Spezielle rechte Seite mit & ohne Resonanz** N228  
Ausführung

(e) Wir lösen  $p(\partial)y(x) = e^{\mu x}$  für  $\mu = i$ . (spezielle rechte Seite)  
Dies ist keine Nullstelle von  $p$ , genauer  $p(i) = 1 + 3i$ .  
Partikulärlösung:  $y_b(x) = e^{ix}/(1 + 3i)$ . Allgemeine Lösung:

$$y(x) = \frac{1-3i}{10}e^{ix} + \alpha_1 e^{-x} + \alpha_2 e^{-2x}.$$

Entsprechend hat  $p(\partial)y(x) = e^{-ix}$  die Partikulärlösung  $e^{-ix}/(1 - 3i)$ .

(f) Wir lösen  $p(\partial)u(x) = \cos(x)$  und  $p(\partial)v(x) = \sin(x)$ .  
Dies ist Real- und Imaginärteil der Gleichung  $p(\partial)y(x) = e^{ix}$ .  
Lösungen erhalten wir aus Real-/Imaginärteil der komplexen Lösung

$$y_b(x) = \frac{1-3i}{10}e^{ix} = \frac{1}{10} \cdot (1-3i) \cdot (\cos x + i \sin x)$$

$$= \frac{1}{10}(\cos x + 3 \sin x) + i \frac{1}{10}(-3 \cos x + \sin x)$$

Die allgemeinen reellen Lösungen sind demnach:

$$u(x) = \frac{1}{10}(\cos x + 3 \sin x) + \alpha_1 e^{-x} + \alpha_2 e^{-2x}$$

$$v(x) = \frac{1}{10}(-3 \cos x + \sin x) + \alpha_1 e^{-x} + \alpha_2 e^{-2x}$$

**Spezielle rechte Seite mit & ohne Resonanz** N229  
Übung

**Aufgabe:** Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y^{(5)}(x) + y^{(4)}(x) + 2y'''(x) + 2y''(x) + y'(x) + y(x) = b(x)$$

mit rechten Seiten  $b(x) = 0, e^x, e^{-x}, e^{ix}, e^{-ix}, \cos(x), \cos(2x)$ .

**Lösung:** (a) Das char. Polynom unserer Gleichung  $p(\partial)y = 0$  ist

$$p(x) = x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1 = (x+1)(x^4 + 2x^2 + 1)$$

$$= (x+1)(x^2+1)^2 = (x+1)(x-i)^2(x+i)^2$$

Nullstellen:  $-1, i, i, -i, -i$  (ausprobieren und faktorisieren)  
Komplexe Fundamentallösungen:  $e^{-x}, e^{ix}, x e^{ix}, e^{-ix}, x e^{-ix}$   
Allgemein komplex:  $y(x) = c_1 e^{-x} + e^{ix}(c_2 + c_3x) + e^{-ix}(c_4 + c_5x)$   
Reelle Fundamentallösungen:  $e^{-x}, \cos(x), x \cos(x), \sin(x), x \sin(x)$   
Allgemein reell:  $y(x) = \alpha_1 e^{-x} + \cos(x)(\alpha_2 + \alpha_3x) + \sin(x)(\alpha_4 + \alpha_5x)$   
😊 **Anfangswerte**  $y(x_0), \dots, y^{(4)}(x_0) \in \mathbb{R}$  können beliebig vorgegeben werden und legen die freien Konstanten  $\alpha_1, \dots, \alpha_5 \in \mathbb{R}$  eindeutig fest.

**Spezielle rechte Seite mit & ohne Resonanz** N230  
Übung

(b) Wir lösen  $p(\partial)y(x) = e^{\mu x}$  für  $\mu = 1$ . (spezielle rechte Seite)  
Dies ist keine Nullstelle von  $p$  (Vielfachheit  $k = 0$ ), genauer  $p(1) = 8$ .  
Partikulärlösung:  $y_b(x) = e^x/8$ . (Probe!) Allgemeine Lösung:

$$y(x) = \frac{1}{8}e^x + \alpha_1 e^{-x} + \cos(x)(\alpha_2 + \alpha_3x) + \sin(x)(\alpha_4 + \alpha_5x)$$

😊 Machen Sie die Probe! Ebenso findet man  $y_b$  durch den Ansatz  $y_b(x) = ce^x$ , Einsetzen  $p(\partial)e^x = 8e^x$ , Koeffizientenvergleich  $c = 1/8$ .

(c) Wir lösen  $p(\partial)y(x) = e^{\mu x}$  für  $\mu = -1$ . (spezielle rechte Seite)  
Einfache Nullstelle von  $p$  (Vielfachheit  $k = 1$ ):  $p(-1) = 0, p'(-1) = 4$ .  
Partikulärlösung:  $y_b(x) = e^{-x}x/4$ . (Probe!) Allgemeine Lösung:

$$y(x) = e^{-x}(\alpha_1 + \frac{x}{4}) + \cos(x)(\alpha_2 + \alpha_3x) + \sin(x)(\alpha_4 + \alpha_5x)$$

😊 Machen Sie die Probe! Ebenso findet man  $y_b$  durch den Ansatz  $y_b(x) = cx e^{-x}$ , Einsetzen in die DG und Koeffizientenvergleich. Übung!

**Spezielle rechte Seite mit & ohne Resonanz** N231  
Übung

(d) Wir lösen  $p(\partial)y(x) = e^{\mu x}$  für  $\mu = i$ . (spezielle rechte Seite)  
Dies ist eine doppelte Nullstelle von  $p$  (Vielfachheit  $k = 2$ ), genauer:

$$p(x) = x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1, \quad p(i) = 0,$$

$$p'(x) = 5x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1, \quad p'(i) = 0,$$

$$p''(x) = 20x^3 + 12x^2 + 12x + 4, \quad p''(i) = -8 - 8i.$$

Partikulärlösung:  $y_b(x) = e^{ix}x^2/(-8 - 8i)$ . (Probe!) Allgemeine Lösung:

$$y(x) = c_1 e^{-x} + e^{ix}(c_2 + c_3x - \frac{1-i}{16}x^2) + e^{-ix}(c_4 + c_5x)$$

(e) Wir lösen  $p(\partial)y(x) = e^{\mu x}$  für  $\mu = -i$  analog zu (d):  
Wir berechnen hierzu  $p(-i) = 0, p'(-i) = 0, p''(-i) = -8 + 8i$ .  
Partikulärlösung:  $y_b(x) = e^{-ix}x^2/(-8 + 8i)$ . Allgemeine Lösung:

$$y(x) = c_1 e^{-x} + e^{ix}(c_2 + c_3x) + e^{-ix}(c_4 + c_5x - \frac{1+i}{16}x^2)$$

😊 Machen Sie die Probe! Ebenso findet man  $y_b$  jeweils durch den Ansatz  $y_b(x) = cx^2 e^{\pm ix}$ , Einsetzen und Koeffizientenvergleich. Übung!  
😊 Gleichungen (c-d) und ihre Lösungen sind komplex-konjugiert.

**Spezielle rechte Seite mit & ohne Resonanz** N232  
Übung

(f) Wir lösen  $p(\partial)u(x) = \cos(x)$  und  $p(\partial)v(x) = \sin(x)$ .  
Dies ist Real- und Imaginärteil der Gleichung  $p(\partial)y(x) = e^{ix}$ .  
Lösungen erhalten wir aus Real-/Imaginärteil der komplexen Lösung

$$y_b(x) = \frac{i-1}{16}x^2 e^{ix} = \frac{1}{16}x^2 \cdot (i-1) \cdot (\cos x + i \sin x)$$

$$= -\frac{1}{16}x^2(\cos x + \sin x) + i \frac{1}{16}x^2(\cos x - \sin x)$$

Die allgemeinen reellen Lösungen sind demnach:

$$u(x) = \alpha_1 e^{-x} + \cos(x)(\alpha_2 + \alpha_3x - \frac{1}{16}x^2) + \sin(x)(\alpha_4 + \alpha_5x - \frac{1}{16}x^2)$$

$$v(x) = \alpha_1 e^{-x} + \cos(x)(\alpha_2 + \alpha_3x + \frac{1}{16}x^2) + \sin(x)(\alpha_4 + \alpha_5x - \frac{1}{16}x^2)$$

😊 Machen Sie die Probe! Ebenso findet man  $y_b$  durch den Ansatz  $y_b(x) = (a \cos x + b \sin x)x^2 e^{ix}$ , Einsetzen und Koeffizientenvergleich.

(g) Wir lösen  $p(\partial)y(x) = e^{\mu x}$  für  $\mu = 2i$ . Hier finden wir  $p(2i) = 9 + 18i$ .  
Partikulärlösung:  $y_b(x) = e^x/(9 + 18i) = (\cos x + i \sin x) \cdot (1 - 2i)/45$ .  
Real-/Imaginärteil lösen  $p(\partial)u(x) = \cos(2x)$  und  $p(\partial)v(x) = \sin(2x)$ .

N233  
Ausführung

**Spezielle rechte Seite mit & ohne Resonanz**

**Aufgabe:** Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichungen

(a)  $y'''(x) + 3y''(x) - 4y(x) = 0,$   
 (b)  $y'''(x) + 3y''(x) - 4y(x) = 8x^2 e^{-x},$   
 (c)  $y'''(x) + 3y''(x) - 4y(x) = 108x^2 e^{-2x}.$

**Lösung:** (a) Das char. Polynom unserer Gleichung  $p(\partial)y = 0$  ist  
 $p(x) = x^3 + 3x^2 - 4 = (x-1)(x^2 + 4x + 4) = (x-1)(x+2)^2.$   
 Fundamentalsystem der homogenen Gleichung:  $e^x, e^{-2x}, x e^{-2x}.$   
 Die allgemeine Lösung ist  $y(x) = \alpha_1 e^x + (\alpha_2 + \alpha_3 x) e^{-2x}.$   
**Anfangswerte**  $y(x_0), y'(x_0), y''(x_0)$  können beliebig vorgegeben werden: Sie legen die freien Konstanten  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  eindeutig fest.

(b) Wir lösen  $p(\partial)y(x) = 8x^2 e^{-x}.$  (spezielle rechte Seite)  
 Hier ist  $\mu = -1$  keine Nullstelle von  $p$  (Vielfachheit  $k = 0$ ).  
 Gemäß Satz N2E gelingt der Ansatz  $y_b(x) = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2) e^{-x}.$

N234  
Ausführung

**Spezielle rechte Seite mit & ohne Resonanz**

Einsetzen in die Differentialgleichung und geduldig ausrechnen:  

$$p(\partial)y_b(x) = p(\partial)[q(x)e^{-x}] = e^{-x}p(\partial-1)q(x) = \dots$$

$$= e^{-x}[q'''(x) - 3q'(x) - 2q(x)] \stackrel{!}{=} 8x^2 e^{-x}$$
 Wir erhalten hieraus die Gleichung  

$$-3(c_1 + 2c_2 x) - 2(c_0 + c_1 x + c_2 x^2) \stackrel{!}{=} 8x^2.$$
**Koeffizientenvergleich:**  

$$\begin{cases} -2c_2 = 8 \\ -6c_2 - 2c_1 = 0 \\ -3c_1 - 2c_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = -4 \\ c_1 = 12 \\ c_0 = -18 \end{cases}$$
 Wir erhalten so die Partikulärlösung  $y_b(x) = (-4x^2 + 12x - 18) e^{-x}.$   
 Die allgemeine Lösung unserer Differentialgleichung ist schließlich  

$$y(x) = (-18 + 12x - 4x^2) e^{-x} + \alpha_1 e^x + (\alpha_2 + \alpha_3 x) e^{-2x}$$
 Machen Sie die Probe: in DG einsetzen und geduldig ausrechnen!

N235  
Ausführung

**Spezielle rechte Seite mit & ohne Resonanz**

(c) Wir lösen  $p(\partial)y(x) = 108x^2 e^{-2x}.$  (spezielle rechte Seite)  
 Hier ist  $\mu = -2$  eine doppelte Nullstelle von  $p$ . (Vielfachheit  $k = 2$ )  
 Gemäß Satz N2E gelingt der Ansatz  $y_b(x) = (c_0 x^2 + c_1 x^3 + c_2 x^4) e^{-2x}.$   
 Einsetzen in die Differentialgleichung und geduldig ausrechnen:  

$$p(\partial)y_b(x) = p(\partial)[q(x)e^{-2x}] = e^{-2x}p(\partial-2)q(x)$$

$$= e^{-2x}(\partial-3)\partial^2 q(x) = e^{-2x}[q'''(x) - 3q''(x)]$$

$$= e^{-2x}[6c_1 + 24c_2 x - 6c_0 - 18c_1 x - 36c_2 x^2] \stackrel{!}{=} 108x^2 e^{-2x}$$
 Wir erhalten hieraus die Gleichung  

$$(6c_1 - 6c_0) + (24c_2 - 18c_1)x - 36c_2 x^2 \stackrel{!}{=} 108x^2.$$
**Koeffizientenvergleich:**  

$$\begin{cases} -36c_2 = 108 \\ 24c_2 - 18c_1 = 0 \\ 6c_1 - 6c_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = -3 \\ c_1 = -4 \\ c_0 = -4 \end{cases}$$

N236  
Ausführung

**Spezielle rechte Seite mit & ohne Resonanz**

Wir erhalten so die Partikulärlösung  $y_b(x) = (-3x^4 - 4x^3 - 4x^2) e^{-2x}.$   
 Die allgemeine Lösung unserer Differentialgleichung ist schließlich  

$$y(x) = \alpha_1 e^x + (\alpha_2 + \alpha_3 x - 4x^2 - 4x^3 - 3x^4) e^{-2x}$$
 Machen Sie die Probe: in DG einsetzen und geduldig ausrechnen!  
**Anfangswerte**  $y(x_0), y'(x_0), y''(x_0)$  können beliebig vorgegeben werden: Sie legen die freien Konstanten  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  eindeutig fest.

☺ Für spezielle rechte Seiten wissen wir, welcher Ansatz gelingt: Die inhomogene lineare Differentialgleichung  $p(\partial)y(x) = r(x)e^{\mu x}$  wird gelöst durch den Ansatz  $y_b(x) = q(x)x^k e^{\mu x}$  mit  $\deg q = \deg r$ . Es genügt Einsetzen, Koeffizientenvergleich und geduldiges Rechnen!

☺ Speziell  $p(\partial)y(x) = e^{\mu x}$  wird gelöst durch  $y_b(x) = e^{\mu x} x^k / p^{(k)}(\mu)$ . Für (b-c) genügt dieser Spezialfall nicht, und wir müssen tatsächlich ein Gleichungssystem lösen; es ist triangulär und daher leicht.

N237  
Ausführung

**Trigonometrische rechte Seite ohne Resonanz**

**Aufgabe:** Finden Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = x e^{-x} \cos(2x).$$

**Lösung:** Char. Polynom  $p(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2.$   
 Fundamentalsystem der homogenen Gleichung:  $e^{-x}, x e^{-x}.$   
 Die rechte Seite ist der Realteil von  $b(x) = x e^{(-1+2i)x}.$   
 Wir betrachten daher die komplexe Differentialgleichung  

$$z''(x) + 2z'(x) + z(x) = x e^{(-1+2i)x}$$
 Hier ist  $\mu = -1 + 2i$  keine Nullstelle von  $p$ . (Vielfachheit  $k = 0$ )  
 Ansatz für eine Partikulärlösung der komplexen Gleichung:  

$$z_b(x) = q(x) e^{(-1+2i)x} \quad \text{mit} \quad q(x) = c_0 + c_1 x$$
 Einsetzen in die DG und geduldig ausrechnen:  

$$p(\partial)z_b(x) = (\partial+1)^2[q(x)e^{(-1+2i)x}] = e^{(-1+2i)x}(\partial+2i)^2 q(x)$$

$$= e^{(-1+2i)x}[q''(x) + 4iq'(x) - 4q(x)] \stackrel{!}{=} x e^{(-1+2i)x}$$

N238  
Ausführung

**Trigonometrische rechte Seite ohne Resonanz**

Wir erhalten hieraus die Gleichung  

$$4ic_1 - 4(c_0 + c_1 x) = x.$$
**Koeffizientenvergleich:**  

$$\begin{cases} -4c_1 = 1 \\ -4c_0 + 4ic_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -1/4 \\ c_0 = -i/4 \end{cases}$$
 Komplexe Partikulärlösung für die rechte Seite  $b(x) = x e^{(-1+2i)x}:$   

$$z_b(x) = -\frac{1}{4}(x+i) e^{(-1+2i)x}$$
 Reelle Partikulärlösung für die rechte Seite  $\text{Re } b(x) = x e^{-x} \cos(2x):$   

$$y_b(x) = \text{Re}[z_b(x)] = \frac{1}{4} e^{-x} (\sin(2x) - x \cos(2x))$$
 Die allgemeine reelle Lösung ist schließlich:  

$$y(x) = \frac{1}{4} e^{-x} (\sin(2x) - x \cos(2x)) + e^{-x}(\alpha_1 + \alpha_2 x)$$
 Machen Sie die Probe: in DG einsetzen und geduldig ausrechnen!

N239  
Ausführung

**Trigonometrische rechte Seite mit Resonanz**

**Aufgabe:** Finden Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$y''(x) + y(x) = x^2 \sin x + \cos x.$$

**Lösung:** Char. Polynom  $p(x) = x^2 + 1 = (x-i)(x+i).$   
 Komplexes Fundamentalsystem der homogenen Gleichung:  $e^{ix}, e^{-ix}.$   
 Reelles Fundamentalsystem der homogenen Gleichung:  $\cos x, \sin x.$   
 Die rechte Seite ist der Realteil von  $b(x) = (1-ix^2) e^{ix}.$   
 Wir betrachten daher die komplexe Differentialgleichung  

$$z''(x) + z(x) = (1-ix^2) e^{ix}.$$
 Hier ist  $\mu = i$  eine einfache Nullstelle von  $p$ . (Vielfachheit  $k = 1$ )  
 Ansatz für eine Partikulärlösung der komplexen Gleichung:  

$$z_b(x) = q(x) e^{ix} \quad \text{mit} \quad q(x) = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

N240  
Ausführung

**Trigonometrische rechte Seite mit Resonanz**

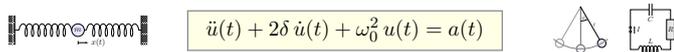
Einsetzen in die DG und Koeffizientenvergleich liefert (wie immer) ein Gleichungssystem. So berechnet man die komplexe Partikulärlösung:  

$$z_b(x) = \left(-\frac{1}{6}x^3 - \frac{i}{4}x^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{i}{2}\right)x\right) e^{ix}$$
 Ihr Realteil ist die gesuchte reelle Partikulärlösung:  

$$y_b(x) = \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x}{4}\right) \cos x + \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}\right) \sin x$$
 Probe! Die allgemeine reelle Lösung ist schließlich:  

$$y(x) = \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x}{4} + \alpha_1\right) \cos x + \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \alpha_2\right) \sin x$$
 Die Konstanten  $\alpha_1, \alpha_2$  ergeben sich aus eventuellen Anfangsdaten.  
 ☺ Der entscheidende Schritt ist, den richtigen Ansatz zu wählen. Genau dies leistet unser Satz N2E! Die Lösung gelingt garantiert und ist somit nur eine Frage des geduldigen Ausrechnens. Alles wird gut.

Wir betrachten die Differentialgleichung  $p(\partial) u(t) = a(t)$ , zum Beispiel



$$\ddot{u}(t) + 2\delta \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = a(t)$$

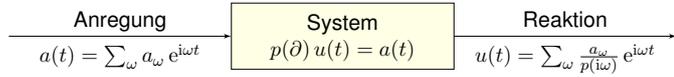
Jede harmonische Anregung  $a$  erzwingt eine harmonische Reaktion  $u$ :

$$u(t) = e^{i\omega t} \xrightarrow{(1)} a(t) = p(i\omega) e^{i\omega t}$$

$$a(t) = e^{i\omega t} \xrightarrow{(2)} u(t) = p(i\omega)^{-1} e^{i\omega t} + \text{homogene Lösung}$$

Die Rechnung (1) ist leicht. Für die Umkehrung (2) betrachten wir zur Vereinfachung nur den Fall ohne Resonanz, also  $p(i\omega) \neq 0$ . (Satz N2E)

Dank Linearität des Operators  $p(\partial)$  überlagern sich diese Lösungen:



Wir können zu  $u$  noch homogene Lösungen addieren; diese lasse ich hier weg und denke an das Langzeitverhalten bei Dämpfung  $\delta > 0$ . [N119]

☺ Die Transformation in den Frequenzbereich vereinfacht das Problem! Durch Fourier-Entwicklung können wir so diese Differentialgleichung für jede rechte Seite lösen und für jede Frequenz leicht verstehen.

Anders gesagt: Für den Differentialoperator  $p(\partial)$  ist  $e^{\lambda t}$  Eigenfunktion zum Eigenwert  $p(\lambda)$ . Die Fourier-Zerlegung  $u(t) = \sum_{\omega} u_{\omega} e^{i\omega t}$  führt zu  $a(t) = p(\partial) u(t) = \sum_{\omega} p(i\omega) u_{\omega} e^{i\omega t}$ , dank Diagonalisierung von  $p(\partial)$ .

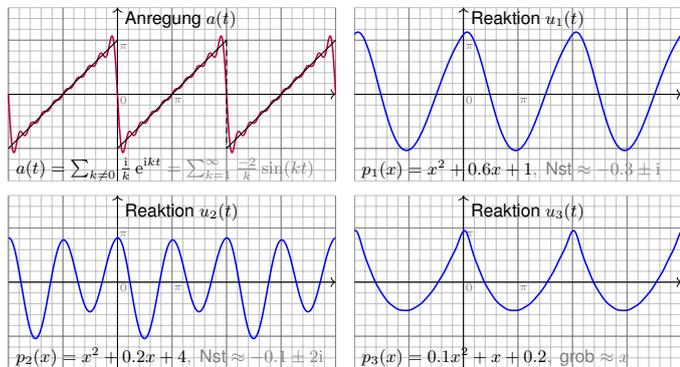
Umgekehrt lösen wir so die Differentialgleichung  $p(\partial) u(t) = a(t)$ : Die Anregung  $a(t) = \sum_{\omega} a_{\omega} e^{i\omega t}$  führt dank dieser Diagonalisierung zur Reaktion  $u(t) = p(\partial)^{-1} a(t) = \sum_{\omega} p(i\omega)^{-1} a_{\omega} e^{i\omega t} + \text{homogene Lösung}$ .

Dies gelingt für endliche Summen, also trigonometrische Polynome, ebenso wie für unendliche, also Fourier-Reihen und Fourier-Integrale. Hier zählt sich aus, dass wir die Fourier-Analyse bereits beherrschen!

Der hier wirkende Verstärkungsfaktor  $\omega \mapsto 1/p(i\omega)$  ist frequenzabhängig! Dies nennt man den **Frequenzgang** oder die **Übertragungsfunktion** des Systems. Durch Wahl des Systems und seiner Parameter können wir aus dem Spektrum des Signals gezielt Frequenzen ausfiltern.

**Aufgabe:** Wir untersuchen ein System mit charakteristischem Polynom  $p(x) = x^2 + 0.6x + 1$  oder  $x^2 + 0.2x + 4$  oder  $0.1x^2 + x + 0.2$  oder ...

Welche Antwort  $u(t)$  entsteht bei sägezahnförmiger Anregung  $a(t)$ ? [I205]



Diese Graphiken illustrieren die oben erklärte Frequenzanalyse und Filterwirkung. Auf den ersten Blick ist das Ergebnis überraschend: Die Reaktion  $u(t)$  hat wenig mit der Anregung  $a(t)$  gemeinsam!

☺ In der Frequenzanalyse hingegen wird das Bild klar und einfach. Die anregende Funktion  $a(t)$  enthält alle Frequenzen  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Die Verstärkung  $p(ik)$  hängt nur vom charakteristischen Polynom  $p$  ab!

Für  $p_1(x) = x^2 + 0.6x + 1$  haben wir die beiden Nullstellen  $\approx -0.3 \pm i$ . Demnach ist  $p(i)$  sehr klein und  $p(i)^{-1}$  sehr groß: Die Grundfrequenz wird extrem verstärkt, die anderen Frequenzen deutlich weniger.

Für  $p_2(x) = x^2 + 0.2x + 4$  haben wir die beiden Nullstellen  $\approx -0.1 \pm 2i$ . Demnach ist  $p(2i)$  sehr klein und  $p(2i)^{-1}$  sehr groß: Daher wird diese erste Oberschwingung extrem verstärkt, die anderen deutlich weniger.

Für  $p_3(x) = 0.1x^2 + x + 0.2$  erinnert die Graphik an die Parabelfunktion. Das ist kein Zufall! Wir haben grob  $p_3(x) \approx x$ , das entspricht  $\partial u = a$ , also der Integration der Sägezahnfunktion  $a$  zur Parabelfunktion  $u$ ! [I321]

☺ Die Anschauung stimmt. Sie können dies nun auch quantitativ lösen!

Zu lösen sei  $p(\partial) y = b$  mit  $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \in \mathbb{K}[x]$ :

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1y'(x) + a_0y(x) = b(x).$$

Die Funktion  $b: \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{K}$  sei stetig auf einem Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Sie heißt **Inhomogenität** oder **Störterm** oder kurz **rechte Seite**. Für spezielle rechte Seiten wie in N2E können wir die DG leicht lösen.

**Satz N2F:** Greensche Fundamentallösung und Lösungsformel

Die homogene Gleichung  $p(\partial) u = 0$  hat genau eine Lösung  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  mit den **Anfangswerten**  $u(0) = \dots = u^{(n-2)}(0) = 0$  und  $u^{(n-1)}(0) = 1$ .

Wir nennen  $u$  die **Greensche Fundamentallösung**. Hieraus erhalten wir eine Lösung der inhomogenen Gleichung  $p(\partial) y = b$  durch **Faltung**:

$$y(x) = \int_{t=x_0}^x u(x-t) b(t) dt.$$

Genauer ist  $y$  die einzige Lösung der inhomogenen Gleichung  $p(\partial) y = b$  mit Anfangswerten  $y(x_0) = y'(x_0) = \dots = y^{(n-2)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0) = 0$ .

**Aufgabe:** Zu lösen sei, für  $-\pi/2 < x < \pi/2$ , die Differentialgleichung

$$y''(x) + y(x) = \frac{1}{\cos x} \quad \text{mit} \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

**Lösung:** Allgemeine homogene Lösung ist  $u(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ .

Die Anfangswerte  $u(0) = 0$  und  $u'(0) = 1$  erfüllt nur  $u(x) = \sin x$ .

Wir falten diese **Fundamentallösung**  $u$  mit der **rechten Seite**  $b$ :

$$y(x) = \int_{t=0}^x \sin(x-t) \frac{1}{\cos t} dt = \int_{t=0}^x (\sin x \cos t - \cos x \sin t) \frac{1}{\cos t} dt$$

$$= \int_{t=0}^x \sin x - \cos x \cdot \frac{\sin t}{\cos t} dt = \left[ t \sin x + \cos x \cdot \ln \cos t \right]_{t=0}^x$$

$$= x \sin x + \cos x \cdot \ln \cos x$$

☺ Die Probe ist wie immer leicht und lohnend! Geduldig ausrechnen:

$$y'(x) = \sin x + x \cos x - \sin x \cdot \ln \cos x - \sin x$$

$$y''(x) = \cos x - x \sin x - \cos x \cdot \ln \cos x + \sin(x)^2 / \cos x$$

Einsetzen:  $y''(x) + y(x) = \cos x + \sin(x)^2 / \cos x = 1 / \cos x$ . Alles passt!

**Aufgabe:** Beweisen Sie Greens Lösungsformel (a) durch Nachrechnen oder alternativ (b) durch Laplace-Transformation (wie auf Seite [L309]).

**Lösung:** (a) Für die Ableitung nutzen wir die Leibniz-Regel [D303]:

$$\frac{d}{dx} \int_{t=x_0}^{h(x)} f(x,t) dt = h'(x) f(x, h(x)) + \int_{t=x_0}^{h(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) dt$$

Angewendet auf  $h(x) = x$  und  $f(x,t) = u(x-t) b(t)$  erhalten wir

$$y'(x) = \underbrace{u(0)}_{=0} b(x) + \int_{t=x_0}^x u'(x-t) b(t) dt,$$

$$y''(x) = \underbrace{u'(0)}_{=0} b(x) + \int_{t=x_0}^x u''(x-t) b(t) dt,$$

⋮

$$y^{(n-1)}(x) = \underbrace{u^{(n-2)}(0)}_{=0} b(x) + \int_{t=x_0}^x u^{(n-1)}(x-t) b(t) dt,$$

$$y^{(n)}(x) = \underbrace{u^{(n-1)}(0)}_{=1} b(x) + \int_{t=x_0}^x u^{(n)}(x-t) b(t) dt.$$

Einsetzen dieser Ableitungen in unsere Differentialgleichung ergibt

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1y'(x) + a_0y(x) = b(x) + \int_{t=x_0}^x \underbrace{[u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + a_1u' + a_0u]}_{=0, \text{ da } u \text{ eine Lösung der homogenen DG ist}}(x-t) b(t) dt$$

Somit ist  $y$  eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1y'(x) + a_0y(x) = b(x).$$

Die Anfangswerte  $y(x_0) = y'(x_0) = \dots = y^{(n-2)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0) = 0$  ergeben sich aus der obigen Zwischenrechnung für die Ableitungen.

**Anschauliche Erklärung** wie sie in der Physik beliebt ist: Für alle  $x < 0$  sei das System in Ruhelage  $u(x) = 0$ . Zum Zeitpunkt  $x = 0$  gilt  $u(0) = u'(0) = \dots = u^{(n-2)}(0) = 0$ , und es wird abrupt beschleunigt durch  $u^{(n-1)}(0) = 1$ . Man stellt sich dies als „Hammerschlag“ vor. Das System vollführt als sogenannte **Impulsantwort** die Bewegung  $u(x)$  für  $x \geq 0$ . [L421] Entsprechend verschoben ist  $u(x-t) b(t)$  ein Hammerschlag zum Zeitpunkt  $t$  mit Stärke  $b(t)$ . Das Integral über  $t$  ist die Summe dieser Beiträge: Wir nutzen Superposition dank Linearität. Gilt  $b(x) = 0$  für  $x \leq x_0$ , so ist  $y(x) = \int_{x_0}^x u(x-t) b(t) dt = \int_{t=x_0}^x u(x-t) b(t) dt$ . [L426]

Eine **lineare Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung** ist von der Form

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x).$$

Hierbei sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und wie üblich  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

Die stetigen Funktionen  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{K}$  heißen **Koeffizienten**.

Die stetige Funktion  $b : I \rightarrow \mathbb{K}$  heißt **Störterm** oder kurz **rechte Seite**.

Links wirkt der **lineare Differentialoperator**  $L : C^n(I, \mathbb{K}) \rightarrow C^0(I, \mathbb{K})$ ,

$$L = a_0 \partial^0 + a_1 \partial^1 + \dots + a_{n-1} \partial^{n-1} + \partial^n,$$

$$y \mapsto a_0 y + a_1 y' + \dots + a_{n-1} y^{(n-1)} + y^{(n)}.$$

Wir suchen alle Funktionen  $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ , die die Gleichung  $Ly = b$  erfüllen. Linearität bedeutet  $L(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 L(y_1) + c_2 L(y_2)$  für  $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$ .

In anderen Worten: Aus Lösungen  $y_1$  zu  $b_1$  und  $y_2$  zu  $b_2$  ergibt die Linearkombination  $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$  eine Lösung zu  $b = c_1 b_1 + c_2 b_2$ .

Zu  $Ly = b$  gehört die **homogene lineare Differentialgleichung**  $Ly = 0$ . Als Lösungsmenge suchen wir also den Kern der linearen Abbildung  $L$ .

**Satz N3A: Struktursatz für lineare Differentialgleichungen**

Zu  $Ly = b$  suchen wir die Lösungsmenge  $L_b = \{y \in C^n(I, \mathbb{K}) \mid Ly = b\}$ .

(0) **Globale Existenz und Eindeutigkeit:** Zu jedem Anfangsdatum  $(x_0, v_0, \dots, v_{n-1}) \in I \times \mathbb{K}^n$  existiert genau eine Lösung  $y \in L_b$  mit  $y(x_0) = v_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = v_{n-1}$ . Das heißt, in jedem Punkt  $x_0 \in I$  ist die Auswertung  $\Psi : L_b \rightarrow \mathbb{K}^n : y \mapsto (y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0))$  bijektiv.

(1)  $L_0 = \{y \mid Ly = 0\}$  ist ein **Vektorraum** der Dimension  $n$  über  $\mathbb{K}$ . Wir finden ein **Fundamentalsystem**  $y_1, \dots, y_n \in L_0$ , also eine Basis von  $L_0$  bestehend aus  $n$  linear unabhängigen Lösungen, und erhalten:

$$L_0 = \{c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}\} \cong \mathbb{K}^n$$

(2)  $L_b = \{y \mid Ly = b\}$  ist ein **affiner Raum** der Dimension  $n$  über  $\mathbb{K}$ . Für jede **Partikulärlösung**  $y_b \in L_b$  gilt  $L_b = y_b + L_0$ , ausgeschrieben:

$$L_b = y_b + L_0 = \{y_b + c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}\}$$

„Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen“

Bisher untersuchen wir lineare Differentialgleichungen mit **konstanten Koeffizienten**. Hier können wir alle Lösungen explizit angeben, uns genügen Exponentialansatz N2D und Greensche Lösungsformel N2F.

😊 Die Anwendungen sind wie gesehen bereits sehr reichhaltig!

Wir wollen nun auch **nicht-konstante Koeffizienten** betrachten, da solche Gleichungen ebenso natürlich in Anwendungen auftreten.

😊 Für Ordnung  $n = 1$  kennen wir bereits eine Lösungsformel. M221

Als mögliche Lösungen betrachten wir hier alle Funktionen  $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ , die  $n$ -mal stetig differenzierbar sind, kurz  $y \in C^n(I, \mathbb{K})$ , denn hierauf sind die Differentialoperatoren  $\partial, \dots, \partial^n$  und  $L = \sum_{k=0}^n a_k \partial^k$  definiert.

⚠️ Lösungen der Gleichung  $Ly = b$  wirklich **explizit** auszurechnen, kann mühsam und beliebig schwierig sein, mitunter gar unmöglich. Daher nutzen wir dankbar zunächst allgemeine Strukturaussagen!

😊 Einen guten Überblick verschafft uns der folgende wichtige Satz: Alles ist linear und wir haben  $n$  Freiheitsgrade; Anfangswerte können beliebig vorgegeben werden und legen die Lösung eindeutig fest.

Sie kennen diese Strukturaussagen bereits aus der linearen Algebra! 📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §4.6.

😊 Zu Verständnis und Lösung von Differentialgleichungen arbeiten Analysis und Lineare Algebra wunderbar zusammen. Hier lohnt sich erneut Ihre Investition in die mathematischen Grundlagen der HM1&2!

😊 Die Menge  $C^n(I, \mathbb{K})$  aller  $n$ -mal stetig diff'baren Funktionen ist ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Allerdings ist er unendlich-dimensional; daher greifen die wunderbar erfolgreichen Methoden der Matrizenrechnung wie etwa der Gauß-Algorithmus hier nicht. Wir benötigen nun verstärkt Analysis! Glücklicherweise sind unsere Lösungsräume endlich-dimensional:

$$L_0 = \{y \in C^n(I, \mathbb{K}) \mid Ly = 0\}, \quad \text{linear, } \dim_{\mathbb{K}} L_0 = n,$$

$$L_b = \{y \in C^n(I, \mathbb{K}) \mid Ly = b\}, \quad \text{affin, } \dim_{\mathbb{K}} L_b = n.$$

😊 Strukturaussage und  $\exists$ &E-Satz sagen uns zu jeder linearen DG  $n$ -ter Ordnung genau, wie groß der Lösungsraum ist: Er hat immer Dimension  $n$ ! Bei jeder konkreten Berechnung wissen wir daher, wie viele Lösungen wir suchen müssen und wann wir alle gefunden haben!

**Aufgabe:** (1) Zu lösen sei zunächst die homogene Differentialgleichung

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) - \frac{4}{x^2}y(x) = 0 \quad \text{für } y : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}.$$

(1a) Welche Struktur hat die Lösungsmenge? („Form“ und „Größe“)

(1b) Gibt es Lösungen der Form  $y(x) = x^k$ ? (geschickter Ansatz)

(1c) Bestimmen Sie die Lösung  $y$  zum AWP  $y(1) = 0$  und  $y'(1) = 1$ .

**Lösung:** (1a) Die Lösungsmenge ist ein Vektorraum der Dimension 2.

(1b) Ableiten von  $y(x) = x^k$  und Einsetzen in die DG ergibt

$$k(k-1)x^{k-2} + kx^{k-2} - 4x^{k-2} = 0.$$

Also  $(k^2 - 4)x^{k-2} = 0$ . Lösungen  $k = \pm 2$ , also  $y_1(x) = x^2$ ,  $y_2(x) = x^{-2}$ . Diese sind linear unabhängig, also eine Basis, aka Fundamentalsystem. Einfacher Test dank Wronski:  $Y(x) = \begin{pmatrix} x^2 & x^{-2} \\ 2x & -2x^{-3} \end{pmatrix}$ , z.B.  $Y(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ .

Die allgemeine Lösung ist demnach  $y(x) = c_1 x^2 + c_2 x^{-2}$  mit  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

(1c) Anfangswerte:  $y(1) = c_1 + c_2 \stackrel{!}{=} 0$  und  $y'(1) = 2c_1 - 2c_2 \stackrel{!}{=} 1$ .

Die gesuchte Lösung des AWP ist  $y(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^{-2}$ . Probe!

**Aufgabe:** (2) Zu lösen sei nun die inhomogene Differentialgleichung

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) - \frac{4}{x^2}y(x) = x \quad \text{für } y : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}.$$

(2a) Welche Struktur hat die Lösungsmenge? („Form“ und „Größe“)

(2b) Gibt es Lösungen der Form  $y(x) = c x^k$ ? (geschickter Ansatz)

(2c) Bestimmen Sie die Lösung  $y$  zum AWP  $y(1) = 1$  und  $y'(1) = 1$ ?

**Lösung:** (2a) Die Lösungsmenge ist ein affiner Raum der Dimension 2.

(2b) Ableiten von  $y_b(x) = c x^k$  und Einsetzen in die DG ergibt

$$ck(k-1)x^{k-2} + ckx^{k-2} - 4cx^{k-2} = x.$$

Also  $c(k^2 - 4) = x^{3-k}$ . Die linke Seite hängt nicht von  $x$  ab.

Lösung:  $k = 3$  und  $c = \frac{1}{5}$ , also  $y_b(x) = \frac{1}{5}x^3$ . Die Probe ist leicht!

Ein Fundamentalsystem der homogenen DG kennen wir bereits!

Die allgemeine Lösung ist  $y(x) = \frac{1}{5}x^3 + c_1 x^2 + c_2 x^{-2}$  mit  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

(2c) Anfangswerte:  $y(1) = \frac{1}{5} + c_1 + c_2 \stackrel{!}{=} 1$  und  $y'(1) = \frac{3}{5} + 2c_1 - 2c_2 \stackrel{!}{=} 1$ .

Die gesuchte Lösung ist schließlich  $y(x) = \frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{10}x^{-2}$ . Probe!

**Aufgabe:** (3) Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) - \frac{4}{x^2}y(x) = x \quad \text{für } y : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$$

durch Substitution:  $x = e^t$ ,  $t = \ln x$  und  $u(t) = y(e^t)$ ,  $y(x) = u(\ln x)$ .

**Lösung:** (3) Wir rechnen sorgsam die Ableitungen aus:

$$y(x) = u(\ln x), \quad y'(x) = \dot{u}(\ln x) \frac{1}{x}, \quad y''(x) = \ddot{u}(\ln x) \frac{1}{x^2} - \dot{u}(\ln x) \frac{1}{x^2}$$

$$u(t) = y(e^t) \quad \dot{u}(t) = y'(e^t) e^t \quad \ddot{u}(t) = y''(e^t) e^{2t} + y'(e^t) e^t$$

Unsere Differentialgleichung können wir äquivalent umschreiben:

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) - \frac{4}{x^2}y(x) = x \iff$$

$$\ddot{u}(t) e^{-2t} - \dot{u}(t) e^{-2t} + \dot{u}(t) e^{-2t} - 4u(t) e^{-2t} = e^t$$

Wir erhalten eine lineare DG mit konstanten Koeffizienten:

$$\ddot{u}(t) - 4u(t) = e^{3t}$$

😊 Wir haben Glück und unser Substitutionsansatz zahlt sich aus!

😊 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beherrschen wir gut! Ihre Lösungen finden wir nach Schema:

Charakteristisches Polynom  $p(x) = x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ .

Nullstellen 2, -2. Fundamentalsystem:  $u_1(t) = e^{2t}$ ,  $u_2(t) = e^{-2t}$ .

Wir lösen  $p(\partial)u(t) = e^{\mu t}$  für  $\mu = 3$ . (spezielle rechte Seite)

Dies ist keine Nullstelle von  $p$  (Vielfachheit  $k = 0$ ), genauer  $p(3) = 5$ .

Partikulärlösung:  $u_b(t) = e^{3t}/5$ . Die allgemeine Lösung ist demnach:

$$u(t) = \frac{1}{5}e^{3t} + c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}.$$

Rücksubstitution von  $u(t)$  zu  $y(x)$  ergibt schließlich:

$$y(x) = \frac{1}{5}x^3 + c_1 x^2 + c_2 x^{-2}$$

😊 Dies entspricht der Lösung der vorigen Aufgabe (2).

Dieses Beispiel zeigt erneut, dass eine geschickte Substitution manchmal eine komplizierte DG in eine einfache verwandeln kann, hier bei einer linearen DG etwa variable in konstante Koeffizienten.

Aus Lösungen  $y_1, \dots, y_n : I \rightarrow \mathbb{K}$  bilden wir die **Fundamentalmatrix**:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

Man nennt  $Y(x)$  auch die **Wronski-Matrix** der Funktionen  $y_1, \dots, y_n$ , und  $\det Y(x)$  ihre **Wronski-Determinante**. Diese sind oft nützlich:

**Korollar N3B: Unabhängigkeitskriterium**

Folgende Aussagen sind untereinander äquivalent:

- (a) Die Funktionen  $y_1, \dots, y_n : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  sind linear unabhängig.
- (b) Die Spaltenvektoren von  $Y$  sind linear unabhängig für jedes  $x \in I$ .
- (c) Die Spaltenvektoren von  $Y$  sind linear unabhängig für ein  $x \in I$ .
- (d) Die Determinante erfüllt  $\det Y(x) \neq 0$  für ein und damit alle  $x \in I$ .

☺ Dieses Kriterium ist einfach und übersichtlich. In kleiner Dimension  $n = 2, 3$  kann man die Determinante tatsächlich bequem ausrechnen.

Seien  $y_1, \dots, y_n : I \rightarrow \mathbb{K}$  linear unabhängige Lösungen von  $Ly = 0$ . In diesem Fall ist  $y_1, \dots, y_n$  eine **Basis des Lösungsraumes**  $L_0$ ; man nennt dies auch ein **Fundamentalsystem** der homogenen DG. Dann hat jede Lösung  $y \in L_0$  der homogenen Gleichung  $Ly = 0$  die Form  $y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$  mit eindeutigen Konstanten  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ . Sind **Anfangswerte**  $(y(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)) \in \mathbb{K}^n$  vorgegeben, so bestimmen wir  $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{K}^n$  durch folgendes Gleichungssystem:

$$Y \cdot c = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

In jedem Punkt  $x_0 \in I$  ist die Fundamentalmatrix  $Y(x_0)$  invertierbar, somit stiftet  $c = Y(x_0)^{-1} \cdot y(x_0)$  die gesuchte Linearkombination.

☺ Wir gehen von  $C^n(I, \mathbb{K})$  zum Teilraum  $L_0 = \{y \mid Ly = 0\}$  über. Hier in endlicher Dimension greifen unsere bewährten Methoden: Basiswahl, Matrizen, Gauß-Algorithmus, Determinante, Inversion, etc.

Zu lösen sei eine **inhomogene lineare Differentialgleichung**

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x).$$

Zur homogenen Gleichung  $Ly = 0$  sei bereits ein Fundamentalsystem  $y_1, \dots, y_n : I \rightarrow \mathbb{K}$  gefunden. Ihre allgemeine Lösung ist dann

$$y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \quad \text{mit} \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}.$$

Ansatz für eine Partikulärlösung durch **Variation der Konstanten**:

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + \dots + c_n(x)y_n(x) \quad \text{mit} \quad c_1, \dots, c_n : I \rightarrow \mathbb{K}$$

Diese bestimmen wir durch folgendes lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ \vdots \\ c_{n-1}'(x) \\ c_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

Die Fundamentalmatrix  $Y(x)$  ist für jedes  $x \in I$  invertierbar. Dies garantiert eine eindeutige Lösung  $c_1'(x), \dots, c_n'(x)$  gemäß

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ \vdots \\ c_{n-1}'(x) \\ c_n'(x) \end{pmatrix} = Y(x)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

Integration liefert dann die gesuchten Funktionen  $c_1(x), \dots, c_n(x)$ .

**Satz N3C: Variation der Konstanten**

Diese Konstruktion der Koeffizientenfunktionen  $c_1, \dots, c_n : I \rightarrow \mathbb{K}$  ergibt eine Partikulärlösung  $y(x) = c_1(x)y_1(x) + \dots + c_n(x)y_n(x)$  mit  $Ly = b$ .

☺ Jede inhomogene Differentialgleichung lässt sich so lösen! Probe: Einsetzen und geduldiges Ausrechnen ergibt  $Ly = b$ .

Dies entspricht der Lösung linearer Differentialgleichungen  $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$  erster Ordnung, wie wir sie aus dem vorigen Kapitel kennen, siehe Seite M433, alternativ Seite M221. Der Unterschied ist, dass nicht im Körper  $\mathbb{K}$  invertiert wird, sondern im Matrizenring  $\mathbb{K}^{n \times n}$ . Matrixwertige Differentialgleichungen führen wir in Kapitel O aus, siehe Seite O311

**Aufgabe:** Rechnen Sie nach, dass die angegebene Lösungsformel der „Variation der Konstanten“ aus Satz N3c tatsächlich immer zum Erfolg führt, also eine Partikulärlösung  $y : I \rightarrow \mathbb{K}$  der Gleichung  $Ly = b$  liefert.

**Lösung:** Wir rechnen zunächst die Ableitungen von  $y$  geduldig aus.

$$\begin{aligned} y &= c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \\ y' &= c_1 y_1' + \dots + c_n y_n' + \underbrace{c_1' y_1 + \dots + c_n' y_n}_{=0} \\ y'' &= c_1 y_1'' + \dots + c_n y_n'' + \underbrace{c_1' y_1' + \dots + c_n' y_n'}_{=0} \\ &\vdots \\ y^{(n-1)} &= c_1 y_1^{(n-1)} + \dots + c_n y_n^{(n-1)} + \underbrace{c_1' y_1^{(n-2)} + \dots + c_n' y_n^{(n-2)}}_{=0} \\ y^{(n)} &= c_1 y_1^{(n)} + \dots + c_n y_n^{(n)} + \underbrace{c_1' y_1^{(n-1)} + \dots + c_n' y_n^{(n-1)}}_{=b} \end{aligned}$$

☺ Die Konstruktion von  $c_1, \dots, c_n$  vereinfacht die Rechnung!

Damit erfüllt  $y$  die inhomogene Differentialgleichung  $Ly = b$ :

$$\begin{aligned} Ly &= y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y \\ &= b + c_1' [y_1^{(n)} + a_{n-1}y_1^{(n-1)} + \dots + a_1 y_1' + a_0 y_1] \\ &\quad + \dots \\ &\quad + c_n' [y_n^{(n)} + a_{n-1}y_n^{(n-1)} + \dots + a_1 y_n' + a_0 y_n] \end{aligned}$$

☺ Dies zeigt, dass der Ansatz immer gelingt! Für eine konkrete Aufgabe mag die explizite Rechnung mühsam sein, aber wir wissen immerhin, dass eine Lösung existiert und wie wir sie finden können. Oft ist allein das schon eine sehr wertvolle Information!

☺ Meist wird man versuchen, die Rechnung weiter zu vereinfachen. Dies kennen wir von konstanten Koeffizienten und speziellen rechten Seiten: Hier führen sowohl die allgemeine Greensche Methode N2F als auch die noch allgemeinere Variation N3c der Konstanten zum Ziel, doch der Exponentialansatz N2E kürzt die Rechnungen erheblich ab!

**Aufgabe:** Zu lösen sei, für  $-\pi/2 < x < \pi/2$ , die Differentialgleichung

$$y''(x) + y(x) = \frac{1}{\cos x} \quad \text{mit} \quad y(0) = \alpha_1, \quad y'(0) = \alpha_2.$$

Allgemeine rechte Seite: Nutzen Sie die Variation der Konstanten!

**Lösung:** Die zugehörige homogene Gleichung ist  $y''(x) + y(x) = 0$ . Fundamentalsystem:  $y_1(x) = \cos x, y_2(x) = \sin x$ . Fundamentalmatrix:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}, \quad Y^{-1} = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

Probe! Dies ist eine Rotationsmatrix mit  $\det Y = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$ . Die Inversion gelingt mit Cramerscher Regel:  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ .

Ansatz für eine Partikulärlösung durch **Variation der Konstanten**:

$$y_b(x) = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x \quad \text{mit} \quad c_1, c_2 : ]-\pi/2, \pi/2[ \rightarrow \mathbb{R}$$

Die Koeffizientenfunktionen  $c_1, c_2$  bestimmen wir gemäß obigem Satz:

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = Y^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos & -\sin \\ \sin & \cos \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\cos \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin/\cos \\ 1 \end{pmatrix}$$

Integration von  $c_1', c_2'$  zu  $c_1, c_2$  liefert die gesuchten Funktionen:

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \int_{t=0}^x \frac{-\sin t}{\cos t} dt = \left[ \ln \cos t \right]_{t=0}^x = \ln \cos x \\ c_2(x) &= \int_{t=0}^x 1 dt = \left[ t \right]_{t=0}^x = x \end{aligned}$$

Als Partikulärlösung erhalten wir so  $y_b(x) = (\ln \cos x)\cos x + x \sin x$ . Machen Sie die Probe! [N246](#) Die allgemeine Lösung ist demnach

$$y(x) = (\ln \cos x + \alpha_1)\cos x + (x + \alpha_2)\sin x.$$

Die Konstanten entsprechen Anfangswerten  $y(0) = \alpha_1$  und  $y'(0) = \alpha_2$ .

☺ Wie immer gilt auch hier: **Anfangswerte**  $y(x_0), y'(x_0) \in \mathbb{R}$  zu einem Zeitpunkt  $x_0 \in I$  können beliebig vorgegeben werden; sie bestimmen eindeutig die Lösung, also die Konstanten  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ , und umgekehrt.

☺ Wir haben hier eine DG mit konstanten Koeffizienten. Für diesen Spezialfall können wir die Greensche Lösungsformel nutzen. [N246](#) Die Variation der Konstanten funktioniert ebenso, zudem sogar ganz allgemein auch für Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten!

**Aufgabe:** Bestimmen Sie alle Potenzreihen  $u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  mit

$$u'(x) - u(x) = 0.$$

**Lösung:** Einsetzen von  $u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  in die DG ergibt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

Dies fassen wir als eine einzige Potenzreihe zusammen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+1)a_{k+1} - a_k] x^k = 0$$

Koeffizientenvergleich ergibt  $(k+1)a_{k+1} - a_k = 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ .

Wir erhalten rekursiv  $a_{k+1} = a_k / (k+1)$ , also  $a_k = a_0 / k!$ .

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_0}{k!} x^k = a_0 \exp(x)$$

☺ Das war zu erwarten. Wenn wir die Exponentialfunktion nicht schon kannten, wir müssten sie spätestens für diese DG als Lösung erfinden!

**Aufgabe:** Bestimmen Sie alle Potenzreihen  $v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  mit

$$v''(x) + v(x) = 0.$$

**Lösung:** Einsetzen von  $v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  in die DG ergibt:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

Dies fassen wir als eine einzige Potenzreihe zusammen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)(k+1)a_{k+2} + a_k] x^k = 0$$

Wir erhalten rekursiv  $a_{k+2} = -a_k / ((k+2)(k+1))$ , für gerade Indizes

$a_{2j} = (-1)^j a_0 / (2j)!$  und für ungerade  $a_{2j+1} = (-1)^j a_1 / (2j+1)!$

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 \cos(x) + a_1 \sin(x)$$

☺ Auch das war zu erwarten. Hier schließt sich der Kreis, den wir zu Beginn des Kapitels mit der Schwingungsgleichung eröffneten.

Viele wichtige Funktionen lassen sich als **Potenzreihen** darstellen:

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Jede dieser fünf Reihen hat unendlichen Konvergenzradius, sie konvergiert daher für jeden Parameter  $x \in \mathbb{R}$ , sogar  $x \in \mathbb{C}$ .

Ihre Ableitungen lesen wir direkt aus den Potenzreihen ab:

$$\exp' = \exp, \quad \sin' = \cos, \quad \cos' = -\sin, \quad \sinh' = \cosh, \quad \cosh' = \sinh$$

Diese Funktionen sind in der Mathematik allgegenwärtig, wir finden sie insbesondere als Lösungen grundlegender Differentialgleichungen:

$$y' = y, \quad y'' = -y, \quad y'' = y$$

Vor allem die einfachste Gleichung  $y' = y$  ist omnipräsent, denn sie beschreibt in Natur und Technik viele wichtige Wachstumsprozesse. Kein Polynom kann diese Gleichung lösen. (Warum?) Daher ist die Erweiterung von rationalen zu transzendenten Funktionen wie  $\exp$ ,  $\sin$ ,  $\cos$ , etc. unumgänglich. Bemerkenswerterweise benötigen wir für lineare Differentialgleichungen mit *konstanten* Koeffizienten keine weiteren Funktionen: Der Exponentialansatz  $x^k e^{\mu x}$  gelingt immer!

Bei *nicht-konstanten* Koeffizienten hingegen werden neue Funktionen als Lösungen von Differentialgleichungen benötigt bzw. konstruiert. Die Bessel-Funktionen sind hierfür ein prominentes Beispiel...

Für viele Differentialgleichungen existiert keine elementare Lösung. In diesem Fall kann uns der Potenzreihenansatz meist weiterhelfen:

**Aufgabe:** (1) Bestimmen Sie die Potenzreihe  $J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  mit

$$x^2 J_0''(x) + x J_0'(x) + x^2 J_0(x) = 0 \quad \text{und} \quad J_0(0) = 1, \quad J_0'(0) = 0.$$

(2) Berechnen Sie aus den Koeffizienten den Konvergenzradius.

(3) Skizzieren Sie die so dargestellte Funktion  $J_0$ .

**Bessel-Funktionen**  $J_\alpha$  treten in der Physik auf. Sie sind Lösungen der Differentialgleichung  $x^2 J_\alpha'' + x J_\alpha' + (x^2 - \alpha^2) J_\alpha = 0$  mit  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Es gibt keine elementare Lösung in  $\exp$ ,  $\sin$ ,  $\cos$ , ... , daher der Potenzreihenansatz. Als typisches Beispiel lösen wir hier den Spezialfall  $\alpha = 0$ .

Die numerische Lösung von Differentialgleichungen ist für die Praxis ein überaus wichtiges Gebiet. Stellvertretend skizzieren wir hier nur den besonders eleganten Potenzreihenansatz: Diese Darstellung nutzen wir für viele Funktionen; sie ist für praktische wie theoretische Belange beinahe ebenso gut wie eine Darstellung durch elementare Funktionen  $\exp$ ,  $\sin$ ,  $\cos$ , ...

Für die numerische Berechnung auf dem Computer wählen wir ein Intervall  $[a, b]$  und eine Fehlerschranke  $\varepsilon > 0$ . Hierzu bestimmen wir  $n$  so, dass der Rest  $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k$  beschränkt wird durch  $|R_n(x)| < \varepsilon$  für alle  $x \in [a, b]$ . Wir können dann  $J_\alpha(x)$  durch das Polynom  $\sum_{k=0}^n a_k x^k$  annähern, und für alle  $x \in [a, b]$  bleibt der Fehler kleiner als  $\varepsilon$ .

**Lösung:** (1) Einsetzen von  $J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  in die DG ergibt:

$$x^2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} + x \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} + x^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

Dies fassen wir als eine einzige Potenzreihe zusammen:

$$a_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} [k^2 a_k + a_{k-2}] x^k = 0$$

Wir erhalten  $a_k = -a_{k-2} / k^2$  für alle  $k \geq 2$ . Aus  $a_0 = 1$  und  $a_1 = 0$  folgt

$$a_{2j} = \frac{(-1)^j}{4^j (j!)^2} \quad \text{und} \quad a_{2j+1} = 0 \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}.$$

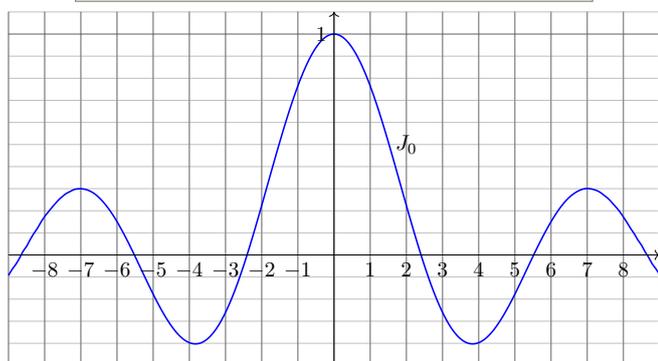
Wenn es also eine Lösung in Form einer Potenzreihe gibt, dann diese!

(2) Sie konvergiert für alle  $x \in \mathbb{R}$ , definiert also eine Funktion  $J_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dank Eindeutigkeitsatz N3A ist diese Funktion  $J_0$  die einzige Lösung.

☺ Die Differentialgleichung gebiert eine neue fundamentale Funktion!

(3) Wir skizzieren schließlich den Graphen der Bessel-Funktion

$$J_0(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{4^j (j!)^2} x^{2j} = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + \dots$$



Die Lösungen  $J_\alpha$  der **Bessel-Differentialgleichung**

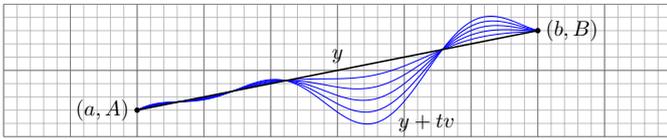
$$x^2 J_\alpha''(x) + x J_\alpha'(x) + (x^2 - \alpha^2) J_\alpha(x) = 0$$

heißen **Bessel-Funktionen** zum Parameter  $\alpha \in \mathbb{C}$ . (Wir haben oben den Fall  $\alpha = 0$  ausgeführt.) Sie begegnen uns bei der Lichtbeugung an kreisförmigen Öffnungen, der Ausbreitung von Wasserwellen in kreisförmigen Behältern, der Untersuchung von Eigenschwingungen einer kreisförmigen Membran, der Wärmeleitung in Stäben, etc.

📖 H. Heuser: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, §28, sowie [de.wikipedia.org/wiki/Besselsche\\_Differentialgleichung](http://de.wikipedia.org/wiki/Besselsche_Differentialgleichung).

Man zählt sie zu den **speziellen Funktionen**. Damit bezeichnet man allgemein all solche Funktionen, die in Mathematik und Physik häufig auftreten und daher eine grundlegende Rolle spielen, dabei aber über die elementaren Funktionen  $\exp$ ,  $\sin$ ,  $\cos$ , ... hinausgehen.

📖 M. Abramowitz, I.A. Stegun: *Handbook of mathematical functions*, online frei erhältlich etwa unter [numerical.recipes/aands/](http://numerical.recipes/aands/)



Welche Funktion  $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  verbindet  $(a, A)$  und  $(b, B)$  mit minimaler Länge  $L = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$ ? oder Wirkung  $S = \frac{1}{2} \int_a^b 1 + y'(x)^2 dx$ ?  
Zu minimieren ist hier das **Wirkungsfunktional**  $S: C^2([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$y \mapsto S(y) := \int_{x=a}^b F(x, y(x), y'(x)) dx \quad \text{mit} \quad F(x, q, p) = \begin{cases} 1 + p^2 \\ \sqrt{1 + p^2} \end{cases}$$

Die folgende Rechnung zeigt, wie wir minimierende Kurven finden. Angenommen, die Funktion  $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist minimal bezüglich  $S$ , das heißt, es gilt  $S(y) \leq S(z)$  für alle Konkurrenten  $z: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Sei  $v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine kleine Variation mit  $v(a) = v(b) = 0$  und

$$\varphi(t) := S(y + tv) = \int_{x=a}^b F(x, y(x) + tv(x), y'(x) + tv'(x)) dx.$$

Die Funktion  $t \mapsto \varphi(t)$  hat in  $t = 0$  ein Minimum, also gilt  $\varphi'(0) = 0$ .

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \frac{d}{dt} \int_{x=a}^b F(x, y + tv, y' + tv') dx = \int_{x=a}^b \frac{d}{dt} F(x, y + tv, y' + tv') dx \\ &= \int_{x=a}^b \frac{\partial F}{\partial q}(x, y + tv, y' + tv') \cdot v + \frac{\partial F}{\partial p}(x, y + tv, y' + tv') \cdot v' dx \end{aligned}$$

Den zweiten Summanden vereinfachen wir durch partielle Integration:

$$\int_{x=a}^b \frac{\partial F}{\partial p} \cdot v' dx = \left[ \frac{\partial F}{\partial p} \cdot v \right]_{x=a}^b - \int_{x=a}^b \left[ \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial p} \right] \cdot v dx$$

Somit gilt schließlich:

$$\varphi'(0) = \int_{x=a}^b \left[ \frac{\partial F}{\partial q}(x, y, y') - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial p}(x, y, y') \right] \cdot v(x) dx \stackrel{!}{=} 0$$

😊 Anschaulich: Dies ist die Ableitung von  $S$  im Punkt  $y$  in Richtung  $v$ . Sie verschwindet für alle Variationen  $v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $v(a) = v(b) = 0$ . Folglich verschwindet die Funktion  $u(x)$  in eckigen Klammern:  $[...] = 0$ .

Gegeben sei ein **Wirkungsfunktional**  $S: C^2 = C^2([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$y \mapsto S(y) := \int_{x=a}^b F(x, y(x), y'(x)) dx$$

als Integral einer  $C^2$ -Funktion  $F: [a, b] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, q, p) \mapsto F(x, q, p)$ .

**Satz N4B: Euler-Lagrange-Differentialgleichung**

Ist  $y \in C^2$  **extremal**, also minimal  $S(y) \leq S(z)$  für alle  $z \in C^2$  oder maximal  $S(y) \geq S(z)$  für alle  $z \in C^2$ , dann erfüllt  $y$  die Gleichung

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial q} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial p} \right] (x, y(x), y'(x)) = 0.$$

Ausgeschrieben bedeutet das: Für alle  $x \in [a, b]$  gilt die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial q}(x, y(x), y'(x)) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial p}(\dots) + \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial p}(\dots) y'(x) + \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}(\dots) y''(x).$$

😊 Mit dieser Differentialgleichung können wir  $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  berechnen!

**Übung:** (1) Anwendung auf Verbindungswege geringster Wirkung:

$$\begin{aligned} F(x, q, p) &= \frac{1 + p^2}{2}, & \frac{\partial F}{\partial q} &= 0, & \frac{\partial F}{\partial p} &= p \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial p} &= 0, & \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial p} &= 0, & \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} &= 1. \end{aligned}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung reduziert sich damit zu  $y''(x) = 0$ , also  $y(x) = c_0 + c_1 x$ . Minimierende Verbindungswege sind Geraden!

⚠ Dass umgekehrt die gefundenen Lösungen tatsächlich minimal sind, muss man jeweils durch genauere Analyse absichern, etwa  $\varphi''(0) > 0$ .

**Übung:** (2) Anwendung auf Verbindungswege kürzester Länge:

$$\begin{aligned} F(x, q, p) &= \sqrt{1 + p^2}, & \frac{\partial F}{\partial q} &= 0, & \frac{\partial F}{\partial p} &= \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial p} &= 0, & \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial p} &= 0, & \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} &= \frac{1}{(1 + p^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

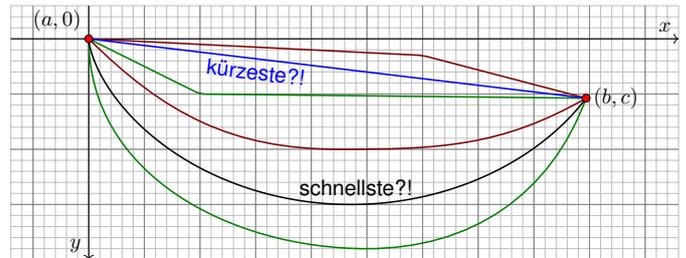
Auch hier reduziert sich die Euler-Lagrange-Gleichung zu  $y''(x) = 0$ .

😊 Geraden waren hier zu erwarten, nun können wir es nachrechnen!



Eine Skaterampe (im Bild eine Halfpipe in Rotterdam) wird meist aus einfachen geometrischen Formen zusammengesetzt. Welche Kurve optimiert die Geschwindigkeit, wird also am schnellsten durchlaufen? Das ist das berühmte Problem der **Brachistochrone**, also der Kurve kürzester Laufzeit. Seine Untersuchung führt zur Variationsrechnung.

Ein Massepunkt ruht in  $(a, 0)$  und bewegt sich dann allein durch seine Schwerkraft reibungsfrei auf der Kurve  $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  nach  $(b, c)$ .



Problem der Brachistochrone: Welche Kurve  $y$  hat kürzeste Laufzeit?

**Aufgabe:** (1) Finden / begründen Sie  $1 + y'(x)^2 + 2y(x)y''(x) = 0$ .

(2) Lösen Sie diese Differentialgleichung durch die **Zykloide**

$$\gamma: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto (x(\theta), y(\theta)) = r(\theta - \sin \theta, 1 - \cos \theta)$$

**Lösung:** (1) Wir berechnen die Laufzeit  $T(y)$  längs  $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ :

Energieerhaltung:  $\frac{1}{2}mv^2 = mgy \Rightarrow$  Geschwindigkeit:  $v = \sqrt{2gy}$

Wegstück:  $ds = \sqrt{1 + y'(x)^2} dx \Rightarrow$  Zeitverbrauch:  $dt = ds/v$

Die Laufzeit von  $(a, 0)$  nach  $(b, c)$  längs  $(x, y(x))$  ist demnach:

$$T(y) = \int_{x=a}^b \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2g y(x)}} dx$$

Zu minimieren ist hier also das Funktional  $T: C^2([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$y \mapsto T(y) := \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx \quad \text{mit} \quad F(x, q, p) = \sqrt{\frac{1 + p^2}{2gq}}$$

Wir finden Kandidaten  $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dank Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial F}{\partial q}(x, y(x), y'(x)) - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial p}(\dots) - \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial p}(\dots) y'(x) - \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}(\dots) y''(x) = 0$$

Die nötigen Ableitungen berechnen wir sorgsam und geduldig:

$$F(x, q, p) = \left[ \frac{1 + p^2}{2gq} \right]^{1/2}, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = -\frac{1 + p^2}{4gq^2} \left[ \dots \right]^{-1/2}, \quad \frac{\partial F}{\partial p} = \frac{p}{2gq} \left[ \dots \right]^{-1/2}$$

Die zweiten Ableitungen sind dann  $\partial^2 F / \partial x \partial p = 0$  sowie

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial p} &= -\frac{p}{2gq^2} \left[ \dots \right]^{-3/2} + \frac{p}{2gq} \frac{1 + p^2}{4gq^2} \left[ \dots \right]^{-3/2} = -\frac{p}{4gq^2} \left[ \dots \right]^{-3/2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} &= +\frac{1}{2gq} \left[ \dots \right]^{-1/2} - \frac{p}{2gq} \frac{p}{2gq} \left[ \dots \right]^{-3/2} = +\frac{1}{2gq(1 + p^2)} \left[ \dots \right]^{-1/2} \end{aligned}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung vereinfachen sich damit wie folgt:

$$\frac{\partial F}{\partial q}(x, y(x), y'(x)) - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial p}(\dots) - \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial p}(\dots) y'(x) - \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}(\dots) y''(x) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1 + y'(x)^2}{4g y(x)^2} + \frac{y'(x)^2}{4g y(x)^2} - \frac{1}{2g y(x)(1 + y'(x)^2)} y''(x) = 0$$

$$\Rightarrow 1 + y'(x)^2 + 2y(x)y''(x) = 0 \quad \text{Uff! Alles wird gut.}$$

## Die Brachistochrone

N409  
Ergänzung

(2) Die Kurve  $x(\theta) = r \cdot (\theta - \sin \theta)$  und  $y(\theta) = r \cdot (1 - \cos \theta)$  mit  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  löst unsere Differentialgleichung  $1 + (y')^2 + 2yy'' = 0$ . Nachrechnen:

$$\frac{dx}{d\theta} = r \cdot (1 - \cos \theta), \quad \frac{dy}{d\theta} = r \sin \theta, \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$$

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{\sin^2(\theta)}{(1 - \cos \theta)^2} = \frac{1 - 2 \cos \theta + \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}{(1 - \cos \theta)^2} = \frac{2}{1 - \cos \theta}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{\cos \theta \cdot (1 - \cos \theta) - \sin \theta \cdot \sin \theta}{r \cdot (1 - \cos \theta)^3} = \frac{-1}{r \cdot (1 - \cos \theta)^2}$$

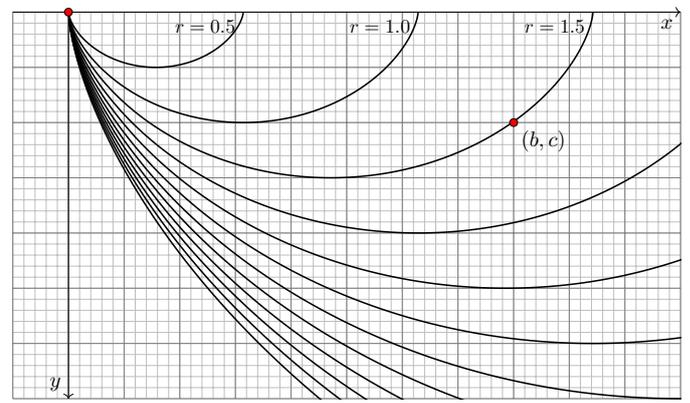
$$2yy'' = 2r \cdot (1 - \cos \theta) \cdot \frac{-1}{r \cdot (1 - \cos \theta)^2} = \frac{-2}{1 - \cos \theta}$$

☺ Wir haben Glück, die Lösung ist schön und einfach: Die gesuchte Kurve ist eine **Zykloide**! Das war nicht zu erwarten. Sie beginnt im Ursprung  $(x(0), y(0)) = (0, 0)$ ; die freie Konstante  $r$  wählen wir so, dass die Zykloide durch den vorgegebenen Endpunkt  $(x(\Theta), y(\Theta)) = (b, c)$  geht.

Bemerkungen: Die Kurve ist unabhängig von der Masse  $m$  und der Erdbeschleunigung  $g$ . Die Tangente im Startpunkt ist senkrecht. Bei starkem Gefälle  $c/b \geq 2/\pi$  ist  $(b, c)$  der tiefste Punkt, bei schwachem Gefälle  $c/b < 2/\pi$  liegt der Tiefpunkt strikt zwischen  $(a, 0)$  und  $(b, c)$ ! Bei Gefälle 0 liegen  $(a, 0)$  und  $(b, 0)$  auf derselben Höhe, und die Kurve ist symmetrisch.

## Die Brachistochrone

N410  
Ergänzung

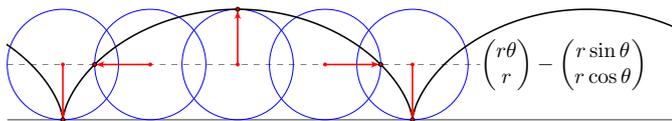


Die freie Konstante  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  können wir eindeutig so wählen, dass die Zykloide durch den vorgegebenen Endpunkt  $(x(\Theta), y(\Theta)) = (b, c)$  läuft.

## Die Brachistochrone

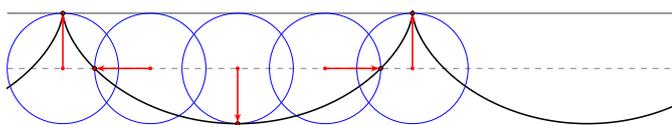
N411  
Ergänzung

Geometrische Konstruktion der **Zykloide** durch Abrollen eines Kreises:



Die Zykloide ist die **Radkurve**, die ein Kreispunkt beim Abrollen eines Kreises auf einer Leitkurve beschreibt, hier auf einer horiz. Geraden. Mit dieser Beschreibung finden wir sofort die Koordinaten  $(x(\theta), y(\theta))$  in Abhängigkeit vom zurückgelegten Drehwinkel  $\theta \in \mathbb{R}$ , wie angegeben.

Zykloiden haben bemerkenswerte Eigenschaften; uns begegnen sie hier als Brachistochrone: Diese ist eine nach oben geöffnete Zykloide.



## Die Brachistochrone

N412  
Ergänzung

**Aufgabe:** Berechnen Sie die minimale Laufzeit entlang der Zykloide.

**Lösung:** Wir nutzen die oben entwickelten Formeln:

$$T(y) = \int_{x=a}^b \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2g y(x)}} dx \quad \text{mit} \quad \begin{cases} x(\theta) = r(\theta - \sin \theta) \\ y(\theta) = r(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

$$= \int_{\theta=0}^{\Theta} \sqrt{\frac{2/(1 - \cos \theta)}{2g r(1 - \cos \theta)}} r(1 - \cos \theta) d\theta$$

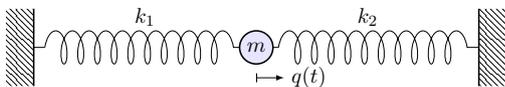
$$= \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{\theta=0}^{\Theta} 1 d\theta = \sqrt{\frac{r}{g}} \Theta$$

☺ Unser zunächst willkürlicher Parameter  $\theta$  ist proportional zur Zeit. Das ist ein bemerkenswerter und nützlicher Nebeneffekt.

☺ Das Geradensegment ist zwar die geometrisch kürzeste Verbindung aber nicht die schnellste! Sie können die Laufzeiten auch für andere Kurven explizit berechnen und vergleichen: Die Zykloide schlägt sie alle! Im Internet finden Sie zahlreiche Illustrationen und Experimente dazu. Sie können dies mit etwas Geschick selbst bauen und ausprobieren.

## Lagrange-Funktion in der klassischen Mechanik

N413  
Ergänzung



Ein Teilchen habe die Masse  $m$ , Position  $q(t)$  und Geschwindigkeit  $\dot{q}(t)$ , die kinetische Energie  $T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2$  und die potentielle Energie  $V = \frac{1}{2}kq^2$ .

Dies definiert folgende **Lagrange-Funktion** und ihr **Wirkungsintegral**:

$$L := T - V, \quad S(q) := \int_{t=a}^b L(t, q, \dot{q}) dt = \int_{t=a}^b \left( \frac{1}{2}m\dot{q}(t)^2 - \frac{1}{2}kq(t)^2 \right) dt$$

**Aufgabe:** Finden Sie die Kurven  $q: \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}$  minimaler Wirkung. Entspricht dies der Bewegung nach der Newtonschen Mechanik?

**Lösung:** Die Euler-Lagrange-Gleichung N4B ergibt:

$$\frac{\partial L}{\partial q} \stackrel{!}{=} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad \text{hier mit} \quad \frac{\partial L}{\partial q} = -kq \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt} [m\dot{q}] = m\ddot{q}.$$

Wir erhalten somit  $-kq = m\ddot{q}$ , also „Kraft = Masse · Beschleunigung“.

☺ Die Lösungen sind harmonische Schwingungen  $A \cos(\omega t + \varphi)$ .

## Lagrange-Funktion in der klassischen Mechanik

N414  
Ergänzung

☺ Lagranges Formulierung ist Grundlage der **analytischen Mechanik**: Die Dynamik des Systems  $q(t)$  wird durch eine einzige skalare Funktion  $L(t, q, \dot{q})$  beschrieben; hieraus gewinnen wir dank Variationsrechnung die Bewegungsgleichung durch die Euler-Lagrange-Gleichung N4B.

☺ Hierzu formulierte Hamilton das **Prinzip der kleinsten Wirkung**: Unter allen denkbaren Trajektorien ist die physikalisch beobachtete Bahn des Teilchens extremal: Sie minimiert das Wirkungsintegral! „Die Natur wählt unter allen möglichen Wegen den sparsamsten.“ Diese Betrachtungsweise vereinheitlicht viele physikalische Probleme und vereinfacht ihre Analyse: Lagrange- bzw. Hamilton-Formalismus.

☺ In unserem besonders schönen Spezialfall finden wir  $m\ddot{q} + kq = 0$ . Das ist die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators! N105 Damit schließt sich wunderbar der Kreis: Wir haben dieses Kapitel mit dem harmonischen Oszillator begonnen und beschließen es auch damit. Auf diesem Weg haben wir Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung lösen gelernt. Ich hoffe, diese Anregung findet Ihre Resonanz.

## Lagrange-Funktion in der klassischen Mechanik

N415  
Ergänzung

### Satz N4C: Invariansatz, Emmy Noether 1918

Angenommen, die Lagrange-Funktion  $L(t, q, \dot{q})$  hängt nicht von  $t$  ab, es gelte also  $\partial L / \partial t = 0$ . Dann ist die Energie bzw. Hamilton-Funktion

$$H(q, \dot{q}) = \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L(q, \dot{q})$$

eine Invariante der Bewegung: Es gilt also  $\dot{H} = dH(q(t), \dot{q}(t))/dt = 0$  entlang jeder Trajektorie / Lösung  $t \mapsto q(t)$  des dynamischen Systems.

**Aufgabe:** (1) Beweisen Sie den Satz durch explizites Ausrechnen. (2) Finden Sie  $H$  für den harmonischen Oszillator  $L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$ . (3) Wenden Sie Noethers Satz auf das Brachistochrone-Problem an: Die Aufstellung der Differentialgleichung gelingt damit viel leichter!

**Lösung:** (1) Wir leiten ab und nutzen die Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\frac{dH}{dt} = \ddot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \dot{q} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} = \dot{q} \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \right] \stackrel{\text{Euler-Lagrange}}{\underset{\text{N4B}}{=}} 0$$

## Lagrange-Funktion in der klassischen Mechanik

N416  
Ergänzung

(2) Für  $L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$  ist  $H = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2$  die Gesamtenergie!  
(3) Für die Lagrange-Funktion  $L(q, \dot{q}) = \sqrt{(1 + \dot{q}^2)/(2gq)}$  finden wir:

$$H = \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L(q, \dot{q}) = \dot{q} \frac{\dot{q}}{2gq} \left[ \frac{1 + \dot{q}^2}{2gq} \right]^{-1/2} - \left[ \frac{1 + \dot{q}^2}{2gq} \right]^{1/2}$$

$$= -\frac{1}{2gq} \left[ \frac{1 + \dot{q}^2}{2gq} \right]^{-1/2} + \frac{1 + \dot{q}^2}{2gq} \left[ \frac{1 + \dot{q}^2}{2gq} \right]^{-1/2} - \left[ \frac{1 + \dot{q}^2}{2gq} \right]^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2gq} \sqrt{\frac{2gq}{1 + \dot{q}^2}} = \frac{1}{\sqrt{2gq(1 + \dot{q}^2)}} \stackrel{!}{=} \text{const}$$

Hieraus folgt die Erhaltungsgröße  $q(1 + \dot{q}^2) = \text{const}$ , also wie oben

$$1 + \dot{q}(t)^2 + 2q(t)\ddot{q}(t) = 0.$$

☺ Diese Rechnung ist viel kürzer und leichter als unsere erste. N406 Zudem erhalten wir gratis ein Integral / eine Invariante der Bewegung!

☺ In beide Gleichungen können wir die Zykloide einsetzen und so das Problem der Brachistochrone lösen; dies haben wir oben ausgeführt.

**Lineare DG  $n$ -ter Ordnung** N501  
Fazit

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b: I \rightarrow \mathbb{K}$  stetig,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ . Dies definiert eine **lineare Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung**

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x).$$

Die stetigen Funktionen  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}: I \rightarrow \mathbb{K}$  heißen **Koeffizienten**. Die stetige Funktion  $b: I \rightarrow \mathbb{K}$  heißt **Störterm** oder kurz **rechte Seite**. Links wirkt der **lineare Differentialoperator**  $L: C^n(I, \mathbb{K}) \rightarrow C^0(I, \mathbb{K})$ ,

$$L = a_0 \partial^0 + a_1 \partial^1 + \dots + a_{n-1} \partial^{n-1} + \partial^n,$$

$$y \mapsto a_0 y + a_1 y' + \dots + a_{n-1} y^{(n-1)} + y^{(n)}.$$

Wir suchen alle Funktionen  $y: I \rightarrow \mathbb{K}$ , die die Gleichung  $Ly = b$  erfüllen. Linearität bedeutet  $L(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 L(y_1) + c_2 L(y_2)$  für  $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$ . In anderen Worten: Aus Lösungen  $y_1$  zu  $b_1$  und  $y_2$  zu  $b_2$  ergibt die Linearkombination  $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$  eine Lösung zu  $b = c_1 b_1 + c_2 b_2$ . Zu  $Ly = b$  gehört die **homogene lineare Differentialgleichung**  $Ly = 0$ . Als Lösungsmenge suchen wir also den Kern der linearen Abbildung  $L$ .

**Lineare DG  $n$ -ter Ordnung** N502  
Fazit

Qualitativer Überblick dank **Existenz- und Eindeigkeitsatz N3A** (Fortsetzung von M1C, konstruktiv M2E, später O1B, konstruktiv O2A):

Zu jedem Anfangsdatum  $(x_0, v_0, \dots, v_{n-1}) \in I \times \mathbb{K}^n$  existiert genau eine Lösung  $y: I \rightarrow \mathbb{K}$  mit  $Ly = b$  und  $y(x_0) = v_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = v_{n-1}$ .

Die Lösungsmenge  $L_0 = \{y: I \rightarrow \mathbb{K} \mid Ly = 0\}$  ist ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum der Dimension  $n$ : Wir wählen ein Fundamentalsystem  $y_1, \dots, y_n \in L_0$  von  $n$  linear unabhängigen Lösungen und erhalten:

$$L_0 = \{c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}\} \cong \mathbb{K}^n$$

Die Lösungsmenge  $L_b = \{y: I \rightarrow \mathbb{K} \mid Ly = b\}$  ist ein affiner Raum. Für jede Partikulärlösung  $y_b \in L_b$  gilt  $L_b = y_b + L_0$ , ausgeschrieben:

$$L_b = y_b + L_0 = \{y_b + c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}\}$$

„Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen“  
Sind Anfangswerte  $y(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$  vorgegeben, so kann man hieraus  $c_1, \dots, c_n$  eindeutig bestimmen (lineares Gleichungssystem).

**Lineare DG  $n$ -ter Ordnung** N503  
Fazit

Besonders leicht sind **lineare DG mit konstanten Koeffizienten**:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0$$

Kurzschreibweise  $p(\partial)y = 0$  mit dem **charakteristischen Polynom**

$$p(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Jede  $k$ -fache Nullstelle  $\lambda \in \mathbb{C}$  liefert  $k$  linear unabhängige Lösungen

$$e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda x}.$$

Ist  $p \in \mathbb{R}[x]$  reell und  $\lambda = \sigma + i\omega$  mit  $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$  und  $\omega \neq 0$  eine  $k$ -fache Nullstelle, so gilt dies auch für die komplex-konjugierte Zahl  $\bar{\lambda} = \sigma - i\omega$ . Durch Linearkombination erhalten wir die zugehörigen reellen Lösungen; sie entsprechen Real- und Imaginärteil der komplexen Lösungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda x} \\ e^{\bar{\lambda} x}, \dots, x^{k-1} e^{\bar{\lambda} x} \end{array} \right\} \xleftrightarrow{\text{Basisswechsel}} \left\{ \begin{array}{l} e^{\sigma x} \cos(\omega x), \dots, x^{k-1} e^{\sigma x} \cos(\omega x) \\ e^{\sigma x} \sin(\omega x), \dots, x^{k-1} e^{\sigma x} \sin(\omega x) \end{array} \right\}$$

**Lineare DG  $n$ -ter Ordnung** N504  
Fazit

Zu lösen sei schließlich eine **inhomogene lineare DG**  $p(\partial)y(x) = b(x)$ :

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = b(x)$$

Eine Lösung  $y_b$  gewinnen wir durch **Variation der Konstanten** (N3C) oder Faltung von  $b$  mit der **Greenschen Fundamentallösung**  $u$  (N2F), für die  $p(\partial)u = 0$  und  $u(0) = \dots = u^{(n-2)}(0) = 0, u^{(n-1)}(0) = 1$  gilt:

$$y_b(x) = \int_{t=x_0}^x u(x-t) b(t) dt$$

Für **spezielle rechte Seiten** lohnt sich folgender Ansatz (N2E):  
Zu lösen sei  $p(\partial)y(x) = r(x)e^{\mu x}$  mit Polynomen  $p, r \in \mathbb{C}[x]$ .  
Ist  $\mu$  eine  $k$ -fache Nullstelle von  $p$ , so existiert eine Lösung

$$y_b(x) = q(x) x^k e^{\mu x}$$

mit einem eindeutigen Polynom  $q \in \mathbb{C}[x]$  vom Grad  $\deg q = \deg r$ .  
Speziell  $p(\partial)y(x) = e^{\mu x}$  wird gelöst durch  $y_b(x) = e^{\mu x} x^k / p^{(k)}(\mu)$ .

**Differentialgleichung in Potenzreihen** N505  
Fazit

Für manche Differentialgleichungen reichen elementare Funktionen nicht aus; es werden neue Funktionen als Lösungen benötigt bzw. konstruiert. Bessel-Funktionen sind ein prominentes Beispiel. [N321](#)

Zu lösen sei eine analytische Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

mit gegebenen Anfangsdaten  $y(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$  und einer Potenzreihe

$$f(x, u_0, u_1, \dots, u_{n-1}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}} c_\alpha u_0^{\alpha_0} u_1^{\alpha_1} \dots u_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x^{\alpha_n}.$$

Diese DG wird von genau einer Potenzreihe  $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  erfüllt: Aus den vorgegebenen Anfangsdaten  $a_0, \dots, a_{n-1}$  berechnen sich rekursiv alle weiteren Koeffizienten  $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$  der Reihe.

😊 Hat diese Potenzreihe einen Konvergenzradius  $\rho > 0$ , dann löst die so definierte Funktion  $y: ]-\rho, \rho[ \rightarrow \mathbb{R}$  die gegebene Differentialgleichung.

😊 Dieses Verfahren ist manchmal mühsam, aber immer konstruktiv!

**Euler-Lagrange-Differentialgleichung** N506  
Fazit

Gegeben sei ein **Wirkungsfunktional**  $S: C^2([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$y \mapsto S(y) := \int_{x=a}^b F(x, y(x), y'(x)) dx$$

mit einer  $C^2$ -Funktion  $F: [a, b] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, q, p) \mapsto F(x, q, p)$ .

Dann gilt die **Euler-Lagrange-Differentialgleichung** (Satz N4B):  
Ist  $y \in C^2$  **extremal**, also minimal  $S(y) \leq S(z)$  für alle  $z \in C^2$  oder maximal  $S(y) \geq S(z)$  für alle  $z \in C^2$ , dann erfüllt  $y$  die Gleichung

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial q} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial p} \right] (x, y(x), y'(x)) = 0.$$

Ausgeschrieben bedeutet das: Für alle  $x \in [a, b]$  gilt die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial q}(x, y(x), y'(x)) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial p}(\dots) + \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial p}(\dots) y'(x) + \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}(\dots) y''(x).$$

😊 Mit dieser Differentialgleichung können wir  $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  berechnen!  
Dies ist die Grundlage der Optimierung durch Variationsrechnung. [N401](#)

**Verständnisfragen** N507  
Fazit

Versuchen Sie, folgende Fragen frei aber genau zu beantworten, etwa so, wie Sie dies einer Kommiliton:in / Kolleg:in erklären wollen.

- (1) Was ist ein linearer Differentialoperator  $L: C^n(I, \mathbb{K}) \rightarrow C^0(I, \mathbb{K})$ ?
- (2) Ist diese Abbildung  $L$  injektiv? Welche Dimension hat ihr Kern?
- (3) Welche Struktur hat die Lösungsmenge der Gleichung  $Ly = 0$ ?
- (4) Was versteht man unter einem Fundamentalsystem?
- (5) Ist diese Abbildung  $L: C^n(I, \mathbb{K}) \rightarrow C^0(I, \mathbb{K})$  surjektiv?
- (6) Wie bestimmt man zu  $b \in C^0$  ein Urbild  $y \in C^n$  mit  $Ly = b$ ?
- (7) Welche Struktur hat die Lösungsmenge der Gleichung  $Ly = b$ ?

**Lösung:** (1) Dies ist eine Zuordnung  $L: y \mapsto a_0 y + a_1 y' + \dots + a_{n-1} y^{(n-1)} + y^{(n)}$  mit Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in C^0(I, \mathbb{K})$ , eventuell konstant. (Zur Vereinfachung  $a_n = 1$ .)  
(2) Die Abbildung  $L: C^n(I, \mathbb{K}) \rightarrow C^0(I, \mathbb{K})$  ist linear. Sie ist für  $n \geq 1$  nicht injektiv, genauer:  
(3) Die Lösungsmenge  $\ker L = \{y \in C^n \mid Ly = 0\}$  ist ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum der Dimension  $n$ .  
(4) Ein Fundamentalsystem ist eine Basis  $y_1, \dots, y_n \in \ker L$ . (5) Die Abbildung  $L$  ist surjektiv:  
(6) Partikulärlösungen  $y_b$  mit  $Ly_b = b$  finden wir durch die Greensche Lösungsformel [N245](#) oder Variation der Konstanten [N311](#) oder geeigneten Ansatz für spezielle rechte Seiten [N271](#).  
(7) Die Lösungsmenge der Gleichung  $Ly = b$  ist ein affiner Raum der Dimension  $n$ , explizit ausgeschrieben  $\{y: I \rightarrow \mathbb{K} \mid Ly = b\} = \{y_b + c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}\}$ .

**Verständnisfragen** N508  
Fazit

- (1) Was ist eine lineare Differentialgleichung  $Ly = 0$  mit konstanten Koeffizienten? Was ist ihr charakteristisches Polynom?
- (2) Wie bestimmt man hierzu ein Fundamentalsystem?
- (3) Wie bestimmt man zu  $b \in C^0$  ein Urbild  $y \in C^n$  mit  $Ly = b$ ?
- (4) Was versteht man unter einer speziellen rechten Seite  $b$ ? Wie bestimmt man hierzu ein Urbild  $y \in C^n$  mit  $Ly = b$ ?
- (5) Was versteht man in diesem Zusammenhang unter Resonanz?
- (6) Was ist die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators? Wie löst man sie? Was passiert bei harmonischer Anregung? Was versteht man unter dem Begriff Resonanzkatastrophe?

**Lösung:** (1) Hier gilt  $L: y \mapsto a_0 y + a_1 y' + \dots + a_{n-1} y^{(n-1)} + y^{(n)}$  mit konstanten Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ . Wir schreiben hierfür kurz  $Ly = p(\partial)y$  mit  $\partial = d/dx$  und dem charakteristischen Polynom  $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n \in \mathbb{K}[x]$ .  
(2) Der Exponentialansatz N2D liefert hier stets  $n$  unabhängige Lösungen  $y_1, \dots, y_n \in \ker L$ .  
(3) Neben Greenscher Lösungsformel [N245](#) und Variation der Konstanten [N311](#) lohnt sich meist  
(4) der passende Ansatz für spezielle rechte Seiten  $r(x)e^{\mu x}, e^{\sigma x} \cos(\tau x), e^{\sigma x} \sin(\tau x)$ . [N271](#)  
(5) Bei  $p(\partial)y = r(x)e^{\mu x}$  liegt ( $k$ -fache) Resonanz vor, falls die Anregung  $\mu$  eine ( $k$ -fache) Nullstelle des char. Polynoms  $p$  trifft. (6) Siehe die Ausführung am Anfang des Kapitels N.

**Beispiel einer Klausuraufgabe (2013)** N509  
Übung

**Aufgabe:** Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen für reelle Funktionen  $u, v, w, y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Die vier Gleichungen sind untereinander eng verwandt, das können und sollen Sie zur Lösung ausnutzen.

(1) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$u''(x) - 4u'(x) + 4u(x) = 0.$$

(2) Bestimmen Sie eine Partikulärlösung der inhomogenen Gleichung

$$v''(x) - 4v'(x) + 4v(x) = e^{2x}.$$

(3) Bestimmen Sie eine Partikulärlösung der inhomogenen Gleichung

$$w''(x) - 4w'(x) + 4w(x) = \cos(x).$$

(4) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 2e^{2x} + 25\cos(x).$$

(5) Lösen Sie schließlich das Anfangswertproblem  $y(0) = 5, y'(0) = 1$ .

**Beispiel einer Klausuraufgabe (2013)** N510  
Übung

**Lösung:** Im folgenden Telegrammstil sollten Sie alle Rechnungen eigenhändig nachprüfen und Zwischenrechnungen ergänzen.

(1) Charakteristisches Polynom  $p(x) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$ .  
Fundamentallösungen:  $u_1(x) = e^{2x}$  und  $u_2(x) = x e^{2x}$ . Probe!  
Allgemeine Lösung:  $u(x) = (c_1 + c_2 x) e^{2x}$  mit  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

(2) Für die rechte Seite  $e^{\mu x}$  mit  $\mu = 2$  liegt (doppelte) Resonanz vor:  
 $p(\mu) = p'(2) = 0, p''(\mu) = 2$ . Partikulärlösung ist also  $v(x) = e^{2x} x^2 / 2$ .

(3) Für die rechte Seite  $\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix})$  liegt keine Resonanz vor.  
Wir lösen  $p(\partial) z(x) = e^{ix}$ . Es gilt  $p(\mu) = 3 - 4i$ . Partikulärlösung:  
$$z(x) = \frac{e^{ix}}{3 - 4i} = \frac{3 + 4i}{25} e^{ix} = \left[ \frac{3}{25} \cos x - \frac{4}{25} \sin x \right] + i \left[ \frac{4}{25} \cos x + \frac{3}{25} \sin x \right]$$
  
Der Realteil  $w(x) = \frac{3}{25} \cos x - \frac{4}{25} \sin x$  löst demnach  $p(\partial) w(x) = \cos(x)$ .

**Beispiel einer Klausuraufgabe (2013)** N511  
Übung

Wann wie welcher Ansatz zum Ziel führt, erklärt Ihnen die Theorie! Um alle möglichen Komplikationen und die unzähligen Beispiele zu verstehen, sollten Sie daher unbedingt die Grundlagen beherrschen.

**Alternativen:** (2b) Wir machen den Ansatz  $v(x) = cx^2 e^{2x}$ :  
Ableiten  $v'(x) = c(2x + 2x^2) e^{2x}$  und  $v''(x) = c(2 + 8x + 4x^2) e^{2x}$   
ergibt  $v''(x) - 4v'(x) + 4v(x) = 2c e^{2x}$ . Koeffizientenvergleich mit  $e^{2x}$ :  
Unser Ansatz löst die DG für  $c = 1/2$ , also  $v(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{2x}$ . Probe!

(3b) Wir machen den Ansatz  $w(x) = a \cos x + b \sin x$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ .  
Ableiten  $w'(x) = -a \sin x + b \cos x$  und  $w''(x) = -a \cos x - b \sin x$   
ergibt  $w''(x) - 4w'(x) + 4w(x) = (3a - 4b) \cos x + (4a + 3b) \sin x$ .  
Koeffizientenvergleich  $3a - 4b = 1$  und  $4a + 3b = 0$  ergibt  $a = 3/25$   
und  $b = -4/25$ . Wir erhalten  $w(x) = \frac{3}{25} \cos(x) - \frac{4}{25} \sin(x)$ . Probe!

(3c) Ebenso gelingt der komplexe Ansatz  $z(x) = c e^{ix}$  mit  $c \in \mathbb{C}$ :  
Ableiten  $z'(x) = ci e^{ix}$  und  $z''(x) = -c e^{ix}$  ergibt in die DG eingesetzt  
 $z''(x) - 4z'(x) + 4z(x) = c(3 - 4i) e^{ix}$ . Koeffizientenvergleich mit  $e^{ix}$ :  
Für die Konstante  $c$  finden wir somit  $c = (3 - 4i)^{-1} = (3 + 4i)/25$ .  
Die reelle Lösung findet man wie oben als Realteil  $w(x) = \operatorname{Re} z(x)$ .

**Beispiel einer Klausuraufgabe (2013)** N512  
Übung

(4) Die allgemeine Lösung erhalten wir nun als Linearkombination:  
$$y(x) = u(x) + 2v(x) + 25w(x) = (c_1 + c_2 x + x^2) e^{2x} + 3 \cos(x) - 4 \sin(x)$$
  
Dank Linearität erfüllt dies  $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 2e^{2x} + 25 \cos(x)$ .

(5) Wir lösen schließlich das AWP  $y(0) = 5, y'(0) = 1$ . Ableiten:  
$$y'(x) = (c_2 + 2x) e^{2x} + 2(c_1 + c_2 x + x^2) e^{2x} - 3 \sin(x) - 4 \cos(x)$$
  
Einsetzen führt zu  $y(0) = c_1 + 3 \stackrel{!}{=} 5$  und  $y'(0) = 2c_1 + c_2 - 4 \stackrel{!}{=} 1$ .  
Die gesuchten Konstanten sind demnach  $c_1 = 2$  und  $c_2 = 1$ . Lösung:  
$$y(x) = (2 + x + x^2) e^{2x} + 3 \cos(x) - 4 \sin(x)$$
  
Machen Sie wie immer die Probe: Lösen ist schwer, prüfen ist leicht!

😊 Die Rechnung ist lang, jeder Schritt ist leicht. No pain, no gain!  
😊 Zu jedem Schritt ist klar, was zu tun ist. Der Theorie sei Dank!  
😊 Die abschließende Probe ist leicht und sicher. Alles wird gut!

**Vergleich verschiedener Lösungsmethoden** N513  
Übung

**Aufgabe:** Lösen Sie die beiden Differentialgleichungen

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = e^{\pm t} \quad \text{mit} \quad y(0) = y'(0) = 0$$

auf je drei verschiedenen Wegen: (1) allgemein und dann das AWP, (2) mit Greenscher Lösungsformel, (3) mit Laplace-Transformation.  
Vergleich: Welcher Rechenweg scheint Ihnen am geschicktesten?

**Lösung:** (1) Charakteristisches Polynom  $p(s) = s^2 + 2s + 1 = (s + 1)^2$ .  
Doppelte Nullstelle  $-1$ . Fundamentallösungen:  $e^{-t}, t e^{-t}$ .

(a) Wir lösen  $p(\partial) y(t) = e^{\mu t}$  für  $\mu = 1$ : keine Nullstelle,  $p(1) = 4$ .  
Partikulär:  $y_b(t) = e^t / 4$ . Allgemein:  $y(t) = \frac{1}{4} e^t + (c_1 + c_2 t) e^{-t}$ .  
Die Lösung des AWP ist  $y(t) = \frac{1}{4} e^t + (-\frac{1}{4} - \frac{1}{2} t) e^{-t}$ . Probe!

(b) Wir lösen  $p(\partial) y(t) = e^{\mu t}$  für  $\mu = -1$ : doppelte Nullst.,  $p'(-1) = 2$ .  
Partikulär:  $y_b(t) = e^{-t} t^2 / 2$ . Allgemein:  $y(t) = (c_1 + c_2 t + \frac{1}{2} t^2) e^{-t}$ .  
Die Lösung des AWP ist  $y(t) = \frac{1}{2} t^2 e^{-t}$ . Probe!

**Vergleich verschiedener Lösungsmethoden** N514  
Übung

**Lösung:** (2) Allgemeine Lösungen der homogenen DG:  $(c_1 + c_2 t) e^{-t}$ .  
Greensche Fundamentallösung:  $u(t) = t e^{-t}$  mit  $u(0) = 0, u'(0) = 1$ .

(a) Die Faltung von  $u$  mit der rechten Seite  $b(t) = e^t$  ergibt:  
$$y(t) = \int_{\tau=0}^t u(t-\tau) b(\tau) d\tau = \int_{\tau=0}^t (t-\tau) e^{\tau-t} e^{\tau} d\tau$$
  
$$= e^{-t} \left[ \frac{2t+1-2\tau}{4} e^{2\tau} \right]_{\tau=0}^t = \frac{1}{4} e^t - \frac{1+4t}{4} e^{-t}$$

(b) Die Faltung von  $u$  mit der rechten Seite  $b(t) = e^{-t}$  ergibt:  
$$y(t) = \int_{\tau=0}^t u(t-\tau) b(\tau) d\tau = \int_{\tau=0}^t (t-\tau) e^{\tau-t} e^{-\tau} d\tau$$
  
$$= e^{-t} \left[ t\tau - \frac{1}{2} \tau^2 \right]_{\tau=0}^t = \frac{1}{2} t^2 e^{-t}$$

😊 Die Greensche Lösungsformel führt immer zum Ziel. Das ist gut.  
Hier geht es noch geschickter: Für spezielle rechte Seiten gelingt der richtige Exponentialansatz leichter und schneller. Das ist sein Zweck!

**Vergleich verschiedener Lösungsmethoden** N515  
Übung

**Lösung:** (3) Wir Laplace-transformieren dank  $\mathcal{L}$ -Tabelle:

$$\begin{aligned} y(t) &\circ\!\!\!\circ\! Y(s) &&= Y(s) \\ y'(t) &\circ\!\!\!\circ\! sY(s) - y(0) &&= sY(s) \\ y''(t) &\circ\!\!\!\circ\! s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) &&= s^2 Y(s) \\ e^{\mu t} &\circ\!\!\!\circ\! 1/(s-\mu) \end{aligned}$$

(a) Dank Linearität transformieren wir die DG zur Hilfsgleichung

$$(s^2 + 2s + 1) Y(s) = \frac{1}{s-\mu}$$

charakteristisches Polynom                      rechte Seite

Vor  $Y(s)$  steht als Faktor immer das charakteristische Polynom, hier  $p(s) = s^2 + 2s + 1$ .  
Das gilt allgemein:  $p(\partial) y(t) \circ\!\!\!\circ\! p(s) Y(s) + \dots$ , im Allgemeinen steuern Anfangswerte weitere Terme bei; zur Vereinfachung wurde hier das AWP  $y(0) = y'(0) = 0$  vorgegeben.  
Die Anfangswerte werden schon im ersten Schritt in die  $\mathcal{L}$ -Transformation eingearbeitet und somit nur die spezielle Lösung des AWP angesteuert. Die allgemeine Lösung der Gleichung  $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = e^{\mu t}$  wird hier nicht benötigt (und auch nicht nebenbei gefunden).  
Im Fall  $\mu = -1$  liegt Resonanz vor; die  $\mathcal{L}$ -Transformation verarbeitet das automatisch.

**Vergleich verschiedener Lösungsmethoden** N516  
Übung

(b) Auflösung der Hilfsgleichung nach  $Y$  und Partialbruchzerlegung:

$$Y(s) = \frac{1}{(s-\mu)(s+1)^2} = \begin{cases} \frac{1}{4(s-1)} - \frac{1}{2(s+1)} - \frac{1}{4(s+1)^2} & \text{für } \mu = +1, \\ \frac{1}{(s+1)^3} & \text{für } \mu = -1. \end{cases}$$

(c) Rücktransformation von  $Y$  zu  $y$  dank  $\mathcal{L}$ -Tabelle:

$$Y(s) = \frac{1}{(s-\mu)(s+1)^2} \circ\!\!\!\circ\! y(t) = \begin{cases} \frac{1}{4} e^t - \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{4} t e^{-t} & \text{für } \mu = +1, \\ \frac{1}{2} t^2 e^{-t} & \text{für } \mu = -1. \end{cases}$$

Machen Sie wie immer die Probe: Lösen ist schwer, prüfen ist leicht!

😊 Die allgemeine Lösung (1) betont die lineare / affine Struktur.  
Dies gibt uns einen guten Überblick des Raumes *aller* Lösungen.  
😊 Aus (1) erhalten wir insb. die Greensche Fundamentallösung.  
Die Greensche Lösungsformel (2) funktioniert für *alle* rechten Seiten.  
😊 Die Laplace-Transformation (3) behandelt alle Fälle einheitlich.  
Eventuelle Resonanz zeigt sich in der Partialbruchzerlegung (3b,c).

Die Methode der Laplace-Transformation ist dann effizient, wenn man jeden der drei Schritte (a-c) schnell und sicher ausführen kann. Hierzu nützen Tabellen, vor allem aber *viel Erfahrung!*

**Vergleich verschiedener Lösungsmethoden** N517  
Übung

**Aufgabe:** Lösen Sie die Differentialgleichung

$$u'''(t) - u(t) = 1 \quad \text{mit} \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = u''(0) = 1$$

(1) allgemein und dann das AWP, (2) mit Laplace-Transformation.  
Vergleich: Welcher Rechenweg scheint Ihnen am geschicktesten?

**Lösung:** (1) Das char. Polynom der Gleichung  $p(\partial)u = 0$  ist

$$p(s) = s^3 - 1 = (s - 1)(s^2 + s + 1) = (s - 1)(s - \omega)(s - \bar{\omega})$$

$$\omega = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3} = e^{2\pi i/3}, \quad \bar{\omega} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3} = e^{4\pi i/3}$$

Nullstellen:  $1, \omega, \bar{\omega}$ . Fundamentallösungen:  $e^t, e^{\omega t}, e^{\bar{\omega}t}$ .

(a) Wir lösen  $p(\partial)u(t) = e^{\mu t}$  für  $\mu = 0$ : keine Nullstelle,  $p(0) = -1$ .  
Partikulärlösung:  $u_b(t) = e^{0t}/(-1) = -1$ . Probe: klar!  
Die allgemeine Lösung der DG  $u'''(t) - u(t) = 1$  ist demnach:

$$u(t) = c_1 e^t + c_2 e^{\omega t} + c_3 e^{\bar{\omega}t} - 1$$

**Vergleich verschiedener Lösungsmethoden** N518  
Übung

(b) Die Anfangsdaten bestimmen eindeutig die freien Konstanten:

$$\left. \begin{aligned} u(0) &= c_1 + c_2 + c_3 - 1 \stackrel{!}{=} 0 \\ u'(0) &= c_1 + \omega c_2 + \bar{\omega} c_3 \stackrel{!}{=} 1 \\ u''(0) &= c_1 + \bar{\omega} c_2 + \omega c_3 \stackrel{!}{=} 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

Probe! Die gesuchte Lösung des AWP ist also

$$u(t) = e^t - 1.$$

Wir machen die Probe: Lösen ist schwer, prüfen ist leicht!

$$u(t) = e^t - 1, \quad u'(t) = u''(t) = u'''(t) = e^t$$

$$u'''(t) - u(t) = 1, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = u''(0) = 1$$

😊 Die Funktion  $u$  erfüllt die Differentialgleichung mit Anfangsdaten!

Dieses Lösungsschema hat nur zwei rechenintensive Schritte: Wir müssen (a) die Nullstellen des charakteristischen Polynoms finden und (b) die freien Koeffizienten durch ein lineares Gleichungssystem bestimmen. Das ist mitunter mühsam aber letztlich Routinearbeit. Für Gleichungen kleiner Ordnung  $n = 2, 3, 4, \dots$  gelingt es jedenfalls leicht.

**Vergleich verschiedener Lösungsmethoden** N519  
Übung

**Lösung:** (2) Wir Laplace-transformieren dank  $\mathcal{L}$ -Tabelle:

$$\begin{aligned} u(t) &\circ \bullet U(s) &&= U(s) \\ u'(t) &\circ \bullet sU(s) - u(0) &&= sU(s) \\ u''(t) &\circ \bullet s^2U(s) - su(0) - u'(0) &&= s^2U(s) - 1 \\ u'''(t) &\circ \bullet s^3U(s) - s^2u(0) - su'(0) - u''(0) &&= s^3U(s) - s - 1 \\ 1 &\circ \bullet s^{-1} \end{aligned}$$

(a) Dank Linearität transformieren wir die DG zur Hilfsgleichung

$$\begin{aligned} s^3U(s) - s - 1 - U(s) &= s^{-1} \\ \underbrace{(s^3 - 1)U(s)}_{\text{char. Polynom}} - \underbrace{(s + 1)}_{\text{Anfangsdaten}} &= \underbrace{s^{-1}}_{\text{rechte Seite}} \end{aligned}$$

Vor  $U(s)$  steht als Faktor immer das charakteristische Polynom, hier also  $p(s) = s^3 - 1$ , denn  $p(\partial)y(t) \circ \bullet p(s)Y(s) + \dots$ . Die Anfangswerte steuern die weiteren Terme bei.  
Die Anfangswerte werden schon im ersten Schritt in die  $\mathcal{L}$ -Transformation eingearbeitet und somit nur die spezielle Lösung des AWP angesteuert. Die allgemeine Lösung der Gleichung  $u'''(t) - u(t) = 1$  wird hier nicht benötigt (und auch nicht nebenbei gefunden).

**Vergleich verschiedener Lösungsmethoden** N520  
Übung

(b) Auflösung der Hilfsgleichung nach  $U$ :

$$(s^3 - 1)U(s) = s + 1 + s^{-1}$$

$$U(s) = \frac{s + 1 + s^{-1}}{s^3 - 1} = \frac{s^2 + s + 1}{s(s - 1)(s^2 + s + 1)} = \frac{1}{s(s - 1)}$$

(c) Rücktransformation von  $U$  zu  $u$  dank  $\mathcal{L}$ -Tabelle:

$$U(s) = \frac{1}{s(s - 1)} \stackrel{\text{PBZ}}{=} \frac{1}{s - 1} - \frac{1}{s} \quad \bullet \circ \quad e^t - 1 = u(t)$$

😊 Wir machen die Probe wie in (1). Lösen ist schwer, prüfen ist leicht!

Die Transformation entnimmt man am besten einer der umfangreichen  $\mathcal{L}$ -Tabellen. Dies ist besonders einfach für spezielle rechte Seiten wie  $t^n e^{at} \circ \bullet n!/(s - a)^{n+1}$  etc.  
Zur Rücktransformation nutzen wir die Partialbruchzerlegung. Das ist Routinearbeit. Damit bringen wir unsere Hilfslösung  $U(s)$  in eine möglichst einfache Form, deren Bestandteile wir in der  $\mathcal{L}$ -Tabelle finden und so bequem zur gesuchten Lösung  $u(t)$  zurücktransformieren.  
Die Methode der Laplace-Transformation ist dann effizient, wenn man jeden der drei Schritte (a-c) schnell und sicher ausführen kann. Hierzu nützen Tabellen, vor allem aber *viel Erfahrung!*

**Vergleich verschiedener Lösungsmethoden** N521  
Übung

**Aufgabe:** Lösen Sie die Differentialgleichung

$$u''(t) + 2u'(t) + 10u(t) = 2 \cos(t) + 9 \sin(t) \quad \text{mit} \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 4.$$

(1) allgemein und dann das AWP, (2) mit Laplace-Transformation.  
Vergleich: Welcher Rechenweg scheint Ihnen am geschicktesten?

**Lösung:** (1) Das char. Polynom der Gleichung  $p(\partial)u = 0$  ist

$$p(s) = s^2 + 2s + 10 = (s + 1 + 3i)(s + 1 - 3i)$$

Komplexe Fundamentallösungen:  $e^{(-1-3i)t}, e^{(-1+3i)t}$ .  
Reelle Fundamentallösungen:  $e^{-t} \cos(3t), e^{-t} \sin(3t)$ .

(a) Wir lösen  $p(\partial)z(t) = (2 - 9i)e^{it}$ . Es gilt  $p(i) = 9 + 2i$ , also

$$z(t) = \frac{2 - 9i}{9 + 2i} e^{it} = -i e^{it} = \sin(t) - i \cos(t).$$

Der Realteil  $\sin(t)$  löst unsere Differentialgleichung. Allgemein:

$$\begin{aligned} u(t) &= \sin(t) + c_1 e^{(-1-3i)t} + c_2 e^{(-1+3i)t} \\ &= \sin(t) + \alpha_1 e^{-t} \cos(3t) + \alpha_2 e^{-t} \sin(3t) \end{aligned}$$

**Vergleich verschiedener Lösungsmethoden** N522  
Übung

(b) Die Anfangsdaten bestimmen eindeutig die freien Konstanten:

$$\left. \begin{aligned} u(0) &= \alpha_1 \stackrel{!}{=} 0 \\ u'(0) &= 1 - \alpha_1 + 3\alpha_2 \stackrel{!}{=} 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

Probe! Die gesuchte Lösung des AWP ist also

$$u(t) = \sin(t) + e^{-t} \sin(3t).$$

Wir machen die Probe: Lösen ist schwer, prüfen ist leicht!

$$\begin{aligned} u(t) &= \sin(t) + e^{-t} \sin(3t) \\ u'(t) &= \cos(t) - e^{-t} \sin(3t) + 3e^{-t} \cos(3t) \\ u''(t) &= -\sin(t) - 8e^{-t} \sin(3t) - 6e^{-t} \cos(3t) \end{aligned}$$

😊 Die Funktion  $u$  erfüllt die Differentialgleichung mit Anfangsdaten!

Bei diesem Lösungsweg müssen wir (a) die Nullstellen des charakteristischen Polynoms finden und (b) die freien Koeffizienten durch ein lineares Gleichungssystem bestimmen. Das ist mitunter mühsam aber letztlich Routinearbeit. Für Gleichungen kleiner Ordnung gelingt es leicht.

**Vergleich verschiedener Lösungsmethoden** N523  
Übung

**Lösung:** (2) Wir Laplace-transformieren dank  $\mathcal{L}$ -Tabelle:

$$\begin{aligned} u(t) &\circ \bullet U(s) &&= U(s) \\ u'(t) &\circ \bullet sU(s) - u(0) &&= sU(s) \\ u''(t) &\circ \bullet s^2U(s) - su(0) - u'(0) &&= s^2U(s) - 4 \\ \cos(\omega t) &\circ \bullet \frac{s}{s^2 + \omega^2} && \sin(\omega t) \circ \bullet \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

(a) Dank Linearität transformieren wir die DG zur Hilfsgleichung:

$$\begin{aligned} s^2U(s) - 4 + 2sU(s) + 10U(s) &= \frac{2s}{s^2 + 1} + \frac{9}{s^2 + 1} \\ \underbrace{(s^2 + 2s + 10)U(s)}_{\text{char. Polynom}} - \underbrace{4}_{\text{Anfangsdaten}} &= \underbrace{\frac{2s + 9}{s^2 + 1}}_{\text{rechte Seite}} \end{aligned}$$

Vor  $U(s)$  steht als Faktor immer das charakteristische Polynom, hier also  $p(s) = s^3 - 1$ , denn  $p(\partial)y(t) \circ \bullet p(s)Y(s) + \dots$ . Die Anfangswerte steuern die weiteren Terme bei.

**Vergleich verschiedener Lösungsmethoden** N524  
Übung

(b) Auflösung der Hilfsgleichung nach  $U$  und Partialbruchzerlegung:

$$(s^2 + 2s + 10)U(s) = 4 + \frac{2s + 9}{s^2 + 1}$$

$$U(s) = \frac{4}{s^2 + 2s + 10} + \frac{2s + 9}{(s^2 + 1)(s^2 + 2s + 10)}$$

$$\stackrel{\text{PBZ}}{=} \frac{4}{s^2 + 2s + 10} + \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{s^2 + 2s + 10}$$

(c) Rücktransformation von  $U$  zu  $u$  dank  $\mathcal{L}$ -Tabelle:

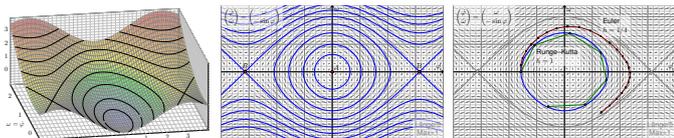
$$U(s) = \frac{3}{(s + 1)^2 + 3^2} + \frac{1}{s^2 + 1} \quad \bullet \circ \quad e^{-t} \sin(3t) + \sin(t) = u(t)$$

😊 Wir machen die Probe wie in (1). Lösen ist schwer, prüfen ist leicht!

Die Transformation entnimmt man am besten einer der umfangreichen  $\mathcal{L}$ -Tabellen. Dies ist einfach für spezielle rechte Seiten wie  $e^{-at} \sin(\omega t) \circ \bullet \omega / ((s + a)^2 + \omega^2)$ . Zur Rücktransformation nutzen wir die Partialbruchzerlegung. Das ist Routinearbeit.

Kapitel O

Dynamische Systeme



Nicht das Existenztheorem ist das Wertvolle, sondern die im Beweise geführte Konstruktion.

Hermann Weyl (1885–1955)

Inhalt dieses Kapitels O

- 1 Dynamische Systeme
  - Der harmonische Oszillator als dynamisches System
  - Gekoppelte Oszillatoren und Eigenfrequenzen
  - Mathematisches Pendel und Energiefläche
  - Das Näherungsverfahren von Runge–Kutta
- 2 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen
  - Lokale Lösungen: Satz von Picard–Lindelöf
  - Fortsetzungen und maximale Lösungskurven
  - Sensible Abhängigkeit von den Anfangsdaten
  - Aufgaben zu Existenz und Eindeutigkeit und Stabilität
- 3 Der Hauptsatz für lineare dynamische Systeme
  - Affin/Lineare Struktur des Lösungsraumes
  - Variation der Konstanten zur Partikulärlösung
  - Matrizenkalkül und Exponentialfunktion
  - Fundamentallösung homogener DGSysteme

Einleitung und Überblick

Differentialgleichungen sind die Sprache der Naturgesetze.

- Oft ist der unabhängige Parameter  $t \in \mathbb{R}$  die Zeit.
- Die abhängige Größe  $x(t)$  ist der Zustand zur Zeit  $t$ .
- Die Gleichung  $x'(t) = f(t, x(t))$  ist das Bewegungsgesetz.
- Die Anfangsdaten  $x(t_0) = x_0$  sind gegeben durch  $(t_0, x_0)$ .

Viele Modelle in Naturwissenschaft und Technik haben diese Form!

Wir nennen dies ein **deterministisches dynamisches System**:

Der zukünftige Verlauf hängt nur vom Anfangszustand  $(t_0, x_0)$  ab.

Solche Modelle werden zur Erklärung und Vorhersage angewendet, von der Mechanik über Klimamodelle bis zur Astronomie.

Bei **zeitdiskreten Systemen** verläuft die Zeit  $t \in \mathbb{Z}\Delta t$  in Schritten, bei **zeitkontinuierlichen Systemen** ist die Zeit  $t \in \mathbb{R}$  kontinuierlich.

Die wichtigste Technik hierzu sind Differentialgleichungen. Wichtige Fragestellungen sind die (exakte oder numerische) Berechnung von Lösungen sowie ihr Langzeitverhalten (Periodizität, Stabilität, Chaos).

Einleitung und Überblick

Differentialgleichungen sind ein Universalwerkzeug zur quantitativen Beschreibung von allen Systemen, die vom gegenwärtigen Zustand ausgehend einer kontinuierlichen zeitlichen Entwicklung unterliegen.

*Une loi (physique), pour nous, [...] est une relation constante entre le phénomène d'aujourd'hui et celui de demain; en un mot, c'est une équation différentielle.*

Henri Poincaré (1854–1912), *La valeur de la science*

Das gilt für naturwissenschaftlich-technische Anwendungen ebenso wie praktisch überall sonst. Trotz drastischer Vereinfachung des Modells sind Differentialgleichungen daher ähnlich komplex wie diese realen Phänomene: Sie sind naturgegeben schwierig, aber auch faszinierend.

📖 Zur Vertiefung und für zahlreiche Anwendungsbeispiele siehe H. Heuser: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Vieweg, 6. Aufl. 2009

📖 Die Numerik bietet umfangreiche Werkzeuge, siehe etwa P. Deuflhard, F. Bornemann: *Numerische Mathematik*, Band 2: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, De Gruyter, 3. Aufl. 2008

Einleitung und Überblick

In den vorigen Kapiteln haben wir **Differentialgleichungen** der Form  $y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  untersucht, in Kapitel M zunächst für  $n = 1$  von der speziellen Form  $y' = f(t, y)$ , in Kapitel N allgemeiner für  $n \geq 1$ :

Gegeben ist die stetige Funktion  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n \supseteq G \rightarrow \mathbb{K}$ , gesucht sind alle Funktionen  $y: I \rightarrow \mathbb{K}$  auf einem (je maximalen) Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ , die der Gleichung  $y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$  für alle  $t \in I$  genügen.

In vielen Anwendungen geht es statt einer Größe  $y(t) \in \mathbb{K}$  um mehrere Größen  $y_1(t), \dots, y_n(t) \in \mathbb{K}$ , deren Entwicklung und Wechselwirkung durch **gekoppelte Differentialgleichungen** beschrieben wird:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= f_1(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)), \\ y_2'(t) &= f_2(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)), \\ &\vdots \\ y_n'(t) &= f_n(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)). \end{aligned}$$

Mit  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  und  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  bündeln wir dies kurz und übersichtlich zu der vektorwertigen Differentialgleichung  $y' = f(t, y)$ .

Einleitung und Überblick

Jedes **Differentialgleichungssystem** bündeln wir damit prägnant zu

$$y'(t) = f(t, y(t)).$$

Gegeben ist die stetige Funktion  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n \supseteq G \rightarrow \mathbb{K}^n$  als rechte Seite. Gesucht sind alle differenzierbaren Funktionen  $y: I \rightarrow \mathbb{K}^n$  auf einem (je maximalen) Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ , die die Bedingung  $(t, y(t)) \in G$  und die ersehnte Gleichung  $y'(t) = f(t, y(t))$  für alle  $t \in I$  erfüllen.

Dieses Leitmotiv der beiden vorigen Kapitel wird hier fortgeführt und mehrdimensional verallgemeinert. Die zugehörige Theorie erlaubt uns, solcherart Phänomene zu beschreiben, zu verstehen, zu berechnen:

- Gibt es immer eine Lösung? mehrere? Existenz und Eindeutigkeit?
- Wie finden wir eine Lösung? gar alle? effiziente Lösungsmethoden?

Wir benötigen wie immer zwei sich ergänzende Lösungsmethoden:

- Leistungsstarke Lösungstheorie als Grundlage
- Erprobte Rezepte für spezielle Gleichungen

Für manche  $f$  können wir die DG exakt lösen, sonst nur numerisch.

Einleitung und Überblick

Ein **lineares Differentialgleichungssystem** ist von folgender Form:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= a_{11}(t)y_1(t) + a_{12}(t)y_2(t) + \dots + a_{1n}(t)y_n(t) + b_1(t) \\ y_2'(t) &= a_{21}(t)y_1(t) + a_{22}(t)y_2(t) + \dots + a_{2n}(t)y_n(t) + b_2(t) \\ &\vdots \\ y_n'(t) &= a_{n1}(t)y_1(t) + a_{n2}(t)y_2(t) + \dots + a_{nn}(t)y_n(t) + b_n(t) \end{aligned}$$

Solche Gleichungssysteme bündeln wir prägnant zu einer Gleichung:

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t)$$

Hier heißt  $A$  Koeffizientenmatrix und  $b$  rechte Seite des DGSystems.

Bei linearen DGSystemen sind zwei strukturelle Aspekte grundlegend:

- Die Lösungsmenge einer linearen Differentialgleichungsystems ist immer ein **Vektorraum** (für  $b = 0$ ) bzw. ein **affiner Raum** (für  $b \neq 0$ ).
- Dieser Raum hat immer **Dimension  $n$** : Dies folgt aus Existenz und Eindeutigkeit der Lösung zu gegebenen Anfangsdaten. (Satz O3B)

Dies strukturiert und vereinfacht das Problem, alle Lösungen zu finden!

Einleitung und Überblick

Die Berechnung einer **Basis des Lösungsraumes** ist nicht leicht, aber wir können explizite Lösungsformeln angeben und für wichtige Beispiele ausrechnen. Hierzu benötigen wir geeignete Techniken aus der Analysis, insbesondere die allgegenwärtige Integration.

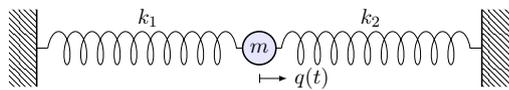
Lineare Differentialgleichungssysteme mit **konstanten Koeffizienten** sind leicht; ihre Lösung gelingt uns vollständig mit linearer Algebra: Wir lösen den Exponentialansatz direkt mit Hilfe von Eigenvektoren im diagonalisierbaren Fall oder falls nötig mit den Hauptvektoren einer Jordan–Basis; die Integration tritt dabei in den Hintergrund.

Dieses und das nächste Kapitel handeln deshalb im Wesentlichen von **Matrizenrechnung** in ihrer vollen Schönheit. Wir mobilisieren nahezu alle Begriffe und Techniken: Vektorraum, Basis, Dimension, lineare Abbildung, Kern und Bild, Darstellung durch Matrizen, zugehörige Rechenmethoden, Determinante, charakteristisches Polynom, Eigenvektoren und Diagonalform, Hauptvektoren und Jordan–Form.

Hier lohnt sich erneut Ihre Investition in mathematische Grundlagen!

## Der harmonische Oszillator als dynamisches System

O101  
Beispiel



**Aufgabe:** Formulieren und lösen Sie den harmonischen Oszillator (1) als eine eindimensionale Differentialgleichung zweiter Ordnung, (2) als ein zweidim. Differentialgleichungssystem erster Ordnung.

**Lösung:** (1) Zeit  $t \in \mathbb{R}$ , Position  $q(t) \in \mathbb{R}$ , Geschwindigkeit  $\dot{q}(t) \in \mathbb{R}$ , Beschleunigung  $\ddot{q}(t) \in \mathbb{R}$ , Kraft pro Masse  $-\omega_0^2 q(t) - 2\delta \dot{q}(t)$ , also:

$$\ddot{q}(t) + 2\delta \dot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) = 0$$

Allg. Lösung  $q(t) = e^{-\delta t} [c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)]$  mit  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ . Die Anfangsdaten  $(q(t_0), \dot{q}(t_0))$  bestimmen die Konstanten  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

(2) Zustand  $(x_1(t), x_2(t)) = (q(t), \dot{q}(t))$ , Zustandsraum  $\mathbb{R}^2$ , DGS-System:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1 - 2\delta x_2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

## Der harmonische Oszillator als dynamisches System

O102  
Ausführung

☺ Allgemeiner Trick: Reduktion von höherer auf erste Ordnung! O151

☺ DGSystem erster Ordnung = Vektorfeld auf dem Zustandsraum!

Der harmonische Oszillator dient uns weiterhin als zentrales Modell: Es ist besonders einfach und anschaulich, lässt sich leicht lösen und zeigt im Prinzip bereits alle wesentlichen Phänomene! N105

Wir schreiben seine Differentialgleichung zweiter Ordnung hier neu als System erster Ordnung: Das ist ein Vektorfeld auf dem Zustandsraum!

Jedes solche Richtungsfeld ist geometrisch besonders anschaulich als ein „Fluss“, dies uns nützt in der Analysis ebenso wie in der Numerik.

Lösungskurven des DGSsystems sind die Trajektorien: Die nächsten beiden Graphiken zeigen den nicht bzw. schwach gedämpften Fall. Hierzu kennen wir die exakten Lösungen aus Kapitel N!

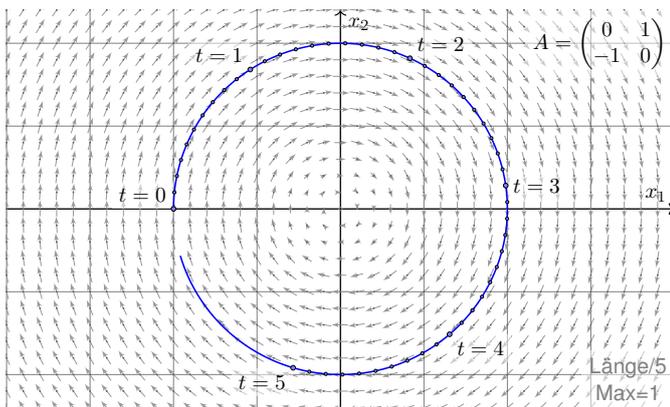
N117

Die dritte Graphik zeigt mehrere numerische Näherungen durch das Euler-Verfahren: Solche Näherungen sind nützlich, wenn wir keine exakte Lösung kennen oder mühsam beschaffen wollen, und nötig, wenn gar keine Lösungsformel in geschlossener Form existiert.

## Der harmonische Oszillator im Zustandsraum $\mathbb{R}^2$

O103  
Beispiel

Harmonischer Oszillator, keine Dämpfung  $\delta = 0$ , zum Beispiel  $\omega_0 = 1$ :

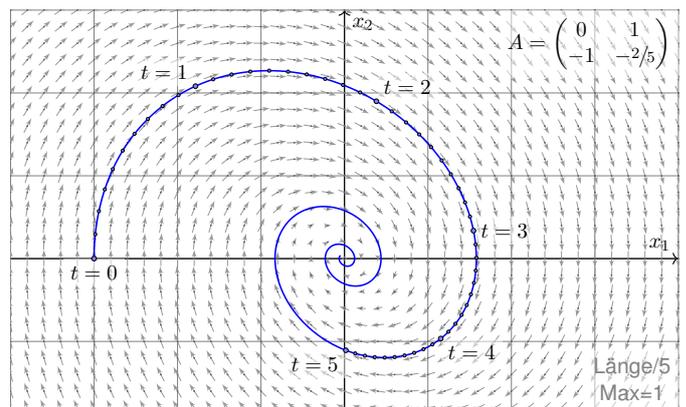


Kein Energieverlust, daher sogar Rückkehr in den Anfangszustand.

## Der harmonische Oszillator im Zustandsraum $\mathbb{R}^2$

O104  
Beispiel

Schwache Dämpfung  $0 < \delta < \omega_0$ , zum Beispiel  $\delta = 1/5$  und  $\omega_0 = 1$ :

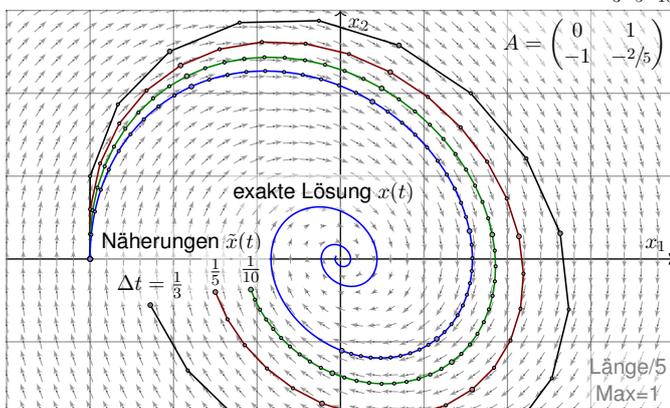


Echter Energieverlust, daher keine Rückkehr in den Anfangszustand.

## Numerische Näherung durch das Euler-Verfahren

O105  
Beispiel

Approximation durch das Euler-Verfahren mit Schrittweite  $\Delta t = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ :



Wir erkennen graphisch den Rechenaufwand und Approximationsfehler.

## Numerische Näherung durch das Euler-Verfahren

O106  
Ausführung

Zu lösen sei ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = x_0$$

☺ Dies ist im Wesentlichen ein Vektorfeld  $f$  auf dem Zustandsraum! Gesucht ist eine Lösungskurve  $x(t)$ , die die obige Gleichung erfüllt.

Das **Euler-Verfahren** verschafft uns eine numerische Näherung  $\tilde{x}$ :

Wir wählen Zeitschritte  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots$  mit  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ . Am einfachsten äquidistant  $t_i = t_0 + i\Delta t$  mit fester Schrittweite  $\Delta t > 0$ . Die Ableitung  $\dot{x}$  approximieren wir durch den **Differenzenquotienten**:

$$\frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \approx \dot{x}(t_i) \stackrel{!}{=} f(t, x(t_i))$$

Damit berechnen wir Näherungswerte  $\tilde{x}(t_1), \tilde{x}(t_2), \tilde{x}(t_3), \dots$  rekursiv:

$$\tilde{x}(t_{i+1}) = \tilde{x}(t_i) + f(t_i, \tilde{x}(t_i)) \cdot (t_{i+1} - t_i) \quad \text{für } i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Unter geeigneten Bedingungen existiert genau eine Lösung  $x(t)$  und die Euler-Approximation  $\tilde{x}(t)$  kommt für kleine Schrittweiten beliebig nahe.

⚠ Zur Anwendung müssen wir zudem den Fehler  $|\tilde{x} - x|$  kontrollieren!

## Numerische Näherung durch das Euler-Verfahren

O107  
Ausführung

Geometrische Voraussetzungen für das Euler-Verfahren:

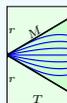
Sei  $I = [t_0, t_0 + T] \subseteq \mathbb{R}$  ein Zeitintervall der Länge  $T > 0$ .

Sei  $K = \bar{B}(x_0, r) \subseteq \mathbb{K}^n$  der Ball um  $x_0$  mit Radius  $r > 0$ .

Sei  $f: I \times K \rightarrow \mathbb{K}^n$  stetig, somit beschränkt, also  $|f| \leq M$ .

Hierbei gelte  $T \cdot M \leq r$ , notfalls verkleinern wir  $T$  und  $I$ .

Dies garantiert, dass Lösungen nicht vorzeitig aus  $K$  rauslaufen.



Gesucht ist  $x: I \rightarrow K$  diff'bar mit  $x(t_0) = x_0$  und  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ . Das heißt: In jedem Punkt  $(t, x(t))$  ist die Tangente  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ .

**Euler-Approximation:** Wir wählen eine Partition des Zeitintervalls

$$P = \{t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_0 + T\}.$$

Wie oben illustriert definieren wir hierzu den **Euler-Polygonzug**

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_N \\ \tilde{x}_0 & \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \dots & \tilde{x}_N \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \frac{\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i}{t_{i+1} - t_i} = f(t_i, \tilde{x}_i)$$

☺ Praktisch: Aus  $\tilde{x}_0 = x_0$  berechnet man schrittweise  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_N$ . Im Punkt  $(t_i, \tilde{x}_i)$  wird die Kurve in Richtung  $f(t_i, \tilde{x}_i)$  weitergeschickt.

## Numerische Näherung durch das Euler-Verfahren

O108  
Ausführung

Satz O1A: Existenz von Lösungen, Peano 1890

Zu lösen sei die Differentialgleichung  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$  mit  $x(t_0) = x_0$ .

Unter den oben erklärten geometrischen Voraussetzungen gilt:

Es existieren Partitionen  $P_1, P_2, P_3, \dots \subseteq I$ , deren Euler-Polygonzüge  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \dots: I \rightarrow K$  gegen eine Lösung  $x: I \rightarrow K$  konvergieren.

☺ Dies garantiert Existenz von Lösungen, ☹ aber keine Eindeutigkeit: Es kann durchaus mehrere Lösungen geben, siehe Kapitel M. M123 M325

☺ Für spezielle  $f$  können wir die DG exakt lösen, sonst nur numerisch.

☺ Die Rechnung ist für  $\Delta t = T/N$  sehr leicht zu implementieren.

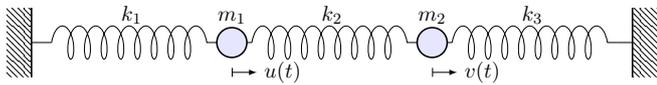
Präzision verlangt großes  $N$ , damit wächst der Rechenaufwand.

☹ Praktisches Problem: Der Satz ist nicht konstruktiv! Gegeben  $\varepsilon > 0$ , wie wählt man eine Partition  $P$ , um eine  $\varepsilon$ -Approximation zu erhalten?

☺ Die Numerik untersucht und optimiert solche Verfahren, siehe O141.

Ziel: gute Fehlerschranken und hohe Präzision bei geringem Aufwand.

Die **Numerik der gewöhnlichen Differentialgleichungen** ist ein hoch entwickeltes Gebiet und stellt umfangreiche Werkzeuge zur Verfügung.



Zwei Massen  $m_1, m_2 > 0$  sind durch Federn  $k_1, k_2, k_3 > 0$  verbunden.

**Aufgabe:** Formulieren Sie das hier skizzierte dynamische System (0) als Bewegungsgleichung sowie (1) als DGSystem erster Ordnung. (2) Welche Struktur hat die Lösungsmenge? (a) „Form“ und (b) „Größe“?

**Lösung:** (0) Auslenkungen  $u(t), v(t)$  aus der Ruhelage. Kräftebilanz:

$$F_1(t) = -k_1 u(t) - k_2 [u(t) - v(t)]$$

$$F_2(t) = -k_3 v(t) - k_2 [v(t) - u(t)]$$

Bewegungsgesetz:  $m_1 \ddot{u}(t) = F_1(t)$  und  $m_2 \ddot{v}(t) = F_2(t)$ . Hieraus folgt:

$$\ddot{u}(t) = -\frac{k_1+k_2}{m_1} u(t) + \frac{k_2}{m_1} v(t)$$

$$\ddot{v}(t) = +\frac{k_2}{m_2} u(t) - \frac{k_2+k_3}{m_2} v(t)$$

☺ Zur Vereinfachung betrachten wir keine Reibung oder äußere Kräfte.

(1) Wir haben ein (homogenes, lineares) DGSystem zweiter Ordnung:

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) = a u(t) + b v(t) \\ \ddot{v}(t) = c u(t) + d v(t) \end{cases}$$

Neue Variablen  $x_1 = u, x_2 = v, x_3 = \dot{u}, x_4 = \dot{v}$  reduzieren dies zu einem (ebenso homogenen, linearen) DGSystem erster Ordnung:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \text{kurz } \dot{x} = A x$$

Das DGSystem (1) ist einfacher als (0), da erster Ordnung. Unser System  $\dot{x} = A x$  ist homogen linear mit Systemmatrix  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ . Hier sind die Koeffizienten konstant, das heißt, sie hängen nicht von der Zeit  $t$  ab. Für solche homogen-linearen DGSysteme mit konstanten Koeffizienten entwickeln wir mit Hilfe der Linearen Algebra exakte und zudem effiziente Lösungsmethoden: Wie in der folgenden Aufgabe nutzen wir dazu Eigenvektoren und alle zugehörigen Techniken. Der grundlegende Existenz- und Eindeutigkeitsatz O3B erklärt ganz allgemein die Struktur:

(2) Die Lösungsmenge ist (a) ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum (b) der Dimension 4. ☺ Hier zählen sich Matrizenrechnung und Lineare Algebra erneut aus.

**Aufgabe:** (3) Lösen Sie den symmetrischen Fall  $m_1 = m_2, k_1 = k_3$ , als konkretes Beispiel  $m_1 = m_2 = 1$  und  $k_1 = k_3 = 1$  sowie  $k_2 = 1$ .

(4) Welche Bewegung folgt aus  $u(0) = 2, v(0) = 0, \dot{u}(0) = \dot{v}(0) = 0$ ? Sind alle Lösungen unseres dynamischen Systems periodisch?

**Lösung:** Einstweilen nutzen wir unsere physikalische Anschauung!

(3a) Der Ansatz  $u = v$  entkoppelt zu  $\ddot{u} = -\frac{k_1}{m_1} u, \ddot{v} = -\frac{k_1}{m_1} v$ .  
 Lösungen:  $u_1(t) = \cos(\omega_1 t)$  und  $u_2(t) = \sin(\omega_1 t)$  mit  $\omega_1^2 = \frac{k_1}{m_1}$ .

(3b) Der Ansatz  $u = -v$  entkoppelt zu  $\ddot{u} = -\frac{k_1+2k_2}{m_1} u, \ddot{v} = -\frac{k_1+2k_2}{m_1} v$ .  
 Lösungen:  $u_3(t) = \cos(\omega_2 t)$  und  $u_4(t) = \sin(\omega_2 t)$  mit  $\omega_2^2 = \frac{k_1+2k_2}{m_1}$ .

Sind wir schon fertig? Ja! Jede Lösung ist eine Linearkombination

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} u_2(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} u_3(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} u_4(t) \\ v_4(t) \end{pmatrix}.$$

☺ Als **Anfangswerte** zur Zeit  $t_0$  können Position und Geschwindigkeit  $u(t_0), v(t_0), \dot{u}(t_0), \dot{v}(t_0) \in \mathbb{R}$  beliebig vorgegeben werden: Sie legen die freien Konstanten  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$  eindeutig fest (und umgekehrt).

☺ Unser DGSystem ist sehr einfach: Die Gleichungen sind linear! Linearkombinationen von Lösungen sind daher wieder Lösungen. Mit anderen Worten: Der Lösungsraum ist ein **Vektorraum** über  $\mathbb{R}$ .

☺ Unser **geschickter Ansatz** entkoppelt das Gleichungssystem: Eindimensionale Differentialgleichungen können wir bereits lösen! Die einfache Rechnung bestätigt und präzisiert unsere physikalische Anschauung: Die Probe ist nun leicht: Einsetzen und Ausrechnen!

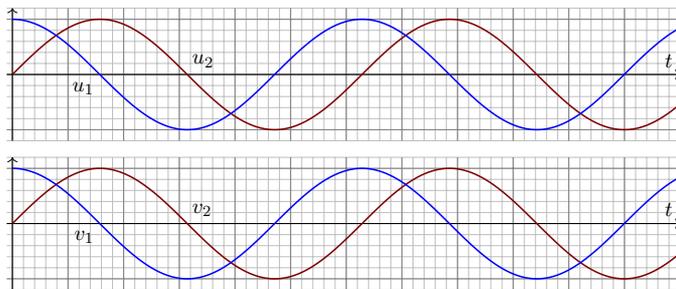
☺ Wir haben vier Lösungen gefunden. Diese sind **linear unabhängig**. Der Lösungsraum hat also Dimension  $\geq 4$ . Gibt es noch mehr?

⚠ Wir wünschen uns ein einfaches Kriterium für Dimension = 4. Dann wüssten wir sicher: Wir haben alle Lösungen gefunden!

Physikalisch ist das plausibel: Jede Masse hat zur Zeit  $t_0$  eine Position und eine Geschwindigkeit. Diese Daten sollten den weiteren Verlauf eindeutig festlegen. Wir hätten demnach genau 4 Freiheitsgrade.

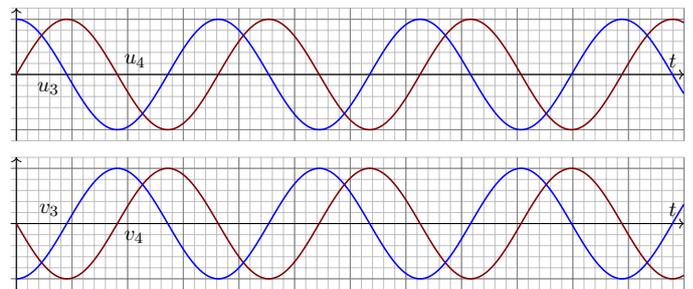
☺ Diese Heuristik lässt sich mathematisch formulieren und beweisen: Es gilt der grundlegende **Existenz- und Eindeutigkeitsatz O3B!**

Illustration für den Fall  $m_1 = m_2 = 1$  und  $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ .  
 Gleichsinnige Eigenschwingungen zur Frequenz  $\omega_1 = 1$ :



☺ Die Eigenschwingungen unseres Systems sind besonders leicht zu berechnen. Zudem erweisen sie sich als einfach und übersichtlich: Harmonische Schwingung: Jede dieser vier Lösungen ist periodisch.

Illustration für den Fall  $m_1 = m_2 = 1$  und  $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ .  
 Gegensinnige Eigenschwingungen zur Frequenz  $\omega_2 = \sqrt{3}$ :

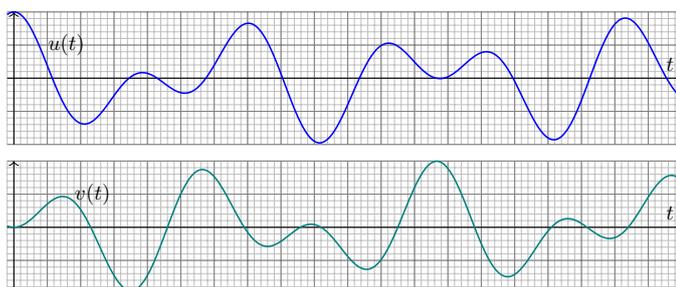


☺ Die Frequenz der gegensinnigen Schwingung ist deutlich größer als die der gleichsinnigen Schwingung. Das ist anschaulich plausibel; probieren Sie es mal aus! Nun können wir es sogar präzise ausrechnen.

(4) Welche Linearkombination von Eigenschwingungen löst das AWP?

$$u(t) = \cos(t) + \cos(\sqrt{3}t), \quad u(0) = 2, \quad \dot{u}(0) = 0$$

$$v(t) = \cos(t) - \cos(\sqrt{3}t), \quad v(0) = 0, \quad \dot{v}(0) = 0$$

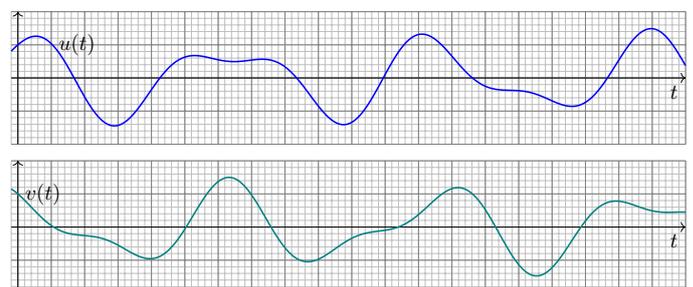


⚠ Diese Bewegung ist nicht periodisch! Sie scheint zuerst kompliziert, ist aber nur die Überlagerung von zwei harmonischen Schwingungen.

Zur Illustration eine weitere Linearkombination von Eigenschwingungen:

$$u(t) = \cos(t) + \frac{1}{2} \sin(\sqrt{3}t)$$

$$v(t) = \cos(t) - \frac{1}{2} \sin(\sqrt{3}t)$$



☺ Die Anfangswerte  $u(0), \dot{u}(0)$  sowie  $v(0), \dot{v}(0)$  können beliebig vorgegeben werden; sie legen den weiteren Verlauf eindeutig fest.

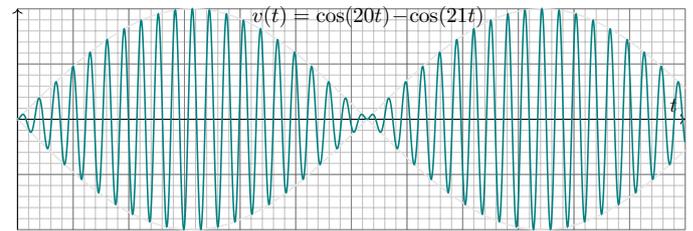
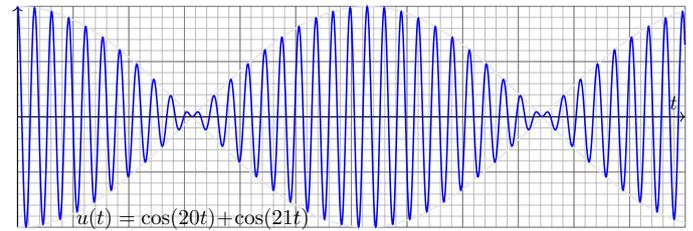


**Aufgabe:** Was geschieht bei schwacher Kopplung, für  $0 < k_2 \ll k_1 = k_3$ ?

(5) Als Zahlenbeispiel sei  $m_1 = m_2 = 1$ ,  $k_1 = k_3 = 400$ ,  $k_2 = 20.5$ .

**Lösung:** (5) Die Eigenfrequenzen  $\omega_1 = 20$  und  $\omega_2 = 21$  liegen nahe. Das Anfangswertproblem  $u(0) = 2$ ,  $v(0) = 0$  und  $\dot{u}(0) = \dot{v}(0) = 0$  wird gelöst durch  $u(t) = \cos(20t) + \cos(21t)$  und  $v(t) = \cos(20t) - \cos(21t)$ . Die folgenden Graphiken illustrieren den zeitlichen Verlauf für  $t \in [0, 12]$ .

Wir beobachten eine *Schwebung*: In der Überlagerung  $u(t)$  bzw.  $v(t)$  nimmt die Amplitude der Summe mit langer Periode zu und ab, additive Phasen und subtraktive Phasen wechseln sich ab.



Anschaulich geschieht hier folgendes: Wir können den linken Oszillator auslenken und dann loslassen. Er schwingt daraufhin nahezu frei, doch nach und nach überträgt sich (fast) seine gesamte Energie auf den rechten Oszillator, anschließend geschieht dasselbe umgekehrt.

**Aufgabe:** Erklären Sie das hier gezeigte, bemerkenswerte Phänomen der Schwebungen mit Hilfe der trigonometrischen **Additionstheoreme**.

**Lösung:** Aus der Euler-Gleichung  $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$  und der Homomorphie  $e^{z+w} = e^z e^w$  erhalten wir (nach kurzer Rechnung):

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

In unserem Zahlenbeispiel erhalten wir:

$$u(t) = \cos(20t) + \cos(21t) = 2 \cos(0.5t) \cdot \cos(20.5t)$$

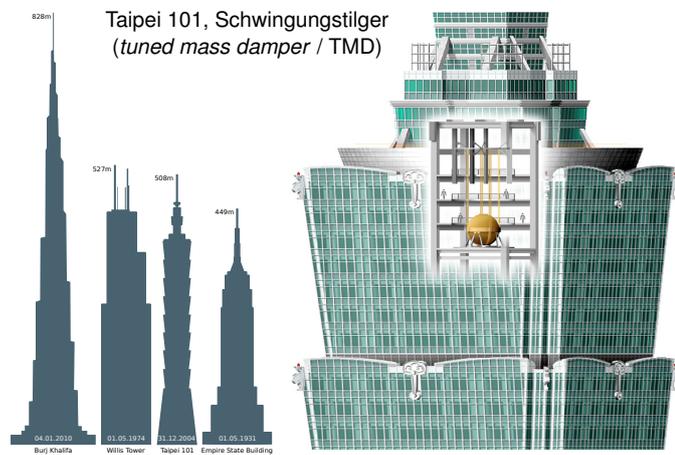
$$v(t) = \cos(20t) - \cos(21t) = -2 \sin(0.5t) \cdot \sin(20.5t)$$

Wir interpretieren daher die Überlagerung  $u(t) = A(t) \cos(20.5t)$  als eine Grundschwingung der mittleren Frequenz  $\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) = 20.5$  mit der variablen Amplitude  $A(t) = 2 \cos(0.5t)$ ; diese hat die deutlich niedrigere Frequenz  $\delta = \frac{1}{2}|\omega_1 - \omega_2| = 0.5$ , sodass  $\omega_{1/2} = \bar{\omega} \mp \delta$  gilt.

Diese Rechnung ist in der obigen Graphik schön anschaulich illustriert durch die Trägerschwingung  $\cos(20.5t)$  und die Einhüllende  $\pm 2 \cos(0.5t)$ . Das Phänomen der Schwebung entsteht immer, wenn sich zwei ähnlich große Schwingungen mit nahezu gleichen Frequenzen überlagern.

In der Akustik sind solche Schwebungen deutlich zu hören: Der Ton ist moduliert, seine Lautstärke schwankt mit der Schwebungsfrequenz, was mitunter als unangenehme Dissonanz empfunden wird. Das ist keine akustische Täuschung, sondern ein reales physikalisches Phänomen.

Taipei 101, Schwingungstilger (tuned mass damper / TMD)



Gebäude werden zu Schwingungen angeregt, extern durch Wind oder Erdbeben, intern durch Menschen oder Maschinen. Dagegen helfen **Schwingungstilger**, justiert auf die Eigenfrequenz des Gebäudes. Berlins Fernsehturm hat in seiner Spitze ein 1.5-Tonnen-Tilgerpendel. Londons Millennium Bridge, 2000 eröffnet und *wobbly bridge* genannt, wurde nachträglich mit 52 kleinen *tuned mass dampers* ausgestattet.

Das Taipei Financial Center in Taiwan hielt ab 2004 den Rekord des höchsten Gebäudes der Welt, bis es 2009 vom Burj Khalifa überholt wurde. Zwischen dem 88. und 92. Stockwerk befindet sich eine 660 Tonnen schwere Stahlkugel als Pendel mit öhydraulischer Dämpfung. Dies ist öffentlich zugänglich und eine beliebte Touristen-Attraktion.

Das Gebäude überträgt Schwingungsenergie auf diesen Oszillator, der sie absorbiert und dann durch Dämpfung in Wärme umwandelt. Die maximale Beschleunigung bei Stürmen wird so etwa halbiert! (Taiwan ist sowohl aktive Erdbebenregion als auch Taifungebiet.) Ein Video sagt mehr als tausend Worte: [youtu.be/f1U4SAgy60c](https://youtu.be/f1U4SAgy60c).

Wasserwellen regen ein Schiff zu Schwingungen an:

- 1 Das Schiff „rollt“ um seine Längsachse, kippt also nach links (Backbord) und rechts (Steuerbord).
- 2 Das Schiff „stampft“ um seine Querachse, neigt sich also nach vorne (zum Bug) und hinten (zum Heck).

Wenn die anregende Frequenz des Seegangs unglücklich nah an der Eigenfrequenz des Schiffes liegt, so kommt es zur Resonanz. Um eine Katastrophe zu verhindern, möchte man vorsorgen und die auftretenden Resonanzen so weit wie möglich abschwächen.

Für die Rollbewegung um die Längsachse gelingt dies recht effizient mit zwei raffiniert gekoppelten Schwingungen. Hierzu entwickelte der deutsche Schiffsbauer Hermann Frahm (1867–1939) um 1900 den sogenannten Frahm'schen **Schlingertank**. Dieser besteht aus zwei Wassertanks an den Längsseiten des Schiffes, die möglichst hoch liegen und über Rohre kommunizieren. Hierin füllt man Wasser, bis die Eigenfrequenz des Tanks der des Schiffes entspricht.

Seitlich auftreffende Wellen regen das Schiff zum Rollen an. Im Resonanzfall erzwingt dies eine Schwingung des Schiffes mit der Phasenverschiebung um  $\pi/2$  gegenüber der Anregung. Das rollende Schiff lässt nun seinerseits das Ballastwasser im Tank periodisch hin- und herströmen, ebenso mit einer Phasenverschiebung um  $\pi/2$ .

Die äußere Anregung und die innere Schwingung des Tanks sind daher gegenphasig. Die so wirkenden entgegengesetzten Drehmomente heben sich weitgehend auf, was die Rollbewegung deutlich verringert.

Die Grundidee ist genial-einfach und in unserem mathematischen Modell gut nachzuverfolgen. Die technische Ausführung erfordert die geeignete Kalibrierung der Parameter und ist eine eigene Kunst.

Das gesamte System ist in Wirklichkeit nicht-linear: Die Frequenz des Schiffes und des Ballastwasser hängen von der Amplitude ab, dadurch wird ihr Zusammenspiel recht kompliziert. Das Prinzip ist jedoch gleich.

**Aufgabe:** Formulieren Sie die Bewegungsgleichungen von  $n$  Körpern mit Masse  $m_k > 0$ , Position  $u_k(t) \in \mathbb{R}^3$  und Geschwindigkeit  $v_k(t) \in \mathbb{R}^3$ .  
**Lösung:** Newtons Gravitationsgesetz ergibt die Differentialgleichungen

$$\dot{u}_k = v_k, \quad \dot{v}_k = f_k(u) := \sum_{j \neq k} \gamma m_j \frac{u_j - u_k}{|u_j - u_k|^3}.$$

Vorgegeben sind die Anfangsdaten  $u_k(0)$  und  $v_k(0)$  zur Zeit  $t = 0$ . Als Lösung gesucht ist die Bewegung  $(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{6n}$ . Erlaubt ein so komplexes System immer genau eine Lösung? Ja, das ist der zentrale  $\exists \& E$ -Satz! Kollision oder Expulsion nach  $\infty$  sind möglich: Eventuell existiert die Lösung nur für eine kurze Zeit  $T > 0$ . Für manche Startwerte sind Lösungen periodisch, oder beinahe: Zu unserem Glück!  
 😊 Den Fall  $n = 2$  lösen Kegelschnitte: Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln.  
 😞 Für  $n \geq 3$  lässt sich dieses DGSystem i.A. nicht geschlossen lösen!  
 😊 Euler-Verfahren: diskrete Zeitschritte  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ ,

$$u_k(t_{i+1}) \approx u_k(t_i) + v_k(t_i) \cdot (t_{i+1} - t_i),$$

$$v_k(t_{i+1}) \approx v_k(t_i) + f_k(u) \cdot (t_{i+1} - t_i).$$

Allein schon das obige Differentialgleichungssystem zu formulieren, ist eine Meisterleistung der Mathematik und Physik der Neuzeit. Wir nennen dies **Himmelsmechanik** und sind völlig zu Recht stolz auf sie: Mathematische Sprache und Werkzeuge erleuchten die gesamte Entwicklung und ebnen den Weg von Beobachtung über Erklärung und Berechnung bis zur Raumfahrt.

Auch nach über 300 Jahren sind Newtons Gleichungen immer noch nützlich wie am ersten Tag! Daten ändern sich, Methoden bleiben bestehen. Solide mathematische Arbeit hat eine extrem lange Wirksamkeit. Daher lohnt es sich auch für Sie heute, in mathematische Grundlagen zu investieren und diese wirksamen Werkzeuge zu erlernen, anzuwenden und fortzuführen.

Die drei Fälle  $n = 1$  und  $n = 2$  sowie  $n \geq 3$  sind sehr verschieden! Für einen einzigen Körper ( $n = 1$ ) enthalten Newtons Gleichungen  $\dot{u}_1 = v_1$  und  $\dot{v}_1 = 0$  keine gravitative Wechselwirkung. Ihre Lösung ist eine **geradlinige Bewegung**, nämlich  $u_1(t) = u_1(0) + v_1 t$ .

Ein Zwei-Körper-System ( $n = 2$ ) wie Sonne-Erde oder Erde-Mond ist bereits ausgesprochen interessant. Newton konnte seine Gleichungen hier gut lösen, sie ergeben Ellipsenbahnen und erklären die Keplerschen Gesetze. Allgemeiner sind auch Parabeln und Hyperbeln als Lösungen möglich, je nach Anfangsdaten  $u_1(0), v_1(0), u_2(0), v_2(0)$ . In allen Fällen gelingt die Lösung hier noch in geschlossener Form. Man nennt ein solches System **vollständig integrierbar**. [P270]

Newton betrachtete anschließend das Drei-Körper-System Sonne-Erde-Mond. Dies entzog sich jedoch hartnäckig einer Lösung und wurde zum berühmtesten offenen Problem der Mathematik. Das **Drei-Körper-Problem** gilt bis heute als eines der schwierigsten Probleme, die zahlreichen Anstrengungen zu seiner Lösung erfordern und erzeugen immer wieder wichtige neue Methoden.

Jedes **Differentialgleichungssystem erster Ordnung** hat die Form

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= f_1(t, y_1(t), \dots, y_n(t)), \\ &\vdots \\ y_n'(t) &= f_n(t, y_1(t), \dots, y_n(t)). \end{aligned}$$

Dies ist ein System von  $n$  gekoppelten Differentialgleichungen: Die Änderungsrate  $y_k'(t)$  ist eine Funktion  $f_k$  von  $t$  und  $y_1(t), \dots, y_n(t)$ . Mit  $y = (y_1, \dots, y_n)$  und  $f = (f_1, \dots, f_n)$  bündeln wir dies kürzer und übersichtlicher als eine **vektorielle Differentialgleichung**:

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

Gegeben ist die stetige Funktion  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n \supseteq G \rightarrow \mathbb{K}^n$  als rechte Seite. Als Lösung gesucht sind alle diff'baren Funktionen  $y : \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{K}^n$  auf einem (maximalen) Intervall  $I$  mit  $(t, y(t)) \in G$  und  $y'(t) = f(t, y(t))$  für alle  $t \in I$ . Meist ist zudem ein Anfangswert  $(t_0, y_0) \in G$  vorgegeben. Der folgende Satz garantiert Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung.

**Satz O1B: Cauchy Existenz- und Eindeutigkeitssatz, kurz  $\exists \& E$**   
 Sei  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n \supseteq G \rightarrow \mathbb{K}^n$  stetig. Zu lösen sei die Differentialgleichung

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{mit Anfangswert} \quad y(t_0) = y_0.$$

- (1) Zu jedem Startpunkt  $(t_0, y_0) \in \overset{\circ}{G}$  existieren Lösungen  $y : \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{K}^n$ . Jede kann beidseitig bis zum Rand  $\partial G$  (oder  $\infty$ ) fortgesetzt werden.
- (2) Ist  $f(t, y)$  stetig diff'bar nach  $y$ , so ist die Lösung durch  $(t_0, y_0) \in \overset{\circ}{G}$  eindeutig bestimmt. Sie hängt stetig differenzierbar von  $(t_0, y_0)$  ab.

😊 Wir kennen dieses Ergebnis aus Dimension  $n = 1$ . (Satz M1c)  
 Die mehrdimensionale Verallgemeinerung O1B gilt wörtlich genauso.  
 Planetenbewegung: Zu gegebenen Startwerten  $y(0) \in \mathbb{R}^{6n}$  existiert eine eindeutige Lösung  $y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{6n}$ , zumindest eine gewisse Zeit  $T > 0$ . Entweder gilt  $T = \infty$ , d.h. die Lösung existiert für alle Zeit  $t \geq 0$ , oder aber sie verlässt den Definitionsbereich  $G$ , d.h. sie läuft in eine Polstelle,  $u_j(T) = u_k(T)$ , oder entkommt nach unendlich,  $|u_k(t)| \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow T$ .

Das Verständnis der **Himmelsmechanik** markiert den Übergang vom Mittelalter zur Neuzeit. Die Beobachtung des Nachthimmels und seiner Sterne fasziniert uns Menschen seit Alters her. Neben den zahlreichen „Fixsternen“ (weit entfernte Sterne) erkennen wir einige „Wandelsterne“ (Planeten unseres Sonnensystems). Ihre Bewegung lässt Regeln erahnen, doch für Wandelsterne scheinen diese zunächst kompliziert und verwirrend. Sie quantitativ zu erfassen und gründlich zu verstehen, ist einer der großen Triumphe menschlicher Neugier und systematischer Forschung!

Von der Erde besehen scheinen sich alle Sterne um uns zu drehen, doch die exakte Bewegung der Planeten erweist sich als schrecklich kompliziert. Kopernikus' heliozentrisches Modell (1543) ist einfacher, daher nützlicher: Die Bahnen der Planeten um die Sonne erweisen sich recht genau als Ellipsen. Diese Koordinatentransformation hat enorme Wirkung und schreibt Weltgeschichte!

Aus Tycho Brahes präzisen **Beobachtungsdaten** leitete Johannes Kepler drei Gesetze ab, die die Ellipsenbewegung der Planeten um die Sonne gut beschreiben. Eine **Erklärung** der Bewegungen durch einheitliche physikalische Prinzipien gelang erst Isaac Newton 1686 mit seinen Principia!

Die moderne Naturwissenschaft beginnt mit Newtons Formulierung der drei Bewegungsgesetze, des universellen Gravitationsgesetzes und seiner Lösung des Zwei-Körper-Problems. Mit einer Handvoll physikalischer Prinzipien und den passenden mathematischen Werkzeugen konnte er die Keplerschen Regeln erklären, ja herleiten. Newtons revolutionäre Idee: Überall im Universum gelten dieselben Gesetze! Newtons Mechanik erklärt die Schwerkraft hier auf Erden ebenso wie außerirdische Phänomene: den Umlauf der Planeten um die Sonne und des Mondes um die Erde, sogar die Gezeiten unserer Meere, ebenso die Coriolis-Kraft und das Foucaultsche Pendel.

Für künstliche Satelliten wird das **zirkuläre restringierte Drei-Körper-Problem** (CR3BP) sehr ausgiebig untersucht: Zwei massereiche Körper umrunden sich kreisförmig, während der dritte Körper nahezu masselos ist. Hier findet man die berühmten fünf Lagrange-Punkte. [P257]

Nur wenige und sehr spezielle Sonderfälle des  $n$ -Körper-Problems sind geschlossen lösbar. Auch diese haben ihren eigenen Reiz: Seit 1994 wurden zahlreiche **Choreographien** entdeckt, in denen  $n$  Körper symmetrisch angeordnet werden und dann periodische Bahnen durchlaufen. Für generische Anfangsdaten hingegen ist die Bewegung **chaotisch** und kann nur numerisch annähernd berechnet werden. 📺 *Solving the Three Body Problem*, youtu.be/et7XvBenEo8.

Zum Kontrast untersuchen und vergleichen wir zwei klassische Anwendungen der Mechanik: Einerseits gekoppelte **lineare Systeme** wie harmonische Oszillatoren [O101] [P101], andererseits Planetenbewegung und ähnliche **nicht-lineare Systeme**. Nicht-lineare Systeme sind schwierig und verhalten sich oft chaotisch. Lineare Systeme sind besonders gutartig und einfach zu lösen. Daher sollten Sie Linearität erkennen und wertschätzen, verstehen und nutzen lernen!

Auch nicht-lineare Systeme lassen sich mitunter gut lösen, wie einfache Beispiele zeigen. Dies sind aber Ausnahmen und seltene Glücksfälle. Typischerweise sind nicht-lineare Systeme nicht geschlossen lösbar. Es bleibt dann nur die **numerische Approximation** mit Hilfe geeigneter Näherungsverfahren, z.B. das Euler-Verfahren oder besser gleich das Runge-Kutta-Verfahren. Mehr hierzu erfahren Sie in der Numerik. Aufbauend auf den mathematischen Grundlagen können Sie die Numerik von Differentialgleichungen nutzen und wo nötig vertiefen.

Allgemeine Grundlagen und konkrete Anwendungen ergänzen sich wunderbar.

Beide hier gezeigten **Schreibweisen** sind nützlich und üblich: Die erste ist explizit ausführlich, die zweite ist bequem komprimiert.

Ich verzichte meist auf Pfeile und sonstige Dekoration für Vektoren. Der Kontext gibt jeweils an, mit welchen Objekten (Skalaren, Vektoren, Matrizen, ...) und mit welcher Dimension wir es genau zu tun haben. Ohnehin sollte man dies eingangs klarstellen bzw. in Erinnerung rufen.

Die Funktion  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n \supseteq G \rightarrow \mathbb{K}^n$  erklärt die Differentialgleichung. Sie ist im Allgemeinen nicht auf ganz  $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$  definiert, sondern nur auf einer geeigneten (offenen) Teilmenge  $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$  gegeben.

**Beispiel:** Die Differentialgleichung der Planetenbewegung ist bei einer Kollision  $u_j = u_k$  nicht mehr definiert. Das Definitionsgebiet ist also

$$G = \{ (t, u_1, v_1, \dots, u_n, v_n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{6n} \mid u_j \neq u_k \text{ für } j \neq k \}.$$

Hierauf ist unsere Funktion  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{6n} \supseteq G \rightarrow \mathbb{R}^{6n}$  definiert durch

$$\dot{u}_k = v_k, \quad \dot{v}_k = \sum_{j \neq k} \gamma m_j \frac{u_j - u_k}{|u_j - u_k|^3}.$$

Die **Existenz** einer Lösung  $y : \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{K}^n$  bedeutet: Es gibt ein Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  mit  $t_0 \in I$  und eine differenzierbare Funktion  $y : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  mit  $y(t_0) = y_0$  sowie  $(t, y(t)) \in G$  und  $y'(t) = f(t, y(t))$  für alle  $t \in I$ .

Meist suchen wir **maximale Lösungen**  $y : \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{K}^n$ , also solche, die sich auf kein größeres Intervall  $I^* \supseteq I$  fortsetzen lassen.

⚠ Im Allgemeinen existieren Lösungen  $y : \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{K}^n$  nicht auf ganz  $\mathbb{R}$ , sondern nur auf einem (evtl. endlichen) Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Die Lösung lässt sich im Inneren  $G^\circ$  des Definitionsbereichs zwar immer fortsetzen, aber manche Lösungen verlassen  $G$ , d.h. sie enden auf dem Rand  $\partial G$  oder entkommen nach  $\infty$ . Man denke an obige Planetenbewegung!

⚠ Beispiele zeigen, dass es zum gegebenen Startwert  $(t_0, y_0)$  auch mehrere Lösungen geben kann: Siehe Wasseruhr M123 oder M325. Das Problem ist dann **schlecht gestellt**. Dies gilt es zu vermeiden!

**Eindeutigkeit** bedeutet: Sind  $u : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  und  $v : J \rightarrow \mathbb{K}^n$  Lösungen mit  $u'(t) = f(t, u(t))$  für alle  $t \in I$  und  $v'(t) = f(t, v(t))$  für alle  $t \in J$  sowie  $u(t_0) = v(t_0) = y_0$ , so gilt  $u = v$  auf dem gemeinsamen Intervall  $I \cap J$ . Sind beide Lösungen  $u, v$  maximal, so gilt zudem  $I = J$ .

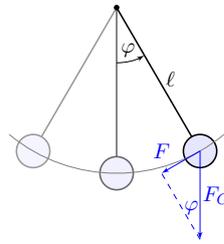
Welche Schwingungsdauer hat eine Schaukel bei 90° Auslenkung?

⚠ Als eindrücklicher Kontrast vergleichen wir hier noch einmal detailliert ein nicht-lineares DGSsystem mit seiner Linearisierung.



- Aufgabe:** (1) Erstellen Sie die Bewegungsgleichung  $\ddot{\varphi}(t) = \dots$   
 (2) Nähern und lösen Sie diese für kleine Amplituden ( $|\varphi| < 5^\circ$ ).  
 (3) Formulieren und beweisen Sie die Energieerhaltung für  $E = \dots$   
 (4) Schreiben Sie die Bewegungsgleichung als DGSsystem  $\dot{x} = \dots$

- (5) Skizzieren Sie das Vektorfeld  $f$  und Lösungskurven für  $\ell = 9.81m$ .  
 (6) Wenden Sie das Euler-Verfahren an auf die Anfangsdaten  $\varphi(0) = -\pi/2$  und  $\dot{\varphi}(0) = 0$  mit Schrittweite  $\Delta t = 0.1$ .  
 Können Sie der so berechneten Näherung vertrauen? Wie lange dauert ein Umlauf ungefähr?



Die Rückstellkraft ist hier nicht-linear:

$$F(t) = -m \cdot g \cdot \sin \varphi(t)$$

- $m$  = Masse des Pendelkörpers
- $g = 9.81m/s^2$  Erdbeschleunigung
- $F_G = mg$  Gravitationskraft zur Masse  $m$
- $\ell$  = Länge des Pendelstabes
- $\varphi(t)$  = Winkelauslenkung
- $\ell \varphi(t)$  = Auslenkung

(1) Newtons Gesetz  $F(t) = m \ell \ddot{\varphi}(t)$  führt zur Differentialgleichung

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{\ell} \sin \varphi(t).$$

- ⚠ Wir vereinfachen hier: punktförmige Masse des Pendelkörpers, vernachlässigbare Masse des Stabes, reibungsfreie Aufhängung, etc.  
 😊 Für kleine Auslenkungen gilt  $\sin(\varphi) \approx \varphi$ . (Faustregel für  $|\varphi| < 5^\circ$ )

(2) Dies führt uns zur **linearisierten Differentialgleichung:**

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{\ell} \varphi(t)$$

Dies ist ein harmonischer Oszillator:  $\ddot{\varphi}(t) = -\omega^2 \varphi(t)$  mit  $\omega = \sqrt{g/\ell}$ .  
 Lösung  $\varphi(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$ , Periodendauer  $T = 2\pi \sqrt{\ell/g}$ .  
 Beispiel Schiffsschaukel: Für  $\ell = 9.81m$  finden wir  $T = 2\pi s \approx 6.28s$ .

- 😊 Die Schwingungsdauer ist unabhängig von der Pendelmasse  $m$ ! Bei kleinen Schwingungen ist sie auch unabhängig von der Amplitude.  
 ⚠ Für große Auslenkungen brauchen wir eine genauere Rechnung!

(3) Kinetische Energie  $\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2$ , potentielle Energie  $mg\ell(1 - \cos \varphi)$ . Die **Gesamtenergie**  $E = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2 + mg\ell(1 - \cos \varphi)$  bleibt erhalten:

$$\frac{dE}{dt} = m\ell^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + mg\ell\dot{\varphi}\sin \varphi = m\ell^2\dot{\varphi}\left[-\frac{g}{\ell}\sin \varphi(t)\right] + mg\ell\dot{\varphi}\sin \varphi = 0$$

Zum Vergleich der harmonische Oszillator:  $E = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mg\ell\varphi^2$

(4) Zustand  $(x_1, x_2) = (\varphi(t), \dot{\varphi}(t)) \in \mathbb{R}^2$ . Der Zustandsraum ist hier  $\mathbb{R}^2$ . Das Bewegungsgesetz darauf lautet:  $\dot{x}_1 = x_2$  und  $\dot{x}_2 = -g/\ell \sin(x_1)$ .

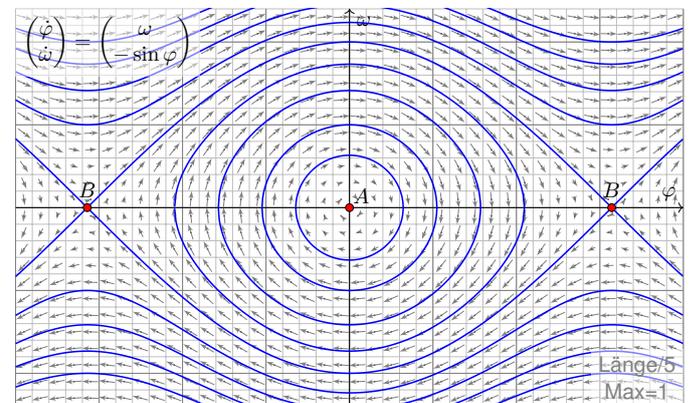
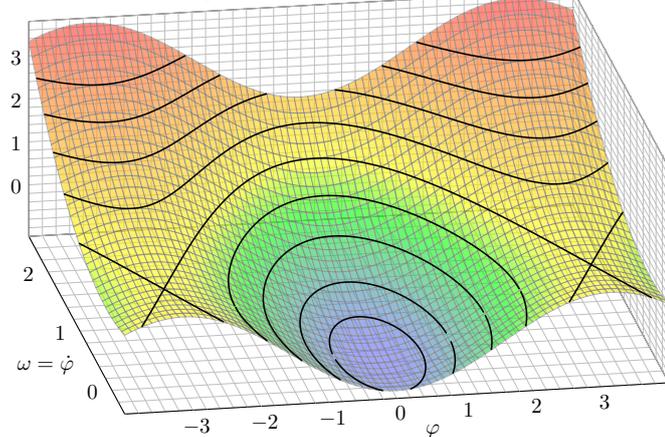
(5) Für  $\ell = 9.81m$  erhalten wir  $(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = f(x_1, x_2) = (x_2, -\sin(x_1))$ . Dieses Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist in folgenden Graphiken dargestellt.

😊 Dank Energieerhaltung können wir sofort die Lösungskurven als Äquipotentiallinien  $E = \text{const}$  einzeichnen! Leider sieht man diesen Kurven ihre zeitliche Parametrisierung oder Periodendauer nicht an.

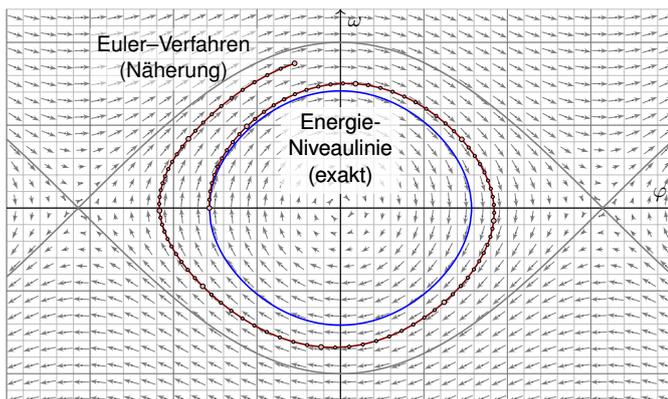
(6) Zeitlich parametrisierte Lösungen  $[0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$  berechnen wir näherungsweise durch das Euler-Verfahren und lesen die Zeit ab: Ein Viertelumlauf benötigt  $\approx 1.85s$ , eine ganze Periode also  $\approx 7.4s$ . Das ist etwa 18% länger als die Periode des linearisierten Modells.

⚠ Die Näherung akkumuliert Approximationsfehler und entfernt sich von der Energieniveaulinie. Für kleine Zeiten scheint die Abweichung gerade noch akzeptabel. Für eine ernsthafte Rechnung müssen wir die Schrittweite verkleinern oder das gesamte Verfahren verbessern: Fehlerschranken, Effizienz und Präzision erfordern harte Arbeit!

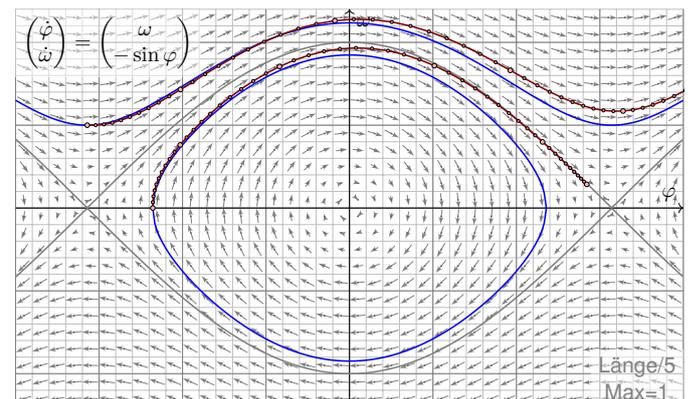
Gesamtenergie  $E = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2 - mg\ell \cos \varphi$



Wir erkennen harmonische Oszillation um das untere Gleichgewicht A. Der obere Scheitelpunkt B hingegen ist ein instabiles Gleichgewicht.



Die Periode dauert etwa  $4 \cdot 1.85s = 7.4s$ : Länger als im linearen Modell! Das ist physikalisch plausibel: Kraft und Beschleunigung sind geringer.



Wir erkennen deutlich die Abweichungen der Euler-Approximation. Wie erreichen wir möglichst hohe Präzision bei geringem Aufwand?

Das Euler-Verfahren wird hier zu didaktischen Zwecken vorgestellt: Es ist besonders einfach. Leider ist es wenig präzise, wie bereits obige Experimente zeigen, und für ernsthafte Anwendungen nicht geeignet!

Auf zwei Weisen können wir die Präzision der Näherung verbessern:

- Wir können kleinere Schritte wählen und so feiner diskretisieren. Das erhöht den Rechenaufwand, der Computer läuft langsamer.
- Wir können ein Verfahren höherer Konvergenzordnung wählen. Das erhöht den Theorieaufwand, der Computer rechnet schneller.

Die numerische Approximation von Differentialgleichungen ist in naturwissenschaftlich-technischen Anwendungen allgegenwärtig. Es gibt hierzu zahlreiche Verfahren, ständig werden weitere entwickelt, auf spezielle Anwendungen angepasst, untersucht und verbessert. Das bekannteste ist vermutlich das klassische Runge-Kutta-Verfahren (der Ordnung 4, kurz „RK4“). Es ist in der Praxis sehr weit verbreitet und erfreut sich großer Beliebtheit, denn es ist ebenso einfach zu implementieren wie das Euler-Verfahren, aber wesentlich präziser!



Carl Runge (1856–1927)



Wilhelm Kutta (1867–1944)

Entwickelt hat dieses Verfahren 1895 Carl Runge. Er war 1904–1925 in Göttingen Deutschlands erster Professor für angewandte Mathematik. Weiterentwickelt hat es 1901 Wilhelm Kutta, 1912–1935 Professor für Mathematik in Stuttgart. Vor hundert Jahren hätten Sie Ihre Mathematik vermutlich bei ihm gehört. Viele Studierende erinnerten sich später, so heißt es, mit großer Bewunderung an seine einzigartigen Vorlesungen.

Numerisch zu lösen ist  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ . Gegeben ist zur Zeit  $t$  der Zustand  $x = x(t)$ . Gesucht ist nach Zeitschritt  $h$  der Zustand  $x(t+h)$ . Zur Erinnerung das **Euler-Verfahren** (Ordnung 1):

$$x(t+h) \approx x(t) + hk_1 \quad \text{mit Zuwachs} \quad k_1 = f(t, x)$$

Hier das **Runge-Kutta-Verfahren** (der Ordnung 4, kurz „RK4“):

$$x(t+h) \approx x(t) + h \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} k_1 = f(t, x), \\ k_2 = f(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}k_1), \\ k_3 = f(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}k_2), \\ k_4 = f(t+h, x + hk_3). \end{cases}$$

Diese raffinierte Rechnung verringert den Approximationsfehler. Die Numerik erklärt wie genau das geht. Zunächst ist  $k_1$  der Zuwachs gemäß des Tangentenvektors zur Zeit  $t$  im Punkt  $x$  wie bei Eulers Verfahren, dann ist  $k_2$  der Zuwachs zur Mitte des Zeitschritts im Punkt  $x + h/2 \cdot k_1$ , sodann  $k_3$  der Zuwachs zur Mitte des Zeitschritts aber im Punkt  $x + h/2 \cdot k_2$ , schließlich ist  $k_4$  der Zuwachs am Ende des Zeitschritts im Punkt  $x + hk_3$ . Die vier Zuwächse werden gemittelt, wobei die beiden mittleren doppelt zählen. Wenn  $f(t, x)$  nur von  $t$  und nicht von  $x$  abhängt, dann ist dies die numerische Integration gemäß Simpson, auch Keplers Fassregel genannt.

Die nachfolgenden Graphiken vergleichen Euler und Runge-Kutta. Das Euler-Verfahren, aka RK1, ist **erster Ordnung**, kurz  $O(h)$ :

$$\text{GlobalerFehler(Euler)} \leq C_E(f) \cdot h$$

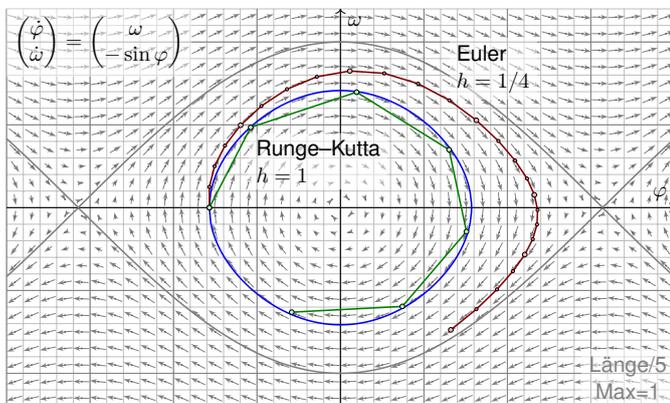
Die Konstante hängt von der Funktion  $f$  und dem Zeitintervall ab. Der Fehler  $O(h)$  sinkt für  $h \rightarrow 0$  linear mit der Schrittweite: Halbe Schrittweite bringt doppelte Genauigkeit.

Das Runge-Kutta-Verfahren ist **viertes Ordnung**, kurz  $O(h^4)$ :

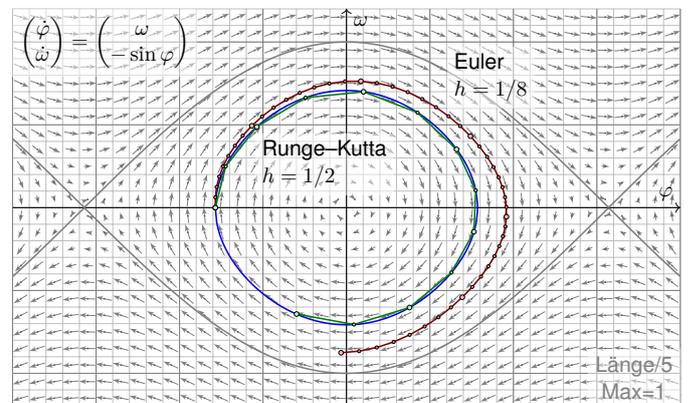
$$\text{GlobalerFehler(RK4)} \leq C_{RK4}(f) \cdot h^4$$

Im Vergleich zu  $O(h)$  sinkt der Fehler  $O(h^4)$  wesentlich schneller: Halbe Schrittweite bringt sechzehnfache Genauigkeit! Das ist eine dramatische Verbesserung. Die folgenden Graphiken illustrieren dies. Das Runge-Kutta-Verfahren benötigt vier Auswertungen der Funktion  $f$  für jeden Schritt  $h$ . Zur Fairness gebe ich dem Euler-Verfahren seine gerechte Schrittweite  $h/4$ . Dennoch ist Runge-Kutta weit überlegen!

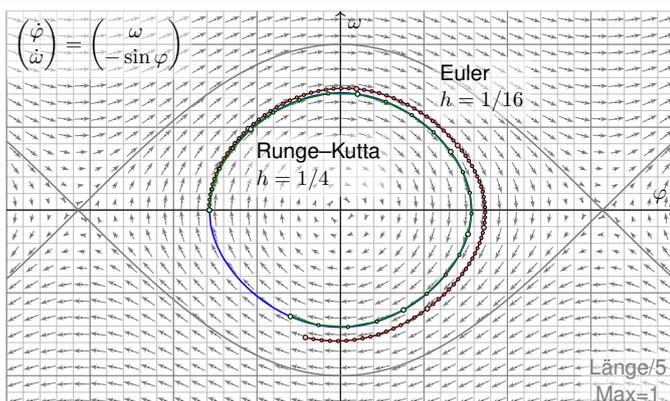
• Why Runge-Kutta is so much better than Euler's method. [youtu.be/dSht1M169kY](https://youtu.be/dSht1M169kY)



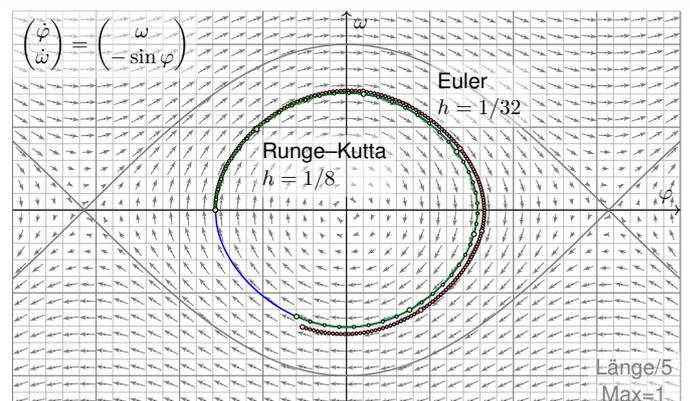
Das Euler-Verfahren (rot) entfernt sich schnell von der exakten Lösung (blau). Das Runge-Kutta-Verfahren (grün) ist bereits recht präzise!



Halbierung der Schrittweite: Das Euler-Verfahren (rot) wird besser. Das Runge-Kutta-Verfahren (grün) scheint weitgehend exakt (blau).



Halbe Schrittweite: Das Euler-Verfahren (rot) halbiert seinen Fehler. Das Runge-Kutta-Verfahren (grün) scheint weitgehend exakt (blau).



Halbe Schrittweite: Das Euler-Verfahren (rot) halbiert seinen Fehler. Das Runge-Kutta-Verfahren (grün) scheint weitgehend exakt (blau).

☺ Differentialgleichungen erster Ordnung sind universell: Wir können jede DG  $n$ -ter Ordnung auf ein DGSystem erster Ordnung reduzieren! Beispiel: Wir nutzen dies zur Formulierung der Planetenbewegung. [O125](#)

**Reduktion:** Vorgelegt sei eine **Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung:**

$$(1) \quad y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Diese können wir umformulieren in ein **DGSystem erster Ordnung:**

$$(2) \quad \begin{cases} y_0' &= y_1 \\ y_1' &= y_2 \\ \vdots & \\ y_{n-2}' &= y_{n-1} \\ y_{n-1}' &= f(t, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \end{cases}$$

**Übung:** Rechnen Sie diesen genial-einfachen Trick sorgsam nach: Löst  $y: I \rightarrow \mathbb{K}$  die DG (1), so löst  $(y, y', \dots, y^{(n-1)})$  das DGSystem (2). Löst  $(y_0, \dots, y_{n-1}): I \rightarrow \mathbb{K}^n$  das DGSystem (2), so löst  $y_0$  die DG (1).

☺ Es genügt daher, **DGSysteme erster Ordnung** zu untersuchen! Diese Formulierung ist einfacher und erlaubt starke Werkzeuge:

☺ In jeder Dimension  $n$  gilt **Existenz & Eindeutigkeit & Stabilität**.

☺ Der einfachste Fall sind **entkoppelte Gleichungen:**

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= f_1(t, y_1(t)) \\ y_2'(t) &= f_2(t, y_2(t)) \\ &\vdots \\ y_n'(t) &= f_n(t, y_n(t)) \end{aligned}$$

Hierzu lösen wir  $n$  eindimensionale Differentialgleichungen. Das können wir schon recht gut, wie zuvor in Kapitel M erklärt.

**Beispiel:** Wir nutzen dies unten beim Massenwirkungsgesetz. [O153](#)

⚠ Im Allgemeinen sind die gegebenen Gleichungen aber gekoppelt. Für dieses Problem benötigen wir daher passende Rechenmethoden. Hierzu nutzen wir die Werkzeuge der Analysis und der linearen Algebra!

Zu lösen sei eine lineare Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung:

$$(1) \quad y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t)$$

Diese ist äquivalent zu einem linearen DGSystem erster Ordnung:

$$(2) \quad \begin{cases} y_0' &= & & & y_1 \\ \vdots & & & & \\ y_{n-2}' &= & & & y_{n-1} \\ y_{n-1}' &= & -a_0(t)y_0 & -a_1(t)y_1 & \dots & -a_{n-1}(t)y_{n-1} & +b(t) \end{cases}$$

Das entspricht  $y'(t) = A(t)y(t) + B(t)$  mit zugehöriger Systemmatrix

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \dots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

**Beispiel:** Wir nutzen dies oben für die gekoppelten Oszillatoren. [O109](#) Hierbei nennen wir  $A(t)$  die **Begleitmatrix** des Polynoms aus (1).

☺ Besonders wichtig und gut zu lösen sind lineare DGSysteme  $y'(t) = Ay(t) + b(t)$  mit **konstanter Koeffizientenmatrix**  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ . Diese behandeln wir ausführlich in diesem und im nächsten Kapitel.

☺ Der einfachste Fall sind auch hier **entkoppelte Gleichungen:**

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= \lambda_1 y_1(t) \\ y_2'(t) &= \lambda_2 y_2(t) \\ &\vdots \\ y_n'(t) &= \lambda_n y_n(t) \end{aligned}$$

Die Lösungen  $y_k(t) = c_k e^{\lambda_k t}$  können wir sofort ausschreiben!

☺ Oft lassen sich komplexe Lösungen  $e^{(\sigma \pm i\omega)t}$  leichter berechnen und dann in reelle Lösungen  $e^{\sigma t} \cos(\omega t)$  und  $e^{\sigma t} \sin(\omega t)$  umrechnen.

**Beispiel:** Wir nutzen dies oben für die gekoppelten Oszillatoren. [O109](#)

⚠ Im Allgemeinen sind die gegebenen Gleichungen aber gekoppelt. Für dieses Problem benötigen wir daher passende Rechenmethoden. Hierzu nutzen wir die Werkzeuge der Analysis und der linearen Algebra!

Chemische Substanzen  $A$  und  $B$  reagieren zu  $C$ , kurz:  $A + B \xrightarrow{k} C$ . Wir beobachten ihre Konzentrationen  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $c(t)$  zur Zeit  $t \geq 0$ . Für  $t = 0$  sind Anfangswerte  $a(0) = a_0$ ,  $b(0) = b_0$ ,  $c(0) = 0$  gegeben. Nach dem Massenwirkungsgesetz ist die Reaktionsrate  $k a b$ , also:

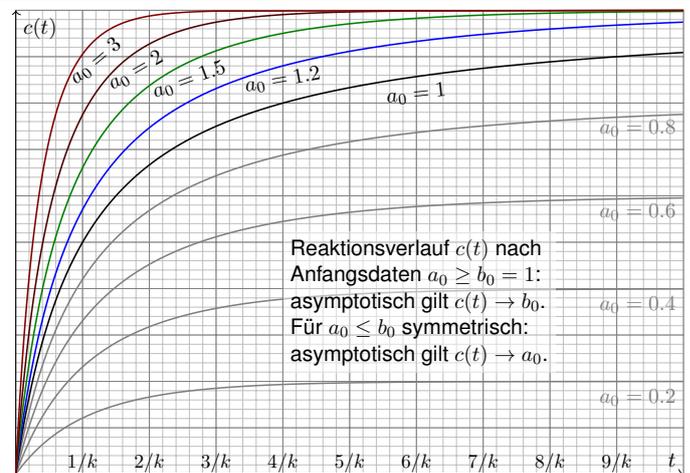
$$\begin{aligned} a'(t) &= -k a(t) b(t) \\ b'(t) &= -k a(t) b(t) \\ c'(t) &= +k a(t) b(t) \end{aligned}$$

**Aufgabe:** Gesucht ist die Lösungskurve  $y: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $y(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix}$ .

⚠ Dies ist ein nicht-lineares DGSystem! Gibt es Lösungen? mehrere oder nur genau eine? Wie findet man alle Lösungen?

**Lösung:** Glücklicherweise lässt sich dieses DGSystem explizit lösen. Entkoppeln, Trennung der Variablen und Partialbruchzerlegung ergibt:

$$a(t) = a_0 - c(t), \quad b(t) = b_0 - c(t), \quad c(t) = \frac{a_0 b_0 (e^{a_0 k t} - e^{b_0 k t})}{a_0 e^{a_0 k t} - b_0 e^{b_0 k t}}$$



Reaktionsverlauf  $c(t)$  nach Anfangsdaten  $a_0 \geq b_0 = 1$ : asymptotisch gilt  $c(t) \rightarrow b_0$ .  
Für  $a_0 \leq b_0$  symmetrisch: asymptotisch gilt  $c(t) \rightarrow a_0$ .

**Lösung:** Wir bemerken und nutzen  $[a + c]' = 0$  und  $[b + c]' = 0$ . Demnach sind  $a(t) + c(t) = a_0$  und  $b(t) + c(t) = b_0$  Konstanten. Einsetzen entkoppelt das DGSystem zu  $c' = k(a_0 - c)(b_0 - c)$ . Dies entspricht der logistischen Differentialgleichung. [M405](#)

Trennung der Variablen und Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned} kt &= \int_{\tau=0}^t \frac{c'(\tau)}{[a_0 - c(\tau)][b_0 - c(\tau)]} d\tau \\ &= \int_{\tau=0}^t \frac{1}{a_0 - b_0} \left[ \frac{c'(\tau)}{b_0 - c(\tau)} - \frac{c'(\tau)}{a_0 - c(\tau)} \right] d\tau \\ &= \frac{1}{a_0 - b_0} \left[ \ln(a_0 - c(\tau)) - \ln(b_0 - c(\tau)) \right]_{\tau=0}^t \\ &= \frac{1}{a_0 - b_0} \ln \left[ \frac{a_0 - c(t)}{b_0 - c(t)} \cdot \frac{a_0 - c(0)}{b_0 - c(0)} \right] \end{aligned}$$

Der Anfangswert  $c(0) = 0$  vereinfacht dies zu

$$(a_0 - b_0)kt = \ln \left[ \frac{a_0 - c(t)}{b_0 - c(t)} \cdot \frac{a_0}{b_0} \right].$$

Beidseitige Anwendung der Exponentialfunktion liefert:

$$\frac{a_0}{b_0} e^{(a_0 - b_0)kt} = \frac{a_0 - c(t)}{b_0 - c(t)}$$

Wir lösen nach  $c(t)$  auf und erhalten schließlich:

$$c(t) = \frac{a_0 b_0 (e^{a_0 k t} - e^{b_0 k t})}{a_0 e^{a_0 k t} - b_0 e^{b_0 k t}}$$

Hieraus ergeben sich  $a(t) = a_0 - c(t)$  und  $b(t) = b_0 - c(t)$ .

☺ Damit haben wir unsere Differentialgleichung explizit gelöst!

Für  $t \rightarrow \infty$  sehen wir den (asymptotischen) Endzustand der Reaktion:

- Für  $a_0 > b_0$  gilt  $c(t) \rightarrow b_0$ , also  $a(t) \rightarrow a_0 - b_0$  und  $b(t) \rightarrow 0$ .
- Für  $a_0 < b_0$  gilt  $c(t) \rightarrow a_0$ , also  $a(t) \rightarrow 0$  und  $b(t) \rightarrow b_0 - a_0$ .
- Der Sonderfall  $a_0 = b_0$  liefert analog  $c(t) = a_0^2 kt / (akt + 1)$ .

☺ Plausibilitätsprüfung: Die Reaktion verläuft gemäß unserer obigen Formel bis schließlich eine der beiden Substanzen verbraucht ist.

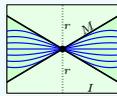
Zum  $\exists$ &E-Satz O1B erklären wir eine allgemeine Lösungsmethode, um 1890 entwickelt von Picard und Lindelöf, für das Anfangswertproblem

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0.$$

Der folgende Satz garantiert (1) die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung und zudem (2) ein Konstruktionsverfahren zur Approximation dieser Lösung mit (3) expliziter Fehlerschranke. Was will man mehr?

**Geometrische Voraussetzungen für die Picard–Lindelöf–Iteration:**

Sei  $I = [t_0 - a, t_0 + b] \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall um  $t_0$  mit  $a, b \leq T$ .  
 Sei  $K = \overline{B}(y_0, r) \subseteq \mathbb{K}^n$  der Ball um  $y_0$  mit Radius  $r > 0$ .  
 Sei  $f: I \times K \rightarrow \mathbb{K}^n$  stetig, somit beschränkt, also  $|f| \leq M$ .  
 Hierbei gelte  $T \cdot M \leq r$ , notfalls verkleinern wir  $T$  und  $I$ .



Zudem erfülle  $f$  für alle  $t \in I$  und  $u, v \in K$  die **Lipschitz–Bedingung**

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq L|u - v|.$$

Ist etwa  $f(t, y)$  stetig differenzierbar nach  $y$ , so genügt  $|\partial f / \partial y| \leq L$ .

**Satz O2A: Picard–Lindelöf–Iteration**

Unter den oben erklärten geometrischen Voraussetzungen gilt:

- (1) Das Anfangswertproblem hat genau eine Lösung  $y: I \rightarrow K$ .
- (2) Die Lösung  $y$  ist die Grenzfunktion der Picard–Lindelöf–Iteration

$$u_0 = y_0, \quad u_{n+1}(t) = y_0 + \int_{\tau=t_0}^t f(\tau, u_n(\tau)) d\tau \quad \text{für } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

- (3) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $t \in I$  gilt die gleichmäßige Fehlerschranke

$$|y(t) - u_n(t)| \leq \max_I |u_1 - u_0| e^{LT} \cdot \frac{(LT)^n}{n!} \rightarrow 0.$$

- (4) Die Lösung  $y$  hängt stetig vom Anfangswert  $y_0$  ab: Ist  $\tilde{y}: \tilde{I} \rightarrow K$  eine Lösung zum Startwert  $\tilde{y}(t_0) = \tilde{y}_0$  auf einem Intervall  $\tilde{I}$  mit  $t_0 \in \tilde{I}$ , so laufen die Lösungen  $y$  und  $\tilde{y}$  höchstens exponentiell auseinander:

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \leq |y_0 - \tilde{y}_0| \cdot e^{L|t-t_0|} \quad \text{für alle } t \in I \cap \tilde{I}$$

**Aufgabe:** Lösen Sie durch Picard–Lindelöf–Iteration das AWP

$$y'(t) = y(t), \quad y(0) = 1.$$

**Lösung:** Sukzessive Approximation gemäß Picard–Lindelöf:

$$\begin{aligned} u_0(t) &= 1 \\ u_1(t) &= 1 + \int_{\tau=0}^t u_0(\tau) d\tau = 1 + t \\ u_2(t) &= 1 + \int_{\tau=0}^t u_1(\tau) d\tau = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 \\ u_3(t) &= 1 + \int_{\tau=0}^t u_2(\tau) d\tau = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 \\ u_4(t) &= 1 + \int_{\tau=0}^t u_3(\tau) d\tau = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4 \end{aligned}$$

Per Induktion und Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  finden wir die Lösung:

$$u_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} \rightarrow y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = \exp(t)$$

☺ Probe! Dieselbe Lösung finden wir alternativ durch Separation M1A.

**Aufgabe:** Lösen Sie durch Picard–Lindelöf–Iteration das AWP

$$y'(t) = -t y(t), \quad y(0) = 1.$$

**Lösung:** Sukzessive Approximation gemäß Picard–Lindelöf:

$$\begin{aligned} u_0(t) &= 1 \\ u_1(t) &= 1 - \int_{\tau=0}^t \tau u_0(\tau) d\tau = 1 - \frac{1}{2}t^2 \\ u_2(t) &= 1 - \int_{\tau=0}^t \tau u_1(\tau) d\tau = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^4 \\ u_3(t) &= 1 - \int_{\tau=0}^t \tau u_2(\tau) d\tau = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^4 - \frac{1}{48}t^6 \\ u_4(t) &= 1 - \int_{\tau=0}^t \tau u_3(\tau) d\tau = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^4 - \frac{1}{48}t^6 + \frac{1}{384}t^8 \end{aligned}$$

Per Induktion und Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  finden wir die Lösung:

$$u_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k t^{2k}}{2^k k!} \rightarrow y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{2^k k!} = \exp(-t^2/2)$$

☺ Probe! Dieselbe Lösung finden wir alternativ durch Separation M1A.

**Aufgabe:** (A) Sei  $y: I \rightarrow K$  stetig. Unsere **Differentialgleichung**

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{für alle } t \in I \text{ und } y(t_0) = y_0$$

ist äquivalent zu folgender (für uns vorteilhaften) **Integralgleichung:**

$$y(t) = y_0 + \int_{\tau=t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau \quad \text{für alle } t \in I$$

Somit sind Lösungen  $y: I \rightarrow K$  genau die **Fixpunkte** der Abbildung

$$\Psi: C(I, K) \rightarrow C(I, \mathbb{K}^n), \quad (\Psi u)(t) = y_0 + \int_{\tau=t_0}^t f(\tau, u(\tau)) d\tau.$$

(B) Tatsächlich gilt  $\Psi: C(I, K) \rightarrow C(I, K)$ : Wir können  $\Psi$  also **iterieren!**

(C) Für je zwei Funktionen  $u, v \in C(I, K)$  gilt die **Fehlerschranke**

$$|\Psi^n u(t) - \Psi^n v(t)| \leq \max_{[t_0, t]} |u - v| \cdot \frac{L^n |t - t_0|^n}{n!} \leq \max_I |u - v| \cdot \frac{(LT)^n}{n!}.$$

Für  $n \rightarrow \infty$  gilt  $(LT)^n/n! \rightarrow 0$ . Demnach ist  $\Psi^n$  schließlich **kontraktiv**:  
 Zu  $0 < \alpha < 1$  existiert  $n \in \mathbb{N}$  sodass  $|\Psi^n u - \Psi^n v| \leq \alpha |u - v|$  gilt.

**Lösung:** (A) Dank HDI (B11). Die Integralgleichung besagt  $y = \Psi y$ .

(B) Für  $u \in C(I, K)$  zeigen wir  $\Psi u \in C(I, K)$  durch Nachrechnen:

$$\begin{aligned} |\Psi u(t) - y_0| &= \left| \int_{t_0}^t f(\tau, u(\tau)) d\tau \right| \leq \int_{t_0}^t |f(\tau, u(\tau))| d\tau \leq \int_{t_0}^t M d\tau \\ &= |t - t_0| M \leq T M \leq r \end{aligned}$$

(C) Für  $n = 0$  ist die Aussage trivial. Für  $n \geq 1$  folgt sie induktiv:

$$\begin{aligned} |\Psi^n u(t) - \Psi^n v(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(\tau, \Psi^{n-1} u(\tau)) - f(\tau, \Psi^{n-1} v(\tau)) d\tau \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t L |\Psi^{n-1} u(\tau) - \Psi^{n-1} v(\tau)| d\tau \\ &\leq \int_{t_0}^t \max_{[t_0, t]} |u - v| \cdot \frac{L^n |\tau - t_0|^{n-1}}{(n-1)!} d\tau \\ &= \max_{[t_0, t]} |u - v| \cdot \frac{L^n |t - t_0|^n}{n!} \leq \max_I |u - v| \cdot \frac{(LT)^n}{n!} \end{aligned}$$

Diese Rechnungen beweisen den Satz O2A von Picard–Lindelöf:

Der Raum  $C(I, K)$  ist vollständig bezüglich der Supremumsnorm. Daher können wir auf  $\Psi$  den **Fixpunktsatz von Banach** anwenden:

(1) Die Abbildung  $\Psi: C(I, K) \rightarrow C(I, K)$  hat genau einen Fixpunkt  $y$ .

☺ Dank (A) hat unser AWP somit genau eine Lösung  $y: I \rightarrow K$ .

(2) Wir erhalten die Lösung  $y$  durch sukzessive Approximation.

☺ Für jede Funktion  $u_0 \in C(I, K)$  konvergiert  $u_n = \Psi^n u_0$  gegen  $y$ .

Für den Fixpunkt  $v_0 = y$  liefert die Iteration  $v_n = \Psi^n v_0 = y$ .

Dank der Fehlerschranke (D) erhalten wir also:

$$|y(t) - u_n(t)| \leq \max_{[t_0, t]} |y - u| \cdot \frac{L^n |t - t_0|^n}{n!} \leq \max_I |y - u| \cdot \frac{(LT)^n}{n!}.$$

☺ Die Konvergenz  $u_n \rightarrow y$  der Approximationen  $u_n$  gegen die Lösung  $y$  ist demnach mindestens so schnell wie die Konvergenz  $(LT)^n/n! \rightarrow 0$ .

☺ Die in (3) angegebene Verschärfung nutzt nur die Schritte  $u_0, u_1$ :  
 Auf der rechten Seite stehen also nur bereits bekannte Daten.

(3) Wir formulieren die Fehlerschranke nur mit  $u_0$  und  $u_1$ :

$$\begin{aligned} |u_n(t) - u_{n+1}(t)| &= |\Psi^n u_0(t) - \Psi^n u_1(t)| \leq \max_{[t_0, t]} |u_0 - u_1| \cdot \frac{L^n |t - t_0|^n}{n!} \\ |u_n(t) - u_{n+p}(t)| &\leq |u_n(t) - u_{n+1}(t)| + \dots + |u_{n+p-1}(t) - u_{n+p}(t)| \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \max_{[t_0, t]} |u_0 - u_1| \cdot \frac{L^k |t - t_0|^k}{k!} \leq \max_{[t_0, t]} |u_0 - u_1| e^{L|t-t_0|} \cdot \frac{L^n |t - t_0|^n}{n!} \end{aligned}$$

Für  $p \rightarrow \infty$  erhalten wir die gewünschte Ungleichung für  $|u_n(t) - y(t)|$ .

(4) Ist  $\tilde{y}: \tilde{I} \rightarrow K$  eine Lösung zum Startwert  $\tilde{y}(t_0) = \tilde{y}_0$ , so gilt dank (A)  $\tilde{y}(t) = \tilde{y}_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \tilde{y}(\tau)) d\tau$ . Wir beginnen die Picard–Lindelöf–Iteration mit der Funktion  $u_0 = \tilde{y}$  und erhalten im ersten Schritt die Verschiebung

$$u_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \tilde{y}(\tau)) d\tau = y_0 - \tilde{y}_0 + u_0(t), \quad \text{dank (3) also}$$

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \leq |y_0 - \tilde{y}_0| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^k |t - t_0|^k}{k!} = |y_0 - \tilde{y}_0| e^{L|t-t_0|}.$$

Diese nützliche Fehlerschranke untersuchen wir im Folgenden genauer.

## Fortsetzungen und maximale Lösungen

O209  
Ausführung

Sei  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n \supseteq G \rightarrow \mathbb{K}^n$  stetig. Zu lösen sei die Differentialgleichung

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{mit Anfangswert} \quad y(t_0) = y_0.$$

Euler–Polygonzüge und der Peano–Existenzsatz O1A zeigen allgemein die Existenz von lokalen Lösungen. Wir verlangen meist zusätzlich, dass die partielle Ableitung  $\partial_y f$  von  $f$  nach  $y$  existiert und stetig ist. Die Picard–Lindelöf–Iteration O2A löst dann das AWP in einer kleinen Umgebung  $(t_0, y_0) \in I \times K \subseteq G$  mit  $I = [t_0 - a, t_0 + b]$  und  $K = \overline{B}(y_0, r)$ .

### Satz O2B: Fortsetzungen und maximale Lösungen

Aus der lokalen folgt die globale Lösbarkeit im Inneren  $G^\circ$ :

(1) Sei  $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}^n$  eine Lösung mit  $y'(t) = f(t, y(t))$  für alle  $t \in [a, b]$ . Verläuft  $y$  ganz in einer kompakten Menge  $A \subseteq G$ , so lässt sich  $y$  auf das Intervall  $[a, b]$  eindeutig fortsetzen zu einer Lösung  $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}^n$ .

(2) Sind  $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}^n$  und  $v: [b, c] \rightarrow \mathbb{K}^n$  Lösungen mit  $u(b) = v(b)$ , so lassen sie sich zusammensetzen zu einer Lösung  $y: [a, c] \rightarrow \mathbb{K}^n$ .

Jede Lösung kann so bis zum Rand  $\partial G$  (oder  $\infty$ ) fortgesetzt werden.

## Fortsetzungen und maximale Lösungen

O211  
Ausführung

(2) Aus Lösungen  $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}^n$  und  $v: [b, c] \rightarrow \mathbb{K}^n$  mit  $u(b) = v(b)$  setzen wir die Lösung  $y: [a, c] \rightarrow \mathbb{K}^n$  zusammen durch Verkleben:

$$y(t) := \begin{cases} u(t) & \text{für } t \in [a, b], \\ v(t) & \text{für } t \in [b, c]. \end{cases}$$

Wegen  $u(b) = v(b)$  ist dies wohldefiniert. Wir müssen noch nachweisen, dass  $y$  differenzierbar ist und  $y'(t) = f(t, y(t))$  für alle  $t \in [a, c]$  erfüllt. Dies gilt für  $t \in [a, b]$ , denn  $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}^n$  löst die Differentialgleichung. Dies gilt für  $t \in ]b, c]$ , denn  $v: [b, c] \rightarrow \mathbb{K}^n$  löst die Differentialgleichung. Die Ableitung in  $t = b$  ist linksseitig  $y'(b-) = u'(b) = f(b, u(b))$  und rechtsseitig  $y'(b+) = v'(b) = f(b, v(b))$ . Hurra, beide sind gleich!

(3) Wir lösen  $y'(t) = f(t, y(t))$  mit  $y(t_0) = y_0$ . Bei Start in  $(t_0, y_0) \in G^\circ$  existiert eine lokale Lösung  $y: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{K}^n$  mit  $t_1 > t_0$  dank O1A / O2A.

Im günstigsten Falle  $t_1 = \infty$  existiert diese Lösung für alle Zeit  $t \geq t_0$ . Andernfalls können wir  $y$  maximal fortsetzen mit Hilfe von (1) und (2), mögliche Hindernisse sind nur Polstellen oder der Rand  $\partial G$ . Genauer:

## Allgemeine Lösung einer Differentialgleichung

O213  
Ausführung

Wir betrachten wie zuvor ein Anfangswertproblem der Form

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(\tau) = \eta.$$

Wir untersuchen nun genauer die Abhängigkeit vom Startpunkt  $(\tau, \eta)$ . Hierzu sei  $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$  offen und  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n \supseteq G \rightarrow \mathbb{K}^n: (t, y) \mapsto f(t, y)$  stetig, zudem nach  $y$  stetig differenzierbar. Dank  $\exists\&E$ -Satz O1B existiert ein maximales Definitionsintervall  $I = I(\tau, \eta) \subseteq \mathbb{R}$  und eine eindeutige Lösung  $y: I \rightarrow \mathbb{K}^n: t \mapsto y(t)$ . Um die Abhängigkeit von den Startwerten  $(\tau, \eta)$  explizit zu notieren, schreiben wir nun genauer  $Y(t; \tau, \eta) := y(t)$ . Wir erhalten zusammenfassend die **allgemeine Lösung**  $Y: B \rightarrow \mathbb{K}^n$ :

$$\begin{aligned} B &= \{ (t; \tau, \eta) \in \mathbb{R} \times G \mid t \in I(\tau, \eta) \} \\ Y &: \mathbb{R} \times G \supseteq B \rightarrow \mathbb{K}^n : (t; \tau, \eta) \mapsto Y(t; \tau, \eta) \\ \partial_t Y(t; \tau, \eta) &= f(t, Y(t; \tau, \eta)), \quad Y(\tau; \tau, \eta) = \eta \end{aligned}$$

Diese Bezeichnung ist leider etwas schwerfällig; sie ist aber notwendig, wenn wir alle Lösungen zugleich betrachten wollen. Insbesondere wollen wir  $Y(t; \tau, \eta)$  auch nach  $\tau$  und  $\eta$  ableiten.

## Glatte Abhängigkeit von den Anfangsdaten

O215  
Ausführung

### Satz O2C: glatte Abhängigkeit von den Anfangsdaten

Sei  $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$  offen,  $f: G \rightarrow \mathbb{K}^n$  stetig und nach  $y$  stetig diff'bar.

(1) Die allgemeine Lösung  $Y: \mathbb{R} \times G \supseteq B \rightarrow \mathbb{K}^n: (t; \tau, \eta) \mapsto Y(t; \tau, \eta)$  zu  $y' = f(t, y)$ ,  $y(\tau) = \eta$  ist stetig in  $(t; \tau, \eta)$ , und  $B \subseteq \mathbb{R} \times G$  ist offen.

(2) Zudem ist  $Y$  nicht nur nach  $t$ , sondern auch nach den Startwerten  $\tau$  und  $\eta$  stetig partiell differenzierbar.

(3) Die Ableitungen  $W = \partial_\eta Y: B \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  und  $z = \partial_\tau Y: B \rightarrow \mathbb{K}^n$  erfüllen die homogenen linearen Differentialgleichungen (§O3)

$$\begin{aligned} \partial_t W(t; \tau, \eta) &= \partial_y f(t, Y(t; \tau, \eta)) W(t; \tau, \eta), & W(\tau; \tau, \eta) &= \mathbf{1}_{n \times n}, \\ \partial_t z(t; \tau, \eta) &= \partial_y f(t, Y(t; \tau, \eta)) z(t; \tau, \eta), & z(\tau; \tau, \eta) &= -f(\tau, \eta). \end{aligned}$$

Zu festen Startwerten  $(\tau, \eta) \in G$  finden wir die Fundamentallösung  $W(-; \tau, \eta): I(\tau, \eta) \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  wie in Satz O3I, kommutativ Satz O3J. Insbesondere gilt  $z(t; \tau, \eta) = -W(t; \tau, \eta) f(\tau, \eta)$  für alle  $t \in I(\tau, \eta)$ .

## Fortsetzungen und maximale Lösungen

O210  
Ausführung

**Aufgabe:** (1) Warum existiert für  $t \nearrow b$  ein Grenzwert  $y(t) \rightarrow w$ ?

Warum ist auch die Fortsetzung  $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}^n$  eine Lösung der DG?

(2) Wie ist  $y: [a, c] \rightarrow \mathbb{K}^n$  definiert? Warum ist  $y$  eine Lösung der DG?

(3) Peano O1A und Picard–Lindelöf O2A lösen das AWP zunächst lokal. Wie folgt hieraus die globale Formulierung des  $\exists\&E$ -Satzes O1B?

**Lösung:** (1) Die Funktion  $f: G \rightarrow \mathbb{K}^n$  ist stetig. Auf jedem Kompaktum  $A \subseteq G$  ist sie beschränkt, also  $|f|_A \leq M < \infty$ . Für  $t_1, t_2 \in [a, b]$  folgt:

$$|y(t_1) - y(t_2)| = \left| \int_{t=t_1}^{t_2} y'(t) dt \right| = \left| \int_{t=t_1}^{t_2} f(t, y(t)) dt \right| \leq M |t_1 - t_2|$$

Für  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \nearrow b$  ist  $(y(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy–Folge, somit konvergent. Wir können also  $y: [a, b[ \rightarrow \mathbb{K}^n$  auf genau eine Weise stetig fortsetzen zu  $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}^n$ . Unser AWP ist äquivalent zur Integralgleichung

$$y(t) = y_0 + \int_{\tau=t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau.$$

Sie gilt für alle  $t \in [a, b]$  und per Grenzübergang  $t \nearrow b$  auch für  $t = b$ . Somit ist  $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}^n$  auch in  $b$  differenzierbar mit  $y'(b) = f(b, y(b))$ .

## Fortsetzungen und maximale Lösungen

O212  
Ausführung

Sei  $\Gamma = \{ (t, y(t)) \mid t \in [t_0, t_1[ \} \subseteq G$  der Graph unserer Lösung  $y$ . Wir betrachten seinen Abschluss  $A = \overline{\Gamma}$  im Inneren  $G^\circ \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ .

**Kompakter Fall:** Ist  $A$  kompakt, so können wir  $y$  dank (1) eindeutig fortsetzen zu einer Lösung  $y: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{K}^n$ . Wegen  $(t_1, y(t_1)) \in A \subseteq G^\circ$  erlaubt das AWP zu  $(t_1, y(t_1))$  eine Lösung  $y: [t_1, t_2[ \rightarrow \mathbb{K}^n$  mit  $t_2 > t_1$ . Dank (2) können wir diese Lösung ankleben. Wir erreichen schließlich:

**Nicht-kompakter Fall:** Die folgenden drei Fälle sind möglich:

- $t_1 = \infty$ : Unsere Lösung  $y: [t_0, t_1[ \rightarrow \mathbb{K}^n$  existiert für alle Zeit  $t \geq t_0$ .
- $\limsup_{t \nearrow t_1} |y(t)| = \infty$ : Unsere Lösung  $y$  entkommt nach Unendlich.
- $\liminf_{t \nearrow t_1} \text{dist}(y(t), \partial G) = 0$ : Unsere Lösung  $y$  läuft zum Rand  $\partial G$ .

In diesen Fällen ist eine Fortsetzung zu  $y: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{K}^n$  in  $G^\circ$  unmöglich. Also ist unsere Lösung  $y: [t_0, t_1[ \rightarrow \mathbb{K}^n$  maximal nach rechts (für  $t \geq t_0$ ). Entsprechend existiert eine maximale Fortsetzung nach links (für  $t \leq t_0$ ).

☺ Jede gegebene Lösung der Differentialgleichung  $y'(t) = f(t, y(t))$  kann beidseitig bis zum Rand  $\partial G$  (oder  $\infty$ ) fortgesetzt werden.

☺ Aus lokaler Eindeutigkeit folgt zudem die globale Eindeutigkeit.

## Allgemeine Lösung einer Differentialgleichung

O214  
Ausführung

**Aufgabe:** Finden Sie die allgemeine Lösung der Gleichung  $y' = f(x, y)$ :

- Für  $f(x, y) = x^2$  auf dem Definitionsgebiet  $G = \mathbb{R}^2$ . M109
- Für  $f(x, y) = y$  auf dem Definitionsgebiet  $G = \mathbb{R}^2$ . M111
- Für  $f(x, y) = y^2$  auf dem Definitionsgebiet  $G = \mathbb{R}^2$ . M113
- Für  $y' = f(x, y) = -x/y$  auf  $G = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \}$ . M115

**Lösung:** (1) Die allgemeine Lösung zum AWP  $y(\xi) = \eta$  und  $y' = x^2$  ist  $Y(x; \xi, \eta) = (x^3 - \xi^3)/3 + \eta$  auf ganz  $B = \mathbb{R} \times G$ . Machen Sie die Probe!

(2) Die allgemeine Lösung zum AWP  $y(\xi) = \eta$  und  $y' = y$  ist  $Y(x; \xi, \eta) = \eta e^{x-\xi}$  auf ganz  $B = \mathbb{R} \times G$ . Machen Sie die Probe!

(3) Die allgemeine Lösung zum AWP  $y(\xi) = \eta$  und  $y' = y^2$  ist  $Y(x; \xi, \eta) = \eta / (1 - (x - \xi)\eta)$  auf  $B = \{ (x; \xi, \eta) \in \mathbb{R} \times G \mid (x - \xi)\eta < 1 \}$ .

(4) Die allgemeine Lösung zum AWP  $y(\xi) = \eta$  und  $y' = -x/y$  ist  $Y(x; \xi, \eta) = \sqrt{\eta^2 + \xi^2 - x^2}$  auf  $B = \{ (x; \xi, \eta) \in \mathbb{R} \times G \mid x^2 < \eta^2 + \xi^2 \}$ .

☺ Immer ist  $B$  offen und hierauf  $Y$  stetig differenzierbar in  $(x; \xi, \eta)$ . Das ist kein Zufall, sondern die Aussage des folgenden Satzes.

## Glatte Abhängigkeit von den Anfangsdaten

O216  
Ausführung

**Aufgabe:** Schreiben Sie die definierende Differentialgleichung für  $Y$  als Integralgleichung. Nutzen Sie (1) und (2), rechnen Sie damit (3) aus!

**Lösung:** Wir integrieren  $\partial_t Y(t; \tau, \eta) = f(t, Y(t; \tau, \eta))$  ab  $Y(\tau; \tau, \eta) = \eta$ :

$$Y(\bar{\tau}; \tau, \eta) = Y(\tau; \tau, \eta) + \int_{t=\tau}^{\bar{\tau}} \partial_t Y(t; \tau, \eta) dt = \eta + \int_{t=\tau}^{\bar{\tau}} f(t, Y(t; \tau, \eta)) dt$$

Wir setzen (1) und (2) voraus. Dank Leibniz–Regel D3B folgt dann (3):

$$\begin{aligned} \partial_\eta Y(\bar{\tau}; \tau, \eta) &= \mathbf{1}_{n \times n} + \int_{t=\tau}^{\bar{\tau}} \partial_y f(t, Y(t; \tau, \eta)) \partial_\eta Y(t; \tau, \eta) dt \\ \partial_\tau Y(\bar{\tau}; \tau, \eta) &= -f(\tau, \eta) + \int_{t=\tau}^{\bar{\tau}} \partial_y f(t, Y(t; \tau, \eta)) \partial_\tau Y(t; \tau, \eta) dt \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen  $W = \partial_\eta Y$  und  $z = \partial_\tau Y$  erfüllen demnach folgende lineare Differentialgleichungen mit speziellen Anfangswerten:

$$\begin{aligned} \partial_t W(t; \tau, \eta) &= \partial_y f(t, Y(t; \tau, \eta)) W(t; \tau, \eta), & W(\tau; \tau, \eta) &= \mathbf{1}_{n \times n} \\ \partial_t z(t; \tau, \eta) &= \partial_y f(t, Y(t; \tau, \eta)) z(t; \tau, \eta), & z(\tau; \tau, \eta) &= -f(\tau, \eta) \end{aligned}$$

Insbesondere gilt  $z(t; \tau, \eta) = -W(t; \tau, \eta) f(\tau, \eta)$  für alle  $t \in I(\tau, \eta)$ .

„Kann der Flügelschlag eines Schmetterlings in Stuttgart einen Tornado in Texas auslösen?“

Der berühmte **Schmetterlingseffekt** besagt: Kleine Abweichungen der Anfangsdaten können im weiteren Verlauf zu großen Abweichungen führen.

😊 Sie pflanzen sich jedoch höchstens exponentiell fort:



### Satz O2D: Auseinanderdriften und Eindeutigkeit

Für je zwei Lösungen  $y, \tilde{y}: I \rightarrow \mathbb{K}^n$  mit  $y' = f(t, y)$  und  $\tilde{y}' = f(t, \tilde{y})$  gilt

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \leq |y(t_0) - \tilde{y}(t_0)| \cdot e^{L|t-t_0|} \quad \text{für alle } t, t_0 \in I.$$

Hier sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall. Sei  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n \supseteq G \rightarrow \mathbb{K}^n$  stetig und erfülle die Lipschitz-Bedingung  $|f(t, y(t)) - f(t, \tilde{y}(t))| \leq L|y(t) - \tilde{y}(t)|$  für  $t \in I$ . Hierzu genügt  $|\partial f / \partial y| \leq L$  auf jeder Strecke  $[(t, y(t)), (t, \tilde{y}(t))]$  für  $t \in I$ .

⚠ Die exponentielle Ungleichung ist optimal, wie  $y'(t) = L y(t)$  zeigt: Die Lösungen  $y_0 e^{L(t-t_0)}$  und  $\tilde{y}_0 e^{L(t-t_0)}$  laufen exponentiell auseinander.

**Beweis:** Die Funktion  $y$  erfüllt  $y'(t) = f(t, y(t))$  für alle  $t \in I$ . Also

$$y(t) \stackrel{\text{HD1}}{=} y(t_0) + \int_{t_0}^t y'(\tau) d\tau \stackrel{\text{DG}}{=} y(t_0) + \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau.$$

Gleiches gilt für  $\tilde{y}$ . Wir untersuchen  $\varphi(t) := |y(t) - \tilde{y}(t)|$ . Für  $t \geq t_0$  gilt:

$$\begin{aligned} 0 \leq \varphi(t) &= \left| y(t_0) + \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau - \tilde{y}(t_0) - \int_{t_0}^t f(\tau, \tilde{y}(\tau)) d\tau \right| \\ &\leq |y(t_0) - \tilde{y}(t_0)| + \left| \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) - f(\tau, \tilde{y}(\tau)) d\tau \right| \\ &\leq |y(t_0) - \tilde{y}(t_0)| + \int_{t_0}^t |f(\tau, y(\tau)) - f(\tau, \tilde{y}(\tau))| d\tau \\ &\leq |y(t_0) - \tilde{y}(t_0)| + \int_{t_0}^t L |y(\tau) - \tilde{y}(\tau)| d\tau \\ &= |y(t_0) - \tilde{y}(t_0)| + L \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Der Satz folgt dann aus dem folgenden Lemma von Gronwall.

Die obige Abschätzung führt uns von Differentialgleichungen zu Ungleichungen. Erste wichtige Beispiele kennen Sie bereits gut:  $y' \geq 0$  heißt wachsend,  $y' \leq 0$  fallend,  $y'' \geq 0$  konvex,  $y'' \leq 0$  konkav. Wir benötigen nun für  $\varphi'(t) \leq L \varphi(t)$  folgendes grundlegende Lemma:

### Lemma O2E: Gronwall 1918

Sei  $\varphi: [t_0, t_0 + b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Aus der impliziten Ungleichung

$$0 \leq \varphi(t) \leq C + L \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_0 + b]$$

mit Konstanten  $C, L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  folgt die explizite Ungleichung

$$0 \leq \varphi(t) \leq C e^{L(t-t_0)} \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_0 + b].$$

Im Grenzfall  $C = 0$  gilt dann  $\varphi(t) = 0$  für alle  $t \in [t_0, t_0 + b]$ .

😊 Die erste Ungleichung ist *implizit*, da die Funktion  $\varphi$  links und rechts vorkommt. Die zweite Ungleichung liefert eine *explizite* Schranke für  $\varphi$ .

**Beweis:** Zu  $0 \leq C < D$  betrachten wir folgende Vergleichsfunktion:

$$\psi(t) = D e^{L(t-t_0)}$$

Sie erfüllt die Gleichung  $\psi'(t) = D + L \int_{t_0}^t \psi(\tau) d\tau$  für alle  $t \geq t_0$ .

Es gilt  $0 \leq \varphi(t) < \psi(t)$  für  $t = t_0$ , und wir zeigen dies nun für alle  $t > t_0$ .

Andernfalls gäbe es einen ersten Zeitpunkt  $t_1 > t_0$  mit  $\varphi(t_1) = \psi(t_1)$ .

Andererseits gilt  $\varphi(t) < \psi(t)$  für  $t_0 \leq t < t_1$  und somit:

$$\varphi(t_1) \leq C + L \int_{t_0}^{t_1} \varphi(\tau) d\tau < D + L \int_{t_0}^{t_1} \psi(\tau) d\tau = \psi(t_1)$$

Demnach ist  $\varphi(t_1) = \psi(t_1)$  nicht möglich. Also gilt  $\varphi(t) < \psi(t)$  für alle  $t \in [t_0, t_0 + b]$ . Insbesondere gilt demnach die schwache Ungleichung:

$$0 \leq \varphi(t) \leq D e^{L(t-t_0)} \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_0 + b]$$

Diese Ungleichung bleibt beim Grenzübergang  $D \searrow C$  bestehen:

$$0 \leq \varphi(t) \leq C e^{L(t-t_0)} \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_0 + b]$$

Damit ist die Ungleichung von Gronwalls Lemma O2E bewiesen.

In praktischen Anwendungen stehen wir vor folgendem Problem:

Anfangsdaten sind oft zufälligen kleinen Schwankungen unterworfen, etwa durch kleine äußere Störungen oder durch ungenaue Messdaten.

Statt der exakten Daten  $(t_0, y_0)$  kennen wir oft nur eine Näherung  $(\tilde{t}_0, \tilde{y}_0)$  sowie (hoffentlich gute) Fehlerschranken  $|t_0 - \tilde{t}_0| \leq \delta$  und  $|y_0 - \tilde{y}_0| \leq \eta$ .

Auch das Vektorfeld  $f$  unserer Differentialgleichung  $y' = f(t, y)$  ist oft nicht exakt bekannt, etwa aufgrund ungenauer von Daten. Wir arbeiten daher mit einer Näherung  $\tilde{f}$  sowie einer Fehlerschranke  $|f - \tilde{f}| \leq \varepsilon$ .

Manchmal ist die rechte Seite  $f$  auch schlicht zu kompliziert und wir wollen sie durch eine Vereinfachung  $\tilde{f}$  ersetzen, also „runden“. [M448](#)

Statt der richtigen Gleichung  $y'(t) = f(t, y(t))$ ,  $y(t_0) = y_0$  lösen wir die benachbarte (etwas falsche) Gleichung  $\tilde{y}'(t) = \tilde{f}(t, \tilde{y}(t))$ ,  $\tilde{y}(\tilde{t}_0) = \tilde{y}_0$ .

Unsere berechnete (etwas falsche) Näherungslösung  $\tilde{y}$  weicht von der richtigen (aber uns unbekannt) Lösung  $y$  ab. Es ist daher wichtig, den möglichen Fehler zu kontrollieren. Dies leistet die folgende Schranke!

### Satz O2F: Fehlerschranke für Näherungslösungen

Wir vergleichen eine exakte Lösung  $y$  mit einer Näherungslösung  $\tilde{y}$ :

$$y: I \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{für alle } t \in I,$$

$$\tilde{y}: I \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad \tilde{y}(\tilde{t}_0) = \tilde{y}_0, \quad |\tilde{y}'(t) - f(t, \tilde{y}(t))| \leq \varepsilon(t).$$

Unter folgenden Voraussetzungen gilt für alle  $t \in I$  die Fehlerschranke

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \leq [|y_0 - \tilde{y}_0| + M |t_0 - \tilde{t}_0|] e^{L|t-t_0|} + \varepsilon(t) \frac{e^{L|t-t_0|-1}}{L} :$$

Die hierzu nötigen Daten  $\varepsilon, L, M$  bestimmen wir nach folgenden Regeln:

(1) Sei  $I = [t_0 - a, t_0 + b]$ . Sei  $f: I \times \mathbb{K}^n \supseteq G \rightarrow \mathbb{K}^n$  stetig und erfülle die Lipschitz-Bedingung  $|f(t, y(t)) - f(t, \tilde{y}(t))| \leq L|y(t) - \tilde{y}(t)|$  für  $t \in I$ .

Hierzu genügt  $|\partial f / \partial y| \leq L$  auf jeder Strecke  $[(t, y(t)), (t, \tilde{y}(t))]$  für  $t \in I$ .

(2) Die Schranke  $\varepsilon: I \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  sei monoton fallend links, auf  $[t_0 - a, t_0]$ , und monoton wachsend rechts, auf  $[t_0, t_0 + b]$ ; etwa eine Konstante.

(3) Es gelte  $|\tilde{y}(\tilde{t}_0) - \tilde{y}(\tilde{t}_0)| \leq M |t_0 - \tilde{t}_0|$ ; etwa  $|\tilde{y}'| \leq M = \max |f| + \varepsilon$ .

Die umfassende Fehlerschranke O2F garantiert eine allgemeine und quantitative Stetigkeitsaussage. Ich betone zwei wichtige Spezialfälle:

**Aufgabe:** Was besagt O2F für (1)  $\varepsilon = 0$  und (2)  $(t_0, y_0) = (\tilde{t}_0, \tilde{y}_0)$ ?

**Erster Spezialfall:** Im Falle  $\varepsilon = 0$  ist neben  $y$  auch  $\tilde{y}$  eine exakte Lösung, allerdings statt  $(t_0, y_0)$  mit anderen Startwerten  $(\tilde{t}_0, \tilde{y}_0)$ .

Die Lösungen  $y$  und  $\tilde{y}$  laufen höchstens exponentiell auseinander:

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \leq [|y_0 - \tilde{y}_0| + M |t_0 - \tilde{t}_0|] e^{L|t-t_0|}$$

😊 Das zeigt insbesondere stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten: Wenn die Startwerte  $(t_0, y_0)$  und  $(\tilde{t}_0, \tilde{y}_0)$  sich nur wenig unterscheiden, so unterscheiden sich auch die zugehörigen Lösungen  $y$  und  $\tilde{y}$  wenig.

😊 Bei gleichen Startzeitpunkten  $t_0 = \tilde{t}_0$  ist dies der obige Satz O2D. Im Allgemeinen Fall gilt  $|\tilde{y}(t_0) - \tilde{y}(\tilde{t}_0)| \leq M |t_0 - \tilde{t}_0|$ , so dass umgekehrt auch Satz O2D zur obigen, etwas allgemeineren Ungleichung führt.

😊 Aus  $(t_0, y_0) = (\tilde{t}_0, \tilde{y}_0)$  folgt die wichtige Eindeutigkeitsaussage, wie wir sie von Cauchy O1B und Picard-Lindelöf O2A bereits kennen.

**Zweiter Spezialfall:** Bei gleichen Startwerten  $(t_0, y_0) = (\tilde{t}_0, \tilde{y}_0)$  gilt:

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \leq \varepsilon(t) \frac{e^{L|t-t_0|-1}}{L}$$

😊 Hier erfüllt  $\tilde{y}$  die Differentialgleichung  $y'(t) = f(t, y(t))$  nicht exakt, sondern näherungsweise gemäß  $|\tilde{y}'(t) - f(t, \tilde{y}(t))| \leq \varepsilon(t)$  für alle  $t \in I$ . Glücklicherweise entfernt sich  $\tilde{y}$  auch hier höchstens exponentiell von  $y$ .

😊 Für exakte Lösungen,  $\varepsilon = 0$ , folgt erneut die Eindeutigkeitsaussage, wie wir sie von Cauchy O1B und Picard-Lindelöf O2A bereits kennen.

😊 Auch diese Ungleichung zeigt eine stetige Abhängigkeit: Wenn wir  $y(t_0) = y_0$  festhalten und die rechte Seite von  $y'(t) = f(t, y(t))$  wenig ändern zu  $\tilde{f}$  mit  $|f - \tilde{f}| \leq \varepsilon$ , so ändert sich auch die Lösung  $\tilde{y}$  nur wenig.

😊 Dies können wir zum „Runden“ der rechten Seite  $f$  nutzen. [M448](#)

**Allgemeiner Fall:** Die umfassende Fehlerschranke aus Satz O2F ist die Summe von zwei anschaulich leicht verständlichen Beiträgen: der Fehler der Anfangsdaten  $(\tilde{t}_0, \tilde{y}_0)$  und der Fehler der rechten Seite  $\tilde{f}$ .

😊 Die Abschätzungen  $\varepsilon, L, M$  liefern unsere explizite Fehlerschranke!

**Aufgabe:** (1) Finden Sie alle Funktionen  $y: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$y'(t) = y(t)^2, \quad y(0) = 0.25.$$

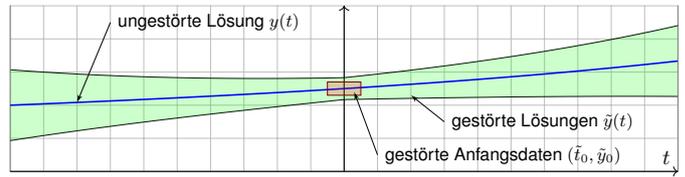
(2) Wie verlaufen Lösungen  $\tilde{y}: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  der gestörten Gleichung?

- (a)  $\tilde{y}'(t) = \tilde{y}(t)^2 + 0.01 \sin(t^2 + 9000y(t)), \quad \tilde{y}(0.05) = 0.27$
- (b)  $\tilde{y}'(t) = \tilde{y}(t)^2 - 0.08 \tilde{y}(t)^3, \quad \tilde{y}(0.04) = 0.23$
- (c)  $\tilde{y}'(t) = \tilde{y}(t)^2 + \tilde{g}(t, \tilde{y}(t)), \quad \tilde{y}(\tilde{t}_0) = \tilde{y}_0$

mit  $|\tilde{g}| \leq \varepsilon = 0.01$  sowie  $|t_0 - \tilde{t}_0| \leq \delta = 0.05$  und  $|y_0 - \tilde{y}_0| \leq \eta = 0.02$ . Nutzen Sie die Schranke O2F mit möglichst guten Konstanten  $M, L$ .

**Lösung:** (1) Separation, Lösung  $y(t) = 1/(4-t)$ , Probe! Eindeutigkeit!

(2) Wir prüfen bzw. schaffen die geometrischen Voraussetzungen: Wir haben das Intervall  $I = [-1, 1]$  um  $t_0 = 0$  vom Radius  $T = 1$ . Wir wählen  $K = \bar{B}(y_0, r) = [0, 0.5]$  um  $y_0 = 0.25$  mit Radius  $r = 0.25$ . Hierauf ist  $f: I \times K \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt durch  $|f| \leq M := 0.25$ . Dank  $\partial f / \partial y = 2y$  ist  $f$  Lipschitz mit  $L = \max_{I \times K} |\partial f / \partial y| = 1$ .



(a/b/c) Für Lösungen  $\tilde{y}: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  gilt dank O2F die Fehlerschranke

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \leq \left[ |y_0 - \tilde{y}_0| + (M + \varepsilon)|t_0 - \tilde{t}_0| \right] e^{L|t-t_0|} + \frac{\varepsilon}{L} \left[ e^{L|t-t_0|} - 1 \right] \leq [0.02 + 0.26 \cdot 0.05] e^{|t|} + 0.01 [e^{|t|} - 1] = 0.043 e^{|t|} - 0.01.$$

Die Graphik zeigt die ungestörte Lösung  $y$  und den möglichen Verlauf gestörter Lösungen  $\tilde{y}$ . Probe:  $\tilde{y}$  verläuft tatsächlich ganz in  $K = [0, 0.5]$ .

☺ Meist können wir den Verlauf gestörter Lösungen  $\tilde{y}(t)$  nicht genau bestimmen, aber wir können ihn immerhin recht präzise eingrenzen!

**Aufgabe:** Beweisen Sie die Fehlerschranke O2F analog zu Satz O2D.

**Lösung:** Wir betrachten die Differenz  $\varphi(t) := |y(t) - \tilde{y}(t)|$ . Es gilt:

$$0 \leq \varphi(t) = \left| y(t_0) + \int_{t_0}^t y'(\tau) d\tau - \tilde{y}(\tilde{t}_0) + \tilde{y}(\tilde{t}_0) - \tilde{y}(t_0) - \int_{t_0}^t \tilde{y}'(\tau) d\tau \right| \leq \underbrace{|y_0 - \tilde{y}_0| + M |t_0 - \tilde{t}_0|}_{=: C} + \left| \int_{t_0}^t y'(\tau) - \tilde{y}'(\tau) d\tau \right|$$

Wir nehmen nun  $t \geq t_0$  an. Für das letzte Integral finden wir:

$$\left| \int_{t_0}^t y'(\tau) - \tilde{y}'(\tau) d\tau \right| = \left| \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) - f(\tau, \tilde{y}(\tau)) + f(\tau, \tilde{y}(\tau)) - \tilde{y}'(\tau) d\tau \right| \leq \int_{t_0}^t |f(\tau, y(\tau)) - f(\tau, \tilde{y}(\tau))| + |f(\tau, \tilde{y}(\tau)) - \tilde{y}'(\tau)| d\tau \leq \int_{t_0}^t L |y(\tau) - \tilde{y}(\tau)| + \varepsilon(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t L \varphi(\tau) + \varepsilon(\tau) d\tau$$

Wir erhalten so die Ungleichung  $0 \leq \varphi(t) \leq C + \int_{t_0}^t L \varphi(\tau) + \varepsilon(\tau) d\tau$ .

**Trick:** Zu  $0 \leq C < D$  betrachten wir folgende Vergleichsfunktion:

$$\psi(t) = D e^{L|t-t_0|} + \varepsilon(t) \frac{e^{L|t-t_0|} - 1}{L}$$

Sie erfüllt die Ungleichung  $\psi(t) \geq D + \int_{t_0}^t L\psi(\tau) + \varepsilon(\tau) d\tau$  für alle  $t \geq t_0$ . Es gilt  $0 \leq \varphi(t) < \psi(t)$  für  $t = t_0$ , und wir zeigen dies nun für alle  $t > t_0$ . Andernfalls gäbe es einen ersten Zeitpunkt  $t_1 > t_0$  mit  $\varphi(t_1) = \psi(t_1)$ . Andererseits gilt  $\varphi(t) < \psi(t)$  für  $t_0 \leq t < t_1$  und somit:

$$\varphi(t_1) \leq C + \int_{t_0}^{t_1} L\varphi(\tau) + \varepsilon(\tau) d\tau < D + \int_{t_0}^{t_1} L\psi(\tau) + \varepsilon(\tau) d\tau \leq \psi(t_1)$$

Demnach ist  $\varphi(t_1) = \psi(t_1)$  nicht möglich. Also gilt  $\varphi(t) < \psi(t)$  für alle  $t \in [t_0, t_0 + b]$ . Insbesondere gilt demnach die schwache Ungleichung:

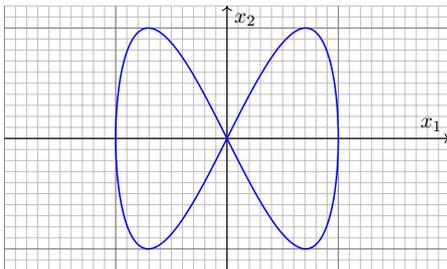
$$0 \leq \varphi(t) \leq D e^{L|t-t_0|} + \varepsilon(t) \frac{e^{L|t-t_0|} - 1}{L} \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_0 + b]$$

Diese Ungleichung bleibt beim Grenzübergang  $D \searrow C$  bestehen:

$$0 \leq \varphi(t) \leq C e^{L|t-t_0|} + \varepsilon(t) \frac{e^{L|t-t_0|} - 1}{L} \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_0 + b]$$

Ebenso für  $t \in [t_0 - a, t_0]$ . Damit ist die Ungleichung O2F bewiesen.

**Aufgabe:** (1) Skizzieren Sie  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto (\sin(t), \sin(2t))$ . Kann dies Lösung eines dynamischen Systems  $\dot{x} = f(x)$  mit  $f \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  sein?



(2) Können sich bei einem autotomen dynamischen System  $\dot{x} = f(x)$  zwei Lösungen  $u, v$  kreuzen mit  $u(t_1) = v(t_2)$  und  $\dot{u}(t_1) \neq \dot{v}(t_2)$ ?

(3) Können sich bei einem System  $\dot{x} = f(x)$  mit  $f \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  zwei verschiedene Lösungen kreuzen mit  $u(t_1) = v(t_2)$  und  $\dot{u}(t_1) = \dot{v}(t_2)$ ?

**Lösung:** (1) Für  $t = 0$  gilt  $u(0) = (0, 0)$  und  $\dot{u}(0) = (1, 2)$ . Für  $t = \pi$  gilt ebenfalls  $u(\pi) = (0, 0)$  aber  $\dot{u}(\pi) = (-1, 2)$ . Demnach müsste sowohl  $f(0, 0) = (1, 2)$  als auch  $f(0, 0) = (-1, 2)$  gelten, ein Widerspruch!

(2) Nein, das ist unmöglich! Teil (1) zeigt ein Beispiel, nun allgemein: Jede Lösung  $u: \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}^2$  erfüllt  $\dot{u}(t) = f(u(t))$  für alle  $t \in I$ , auch die Lösung  $v: \mathbb{R} \supseteq J \rightarrow \mathbb{R}^2$  erfüllt  $\dot{v}(t) = f(v(t))$  für alle  $t \in J$ . Aus  $u(t_1) = v(t_2)$  folgt zwingend  $\dot{u}(t_1) = f(u(t_1)) = f(v(t_2)) = \dot{v}(t_2)$ . ☺ Der Eindeutigkeitsatz vereinfacht die Geometrie von Lösungen.

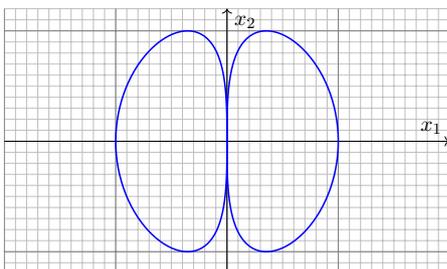
(3) Ja, solche Beispiele kennen wir von der Wasseruhr M123 oder M325.

Das Vektorfeld  $f(x_1, x_2) = (1, 3\sqrt[3]{x_2^2})$  definiert das System  $\dot{x} = f(x)$ . Dieses Vektorfeld ist stetig aber nicht stetig differenzierbar.

Unendlich viele Lösungen laufen durch den Startpunkt  $x(0) = (0, 0)$ , zum Beispiel  $u, v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $u(t) = (t, 0)$  und  $v(t) = (t, t^3)$ .

☹ Ohne Eindeutigkeit wird das Problem komplizierter.

**Aufgabe:** (4) Skizzieren Sie  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto (\sin(t)^3, \sin(2t))$ . Kann dies Lösung eines dynamischen Systems  $\dot{x} = f(x)$  mit  $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  sein?



(5) Wir betrachten ein System  $\dot{x} = f(x)$  mit  $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . Erfüllt eine Lösung  $u$  zudem  $u(\tau) = u(0)$  für ein  $\tau > 0$ , ist sie dann  $\tau$ -periodisch?

**Lösung:** (4) Für  $\tau \in \{0, \pi\}$  gilt  $u(\tau) = (0, 0)$  und  $\dot{u}(\tau) = f(0, 0) = (0, 2)$ . Laut Aufgabenstellung wird hier  $f$  stetig differenzierbar vorausgesetzt. Wir können daher den Eindeutigkeitsatz O1B nutzen:

Bei gleichen Startwerten muss der weitere Verlauf identisch sein; im vorliegenden Fall bedeutet das  $u(t) = u(\pi + t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Die vorgelegte Funktion  $u$  ist aber nicht  $\pi$ -periodisch!

⚠ Ist  $f$  nur stetig (und nicht zudem stetig differenzierbar), dann ist eine solche exotische Lösung durchaus möglich.

(5) Ja. Teil (4) zeigt ein Gegenbeispiel, allgemein gilt folgendes:

Sei  $u: \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine maximale Lösung mit  $0, \tau \in I$  und  $\tau > 0$ . Wir verschieben  $u$ : Hierzu sei  $J = I - \tau$  und  $v: J \rightarrow \mathbb{R}^n: t \mapsto u(t + \tau)$ . Die beiden Funktionen  $u$  und  $v$  sind Lösungen des autonomen Systems  $\dot{x} = f(x)$  mit  $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  zum selben Startpunkt  $u(0) = v(0)$ . Dank Eindeutigkeitsatz O1B sind sie gleich, also  $u(t) = v(t) = u(t + \tau)$ . Insbesondere lässt sich  $u$  periodisch fortsetzen, also gilt  $I = \mathbb{R}$ .

Beispielfamilie zu Existenz und Eindeutigkeit

O233  
Übung

**Aufgabe:** Sei  $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ . Finden Sie alle maximalen Lösungen

- (1)  $y: I \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  mit  $y'(t) = y(t)^\alpha$ ,
- (2)  $y: I \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit  $y'(t) = y(t)^\alpha$ ,
- (3)  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $y'(t) = |y(t)|^\alpha$ .

- (a) Ist die rechte Seite (stetig) differenzierbar? Ist sie (lokal) Lipschitz?
- (b) Zu welchen Anfangswerten  $y(t_0) = y_0$  ist die Lösung eindeutig?
- (c) Quantitative Lösung: Berechnen Sie alle maximalen Lösungen.
- (d) Diskutieren und zeichnen Sie insbesondere die Fälle  $\alpha = 1/2, 1, 2$ .

Der Fall  $\alpha = 0$  ist trivial. Bei  $\alpha < 0$  hätten wir eine Polstelle in  $y = 0$ . Zur Vereinfachung nehmen wir im Folgenden kurzerhand  $\alpha > 0$  an. Wir lassen auch gebrochene Exponenten zu, zum Beispiel  $y^{1/2} = \sqrt{y}$ . Bei (3) müssen wir den Absolutbetrag nehmen, denn  $\sqrt{-1}$  ist nicht reell. Wir setzen  $|y|^\alpha := \exp(\alpha \ln|y|)$  für  $y \neq 0$  dabei stetig fort durch  $0^\alpha := 0$ . Aus Kapitel M kennen wir bereits die illustrativen Beispiele  $y' = y$  **M111** und  $y' = y^2$  **M113** sowie  $y' = -2\sqrt{|y|}$  **M123** und  $y' = \sqrt[3]{y^2}$  **M325**.

Beispielfamilie zu Existenz und Eindeutigkeit

O235  
Übung

- (2a) Für  $\alpha \geq 1$  ist  $f(t, y) = y^\alpha$  stetig differenzierbar mit  $\partial f / \partial y = \alpha y^{\alpha-1}$ . Demnach erfüllt  $f$  in diesem Falle lokal eine Lipschitz-Bedingung.
- (2b) Für  $\alpha \geq 1$  können wir den  $\exists\&E$ -Satz anwenden dank (2a): Zum Anfangswert  $y(t_0) = y_0 \geq 0$  ist die Lösung  $y: I \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  eindeutig.
- (2c) Für  $y \geq 0$  ist zudem die konstante Funktion  $y(t) = 0$  eine Lösung. Für  $\alpha \geq 1$  sind Null und die Funktionen aus (1c) die einzigen Lösungen. Für  $0 < \alpha < 1$  lässt sich jede Lösung aus (1c) maximal fortsetzen zu

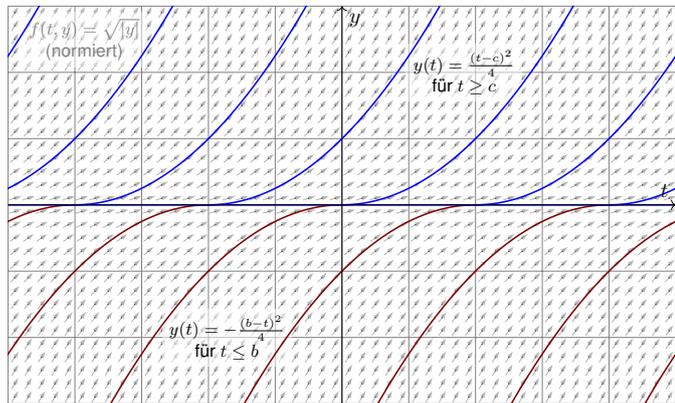
$$y_c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, y_c(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq c, \\ [(1-\alpha)(t-c)]^{\frac{1}{1-\alpha}} & \text{für } t \geq c. \end{cases}$$

Durch jeden Startpunkt  $(t_0, y_0)$  mit  $y_0 > 0$  läuft genau eine Lösung. Durch jeden Punkt  $(t_0, 0)$  hingegen laufen unendlich viele Lösungen!  
 ⚠ Jedes AWP  $y(t_0) = y_0 > 0$  ist gut gestellt, aber  $y(t_0) = 0$  schlecht.  
 ⚠ Den  $\exists\&E$ -Satz können wir für  $0 < \alpha < 1$  nicht anwenden: Die rechte Seite  $f(t, y) = y^\alpha$  ist differenzierbar mit  $\partial f / \partial y = \alpha y^{\alpha-1}$ , doch die Ableitung hat in  $y = 0$  eine Polstelle:  $f$  ist nicht Lipschitz!

Beispielfamilie zu Existenz und Eindeutigkeit

O237  
Übung

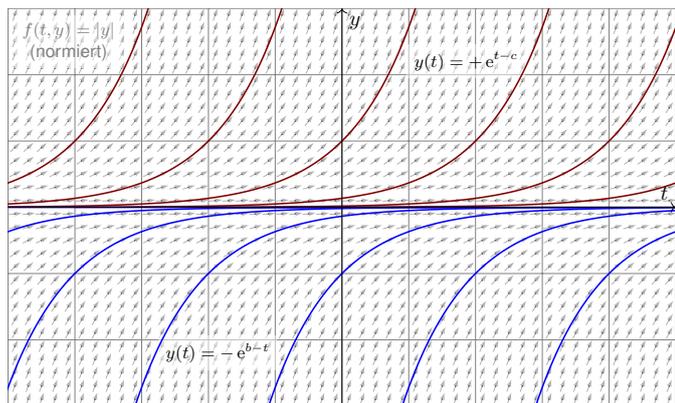
- ⚠ Auf  $y'(t) = \sqrt{|y(t)|}$  können wir den  $\exists\&E$ -Satz nicht anwenden.
- ⚠ Durch jeden Startpunkt  $(t_0, y_0)$  verlaufen unendlich viele Lösungen!



Beispielfamilie zu Existenz und Eindeutigkeit

O239  
Übung

- 😊 Auch auf  $y'(t) = |y(t)|$  können wir den  $\exists\&E$ -Satz anwenden: Zwar ist  $f(t, y) = |y|$  nicht differenzierbar, aber Lipschitz mit  $L = 1$ .



Beispielfamilie zu Existenz und Eindeutigkeit

O234  
Übung

- Lösung:** (1a) Die rechte Seite  $f(t, y) = y^\alpha$  ist stetig differenzierbar mit  $\partial f / \partial y = \alpha y^{\alpha-1}$ ; sie erfüllt demnach lokal eine Lipschitz-Bedingung.
- (1b) Wir können den  $\exists\&E$ -Satz M1c anwenden, sogar Separation M1a. Zum Anfangswert  $y(t_0) = y_0 > 0$  ist die Lösung  $y: I \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  eindeutig. Zwei verschiedene (maximale) Lösungen können sich nicht schneiden.
- (1c) Wir lösen diese Gleichung durch Separation:  $y^{-\alpha}(t) y'(t) = 1$ .

$$\alpha = 1: \ln y(t) = t - c \Rightarrow y(t) = e^{t-c} = C e^t, C > 0, t \in \mathbb{R}$$

$$\alpha > 1: \frac{y(t)^{1-\alpha}}{1-\alpha} = t - c \Rightarrow y(t) = [(\alpha-1)(c-t)]^{\frac{1}{1-\alpha}}, t < c$$

$$\alpha < 1: \frac{y(t)^{1-\alpha}}{1-\alpha} = t - c \Rightarrow y(t) = [(1-\alpha)(t-c)]^{\frac{1}{1-\alpha}}, t > c$$

- ⚠ Nur für  $\alpha = 1$  existiert die Lösung  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  für alle Zeit  $t \in \mathbb{R}$ . Für  $\alpha > 1$  läuft jede Lösung in eine Polstelle: Für  $t \nearrow c$  gilt  $y(t) \nearrow \infty$ . Für  $0 < \alpha < 1$  läuft jede Lösung  $y$  gegen Null: Für  $t \searrow c$  gilt  $y(t) \searrow 0$ . Für  $\alpha \neq 1$  ist deshalb das Lösungsintervall rechts / links beschränkt.
- 😊 Dank (1b) sind dies die einzigen Lösungen; das vereinfacht enorm.

Beispielfamilie zu Existenz und Eindeutigkeit

O236  
Übung

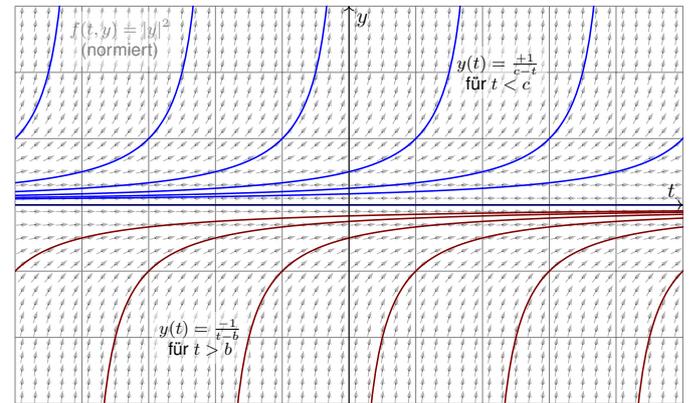
- (3c) Wir finden weitere Lösungen  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $y'(t) = |y(t)|^\alpha$ :
  - $\alpha = 1: y_0(t) = 0, t \in \mathbb{R}$
  - $y_c^-(t) = -e^{t-c}, t \in \mathbb{R}$
  - $y_c^+(t) = +e^{t-c}, t \in \mathbb{R}$
  - $\alpha > 1: y_c^-(t) = -[(\alpha-1)(t-c)]^{\frac{1}{1-\alpha}}, t > c$
  - $y_c^+(t) = +[(\alpha-1)(c-t)]^{\frac{1}{1-\alpha}}, t < c$
  - $\alpha < 1: y_{b,c}(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } b \leq t \leq c, \\ -[(1-\alpha)(b-t)]^{\frac{1}{1-\alpha}} & \text{für } t \leq b, \\ +[(1-\alpha)(t-c)]^{\frac{1}{1-\alpha}} & \text{für } t \geq c. \end{cases}$

- (3b) Für  $\alpha \geq 1$  bleiben die drei Lösungsarme  $> 0, = 0, < 0$  getrennt. Eindeutigkeit: Durch jeden Startpunkt  $(t_0, y_0)$  läuft genau eine Lösung. Für  $0 < \alpha < 1$  fügen sich die Lösungsarme differenzierbar zusammen. (Hierbei lassen wir auch die Sonderfälle  $b = -\infty$  und  $c = +\infty$  zu.) Durch jeden Startpunkt  $(t_0, y_0)$  laufen unendlich viele Lösungen!
- (3a) Für  $0 < \alpha < 1$  ist  $f(t, y) = |y|^\alpha$  um  $y = 0$  nicht Lipschitz!

Beispielfamilie zu Existenz und Eindeutigkeit

O238  
Übung

- 😊 Auf  $y'(t) = |y(t)|^2$  hingegen können wir den  $\exists\&E$ -Satz anwenden: Die rechte Seite  $f(t, y) = |y|^2$  ist differenzierbar, also lokal Lipschitz.



Beispielfamilie zu Existenz und Eindeutigkeit

O239  
Übung

- 😊 Der Existenz-und-Eindeutigkeits-Satz von Cauchy O1B oder genauer Picard-Lindelöf O2A ist ein grundlegendes und mächtiges Werkzeug.
- 😊 Die Lipschitz-Bedingung prüfen wir am bequemsten durch ableiten: Ist  $f(t, y)$  stetig diff'bar nach  $y$ , so genügt  $f$  lokal auf  $[a, b] \times \bar{B}(y_0, r)$  der Lipschitz-Bedingung  $|f(t, u) - f(t, v)| \leq L|u - v|$  mit  $L = \max|\partial f / \partial y|$ . Dies gilt für  $f(t, y) = |y|^\alpha$  mit  $\alpha > 1$ : Hier greift der Eindeutigkeitsatz!
- Für  $0 < \alpha < 1$  hingegen ist  $|y|^\alpha$  in  $y = 0$  nicht diff'bar und nicht Lipschitz. Wir können den Eindeutigkeitsatz hier also nicht anwenden. Tatsächlich finden wir durch jeden Startpunkt  $(t_0, y_0)$  unendlich viele Lösungen!
- Im kritischen Fall  $\alpha = 1$  haben wir die Differentialgleichung  $y' = |y|$ . Die rechte Seite  $f(t, y) = |y|$  ist in  $y = 0$  nicht differenzierbar. (Skizze!) Dennoch erfüllt sie eine Lipschitz-Bedingung, sogar global mit  $L = 1$ , denn es gilt  $||u| - |v|| \leq |u - v|$  für alle  $u, v \in \mathbb{R}$ . (Dreiecksungleichung)
- 😊 Beispiele wie dieses zeigen, dass die Lipschitz-Bedingung in  $y$  etwas allgemeiner ist als die (sehr bequeme) Differenzierbarkeit in  $y$ .

**Aufgabe:** (1a) Skizzieren Sie das Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

(1b) Finden Sie (durch Anschauung und Probe) eine Lösung  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  des Systems  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  zum Startwert  $x(0) = (r_0 \cos t_0, r_0 \sin t_0)$ .

(1c) Gibt es weitere Lösungen oder haben Sie damit alle gefunden?

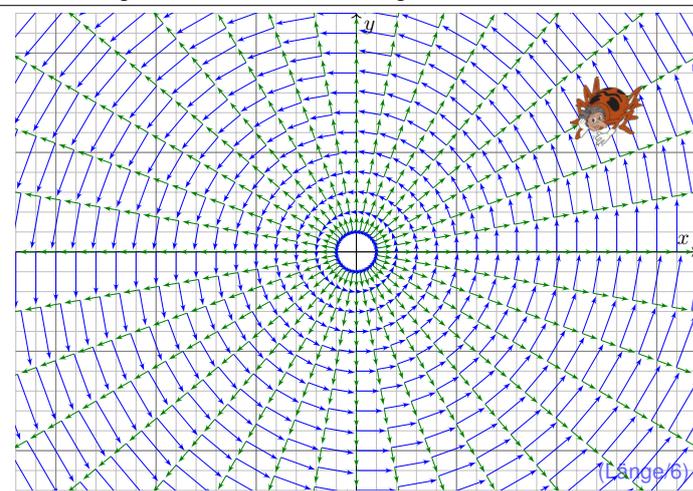
(2a) Skizzieren Sie das Vektorfeld

$$g : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

(2b) Finden Sie (durch Anschauung und Probe) eine Lösung  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  des Systems  $\dot{x}(t) = g(x(t))$  zum Startwert  $x(0) = (r_0 \cos t_0, r_0 \sin t_0)$ .

(2c) Gibt es weitere Lösungen oder haben Sie damit alle gefunden?

😊 In günstigen Fällen finden wir leicht explizite Lösungen. Für  $f \in C^1$  garantiert der Eindeutigkeitsatz, dass wir keine Lösungen übersehen.



**Aufgabe:** (3a) Skizzieren Sie soweit möglich das gestörte Vektorfeld

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 : x \mapsto f(x) + \sqrt[3]{|x| - 2} \cdot g(x)$$

(3b) Nennen Sie eine periodische Lösung von  $\dot{x}(t) = \tilde{f}(x(t))$ .

(3c) Finden Sie eine Lösung mit  $x(0) = (1, 0)$  und  $x(4\pi) = (3, 0)$ .

Hinweis: Nutzen Sie den Ansatz  $x(t) = (r(t) + 2) \cdot (\cos t, \sin t)$

Ist die Lösung eindeutig? Lässt sie sich für alle Zeit  $t \in \mathbb{R}$  fortsetzen?

Bleibt sie für immer beschränkt oder entkommt sie nach Unendlich?

**Lösung:** (3a) Diese Linearkombination ist graphisch sehr anschaulich!

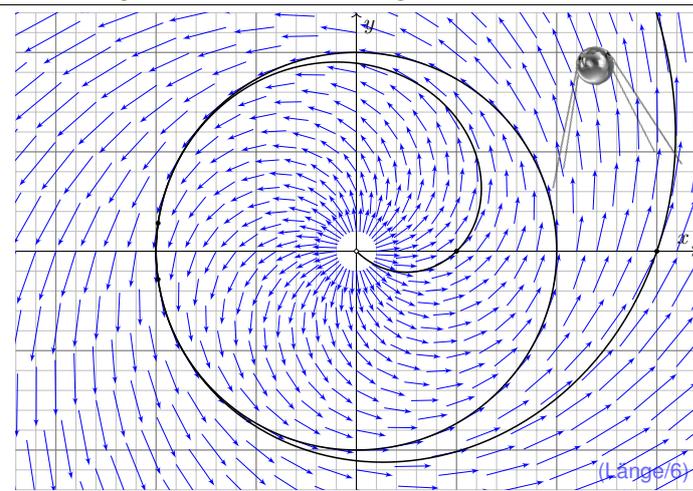
(3b) Die Skizze suggeriert  $x(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$ . Die Probe zeigt's!

(3c) Wir finden die Lösung  $r(t) = \frac{(t-3)^3}{3}$  für  $3 - 3\sqrt[3]{2} < t \leq 3$ ,

$r(t) = 0$  für  $3 \leq t \leq 4\pi - 3$  und  $r(t) = \frac{(t-4\pi+3)^3}{3}$  für  $t \geq 4\pi - 3$ ,

also  $r(t) \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow \infty$ . Machen Sie die Probe!

⚠ Differentialgleichungen können auch unerwartete Lösungen haben, etwa so wie hier „exotische“ Lösungen neben den „offensichtlichen“. Diese Gefahrenquelle müssen Sie kennen und beherrschen, besser: soweit möglich ausschließen. Genau hierzu hilft Ihnen der  $\exists\&E$ -Satz!



**Aufgabe:** (4a) Skizzieren Sie soweit möglich das gestörte Vektorfeld

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \tilde{f}(x) = f(x) + (|x|^2 - 4)h(x_1, x_2) \quad \text{mit } h \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$$

(4b) Nennen Sie eine periodische Lösung von  $\dot{x}(t) = \tilde{f}(x(t))$ .

(4c) Existiert eine Lösung  $u$  zum Startwert  $u(0) = (1, 0)$ ?

Ist sie eindeutig? Lässt sie sich für alle Zeit  $t \in \mathbb{R}$  fortsetzen?

Bleibt sie beschränkt oder kann sie nach Unendlich entkommen?

😊 Der Existenz- und Eindeutigkeitsatz hilft Ihnen auch / gerade dann, wenn Sie (noch) keine explizite Lösung ausrechnen können oder wollen.

😊 Sie können dann immerhin noch qualitative Vorhersagen machen, hier etwa eine Stabilitätsgarantie. Solche Überlegungen sind ein erster wichtiger Schritt vor der numerischen Näherung, oder dienen danach als Probe / Plausibilitätscheck für die berechneten Näherungslösungen.

😊 Die theoretischen Grundlagen leiten die konkreten Rechnungen und sichern praktische Anwendungen. Ihr mathematisches Handwerkszeug hilft Ihnen, lernen Sie möglichst früh, es zu beherrschen und zu nutzen!

**Lösung:** (4a) Solche Vektorfelder ähneln sehr der vorigen Skizze, doch schmiegen sie sich wesentlich glatter an den Kreis  $\partial B(0, 2)$ . Spezialfall: Ist das Vektorfeld  $h$  rotationssymmetrisch, so auch  $\tilde{f}$ .

(4b) Zum Vektorfeld  $f$  ist  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (2 \cos t, 2 \sin t)$  eine Lösung. Sie bleibt für die Störung  $\tilde{f}$  erhalten, da sich auf  $\partial B(0, 2)$  nichts ändert.

(4c) Ja: Unser Vektorfeld  $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist stetig differenzierbar.

Dank  $\exists\&E$ -Satz existiert zu jedem Startwert  $u(0) \in \mathbb{R}^2$  eine eindeutige maximale Lösung  $u : \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Bei Start in der Kreisscheibe  $B(0, 2)$ , also  $|u(0)| < 2$ , kann die Lösung  $u$  die Kreisscheibe nicht verlassen: Hierzu müsste sie die obige Lösung  $x$  kreuzen, und das ist nach dem Eindeutigkeitsatz nicht möglich!

Insbesondere kann die Lösung  $u$  nicht nach Unendlich entkommen.

(In der vorigen Aufgabe geschah überraschenderweise genau dies!)

Die Lösung  $u$  lässt sich daher für alle Zeit  $t \in \mathbb{R}$  fortsetzen; die maximale Lösung ist von der Form  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

**Aufgabe:** (5a) Skizzieren Sie das Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (-x_2, x_1, 0).$$

(5b) Finden Sie (durch Anschauung und Probe) eine Lösung  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  des Systems  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  zum Startwert  $x(0) = (r_0 \cos t_0, r_0 \sin t_0, z_0)$ .

(5c) Gibt es weitere Lösungen oder haben Sie damit alle gefunden?

(6) Wir untersuchen zu  $h \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  das gestörte Vektorfeld

$$\tilde{f}(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3) + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4)h(x_1, x_2, x_3).$$

(6a) Nennen Sie periodische Lösungen von  $\dot{x}(t) = \tilde{f}(x(t))$ .

(6b) Existiert eine Lösung  $u : \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $u(0) = (1, 0, 0)$ ?

Ist sie eindeutig? Lässt sie sich für alle Zeit  $t \in \mathbb{R}$  fortsetzen?

Bleibt sie beschränkt oder entkommt sie nach Unendlich?

😊 Diese Beispiele entsprechen den vorigen – in Farbe und 3D.

**Lösung:** (5a) Das Vektorfeld  $f$  ist in jeder  $x_1$ - $x_2$ -Ebene wie zuvor.

(5b) Eine Lösung ist  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto (r_0 \cos(t - t_0), r_0 \sin(t - t_0), z_0)$ . Probe: Sie erfüllt  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  und  $x(0) = (r_0 \cos t_0, r_0 \sin t_0, z_0)$ .

(5c) Dank  $\exists\&E$ -Satz ist diese Lösung eindeutig: Wir haben sie alle!

(6a) Das Vektorfeld bleibt unverändert auf der Kugel vom Radius 2: Für  $r_0^2 + z_0^2 = 4$  erhalten wir erneut genau die Lösungen aus (5b).

(6b) Ja: Unser Vektorfeld  $\tilde{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist stetig differenzierbar.

Dank  $\exists\&E$ -Satz existiert zu jedem Startwert  $u(0) \in \mathbb{R}^3$  eine eindeutige maximale Lösung  $u : \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Bei Start in der Kugel  $\bar{B}(0, 2)$ , also  $r_0^2 + z_0^2 \leq 4$ , kann die Lösung  $u$  die Kugel nicht verlassen: Hierzu müsste sie eine der obigen Lösungen  $x$  kreuzen, und das ist nach dem Eindeutigkeitsatz nicht möglich!

Insbesondere kann die Lösung  $u$  nicht nach Unendlich entkommen.

Die Lösung  $u$  lässt sich daher für alle Zeit  $t \in \mathbb{R}$  fortsetzen; die maximale Lösung ist von der Form  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Jedes **lineare Differentialgleichungssystem** hat die Form

$$\begin{cases} y_1'(t) = a_{11}(t)y_1(t) + \dots + a_{1n}(t)y_n(t) + b_1(t), \\ \vdots \\ y_n'(t) = a_{n1}(t)y_1(t) + \dots + a_{nn}(t)y_n(t) + b_n(t). \end{cases}$$

Wir bündeln dies prägnant zu einer vektorwertigen Gleichung:

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t)$$

Gegeben sind hierzu stetige Funktionen  $A: I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  und  $b: I \rightarrow \mathbb{K}^n$ , dabei ist  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein reelles Intervall und  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder allgemeiner  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Hier heißt  $A$  **Koeffizientenmatrix** und  $b$  **rechte Seite** oder **Störterm**.

Gesucht sind alle Funktionen  $y: I \rightarrow \mathbb{K}^n$ , die  $y' = Ay + b$  erfüllen.

Die zugehörige **homogene Gleichung** erhalten wir für  $b = 0$ :

$$y'(t) = A(t)y(t)$$

☺ Sie lernen nun, lineare DGSysteme explizit und effizient zu lösen!

**Beispiel:** Unser einführendes Beispiel ist das homogene DGSystem

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2+k_3}{m_2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

Hier ist die Koeffizientenmatrix  $A$  konstant und der Störterm  $b = 0$ .

**Lemma O3A:** Linearkombination von Lösungen

Seien  $y_1, y_2: I \rightarrow \mathbb{K}^n$  Lösungen zu  $y_1' = Ay_1 + b_1$  und  $y_2' = Ay_2 + b_2$ . Ihre **Linearkombination**  $y = c_1y_1 + c_2y_2$  mit  $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$  ist dann eine Lösung der Gleichung  $y' = Ay + b$  mit rechter Seite  $b = c_1b_1 + c_2b_2$ .

(1) Im homogenen Fall ist  $L_0 = \{y \mid y' = Ay\}$  ein **Vektorraum** über  $\mathbb{K}$ : Jede Linearkombination von Lösungen ist selbst wieder eine Lösung.

(2) Im inhomogenen Fall ist  $L_b = \{y \mid y' = Ay + b\}$  ein **affiner Raum**: Für jede beliebige („partikuläre“) Lösung  $y_b \in L_b$  gilt  $L_b = y_b + L_0$ .

📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §4.6.

☺ Wie jeder Vektorraum enthält  $L_0$  den Nullpunkt, der affine Raum  $L_b$  hingegen ist um  $y_b$  verschoben. Diesen allgemeinen Sachverhalt kennen Sie aus der linearen Algebra von linearen Gleichungssystemen in  $\mathbb{K}^n$ !

**Nachrechnen:** (1) Die Menge  $L_0$  ist ein Untervektorraum von  $C^1(I, \mathbb{K}^n)$ : Es gilt  $0 \in L_0$  und aus  $y_1, y_2 \in L_0, c_1, c_2 \in \mathbb{K}$  folgt  $c_1y_1 + c_2y_2 \in L_0$ .

(2) Die Menge  $L_b$  ist ein affiner Unterraum: Lösen  $y, y_b \in C^1(I, \mathbb{K}^n)$  das inhomogene DGSystem, dann löst  $y_h = y - y_b$  das homogene. Das bedeutet  $y = y_b + y_h$  mit  $y_h \in L_0$ , kurz  $L_b \subseteq y_b + L_0$ . Umgekehrt: Für jede homogene Lösung  $y_h \in L_0$  gilt  $y_b + y_h \in L_b$ , kurz  $L_b \supseteq y_b + L_0$ .

⚠ Für  $y' = Ay$  haben wir immer die triviale Lösung  $0$ . Denkbar wäre aber, dass dies die einzige Lösung ist, also  $L_0 = \{0\}$ . Für  $y' = Ay + b$  wäre sogar zu befürchten, dass es gar keine Lösung gibt, also  $L_b = \emptyset$ .

☺ Hier rettet uns der  $\exists\&E$ -Satz O1B mit der globalen Schranke O2D, oder konkret ausgeführt die Konstruktion O3I und die Methode O3D. Die Dimension ist immer  $n$ : Bei jeder konkreten Rechnung wissen wir, wie viele Lösungen wir suchen, und wann wir alle gefunden haben!

**Satz O3B:** Struktursatz für lineare Differentialgleichungssysteme

Wie zuvor sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $A: I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  und  $b: I \rightarrow \mathbb{K}^n$  stetig. Wir betrachten die Lösungsmenge  $L_b = \{y \in C^1(I, \mathbb{K}^n) \mid y' = Ay + b\}$ .

(0) **Globale Existenz und Eindeutigkeit:** Zu jedem Zeitpunkt  $t_0 \in I$  und Anfangsdatum  $y_0 \in \mathbb{K}^n$  existiert genau eine Lösung  $y \in L_b$  mit  $y(t_0) = y_0$ . Die Auswertung  $\Psi: L_b \rightarrow \mathbb{K}^n: y \mapsto y(t_0)$  ist also bijektiv.

(1)  $L_0 = \{y \mid y' = Ay\}$  ist ein **Vektorraum** der Dimension  $n$  über  $\mathbb{K}$ . Wir finden ein **Fundamentalsystem**  $y_1, \dots, y_n \in L_0$ , also eine Basis von  $L_0$  bestehend aus  $n$  linear unabhängigen Lösungen, und erhalten:

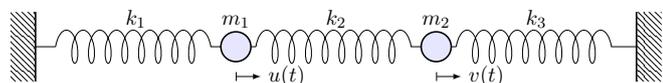
$$L_0 = \{c_1y_1 + \dots + c_ny_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}\} \cong \mathbb{K}^n$$

(2)  $L_b = \{y \mid y' = Ay + b\}$  ist ein **affiner Raum** der Dimension  $n$ . Für jede **Partikulärlösung**  $y_b \in L_b$  gilt  $L_b = y_b + L_0$ , ausgeschrieben:

$$L_b = y_b + L_0 = \{y_b + c_1y_1 + \dots + c_ny_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}\}$$

„Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen“

**Aufgabe:** Formulieren und lösen Sie folgendes dynamische System:



- (1) Formulieren Sie das Differentialgleichungssystem erster Ordnung.
- (2) Welche Struktur hat der Lösungsraum? („Form“ und „Größe“)
- (3) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem reeller Lösungen.
- (4) Wie erhalten Sie hieraus eine allgemeine Lösung  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ?
- (5) Wie lösen Sie das Anfangswertproblem  $y(t_0) = y_0$  für  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ ?

**Lösung:** (1) Für die Variablen  $y_1 = u, y_2 = v, y_3 = u', y_4 = v'$  ist die Bewegungsgleichung ein **DGSystem erster Ordnung**: O109

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{m} & \frac{k_2}{m} & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m} & -\frac{k_2+k_3}{m} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \quad \text{kurz } y' = Ay$$

(2) Die Menge aller Lösungen  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$  ist ein  **$\mathbb{R}$ -Vektorraum**. Dank des  $\exists\&E$ -Satzes hat dieser Vektorraum die **Dimension 4**.

(3) Durch Entkopplung finden wir Lösungen  $y_1, y_2, y_3, y_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ . Diese bündeln wir übersichtlich zur **Fundamentalmatrix**

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t) & \sin(\omega_1 t) & +\cos(\omega_2 t) & +\sin(\omega_2 t) \\ \cos(\omega_1 t) & \sin(\omega_1 t) & -\cos(\omega_2 t) & -\sin(\omega_2 t) \\ -\omega_1 \sin(\omega_1 t) & \omega_1 \cos(\omega_1 t) & -\omega_2 \sin(\omega_2 t) & +\omega_2 \cos(\omega_2 t) \\ -\omega_1 \sin(\omega_1 t) & \omega_1 \cos(\omega_1 t) & +\omega_2 \sin(\omega_2 t) & -\omega_2 \cos(\omega_2 t) \end{pmatrix}$$

Die Frequenzen sind hierbei  $\omega_1^2 = k_1/m$  und  $\omega_2^2 = (k_1 + 2k_2)/m$ . **Lineare Unabhängigkeit** testen wir in einem beliebigen Punkt:

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \omega_1 & 0 & \omega_2 \\ 0 & \omega_1 & 0 & -\omega_2 \end{pmatrix}, \quad \det Y(0) = -4\omega_1\omega_2 \neq 0$$

☺ Unsere vier Lösungen  $y_1, y_2, y_3, y_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$  sind linear unabhängig. Da der Lösungsraum die Dimension 4 hat, haben wir also eine **Basis**! Man nennt dies auch ein **Fundamentalsystem** des homogenen DGS. Wie aus der linearen Algebra bekannt bedeutet Basis folgendes:

(4) Jede Lösung  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$  unserer homogenen Gleichung  $y' = Ay$  ist eine **Linearkombination**  $y(t) = c_1y_1(t) + \dots + c_4y_4(t)$  mit  $c \in \mathbb{R}^4$ , zusammengefasst  $y(t) = Y(t)c$  mit obiger Fundamentalmatrix  $Y(t)$ .

(5) Ist ein **Anfangswert**  $y(t_0) = y_0$  vorgegeben durch  $y_0 \in \mathbb{R}^4$ , so gilt

$$Y(t_0)c = y_0 \implies c = Y(t_0)^{-1}y_0$$

☺ Die Matrix  $Y(t)$  ist invertierbar zu jedem Zeitpunkt  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Das AWP  $y(t_0) = y_0$  wird demnach gelöst durch  $y(t) = Y(t)Y(t_0)^{-1}y_0$ .

Theoretisch ist damit alles klar. In unserem Beispiel fanden wir das Fundamentalsystem durch die Methode des scharfen Hinsehens. Wir werden hierzu im Folgenden allgemeine Methoden erklären und im nächsten Kapitel zu einer effizienten Konstruktion ausbauen.

Lösungen  $y_1, \dots, y_n: I \rightarrow \mathbb{K}^n$  bündeln wir zur **Fundamentalmatrix**:

$$Y: I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}, \quad Y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t)) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) & y_{21}(t) & \dots & y_{n1}(t) \\ y_{12}(t) & y_{22}(t) & \dots & y_{n2}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1n}(t) & y_{2n}(t) & \dots & y_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

Man nennt  $Y(t)$  auch die **Wronski-Matrix** der Funktionen  $y_1, \dots, y_n$  und  $\det Y(t)$  ihre **Wronski-Determinante**. Diese sind oft nützlich:

**Korollar O3c:** Unabhängigkeitskriterium dank O3B/O3M

Die folgenden vier Aussagen sind untereinander äquivalent:

- (a) Die Funktionen  $y_1, \dots, y_n: I \rightarrow \mathbb{K}^n$  sind linear unabhängig über  $\mathbb{K}$ .
- (b) Die Vektoren  $y_1(t), \dots, y_n(t)$  sind linear unabhängig für jedes  $t \in I$ .
- (c) Die Vektoren  $y_1(t), \dots, y_n(t)$  sind linear unabhängig für ein  $t \in I$ .
- (d) Die Determinante erfüllt  $\det Y(t) \neq 0$  für ein und damit alle  $t \in I$ .

☺ Dieses Kriterium ist einfach und übersichtlich. In kleiner Dimension kann man die Determinante tatsächlich noch bequem ausrechnen.

**Anwendungsbeispiel zur Entkopplung** 0309

**Aufgabe:** Lösen Sie das homogene Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_1(t) + y_2(t), & y_1(0) = 2, \\ y_2'(t) = y_1(t) - y_2(t), & y_2(0) = 0. \end{cases}$$

(0) Welche Struktur hat der allgemeine Lösungsraum? (Form & Größe)  
 (1) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem reeller Lösungen.  
 (2) Formulieren Sie die allgemeine Lösung  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ .  
 (3) Lösen Sie speziell das Anfangswertproblem.

**Lösung:** (1) Wir nutzen weiterhin die Methode des scharfen Hinsehens: Der Ansatz  $y_1 = y_2$  entkoppelt zu  $y_1' = y_2' = 0$ . Wir erhalten eine Lösung

$$u(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Ansatz  $y_1 = -y_2$  entkoppelt zu  $y_1' = -2y_1$ . Wir erhalten eine Lösung

$$v(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

☺ Dieser Trick ist so gut, dass wir ihn im nächsten Kapitel P zu einer Methode ausbauen, indem wir systematisch Eigenvektoren nutzen. [P114](#)

**Anwendungsbeispiel zur Entkopplung** 0310

Sind beide Lösungen linear unabhängig? Wir betrachten die Matrix

$$Y(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) & v_1(t) \\ u_2(t) & v_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e^{-2t} \\ 1 & -e^{-2t} \end{pmatrix}, \quad \det Y(t) = -2e^{-2t} \neq 0.$$

(2) Damit haben wir eine **Fundamentalmatrix** gefunden. Diese erfüllt

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -2e^{-2t} \\ 0 & 2e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} Y(t) \quad \text{mit} \quad Y(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Jede Lösung  $y$  hat die Form  $y = c_1 u + c_2 v = Yc$ . (3) Anfangswert:

$$y(0) = Y(0)c \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow c = Y(0)^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die gesuchte **Lösung des Anfangswertproblems** ist demnach:

$$y(t) = u(t) + v(t) = \begin{pmatrix} 1 + e^{-2t} \\ 1 - e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Probe:  $y(0) = (2, 0)$ ,  $y_1' = -2e^{-2t} = -y_1 + y_2$ ,  $y_2' = 2e^{-2t} = y_1 - y_2$ .

**Lösung durch Variation der Konstanten** 0311

Zu lösen sei nun ein **inhomogenes Differentialgleichungssystem**

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t).$$

Einfacher ist das zugehörige homogene DGSystem  $y'(t) = A(t)y(t)$ . Hierzu sei eine Fundamentalmatrix  $Y: I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  bereits gefunden,

$$Y'(t) = A(t)Y(t) \quad \text{mit} \quad \det Y(t) \neq 0 \quad \text{für alle} \quad t \in I.$$

Das bedeutet, die Spalten  $y_1, \dots, y_n$  sind linear unabhängige Lösungen. Jede Lösung  $y: I \rightarrow \mathbb{K}^n$ ,  $y' = Ay$ , ist **eindeutige Linearkombination**

$$y(t) = c_1 y_1(t) + \dots + c_n y_n(t) = Y(t)c \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{K}^n.$$

Ansatz für eine Partikulärlösung durch **Variation der Konstanten**:

$$y_b(t) = c_1(t)y_1(t) + \dots + c_n(t)y_n(t) = Y(t)c(t) \quad \text{mit} \quad c: I \rightarrow \mathbb{K}^n.$$

Das ist zunächst nur ein Ansatz, aber einen Versuch ist es wert!  
 Das erfreuliche ist: Dieser Ansatz lohnt sich tatsächlich immer.

**Aufgabe:** Bestimmen Sie die Funktionen  $c_1, \dots, c_n$  möglichst explizit.

**Lösung durch Variation der Konstanten** 0312

**Lösung:** Ableiten von  $y_b(t) = Y(t)c(t)$  nach der Produktregel:

$$y_b' = [Yc]' = Y'c + Yc' = AYc + Yc'$$

Einsetzen in unser DGSystem  $y' = Ay + b$  ergibt die Gleichung

$$AYc + Yc' \stackrel{!}{=} AYc + b.$$

Wir erhalten  $Yc' = b$ , umgeformt  $c' = Y^{-1}b$ , und integriert:

$$c(t) = \int_{\tau=t_0}^t Y(\tau)^{-1}b(\tau) d\tau + c(t_0)$$

☺ Die **Partikulärlösung**  $y_b = Yc$  löst unsere Gleichung  $y' = Ay + b$ . Den eindimensionalen Fall haben wir ab Seite M433 ausgeführt. Alternativ gelingt die Rechnung mit einem integrierendem Faktor, siehe Seite M221; exakte Differentialgleichungen stehen in höherer Dimension nicht mehr zur Verfügung. Für höhere Ableitungen siehe Seite N311.

Die „Variation der Konstanten“ klingt widersinnig, beschreibt aber treffend unser Vorgehen: Wir betrachten die Koeffizienten  $c_1, \dots, c_n$  nicht als Konstanten, sondern als Funktionen von  $t$ . Wir rechnen es aus, und das Ergebnis ist bemerkenswert: Dieser Kunstgriff gelingt immer!

☺ Damit lösen Sie jede inhomogene Gleichung, die allgemeine Lösungsformel gilt immer. Sie sollten diesen Lösungsweg in mehreren Übungsbeispielen schrittweise nachvollziehen: Bei der Lösung von  $Yc' = b$  und anschließender Integration sind evtl. Abkürzungen möglich.

**Partikulärlösung inhomogener DGSysteme** 0313

**Satz O3D: Variation der Konstanten**  
 Seien  $A: I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  und  $b: I \rightarrow \mathbb{K}^n$  stetig,  $Y = (y_1, \dots, y_n): I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  eine Fundamentalmatrix der homogenen Gleichung  $Y'(t) = A(t)Y(t)$ .  
 Zu lösen sei das inhomogene Differentialgleichungssystem

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t) \quad \text{mit} \quad y(t_0) = y_0.$$

Zu jedem Anfangswert  $y_0 \in \mathbb{K}^n$  existiert genau eine Lösung, nämlich

$$y(t) = Y(t) \int_{\tau=t_0}^t Y(\tau)^{-1}b(\tau) d\tau + Y(t)Y(t_0)^{-1}y_0.$$

**Beweis:** Kennt man erst einmal diese Formel, so genügt ableiten!  
 In der Praxis nutzt man direkt den Ansatz zur Variation der Konstanten. Die allgemeine Lösung ist  $y = y_b + c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$  mit  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ .  
 ☺ Explizite Formel ☺ Eindeutigkeit ☺ Stetig abhängig von  $(t_0, y_0)$   
 ☺ Für  $A = 0$  ist's der HDI. ☺ Für  $b = 0$  entfällt der inhomogene Term.

**Anwendungsbeispiel zur Variation der Konstanten** 0314

**Aufgabe:** Lösen Sie das inhomogene Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_1(t) + y_2(t) + t, & y_1(0) = 2, \\ y_2'(t) = y_1(t) - y_2(t) + t, & y_2(0) = 0. \end{cases}$$

**Lösung:** (0) In Matrixschreibweise gilt  $y'(t) = A y(t) + b(t)$  mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}.$$

Eine **Fundamentalmatrix** des homogenen Systems kennen wir [0309](#):

$$Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^{-2t} \\ 1 & -e^{-2t} \end{pmatrix}, \quad \det Y(t) = -2e^{-2t} \neq 0$$

Zur Inversion (kleiner) Matrizen ist die Cramersche Regel nützlich:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Wir erhalten:

$$Y(t)^{-1} = -\frac{e^{2t}}{2} \begin{pmatrix} -e^{-2t} & -e^{-2t} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{2t} & -e^{2t} \end{pmatrix}$$

**Anwendungsbeispiel zur Variation der Konstanten** 0315

(1) Wir berechnen die **Partikulärlösung**  $y_b(t) = Y(t)c(t)$  gemäß O3D:

$$c(t) = \int_{\tau=0}^t Y(\tau)^{-1}b(\tau) d\tau = \int_{\tau=0}^t \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{2\tau} & -e^{2\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ \tau \end{pmatrix} d\tau$$

$$= \int_{\tau=0}^t \begin{pmatrix} \tau \\ 0 \end{pmatrix} d\tau = \left[ \begin{pmatrix} \tau^2/2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{\tau=0}^t = \begin{pmatrix} t^2/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die ersehnte Partikulärlösung ist demnach:

$$y_b(t) = Y(t)c(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^{-2t} \\ 1 & -e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}$$

(2) Die **allgemeine Lösung** unserer inhomogenen DG ist gemäß O3B:

$$y(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$$

(3) Die Lösung unseres **Anfangswertproblems**  $y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  ist also:

$$y(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 + e^{-2t} \\ 1 - e^{-2t} \end{pmatrix}$$

**Verständnisfragen zum Struktursatz** 0316  
Erläuterung

**Aufgabe:** Wir betrachten folgende DGSysteme und Lösungsmengen. Welche DGSysteme sind linear? in/homogen? Welche Lösungsmengen sind affin/lineare Unterräume? Was ist gegebenenfalls die Dimension?

$A = \left\{ y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} y_1' = y_2 - y_1 \\ y_2' = y_1 - y_2 \end{array} \right\}$  Dieses DGSystem ist linear und zudem homogen. Wir können also direkt unseren Struktursatz O3a anwenden. Die Lösungsmenge  $\mathcal{L}$  ist ein Untervektorraum der Dimension 2. Explizite Rechnung auf Seite 0309.

$B = \left\{ y: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} y_1' = y_2 - y_1 + 1 \\ y_2' = y_1 - y_2 + 1 \end{array} \right\}$  Dieses DGSystem ist linear, nur jedoch inhomogen. Die Lösungsmenge  $\mathcal{L}$  ist ein affiner Unterraum der Dimension 2. Explizite Rechnung auf Seite 0314.

$C = \left\{ y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2'' = y_2 \end{array} \right\}$  Dieses DGSystem ist inhomogen linear. Wir können den Struktursatz O3a anwenden, dazu reduzieren wir zu  $y_2'' = y_2$  und  $y_1' = y_1 + y_2$ . Die Lösungsmenge  $\mathcal{L}$  ist ein Untervektorraum der Dimension 3.

$D = \left\{ y: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = y_2 \end{array} \right\}$  Dieses DGSystem ist nicht linear. Daher greift unser Struktursatz O3a hier nicht. Die Lösungsmenge  $\mathcal{L}$  ist ein Untervektorraum. M222 für  $y_1'$ . Die Menge  $\mathcal{L}$  ist kein Untervektorraum! Sie explizit ausrechnen, siehe M113 für  $y_2$  und  $y_1$ .

$E = \left\{ y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = y_2 \end{array} \right\}$  Wir finden  $y_2 = e^t$ , siehe M113, also  $y_1(t) = (t) = c \cdot e^t$ . Dieses DGSystem ist nicht linear. Daher greift unser Struktursatz O3a hier nicht. Die Lösungsmenge  $\mathcal{L}$  ist ein affiner Untervektorraum, der Dimension 2 ist.

⚠ Schauen Sie hin, denken Sie scharf nach, es gibt Überraschungen!

**Matrizenkalkül: Schreibweise** O317  
Erinnerung

Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper, wir denken dabei insbesondere an den Körper  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  der **reellen Zahlen** oder den Körper  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  der **komplexen Zahlen**. Eine **Matrix**  $A$  der Größe  $m \times n$  über  $\mathbb{K}$  ist eine Abbildung

$$A : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{K} : (i, j) \mapsto a(i, j) = a_{ij} = a_{ji}.$$

Die Menge aller  $m \times n$ -Matrizen bezeichnen wir deshalb mit  $\mathbb{K}^{m \times n}$ . Wir schreiben die Matrix  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  bequem als rechteckiges Schema

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mit  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten, kurz  $A = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$  oder  $A = (a_{ij})_{ij}$ . In dieser Schreibweise ist  $v \in \mathbb{K}^{m \times 1}$  ein **Spaltenvektor** mit  $m$  Zeilen. Entsprechend ist  $w \in \mathbb{K}^{1 \times n}$  ein **Zeilenvektor** mit  $n$  Spalten. Jede Matrix  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  können wir auffassen als Familie  $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$  von Zeilenvektoren  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{K}^{1 \times n}$ , ebenso als Familie  $A = (v_1, \dots, v_n)$  von Spaltenvektoren  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^{m \times 1}$ .

**Matrizenkalkül: Schreibweise** O318  
Erinnerung

Zu  $A = (a_{ij})_{ij}$  definieren wir die **transponierte Matrix**  $A^T = (a_{ij})_{ji}$ . Dies definiert die Bijektion  $\mathbb{K}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{K}^{n \times m} : A \mapsto A^T$  mit  $(A^T)^T = A$ . Genau dann gilt  $A^T = A$ , wenn die Matrix  $A$  **symmetrisch** ist, also quadratisch ist ( $m = n$ ) und  $a_{ij} = a_{ji}$  für alle  $i, j = 1, \dots, n$  erfüllt.

Ebenso definieren wir die **komplex-konjugierte Matrix**  $\bar{A} = (\overline{a_{ij}})_{ij}$ . Dies definiert die Bijektion  $\mathbb{K}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{K}^{m \times n} : A \mapsto \bar{A}$  mit  $\overline{\bar{A}} = A$ . Genau dann gilt  $\bar{A} = A$ , wenn  $A$  reell ist, also  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  für alle  $i, j$  gilt.

Die **Einheitsmatrix**  $E = 1_{n \times n}$  der Größe  $n \times n$  ist gegeben durch

$$1_{n \times n} = (e_{ij})_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Sie hat als Spalten die **Spalten-Einheitsvektoren**  $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{K}^{n \times 1}$ , und als Zeilen die **Zeilen-Einheitsvektoren**  $e_1^T, \dots, e_n^T \in \mathbb{K}^{1 \times n}$ .

**Matrizenkalkül: Rechenoperationen** O319  
Erinnerung

Matrizen passender Größe können wir addieren und multiplizieren:

$$+ : \mathbb{K}^{m \times n} \times \mathbb{K}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{K}^{m \times n} : (A, B) \mapsto C = A + B, \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

$$* : \mathbb{K}^{p \times q} \times \mathbb{K}^{q \times r} \rightarrow \mathbb{K}^{p \times r} : (A, B) \mapsto C = AB, \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^q a_{ij} b_{jk}.$$

Die **Addition** definiert eine abelsche Gruppe  $(\mathbb{K}^{m \times n}, +)$ . Die **Multiplikation**  $*$  ist assoziativ und distributiv über die Addition. Zu jeder Matrix  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  ist die Einheitsmatrix  $1_{m \times m}$  links-neutral, also  $1_{m \times m} * A = A$ , und  $1_{n \times n}$  ist rechts-neutral, also  $A * 1_{n \times n} = A$ . Konjugation erhält die Multiplikation, das heißt es gilt  $\overline{A * B} = \overline{A} * \overline{B}$ . Transposition hingegen kehrt die Reihenfolge um,  $(A * B)^T = B^T * A^T$ . Zudem haben wir die **Multiplikation mit Skalaren**:

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{K}^{m \times n} : (\lambda, A) \mapsto B = \lambda A, \quad b_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Für alle  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  gilt  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$  und  $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$  sowie  $1A = A$  und  $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$  und  $\lambda(AB) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$ . Matrizen gleicher Größe bilden demnach einen Vektorraum  $(\mathbb{K}^{m \times n}, +, \cdot)$ . Quadratische Matrizen bilden einen Ring  $(\mathbb{K}^{n \times n}, +, *)$  bzw.  $\mathbb{K}$ -Algebra.

**Matrizenkalkül: Gleichungssysteme** O320  
Erinnerung

Wir identifizieren den Vektorraum  $\mathbb{K}^n$  mit  $\mathbb{K}^{n \times 1}$  (Spaltenvektoren). Hierauf operieren Matrizen  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  durch Multiplikation von links:

$$* : \mathbb{K}^{m \times n} \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m : (A, v) \mapsto Av.$$

Das dient zur bequemen Darstellung linearer Gleichungssysteme

$$Ax = y.$$

Ein effizientes Lösungsverfahren bietet der **Gauß-Algorithmus**. Quadratische Matrizen (mit  $m = n$ ) bilden einen Ring  $(\mathbb{K}^{n \times n}, +, \cdot)$ . Eine Matrix  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  heißt **invertierbar**, wenn es eine Matrix  $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$  gibt, sodass  $AB = BA = E$ . In diesem Fall ist  $B$  eindeutig und wird die zu  $A$  **inverse Matrix** genannt, geschrieben  $B = A^{-1}$ . Das Gleichungssystem  $Ax = y$  wird dann gelöst durch  $x = A^{-1}y$ . Die invertierbaren Matrizen im Ring  $\mathbb{K}^{n \times n}$  bilden demnach eine Gruppe, genannt die **allgemeine lineare Gruppe** der  $n \times n$ -Matrizen über  $\mathbb{K}$ , geschrieben  $GL(n; \mathbb{K})$  oder  $GL_n(\mathbb{K})$ , englisch **general linear group**.

**Matrizenkalkül: lineare Abbildungen** O321  
Erinnerung

Matrizen dienen insbesondere zur Darstellung linearer Abbildungen. Eine Abbildung  $f : V \rightarrow W$  zwischen  $\mathbb{K}$ -Vektorräumen heißt **linear**, wenn  $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$  gilt für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  und  $u, v \in V$ .

Beispiel: Für  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  ist die Abbildung  $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  mit  $v \mapsto Av$  linear. Wir können umgekehrt jede lineare Abbildung so als Matrix darstellen:

Jede lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  ist bereits eindeutig festgelegt durch die Bilder der Elemente einer Basis von  $V$ . Genauer: Sei  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  eine Basis von  $V$  und  $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$  eine Basis von  $W$ . Dann existieren Konstanten  $a_{ij} \in \mathbb{K}$  sodass

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i \quad \text{für alle } j = 1, \dots, n.$$

Hierbei sind die  $a_{ij}$  eindeutig bestimmt durch  $f$  sowie  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$ . So ordnen wir der linearen Abbildung  $f$  ihre Matrix  $A$  zu:

$$f \mapsto \varphi(f)_{\mathcal{B}} := A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{K}^{m \times n}$$

**Matrizenkalkül: lineare Abbildungen** O322  
Erinnerung

Abbildungen  $f, g : V \rightarrow W$  addieren wir durch

$$(f + g)(v) = f(v) + g(v) \quad \text{für alle } v \in V.$$

Abbildungen  $f : U \rightarrow V$  und  $g : V \rightarrow W$  komponieren wir durch

$$(g \circ f)(u) = g(f(u)) \quad \text{für alle } u \in U.$$

Skalarmultiplikation von  $f : U \rightarrow V$  mit  $\lambda \in \mathbb{K}$  definieren wir durch

$$(\lambda \cdot f)(u) = \lambda \cdot f(u) \quad \text{für alle } u \in U.$$

Sind  $f, g$  linear, dann auch Summe, Komposition, Skalarmultiplikation.

Diese Rechenoperationen für lineare Abbildungen übersetzen sich direkt in die entsprechenden Rechenoperationen für Matrizen:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda \cdot f)_{\mathcal{B}} &= \lambda \cdot \varphi(f)_{\mathcal{B}} \\ \varphi(f + g)_{\mathcal{B}} &= \varphi(f)_{\mathcal{B}} + \varphi(g)_{\mathcal{B}} \\ \varphi(g \circ f)_{\mathcal{B}} &= \varphi(g)_{\mathcal{C}} * \varphi(f)_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

Damit können wir den Matrizenkalkül für lineare Abbildungen nutzen!

**Matrizenkalkül: Kern und Bild** O323  
Erinnerung

Dank Übersetzung der linearen Abbildung  $f : V \rightarrow W$  in eine Matrix löst der Gauß-Algorithmus die folgenden grundlegenden Probleme:

- Bestimmung des Kerns  $\text{Kern}(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$ .
- Bestimmung des Bildes  $\text{Bild}(f) = \{f(v) \mid v \in V\}$ .

Beides sind jeweils Untervektorräume und ihre Berechnung gelingt durch explizite Angabe einer Basis. Insbesondere lässt sich so der **Rang**  $\dim_{\mathbb{K}} \text{Bild}(f)$  und der **Defekt**  $\dim_{\mathbb{K}} \text{Kern}(f)$  ausrechnen. Für jede lineare Abbildungen  $f : V \rightarrow W$  gilt die **Dimensionsformel**

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{Kern}(f) + \dim_{\mathbb{K}} \text{Bild}(f) = \dim_{\mathbb{K}} V.$$

😊 Kennt man zwei dieser Dimensionen, so auch die dritte. Das reduziert bei vielen Rechnungen den Aufwand erheblich.

- Es gibt  $f : V \rightarrow W$  lineare und surjektiv gdw  $\dim V \geq \dim W$ .
- Es gibt  $f : V \rightarrow W$  lineare und injektiv gdw  $\dim V \leq \dim W$ .
- Es gibt  $f : V \rightarrow W$  lineare und bijektiv gdw  $\dim V = \dim W$ .
- Für  $\dim V = \dim W < \infty$  gilt  $f$  injektiv gdw  $f$  surjektiv.

**Matrizenkalkül: Determinante** O324  
Erinnerung

**Satz O3E: Definition und Eigenschaften der Determinante**

In jeder Dimension  $n \in \mathbb{N}$  existiert genau eine multilineare, alternierende, normierte Abbildung  $\det = \det_{\mathbb{K}}^n : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}$ . Diese Abbildung nennen wir die **Determinante**. Sie erfreut sich folgender Eigenschaften:

- Es gilt  $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1),1} \cdot a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$  (**Leibniz**)
- Die Determinante ist transpositionsinvariant:  $\det(A^T) = \det(A)$ .
- Die Determinante ist multiplikativ:  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ .
- Genau dann ist  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  invertierbar, wenn  $\det(A) \neq 0$  gilt.
- Genauer gilt  $A\bar{A} = \bar{A}A = \det(A)E$ , also  $A^{-1} = \det(A)^{-1} \bar{A}$ . (**Cramer**)

Zu  $A = (a_1, \dots, a_n)$  definieren wir die **adjunkte Matrix**  $A' = \text{adj}(A)$  durch die Cofaktoren  $a'_{ij} := \det(a_1, \dots, a_{i-1}, e_j, a_{i+1}, \dots, a_n)$ .

😊 Explizite polynomielle Formel. 😊 Sofort praktisch für kleine  $n$ .  
 😞 Naive Anwendung der Leibniz-Formel ist für große  $n$  aufwändig ( $n!$ ).  
 😊 Eine effiziente Berechnung gelingt mit dem Gauß-Algorithmus ( $n^3$ ).

**Matrizenkalkül: Eigenwerte und Eigenvektoren** O325  
Erinnerung

Sei  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  eine Matrix,  $v \in \mathbb{K}^n$  ein Vektor,  $\lambda \in \mathbb{K}$  ein Skalar.  
Wir nennen  $v$  einen **Eigenvektor** von  $A$  zum **Eigenwert**  $\lambda$ , wenn

$$Av = \lambda v \quad \text{und} \quad v \neq 0.$$

Die Menge  $V_\lambda = \{v \in \mathbb{K}^n \mid Av = \lambda v\}$  heißt **Eigenraum** zu  $\lambda$ .  
Genau dann ist  $\lambda \in \mathbb{K}$  ein Eigenwert von  $A$ , wenn  $\dim V_\lambda > 0$  gilt,  
d.h.  $(A - \lambda E)v = 0$  hat nicht-triviale Lösungen, also  $\det(A - \lambda E) = 0$ .  
Das **charakteristische Polynom** von  $A$  ist  $p_A(\lambda) := \det(A - \lambda E)$ .  
Somit sind die Nullstellen von  $p_A$  gerade die Eigenwerte von  $A$ .  
Für ihre algebraische Vielfachheit  $k_\lambda$  gilt stets  $1 \leq \dim V_\lambda \leq k_\lambda$ .  
Hierbei ist  $\dim V_\lambda < k_\lambda$  durchaus möglich: Der **Jordan-Block**

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

hat den Eigenwert  $\lambda$  mit algebraischer Vielfachheit  $k_\lambda = n$ ,  
aber der Eigenraum  $V_\lambda = \mathbb{K}e_1$  hat nur Dimension  $\dim V_\lambda = 1$ .

**Matrizenkalkül: ähnliche Matrizen** O326  
Erinnerung

Zwei Matrizen  $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$  heißen **konjugiert** oder **ähnlich** wenn es eine invertierbare Matrix  $T \in \mathbb{K}^{n \times n}$  gibt, sodass  $B = T^{-1}AT$  gilt.  
(Die Bedingung  $B = T^{-1}AT$  ist äquivalent zu  $A = TBT^{-1}$ .)  
Beispiel: Wir können jede lineare Abbildung  $f: V \rightarrow V$  bezüglich verschiedener Basen  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  von  $V$  darstellen. Die zugehörigen Matrizen  $A =_{\mathcal{A}}(f)_{\mathcal{A}}$  und  $B =_{\mathcal{B}}(f)_{\mathcal{B}}$  sind i.A. verschieden, aber immer ähnlich: Es gilt  $B = T^{-1}AT$  mit der Basiswechselmatrix  $T =_{\mathcal{B}}(\text{id}_V)_{\mathcal{A}}$ .

Ist  $v$  ein Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$ , dann ist  $T^{-1}v$  ein Eigenvektor von  $B$  zum selben Eigenwert, und umgekehrt.  
Insbesondere haben  $A$  und  $B$  dieselben Eigenwerte.  
Allgemeiner sind sogar ihre charakteristischen Polynome gleich:

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda E) &= \det(T^{-1}AT - \lambda E) \\ &= \det[T^{-1}(A - \lambda E)T] \\ &= \det(T^{-1}) \det(A - \lambda E) \det(T) = \det(A - \lambda E), \end{aligned}$$

insbesondere auch Determinante  $\det A = \det B$  und Spur  $\text{tr} A = \text{tr} B$ .

**Matrizenkalkül: Diagonalisierbarkeit** O327  
Erinnerung

Eine Matrix  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  heißt über  $\mathbb{K}$  **diagonalisierbar**, wenn es eine Basis  $v_1, \dots, v_n$  des  $\mathbb{K}^n$  aus Eigenvektoren von  $A$  gibt, also  $Av_j = \lambda_j v_j$ .  
Die Basiswechselmatrix  $T = (v_1, \dots, v_n)$  ist invertierbar, und es gilt

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Gilt umgekehrt  $T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , so ist  $v_1 = Te_1, \dots, v_n = Te_n$  eine Basis des  $\mathbb{K}^n$  aus Eigenvektoren, und zwar gilt  $Av_j = \lambda_j v_j$ .  
Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.  
Das vereinfacht konkrete Rechnungen und allgemeine Überlegungen.  
Genau dann ist  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  über  $\mathbb{K}$  diagonalisierbar, wenn gilt:

- Das charakteristische Polynom  $p_A$  zerfällt über  $\mathbb{K}$  in Linearfaktoren, das heißt  $p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \dots (\lambda - \lambda_m)^{k_m}$  mit Nullstellen  $\lambda_i \in \mathbb{K}$  der Vielfachheiten  $k_i \geq 1$  für  $i = 1, \dots, m$  sowie  $\lambda_i \neq \lambda_j$  für  $i \neq j$ .
- Für jeden Eigenwert erreicht die geometrische die algebraische Vielfachheit, das heißt  $\dim \ker(A - \lambda_i E) = k_i$  für alle  $i = 1, \dots, m$ .

**Matrizenkalkül: Trigonalisierbarkeit** O328  
Erinnerung

Nicht alle Matrizen sind diagonalisierbar, etwa Jordan-Blöcke. O329  
Wir betrachten daher auch folgende schwächere Bedingung:  
Eine Matrix  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  heißt über  $\mathbb{K}$  **trigonalisierbar**, wenn es eine invertierbare Matrix  $T \in \mathbb{K}^{n \times n}$  gibt, sodass

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich gilt dann  $p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n)$ , das heißt, das charakteristische Polynom zerfällt in Linearfaktoren über  $\mathbb{K}$ .  
Hierzu gilt die Umkehrung: Genau dann ist  $A$  über  $\mathbb{K}$  trigonalisierbar, wenn das charakteristische Polynom über  $\mathbb{K}$  in Linearfaktoren zerfällt.  
Speziell über dem Körper  $\mathbb{C}$  gilt dies immer: Nach dem Fundamentalsatz der Algebra (F3C) zerfällt jedes Polynom über  $\mathbb{C}$  in Linearfaktoren.  
Besser noch: Ist  $A$  trigonalisierbar, so ist  $A$  sogar **jordanisierbar!**  
□□ Zur Vertiefung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §Z.4.

**Polynome und Potenzreihen von Matrizen** O329  
Ausführung

Gegeben sei ein (reelles oder komplexes) Polynom

$$f(x) = \sum_{j=0}^k a_j x^j = a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k \in \mathbb{K}[x].$$

Darin können wir jede Matrix  $X \in \mathbb{K}^{n \times n}$  einsetzen:

$$f(X) = \sum_{j=0}^k a_j X^j = a_0 E + a_1 X + \dots + a_k X^k \in \mathbb{K}^{n \times n}.$$

Das gilt allgemeiner für jede Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Auch hier können wir jede Matrix  $X \in \mathbb{K}^{n \times n}$  einsetzen:

$$f(X) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j X^j = a_0 E + a_1 X + a_2 X^2 + \dots$$

Einzigste Voraussetzung ist – wie immer – die Konvergenz!

**Die euklidische Norm für Vektoren und Matrizen** O330  
Ausführung

Für Vektoren  $v \in \mathbb{K}^n$  nutzen wir die **euklidische Norm**:

$$|v| = \sqrt{|v_1|^2 + \dots + |v_n|^2}$$

Für Matrizen  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  definieren wir genauso die **Matrixnorm**

$$|A| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$$

Dies ist tatsächlich eine Norm auf dem Vektorraum  $\mathbb{K}^{m \times n}$ , das heißt:

- Es gilt  $|A| \geq 0$  für alle  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ , und  $|A| = 0$  nur für  $A = 0$ .
- Es gilt  $|\lambda A| = |\lambda| \cdot |A|$  für alle  $\lambda \in \mathbb{K}$  und  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ .
- Es gilt  $|A + B| \leq |A| + |B|$  für alle  $A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ .

Die Norm  $|A - B|$  misst den Abstand der Matrizen  $A$  und  $B$ .  
Aus (3) folgt  $|A - B| \geq ||A| - |B||$ . (Übung: Zeigen Sie dies.)  
Konvergenz von Matrizen  $A_k \rightarrow A$  ist definiert durch  $|A_k - A| \rightarrow 0$ .  
Dies ist gleichbedeutend mit komponentenweise Konvergenz.

**Eigenschaften der Matrixnorm** O331  
Ausführung

Die Matrixnorm ist verträglich mit der Vektornorm:

- Es gilt  $|A \cdot v| \leq |A| \cdot |v|$  für alle  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  und  $v \in \mathbb{K}^n$ .

Allgemeiner ist die Matrixnorm submultiplikativ:

- Es gilt  $|A \cdot B| \leq |A| \cdot |B|$  für alle  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  und  $B \in \mathbb{K}^{n \times p}$ .

Bei Potenzen gilt insbesondere  $|A^k| \leq |A|^k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ .

**Nachrechnen:** Dank CSU gilt  $|u \cdot v| \leq |u| \cdot |v|$  für  $u, v \in \mathbb{K}^n$ .  
Seien  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{K}^{1 \times n}$  die Zeilen der Matrix  $A$ . Dann gilt:

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \cdot v = \begin{pmatrix} a_1 \cdot v \\ \vdots \\ a_m \cdot v \end{pmatrix}$$

Hieraus folgt die erste Ungleichung:

$$|Av|^2 = |a_1 \cdot v|^2 + \dots + |a_m \cdot v|^2 \leq |a_1|^2 |v|^2 + \dots + |a_m|^2 |v|^2 = |A|^2 \cdot |v|^2$$

Die Ungleichung  $|A \cdot B| \leq |A| \cdot |B|$  folgt ebenso, spaltenweise über  $B$ .

**Inversion durch geometrische Reihe** O332  
Ausführung

**Satz O3F:** Einsetzen einer Matrix in eine Potenzreihe

Sei  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $\rho > 0$ .  
Für jede Matrix  $X \in \mathbb{K}^{n \times n}$  mit Norm  $|X| < \rho$  konvergiert die Reihe  $f(X) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$  absolut in  $\mathbb{K}^{n \times n}$  und damit komponentenweise, denn sie wird majorisiert durch  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k X^k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot |X|^k < \infty$ .

**Beispiel:** Wir betrachten die geometrische Reihe. Für  $|x| < 1$  gilt

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} x^j = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = (1 - x)^{-1},$$

denn  $(1 - x)(1 + x + x^2 + \dots + x^{k-1}) = 1 - x^k \rightarrow 1$  für  $k \rightarrow \infty$ .  
Gleiches gilt auch für jede Matrix  $X \in \mathbb{K}^{n \times n}$ : Für  $|X| < 1$  gilt

$$f(X) = \sum_{j=0}^{\infty} X^j = 1 + X + X^2 + X^3 + \dots = (1 - X)^{-1}.$$

😊 Allgemein und explizit. 😊 Beweis einfach durch Nachrechnen!  
😊 Endliche Summen können zur Approximation genutzt werden.  
😊 Leichtere Spezialfälle löst man besser per Gauß-Algorithmus.

Jedes lineare DGSystem mit **konstanten Koeffizienten** hat die Form

$$\begin{cases} y_1'(t) = a_{11}y_1(t) + \dots + a_{1n}y_n(t) + b_1(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = a_{n1}y_1(t) + \dots + a_{nn}y_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

Wir bündeln dies prägnant zu einer vektorwertigen Gleichung:

$$y'(t) = Ay(t) + b(t)$$

Hierbei ist  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  eine Matrix und  $b: I \rightarrow \mathbb{K}^n$  eine stetige Abbildung. Die **Koeffizientenmatrix**  $A$  ist hier konstant, d.h. unabhängig von  $t$ . Der **Störterm**  $b(t)$  hingegen darf weiterhin von  $t$  abhängen.

Die zugehörige **homogene Gleichung** erhalten wir für  $b = 0$ :

$$y'(t) = Ay(t).$$

😊 Diese geschickte Schreibweise spart Arbeit und betont die Struktur: Sie verschafft uns Übersicht und macht den Blick frei fürs Wesentliche.

**Erinnerung:** Sei  $a \in \mathbb{C}$ . Wir suchen eine Lösung  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  der eindimensionalen Differentialgleichung  $y'(t) = ay(t)$  mit  $y(0) = 1$ . Hierzu gibt es genau eine Lösung, nämlich die Funktion  $y(t) = e^{at}$ . Wir nutzen hierzu dankend die gute alte Exponentialfunktion

$$\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

**Allgemeiner:** Sei nun  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  eine Matrix (zuvor  $n = 1$ , jetzt  $n \geq 2$ ). Wir suchen  $Y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$  mit  $Y'(t) = AY(t)$  und  $Y(0) = E$ . Als Lösung vermuten wir auch hier die Funktion  $Y(t) = e^{tA}$ . Wir bräuchten hierzu die Exponentialfunktion für Matrizen

$$\exp: \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}, \quad \exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3!} + \dots$$

😊 Das sieht verwegend aus, aber es funktioniert ganz wunderbar! Der folgende Satz garantiert, dass diese Exponentialreihe tatsächlich für jede Matrix konvergiert und alle ersehnten Eigenschaften hat.

**Satz O3G: Exponentialfunktion für Matrizen**

Für jede Matrix  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  konvergiert die Exponentialreihe

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = E + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{4!}A^4 + \dots$$

Dies definiert die Matrix-Exponentialfunktion  $\exp: \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ .

- 1 Die Nullmatrix wird auf die Einheitsmatrix  $\exp(0) = E$  abgebildet.
- 2 Aus  $AB = BA$  folgt  $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$ .
- 3 Insbesondere gilt  $\exp(A)\exp(-A) = \exp(A-A) = \exp(0) = E$ . Somit ist die Matrix  $\exp(A)$  invertierbar mit  $\exp(-A) = \exp(A)^{-1}$ .
- 4 Die Zuordnung  $t \mapsto \exp(tA)$  definiert eine differenzierbare Kurve  $Y: \mathbb{R} \rightarrow \text{GL}_n \mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}^{n \times n}$  mit  $0 \mapsto E$  und  $\frac{d}{dt} \exp(tA) = A \exp(tA)$ .

**Übung:** Rechnen Sie dies nach wie für die reelle Exponentialfunktion.

☐ Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik I, §1.14, sowie Seite F222ff.

**Satz O3G: Exponentialfunktion für Matrizen**

Die Exponentialfunktion verträgt sich zudem mit Matrix-Operationen:

- 5 komplexe Konjugation  $\exp(\bar{A}) = \overline{\exp(A)}$
- 6 Transposition  $\exp(A^T) = \exp(A)^T$
- 7 Konjugation  $\exp(PAP^{-1}) = P \exp(A) P^{-1}$
- 8 Determinante  $\det(\exp(A)) = \exp(\text{tr}(A))$
- 9 Euler-Grenzwert  $(E + \frac{1}{n}A)^n \rightarrow \exp(A)$  für  $n \rightarrow \infty$

Für (5) nutzen wir  $\bar{A}^k = \overline{A^k}$ , für (6) entsprechend  $(A^T)^k = (A^k)^T$ , und für (7) schließlich  $(PAP^{-1})^k = PAP^{-1} \dots PAP^{-1} = PA^k P^{-1}$ . Formel (8) ist klar für Dreiecksmatrizen:

$$\det \exp \begin{pmatrix} a_{11} & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e^{a_{11}} & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & e^{a_{nn}} \end{pmatrix} = e^{a_{11}} \dots e^{a_{nn}} = e^{a_{11} + \dots + a_{nn}}$$

Für den allgemeinen Fall nutzen wir unser Wissen aus der linearen Algebra: Jede Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ist trigonalisierbar, das heißt, es existiert  $P \in \text{GL}_n \mathbb{C}$  sodass  $PAP^{-1}$  eine obere Dreiecksmatrix ist. Determinante und Spur bleiben dank (7) bei Konjugation unverändert:

$$\det(\exp(A)) = \det(\exp(PAP^{-1})) = \exp(\text{tr}(PAP^{-1})) = \exp(\text{tr}(A))$$

**Aufgabe:** Berechnen Sie die Exponentialfunktion  $\exp(A)$  einer Diagonalmatrix  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  sowie  $\exp(tA)$  für  $t \in \mathbb{R}$ .

**Lösung:** (0) Die Potenzen der Matrix  $A$  sind leicht zu berechnen:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \implies A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

(1) Hieraus berechnen wir ebenso leicht die Exponentialreihe:

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

(2) Mit dem Zeitparameter  $t \in \mathbb{R}$  im Exponenten erhalten wir:

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix}$$

**Aufgabe:** Berechnen Sie  $\exp(A)$  einer  $2 \times 2$ -Dreiecksmatrix.

**Lösung:** (0) Wir betrachten eine obere  $2 \times 2$ -Dreiecksmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & (a+b)c \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & (a^2+ab+b^2)c \\ 0 & b^3 \end{pmatrix}, \dots$$

(1) Wir nehmen zunächst  $a \neq b$  an. Per Induktion finden wir dann

$$A^k = \begin{pmatrix} a^k & \frac{a^k - b^k}{a-b} c \\ 0 & b^k \end{pmatrix} \implies \exp \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a & \frac{e^a - e^b}{a-b} c \\ 0 & e^b \end{pmatrix}.$$

(2) Resonanz: Für  $b \rightarrow a$  gilt  $\frac{e^a - e^b}{a-b} \rightarrow e^a$ . Für  $a = b$  finden wir tatsächlich:

$$A^k = \begin{pmatrix} a^k & k a^{k-1} c \\ 0 & a^k \end{pmatrix} \implies \exp \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a & c e^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix}.$$

Für große Matrizen ist diese Rechnung ebenso möglich, aber mühsam. In Kapitel P werden wir hierfür Eigen- und Hauptvektoren nutzen. Diese Werkzeuge erweisen sich auch hier als sehr effizient.

**Aufgabe:** Berechnen Sie  $\exp(tN)$  einer nilpotenten Jordan-Matrix

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots$$

**Lösung:** (1) Es gilt  $N^4 = 0$ . Die Exponentialreihe bricht hier ab:

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{N^0}{0!} + \frac{N^1}{1!} + \frac{N^2}{2!} + \frac{N^3}{3!} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Mit dem Zeitparameter  $t \in \mathbb{R}$  im Exponenten erhalten wir:

$$\exp(tN) = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe:** Berechnen Sie  $\exp(tB)$  einer beliebigen Jordan-Matrix

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}.$$

**Lösung:** (1) Dank  $B = \lambda I + N$  und  $IN = NI$  erhalten wir

$$\exp(B) = \exp(\lambda I + N) = \exp(\lambda I) \exp(N) = e^\lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Mit dem Zeitparameter  $t \in \mathbb{R}$  im Exponenten erhalten wir:

$$\exp(tB) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Korollar O3H: Lösung durch Exponentialfunktion**

Zu gegebenen Matrizen  $A, Y_0 \in \mathbb{K}^{n \times n}$  hat die Differentialgleichung

$$Y'(t) = AY(t) \quad \text{mit} \quad Y(t_0) = Y_0$$

genau eine Lösung  $Y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ , nämlich  $Y(t) = \exp[(t - t_0)A]Y_0$ .  
Ebenso hat zu jedem  $y_0 \in \mathbb{K}^n$  die vektorwertige Differentialgleichung

$$y'(t) = Ay(t) \quad \text{mit} \quad y(t_0) = y_0$$

genau eine Lösung  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n$ , nämlich  $y(t) = \exp[(t - t_0)A]y_0$ .

Somit hat die Differentialgleichung  $y' = Ay$  als Lösungsmenge  $L_0 = \{ e^{(t-t_0)A} y_0 \mid y_0 \in \mathbb{K}^n \}$  einen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum der Dimension  $n$ .

- ☺ Für einfache Matrizen können wir  $\exp(tA)$  explizit berechnen (s.o.).
- ☹ Für komplizierte Matrizen  $A$  ist leider auch  $\exp(tA)$  kompliziert.
- ☺ Vereinfachung mit linearer Algebra durch Eigen-/Hauptvektoren!

**Aufgabe:** Lösen Sie folgende gekoppelte Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} y_1' = \lambda y_1 + y_2 \\ y_2' = \lambda y_2 + y_3 \\ y_3' = \lambda y_3 + y_4 \\ y_4' = \lambda y_4 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

**Lösung:** Die Exponentialfunktion liefert eine Fundamentalmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \exp(tA) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zur Probe rechnet man die vier Fundamentallösungen direkt nach:

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t e^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} e^{\lambda t} \\ t e^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{t^3}{3!} e^{\lambda t} \\ \frac{t^2}{2} e^{\lambda t} \\ t e^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

☺ Das AWP  $y' = Ay$  mit  $y(0) = y_0$  wird gelöst durch  $y(t) = \exp(tA)y_0$ .

**Aufgabe:** Lösen Sie das DGSystem  $y_1' = -y_2$  und  $y_2' = y_1$ .

**Lösung:** Wir lösen das Differentialgleichungssystem  $y' = Ay$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots$$

Hieraus berechnen wir mühelos die Matrix-Exponentialfunktion:

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots & -t + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^5}{5!} + \dots \\ t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots & 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Kurzum:

$$Y(t) = \exp \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Die Probe ist leicht: Für die Ableitung gilt wie gewünscht

$$\frac{d}{dt} Y(t) = \begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix} = AY(t).$$

☺ Das AWP  $y' = Ay$  mit  $y(0) = y_0$  wird gelöst durch  $y(t) = \exp(tA)y_0$ .

**Aufgabe:** Lösen Sie das DGSystem  $y_1' = y_2$  und  $y_2' = y_1$ .

**Lösung:** Wir lösen das Differentialgleichungssystem  $y' = Ay$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots$$

Hieraus berechnen wir mühelos die Matrix-Exponentialfunktion:

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \dots & t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots \\ t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots & 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$$

Kurzum:

$$Y(t) = \exp \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$$

Die Probe ist leicht: Für die Ableitung gilt wie gewünscht

$$\frac{d}{dt} Y(t) = \begin{pmatrix} \sinh t & \cosh t \\ \cosh t & \sinh t \end{pmatrix} = AY(t).$$

☺ Das AWP  $y' = Ay$  mit  $y(0) = y_0$  wird gelöst durch  $y(t) = \exp(tA)y_0$ .

☺ Wir erkennen einen schönen Zusammenhang zwischen der Matrix-Exponentialfunktion und der Näherung durch das Euler-Verfahren!

**Aufgabe:** (1) Berechnen Sie die Lösung  $x: [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}^2$  des AWP

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2, & x_1(0) = 1, \\ \dot{x}_2 = x_1, & x_2(0) = 0. \end{cases}$$

- (a) Berechnen Sie die Matrix-Exponentialfunktion  $x(t) = \exp(tA)x_0$ .
- (b) Vergleichen Sie dies mit der numerischen Näherung durch das Euler-Verfahren mit Polygonzügen zu Schrittweiten  $\Delta t = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ .
- (2) Untersuchen Sie ebenso die Lösung  $x: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$  des AWP

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(-2) = \sinh(-2), \\ \dot{x}_2 = x_1, & x_2(-2) = \cosh(-2). \end{cases}$$

- (3) Zu lösen sei  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  mit konstanter Matrix  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ . Konvergieren die Euler-Näherungen zum Anfangswert  $x(t_0) = x_0$  gegen die exakte Lösung  $x: [t_0, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{K}^n$  mit  $x(t) = \exp[(t - t_0)A]x_0$ ?

**Lösung:** (a) Die Exponentialfunktion haben wir oben berechnet:

$$X(t) = \exp \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \implies x(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$X(t) = \exp \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t & -\sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \implies x(t) = \begin{pmatrix} \sinh t \\ \cosh t \end{pmatrix}$$

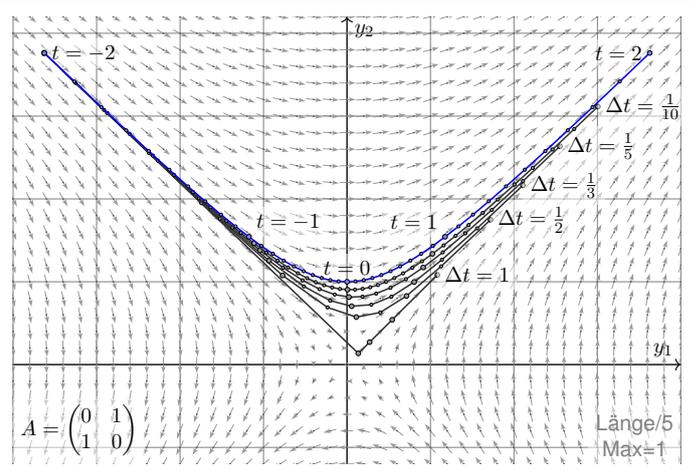
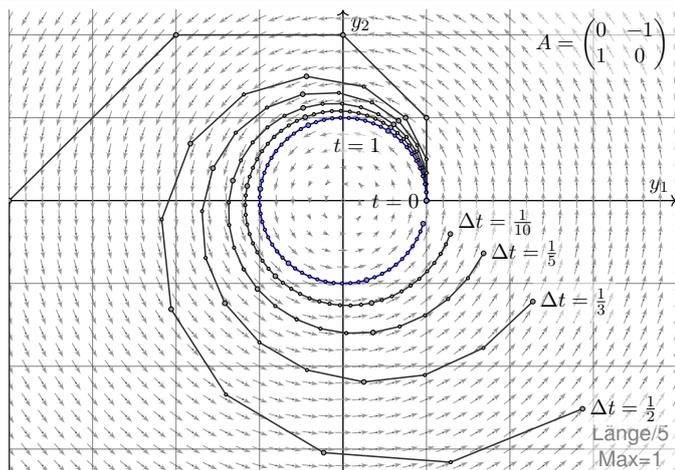
- (b) Die Graphiken zeigen die Polygonzüge des Euler-Verfahrens.
- (3) Wir betrachten die Schrittweite  $\Delta t = T/N$ , also  $t_k = t_0 + kT/N$ . Die Euler-Approximation  $\tilde{x}: [t_0, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{K}^n$  interpoliert die Werte

$$\tilde{x}(t_{k+1}) = \tilde{x}(t_k) + A\tilde{x}(t_k) \cdot (t_{k+1} - t_k) = (1 + \frac{T}{N}A)\tilde{x}(t_k).$$

Rekursiv erhalten wir  $\tilde{x}(t_k) = (1 + \frac{T}{N}A)^k x_0$  für alle  $k = 0, 1, 2, \dots, N$ . Für  $N \rightarrow \infty$  kennen wir den Grenzwert  $(1 + \frac{T}{N}A)^N \rightarrow \exp(TA)$ . Also:

$$\tilde{x}(t_0 + T) = (1 + \frac{T}{N}A)^N x_0 \rightarrow \exp(TA)x_0 = x(t_0 + T)$$

Gleiches gilt für  $t \in [t_0, t_0 + T]$ , die Rechnung ist nur etwas mühsamer.



Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $A: I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  eine stetige Funktion.  
Wir interessieren uns für **vektorwertige Differentialgleichungen**

$$y'(t) = A(t)y(t).$$

Gesucht sind Lösungen  $y: I \rightarrow \mathbb{K}^n$ . Diese bilden einen Vektorraum.  
Ebenso nützlich sind **matrixwertige Differentialgleichungen**

$$Y'(t) = A(t)Y(t)$$

Gesucht sind matrixwertige Lösungen  $Y: I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}: t \mapsto Y(t)$ .  
Auch diese bilden einen Vektorraum. Spalten sind Lösungsvektoren.  
Entscheidender Vorteil: Matrizen kann man zudem auch multiplizieren!

Auch hier stellen sich die für Differentialgleichungen üblichen Fragen: Gibt es immer eine Lösung? Wenn ja, wie findet man eine? gar alle? Ist die Lösung durch einen gegebenen Anfangswert eindeutig bestimmt? Die folgende Lösungsformel löst all diese Fragen! Wir werden anschließend lernen, sie zu nutzen und in wichtigen Spezialfällen zu vereinfachen.

Die Picard–Lindelöf–Iteration O2A beschert uns folgende Lösung:

**Satz O31: Fundamentallösung homogener DGSyteme**

Sei  $A: I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  stetig. Die **matrixwertige Differentialgleichung**

$$W'(t) = A(t)W(t) \quad \text{mit Anfangswert} \quad W(t_0) = E$$

erlaubt die **Fundamentallösung**  $W: I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  gegeben durch

$$W(t) = E + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t_0}^t A(t_k) \cdots \int_{t_2=t_0}^{t_3} A(t_2) \int_{t_1=t_0}^{t_2} A(t_1) dt_1 dt_2 \cdots dt_k.$$

Für jedes  $t \in I$  ist die Reihe absolut konvergent und  $W(t)$  invertierbar.

- ☺ Allgemein und explizit. ☺ Beweis durch termweises Ableiten!
- ☺ Endliche Summen können zur Approximation genutzt werden.
- ☺ Diese Lösungsformel dient als Vorlage für alle Spezialfälle.

**Aufgabe:** Rechnen Sie nach, dass  $W$  tatsächlich eine Lösung ist.

**Lösung:** Die Fundamentallösung ist gegeben als Reihe

$$W(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t).$$

Die Summanden sind  $A_0(t) = E$  und für  $k = 1, 2, 3, \dots$  rekursiv

$$A_k(t) = \int_{\tau=t_0}^t A(\tau)A_{k-1}(\tau) d\tau.$$

Dank HDI gilt  $A'_k(t) = A(t)A_{k-1}(t)$ . Durch termweises Ableiten folgt

$$W'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A'_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A(t)A_{k-1}(t) = A(t) \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) = A(t)W(t).$$

Also erfüllt  $W(t)$  die Differentialgleichung mit Anfangswert  $W(t_0) = E$ .

☺ Dies garantiert die Existenz einer Lösung... samt Lösungsformel!

Ergibt die Reihe  $W(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t)$  und obige Rechnung einen Sinn?  
Zur Begründung und Erläuterung: Warum konvergiert diese Reihe?

Das Integral über Matrizen in  $\mathbb{K}^{n \times n}$  geschieht komponentenweise.  
Dank Stetigkeit von  $A$  existiert jedes dieser Integrale, und  $A_k$  ist stetig.

Auch die Konvergenz der Reihe ist komponentenweise zu verstehen.  
Zu  $t$  existiert  $M \in \mathbb{R}$  mit  $|A(t)| \leq M$  für alle  $t$  zwischen  $t_0$  und  $t$ .  
Für die iterierten Integrale folgt induktiv  $|A_k(t)| \leq M^k |t - t_0|^k / k!$ .

Die Reihe  $W(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t)$  konvergiert absolut, majorisiert durch

$$\sum_{k=0}^{\infty} |A_k(t)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k |t - t_0|^k}{k!} = e^{M|t-t_0|} < \infty.$$

Die so definierte Funktion  $W: I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  mit  $W(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t)$  ist stetig diff'bar, und wir dürfen termweise ableiten:  $W'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A'_k(t)$

☺ Damit ist die obige Rechnung gerechtfertigt und Satz O31 bewiesen.

**Aufgabe:** Lösen Sie  $W'(t) = A(t)W(t)$  mit  $W(0) = E$  und

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Lösung:** Wir setzen  $A_0(t) = E$  und für  $k = 1, 2, 3, \dots$  rekursiv

$$A_k(t) = \int_{\tau=0}^t A(\tau)A_{k-1}(\tau) d\tau.$$

Die ersten Schritte sind:

$$A_1(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} d\tau = \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

$$A_2(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau & \frac{1}{2}\tau^2 \\ 0 & \tau \end{pmatrix} d\tau = \int_0^t \begin{pmatrix} \tau & \frac{3}{2}\tau^2 \\ 0 & \tau \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{2}t^3 \\ 0 & \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix}$$

$$A_3(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\tau^2 & \frac{1}{2}\tau^3 \\ 0 & \frac{1}{2}\tau^2 \end{pmatrix} d\tau = \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\tau^2 & \tau^3 \\ 0 & \frac{1}{2}\tau^2 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} \frac{1}{3!}t^3 & \frac{1}{4}t^4 \\ 0 & \frac{1}{3!}t^3 \end{pmatrix}$$

Wir rechnen munter so weiter... und finden per Induktion

$$A_k(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^k}{k!} & \frac{t^{k+1}}{2(k-1)!k!} \\ 0 & \frac{t^k}{k!} \end{pmatrix}.$$

Als Fundamentallösung erhalten wir schließlich die Reihe

$$W(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) = \begin{pmatrix} e^t & \frac{t^2}{2} e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Wie nach jeder Rechnung empfiehlt sich auch hier die Probe:

Zur Startzeit  $t = 0$  gilt  $W(0) = E$  sowie allgemein

$$W'(t) = \begin{pmatrix} e^t & t e^t + \frac{1}{2} e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix},$$

$$A(t)W(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & \frac{t^2}{2} e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & t e^t + \frac{t^2}{2} e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe:** Lösen Sie  $W'(t) = A(t)W(t)$  mit  $W(0) = E$  und

$$A(t) = \begin{pmatrix} a & ct \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

**Lösung:** Wir setzen  $A_0(t) = E$  und für  $k = 1, 2, 3, \dots$  rekursiv

$$A_k(t) = \int_{\tau=0}^t A(\tau)A_{k-1}(\tau) d\tau.$$

Die ersten Schritte sind:

$$A_1(t) = \int_{\tau=0}^t \begin{pmatrix} a & c\tau \\ 0 & b \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} at & \frac{c}{2}t^2 \\ 0 & bt \end{pmatrix}$$

$$A_2(t) = \int_{\tau=0}^t \begin{pmatrix} a^2\tau & \frac{a+2b}{2!}c\tau^2 \\ 0 & b^2\tau \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{2!}t^2 & \frac{a+2b}{3!}ct^3 \\ 0 & \frac{b^2}{2!}t^2 \end{pmatrix}$$

$$A_3(t) = \int_{\tau=0}^t \begin{pmatrix} \frac{a^3}{2!}\tau^2 & \frac{a^2+2ab+3b^2}{3!}c\tau^3 \\ 0 & \frac{b^3}{2!}\tau^2 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} \frac{a^3}{3!}t^3 & \frac{a^2+2ab+3b^2}{4!}ct^4 \\ 0 & \frac{b^3}{3!}t^3 \end{pmatrix}$$

Wir rechnen munter so weiter... und finden (für  $a \neq b$ ) per Induktion

$$A_k(t) = \begin{pmatrix} \frac{a^k}{k!}t^k & \frac{c c_k}{(k+1)!}t^{k+1} \\ 0 & \frac{b^k}{k!}t^k \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{(a-b)^2} + (k+1) \frac{b^k}{b-a}.$$

Als Fundamentallösung erhalten wir schließlich die Reihe

$$W(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) = \begin{pmatrix} e^{at} & c f(t) \\ 0 & e^{bt} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad f(t) = \frac{e^{at} - e^{bt}}{(b-a)^2} + \frac{t e^{bt}}{b-a}$$

Wie nach jeder Rechnung empfiehlt sich auch hier die Probe:

$$f'(t) = \frac{a e^{at} - b e^{bt}}{(b-a)^2} + \frac{e^{bt} + bt e^{bt}}{b-a} = \dots = a f(t) + t e^{bt}$$

$$W'(t) = \begin{pmatrix} a e^{at} & c f'(t) \\ 0 & b e^{bt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & ct \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{at} & c f(t) \\ 0 & e^{bt} \end{pmatrix} = A(t)W(t).$$

Im Sonderfall  $a = b$  erhalten wir  $c_k = \frac{k(k+1)}{2} a^k$  und  $f(t) = \frac{t^2}{2} e^{at}$ .

**Kommutierende Matrizen** O357  
Ergänzung

Im Allgemeinen brauchen wir die iterierten Integrale aus Satz O3I. Speziell für kommutierende Matrizen können wir dies mit Hilfe der Exponentialfunktion vereinfachen zu einem einzigen Integral:

**Satz O3J: DGSsystem mit kommutierenden Matrizen**

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $A: I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  stetig. Zu lösen sei

$$Y'(t) = A(t)Y(t) \quad \text{mit} \quad Y(t_0) = E.$$

Gilt  $A(s)A(t) = A(t)A(s)$  für alle  $s, t \in I$ , so ist die Fundamentallösung

$$Y(t) = \exp\left(\int_{\tau=t_0}^t A(\tau) d\tau\right).$$

☺ Speziell für jede konstante Matrix  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  erhalten wir erneut

$$Y(t) = \exp[(t - t_0)A].$$

⚠ Ohne Kommutativität gibt es Gegenbeispiele wie unten illustriert.

**Kommutierende Matrizen** O358  
Ergänzung

**Aufgabe:** Rechnen Sie nach, dass  $Y$  tatsächlich eine Lösung ist.

**Lösung:** Für  $B(t) = \int_{\tau=t_0}^t A(\tau) d\tau$  gilt  $A(t)B(t) = B(t)A(t)$ , denn

$$A(t)B(t) \stackrel{\text{Def}}{=} A(t) \left[ \int_{\tau=t_0}^t A(\tau) d\tau \right] \stackrel{\text{Lin}}{=} \int_{\tau=t_0}^t A(t)A(\tau) d\tau$$

$$\stackrel{\text{Kom}}{=} \int_{\tau=t_0}^t A(\tau)A(t) d\tau \stackrel{\text{Lin}}{=} \left[ \int_{\tau=t_0}^t A(\tau) d\tau \right] A(t) \stackrel{\text{Def}}{=} B(t)A(t).$$

Aus  $B'(t) = A(t)$  berechnen wie die Ableitung von  $Y(t) = \exp B(t)$ :

$$\frac{d}{dt} Y = \frac{d}{dt} \left[ E + B + \frac{1}{2!} B^2 + \frac{1}{3!} B^3 + \dots \right]$$

$$= A + \frac{1}{2!} (AB + BA) + \frac{1}{3!} (ABB + BAB + BBA) + \dots$$

$$= A + \frac{2}{2!} AB + \frac{3}{3!} AB^2 + \dots = A \left( E + B + \frac{1}{2!} B^2 + \dots \right) = AY.$$

Somit gilt  $Y'(t) = A(t)Y(t)$  und  $Y(t_0) = E$  wie gewünscht.

**Kommutierende Matrizen** O359  
Ergänzung

**Aufgabe:** Lösen Sie  $Y'(t) = A(t)Y(t)$  mit  $Y(0) = E$  und

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Lösung:** Die Matrizen  $A(s), A(t)$  kommutieren für alle  $s, t \in \mathbb{R}$ :

$$A(s)A(t) = \begin{pmatrix} 1 & s+t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A(t)A(s)$$

Wir finden

$$\int_{\tau=0}^t A(\tau) d\tau = \int_{\tau=0}^t \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} t & t^2/2 \\ 0 & t \end{pmatrix}.$$

Die Exponentialfunktion solcher Matrizen kennen wir schon:

$$\exp \begin{pmatrix} t & t^2/2 \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & \frac{t^2}{2} e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$$

Probe! Dies haben wir auch durch iterierte Integrale erhalten [O353](#).

☺ Dank Vereinfachung kommen wir hier mit nur einem Integral aus!

**Kommutierende Matrizen** O360  
Ergänzung

**Aufgabe:** Lässt sich die Lösungsformel aus Satz O3J anwenden auf

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & -1 \end{pmatrix}?$$

**Lösung:** Diese Matrizen kommutieren nicht untereinander:

$$A(s)A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t-s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A(t)A(s) = \begin{pmatrix} 1 & s-t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Formel des Satzes liefert folgendes [O338](#):

$$B(t) = \int_{\tau=0}^t A(\tau) d\tau = \begin{pmatrix} t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & -t \end{pmatrix} \Rightarrow e^{B(t)} = \begin{pmatrix} e^t & (e^t - e^{-t}) \frac{t}{4} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Das ist leider keine Lösung zu  $Y' = AY$ : Machen Sie die Probe!  
Die richtige Lösung haben wir oben bereits berechnet [O355](#):

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^t & f(t) \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad f(t) = (e^t - e^{-t} - 2te^{-t})/4$$

⚠ Die Kommutativität  $A(s)A(t) = A(t)A(s)$  ist wesentlich für die Gültigkeit des Satzes; ohne Kommutativität gibt es Gegenbeispiele.

**Invertierbarkeit der Fundamentallösung** O361  
Ergänzung

**Satz O3K: Invertierbarkeit der Fundamentallösung**

Wie zuvor sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $t_0 \in I$ , und  $A: I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  stetig. Dann existieren Lösungen  $W, V: I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  der Differentialgleichungen

$$W'(t) = A(t)W(t), \quad W(t_0) = E,$$

$$V'(t) = -V(t)A(t), \quad V(t_0) = E.$$

Diese erfüllen die Gleichung  $V(t)W(t) = E$  für alle  $t \in I$ . Das heißt, jede Matrix  $W(t)$  ist invertierbar und  $W(t)^{-1} = V(t)$ .

**Nachrechnen:** Wir setzen  $F(t) := V(t)W(t)$ . Nach Produktregel gilt

$$F'(t) = [-V(t)A(t)]W(t) + V(t)[A(t)W(t)] = 0.$$

Aus  $F(t_0) = E$  und  $F' = 0$  folgt  $F(t) = E$  für alle  $t \in I$ .

☺ Anders gesagt: Die Fundamentallösung  $W$  zu  $W'(t) = A(t)W(t)$  ist zu jedem Zeitpunkt  $t \in I$  invertierbar, und die Inverse  $V(t) = W(t)^{-1}$  erfüllt ihrerseits die Differentialgleichung  $V'(t) = -V(t)A(t)$ .

**Invertierbarkeit der Fundamentallösung** O362  
Ergänzung

Wir müssen noch die Existenz von  $W$  und  $V$  sicherstellen. Mit Satz O3I konstruieren wir explizit eine Lösung  $W$  zu

$$W'(t) = A(t)W(t) \quad \text{mit Anfangswert} \quad W(t_0) = E.$$

Ebenso können wir eine Lösung  $V$  konstruieren zu

$$V'(t) = -V(t)A(t) \quad \text{mit Anfangswert} \quad V(t_0) = E.$$

Die Koeffizientenmatrix steht hier allerdings auf der rechten Seite! Die Fundamentallösung müsste entsprechend umformuliert werden...

Ich greife lieber zu einem Trick: Wir konstruieren  $U: I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  zu  $U'(t) = -A(t)^T U(t)$  mit  $U(t_0) = E$  und erhalten  $V(t) := U(t)^T$ , denn die Transposition kehrt die Produktreihenfolge um.

☺ Ein Lob der Matrizenrechnung: Sie vereinfacht unsere Rechnungen! Lineare Differentialgleichungssysteme  $y'(t) = A(t)y(t)$  sind zwar nur ein Spezialfall des allgemeinen Problems  $y'(t) = f(t, y(t))$ , doch sie sind häufig und wichtig. Daher lohnt sich ihre eingehende Untersuchung.

**Wronski-Determinante und Liouville-Formel** O363  
Ergänzung

**Definition O3L: Wronski-Determinante**

Die Determinante  $w(t) = \det W(t)$  heißt **Wronski-Determinante**.

Unser einfaches Beispiel [O353](#):

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{tr} A(t) = 2,$$

$$W(t) = \begin{pmatrix} e^t & \frac{t^2}{2} e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}, \quad \det W(t) = e^{2t}.$$

Unser weniger einfaches Beispiel [O355](#):

$$A(t) = \begin{pmatrix} a & ct \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad \text{tr} A(t) = a + b,$$

$$W(t) = \begin{pmatrix} e^{at} & c f(t) \\ 0 & e^{bt} \end{pmatrix}, \quad \det W(t) = e^{(a+b)t}.$$

☺ Wir sehen hier einen sehr einfachen und nützlichen Zusammenhang zwischen  $\text{tr} A(t)$  und  $\det W(t)$ : Dies ist die berühmte Liouville-Formel!

**Wronski-Determinante und Liouville-Formel** O364  
Ergänzung

**Satz O3M: Liouville-Formel**

(1) Aus  $W'(t) = A(t)W(t)$  und  $w(t) = \det W(t)$  folgt

$$w'(t) = [\text{tr} A(t)] w(t) \quad \text{und daraus}$$

$$w(t) = w(t_0) \cdot \exp \left[ \int_{\tau=t_0}^t \text{tr} A(\tau) d\tau \right].$$

Insbesondere folgt aus  $w(t_0) \neq 0$  bereits  $w(t) \neq 0$  für alle  $t \in I$ .

(2) Ist  $\text{tr} A(t) = a$  konstant, so folgt  $\det W(t) = \det W(t_0) \cdot e^{a(t-t_0)}$ .

(3) Für spurlose Matrizen, also  $\text{tr} A(t) = 0$ , ist  $t \mapsto \det W(t)$  konstant.

**Nachrechnen:** (1) Für  $w = \det(w_1, \dots, w_n)$  folgt die Ableitung gemäß Produktregel:

$$w' = \det(w'_1, \dots, w_n) + \dots + \det(w_1, \dots, w'_n)$$

$$= \det(Aw_1, \dots, w_n) + \dots + \det(w_1, \dots, Aw_n) = (\text{tr} A) w$$

Als Funktion von  $w_1, \dots, w_n$  ist die letzte Zeile multilinear und alternierend in  $w_1, \dots, w_n$ . Dank Eindeutigkeit der Determinante ist dies also gleich  $c \cdot \det(w_1, \dots, w_n)$ ; die Konstante  $c = \text{tr} A$  finden wir durch Einsetzen der Einheitsmatrix  $(w_1, \dots, w_n) = (e_1, \dots, e_n)$ .

**Orthogonale und antisymmetrische Matrizen** O365  
Ergänzung

**Aufgabe:** (1) Schreiben Sie das DGSystem  $y_1' = -y_2$  und  $y_2' = y_1$  als Matrixgleichung  $Y'(t) = AY(t)$ . Lösen Sie das AWP mit  $Y(0) = E$ . Welche besonderen Eigenschaften haben die Matrizen  $A$  und  $Y(t)$ ?  
 (2) Seien  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  reelle Matrizen. Wann heißt  $A$  symmetrisch? antisymmetrisch? Wann heißt  $B$  orthogonal, geschrieben  $B \in O_n \mathbb{R}$ ?  
 (3) Sei  $A$  antisymmetrisch. Wie sieht die Lösung zu  $Y'(t) = AY(t)$  mit  $Y(0) = E$  aus? Ist die Matrix  $Y(t)$  zu jedem Zeitpunkt  $t \in \mathbb{R}$  orthogonal?  
 (4) Was bedeutet diese Orthogonalitätseigenschaft geometrisch? Was folgt speziell für die Spur  $\text{tr } A$  und die Determinante  $\det Y(t)$ ?  
 (5) Was gilt komplex für antihermitesche und unitäre Matrizen?

**Lösung:** (1) Wir lösen die Matrix-Differentialgleichung  $Y' = AY$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung erhalten wir durch die Matrix-Exponentialfunktion: O343

$$Y(t) = \exp \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

**Orthogonale und antisymmetrische Matrizen** O366  
Ergänzung

☺ Diese DG tritt häufig auf, wir kennen sie bereits gut von der ebenen Kreisbewegung sowie dem harmonischen Oszillator ohne Reibung. O101  
 Die Systemmatrix  $A$  ist hier antisymmetrisch, erfüllt also  $A^T = -A$ . Zu jedem Zeitpunkt  $t \in \mathbb{R}$  ist  $Y(t)$  eine Drehmatrix, also orthogonal! Diesen Zusammenhang wollen wir nun allgemein nachrechnen.  
 (2) Zur Erinnerung: Die Matrix  $A$  ist **symmetrisch**, falls  $A^T = A$ , und **antisymmetrisch**, falls  $A^T = -A$ . Diese Bedingung ist leicht zu prüfen: Man sieht dies jeweils leicht durch Spiegelung an der Hauptdiagonalen!  
 Die Matrix  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt **orthogonal**, wenn ihre Spaltenvektoren eine Orthonormalbasis des  $\mathbb{R}^n$  bilden, also  $B^T B = E$  gilt. Das ist äquivalent für Zeilenvektoren, also  $B B^T = E$ . Beides bedeutet  $B^{-1} = B^T$ .  
 (3) Ist die Systemmatrix  $A$  antisymmetrisch, so ist die Lösung  $Y(t) = e^{-At}$  orthogonal, da  $Y(t)^T = \exp(A^T t) = \exp(-At) = \exp(At)^{-1} = Y(t)^{-1}$ .  
 (4) Die Lösung  $Y(t) = e^{At}$  ist demnach eine Drehung. Aus  $A^T = -A$  folgt  $\text{tr } A = 0$  und dank Liouville  $\det Y(t) = \det Y(0) = 1$ . (Für  $B \in O_n \mathbb{R}$  gilt allgemein  $\det B = \pm 1$ ; der Fall  $-1$  tritt für  $Y(t) = e^{At}$  nicht auf.)  
 (5) Gleiches gilt komplex für antihermitesche und unitäre Matrizen.

**Unitäre und antihermitesche Matrizen** O367  
Ergänzung

Zur Erinnerung: Die Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ist **hermitesch**, falls  $A^T = \bar{A}$ , und **antihermitesch**, falls  $A^T = -\bar{A}$ . Diese Bedingung ist schnell zu prüfen: Man sieht dies jeweils leicht durch Spiegelung an der Hauptdiagonalen! Die Matrix  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  heißt **unitär**, wenn ihre Spaltenvektoren eine Orthonormalbasis des  $\mathbb{C}^n$  bilden, also  $\bar{B}^T B = E$  gilt. Das ist äquivalent für Zeilenvektoren, also  $B \bar{B}^T = E$ . Beides bedeutet  $B^{-1} = \bar{B}^T$ .

**Satz O3N: antisymmetrische / antihermitesche Systemmatrizen**  
 Zu lösen sei  $W'(t) = A(t)W(t)$  mit  $W(t_0) = E$  und  $A: I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  stetig.

(1) Ist die Systemmatrix  $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  antisymmetrisch für alle  $t \in I$ , so ist die Lösungsmatrix  $W(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  orthogonal für alle  $t \in I$ . Insbesondere gilt  $\text{tr } A(t) = 0$  und  $\det W(t) = 1$  für alle  $t \in I$ .  
 (2) Ist die Systemmatrix  $A(t) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  antihermitesch für alle  $t \in I$ , so ist die Lösungsmatrix  $W(t) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  unitär für alle  $t \in I$ . Insbesondere gilt  $\text{tr } A(t) \in i\mathbb{R}$  und  $\det W(t) \in \mathbb{S}^1$  für alle  $t \in I$ .

**Aufgabe:** Rechnen Sie diese Aussagen sorgfältig nach!

**Unitäre und antihermitesche Matrizen** O368  
Ergänzung

**Lösung:** Wir rechnen den unitären Fall; der orthogonale Fall ist analog. (Letzteres ist genau der Spezialfall, in dem alle Matrizen reell sind.)  
 (2) Wir zeigen  $\overline{W(t)}^T W(t) = E$  für alle  $t \in I$ . Wegen  $W(t_0) = E$  gilt dies zum Startzeitpunkt  $t_0 \in I$ . Anschließend betrachten wir die Ableitung:

$$\begin{aligned} [\overline{W(t)}^T W(t)]' &= \overline{W'(t)}^T W(t) + \overline{W(t)}^T W'(t) = \overline{A(t)}^T W(t) + \overline{W(t)}^T A(t) W(t) \\ &= \overline{W(t)}^T \overline{A(t)}^T W(t) + \overline{W(t)}^T A(t) W(t) = \overline{W(t)}^T (\overline{A(t)}^T + A(t)) W(t) = 0 \end{aligned}$$

Auf dem Intervall  $I$  ist die Funktion  $t \mapsto \overline{W(t)}^T W(t)$  konstant, also  $= E$ . Wegen  $A(t)^T = -\bar{A}(t)$  sind alle Diagonaleinträge rein imaginär, somit auch ihre Summe  $\text{tr } A(t) \in i\mathbb{R}$ . Dank Liouville gilt  $\det Y(t) \in e^{i\mathbb{R}} = \mathbb{S}^1$ .  
 ☺ Letzteres wissen wir aus der Linearen Algebra: Aus  $E = \bar{B}^T B$  folgt  $1 = \det E = \det(\bar{B}^T B) = \det(\bar{B}^T) \det(B) = |\det(B)|^2$ , also  $B \in \mathbb{S}^1$ .  
 ☺ Orthogonale und unitäre Matrizen sind sehr nützlich, insbesondere leicht invertierbar. Jede solche zusätzliche Information ist wertvoll zur Lösung von DGSystemen, sei es zur Probe oder zur Berechnung:  
 Im  $\mathbb{R}^2$  folgt aus einer Lösungsspalte  $y_1(t)$  die zweite  $y_2(t) = \circlearrowleft y_1(t)$ .  
 Im  $\mathbb{R}^3$  folgt aus zwei Spalten  $y_1(t), y_2(t)$  die dritte  $y_3(t) = y_1(t) \times y_2(t)$ .

**Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen** O369  
Ausführung

**Satz O3O: Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen**  
 Wie zuvor sei  $A: I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  stetig und  $W: I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  die Fundamentallösung zu  $W'(t) = A(t)W(t)$  mit  $W(t_0) = E$ .

(1) Zur Startmatrix  $Y_0 \in \mathbb{K}^{n \times n}$  lösen wir die Matrix-Differentialgleichung

$$Y'(t) = A(t)Y(t) \quad \text{mit} \quad Y(t_0) = Y_0.$$

Diese hat genau eine Lösung  $Y: I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ , nämlich  $Y(t) = W(t)Y_0$ . Somit hat die Differentialgleichung  $Y' = AY$  als Lösungsmenge  $L_0 = \{WY_0 \mid Y_0 \in \mathbb{K}^{n \times n}\}$  einen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum der Dimension  $n^2$ .  
 (2) Zum Startvektor  $y_0 \in \mathbb{K}^n$  lösen wir die Vektor-Differentialgleichung

$$y'(t) = A(t)y(t) \quad \text{mit} \quad y(t_0) = y_0.$$

Diese hat genau eine Lösung  $y: I \rightarrow \mathbb{K}^n$ , nämlich  $y(t) = W(t)y_0$ . Somit hat die Differentialgleichung  $y' = Ay$  als Lösungsmenge  $L_0 = \{Wy_0 \mid y_0 \in \mathbb{K}^n\}$  einen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum der Dimension  $n$ .

**Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen** O370  
Ausführung

Zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen können wir an den allgemeinen Satz appellieren (O1B / O2A). In der speziellen Situation eines linearen DGSystems (O3B / O3I) kennen wir zudem die explizite Fundamentalmatrix  $W(t)$  und können damit alles direkt nachrechnen. . .

**Existenz:** Für  $Y(t) = W(t)Y_0$  gilt der Startwert  $Y(t_0) = Y_0$  sowie

$$Y'(t) = W'(t)Y_0 = A(t)W(t)Y_0 = A(t)Y(t).$$

**Eindeutigkeit:** Angenommen  $Y'(t) = A(t)Y(t)$  und  $Y(t_0) = Y_0$ . Für  $t \in I$  setzen wir  $F(t) := W(t)^{-1}Y(t)$ . Nach Produktregel gilt

$$F'(t) = [-W(t)^{-1}A(t)]Y(t) + W(t)^{-1}[A(t)Y(t)] = 0$$

Aus  $F(t_0) = Y_0$  und  $F' = 0$  folgt  $F(t) = Y_0$  für alle  $t \in I$ . Also

$$W(t)^{-1}Y(t) = Y_0 \quad \Rightarrow \quad Y(t) = W(t)Y_0$$

☺ Somit hat jede Lösung des AWP die im Satz genannte Form. Die Aussage für  $y = Wy_0$  rechnet man wörtlich genauso nach.

**Dimension des Lösungsraumes** O371  
Ausführung

☺ Die Dimension sehen wir direkt so: Jeder Startwert  $y_0 \in \mathbb{K}^n$  legt die Lösung  $y$  eindeutig fest, also haben wir genau  $n$  Freiheitsgrade.

**Ausführlich:** Wir erhalten zueinander inverse, lineare Abbildungen

$$\begin{aligned} \Phi: \mathbb{K}^n &\rightarrow L_0: y_0 \mapsto W y_0, \\ \Psi: L_0 &\rightarrow \mathbb{K}^n: y \mapsto y(t_0). \end{aligned}$$

Für jeden Startvektor  $y_0 \in \mathbb{K}^n$  gilt dabei

$$y_0 \xrightarrow{\Phi} W y_0 \xrightarrow{\Psi} W(t_0) y_0 = y_0 \quad \text{dank} \quad W(t_0) = E.$$

Für jede Lösung  $y \in L_0$  gilt umgekehrt

$$y \xrightarrow{\Psi} y(t_0) \xrightarrow{\Phi} W y(t_0) = y \quad \text{dank Eindeutigkeit der Lösung.}$$

Dies zeigt  $L_0 \cong \mathbb{K}^n$ , insbesondere  $\dim_{\mathbb{K}}(L_0) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$ .

Der Satz O3O liefert explizite Formeln und garantiert die Eindeutigkeit der Lösung. Wir folgern hieraus insbesondere die Dimension des Lösungsraumes. Für einfache  $A(t)$  können wir zudem  $W(t)$  explizit berechnen. Damit ist jedes homogene lineare DGSystem im Prinzip gelöst.

☺ Die nötigen Rechnungen vereinfachen wir im nächsten Kapitel.

**Zwischenbilanz zu linearen DGSystemen** O372  
Ausführung

Mit unseren Werkzeugen können wir die beiden Grundprobleme lösen:  
 Ein **homogenes lineares DGSystem** erster Ordnung ist von der Form

$$y'(t) = A(t)y(t).$$

Gegeben ist hierzu eine stetige **Koeffizientenmatrix**  $A: I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ . Iterierte Integrale O3I liefern die Fundamentallösung  $W: I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ . Jede vektorwertige Lösung  $y: I \rightarrow \mathbb{K}^n$  hat die Form  $y(t) = W(t)y_0$ . Die Lösungsmenge  $L_0 = \{Wy_0 \mid y_0 \in \mathbb{K}^n\}$  ist ein  $n$ -dim. Vektorraum.  
 Ein **inhomogenes lineares DGSystem** ist von der Form

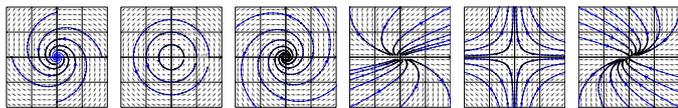
$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t).$$

Gegeben ist hier neben  $A: I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  ein stetiger **Störterm**  $b: I \rightarrow \mathbb{K}^n$ . Variation der Konstanten (O3D) liefert eine Partikulärlösung  $y_b: I \rightarrow \mathbb{K}^n$ . Somit hat die Differentialgleichung  $y' = Ay + b$  als Lösungsmenge  $L_b = \{y_b + Wy_0 \mid y_0 \in \mathbb{K}^n\}$  einen affinen Raum der Dimension  $n$ .

☺ Die nötigen Rechnungen vereinfachen wir im nächsten Kapitel.

Kapitel P

Autonome Systeme,  
Gleichgewicht und Stabilität



Wie ist es möglich, daß die Mathematik, letztlich doch ein Produkt menschlichen Denkens unabhängig von der Erfahrung, den wirklichen Gegebenheiten so wunderbar entspricht?

Albert Einstein (1879–1955), *Geometrie und Erfahrung* (1921)

Inhalt dieses Kapitels P

- Lineare DGSysteme mit konstanten Koeffizienten
  - Gekoppelte Oszillatoren und stehende Wellen
  - Lösungen mittels Eigenvektoren und Eigenfunktionen
  - Lösungen mittels Hauptvektoren und Hauptfunktionen
  - Von komplexen zu reellen Lösungen
- Gleichgewichtslagen und In/Stabilität von Fixpunkten
  - Linearisierung um Fixpunkte und In/Stabilität
  - Räuber-Beute-Modell nach Lotka–Volterra
  - Stabilitätsanalyse nach Lyapunov
  - Hamiltonsche Dynamik und Stabilität
- Fazit: Differentialgleichungssysteme
  - Zusammenfassung und Verständnisfragen
  - Reduktion der Ordnung und Methodenvergleich
  - Beispiele zur Dynamik um Fixpunkte und In/Stabilität
  - Invariante Mengen dank Tangentialbedingung

Lineare DGSysteme mit konstanten Koeffizienten

Differentialgleichungen sind die Sprache der Naturgesetze.

Im vorigen Kapitel O haben wir dazu Differentialgleichungssysteme der Form  $x'(t) = f(t, x(t))$  mit Anfangsdaten  $x(t_0) = x_0$  untersucht: Gibt es immer eine Lösungsfunktion  $x$ ? nur eine? oder mehrere?

Der **Existenz- und Eindeigkeitssatz** O1B antwortet umfassend: Es genügt, dass  $f$  stetig differenzierbar ist. Hoch lebe die Analysis! Nachdem Existenz- und Eindeutigkeit geklärt sind, wenden wir uns der praktischen Berechnung zu: Wie finden wir eine Lösung? gar alle?

Für **lineare Differentialgleichungssysteme**  $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$  haben wir eine vollständige Lösungstheorie. Der Struktursatz O3B sagt: Die Lösungsmenge ist ein **linearer / affiner Raum** der Dimension  $n$ . Im homogenen Fall  $b = 0$  suchen wir also eine **Basis** der Länge  $n$ .

Für **konstante Koeffizienten**  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  ist die Lösung besonders einfach: Es genügt, eine Basis des Raums  $\mathbb{K}^n$  aus **Eigenvektoren** der Matrix  $A$  zu finden. Falls dies nicht gelingt, so führen allgemeiner **Hauptvektoren** stets zum Ziel. Hoch lebe die Lineare Algebra!

Lineare DGSysteme von besonders einfacher Form

**Aufgabe:** Wie lösen Sie (geschickt) die folgenden linearen DGSysteme?

(1) Die Koeffizienten sind konstant und bilden eine **Diagonalmatrix**:

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \\ y_4'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix}$$

(2) Die Koeffizienten sind konstant und bilden einen **Jordan-Block**:

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \\ y_4'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix}$$

(3) Die Koeffizienten sind konstant und bilden eine **beliebige Matrix**:

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \\ y_4'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix}$$

Lineare DGSysteme von besonders einfacher Form

**Aufgabe:** Wie lösen Sie die folgenden linearen DGSysteme?

(4) Die Koeffizienten bilden eine **Diagonalmatrix**:

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \\ y_4'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ b_3(t) \\ b_4(t) \end{pmatrix}$$

(5) Die Koeffizienten bilden eine **obere Dreiecksmatrix**:

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \\ y_4'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) & a_{14}(t) \\ 0 & a_{22}(t) & a_{23}(t) & a_{24}(t) \\ 0 & 0 & a_{33}(t) & a_{34}(t) \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ b_3(t) \\ b_4(t) \end{pmatrix}$$

(6) Die Koeffizienten bilden eine **beliebige Matrix**:

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \\ y_4'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) & a_{14}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) & a_{24}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) & a_{34}(t) \\ a_{41}(t) & a_{42}(t) & a_{43}(t) & a_{44}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ b_3(t) \\ b_4(t) \end{pmatrix}$$

Langzeitverhalten und Stabilität von Lösungen

Anfangsdaten sind oft zufälligen kleinen Schwankungen unterworfen, etwa durch äußere **Störungen** oder ungenaue **Messdaten**. Hierzu untersucht die **Stabilitätstheorie** die Auswirkung von Störungen auf dynamische Systeme, insbesondere um Gleichgewichtszustände.

Zur Vereinfachung betrachten wir **autonome Systeme**  $x'(t) = f(x(t))$ ; hier hängt also die rechte Seite  $f(x)$  nicht explizit von der Zeit  $t$  ab. Ein **Fixpunkt**  $x_0$  (Ruhelage) zeichnet sich durch  $f(x_0) = 0$  aus: Bei Start in  $x(t_0) = x_0$  verharrt das System in dieser Ruhelage.

Die Ruhelage  $x_0$  ist **instabil**, wenn eine zufällige kleine Störung im weiteren zeitlichen Verlauf immer größer wird und von  $x_0$  wegführt. Sie ist (asymptotisch) **stabil**, wenn kleine Störungen beschränkt bleiben (bzw. abklingen und das System langfristig in die Ruhelage zurückkehrt).

**Kleine Auslenkungen**  $x(t) = x_0 + u(t)$  aus der Ruhelage befolgen in erster Näherung  $u(t) = A u'(t)$  mit Jacobi-Matrix  $A = f'(x_0) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ , ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten! Genau hierdurch erhalten lineare DGSysteme ihre zentrale Bedeutung.

Lineare DGSysteme von besonders einfacher Form

**Lösung:** (1) Dieses DGSystem entkoppelt zu  $n$  eindimensionalen DG  $y_k'(t) = \lambda_k y_k(t)$ . Die Lösungen sind  $y_k(t) = c_k e^{\lambda_k t}$  mit  $c_k \in \mathbb{K}$  beliebig, also  $y(t) = \sum_{k=1}^n c_k u_k(t)$  mit den **Eigenfunktionen**  $u_k(t) = e^{\lambda_k t}$ . (P1B)

(2) Dieses DGSystem ist zwar nicht entkoppelt wie (1), doch wir können es ebenso rekursiv lösen: Die letzte Gleichung ergibt  $y_4(t) = c_4 e^{\lambda t}$  für  $y_4' = \lambda y_4$ . Damit finden wir  $y_3(t) = (c_4 t + c_3) e^{\lambda t}$  für  $y_3' = \lambda y_3 + y_4$ , dann  $y_2(t) = (c_4 t^2/2 + c_3 t + c_2) e^{\lambda t}$  für  $y_2' = \lambda y_2 + y_3$ , und damit schließlich  $y_1(t) = (c_4 t^3/3! + c_3 t^2/2 + c_2 t + c_1) e^{\lambda t}$  für  $y_1' = \lambda y_1 + y_2$ . Insgesamt also  $y(t) = \sum_{k=1}^n c_k u_k(t)$  mit  $u_k(t) = e^{\lambda t} [c_k + t c_{k-1} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} c_1]$ . Diese Lösungen  $u_1, u_2, u_3, \dots$  nennen wir **Hauptfunktionen**. (P1E)

(3) Für jede Lösung gilt  $y(t) = e^{A(t-t_0)} y_0$  mit  $y(t_0) = y_0 \in \mathbb{K}^n$ . (O3H) Die Matrix-Exponentialfunktion (O3G) ist jedoch mühsam zu berechnen.

Effizienter: Mit Eigenvektoren P1A und Hauptvektoren P1C führen wir das allgemeine Problem (3) zurück auf die einfachen Fälle (1) und (2).

Das ist unser Ziel in §P1: Jede Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  lässt sich aufbauen aus Jordan-Blöcken (2) mittels einer Basis aus Hauptvektorketten (P1D).

Lineare DGSysteme von besonders einfacher Form

**Lösung:** (4) Dieses DGSystem  $y'(t) = A(t)y(t) + b(t)$  entkoppelt zu  $n$  eindimensionalen Differentialgleichungen  $y_k'(t) = a_{kk}(t)y_k(t) + b_k(t)$ . Diese können wir bereits lösen, etwa dank der Lösungsformel M2E.

(5) Dieses DGSystem ist zwar nicht entkoppelt wie (4), doch wir können es rekursiv lösen: Die letzte Gleichung  $y_4'(t) = a_{44}(t)y_4(t) + b_4(t)$  lösen wir dank M2E. Genauso können wir nun  $y_3'(t) = a_{33}(t)y_3(t) + \dots$  lösen, dann  $y_2'(t) = a_{22}(t)y_2(t) + \dots$  und schließlich  $y_1'(t) = a_{11}(t)y_1(t) + \dots$

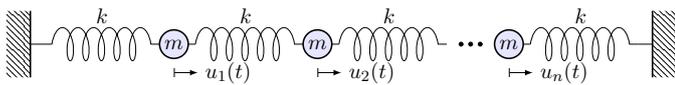
(6) Die allgemeine Konstruktion O3I liefert eine Fundamentallösung für das homogene DGSystem  $Y'(t) = A(t)Y(t)$ . Variation der Konstanten O3D löst dann das inhomogene DGSystem  $Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$ .

Das Problem ist also konstruktiv lösbar. Die Lösung ist eindeutig. (O3O) Die in O3I benötigten Rechnungen sind jedoch meist sehr aufwändig. Für kommutierende Matrizen O3J haben wir  $Y(t) = \exp(\int_{\tau=t_0}^t A(\tau) d\tau)$ .

Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten (3) sind der einfachste Fall. Die Integration tritt hierbei in den Hintergrund, die Lösung gelingt uns allein dank linearer Algebra wie in (1) und (2).

Wir untersuchen die Ausbreitung einer Welle, zum Beispiel einer Druck- oder Schallwelle, zunächst als diskretes, endlich-dimensionales Modell: mit Federn verbundene Massenpunkte. In diesem schönen Beispiel können wir alles explizit berechnen und anschaulich interpretieren. Zudem können wir unsere Methoden der linearen Algebra und Analysis erproben und schärfen. Anschließend extrahieren wir die zentrale Idee: Eigenvektoren und Eigenfunktionen (P1A).

**Aufgabe:** Formulieren und lösen Sie folgendes dynamische System:



Linear sind  $n$  Massen  $m > 0$  durch  $n + 1$  Federn  $k > 0$  verbunden.

- (1) Formulieren Sie das Differentialgleichungssystem erster Ordnung.
- (2) Welche Struktur hat der Lösungsraum? („Form“ und „Größe“)
- (3) Finden Sie alle Lösungen zum Produktansatz  $u_j(t) = e^{i\omega t} e^{i\alpha j}$ . Auch später bei PDE nützt diese Trennung der Variablen (R113).
- (4) Gewinnen Sie hieraus eine reelle Basis des Lösungsraumes. Wie können Sie garantieren, wirklich eine Basis gefunden zu haben?

**Lösung:** (1) Auslenkung  $u_j(t) \in \mathbb{R}$  aus der Ruhelage, lineare Rückstellkraft  $F_j = k(u_{j+1} - u_j) + k(u_{j-1} - u_j)$ , Newtons Bewegungsgesetz  $F_j = m\ddot{u}_j$ . Mit  $c^2 := k/m$  gilt

$$\ddot{u}_j(t) = c^2 [u_{j-1}(t) - 2u_j(t) + u_{j+1}(t)] \quad \text{mit} \quad u_0(t) = u_{n+1}(t) = 0.$$

Dies gilt für jeden der Massenpunkte  $j = 1, \dots, n$  im Inneren der Kette. Randbedingungen: Die beiden Enden  $u_0 = u_{n+1} = 0$  sind hierbei fixiert. Anfangswerte: Position  $u_j(0)$  und Geschwindigkeit  $\dot{u}_j(0)$  für  $j = 1, \dots, n$ . Diese **Bewegungsgleichung** ist zweiter Ordnung in  $n$  Unbekannten. Wir reduzieren sie äquivalent zu erster Ordnung in  $2n$  Unbekannten:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \ddot{u}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & E_n \\ c^2 B_n & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{pmatrix}$$

Mit  $y = (u, \dot{u})$  ist dies eine homogene lineare Differentialgleichung  $\dot{y}(t) = A y(t)$  mit der angegebenen Koeffizientenmatrix  $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ . Hier ist  $0_n$  die  $(n \times n)$ -Nullmatrix und  $E_n$  die  $(n \times n)$ -Einheitsmatrix.

Die **Bandmatrix**  $B = B_n$  kodiert hierbei die geometrische Anordnung:

$$B_n := \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad A := \begin{pmatrix} 0 & E \\ c^2 B & 0 \end{pmatrix}$$

(2) Wir suchen  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  mit  $\dot{y}(t) = A y(t)$ . Struktursatz O3B: Die Lösungsmenge ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum der Dimension  $2n$ .

😊 Dank Existenz und Eindeutigkeit gehört zu jedem Startzustand  $y(0) = (u(0), \dot{u}(0)) \in \mathbb{R}^{2n}$  genau eine Lösungsfunktion  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ .

Diese wichtige Information strukturiert und erleichtert unsere Rechnung: Wir müssen jetzt nur noch  $2n$  linear unabhängige Lösungen finden! Unser Produktansatz liefert uns  $2n$  unabhängige Lösungen; jede davon ist eine *stehende Welle*. Wo bleiben die erwarteten *wandernden Wellen*? Die Antwort ist ebenso einfach wie verblüffend: Je nach Startzustand  $y(0)$  erhalten wir eine Linearkombination stehender Wellen, ihre Summe ist eine wandernde Welle! Basiswechsel: Stehende Wellen und wandernde Wellen sind zwei mögliche Basen des Lösungsraums.

(3) Wir machen den Produktansatz  $u_j(t) = e^{i\omega t} e^{i\alpha j}$ . Einsetzen ergibt:  
 $-\omega^2 e^{i\omega t} e^{i\alpha j} = c^2 [e^{i\omega t} e^{i\alpha(j-1)} - 2e^{i\omega t} e^{i\alpha j} + e^{i\omega t} e^{i\alpha(j+1)}]$ , also  
 $\omega^2 = -c^2(e^{-i\alpha} - 2 + e^{i\alpha}) = -c^2(e^{-i\alpha/2} - e^{i\alpha/2})^2 = 4c^2 \sin^2(\alpha/2)$

Zu jedem  $\alpha \in \mathbb{R}$  erhalten wir  $\omega = \pm 2c \sin(\alpha/2)$ . Linearkombination der vier komplexen Lösungen  $e^{\pm i\omega t} e^{\pm i\alpha j}$  liefert uns vier reelle Lösungen

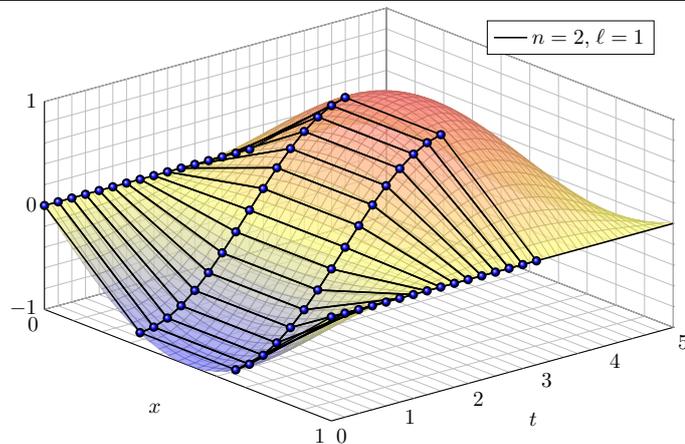
$$u_j(t) = \begin{cases} \sin(\alpha j) \cos(\omega t), & \cos(\alpha j) \cos(\omega t), \\ \sin(\alpha j) \sin(\omega t), & \cos(\alpha j) \sin(\omega t). \end{cases}$$

Randbedingungen  $u_0 = u_{n+1} = 0$ : Die Lösungen links erfüllen  $u_0(t) = 0$ , und  $u_{n+1}(t) = 0$  für  $\alpha = \ell\pi/(n+1)$  und  $\ell = 1, \dots, n$ . **Eigenfunktionen:**

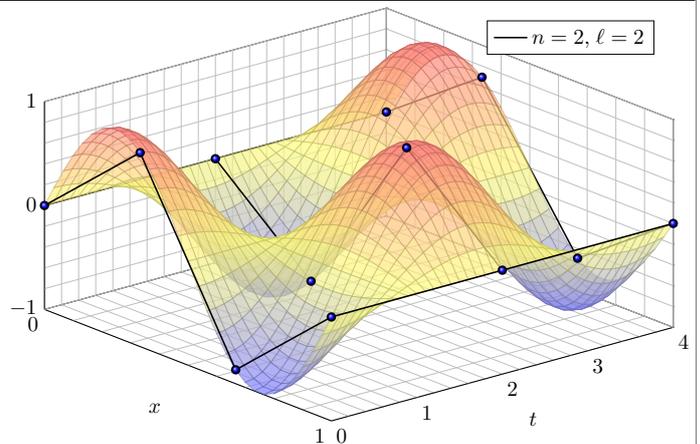
$$\left. \begin{matrix} u_{\ell,j}(t) = \sin(\alpha_\ell j) \cos(\omega_\ell t) \\ v_{\ell,j}(t) = \sin(\alpha_\ell j) \sin(\omega_\ell t) \end{matrix} \right\} \text{ mit } \begin{cases} \alpha_\ell = \ell\pi/(n+1), \\ \omega_\ell = 2c \sin(\alpha_\ell/2). \end{cases}$$

(4) Diese  $2n$  Lösungen sind linear unabhängig, also eine **Basis**!

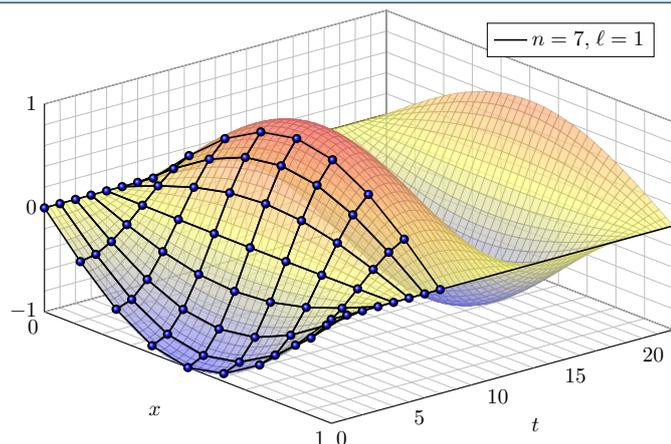
Wir haben je zwei unabhängige Eigenfunktionen gefunden,  $\partial_t^2 u_\ell = -\omega_\ell^2 u_\ell$  und  $\partial_t^2 v_\ell = -\omega_\ell^2 v_\ell$ . Das hilft: Die Eigenwerte  $\omega_1^2 < \dots < \omega_n^2$  sind verschieden. Dank Satz N2B sind die zugehörigen Eigenfunktionen linear unabhängig. Die zugehörigen Eigenräume bilden eine direkte Summe.



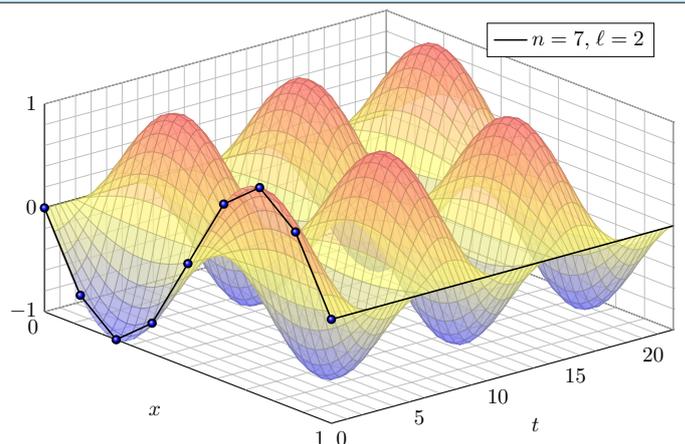
Das ist eine stehende Welle, mit Randbedingungen  $u_0(t) = u_{n+1}(t) = 0$ .



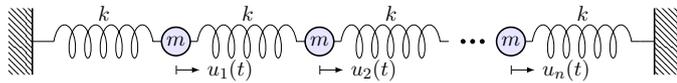
Auch dies ist eine stehende Welle; die Frequenz  $\omega_2 > \omega_1$  wird größer.



Dieses Phänomen kennt jedes Kind vom Seilspringen. Probieren Sie es!



😊 Von der Intuition zur Präzision: Nun können Sie alles ausrechnen!



**Lemma P1A:** Lösung eines DGSystems durch Eigenfunktionen  
Gegeben sei eine Matrix  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ . Zu lösen sei das DGSystem

$$y'(t) = Ay(t) \quad \text{für } y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n.$$

Eine **Eigenfunktion** zum Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{K}$  ist eine Lösung der Form

$$y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n \quad \text{mit } y(t) = e^{\lambda t} v$$

und  $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ . Wir vergleichen  $y'(t) = \lambda e^{\lambda t} v$  und  $Ay(t) = A e^{\lambda t} v$ .  
Somit ist  $y'(t) = Ay(t)$  äquivalent zur **Eigenvektorgleichung**  $Av = \lambda v$ .

😊 Hier zahlen sich erneut Ihre Kenntnisse der linearen Algebra aus: Eigenwerte und -vektoren von Matrizen beherrschen Sie seit der HM1. Mit dieser Technik lösen Sie nun auch Differentialgleichungssysteme!

**Aufgabe:** Sei  $V$  ein Vektorraum über dem Grundkörper  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ .

(1) Was ist ein Eigenvektor & -wert einer  $\mathbb{K}$ -linearen Abb.  $f: V \rightarrow V$ ?

(2) Finden Sie alle EV / EW der Ableitung  $\partial = d/dx: V_i \rightarrow V_i$  auf  $V_1 = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ ist beliebig oft differenzierbar}\}$ ,

$V_2 = \{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \mid n \in \mathbb{N}, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}\} \subseteq C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ ,

$V_3 = \{a_1x^{-1} + \dots + a_nx^{-n} \mid n \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}\} \subseteq C^\infty(\mathbb{R}_{>0}, \mathbb{K})$ .

Gibt es lineare Abbildungen ohne Eigenwert? mit unendlich vielen?

Gibt es solche extremen Fälle auch für lineare Abbildung  $f: V \rightarrow V$  auf einem endlich-dimensionalen  $\mathbb{C}$ -Vektorraum? oder  $\mathbb{R}$ -Vektorraum?

(3) Erklären Sie den Zusammenhang lineare Abbildung – Matrix sowie Eigenvektor / Eigenwert – Determinante – charakteristisches Polynom.

**Lösung:** (1) Ein **Eigenvektor** der  $\mathbb{K}$ -linearen Abbildung  $f: V \rightarrow V$  ist ein Vektor  $v \in V \setminus \{0\}$  mit der Eigenschaft  $f(v) = \lambda v$  für ein  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

Wir nennen dann  $\lambda$  einen **Eigenwert** von  $f$ , und  $v$  einen Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda$ . (Der Vektor  $v \neq 0$  bestimmt den Skalar  $\lambda$  eindeutig.)

(2) Beispiele: (a)  $V_1 = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$  ist ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Die Ableitung  $\partial: V_1 \rightarrow V_1$  ist eine  $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung. Für jede Zahl  $\lambda \in \mathbb{K}$  ist die Exponentialfunktion  $t \mapsto e^{\lambda t}$  ein Eigenvektor von  $\partial$  zum Eigenwert  $\lambda$ , denn  $\partial e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}$ . Vielfache sind die einzigen Lösungen (Satz M2D).

(b) Auch auf der Polynomalgebra  $\mathbb{K}[x] = \{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n\}$  ist die Ableitung  $\partial: \mathbb{K}[x] \rightarrow \mathbb{K}[x]$  eine  $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung. Eigenvektoren sind hier die konstanten Funktionen  $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ , denn es gilt  $\partial c = 0 = 0 \cdot c$ . Für jedes Polynom  $P \in \mathbb{K}[x]$  vom Grad  $n \geq 1$  hat die Ableitung  $\partial P$  den Grad  $n - 1$ , ist also sicher kein Vielfaches von  $P$ , also kein Eigenvektor.

(c) Auch auf der Algebra  $V_3 = \{a_1x^{-1} + \dots + a_nx^{-n}\}$  ist die Ableitung  $\partial: V_3 \rightarrow V_3$  eine  $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung. Diese hat keine Eigenvektoren!

Das sind lehrreiche und mahnende Beispiele: Es gibt also durchaus lineare Abbildungen ohne Eigenwert (c) oder mit unendlich vielen (a).

Solche Komplikationen sind ausgeschlossen für jede lineare Abbildung  $f: V \rightarrow V$  auf einem endlich-dimensionalen  $\mathbb{C}$ -Vektorraum oder einem ungerade-dimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum, wie folgende Rechnung zeigt.

(3) Ist  $V$  endlich-dimensional, so können wir eine Basis  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  wählen. Jede lineare Abbildung  $f: V \rightarrow V$  können wir dann durch ihre Matrix  $A =_{\mathcal{B}}(f) \in \mathbb{K}^{n \times n}$  darstellen. Für  $v = u_1v_1 + \dots + u_nv_n$  gilt  $f(v) = \lambda v$  genau dann, wenn  $Au = \lambda u$  gilt. Damit wird das Problem berechenbar! Für Matrizen können wir die **Determinante** nutzen:

$$\begin{aligned} \exists v \in V, v \neq 0: \quad & f(v) = \lambda v \\ \iff \exists u \in \mathbb{K}^n, u \neq 0: \quad & Au = \lambda u \\ \iff \exists u \in \mathbb{K}^n, u \neq 0: \quad & (A - \lambda E)u = 0 \\ \iff \exists u \in \mathbb{K}^n, u \neq 0: \quad & u \in \ker(A - \lambda E) \\ \iff \quad & \ker(A - \lambda E) \neq \{0\} \\ \iff \quad & \det(A - \lambda E) = 0 \end{aligned}$$

Für jede Matrix  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  ist  $p_A(x) := \det(A - xE) \in \mathbb{K}[x]$  ein Polynom vom Grad  $n$  über  $\mathbb{K}$ . Wir nennen es das **charakteristische Polynom**. Unsere Rechnung zeigt: Die Nullstellen des Polynoms  $p_A$  sind genau die Eigenwerte von  $A$ . Damit können wir EW und EV berechnen!

📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §6.

**Satz P1B:** Lösung eines DGSystems durch Eigenfunktionen

Gegeben sei eine Matrix  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ . Zu lösen sei das DGSystem

$$y'(t) = Ay(t) \quad \text{für } y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n.$$

Der  $\mathbb{K}$ -Vektorraum aller Lösungen  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n$  hat Dimension  $n$ . (O3B) Eigenvektoren  $v_1, \dots, v_\ell \in \mathbb{K}^n$  mit  $Av_k = \lambda_k v_k$  liefern Eigenfunktionen

$$y_1, \dots, y_\ell: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n \quad \text{mit } y_k(t) = e^{\lambda_k t} v_k.$$

Genau dann sind die Eigenfunktionen  $y_1, \dots, y_\ell$  **linear unabhängig**, wenn die Eigenvektoren  $v_1, \dots, v_\ell \in \mathbb{K}^n$  linear unabhängig sind. (O3B)

Genau dann bilden  $y_1, \dots, y_n$  eine **Basis** des Lösungsraums der DG, wenn die Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis des Vektorraums  $\mathbb{K}^n$  bilden.

Letzteres nennen wir ein **Fundamentalsystem** aus Eigenfunktionen.

⚠️ Eigenvektoren von  $A$  entsprechen Eigenfunktionen von  $y' = Ay$ . Dies sind jedoch verschiedene Objekte: Bitte sauber unterscheiden!

**Aufgabe:** Lösen Sie das Differentialgleichungssystem mit AWP

$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_1(t) + y_2(t), & y_1(0) = 1, \\ y_2'(t) = y_1(t) - y_2(t), & y_2(0) = 2. \end{cases}$$

(1) Welche Struktur hat der allgemeine Lösungsraum? (Form & Größe)

(2) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem aus Eigenfunktionen.

(3) Wie erhalten Sie hieraus eine allgemeine Lösung  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ?  
Stabilität: Wie verhalten sich die Lösungen für  $t \rightarrow \infty$ ?

(4) Lösen Sie damit speziell das Anfangswertproblem!

**Lösung:** (1) Dies ist eine homogene lineare Differentialgleichung:

$$y'(t) = Ay(t) \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Lösungen  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^2$  bilden einen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum der Dimension 2.

😊 Die Lösungen haben wir zuvor bereits durch scharfes Hinsehen gefunden (O309). Mit den Werkzeugen der linearen Algebra können wir diesen Trick jetzt endlich zu einer systematischen Methode ausbauen!

(2) Wir berechnen das **charakteristische Polynom** von  $A$ :

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \det(A - xE) = \det \begin{pmatrix} -1-x & 1 \\ 1 & -1-x \end{pmatrix} \\ &= (-1-x)^2 - 1 = x^2 + 2x = x(x+2) \end{aligned}$$

Die **Eigenwerte** sind demnach  $\lambda_1 = 0$  und  $\lambda_2 = -2$ .

Wir suchen **Eigenvektoren**. Zu  $\lambda_1 = 0$  lösen wir  $(A - \lambda_1 E)v_1 = 0$ :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} v_1 = 0, \quad \text{eine Lösung } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zu  $\lambda_2 = -2$  lösen wir entsprechend  $(A - \lambda_2 E)v_2 = 0$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v_2 = 0, \quad \text{eine Lösung } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten das **Fundamentalsystem** bzw. die **Fundamentalmatrix**:

$$y_1(t) = e^{0t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y_2(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \implies Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^{-2t} \\ 1 & -e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Beide Lösungen sind linear unabhängig, denn  $\det Y(t) = -2e^{-2t} \neq 0$ .

(3) **Allgemeine Lösung** unseres DGSystems  $y'(t) = Ay(t)$ :

$$y(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e^{-2t} \\ 1 & -e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = Y(t) c$$

(4) **Spezielle Lösung** zu den gegebenen Anfangsdaten:

$$y(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Zu lösen ist hierzu das LGS  $Y(0)c = y(0)$ , also  $c = Y(0)^{-1}y(0)$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Die gesuchte **Lösung des Anfangswertproblems** ist demnach:

$$y(t) = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 - e^{-2t} \\ 3 + e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Probe!  $y(0) = (1, 2)$ ,  $y_1' = -2e^{-2x} = -y_1 + y_2$ ,  $y_2' = 2e^{-2x} = y_1 - y_2$ .

**Von Eigenvektoren zu Hauptvektoren** P117

Eine Matrix  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  ist **diagonalisierbar** über  $\mathbb{K}$ , wenn es eine Basis  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  des  $\mathbb{K}^n$  aus Eigenvektoren gibt, also  $Av_k = \lambda_k v_k$ . (P1B)

**Beispiel:** Jede symmetrische / hermitesche Matrix ist diagonalisierbar! Bezüglich dieser Basis hat die Abbildung  $v \mapsto Av$  Diagonalgestalt:

$$\mathcal{B}(A)\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

Nicht jede Matrix ist diagonalisierbar! Typisch ist der **Jordan-Block**:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}, \quad B - \lambda E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es gibt nicht genug Eigenvektoren:  $\ker(B - \lambda) = \mathbb{K}e_1$  ist eindimensional. Stattdessen haben wir  $Be_k = \lambda e_k + e_{k-1}$ , also eine **Hauptvektorkette**:

$$0 \xleftarrow{B-\lambda} e_1 \xleftarrow{B-\lambda} e_2 \xleftarrow{B-\lambda} \dots \xleftarrow{B-\lambda} e_n$$

**Von Eigenvektoren zu Hauptvektoren** P118 Erläuterung

☺ Für jede Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  hat das charakteristische Polynom genau  $n$  Nullstellen in  $\mathbb{C}$ , also  $p_A(x) = \det(A - xE) = (\lambda_1 - x) \cdots (\lambda_n - x)$ .

☺ Sind zudem alle  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  verschieden, so ist  $A$  diagonalisierbar.

⚠ Bei mehrfachen Nullstellen müssen wir genauer hinschauen! [P127]

☺ Satz 11K: Für  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrisch bzw.  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  hermitesch sind alle EW reell, für jeden erreicht die geometrische Vielfachheit die algebraische, EV zu verschiedenen EW stehen senkrecht aufeinander, somit gibt es eine Orthonormalbasis des  $\mathbb{K}^n$  aus Eigenvektoren von  $A$ .

☹ Jordan-Block:  $p_B(x) = (\lambda - x)^n$  hat die  $n$ -fache Nullstelle  $\lambda$ . Der zugehörige Kern  $\ker(B - \lambda E) = \mathbb{C}e_1$  hat aber nur Dimension 1: Die geometrische Vielfachheit (1) ist kleiner als die algebraische ( $n$ ). Deshalb existiert keine Basis des  $\mathbb{C}^n$  aus Eigenvektoren von  $B$ !

Anders gesagt: Für die Matrix  $B$  existieren nicht genug Eigenvektoren, um eine Basis zu bilden. Mit der Verallgemeinerung zu Hauptvektoren können wir dieses Problem allgemein lösen. Die Matrix kommt zwar nicht in Diagonalform, wird aber immerhin so einfach wie möglich.

**Von Eigenvektoren zu Hauptvektoren** P119

**Definition P1C: Hauptvektoren**

Sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  eine Matrix und  $\lambda \in \mathbb{C}$  ein Skalar. Eine **Hauptvektorkette**

$$0 \xleftarrow{A-\lambda} v_1 \xleftarrow{A-\lambda} v_2 \xleftarrow{A-\lambda} \dots \xleftarrow{A-\lambda} v_\ell$$

besteht aus Vektoren  $0 \neq v_1, \dots, v_\ell \in \mathbb{C}^n$  mit  $(A - \lambda)v_k = v_{k-1}$ .

Die Vektoren  $v_1, v_2, \dots, v_\ell$  sind linear unabhängig. Wie Eigenvektoren sind auch Hauptvektoren zu verschiedenen Eigenwerten unabhängig.

**Satz P1D: Jordan-Basis einer Matrix**

(1) Zu  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  existiert eine Basis  $\mathcal{B}$  des  $\mathbb{C}^n$  aus Hauptvektorketten.

(2) Bezüglich dieser Basis  $\mathcal{B}$  besteht  $v \mapsto Av$  aus Jordan-Blöcken:

$$\mathcal{B}(A)\mathcal{B} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_m \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad B_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

**Von Eigenvektoren zu Hauptvektoren** P120 Erläuterung

Wir nennen  $v_k$  einen **Hauptvektor  $k$ -ter Stufe**. Das bedeutet:

$$(A - \lambda E)^k v_k = 0 \quad \text{aber} \quad v_1 = (A - \lambda E)^{k-1} v_k \neq 0$$

Die Eigenvektoren  $v_1$  von  $A$  sind genau die **Hauptvektoren 1. Stufe**:

$$(A - \lambda E)^1 v_1 = 0 \quad \text{aber} \quad v_1 = (A - \lambda E)^0 v_1 \neq 0$$

Ein Vektor  $v_2$  mit  $(A - \lambda E)v_2 = v_1$  ist dann **Hauptvektor 2. Stufe**. Ein Vektor  $v_3$  mit  $(A - \lambda E)v_3 = v_2$  ist dann **Hauptvektor 3. Stufe**, usw. Daher heißen Hauptvektoren auch **verallgemeinerte Eigenvektoren**.

Jeder  $k$ -fache Eigenwert  $\lambda$  erlaubt mindestens einen und höchstens  $k$  linear unabhängige Eigenvektoren; alle Möglichkeiten können auftreten. Hingegen existieren zu  $\lambda$  immer  $k$  linear unabhängige Hauptvektoren! Genauer besagt Satz P1D: Es gibt eine Basis aus Hauptvektorketten.

☐ Zur Vertiefung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §Z.4. Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper, etwa  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ , und  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  eine quadratische Matrix über  $\mathbb{K}$ . Dann gelten folgende Implikationen: Das char. Polynom hat  $n$  verschiedene Nullstellen in  $\mathbb{K} \Rightarrow$  Die Matrix ist über  $\mathbb{K}$  diagonalisierbar  $\Leftrightarrow$  Es existiert eine Basis des  $\mathbb{K}^n$  aus Eigenvektoren  $\Rightarrow$  Das char. Polynom hat  $n$  Nullstellen in  $\mathbb{K} \Leftrightarrow$  Die Matrix ist über  $\mathbb{K}$  trigonalisierbar  $\Leftrightarrow$  Die Matrix ist über  $\mathbb{K}$  jordanisierbar  $\Leftrightarrow$  Es existiert eine Jordan-Basis des  $\mathbb{K}^n$  aus Hauptvektorketten von  $A$ . Für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  gilt Letzteres immer.

**Algorithmus zur Berechnung von Hauptvektoren** P121 Ausführung

Sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  eine reelle / komplexe  $n \times n$ -Matrix. Das charakteristische Polynom  $p_A(x) = \det(A - xE) \in \mathbb{C}[x]$  zerfällt über  $\mathbb{C}$  in Linearfaktoren:

$$p_A(x) = \pm (x - \lambda_1)^{n_1} \cdots (x - \lambda_\ell)^{n_\ell}$$

mit  $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell \in \mathbb{C}$  und  $n_1, \dots, n_\ell \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ; hierbei gelte  $\lambda_i \neq \lambda_j$  für  $i \neq j$ . Daher existiert zu  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  eine Basis des  $\mathbb{C}^n$  aus Hauptvektorketten.

Ebenso: Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine reelle Matrix, und das charakteristische Polynom  $p_A(x) = \det(A - xE) \in \mathbb{R}[x]$  zerfalle in Linearfaktoren über  $\mathbb{R}$ . Dann existiert zu  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Basis des  $\mathbb{R}^n$  aus Hauptvektorketten. (Meist müssen wir hierzu jedoch von  $\mathbb{R}$  zu  $\mathbb{C}$  übergehen.)

Wir berechnen im Folgenden Hauptvektoren zu jedem Eigenwert  $\lambda = \lambda_k$ . Zusammen liefern diese die gewünschte Basis aus Hauptvektorketten. Dieser Algorithmus beweist somit die Richtigkeit des obigen Satzes P1D. (Den Nachweis der Richtigkeit aller Schritte führen wir hier nicht.)

Das Verfahren besteht aus zwei Schritten: Im ersten Schritt finden wir stufenweise eine Basis aus Hauptvektoren der Stufe  $s = 1, 2, \dots, r$ . Im zweiten Schritt ordnen wir diese Hauptvektoren dann zu Ketten.

**Algorithmus zur Berechnung von Hauptvektoren** P122 Ausführung

$\dots \quad \dots \quad b_{k_r}$	Hauptvektoren $r$ . Stufe
$\dots \quad \dots \quad \dots \quad b_{k_2}$	Hauptvektoren 2. Stufe
$b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad \dots \quad b_{k_1}$	Eigenvektoren (1. Stufe)

**1. Schritt: Wir finden stufenweise eine Basis aus Hauptvektoren.**

Bestimme eine Basis  $b_1, \dots, b_{k_1}$  des Kerns  $V_1 = \ker(A - \lambda E)$ . Im Falle  $k_1 = n_1$  haben wir eine Basis aus Eigenvektoren. Andernfalls:

Ergänze zu einer Basis  $b_1, \dots, b_{k_2}$  des Kerns  $V_2 = \ker(A - \lambda E)^2 \supseteq V_1$ . Im Falle  $k_2 = n_1$  haben wir eine Basis aus Hauptvektoren. Andernfalls:

Ergänze zu einer Basis  $b_1, \dots, b_{k_r}$  des Kerns  $V_r = \ker(A - \lambda E)^r \supseteq V_{r-1}$ . Schließlich gilt  $k_r = n_1$  und wir haben eine Basis aus Hauptvektoren.

**Algorithmus zur Berechnung von Hauptvektoren** P123 Ausführung

$v_1^r \quad \dots \quad v_{m_r}^r$	Hauptvektoren $r$ . Stufe
$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad (A - \lambda E)$	
$v_1^2 \quad \dots \quad \dots \quad v_{m_2}^2$	Hauptvektoren 2. Stufe
$v_1^1 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad v_{m_1}^1$	Eigenvektoren (1. Stufe)

**2. Schritt: Wir ordnen unsere Hauptvektoren zu Ketten.**

Wir bilden eine Basis sodass  $(A - \lambda E)v_i^s = v_i^{s-1}$  in jeder Stufe  $s \geq 2$ .

Ausführlich gehen wir nach obigem Schema von oben nach unten vor: Die oberste Stufe  $v_1^r, \dots, v_{m_r}^r$  wurde im 1. Schritt bereits berechnet. Ist  $v_1^{s+1}, \dots, v_{m_{s+1}}^{s+1}$  in Stufe  $s+1$  bereits berechnet, so erhalten wir  $v_i^s := (A - \lambda E)v_i^{s+1}$  und ergänzen zur Basis  $v_1^s, \dots, v_{m_s}^s$  der Stufe  $s$ .

**Algorithmus zur Berechnung von Hauptvektoren** P124 Ausführung

Die Abbildung  $(A - \lambda E)$  bildet die Stufe  $s+1$  injektiv in die Stufe  $s$  ab. Insbesondere ist demnach die Stufe  $s+1$  niemals breiter als die Stufe  $s$ .

Im 2. Schritt sind die  $v_1^{s+1}, \dots, v_{m_{s+1}}^{s+1}$  in Stufe  $s+1$  linear unabhängig, und somit auch die zugehörigen Bilder  $v_i^s := (A - \lambda E)v_i^{s+1}$  in Stufe  $s$ .

Es genügt, diese Vektoren in die bestehende Basis einzutauschen gemäß dem Basisaustauschlemma von Steinitz. Anders gesagt:

Wir wählen einen Hauptvektor höchster Stufe und bilden seine Kette. Wir ergänzen durch linear unabhängige Ketten bis eine **Basis des Hauptraumes**  $H_\lambda = \ker(A - \lambda E)^r$  aus Hauptvektorketten gefunden ist. Diese Konstruktion führen wir für jeden Hauptraum  $H_{\lambda_k} = \ker(A - \lambda_k)^{r_k}$  aus und erhalten so die ersehnte **Jordan-Basis** zu unserer Matrix  $A$ .

☺ Der Begriff und die Berechnung von Hauptvektoren mag zunächst kompliziert erscheinen, er ist aber kaum komplizierter als der Begriff und die Berechnung von Eigenvektoren. Hier lohnt sich erneut Ihre langfristige Investition in die mathematischen Grundlagen der HM1&2!

☐ Für Ausführungen und Beispiele siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §Z.4.

**Satz P1E:** Lösung eines DGSystems durch Hauptfunktionen  
 Vorgelegt sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Zu lösen sei das DGSystem  $y'(t) = A y(t)$ .  
 Hierzu sei  $0 \xleftarrow{A-\lambda} v_1 \xleftarrow{A-\lambda} v_2 \xleftarrow{A-\lambda} \dots \xleftarrow{A-\lambda} v_\ell$  eine **Hauptvektorkette**.  
 (1) Wir definieren die zugehörigen **Hauptfunktionen**  $y_1, \dots, y_\ell$  durch

$$y_k(t) = e^{\lambda t} \left[ v_k + t v_{k-1} + \frac{t^2}{2} v_{k-2} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} v_1 \right].$$

Die Hauptvektoren  $v_1, \dots, v_\ell \in \mathbb{C}^n$  sind linear unabhängig, daher auch die zugehörigen Hauptfunktionen  $y_1, \dots, y_\ell: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ , denn  $y_k(0) = v_k$ .  
 (2) Wie die Hauptvektoren bilden auch die Hauptfunktionen eine Kette:

$$\begin{aligned} 0 \xleftarrow{A-\lambda} y_1 \xleftarrow{A-\lambda} y_2 \xleftarrow{A-\lambda} \dots \xleftarrow{A-\lambda} y_\ell & \text{ also } Ay_k = \lambda y_k + y_{k-1}, \\ 0 \xleftarrow{\partial-\lambda} y_1 \xleftarrow{\partial-\lambda} y_2 \xleftarrow{\partial-\lambda} \dots \xleftarrow{\partial-\lambda} y_\ell & \text{ also } y'_k = \lambda y_k + y_{k-1}. \end{aligned}$$

Insbesondere lösen  $y_1, \dots, y_\ell: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  unser DGSystem  $y'(t) = A y(t)$ .

**Anwendungsbeispiel zu Hauptfunktionen** P127

**Aufgabe:** Finden Sie ein Fundamentalsystem aus Hauptfunktionen zu  
 (1)  $y' = A y$  mit  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  und (2)  $y' = B y$  mit  $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ .  
 Wie verhalten sich die Lösungen für  $t \rightarrow \infty$  und  $\lambda < 0$ ?  $\lambda > 0$ ?  $\lambda = 0$ ?  
**Lösung:** (1) Die Matrix  $A$  hat den doppelten Eigenwert  $\lambda$ .  
 Eigenvektoren bestimmen wir durch  $(A - \lambda)v = 0$ :  
 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v = 0$ , mögliche Lösungen  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .  
 Wir erhalten das Fundamentalsystem bzw. die Fundamentalmatrix:  
 $y_1(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $y_2(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \implies Y(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$   
 ☺ Jede andere Basis  $(v_1, v_2)$  des  $\mathbb{C}^2$  wäre hier ebenso möglich. Sie führt zum Fundamentalsystem  $y_1(t) = e^{\lambda t} v_1$ ,  $y_2(t) = e^{\lambda t} v_2$ .  
 ⚠ Eigenvektoren von  $A$  entsprechen Eigenfunktionen von  $y' = A y$ , aber es sind verschiedene Objekte: Bitte sauber unterscheiden!

**Von komplexen zu reellen Lösungen** P129 Erläuterung

Zur Vereinfachung haben wir bisher alles komplex betrachtet. Vorteil: Jede Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  hat  $n$  Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ .  
 Für eine reelle Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  werden wir im Allgemeinen nicht  $n$  reelle Eigenwerte finden: Wir brauchen auch komplexe Eigenwerte!  
 Für reelle DGSysteme wollen wir aber meist nur reelle Lösungen! Den genial-einfachen Zusammenhang können wir leicht klären:  
**Lemma P1F:** Konjugation von Lösungen  
 Gegeben sei die Systemmatrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Zu lösen sei das DGSystem

$$y'(t) = A y(t).$$

Ist  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  Lösung von  $y' = A y$ , so ist  $\bar{y}$  Lösung von  $\bar{y}' = \bar{A} \bar{y}$ . Genau dann ist unsere Matrix reell, also  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , wenn  $\bar{A} = A$  gilt.  
 In diesem Fall ist mit  $y' = A y$  automatisch auch  $\bar{y}' = A \bar{y}$  eine Lösung.  
 Somit sind  $\text{Re } y = \frac{1}{2}(y + \bar{y})$  und  $\text{Im } y = \frac{1}{2i}(y - \bar{y})$  reelle Lösungen. Umgekehrt gilt  $\{y, \bar{y}\} = \{\text{Re } y \pm i \text{Im } y\}$ . Dies ist ein Basiswechsel!

**Anwendungsbeispiel: komplex und reell** P131

**Aufgabe:** Zu lösen sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} y'_1 = -2y_1 + 1y_2, & y_1(0) = 1, \\ y'_2 = -1y_1 - 2y_2, & y_2(0) = 2. \end{cases}$$

(1) Finden Sie ein komplexes Fundamentalsystem und (2) ein reelles.  
 (3) Stabilität: Wie verhalten sich die Lösungen für  $t \rightarrow \infty$ ?  
 (4) Lösen Sie schließlich das AWP.  
**Lösung:** In Matrix-Schreibweise gilt  $y' = A y$  mit  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ .  
 Das charakteristische Polynom der Matrix  $A$  ist:  
 $\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (-2-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 5$   
 Die Nullstellen sind  $\lambda_{1/2} = -2 \pm \sqrt{4-5} = -2 \pm i$ . Eigenvektoren?  
 Zu  $\lambda_1 = -2 + i$ :  $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} v_1 = 0$ , eine Lösung  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$   
 Zu  $\lambda_2 = -2 - i$ :  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} v_2 = 0$ , eine Lösung  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

☺ Ist  $A$  diagonalisierbar, so können wir unsere Differentialgleichungen vollständig entkoppeln (P1B): Wir finden eine Basis  $(v_1, \dots, v_n)$  des  $\mathbb{C}^n$  aus Eigenvektoren,  $A v_k = \lambda_k v_k$ . Diese liefert uns sofort eine Basis aus Eigenfunktionen  $y_1, \dots, y_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  mit  $y_k(t) = e^{\lambda_k t} v_k$ . (Satz P1B)  
 ☺ Ist  $A$  nicht diagonalisierbar, so doch immerhin noch jordanisierbar: Es existiert eine Basis des Raumes  $\mathbb{C}^n$  aus Hauptvektoren, und diese liefern eine Basis des Lösungsraumes  $L_0$  aus Hauptfunktionen.  
 ☺ Damit ist das zunächst schwierige analytische Problem, ein DGSystem  $y'(t) = A y(t)$  zu lösen, zurückgeführt auf das einfachere algebraische Problem, Hauptvektoren der Matrix  $A$  zu berechnen. Das ist zwar mitunter mühsam, aber letztlich Routinearbeit. Es kann insbesondere von Computer-Algebra-Systemen ausgeführt werden.  
 ☺ Wir erkennen hieran Stabilität und Langzeitverhalten der Lösungen: Für  $\text{Re}(\lambda) < 0$  gilt exponentielles Abklingen,  $|y_k(t)| \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ . Für  $\text{Re}(\lambda) > 0$  gilt exponentielles Wachstum,  $|y_k(t)| \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow \infty$ . Für  $\text{Re}(\lambda) = 0$  ist  $y_1$  beschränkt, aber  $y_2, \dots, y_\ell$  wachsen polynomiell.

**Anwendungsbeispiel zu Hauptfunktionen** P128

(2) Auch die Matrix  $B$  hat den doppelten Eigenwert  $\lambda$ . Eigenvektoren:  
 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_1 = 0$ , eine Lösung ist  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .  
 Wir suchen daher noch einen Hauptvektor  $v_2$  über  $v_1$ :  
 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_2 = v_1$ , eine Lösung ist  $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .  
 Wir erhalten das Fundamentalsystem bzw. die Fundamentalmatrix:  
 $y_1(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $y_2(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \implies Y(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$   
 ☺ Andere Wahlen sind möglich: Jeder Vektor  $v_1 = (a, 0)$  mit  $a \neq 0$  ist Eigenvektor, und jeder Vektor  $v_2 = (b, a)$  liegt darüber als Hauptvektor.  
 $y_1(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $y_2(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} at + b \\ a \end{pmatrix} \implies Y(t) = \begin{pmatrix} a e^{\lambda t} & (at + b) e^{\lambda t} \\ 0 & a e^{\lambda t} \end{pmatrix}$   
 ⚠ Hauptvektoren von  $A$  entsprechen Hauptfunktionen von  $y' = A y$ , aber es sind verschiedene Objekte: Bitte sauber unterscheiden!

**Von komplexen zu reellen Lösungen** P130 Erläuterung

**Satz P1G:** reelle Lösungen  
 Gegeben sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Zu lösen sei das DGSystem  $y'(t) = A y(t)$ .  
 Sei  $0 \xleftarrow{A-\lambda} v_1 \xleftarrow{A-\lambda} \dots \xleftarrow{A-\lambda} v_\ell$  eine Hauptvektorkette zu  $\lambda = \sigma + i\omega$ .  
 Dann ist  $0 \xleftarrow{A-\bar{\lambda}} \bar{v}_1 \xleftarrow{A-\bar{\lambda}} \dots \xleftarrow{A-\bar{\lambda}} \bar{v}_\ell$  eine Hauptvektorkette zu  $\bar{\lambda} = \sigma - i\omega$ .  
 Dank Basiswechsel P1F hat das DGSystem  $2\ell$  **reelle Lösungen**

$$\begin{aligned} \text{Re } y_k(t) &= e^{\sigma t} \text{Re} \left( e^{i\omega t} \left[ v_k + t v_{k-1} + \frac{t^2}{2} v_{k-2} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} v_1 \right] \right), \\ \text{Im } y_k(t) &= e^{\sigma t} \text{Im} \left( e^{i\omega t} \left[ v_k + t v_{k-1} + \frac{t^2}{2} v_{k-2} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} v_1 \right] \right). \end{aligned}$$

Im Falle  $\omega \neq 0$  sind diese  $2\ell$  Lösungen linear unabhängig. (Im Falle  $\omega = 0$  erhalten wir nur eine Kette von  $\ell$  linear unabhängigen Lösungen.)  
 ☺ Wir erkennen hieran Stabilität und Langzeitverhalten der Lösungen, wie oben erklärt, je nach Vorzeichen  $\sigma > 0$  oder  $\sigma < 0$  oder  $\sigma = 0$ .

**Anwendungsbeispiel: komplex und reell** P132

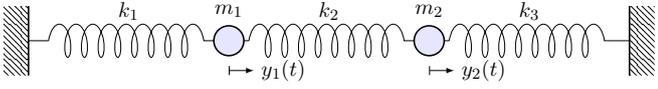
(1) Komplexes Fundamentalsystem des DGSystems:  
 $u_1(t) = e^{(-2+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ -\sin t + i \cos t \end{pmatrix}$ ,  $u_2(t) = e^{(-2-i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$   
 (2) Basiswechsel zu einem reellen Fundamentalsystem:  
 $y_1(t) = \text{Re } u_1(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$ ,  $y_2(t) = \text{Im } u_1(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$   
 (3) Die allgemeine reelle Lösung klingt exponentiell ab:  
 $y(t) = Y(t) c = e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$  mit  $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$   
 (4) Spezielle Lösung zu den gegebenen Anfangsdaten:  
 $y(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \implies y(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos t + 2 \sin t \\ 2 \cos t - \sin t \end{pmatrix}$ .  
 ☺ Dies löst das Anfangswertproblem. Machen Sie die Probe!

**Aufgabe:** Zu lösen sei folgende Bewegungsgleichung:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2+k_3}{m_2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

(1) Finden Sie ein komplexes Fundamentalsystem und (2) ein reelles.  
 (3) Stabilität: Wie verhalten sich die Lösungen für  $t \rightarrow \infty$ ?  
 (4) Lösen Sie schließlich das AWP  $y(0) = (2, 0, 0, 0)$ .

**Lösung:** Wir erkennen das Modell von zwei gekoppelten Oszillatoren:



Dieses System können wir nach obigem Schema lösen: char. Polynom, Eigenwerte, Eigenvektoren, ... Diese Daten müssen wir nicht mühsam neu berechnen, denn hier kennen wir die Lösung bereits! [Q109](#) [P101](#)

(1) Wir kennen ein Fundamentalsystem komplexer Eigenfunktionen:

$$e^{i\omega_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i\omega_1 \end{pmatrix}, \quad e^{-i\omega_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -i\omega_1 \end{pmatrix}, \quad e^{i\omega_2 t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ i\omega_2 \end{pmatrix}, \quad e^{-i\omega_2 t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -i\omega_2 \end{pmatrix}$$

Die Frequenzen sind hierbei  $\omega_1^2 = k_1/m$  und  $\omega_2^2 = (k_1 + 2k_2)/m$ . Diese Lösung beschert uns nebenbei die Eigenvektoren der Matrix  $A$ . Eigenwerte  $\pm i\omega_1$  und  $\pm i\omega_2$ , char. Polynom  $p_A(x) = (x^2 + \omega_1^2)(x^2 + \omega_2^2)$ .

(2) Wir erhalten ein Fundamentalsystem reeller Eigenfunktionen:

$$\begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t) \\ \cos(\omega_1 t) \\ -\omega_1 \sin(\omega_1 t) \\ -\omega_1 \sin(\omega_1 t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin(\omega_1 t) \\ \sin(\omega_1 t) \\ \omega_1 \cos(\omega_1 t) \\ \omega_1 \cos(\omega_1 t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\omega_2 t) \\ -\cos(\omega_2 t) \\ -\omega_2 \sin(\omega_2 t) \\ \omega_2 \sin(\omega_2 t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin(\omega_2 t) \\ -\sin(\omega_2 t) \\ \omega_2 \cos(\omega_2 t) \\ -\omega_2 \cos(\omega_2 t) \end{pmatrix}$$

(3) Für  $t \rightarrow \infty$  bleibt jede Lösung  $y = c_1 y_1 + \dots + c_4 y_4$  beschränkt.  
 (4) Das AWP  $y(0) = (2, 0, 0, 0)$  wird gelöst durch  $y(t) = y_1(t) + y_3(t)$ .

**Aufgabe:** (Klausur September 2013) Wir untersuchen das lineare Differentialgleichungssystem  $y'(t) = A y(t)$  mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad v_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \mp i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) Berechnen Sie die Vektoren  $Av_1, Av_2, Av_3, Av_4$  und schreiben Sie jeden als Linearkombination bezüglich der Basis  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ .  
 (2) Schreiben Sie die Abbildung  $A$  als Matrix  $B = {}_{\mathcal{B}}(A)_{\mathcal{B}}$  und lesen Sie das char. Polynom  $p_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)(x - \lambda_3)(x - \lambda_4)$  ab.  
 (3) Bestimmen Sie zu  $y'(t) = A y(t)$  ein reelles Fundamentalsystem  $y_1, y_2, y_3, y_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$  mit Anfangswerten  $y_1(0) = (1, 0, 0, 0) = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$  und  $y_2(0) = (0, 0, 1, 0) = \frac{1}{2}(v_1 - v_2)$  sowie  $y_3(0) = v_3$  und  $y_4(0) = v_4$ .  
 (4) Stabilität: Wenn Sie zufällig (stetig verteilt) einen Startvektor  $y(0) \in \mathbb{R}^4$  nahe Null wählen und die zugehörige Lösung von  $y'(t) = A y(t)$  verfolgen, wie verhält sich  $|y(t)|$  für  $t \rightarrow \infty$ ?

⚠ Es ist für diesen Aufgabentyp nicht sinnvoll, blind und stur nach Schema loszurechnen: char. Polynom, Eigenwerte, Eigenvektoren, ... Dieser lange Weg ist nötig, wenn Sie außer der Matrix nichts wissen. Diese Daten müssen Sie jedoch nicht mühsam neu berechnen, wenn alle wesentlichen Daten bereits vorliegen! Hierzu dienen (1) und (2).  
 😊 Es ist hier (wie fast immer im Leben) geschickter und effizienter, die bereits vorliegende Information zu verstehen und auszunutzen.  
 Zu (3): Hier können und sollen Sie unsere Lösungsformeln anwenden.  
 Zu (4): Der Startpunkt  $y(0) = 0$  ist ein Fixpunkt dieses dynamischen Systems, der weitere Verlauf ist offensichtlich  $y(t) = 0$  für alle  $t \geq 0$ . Anfangsdaten sind oft zufälligen kleinen Schwankungen unterworfen, etwa durch kleine äußere Störungen oder ungenaue Messdaten. Wir betrachten daher einen zufälligen Startwert  $y(0)$  nahe Null. Entscheidend ist das Langzeitverhalten von  $|y(t)|$  für  $t \rightarrow \infty$ :

- Gilt Abklingen  $|y(t)| \rightarrow 0$ ? sogar exponentiell?
- Gilt Beschränktheit gemäß  $0 < c_0 \leq |y(t)| \leq c_1 < \infty$ ?
- Gilt Wachstum  $|y_k(t)| \rightarrow \infty$ ? nur polynomiell? gar exponentiell?

**Lösung:** (1) Die vorgeschlagene Rechnung ergibt folgendes:

$$Av_1 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} +iv_1 \\ +0v_2 \\ +0v_3 \\ +0v_4 \end{cases}, \quad Av_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} -iv_1 \\ -iv_2 \\ +0v_3 \\ +0v_4 \end{cases}$$

$$Av_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 0v_1 \\ +0v_2 \\ +0v_3 \\ +0v_4 \end{cases}, \quad Av_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 0v_1 \\ +0v_2 \\ +1v_3 \\ +0v_4 \end{cases}$$

😊 Diese einfache Rechnung beschert uns wertvolle Informationen:

- Der Vektor  $v_1$  ist ein Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $+i$ .
- Der Vektor  $v_2$  ist ein Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $-i$ .
- Der Vektor  $v_3$  ist ein Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $0$ ,
- darüber liegt  $v_4$  als ein Hauptvektor zweiter Stufe.

Diese Vektoren sind linear unabhängig: Sie bilden eine Basis des  $\mathbb{C}^4$ .

⚠ Der Hauptvektor 2. Stufe zeigt, dass  $A$  nicht diagonalisierbar ist!  
 😊 Das Ergebnis aus (1) wird besonders übersichtlich gebündelt, wenn wir  $A$  bezüglich unserer Basis  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$  schreiben ...

(2) Bezüglich der Basis  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$  finden wir die **Jordan-Form**:

$$B = {}_{\mathcal{B}}(A)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrizen  $A \sim B$  sind **konjugiert**. Hieraus folgt das char. Polynom

$$p_A(x) = p_B(x) = (x - i)(x + i)(x - 0)^2 = x^4 + x^2$$

⚠ Alternativ könnte man  $p_A(x) = \det(A - xE)$  entwickeln, faktorisieren, Eigen/Hauptvektoren finden. ... Das ist lässlich und viel mühsamer.  
 😊 Hier gilt wie allgemein immer: Es ist geschickter und effizienter, die bereits vorliegende Information zu verstehen und auszunutzen.

😊 Unsere Vorarbeit (2) setzen wir in unsere Lösungsformeln P1E ein: Aus Eigen-/Hauptvektoren gewinnen wir Eigen-/Hauptfunktionen!

(3) Zwei komplex-konjugierte Lösungen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^4$  sind  $e^{it}v_1$  und  $e^{-it}v_2$ . Die gegebenen reellen AWP führen zu reellen Lösungen:

$$y_1(0) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}(v_1 + v_2) \implies y_1(t) = \frac{1}{2} [e^{it}v_1 + e^{-it}v_2] = \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y_2(0) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}(v_1 - v_2) \implies y_2(t) = \frac{1}{2} [e^{it}v_1 - e^{-it}v_2] = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 0 \\ 0 \\ +\cos t \end{pmatrix}$$

Eigen- & Hauptvektor zum Eigenwert  $0$  liefern direkt reelle Lösungen:

$$y_3(t) = e^{0t}v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y_4(t) = e^{0t}(v_4 + tv_3) = \begin{pmatrix} 1 + t \\ 1 \\ 1 + t \\ 1 + t \end{pmatrix}$$

😊 Jede Funktion  $y_1, y_2, y_3, y_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$  löst die Gleichung  $y' = Ay$ : Setzen Sie alles ein und machen Sie die Probe; sie erfüllen zudem die gewünschten **Anfangsbedingungen**.  $y_1(0) = (1, 0, 0, 0) = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$  und  $y_2(0) = (0, 0, 1, 0) = \frac{1}{2}(v_1 - v_2)$  sowie  $y_3(0) = v_3$  und  $y_4(0) = v_4$ .

(4) Zur Stabilität untersuchen wir das **Langzeitverhalten** für  $t \rightarrow \infty$ . Die Lösungen  $y_1, y_2, y_3$  sind beschränkt, hingegen gilt  $|y_4(t)| \rightarrow \infty$ . Für jede Lösung  $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + c_3 y_3(t) + c_4 y_4(t)$  mit  $c_4 \neq 0$  gilt somit  $|y(t)| \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow \infty$ . Der Fixpunkt  $0$  ist demnach instabil. Bei zufälliger Wahl des Startwerts  $y(0)$  sind mit Wahrscheinlichkeit  $1$  alle Koeffizienten  $c_1, c_2, c_3, c_4$  ungleich Null, also gilt  $|y(t)| \rightarrow \infty$ .

Der Startpunkt  $y(0) = 0$  ist ein **Fixpunkt** dieses dynamischen Systems. Er ist jedoch nicht stabil, denn eine zufällige Störung wird im Verlauf immer größer und führt von  $0$  weg. (Eine stetige Verteilung entspricht einer Wahrscheinlichkeitsdichte  $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit  $\int_{\mathbb{R}^4} \varphi(x) dx = 1$ ) Im vorliegenden Beispiel ist das Wachstum  $|y_4(t)| \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow \infty$  nicht exponentiell, sondern nur linear, also vergleichsweise langsam.

**Aufgabe:** (Klausur Februar 2013) Wir untersuchen das lineare Differentialgleichungssystem  $y'(t) = Ay(t)$  mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ sowie } v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie  $u = Av$  und  $Au$  sowie  $Aw$ . Bestimmen Sie hieraus eine Basis  $\mathcal{B}$  des  $\mathbb{C}^4$  bestehend aus Hauptvektorketten von  $A$ .
  - Schreiben Sie die Abbildung  $A$  als Matrix  $B = \mathcal{B}(A)\mathcal{B}^{-1}$  und lesen Sie das char. Polynom  $p_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)(x - \lambda_3)(x - \lambda_4)$  ab.
  - Bestimmen Sie zu  $y'(t) = Ay(t)$  ein reelles Fundamentalsystem  $y_1, y_2, y_3, y_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$  mit Anfangswerten  $u, v, e_1, e_4 \in \mathbb{R}^4$ .
  - Stabilität: Wenn Sie zufällig (stetig verteilt) einen Startvektor  $y(0) \in \mathbb{R}^4$  nahe Null wählen und die zugehörige Lösung von  $y'(t) = Ay(t)$  verfolgen, wie verhält sich  $|y(t)|$  für  $t \rightarrow \infty$ ?
- ⚠ Es gelten alle Tipps und Warnungen der vorigen Aufgabe.

😊 Unsere Vorarbeit (2) setzen wir in unsere **Lösungsformeln** ein:  
(3) Eigen-&Hauptvektor zum Eigenwert 0 liefern reelle Lösungen:

$$y_1(t) = e^{0t}u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad y_2(t) = e^{0t}(v + tw) = \begin{pmatrix} 1 + t \\ 1 \\ 1 + t \\ -1 - t \end{pmatrix}.$$

Zwei komplex-konjugierte Lösungen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^4$  sind  $e^{it}w$  und  $e^{-it}\bar{w}$ . Hieraus erhalten wir zwei reelle Lösungen als Real-/Imaginärteil:

$$y_3(t) = \operatorname{Re}[e^{it}w] = \frac{1}{2}[e^{it}w + e^{-it}\bar{w}] = \begin{pmatrix} +\cos t \\ 0 \\ 0 \\ -\sin t \end{pmatrix},$$

$$y_4(t) = \operatorname{Im}[e^{it}w] = \frac{1}{2i}[e^{it}w - e^{-it}\bar{w}] = \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \\ 0 \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe:** Wir lösen das Differentialgleichungssystem  $y'(t) = Ay(t)$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

- Welche Beziehung gilt zwischen Eigenwerten,  $\operatorname{tr}(A)$  und  $\det(A)$ ?
  - Das char. Polynom ist hier  $p_A(x) = (\lambda - x)^5$ . Bestimmen Sie  $\lambda$ .
  - Ist  $u$  Hauptvektor? Welcher Stufe? Lösen Sie  $y' = Ay$  mit  $y(0) = u$ .
  - Ist  $v$  Hauptvektor? Welcher Stufe? Lösen Sie  $y' = Ay$  mit  $y(0) = v$ .
  - Bestimmen Sie eine Basis des  $\mathbb{R}^5$  aus Hauptvektorketten und damit ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung  $y' = Ay$ .
- Lösung:** (0) Allgemein gilt  $\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$  und  $\det(A) = \lambda_1 \dots \lambda_n$ . Das ist offensichtlich für  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  diagonal oder in Jordan-Form, und jede Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  lässt sich in diese Form konjugieren (P1D).  
(1) Hier ist  $\lambda$  fünffacher Eigenwert: Es gilt  $5\lambda = \operatorname{tr}(A) = 10$ , also  $\lambda = 2$ .

(3) Wir bestimmen ebenso die **Stufe des Hauptvektors**  $v$ :

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{A-2} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A-2} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A-2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A-2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{A-2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow v_5, v_4, v_3, v_2, v_1$

Hieraus erhalten wir die spezielle Lösung von  $y' = Ay$  mit  $y(0) = v$ :

$$y(t) \stackrel{\text{PIE}}{=} e^{2t} \begin{pmatrix} -1 - t & -2t^2/2 & +2t^4/4! \\ 2 - 2t & +2t^2/2 & \\ 3 - 2t & +4t^2/2 & -2t^3/3! \\ 4 - 3t & +2t^2/2 & -2t^3/3! & +2t^4/4! \\ 5 - 2t & +2t^2/2 & -2t^3/3! \end{pmatrix}$$

(4) **Basis des Lösungsraums:** Die oben gefundene Hauptvektorkette  $0 \leftarrow^{A-\lambda} v_1 \dots \leftarrow^{A-\lambda} v_5$  liefert die Hauptfunktionen  $y_1, \dots, y_5: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^5$ :

$$y_k(t) \stackrel{\text{PIE}}{=} e^{\lambda t} \left[ v_k + t v_{k-1} + \frac{t^2}{2} v_{k-2} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} v_1 \right]$$

**Lösung:** (1) Die vorgeschlagene Rechnung beschert uns folgendes:

$$Av = u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Au = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Aw = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = iw, \quad A\bar{w} = -i\bar{w}.$$

Somit ist  $u$  ein EV zum EW 0, und hierüber  $v$  ein Hauptvektor 2. Stufe. Zudem ist  $w$  ein EV zum EW  $i$ . Da  $A$  reell ist, gilt  $A\bar{w} = \bar{A}w = \bar{i}w = -i\bar{w}$ . Somit ist  $\bar{w}$  ein EV zum EV  $-i$ . Das beschert uns die Basis  $u, v, w, \bar{w}$ .

(2) Bezüglich der Basis  $\mathcal{B} = (u, v, w, \bar{w})$  finden wir die **Jordan-Form**:

$$B = \mathcal{B}(A)\mathcal{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

Wir lesen die Eigenwerte  $0, 0, i, -i$  ab. Das char. Polynom ist

$$p_A(x) = p_B(x) = (x - 0)(x - 0)(x - i)(x + i) = x^4 + x^2.$$

Alternativ kann man  $\det(A - xE)$  direkt entwickeln. Versuchen Sie es!

😊 Jede Funktion  $y_1, y_2, y_3, y_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$  löst die Gleichung  $y' = Ay$ : Setzen Sie ein und machen Sie die Probe; sie erfüllen die gewünschten **Anfangsbedingungen**:  $y_1(0) = u, y_2(0) = v, y_3(0) = e_1, y_4(0) = e_4$ .

(4) Zur Stabilität untersuchen wir das **Langzeitverhalten** für  $t \rightarrow \infty$ . Die Lösungen  $y_1, y_3, y_4$  sind beschränkt, hingegen gilt  $|y_2(t)| \rightarrow \infty$ .

Für jede Lösung  $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + c_3 y_3(t) + c_4 y_4(t)$  mit  $c_2 \neq 0$  gilt somit  $|y(t)| \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow \infty$ . Der Fixpunkt 0 ist demnach instabil.

Bei zufälliger Wahl des Startwerts  $y(0)$  sind mit Wahrscheinlichkeit 1 alle Koeffizienten  $c_1, c_2, c_3, c_4$  ungleich Null, also gilt  $|y(t)| \rightarrow \infty$ .

Der Startpunkt  $y(0) = 0$  ist ein **Fixpunkt** dieses dynamischen Systems. Er ist jedoch nicht stabil, denn eine zufällige Störung wird im Verlauf immer größer und führt von 0 weg. (Eine stetige Verteilung entspricht einer Wahrscheinlichkeitsdichte  $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit  $\int_{\mathbb{R}^4} \varphi(x) dx = 1$ .)

Im vorliegenden Beispiel ist das Wachstum  $|y_2(t)| \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow \infty$  nicht exponentiell, sondern nur linear, also vergleichsweise langsam.

(2) Es gilt

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen zunächst die **Stufe des Hauptvektors**  $u$ :

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{A-2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A-2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A-2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{A-2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow u_4, u_3, u_2, u_1$

Hieraus erhalten wir die spezielle Lösung von  $y' = Ay$  mit  $y(0) = u$ :

$$y(t) \stackrel{\text{PIE}}{=} e^{2t} \begin{pmatrix} +2t & -t^3/3! \\ 1 - t & \\ -2t & +t^2/2 \\ & +t^2/2 & -t^3/3! \\ -t & +t^2/2 \end{pmatrix}$$

(3) Wir bestimmen ebenso die **Stufe des Hauptvektors**  $v$ :

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{A-2} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A-2} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A-2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A-2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{A-2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow v_5, v_4, v_3, v_2, v_1$

Hieraus erhalten wir die spezielle Lösung von  $y' = Ay$  mit  $y(0) = v$ :

$$y(t) \stackrel{\text{PIE}}{=} e^{2t} \begin{pmatrix} -1 - t & -2t^2/2 & +2t^4/4! \\ 2 - 2t & +2t^2/2 & \\ 3 - 2t & +4t^2/2 & -2t^3/3! \\ 4 - 3t & +2t^2/2 & -2t^3/3! & +2t^4/4! \\ 5 - 2t & +2t^2/2 & -2t^3/3! \end{pmatrix}$$

(4) **Basis des Lösungsraums:** Die oben gefundene Hauptvektorkette  $0 \leftarrow^{A-\lambda} v_1 \dots \leftarrow^{A-\lambda} v_5$  liefert die Hauptfunktionen  $y_1, \dots, y_5: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^5$ :

$$y_k(t) \stackrel{\text{PIE}}{=} e^{\lambda t} \left[ v_k + t v_{k-1} + \frac{t^2}{2} v_{k-2} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} v_1 \right]$$

**Aufgabe:** (Wir untersuchen weiterhin die Daten der vorigen Aufgabe.)

- Stabilität: Wie verhalten sich hier typische Lösungen für  $t \rightarrow \infty$ ?
- Welche Dimension hat der Hauptraum 4. Stufe  $U = \ker(A - \lambda E)^4$ ?
- Wählen Sie zufällig (stetig verteilt) einen Vektor  $w \in \mathbb{R}^5$  und berechnen Sie seine Stufe. ... Mit welcher Wkt. ist er fünfter Stufe?

**Lösung:** (5) Für  $t \rightarrow \infty$  gilt  $|y(t)| \rightarrow \infty$ , typischerweise  $\sim e^{2t} t^4/4!$ .

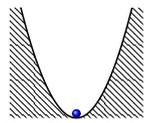
(6) Zu  $(A - 2E)^4 v_5 \neq 0$  gehört die Hauptvektorkette der Länge 5:

$$0 \leftarrow^{A-2} v_1 \leftarrow^{A-2} v_2 \leftarrow^{A-2} v_3 \leftarrow^{A-2} v_4 \leftarrow^{A-2} v_5.$$

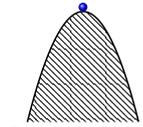
Der Unterraum  $U = \mathbb{R}v_1 + \mathbb{R}v_2 + \mathbb{R}v_3 + \mathbb{R}v_4$  hat also Dimension 4.

(7) Mit 100% Wahrscheinlichkeit ist  $w$  ein Hauptvektor 5. Stufe!

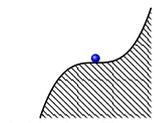
Fast jeder Vektor  $v \in \mathbb{R}^5$  ist hier von 5. Stufe: Alle Hauptvektoren der Stufe 4, 3, 2, 1 und der Nullvektor liegen in der Hyperebene  $U$ . Wenn wir also zufällig (stetig verteilt) einen Vektor  $w \in \mathbb{R}^5$  wählen, dann liegt  $w$  mit Wahrscheinlichkeit 0 im Unterraum  $U$ .



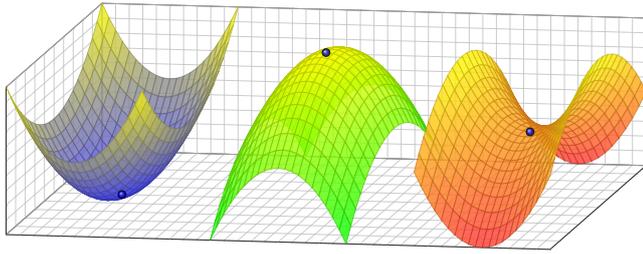
Der Fixpunkt ist stabil / attraktiv.



Der Fixpunkt ist instabil / repulsiv.



kritischer Fixpunkt (höhere Ordnung)



Anfangsdaten sind oft zufälligen kleinen Schwankungen unterworfen, etwa durch kleine äußere Störungen oder ungenaue Messdaten.

Wir wollen das Langzeitverhalten in der Nähe von Fixpunkten verstehen. Hier gilt  $\dot{x}(t) = f(x(t))$ , für  $x(t) = x_0 + u(t) \approx x_0$  also  $\dot{u}(t) \approx f'(x_0) u(t)$ .

- Gilt Abklingen  $|u(t)| \rightarrow 0$ ? sogar exponentiell?
- Gilt Beschränktheit gemäß  $0 < c_0 \leq |u(t)| \leq c_1 < \infty$ ?
- Gilt Wachstum  $|u(t)| \rightarrow \infty$ ? nur polynomiell? gar exponentiell?

⚠ Instabile Fixpunkte sind meist Opfer des **Schmetterlingseffekts**: Sie zeigen eine extrem sensible Abhängigkeit von den Anfangsdaten; typischerweise können kleine Störungen exponentiell anwachsen! Beispiele wie  $\dot{x}(t) = ax(t)$  zeigen, dass dies tatsächlich vorkommt.

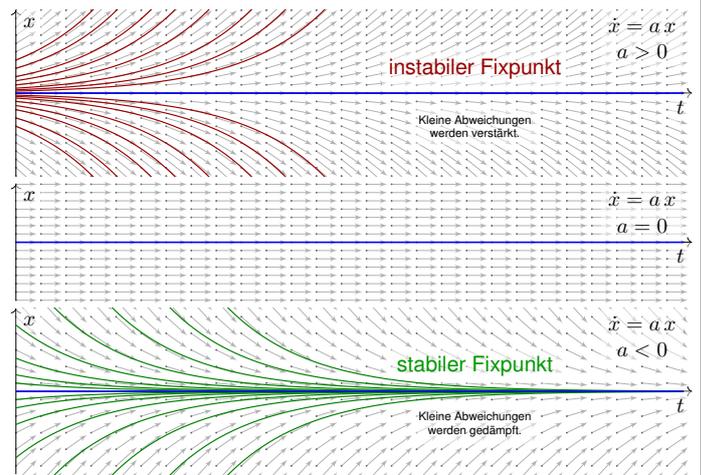
⚠ Technische Anwendungen erfordern meist stabile Gleichgewichte! Die **Stabilitätstheorie** untersucht die Auswirkung kleiner Störungen, die als Abweichung von Gleichgewichtszuständen auftreten, etwa in der Regelungstechnik (P2D) oder der Technischen Mechanik (P2H).

**Aufgabe:** (1) Wir untersuchen  $\dot{x}(t) = ax(t)$  mit  $x(0) = x_0$  und  $a \in \mathbb{R}$ . Welches asymptotische Verhalten haben die Lösungen für  $t \rightarrow \infty$ ?  
(2) Welches Verhalten erwarten Sie für eine nicht-lineare Gleichung  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  mit  $x(0) = x_0$  und  $f(x_0) = 0$ ? Ist  $x_0$  ein Fixpunkt? Welche Rolle spielt die Ableitung  $f'(x_0)$  für die Stabilität?

**Lösung:** (1) Dieses AWP hat als eindeutige Lösung  $x(t) = x_0 e^{at}$ . Die Dynamik eindimensionaler linearer Systeme ist sehr einfach:

- $a > 0$  streckt; Störungen werden exponentiell verstärkt. Der einzige Fixpunkt 0 ist **instabil**.
- $a < 0$  staucht; Störungen werden exponentiell gedämpft. Der einzige Fixpunkt 0 ist **stabil**.
- Im Falle  $a = 0$  ist jeder Startpunkt  $x_0$  ein Fixpunkt.

(2) Nicht-lineare Systeme sind wesentlich komplizierter! In der Nähe eines Fixpunktes können wir jedoch linearisieren und annähernd eine **lineare Dynamik** erwarten. Diese Idee wird im Folgenden ausgeführt.



Wir betrachten ein **autonomes Differentialgleichungssystem**:

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

Hierbei sei  $f: \mathbb{R}^n \supseteq G \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Die rechte Seite  $f(x)$  hängt nicht explizit von der Zeit  $t$  ab, daher **autonom**. Zu jedem Startpunkt  $x_0 \in G$  existiert eine eindeutige Lösung  $x: [0, T[ \rightarrow G$  für  $T > 0$  mit  $x(0) = x_0$  und  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  für  $t \in [0, T[$ . Für das maximale  $T$  gilt entweder  $T = \infty$  oder  $f(t) \rightarrow \partial G \cup \{\infty\}$  für  $t \nearrow T < \infty$ .

**Aufgabe:** Was geschieht bei Start nahe einer Gleichgewichtslage?

**Lösung:** Jeder Startpunkt  $x_0$  mit  $f(x_0) = 0$  ist ein **Fixpunkt**.

Für kleine Auslenkungen  $x(t) = x_0 + u(t)$  können wir **linearisieren**:

$$\dot{u}(t) = \dot{x}(t) = f(x(t)) = f(x_0 + u(t)) \approx f(x_0) + f'(x_0) u(t) = A u(t)$$

Sei  $x: [0, T[ \rightarrow G$  die Lösung zum Startpunkt  $x(0) = x_0$  mit  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  für alle  $t \in [0, T[$ . **Ruhelage:** Genau dann herrscht Konstanz  $x(t) = x_0$  für alle  $t \in [0, T[$ , wenn  $f(x_0) = 0$  gilt. Die **Jacobi-Matrix**  $A = f'(x_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  von  $f$  beschreibt das Verhalten um den Fixpunkt  $x_0$ : Wir erhalten als Näherung die lineare Differentialgleichung  $\dot{u}(t) = A u(t)$ . Hierdurch erhalten lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten ihre zentrale Bedeutung!

😊 Kleine Auslenkungen aus der Ruhelage  $x_0$  folgen näherungsweise dem linearen DGSystem mit konstanter Systemmatrix  $A = f'(x_0)$ :

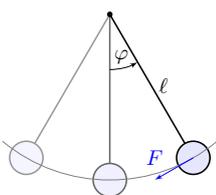
$$\text{nicht-linear } \dot{x}(t) = f(x(t)) \rightsquigarrow \text{linear } \dot{u}(t) = A u(t)$$

😊 Linearisierung vereinfacht die ursprüngliche Gleichung enorm! Jede Lösung dieser Approximation ist von der Form  $u(t) = e^{tA} u_0$ . Zum Eigenwert  $\lambda = \sigma + i\omega$  gehören Eigen- und Hauptfunktionen

$$u(t) = e^{\sigma t} e^{i\omega t} \left[ v_k + t v_{k-1} + \frac{t^2}{2} v_{k-2} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} v_1 \right],$$

siehe P1E und P1G. Damit erkennen wir die **Stabilität** des Fixpunktes:

- $\text{Re}(\lambda) < 0$  staucht; kleine Störungen werden exponentiell gedämpft. Der Fixpunkt ist **stabil**, wenn  $\text{Re}(\lambda) < 0$  für **alle** Eigenwerte gilt.
  - $\text{Re}(\lambda) > 0$  streckt; kleine Störungen werden exponentiell verstärkt. Der Fixpunkt ist **instabil**, wenn  $\text{Re}(\lambda) > 0$  für **einen** Eigenwert gilt.
- Der Grenzfall  $\text{Re}(\lambda) = 0$  bedarf genauerer Analyse (höhere Ordnung).



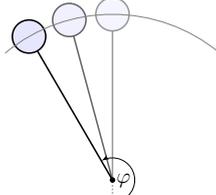
Dynamisches System:

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ -(g/\ell) \sin \varphi - 2\delta\omega \end{pmatrix}$$

Linearisierung um  $(0, 0)$ :

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(g/\ell) & -2\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Der Fixpunkt  $(0, 0)$  ist stabil.



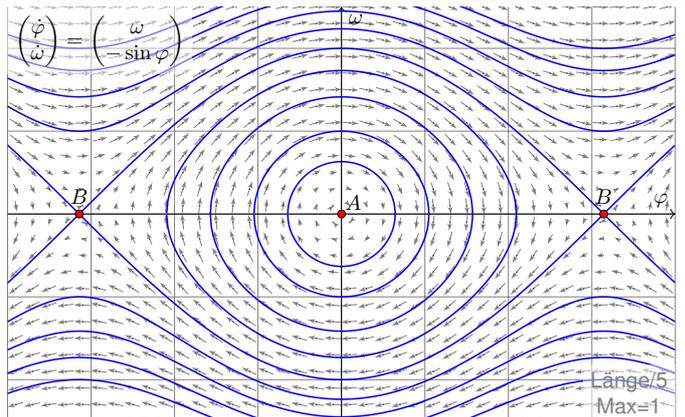
Dynamisches System:

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ -(g/\ell) \sin \varphi - 2\delta\omega \end{pmatrix}$$

Linearisierung um  $(\pi, 0)$ :

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ +(g/\ell) & -2\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Der Fixpunkt  $(\pi, 0)$  ist instabil.



Wir erkennen harmonische Oszillation um das untere Gleichgewicht A. Der obere Scheitelpunkt B hingegen ist ein instabiles Gleichgewicht.

Wir untersuchen das DGSsystem  $\dot{u}(t) = Au(t)$  zur Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .  
 Polynom  $\det(A - tE) = t^2 - 2at + d$ , Eigenwerte  $\lambda_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - d}$ .  
 Spur  $\text{tr}(A) = 2a$ , Determinante  $\det(A) = d$ , Diskriminante  $\Delta = a^2 - d$ .

**Aufgabe:** Skizzieren Sie die Dynamik je nach Lage der Eigenwerte (14 Fälle) und untersuchen Sie das Verhalten von  $|u(t)|$  für  $t \rightarrow \infty$ .

- Gilt Abklingen  $|u(t)| \rightarrow 0$ ? sogar exponentiell?
- Gilt Beschränktheit gemäß  $0 < c_0 \leq |u(t)| \leq c_1 < \infty$ ?
- Gilt Wachstum  $|u(t)| \rightarrow \infty$ ? nur polynomiell? gar exponentiell?

**Lösung:** Wir unterscheiden zunächst reelle und komplexe Eigenwerte:

$a^2 < d$ : komplex-konjugiert  $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ ,  $A \sim \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

$a^2 > d$ : zwei reelle Eigenwerte  $\lambda_1 < \lambda_2$ ,  $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

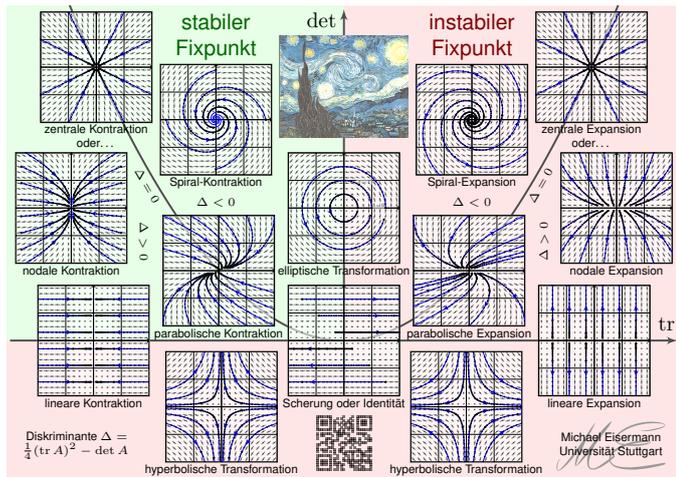
$a^2 = d$ : ein doppelter Eigenwert  $\lambda$ ,  $A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  oder  $A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

☺ Damit haben wir alle möglichen Fälle vollständig gelöst! Dank Eigen- und Hauptfunktionen wird alles klar und einfach.  
 Erinnerung [0326]: Hier bedeutet  $A \sim B$ , dass  $A$  und  $B$  konjugiert sind, also  $B = T^{-1}AT$  für eine geeignete Basiswechsellmatrix  $T \in GL_2 \mathbb{R}$ .  
 Dies beschreibt den Übergang zu unserer neuen Basis aus Eigen- bzw. Hauptvektoren, in der sich das Problem wesentlich einfacher darstellt.

☺ Wir finden drei Klassen, je nach Vorzeichen der Diskriminante

$$\Delta = \frac{1}{4}(\text{tr } A)^2 - \det A.$$

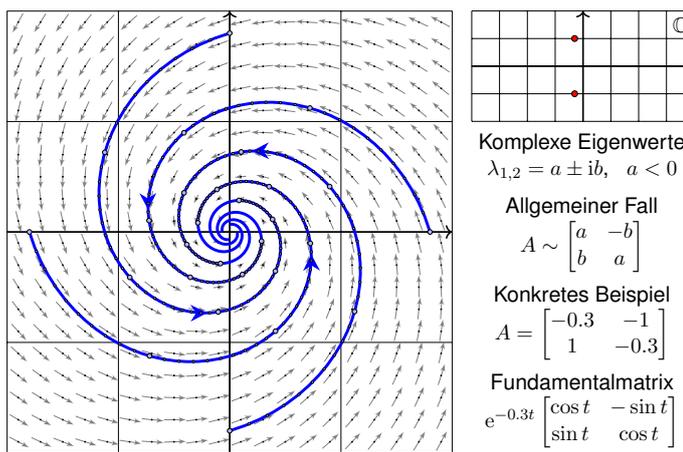
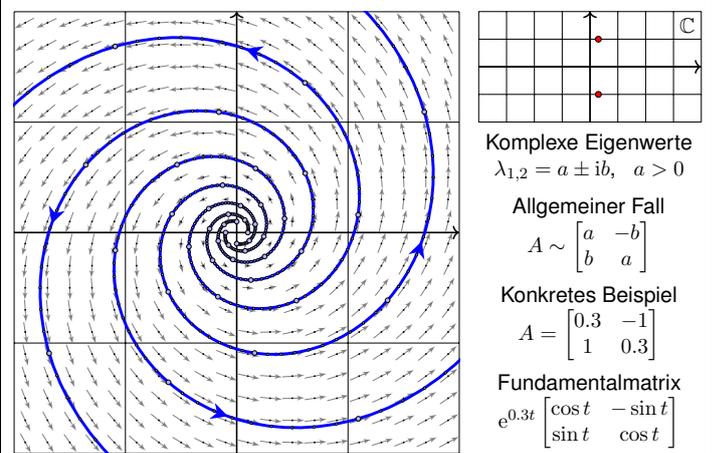
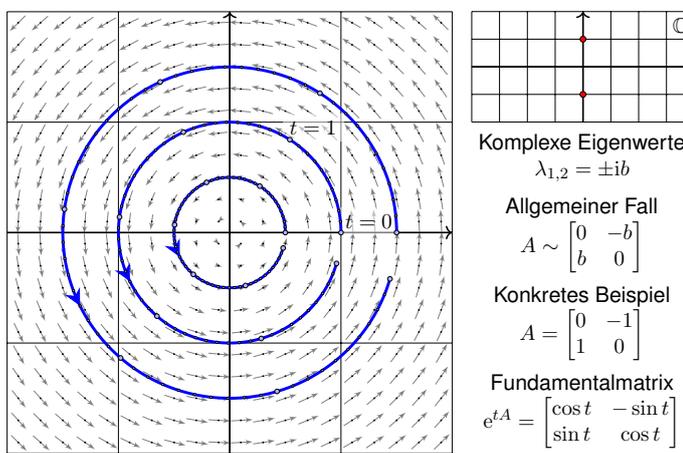
Das Vorzeichen der Diskriminante unterscheidet, wie oben gesehen, zwischen reellen Eigenwerten und (echt) komplexen Eigenwerten.  
 Der Fixpunkt ist stabil, wenn  $\text{Re}(\lambda) < 0$  für beide Eigenwerte gilt. Das bedeutet: Kleine Störungen werden exponentiell gedämpft.  
 Das gilt hier genau dann, wenn  $\text{tr}(A) < 0$  und  $\det(A) > 0$  gilt. Die stabile Region ist grün gefärbt, die instabile Region rot.



Diese schöne Graphik gibt einen guten Überblick: Sie klassifiziert die (linearisierte) Dynamik um einen Fixpunkt in der Ebene  $\mathbb{R}^2$ .  
 Im obigen Beispiel des mathematischen Pendels haben wir bereits zwei Fälle gesehen, einen stabilen und einen instabilen Fixpunkt. Die folgenden Folien diskutieren alle gezeigten Einzelfälle im Detail, wir zoomen also auf einzelne Punkte dieses Gesamtkunstwerks.

⚠ Wir betrachten hier als einfaches Modell die linearisierte Gleichung. Nicht-lineare dynamische Systeme sind meist wesentlich komplizierter! Dennoch gibt uns das linearisierte Modell sehr nützliche Auskunft, denn im Kleinen verhält sich das nicht-lineare Modell ganz ähnlich:

- ☺ Für die Stabilität des Fixpunktes  $x_0$  genügt die Matrix  $A = f'(x_0)$ , falls alle Eigenwerte negativen Realteil haben (Satz von Lyapunov).
- ☺ In diesem Falle sieht die lokale Dynamik von  $\dot{x} = f(x)$  topologisch aus wie im linearisierten Modell  $\dot{u} = Au$  (Satz von Hartman–Grobman).
- ☺ Dieser Linearisierungssatz gilt ganz allgemein in jeder Dimension  $n$  um jeden *hyperbolischen* Fixpunkt (ohne Eigenwerte mit Realteil Null).



☺ Die ersten drei Fälle komplex-konjugierter Eigenwerte zeigen bereits den Einfluss auf das Langzeitverhalten und die Stabilität der Lösungen:

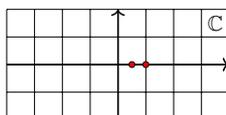
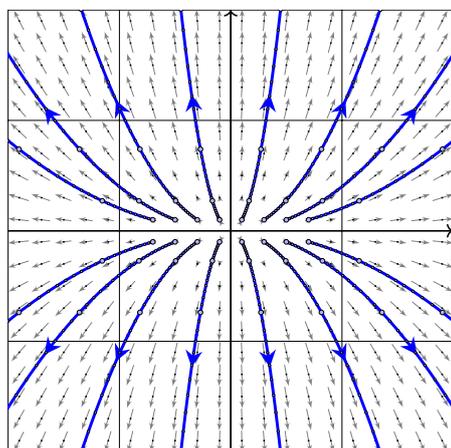
- $\text{Re}(\lambda) < 0$  staucht; kleine Störungen werden exponentiell gedämpft. Der Fixpunkt 0 ist **stabil**, wenn  $\text{Re}(\lambda) < 0$  für alle Eigenwerte gilt.
- $\text{Re}(\lambda) > 0$  streckt; kleine Störungen werden exponentiell verstärkt. Der Fixpunkt 0 ist **instabil**, wenn  $\text{Re}(\lambda) > 0$  für einen Eigenwert gilt.

☺ Wir diskutieren die verbleibenden Fälle reeller Eigenwerte  $\lambda_1 \leq \lambda_2$ :  
 Im Falle  $\lambda_1 < \lambda_2$  unterscheiden wir fünf Fälle je nach Lage zu 0: Die Matrix  $A$  ist hierbei wegen  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  immer diagonalisierbar.  
 Im Falle  $\lambda_1 = \lambda_2$  unterscheiden wir drei Fälle je nach Lage zu 0: Im einfachsten Falle ist  $A \sim \text{diag}(\lambda, \lambda)$  diagonalisierbar (drei Fälle); andernfalls nutzen wir Hauptvektoren zur Jordan–Form (drei Fälle).

☺ Dank unserer gründlichen Vorarbeit zu Eigen- und Hauptvektoren können wir alle 14 Fälle vollständig lösen und übersichtlich darstellen. Ebenso gelingt die Klassifikation linearer Dynamik in jeder Dimension!

### Instabiler Knoten: nodale Expansion

P217



Zwei reelle Eigenwerte  
 $0 < \lambda_1 < \lambda_2$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Konkretes Beispiel

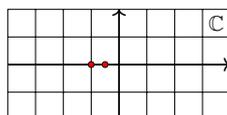
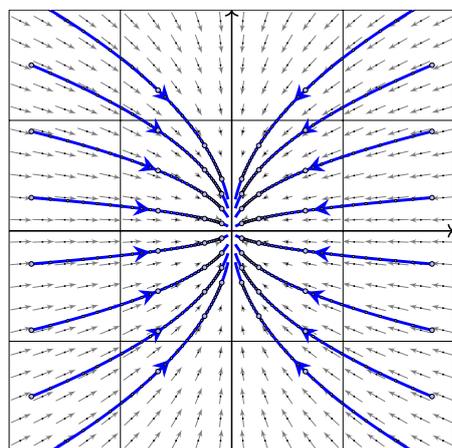
$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

### Stabiler Knoten: nodale Kontraktion

P218



Zwei reelle Eigenwerte  
 $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Konkretes Beispiel

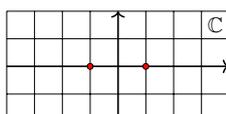
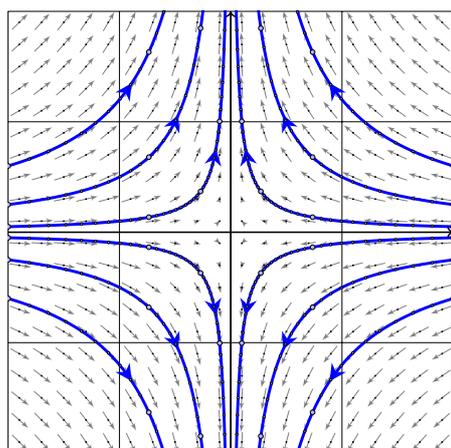
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{bmatrix}$$

### Sattelpunkt: hyperbolische Transformation

P219



Zwei reelle Eigenwerte  
 $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Konkretes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

### Eigenwerte und Eigenvektoren

P220

Erläuterung

☺ Die hier illustrierten Beispiele zeigen die typische ebene Dynamik um den Fixpunkt  $(0, 0)^T$  im elliptischen und im hyperbolischen Fall: Die Eigenwerte geben Auskunft über Dynamik und Stabilität!

- Sind beide Eigenwerte positiv, so erhalten wir eine Expansion, typischerweise zwei Eigenräume / Achsen: langsam und schnell.
- Sind beide Eigenwerte negativ, so erhalten wir eine Kontraktion, typischerweise zwei Eigenräume / Achsen: langsam und schnell.
- Ist einer negativ und einer positiv, so erhalten wir eine stabile und eine instabile Richtung, wie im hyperbolischen Fall gezeigt.

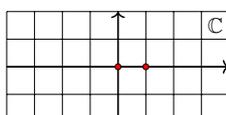
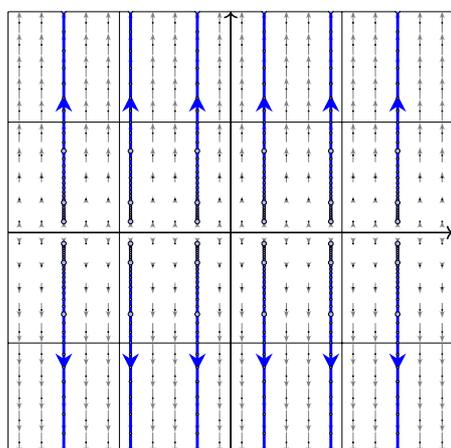
☺ Die nächsten Folien zeigen schließlich alle Rand- und Sonderfälle. Zur Vereinfachung transformieren wir die beiden Eigen/Hauptvektoren der Systemmatrix  $A$  auf  $(1, 0)^T$  und  $(0, 1)^T$ ; das ist übersichtlicher.

⚠ Im Allgemeinen liegen diese beiden Achsen beliebig in der Ebene; sie sind typischerweise verdreht und stehen nicht senkrecht zueinander. Nach Koordinatenwechsel entsteht das hier gezeigte, einfache Bild. Die Aufgabe auf Seite P229 zeigt ein realistisches Beispiel.

### Lineare Expansion

P221

Erläuterung



Zwei reelle Eigenwerte  
 $0 = \lambda_1 < \lambda_2$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Konkretes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

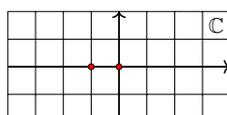
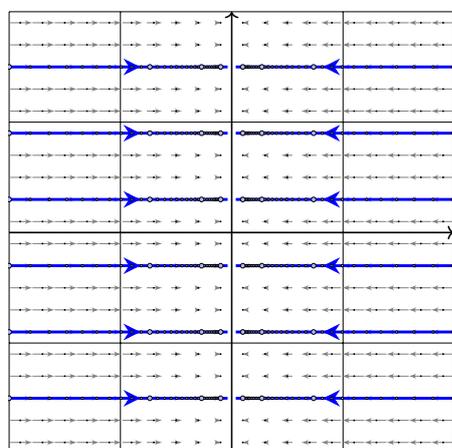
Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

### Lineare Kontraktion

P222

Erläuterung



Zwei reelle Eigenwerte  
 $\lambda_1 < \lambda_2 = 0$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Konkretes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

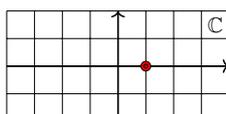
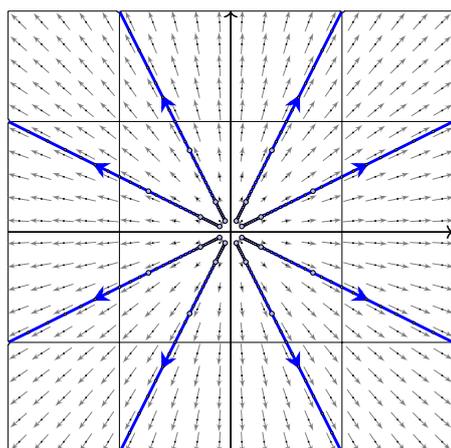
Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Zentrale Expansion

P223

Erläuterung



Doppelter Eigenwert  
 $\lambda > 0$

Diagonalisierbarer Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Konkretes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

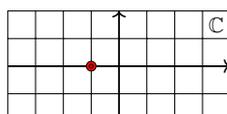
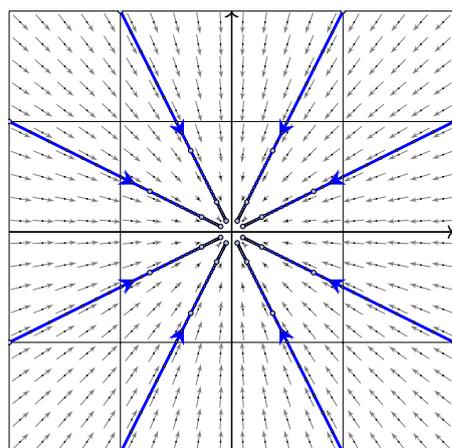
Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

### Zentrale Kontraktion

P224

Erläuterung



Doppelter Eigenwert  
 $\lambda < 0$

Diagonalisierbarer Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Konkretes Beispiel

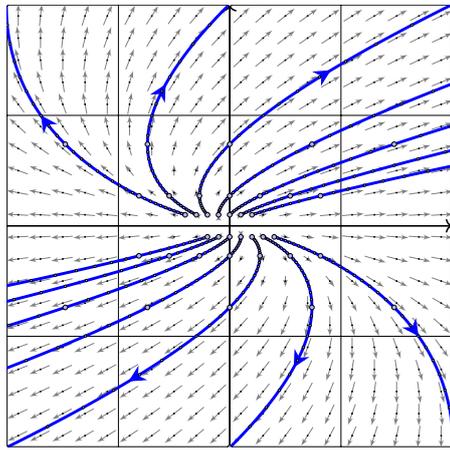
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

**Instabiler Knoten: parabolische Expansion**

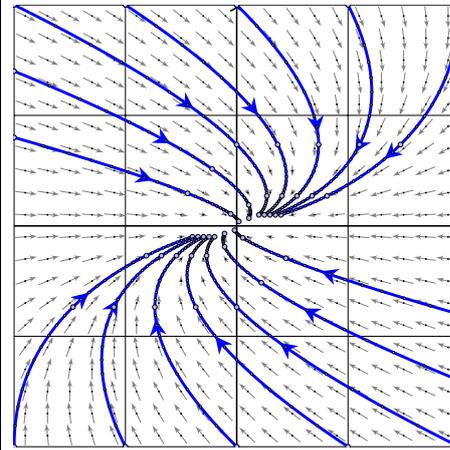
P225



Doppelter Eigenwert  $\lambda > 0$   
 Nicht-diagonalisierbar  
 $A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$   
 Konkretes Beispiel  
 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$   
 Fundamentalmatrix  
 $e^{tA} = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$

**Stabiler Knoten: parabolische Kontraktion**

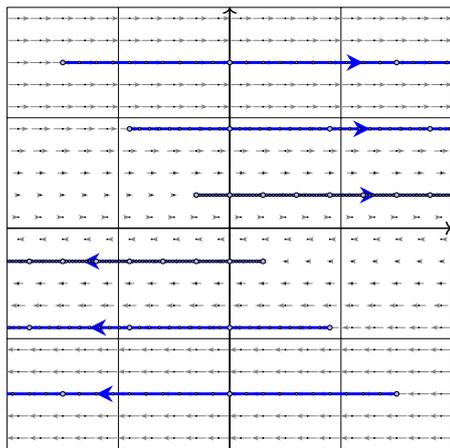
P226



Doppelter Eigenwert  $\lambda < 0$   
 Nicht-diagonalisierbar  
 $A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$   
 Konkretes Beispiel  
 $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$   
 Fundamentalmatrix  
 $e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$

**Scherung**

P227



Doppelter Eigenwert  $\lambda = 0$   
 Nicht-diagonalisierbar  
 $A \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$   
 Konkretes Beispiel  
 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$   
 Fundamentalmatrix  
 $e^{tA} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

**Diagonalisierbar oder nicht diagonalisierbar?**

P228  
Erläuterung

Für jede Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  mit doppeltem Eigenwert  $\lambda$  gilt  $\lambda \in \mathbb{R}$  sowie

$$\text{entweder } A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ oder } A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Im ersten Fall existiert eine Basis des  $\mathbb{R}^2$  aus Eigenvektoren von  $A$ . Die Matrix  $A$  wird hierdurch diagonalisiert. Es gilt dann:

$$e^{tA} \sim e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

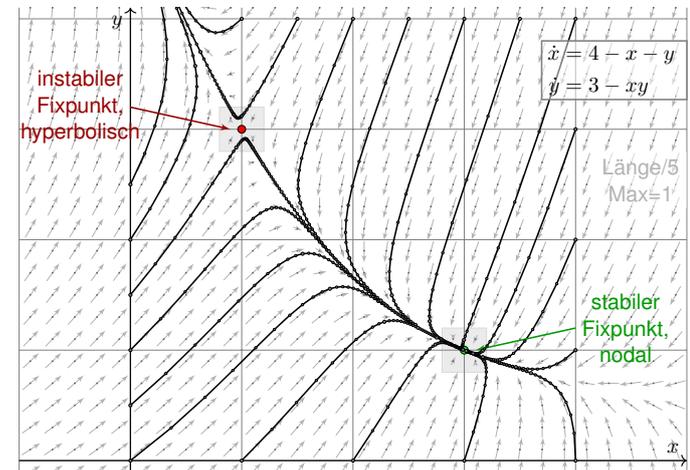
Andernfalls existiert eine Hauptvektorkette der Länge 2. Diese nutzen wir als Basis des  $\mathbb{R}^2$  und erhalten obigen Jordan-Block. Es gilt dann:

$$e^{tA} \sim e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

☺ Nach demselben Schema können wir  $n$ -dimensionale autonome Systeme analysieren: Fixpunkte, Linearisierung, Eigenwerte, Stabilität. Unsere gründliche Vorarbeit zu Eigen- und Hauptvektoren zahlt sich aus!

**Ein nicht-lineares DGSsystem: quadratisches Vektorfeld**

P229  
Übung



**Ein nicht-lineares DGSsystem: quadratisches Vektorfeld**

P230  
Übung

**Aufgabe:** Wir untersuchen folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\begin{cases} \dot{x} = 4 - x - y \\ \dot{y} = 3 - xy \end{cases}$$

- (0) Skizzieren Sie das zugehörige Vektorfeld und einige Flusslinien.
  - (1a) Finden Sie alle Fixpunkte. Es gibt genau zwei:  $(1, 3)$  und  $(3, 1)$ .
  - (1b) Linearisieren Sie um jeden Fixpunkt: Welche Dynamik gibt hier? Leichtere Teilfrage: Ist der betrachtete Fixpunkt stabil oder instabil? Was bedeuten die zugehörigen Eigenvektoren und die Eigenwerte?
  - (2) Erklären Sie (qualitativ anhand Ihrer Skizze) für jeden Startpunkt  $(x(0), y(0)) \in \mathbb{R}^2$  das Verhalten der Lösung  $(x(t), y(t))$  für  $t \rightarrow \infty$ .
  - (2a) Gibt es zu jedem Startwert eine Lösung? Ist sie eindeutig?
  - (2b) Für welche Startwerte konvergiert die Lösung gegen  $(3, 1)$ ?
  - (2c) Für welche Startwerte konvergiert die Lösung gegen  $(1, 3)$ ?
  - (2d) Für welche Startwerte divergiert die Lösung? gegen  $\infty$ ?
- Ist dieses Verhalten stabil? Wird das Ziel in endlicher Zeit erreicht?

**Ein nicht-lineares DGSsystem: quadratisches Vektorfeld**

P231  
Übung

**Lösung:** (1a) Fixpunkte sind die Nullstellen des Vektorfeldes:

$$\begin{aligned} \dot{x} = 4 - x - y & \stackrel{!}{=} 0 \\ \dot{y} = 3 - xy & \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Die erste Gleichung bedeutet  $y = 4 - x$ , einsetzen in die zweite ergibt:

$$3 - 4x + x^2 = 0 \iff x \in \{1, 3\}$$

☺ Die beiden einzigen Fixpunkte sind daher  $(1, 3)$  und  $(3, 1)$ . Probel!

(1b) Wir berechnen die Jacobi-Matrix in jedem der beiden Fixpunkte:

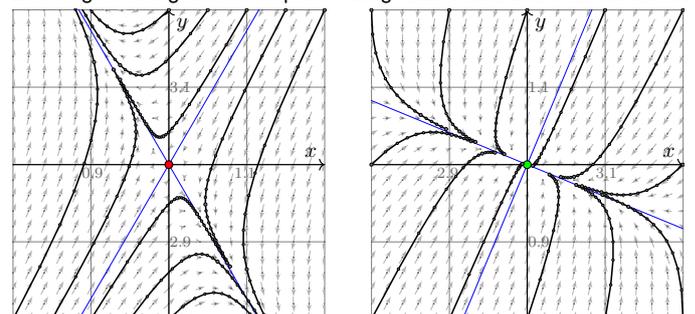
$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 - x - y \\ 3 - xy \end{pmatrix} \implies f' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -y & -x \end{pmatrix} \\ f' \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \det = -2 < 0, \text{ tr} = -2 : \\ \text{instabil! genauer: hyperbolisch} \end{cases} \\ f' \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \det = +2 > 0, \text{ tr} = -4 < 0 : \\ \text{stabil! genauer: nodale Kontraktion} \end{cases} \end{aligned}$$

☺ Vergleich mit der obigen Skizze: Das entspricht der Anschauung!

**Ein nicht-lineares DGSsystem: Zoom auf Fixpunkte**

P232  
Übung

Die Vergrößerung um die Fixpunkte zeigt annähernd lineares Verhalten:



Die beiden Eigenvektoren entsprechen den Hauptachsen der Dynamik:

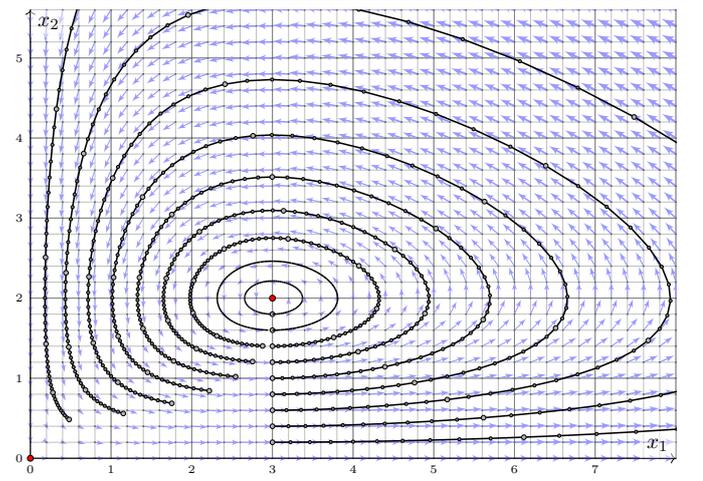
$$v = \begin{pmatrix} \pm 1/\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda = \mp \sqrt{3} - 1 \quad v = \begin{pmatrix} \pm \sqrt{2} - 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda = \mp \sqrt{2} - 2$$

☺ Rechts ist die Jacobi-Matrix symmetrisch, die EV daher orthogonal.

Räuber-Beute-Modell: 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha_1 x_1 - \beta_1 x_1 x_2 & =: f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = -\alpha_2 x_2 + \beta_2 x_1 x_2 & =: f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

Größe	Bedeutung	Beispiel
$t \geq 0$	Zeit	Jahre
$x_1(t) \geq 0$	Anzahl der Beutetiere	Hasen/Mio
$x_2(t) \geq 0$	Anzahl der Raubtiere	Luchse/Tsd
$\alpha_1 > 0$	Reproduktionsrate der Beute (ohne Räuber)	0.8/Jahr
$\beta_1 > 0$	Sterberate der Beute pro Räuber	0.4/Jahr
$\alpha_2 > 0$	Sterberate der Räuber (ohne Beute)	0.6/Jahr
$\beta_2 > 0$	Reproduktionsrate der Räuber pro Beute	0.2/Jahr

Dieses DGSsystem beschreibt die Entwicklung großer Räube-Beute-Populationen. Beispiel: Fangaufzeichnungen der Hudson Bay Company zeigten über 90 Jahre einen 9jährigen Zyklus. Formuliert und untersucht wurde dieses Modell 1925 von Alfred Lotka und unabhängig 1926 von Vito Volterra, seither ist es das Paradebeispiel einer Populationsdynamik in der Biologie. Die quadratischen Terme entsprechen dem Massenwirkungsgesetz chemischer Reaktionen. Epidemien folgen einer ähnlichen Dynamik, man untersucht und nutzt dies für Maßnahmen. Mechanische Systeme mit nicht-linearen Rückkopplungen gehorchen ähnlichen Gleichungen.

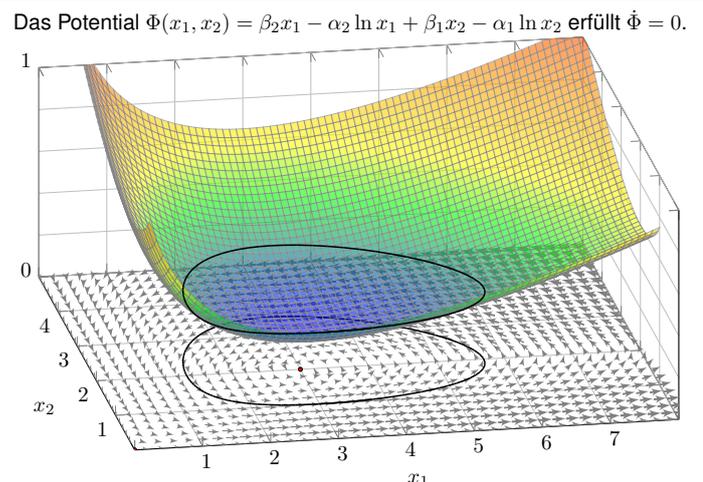


**Lösung:** (1) Wir nutzen den  $\exists\&E$ -Satz:  $f$  ist stetig differenzierbar.  

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 - \beta_1 x_1 x_2 \\ -\alpha_2 x_2 + \beta_2 x_1 x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow f' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \beta_1 x_2 & -\beta_1 x_1 \\ \beta_2 x_2 & -\alpha_2 + \beta_2 x_1 \end{pmatrix}$$
  
 😊 Zu jedem  $x(0) \in \mathbb{R}^2$  existiert genau eine Lösung mit  $\dot{x}(t) = f(x(t))$ .  
 (2) Aus  $x_2(0) = 0$  folgt  $x_2(t) = 0$  und  $x_1(t) = e^{\alpha_1 t} x_1(0)$  für alle  $t \geq 0$ .  
 Aus  $x_1(0) = 0$  folgt  $x_1(t) = 0$  und  $x_2(t) = e^{-\alpha_2 t} x_2(0)$  für alle  $t \geq 0$ .  
 Die Fixpunkte  $\dot{x} = f(x) = 0$  sind  $(0, 0)$  und  $(\alpha_2/\beta_2, \alpha_1/\beta_1) = (3, 2)$ .  
 (3) Dieses System ist nicht linear! Lösungen können wir (hier wie meist) nur numerisch berechnen. Wie skizziert, Runge-Kutta sei Dank!  
 (4) Wir linearisieren um  $x_0 = (\alpha_2/\beta_2, \alpha_1/\beta_1)$ . Für  $x(t) = x_0 + u(t)$  gilt:  

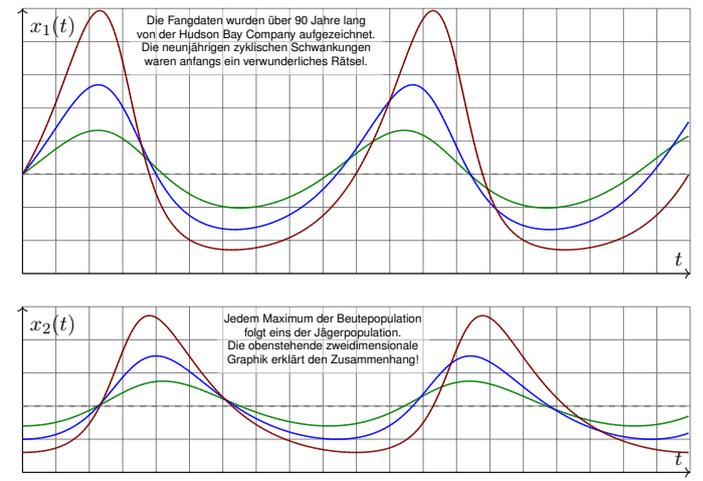
$$\dot{u} = \dot{x} = f(x) = f(x_0 + u) \approx f(x_0) + f'(x_0)u = Au$$
  
 😊 Die Jacobi-Matrix beschreibt das Verhalten um den Fixpunkt:  

$$A = f'(x_0) = f' \begin{pmatrix} \alpha_2/\beta_2 \\ \alpha_1/\beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_2 \beta_1/\beta_2 \\ \alpha_1 \beta_2/\beta_1 & 0 \end{pmatrix}$$



Räuber-Beute-Modell: 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0.8 x_1 - 0.4 x_1 x_2 & =: f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = -0.6 x_2 + 0.2 x_1 x_2 & =: f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

- Aufgabe:** (1) Skizzieren Sie den Zustandsraum und das Vektorfeld. Existiert zu jedem Startwert  $x(0) \in \mathbb{R}^2$  eine Lösung  $t \mapsto x(t)$ ? eindeutig?  
 (2) Was folgt aus  $x_2(0) = 0$ ? aus  $x_1(0) = 0$ ? Wo liegen Fixpunkte? Skizzieren Sie Lösungen zu  $x_1(0) = 3$  und  $x_2(0) = 2.0, 1.8, \dots, 0.0$ .  
 (3) Ist das System linear? Wie / Können Sie Lösungen berechnen?  
 (4) Linearisieren & lösen Sie für kleine Störungen des Gleichgewichts. Wie lange dauert eine Periode? Wie verlässlich ist das lineare Modell?  
 (5) Das Potential  $\Phi := \beta_2 x_1 - \alpha_2 \ln x_1 + \beta_1 x_2 - \alpha_1 \ln x_2$  erfüllt  $\dot{\Phi} = 0$ .  
 (6) Erste Lotka-Volterra-Regel, Periodizität der Lösungen:  
*Beide Populationsgrößen entwickeln sich periodisch.*  
 (7) Zweite Lotka-Volterra-Regel, Konstanz der Mittelwerte:  
*Die zeitlichen Mittelwerte sind  $\bar{x}_1 = \alpha_2/\beta_2$  und  $\bar{x}_2 = \alpha_1/\beta_1$ .*  
 (8) Angenommen, der Mensch hält die Beutetiere für Schädlinge. Im Zustand  $(3, 1)$  werden sie gejagt und auf  $(1, 1)$  reduziert. Erfolg?



**Nicht-linear** ist schwierig, doch **lineare Systeme** lösen wir leicht:  

$$p_A(x) = \det(A - xE) = \det \begin{pmatrix} -x & -\alpha_2 \beta_1/\beta_2 \\ \alpha_1 \beta_2/\beta_1 & -x \end{pmatrix} = x^2 + \alpha_1 \alpha_2$$
  
 Eigenwerte:  $\lambda_1 = +i\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} = +i\omega, \lambda_2 = -i\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} = -i\omega$   
 Eigenvektoren:  $v_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_2 \beta_1/\beta_2} \\ -i\sqrt{\alpha_1 \beta_2/\beta_1} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_2 \beta_1/\beta_2} \\ +i\sqrt{\alpha_1 \beta_2/\beta_1} \end{pmatrix}$   
 Eigenfunktionen:  $u_1(t) = e^{\lambda_1 t} v_1, u_2(t) = e^{\lambda_2 t} v_2$   
 Für unser reelles System verlangen wir **reelle Lösungen**:  

$$\operatorname{Re} u_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \sqrt{\alpha_2 \beta_1/\beta_2} \\ \sin(\omega t) \sqrt{\alpha_1 \beta_2/\beta_1} \end{pmatrix}, \operatorname{Im} u_1(t) = \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \sqrt{\alpha_2 \beta_1/\beta_2} \\ -\cos(\omega t) \sqrt{\alpha_1 \beta_2/\beta_1} \end{pmatrix}$$
  
 Die Kreisfrequenz  $\omega = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$  bedeutet Periodendauer  $T = 2\pi/\omega$ .  
 Im Beispiel ist  $\alpha_1 = 0.8$  und  $\alpha_2 = 0.6$ , also  $\omega \approx 0.69$  und  $T \approx 9.07$ .  
 😊 Plausibel: Für kleine Störungen deckt sich das mit obigen Skizzen. Große Störungen und Langzeitverhalten erfordern weitere Argumente!

(5) Für das Potential  $\Phi(x_1, x_2) := \beta_2 x_1 - \alpha_2 \ln x_1 + \beta_1 x_2 - \alpha_1 \ln x_2$  gilt  

$$\dot{\Phi} = \beta_2 \dot{x}_1 - \alpha_2 \dot{x}_1/x_1 + \beta_1 \dot{x}_2 - \alpha_1 \dot{x}_2/x_2 = (\beta_2 - \alpha_2/x_1)(\alpha_1 x_1 - \beta_1 x_1 x_2) + (\beta_1 - \alpha_1/x_2)(-\alpha_2 x_2 + \beta_2 x_1 x_2) = 0.$$
  
 (6) Jede Lösung in  $\mathbb{R}_{>0}^2$  schließt sich deshalb nach endlicher Zeit  $T > 0$ :  
 (7) Die zeitlichen Mittelwerte der Populationsgrößen sind  

$$\bar{x}_1 := \frac{1}{T} \int_{t=0}^T x_1(t) dt \quad \text{und} \quad \bar{x}_2 := \frac{1}{T} \int_{t=0}^T x_2(t) dt.$$
  
 Aus den beiden Differentialgleichungen folgt:  

$$\beta_2 \bar{x}_1 - \alpha_2 = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \beta_2 x_1(t) - \alpha_2 dt = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \frac{\dot{x}_2(t)}{x_2(t)} dt = \left[ \frac{\ln x_2(t)}{T} \right]_{t=0}^T = 0$$
  

$$\alpha_1 - \beta_1 \bar{x}_2 = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \alpha_1 - \beta_1 x_2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \frac{\dot{x}_1(t)}{x_1(t)} dt = \left[ \frac{\ln x_1(t)}{T} \right]_{t=0}^T = 0$$
  
 Das bedeutet  $\bar{x}_1 = \alpha_2/\beta_2$  und  $\bar{x}_2 = \alpha_1/\beta_1$ . Erstaunlich: Der Mittelwert  $\bar{x}_1$  der Beutepopulation hängt nicht von deren Reproduktionsrate ab!

P241 Ausführung

**Potentiale: Lösungen als Niveaulinien**

Das Potential und seine Niveaulinien  $\Phi(x, y) = \text{const}$  sind der Schlüssel zur exakten Lösung des Räuber-Beute-Modells, wie zuvor schon des harmonischen Oszillators [O101] und des mathematischen Pendels [O133]. Dasselbe nutzen wir seit Kapitel M für exakte Differentialgleichungen. Wir wollen daher unsere guten Erfahrungen mit dieser Methode zusammenfassen und zu einem allgemeingültigen Satz bündeln.

Zu lösen sei das **autonome Differentialgleichungssystem**

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Hierbei sei  $f: \mathbb{R}^2 \supseteq G \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein stetiges Vektorfeld in der Ebene. Wir haben zudem ein Potential  $\Phi: \mathbb{R}^2 \supseteq G \rightarrow \mathbb{R}$ , das entlang jeder Lösung zeitlich konstant ist, das heißt, die Ableitung verschwindet:

$$0 = \frac{d}{dt} \Phi \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \dot{x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \dot{y} = \text{grad } \Phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

☺ Geometrisch: Genau dann ist  $\Phi: G \rightarrow \mathbb{R}$  ein Potential, wenn das Vektorfeld  $f$  und das Gradientenfeld  $\text{grad } \Phi$  überall senkrecht stehen.

P242 Ausführung

**Potentiale: Lösungen als Niveaulinien**

**Beispiel:** Zu  $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 x - \beta_1 x y \\ -\alpha_2 y + \beta_2 x y \end{pmatrix}$  nutze  $g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \circ f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 y - \beta_2 x y \\ \alpha_1 x - \beta_1 x y \end{pmatrix}$ . Es gilt  $f \cdot g = 0$  aber leider  $\text{rot}(g) \neq 0$ . Der integrierende Faktor  $-1/y$  liefert  $\tilde{g} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_2 - \alpha_2/x \\ \beta_1 - \alpha_1/y \end{pmatrix}$  mit  $\text{rot}(\tilde{g}) = 0$ , also  $\tilde{g} = \text{grad } \Phi$ . Damit finden wir leicht das ersehnte Potential  $\Phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \beta_2 x - \alpha_2 \ln x + \beta_1 y - \alpha_1 \ln y$ .

☺ Jede Lösung  $[t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto (x(t), y(t))$  hat konstantes Potential und ist somit gefangen auf ihrer **Niveaulinie**  $\{ (x, y) \mid \Phi(x, y) = \text{const} \}$ .

Die oben genannten Beispiele illustrieren dies sehr eindrücklich: Ein solches Potential ist hilfreich und liefert uns die Lösungskurven als Niveaulinien (zunächst implizit und zeitlich nicht parametrisiert). Man nennt dies auch ein **erstes Integral** der Differentialgleichung. Diese traditionelle Bezeichnung stammt aus Zeiten als man versuchte, alle Differentialgleichungen durch solcherart Integration explizit zu lösen.

⚠ Damit wir wirklich eine Niveaulinie erhalten (und kein Plateau oder schlimmeres), fordern wir  $\text{grad } \Phi(x, y) \neq 0$ . Damit die Lösung nirgends stehen bleibt, fordern wir  $|f(x, y)| \geq M > 0$ . Diese beiden bilden die geometrischen Voraussetzungen des folgenden Periodizitätssatzes.

P243 Ausführung

**Periodizitätssatz: gefangen im Potentialtopf**

In Anwendungen verhalten sich viele dynamische Systeme periodisch: harmonischer Oszillator, mathematisches Pendel, Lotka-Volterra, etc. Der folgende Satz erklärt dies ganz allgemein für zweidimensionale Systeme mit Potential: Kompakte Niveaulinien sind geschlossen!

**Satz P2A: Periodizitätssatz zweidimensionaler Dynamik**

Sei  $f: \mathbb{R}^2 \supseteq G \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein stetiges Vektorfeld und  $\Phi: G \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Zu  $a \leq b$  sei  $K = \{ (x, y) \in G \mid a \leq \Phi(x, y) \leq b \}$  kompakt und liege ganz im Inneren  $G$  des Definitionsbereichs  $G$ .

In jedem  $(x, y) \in K$  sei  $(f(x, y), \text{grad } \Phi(x, y))$  eine Orthogonalbasis, also  $f(x, y) \neq 0$  und  $\text{grad } \Phi(x, y) \neq 0$  und  $f(x, y) \cdot \text{grad } \Phi(x, y) = 0$ .

Dann sind Niveaulinien von  $\Phi: K \rightarrow \mathbb{R}$  geschlossene Lösungskurven: Jeder Startwert  $(x(0), y(0)) \in K$  führt zu einer eindeutigen periodischen Lösung  $(x, y): \mathbb{R} \rightarrow G$  mit  $(\dot{x}, \dot{y}) = f(x, y)$ . Es gibt eine kleinste Periode  $T > 0$ , sodass  $(x(t+T), y(t+T)) = (x(t), y(t))$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt.

☺ Die Voraussetzungen sind geometrisch anschaulich und in unseren Anwendungen leicht zu prüfen. Wir erhalten periodische Lösungen!

P244 Ausführung

**Periodizitätssatz: gefangen im Potentialtopf**

**Beweis:** Zu  $c \in [a, b]$  ist die Niveaulinie  $C = \{ (x, y) \in G \mid \Phi(x, y) = c \}$  eine glatte Kurve in  $\mathbb{R}^2$  (dank des Satzes über implizite Funktionen). Nach Konstruktion ist  $C$  abgeschlossen, wegen  $C \subseteq K$  also kompakt. Jede kompakte Kurve ist eine Kreislinie oder Vereinigung von endlich vielen disjunkten Kreislinien (dank der Klassifikation der Kurven).

Für  $(x, y) \in K$  gilt  $f(x, y) \neq 0$ . Die Absolutgeschwindigkeit  $|f|: K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  ist stetig. Dank Kompaktheit nimmt sie ihr Minimum an. Demnach ist die Mindestgeschwindigkeit positiv,  $M := \min |f(x, y)| = |f(x_m, y_m)| > 0$ .

Jede der Kurven  $C$  hat endliche Länge  $\ell(C)$ . Bei Mindestgeschwindigkeit  $M > 0$  wird sie also in endlicher Zeit  $T \leq \ell(C)/M < \infty$  durchlaufen.

Jeder Startwert  $(x(0), y(0)) \in K$  mit  $\Phi(x(0), y(0)) = c$  führt schließlich zu einer periodischen Lösung: Jede Lösung  $t \mapsto (x(t), y(t))$  verbleibt in  $C$  und läuft nicht aus  $G$  hinaus; sie setzt sich unendlich fort für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

Die Lösung  $\mathbb{R} \rightarrow G: t \mapsto (x(t), y(t))$  durchläuft ewig die Kreislinie  $C$ . Nach der Zeit  $T > 0$  kehrt sie zwingend zurück in den Ausgangszustand  $(x(T), y(T)) = (x(0), y(0))$ . Dank des Eindeutigkeitsatzes O1B folgt hieraus die Periodizität  $(x(t+T), y(t+T)) = (x(t), y(t))$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

P245 Ergänzung

**Lie-Ableitung und erste Integrale**

Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f: \mathbb{R}^n \supseteq G \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar. Dieses Vektorfeld definiert die **autonome Differentialgleichung**  $\dot{x}(t) = f(x(t))$ . Zu jedem vorgegebenen Startwert  $x(0) = x_0 \in G$  existiert genau eine maximale Lösung  $x: \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow G$  mit  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  für alle  $t \in I$  (O1B).

Sei  $E: G \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Zum Gradienten  $\nabla E$  bilden wir das Produkt  $\dot{E} := \nabla E \cdot f: G \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \partial_1 E(x) \cdot f_1(x) + \dots + \partial_n E(x) \cdot f_n(x)$ . Dies ist die **Lie-Ableitung** von  $E$  in Richtung des Vektorfeldes  $f$ .

**Aufgabe:** (1) Auf ganz  $G$  gelte (a)  $\nabla E \cdot f = 0$  oder (b)  $\dot{E} \geq 0$  oder (c)  $\dot{E} \leq 0$ . Wie verhält sich  $t \mapsto E(x(t))$  entlang einer Lösung  $x: I \rightarrow G$ ?

(2) Eine Funktion  $E: G \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\nabla E \cdot f = 0$  heißt **erstes Integral**. Wie nutzen Sie dies, um den Verlauf von Lösungen zu bestimmen? Geben Sie möglichst viele Beispiele! exakte Differentialgleichungen!

(3) Es gelte  $\nabla E \cdot f \leq 0$  auf ganz  $G$ . Zum Startwert  $E_0 = E(x_0)$  sei die Menge  $K = \{ x \in G \mid E(x) \leq E_0 \}$  kompakt. Bleibt die Lösung  $t \mapsto x(t)$  in der Teilmenge  $K \subseteq G$  gefangen? Existiert die Lösung für alle  $t \geq 0$ ?

(4) Welche drei Formen können Lösungskurven  $\{ x(t) \mid t \in \mathbb{R} \}$  haben?

P246 Ergänzung

**Lie-Ableitung und erste Integrale**

**Lösung:** (1) Die Zeitableitung von  $t \mapsto E(x(t))$  ergibt dank Kettenregel

$$\frac{d}{dt} E(x(t)) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial E}{\partial x_k} (x_1(t), \dots, x_n(t)) \cdot \frac{dx_k}{dt}(t) = (\nabla E \cdot f)(x(t)).$$

Folglich ist  $t \mapsto E(x(t))$  also (a) konstant, (b) wachsend, (c) fallend.

☺ Wir denken uns  $\dot{x} = f(x)$  als mechanisches System,  $E$  als eine verallgemeinerte Energiefunktion und  $\dot{E} \leq 0$  als Dissipation (Verlust).

(2) Zum Startwert  $E_0 = E(x_0)$  verläuft die Lösung  $t \mapsto x(t)$  ganz in der Teilmenge  $K = \{ x \in G \mid E(x) = E_0 \}$ . ☺ Ohne sie explizit zu kennen, können wir Lösungskurven eingrenzen, manchmal implizit bestimmen!

(3) Ja! Zum Beweis sei  $[0, T] \rightarrow G: t \mapsto x(t)$  eine Lösung mit  $0 < T < \infty$ . Wegen  $E(x_0) \in K$  und  $\nabla E \cdot f \leq 0$  verläuft diese Lösung ganz in  $K$ . Wegen  $|\dot{x}(t)| = |f(x(t))| \leq M := \max_K |f|$  gilt  $|x(s) - x(t)| \leq M|s - t|$ . Dank dieser Cauchy-Bedingung konvergiert  $x(t) \rightarrow x_T \in K$  für  $t \nearrow T$ . Dank des  $\exists \& E$ -Satzes O1B können wir die Lösung weiter fortsetzen.

(4) Entweder ist  $t \mapsto x(t)$  konstant, nämlich für  $f(x_0) = 0$ , oder injektiv oder periodisch. Die Kurve  $\{ x(t) \mid t \in \mathbb{R} \}$  ist demnach ein Punkt  $\{x_0\}$ , eine eingebettete unendliche Kurve  $\mathbb{R} \hookrightarrow G$  oder kreisförmig  $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow G$ .

P247 Ergänzung

**Stabilität von Fixpunkten**

Wir untersuchen damit Fixpunkte und kleine Störungen noch genauer:

**Definition P2B: Fixpunkte und Stabilität**

Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f: \mathbb{R}^n \supseteq G \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar. Wir betrachten das Anfangswertproblem  $\dot{x}(t) = f(x(t)), x(0) = x_0$ .

(0) Wir nennen  $x_0 \in G$  einen **Fixpunkt**, wenn er  $f(x_0) = 0$  erfüllt. Äquivalent hierzu: Die zugehörige Lösung  $t \mapsto x(t)$  ist konstant.

(1) Der Fixpunkt  $x_0$  heißt **Lyapunov-stabil**, wenn zu jedem Radius  $\varepsilon > 0$  mit  $\bar{B}(x_0, \varepsilon) \subseteq G$  ein (eventuell kleinerer) Radius  $\delta > 0$  existiert, sodass für jeden Startpunkt  $\tilde{x}_0 \in B(x_0, \delta)$  die zugehörige Lösung  $t \mapsto \tilde{x}(t)$  für alle  $t \in [0, \infty[$  existiert und ganz in  $B(x_0, \varepsilon)$  verläuft.

(2) Der Fixpunkt  $x_0$  heißt **asymptotisch stabil**, wenn (1) gilt und zudem ein  $\delta > 0$  existiert, sodass für jeden Startpunkt  $\tilde{x}_0 \in B(x_0, \delta)$  die zugehörige Lösung  $t \mapsto \tilde{x}(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  gegen  $x_0$  konvergiert.

(3) Der Fixpunkt  $x_0$  heißt **exponentiell stabil**, wenn (2) gilt mit Schranke  $|\tilde{x}(t) - x_0| \leq \alpha \cdot |\tilde{x}_0 - x_0| \cdot e^{-\lambda t}$  für Konstanten  $\alpha, \lambda > 0$  und alle  $t \geq 0$ .

P248 Ergänzung

**Stabilität von Fixpunkten**

**Übung:** Formulieren Sie zur Wiederholung den un/gedämpften harmonischen Oszillator [O101], das un/gedämpfte mathematische Pendel [O133], Lotka-Volterra [P233], usw. . . als dynamisches System  $\dot{x} = f(x)$ . Wo sind die Fixpunkte? Welche sind stabil? asymptotisch? exponentiell? Formulieren Sie die Gesamtenergie  $E$  und zeigen Sie  $\dot{E} = 0$  bzw.  $\dot{E} \leq 0$ .

**Aufgabe:** Zu  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  betrachten wir das lineare System  $\dot{x}(t) = Ax(t)$ . Wo sind die Fixpunkte? Welche sind stabil? asymptotisch? exponentiell? Sei 0 asymptotisch stabil. Dann ist  $\langle u | v \rangle_A := \int_{t=0}^{\infty} \langle e^{tA} u | e^{tA} v \rangle dt$  ein Skalarprodukt, und für die „Energie“  $E(x) = \langle x | x \rangle_A$  gilt  $\dot{E}(x) = -|x|^2$ .

**Lösung:** Ein Fixpunkt ist 0; weitere gibt's nur für  $Ax = 0$ , also  $x \in \ker A$ . Genau dann ist 0 asymptotisch stabil, gar exponentiell, wenn  $\text{Re } \lambda_k < 0$  für alle  $k \in \{1, \dots, n\}$ , und instabil, wenn  $\text{Re } \lambda_k > 0$  für ein  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Im verbleibenden kritischen Fall gilt  $\text{Re } \lambda_k \leq 0$  für alle  $k$  und  $\text{Re } \lambda_k = 0$  für ein  $k$ . Er kann instabil oder stabil sein, aber nicht asymptotisch stabil. Das Integral konvergiert, erfüllt alle Anforderungen (I1G), und es gilt  $\dot{E}(x) = 2 \langle x | Ax \rangle_A = \int_{t=0}^{\infty} 2 \langle x(t) | \dot{x}(t) \rangle dt = [ |x(t)|^2 ]_{t=0}^{\infty} = -|x|^2$ .

Nicht-lineare dynamische Systeme  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  können wir meist nicht explizit lösen. Lyapunovs Methode liefert dennoch Schlussfolgerungen über Lösungsverlauf und Stabilität. Sei  $x_0$  ein Fixpunkt, also  $f(x_0) = 0$ .

**Satz P2c: Lyapunov-Kriterium für In/Stabilität**

Sei  $E: \mathbb{R}^n \supseteq G \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar und **positiv definit** um  $x_0$ : Es gelte  $E(x_0) = 0$  und  $E(x) > 0$  für  $x \neq x_0$ . (Lyapunov-Funktion)

- (1) Sei  $E$  **schwach dissipativ** um  $x_0$ : Für  $|x - x_0| \leq \varepsilon$  gelte  $\dot{E}(x) \leq 0$ . Dann ist der Fixpunkt  $x_0$  stabil.
- (2) Sei  $E$  **strikt dissipativ** um  $x_0$ : Für  $0 < |x - x_0| \leq \varepsilon$  gelte  $\dot{E}(x) < 0$ . Dann ist der Fixpunkt  $x_0$  asymptotisch stabil.
- (3) Für  $|x - x_0| \leq \varepsilon$  gelte  $\dot{E} \leq -\alpha E$  und  $E(x) \geq c|x - x_0|^\beta$  mit  $\alpha, \beta, c > 0$ . Dann ist der Fixpunkt  $x_0$  exponentiell stabil.
- (4) Für  $0 < |x - x_0| \leq \varepsilon$  gelte  $\dot{E}(x) > 0$ . Dann ist der Fixpunkt  $x_0$  instabil.

**Aufgabe:** Erklären Sie diese Aussagen möglichst anschaulich anhand von Skizzen und versuchen Sie sie anschließend zu beweisen!

(1) Sei  $\varepsilon > 0$ . Wir können  $\varepsilon$  so klein wählen, dass  $\bar{B}(x_0, \varepsilon) \subseteq G$  gilt. Die Sphäre  $\partial B(x_0, \varepsilon)$  ist kompakt. Die stetige Funktion  $E$  nimmt hierauf ihr Minimum an, also gilt  $m := \min\{E(x) \mid x \in \partial B(x_0, \varepsilon)\} > 0$ . Zu  $E(x_0) = 0$  wählen wir  $\delta > 0$  so, dass  $E(x) < m$  für alle  $x \in B(x_0, \delta)$ . Zum Startpunkt  $\tilde{x}_0 \in B(x_0, \delta)$  gilt  $E(\tilde{x}(t)) \leq E(\tilde{x}(0)) < m$  für alle  $t \geq 0$ . Somit kann die Lösung  $t \mapsto \tilde{x}(t)$  die Sphäre  $\partial B(x_0, \varepsilon)$  nicht erreichen, und demnach den vorgegebenen Ball  $B(x_0, \varepsilon)$  um  $x_0$  niemals verlassen.

(2) Zum Startpunkt  $\tilde{x}_0 \in B(x_0, \delta)$  bleibt die Lösung  $t \mapsto x(t)$  in  $B(x_0, \varepsilon)$ . Zudem ist  $t \mapsto E(x(t)) \in [0, m]$  monoton fallend, konvergiert also für  $t \rightarrow \infty$  gegen einen Grenzwert  $e \geq 0$ . Wir haben  $e = 0$  zu zeigen. Angenommen  $e > 0$ . Es existiert  $\rho > 0$  sodass  $E(x) < e$  für  $x \in B(x_0, \rho)$ . Die Lösung  $t \mapsto \tilde{x}(t)$  verläuft also vollständig im kompakten Kreisring  $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho \leq |x - x_0| \leq \varepsilon\}$ . Die stetige Funktion  $\dot{E} = \nabla E \cdot f < 0$  nimmt hierauf ihr Maximum an, also gilt  $a := \max\{\dot{E}(x) \mid x \in K\} < 0$ . Es folgt  $E(\tilde{x}(t)) = E(\tilde{x}(0)) + \int_0^t \dot{E}(\tilde{x}(\tau)) d\tau \leq E(\tilde{x}(0)) + at \searrow -\infty$ . Das ist wegen  $E \geq 0$  unmöglich. Also gilt  $e = 0$ , und somit  $x(t) \rightarrow x_0$ .

Aussagen (3) und (4) beweist man ähnlich; ich führe dies hier nicht aus.

Lyapunovs indirekte Methode: das Eigenwertkriterium

Wir betrachten das autonome System  $\dot{x} = f(x)$  um einen Fixpunkt  $x_0$ . Nach Verschieben können wir ohne Einschränkung  $x_0 = 0$  annehmen. Für kleine Auslenkungen um den Fixpunkt 0 linearisieren wir gemäß

$$\dot{x} = Ax + g(x).$$

Die Jacobi-Matrix  $A = f'(0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ist der **lineare Hauptteil**. Der **Störterm**  $g$  sei stetig und erfülle  $|g(x)|/|x| \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow 0$ . Das **ungestörte System**  $\dot{u} = Au$  ist linear: Satz P1G gibt uns explizit alle Lösungen mit Hilfe der Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ , damit Stabilität.

**Satz P2D: Eigenwertkriterium für In/Stabilität**

Für das gestörte System  $\dot{x} = Ax + g(x)$  gilt wie für das ungestörte:

- (1) Gilt  $\text{Re}(\lambda_k) < 0$  für **alle** Eigenwerte, so ist der Fixpunkt exp. **stabil**.
- (2) Gilt  $\text{Re}(\lambda_k) > 0$  für **einen** Eigenwert, so ist der Fixpunkt **instabil**.

⚠ Den verbleibenden kritischen Fall muss man gesondert untersuchen: Hier gilt weder (1) noch (2), also  $\sigma_A := \max\{\text{Re}(\lambda_k) \mid k = 1, \dots, n\} = 0$ .

Lyapunovs indirekte Methode: das Eigenwertkriterium

Zum Beweis konstruieren wir eine Lyapunov-Funktion gemäß Satz P2C.

**Beweis:** (1) Wie oben [P248] nutzen wir zu  $u, v \in \mathbb{R}^n$  das Skalarprodukt  $\langle u \mid v \rangle_A := \int_{t=0}^{\infty} \langle e^{tA}u \mid e^{tA}v \rangle dt$ . Für die Energie  $E(x) = \langle x \mid x \rangle_A$  gilt:

$$\begin{aligned} \dot{E}(x) &\stackrel{\text{Def}}{=} 2\langle x \mid Ax + g(x) \rangle_A \stackrel{\text{Lin}}{=} 2\langle x \mid Ax \rangle + 2\langle x \mid g(x) \rangle_A \\ &\stackrel{\text{P248}}{=} -|x|^2 + 2\langle x \mid g(x) \rangle_A \stackrel{\text{CSU}}{\leq} -|x|^2 + 2 \cdot |x|_A \cdot |g(x)|_A \end{aligned}$$

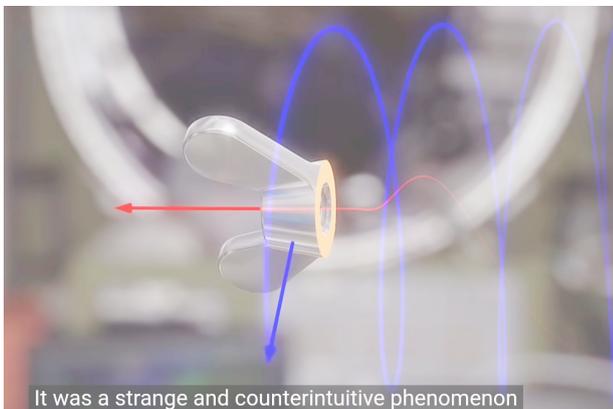
Auf dem  $\mathbb{R}^n$  sind je zwei Normen wie  $|\cdot|$  und  $|\cdot|_A$  äquivalent, das heißt, es gibt Konstanten  $0 < a < b$  sodass  $a|x| \leq |x|_A \leq b|x|$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ . Wir wählen  $\varepsilon > 0$  so klein, dass  $B(0, \varepsilon) \subseteq G$  gilt, dank  $|g(x)|/|x| \rightarrow 0$  zudem  $|g(x)| \leq (1/4b^2)|x|$  für alle  $x \in B(0, \varepsilon)$ . Wir erhalten:

$$\dot{E}(x) \leq -|x|^2 + 2b^2 \cdot |x| \cdot |g(x)| \leq -\frac{1}{2}|x|^2 \leq -\frac{1}{2a^2}E(x)$$

Dank Lyapunov-Kriterium P2C(2) ist der Fixpunkt asymptotisch stabil; dank der Verschärfung P2C(3) ist er sogar exponentiell stabil.

Das Instabilitätskriterium (2) beweist man ähnlich; ich verweise auf [W. Walter: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Springer, §29–30]

Der torkelnde Tennisschläger / intermediate axis theorem



The bizarre behavior of rotating bodies  
Veritasium, youtu.be/1VPfZ\_XzisU

Der torkelnde Tennisschläger / intermediate axis theorem

Wir betrachten einen rotierenden Körper (in körperfesten Koordinaten). Die Drehbewegung wird beschrieben durch die **Euler-Gleichungen**:

$$\Theta \dot{\omega} = (\Theta \omega) \times \omega + M$$

Zu jedem Zeitpunkt  $t \in \mathbb{R}$  ist  $\omega(t) \in \mathbb{R}^3$  die Winkelgeschwindigkeit und  $M(t) \in \mathbb{R}^3$  das angewendete Drehmoment; wir setzen hier  $M(t) = 0$ . Hierbei ist  $L = \Theta \omega$  der Drehimpuls, wir haben also  $\dot{L} = L \times \omega + M$ . Das Trägheitsmoment  $\Theta \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  diagonalisieren wir in **Hauptachsen**:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3 \end{pmatrix} \quad (\text{symmetrisch} \implies \text{orthogonal diagonalisierbar})$$

Koordinatenweise ausgeschrieben erhalten wir unser nicht-lineares DGSystem erster Ordnung:

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \dot{\omega}_1 \\ \theta_2 \dot{\omega}_2 \\ \theta_3 \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 \omega_1 \\ \theta_2 \omega_2 \\ \theta_3 \omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\theta_2 - \theta_3)\omega_2\omega_3 + M_1 \\ (\theta_3 - \theta_1)\omega_3\omega_1 + M_2 \\ (\theta_1 - \theta_2)\omega_1\omega_2 + M_3 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe:** Sei  $0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3$ . Bestimmen Sie Fixpunkte und Stabilität.

Der torkelnde Tennisschläger / intermediate axis theorem

**Lösung:** (1) Es gibt genau die Fixpunkte  $(\omega_1, 0, 0)$ ,  $(0, \omega_2, 0)$ ,  $(0, 0, \omega_3)$ .  
(2) Wir linearisieren, dazu berechnen wir zunächst die Jacobi-Matrix:

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha_1 \omega_2 \omega_3 \\ \alpha_2 \omega_3 \omega_1 \\ \alpha_3 \omega_1 \omega_2 \end{pmatrix} \implies f' \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \omega_3 & \alpha_1 \omega_2 \\ \alpha_2 \omega_3 & 0 & \alpha_2 \omega_1 \\ \alpha_3 \omega_2 & \alpha_3 \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Linearisiert um den Fixpunkt  $(0, \omega_2, 0)$  erhalten wir  $\dot{u} = Au$ :

$$A = f' \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 \omega_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha_3 \omega_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(A - \lambda E) = -\lambda(\lambda^2 - \alpha_1 \alpha_3 \omega_2^2) = -\lambda(\lambda^2 - \omega_2^2(\theta_3 - \theta_2)(\theta_2 - \theta_1)/\theta_1 \theta_3)$$

Eigenwerte sind 0 und  $\pm \omega_2 \sqrt{(\theta_3 - \theta_2)(\theta_2 - \theta_1)/\theta_1 \theta_3}$ . Daraus folgt:

**Satz P2E: torkelnder Tennisschläger / intermediate axis theorem**

Wir untersuchen die kräftefreie Bewegung eines starren Körpers mit Trägheitsmomenten  $0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3$  bezüglich seiner Hauptachsen.

Die Rotation um die mittlere Achse ist instabil: Jede kleine Störung wird exponentiell verstärkt mit  $e^{\lambda t}$  und  $\lambda = |\omega_2| \sqrt{(\theta_3 - \theta_2)(\theta_2 - \theta_1)/\theta_1 \theta_3}$ .

Der torkelnde Tennisschläger / intermediate axis theorem

Um  $(\omega_1, 0, 0)$  linearisiert finden wir  $0, \pm \omega_1 \sqrt{(\theta_2 - \theta_1)(\theta_3 - \theta_1)/\theta_2 \theta_3} \in i\mathbb{R}$ .  
Um  $(0, 0, \omega_3)$  linearisiert finden wir  $0, \pm \omega_3 \sqrt{(\theta_3 - \theta_1)(\theta_3 - \theta_2)/\theta_1 \theta_2} \in i\mathbb{R}$ .

⚠ Das Eigenwertkriterium P2D können wir hier leider nicht anwenden! Die In/Stabilität lässt sich allein aus diesen Daten noch nicht schließen; dazu sind genauere Untersuchungen nötig, dank Lyapunov-Funktionen:

$$V_1 = (\theta_2 - \theta_1)\theta_2\omega_2^2 + (\theta_3 - \theta_1)\theta_3\omega_3^2 \geq 0, \quad V_1 = 0 \iff \omega_2 = \omega_3 = 0, \quad \dot{V}_1 = 0$$

$$V_3 = (\theta_3 - \theta_1)\theta_1\omega_1^2 + (\theta_3 - \theta_2)\theta_2\omega_2^2 \geq 0, \quad V_3 = 0 \iff \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \dot{V}_3 = 0$$

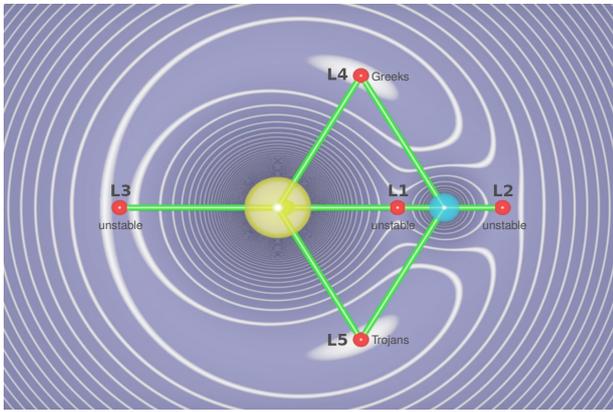
😊 Diese Invarianten zeigen, dass die Rotation um die erste bzw. dritte Achse stabil ist. Letzteres gilt nur bei Energieerhaltung, wie eingangs vereinfachend angenommen. Bei Dissipation gilt  $\dot{V}_1 \geq 0$  und  $\dot{V}_3 \leq 0$ .

⚠ Die Rotation um die kleine Achse wird dann ebenfalls instabil. Die NASA erfuhr dies 1958 schmerzlich mit Explorer 1, ihrem ersten künstlichen Erdsatelliten, siehe en.wikipedia.org/wiki/Explorer\_1.

📖 Colley: *The tumbling box*. Amer. Math. Monthly 94 (1987) 62–68.  
Marsden, Ratiu: *Mechanics and Symmetry*. Springer 1999, §15.9.

## Die Lagrange-Punkte eines Zwei-Körper-Systems

P257  
Beispiel



What makes Lagrange points special locations in space?

▶ Scott Manley, [youtu.be/7PHvDj4TDfM](https://youtu.be/7PHvDj4TDfM)

## Die Lagrange-Punkte eines Zwei-Körper-Systems

P258  
Beispiel

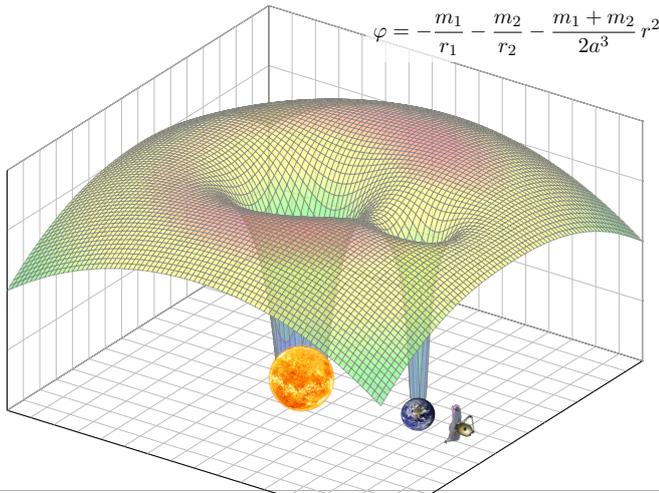
Newtons  $N$ -Körper-Problem spezialisieren wir zu  $N = 2$  Körpern, etwa Sonne-Erde oder Erde-Mond; sie umkreisen sich ellipsenförmig. In jedem solchen System gibt es genau fünf **Lagrange-Punkte** oder **Librationspunkte**, in denen sich alle wirkenden Kräfte ausgleichen. Hier kann ein dritter, leichter Körper antriebslos geparkt werden.

Die Punkte  $L_{1/2/3}$  sind in Radialrichtung instabil, also insgesamt instabil. Natürliche Objekte sammeln sich hier nicht, sondern werden langfristig ausgefegt; Dauerparken erfordert eine (leichte) **aktive Bahnkorrektur**. Der  $L_2$ -Punkt ist ideal für Weltraumteleskope, etwa WMAP (2001–2010), Planck und Herschel (2009–2013), aktuell James-Webb (seit 2022).

Die Punkte  $L_{4/5}$  hingegen sind Lyapunov-stabil: Kleine Abweichungen bleiben beschränkt und vollführen kleine Oszillationen um den Fixpunkt. Hier können sich natürliche Objekte dauerhaft ansammeln, ganz ohne aktive Bahnkorrektur. Insbesondere auf den Umlaufbahnen der großen Planeten sammeln sich die **Griechen** um  $L_4$  und die **Trojaner** um  $L_5$ . Wir untersuchen nun dieses restringierte Drei-Körper-Problem (CR3BP).

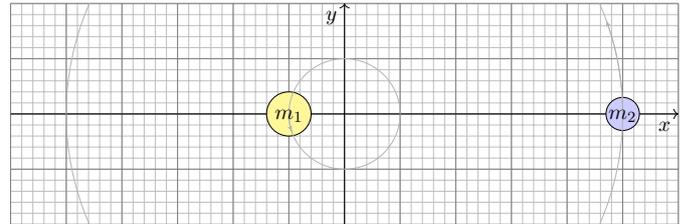
## Die Lagrange-Punkte eines Zwei-Körper-Systems

P259  
Ausführung



## Die Lagrange-Punkte eines Zwei-Körper-Systems

P260  
Ausführung



Wir betrachten zwei Massen  $m_1 \geq m_2 > 0$  mit Abstand  $a > 0$ . Durch diese legen wir die  $x$ -Achse mit Ursprung im Schwerpunkt, genauer  $x_1 < 0 < x_2$  mit  $x_1 m_1 + x_2 m_2 = 0$  und  $a = x_2 - x_1 = x_2(m_1 + m_2)/m_1$ . Kreisförmige Bewegung entspricht der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  mit Zentripetalkraft gleich Schwerkraft, also  $\omega^2 x_2 m_2 = \gamma m_1 m_2 / a^2$ , somit

$$\omega^2 = \gamma \frac{m_1 + m_2}{a^3}.$$

Das entspricht **Keplers drittem Gesetz**: Das Quadrat der Umlaufzeit ist proportional zum Kubus der großen Halbachse der Bahnellipse.

## Die Lagrange-Punkte eines Zwei-Körper-Systems

P261  
Ausführung

Wir betrachten ein Testteilchen mit sehr kleiner Masse  $m \ll m_2 \leq m_1$ . Im rotierenden Koordinatensystem wirkt effektiv das **Roche-Potential**:

$$V(x, y, z) = -\gamma \frac{m_1}{r_1} - \gamma \frac{m_2}{r_2} - \frac{1}{2} \omega^2 r^2$$

mit den Abständen  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  und  $r_i^2 = (x - x_i)^2 + y^2 + z^2$ . Auf das Testteilchen wirkt dadurch die Kraft  $-m \nabla V$ , als Summe der Schwerkraft zu  $m_1$  und zu  $m_2$  sowie der (fiktiven) Zentrifugalkraft weg von der Achse.

☺ Mit der Gleichung  $\nabla V = 0$  finden wir alle **Gleichgewichtslagen!** In der Dynamik wirkt zudem die Corioliskraft  $2m\vec{v} \times \vec{\omega}$ , ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\partial_x V(x, y, z) + 2\dot{y}\omega \\ \ddot{y} &= -\partial_y V(x, y, z) - 2\dot{x}\omega \\ \ddot{z} &= -\partial_z V(x, y, z) \end{aligned}$$

Die **Gesamtenergie** des Zustands entspricht der Jacobi-Invariante

$$H(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = V(x, y, z) + \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

## Die Lagrange-Punkte eines Zwei-Körper-Systems

P262  
Ausführung

**Übung:** (1a) Bestimmen Sie die Lagrange-Punkte  $L_1, L_2, L_3$  auf der  $x$ -Achse in Abhängigkeit vom Massenverhältnis  $\mu = m_2/(m_1 + m_2)$ .

(1b) Setzen Sie die Zahlen für Sonne-Erde und für Erde-Mond ein. Vergleichen Sie dies mit der Position des James-Webb-Teleskops.

(2) Genau dann gilt  $\nabla V(p) = 0$ , wenn  $p \in \{L_1, L_2, L_3, L_4, L_5\}$ :

(2a) Jeder der fünf Lagrange-Punkte ist ein Gleichgewicht.

(2b) Jedes Gleichgewicht ist einer der fünf Lagrange-Punkte.

(3) Die Jacobi-Invariante  $H$  ist konstant entlang jeder Trajektorie, denn dank Kettenregel gilt  $\dot{H} = \partial_x V \cdot \dot{x} + \partial_y V \cdot \dot{y} + \partial_z V \cdot \dot{z} + \dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y} + \dot{z}\dot{z} = 0$ .

**Lösung:** Anschaulich erhalten wir die Situation der obigen Skizzen: Auf der  $x$ -Achse liegen die Lagrange-Punkte  $L_1, L_2, L_3$  als Sattel; sie sind instabil bei Störung in  $x$ -Richtung, also insgesamt instabil. Die Maxima liegen in den Ecken  $L_4$  und  $L_5$  der beiden gleichseitigen Dreiecke in der  $x$ - $y$ -Ebene; die Corioliskraft macht sie Lyapunov-stabil.

☞ Eine schöne Ausführung und Lösung finden Sie bei Neil Cornish: [Lagrange Points, map.gsfc.nasa.gov/ContentMedia/lagrange.pdf](https://map.gsfc.nasa.gov/ContentMedia/lagrange.pdf).

## Die Lagrange-Punkte eines Zwei-Körper-Systems

P263  
Ausführung

Die fünf Lagrange-Punkte sind die Gleichgewichte. Ihre In/Stabilität erfordert eine genauere Analyse der Dynamik inklusive Corioliskraft. Beim ersten Blick auf das Potential  $V$  scheinen  $L_4$  und  $L_5$  instabil, erst die Corioliskraft stabilisiert sie. Eine detaillierte Darstellung finden Sie in:

☞ Meyer, Offen: *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*. Springer 2017. Ich fasse hier §4.5 zusammen:

☺ Die Punkte  $L_1, L_2, L_3$  sind instabil dank Eigenwertkriterium P2D. Für diese Schlussfolgerung genügt also bereits die Linearisierung.

☺ Für die Stabilität der Punkte  $L_4$  und  $L_5$  ist das Massenverhältnis  $\mu = m_2/(m_1 + m_2)$  entscheidend. Der kritische Wert ist nach Routh  $\mu_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{69}/9) \approx 0.03852$ . Für  $\mu_1 < \mu \leq 1/2$  gibt es Eigenwerte mit positiven Realteil; gemäß P2D sind die Librationspunkte somit instabil. Für  $0 < \mu \leq \mu_1$  sind alle Eigenwerte imaginär. Bedeutet das Stabilität?

⚠ Zur Stabilität von  $L_4$  und  $L_5$  genügt die Linearisierung noch nicht. Erst eine genauere Untersuchung zeigt die Stabilität von  $L_4$  und  $L_5$  mit Methoden der KAM-Theorie (nach Kolmogorov, Arnold, Moser).

## Die Lagrange-Punkte eines Zwei-Körper-Systems

P264  
Ausführung

☺ Mit aktiver Bahnkorrektur können Satelliten um  $L_1, L_2, L_3$  kreisen, aktuell zum Beispiel das James-Webb Space Telescope (JWST) um  $L_2$ .

☺ Die Jacobi-Invariante zeigt insbesondere, dass jede energetisch günstigste Flugbahn von der Erde zum Mond über den  $L_1$ -Punkt führt.

☺ In einem binären Sternensystem kann über den  $L_1$ -Sattelpunkt Masse leicht vom kleineren zum größeren Stern fließen (*accreting binaries*).

☺ Die Bahn eines Probesteilchens kann überraschend kompliziert sein, kaulquappenförmig (*tadpole orbit*) oder hufeisenförmig (*horseshoe orbit*) um  $L_4$  und  $L_5$ , siehe [de.wikipedia.org/wiki/Hufeisenumlaufbahn](https://de.wikipedia.org/wiki/Hufeisenumlaufbahn). Spektakuläres Beispiel sind die Saturnmonde Janus und Epimetheus.

☺ Die Erde hat neben dem Mond einen zweiten Begleiter als Minimond: Der Asteroid 3753 hat einen Durchmesser von etwa 5km. Er umkreist nicht die Erde, sondern den vorauseilenden Lagrange-Punkt  $L_4$  des Sonne-Erde-Systems auf einer hufeisenförmigen Bahn. *Math rocks!*

☞ Wiegert, Innanen, Mikkola: *An asteroidal companion to the Earth*. Nature 387 (1997) 685–686, siehe [www.nature.com/articles/42662](https://www.nature.com/articles/42662)

Jedes stetige Vektorfeld  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  definiert ein DGS

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)).$$

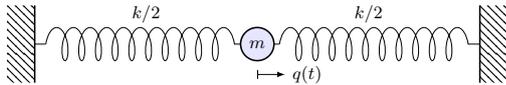
In physikalischen Anwendungen ist das Feld  $f$  oft von spezieller Form: Der Zustand  $x = (q, p)$  besteht aus den Ortskoordinaten  $q = (q_1, \dots, q_n)$  und den Impulskordinaten  $p = (p_1, \dots, p_n)$ ; somit ist  $m = 2n$  gerade.

**Definition P2F: hamiltonsches dynamisches System**

Vorgegeben sei eine beliebige  $C^2$ -Funktion  $H: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , genannt **Hamilton-Funktion**. Diese definiert das **hamiltonsche Vektorfeld**  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  mit  $f_k = \partial H / \partial p_k$  und  $f_{n+k} = -\partial H / \partial q_k$  für  $k = 1, \dots, n$ . Wir erhalten so das **hamiltonsche dynamische System**  $(\Omega, H)$  mit

$$\begin{aligned} \dot{q}_k(t) &= \frac{\partial H}{\partial p_k}(t, q(t), p(t)), \\ \dot{p}_k(t) &= -\frac{\partial H}{\partial q_k}(t, q(t), p(t)). \end{aligned}$$

Hamiltonsche Dynamik: harmonischer Oszillator



**Beispiel:** Für den (reibungsfreien) harmonischen Oszillator betrachten wir den Zustandsraum  $\Omega = \mathbb{R}^2$  und hierauf die Hamilton-Funktion

$$H(q, p) = \frac{k}{2}q^2 + \frac{1}{2m}p^2.$$

- Die Gesamtenergie  $H(q, p)$  ist die Summe der potentiellen Energie  $V(q) = \frac{k}{2}q^2$  und der kinetischen Energie  $T(p) = \frac{1}{2m}p^2$  im Zustand  $(q, p)$ .
- Die zugehörigen hamiltonschen Bewegungsgleichungen P2F lauten

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p/m, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -kq.$$

Das ist sehr vertraut: Die erste Gleichung  $p = m\dot{q}$  erklärt den Impuls  $p$  als Masse  $m$  mal Geschwindigkeit  $\dot{q}$ . Die zweite Gleichung  $m\ddot{q} = -kq$  besagt Masse  $m$  mal Beschleunigung  $\ddot{q}$  ist gleich Federkraft  $-kq$ . [Q101](#)

Hamiltonsche Dynamik: die Poisson-Klammer

**Aufgabe:** Wie verändert sich eine skalare  $C^1$ -Funktion  $E: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  entlang der Trajektorie  $t \mapsto (t, q(t), p(t))$  durch den Punkt  $(\bar{t}, \bar{q}, \bar{p})$ ?

**Lösung:** Wir wenden die Kettenregel auf  $t \mapsto E(t, q(t), p(t))$  an:

$$\begin{aligned} \dot{E}(\bar{t}, \bar{q}, \bar{p}) &\stackrel{\text{Def}}{=} \frac{dE(t, q(t), p(t))}{dt}(\bar{t}) \quad \text{mit} \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \\ &\stackrel{\text{KR}}{=} \frac{\partial E}{\partial t}(\bar{t}, \bar{q}, \bar{p}) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial E}{\partial q_k}(\bar{t}, \bar{q}, \bar{p}) \cdot \dot{q}_k(\bar{t}) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial E}{\partial p_k}(\bar{t}, \bar{q}, \bar{p}) \cdot \dot{p}_k(\bar{t}) \\ &= \frac{\partial E}{\partial t} + \{E, H\} \quad \text{mit} \quad \{E, F\} := \sum_{k=1}^n \frac{\partial E}{\partial q_k} \frac{\partial F}{\partial p_k} - \frac{\partial E}{\partial p_k} \frac{\partial F}{\partial q_k} \end{aligned}$$

**Beispiel:** Speziell für  $E = H$  gilt  $\{H, H\} = 0$ . Daraus folgt  $\dot{H} = \partial_t H$ :

**Satz P2G: Energieerhaltung in hamiltonscher Dynamik**

Gegeben sei eine autonome Hamilton-Funktion  $H$ , das heißt  $\partial_t H = 0$ . Dann gilt  $\dot{H} = 0$ , das heißt  $H$  ist konstant entlang jeder Trajektorie.

Entspricht physikalischer Erfahrung: Die Gesamtenergie bleibt erhalten!

Hamiltonsche Dynamik: Fixpunkte und Stabilität

Sei  $H(q, p) = V(q) + T(p)$  die Summe der Lageenergie  $V(q)$  und der Bewegungsenergie  $T(p)$ . Hierbei sei  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine positiv definite quadratische Form, etwa  $T(p) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2m_i} p_i^2$  mit Massen  $m_i > 0$ .

**Satz P2H: Fixpunkte und Stabilität und kleine Schwingungen**

- Genau dann ist  $(\bar{q}, 0) \in \Omega$  ein Fixpunkt, wenn  $\nabla V(\bar{q}) = 0$  gilt.
- Ist  $\bar{q}$  ein striktes lokales Minimum von  $V$ , so ist  $(\bar{q}, 0)$  stabil.
- Nach affiner Transformation der Koordinaten gilt dann

$$H(q, p) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} p_i^2 + \frac{1}{2} \omega_i^2 q_i^2 + (\text{höhere Terme})$$

„In erster Näherung ist alles eine harmonische Schwingung.“ (Horst Kilp)

**Beweis:** (0) Die Bewegungsgleichungen besagen  $\dot{p}_k(t) = \partial H / \partial q_k = 0$ , also  $p_k(t) = \bar{p}_k = 0$ , und  $\dot{q}_k(t) = \partial H / \partial p_k = p_k / m_k = 0$ , also  $q_k(t) = \bar{q}_k$ .

(1) Dank P2G können wir das Lyapunov-Kriterium P2C anwenden:  $E(q, p) = H(q, p) - V(\bar{q})$  ist positiv definit um  $(\bar{q}, 0)$  und erfüllt  $\dot{E} = 0$ .

☺ Dies vereinfacht dramatisch: Statt eines Vektorfeldes  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  betrachten wir nur noch eine skalare Funktion  $H: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und setzen

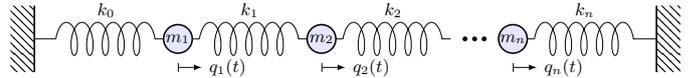
$$f = J \cdot \nabla H \quad \text{mit} \quad J = \begin{pmatrix} 0_n & E_n \\ -E_n & 0_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}.$$

☺ Genau dann ist  $f$  hamiltonsch, wenn  $-J \cdot f$  ein Potential  $H$  erlaubt. Das Potentialproblem für  $(\Omega, -J \cdot f)$  haben wir in §H2 vollständig gelöst. Geometrisch: In jeder  $(q_k, p_k)$ -Ebene wirkt  $\pm J$  als eine Vierteldrehung. Somit ist  $(\Omega, H)$  ein dynamisches System von der ganz speziellen Form  $(\dot{q}, \dot{p}) = J \cdot \nabla H(t, q, p)$ . Es lebt immer auf einem **Phasenraum** gerader Dimension  $m = 2n$ , und wir nennen  $n$  die **Anzahl der Freiheitsgrade**.

Jede Lösungskurve  $t \mapsto (t, q(t), p(t))$  bezüglich  $H$  folgt dem zugehörigen hamiltonschen Vektorfeld  $f = J \cdot \nabla H$  und wird **Trajektorie** genannt. Dank Cauchy O1B / Picard-Lindelöf O2A gilt Existenz und Eindeutigkeit.

**Autonome Systeme** sind zeitunabhängig: Hier gilt  $\dot{x} = f(x)$  bzw.  $(\dot{q}, \dot{p}) = J \cdot \nabla H(q, p)$ , wobei  $f$  und  $H$  nicht von der Zeit  $t$  abhängen.

Hamiltonsche Dynamik: gekoppelte Oszillatoren



**Beispiel:** Für  $n$  linear gekoppelte Oszillatoren [P101](#) betrachten wir

$$H(q, p) = \sum_{i=0}^n \frac{k_i}{2} (q_{i+1} - q_i)^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2m_i} p_i^2.$$

Wie zuvor vereinbaren wir Dirichlet-Randbedingungen  $q_0 = q_{n+1} = 0$ . Hamiltons Bewegungsgleichungen P2F ergeben erneut Vertrautes:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = p_i / m_i, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -k_i(q_{i+1} - q_i) - k_{i-1}(q_i - q_{i-1})$$

- ☺ Vorteile: einfache Funktion  $H$ , symmetrische Struktur in  $(q, p)$ . Dynamik und Stabilität lassen sich geometrisch untersuchen (P2H).
- ☺ Der Fluss im Phasenraum entspricht einem inkompressiblen Fluid und ermöglicht eine statistische Formulierung in der Thermodynamik.
- ☺ Leichter Übergang von klassischer zur Quantenmechanik. [R125](#)

Hamiltonsche Dynamik: die Poisson-Klammer

**Übung:** Für  $C^1$ -Funktionen  $E, F, G, \dots: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem Phasenraum definieren wir die **Poisson-Klammer**  $\{E, F\}$  wie oben motiviert durch

$$\{E, F\} := \sum_{k=1}^n \frac{\partial E}{\partial q_k} \frac{\partial F}{\partial p_k} - \frac{\partial E}{\partial p_k} \frac{\partial F}{\partial q_k}.$$

Dann gelten die folgenden nützlichen Rechenregeln:

- Antisymmetrie:  $\{F, E\} = -\{E, F\}$ , somit  $\{E, E\} = 0$
- Bilinearität:  $\{aE + bF, G\} = a\{E, G\} + b\{F, G\}$  für  $a, b \in \mathbb{R}$
- Leibniz-Produktregel:  $\{E \cdot F, G\} = E \cdot \{F, G\} + \{E, G\} \cdot F$
- Jacobi-Identität:  $\{E, \{F, G\}\} + \{F, \{G, E\}\} + \{G, \{E, F\}\} = 0$
- Für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  gilt  $\{q_i, q_j\} = 0$ ,  $\{p_i, p_j\} = 0$ ,  $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$ .
- Sei  $H$  autonom. Dann gilt  $\dot{E} = \{E, H\}$ . Gilt  $\{E, H\} = 0$ , so ist  $E$  eine **Erhaltungsgröße**. Gilt dies für  $E, F$ , so auch für  $aE + bF, E \cdot F, \{E, F\}$ .

Das System  $(\Omega, H)$  heißt **vollständig integrabel** (nach Liouville), falls es  $n$  unabhängige Erhaltungsgrößen  $H = E_1, \dots, E_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  erlaubt, die  $\{E_i, E_j\} = 0$  für alle  $i, j$  erfüllen. Diese Bewegungsinvarianten legen alle Trajektorien eindeutig fest, wie etwa beim Pendel [Q133](#) illustriert.

Hamiltonsche Dynamik: kleine Schwingungen

(2) Nach Verschieben der Koordinaten um  $\bar{q}$  dürfen wir  $\bar{q} = 0$  annehmen. Das Potential  $V$  sei zweimal stetig differenzierbar, dank Taylor also

$$V(q) = V_0 + \sum_{i=1}^n V_i q_i + \sum_{i,j=1}^n V_{ij} q_i q_j + \varepsilon(q).$$

Das Energiegrundniveau  $V_0$  können wir vereinfachend auf Null setzen. Da  $V$  in 0 ein lokales Minimum hat, gilt hier  $(V_1, \dots, V_n) = \nabla V(0) = 0$ . Die Hesse-Matrix  $(V_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ist symmetrisch und positiv semidefinit. Der Fehler  $\varepsilon(q)$  liegt in  $o(|q|^2)$ , erfüllt also  $\varepsilon(q)/|q|^2 \rightarrow 0$  für  $|q| \rightarrow 0$ . Insgesamt erhalten wir also um den Zustand  $(0, 0)$  die Näherung

$$H(q, p) = \sum_{i,j=1}^n T_{ij} p_i p_j + \sum_{i,j=1}^n V_{ij} q_i q_j + (\text{höhere Terme})$$

Wir können beide Matrizen  $(T_{ij})$  und  $(V_{ij})$  simultan diagonalisieren: Dank Gram-Schmidt existiert eine Basis  $(e_1, \dots, e_n)$  mit  $e_i^T T e_j = \frac{1}{2} \delta_{ij}$ . Eine Drehung diagonalisiert nun die Matrix  $(V_{ij})$  zu  $\frac{1}{2} \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2)$ . In diesen Koordinaten gilt  $H(q, p) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} p_i^2 + \frac{1}{2} \omega_i^2 q_i^2 + \text{höhere Terme}$ . Die Bewegungsgleichungen sind  $\dot{q}_i = p_i$  und  $\dot{p}_i = -\omega_i^2 q_i$  (annähernd). Daraus folgt  $q_i(t) = q_i^* \sin(\omega_i t + \varphi_i)$  und  $p_i(t) = q_i^* \omega_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)$ .

**Differentialgleichungssysteme** können wir auf 1. Ordnung reduzieren:

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1(t, y_1(t), \dots, y_n(t)), \\ \vdots \\ y_n'(t) = f_n(t, y_1(t), \dots, y_n(t)). \end{cases}$$

Mit  $y = (y_1, \dots, y_n)$  und  $f = (f_1, \dots, f_n)$  bündeln wir dies prägnant und übersichtlich als eine **vektorwertige Differentialgleichung**:

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

Gegeben ist hierzu die stetige Funktion  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n \supseteq G \rightarrow \mathbb{K}^n$ . Gesucht sind alle Funktionen  $y: I \rightarrow \mathbb{K}^n$  auf einem (maximalen) Intervall  $I$ , die  $(t, y(t)) \in G$  und die Gleichung  $y'(t) = f(t, y(t))$  für alle  $t \in I$  erfüllen.

Qualitativer Überblick dank **Existenz- und Eindeutigkeitsatz** O1B:

- (1) Zu jedem Startpunkt  $(t_0, y_0)$  im Inneren  $\overset{\circ}{G}$  existieren Lösungen; jede kann beidseitig bis zum Rand von  $G$  (oder  $\infty$ ) fortgesetzt werden.
- (2) Ist  $f(t, y)$  stetig diff'bar nach  $y$ , so ist die Lösung durch  $(t_0, y_0) \in \overset{\circ}{G}$  eindeutig bestimmt und hängt stetig von diesen Anfangswerten ab.

Ein **homogenes lineares DGS** erster Ordnung ist von der Form

$$y'(t) = A(t)y(t).$$

Gegeben ist hierzu eine stetige **Koeffizientenmatrix**  $A: I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ . Die Lösungsmenge  $L_0 = \{y: I \rightarrow \mathbb{K}^n \mid y' = Ay\}$  ist ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum der Dimension  $n$ : Wir wählen ein **Fundamentalsystem**  $y_1, \dots, y_n \in L_0$  von  $n$  linear unabhängigen Lösungen. Bezüglich dieser Basis gilt dann:

$$L_0 = \{c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}\} \cong \mathbb{K}^n$$

Ein (inhomogenes) **lineares DGS** ist von der Form

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t).$$

Gegeben ist hier neben  $A: I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  ein stetiger **Störterm**  $b: I \rightarrow \mathbb{K}^n$ . Eine partikuläre Lösung  $y_b$  liefert die **Variation der Konstanten** (O3D). Die Lösungsmenge  $L_b = \{y: I \rightarrow \mathbb{K}^n \mid y' = Ay + b\}$  ist ein affiner Raum:

$$L_b = y_b + L_0 = \{y_b + c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}\}$$

„Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen.“

Sei  $A: I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  stetig. Die **matrixwertige Differentialgleichung**

$$W'(t) = A(t)W(t) \quad \text{mit} \quad W(t_0) = E$$

erlaubt die **Fundamentallösung**  $W: I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  gegeben durch

$$W(t) = E + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t_0}^t A(t_k) \cdots \int_{t_2=t_0}^{t_3} A(t_2) \int_{t_1=t_0}^{t_2} A(t_1) dt_1 dt_2 \cdots dt_k.$$

Für jedes  $t \in I$  ist die Reihe absolut konvergent und  $W(t)$  invertierbar. Zu jedem  $y_0 \in \mathbb{K}^n$  hat daher die **vektorwertige Differentialgleichung**

$$y'(t) = A(t)y(t) \quad \text{mit} \quad y(t_0) = y_0$$

genau eine Lösung  $y: I \rightarrow \mathbb{K}^n$ , nämlich  $y(t) = W(t)y_0$ . Somit hat die Differentialgleichung  $y' = Ay$  als Lösungsmenge den  $\mathbb{K}$ -Vektorraum

$$L_0 = \{W y_0 \mid y_0 \in \mathbb{K}^n\}.$$

☺ Diese allgemeine Lösungsformel ist einfach und übersichtlich.

Lösungen  $y_1, \dots, y_n: I \rightarrow \mathbb{K}^n$  bündeln wir zur **Fundamentalmatrix**:

$$Y: I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}, \quad Y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t)) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) & y_{21}(t) & \dots & y_{n1}(t) \\ y_{12}(t) & y_{22}(t) & \dots & y_{n2}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1n}(t) & y_{2n}(t) & \dots & y_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

Die folgenden vier Aussagen sind untereinander äquivalent:

- (a) Die Funktionen  $y_1, \dots, y_n: I \rightarrow \mathbb{K}^n$  sind linear unabhängig über  $\mathbb{K}$ .
- (b) Die Vektoren  $y_1(t), \dots, y_n(t)$  sind linear unabhängig für jedes  $t \in I$ .
- (c) Die Vektoren  $y_1(t), \dots, y_n(t)$  sind linear unabhängig für ein  $t \in I$ .
- (d) Die Determinante erfüllt  $\det Y(t) \neq 0$  für ein und damit alle  $t \in I$ .

Man nennt  $Y(t)$  auch die **Wronski-Matrix** der Funktionen  $y_1, \dots, y_n$ . Die **Wronski-Determinante**  $w(t) = \det Y(t)$  entwickelt sich gemäß

$$w(t) = w(t_0) \cdot \exp \left[ \int_{t_0}^t \text{tr} A(\tau) d\tau \right].$$

Unsere **Fundamentallösung**  $W$  ist der Spezialfall mit  $W(t_0) = E$ ; Umrechnung via  $Y(t) = W(t)Y(t_0)$  bzw.  $W(t) = Y(t)Y(t_0)^{-1}$ .

Seien  $A: I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  und  $b: I \rightarrow \mathbb{K}^n$  stetig,  $Y = (y_1, \dots, y_n): I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  eine Fundamentalmatrix der homogenen Gleichung  $Y'(t) = A(t)Y(t)$ .

Zu lösen sei das inhomogene Differentialgleichungssystem

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t) \quad \text{mit} \quad y(t_0) = y_0.$$

Eine Lösung  $y_b$  erhalten wir durch **Variation der Konstanten**. O311

Zu jedem Anfangswert  $y_0 \in \mathbb{K}^n$  existiert genau eine Lösung, nämlich

$$y(t) = Y(t) \int_{t_0}^t Y(\tau)^{-1} b(\tau) d\tau + Y(t)Y(t_0)^{-1} y_0.$$

Somit hat die Differentialgleichung  $y' = Ay + b$  als Lösungsmenge

$$L_b = y_b + L_0 = \{y_b + W y_0 \mid y_0 \in \mathbb{K}^n\}.$$

Dies ist ein affiner Raum der Dimension  $n$  und präzisiert die Merkregel: „Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen.“

Häufig trifft man **lineare DGS mit konstanten Koeffizienten**, z.B. durch Linearisierung autonomer DGS um Fixpunkte (§P2). Gegeben sei eine Matrix  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ . Zu lösen sei das DGS

$$y'(t) = A y(t) \quad \text{für} \quad y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n.$$

Zu jedem Startvektor  $y(t_0) = y_0$  existiert genau eine Lösung, nämlich

$$y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n \quad \text{mit} \quad y(t) = e^{(t-t_0)A} y_0.$$

Die Berechnung dieser Matrix-Exponentialfunktion ist leider schwierig.

☺ Eigen- & Hauptvektoren können dies dramatisch vereinfachen:

Eigenvektoren  $v_1, \dots, v_\ell \in \mathbb{K}^n$  mit  $Av_k = \lambda_k v_k$  liefern **Eigenfunktionen**

$$y_1, \dots, y_\ell: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n \quad \text{mit} \quad y_k(t) = e^{\lambda_k t} v_k.$$

Genau dann sind die Eigenfunktionen  $y_1, \dots, y_\ell$  **linear unabhängig**, wenn die Eigenvektoren  $v_1, \dots, v_\ell \in \mathbb{K}^n$  linear unabhängig sind.

Genau dann sind  $y_1, \dots, y_n$  eine **Basis** des Lösungsraumes der DG, wenn die Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis des Raumes  $\mathbb{K}^n$  sind.

Sei  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  eine Matrix und  $\lambda \in \mathbb{K}$  ein Skalar. Eine **Hauptvektorkette**

$$0 \xleftarrow{A-\lambda} v_1 \xleftarrow{A-\lambda} v_2 \xleftarrow{A-\lambda} \dots \xleftarrow{A-\lambda} v_\ell$$

besteht aus Vektoren  $0 \neq v_1, \dots, v_\ell \in \mathbb{K}^n$  mit  $(A - \lambda)v_k = v_{k-1}$ .

Diese löst das DGS durch **Hauptfunktionen**  $y_1, \dots, y_\ell$  mit

$$y_k(t) = e^{\lambda t} \left[ v_k + t v_{k-1} + \frac{t^2}{2} v_{k-2} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} v_1 \right]$$

☺ Ist  $A$  **diagonalisierbar**, so können wir die Differentialgleichungen vollständig entkoppeln (P1B): Wir finden eine Basis  $(v_1, \dots, v_n)$  des  $\mathbb{C}^n$  aus Eigenvektoren,  $Av_k = \lambda_k v_k$ . Diese liefert uns sofort eine Basis aus Eigenfunktionen  $y_1, \dots, y_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  mit  $y_k(t) = e^{\lambda_k t} v_k$ .

Dies vereinfacht die Berechnung der obigen Matrix-Exponentialfunktion.

☺ Ist  $A$  **nicht diagonalisierbar**, so doch immerhin noch jordanisierbar: Es existiert eine Basis des Raumes  $\mathbb{C}^n$  aus Hauptvektoren, und diese liefern eine Basis des Lösungsraumes  $L_0$  aus Hauptfunktionen.

☺ Zu jeder Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  existiert eine Basis aus Hauptvektorketten. Das obige Verfahren führt also stets zu einer Basis des Lösungsraums. Ist die Matrix reell,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , so fordert man meist reelle Lösungen. Sei  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{C}^n$  eine Hauptvektorkette zum Eigenwert  $\lambda = \sigma + i\omega$ . Dann ist  $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$  eine Hauptvektorkette zum Eigenwert  $\bar{\lambda} = \sigma - i\omega$ . Dank Basiswechsel hat das DGS folgende **reelle Lösungen**

$$\begin{aligned} \text{Re } y_k(t) &= e^{\sigma t} \text{Re} \left( e^{i\omega t} \left[ v_k + t v_{k-1} + \frac{t^2}{2} v_{k-2} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} v_1 \right] \right), \\ \text{Im } y_k(t) &= e^{\sigma t} \text{Im} \left( e^{i\omega t} \left[ v_k + t v_{k-1} + \frac{t^2}{2} v_{k-2} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} v_1 \right] \right). \end{aligned}$$

Wir erkennen hieran insbesondere das **asymptotische Verhalten**:

Für  $\sigma < 0$  gilt exponentielles Abklingen,  $|y_k(t)| \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ .

Für  $\sigma > 0$  gilt exponentielles Wachstum,  $|y_k(t)| \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow \infty$ .

Für  $\sigma = 0$  ist  $y_1$  beschränkt, aber  $y_2, \dots, y_\ell$  wachsen polynomiell.

☺ Das Eigenwert-Kriterium gilt allgemein für Linearisierungen (P2D).

**Verständnisfragen zu Eigen- & Hauptfunktionen** P309  
Ausführung

**Aufgabe:** (0) Welche Funktionen gehören zur Menge  $V = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ? Ist sie ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum? Ist die Abbildung  $\partial: V \rightarrow V: f \mapsto f'$  linear?

(1) Finden Sie zu jedem Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{C}$  alle Eigenfunktionen von  $\partial$ .  
 (2) Finden Sie zu jedem Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{C}$  alle Hauptfunktionen von  $\partial$ .  
 (3) Welche Dimension hat  $V$ : endlich? unendlich? gar überabzählbar?  
 (4) Erlaubt der Raum  $V$  eine Basis aus Eigen-/Hauptfunktionen zu  $\partial$ ?

**Lösung:** (0) Die Menge  $V = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  der beliebig oft differenzierbaren Funktionen ist ein Vektorraum, genauer gesagt ein Untervektorraum von  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ : Linearkombinationen glatter Funktionen sind glatt. Die Ableitung  $\partial: V \rightarrow V: f \mapsto f'$  ist hierauf eine lineare Abbildung.

(1) Die Eigenwertgleichung  $\partial f = \lambda f$  ist die lineare Differentialgleichung  $(\partial - \lambda)f = 0$  und wird gelöst von  $f(x) = ce^{\lambda x}$  mit  $c \in \mathbb{C}$ . Eindeutigkeit: Der Eigenraum  $E_\lambda = \ker(\partial - \lambda)$  ist eindimensional, erzeugt von  $x \mapsto e^{\lambda x}$ .

(2) Wir kennen den Hauptraum  $n$ -ter Stufe  $H_\lambda^n = \ker(\partial - \lambda)^n$ : Er besteht aus allen Funktionen  $f(x) = (\sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k / k!) e^{\lambda x}$  mit  $c_0, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{C}$ . Er ist demnach  $n$ -dimensional, mit Basis  $(e^{\lambda x} x^{k-1} / (k-1)!)_{k=1}^{n-1}$ .

**Verständnisfragen zu Eigen- & Hauptfunktionen** P310  
Ausführung

(3) Der Vektorraum  $V = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  ist unendlich-dimensional: Er enthält alle Polynome  $\sum_{k=0}^n c_k x^k$  beliebigen Grades  $n \in \mathbb{N}$ . Die Monome  $1, x, x^2, x^3, \dots$  sind linear unabhängig, also  $\dim V = \infty$ .  
 Noch extremer: Die Familie der Eigenfunktionen  $(e_\lambda: x \mapsto e^{\lambda x})_{\lambda \in \mathbb{R}}$  ist überabzählbar und linear unabhängig. Also ist die Dimension von  $V$  nicht nur abzählbar unendlich, sondern sogar überabzählbar unendlich.

☺ All diese Eigen- und Hauptfunktionen  $e^{\lambda x} x^{k-1} / (k-1)!$  mit  $\lambda \in \mathbb{C}$  und  $k \in \mathbb{N}$  sind überaus nützlich zur Lösung linearer Differentialgleichungen. Sie bieten uns ein großes Repertoire, das viele Anwendungen abdeckt.

(4) Sie bilden jedoch keine Basis von  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . Zum Beleg suchen wir Funktionen  $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , die sich nicht als Linearkombination von Eigen- und Hauptfunktionen  $e^{\lambda x} x^{k-1} / (k-1)!$  darstellen lassen. Jede Hauptfunktion  $e^{\lambda x} x^{k-1} / (k-1)!$  ist analytisch, also darstellbar als Potenzreihe, und auf ganz  $\mathbb{R}$  konvergent. Gleiches gilt daher für jede Linearkombination. Für  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  glatt mit kompaktem Träger (B438) gilt dies nicht, demnach ist  $f$  so nicht als Linearkombination darstellbar!

**Verständnisfragen zu Eigen- & Hauptfunktionen** P311  
Ausführung

**Aufgabe:** Wir betrachten die Ableitung  $\partial: f \mapsto f'$  als lineare Abbildung auf endlich-dimensionalen  $\mathbb{K}$ -Untervektorräumen von  $V = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ :

$V_1 = \{ \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \mid c_k \in \mathbb{C} \}$  über  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$   
 $V_2 = \{ \sum_{k=-n}^n c_k e^{kx} \mid c_k \in \mathbb{K} \}$  über  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$   
 $V_3 = \mathbb{K}[x]_{<n} = \{ \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \mid a_k \in \mathbb{K} \}$  über  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$   
 $V_4 = e^{\lambda x} \mathbb{K}[x]_{<n} = \{ e^{\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \mid a_k \in \mathbb{K} \}$  über  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Finden Sie eine Basis von  $V_i$  aus Eigenvektoren bzw. Hauptvektorketten. Berechnen Sie das char. Polynom der linearen Abbildung  $\partial: V_i \rightarrow V_i$ .

**Lösung:** (1) Die Funktionen  $e_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $e_k(x) = e^{ikx}$  sind  $C^\infty$ -glatt und  $2\pi$ -periodisch. Sie spannen den Raum  $T$  der trigonometrischen Polynome auf, und bilden hierin eine Orthonormalbasis (Kapitel I). Sie sind Eigenfunktionen des Ableitungsoperators, denn  $\partial e_k = ike_k$ . Deshalb sind Fourier-Reihen für Differentialgleichungen so nützlich! Die lineare Abbildung  $\partial: V_1 \rightarrow V_1$  wird durch diese Basis diagonalisiert. Das char. Polynom ist demnach  $\det(\partial - x \text{id}) = \prod_{k=-n}^n (x - ik) \in \mathbb{C}[x]$ .

**Verständnisfragen zu Eigen- & Hauptfunktionen** P312  
Ausführung

(2) Auch die reellen Funktionen  $f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f_k(x) = e^{kx}$  sind Eigenfunktionen des Ableitungsoperators, denn  $\partial f_k = k e_k$ . Insbesondere sind sie linear unabhängig, und somit ist  $(f_k)_{k=-n}^n$  eine Basis des Vektorraums  $V_2$  bestehend aus Eigenfunktionen von  $\partial$ . Die lineare Abbildung  $\partial: V_2 \rightarrow V_2$  wird durch diese Basis diagonalisiert. Das char. Polynom ist demnach  $\det(\partial - x \text{id}) = \prod_{k=-n}^n (x - k) \in \mathbb{R}[x]$ .

(3) Hier ist  $(x^k / k!)_{k=0}^{n-1}$  eine Hauptvektorkette und eine Basis von  $V_3$ . Das char. Polynom ist demnach  $\det(\partial - x \text{id}) = x^n \in \mathbb{R}[x]$ . Für  $\dim V_3 = n \geq 2$  ist  $\partial$  auf  $V_3$  nicht diagonalisierbar!

(4) Hier ist  $(e^{\lambda x} x^k / k!)_{k=0}^{n-1}$  eine Hauptvektorkette und eine Basis von  $V_4$ . Das char. Polynom ist demnach  $\det(\partial - x \text{id}) = (x - \lambda)^n \in \mathbb{C}[x]$ . Für  $\dim V_4 = n \geq 2$  ist  $\partial$  auf  $V_4$  nicht diagonalisierbar!

☺ Der Ableitungsoperator  $\partial$  ist für Differentialgleichungen und ihre Anwendungen extrem wichtig. Als lineare Abbildung ist er ebenso kompliziert wie interessant und illustriert nahezu alle Möglichkeiten. Die Lineare Algebra verschafft uns hierzu Klarheit und Übersicht.

**Verständnisfragen: Vektorräume** P313  
Ausführung

Wir wollen lineare Differentialgleichungssysteme  $\dot{u}(t) = A u(t)$  lösen. Dieses grundlegende Problem tritt in Anwendungen nahezu überall auf, meist als einfaches Teilproblem eines komplexeren Zusammenhangs. Zur Lösung mobilisieren wir den gesamten Apparat der linearen Algebra. Bitte wiederholen Sie hierzu noch einmal alle wichtigen Begriffe:

Was ist ein Körper  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ? Erklären Sie Beispiele:  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ?  
 Was ist ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $(V, +, \cdot)$ ? Beispiele?  $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}[x], C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ?  
 Was ist eine Basis? Geben Sie mehrere Beispiele für  $\mathbb{K}^n$  und  $\mathbb{K}[x]$ .  
 Was ist die Dimension eines  $\mathbb{K}$ -Vektorraums? Beispiele?  $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}[x]$ ?  
 Was ist ein Untervektorraum  $U \subseteq V$ ? Beispiele?  $\mathbb{R}[x] \subseteq C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ?

Was ist eine  $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung  $f: V \rightarrow W$ ? Beispiele?  $\partial = d/dx$ ?  
 Wann / womit / wie kann man  $f: V \rightarrow W$  durch eine Matrix darstellen?  
 Beispiele: Stellen Sie  $\partial = d/dx: \mathbb{R}[x]_{<n} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{<n}$  als eine Matrix dar, und allgemein  $\partial: Q_n \rightarrow Q_n$  auf  $Q_n = \{ x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{x^k}{k!} \mid c_k \in \mathbb{C} \}$  sowie  $\partial: T_n \rightarrow T_n$  auf  $T_n = \{ x \mapsto \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \mid c_k \in \mathbb{C} \} \subseteq C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$   
 Warum ist die Antwort noch nicht eindeutig? Was benötigen Sie hierzu?

**Verständnisfragen: Matrizenrechnung** P314  
Ausführung

Matrizenrechnung: Was ist  $\mathbb{K}^{m \times n}$ ? Erklären Sie Addition + und Multiplikation  $\cdot$  von Matrizen. Ist  $(\mathbb{K}^{2 \times 2}, \cdot)$  kommutativ? nullteilerfrei? Welche Probleme löst der Gauß-Algorithmus und wie funktioniert er? Jede Matrix  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  definiert eine  $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung  $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  durch  $v \mapsto Av$ . Wie berechnen Sie ihren Kern? ihr Bild? Sind dies jeweils Untervektorräume? Welche nützliche Beziehung gilt zwischen  $\dim_{\mathbb{K}} \text{Kern}(A)$  und  $\dim_{\mathbb{K}} \text{Bild}(A)$ ? Wann ist  $A$  surjektiv? und injektiv? Was ist die Determinante? Welche charakteristischen Eigenschaften definieren sie? Wie kann man sie berechnen? Wie geht es effizient? Was bedeutet  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  ist invertierbar? Warum gilt dabei  $m = n$ ? Was gilt für den Kern von  $A$ ? für das Bild? für die Determinante? Welche Implikationen / Äquivalenzen gelten für diese Kriterien? Einfaches Beispiel: Untersuchen Sie Kern, Bild, Determinante und Invertierbarkeit der Telefonmatrix  $T$  und der Vandermonde-Matrix  $V$ :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

**Verständnisfragen: Eigenvektoren** P315  
Ausführung

Was ist ein Eigenvektor / Eigenwert einer  $\mathbb{K}$ -linearen Abb.  $f: V \rightarrow V$ ? Beispiel: Finden Sie alle EV / EW der Ableitung  $\partial = d/dx: V_i \rightarrow V_i$  auf  $V_1 = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist beliebig oft differenzierbar} \}$ ,  
 $V_2 = \{ a_0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n \mid n \in \mathbb{N}, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \} \subseteq C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  
 $V_3 = \{ a_1 x^{-1} + \dots + a_n x^{-n} \mid n \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \} \subseteq C^\infty(\mathbb{R}_{>0}, \mathbb{R})$ .

Gibt es lineare Abbildungen ohne Eigenwert? mit unendlich vielen?  
 Gibt es solche Fälle auch für lineare Abbildung  $f: V \rightarrow V$  auf einem endlich-dimensionalen  $\mathbb{C}$ -Vektorraum? oder  $\mathbb{R}$ -Vektorraum?  
 Erklären Sie den Zusammenhang lineare Abbildungen – Matrizen sowie Eigenvektor / Eigenwert – Determinante – charakteristisches Polynom.  
 Fußballproblem: Kann man den Kreis  $S^1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \}$  so drehen, dass kein einziger Punkt fix bleibt? Geht das auch mit der zweidimensionalen Sphäre  $S^2 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$ ?  
 Was sagt Ihre Anschauung? Formulieren und begründen Sie es präzise! Hier helfen Drehmatrizen  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  und das charakteristische Polynom!

**Verständnisfragen: Hauptvektoren** P316  
Ausführung

Was versteht man unter einer Hauptvektorkette für  $f: V \rightarrow V$ ? Sind die Vektoren einer solchen Kette linear unabhängig? Was versteht man unter einer Jordan-Basis von  $V$  zu  $f$ ? Finden Sie für  $\partial: \mathbb{R}[x]_{\leq 7} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 7}$  eine Basis aus Hauptvektorketten. Stellen Sie  $\partial$  als Matrix in dieser Basis dar. Gilt diese Form allgemein? Wie liest man hieraus das char. Polynom und alle Eigenwerte ab? Gibt es reelle Matrizen  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , die keine reellen Eigenwerte haben? die reelle Eigenwerte haben aber dennoch nicht diagonalisierbar sind? Gibt es reelle Matrizen  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , die keine reellen Eigenwerte haben? die reelle Eigenwerte haben aber dennoch nicht diagonalisierbar sind? Wenn  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  verschiedene reelle bzw. konjugiert-komplexe EW hat, ist  $A$  dann diagonalisierbar über  $\mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{C}$ ? Gilt hierzu die Umkehrung? Wichtiger Spezialfall: Was gilt für jede symmetrische Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ? Gibt es eine Basis aus Eigenvektoren? sogar eine Orthonormalbasis? Wie lösen Sie eine Differentialgleichung  $\dot{u}(t) = A u(t)$  mit  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  durch Eigen- & Hauptvektoren? Wann genügen nur Eigenvektoren?

Wir vergleichen unsere Methoden zu den beiden Grundproblemen

$$p(\partial)y(t) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{u}(t) = Au(t).$$

Beides sind lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Im ersten Fall ist  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eindimensional aber der Differentialoperator  $p(\partial)$  von Ordnung  $n$ . Hierzu liefert Kapitel N explizit alle Lösungen (N2D). Im zweiten Fall ist  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  mehrdimensional, wird aber nur einmal abgeleitet. Hierzu erklärt Kapitel P die allgemeine Lösungstheorie (P1E). Beide Probleme erweisen sich als äquivalent, und wir wollen sehen wie.

**Aufgabe:** Gegeben sei  $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$ .

- (1) Reduzieren Sie die DG  $p(\partial)y(t) = 0$  auf ein System  $\dot{u}(t) = Au(t)$ .
- (2) Bestimmen Sie das char. Polynom dieser Systemmatrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ .
- (3) Bestimmen Sie die Eigenräume. (4) Wann ist  $A$  diagonalisierbar?
- (5) Bestimmen Sie eine Basis des  $\mathbb{C}^n$  aus Hauptvektorketten von  $A$ .

Wie entsprechen Hauptlösungen von  $p(\partial)y(t) = 0$  den Hauptfunktionen des DGSystems  $\dot{u}(t) = Au(t)$  und den Hauptvektoren der Matrix  $A$ ?

**Lösung:** (1) Wir setzen  $u := (u_0 = y, u_1 = y', \dots, u_{n-1} = y^{n-1})$ . Damit ist  $p(\partial)y(t) = 0$  äquivalent zu  $\dot{u}(t) = Au(t)$  mit der Systemmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

☺ Dies erlaubt die **Reduktion** von Ordnung  $n$  auf Ordnung 1. [0151]

(2) Für das charakteristische Polynom der Matrix  $A$  betrachten wir

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & \dots & \lambda + a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

☺ Wir entwickeln die letzte Zeile und erhalten  $\det(\lambda E - A) = p(\lambda)$ .

Man nennt die Matrix  $A$  auch die **Begleitmatrix** zum Polynom  $p$ . Das charakteristische Polynom von  $A$  ist das vorgegebene  $p$ .

(3) Wir betrachten die **Eigenvektorgleichung** für  $v \in \mathbb{C}^n$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$ :

$$A \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_{n-1} \\ -a_0v_0 - \dots - a_{n-1}v_{n-1} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \lambda \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$$

Diese Gleichungen sind erfüllt genau für  $v_k = \lambda^k v_0$  und  $p(\lambda)v_0 = 0$ .

☺ Zum Eigenwert  $\lambda$  gehört also der Eigenvektor  $(1, \lambda, \dots, \lambda^{n-1})^T$ .

(4) Hier hat jeder Eigenwert  $\lambda$  geometrische Vielfachheit 1: Genau dann ist  $A$  diagonalisierbar, wenn  $p$  verschiedene Nullstellen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  hat; genauer gilt  $V^{-1}AV = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  mit der **Vandermonde-Matrix**

$$V = V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1^0 & \dots & \lambda_n^0 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Andernfalls ist die Matrix  $A$  nicht diagonalisierbar: Zu jedem Eigenwert der Vielfachheit  $\ell \geq 1$  gehört eine einzige Hauptvektorkette der Länge  $\ell$  und somit ein Jordan-Block der Größe  $\ell \times \ell$ . Auch das kommt also vor.

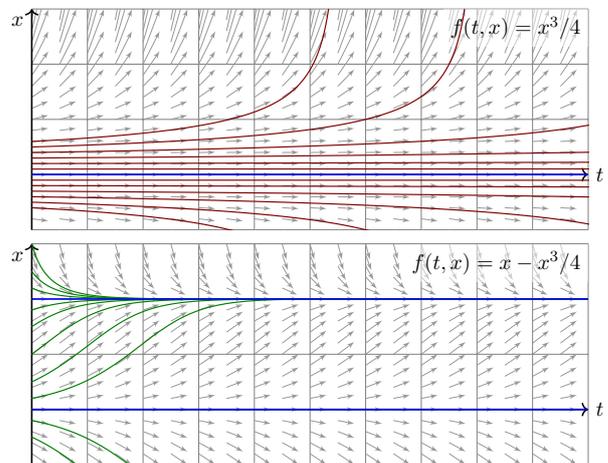
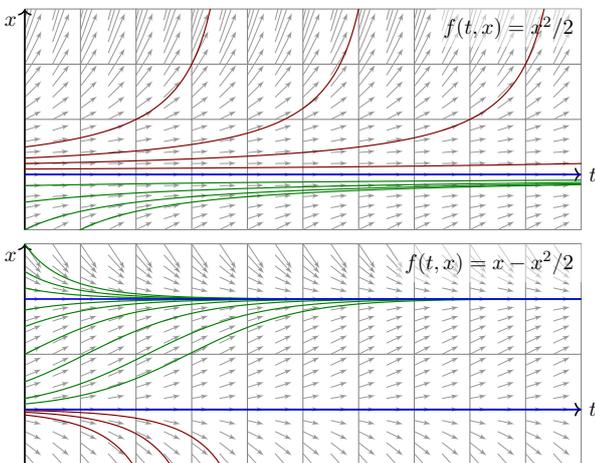
(5) Sei  $\lambda$  eine Nullstelle der Vielfachheit  $\ell \geq 1$ . Hierzu hat  $p(\partial)y(t) = 0$  die Hauptlösungen  $y_1(t) = e^{\lambda t}$ ,  $y_2(t) = t e^{\lambda t}$ ,  $\dots$ ,  $y_\ell(t) = \frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!} e^{\lambda t}$ . Diesen Lösungen von  $p(\partial)y(t) = 0$  entsprechen bei  $\dot{u}(t) = Au(t)$  wie erklärt die Hauptfunktionen  $u_1, u_2, \dots, u_\ell: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ , ausgeschrieben:

$$u_1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_2' \\ \vdots \\ y_2^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad u_\ell = \begin{pmatrix} y_\ell \\ y_\ell' \\ \vdots \\ y_\ell^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Ausgewertet in  $t = 0$  erhalten wir die Hauptvektoren  $v_1, v_2, \dots, v_\ell \in \mathbb{C}^n$ :

$$v_1 = \begin{pmatrix} \lambda^0 \\ \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1\lambda^0 \\ \vdots \\ (n-1)\lambda^{(n-2)} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad v_\ell = \begin{pmatrix} \binom{\ell-1}{0}\lambda^{(1-\ell)} \\ \binom{\ell-1}{1}\lambda^{(2-\ell)} \\ \vdots \\ \binom{\ell-1}{\ell-1}\lambda^{(n-\ell)} \end{pmatrix}$$

☺ Für Eigenvektoren & -funktionen ist das schön, leicht und erhellend. Für Hauptvektoren & -funktionen geht alles genauso, ist aber mühsamer.



**Aufgabe:** Zu  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  untersuchen wir die nicht-lineare Gleichung

$$\dot{x} = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 \quad \text{für} \quad x: \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}.$$

Diese Differentialgleichung ist recht einfach aber lehrreich: Sie illustriert das Wechselspiel zwischen Linearisierung und höheren Ordnungen.

- (1) Finden Sie alle Fixpunkte, jeweils in Abhängigkeit von  $\alpha, \beta, \gamma$ .
- (2) Wie lautet die Linearisierung um 0? Lösungen? Stabilität?
- (3) Diskutieren Sie die Stabilität der nicht-linearen Gleichung. (3a) Nutzen Sie möglichst effizient die Stabilitätskriterien. (3b) Wo nötig / möglich lösen Sie die Gleichung explizit. (3c) Skizzieren Sie die Lösungen, notfalls numerisch.

**Lösung:** (1) Ein Fixpunkt ist  $x = 0$ , für  $\alpha \neq 0 = \beta = \gamma$  der einzige, für  $\beta \neq 0 = \gamma$  auch  $-a/\beta$ , für  $\gamma \neq 0$  auch  $(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma})/(2\gamma)$ .

(2) Die Linearisierung um  $x = 0$  lautet  $\dot{x} = \alpha x$ . Lösung  $x(t) = x_0 e^{\alpha t}$ . Für  $\alpha < 0$  asymptotisch stabil, für  $\alpha > 0$  instabil. Im kritischen Fall  $\alpha = 0$  sind alle Lösungen konstant, der FP also stabil aber nicht asymptotisch.

(3a) Für  $\alpha < 0$  ist der Fixpunkt  $x = 0$  stabil, für  $\alpha > 0$  instabil.

Im kritischen Fall  $\alpha = 0$  müssen wir die zweite Ordnung betrachten:

- Für  $\beta > 0$  ist der FP linksseitig stabil aber rechtsseitig instabil.
- Für  $\beta < 0$  ist der FP rechtsseitig stabil aber linksseitig instabil.

Also ist für  $\alpha = 0$  und  $\beta \neq 0$  der Fixpunkt  $x = 0$  nicht stabil!

Im kritischen Fall  $\alpha = \beta = 0$  müssen wir die dritte Ordnung betrachten:

Für  $\gamma < 0$  ist der Fixpunkt beidseitig stabil, für  $\gamma > 0$  beidseitig instabil.

(3b) Lösung von  $\dot{x} = \beta x^2$  bzw.  $\dot{x} = \alpha x + \beta x^2$ , Bernoulli-Gleichung [M413]:

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0\beta t}, \quad x(t) = \frac{x_0 e^{\alpha t}}{1 - x_0\beta(e^{\alpha t} - 1)/\alpha}$$

Lösung von  $\dot{x} = \gamma x^3$  bzw.  $\dot{x} = \alpha x + \gamma x^3$ , Bernoulli-Gleichung [M413]:

$$x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{1 - 2x_0^2\gamma t}}, \quad x(t) = \frac{x_0 e^{\alpha t}}{\sqrt{1 - x_0^2\gamma(e^{2\alpha t} - 1)/\alpha}}$$

☺ Probe! Quantitativ (3b) ist es mühsam, qualitativ (3a) ist es leicht.

**Aufgabe:** (1) Zu lösen sei das lineare DGSystem  $\dot{u}(t) = Au(t)$  mit

(a)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$  und (b)  $A = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Ist der Fixpunkt  $(0, 0)$  stabil? oder instabil? von welchem Typ? Gibt es außer dem Ursprung  $(0, 0)$  noch weitere Fixpunkte?

(2) Untersuchen ebenso Sie die folgenden nicht-linearen Systeme:

(a)  $\dot{x} = 2x + y, \quad \dot{y} = 3x + 3y^2$  um  $(0, 0)$

(b)  $\dot{x} = -2x - 5y, \quad \dot{y} = x + 3x^2$  um  $(0, 0)$

(3) Untersuchen Sie die Stabilität mit Hilfe einer Lyapunov-Funktion:

(a)  $\dot{x} = -x^3 - y, \quad \dot{y} = x - y^3, \quad V(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$

(b)  $\dot{x} = x^5 - 3y, \quad \dot{y} = 2x + y^3, \quad V(x, y) = 2x^2 + 3y^2$

(4) Seien  $a, b > 0$ . Untersuchen Sie die Stabilität von  $\dot{x} = \alpha x^3 - by, \dot{y} = ax + \beta y^3$  mit Hilfe der Lyapunov-Funktion  $V(x, y) = ax^2 + by^2$ .

**Lösung:** Dank Katalog: (1a)  $\det A = -3$ : instabil! genauer: Sattelpunkt. (1b)  $\det A = 5, \text{tr} A = -2, \Delta A = -4$ : stabil! genauer: stabiler Strudel.

☺ Determinante, Spur und Diskriminante genügen hierzu bereits!

**Übung:** Führen Sie die Rechnung aus bis zu Eigen-/Hauptfunktionen.

(2) Wir linearisieren  $(\dot{x}, \dot{y}) = f(x, y)$  um den angegebenen Fixpunkt. Als Jacobi-Matrix erhalten wir jeweils ein Beispiel aus (1).

☺ Die Linearisierung vereinfacht das Problem ganz wesentlich: Ein Lob an die effizienten Methoden der Linearen Algebra!

(3a)  $\dot{V} = x\dot{x} + y\dot{y} = -x^4 - xy + xy - y^4 < 0 \Rightarrow$  asymp. stabil dank P2c

(3b)  $\dot{V} = 4x\dot{x} + 6y\dot{y} = 4x^6 - 12xy + 12yx + 6y^4 > 0 \Rightarrow$  instabil dank P2c

☺ Linearisierung und Eigenwertkriterium P2d genügen hier nicht.

☺ Eine geeignete Lyapunov-Funktion löst das Problem elegant.

(4) Es gilt  $\dot{V} = \alpha x\dot{x} + \beta y\dot{y} = \alpha ax^4 + \beta by^4$ . Für  $\alpha, \beta \leq 0$  ist der Fixpunkt  $(0, 0)$  stabil, für  $\alpha, \beta < 0$  sogar asymptotisch stabil, für  $\alpha, \beta > 0$  instabil.

**Übung:** Denken Sie sich selbst weitere Beispiele dieser Art aus! Falls Ihnen nichts einfällt, untersuchen Sie zufällige DGSysteme.

☺ Diese Übersicht und Klassifikation der zweidimensionalen Dynamik um einen Fixpunkt beruht auf unserem Verständnis der linearen Algebra: Wie bei jeder Klassifikation stellen sich zwei Fragen: Ist unsere Liste vollständig, haben wir also wirklich alle möglichen Fälle gefunden? Ist unsere Liste redundanzfrei, kommt also jeder Fall in unserer Liste höchstens einmal vor?

**Satz P3A: Klassifikation von  $2 \times 2$ -Matrizen bis auf Konjugation**

Jede Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  können wir durch Basiswechsel konjugieren zu genau einer der folgenden Modellmatrizen:

$M_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$  mit  $\lambda \leq \mu$  in  $\mathbb{R}$ ,

$M_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  mit  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$M_3 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $b > 0$ .

Dies sind die **Normalformen** oder **kanonischen Repräsentanten**: Zu jeder Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  enthält die Menge  $\{T^{-1}AT \mid T \in GL_2 \mathbb{R}\}$  aller hierzu äquivalenten Matrizen genau eines der obigen Modelle.

**Aufgabe:** Formulieren Sie den Beweis allgemein als Algorithmus: Eingabe  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , Ausgabe  $T \in GL_2 \mathbb{R}$  mit  $T^{-1}AT = M_i$  wie gefordert.

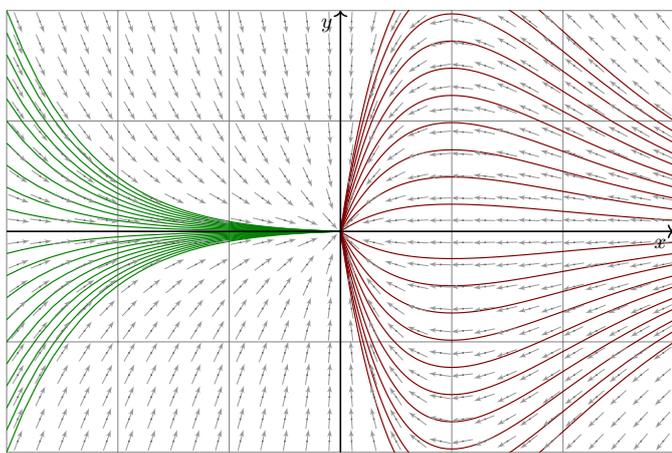
☺ Die Klassifikation P3A und den Algorithmus führen Sie in jedem Anwendungsbeispiel durch. Das können Sie genauso programmieren!

**Lösung:** (0) Berechne das char. Polynom  $p_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$  und die Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ . Unterscheide drei Fälle je nach Lage in  $\mathbb{C}$ :

(1) Zu  $\lambda_1 < \lambda_2$  in  $\mathbb{R}$  berechne Eigenvektoren  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ . Dank N2B sind sie linear unabhängig. Die Matrix  $T = (v_1, v_2)$  erfüllt  $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ .

(2) Im Falle  $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda \in \mathbb{R}$  ist  $\dim_{\mathbb{R}} \ker(A - \lambda) \in \{1, 2\}$  möglich. Bei  $\dim = 2$  wähle zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$  wie in (1). Bei  $\dim = 1$  berechne eine Hauptvektorkette  $0 \leftarrow v_1 \leftarrow v_2$ . Die Matrix  $T = (v_1, v_2)$  erfüllt  $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ .

(3) Im Falle  $\lambda_{1/2} = a \pm ib$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $b > 0$  berechne Eigenvektoren  $u_1 \in \mathbb{C}^2$  und  $u_2 = \bar{u}_1$ . Dank N2B sind sie  $\mathbb{C}$ -linear unabhängig. Realteil  $v_1 = \text{Re } u_1 = (u_1 + u_2)/2$  und Imaginärteil  $v_2 = \text{Im } u_1 = (u_1 - u_2)/2i$  bilden eine Basis  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$  mit  $Av_1 = av_1 + bv_2$  und  $Av_2 = av_2 - bv_1$ . Die Matrix  $T = (v_1, v_2)$  erfüllt  $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ .



**Aufgabe:** Wir untersuchen das nicht-lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} \dot{x} = -x, \\ \dot{y} = -y + xy. \end{cases}$$

(1) Schreiben Sie dies als  $(\dot{x}, \dot{y}) = f(x, y)$  mit Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Finden Sie alle Fixpunkte dieses Systems, also Nullstellen von  $f$ .

(2) Skizzieren Sie das Vektorfeld  $f$  auf dem Rechteck  $[-3, 3] \times [-2, 2]$ .

(3) Linearisieren Sie um den Fixpunkt  $(0, 0)$ : Was ist die Jacobi-Matrix? Welchen Typ hat der Fixpunkt (laut unserem Katalog)? Ist er in/stabil?

(4) Ist  $E: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto x^2 + \ln(1 + y^2)$  eine Lyapunov-Funktion? Ausführlich gefragt: Wo gilt  $E = 0$ ? Wo gilt  $E > 0$ ? Gilt hier  $\dot{E} < 0$ ? Was folgt damit für das asymptotische Verhalten der Lösungen?

(5) Lösen Sie explizit das nicht-lineare Differentialgleichungssystem. Wie verhalten sich die Lösungen  $(x(t), y(t))$  für  $t \rightarrow \infty$ ?

**Lösung:** (1) Das Vektorfeld ist hier  $f(x, y) = (-x, -y + xy)$ . Für jeden Fixpunkt gilt  $f(x, y) = 0$ . Einzige Lösung ist  $(0, 0)$ .

(3) Die Linearisierung von  $f$  um den Fixpunkt  $(0, 0)$  ist offensichtlich:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=: f'(0,0) =: A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix}}_{=: g(x,y)}$$

Die Lösung  $t \mapsto e^{At}$  der linearen Gleichung ist eine zentrale Kontraktion. Der Fixpunkt  $(0, 0)$  ist stabil, zumindest lokal unter kleinen Störungen.

(4) Es gilt  $E(0, 0) = 0$ . Für  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  gilt  $E(x, y) > 0$  sowie

$$\begin{aligned} \dot{E}(x, y) &= \partial_x E(x, y) \cdot \dot{x} + \partial_y E(x, y) \cdot \dot{y} = 2x \cdot \dot{x} + \frac{2y}{1+y^2} \cdot \dot{y} \\ &= -2x^2 + \frac{2y^2(x-1)}{1+y^2} = \frac{-2x^2(1+y^2) + 2y^2(x-1)}{1+y^2} \\ &= \frac{-2x^2 + y^2 + x^2y^2 + (1-x)^2y^2}{1+y^2} < 0 \end{aligned}$$

Somit ist  $E$  eine Lyapunov-Funktion (P2c) und zudem strikt dissipativ. Der Fixpunkt  $(0, 0)$  ist asymptotisch stabil, wie bereits erwartet dank der obigen Linearisierung (3), zumindest lokal unter kleinen Störungen.

Genauer: Jede Menge  $K(c) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid E(x, y) \leq c\}$  ist kompakt. Zu jedem Startwert  $(x(0), y(0)) \in \mathbb{R}^2$  mit  $E(x(0), y(0)) \leq c$  verbleibt die Lösung  $(x(t), y(t))$  daher in  $K(c)$  und existiert daher für alle Zeit  $t \geq 0$ .

Entlang jeder Lösung  $(x(t), y(t))$  gilt  $\dot{E} < 0$ , also fällt  $t \mapsto E(x(t), y(t))$  streng monoton und konvergiert für  $t \rightarrow \infty$ : Wir vermuten gegen Null! Dank Konvergenz  $E \searrow c$  gilt  $\dot{E} \rightarrow 0$ . Dies ist nur für  $(x, y) \rightarrow 0$  möglich!

(5) Wir lösen  $\dot{x} = -x$  durch  $x(t) = x_0 e^{-t}$  und dann  $\dot{y} = (x-1)y$  als lineare Differentialgleichung (M2b) durch  $y(t) = y_0 \exp[x_0(1 - e^{-t}) - t]$ .

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 e^{-t} \\ y_0 \exp[x_0(1 - e^{-t}) - t] \end{pmatrix}$$

☺ Zu jedem Startwert  $(x(0), y(0)) \in \mathbb{R}^2$  gilt tatsächlich Konvergenz  $(x(t), y(t)) \rightarrow (0, 0)$  für  $t \rightarrow \infty$ , wie in (4) bereits qualitativ gefunden.

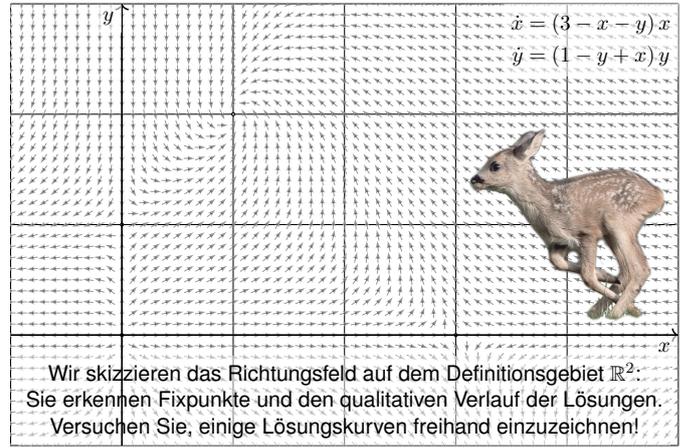
☺ Die explizite Lösung besichert uns (wie immer) wesentlich genauere Aussagen über den Lösungsverlauf und die Konvergenzgeschwindigkeit.

⚠ Obwohl alle Lösungen gegen den Fixpunkt  $(0, 0)$  konvergieren, können sie zuvor noch beliebige große Umwege machen!

**Aufgabe:** Wir untersuchen das nicht-lineare Differentialgleichungssystem

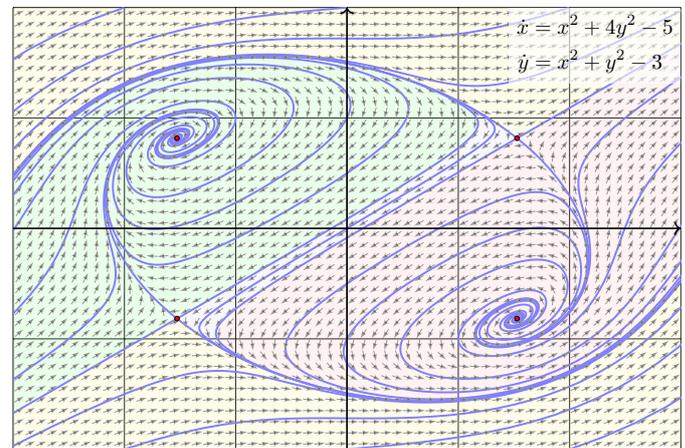
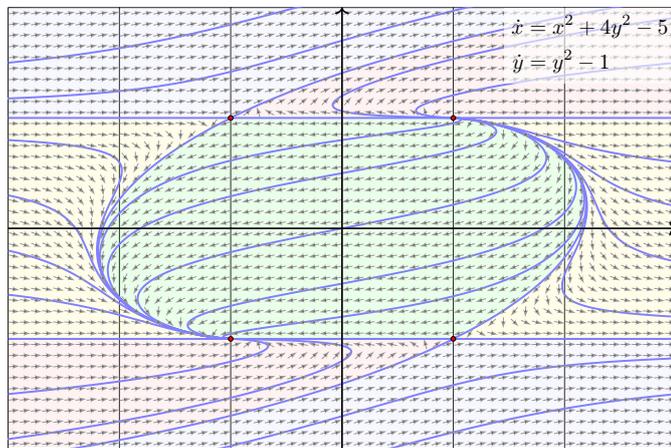
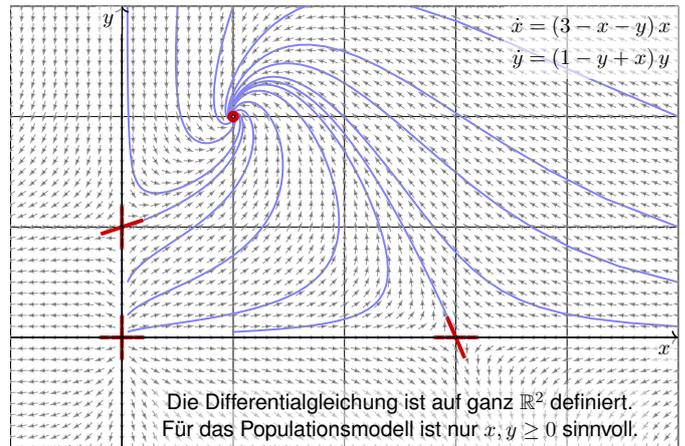
$$\begin{aligned} \dot{x} &= (3 - x - y)x, \\ \dot{y} &= (1 - y + x)y. \end{aligned}$$

- (1) Schreiben Sie dies als  $(\dot{x}, \dot{y}) = f(x, y)$  mit Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Finden Sie alle Fixpunkte dieses Systems, also Nullstellen von  $f$ .
- (2) Linearisieren Sie um jeden Fixpunkt  $p$ : Was ist die Jacobi-Matrix? Welchen Typ hat der Fixpunkt (laut unserem Katalog)? Ist er in/stabil?
- (3) Genauere Untersuchung: Finden Sie alle reellen Lösungen des linearisierten Differentialgleichungssystems um den Fixpunkt  $p \in \mathbb{R}_{>0}^2$ .
- (4) Was bedeuten in den Fixpunkten die Eigenvektoren? Erklären Sie dies anschaulich-geometrisch in folgender Skizze des Vektorfeldes.
- (5) Wie verhalten sich Lösungen  $(x(t), y(t))$  mit Anfangspunkt  $(x(0), y(0)) \in \mathbb{R}_{>0}^2$  für  $t \rightarrow \infty$ ? Formulieren Sie eine qualitative Vermutung und begründen Sie diese anschaulich!
- (6) Interpretation: Welche Lösungskurven passen zu der Geschichte „Rehe allein auf der Insel“ und anschließend „Die Ankunft der Wölfe“?



**Interpretation / Motivation:** Auf einer Insel vermehren sich Rehe. Zunächst wächst die noch kleine Rehpopulation proportional zur Populationsgröße  $x(t)$ , im Beispiel  $\dot{x}(t) \approx 3x(t)$ . Bei wachsender Population machen sich die begrenzten Ressourcen bemerkbar: Realistischer ist die logistische Gleichung  $\dot{x} = (3 - x)x$ , siehe M405. Fixpunkte sind hier  $x = 0$  (keine Rehe) und  $x = 3$  (Gleichgewicht). Eines Tages schwimmt ein Rudel Wölfe zur Insel. Die Rehpopulation  $x(t)$  bietet der Wolfpopulation  $y(t)$  reichlich Nahrung: Für die Wölfe gilt  $\dot{y} = (1 - y)y + xy$ . Für die Rehe hingegen gilt jetzt  $\dot{x} = (3 - x)x - xy$ . Die Entwicklung dieser beiden Populationen ist damit ein gekoppeltes nicht-lineares Differentialgleichungssystem. Voilà, unsere Aufgabe!

Die obige Skizze zeigt das Vektorfeld (auf Einheitslänge normiert). Sie erkennen hier graphisch die vier Fixpunkte, die Sie in Frage (1) explizit ausrechnen. Sie sehen auch den Typ jedes Fixpunkts (2). Quantitativ und ausführlich berechnen Sie dies für den besonders interessanten Fixpunkt (3), die anderen behandeln Sie analog (4). Damit können Sie das Verhalten der Lösungen beschreiben und erklären (5).



$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x, y) = p_{00} + p_{10}x + p_{01}y + p_{20}x^2 + p_{11}xy + p_{02}y^2 + \dots \\ \dot{y} &= Q(x, y) = q_{00} + q_{10}x + q_{01}y + q_{20}x^2 + q_{11}xy + q_{02}y^2 + \dots \end{aligned}$$

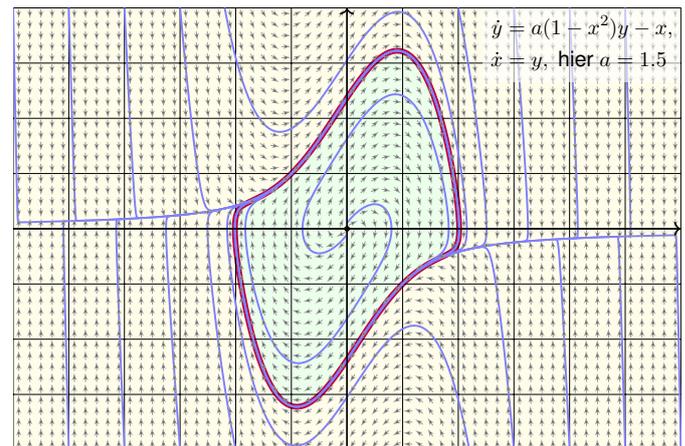
Wir betrachten die Differentialgleichung  $(\dot{x}, \dot{y}) = (P, Q)$  in der Ebene  $\mathbb{R}^2$ . Die Funktionen  $P, Q \in \mathbb{R}[x, y]$  seien Polynome in  $x, y$  vom Grad  $\leq n$ .

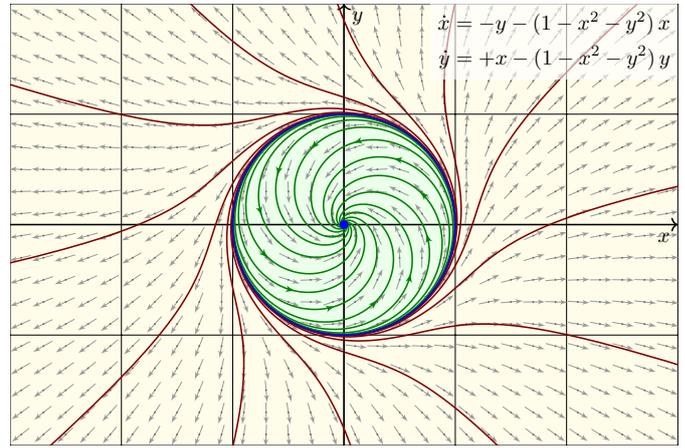
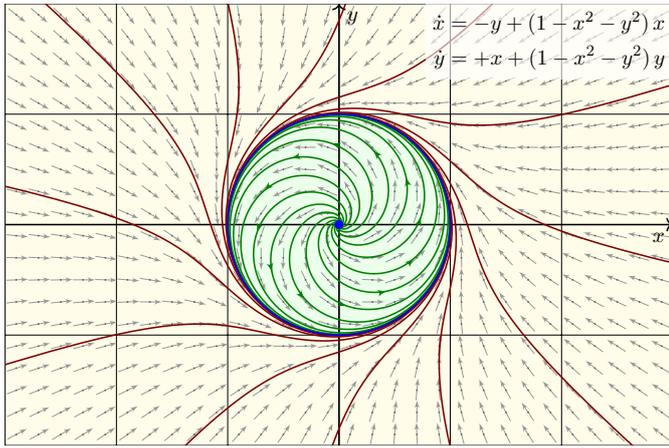
Für Grad  $n = 1$  haben wir ein **affin-lineares Vektorfeld**. Hierzu gibt es typischerweise genau einen Fixpunkt  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , und um diesen ist die Dynamik exakt linear. Dies konnten wir oben vollständig lösen!

Für Grad  $n = 2$  haben wir ein **quadratisches Vektorfeld**. Hierzu gibt es typischerweise vier Fixpunkte; zur Berechnung nutzen wir Quadriken. Folgende Beispiele zeigen **polynomiale Vektorfelder** vom Grad  $n = 3$ .

Die globale Dynamik in der Ebene ist verblüffend vielfältig. Hilberts 16. Problem fragt nach einer Klassifikation oder zumindest einer groben Zählung, [en.wikipedia.org/wiki/Hilbert's\\_sixteenth\\_problem](http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert's_sixteenth_problem).

In drei Dimensionen sind zudem **chaotisches Verhalten** und **seltene Attraktoren** möglich, [de.wikipedia.org/wiki/Lorenz-Attraktor](http://de.wikipedia.org/wiki/Lorenz-Attraktor).





**Aufgabe:** Wir untersuchen das autonome dynamische System

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} + \alpha(1 - x^2 - y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- (1) Für welche  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist das System linear? Was sind dann Lösungen?
- (2) Bestimmen Sie alle Fixpunkte und diskutieren Sie ihre Stabilität: Wie lautet die Linearisierung? die Eigenwerte? das Stabilitätskriterium?
- (3) Bestimmen Sie alle Lösungen durch explizite Lösungsformeln. Nutzen Sie Polarkoordinaten  $(x(t), y(t)) = r(t)(\cos \varphi(t), \sin \varphi(t))$ .

**Lösung:** (1) Das System ist linear genau für  $\alpha = 0$ . Lösungen von  $(\dot{x}, \dot{y}) = (-y, x)$  sind  $r_0(\cos(t - t_0), \sin(t - t_0))$  für  $r_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  und  $t_0 \in \mathbb{R}$ . (Für  $\alpha \neq 0$  kommt eine radiale Bewegung hinzu, wie in (3) berechnet.)

(2) Der einzige Fixpunkt ist  $(0, 0)$ . Die Linearisierung um  $(0, 0)$  ist

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x - y \\ x + \alpha y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Charakteristisches Polynom  $p(\lambda) = (\alpha - \lambda)^2 + 1$ , Eigenwerte  $\lambda = \alpha \pm i$ .

- ☺ Aus diesen Daten können wir bequem die Stabilität ablesen: Für  $\alpha > 0$  ist der Fixpunkt  $(0, 0)$  instabil. (Erste Skizze oben:  $\alpha = 1$ ) Für  $\alpha < 0$  ist er asymptotisch stabil. (Zweite Skizze oben:  $\alpha = -1$ )
- (3) Die beiden Gleichungen entkoppeln zu  $\dot{\varphi} = 1$  und  $\dot{r} = \alpha r(1 - r^2)$ . Konstante Lösungen  $r = 0$  (Fixpunkt) und  $r = 1$  (Kreis, siehe Skizze). Bernoulli-Gleichung  $\dot{r} = \alpha r - \alpha r^3$  dank Substitution  $v = r^{-2}$ :

$$r(t) = \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + (1 - r_0^2)e^{-2\alpha t}}}, \quad r(0) = r_0$$

$$\alpha > 0: \begin{cases} 0 < r_0 < 1: & r(t) \nearrow 1 \quad \text{für } t \nearrow \infty \\ r_0 > 1: & r(t) \searrow 1 \quad \text{für } t \nearrow \infty \end{cases}$$

$$\alpha < 0: \begin{cases} 0 < r_0 < 1: & r(t) \searrow 0 \quad \text{für } t \nearrow \infty \\ r_0 > 1: & r(t) \nearrow \infty \quad \text{für } t \nearrow \alpha^{-1} \ln \sqrt{(r_0^2 - 1)/r_0^2} \end{cases}$$

- ☺ Die obigen Skizzen zeigen die typischen Fälle  $\alpha = +1$  und  $\alpha = -1$ . Für  $\alpha > 0$  ist der Fixpunkt  $(0, 0)$  instabil, aber der Kreis ein Attraktor. Für  $\alpha < 0$  ist der Fixpunkt  $(0, 0)$  asympt. stabil, aber der Kreis repulsiv. Das bestätigt und präzisiert die qualitative Stabilitätsanalyse aus (2).

Wir untersuchen ein autonomes dynamisches System  $\dot{x} = f(x)$ . Hierzu sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und hierauf  $f: \mathbb{R}^n \supseteq G \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig. Eine Teilmenge  $K \subseteq G$  heißt **(positiv) invariant** bezüglich  $f$ , wenn jede Lösung  $x: [0, T] \rightarrow G$  mit  $x(0) \in K$  ganz in  $K$  verläuft. (Dies betrifft die positive Zeitrichtung. Für **negativ invariant** muss jede Lösung  $x: ]-T, 0] \rightarrow G$  mit  $x(0) \in K$  ganz in  $K$  verlaufen.)

**Lemma P3B:** maximale Lösungen in invariantem Kompaktum

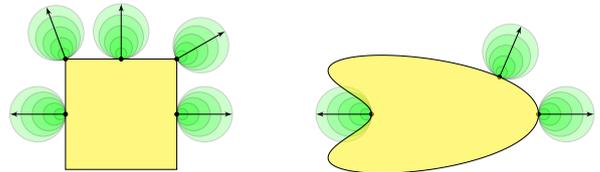
Sei  $K \Subset G$  kompakt und (positiv) invariant bezüglich  $f$ . Jede maximale Lösung mit Startwert  $x(0) \in K$  existiert für alle  $t \geq 0$  und verbleibt in  $K$ .

**Aufgabe:** Beweisen Sie dies! Benötigen Sie die Kompaktheit von  $K$ ?

**Lösung:** Sei  $x: [0, T] \rightarrow G: t \mapsto x(t)$  eine Lösung mit  $0 < T < \infty$ . Aus der Startbedingung  $x(0) \in K$  folgt  $x(t) \in K$  für alle  $t \in [0, T]$ . Wegen  $|\dot{x}(t)| = |f(x(t))| \leq M := \max_K |f|$  gilt  $|x(s) - x(t)| \leq M|s - t|$ . Dank dieser Cauchy-Bedingung konvergiert  $x(t) \rightarrow x_T \in K$  für  $t \nearrow T$ . Dank des  $\exists \& E$ -Satzes O1B können wir die Lösung weiter fortsetzen.

⚠ Ohne Kompaktheit gilt dies nicht, wie  $\dot{x} = x^2$  auf  $\mathbb{R}$  zeigt (M113).

Wie prüfen wir möglichst effizient, ob eine Menge  $K \subseteq G$  invariant ist? Notwendig ist recht offensichtlich folgende geometrische Eigenschaft:



**Tangentialbedingung:** Das Vektorfeld  $f$  zeigt nirgends aus  $K$  heraus: Für jede von  $x \in \partial K$  nach außen weisende Einheitsnormale  $n \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$f(x) \cdot n \leq 0.$$

Ist der Rand  $\partial K$  im Punkt  $x \in \partial K$  glatt, so bestimmt dies  $n$  eindeutig. Allgemein fordern wir  $|n| = 1$  und  $K \cap B(x + \varepsilon n, \varepsilon) = \emptyset$  für ein  $\varepsilon > 0$ .

☺ Damit decken wir bequem alle Fälle ab, insbesondere alle Kompakta mit stückweise glattem Rand wie Quadrate und Würfel und ähnliches.

☺ Für  $C^1$ -Vektorfelder ist die Tangentialbedingung auch hinreichend:

**Satz P3C:** invariante Mengen dank Tangentialbedingung

Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar. Sei  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  abgeschlossen,  $K \subseteq G$ , und  $(K, f)$  erfülle obige Tangentialbedingung. Dann ist  $(K, f)$  positiv invariant: Jede Lösung  $x: [0, T] \rightarrow G$  des Systems  $\dot{x} = f(x)$  mit Startwert  $x(0) \in K$  verbleibt ganz in  $K$ .

Ist  $K$  zudem kompakt, so gilt: Jede maximale Lösung zu  $\dot{x} = f(x)$  mit Startwert  $x(0) \in K$  existiert für alle Zeit  $t \geq 0$  und verbleibt ganz in  $K$ .

**Aufgabe:** (1) Untersuchen Sie wie oben das autonome System

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} + \alpha(1 - x^2 - y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit Parameter  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Welche der Bälle  $K = \overline{B}(0, r)$  sind invariant?

(2) Untersuchen Sie das Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: f(x, y) = (1, \sqrt[3]{y(x^2)})$ . Sind die Halbebenen  $H_{\pm} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \pm y \geq 0\}$  invariant? Erfüllt  $(H_{\pm}, f)$  die Tangentialbedingung? Lässt sich Satz P3C anwenden?

**Lösung:** (1) Obige Skizzen zeigen: Für  $\alpha = 0$  ist jeder Ball invariant; für  $\alpha > 0$  nur  $r = 0$  und  $r \geq 1$ ; für  $\alpha < 0$  nur  $0 \leq r \leq 1$ . Dank Satz P3C können Sie es bequem nachrechnen: Alle Voraussetzungen sind erfüllt! Im Sonderfall  $r = 0$  enthält die Menge  $K = \{(0, 0)\}$  nur den Nullpunkt; dieser ist für jeden Parameter  $\alpha \in \mathbb{R}$  ein Fixpunkt, somit ist  $K$  invariant. Für  $r > 0$  kennen wir die Randpunkte und die äußere Einheitsnormale:

$$(x, y) \in \partial K \iff x^2 + y^2 = r^2 \implies n = (x, y)/r$$

☺ Die Tangentialbedingung wird damit besonders einfach:

$$f(x, y) \cdot n = \alpha(1 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2)/r = \alpha(1 - r^2)r \leq 0$$

(2) Das ist unser warnendes Beispiel  $y'(x) = \sqrt[3]{y(x)^2}$  von Seite M325. Die obere Halbebene  $H_+$  ist tatsächlich invariant, die untere Halbebene  $H_-$  jedoch nicht, wie die Lösung  $t \mapsto (t, t^3/27)$  zeigt. Dennoch erfüllen beide Halbebenen  $H_{\pm}$  die Tangentialbedingung, denn  $f(x, 0) = (1, 0)$ .

⚠ Der schöne und bequeme Satz P3C lässt sich nicht anwenden, da das hier betrachtete Vektorfeld  $f$  nicht stetig differenzierbar ist.

**Aufgabe:** Zu  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  untersuchen wir das lineare System

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Speziell sei  $A$  eine unserer Modellmatrizen aus der Klassifikation P211.

- (1) Für welche Matrizen  $A$  ist die Kreisscheibe  $D = B(0, r)$  invariant?
- (2) Für welche Matrizen  $A$  ist das Quadrat  $Q = [-r, r]^2$  invariant?
- (3) Skizzieren Sie das Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  des Systems (P329)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x, \\ \dot{y} &= -y + xy. \end{aligned}$$

- (4) Welche Rechtecke  $K = [-a, a] \times [-b, b]$  sind unter  $f$  invariant?
- (5) Skizzieren Sie das Vektorfeld  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  des Systems (P333)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (3 - x - y)x, \\ \dot{y} &= (1 - y + x)y. \end{aligned}$$

- (6) Welche Rechtecke  $K = [0, a] \times [0, b]$  sind unter  $g$  invariant?

- ☺ Invariante Teilmengen  $K \subseteq G$  des Systems  $\dot{x} = f(x)$  erlauben uns, mögliche Lösungen geschickt einzugrenzen: Einmal in  $K$ , immer in  $K$ .
- ☺ Diese Sichtweise ist zwar etwas vergrößert, aber gerade deshalb oft nützlich, insbesondere wenn Sie Stabilitätsgarantien erarbeiten wollen.
- ☺ Dieser Ansatz gelingt selbst in schwierigen Situationen, wenn Sie den genauen Verlauf nicht bestimmen können (oder nicht wollen).
- ☺ Für einzelne Startpunkte können Sie die Trajektorien als numerische Näherungen berechnen (lassen). Das schützt Sie aber noch nicht vor eventuell bössartigen Ausreißern, hier helfen invariante Teilmengen!

**Beispiele aus der Physik:** Bleibt die Energie  $E: G \rightarrow \mathbb{R}$  erhalten, also  $\dot{E} = 0$ , so ist jede Niveaumenge  $E=c = \{x \in G \mid E(x) = c\}$  invariant.

Nimmt die Energie ab, also  $\dot{E} \leq 0$ , so ist noch jede Subniveaumenge  $E \leq c = \{x \in G \mid E(x) \leq c\}$  invariant: Trajektorien bleiben gefangen!

In dieser einfachen Aufgabe sollen Sie zunächst graphisch-anschaulich Kandidaten für invariante Mengen erkennen und dann rechnerisch-exakt mit der Tangentialbedingung und Satz P3C nachprüfen. Das hilft!

(1) Im Sonderfall  $r = 0$  ist  $D = \{(0, 0)\}$  invariant: Fixpunkt! Sei nun  $r > 0$ . Die graphische Darstellung unserer 14 Modellfälle zeigt uns die Antwort:

- Unter  $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  ist  $D$  invariant nur für  $a \leq 0$ , sonst nicht:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a(x^2 + y^2) \stackrel{!}{\leq} 0$$

- Unter  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$  ist  $D$  invariant nur für  $\lambda, \mu \leq 0$ , sonst nicht:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda x^2 + \mu y^2 \stackrel{!}{\leq} 0$$

- Unter  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  ist  $D$  invariant nur für  $\lambda \leq -\frac{1}{2}$ , sonst nicht:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \lambda(x^2 + y^2) + xy \\ &= \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}(x - y)^2 \stackrel{!}{\leq} 0 \end{aligned}$$

Allgemein muss die Systemmatrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  negativ semidefinit sein.

(2) Im Sonderfall  $r = 0$  ist  $Q = \{(0, 0)\}$  invariant: Fixpunkt! Sei nun  $r > 0$ . Die graphische Darstellung unserer 14 Modellfälle zeigt uns die Antwort: Wir diskutieren hier zunächst nur die rechte Quadratseite  $\{r\} \times [-r, r]$ ; die anderen drei Seiten führen zu ähnlichen Gleichungen. (Übung)

- Unter  $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  ist  $Q$  invariant nur für  $a \leq -|b|$ , sonst nicht:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ y \end{pmatrix} = ra - by \stackrel{!}{\leq} 0$$

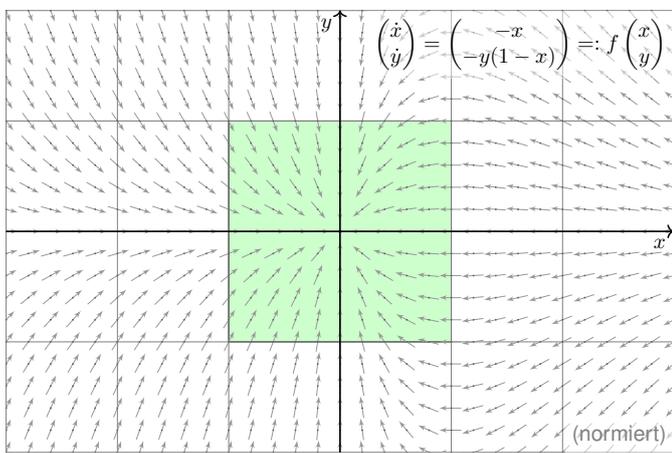
- Unter  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$  ist  $Q$  invariant nur für  $\lambda, \mu \leq 0$ , sonst nicht:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ y \end{pmatrix} = \lambda r \stackrel{!}{\leq} 0$$

- Unter  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  ist  $Q$  invariant nur für  $\lambda \leq -1$ , sonst nicht:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ y \end{pmatrix} = \lambda r + y \stackrel{!}{\leq} 0$$

Wie zu erwarten war, erhalten wir in (1) quadratische Ungleichungen und in (2) lineare Ungleichungen. Übung: Schreiben Sie die Lösung aus.



(4) Das degenerierte Rechteck  $\{(0, 0)\}$  ist invariant: unser Fixpunkt! Ebenso ist jedes Intervall  $[-a, a] \times \{0\}$  und  $\{0\} \times [-b, b]$  invariant. In diesem Sonderfall ist die Dynamik lediglich eindimensional.

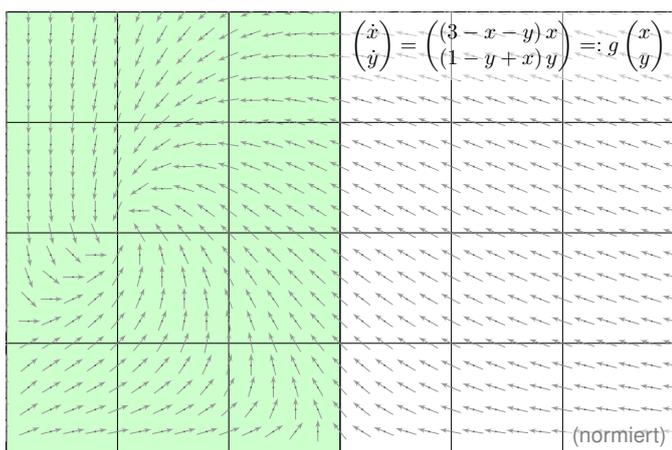
Wir betrachten nun echte Rechtecke  $K = [-a, a] \times [-b, b]$  mit  $a, b > 0$ . Unsere Skizze zeigt bereits, dass nicht alle Rechtecke invariant sind: Für  $a > 1$  und  $b > 0$  zeigt  $f(a, b)$  nach oben und somit nach außen.

Als Kandidaten bleiben  $K = [-a, a] \times [-b, b]$  mit  $0 < a \leq 1$  und  $b > 0$ . Wir prüfen auf jeder der vier Rechteckseiten die Tangentialbedingung:

- Es gilt  $f_1(-1, y) = +1 \geq 0$ : Hier zeigt  $f$  nach innen.
- Es gilt  $f_2(x, -1) = 1 - x \geq 0$ : Hier zeigt  $f$  nach innen.
- Es gilt  $f_1(+1, y) = -1 \leq 0$ : Hier zeigt  $f$  nach innen.
- Es gilt  $f_2(x, +1) = x - 1 \leq 0$ : Hier zeigt  $f$  nach innen.

Also zeigt  $f$  nirgends nach außen, und  $(K, f)$  ist tatsächlich invariant! Ein solches Rechteck  $K = [-1, 1] \times [-1, 1]$  ist in der Skizze grün gefärbt.

☺ Die Tangentialbedingung ist geometrisch wunderbar anschaulich und mit einer Parametrisierung des Randes bequem nachzurechnen.



(6) Zunächst die Sonderfälle:  $K = [0, a] \times \{0\}$  ist invariant für  $a = 0$  und für  $a \geq 3$ , und  $K = \{0\} \times [0, b]$  ist invariant für  $b = 0$  und für  $b \geq 1$ .

Wir betrachten nun echte Rechtecke  $K = [0, a] \times [0, b]$  mit  $a, b > 0$ . Unsere Skizze zeigt bereits, dass nicht alle Rechtecke invariant sind! Zunächst muss  $a \geq 3$  gelten, sonst zeigt  $f(a, 0)$  nach rechts (außen). Zudem muss  $b \geq 1 + a$  gelten, sonst zeigt  $f(a, b)$  nach oben (außen).

Als Kandidaten bleiben somit  $K = [0, a] \times [0, b]$  mit  $a \geq 3$  und  $b \geq 1 + a$ . Wir prüfen auf jeder der vier Rechteckseiten die Tangentialbedingung:

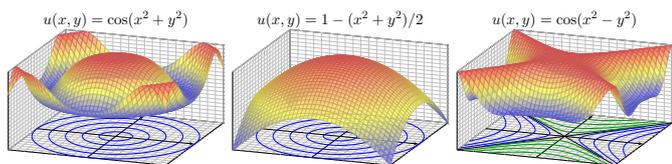
- Für  $(0, y)$  gilt  $g_1(0, y) = 0 \geq 0$ : Hier zeigt  $g$  nach innen.
- Für  $(x, 0)$  gilt  $g_2(x, 0) = 0 \geq 0$ : Hier zeigt  $g$  nach innen.
- Für  $(a, y)$  gilt  $g_1(a, y) = (3 - a - y)a \leq 0$ : Hier zeigt  $g$  nach innen.
- Für  $(x, b)$  gilt  $g_2(x, b) = (1 - b + x)b \leq 0$  wegen  $0 \leq x \leq a \leq b - 1$ .

Also zeigt  $g$  nirgends nach außen, und  $(K, g)$  ist tatsächlich invariant! Das kleinste Rechteck  $K = [0, 3] \times [0, 4]$  ist in der Skizze grün gefärbt.

☺ Die Tangentialbedingung ist geometrisch wunderbar anschaulich.   
 W. Walter: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Springer, §10

Kapitel Q

Partielle Differentialgleichungen (PDE)



Differential equations represent the most powerful tool humanity has ever created for making sense of the material world.

Steven H. Strogatz (1959–)

- 1 Erste Beispiele partieller Differentialgleichungen
  - Partielle Ableitungen und der Satz von Schwarz
  - Cauchy–Riemann und Maxwell–Gleichungen
  - Konvektion-Diffusion und Navier–Stokes–Gleichungen
  - Ideale ebene Strömungen und holomorphe Funktionen
- 2 Lineare PDE erster Ordnung
  - Lineare Differentialoperatoren
  - Lösung entlang charakteristischer Kurven
  - Die Charakteristikmethode und warnende Gegenbeispiele
  - Transportgleichung mit konstanten Koeffizienten
- 3 Fazit: PDE erster Ordnung
  - Zusammenfassung und Verständnisfragen
  - Aufgaben zur Charakteristikmethode
  - Lösung durch Potenzreihenansatz
  - Methodenvergleich: Viele Wege führen zum Ziel.

Einleitung und Überblick

Bei **gewöhnlichen Differentialgleichungen** (ODE) oder DGSystemen betrachten wir Funktionen  $u(x)$  in einer einzigen reellen Variablen  $x$ , also

$$u : \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}^m : x \mapsto u(x).$$

Gesucht sind die Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung

$$F(x, u, u', u'', u''', \dots, u^{(k)}) = 0$$

in der Funktion  $u$  und ihren Ableitungen  $u', u'', u''', \dots, u^{(k)} = \partial^k u$ .

Bei **partiellen Differentialgleichungen** (PDE) betrachten wir allgemeine Funktionen  $u(x_1, \dots, x_n)$  in mehreren Variablen  $x_1, \dots, x_n, n \geq 1$ , also

$$u : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m : (x_1, \dots, x_n) \mapsto u(x_1, \dots, x_n).$$

Gesucht sind die Lösungen einer partiellen Differentialgleichung

$$F(x_1, \dots, x_n, u, \partial_1 u, \dots, \partial_n u, \dots, \partial^\nu u, \dots) = 0$$

in der Funktion  $u$  und ihren partiellen Ableitungen  $\partial^\nu u = \partial_1^{\nu_1} \dots \partial_n^{\nu_n} u$ .

Die **Ordnung**  $k$  einer (partiellen) Differentialgleichung ist die höchste Ordnung  $|\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_n$  aller auftretenden (partiellen) Ableitungen.

Einleitung und Überblick

Die Wichtigkeit der (gewöhnlichen und partiellen) Differentialgleichungen besteht darin, dass sich nahezu alle Naturphänomene so beschreiben lassen. Wir illustrieren dies an drei zentralen klassischen Beispielen: Wärmeleitungsgleichung, Potentialgleichung und Wellengleichung.

Wichtige Anwendungen, die Sie zum Teil schon kennengelernt haben, finden sie in Elektrodynamik (Maxwell–Gleichungen), Thermodynamik (Bilanzgleichungen), klassischer Mechanik (Hamilton–Gleichungen), Quantenmechanik (Schrödinger–Gleichung), Strömungsmechanik (Navier–Stokes–Gleichungen), usw. ... Die Liste ist schier endlos.

Die Lösung partieller Differentialgleichungen mobilisiert alle bisher erarbeiteten Techniken der Höheren Mathematik: mehrdimensionale Differential- und Integralrechnung, Integralsätze, Fourier–Theorie, gewöhnliche Differentialgleichungen, etc. Differentialgleichungen sind ein riesiges Gebiet, zu dem ich hier nur einen winzigen Einblick gebe.

Die mathematische und oft numerische Bearbeitung praxisrelevanter Probleme führt schnell zu Fragestellungen der aktuellen Forschung und sprengt daher bei weitem den Rahmen dieser Vorlesung.

Erinnerung: Richtungsableitungen

☞ Zur Wiederholung siehe Stropfel, Höhere Mathematik 2, §4.3.

**Eindimensional:** Sei  $I = ]a, b[ \subseteq \mathbb{R}$  und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

Wir nennen  $f$  im Punkt  $x \in I$  differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =: f'(x)$$

existiert. In diesem Fall heißt  $f'(x)$  die Ableitung von  $f$  im Punkt  $x$ .

**Mehrdimensional:** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

Die Ableitung von  $f$  im Punkt  $x \in \Omega$  in Richtung  $v \in \mathbb{R}^n$  ist

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+hv) - f(x)}{h} =: \partial_v f(x).$$

Dies ist die Ableitung der partiellen Funktion  $h \mapsto f(x+hv)$  in  $h = 0$ .

Häufig nutzen wir die Ableitung  $\partial_k$  in Richtung  $v = e_k$ , wobei  $e_1, \dots, e_n$  die kanonische Basis des  $\mathbb{R}^n$  ist, also  $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ .

😊 Die Offenheit von  $\Omega$  garantiert, dass wir um jedem Punkt  $x \in \Omega$  etwas Platz haben: Es gibt einen kleinen Ball  $B(x, \varepsilon) \subseteq \Omega$  vom Radius  $\varepsilon > 0$ . Andernfalls ließe sich die Ableitung erst gar nicht wie oben erklären.

Erinnerung: partielle Ableitungen

Die  $k$ -te **partielle Ableitung**  $\partial_k f$  von  $f$  im Punkt  $x \in \Omega$  ist demnach

$$\begin{aligned} \partial_k f(x_1, \dots, x_n) &:= \left[ \frac{d}{dt} f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + t, x_{k+1}, \dots, x_n) \right]_{t=0} \\ &:= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\dots, x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1}, \dots) - f(\dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots)}{h} \end{aligned}$$

Wenn diese Ableitungen für alle  $x \in \Omega$  und alle  $k = 1, \dots, n$  existieren, so nennen wir  $f$  **partiell differenzierbar**. Dies definiert  $\partial_k f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

Sind alle  $\partial_k f$  stetig, so heißt  $f$  **stetig partiell differenzierbar**, kurz  $C^1$ .

Sind alle  $\partial_k f$  stetig partiell differenzierbar, so heißt  $f$  **zweimal stetig partiell differenzierbar**, kurz  $C^2$ . Hier gilt der Satz von Schwarz D4A:

◆ Satz D4A: Satz von Schwarz

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Ist  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar, so gilt

$$\partial_j \partial_k f = \partial_k \partial_j f \quad \text{für alle } j, k \in \{1, \dots, n\}.$$

Induktiv definieren wir die  $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen  $C^k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und schließlich die **glatten Funktionen**  $C^\infty = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k$ .

Erinnerung: ein warnendes Gegenbeispiel

Vertauschbarkeit gilt nicht immer! Ein warnendes Gegenbeispiel [D403]:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Die Funktion  $f$  ist stetig und differenzierbar auf  $\mathbb{R}^2$ , auch im Punkt  $(0, 0)$ .

Die Ableitungen  $\partial_x f, \partial_y f$  sind stetig und partiell differenzierbar, aber:

$$\begin{aligned} (\partial_y f)(x, y) &= \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}, & (\partial_y f)(0, 0) &= 0, \\ (\partial_y f)(x, 0) &= \frac{+x^5}{x^4} = +x, & (\partial_x \partial_y f)(0, 0) &= +1, \\ (\partial_x f)(x, y) &= \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}, & (\partial_x f)(0, 0) &= 0, \\ (\partial_x f)(0, y) &= \frac{-y^5}{y^4} = -y, & (\partial_y \partial_x f)(0, 0) &= -1. \end{aligned}$$

Für partielle Differentialgleichungen möchten wir dieses lästige Problem beheben bzw. umgehen. Die korrekte Behandlung gelingt wunderbar mit der Theorie der Distributionen (siehe Kapitel D).

Erinnerung: gebräuchliche Schreibweisen

Zur Illustration nenne ich für  $u : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R} : (t, x, y, z) \mapsto u(t, x, y, z)$  die Nummerierung  $(t, x, y, z) = (x_0, x_1, x_2, x_3)$  mit partiellen Ableitungen

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} = \partial_t u = \partial_0 u, \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \partial_x u = \partial_1 u, \quad \text{etc.}$$

Für die Ortsableitung  $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$  gilt  $\nabla u = \text{grad } u = (\partial_1 u, \partial_2 u, \partial_3 u)$ .

Für zweifache partielle Ableitungen (Vertauschbarkeit vorausgesetzt):

$$u_{xt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} u = \partial_t \partial_x u = \partial_0 \partial_1 u = \partial_0^1 \partial_1^0 \partial_2^0 \partial_3^0 u = \partial^{(1,1,0,0)} u, \quad \text{etc.}$$

**Beispiel:** Die Wellengleichung lässt sich wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} c^{-2} u_{tt} &= u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}, & \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ \partial_t^2 u &= c^2 \Delta u & \text{mit } \Delta &= \nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2, \\ \square u &= 0 & \text{mit } \square &= c^{-2} \partial_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2. \end{aligned}$$

Die Schreibweise soll jeweils klar und eindeutig sein. Sie ist wie jede Konvention eine Frage von Tradition, Bequemlichkeit und Geschmack.

Die **Cauchy–Riemann–Gleichungen** für  $(u, v) : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  lauten

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

- ⇔ Das Vektorfeld  $(u, -v)$  erfüllt  $\operatorname{div}(u, -v) = 0$  und  $\operatorname{rot}(u, -v) = 0$ .
- ⇔ Die komplexe Funktion  $f = u + iv : \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  ist **holomorph**.
- ⇔ Lokal ist  $f$  eine komplexe **Potenzreihe**,  $f(z) = \sum a_k (z - z_0)^k$ .
- ⇒ Beide Funktionen  $u, v$  sind **harmonisch**, also  $\Delta u = \Delta v = 0$ .

Diese spezielle PDE ist extrem wichtig. Cauchys Integralsatz entfaltet hier nämlich ein Wunder: Für holomorphe Funktionen gelten besonders starke Gesetzmäßigkeiten. Diese sind Thema der Funktionentheorie, also der komplexen Analysis. Insbesondere ist jede holomorphe Funktion lokal eine komplexe Potenzreihe und umgekehrt. Damit ist diese PDE vollständig gelöst! Hier zählt sich Ihre Investition in solide mathematische Grundlagen überreichlich aus.

Holomorphe Funktionen sind in Mathematik und Physik überall anzutreffen und als Werkzeuge unentbehrlich. Klassische Anwendungen sind ebene Elektrostatik (Q1A) und Strömungen (Q1B). Aus obigen Gleichungen folgt insbesondere, dass  $u$  und  $v$  harmonisch sind, also  $\Delta u = \Delta v = 0$ . Versuchen Sie dies durch Ableiten nachzurechnen, als leichte Übung und Wiederholung. [E51] Zur Schreibweise und Verwendung der Differentialoperatoren  $\nabla$  und  $\Delta = \nabla^2$  siehe Seite H101.

Die **Maxwell–Gleichungen** [H157] für Felder  $\vec{E}, \vec{B} : \mathbb{R}^4 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  lauten

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho, & \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, & \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{J}. \end{aligned}$$

**Aufgabe:** (1) Was besagen die statischen Maxwell–Gleichungen? in quellenfreien Bereichen? Was sind die Lösungen im ebenen Fall? (2) Skizzieren Sie das  $\vec{E}$ -Feld gegenpoliger Punktladungen (Dipolfeld).

**Lösung:** (1) Wir erhalten  $\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \vec{B} = 0$  und  $\nabla \times \vec{E} = \nabla \times \vec{B} = 0$ .

**Satz Q1A: holomorphe Lösungen der Maxwell–Gleichung**

Jedes ebene statische  $E$ -Feld  $\vec{E} : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  ohne Quellen entspricht einer holomorphen Funktion  $f = E_1 - iE_2 : \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  und umgekehrt.

😊 Lösungen sind holomorphe Funktionen, also komplexe Potenzreihen. Damit können wir Lösungen bequem finden und explizit ausschreiben. Umgekehrt können wir uns Residuen als Ladungen vorstellen (F4D).

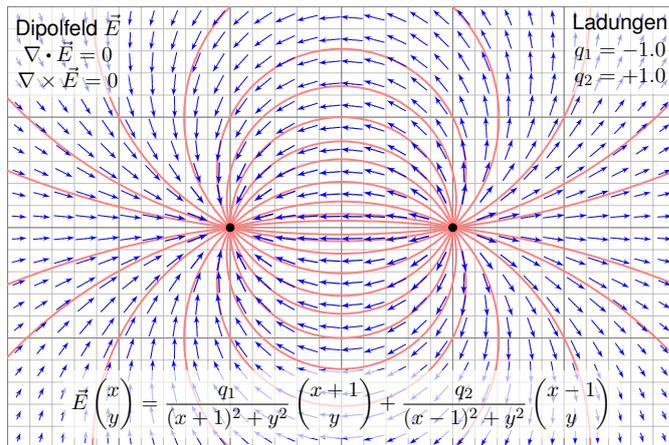
Ein **System partieller Differentialgleichungen** entsteht aus mehreren Funktionen  $u_1, \dots, u_m : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Diese können wir zusammenfassen zu

$$u : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad u = (u_1, \dots, u_m).$$

Das System der partiellen Differentialgleichungen schreibt sich dann

$$\begin{cases} F_1(u_1, \dots, u_m, \dots, \partial^\nu u_i, \dots) = 0 \\ \vdots \\ F_\ell(u_1, \dots, u_m, \dots, \partial^\nu u_i, \dots) = 0 \end{cases}$$

Zur Illustration nenne ich drei berühmte Gleichungssysteme, die seit dem 19. Jahrhundert ausgiebig untersucht und vielfältig genutzt werden: Die **Cauchy–Riemann–Gleichungen** sind vollständig verstanden, die **Maxwell–Gleichungen** auch weitgehend, aber viel schwieriger, die **Navier–Stokes–Gleichungen** noch nicht. Letztere sind nicht-linear. Als lineares Pendant untersuchen wir in diesem Kapitel ausführlich die **Konvektions-Diffusions-Gleichung** und lösen wichtige Spezialfälle.



Rechnung [E317]. Für das Magnetfeld addieren wir zwei Wirbelfelder. [H328]

**Bilanzgleichung** der Strömungslehre zu Konvektion und Diffusion:

$$\underbrace{\partial_t u(t, x)}_{\text{Änderungsrate}} + \underbrace{\nabla \cdot [\vec{v} u(t, x)]}_{\text{Konvektion: Zu/Abfluss}} = \underbrace{\nabla \cdot [\kappa \nabla u(t, x)]}_{\text{Diffusion: div grad}} + \underbrace{q(t, x)}_{\text{Quellen}} + \underbrace{c u(t, x)}_{\text{Wachstum/Zerfall}}$$

Diese partielle Differentialgleichung ist linear zweiter Ordnung. Sie beschreibt den Transport in einer vorgegebenen Strömung  $\vec{v}(t, x)$ , z.B. von Algen im Meer oder eines radioaktiven Markers im Blutkreislauf. Dieselben Gleichungen gelten für die Konvektion und Diffusion von Wärme. Gesucht ist die Stoffkonzentration  $u : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  (Wärmedichte), also die Werte  $u(t, x)$  zur Zeit  $t \in I \subseteq \mathbb{R}$  am Ort  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Zur Ortsableitung schreiben wir wie üblich  $\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_n)$ . [H10] Gegeben sind Anfangswerte  $u(0, x) = u_0(x)$  für  $t = 0$  und alle  $x \in \Omega$ , sowie die Strömungsgeschwindigkeit  $\vec{v} : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  (Konvektion), der Diffusionskoeffizient  $\kappa : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  (Temperaturleitfähigkeit), zudem die Quellen und Senken  $q : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  (Wärmeleistungsdichte) und die Wachstumsrate  $c : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  (Vermehrung, Abbau, Zerfall).

Für räumlich **konstante Koeffizienten** gilt  $\nabla \vec{v} = 0$  und  $\nabla \kappa \cdot \nabla u = 0$ :

$$\partial_t u(t, x) + \vec{v} \nabla u(t, x) = \kappa \Delta u(t, x) + q(t, x) + c u(t, x)$$

Links steht die **substantielle Ableitung** [H11] entlang der Strömung:

$$\partial_t u(t, x) + \sum_{j=1}^n v_j \partial_j u(t, x) = \kappa \sum_{j=1}^n \partial_j^2 u(t, x) + c u(t, x) + q(t, x)$$

Dritter Spezialfall: Im **stationären Zustand** gilt  $\partial_t u = 0$  und  $c = 0$ . Alle Größen hängen nicht von der Zeit  $t$  ab, sondern nur vom Ort  $x$ .

$$\nabla \cdot [\vec{v}(x) u(x)] = \nabla \cdot [\kappa(x) \nabla u(x)] + q(x)$$

Für  $v = 0$  und  $\kappa = 1$  erhalten wir die **Potentialgleichung**  $0 = \Delta u + q$ .

😊 Konvektion und Diffusion begegnen Ihnen in vielen Anwendungen. In glücklichen Fällen können Sie die Gleichung allein mit Stift und Papier lösen, explizit und exakt. Meist jedoch ist dies unmöglich und Sie nutzen Computer zur numerischen Approximation. Hierzu benötigen Sie ein solides Grundverständnis: Existiert eine Lösung? Ist sie eindeutig? Wie verhält sie sich typischerweise? Wie lässt sie sich berechnen?

😊 In typischen Anwendungen ist  $u(t, x)$  die Wärmedichte oder eine Stoffkonzentration. Im Allgemeinen hängen die Koeffizienten  $v, \kappa, q$  höchstens von der Zeit  $t$  und dem Ort  $x$  ab. In genaueren Modellen hängen sie zudem von der Wärmedichte bzw. Konzentration  $u$  ab.

⚠ Die Gleichung ist dann nicht-linear und wesentlich komplizierter.

Erster wichtiger Spezialfall: Ohne Diffusion gilt  $\kappa = 0$ . Das vereinfacht! Wir erhalten die **Transportgleichung** oder **Konvektionsgleichung**:

$$\partial_t u(t, x) + \nabla \cdot [\vec{v}(t, x) u(t, x)] = c(t, x) u(t, x) + q(t, x)$$

😊 Dies ist eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung. Mit konstanten Koeffizienten lösen wir sie in Satz Q2E, allgemeiner Q3A.

😊 Solche einfach gebauten Gleichungen können wir bereits lösen! Hierzu nutzen wir die raffinierte und vielseitige Charakteristikmethode.

Zweiter Spezialfall: Ohne Konvektion und Wachstum gilt  $v = c = 0$ . Wir erhalten die **Wärmeleitungsgleichung** oder **Diffusionsgleichung**:

$$\partial_t u(t, x) = \nabla \cdot [\kappa(t, x) \nabla u(t, x)] + q(t, x)$$

😊 Dies ist eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung. Mit konstanten Koeffizienten,  $\kappa = \text{const}$ , lösen wir sie in Kapitel S.

😊 Die Lösung der Wärmeleitungsgleichung gelingt uns dank guter mathematischer Grundlegung, sie mobilisiert alle bisherigen Techniken.

**Aufgabe:** Eine wichtige Anwendung ist die Strömung von Flüssigkeiten.

(1) Setzen Sie als transportierte Größe die Masse ein, also  $u = \rho$ , und vereinfachen Sie durch die plausiblen Annahmen  $\kappa = 0, c = 0, q = 0$ .

(2) Untersuchen Sie als transportierte Größe die Impulsdichte  $\vec{u} = \vec{v}\rho$ . Welche Differentialgleichung erhalten Sie nach Vereinfachung?

**Lösung:** (1) Wir erhalten die Kontinuitätsgleichung  $\partial_t \rho + \nabla \cdot (\vec{v}\rho) = 0$ .

(2) Wir setzen die Komponente  $u = \rho v_i$  in die Konv-Diff-Gleichung ein:

$$\begin{aligned} \partial_t u + \sum_{j=1}^n \partial_j [v_j u] &= \sum_{j=1}^n \partial_j [\kappa \partial_j u] + q_i \\ \partial_t [\rho v_i] + \sum_{j=1}^n \partial_j [\rho v_j v_i] &= \kappa \Delta (\rho v_i) + q_i \\ \rho \partial_t v_i + v_i \partial_t \rho + v_j \sum_{j=1}^n \partial_j [\rho v_j] + \sum_{j=1}^n \rho v_j \partial_j v_i &= \kappa \Delta (\rho v_i) + q_i \\ &= 0 \text{ dank Kontinuitätsgleichung (1)} \end{aligned}$$

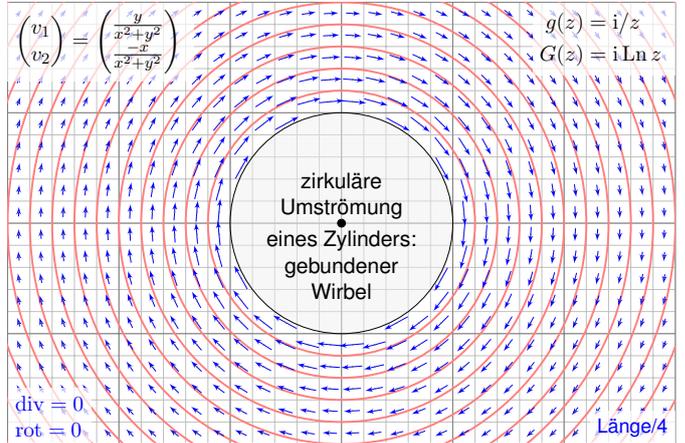
😊 Wir erhalten hierdurch genau die  $i$ -te Navier–Stokes–Gleichung: Diese sind nichts anderes als die Bilanzgleichungen für den Impuls! Die Kraft  $q_i = \rho f_i - \partial_i p$  setzt sich zusammen aus der externen Kraft  $\rho f_i$  und der internen Kraft  $-\partial_i p$ , die durch das Druckgefälle erzeugt wird.

Massenerhaltung:  $\operatorname{div} \vec{v} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0$

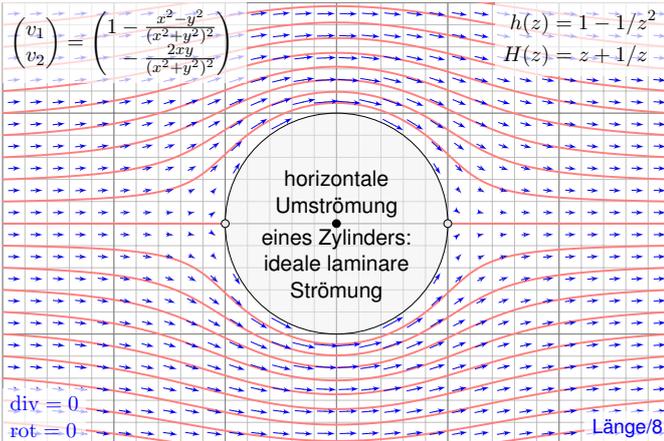
Impulserhaltung:  $\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \nu \Delta v_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i$

Änderung
Konvektion
Diffusion
interne Kraft
extern

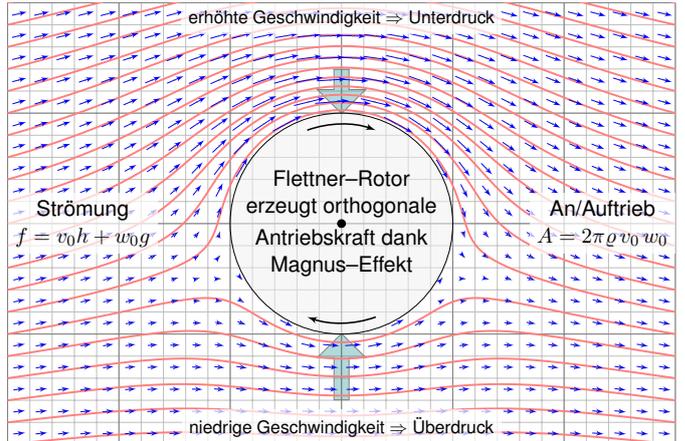
Diese  $1 + n$  Gleichungen beschreiben die Strömungsgeschwindigkeit  $\vec{v}: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  einer Flüssigkeit zur Zeit  $t \in I \subseteq \mathbb{R}$  am Ort  $\vec{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  in der Ebene ( $n=2$ ) oder im Raum ( $n=3$ ), mit konstanter Massendichte  $\rho \in \mathbb{R}$  und Viskosität  $\nu \in \mathbb{R}$ , Druck  $p: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und äußerer Kraft  $f: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Sie sind zweiter Ordnung und nicht-linear in  $\vec{v}$ . Die Impulserhaltung ist Newtons Bewegungsgesetz: Links steht die Beschleunigung, als konvektive Ableitung. H111 Rechts stehen die Kräfte durch Reibung  $\nu$ , Druck  $p$  und  $f$ . Gegeben sind hierzu die äußere Kraft  $\vec{f}$  sowie die Anfangsgeschwindigkeiten  $\vec{v}(0, \vec{x})$  für  $\vec{x} \in \Omega$ . Gesucht sind die Funktionen  $\vec{v}$  und  $p$ . Im zweidimensionalen Falle ist die Lösbarkeit bewiesen, im dreidimensionalen Falle noch nicht! Die Navier–Stokes–Gleichungen illustrieren die Schwierigkeit partieller Differentialgleichungen: Über dreidimensionale Lösungen weiß man allgemein wenig, z.B. sind Existenz und Regularität ungeklärt – trotz größter Anstrengungen. Das Clay Mathematics Institute hat dies im Jahr 2000 als eines von sieben Millennium-Problemen ausgelobt, mit einem Preisgeld von 1 Million Dollar.



😊 Holomorphe Funktionen beschreiben Strömungen: Wirbelfeld.



😊 Einfaches und intuitives Modell, exakte Lösung dank Holomorphie!



📺 Veritasium: [youtu.be/23f1jvGUWJs](https://youtu.be/23f1jvGUWJs), /t-3jn0IJg4k, /20SrvzNW9FE

😊 Auch Navier–Stokes betrachten wir vereinfachend in der Ebene: Wir erhalten schöne Graphiken und präzise Formeln! So berechneten M.W. Kutta 1902 und N.J. Joukowski 1904 die dynamische Auftriebskraft.

- Aufgabe:** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Gebiet: offen und wegzusammenhängend.
- Hierauf sei  $v = (v_1, v_2): \mathbb{R}_{\geq 0} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  das Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit konstanter Dichte  $\rho$ . Formulieren Sie dies als PDE.
  - Folgern Sie für  $\omega = \operatorname{rot}(v) = \partial_x v_2 - \partial_y v_1$  die Wirbeltransportgleichung. Nehmen Sie hierzu die äußere Kraft  $f$  als wirbelfrei an, also  $\operatorname{rot}(f) = 0$ .
  - Nehmen Sie als Idealisierung an, unser Strömungsfeld  $v$  sei zudem stationär sowie ohne Rotation, ohne Reibung und ohne äußere Kräfte. Welche Lösungen hat die PDE? Wie berechnen Sie hierbei den Druck?
  - Finden Sie alle Lösungen  $v$  auf der gesamten Ebene  $\Omega = \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ .
  - Finden Sie alle Lösungen  $v$  auf  $\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < r_1^2 \}$ .
  - Finden Sie alle Lösungen auf  $\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid r_0^2 < x^2 + y^2 < r_1^2 \}$ .
  - Sei  $D \subseteq \Omega$  kompakt mit stückweise glattem Rand  $\partial D$ . Bestimmt die Strömung  $v|_{\partial D}$  am Rand die Strömung  $v$  im Inneren? (8) im Äußeren?

**Lösung:** (1) Die Massenerhaltung  $\operatorname{div}(\rho v) + \partial_t \rho = 0$  ergibt  $\operatorname{div}(v) = 0$ . Aus Impulserhaltung folgern wir die Navier–Stokes–Gleichungen H111:

Massenerhaltung:  $\operatorname{div}(v) = \partial_x v_1 + \partial_y v_2 = 0$

Impulserhaltung:  $\partial_t v + (v_1 \partial_x + v_2 \partial_y)v = \nu \Delta v - \operatorname{grad} p / \rho + f$

(2) Die Rotation der Impulsgleichungen ergibt nach kurzer Rechnung:

$$\partial_t \omega + (v_1 \partial_x + v_2 \partial_y) \omega = \nu \Delta \omega$$

😊 Wir erkennen hierin die Konvektions-Diffusions-Gleichung für  $\omega$ ! Für  $\nu = 0$  sind die Wirbel längs der Flusslinien konstant, „eingefroren“.

⚠️ Dreidimensional kommt rechts noch  $(\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v}$  als Summand hinzu. Die Helmholtz’schen Wirbelsätze erklären das Verhalten von Wirbeln.

(3) Die Annahmen bedeuten  $\partial_t v = 0$ ,  $\omega = 0$ ,  $\nu = 0$ ,  $f = 0$ . Somit bleibt:

Massenerhaltung:  $\partial_x v_1 + \partial_y v_2 = 0$

Rotationsfreiheit:  $\partial_x v_2 - \partial_y v_1 = 0$

Impulserhaltung:  $(v_1 \partial_x + v_2 \partial_y)v = -\operatorname{grad} p / \rho$

**Satz Q1B: holomorphe Lösung der Navier–Stokes–Gleichungen**

Jede ebene stationäre Strömung  $v = (v_1, v_2): \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  konstanter Dichte, ohne Wirbel, ohne Reibung und ohne äußere Kräfte entspricht einer holomorphen Funktion  $f = v_1 - iv_2: \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  und umgekehrt. Der Druck  $p$  berechnet sich hieraus durch  $p + (\rho/2)(v_1^2 + v_2^2) = \text{const.}$

**Nachrechnen:** Wir setzen die Rotationsfreiheit  $\partial_x v_2 = \partial_y v_1$  ein:

$$v_1 \partial_x v_1 + v_2 \partial_y v_1 = v_1 \partial_x v_1 + v_2 \partial_x v_2 = \frac{1}{2} \partial_x (v_1^2 + v_2^2)$$

$$v_1 \partial_x v_2 + v_2 \partial_y v_2 = v_1 \partial_y v_1 + v_2 \partial_y v_2 = \frac{1}{2} \partial_y (v_1^2 + v_2^2)$$

Damit vereinfacht sich die Impulserhaltung zu:

$$\operatorname{grad} p = -\frac{\rho}{2} \operatorname{grad}(v_1^2 + v_2^2) \quad \text{also} \quad p = \text{const} - \frac{\rho}{2}(v_1^2 + v_2^2)$$

😊 Der **hydrostatische Druck**  $p$  ist das Skalarpotential des inneren Kraftfeldes. Der Term  $\frac{\rho}{2}v^2$  ist der **dynamische Druck** oder **Staudruck**. Ihre Summe ist konstant: Energiegleichung und **Gesetz von Bernoulli**.

😊 Damit können wir Lösungen finden und lokal explizit ausschreiben: Jede Lösung ist eine holomorphe Funktion, also lokal eine Potenzreihe

$$f(z) = v_1(x, y) - iv_2(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \text{mit} \quad a_k \in \mathbb{C}$$

mit Konvergenzradius  $\rho = 1 / \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \in [0, \infty]$  (Hadamard).

(4) Der Radius  $\rho = \infty$  entspricht der Bedingung  $\sqrt[k]{|a_k|} \rightarrow 0$ .

(5) Lösungen sind alle Potenzreihen mit  $\rho \geq r_1$  dank Satz F3E.

(6) Lösungen sind alle konvergenten Laurent-Reihen dank Satz F3F.

(7) Die Antwort lautet überraschenderweise: Ja! Dies verdanken wir der Integralformel von Cauchy  $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$  für  $z_0 \in \overset{\circ}{D}$  (Satz F3B).

(8) Angenommen  $\Omega \supseteq \mathbb{C} \setminus \overset{\circ}{D}$ , und der Nullpunkt liegt im Inneren,  $0 \in \overset{\circ}{D}$ . Wir können Inneres und Äußeres Vertauschen durch die holomorphe Abbildung  $z \mapsto 1/z$ . Wir fordern zudem, dass  $f(z) \rightarrow a$  für  $|z| \rightarrow \infty$  gilt. Dann können wir  $g(z) = f(1/z)$  durch  $g(0) = a$  stetig fortsetzen, und  $g$  ist damit holomorph (F5G). Wir nutzen (7) und transformieren zurück.

**Satz Q1C: dynamischer Auftrieb nach Kutta–Joukowski–Blasius**  
 Sei  $K \subseteq \mathbb{C}$  kompakt mit stückweise glattem Rand  $\partial K$ . Das Komplement  $\Omega = \mathbb{C} \setminus K$  ist offen mit Abschluss  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial K$ . Die Strömung  $v: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  sei stetig, am Rand  $\partial K$  tangential, und  $f = \bar{v}$  auf  $\Omega$  holomorph (Q1B).

(1) Der Druck  $p$  berechnet sich daraus durch die **Bernoulli–Gleichung**:

$$p + \frac{\rho}{2}(v_1^2 + v_2^2) = \text{const}$$

(2) Für den dynamischen Auftrieb folgt daraus die **Formel von Blasius**:

$$\bar{F} = F_1 - iF_2 = i \frac{\rho}{2} \oint_C f(z)^2 dz$$

(3) Für  $f(z) = v_0 + w_0 z^{-1} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^{-k}$  folgt die **Formel von Kutta**:

$$\bar{F} = -2\pi \rho v_0 w_0 = i \rho v_0 \oint_C f(z) dz$$

**Beweis:** (2) Gegeben ist das Geschwindigkeitsfeld  $z \mapsto v(z) = \bar{f}(z)$ . Gesucht ist die auf den Körper  $K$  wirkende Auftriebskraft  $F = F_1 + iF_2$ .

Wir durchlaufen die Randkurve  $C = \partial K$  im positiven Sinne. An jedem Kurvenelement  $dz = dx + i dy$  erzeugt der Druck  $p$  die Kraft  $dF = i p dz$ ; sie steht senkrecht zu  $dz$ , und zwar um  $+90^\circ$  gedreht, daher der Faktor  $i$ . Wir nutzen die Bernoulli–Gleichung (1)  $p = \text{const} - v\bar{v} \cdot \rho/2$  und erhalten:

$$F = \oint_C i p dz = -i \frac{\rho}{2} \oint_C \bar{v} v dz$$

Entlang der Randkurve  $C = \partial K$  ist die Strömung  $v$  überall tangential, also parallel zu  $dz$ . Daher ist das Produkt  $\bar{v} dz = v d\bar{z}$  reell. Daraus folgt:

$$F = -i \frac{\rho}{2} \oint_C v^2 d\bar{z} = -i \frac{\rho}{2} \oint_C f(z)^2 dz$$

Nach Konjugation erhalten wir somit die ersehnte Formel von Blasius:

$$\bar{F} = F_1 - iF_2 = i \frac{\rho}{2} \oint_C f(z)^2 dz$$

(3) Fliegerisch interessant sind Strömungen mit  $f(z) \rightarrow v_0$  für  $|z| \rightarrow \infty$ . Für  $K \subseteq B(0, r)$  und  $|z| \geq r$  gilt  $f(z) = v_0 + w_0 z^{-1} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^{-k}$  (F3F). Wir finden  $f(z)^2 = v_0^2 + 2v_0 w_0 z^{-1} + \sum_{k=2}^{\infty} b_k z^{-k}$  und die Auftriebsformel

$$\bar{F} = i \frac{\rho}{2} \oint_C f(z)^2 dz \stackrel{\text{Res}_{F3A}}{=} i \frac{\rho}{2} \oint_{B(0,r)} f(z)^2 dz \stackrel{\text{Res}_{F1B}}{=} -2\pi \rho v_0 w_0.$$

Der dynamische Auftrieb ist das Produkt aus Dichte  $\rho$ , Geschwindigkeit  $v_0$  und Zirkulation  $w_0$ . Ihre Richtung ist senkrecht zur Anströmung: Verläuft die Strömung von links nach rechts und die Zirkulation ist negativ (im Uhrzeigersinn), dann zeigt die Kraft nach oben: plausibel, Auftrieb! Unsere obige Illustration zeigt  $f(z) = v_0(1 - 1/z^2) + w_0 i/z$  mit Auftrieb  $\bar{F} = -2\pi i \rho v_0 w_0$ .

Die Formel (3) wurde 1902 von Wilhelm Kutta (1867–1944) an der Technischen Hochschule München entwickelt; von 1912 bis 1935 war er Professor für Mathematik in Stuttgart. Mit diesem bahnbrechenden Ergebnis konnten erstmals auftriebserzeugende Flügelprofile entwickelt werden! Kuttas Zirkulationsformel hilft auch näherungsweise noch, wenn keine ideale Strömung vorliegt.

Die Formel heißt auch Kutta–Joukowski–Theorem, nach Kutta und dem russischen Physiker und Aerodynamiker Nikolai Joukowski (1847–1921), der dieses Ergebnis unabhängig entdeckte und 1906 veröffentlichte. Er gründete 1904 nahe Moskau das erste aerodynamische Institut Europas. Berühmt ist das von ihm entwickelte Joukowski–Flügelprofil (1910), das aus einer kreisförmigen Lösung (wie oben illustriert) durch eine Kutta–Joukowski–Transformation gewonnen wird.

Ihre grundlegende Formel haben Kutta und Joukowski aus den Strömungsgleichungen abgeleitet, durch Einschränkung auf zwei Dimensionen und dank der Werkzeugen holomorpher Funktionen. Heinrich Blasius (1883–1970) hat 1911 diesen Ansatz weiter verallgemeinert und vereinfacht.

Die *abstrakten* mathematischen Grundlagen der Funktionentheorie zählen sich hier *konkret* aus, auch in einem völlig anderen und neuen Gebiet wie der Aerodynamik! Ich betone es nochmals: Abstrakt bedeutet nicht fern der Anwendung, sondern abstrakt bedeutet vielseitig anwendbar.

Die historische Bedeutung des Kutta–Joukowski–Verfahrens liegt darin, dass damit erstmals die Strömungsgleichung für einfache Tragflächen gelöst und so der dynamische Auftrieb errechnet werden konnte. Das ist auch heute noch didaktisch hilfreich, denn zum Verständnis sind einfache, exakte Lösungen nützlich, bevor man zu komplizierten, numerischen Näherungen übergeht.

Unsere Berechnung beruht auf Vereinfachungen: Die  $z$ -Richtung kann vernachlässigt werden, die Strömung ist zweidimensional in  $x$ - $y$ -Richtung, stationär, inkompressibel, reibungslos und wirbelfrei. Unsere Rechnung wird dadurch sehr elegant. Sie ergibt einen realistischen Auftrieb, aber keinen Widerstand! Ohne Reibung ist dies das berühmte-berühmte D'Alembert-Paradox.

Im Allgemeinen sind die Navier–Stokes–Strömungsgleichungen extrem kompliziert zu lösen, ebenso die daraus resultierenden Kräfte. Von Anfang an entwickelte man daher neben der Theorie eine umfangreiche Empirie, Experimente und Messungen im Feldversuch, später im Windkanal. Heute nutzt man als dritten Zugang, sozusagen als goldenen Mittelweg, numerische Verfahren zur Simulation auf Hochleistungsrechnern. Damit lassen sich beliebige dreidimensionale Profile untersuchen, zudem ist man nicht mehr auf vereinfachte Strömungsgleichungen eingeschränkt.

Am einfachsten sind wie immer **lineare Differentialgleichungen**. Es lohnt sich, die vorhandene Struktur zu erkennen und zu nutzen! Bei unseren Rechnungen wollen wir Funktionen ableiten sowie addieren und multiplizieren. Hier vereinen sich Analysis und Lineare Algebra:

Der Wertebereich ist wie üblich  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ , der Körper der reellen Zahlen oder der Körper der komplexen Zahlen. Beide Fälle sind zunächst sehr ähnlich, daher wollen wir beide auch möglichst parallel behandeln.

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\mathbb{K}^\Omega$  die Menge aller Funktionen  $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ . Summe  $f + g$  und Produkt  $\alpha f$  mit  $\alpha \in \mathbb{K}$  definieren wir punktweise:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{und} \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega.$$

Hiermit wird  $(\mathbb{K}^\Omega, +, \cdot)$  zu einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Hierin ist die Teilmenge  $C^k(\Omega) = C^k(\Omega, \mathbb{K}) \subseteq \mathbb{K}^\Omega$  aller  $k$ -mal stetig diff'baren Funktionen ein Untervektorraum. Auch das Produkt  $f \cdot g$  definieren wir punktweise:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega.$$

Damit wird  $(\mathbb{K}^\Omega, +, \cdot)$  zu einer  $\mathbb{K}$ -Algebra, darin ebenso  $C^k(\Omega, \mathbb{K})$ .

**Satz Q2A: Ableitung von Summen und Produkten**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge. Die Menge  $C^k(\Omega, \mathbb{K})$  aller  $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  ist ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum.

Jede partielle Ableitung  $\partial_1, \dots, \partial_n: C^k(\Omega, \mathbb{K}) \rightarrow C^{k-1}(\Omega, \mathbb{K})$  ist eine  $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung, das heißt, für alle  $f, g \in C^k$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  gilt

$$\partial_k(\alpha f + \beta g) = \alpha(\partial_k f) + \beta(\partial_k g)$$

Mit der punktwisen Multiplikation wird  $C^k(\Omega, \mathbb{K})$  zu einer  $\mathbb{K}$ -Algebra. Für die Ableitung von Produkten gilt wie üblich die **Leibniz-Regel**:

$$\partial_k(f \cdot g) = (\partial_k f) \cdot g + f \cdot (\partial_k g)$$

😊 Sie kennen diese Rechenregeln vom eindimensionalen Fall ( $n = 1$ ). Nachrechnen: Sie übertragen sich auf partielle Ableitungen ( $n \geq 1$ ).

😊 Auf den differenzierbaren Funktionen  $f \in C^k(\Omega, \mathbb{K})$  wirken nun Differentialoperatoren wie z.B. der Laplace-Operator  $\Delta = \partial_1^2 + \dots + \partial_n^2$ .

**Definition Q2B: linearer Differentialoperator**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Zu  $\nu \in \mathbb{N}^n$  betrachten wir die  $\nu$ -fache Ableitung

$$\partial^\nu := \partial_1^{\nu_1} \dots \partial_n^{\nu_n}: C^k(\Omega, \mathbb{K}) \rightarrow C^{k-|\nu|}(\Omega, \mathbb{K}).$$

Dank Schwarz (D4A) dürfen wir hier umordnen:  $\partial^\mu \partial^\nu = \partial^\nu \partial^\mu = \partial^{\mu+\nu}$ .

Ein **linearer Differentialoperator**  $L: C^k \rightarrow C^0$  ist von der Form

$$L = \sum_{|\nu| \leq k} a_\nu(x) \partial^\nu, \quad \text{also} \quad (Lf)(x) = \sum_{|\nu| \leq k} a_\nu(x) \partial^\nu f(x).$$

Jede **lineare Differentialgleichung** (PDE) hat die Form  $Lu = b$ . Gegeben ist  $L$  und  $b: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ ; gesucht sind Lösungen  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ .

😊 Die homogene Gleichung  $Lu = 0$  fragt nach dem Kern von  $L$ . Die Menge aller Lösungen  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  von  $Lu = 0$  ist ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum.

Die Menge aller Lösungen  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  von  $Lu = b$  ist ein affiner Raum: „Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen.“

Unter den partiellen Differentialgleichungen (PDE) sind die linearen der wichtigste Spezialfall. Hierfür brauchen wir passendes Vokabular.

Bei  $\partial^\nu$  ist  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n$  ein **Multiindex** mit  $\nu_1, \dots, \nu_n \in \mathbb{N}$ . Die **Ordnung**  $|\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_n$  besagt, wie oft abgeleitet wird.

Der Differentialoperator  $L$  ist eine **Linearkombination** dieser  $\partial^\nu$ . Dies ist eine **lineare Abbildung**, d.h.  $L(\alpha f + \beta g) = \alpha(Lf) + \beta(Lg)$ .

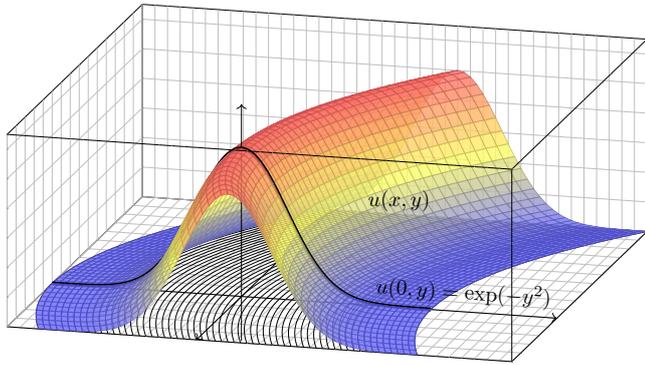
Die **Koeffizienten**  $a_\nu: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  sind hierbei stetige Funktionen; bei **konstanten Koeffizienten** sind die  $a_\nu$  auf ganz  $\Omega$  konstant.

Die **Ordnung** von  $L$  ist  $\leq k$ , wenn  $a_\nu = 0$  für alle  $\nu$  mit  $|\nu| > k$  gilt. Die Ordnung ist  $= k$ , wenn zudem  $a_\nu \neq 0$  für ein  $\nu$  mit  $|\nu| = k$  gilt.

😊 Erfahrung und Intuition gewöhnlicher Differentialgleichungen helfen!

⚠ Anders als bei gewöhnlichen Differentialgleichungen (Struktursatz O3B) sind die Lösungsräume partieller Differentialgleichungen jedoch meist unendlichdimensional, wie schon die obigen Beispiele zeigen. Auch Anfangs- bzw. Randbedingungen sind meistens komplizierter. Wir müssen je nach Problemstellung individuell darauf eingehen.

Grundidee: Konstruiere die Funktion  $u(x, y)$  entlang ihrer Höhenlinien!



☺ Charakteristische Kurven sind genial einfach und einfach genial. Die Methode erfordert Verständnis und Übung. Schauen Sie genau hin!

Zu lösen sei eine **quasilineare PDE erster Ordnung**:

$$a(x, y, u) \partial_x u(x, y) + b(x, y, u) \partial_y u(x, y) = f(x, y, u)$$

$$1 \partial_x u(x, y) + x \partial_y u(x, y) = 0$$

mit Anfangswerten  $u(0, y) = \exp(-y^2)$  für alle  $y \in \mathbb{R}$

Unser Beispiel zeigt den Spezialfall einer **homogenen linearen PDE**. Das Definitionsgebiet von  $u: \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist dabei implizit ganz  $\mathbb{R}^2$ .

**Aufgabe:** Zur Vereinfachung auf eine Dimension untersuchen wir Wege

$$\gamma: \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^2: s \mapsto (x, y) = (X(s), Y(s)).$$

Diese setzen wir stillschweigend als stetig differenzierbar voraus.

(1) Leiten Sie die Höhe  $U(s) = u(X(s), Y(s))$  ab nach Wegparameter  $s$ . Wählen Sie  $\gamma$  so, dass die Wegableitung genau unserer PDE entspricht.

(2) Konstruieren Sie  $u$  entlang dieser **charakteristischen Kurven**.

Was ist der Unterschied zwischen  $x, y, u$  und  $X, Y, U$ ? Was ist gleich?

**Lösung:** (1) Dank der **Kettenregel** gilt:  $X' \partial_x u + Y' \partial_y u = U'$

**Koeffizientenvergleich** mit unserer PDE:  $a \partial_x u + b \partial_y u = f$

(2) Zum Startpunkt  $(0, y_0)$  gehören **charakteristische Gleichungen**:

$$\begin{aligned} X(0) &= x_0 = 0, & X'(s) &= a(X(s), Y(s), U(s)) = 1, \\ Y(0) &= y_0 \in \mathbb{R}, & Y'(s) &= b(X(s), Y(s), U(s)) = X(s), \\ U(0) &= u(x_0, y_0) = \exp(-y_0^2), & U'(s) &= f(X(s), Y(s), U(s)) = 0. \end{aligned}$$

☺ Gewöhnliche Differentialgleichungen verstehen wir bereits gut!

Wir können dies für  $X, Y, U$  lösen und dann in  $x, y, u$  umrechnen:

$$\left. \begin{aligned} x &\stackrel{!}{=} X(s) = x_0 + s \\ y &\stackrel{!}{=} Y(s) = y_0 + s^2/2 \\ u(x, y) &\stackrel{!}{=} U(s) = \exp(-y_0^2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} s &= x \\ y_0 &= y - x^2/2 \\ u(x, y) &= \exp[-(y - x^2/2)^2] \end{cases}$$

☺ Skizze: Der Graph zeigt diese Funktion  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto u(x, y)$ .

☺ Probe: Diese Funktion  $u$  erfüllt unsere PDE und die Anfangswerte!

☺ Die Rechnung zeigt zudem die Eindeutigkeit der Lösung  $u$ . Warum?

☺ Die **charakteristischen Kurven** transportieren die Anfangswerte.

Aus der zur Lösung vorgelegten PDE  $a \partial_x u + b \partial_y u = f$  lesen wir direkt die charakteristischen Gleichungen  $X' = a, Y' = b, U' = f$  als AWP ab und bestimmen hierzu die charakteristischen Kurven wie zuvor gelernt.

☺ Wir nutzen diese Charakteristiken geschickt, um  $u$  zu berechnen.

Im Allgemeinen Fall ist  $U' = f$  die Höhenänderung längs des Weges. Im einfachsten Fall  $f = 0$  ist jede Charakteristik  $\gamma$  eine Höhenlinie von  $u$ .

☺ **Notation:** Warum schreiben wir erst  $x, y, u$  und dann  $X, Y, U$ ?

Zunächst sind  $(x, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  freie Variablen (etwa Ort, Zeit, etc.), davon hängt die gesuchte Funktion  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto u(x, y)$  ab.

Entlang des Weges  $\gamma$  parameterisieren wir Ort  $(x, y) = (X(s), Y(s))$  und Höhe  $U(s) = u(X(s), Y(s))$  allein durch den Wegparameter  $s \in I \subseteq \mathbb{R}$ . Dies sind also Funktionen von  $s$ , und das wollen wir präzise notieren.

☺ Die Bezeichnung  $X, Y, U$  ist einfach, klar und narrensicher. Üblich sind ebenso  $\xi, \eta, v$  (griechisch) oder  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{u}$  (lästig) oder schlicht  $x, y, u$  (doppeldeutig). Das ist eine Frage von Bequemlichkeit und Geschmack.

**Definition Q2C:** lineare, semilineare und quasilineare PDE

Eine **PDE erster Ordnung** für  $u: \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine Gleichung

$$F(x, y, u(x, y), \partial_x u(x, y), \partial_y u(x, y)) = 0 \quad \text{für alle } (x, y) \in \Omega.$$

Gegeben ist  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  offen,  $F: \Omega \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, gesucht ist  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir nennen  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine **(klassische) Lösung**, wenn  $u$  nach  $x$  und  $y$  differenzierbar ist und in jedem Punkt  $(x, y) \in \Omega$  des Definitionsgebiets die geforderte Gleichung  $F(x, y, u(x, y), \partial_x u(x, y), \partial_y u(x, y)) = 0$  erfüllt.

Wichtige Spezialfälle sind **quasilineare / semilineare / lineare PDE**

$$\begin{aligned} a(x, y, u) \partial_x u(x, y) + b(x, y, u) \partial_y u(x, y) &= f(x, y, u) \\ a(x, y) \partial_x u(x, y) + b(x, y) \partial_y u(x, y) &= f(x, y, u) \\ a(x, y) \partial_x u(x, y) + b(x, y) \partial_y u(x, y) &= c(x, y) u(x, y) + d(x, y) \end{aligned}$$

Gegeben sind die stetigen Koeffizientenfunktionen  $a, b, f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bzw.  $a, b, c, d: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , gesucht sind Lösungen  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  wie erklärt. Lineare PDE sind **homogen** ( $d = 0$ ) oder **inhomogen** ( $d \neq 0$ ).

**Aufgabe:** Sind folgende PDE linear? semi? quasi? weder noch?

Die PDE	$\partial_x u + \partial_y u = u$	ist .. linear homogen.
Die PDE	$y \partial_x u + \sin(x) \partial_y u = \cos(x + y)$	ist .. linear inhomogen.
Die PDE	$\partial_x u + x \partial_y u = \cos(y) \cos(u)$	ist .. semilinear.
Die PDE	$\partial_x u + u \partial_y u = \cos(y) \cos(u)$	ist .. quasilinear.
Die PDE	$x \partial_x u + u^2 \partial_y u = e^u + e^{-u}$	ist .. quasilinear.
Die PDE	$\partial_x u + (\partial_y u)^2 = 0$	ist .. nicht quasilinear.

Charakteristiken sind maßgeschneidert für quasilineare Gleichungen. Im semilinearen oder linearen Fall wird alles noch etwas einfacher.

☞ G.B. Folland: *Partial differential equations*, Princeton UP 1995.

Der allgemeine Fall  $F(x, y, u, \partial_x u, \partial_y u) = 0$  ist deutlich schwieriger und wird hier nicht behandelt. Siehe §3.2 des umfassenden Lehrbuchs von

☞ L.C. Evans: *Partial Differential Equations*, 2nd edition, AMS 2010.

Es kommt vor, dass klassische Lösungen nicht genügen, dann helfen allgemeiner schwache Lösungen und Distributionen, siehe Kapitel D.

Zu lösen sei eine **quasilineare PDE erster Ordnung**

$$\begin{aligned} a(x, y, u) \partial_x u + b(x, y, u) \partial_y u &= f(x, y, u) \quad \text{für alle } (x, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2, \\ \text{mit Anfangswerten } u(x, y) &= u_0(x, y) \quad \text{für alle } (x, y) \in A \subseteq \Omega. \end{aligned}$$

Gegeben sind hierzu das Definitionsgebiet  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  und die stetigen Koeffizientenfunktionen  $a, b, f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , gesucht ist  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Auf einer Teilmenge  $A \subseteq \Omega$  gibt  $u_0: A \rightarrow \mathbb{R}$  die Anfangswerte vor.

Eine **charakteristische Kurve** der PDE zum Startpunkt  $(x_0, y_0) \in A$  ist ein  $C^1$ -Weg  $\gamma: \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \Omega \times \mathbb{R}$  mit  $s \mapsto (X(s), Y(s), U(s))$  und

$$\begin{aligned} X(0) &= x_0, & X'(s) &= a(X, Y, U), \\ Y(0) &= y_0, & Y'(s) &= b(X, Y, U), \\ U(0) &= u_0(x_0, y_0), & U'(s) &= f(X, Y, U). \end{aligned}$$

Solche gewöhnlichen DGSysteme können wir bereits lösen (O1B/O2A): Sind  $a, b, f$  stetig diff'bar, so hat das AWP genau eine maximale Lösung.

☺ Der Startwert wird entlang der Charakteristik transportiert (Q2D): Jede Lösung  $u$  der PDE erfüllt  $u(X(s), Y(s)) = U(s)$  für alle  $s \in I$ .

☺ So können wir **quasilineare PDE** zurückführen auf ODE.

Wir nutzen diese Charakteristiken geschickt, um  $u$  zu berechnen. Im Allgemeinen Fall ist  $U' = f$  die Höhenänderung längs des Weges. Im einfachsten Fall  $f = 0$  ist jede Charakteristik  $\gamma$  eine Höhenlinie von  $u$ .

☺ Für **semilineare PDE** vereinfachen sich die char. Gleichungen zu

$$X' = a(X, Y), \quad Y' = b(X, Y).$$

Hier haben wir die **Grundkurve**  $s \mapsto (X(s), Y(s))$  in der  $x$ - $y$ -Ebene, und ihr DGSystem ist von der Höhe  $U(s) = u(X(s), Y(s))$  entkoppelt. Die Höhe folgt ihrer eigenen Gleichung  $U'(s) = f(X(s), Y(s), U(s))$ .

☺ Für **lineare PDE** vereinfacht sich die letzte Gleichung noch weiter zu

$$U' = c(X, Y)U + d(X, Y).$$

Zu gegebener Grundkurve  $s \mapsto (X(s), Y(s))$  ist die **Höhenfunktion**  $U(s)$  leicht zu berechnen: Sie folgt einer linearen Differentialgleichung (M2E). Zu ihrer Lösung nutzen wir die explizite Integralformel, siehe Satz Q2E.

Erstes Beispiel: überbestimmt?

Q213

**Aufgabe:** Finden Sie alle  $C^1$ -Funktionen  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$y \partial_x u(x, y) - x \partial_y u(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad (1) \quad u(x, 0) = \cos(x^2),$$

$$(2) \quad u(x, 0) = 1 - x^2/2,$$

$$(3) \quad u(x, 0) = \sin(x).$$

**Lösung:** Zum Startpunkt  $(x_0, 0)$  gehört die charakteristische Gleichung

$$X(0) = x_0, \quad X'(s) = Y(s),$$

$$Y(0) = 0, \quad Y'(s) = -X(s).$$

😊 Entlang dieser Kurve ist  $U(s) = u(X(s), Y(s))$  konstant, da  $U' = 0$ . Zu lösen ist nur noch ein lineares DGSytem, in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

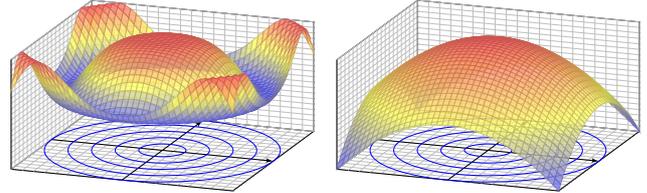
😊 Eigenwerte, Eigenvektoren, Eigenfunktionen, reelle Lösungen... Die Lösung ist der Kreis  $X(s) = x_0 \cos(s)$ ,  $Y(s) = -x_0 \sin(s)$ . Probe!

Erstes Beispiel: überbestimmt?

Q214

Entlang jeder Charakteristik ist die gesuchte Lösung  $u(x, y)$  konstant: Die allgemeine Lösung ist  $u(x, y) = f(x^2 + y^2)$ . Machen Sie die Probe! Zusammen mit den Anfangswerten konstruieren wir hieraus die Lösung. (1) Die gegebenen Anfangswerte  $u(x, 0) = \cos(x^2)$  auf der  $x$ -Achse werden entlang der Kreise  $x^2 + y^2 = \text{const}$  überallhin transportiert:

$$u(x, y) = \cos(x^2 + y^2) \qquad u(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)/2$$



(2) Ebenso für die gegebenen Anfangswerte  $u(x, 0) = 1 - x^2/2$ .

(3) Die Anfangswerte  $u(x, 0) = \sin(x)$  erlauben keine Lösung! Diese Aufgabe ist **überbestimmt**. Wir wünschen / fordern, dass auf jeder charakteristischen Kurve **genau ein Anfangswert** gegeben ist.

Die Charakteristikmethode in Worten

Q215 Erläuterung

😊 Die Grundidee der Charakteristiken ist geometrisch anschaulich: Konstruiere die Funktion  $u: \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  entlang ihrer Höhenlinien! Wir kennen die gesuchte Funktion  $u$  noch nicht, sondern nur die PDE. Glücklicherweise können wir daraus bereits die Höhenlinien berechnen! Voraussetzung: Die PDE ist erster Ordnung und quasilinear (Q2C).

Hierzu lesen wir aus der PDE die charakteristischen Gleichungen ab, als System gewöhnlicher Differentialgleichungen mit Anfangswerten. Das können wir bereits gut lösen – dank unserer soliden Vorbereitung.

Der Idealfall sieht so aus: Die Charakteristiken überdecken das Gebiet  $\Omega$  als „parallele“ Kurvenschar, ohne Lücken und ohne Überschneidungen, und auf jeder Charakteristik wird genau ein Anfangswert vorgegeben.

Aus den Charakteristiken können wir die Funktion  $u$  rekonstruieren: Annahme: Über jeden Punkt  $(x, y) \in \Omega$  läuft genau eine Charakteristik. Ihre Höhe bestimmt dann den Funktionswert  $u(x, y)$  in diesem Punkt.

⚠️ Abschließend sollten wir überprüfen, ob  $u$  differenzierbar ist und tatsächlich die Differentialgleichung mit allen Anfangswerten erfüllt.

Die Charakteristikmethode in Worten

Q216 Erläuterung

Charakteristiken lösen quasilineare Differentialgleichungen (Q2D). Zwei **geometrische Hindernisse** können dabei auftreten:

Die PDE kann **unterbestimmt** sein: Lläuft über einen Punkt  $(x, y) \in \Omega$  gar keine Charakteristik, so ist der Funktionswert  $u(x, y)$  unbestimmt.

⚠️ In diesem Falle kann die PDE mehr als eine Lösung zulassen.

Die PDE kann **überbestimmt** sein: Laufen über einen Punkt  $(x, y) \in \Omega$  mehrere Charakteristiken mit verschiedenen Höhen, so widersprechen sich diese Forderungen, und kein Wert  $u(x, y)$  kann sie alle erfüllen.

⚠️ In diesem Falle lässt die PDE überhaupt keine Lösung zu.

Kurzum: Bei Überbestimmtheit gibt es zu viele Charakteristiken, so dass widersprüchliche Forderungen entstehen und keine Lösung möglich ist.

Bei Unterbestimmtheit hingegen gibt es zu wenige Charakteristiken, so dass nicht alle Funktionswerte  $u(x, y)$  eindeutig festgelegt sind.

😊 Die PDE heißt **gut gestellt**, wenn sie genau eine Lösung zulässt, und diese Lösung zudem stetig von den Anfangsdaten abhängt.

Zweites Beispiel: unterbestimmt?

Q217

**Aufgabe:** Finden Sie alle  $C^1$ -Funktionen  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$y \partial_x u(x, y) + x \partial_y u(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad (1) \quad u(x, 0) = \cos(x^2),$$

$$(2) \quad u(0, y) = \cos(y^2),$$

$$(3) \quad \text{beides.}$$

**Lösung:** Zum Startpunkt  $(x_0, 0)$  gehört die charakteristische Gleichung

$$X(0) = x_0, \quad X'(s) = Y(s),$$

$$Y(0) = 0, \quad Y'(s) = X(s).$$

😊 Entlang dieser Kurve ist  $U(s) = u(X(s), Y(s))$  konstant, da  $U' = 0$ . Zu lösen ist nur noch ein lineares DGSytem, in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

😊 Eigenwerte, Eigenvektoren, Eigenfunktionen, reelle Lösungen... Die Lösung ist die Hyperbel  $X(s) = x_0 \cosh(s)$ ,  $Y(s) = x_0 \sinh(s)$ .

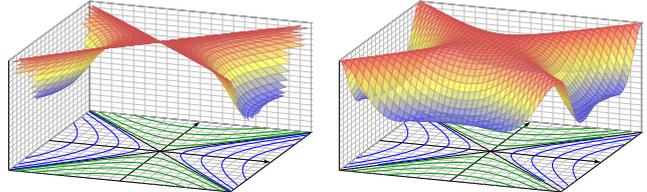
Zweites Beispiel: unterbestimmt?

Q218

Entlang jeder Charakteristik ist die gesuchte Lösung  $u(x, y)$  konstant: Die allgemeine Lösung ist  $u(x, y) = g(x^2 - y^2)$  auf jedem Viertel. Probe! Zusammen mit den Anfangswerten konstruieren wir hieraus die Lösung:

(1) Die gegebenen Anfangswerte  $u(x, 0) = \cos(x^2)$  auf der  $x$ -Achse werden entlang der Hyperbeln  $x^2 - y^2 = \text{const}$  transportiert: überallhin?

$$u(x, y) = \cos(x^2 - y^2) \qquad u(x, y) = \cos(x^2 - y^2)$$



Diese Aufgabenstellung (1) ist noch **unterbestimmt**. Ebenso (2). Erst beide Daten zusammen (3) bestimmen  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  eindeutig. Zwecks Existenz und Eindeutigkeit der Lösung fordern wir, dass auf jeder charakteristischen Kurve **genau ein Anfangswert** gegeben ist.

Drittes Beispiel: gut gestellt?

Q219 Erläuterung

**Aufgabe:** Finden Sie alle  $C^1$ -Funktionen  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\partial_t u(t, x) + 2 \partial_x u(t, x) = 0 \quad \text{und} \quad u(0, x) = g(x) = -x e^{-x^2/2}.$$

**Lösung:** Zum Startpunkt  $(0, x_0)$  gehört die charakteristische Gleichung

$$T(0) = 0, \quad T'(s) = 1,$$

$$X(0) = x_0, \quad X'(s) = 2,$$

$$U(0) = g(x_0), \quad U'(s) = 0.$$

Wir finden  $t \stackrel{!}{=} T(s) = s$ . Fortan nutzen wir daher  $t$  als Wegparameter. Weiterhin finden wir  $x \stackrel{!}{=} X(t) = x_0 + 2t$ , nach  $x_0$  aufgelöst  $x_0 = x - 2t$ . Entlang dieser Kurve ist  $U(t) = u(t, x_0 + 2t)$  konstant, denn  $\dot{U} = 0$ . Also:

$$u(t, x) \stackrel{!}{=} U(t) = U(0) = g(x_0) = g(x - 2t).$$

😊 Probe: Diese Funktion  $u$  erfüllt unsere PDE und die Anfangswerte!  
 😊 Die Rechnung zeigt zudem die Eindeutigkeit der Lösung  $u$ . Warum?  
 😊 Dies ist ein einfaches Beispiel der Transportgleichung, siehe Q229.

Viertes Beispiel: gut gestellt?

Q220 Erläuterung

**Aufgabe:** Finden Sie alle  $C^1$ -Funktionen  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\partial_t u(t, x) + x \partial_x u(t, x) = 0 \quad \text{und} \quad u(0, x) = g(x) = -\sin(x).$$

**Lösung:** Zum Startpunkt  $(0, x_0)$  gehört die charakteristische Gleichung

$$T(0) = 0, \quad T'(s) = 1,$$

$$X(0) = x_0, \quad X'(s) = X(s),$$

$$U(0) = g(x_0), \quad U'(s) = 0.$$

Wir finden  $t \stackrel{!}{=} T(s) = s$ . Fortan nutzen wir daher  $t$  als Wegparameter. Weiterhin finden wir  $x \stackrel{!}{=} X(t) = x_0 e^t$ , nach  $x_0$  aufgelöst  $x_0 = x e^{-t}$ . Entlang dieser Kurve ist  $U(t) = u(t, x_0 e^t)$  konstant, denn  $\dot{U} = 0$ . Also:

$$u(t, x) \stackrel{!}{=} U(t) = U(0) = g(x_0) = g(x e^{-t})$$

😊 Probe: Diese Funktion  $u$  erfüllt unsere PDE und die Anfangswerte!  
 😊 Die Rechnung zeigt zudem die Eindeutigkeit der Lösung  $u$ . Warum?  
 😊 Für eine Variante mit rechter Seite und Graphik siehe Q233.

**Die Charakteristikmethode** Q221  
Ausführung

Allgemein für  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  verläuft das Verfahren wörtlich genauso. Gegeben seien stetige Funktionen  $a_1, \dots, a_n, f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Gesucht sind alle stetig diff'baren Funktionen  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\sum_{k=1}^n a_k(x, u) \partial_k u(x) = f(x, u) \quad \text{für alle } x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n,$$

$$u(x) = u_0(x) \quad \text{für alle } x \in A \subseteq \Omega.$$

Das AWP kann **unterbestimmt** sein und mehrere Lösungen zulassen, oder **überbestimmt** und keine Lösung zulassen. Es heißt **gut gestellt**, wenn genau eine Lösung existiert und zudem stetig von  $u_0$  abhängt. Eine **charakteristische Kurve** der PDE zum Startpunkt  $x_0 \in A$  ist ein  $C^1$ -Weg  $\gamma: \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \Omega \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  mit  $t \mapsto (X(s), U(s))$  und

$$\begin{aligned} X' &= a(X, U), & X(0) &= x_0, \\ U' &= f(X, U), & U(0) &= u_0(x_0). \end{aligned}$$

Sind die Funktionen  $a, f$  sogar stetig differenzierbar, so können wir den Existenz- und Eindeigkeitsatz für gewöhnliche DGSysteme nutzen: Zu jedem Startpunkt  $x_0 \in A$  gehört genau eine Charakteristik. (O1B)

**Die Charakteristikmethode** Q222  
Ausführung

Annahme (A): Die Koeffizientenfunktionen  $a_1, \dots, a_n, f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sind stetig und bezüglich der letzten Variable  $u$  sogar stetig differenzierbar.  
Annahme (B): Die Charakteristiken der PDE überdecken ganz  $\Omega$ ; zu jedem Punkt  $x \in \Omega$  existiert (mindestens) eine Charakteristik  $s \mapsto (X(s), U(s))$  mit Startpunkt  $X(0) \in A$  und  $X(s) = x$  für ein  $s$ .

**Satz Q2D: Lösung entlang charakteristischer Kurven**

Unter den Annahmen (A) und (B) gilt für  $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$  die Äquivalenz:

Die Funktion  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  löst die PDE.

(A)  $\Downarrow$   $\Uparrow$  (B)

Es gilt  $u(X(s)) = U(s)$  längs jeder Charakteristik.

Insbesondere existiert dank (A&B) höchstens eine Lösung  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

☺ So können Sie jede Lösung  $u$  finden. Abschließend bleibt zu prüfen, ob die gefundene Funktion  $u$  tatsächlich stetig differenzierbar ( $C^1$ ) ist.

**Beweis der Charakteristikmethode** Q223  
Ausführung

**Nachrechnen:** (A) Sei  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung unserer PDE. Sei  $s \mapsto (X(s), U(s))$  eine Charakteristik. Wir zeigen  $u(X(s)) = U(s)$ . Für die Differenz  $\delta(s) = U(s) - u(X(s))$  gilt  $\delta(0) = 0$  und folgende ODE:

$$\begin{aligned} \delta' &= U' - \sum_{k=1}^n X'_k \partial_k u(X) \\ &= f(X, U) - \sum_{k=1}^n a_k(X, U) \partial_k u(X) \\ &= f(X, u(X) + \delta) - \sum_{k=1}^n a_k(X, u(X) + \delta) \partial_k u(X) \end{aligned}$$

Da  $u$  die PDE löst, ist die Nullfunktion  $\tilde{\delta}(s) = 0$  eine Lösung dieser ODE. Dank Annahme (A) können wir den Eindeigkeitsatz M1c anwenden: Diese ODE kann nur eine einzige Lösung haben! Das bedeutet  $\delta = 0$ . Somit gilt  $u(X(s)) = U(s)$  entlang jeder Charakteristik, wie behauptet.

☺ Das ist die schwierigste und wichtigste Hälfte des Satzes. Die Startwerte werden entlang von Charakteristiken transportiert: Lösungen der PDE erfüllen  $u(X(s)) = U(s)$  längs jeder Charakteristik.

☺ Mit Charakteristiken können wir Werte einer Lösung  $u$  bestimmen! Das gilt insbesondere, wenn wir genügend Charakteristiken haben (B).

**Beweis der Charakteristikmethode** Q224  
Ausführung

**Nachrechnen:** (B) Sei  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Sei  $s \mapsto (X(s), U(s))$  eine beliebige Charakteristik der PDE. Wir setzen  $U(s) - u(X(s)) = 0$  voraus. Die Ableitung ergibt:

$$\begin{aligned} 0 &= U' - \sum_{k=1}^n X'_k \partial_k u(X) \\ &= f(X, U) - \sum_{k=1}^n a_k(X, U) \partial_k u(X) \\ &= f(X, u(X)) - \sum_{k=1}^n a_k(X, u(X)) \partial_k u(X) \end{aligned}$$

In jedem Punkt  $x = X(s)$  erfüllt  $u$  demnach die PDE. Dank Annahme (B) gilt die PDE in jedem Punkt  $x \in \Omega$ .

☺ Damit können wir aus Charakteristiken eine Lösung  $u$  konstruieren. Dies gilt insbesondere dann, wenn zu jedem Punkt  $x \in \Omega$  **genau** eine Charakteristik  $s \mapsto (X(s), U(s))$  existiert mit  $X(s) = x$  für **genau** ein  $s$ .

⚠ Bei Überbestimmtheit gibt es zu viele Charakteristiken, so dass widersprüchliche Forderungen entstehen und keine Lösung möglich ist. Bei Unterbestimmtheit hingegen gibt es zu wenige Charakteristiken. Die vorangehenden Beispiele illustrieren Über- und Unterbestimmtheit.

**Warnende Gegenbeispiele** Q225  
Ausführung

Die oben erklärten Voraussetzungen (A) und (B) sind etwas technisch, aber leider unverzichtbar. Dies sehen wir an konkreten Gegenbeispielen: Die obige Aufgabe zu Hyperbeln (Q217) illustriert Unterbestimmtheit; hier ist (B) verletzt, und somit ist Satz Q2D(B) nicht anwendbar. Im folgenden Beispiel ist (A) verletzt und daher Q2D(A) nicht anwendbar.

**Aufgabe:** (1) Zu lösen ist für  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  die PDE

$$\partial_x u(x, y) = \sqrt[3]{u(x, y)^2}, \quad u(0, y) = 0.$$

(a) Finden Sie mindestens zwei verschiedene Lösungen  $u$  und  $\tilde{u}$ .  
(b) Stellen Sie die charakteristischen Gleichungen auf und finden Sie zu jedem Startwert mindestens zwei verschiedene Charakteristiken.

(2) Finden Sie alle Lösungen  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  der PDE

$$\partial_x u(x, y) = \sqrt[3]{u(x, y)^2}, \quad u(3, y) = 1.$$

Hier ist (A) zwar verletzt, aber dennoch sind Charakteristiken eindeutig.

**Warnende Gegenbeispiele** Q226  
Ausführung

**Lösung:** In  $x$ -Richtung ist dies die gewöhnliche DG  $u'(x) = \sqrt[3]{u(x)^2}$ . Diese kennen wir von der ausführlichen Untersuchung auf Seite M325.

(1a) Zwei mögliche Lösungen sind  $u(x, y) = 0$  und  $\tilde{u}(x, y) = x^3/27$ .  
(1b) Zum Startpunkt  $(0, y_0)$  gehört die charakteristische Gleichung

$$\begin{aligned} X(0) &= 0, & X'(s) &= 1, \\ Y(0) &= y_0, & Y'(s) &= 0, \\ U(0) &= 0, & U'(s) &= \sqrt[3]{U(s)^2}. \end{aligned}$$

Zwei mögliche Lösungen sind die charakteristischen Kurven

$$\begin{aligned} \gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3: s &\mapsto (X(s), Y(s), U(s)) = (s, y, 0) \quad \text{und} \\ \tilde{\gamma}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3: s &\mapsto (\tilde{X}(s), \tilde{Y}(s), \tilde{U}(s)) = (s, y, s^3/27). \end{aligned}$$

⚠ Dies zeigt, dass sich der Satz Q2D hier nicht anwenden lässt!  
(2) Die Charakteristiken  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{\geq 0}: s \mapsto (s, y, U(s))$  sind hier eindeutig, nämlich  $U(s) = s^3/27$  für  $s \geq 0$  und  $U(s) = 0$  für  $s \leq 0$ . Diese PDE hat demnach **genau** eine Lösung  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , nämlich  $u(x, y) = x^3/27$  für  $x \geq 0$  und  $u(x, y) = 0$  für  $x \leq 0$ .

**Kritisches Beispiel: Wasseruhr** Q227  
Ausführung

**Aufgabe:** (1) Finden Sie alle Lösungen  $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  der PDE

$$\partial_x u(x, y) = -2y\sqrt{u(x, y)}, \quad u(0, y) = y^2.$$

(2) Finden Sie zwei verschiedene Lösungen  $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  der PDE

$$\partial_x u(x, y) = -2y\sqrt{u(x, y)}, \quad u(1, y) = 0.$$

Warum versagt die Charakteristikmethode? Was sollte Sie warnen?

Wir erinnern an Torricellis Gesetz (Seite M123): Wasser fließt aus einem Zylinder mit der Geschwindigkeit  $v = \sqrt{2gh}$  gemäß Energieerhaltung. Sei  $x \in \mathbb{R}$  die Zeit und  $u \geq 0$  die Wasserhöhe über der Öffnung. Dann gilt Torricellis Differentialgleichung  $\partial_x u = -y\sqrt{u(x)}$ . Hier ist  $y > 0$  eine Konstante; dieser Parameter hängt von Form und Größe der Öffnung ab.

**Lösung:** (1) Zum Startpunkt  $(0, y_0)$  gehört die char. Gleichung

$$\begin{aligned} X(0) &= 0, & X'(s) &= 1, \\ Y(0) &= y_0, & Y'(s) &= 0, \\ U(0) &= y_0^2, & U'(s) &= -2Y(s)\sqrt{U(s)}. \end{aligned}$$

**Kritisches Beispiel: Wasseruhr** Q228  
Ausführung

Eindeutige Lösung M123 ist die Charakteristik  $s \mapsto (s, y_0, U(s))$  mit

$$U(s) = \begin{cases} (y_0 - sy_0)^2 & \text{für } s \leq 1, \\ 0 & \text{für } s \geq 1. \end{cases}$$

Für jede Lösung  $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  muss demnach gelten:

$$u(x, y) = \begin{cases} (y - xy)^2 & \text{für } x \leq 1, \\ 0 & \text{für } x \geq 1. \end{cases}$$

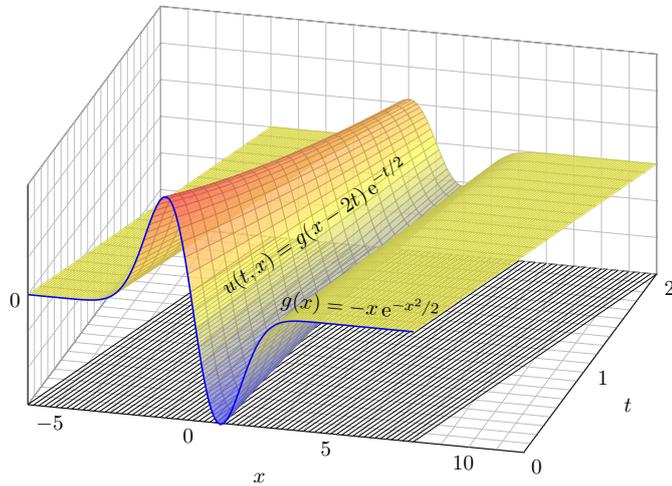
Probe: Für alle  $x \leq 1$  gilt  $\partial_x u(x, y) = -2y(y - xy) = -2y\sqrt{u(x, y)}$ . Für  $x \geq 1$  gilt  $\partial_x u(x, y) = 0 = -2y\sqrt{u(x, y)}$ . Für  $x = 0$  gilt  $u(0, y) = y^2$ .

☺ Somit ist  $u$  eine Lösung. Unsere Rechnung zeigt: Es ist die **einzige**!

(2) Die Nullfunktion ist eine Lösung, ebenso die Funktion  $u$  aus (1).  
⚠ Die Charakteristiken sind hier nicht eindeutig! Physikalischer Grund: Ist der Eimer einmal leer, so erkennen wir nicht mehr, wann er auslief! Mathematisches Warnsignal: Die rechte Seite  $-2y\sqrt{u}$  ist nicht stetig nach  $u$  differenzierbar, denn die Ableitung  $\partial_u[-2y\sqrt{u}] = -y/\sqrt{u}$  hat in  $u = 0$  eine Polstelle. Somit können wir unseren Satz Q2D hier nicht anwenden!

## Die Transportgleichung: Illustration

Q229



## Die Transportgleichung: Problemstellung

Q230

Wir betrachten lineare PDE erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Nach Division durch einen der Koeffizienten erhalten wir folgende Form:

**Aufgabe:** Zu lösen sei die folgende **Transportgleichung**:

$$\partial_t u(t, x) + b \partial_x u(t, x) + c u(t, x) = f(t, x) \quad \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R},$$

$$\text{mit Anfangswerten } u(0, x) = g(x) \quad \text{für } t = 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}.$$

Gegeben sind die konstanten Koeffizienten  $a = 1, b, c \in \mathbb{R}$  sowie stetige Funktionen  $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , gesucht ist  $u: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Existiert eine Lösung  $u$ ? Ist sie eindeutig? Wie berechnen Sie sie?

Anschaulich und in Worten bedeutet die Transportgleichung folgendes: Die Anfangsdaten  $g(x_0)$  werden mit **Geschwindigkeit**  $b$  transportiert: Die Kurven  $t \mapsto (t, x_0 + bt)$  sind die charakteristischen Kurven der PDE.

Im Falle  $c \neq 0$  kommt noch **exponentielle Dämpfung** mit  $e^{-ct}$  hinzu. Beides ist in der Beispielgraphik für  $b = 2$  und  $c = 1/2$  gut zu erkennen. Für  $f \neq 0$  addiert sich auf der rechten Seite der **Quellterm**  $f(t, x)$  längs des Transportweges  $\tau \mapsto (\tau, x_0 + b\tau)$ , integriert von  $\tau = 0$  nach  $\tau = t$ .

## Die Transportgleichung: Rechnung

Q231

**Lösung:** Zum Startpunkt  $(0, x_0)$  gehört die charakteristische Gleichung

$$\begin{aligned} T(0) &= 0, & T'(s) &= 1, \\ X(0) &= x_0, & X'(s) &= b, \\ U(0) &= g(x_0), & U'(s) &= f(T(s), X(s)) - cU(s). \end{aligned}$$

Wir finden  $t \stackrel{!}{=} T(s) = s$ . Fortan nutzen wir daher  $t$  als Wegparameter. Weiterhin finden wir  $x \stackrel{!}{=} X(t) = x_0 + bt$ , nach  $x_0$  aufgelöst  $x_0 = x - bt$ . Die Gleichung für  $U$  lautet  $\dot{U}(t) = f(t, x_0 + bt) - cU(t)$ . Sie ist linear! Zur Lösung kennen und nutzen wir die Integralformel (Satz M2E):

$$\begin{aligned} u(t, x) \stackrel{!}{=} U(t) &= g(x_0) e^{-ct} + \int_{\tau=0}^t f(\tau, x_0 + b\tau) e^{c(\tau-t)} d\tau \\ &= g(x - bt) e^{-ct} + \int_{\tau=0}^t f(\tau, x - bt + b\tau) e^{c(\tau-t)} d\tau \end{aligned}$$

☺ Probe: Diese Funktion  $u$  erfüllt unsere PDE und die Anfangswerte!  
☺ Dieses DGSsystem ist besonders einfach, da nahezu entkoppelt. Allgemein  $\partial_t u(t, x) + b(t) \partial_x u(t, x) + c(t, x) u(t, x) = f(t, x)$ , siehe Q3A.

## Die Transportgleichung: Zusammenfassung

Q232  
Erläuterung

**Satz Q2E:** Integralformel für lineare PDE erster Ordnung

Zu lösen sei die folgende **Transportgleichung**:

$$\partial_t u(t, x) + b \partial_x u(t, x) + c u(t, x) = f(t, x) \quad \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R},$$

$$\text{mit Anfangswerten } u(0, x) = g(x) \quad \text{für } t = 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}.$$

Gegeben sind die konstanten Koeffizienten  $a = 1, b, c \in \mathbb{R}$  sowie stetige Funktionen  $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , gesucht ist  $u: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dieses Problem hat genau eine Lösung  $u: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , nämlich

$$u(t, x) = g(x - bt) e^{-ct} + \int_{\tau=0}^t f(\tau, x - bt + b\tau) e^{c(\tau-t)} d\tau$$

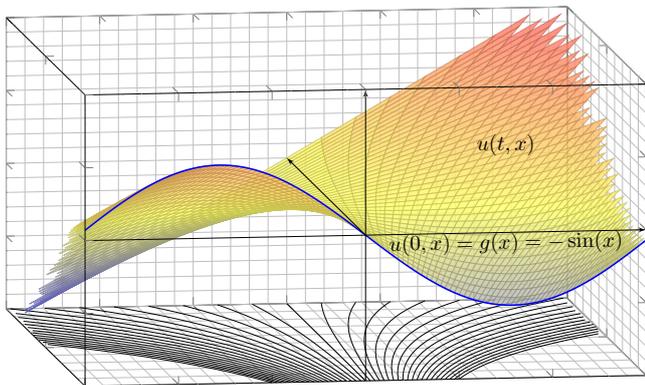
☺ Liegt die vermutete Formel erst einmal vor, so ist die Probe leicht.  
☺ Das ist ein seltener Glücksfall: Zu dieser Problemklasse haben wir mühelos eine allgemein gültige und explizite Integralformel gefunden.  
⚠ Die meisten PDE lassen sich nicht einfach mit Integralformeln lösen.

## Zweidimensionales Anwendungsbeispiel

Q233

**Aufgabe:** Finden Sie alle stetig differenzierbaren Funktionen  $u(t, x)$  mit

$$\partial_t u + x \partial_x u = x \quad \text{und} \quad u(0, x) = g(x) = -\sin(x).$$



## Zweidimensionales Anwendungsbeispiel

Q234

**Lösung:** Zum Startpunkt  $(0, x_0)$  gehört die charakteristische Gleichung

$$\begin{aligned} T(0) &= 0, & T'(s) &= 1, \\ X(0) &= x_0, & X'(s) &= X(s), \\ U(0) &= g(x_0), & U'(s) &= X(s). \end{aligned}$$

Wir finden  $t \stackrel{!}{=} T(s) = s$ . Fortan nutzen wir daher  $t$  als Wegparameter. Weiterhin gilt  $x \stackrel{!}{=} X(t) = x_0 e^t$ , nach  $x_0$  aufgelöst  $x_0 = x e^{-t}$ . Damit:

$$\begin{aligned} u(t, x) \stackrel{!}{=} U(t) &\stackrel{\text{HDI}}{=} U(0) + \int_{s=0}^t U'(s) ds \stackrel{\text{Vor}}{=} g(x_0) + \int_{s=0}^t x_0 e^s ds \\ &= g(x_0) + x_0(e^t - 1) \\ &= g(x e^{-t}) + x(1 - e^{-t}) \end{aligned}$$

☺ Machen Sie die Probe durch Einsetzen in die Aufgabenstellung! Diese Funktion erfüllt tatsächlich  $\partial_t u + x \partial_x u = x$  und  $u(0, x) = g(x)$ .  
☺ Dieses DGSsystem ist besonders einfach, da nahezu entkoppelt. Jeden der drei Schritte können wir direkt durch ein Integral lösen (Q3A).

## Dreidimensionales Anwendungsbeispiel

Q235

**Aufgabe:** Finden Sie alle stetig diff'baren Funktionen  $u(t, x, y)$  mit

$$\partial_t u + (x - y) \partial_x u + (x + y) \partial_y u = 0 \quad \text{und} \quad u(0, x, y) = xy.$$

**Lösung:** Zum Startpunkt  $(0, x_0, y_0)$  gehört die char. Gleichung

$$\begin{aligned} T(0) &= 0, & T'(s) &= 1, \\ X(0) &= x_0, & X'(s) &= X(s) - Y(s), \\ Y(0) &= y_0, & Y'(s) &= X(s) + Y(s), \\ U(0) &= x_0 y_0, & U'(s) &= 0. \end{aligned}$$

Wir finden  $t \stackrel{!}{=} T(s) = s$ . Fortan nutzen wir daher  $t$  als Wegparameter. In  $X, Y$  ist dies ein lineares DGSsystem mit konstanten Koeffizienten. Wir lösen es wie geübt durch Eigenvektoren und Eigenfunktionen...

$$\begin{aligned} x \stackrel{!}{=} X(t) &= e^t(x_0 \cos t - y_0 \sin t) \\ y \stackrel{!}{=} Y(t) &= e^t(x_0 \sin t + y_0 \cos t) \end{aligned}$$

☺ Machen Sie die Probe! Wegen  $\dot{U}(t) = 0$  ist die Höhe  $U(t)$  konstant: Die gefundenen Charakteristiken  $t \mapsto (t, X(t), Y(t))$  sind Niveaulinien.

## Dreidimensionales Anwendungsbeispiel

Q236

Die Lösung unserer PDE ist hierdurch implizit gegeben:

$$u(t, X(t), Y(t)) \stackrel{!}{=} U(t) = U(0) = x_0 y_0$$

☺ Laufen wir von  $(0, x_0, y_0)$  nach  $(t, x, y)$ , so kennen wir dort den Wert  $u(t, x, y) = x_0 y_0$ . Wir fragen umgekehrt: Welcher Startpunkt  $(0, x_0, y_0)$  führt zum Ziel  $(t, x, y)$ ? Wir lösen die Formel für  $(x, y)$  nach  $(x_0, y_0)$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= e^{+t} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} &= e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir setzen dies ein und erhalten schließlich die explizite Lösung:

$$\begin{aligned} u(t, x, y) = x_0 y_0 &= e^{-t}(x \cos t + y \sin t) \cdot e^{-t}(-x \sin t + y \cos t) \\ &= e^{-2t}[(y^2 - x^2) \cos t \sin t + xy(\cos^2 t - \sin^2 t)] \end{aligned}$$

☺ Machen Sie die Probe durch Einsetzen in die Aufgabenstellung! Diese Funktion erfüllt die PDE mit den gegebenen Anfangsdaten.  
☺ Die Rechnung zeigt zudem die Eindeutigkeit der Lösung  $u$ . Warum?

Die **Cauchy–Riemann–Gleichungen** für  $u, v: \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  lauten

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

- ⇔ Das Vektorfeld  $(u, -v)$  erfüllt  $\operatorname{div}(u, -v) = 0$  und  $\operatorname{rot}(u, -v) = 0$ .
- ⇔ Die komplexe Funktion  $f = u + iv: \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  ist **holomorph**.
- ⇔ Lokal ist  $f$  eine komplexe **Potenzreihe**,  $f(z) = \sum a_k(z - z_0)^k$ .
- ⇒ Beide Funktionen  $u, v$  sind **harmonisch**, also  $\Delta u = \Delta v = 0$ .

Die **Maxwell–Gleichungen** für die Felder  $\vec{E}, \vec{B}: \mathbb{R}^4 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  lauten

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho, & \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, & \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \end{aligned}$$

Jede ebene stationäre Lösung  $\vec{E}: \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  ohne Quellen entspricht einer holomorphen Funktion  $f = E_1 - iE_2: \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  und umgekehrt.

Allgemeine **Bilanzgleichung** / Transportgleichung der Strömungslehre:

$$\underbrace{\partial_t u(t, x)}_{\text{Änderungsrate}} + \underbrace{\nabla \cdot [\vec{v} u(t, x)]}_{\text{Zu/Abfluss: Konvektion}} = \underbrace{\nabla \cdot [\kappa \nabla u(t, x)]}_{\text{Diffusion: div grad}} + \underbrace{c u(t, x)}_{\text{Wachstum/Zerfall}} + \underbrace{q(t, x)}_{\text{Quellen}}$$

Angewendet auf die Impulsdichte  $\vec{u} = \vec{v}$  erhalten wir daraus die **Navier–Stokes–Gleichungen** für inkompressible Fluide:

$$\begin{aligned} \text{Massenerhaltung: } \operatorname{div} \vec{v} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0 \\ \text{Impulserhaltung: } \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} &= \nu \Delta v_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i \end{aligned}$$

Änderung
Konvektion
Diffusion
interne Kraft
extern

Jede ebene stationäre Strömung  $v = (v_1, v_2): \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  konstanter Dichte ohne Wirbel, ohne Reibung und ohne äußere Kräfte entspricht einer holomorphen Funktion  $f = v_1 - iv_2: \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  und umgekehrt. Der Druck  $p$  berechnet sich hieraus durch  $p + (\rho/2)(v_1^2 + v_2^2) = \text{const.}$

Zu lösen sei eine **quasi-lineare PDE erster Ordnung**

$$\begin{aligned} a(x, y, u) \partial_x u + b(x, y, u) \partial_y u &= f(x, y, u) \quad \text{für alle } (x, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2, \\ \text{mit Anfangswerten } u(x, y) &= u_0(x, y) \quad \text{für alle } (x, y) \in A \subseteq \Omega. \end{aligned}$$

Gegeben sind hierzu das Definitionsgebiet  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  und die stetigen Koeffizientenfunktionen  $a, b, f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , gesucht ist  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Auf einer Teilmenge  $A \subseteq \Omega$  gibt  $u_0: A \rightarrow \mathbb{R}$  die Anfangswerte vor.

Eine **charakteristische Kurve** der PDE zum Startpunkt  $(x_0, y_0) \in A$  ist ein  $C^1$ -Weg  $\gamma: \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \Omega \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^3$  mit  $s \mapsto (X(s), Y(s), U(s))$  und

$$\begin{aligned} X(0) &= x_0, & X' &= a(X, Y, U), \\ Y(0) &= y_0, & Y' &= b(X, Y, U), \\ U(0) &= u_0(x_0, y_0), & U' &= f(X, Y, U). \end{aligned}$$

- ☺ Solche gewöhnlichen DGSysteme können wir bereits gut lösen! Sind  $a, b, f$  stetig diff'bar, so hat das AWP genau eine maximale Lösung.
- ☺ Der Startwert wird entlang der Charakteristik transportiert (Q2D): Jede Lösung  $u$  der PDE erfüllt  $u(X(s), Y(s)) = U(s)$  für alle  $s \in I$ .

Wir betrachten lineare PDE erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Nach Division durch einen der Koeffizienten erhalten wir folgende Form:

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) + b \partial_x u(t, x) + c u(t, x) &= f(t, x) \quad \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}, \\ \text{mit Anfangswerten } u(0, x) &= g(x) \quad \text{für } t = 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Gegeben sind die konstanten Koeffizienten  $a = 1, b, c \in \mathbb{R}$  sowie stetige Funktionen  $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , gesucht ist  $u: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dieses Problem hat genau eine Lösung  $u: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , nämlich

$$u(t, x) = g(x - bt) e^{-ct} + \int_{\tau=0}^t f(\tau, x - bt + b\tau) e^{c(\tau-t)} d\tau$$

- ☺ Machen Sie die Probe: einsetzen und sorgfältig nachrechnen!
- ☺ Das ist ein seltener Glücksfall: Zu dieser Problemklasse haben wir mühelos eine allgemein gültige und explizite Integralformel gefunden.
- ☺ Allgemeiner gelingt diese Rechnung ebenso für Gleichungen  $\partial_t u(t, x) + b(t) \partial_x u(t, x) + c(t, x) u(t, x) = f(t, x)$ , siehe Satz Q3A.
- ⚠ Die meisten PDE lassen sich nicht einfach mit Integralformeln lösen.

**Aufgabe:** Finden Sie alle Funktionen  $u: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) + 2t \partial_x u(t, x) &= -u(t, x) \quad \text{für alle } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= \cos(x) \quad \text{für } t = 0 \text{ und alle } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- ☺ Dies ist ein Spezialfall der allgemeinen Transportgleichung Q3A.
- Lösung:** Zum Startpunkt  $(0, x_0)$  gehört die charakteristische Gleichung

$$\begin{aligned} T'(s) &= 1, & T(0) &= 0, \\ X'(s) &= 2T(s), & X(0) &= x_0, \\ U'(s) &= -U(s), & U(0) &= \cos(x_0). \end{aligned}$$

Wir finden  $t \stackrel{!}{=} T(s) = s$  und  $x \stackrel{!}{=} X(s) = x_0 + s^2$  sowie schließlich  $u(t, x) \stackrel{!}{=} U(s) = e^{-s} \cos(x_0)$ . Wir lösen dies nach  $(t, x)$  auf und erhalten:

$$u(t, x) = e^{-t} \cos(x - t^2)$$

- ☺ Startwerte werden längs Charakteristiken transportiert. Machen Sie die Probe:  $u$  erfüllt PDE und Anfangswerte!

**Aufgabe:** Finden Sie alle Funktionen  $u: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) + \cos(t) \partial_x u(t, x) &= \frac{3}{2} \sqrt{t} \quad \text{für alle } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= e^x \quad \text{für } t = 0 \text{ und alle } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- ☺ Dies ist ein Spezialfall der allgemeinen Transportgleichung Q3A.
- Lösung:** Zum Startpunkt  $(0, x_0)$  gehört die charakteristische Gleichung

$$\begin{aligned} T'(s) &= 1, & T(0) &= 0, \\ X'(s) &= \cos[T(s)], & X(0) &= x_0, \\ U'(s) &= \frac{3}{2} T(s)^{1/2}, & U(0) &= e^{x_0}. \end{aligned}$$

Wir finden  $t \stackrel{!}{=} T(s) = s$  und  $x \stackrel{!}{=} X(s) = x_0 + \sin(s)$  sowie schließlich  $u(t, x) \stackrel{!}{=} U(s) = s^{3/2} + e^{x_0}$ . Wir lösen dies nach  $(t, x)$  auf und erhalten:

$$u(t, x) = t^{3/2} + e^{x - \sin(t)}$$

- ☺ Startwerte werden längs Charakteristiken transportiert. Machen Sie die Probe:  $u$  erfüllt PDE und Anfangswerte!

Wir untersuchen für  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  die partielle Differentialgleichung

$$\begin{aligned} (3x - 4y) \partial_x u(x, y) + (2y - x) \partial_y u(x, y) &= u(x, y) \\ \text{mit } u(x, 0) &= \sin(x). \end{aligned}$$

**Aufgabe:** Formulieren Sie das Gleichungssystem der charakteristischen Kurven  $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ , sodass  $u(x(t), y(t)) = z(t)$  gilt.

**Lösung:** Diese PDE ist von erster Ordnung und linear (Q2c). Wir nutzen die zugehörige Charakteristikmethode (Q21):

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ \sin(x_0) \end{pmatrix}$$

- ☺ Dieses gewöhnliche Differentialgleichungssystem ist linear mit konstanten Koeffizienten, wir schreiben es daher gleich in Matrixform. Wir können dies wie gesehen lösen, durch Eigen- & Hauptfunktionen, und damit die gesuchte Funktion  $(x, y) \mapsto u(x, y)$  explizit bestimmen.

Wir untersuchen für  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  die partielle Differentialgleichung

$$\begin{aligned} (3x - 4y + 2u) \partial_x u(x, y) + (2y - x - 3u) \partial_y u(x, y) &= u(x, y)^2 \\ \text{mit } u(x, 0) &= \cos(x). \end{aligned}$$

**Aufgabe:** Formulieren Sie das Gleichungssystem der charakteristischen Kurven  $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ , sodass  $u(x(t), y(t)) = z(t)$  gilt.

**Lösung:** (1) Diese PDE ist von erster Ordnung und quasilinear (Q2c). Wir nutzen die zugehörige Charakteristikmethode (Q21):

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x(t) - 4y(t) + 2z(t) \\ -x(t) + 2y(t) - 3z(t) \\ z(t)^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ \cos(x_0) \end{pmatrix}$$

- ⚠ Dieses gewöhnliche Differentialgleichungssystem ist nicht linear.
- ☺ Dennoch können wir es lösen, zunächst leicht für  $z$  und für  $x, y$  dann inhomogen durch Variation der Konstanten. Zumindest im Prinzip finden wir damit schließlich die gesuchte Funktion  $(x, y) \mapsto u(x, y)$ .

Q309  
Erinnerung

**Potentialproblem als PDE**

**Aufgabe:** Wir betrachten das ebene Gebiet  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Zu lösen sei das folgende System aus zwei partiellen Differentialgleichungen:

$$\partial_x u = f_1, \quad \partial_y u = f_2.$$

Gegeben sind  $f_1, f_2 \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ , gesucht sind Lösungen  $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ .

(1) Ist diese PDE linear? Welche Lösungen hat die homogene PDE? Welche Struktur hat der Lösungsraum der inhomogenen PDE?  
 (2) Lässt sich jede so gegebene Problemstellung  $f = (f_1, f_2)$  lösen? Welche Bedingungen sind notwendig? Welche sind hinreichend?  
 (3) Falls dies überhaupt möglich ist: Wie lösen Sie diese PDE?

☺ Das ist eine typische Problemstellung, die Sie bereits gut kennen. Sie ist häufig und wichtig genug, um sie noch einmal zu wiederholen. Wir erkennen hier typische Hindernisse bei der Lösung von PDE: Wir benötigen sowohl lokale Kriterien (an  $f$ ) als auch globale (an  $\Omega$ ).

Q310  
Erinnerung

**Potentialproblem als PDE**

**Lösung:** (1) Ja, diese PDE ist linear in  $u$  und von erster Ordnung. Die homogene PDE  $\partial_x u = \partial_y u = 0$  bedeutet  $\text{grad } u = 0$ , also ist  $u$  lokal konstant dank HDI. Da unser Gebiet  $\Omega$  wegzusammenhängend ist, sind  $u = \text{const}$  tatsächlich die einzigen Lösungen der homogenen PDE. Ist  $u$  eine partikuläre Lösung der (inhomogenen) PDE  $\text{grad } u = f$ , so ist die gesamte Lösungsmenge der (affine) Raum  $\{u + c \mid c \in \mathbb{R}\}$ . Warum? Zur Erinnerung: Ist  $v$  eine weitere Lösung zu  $\text{grad } v = f$ , so gilt  $\text{grad}(v - u) = 0$  dank Linearität, also  $v - u = c$  mit  $c \in \mathbb{R}$ .

☺ Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung ist ein affiner Raum: „Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen“ Es ist dabei egal ob Differentialgleichung, gewöhnlich oder partiell, allein die lineare Struktur der vorliegenden Gleichung garantiert uns bereits die Struktur des Lösungsraumes. Das vereinfacht und verschafft Überblick. Wir erkennen in unserem Beispiel das Potentialproblem  $\text{grad } u = f$ . „Ein Potential ist nur bis auf eine additive Konstante bestimmt.“ In einfachster Form kennen Sie dies schon lange vom HDI.

Q311  
Erinnerung

**Potentialproblem als PDE**

(2) Nein, nicht jede Problemstellung  $f = (f_1, f_2)$  lässt sich lösen!  
 (2a) Wenn eine Lösung  $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$  mit  $\text{grad } u = f$  existiert, so gilt dank Schwarz  $\partial_x f_2 = \partial_x \partial_y u = \partial_y \partial_x u = \partial_y f_1$ , also  $\text{rot}(f_1, f_2) = 0$ . Diese Bedingung ist notwendig, aber noch nicht hinreichend! Gegenbeispiel ist das Wirbelfeld  $(f_1, f_2) = (-y, x)/(x^2 + y^2)$ .  
 (2b) Für den geschlossenen Weg  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega$  mit  $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$  gilt dank HDI zudem  $0 = u(\gamma(1)) - u(\gamma(0)) = \oint_\gamma \text{grad}(u) \cdot d\gamma = \oint_\gamma (f_1, f_2) \cdot d\gamma$ .

$$\text{rot}(f_1, f_2) = 0 \quad \text{und} \quad \oint_\gamma (f_1, f_2) \cdot d\gamma = 0$$

Beide Bedingungen sind notwendig, und zusammen auch hinreichend: Wir zeigen abschließend (3), dass dies tatsächlich zur Lösung reicht.  
 ☺ Die Lösbarkeit ist leicht zu prüfen, aber man muss wissen wie: Wir benötigen sowohl lokale Kriterien (an  $f$ ) als auch globale (an  $\Omega$ ). Im vorliegenden Fall ist das glücklicherweise einfach und übersichtlich.

Q312  
Erinnerung

**Potentialproblem als PDE**

(3) Zunächst müssen die obigen Bedingungen erfüllt sein. Dann gelingt die Lösung durch das Arbeitsintegral entlang von Wegen  $\alpha: [0, 1] \rightarrow \Omega$ :

$$u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad u(x, y) = \int_{\alpha(0)=(1,0)}^{\alpha(1)=(x,y)} (f_1, f_2) \cdot d\alpha$$

Ist  $\tilde{\alpha}: [0, 1] \rightarrow \Omega$  ein weiterer Weg von  $\tilde{\alpha}(0) = (1, 0)$  nach  $\tilde{\alpha}(1) = (x, y)$ , so müssen wir Wohldefiniertheit sicherstellen, also  $\int_{\tilde{\alpha}} f \cdot d\tilde{\alpha} = \int_\alpha f \cdot d\alpha$ . Die Bedingung  $\text{rot}(f) = 0$  sichert dies für homotope Wege. (Satz H2B) Die Verknüpfung  $\beta = \tilde{\alpha} * \bar{\alpha}$  ist ein geschlossener Weg von  $(1, 0)$  längs  $\tilde{\alpha}$  nach  $(x, y)$  und längs  $\bar{\alpha}$  zurück nach  $(1, 0)$ . Also ist  $\beta$  in  $\Omega$  homotop zum Weg  $\gamma_k(t) = e^{2\pi i k t}$  mit Umlaufzahl  $k \in \mathbb{Z}$ . (Satz H2D) Wir erhalten somit:

$$\int_{\tilde{\alpha}} f \cdot d\tilde{\alpha} - \int_\alpha f \cdot d\alpha = \oint_\beta f \cdot d\beta \stackrel{(2a)}{=} \oint_{\gamma_k} f \cdot d\gamma_k = k \oint_{\gamma} f \cdot d\gamma \stackrel{(2b)}{=} 0$$

☺ Das Ergebnis  $u(x, y)$  ist unabhängig vom gewählten Integrationsweg. Dank Satz H2A löst die so konstruierte Funktion  $u$  das Potentialproblem. Unsere Bedingungen (2a) und (2b) sind also tatsächlich hinreichend.

Q313  
Erinnerung

**Komplexe Stammfunktion als PDE**

**Aufgabe:** Sei  $S \subseteq \mathbb{R}^2$  eine diskrete Menge. Wir betrachten  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus S$ . Zu lösen sei folgendes System aus vier partiellen Differentialgleichungen:

$$\begin{pmatrix} \partial_x F_1 & \partial_y F_1 \\ \partial_x F_2 & \partial_y F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & -f_2 \\ f_2 & f_1 \end{pmatrix}.$$

Gegeben sind  $f_1, f_2 \in C^0(\Omega, \mathbb{R})$ , gesucht sind  $F_1, F_2 \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ . Links steht die Jacobi-Matrix  $J(F) := \partial(F_1, F_2)/\partial(x, y)$ .

(1) Ist diese PDE linear? Welche Lösungen hat die homogene PDE? Welche Struktur hat der Lösungsraum der inhomogenen PDE?  
 (2) Lässt sich jede so gegebene Problemstellung  $f = (f_1, f_2)$  lösen? Welche Bedingungen sind notwendig? Welche sind hinreichend?  
 (3) Falls dies überhaupt möglich ist: Wie lösen Sie diese PDE?

☺ Wir erkennen hier typische Hindernisse bei der Lösung von PDE: Wir benötigen sowohl lokale Kriterien (an  $f$ ) als auch globale (an  $\Omega$ ).

Q314  
Erinnerung

**Komplexe Stammfunktion als PDE**

**Lösung:** (1) Ja, diese PDE ist linear in  $F = (F_1, F_2)$  und erster Ordnung. Die homogene PDE  $J(F) = 0$  bedeutet  $\text{grad } F_1 = \text{grad } F_2 = 0$ , also sind  $F_1, F_2$  lokal konstant dank HDI. Unser Gebiet  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus S$  ist immer noch wegzusammenhängend: Wir können den Punkten  $s \in S$  ausweichen. Somit sind  $F = \text{const}$  tatsächlich die einzigen Lösungen von  $J(F) = 0$ .

Ist  $F$  eine Lösung der (inhomogenen) PDE  $J(F) = \begin{pmatrix} f_1 & -f_2 \\ f_2 & f_1 \end{pmatrix}$ , so ist die Lösungsmenge der (affine) Raum  $\{F + c \mid c \in \mathbb{R}^2\}$ . Warum? Zur Erinnerung: Ist  $G$  eine weitere Lösung zu  $J(G) = \begin{pmatrix} f_1 & -f_2 \\ f_2 & f_1 \end{pmatrix}$ , so gilt  $J(G - F) = 0$  dank Linearität, also  $G - F = c$  mit  $c \in \mathbb{R}^2$ .

☺ Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung ist ein affiner Raum: „Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen“ Wir erkennen bei genauem Hinsehen das komplexe Potentialproblem: Zu lösen ist  $\partial F/\partial z = f$  für  $F = F_1 + iF_2, f = f_1 + if_2: \Omega = \mathbb{C} \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$ . „Eine Stammfunktion ist nur bis auf eine additive Konstante bestimmt.“

Q315  
Erinnerung

**Komplexe Stammfunktion als PDE**

(2) Nicht jede Problemstellung  $f = (f_1, f_2) \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^2)$  lässt sich lösen!  
 (2a) Wenn eine Lösung  $F = (F_1, F_2) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$  existiert, so erfüllt sie die Cauchy-Riemann-Gleichungen  $\partial_x F_1 = \partial_y F_2$  und  $\partial_x F_2 = -\partial_y F_1$ . Somit ist die Funktion  $F = F_1 + iF_2: \Omega = \mathbb{C} \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, also auch ihre Ableitung  $F' = f = f_1 + if_2: \Omega = \mathbb{C} \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$ . Die Holomorphie von  $f$  ist notwendig, aber noch nicht hinreichend! Gegenbeispiel ist die Funktion  $f: \mathbb{C} \setminus \{s\} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto f(z) = 1/(z - s)$ . Das ist das zentrale Problem des komplexen Logarithmus. [E225]  
 (2b) Für den geschlossenen Weg  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega$  mit  $\gamma(t) = s + r e^{2\pi i t}$  gilt dank HDI zudem  $0 = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = \oint_\gamma F'(z) dz = \oint_\gamma f(z) dz$ .

$$\partial_x f_1 = \partial_y f_2, \quad \partial_x f_2 = -\partial_y f_1 \quad \text{und} \quad \oint_{\partial B(s,r)} f(z) dz = 0$$

☺ Notwendig ist also, dass die Funktion  $f: \Omega = \mathbb{C} \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph ist, und das Residuum  $\text{res}_s(f)$  in jeder Singularität  $s \in S$  verschwindet!

Q316  
Erinnerung

**Komplexe Stammfunktion als PDE**

Beide Bedingungen sind notwendig, und zusammen auch hinreichend: Wir zeigen abschließend, dass dies tatsächlich zur Lösung reicht.  
 (3) Zunächst müssen die obigen Bedingungen erfüllt sein. Dann gelingt die Lösung durch das Arbeitsintegral entlang von Wegen  $\alpha: [0, 1] \rightarrow \Omega$ :

$$F: \Omega = \mathbb{C} \setminus S \rightarrow \mathbb{C}: w \mapsto F(w) = \int_{\alpha(0)=w_0}^{\alpha(1)=w} f(z) dz$$

Hierzu fixieren wir einen Startpunkt  $w_0 \in \Omega$ . Da unser Gebiet  $\Omega = \mathbb{C} \setminus S$  wegzusammenhängend ist, gibt es zu jedem beliebigen Zielpunkt  $w \in \Omega$  Wege  $\alpha: [0, 1] \rightarrow \Omega$  von  $w_0$  nach  $w$ . Dank unserer Integralbedingungen an  $f$  ist das obige Wegintegral unabhängig vom gewählten Weg  $\alpha$ .

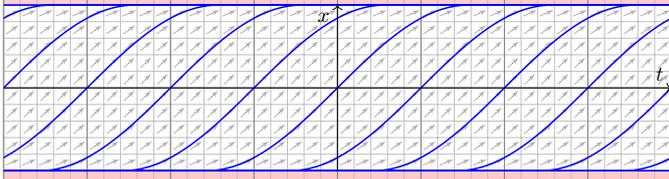
☺ Die so konstruierte Funktion  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  löst die Gleichung  $F' = f$ . Obwohl wir von der Lösung anfangs nur  $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$  verlangt haben, bekommen wir wesentlich mehr geschenkt: Die Lösung ist holomorph! Das ist zugleich auch eine starke Bedingung:  $f$  muss holomorph sein. Zur Integration zu  $F$  müssen zudem alle Residuen von  $f$  verschwinden.

**Aufgabe:** Finden Sie alle  $C^1$ -Lösungen  $u: \mathbb{R} \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  der PDE

$$\partial_t u(t, x) + \sqrt{1-x^2} \partial_x u(t, x) = 0 \quad \text{für alle } (t, x) \in \mathbb{R} \times [-1, 1].$$

- (1a) Sind konstante Funktionen Lösungen? (1b) Gibt es noch weitere? Wie / Lässt sich die Charakteristikmethode (Satz Q2D) hier anwenden?  
 (2) Finden Sie alle Lösungen  $u \in C^0(\mathbb{R} \times [-1, 1]) \cap C^1(\mathbb{R} \times ]-1, 1[)$ , die auf  $\mathbb{R} \times ]-1, 1[$  die PDE erfüllen. Können Sie  $u(t, 0)$  beliebig vorgeben?

**Lösung:** (1a) Jede konstante Funktion  $u(t, x) = \text{const}$  löst unsere PDE. (1b) Jede charakteristische Kurve  $t \mapsto (t, x(t))$  erfüllt  $\dot{x}(t) = \sqrt{1-x(t)^2}$ . Wir suchen alle (maximalen) Lösungskurven  $x: \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}$ , siehe M329.

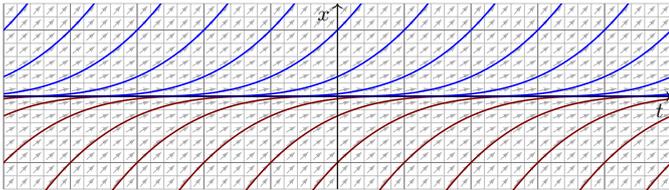


**Aufgabe:** Finden Sie alle  $C^1$ -Lösungen  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  der Gleichung

$$\partial_t u(t, x) + \sqrt[3]{x^2} \partial_x u(t, x) = 0 \quad \text{für alle } (t, x) \in \mathbb{R}^2.$$

- (1a) Sind konstante Funktionen Lösungen? (1b) Gibt es noch weitere? Wie / Lässt sich die Charakteristikmethode (Satz Q2D) hier anwenden?  
 (2) Finden Sie alle Lösungen  $u \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*)$ , die obige PDE für  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$  erfüllen. Können Sie  $u(t, 0)$  beliebig vorgeben?

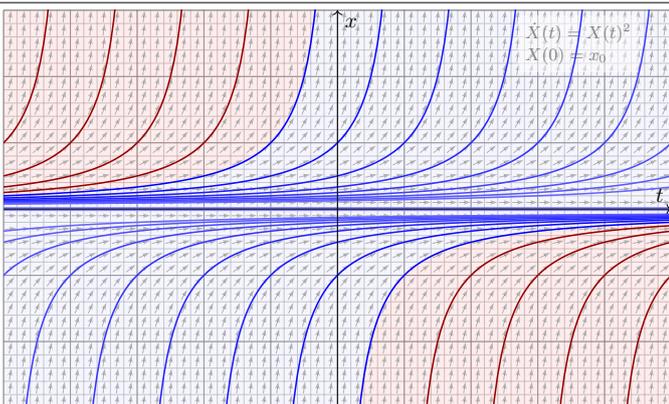
**Lösung:** (1a) Jede konstante Funktion  $u(t, x) = \text{const}$  löst unsere PDE. (1b) Jede charakteristische Kurve  $t \mapsto (t, x(t))$  erfüllt  $\dot{x}(t) = \sqrt[3]{x(t)^2}$ .



**Aufgabe:** Zu lösen sei die folgende PDE mit Anfangswerten:

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) + x^2 \partial_x u(t, x) &= 0 \quad \text{für } t \in \mathbb{R} \text{ und } x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= g(x) = e^{-x^2} \quad \text{für } t = 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- (1) Lösen Sie diese Gleichung auf dem maximalen Gebiet  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ :  
 (a) Bestimmen Sie zunächst alle Charakteristiken dieser PDE.  
 (b) Welche Punkte  $(t, x) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  werden so erreicht, welche nicht?  
 (c) Berechnen Sie hierauf die eindeutige  $C^1$ -Lösung  $u: \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .  
 (d) Warum tritt das Problem bei der Transportgleichung Q2E nicht auf?  
 (2) Wird  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  eindeutig bestimmt durch folgende Anfangswerte?  
 (a)  $u(t, +1) = e^{-t^2}$  für alle  $t \in \mathbb{R}$   
 (b)  $u(t, -1) = e^{-t^2}$  für alle  $t \in \mathbb{R}$   
 (c)  $u(t, \pm 1) = e^{-t^2}$  für alle  $t \in \mathbb{R}$   
 (d)  $u(t, +t) = e^{-t^2}$  für alle  $t \in \mathbb{R}$   
 (e)  $u(t, -t) = e^{-t^2}$  für alle  $t \in \mathbb{R}$   
 (f)  $u(m, x) = e^{-x^2}$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  und eine Konstante  $m \in \mathbb{R}$



Die Charakteristiken (blau) decken nur einen Teil aller Punkte  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$  ab; hier wird der Funktionswert  $u(t, x)$  durch die Anfangswerte bestimmt. ▲ Im rot gefärbten Bereich hingegen ist der Wert  $u(t, x)$  unbestimmt.

Trennung der Variablen und genaue Diskussion wie auf Seite M329: Lösungen sind neben  $x_{-\infty}(t) = +1$  und  $x_{+\infty}(t) = -1$  die Funktionen

$$x_c: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1] : t \mapsto x_c(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } t \leq c - \pi/2, \\ \sin(t - c) & \text{für } c - \pi/2 \leq t \leq c + \pi/2, \\ +1 & \text{für } t \geq c + \pi/2. \end{cases}$$

Jeder Punkt  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times ]-1, 1[$  liegt auf (mindestens) einer dieser Charakteristiken  $\gamma_c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times [-1, 1] : t \mapsto (t, x_c(t))$  für geeignetes  $c \in \mathbb{R}$ . Wir sehen eine Besonderheit: Je zwei Charakteristiken treffen sich! Folgerung: Erfüllt  $u: \mathbb{R} \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  die obige PDE, so ist  $u$  konstant.

☹ (Zu viele) Charakteristiken erzwingen (zu viele) Einschränkungen.

(2) Hier gilt hingegen: Jeder Punkt  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times ]-1, 1[$  liegt auf genau einer Charakteristik  $\gamma_c^*: ]c - \pi/2, c + \pi/2[ \rightarrow \mathbb{R} \times ]-1, 1[ : t \mapsto (t, x_c(t))$ .

Zu  $u(t, 0) = g(t)$  können wir jede  $C^1$ -Funktion  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vorgeben und erhalten die Lösung  $u(t, x) = g(t - \arcsin(x))$ . Machen Sie die Probe!

☺ Charakteristiken erzwingen hier das rechte Maß an Bedingungen.

Trennung der Variablen und genaue Diskussion wie auf Seite M325: Lösungen sind neben  $x(t) = 0$  auch  $x_c(t) = (x - c)^3/27$ , allgemein

$$x_{a,b}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto x_{a,b}(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } a \leq t \leq b, \\ (t - a)^3/27 & \text{für } t \leq a, \\ (t - b)^3/27 & \text{für } t \geq b, \end{cases}$$

mit Parametern  $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ . Jeder Punkt  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$  liegt auf unendlich vielen dieser Charakteristiken  $\gamma_{a,b}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, x_{a,b}(t))$ . Jede Charakteristik  $\gamma_{a,b}$  schneidet die Charakteristik  $\gamma_{-\infty, \infty}: t \mapsto (t, 0)$ . Folgerung: Erfüllt  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  unsere PDE auf ganz  $\mathbb{R}^2$ , so ist  $u$  konstant.

☹ (Zu viele) Charakteristiken erzwingen (zu viele) Einschränkungen.

(2) Hier gilt hingegen: Jeder Punkt  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$  mit  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  liegt auf genau einer Charakteristik  $\gamma_c^*: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t + c, t^3/27)$ .

Zu  $u(t, 0) = g(t)$  können wir jede  $C^1$ -Funktion  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vorgeben und erhalten die Lösung  $u(t, x) = g(t - 3\sqrt[3]{x})$ . Machen Sie die Probe!

☺ Charakteristiken erzwingen hier das rechte Maß an Bedingungen.

**Lösung:** (1a) Wir lesen die charakteristische Gleichung ab:

$$\begin{aligned} T(0) &= 0, & T'(s) &= 1, \\ X(0) &= x_0, & X'(s) &= X(s)^2, \\ U(0) &= g(x_0), & U'(s) &= 0. \end{aligned}$$

Wir finden  $t = T(s) = s$ . Fortan nutzen wir daher  $t$  als Wegparameter. Wir lösen  $X(0) = x_0$  und  $\dot{X}(t) = X(t)^2$ . Für  $x_0 = 0$  finden wir  $X(t) = 0$ . Für  $x_0 \neq 0$  nutzen wir wie üblich die Separation der Variablen: M113

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= X(t)^2 & \implies & X(t)^{-2} \dot{X}(t) = 1 \\ \implies \int_{s=0}^t X(s)^{-2} \dot{X}(s) ds &= \int_{s=0}^t 1 ds & \implies & [-X(s)^{-1}]_{s=0}^t = [s]_{s=0}^t \\ \implies X(0)^{-1} - X(t)^{-1} &= t & \implies & X(t) = \frac{x_0}{1 - tx_0} \end{aligned}$$

Die Lösung ist  $x = x_0/(1 - tx_0)$ , nach  $x_0$  aufgelöst  $x_0 = x/(1 + tx)$ .

☺ Die folgende Graphik zeigt die charakteristischen Kurven der PDE.

(1b) Erreicht werden die Punkte  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$  mit  $t = 0$  oder  $(t > 0$  und  $x > -1/t)$  oder  $(t < 0$  und  $x < -1/t)$ , kurz  $\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid tx > -1\}$ .

(1c) Wir finden die Lösung  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $u(t, x) = \exp(-x^2/(1 + tx)^2)$ . Probe: Diese Funktion  $u$  erfüllt unsere PDE und die Anfangswerte!

(1d) Bei der Transportgleichung mit konstanten Koeffizienten (Satz Q2E) überdecken die Charakteristiken als Geradenschar die gesamte Ebene.

(2a/b) Nein, die Charakteristiken erreichen nur  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$  mit  $x \geq 0$ .

(2c) Ja, die Charakteristiken erreichen alle Punkte  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$  mit  $x \neq 0$ ; die Werte  $u(t, 0) = 0$  erhalten wir daraus durch stetige Fortsetzung.

(2d) Nein, manche der Charakteristiken  $x = x_0/(1 - tx_0)$  werden von der Geraden  $(t, t)$  nicht geschnitten, die PDE ist daher unterbestimmt, und die Lösung  $u$  ist nicht eindeutig. Andere dieser Kurven werden hingegen zweimal geschnitten, dort ist die PDE also überbestimmt.

(2e) Ja, jede der Charakteristiken  $x = x_0/(1 - tx_0)$  wird von der Geraden  $(t, -t)$  genau einmal geschnitten. Somit wird die Lösung  $u$  eindeutig durch die Anfangswerte auf der Geraden  $(t, -t)$  bestimmt.

(2f) Ja für  $m < 0$ , wie in (2e). Nein für  $m \geq 0$ , wie in (2d).

**Aufgabe:** Sei  $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ . Zu lösen sei folgende PDE mit Anfangswerten:

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) + |x|^\alpha \partial_x u(t, x) &= 0 \quad \text{für alle } (t, x) \in \Omega, \\ u(0, x) &= g(x) = e^{-x^2} \quad \text{für alle } (0, x) \in \Omega, \end{aligned}$$

- (1) auf der gesamten Ebene  $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , also für alle  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ .
- (2) auf der abgeschlossenen Halbebene  $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ , kurz  $x \geq 0$ ,
- (3) auf der offenen Halbebene  $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$ , also kurz für  $x > 0$ ,

- (a) Finden Sie zunächst alle Charakteristiken dieser PDE.
- (b) Eindeutigkeit: Gibt es höchstens eine Lösung  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ?
- (c) Existenz: Gibt es mindestens eine Lösung  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ?
- (d) Berechnung: Gelten Existenz (a) und Eindeutigkeit (b), so finden Sie eine explizite Formel für die Lösung  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ !

Diskutieren und zeichnen Sie insbesondere die Fälle  $\alpha = 2/3, 1, 2$ .

Aus Kapitel M kennen wir bereits die illustrativen Beispiele  $\dot{x} = x$  [M111](#) und  $\dot{x} = x^2$  [M113](#) sowie  $\dot{x} = -2\sqrt{|x|}$  [M123](#) und  $\dot{x} = \sqrt[3]{x^2}$  [M325](#). Vergleich und Zusammenfassung  $\dot{x} = |x|^\alpha$  [Q233](#), dort finden Sie auch Graphiken.

**Lösung:** (1a) Wir lesen die charakteristische Gleichung ab:

$$\begin{aligned} T(0) &= 0, & T'(s) &= 1, \\ X(0) &= x_0, & X'(s) &= |X(s)|^\alpha, \\ U(0) &= g(x_0), & U'(s) &= 0. \end{aligned}$$

Wir finden  $t \stackrel{!}{=} T(s) = s$ . Fortan nutzen wir daher  $t$  als Wegparameter. Wir lösen  $\dot{X}(t) = |X(t)|^\alpha$  durch Fallunterscheidung  $X(t) \gtrless 0$  und Separation der Variablen. Der Fall  $\alpha = 1$  ist am einfachsten:

$$X(t) = \begin{cases} x_0 e^{+t} & \text{für } x_0 \geq 0, \\ x_0 e^{-t} & \text{für } x_0 \leq 0. \end{cases}$$

Zu jedem  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$  können wir  $x = x_0 e^{\pm t}$  nach  $x_0 = x e^{\mp t}$  auflösen:

$$u(t, x) = \begin{cases} g(x e^{-t}) & \text{für } x \geq 0, \\ g(x e^{+t}) & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

☺ Dies zeigt im einfachsten Falle  $\alpha = 1$  sofort die Eindeutigkeit (b) und die Existenz (c) der Lösung  $u$  durch ihre explizite Berechnung (d).

Den Fall  $\alpha \neq 1$  lösen wir ebenso durch Separation. Für  $X(t) > 0$  gilt:

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= X(t)^\alpha & \implies & X(t)^{-\alpha} \dot{X}(t) = 1 \\ \implies \int_{s=0}^t X(s)^{-\alpha} \dot{X}(s) ds &= \int_{s=0}^t 1 ds & \implies & \left[ \frac{X(s)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_{s=0}^t = [s]_{s=0}^t \\ \implies \frac{X(t)^{1-\alpha} - x_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} &= t & \implies & X(t) = [x_0^\alpha + \alpha t]^{1/\alpha} \end{aligned}$$

Zur Abkürzung setzen wir hier  $\bar{\alpha} := 1 - \alpha$ . Für  $X(t) < 0$  lösen wir  $\dot{X}(t) = (-X(t))^\alpha$  und erhalten ebenso  $X(t) = -[(-x_0)^\alpha - \bar{\alpha}t]^{1/\bar{\alpha}}$ . Im Falle  $\alpha > 1$  erhalten wir demnach  $X(t) = x_0 [1 \pm |x_0|^{\alpha-1} \bar{\alpha} t]^{1/\bar{\alpha}}$ . Zu  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$  können wir dies nach  $x_0 = x [1 \mp |x|^{\alpha-1} \bar{\alpha} t]^{1/\bar{\alpha}}$  auflösen. Die Lösungskurven haben Polstellen: Wir erreichen nur die Punkte  $\Omega = \{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \mp |x|^{\alpha-1} \bar{\alpha} t > 0 \}$ . Auf  $\Omega$  ist  $u$  eindeutig bestimmt; außerhalb dieses Gebiets  $\Omega$  sind die Funktionswerte  $u(t, x)$  unbestimmt. Siehe [Q321](#) für den Fall  $\alpha = 2$  und  $\Omega = \{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid tx > -1 \}$ .  
⚠ Für  $\alpha > 1$  gilt zwar die Existenz (c), aber nicht die Eindeutigkeit (b).

Im verbleibenden Falle  $0 < \alpha < 1$  finden wir die Charakteristiken:

$$X_{a,b}(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } a \leq t \leq b, \\ -[\bar{\alpha}(a-t)]^{1/\bar{\alpha}} & \text{für } t \leq a, \\ +[\bar{\alpha}(t-b)]^{1/\bar{\alpha}} & \text{für } t \geq b, \end{cases}$$

mit Parametern  $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ . Jeder Punkt  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$  liegt auf unendlich vielen dieser Charakteristiken  $\gamma_{a,b}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto (t, X_{a,b}(t))$ . Jede Charakteristik  $\gamma_{a,b}$  schneidet die Charakteristik  $\gamma_{-\infty, \infty}: t \mapsto (t, 0)$ . Folgerung: Erfüllt  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  unsere PDE auf ganz  $\mathbb{R}^2$ , so ist  $u$  konstant. Siehe [Q319](#) für eine Ausführung und Skizze des Falls  $\alpha = 2/3$ .

- ⚠ Für  $0 < \alpha < 1$  ist jede Lösung  $u$  konstant. Zwar gilt die Eindeutigkeit (b), aber nicht die Existenz (c) einer Lösung zu den Anfangsdaten  $g$ .
- (2) Auf  $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  gilt sinngemäß dasselbe in jedem der Fälle  $\alpha \gtrless 1$ .
- (3) Auf  $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$  gilt Existenz und Eindeutigkeit für  $0 < \alpha \leq 1$ .
- ☺ Das ist der Idealfall: Die Charakteristiken überdecken das Gebiet  $\Omega$  als „parallele“ Kurvenschar, ohne Lücken und ohne Überschneidungen, und auf jeder Charakteristik wird genau ein Anfangswert vorgegeben.

Die vorangehenden Beispiele zeigen exotische Transportgleichungen mit nicht-eindeutigen oder nicht-ausreichenden Transportwegen.

**Aufgabe:** Wiederholen Sie die Lösung der **Transportgleichung**:

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) + b \partial_x u(t, x) + c u(t, x) &= f(t, x) \quad \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= g(x) \quad \text{für } t = 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Was bedeuten die Daten  $b, c, f, g$  anschaulich / physikalisch? Lösen Sie möglichst ebenso explizit folgende Verallgemeinerung:

$$\partial_t u(t, x) + b(t, x) \partial_x u(t, x) + c(t, x) u(t, x) = f(t, x)$$

Gegeben sind stetige Koeffizientenfunktionen  $b, c, f: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und Anfangsdaten  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , gesucht sind alle Lösungen  $u: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Existiert eine Lösung  $u$ ? Ist sie eindeutig? Wie berechnen Sie sie?

- (1) Lösen Sie den Fall  $b(t, x) = b_0(t)$ , in dem  $b$  nur von  $t$  abhängt.
- (2) Lässt sich der lineare Fall  $b(t, x) = b_0(t) + b_1(t)x$  ebenso lösen?
- (3) Welche Probleme bereitet die Lösung der allgemeinen Gleichung?

**Lösung:** (1) Wir lesen die charakteristische Gleichung ab:

$$\begin{aligned} T(0) &= 0, & T'(s) &= 1, \\ X(0) &= x_0, & X'(s) &= b_0(s), \\ U(0) &= g(x_0), & U'(s) &= f(T(s), X(s)) - c(T(s), X(s))U(s). \end{aligned}$$

Wir finden  $t \stackrel{!}{=} T(s) = s$ . Fortan nutzen wir daher  $t$  als Wegparameter. Wir haben die Integralfunktion  $B_0(t) = \int_{\tau=0}^t b_0(\tau) d\tau$  dank Stetigkeit. Die Lösung ist  $x = X(t) = x_0 + B_0(t)$ , nach  $x_0$  aufgelöst  $x_0 = x - B_0(t)$ .  
(2) Etwas allgemeiner: Für  $b(t, x) = b_0(t) + b_1(t)x$  finden wir

$$\begin{aligned} x \stackrel{!}{=} X(t) &= e^{B_1(t)} x_0 + e^{B_1(t)} \int_{\tau=0}^t e^{-B_1(\tau)} b_0(\tau) d\tau, \\ x_0 &= e^{-B_1(t)} x - \int_{\tau=0}^t e^{-B_1(\tau)} b_0(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

☺ Das ist der Idealfall: Die Charakteristiken überdecken das Gebiet  $\Omega$  als „parallele“ Kurvenschar, ohne Lücken und ohne Überschneidungen, und auf jeder Charakteristik wird genau ein Anfangswert vorgegeben.

⚠ Im allgemeinen Fall (3) treten zwei Hindernisse auf: Charakteristiken können sich schneiden oder manche Punkte  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$  nicht erreichen. Die vorangehenden Aufgaben illustrieren die möglichen Komplikationen.

☺ Wir gehen vom Idealfall aus, wie für  $b(t, x) = b_0(t) + b_1(t)x$  gezeigt. Für  $U(t) = u(t, X(t))$  erhalten wir die lineare Differentialgleichung

$$U'(t) = g(x_0), \quad \dot{U}(t) = \varphi(t) - \gamma(t)U(t)$$

mit den Koeffizientenfunktionen  $\varphi(t) = f(t, X(t))$  und  $\gamma(t) = c(t, X(t))$ . Wir setzen  $C(t) = \int_{\tau=0}^t \gamma(\tau) d\tau$  und nutzen die Integralformel M2E:

$$u(t, x) \stackrel{!}{=} U(t) = e^{-C(t)} g(x_0) + e^{-C(t)} \int_{\tau=0}^t e^{C(\tau)} \varphi(\tau) d\tau$$

- ☺ Jede Lösung  $u$  erfüllt  $u(t, X(t)) = U(t)$ . Damit ist  $u(t, x)$  bestimmt! Zu jedem Punkt  $(t, x)$  können wir wie oben erklärt den Startpunkt  $x_0$  bestimmen und damit den Weg  $t \mapsto (t, X(t))$  von  $(0, x_0)$  nach  $(t, x)$ .
- ☺ Das ist ein seltener Glücksfall: Zu dieser Problemklasse haben wir direkt eine allgemein gültige und explizite Integralformel gefunden.
- ⚠ Die meisten PDE lassen sich nicht einfach mit Integralformeln lösen.

**Satz Q3A:** Integralformel für lineare PDE erster Ordnung

Zu lösen sei die allgemeine **Transportgleichung**:

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) + b(t, x) \partial_x u(t, x) + c(t, x) u(t, x) &= f(t, x), \\ u(0, x) &= g(x). \end{aligned}$$

Gegeben sind stetige Koeffizientenfunktionen  $b, c, f: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und Anfangsdaten  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , gesucht sind alle Lösungen  $u: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Im allgemeinen Fall können Hindernisse auftreten, wir betrachten daher  $b(t, x) = b_0(t) + b_1(t)x$ . Dieses Problem hat genau eine Lösung, nämlich

$$u(t, x) = e^{-C(t)} g(x_0) + e^{-C(t)} \int_{\tau=0}^t e^{C(\tau)} f(\tau, X(\tau)) d\tau$$

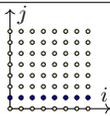
Aus der Funktion  $B_1(t) = \int_{\tau=0}^t b_1(\tau) d\tau$  erhalten wir die Charakteristik  $X(t) = e^{B_1(t)} x_0 + e^{B_1(t)} \int_{\tau=0}^t e^{-B_1(\tau)} b_0(\tau) d\tau$  mit passendem Startpunkt  $x_0 = e^{-B_1(t)} x - \int_{\tau=0}^t e^{-B_1(\tau)} b_0(\tau) d\tau$  sowie  $C(t) = \int_{\tau=0}^t c(\tau, X(\tau)) d\tau$ .

## Lösung durch Potenzreihen

Q333  
Ergänzung

**Aufgabe:** Mit dem Ansatz  $u(t, x) = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} a_{ij} t^i x^j$  löse man

$$\partial_t u(t, x) + x \partial_x u(t, x) = 0, \quad u(0, x) = x.$$



**Lösung:** Einsetzen in die geforderten Gleichungen ergibt:

$$(1) \sum_i i a_{ij} t^{i-1} x^j + \sum_j j a_{ij} t^i x^{j-1} = 0, \quad (2) \sum_j a_{0j} x^j = x$$

(2) Koeffizientenvergleich ergibt  $a_{01} = 1$  und  $a_{0j} = 0$  für  $j \neq 1$ .

(1) Es gilt  $(i+1)a_{i+1,j} + j a_{ij} = 0$ , also rekursiv  $a_{i+1,j} = -\frac{j}{i+1} a_{ij}$ :

$$j = 1: a_{0,1} \stackrel{!}{=} 1, \quad a_{1,1} = -\frac{1}{1!}, \quad a_{2,1} = +\frac{1}{2!}, \quad a_{3,1} = -\frac{1}{3!}, \quad \dots$$

$$j \neq 1: a_{0,j} \stackrel{!}{=} 0, \quad a_{1,j} = 0, \quad a_{2,j} = 0, \quad a_{3,j} = 0, \quad \dots$$

Diese Koeffizienten bestimmen eine Lösung. Wir erhalten so:

$$u(t, x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} t^i x^1 = x e^{-t}$$

☺ Die Reihe genügt meist. Hier erkennen wir zudem die  $\exp$ -Funktion. Schön. Machen Sie die Probe! Es gilt  $\partial_t u + x \partial_x u = 0$  und  $u(0, x) = x$ .

## Lösung durch Potenzreihen

Q335  
Ergänzung

**Satz Q3B: Cauchy 1842, Kowalewskaja 1875**

Zu lösen sei wie zuvor ein **Cauchy-Problem** der Form

$$\partial_t u = F(t, x, u, \partial_x u), \quad u(t_0, x) = f(x).$$

Gegeben sind Intervalle  $t_0 \in I \subseteq \mathbb{R}$  und  $x_0 \in \Omega \subseteq \mathbb{R}$  sowie Funktionen  $F: I \times \Omega \times \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}$  und  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ . Beide Funktionen seien analytisch.

Dann existiert lokal genau eine analytische Lösung  $u: I_0 \times \Omega_0 \rightarrow \mathbb{K}$  auf (eventuell kleineren) Intervallen  $t_0 \in I_0 \subseteq I$  und  $x_0 \in \Omega_0 \subseteq \Omega$ .

**Konstruktion:** Wir entwickeln um den Nullpunkt  $(t_0, x_0) = (0, 0)$ :

Hier gilt  $F(t, x, u, v) = \sum_{i,j,k \in \mathbb{N}} b_{ijk} t^i x^j u^k v^l$  und  $f(x) = \sum_{j \in \mathbb{N}} c_j x^j$ .

Für  $u$  wählen wir den Potenzreihenansatz  $u(t, x) = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} a_{ij} t^i x^j$ .

Einsetzen ergibt rekursive Gleichungen für die Koeffizienten  $a_{ij}$ .

Diese sind eindeutig lösbar. Der Satz garantiert Konvergenzradius  $> 0$ . (Letzteres ist die eigentliche Aussage; wir rechnen dies hier nicht nach.)

## Methodenvergleich: Viele Wege führen zum Ziel.

Q337  
Ergänzung

**Aufgabe:** Finden Sie alle  $C^1$ -Funktionen  $u: \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\partial_t u(t, x) + x^2 \partial_x u(t, x) = 0 \quad \text{und} \quad u(0, x) = x.$$

Nutzen und vergleichen Sie die beiden bisherigen Techniken:

(1) die Charakteristikmethode und (2) den Potenzreihenansatz.

Auf welchem Gebiet  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  gelingt Ihnen diese Berechnung?

Wie können Sie sicher sein, alle Lösungen gefunden zu haben?

**Lösung:** (1) Die Charakteristiken haben wir oben ausgeführt (Q321):

Die charakteristische Kurve durch  $(0, x_0)$  ist  $t \mapsto (t, x_0/(1-tx_0))$ .

Erreicht werden nur die Punkte in  $\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid tx > -1\}$ .

Als eine mögliche Lösung finden wir so:

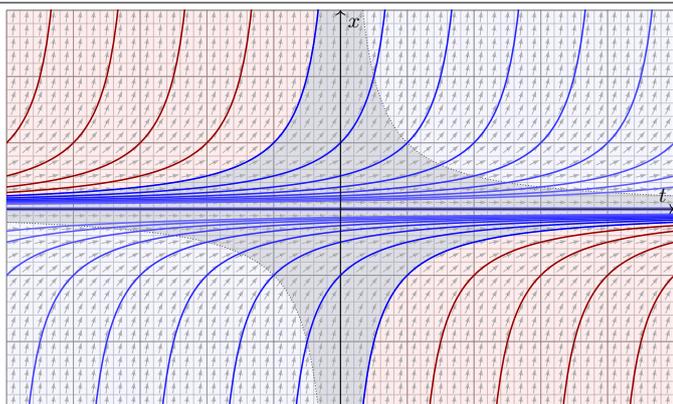
$$u: \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R} : (t, x) \mapsto u(t, x) = \frac{x}{1+tx}$$

☺ Gehen Sie die Rechnung erneut durch und machen Sie die Probe!

☺ Der Transport entlang von Charakteristiken beweist die Eindeutigkeit auf  $\Omega$  dank Satz Q2D; darüber hinaus reichen die Anfangswerte nicht.

## Methodenvergleich: Viele Wege führen zum Ziel.

Q339  
Ergänzung



Die Charakteristiken (blau) decken nur einen Teil aller Punkte  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$  ab; hier wird der Funktionswert  $u(t, x)$  durch die Anfangswerte bestimmt.

⚠ Im rot gefärbten Bereich hingegen ist der Wert  $u(t, x)$  unbestimmt.

## Lösung durch Potenzreihen

Q334  
Ergänzung

Dieses Beispiel dient hier zur Illustration; diese spezielle PDE ist linear und kann mit der Charakteristikmethode ebenso leicht gelöst werden.

Auch der Separationsansatz  $u(t, x) = v(t) \cdot w(x)$  führt hier zum Erfolg. Sehen Sie, wie das hier gelingt? Versuchen Sie es als Übung!

☹ Nicht jede PDE besitzt eine Lösung. Selbst wenn sie eine Lösung besitzt, so doch meist nicht elementar, d.h. in geschlossener Form.

In solchen Fällen hilft recht häufig der Potenzreihenansatz.

☺ Jede PDE mit analytischen Koeffizienten kann lokal gelöst werden.

Der Potenzreihenansatz hat den Vorteil, dass er allgemein anwendbar ist und dank Satz Q3B immer eine konvergente Reihe als Lösung liefert.

☺ Die Methode eignet sich auch zur numerischen Approximation.

Da die Rechnungen jedoch aufwändig werden können, wählt man den Potenzreihenansatz nur mit Bedacht. Notfalls kann man so immerhin qualitative Aussagen gewinnen und Approximationen berechnen.

## Lösung durch Potenzreihen

Q336  
Ergänzung

☺ Analytische Cauchy-Probleme sind gut gestellt, das heißt, es gibt genau eine Lösung, zumindest lokal um den Entwicklungspunkt  $(t_0, x_0)$ .

Diese Lösung ist analytisch, d.h. lokal eine konvergente Potenzreihe:

Die Koeffizienten lassen sich rekursiv berechnen, wie oben skizziert. Zudem gilt eine allgemeine Majorante und damit lokale Konvergenz.

⚠ Hadamards Beispiel (Seite R217) zeigt, dass die Lösungen einer PDE im Allgemeinen nicht stetig von den Anfangsdaten abhängen!

☺ Die rechte Seite  $F$  und die Funktion  $f$  müssen analytisch sein. Das ist in vielen Anwendungen eine harmlose Voraussetzung.

⚠ Differenzierbarkeit reicht nicht! Die erstaunliche Entdeckung von Lewy (1956) und Mizohata (1962): Es gibt glatte, nicht-analytische Funktionen  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ , sodass  $\partial_t u(t, x) + it \partial_x u(t, x) = g(t, x)$  keine Lösung hat, nicht einmal lokal auf einem beliebig kleinen Gebiet!

☺ Die Koeffizienten sind hier nicht-konstante Polynome; für konstante Koeffizienten rettet uns der Satz R1A von Ehrenpreis-Malgrange.

## Methodenvergleich: Viele Wege führen zum Ziel.

Q338  
Ergänzung

Was ergibt der Potenzreihenansatz? Kommen wir damit weiter?

(2) Einsetzen von  $u(t, x) = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} a_{ij} t^i x^j$  in die PDE ergibt:

$$\sum_i i a_{ij} t^{i-1} x^j + \sum_j j a_{ij} t^i x^{j+1} = 0, \quad \sum_j a_{0j} x^j = x$$

Koeffizientenvergleich ergibt  $a_{01} = 1$  und  $a_{0j} = 0$  für  $j \neq 1$ .

Es gilt  $(i+1)a_{i+1,j+1} + j a_{ij} = 0$ , also rekursiv  $a_{i+1,j+1} = -\frac{j}{i+1} a_{ij}$ :

$$j = 1: a_{0,1} = +1, \quad a_{1,2} = -1, \quad a_{2,1} = +1, \quad a_{3,1} = -1, \quad \dots$$

$$j \neq 1: a_{0,j} = 0, \quad a_{1,j+1} = 0, \quad a_{2,j+2} = 0, \quad a_{3,j+3} = 0, \quad \dots$$

Diese Koeffizienten bestimmen eine Lösung. Wir erhalten so:

$$u(t, x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i t^i x^{i+1} = \frac{x}{1+tx}$$

☺ Die Reihe genügt meist! Hier erkennen wir die geometrische Reihe.

⚠ Sie konvergiert nur auf  $\Omega' = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid |tx| < 1\}$ . Dieser Bereich ist kleiner als zuvor  $\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid tx > -1\}$  mit Charakteristiken.

## Methodenvergleich: Viele Wege führen zum Ziel.

Q340  
Ergänzung

⚠ Unsere Potenzreihe konvergiert nur im grau unterlegten Gebiet  $\Omega'$ .

Wir arbeiten hier mit einer Potenzreihe  $u(t, x) = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} a_{ij} t^i x^j$  in zwei reellen Variablen  $t, x \in \mathbb{R}$  um den Entwicklungspunkt  $(t_0, x_0) = (0, 0)$ .

Ihr Konvergenzgebiet  $\Omega'$  wird von den Hyperbeln  $x = \pm 1/t$  begrenzt.

Im Gegensatz dazu erwarten wir für Potenzreihen  $f(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k z^k$  in einer komplexen Variablen  $z \in \mathbb{C}$  die üblichen Konvergenzkreise.

☺ Auf dem gemeinsamen Definitionsbereich  $\Omega' \subseteq \Omega$  stimmen beide Lösungen überein, so wie es sein muss: Aus (1) wissen wir bereits, dank Satz Q2D, dass die Lösung auf  $\Omega$  eindeutig ist! Insbesondere hat somit der (willkürlich gewählte) Rechenweg keinen Einfluss auf das Ergebnis.

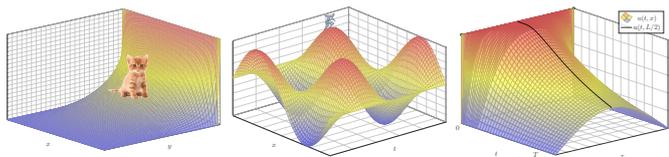
Unsere Wahl des Rechenweges und der zugehörigen Darstellung der Lösung beeinflusst lediglich das Definitionsgebiet, zuvor  $\Omega$ , hier  $\Omega' \subsetneq \Omega$ .

☺ Die Charakteristikmethode betont die geometrische Sichtweise: Sie zeigt das maximale Definitionsgebiet und hierauf Eindeutigkeit.

☺ Der Potenzreihenansatz betont hingegen die analytische Sichtweise: Er entwickelt die Lösung, soweit möglich, als konvergente Potenzreihe.

Kapitel R

Lineare PDE zweiter Ordnung



Im Unterschied zu den gewöhnlichen Differentialgleichungen besitzen die partiellen Differentialgleichungen keine einheitliche Theorie.

Einige Gleichungen haben ihre eigenen Theorien, für andere gibt es überhaupt keine Theorie.

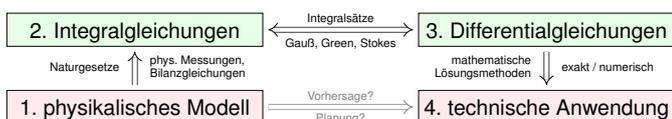
Vladimir I. Arnold (1937–2010)

- 1 Lineare PDE zweiter Ordnung
  - Lösung durch Fourier–Transformation
  - Klassifikation linearer PDE zweiter Ordnung
  - Trennung der Variablen durch Produktansatz
- 2 Anwendung auf die Potentialgleichung
  - Laplace–Gleichung auf einem Rechteck
  - Eindeutigkeit und Minimum-Maximum-Prinzip
  - Gut gestellt? Hadamards warnendes Gegenbeispiel
- 3 Anwendung auf die Wellengleichung
  - Die harmonisch schwingende Saite
  - Wellengleichung und die gezupfte Saite
  - Die Energiemethode beweist die Eindeutigkeit.
- 4 Fazit: PDE zweiter Ordnung
  - Zusammenfassung und Verständnisfragen
  - Aufgaben zur Separationsmethode

Motivation zu Differentialgleichungen

Differentialgleichungen sind die Sprache der Naturgesetze.

Typische Anwendungen verlaufen daher nach dem vertrauten Muster:



Wir untersuchen ein physikalisches Phänomen, das uns am Herzen liegt und das wir nutzen wollen. Grundlegende physikalische Gesetze sind Erhaltungsgrößen in Form von Integralgleichungen. Diese formen wir um zu Differentialgleichungen, in der Hoffnung, sie leichter lösen zu können.

Wichtige Anwendungen, die Sie zum Teil schon kennengelernt haben, finden sie in Elektrodynamik (Maxwell–Gleichungen), Thermodynamik (Bilanzgleichungen), klassischer Mechanik (Hamilton–Gleichungen), Quantenmechanik (Schrödinger–Gleichung), Strömungsmechanik (Navier–Stokes–Gleichungen), usw. . . . Die Liste ist schier endlos.

Motivation zu Differentialgleichungen

Wir haben zunächst **gewöhnliche Differentialgleichungen** (ODE) untersucht und gelöst. Theorie und Lösungsmethoden sind hier noch übersichtlich und weitgehend vollständig. Das ist die unentbehrliche Grundlage und beschert uns bereits phantastische Anwendungen.

In der Praxis treten häufig **partielle Differentialgleichungen** (PDE) auf. Erfahrungsgemäß sind die allermeisten höchstens **zweiter Ordnung**. Wir diskutieren etwas genauer die drei zentralen, klassischen Beispiele: Potentialgleichung, Wellengleichung und Wärmeleitungsgleichung.

Bei jeder partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung fragen wir: Ist sie linear? Ist sie elliptisch? oder hyperbolisch? oder parabolisch? Dies deckt nur die einfachsten Möglichkeiten ab, es gibt viele weitere, aber es verhilft uns zu einer ersten Übersicht und Orientierung:

😊 Wenn die Gleichung elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch ist, dann verhält sie sich ähnlich wie die entsprechende **Modellgleichung**, also Potential-, Wellen- oder Wärmeleitungsgleichung. Zu Verständnis und Lösung der Gleichung sind solche Analogien oft sehr nützlich.

Lösung durch Fourier–Transformation

Wir untersuchen die homogene **Wärmeleitungsgleichung** §101

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) &= \kappa \partial_x^2 u(t, x) \quad \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= u_0(x) \quad \text{für } t = 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Aufgabe:** Lösen Sie dies durch Fourier–Transformation bezüglich  $x$ .

Hierzu gibt es Voraussetzungen: Satz K2A erfordert, dass  $u$  zweimal stetig nach  $x$  differenzierbar ist und  $\partial_x^2 u$  absolut integrierbar. Das ist am Ende noch zu überprüfen, siehe hierzu Satz D5D.

**Lösung:** Die  $\mathcal{F}$ -Transformierte  $\hat{u}(t, \xi)$  erfüllt  $\partial_t \hat{u}(t, \xi) = -\kappa \xi^2 \hat{u}(t, \xi)$ .

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung in  $t$  mit Parameter  $\xi$ .

Wir trennen die Variablen gemäß  $[\partial_t \hat{u}(t, \xi)] / \hat{u}(t, \xi) = -\kappa \xi^2$  und integrieren von 0 bis  $t$  zu  $\ln \hat{u}(t, \xi) - \ln \hat{u}(0, \xi) = -\kappa \xi^2 t$ .

Wir erhalten so die Lösung  $\hat{u}(t, \xi) = e^{-\kappa \xi^2 t} \hat{u}_0(\xi)$  für alle  $t \geq 0$ .

Rücktransformation  $e^{-\kappa \xi^2 t} \bullet \circ e^{-x^2/4\kappa t} / \sqrt{2\kappa t}$  und Faltung ergibt:

$$u(t, x) = \int_{y \in \mathbb{R}} \frac{e^{-(x-y)^2/4\kappa t}}{\sqrt{4\pi\kappa t}} u_0(y) dy \quad \text{für } t > 0.$$

Lösung durch Fourier–Transformation

😊 Das Ergebnis entspricht unserer in Satz D5D präsentierten Lösung: Die Wärmeleitungsgleichung  $\partial_t u = \kappa \partial_x^2 u$  hat als Fundamentallösung eine auseinanderfließende Glockenkurve, den **Wärmeleitungskern**

$$H : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : H(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\kappa t}\right).$$

Die Konstanten sichern die Normierung  $\int_{\mathbb{R}} H(t, x) dx = 1$ . (Gauß C2G) Für  $t = 0$  sei die Wärmeverteilung  $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vorgegeben, mit  $u_0 \in C_b$ . Für  $t > 0$  erhalten wir die Lösung durch **Superposition** (Faltung D5E):

$$u(t, x) = \int_{y \in \mathbb{R}} u_0(x - y) H(t, y) dy = \int_{z \in \mathbb{R}} u_0(z) H(t, x - z) dz.$$

😊 Stehen die Formeln schon da, so genügt geduldiges Nachrechnen: Machen Sie die Probe und zeigen Sie  $\partial_t u = \kappa \partial_x^2 u$  durch Ableiten. D517

😊 Die Fourier–Transformation bietet eine elegant-effiziente Herleitung. Anschließend sammeln und prüfen wir die Voraussetzungen (D5D, D5U).

Lösung durch Fourier–Transformation

Die Methode der Fourier–Transformation funktioniert ganz allgemein! Die Idee ist klar: Zu lösen sei die lineare partielle Differentialgleichung

$$P(\partial) u(x) = g(x)$$

mit einem Polynom  $P(x) = \sum a_\nu x^\nu$ . Nach Fourier–Transformation gilt

$$P(i\xi) \hat{u}(\xi) = \hat{g}(\xi).$$

Auflösen zu  $\hat{u}(\xi) = \hat{g}(\xi) / P(i\xi)$  und Rücktransformation liefert  $u$ .

Die Transformation  $g(x) \mapsto \hat{g}(\xi)$  und  $P(\partial) \mapsto P(i\xi)$  kennen wir bereits, so dass wir  $\hat{u}(\xi) = \hat{g}(\xi) / P(i\xi)$  setzen können. Zunächst ist jedoch nicht klar, ob die Rücktransformation  $\hat{u} \mapsto u$  überhaupt immer möglich ist – insb. wenn  $\hat{g}$  nicht absolut integrierbar ist oder  $1/P(i\xi)$  Polstellen hat!

😊 Dies garantiert der grundlegende Satz von Ehrenpreis–Malgrange: Jede lineare PDE mit konstanten Koeff. kann global gelöst werden!

⚠ Für nicht-konstante Koeffizienten gilt die Lösbarkeit nicht allgemein, wie das obige Gegenbeispiel von Lewy–Mizohata §336 eindrücklich zeigt.

Lösung durch Fourier–Transformation

Satz R1A: Ehrenpreis 1954, Malgrange 1955

Sei  $P(x) = \sum_{|\nu| \leq k} a_\nu x^\nu$  ein Polynom mit Koeffizienten  $a_\nu \in \mathbb{C}$ .

Zu lösen sei für  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  die lineare partielle Differentialgleichung

$$P(\partial) u(x) = g(x).$$

Zu jeder rechten Seite  $g \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  existiert eine Lösung  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ .

Genauer gilt: Zu  $P$  existiert eine Fundamentallösung  $F$  mit  $P(\partial) F = \delta$ . Für jede rechte Seite  $g$  liefert  $F$  dann eine Lösung  $u$  durch Faltung:

$$u(x) = \int_{y \in \mathbb{R}^n} F(x - y) g(y) dy = \int_{z \in \mathbb{R}^n} F(z) g(x - z) dz.$$

😊 Für diese Problemklasse ist die Existenz von Lösungen garantiert. Im Einzelfall bleibt „nur“ noch die Fundamentallösung  $F$  auszurechnen.

😊 Im Falle  $n = 1$  haben wir eine gewöhnliche DG der Ordnung  $k$ , linear mit konstanten Koeffizienten und rechter Seite  $g$ . (Satz N2F)

**Potentialgleichung** für  $u: \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}: (x_1, \dots, x_n) \mapsto u(x_1, \dots, x_n)$ :

$$\Delta u = \rho \quad \text{mit} \quad \Delta = \partial_1^2 + \dots + \partial_n^2$$

Die Gleichung  $\Delta u = 0$  heißt **homogene Potentialgleichung** oder **Laplace-Gleichung**; ihre Lösungen heißen harmonische Funktionen. Die Gleichung  $\Delta u = \rho$  heißt **inhomogene Potentialgleichung** oder **Poisson-Gleichung**. Sie beschreibt das Gravitationspotential  $u$  zur Massenverteilung  $\rho$ , ebenso das elektrische Potential  $u$  zur Ladungsdichte  $\rho$ , und vieles mehr.

**Wellengleichung** für  $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  oder  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ :

$$\partial_t^2 u - c^2 \Delta u = \rho \quad \text{mit} \quad \Delta = \partial_1^2 + \dots + \partial_n^2$$

Diese Gleichung beschreibt die Ausbreitung von Schallwellen in Röhren (Dim.  $n = 1$ ), flache Oberflächenwellen in Wasser (Dim. 2) oder Lichtwellen im Raum (Dim. 3); hierbei ist  $c > 0$  die Ausbreitungsgeschwindigkeit. Im stationären Fall  $\partial_t u = 0$  erhalten wir die Potentialgleichung!

**Wärmeleitungsgleichung** für  $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  oder  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ :

$$\partial_t u - \kappa \Delta u = q \quad \text{mit} \quad \Delta = \partial_1^2 + \dots + \partial_n^2$$

Sie beschreibt die Wärmeausbreitung in einem homogenen Körper mit Temperaturleitfähigkeit  $\kappa > 0$ , Wärmeenergieichte  $u$  und Wärmeleistungsdichte  $q$ . Sie heißt auch Diffusionsgleichung. Im stationären Fall  $\partial_t u = 0$  erhalten wir erneut die Potentialgleichung!

**Satz R1c:** Lösungen der Wellengleichung

(1) Die  $n$ -dimensionale homogene **Wellengleichung**  $\partial_t^2 u - c^2 \Delta u = 0$  hat zu jeder Richtung  $\xi \in \mathbb{R}^n$  die separierte **Fundamentallösung**

$$\Psi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}: (t, x) \mapsto e^{i(\xi|x)} e^{-i|\xi|ct}$$

(2) Die allgemeine Lösung erhalten wir hieraus als **Superposition**

$$u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n: (t, x) \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\xi|x)} e^{-i|\xi|ct} a(\xi) d\xi.$$

Wir erhalten  $u(0, x) = u_0(x)$  durch die **Fourier-Transformierte**  $a = \widehat{u_0}$ .

**Übung:** Rechnen Sie nach, dass die Funktion  $\Psi$  tatsächlich  $(\partial_t^2 - c^2 \Delta)\Psi = 0$  erfüllt. Die Funktion  $\Psi$  beschreibt eine Welle mit Wellenvektor  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Eine allgemeinere Form ist  $u(t, x) = f((\xi|x) - |\xi|ct)$ . Der obige Produktsatz erlaubt die Trennung der Variablen. Superposition von endlich vielen Wellen bereitet keine Schwierigkeit. Damit aber das Integral konvergiert, sollte  $a$  absolut integrierbar sein. Ist auch der Anfangswert  $u_0$  absolut integrierbar, so können wir  $a = \widehat{u_0}$  definieren und erhalten  $u(t, x)$  mit  $u(0, x) = u_0$ . Einfach wunderbar!

Wir erinnern an ebene Quadriken im Hauptachsensystem: [E037](#)

$$x^2 + y^2 = 1, \quad \left(\frac{x-x_0}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{r_2}\right)^2 = 1, \quad \text{Ellipse};$$

$$x^2 - y^2 = 1, \quad \left(\frac{x-x_0}{r_1}\right)^2 - \left(\frac{y-y_0}{r_2}\right)^2 = 1, \quad \text{Hyperbel};$$

$$x^2 - y = 0, \quad \left(\frac{x-x_0}{r_1}\right)^2 - \left(\frac{y-y_0}{r_2}\right) = 0, \quad \text{Parabel}.$$

In Dimension 2 betrachten wir allgemein das quadratische Polynom

$$P(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c.$$

Zu  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  mit  $a_{12} = a_{21}$  betrachten wir  $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ .

Wir nennen das Polynom  $P(x, y)$  **elliptisch**, wenn  $\det A > 0$ ; **hyperbolisch**, wenn  $\det A < 0$ ; **parabolisch**, wenn  $\det A = 0$ .

Zur Klassifikation der Quadriken siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, Kapitel 7. Wir beschreiben den quadratischen Anteil durch eine symmetrische Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Jede symmetrische Matrix lässt sich orthogonal diagonalisieren, damit können wir  $P$  in Normalform bringen. Entscheidend ist hierfür das Vorzeichen der Eigenwerte!

Die drei **Modellgleichungen** haben keine gemischten Terme:

$$(1) \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = \rho, \quad \text{räumlich} \quad \partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_z^2 u = \rho,$$

$$(2) \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = \rho, \quad \text{räumlich} \quad \partial_t^2 u - \partial_x^2 u - \partial_y^2 u - \partial_z^2 u = \rho,$$

$$(3) \partial_t u - \partial_x^2 u = q, \quad \text{räumlich} \quad \partial_t u - \partial_x^2 u - \partial_y^2 u - \partial_z^2 u = q.$$

Die Wellengleichung hat die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c > 0$ , die Wärmeleitungsgleichung die Temperaturleitfähigkeit  $\kappa > 0$ . Nach Skalierung können wir  $c = 1$  bzw.  $\kappa = 1$  annehmen. Auf der rechten Seite dieser Gleichungen steht als Inhomogenität jeweils der Quellterm  $\rho$  bzw.  $q$ . Im Spezialfall  $\rho = 0$  bzw.  $q = 0$  haben wir eine homogene lineare Gleichung zweiter Ordnung.

Die **Potentialgleichung** (1) ist elliptisch.

Die **Wellengleichung** (2) ist hyperbolisch.

Die **Wärmeleitungsgleichung** (3) ist parabolisch.

Unsere Modellgleichungen haben keine gemischten Terme  $\partial_x \partial_y$  etc. Deshalb können wir sie gut durch **Separation der Variablen** behandeln, wie wir anschließend ausführen. Dieses Verfahren ist extrem vielseitig und erfolgreich. Eine allgemeine (elliptische, hyperbolische, parabolische) Differentialgleichung zweiter Ordnung können wir durch geeignete Koordinatentransformation diagonalisieren, also auf eine unserer Modellgleichungen zurückführen und somit lösen.

**Satz R1B:** Lösungen der Potentialgleichung

(1) Die  $n$ -dimensionale **Laplace-Gleichung**  $\Delta u = 0$  auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  hat als **Fundamentallösung** das  $n$ -dimensionale Newton-Potential

$$N(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}|x| & \text{für } n = 1, & \frac{1}{2\pi} \ln|x| & \text{für } n = 2, \\ -\frac{1}{4\pi|x|} & \text{für } n = 3, & \frac{|x|^{2-n}}{(2-n)n\tau_n} & \text{für } n \neq 2. \end{cases}$$

(2) Die **Potentialgleichung**  $\Delta u = \rho$  wird gelöst durch **Superposition**:

$$u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} N(x-y) \rho(y) dy$$

**Übung:** Die Funktion  $N$  erfüllt  $\Delta N = 0$  und die Normierung  $\int_{\partial B(0,r)} \nabla N \cdot dS = 1$  (Satz H1E). Allgemein ist  $\tau_n = \text{vol}_n(\mathbb{D}^n)$  das  $n$ -dim. Volumen der Einheitskugel. [E248](#) Bis auf Vorzeichen und Konstante ist  $N$  das Gravitationspotential einer Punktmasse im Ursprung. Die Verschiebung  $N(x-y)$  ist demnach das Potential um  $y$ , und  $u(x)$  ihre Superposition. Wenn  $\rho$  vernünftig ist, zum Beispiel stetig differenzierbar mit kompaktem Träger, so folgt hieraus  $\Delta u = \rho$  (Satz H1E).

**Satz D5D:** Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

(1) Die Wärmeleitungsgleichung  $\partial_t u = \kappa \Delta u$  hat als Fundamentallösung eine auseinanderfließende Glockenkurve, den **Wärmeleitungskern**

$$H: \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}: H(t, x) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi\kappa t})^n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\kappa t}\right).$$

Die Konstanten sichern die Normierung  $\int_{x \in \mathbb{R}^n} H(t, x) dx = 1$  für  $t > 0$ .

(2) Für  $t = 0$  sei die Wärmeverteilung  $u_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  vorgegeben,  $u_0 \in C_b$ . Für  $t > 0$  erhalten wir die Lösung durch **Superposition** (Faltung D5E):

$$u: \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}: u(t, x) = \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} H(t, x - \xi) u_0(\xi) d\xi.$$

Sie erfüllt  $\partial_t u = \kappa \Delta u$  für  $t > 0$  sowie  $\lim_{t \searrow 0} u(t, x) = u_0(x)$ .

**Übung:** Rechnen Sie nach, dass tatsächlich  $(\partial_t - \kappa \Delta)H = 0$  und  $\int_{\mathbb{R}^n} H(t, x) dx = 1$  gilt. Für festes  $t > 0$  ist  $H(t, x - \xi)$  eine Glockenkurve mit Mittelwert  $\xi$  und Streuung  $\sigma = \sqrt{2\kappa t}$ . Ableiten von  $u$  ergibt  $(\partial_t - \kappa \Delta)u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\xi) (\partial_t - \kappa \Delta)H(t, x - \xi) d\xi = 0$ . [E517](#)

In Dimension 2 betrachten wir den linearen Differentialoperator

$$L = P(\partial_x, \partial_y) = a_{11}\partial_x^2 + 2a_{12}\partial_x\partial_y + a_{22}\partial_y^2 + b_1\partial_x + b_2\partial_y + c.$$

Der quadratische Teil hat die Determinante  $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ . Wir nennen den Differentialoperator  $L$  **elliptisch**, wenn  $\det A > 0$ ; **hyperbolisch**, wenn  $\det A < 0$ ; **parabolisch**, wenn  $\det A = 0$ .

In Dimension  $n$  betrachten wir allgemein den Differentialoperator

$$L = P(\partial_1, \dots, \partial_n) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} \partial_j \partial_k + \sum_{j=1}^n b_j \partial_j + c.$$

Wir nennen  $\pm L$  **elliptisch**, wenn alle Eigenwerte von  $A$  positiv sind; **hyperbolisch**, wenn ein Eigenwert negativ ist, alle anderen positiv; **parabolisch**, wenn ein Eigenwert null ist, aber alle anderen positiv.

Dazu passen spezialisierte Techniken. Hängen die Koeffizienten  $a_{jk}, b_j, c: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  zudem vom Ort  $x \in \Omega$  ab, so muss die Bedingung in jedem Punkt  $x \in \Omega$  erfüllt sein. Andernfalls ist  $L$  ein Differentialoperator gemischten Typs, in manchen Regionen elliptisch, hyperbolisch, parabolisch.

Klassifikation linearer PDE zweiter Ordnung

In der Praxis treten sehr häufig partielle Differentialgleichungen auf. Erfahrungsgemäß sind die allermeisten höchstens **zweiter Ordnung**.

Bei jeder partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung fragen wir: Ist sie linear? Ist sie elliptisch? oder hyperbolisch? oder parabolisch? Dies deckt nur die einfachsten Möglichkeiten ab, es gibt viele weitere, aber es verhilft uns zu einer ersten Übersicht und Orientierung.

☺ Wenn die Gleichung elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch ist, dann verhält sie sich ähnlich wie die entsprechende **Modellgleichung**, also Potential-, Wellen- oder Wärmeleitungsgleichung. Zu Verständnis und Lösung der Gleichung sind solche Analogien oft sehr nützlich.

☺ Konkret wird man versuchen, durch eine geeignete Substitution die Gleichung in Normalform zu bringen, **ohne gemischte Terme**.

Zur Reduktion auf Normalform konstruiert man geeignete Koordinaten: Im einfachsten Fall mit Hauptachsentransformationen (wie in der HM1). Im allgemeinen Fall nutzt man ein geeignetes Koordinatensystem längs charakteristischer Kurven, siehe Meyberg-Vachenaue, §12.3.

Zu lösen sei eine **separierbare Differentialgleichung** der Form

$$P(\partial_x) u(x, y) = Q(\partial_y) u(x, y).$$

Hier wirkt der Differentialoperator  $P(\partial_x)$  nur auf  $x$ , und  $Q(\partial_y)$  nur auf  $y$ . Als Lösungen gesucht sind Funktionen  $u: X \times Y \rightarrow \mathbb{K}: (x, y) \mapsto u(x, y)$ . In diesem Falle eignet sich der **Produktansatz**  $u(x, y) = v(x) \cdot w(y)$ :

$$[P(\partial_x) v(x)] w(y) = v(x) [Q(\partial_y) w(y)]$$

$$\iff \frac{P(\partial_x) v(x)}{v(x)} = \frac{Q(\partial_y) w(y)}{w(y)} = \lambda$$

Die triviale Lösung ist  $u = 0$ ; andernfalls dividieren wir durch  $v(x)w(y)$ . Die linke Seite hängt nur von  $x$  ab, die rechte nur von  $y$ . Da wir  $x$  und  $y$  unabhängig verändern können, sind beide Seiten konstant, gleich  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Zu jeder **Separationskonstanten**  $\lambda$  gehören zwei Eigenwertprobleme:

$$P(\partial_x) v(x) = \lambda v(x) \quad \text{und} \quad Q(\partial_y) w(y) = \lambda w(y)$$

Lösung sind **Eigenfunktionen**  $u(x, y) = v(x)w(y)$  und Superpositionen. Gleiches gilt für  $u(x_1, \dots, x_n) = u_1(x_1) \cdots u_n(x_n)$  in mehreren Variablen.

**Aufgabe:** Begründen Sie sorgfältig die Äquivalenz „(1)  $\iff$  (2)“!

Den Produktansatz  $u(x, y) = v(x)w(y)$  haben wir oben bereits erklärt. Dabei haben wir  $u \neq 0$  angenommen und sogar so getan als gälte  $u(x, y) \neq 0$  in jedem Punkt  $(x, y)$ . Im Allgemeinen werden die Funktionen  $v: X \rightarrow \mathbb{K}$  und  $w: Y \rightarrow \mathbb{K}$  jedoch Nullstellen haben, und somit auch  $u$ . Diese Feinheit müssen wir klären; diese Präzisierung ist Ziel des Satzes R1D und dieser Übung.

**Lösung:** Zunächst „(2)  $\implies$  (1)“: In jedem Punkt  $(x, y) \in X \times Y$  gilt

$$P u(x, y) = P[v(x) \cdot w(y)] = [P v(x)] w(y) = \lambda v(x) \cdot w(y),$$

$$Q u(x, y) = Q[v(x) \cdot w(y)] = v(x) [Q w(y)] = v(x) \cdot \lambda w(y),$$

also  $P u = Q u$ . Wir zeigen nun die Umkehrung „(1)  $\implies$  (2)“: Wir nehmen  $u, v \neq 0$  an, also  $v(x_0) \neq 0$  und  $w(y_0) \neq 0$  für je einen Punkt  $x_0 \in X$  und  $y_0 \in Y$ . Beides zusammen ist äquivalent zu  $u \neq 0$ , denn  $u(x_0, y_0) \neq 0$ . In jedem Punkt  $(x, y) \in X \times Y$  gilt  $P u(x, y) = Q u(x, y)$ , also

$$[P v(x)] w(y) = v(x) [Q w(y)], \quad \frac{P v(x_0)}{v(x_0)} = \frac{Q w(y_0)}{w(y_0)} =: \lambda,$$

$$\frac{P v(x_0)}{v(x_0)} w(y) = Q w(y), \quad P v(x) = v(x) \frac{Q w(y_0)}{w(y_0)}.$$

**Aufgabe:** Wir suchen Lösungen  $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  der Wellengleichung

$$\partial_t^2 u(t, x) = c^2 \partial_x^2 u(t, x).$$

(1) Finden Sie alle Lösungen in Produktform  $u(t, x) = v(t)w(x)$ .

**Lösung:** Der Produktansatz  $u(t, x) = v(t)w(x)$  separiert zu

$$v''(t) = \lambda v(t), \quad c^2 w''(x) = \lambda w(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

**1. Fall:** Für  $\lambda = 0$  finden wir  $v''(t) = 0$  und  $w''(x) = 0$ , also

$$v(t) = a_1 + a_2 t, \quad w(x) = b_1 + b_2 x.$$

**2. Fall:** Für  $\lambda = \alpha^2 > 0$  finden wir die Eigenfunktionen

$$v(t) = a_1 e^{\alpha t} + a_2 e^{-\alpha t}, \quad w(x) = b_1 e^{x\alpha/c} + b_2 e^{-x\alpha/c}.$$

**3. Fall:** Für  $\lambda = -\omega^2 < 0$  finden wir dasselbe komplex, also reell

$$v(t) = a_1 \cos(\omega t) + a_2 \sin(\omega t), \quad w(x) = b_1 \cos(x\omega/c) + b_2 \sin(x\omega/c)$$

☺ Machen Sie die Probe! Nur die letzten Lösungen sind beschränkt.

**Aufgabe:** Wir suchen Lösungen  $u: \mathbb{R} \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  der Wellengleichung

$$\partial_t^2 u(t, x) = c^2 \partial_x^2 u(t, x) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \text{ und } 0 < x < L,$$

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0 \quad \text{Randwerte für } x \in \{0, L\} \text{ und } t \in \mathbb{R}.$$

(2) Finden Sie alle Lösungen in Produktform  $u(t, x) = v(t)w(x)$ .

**Lösung:** (2) Dank (1) kennen wir alle möglichen Lösungspaare  $(v, w)$ :

$$v(t) = a_1 + a_2 t, \quad w(x) = b_1 + b_2 x;$$

$$v(t) = a_1 e^{\alpha t} + a_2 e^{-\alpha t}, \quad w(x) = b_1 e^{x\alpha/c} + b_2 e^{-x\alpha/c};$$

$$v(t) = a_1 \cos(\omega t) + a_2 \sin(\omega t), \quad w(x) = b_1 \cos(x\omega/c) + b_2 \sin(x\omega/c).$$

Diese lösen die freie Wellengleichung. Die zusätzliche Randbedingung  $w(0) = w(L) = 0$  erfüllt nur  $\sin(n\pi x/L)$  für  $n \in \mathbb{N}$ , also  $\omega = n\pi c/L$  und

$$u_n(t, x) = [a_n \cos(n\pi c t/L) + b_n \sin(n\pi c t/L)] \sin(n\pi x/L)$$

☺ Für jede natürliche Zahl  $n = 1, 2, 3, \dots$  erhalten wir als Lösung eine stehende Wellen mit Wellenlänge  $2L/n$  und Periode  $2L/n c$ .

Da diese Methode oft gebraucht wird, formulieren wir sie hier genauer. Gegeben sind Intervalle  $X, Y \subseteq \mathbb{R}$  und hierauf die Differentialoperatoren

$$P(x, \partial_x) = \sum_{j=0}^m a_j(x) \partial_x^j : C^m(X, \mathbb{K}) \rightarrow C^0(X, \mathbb{K}),$$

$$Q(y, \partial_y) = \sum_{k=0}^n b_k(y) \partial_y^k : C^n(Y, \mathbb{K}) \rightarrow C^0(Y, \mathbb{K}),$$

mit stetigen Koeffizientenfunktionen  $a_j: X \rightarrow \mathbb{K}$  und  $b_k: Y \rightarrow \mathbb{K}$ .

**Satz R1D: Trennung der Variablen durch Produktansatz**

Sei  $u: X \times Y \rightarrow \mathbb{K}: u(x, y) = v(x) \cdot w(y)$  Produkt von  $0 \neq v \in C^m(X, \mathbb{K})$  und  $0 \neq w \in C^n(Y, \mathbb{K})$ . Dann sind folgende zwei Aussagen äquivalent:

(1) Die Funktion  $u$  löst die partielle Differentialgleichung

$$P(x, \partial_x) u(x, y) = Q(y, \partial_y) u(x, y).$$

(2) Für einen gemeinsamen Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{K}$  gelten die Gleichungen

$$P(x, \partial_x) v(x) = \lambda v(x) \quad \text{und} \quad Q(y, \partial_y) w(y) = \lambda w(y).$$

**Aufgabe:** Wie funktioniert der Produktansatz für folgende PDE?

(A)  $P(x, \partial_x)u(x, y, z) = Q(y, z, \partial_y, \partial_z)u(x, y, z)$   
 (B)  $P(x, \partial_x)u(x, y, z) + Q(y, \partial_y)u(x, y, z) + R(z, \partial_z)u(x, y, z) = \lambda u(x, y, z)$

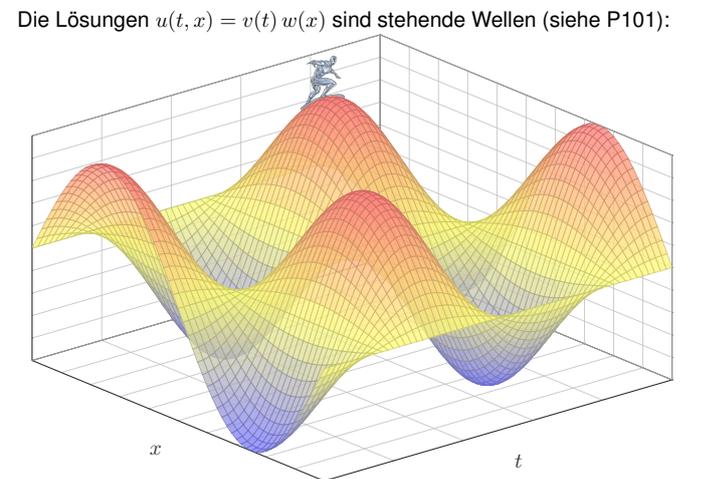
**Lösung:** (a) Für  $u(x, y, z) = v(x) \cdot w(y, z)$  mit  $u \neq 0$  ist (A) äquivalent zu  $P(x, \partial_x) v(x) = \lambda v(x)$  und  $Q(y, z, \partial_y, \partial_z) w(y, z) = \lambda w(y, z)$  mit einer gemeinsamen Konstante  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Dies beweist man wörtlich wie oben.

(b) Für  $u(x, y, z) = u_1(x) \cdot u_2(y) \cdot u_3(z)$  mit  $u \neq 0$  ist (B) äquivalent zu den Gleichungen  $P(x, \partial_x) u_1(x) = \lambda_1 u_1(x)$  und  $Q(y, \partial_y) u_2(y) = \lambda_2 u_2(y)$  und  $R(z, \partial_z) u_3(z) = \lambda_3 u_3(z)$  mit  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$  und  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda$ . Die Implikation „ $\Leftarrow$ “ ist klar. Wir zeigen „ $\Rightarrow$ “: In jedem Punkt  $(x, y, z)$  gilt  $(P u_1) u_2 u_3 + u_1 (Q u_2) u_3 + u_1 u_2 (R u_3) = \lambda u_1 u_2 u_3$ , also insbesondere

$$\frac{P u_1(x_0)}{u_1(x_0)} + \frac{Q u_2(y_0)}{u_2(y_0)} + \frac{R u_3(z_0)}{u_3(z_0)} = \lambda,$$

$$P u_1(x) + \frac{Q u_2(y_0)}{u_2(y_0)} u_1(x) + \frac{R u_3(z_0)}{u_3(z_0)} u_1(x) = \lambda u_1(x),$$

$$\frac{P u_1(x_0)}{u_1(x_0)} u_2(y) + Q u_2(y) + \frac{R u_3(z_0)}{u_3(z_0)} u_2(y) = \lambda u_2(y),$$

$$\frac{P u_1(x_0)}{u_1(x_0)} u_3(z) + \frac{Q u_2(y_0)}{u_2(y_0)} u_3(z) + R u_3(z) = \lambda u_3(z).$$


**Aufgabe:** Wir suchen Lösungen  $u: \mathbb{R} \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  der Wellengleichung

$$\partial_t^2 u(t, x) = c^2 \partial_x^2 u(t, x) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \text{ und } 0 < x < L,$$

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0 \quad \text{Randwerte für } x \in \{0, L\} \text{ und } t \in \mathbb{R},$$

$$u(0, x) = g(x) \quad \text{Anfangsposition für } t = 0 \text{ und } 0 \leq x \leq L,$$

$$\partial_t u(0, x) = h(x) \quad \text{Anfangsgeschwindigkeit für } t = 0.$$

(3) Lösen Sie dieses ARWP. Dazu liegen  $g$  und  $h$  als Sinus-Reihen vor,  $g(x) = \sum_n A_n \sin(n\pi x/L)$  und  $h(x) = \sum_n B_n \sin(n\pi x/L)$  mit  $A_n, B_n \in \mathbb{R}$ .

**Lösung:** (3) Dank (2) kennen wir die Lösung mit Randbedingung:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\pi c t/L) + b_n \sin(n\pi c t/L)] \sin(n\pi x/L)$$

Die Koeffizienten  $a_n, b_n$  entnehmen wir den Anfangsbedingungen:

$$a_n = A_n, \quad b_n = B_n \frac{L}{n\pi c}$$

☺ Dank Fourier-Theorie können wir alle (physikalisch relevanten) Anfangsdaten  $g$  und  $h$  durch solche Sinus-Reihen darstellen! [1417]

**Beispiel zum Produktansatz** R121  
Ergänzung

**Aufgabe:** Finden Sie beschränkte Lösungen  $u: [0, \infty[ \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\partial_x^2 u + \partial_t^2 u - 2\partial_t u + u = 0 \quad \text{für alle } t > 0 \text{ und } 0 < x < \pi,$$

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 \quad \text{Randwerte für } x \in \{0, \pi\} \text{ und } t \geq 0,$$

$$u(0, x) = f(x) \quad \text{Anfangswerte für } t = 0 \text{ und } 0 < x < \pi.$$

Ist diese PDE linear? Von welcher Ordnung? Von welchem Typ?  
**Lösung:** Wir nutzen den Produktansatz  $u(t, x) = v(t)w(x)$ . Einsetzen:  
 $v(t)w''(x) + v''(t)w(x) - 2v'(t)w(x) + v(t)w(x) = 0$   
 Die triviale Lösung ist  $u = 0$ . Andernfalls dividieren wir durch  $u = vw$ :  
 $\frac{w''(x)}{w(x)} = -\frac{v''(t)}{v(t)} + \frac{2v'(t)}{v(t)} - 1 = \lambda \in \mathbb{R}$   
 Wir betrachten zunächst das erste Eigenwertproblem  $w''(x) = \lambda w(x)$ :  
 Für  $\lambda = 0$  finden wir  $w(x) = c + dx$ .  
 Für  $\lambda = \alpha^2 > 0$  finden wir  $w(x) = c e^{\alpha x} + d e^{-\alpha x}$ .  
 Für  $\lambda = -\omega^2 < 0$  finden wir  $w(x) = c \sin(\omega x) + d \cos(\omega x)$ .

**Beispiel zum Produktansatz** R122  
Ergänzung

Wir berücksichtigen nun die Randbedingungen  $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$ .  
 Für unseren Produktansatz  $v(t)w(x)$  bedeutet das  $w(0) = w(\pi) = 0$ .  
 Nicht-triviale Lösungen existieren nur für  $\lambda = -n^2 < 0$ , nämlich  
 $w_n(x) = \sin(nx) \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, \dots$   
 Damit folgt  $v'' - 2v' + (1 - n^2)v = 0$ , mit der allgemeinen Lösung  
 $v_n(t) = a_n e^{(1-n)t} + b_n e^{(1+n)t}$ .  
 Wir finden so zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  eine Lösung in Produktform:  
 $u_n(t, x) = v_n(x)w_n(t) = [a_n e^{(1-n)t} + b_n e^{(1+n)t}] \sin(nx)$   
 Beschränkt nur für  $b_n = 0$ . Allgemeine Lösung durch Superposition:  
 $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{(1-n)t} \sin(nx) \quad \text{Fourier-Reihe in } x!$   
 $u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \stackrel{!}{=} f(x) \quad \text{Fourier-Analyse von } f!$   
 😊 Die Konstanten  $a_n$  passen wir den gegebenen Anfangsdaten  $f$  an.

**Beispiel zum Produktansatz** R123  
Ergänzung

**Aufgabe:** Finden Sie beschränkte Lösungen  $u: [0, \infty[ \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\partial_x^2 u + \partial_t^2 u - 2\partial_t u + u = 0 \quad \text{für alle } t > 0 \text{ und } 0 < x < \pi,$$

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 \quad \text{Randwerte für } x \in \{0, \pi\} \text{ und } t \geq 0,$$

$$u(0, x) = f(x) := 1 \quad \text{Anfangswerte für } t = 0 \text{ und } 0 < x < \pi.$$

Dies ist eine PDE mit Anfangsrandwertproblem, kurz ARWP.  
**Lösung:** Wir kennen bereits die allgemeine Lösung:  
 $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{(1-n)t} \sin(nx)$   
 Fourier-Entwicklung der Rechteckfunktion: [1225]  
 $f(x) = 1 \stackrel{!}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \quad \text{also } a_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ gerade} \\ 4/(n\pi) & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$   
 Die gesuchte Lösungsfunktion  $u$  ist demnach die Superposition  
 $u(t, x) = 4 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2kt} \frac{\sin((2k+1)x)}{(2k+1)\pi}$ .

**Beispiel zum Produktansatz** R124  
Ergänzung

**Aufgabe:** Finden Sie beschränkte Lösungen  $u: [0, \infty[ \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\partial_x^2 u + \partial_t^2 u - 2\partial_t u + u = 0 \quad \text{für alle } t > 0 \text{ und } 0 < x < \pi,$$

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 \quad \text{Randwerte für } x \in \{0, \pi\} \text{ und } t \geq 0,$$

$$u(0, x) = f(x) := x \quad \text{Anfangswerte für } t = 0 \text{ und } 0 < x < \pi.$$

Dies ist eine PDE mit Anfangsrandwertproblem, kurz ARWP.  
**Lösung:** Wir kennen bereits die allgemeine Lösung:  
 $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{(1-n)t} \sin(nx)$   
 Fourier-Entwicklung der Sägezahnfunktion: [1205]  
 $f(x) = x \stackrel{!}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \quad \text{also } a_n = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}$   
 Die gesuchte Lösungsfunktion  $u$  ist demnach die Superposition  
 $u(t, x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{(1-n)t} \frac{\sin(nx)}{n}$ .

**Beispiel: die Schrödinger-Gleichung** R125  
Ergänzung

Die **Schrödinger-Gleichung** für  $\Psi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}$  zum Potential  $V: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) + V\Psi$$

Gegeben ist  $V$ , gesucht ist  $\Psi$ . Diese PDE schreiben wir meist kürzer  
 $\underbrace{i\hbar \partial_t \Psi = H\Psi}_{\text{Schrödinger-Gleichung}} \quad \text{mit} \quad \underbrace{H = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V}_{\text{Hamilton-Operator}} \quad \text{und} \quad \underbrace{\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2}_{\text{Laplace-Operator}}$   
 Dies ist eine homogene lineare PDE zweiter Ordnung, genauer eine Diffusionsgleichung [109].  
 für  $V = 0$  eine Wärmeleitungsgleichung mit  $\kappa = \hbar/(2im)$ . Erwin Schrödinger (1887–1961) hat sie 1926 aufgestellt und damit das Spektrum des Wasserstoffatoms berechnet (Nobelpreis 1933).  
 Sie beschreibt den Zustand  $\Psi$  eines Teilchens mit Masse  $m$  in einem Potential  $V: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ .  
 Hier ist  $\hbar = h/2\pi$  die Plancksche Konstante,  $p^2/2m = (\hbar^2/2m) \Delta$  die kinetische Energie und  $V$  die potentielle. Analog zur *klassischen Mechanik* spricht man daher von *Quantenmechanik*.  
 Beide beschreiben die Bewegung massebehafteter Teilchen unter der Wirkung von Kräften, jedoch werden klassische Begriffe wie „Ort“ und „Bahn“ eines Teilchens nun ersetzt durch die quantenmechanischen Begriffe, die die physikalischen Beobachtungen besser erklären.  
 Die Erweiterung zur *Quantenfeldtheorie* behandelt zudem Erzeugung und Vernichtung von Elementarteilchen, insbesondere die Emission / Absorption von Licht in Form von Photonen.

**Beispiel: die Schrödinger-Gleichung** R126  
Ergänzung

Physikalische Interpretation und Verwendung dieser Gleichung:  
 Wir betrachten den Vektorraum  $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$  aller quadrat-integrierbaren Funktionen  $\psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ , also  $\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x)|^2 dx < \infty$ , mit dem Skalarprodukt  
 $\langle - | - \rangle: L^2 \times L^2 \rightarrow \mathbb{C}: \langle \varphi | \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\varphi(x)} \psi(x) dx$ .  
 Meist dividieren wir durch die Norm  $\|\psi\|_{L^2} = \langle \psi | \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x)|^2 dx$ ;  
 hierdurch können wir die Normierung  $\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x)|^2 dx = 1$  sicherstellen.  
 Die Quantenmechanik beruht auf folgenden Prinzipien:  
 1 Der Zustand eines Teilchens wird durch eine Funktion  $\psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  beschrieben;  $|\psi|^2$  ist die Dichte der Aufenthaltswahrscheinlichkeit.  
 2 Die Entwicklung des zeitabhängigen Zustandes  $\Psi: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  wird durch die Schrödinger-Gleichung  $i\hbar \partial_t \Psi = H\Psi$  bestimmt.  
 3 Observablen entsprechen hermiteschen Operatoren  $A, B, C, \dots$ . Der Mittelwert der Observablen  $A$  im Zustand  $\psi$  ist  $\langle \psi | A \psi \rangle$ .  
 4 Wird bei einer Messung zur Observablen  $A$  der Wert  $a$  gefunden, so wird  $\psi$  auf den Eigenraum zum Eigenwert  $a$  projiziert (Kollaps).

**Beispiel: stationäre Lösungen** R127  
Ergänzung

Angenommen das Potential  $V$  ist zeitlich konstant, unabhängig von  $t$ :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = H\Psi \quad \text{mit} \quad H = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(x, y, z).$$

Dann wirkt links der Operator  $\partial_t$  nur auf  $t$  und rechts  $H$  nur auf  $x, y, z$ .  
 Wir trennen  $t$  von den Ortsvariablen  $x, y, z$  durch den Produktansatz  
 $\Psi(t, x, y, z) = \varphi(t) \psi(x, y, z)$ .  
 Für die stationäre Lösung  $\psi(x, y, z)$  suchen wir Eigenfunktionen  
 $H\psi = E\psi \quad \text{mit Eigenwert } E \in \mathbb{R} \text{ (Energie)}.$   
 Anschließend  $i\hbar \partial_t \varphi = E\varphi$ , also  $\varphi(t) = e^{-i\omega t}$  mit  $E = \hbar\omega$ . Wir erhalten  
 $\Psi(t, x, y, z) = e^{-i\omega t} \psi(x, y, z) \quad \text{mit Energie } E = \hbar\omega.$   
 In der Schrödinger-Gleichung  $i\hbar \partial_t \Psi = H\Psi$  tritt die Energie zunächst nicht als Skalar auf, sondern als Hamilton-Operator  $H$ , der auf den Zustand  $\Psi$  angewendet wird. Die Trennung der Variablen entspricht der Zerlegung in Eigenfunktionen des Operators  $H$ . Die Lösung besagt dann, dass die zeitliche Veränderung des Zustands allein durch seine Energie  $E$  bestimmt ist.

**Beispiel: harmonischer Oszillator** R128  
Ergänzung

Als konkrete Illustration zur Schrödinger-Gleichung nenne ich den **harmonischen Oszillator** in einem parabelförmigen Potentialtopf:  
 $V(x, y, z) = \frac{\hbar}{2mr_0^4} (x^2 + y^2 + z^2)$   
 Die Eigenwertgleichung  $H\psi = E\psi$  erlaubt unendlich viele Lösungen. Hierbei sind die möglichen Energieeigenwerte **quantisiert**, das heißt die Eigenwerte  $3\hbar/2mr_0^2 = E_0 < E_1 < E_2 < E_3 < \dots$  sind diskret.  
 😊 Der Grundzustand  $\psi_0$  mit  $H\psi_0 = E_0\psi_0$  ist eine Glockenkurve:  
 $\psi_0(x, y, z) = \frac{1}{(r_0\sqrt{\pi})^3} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2r_0^2}\right)$   
**Übung:** Dies ist tatsächlich eine Lösung. Machen Sie die Probe!  
 Dies nur zur Illustration: Wir können hier explizit rechnen! Wer etwas mehr wissen möchte: [de.wikipedia.org/wiki/Harmonischer\\_Oszillator\\_\(Quantenmechanik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Harmonischer_Oszillator_(Quantenmechanik)). Dort wird auch skizziert, wie man alle weiteren Lösungen mit der „Leitermethode“ konstruieren kann. Das Wasserstoffatom entspricht dem elektrischen Potential  $V = \text{const}/r$ . Die Eigenfunktionen der Schrödinger-Gleichung sind dann die berühmten „Orbitale“ aus dem Chemieunterricht.

**Aufgabe:** Eine quadratische Kupferplatte mit Kantenlänge 1m wird an drei Seiten konstant auf 0°C gekühlt, an der vierten Seite konstant auf 100°C geheizt. Wir suchen die stationäre Temperaturverteilung  $u$ .

(1) Formulieren und (2) lösen Sie die Differentialgleichung für  $u$ ! Die Rechnung konstruiert eine Lösung. Gibt es (auf anderen Wegen) weitere Lösungen? Oder führen alle Wege zum selben Ziel? Existenz und Eindeutigkeit der Lösung sind für jede Anwendung grundlegend!

**Lösung:** (1) auf dem Rechteck  $R = [0, a] \times [0, b] \subseteq \mathbb{R}^2$ . Die allgemeine Wärmeleitungsgleichung lautet  $\partial_t u = \kappa \Delta u + q$ . Im Bereich  $R$  gebe es keine Quellen oder Senken, also  $q = 0$ . Im stationären Zustand gilt  $\partial_t u = 0$ , also haben wir  $\Delta u = 0$ :

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0 \quad \text{auf dem Rechteck } R = [0, a] \times [0, b] \subseteq \mathbb{R}^2$$

mit  $u(x, 0) = u(0, y) = u(a, y) = 0$  und  $u(x, b) = 100$ .

☺ Wir lassen die Abmessungen  $a$  und  $b$  noch unbestimmt und setzen erst am Ende  $a = b = 1$  ein. Das macht die Zusammenhänge klarer.

Wie wird sich die Temperatur auf dem Blech verteilen? Das erklärt den Titel der Aufgabe: Die Katze probiert aus, wo ihr die Temperatur am besten gefällt, Sie können es ausrechnen! So heißt auch ein Theaterstück von Tennessee Williams von 1955, erfolgreich verfilmt 1958.

(2) Wir suchen zunächst alle Lösungen der PDE  $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$  in Produktform  $u(x, y) = v(x) \cdot w(y)$ . Unsere PDE wird damit zu:

$$v''(x)w(y) + v(x)w''(y) = 0$$

Trennung der Variablen ergibt

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = -\frac{w''(y)}{w(y)} = \lambda$$

mit einer noch unbekanntenen Separationskonstanten  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Die drei Randbedingungen  $u(x, 0) = u(0, y) = u(a, y) = 0$  werden erfüllt durch

$$w(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad v(a) = 0.$$

☺ Statt einer PDE in zwei Variablen  $x, y$  erhalten wir zwei ODE, getrennt in je einer Variablen  $x$  bzw.  $y$ . Das ist wesentlich einfacher!

(A) Wir lösen  $v''(x) - \lambda v(x) = 0$  mit Randbedingung  $v(0) = v(a) = 0$ ,  
(B) anschließend  $w''(y) + \lambda w(y) = 0$  mit Randbedingung  $w(0) = 0$ .

(A1) Für  $\lambda = 0$  gilt  $v''(x) = 0$ , also  $v(x) = \alpha x + \beta$  mit  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Die Randbedingungen liefern  $\alpha = \beta = 0$ , also die triviale Lösung.

(A2) Für  $\lambda = \omega^2 > 0$  gilt  $v''(x) - \omega^2 v(x) = 0$ . Die allgemeine Lösung ist  $v(x) = \alpha e^{\omega x} + \beta e^{-\omega x}$ . Die Randbedingungen liefern erneut  $\alpha = \beta = 0$ .

(A3) Für  $\lambda = -\omega^2 < 0$  gilt  $v''(x) + \omega^2 v(x) = 0$ . Die allgemeine Lösung ist  $v(x) = \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)$ . Die Randbedingung  $v(0) = 0$  liefert  $\alpha = 0$ , und  $v(a) = 0$  liefert  $\beta \sin(\omega a) = 0$ . Also  $\beta = 0$  oder  $\omega a = n\pi$  mit  $n \in \mathbb{N}$ .

☺ Die Lösungen für den Faktor  $v$  sind also

$$v_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}_{\geq 1}.$$

Zu jeder Lösung  $v_n$  bestimmen wir nun einen passenden Cofaktor  $w_n$ . Die beiden sind gekoppelt durch ihren gemeinsamen Eigenwert!

(B) Die Differentialgleichung mit  $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{a^2}$  besitzt die Lösungen

$$w_n(y) = a_n \exp\left(\frac{n\pi}{a}y\right) + b_n \exp\left(-\frac{n\pi}{a}y\right).$$

Die Randbedingung  $w_n(0) = 0$  impliziert  $b_n = -a_n$ , also

$$w_n(y) = a_n \left[ \exp\left(\frac{n\pi}{a}y\right) - \exp\left(-\frac{n\pi}{a}y\right) \right] = 2a_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right).$$

Alle Lösungen in Produktform  $u(x, y) = v(x)w(y)$ , die bereits die drei Randbedingungen  $u(x, 0) = u(0, y) = u(a, y) = 0$  erfüllen, sind demnach

$$u_n(x, y) = v_n(x)w_n(y) = a_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right).$$

Die obige Konstante  $2a_n$  haben wir hierbei zu  $a_n$  zusammengefasst.

☺ Durch Superposition erhalten wir die allgemeine Lösung:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

Für die letzte Randbedingung  $u(x, b) = 100$  machen wir den Ansatz

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right).$$

Speziell für  $y = b$  wird diese Reihe zu

$$u(x, b) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right).$$

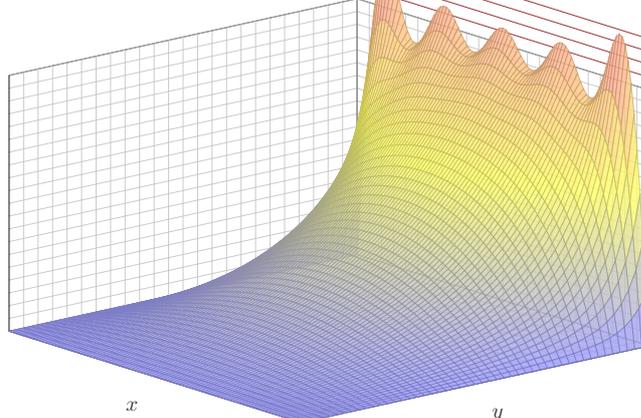
Die Koeffizienten  $c_n$  erhalten wir durch Fourier-Entwicklung:

$$a_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) = c_n = \frac{2}{a} \int_{x=0}^a 100 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = \frac{200}{n\pi} [1 - (-1)^n]$$

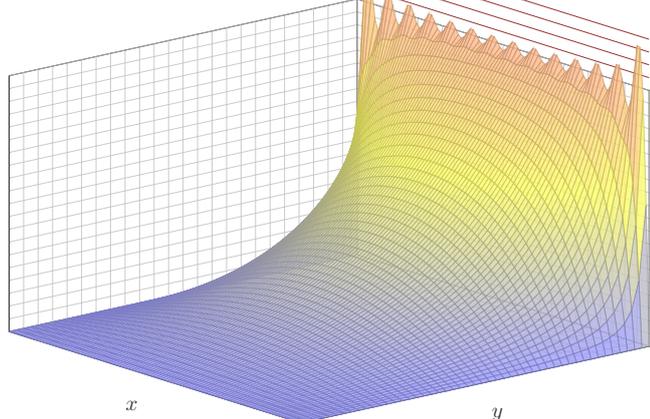
☺ Für die Abmessungen  $a = b = 1$  finden wir schließlich:

$$u(x, y) = \frac{400}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)\pi x) \sinh((2n+1)\pi y)}{(2n+1) \sinh((2n+1)\pi)}$$

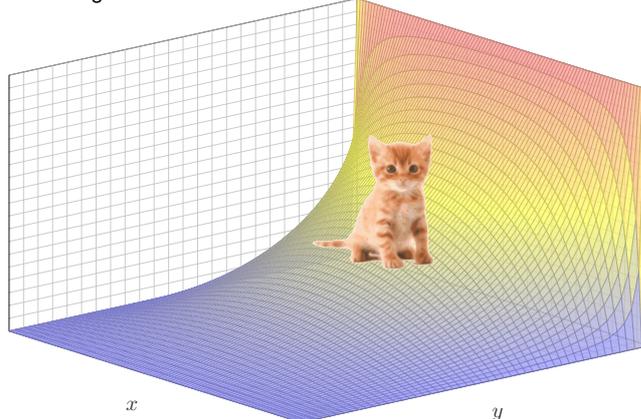
Die Summe der ersten fünf Terme. Wir sehen das Gibbs-Phänomen.



Die Summe der ersten 14 Terme. Das Gibbs-Phänomen bleibt.



Der Grenzwert der Reihe. Alles wird gut.



**Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen** R209  
Ausführung

Lösungen suchen wir bisher mit dem Produktansatz  $u(x, y) = v(x)w(y)$ . Das ist zunächst nur geraten, mit etwas Anschauung und Erfahrung. Wir haben Glück und finden die Eigenfunktionen  $u_n(x, y) = v_n(x)w_n(y)$ , genug um mit  $u(x, y) = \sum_n a_n v_n(x)w_n(y)$  alle Bedingungen zu erfüllen.

Unsere Konstruktion von  $u(x, y)$  zeigt somit die **Existenz** einer Lösung. Wir können daran explizit nachprüfen, dass  $u$  alle Forderungen erfüllt. Dies zeigt jedoch noch keineswegs die **Eindeutigkeit**: Es könnte noch weitere Lösungen der PDE geben, die aber unserem Ansatz entgehen.

Mehrdeutigkeiten müssen wir erkennen und nötigenfalls auch beheben: Sind noch mehrere Lösungen möglich, so stellen wir geeignete weitere Bedingungen, um die physikalisch sinnvollen Lösungen herauszuheben. Dieses Vorgehen beruht auf der Überzeugung, dass die physikalische Lösung bereits durch die Randdaten festgelegt ist. Daher sollte unser mathematisches Modell genau diese als eindeutige Lösung haben.

Mathematisch bedeutet die Eindeutigkeit: Je zwei Lösungen sind gleich. Dies wollen wir nun sorgfältig als Satz formulieren und dann beweisen.

**Wie lautet die Problemstellung?** R210  
Ausführung

Um über Eindeutigkeit zu sprechen, müssen wir zunächst erklären, wie die Problemstellung aussieht und was wir als Lösungen zulassen.

**Definition R2A: Dirichlet-Problem der Potentialgleichung**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet mit Abschluss  $\bar{\Omega}$  und Rand  $\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$ . Hierauf seien  $q: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen. Das **Dirichlet-Problem** zu den Daten  $(\Omega, q, g)$  lautet:

$$\Delta u(x) = q(x) \quad \text{für jeden inneren Punkt } x \in \Omega,$$

$$u(x) = g(x) \quad \text{für jeden Randpunkt } x \in \partial\Omega.$$

Gesucht sind Lösungen  $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ , stetig auf  $\bar{\Omega}$  und zweimal stetig differenzierbar im Inneren  $\Omega$ , die diese Gleichungen erfüllen.

In manchen Anwendungen ist die Randfunktion  $g$  unstetig, wie oben: Auf dem Rechteck  $\bar{\Omega} = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$  fordern wir daher schwächer nur  $L^2$ -Konvergenz, also  $\int_{x=a}^b |u(x, y) - u(x, c)|^2 dx \rightarrow 0$  für  $y \searrow c$ , und entsprechend für jede der vier Seiten des Rechtecks.

**Eindeutigkeit gilt nicht immer.** R211  
Ausführung

**Aufgabe:** Sei  $\bar{\Omega} = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{B}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$  die Ebene  $\mathbb{R}^2$  ohne die Einheitskreisscheibe  $\mathbb{B}^2$ . Wir betrachten den Fall ohne Quellen. Auf dem Rand  $\partial\Omega = \mathbb{S}^1$  sei  $g(x, y) = x$ . Das Dirichlet-Problem lautet:

$$\Delta u(x, y) = 0 \quad \text{für jeden inneren Punkt } (x, y) \in \Omega,$$

$$u(x, y) = x \quad \text{für jeden Randpunkt } (x, y) \in \partial\Omega.$$

Seien  $u, v: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $u(x, y) = x$  und  $v(x, y) = x/(x^2 + y^2)$ . Zeigen Sie, dass beide Funktionen das Dirichlet-Problem lösen. Folgern Sie damit, dass es sogar unendlich viele Lösungen gibt.

**Lösung:** Die Kandidaten  $u, v$  liegen explizit vor. Die Randbedingung  $u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} = g$  ist klar. Es genügt also,  $\Delta u = \Delta v = 0$  nachzurechnen. Das ist trivial für  $u$  und eine leichte Übung für  $v$ : Versuchen Sie es! Damit ist für jedes  $t \in \mathbb{R}$  auch  $w_t = (1-t)u + tv$  eine Lösung.

⚠ Dieses Beispiel zeigt eindrücklich, dass die Randwerte  $g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  die gesuchte harmonische Lösung  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  nicht eindeutig festlegen. Das Problem ist hier leicht zu ahnen: Das Gebiet  $\Omega$  ist unbeschränkt. Der folgende Satz garantiert: Ist  $\bar{\Omega}$  kompakt, so ist die Lösung eindeutig!

**Kompaktheit garantiert Eindeutigkeit.** R212  
Ausführung

**Satz R2B: Eindeutigkeitsatz für die Potentialgleichung**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet, also der Abschluss  $\bar{\Omega}$  kompakt.

(0) Löst  $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  die homogene Potentialgleichung

$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{für jeden inneren Punkt } x \in \Omega,$$

$$u(x) = 0 \quad \text{für jeden Randpunkt } x \in \partial\Omega,$$

dann gilt  $u(x) = 0$  für alle  $x \in \bar{\Omega}$ .

(1) Lösen  $\tilde{u}, \check{u}: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  die inhomogene Potentialgleichung

$$\Delta u(x) = q(x) \quad \text{für jeden inneren Punkt } x \in \Omega,$$

$$u(x) = g(x) \quad \text{für jeden Randpunkt } x \in \partial\Omega,$$

dann gilt  $\tilde{u}(x) = \check{u}(x)$  für alle  $x \in \bar{\Omega}$ .

Wie üblich folgt (1) aus (0) dank Linearität: Angenommen  $\tilde{u}, \check{u}$  erfüllen (1). Die Differenz  $u = \tilde{u} - \check{u}$  erfüllt dann (0). Also gilt  $u = 0$  und somit  $\tilde{u} = \check{u}$ . Wir müssen daher nur Aussage (0) zeigen. Wir geben zwei Beweise.

**Minimum-Maximum-Prinzip harmonischer Funktionen** R213  
Ausführung

**Beweis der Eindeutigkeit mit dem Minimum-Maximum-Prinzip:** Harmonische Funktionen nehmen ihre Extrema auf dem Rand an:

**Satz R2C: Maximumsprinzip für harmonische Funktionen**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet, also der Abschluss  $\bar{\Omega}$  kompakt. Sei  $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Da  $\bar{\Omega}$  und  $\partial\Omega$  kompakt sind, nimmt  $u$  hierauf jeweils ein Minimum und ein Maximum an. Wegen  $\bar{\Omega} \supseteq \partial\Omega$  gilt dann allgemein:

$$\min_{\bar{\Omega}} u \leq \min_{\partial\Omega} u \quad \text{und} \quad \max_{\bar{\Omega}} u \geq \max_{\partial\Omega} u$$

Zudem sei  $u$  harmonisch auf dem Inneren  $\Omega$ , also  $u \in C^2$  und  $\Delta u = 0$ .

(1) Dann nimmt  $u$  sein Minimum und Maximum auf dem Rand  $\partial\Omega$  an:

$$\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u \quad \text{und} \quad \max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$$

Seien  $u, v: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und auf dem Inneren  $\Omega$  harmonisch.

(2) Monotonie: Aus  $u \leq v$  auf dem Rand  $\partial\Omega$  folgt  $u \leq v$  auf ganz  $\bar{\Omega}$ .

(3) Eindeutigkeit: Aus  $u = v$  auf dem Rand  $\partial\Omega$  folgt  $u = v$  auf ganz  $\bar{\Omega}$ .

**Minimum-Maximum-Prinzip harmonischer Funktionen** R214  
Ausführung

**Aufgabe:** Beweisen Sie das Prinzip (1) in folgenden Verschärfungen:

(a) Auf  $\Omega$  gelte  $\Delta u > 0$ . Dann folgt  $\max u = \max u|_{\partial\Omega} > u|_{\Omega}$ .

(b) Auf  $\Omega$  gelte  $\Delta u \geq 0$ . Dann folgt  $\max u = \max u|_{\partial\Omega} \geq u|_{\Omega}$ .

(c) Auf  $\Omega$  gelte  $\Delta u < 0$ . Dann folgt  $\min u = \min u|_{\partial\Omega} < u|_{\Omega}$ .

(d) Auf  $\Omega$  gelte  $\Delta u \leq 0$ . Dann folgt  $\min u = \min u|_{\partial\Omega} \leq u|_{\Omega}$ .

**Lösung:** Durch Übergang von  $u$  zu  $-u$  gilt (a)  $\Leftrightarrow$  (c) und (b)  $\Leftrightarrow$  (d). Es genügt daher, die ersten beiden Aussagen (a) und (b) zu beweisen:

(a) Angenommen,  $u$  wäre maximal in einem inneren Punkt  $x_0 \in \Omega$ . Dann gilt  $\partial_i u(x_0) = 0$  und  $\partial_i^2 u(x_0) \leq 0$  in jede Richtung  $i = 1, \dots, n$ , also  $\Delta u(x_0) \leq 0$  im Widerspruch zur Voraussetzung  $\Delta u > 0$ .

(b) Wir betrachten  $v := u + \varepsilon|x|^2$  mit  $\varepsilon > 0$  und  $|x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$ . Damit gilt  $\Delta v = \Delta u + 2n\varepsilon > 0$ , dank (a) also  $\max v = \max_{\partial\Omega} v$ . Wir haben  $u \leq v \leq \max v = \max_{\partial\Omega} v \leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon \max_{\partial\Omega} |x|^2$ . Damit gilt  $u \leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon \max_{\partial\Omega} |x|^2$  für alle  $\varepsilon > 0$ . Für  $\varepsilon \searrow 0$  folgt  $u \leq \max_{\partial\Omega} u$ , was zu zeigen war.

**Minimum-Maximum-Prinzip harmonischer Funktionen** R215  
Ausführung

**Aufgabe:** Beweisen Sie die Monotonie (2) in folgenden Verschärfungen:

(e) In jedem Punkt im Inneren  $\Omega$  gelte  $\Delta u \geq \Delta v$ . Aus  $u \leq v$  auf dem Rand  $\partial\Omega$  folgt  $u \leq v$  auf ganz  $\Omega$ .

(f) In jedem Punkt im Inneren  $\Omega$  gelte  $\Delta u \geq \Delta v$ . Aus  $u < v$  auf dem Rand  $\partial\Omega$  folgt  $u < v$  auf ganz  $\Omega$ .

(g) In jedem Punkt im Inneren  $\Omega$  gelte  $\Delta u > \Delta v$ . Aus  $u \leq v$  auf dem Rand  $\partial\Omega$  folgt  $u < v$  im Inneren  $\Omega$ .

**Lösung:** (e) Für die Differenz  $w = u - v$  gilt  $\Delta w \geq 0$ . Dank (b) folgt  $w \leq \max w = \max_{\partial\Omega} w \leq 0$ , also  $u \leq v$ .

(f) Für  $w = u - v$  gilt  $\Delta w \geq 0$  in jedem Punkt von  $\Omega$ . Dank (b) folgt  $w \leq \max w = \max_{\partial\Omega} w < 0$ , also  $u < v$ .

(g) Für  $w = u - v$  gilt  $\Delta w > 0$  in jedem Punkt von  $\Omega$ . Dank (a) folgt  $w|_{\Omega} < \max_{\partial\Omega} w \leq 0$ , auf  $\Omega$  also  $w < 0$  und  $u < v$ .

😊 Dies können wir zur Eingrenzung durch Ober/Unterlösungen nutzen. Solche Ungleichungen und Einschachtelungen kennen wir bereits aus den Sätzen M4C und M4D für gewöhnliche Differentialgleichungen.

**Die Energiemethode beweist die Eindeutigkeit.** R216  
Ausführung

**Beweis der Eindeutigkeit mit der Energiemethode:**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\bar{\Omega}$  kompakt mit stückweise glattem Rand, etwa ein Rechteck ( $n = 2$ ) oder ein Quader ( $n = 3$ ). Vorgelegt sei eine Funktion  $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\Delta u = 0$  und  $u|_{\partial\Omega} = 0$ . Wir wollen  $u = 0$  auf  $\bar{\Omega}$  zeigen. Als mathematische Hilfsgröße untersuchen wir hierzu die **Energie**

$$E(u) := \int_{x \in \Omega} [\nabla u(x)]^2 dx \geq 0.$$

Wir formen  $E$  in ein Randintegral um und folgern  $u = 0$ :

$$E(u) \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{x \in \Omega} [\nabla u(x)]^2 dx = \int_{x \in \Omega} \nabla \cdot [u(x)\nabla u(x)] - \underbrace{u(x)\Delta u(x)}_{=0} dx$$

$$\stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_{s \in \partial\Omega} \underbrace{u(x)\nabla u(x)}_{=0} \cdot dS = 0 \quad (\text{Flussintegral, hier für } n = 3)$$

Aus  $E(u) = 0$  folgt  $\nabla u = 0$  auf  $\Omega$ , also ist  $u$  auf dem Gebiet  $\Omega$  konstant. Dank Stetigkeit von  $u$  und Randwerten  $u|_{\partial\Omega} = 0$  folgt  $u = 0$  auf ganz  $\bar{\Omega}$ . Der entscheidende Punkt ist die Anwendbarkeit des Satzes von Gauß. Hierzu müssen die Funktion  $u$  und der Rand  $\partial\Omega$  hinreichend glatt sein.

⚠ Hadamards Beispiel zeigt, dass die Lösungen einer PDE im Allgemeinen nicht stetig von den Anfangsdaten abhängen!

**Aufgabe:** (1) Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Lösen Sie für  $u: \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  die PDE

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(t, x) + \partial_x^2 u(t, x) &= 0 && \text{für alle } t > 0 \text{ und } 0 < x < \pi, \\ u(t, 0) = u(t, \pi) &= 0 && \text{Randbedingungen für } t \geq 0, \\ u(0, x) = g(x) &:= 0 && \text{Anfangswerte für } 0 < x < \pi, \\ \partial_t u(0, x) &= h(x) := n \sin(nx) && \text{Anfangswerte für } 0 < x < \pi. \end{aligned}$$

(2) Bestimmen Sie für jeden Parameter  $n = 0, 1, 2, \dots$  die Lösung  $u_n: \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  zu den Randwerten  $h_n(x) = n e^{-n/2} \sin(nx)$ .

(3) Konvergieren die Randwerte  $h_n: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  für  $n \rightarrow \infty$ ?

Konvergieren die zugehörigen Lösungen  $u_n: \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ?

**Lösung:** (1) Der Produktansatz  $u(t, x) = v(t)w(x)$  entkoppelt (dank Satz R1D) unsere PDE zu zwei Eigenwertgleichungen

$$v''(t) = -\lambda v(t) \quad \text{und} \quad w''(x) = \lambda w(x) \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Wir bestimmen zunächst die Ortsfunktion  $x \mapsto w(x)$ :

$$\begin{aligned} \lambda = 0 &\implies w(x) = a + bx \\ \lambda = \alpha^2 > 0 &\implies w(x) = a e^{\alpha x} + b e^{-\alpha x} \\ \lambda = -\omega^2 < 0 &\implies w(x) = a \sin(\omega x) + b \cos(\omega x) \end{aligned}$$

Die Konstanten  $a, b \in \mathbb{R}$  können hierbei frei gewählt werden.

Die Randbedingung  $w(0) = w(\pi) = 0$  erfüllen nur Vielfache der Lösung  $w(x) = a \sin(\omega x)$  mit  $\omega = n \in \mathbb{N}$ , also  $\lambda = -n^2$ .

Die Gleichung  $v''(t) = n^2 v(t)$  wird gelöst durch  $v(t) = a e^{nt} + b e^{-nt}$ .

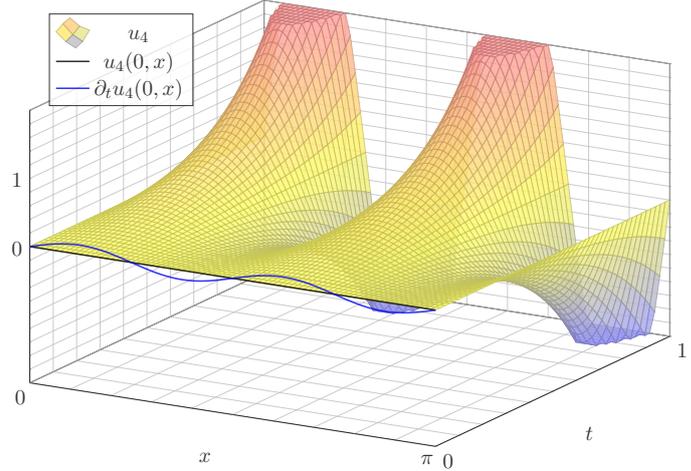
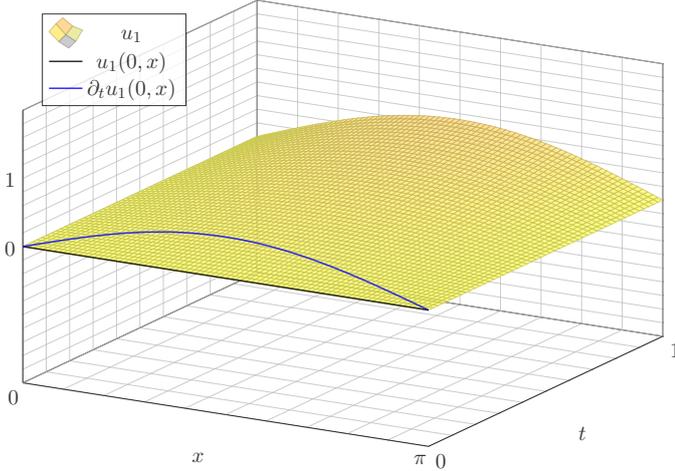
Wir erhalten so die Eigenfunktion  $u(t, x) = (a e^{nt} + b e^{-nt}) \sin(nx)$ .

Der Anfangswert  $u(0, x) = 0$  erfordert  $a = -b$ , und  $\partial_t u(0, x) = n \sin(nx)$  erfordert  $a = 1/2$ . Damit finden wir schließlich die erhoffte Lösung:

$$u(t, x) = \sinh(nt) \sin(nx)$$

(2) Dank Linearität finden wir  $u_n(t, x) = e^{-n/2} \sinh(nt) \sin(nx)$

(3) Für  $n \rightarrow \infty$  konvergieren die Anfangsdaten  $h_n \rightarrow 0$  gleichmäßig gegen die Nullfunktion, nicht aber die zugehörigen Lösungen:  $u_n \not\rightarrow 0!$



**Aufgabe:** Wir suchen Lösungen  $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  der Wärmeleitung:

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) &= \kappa \partial_x^2 u(t, x) && \text{für alle } t \in \mathbb{R} \text{ und } x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= \sum_n c_n \sin(nx) && \text{Anfangswerte für } t = 0. \end{aligned}$$

(1) Finden Sie alle Lösungen in Produktform  $u(t, x) = v(t)w(x)$ .

(2) Was folgt daraus für Anfangswerte  $u(0, x) = \sum_n c_n \sin(nx)$ ?

**Lösung:** (1) Der Produktansatz  $u(t, x) = v(t)w(x)$  separiert zu

$$v'(t) = \lambda v(t), \quad \kappa w''(x) = \lambda w(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Wir nutzen die Anfangsdaten  $w(x) = \sin(nx)$  und  $v(0) = 1$ . Daraus lesen wir  $\lambda = -n^2 \kappa$  ab und erhalten  $v(t) = e^{-n^2 \kappa t}$ .

(2) Linearkombination / Superposition ergibt die Lösung

$$u(t, x) = \sum_n c_n e^{-n^2 \kappa t} \sin(nx)$$

Für  $t > 0$  gilt: Hohe Frequenzen klingen extrem schnell ab.

Für  $t < 0$  gilt: Hohe Frequenzen werden extrem verstärkt.

(3) Was bedeutet das für die Stabilität der Wärmeleitungsgleichung?  
(a) Wenn sie vorwärts läuft? (b) Wenn wir sie rückwärts betrachten?  
Ist das Problem demnach gut gestellt im Sinne von Hadamard?

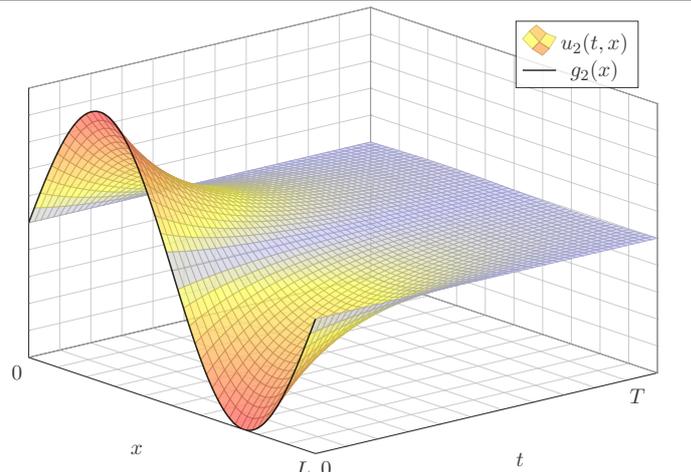
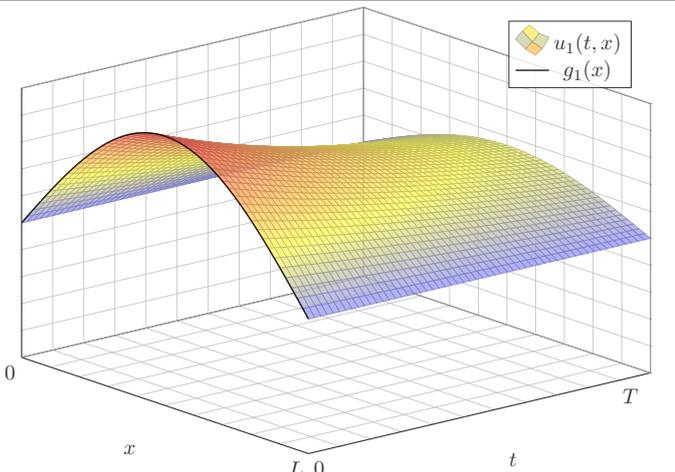
**Lösung:** (3) Eine partielle Differentialgleichung (PDE), hier als Anfangs- und Randwertproblem (ARWP), heißt **gut gestellt**, wenn genau eine Lösung existiert und diese stetig von den gegebenen Daten abhängt.

Für die Wärmeleitungsgleichung sind Existenz und Eindeutigkeit nicht offensichtlich, wir werden beides im nächsten Kapitel noch diskutieren. Die Abhängigkeit von den Anfangsdaten können wir sofort ablesen:

☺ Für die (übliche, vorwärtslaufende) Wärmeleitung hängt die Lösung  $u: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig von den Anfangsdaten  $u(0, -) = u_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ab: Ist  $u_0$  klein, so auch  $u$  (in einer geeigneten Norm als Präzisierung).

☹ Für die rückwärtslaufende Wärmeleitung gilt dies offensichtlich nicht: Die Anfangsdaten  $u(0, x) = n^{-1} \sin(nx)$  sind beliebig klein für  $n \rightarrow \infty$ , doch die Lösung  $u(t, x) = n^{-1} e^{-n^2 \kappa t} \sin(nx)$  wird für  $t < 0$  beliebig groß.

⚠ Für manche Anfangsdaten existiert die Lösung nur für  $t \geq 0$ .



### Wellengleichung und die harmonisch schwingende Saite

R301  
Übung

Wie schwingt die Saite eines Musikinstruments (Geige, Klavier, Gitarre)? Nach d'Alembert 1747 beschrieb Euler 1748 die Problemstellung so:

*Eine Saite wird gespannt und in eine von der geradlinigen wenig abweichende, sonst aber beliebige Lage gebracht, und nachher sich selbst überlassen.*  
*Man bestimme die vollständige schwingende Bewegung der Saite.*

**Aufgabe:** (0) Beschreiben Sie die Lage  $u(t, x)$  einer gezupften Saite für alle  $x \in [0, L]$  und  $t \geq 0$  durch eine PDE mit Rand- und Anfangswerten.

(1) Lösen Sie zunächst den **Separationsansatz**  $u(t, x) = v(t)w(x)$ .

(2) Skizzieren Sie  $u_n(t, x) = \cos(n\pi ct/L) \sin(n\pi x/L)$  für  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Erfüllt diese Funktion die PDE und alle Rand- und Anfangswerte?

**Lösung:** (0) Wir suchen  $u: \mathbb{R} \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}: (t, x) \mapsto u(t, x)$ . Dazu gilt:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(t, x) &= c^2 \partial_x^2 u(t, x) && \text{für alle } t \in \mathbb{R} \text{ und } 0 < x < L, \\ u(t, 0) &= u(t, L) = 0 && \text{Randwerte für } x \in \{0, L\} \text{ und } t \geq 0, \\ u(0, x) &= g(x) && \text{Anfangsposition für } t = 0 \text{ und } 0 \leq x \leq L, \\ \partial_t u(0, x) &= 0 && \text{Anfangsgeschwindigkeit für } t = 0. \end{aligned}$$

### Wellengleichung und die harmonisch schwingende Saite

R302  
Übung

(1) Der Produktansatz  $u(t, x) = v(t)w(x)$  separiert zu: **R117**

$$v''(t) = \lambda v(t), \quad c^2 w''(x) = \lambda w(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Die Lösungspaare hängen von der Separationskonstanten  $\lambda \in \mathbb{R}$  ab:

$$\begin{aligned} \lambda = 0: & \quad v(t) = a_1 + a_2 t, \\ & \quad w(x) = b_1 + b_2 x \\ \lambda = \alpha^2 > 0: & \quad v(t) = a_1 e^{\alpha t} + a_2 e^{-\alpha t}, \\ & \quad w(x) = b_1 e^{x\alpha/c} + b_2 e^{-x\alpha/c}. \\ \lambda = -\omega^2 < 0: & \quad v(t) = a_1 \cos(\omega t) + a_2 \sin(\omega t), \\ & \quad w(x) = b_1 \cos(x\omega/c) + b_2 \sin(x\omega/c) \end{aligned}$$

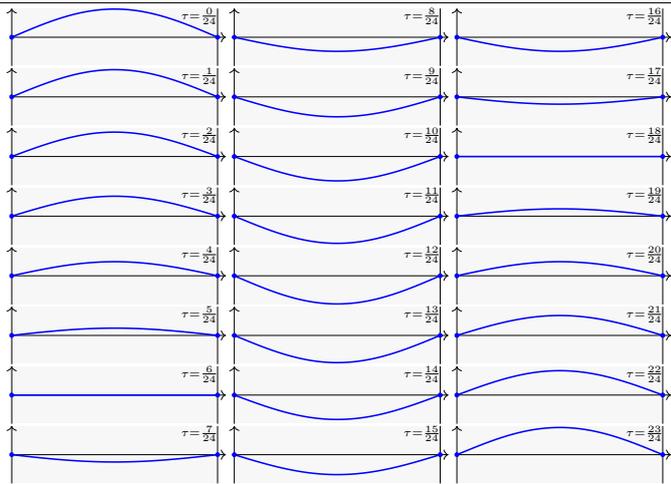
Diese lösen die *freie* Wellengleichung. Die geforderte Randbedingung  $w(0) = w(L) = 0$  erfüllt nur  $\sin(n\pi x/L)$  für  $n \in \mathbb{N}$ , also  $\omega = n\pi c/L$  und

$$u_n(t, x) = [a_n \cos(n\pi ct/L) + b_n \sin(n\pi ct/L)] \sin(n\pi x/L)$$

Da wir zudem  $\partial_t u(0, x) = 0$  für alle  $x \in [0, L]$  fordern, folgt  $b_n = 0$ .

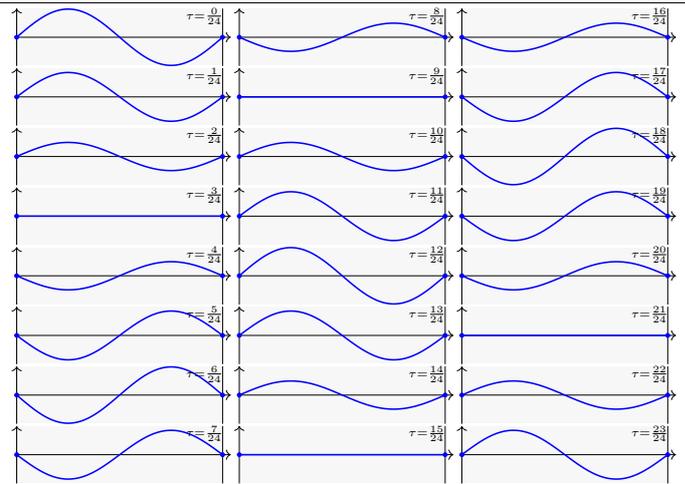
### Die harmonisch schwingende Saite: Eigenfunktion

R303  
Ausführung



### Die harmonisch schwingende Saite: Eigenfunktion

R304  
Ausführung



### Wellengleichung und die gezupfte Saite

R305  
Übung

Die vorige Aufgabe löst unser Problem, falls zum Startzeitpunkt  $t = 0$  die Schwingung mit  $u(0, x) = \sin(n\pi x/L)$  und  $\partial_t u(0, x) = 0$  beginnt.

**D'Alembert-Ansatz:** (3) Die Funktion  $u(t, x) = f(x \mp ct)$  beschreibt eine Welle der Form  $f$ , die mit Geschwindigkeit  $c$  nach rechts/links läuft.

(4) Lösen Sie mit diesem Ansatz das allgemeine ARWP wie oben in (0).

(5) Erklären Sie, wie die Faktorisierung  $\partial_t^2 - c\partial_x^2 = (\partial_t + c\partial_x)(\partial_t - c\partial_x)$  die Wellengleichung aus (0) in zwei einfache Transportprobleme zerlegt.

**Lösung:** (3) Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar (stetig genügt, wenn wir Ableitungen im Distributionensinne verstehen, siehe D533).

Für  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (t, x) \mapsto u(t, x) = f(x - ct)$  gilt  $\partial_x^2 u(t, x) = f''(x - ct)$  und  $\partial_t^2 u(t, x) = c^2 f''(x - ct) = c^2 \partial_x^2 u(t, x)$ . Die PDE ist also erfüllt!

(4) Wir setzen die gegebene Funktion  $g: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(0) = g(L) = 0$  ungerade und  $2L$ -periodisch fort zu  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und erhalten:

$$u(t, x) = \frac{1}{2} [g(x - ct) + g(x + ct)]$$

😊 D'Alemberts geniale Lösung überlagert zwei gegenläufige Wellen.

### Wellengleichung und die gezupfte Saite

R306  
Übung

Daniel Bernoulli hingegen war weiterhin überzeugt, dass die Bewegung aus harmonischen Grund- und Oberschwingungen bestehen müssen. Er war unzufrieden mit d'Alemberts Lösung und schrieb 1753:

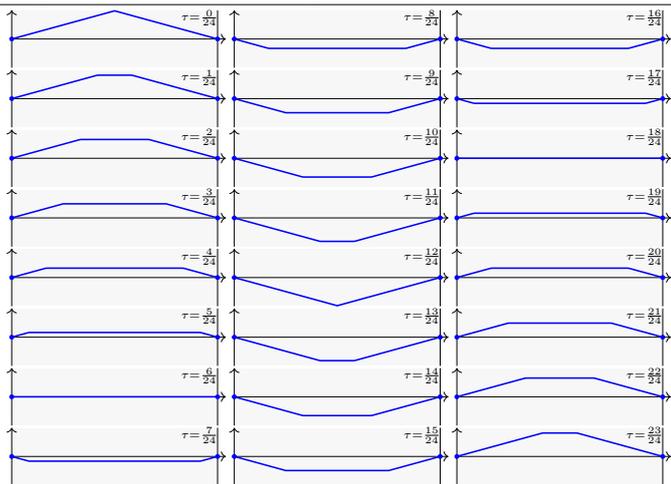
*Ich folgere daraus, dass alle schwingenden Körper eine Unmenge von Tönen von sich geben [...], aber diese Vielfalt der Schwingungen bei der Saite verschweigen die Herren d'Alembert und Euler. [...] In der Tat stimmen alle Musiker darin überein, dass eine gezupfte Saite außer ihrem Grundton zugleich auch noch andere, sehr viel hellere Töne von sich gibt. Dies ist der Beweis dafür, dass sich in einer und derselben Saite eine Überlagerung mehrerer Arten taylorscher [harmonischer] Schwingungen zugleich einstellen kann.*

Wer hat denn nun Recht? D'Alembert (1747) und Euler (1748) mit ihrer Summe gegenläufiger Wellen oder Taylor (1713) und Bernoulli (1753) mit der Überlagerung vieler stehender harmonischer Schwingungen?

Diese Kontroverse dauerte über fünfzig Jahre. Die revolutionäre Lösung lieferte Fourier (1807): Beide haben Recht! Jede (physikalisch relevante) Anfangsposition kann als Reihe harmonischer Terme dargestellt werden. Fouriers Theorie erklärte auch, wie die Koeffizienten zu bestimmen sind.

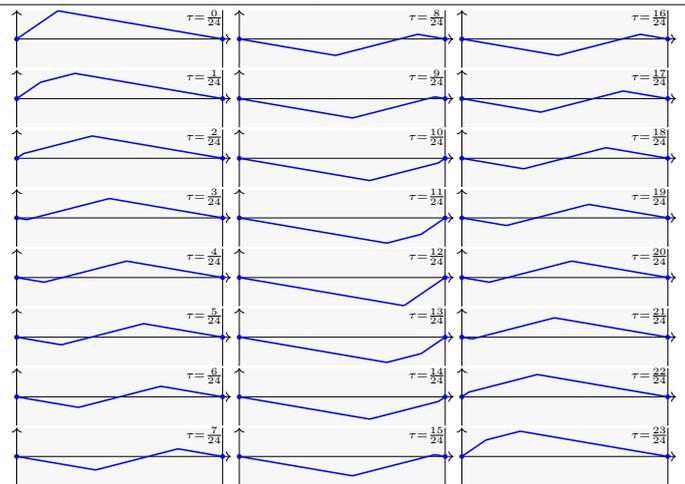
### Die gezupfte Saite: gegenläufige Wellen

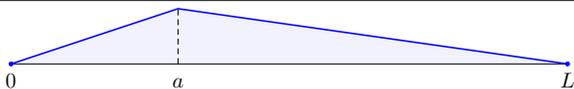
R307  
Ausführung



### Die gezupfte Saite: gegenläufige Wellen

R308  
Ausführung





**Aufgabe:** (6) Zu  $0 < a < L$  betrachten wir die Anfangsposition

$$g : [0, L] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto g(x) = \begin{cases} x/a & \text{für } 0 \leq x \leq a, \\ (L-x)/(L-a) & \text{für } a \leq x \leq L. \end{cases}$$

Überlagern Sie die Eigenfunktionen aus (1–2)

$$u_n(t, x) = \cos(n\pi ct/L) \sin(n\pi x/L)$$

für  $n = 1, 2, 3, \dots$  durch „unendliche Linearkombination“ zu einer Reihe

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(t, x)$$

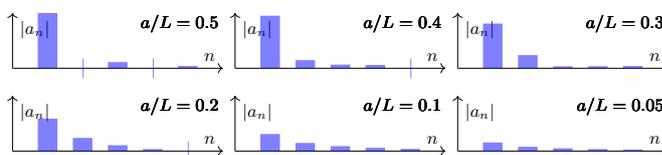
mit Anfangswerten  $u(0, x) = g(x)$  und  $\partial_t u(0, x) = 0$  für alle  $x \in [0, L]$ . Wie bestimmen Sie effizient und sicher die Koeffizienten  $a_1, a_2, a_3, \dots$ ?

(7) Zeichnen Sie die ersten Partialsummen dieser Reihenentwicklung.

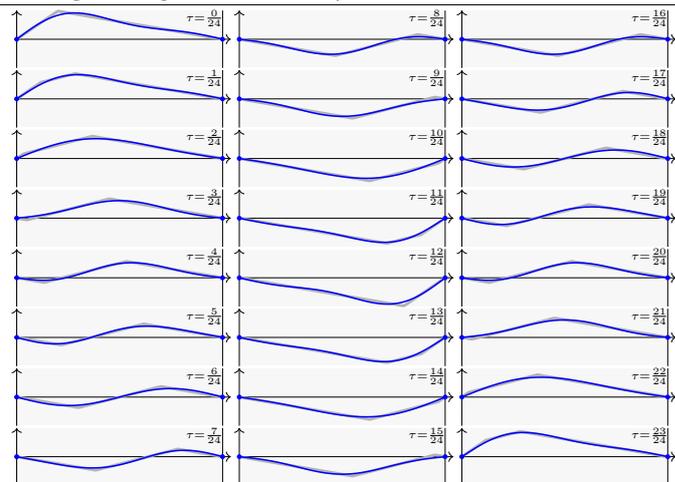
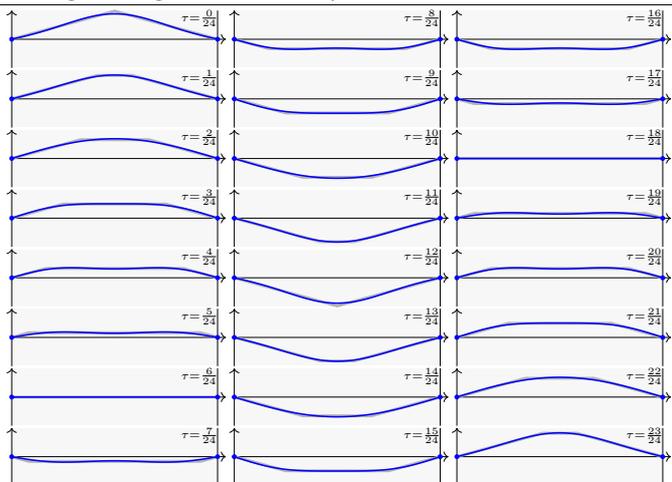
**Lösung:** (6) Es gilt bereits  $\partial_t u_n(0, x) = 0$ , folglich auch  $\partial_t u(0, x) = 0$ . Für  $u(0, x) = g(x)$  bestimmen wir  $a_n$  durch Fourier-Analyse und finden

$$u(t, x) = \frac{2L^2}{\pi^2 a(L-a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi a/L)}{n^2} \sin(n\pi x/L) \cos(n\pi ct/L).$$

Die  $n$ -te Schwingung hat die Amplitude  $\sin(n\pi a/L)/n^2$ , hängt also von der Stelle  $a \in [0, L]$  ab, an der gezupft wird. Etwa bei  $a = 0.2L$  sind erste und zweite Oberschwingung recht stark, was einen vollen Klang bewirkt.



(7) Die folgenden Graphiken zeigen die Summe der ersten drei Terme. 😊 Die Näherung ist schnell recht gut. Fourier-Theorie wirkt auch hier!



Lösungen suchen wir zuerst mit dem Produktansatz  $u(t, x) = v(t) w(x)$ . Das ist zunächst nur geraten, mit etwas Anschauung und Erfahrung. Wir haben Glück und finden die Eigenfunktionen  $u_n(t, x) = v_n(t) w_n(x)$ , genug um mit  $u(t, x) = \sum a_n v_n(t) w_n(x)$  alle Bedingungen zu erfüllen.

Unsere Konstruktion von  $u(t, x)$  zeigt somit die **Existenz** einer Lösung. Dies zeigt jedoch noch keineswegs die **Eindeutigkeit**: Es könnte noch weitere Lösungen der PDE geben, die aber unserem Ansatz entgehen. D'Alemberts Ansatz liefert eine weitere Lösung. Sind beide gleich?

Wir wünschen uns sehnlichst die Eindeutigkeit der gesuchten Lösung. Mehrdeutigkeiten müssen wir erkennen und nötigenfalls auch beheben: Sind noch mehrere Lösungen möglich, so stellen wir geeignete weitere Bedingungen, um die physikalisch sinnvollen Lösungen herauszuheben.

Dieses Vorgehen beruht auf der Überzeugung, dass die physikalische Entwicklung **deterministisch** ist. Ein brauchbares mathematisches Modell soll die zukünftige Entwicklung vorhersagen und muss daher eine **eindeutige Lösung** haben, nämlich die physikalisch beobachtete.

**Satz R3A: Eindeutigkeitssatz für die Wellengleichung**

(0) Löst  $u : [0, T] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  in  $C^2$  die homogene Wellengleichung

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t, x) - c^2 \partial_x^2 u(t, x) = 0 & \text{für } 0 \leq t < T \text{ und } a \leq x \leq b, \\ u(t, a) = u(t, b) = 0 & \text{Dirichlet-Randbedingungen für } t \geq 0 \\ \partial_x u(t, a) = \partial_x u(t, b) = 0 & \text{Neumann-Randbedingungen für } t \geq 0, \\ u(0, x) = 0, \partial_t u(0, x) = 0 & \text{Anfangswerte für } t = 0 \text{ und } a \leq x \leq b, \end{cases}$$

dann gilt  $u(t, x) = 0$  für alle  $(t, x) \in [0, T] \times [a, b]$ .

(1) Lösen  $\tilde{u}, \hat{u} : [0, T] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  in  $C^2$  die inhomogene Wellengleichung

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t, x) - c^2 \partial_x^2 u(t, x) = f(t, x), \\ u(t, a) = \ell(t), u(t, b) = r(t) \text{ oder} \\ \partial_x u(t, a) = \ell(t), \partial_x u(t, b) = r(t), \\ u(0, x) = g(x), \partial_t u(0, x) = h(x) \end{cases}$$

dann gilt  $\tilde{u}(t, x) = \hat{u}(t, x)$  für alle  $(t, x) \in [0, T] \times [a, b]$ .

**Aufgabe:** Beweisen Sie die Eindeutigkeit mit der Energiemethode! Als mathematische Hilfsgröße untersuchen wir hierzu die **Energie**

$$E : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \frac{1}{2} \int_{x=a}^b [\partial_t u(t, x)]^2 + [c \partial_x u(t, x)]^2 dx \geq 0.$$

(0) Berechnen Sie  $\dot{E} = 0$ , folgern Sie  $E = 0$  und schließlich  $u = 0$ .

(1) Folgern Sie die allgemeine Aussage (1) aus der speziellen (0).

**Lösung:** (0) Zur Abkürzung schreiben wir  $\partial_x u = u_x$  und  $\partial_t u = u_t$  usw. Dank  $u \in C^2$  nutzen wir  $u_{xt} = u_{tx}$  nach dem Satz D4A von Schwarz.

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) &\stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{2} \partial_t \int_{x=a}^b u_t^2 - c^2 u_x^2 dx \stackrel{\text{Satz D3A}}{=} \int_{x=a}^b u_t u_{tt} + c^2 u_x u_{xt} dx \\ &\stackrel{\text{part}}{=} \int_{x=a}^b \underbrace{u_t (u_{tt} - c^2 u_{xx})}_{=0 \text{ Wellengleichung}} dx + \underbrace{[c u_x u_t]_{x=a}^b}_{=0 \text{ Randbedingung}} = 0 \end{aligned}$$

Aus  $u(0, x) = 0$  für  $x \in [a, b]$  folgt  $E(0) = 0$ , somit  $E(t) = 0$  für alle  $t \geq 0$ . Das bedeutet  $\partial_t u(t, x) = \partial_x u(t, x) = 0$  für alle  $(t, x) \in [0, T] \times [a, b]$ . Zusammen mit  $u(0, x) = 0$  folgt daraus  $u(t, x) = 0$  für alle  $(t, x)$ .

(1) Gegeben seien Lösungen  $\tilde{u}, \hat{u} : [0, T] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zu den Daten (1). Die Differenz  $u = \tilde{u} - \hat{u}$  erfüllt alle Gleichungen aus (0), also  $u = 0$ . Daraus folgt  $\tilde{u} = \hat{u}$ . Es kann also höchstens eine Lösung geben!

😊 Wir nutzen geschickt die lineare Struktur der Problemstellung!

😊 Die Energiemethode ist für PDE ungemein nützlich und vielseitig.

😊 Der Eindeutigkeitssatz gilt allgemein für alle stetigen Lösungen  $u$ , wenn wir Ableitungen im Distributionensinne verstehen, siehe D533.

😊 In unserem Beispiel erhalten wir (vereinfacht für  $L = \pi$ ):

$$\frac{1}{2} [g(x-ct) + g(x+ct)] = \frac{2}{a(\pi-a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{n^2} \sin(nx) \cos(ncy)$$

Links steht die Lösung nach d'Alembert und Euler als Summe gegenläufiger Wellen. Rechts steht die Lösung nach Bernoulli und Fourier als unendliche Reihe harmonischer Schwingungen. Dank Eindeutigkeitssatz R3A kann es jedoch nur eine Lösung geben, also sind beide gleich.

☹ Nicht jede PDE besitzt eine Lösung; selbst wenn sie eine besitzt, so doch meist nicht elementar, das heißt in geschlossener Form.  
 😊 In solchen Fällen hilft meist nur der **Potenzreihenansatz** Q333: Existenz- und Eindeutigkeitssatz Q3B von Cauchy-Kowalewskaja  
 😊 **Fourier-Transformation** löst  $P(\partial) u(x) = g(x)$  für jedes Polynom  $P(x) = \sum a_\nu x^\nu$ . Die Transformation ergibt nämlich  $P(i\xi) \hat{u}(\xi) = \hat{g}(\xi)$ , Auflösen zu  $\hat{u}(\xi) = \hat{g}(\xi)/P(i\xi)$  und Rücktransformation liefert dann  $u$ : Dies garantiert der Existenzsatz R1A von Ehrenpreis-Malgrange.  
 In der Praxis treten sehr häufig partielle Differentialgleichungen auf. Erfahrungsgemäß sind die allermeisten höchstens **zweiter Ordnung**.  
 😊 Lineare PDE **erster** Ordnung lösen wir entlang **Charakteristiken**. Die wichtigsten linearen PDE **zweiter** Ordnung sind folgende Modelle: Die Poisson-Gleichung  $\Delta u = \rho$ , die Wellengleichung  $\partial_t^2 u - c^2 \Delta u = \rho$  und die Wärmeleitungsgleichung  $\partial_t u - \kappa \Delta u = q$  mit  $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ .  
 Nach diesen drei Modellgleichungen klassifiziert man lineare PDE zweiter Ordnung in **elliptisch**, **hyperbolisch** und **parabolisch** R110.

Kompaktheit garantiert Eindeutigkeit.

Die Konstruktion einer Lösung oder erfolgreiche Probe eines Kandidaten zeigt die **Existenz** einer Lösung, aber noch nicht die **Eindeutigkeit**: Es könnte weitere Lösungen geben, die unserem Ansatz entgehen.  
 Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet, also der Abschluss  $\bar{\Omega}$  kompakt.  
 (0) Löst  $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  die homogene Poisson-Gleichung  

$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{für jeden inneren Punkt } x \in \Omega,$$

$$u(x) = 0 \quad \text{für jeden Randpunkt } x \in \partial\Omega,$$
 dann gilt  $u(x) = 0$  für alle  $x \in \bar{\Omega}$ .  
 (1) Lösen  $\tilde{u}: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  die inhomogene Poisson-Gleichung  

$$\Delta u(x) = q(x) \quad \text{für jeden inneren Punkt } x \in \Omega,$$

$$u(x) = g(x) \quad \text{für jeden Randpunkt } x \in \partial\Omega,$$
 dann gilt  $\tilde{u}(x) = \tilde{u}(x)$  für alle  $x \in \bar{\Omega}$ .  
 Wie üblich folgt (1) aus (0) dank Linearität: Angenommen  $\tilde{u}, \tilde{u}$  erfüllen (1). Die Differenz  $u = \tilde{u} - \tilde{u}$  erfüllt dann (0). Also gilt  $u = 0$  und somit  $\tilde{u} = \tilde{u}$ .

Separation (Klausur Februar 2016)

Wir untersuchen für  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  die partielle Differentialgleichung  

$$\partial_x^2 u(x, y) + 6 \partial_x u(x, y) = \partial_y^2 u(x, y).$$
 Gesucht sind Lösungen in Produktform  $u(x, y) = v(x) w(y) \neq 0$ .  
**Aufgabe:** (1) Formulieren Sie die Gleichungen für  $v(x)$  und  $w(y)$ .  
 (2) Finden Sie alle Lösungen der Form  $u(x, y) = v(x) \cdot \cos(3y)$ .  
**Lösung:** (1) Wir folgen dem Separationsansatz:  

$$\frac{v''(x) + 6v'(x)}{v(x)} = \frac{w''(y)}{w(y)} = \lambda \implies \begin{cases} v''(x) + 6v'(x) = \lambda v(x) \\ w''(y) = \lambda w(y) \end{cases}$$
 😊 Zu jedem  $\lambda \in \mathbb{R}$  können wir diese beiden ODE lösen. Speziell:  
 (2) Aus  $w(y) = \cos(3y)$  folgt  $w''(y) = -9w(y)$ , also  $\lambda = -9$ .  
 Wir lösen die zugehörige Gleichung  $v''(x) + 6v'(x) + 9v(x) = 0$ .  
 Wir finden  $u(x, y) = (c_1 + c_2 x) e^{-3x} \cdot \cos(3y)$  mit  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Probe!

Existenz, Eindeutigkeit, Superposition

**Aufgabe:** Eine quadratische Kupferplatte mit Kantenlänge 1m wird an zwei gegenüberliegenden Seiten konstant auf 100°C bzw. 200°C geheizt, an den beiden anderen konstant auf 0°C gekühlt. (1) Formulieren und (2) lösen Sie die PDE für die stationäre Temperaturverteilung  $u$ !  
 (3) Wie viele Lösungen  $u$  existieren? Wie können Sie sicher sein?  
**Lösung:** (1) auf dem Quadrat  $Q = [0, 1] \times [0, 1]$  suchen wir  $u: Q \rightarrow \mathbb{R}$ . Die allgemeine Wärmeleitungsgleichung lautet  $\partial_t u = \kappa \Delta u + q$ . Im Bereich  $Q$  gebe es keine Quellen oder Senken, also  $q = 0$ . Im stationären Zustand gilt  $\partial_t u = 0$ , also haben wir  $\Delta u = 0$ :  

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0 \quad \text{auf dem Quadrat } Q = [0, 1] \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$$
 mit  $u(0, y) = u(1, y) = 0, u(x, 0) = 100, u(x, 1) = 200$ .  
 (2) Wir haben den grundlegenden Fall auf Seite R201 bereits eindeutig gelöst durch  $v: Q \rightarrow \mathbb{R}$ . Bitte wiederholen Sie sorgfältig alle Argumente! Aus der dortigen ergibt sich unsere hiesige Lösung durch Superposition, nämlich als die Linearkombination  $u(x, y) = 2v(x, y) + v(x, 1 - y)$ .

Trennung der Variablen durch Produktansatz

Zu lösen sei eine **separierbare Differentialgleichung** der Form

$$P(x, \partial_x) u(x, y) = Q(y, \partial_y) u(x, y).$$

Gegeben sind Intervalle  $X, Y \subseteq \mathbb{R}$  und hierauf die Differentialoperatoren  $P(x, \partial_x) = \sum_{j=0}^m a_j(x) \partial_x^j$  und  $Q(y, \partial_y) = \sum_{k=0}^n b_k(y) \partial_y^k$  mit  $a_j, b_k$  stetig.  
 Das bedeutet anschaulich:  $P$  operiert nur auf  $x$  und  $Q$  operiert nur auf  $y$ .  
 Als Lösungen gesucht sind Funktionen  $u: X \times Y \rightarrow \mathbb{K}: (x, y) \mapsto u(x, y)$ . In diesem Falle eignet sich der **Produktansatz** gemäß Satz R1D:  
 Sei  $u: X \times Y \rightarrow \mathbb{K}: u(x, y) = v(x) \cdot w(y)$  Produkt von  $0 \neq v \in C^m(X, \mathbb{K})$  und  $0 \neq w \in C^n(Y, \mathbb{K})$ . Dann ist die obige PDE äquivalent zu den beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen / Eigenwertgleichungen

$$P(x, \partial_x) v(x) = \lambda v(x) \quad \text{und} \quad Q(y, \partial_y) w(y) = \lambda w(y)$$

mit einem gemeinsamen Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{K}$  als **Separationskonstante**. Lösung sind Eigenfunktionen  $u(x, y) = v(x)w(y)$  und Superpositionen. Gleiches gilt für  $u(x_1, \dots, x_n) = u_1(x_1) \cdots u_n(x_n)$  in mehreren Variablen.

Minimum-Maximum-Prinzip harmonischer Funktionen

Beweise für die Eindeutigkeit liefern die **Energiemethode** und das folgende **Minimum-Maximum-Prinzip** für harmonische Funktionen.  
 Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet, also der Abschluss  $\bar{\Omega}$  kompakt. Sei  $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Da  $\bar{\Omega}$  und  $\partial\Omega$  kompakt sind, nimmt  $u$  hierauf jeweils ein Minimum und ein Maximum an. Wegen  $\bar{\Omega} \supseteq \partial\Omega$  gilt dann allgemein:  

$$\min_{\bar{\Omega}} u \leq \min_{\partial\Omega} u \quad \text{und} \quad \max_{\bar{\Omega}} u \geq \max_{\partial\Omega} u$$
 Zudem sei  $u$  harmonisch auf dem Inneren  $\Omega$ , also  $u \in C^2$  und  $\Delta u = 0$ .  
 (1) Dann nimmt  $u$  sein Minimum und Maximum auf dem Rand  $\partial\Omega$  an:  

$$\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u \quad \text{und} \quad \max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$$
 Seien  $u, v: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und auf dem Inneren  $\Omega$  harmonisch. Dann gilt:  
 (2) Monotonie: Aus  $u \leq v$  auf dem Rand  $\partial\Omega$  folgt  $u \leq v$  auf ganz  $\bar{\Omega}$ .  
 (3) Eindeutigkeit: Aus  $u = v$  auf dem Rand  $\partial\Omega$  folgt  $u = v$  auf ganz  $\bar{\Omega}$ .  
 😊 Dies können wir zur Eingrenzung durch Ober/Unterslösungen nutzen. Das Minimum-Maximum-Prinzip gilt ebenso diskret für endliche Graphen (Satz T4B) und beweist neben Eindeutigkeit auch Existenz der Lösung!

Separation (Klausur September 2016)

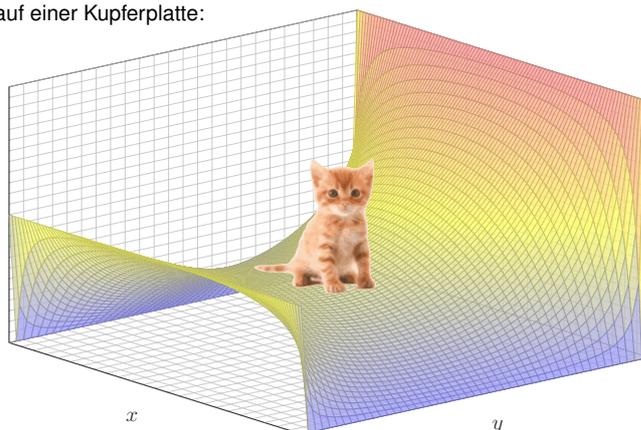
Wir untersuchen für  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  die partielle Differentialgleichung  

$$\partial_x^2 u(x, y) + 10 \partial_x u(x, y) = \partial_y^2 u(x, y).$$
 Gesucht sind Lösungen in Produktform  $u(x, y) = v(x) w(y) \neq 0$ .  
**Aufgabe:** (1) Formulieren Sie die Gleichungen für  $v(x)$  und  $w(y)$ .  
 (2) Finden Sie alle Lösungen der Form  $u(x, y) = v(x) \cdot \cos(4y)$ .  
**Lösung:** (1) Wir folgen dem Separationsansatz:  

$$\frac{v''(x) + 10v'(x)}{v(x)} = \frac{w''(y)}{w(y)} = \lambda \implies \begin{cases} v''(x) + 10v'(x) = \lambda v(x) \\ w''(y) = \lambda w(y) \end{cases}$$
 😊 Zu jedem  $\lambda \in \mathbb{R}$  können wir diese beiden ODE lösen. Speziell:  
 (2) Aus  $w(y) = \cos(4y)$  folgt  $w''(y) = -16w(y)$ , also  $\lambda = -16$ .  
 Wir lösen die zugehörige Gleichung  $v''(x) + 10v'(x) + 16v(x) = 0$ .  
 Wir finden  $u(x, y) = (c_1 e^{-8x} + c_2 e^{-2x}) \cdot \cos(4y)$  mit  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Probe!

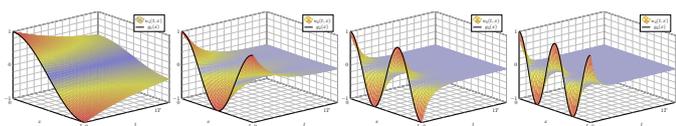
Existenz, Eindeutigkeit, Superposition

Stationäre Wärmeverteilung auf einer Kupferplatte:



Kapitel S

Die Wärmeleitungsgleichung



Et ignem regunt numeri. [Selbst das Feuer beherrschen die Zahlen.]

Joseph Fourier (1768–1830), *Théorie analytique de la chaleur* (1822)

[Les méthodes] C'est dans les travaux d'application qu'on doit les étudier; c'est là qu'on juge leurs capacités et qu'on apprend la manière de les utiliser.

Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)

Inhalt dieses Kapitels S

- 1 Die Wärmeleitungsgleichung und ihre freien Lösungen
  - Von der Wärmebilanz zur Differentialgleichung
  - Wärmeleitungskern und Superposition
  - Lösung durch Fourier–Transformation
- 2 Die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung als ARWP
  - Wie schnell kühlt ein Stab über seine Enden ab?
  - Was passiert bei gleichmäßigem Aufheizen?
  - Was passiert bei Isolierung an den Rändern?
- 3 Existenz und Eindeutigkeit und Näherung des ARWP
  - Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen
  - Energie und Minimum-Maximum-Prinzip
  - Approximation durch finite Differenzen
- 4 Die dreidimensionale Wärmeleitungsgleichung als ARWP
  - Wie schnell kühlt eine Kugel über ihren Rand ab?
  - Anwendungsbeispiele aus Küche, Keller, Krimi
  - Fazit: Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

Motivation und Zielsetzung

Die **Wärmeleitungsgleichung** oder **Diffusionsgleichung** im  $\mathbb{R}^3$  lautet:

$$\partial_t u(t, x, y, z) - \kappa \Delta u(t, x, y, z) = q(t, x, y, z) \quad \text{mit} \quad \Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$$

Typischerweise ist  $u$  die Wärmedichte und  $q$  die Wärmeleistungsdichte, jeweils abhängig von der Zeit  $t \geq 0$  und dem Ort  $(x, y, z) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ . Die Konstante  $\kappa > 0$  ist die Temperaturleitfähigkeit des Materials.

Diese Gleichung tritt in vielen Anwendungen und den verschiedensten Kontexten auf, nicht zuletzt löst Google zur Bewertung von Webseiten eine diskrete Version der Wärmeleitung auf dem Linkgraphen. [T453]

Sie ist eine partielle Differentialgleichung, linear zweiter Ordnung, und das archetypische Beispiel einer **parabolischen** Differentialgleichung.

😊 Die Wärmeleitungsgleichung folgt aus der Energieerhaltung, dem Gaußschen Integralsatz und Fouriers Gesetz der Wärmeleitung.

Zur Wiederholung wollen wir mit dieser Herleitung beginnen.

😊 Die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung können wir explizit angeben. Sie wird Wärmeleitungskern genannt und beschreibt allgemein, explizit und quantitativ die freie Wärmeausbreitung im  $\mathbb{R}^n$ .

Motivation und Zielsetzung

Zur Vereinfachung betrachten wir zunächst den **eindimensionalen Fall**:

$$\partial_t u(t, x) - \kappa \partial_x^2 u(t, x) = q(t, x)$$

Für  $q = 0$  erhalten wir die **homogene Wärmeleitungsgleichung**:

$$\partial_t u(t, x) - \kappa \partial_x^2 u(t, x) = 0$$

Die zeitliche Ableitung ist proportional zur zweiten räumlichen Ableitung. Diese entspricht der räumlichen Krümmung von  $u$  (konkav / konvex):

Genau dann gilt  $\partial_t u(t, x) = 0$ , wenn  $\partial_x^2 u(t, x) = 0$ . In diesem Falle ist  $x \mapsto u(t, x)$  eine Gerade; überall fließt genauso viel Wärme ab wie zu.

Das Lösungsverfahren verläuft nach einem bewährten Schema: Durch den Produktansatz  $u(t, x) = v(t)w(x)$  trennen wir die Variablen. Für räumlich begrenzte Wärmeverteilungen müssen wir zusätzlich Randbedingungen berücksichtigen, etwa  $u(t, 0) = u(t, L) = 0$ .

Zur Lösung der vorgegebenen Anfangswerte  $u(0, x)$  nutzen wir unsere Kenntnisse und Vorarbeit zu Fourier–Reihen. Hierzu hat Fourier seine Theorie ursprünglich entwickelt. Alles fügt sich wunderbar zusammen!

Fouriers Wärmeleitungsgleichung

**Ziel:** Wie berechnen wir den Wärmefluss in einem Körper?



Wärmebilanz für  $K =$  Kaninchen bei  $t \in$  Winter

Wir betrachten ein Gebiet  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  und ein Zeitintervall  $I = [t_0, t_1]$  und suchen eine Beziehung zwischen Wärmeleistungsdichte  $q: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , Wärmedichte  $u: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und Wärmefluss  $\vec{f}: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Fouriers Wärmeleitungsgleichung

- Aufgabe:** (1) Sei  $K \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  kompakt, etwa ein Würfel. Formulieren Sie die Wärmebilanz für  $K$  in Worten und als Volumen-/Flussintegrale. (2) Formen Sie dies um zu einem einzigen Volumenintegral. (3) Folgern Sie hieraus die zugehörige Differentialgleichung. (4) Vereinfachen Sie schließlich durch die Annahme  $\vec{f} = -\kappa \nabla u$ .

**Lösung:** (1) Für jedes Kompaktum  $K \in \Omega$  gilt die Wärmebilanz:

$$\begin{aligned} &\text{Von den Wärmequellen in } K \text{ zugeführte Energie} \\ &= \text{Zuwachs der in } K \text{ enthaltenen Wärmeenergie} \\ &+ \text{Wärmefluss über den Rand von } K \text{ nach außen} \end{aligned}$$

Als Integralgleichung formuliert bedeutet dies:

$$\iint_K q(t, x) \, dx = \frac{d}{dt} \iiint_K u(t, x) \, dx + \iint_{S=\partial K} \vec{f}(t, x) \cdot \vec{n} \, dS$$

Alle Funktionen seien so oft stetig differenzierbar wie in der folgenden Rechnung benötigt. Ich greife hier schon mal vor:  $q$  sei stetig,  $f$  einmal stetig diff'bar,  $u$  zweimal stetig diff'bar.

Fouriers Wärmeleitungsgleichung

(2) Mit Gauß (G3G) verwandeln wir Flussintegrale in Volumenintegrale:

$$\iint_{S=\partial K} \vec{f}(t, x) \cdot \vec{n} \, dS \stackrel{\text{Gauß}}{\stackrel{\text{G3G}}{=}} \iiint_K \nabla \cdot \vec{f}(t, x) \, dx$$

Dürfen wir die Ableitung unters Integral ziehen?  $K$  kompakt,  $\partial_t u$  stetig!

$$\frac{d}{dt} \iiint_K u(t, x) \, dx \stackrel{\text{Kpkt}}{\stackrel{\text{D3c}}{=}} \iiint_K \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) \, dx$$

Dank Linearität des Integrals erhalten wir ein einziges Volumenintegral:

$$\iiint_K \left[ \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + \nabla \cdot \vec{f}(t, x) - q(t, x) \right] dx = 0.$$

(3) Diese lokale Wärmebilanz gilt für jedes Kompaktum  $K \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ . Das gilt genau dann, wenn der (stetige!) Integrand verschwindet (H1A):

$$\partial_t u(t, x) + \nabla \cdot \vec{f}(t, x) = q(t, x)$$

Diese Gleichung gilt überall dort, wo etwas entsteht ( $q$ ), gespeichert wird ( $u$ ) und fließt ( $\vec{f}$ ). Die Wärmeleitungsgleichung heißt deshalb auch Diffusionsgleichung und tritt in vielfältigen Anwendungen auf. Wir werden sie am Ende des Semesters mit Fourier–Theorie lösen können. Spezialfall: Für  $q = 0$  sowie  $u = \rho$  und  $\vec{f} = \rho \vec{v}$  erhalten wir erneut die Kontinuitätsgleichung.

Fouriers Wärmeleitungsgleichung

(4) Wärme fließt von warm nach kalt, genauer  $\vec{f} = -\kappa \nabla u$ . Einsetzen:

$$\partial_t u(t, x) + \nabla \cdot [-\kappa \nabla u(t, x)] = q(t, x)$$

Mit dem Laplace–Operator  $\Delta = \nabla \cdot \nabla$  schreiben wir dies kurz

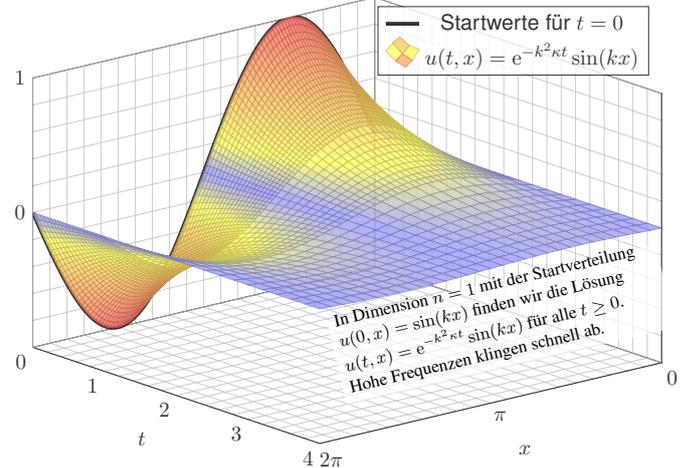
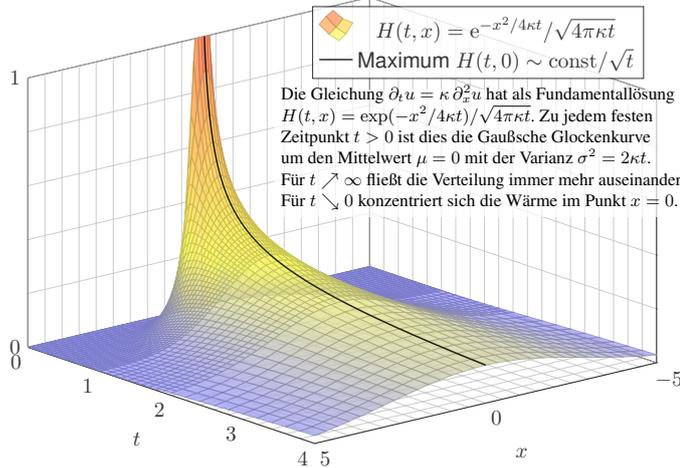
$$\partial_t u - \kappa \Delta u = q \quad \text{mit} \quad \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2.$$

Physikalische Begründung: Wärme ist (vereinfacht) proportional zur Temperatur  $T$ , genauer  $u = \rho c T$  mit Dichte  $\rho$  und Wärmekapazität  $c$ . Sie fließt proportional zur Temperaturdifferenz, also  $\vec{f} = -\lambda \nabla T$  mit Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$ . Demnach gilt  $\vec{f} = -\kappa \nabla u$  mit  $\kappa := \lambda / (\rho c)$ . [S223] Zur Vereinfachung sei hier die Temperaturleitfähigkeit  $\kappa(t, x)$  räumlich konstant und isotrop.

Wir erhalten so Fouriers berühmte **Wärmeleitungsgleichung** (1822):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \Delta u = q \quad \text{mit} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

Dies ist eine lineare partielle Differentialgleichung in  $u$  (links) mit Inhomogenität  $q$  (rechts). Sie beschreibt, wie sich die Wärme in einem Körper ausbreitet. Joseph Fourier (1768–1830) hat sie in seiner Arbeit *Théorie analytique de la chaleur* 1822 erstmals eingehend untersucht und hierzu die nach ihm benannte Fourier–Theorie entwickelt, mit der wir uns dieses Semester beschäftigen. Gesucht ist  $u$ , gegeben sind Anfangswerte und  $q$ . Wie sehen die Lösungen aus? Im homogenen Fall ohne Quellen ( $q = 0$ ) können wir die Fundamentallösung angeben! [S516]



**Satz S1A: Lösung des Cauchy-Problems,  $\exists \& E$**

Zu lösen sei die homogene Wärmeleitungsgleichung (als AWP)

$$\partial_t u(t, x) - \kappa \Delta u(t, x) = 0 \quad \text{für alle } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}^n,$$

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{Anfangswerte für } x \in \mathbb{R}^n.$$

Gegeben sei  $u_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit Schranke  $|u_0(x)| \leq a e^{b|x|^\alpha}$ ,  $\alpha < 2$ .

**Existenz:** Dann wird unser Problem gelöst durch das Integral

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} H(t, x - \xi) u_0(\xi) d\xi \quad \text{für } t > 0.$$

Zu jedem  $T > 0$  gilt eine Schranke  $|u(t, x)| \leq A e^{B|x|^2}$  auf  $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ .

**Eindeutigkeit:** Unsere Lösung  $u$  ist die einzige mit dieser Schranke.

Ausführlich bedeutet das: Sind  $\tilde{u}, \hat{u}: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Lösungen mit Abstand beschränkt durch  $|\tilde{u}(t, x) - \hat{u}(t, x)| \leq A e^{B|x|^2}$ , so gilt  $\tilde{u} = \hat{u}$ .

**Satz S1B: exotische Lösung, Tychonov 1935**

Sei  $\alpha > 1$ . Wir kennen (von Seite B438) die  $C^\infty$ -glatte Funktion

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto g(t) := \begin{cases} e^{-1/t^\alpha} & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{für } t \leq 0. \end{cases}$$

Zu  $\kappa > 0$  konstruieren wir daraus

$$u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (t, x) \mapsto u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(t)}{\kappa^n} \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Diese Reihe konvergiert in jedem Punkt  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ . Die so definierte Funktion  $u$  ist  $C^\infty$ -glat, und wir dürfen termweise ableiten. Daher gilt

$$\partial_t u(t, x) - \kappa \partial_x^2 u(t, x) = 0 \quad \text{für alle } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R},$$

$$u(0, x) = 0 \quad \text{Anfangswerte für } x \in \mathbb{R}.$$

⚠ Die Nullfunktion erfüllt ebenso dieses AWP, aber dennoch gilt  $u \neq 0$ . Eindeutigkeit S1A greift nicht, denn  $u(t, x)$  wächst schneller als  $A e^{B|x|^2}$ .

Zu lösen sei die **inhomogene Wärmeleitungsgleichung** (als AWP)

$$\partial_t u(t, x) - \kappa \partial_x^2 u(t, x) = f(t, x) \quad \text{für alle } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R},$$

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{Anfangswerte für } x \in \mathbb{R}.$$

Gegeben sind  $u_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f: \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , gesucht ist  $u: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ . Randwerte sind hier nicht vorgegeben, wir arbeiten unbegrenzt auf  $\mathbb{R}$ .

**Aufgabe:** Lösen Sie dies durch Fourier-Transformation bezüglich  $x$ . Welche Rechenregeln nutzen / welche Voraussetzungen benötigen Sie?

😊 Unser Ziel ist zunächst, eine Lösung  $u(t, x)$  in Form einer expliziten Integralformel zu finden. Ist dies gelungen, so können wir den gewählten Rechenweg präzisieren oder die Formel eigenständig untersuchen.

⚠ Die hier verwendeten Sätze und Rechenregeln benötigen gewisse Voraussetzungen. Gehen Sie in einem ersten Durchgang davon aus, dass alle Voraussetzungen erfüllt sind. Diese sind schließlich in einem zweiten Durchgang nachzuprüfen. Genaueres erklärt der folgende Satz.

**Lösung:** (1) Wir transformieren und nutzen den Ableitungssatz K2A:

$$u(t, x) \circ \bullet U(t, \xi), \quad u_0(x) \circ \bullet U_0(\xi), \quad f(t, x) \circ \bullet F(t, \xi)$$

$$\partial_t u(t, x) = \kappa \partial_x^2 u(t, x) + f(t, x) \circ \bullet \partial_t U(t, \xi) = \underbrace{-\kappa \xi^2}_{y'(t)} \underbrace{U(t, \xi)}_{y(t)} + \underbrace{F(t, \xi)}_{b(t)}$$

(2) Diese lineare Differentialgleichung in  $t$  mit Parameter  $\xi$  löst M2E:

$$U(t, \xi) = e^{-\kappa \xi^2 t} U_0(\xi) + \int_{\tau=0}^t e^{-\kappa \xi^2 (t-\tau)} F(\tau, \xi) d\tau$$

(3) Wir kennen die (rück)Transformation der Glockenkurve aus K1F:

$$e^{-\kappa \xi^2 t} \circ \bullet e^{-x^2/4\kappa t} / \sqrt{2\kappa t} = H(t, x) \sqrt{2\pi}$$

(4) Das Produkt (rück)transformiert zur Faltung gemäß Satz K2B:

$$\hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi) \circ \bullet (f * g)(x) / \sqrt{2\pi}$$

(5) Wir erhalten so schließlich die ersehnte Lösung dank Fubini C1E:

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} H(t, x - \xi) u_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} H(t - \tau, x - \xi) f(\tau, \xi) d\xi d\tau$$

Die eindimensionale inhomogene Wärmeleitungsgleichung  $\partial_t u(t, x) - \kappa \partial_x^2 u(t, x) = f(t, x)$  mit rechter Seite  $f(t, x)$  und Anfangswert  $u(0, x) = 0$  wird gelöst durch das Integral

$$u(t, x) = \int_{\tau=0}^t \int_{\xi \in \mathbb{R}} H(t - \tau, x - \xi) f(\tau, \xi) d\xi d\tau.$$

Anschaulich ist  $H(t - \tau, x - \xi)$  eine Fundamentallösung, die verschoben in  $(\tau, \xi)$  startet. Wenn man diese Formel erst einmal vermutet, dann kann man sie auch direkt nachprüfen:

$$\frac{1}{t - t_0} \int_{\tau=t_0}^t \int_{\mathbb{R}} H(t - \tau, x - \xi) f(\tau, \xi) d\xi d\tau \rightarrow f(t, x) \quad \text{für } t_0 \nearrow t.$$

Dieser Grenzwert ist anschaulich plausibel. Die genaue Rechnung benötigt als Voraussetzung, dass  $f$  nicht nur beschränkt und stetig, sondern sogar Hölder-stetig ist: Auf jedem Kompaktum in  $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$  gilt die lokale Schranke  $|f(t, x) - f(t', x')| \leq C[|t - t'|^\alpha + |x - x'|^\alpha]$  für geeignete Konstanten  $C, \delta, \alpha > 0$  und alle Punkte mit Abstand  $|t - t'| < \delta$  und  $|x - x'| < \delta$ . Hinreichend aber wesentlich stärker:  $f$  ist Lipschitz-stetig oder sogar stetig differenzierbar.

Anschließend bleibt die Ableitung unter dem Integral gemäß der Leibniz-Regel D3B:

$$\partial_t u(t, x) = f(t, x) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \partial_t H(t - \tau, x - \xi) f(\tau, \xi) d\xi d\tau$$

$$\partial_x^2 u(t, x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \partial_x^2 H(t - \tau, x - \xi) f(\tau, \xi) d\xi d\tau$$

Die Differenz ist  $\partial_t u(t, x) - \kappa \partial_x^2 u(t, x) = f(t, x)$ , denn  $\partial_t H(t, x) - \kappa \partial_x^2 H(t, x) = 0$ .

**Satz S1C: Lösung der inhomogenen Wärmeleitung,  $\exists \& E$**

Zu lösen sei die inhomogene Wärmeleitungsgleichung (als AWP)

$$\partial_t u(t, x) - \kappa \Delta u(t, x) = f(t, x) \quad \text{für alle } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}^n,$$

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{Anfangswerte für } x \in \mathbb{R}^n.$$

Gegeben sei  $u_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit Schranke  $|u_0(x)| \leq a e^{b|x|^\alpha}$ ,  $\alpha < 2$  sowie  $f: \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und stetig differenzierbar,  $f \in C_b^1$ .

**Existenz:** Dann wird unser Problem gelöst durch das Integral

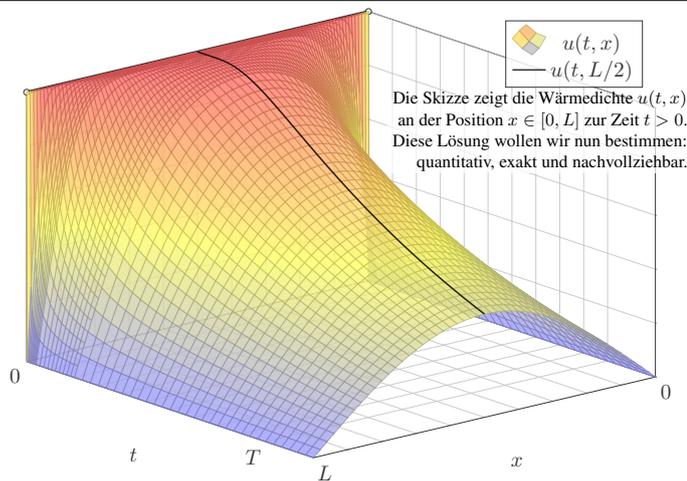
$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} H(t, x - \xi) u_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} H(t - \tau, x - \xi) f(\tau, \xi) d\xi d\tau.$$

Zu jedem  $T > 0$  gilt eine Schranke  $|u(t, x)| \leq A e^{B|x|^2}$  auf  $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ .

**Eindeutigkeit:** Unsere Lösung  $u$  ist die einzige mit dieser Schranke.

⚠ Ohne diese Schranke gibt es exotische Gegenbeispiele wie S1B.

Wie schnell kühlt ein Stab über seine Enden ab? S201



Die homogene Wärmeleitungsgleichung S202

**Aufgabe:** Lösen Sie die homogene Wärmeleitungsgleichung (ARWP)

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) - \kappa \partial_x^2 u(t, x) &= 0 && \text{für alle } t > 0 \text{ und } 0 < x < L, \\ u(t, 0) = u(t, L) &= 0 && \text{Randbedingungen für } t \geq 0, \\ u(0, x) &= g(x) && \text{Anfangswerte für } 0 < x < L. \end{aligned}$$

Dies ist ein Anfangsrandwertproblem (ARWP). Gesucht sind Funktionen  $u: \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ , die obige Gleichungen erfüllen. Dazu sei  $u$  stetig auf  $\mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, L]$ , eventuell bis auf die Ecken  $(0, 0)$  und  $(0, L)$ , und differenzierbar auf  $\mathbb{R}_{> 0} \times ]0, L[$ , einmal nach  $t$  und zweimal nach  $x$ . Der Anfangswert  $u(0, x) = g(x)$  gibt die Wärmedichte zur Zeit  $t = 0$  in jedem Punkt  $x$  vor. Der Randwert  $u(t, 0) = u(t, L) = 0$  bedeutet, dass wir an den Stabenden die Wärmedichte  $u$  konstant auf Null halten, etwa durch Kontakt mit einem großen Reservoir konstanter Temperatur.

**Lösung:** (0) Wir separieren die Variablen durch den Produktansatz

$$u(t, x) = v(t) w(x).$$

Damit entkoppeln wir unsere PDE in zwei ODE / Eigenprobleme:

$$v'(t) w(x) = \kappa v(t) w''(x) \implies \frac{1}{\kappa} \frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Trennung der Variablen durch Produktansatz S203 Erläuterung

Die linke Seite der Gleichung hängt nur von  $t$  ab, die rechte nur von  $x$ . Da wir  $t$  und  $x$  unabhängig variieren können, sind beide Seiten konstant, also gleich einer gemeinsamen Konstanten  $\lambda \in \mathbb{R}$ , siehe Satz R1D.

Aus unserer *partiellen* Differentialgleichung (PDE)

$$\partial_t u(t, x) = \kappa \partial_x^2 u(t, x)$$

erhalten wir so zwei *gewöhnliche* Differentialgleichungen (ODE):

$$v'(t) = \kappa \lambda v(t) \quad \text{und} \quad w''(x) = \lambda w(x)$$

mit einer noch unbekanntenen Separationskonstanten  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**1. Teilproblem:**  $w''(x) = \lambda w(x)$  mit Randbedingung  $w(0) = w(L) = 0$

**2. Teilproblem:**  $v'(t) = \kappa \lambda v(t)$  mit derselben Kopplungskonstanten  $\lambda$

😊 Diese Eigenwertprobleme sind gewöhnliche Differentialgleichungen, zudem linear mit konstanten Koeffizienten, also leicht zu lösen!

😊 Beide Teilprobleme sind über die Separationskonstante  $\lambda$  gekoppelt. Wir lösen beide getrennt und führen sie anschließend zusammen...

Bestimmung der Ortsfunktion  $w(x)$  S204

(1) Wir lösen zunächst das erste Teilproblem:  $w''(x) - \lambda w(x) = 0$

**1. Fall:**  $\lambda = 0$ , also  $w''(x) = 0$ . Allgemeine Lösung:

$$w(x) = a + bx \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Einsetzen in die vorgegebenen Randbedingungen:

$$w(0) = a \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{und} \quad w(L) = a + bL \stackrel{!}{=} 0$$

☹ Hieraus folgt  $a = b = 0$ . Es gibt nur die triviale Lösung!

**2. Fall:**  $\lambda = \alpha^2 > 0$ , also  $w''(x) - \alpha^2 w(x) = 0$ . Allgemeine Lösung:

$$w(x) = a e^{\alpha x} + b e^{-\alpha x} \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Einsetzen in die vorgegebenen Randbedingungen:

$$w(0) = a + b \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{und} \quad w(L) = a e^{\alpha L} + b e^{-\alpha L} \stackrel{!}{=} 0$$

☹ Hieraus folgt  $a = b = 0$ . Es gibt nur die triviale Lösung!

Bestimmung der Ortsfunktion  $w(x)$  S205

**3. Fall:**  $\lambda = -\omega^2 < 0$ , also  $w''(x) + \omega^2 w(x) = 0$ . Allgemeine Lösung:

$$w(x) = a \sin(\omega x) + b \cos(\omega x) \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Einsetzen in die vorgegebenen Randbedingungen:

$$w(0) = b \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{und} \quad w(L) = a \sin(\omega L) \stackrel{!}{=} 0$$

☹ Für  $a = 0$  erhalten wir erneut die triviale Lösung.

😊 Für  $a \neq 0$  benötigen wir  $\sin(\omega L) = 0$ , also  $\omega L = n\pi$  mit  $n \in \mathbb{N}$ .

Damit haben wir das erste Teilproblem vollständig gelöst:

$$w''(x) = \lambda w(x) \quad \text{mit} \quad w(0) = w(L) = 0$$

Als einzige nicht-triviale Lösungen erhalten wir

$$w_n(x) = a_n \sin(n\pi x/L) \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots$$

Diese Lösung gehört zur Separationskonstanten  $\lambda_n = -(n\pi/L)^2$ .

Bestimmung der Zeitfunktion  $v(t)$  S206

(1) **Erstes Eigenproblem:**  $w''(x) = \lambda w(x)$  mit  $w(0) = w(L) = 0$

**Lösungen:**  $w_n(x) = \sin(n\pi x/L)$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und  $\lambda = \lambda_n = -(n\pi/L)^2$

(2) **Zweites Eigenproblem:**  $v'(t) = \kappa \lambda v(t)$  mit  $\lambda = \lambda_n = -(n\pi/L)^2$

**Lösung:**  $v_n(t) = e^{-(n\pi/L)^2 \kappa t} = e^{-n^2 t/T}$  mit Abklingzeit  $T = L^2/\kappa\pi^2$

(3) Zusammengesetzte Eigenfunktionen:

$$u_n(t, x) = v_n(t) w_n(x) = e^{-n^2 t/T} \sin(n\pi x/L)$$

So finden wir zu unseren RWP alle Lösungen in Produktform.

Zudem gilt das Superpositionsprinzip für lineare Gleichungen:

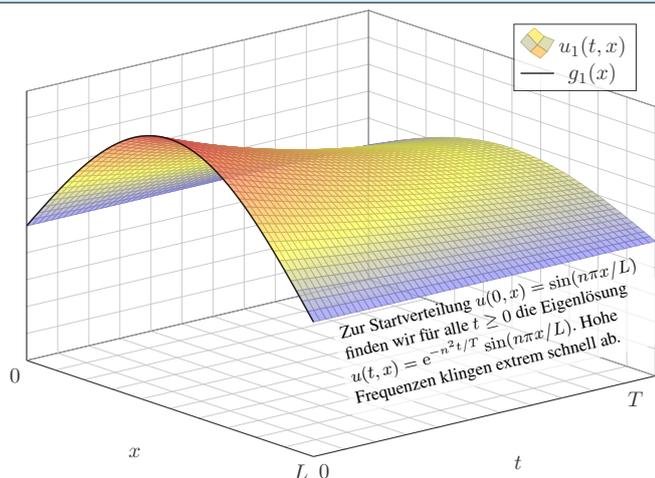
Jede Linearkombination dieser Lösungen ist ebenfalls eine Lösung.

Wir können sogar zu Reihen übergehen, Konvergenz vorausgesetzt!

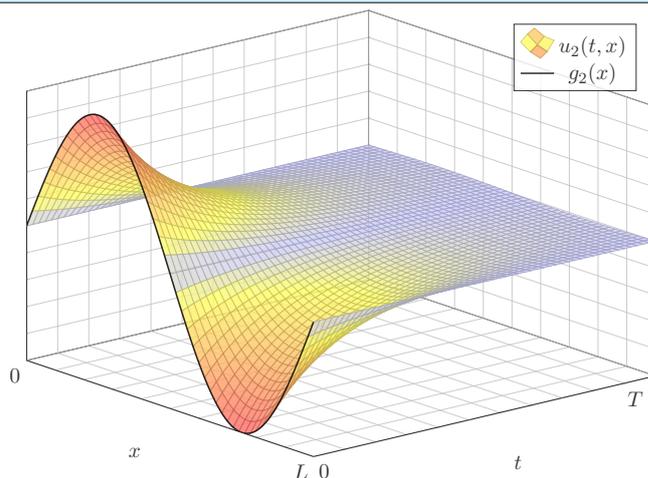
$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(t, x)$$

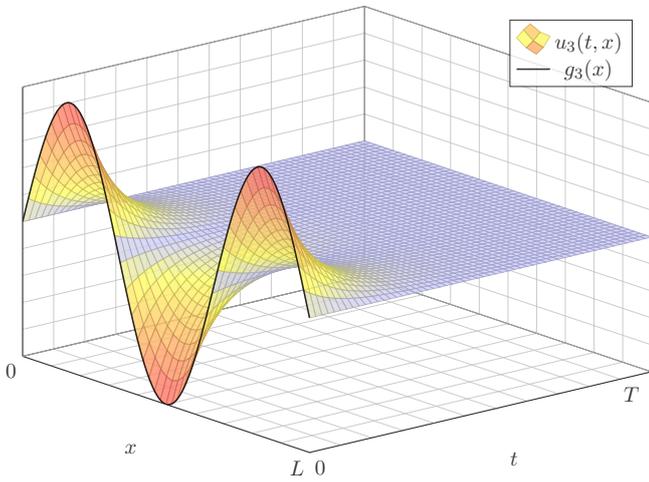
😊 Die Probe ist leicht: Es gilt  $\partial_t u = \kappa \partial_x^2 u$  sowie  $u(t, 0) = u(t, L) = 0$ .

Produktansatz: Eigenlösung  $u_1(t, x)$  S207



Produktansatz: Eigenlösung  $u_2(t, x)$  S208





(4) Die allgemeine Lösung erhalten wir durch Superposition:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t/T} \sin(n\pi x/L)$$

Einsetzen der Startzeit  $t = 0$  liefert die vorgegebenen Anfangswerte:

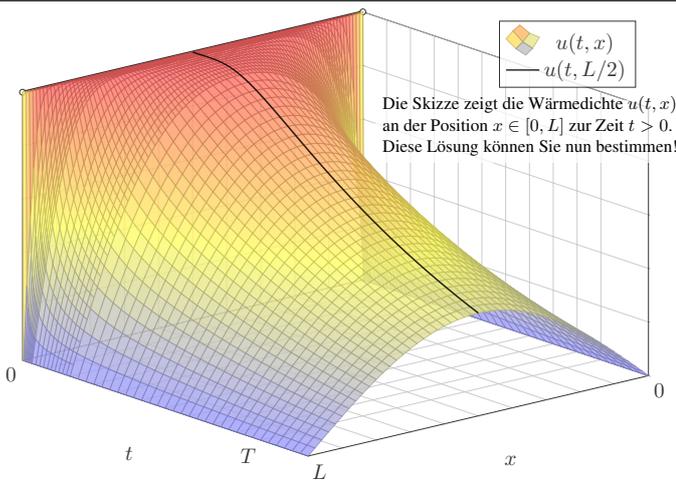
$$u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x/L) \stackrel{!}{=} g(x) \quad \text{für } 0 < x < L$$

Hier sind  $a_1, a_2, a_3, \dots$  die Koeffizienten der Fourier-Sinusreihe von  $g$ . Wir betrachten daher die ungerade Fortsetzung  $\tilde{g}$  von  $g$  auf  $[-L, L]$ :

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{für } 0 < x < L, \\ -g(-x) & \text{für } -L < x < 0. \end{cases}$$

Anschließend berechnen wir die Fourier-Reihe für  $\tilde{g}: [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Koeffizienten  $a_n$  erhalten wir aus den Anfangsdaten  $g$  dank Fourier:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{x=0}^L g(x) \sin(n\pi x/L) dx$$



**Aufgabe:** Lösen Sie die homogene Wärmeleitungsgleichung (ARWP)

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) - \kappa \partial_x^2 u(t, x) &= 0 & \text{für alle } t > 0 \text{ und } 0 < x < L, \\ u(t, 0) = u(t, L) &= 0 & \text{Randbedingungen für } t \geq 0, \\ u(0, x) &= 1 & \text{Anfangswerte für } 0 < x < L. \end{aligned}$$

**Lösung:** Wir kennen bereits die allgemeine Lösung:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t/T} \sin(n\pi x/L)$$

Für  $t = 0$  nutzen wir die Fourier-Entwicklung der Rechteckfunktion: [1225]

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x/L) \stackrel{!}{=} 1 \quad \text{mit} \quad a_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ gerade,} \\ 4/(n\pi) & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Die gesuchte Lösungsfunktion ist demnach

$$u(t, x) = 4 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(2k+1)^2 t/T} \frac{\sin((2k+1)\pi x/L)}{(2k+1)\pi}$$

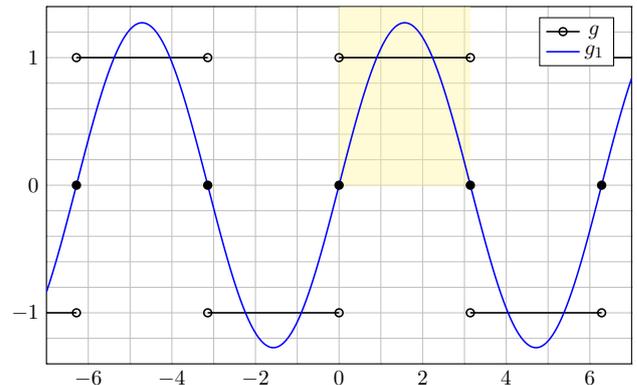
☺ Wie können wir mit der so gefundenen Lösung rechnen? Ganz konkret: Wie wurden diese schönen Graphiken erstellt? Die Reihe beschreibt die exakte Lösung und Approximationen

$$u(t, x) \approx 4 \sum_{k=0}^n e^{-(2k+1)^2 t/T} \frac{\sin((2k+1)\pi x/L)}{(2k+1)\pi}$$

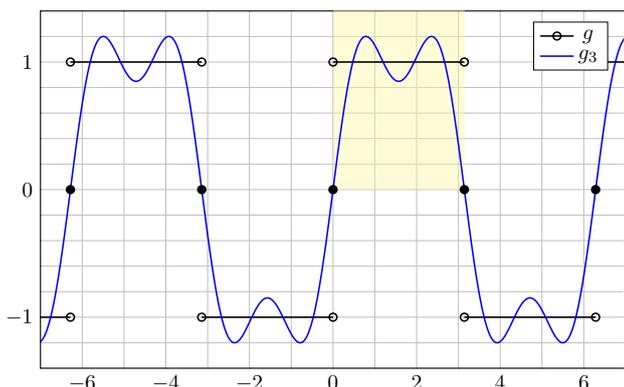
für  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Diese werden immer besser, sogar exakt für  $n \rightarrow \infty$ . Für die obige Graphik habe ich die Reihe bis  $n = 30$  aufsummiert (und zudem nahe  $t = 0$  geglättet; die folgenden Graphiken erklären warum.)

Eine wichtige und nützliche Eigenschaft der Wärmeleitung ist ihre Glättungseigenschaft: Eine „raue“ Funktion  $g(x) = u(0, x)$  hat starke hohe Frequenzen. Diese klingen jedoch bei der Wärmeleitung für  $t > 0$  besonders schnell ab. Zu  $t = 0$  dürfen die Anfangsdaten beliebig rau sein, sogar unstetig, doch zu jedem Zeitpunkt  $t > 0$  ist die Lösung glatt. In obigem Beispiel sehen wir dies drastisch:  $x \mapsto u(0, x)$  ist unstetig im Rand  $x \in \{0, L\}$ , doch für  $t > 0$  ist  $u(t, x)$  stetig, glatt, sogar analytisch!

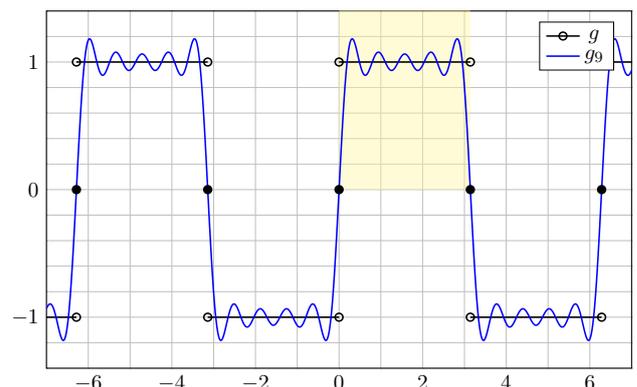
$$g(x) \sim \frac{4}{\pi} \left[ \sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \frac{\sin(7x)}{7} + \frac{\sin(9x)}{9} + \dots \right]$$

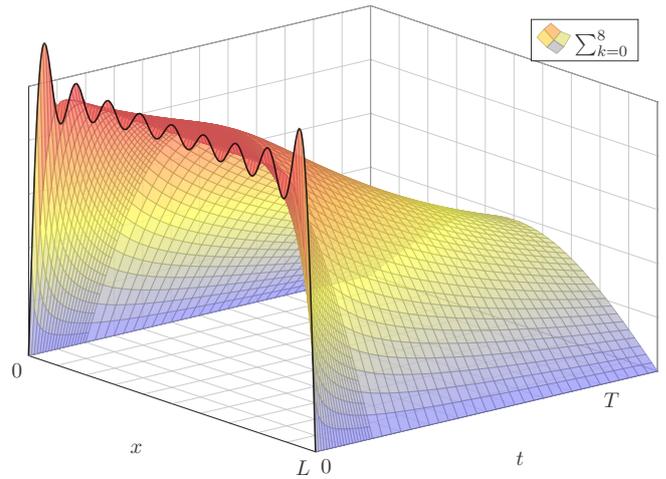
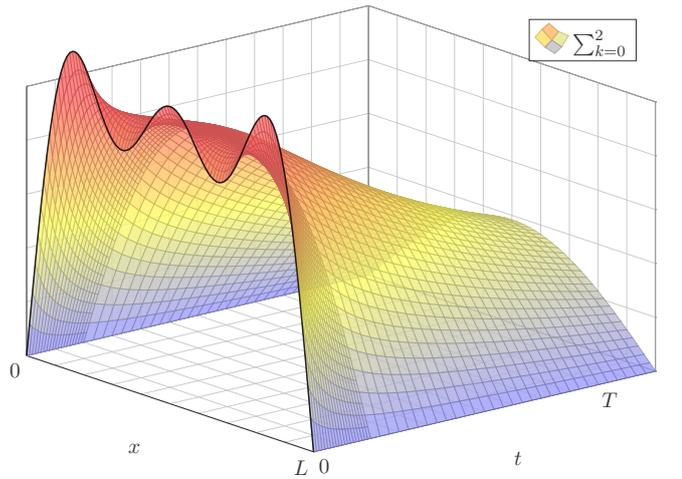
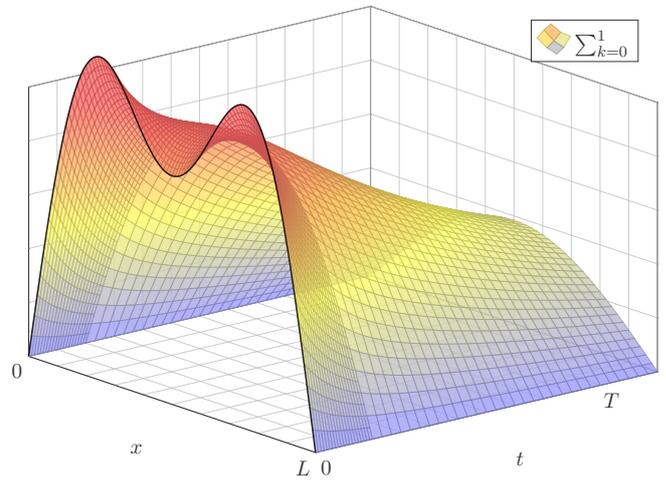
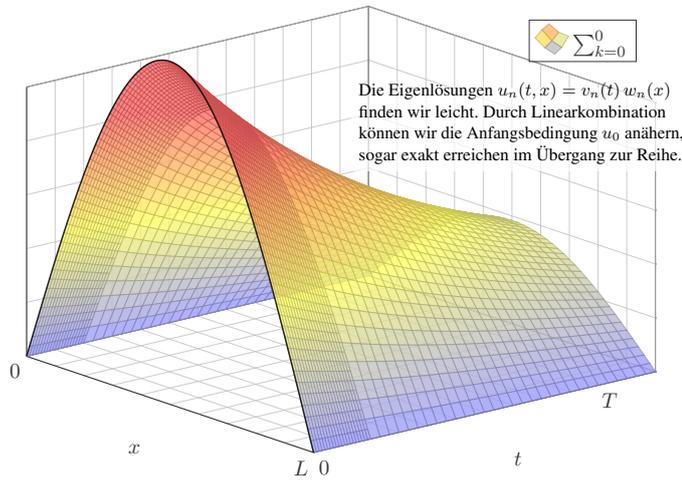


$$g(x) \sim \frac{4}{\pi} \left[ \sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \frac{\sin(7x)}{7} + \frac{\sin(9x)}{9} + \dots \right]$$



$$g(x) \sim \frac{4}{\pi} \left[ \sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \frac{\sin(7x)}{7} + \frac{\sin(9x)}{9} + \dots \right]$$





Die natürliche Zeitskala ist hier  $\tau = (\pi/L)^2 \kappa t = t/T$  mit  $T = L^2/\kappa\pi^2$ .

$$u(t, x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(2k+1)^2 t/T} \frac{\sin((2k+1)\pi x/L)}{(2k+1)}$$

$$u(t, \frac{L}{2}) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(2k+1)^2 t/T} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} \stackrel{k \gg 0}{\approx} \frac{4}{\pi} e^{-t/T}$$

😊 Leibniz-Reihe, numerisch günstig, explizite Fehlerschranke B3G!  
Wir können Wärmedichte in Temperatur umrechnen und leicht messen.  
Die Temperaturdifferenz fällt exponentiell, sehr gute Näherung für  $t > T$ .

😊 Obigen Verlauf können wir für jede Start- und Zieltemperatur nutzen: Hierzu genügt eine affin-lineare Transformation der Temperaturskala.

**Aufgabe:** Wie lange toastet Brot? Welche Temperatur wird erreicht? Welche Daten benötigen Sie? Schätzen Sie diese soweit möglich!

**Lösung:** Toastbrot der Dicke  $L = 14\text{mm}$  wird bei  $220^\circ\text{C}$  getoastet. Die Temperaturleitfähigkeit beträgt etwa  $\kappa \approx 0.5\text{mm}^2/\text{s}$ : Messen! Die natürliche Zeitskala ist hier  $T = L^2/\kappa\pi^2 \approx 40\text{s}$ : Das ist plausibel. Der Verlauf der Kerntemperatur ist (näherungsweise für  $t > T$ ):

$$t \mapsto 220^\circ\text{C} - 200^\circ\text{C} \cdot \frac{4}{\pi} e^{-t/T} = \vartheta(t)$$

$$2\text{min} = 3T \mapsto 220^\circ\text{C} - 200^\circ\text{C} \cdot \frac{4}{\pi} e^{-3} \approx 200^\circ\text{C}$$

😊 Jetzt wissen Sie, warum das Toasten doch relativ lange dauert. Bei 20mm Dicke benötigen Sie doppelt so lange... außen verbrannt?

😊 Wärmeleitung und Timing sind essentiell beim Grillen. Mangelnde Kenntnis führt zu falscher Intuition und häufig zu Fehlentscheidungen. Grillgut muss ruhen! [blog.thermoworks.com/carryover-cooking](http://blog.thermoworks.com/carryover-cooking)

Die **Temperaturleitfähigkeit**  $\kappa = \lambda/(\rho c)$  können wir berechnen aus Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$ , Dichte  $\rho$  und spezifischer Wärmekapazität  $c$ .

Material	$\rho / \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$c / \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$	$\lambda / \frac{\text{W}}{\text{m K}}$	$\kappa / \frac{\text{mm}^2}{\text{s}}$
Tannenholz	600	2720	0.12	0.07
Fensterglas	2480	700	0.87	0.50
Stahl (leg./unleg.)	7800	460	15...50	4...14
Kupfer (rein)	8940	383	400	117
Marmor	$\approx 2600$	$\approx 800$	$\approx 2.8$	$\approx 1.35$
Beton	$\approx 2400$	$\approx 880$	$\approx 2.1$	$\approx 0.99$
Granit	$\approx 2640$	$\approx 820$	$\approx 1.6$	$\approx 0.74$
Ziegelstein	$\approx 1700$	$\approx 840$	$\approx 0.4$	$\approx 0.28$
Wasser bei $0^\circ\text{C}$	999	4220	0.561	0.133
50°C	990	4181	0.642	0.155
100°C	958	4216	0.679	0.168
Luft bei 1013 hPa	1.3...1.0	$\approx 1005$	0.025...0.030	19...30

☐ Lienhard: A Heat Transfer Textbook. Dover 2020. Luft isoliert gut, dennoch ist  $\kappa$  hier groß: Zwar wird kaum Wärmeleistung übertragen ( $\lambda$ ), aber Dichte ( $\rho$ ) und Kapazität ( $c$ ) sind gering.

Wir haben oben die Wärmebilanz umgeformt zur Differentialgleichung

$$(1) \quad \partial_t u(t, x) - \nabla \cdot [\kappa \nabla u(t, x)] = q(t, x).$$

Erst an dieser Stelle spielt das Medium des Wärmetransports eine Rolle. Die Materialeigenschaft  $\kappa$  wird empirisch durch Messungen bestimmt.

😊 Ist  $\kappa \in \mathbb{R}$  eine Konstante, so vereinfacht sich unsere Gleichung zu

$$(2) \quad \partial_t u(t, x) - \kappa \Delta u(t, x) = q(t, x).$$

Die Temperaturleitfähigkeit  $\kappa$  hängt nicht nur vom Material ab, sondern im Allgemeinen auch von dessen Zustand, auch von seiner Temperatur: Die PDE (1) mit  $\kappa = \kappa(t, x, u)$  ist dann nicht mehr linear in  $u$ . Schwierig!

😊 Wir betrachten hier  $\kappa$  näherungsweise als temperaturunabhängig. Die Leitfähigkeit ist eventuell richtungsabhängig, also nicht isotrop, bei Holz etwa längs und quer zu den Fasern. Im allgemeinen, anisotropen Fall ist  $\kappa(t, x) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  ein Tensor zweiter Stufe, also eine  $(3 \times 3)$ -Matrix.

😊 Wir betrachten hier nur den idealisierten Fall (2) eines homogenen, isotropen Mediums mit konstanter Temperaturleitfähigkeit  $\kappa$ . Einfacher!

**Aufgabe:** Lösen Sie die inhomogene Wärmeleitungsgleichung (ARWP)

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) - \kappa \partial_x^2 u(t, x) &= f(t, x) && \text{für alle } t > 0 \text{ und } 0 < x < L, \\ u(t, 0) = u(t, L) &= 0 && \text{Randbedingungen für } t \geq 0, \\ u(0, x) &= g(x) && \text{Anfangswerte für } 0 < x < L. \end{aligned}$$

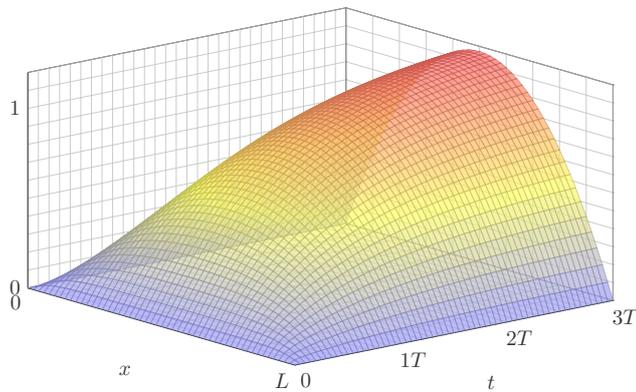
Im Gegensatz zum vorigen Modell wird hier der Stab durch Wärmequellen  $f(x, t)$  aufgeheizt. Denken Sie etwa an elektrischen Widerstand, bio/chemische Reaktion oder radioaktiven Zerfall. Der Anfangswert  $u(0, x) = g(x)$  gibt die Wärmeverteilung zur Zeit  $t = 0$  vor. Die Randwerte  $u(t, 0) = u(t, L) = 0$  bedeuten, dass wir hier die Wärmedichte  $u$  auf Null halten, also kühlen.

Dank unserer Erfahrung versuchen wir folgenden Lösungsansatz:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \sin(n\pi x/L)$$

Das imitiert die Lösungsformel, die wir oben für den homogenen Fall  $f = 0$  entwickelt haben; dort fanden wir die Lösung  $v_n(t) = a_n \exp(-n^2 t/T)$ . Wir setzen diesen erfolgreichen Ansatz in unsere PDE ein, nun mit einer allgemeinen rechten Seite  $f(t, x)$ , und bestimmen damit  $v_n(t)$ .

$$u(t, x) = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \left[ 1 - e^{-(2k+1)^2 t/T} \right] \frac{\sin((2k+1)\pi x/L)}{(2k+1)^3 \pi}$$



**Aufgabe:** Lösen Sie die homogene Wärmeleitungsgleichung (ARWP)

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) - \kappa \partial_x^2 u(t, x) &= 0 && \text{für alle } t > 0 \text{ und } 0 < x < L, \\ \partial_x u(t, 0) = \partial_x u(t, L) &= 0 && \text{Randbedingungen für } t \geq 0, \\ u(0, x) &= g(x) && \text{Anfangswerte für } 0 \leq x \leq L. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung ist wie zuvor die homogene Wärmeleitungsgleichung. Der Anfangswert  $u(0, x) = g(x)$  gibt die Wärmeverteilung zur Zeit  $t = 0$  vor. Neu ist die Randbedingung  $\partial_x u(t, 0) = \partial_x u(t, L) = 0$ : Sie bedeutet, dass keine Wärme über den Rand abfließt. Man stelle sich eine perfekte Wärmeisolierung vor. Die Lösungen zeigen dies anschaulich: Die Gesamtwärmemenge  $Q(t) = \int_{x=0}^L u(t, x) dx$  bleibt für alle Zeiten  $t \geq 0$  konstant.

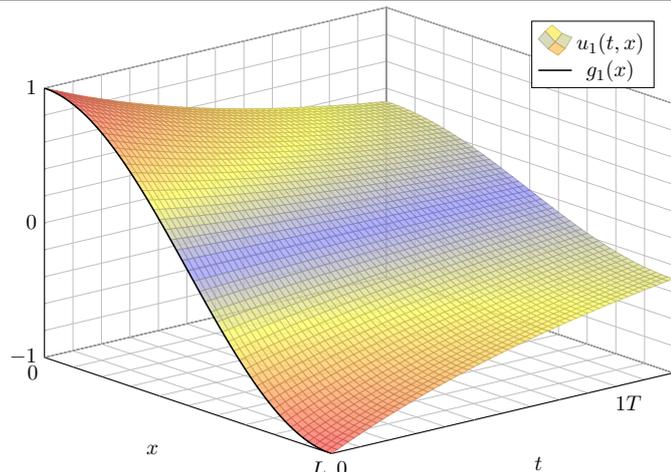
**Lösung:** Der Produktansatz  $u(t, x) = v(t) w(x)$  separiert dies zu

$$\frac{1}{\kappa} \frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)} = \lambda.$$

Wir erhalten zwei **gewöhnliche Differentialgleichungen:**

$$v'(t) = \kappa \lambda v(t) \quad \text{und} \quad w''(x) = \lambda w(x)$$

Die Randbedingung übersetzt sich in  $w'(0) = w'(L) = 0$ .



**Lösung:** Einsetzen dieses Ansatzes in die PDE:

$$\partial_t u(t, x) - \kappa \partial_x^2 u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ v_n'(t) + \kappa v_n(t) (n\pi/L)^2 \right] \sin(n\pi x/L) \stackrel{!}{=} f(t, x)$$

Für  $t = 0$  ist zudem der Anfangswert vorgegeben:

$$u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(0) \sin(n\pi x/L) \stackrel{!}{=} g(x)$$

Zum Vergleich entwickeln wir auch  $g$  und  $f$  in Fourier-Sinusreihen:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x/L), \quad f(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(n\pi x/L).$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir eine ODE erster Ordnung:

$$v_n'(t) + (n^2/T) v_n(t) = b_n(t), \quad v_n(0) = a_n$$

☺ Für  $b_n = 0$  erhalten wir erneut die vorige Lösung  $v_n(t) = a_n e^{-n^2 t/T}$ . Auch hier ist die natürliche Zeitskala  $T = L^2/\kappa\pi^2$ ; das vereinfacht!

**Aufgabe:** Lösen Sie die inhomogene Wärmeleitungsgleichung (ARWP)

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) - \kappa \partial_x^2 u(t, x) &= 1/T && \text{für alle } t > 0 \text{ und } 0 < x < L, \\ u(t, 0) = u(t, L) &= 0 && \text{Randbedingungen für } t \geq 0, \\ u(0, x) &= 0 && \text{Anfangswerte für } 0 < x < L. \end{aligned}$$

**Lösung:** Wir kennen bereits die allgemeine Lösung:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \sin(n\pi x/L)$$

Wir nutzen die Fourier-Entwicklung der Rechteckfunktion: 1225

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x/L) \stackrel{!}{=} 1 \quad \text{mit} \quad b_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ gerade,} \\ 4/(n\pi) & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Gewöhnliche Differentialgleichung für die Koeffizienten  $v_n(t)$ :

$$v_n'(t) + (n^2/T) v_n(t) = b_n/T, \quad v_n(0) = 0$$

Lösung für  $n$  gerade  $v_n(t) = 0$ , ungerade  $v_n(t) = 4/(n^3\pi) [1 - e^{-n^2 t/T}]$ .

**Erstes Teilproblem:**  $w''(x) = \lambda w(x)$  mit  $w'(0) = w'(L) = 0$

**Lösungen:**  $w_n(x) = \cos(n\pi x/L)$  mit  $\lambda = \lambda_n = -(n\pi/L)^2$

**Zweites Teilproblem:**  $v'(t) = \kappa \lambda v(t)$  mit  $\lambda = \lambda_n = -(n\pi/L)^2$

**Lösung:**  $v_n(t) = e^{-(n\pi/L)^2 \kappa t} = e^{-n^2 t/T}$  mit Abklingzeit  $T = L^2/\kappa\pi^2$

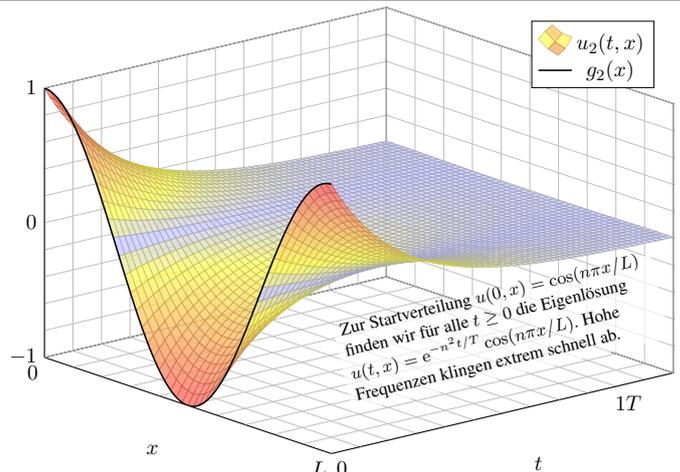
Zusammengesetzte Eigenfunktion:

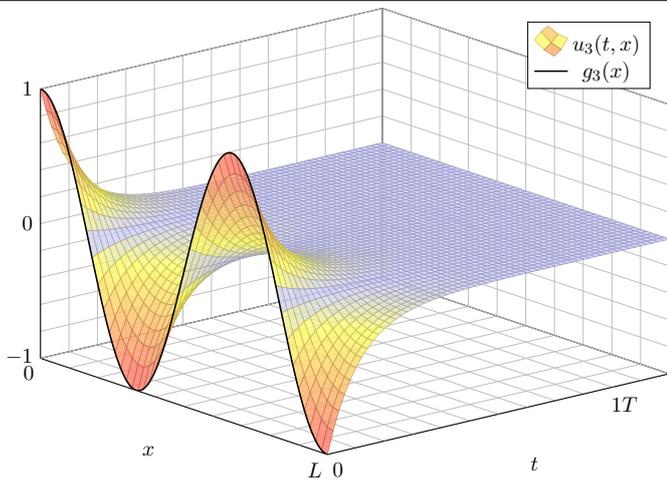
$$u_n(t, x) = v_n(t) w_n(x) = e^{-n^2 t/T} \cos(n\pi x/L)$$

Die allgemeine Lösung erhalten wir durch Superposition:

$$u(t, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t/T} \cos(n\pi x/L)$$

Hier ist die konstante Funktion  $u(t, x) = a_0/2$  eine Lösung. Wie für Fourier-Reihen üblich schreiben wir  $a_0/2$ , so dass die untenstehende Integralformel für alle  $n \in \mathbb{N}$  gleich aussieht. Stationäre Lösung: Für  $t \rightarrow \infty$  gilt  $u(t, x) \rightarrow a_0/2$ . Die Rechnung zeigt Ihnen, wie schnell! Die konstante Lösung entspricht einer homogenen Wärmeverteilung, bei der kein Wärmefluss stattfindet. Jede Lösung strebt für  $t \rightarrow \infty$  gegen diese stationäre Lösung, wie zu erwarten war.





Die allgemeine Lösung erhalten wir durch Superposition:

$$u(t, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t/T} \cos(n\pi x/L)$$

Einsetzen der Anfangswerte für  $t = 0$  liefert:

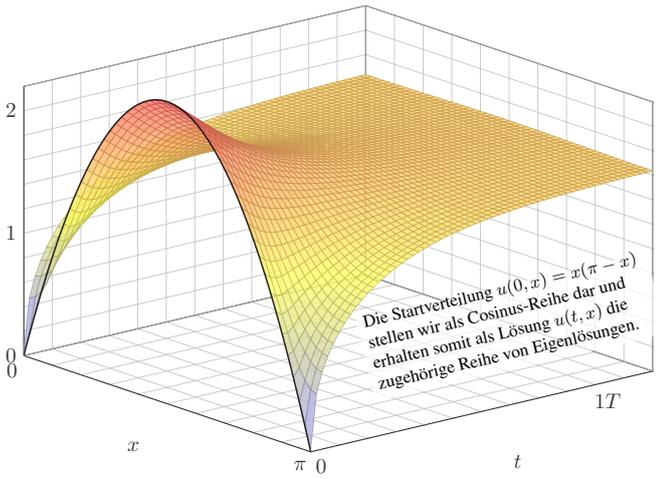
$$u(0, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x/L) \stackrel{!}{=} g(x)$$

Hier sind  $a_0, a_1, \dots$  die Koeffizienten der Fourier-Cosinusreihe von  $g$ . Wir betrachten daher die gerade Fortsetzung von  $g$  auf  $[-L, L]$ :

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{für } 0 \leq x \leq L, \\ g(-x) & \text{für } -L \leq x \leq 0. \end{cases}$$

Anschließend berechnen wir die Fourier-Reihe für  $\tilde{g}: [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Koeffizienten  $a_n$  erhalten wir aus den Anfangsdaten dank Fourier:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{x=0}^L g(x) \cos(n\pi x/L) dx$$



**Aufgabe:** Lösen Sie die homogene Wärmeleitungsgleichung (ARWP)

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) - \partial_x^2 u(t, x) &= 0 && \text{für alle } t > 0 \text{ und } 0 < x < \pi, \\ \partial_x u(t, 0) = \partial_x u(t, \pi) &= 0 && \text{Randbedingungen für } t \geq 0, \\ u(0, x) = g(x) &:= x(\pi - x) && \text{Anfangswerte für } 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned}$$

**Lösung:** Wir kennen bereits die allgemeine Lösung:

$$u(t, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} \cos(nx)$$

Für  $t = 0$  nutzen wir die Fourier-Entwicklung der Anfangswerte: [225]

$$g(x) \stackrel{!}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \quad \text{also} \quad a_n = \begin{cases} -4/n^2 & \text{für } n \geq 2 \text{ gerade,} \\ 0 & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Die gesuchte Lösungsfunktion ist demnach

$$u(t, x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty} e^{-4k^2 t} \frac{\cos(2kx)}{k^2}$$

Lösungen suchen wir bisher mit dem Produktansatz  $u(t, x) = v(t) w(x)$ . Das ist zunächst nur geraten, mit etwas Anschauung und Erfahrung. Wir haben Glück und finden die Eigenfunktionen  $u_n(t, x) = v_n(t) w_n(x)$ , genug um mit  $u(t, x) = \sum_n a_n v_n(t) w_n(x)$  alle Bedingungen zu erfüllen. Unsere Konstruktion von  $u(t, x)$  zeigt somit die **Existenz** einer Lösung. Dies zeigt jedoch noch keineswegs die **Eindeutigkeit**: Es könnte noch weitere Lösungen der PDE geben, die aber unserem Ansatz entgehen. Eine dramatische Warnung sind exotische Lösungen wie in Satz S1B. Mehrdeutigkeiten müssen wir erkennen und nötigenfalls auch beheben: Sind noch mehrere Lösungen möglich, so stellen wir geeignete weitere Bedingungen, um die physikalisch sinnvollen Lösungen herauszuheben. Dieses Vorgehen beruht auf der Überzeugung, dass die physikalische Entwicklung **deterministisch** ist. Ein brauchbares mathematisches Modell soll die zukünftige Entwicklung vorhersagen und muss daher eine **eindeutige Lösung** haben, nämlich die physikalisch beobachtete. Mathematisch bedeutet die Eindeutigkeit: Je zwei Lösungen sind gleich. Dies wollen wir nun sorgfältig als Satz formulieren und dann beweisen.

Um über Eindeutigkeit zu sprechen, müssen wir zunächst erklären, wie die Problemstellung aussieht und was wir als Lösungen zulassen.

**Definition S3A:** Anfangs- und Randwertproblem, kurz ARWP

Die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung formulieren wir wie folgt als **Anfangs- und Dirichlet-Randwertproblem**:

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) - \kappa \partial_x^2 u(t, x) &= f(t, x) && \text{für } 0 < t < T \text{ und } a < x < b, \\ u(t, a) = \ell(t), u(t, b) = r(t) &&& \text{Randbedingung für } 0 < t < T, \\ u(0, x) = g(x) &&& \text{Anfangswerte für } a < x < b. \end{aligned}$$

Gegeben sind hierzu stetige Funktionen  $f: [0, T[ \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\ell, r: [0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$  sowie  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ; schwächer genügt  $g \in L^2([a, b])$ . Bei **Neumann-Randbedingungen** fordern wir stattdessen

$$\partial_x u(t, a) = \ell(t), \partial_x u(t, b) = r(t) \quad \text{für } 0 < t < T.$$

Auch gemischte Randbedingungen sind möglich.

Stetigkeit in den Randpunkten ist nicht selbstverständlich, wie bereits unser erstes Beispiel mahnt. Wir formulieren daher besonders sorgfältig:

**Definition S3B:** Lösung des Anfangs- und Randwertproblems

Eine Funktion  $u: [0, T[ \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  nennen wir eine **Lösung** des obigen Anfangs- und Randwertproblems S3A, wenn gilt:

- (A) Auf  $]0, T[ \times ]a, b[$  existieren die Ableitungen  $\partial_t u, \partial_x u, \partial_x^2 u$  und sind dort stetig und erfüllen die Wärmeleitungsgleichung  $\partial_t - \kappa \partial_x^2 u = f$ .
- (B) Auf  $]0, T[ \times [a, b]$  sei  $u$  stetig und  $\partial_x u$  stetig fortsetzbar, und beide erfüllen auf  $]0, T[ \times \{a, b\}$  die jeweils geforderten Randbedingungen.
- (C) Es gilt  $u(0, x) = g(x)$  für alle  $x \in [a, b]$  und zudem Stetigkeit:
- (C1) Im strengen Sinne sei  $u$  stetig auf  $[0, T[ \times [a, b]$ . Schwächer:
- (C2) Für  $t \searrow 0$  gilt  $L^2$ -Konvergenz  $\int_{x=a}^b |u(t, x) - u(0, x)|^2 dx \rightarrow 0$ .

- 😊 Die starke Bedingung (C1) impliziert die schwache (C2) dank D3A.
- ⚠ Eine unstetige Startverteilung  $g$  erfordert die Abschwächung (C2): Uns genügt dann quadratische Integrierbarkeit und  $L^2$ -Konvergenz.

**Satz S3C:** Eindeutigkeitssatz für die Wärmeleitungsgleichung

(0) Löst  $u: [0, T[ \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  die homogene Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) - \kappa \partial_x^2 u(t, x) &= 0 && \text{für } 0 < t < T \text{ und } a < x < b, \\ \begin{cases} u(t, a) = u(t, b) = 0 \\ \partial_x u(t, a) = \partial_x u(t, b) = 0 \end{cases} &&& \text{Dirichlet-Randbedingungen für } t > 0 \text{ oder} \\ &&& \text{Neumann-Randbedingungen für } t > 0, \\ u(0, x) &= 0 && \text{Anfangswerte für } t = 0 \text{ und } a < x < b, \end{aligned}$$

dann gilt  $u(t, x) = 0$  für alle  $(t, x) \in [0, T[ \times [a, b]$ .

(1) Lösen  $\tilde{u}, \check{u}: [0, T[ \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) - \kappa \partial_x^2 u(t, x) &= f(t, x), \\ \begin{cases} u(t, a) = \ell(t), u(t, b) = r(t) \\ \partial_x u(t, a) = \ell(t), \partial_x u(t, b) = r(t) \end{cases} &&& \text{oder} \\ u(0, x) &= g(x), \end{aligned}$$

dann gilt  $\tilde{u}(t, x) = \check{u}(t, x)$  für alle  $(t, x) \in [0, T[ \times [a, b]$ .

Die Funktion  $u : [0, T[ \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  löse die Wärmeleitungsgleichung  $\partial_t u = \kappa \partial_x^2 u$  mit den Randbedingungen  $(u \partial_x u)(t, a) = (u \partial_x u)(t, b) = 0$ . Als mathematische Hilfsgröße untersuchen wir hierzu die **Energie**

$$E : [0, T[ \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto E(t) := \int_{x=a}^b \frac{1}{2} u(t, x)^2 dx \geq 0.$$

**Aufgabe:** Ist  $E$  stetig? Berechnen Sie  $\dot{E}(t)$  für  $0 < t < T$ . **Lösung:**

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) &\stackrel{\text{Def}}{=} \partial_t \int_{x=a}^b \frac{1}{2} u(t, x)^2 dx \stackrel{\text{Satz D3A}}{=} \int_{x=a}^b \partial_t \left[ \frac{1}{2} u(t, x)^2 \right] dx \\ &\stackrel{\text{Prod}}{=} \int_{x=a}^b u(t, x) \cdot \partial_t u(t, x) dx \stackrel{\text{PDE}}{=} \int_{x=a}^b u(t, x) \cdot \kappa \partial_x^2 u(t, x) dx \\ &\stackrel{\text{Int}}{=} \kappa \left[ \underbrace{u(t, x) \cdot \partial_x u(t, x)}_{= 0 \text{ dank Randbedingung}} \right]_{x=a}^b - \kappa \int_{x=a}^b \left[ \partial_x u(t, x) \right]^2 dx \leq 0 \end{aligned}$$

$L^2$ -Norm von  $\partial_x u$  auf  $[a, b]$

Somit kann  $t \mapsto E(t)$  nur sinken. Sie bleibt konstant nur falls  $\partial_x u = 0$ , wegen  $\partial_t u = \kappa \partial_x^2 u = 0$  also nur für konstante Lösungen  $u(t, x) = \text{const.}$

**Aufgabe:** Beweisen Sie den Eindeutigkeitssatz mit der Energiemethode!

**Lösung:** (0) Gesucht sind alle Funktionen  $u : [0, T[ \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , die die Wärmeleitung  $\partial_t u = \kappa \partial_x^2 u$  lösen (im Sinne unserer Definition S3B), wobei alle Anfangs- und Randwerte konstant gleich Null sind.

Zunächst ist klar: Die Nullfunktion  $u(t, x) = 0$  ist eine mögliche Lösung. Wir wollen nun sorgfältig nachweisen, dass dies die einzige Lösung ist:

Sei  $u : [0, T[ \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige Lösung zu den Daten (0). Aufgrund der Anfangswerte  $u(0, x) = 0$  für alle  $x \in [a, b]$  gilt  $E(0) = 0$ . Die Funktion  $E : [0, T[ \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : t \mapsto E(t)$  ist stetig dank D3A bzw. (C2). Dank der Randwerte  $u \partial_x u = 0$  für alle  $t \in ]0, T[$  gilt  $\dot{E}(t) \leq 0$ . Daraus folgt  $E(t) = 0$  für alle  $t \in [0, T[$ , also  $u(t, x) = 0$ . Das war zu zeigen.

(1) Gegeben seien Lösungen  $\tilde{u}, \hat{u} : [0, T[ \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zu den Daten (1). Die Differenz  $u = \tilde{u} - \hat{u}$  erfüllt alle Gleichungen aus (0), also  $u = 0$ . Daraus folgt  $\tilde{u} = \hat{u}$ . Es kann also höchstens eine Lösung geben!

😊 Wir nutzen geschickt die lineare Struktur der Problemstellung!

**Satz S3D:** Lösung der Wärmeleitungsgleichung,  $\exists \&E$

Zu lösen sei die eindimensionale homogene Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) - \kappa \partial_x^2 u(t, x) &= 0 \quad \text{für alle } t > 0 \text{ und } 0 < x < L, \\ u(t, 0) = u(t, L) &= 0 \quad \text{Randbedingungen für } t \geq 0, \\ u(0, x) &= g(x) \quad \text{Anfangswerte für } 0 < x < L. \end{aligned}$$

Gegeben sei  $g : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig oder allgemeiner  $g \in L^2([0, L])$ , also entwickelt  $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x/L)$  mit  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ .

Dann wird unser Problem eindeutig gelöst durch

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t/T} \sin(n\pi x/L).$$

Die natürliche Zeitskala ist die Abklingzeit  $T = L^2/\kappa\pi^2$  (Eigenzeit). Gilt sogar  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ , so ist  $u$  in  $t = 0$  stetig und dort gleich  $g$ .

😊 Wir haben oben ausführlich dargestellt, wie man diese Lösung findet. Der Satz fasst das Ergebnis zusammen und ist leicht nachzurechnen:

**Aufgabe:** Zeigen Sie, dass  $u$  die Gleichung  $\partial_t u = \kappa \partial_x^2 u$  sowie das Anfangs- und Randwertproblem löst (im Sinne unserer Definition S3B).

**Lösung:** Für alle  $t > 0$  und  $\nu \in \mathbb{N}$  gilt  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n n^\nu e^{-n^2 t/T}| < \infty$  dank der exponentiellen Dämpfung. Daher konvergiert die im Satz für  $u$  angegebene Reihe in jedem Punkt  $(t, x) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ , und die so definierte Funktion  $u : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist beliebig oft differenzierbar.

Wir dürfen termweise ableiten und finden sofort  $\partial_t u = \kappa \partial_x^2 u$ .

In den Randpunkten  $x \in \{0, L\}$  gilt offensichtlich  $u(t, x) = 0$ .

Für  $t \searrow 0$  gilt  $L^2$ -Konvergenz  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - a_n e^{-n^2 t/T}|^2 \searrow 0$  und somit  $L^2$ -Konvergenz  $\int_{x=0}^L |u(t, x) - u(0, x)|^2 dx \searrow 0$  (Fourier-Isometrie J1A).

Im Falle  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$  ist die Reihe auf ganz  $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}$  gleichmäßig konvergent, die so definierte Funktion  $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist somit stetig.

😊 Mit dieser Methode können Sie zahlreiche ähnliche Probleme lösen, insbesondere inhomogene Gleichungen mit diversen Randbedingungen.

Zu lösen ist für  $u : [0, T] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) - \kappa \partial_x^2 u(t, x) &= f(t, x) \quad \text{für } 0 < t \leq T \text{ und } a < x < b, \\ u(t, a) = \ell(t), \quad u(t, b) &= r(t) \quad \text{Randbedingungen für } t \geq 0, \\ u(0, x) &= g(x) \quad \text{Anfangswerte für } a < x < b. \end{aligned}$$

Allgemein untersuchen wir die Wärmeleitung auf einem Körper  $K$ ; hierzu sei  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  kompakt mit stückweise glattem Rand  $\partial K$ .

Obiges Beispiel in Dimension  $n = 1$  ist das kompakte Intervall  $K = [a, b]$  mit den beiden Randpunkten  $a < b$ , kurz  $\partial K = \{a, b\}$ .

Auf dem Bereich  $\Omega_T = [0, T] \times K$  sei  $u : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Zudem gelte  $\partial_t u - \kappa \Delta u = f$  auf dem **parabolischen Inneren** (*parabolic domain*)

$$D_T = ]0, T[ \times \overset{\circ}{K}.$$

Vorgegeben sind die Rand- und Anfangswerte, also die Einschränkung  $u|_{B_T}$  auf dem **parabolischen Rand** (engl. *parabolic boundary*)

$$B_T = ([0, T] \times \partial K) \cup (\{0\} \times K).$$

😊 Der Bereich  $\Omega_T$  und sein parabolischer Rand  $B_T$  sind kompakt.

Wie zuvor sei  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  kompakt,  $\Omega_T = [0, T] \times K$  und  $u : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir untersuchen  $\partial_t u = \kappa \Delta u$ , wobei  $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \dots + \partial^2/\partial x_n^2$ .

Zur Vereinfachung der Schreibweise dürfen wir  $\kappa = 1$  annehmen.

**Satz S3E:** Maximumsprinzip für die Wärmeleitungsgleichung

Auf  $\Omega_T = [0, T] \times K$  sei  $u : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Da  $\Omega_T$  und  $B_T$  kompakt sind, nimmt  $u$  hierauf Minimum und Maximum an. Wegen  $\Omega_T \supseteq B_T$  gilt also:

$$\min_{\Omega_T} u \leq \min_{B_T} u \quad \text{und} \quad \max_{\Omega_T} u \geq \max_{B_T} u$$

Zudem gelte  $\partial_t u = \Delta u$  auf dem parabolischen Inneren  $D_T = ]0, T[ \times \overset{\circ}{K}$ .

(1) Dann nimmt  $u$  sein Minimum und Maximum auf dem Rand  $B_T$  an:

$$\min_{\Omega_T} u = \min_{B_T} u \quad \text{und} \quad \max_{\Omega_T} u = \max_{B_T} u$$

Seien  $u, v : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Lösungen,  $\partial_t u = \Delta u$  und  $\partial_t v = \Delta v$  auf  $D_T$ .

(2) Monotonie: Aus  $u \leq v$  auf dem Rand  $B_T$  folgt  $u \leq v$  auf ganz  $\Omega_T$ .

(3) Eindeutigkeit: Aus  $u = v$  auf dem Rand  $B_T$  folgt  $u = v$  auf ganz  $\Omega_T$ .

😊 In der PDE  $\partial_t u - \Delta u = f$  bedeutet  $f \leq 0$  Senken oder Quellen.

**Aufgabe:** Beweisen Sie das Prinzip (1) in folgenden Verschärfungen:

- (a) Auf  $D_T$  gelte  $\partial_t u - \Delta u < 0$ . Dann folgt  $\max u = \max u|_{B_T} > u|_{D_T}$ .
- (b) Auf  $D_T$  gelte  $\partial_t u - \Delta u \leq 0$ . Dann folgt  $\max u = \max u|_{B_T} \geq u|_{D_T}$ .
- (c) Auf  $D_T$  gelte  $\partial_t u - \Delta u > 0$ . Dann folgt  $\min u = \min u|_{B_T} < u|_{D_T}$ .
- (d) Auf  $D_T$  gelte  $\partial_t u - \Delta u \geq 0$ . Dann folgt  $\min u = \min u|_{B_T} \leq u|_{D_T}$ .

**Lösung:** Durch Übergang von  $u$  zu  $-u$  gilt (a)  $\Leftrightarrow$  (c) und (b)  $\Leftrightarrow$  (d). Daher genügt es, die ersten beiden Aussagen (a) und (b) zu beweisen:

(a) Angenommen,  $u$  wäre maximal im inneren Punkt  $(t_0, x_0) \in D_T$ . Dann gilt  $\partial_t u(t_0, x_0) \geq 0$  und  $\partial_{x_i} u(t_0, x_0) = 0$  sowie  $\partial_{x_i}^2 u(t_0, x_0) \leq 0$ , also  $\partial_t u(t_0, x_0) - \Delta u(t_0, x_0) \geq 0$  im Widerspruch zur Voraussetzung  $< 0$ .

(b) Wir betrachten  $v := u + \varepsilon |x|^2$  mit  $\varepsilon > 0$ , wobei  $|x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$ . Es gilt  $\partial_t v - \Delta v = \partial_t u - \Delta u - 2n\varepsilon < 0$ , dank (a) also  $\max v = \max_{B_T} v$ . Wir haben  $u \leq v \leq \max v = \max_{B_T} v \leq \max_{B_T} u + \varepsilon \max_{B_T} |x|^2$ .

Damit gilt  $u \leq \max_{B_T} u + \varepsilon \max_{B_T} |x|^2$  für alle  $\varepsilon > 0$ .

Für  $\varepsilon \searrow 0$  folgt  $u \leq \max_{B_T} u$ , was zu zeigen war.

**Aufgabe:** Beweisen Sie die Monotonie (2) in folgenden Verschärfungen:

- (e) In jedem Punkt im Inneren  $D_T$  gelte  $\partial_t u - \Delta u \leq \partial_t v - \Delta v$ . Aus  $u \leq v$  auf dem Rand  $B_T$  folgt  $u \leq v$  auf ganz  $\Omega_T$ .
- (f) In jedem Punkt im Inneren  $D_T$  gelte  $\partial_t u - \Delta u \leq \partial_t v - \Delta v$ . Aus  $u < v$  auf dem Rand  $B_T$  folgt  $u < v$  auf ganz  $\Omega_T$ .
- (g) In jedem Punkt im Inneren  $D_T$  gelte  $\partial_t u - \Delta u < \partial_t v - \Delta v$ . Aus  $u \leq v$  auf dem Rand  $B_T$  folgt  $u < v$  im Inneren  $D_T$ .

**Lösung:** (e) Für die Differenz  $w = u - v$  gilt  $\partial_t w - \Delta w \leq 0$ . Dank (b) folgt  $w \leq \max w = \max_{B_T} w \leq 0$ , also  $u \leq v$ .

(f) Für  $w = u - v$  gilt  $\partial_t w - \Delta w \leq 0$  in jedem Punkt von  $D_T$ . Dank (b) folgt  $w \leq \max w = \max_{B_T} w < 0$ , also  $u < v$ .

(g) Für  $w = u - v$  gilt  $\partial_t w - \Delta w < 0$  in jedem Punkt von  $D_T$ . Dank (a) folgt  $w|_{D_T} < \max_{B_T} w \leq 0$ , auf  $D_T$  also  $w < 0$  und  $u < v$ .

😊 Dies können wir zur Eingrenzung durch Ober/Unterslösungen nutzen. Solche Ungleichungen und Einschachtelungen kennen wir bereits aus den Sätzen M4C und M4D für gewöhnliche Differentialgleichungen.

### Finite-Differenzen-Methode: Approximation

S313  
Ergänzung

Zu lösen ist für  $u: [0, T] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) - \kappa \partial_x^2 u(t, x) &= f(t, x) && \text{für } 0 < t \leq T \text{ und } a < x < b, \\ u(t, a) = \ell(t), \quad u(t, b) &= r(t) && \text{Randbedingungen für } t \geq 0, \\ u(0, x) &= g(x) && \text{Anfangswerte für } a < x < b. \end{aligned}$$

Zur numerischen Diskretisierung approximieren wir die Ableitungen  $\partial_t$  sowie  $\partial_x$  und  $\partial_x^2$  (Differentialquotienten) durch Differenzenquotienten:

$$\begin{aligned} \partial_x u(t, x) &\approx \frac{u(t, x + \Delta x/2) - u(t, x - \Delta x/2)}{\Delta x} \\ \partial_x^2 u(t, x) &\approx \frac{\partial_x u(t, x + \Delta x/2) - \partial_x u(t, x - \Delta x/2)}{\Delta x} \\ &\approx \frac{u(t, x - \Delta x) - 2u(t, x) + u(t, x + \Delta x)}{(\Delta x)^2} \end{aligned}$$

Die Wärmeleitungsgleichung  $\partial_t u = \kappa \partial_x^2 u + f$  besagt näherungsweise:

$$\frac{u(t + \Delta t, x) - u(t, x)}{\Delta t} \approx \kappa \frac{u(t, x - \Delta x) - 2u(t, x) + u(t, x + \Delta x)}{(\Delta x)^2} + f(t, x)$$

### Finite-Differenzen-Methode: Diskretisierung

S314  
Ergänzung

Hier sind  $\Delta x > 0$  und  $\Delta t > 0$  Schrittweiten, nicht der Laplace-Operator. Diese Diskretisierung können wir als Rekursionsgleichung nutzen:

$$u(t + \Delta t, x) \approx u(t, x) + \Delta t \left[ \kappa \frac{u(t, x - \Delta x) - 2u(t, x) + u(t, x + \Delta x)}{(\Delta x)^2} + f(t, x) \right]$$

Aus den Werten zur Zeit  $t$  gewinnen wir so die Werte zur Zeit  $t + \Delta t$ . Die Randwerte  $u(t + \Delta t, x)$  für  $x \in \{a, b\}$  sind dabei vorgegeben.

**Aufgabe:** Approximieren Sie  $u: [0, 2] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  zu den Daten  $\kappa = 0.04$ ,  $f = 0$ ,  $g = 1$ ,  $\ell = 0$ ,  $r = 0$  mit Diskretisierung  $\Delta t = 0.1$  und  $\Delta x = 0.1$ .

**Lösung:** Die folgende Tabelle und die Graphik zeigen die Werte. [H125](#)

☺ Mit diesem Verfahren können Sie  $u$  näherungsweise berechnen.

Sie finden dieses Beispiel unter [eiserm.de/lehre/HM3/Irrfahrt.ods](http://eiserm.de/lehre/HM3/Irrfahrt.ods). In der Numerik lernen Sie noch weit bessere und raffiniertere Verfahren.

⚠ Bevor man irgendeine numerische Approximation unternimmt, muss man sicherstellen, dass die Frage gut gestellt ist: Unsere mathematische Vorbereitung zeigt, dass eine exakte Lösung  $u$  existiert und dass sie eindeutig ist. Erst das gibt der numerischen Näherung einen Sinn!

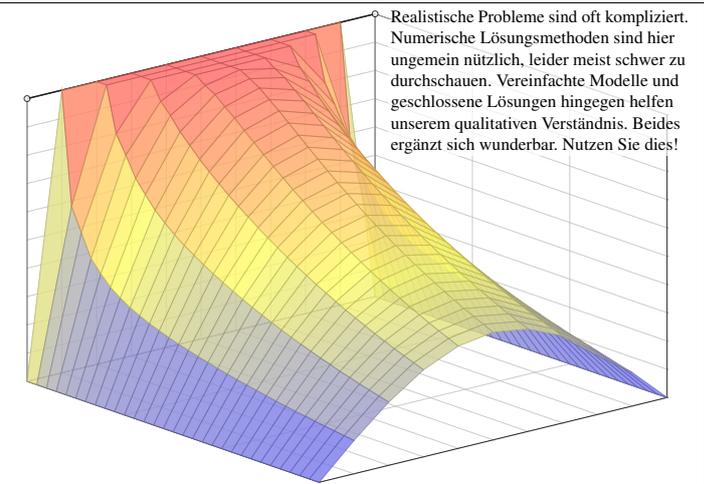
### Finite-Differenzen-Methode: Kühlung am Rand

S315  
Ergänzung

x=	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
t=0.0	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000
0.1	0.000	0.600	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.600	0.000
0.2	0.000	0.520	0.840	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.840	0.520	0.000
0.3	0.000	0.440	0.776	0.936	1.000	1.000	1.000	0.936	0.776	0.440	0.000
0.4	0.000	0.398	0.706	0.898	0.974	1.000	0.974	0.898	0.706	0.398	0.000
0.5	0.000	0.362	0.660	0.852	0.954	0.980	0.954	0.852	0.660	0.362	0.000
0.6	0.000	0.336	0.617	0.816	0.923	0.959	0.923	0.816	0.617	0.336	0.000
0.7	0.000	0.314	0.584	0.779	0.895	0.930	0.895	0.779	0.584	0.314	0.000
0.8	0.000	0.297	0.554	0.747	0.863	0.902	0.863	0.747	0.554	0.297	0.000
0.9	0.000	0.281	0.528	0.716	0.832	0.871	0.832	0.716	0.528	0.281	0.000
1.0	0.000	0.268	0.505	0.687	0.801	0.840	0.801	0.687	0.505	0.268	0.000
1.1	0.000	0.255	0.483	0.660	0.771	0.809	0.771	0.660	0.483	0.255	0.000
1.2	0.000	0.244	0.463	0.634	0.742	0.779	0.742	0.634	0.463	0.244	0.000
1.3	0.000	0.234	0.444	0.608	0.713	0.749	0.713	0.608	0.444	0.234	0.000
1.4	0.000	0.224	0.426	0.584	0.686	0.720	0.686	0.584	0.426	0.224	0.000
1.5	0.000	0.215	0.409	0.561	0.659	0.693	0.659	0.561	0.409	0.215	0.000
1.6	0.000	0.206	0.392	0.539	0.633	0.666	0.633	0.539	0.392	0.206	0.000
1.7	0.000	0.198	0.377	0.518	0.609	0.640	0.609	0.518	0.377	0.198	0.000
1.8	0.000	0.190	0.362	0.498	0.585	0.615	0.585	0.498	0.362	0.190	0.000
1.9	0.000	0.183	0.348	0.478	0.562	0.591	0.562	0.478	0.348	0.183	0.000
2.0	0.000	0.176	0.334	0.460	0.540	0.568	0.540	0.460	0.334	0.176	0.000

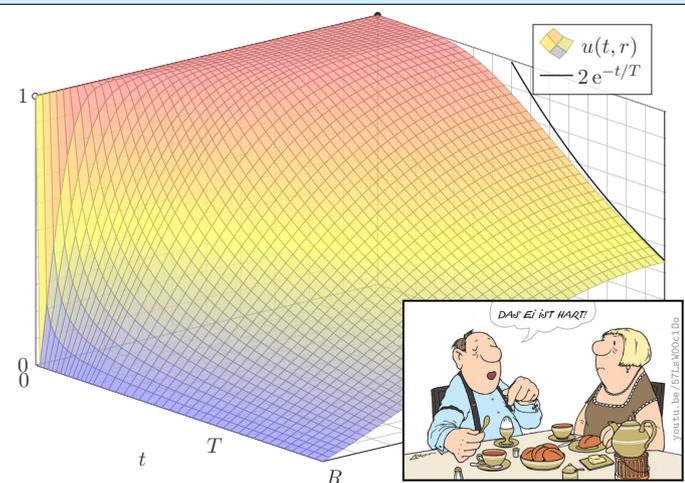
### Finite-Differenzen-Methode: Kühlung am Rand

S316  
Ergänzung



### Wie schnell kühlt eine Kugel über ihren Rand ab?

S401



### Wie schnell kühlt eine Kugel über ihren Rand ab?

S402  
Erläuterung

**Erstes Beispiel**, aus der Küche:

Wie lange muss ein Ei kochen? eine Pute garen? ein Bierfass kühlen? Genauer: Wann erreicht die Kerntemperatur die jeweilige Zielgröße? Wir untersuchen hier nur Wärmeleitung ohne Konvektion / Strömung; für Pute und Ei ist das realistisch, bei Bier eine starke Vereinfachung.

**Zweites Beispiel**, aus der Fernsehunterhaltung:

Mit gut gekühltem, frisch gezapftem Bier schauen Sie *CSI: Stuttgart*. Die Polizei findet morgens um 6 Uhr ein Mordopfer im Schlossgarten. Die Außentemperatur beträgt recht konstant 10°C, die Temperatur in der Mitte des Gehirns liegt noch bei 20°C. Wann geschah der Mord?

**Drittes Beispiel**, aus Erdgeschichte und Evolution:

Warum waren Dinosaurier groß, aber Vögel sind klein? Erstere waren vermutlich wechselwarm, und ihre Wärmebilanz ist bei großem Volumen günstiger: Das Volumen wächst kubisch, die Oberfläche nur quadratisch. Warmblüter (Vögel, Säugetiere) haben schnelleren Stoffwechsel und benötigen viel Energie für die Regulierung ihrer Körpertemperatur.

### Der Laplace-Operator bei sphärischer Symmetrie

S403

Zur Vereinfachung nutzen wir sphärische Symmetrie:

$$U: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y, z) \mapsto U(x, y, z) = u(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

Hier zählt nur der Radius  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  und somit die Funktion

$$u: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}: r \mapsto u(r).$$

**Aufgabe:** Berechnen Sie den Laplace-Operator  $\Delta U(x, y, z)$  mittels  $u$ .

**Lösung:** Wir leiten geduldig ab: Wir finden  $\partial_x r = x/r$  und somit

$$\partial_x u(r) = u'(r) \cdot \frac{x}{r} \quad \text{dank Kettenregel,}$$

$$\partial_x^2 u(r) = u''(r) \cdot \frac{x^2}{r^2} + u'(r) \cdot \frac{r - x^2/r}{r^2} \quad \text{dank Produktregel.}$$

Ebenso für  $\partial_y^2 u(r)$  und  $\partial_z^2 u(r)$ . Die Summe ergibt schließlich:

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) U(x, y, z) = u''(r) + \frac{2}{r} u'(r) = \frac{1}{r^2} \partial_r [r^2 \partial_r u(r)]$$

### Der Laplace-Operator in Kugelkoordinaten

S404  
Erläuterung

Allgemein können wir  $U: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  in Kugelkoordinaten parametrisieren:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \rho \sin \theta \sin \varphi \\ \rho \cos \theta \end{pmatrix} \implies U \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \rho \sin \theta \sin \varphi \\ \rho \cos \theta \end{pmatrix} =: u \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$$

Aus  $U: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  erhalten wir die Funktion  $u: \mathbb{R}_{>0} \times [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir übertragen den Laplace-Operator in sphärische Koordinaten:

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 = \frac{1}{\rho^2} \partial_\rho (\rho^2 \partial_\rho) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi^2$$

Das bedeutet ausführlich

$$[\Delta U] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left[ \frac{1}{\rho^2} \partial_\rho (\rho^2 \partial_\rho) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 \right] u \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$$

**Übung für Mutige:** Rechnen Sie beide Seiten aus und vergleichen Sie!

☺ Hängt  $u$  nicht von  $\varphi$  und  $\theta$  ab, so erhalten wir die vorige Formel in  $r$ .

**Aufgabe:** Lösen Sie die sphärische Wärmeleitungsgleichung (ARWP)

$$\partial_t u(t, r) = \frac{\kappa}{r^2} \partial_r [r^2 \partial_r u(t, r)] \quad \text{für alle } t > 0 \text{ und } 0 < r < R,$$

$$u(t, R) = 0 \quad \text{Randbedingungen für } t \geq 0,$$

$$u(0, r) = 1 \quad \text{Anfangswerte für } 0 \leq r < R.$$

Gesucht sind Funktionen  $u: \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, R] \rightarrow \mathbb{R}$ , stetig auf  $\mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, R]$  bis auf die Ecke  $(0, R)$  und differenzierbar auf  $\mathbb{R}_{> 0} \times ]0, R[$ , mindestens einmal nach  $t$  und zweimal nach  $r$ , die obige Gleichungen erfüllen. Der Anfangswert  $u(0, r) = 1$  gibt die Wärmeverteilung zur Zeit  $t = 0$  vor. Der Randwert  $u(t, R) = 0$  bedeutet, dass wir am Kugelrand die Wärmedichte  $u$  konstant auf Null halten, etwa durch Kontakt mit einem riesigen Reservoir konstanter Temperatur.

**Lösung:** Wir separieren die Variablen durch den Produktansatz

$$u(t, r) = v(t) w(r).$$

Damit entkoppeln wir unsere PDE in zwei ODE / Eigenprobleme:

$$v'(t) = \lambda v(t) \quad \text{und} \quad w''(r) + \frac{2}{r} w'(r) = \frac{\lambda}{\kappa} w(r)$$

Zu jedem  $\lambda \in \mathbb{R}$  haben wir links die Lösung  $v(t) = e^{\lambda t}$ .

Rechts substituieren wir  $q(r) = r w(r)$ :

$$w(r) = q(r)/r$$

$$w'(r) = q'(r)/r - q(r)/r^2$$

$$w''(r) = q''(r)/r - 2q'(r)/r^2 + 2q(r)/r^3$$

Aus  $w''(r) + (2/r) w'(r) = (\lambda/\kappa) w(r)$  wird damit  $q''(r) = (\lambda/\kappa) q(r)$ .

$$\lambda = 0: \quad w(r) = \frac{ar + b}{r} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R},$$

$$\lambda > 0: \quad w(r) = \frac{a e^{+\alpha r} + b e^{-\alpha r}}{r}, \quad \alpha = \sqrt{\lambda/\kappa}$$

$$\lambda < 0: \quad w(r) = \frac{a \sin(\omega r) + b \cos(\omega r)}{r}, \quad \omega = \sqrt{-\lambda/\kappa}$$

Endlichkeit von  $w(0)$  und die Randbedingung  $w(R) = 0$  erfüllt nur

$$w(r) = a \frac{\sin(\omega r)}{r} \quad (\text{Spalfunktion, we meet again!})$$

mit  $\omega = \omega_n := n\pi/R$  und  $n = 1, 2, 3, \dots$ , somit  $\lambda = \lambda_n := -(n\pi/R)^2 \kappa$ .

Zusammengesetzte Eigenfunktionen:

$$u_n(t, r) = v_n(t) w_n(r) = e^{-n^2 t/T} \frac{\sin(n\pi r/R)}{r}$$

Weitere Lösungen erhalten wir durch Superposition:

$$u(t, r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(t, r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t/T} \frac{\sin(n\pi r/R)}{r}$$

Damit lösen wir schließlich die Anfangsbedingung für  $t = 0$ :

$$u(0, r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sin(n\pi r/R)}{r} \stackrel{!}{=} 1 \quad \text{für } 0 \leq r < R.$$

Wie lösen Sie  $\sum a_n \sin(n\pi r/R) = r$ ? Durch Fourier-Entwicklung! [I205]

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(nx)}{n} = x \quad \text{für } |x| < \pi, \text{ hier } x = \pi r/R$$

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(n\pi r/R)}{n\pi r/R} = 1 \quad \text{für } |r| < R, \text{ Einsetzen!}$$

Als Lösung  $u: \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, R] \rightarrow \mathbb{R}$  für die Kugel erhalten wir:

$$u(t, r) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n^2 t/T} \frac{\sin(n\pi r/R)}{n\pi r/R}$$

Zum Vergleich die Lösung  $u: \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  für einen Stab:

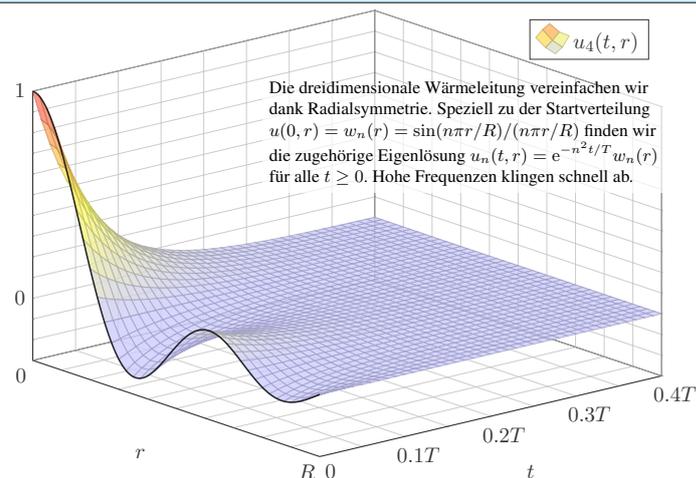
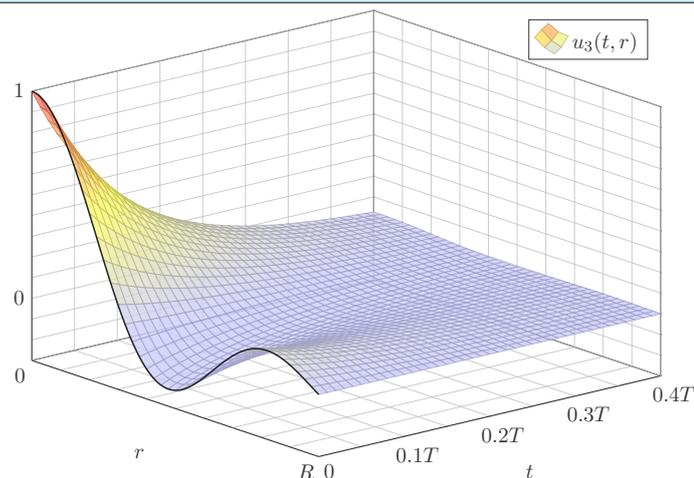
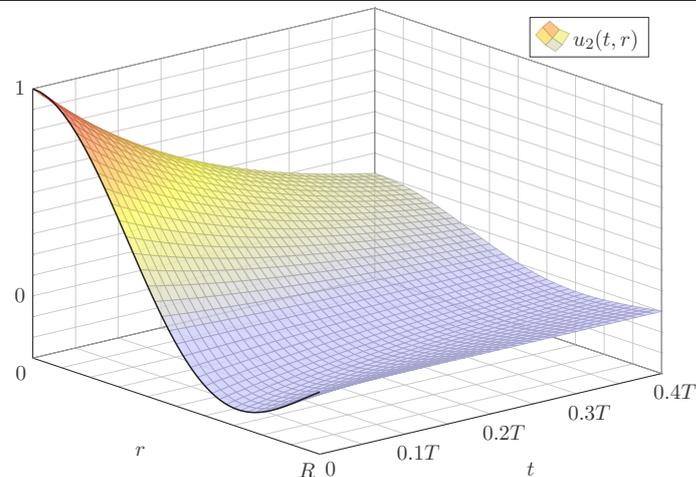
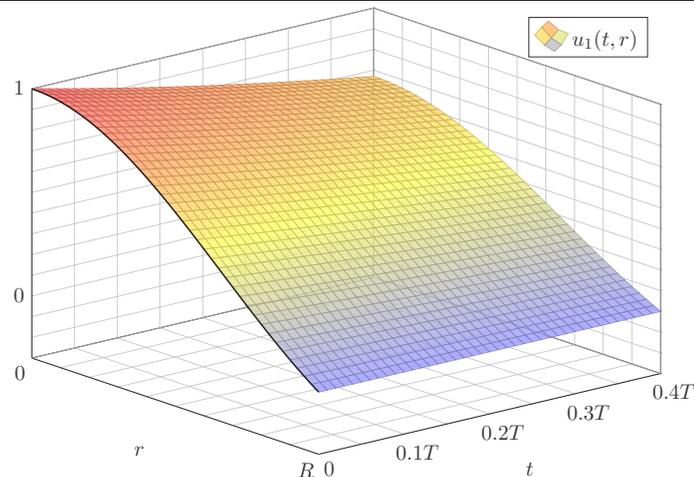
$$u(t, x) = 4 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(2k+1)^2 t/T} \frac{\sin((2k+1)\pi x/L)}{(2k+1)\pi}$$

😊 Beide Lösungen haben im Wesentlichen dieselbe Form:

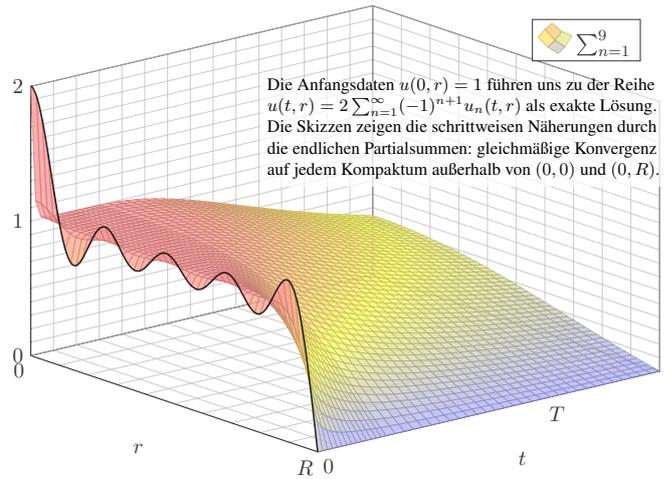
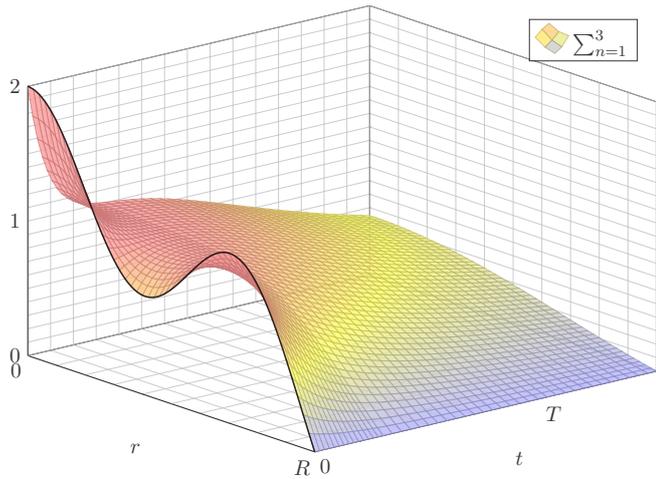
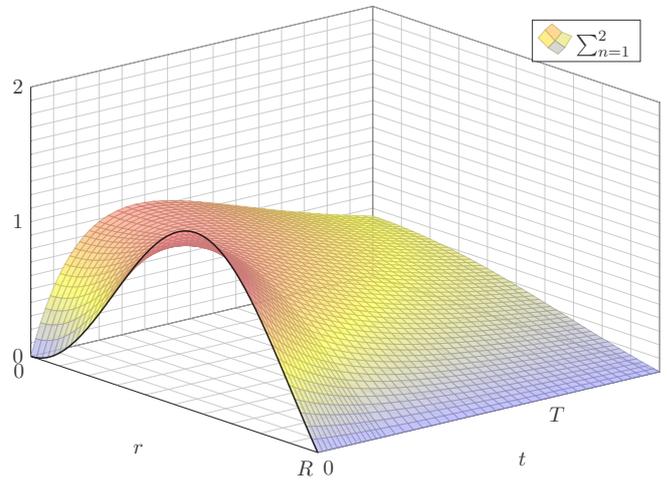
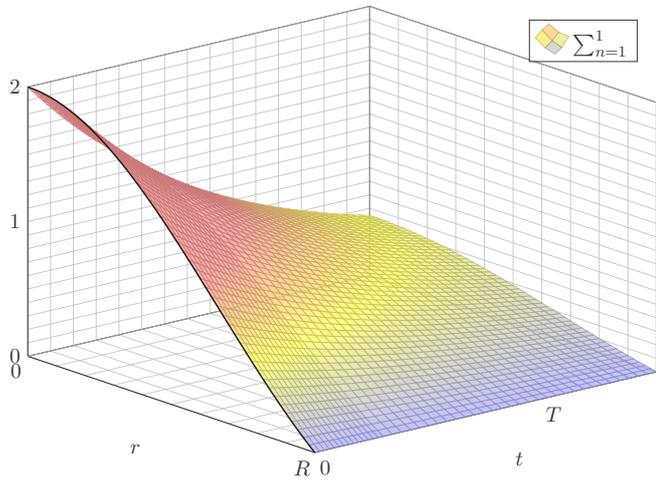
Summiert wird über alle natürlichen Zahlen  $n = 1, 2, 3, \dots$  bzw. über alle ungeraden Zahlen  $n = 2k + 1 = 1, 3, 5, \dots$

Der Zeitfaktor  $e^{-n^2 t/T}$  sorgt für exponentielles Abklingen. Für die Kugel erhalten wir zusätzlich einen Faktor  $r/R$ .

Die natürliche Zeitskala ist  $T = R^2/\kappa\pi^2$  bzw.  $T = L^2/\kappa\pi^2$ . Bei doppelter Größe dauert die Abkühlung viermal so lange.



Die dreidimensionale Wärmeleitung vereinfachen wir dank Radialsymmetrie. Speziell zu der Startverteilung  $u(0, r) = w_n(r) = \sin(n\pi r/R)/(n\pi r/R)$  finden wir die zugehörige Eigenlösung  $u_n(t, r) = e^{-n^2 t/T} w_n(r)$  für alle  $t \geq 0$ . Hohe Frequenzen klingen schnell ab.



Die natürliche Zeitskala ist hier  $\tau = (\pi/R)^2 \kappa t = t/T$  mit  $T = R^2/\kappa\pi^2$ .

$$u(t, r) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n^2 t/T} \frac{\sin(n\pi r/R)}{n\pi r/R}$$

$$u(t, 0) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n^2 t/T} \stackrel{\approx}{\sim} 2 e^{-t/T}$$

- 😊 Leibniz-Reihe, numerisch günstig, explizite Fehlerschranke B3G!
- 😊 Die Abkühlung ist exponentiell, sehr gute Näherung für  $t > 2T$ .
- 😊 Bei doppeltem Radius dauert die Abkühlung viermal so lange.

**Aufgabe:** Wie lange kochen Eier? Erklären Sie die Formel:

$$t = T \cdot \ln \left[ 2 \frac{\vartheta_{\text{Außen}} - \vartheta_{\text{Start}}}{\vartheta_{\text{Außen}} - \vartheta_{\text{Ziel}}} \right]$$

**Lösung:** Typischer Durchmesser  $D = 44\text{mm}$ , also Radius  $R = 22\text{mm}$ . Eier sind keine Kugeln, sondern... eiförmig; das vernachlässigen wir. Die Temperaturleitfähigkeit beträgt etwa  $\kappa \approx 0.2\text{mm}^2/\text{s}$ : Messen! Das ist etwas mehr als Wasser. Die Angaben in der Literatur variieren. Die natürliche Zeitskala ist  $T = R^2/\kappa\pi^2 \approx 240\text{s} = 4\text{min}$ : Plausibel! Der Verlauf der Kerntemperatur ist (näherungsweise für  $t > T$ ):

$$\begin{aligned} t &\mapsto 100^\circ\text{C} - 93^\circ\text{C} \cdot 2 e^{-t/T} = \vartheta(t) \\ 6\text{min} = 1.5T &\mapsto 100^\circ\text{C} - 93^\circ\text{C} \cdot 2 e^{-1.5} \approx 60^\circ\text{C} \\ 8\text{min} = 2.0T &\mapsto 100^\circ\text{C} - 93^\circ\text{C} \cdot 2 e^{-2.0} \approx 75^\circ\text{C} \\ 10\text{min} = 2.5T &\mapsto 100^\circ\text{C} - 93^\circ\text{C} \cdot 2 e^{-2.5} \approx 85^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Der Dotter denaturiert bei  $65^\circ\text{C}$ , das Eiklar erst bei  $82^\circ\text{C}$ .

😊 Eierkochen ist eine Wissenschaft für sich. Manche denken: Dafür braucht's keine Rechnung! Stimmt, dieses Beispiel soll unser Modell illustrieren, prüfen, kalibrieren, mehr nicht. Man kann seine Frühstückseier auch ohne Studium kochen, dennoch gilt: Studieren erleuchtet Probieren! Manchmal stehen Sie auch vor Fragen, zu denen Sie (noch) keine Erfahrung haben, und Sie wollen rechnerisch eine Prognose erstellen. Typische Probleme sind Fragen der Skalierung:

**Aufgabe:** Wie lange kochen Sie ein Straußenei mit 15cm Durchmesser?  
**Lösung:** Der Durchmesser ist 3.4-mal größer, die Zeit etwa 11.5-mal.

Sie sollten daher eine längere Kochzeit von etwa 90min einplanen. Das hätten Sie ohne Modell wohl nur schwer erraten. Wie hilft Ihnen hier unser mathematisches Modell? Es erklärt Ihnen alle wesentlichen Eigenschaften! Insbesondere sehen Sie daran: Die erste Eigenfunktion ist relevant, alle anderen klingen viel schneller ab. Wir gewinnen so eine brauchbare, robuste Beschreibung unabhängig von Details. Probieren Sie's aus! Genauere Rechnungen sind bei Bedarf möglich.

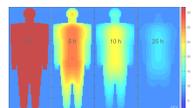
**Aufgabe:** Wie lange kühlen Sie ein 5l-Fass Bier? eine Flasche Sekt?  
**Lösung:**  $R \approx 11\text{cm}$ ,  $\kappa \approx 0.14\text{mm}^2/\text{s}$ ,  $T = R^2/\kappa\pi^2 \approx 8800\text{s} \approx 2.5\text{h}$ .  
Flasche grob gerundet  $R \approx 5\text{cm}$ ,  $T = R^2/\kappa\pi^2 \approx 1800\text{s} \approx 0.5\text{h}$ .

Im Kühlschrank genügen  $4T \approx 10\text{h}$  für Bier bzw.  $4T \approx 2\text{h}$  für Sekt. Das ist durchaus plausibel. Im Gefrierschrank ist die Temperaturdifferenz größer und die Kühlung entsprechend schneller; die obige Formel berechnet die Zeit. (Vorsicht vor Frost!) Wir vereinfachen hier natürlich die Geometrie, Wärmeleitung, etc., aber immerhin erhalten wir eine brauchbare Größenordnung.

**Aufgabe:** (*MathFlix and Chill*, für hartgesottene Fans der Wärmeleitung) Die Polizei findet morgens um 6 Uhr ein Mordopfer im Schlossgarten. Die Außentemperatur beträgt recht konstant  $10^\circ\text{C}$ , die Temperatur in der Mitte des Gehirns liegt noch bei  $20^\circ\text{C}$ . Der Kopfumfang ist  $U = 57\text{cm}$ . Wann geschah der Mord? Wie verlässlich ist Ihre Schätzung?

**Lösung:** Radius  $R \approx 9\text{cm}$ , Temperaturleitfähigkeit  $\kappa \approx 0.2\text{mm}^2/\text{s}$ . Die natürliche Zeitskala ist hier  $T = R^2/\kappa\pi^2 \approx 4100\text{s} \approx 1\text{h}10$ .

$$t = T \cdot \ln \left[ 2 \frac{\vartheta_{\text{Außen}} - \vartheta_{\text{Start}}}{\vartheta_{\text{Außen}} - \vartheta_{\text{Ziel}}} \right] = T \cdot \ln \left[ 2 \cdot \frac{27}{10} \right] \approx 2\text{h}$$



⚠️ Gesicherte Aussagen erfordern große Umsicht: Wir vereinfachten, der Kopf ist keine homogene Kugel: besseres Modell! Die Temperaturleitfähigkeit  $\kappa$  ist nur grob geschätzt: bessere Messung! Jede Messung (Temperaturen, Umfang) hat Fehler: Konfidenzintervall! Die Methode eignet sich nur von etwa  $1T$  bis  $4T$ : inverses Problem!

📖 Leah Wilk et al., Science (2020), doi: 10.1126/sciadv.aba4243.  
J.B. Keller: *Inverse Problems*. Amer. Math. Monthly 83 (1976) 107–118.

**Homogene Wärmeleitungsgleichung auf  $\mathbb{R}^n$**  S421  
Fazit

Fouriers berühmte Wärmeleitungsgleichung  $\partial_t u - \kappa \Delta u = q$  folgt aus der Wärmebilanz für den Wärmefluss dank unserer Integralsätze.

Die homogene Gleichung  $\partial_t u = \kappa \Delta u$  hat als Fundamentallösung eine auseinanderfließende Glockenkurve, den **Wärmeleitungskern**

$$H : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : H(t, x) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi\kappa t})^n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\kappa t}\right).$$

Die Konstanten sichern die Normierung  $\int_{\mathbb{R}^n} H(t, x) dx = 1$  für  $t > 0$ . In Satz D5D haben wir die Gleichung  $(\partial_t - \kappa \Delta)H = 0$  nachgerechnet.

Ist für  $t = 0$  die Wärmeverteilung  $u_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  vorgegeben,  $u_0 \in C_b$ , so erhalten wir die Lösung durch **Superposition** (Faltung, siehe D5E)

$$u : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : u(t, x) = \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} H(t, x - \xi) u_0(\xi) d\xi.$$

Für  $t \searrow 0$  gilt dann  $u(t, x) \rightarrow u_0(x)$ . Durch Ableiten unter dem Integral finden wir  $(\partial_t - \kappa \Delta)u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\xi) (\partial_t - \kappa \Delta)H(t, x - \xi) d\xi = 0$ .

**Inhomogene Wärmeleitungsgleichung auf  $\mathbb{R}^n$**  S422  
Fazit

Zu lösen sei die inhomogene Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u(t, x) - \kappa \Delta u(t, x) = f(t, x) \quad \text{für alle } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}^n,$$

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{Anfangswerte für } x \in \mathbb{R}^n,$$

Gegeben sei  $u_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit Schranke  $|u_0(x)| \leq a e^{b|x|^\alpha}$ ,  $\alpha < 2$  sowie  $f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und stetig differenzierbar.

**Existenz:** Dann wird unser Problem gelöst durch das Integral

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} H(t, x - \xi) u_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} H(t - \tau, x - \xi) f(\tau, \xi) d\xi d\tau.$$

Zu jedem  $T > 0$  gilt eine Schranke  $|u(t, x)| \leq A e^{Bx^2}$  auf  $[0, T] \times \mathbb{R}$ .

**Eindeutigkeit:** Unsere Lösung  $u$  ist die einzige mit dieser Schranke.

⚠ Ohne diese Schranke gibt es exotische Gegenbeispiele (S1B). Mehrdeutigkeiten müssen wir erkennen und nötigenfalls auch lösen: Sind noch mehrere Lösungen möglich, so stellen wir geeignete weitere Bedingungen, um die physikalisch sinnvollen Lösungen herauszuheben.

**Randbedingungen und Eindeutigkeit** S423  
Fazit

Für die Wärmeleitungsgleichung mit Anfangs- und Randbedingungen (ARWP) nutzen wir den folgenden Eindeutigkeitsatz S3C:

(0) Löst  $u : [0, T] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  die homogene Wärmeleitungsgleichung  $\partial_t u(t, x) - \kappa \partial_x^2 u(t, x) = 0$  für  $0 < t < T$  und  $a < x < b$ ,

$$\begin{cases} u(t, a) = u(t, b) = 0 & \text{Dirichlet-Randbedingungen für } t > 0 \text{ oder} \\ \partial_x u(t, a) = \partial_x u(t, b) = 0 & \text{Neumann-Randbedingungen für } t > 0, \\ u(0, x) = 0 & \text{Anfangswerte für } t = 0 \text{ und } a < x < b, \end{cases}$$

dann gilt  $u(t, x) = 0$  für alle  $(t, x) \in [0, T] \times [a, b]$ .

(1) Lösen  $\tilde{u}, \hat{u} : [0, T] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) - \kappa \partial_x^2 u(t, x) = f(t, x), \\ \begin{cases} u(t, a) = \ell(t), u(t, b) = r(t) \text{ oder} \\ \partial_x u(t, a) = \ell(t), \partial_x u(t, b) = r(t), \end{cases} \\ u(0, x) = g(x), \end{cases}$$

dann gilt  $\tilde{u}(t, x) = \hat{u}(t, x)$  für alle  $(t, x) \in [0, T] \times [a, b]$ .

**Das Minimum-Maximum-Prinzip** S424  
Fazit

Sei  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  kompakt und  $\Omega_T = [0, T] \times K$ . Für  $u : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}$  untersuchen wir die Wärmeleitungsgleichung  $\partial_t u = \Delta u$ . Hierzu zerlegen wir  $\Omega_T$  in das parabolische Innere  $D_T = ]0, T] \times \overset{\circ}{K}$  und den parabolische Rand  $B_T = ([0, T] \times \partial K) \cup (\{0\} \times K)$ .

Auf  $\Omega_T = [0, T] \times K$  sei  $u : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Da  $\Omega_T$  und  $B_T$  kompakt sind, nimmt  $u$  hierauf Minimum und Maximum an. Wegen  $\Omega_T \supseteq B_T$  gilt also:

$$\min_{\Omega_T} u \leq \min_{B_T} u \quad \text{und} \quad \max_{\Omega_T} u \geq \max_{B_T} u$$

Zudem gelte  $\partial_t u = \Delta u$  auf dem parabolischen Inneren  $D_T = ]0, T] \times \overset{\circ}{K}$ .

(1) Dann nimmt  $u$  sein Minimum und Maximum auf dem Rand  $B_T$  an:

$$\min_{\Omega_T} u = \min_{B_T} u \quad \text{und} \quad \max_{\Omega_T} u = \max_{B_T} u$$

Seien  $u, v : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Lösungen,  $\partial_t u = \Delta u$  und  $\partial_t v = \Delta v$  auf  $D_T$ .

(2) Monotonie: Aus  $u \leq v$  auf dem Rand  $B_T$  folgt  $u \leq v$  auf ganz  $\Omega_T$ .

(3) Eindeutigkeit: Aus  $u = v$  auf dem Rand  $B_T$  folgt  $u = v$  auf ganz  $\Omega_T$ .

Das Prinzip gilt ebenso harmonisch (Satz R2C) und diskret (Satz T4B).

**Wärmeleitung eines Stabes** S425  
Fazit

Zu lösen sei die eindimensionale homogene Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) - \kappa \partial_x^2 u(t, x) = 0 & \text{für alle } t > 0 \text{ und } 0 < x < L, \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 & \text{Randbedingungen für } t \geq 0, \\ u(0, x) = g(x) & \text{Anfangswerte für } 0 < x < L. \end{cases}$$

Gegeben sei  $g : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig oder allgemeiner  $g \in L^2([0, L])$ , entwickelt als  $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x/L)$  mit  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ . Dann wird unser Anfangs- und Randwertproblem gelöst durch

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t/T} \sin(n\pi x/L).$$

Die natürliche Zeitskala ist die Abklingzeit  $T = L^2/\kappa\pi^2$  (Eigenzeit). Gilt sogar  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ , so ist  $u$  in  $t = 0$  stetig und dort gleich  $g$ .

- 😊 So können Sie Abkühlen und Aufheizen explizit berechnen: Diese Eigenfunktionen diagonalisieren die Wärmeleitungsgleichung.
- 😊 Numerisch sehr effizient für  $t > T$  dank exponentiellem Abklingen.

**Wärmeleitung eines Stabes** S426  
Fazit

Speziell für konstante Anfangswerte  $g(x) = 1$  erhalten wir die Lösung

$$u(t, x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(2k+1)^2 t/T} \frac{\sin((2k+1)\pi x/L)}{(2k+1)}.$$

Die Kerntemperatur im Stabmittelpunkt  $x = L/2$  ist demnach

$$u(t, \frac{L}{2}) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(2k+1)^2 t/T} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} \stackrel{t \gg T}{\approx} \frac{4}{\pi} e^{-t/T}.$$

- 😊 Die Abkühlung ist exponentiell, sehr gute Näherung für  $t > T$ . Bei doppelter Länge dauert die Abkühlung viermal so lange.
- 😊 Hohe Frequenzen klingen besonders schnell ab. Das ist numerisch günstig, führt zu schneller Konvergenz und Glättungseigenschaft:
- 😊 Zu  $t = 0$  dürfen die Anfangsdaten  $u(0, x)$  beliebig rau sein, sogar unstetig, doch zu jedem Zeitpunkt  $t > 0$  ist die Lösung  $u(t, x)$  glatt.

Dieselbe Methode löst die inhomogene Gleichung  $\partial_t u - \kappa \partial_x^2 u = f$  mit den jeweiligen Randbedingungen: Dirichlet, Neumann, etc.

**Wärmeleitung einer Kugel** S427  
Fazit

Zu lösen sei die sphärische homogene Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} \partial_t u(t, r) = \frac{\kappa}{r^2} \partial_r [r^2 \partial_r u(t, r)] & \text{für alle } t > 0 \text{ und } 0 < r < R, \\ u(t, R) = 0 & \text{Randbedingungen für } t \geq 0, \\ u(0, r) = 1 & \text{Anfangswerte für } 0 \leq r < R. \end{cases}$$

Gegeben sei  $g : [0, R] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig oder allgemeiner  $g \in L^2([0, R])$ , entwickelt als  $g(r) \cdot r = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi r/R)$  mit  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ . Dann wird unser Anfangs- und Randwertproblem gelöst durch

$$u(t, r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t/T} \sin(n\pi r/R).$$

Die natürliche Zeitskala ist die Abklingzeit  $T = R^2/\kappa\pi^2$  (Eigenzeit). Gilt sogar  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ , so ist  $u$  in  $t = 0$  stetig und dort gleich  $g$ .

- 😊 So können Sie Abkühlen und Aufheizen explizit berechnen: Diese Eigenfunktionen diagonalisieren die Wärmeleitungsgleichung.
- 😊 Numerisch sehr effizient für  $t > T$  dank exponentiellem Abklingen.

**Wärmeleitung einer Kugel** S428  
Fazit

Speziell für konstante Anfangswerte  $g(r) = 1$  erhalten wir die Lösung

$$u(t, r) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n^2 t/T} \frac{\sin(n\pi r/R)}{n\pi r/R}.$$

Die Kerntemperatur im Kugelmittelpunkt  $r = 0$  ist demnach

$$u(t, 0) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n^2 t/T} \stackrel{t \gg T}{\approx} 2 e^{-t/T}.$$

- 😊 Die Abkühlung ist exponentiell, sehr gute Näherung für  $t > 2T$ . Bei doppeltem Radius dauert die Abkühlung viermal so lange.
- 😊 Hohe Frequenzen klingen besonders schnell ab. Das ist numerisch günstig, führt zu schneller Konvergenz und Glättungseigenschaft:
- 😊 Zu  $t = 0$  dürfen die Anfangsdaten  $u(0, r)$  beliebig rau sein, sogar unstetig, doch zu jedem Zeitpunkt  $t > 0$  ist die Lösung  $u(t, r)$  glatt.

Dieselbe Methode löst die inhomogene Wärmeleitungsgleichung mit den jeweiligen Randbedingungen: Dirichlet, Neumann, etc.

Kapitel T

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Statistical thinking will one day be as necessary for efficient citizenship as the ability to read or write.

H.G. Wells (1866–1946)

Les questions les plus importantes de la vie ne sont en effet, pour la plupart, que des problèmes de probabilité.

Pierre-Simon de Laplace (1749–1827)

So you're telling me it is a matter of probability and odds; I was worried there was some chance involved.

Vesper Lynd zu James Bond im Film *Casino Royale* (2006)

Inhalt dieses Kapitels T

- 1 Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume
  - Zufall und Wahrscheinlichkeit: Grundbegriffe
  - Rechnen mit Ereignissen: Wahrscheinlichkeitsräume
- 2 Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit
  - Bedingte Wahrscheinlichkeiten, Formel von Bayes
  - Stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen
- 3 Das Gesetz der großen Zahlen (GGZ)
  - Zufallsvariablen, Erwartung und Varianz
  - Die Ungleichungen von Pafnuty Chebychev
  - Unabhängige Wiederholung: Gesetz der großen Zahlen
  - Stochastische Abhängigkeit: Korrelation vs Kausalität
- 4 Fazit: Wahrscheinlichkeitsrechnung
  - Weitere Aufgaben und Anwendungsbeispiele
  - Sex: Was nützen dem Pfau seine Federn?
  - Tischkicker: Das Runde muss ins Eckige.
  - Google: die zufällige Irrfahrt im Internet

Ziele der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Unser Ziel sind **rationale Entscheidungen unter Unsicherheit**.

- **Experimente** unter Einfluss von Zufällen
- **Prozesse** mit unsicherem Ausgang

That's life: Fast alles im Leben ist ein Wahrscheinlichkeitsexperiment!

Wir wollen **nachvollziehbar begründete, quantitative Aussagen**.

- Ungenauigkeit von Messungen, Konfidenzintervalle, ...
- Ausfallwahrscheinlichkeit, Lebensdauer von Bauteilen, ...
- Risikomanagement: Unfälle, Sicherheit, Versicherung, ...
- Glücksspiele: Lotto, Roulette, Poker, Aktienbörse, Klausur, ...

Ingenieur:innen müssen Risiken abschätzen, minimieren, verkaufen bzw. Chancen berechnen, maximieren, kaufen. Dazu dient die Stochastik!

📖 Literatur: H.-O. Georgii: *Stochastik*. De Gruyter 2009  
 E. Kreyszig: *Advanced Engineering Mathematics*. Wiley 2010  
 U. Krengel: *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie*. Vieweg 2005  
 W. Feller: *Probability Theory and Its Applications*. Wiley 1950–1971

Ziele der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung beginnt im 17. Jh. mit Rechnungen zu Glücksspielen. [T417] Heutzutage wird sie überall eingesetzt, von der Wettervorhersage bis zur Industrieproduktion und klinischen Tests neuer Medikamente. In ihrer Bedeutung für den Alltag kommt sie wohl gleich nach Grundrechenarten und Dreisatz. Ich möchte wetten, Wahrscheinlichkeitsrechnung wird von Otto Normalbürger (m/w/d) vielhundertmal häufiger benötigt, gar genutzt, als die sagenhafte Mitternachtsformel! Das hängt natürlich davon ab, was Otto im Alltag oder Beruf so tut. . .

Viele Vorgänge haben unsicheren Ausgang; stochastische Argumente sind daher unausweichlich. Leider erschreckend häufig werden aber selbst einfache Fragen falsch behandelt – manchmal mit katastrophalen Folgen. Damit es Ihnen nicht so, sondern besser ergeht, sollen Sie hier mit (einer homöopathischen Dosis) Wahrscheinlichkeitsrechnung geimpft werden. Zu Experten werden Sie dadurch noch nicht, aber die Grundregeln müssen Sie kennen und fehlerfrei anwenden können.

Statt *Wahrscheinlichkeitsrechnung* spricht man gleichbedeutend von *Wahrscheinlichkeitstheorie*: Auf Grundlage eines geeigneten Modells (eines Wahrscheinlichkeitsraums wie unten erklärt) erlaubt sie die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten zu den betrachteten Ereignissen.

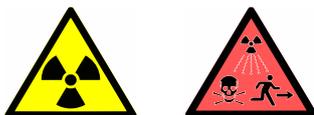
Ihr Gegenstück ist die *Statistik*, also die Analyse empirischer Daten (Messwerte, Beobachtungen). Diese versucht, möglichst verlässliche Daten zu erheben und daraus relevante Informationen zu extrahieren, insbesondere um ein geeignetes Modell zu finden, zu testen oder zu kalibrieren.

WTheorie und Statistik ergänzen sich demnach. Beide fasst man im deutschsprachigen Raum unter dem Oberbegriff *Stochastik* zusammen, von altgriechisch *στοχαστική* [stochazomai] 'zielen, vermuten, erraten', auch *στοχαστικός* [stochastikos] 'scharfsinnig'.

Typische Anwendung: Ausfallwahrscheinlichkeit

**Aufgabe:** Drei unabhängige Bauteile haben Ausfallwkten 0.3, 0.4, 0.5. (0) Mit welcher Wkt fällt mindestens ein Teil aus? (1) Genau 0, 1, 2, 3? (2) Wenn nur genau ein Teil ausfällt, mit welcher Wkt ist es A, B, C? (3) Konstruieren Sie als Modell hierfür explizit einen WRaum  $(\Omega, \mathcal{P})$ .

**Techniken:** Rechenregeln für WRäume, bedingte Wkt, Bayes. Lösung ab Seite T409: Die Wkten in (1) sind 0.21, 0.44, 0.29, 0.06.



Aus der Presse: „In 14 000 Reaktorjahren sind 4 Unfälle der höchsten Stufe aufgetreten. Demnach tritt bei 143 europäischen Reaktoren in 30 Jahren ein solcher Unfall mit Wahrscheinlichkeit von über 100% auf.“

**Aufgabe:** Was ist hieran falsch? Welche Rechnung wäre richtig?  
**Techniken:** Ausfallwkt (exakt), Poisson–Verteilung (gute Näherung). Lösung ab Seite U109: Die Wkt ist mit  $\approx 70\%$  erschreckend hoch.

Typische Anwendung: Chancen beim Glücksspiel

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung hat viele praktische Anwendungen! Ihre Ursprünge liegen im Glücksspiel. Eines der ersten Probleme war die gerechte Teilung bei vorzeitigem Spielabbruch. Konkretes Beispiel:



Zwei gleich starke Teams spielen Tischkicker bis 10.

**Aufgabe:** Wie stehen die Chancen bei 9 : 8? bei 4 : 7?  
 Lösung ab Seite T441:  
 (a) 75 : 25 (leicht) bzw.  
 (b) 14.5 : 85.5 (knifflig)

**Aufgabe:** Sie wiederholen 400 mal unabhängig ein Experiment mit Trefferwkt 20%. Mit welcher Wkt erhalten Sie 60 bis 90 Treffer?

**Techniken:** Erwartung und Varianz, Binomialverteilung (exakt), lokaler Grenzwertsatz (gute Näherung), Chebychev (Abschätzung). Lösung ab Seite V317: Die gesuchte Wkt beträgt recht genau 90%.

Typische Anwendung: Gesetze der großen Zahlen

In der Praxis ist nichts exakt. Jede Messung  $X$  ist zufälligen Störungen unterworfen, wiederholte Messwerte schwanken um den Erwartungswert  $\mu$  mit Streuung  $\sigma > 0$ . Ingenieur:innen müssen sorgsam und sachgerecht mit Messfehlern umgehen: Konfidenzintervalle, Fehlerrechnung, etc.

**Beispiel:** Sie führen  $n = 400$  unabhängige Messungen  $X_1, X_2, \dots, X_{400}$  durch und erhalten Messwerte  $x_1, x_2, \dots, x_{400}$ . Sie schätzen  $\mu$  durch den

$$\text{Stichprobenmittelwert: } \hat{x} := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \stackrel{\text{Messung}}{=} \stackrel{\text{(Beispiel)}}{=} 57.5$$

Die Streuung von  $X$  schätzen Sie (dank der Stichprobe) auf  $\sigma \approx 10$ . Wie genau ist  $\hat{x}$ ? Wo liegt vermutlich der wahre Erwartungswert  $\mu$ ?

$$I_1 = [57, 58], \quad I_2 = [56.5, 58.5], \quad I_3 = [56, 59], \quad I_k = [57.5 \pm k \cdot 0.5]$$

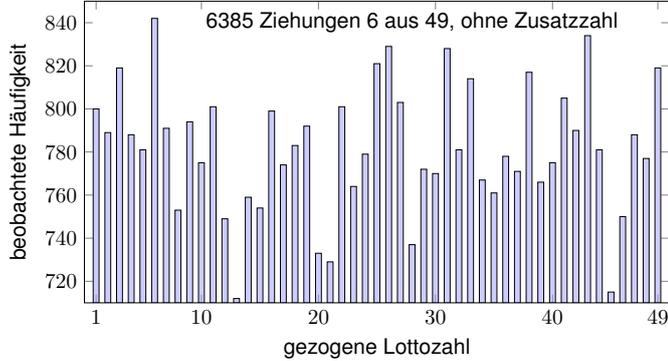
**Aufgabe:** Welches Intervall  $I_k$  überdeckt den Erwartungswert  $\mu$  mit Sicherheit  $\alpha_k \geq 95\%$  bzw.  $\alpha_k \geq 99\%$ ? **Lösung:** Es genügen  $I_2$  bzw.  $I_3$ !  
**Techniken:** Erwartung und Varianz, Chebychev (Abschätzung, T337), genauer Normalverteilung und lokaler / zentraler Grenzwertsatz (W201).

Gewählte Themen und benötigte Techniken

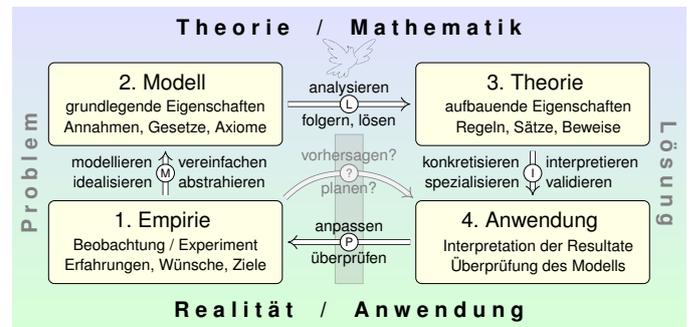
Diese Aufgaben nenne ich stellvertretend für unsere vier Kapitel über Wahrscheinlichkeitsrechnung. Meine Auswahl der Themen (in Breite und Tiefe) ist naturgemäß ein Kompromiss: Für den einen ist es schon zuviel, für die andere noch lange nicht genug. Ihr Bedarf hängt ganz davon ab, womit Sie sich beschäftigen. Ich will und kann nur einen Einstieg bieten, damit Sie diese wichtigen Techniken je nach Bedarf vertiefen können.

Wenn Sie das alles schon aus der Schule kennen und beherrschen, dann können Sie die folgenden Kapitel als Wiederholung genießen. Vermutlich ist aber für die meisten viel Neues und Schönes dabei.

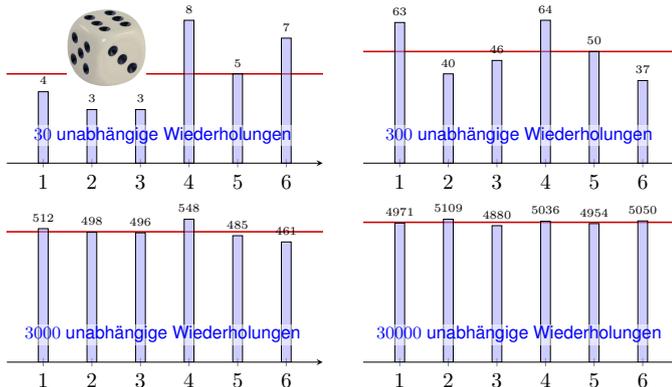
Welche mathematischen Grundlagen und Techniken benötigen wir? Die Anfänge der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wie hier dargelegt, erfordern vor allem begriffliche Präzision (Ereignisse und WMaße), sind aber technisch noch leicht (Reihen, Kombinatorik). Kontinuierliche Verteilungen, wie die Normalverteilung, erfordern zudem Integration. Überall nützlich sind Grenzwerte und Näherungen, wie Stirling–Formel oder Taylor–Entwicklung. Den zentralen Grenzwertsatz W1D schließlich können wir mit der Fourier–Transformation schmerzfrei nachrechnen.



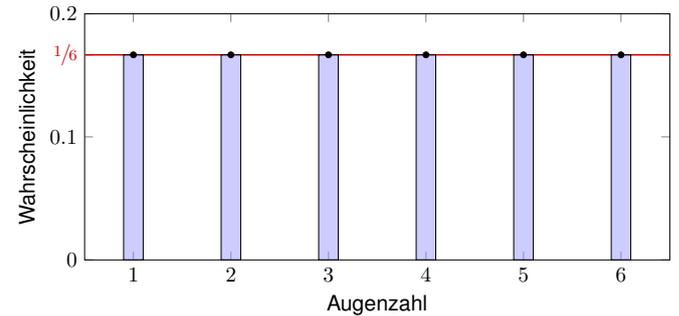
**Statistik** der ersten 6385 Lottoziehungen, vom 09.10.1955 bis 08.01.2025. „Die Ziehung der Zahlen hängt allein vom Zufall ab. Die statistische Häufigkeit der gezogenen Zahlen hat keinen Einfluss auf die Ziehungswahrscheinlichkeit.“ Alle Zahlen sollten gleich wahrscheinlich sein. Sind sie es wirklich? Jedes Modell ist eine **Annahme** und sollte kritisch überprüft werden. [V324]



Konkrete Anwendung benötigt abstrakte Kenntnisse; je anspruchsvoller, desto mathematischer! *Zahlen beherrschen sogar das Feuer*, erklärte Fourier 1822 stolz in seinem berühmten Zitat.  *Kann Mathematik selbst den Zufall zähmen?*, fragte Hilbert 1900 in seinem Vortrag den Kongress, und 1933 antwortete Kolmogorov: Erfreulicherweise ja! Das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten ist eine fundamentale Errungenschaft des menschlichen Geistes und wird überall erfolgreich angewendet. Diese segensreiche Kulturtechnik wollen wir verstehen und nutzen lernen.



Wie sollen Sie mit etwas rechnen, wie dem Zufall, das prinzipiell unberechenbar scheint? Das **empirische Gesetz der großen Zahlen** ist folgende Erfahrungstatsache: Bei häufiger unabhängiger Wiederholung nähern sich die relativen Häufigkeiten einem Grenzwert an.



Diese (plausiblen, aber idealisierten) **Wahrscheinlichkeiten** bilden das stochastische Modell. Es handelt sich um eine **Abstraktion**, also *theoretische* Werte. Hiervon zu unterscheiden sind die *empirischen relativen Häufigkeiten*: Diese werden bei  $n$ -maliger Durchführungen des Experiments beobachtet. Für  $n \rightarrow \infty$  nähern sie sich den Wahrscheinlichkeiten an. Satz T3) präzisiert und quantifiziert diese Aussage als **Gesetz der großen Zahlen**. Damit schließt sich ein erster Durchgang im obigen Modellierungskreislauf.



Mögliche **Ergebnisse** sind die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6.  
**Annahme:** Alle Ergebnisse sind gleich wahrscheinlich.

Das bedeutet anschaulich: Wenn Sie „sehr oft“ würfeln, dann treten die Ergebnisse 1, 2, 3, 4, 5, 6 gleich häufig auf, jedes also in  $1/6$  aller Fälle.

Das ist zunächst eine Erfahrung, sodann eine empirische **Beobachtung**, für unser theoretisches Modell ist es die grundlegende **Annahme**.

Abstraktion des Experiments zu einem mathematischen Modell  $(\Omega, p)$ :

Die Menge  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  umfasst alle möglichen **Ergebnisse**.

Hierauf definiert  $p: \Omega \rightarrow [0, 1]$  die **Elementarwahrscheinlichkeiten**:

$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}.$$

☺ In diesem Falle ist die Gleichverteilung plausibel aufgrund der Symmetrie des Würfels. Dieses Modell besteht nicht aus empirischen Daten, sondern ist eine axiomatische Festlegung! Wir fixieren damit präzise unsere Annahmen und leiten alle weiteren Rechnungen hieraus ab.

Wie können Sie das interpretieren? oder messen? Was bedeutet Wahrscheinlichkeit  $w \in [0, 1]$ ?

Vereinfacht gesagt: Bei häufiger Wiederholung tritt das Ergebnis im Anteil  $w$  aller Fälle ein. Mit den nötigen Werkzeugen können wir Wktn empirisch messen, siehe [V411], [V415], [W203].

**Aufgabe:** Sie würfeln mit einem fairen Würfel. Wie wahrscheinlich ist das Ereignis  $A$ : gerade Zahl?  $B$ : mindestens 5?  $A \cap B$ : beides?

**Lösung:** (1) Das Ereignis  $A = \{2, 4, 6\} \subseteq \Omega$  hat die Wahrscheinlichkeit

$$P(A) = P(\{2, 4, 6\}) = p(2) + p(4) + p(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

(2) Das Ereignis  $B = \{5, 6\} \subseteq \Omega$  hat die Wahrscheinlichkeit

$$P(B) = P(\{5, 6\}) = p(5) + p(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

(3) Die Schnittmenge  $A \cap B = \{6\}$  hat die Wahrscheinlichkeit

$$P(A \cap B) = P(\{6\}) = \frac{1}{6} = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}.$$

Die Ereignisse  $A$  und  $B$  sind hier **stochastisch unabhängig**.

Das Ereignis „gerade Zahl“ entspricht der Teilmenge  $A = \{2, 4, 6\} \subseteq \Omega$ . Dieses Ereignis  $A$  tritt genau dann ein, wenn ein Ergebnis  $\omega \in A$  gewürfelt wird. Interpretation der Wkt: Das Ereignis  $A = \{2, 4, 6\}$  tritt in der Hälfte aller Fälle ein, das Ereignis  $B = \{5, 6\}$  nur in einem Drittel aller Fälle. Beide zusammen, also das Ereignis  $A \cap B = \{6\}$  tritt in einem Sechstel aller Fälle ein.

☺ Unsere Rechnungen nutzen ausschließlich das zuvor festgelegte Modell eines fairen Würfels. Ein gezinkter Würfel hat andere Wahrscheinlichkeiten, wie im nachfolgenden Beispiel illustriert.

Man kann Würfel durch ungleiche Masse manipulieren (Bleieinlage). Präzisionswürfel sind daher transparent, um Betrug zu erschweren.



Gleiche Wkten!



Ungleiche Wkten?

Wir nehmen an, die Wahrscheinlichkeiten sind nicht gleich, sondern:

$$p(1) = 0.15, \quad p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = 0.16, \quad p(6) = 0.21$$

Dies ist ein anderes stochastisches Modell  $(\Omega, p)$  als die zuvor betrachtete Gleichverteilung! Es besagt anschaulich: Wenn Sie „sehr oft“ würfeln, dann tritt die Augenzahl 1 etwa in 15% aller Fälle auf, 2, 3, 4, 5 jeweils etwa in 16% aller Fälle, und 6 in etwa in 21% aller Fälle.

**Aufgabe:** Sie würfeln mit diesem gezinkten Würfel. Wie wahrscheinlich ist das Ereignis  $A$ : gerade Zahl?  $B$ : mindestens 5?  $A \cap B$ : beides?

**Lösung:** (1) Das Ereignis  $A = \{2, 4, 6\} \subseteq \Omega$  hat die Wahrscheinlichkeit

$$P(A) = P(\{2, 4, 6\}) = p(2) + p(4) + p(6) = 0.16 + 0.16 + 0.21 = 0.53.$$

(2) Das Ereignis  $B = \{5, 6\} \subseteq \Omega$  hat die Wahrscheinlichkeit

$$P(B) = P(\{5, 6\}) = p(5) + p(6) = 0.16 + 0.21 = 0.37.$$

(3) Die Schnittmenge  $A \cap B = \{6\}$  hat die Wahrscheinlichkeit

$$P(A \cap B) = P(\{6\}) = 0.21 \neq P(A) \cdot P(B) = 0.1961.$$

In diesem Modell sind  $A$  und  $B$  **stochastisch abhängig**.

Interpretation: Das Ereignis  $A$  tritt in 53% aller Fälle ein, und  $B$  tritt in 37% aller Fälle ein. Die Wahrscheinlichkeiten sind hier anders als beim fairen Würfel. Es handelt sich um zwei verschiedene Modelle, die unterschiedliche Vorhersagen machen. Welches Modell in einem konkreten Fall das „richtige“ oder das „realistischere“ ist, bleibt hierbei zunächst noch offen. Dazu muss man konkurrierende Modelle empirisch testen und das besser passende auswählen.

**Ziel:** Geeignete Sprache zur Beschreibung von Zufallsereignissen.

- Möglichst klare und einfache, doch unmissverständliche Notation
- Bequem, flexibel und sicher anwendbar in konkreten Rechnungen

Hierfür bietet sich die universelle Sprache der Mengenlehre an!

Alle Ergebnisse fassen wir zur **Ergebnismenge**  $\Omega$  zusammen.

Jedes Element  $\omega \in \Omega$  nennen wir ein **Ergebnis** oder einen Ausgang.

Jede Teilmenge  $A \subseteq \Omega$  nennen wir ein **Ereignis**. Wir vereinbaren dabei:

Das Ereignis  $A$  tritt genau dann ein, wenn ein Ergebnis  $\omega \in A$  eintritt.

Beispiel Würfeln:  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  besteht aus sechs Ergebnissen.

Das Ereignis „gerade Zahl“ entspricht der Teilmenge  $A = \{2, 4, 6\}$ .

Das Ereignis „mindestens 5“ entspricht der Teilmenge  $B = \{5, 6\}$ .

(Die Zusammenfassung als Menge ist eine Oder-Verknüpfung.)

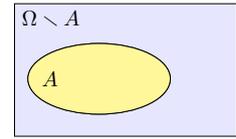
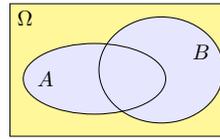
„Ergebnis“ und „Ereignis“ klingen ähnlich, bedeuten aber verschiedenes:

Unterscheiden Sie beides sorgfältig! Dann weiß jede:r, was gemeint ist.

Wir unterscheiden insbesondere das Ergebnis  $\omega \in \Omega$  als ein Element von  $\Omega$  und das Elementarereignis  $\{\omega\} \subseteq \Omega$  als eine Teilmenge von  $\Omega$ .

Wir bezeichnen mit  $\Omega$  unsere **Gesamtmenge**,  $\emptyset$  ist die **leere Menge**.

Wir schreiben  $A \subseteq B$ , wenn jedes Element von  $A$  auch in  $B$  liegt.



Die Teilmenge aller Elemente mit einer **Eigenschaft**  $P$  schreiben wir

$$\Omega_P = \{ \omega \in \Omega \mid P(\omega) \}.$$

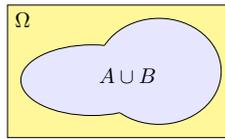
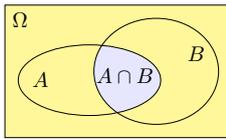
Beispiel: Für  $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$  gilt  $\{ \omega \in \Omega \mid \omega \text{ gerade} \} = \{2, 4, 6\}$ .

Das **Komplement** von  $A$  in  $\Omega$  ist „ $\Omega$  ohne  $A$ “ oder „nicht  $A$ “:

$$\Omega \setminus A := \bar{A} = \{ \omega \in \Omega \mid \omega \notin A \}.$$

Es besteht aus allen Elementen von  $\Omega$ , die nicht in  $A$  liegen.

Gebräuchliche Schreibweisen:  $\Omega \setminus A = \complement_{\Omega} A = \complement A = A^c = \bar{A} = \dots$



Die **Schnittmenge** „ $A$  und  $B$ “ ist

$$A \cap B = \{ \omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ und } \omega \in B \}.$$

Sie besteht aus den Elementen, die sowohl in  $A$  als auch in  $B$  liegen.

Die **Vereinigung** „ $A$  oder  $B$ “ ist

$$A \cup B = \{ \omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ oder } \omega \in B \}.$$

Sie besteht aus den Elementen, die in  $A$  oder  $B$  liegen (oder in beiden).

Zwei Mengen  $A, B$  heißen **disjunkt**, wenn  $A \cap B = \emptyset$  gilt.

In diesem Fall erhalten wir die **disjunkte Vereinigung**:

$$A \cup B := A \dot{\cup} B \text{ mit } A \cap B = \emptyset.$$

Die Vereinigung einer endlichen Familie von Mengen:

$$\bigcup_{k=0}^n A_k = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

Vereinigung einer (abzählbar) unendlichen Familie:

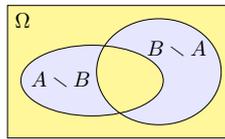
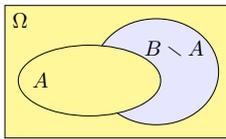
$$\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k = \{ \omega \mid \omega \in A_k \text{ für mind. ein } k \in \mathbb{N} \}$$

Die Schnittmenge einer endlichen Familie von Mengen:

$$\bigcap_{k=0}^n A_k = A_0 \cap A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

Schnittmenge einer (abzählbar) unendlichen Familie:

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} A_k = \{ \omega \mid \omega \in A_k \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \}$$



Die **Restmenge** „ $B$  ohne  $A$ “ ist

$$B \setminus A := \{ \omega \in B \mid \omega \notin A \}.$$

Sie besteht aus allen Elementen, die zwar in  $B$  nicht aber in  $A$  liegen.

Die **symmetrische Differenz** „entweder  $A$  oder  $B$ “ ist

$$A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Sie besteht aus allen Elementen, die entweder in  $A$  oder in  $B$  liegen, aber nicht in beiden zugleich! Wir nennen dies auch **exklusives Oder**.

**Satz T1A:** Rechenregeln für Vereinigung  $\cup$  und Schnitt  $\cap$

Folgende nützliche Rechenregeln gelten für alle  $A, B, C \subseteq \Omega$ :

Neutralität, Absorption, Idempotenz, Komplemente:

$$\begin{aligned} A \cup \emptyset &= A, & A \cup \Omega &= \Omega, & A \cup A &= A, & A \cup \bar{A} &= \Omega \\ A \cap \Omega &= A, & A \cap \emptyset &= \emptyset, & A \cap A &= A, & A \cap \bar{A} &= \emptyset \end{aligned}$$

Kommutativität:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$

Assoziativität:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Distributivität:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

**Übung:** Illustrieren und begründen Sie sorgfältig jede dieser Regeln.

**Satz T1B:** Regeln von DeMorgan für Komplemente

Das Komplement einer Menge  $A$  in  $\Omega$  ist definiert durch

$$\bar{A} = \Omega \setminus A := \{ \omega \in \Omega \mid \omega \notin A \}.$$

Es gilt  $\overline{\bar{\Omega}} = \emptyset$  und  $\overline{\bar{\emptyset}} = \Omega$  sowie  $\overline{\bar{A}} = A$ . Für die Restmenge gilt:

$$B \setminus A = B \cap \bar{A}$$

Für je zwei Mengen  $A, B \subseteq \Omega$  gilt

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

Allgemein: Für alle  $A, B, C \subseteq \Omega$  gilt

$$\begin{aligned} C \setminus (A \cup B) &= (C \setminus A) \cap (C \setminus B), \\ C \setminus (A \cap B) &= (C \setminus A) \cup (C \setminus B). \end{aligned}$$

**Übung:** Illustrieren und begründen Sie sorgfältig jede dieser Regeln.

Wie zuvor sei  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  sowie  $A = \{2, 4, 6\}$  und  $B = \{5, 6\}$ .

**Aufgabe:** Führen Sie an diesem Beispiel die DeMorgan-Regeln aus.

**Lösung:** Wir bestimmen Schnitt, Vereinigung und ihre Komplemente.

Das Komplement der Vereinigung ist der Schnitt der Komplemente:

$$\begin{aligned} \overline{A \cup B} &= \overline{\{2, 4, 5, 6\}} = \{1, 3\} \\ \bar{A} \cap \bar{B} &= \{1, 3, 5\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 3\} \end{aligned}$$

Das Komplement des Schnittes ist die Vereinigung der Komplemente:

$$\begin{aligned} \overline{A \cap B} &= \overline{\{6\}} = \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ \bar{A} \cup \bar{B} &= \{1, 3, 5\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 5\} \end{aligned}$$

😊 Diese Rechenregeln sind sehr einfach, sehr häufig und sehr nützlich. Sie schützen vor ärgerlichen Rechenfehlern und Trugschlüssen!

⚠ Wir sehen insbesondere  $\overline{A \cup B} \neq \bar{A} \cup \bar{B}$  und  $\overline{A \cap B} \neq \bar{A} \cap \bar{B}$ . Nutzen Sie die mathematische Notation mit Sinn und Verstand!

Alle Ergebnisse fassen wir zur **Ergebnismenge**  $\Omega$  zusammen. Jedes Element  $\omega \in \Omega$  heißt **Ergebnis**. Jede Teilmenge  $A \subseteq \Omega$  heißt **Ereignis**.

Menge	Bedeutung als Zufallsereignis
$\Omega$	Das sichere Ereignis: $\Omega$ tritt immer ein.
$\emptyset$	Das unmögliche Ereignis: $\emptyset$ tritt nie ein.
$A \subseteq \Omega$	Das Ereignis $A$ tritt ein bei jedem Ergebnis $\omega \in A$ .
$\Omega \setminus A$	Komplement: $\bar{A} = \Omega \setminus A$ tritt ein, wenn $A$ nicht eintritt.
$A \subseteq B$	Teilmenge: Immer wenn $A$ eintritt, dann auch $B$ .
$B \setminus A$	Restmenge: Das Ereignis $B$ tritt ein, aber nicht $A$ .
$A \cap B$	Schnittmenge: Die Ereignisse $A$ und $B$ treten beide ein.
$A \cup B$	Das Ereignis $A$ oder $B$ tritt ein (evtl. auch beide).
$A \sqcup B$	Das Ereignis $A$ oder $B$ tritt ein, wobei $A \cap B = \emptyset$ .
$A \Delta B$	Entweder $A$ oder $B$ tritt ein (aber nicht beide).

Unser Ziel sind nachvollziehbar begründete, quantitative Aussagen.  
 ☺ Diese Notation erlaubt präzises Rechnen mit Zufallsereignissen.

Sie würfeln mit unserem gezinkten Würfel,  $p: \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$p(1) = 0.15, \quad p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = 0.16, \quad p(6) = 0.21$$

**Aufgabe:** Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt unser gezinkter Würfel entweder eine gerade Zahl oder mindestens 5? (aber nicht beides!)

**Lösung:** Das Ereignis „gerade Zahl“ ist die Teilmenge  $A = \{2, 4, 6\}$ . Entsprechend ist das Ereignis „mindestens 5“ die Teilmenge  $B = \{5, 6\}$ . „Entweder  $A$  oder  $B$ “ entspricht der symmetrischen Differenz:

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{2, 4, 5, 6\} \setminus \{6\} = \{2, 4, 5\}.$$

Die Wkt berechnen wir durch Aufsummieren der Elementarwkten:

$$P(A \Delta B) = p(2) + p(4) + p(5) = 0.16 + 0.16 + 0.16 = 0.48$$

**Interpretation:** Dieses Ereignis tritt in 48% aller Fälle ein.

☺ Bequeme Notation und präzises Rechnen mit Zufallsereignissen. Übersetzung von Prosa zur Formel und zurück zur Interpretation.

**Definition T1C:** diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung

Eine **diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung** auf  $\Omega$  ist eine Abbildung

$$p: \Omega \rightarrow [0, 1] : \omega \mapsto p(\omega) \quad \text{mit} \quad \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1.$$

Siehe Definition A2H; hierbei hat  $p$  höchstens abzählbaren Träger. Für jedes **Ereignis**  $A \subseteq \Omega$  summieren sich die Elementarwkten:

$$P: \mathfrak{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1] : A \mapsto P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$$

Ein solches Paar  $(\Omega, P)$  heißt **diskreter Wahrscheinlichkeitsraum**.

Jedem Ergebnis  $\omega \in \Omega$  wird seine Elementarwahrscheinlichkeit  $p(\omega) \in [0, 1]$  zugeordnet. Beispiele: Für den fairen Würfel gilt  $p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = 1/6$ , für unseren gezinkten  $p(1) = 0.15, p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = 0.16, p(6) = 0.21$ . Weitere typische Beispiele: Wir betrachten später die Verteilungen  $p: \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$  mit Elementarwkten  $p(k) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$  oder  $p(k) = e^{-\lambda} \lambda^k / k!$  oder  $p(k) = q^k (1-q)$ . Es handelt sich hierbei jeweils um die Binomialverteilung  $B(n, t)$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und  $t \in [0, 1]$ , die Poisson-Verteilung  $P(\lambda)$  mit  $\lambda \geq 0$ , und die geometrische Verteilung  $G(q)$  mit  $q \in [0, 1]$ . Diese erfüllen  $p(k) \geq 0$  und  $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$ , wie gefordert. Versuchen Sie es als Übung!

Es gilt die **Normierung**  $P(\Omega) = 1$  sowie  $P(\emptyset) = 0$ . Außerdem gilt

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Bei disjunkter Vereinigung addieren sich die Wkten: Aus  $A \cap B = \emptyset$  folgt

$$P(A \sqcup B) = P(A) + P(B).$$

Per Induktion folgt aus paarweiser die **endliche Additivität**:

$$P(A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

Bei diskreten Wahrscheinlichkeiten gilt sogar **allgemeine Additivität**:

$$P\left(\bigsqcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i).$$

Insbesondere gilt  $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$  für jede Teilmenge  $A \subseteq \Omega$ .

Hier bedeutet  $\bigsqcup_j A_i = \bigcup_j A_i$  mit  $A_i \cap A_j = \emptyset$  für  $i \neq j$ . Die Indexmenge  $I$  ist beliebig. Siehe Definition A2H. Bei endlichem Wert ist der Träger abzählbar, wir haben also eine Reihe. Für kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsräume nutzen wir später Integrale statt Summen. Zudem beschränken wir uns dann (aus unumgänglichen technischen Gründen) auf höchstens abzählbare Vereinigungen. Einstweilen ist alles noch diskret und somit besonders einfach.

Auch die Zuordnung  $A \mapsto P(A)$  wollen wir als Abbildung auffassen. Wir fassen alle Ereignisse  $A \subseteq \Omega$  zur **Ereignismenge**  $\mathcal{A}$  zusammen. Zur gegebenen **Ergebnismenge**  $\Omega$  ist dies die **Potenzmenge**  $\mathfrak{P}(\Omega)$

$$\mathcal{A} = \mathfrak{P}(\Omega) := \{A \mid A \subseteq \Omega\}.$$

**Definition T1D:** diskreter Wahrscheinlichkeitsraum

Ein **diskretes WMaß** ist eine Abbildung  $P: \mathfrak{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$  für die gilt:

- 1 Normierung: Es gilt  $P(\Omega) = 1$  für die Gesamtmenge  $\Omega$ .
- 2 Additivität: Es gilt  $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$  für jedes  $A \subseteq \Omega$ .

Ein **diskreter Wahrscheinlichkeitsraum**  $(\Omega, P)$  besteht aus

- einer (nicht-leeren) Menge  $\Omega$  von möglichen Ergebnissen und
- einem diskreten WMaß  $P: \mathfrak{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$  wie oben erklärt.

Diese einfache Definition fasst unsere bisherigen Überlegungen zusammen. Sie ist ausreichend flexibel für viele Anwendungen und legt einen präzisen und bequemen Sprachgebrauch fest. Bei diskreten WRäumen ist  $P$  bestimmt durch die Elementarwkten  $p(\omega) := P(\{\omega\})$  für  $\omega \in \Omega$ . Neben diskreten werden wir später auch kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsmaße kennenlernen.

0 Unmögliches Ereignis:

$$P(\emptyset) = 0$$

1 Sicheres Ereignis:

$$P(\Omega) = 1$$

2 Komplement:

$$P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$$

3 Monotonie:

$$A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$$

4 Restmenge:

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(B \cap A)$$

5 Vereinigung:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

6 Disjunkte Vereinigung:

$$P(A \sqcup B) = P(A) + P(B) \quad \text{dank} \quad A \cap B = \emptyset$$

**Definition T1E:** endlicher WRaum und Gleichverteilung

Ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, P)$  heißt **endlich**, wenn die Ergebnismenge  $\Omega$  endlich ist, und **laplacesch**, wenn zudem alle Ergebnisse  $\omega \in \Omega$  gleich wahrscheinlich sind:

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}$$

Für dieses **Laplace-Wahrscheinlichkeitsmaß** auf  $\Omega$  gilt daher

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der Ergebnisse in } A}{\text{Anzahl aller Ergebnisse in } \Omega} = \frac{\text{günstige Ergebnisse}}{\text{mögliche Ergebnisse}}$$

Dies nennen wir auch die (diskrete, endliche) **Gleichverteilung** auf  $\Omega$ .

**Beispiel:** Der Wurf eines fairen Würfels ist ein Laplace-Experiment auf  $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$ , der Wurf unseres gezinkten Würfels hingegen nicht. Roulette ist ein Laplace-Experiment auf der Menge  $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, 36\}$ ; hingegen sind hierbei {rot, schwarz, zéro} nicht gleichwahrscheinlich.

**Aufgabe:** Sie würfeln zweimal. (1) Beschreiben Sie dies als WRaum.

**Lösung:** Als Ergebnismenge haben wir

$$\Omega = \{1, \dots, 6\}^2 = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1, 1), & (1, 2), & (1, 3), & (1, 4), & (1, 5), & (1, 6), \\ (2, 1), & (2, 2), & (2, 3), & (2, 4), & (2, 5), & (2, 6), \\ (3, 1), & (3, 2), & (3, 3), & (3, 4), & (3, 5), & (3, 6), \\ (4, 1), & (4, 2), & (4, 3), & (4, 4), & (4, 5), & (4, 6), \\ (5, 1), & (5, 2), & (5, 3), & (5, 4), & (5, 5), & (5, 6), \\ (6, 1), & (6, 2), & (6, 3), & (6, 4), & (6, 5), & (6, 6) \end{array} \right\}.$$

Wir nehmen an, beide Würfe seien gleichverteilt und unabhängig. Es handelt sich demnach bei  $(\Omega, P)$  um ein Laplace-Experiment!

**Aufgabe:** (2) Welche Wkt hat die Augensumme 2, 3, 4, ..., 12?

**Lösung:** Wir untersuchen das Ereignis  $A_k =$  „Die Augensumme ist  $k$ .“

$$A_2 = \{(1, 1)\}, \quad P(A_2) = |A_2|/|\Omega| = 1/36$$

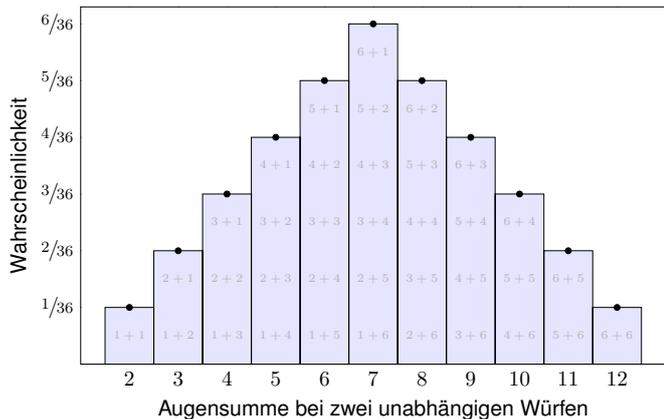
$$A_3 = \{(1, 2), (2, 1)\}, \quad P(A_3) = |A_3|/|\Omega| = 2/36$$

$$A_4 = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}, \quad P(A_4) = |A_4|/|\Omega| = 3/36$$

## Zweimaliger Wurf eines fairen Würfels

T125

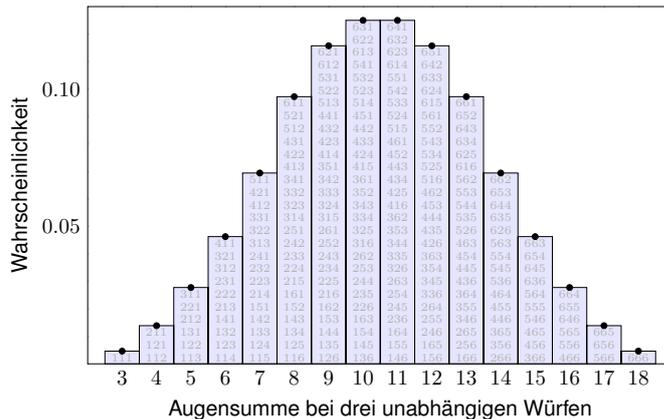
Alle Ergebnisse  $(i, j) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$  sind gleichwahrscheinlich, die zugehörigen Augensummen  $s = i + j$  hingegen nicht!



## Dreimaliger Wurf eines fairen Würfels

T126

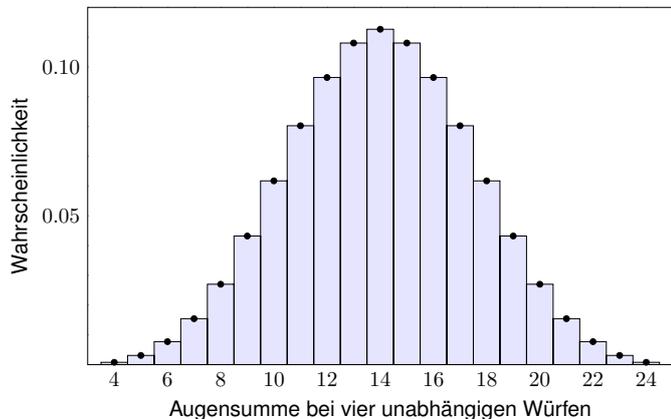
Bei dreimaligem Würfeln sind alle Ergebnisse  $(i, j, k) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3$  gleichwahrscheinlich, die Augensummen  $s = i + j + k$  hingegen nicht!



## Viermaliger Wurf eines fairen Würfels

T127  
Ausführung

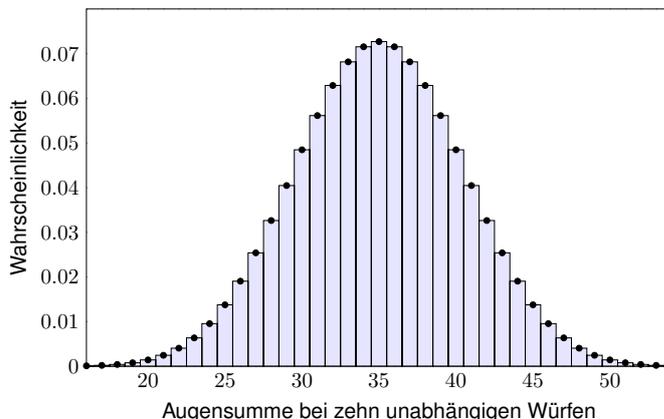
Die hier entstehende Glockenkurve wird uns noch viel nützen: Sie illustriert den **zentralen Grenzwertsatz** W1D, kurz ZGS.



## Zehnmaliger Wurf eines fairen Würfels

T128

Kombinatorik (Kapitel U) und Asymptotik (Kapitel V & W): Hier entsteht in immer besserer Näherung die **gaussche Glockenkurve**! Das hilft!



## Kombinatorik der Augensumme beim Würfeln

T129  
Ausführung

**Aufgabe:** Auf wie viele Weisen erhalten Sie die Augensumme  $s$  bei einmaligem Würfeln? zweimaligem Würfeln? dreimaligem Würfeln?

**Lösung:** (1) Bei einmaligem Würfeln ist alles klar:

Augensumme $s$	1	2	3	4	5	6
Möglichkeiten $n_s$	1	1	1	1	1	1

Die Wkt  $P(S=s) = 1/6$  ist gleichverteilt. Wir kodieren sie als Polynom

$$G(z) = \frac{1}{6}z^1 + \frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{6}z^4 + \frac{1}{6}z^5 + \frac{1}{6}z^6 = \frac{z - z^7}{6(1 - z)}$$

(2) Bei zweimaligem Würfeln entspricht die Summe der Augenzahlen der Faltung der Verteilung (1) mit sich selbst, als Polynom also  $G(z) \cdot G(z)$ :

Augensumme $s$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Möglichkeiten $n_s$	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Die Wkt ist jeweils  $P(S=s) = n_s/6^2$ , also keine Gleichverteilung mehr! Die Wkt ist am größten für die Augensumme 7, und zwar mit Wkt  $1/6$ .

## Kombinatorik der Summe beim fairen Münzwurf

T131  
Ausführung

Würfelexperimente sind schön anschaulich, die Rechnungen sind nicht ganz banal und illustrieren bereits viele wichtige Phänomene.

Münzwürfe sind wesentlich leichter und als Modell noch wichtiger: Wir wiederholen ein Experiment  $n$ -mal und zählen die Treffer.

**Aufgabe:** Sie werfen  $n$ -mal eine faire Münze: 0 = Kopf, 1 = Zahl. Die Summe der Treffer bezeichnen wir mit  $S_n \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit  $P(S_n=k)$  für alle  $0 \leq k \leq n$ .
- Berechnen Sie die erzeugende Funktion  $G_n(z) = \sum_k P(S_n=k) z^k$ .
- Skizzieren Sie die Verteilung der Zufallsvariablen  $S_1, S_2, S_3, S_4, \dots$

**Lösung:** (1) Für unabhängig wiederholte faire Münzwürfe finden wir:

$$P(S_n=k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

😊 Die Binomialverteilung  $\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$  ist ein wichtiges Modell. Wir werden sie in den nächsten Kapiteln ausführlich untersuchen.

(2) Wir finden das Polynom  $G_n(z) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^k = \left(\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\right)^n$ .

## Kombinatorik der Augensumme beim Würfeln

T130  
Ausführung

(3) Bei dreimaligem Würfeln müssen wir die Rechnung gut organisieren. Beispiel: Auf wie viele Weisen kann die Augensumme 10 entstehen? Je nach erstem Wurf  $10 = 1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6 = 5 + 5 = 6 + 4$ , dank voriger Tabelle also auf  $4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 = 27$  Möglichkeiten. Die Wkt ist demnach  $P(S=10) = 27/6^3 = 1/8 = 0.125$ .

Nach diesem Schema berechnen wir die folgende Tabelle: Die Summe der Augenzahlen entspricht der Faltung der Verteilungen (1) und (2). (Hier kann eine Tabellenkalkulation helfen, zum Beispiel *LibreOffice*.)

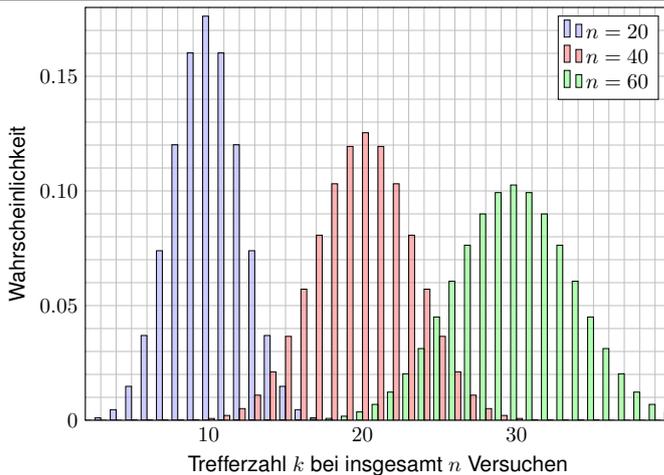
Augensumme $s$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Möglichkeiten $n_s$	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1

Die Wkt ist jeweils  $P(S=s) = n_s/6^3$ , wie oben graphisch dargestellt. Wie zu erwarten ist die Wkt am größten für die mittleren Augensummen 10 und 11, und zwar jeweils mit Wkt  $1/8$ . Jetzt können Sie's ausrechnen!

😊 Als Polynom entspricht dies dem Produkt  $G(z)^3 = G(z) \cdot G(z) \cdot G(z)$ . Die Wkten lesen Sie als Koeffizienten von  $G(z)^3 = \sum_s P(S=s) z^s$  ab. Die Kodierung als **erzeugende Funktion** (U4D) ist elegant und effizient.

## Kombinatorik der Summe beim fairen Münzwurf

T132  
Ausführung



Häufig stehen Sie vor der Aufgabe, nach Eintritt eines Ereignisses  $B$  auf die Wahrscheinlichkeit eines anderen Ereignisses  $A$  zu schließen.

**Aufgabe:** Angenommen, beim Würfeln wurde nicht die 6 gewürfelt. Wie groß ist dann noch die Wahrscheinlichkeit einer geraden Zahl?

**Lösung:** Wir setzen voraus, das Ereignis  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  tritt ein. Zum Ereignis  $A = \{2, 4, 6\}$  suchen wir die bedingte Wkt  $\mathbf{P}_B(A)$ .

Ergebnis $\omega =$	1	2	3	4	5	6
ursprüngliche Wkt $\mathbf{P}(\{\omega\}) =$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
bedingte Wkt $\mathbf{P}_B(\{\omega\}) =$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0

Die gesuchte Wkt ist demnach  $\mathbf{P}_B(A) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} = 40\%$ .

**Interpretation:** Wir würfeln sehr häufig und werten nur die Fälle, die die Bedingung  $B$  erfüllen. In  $\frac{2}{5}$  dieser Fälle erhalten wir eine gerade Zahl. In den restlichen  $\frac{3}{5}$  dieser Fälle erhalten wir eine ungerade Zahl.

Wie zuvor erklärt, beginnen wir mit einem stochastischen Modell, also einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathbf{P})$  gemäß Definition T1c.

**Definition T2A: bedingte Wahrscheinlichkeit**

Sei  $(\Omega, \mathbf{P})$  ein WRaum und  $B \subseteq \Omega$  ein Ereignis mit  $\mathbf{P}(B) > 0$ . Für jedes Ereignis  $A \subseteq \Omega$  definieren wir die Wkt von  $A$  unter der Bedingung  $B$ :

$$\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}_B(A) := \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$$

**Beispiel:** In der vorigen Aufgabe finden wir

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(\{2, 4\})}{\mathbf{P}(\{1, 2, 3, 4, 5\})} = \frac{2/6}{5/6} = \frac{2}{5} = 40\%$$

- ☺ Bequeme Notation und präzises Rechnen mit Zufallsereignissen.
- ☺ Die Rechnung ist meist leicht, die Interpretation erfordert Übung.
- ☺ Die Definition T2A stellt eindeutig klar, was gemeint ist.

**Aufgabe:** Ist  $\mathbf{P}_B: \mathfrak{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$  selbst ein (diskretes) WMaß?

**Lösung:** Ja,  $\mathbf{P}_B$  erfüllt die beiden definierenden Eigenschaften (T1D):

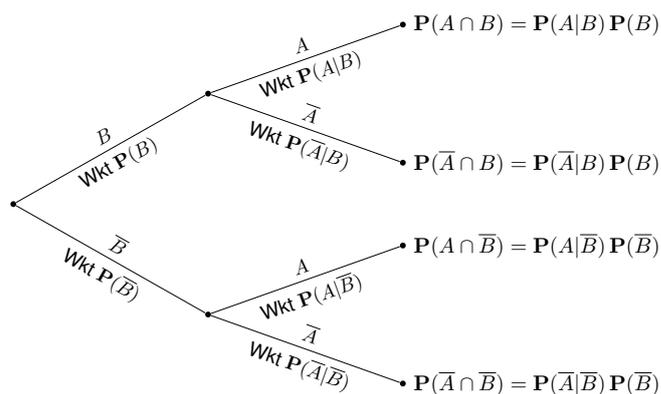
- (1) Normierung: Es gilt  $\mathbf{P}_B(\Omega) = \mathbf{P}(\Omega \cap B)/\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B)/\mathbf{P}(B) = 1$ .
- (2) Additivität: Für jedes Ereignis  $A \subseteq \Omega$  gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_B(A) &= \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\sum_{\omega \in A} \mathbf{P}(\{\omega\} \cap B)}{\mathbf{P}(B)} \\ &= \sum_{\omega \in A} \frac{\mathbf{P}(\{\omega\} \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \sum_{\omega \in A} \mathbf{P}_B(\{\omega\}). \end{aligned}$$

Gleiches gilt für (abzählbare) disjunkte Vereinigungen  $A = \bigsqcup_{i \in I} A_i$ :

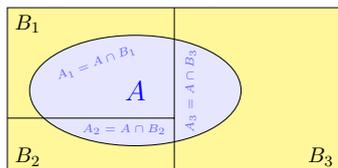
$$\begin{aligned} \mathbf{P}_B(A) &= \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\sum_{i \in I} \mathbf{P}(A_i \cap B)}{\mathbf{P}(B)} \\ &= \sum_{i \in I} \frac{\mathbf{P}(A_i \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \sum_{i \in I} \mathbf{P}_B(A_i) \end{aligned}$$

Aus diesen beiden Eigenschaften folgen alle weiteren Rechenregeln.



**Produktregel:** Die Wkt jedes Blattes ist das Produkt der bedingten Wkten entlang des Pfades.  
**Summenregel:** Die Wkt eines Ereignisses  $A$  ist die Summe der Wkten aller Pfade, die zu  $A$  führen. Implizite Voraussetzung: Diese Zerlegung muss ganz  $A$  überdecken und disjunkt sein!

Sei  $\Omega = B_1 \sqcup B_2 \sqcup \dots \sqcup B_\ell$  eine **Zerlegung** in disjunkte Ereignisse. Das bedeutet, es gilt  $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_\ell$  mit  $B_i \cap B_j = \emptyset$  für  $i \neq j$ . Dies zerlegt jedes Ereignis  $A \subseteq \Omega$  in disjunkte Teilmengen  $A_k = A \cap B_k$ :



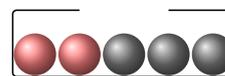
$$A = (A \cap B_1) \sqcup (A \cap B_2) \sqcup \dots \sqcup (A \cap B_\ell)$$

Hieraus folgt die **Formel der totalen Wahrscheinlichkeit**:

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{k=1}^{\ell} \mathbf{P}(A \cap B_k) = \sum_{k=1}^{\ell} \mathbf{P}(A|B_k) \mathbf{P}(B_k)$$

Diese Formel entspricht dem Baumdiagramm für  $\Omega = B_1 \sqcup B_2 \sqcup \dots \sqcup B_\ell$ .

- ☺ Sie gilt sogar für  $\mathbf{P}(B_k) = 0$ , wobei wir  $\mathbf{P}(A|B_k)\mathbf{P}(B_k) = 0$  setzen.
- ☺ Strategie: Zerlegung des Problems in einfachere Teilprobleme!



**Aufgabe:** Aus einer Urne mit zwei roten und drei schwarzen Kugeln ziehen wir nacheinander zufällig zwei Kugeln,  $\mathbf{P}$ : ohne Zurücklegen,  $\mathbf{Q}$ : mit Zurücklegen. Mit welcher Wkt haben beide die gleiche Farbe?

**Lösung:** Sei  $G = \{\text{Beide Kugeln haben die gleiche Farbe}\}$  sowie  $R = \{\text{Die erste ist rot}\}$  und  $S = \{\text{Die erste ist schwarz}\}$ . Wir wissen:

$$\Omega = R \sqcup S, \quad \mathbf{P}(R) = \frac{2}{5}, \quad \mathbf{P}(S) = \frac{3}{5}, \quad \mathbf{P}(G|R) = \frac{1}{4}, \quad \mathbf{P}(G|S) = \frac{2}{4},$$

$$\mathbf{P}(G) = \mathbf{P}(G|R) \mathbf{P}(R) + \mathbf{P}(G|S) \mathbf{P}(S) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2+6}{20} = \frac{2}{5},$$

$$\mathbf{Q}(G) = \mathbf{Q}(G|R) \mathbf{Q}(R) + \mathbf{Q}(G|S) \mathbf{Q}(S) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{13}{25}$$

- ☺ Schön und nützlich: klare Sprache und effiziente Rechenregeln. Bedingte Wkten strukturieren und vereinfachen die Rechnung!

Erinnerung: Für alle Ereignisse  $A, B \subseteq \Omega$  mit  $\mathbf{P}(A), \mathbf{P}(B) > 0$  gilt

$$\mathbf{P}(A|B) \mathbf{P}(B) \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} \mathbf{P}(B) \stackrel{\text{R}}{=} \mathbf{P}(A \cap B),$$

$$\mathbf{P}(B|A) \mathbf{P}(A) \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)} \mathbf{P}(A) \stackrel{\text{R}}{=} \mathbf{P}(A \cap B).$$

Durch Umstellen gewinnen wir hieraus die **Formel von Bayes**:

$$\mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B) \mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)}$$

☺ Dies erlaubt das „Umkehren von Bedingung und Schlussfolgerung“, zwar nicht im kausalen Sinne, aber immerhin im stochastischen Sinne.

☺ Typische Anwendung: Wir kennen die Wkten  $\mathbf{P}(A)$  und  $\mathbf{P}(B)$ , die Bestimmung von  $\mathbf{P}(A|B)$  ist leicht, aber gesucht ist  $\mathbf{P}(B|A)$ .

⚠ Um durch  $\mathbf{P}(A)$  zu dividieren, müssen wir  $\mathbf{P}(A) > 0$  voraussetzen. Die Formel gilt auch für  $\mathbf{P}(B) = 0$ ; wir setzen dann  $\mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B) = 0$ .

☺ Anschaulich in obiger Graphik zu  $A = (A \cap B_1) \sqcup \dots \sqcup (A \cap B_\ell)$ .

Soweit ist alles klar und einfach, die Formel von Bayes ist sehr leicht. In vielen Anwendungen entfaltet sie eine enorme Durchschlagskraft.

**Satz T2B: Thomas Bayes (1701–1761), posthum 1763**

Sei  $(\Omega, \mathbf{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $\Omega = B_1 \sqcup B_2 \sqcup \dots \sqcup B_\ell$  eine Zerlegung, also  $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_\ell$  mit  $B_i \cap B_j = \emptyset$  für  $i \neq j$ .

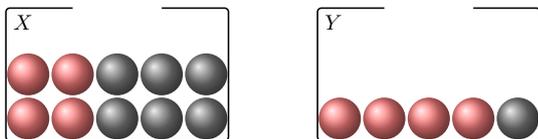
(1) Für alle  $A \subseteq \Omega$  gilt die Formel der **totalen Wahrscheinlichkeit**:

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{k=1}^{\ell} \mathbf{P}(A \cap B_k) = \sum_{k=1}^{\ell} \mathbf{P}(A|B_k) \mathbf{P}(B_k)$$

(2) Im Falle  $\mathbf{P}(A) > 0$  gilt zudem die **Formel von Bayes**:

$$\mathbf{P}(B_i|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B_i) \mathbf{P}(B_i)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(A|B_i) \mathbf{P}(B_i)}{\sum_{k=1}^{\ell} \mathbf{P}(A|B_k) \mathbf{P}(B_k)}$$

- ☺ Alles gilt wörtlich genauso für abzählbare Zerlegungen, also  $\ell = \infty$ .
- ☺ Bequeme Notation und präzises Rechnen mit Zufallsereignissen.
- ⚠ Die Rechnung ist meist leicht, die Interpretation erfordert Übung.



Urne  $X$ : 4 rote und 6 schwarze; Urne  $Y$ : 4 rote und 1 schwarze Kugel. Wir wählen zufällig eine Urne  $X, Y$  und ziehen daraus eine Kugel.

**Aufgabe:** (1) Welche Wkt hat das Ereignis  $R = \{\text{rote Kugel}\}$ ?

$$P(R) = P(R|X)P(X) + P(R|Y)P(Y) = \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

(2) Es wurde eine rote Kugel gezogen. Mit welcher Wkt aus Urne  $X$ ?

$$P(X|R) = \frac{P(R|X)P(X)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3}$$

😊 Die Rechnung ist Routine, doch die Interpretation erfordert Übung.

Eine bestimmte Krankheit tritt bei 2% aller Personen (zufällig) auf. Sie erfordert frühzeitige Erkennung und geeignete Maßnahmen. Ein Testverfahren für diese Krankheit liefert ein positives Ergebnis bei 98% aller Kranken, aber auch bei 6% aller gesunden Personen.

**Aufgabe:** Mit welcher Wkt ist eine positiv getestete Person krank?

**Lösung:** (0) Für das Ereignis  $K = \{\text{krank}\}$  wissen wir  $P(K) = 0.02$ . Für  $P = \{\text{positiver Test}\}$  gilt  $P(P|K) = 0.98$  und  $P(P|\bar{K}) = 0.06$ .

(1) Aus diesen Daten folgt zunächst die totale Wahrscheinlichkeit

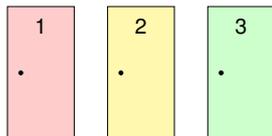
$$P(P) = P(P|K)P(K) + P(P|\bar{K})P(\bar{K}) = 0.98 \cdot 0.02 + 0.06 \cdot 0.98 = 0.0196 + 0.0588 = 0.0784 \approx 8\%$$

(2) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit  $P(K|P)$  erhalten wir mit Bayes:

$$P(K|P) = \frac{P(P|K)P(K)}{P(P)} = \frac{0.0196}{0.0784} = 0.25 = 25\%$$

Komplementär  $P(\bar{K}|P) \approx 75\%$ . In diesem Beispiel ist eine positiv getestete Person mit größerer Wahrscheinlichkeit gesund als krank!

Bei der Spielshow *Let's make a deal* wählt die Kandidatin zwischen drei Türen: Hinter einer ist ein Auto, hinter den beiden anderen sind Ziegen.



Die Kandidatin wählt eine Tür. Der Showmaster weiß, was hinter den Türen ist, und öffnet eine der beiden anderen Türen, immer mit Ziege. Er bietet der Kandidatin nun die Möglichkeit noch einmal zu wechseln.

**Aufgabe:** Ist es vorteilhaft, die Tür zu wechseln?

**Antwort:** Unglaublich, aber wahr: Ja! Es lohnt sich, zu wechseln!

Dies ist ein berühmtes Problem, zunächst paradox, dann lehrreich. Hierzu bieten sich drei Erklärungen: (1) Anschaulich. (2) Experimentell. (3) Ausführlich mit Bayes (Satz T2B). Versuchen Sie möglichst alle drei!

**Aufgabe:** Lösen Sie das Ziegenproblem mit der Formel von Bayes.

**Lösung:** Wir nummerieren die Türen und betrachten die Ereignisse:

$A_1, A_2, A_3 =$  Das Auto steht hinter Tür 1, 2, 3

⚠ Annahme der Gleichverteilung:  $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/3$   
Die Kandidatin wählt Tür 1. Wie kann der Moderator reagieren?

$M_1, M_2, M_3 =$  Der Moderator öffnet Tür 1, 2, 3

⚠ Annahme der Gleichverteilung auch bei der Türöffnung:

$$P(M_2|A_1) = 1/2, \quad P(M_2|A_2) = 0, \quad P(M_2|A_3) = 1, \\ P(M_3|A_1) = 1/2, \quad P(M_3|A_2) = 1, \quad P(M_3|A_3) = 0.$$

😊 Beide Annahmen kann die Kandidatin erzwingen, indem sie die drei Türen für ihren Gebrauch zufällig nummeriert, also *symmetrisiert*.

Der Moderator öffnet demnach Tür 2 oder Tür 3 jeweils mit Wkt  $1/2$ :

$$P(M_3) = P(M_3|A_1)P(A_1) + P(M_3|A_2)P(A_2) + P(M_3|A_3)P(A_3) \\ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

Zu einer Prüfung treten drei Typen von Teilnehmer:innen an:  
Typ  $A$ : 10% sind gut vorbereitet und haben Erfolgswkt 100%.  
Typ  $B$ : 50% sind etwas vorbereitet und haben Erfolgswkt 60%.  
Typ  $C$ : 40% sind schlecht vorbereitet und haben Erfolgswkt 25%.

**Aufgabe:** (1) Wie groß ist der Anteil erfolgreicher Teilnehmer:innen  $E$ ?  
(2) Wie groß ist darunter jeweils der Anteil der Typen  $A, B, C$ ?

**Lösung:** (0) Die Gesamtmenge wird disjunkt zerlegt in  $\Omega = A \sqcup B \sqcup C$ .  
(1) Nach der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit (T2B) erhalten wir:

$$P(E) = P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B) + P(E|C)P(C) \\ = 1.0 \cdot 0.1 + 0.6 \cdot 0.5 + 0.25 \cdot 0.4 = 0.1 + 0.3 + 0.1 = 0.5$$

(2) Nach Bayes (T2B) berechnen wir hieraus folgende Verteilung auf  $E$ :

$$P(A|E) = P(E|A)P(A) / P(E) = 0.1/0.5 = 0.2 \\ P(B|E) = P(E|B)P(B) / P(E) = 0.3/0.5 = 0.6 \\ P(C|E) = P(E|C)P(C) / P(E) = 0.1/0.5 = 0.2$$

Die Verteilung ändert sich von (10, 50, 40) auf  $\Omega$  zu (20, 60, 20) auf  $E$ .

2% krank      98% gesund

Wissen macht Ah! Unwissen macht Aua! Unkenntnis führt zu Fehleinschätzung, schlimmer: zu Fehlentscheidungen.

Ist unser Ergebnis plausibel? Naiv halten Sie den Test für zuverlässig und vertrauen dem Testergebnis. Das Problem ist hier, dass die Krankheit eher selten ist; die allermeisten der getesteten Personen sind gesund, und hier hat der Test leider eine recht hohe Falsch-Positiv-Rate. Falsch-positive Testergebnisse kommen daher recht häufig vor.

Diese *qualitative Vorüberlegung* erklärt das Problem sehr schön anschaulich. Unsere Rechnung liefert zudem eine *quantitative Aussage*. Obwohl die Krankheit mit 2% recht selten ist, werden etwa 8% aller Personen positiv getestet: Von den 98% gesunden werden 6% falsch positiv getestet!

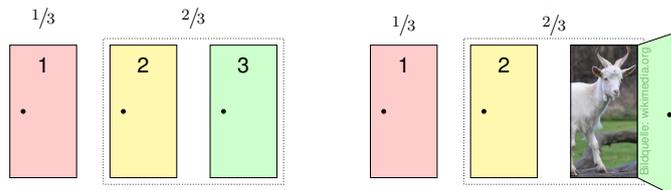
Ein positiver Test ist daher nur ein erstes Indiz, dass die Krankheit vorliegen *könnte*: Die Wahrscheinlichkeit, krank zu sein, steigt von 2% vor dem Test auf 25% nach einem positiven Test. Entsprechend sinkt die Wahrscheinlichkeit, gesund zu sein, von 98% vor dem Test auf 75% nach einem positiven Test. Daher wird eine Ärzt:in möglichst versuchen, den Verdacht durch weitere, unabhängige (und genauere) Untersuchungen zu erhärten oder auszukurieren.

5.88% gesund und positiv

Sensitivität des Tests: 98% = Richtig-Positiv-Rate

Spezifität des Tests: 94% = Richtig-Negativ-Rate

(1) Anschauliche Darstellung der Wahrscheinlichkeiten: Die Kandidatin wählt Tür 1, diese hat Gewinnwkt  $1/3$ , die beiden anderen zusammen  $2/3$ . Das bleibt auch so, nachdem der Moderator die/eine Ziegentür öffnet.



(2) Experimenteller Vergleich bei 3000 Spielshows:  
Die Strategie „nie wechseln“ erzielt etwa 1000 Treffer (ein Drittel).  
Die Strategie „immer wechseln“ erzielt die verbleibenden 2000 Treffer.

😊 Entgegen dem naiven ersten Eindruck ist es tatsächlich die bessere Strategie, die anfangs gewählte Tür im zweiten Schritt zu wechseln! Stochastik (= Scharfsinn) hilft, mindert Risiken, optimiert Chancen!

Angenommen der Moderator öffnet Tür 3. Was sollte die Kandidatin tun? Die Formel von Bayes ergibt für die Gewinnwkt der Türen 1 und 2:

$$P(A_1|M_3) = \frac{P(M_3|A_1)P(A_1)}{P(M_3)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \\ P(A_2|M_3) = \frac{P(M_3|A_2)P(A_2)}{P(M_3)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

😊 Das entspricht der anschaulichen Erklärung: Wechseln ist besser!  
Die Rechnung verläuft in allen Fällen aus Symmetriegründen gleich.

Ein häufiger Einwand gegen diese Rechnung ist folgender: Was wäre, wenn der Moderator die beiden Türen ungleich öffnet? Sei allgemein  $P(M_2|A_1) = \alpha \in [0, 1]$  und  $P(M_3|A_1) = 1 - \alpha$ . Wir haben oben vereinfachend  $\alpha = 1/2$  angenommen. Die allgemeine Rechnung verläuft so: Zunächst folgt  $P(M_2) = (1 + \alpha)/3$  und  $P(M_3) = (2 - \alpha)/3$ . Die obige Rechnung ergibt nun  $P(A_1|M_3) = (1 - \alpha)/(2 - \alpha)$  und  $P(A_2|M_3) = 1/(2 - \alpha)$ . Es ist auch hier immer noch vorteilhaft zu wechseln! Der Sonderfall  $\alpha = 0$  bedeutet: Hat der Moderator die Wahl, Tür 2 oder 3 zu öffnen, dann nimmt er immer Tür 3. Hier gilt Gleichstand  $P(A_1|M_3) = P(A_2|M_3) = 1/2$ . In allen verbleibenden Fällen *mus*s der Moderator Tür 2 öffnen, und hier gilt  $P(A_1|M_2) = 0$  gegen  $P(A_3|M_2) = 1$ . Über alle Fälle summiert bleibt die Schlussfolgerung bestehen!

**Stochastisch un/abhängige Ereignisse** T217

Wir betrachten weiterhin einen WRaum  $(\Omega, \mathcal{P})$  gemäß T1c. Zwei Ereignisse  $A$  und  $B$  sind **stochastisch unabhängig**, wenn die Wahrscheinlichkeit von  $A$  nicht von  $B$  abhängt:

$$P(A|B) = P(A)$$

Das setzt  $P(B) > 0$  voraus und bedeutet ausgeschrieben:

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A),$$

also  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ . Dies machen wir nun zur Definition:

**Definition T2C: stochastisch unabhängige Ereignisse**

Sei  $(\Omega, \mathcal{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $A, B \subseteq \Omega$  zwei Ereignisse. Wir nennen  $A$  und  $B$  (**stochastisch**) **unabhängig** bezüglich  $\mathcal{P}$ , wenn

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

In Worten: Die Wkt des Schnitts  $A \cap B$  ist das Produkt der Wkten. Andernfalls heißen die Ereignisse  $A$  und  $B$  (**stochastisch**) **abhängig**.

**Stochastisch un/abhängige Ereignisse** T218

**Aufgabe:** Sie würfeln einmal mit einem fairen Würfel. Dies ist ein Laplace-Experiment auf  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

$$A := \{\text{gerade Zahl}\} = \{2, 4, 6\}$$

$$B := \{\text{höchstens } 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Sind  $A$  und  $B$  stochastisch unabhängig?

**Lösung:** Wir finden zunächst  $A \cap B = \{2, 4\}$ . Es gilt  $P(A) = \frac{1}{2}$  und  $P(B) = \frac{5}{6}$ , aber  $P(A \cap B) = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}$ .

☺ Die Ereignisse  $A$  und  $B$  sind demnach **stochastisch abhängig**.

☺ Anschaulich plausibel. Definition T2c sagt genau, was zu prüfen ist.

Quantitativer Vergleich: Es gilt  $P(A|B) = \frac{2}{5} < \frac{1}{2} = P(A)$  und  $P(B|A) = \frac{2}{3} < \frac{5}{6} = P(B)$ . Wir sprechen von einer negativen Korrelation: Das Eintreten von  $B$  verringert die Wkt von  $A$ . Das Eintreten von  $A$  verringert die Wkt von  $B$ . Wir führen dies in Definition T3k aus.

Eine Eigenschaft wie Unabhängigkeit können Sie prüfen; das ist zunächst eine (Beweis-)Last. Umgekehrt jedoch, sobald Sie sie voraussetzen dürfen, ist sie für Sie von großem Nutzen! In vielen praktischen Anwendungen erlaubt ein sorgfältiger Versuchsaufbau die Annahme der Unabhängigkeit, da die Ereignisse sich aus physikalischen Gründen nicht beeinflussen (können).

**Stochastisch un/abhängige Ereignisse** T219

**Aufgabe:** Sie würfeln zweimal mit einem fairen Würfel. Dies ist ein Laplace-Experiment auf  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ .

$$A := \{\text{Die erste Augenzahl ist gerade}\}$$

$$B := \{\text{Die Augensumme ist gerade}\}$$

Sind  $A$  und  $B$  stochastisch unabhängig?

**Lösung:** Wir haben  $A \cap B = \{\text{Beide Augenzahlen sind gerade}\}$ . Somit finden wir  $P(A) = \frac{1}{2}$  und  $P(B) = \frac{1}{2}$  sowie  $P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ .

☺ Die Ereignisse  $A$  und  $B$  sind demnach **stochastisch unabhängig**.

☺ Auch hier sagt Ihnen die Definition T2c genau, was zu prüfen ist.

Alternative Formulierung: Hier gilt  $P(A) = \frac{1}{2} = P(A|B)$  und  $P(B) = \frac{1}{2} = P(B|A)$ . Intuitiv-anschaulich ist das vielleicht etwas überraschend, denn die erste Augenzahl beeinflusst natürlich die Augensumme. Dennoch sind beide Ereignisse  $A$  und  $B$  stochastisch unabhängig.

Es geht bei der stochastischen Unabhängigkeit nicht um Kausalität o.ä., sondern allein um die Multiplikatивität der Wahrscheinlichkeiten. Die Ereignisse  $A$  und  $B$  mögen noch so raffiniert miteinander verweben sein, doch es zählt allein die Gleichung  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ . Nutzen Sie beides: Definition und Beispiele, Präzision und Intuition, Handwerk und Kunst.

**Stochastisch un/abhängige Ereignisse** T220 Übung

**Aufgabe:** Sie würfeln zweimal nacheinander mit einem fairen Würfel. Sei  $X$  die erste Augenzahl,  $Y$  die zweite,  $S = X + Y$  ihre Summe.

(1a) Sind die Ereignisse  $X = 3$  und  $S = 7$  stochastisch unabhängig?  
 (1b) Sind die Ereignisse  $X = 3$  und  $S = 6$  stochastisch unabhängig?  
 (2) Berechnen und interpretieren Sie ebenso die bedingten Wkten.

**Lösung:** (1a) Wir wissen schon  $P(X = 3) = \frac{1}{6}$  und  $P(S = 7) = \frac{1}{6}$  sowie  $P(X = 3, S = 7) = P(\{(3, 4)\}) = \frac{1}{36}$ . Beide Ereignisse sind unabhängig.

(1b) Wir wissen schon  $P(X = 3) = \frac{1}{6}$  und  $P(S = 6) = \frac{5}{36}$  und finden  $P(X = 3, S = 6) = P(\{(3, 3)\}) = \frac{1}{36}$ . Beide Ereignisse sind abhängig.

(2a)  $P(S = 7|X = 3) = \frac{1}{6} = P(S = 7)$ ,  
 $P(X = 3|S = 7) = \frac{1}{6} = P(X = 3)$ .

(2b)  $P(S = 6|X = 3) = \frac{1}{6} \neq \frac{5}{36} = P(S = 6)$ ,  
 $P(X = 3|S = 6) = \frac{1}{5} \neq \frac{1}{6} = P(X = 3)$ .

Nochmal zur Betonung: Es geht bei der stochastischen Unabhängigkeit nicht um Kausalität! Die Ereignisse mögen noch so raffiniert miteinander verweben sein, für ihre stochastische Unabhängigkeit zählt allein die Multiplikatивität der Wahrscheinlichkeiten. So einfach ist das.

**Vierfeldertafel und Unabhängigkeit** T221

**Aufgabe:** Sind folgende Ereignisse  $A, B$  stochastisch unabhängig?

Wkt	$B$	$\bar{B}$	ges.
$A$	0.28	0.12	0.40
$\bar{A}$	0.42	0.18	0.60
ges.	0.70	0.30	1.00

Wkt	$Y$	$\bar{Y}$	ges.
$X$	0.30	0.10	0.40
$\bar{X}$	0.40	0.20	0.60
ges.	0.70	0.30	1.00

Links: Ja! Aus  $P(A), P(B)$  und Multiplikatивität folgt die Tabelle. Rechts: Nein! Multiplikatивität gilt hier nicht;  $X, Y$  sind abhängig. Wir sehen erfreut: Bei einer Vierfeldertafel genügt zur Unabhängigkeit bereits eines der vier Produkte, die anderen drei gibt es gratis (T2d).

☺ Die Definition T2c können Sie in beide Richtungen anwenden: Sind die Wkten gegeben, so können Sie Unabhängigkeit leicht prüfen. Ist umgekehrt die Unabhängigkeit gegeben, so können Sie die Wkten von Schnitten wunderbar als Produkte ausrechnen. Das hilft ungemein! Eine schöne Illustration zeigt das „Sudoku für Wahrscheinlichkeiten“.

**Komplemente und Unabhängigkeit** T222 Übung

**Lemma T2d: Komplemente**

Sind  $(A, B)$  unabhängig, dann auch  $(A, \bar{B})$  und  $(\bar{A}, B)$  sowie  $(\bar{A}, \bar{B})$ . Für jedes Ereignis  $A \subseteq \Omega$  sind zudem  $(A, \emptyset)$  und  $(A, \Omega)$  unabhängig.

**Aufgabe:** Rechnen Sie dies sorgfältig nach! **Lösung:**

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A \setminus (A \cap B)) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\bar{B})$$

Jedes Ereignis  $A$  ist von  $\emptyset$  stochastisch unabhängig:

$$P(A \cap \emptyset) = P(\emptyset) = 0 = P(A) \cdot P(\emptyset)$$

Jedes Ereignis  $A$  ist von  $\Omega$  stochastisch unabhängig:

$$P(A \cap \Omega) = P(A) = P(A) \cdot P(\Omega)$$

Zusammengefasst: Jedes der Ereignisse  $\emptyset, A, \bar{A}, \Omega$  ist stochastisch unabhängig von jedem der Ereignisse  $\emptyset, B, \bar{B}, \Omega$ . Das nützt gelegentlich.

**Sudoku für Wahrscheinlichkeiten** T223

**Aufgabe:** Wie können Sie die Tabelle füllen? bei Unabhängigkeit?

Wkt	$B$	$\bar{B}$	ges.
$A$			0.36
$\bar{A}$			
ges.	0.25		

Wkt	$B$	$\bar{B}$	ges.
$A$	<span style="border: 1px solid red;">0.00</span> <span style="border: 1px solid red;">0.25</span>	<span style="border: 1px solid red;">0.11</span> <span style="border: 1px solid red;">0.36</span>	0.36
$\bar{A}$	<span style="border: 1px solid red;">0.00</span> <span style="border: 1px solid red;">0.25</span>	<span style="border: 1px solid red;">0.39</span> <span style="border: 1px solid red;">0.64</span>	0.64
ges.	0.25	0.75	1.00

Wkt	$B$	$\bar{B}$	ges.
$A$	0.09	0.27	0.36
$\bar{A}$	0.16	0.48	0.64
ges.	0.25	0.75	1.00

Ohne die Voraussetzung der Unabhängigkeit sind die rot markierten Einträge nicht eindeutig: Sie können ein beliebiges Feld aussuchen und frei festlegen – im offensichtlichen Intervall! Bei Unabhängigkeit gibt es jeweils nur eine Lösung (hier gelb). Ein raffinierteres Beispiel: Gleiches gilt bei der nächsten Frage, es gibt aber zwei Lösungen (quadratische Gleichung).

Wkt	$B$	$\bar{B}$	ges.
$A$	0.12		
$\bar{A}$		0.32	
ges.			

Wkt	$B$	$\bar{B}$	ges.
$A$	0.12	<span style="border: 1px solid red;">0.00</span> <span style="border: 1px solid red;">0.56</span>	<span style="border: 1px solid red;">0.12</span> <span style="border: 1px solid red;">0.68</span>
$\bar{A}$	<span style="border: 1px solid red;">0.00</span> <span style="border: 1px solid red;">0.56</span>	0.32	<span style="border: 1px solid red;">0.32</span> <span style="border: 1px solid red;">0.88</span>
ges.	<span style="border: 1px solid red;">0.12</span> <span style="border: 1px solid red;">0.68</span>	<span style="border: 1px solid red;">0.32</span> <span style="border: 1px solid red;">0.88</span>	1.00

Wkt	$B$	$\bar{B}$	ges.
$A$	0.12	0.08 0.48	0.20 0.60
$\bar{A}$	0.48 0.08	0.32	0.80 0.40
ges.	0.60 0.20	0.40 0.80	1.00

**Annähernde Unabhängigkeit** T224 Übung

**Aufgabe:** Drei Absender schreiben je einen Brief an einen von zwei Empfängern. Die Wahlen sind zufällig, gleichverteilt und unabhängig.

(1) Berechnen Sie  $P(A_1), P(A_2), P(A_1 \cap A_2)$  für die Ereignisse

$$A_i = \{\text{Der Empfänger } i \text{ erhält mindestens einen Brief}\}.$$

(2) Sind  $A_1, A_2$  stochastisch unabhängig? (3) Was gilt für  $n$  Absender?

**Lösung:** Es gibt  $2^3 = 8$  gleichwahrscheinliche Zuordnungen:

$$(1, 1, 1) \quad (1, 1, 2) \quad (1, 2, 1) \quad (1, 2, 2) \\ (2, 1, 1) \quad (2, 1, 2) \quad (2, 2, 1) \quad (2, 2, 2)$$

(1) Demnach finden wir  $P(A_1) = P(A_2) = 7/8$  und  $P(A_1 \cap A_2) = 6/8$ .

(2) Wegen  $7/8 \cdot 7/8 \neq 6/8$  sind  $A_1, A_2$  stochastisch abhängig.

(3) Allgemein  $P(A_1) = P(A_2) = 1 - 2^{-n}$  und  $P(A_1 \cap A_2) = 1 - 2^{1-n}$ . Unabhängigkeit gilt hierbei nie, aber die „Abhängigkeit nimmt ab“: Für  $n \rightarrow \infty$  gilt  $P(A_1)P(A_2)/P(A_1 \cap A_2) \rightarrow 1$ . Das ist plausibel! Mehr zur Korrelation von Ereignissen finden Sie ab Seite T350.

Zwei Ereignisse  $A, B$  sind unabhängig, wenn gilt:  

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$
 Drei Ereignisse  $A, B, C$  sind unabhängig, wenn gilt:  

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A)P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

⚠ Die Tripelbedingung folgt nicht aus den drei Paarbedingungen!  
 Sie kennen dieses Problem von linearer Unabhängigkeit von Vektoren.

**Definition T2E: stochastische Unabhängigkeit**  
 Sei  $(\Omega, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Familie von Ereignissen  $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq \Omega$  heißt (**stochastisch**) **unabhängig**, wenn folgende Produktformel für jede Auswahl  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_\ell \leq n$  gilt:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_\ell}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_\ell})$$

**Aufgabe:** In einer Urne befinden sich die Lose 112, 121, 211, 222.  
 Sei  $A_i$  das Ereignis „1 an  $i$ -ter Stelle“. Sind  $A_1, A_2$  unabhängig?  
 und  $A_1, A_3$ ? und  $A_2, A_3$ ? Sind  $A_1, A_2, A_3$  unabhängig?

**Lösung:** Wir finden  $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/2$   
 und  $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) = 1/4$ ;  
 Die Ereignisse  $A_1, A_2, A_3$  sind paarweise unabhängig.  
 Es gibt kein Los 111, daher gilt  $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0$ ;  
 Das Tripel  $(A_1, A_2, A_3)$  ist insgesamt nicht unabhängig.

**Aufgabe:** Sie würfeln zweimal mit einem fairen Würfel. Berechnen Sie  
 die Wkten von  $A = \{\text{erster gerade}\}$  und  $B = \{\text{zweiter ungerade}\}$  und  
 $C = \{\text{Summe gleich } 7\}$  und ihrer Schnitte. Sind  $A, B, C$  unabhängig?

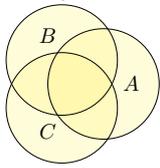
**Lösung:** Wir finden  $P(A) = P(B) = 1/2$  und  $P(C) = 1/6$  sowie  
 $P(A \cap B) = 1/4$  und  $P(A \cap C) = P(B \cap C) = P(A \cap B \cap C) = 1/12$ ;  
 Die Familie  $(A, B, C)$  ist paarweise unabhängig, aber nicht unabhängig.  
 Wir kennen dieses erstaunliche Phänomen bereits. Es tritt häufig auf!  
 Es ist keine exotische Ausnahme, sondern ein typisches Problem.

Erinnerung: Für  $A, B \subseteq \Omega$  gilt  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .  
**Aufgabe:** (1) Erklären Sie graphisch und rechnerisch die Siebformel:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

(2) Was erhalten Sie im Spezialfall, wenn  $A, B, C$  unabhängig sind?  
 (3) Formulieren und erklären Sie die Formel für  $P(A \cup B \cup C \cup D)$ .  
 (4) Formulieren Sie die allgemeine Siebformel: Aus  $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$  folgt  
 $\prod_{i=1}^n (I_A - I_{A_i}) = 0$  und somit  $I_A = \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|J|-1} I_{A_J}$ .

**Lösung:** (1a) Die Summe  $P(A) + P(B) + P(C)$   
 zählt manche Elemente doppelt oder gar dreifach.  
 Nach Korrektur  $-P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C)$   
 zählen die Elemente in  $A \cap B \cap C$  gar nicht mehr.  
 Nach Korrektur  $+P(A \cap B \cap C)$  stimmt alles.



**Aufgabe:** (nach Lewis Carroll) Projekte im Research & Development  
 leiden erfahrungsgemäß zu 70% an irrationalen Zielen, 75% an schlechter  
 Kommunikation, 80% an Missmanagement, 85% an Zeitmangel.

Wie viele Projekte leiden an allem, also an irrationalen Zielen, an schlechter  
 Kommunikation, an Missmanagement und natürlich an Zeitmangel...  
 (1) höchstens? (2) mindestens? (0) wenn diese unabhängig sind?  
 Nennen Sie Mengen  $I, K, M, Z \subseteq \Omega$ , die diese Schranken realisieren!

M	Z	Z				M	Z	M	Z	M	Z	M	Z	M	Z	
76...80	81...85	86...90	91...95	96...100		76...80	81...85	86...90	91...95	96...100		76...80	81...85	86...90	91...95	96...100
M	Z	M	Z	M	Z	M	Z	M	Z	M	Z	M	Z	M	Z	
51...55	56...60	61...65	66...70	71...75		51...55	56...60	61...65	66...70	71...75		51...55	56...60	61...65	66...70	71...75
I	K	I	K	I	K	I	K	I	K	I	K	I	K	I	K	
M	Z	M	Z	M	Z	M	Z	M	Z	M	Z	M	Z	M	Z	
26...30	31...35	36...40	41...45	46...50		26...30	31...35	36...40	41...45	46...50		26...30	31...35	36...40	41...45	46...50
I	K	I	K	I	K	I	K	I	K	I	K	I	K	I	K	
M	Z	M	Z	M	Z	M	Z	M	Z	M	Z	M	Z	M	Z	
1...5	6...10	11...15	16...20	21...25		1...5	6...10	11...15	16...20	21...25		1...5	6...10	11...15	16...20	21...25
I	K	I	K	I	K	I	K	I	K	I	K	I	K	I	K	

Sie werfen zweimal eine faire Münze: 0 = Kopf, 1 = Zahl.  
**Aufgabe:** Sind folgende Ereignisse  $(A, B, C)$  unabhängig?  
 $A = \{\text{Zahl beim ersten Wurf}\} = \{(1, 0), (1, 1)\}$   
 $B = \{\text{Zahl beim zweiten Wurf}\} = \{(0, 1), (1, 1)\}$   
 $C = \{\text{gleiches Ergebnis bei beiden}\} = \{(0, 0), (1, 1)\}$

Welche dieser drei Paare sind unabhängig? Ist das Tripel unabhängig?  
**Lösung:** Der Ergebnisraum ist  $\Omega = \{0, 1\}^2$  mit Gleichverteilung.  
 Wir berechnen die erforderlichen Wahrscheinlichkeiten:

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2},$$

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4},$$

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}.$$

😊 Jedes der Paare  $(A, B)$  und  $(A, C)$  und  $(B, C)$  ist unabhängig.  
 ⚠ Das Tripel  $(A, B, C)$  ist dennoch abhängig! Lesen Sie die Definition!  
 Sie kennen dieses Problem von linear un/abhängigen Vektoren.

**Aufgabe:** Wir würfeln zweimal mit einem fairen Würfel. Berechnen Sie  
 die Wkten von  $A = \{\text{erster gerade}\}$  und  $B = \{\text{zweiter 2 oder 5}\}$  und  
 $C = \{\text{Summe gleich } 7\}$  und ihrer Schnitte. Sind  $A, B, C$  unabhängig?

**Lösung:** Wir finden  $P(A) = 1/2$  und  $P(B) = 1/3$  und  $P(C) = 1/6$   
 sowie  $P(A \cap B) = 1/6$  und  $P(A \cap C) = 1/12$  und  $P(B \cap C) = 1/18$   
 und  $P(A \cap B \cap C) = 1/36$ . Die Familie  $(A, B, C)$  ist also unabhängig.

**Aufgabe:** Seien  $(A, B, C)$  drei unabhängige Ereignisse  $A, B, C \subseteq \Omega$ .  
 Sind dann auch die folgenden Tripel von Ereignissen unabhängig?  
 (1)  $(A, C, B)$ , (2)  $(B, A, C)$ , (3)  $(A, B, \bar{C})$ , (4)  $(\bar{A}, B, \bar{C})$

**Lösung:** Ja! Alle Bedingungen in der Definition der Unabhängigkeit sind  
 invariant unter Vertauschung (1,2). Wir rechnen (3) exemplarisch nach:

$$P(A \cap B \cap \bar{C}) = P((A \cap B) \setminus (A \cap B \cap C))$$

$$= P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) - P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

$$= P(A) \cdot P(B) \cdot (1 - P(C)) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(\bar{C})$$

Jedes der  $3! \cdot 2^3 = 48$  so variierten Tripel ist stochastisch unabhängig.

(1b) Wir nutzen  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$  und finden:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cap C) \cup (B \cap C))$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

(2) Sind  $A, B, C$  unabhängig, so finden wir die vertraute Produktformel:

$$P(A \cup B \cup C) = P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = 1 - [1 - P(A)][1 - P(B)][1 - P(C)]$$

(4) Für  $A_1, \dots, A_n \subseteq \Omega$  und  $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$  gilt  $\prod_{i=1}^n (I_A - I_{A_i}) = 0$ , denn  
 für jedes  $x \in A$  ist mindestens ein Faktor Null. Für jede Indexmenge  
 $J \subseteq \{1, \dots, n\}$  sei  $A_J := \bigcap_{i \in J} A_i$  die Schnittmenge, speziell  $A_\emptyset = A$ .  
 Wir erhalten die **Siebformel**, auch **Inklusions-Exklusions-Prinzip**:

$$I_A = \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|J|-1} I_{A_J},$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|J|-1} P(A_J).$$

**Lösung:** (0) Bei Unabhängigkeit von  $I, K, M, Z$  ergibt die Produktformel  
 ganz einfach  $P(I \cap K \cap M \cap Z) = P(I) \cdot P(K) \cdot P(M) \cdot P(Z) = 0.357$ .

(1) Höchstens 70% leiden an allen vier; diese Schranke ist offensichtlich.  
 (2) Mindestens 10% leiden an allen vier; das rechnen wir geduldig aus:

$$P(I \cap K) = P(I) + P(K) - P(I \cup K)$$

$$\geq 0.70 + 0.75 - 1 = 0.45$$

$$P(I \cap K \cap M) = P(I \cap K) + P(M) - P((I \cap K) \cup M)$$

$$\geq 0.45 + 0.80 - 1 = 0.25$$

$$P(I \cap K \cap M \cap Z) = P(I \cap K \cap M) + P(Z) - P((I \cap K \cap M) \cup Z)$$

$$\geq 0.25 + 0.85 - 1.00 = 0.10$$

Die oben skizzierten Graphiken zeigen, dass diese Werte tatsächlich  
 angenommen werden können. Unsere Schranken sind also optimal.  
 Alternativ: Dank DeMorgan gilt  $\overline{I \cap K \cap M \cap Z} = \bar{I} \cup \bar{K} \cup \bar{M} \cup \bar{Z}$ ,  
 also  $P(\overline{I \cap K \cap M \cap Z}) \leq P(\bar{I}) + P(\bar{K}) + P(\bar{M}) + P(\bar{Z}) \leq 0.90$ .

**Beispiel:** Bei  $n$ -maligem Würfeln nutzen wir  $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^n$  mit Gleichverteilung  $\mathbf{P}$  und  $S_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}: (\omega_1, \dots, \omega_n) \mapsto \omega_1 + \dots + \omega_n$ .

**Definition T3A:** Zufallsvariable, zunächst diskret

Sei  $(\Omega, \mathbf{P})$  ein WRaum. Eine reelle **Zufallsvariable** ist eine Abbildung

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}: \omega \mapsto X(\omega).$$

Das heißt:  $X$  ordnet jedem Ergebnis  $\omega \in \Omega$  eine Zahl  $X(\omega) \in \mathbb{R}$  zu. Sie transportiert das WMaß  $\mathbf{P}$  auf  $\Omega$  zum **Bildmaß**  $\mathbf{P}_X$  auf  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_X(\{a\}) &= \mathbf{P}(X = a) := \mathbf{P}(X^{-1}(\{a\})) = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\}) \\ \mathbf{P}_X(A) &= \mathbf{P}(X \in A) := \mathbf{P}(X^{-1}(A)) = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}) \end{aligned}$$

für jedes Element  $a \in \mathbb{R}$  und jede Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{R}$ , etwa  $A = [a, b]$ .

**Satz T3B:** Auch das Bildmaß ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Sei  $(\Omega, \mathbf{P})$  ein (diskreter) WRaum und  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Zufallsvariable. Dann ist  $\mathbf{P}_X$  auf  $\mathbb{R}$  ein (diskretes) Wahrscheinlichkeitsmaß (T1D).

😊 Wir setzen den WRaum  $(\Omega, \mathbf{P})$  hier vorerst als diskret voraus (T1D). Später ist  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  ein allgemeiner WRaum; wir fordern dann von  $X$  zudem Messbarkeit, also  $X^{-1}([a, b]) \in \mathcal{A}$  für jedes Intervall  $[a, b] \in \mathbb{R}$ .

**Aufgabe:** (1) Interpretieren Sie die Abbildung  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stochastisch. (2) Warum ist  $\mathbf{P}_X$  auf  $\mathbb{R}$  ein diskretes WMaß? Was ist hier zu prüfen?

**Lösung:** (1) Die Zufallsvariable  $X$  ordnet jedem Ergebnis  $\omega \in \Omega$  eine reelle Zahl  $X(\omega) = a \in \mathbb{R}$  zu, etwa den Gewinn oder eine Auszahlung. Oft beobachten wir nicht direkt das Ergebnis  $\omega$ , sondern die abgeleitete Zufallsgröße  $X(\omega) = a$ . Die Menge  $X^{-1}(\{a\}) := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\}$  fasst alle Ergebnisse  $\omega \in \Omega$  zusammen, die zum Wert  $X(\omega) = a$  führen. (2) Wir wenden Definition T1D an. (a)  $\mathbf{P}_X(\mathbb{R}) = \mathbf{P}(X^{-1}(\mathbb{R})) = \mathbf{P}(\Omega) = 1$ . (b) Ebenso prüfen wir die Additivität: Für jede Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{R}$  gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_X(A) &\stackrel{\text{Def}}{=} \mathbf{P}(X^{-1}(A)) \stackrel{\text{Def}}{=} \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}) \\ &\stackrel{\text{Dis}}{=} \mathbf{P}\left(\bigcup_{a \in A} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\}\right) \stackrel{\text{Def}}{=} \mathbf{P}\left(\bigcup_{a \in A} X^{-1}(\{a\})\right) \\ &\stackrel{\text{Add}}{=} \sum_{a \in A} \mathbf{P}(X^{-1}(\{a\})) \stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{a \in A} \mathbf{P}_X(\{a\}) \end{aligned}$$

**Definition T3C:** Erwartungswert, zunächst diskret

Die **absolute Erwartung** der Zufallsvariable  $X: (\Omega, \mathbf{P}) \rightarrow \mathbb{R}$  ist

$$\mathbf{E}(|X|) := \sum_{\omega \in \Omega} |X(\omega)| \cdot \mathbf{P}(\{\omega\}) \in [0, \infty].$$

Ist dieser Wert endlich, so nennen wir  $X$  **absolut summierbar**.

Wir sagen hierzu anschaulich **der Erwartungswert von  $X$  existiert**; dies gilt immer, wenn  $\Omega$  endlich oder  $X$  beschränkt ist. Wir schreiben:

$$L^1(\Omega, \mathbf{P}; \mathbb{R}) := \{X: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \mathbf{E}(|X|) < \infty\}$$

Für jede Zufallsvariable  $X \in L^1(\Omega, \mathbf{P})$  ist der **Erwartungswert** definiert:

$$\mathbf{E}(X) := \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \mathbf{P}(\{\omega\}) = \sum_{a \in \mathbb{R}} a \cdot \mathbf{P}(X = a)$$

**Satz T3D:** Die Erwartung ist linear.

Für jeden WRaum  $(\Omega, \mathbf{P})$  ist die Menge  $L^1(\Omega, \mathbf{P})$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und die Erwartung  $\mathbf{E}: L^1(\Omega, \mathbf{P}) \rightarrow \mathbb{R}: X \mapsto \mathbf{E}(X)$  eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung.

😊 Wir setzen den WRaum  $(\Omega, \mathbf{P})$  hier vorerst als diskret voraus (T1D). Im diskreten Fall genügen Reihen, im Allgemeinen nutzen wir Integrale. Für Reihen und Integrale verfügen Sie über alle nötigen Werkzeuge.

**Aufgabe:** (1) Der Erwartungswert  $\mathbf{E}(X)$  kann wie angegeben auf zwei Arten berechnet werden: Beide Summen ergeben denselben Wert! (2) Beweisen Sie den Satz T3D durch sorgfältiges Nachrechnen.

**Lösung:** (1) Dank absoluter Summierbarkeit (A2N) dürfen wir umordnen:

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \mathbf{P}(\{\omega\}) &\stackrel{\text{Um}}{\stackrel{\text{A2N}}{=}} \sum_{a \in \mathbb{R}} \left[ \sum_{\omega \in X^{-1}(\{a\})} X(\omega) \cdot \mathbf{P}(\{\omega\}) \right] \\ &\stackrel{\text{Lin}}{=} \sum_{a \in \mathbb{R}} a \cdot \left[ \sum_{\omega \in X^{-1}(\{a\})} \mathbf{P}(\{\omega\}) \right] \stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{a \in \mathbb{R}} a \cdot \mathbf{P}(X = a) \end{aligned}$$

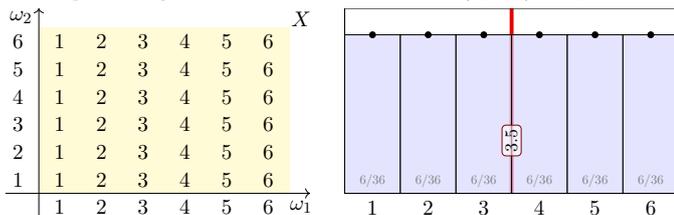
(2) Es gilt  $\mathbf{E}(|\lambda \cdot X|) = |\lambda| \cdot \mathbf{E}(|X|)$  und  $\mathbf{E}(|X + Y|) \leq \mathbf{E}(|X|) + \mathbf{E}(|Y|)$ , für alle Zufallsvariablen  $X, Y: (\Omega, \mathbf{P}) \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ , daher ist  $L^1(\Omega, \mathbf{P})$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Für  $X, Y \in L^1(\Omega, \mathbf{P})$  gilt zudem  $\mathbf{E}(\lambda \cdot X) = \lambda \cdot \mathbf{E}(X)$  und  $\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y)$  dank Linearität (konvergenter!) Reihen. Die Abbildung  $\mathbf{E}: L^1(\Omega, \mathbf{P}) \rightarrow \mathbb{R}$  ist also  $\mathbb{R}$ -linear, wie gewünscht.

**Aufgabe:** Bei zweimaligem Würfeln betrachten wir die Ergebnismenge  $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^2$  mit der Gleichverteilung  $\mathbf{P}$  und den Zufallsvariablen

$$X, Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}: X(\omega_1, \omega_2) = \omega_1, Y(\omega_1, \omega_2) = \omega_2.$$

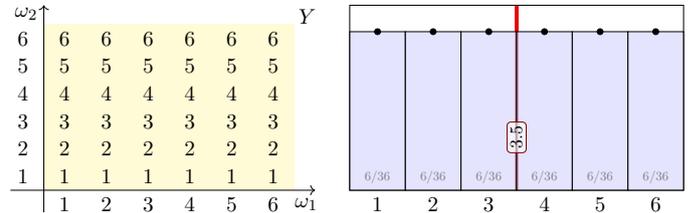
Berechnen Sie Verteilung und Erwartung der Zufallsvariablen  $X, Y$ , sowie  $X - Y$  und  $|X - Y|$ , schließlich  $\max(X, Y)$  und  $\min(X, Y)$ .

**Lösung:** Wir beginnen mit der Zufallsvariable  $X(\omega_1, \omega_2) = \omega_1$ :



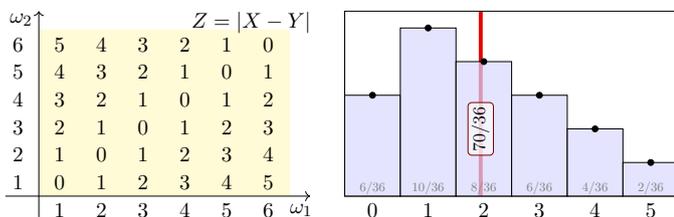
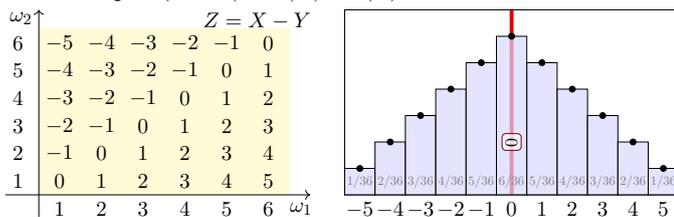
Der Erwartungswert ist hier  $\mathbf{E}(X) = 3.5$ , wie Sie leicht nachrechnen. Erwartungswert bedeutet nicht häufigster Wert, sondern Schwerpunkt!

Die ZVariable  $Y$  ist verschieden von  $X$ , aber identisch verteilt:

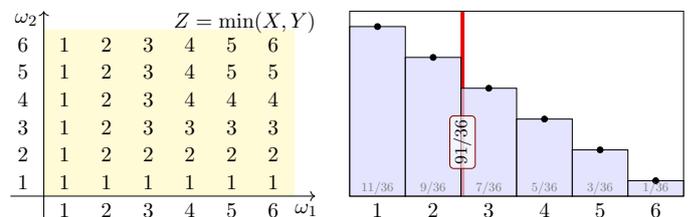
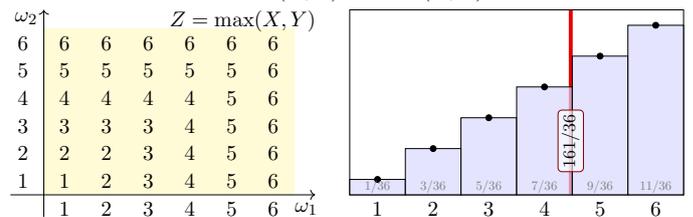


Wir sehen in den ausführlichen Tabellen links die beiden ZVariablen  $X \neq Y$ . Die Graphik rechts zeigt die Verteilungen, hier gilt  $\mathbf{P}_X = \mathbf{P}_Y$ . Dies zeigt eindrücklich: Das Bildmaß ist ein stark vergrößertes Abbild! Die letzte Formel von Definition T3C sagt: Der Erwartungswert  $\mathbf{E}(X)$  hängt nur von der Verteilung  $\mathbf{P}_X$  ab: Aus  $\mathbf{P}_X = \mathbf{P}_Y$  folgt  $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y)$ . Diese Situation ist typisch für Anwendungen, in denen eine Messung / ein Experiment  $n$ -mal unabhängig wiederholt wird: Alle  $n$  ZVariablen  $X_1, \dots, X_n$  sind unabhängig und identisch verteilt. Dazu später mehr!

Für  $X - Y$  gilt  $\mathbf{E}(X - Y) = \mathbf{E}(X) - \mathbf{E}(Y) = 0$  dank Linearität.



Für die Zufallsvariablen  $\max(X, Y)$  und  $\min(X, Y)$  finden wir:



**Erwartung und Varianz von Zufallsvariablen** T309

**Definition T3E: Varianz und höhere Momente**  
 Sei  $(\Omega, \mathcal{P})$  ein WRaum und  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}: \omega \mapsto X(\omega)$  eine Zufallsvariable. Zudem sei  $\mathbf{E}(|X|) < \infty$ , so dass der Erwartungswert  $\mu = \mathbf{E}(X)$  existiert. Die **Varianz** der ZVariable  $X$  ist die mittlere quadratische Abweichung:

$$\sigma^2(X) = \mathbf{V}(X) := \mathbf{E}[(X - \mu)^2] = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 \geq 0$$

Die **Streuung** oder **Standardabweichung** von  $X$  ist die Quadratwurzel

$$\sigma(X) := \sqrt{\mathbf{V}(X)} \geq 0.$$

Das (absolute, zentrierte)  **$n$ -te Moment** von  $X$  ist gegeben durch

$$\rho^n(X) := \mathbf{E}[|X - \mu|^n].$$

Anschaulich ist der Erwartungswert  $\mu$  der Schwerpunkt der Verteilung. Die Varianz  $\mathbf{E}[(X - \mu)^2]$  entspricht demnach dem Trägheitsmoment. Varianz und höhere Momente messen, wie weit die Werte um  $\mu$  streuen: Große Abweichungen wiegen schwerer, quadratisch oder sogar hoch  $n$ .

**Erwartung und Varianz von Zufallsvariablen** T310

**Aufgabe:** Berechnen Sie das 1./2./3. Moment für  $X = \mathbf{I}_A \sim B(1, t)$ .  
**Lösung:** Hier ist  $X: \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  eine Zufallsvariable mit Verteilung

$$\mathbf{P}(X=1) = \mathbf{P}(A) = t \quad \text{und} \quad \mathbf{P}(X=0) = \mathbf{P}(\Omega \setminus A) = 1 - t =: \bar{t}.$$

Ihre Erwartung und 1./2./3. Momente berechnen wir nach Definition:

$$\begin{aligned} \mu = \mathbf{E}(X) &= 0 \cdot \mathbf{P}(X=0) + 1 \cdot \mathbf{P}(X=1) = t \\ \mathbf{E}(|X - \mu|^1) &= |0 - \mu|^1 \cdot \mathbf{P}(X=0) + |1 - \mu|^1 \cdot \mathbf{P}(X=1) \\ &= t^1 \cdot (1 - t) + (1 - t)^1 \cdot t = 2t(1 - t) \\ \mathbf{E}(|X - \mu|^2) &= |0 - \mu|^2 \cdot \mathbf{P}(X=0) + |1 - \mu|^2 \cdot \mathbf{P}(X=1) \\ &= t^2 \cdot (1 - t) + (1 - t)^2 \cdot t = t(1 - t) \\ \mathbf{E}(|X - \mu|^3) &= |0 - \mu|^3 \cdot \mathbf{P}(X=0) + |1 - \mu|^3 \cdot \mathbf{P}(X=1) \\ &= t^3 \cdot (1 - t) + (1 - t)^3 \cdot t = t\bar{t}(t^2 + \bar{t}^2) \end{aligned}$$

☺ Zum Vergleich: Auch  $\mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = t - t^2$  liefert die Varianz.

**Warnende Beispiele: divergente Reihen** T311  
Ausführung

**Aufgabe:** Seien  $X, Y: \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$  Zufallsvariablen mit Verteilung

$$\mathbf{P}[X = (-2)^k] = \frac{a}{2^k} \quad \text{und} \quad \mathbf{P}[Y = k] = \frac{b}{k^2} \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots$$

(1) Sind dies tatsächlich WVerteilungen? Für welche  $a$  bzw.  $b$ ?  
 (2) Existiert der Erwartungswert  $\mathbf{E}(X)$  bzw.  $\mathbf{E}(Y)$ ?

**Lösung:** (1) Ja: Es gilt jeweils  $p(k) \geq 0$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} p(k) = 1$ , wobei wir die Konstanten  $a = 1$  und  $b = 6/\pi^2$  setzen müssen. [324]  
 (2) Nein, die zum Erwartungswert benötigte Reihe konvergiert nicht:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot \mathbf{P}[X=x_k] &= \sum_{k=1}^{\infty} (-2)^k \cdot \frac{a}{2^k} = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 \pm \dots \\ \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \mathbf{P}[Y=k] &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{b}{k^2} = \frac{6}{\pi^2} \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots \right) \end{aligned}$$

⚠️ Einen Erwartungswert können wir hier also nicht definieren! Zur Rechnung für die geometrische Verteilung siehe T421.

**Warnende Beispiele: die Zeta-Verteilung** T312  
Ausführung

**Aufgabe:** Sei  $Z: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$  eine Zufallsvariable mit der **Zeta-Verteilung**

$$\mathbf{P}[Z=k] = c/k^\alpha \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots$$

(1) Für welche  $\alpha, c \in \mathbb{R}$  ist dies tatsächlich eine WVerteilung?  
 (2) Für welche  $\alpha \in \mathbb{R}$  existiert der Erwartungswert  $\mu = \mathbf{E}[Z]$ ? zudem endliche Varianz  $\sigma^2 = \mathbf{V}(Z) = \mathbf{E}(|Z - \mu|^2)$ ? und endliches  $n$ -tes Moment  $\rho^n = \mathbf{E}(|Z - \mu|^n)$ ?

**Lösung:** (1) Es muss  $c \in ]0, \infty[$  gelten und  $c^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^\alpha =: \zeta(\alpha)$ . Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^\alpha$  konvergiert jedoch nur für  $\alpha > 1$ . (Warum?) Für  $\alpha \leq 1$  ist dies also keine Wahrscheinlichkeitsverteilung!  
 (2) Die Reihe  $\mathbf{E}[Z] = \sum_{k=1}^{\infty} k/k^\alpha = \zeta(\alpha - 1)$  konvergiert nur für  $\alpha > 2$ . Für  $1 < \alpha \leq 2$  hingegen existiert der Erwartungswert nicht!  
 Die Reihe  $\mathbf{E}[Z^2] = \sum_{k=1}^{\infty} k^2/k^\alpha = \zeta(\alpha - 2)$  konvergiert nur für  $\alpha > 3$ . Für  $2 < \alpha \leq 3$  existiert die Erwartung, aber die Varianz ist unendlich!  
 Allgemein: Die Reihe  $\mathbf{E}[Z^n] = \sum_{k=1}^{\infty} k^n/k^\alpha = \zeta(\alpha - n)$  konvergiert nur für  $\alpha > n + 1$ . Für  $1 < \alpha \leq n$  hingegen ist das  $n$ -te Moment unendlich!

**Erwartung und Varianz von Zufallsvariablen** T313  
Übung

**Aufgabe:** (1) Sei  $\mu = \mathbf{E}(X)$ . Zeigen Sie die nützliche Formel

$$\sigma^2 = \mathbf{V}(X) = \mathbf{E}[(X - \mu)^2] \stackrel{!}{=} \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2.$$

(2) Wie verhalten sich Erwartung und Varianz bei Verschiebung zu  $Y = X + c$  mit  $c \in \mathbb{R}$  und Skalierung zu  $Z = aX$  mit  $a \in \mathbb{R}$ ?  
 (3) Was gilt demnach für  $Y = X - \mu$  und  $Z = (X - \mu)/\sigma$ ?

**Nachrechnen:** (1) Wir fordern  $\mathbf{E}(|X|) < \infty$  und setzen  $\mu = \mathbf{E}(X)$  gemäß Definition T3A. Dank Linearität der Erwartung T3D gilt dann

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathbf{E}[(X - \mu)^2] &= \mathbf{E}[X^2 - 2X\mu + \mu^2] = \mathbf{E}[X^2] - 2\mathbf{E}[X]\mu + \mu^2 \\ &= \mathbf{E}(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 \end{aligned}$$

☺ Die Varianz  $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}[(X - \mu)^2] = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$  können Sie also mit jeder der beiden Formeln ausrechnen. Beide sind nützlich.  
 ⚠️ Dies ist eine besondere Eigenschaft des zweiten Moments. Für alle anderen Momente  $\mathbf{E}[|X - \mu|^n]$  mit  $n \neq 2$  gilt dies nicht!

**Erwartung und Varianz von Zufallsvariablen** T314  
Übung

(2) Dank der Normierung  $\mathbf{P}(\Omega) = 1$  und der Linearität der Erwartung gilt immer  $\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(X + c) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(c) = \mathbf{E}(X) + c$ , sowie  $\mathbf{E}(Z) = \mathbf{E}(aX) = a\mathbf{E}(X)$ . Bei Verschiebung und Skalierung gilt:

$$\begin{aligned} \rho^n(X + c) &= \mathbf{E}[|X + c - \mathbf{E}(X + c)|^n] = \mathbf{E}[|X + c - \mathbf{E}(X) - c|^n] \\ &= \mathbf{E}[|X - \mathbf{E}(X)|^n] = \rho^n(X) \\ \rho^n(aX) &= \mathbf{E}[|aX - \mathbf{E}(aX)|^n] = \mathbf{E}[|aX - a\mathbf{E}(X)|^n] \\ &= |a|^n \mathbf{E}[|X - \mathbf{E}(X)|^n] = |a|^n \rho^n(X) \end{aligned}$$

(3) Speziell für  $Y = X - \mu$  gilt somit  $\mathbf{E}(Y) = 0$  und  $\mathbf{V}(Y) = \mathbf{V}(X) = \sigma^2$ . Speziell für  $Z = (X - \mu)/\sigma$  gilt somit  $\mathbf{E}(Z) = 0$  und  $\mathbf{V}(Z) = 1$ .

☺ Wir nennen  $Y = X - \mu$  die **Zentrierung** und  $Z = (X - \mu)/\sigma$  die **Normierung** von  $X$ . Dies lässt sich umkehren zu  $X = \mu + \sigma Z$ .  
 ☺ Für die Zufallsvariable  $X$  ist die natürliche Betrachtung die  **$(\mu, \sigma)$ -Skala** mit Ursprung in  $\mu$  und Längeneinheit  $\sigma > 0$ .

**Erwartung und Varianz von Zufallsvariablen** T315  
Ausführung

**Aufgabe:** Bei zweimaligem Würfeln betrachten wir die Ergebnismenge  $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^2$  mit der Gleichverteilung  $\mathbf{P}$  und den Zufallsvariablen

$$X, Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}: \quad X(\omega_1, \omega_2) = \omega_1, \quad Y(\omega_1, \omega_2) = \omega_2.$$

Berechnen Sie Erwartung und Varianz der Zufallsvariablen  $X, Y$ , sowie  $X - Y, |X - Y|$ , schließlich  $\max(X, Y)$  und  $\min(X, Y)$ .

**Lösung:** Die Verteilungen dieser ZVariablen wurden oben ausgeführt. Wir nutzen direkt die Definition T3C. Für die Zufallsvariable  $X$  finden wir:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X) &= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3.5 \\ \mathbf{E}(X^2) &= 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6} \\ \mathbf{V}(X) &= \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{182 - 147}{12} = \frac{35}{12} \\ \sigma(X) &= \sqrt{35/12} \approx 1.70783 \end{aligned}$$

Die ZVariable  $Y$  ist verschieden von  $X$ , aber identisch verteilt. Erwartung, Varianz und Streuung sind demnach dieselben.

**Erwartung und Varianz von Zufallsvariablen** T316  
Ausführung

☺ Dank Linearität T3D gilt  $\mathbf{E}(X - Y) = \mathbf{E}(X) - \mathbf{E}(Y) = 0$ . Also:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(X - Y) &= \mathbf{E}[(X - Y)^2] \\ &= 0^2 \cdot \frac{6}{36} + 1^2 \cdot \frac{10}{36} + 2^2 \cdot \frac{8}{36} + 3^2 \cdot \frac{6}{36} + 4^2 \cdot \frac{4}{36} + 5^2 \cdot \frac{2}{36} = \frac{210}{36} = \frac{35}{6} \\ \sigma(X - Y) &= \sqrt{35/6} \approx 2.41523 \end{aligned}$$

☺ Das Ergebnis erhalten wir bequemer dank Unabhängigkeit (T3H) der beiden ZVariablen  $X, Y$  mittels Additivität der Varianzen (T3i):

$$\mathbf{V}(X - Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(-Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) = \frac{35}{12} + \frac{35}{12} = \frac{35}{6}$$

Für die Zufallsvariable  $|X - Y|$  finden wir entsprechend:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(|X - Y|) &= 0 \cdot \frac{6}{36} + 1 \cdot \frac{10}{36} + 2 \cdot \frac{8}{36} + 3 \cdot \frac{6}{36} + 4 \cdot \frac{4}{36} + 5 \cdot \frac{2}{36} = \frac{70}{36} = \frac{35}{18} \\ \mathbf{V}(|X - Y|) &= \mathbf{E}[|X - Y|^2] - \mathbf{E}[|X - Y|]^2 = \frac{35}{6} - \left(\frac{35}{18}\right)^2 = \frac{665}{324} \\ \sigma(|X - Y|) &= \sqrt{665/324} \approx 1.43264 \end{aligned}$$

Die Rechnungen für  $\max(X, Y)$  und  $\min(X, Y)$  verlaufen genauso: Wir wenden die Definition T3C direkt auf die Verteilungen an.

**Chebychev: Große Abweichungen sind unwahrscheinlich!**

T317  
Erläuterung

Sei  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Zufallsvariable mit Erwartung  $\mu = \mathbf{E}(X)$ .  
Anschaulich gilt: Die Werte schwanken zufällig um  $\mu$ , und große Abweichungen vom Erwartungswert sind eher unwahrscheinlich.  
Wie unwahrscheinlich? Wir fragen also nach  $\mathbf{P}(|X - \mu| \geq c)$ .  
Die Streuung  $\sigma$  misst hierzu die typische Breite der Verteilung um  $\mu$ .  
Die Ungleichungen von Chebychev geben bequeme Abschätzungen!

😊 Wir müssen hierzu über die Verteilung von  $X$  nichts weiter wissen als nur ihren Erwartungswert  $\mu = \mathbf{E}(X)$  und ihre Varianz  $\sigma^2 = \mathbf{V}(X)$ ! Dies sind hier (und überall) die beiden wichtigsten Kenngrößen.

😊 Selbst wenn Sie mehr wissen oder mehr herausfinden könnten, die Chebychev-Abschätzungen sind allgemein, unschlagbar einfach und oft sehr nützlich und handlich als erste Überschlagsrechnung.

⚠️ Anschließend werden wir den zentralen Grenzwertsatz W1D kennen und nutzen lernen. Wenn der ZGS anwendbar ist, dann ermöglicht er präzisere Schätzungen. In diesen Fällen ist Chebychev zwar einfacher, aber auch viel gröber und kann in Genauigkeit meist nicht konkurrieren.

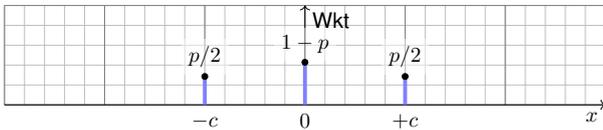
**Beispiel zur beidseitigen Chebychev-Abschätzung**

T319  
Ausführung

Die beidseitige Chebychev-Ungleichung (1,2) besagt:

$$\mathbf{P}[|X - \mu| \geq c] \leq \frac{\sigma^2}{c^2}$$

**Aufgabe:** Überprüfen Sie diese für folgende Verteilung. Ist sie scharf?



**Lösung:** Es gilt  $\mu = 0$  und  $\sigma^2 = c^2 p$ . Die Ungleichung ist scharf:

$$p = \mathbf{P}[|X - \mu| \geq c] \leq \frac{\sigma^2}{c^2} = p$$

😊 Die Abschätzung ist meist grob, dafür aber universell einsetzbar. Unser Beispiel zeigt, dass sie sich allgemein nicht verbessern lässt.

**Beispiel:** Speziell für  $p = 1$  finden wir hier  $\mathbf{P}[|X - \mu| \geq 1\sigma] = 100\%$ .

**Chebychev-Abschätzungen auf der  $(\mu, \sigma)$ -Skala**

T321

**Aufgabe:** Was sagt Chebychev für folgende typische Abschätzungen?

- $\mathbf{P}[|X - \mu| \geq 1\sigma] \leq 1/1 = 100\%$
- $\mathbf{P}[|X - \mu| \geq 2\sigma] \leq 1/4 = 25\%$
- $\mathbf{P}[|X - \mu| \geq 3\sigma] \leq 1/9 \approx 11\%$
- $\mathbf{P}[|X - \mu| \geq 4\sigma] \leq 1/16 \approx 6\%$
- $\mathbf{P}[X \geq \mu + 1\sigma] \leq 1/2 = 50\%$
- $\mathbf{P}[X \geq \mu + 2\sigma] \leq 1/5 = 20\%$
- $\mathbf{P}[X \geq \mu + 3\sigma] \leq 1/10 = 10\%$
- $\mathbf{P}[X \geq \mu + 4\sigma] \leq 1/17 \approx 6\%$

😊 Große Abweichungen vom Erwartungswert sind unwahrscheinlich. Chebychevs Abschätzungen sind grob, dafür aber universell einsetzbar.

Die erste Abschätzung ist trivialerweise immer richtig, aber nie hilfreich. Mindestens  $3/4$  der Wkt liegt in der  $2\sigma$ -Umgebung  $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ . Mindestens  $8/9$  der Wkt liegt in der  $3\sigma$ -Umgebung  $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ .

😊 Für Normalverteilungen gilt die genauere 68-95-99-Regel. [V120](#)

**Beweis der einseitigen Chebychev-Abschätzung**

T323  
Ausführung

**Aufgabe:** Beweisen Sie mit Lemma T3G die Ungleichungen (3) und (5).

**Lösung:** Wir beweisen die einseitige Chebychev-Ungleichung (3). Wie zuvor zentrieren wir die Zufallsvariable  $X$  gemäß  $Z := X - \mu$ . Für alle  $t, b \in \mathbb{R}$  mit  $t + b > 0$  gelten folgende Ungleichungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[Z \geq b] &= \mathbf{P}[Z + t \geq b + t] \\ &\leq \mathbf{P}[(Z + t)^2 \geq (b + t)^2] \stackrel{\text{Markov}}{\leq} \frac{\mathbf{E}[(Z + t)^2]}{(b + t)^2} = \frac{\sigma^2 + t^2}{(b + t)^2} \end{aligned}$$

Die erste Ungleichung ist klar, die zweite ist die Markov-Ungleichung. Die letzte Gleichung folgt dank Zentrierung  $\mathbf{E}[Z] = 0$ , denn damit gilt

$$\mathbf{E}[(Z + t)^2] = \mathbf{E}[Z^2] + 2\mathbf{E}[Z]t + t^2 = \sigma^2 + t^2.$$

Für  $b = k\sigma$  und  $t = \sigma/k$  erhalten wir die gewünschte Ungleichung (3):

$$\mathbf{P}[X - \mu \geq k\sigma] = \frac{\sigma^2 + t^2}{(k\sigma + t)^2} = \frac{\sigma^2 + \sigma^2/k^2}{(k\sigma + \sigma/k)^2} = \frac{k^2 + 1}{(k^2 + 1)^2} = \frac{1}{k^2 + 1}$$

😊 Die Rechnung ist etwas trickreich, aber jeder Schritt ist elementar.

**Chebychev: Große Abweichungen sind unwahrscheinlich!**

T318

**Satz T3F: die Ungleichungen von Chebychev, 1867**

Sei  $X : (\Omega, \mathbf{P}) \rightarrow \mathbb{R} : \omega \mapsto X(\omega)$  eine ZVariable mit Erwartung  $\mu = \mathbf{E}(X)$  und Varianz  $\sigma^2 = \mathbf{E}[(X - \mu)^2]$  bzw.  $n$ -tem Moment  $\rho^n = \mathbf{E}[|X - \mu|^n]$ . Dann gelten universelle „worst case“ Abschätzungen für alle  $c, k, h > 0$ :

- (1)  $\mathbf{P}[|X - \mu| \geq c] \leq \frac{\sigma^2}{c^2}$  bzw.  $\frac{\rho^2}{c^2}$
- (2)  $\mathbf{P}[|X - \mu| \geq k\sigma] \leq \frac{1}{k^2}$
- (3)  $\mathbf{P}[X \geq \mu + k\sigma] \leq \frac{1}{1 + k^2}$
- (4)  $\mathbf{P}[\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma] \geq 1 - \frac{1}{k^2}$
- (5)  $\mathbf{P}[\mu - h\sigma < X < \mu + k\sigma] \geq \frac{4(hk - 1)}{(h + k)^2}$

Die Wkt großer Abweichungen fällt mindestens quadratisch, mit  $1/k^2$ . Kennen Sie nur  $\mu$  und  $\sigma$  bzw.  $\rho$ , so sind diese Ungleichungen optimal.

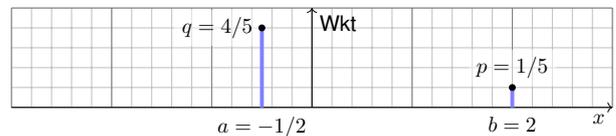
**Beispiel zur einseitigen Chebychev-Abschätzung**

T320  
Ausführung

Die einseitige Chebychev-Ungleichung (3) für  $a < \mu < b$  besagt:

$$\mathbf{P}[X \leq a] \leq \frac{1}{1 + (\frac{a - \mu}{\sigma})^2} \quad \text{und} \quad \mathbf{P}[X \geq b] \leq \frac{1}{1 + (\frac{b - \mu}{\sigma})^2}$$

**Aufgabe:** Überprüfen Sie beide für folgende Verteilung. Sind sie scharf?



**Lösung:** Hier gilt  $\mu = 0$  und  $\sigma^2 = 1$ . Die Ungleichungen sind scharf:

$$q = \mathbf{P}[X \leq a] \leq \frac{1}{1 + a^2} = \frac{4}{5} \quad \text{bzw.} \quad p = \mathbf{P}[X \geq b] \leq \frac{1}{1 + b^2} = \frac{1}{5}.$$

😊 Die Abschätzung ist meist grob, dafür aber universell einsetzbar. Unser Beispiel zeigt, dass sie sich allgemein nicht verbessern lässt.

**Übung:** Erfinden und untersuchen Sie weitere einfache Beispiele.

**Beweis der beidseitigen Chebychev-Abschätzung**

T322  
Erläuterung

**Nachrechnen:** Die Zufallsvariable  $X$  zentrieren wir zu  $Z := X - \mu$ . Ihr  $n$ -tes Moment ist  $\rho^n = \mathbf{E}[|Z|^n]$ ; für  $n = 2$  ist dies die Varianz  $\sigma^2$ . Wir vergleichen  $Z$  mit der zweiwertigen Zufallsvariablen  $Y = c \mathbf{I}_{\{|Z| \geq c\}}$ ,

$$Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \omega \mapsto Y(\omega) = \begin{cases} c & \text{falls } |Z(\omega)| \geq c, \\ 0 & \text{falls } |Z(\omega)| < c. \end{cases}$$

Es gilt  $|Z| \geq Y \geq 0$ . Dank Monotonie der Erwartung folgt

$$\rho^n = \mathbf{E}[|Z|^n] \geq \mathbf{E}[Y^n] = c^n \cdot \mathbf{P}[|X - \mu| \geq c].$$

😊 Hieraus folgt (1). Speziell für  $n = 2$  und  $c = k\sigma$  erhalten wir (2). Für (3) zeigen wir als Hilfsmittel zunächst die Markov-Ungleichung:

**Lemma T3G: Markov-Ungleichung**

Sei  $Y : (\Omega, \mathbf{P}) \rightarrow [0, \infty]$  eine nicht-negative Zufallsvariable. Für alle  $b > 0$  gilt dann die Abschätzung  $\mathbf{P}[Y \geq b] \leq \mathbf{E}[Y]/b$ .

**Beweis:** Es gilt  $Y \geq b \mathbf{I}_{\{Y \geq b\}}$ , also folgt  $\mathbf{E}[Y] \geq b \cdot \mathbf{P}[Y \geq b]$ .

😊 Hieraus erhalten wir, nach Rechnung, die Ungleichungen (3–5).

**Beweis der asymmetrischen Abschätzung**

T324  
Ausführung

Ungleichung (4) folgt direkt aus (2); sie betont hier die Analogie zur asymmetrischen Ungleichung (5). Für  $a < \mu < b$  ist diese äquivalent zu:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[a < X < b] &\geq \frac{4[(b - \mu)(\mu - a) - \sigma^2]}{(b - a)^2}, \\ \mathbf{P}[|X - m| \geq c] &\leq \frac{\sigma^2 + (m - \mu)^2}{c^2}. \end{aligned}$$

Zur Umformulierung setzen wir  $m = (a + b)/2$  und  $c = (b - a)/2$ . Für  $m = \mu$  ergibt sich die symmetrische Chebychev-Ungleichung. Die letzte Ungleichung folgt erneut dank Markov-Ungleichung T3G:

$$\mathbf{P}[|X - m| \geq c] = \mathbf{P}[|X - m|^2 \geq c^2] \leq \frac{\mathbf{E}[|X - m|^2]}{c^2} = \frac{\sigma^2 + (m - \mu)^2}{c^2}$$

Auch diese Abschätzung lässt sich nicht verbessern. Obiges Beispiel: Zu  $0 < t < 1$  sei  $b = \sqrt{(1-t)/t}$  und  $a = -1/b = -\sqrt{t/(1-t)}$  sowie

$$\mathbf{P}(X=a) = 1 - t \quad \text{und} \quad \mathbf{P}(X=b) = t.$$

Es gilt  $\mathbf{E}(X) = a(1-t) + bt = 0$  und  $\mathbf{V}(X) = a^2(1-t) + b^2t = 1$ . In diesem Beispiel sind die obigen Ungleichungen scharf.



**Aufgabe:** (1) Einzelner Münzwurf: Berechnen Sie Erwartung und Varianz eines 0–1–Experiments  $X_k: \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  mit  $P(X_k=1) = t_k$ .  
 (2) Mehrere Münzwürfe: Bestimmen Sie Erwartung und Varianz der Trefferzahl  $S = X_1 + \dots + X_n$ . Welche Zusatzinformation brauchen Sie?  
**Lösung:** (1) Wir erhalten  $E(X_k) = t_k$  und  $V(X_k) = t_k(1 - t_k)$ .  
 (2) Dank **Linearität** der Erwartung (T3D) gilt hier Additivität:  

$$E(S) = E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = t_1 + \dots + t_n$$
 Sind die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  zudem **unabhängig**, so addieren sich bei der Summe  $S = X_1 + \dots + X_n$  auch ihre Varianzen (T3I):  

$$V(S) = V(X_1) + \dots + V(X_n) = t_1(1 - t_1) + \dots + t_n(1 - t_n)$$
 ☺ Speziell für  $t_1 = \dots = t_n = t$  gilt  $E(S) = nt$  und  $V(S) = nt(1 - t)$ . Das ist der wichtige Spezialfall von unabhängigen, identisch verteilten 0–1–Experimenten (U3B): Die Summe ist binomialverteilt,  $S \sim B(n, t)$ .  
**Beispiel:** Punkteverteilung in einer Klausur? Gilt hier Unabhängigkeit?

**Aufgabe:** Für eine Klausur sind  $n = 320$  Teilnehmer:innen angemeldet. Jede:r davon tritt nur mit Wahrscheinlichkeit  $t = 0.8$  tatsächlich an. Wir nehmen stochastische Unabhängigkeit an, keine Grippewelle o.ä. Mit welcher Wkt reichen 300 Plätze? (Chebychev, später LGS, exakt)  
**Lösung:** Wir wissen  $\mu = nt = 256$ ,  $\sigma^2 = nt(1 - t) = 51.2$ ,  $\sigma \approx 7.2$ .  
**Chebychev:** Die Wkt für mehr als 300 Teilnehmer ist beschränkt durch  

$$P(T \geq 301) = P(T - 256 \geq 45) \leq \frac{1}{1+k^2} \approx 2.5\% \quad \text{mit } k = \frac{45}{7.2} \approx 6.22.$$
 Die Schätzung 3% ist deutlich zu hoch, dafür aber bequem zu berechnen. Wir wissen über  $T$  noch viel mehr als nur  $\mu$  und  $\sigma$ : Wir kennen die gesamte Verteilung! Die Binomialverteilung  $B(n, t)$  erlaubt dank lokalem Grenzwertsatz V3A eine wesentlich genauere Abschätzung:  
**LGS V3A:** Normalverteilung als Näherung, Tabelle:  $\int_k^\infty \varphi(t) dt < 10^{-5}$ , Approximationsfehler:  $|\delta| < 1/(6\sigma) < 0.023$ , insgesamt Wkt  $< 2.3\%$ .  
**Exakt U3B:** Die Teilnehmerzahl  $T$  ist binomialverteilt, genauer  $T \sim B(n, t)$ . Durch Aufsummieren (mit Computerhilfe) erhalten wir  $P(T \geq 301) \approx 0.9 \cdot 10^{-12}$ .  
 Es gibt  $2^{320} > 2 \cdot 10^{96}$  mögliche Ausgänge dieses Experiments. Das kann offensichtlich niemand naiv aufsummieren, selbst der schnellste Computer nicht. Die exakte Rechnung organisieren wir daher wesentlich effizienter mit den Abzählmethoden des folgenden Kapitels.

**Anwendung:** Jede Messung  $X$  ist zufälligen Störungen unterworfen, Messwerte schwanken um den Erwartungswert  $\mu$  mit Streuung  $\sigma > 0$ .  
**Beispiel:** Sie führen  $n = 400$  unabhängige Messungen  $X_1, X_2, \dots, X_{400}$  durch und erhalten Messwerte  $x_1, x_2, \dots, x_{400}$ . Sie schätzen  $\mu$  durch den  

**Stichprobenmittelwert**  $\hat{x} := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$  Messung (Beispiel) 57.5

 Die Streuung von  $X$  schätzen Sie (dank der Stichprobe) auf  $\sigma \approx 10$ . Wie genau ist  $\hat{x}$ ? Wo liegt vermutlich der wahre Erwartungswert  $\mu$ ?  
 $I_1 = [57, 58], \quad I_2 = [56.5, 58.5], \quad I_3 = [56, 59], \quad I_k = [57.5 \pm k \cdot 0.5]$   
**Aufgabe:** Welches Intervall  $I_k$  überdeckt den Erwartungswert  $\mu$  mit Sicherheit  $\alpha_k \geq 95\%$  bzw.  $\alpha_k \geq 99\%$ ? (Später genauer mit ZGS, W201)  
 Der Erwartungswert  $\mu$  ist eine Konstante. Leider ist sie uns unbekannt. Das Ziel der Messung ist, diese Konstante  $\mu$  möglichst genau zu bestimmen. Als Schätzung für den Wert  $\mu$  dient uns  $\hat{x}$ . Wie die Messwerte  $x_1, \dots, x_n$  ist auch  $\hat{x}$  zufälligen Schwankungen unterworfen. Wenn Sie eine neue unabhängige Stichprobe durchführen, erhalten Sie einen neuen Mittelwert  $\hat{x}$ , und mit ihm verschieben sich obige Intervalle. Wir wollen sichergehen und verlangen, dass in 95% aller Stichproben unser Intervall den wahren Wert  $\mu$  überdecken soll. Welchem Intervall vertrauen wir?

**Planung: Vor der Messung** sind  $X_1, \dots, X_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  Zufallsvariablen. Wir kennen die Messergebnisse noch nicht, noch sind für  $X_j$  alle Werte möglich mit ihren jeweiligen Wahrscheinlichkeiten  $P(X_j \in I)$ ; daher ist es hier sinnvoll, von Erwartung  $E(X_j)$  und Varianz  $V(X_j)$  zu sprechen. Daraus berechnen wir die Zufallsvariable  $\hat{X}$  und schließlich das Intervall  $I_k = [\hat{X} \pm k\sigma]$ . Mit  $\hat{X}$  schwankt auch  $I_k$ . Wir wollen unser **Verfahren** (!) so einrichten, dass  $I_k$  mit hoher Wkt den gesuchten Wert  $\mu$  überdeckt.  
**Auswertung: Nach der Messung** liegen Werte  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  vor. Wir unterscheiden die Funktion  $X_i$  und den Funktionswert  $x_i = X_i(\omega)$ . Dies sind keine Zufallsvariablen, sondern reelle Zahlen. Es hat daher keinen Sinn, von Erwartung  $E(x_k)$  oder Varianz  $V(x_k)$  zu sprechen. Auch das Intervall  $I_k = [\hat{x} \pm k\sigma]$  ist jetzt fixiert. Entweder es überdeckt  $\mu$  oder eben nicht. Es hat somit keinen Sinn, hier nach Wkt zu fragen.  
**Reproduzierbarkeit: Nach der Messung ist vor der Messung!**  
 Wir wollen garantieren, dass unsere Schätzungs**methode** zukünftigen, unabhängig wiederholten Messungen standhält. Klarheit und Korrektheit benötigen solides Verständnis und sorgfältige Ausführung!

☺ Unabhängig wiederholte Experimente sind eine zentrale Methode der Natur- und Ingenieurwissenschaften. Das stochastische Modell (zur Planung) und die statistische Auswertung (nach Durchführung) gehören zum allgegenwärtigen Handwerkszeug seriöser Arbeit.  
 (1) Der Münzwurf ist das einfachste Zufallsexperiment: Es gibt nur zwei Ergebnisse: Kopf (0) oder Zahl (1). Wir nehmen hier nicht zwangsweise an, dass die Münze fair ist, also  $P(X_k=0) = P(X_k=1) = 1/2$  erfüllt. Die Wkt  $P(X_k=1) = t_k \in [0, 1]$  ist in unserem Modell frei wählbar.  
 (2) Wenn wir  $n$  Münzen werfen, so addieren sich die Erwartungen und dank Unabhängigkeit auch die Varianzen. (Für Letzteres genügt bereits die Unkorreliertheit, das ist i.A. schwächer.) Die Summe unabhängiger zweierwertiger Zufallsvariablen ist ein weiteres einfaches Modell.  
 (3) Die  $n$ -fache Wiederholung eines Münzwurfs ist ein wichtiges Modell: Zur Vereinfachung nehmen wir an, das Experiment wird unabhängig wiederholt und alle Wkten sind gleich. Dies führt zur Binomialverteilung U3B und zum lokalen Grenzwertsatz V3A als wichtiger Näherung.

**Aufgabe:** Angenommen, im obigen Beispiel gilt  $n = 320$  und  $t = 0.9$ . Mit welcher Wkt reichen 300 Plätze? (Chebychev, LGS, exakt)  
**Lösung:** Wir wissen  $\mu = nt = 288$ ,  $\sigma^2 = nt(1 - t) = 28.8$ ,  $\sigma \approx 5.4$ .  
**Chebychev:** Die Wkt für mehr als 300 Teilnehmer ist beschränkt durch  

$$P(T \geq 301) = P(T - 288 \geq 13) \leq \frac{1}{1+k^2} \approx 15\% \quad \text{mit } k = \frac{13}{5.4} \approx 2.33.$$
 Diese Größenordnung ist alarmierend: Wir sollten einen größeren Hörsaal buchen — oder genauer hinschauen! Die Binomialverteilung erlaubt eine wesentlich genauere Abschätzung:  
**LGS V3A:** Normalverteilung als Näherung, Tabelle:  $\int_k^\infty \varphi(t) dt < 0.01$ , Approximationsfehler:  $|\delta| \leq 1/(6\sigma) < 0.04$ , insgesamt Wkt  $< 5\%$ .  
**Exakt U3B:** Die Teilnehmerzahl  $T$  ist binomialverteilt, genauer  $T \sim B(n, t)$ . Durch Aufsummieren (mit Computerhilfe) erhalten wir  $P(T \geq 301) \approx 0.00684$ .  
 Die Ungleichung von Chebychev ist vor allem in Situationen nützlich, in denen wir über die Verteilung wenig wissen (z.B. nur  $\mu$  und  $\sigma$ ), aber die Wahrscheinlichkeit großer Abweichungen abschätzen wollen. In obigen Beispielen kennen wir die Verteilung sogar genau. Der lokale Grenzwertsatz V3A und die Tabelle der Normalverteilung liefern präzisere Abschätzungen. Solche Risikoabschätzungen und Optimierungen haben enorme wirtschaftliche Bedeutung. Genau dieses Szenario analysieren Fluggesellschaften bei der Überbuchung ihrer Flüge.

**Lösung:** Die Einzelmessung entspricht einer ZVaren  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit Erwartung  $\mu = E(X)$ , Varianz  $\sigma^2 = V(X)$  und Streuung  $\sigma(X) \in ]0, \infty[$ .  
 (1) Aus unabhängigen Wiederholungen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  bilden wir den  

**empirischen Mittelwert**  $\hat{X} := \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ .

 Dank Linearität gilt  $E(\hat{X}) = E(X) = \mu$  und dank Unabhängigkeit zudem  

$$V(\hat{X}) = \frac{1}{n^2} V(X_1 + \dots + X_n) = \frac{1}{n^2} [V(X_1) + \dots + V(X_n)] = \frac{1}{n} V(X).$$
 Demnach gilt  $\sigma(\hat{X}) = \sigma(X)/\sqrt{n}$ , im Beispiel  $\sigma(\hat{X}) \approx 10/\sqrt{400} = 0.5$ .  
 (2) Für unsere Intervalle gelten die Chebychev–Abschätzungen:  

$$\alpha_1 \geq 1 - 1/1^2 = 0, \quad \alpha_2 \geq 1 - 1/2^2 \geq 75\%,$$

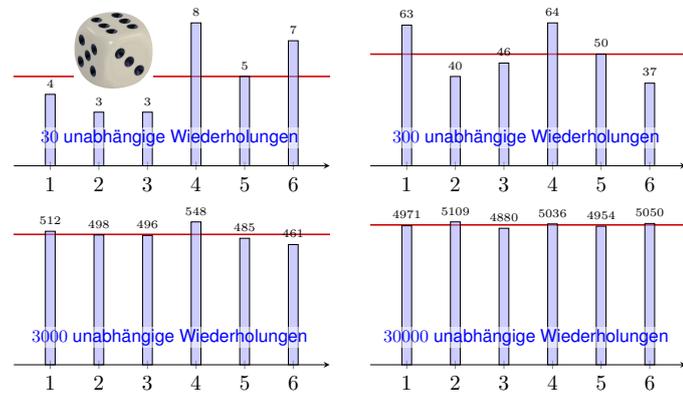
$$\alpha_3 \geq 1 - 1/3^2 \geq 88\%, \quad \alpha_5 \geq 1 - 1/5^2 \geq 96\%,$$

$$\alpha_{10} \geq 1 - 1/10^2 \geq 99\%, \quad \alpha_k \geq 1 - 1/k^2.$$
 ☺ Diese genial-einfache Methode optimieren wir in Kapitel V und W: Unser Ziel sind schärfere Abschätzungen, also genauere Intervalle!

☺ Dieses Argument und die Rechnung fassen wir als Satz zusammen:  
**Satz T3J: Gesetz der großen Zahlen (nach Chebychev)**  
 Seien  $X_1, \dots, X_n: (\Omega, \mathcal{P}) \rightarrow \mathbb{R}$  ZVaren mit Erwartung  $\mu = E(X)$  und Varianz  $\sigma^2 = V(X)$  und zudem unabhängig (es genügt unkorreliert). Der empirische Mittelwert  $\hat{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$  nähert sich der Erwartung  $\mu$ :  
 (1) Seine Streuung  $\sigma(\hat{X}) = \sigma(X)/\sqrt{n} \rightarrow 0$  fällt wie  $1/\sqrt{n}$  für  $n \rightarrow \infty$ .  
 (2) Abweichungen um  $\varepsilon > 0$  werden beliebig unwahrscheinlich gemäß  

$$P[|\hat{X} - \mu| \geq \varepsilon] \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \searrow 0.$$

 Deshalb wiederholen wir Messungen **unabhängig**, um die Messgenauigkeit zu verbessern! Das Gesetz der großen Zahlen erklärt insbesondere, wie wir Wahrscheinlichkeiten messen können: Die Indikatorfunktion  $X = \mathbf{I}_A$  zählt das Eintreten des Ereignisses  $A$ . Der Mittelwert  $\hat{X}$  ist die relative Häufigkeit nach  $n$  Versuchen und konvergiert gegen  $\mu = E(X) = P(A)$ . Alles wird gut!  
 ⚠ Für praktische Anwendungen wollen Sie  $n$  nicht zu groß wählen: Wiederholte Messungen sind teuer. Chebychev T3F ist zwar einfach, aber noch recht grob. Sie wollen daher bessere Schranken für die Abweichung  $P(|\hat{X} - \mu| \geq \varepsilon)$ . Diese liefert der ZGS! (Satz W1D)



Das **empirische Gesetz der großen Zahlen** ist folgende Erfahrungstatsache: Bei sehr häufiger unabhängiger Wiederholung nähern sich die relativen Häufigkeiten der Wahrscheinlichkeit an. Wir können dies nun begründen und sogar nachrechnen, wie schnell und sicher dies geschieht!

**Aufgabe:** Sie würfeln  $n = 3600$  mal mit einem fairen Würfel. Sei  $S$  die Häufigkeit der Augenzahl 6. Wie groß sind Erwartung und Streuung? Welche zusätzlichen Annahmen fordern Sie hierzu sinnvollerweise? Wie wahrscheinlich ist  $S \in [500, 700]$ ?  $S \in [550, 650]$ ?  $S \in [580, 620]$ ?

**Lösung:** Wir nutzen die Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ , wobei  $X_k = 1$  bedeutet „Augenzahl 6 im  $k$ -ten Wurf“. Damit gilt:

$$\begin{aligned} \text{Trefferwkt } P(X_k=1) &= t = 1/6, \\ \text{Erwartung } E(X_k) &= t = 1/6, \\ \text{Varianz } V(X_k) &= t(1-t) = 5/36. \end{aligned}$$

Die Summe  $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  zählt die Häufigkeit:

$$\begin{aligned} \text{Erwartung } E(S) &= nt = 600, \\ \text{Varianz } V(S) &= nt(1-t) = 500, \\ \text{Streuung } \sigma(S) &= \sqrt{V(S)} \approx 22.36. \end{aligned}$$

Satz T31: Für die Additivität der Varianzen fordern wir Unabhängigkeit!

Wir nutzen die (worst case) Abschätzungen von Chebychev (Satz T3F):

$$\begin{aligned} P[|X - \mu| \geq c] &\leq \frac{\sigma^2}{c^2} \\ P[|X - \mu| \geq k\sigma] &\leq \frac{1}{k^2}, \\ P[\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma] &\geq 1 - \frac{1}{k^2}, \end{aligned}$$

In unserem Fall gilt  $\mu = 600$  und  $\sigma \approx 22.36$ , damit erhalten wir:

$$P[|S - 600| \geq 101] \leq \frac{500}{101^2} \approx 0.05 \implies P[S \in [500, 700]] \geq 0.95,$$

$$P[|S - 600| \geq 51] \leq \frac{500}{51^2} \approx 0.20 \implies P[S \in [550, 650]] \geq 0.80,$$

$$P[|S - 600| \geq 21] \leq \frac{500}{21^2} \approx 1.13 \implies P[S \in [580, 620]] \geq -0.13.$$

Die ersten beiden Abschätzungen sind hilfreich, die dritte ist nutzlos. Später rechnen wir genauer mit dem lokalen Grenzwertsatz V3A (LGS).

Die Ungleichungen von Chebychev sind zwar grob, aber sie erlauben uns immerhin eine erste Abschätzung, zudem schnell und bequem.

Zunächst klingen 3600 Versuche nach viel, doch es genügt nicht: Die Ergebnisse streuen noch stark, die Messung ist recht ungenau!

**Aufgabe:** Bei 3600 Versuchen gilt  $S \in [\mu \pm 0.167\mu]$  mit Wkt  $\geq 95\%$ . Wie oft müssen Sie würfeln, damit  $S \in [\mu \pm 0.01\mu]$  mit Wkt  $\geq 95\%$  gilt?

**Lösung:** Wir rechnen wie oben, mit unbekannter Versuchszahl  $n$ :

$$P[|S - \mu| \geq 0.01\mu] \leq \frac{\sigma^2}{(0.01\mu)^2} = \frac{nt(1-t)}{(0.01nt)^2} = 10000 \frac{1-t}{nt} \stackrel{!}{\leq} 0.05$$

Wegen  $(1-t)/t = 5/6 / 1/6 = 5$  muss demnach  $n \geq 1000000$  gelten.

Plausibel: Doppelte Genauigkeit erfordert vierfache Versuchszahl, zehnfache Genauigkeit erfordert hundertfache Versuchszahl, 17-fache Genauigkeit erfordert 289-fache Versuchszahl.

Genauigkeit hat ihren Preis: Wir müssen mehr messen! Das ist zugleich Fluch und Segen der großen Zahlen.



Gleiche Wkten!

Ungleiche Wkten?

Bei perfekter Symmetrie sind alle Ergebnisse gleichwahrscheinlich:

$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}$$

Mit Omas handgefertigtem Lieblingswürfel gewinnt sie verdächtig oft:

$$p(1) = 0.15, \quad p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = 0.16, \quad p(6) = 0.21$$

Wie findet man diese Wkten? Man muss sie messen! Aber wie genau?

**Aufgabe:** Sie wollen die Wkt  $P(A) = t$  eines Ereignisses  $A$  messen:  
(1) Bis auf einen Fehler von  $\varepsilon = 0.01$ . Sie verlangen 98%ige Sicherheit.  
(2) Bis auf einen Fehler von  $\varepsilon = 0.02$ . Sie verlangen 96%ige Sicherheit.  
(3) Bis auf einen Fehler von  $\varepsilon = 0.05$ . Sie verlangen 93%ige Sicherheit.

Wie oft müssen Sie dazu die Messung / das Experiment wiederholen?  
Möglichst präzise, sicher, kostengünstig: Wählen Sie zwei von drei! Nutzen Sie zur Vereinfachung zunächst den Satz von Chebychev T3F, später die Binomialverteilung U3B und den lokalen Grenzwertsatz V3A.

Wir setzen unser Experiment als beliebig wiederholbar voraus. Das ist für praktische Anwendungen eine starke Annahme; manchmal ist schon eine erste Wiederholung zu kostspielig oder gar unmöglich. Dann muss man Wkten auf andere Weise schätzen, und sei's nur grob.

Selbst wenn das Experiment im Prinzip beliebig wiederholbar ist, so sind Wiederholungen doch meist aufwändig und kostspielig. Begrenzte Ressourcen erlauben Ihnen nur begrenzte Genauigkeit. Für dieses Problem soll Sie dieser Aufgabentyp sensibilisieren.

**Lösung:** Das einfache Experiment hat Erwartung  $E(I_A) = P(A) = t$  und Varianz  $V(I_A) = t(1-t) \leq 1/4$ . Wir nutzen besser  $n$  unabhängige Wiederholungen  $X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  und bilden den Mittelwert

$$\hat{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) = \text{relative Häufigkeit des Ereignisses } A.$$

Er hat die Erwartung  $E(\hat{X}) = t$  und dank Unabhängigkeit (!) die Varianz  $\sigma^2 = V(\hat{X}) = V(X)/n \leq 1/4n \searrow 0$ , also die Streuung  $\sigma \leq 1/2\sqrt{n} \searrow 0$ . Wir nutzen das Gesetz der großen Zahlen T3J nach Chebychev:

$$\alpha = P[|\hat{X} - t| < \varepsilon] \geq 1 - 1/4n\varepsilon^2 \nearrow 1$$

(1) Damit schätzen wir die Wiederholungen für  $\alpha = 0.98$  und  $\varepsilon = 0.01$ :

$$\text{Irrtumswkt: } P(|\hat{X} - t| \geq k\sigma) \leq 1/k^2 \stackrel{!}{\leq} 0.02 \iff k \geq 8$$

$$\text{Ungenauigkeit: } 8\sigma \leq 8/2\sqrt{n} \stackrel{!}{\leq} \varepsilon = 0.01 \iff n \geq 160000$$

Für 98%ige Sicherheit genügt immer ein  $8\sigma$ -Intervall um den Messwert. Zur Genauigkeit  $\varepsilon = 0.01$  genügen demnach  $n \geq 160000$  Messungen. Genauer: Dank LGS genügt  $k = 2.33$ , somit nur  $n = 13573$  Messungen.

(2) Wir schätzen die Wiederholungen für  $\alpha = 0.96$  und  $\varepsilon = 0.02$ :

$$\text{Irrtumswkt: } P(|\hat{X} - t| \geq k\sigma) \leq 1/k^2 \stackrel{!}{\leq} 0.04 \iff k \geq 5$$

$$\text{Ungenauigkeit: } 5\sigma \leq 5/2\sqrt{n} \stackrel{!}{\leq} \varepsilon = 0.02 \iff n \geq 15625$$

Für 96%ige Sicherheit genügt immer ein  $5\sigma$ -Intervall um den Messwert. Für die Genauigkeit  $\varepsilon = 0.02$  genügen demnach  $n \geq 15625$  Messungen. Genauer: Dank LGS genügt  $k = 2.06$ , somit nur  $n = 2653$  Messungen.

(3) Wir schätzen die Wiederholungen für  $\alpha = 0.93$  und  $\varepsilon = 0.05$ :

$$\text{Irrtumswkt: } P(|\hat{X} - t| \geq k\sigma) \leq 1/k^2 \stackrel{!}{\leq} 0.07 \iff k \geq 4$$

$$\text{Ungenauigkeit: } 4\sigma \leq 4/2\sqrt{n} \stackrel{!}{\leq} \varepsilon = 0.05 \iff n \geq 1600$$

Für 93%ige Sicherheit genügt immer ein  $4\sigma$ -Intervall um den Messwert. Für die Genauigkeit  $\varepsilon = 0.05$  genügen demnach  $n \geq 1600$  Messungen. Genauer: Dank LGS genügt  $k = 1.82$ , somit nur  $n = 332$  Messungen.

Genauigkeit und Sicherheit haben ihren Preis! Mathematik kann beide erhöhen und somit die Kosten senken, siehe [V411](#), [V415](#), [W203](#).

Seien  $A, B \subseteq \Omega$  Ereignisse in einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{P})$ . Für die Wahrscheinlichkeit ihrer Vereinigung gilt die einfache Formel

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B).$$

Diese Formel gilt *immer*. Meist kennen wir die Wahrscheinlichkeiten  $\mathbf{P}(A)$  und  $\mathbf{P}(B)$ , aber wie berechnen wir den „Störterm“  $\mathbf{P}(A \cap B)$ ? Zwei Fälle sind besonders nützlich und wichtig:

$$\left. \begin{array}{l} A, B \text{ sind disjunkt, } A \cap B = \emptyset, \\ \text{allgemeiner } \mathbf{P}(A \cap B) = 0. \end{array} \right\} \iff \mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Die Ereignisse } A, B \text{ sind} \\ \text{stochastisch unabhängig.} \end{array} \right\} \iff \mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$$

Das sind zwar nur die einfachsten (extremen) Fälle, aber sie treten häufig genug auf, um nützlich zu sein. Häufig nutzt (prüft oder fordert) man in Rechnungen daher Disjunktheit oder Unabhängigkeit. Das hilft.

⚠ Disjunkt *und* unabhängig gilt nur für  $\mathbf{P}(A) = 0$  oder  $\mathbf{P}(B) = 0$ .

Wir untersuchen genauer die Un/Abhängigkeit von Ereignissen: Im Falle  $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \mathbf{P}(B)$  sind die Ereignisse **unabhängig**. Im Falle  $\mathbf{P}(A \cap B) > \mathbf{P}(A) \mathbf{P}(B)$  sind sie **positiv korreliert**. Im Falle  $\mathbf{P}(A \cap B) < \mathbf{P}(A) \mathbf{P}(B)$  sind sie **negativ korreliert**. Im Allgemeinen können wir dies wie folgt quantifizieren:

**Definition T3K: Kovarianz und Korrelation von Ereignissen**

Die **Kovarianz** von Ereignissen  $A, B$  im WRaum  $(\Omega, \mathcal{P})$  ist

$$\mathbf{Cov}(A, B) := \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) = \mathbf{E}(X \cdot Y)$$

mit den zentrierten Zufallsvariablen  $X = \mathbf{I}_A - \mathbf{P}(A)$  und  $Y = \mathbf{I}_B - \mathbf{P}(B)$ . Im Fall  $\mathbf{P}(A), \mathbf{P}(B) \in ]0, 1[$  definieren wir ihre **Korrelation** durch

$$\mathbf{Cor}(A, B) := \frac{\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)}{\sqrt{\mathbf{P}(A) \mathbf{P}(\bar{A}) \cdot \mathbf{P}(B) \mathbf{P}(\bar{B})}} = \frac{\mathbf{E}(X \cdot Y)}{\sqrt{\mathbf{V}(X) \cdot \mathbf{V}(Y)}} \in [-1, 1].$$

Im Fall  $\mathbf{P}(A) \in \{0, 1\}$  oder  $\mathbf{P}(B) \in \{0, 1\}$  setzen wir  $\mathbf{Cor}(A, B) := 0$ .

Die Un/Abhängigkeit von Ereignissen  $A, B \subseteq \Omega$  ist eine Ja/Nein-Frage. Ihre Korrelation  $\mathbf{Cor}(A, B) \in [-1, 1]$  hingegen quantifiziert den Grad ihrer Abhängigkeit. Hierzu gelten einfache, aber nützliche Regeln:

**Aufgabe:** Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln:

- (1) Genau dann gilt  $\mathbf{Cor}(A, B) = 0$ , wenn  $A$  und  $B$  unabhängig sind.
- (2) Es gilt  $\mathbf{Cor}(A, A) = 1$ ,  $\mathbf{Cor}(A, \bar{A}) = -1$ ,  $\mathbf{Cor}(A, \bar{B}) = -\mathbf{Cor}(A, B)$ .
- (3) Für alle  $A, B \subseteq \Omega$  gilt  $\mathbf{Cor}(A, B) \in [-1, 1]$  dank Cauchy-Schwarz.
- (4) Aus  $\mathbf{Cor}(A, B) = +1$  folgt  $A = B$  *fast sicher*, also  $\mathbf{P}(A \Delta B) = 0$ .
- (5) Aus  $\mathbf{Cor}(A, B) = -1$  folgt  $A = \bar{B}$  *fast sicher*, also  $\mathbf{P}(A \Delta \bar{B}) = 0$ .

Vereinbarung: Die bequeme Ausdrucksweise „fast sicher“ bedeutet bis auf eine „vernachlässigbare“ Menge mit Wahrscheinlichkeit Null.

Beispiel: Wenn  $\mathbf{P}(\{\omega\}) > 0$  für alle  $\omega \in \Omega$  gilt, dann gilt in (4)  $A = B$  bzw. in (5)  $A = \bar{B}$ . Es ist jedoch möglich, dass unser WRaum  $(\Omega, \mathcal{P})$  Elemente  $\omega$  mit Wkt  $\mathbf{P}(\{\omega\}) = 0$  enthält, dann können wir nicht  $A = B$  bzw.  $A = \bar{B}$  schließen, sondern nur  $\mathbf{P}(A \Delta B) = 0$  bzw.  $\mathbf{P}(A \Delta \bar{B}) = 0$ .

**Lösung:** (1) Im Sonderfall  $\mathbf{P}(A) \in \{0, 1\}$  oder  $\mathbf{P}(B) \in \{0, 1\}$  sind  $A$  und  $B$  unabhängig, und es gilt  $\mathbf{Cor}(A, B) = 0$  nach Vereinbarung. Im regulären Fall  $\mathbf{P}(A), \mathbf{P}(B) \in ]0, 1[$  betrachten wir den obigen Bruch: Genau dann gilt  $\mathbf{Cor}(A, B) = 0$ , wenn  $\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) = 0$ .

(2) Einsetzen liefert sofort  $\mathbf{Cor}(A, A) = +1$  und  $\mathbf{Cor}(A, \bar{A}) = -1$ . Zum Ereignis  $A \subseteq \Omega$  betrachten wir  $X = \mathbf{I}_A - \mathbf{P}(A)$ , zum Komplement  $\bar{A} = \Omega \setminus A$  entsprechend  $\bar{X} = \mathbf{I}_{\bar{A}} - \mathbf{P}(\bar{A}) = (1 - \mathbf{I}_A) - (1 - \mathbf{P}(A)) = -X$ . Hieraus folgt  $\mathbf{Cov}(A, \bar{B}) = -\mathbf{Cov}(A, B)$  und  $\mathbf{Cor}(A, \bar{B}) = -\mathbf{Cor}(A, B)$ .

(3) Für  $X = \mathbf{I}_A - \mathbf{P}(A)$  gilt  $\mathbf{E}(X) = 0$  und  $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) = \mathbf{P}(A) \mathbf{P}(\bar{A})$ , und für  $Y = \mathbf{I}_B - \mathbf{P}(B)$  gilt  $\mathbf{E}(Y) = 0$  und  $\mathbf{V}(Y) = \mathbf{E}(Y^2) = \mathbf{P}(B) \mathbf{P}(\bar{B})$ . Wir finden  $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(\mathbf{I}_A \mathbf{I}_B) - \mathbf{P}(A) \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A) \mathbf{P}(B)$ . Dank der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt  $|\mathbf{E}(XY)|^2 \leq \mathbf{E}(X^2) \mathbf{E}(Y^2)$ , also  $\mathbf{Cor}(X, Y)^2 \leq 1$  und somit  $\mathbf{Cor}(X, Y) \in [-1, 1]$  wie gewünscht.

(4/5) Gleichheit gilt bei Cauchy-Schwarz für  $Y = \lambda X$  mit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Wegen  $1 = \max X - \min X = \max Y - \min Y$  bleibt nur  $\lambda = \pm 1$ . In  $L^2(\Omega, \mathcal{P})$  gilt demnach  $X = \pm Y$ , also  $A = B$  bzw.  $A = \bar{B}$  *fast sicher*.

Die Varianz ist nicht additiv! T331 Die nötige Korrektur liefert gerade die Kovarianz:  $\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\mathbf{Cov}(X, Y)$ . Das erinnert uns an die Lineare Algebra: Die Varianz  $X \mapsto \mathbf{V}(X)$  ist eine quadratische Form, die Kovarianz  $(X, Y) \mapsto \mathbf{Cov}(X, Y)$  ist ihre **Polarisierung**.

**Definition T3L: Kovarianz und Korrelation von Zufallsvariablen**

Seien  $X, Y : (\Omega, \mathcal{P}) \rightarrow \mathbb{R}$  Zufallsvariablen mit  $\mathbf{E}[X^2], \mathbf{E}[Y^2] < \infty$ .

Wir definieren ihre **Kovarianz** und ihre **Korrelation** durch

$$\mathbf{Cov}(X, Y) := \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}(X)) \cdot (Y - \mathbf{E}(Y))] = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X) \mathbf{E}(Y),$$

$$\mathbf{Cor}(X, Y) := \frac{\mathbf{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbf{V}(X) \mathbf{V}(Y)}} \quad \text{bzw. } := 0, \text{ falls } \mathbf{V}(X) \mathbf{V}(Y) = 0.$$

Wir nennen die beiden Zufallsvariablen  $X, Y$

- **unkorreliert**, falls  $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$  gilt,
- **positiv korreliert**, falls  $\mathbf{Cov}(X, Y) > 0$  gilt,
- **negativ korreliert**, falls  $\mathbf{Cov}(X, Y) < 0$  gilt.

**Satz T3M: Kovarianz als Skalarprodukt**

Die Kovarianz verhält sich wie ein Skalarprodukt:

$$\begin{aligned} \mathbf{Cov}(X, X) &= \mathbf{V}(X) \geq 0 \\ \mathbf{Cov}(X, Y) &= \mathbf{Cov}(Y, X) \\ \mathbf{Cov}(a + bX, Y) &= b \mathbf{Cov}(X, Y) \end{aligned}$$

Die Varianz  $\mathbf{V}(X) = \mathbf{Cov}(X, X)$  entspricht dem Normquadrat, die Streuung  $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$  entspricht somit der Norm. Genau dann gilt  $\mathbf{V}(X) = 0$ , wenn  $X = \text{const}$  *fast sicher*.

Für die Varianz einer Summe gilt Pythagoras:

$$\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\mathbf{Cov}(X, Y)$$

Unkorreliert  $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$  bedeutet orthogonal  $X \perp Y$ . Dank Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt  $\mathbf{Cor}(X, Y) \in [-1, 1]$ , mit  $\mathbf{Cor}(X, Y) = \pm 1$  genau dann, wenn  $X = \pm \lambda Y$  *fast sicher* (mit  $\lambda > 0$ ).

**Aufgabe:** Seien  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Zufallsvariablen. Das Paar  $(X, Y)$  nimmt die vier Werte  $(\pm 1, 0), (0, \pm 1) \in \mathbb{R}^2$  jeweils mit Wkt  $1/4$  an.

- (1) Berechnen Sie  $\mathbf{E}(X)$ ,  $\mathbf{V}(X)$  und  $\mathbf{E}(Y)$ ,  $\mathbf{V}(Y)$  sowie  $\mathbf{Cov}(X, Y)$ .
- (2) Sind  $X$  und  $Y$  unkorreliert? (3) Sind  $X$  und  $Y$  unabhängig?
- (4) Welche Verteilung hat  $S = X + Y$ ? Erwartung? Varianz?

**Lösung:** (1) Es gilt  $\mathbf{P}(X = \pm 1) = \frac{1}{4}$  und  $\mathbf{P}(X = 0) = \frac{1}{2}$ , also  $\mathbf{E}(X) = 0$  und  $\mathbf{V}(X) = \frac{1}{2}$ . Ebenso für  $Y$ , denn  $Y$  hat dieselbe Verteilung.

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}(X)) \cdot (Y - \mathbf{E}(Y))] = \mathbf{E}(XY) = 0$$

(2) Demnach sind  $X$  und  $Y$  unkorreliert. (3) Aber nicht unabhängig:

$$\mathbf{P}(X=1) = \mathbf{P}(Y=1) = \frac{1}{4} \quad \text{aber} \quad \mathbf{P}(X=1, Y=1) = 0$$

(4) Für die Summe  $S = X + Y$  gilt offensichtlich  $\mathbf{P}(S = \pm 1) = \frac{1}{2}$ , also  $\mathbf{E}(S) = 0 = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y)$  und  $\mathbf{V}(S) = 1 = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$ .

⚠ Die Variablen  $X$  und  $Y$  sind abhängig, aber dennoch unkorreliert. Diese schwächere Bedingung genügt für die Additivität der Varianzen.

**Aufgabe:** Wir untersuchen die drei folgenden Aussagen über  $X, Y$ :

- (1) Die Zufallsvariablen  $X, Y$  sind unabhängig (gemäß Definition T3H).
- (2) Die Zufallsvariablen  $X, Y$  sind unkorreliert, also  $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$ .
- (3) Die Varianzen addieren sich gemäß  $\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$ .

Welche der sechs möglichen Implikationen gelten hier? Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

**Lösung:** Pythagoras T3M zeigt sofort die Äquivalenz „(2)  $\Leftrightarrow$  (3)“.

Es gilt „(1)  $\Rightarrow$  (2)“: Satz T3I garantiert  $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X) \mathbf{E}(Y)$  für unabhängige Variablen, also  $\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X) \mathbf{E}(Y) = 0$ .

Die Umkehrung „(2)  $\Rightarrow$  (1)“ gilt nicht: Die vorige Aufgabe zeigt ein Gegenbeispiel. (Sie können leicht Varianten davon konstruieren.)

⚠ Unabhängig impliziert unkorreliert, aber nicht umgekehrt!

**Aufgabe:** Für alle **zweiwertigen** Zufallsvariablen  $X = a_0 + a_1 \mathbf{I}_A$  und  $Y = b_0 + b_1 \mathbf{I}_B$  ist unabhängig äquivalent zu unkorreliert. **Lösung:** T329

⚠ Für drei- und mehrwertige ZV Variablen gilt dies allgemein nicht mehr!

**Aufgabe:** Wir beobachten sehr häufig folgende Ereignisse:

$$R = \{\text{Es regnet}\}, \quad S = \{\text{Scheibenwischer laufen}\}$$

- (1) Es gilt etwa  $P(S|R) = 99\%$ . Was können Sie hieraus folgern? Verursacht Regen das Anschalten der Scheibenwischer? „Ja, klar!“
- (2) Es gilt auch etwa  $P(R|S) = 99\%$ . Was können Sie hieraus folgern? Verursacht Anschalten der Scheibenwischer also Regen? „Whaaa?“

⚠ Dieser Denkfehler ist absurd, aber häufig. Wie ist er zu widerlegen? Dieses Beispiel ist so gewählt, dass der Denkfehler möglichst auffällig ist, gar absurd. Doch wo genau liegt der Fehler? Wir wissen alle aus Erfahrung, dass das Anschalten der Scheibenwischer nicht Regen verursacht. Woher wissen wir das? Das sagen uns nicht die obigen Wahrscheinlichkeiten, sondern folgendes aktive Experiment: Wir können willkürlich / zufällig den Scheibenwischer anschalten und den Regen beobachten. Nach zahlreicher Wiederholung dieses Experiments sind wir sicher, dass der vermutete kausale Zusammenhang nicht besteht.

😊 Kausalität beweist man immer nur aktiv, durch randomisierte Tests. So lernten wir als Kinder, Zusammenhänge zu begreifen und mögliche Erklärungen zu erhärten: durch ausgiebige Tests und endlos wiederholte Spiele. Das ist eine überaus sinnvolle Strategie! Siehe hierzu [en.wikipedia.org/wiki/Correlation\\_does\\_not\\_imply\\_causation](http://en.wikipedia.org/wiki/Correlation_does_not_imply_causation).

- 😊 Kausalität impliziert meist gewisse Wahrscheinlichkeiten. Unser Erfahrungswissen nutzen wir zur Erstellung unserer Modelle.
- 😞 Umgekehrt jedoch müssen wir dabei extrem vorsichtig sein: Beobachtung einer Korrelation impliziert noch keine Kausalität.
- ⚠ Wissenschaftliche Grundregel: Ursache und Wirkung lässt sich nur durch ein detailliertes Verständnis der Mechanismen ergründen!
- ⚠ Ein passives, statistisches Abbild der Situation ist hierfür zu grob. Um Kausalität zu messen, benötigen wir aktiv randomisierte Tests.

Beispiel: Menschen mit hohem Vitamin-C-Gehalt im Blut erleiden seltener einen Herzinfarkt. Kann man hieraus folgern, dass Vitamin C das Risiko mindert? Nein, daraus allein noch nicht! Ein hoher Vitamin-C-Gehalt kann durch andere Faktoren verursacht werden (wie etwa gesunder Lebenswandel, viel Obst, viel Sport) und diese mindern das Infarkttrisiko, nicht allein Vitamin C: Es ist noch nicht schlüssig, ob zusätzlich verabreichtes Vitamin C das Risiko senkt oder erhöht. Da sehr viele (bekannte und unbekante) Faktoren das Infarkttrisiko beeinflussen, muss man mit voreiligen Schlussfolgerungen vorsichtig sein. Die Wirkung von Vitamin C auf das Infarkttrisiko kann man glücklicherweise dennoch untersuchen: Sorgfältig konstruiert kann ein randomisierter kontrollierter Test (RCT) hierauf Antwort geben. Dies ist zwar extrem aufwändig, aber allgemein das beste Studiendesign in der medizinischen, psychologischen und ökonomischen Forschung.

Korrelation tritt in diversen Zusammenhängen auf, manchmal mit und häufig auch ohne Kausalität:



- Aufgabe:** Diskutieren Sie das Auftreten folgender Korrelationen:
- „Regionen mit mehr Störchen haben höhere Geburtenraten.“
  - „Mit Schuhen zu schlafen, geht mit Kopfschmerzen einher.“
  - „Tabak zu rauchen geht häufig mit Leberschäden einher.“
  - „Je mehr Feinstaub, desto höher das Herzinfarkttrisiko.“
  - „Spieler von Ego-Shootern sind häufiger aggressiv.“
  - „Ein Glas Rotwein pro Tag fördert die Gesundheit.“
  - „Vorlesungsbesuch geht mit Klausurerfolg einher.“

Begründet dies eine Kausalität? Sehen Sie mögliche Gegenargumente? Vermeiden Sie voreilige Schlüsse! Fragen Sie nach! Widersprechen Sie!

- Störche und Geburten sind positiv korreliert; siehe Robert Matthews: *Storks deliver Babies*. Teaching Statistics 22 (2000) 36–38. Mögliche gemeinsame Ursache: Ländliche Regionen haben (a) mehr Störche und (b) mehr Geburten. Mehr Störche anzusiedeln, erhöht nicht die Geburten.
- Gemeinsame Ursache dürfte Alkoholkonsum sein. Die Schuhe auszuziehen, hilft nicht gegen Kopfschmerz. Sie wollen das ausprobieren? Machen Sie einen randomisierten kontrollierten Test!
- Dieser Zusammenhang wurde intensiv untersucht. Ein wesentlicher Störfaktor: Tabakrauchen korreliert mit Alkoholkonsum, und Letzteres verursacht Leberschäden. Das Rauchen aufzuhören, fördert sicherlich allgemein die Gesundheit, hat aber keinen direkten Einfluss auf Leberschäden.
- Feinstaub wird heftig diskutiert, gerade in Stuttgart. Studien müssen Störfaktoren vermeiden, Beispiel: Geringes Einkommen impliziert (a) Gesundheitsrisiken und (b) schlechte Wohnlage, darunter auch hohe Luftbelastung. Vereinfacht gesagt: Wer es sich leisten kann, zieht weg.
- Ein komplexes stacheliges Thema! Der Oberste Gerichtshof der USA resümierte 2011 in einer Urteilsbegründung: „Nearly all of the research is based on correlation, not evidence of causation.“
- Positive Korrelation besteht. Mögliche gemeinsame Ursache: Hohes Einkommen impliziert (a) gute Gesundheit und (b) Weinkonsum. Auch medizinische Zusammenhänge werden diskutiert. (Vor allem in französischen Studien? [en.wikipedia.org/wiki/French\\_paradox](http://en.wikipedia.org/wiki/French_paradox) ;-)
- Die Korrelation ist stark. Schon drei verpasste Termine senken signifikant den Klausurerfolg. Prof. Dr. Rolf Schulmeister (Uni Hamburg) hat eine Meta-Studie von 300 empirischen Arbeiten vorgelegt: *Abwesenheit von Lehrveranstaltungen. Ein nur scheinbar triviales Problem.* (2015)

Ein **diskreter Wahrscheinlichkeitsraum**  $(\Omega, P)$  besteht aus

- einer Menge  $\Omega$  von möglichen Ergebnissen und
- einer normierten und additiven Abbildung  $P: \mathfrak{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ .

Letzteres bedeutet  $P(\Omega) = 1$  und  $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$  für alle  $A \subseteq \Omega$ .

Jedes Element  $\omega \in \Omega$  heißt **Ergebnis**, somit ist  $\Omega$  die **Ergebnismenge**. Jede Teilmenge  $A \subseteq \Omega$  heißt **Ereignis**, somit  $\mathfrak{P}(\Omega)$  die **Ereignismenge**. Das Ereignis  $A$  tritt genau dann ein, wenn ein Ergebnis  $\omega \in A$  eintritt. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist das **Wahrscheinlichkeitsmaß**  $P(A)$ .

Spezialfall: Ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, P)$  heißt **endlich**, wenn die Ergebnismenge  $\Omega$  endlich ist. Er heißt **laplacesch**, wenn zudem alle Ergebnisse  $\omega \in \Omega$  gleich wahrscheinlich sind. Für das **Laplace-Wahrscheinlichkeitsmaß** auf  $\Omega$  gilt daher

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der Ergebnisse in } A}{\text{Anzahl aller Ergebnisse in } \Omega} = \frac{\text{günstige Ergebnisse}}{\text{mögliche Ergebnisse}}$$

😊 Für Laplace-Experimente berechnet man die Wkten durch Abzählen der Ergebnisse. Hierbei helfen kombinatorische Abzählformeln.

Alle Ergebnisse fassen wir zur **Ergebnismenge**  $\Omega$  zusammen. Jedes Element  $\omega \in \Omega$  heißt **Ergebnis**. Jede Teilmenge  $A \subseteq \Omega$  heißt **Ereignis**.

Menge	Bedeutung als Zufallsereignis
$\Omega$	Das sichere Ereignis: $\Omega$ tritt immer ein.
$\emptyset$	Das unmögliche Ereignis: $\emptyset$ tritt nie ein.
$A \subseteq \Omega$	Das Ereignis $A$ tritt ein bei jedem Ergebnis $\omega \in A$ .
$\Omega \setminus A$	Komplement: $\bar{A} = \Omega \setminus A$ tritt ein, wenn $A$ nicht eintritt.
$A \subseteq B$	Teilmenge: Immer wenn $A$ eintritt, dann auch $B$ .
$B \setminus A$	Restmenge: Das Ereignis $B$ tritt ein, aber nicht $A$ .
$A \cap B$	Schnittmenge: Die Ereignisse $A$ und $B$ treten beide ein.
$A \cup B$	Das Ereignis $A$ oder $B$ tritt ein (evtl. auch beide).
$A \sqcup B$	Das Ereignis $A$ oder $B$ tritt ein, wobei $A \cap B = \emptyset$ .
$A \Delta B$	Entweder $A$ oder $B$ tritt ein (aber nicht beide).

Unser Ziel sind nachvollziehbar begründete, quantitative Aussagen. 😊 Diese Notation erlaubt präzises Rechnen mit Zufallsereignissen.

Sei  $(\Omega, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $B \subseteq \Omega$  ein Ereignis mit Wahrscheinlichkeit  $P(B) > 0$ . Für jedes Ereignis  $A \subseteq \Omega$  definieren wir die **Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B** durch

$$P(A|B) := P_B(A) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Sei  $\Omega = B_1 \sqcup B_2 \sqcup \dots \sqcup B_\ell$  eine Zerlegung in disjunkte Ereignisse. Für  $A \subseteq \Omega$  gilt dann die **Formel der totalen Wahrscheinlichkeit**:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{\ell} P(A \cap B_k) = \sum_{k=1}^{\ell} P(A|B_k) P(B_k)$$

Im Falle  $P(A) > 0$  gilt zudem die **Formel von Bayes** (Satz T2B):

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) P(B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i) P(B_i)}{\sum_{k=1}^{\ell} P(A|B_k) P(B_k)}$$

- 😊 Bequeme Notation und präzises Rechnen mit Zufallsereignissen.
- 😊 Die Rechnung ist meist leicht, die Interpretation erfordert Übung.

Eine Familie von Ereignissen  $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq \Omega$  heißt (**stochastisch**) **unabhängig**, wenn alle Schnittmengen die Produktregel erfüllen:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_\ell}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_\ell})$$

für jede Auswahl  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_\ell \leq n$ : Die Wkt jedes Schnitts ist das Produkt der Wahrscheinlichkeiten. Für unabhängige Ereignisse lassen sich damit die Wkten aller erzeugten Ereignisse berechnen.

Das heißt, zwei Ereignisse  $A, B \subseteq \Omega$  sind unabhängig, wenn gilt:

- $P(A \cap B) = P(A) P(B)$ .

Drei Ereignisse  $A, B, C \subseteq \Omega$  sind unabhängig, wenn gilt:

- $P(A \cap B) = P(A) P(B)$ ,
- $P(A \cap C) = P(A) P(C)$ ,
- $P(B \cap C) = P(B) P(C)$ ,
- $P(A \cap B \cap C) = P(A) P(B) P(C)$ .

- ⚠ Die Tripelbedingung folgt nicht aus den drei Paarbedingungen! [T226]

**Verständnisfragen: typische Fehler** T405 Übung

**Aufgabe:** Seien  $A, B, C \subseteq \Omega$  Ereignisse in einem WRaum  $(\Omega, \mathbf{P})$ . Gelten folgende Formeln allgemein? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel! Kennen Sie zusätzliche, hinreichende Voraussetzungen?

- (1)  $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$
- (2)  $\mathbf{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathbf{P}(A)$
- (3)  $\mathbf{P}(A \setminus B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(B)$
- (4)  $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$
- (5)  $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$
- (6)  $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$
- (7)  $\mathbf{P}(A \cup B \cup C) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(B \cap C) - \mathbf{P}(A \cap C)$

**Lösung:** Zeichnen Sie Skizzen! Formeln (2),(4),(6) gelten immer.  
 (1) Falsch im Allgemeinen. Dies ist äquivalent zur Unabhängigkeit!  
 (3) Falsch im Allgemeinen. Es braucht  $\mathbf{P}(B \setminus A) = 0$ , z.B.  $B \subseteq A$ .  
 (5) Falsch im Allgemeinen. Es braucht  $\mathbf{P}(A \cap B) = 0$ , z.B.  $A \cap B = \emptyset$ .  
 (7) Falsch im Allgemeinen. Es fehlt der Korrekturterm  $+\mathbf{P}(A \cap B \cap C)$ .

**Verständnisfragen: typische Fehler** T406 Übung

**Aufgabe:** (1) „Die Wkt, die Klausur zu bestehen, beträgt 40%. Bei drei Versuchen bestehe ich mit 120%iger Sicherheit!“ Richtig?  
 (2) „Die Erfolgswkt einer unbemannten Marsmission liegt bei 50%. Es genügen also zwei Missionen, und wir haben 100%igen Erfolg!“

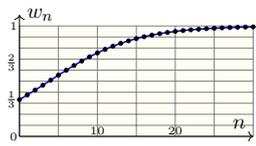
**Lösung:** (1) Offenbar ist  $3 \cdot 40\% = 120\%$  nicht die richtige Antwort! Die Wkt, alle dreimal nicht zu bestehen, ist – bei Unabhängigkeit! –  

$$0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.6 = 0.216.$$
 Die Wkt, mindestens einmal zu bestehen, ist also nur  $0.784 \approx 78\%$ .  
 ☺ Sie könnten nun einwenden, diese Rechnung sei unrealistisch: Sobald Sie die erste Klausur bestehen, müssen und werden Sie keine weiteren Versuche unternehmen. Wenn Sie möchten, können Sie auch dieses alternative Modell ausführlich durchrechnen. Es kommt dasselbe heraus! Ernster ist folgender Einwand: Klausuren sind keine Lotterien! Unabhängigkeit gilt nicht, da sich jeder vernünftige Prüfling nach einem ersten Misserfolg sorgfältiger vorbereitet. (Nicht wahr?)  
 (2) Tatsächlich ist  $2 \cdot 50\% = 100\%$  auch hier nicht die richtige Antwort! Die Wkt von zwei Misserfolgen ist bei Unabhängigkeit  $0.5 \cdot 0.5 = 0.25$ . Die Wkt von mindestens einem Erfolg ist demnach nur  $0.75 = 75\%$ .

**Münzen testen: fair oder gezinkt?** T407 Übung

**Aufgabe:** (Aus der NEW YORK TIMES, August 2011) Von drei gleich aussehenden Münzen sind zwei fair, zeigen also Kopf 0 und Zahl 1 mit gleicher Wkt, die dritte ist gezinkt und zeigt Kopf mit Wkt 60%. Sie wählen zufällig eine der drei Münzen und machen einen Testwurf. Wenn Sie Kopf erhalten, mit welcher Wkt  $w_1$  ist Ihre Münze gezinkt?

**Lösung:** Wir betrachten gleich  $n$  Testwürfe. Dank Bayes erhalten wir:

$$w_n \stackrel{\text{Bayes}}{=} \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n \cdot \frac{1}{3}}{\left(\frac{3}{5}\right)^n \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{2}{3}} \stackrel{\text{Q}}{=} \frac{1}{1 + 2\left(\frac{5}{6}\right)^n}$$


$w_0 = \frac{1}{3}, w_1 = \frac{3}{8}, w_2 = \frac{18}{43}, w_3 = \frac{108}{233}$

Wir betrachten das Ereignis  $F :=$  „Ihre Münze ist fair“, komplementär  $G := \bar{F} :=$  „gezinkt“, und  $T_n :=$  „Alle  $n$  Testwürfe ergeben Kopf“. Gegeben sind  $\mathbf{P}(F) = \frac{2}{3}$  und  $\mathbf{P}(G) = \frac{1}{3}$  sowie  $\mathbf{P}(T_n|F) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$  und  $\mathbf{P}(T_n|G) = \left(\frac{3}{5}\right)^n$ . Daraus berechnen wir  $w_n := \mathbf{P}(G|T_n)$  dank Bayes. Wissenszuwachs, Bayessches Lernen, Fortschritt: Vor dem Testwurf ist die Wkt  $1/3 \approx 0.333$ , nach dem Testwurf  $3/8 = 0.375$ . Das ist plausibel. Mehr Testwürfe: Für  $n \rightarrow \infty$  gilt  $w_n \nearrow 1$ , doch anfangs wächst  $w_n$  nur erstaunlich langsam, zudem bis  $w_{10} \approx 0.756$  annähernd linear.

**Würfel testen: fair oder gezinkt?** T408 Übung

**Aufgabe:** Von 73 äußerlich gleichen, sechseitigen Würfeln sind 72 fair, doch einer ist gezinkt und würfelt immer die 6. Sie wählen zufällig einen dieser 73 Würfel und würfeln  $n$  mal unabhängig. Wenn alle  $n$  Würfe die 6 ergeben, mit welcher Wahrscheinlichkeit  $w_n$  ist Ihr Würfel der gezinkte?

**Lösung:** Sei  $F =$  „fair“,  $G =$  „gezinkt“ und  $S_n =$  „alle  $n$  mal die Sechs“.

$$w_n \stackrel{\text{Def}}{=} \mathbf{P}(G|S_n) \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{\mathbf{P}(G \cap S_n)}{\mathbf{P}(S_n)} \quad \text{Wir nutzen die Formel von Bayes!}$$

$$\stackrel{\text{Bayes}}{=} \frac{\mathbf{P}(S_n|G) \cdot \mathbf{P}(G)}{\mathbf{P}(S_n|G) \cdot \mathbf{P}(G) + \mathbf{P}(S_n|F) \cdot \mathbf{P}(F)} \stackrel{\text{Daten}}{=} \frac{\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{73}}{\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{73} + \frac{1}{6^n} \cdot \frac{72}{73}} \stackrel{\text{Q}}{=} \frac{1}{1 + \frac{72}{6^n}}$$

Konkrete Zahlen sind lehrreich, gar erstaunlich:  $w_0 = 1/73, w_1 = 1/13, w_2 = 1/3, w_3 = 3/4, w_4 = 18/19 \approx 95\%, w_5 = 108/109 \approx 99\%$ . Oh, ah!

☺ Die Sprache der Wkt hilft zur Klarheit. Die Rechnung ist dann leicht. Schön und nützlich: klare Sprache und effiziente Rechenregeln. *Fun fact:* Auch ChatGPT antwortet hier mit Bravour. Viele würden vermutlich schon bei zwei Sechsen an den gezinkten Würfel glauben, das ist aber mit Wkt  $w_2 = 1/3$  noch recht unsicher. Selbst drei Sechsen erhöhen die Wkt nur auf  $w_3 = 3/4$ . Erst danach liegen die Wkten  $w_4 = 18/19 \approx 95\%$  und  $w_5 = 108/109 \approx 99\%$  recht nahe bei 1.

**Ausfallwahrscheinlichkeit: Welcome to the machine!** T409 Übung

**Aufgabe:** Drei unabhängige Bauteile  $A, B, C$  haben die Ausfallwkten  
 $\mathbf{P}(A) = a = 0.3, \quad \mathbf{P}(B) = b = 0.4, \quad \mathbf{P}(C) = c = 0.5.$

- (0) Mit welcher Wkt fällt mindestens ein Teil aus? (1) Genau 0, 1, 2, 3?
- (2) Wenn nur genau ein Teil ausfällt, mit welcher Wkt ist es  $A, B, C$ ?
- (3) Konstruieren Sie als Modell hierfür explizit einen WRaum  $(\Omega, \mathbf{P})$ .

**Lösung:** (0) Offenbar ist  $0.3 + 0.4 + 0.5 = 1.2$  unsinnig! (Warum?)  
 Kein Teil fällt aus, wenn  $A$  funktioniert,  $B$  funktioniert,  $C$  funktioniert:  
 $\{\text{Keins fällt aus}\} = \bar{A} \bar{B} \bar{C}$

Dank **Unabhängigkeit** können wir diese Wkt als Produkt berechnen:  
 $\mathbf{P}(\text{Keins fällt aus}) = \mathbf{P}(\bar{A}) \cdot \mathbf{P}(\bar{B}) \cdot \mathbf{P}(\bar{C}) = 0.7 \cdot 0.6 \cdot 0.5 = 0.21$

Die Wkt, dass mindestens ein Teil ausfällt, ist demnach  $1 - 0.21 = 0.79$ .  
 ☺ Komplement verkürzt die Rechnung. Frage (1) geht den langen Weg. Beide Wege führen zum Ziel. Kennen Sie beide, wählen Sie weise!

**Ausfallwahrscheinlichkeit: Welcome to the machine!** T410 Übung

(1) Mit welcher Wkt fallen genau 0, 1, 2, 3 Teile aus? Wir zerlegen:  
 $\{\text{Keins fällt aus}\} = F_0 := \bar{A} \bar{B} \bar{C}$   
 $\{\text{Eins fällt aus}\} = F_1 := (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$   
 $\{\text{Zwei fallen aus}\} = F_2 := (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)$   
 $\{\text{Drei fallen aus}\} = F_3 := A \cap B \cap C$

☺ Wir nutzen alle oben ausgeführten Rechenregeln:  
 Bei Vereinigung **disjunkter** Ereignisse ist die Wkt additiv.  
 Bei Schnitten **unabhängiger** Ereignisse ist die Wkt multiplikativ.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\text{Keins fällt aus}) &= \mathbf{P}(F_0) = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} &= 0.21 \\ \mathbf{P}(\text{Eins fällt aus}) &= \mathbf{P}(F_1) = a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot b \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c &= 0.44 \\ \mathbf{P}(\text{Zwei fallen aus}) &= \mathbf{P}(F_2) = a \cdot b \cdot \bar{c} + a \cdot \bar{b} \cdot c + \bar{a} \cdot b \cdot c &= 0.29 \\ \mathbf{P}(\text{Drei fallen aus}) &= \mathbf{P}(F_3) = a \cdot b \cdot c &= 0.06 \end{aligned}$$

☺ Plausibilitätsprüfung: Für WMaß gilt  $0.21 + 0.44 + 0.29 + 0.06 = 1$ .

**Ausfallwahrscheinlichkeit: Welcome to the machine!** T411 Übung

(2) Genau ein Teil fällt aus; mit welcher Wkt ist es  $A, B, C$ ?  
 Die Wkten berechnen wir dank Unabhängigkeit (wie zuvor):  
 Nur  $A$  fällt aus:  $X := A \cap \bar{B} \cap \bar{C}, \quad \mathbf{P}(X) = 0.3 \cdot 0.6 \cdot 0.5 = 0.09$   
 Nur  $B$  fällt aus:  $Y := \bar{A} \cap B \cap \bar{C}, \quad \mathbf{P}(Y) = 0.7 \cdot 0.4 \cdot 0.5 = 0.14$   
 Nur  $C$  fällt aus:  $Z := \bar{A} \cap \bar{B} \cap C, \quad \mathbf{P}(Z) = 0.7 \cdot 0.6 \cdot 0.5 = 0.21$   
 Eins fällt aus:  $F_1 := X \cup Y \cup Z, \quad \mathbf{P}(F_1) = 0.09 + 0.14 + 0.21 = 0.44$

Für die bedingten Wahrscheinlichkeiten folgt somit:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A|F_1) &= \frac{\mathbf{P}(A \cap F_1)}{\mathbf{P}(F_1)} = \frac{\mathbf{P}(X)}{\mathbf{P}(F_1)} = \frac{0.09}{0.44} \approx 0.205 \\ \mathbf{P}(B|F_1) &= \frac{\mathbf{P}(B \cap F_1)}{\mathbf{P}(F_1)} = \frac{\mathbf{P}(Y)}{\mathbf{P}(F_1)} = \frac{0.14}{0.44} \approx 0.318 \\ \mathbf{P}(C|F_1) &= \frac{\mathbf{P}(C \cap F_1)}{\mathbf{P}(F_1)} = \frac{\mathbf{P}(Z)}{\mathbf{P}(F_1)} = \frac{0.21}{0.44} \approx 0.477 \end{aligned}$$

☺ Plausibilitätsprüfung: Für WMaß gilt  $0.205 + 0.318 + 0.477 = 1$ .

**Ausfallwahrscheinlichkeit: Welcome to the machine!** T412 Übung

(3) Wir konstruieren explizit einen geeigneten WRaum  $(\Omega, \mathbf{P})$ .  
**Mögliches Modell:**  $\Omega = \{0, 1\}^3$  mit 0 = „fehlerfrei“ und 1 = „fällt aus“. Die zugehörigen Wkten erhalten wir dank Unabhängigkeit:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{111\}) &= a \cdot b \cdot c = 0.06, & \mathbf{P}(\{110\}) &= a \cdot b \cdot \bar{c} = 0.06, \\ \mathbf{P}(\{101\}) &= a \cdot \bar{b} \cdot c = 0.09, & \mathbf{P}(\{100\}) &= a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} = 0.09, \\ \mathbf{P}(\{011\}) &= \bar{a} \cdot b \cdot c = 0.14, & \mathbf{P}(\{010\}) &= \bar{a} \cdot b \cdot \bar{c} = 0.14, \\ \mathbf{P}(\{001\}) &= \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c = 0.21, & \mathbf{P}(\{000\}) &= \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} = 0.21 \end{aligned}$$

☺ Hiermit ist  $(\Omega, \mathbf{P})$  tatsächlich ein WRaum, denn  $\mathbf{P} \geq 0$  und  $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ . Unsere Ereignisse sind  $A = \{1??\} = \{100, 101, 110, 111\}$  und  $B = \{?1?\}$  und  $C = \{??1\}$  sowie komplementär  $\bar{A} = \{0??\}, \bar{B} = \{?0?\}, \bar{C} = \{??0\}$ . Die zugehörigen Wkten erhalten wir jeweils durch Summation (T1D). Ebenso  $X = \{100\}, Y = \{010\}, Z = \{001\}$  und  $F_1 = \{100, 010, 001\}$ .

☺ Das explizite Modell (3) ist detaillierter; das kann helfen. Oft genügt die implizite Schreibweise wie in (0–2); sie ist schnell und bequem.

⚠ Es liegt immer ein Modell zu Grunde; im Zweifel führt man es aus.

**Mikrozensus: Familienbande** T413  
Ergänzung

Laut Mikrozensus 2009 haben von ca. 12 Mio Haushalten mit Kindern (vereinfacht) etwa 52% ein Kind, 36% zwei Kinder, 9% drei Kinder, 2% vier Kinder, 1% fünf Kinder. (Weitere vernachlässigen wir hier.) Die Wkten von Mädchen und Jungen seien gleich und unabhängig.

**Aufgabe:** (1) Stimmt die Schlagzeile „Jedes zweite Kind ist Einzelkind“? Wie viele sind Einzelkinder? oder eins von 2, 3, 4, 5 Geschwistern?

(2) Angenommen Sie haben später einmal drei Kinder. Mit welcher Wkt sind es zwei Mädchen und ein Junge?

(3) Angenommen Sie haben später einmal vier Kinder. Mit welcher Wkt sind es zwei Mädchen und zwei Jungs?

(4) Xanthia hat zwei Geschwister, dabei ist das ältere ein Mädchen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das andere Geschwist ein Junge?

(5) Yago hat zwei Geschwister, dabei (mindestens) eine Schwester. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das andere Geschwist ein Junge?

(6) Sie lernen zufällig Zé kennen, von dem Sie zunächst nichts wissen. Wie groß ist die Wkt, dass er (mindestens) eine Schwester hat?

**Mikrozensus: Familienbande** T415  
Ergänzung

(5) In Geburtsreihenfolge ist möglich: MM, MJ, JM, JJ. Das Ereignis  $A = \{\text{mindestens ein Bruder}\}$  hat Wkt  $P(A) = 3/4$ . Das Ereignis  $B = \{\text{mindestens eine Schwester}\}$  hat Wkt  $P(B) = 3/4$ . Gefragt ist die Wkt  $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = (1/2) / (3/4) = 2/3$ . Alternativ: Das entspricht zwei der drei Möglichkeiten MM, MJ, JM.

😊 Vergleichen Sie (4) und (5): Der Unterschied mag überraschen.

(6) Zé habe  $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$  Geschwister. Dann gilt:

$$P(\text{Zé hat keine Schwester} \mid \text{Zé hat } n \text{ Geschwister}) = \frac{1}{2^n}$$

Als nächstes benötigen wir die Wahrscheinlichkeiten

$$P(\text{Zé hat } n \text{ Geschwister}) = \frac{\text{Anzahl der Kinder mit } n \text{ Geschwistern}}{\text{Gesamtzahl aller Kinder}}$$

Aus dem Mikrozensus (1) berechnen wir (auf drei Nachkommastellen):

$n =$	0	1	2	3	4
$p_n \approx$	0.317	0.439	0.165	0.049	0.030

**Glücksritter: Ursprünge der Stochastik im Würfelspiel** T417  
Übung

Chevalier de Meré (1607–1684) war ein berufsmäßiger Spieler und suchte hierzu Rat bei dem Mathematiker Blaise Pascal (1623–1662).

Speziell plagte ihn folgendes Problem. Beim Würfelspiel war er davon ausgegangen, dass folgende Ereignisse gleich wahrscheinlich seien:

A: Bei 4 Würfeln eines Würfels tritt mindestens eine Sechs auf.  
B: Bei 24 Würfeln zweier Würfel tritt mind. eine Doppelsechs auf.

Er argumentierte ganz einfach und anschaulich so: Eine Doppelsechs ist 6 mal unwahrscheinlicher, dafür führt man 6 mal mehr Würfe aus, also sind beide gleich wahrscheinlich. Damit hatte er jedoch auf Dauer Geld verloren, was ihn recht wunderte – und vor allem sehr verdross.

😊 Dieses praktische Problem wollte er nun mathematisch lösen. Mit den Techniken dieses Kapitels gelingt Ihnen dies spielend!

😞 Wissen macht Ah! Unwissen macht Aua! Unkenntnis führt zu Fehlentscheidungen und – schlimmer noch – zu Fehlentscheidungen.

😊 Die Mathematik bietet Ihnen hierzu extrem präzise Werkzeuge. Hier macht das den Unterschied, wie in jeder ernsthaften Anwendung.

**Chancengleichheit: Wie fair ist ein fairer Würfel?** T419  
Übung

Bei einem fairen Würfel sind alle sechs Ergebnisse 1, 2, 3, 4, 5, 6 gleich wahrscheinlich. Manche verstehen „fair“ wesentlich strenger so, dass bei sechsmaligem Würfeln jedes der möglichen Ergebnisse einmal auftritt.

**Aufgabe:** (1) Warum ist das keine vernünftige Definition von „fair“? (2) Wie wahrscheinlich ist das? Was sagt Ihre Intuition? Rechnung? (3) Können Sie dennoch eine realistische Vorhersage machen?

**Lösung:** (1) Der Würfel müsste wissen, was er noch würfeln darf. Insbesondere beim letzten Wurf wäre er festgelegt und nicht zufällig! (2) Es gibt  $6^6$  Möglichkeiten (unter Beachtung der Reihenfolge). Alle sind gleich wahrscheinlich. Darunter sind  $6!$  Möglichkeiten, bei denen jede der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 genau einmal vorkommt. Die Wahrscheinlichkeit ist also  $6!/6^6 = 720/46656 \approx 0.015$ . Das ist unwahrscheinlich und tritt nur etwa in jeder 65. Serie auf. (3) Das Gesetz der großen Zahlen (T3J) garantiert: Bei unabhängiger Wiederholung nähern sich die relativen Häufigkeiten den Wkten, hier also  $1/6$ . Sechsmalige Wiederholung ist aber noch keine große Zahl.

**Mikrozensus: Familienbande** T414  
Ergänzung

**Lösung:** (1) Es gab  $\frac{52}{100} \cdot 12\text{Mio} = 6\,240\,000$  Einzelkinder,  
 $2 \cdot \frac{36}{100} \cdot 12\text{Mio} = 8\,640\,000$  Kinder mit genau einem Geschwist,  
 $3 \cdot \frac{9}{100} \cdot 12\text{Mio} = 3\,240\,000$  Kinder mit genau zwei Geschwistern  
 $4 \cdot \frac{2}{100} \cdot 12\text{Mio} = 960\,000$  Kinder mit drei Geschwistern und  
 $5 \cdot \frac{1}{100} \cdot 12\text{Mio} = 600\,000$  Kinder mit vier Geschwistern.  
 Insgesamt sind das 19 680 000 Kinder. Etwa jedes dritte ist Einzelkind.

😊 Die Zeitungsschlagzeile ist also falsch. Sie gründet, wie so oft, auf mangelnder Sachkenntnis. Man muss eine Statistik auch lesen können!

(2) In Geburtsreihenfolge: {MMJ, MJM, JMM}. Das sind drei von acht gleichwahrscheinlichen Möglichkeiten. Die Wkt beträgt  $3/8 = 37.5\%$ .

(3) Hier {MMJJ, MJMJ, MJJM, JMMJ, JMJM, JJMM}, also 6 von 16 gleichwahrscheinlichen Möglichkeiten. Die Wkt beträgt  $6/16 = 37.5\%$ .

😊 Diese beiden Fragen sind Spezialfälle der Binomialverteilung U3B.

(4) Das Geschlecht des jüngeren Geschwist ist unabhängig vom Geschlecht der älteren. Also ist die Wahrscheinlichkeit  $1/2 = 50\%$ .

**Mikrozensus: Familienbande** T416  
Ergänzung

Damit finden wir schließlich die totale Gesamtwahrscheinlichkeit (T2B):

$$P(\text{Zé hat keine Schwester}) = \sum_{n=0}^4 P(\text{Zé hat } n \text{ Geschwister und keine Schwester})$$

$$= \sum_{n=0}^4 \left\{ P(\text{Zé hat } n \text{ Geschwister}) \cdot P(\text{Zé hat keine Schwester} \mid \text{Zé hat } n \text{ Geschwister}) \right\}$$

$$= 0.317 \cdot 1 + 0.439 \cdot \frac{1}{2} + 0.165 \cdot \frac{1}{4} + 0.049 \cdot \frac{1}{8} + 0.030 \cdot \frac{1}{16} \approx 0.586$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach das Komplement:

$$P(\text{Zé hat mindestens eine Schwester}) = 1 - P(\text{Zé hat keine Schwester}) \approx 1 - 0.586 = 0.414$$

😊 Mit den Mitteln dieses Kapitels verfügen Sie über eine bequeme Notation und präzise Formeln. Der Rest ist sorgfältiges Rechnen.

**Glücksritter: Ursprünge der Stochastik im Würfelspiel** T418  
Übung

**Aufgabe:** Wie wahrscheinlich sind diese Ereignisse  $A$  und  $B$ ? Auf welches sollte unser Glücksritter demnach wetten?

**Lösung:** (A) Die Wahrscheinlichkeit, bei vier Würfeln keine Sechs zu werfen ist  $(\frac{5}{6})^4 = \frac{625}{1296} \approx 0.4823$ . Bei vier Würfeln mindestens eine Sechs zu werfen, hat somit die Gegenwahrscheinlichkeit  $1 - 0.4823 \approx 0.5177$ .

(B) Die Wahrscheinlichkeit, bei 24 Würfeln keine Doppelsechs zu werfen ist  $(\frac{35}{36})^{24} \approx 0.5086$ . Bei 24 Würfeln mindestens eine Doppelsechs zu werfen, hat somit die Gegenwahrscheinlichkeit  $1 - 0.5086 \approx 0.4914$ .

😊 Tatsächlich ist das Ereignis  $A$  etwas wahrscheinlicher als  $B$ . Der Chevalier de Meré sollte demnach auf Ereignis  $A$  wetten.

⚠ Der kleine Unterschied von etwa 2.6% fällt nicht sofort auf. Bei häufiger Wiederholung fällt er jedoch spürbar ins Gewicht. Für professionelle Spieler wie Meré ist genaues Wissen wertvoll.

😊 Gleiches gilt für alle Prozesse, die häufig wiederholt werden, und deren genaue Berechnung / Bewertung daher wesentlich ist. Bei geringer Wiederholung hingegen verschwimmt die Trennschärfe.

**Efrons intransitive Würfel: Welcher ist der beste?** T420  
Übung

**Aufgabe:** Der Statistiker Bradley Efron erfand **intransitive Würfel**:



Alice

$A : 5, 5, 5, 1, 1, 1 \implies E(A) = 9/3$   
 $B : 6, 6, 2, 2, 2, 2 \implies E(B) = 10/3$   
 $C : 3, 3, 3, 3, 3, 3 \implies E(C) = 9/3$   
 $D : 4, 4, 4, 4, 0, 0 \implies E(D) = 8/3$



Bob

Je zwei Würfel treten gegeneinander an, z.B.  $A$  gegen  $B$ . Wie groß sind die Gewinnwkten  $P(A > B)$  etc.? Welcher Würfel ist dabei der beste? Wie beschreiben Sie diese Situation präzise durch Zufallsvariablen?

**Lösung:** Unabhängigkeit! Abzählen aller Gewinnkombinationen ergibt:

$$P(A > B) = 12/36 = 1/3, \quad P(B > C) = 12/36 = 1/3,$$

$$P(C > D) = 12/36 = 1/3, \quad P(D > A) = 12/36 = 1/3,$$

$$P(A > C) = 18/36 = 1/2, \quad P(B > D) = 20/36 = 5/9.$$

Es gibt keinen „besten“ Würfel: Jeder wird vom nächsten geschlagen!

😊 **Penney's Game:** Intransitivität entsteht auch in zufälligen 0-1-Folgen beim Wettrennen von je zwei der acht Tripel: Wer schlägt hier wen?

**Satz T4A: geometrische Verteilung**

Wir wiederholen ein Zufallsexperiment mit Misserfolgswkt  $0 \leq q < 1$  unabhängig so lange, bis im  $n$ -ten Versuch der erste Erfolg eintritt. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Wartezeit  $X$  ist gegeben durch

$$p : \mathbb{N}_{\geq 1} \rightarrow [0, 1] : n \mapsto p(n) = q^{n-1}(1 - q).$$

Dies nennen wir die **geometrische Verteilung**  $G(q)$ , geschrieben

$$X \sim G(q).$$

Die mittlere Wartezeit bis zum ersten Erfolg und ihre Varianz sind

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} n p(n) = \frac{1}{1 - q} \quad \text{und} \quad \mathbf{V}[X] = \frac{q}{(1 - q)^2}.$$

**Beispiele:** Lebensdauer eines Geräts, Wartezeit bis zum Ausfall, Würfeln bis die Sechs kommt beim Spiel *Mensch ärgere dich nicht*, Wartezeit auf den Jackpot beim Lotto oder ähnlichen Spielen. U416

**Aufgabe:** (0) Warum ist  $G(q)$  tatsächlich eine WVerteilung? Berechnen Sie hierzu (1) die Erwartung und (2) die Varianz.

**Lösung:** (0) Zwei Eigenschaften sind zu prüfen: Es gilt  $p(n) \geq 0$  und

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(n) = (1 - q) \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = (1 - q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n = (1 - q) \cdot \frac{1}{1 - q} = 1.$$

(1) Wir berechnen zunächst den Erwartungswert:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{P}(X=n) = (1 - q) \sum_{n=0}^{\infty} n q^{n-1} = (1 - q) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dq} q^n \\ &= (1 - q) \frac{d}{dq} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} q^n \right] = (1 - q) \frac{d}{dq} \left[ \frac{1}{1 - q} \right] = (1 - q) \frac{1}{(1 - q)^2} = \frac{1}{1 - q} \end{aligned}$$

☺ Der geometrischen Reihe sei Dank! Hier hilft der Ableitungstrick: Die Rechenregeln für Reihen kennen und nutzen Sie seit der HM2.

☺ Das Ergebnis ist bemerkenswert: Die Wartezeit kann beliebig groß werden, aber ihre Erwartung ist endlich, da die Wkt schnell sinkt mit  $q^n$ .

(2) Ebenso berechnen wir  $\mathbf{E}[X^2]$ , dazu zunächst  $\mathbf{E}[X(X - 1)]$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X(X - 1)] &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n - 1) \mathbf{P}(X=n) = (1 - q)q \sum_{n=0}^{\infty} n(n - 1)q^{n-2} \\ &= (1 - q)q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^2}{dq^2} q^n = (1 - q)q \frac{d^2}{dq^2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} q^n \right] \\ &= (1 - q)q \frac{d^2}{dq^2} \left[ \frac{1}{1 - q} \right] = (1 - q)q \frac{2}{(1 - q)^3} = \frac{2q}{(1 - q)^2} \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir schließlich die ersehnte Varianz:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}[X] &= \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = \mathbf{E}[X(X - 1)] + \mathbf{E}[X] - \mathbf{E}[X]^2 \\ &= \frac{2q^2}{(1 - q)^2} + \frac{1}{1 - q} - \frac{1}{(1 - q)^2} = \frac{q}{(1 - q)^2} \end{aligned}$$

☺ Die Rechnung ist trickreich, aber jeder einzelne Schritt ist leicht: Für Reihen kennen Sie alle nötigen Rechenregeln aus der HM2.

☺ Auch hier hilft erneut der Ableitungstrick: Sie nutzen gewinnbringend die allgegenwärtigen, extrem effizienten Rechenregeln für Potenzreihen!

**Aufgabe:** Jeder Bestellung liegt (unabhängig, gleichverteilt) eines von insgesamt  $n$  Sammelbildern bei. Wann ist Ihre Sammlung vollständig?

**Lösung:** Die Wartezeit  $T_k$  von  $k$  bis  $k + 1$  Bildern ist geometrisch verteilt mit Misserfolgswkt  $q_k = k/n$ , also Erfolgswkt  $p_k = 1 - q_k = (n - k)/n$ , Erwartung  $\mu_k = 1/p_k = n/(n - k)$  und Varianz  $\sigma_k^2 = (1 - p_k)/p_k^2$ . T421 Für die Gesamtwarezeit  $T = T_0 + \dots + T_{n-1}$  erwarten wir demnach

$$\mathbf{E}(T) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{E}(T_k) = \frac{n}{n} + \frac{n}{n-1} + \dots + \frac{n}{1} = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = n \cdot H_n,$$

mit der harmonischen Reihe  $H_n \approx \ln n$ . B302 Dank Unabhängigkeit gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(T) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{V}(T_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1 - p_k}{p_k^2} - p_k^{-1} \\ &= \left( \frac{n^2}{n^2} + \frac{n^2}{(n-1)^2} + \dots + \frac{n^2}{1^2} \right) - \left( \frac{n}{n} + \frac{n}{n-1} + \dots + \frac{n}{1} \right), \end{aligned}$$

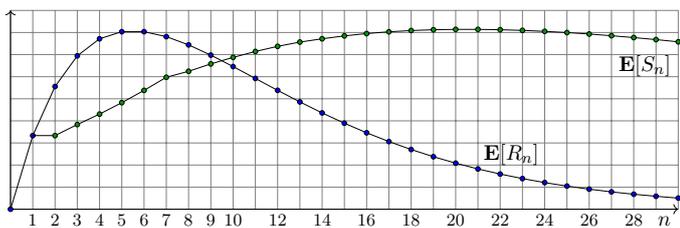
also große Varianz  $\mathbf{V}(T) \approx n^2 \pi^2/6 - n \ln n$ , siehe Basler Problem. I324 Die Erwartung ist erfreulich klein, die Varianz jedoch erschreckend groß.

$n$	2	3	6	10	100	1000	$10^6$	$10^9$
$\mathbf{E}(T)$	3	5.5	14.7	$\approx 29.3$	$\approx 519$	$\approx 7486$	$1.4 \cdot 10^7$	$2.1 \cdot 10^{10}$

Beim Würfeln werden Augenzahlen addiert bis der Spieler aufhört; würfelt er jedoch eine Eins, so endet sein Spiel mit Totalverlust/Ruin. Die Spielleiterin zahlt die erreichte Augensumme in Euro, verlangt aber 10€ Einsatz. Wie spielen Sie optimal? Können Sie Profit generieren?

**Aufgabe:** Sie nutzen die Strategie  $R_n$ : „Spiele  $n$  Runden (oder Ruin).“ (1) Welchen Gewinn erwarten Sie? Welche  $n$  maximieren den Gewinn?

**Lösung:** (1) Bei  $n$  Würfeln erwarten wir den Gewinn  $\mathbf{E}[R_n] = 4n(\frac{5}{6})^n$ . Bei  $n \in \{5, 6\}$  erreichen wir das Maximum  $4 \cdot 5(\frac{5}{6})^5 \approx 8.038$ .



Die Erwartung  $\mathbf{E}[R_5] \approx 8$  ist noch zu gering. Gibt es bessere Strategien? Angenommen, im laufenden Spiel beträgt Ihre aktuelle Augensumme  $s$ . Sollten Sie noch einen weiteren Zug wagen oder besser jetzt aufhören?

**Aufgabe:** (2) Bis zu welcher Augensumme  $s$  lohnt sich ein weiterer Zug? **Lösung:** (2) Nach einem weiteren Zug ist die erwartete Augensumme

$$e(s) = \frac{0 + (s+2) + (s+3) + (s+4) + (s+5) + (s+6)}{6} = \frac{5s + 20}{6}$$

Der nächste Zug ist genau dann profitabel (im Mittel), wenn  $e(s) > s$  gilt:

$$s < \frac{5s + 20}{6} \iff s < 20$$

Das legt folgende Strategie nahe: Sie würfeln bis Sie Augensumme  $\geq 20$  erreichen (oder aber eine Eins zuvor Ihr Spiel mit Totalverlust ruiniert.)

Ist diese flexible Strategie wirklich besser als  $R_n$  mit fest 5 Runden? Können Sie damit sogar die 10€ Einsatz übertreffen und profitieren? Dazu müssen wir die Erwartungswerte berechnen und vergleichen!

Die Strategie  $S_n$  lautet: „Spiele bis mindestens  $n$  Punkte (oder Ruin).“ Anders als bei  $R_n$  nutzen Sie Informationen des bisherigen Verlaufs!

**Aufgabe:** (3) Welches Ergebnis liefert die Strategie  $S_n$  mit welcher Wkt? (4) Welche der Strategien in  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  erwartet den höchsten Gewinn?

**Lösung:** (3) Sei  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ . Die Strategie  $S_n$  liefert die Ergebnisse  $0, n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$  mit Wkten  $a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n, g_n \in [0, 1]$ . Für  $n = 1$  sind diese Wkten offensichtlich  $1/6, 0, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6$ .

Rekursiv gilt dann  $a_{n+1} = a_n + b_n/6, b_{n+1} = c_n, c_{n+1} = d_n + b_n/6, d_{n+1} = e_n + b_n/6, e_{n+1} = f_n + b_n/6, f_{n+1} = g_n + b_n/6, g_{n+1} = b_n/6$ . Mit einer Tabellenkalkulation erhalten wir mühelos die folgenden Werte; Sie finden dieses Beispiel unter [eiserm.de/lehre/HM3/Wuerfeln.ods](http://eiserm.de/lehre/HM3/Wuerfeln.ods).

(4) Der erwartete Gewinn für die Strategie  $S_n$  ist gegeben durch  $\mathbf{E}[S_n] = nb_n + (n+1)c_n + (n+2)d_n + (n+3)e_n + (n+4)f_n + (n+5)g_n$ .

Das Maximum  $\mathbf{E}[S_{20}] = \mathbf{E}[S_{21}] \approx 8.142$  liegt nur ein klein Wenig höher als zuvor  $\mathbf{E}[R_5] = \mathbf{E}[R_6] \approx 8.038$  bei fester Rundenzahl. Immerhin! Für 10€ Einsatz genügt das nicht. Können Sie mehr rausholen?

$S_n$	0	$n$	$n+1$	$n+2$	$n+3$	$n+4$	$n+5$	$\mathbf{E}[S_n]$	$S_n$	0	$n$	$n+1$	$n+2$	$n+3$	$n+4$	$n+5$	$\mathbf{E}[S_n]$
1	.167	.000	.167	.167	.167	.167	.167	3.333	26	.714	.076	.072	.057	.041	.027	.013	7.931
2	.167	.167	.167	.167	.167	.167	.000	3.333	27	.726	.072	.069	.054	.040	.026	.013	7.855
3	.194	.167	.194	.194	.028	.028	3.833	28	.738	.069	.066	.052	.038	.025	.012	7.771	
4	.222	.194	.222	.222	.056	.056	4.306	29	.750	.066	.063	.049	.036	.024	.012	7.679	
5	.255	.222	.255	.088	.088	.060	4.824	30	.761	.063	.060	.047	.035	.023	.011	7.579	
6	.292	.255	.225	.125	.097	.069	5.380	31	.771	.060	.058	.045	.033	.022	.011	7.474	
7	.334	.225	.167	.140	.112	.079	5.974	32	.781	.058	.055	.043	.032	.021	.010	7.363	
8	.385	.167	.160	.133	.100	.063	6.245	33	.791	.055	.053	.041	.030	.020	.010	7.248	
9	.383	.160	.161	.128	.091	.049	6.579	34	.800	.053	.050	.039	.029	.019	.009	7.128	
10	.410	.161	.155	.118	.075	.055	6.874	35	.809	.050	.048	.038	.028	.018	.009	7.005	
11	.436	.155	.145	.102	.081	.054	7.141	36	.818	.048	.046	.036	.026	.017	.008	6.878	
12	.462	.145	.128	.107	.079	.053	7.374	37	.826	.046	.044	.034	.025	.016	.008	6.750	
13	.486	.128	.131	.103	.077	.050	7.567	38	.833	.044	.042	.033	.024	.016	.008	6.619	
14	.508	.131	.125	.098	.071	.045	7.716	39	.841	.042	.040	.031	.023	.015	.007	6.487	
15	.530	.125	.120	.093	.067	.043	7.848	40	.848	.040	.039	.030	.022	.014	.007	6.353	
16	.550	.120	.114	.088	.064	.043	7.952	41	.854	.039	.037	.029	.021	.014	.007	6.219	
17	.570	.114	.108	.084	.063	.041	8.032	42	.861	.037	.035	.028	.020	.013	.006	6.084	
18	.589	.108	.103	.082	.060	.039	8.089	43	.867	.035	.034	.026	.019	.013	.006	5.949	
19	.607	.103	.100	.078	.057	.037	8.125	44	.873	.034	.032	.025	.018	.012	.006	5.814	
20	.625	.100	.095	.074	.054	.035	8.142	45	.878	.032	.031	.024	.018	.011	.006	5.680	
21	.641	.095	.091	.071	.052	.034	8.147	46	.884	.031	.029	.023	.017	.011	.005	5.546	
22	.657	.091	.087	.068	.050	.032	8.126	47	.889	.029	.028	.022	.016	.010	.005	5.412	
23	.672	.087	.083	.065	.048	.031	8.096	48	.894	.028	.027	.021	.015	.010	.005	5.280	
24	.687	.083	.079	.062	.045	.030	8.052	49	.898	.027	.026	.020	.015	.010	.005	5.149	
25	.700	.079	.076	.059	.043	.028	7.997	50	.903	.026	.025	.019	.014	.009	.004	5.019	

Es ist überaus bemerkenswert, dass wir mit Wkten rechnen können! Anfangs erschien der Zufall allzu vage, unfassbar, unberechenbar. Doch auch der Zufall folgt gewissen Gesetzen und Rechenregeln.

Mit den Mitteln dieses Kapitels verfügen Sie über eine bequeme und präzise Notation zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten. Insbesondere die Formel von Bayes ist sehr einfach, aber nützlich: Sie klärt viele Rechnungen, die ansonsten undurchdringlich blieben.

Sie können dies in den unterschiedlichsten Situationen einsetzen: Konfidenzintervalle [T337] [W201], Testverfahren [T407], Partnerwahl [T437], Bewerbung [T439], Glücksspiel [T441] [T445] oder Googles PageRank [T453]. Versuchen wir es mal mit den großen Fragen der Menschheit. . .

*There is a theory which states that if ever anybody discovers exactly what the Universe is for and why it is here, it will instantly disappear and be replaced by something even more bizarre and inexplicable.*

*There is another theory which states that this has already happened.*

Douglas Adams (1952–2001)

Sind Sie das einzige denkende Wesen? T431  
Ergänzung

Als Kopfnuss hier eine erstaunliche Rechnung, die nicht ganz ernst gemeint ist. (Oder doch?) Es gibt Menschen, die glauben, sie seien das einzige denkende Wesen im Universum. Für den Fall, dass auch Sie sich diese Frage stellen, schlage ich Ihnen ein stochastisches Argument vor.

(a) Angenommen, es gibt genau  $X$  **denkende Wesen** im Universum. Diese Anzahl  $X$  ist Ihnen nicht bekannt, Sie nehmen deshalb die Gleichverteilung auf der Menge  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  an, etwa  $n < e^{100}$ .

Wir wollen nur annehmen, dass  $n$  sehr groß ist, aber doch kleiner als die geschätzten  $10^{80}$  Elementarteilchen im Universum. (Paralleluniversen werden nicht mitgerechnet, wie auch?)

(b) Angenommen, **nur eines** der Wesen hat zufällig die Erleuchtung: *Ich denke, also bin ich. . . Bin ich das einzige denkende Wesen?*

Das ist von allen Annahmen die willkürlichste und rechnerisch auch die einschneidendste. Andererseits: Wer sich wirklich fragt, ob er das einzige denkende Wesen im Universum ist, der wird auch vor dieser Annahme der Einzigkeit nicht zurückschrecken. Also sei's drum.

**Aufgabe:** Angenommen, dieses denkende Wesen sind zufällig Sie. Mit welcher Wahrscheinlichkeit können Sie nun zurückschließen, dass Sie das einzige denkende Wesen im Universum sind?

Objektive und subjektive Wahrscheinlichkeit T433  
Ausführung

Ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathbf{P})$  ist ein **theoretisches Modell**: Es dient zur Grundlegung und Formulierung unserer Berechnungen. Was sagt es über die **Wirklichkeit**? Was bedeuten Aussagen wie: „Das Ereignis  $A$  tritt mit Wahrscheinlichkeit  $\mathbf{P}(A)$  ein“?

**Objektive Interpretation:** Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist die relative Häufigkeit bei **beliebig wiederholbaren Experimenten**. Sie kann empirisch überprüft werden, wir können sie messen! [T345]

- Bei einem fairen Würfel erscheinen gerade Zahlen mit Wkt  $1/2$ .
- Bei unserem gezinkten Würfel haben gerade Zahlen Wkt  $53\%$ .
- Die Wkt für 6 Richtige beim Lotto ist Eins zu  $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$ .

**Subjektive Interpretation:** Die Wahrscheinlichkeit drückt den Grad unseres Unwissens aus, mithin die „**gefühlte Wahrscheinlichkeit**“. Dies hat nur einen vagen Sinn und ist empirisch kaum überprüfbar.

- Morgen beträgt die Regenwahrscheinlichkeit  $70\%$ .
- Die Klausur werde ich mit  $90\%$  Wahrscheinlichkeit bestehen.
- Mit Wkt  $1\%$  bin ich das einzige denkende Wesen im Universum.

Objektive und subjektive Wahrscheinlichkeit T435  
Ausführung

**Beispiel:** Sie kaufen ein Los mit Gewinnwkt  $1:14$ Mio und reisen damit in die Berge zum Wandern. Die Ziehung findet statt, doch fernab der Zivilisation wissen Sie davon nichts. Wie groß ist jetzt Ihre Gewinnwkt? Die Aussage „Sie haben gewonnen.“ ist nun entweder wahr oder falsch, und somit keine Frage der Wahrscheinlichkeit mehr! Oder etwa doch?

**Beispiel:** Diese Situation können wir hier vor Ort sofort nachstellen: Die Spielleiterin wirft eine faire Münze, hält diese aber noch verdeckt. Wie stehen jetzt Ihre Gewinnchancen? objektiv? subjektiv?

*Nach dem Ereignis hat es keinen Sinn, nach Wahrscheinlichkeit zu fragen.*  
Albert Einstein (1879–1955)

**Beispiel:** Drei gleich gute Studenten  $A, B, C$  schreiben eine Klausur. Vorläufiges Ergebnis: Zwei der drei haben die Bestnote Eins, doch die Einzelnoten sind noch nicht bekannt. Student  $A$  bezirzt die Assistentin, ihm einen (anderen) Studenten zu nennen, der eine Eins hat, und nach einigem Zögern sagt sie: „ $C$  hat eine Eins.“ Daraufhin ist  $A$  sehr traurig, denn er fühlt seine Chance von  $2/3$  auf  $1/2$  gesunken. Zu Recht? [T213]



Seul au monde?

*Man sieht nur mit der Mathematik gut.  
Das Wesentliche ist für die Augen unsichtbar.*  
frei nach Antoine de Saint-Exupéry (1900–1944)

Sind Sie das einzige denkende Wesen? T432  
Ergänzung

**Lösung:** Nach Annahme der Gleichverteilung (a) wissen Sie

$$\mathbf{P}(X=1) = \mathbf{P}(X=2) = \dots = \mathbf{P}(X=n) = \frac{1}{n}.$$

Ihre Erleuchtung  $E$  hat gemäß (b) die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbf{P}(E|X=k) = \frac{1}{k}.$$

Ihre Einzigkeit  $\{X=1\}$  hat nach Bayes die Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X=1|E) &= \frac{\mathbf{P}(E|X=1) \mathbf{P}(X=1)}{\sum_{k=1}^n \mathbf{P}(E|X=k) \mathbf{P}(X=k)} \\ &= \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{n}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}} \geq \frac{1}{1 + \ln n} > \frac{1}{100} = 1\% \end{aligned}$$

Zur harmonischen Reihe siehe B302. Unter den genannten Annahmen (a) und (b) gibt es also eine nicht zu vernachlässigende Wahrscheinlichkeit von mindestens  $1\%$ , dass Sie das einzige denkende Wesen im Universum sind. Wie gut, dass wir das klären konnten. Ich gratuliere!

Objektive und subjektive Wahrscheinlichkeit T434  
Ausführung

Die objektive Sichtweise heißt auch **frequentistische Interpretation**: Wir betrachten nur Experimente, die wir „beliebig oft“ unter den „gleichen Bedingungen“ wiederholen können. Die Wkt eines Ereignisses ist der Grenzwert der relativen Häufigkeit bei „sehr vielen“ Wiederholungen.

Damit erscheint die Wkt als eine **physikalische Größe**, die zwar Messfehlern unterliegt, die wir aber beliebig genau messen können. Diese Interpretation ist inspiriert durch physikalische Laborexperimente, darunter auch Glücksspiele. Sie versagt allerdings bei Experimenten, die wir nicht wiederholen können, etwa gar nicht oder nicht oft genug.

Die subjektive Sichtweise heißt auch **Bayes'sche Interpretation**: Die Wkt  $\mathbf{P}(A) \in [0, 1]$  eines Ereignisses  $A$  drückt aus, wie überzeugt der subjektive Beobachter vom Eintreten ist. In gewissen Grenzen können wir auch dies recht gut messen: „Wie viel bist du bereit zu wetten?“

Damit erscheint die Wkt als eine **psychologische Größe**; das ist für viele Anwendungen pragmatisch, aber leider vollkommen subjektiv. Oft werden die objektive und die subjektive Interpretation vermischt!

**Was ist eigentlich Wahrscheinlichkeit?** [youtu.be/BYUKbEXXmG4](https://youtu.be/BYUKbEXXmG4)

Objektive und subjektive Wahrscheinlichkeit T436  
Ausführung

Diese grundlegenden Fragen sind nicht bloß spitzfindige Haarspalterei: Bei der Erklärung von **Konfidenzintervallen** geht es genau darum! Wissenschaft sucht objektive Aussagen und begründete Folgerungen. Äußerungen, die keine Prüfung erlauben, haben keinen objektiven Sinn.

*Das ist nicht nur nicht richtig, es ist nicht einmal falsch! [not even wrong]*  
Wolfgang Pauli (1900–1958)

Präzise Aussagen und rationales Entscheiden folgen strengen Regeln: Dies ist das übliche und bewährte Vorgehen der Naturwissenschaften!

**Theorie:** Die präzise Beschreibung des zugrundegelegten Modells dient der wissenschaftlichen Redlichkeit: Es enthält alle Annahmen und die festgelegten Wahlen, Parameter, Kalibrierungen etc. Alle Rechnungen bauen auf genau diesen Daten auf — und auf nichts weiter.

**Empirie:** Ob ein Modell zur Beschreibung der Realität geeignet ist, oder ob von zwei Modellen womöglich eines besser ist als das andere, lässt sich empirisch feststellen: Wir vergleichen hierzu die Vorhersagen und prüfen sie durch Experimente — stochastisch unabhängig wiederholt!

## Was nützen dem Pfau seine Federn?

T437

Pfauen-Männchen haben ein prachtvolles Gefieder. Für das Überleben ist es leider hinderlich: Tarnung, Flucht, Energie, ... Warum lohnen sich dennoch lange Federn? Wozu dienen sie? Angenommen, es gebe „fitte“ und „unfitte“ Pfauen-Männchen. Letztere werden öfter von Raubtieren gefressen etc. Sowohl fitte als auch unfitte können kurze oder lange Federn haben. Die mit langen Federn werden aufgrund der genannten Nachteile jedenfalls öfter gefressen.

Eine Population von Pfauen-Männchen könnte etwa so aussehen:

Pfauen	fit	unfit
kurze Federn	40%	20%
lange Federn	30%	10%

Das Pfauen-Weibchen sieht nicht die Fitness, sondern nur die Federn!

**Aufgabe:** Welche Strategie der Partnerwahl ist für sie vorteilhaft?

- Federlänge ignorieren: Trefferquote 70 : 30 (möglich)
  - Kurze Federn bevorzugen: Trefferquote 40 : 20 (schlechter)
  - Lange Federn bevorzugen: Trefferquote 30 : 10 (besser!)
- 😊 Trotz aller Nachteile zahlen sich lange Federn doch aus!

## Visuelles Ornament und sexuelle Selektion

T438  
Erläuterung

Das auffällige Gefieder der Pfauen-Männchen wird als *visuelles Ornament* bezeichnet. Die lange Schleppe ist zwar hinderlich und vermindert das Flugvermögen, paradoxerweise kann es dennoch ein Indikator für genetische Fitness sein und Pfauen-Weibchen als Indiz für gesunden Nachwuchs dienen. (Siehe unser Zahlenbeispiel.) Wäre es nicht effizienter, Pfauen würden diesen Aufwand sparen und die Energie in bessere Überlebensstrategien stecken? Auf den ersten Blick besetzen ja. Aber für ein Weibchen gibt es keine bessere Wahl: Es sieht nicht die tatsächliche Fitness, sondern nur das *Signal* der Federn. Auf Grundlage dieser unvollständigen Information muss es sich für die langen Federn entscheiden, selbst wenn das Überlebensnachteile mit sich bringt, auch für seinen eigenen Nachwuchs! Damit bleibt auch den Männchen keine Wahl, lange Federn werden zum Must-Have. Diese *sexuelle Selektion* ist der Schlusstein in Darwins Evolutionstheorie.

Auch Menschen ist dieses Phänomen vertraut: Manche Männer beeindrucken Frauen, indem sie Geld verschwenden oder andere verrückte Dinge tun. Wäre dieses Verhalten insgesamt nachteilig, so würde man vermuten, dass es auf lange Sicht ausstirbt. Das ist jedoch nicht der Fall, da Frauen dieses Verhalten als Indikator für (gesellschaftlichen) Erfolg interpretieren können und eventuell bei der Partnerwahl belohnen. (All das funktioniert selbstverständlich auch umgekehrt. ...)

Dieses Phänomen wird *Handicap-Prinzip* genannt. Beispiele gibt es viele: Produktwerbung verschwendet Geld, wird aber vom Käufer belohnt. Manch akademischer Titel ist scheinbar Zeitverschwendung, wird aber vom Arbeitgeber honoriert. Auch Ihr Studium ist nur teilweise für Ihren späteren Beruf relevant, und dennoch wird diese Anstrengung meist belohnt. Zum Beispiel gelten Leistungen in Mathematik als zuverlässiger Indikator für intellektuelle Leistungsfähigkeit. Dazu diskutieren wir den Arbeitsmarkt, extrem vereinfacht, in folgendem Gedankenexperiment.

## Kann ein unnützer Dokortitel doch nützlich sein?

T439

Eine Personalchefin sucht für eine Stelle einen Ingenieur (m/w/d). Aus Erfahrung schätzt sie die allgemeine Bewerberlage wie folgt:

Bewerber	geeignet	ungeeignet
Diplom/Master	50%	25%
Promotion	20%	5%

Als individuelle Information hat sie zunächst nur den *Abschluss* laut Bewerbungsunterlagen. Die eigentlich interessante Zielgröße der *tatsächlichen Eignung* kennt sie hingegen nicht. Eine Promotion kostet Zeit und Mühe, bringt aber für *diese* Stelle keinen direkten Nutzen.

**Aufgabe:** Welche Strategie ist bei ihrer Auswahl vorteilhaft?

- Abschluss ignorieren: Trefferquote 70 : 30 (möglich)
  - Master einstellen: Trefferquote 50 : 25 (schlechter)
  - Doktor einstellen: Trefferquote 20 : 5 (besser!)
- 😊 Trotz aller Nachteile kann sich eine Promotion also auszahlen ... selbst wenn sie für die eigentliche Tätigkeit nicht relevant ist!
- ⚠ Ineffizienz ist der Preis für unvollständige Information.

## Bedingte Wkt: Vorurteil oder Gerechtigkeit?

T440  
Erläuterung

Wir untersuchen hier zwei simple, aber frappierende Beispiele: Federn und Dokortitel. Beide sind durchaus realistisch und handfeste Illustrationen für das Konzept der *bedingten Wahrscheinlichkeit*: Diese ist nicht nur eine schöne Theorie, sondern überall tägliche Praxis.

Die Argumente in unserer fiktiven Bewerbungssituation mögen manche für ungerecht halten. In der Tat basieren Sie auf *Vorurteilen* der Arbeitgeberin – ein eher negativ besetzter Ausdruck, aber inhaltlich bedeutet es dasselbe wie bedingte Wahrscheinlichkeit: Sie nutzt ihre Erfahrung. Unter den gegebenen spärlichen Informationen ist das Vorurteil nützlicher als gar kein Urteil.

Das Grundproblem: Die primäre Zielgröße „Eignung“ ist nicht direkt zugänglich. Der sekundäre Faktor „Ornament“ ist eigentlich unwichtig, dafür aber leicht sichtbar. In Ermangelung primärer Information muss man sich mit sekundärer Information begnügen. Diese erhält dadurch eine größere Bedeutung als sie eigentlich haben sollte, und das wird als ineffizient oder ungerecht empfunden. Das ist der Preis für unvollständige Information!

Zur Beruhigung der Gemüter: Nichts hält die Arbeitgeberseite davon ab, über die erste grobe Vorinformation hinaus genauere Information zu gewinnen, zum Beispiel durch Gespräche, Tests, Assessment oder eine Probezeit. Genau das wird in der Praxis auch erfolgreich genutzt. Das ist der Vorteil, wenn man Information nicht nur *passiv* beobachtet, sondern *aktiv* herstellen kann. Schließlich zur Ehrenrettung der Promotion, auch aus persönlicher Erfahrung: Viele Studierende empfinden große Begeisterung für ihr Fach. Dies kann sogar dazu führen, dass sie aus ehrlichem intrinsischem Interesse einer Frage auf den Grund gehen wollen und darüber sogar promovieren. Das wird durch die obigen, allzu kühl berechnenden Argumente nicht in Zweifel gezogen!

## Das Runde muss ins Eckige: Bayes beim Tischkicker

T441

Angenommen beim Tischkicker bis 10 zwischen den gleich starken Alice und Bob fallen die Tore zufällig (50 : 50) und unabhängig voneinander.

**Aufgabe:** Wie stehen die Gewinnchancen bei 9 : 8? bei 4 : 7?

**Lösung:** Wahrscheinlichkeitstabelle für den Sieg von Alice beim Stand  $a : b$ . Am oberen und linken Rand ist das Spiel beendet und die Wkt ist entweder 0 oder 1. Im Inneren ist jeder Eintrag der Mittelwert aus dem linken und dem oberen Nachbarn.

$a : b$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
9	0.000	0.500	0.750	0.875	0.938	0.969	0.984	0.992	0.996	0.998	0.999
8	0.000	0.250	0.500	0.688	0.813	0.891	0.938	0.965	0.980	0.989	0.994
7	0.000	0.125	0.313	0.500	0.656	0.773	0.855	0.910	0.945	0.967	0.981
6	0.000	0.063	0.188	0.344	0.500	0.637	0.746	0.828	0.887	0.927	0.954
5	0.000	0.031	0.109	0.227	0.363	0.500	0.623	0.726	0.806	0.867	0.910
4	0.000	0.016	0.063	0.145	0.254	0.377	0.500	0.613	0.709	0.788	0.849
3	0.000	0.008	0.035	0.090	0.172	0.274	0.387	0.500	0.605	0.696	0.773
2	0.000	0.004	0.020	0.055	0.113	0.194	0.291	0.395	0.500	0.598	0.685
1	0.000	0.002	0.011	0.033	0.073	0.133	0.212	0.304	0.402	0.500	0.593
0	0.000	0.001	0.006	0.019	0.046	0.090	0.151	0.227	0.315	0.407	0.500

## Das Runde muss ins Eckige: Bayes beim Tischkicker

T442  
Übung

**Ausführung:** Wie kommt diese Rechnung zustande? Ganz einfach dank der Formel von Bayes! Beim Stand von  $a : b$  gibt es zwei mögliche Fortgänge: Entweder es trifft Alice oder es trifft Bob. Wir entwickeln unsere Rechnung übersichtlich in einer Tabelle. Sei  $A[a:b]$  das Ereignis „Alice gewinnt nach Stand  $a : b$ “. Dank Satz T2B gilt für die totale Wahrscheinlichkeit:

$$P(A[a:b]) = P(A[a:b] | \text{Alice trifft}) \cdot P(\text{Alice trifft}) + P(A[a:b] | \text{Bob trifft}) \cdot P(\text{Bob trifft})$$

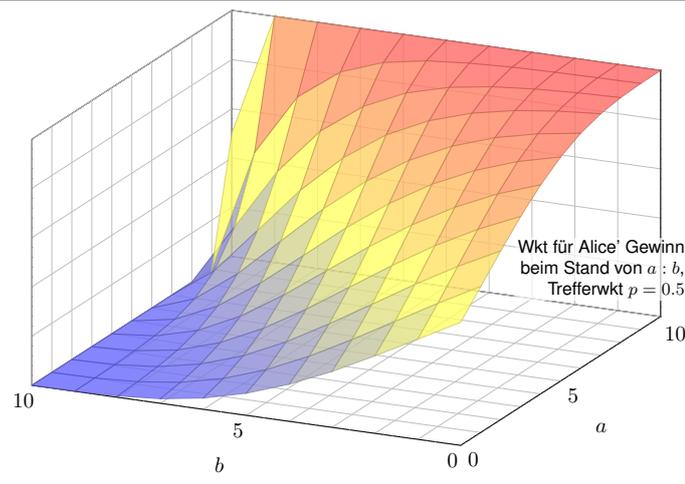
$$= P(A[a+1:b]) \cdot P(\text{Alice trifft}) + P(A[a:b+1]) \cdot P(\text{Bob trifft})$$

- 😊 Mit dieser einfachen Rekursionsformel können Sie nun die gesamte Tabelle ausfüllen. Besonders bequem und automatisiert geht's mit einer Tabellenkalkulation, z.B. *LibreOffice*.
- 😊 Pascal lässt grüßen: Die  $n$ -te Diagonale der Tabelle entspricht der  $n$ -ten Zeile des Pascalschen Dreiecks (hier kumuliert und normiert). In unserer Tabelle versteckt sich die Binomialverteilung!

**Geschichte:** Mitte 1654 schrieb Blaise Pascal (1623–1662) an Pierre de Fermat (1607–1665) einen Brief, der berühmt wurde und als Geburtsurkunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung gilt. Pascal löste darin zwei konkrete Probleme zu Glücksspielen, zu denen ein Freund ihm um Rat gebeten hatte, der berufsmäßige Spieler Antoine Gombaud, Chevalier de Méré (1607–1684). Erstens eine Berechnung von Würfelwahrscheinlichkeiten. [T47] Zweitens das Problem der gerechten Teilung bei vorzeitigem Spielabbruch. Was heißt hier „gerecht“? Pascal und Fermat wurden sich nach ausführlicher Diskussion einig, dass der Einsatz gemäß den Gewinnwkten aufgeteilt werden sollte. Das ist die obige Tabelle. Pascal konnte diese kombinatorisch berechnen dank dem von ihm zuvor entwickelten Pascalschen Dreieck für die Binomialkoeffizienten  $\binom{n}{k}$ .

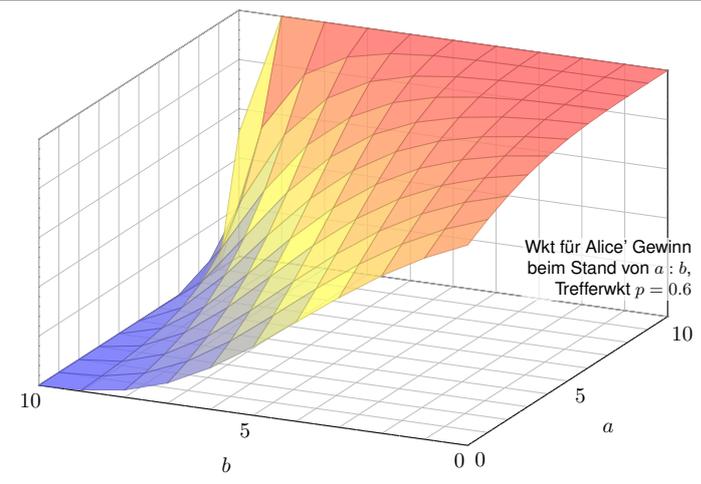
## Das Runde muss ins Eckige: Bayes beim Tischkicker

T443

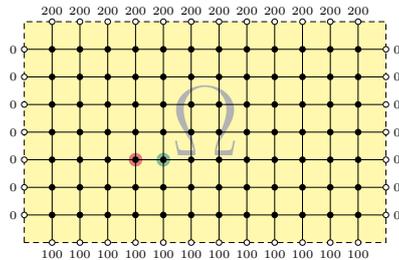


## Das Runde muss ins Eckige: Bayes beim Tischkicker

T444



Zufällige Irrfahrt auf einem Spielfeld  $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$ :



Sie ziehen mit Wkt  $1/4$  nach links / rechts / oben / unten. Das Spiel endet am Rand mit dem gezeigten Gewinn. Für welche Startpunkte würden Sie 100 zahlen?

**Aufgabe:** (1) Wie groß ist die Gewinnerwartung  $u(x, y)$  auf jedem Feld? Wo ist sie maximal? Ist die gesuchte Lösung  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eindeutig? Wie berechnet man sie? möglichst effizient? näherungsweise?

☺ Kontext und Anwendung ändern sich, die Rechnung bleibt dieselbe! (2) Hooke: Netz aus Massen und Federn. (3) Kirchhoff: Spannung einer elektrischen Schaltung. (4) Fourier: diskrete Wärmeleitung / Diffusion.

**Lösung:** (1) Sei  $u(x, y)$  die Gewinnerwartung auf dem Feld  $(x, y) \in \Omega$ . In jedem Randpunkt  $(x, y) \in \partial\Omega$  ist der Gewinn  $u(x, y)$  fest vorgegeben. In jedem inneren Punkt  $(x, y) \in \Omega^\circ$  gilt die **Mittelwerteigenschaft**:

$$u(x, y) = \frac{1}{4}u(x-1, y) + \frac{1}{4}u(x+1, y) + \frac{1}{4}u(x, y-1) + \frac{1}{4}u(x, y+1)$$

Eine solche diskrete Funktion  $u: \mathbb{Z}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  nennen wir **harmonisch**. ☺ Die folgende Tabelle und Graphik zeigen die / eine Lösung  $u$ .

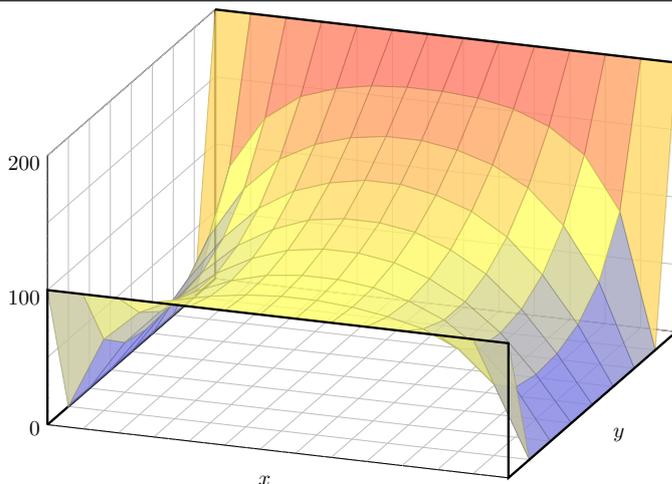
Wir betrachten hier das ebene Gitter  $\mathbb{Z}^2$  und darin eine Teilmenge  $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$ . Innere Punkte  $z \in \Omega$  sind solche, deren vier direkte Nachbarn ebenfalls in  $\Omega$  liegen. Bei einem Randpunkt  $z \in \partial\Omega$  liegt mindestens ein Nachbar außerhalb von  $\Omega$ . **Dirichlet-Problem:** In jedem Randpunkt  $z \in \partial\Omega$  ist der Wert  $u(z)$  festgelegt durch die vorgegebene Randfunktion  $v = u|_{\partial\Omega}: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Gesucht ist eine harmonische Funktion  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $u|_{\partial\Omega} = v$ . Existiert eine Lösung? Ist sie eindeutig? Wie können wir sie berechnen bzw. annähern? Kurzum: Ist das Problem **gut gestellt**?

Diese Anwendung ist recht faszinierend: Sie ist physikalisch-anschaulich motiviert und fördert sowohl Intuition als auch Methodik. Hier gilt das Minimum-Maximum-Prinzip (Satz T4B) und daraus können wir nicht nur die Eindeutigkeit, sondern sogar die Existenz einer Lösung ableiten. Diese einfache Differenzengleichung diskretisiert partielle Differentialgleichungen (H125) und enthüllt so unerwartete Zusammenhänge, als Modell / Näherung / Anschauung für harmonische Funktionen  $\Delta u = 0$  (Satz R2c) und die Wärmeleitungsgleichung  $\partial_t u = \kappa \Delta u$  (Satz S3E).

Dieses einfache Beispiel illustriert das allgemeine und überall wichtige **Dirichlet-Problem**. Die Rechnung ist trickreicher als in der vorigen Aufgabe: Dort konnten wir mit den Startwerten direkt Zeile für Zeile ausrechnen. Hier hingegen scheint die Rechnung zunächst selbstbezüglich.

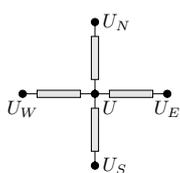
	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	
000	100	139	158	167	172	174	174	167	157	139	100	000
000	061	100	125	139	147	151	151	147	139	125	100	061
000	043	077	102	118	127	132	132	127	118	102	077	043
000	035	065	088	103	113	117	117	113	103	088	065	035
000	033	061	081	095	104	108	108	104	095	081	061	033
000	037	063	081	092	099	102	102	099	092	081	063	037
000	053	076	088	094	098	100	100	098	094	088	076	053
	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	

Die Aufgabe führt uns zu einem **linearen Gleichungssystem** mit  $7 \times 12 = 84$  Unbekannten. Für diese haben wir genau 84 Gleichungen. Das sieht vernünftig aus, bedeutet aber noch nicht, dass es genau eine Lösung gibt. Hierzu müssen wir genauer hinschauen und präzise begründen! Meine Tabellenkalkulation *LibreOffice* weigert sich zunächst mit „Fehler 522: zirkulärer Bezug“. Mit Extras > Optionen > Calc > Iterationen rechnet sie dann iterativ obige Näherungslösung aus. Eine tabellarische Darstellung der ersten 80 Näherungsschritte finden Sie ab Seite H129.



☺ Kontext und Anwendung ändern sich, die Rechnung bleibt dieselbe!

(2) Wir betrachten Massenpunkte in  $(x, y, u(x, y)) \in \mathbb{R}^3$  in Ruhelage. Jeder ist durch gleich starke Federn mit seinen Nachbarn verbunden. Somit gilt: Ruhelage = Kräftegleichgewicht  $\approx$  Mittelwerteigenschaft! Sie können es nachrechnen! [H129] Genauer gesagt ist dies die Näherung bei geringer Krümmung.



(3) Wir betrachten die gezeigte Schaltung mit vier gleichen Widerständen. An den Nachbarpunkten liegen die Potentiale  $U_E, U_N, U_W, U_S$  an.

Ohmsches Gesetz und Kirchhoffsche Regel:

$$U = \frac{U_E + U_N + U_W + U_S}{4}$$

Ausführlich: Es gilt das Ohmsche Gesetz  $I_E = (U_E - U)/R$ . Die Kirchhoffsche Regel besagt hier  $I_E + I_N + I_W + I_S = 0$ . Einsetzen und Auflösen nach  $U$  ergibt die Mittelwerteigenschaft!

☺ Wir können  $\Omega$  als Schaltung realisieren und am Rand die genannten Spannungen anlegen. Mit einem Voltmeter messen wir das Potential  $u(x, y)$  im Inneren und finden obige Lösung. Physikalische Intuition suggeriert Existenz und Eindeutigkeit der Lösung, siehe Satz T4B.

(4) Wir betrachten  $\Omega$  als ein Bauteil aus wärmeleitendem Material. Am Rand liegen die Temperaturen  $0^\circ\text{C}, 100^\circ\text{C}, 200^\circ\text{C}$  an. [H125] [R407] Wärme fließt von warm nach kalt proportional zur Temperaturdifferenz. Stationäre Verteilung = Fließgleichgewicht = Mittelwerteigenschaft!

☺ Unser LGS ist die diskrete Version der Potentialgleichung  $\Delta u = 0$ . Für  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar gilt die Taylor-Formel:

$$0 = \underbrace{u(x-1, y) - 2u(x, y) + u(x+1, y)}_{= \partial_x^2 u(x, y) + \text{h.o.t.}} + \underbrace{u(x, y-1) - 2u(x, y) + u(x, y+1)}_{= \partial_y^2 u(x, y) + \text{h.o.t.}}$$

Wir diskretisieren die Wärmeleitungsgleichung  $\partial_t u = \kappa \Delta u$  für  $\kappa = \frac{1}{4}$ :

$$u(t+1, x, y) = \frac{u(t, x-1, y) + u(t, x+1, y) + u(t, x, y-1) + u(t, x, y+1)}{4}$$

☺ Diese Iteration nähert sich der stationären Lösung  $u$  mit  $\Delta u = 0$ .

Diese Beobachtung führt uns schließlich zur Methode der iterativen Näherung, die ab Seite H129 numerisch illustriert wird. Alles fließt! Dieses Näherungsverfahren beginnt mit einer (beliebigen!) Startverteilung und konvergiert recht schnell gegen die (eindeutige!) stationäre Lösung. Das ist für den Computer einfach und schnell zu rechnen. Genau das nutzt Ihre Tabellenkalkulation.

Wie zuvor sei  $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^n$  ein endlicher Graph. Wir zerlegen  $\Omega = \Omega^\circ \sqcup \partial\Omega$ : Jeder innere Punkt  $z \in \Omega^\circ$  hat alle seine  $2n$  Nachbarn  $z \pm e_k$  in  $\Omega$ ; jeder Randpunkt  $z \in \partial\Omega$  hat mindestens einen Nachbarn außerhalb von  $\Omega$ . Wir nennen  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  harmonisch, wenn die Mittelwerteigenschaft gilt.

**Satz T4B: Minimum-Maximum-Prinzip, Eindeutigkeit & Existenz**

(1) Jede harmonische Funktion  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  nimmt Minimum und Maximum am Rand  $\partial\Omega$  an: Es gilt also  $\min_\Omega u = \min_{\partial\Omega} u$  und  $\max_\Omega u = \max_{\partial\Omega} u$ .

Für je zwei harmonische Funktionen  $u, \tilde{u}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  gilt demnach:

- (2) Monotonie: Aus  $u \leq \tilde{u}$  auf dem Rand  $\partial\Omega$  folgt  $u \leq \tilde{u}$  auf ganz  $\Omega$ .
- (3) Eindeutigkeit: Aus  $u = \tilde{u}$  auf dem Rand  $\partial\Omega$  folgt  $u = \tilde{u}$  auf ganz  $\Omega$ .

Hieraus gewinnen wir die Existenz und sogar eine Konstruktion:

(4) Existenz: Zu jeder vorgegebenen Randfunktion  $v: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  existiert genau eine harmonische Funktion  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $u|_{\partial\Omega} = v$ .

(5) Konstruktion: Die diskrete Wärmeleitung liefert zu  $v$  Näherungen  $u_0, u_1, u_2, \dots \rightarrow u$ , die gegen die eindeutige Lösung  $u$  konvergieren.

☺ Wir kennen das Prinzip (1-3) von harmonischen Funktionen  $\Delta u = 0$  (Satz R2c) und der Wärmeleitung  $\partial_t u = \kappa \Delta u$  (Satz S3E). Neu hinzu kommen Existenz (4) und Konstruktion (5).

**Aufgabe:** Beweisen Sie (1-4) mit linearer Algebra. **Lösung:** Die Mittelwerteigenschaft (MWE) ist ein lineares Gleichungssystem:  $u(z) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} u(z + e_k) + u(z - e_k)$  für alle  $z \in \Omega^\circ$ .

- (1) Sei  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  harmonisch. Da die Menge  $\Omega$  endlich ist, existiert eine Minimalstelle  $z \in \Omega$ , das heißt  $u(z) \leq u$ . Liegt  $z$  im Inneren, so sind alle Nachbarn  $z \pm e_k$  ebenfalls Minimalstellen. Es gibt einen Weg von  $z$  zu einem Randpunkt  $z' \in \partial\Omega$ , also ist auch dieser eine Minimalstelle.
- (2) Die Differenz  $v = \tilde{u} - u$  ist harmonisch und erfüllt  $v \geq 0$  auf  $\partial\Omega$ , nach (1) also  $v \geq 0$  auf  $\Omega$ . Daraus folgt sofort (3). Alternativ:  $v = \tilde{u} - u$  erfüllt  $v = 0$  auf  $\partial\Omega$ , nach (1) also  $v = 0$  auf  $\Omega$ .

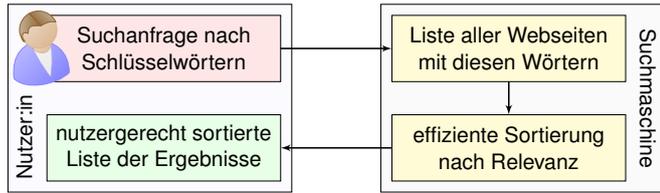
(4) Vorgegeben ist die Randfunktion  $v: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  als Bedingung  $u|_{\partial\Omega} = v$ . Wir suchen die/eine harmonische Fortsetzung  $u = u|_{\Omega^\circ}: \Omega^\circ \rightarrow \mathbb{R}$  auf das Innere. Sei  $N = \#\Omega^\circ$  die Anzahl innerer Punkte. Wir haben  $N$  Variablen  $w(z)$  für  $z \in \Omega^\circ$  und ebenso viele Gleichungen

$$\Lambda_v(w)(z) := w(z) - \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} u(z + e_k) + u(z - e_k) \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{wobei } u = v \sqcup w.$$

Dies definiert die affin-lineare Abbildung  $\Lambda_v: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N: w \mapsto \Lambda_v(w) = \Lambda_0(w) + \Lambda_v(0)$ . Die Abbildung  $\Lambda_0: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  ist linear. Dank (3) ist  $\Lambda_0(w) = 0$  eindeutig lösbar, also  $\Lambda_0$  injektiv. Dank Dimensionsformel  $\dim \mathbb{R}^N = \dim \text{Kern } \Lambda_0 + \dim \text{Bild } \Lambda_0$  ist  $\Lambda_0$  surjektiv, also bijektiv. Somit ist auch  $\Lambda_v$  bijektiv. Insbesondere existiert die ersehnte Lösung  $w \in \mathbb{R}^N$  mit  $\Lambda_v(w) = 0$ .

(5) Hierzu liefert die Analysis den Fixpunktsatz von Banach. [T459] All unsere Argumente gelten allgemein für jeden endlichen Graphen mit Übergangswktn auf den Kanten (diskrete endliche Markov-Kette). Genau dies nutzt Googles PageRank, wie im Folgenden erläutert.

„Wo simmer denn dran? Aha, heute kriege mer de Suchmaschin.  
Wat is en Suchmaschin? Da stelle mer uns ganz dumm. ...“



- Mathematik:** Wie misst man Relevanz von Informationen?  
*Artificial Intelligence (AI), Machine Learning (ML), ...*
- Informatik:** Wie verarbeitet man enorm große Datenmengen?  
*Big Data, Data Mining, Data Science, ... „Data is the new oil.“*
- Finanzstrategie:** Wie verdient man Geld mit einem Gratisprodukt?  
*„If you're not paying for it, you're not the customer, you are the product.“*

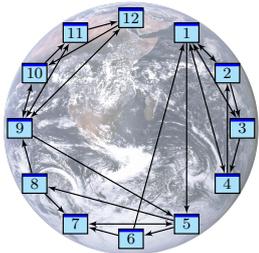
Als das World Wide Web Mitte der 1990er noch klein war, da genügte es, zu einer Suchanfrage einfach alle Treffer aufzulisten. Die Liste war noch kurz, jeder Nutzer:in konnte sie leicht selbst überblicken. Das Internet blieb jedoch nicht lange so überschaubar. ... Das Volumen explodierte! Als Versuch einer Lösung ging 1998 die Suchmaschine Google in Betrieb und dominiert seither den Markt. Sie wird ständig weiterentwickelt. Die meisten Optimierungen hütet Google streng als Firmengeheimnis, doch das ursprüngliche Grundprinzip ist veröffentlicht und genial einfach:

☐ Sergey Brin, Larry Page: *The anatomy of a large-scale hypertextual web search engine.* Stanford University 1998, [infolab.stanford.edu/pub/papers/google.pdf](http://infolab.stanford.edu/pub/papers/google.pdf)

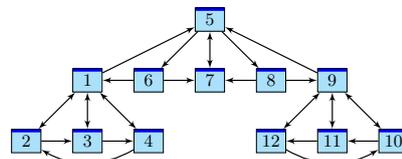
Bei vorherigen Suchmaschinen musste man endlose Trefferlisten durchforsten, bis man auf die ersten interessanten Ergebnisse stieß. Bei Google stehen sie auf wundersame Weise ganz oben. Wie ist das möglich? Die Antwort liegt (zu einem großen Teil) in folgender genial-einfachen Idee. Google misst die Popularität  $p_i$  (PageRank) jeder Seite  $i$  durch folgendes Gleichungssystem:

$$\text{PageRank } p_i = \frac{q}{N} + \sum_{j \rightarrow i} \frac{1-q}{\ell_j} p_j$$

Keine Angst, die Formel sieht nur auf den ersten Blick kompliziert aus. Ich werde sie anhand von Beispielen Schritt für Schritt erläutern. Wer sowas schon gesehen hat, weiß, dass es sich um eine besonders einfache Formel handelt, nämlich ein *lineares Gleichungssystem*, das keine Quadrate oder kompliziereres enthält. Schon die Formel von Pythagoras  $a^2 + b^2 = c^2$  ist komplizierter.



Miniaturbeispiel des Web als ein Graph aus Seiten  $i = 1, \dots, N$  und Links  $i \rightarrow j$ .  
Versuch einer hierarchischen Anordnung:



- Eine Seite ist populär, wenn viele Seiten auf sie verweisen? Zu naiv!
- Eine Seite ist populär, wenn viele populäre Seiten auf sie verweisen.
- Ein zufälliger Surfer folgt von der aktuellen Seite zufällig einem der Links.
- Aufgabe:** Berechnen Sie die Aufenthaltswktn. Konvergieren sie gegen ein Gleichgewicht? Wie schnell? Immer dasselbe, d.h. ist es eindeutig?
- ☺ Im Rückblick ist die abstrakt-mathematische Idee genial einfach. Wer diese Aufgabe bis 1998 professionell löste, ist heute Milliardär.

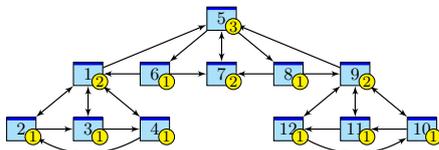
Klassische Texte sind von einer Person geschrieben und linear: Ein Buch hat einen Anfang und ein Ende, typischerweise liest man es von vorne nach hinten in der Reihenfolge der Seiten. Meist gibt es zudem ein Inhaltsverzeichnis oder einen Index zum leichteren Nachschlagen. (Ja, liebe Kinder, unsere Vorfahren konnten Texte mit hunderttausend Buchstaben am Stück lesen, ohne Clicks und ohne Werbung. Man nannte das „Buch“ und speicherte es auf „Papier“. Damals!)

Webseiten bilden hingegen eine gänzlich andere Struktur. Niemand käme auf die Idee, das Internet von Anfang bis Ende durchzulesen: Es hat keine lineare Struktur, keine erste und keine letzte Seite, es ist zudem viel zu groß, und das meiste ist ohnehin uninteressant.

Die Webseiten verweisen gegenseitig aufeinander und bilden einen *Hypertext*. Zur Illustration betrachten wir ein Miniaturbeispiel bestehend aus 12 Webseiten. Unter den Seiten 1, 2, 3, 4 wird 1 am häufigsten zitiert. Die Seite 1 scheint daher besonders relevant oder populär. Gleiches gilt für 9, 10, 11, 12 mit 9 an der Spitze. Die Struktur von 5, 6, 7, 8 ist ähnlich mit 7 an der Spitze. Aber die Seiten 1, 7, 9, die wir schon als relevant erkannt haben, verweisen alle auf die Seite 5. Diese scheint daher populär / wichtig / zentral und für eine spätere Suche besonders relevant.

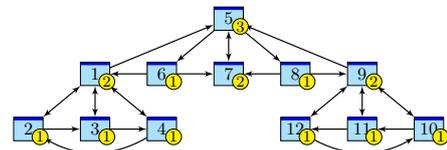
Diese Anordnung war Handarbeit. Lässt sie sich automatisieren? Nach welchen Regeln? Erster Versuch einer Bewertung: Eine Seite ist populär, wenn viele Seiten auf sie verweisen. Nachteil: Die simple Linkzählung ist zu naiv und anfällig für Manipulationen! (Linkfarmen)

Zweiter Versuch: Eine Seite ist populär, wenn viele populäre Seiten auf sie verweisen. Das klingt zunächst zirkulär, lässt sich aber in eine einfache Gleichung fassen und lösen. Ich erläutere dazu die besonders anschauliche Betrachtungsweise des zufälligen Surfers.



Googles Heuristik: Aufenthaltswkt ~ Popularität ~ Relevanz  
**Aufgabe:** Berechnen Sie die Aufenthaltswktn bei Start auf Seite 7.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$t = 0$	.000	.000	.000	.000	.000	.000	1.00	.000	.000	.000	.000	.000
$t = 1$	.000	.000	.000	.000	1.00	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
$t = 2$	.000	.000	.000	.000	.000	.333	.333	.333	.000	.000	.000	.000
$t = 3$	.167	.000	.000	.000	.333	.000	.333	.000	.167	.000	.000	.000
$t = 4$	.400	.042	.042	.042	.417	.111	.111	.000	.042	.042	.042	.042
$t = 5$	.118	.021	.021	.021	.111	.139	.250	.139	.118	.021	.021	.021
...												
$t = 29$	.117	.059	.059	.059	.177	.059	.117	.059	.117	.059	.059	.059
$t = 30$	.117	.059	.059	.059	.177	.059	.117	.059	.117	.059	.059	.059



Googles Heuristik: Aufenthaltswkt ~ Popularität ~ Relevanz  
**Aufgabe:** Berechnen Sie die Aufenthaltswktn bei Start auf Seite 1.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$t = 0$	1.00	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
$t = 1$	.000	.250	.250	.250	.250	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
$t = 2$	.375	.125	.125	.125	.000	.083	.083	.083	.000	.000	.000	.000
$t = 3$	.229	.156	.156	.156	.177	.000	.083	.000	.042	.000	.000	.000
$t = 4$	.234	.135	.135	.135	.151	.059	.059	.059	.000	.010	.010	.010
$t = 5$	.233	.126	.126	.126	.118	.050	.109	.050	.045	.005	.005	.005
...												
$t = 69$	.117	.059	.059	.059	.177	.059	.117	.059	.117	.059	.059	.059
$t = 70$	.117	.059	.059	.059	.177	.059	.117	.059	.117	.059	.059	.059

Wir beobachten eine Diffusion: Sie konvergiert gegen eine stationäre Gleichgewichtsverteilung! Ebenso beim Start in 1; sie konvergiert langsamer, aber schließlich zum selben Gleichgewicht! Dank dieser Betrachtungsweise löst sich unser LGS sozusagen von allein! Verfeinertes Modell:

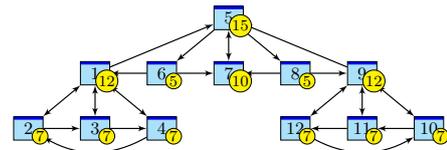
**Sprung:** Mit Wkt  $q$  startet unser Surfer neu auf irgendeiner zufälligen Seite  $i \in \{1, \dots, N\}$ .  
**Fluss:** Mit Wkt  $(1 - q)$  folgt er von der aktuellen Seite  $j$  zufällig irgendeinem der  $\ell_j$  Links. Dies führt zu folgenden Gleichungen, analog zur Wärmeleitung bzw. Potentialgleichung: [T445]

$$\text{Diffusion} \quad p_i(t+1) = \frac{q}{N} + \sum_{j \rightarrow i} \frac{1-q}{\ell_j} p_j(t)$$

$$\text{Gleichgewicht} \quad p_i = \frac{q}{N} + \sum_{j \rightarrow i} \frac{1-q}{\ell_j} p_j$$

Dieses verfeinerte Modell mit Teleportation lässt sich ebenso leicht berechnen. Für  $q = 0.15$  entspricht es dem typischen Verhalten, sechs bis sieben Links zu folgen, bevor man neu anfängt.  
☺ Die Ergebnisse entsprechen der Nutzererwartung und sind recht robust gegen Manipulationen.  
☺ Unsere obigen Beobachtungen zur Konvergenz sind nicht bloß zufällig, sondern beruhen auf mathematischen Gesetzmäßigkeiten. Diese kann man beweisen und darf sich darauf verlassen:

- Der **Fixpunktsatz von Banach** garantiert bei positiver Sprunghaftigkeit  $0 < q \leq 1$  Folgendes:
- (1) Es gibt genau ein Gleichgewicht  $p$ . Dieses erfüllt  $p_1, \dots, p_N > 0$  und  $p_1 + \dots + p_N = 1$ .
  - (2) Für jede Anfangsverteilung konvergiert die Diffusion gegen die Gleichgewichtsverteilung  $p$ .
  - (3) Die Konvergenz ist mindestens so schnell wie die der geometrischen Folge  $(1 - q)^n \searrow 0$ .

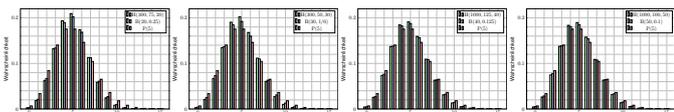


Googles Heuristik: Aufenthaltswkt ~ Popularität ~ Relevanz  
**Aufgabe:** Aufenthaltswktn bei Sprunghaftigkeit  $q = 0.15$ :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$t = 0$	1.00	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
$t = 1$	.013	.225	.225	.225	.225	.013	.013	.013	.013	.013	.013	.013
$t = 2$	.305	.111	.111	.111	.028	.076	.087	.076	.034	.020	.020	.020
$t = 3$	.186	.124	.124	.124	.158	.021	.085	.021	.071	.028	.028	.028
$t = 4$	.180	.105	.105	.105	.140	.057	.075	.057	.057	.040	.040	.040
$t = 5$	.171	.095	.095	.095	.126	.052	.101	.052	.087	.042	.042	.042
...												
$t = 29$	.120	.066	.066	.066	.150	.055	.102	.055	.120	.066	.066	.066
$t = 30$	.120	.066	.066	.066	.150	.055	.102	.055	.120	.066	.066	.066

Kapitel U

Kombinatorik und Näherungen



Stochastik ist die scharfsinnige Kunst, mit unsicheren Ereignissen sicher zu rechnen.

On voit, par cet Essai, que la théorie des probabilités n'est, au fond, que le bon sens réduit au calcul.

Pierre-Simon de Laplace (1749–1827)

Inhalt dieses Kapitels U

- 1 Produktexperimente
  - Ausfallwahrscheinlichkeiten
  - Prognosen zu Reaktorunfällen
  - Kollision und Geburtstagsparadox
- 2 Kombinatorik und Urnenmodelle
  - Kombinatorische Abzählformeln
  - Schubfachmodelle:  $\{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$
  - Urnenmodelle: Ziehung von  $k$  aus  $n$  Kugeln
- 3 Drei grundlegende stochastische Modelle
  - Hypergeometrische Verteilung: Stichproben
  - Binomialverteilung: unabhängige Versuche
  - Poisson-Verteilung: bequeme Näherung
- 4 Fazit: hypergeometrisch, binomial, Poisson
  - Verständnisfragen und weitere Aufgaben
  - Poissons Gesetz der kleinen Zahlen
  - Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion

Motivation und Zielsetzung

Viele Zufallsexperimente beschreiben wir durch **Standardmodelle**:

- Produktraum bei unabhängig durchgeführten Experimenten,
- Ziehung von Losen (mit/ohne Zurücklegen, mit/ohne Reihenfolge),
- Schubfachmodelle (balls in bins, mit zusätzlichen Bedingungen).

Hier hilft geschicktes systematisches Abzählen, also **Kombinatorik**. Die entstehenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind zwar vielfältig, haben aber Gemeinsamkeiten, die Sie kennen und nutzen sollten.

Drei besonders wichtige werden wir in diesem Kapitel behandeln:

- die hypergeometrische Verteilung  $H(N, K, n)$  für Stichproben,
- die Binomialverteilung  $B(n, t)$  für Trefferanzahlen,
- die Poisson-Verteilung  $P(\lambda)$  als Näherung.

Viele Rechnungen vereinfachen wir durch hilfreiche **Näherungen**:

- Für große Stichproben ( $N \rightarrow \infty$ ) gilt  $H(N, K, n) \approx B(n, K/N)$ .
- Poissons Gesetz der kleinen Zahlen:  $B(n, t) \approx P(nt)$  für kleines  $t$ .
- Lokaler Grenzwertsatz:  $B(n, t) \approx N(\mu, \sigma^2)$ , siehe nächstes Kapitel V.

Vorgehensweise

Abschätzung von Risiken ist eine typische und wichtige Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in den Ingenieurwissenschaften.

Ich beginne daher mit Produktexperimenten als Modell unabhängiger Ereignisse und ersten Anwendungen auf Ausfallwahrscheinlichkeiten. Nach Einführung der Urnenmodelle kommen wir zu Stichproben und damit zu hypergeometrischen, Binomial- und Poisson-Verteilungen.

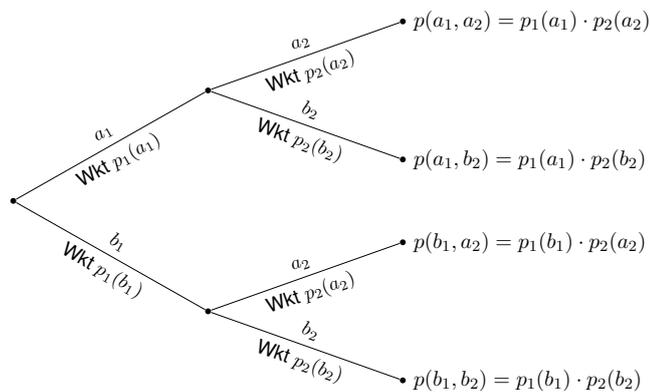
Auf Grundlage eines stochastischen Modells können Sie die gesuchten Wkten exakt berechnen, d.h. aus den angenommenen Daten ableiten. Oft ist die exakte Berechnung zu aufwändig, und Sie begnügen sich mit einer guten Näherung. Nützliche Tricks sollten Sie kennen und nutzen!

Grenzwertsätze formuliere ich möglichst mit expliziten Fehlerschranken. Dies ermöglicht, die üblichen Approximationen nicht nur blind oder naiv nach Gefühl anzuwenden, sondern bequem ihre Güte abzuschätzen. Ob neben der Berechnung der Approximation auch eine Abschätzung des Fehlers notwendig ist, hängt vom geforderten Sicherheitsniveau ab. Die Werkzeuge hierzu sind jedenfalls vorhanden und nicht schwierig.

Baummodell für unabhängige Experimente

Durchführung von zwei **unabhängigen Experimenten**:

$(\Omega_1 = \{a_1, b_1, \dots\}, P_1)$  und  $(\Omega_2 = \{a_2, b_2, \dots\}, P_2)$ .



Produkt von Wahrscheinlichkeitsräumen

**Definition U1A: Produktwahrscheinlichkeit, zunächst diskret**

Seien  $(\Omega_1, P_1)$  und  $(\Omega_2, P_2)$  diskrete Wahrscheinlichkeitsräume.

Der Produktraum ist das **kartesische Produkt**

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2\}.$$

Die **Produktwahrscheinlichkeit**  $P = P_1 \otimes P_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist

$$P(\{(\omega_1, \omega_2)\}) = P_1(\{\omega_1\}) \cdot P_2(\{\omega_2\}).$$

Per Additivität setzt sich dies auf alle Ereignisse  $A \subseteq \Omega$  fort zur Formel

$$P(A) = \sum_{(\omega_1, \omega_2) \in A} P_1(\{\omega_1\}) \cdot P_2(\{\omega_2\}).$$

Der **Produktraum**  $(\Omega, P) = (\Omega_1, P_1) \times (\Omega_2, P_2) = (\Omega_1 \times \Omega_2, P_1 \otimes P_2)$  ist selbst ein diskreter WRaum, denn  $P$  ist additiv und erfüllt  $P(\Omega) = 1$ .

**Beispiel:** Zweimaliges unabhängiges Würfeln, siehe T124.

Ausfallwahrscheinlichkeit bei 2 Teilen

**Aufgabe:** Eine Maschine bestehe aus zwei unabhängigen Teilen. Ihre Ausfallwkten seien  $p_1 = 0.1 = 10\%$  und  $p_2 = 0.2 = 20\%$ .

- (1) Konstruieren Sie als Modell hierfür explizit einen WRaum  $(\Omega, P)$ .
- (2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktionieren beide? fällt eins aus?

**Lösung:** (1) Stochastisches Modell  $(\Omega_1, P_1)$  für Teil  $T_1$  allein:

$$\Omega_1 = \{0, 1\} \quad \text{mit} \quad 0 = \text{„}T_1 \text{ fällt aus“}, \quad 1 = \text{„}T_1 \text{ funktioniert“}$$

$$P_1(\{0\}) = p_1 = 0.1, \quad P_1(\{1\}) = \bar{p}_1 = 0.9$$

Stochastisches Modell  $(\Omega_2, P_2)$  für Teil  $T_2$  allein:

$$\Omega_2 = \{0, 1\} \quad \text{mit} \quad 0 = \text{„}T_2 \text{ fällt aus“}, \quad 1 = \text{„}T_2 \text{ funktioniert“}$$

$$P_2(\{0\}) = p_2 = 0.2, \quad P_2(\{1\}) = \bar{p}_2 = 0.8$$

Wegen Unabhängigkeit ist der Produktraum hier das richtige Modell: Wir betrachten also den Produktraum  $(\Omega, P) = (\Omega_1 \times \Omega_2, P_1 \otimes P_2)$ , also  $\Omega = \{00, 01, 10, 11\}$  mit Produktwahrscheinlichkeit  $P = P_1 \otimes P_2$ .

Ausfallwahrscheinlichkeit bei 2 Teilen

(2) Wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit der beiden Teile ist die Produktwahrscheinlichkeit hier das richtige Modell:

$$T_1 \text{ fällt aus und } T_2 \text{ fällt aus:} \quad P(\{00\}) = p_1 \cdot p_2 = 0.1 \cdot 0.2 = 0.02$$

$$T_1 \text{ fällt aus und } T_2 \text{ funktioniert} \quad P(\{01\}) = p_1 \cdot \bar{p}_2 = 0.1 \cdot 0.8 = 0.08$$

$$T_1 \text{ funktioniert und } T_2 \text{ fällt aus:} \quad P(\{10\}) = \bar{p}_1 \cdot p_2 = 0.9 \cdot 0.2 = 0.18$$

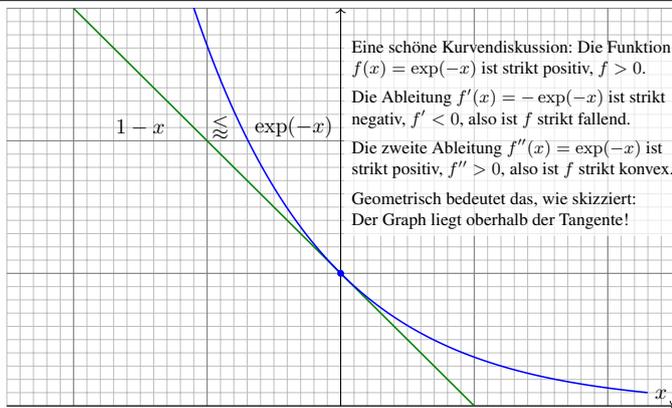
$$T_1 \text{ funktioniert und } T_2 \text{ funktioniert:} \quad P(\{11\}) = \bar{p}_1 \cdot \bar{p}_2 = 0.9 \cdot 0.8 = 0.72$$

Mit Wahrscheinlichkeit 0.72 funktionieren beide Teile. Mit Wahrscheinlichkeit 0.28 fällt (mindestens) eins aus.

😊 Das explizite Modell (1) ist detailliert; das kann helfen. Oft genügt die implizite Schreibweise wie in (2); sie ist schnell und bequem.

😊 Es liegt immer ein Modell zu Grunde; im Zweifel führt man es aus. Zur Illustration notiere ich hier (übertrieben) sorgfältig jeden Schritt.

⚠ Verwechseln Sie nicht die gesuchte Wkt und ihre Gegenwkt! Solche Aufgaben sind leicht, wenn Sie sorgfältig arbeiten.



Für alle  $x$  gilt  $1 - x \leq \exp(-x)$ , und für  $x \approx 0$  zudem  $1 - x \approx \exp(-x)$ .  
Wir schreiben dies im Folgenden kurz und prägnant  $1 - x \lesseqgtr \exp(-x)$ .

Dieses graphische Argument können und wollen wir präzisieren:

**Lemma U1B: Exponentialnäherung**

(1) Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gelten die Ungleichungen

$$\exp(x) \geq 1 + x \quad \text{und} \quad \exp(-x) \geq 1 - x.$$

(2) Für  $x$  um 0 sind dies die Taylor-Näherung bis zur ersten Ordnung:

$$\exp(x) \approx 1 + x \quad \text{und} \quad \exp(-x) \approx 1 - x.$$

**Aufgabe:** Beweisen Sie diese Ungleichungen durch Kurvendiskussion.

**Lösung:** (1) Für  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \exp(x)$  gilt  $f(0) = 1$  und  $f' = f$ .

Die Tangente im Punkt  $x = 0$  ist somit  $x \mapsto f(0) + f'(0)x = 1 + x$ .

Wegen  $f'' = f' = f > 0$  ist  $f$  konvex, liegt also oberhalb der Tangente.

Das beweist die Ungleichung  $\exp(x) \geq 1 + x$ , ebenso  $\exp(-x) \geq 1 - x$ .

(2) Anschaulich: Für  $x \approx 0$  gilt  $\exp(x) \approx 1 + x$ , ebenso  $\exp(-x) \approx 1 - x$ .

Der Fehler ist höherer Ordnung, kurz  $O(x^2)$ , genauer siehe Restterm!

Wir schreiben dies im Folgenden kurz und prägnant  $\exp(-x) \approx 1 - x$ .

Ein Projekt habe  $n$  **single points of failure** / Teilschritte  $T_1, \dots, T_n$ .  
Zum Gesamterfolg muss jeder dieser Teilschritte erfolgreich sein.

Eine Maschine bestehe aus  $n$  **unabhängigen** Teilen  $T_1, \dots, T_n$ .  
Jedes Teil  $T_k$  hat eine gewisse Ausfallwahrscheinlichkeit  $p_k \in [0, 1]$ .

**Aufgabe:** Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktionieren alle Teile?  
Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt (mindestens) ein Teil aus?

**Lösung:** Für diese Wkten gilt exakt bzw. näherungsweise:

$$\begin{aligned} P(\text{Alle Teile funktionieren}) &= (1 - p_1) \cdots (1 - p_n) \\ &\approx e^{-p_1} \cdots e^{-p_n} = e^{-(p_1 + \dots + p_n)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{Mindestens eins fällt aus}) &= 1 - (1 - p_1) \cdots (1 - p_n) \\ &\approx 1 - e^{-(p_1 + \dots + p_n)}. \end{aligned}$$

😊 Diese Näherung ist praktisch für  $p_1, \dots, p_n$  klein und  $n$  groß:  
Statt einem  $n$ -fachen Produkt genügt uns eine  $n$ -fache Summe!

😊 Dies ist die Poisson-Wkt  $P(\lambda)(0)$  mit  $\lambda = p_1 + \dots + p_n$ , siehe U3C.

😊 Ein wichtiger Spezialfall sind **unabhängige identische** Teile.

**Satz U1C: Ausfallwahrscheinlichkeiten**

Von  $n$  unabhängigen Teilen habe jedes Ausfallwkt  $p \in [0, 1]$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} P(\text{Alle Teile funktionieren}) &= (1 - p)^n \lesseqgtr e^{-np} \\ P(\text{Mindestens eins fällt aus}) &= 1 - (1 - p)^n \gtrsim 1 - e^{-np} \end{aligned}$$

**Aufgabe:** Bei Ausfallwkt  $p = 0.01$ , mit welcher Wkt funktionieren... .

alle 50 Teile? Wkt  $0.99^{50} \approx e^{-0.5} \approx 0.61$

alle 100 Teile? Wkt  $0.99^{100} \approx e^{-1} \approx 0.37$

alle 200 Teile? Wkt  $0.99^{200} \approx e^{-2} \approx 0.14$

😊 Die behandeln wir später noch besser, allgemeiner und präziser:  
Für den Ausfall von  $1, 2, 3, \dots$  Teilen gilt exakt die Binomialverteilung  $B(n, p)$  und als praktische Näherung die Poisson-Verteilung  $P(np)$ .  
Poissons Gesetz der kleinen Zahlen (U3E) liefert eine Fehlerschranke.

Beliebter, aber tragischer Fehler: „Die Klausur bestehe ich mit 40% Wkt, bei drei Prüfungsversuchen also mit 120%iger Sicherheit.“ *Whaaa?*

😊 Eine „Wkt über 100%“ ist ganz offenkundig blühender Unsinn!  
Die Rechnung ist katastrophal falsch. Dunning-Kruger-Effekt?



Aus der Presse: „In 14 000 Reaktorjahren sind 4 Unfälle der höchsten Stufe aufgetreten. Demnach tritt bei 143 europäischen Reaktoren in 30 Jahren ein solcher Unfall mit Wahrscheinlichkeit von über 100% auf.“

Unfallwkt  $p = 4/14000 \approx 0.029\%$  pro Reaktorjahr.

Betrachtete Laufzeit  $n = 143 \cdot 30 = 4290$  Reaktorjahre.

😊 Falsche Rechnung: Wkt  $np = 4290 \cdot 4/14000 \approx 123\%$ .

Nach der Nuklearkatastrophe von Fukushima im März 2011 wurde über Risiken diskutiert. Der Physiker Bernard Laponche und der Ingenieur Benjamin Dessus schrieben hierzu in der Tageszeitung *La Libération*:

*Le parc actuel de réacteurs des centrales nucléaires cumule 14000 années-réacteur, ce qui correspond à environ 450 réacteurs fonctionnant durant trente et un ans. [...] Sur ce parc, cinq réacteurs ont connu un accident grave (un à Three Mile Island, un à Tchernobyl et trois à Fukushima), dont quatre sont des accidents majeurs (Tchernobyl et Fukushima). [...] La France compte actuellement 58 réacteurs en fonctionnement et l'Union européenne un parc de 143 réacteurs. Sur la base du constat des accidents majeurs survenus ces trente dernières années, la probabilité d'occurrence d'un accident majeur sur ces parcs serait donc de 50% pour la France et de plus de 100% pour l'UE. (Accident nucléaire: une certitude statistique, La Libération, 3.6.2011)*

Diese kreative Wahrscheinlichkeitsrechnung wollen wir kritisch prüfen.  
Nicht alles, was Sie in der Zeitung oder im Internet oder im Lehrbuch lesen, ist wahr und gut und nützlich. Bleiben Sie (selbst)kritisch!

**Aufgabe:** Welche Rechnung wäre richtig? Ich erinnere an unser Ziel:  
Wir wollen nachvollziehbar begründete, quantitative Aussagen!

😊 Eine Wkt von „über 100%“ ist offenkundig blühender Unsinn!  
Aus Daten lernen? Das gelingt nur richtig mit Mathematik. . .

😊 Wir haben oben die korrekte Formel abgeleitet und approximiert.  
Das ist nicht weiter schwer. Gehen wir angemessen sorgfältig vor:

**Modell:** Unfälle ereignen sich unabhängig mit Wkt  $p$  pro Reaktorjahr.  
Wahrscheinlichkeit, in  $n$  Reaktorjahren **keinen Unfall** zu erleben:

$$(1 - p)^n \lesseqgtr e^{-np} \approx e^{-1.23} \approx 29.4\%$$

Wahrscheinlichkeit, **mindestens einen Unfall** zu erleben:

$$1 - (1 - p)^n \gtrsim 1 - e^{-np} \approx 70.6\%$$

Die Wkt mindestens eines Unfalls beträgt also etwas über 70%.

😊 Hier ist  $\mu = np$  die erwartete Anzahl der Unfälle. Die Näherung  $e^{-np} = P(\mu)(0)$  gehört zur Poisson-Verteilung, siehe Satz U3E.

⚠ Auch die korrekte Rechnung ergibt noch eine alarmierend hohe Wkt.

Es hätte dem Artikel gut getan, einfach richtig zu rechnen. Durch falsche Rechnung, ja grobe Missachtung mathematischer Sorgfalt, wurde ein gutes und ernsthaftes Argument entwertet. Wir können nun diskutieren, ob die Daten verlässlich sind und die Annahmen überzeugend. . . Aber wenigstens stimmt jetzt die Rechnung: Soviel Handwerk muss man beherrschen!

Ob die Argumente *sachlich* stichhaltig sind, ist eine sehr schwierige Frage. Für eine gesicherte Auswertung ist die Fallzahl sehr gering. Die statistische Analyse vergangener Unfälle und die daraus abgeleitete Schätzung zukünftiger Unfälle sind daher nur schwer möglich. Zum Beispiel sind die drei Unfälle von Fukushima nicht unabhängig, ihre Zählweise also diskussionswürdig. Die Sachlage ist komplex, die hier vorgestellten Zahlen sind nur ein grober erster Anhaltspunkt.

Klar ist immerhin, dass die Unfallwahrscheinlichkeit nicht verschwindend gering ist, und schon gar nicht gleich Null. Zur Vereinfachung schlage ich hier vor, für unsere Beispielrechnung die Annahmen der Autoren zunächst zu akzeptieren und auf dieser Grundlage lediglich zu prüfen, ob die Argumente *rechnerisch* richtig sind. Zur Betonung halten wir daher nochmals fest:

**Eine Wahrscheinlichkeit von „über 100%“ ist blühender Unsinn!**

Der Fehler liegt in der allzu naiven Rechnung: Bei einer Unfallwahrscheinlichkeit von  $p$  pro Reaktorjahr und einer Laufzeit von  $n$  Reaktorjahren beträgt die Gesamtwahrscheinlichkeit nicht  $np$ . Das fällt spätestens bei einer (grobten) Plausibilitätsprüfung auf! Wie jede ernsthafte Frage verdient die Reaktorsicherheit Umsicht und Sorgfalt und insbesondere korrekte Rechnungen!

Ein Affe tippt zufällig, aber endlos lange, auf einer Schreibmaschine. Wird er dabei irgendwann Shakespeares *Hamlet* schreiben? Ja! Müssen wir darauf sehr lange warten? Ja, aber sicher!



Bildquelle: wikipedia.org



**Satz U1D: vom endlos tippenden Affen, quantitative Fassung**

Sei  $T$  ein vorgegebener Text der Länge  $L$  über einem Alphabet  $A$ . Ein zufälliger Text  $Z$  der Länge  $nL$  enthält  $T$  mit Wahrscheinlichkeit

$$P(Z \text{ enthält } T) \geq 1 - (1 - |A|^{-L})^n \nearrow 1 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Für  $p \in [0, 1[$  gilt  $P(Z \text{ enthält } T) \geq p$  für  $n \geq -\ln(1 - p) \cdot |A|^L$ .

- Aufgabe:** (1) Erklären Sie diese Abschätzung und den Grenzwert. (2) Rechnen Sie ein Zahlenbeispiel für  $|A| = 26$  und  $L = 130\,000$ . (3) Ist dies als Strategie für Klausuren zu empfehlen? (4) Die extrem lange Wartezeit wird manchmal als Argument gegen die Evolution durch zufällige Mutationen verwendet. Ist das gerechtfertigt?

Die Formulierung des „endlos tippenden Affen“ ist provokant-anschaulich, drückt aber präzise einen mathematischen Satz aus! Das betrachtete Alphabet  $A$  habe  $|A|$  Zeichen. Zum Beispiel im lateinischen Alphabet 26 Klein- und 26 Großbuchstaben, dazu Ziffern, Satzzeichen, etc. Bei Gleichverteilung wird jedes Zeichen mit positiver Wahrscheinlichkeit  $a = 1/|A|$  getippt.

Für das wiederholte Tippen gehen wir von einem Produktexperiment aus. Unser fleißiger Affe produziert so eine *unendliche* Folge zufälliger Zeichen. Darin findet sich jede *endliche* Folge mit Wahrscheinlichkeit 1. Neben *Hamlet* wird er also auch *Harry Potter* Band 1–7 tippen, ebenso Darwins *Über die Entstehung der Arten*, die gesamte Nationalbibliothek, und überhaupt alle bisher veröffentlichten Texte. Die zu erwartende Wartezeit ist allerdings *sehr sehr laaange*...

Zugrundeliegendes Modell: Auf dem Alphabet  $A$  betrachten wir eine  $W$ -Verteilung  $q: A \rightarrow [0, 1]$  mit  $a = \min q > 0$ , sodass jedes Zeichen mit positiver Wahrscheinlichkeit  $\geq a$  getippt wird. Bei Gleichverteilung hätten wir  $a = 1/|A|$ ; die folgende Abschätzung gilt etwas allgemeiner. Bei  $k$ -facher unabhängiger Wiederholung des zufälligen Tippvorgangs betrachten wir als stochastisches Modell den Produktraum  $A^k$  mit der Produktwahrscheinlichkeit.

(1) Beweis der Abschätzung: Die Wkt, bei  $L$  zufälligen Zeichen den Text  $T$  zu tippen, ist  $\geq a^L > 0$ . (Sie ist zugegeben sehr klein, aber nicht Null). Die Misserfolgswkt ist  $\leq 1 - a^L < 1$  (nahe Eins, aber nicht gleich Eins).

Wenn der Affe  $2L$  Zeichen tippt, so ist die Misserfolgswkt  $\leq (1 - a^L)^2$ .  
Wenn der Affe  $3L$  Zeichen tippt, so ist die Misserfolgswkt  $\leq (1 - a^L)^3$ .  
Wenn der Affe  $nL$  Zeichen tippt, so ist die Misserfolgswkt  $\leq (1 - a^L)^n$ .  
Wegen  $(1 - a^L) < 1$  konvergiert  $(1 - a^L)^n \searrow 0$ , langsam aber sicher!

Für hinreichend großes  $n$  ist die Misserfolgswkt also beliebig nahe an 0. Umgekehrt liegt daher die Erfolgswkt bei  $\geq 1 - (1 - a^L)^n \nearrow 1$ . Genauer: Für Erfolgswkt  $\geq p$ , also Misserfolgswkt  $\leq 1 - p$ , genügt demnach

$$(1 - a^L)^n \leq 1 - p.$$

Nach  $n$  aufgelöst bedeutet das:  $n \ln(1 - a^L) \leq \ln(1 - p)$ .  
Wegen  $\ln(1 - t) \lesssim -t$  genügt es, die einfachere Ungleichung  $n(-a^L) \leq \ln(1 - p)$  zu erfüllen, also  $n \geq -\ln(1 - p)/a^L$ .  
Für  $a = 1/|A|$  erhalten wir die Formel des Satzes.

(2) Zahlenbeispiel: Die Abschätzung ist zwar recht grob, aber illustrativ. Wir betrachten  $|A| = 26$ , also nur Großbuchstaben ohne Satzzeichen. Die Textlänge  $L = 130\,000$  entspricht in etwa die Länge von *Hamlet*. Für Erfolgswkt  $> 99.99\%$  genügt ein zufälliger Text der Länge

$$nL \geq 10 \cdot 26^{130\,000} \cdot 130\,000 \approx 10^{184\,000}.$$

☺ Das scheinbare Paradox ist damit aufgelöst und numerisch illustriert: Die Schwierigkeit liegt in der harmlosen Formulierung „endlos lange“. *Hamlet* kommt irgendwann, aber es wird dauern... *sehr sehr laaange!*

(3) Nein, als Strategie für Klausuren ist das nicht zu empfehlen: Niemand will, niemand kann so lange warten. Nicht nachmachen!

(4) Nein. Treiber der Evolution sind neben zufälliger Mutation vor allem Selektion und Rekombination. Diese ändern das Modell grundlegend!

Sie wählen zufällig eine Zahl  $x \in [0, 1]$  und lesen ihre Nachkommastellen als Text: 00:., 01:A, ..., 26:Z, 27:a, ..., 52:z, ..., 90:0, ..., 99:9. Mit welcher Wkt enthält  $x$  Tolkiens *Der Herr der Ringe*?

**Aufgabe:** Wie groß ist die Wkt  $Q$ , dass unter  $k = 25$  zufälligen Personen mindestens zwei am selben Tag des Jahres geboren sind?

☺ Intuitiv halten viele eine Kollision für unwahrscheinlich. Tatsächlich liegt die Wkt bei über 50%, daher trägt dieses überraschende Ergebnis den Namen „Geburtstagsparadox“. Probieren Sie es selbst einmal aus! Kollisionen untersucht man für Hashfunktionen und Geburtstagsangriffe.

**Annahmen:** Die Geburtstage sind gleichverteilt auf  $n = 365$  Tage (keine Schalttage) und untereinander unabhängig (insb. keine Zwillinge, etc.).

**Lösung:** Gegenwkt  $P = 1 - Q$ , alle haben verschiedene Geburtstage:

$$P = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} = 1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \\ = \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \approx \prod_{j=0}^{k-1} \exp\left(-\frac{j}{n}\right) = \exp\left(-\sum_{j=0}^{k-1} \frac{j}{n}\right) = \exp\left(-\frac{k(k-1)}{2n}\right)$$

Für  $k = 25$  und  $n = 365$  gilt  $P \approx e^{-0.821} \approx 0.44$  und somit  $Q \approx 0.56$ . Schon bei  $k = 23$  Personen liegt die Kollisionswkt knapp über 50%.

**Satz U1E: Geburtstagsatz / Kollisionswahrscheinlichkeit**

Aus  $n$  Möglichkeiten wird  $k$  mal zufällig ausgewählt (wobei  $1 \leq k \leq n$ ). Die Wahrscheinlichkeit  $P_{n,k}$ , dabei  $k$  verschiedene auszuwählen, ist

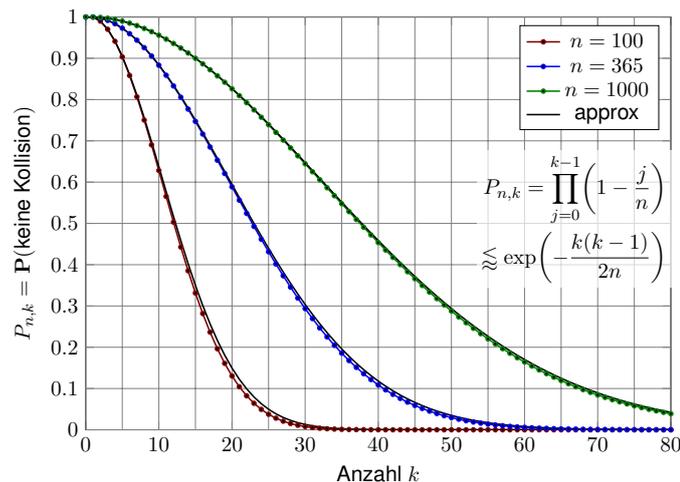
$$P_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)! n^k} \approx \exp\left(-\frac{k(k-1)}{2n}\right).$$

Die Wahrscheinlichkeit  $Q_{n,k}$  mindestens einer Kollision ist demnach

$$Q_{n,k} = 1 - P_{n,k} \approx 1 - \exp\left(-\frac{k(k-1)}{2n}\right).$$

Aus  $n$  Möglichkeiten  $k$  mal zufällig auswählen soll heißen *gleichverteilt* und *unabhängig*. Die genannte Ungleichung „ $\approx$ “ bzw. „ $\gtrsim$ “ gilt hier immer. Die Näherung „ $\approx$ “ ist gut falls  $n$  groß ist und  $k$  klein. Wie die folgenden Graphen zeigen, ist selbst für große  $k$  die Abweichung meist akzeptabel.

☺ Der Graph ist die rechte Hälfte der Gaußschen Glockenkurve  $e^{-x^2/2}$ .



**Fun fact:** Bei der Fußball-WM 2014 traten 32 Teams an, jedes mit 23 Spielern. Wie viele Teams hatten doppelte Geburtstage? Genau 16. Geburtstermine sind nicht gleichverteilt, im Sommer werden etwas mehr Kinder geboren als im Winter. Dadurch steigt die Kollisionswkt leicht an.

☺ Ein Teilnehmer, Geburtstag 29.02., wünschte genauere Rechnung. Wir werfen Bälle  $1, \dots, k$  unabhängig in Fächer  $1, \dots, n$  und zählen die Kollisionen: Ball  $a$  landet in Fach  $f_a$  mit Wkt  $p_a(f_a) \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^n p_a(i) = 1$ .

**Aufgabe:** (1) Wie un/wahrscheinlich ist hier die Kollisionsfreiheit? (2) Wie viele Kollisionen erwarten Sie, d.h. Paare  $a < b$  mit  $f_a = f_b$ ?

**Lösung:** Ergebnismenge ist  $\Omega = \{f: \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, n\}: a \mapsto f_a\}$  mit Wkt  $p(f) = p_1(f_1) \cdots p_k(f_k)$ . Sei  $X_{a,b}(f) = 1$  gdw  $f_a = f_b$ , sonst 0. Kollision  $a$  mit  $b$  hat Wkt  $P(f_a = f_b) = \mathbf{E}(X_{a,b}) = \sum_{i=1}^n p_a(i) p_b(i)$ .

(2) Für die Kollisionszahl  $X = \sum_{a < b} X_{a,b}$  folgt  $\mathbf{E}(X) = \sum_{a < b} \mathbf{E}(X_{a,b})$ .

(1) Kollisionsfreiheit (d.h.  $f$  injektiv) hat näherungsweise die Wkt  $P \approx \prod_{a < b} (1 - \mathbf{E}(X_{a,b})) \approx \prod_{a < b} \exp(-\mathbf{E}(X_{a,b})) = \exp(-\mathbf{E}(X))$ .

**Beispiel:** Für  $p_a(i) = 1/n$  erhalten wir erneut  $P \approx \exp(-k(k-1)/2n)$ .

**Kombinatorische Abzählformeln** U201  
Ausführung

Viele Zufallsexperimente beschreiben wir als **Laplace-Modell** durch einen endlichen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathbb{P})$  mit Gleichverteilung:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der Ergebnisse in } A}{\text{Anzahl aller Ergebnisse in } \Omega} = \frac{\text{günstige Ergebnisse}}{\text{mögliche Ergebnisse}}$$

😊 Es genügt hier also, Elemente zu zählen. Das ist meist einfach.  
 ⚠️ In realistischen Anwendungen können  $\Omega$  und  $A$  sehr groß sein.  
 Beispiel: Beim Lotto „6 aus 49“ gibt es ca. 14 Millionen Möglichkeiten. Mengen solcher Größe möchten Sie nicht mehr per Hand abzählen.  
 Sind die betrachteten Mengen noch etwas größer, so versagen selbst Computer beim expliziten Aufzählen. Wir benötigen daher effiziente Techniken zum systematischen Abzählen und geschickte Näherungen.

😊 Hierzu nutzen wir die folgenden kombinatorischen Abzählformeln!  
 😊 Für große Werte nutzen wir zudem geeignete Näherungsformeln.  
 📖 M. Aigner: *Diskrete Mathematik*. Vieweg 2006

**Kombinatorische Abzählformeln** U202  
Ausführung

Anzahl aller **Tupel** der Länge  $k$  von  $n$  Elementen:

$$n^k = n \cdot n \cdot \dots \cdot n \quad (k \text{ Faktoren})$$

Anzahl aller **Tupel ohne Wiederholungen**:

$$n^{\underline{k}} = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \quad (k \text{ Faktoren})$$

Anzahl aller **Permutationen** von  $n$  Elementen:

$$n! = n^{\underline{n}} = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 1 \quad (n \text{ Faktoren})$$

Anzahl aller **Auswahlen** von  $k$  aus  $n$  Elementen

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k(k-1)(k-2) \cdot \dots \cdot 1} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$$

Für große  $n$  und kleine  $k$  haben wir folgende Näherungsformeln:

$$n^{\underline{k}}/n^k \lesssim e^{-k(k-1)/(2n)} \quad \text{und} \quad n!/n^n \sim \sqrt{2\pi n} e^{-n}$$

📖 Siehe Stoppel, Höhere Mathematik 1, §1.3, zur Wiederholung von **Fakultät** und **Binomialkoeffizienten**. Das Produkt  $n^{\underline{k}} = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = n!/(n-k)!$  heißt **fallende Fakultät** von  $n$  mit  $k$  Faktoren. Sie entsteht hier als nützliche Abzählformel.

**Tupel** U203  
Ausführung

Aus  $\{0, 1\}$  lassen sich folgende 2-Tupel (Paare) bilden:

$$\{0, 1\}^2 = \{ (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1) \}$$

Aus  $\{0, 1\}$  lassen sich folgende 3-Tupel (Tripel) bilden:

$$\{0, 1\}^3 = \{ (0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1) \}$$

Aus  $\{0, 1\}$  lassen sich folgende 4-Tupel (Quadrupel) bilden:

$$\{0, 1\}^4 = \{ (0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1) \}$$

Das entspricht dem  $n$ -maligen Münzwurf (mit 0 = Kopf, 1 = Zahl).  
 Beim  $n$ -maligen Würfeln betrachten wir analog  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^n$  als Ergebnismenge; den Fall  $n = 2$  haben wir auf Seite T124 aufgezählt.

**Tupel** U204  
Ausführung

Für alle  $n, k \in \mathbb{N}$  haben wir die **Potenz**

$$n^k = \text{Anzahl aller Tupel der Länge } k \text{ von } n \text{ Elementen.}$$

Rekursionsformel:  $n^0 = 1$  und  $n^{k+1} = n^k \cdot n$ .  
 Ausgeschrieben:  $n^k = n \cdot n \cdot \dots \cdot n$  mit  $k$  Faktoren.

Zudem betrachten wir die **fallende Fakultät**

$$n^{\underline{k}} = \text{Anzahl aller Tupel ohne Wiederholungen.}$$

Rekursionsformel:  $n^{\underline{0}} = 1$  und  $n^{\underline{k+1}} = n^{\underline{k}} \cdot (n-k)$ .  
 Ausgeschrieben:  $n^{\underline{k}} = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$ .

Nach Geburtstagsatz U1E gilt  $n^{\underline{k}}/n^k \lesssim \exp(-k(k-1)/(2n))$ .  
 Für kleine  $k$  und große  $n$  haben wir also die Näherungsformel

$$n^{\underline{k}} \lesssim n^k e^{-\frac{k(k-1)}{2n}}$$

**Permutationen** U205  
Ausführung

Permutationen der Elemente 1, 2:

$$(1, 2), (2, 1)$$

Permutationen der Elemente 1, 2, 3:

$$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)$$

Permutationen der Elemente 1, 2, 3, 4:

$$(1, 2, 3, 4), (1, 2, 4, 3), (1, 3, 2, 4), (1, 3, 4, 2), (1, 4, 2, 3), (1, 4, 3, 2), (2, 1, 3, 4), (2, 1, 4, 3), (2, 3, 1, 4), (2, 3, 4, 1), (2, 4, 1, 3), (2, 4, 3, 1), (3, 1, 2, 4), (3, 1, 4, 2), (3, 2, 1, 4), (3, 2, 4, 1), (3, 4, 1, 2), (3, 4, 2, 1), (4, 1, 2, 3), (4, 1, 3, 2), (4, 2, 1, 3), (4, 2, 3, 1), (4, 3, 1, 2), (4, 3, 2, 1)$$

Eine Permutation der Menge  $\{1, \dots, n\}$  ist ein  $n$ -Tupel, in dem jedes Element  $1, \dots, n$  genau einmal vorkommt. Hierzu gibt es  $n! := n^{\underline{n}} = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 1$  Möglichkeiten.  
 Obige Näherungsformel liefert die Ungleichung  $n! \leq n^n e^{-\frac{1-n}{2}}$ , ist hier aber unnötig grob.  
 Für die Fakultät geben wir die ersten Werte und als Näherung die Stirling-Formel.

**Permutationen** U206  
Ausführung

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  haben wir die **Fakultät**

$$n! = \text{Anzahl aller Permutationen von } n \text{ Elementen.}$$

Rekursionsformel:  $0! = 1$  und  $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$ .  
 Ausgeschrieben:  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ . Die ersten Werte sind:

$0! = 1$	$7! = 5040$	$14! = 87\,178\,291\,200$
$1! = 1$	$8! = 40\,320$	$15! = 1\,307\,674\,368\,000$
$2! = 2$	$9! = 362\,880$	$16! = 20\,922\,789\,888\,000$
$3! = 6$	$10! = 3\,628\,800$	$17! = 355\,687\,428\,096\,000$
$4! = 24$	$11! = 39\,916\,800$	$18! = 6\,402\,373\,705\,728\,000$
$5! = 120$	$12! = 479\,001\,600$	$19! = 121\,645\,100\,408\,832\,000$
$6! = 720$	$13! = 6\,227\,020\,800$	$20! = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000$

Dank Stirling-Formel B3D haben wir für große  $n$  die Näherung

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

**Potenzmenge** U207  
Ausführung

Die **Potenzmenge**  $\mathfrak{P}(\Omega)$  ist die Menge aller Teilmengen von  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}(\emptyset) &= \{ \emptyset \} \\ \mathfrak{P}(\{1\}) &= \{ \emptyset, \{1\} \} \\ \mathfrak{P}(\{1, 2\}) &= \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\} \} \\ \mathfrak{P}(\{1, 2, 3\}) &= \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} \} \\ \mathfrak{P}(\{1, 2, 3, 4\}) &= \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \\ &\quad \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \\ &\quad \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\} \} \end{aligned}$$

Für die Anzahl aller Teilmengen gilt

$$|\mathfrak{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|}$$

**Beweis:** In einer  $n$ -elementigen Menge  $\Omega$  entsteht jede Teilmenge  $A \subseteq \Omega$  durch  $n$  unabhängige Wahlen: Jedes Element  $\omega \in \Omega$  liegt entweder in  $A$  oder nicht, und diese Wahlen bestimmen  $A$ . Vornehm ausgedrückt: Die Indikatorfunktion stiftet eine Bijektion  $\mathfrak{P}(\Omega) \rightarrow \{0, 1\}^\Omega : A \mapsto \mathbf{1}_A$ , ihre Umkehrfunktion ist demnach  $\{0, 1\}^\Omega \rightarrow \mathfrak{P}(\Omega) : f \mapsto \text{supp}(f) = \{ \omega \in \Omega \mid f(\omega) = 1 \}$ .

**Binomialkoeffizienten** U208  
Ausführung

Für  $n, k \in \mathbb{N}$  haben wir den **Binomialkoeffizienten**

$$\binom{n}{k} = \text{Anzahl aller Auswahlen von } k \text{ aus } n \text{ Elementen.}$$

Es gilt  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$  und  $\binom{n}{k} = 0$  für  $k > n$  sowie  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ .  
 Für alle  $n, k \geq 1$  gelingt die Berechnung durch die Rekursionsformel

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

**Beweis:** Entweder wird das Element  $n$  ausgewählt, dann gibt es genau  $\binom{n-1}{k-1}$  Möglichkeiten, noch  $k-1$  Elemente aus den verbleibenden  $n-1$  auszuwählen. Oder das Element  $n$  wird nicht ausgewählt, dann gibt es noch genau  $\binom{n-1}{k}$  Möglichkeiten,  $k$  Elemente aus den verbleibenden  $n-1$  auszuwählen. Beide Fälle sind disjunkt, ihre Summe ist die behauptete Rekursionsformel.

Zusammen mit der vorigen Formel  $|\mathfrak{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|}$  erhalten wir mühelos:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

**Binomialkoeffizienten** U209  
Ausführung

Hieraus erhalten wir **Pascals Dreieck für Binomialkoeffizienten**:

$\binom{n}{k}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Für festes  $k$  und  $n \rightarrow \infty$  (also eine Spalte in obiger Tabelle) gilt

$$\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!} \exp\left(-\frac{k(k-1)}{2n}\right) \sim \frac{n^k}{k!}$$

**Binomischer Lehrsatz** U210  
Ausführung

Für je zwei Elemente  $a, b$  in einem Ring mit  $ab = ba$  gilt:

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = 1a + 1b$$

$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt (per vollständiger Induktion):

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Speziell für  $a = b = 1$  erhalten wir damit erneut:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

**Binomialkoeffizienten** U211  
Ausführung

Auf wie viele Arten können wir aus  $n$  Objekten  $k$  auswählen?

Die Gesamtzahl der Möglichkeiten ist:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\dots 1} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$$

**Kombinatorische Herleitung:** Wir wählen  $k$  aus  $n$  Elementen. Hierzu können wir alle  $n$  Elemente auf  $n!$  Arten anordnen. Bei jeder Anordnung wählen wir die ersten  $k$  Elemente aus. Die ersten  $k$  dürfen wir dabei auf  $k!$  Arten umordnen. Die letzten  $n-k$  dürfen wir auf  $(n-k)!$  Arten umordnen. Die Auswahl ändert sich hierdurch nicht. Dies liefert die obige Formel.

Hieraus erhalten wir die folgenden groben Schranken:

$$\frac{n^k}{k^k} \leq \binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!} \exp\left(-\frac{k(k-1)}{2n}\right) \leq \frac{n^k}{k!}$$

**Multinomialkoeffizienten** U212  
Ausführung

Der Binomialkoeffizient  $\binom{n}{k}$  zählt, auf wie viele Arten wir  $n$  Objekte in zwei Gruppen der Größe  $k$  und  $n-k$  aufteilen können. Etwas allgemeiner können wir folgendes zählen:

Auf wie viele Arten können wir  $n$  Objekte in  $\ell$  Gruppen zu  $k_1, \dots, k_\ell$  Elementen aufteilen? Hierbei sei  $k_1, \dots, k_\ell \geq 0$  und  $k_1 + \dots + k_\ell = n$ .

Die Gesamtzahl der Möglichkeiten ist:

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_\ell} := \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_\ell!}$$

**Kombinatorische Herleitung:** Wir können die  $n$  Elemente auf  $n!$  Arten anordnen. Die ersten  $k_1$  bilden die erste Gruppe, die nächsten  $k_2$  bilden die zweite Gruppe, usw. Innerhalb jeder Gruppe können wir beliebig umordnen. Dies liefert die obige Formel.

**Anwendungsbeispiele** U213  
Ausführung

**Aufgabe:** Wie viele Kartenverteilungen gibt es beim Skat?

**Lösung:** Von 32 Karten gehen 10 an jede der drei Spieler:innen:

$$\binom{32}{10, 10, 10, 2} = \frac{32!}{10! 10! 10! 2!} \approx 2.75 \cdot 10^{15}$$

**Aufgabe:** Auf wie viele Weisen lassen sich 12 (verschiedenfarbige) Bonbons gerecht unter zwei / drei / vier / zwölf Kindern aufteilen?

**Lösung:** Die Anzahl der möglichen Aufteilungen berechnen wir zu:

$$\binom{12}{6, 6} = \frac{12!}{6! 6!} = 924$$

$$\binom{12}{4, 4, 4} = \frac{12!}{4! 4! 4!} = 34650$$

$$\binom{12}{3, 3, 3, 3} = \frac{12!}{3! 3! 3! 3!} = 369600$$

$$\binom{12}{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1} = 12! = 479001600$$

**Anwendungsbeispiele** U214  
Ausführung

**Aufgabe:** Wie wahrscheinlich ist es, bei 10 Münzwürfen genau 7 mal Kopf und 3 mal Zahl zu erhalten?

$$\Omega = \{0, 1\}^{10}, \quad |\Omega| = 2^{10} = 1024$$

$$A = \left\{ \text{Ergebnisse } \omega \in \Omega \text{ mit } \omega_1 + \dots + \omega_{10} = 3 \right\}, \quad |A| = \binom{10}{7, 3} = 120$$

$$P(A) = |A|/|\Omega| \approx 0.117$$

**Aufgabe:** Wie wahrscheinlich ist es, bei 10-maligem Würfeln, die Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 mit Häufigkeit 1, 2, 3, 3, 0, 1 zu erhalten?

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^{10}, \quad |\Omega| = 6^{10} = 60466176$$

$$A = \left\{ \text{Ergebnisse } \omega \in \Omega \text{ mit diesen Häufigkeiten} \right\}, \quad |A| = \binom{10}{1, 2, 3, 3, 0, 1} = 50400$$

$$P(A) = |A|/|\Omega| \approx 0.00083$$

Hier wurde ein Laplace-Experiment betrachtet, d.h. alle Ergebnisse sind gleich wahrscheinlich. Es genügt daher, die Anzahl  $|A|$  der gesuchten Ergebnisse durch die Gesamtzahl  $|\Omega|$  aller Ergebnisse zu teilen. Diese Anzahlen können wir nun leicht bestimmen.

**Zerlegungen** U215  
Ausführung

Die Menge  $\{1\}$  erlaubt nur eine Zerlegung, nämlich  $\{\{1\}\}$ .

Die Menge  $\{1, 2\}$  erlaubt zwei Zerlegungen:  $\{\{1, 2\}\}$  und  $\{\{1\}, \{2\}\}$ .

Die Menge  $\{1, 2, 3\}$  erlaubt die folgenden fünf Zerlegungen:

$$\{\{1, 2, 3\}\}, \{\{1\}, \{2, 3\}\}, \{\{1, 2\}, \{3\}\}, \{\{1, 3\}, \{2\}\}, \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$$

Die Menge  $\{1, 2, 3, 4\}$  erlaubt die folgenden fünfzehn Zerlegungen:

$$\{\{1, 2, 3, 4\}\},$$

$$\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}, \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}, \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\},$$

$$\{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}, \{\{2\}, \{1, 3, 4\}\}, \{\{3\}, \{1, 2, 4\}\}, \{\{4\}, \{1, 2, 3\}\},$$

$$\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}, \{\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}\}, \{\{1, 4\}, \{2\}, \{3\}\},$$

$$\{\{2, 3\}, \{1\}, \{4\}\}, \{\{2, 4\}, \{1\}, \{3\}\}, \{\{3, 4\}, \{1\}, \{2\}\},$$

$$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}.$$

**Zerlegungszahlen** U216  
Ausführung

Für  $n, k \in \mathbb{N}$  betrachten wir die Zerlegungszahl

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \text{Anzahl aller Zerlegungen von } n \text{ Elementen in } k \text{ nicht-leere Gruppen (beliebiger Größe).}$$

Offenbar gilt  $\left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} = 1$  und  $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = 0$  für  $k > n$ .

Für  $n \geq 1$  gilt  $\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} = 0$ ,  $\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\} = 1$ ,  $\left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} = 1$ .

Für  $n \geq 2$  gilt zudem  $\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ n-1 \end{matrix} \right\} = \binom{n}{2}$ ,  $\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 2^{n-1} - 1$ . (Warum?)

Für alle  $n, k \geq 1$  gelingt die Berechnung durch die Rekursionsformel

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}.$$

**Beweis:** Entweder das Element  $n$  bildet alleine eine Gruppe, dann gibt es genau  $\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}$  Möglichkeiten, die verbleibenden  $n-1$  Elemente in  $k-1$  Gruppen zu zerlegen. Oder aber das Element  $n$  ist Teil einer größeren Gruppe, dann gibt es hierfür genau  $\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}$  Zerlegungen und jeweils  $k$  Wahlen, das Element  $n$  zu einer bestehenden Gruppe hinzuzufügen.

Die Zerlegungszahlen sind ebenso interessant und natürlich wie die Binomialkoeffizienten, wenn auch weniger prominent. Für  $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$  gibt es leider keine so schöne Formel wie für  $\binom{n}{k}$ .

Hieraus erhalten wir folgendes **Dreieck für Zerlegungszahlen**:

$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	1	1								
3	1	3	1							
4	1	7	6	1						
5	1	15	25	10	1					
6	1	31	90	65	15	1				
7	1	63	301	350	140	21	1			
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1		
9	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	
10	1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1

Diese Werte heißen auch **Stirling-Zahlen** (zweiter Art).

Für festes  $k$  und  $n \rightarrow \infty$  (also eine Spalte in obiger Tabelle) gilt

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \sim \frac{k^n}{k!} \quad \text{im Gegensatz zu} \quad \binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}.$$

(2) Exakt gibt es  $k^n = 100^n$  Verteilungen der  $n$  Chips auf  $k = 100$  Kekse. Darunter sind genau  $k! \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$  mit mindestens einem Chip in jedem Keks.

Anders gesagt: Es gibt  $k^n$  Abbildungen  $f: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$ , davon sind genau  $k! \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$  surjektiv. (Schubfachmodell, siehe U222. Gegenstück: Zu injektiv / kollisionsfrei siehe Geburtstagssatz U117.)

Die gewünschte Bedingung ist demnach:

$$g(n) := \frac{k! \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}}{k^n} \geq 0.9$$

Ausrechnen für  $n = 100, 101, 102, \dots$  mit Hilfe eines Computers liefert:

$$g(682) = 0.899499\dots, \quad g(683) = 0.900455\dots$$

☺ Sie brauchen also tatsächlich 683 Chocolate Chips! Das rechtfertigt nachträglich die naive Näherung in der obigen vereinfachten Rechnung. Das erklärt noch nicht, warum diese Näherung so gut funktioniert, oder in welchen anderen Situationen Sie diesen Trick anwenden können. Hierzu wäre eine allgemeine Fehlerabschätzung notwendig.



Auf wie viele Arten können wir  $k$  Murmeln auf  $n$  Fächer verteilen?

Beim Verteilen gibt es drei Varianten:

- **beliebig viele Murmeln pro Fach**
- **höchstens eine Murmel pro Fach**
- **mindestens eine Murmel pro Fach**

Auch zur Unterscheidung der Murmeln gibt es zwei Varianten:

- **mit Unterscheidung**: Die Murmeln sind nummeriert  $1, \dots, k$ .
- **ohne Unterscheidung**: Die Murmeln sind ununterscheidbar.

Jede Zuordnung der Murmeln zu Fächern entspricht einer Abbildung

$$f: \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, n\}.$$

Ununterscheidbare Murmeln dürfen wir umsortieren und erhalten so

$$f(1) \leq f(2) \leq \dots \leq f(k).$$

Wir zählen nun beliebige / injektive / surjektive Abbildungen.

☺ Die Tabelle ist dank unserer Vorarbeit leicht zu verstehen.

(1) Wir verteilen die Objekte  $1, \dots, k$  auf die Fächer  $1, \dots, n$ . Wir betrachten also Abbildungen  $f: \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ .

**Beliebige Abbildungen:**  $n^k$  Möglichkeiten.

Wenn wir  $k$  Objekte beliebig auf  $n$  Fächer verteilen dürfen, dann haben wir für jedes Objekt  $n$  Wahlen. Diese sind untereinander unabhängig. Insgesamt erhalten wir also  $n^k$  Möglichkeiten.

**Injektive Abbildungen:**  $\frac{n!}{(n-k)!}$  Möglichkeiten.

Wenn wir in jedes Fach höchstens ein Objekt legen dürfen, so muss  $k \leq n$  gelten. Für das erste Objekt haben wir  $n$  Möglichkeiten, für das zweite nur noch  $n-1$ , für das dritte nur noch  $n-2$ , usw. Insgesamt erhalten wir also  $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$  Möglichkeiten.

**Surjektive Abbildungen:**  $n! \begin{Bmatrix} k \\ n \end{Bmatrix}$  Möglichkeiten.

Wenn wir in jedes Fach mindestens ein Objekt legen müssen, so muss  $k \geq n$  gelten. Wir zerlegen zunächst alle  $k$  Objekte in  $n$  Gruppen. Dies gelingt auf  $\begin{Bmatrix} k \\ n \end{Bmatrix}$  Möglichkeiten. Diese  $n$  Gruppen können wir nun auf  $n!$  Weisen  $n$  den Fächern zuordnen.

**Aufgabe:** (Aus dem Mathekalender 2012) Sie backen  $k = 100$  Kekse. Sie geben  $n$  Chocolate Chips zum Teig, verteilen diese gründlich zufällig und teilen den Teig in 100 Kekse auf. Wieviele Chips brauchen Sie, damit mit 90% Sicherheit jeder Keks mindestens einen Chip enthält?

**Lösung:** Die Wkt, dass kein Chip im ersten Keks landet, ist  $(99/100)^n$ . Die Wkt für mindestens einen im ersten Keks ist also  $1 - (99/100)^n$ . Für  $A_i = \{\text{mindestens ein Chip in Keks } i\}$  gilt  $P(A_i) = 1 - 0.99^n$ .

(1) Näherung: Zur Vereinfachung rechnen wir, als wären die Ereignisse  $A_i$  unabhängig. (Das ist genau genommen nicht richtig, siehe T224, erweist sich aber als erstaunlich gute Näherung, siehe unten.)

Die gewünschte Bedingung vereinfacht sich dann zu:

$$f(n) := (1 - 0.99^n)^{100} \geq 0.9$$

Wir erhalten somit (dank Taschenrechner):

$$n \geq \frac{\ln(1 - 0.9^{1/100})}{\ln 0.99} \approx 682.17$$

Viele Zufallsexperimente beschreiben wir als **Laplace-Modell** durch einen endlichen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, P)$  mit Gleichverteilung:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der Ergebnisse in } A}{\text{Anzahl aller Ergebnisse in } \Omega} = \frac{\text{günstige Ergebnisse}}{\text{mögliche Ergebnisse}}$$

☺ Zum systematischen Abzählen nutzen wir folgende Funktionen:

- $n^k$  = Anzahl aller **Tupel** der Länge  $k$  von  $n$  Elementen,
- $n^{\underline{k}}$  = Anzahl aller **Tupel ohne Wiederholungen**,
- $n!$  = Anzahl aller **Permutationen** von  $n$  Elementen,
- $\binom{n}{k}$  = Anzahl aller **Auswahlen** von  $k$  aus  $n$  Elementen,
- $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$  = Anzahl aller **Zerlegungen** von  $n$  Elementen in  $k$  Gruppen.

Diese Grundfunktionen gehören zum kombinatorischen Handwerk, da solche und ähnliche Abzählprobleme sehr häufig vorkommen.

☺ Zur exakten Berechnung haben wir die obigen Rekursionsformeln.

☺ Für große Werte nutzen wir zudem geeignete Näherungsformeln.

Auf wie viele Arten können wir  $k$  Objekte auf  $n$  Fächer verteilen?

Schubfachmodell	unterscheidbare Objekte	ununterscheidbare Objekte
beliebig viele Objekte pro Fach	$n^k$	$\binom{n+k-1}{k}$
höchstens eins pro Fach (injektiv)	$\frac{n!}{(n-k)!} = k! \binom{n}{k}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
mindestens eins pro Fach (surjektiv)	$n! \begin{Bmatrix} k \\ n \end{Bmatrix}$	$\binom{k-1}{n-1}$

Unterscheidbare Objekte denken wir uns mit  $1, \dots, k$  nummeriert. Bei ununterscheidbaren Objekten dürfen wir Objekte untereinander vertauschen: Das bedeutet, wir betrachten Anordnungen dann als gleich, wenn sie sich nur durch die Nummerierung der Objekte unterscheiden. (Für Ausführungen siehe [en.wikipedia.org/wiki/Twelvefold\\_way](http://en.wikipedia.org/wiki/Twelvefold_way).)

(2) Bei ununterscheidbaren Objekten dürfen wir Objekte vertauschen: Nach Umordnung können wir  $f(1) \leq f(2) \leq \dots \leq f(k)$  annehmen.

**Injektive Abbildungen:**  $f(1) < f(2) < \dots < f(k)$

Dann ist  $f$  bereits durch  $\{f(1), f(2), \dots, f(k)\}$  bestimmt.

Hier gibt es genau  $\binom{n}{k}$  Möglichkeiten, diese Teilmenge zu wählen.

**Surjektive Abbildungen:**  $f(1) \leq f(2) \leq \dots \leq f(k)$ .

Für genau  $n-1$  der  $k-1$  Vergleiche gilt „<“, sonst „=“.

Hierzu gibt es genau  $\binom{k-1}{n-1} = \binom{k-1}{k-n}$  Möglichkeiten.

**Beliebige Abbildungen:**  $f(1) \leq f(2) \leq \dots \leq f(k)$ .

Definiere  $g: \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, n+k-1\}$  durch  $g(x) = f(x) + x - 1$ .

Es gilt dann  $g(1) < g(2) < \dots < g(k)$ . Dies stiftet eine Bijektion  $f \leftrightarrow g$ .

Für  $g$  gibt es genau  $\binom{n+k-1}{k}$  Möglichkeiten; somit auch für  $f$ .



Viele Zufallsexperimente lassen sich als **Urnenmodelle** verstehen / beschreiben. Aus einer Urne mit  $n$  durchnummerierten Kugeln ziehen wir  $k$  Kugeln (oder Lose):

- Ziehung mit oder ohne Zurücklegen,
- Ergebnis mit oder ohne Reihenfolge.

Die Gesamtzahl der möglichen Ergebnisse berechnet sich wie folgt:

Urnenmodell	mR: mit Reihenfolge	oR: ohne Reihenfolge
oZ: ohne Zurücklegen	$\frac{n!}{(n-k)!} = k! \binom{n}{k}$ <small>Laplace</small>	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ <small>Laplace</small>
mZ: mit Zurücklegen	$n^k$ <small>Laplace</small>	$\binom{n+k-1}{k}$ <small>nicht Laplace</small>

Beispiel: Zweimaliges Würfeln

Zweimal Würfeln ergibt die Gleichverteilung auf  $6^2 = 36$  Ergebnissen:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), \\ (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), \\ (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), \\ (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), \\ (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), \\ (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) \end{array} \right\}$$

Das entspricht dem Urnenmodell „2 aus 6“ mZmR und ist laplacesch.

Umsortiert (also mZoR) bleiben nur noch  $\binom{6+2-1}{2} = 21$  Ergebnisse:

$$\Omega^* = \left\{ \begin{array}{l} (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), \\ (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), \\ (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), \\ (4, 4), (4, 5), (4, 6), \\ (5, 5), (5, 6), \\ (6, 6) \end{array} \right\}$$

Diese sind nicht gleichwahrscheinlich:  $p(1, 1) = \frac{1}{36}$  aber  $p(1, 2) = \frac{2}{36}$ .

Urnenmodell ohne Zurücklegen mit Reihenfolge

Urnenmodell „ $k$  aus  $n$ “ ohne Zurücklegen mit Berücksichtigung der Ziehungsreihenfolge. Die Ergebnismenge ist hier:

$$\Omega = \{ \omega \in \{1, \dots, n\}^k \mid \omega_i \neq \omega_j \text{ für } i \neq j \}$$

Anzahl der Elemente:

$$|\Omega| = n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

☺ Alle Ergebnisse sind gleich wahrscheinlich (Laplace-Experiment). Die Elementarwahrscheinlichkeiten sind demnach:

$$p(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{(n-k)!}{n!}$$

**Beispiel:** Anzahl der Permutationen einer Menge mit  $n$  Elementen. Das Urnenmodell Ziehung „ $n$  aus  $n$ “ oZmR ergibt  $n!$  Permutationen.

Urnenmodell mit Zurücklegen mit Reihenfolge

Urnenmodell „ $k$  aus  $n$ “ mit Zurücklegen mit Berücksichtigung der Ziehungsreihenfolge. Die Ergebnismenge besteht aus allen  $k$ -Tupeln:

$$\Omega = \{1, \dots, n\}^k = \{ (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k) \mid \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k \in \{1, \dots, n\} \}$$

Die Anzahl der Elemente ist demnach die Potenz:

$$|\Omega| = \underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{k \text{ mal}} = n^k$$

☺ Alle Ergebnisse sind gleich wahrscheinlich (Laplace-Experiment). Die Elementarwahrscheinlichkeiten sind demnach:

$$p(\omega) = \frac{1}{n^k}$$

**Beispiel:** Anzahl der Ergebnisse bei  $k$ -maligem Würfeln. Darstellung als Urnenmodell: Ziehung „ $k$  aus 6“ mZmR. Dies ergibt  $6^k$  mögliche Ergebnisse.

Beim Ziehen der Losnummern gibt es zwei Varianten:

- **mit Zurücklegen** (mZ) — Nach jedem Zug wird die Nummer der gezogenen Kugel notiert und die Kugel zurückgelegt.
- **ohne Zurücklegen** (oZ) — Kugeln werden nicht zurückgelegt. Jede Zahl kann daher höchstens einmal auftreten.

Das Endergebnis können wir auf zwei Weisen zusammenfassen:

- **mit** Berücksichtigung der **Ziehungsreihenfolge** (mR)
- **ohne** Berücksichtigung der **Ziehungsreihenfolge** (oR)

☺ Dies entspricht obigen Schubfachmodellen: Jede Ziehung ist eine Abbildung  $f: \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ . Ohne Zurücklegen ist sie injektiv. Ohne Reihenfolge dürfen wir umsordieren zu  $f(1) \leq f(2) \leq \dots \leq f(k)$ .

☺ Jede Ziehung oZmR, oZoR, mZmR ist ein **Laplace-Experiment**: Die Wahrscheinlichkeit ist hier **gleichverteilt**, also  $p(\omega) = 1/|\Omega|$ .

⚠ Die Ziehung mZoR hingegen ist **kein Laplace-Experiment**: Bei der Olympialotterie „Glücksspirale 1971“ war dies der fatale Designfehler!

Beispiel: Große Straße beim Kniffel

**Aufgabe:** Wie wahrscheinlich ist eine große Straße beim Kniffel?

Beim Kniffel (oder Yahtzee) würfelt man mit fünf Würfeln. Eine große Straße besteht aus fünf aufeinanderfolgende Zahlen. Statt „einmal 5 Würfeln“ kann man „5 mal einen Würfel“ werfen.



**Lösung:** Ergebnismenge  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^5$  mit Gleichverteilung.

In diesem Modell ist das Ereignis „große Straße“ die Teilmenge

$$S = \{ \omega \in \Omega \mid \{ \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5 \} = \{1, 2, 3, 4, 5\} \}$$

$$\text{oder } \{ \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5 \} = \{2, 3, 4, 5, 6\} \}.$$

Anzahl  $|S| = 2 \cdot 5! = 240$ . Die Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$P(S) = \frac{|S|}{|\Omega|} = \frac{2 \cdot 5!}{6^5} = \frac{240}{7776} = \frac{5}{162} \approx 0.0308$$

Urnenmodell ohne Zurücklegen ohne Reihenfolge

Urnenmodell „ $k$  aus  $n$ “ ohne Zurücklegen ohne Berücksichtigung der Ziehungsreihenfolge. Äquivalent hierzu: aufsteigende Anordnung, also

$$\Omega = \{ \omega \subseteq \{1, \dots, n\} \mid |\omega| = k \}$$

$$= \{ \{ \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k \} \subseteq \{1, \dots, n\} \mid \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_k \}$$

$$\cong \{ (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k) \in \{1, \dots, n\}^k \mid \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_k \}$$

Anzahl der Elemente:

$$|\Omega| = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

☺ Alle Ergebnisse sind gleich wahrscheinlich (Laplace-Experiment). Die Elementarwahrscheinlichkeiten sind demnach:

$$p(\omega) = \frac{k!(n-k)!}{n!}$$

**Beispiel:** Lotto entspricht dem Urnenmodell „6 aus 49“ oZoR. Dies ergibt  $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$  mögliche Ergebnisse.

Urnenmodell mit Zurücklegen ohne Reihenfolge

Mögliche Wahl der Ergebnismenge (aufsteigende Reihenfolge):

$$\Omega = \{ \omega = (\omega_1, \dots, \omega_k) \in \{1, \dots, n\}^k \mid \omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_k \}$$

Die Anzahl der Elemente ist zunächst nicht direkt ersichtlich... Genial-einfacher Rechen-trick: Wir wählen eine geschickte Bijektion!

$$\Phi: \Omega \rightarrow \Omega' = \{ \omega' \in \{1, \dots, n+k-1\}^k \mid \omega'_1 < \omega'_2 < \dots < \omega'_k \}$$

$$\omega \leftrightarrow \omega' \text{ mit } \omega'_j = \omega_j + j - 1 \text{ für alle } j = 1, \dots, k$$

Beispiele dieser Bijektion zur Illustration:

$$\Phi(1, 1, 1, 1) = (1, 2, 3, 4, 5)$$

$$\Phi(1, 1, 2, 4, 4) = (1, 2, 4, 7, 8)$$

Diese raffinierte Sichtweise löst das Abzählproblem:

$$|\Omega| = |\Omega'| = \binom{n+k-1}{k}$$

⚠ Hier sind nicht alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich!



## Die Binomialverteilung $B(n, t)$

U309

Sie führen  $n$  **unabhängige Experimente** durch mit Trefferwkt  $t \in [0, 1]$ . Ergebnisraum  $\Omega = \{0, 1\}^n$ , Produktraum über  $\{1 = \text{Treffer}, 0 = \text{Niete}\}$ . Für  $\omega \in \Omega$  mit  $k$  Treffern und  $n - k$  Nieten ist die Wkt  $t^k(1-t)^{n-k}$ . Es gibt genau  $\binom{n}{k}$  solcher Ergebnisse  $\omega \in \Omega$  mit  $k$  Treffern.

### Satz U3B: Binomialverteilung

Die Wahrscheinlichkeit  $p(k)$  für genau  $k$  Treffer ist gegeben durch

$$p(k) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}.$$

Dies nennen wir die **Binomialverteilung**

$$B(n, t) : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1] : k \mapsto p(k).$$

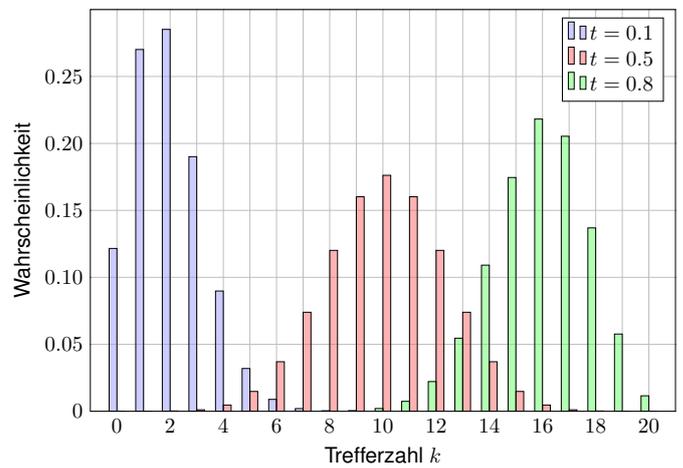
**Aufgabe:** Ist dies eine WVerteilung? **Lösung:** Ja, denn  $p(k) \geq 0$  und

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} p(k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = [t + (1-t)]^n = 1.$$

Der Träger von  $B(n, t)$  ist  $\{0, \dots, n\}$ : Für  $k < 0$  oder  $k > n$  gilt  $p(k) = 0$ .

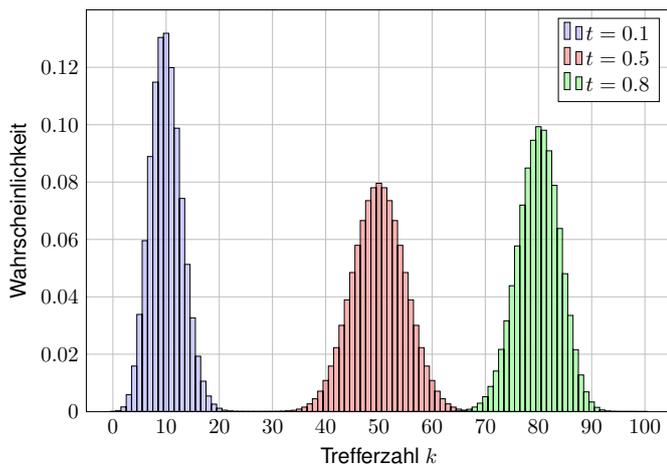
## Beispiele zur Binomialverteilung: $B(20, t)$

U310



## Beispiele zur Binomialverteilung: $B(100, t)$

U311



## Anwendung: Anzahl der Geburtstagskinder

U312

**Aufgabe:** Im Hörsaal sitzen 300 Personen (zufällig und unabhängig). Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben 0, 1, 2, 3, ... heute Geburtstag?

**Lösung:** Diese Anzahl  $B(n, t)$ -verteilt mit  $n = 300$  und  $t = 1/365$ .

Die Wahrscheinlichkeit für 0, 1, 2, 3, ... Geburtstagskinder ist:

$$B(n, t)(0) = \binom{300}{0} \left(\frac{1}{365}\right)^0 \left(\frac{364}{365}\right)^{300} \approx 0.4391$$

$$B(n, t)(1) = \binom{300}{1} \left(\frac{1}{365}\right)^1 \left(\frac{364}{365}\right)^{299} \approx 0.3619$$

$$B(n, t)(2) = \binom{300}{2} \left(\frac{1}{365}\right)^2 \left(\frac{364}{365}\right)^{298} \approx 0.1486$$

$$B(n, t)(3) = \binom{300}{3} \left(\frac{1}{365}\right)^3 \left(\frac{364}{365}\right)^{297} \approx 0.0406$$

☺ Für  $B(n, t)(0)$  kennen wir bereits die Näherung  $(1-t)^n \approx e^{-nt}$ . Mit  $nt = 300/365 \approx 0.8219$  finden wir  $B(n, t)(0) \approx e^{-0.8219} \approx 0.4396$ .

## Von der Binomial- zur Poisson-Verteilung

U313

Die Binomialverteilung  $B(n, t)$  ist für große  $n$  mühsam zu berechnen.

**Aufgabe:** Wir suchen eine praktische Näherung für  $n$  groß und  $t$  klein. Sei  $\lambda > 0$  gegeben und  $t = \lambda/n$ . Berechnen Sie für  $n \rightarrow \infty$  den Limes der Binomialverteilungen  $B(n, \lambda/n)$ . **Lösung:** Geduldig ausrechnen:

$$\begin{aligned} B\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)(k) &= \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{\lambda^k}{n^k} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \underbrace{\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{n}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\rightarrow e^{-\lambda}} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\rightarrow 1} \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \end{aligned}$$

**Beispiel:** Für  $n = 300$  und  $t = 1/365$  gilt  $\lambda = nt = 300/365 \approx 0.8219$ . Statt exakt  $B(n, t)(k)$  berechnen wir bequemer  $p(k) = e^{-\lambda} \cdot \lambda^k/k!$ :

$$p(0) \approx 0.4396, \quad p(1) \approx 0.3613, \quad p(2) \approx 0.1485, \quad p(3) \approx 0.0407.$$

## Die Poisson-Verteilung $P(\lambda)$

U314

### Definition U3C: Poisson-Verteilung

Die **Poisson-Verteilung**  $P(\lambda)$  für  $\lambda \geq 0$  ist gegeben durch

$$P(\lambda) : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1] : k \mapsto p(k) = e^{-\lambda} \cdot \lambda^k/k!.$$

**Aufgabe:** Ist dies eine WVerteilung? **Lösung:** Ja, denn  $p(k) \geq 0$  und

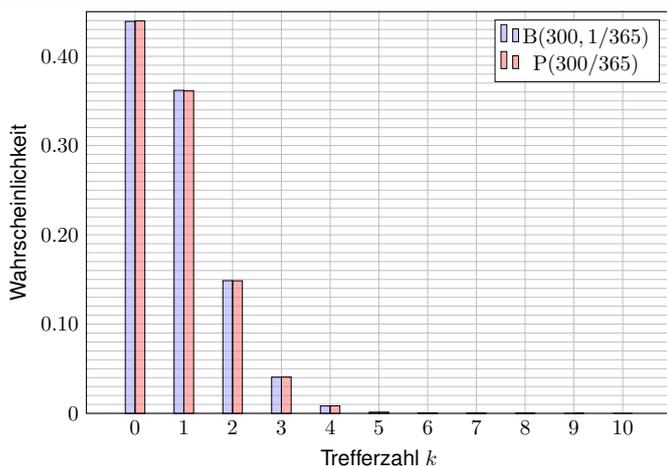
$$\sum_{k=0}^{\infty} p(k) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

☺ So lässt sich die Poisson-Verteilung besonders leicht merken. Die Terme  $\lambda^k/k!$  entsprechen der Exponentialreihe  $e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k/k!$ .

☺ Der Grenzübergang  $B(n, \lambda/n) \rightarrow P(\lambda)$  erklärt die Bedeutung:  $P(\lambda)$  entspricht der Häufigkeit von unabhängigen Ereignissen geringer Wahrscheinlichkeit bei sehr vielen Wiederholungen. Wie gut ist die Approximation von  $B(n, t)$  durch  $P(\lambda)$ ? Auch dies wollen wir nun quantitativ beantworten!

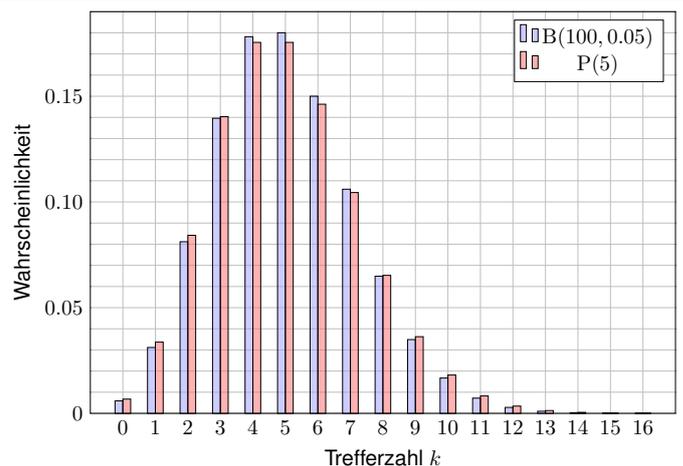
## Vergleich von Binomial- und Poisson-Verteilung

U315



## Vergleich von Binomial- und Poisson-Verteilung

U316



Oft wollen oder müssen wir zwei WMaße  $P_0$  und  $P_1$  auf  $\Omega$  vergleichen: Ist  $P_0$  mühsam aber  $P_1$  bequem, so wollen wir  $P_0$  durch  $P_1$  ersetzen. Die beiden WMaße  $P_0$  und  $P_1$  ordnen jedem Ereignis  $A \subseteq \Omega$  die Wkten  $P_0(A)$  bzw.  $P_1(A)$  zu. Der totale Abstand zwischen  $P_0$  und  $P_1$  ist das Supremum, die größtmögliche Abweichung, die hierbei auftreten kann:

**Definition U3D:** totaler Abstand zweier WMaße

Der **totale Abstand** von zwei diskreten WMaße  $P_0$  und  $P_1$  auf  $\Omega$  ist:

$$\|P_0 - P_1\| := \sup_{A \subseteq \Omega} |P_0(A) - P_1(A)| = \frac{1}{2} \sum_{\omega \in \Omega} |P_0(\{\omega\}) - P_1(\{\omega\})|$$

Diese Fehlerschranke nutzen wir bei näherungsweise Rechnungen: Ist der Abstand klein genug, etwa  $\|P_0 - P_1\| \leq \varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-3}$ , so können wir  $P_0(A)$  durch  $P_1(A)$  ersetzen und machen dabei schlimmstenfalls einen Fehler von  $\varepsilon$ , das heißt, es gilt  $P_0(A) = P_1(A) + \delta$  mit  $|\delta| \leq \varepsilon$ .

Der totale Abstand ist (bis auf einen Faktor 1/2) die Summe über alle punktwweisen Abstände: Die linke Seite  $\sup_{A \subseteq \Omega}$  ist leicht zu verstehen, die rechte Seite  $\sum_{\omega \in \Omega}$  ist leicht zu berechnen. Diese Umformulierung ist oft leichter zugänglich: Es genügt, die absolute Differenz über alle Ergebnisse zu addieren. Die genaue Rechnung [U318](#) beweist dies und erklärt den Faktor 1/2.

**Beweis der Umformulierung:** Wir betrachten  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(\omega) = P_0(\{\omega\}) - P_1(\{\omega\})$  und beweisen  $\|P_0 - P_1\| \leq \frac{1}{2} \sum_{\omega \in \Omega} |f(\omega)|$  sowie  $\|P_0 - P_1\| \geq \frac{1}{2} \sum_{\omega \in \Omega} |f(\omega)|$ .

(1) Für jede beliebige Teilmenge  $A \subseteq \Omega$  gilt:

$$\begin{aligned} P_0(A) - P_1(A) &= \sum_{\omega \in A} f(\omega) \leq \sum_{\omega \in A} f^+(\omega) \leq \sum_{\omega \in \Omega} f^+(\omega) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{2} [|f(\omega)| + f(\omega)] = \frac{1}{2} \sum_{\omega \in \Omega} |f(\omega)| \end{aligned}$$

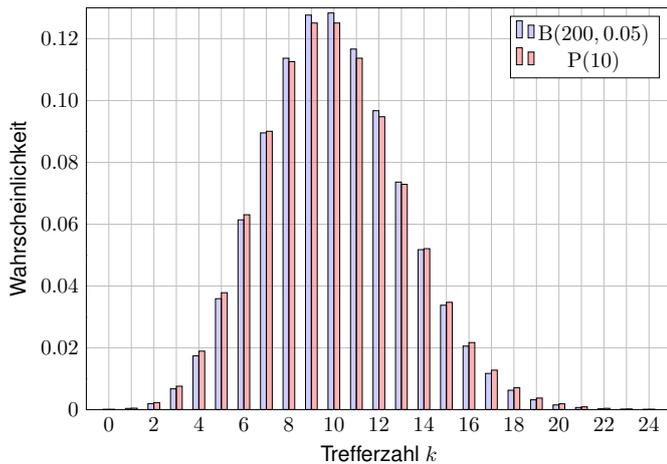
Die letzte Gleichung verdanken wir  $\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) = P_0(\Omega) - P_1(\Omega) = 0$ . Symmetrisch gilt  $P_1(A) - P_0(A) \leq \frac{1}{2} \sum_{\omega \in \Omega} |f(\omega)|$ . Insgesamt folgt  $|P_0(A) - P_1(A)| \leq \frac{1}{2} \sum_{\omega \in \Omega} |f(\omega)|$ .

Nach Definition ist  $\|P_0 - P_1\|$  die kleinste obere Schranke von  $|P_0(A) - P_1(A)|$  über alle  $A \subseteq \Omega$ , also  $\|P_0 - P_1\| \leq \frac{1}{2} \sum_{\omega \in \Omega} |f(\omega)|$ . Wir zeigen nun die umgekehrte Ungleichung.

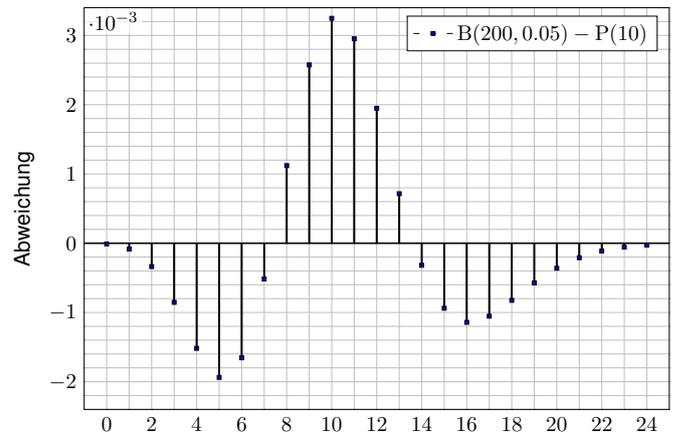
(2) Für die beiden Mengen  $A = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) > 0\}$  und  $B = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) < 0\}$  gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) = \sum_{\omega \in A} f(\omega) + \sum_{\omega \in B} f(\omega) \quad \text{und somit} \\ 0 &\leq \sum_{\omega \in \Omega} |f(\omega)| = \sum_{\omega \in A} f(\omega) - \sum_{\omega \in B} f(\omega) = 2[P_0(A) - P_1(A)] \leq 2\|P_0 - P_1\|. \end{aligned}$$

Dies zeigt  $\|P_0 - P_1\| \geq \frac{1}{2} \sum_{\omega \in \Omega} |f(\omega)|$ . Die Ungleichungen (1) und (2) beweisen Gleichheit. Unsere Rechnung zeigt zudem, dass das Supremum für  $A$  (und  $B$ ) tatsächlich angenommen wird.



Wie gut ist diese Näherung? Punktweise bis auf 0.0033 genau!



Für große  $n$  ist die Binomialverteilung  $B(n, t)$  mühsam. Bei kleinem  $t$  können wir sie durch die bequemere Poisson-Verteilung  $P(nt)$  ersetzen.

**Satz U3E:** Poissons Gesetz der kleinen Zahlen

- (1) Für  $n \rightarrow \infty$  gilt die punktweise Konvergenz  $B(n, \lambda/n) \rightarrow P(\lambda)$ .
- (2) Es gilt  $B(n, t) \approx P(nt)$  mit Fehlerschranke für den totalen Abstand:

$$\|B(n, t) - P(nt)\| \leq nt^2 = \lambda^2/n \searrow 0$$

Hierbei ist  $\lambda = nt$  der Erwartungswert und Parameter für  $P(\lambda)$ .

☺ Dank dieses Satzes können wir den Fehler bequem abschätzen! Z.B. liegen  $B(200, 0.05)$  und  $P(10)$  höchstens 0.5 auseinander, hingegen  $B(2000, 0.005)$  und  $P(10)$  noch höchstens 0.05,  $B(20000, 0.0005)$  und  $P(10)$  nur noch höchstens 0.005.

Gilt der Fehler als klein genug, so kann man die mühsame Binomialverteilung durch die wesentlich bequemere Poisson-Verteilung ersetzen. Den Grenzübergang haben wir oben schon ausgerechnet [U313](#). Die Fehlerabschätzung des totalen Abstandes ist etwas trickreicher [U435](#). Wir verallgemeinern dies in Satz U4C und rechnen es anschließend ausführlich und elegant nach.

**Aufgabe:** Bei der Herstellung eines Displays mit  $n = 1920 \times 1080$  Pixeln ist jedes mit Wkt  $t = 1/2764800$  defekt, alle unabhängig voneinander.

- (1) Mit welcher Wkt  $p$  hat ein Display mehr als 2 Pixelfehler? (Garantie)
- (2) Welche Verteilung gilt hier exakt? Welche gilt näherungsweise? Wie groß ist der Approximationsfehler, d.h. der totale Abstand?

**Lösung:** (2) Exakt  $B(n, t)$ , näherungsweise  $P(\lambda)$  mit  $\lambda = nt = 0.75$ . Der totale Abstand  $\|B(n, t) - P(\lambda)\| \leq \lambda^2/n < 10^{-6}$  ist extrem klein.

☺ Die Näherung ist sehr genau und rechtfertigt die Rechnung in (1).

(1) Statt der exakten Verteilung nutzen wir die bequeme Näherung:

$$\begin{aligned} 1 - p &= \binom{n}{0} t^0 (1-t)^n + \binom{n}{1} t^1 (1-t)^{n-1} + \binom{n}{2} t^2 (1-t)^{n-2} \\ &\approx e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda^0}{0!} + \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} \right) \approx 0.95949 \end{aligned}$$

Garantiefall: Mehr als 2 fehlerhafte Pixel treten mit Wkt  $p \approx 0.04051$  auf.

☺ Die Poisson-Näherung vereinfacht unsere Rechnung spürbar.

**Stichprobe:** Gesamtgröße  $N$ , davon  $K$  Treffer, Stichprobengröße  $n$ . Die Trefferzahl  $k$  folgt hier der **hypergeometrischen Verteilung**

$$H(N, K, n)(k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

**Stichprobe mit Zurücklegen:** Stichprobengröße  $n$ , Trefferwkt  $t = \frac{K}{N}$ .

Die Trefferzahl  $k$  folgt in diesem Fall der **Binomialverteilung**

$$B(n, t)(k) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$$

Ist  $N$  groß gegenüber  $n$ , so erwarten wir  $H(N, K, n)(k) \approx B(n, t)(k)$ .

☺ Anschaulich: Zurücklegen oder nicht macht kaum einen Unterschied.

Diese Idee überprüfen wir anhand von Beispielen und Graphiken für endliches  $N$  sowie durch die Berechnung des Grenzwertes für  $N \rightarrow \infty$ .

Der abschließende Satz U3F gibt explizite handfeste Fehlerschranken: Der totale Abstand von  $H(N, K, n)$  und  $B(n, K/N)$  ist kleiner als  $n/N$ .

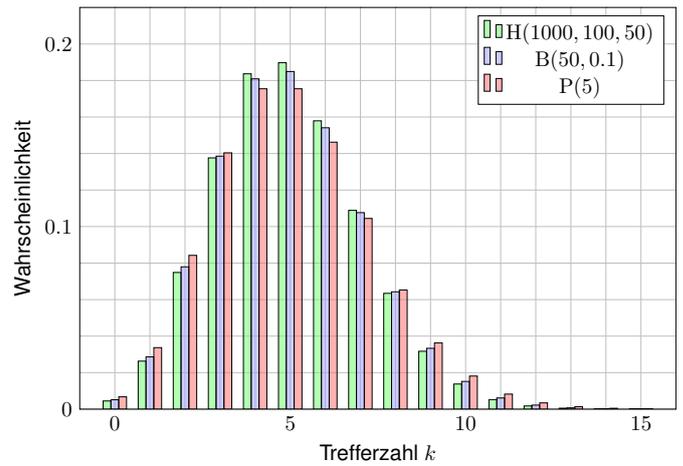
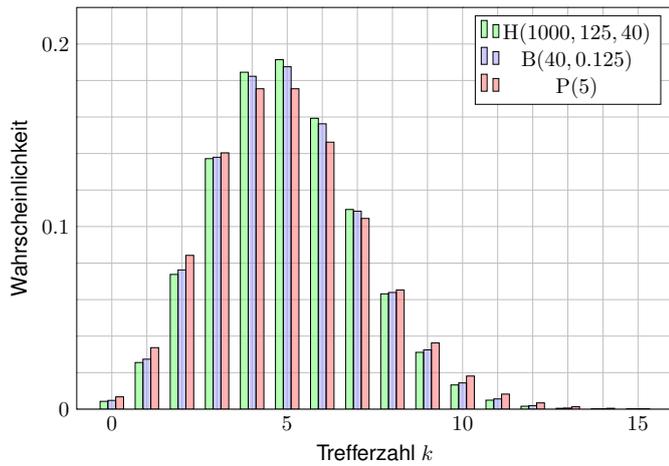
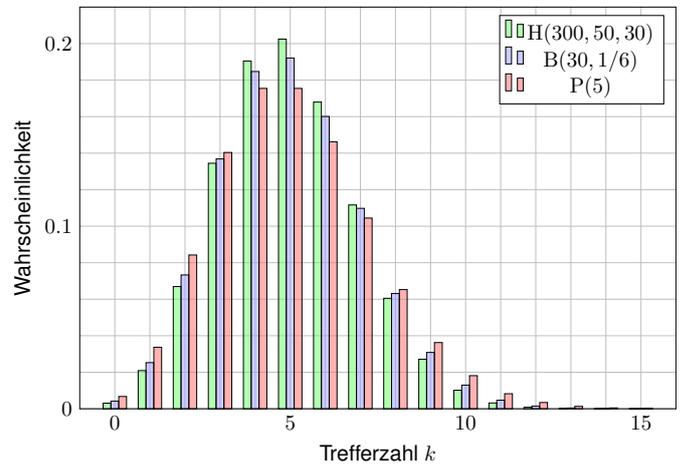
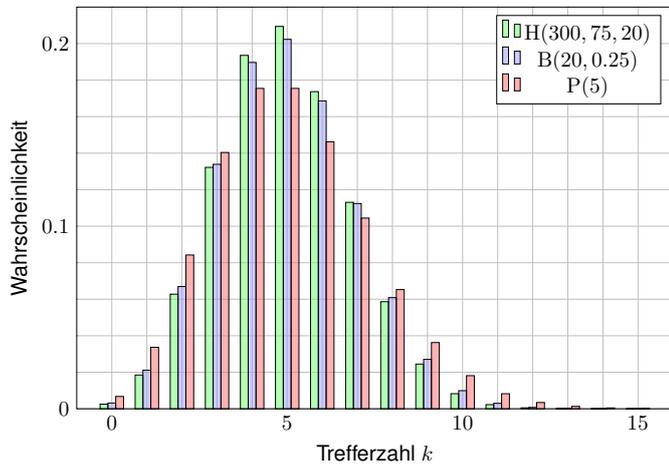
**Aufgabe:** Für  $N \rightarrow \infty$  und  $K/N \rightarrow t$  zeige man  $H(N, K, n) \rightarrow B(n, t)$ .

**Lösung:** Ausschreiben und geduldig vereinfachen:

$$\begin{aligned} \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} &= \frac{K^k (N-K)^{n-k} n!}{k! (n-k)! N^n} \\ &= \frac{\binom{n}{k} K^k (N-K)^{n-k}}{N^k (N-K)^{n-k}} \\ &\sim \frac{\binom{n}{k} \left(\frac{K}{N}\right)^k \left(\frac{N-K}{N}\right)^{n-k}}{1} \\ &\rightarrow \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \end{aligned}$$

Wie gut ist die Approximation von  $H(N, K, n)$  durch  $B(n, K/N)$ ?

Die Güte der Approximation ist für die Praxis wesentlich, leider lässt sie sich aus unserer einfachen Grenzwertrechnung noch nicht ablesen. Der folgende Satz präzisiert dies durch eine explizite Fehlerschranke.



Für große Stichproben möchten wir die hypergeometrische Verteilung  $H(N, K, n)$  durch die Binomialverteilung  $B(n, k/N)$  ersetzen.

**Satz U3F: Abstand von hypergeometrisch zu binomial**

- (1) Für  $N \rightarrow \infty$  und  $K/N \rightarrow t$  gilt Konvergenz  $H(N, K, n) \rightarrow B(n, t)$ .
- (2) Genauer gilt bei  $K > n$  folgende Schranke für den totalen Abstand:

$$\|H(N, K, n) - B(n, K/N)\| < n/N \searrow 0$$

😊 Dank dieses Satzes können wir den Fehler bequem abschätzen. Z.B. liegen  $H(1000, 100, 50)$  und  $B(50, 0.1)$  höchstens 0.05 auseinander, hingegen  $H(10000, 1000, 50)$  und  $B(50, 0.1)$  nur noch höchstens 0.005. Innerhalb der genannten Fehlerabschranken nutzen wir die Näherungen

$$H(N, K, n) \approx B(n, K/N) \text{ und } B(n, t) \approx P(nt).$$

Die Grenzübergänge haben wir oben ausgerechnet. Die Fehlerabschätzung ist schwieriger und wird hier nicht ausgeführt. Ist der Fehler klein genug, so kann man die sehr mühsame hypergeometrische Verteilung durch die weniger mühsame Binomialverteilung ersetzen.

In einer Population von  $N = 500\,000$  Tieren sind  $K = 25\,000$  erkrankt. Zwecks Untersuchung werden  $n = 200$  Tiere zufällig ausgewählt.

- Aufgabe:** (1) Welche Verteilung hat die Anzahl  $k$  der kranken Tiere?  
 (2) Welche Verteilungen bieten sich als bequeme Näherungen an?  
 (3) Wie gut sind diese Näherungen? Sind sie bis auf  $0.5 \cdot 10^{-3}$  genau?

- Lösung:** (1) Die Anzahl der kranken Tiere ist  $H(N, K, n)$ -verteilt.  
 (2) Es wäre bequemer, mit  $B(n, K/N)$  oder  $P(nK/N)$  zu rechnen.  
 (3) Beim Übergang von  $H(N, K, n)$  zu  $B(n, t)$  mit  $t = K/N = 0.05$  machen wir einen totalen Fehler von  $< n/N = 0.0004$ . Das reicht. Beim Übergang von  $B(n, t)$  zu  $P(\lambda)$  mit  $\lambda = nt = 10$  machen wir einen totalen Fehler von  $\leq \lambda^2/n = 0.5$ . Das scheint allzu grob: Vorsicht!

$H(N, K, n):$	8 $\mapsto$ 0.11373,	9 $\mapsto$ 0.12771,	10 $\mapsto$ 0.12838,
$B(n, K/N):$	8 $\mapsto$ 0.11372,	9 $\mapsto$ 0.12769,	10 $\mapsto$ 0.12836,
$P(nK/N):$	8 $\mapsto$ 0.11260,	9 $\mapsto$ 0.12511,	10 $\mapsto$ 0.12511

Die Poisson-Verteilung ist in diesen Punkten immerhin bis auf  $0.5 \cdot 10^{-2}$  genau. Die Fehler in verschiedenen Punkten können sich jedoch addieren; das Supremum ist der totale Abstand U330.

Firma Schlaule kauft einen billigen Restposten von 50 000 Bauteilen. Der Lieferant sichert vertraglich zu, dass höchstens 2 500 defekt sind. Als Eingangsprüfung nehmen Sie eine Stichprobe von 100 Teilen und finden 6 defekte. Ihr Chef folgert: „Der Vertrag wurde nicht eingehalten.“

- Aufgabe:** (1) Kann der Chef auch irren? Wenn ja, mit welcher Wkt? Er wird Ihre Rechnung anzweifeln; begründen Sie deshalb ausführlich! Welche Näherungen sind möglich, welche Fehlergrenzen gelten? [W204](#)  
 (2) Ihr Chef will nun den Lieferanten verklagen. Sollte sich der Vorwurf als falsch erweisen, wären die Kosten enorm. Die Anwältin rät daher zu einer erneuten Stichprobe und verlangt einen Test mit 97% Sicherheit. Bei welchen Stichprobenergebnissen können Sie dies garantieren?

**Lösung:** Wir betrachten zunächst den extremen Fall:  $K = 2\,500$  defekte von  $N = 50\,000$  Teilen, also  $t = K/N = 5\%$ . Eine zufällige Stichprobe von  $n = 100$  ohne Zurücklegen enthält  $k$  defekte mit Wkt  $H(N, K, n)(k)$ . Näherung  $B(n, t)$  mit Fehler  $< n/N = 0.002$ : Das scheint akzeptabel. Näherung  $P(5)$  mit Fehler  $\leq nt^2 = 0.25$ : Hier ist Vorsicht geboten!

Wir berechnen die drei Verteilungen, die jeweils zweite Zeile kumuliert.

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$H(N, K, n)$	.0059	.0311	.0811	.1395	.1782	.1802	.1502	.1061	.0648	.0348
Kumul	.0059	.0370	.1180	.2576	.4358	.6160	.7662	.8723	.9371	.9719
$B(n, t)$	.0059	.0312	.0812	.1396	.1781	.1800	.1500	.1060	.0649	.0349
Kumul	.0059	.0371	.1183	.2578	.4360	.6160	.7660	.8720	.9369	.9718
$P(\lambda)$	.0067	.0337	.0842	.1404	.1755	.1755	.1462	.1044	.0653	.0363
Kumul	.0067	.0404	.1247	.2650	.4405	.6160	.7622	.8666	.9319	.9682

Eine Tabellenkalkulation hilft, z.B. *LibreOffice*. Hier weicht  $B(n, t)$  kaum von  $H(N, K, n)$  ab,  $P(\lambda)$  zwar etwas mehr, aber insgesamt noch wenig.

- (1) Angenommen, höchstens 2 500 der 50 000 Teile sind defekt. Stichprobe  $\leq 5$  mit Wkt  $\approx 61\%$ , Stichprobe  $\geq 6$  mit Wkt  $\approx 39\%$ . Bei bis zu 38% aller Stichproben würde Ihr Chef demnach irren.  
 (2) Stichprobe  $\leq 9$  mit Wkt  $\approx 97\%$ , Stichprobe  $\geq 10$  mit Wkt  $\approx 3\%$ . Das Risiko einer irrtümlichen Klage wäre demnach kleiner als 3%. Im Falle  $K < 2\,500$  verstärken sich die Ungleichungen noch.

**Ausfallwahrscheinlichkeit** U401  
Fazit

Von  $n$  **unabhängigen** Teilen habe jedes Ausfallwkt  $p$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{P(Alle Teile funktionieren)} &= (1-p)^n \approx e^{-np} \\ \text{P(Mindestens eins fällt aus)} &= 1 - (1-p)^n \approx 1 - e^{-np} \end{aligned}$$

Taylor-Entwicklung: Es gilt  $\exp(x) \approx 1+x$  und  $\exp(-x) \approx 1-x$ .  
 Genauer: Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $\exp(x) \geq 1+x$  und  $\exp(-x) \geq 1-x$ ,  
 und für  $x \approx 0$  gilt zudem  $\exp(x) \approx 1+x$  und  $\exp(-x) \approx 1-x$ .

Eine Maschine bestehe aus vielen **unabhängigen** Teilen  $T_1, \dots, T_n$ .  
 Jedes Teil  $T_k$  hat eine gewisse Ausfallwahrscheinlichkeit  $p_k \in [0, 1]$ .

$$\begin{aligned} \text{P(Alle Teile funktionieren)} &= (1-p_1) \cdots (1-p_n) \\ &\approx e^{-p_1} \cdots e^{-p_n} = e^{-(p_1 + \dots + p_n)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{P(Mindestens eins fällt aus)} &= 1 - (1-p_1) \cdots (1-p_n) \\ &\approx 1 - e^{-(p_1 + \dots + p_n)}. \end{aligned}$$

☺ Die Näherung ist praktisch für  $p_1, \dots, p_n$  klein und  $n$  groß.  
 Dies ist die Poisson-Verteilung  $P(\lambda)$  mit  $\lambda = p_1 + \dots + p_n$ . U314

**Kollisionswahrscheinlichkeit** U402  
Fazit

Aus  $n$  Möglichkeiten wird  $k$  mal zufällig ausgewählt (wobei  $1 \leq k \leq n$ ).  
 Die Wahrscheinlichkeit  $P_{n,k}$ , dabei  $k$  verschiedene auszuwählen, ist

$$P_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)! k!} \approx \exp\left(-\frac{k(k-1)}{2n}\right).$$

☺ Der Graph ist die rechte Hälfte der Gaußschen Glockenkurve  $e^{-x^2/2}$ .  
 Die Wahrscheinlichkeit  $Q_{n,k}$  mindestens einer Kollision ist demnach

$$Q_{n,k} = 1 - P_{n,k} \approx 1 - \exp\left(-\frac{k(k-1)}{2n}\right).$$

**Geburtstagsparadox:** Mit welcher Wkt  $Q$  sind unter  $k = 25$  zufälligen  
 Personen mindestens zwei am gleichen Tag des Jahres geboren?  
**Lösung:** Für  $k = 25$  und  $n = 365$  gilt  $P \approx e^{-0.821} \approx 0.44$ , also  $Q \approx 0.56$ .

☺ Intuitiv halten viele eine Kollision für unwahrscheinlich. Tatsächlich  
 liegt die Wkt bei über 50%, daher trägt dieses überraschende Ergebnis  
 den Namen „Geburtstagsparadox“. Probieren Sie es selbst einmal aus!

**Kombinatorik / Schubfachmodelle** U403  
Fazit

Auf wie viele Arten können wir  $k$  Objekte auf  $n$  Fächer verteilen?

Schubfachmodell	unterscheidbare Objekte	ununterscheidbare Objekte
beliebig viele Objekte pro Fach	$n^k$	$\binom{n+k-1}{k}$
höchstens eins pro Fach (injektiv)	$\frac{n!}{(n-k)!} = k! \binom{n}{k}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
mindestens eins pro Fach (surjektiv)	$n! \left\{ \begin{matrix} k \\ n \end{matrix} \right\}$	$\binom{k-1}{n-1}$

Unterscheidbare Objekte denken wir uns mit  $1, \dots, k$  nummeriert.  
 Bei ununterscheidbaren Objekten dürfen wir Objekte untereinander  
 vertauschen: Das bedeutet, wir betrachten Anordnungen dann als gleich,  
 wenn sie sich nur durch die Nummerierung der Objekte unterscheiden.  
 (Für Ausführungen siehe en.wikipedia.org/wiki/Twelvefold\_way.)

**Kombinatorik / Urnenmodelle** U404  
Fazit

Aus  $n$  durchnummerierten Kugeln ziehen wir  $k$  Kugeln (oder Lose):  
 Ziehung mit / ohne Zurücklegen, Ergebnis mit / ohne Reihenfolge.  
 Die Gesamtzahl der möglichen Ergebnisse berechnet sich wie folgt:

Urnenmodell	mR: mit Reihenfolge	oR: ohne Reihenfolge
oZ: ohne Zurücklegen	$\frac{n!}{(n-k)!} = k! \binom{n}{k}$ <small>Laplace!</small>	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ <small>Laplace!</small>
mZ: mit Zurücklegen	$n^k$ <small>Laplace!</small>	$\binom{n+k-1}{k}$ <small>nicht Laplace!</small>

**Beispiel:** In einer Urne liegen  $N$  Kugeln, davon sind genau  $K$  rot.  
 Wir ziehen zufällig  $n$  der  $N$  Kugeln (oZoR). Welche Wkt hat das Ereignis  
 $A_k =$  „Es werden genau  $k$  der  $K$  roten Kugeln gezogen“? **Lösung:**

$$\mathbf{P}(A_k) = \frac{|A_k|}{|\Omega|} = \binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k} / \binom{N}{n}$$

**Abstand von Wahrscheinlichkeitsmaßen** U405  
Fazit

Oft wollen oder müssen wir zwei WMaße  $\mathbf{P}_0$  und  $\mathbf{P}_1$  auf  $\Omega$  vergleichen:  
 Ist  $\mathbf{P}_0$  mühsam aber  $\mathbf{P}_1$  bequem, so wollen wir  $\mathbf{P}_0$  durch  $\mathbf{P}_1$  ersetzen.  
 Die beiden WMaße  $\mathbf{P}_0$  und  $\mathbf{P}_1$  ordnen jedem Ereignis  $A \subseteq \Omega$  die Wkten  
 $\mathbf{P}_0(A)$  bzw.  $\mathbf{P}_1(A)$  zu. Der **totale Abstand** zwischen  $\mathbf{P}_0$  und  $\mathbf{P}_1$  ist das  
 Supremum, die größtmögliche Abweichung, die hierbei auftreten kann:

$$\|\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_1\| := \sup_{A \subseteq \Omega} |\mathbf{P}_0(A) - \mathbf{P}_1(A)| = \frac{1}{2} \sum_{\omega \in \Omega} |\mathbf{P}_0(\{\omega\}) - \mathbf{P}_1(\{\omega\})|$$

Diese Fehlerschranke nutzen wir bei näherungsweisen Rechnungen: Ist der Abstand klein genug,  
 etwa  $\|\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_1\| \leq \varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-3}$ , so können wir  $\mathbf{P}_0(A)$  durch  $\mathbf{P}_1(A)$  ersetzen und machen  
 dabei schlimmstenfalls einen Fehler von  $\varepsilon$ , das heißt, es gilt  $\mathbf{P}_0(A) = \mathbf{P}_1(A) + \delta$  mit  $|\delta| \leq \varepsilon$ .

Der totale Abstand ist (bis auf einen Faktor 1/2) die Summe über alle punktwweisen Abstände:  
 Die linke Seite  $\sup_{A \subseteq \Omega}$  ist leicht zu verstehen, die rechte Seite  $\sum_{\omega \in \Omega}$  ist leicht zu berechnen.  
 Diese Umformulierung ist oft leichter zugänglich: Es genügt, die absolute Differenz über alle  
 Ergebnisse zu addieren. Die genaue Rechnung U318 beweist dies und erklärt den Faktor 1/2.

Die Rechnung zeigt zudem, dass das Supremum angenommen wird, also ein Maximum ist.  
 Für die Menge  $A = \{\omega \in \Omega \mid \mathbf{P}_0(\{\omega\}) > \mathbf{P}_1(\{\omega\})\}$  gilt  $\|\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_1\| = |\mathbf{P}_0(A) - \mathbf{P}_1(A)|$ .

**Hypergeometrisch, binomial, Poisson** U406  
Fazit

**Hypergeometrisch, binomial, Poisson** U407  
Fazit

Stichprobe: Gesamtgröße  $N$ , davon  $K$  Treffer, Stichprobengröße  $n$ .  
 Die Trefferzahl  $k$  folgt der **hypergeometrischen Verteilung**

$$H(N, K, n)(k) = \binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k} / \binom{N}{n}.$$

Ein Experiment mit Trefferwkt  $t$  mit  $n$ -mal unabhängig wiederholt,  
 z.B. Stichprobengröße  $n$  mit Zurücklegen, Trefferwkt  $t = K/N$ .  
 Die Trefferzahl  $k$  folgt hier der **Binomialverteilung**

$$B(n, t)(k) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}.$$

Damit sind  $H(N, K, n)$  und  $B(n, t)$  WVerteilungen auf  $\{0, \dots, n\} \subseteq \mathbb{N}$ .  
 Für  $N \rightarrow \infty$  und  $K/N \rightarrow t$  gilt die Konvergenz  $H(N, K, n) \rightarrow B(n, t)$ .  
 Genauer gilt für  $K > n$  folgende Abschätzung des **totalen Abstands**

$$\|H(N, K, n) - B(n, K/N)\| < n/N.$$

**Hypergeometrisch, binomial, Poisson** U408  
Fazit

Die **Poisson-Verteilung**  $P(\lambda)$  zum Parameter  $\lambda \geq 0$  ist gegeben durch

$$P(\lambda)(k) = e^{-\lambda} \lambda^k / k!.$$

Damit ist  $P(\lambda)$  eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ .  
 Das Gesetz der kleinen Zahlen besagt  $B(n, \lambda/n) \rightarrow P(\lambda)$  für  $n \rightarrow \infty$ .  
 Genauer gilt folgende Abschätzung des **totalen Abstands**:

$$\|B(n, \lambda/n) - P(\lambda)\| \leq \lambda^2/n.$$

Für Trefferwahrscheinlichkeit  $t \in [0, 1]$  und  $\lambda = nt$  erhalten wir

$$\|B(n, t) - P(nt)\| \leq nt^2.$$

☺ Je nach geforderter Genauigkeit können wir so bequem  
 von hypergeometrisch über binomial zu Poisson übergehen.  
 ☺ Das verallgemeinert und präzisiert die Näherungsformel U108 für  
 Ausfallwahrscheinlichkeiten bei  $n$  gleichen unabhängigen Bauteilen.

**Verständnisfragen: unabhängige Experimente** U409  
Erinnerung

Versuchen Sie, folgende Fragen frei aber genau zu beantworten, etwa so, wie Sie dies einer Kommiliton:in / Kolleg:in erklären wollen.

Wie beschreibt man zwei unabhängige Experimente in einem gemeinsamen Modell, d.h. auf einem Wahrscheinlichkeitsraum? Wie berechnet man z.B. die Sicherheit von drei Bauteilen mit Ausfallwkt  $p_1, p_2, p_3$ ? Warum ist die Unabhängigkeit wesentlich?

Wie wahrscheinlich ist es, dass von  $n$  unabhängigen Teilen mit gleicher Ausfallwkt  $p$  mindestens eins ausfällt? Was gilt exakt? Welche Näherung ist für große  $n$  nützlich? Wie kommt sie zustande? Inwiefern ist dies ein Spezialfall der Poisson-Verteilung?

Was besagt das Geburtstagsparadox? Was ist daran paradox? Wie berechnet man allgemein die Wkt einer Kollision? exakt? Welche Näherung ist hierzu nützlich? Wie kommt sie zustande? Welche Rolle spielt hierbei die Gaußsche Glockenkurve  $\exp(-x^2)$ ?

**Verständnisfragen: Abzählformeln** U410  
Erinnerung

Welche Abzählformeln gelten bei der Ziehung aus einer Urne mit / ohne Zurücklegen sowie mit / ohne Beachtung der Ziehungsreihenfolge? Welche davon sind Laplace-Experimente, mit gleichverteilter Wkt?

Drei wichtige Beispiele: Wie definiert man folgende Verteilungen?

- die hypergeometrische Verteilung  $H(N, K, n)$
- die Binomialverteilung  $B(n, t)$
- die Poisson-Verteilung  $P(\lambda)$

Nennen Sie Anwendungen, in denen obige Verteilungen auftreten; inwiefern sind diese Modelle jeweils exakt oder nur angenähert?

Wie definiert man allgemein den totalen Abstand zwischen zwei diskreten Wahrscheinlichkeitsmaßen  $P_0, P_1$  auf einer Menge  $\Omega$ ? Hierzu gibt es zwei äquivalente Formeln, als Supremum über alle Mengen (Ereignisse) und als Summe über alle Punkte (Ergebnisse). Wie lauten diese beiden Formeln und was bedeuten sie anschaulich?

**Verständnisfragen: Gesetz der kleinen Zahlen** U411  
Erinnerung

Dies führt zum ersten wichtigen Grenzwertsatz dieses Kapitels:

$$B(n, t) \approx P(\lambda)$$

In welchem Sinne nähert sich die Binomial- der Poisson-Verteilung? Nennen / erfinden Sie mindestens zehn konkrete Anwendungsbeispiele, in denen diese Näherung praktisch nützlich ist, sinnvoll und hilfreich.

Wie lautet und was besagt Poissons Gesetz der kleinen Zahlen? Wie bestimmt man hierzu die nötige Kenngröße  $\lambda$ ? In welchen Situationen kann man diese Näherung anwenden? Welche Voraussetzungen braucht man und welche Schlussfolgerung gewinnt man?

Wie lautet die Fehlerschranke beim Gesetz der kleinen Zahlen? Wie verhält sie sich für  $n \rightarrow \infty$ ? Wie muss  $t$  angepasst werden? Wozu nützt diese Schranke in konkreten Anwendungen, bei festem  $n$ ? Wann darf man sie getrost ignorieren? meistens? manchmal? nie?

**Verständnisfragen: Trefferwkt bei Stichproben** U412  
Erinnerung

Schließlich zum ergänzenden Grenzwertsatz für Stichproben:

$$H(N, K, n) \approx B(n, t)$$

In welchem Sinne nähert sich die hypergeom. der Binomialverteilung? Nennen / erfinden Sie mindestens zehn konkrete Anwendungsbeispiele, in denen diese Näherung praktisch nützlich ist, sinnvoll und hilfreich.

In der Praxis betrachtet man häufig eine Stichprobe der Größe  $n$  aus einer Population  $N$ , entweder mit oder ohne Zurücklegen. Wie lauten jeweils die exakten Wkten für die Trefferzahlen? Welches der beiden Modelle ist bequemer zu berechnen?

Warum sind beide Modelle für großes  $N$  nahezu gleich? Wie weit liegen sie höchstens auseinander? Wie verhält sich ihr Abstand für  $N \rightarrow \infty$ ? Wozu nützt diese Schranke in konkreten Anwendungen, bei festem  $n$ ? Wann darf man sie getrost ignorieren? meistens? manchmal? nie?

**Kollision bei Losen** U413  
Übung

**Aufgabe:** Eine Tombola enthält 850 durchnummerierte Lose. Sie ziehen zufällig und unabhängig 51 mal ein Los mit Zurücklegen. Wie groß ist die Wkt  $P$ , dabei 51 verschiedene Lose zu ziehen?

**Lösung:** Wir nutzen den Geburtstagsatz U1E oder leiten ihn nochmal selbst her. Für die Wahrscheinlichkeit gilt mit  $n = 850$  und  $k = 51$ :

$$P = \left(1 - \frac{0}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

$$\lesssim \exp\left(-\frac{0}{n}\right) \exp\left(-\frac{1}{n}\right) \exp\left(-\frac{2}{n}\right) \cdots \exp\left(-\frac{k-1}{n}\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{0+1+2+\cdots+(k-1)}{n}\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{k(k-1)}{2n}\right) = \exp(-1.5) \lesssim 0.223.$$

⚠ Die Wkt < 23% ist viel geringer als zunächst vermutet: In 850 scheint für 51 verschiedene Lose genug Platz. Wie beim Geburtstagsparadox sind Kollisionen mit > 77% viel wahrscheinlicher als man naiv erwartet.

**Kollision beim Lotto** U414  
Übung

**Aufgabe:** (1) Wie viele Ergebnisse gibt es beim Lotto „6 aus 49“? (2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit  $Q$  tritt bei 5000 unabhängigen Ziehungen mindestens ein Ziehungsergebnis doppelt auf?

**Lösung:** (1) Wir nutzen unsere kombinatorischen Abzählformeln: Beim Lotto „6 aus 49“ sind  $\binom{49}{6} = 13983816$  Ergebnisse möglich. (2) Wir nutzen den Geburtstagsatz U1E wie in der vorigen Aufgabe: Mit  $n = \binom{49}{6}$  und  $k = 5000$  gilt  $k(k-1)/(2n) \approx 25/28 \approx 0.89$ . Die Wahrscheinlichkeit, keine Kollision zu erleben, ist demnach:

$$P \lesssim \exp\left(-\frac{k(k-1)}{2n}\right) \lesssim \exp(-0.89) \lesssim 0.411$$

⚠ Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Ziehungsergebnis doppelt vorkommt, ist demnach  $Q = 1 - P \approx 0.589$ , also fast 60%.

Das ist viel wahrscheinlicher, als man zunächst vermuten würde. Im deutschen Lotto „6 aus 49“ wurden bei den ersten 5000 Ziehungen (von 1955 bis bis 2011) tatsächlich zweimal die selben sechs Zahlen gezogen: Sowohl am 20.12.1986 als auch am 21.06.1995 waren es die Zahlen 15, 25, 27, 30, 42, 48. Ein solches Vorkommnis ist nach unserer Rechnung durchaus plausibel.

**Mehrfache Hauptgewinne beim Lotto** U415  
Übung

**Aufgabe:** Beim Lotto beträgt die Wkt für 6 Richtige etwa 1:14 Mio. An einem typischen Samstag werden etwa 52 Mio Tipps abgegeben. (1) Wie groß ist die Wkt für  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$  Tipps mit 6 Richtigen? (2) Welche vereinfachenden Annahmen möchten / müssen Sie machen? (3) Welche Approximation ist geeignet? Wie groß ist dabei der Fehler?

**Lösung:**  $n = 52000000$  Versuche mit Trefferwkt  $t = 1/14000000$ . (1) Die Trefferzahl ist binomialverteilt:  $B(n, t)(k) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$  (2) Wir nehmen hier die Tipps als gleichverteilt und unabhängig an. (3) Eine Näherung ist die Poisson-Verteilung  $P(\mu)$  mit  $\mu = nt \approx 3.714$ :

$$B(n, t)(k) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \approx P(\mu)(k) = e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!}$$

😊 Der totale Abstand  $\|B(n, t) - P(\mu)\| \leq nt^2 < 3 \cdot 10^{-7}$  ist extrem klein.

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(\mu)(k)$	.024	.091	.168	.208	.193	.144	.089	.047	.022	.009

**Übertrag und Jackpot beim Lotto** U416  
Übung

**Aufgabe:** Beim Lotto gibt es ca. 140 Mio Möglichkeiten mit Superzahl. Samstags werden etwa 52 Mio Tipps abgegeben, Mittwochs nur 26 Mio. (1) Wie groß ist jeweils die Wkt, dass der Jackpot nicht geknackt wird? (2) Eine Woche lang? zwei? drei? vier? ... (3) Nennen Sie explizit Ihre vereinfachenden Annahmen und die daraus abgeleiteten Modelle.

**Lösung:** (3)  $M = 10 \cdot \binom{49}{6} \approx 14 \cdot 10^7$  Möglichkeiten. Ziehungen sind unabhängig und gleichverteilt, also Trefferwkt  $t = 1/M$ . Wir nehmen hierzu vereinfachend die Tipps als unabhängig und gleichverteilt an. (1) Bei  $n$  Tipps mit Trefferwkt  $t$  wird der Jackpot nicht geknackt mit Wkt

$$q = B(n, t)(0) = (1-t)^n = \left(1 - \frac{nt}{n}\right)^n \approx e^{-nt} = P(nt)(0)$$

Mittwochs  $n_M \cdot t = 26/140 \approx 0.1857$ , also  $q_M = e^{-0.1857} \approx 0.8305$   
 Samstags  $n_S \cdot t = 52/140 \approx 0.3714$ , also  $q_S = e^{-0.3714} \approx 0.6897$   
 (2) Jackpot wird in einer Woche nicht geknackt:  $q = e^{-0.5571} \approx 0.5728$ .  
 Mit Wkt  $q^{k-1}(1-q)$  wird der Jackpot erst in der  $k$ -ten Woche geknackt.  
 😊 Das ist die geometrische Verteilung T4A: Die Wkt fällt exponentiell.

**Aufgabe:** Beweisen Sie die folgende Symmetrieformel:

$$H(N, K, n)(k) = H(N, n, K)(k)$$

- (1) Schreiben Sie beide Seiten explizit aus und vergleichen Sie.  
 (2) Sie wählen aus der Gesamtmenge  $\Omega = \{1, 2, \dots, N\}$  zufällig eine Teilmenge  $A \subseteq \Omega$  mit  $|A| = K$  Elementen und eine Teilmenge  $B \subseteq \Omega$  mit  $|B| = n$  Elementen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gilt  $|A \cap B| = k$ ?

**Lösung:** (1) Wir setzen die Definition ein und vergleichen:

$$H(N, K, n)(k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{K! (N-K)! n! (N-n)!}{k! (K-k)! (n-k)! (N-K-n+k)! N!}$$

$$H(N, n, K)(k) = \frac{\binom{n}{k} \binom{N-n}{K-k}}{\binom{N}{K}} = \frac{n! (N-n)! K! (N-K)!}{k! (n-k)! (K-k)! (N-n-K+k)! N!}$$

(2) Wenn wir erst  $A$  fixieren, finden wir  $H(N, K, n)(k)$ . Wenn wir erst  $B$  fixieren, finden wir  $H(N, n, K)(k)$ . Beide Wkten sind jedoch dieselben!

**Aufgabe:** Sei  $X \sim H(N, K, n)$  hypergeometrisch verteilt. Zeigen Sie:

$$\mathbf{E}[X] = n \frac{K}{N} \quad \text{und} \quad \mathbf{V}[X] = n \frac{K}{N} \frac{N-K}{N} \frac{N-n}{N-1}$$

Diese Formeln sind symmetrisch in  $n$  und  $K$ , ganz wie es sein muss!

**Lösung:** (1) Wir berechnen zunächst den Erwartungswert:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= \sum_{k=0}^n k \mathbf{P}(X=k) = \sum_{k=0}^n k \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} \\ &= \sum_{k=0}^n K \binom{K-1}{k-1} \frac{\binom{N-1-(K-1)}{(n-1)-(k-1)}}{\binom{N}{n} \binom{N-1}{n-1}} \\ &= \frac{nK}{N} \sum_{k=0}^n \underbrace{\binom{K-1}{k-1} \frac{\binom{N-1-(K-1)}{(n-1)-(k-1)}}{\binom{N-1}{n-1}}}_{=1} \end{aligned}$$

☺ Die letzte Summe kumuliert die  $H(N-1, K-1, n-1)$ -Verteilung.

**Aufgabe:** Sei  $X \sim B(n, t)$  binomialverteilt. Zeigen Sie:

$$\mathbf{E}[X] = nt \quad \text{und} \quad \mathbf{V}[X] = nt(1-t)$$

**Lösung:** Klar als Summe unabhängiger Zufallsvariablen, siehe T333! Alternativ gelingt die Rechnung auch direkt: (1) Die Erwartung ist:

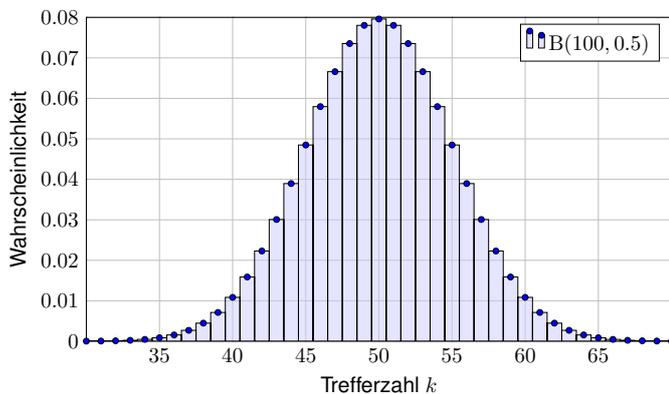
$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= \sum_{k=0}^n k \mathbf{P}(X=k) = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} t^k (1-t)^{n-k} \\ &= nt \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} t^{k-1} (1-t)^{(n-1)-(k-1)} \\ &= nt \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} t^j (1-t)^{(n-1)-j} \end{aligned}$$

☺ Die letzte Summe kumuliert alle Wkten der  $B(n-1, t)$ -Verteilung.

Ein Experiment mit Trefferwkt 0.5 wird 100 mal unabhängig wiederholt.

**Aufgabe:** Was ist hier die Verteilung? Erwartung? Varianz? Streuung?

**Lösung:**  $B(100, 0.5)$ , Erwartung  $\mu=50$ , Varianz  $\sigma^2=25$ , Streuung  $\sigma=5$ .



Satz U4A: diskrete Verteilungen und ihre Kenngrößen

$X \sim$ Verteilung	$\Omega$	$p(k) = \mathbf{P}(\{k\})$	$\mathbf{E}$	$\mathbf{V}$
Geometrisch $G(q)$	$\mathbb{N}_{\geq 1}$	$(1-q)q^{k-1}$	$\frac{1}{1-q}$	$\frac{q}{(1-q)^2}$
Hyperg. $H(N, K, n)$	$\{0, \dots, n\}$	$\frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$n \frac{K}{N}$	$n \frac{K}{N} \frac{N-K}{N} \frac{N-n}{N-1}$
Binomial $B(n, t)$	$\{0, \dots, n\}$	$\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$	$nt$	$nt(1-t)$
Poisson $P(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$e^{-\lambda} \lambda^k / k!$	$\lambda$	$\lambda$

**Aufgabe:** Rechnen Sie dies für die geometrische Verteilung nach.

**Lösung:** Die Rechnung kennen Sie aus dem vorigen Kapitel, Satz T4A.

Für die folgenden Rechnungen nutzen wir insbesondere die Identität

$$k \binom{K}{k} = \frac{K \cdot (K-1) \cdots (K-k+1)}{(k-1) \cdots 1} = K \binom{K-1}{k-1}.$$

(2) Ebenso berechnen wir  $\mathbf{E}[X^2]$ , dazu zunächst  $\mathbf{E}[X(X-1)]$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X(X-1)] &= \sum_{k=0}^n k(k-1) \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} \\ &= \sum_{k=0}^n K(K-1) \binom{K-2}{k-2} \frac{\binom{(N-2)-(K-2)}{(n-2)-(k-2)}}{\binom{N}{n} \binom{N-1}{n-1} \binom{N-2}{n-2}} \\ &= \frac{n(n-1)K(K-1)}{N(N-1)} \sum_{k=0}^n \underbrace{\binom{K-2}{k-2} \frac{\binom{(N-2)-(K-2)}{(n-2)-(k-2)}}{\binom{N-2}{n-2}}}_{=1} \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir schließlich die ersehnte Varianz:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}[X] &= \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = \mathbf{E}[X(X-1)] + \mathbf{E}[X] - \mathbf{E}[X]^2 \\ &= \frac{n(n-1)K(K-1)}{N(N-1)} + \frac{nK}{N} - \frac{n^2 K^2}{N^2} = \frac{nK(N-K)(N-n)}{N^2(N-1)} \end{aligned}$$

☺ Die Rechnung ist länglich, aber jeder einzelne Schritt ist leicht.

(2) Ebenso berechnen wir  $\mathbf{E}[X^2]$ , dazu zunächst  $\mathbf{E}[X(X-1)]$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X(X-1)] &= \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \\ &= \sum_{k=2}^n n(n-1) \binom{n-2}{k-2} t^k (1-t)^{n-k} \\ &= n(n-1)t^2 \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} t^{k-2} (1-t)^{(n-2)-(k-2)} \\ &= n(n-1)t^2 \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} t^j (1-t)^{(n-2)-j} \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir schließlich die ersehnte Varianz:

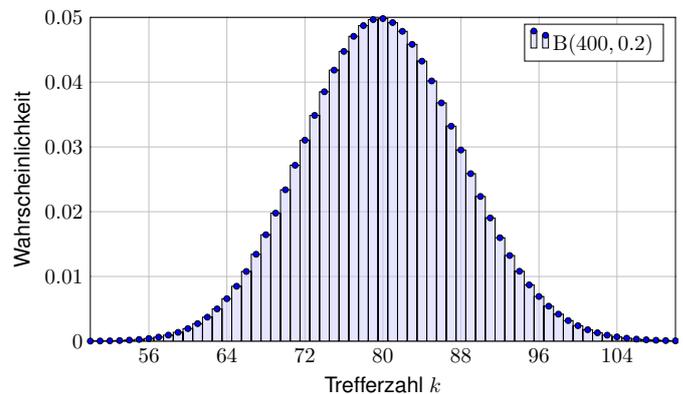
$$\begin{aligned} \mathbf{V}[X] &= \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = \mathbf{E}[X(X-1)] + \mathbf{E}[X] - \mathbf{E}[X]^2 \\ &= n(n-1)t^2 + nt - (nt)^2 = nt(1-t) \end{aligned}$$

☺ Die Rechnung ist länglich, aber jeder einzelne Schritt ist leicht.

Ein Experiment mit Trefferwkt 0.2 wird 400 mal unabhängig wiederholt.

**Aufgabe:** Was ist hier die Verteilung? Erwartung? Varianz? Streuung?

**Lösung:**  $B(400, 0.2)$ , Erwartung  $\mu=80$ , Varianz  $\sigma^2=64$ , Streuung  $\sigma=8$ .



**Aufgabe:** Sei  $X \sim P(\lambda)$  Poisson-verteilt. Zeigen Sie:

$$\mathbf{E}[X] = \lambda \quad \text{und} \quad \mathbf{V}[X] = \lambda$$

**Beweis:** (1) Die Erwartung der Poisson-Verteilung  $P(\lambda)$  ist

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbf{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} = \lambda \end{aligned}$$

- 😊 Die letzte Summe kumuliert alle Wkten der  $P(\lambda)$ -Verteilung.
- 😊 Die Verteilungen werden immer einfacher von hypergeometrisch über binomial zu Poisson, und das spüren wir auch in den Rechnungen.

(2) Ebenso berechnen wir  $\mathbf{E}[X^2]$ , dazu zunächst  $\mathbf{E}[X(X-1)]$ :

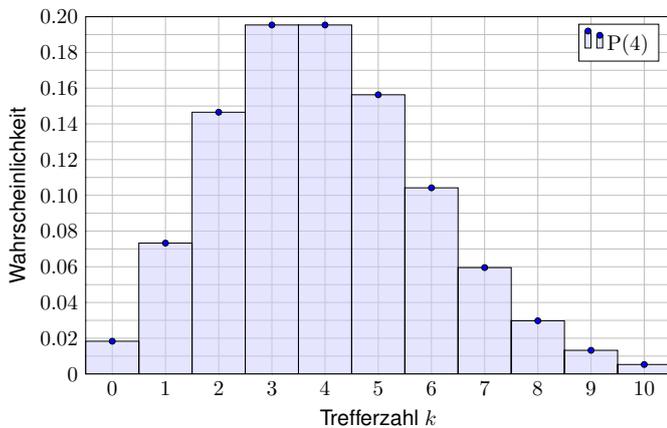
$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X(X-1)] &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \mathbf{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \lambda^2 \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} e^{-\lambda} = \lambda^2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} = \lambda^2 \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir schließlich die ersehnte Varianz:

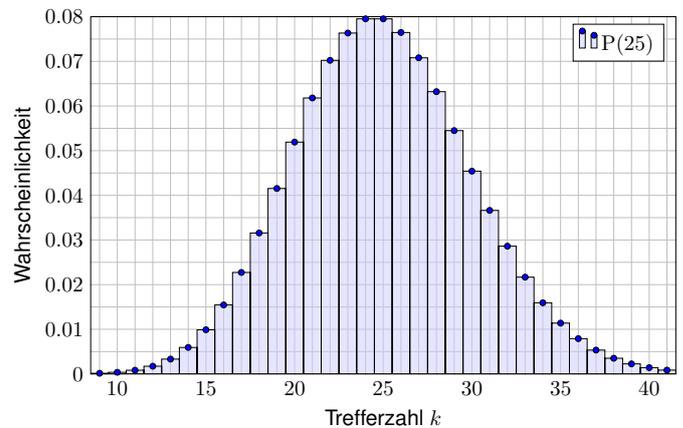
$$\begin{aligned} \mathbf{V}[X] &= \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 \\ &= \mathbf{E}[X(X-1)] + \mathbf{E}[X] - \mathbf{E}[X]^2 \\ &= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda \end{aligned}$$

😊 Die Rechnung ist länglich, aber jeder einzelne Schritt ist leicht.

Die Verteilung  $P(4)$  hat Erwartung  $\mu = 4$  und Streuung  $\sigma = 2$ .



Die Verteilung  $P(25)$  hat Erwartung  $\mu = 25$  und Streuung  $\sigma = 5$ .



Ein klassisches Beispiel für eine Poisson-verteilte Zufallsvariable  $X$  ist die Anzahl der pro Sekunde emittierten  $\alpha$ -Partikel einer radioaktiven Substanz: Die Probe enthält sehr viele Atome, aber jedes Atom zerfällt mit sehr geringer Wahrscheinlichkeit – identisch verteilt und unabhängig von allen anderen. (Bei einer Kettenreaktion sieht es anders aus! [U461])

Messungen an einer Probe Americium 241 (Halbwertszeit 458 Jahre) ergaben für 12169 Intervalle von 1-Sekunden-Länge die folgende Verteilung für die Anzahl  $k$  der Zerfälle (nach Berkson 1966):

$k$	0	1	2	3	4	5	$\Sigma$
$n$	5267	4436	1800	534	111	21	12169

- Aufgabe:** (1) Berechnen Sie den Mittelwert dieser Messdaten.  
 (2) Welche Poisson-Verteilung passen Sie diesem Datensatz an?  
 (3) Was sind die zugehörigen theoretischen (abs./rel.) Häufigkeiten?  
 (4) Was ist der totale Abstand zwischen empirischer und theoretischer Verteilung? Bestätigen oder widerlegen diese Daten die anfängliche Annahme, dass die Zahl der Zerfälle einer Poisson-Verteilung folgt?

(1) Der arithmetische Mittelwert  $\mu$  der gemessenen Zerfallszahlen ist:

$$\frac{0 \cdot 5267 + 1 \cdot 4436 + 2 \cdot 1800 + 3 \cdot 534 + 4 \cdot 111 + 5 \cdot 21}{12169} = \frac{10187}{12169} \approx 0.83713$$

(2) Die Poisson-Verteilung ist gegeben durch  $P(\lambda)(k) = e^{-\lambda} \lambda^k / k!$  und hat Erwartungswert  $\lambda$  (Satz U4A). Daher bietet sich die Wahl  $\lambda = \mu$  an.

(3) Die Verteilung  $P(\mu)$  gibt uns folgende theoretische Häufigkeiten:

$k$	0	1	2	3	4	5	$\geq 6$	Summe
$n$	5267	4436	1800	534	111	21	0	12169
$e^{-\mu} \mu^k / k! \cdot \Sigma$	5268.6	4410.5	1846.1	515.1	107.8	18.0	2.9	12169
$n/\Sigma$	.43282	.36453	.14792	.04388	.00912	.00173	.00000	1
$e^{-\mu} \mu^k / k!$	.43295	.36244	.15170	.04233	.00886	.00148	.00023	1

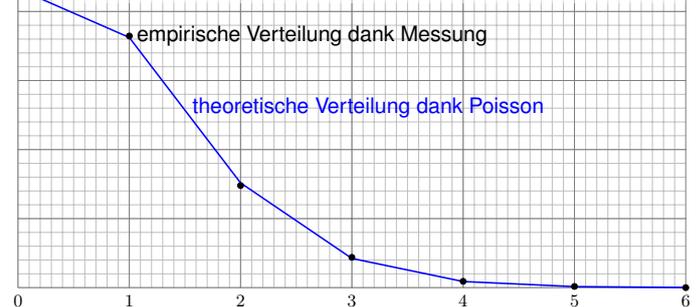
Die erste Zeile zeigt die Anzahl  $k$  der Zerfälle. Die zweite und dritte Zeile zeigen die absolute Häufigkeit empirisch bzw. theoretisch. Die vierte und fünfte Zeile zeigen die relative Häufigkeit empirisch bzw. theoretisch.

(4) Die empirische Verteilung ist  $P: \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$  mit  $P(k) = n(k)/12169$ . Die theoretische Verteilung ist  $P(\mu): \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$  mit  $P(\mu)(k) = e^{-\mu} \mu^k / k!$ . Ihr totaler Abstand ist (gemäß Definition U3D) gegeben durch

$$\begin{aligned} \|P - P(\mu)\| &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{n(k)}{12169} - P(\mu)(k) \right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1.6 + 25.5 + 46.1 + 18.9 + 3.2 + 3.0 + 2.9}{12169} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{101.2}{12169} \approx 0.00416 \end{aligned}$$

Für den totalen Abstand U3D haben wir hier die bequemere zweite Formel verwendet: Für jedes Ergebnis  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$  berechnen wir die Differenz der Wkten  $|P(k) - P(\mu)(k)|$ , summieren auf und teilen durch Zwei. Alternativ können wir auch leicht die erste Formel für das Supremum anwenden: Der Abstand  $|P(A) - P(\mu)(A)|$  wird maximal für  $A \subseteq \mathbb{N}$ , wenn  $A$  alle Ergebnisse  $k$  mit  $P(k) > P(\mu)(k)$  enthält, hier also  $A = \{1, 3, 4, 5\}$ . Der Abstand wird ebenso maximal für das Komplement  $\bar{A} = \{0, 2, \geq 6\}$ . Summiert man die Abweichungen für jedes der Elemente einer dieser Mengen, dann erhält man ebenfalls den totalen Abstand. Diese Aufgabe bietet so die Gelegenheit, den totalen Abstand anhand eines konkreten Beispiels zu begreifen.

Der Abstand zwischen Messwerten und Modell ist sehr gering: Empirische und theoretische Verteilung stimmen gut überein!



Eine perfekte Übereinstimmung ist hier sicher nicht zu erwarten, im Gegenteil wäre sie eher verdächtig: Die Messung ist zufälligen Schwankungen unterworfen! Eine Wiederholung der Messung würde nicht genau dieselben Werte ergeben, sondern nur ähnliche Werte innerhalb der üblichen Schwankungsbreite. Glücklicherweise hilft uns auch hier das Gesetz der großen Zahlen!



**Aufgabe:** (1) Sei  $X \sim B(n, t)$ . Berechnen Sie  $G(z) := \mathbf{E}[z^X]$  für  $z \in \mathbb{C}$ .  
 (2) Berechnen Sie aus  $G$  umgekehrt  $G^{(k)}(0)/k!$  für  $k = 0, 1, 2, \dots$

**Lösung:** (1) Für  $X \sim B(n, t)$  binomialverteilt wissen wir

$$\mathbf{P}(X=k) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}.$$

Als Funktion  $G(z) = \mathbf{E}[z^X]$  erhalten wir ein hübsches Polynom:

$$G(z) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \cdot z^k = (tz + 1 - t)^n$$

(2) Es gilt  $G^{(k)}(z) = n(n-1)\dots(n-k+1)t^k (tz + 1 - t)^{n-k}$ , also

$$\frac{1}{k!} G^{(k)}(0) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}.$$

☺ Das geht ganz leicht und das Ergebnis ist noch dazu sehr einfach! Diesen Trick entwickeln wir nun zu einer allgemeinen Rechenmethode.

**Definition U4D:** erzeugende Funktion einer WVerteilung auf  $\mathbb{Z}$   
 Zur diskreten WVerteilung  $g: \mathbb{Z} \rightarrow [0, 1]$  ist die **erzeugende Funktion**

$$G(z) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(k) z^k = \dots + g(-1)z^{-1} + g(0)z^0 + g(1)z^1 + \dots$$

Ist die Zufallsvariable  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$  verteilt gemäß  $\mathbf{P}(X=k) = g(k)$ , so gilt

$$G(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{P}(X=k) z^k = \mathbf{E}[z^X] \quad \text{für } z \in K(0, \sigma, \rho) \subseteq \mathbb{C}.$$

Aus  $G$  rekonstruieren wir die Verteilung  $g$  durch die Wegintegrale (F2Q)

$$\mathbf{P}(X=k) = g(k) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(0,1)} \frac{G(z)}{z^{k+1}} dz \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}.$$

Im Falle einer Potenzreihe, also  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ , genügen die Ableitungen

$$\mathbf{P}(X=k) = g(k) = \frac{1}{k!} G^{(k)}(0) \quad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

☺ Erzeugende Funktionen bieten uns sehr effiziente Rechenregeln:

**Satz U4E:** Faltung wird zum Produkt erzeugender Funktionen.

Für die Summe  $X + Y$  unabhängiger Zufallsvariablen  $X, Y: \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$  gilt

$$\begin{aligned} G_{X+Y}(z) &= \mathbf{E}[z^{X+Y}] = \mathbf{E}[z^X \cdot z^Y] \\ &= \mathbf{E}[z^X] \cdot \mathbf{E}[z^Y] = G_X(z) \cdot G_Y(z). \end{aligned}$$

**Aufgabe:** Seien  $X \sim B(m, t)$  und  $Y \sim B(n, t)$  unabhängig,  $m, n \in \mathbb{N}$ . Ist die Summe  $S = X + Y$  binomialverteilt? Mit welchen Parametern?

**Lösung:** Die erzeugenden Funktionen haben wir oben ausgerechnet:

$$G_X(z) = (tz + 1 - t)^m \quad \text{und} \quad G_Y(z) = (tz + 1 - t)^n$$

Für die Summe  $S = X + Y$  erhalten wir somit ohne weitere Mühen

$$G_S(z) = G_X(z) \cdot G_Y(z) = (tz + 1 - t)^{m+n}.$$

☺ Somit ist die Summe  $S \sim B(m+n, t)$  tatsächlich binomialverteilt.

☺ Wir erhalten die Faltungsformel  $B(m, t) * B(n, t) = B(m+n, t)$ .

Glücklicherweise lässt sich die Verteilung von  $S$  aus  $G_S$  rekonstruieren! Die erzeugende Funktion  $G_S$  bestimmt die gesamte Verteilung von  $S$ . Alternativ können wir die Verteilung von  $S = X + Y$  direkt ausrechnen durch die entsprechende Reihe, ganz ohne erzeugende Funktionen:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[X + Y = s] &\stackrel{\text{Zerlegung}}{=} \sum_{k+\ell=s} \mathbf{P}[X=k, Y=\ell] \\ &\stackrel{\text{Unabh'keit}}{=} \sum_{k+\ell=s} \mathbf{P}[X=k] \cdot \mathbf{P}[Y=\ell] \\ &\stackrel{\text{binom'vert}}{=} \sum_{k+\ell=s} \binom{m}{k} t^k (1-t)^{m-k} \cdot \binom{n}{\ell} t^\ell (1-t)^{n-\ell} \\ &= t^s (1-t)^{m+n-s} \sum_{k=0}^s \binom{m}{k} \binom{n}{s-k} \\ &= \binom{m+n}{s} \text{ dank Satz U3A} \end{aligned}$$

☺ Dies zeigt  $S \sim B(m+n, t)$  durch direktes Aufsummieren. Unsere erzeugenden Funktionen kodieren dieselbe Information noch effizienter!

**Aufgabe:** (1) Sei  $X \sim P(\lambda)$  mit  $\lambda \geq 0$ . Berechnen Sie  $G(z) = \mathbf{E}[z^X]$ .  
 (2) Seien  $X \sim P(\lambda)$  und  $Y \sim P(\mu)$  unabhängig mit Parametern  $\lambda, \mu \geq 0$ . Ist die Summe  $S = X + Y$  Poisson-verteilt? Mit welchem Parameter?

**Lösung:** (1) Die erzeugende Funktion ist hier denkbar einfach:

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(X=k) \cdot z^k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot z^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^k}{k!} = e^{\lambda(z-1)}$$

☺ Der Exponentialreihe sei Dank! Der Konvergenzradius ist hier  $\infty$ .

(2) Für die Summe  $S = X + Y$  erhalten wir somit ohne weitere Mühen

$$G_S(z) = G_X(z) \cdot G_Y(z) = e^{\lambda(z-1)} \cdot e^{\mu(z-1)} = e^{(\lambda+\mu)(z-1)}.$$

☺ Somit ist die Summe  $S \sim P(\lambda + \mu)$  tatsächlich Poisson-verteilt.

☺ Wir erhalten die schöne Faltungsformel  $P(\lambda) * P(\mu) = P(\lambda + \mu)$ .

Auch hier stellt sich die Frage: Lässt sich die Verteilung von  $S$  aus der Funktion  $G_S$  rekonstruieren? Zum Glück wissen wir  $g(k) = G^{(k)}(0)/k!$ . Die erzeugende Funktion  $G_S$  bestimmt so die gesamte Verteilung von  $S$ .

Alternativ können wir auch hier die Verteilung von  $S$  direkt ausrechnen:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[X + Y = n] &\stackrel{\text{Zerlegung}}{=} \sum_{k+\ell=n} \mathbf{P}[X=k, Y=\ell] \\ &\stackrel{\text{Unabh'keit}}{=} \sum_{k+\ell=n} \mathbf{P}[X=k] \cdot \mathbf{P}[Y=\ell] \\ &\stackrel{\text{Poisson}}{=} \sum_{k+\ell=n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\mu} \frac{\mu^\ell}{\ell!} \\ &= \frac{1}{n!} e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k} = \frac{(\lambda + \mu)^n}{n!} e^{-(\lambda+\mu)} \\ &\quad \text{binomische Formel!} \end{aligned}$$

☺ Dies zeigt  $S \sim P(\lambda + \mu)$  durch direktes Aufsummieren. Unsere erzeugenden Funktionen kodieren dieselbe Information noch effizienter!

☺ Für viele unserer wichtigsten WVerteilungen ist die erzeugende Funktion einfach gebaut. Das ist ein Glücksfall, den wir gerne nutzen.

☹ Für die hypergeometrische Verteilung gilt dies leider nicht.

**Aufgabe:** Berechnen Sie die erzeugende Funktion  $G(z) = \mathbf{E}[z^X]$  für eine geometrisch verteilte Zufallsvariable  $X \sim \text{Geom}(q)$  mit  $0 \leq q < 1$ . Welchen Konvergenzradius hat die Potenzreihe  $G(z)$  in diesem Fall?

**Lösung:** Wir kennen die geometrische Verteilung aus T4A: Für  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  gilt  $\mathbf{P}(X=n) = (1-q)q^{n-1}$ . Die erzeugende Funktion ist demnach:

$$\begin{aligned} G(z) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{P}(X=k) \cdot z^k = \sum_{n=1}^{\infty} (1-q)q^{n-1} z^n \\ &= (1-q)z \sum_{j=0}^{\infty} (qz)^j = \frac{(1-q)z}{1-qz} \quad \text{für } |z| < 1/q \end{aligned}$$

Die rationale Funktion  $G$  hat ihren einzigen Pol im Punkt  $z = 1/q$ . Der Konvergenzradius ist demnach  $\rho = 1/q > 1$ , beliebig dicht an 1!

⚠ Es kann also vorkommen, dass die erzeugende Funktion  $G(z)$  nicht für alle  $z \in \mathbb{C}$  definiert ist. Wegen  $G(1) = 1$  ist die Reihe aber zumindest für alle  $|z| \leq 1$  absolut konvergent. Das genügt für unsere Anwendungen.

**Aufgabe:** Sei  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$  eine ZVariable mit Verteilung  $\mathbf{P}(X=k) = g(k)$  und erzeugender Funktion  $G(z) = \mathbf{E}[z^X] = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)z^k$  für  $z \in \mathbb{C}$ .

(1) Berechnen Sie  $G(1)$ . Ist somit der Konvergenzradius  $\geq 1$ ?

Wie rekonstruieren Sie die Koeffizienten  $g(k)$  aus der Funktion  $G(z)$ ?

(2) Was gilt entsprechend für den allgemeinen Fall  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$ ?

**Lösung:** (1) Als WVerteilung gilt  $g(k) \geq 0$  und  $G(1) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) = 1$ . Dank Majoranten-Kriterium konvergiert  $G(z)$  absolut für alle  $|z| \leq 1$ . Der Konvergenzradius  $\rho$  erfüllt also  $\rho \geq 1$ , und wir erhalten die Funktion

$$G: \overline{B}(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\} \rightarrow \mathbb{C}.$$

Innerhalb des Konvergenzkreises ist  $G$  beliebig oft differenzierbar.

Diese Potenzreihe können wir termweise differenzieren und erhalten  $G^{(k)}(z) = k!g(k)z^0 + \dots$ , also  $g(k) = G^{(k)}(0)/k!$  wie in U4D angegeben.

☺ Die WVerteilung  $g$  und die Funktion  $G$  bestimmen sich gegenseitig.

(2) Allgemein für  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$  ist  $G(z)$  eine Laurent-Reihe. Sie konvergiert mindestens auf der Kreislinie  $|z| = 1$ , allgemein dem Kreisring  $K(0, \sigma, \rho)$ . Der Nullpunkt ist eine Singularität, wir nutzen daher Wegintegrale U4D.

**Satz U4F: Erwartung und Varianz aus erzeugender Funktion**

Sei  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$  eine Zufallsvariable mit Verteilung  $\mathbf{P}(X=k) = g(k)$  und erzeugender Funktion  $G(z) = \mathbf{E}[z^X] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(k) z^k$ . Dann gilt

$$G(1) = 1, \quad G'(1) = \mathbf{E}[X], \quad G''(1) = \mathbf{E}[X(X-1)],$$

falls das erste bzw. zweite Moment existiert. Allgemein erhalten wir so jedes **faktorielle Moment**  $G^{(n)}(1) = \mathbf{E}[X(X-1) \cdots (X-n+1)]$ , falls die zugehörige Reihe konvergiert. Speziell für die Varianz folgt daraus:

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = \mathbf{E}[X(X-1)] + \mathbf{E}[X] - \mathbf{E}[X]^2 = G''(1) + G'(1) - G'(1)^2$$

**Aufgabe:** Rechnen Sie dies nach. **Lösung:** Die  $n$ -te Ableitung ist

$$G^{(n)}(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} k(k-1) \cdots (k-n+1) g(k) z^{k-n}$$

Einsetzen von  $z = 1$  liefert die angegebenen Formeln, Konvergenz vorausgesetzt. Dieser Trick beschert uns die wichtigsten Kenngrößen.

**Aufgabe:** Berechnen Sie auf diese Weise erneut Erwartung und Varianz (1) der Binomialverteilung  $B(n, t)$  und (2) der Poisson-Verteilung  $P(\lambda)$  sowie (3) der geometrischen Verteilung  $\text{Geom}(q)$ .

**Lösung:** (1) Für  $X \sim B(n, t)$  haben wir  $G(z) = (tz + 1 - t)^n$ . Damit gilt:

$$G'(z) = nt(tz + 1 - t)^{n-1} \implies \mathbf{E}(X) = G'(1) = nt$$

$$G''(z) = n(n-1)t^2(tz + 1 - t)^{n-2} \implies$$

$$\mathbf{V}(X) = G''(1) + G'(1) - G'(1)^2 = nt(1-t)$$

(2) Für  $X \sim P(\lambda)$  haben wir  $G(z) = e^{\lambda(z-1)}$ . Daraus folgt:

$$G'(z) = \lambda e^{\lambda(z-1)} \implies \mathbf{E}(X) = G'(1) = \lambda$$

$$G''(z) = \lambda^2 e^{\lambda(z-1)} \implies$$

$$\mathbf{V}(X) = G''(1) + G'(1) - G'(1)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

☺ Das entspricht den zuvor berechneten Werten, siehe U421, U425: Die direkte Berechnung führt ebenso zum Ziel, erzeugende Funktionen organisieren die Rechnung jedoch besonders geschickt und effizient.

Dieser Trick funktioniert ebenso für die geometrische Verteilung: (3) Auch für  $X \sim \text{Geom}(q)$  kennen wir die erzeugende Funktion

$$G(z) := \sum_{k=1}^{\infty} (1-q)q^{k-1}z^k = \frac{(1-q)z}{1-qz}$$

Es gilt  $G(1) = 1$ . Die erste Ableitung liefert uns die Erwartung:

$$G'(z) = \frac{1-q}{(1-qz)^2} \implies \mathbf{E}(X) = G'(1) = \frac{1}{1-q}$$

Die zweite Ableitung liefert uns die Varianz:

$$G''(z) = \frac{2q(1-q)}{(1-qz)^3} \implies$$

$$\mathbf{V}(X) = G''(1) + G'(1) - G'(1)^2 = \frac{q}{(1-q)^2}$$

☺ Das entspricht den zuvor direkt berechneten Werten aus Satz T4A. Auch dort war die Berechnung der erforderlichen Potenzreihen trickreich. Erzeugende Funktionen organisieren die Rechnung besonders effizient.

**Aufgabe:** Seien  $X \sim \text{Geom}(q)$  und  $Y \sim \text{Geom}(p)$  unabhängig mit  $0 \leq q, p < 1$ . Ist die Summe  $S = X + Y$  ebenfalls geometrisch verteilt?

**Lösung:** Die erzeugenden Funktionen haben wir oben ausgerechnet:

$$G_X(z) = \frac{(1-q)z}{1-qz} \quad \text{und} \quad G_Y(z) = \frac{(1-p)z}{1-pz}$$

Für die Summe  $S = X + Y$  erhalten wir dank Unabhängigkeit sofort

$$G_S(z) = G_X(z) \cdot G_Y(z) = \frac{(1-q)(1-p)z^2}{(1-qz)(1-pz)}$$

Wäre  $S$  geometrisch verteilt, also  $S \sim \text{Geom}(r)$  mit  $0 \leq r < 1$ , so wäre

$$G_S(z) = \frac{(1-r)z}{1-rz}$$

Der Vergleich zeigt:  $S$  ist nicht geometrisch verteilt. (Warum nicht?)

☺ Die Familie der geometrisch verteilten Zufallsvariablen ist also nicht stabil unter Faltung: Das sehen wir leicht dank erzeugender Funktionen! Die Faltungen untersuchen wir in der nächsten Aufgabe und Satz U4G.

Wir wiederholen ein Zufallsexperiment mit Trefferwahrscheinlichkeit  $p$  und Gegenwkt  $q = 1 - p$ . Sei  $X_r$  der Zeitpunkt des  $r$ -ten Treffers.

**Aufgabe:** (1) Berechnen Sie erneut  $\mathbf{P}[X_1=n]$  und allgemein  $\mathbf{P}[X_r=n]$ . Konstruieren Sie hierzu einen geeigneten WRaum als Grundlage.

(2) Berechnen Sie die erzeugende Funktion  $G_r(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{P}[X_r=n]z^n$ . Was erkennen Sie daran? Folgern Sie hieraus Erwartung und Varianz.

**Lösung:** (1) Wir finden die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbf{P}[X_1=n] = pq^{n-1} \quad \text{und} \quad \mathbf{P}[X_r=n] = \binom{n-1}{r-1} p^r q^{n-r}$$

Wir nennen dies die **negative Binomialverteilung**, kurz  $X_r \sim \text{NB}(r, p)$ .

Genauer: Ein Einzelexperiment liefert das Ergebnis 0 (Niete) mit Wkt  $q$  oder 1 (Treffer) mit Wkt  $p$ . Als WRaum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  nutzen wir die Menge  $\Omega$  aller 0-1-Folgen  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots)$  und dem WMaß erzeugt durch  $\mathbf{P}[\{(\omega_1, \dots, \omega_n, *)\}] = p^r q^{n-r}$ , wobei  $r = \omega_1 + \dots + \omega_n$  die Trefferzahl ist. Die Bedingung  $X_r(\omega) = n$  bedeutet  $\omega_n = 1$  und  $\omega_1 + \dots + \omega_{n-1} = r - 1$ . Hierzu gibt es  $\binom{n-1}{r-1}$  disjunkte Möglichkeiten, jede davon mit Wkt  $p^r q^{n-r}$ .

(2) Für  $X_1 \sim \text{NB}(1, p) = \text{Geom}(q)$  kennen wir die erzeugende Funktion:

$$G_1(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{P}[X_1=k] \cdot z^k = \sum_{n=1}^{\infty} pq^{n-1}z^n = pz \sum_{j=0}^{\infty} (qz)^j = \frac{pz}{1-qz}$$

Für den allgemeinen Fall  $X_r \sim \text{NB}(r, p)$  finden wir entsprechend:

$$G_r(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{P}[X_r=k] \cdot z^k = \sum_{n=r}^{\infty} \binom{n-1}{r-1} p^r q^{n-r} z^n$$

$$= (pz)^r \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+r-1}{r-1} (qz)^j = (pz)^r \left[ \sum_{i=0}^{\infty} \binom{qz}{i} \right]^r = \left( \frac{pz}{1-qz} \right)^r$$

☺ Dies ist das  $r$ -fache Produkt von  $G_1(z)$ . Wir erhalten die Faltungsformeln  $\text{NB}(r, p) = \text{Geom}(q)^{*r}$  und  $\text{NB}(r, p) * \text{NB}(s, p) = \text{NB}(r+s, p)$ .

☺ Anschaulich: Die Wartezeit  $X_r = W_1 + \dots + W_r$  auf den  $r$ -ten Treffer ist die Summe der Wartezeiten  $W_1, \dots, W_r \sim \text{Geom}(q)$  auf den jeweils nächsten Treffer. Diese sind ohne Gedächtnis, also unabhängig!

Wir fassen unsere Ergebnisse in folgendem schönen Satz zusammen.

**Satz U4G: negative Binomialverteilung**

Wir wiederholen ein Zufallsexperiment mit Trefferwahrscheinlichkeit  $p$  und Gegenwkt  $q = 1 - p$ . Für den Zeitpunkt  $X_r$  des  $r$ -ten Treffers gilt

$$\mathbf{P}[X_1=n] = pq^{n-1} \quad \text{und} \quad \mathbf{P}[X_r=n] = \binom{n-1}{r-1} p^r q^{n-r}$$

Wir nennen dies die **negative Binomialverteilung**, kurz  $X_r \sim \text{NB}(r, p)$ . Im Spezialfall  $r = 1$  ist dies die geometrische Verteilung,  $X_1 \sim \text{Geom}(q)$ .

Für die erzeugende Funktion  $G_r(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{P}[X_r=n] \cdot z^n$  gilt

$$G_1(z) = \frac{pz}{1-qz} \quad \text{und} \quad G_r(z) = \left( \frac{pz}{1-qz} \right)^r$$

Das zeigt  $\text{NB}(r, p) = \text{Geom}(q)^{*r}$  und  $\text{NB}(r, p) * \text{NB}(s, p) = \text{NB}(r+s, p)$ . Die mittlere Wartezeit bis zum  $r$ -ten Treffer und ihre Varianz sind also

$$\mathbf{E}[X_r] = r/p \quad \text{und} \quad \mathbf{V}[X_r] = rq/p^2$$

**Aufgabe:** Sie werfen unabhängig wiederholt einen fairen sechsseitigen Würfel bis Sie im  $n$ -ten Versuch das hundertste Mal eine „6“ erhalten.

(1) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit  $p(n)$  als Funktion von  $n$  sowie Erwartung und Varianz der Wartezeit bis zum hundertsten Treffer.

(2) Mit welcher Wkt gelangen 100 Treffer mit höchstens 710 Würfeln? Welche Abschätzung liefert Chebychev? der LGS/ZGS? Was gilt exakt?

**Lösung:** (1) Die Wkt ist negativ-binomial-verteilt mit Parametern  $p = 1/6$  und  $r = 100$ , explizit  $p(n) = \text{NB}(100, 1/6)(n) = \binom{n-1}{99} (1/6)^{100} (5/6)^{n-100}$ . Dank Satz U4G gilt  $\mu = r/p = 600$  und  $\sigma^2 = rq/p^2 = 3000$  also  $\sigma \approx 55$ .

(2) Chebychev liefert eine grobe aber bequeme erste Abschätzung:

$$\mathbf{P}[X_r > \mu + 2\sigma] \leq \frac{1}{1+2^2} = 20\% \quad \text{also} \quad \mathbf{P}[X_r \leq \mu + 2\sigma] \geq 80\%$$

Später erhalten wir noch wesentlich bessere Näherungen durch den lokalen Grenzwertsatz V3A und den zentralen Grenzwertsatz W1D.

Die exakte Wkt ist  $\sum_{n=100}^{710} p(n) = \sum_{k=100}^{710} \binom{710}{k} (1/6)^k (5/6)^{710-k}$ : mühsam! Die Summe 0.97309... lassen wir durch einen Computer berechnen.

Die erzeugende Funktion  $G_X(z) = \mathbf{E}[z^X]$  ist eine konzise Schreibweise für die Verteilung einer Zufallsvariablen  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$ . Die Methode ist sehr effizient, wenn wir  $\mathbf{E}[X] = G'(1)$  berechnen wollen, aber die explizite Verteilung von  $X$  kompliziert ist. Hier ist ein frappierendes Beispiel:

**Aufgabe:** Seien  $X_1, X_2, \dots \sim B(1, p)$  unabhängige Experimente und  $T$  die Wartezeit zum ersten Erfolgslauf der Länge  $r$ , ausgeschrieben:

$$T(\omega) := \inf\{k \geq r \mid X_k(\omega) = X_{k-1}(\omega) = \dots = X_{k-r+1}(\omega) = 1\}$$

Berechnen Sie rekursiv  $\mathbf{P}[T=n]$  und daraus die Erwartung  $\mathbf{E}[T]$ .

**Lösung:** (1) Für  $n < r$  gilt  $\mathbf{P}[T=n] = 0$ . Für  $n = r$  gilt  $\mathbf{P}[T=r] = p^r$ . Für  $n > r$  zerlegen wir: An einer Stelle  $k \in \{1, 2, \dots, r\}$  muss die erste 0 auftreten, danach noch Wartezeit  $n - k$ . Somit gilt die Rekursionsformel

$$\mathbf{P}[T=n] = \sum_{k=1}^r p^{k-1}(1-p)\mathbf{P}[T=n-k].$$

☺ Ein Computer kann damit alle Werte  $\mathbf{P}[T=n]$  rekursiv berechnen. Geschlossene Formel ist schwierig... gelingt aber als erz. Funktion!

(2) Sei  $G(z) := \mathbf{E}[z^T] = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbf{P}[T=n]$ . Einsetzen von (1) ergibt:

$$\begin{aligned} G(z) &\stackrel{\text{Rek}}{=} z^r p^r + \sum_{n>r} z^n \sum_{k=1}^r p^{k-1}(1-p)\mathbf{P}[T=n-k] \\ &\stackrel{\text{Distr}}{=} (zp)^r + z(1-p) \sum_{k=1}^r (zp)^{k-1} \sum_{n>r} z^{n-k} \mathbf{P}[T=n-k] \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} (zp)^r + z(1-p) \frac{1-(zp)^r}{1-zp} G(z) \end{aligned}$$

☺ Die erzeugende Funktion löst wunderbar die Rekursion! Wir finden:

$$G(z) = \frac{z^r p^r (1-zp)}{1-z+z^{r+1}p^r(1-p)}$$

Wir erhalten so explizit die gesuchte Funktion  $G$ . Bei Bedarf rekonstruieren wir daraus alle ihre Koeffizienten  $\mathbf{P}[T=n]$  durch Partialbruchzerlegung und Entwicklung. Im Spezialfall  $r = 1$  ist dies die vertraute geometrische Verteilung, siehe Satz T4A und die erzeugende Funktion U447.

☺ Für den Erwartungswert  $\mathbf{E}[T]$  genügt uns einmaliges Ableiten:

$$\mathbf{E}[T] \stackrel{\text{U4E}}{=} G'(1) = \dots = \frac{1-p^r}{p^r(1-p)}$$

Wir nutzen oft Summen  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$  unabhängiger Zufallsvariablen. Manchmal ist selbst die Länge  $n$  dieser Summe zufällig! Ausführlich:

**Satz U4H: Zufallssummen zufälliger Länge**

Seien  $T, X_1, X_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$  unabhängige Zufallsvariablen. Wir setzen

$$S := \sum_{k=1}^T X_k, \quad \text{also} \quad S : \Omega \rightarrow \mathbb{N} : \omega \mapsto S(\omega) := \sum_{k=1}^{T(\omega)} X_k(\omega).$$

Alle  $X_k$  seien gleichverteilt. Dann gilt  $G_S = G_T \circ G_X$ . Dank Kettenregel folgt daraus  $\mathbf{E}(S) = \mathbf{E}(T)\mathbf{E}(X)$  und  $\mathbf{V}(S) = \mathbf{V}(T)\mathbf{E}(X)^2 + \mathbf{E}(T)\mathbf{V}(X)$ .

**Nachrechnen:** Dank U4E wissen wir  $G_{X_1+\dots+X_n}(z) = G_X(z)^n$ , also:

$$\begin{aligned} G_S(z) &\stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbf{P}[S=k] \quad \stackrel{\text{Zerlegung}}{\text{Unabh.keit}} \quad \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}[T=n] \mathbf{P}[S_n=k] \\ &\stackrel{\text{Distr}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}[T=n] \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbf{P}[S_n=k] \stackrel{\text{U4E}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}[T=n] G_X(z)^n \stackrel{\text{Def}}{=} G_T(G_X(z)) \end{aligned}$$

Erwartung und Varianz finden wir durch Ableiten dank Kettenregel:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[S] &\stackrel{\text{U4E}}{=} G'_S(1) = G'_T(G_X(1)) G'_X(1) = G'_T(1) G'_X(1) = \mathbf{E}[T] \mathbf{E}[X] \\ \mathbf{E}[S(S-1)] &\stackrel{\text{U4E}}{=} G''_S(1) = G''_T(G_X(1)) G'_X(1)^2 + G'_T(G_X(1)) G''_X(1) \\ \mathbf{V}[S] &\stackrel{\text{U4E}}{=} G''_S(1) + G'_S(1) - G'_S(1)^2 = \dots = \mathbf{V}[T] \mathbf{E}[X]^2 + \mathbf{E}[T] \mathbf{V}[X] \end{aligned}$$

☺ Erzeugende Funktionen bieten eine bequem-konzise Schreibweise.

**Aufgabe:** Eine radioaktive Probe emittiert  $T \sim P(\lambda)$  Teilchen/Zeit. U429

Im Messgerät wird jedes mit Wkt  $p$  registriert, unabhängig voneinander. Berechnen Sie Verteilung, Erwartung, Varianz der registrierten Teilchen.

**Lösung:** Wir haben  $X_1, X_2, \dots \sim B(1, p)$ , also  $G_X(z) = (zp - p + 1)$ . Für  $T \sim P(\lambda)$  wissen wir  $G_T(z) = e^{\lambda(z-1)}$ . Für die Summe  $S = \sum_{k=1}^T X_k$  folgt dank U4H dann  $G_S(z) = G_T(G_X(z)) = e^{\lambda p(z-1)}$ , also  $S \sim P(\lambda p)$ .

Wir finden die Erwartung  $\mathbf{E}(S) = \lambda p = \mathbf{E}(T)\mathbf{E}(X)$  und die Varianz  $\mathbf{V}(S) = \lambda p = \mathbf{V}(T)\mathbf{E}(X)^2 + \mathbf{E}(T)\mathbf{V}(X)$ , so wie es sein muss.

☺ Leistungsstarke Theorie ermöglicht effiziente Berechnung.

Wir beginnen mit einem Individuum. In seiner kurzen Lebenszeit erzeugt es  $X$  Nachkommen, mit  $\mathbf{P}[X=k] = p_k$  und  $G(z) := \mathbf{E}[z^X] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$ . Alle Nachkommen vermehren sich ebenso, unabhängig voneinander. Die Zufallsvariable  $Z_n$  sei die Anzahl der Individuen in Generation  $n$ .

Francis Galton (1822–1911) und Henry William Watson (1827–1903) untersuchten um 1873 das Aussterben aristokratischer Familiennamen. Gleiches gilt für bedrohte Tierarten, die Ausbreitung von Genen und Memen, Epidemien und sozial-virale Phänomene, Computer-Viren, Kettenbriefe, ebenso künftige Weltraummissionen oder Nanotechnologie mit selbstreplizierenden Maschinen. Kernspaltung, ob als Bombe oder als Reaktor, folgt demselben Mechanismus der Kettenreaktion: Ein freies Neutron erzeugt zufällig weitere. Im deterministischen Fall gilt  $p_n = 1$  für ein  $a \in \mathbb{N}$  und somit sicher  $Z_n = a^n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Fortan schließen wir diesen trivialen Sonderfall aus.

**Satz U4I: Aussterbewahrscheinlichkeit nach Galton-Watson**

Die Aussterbewkt  $q \in [0, 1]$  ist die kleinste Lösung der Fixpunktgleichung

$$G(q) = q.$$

Aus der Erwartung  $\mu := G'(1) > 1$  folgt  $q < 1$ : Überleben ist möglich. Aus Erwartung  $\mu \leq 1$  (und  $p_1 < 1$ ) folgt  $q = 1$ : fast sicheres Aussterben.

**Aufgabe:** Führen Sie das Modell und den Satz sorgfältig aus. **Lösung:**

Das Individuum  $i \in \mathbb{N}$  in Generation  $n \in \mathbb{N}$  erzeugt  $X_{n,i}$  Nachkommen. Zur Vereinfachung nehmen wir hier an, alle  $X_{n,i}$  sind unabhängig und identisch verteilt, mit derselben erzeugenden Funktion  $G(z) = \mathbf{E}[z^{X_{n,i}}]$ . Aus  $Z_n$  Individuen in Generation  $n$  werden so  $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i}$ .

Wir beginnen mit einem Individuum, also  $Z_0 = 1$  und  $H_0(z) = z$ . Die Anzahl  $Z_1 = X_{0,1}$  hat die erzeugende Funktion  $H_1(z) = G(z)$ . Rekursiv ist  $H_n = G \circ H_{n-1} = G^{n \circ}$  die  $n$ -fache Komposition dank U4H.

Dieser **Galton-Watson-Prozess**  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Markov-Kette mit Zustandsraum  $\mathbb{N}$  und Übergangswkten  $\mathbf{P}[Z_n=b \mid Z_{n-1}=a] = p_b^a$ .

Aus  $Z_n = 0$  folgt  $Z_{n+1} = 0$ : Aussterben ist ein absorbierender Zustand. Die gesuchte Wkt  $q_n := \mathbf{P}[Z_n=0] = H_n(0)$  ist somit monoton wachsend.

Rekursiv gilt  $q_n = G(q_{n-1})$ . Wir suchen den Grenzwert  $q_n \nearrow q \in [0, 1]$ . Dank Stetigkeit gilt  $G(q) = G(\lim q_n) = \lim G(q_n) = \lim q_{n+1} = q$ .

☺ Mit dieser **Fixpunktgleichung** können wir  $q$  leicht berechnen. Ein anfänglich schwieriges Problem wird dadurch elegant gelöst.

Im Falle  $p_0 + p_1 = 1$  entspricht der Prozess  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dem Warten auf die erste Null wiederholter 0–1-Experimente: geometrische Verteilung T4A. Wir fordern daher  $p_a > 0$  für mindestens ein  $a \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ . Die erz. Funktion  $G : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  ist dann strikt konvex. Die Fixpunktgleichung  $G(q) = q$  hat neben  $G(1) = 1$  somit höchstens eine weitere Lösung  $q \in [0, 1]$ .

**Zellteilung:** Eine Zelle teilt sich ( $p_2 > 0$ ), überlebt ( $p_1$ ) oder stirbt ( $p_0$ ). In unserem Modell gilt dann  $p_0 + p_1 + p_2 = 1$  und  $p_a = 0$  für alle  $a \geq 3$ .

**Aufgabe:** Berechnen Sie die Aussterbewkt  $q$  als Funktion von  $p_0, p_1, p_2$ .

**Lösung:** Die erz. Funktion  $G(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2$  ist quadratisch.

Der Fixpunkt  $q = G(q)$  ist dank Mitternachtsformel nach Vereinfachung

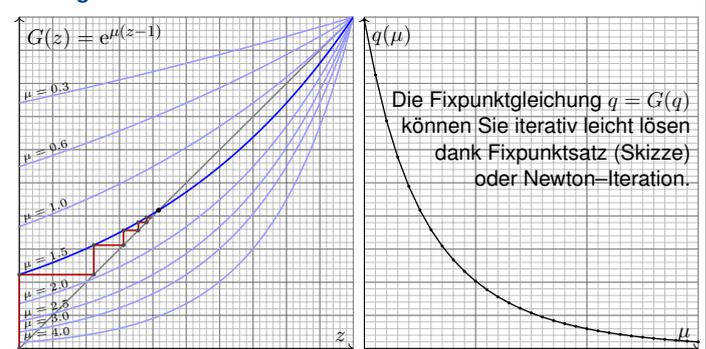
$$q = \frac{(p_0 + p_2) - |p_0 - p_2|}{2p_2} = \begin{cases} 1 & \text{falls } p_0 \geq p_2, \\ p_0/p_2 & \text{falls } p_0 \leq p_2. \end{cases}$$

Aus  $p_0 = p_2$  folgt  $q = 1$ . Das ist bemerkenswert und nicht intuitiv.

Allgemein gilt  $\mathbf{E}[Z_n] = \mu^n$  dank Satz U4H. Im subkritischen Fall  $\mu < 1$  ist die Aussterbezeit  $T = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid Z_n = 0\}$  endlich mit Wkt  $q = 1$ . Genauer gilt  $\mathbf{P}[T > n] = \mathbf{P}[Z_n \geq 1] \leq \mu^n$  dank Markov-Ungleichung T3G.

**Aufgabe:** Illustrieren Sie die Argumente für poisson-verteilte  $X \sim P(\mu)$ . Bestimmen Sie graphisch  $q_n = \mathbf{P}[Z_n=0]$  und den Grenzwert  $q_n \nearrow q$ . Berechnen und zeichnen Sie die Aussterbewkt  $q(\mu)$  für  $\mu \in [1, 4]$ .

**Lösung:** Hier aktivieren Sie wunderbar Ihre numerischen Methoden:



Kapitel V

Der lokale Grenzwertsatz

*Ich glaube nicht an Fügung und Schicksal, als Techniker bin ich gewohnt mit den Formeln der Wahrscheinlichkeit zu rechnen. [...] „Hast du gewusst?“ frage ich, „dass die Mortalität bei Schlangenbiss nur drei bis zehn Prozent beträgt?“ [...] Ich fragte Hanna, wieso sie nicht an Statistik glaubt, statt dessen aber an Schicksal und Derartiges. „Du mit deiner Statistik!“ sagt sie. „Wenn ich hundert Töchter hätte, alle von einer Viper gebissen, dann ja! Dann würde ich nur drei bis zehn Töchter verlieren. Erstaunlich wenig!“*  
 Max Frisch (1911–1991), *Homo faber* (1957)

Inhalt dieses Kapitels V

- 1 Kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen
  - Kontinuierliche Verteilungen
  - Wahrscheinlichkeitsräume
  - Eindimensionale Normalverteilung
- 2 Erwartung, Varianz, Streuung
  - Kumulative Verteilungsfunktion
  - Zufallsvariablen, Erwartung und Varianz
  - Verteilungen und ihre Kenngrößen
- 3 Der lokale Grenzwertsatz (LGS)
  - Von der Binomial- zur Normalverteilung
  - Der lokale Grenzwertsatz  $B(n, t) \approx N(\mu, \sigma^2)$
  - Erste Anwendungsbeispiele
- 4 Fazit: der lokale Grenzwertsatz
  - Zusammenfassung und Verständnisfragen
  - Weitere Aufgaben und Anwendungsbeispiele
  - Kleine Stichprobe und Intervallschätzung

Motivation und Zielsetzung

Wir kennen bereits einen einfachen und nützlichen Grenzwertsatz: Das **Gesetz der kleinen Zahlen** besagt  $B(n, \lambda/n) \rightarrow P(\lambda)$  für  $n \rightarrow \infty$ . Bei seltenen Ereignissen nähert sich die Binomialverteilung  $B(n, t)$  der (viel einfacheren) Poisson-Verteilung  $P(nt)$ . Wir nutzen genauer:

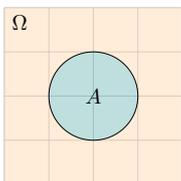
$$B(n, t) \approx P(nt) \quad \text{mit Fehlerschranke} \quad \|B(n, t) - P(nt)\| \leq nt^2$$

Dies lohnt sich vor allem für kleine Wkten  $t$ , also seltene Ereignisse. Der **lokale Grenzwertsatz** (LGS) hingegen nützt für beliebige  $0 < t < 1$  und approximiert Binomialverteilungen durch die **Normalverteilung**: Es gilt  $B(n, t) \approx N(\mu, \sigma^2)$  mit  $\mu = nt$  und  $\sigma^2 = nt(1-t)$ , genauer:

$$\sum_{k=a}^b \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \int_{\xi=\alpha}^{\beta} \frac{e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}} d\xi + \delta$$

mit Integrationsgrenzen  $\alpha = (a - 1/2 - \mu)/\sigma$  und  $\beta = (b + 1/2 - \mu)/\sigma$ . Hierbei ist  $\mu = nt$  die **Erwartung** und  $\sigma = \sqrt{nt(1-t)}$  die **Streuung**. Der Approximationsfehler  $\delta$  ist beschränkt durch  $|\delta| < 1/(6\sigma)$  für  $\sigma \geq 5$ . Für  $n \rightarrow \infty$  gilt  $\sigma \rightarrow \infty$ , also  $\delta \rightarrow 0$ : Die Näherung wird beliebig gut.

Beispiel zur kontinuierlichen Gleichverteilung



**Aufgabe:** Sie werfen zufällig und gleichverteilt Dartpfeile ins Quadrat  $\Omega = [-2, +2] \times [-2, +2]$ . Mit welcher Wahrscheinlichkeit treffen Sie die Kreisscheibe  $A = \{x \in \Omega \mid |x| \leq 1\}$ ?

**Lösung:** Hier ist  $\text{vol}_2(\Omega) = 16$  und  $\text{vol}_2(A) = \pi$ , also gilt  $P(A) = \text{vol}_2(A) / \text{vol}_2(\Omega) = \pi/16 \approx 0.196$ .

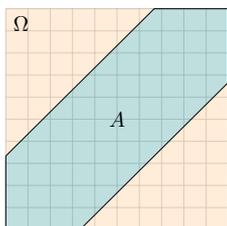
Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses  $A \subseteq \Omega$  ist hier proportional zu seiner Fläche  $\text{vol}_2(A)$ . Die Wkt genau den Mittelpunkt  $(0, 0)$  zu treffen ist gleich Null! Gleiches gilt für jeden Punkt: Die Elementarwahrscheinlichkeiten  $P(\{\omega\})$  sind alle gleich Null! Das Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  entspricht hier nicht der Anzahl (Summation), sondern dem Volumen (Integration).

So können Sie experimentell  $\pi$  bestimmen: Werfen Sie 1000 Reiskörner auf das Quadrat  $\Omega$  und zählen Sie... Wenn Sie etwa 200 in  $A$  finden, so spräche dies für  $\pi \approx 0.2 \cdot 16 = 3.2$ . (Für  $\pi$  gibt es genauere und schnellere Methoden.) Diese Art von *Monte-Carlo Simulation* wird in der Praxis häufig vor allem für komplexe Modelle eingesetzt, die von vielen Parametern abhängen. Oft sind die Rechnungen in Einzelfällen (für fest vorgegebene Parameterwerte) leicht möglich, aber eine geschlossene Formulierung für alle Fälle nicht oder nur schwierig möglich. Durch zufällige Wahl der Parameter und wiederholte Simulation gewinnt man einen Eindruck des typischen Verhaltens. Die Methode geht zurück auf Stanislaw Ulam und John von Neumann im Manhattan Projekt.

Beispiel zu kontinuierlicher Wahrscheinlichkeit

Zwei Personen verabreden sich zwischen 12 und 13 Uhr zum Essen: Jede kommt zu einem zufälligen Zeitpunkt (unabhängig, gleichverteilt). Jede wartet bis zu 20 Minuten, spätestens aber bis 13 Uhr.

**Aufgabe:** Wie groß ist die Wkt, dass sich beide treffen?



**Lösung:** Ankunftszeiten  $(t_1, t_2) \in [0, 1]^2 = \Omega$ . Ereignis „beide Personen treffen sich“:

$$A = \{ (t_1, t_2) \in \Omega \mid |t_1 - t_2| \leq \frac{1}{3} \}$$

Bei kontinuierlicher Gleichverteilung ist die Wkt proportional zur Fläche:

$$P(A) = \frac{\text{vol}_2(A)}{\text{vol}_2(\Omega)} = \frac{5}{9} \approx 56\%$$

Dies ist kein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum! Wir können nicht jedem Punkt  $\omega \in \Omega$  eine feste positive Wahrscheinlichkeit  $P(\{\omega\}) > 0$  zuordnen, denn dann wäre  $P(\Omega) = \infty$ . Wir müssen deshalb jedem Punkt  $\omega \in \Omega$  die Wahrscheinlichkeit  $P(\{\omega\}) = 0$  zuordnen. Das geht aber nicht mit den Rechenregeln für diskrete WRäume, denn dann wäre  $P(\Omega) = 0$ . Näherung und Simulation mit diskreten Ankunftszeiten, etwa gleichverteilt in  $\{0, 1, \dots, 59\}$ .

Vorgehensweise

Poissons Gesetz der kleinen Zahlen (Satz U3E) aus dem letzten Kapitel klärt präzise den Übergang von Binomial- zu Poisson-Verteilungen. Der lokale Grenzwertsatz V3A klärt nun den Übergang von Binomial- zu Normalverteilungen und erlaubt erfreulich genaue Fehlerschranken. Im nächsten Kapitel werden wir allgemeiner für Summen unabhängiger Zufallsvariablen den zentralen Grenzwertsatz (ZGS W1D) formulieren.

Diese Grenzwertsätze haben in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine zentrale Bedeutung: Im Kleinen, bei einzelnen Experimenten regiert der Zufall ungezügelt; im Großen, bei vielen Experimenten muss er sich den Gesetzen beugen. Als grundlegende Näherungen sind diese Werkzeuge deshalb in allen praktischen Anwendungen der Statistik unentbehrlich. Stochastische Werkzeuge helfen, mindern Risiken, optimieren Chancen!

Auch in diesem Kapitel formuliere ich Grenzwertsätze gleich mit möglichst expliziten und praktisch anwendbaren Fehlerschranken. Dies ermöglicht, die üblichen Approximationen nicht nur blind oder naiv nach Gefühl anzuwenden, sondern bequem ihre Güte abzuschätzen.

Kontinuierliche Gleichverteilung

Diskrete Erinnerung: Sei  $\Omega$  eine endliche Menge mit Elementezahl  $|\Omega|$ , kurz  $0 < |\Omega| < \infty$ . Hierauf haben wir die **diskrete Gleichverteilung** T1E

$$P : \mathfrak{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1] : A \mapsto P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Definition V1A: kontinuierliche Gleichverteilung

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  eine messbare Menge mit  $0 < \text{vol}_n(\Omega) < \infty$ . Hierauf haben wir die **kontinuierliche Gleichverteilung**

$$P : \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow [0, 1] : A \mapsto P(A) = \frac{\text{vol}_n(A)}{\text{vol}_n(\Omega)}$$

Im diskreten Fall ist  $\mathfrak{P}(\Omega)$  die Familie *aller* Teilmengen  $A \subseteq \Omega$ . [U207](#) Im kontinuierlichen Fall ist  $\mathcal{B}(\Omega)$  die Familie *aller messbaren* Teilmengen  $A \subseteq \Omega$ . [A102](#) Diese wird erzeugt von Quadern  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ; zum Beispiel sind alle offenen und alle abgeschlossenen Mengen im  $\mathbb{R}^n$  messbar.

Extrem exotische Teilmengen  $A \subseteq \Omega$  lassen sich nicht messen. Aus diesem Grund *müssen* wir das WMaß  $P$  einschränken auf die Familie  $\mathcal{B}(\Omega) \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$  der messbaren Teilmengen  $A \subseteq \Omega$ . Diese Vorsichtsmaßnahme ist technischer Natur und spielt im Folgenden keine weitere Rolle.

Was bedeutet hier Gleichverteilung?

Ausführlich: Der Zeitpunkt  $t_1$  liegt im Intervall  $[0, 1]$  der Länge 1. Die Wahrscheinlichkeit, dass  $t_1$  in  $[a, b]$  liegt, ist demnach

$$P(t_1 \in [a, b]) = b - a.$$

Ebenso für  $t_2$ . Dank Unabhängigkeit ist die Wahrscheinlichkeit, dass  $(t_1, t_2)$  in  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  liegt, gegeben durch das Produkt:

$$P((t_1, t_2) \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]) = P(t_1 \in [a_1, b_1], t_2 \in [a_2, b_2]) = P(t_1 \in [a_1, b_1]) \cdot P(t_2 \in [a_2, b_2]) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2).$$

Das legt die Wkten für alle Rechtecke fest als Produktmaß. Allgemein gilt: Bei Gleichverteilung ist die Wahrscheinlichkeit, dass  $(t_1, t_2)$  in  $A$  liegt, proportional zum Flächeninhalt  $\text{vol}_2(A)$ :

$$P(A) = \frac{\text{vol}_2(A)}{\text{vol}_2(\Omega)}$$

Im Beispiel gilt  $\text{vol}_2(\Omega) = 1$  und  $\text{vol}_2(\Omega \setminus A) = 4/9$  und  $\text{vol}_2(A) = 5/9$ . Interpretation: In etwa 56% aller Fälle werden sich die beiden treffen.

Im diskreten Fall ist es oft nützlich oder meist auch nötig, neben der Gleichverteilung noch andere interessante Verteilungen zu betrachten. Eine **diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung** auf einer Menge  $\Omega$  ist gegeben durch ihre Elementarwahrscheinlichkeiten, also eine Funktion

$$p: \Omega \rightarrow [0, 1] \quad \text{mit Gesamtmasse} \quad \sum_{x \in \Omega} p(x) = 1.$$

Diese definiert ein **diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß**

$$\mathbf{P}: \mathfrak{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]: A \mapsto \mathbf{P}(A) := \sum_{x \in A} p(x).$$

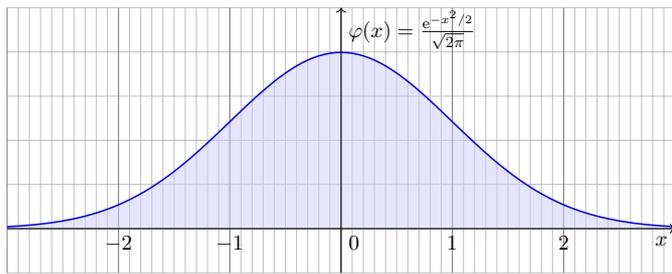
Hierbei ist die Potenzmenge  $\mathfrak{P}(\Omega)$  die Familie aller Teilmengen  $A \subseteq \Omega$ .

**Beispiel:** Die diskrete Gleichverteilung auf  $\Omega$  mit  $0 < |\Omega| < \infty$  entsteht durch Summation über die konstante Verteilung  $p = 1/|\Omega|$ .

Weitere wichtige Beispiele kennen wir aus dem vorigen Kapitel U: Hypergeometrische, Binomial- und Poisson-Verteilungen auf  $\Omega = \mathbb{N}$ .

Wir betrachten nun neben diskreten auch kontinuierliche WVerteilungen. Die Summe der Elementarwkten wird dabei ersetzt durch ein Integral.

Beispiel: eindimensionale Standard-Normalverteilung



Zentrales Beispiel ist die **Gaußsche Glockenkurve**

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Dies ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte: Es gilt  $\varphi \geq 0$  und  $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = 1$  dank C2G. Wir nennen  $\varphi$  die **Dichte der Standard-Normalverteilung**.

Definition V1B: kontinuierliche WDichte und WMaß

Eine **kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung** oder **WDichte** auf einer Ergebnismenge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ist eine messbare Funktion

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \text{mit Gesamtmasse} \quad \int_{\Omega} f(x) dx = 1.$$

Diese definiert ein **kontinuierliches Wahrscheinlichkeitsmaß**

$$\mathbf{P}: \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow [0, 1]: A \mapsto \mathbf{P}(A) := \int_A f(x) dx.$$

Hierbei ist  $\mathcal{B}(\Omega)$  die Familie aller messbaren Mengen  $A \subseteq \Omega$ .

**Beispiel:** Die Gaußsche Glockenkurve  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  ist eine WDichte.

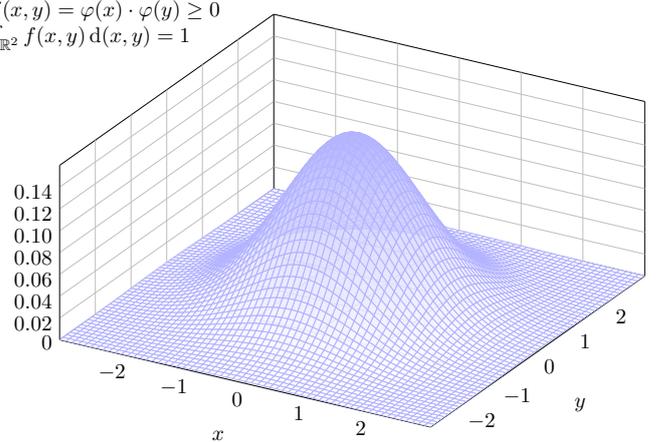
☺ Allgemein genügt auch hier  $0 < \int_{\Omega} \tilde{f}(x) dx < \infty$  mit Normierung.

**Beispiel:** Die kont. Gleichverteilung auf  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $0 < \text{vol}_n(\Omega) < \infty$  entsteht durch Integration über die konstante Dichte  $f = 1/\text{vol}_n(\Omega)$ . In diesem Falle gilt einfach  $\mathbf{P}(A) = \text{vol}_n(A)/\text{vol}_n(\Omega)$  wie in V1A.

Beispiel: zweidimensionale Standard-Normalverteilung

$$f(x, y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y) \geq 0$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d(x, y) = 1$$



Wahrscheinlichkeitsräume: allgemeiner Fall

Bisher kennen wir zwei Typen von Wahrscheinlichkeitsräumen:

(1) Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume  $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \mathbf{P})$ , wobei

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{x \in A} p(x) \quad \text{mit Elementarwkt } p: \Omega \rightarrow [0, 1].$$

(2) Kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsräume  $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathbf{P})$ , wobei

$$\mathbf{P}(A) = \int_{x \in A} f(x) dx \quad \text{mit WDichte } f: \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Im diskreten Fall ist die Wkt in einzelnen, höchstens abzählbar vielen Punkten konzentriert, im zweiten Fall ist die Wkt kontinuierlich verteilt. Auch Mischungen aus diskret und kontinuierlich sind ebenso möglich.

**Ziel:** Wir suchen eine einheitliche Formulierung für alle Fälle. Hierzu fassen wir die wesentlichen Rechenregeln zusammen und erhalten Kolmogorovs Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung (V1c).

*Historische Einordnung.* David Hilbert fragte 1900 im sechsten seiner berühmten 23 Probleme: *Wie kann die Physik axiomatisiert werden?* Ursprünglich ging es in erster Linie um WTheorie und Mechanik. Für die Physik ist die allgemeine Frage weiterhin offen, für die WTheorie fand Kolmogorov 1933 eine Lösung. Die mathematischen Grundlagen hierzu lieferte Lebesgue.

Wahrscheinlichkeitsräume: allgemeiner Fall

Ein Zufallsexperiment beschreiben wir durch seine **Ergebnismenge**  $\Omega$ . Die beobachtbaren **Ereignisse**  $A \subseteq \Omega$  bilden eine Familie  $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ . Das **Wahrscheinlichkeitsmaß** ist eine Abbildung  $\mathbf{P}: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ . Es ordnet jedem Ereignis  $A \in \mathcal{A}$  sein WMaß  $\mathbf{P}(A) \in [0, 1]$  zu.

Um damit vernünftig rechnen zu können, benötigen wir folgendes:

0 Unmögliches Ereignis: Es gilt  $\emptyset \in \mathcal{A}$  und

$$\mathbf{P}(\emptyset) = 0.$$

1 Sicheres Ereignis: Es gilt  $\Omega \in \mathcal{A}$  und

$$\mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

2 Komplement: Aus  $A \in \mathcal{A}$  folgt  $(\Omega \setminus A) \in \mathcal{A}$  und

$$\mathbf{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathbf{P}(A).$$

3 Monotonie: Für alle  $A, B \in \mathcal{A}$  gilt

$$A \subseteq B \implies \mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B).$$

Wahrscheinlichkeitsräume: allgemeiner Fall

Mengenvereinigung und Maßaddition müssen wir sorgsam formulieren:

4 Vereinigung: Aus  $A, B \in \mathcal{A}$  folgt  $(A \cup B), (A \cap B) \in \mathcal{A}$  und

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B).$$

5 Paarweise Additivität: Für alle  $A, B \in \mathcal{A}$  mit  $A \cap B = \emptyset$  gilt

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B).$$

6 Endliche Additivität: Aus  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  folgt  $A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{A}$ , und bei disjunkter Vereinigung addieren sich die Wkten:

$$\mathbf{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mathbf{P}(A_1) + \dots + \mathbf{P}(A_n).$$

7 Abzählbare Additivität: Aus  $A_0, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$  folgt  $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$ , und bei disjunkter Vereinigung addieren sich die Wkten:

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(A_k) \quad \text{falls } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j.$$

Diese Wunschliste ist noch redundant: (1,2,7) implizieren alle anderen. Übung! Wir extrahieren daher nur diese grundlegenden Eigenschaften.

Wahrscheinlichkeitsräume: allgemeiner Fall

Das führt uns zu folgender Definition; sie ist genial-einfach und flexibel.

Definition V1c: Wahrscheinlichkeitsraum, Kolmogorov 1933

Ein **Wahrscheinlichkeitsraum**  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  besteht aus

- einer **Ergebnismenge**  $\Omega$ ,
- einer **Ereignismenge**  $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$  und
- einem **Wahrscheinlichkeitsmaß**  $\mathbf{P}: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ ,

mit folgenden grundlegenden Eigenschaften, wie oben erklärt:

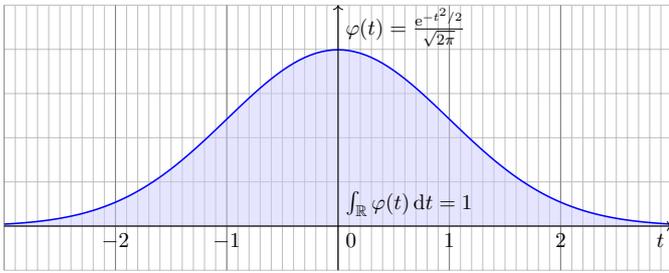
1 **Normierung:** Es gilt  $\Omega \in \mathcal{A}$  und  $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ .

2 **Komplemente:** Aus  $A \in \mathcal{A}$  folgt  $(\Omega \setminus A) \in \mathcal{A}$ .

3  **$\sigma$ -Additivität:** Aus  $A_0, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$  folgt  $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$ , sowie

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(A_k) \quad \text{falls } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j.$$

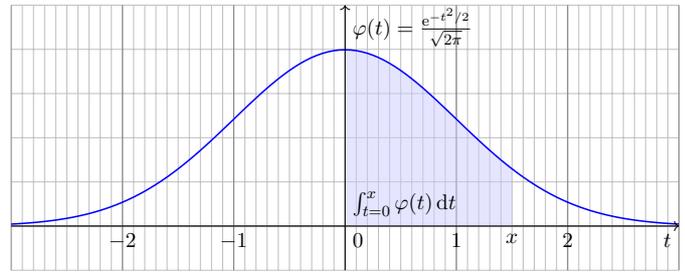
☺ Ein WRaum ist ein Maßraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  im Sinne der Definition A1B mit der Normierung  $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ . Diese Definition extrahiert und präzisiert die grundlegenden Rechenregeln, auf denen alle weiteren aufbauen.



Die Dichte der Standard-Normalverteilung ist

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^k k!}$$

Dies ist eine WDichte, denn  $\varphi \geq 0$  und  $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt = 1$  dank Satz C2g, mit Erwartung  $\int_{\mathbb{R}} t \varphi(t) dt = 0$  [V239] und Varianz  $\int_{\mathbb{R}} t^2 \varphi(t) dt = 1$  [V240].



☹️ Es gibt keine elementare Formel [B145] für die Integralfunktion

$$\int_{t=0}^x \varphi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t=0}^x e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2^k k! (2k+1)}$$

😊 Die Potenzreihe hingegen ist wunderbar einfach und effizient! Die numerische Auswertung liefert die folgende hilfreiche Tabelle.

**Aufgabe:** Approximieren Sie  $\varphi$  für  $x \in [-4, 4]$  auf 7 Nachkommastellen.

**Lösung:** Wir entwickeln die Funktion  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  in ihre Potenzreihe und integrieren termweise! Für  $k \geq 8$  ist dies eine Leibniz-Reihe (B147).

Zur Näherung durch eine endliche Summe schätzen wir den Fehler ab. Eine geeignete Approximation ist dann folgendes Polynom vom Grad 61:

$$\int_{t=0}^x \varphi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{30} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2^k k! (2k+1)} + \delta \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{mit } |\delta| < 0.4 \cdot 10^{-7} \\ \text{für alle } x \in [-4, 4] \end{array} \right.$$

Diese Näherung kann ein Computer leicht auswerten und tabellieren. In Python gelingt dies elegant wie folgt und liefert die ersehnte Tabelle.

```

1 def normal_distribution(x):
2     sum = term = x / sqrt(2*pi) # Summe und Term für k=0
3     factor = (-1) * x*x / 2    # nützlicher gemeinsamer Faktor
4     for k in range(1,31):
5         term *= factor / k    # Fortführung des Terms
6         sum += term / (2*k+1) # Summe bis k
7     return sum
    
```

	x+0.00	x+0.01	x+0.02	x+0.03	x+0.04	x+0.05	x+0.06	x+0.07	x+0.08	x+0.09
x=0.0	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41309	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49205	0.49229	0.49254	0.49278	0.49301	0.49324	0.49346	0.49367	0.49388
2.5	0.49397	0.49413	0.49428	0.49443	0.49456	0.49469	0.49481	0.49492	0.49503	0.49513
2.6	0.49514	0.49527	0.49540	0.49552	0.49563	0.49574	0.49584	0.49593	0.49602	0.49610
2.7	0.49618	0.49626	0.49634	0.49641	0.49648	0.49654	0.49660	0.49666	0.49671	0.49676
2.8	0.49681	0.49685	0.49689	0.49693	0.49697	0.49700	0.49703	0.49706	0.49709	0.49712
2.9	0.49718	0.49721	0.49724	0.49727	0.49730	0.49732	0.49734	0.49736	0.49738	0.49740
3.0	0.49744	0.49746	0.49748	0.49750	0.49752	0.49753	0.49754	0.49755	0.49756	0.49757
3.1	0.49758	0.49759	0.49760	0.49761	0.49762	0.49763	0.49764	0.49765	0.49766	0.49767
3.2	0.49768	0.49769	0.49770	0.49771	0.49772	0.49773	0.49774	0.49775	0.49776	0.49777

Diese Tabelle werden wir häufig nutzen! Ablesebeispiele:

$$\int_0^1 \varphi(t) dt = 0.34134$$

$$\int_0^{1.5} \varphi(t) dt = 0.43319$$

$$\int_0^{1.53} \varphi(t) dt = 0.43699$$

Ablese eines Integrals der Form  $\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) dt$  mit  $\alpha < 0 < \beta$ :

$$\begin{aligned} \int_{-1.23}^{2.34} \varphi(t) dt &= \int_{-1.23}^0 \varphi(t) dt + \int_0^{2.34} \varphi(t) dt \\ &= \int_0^{1.23} \varphi(t) dt + \int_0^{2.34} \varphi(t) dt \\ &= 0.39065 + 0.49036 = 0.88101 \end{aligned}$$

Ablese eines Integrals der Form  $\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) dt$  mit  $0 < \alpha < \beta$ :

$$\begin{aligned} \int_1^2 \varphi(t) dt &= \int_0^2 \varphi(t) dt - \int_0^1 \varphi(t) dt \\ &= 0.47725 - 0.34134 = 0.13591 \end{aligned}$$

Ebenso nutzen Sie auch die **kumulative Verteilungsfunktion**

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt = \frac{1}{2} + \int_0^x \varphi(t) dt$$

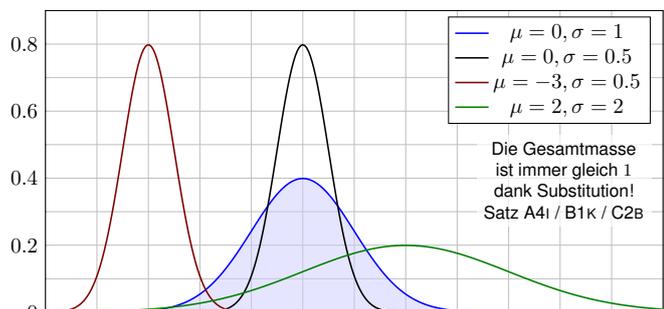
Ablesebeispiele:

$$\begin{aligned} \Phi(0.00) &= 0.50000 \\ \Phi(1.00) &= 0.84134 \\ \Phi(1.50) &= 0.93319 \\ \Phi(1.53) &= 0.93699 \end{aligned}$$

😊 Wahrscheinlichkeiten berechnen Sie leicht mit der nötigen Übung.

Sei  $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$  mit  $\sigma > 0$ . Die Dichte der **Normalverteilung**  $N(\mu, \sigma^2)$  ist

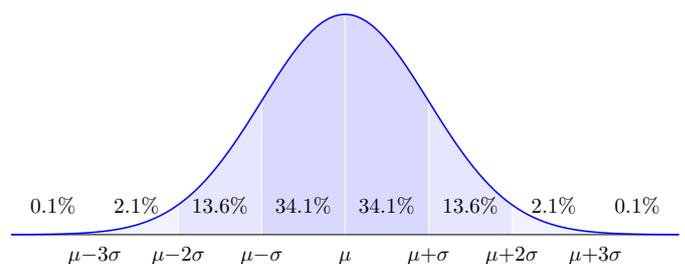
$$\varphi_{\mu, \sigma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



Die Gesamtmasse ist immer gleich 1 dank Substitution! Satz A4i / B1k / C2b

Normalverteilungen: Kennst du eine, kennst du alle! Eine Tabelle genügt.

Die Normalverteilung  $N(\mu, \sigma^2)$  ist extrem konzentriert um  $\mu$ :



Jede Normalverteilung  $N(\mu, \sigma^2)$  ist symmetrisch um  $\mu$ . Gemäß unserer Tabelle gilt:

$$\int_{x=\mu}^{\mu+\sigma} \varphi_{\mu, \sigma}(x) dx \approx 0.34134, \quad \int_{x=\mu}^{\mu+2\sigma} \varphi_{\mu, \sigma}(x) dx \approx 0.47725, \quad \int_{x=\mu}^{\mu+3\sigma} \varphi_{\mu, \sigma}(x) dx \approx 0.49865$$

Das bedeutet ausformuliert: Die Masse liegt zu etwas über 68.2% in der  $1\sigma$ -Umgebung um  $\mu$ , zu über 95.4% in der  $2\sigma$ -Umgebung um  $\mu$ , und zu über 99.7% in der  $3\sigma$ -Umgebung um  $\mu$ . Chybehev T3F liefert universell nur die größeren Ungleichungen  $\geq 0\%$ ,  $\geq 75\%$ ,  $\geq 88\%$ .

**Definition V2A: kumulative Verteilungsfunktion**

Sei  $\mathbf{P} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathbb{R}$ .  
Hierzu definieren wir die **kumulative Verteilungsfunktion**

$$F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \text{ durch } F(x) := \mathbf{P} ]-\infty, x].$$

Wichtige Spezialfälle: Für jede diskrete Verteilung  $p : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  gilt

$$F(x) = \sum_{t \leq x} p(t).$$

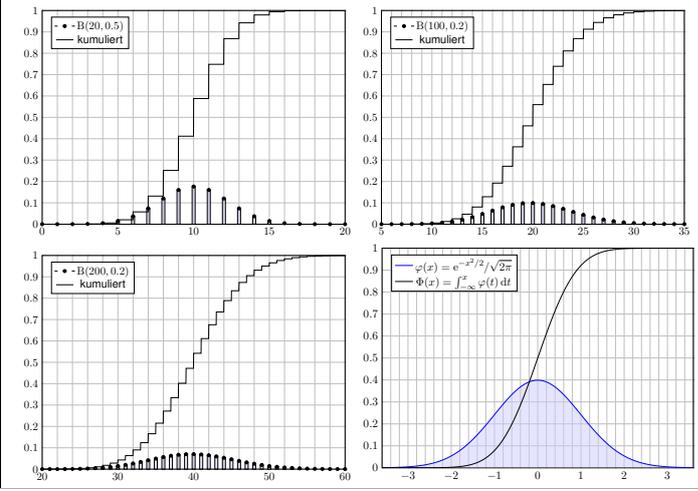
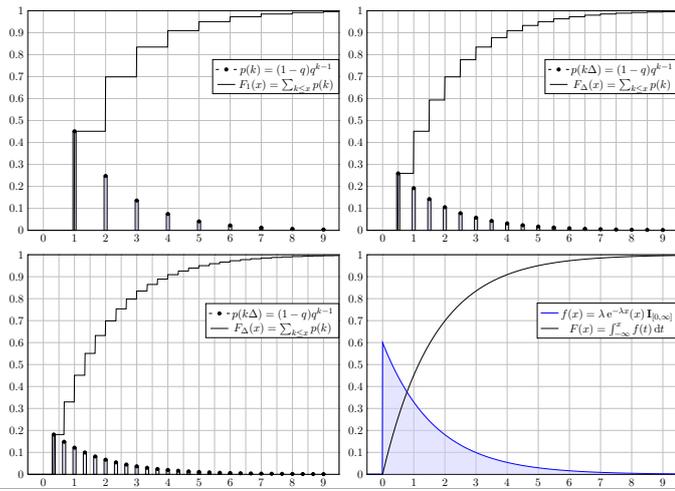
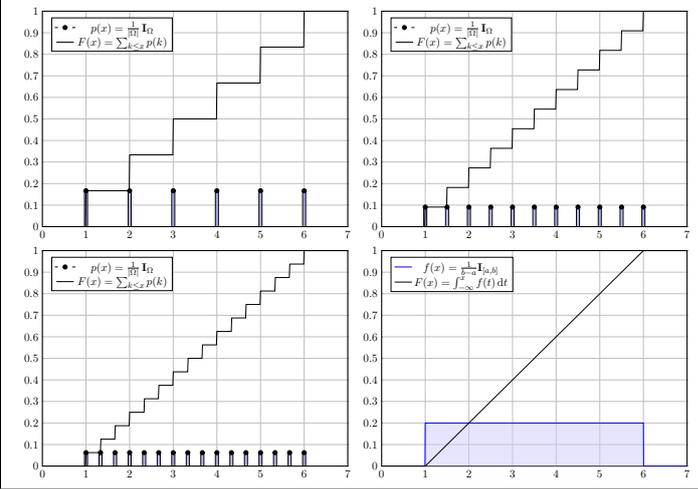
Für jede kontinuierliche Verteilung mit Dichte  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  gilt

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

😊 Diese Beschreibung ist einheitlich, bequem und übersichtlich.

Sauber unterscheiden und benennen: Auf englisch heißt  $f$  *probability density function* (pdf) und  $F$  *cumulative distribution function* (cdf).

Aus  $F$  lässt sich  $\mathbf{P}$  rekonstruieren gemäß  $\mathbf{P}(]a, b]) = F(b) - F(a)$  und  $\mathbf{P}(\{a\}) = F(a) - \lim_{x \nearrow a} F(x)$  im Falle einer Sprungstelle, siehe V2B.



**Satz V2b: WMAße auf  $\mathbb{R}$  und ihre Verteilungsfunktionen**

Zu jedem WMAß  $\mathbf{P} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$  haben wir seine Verteilungsfunktion

$$F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] : x \mapsto F(x) := \mathbf{P} ]-\infty, x].$$

Sie erfreut sich folgender Eigenschaften:

- 1  $F$  ist monoton wachsend, für alle  $x \leq y$  gilt  $F(x) \leq F(y)$ .
- 2 Für  $x \searrow -\infty$  gilt  $F(x) \searrow 0$  und für  $x \nearrow +\infty$  gilt  $F(x) \nearrow 1$ .
- 3  $F$  ist rechtsseitig stetig, d.h. für  $x \searrow a$  gilt  $F(x) \searrow F(a)$ .

Umgekehrt definiert jede solche Funktion  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  eindeutig ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbf{P} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$  mit  $\mathbf{P}(]a, b]) = F(b) - F(a)$ .

In jedem Punkt  $a \in \mathbb{R}$  gilt  $\mathbf{P}(\{a\}) = F(a) - \lim_{x \nearrow a} F(x)$ .

Genau dann ist  $F$  stetig in  $a$ , wenn  $\mathbf{P}(\{a\}) = 0$  gilt.

Genau dann ist  $F$  differenzierbar mit stetiger Ableitung  $f = F'$ , wenn  $\mathbf{P}$  durch eine stetige Dichte  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  gegeben ist.

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  ein WRaum und hierin  $A_0, A_1, A_2, \dots, A \in \mathcal{A}$  Ereignisse.  
Wir schreiben  $A_k \nearrow A$ , falls  $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$  und  $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$  gilt.  
Wir schreiben  $A_k \searrow A$ , falls  $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$  und  $A = \bigcap_{k=0}^{\infty} A_k$  gilt.

**Lemma V2c: Ausschöpfung und Eingrenzung**

Jedes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbf{P}$  ist in folgendem Sinne stetig:

$$\begin{aligned} \text{Aus } A_k \nearrow A \text{ folgt } \mathbf{P}(A_k) \nearrow \mathbf{P}(A), \\ \text{Aus } A_k \searrow A \text{ folgt } \mathbf{P}(A_k) \searrow \mathbf{P}(A). \end{aligned}$$

**Beweis:** Wir setzen  $B_0 := A_0$  und  $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$  für  $k = 1, 2, 3, \dots$

Es gilt  $A_n = \bigcup_{k=0}^n B_k$  und  $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} B_k$ . Dank abzählbarer Additivität

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(B_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(B_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n).$$

Die zweite Aussage folgt aus der ersten durch Komplementbildung.

Für  $x < y$  gilt  $]-\infty, x] \subseteq ]-\infty, y]$  und daher

$$F(x) = \mathbf{P} ]-\infty, x] \leq \mathbf{P} ]-\infty, y] = F(y).$$

Für  $x \rightarrow \pm\infty$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} F(n) = \lim_{n \rightarrow -\infty} \mathbf{P} ]-\infty, n] = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} ]-\infty, n]\right) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P} ]-\infty, n] = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} ]-\infty, n]\right) = \mathbf{P}(\mathbb{R}) = 1$$

Zur rechtsseitigen Stetigkeit:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} F\left(x + \frac{1}{n}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} ]-\infty, x + \frac{1}{n}] \\ &= \mathbf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} ]-\infty, x + \frac{1}{n}]\right) = \mathbf{P} ]-\infty, x] = F(x) \end{aligned}$$

Umkehrung: Ist  $F$  gegeben, so setzen wir  $\mathbf{P}(]a, b]) = F(b) - F(a)$ .  
Die Familie der messbaren Mengen wird von diesen Intervallen erzeugt.  
Daraus folgt die Eindeutigkeit und (mit mehr Mühe) die Existenz von  $\mathbf{P}$ .

Zur linksseitigen Stetigkeit:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} F\left(x - \frac{1}{n}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} ]-\infty, x - \frac{1}{n}] \\ &= \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} ]-\infty, x - \frac{1}{n}]\right) = \mathbf{P} ]-\infty, x] \end{aligned}$$

Dies ist genau dann gleich  $F(x) = \mathbf{P} ]-\infty, x]$ , wenn  $\mathbf{P}(\{x\}) = 0$  gilt.

Allgemein gilt in jedem Punkt  $\mathbf{P}(\{a\}) = F(a) - \lim_{x \nearrow a} F(x)$ .

Hat  $\mathbf{P}$  eine stetige Dichte  $f$ , so gilt  $F' = f$  nach dem HDI, denn

$$F(x) = \mathbf{P} ]-\infty, x] = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Ist umgekehrt  $F$  stetig differenzierbar mit Ableitung  $f = F'$ , so gilt diese Gleichung. Für jede messbare Menge  $A \subseteq \mathbb{R}$  gilt dann

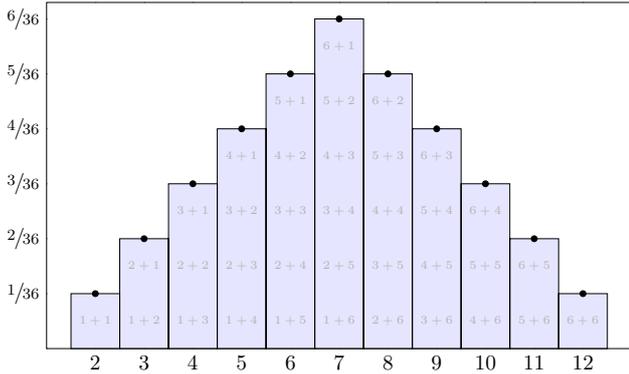
$$\mathbf{P}(A) = \int_A f(t) dt.$$

Somit ist das WMAß  $\mathbf{P}$  kontinuierlich mit stetiger Dichte  $f$ .

### Erinnerung: Augensumme von zwei Würfeln

V209  
Erinnerung

Ergebnisse  $\omega \in \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$  mit Gleichverteilung  $P(\{\omega\}) = \frac{1}{36}$ .  
 Augenzahlen  $X_1, X_2: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $X_1(\omega_1, \omega_2) = \omega_1$  und  $X_2(\omega_1, \omega_2) = \omega_2$ .  
 Augensumme  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $X = X_1 + X_2$ . Die Verteilung von  $X$  ist:

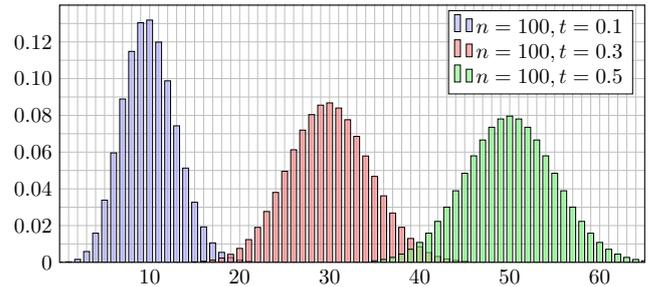


### Erinnerung: unabhängig wiederholte Tests

V210  
Erinnerung

Ergebnisse sind  $n$ -Tupel  $\omega \in \Omega = \{0, 1\}^n$ . Die WVerteilung ist hier  
 $P(\{\omega\}) = t^k(1-t)^{n-k}$  bei Trefferzahl  $k = \omega_1 + \dots + \omega_n$ .  
 Für  $X_i: \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  mit  $X_i(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \omega_i$  gilt  $X_i \sim B(1, t)$ .  
 Für  $X = X_1 + \dots + X_n$  gilt  $X \sim B(n, t)$ , d.h.  $X$  hat die Verteilung

$$P(X=k) = P(\{\omega \mid X(\omega) = k\}) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$$



### Zufallsvariablen: allgemeine Definition

V211  
Ausführung

Oft interessiert bei Experimenten nicht das detaillierte Ergebnis  $\omega \in \Omega$ , sondern nur eine reelle Größe  $X(\omega) \in \mathbb{R}$ , die vom Ergebnis  $\omega$  abhängt.

#### Definition V2D: Zufallsvariable

Wir betrachten einen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .  $\sqrt{112}$   
 Eine reelle **Zufallsvariable** ist eine messbare Funktion  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .  
 Diese definiert auf  $\mathbb{R}$  eine WVerteilung  $P_X: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$  durch

$$P_X(B) = P(X \in B) := P(X^{-1}(B)) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\})$$

Diese nennen wir die **Verteilung** der Zufallsvariablen  $X$  (Bildmaß).  
 Wir sagen hierzu  **$X$  ist  $P_X$ -verteilt** und schreiben kurz  $X \sim P_X$ .

Wir stellen uns  $\Omega$  als Lostopf vor; zu jedem Los  $\omega \in \Omega$  ist  $X(\omega) \in \mathbb{R}$  der Gewinn. Die Wkt  $P$  ist auf die verschiedenen Ergebnisse  $\omega \in \Omega$  verteilt, entsprechend  $P_X$  auf die möglichen Gewinne. Messbarkeit von  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine technisch notwendige Bedingung. Sie bedeutet: Für jedes Intervall  $B \subseteq \mathbb{R}$  ist die Urbildmenge  $A = X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\} = \{X \in B\}_1$  in  $\Omega$  messbar, das heißt  $A \in \mathcal{A}$ . Diese Vorsichtsmaßnahme ist mathematisch-technischer Natur: Sie stellt sicher, dass die Definition von  $P_X$  und alle weiteren Rechnungen möglich sind.

### Zufallsvariablen: Anschauung und Bedeutung

V212  
Ausführung

Wir betrachten statt reeller auch vektorwertige Zufallsvariablen

$$X = (X_1, \dots, X_n): (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, P_X)$$

Allgemeiner: Jede Zufallsvariable ist eine messbare Abbildung

$$X: (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\Omega', \mathcal{B}, P_X)$$

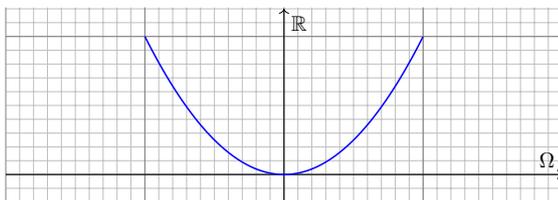
Anschaulich wird die Massenverteilung von  $P$  auf  $P_X$  transportiert. Statt mit einer Zufallsvariable  $X: \Omega \rightarrow \Omega'$  auf dem WRaum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  können wir ebenso auch direkt mit dem Bildraum  $(\Omega', \mathcal{B}, P_X)$  arbeiten. Mit der Zufallsvariable  $X$  können wir so einen **komplizierten** durch einen **einfachen** Wahrscheinlichkeitsraum ersetzen.

Die Einführung von Zufallsvariablen ist oft bequem und nützlich:

- Bequeme Notation und natürliche Sprechweise: ZVaren sind z.B. Messungen, Stichproben, etc. Das ist für Anwendungen hilfreich.
- Wir können mehrere Experimente als Zufallsvariablen  $X_1, X_2, X_3, \dots$  auf dem gemeinsamen WRaum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  betrachten. Das hilft.
- Wir können vom zugrundeliegenden WRaum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  abstrahieren und müssen ihn häufig gar nicht explizit ausführen. Das vereinfacht.

### Zufallsvariablen: kontinuierliche Beispiele

V213  
Ausführung



**Aufgabe:** (1) Auf  $\Omega = [-1, 1]$  betrachten wir die Gleichverteilung  $P$ . Zeichnen Sie hierzu die WDichte  $g$  und die kumul. Verteilung  $G$ .  
 (2) Bestimmen Sie für die ZVariable  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}: t \mapsto X(t) = t^2$  die kumulative Verteilungsfunktion  $F$  und ihre WDichte  $f$ .

**Lösung:** Die Bildmenge ist  $[0, 1]$ , aber die Wkt ist nicht gleichverteilt! Das Bildmaß  $P_X$  hat für  $0 \leq x \leq 1$  die kumulative Verteilung

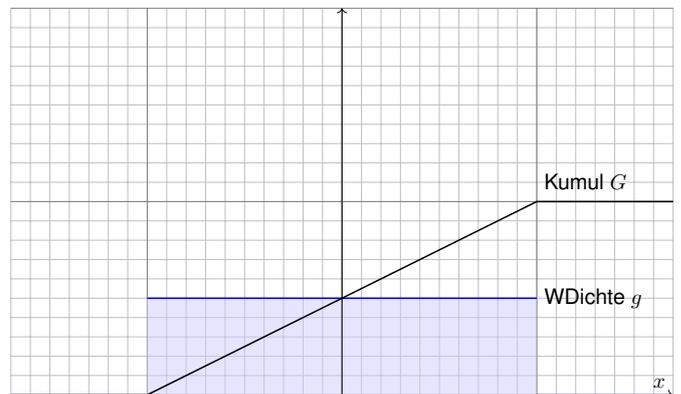
$$F(x) = P(t^2 \leq x) = P(|t| \leq \sqrt{x}) = \sqrt{x}$$

Demnach hat  $P_X$  die Dichte  $f(x) = F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

### Zufallsvariablen: kontinuierliche Beispiele

V214  
Ausführung

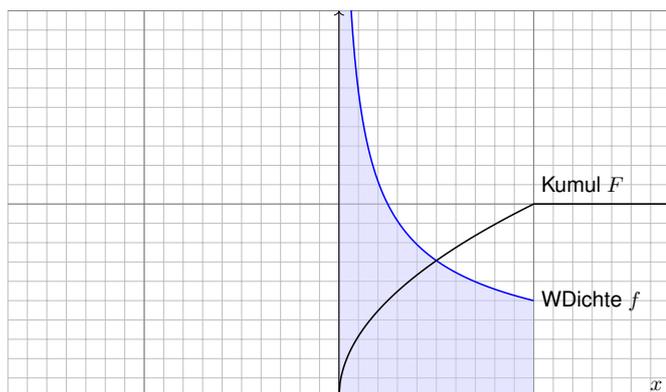
(1) Gleichverteilung  $P$  auf dem Definitionsbereich  $\Omega = [-1, 1]$ :



### Zufallsvariablen: kontinuierliche Beispiele

V215  
Ausführung

(2) Verteilung  $P_X$  der ZVaren  $X(t) = t^2$  im Bildbereich  $\Omega' = [0, 1]$ :



### Zufallsvariablen: kontinuierliche Beispiele

V216  
Ausführung

Die Massenverteilung  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  wird nach  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$  transportiert: Die Parameter  $t \in [-1, 1]$  sind gleichverteilt, nicht jedoch  $t^2 \in [0, 1]$ . Im Bildraum  $[0, 1]$  werden die niedrigen Werte um 0 wahrscheinlicher getroffen (hohe Dichte) als die hohen Werte um 1 (geringere Dichte).

Dies können Sie konkret simulieren: Generieren Sie gleichverteilte Zufallszahlen  $t \in [-1, 1]$  und zeichnen Sie ihre Bildpunkte  $X(t) = t^2$ . Es ergibt sich eine Punktwolke in  $[0, 1]$ , deren Dichte von 0 nach 1 monoton abnimmt. Nahe 0 wird diese Wolke tatsächlich extrem dicht.

Unser Ergebnis für die Zufallsvariable  $X(t) = t^2$  ist daher plausibel. Will man die genaue Verteilung, so muss man rechnen (wie gezeigt). Wir sehen insbesondere, dass WDichten nicht beschränkt sein müssen: Hier hat sie eine Polstelle, beim Nullpunkt 0 also unendlich große Dichte. Dennoch ist die Gesamtmasse weiterhin endlich, immer noch gleich 1.

Hinter diesen Beispielen steckt der Transformationssatz für Integrale: Ist die Zufallsvariable  $X: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig diff'bar, so hat das Bildmaß  $P_X$  die kumulative Verteilung  $F(x) = P(X^{-1}([a, x]))$  und WDichte  $f = F'$ .

Die Transformation von WMaßen können wir auch umgekehrt nutzen: Wir nehmen an, gleichverteilte unabhängige Zufallszahlen  $x \in [0, 1]$  werden uns kostengünstig zur Verfügung gestellt. Wie können Sie nun daraus Zufallszahlen erzeugen, die einer anderen Verteilung folgen, zum Beispiel einer Normalverteilung oder einer Exponentialverteilung?

Jedes WMaß auf  $\mathbb{R}$  können wir als Bildmaß aus der Gleichverteilung auf  $[0, 1]$  gewinnen! Diese Beobachtung können Sie zur Simulation verwenden. Das ist ein vielgenutztes Verfahren:

Für manche Modelle ist es sinnvoll, stochastische Simulationen (am Computer) durchzuführen. Hierzu benötigen Sie einen Generator von gleichverteilten Zufallszahlen  $x \in [0, 1]$ . Das ist ein eigenes Kapitel der Informatik und birgt erstaunliche Schwierigkeiten und Überraschungen.

Wir betrachten dies als „black box“ und nehmen an, gleichverteilte unabhängige Zufallszahlen  $x \in [0, 1]$  werden uns kostengünstig zur Verfügung gestellt. Dann ist z.B.  $3x + 2$  gleichverteilt auf  $[2, 5]$ . Wie können Sie Zufallszahlen  $x \in \mathbb{R}$  erzeugen, die einer ganz anderen Verteilung folgen, zum Beispiel einer Normalverteilung auf  $\mathbb{R}$  oder einer Exponentialverteilung auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ ?

Zur Erzeugung solcher Zufallszahlen nutzen wir, dass auch die kumulative Verteilungsfunktion einen Bildbereich zwischen Null und Eins aufweist! Wählen Sie in diesem Intervall zufällig eine Zahl  $y \in [0, 1]$ , so können Sie dies als Wert  $y = F(x)$  einer Verteilungsfunktion interpretieren. Der zugehörige Wert  $x$  ist dann die gewünschte Zufallszahl. Genau dies erklärt der folgende Satz.

**Aufgabe:** Was ist die Quantilfunktion der Exponentialverteilung  $E(\lambda)$ ? Wie können Sie diese Verteilung mit einer Gleichverteilung simulieren?

**Lösung:** Wir haben die Dichte  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$  auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ , kumuliert also

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = 1 - e^{-\lambda x}.$$

(Siehe V203.) Die Quantilfunktion hierzu ist einfach die Umkehrfunktion

$$F^{-1}(y) = -\frac{\ln(1-y)}{\lambda}.$$

Die  $E(\lambda)$ -Verteilung simulieren wir demnach so: Wir ziehen zufällig Zahlen  $y \in [0, 1]$  und bilden diese ab auf  $x = F^{-1}(y) = -\ln(1-y)/\lambda$ .

Auf  $\Omega = [0, 1]$  mit Gleichverteilung entspricht dies der Zufallsvariablen

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \omega \mapsto X(\omega) = -\frac{\ln(1-\omega)}{\lambda}.$$

Sie prüfen leicht nach, dass  $X$  die gewünschte Verteilungsfunktion hat: Abstrakt ist das der obige Beweis, hier ganz konkret und anschaulich.

**Definition V2F:** einfache Zufallsvariablen und ihre Erwartung

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  ein WRaum. Eine Zufallsvariable  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **einfach**, wenn sie nur endliche viele Werte  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  in  $\mathbb{R}$  annimmt.

Somit gilt  $X = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{I}_{A_k}$  mit  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  und  $\Omega = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n$ . In diesem Falle ist ihr Erwartungswert der gewichtete Mittelwert

$$\mathbf{E}(X) := \sum_{k=1}^n a_k \cdot \mathbf{P}(X=a_k) = \sum_{k=1}^n a_k \cdot \mathbf{P}(A_k)$$

**Aufgabe:** Berechnen Sie  $\mathbf{E}(X)$  für  $X \sim B(n, t)$  binomialverteilt.

**Lösung:** Die Berechnung des Erwartungswertes kennen wir [U421](#):

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^n k \cdot \mathbf{P}(X=k) = \sum_{k=0}^n k \cdot \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = nt$$

Dies ist eine einfache Funktion, in diesem konkreten Beispiel gilt nämlich  $X = \sum_{k=0}^n k \mathbf{I}_{A_k}$  mit  $A_k = X^{-1}(\{k\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k\}$ . Dies verallgemeinert Treppenfunktionen (A307): Hier nun sind  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  beliebige messbare Mengen in  $\Omega$ , nicht nur Quader im  $\mathbb{R}^n$ .

**Lemma V2G:** Ausschöpfung durch einfache Funktionen

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Für jede Funktion  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  sind äquivalent:

(1) Für alle  $a \in \mathbb{R}$  ist  $f^{-1}([0, a])$  messbar:  $\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \leq a\} \in \mathcal{A}$ .

(2) Es existiert eine wachsende Folge einfacher Funktionen

$$0 \leq f_0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots : \Omega \rightarrow [0, \infty] \quad \text{mit} \quad f_k \nearrow f.$$

In diesem Fall gilt  $0 \leq \mathbf{E}(f_0) \leq \mathbf{E}(f_1) \leq \dots$  und wir definieren

$$\mathbf{E}(f) := \lim \mathbf{E}(f_k) \in [0, \infty].$$

Dies ist wohldefiniert, d.h. von der Wahl der Folge  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  unabhängig.

„(1)  $\Rightarrow$  (2)“: Wir konstruieren einfache Funktionen  $f_k : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ . Sei  $k \in \mathbb{N}$ . Für  $j \in \{0, \dots, N = k^2\}$  setzen wir  $h_j := j/2^k$  und  $A_j := f^{-1}([h_j, h_{j+1}])$ , wobei  $A_N := f^{-1}([h_N, \infty])$ . Wir definieren  $f_k := \sum_{j=0}^N h_j \cdot \mathbf{I}_{A_j}$ . Für jeden Punkt  $x \in \Omega$  gilt dann  $f_k(x) \nearrow f(x)$ .

„(2)  $\Leftarrow$  (1)“: Seien  $f_k : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  messbar und  $f_k \nearrow f$ . Die Menge  $A_k = f_k^{-1}([0, a])$  ist messbar, also  $A_k \in \mathcal{A}$ . Für  $A = f^{-1}([0, a])$  gilt dann  $A = \bigcap_{k=0}^{\infty} A_k$ , also  $A \in \mathcal{A}$ .

**Satz V2E:** Quantilfunktion

Vorgegeben sei eine kumulative Verteilungsfunktion  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ .

Wir betrachten  $\Omega = [0, 1]$  mit Gleichverteilung  $\mathbf{P}$  und definieren

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{durch} \quad X(t) = F^{-1}(t) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid t \leq F(x)\}$$

Dann ist  $X$  messbar und  $\mathbf{P}_X$  hat die kumulative Verteilung  $F$ .

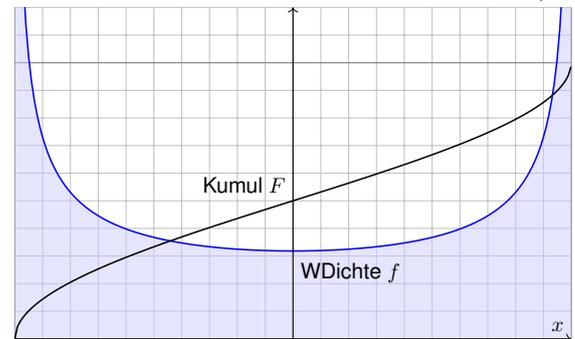
😊 Wenn  $F$  stetig und streng wachsend ist, so ist  $F : \mathbb{R} \rightarrow ]0, 1[$  bijektiv. Im allgemeinen Fall muss  $F$  nur schwach wachsend sein und darf auch Sprungstellen haben. Für diese Fälle ist die ausführlichere Formel als Infimum angegeben. Die Funktion  $X$  heißt **Quantilfunktion** von  $F$ .

**Nachrechnen:** Nach Konstruktion gilt  $X(t) \leq x \Leftrightarrow t \leq F(x)$ , also

$$\mathbf{P}_X ]-\infty, x] = \mathbf{P}(X(t) \leq x) = \mathbf{P}(t \leq F(x)) = F(x)$$

😊 Anwendung: Simulation von WMaßen auf  $\mathbb{R}$ , z.B. am Computer. Aus der Gleichverteilung gewinnen Sie jede beliebige Verteilung.

**Aufgabe:** Wir betrachten das Intervall  $\Omega = [0, 1]$  mit Gleichverteilung  $\mathbf{P}$ . Finden Sie  $X : [0, 1] \rightarrow [-1, 1]$  sodass  $\mathbf{P}_X$  die Dichte  $f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$  hat.



**Lösung:** Kumul. Verteilung  $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt = \frac{1}{\pi} \arcsin(x) + \frac{1}{2}$ .

Wir wählen  $X : [0, 1] \rightarrow [-1, 1]$  gemäß  $X(t) = F^{-1}(t) = \sin(\pi t - \pi/2)$ .

Zum WRaum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  betrachten wir die Menge der Treppenfunktionen

$$T(\Omega, \mathcal{A}) = \left\{ \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{I}_{A_k} \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \right\}$$

**Aufgabe:** (1) Die Menge  $T(\Omega, \mathcal{A}) \subseteq \text{Abb}(\Omega, \mathbb{R})$  ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum, erzeugt von den Indikatorfunktionen  $\mathbf{I}_A$  aller messbarer Mengen  $A \in \mathcal{A}$ .

(2) Hierauf ist die Erwartung  $\mathbf{E} : T(\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^n a_k \mathbf{I}_{A_k}\right) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{P}(A_k).$$

Dies ist die einzige lineare Abbildung mit der Normierung  $\mathbf{E}(\mathbf{I}_A) = \mathbf{P}(A)$ .

**Lösung:** Die Aussage (1) ist klar nach Konstruktion von  $T(\Omega, \mathcal{A})$ .

Aussage (2) folgt aus Definition V2F, falls die Mengen  $A_k \in \mathcal{A}$  disjunkt sind und die Werte  $a_k \in \mathbb{R}$  verschieden sind (wie in der vorigen Aufgabe). Jede Treppenfunktion können wir so darstellen (per Induktion über  $n$ ).

😊 Die Erwartung entspricht dem Integral! Wir nutzen unsere guten Erfahrungen und unsere solide Vorbereitung und führen die Konstruktion des Integrals aus Kapitel A hier erneut durch.

**Lemma V2G:** Ausschöpfung durch einfache Funktionen

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Für jede Funktion  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  sind äquivalent:

(1) Für alle  $a \in \mathbb{R}$  ist  $f^{-1}([0, a])$  messbar:  $\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \leq a\} \in \mathcal{A}$ .

(2) Es existiert eine wachsende Folge einfacher Funktionen

$$0 \leq f_0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots : \Omega \rightarrow [0, \infty] \quad \text{mit} \quad f_k \nearrow f.$$

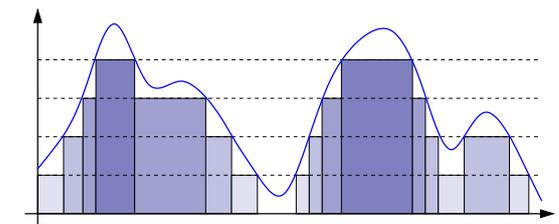
In diesem Fall gilt  $0 \leq \mathbf{E}(f_0) \leq \mathbf{E}(f_1) \leq \dots$  und wir definieren

$$\mathbf{E}(f) := \lim \mathbf{E}(f_k) \in [0, \infty].$$

Dies ist wohldefiniert, d.h. von der Wahl der Folge  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  unabhängig.

„(1)  $\Rightarrow$  (2)“: Wir konstruieren einfache Funktionen  $f_k : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ . Sei  $k \in \mathbb{N}$ . Für  $j \in \{0, \dots, N = k^2\}$  setzen wir  $h_j := j/2^k$  und  $A_j := f^{-1}([h_j, h_{j+1}])$ , wobei  $A_N := f^{-1}([h_N, \infty])$ . Wir definieren  $f_k := \sum_{j=0}^N h_j \cdot \mathbf{I}_{A_j}$ . Für jeden Punkt  $x \in \Omega$  gilt dann  $f_k(x) \nearrow f(x)$ .

„(2)  $\Leftarrow$  (1)“: Seien  $f_k : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  messbar und  $f_k \nearrow f$ . Die Menge  $A_k = f_k^{-1}([0, a])$  ist messbar, also  $A_k \in \mathcal{A}$ . Für  $A = f^{-1}([0, a])$  gilt dann  $A = \bigcap_{k=0}^{\infty} A_k$ , also  $A \in \mathcal{A}$ .



Satz V2H: messbare und absolut integrierbare Funktionen

Genau dann ist  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  **messbar**, wenn  $f^+$  und  $f^-$  messbar sind.  
 (1) In diesem Fall ist auch  $|f| = f^+ + f^-$  messbar, und somit gilt

$$\mathbf{E}(|f|) = \mathbf{E}(f^+) + \mathbf{E}(f^-).$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so nennen wir  $f$  **(absolut) integrierbar**.  
 In diesem Fall können wir den Erwartungswert von  $f$  definieren durch

$$\mathbf{E}(f) := \mathbf{E}(f^+) - \mathbf{E}(f^-).$$

(3) Der Erwartungswert verhält sich als Integral  $\mathbf{E}(f) = \int_{x \in \Omega} f(x) d\mathbf{P}$ :  
 Die integrierbaren Funktionen  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  bilden einen Vektorraum,

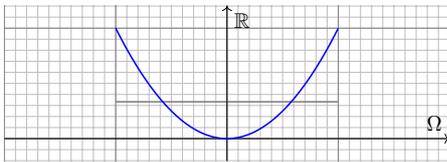
$$L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}; \mathbb{R}) := \{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \mathbf{E}(|f|) < \infty \}.$$

Hierauf ist die Erwartung  $\mathbf{E}: L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}) \rightarrow \mathbb{R}: f \mapsto \mathbf{E}(f)$  eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung, erfüllt Normierung, Monotonie, und Ausschöpfung.

Erwartung: kontinuierliches Beispiel

Für jede Zufallsvariable  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist der Erwartungswert das Integral:

$$\mathbf{E}(X) := \int_{\omega \in \Omega} X(\omega) d\mathbf{P} = \int_{x \in \mathbb{R}} x d\mathbf{P}_X$$



**Aufgabe:** Sei  $\mathbf{P}$  die kontinuierliche Gleichverteilung auf  $\Omega = [-1, 1]$ .  
 Berechnen Sie den Erwartungswert von  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $X(t) = t^2$ .

**Lösung:** Das gelingt durch Integration über  $(\Omega, \mathbf{P})$ :

$$\mathbf{E}(X) = \int_{\Omega} X(t) d\mathbf{P} = \int_{-1}^1 X(t) \cdot \frac{1}{2} dt = \int_{-1}^1 t^2 \cdot \frac{1}{2} dt = \left[ \frac{1}{6} t^3 \right]_{-1}^1 = \frac{1}{3}$$

Erwartung, Varianz, Streuung einer diskreten Verteilung

Definition V2J: Erwartung, Varianz, Streuung

Sei  $p: \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow [0, 1]$  eine diskrete WVerteilung, also  $\sum_{x \in \Omega} p(x) = 1$ .  
 Der Schwerpunkt von  $p$  heißt **Mittelwert** oder **Erwartung**:

$$\mu := \sum_{x \in \Omega} x p(x) \in \mathbb{R}^n.$$

Hierbei setzen wir absolute Summierbarkeit voraus:  $\sum |x| p(x) < \infty$ .  
 Die **Varianz** der Verteilung  $p$  ist ihr Trägheitsmoment bezüglich  $\mu$ :

$$\sigma^2 := \sum_{x \in \Omega} |x - \mu|^2 p(x) = \left[ \sum_{x \in \Omega} |x|^2 p(x) \right] - |\mu|^2 \geq 0.$$

Die Wurzel  $\sigma \geq 0$  dieses Wertes heißt die **Streuung** der Verteilung.

Anschaulich misst  $\sigma$ , wie weit die Werte um den Mittelwert  $\mu$  streuen.  
 Wir nennen die Streuung  $\sigma$  daher auch die **Standardabweichung**.  
 Genau dann gilt  $\sigma = 0$ , wenn  $p(\mu) = 1$  auf den Punkt  $\mu$  konzentriert ist.

Erwartung, Varianz, Streuung einer kont. Verteilung

Definition V2K: Erwartung, Varianz, Streuung

Sei  $f: \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  eine WDichte, also  $\int_{\Omega} f(x) dx = 1$ .  
 Der Schwerpunkt von  $f$  heißt **Mittelwert** oder **Erwartung**:

$$\mu := \int_{\Omega} x f(x) dx$$

Hierbei setzen wir absolute Integrierbarkeit voraus:  $\int |x| f(x) dx < \infty$ .  
 Die **Varianz** der Verteilung  $f$  ist ihr Trägheitsmoment bezüglich  $\mu$ :

$$\sigma^2 := \int_{\Omega} |x - \mu|^2 f(x) dx = \int_{\Omega} |x|^2 f(x) dx - |\mu|^2 \geq 0$$

Die Wurzel  $\sigma \geq 0$  dieses Wertes heißt die **Streuung** der Verteilung.

Wir nutzen hier euklidische Norm  $|\cdot|$  und Skalarprodukt  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  des  $\mathbb{R}^n$ .  
 Anschaulich misst  $\sigma$ , wie weit die Werte um den Mittelwert  $\mu$  streuen.  
 Wir nennen die Streuung  $\sigma$  daher auch die **Standardabweichung**.

Berechnung der Erwartung

Satz V2I: Erwartungswert von Zufallsvariablen

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  ein WRaum und  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Zufallsvariable.  
 Ihr **Erwartungswert** (oder kurz ihre **Erwartung**) ist gegeben durch

$$\mu(X) = \mathbf{E}(X) := \int_{\omega \in \Omega} X(\omega) d\mathbf{P} = \int_{x \in \mathbb{R}} x d\mathbf{P}_X.$$

Ist die Verteilung  $\mathbf{P}_X$  auf  $\mathbb{R}$  kontinuierlich mit Dichte  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , so gilt

$$\mathbf{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx.$$

Ist  $\mathbf{P}_X$  diskret mit Wkten  $p(x) = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\})$ , so gilt

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x p(x).$$

Dies ist jeweils nur sinnvoll für  $\mathbf{E}(|X|) < \infty$ . In diesem Fall nennen wir  $X$  **integrierbar** oder sagen: **Der Erwartungswert von  $X$  existiert**.

Erwartung: kontinuierliches Beispiel

😊 Die Verteilung  $\mathbf{P}_X$  dieser Zufallsvariable haben wir oben diskutiert.  
 Der Erwartungswert ist anschaulich plausibel: Niedrige Werte nahe 0 werden wahrscheinlicher getroffen als hohe Werte nahe 1. Ein Wert unter 1/2 scheint daher plausibel. Den genauen Wert 1/3 hingegen muss man ausrechnen. Dafür haben wir alle Techniken zur Integration!

**Aufgabe:** Berechnen Sie den Erwartungswert alternativ mit dem Bildmaß  $\mathbf{P}_X$ . Stimmen beide Ergebnisse überein? Warum ist das so?

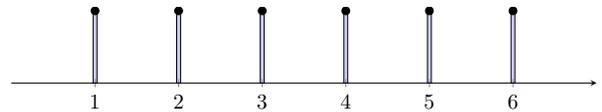
**Lösung:** Zu  $\mathbf{P}_X$  auf  $[0, 1]$  haben wir oben die Dichte  $f(x) = 1/(2\sqrt{x})$  ausgerechnet. Hieraus erhalten wir den Erwartungswert wie folgt:

$$\int_{\mathbb{R}} x d\mathbf{P}_X = \int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 \frac{x}{2\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} x^{1/2} dx = \left[ \frac{1}{3} x^{3/2} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Beide Integrale sind gleich dank Transformationssatz / Substitution!

Die Erwartung lässt sich auf zwei Weisen berechnen: als Integral  $\int_{\Omega} X(\omega) d\mathbf{P}$  der messbaren Funktion  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  bezüglich des Maßes  $\mathbf{P}$  auf  $\Omega$ , oder als Schwerpunkt  $\int_{\mathbb{R}^n} x d\mathbf{P}_X$  des Bildmaßes  $\mathbf{P}_X$  auf  $\mathbb{R}^n$ . Beide ergeben dasselbe Ergebnis. Daher darf sich jeder aussuchen, welcher Rechenweg im konkreten Beispiel jeweils bequemer ist. Ich werde im Folgenden meist Bildmaße auf  $\mathbb{R}^n$  vorziehen, da uns diese aus der  $n$ -dimensionalen Integration vertraut sind.

Beispiel: Erwartung und Varianz beim Würfeln



**Aufgabe:** Welchen **Mittelwert**  $\mu \in \mathbb{R}$  hat die Augenzahl beim Würfeln?  
 Was ist hier die Varianz  $\sigma^2 = \sum (x - \mu)^2 p(x)$ ? Und die Streuung  $\sigma$ ?

**Lösung:** Jede der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 tritt in  $\frac{1}{6}$  der Fälle auf. Also:

$$\mu = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3.5$$

Anschaulich ist  $\mu$  der **Schwerpunkt** der Verteilung  $p$ .

Die **Varianz**  $\sigma^2$  misst die mittlere quadratische Abweichung von  $\mu$ :

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{6} \left[ \left(1 - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(2 - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(3 - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(4 - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(5 - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(6 - \frac{7}{2}\right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[ \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right] = \frac{1}{3} \left[ \frac{25}{4} + \frac{9}{4} + \frac{1}{4} \right] = \frac{35}{12} = 2.91666... \end{aligned}$$

Die **Streuung** ist demnach  $\sigma = \sqrt{35/12} \approx 1.70783$ .

Wichtige Verteilungen und ihre Kenngrößen

diskret	$\Omega$	$p(k) = \mathbf{P}(\{k\})$	$\mathbf{E}$	$\mathbf{V}$
Gleichverteilung	$\{a, \dots, b\}$	$\frac{1}{b-a+1}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$
Hyperg. $H(N, K, n)$	$\{0, \dots, n\}$	$\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k} / \binom{N}{n}$	$n \frac{K}{N}$	$n \frac{K}{N} \frac{N-K}{N} \frac{N-n}{N-1}$
Binomial $B(n, t)$	$\{0, \dots, n\}$	$\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$	$nt$	$nt(1-t)$
Poisson $P(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$e^{-\lambda} \lambda^k / k!$	$\lambda$	$\lambda$
Geometrisch $G(q)$	$\mathbb{N}_{\geq 1}$	$(1-q)q^{k-1}$	$\frac{1}{1-q}$	$\frac{q}{(1-q)^2}$
Zeta $Z(s), s=2$	$\mathbb{N}_{\geq 1}$	$\frac{6}{\pi^2 k^2}$	—	nicht definiert! — <small>Diese Reihen divergieren.</small>
kontinuierlich	$\Omega$	Dichte $f(x)$	$\mathbf{E}$	$\mathbf{V}$
Gleichverteilung	$[a, b]$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponential $E(\lambda)$	$\mathbb{R}_{\geq 0}$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$\lambda^{-1}$	$\lambda^{-2}$
Normal $N(\mu, \sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} / \sigma\sqrt{2\pi}$	$\mu$	$\sigma^2$
Cauchy $C(m, a)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2+(x-m)^2}$	—	nicht definiert! — <small>Diese Integrale divergieren.</small>

**Aufgabe:** Seien  $a \leq b$  in  $\mathbb{Z}$  ganze Zahlen. Berechnen Sie Erwartung und Varianz der diskreten Gleichverteilung auf  $\Omega = \{a, a+1, \dots, b\}$ .

**Lösung:** Wir setzen die Definition ein und rechnen's aus:

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{k=a}^b k = \frac{a+b}{2}$$

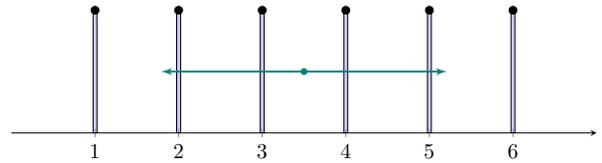
$$\sigma^2 = \left[ \frac{1}{n} \sum_{k=a}^b k^2 \right] - \mu^2 = \frac{n^2 - 1}{12}$$

Zur Abkürzung setzen wir  $n = |\Omega| = b - a + 1$  für die Elementzahl. Für große  $n$  ist die Streuung näherungsweise  $\sigma \approx n/\sqrt{12} \approx n/3.46$ . Zur Rechnung nutzen wir die bekannten Summenformeln (HDI B3B):

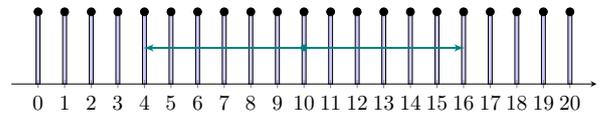
$$\sum_{k=a}^b k = (b-a+1) \frac{a+b}{2},$$

$$\sum_{k=a}^b k^2 = (b-a+1) \frac{2a^2 + 2ab + 2b^2 + b-a}{6}.$$

**Beispiel:** Für  $a = 1, b = 6$  gilt  $\mu = 3.5, \sigma^2 = 35/12, \sigma \approx 1.71$ .



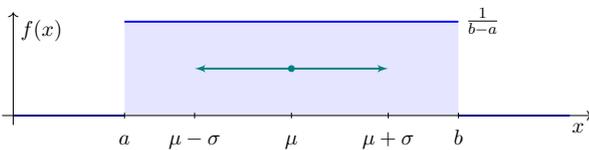
**Beispiel:** Für  $a = 0, b = 20$  gilt  $\mu = 10, \sigma^2 = 440/12, \sigma \approx 6.06$ .



☺ Anschaulich ist der Mittelwert  $\mu$  der Schwerpunkt der Verteilung. Die Standardabweichung  $\sigma$  misst die typische Breite der Verteilung.

Für  $a < b$  in  $\mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  betrachten wir die Schrittweite  $h = \frac{b-a}{n-1}$  und die diskrete Gleichverteilung auf  $\Omega := \{a + kh \mid k = 0, 1, \dots, n-1\}$ . Diese diskreten Verteilungen sind auf den vorigen Folien skizziert.

Im Grenzwert für  $n \rightarrow \infty$  erhalten wir als Idealisierung folgendes Bild:



Für  $a < b$  in  $\mathbb{R}$  betrachten wir die kontinuierliche Gleichverteilung auf dem Intervall  $[a, b]$ . Dies ist eine kontinuierliche Verteilung mit Dichte

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto f(x) = \frac{1}{b-a}.$$

**Aufgabe:** Berechnen Sie Erwartung und Varianz der kontinuierlichen Gleichverteilung auf  $[a, b]$ , mit Dichte  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto f(x) = \frac{1}{b-a}$ .

**Lösung:** Wir setzen die Definition ein und rechnen's aus:

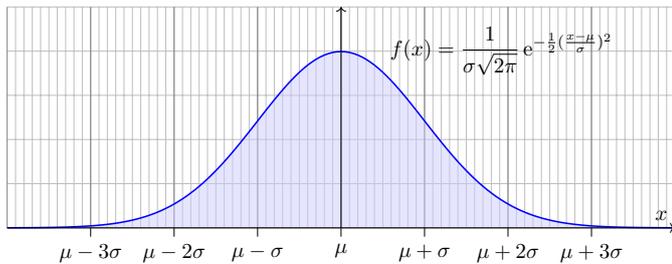
$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_{x=a}^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{b-a} \int_{x=a}^b x^2 dx - \mu^2 = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} \approx \frac{b-a}{3.46}$$

☺ Wie zuvor im diskreten Fall ist der Mittelwert  $\mu$  sehr anschaulich, die Varianz  $\sigma^2$  hingegen müssen wir als Integral explizit ausrechnen. Die ersten Beispiele hierzu sind nicht schwer und eine gute Übung, sowohl zur Schulung Ihrer Intuition als auch Ihrer Rechentechniken.

Für  $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$  mit  $\sigma > 0$  ist die **Normalverteilung**  $N(\mu, \sigma^2)$  gegeben durch folgende Dichte, die allseits beliebte Gaußsche Glockenkurve:



- Aufgabe:** (1) Warum ist dies eine Wahrscheinlichkeitsverteilung?  
 (2) Skizzieren Sie  $x f(x)$  und berechnen Sie die Erwartung.  
 (3) Skizzieren Sie  $x^2 f(x)$  und berechnen Sie die Varianz.

**Lösung:** Offenbar gilt  $f \geq 0$ . Wir haben drei Integrale zu berechnen:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx = \mu, \quad \int_{\mathbb{R}} (x - \mu)^2 f(x) dx = \sigma^2.$$

Vereinfachung: Nach Substitution  $t = (x - \mu)/\sigma$  erhalten wir  $\mu = 0$  und  $\sigma = 1$ , also die Dichte der Standard-Normalverteilung:

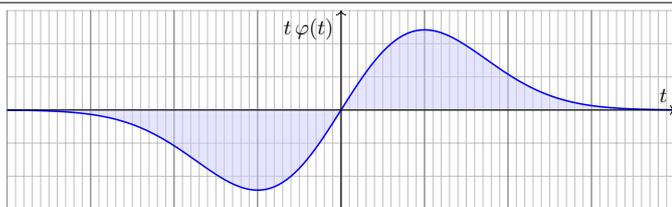
$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$$

(1) Wir berechnen  $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt$  durch den Gaußschen Kunstgriff [C230](#):

$$\left( \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} dt \right)^2 = \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx \right) \cdot \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2} dy \right)$$

$$\stackrel{\text{Fub}}{=} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} e^{-(x^2+y^2)/2} d(x, y) \stackrel{\text{Trafo}}{=} \int_{\mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi]} e^{-r^2/2} r d(r, \alpha)$$

$$\stackrel{\text{Fub}}{=} \int_{r=0}^{\infty} \int_{\alpha=0}^{2\pi} e^{-r^2/2} r d\alpha dr \stackrel{\text{HDI}}{=} 2\pi \left[ -e^{-r^2/2} \right]_{r=0}^{\infty} = 2\pi$$



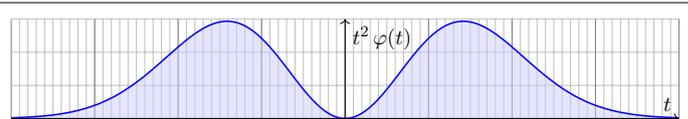
(2) Die Erwartung ist Null aufgrund der Symmetrie  $\varphi(-t) = \varphi(t)$ :

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} t \varphi(t) dt = 0.$$

Alternativ können wir explizit eine Stammfunktion angeben:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-t^2/2} dt \stackrel{\text{HDI}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ -e^{-t^2/2} \right]_{-\infty}^{\infty} = 0$$

Der allgemeine Fall folgt mit Substitution  $t = (x - \mu)/\sigma$ : Die Erwartung der Normalverteilung  $N(\mu, \sigma^2)$  ist  $\mu$ .



(3) Die Varianz berechnen wir mit partieller Integration:

$$\sigma^2 \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-t) \cdot (-t) e^{-t^2/2} dt$$

$$\stackrel{\text{part}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ -t \cdot e^{-t^2/2} \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = 1$$

Der allgemeine Fall folgt mit Substitution  $t = (x - \mu)/\sigma$ : Die Varianz der Normalverteilung  $N(\mu, \sigma^2)$  ist  $\sigma^2$ .

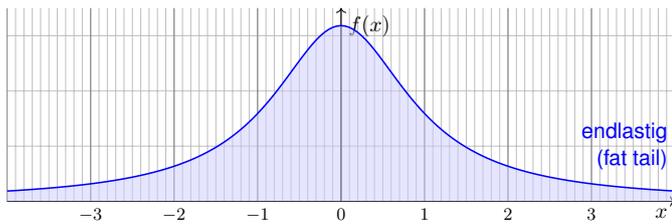
☺ Siehe D419 für die geraden Momente  $\rho^{2k}$  der Normalverteilung. Ungerade Momente  $\int_{\mathbb{R}} t^{2k+1} \varphi(t) dt$  verschwinden dank Symmetrie.

**Übung:** Legen Sie die Vorlage beiseite und versuchen Sie es selbst!

**Aufgabe:** Ist die folgende Funktion eine Wahrscheinlichkeitsdichte?

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1/c}{1+x^2}$$

Für welche Konstanten  $c \in \mathbb{R}$ ? Existieren hierzu Erwartung und Varianz?



⚠ Der Graph erinnert grob an die Glockenkurve  $\varphi(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$ . Doch Vorsicht: Die Cauchy-Verteilung hat völlig andere Eigenschaften! Vor allem klingt  $f(x)$  nicht exponentiell ab, sondern nur wie  $x \mapsto 1/x^2$ . Das hat dramatische Konsequenzen: Die Erwartung existiert nicht!

**Lösung:** (1) Wir haben  $f \geq 0$  und für  $c = 1$  ist die Gesamtmasse

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan(x)]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

😊 Die Wahl  $c = \pi$  normiert die Gesamtmasse auf  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$ . Erst hierdurch wird  $f$  zu einer Wahrscheinlichkeitsdichte.

(2) Für Erwartung und Varianz benötigen wir folgende Integrale:

$$\mu \stackrel{!}{=} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{1+x^2} dx \quad \text{und} \quad \sigma^2 \stackrel{!}{=} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{1+x^2} dx = \infty.$$

Der erste Integrand ist nicht absolut integrierbar, siehe B417.

Der Median ist offensichtlich 0, aber die Erwartung existiert nicht!

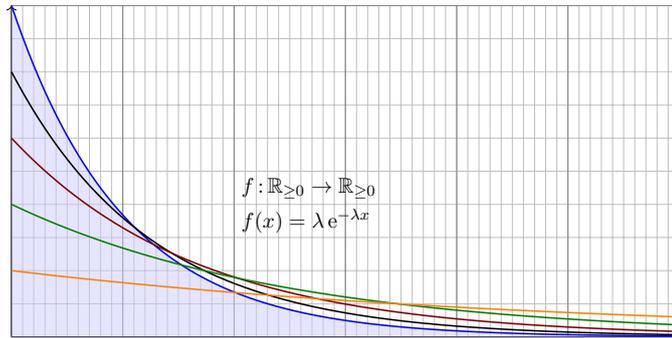
Der zweite Integrand ist nicht-negativ, sein Integral ist unendlich.

⚠ Hier haben Erwartung und Varianz demnach keinen Sinn.

Solche Schwierigkeiten vermeiden wir durch absolute Integrierbarkeit!

Dies garantiert für unsere Integrale alle gewohnten Rechenregeln.

Für  $\lambda > 0$  ist die **Exponentialverteilung**  $E(\lambda)$  gegeben durch die Dichte



**Aufgabe:** (1) Ist dies eine Wahrscheinlichkeitsverteilung?

(2) Berechnen Sie ihre Erwartung und ihre Varianz.

**Lösung:** (1) Ja: Auf  $\Omega = \mathbb{R}_{\geq 0}$  gilt  $f \geq 0$  und  $\int_{\Omega} f(x) dx = 1$ , denn

$$\int_{x=0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_{x=0}^{\infty} = 1.$$

(2) Die Erwartung berechnen wir mit partieller Integration:

$$\begin{aligned} \mu &= \int_{x=0}^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= [-x e^{-\lambda x}]_{x=0}^{\infty} + \int_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_{x=0}^{\infty} = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

Die Varianz berechnen wir ebenso:

$$\begin{aligned} \sigma^2 + \mu^2 &= \int_{x=0}^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = [-x^2 e^{-\lambda x}]_{x=0}^{\infty} + \int_{x=0}^{\infty} 2x e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{2}{\lambda} \int_{x=0}^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Hieraus folgt  $\sigma^2 = 1/\lambda^2$ .

*Every day I get in the queue // To get on the bus that takes me to you.  
I'm so nervous, I just sit and smile. // Your house is only another mile.*

**Aufgabe:** Ihre Buslinie fährt streng nach Fahrplan alle 20 Minuten, also zum Beispiel um 6:00, 6:20, 6:40, etc. bis Dienstschluss um 24:00 Uhr. Sie kommen zufällig irgendwann im Laufe des Tages an die Haltestelle. Wie lang ist Ihre mittlere Wartezeit? (Gemeint ist der Erwartungswert, aber die Formulierung „erwartete Wartezeit“ klingt etwas seltsam.)

**Lösung:** Sei  $t$  Ihre Ankunftszeit und  $t_0$  die Abfahrtszeit des letzten Busses, den Sie verpasst haben. Dann gilt  $t_0 < t \leq t_0 + 20$  mit Wartezeit  $T = 20 - (t - t_0) \in [0, 20[$ . Daher ist Ihre mittlere Wartezeit:

$$\bar{T} = \frac{1}{20} \int_{t=t_0}^{t_0+20} \underbrace{20 - (t - t_0)}_{=\tau} dt = \frac{1}{20} \int_{\tau=0}^{20} \tau d\tau = \frac{1}{20} \left[ \frac{\tau^2}{2} \right]_{\tau=0}^{20} = 10$$

Sie müssen also im Durchschnitt 10min auf den nächsten Bus warten.

😊 Diese Rechnung ist völlig plausibel und wird Sie kaum überraschen. Sie dient zum Aufwärmen und als Kontrast für die folgenden Aufgaben.

**Aufgabe:** Die Exponentialverteilung hat kein Gedächtnis! Genauer, für jede exponentialverteilte Zufallsvariable  $X \sim E(\lambda)$  und  $s, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  gilt:

$$\mathbf{P}(X \geq s+t \mid X \geq s) = \mathbf{P}(X \geq t) = e^{-\lambda t}$$

**Lösung:** Wir nutzen die Definitionen und rechnen es geduldig aus:

$$\mathbf{P}(X \geq s) = \int_{x=s}^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx = -[e^{-\lambda x}]_{x=s}^{\infty} = e^{-\lambda s}$$

$$\mathbf{P}(\{X \geq s+t\} \cap \{X \geq s\}) = \mathbf{P}(X \geq s+t) = e^{-\lambda(s+t)}$$

$$\mathbf{P}(X \geq s+t \mid X \geq s) = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = \mathbf{P}(X \geq t)$$

Die Exponentialverteilung modelliert kontinuierliche Wartezeiten. Sie ist ohne Gedächtnis:

Wenn Sie schon bis zur Zeit  $s$  gewartet haben, so ist die weitere Wartezeit  $t$  davon unabhängig!

Diskrete Analogie ist die geometrische Verteilung [142]. „Ich kaufe jeden Tag ein Rubbellos mit Gewinnwkt 1:100. Im Mittel warte ich also 100 Tage auf den nächsten Gewinn. Seit 70 Tagen bin ich ohne Gewinn, also warte ich nur noch 30 Tage.“ Ist das plausibel? Was sagt die Rechnung?

**Aufgabe:** Ihr Bus fährt nun nicht mehr nach Fahrplan, sondern zufällig: Der Abstand aufeinanderfolgender Busse sei exponentialverteilt mit Dichte  $f(t) = e^{-t/20}/20$ . (Wir messen die Zeit  $t$  hier in Minuten.)

(1) Wie lang ist der mittlere Zeitabstand zwischen zwei Bussen?

(2) Sie kommen zufällig irgendwann am Tag an die Haltestelle.

Wie lang ist Ihre mittlere Wartezeit? Warum ist das erstaunlich?

Können Sie das Ergebnis dennoch möglichst anschaulich erklären?

(3) Diskutieren Sie das diskrete Analogon: An der Wendestelle lässt der Busfahrer zunächst den Vorgänger abfahren. Er würfelt jede Minute eine Zahl  $1, \dots, 20$  (mit einem regulären Ikosaeder), bei einer 1 fährt er los.

(4) Welcher Übergang führt vom diskreten zum kontinuierlichen Modell?

**Lösung:** (1) Diesen Erwartungswert haben wir bereits berechnet:

$$\mu = \int_{t=0}^{\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt = [-t e^{-\lambda t}]_{t=0}^{\infty} + \int_{t=0}^{\infty} e^{-\lambda t} dt = \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}\right]_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

In unserem Beispiel ist  $\lambda = 1/20$ , also der mittlere Abstand 20 Minuten.

(2) Nehmen wir zunächst an, Sie haben gerade einen Bus verpasst. Dann ist Ihre mittlere Wartezeit 20min wie zuvor in (1) berechnet.

Allgemeiner Fall: Sie haben den letzten Bus um  $s \geq 0$  Minuten verpasst. Nach der obigen Aufgabe hat die Exponentialverteilung kein Gedächtnis. Daher ist Ihre mittlere Wartezeit immer 20min! Vielleicht dachten Sie, das sei Ihr besonderes Pech. Jetzt kennen Sie den wahren Grund!

Naiv würde man hoffen, die Wartezeit wäre nur halb so groß, aber nein!

Anschaulich erklärt: Mit großer Wkt treffen Sie große Intervalle, leider.

Daher warten Sie im Mittel nicht nur 10min, sondern tatsächlich 20min.

(3) Die Wkt, nach einer Minute loszufahren, ist  $p = 1/20$ .

Die Wkt, nach zwei Minuten loszufahren, ist  $q \cdot p$  mit  $q := 1 - p$ .

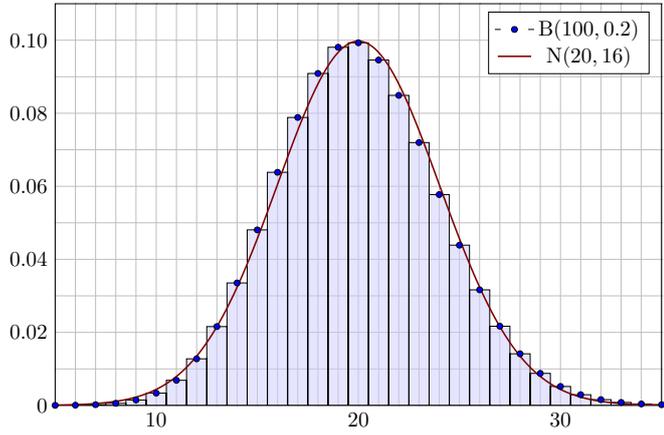
Die Wkt, nach  $k$  Minuten loszufahren, ist dementsprechend  $q^{k-1} \cdot p$ . Dies ist die geometrische Verteilung  $G(q)$ . Der mittlere Abstand ist  $1/p$ , also 20 Minuten. In diesem diskreten Modell gilt dasselbe wie in (2).

(4) Lassen wir den Zeitschritt  $\Delta t$  gegen Null gehen, so erhalten wir aus der geometrischen Verteilung die Exponentialverteilung, siehe V203.

Vergleich von Binomial- und Normalverteilung

V301  
Ausführung

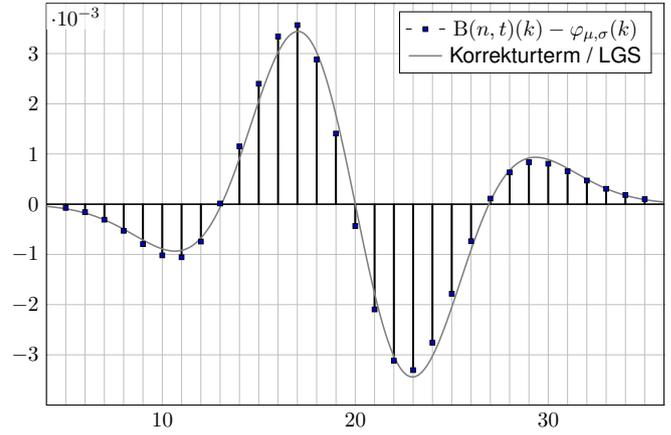
Beispiel:  $n = 100$  und  $t = 0.2$ , also  $\mu = nt = 20$  und  $\sigma^2 = nt(1-t) = 16$



Vergleich von Binomial- und Normalverteilung

V302  
Ausführung

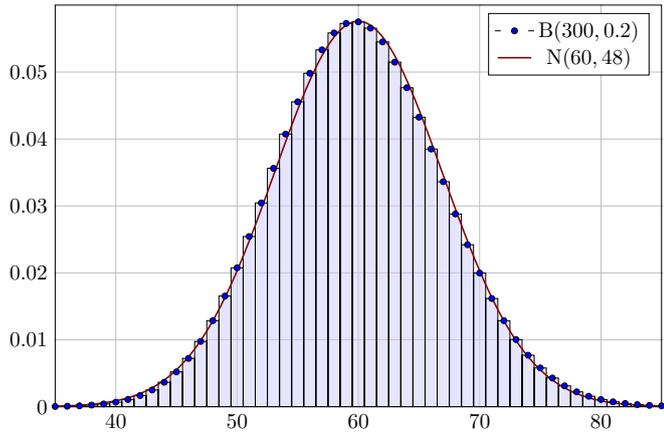
Wie gut ist die Näherung? Punktweise bis auf 0.004 genau!



Vergleich von Binomial- und Normalverteilung

V303  
Ausführung

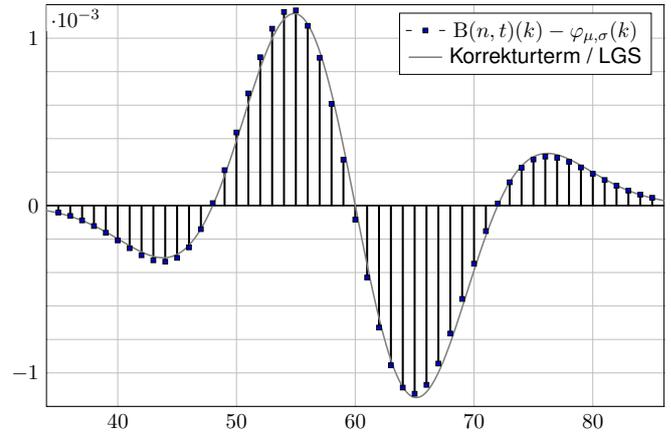
Beispiel:  $n = 300$  und  $t = 0.2$ , also  $\mu = nt = 60$  und  $\sigma^2 = nt(1-t) = 48$



Vergleich von Binomial- und Normalverteilung

V304  
Ausführung

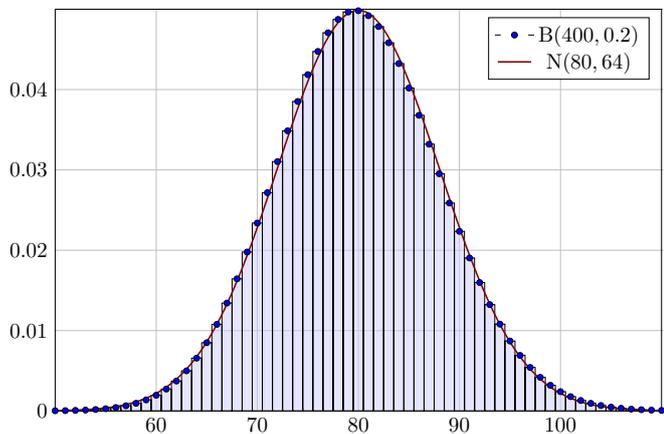
Wie gut ist die Näherung? Punktweise bis auf 0.0012 genau!



Vergleich von Binomial- und Normalverteilung

V305  
Ausführung

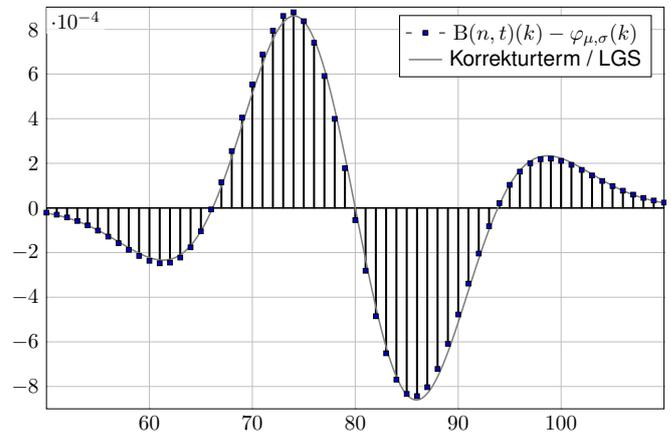
Beispiel:  $n = 400$  und  $t = 0.2$ , also  $\mu = nt = 80$  und  $\sigma^2 = nt(1-t) = 64$



Vergleich von Binomial- und Normalverteilung

V306  
Ausführung

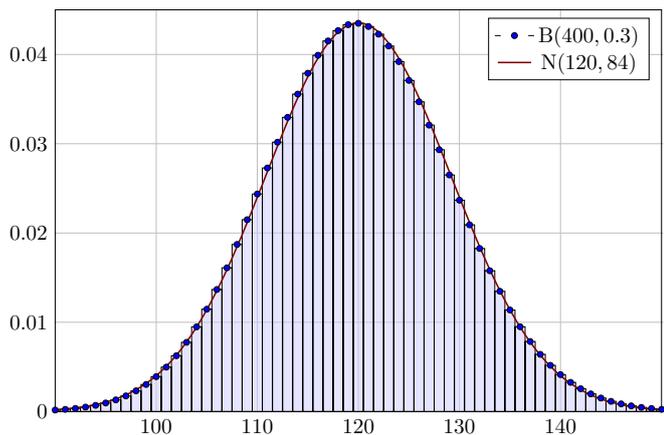
Wie gut ist die Näherung? Punktweise bis auf 0.0009 genau!



Vergleich von Binomial- und Normalverteilung

V307  
Ausführung

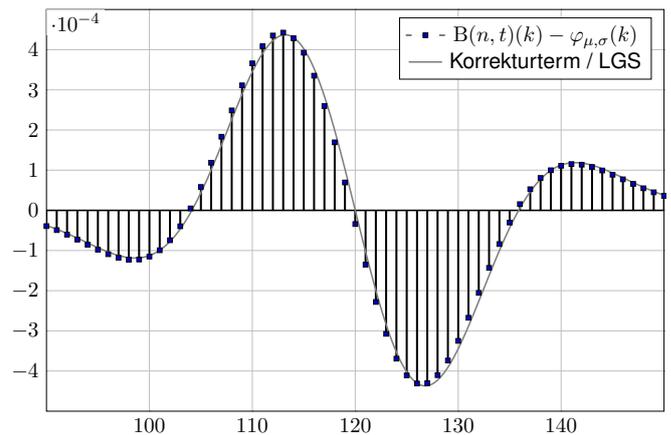
Beispiel:  $n = 400$  und  $t = 0.3$ , also  $\mu = nt = 120$  und  $\sigma^2 = nt(1-t) = 84$



Vergleich von Binomial- und Normalverteilung

V308  
Ausführung

Wie gut ist die Näherung? Punktweise bis auf 0.0005 genau!



## Übergang von Binomial- zu Normalverteilung

V309  
Ausführung

😊 Obige Beispiele illustrieren die Annäherung der Binomial- an die Normalverteilung. Wir können sie nun als Grenzwert nachrechnen.

Dank Stirling-Formel und Taylor-Entwicklung gilt (siehe unten)

$$\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \approx \frac{e^{-\frac{(k-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \approx \int_{k-1/2}^{k+1/2} \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dx.$$

Die Stetigkeitskorrektur um  $-1/2$  bzw.  $+1/2$  ist hier sehr anschaulich. Mühsame Summen ersetzen wir so durch bequemere Integrale:

$$\sum_{k=a}^b \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \approx \int_{x=a-1/2}^{b+1/2} \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dx = \int_{\xi=\alpha}^{\beta} \frac{e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}} d\xi$$

Die Substitution  $\xi = (x - \mu)/\sigma$  führt zur Standard-Normalverteilung.

😊 Wir müssen daher nur in einer einzigen Tabelle nachschlagen! Die Grenzen sind dabei  $\alpha = (a - 1/2 - \mu)/\sigma$  und  $\beta = (b + 1/2 - \mu)/\sigma$ . Die Stetigkeitskorrektur um  $-1/2$  bzw.  $+1/2$  ist auch hier anschaulich.

## Übergang von Binomial- zu Normalverteilung

V310  
Ausführung

Für  $n \in \mathbb{N}$  und  $0 < t < 1$  sei  $\mu = nt$  und  $\sigma = \sqrt{nt(1-t)}$ . Sei  $k = k_n$  ein Folge in  $\mathbb{N}$ . Für  $n \rightarrow \infty$  gelte  $(k - \mu)/\sigma \rightarrow \xi$ , somit insbesondere  $k/n \rightarrow t$ , jeweils gelesen als  $k = k_n$ . Dank Stirling-Formel  $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$  gilt dann:

$$\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \approx \sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}} \cdot \left(\frac{nt}{k}\right)^k \left(\frac{n(1-t)}{n-k}\right)^{n-k} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\xi^2/2}$$

Zur Berechnung dieses Grenzwertes nutzen wir die Potenzreihe des natürlichen Logarithmus:

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots \quad \text{für } |z| < 1$$

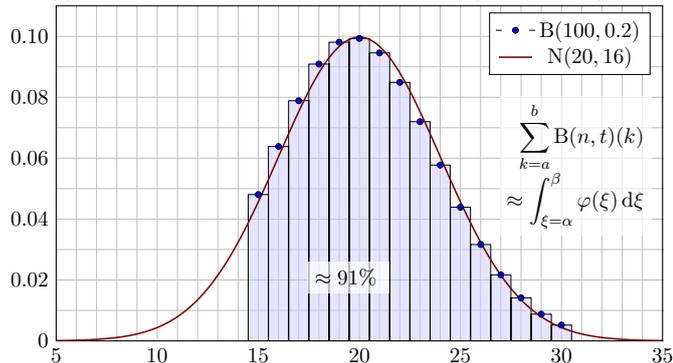
Bis Grad 2 schreiben wir kurz  $\ln(1+z) \approx z - z^2/2$ . Hieraus erhalten wir

$$\begin{aligned} \left(\frac{nt}{k}\right)^k \left(\frac{n(1-t)}{n-k}\right)^{n-k} &= \left(1 + \frac{nt-k}{k}\right)^k \left(1 - \frac{nt-k}{n-k}\right)^{n-k} \\ &= \exp\left[k \ln\left(1 + \frac{nt-k}{k}\right) + (n-k) \ln\left(1 - \frac{nt-k}{n-k}\right)\right] \\ &\approx \exp\left[(nt-k) - \frac{(nt-k)^2}{2k} - (n-k) - \frac{(n-k)^2}{2(n-k)}\right] \\ &= \exp\left[-\frac{(nt-k)^2 n}{2k(n-k)}\right] = \exp\left[-\frac{(k-nt)^2}{2n(k/n)(1-k/n)}\right] \rightarrow e^{-\xi^2/2} \end{aligned}$$

## Übergang von Binomial- zu Normalverteilung

V311

Wir **approximieren** mühsame Summen durch bequemere Integrale:



Beispiel für  $B(100, 0.2)$  mit Summationsgrenzen  $a = 15$  und  $b = 30$ , Integration von 14.5 bis 30.5, normiert also  $\alpha = -5.5/4 = -1.375$  und  $\beta = 10.5/4 = 2.625$ . Das Integral  $\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\xi) d\xi$  entnehmen wir der Tabelle.

## Übergang von Binomial- zu Normalverteilung

V312  
Erläuterung

Wozu nützt die **Näherung** der Binomial- durch die Normalverteilung?

Die Binomialverteilung  $B(n, t)$  ist für große  $n$  mühsam zu summieren.

Die Normalverteilung hingegen ist leicht, und  $\Phi$  liegt tabelliert vor. [\[V116\]](#)

$$\sum_{k=a}^b \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \approx \int_{\xi=\alpha}^{\beta} \frac{e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}} d\xi = [\Phi]_{\alpha}^{\beta}$$

Hierzu benötigen wir nur Erwartung  $\mu = nt$  und Varianz  $\sigma^2 = nt(1-t)$  und berechnen damit  $\alpha = (a - 1/2 - \mu)/\sigma$  und  $\beta = (b + 1/2 - \mu)/\sigma$ .

Der natürlich auftretende Summand  $\mp 1/2$  heißt **Stetigkeitskorrektur**.

Er erklärt sich aus obiger Graphik. Denken Sie insbesondere an  $a = b!$

Die Binomialverteilung  $B(n, t)$  können wir somit durch die einfachere Normalverteilung approximieren. Wann ist diese Näherung gut genug?

Die Faustregel ist „ $n$  soll groß sein“ oder „ $\sigma^2 = nt(1-t)$  soll groß sein“.

Naja... Wie groß ist groß genug? Wie klein ist dann noch der Fehler?

Die genaue Analyse des Fehlers ist leider mühsam. Ich gebe hier ein praktisches Ergebnis von James Uspensky (1937) in vereinfachter Form.

## Der lokale Grenzwertsatz (LGS)

V313

Satz V3A: de Moivre 1733, Laplace 1812, Uspensky 1937

Für die Binomialverteilung  $B(n, t)$  gilt  $\mu = nt$  und  $\sigma = \sqrt{nt(1-t)}$ .

Sie ähnelt der Normalverteilung:  $B(n, t) \approx N(\mu, \sigma^2)$ . Genauer gilt:

$$\sum_{k=a}^b \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \int_{\xi=\alpha}^{\beta} \frac{e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}} d\xi + \delta$$

Die Grenzen sind hier  $\alpha = (a - 1/2 - \mu)/\sigma$  und  $\beta = (b + 1/2 - \mu)/\sigma$ .

(1) Für  $\sigma \geq 5$  ist der Fehler  $\delta$  beschränkt durch  $|\delta| < \frac{|1-2t|}{10\sigma} + \frac{1}{3\sigma^2} \leq \frac{1}{6\sigma}$ .

(2) Genauer gilt  $\delta = \kappa + \varepsilon$  mit Korrekturterm  $\kappa$  und restlichem Fehler  $\varepsilon$ :

$$\kappa = \frac{1-2t}{6\sigma\sqrt{2\pi}} \left[ (1-\xi^2) e^{-\xi^2/2} \right]_{\alpha}^{\beta}, \quad |\kappa| < \frac{|1-2t|}{10\sigma}, \quad |\varepsilon| < \frac{1}{3\sigma^2}$$

$\sigma \geq 5$	$\sigma \geq 8$	$\sigma \geq 13$	$\sigma \geq 19$	$\sigma \geq 26$
$ \delta  < 0.034$	$ \delta  < 0.0178$	$ \delta  < 0.0097$	$ \delta  < 0.0062$	$ \delta  < 0.0043$
$ \varepsilon  < 0.014$	$ \varepsilon  < 0.0053$	$ \varepsilon  < 0.0020$	$ \varepsilon  < 0.0010$	$ \varepsilon  < 0.0005$

## Der lokale Grenzwertsatz (LGS)

V314  
Erläuterung

Für  $n \rightarrow \infty$  gilt  $\sigma = \sqrt{nt(1-t)} \rightarrow \infty$ , also  $\delta \rightarrow 0$ , und somit

$$\sum_{k=\lfloor \mu+\alpha\sigma \rfloor}^{\lfloor \mu+\beta\sigma \rfloor} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \rightarrow \int_{\xi=\alpha}^{\beta} \frac{e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}} d\xi$$

Meist wird diese schwächere Aussage lokaler Grenzwertsatz genannt.

Außer  $\delta \rightarrow 0$  macht sie keine quantitative Aussage über den Fehler.

In der Praxis rechnen wir nicht für  $n \rightarrow \infty$ , sondern mit festem  $n \in \mathbb{N}$ .

Für praktische Rechnungen ist daher die Fehlerkontrolle wesentlich:

$$|\delta| < \frac{1}{6\sigma} = \frac{1}{6\sqrt{nt(1-t)}} \searrow 0$$

Wenn wir zum Integral den Korrekturterm  $\kappa$  hinzuaddieren, so wird der

Approximationsfehler noch um eine Größenordnung kleiner, nämlich:

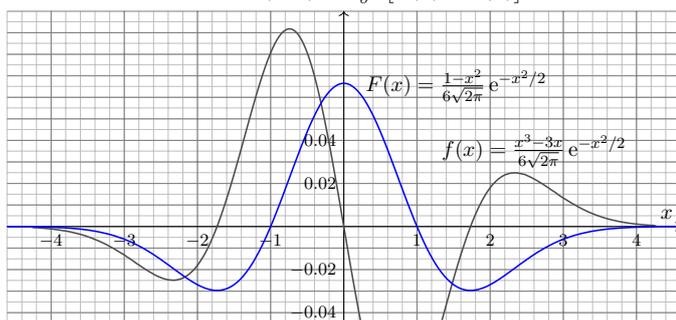
$$|\varepsilon| < \frac{0.15 + 0.18|1-2t|}{\sigma^2} < \frac{1}{3\sigma^2} = \frac{1}{3nt(1-t)}$$

😊 Für  $t = 1/2$  oder  $\alpha = -\beta$  gilt  $\kappa = 0$  und somit  $|\delta| < 1/(3\sigma^2)$ . In diesen Fällen ist die Näherung durch die Normalverteilung besonders genau.

## Der lokale Grenzwertsatz (LGS)

V315  
Ausführung

Form des Korrekturterms  $\kappa(\alpha, \beta) = \frac{1-2t}{\sigma} [F(\beta) - F(\alpha)]$  wie illustriert:



punktwiser Fehler  $\approx \frac{1-2t}{\sigma^2} f(x)$

kumulierter Fehler  $\approx \frac{1-2t}{\sigma} F(x)$

an der Stelle  $k$  bzw.  $x = \frac{k-\mu}{\sigma}$

## Der lokale Grenzwertsatz (LGS)

V316  
Ausführung

😊 Gilt der Fehler als klein genug, so können wir die mühsame Summe der Binomialverteilung (links) durch das wesentlich bequemere Integral der Normalverteilung (rechts) ersetzen: Dieses liegt tabelliert vor. [\[V116\]](#)

Die Gleichung des Satzes (mit Fehler  $\delta$ ) können wir vergrößern zu:

$$\sum_{k=a}^b \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \approx \int_{\xi=\alpha}^{\beta} \frac{e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}} d\xi = [\Phi]_{\alpha}^{\beta}$$

Das ist eine nützliche Faustformel, leider ohne jegliche Fehlerkontrolle. In der Praxis vernachlässigt man meist den Approximationsfehler  $\delta$  und beruft sich erfahrungsgemäß darauf, dass  $\sigma$  schon „groß genug“ sei.

😊 Möchte man ein möglichst genaues Ergebnis mit garantierter Fehler-

schranke, so nimmt man die Grenzen mit der Stetigkeitskorrektur  $\mp 1/2$ .

Statt der Grenzen  $\alpha = (a - 1/2 - \mu)/\sigma$  und  $\beta = (b + 1/2 - \mu)/\sigma$  nutzt man

auch gerne  $(a - \mu)/\sigma$  und  $(b - \mu)/\sigma$ . Das ist bequem, aber ungenauer.

Meist ist diese Vereinfachung gut genug, insbesondere bei großem  $\sigma$ .

Die größeren Grenzwerte nutzen wir im zentralen Grenzwertsatzes W10.

**Erstes Anwendungsbeispiel** V317  
Übung

**Aufgabe:** Ein Experiment mit Trefferwkt 0.2 wird 400 mal unabhängig wiederholt. Mit welcher Wkt ergibt sich eine Trefferzahl von 60 bis 90? (Ergebnis in Prozent, gerundet zum nächsten Prozentpunkt)

**Lösung:** Die Trefferzahl ist  $B(n, t)$ -verteilt mit  $n = 400$  und  $t = 0.2$ . Dies ist die exakte Verteilung, die wir nun numerisch nähern wollen. Erwartung  $\mu = nt = 80$ , Varianz  $\sigma^2 = nt(1-t) = 64$ , Streuung  $\sigma = 8$ .

**Grob:** Trefferzahl 60 bis 90 entspricht  $\mu - 2.5\sigma$  bis  $\mu + 1.25\sigma$ . Also

$$p = \sum_{k=60}^{90} \binom{400}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{400-k} \approx \int_{-2.5}^{1.25} \varphi(t) dt.$$

Dank der Symmetrie  $\varphi(-t) = \varphi(t)$  gilt für das Integral

$$p \approx \int_{-2.5}^{1.25} \varphi(t) dt = \int_{t=0}^{2.5} \varphi(t) dt + \int_{t=0}^{1.25} \varphi(t) dt.$$

Die Tabelle liefert  $p \approx 0.49379 + 0.39435 = 0.88814$ , also  $p \approx 89\%$ .  
Was ist hier schludrig? Schlechte Grenzen und keine Fehlerschranke!

**Erstes Anwendungsbeispiel** V318  
Übung

**Fein:** Genauer ist die im Satz angegebene Näherung  $p \approx \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) dt$  mit  $\alpha = (60 - 0.5 - 80)/8 \approx -2.56$  und  $\beta = (90 + 0.5 - 80)/8 \approx 1.31$ .

$$p \approx \int_{-2.56}^{1.31} \varphi(t) dt = \int_{t=0}^{2.56} \varphi(t) dt + \int_{t=0}^{1.31} \varphi(t) dt.$$

Die Tabelle liefert  $p \approx 0.49477 + 0.40490 = 0.89967$ , also  $p \approx 90\%$ .

**Güte:** Wie genau ist diese Approximation? Laut Satz gilt:

$$|\delta| < \frac{1}{6\sigma} = \frac{1}{48} \approx 0.02$$

Diese Schranke ist noch zu grob. Wir schauen daher genauer hin:

$$\kappa \approx 0.00047 \quad \text{und} \quad |\varepsilon| < \frac{1}{3\sigma^2} = \frac{1}{192} \approx 0.00521$$

Unsere Approximation  $p \approx 0.89967$  hat also einen Fehler  $|\delta| < 0.00568$ .  
Damit erfüllt der Wert  $p \approx 90\%$  die geforderte Genauigkeit 0.01.

**Exakt:** Mühsames Aufsummieren ergibt  $p = 0.89982 \dots$ , also  $p \approx 90\%$ .

**Zweites Anwendungsbeispiel** V319  
Übung

**Aufgabe:** Ein Experiment mit Trefferwkt 1% wird 3600 mal unabhängig wiederholt. Mit welcher Wkt ergibt sich eine Trefferzahl von 36 bis 46? (Ergebnis in Prozent, gerundet zum nächsten Prozentpunkt)

**Lösung:** Die Trefferzahl ist  $B(n, t)$ -verteilt mit  $n = 3600$  und  $t = 0.01$ . Dies ist die exakte Verteilung, die wir nun numerisch nähern wollen. Wir finden Erwartung  $\mu = nt = 36$ , Varianz  $\sigma^2 = nt(1-t) = 35.64$ , Streuung  $\sigma \approx 5.97$ . Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit

$$p = \sum_{k=36}^{46} \binom{3600}{k} \left(\frac{1}{100}\right)^k \left(\frac{99}{100}\right)^{3600-k} \approx \int_{t=\alpha}^{\beta} \varphi(t) dt$$

mit  $\alpha = -0.5/5.97 \approx -0.084$  und  $\beta = 10.5/5.97 \approx 1.759$ . Demnach gilt

$$p \approx \int_{-0.084}^{1.759} \varphi(t) dt = \int_{t=0}^{0.084} \varphi(t) dt + \int_{t=0}^{1.759} \varphi(t) dt.$$

Für die dritte Dezimalstelle interpolieren wir zwischen den Nachbarn. Interpolation der Tabelle liefert  $p \approx 0.03347 + 0.46071 = 0.49418$ .

**Zweites Anwendungsbeispiel** V320  
Übung

**Güte:** Laut Satz ist der Approximationsfehler  $|\delta| < 1/(6\sigma) \approx 0.028$ . Damit können wir die gewünschte Genauigkeit noch nicht garantieren. Der Korrekturterm ist  $\kappa \approx -0.01567$ , also korrigieren wir zu

$$p \approx 0.49418 - 0.01567 = 0.47851$$

Dann bleibt nur noch  $|\varepsilon| < 1/(3\sigma^2) \approx 0.00936$ . Wir schließen  $p \approx 48\%$ .

In diesem Beispiel ist die Streuung  $\sigma \approx 6$  sehr klein, und die Näherungen des lokalen Grenzwertsatzes daher entsprechend grob. Auch sind sowohl die Trefferwahrscheinlichkeit  $t = 0.01$  als auch die Integrationsgrenzen  $\alpha$  und  $\beta$  besonders unsymmetrisch, und so ist der Korrekturterm  $\kappa$  hier recht groß. Die Addition von  $\kappa$  bringt eine spürbare Verbesserung:

Die erste Näherung  $p \approx 0.49418$  ist deutlich schlechter als die um  $\kappa$  korrigierte Näherung  $p \approx 0.47851$ . Nur letztere erfüllt die geforderte Genauigkeit von 0.01. Auch gerundet hätten wir zunächst 49% erhalten, aber die tatsächliche Wahrscheinlichkeit liegt knapp unter 48%:

**Exakt:** Mühsames Aufsummieren ergibt  $p = 0.47880 \dots$ , also  $p \approx 48\%$ .

😊 Egal ob grob oder genau, der Satz stellt alle Werkzeuge bereit. Lesen Sie den Satz genau, er ist wunderbar explizit und hilfreich.

**Drittes Anwendungsbeispiel** V321  
Übung

**Aufgabe:** Wie wahrscheinlich ist es, dass bei 600maligem Würfeln die Augenzahl 6 zwischen einschließlich 90 und 110 mal eintritt? Bestimmen Sie diese Wahrscheinlichkeit auf 0.005 genau.

**Lösung:** Die Anzahl ist  $B(n, t)$ -verteilt mit  $n = 600$  und  $t = 1/6$ . Dies ist die exakte Verteilung, die wir nun numerisch nähern wollen. Wir finden Erwartung  $\mu = nt = 100$ , Varianz  $\sigma^2 = nt(1-t) = 500/6$ , Streuung  $\sigma = 10\sqrt{5/6} \approx 9.13$ . Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit

$$p = \sum_{k=90}^{110} \binom{600}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{600-k} \approx \int_{t=\alpha}^{\beta} \varphi(t) dt$$

mit  $\alpha = (90 - 0.5 - 100)/9.13 \approx -1.15$  und  $\beta \approx 1.15$ . Demnach gilt

$$p \approx \int_{-1.15}^{1.15} \varphi(t) dt = 2 \int_{t=0}^{1.15} \varphi(t) dt \approx 2 \cdot 0.37493 = 0.74986.$$

Also  $p \approx 75\%$ . (Plausibel, denn etwas mehr als die  $1\sigma$ -Umgebung.)

**Drittes Anwendungsbeispiel** V322  
Übung

**Güte:** Wie genau ist die Approximation in diesem Fall?

Dank der Symmetrie von  $\alpha$  und  $\beta$  verschwindet der Korrekturterm. Wegen  $\kappa = 0$  bleibt hier nur ein besonders kleiner Fehler von

$$|\delta| = |\varepsilon| < \frac{1}{3\sigma^2} = \frac{2}{500} = 0.004.$$

Somit ist unsere Approximation  $p \approx 75\%$  auf 0.005 genau.

**Exakt:** Mühsames Aufsummieren ergibt  $p = 0.75012 \dots$

Wir sehen in diesen Beispielen, dass die Approximation meist noch besser ist, als die allgemeine Fehlerabschätzung des Satzes vermuten lässt. Das ist auch verständlich: Es handelt sich nur um eine obere Schranke für den Fehler, aber sie ist doch recht nah an der wirklichen Abweichung. Die exakten Werte liefern immer einen Fehler unter dieser Schranke, manchmal deutlich darunter.

Der Nutzen des Satzes ist über die Konvergenz für  $n \rightarrow \infty$  hinaus vor allem die bequeme und aussagekräftige Fehlerschranke für endliches  $n$ . Damit können Sie schnell und sicher abschätzen, ob die gewünschte Genauigkeit gewährleistet ist. Ist eine höhere Genauigkeit nötig, so müssen Sie beim Fehler genauer hinschauen und gegebenenfalls eine präzisere Rechnung nutzen, notfalls aufwändig  $B(n, t)$  aufsummieren. Alle hierzu nötigen Informationen liegen explizit vor.

**Sind die Lotto-Zahlen verdächtig?** V323  
Übung

6385 Ziehungen, Sa+Mi, ohne Zusatzzahl

**Sind die Lotto-Zahlen verdächtig?** V324  
Übung

Die Graphik zeigt die Statistik über 6385 Lotto-Ziehungen 6 aus 49.

**Aufgabe:** Ist die geringe Ziehungshäufigkeit der Zahl 13 verdächtig?

**Lösung:** Wir untersuchen  $n = 6385$  Ziehungen von je 6 Zahlen. Die Ziehungswahrscheinlichkeit jeder Zahl ist  $t = \binom{48}{5} / \binom{49}{6} = 6/49$ . Bei ordnungsgemäßer Ziehung ist jede Anzahl  $B(n, t)$ -verteilt.

Erwartung  $\mu = nt \approx 781.84$   
 Varianz  $\sigma^2 = nt(1-t) \approx 686.10$   
 Streuung  $\sigma \approx 26.19$

Die  $1\sigma$ -Umgebung [755, 808] enthält 31 der 49 Anzahlen, also 63%.  
 Die  $2\sigma$ -Umgebung [729, 834] enthält 46 der 49 Anzahlen, also 94%.  
 Die  $3\sigma$ -Umgebung [703, 860] enthält 49 der 49 Anzahlen, also 100%.

😊 Diese Verteilung entspricht der erwarteten 68–95–99–Regel. Schwankungen dieser Größenordnung sind normal. Im Gegenteil, weniger wäre verdächtig. Also doch keine Lotto-Verschwörung. Titanic (26.10.2011): „Experten warnen: Lottozahlen oft reiner Zufall!“

**Wahrscheinlichkeitsräume** V401  
Fazit

Mit Kolmogorovs Axiomen (V1c) fixieren wir die grundlegenden Forderungen für WMaße, woraus alle weiteren Rechenregeln folgen:

Ein **Wahrscheinlichkeitsraum**  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  besteht aus

- einer **Ergebnismenge**  $\Omega$ ,
- einer **Ereignismenge**  $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$  und
- einem **Wahrscheinlichkeitsmaß**  $P: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ ,

mit folgenden grundlegenden Eigenschaften:

- 1 Normierung:** Es gilt  $\Omega \in \mathcal{A}$  und  $P(\Omega) = 1$ .
- 2 Komplemente:** Aus  $A \in \mathcal{A}$  folgt  $(\Omega \setminus A) \in \mathcal{A}$ .
- 3  $\sigma$ -Additivität:** Aus  $A_0, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$  folgt  $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$ , sowie
 
$$P\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} P(A_k) \quad \text{wenn } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j.$$

Die Bezeichnung „ $\sigma$ “ steht abkürzend für „abzählbar“. Wir nennen  $\mathcal{A}$  eine  **$\sigma$ -Algebra** und hierauf  $P: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  ein  **$\sigma$ -additives Maß**.

Wichtigste Beispiele sind diskrete und kontinuierliche WRäume. Auch Mischungen aus diskret und kontinuierlich sind möglich.

**Diskrete und kontinuierliche WRäume** V402  
Fazit

Eine **diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung** auf  $\Omega$  ist eine Funktion

$$p: \Omega \rightarrow [0, 1] \quad \text{mit Gesamtmasse} \quad \sum_{x \in \Omega} p(x) = 1.$$

Diese definiert ein **diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß**

$$P: \mathfrak{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1] \quad \text{durch} \quad P(A) := \sum_{x \in A} p(x).$$

Hierbei ist  $\mathfrak{P}(\Omega)$  die Familie aller Teilmengen  $A \subseteq \Omega$ .

Eine **kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung** oder **WDichte** auf einer Ergebnismenge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ist eine messbare Funktion

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \text{mit Gesamtmasse} \quad \int_{\Omega} f(x) dx = 1.$$

Diese definiert ein **kontinuierliches Wahrscheinlichkeitsmaß**

$$P: \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow [0, 1] \quad \text{durch} \quad P(A) := \int_A f(x) dx.$$

Hierbei ist  $\mathcal{B}(\Omega)$  die Familie aller messbaren Teilmengen  $A \subseteq \Omega$ .

**Erwartung, Varianz, Streuung** V403  
Fazit

Sei  $P$  ein WMaß auf  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , zum Beispiel diskret oder kontinuierlich. Der Schwerpunkt der Verteilung  $P$  heißt **Mittelwert** oder **Erwartung**:

$$\mu := \sum_{x \in \Omega} x p(x) \quad \text{bzw.} \quad \mu := \int_{x \in \Omega} x f(x) dx.$$

Hierbei setzen wir absolute Summierbarkeit / Integrierbarkeit voraus. Die **Varianz** der Verteilung ist ihr Trägheitsmoment bezüglich  $\mu$ :

$$\sigma^2 := \sum_{x \in \Omega} (x - \mu)^2 p(x) = \left[ \sum_{x \in \Omega} x^2 p(x) \right] - \mu^2 \geq 0 \quad \text{bzw.}$$

$$\sigma^2 := \int_{x \in \Omega} (x - \mu)^2 f(x) dx = \int_{x \in \Omega} x^2 f(x) dx - \mu^2 \geq 0.$$

Die Wurzel  $\sigma \geq 0$  dieses Wertes heißt die **Streuung** der Verteilung. Anschaulich misst  $\sigma$ , wie weit die Werte um den Mittelwert  $\mu$  streuen. Man nennt die Streuung  $\sigma$  daher auch die **Standardabweichung**. Genau dann gilt  $\sigma = 0$ , wenn  $P$  auf den Punkt  $\mu$  konzentriert ist, d.h. für  $A \subseteq \mathbb{R}$  gilt  $P(A) = 1$  falls  $\mu \in A$  und  $P(A) = 0$  falls  $\mu \notin A$ .

**Existenz von Erwartung und Varianz** V404  
Fazit

**Aufgabe:** Welche der folgenden Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sind WDichten?

$$f(x) = \frac{1/c}{1 + |x|}, \quad f(x) = \frac{1/c}{1 + |x|^2},$$

$$f(x) = \frac{1/c}{1 + |x|^3}, \quad f(x) = \frac{1/c}{1 + |x|^\alpha},$$

$$g(x) = \frac{1/c}{1 + |x|^\alpha \ln(e + |x|)}, \quad h(x) = \frac{1/c}{1 + |x|^\alpha \ln(e + |x|^2)},$$

mit geeignetem  $c \in \mathbb{R}$ . Für welche existieren Erwartung und Varianz?

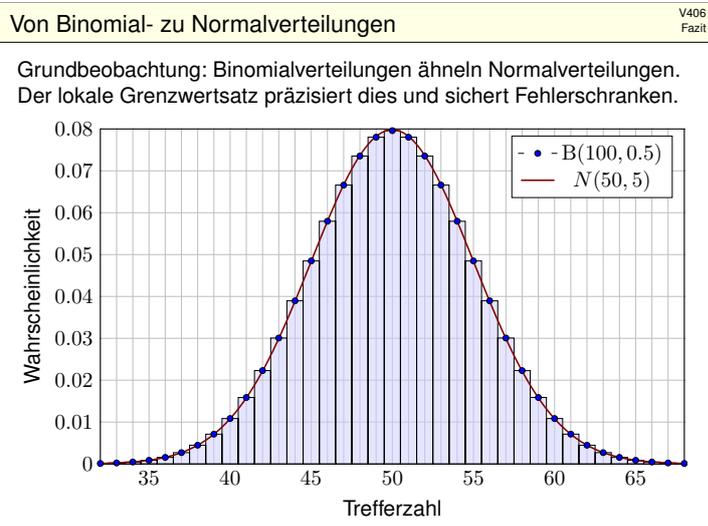
**Lösung:** Wir haben jeweils  $f \geq 0$ . Die erste lässt sich nicht normieren:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + |x|^\alpha} dx = \begin{cases} +\infty & \text{für } \alpha \leq 1, \\ < \infty & \text{für } \alpha > 1. \end{cases}$$

Für  $\alpha = 2$  erhalten wir die Cauchy-Verteilung  $f(x) = \frac{1/\pi}{1+x^2}$ . [V241]  
Das Integral konvergiert für  $\alpha > 1$ . Für die Erwartung braucht's  $\alpha > 2$ . Für die Varianz braucht's  $\alpha > 3$ . Für  $h$  genügt jeweils schon  $\alpha \geq 1, 2, 3$ .

**Wichtige Verteilungen und ihre Kenngrößen** V405  
Fazit

typ	$\Omega$	$p(k) = P(\{k\})$	E	V
<b>diskret</b>				
Gleichverteilung	$\{a, \dots, b\}$	$\frac{1}{b-a+1}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$
Hyperg. $H(N, K, n)$	$\{0, \dots, n\}$	$\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k} / \binom{N}{n}$	$n \frac{K}{N}$	$n \frac{K}{N} \frac{N-K}{N} \frac{N-n}{N-1}$
Binomial $B(n, t)$	$\{0, \dots, n\}$	$\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$	$nt$	$nt(1-t)$
Poisson $P(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$e^{-\lambda} \lambda^k / k!$	$\lambda$	$\lambda$
Geometrisch $G(q)$	$\mathbb{N}_{\geq 1}$	$(1-q)q^{k-1}$	$\frac{1}{1-q}$	$\frac{q}{(1-q)^2}$
Zeta $Z(s), s=2$	$\mathbb{N}_{\geq 1}$	$\frac{6}{\pi^2} \frac{1}{k^2}$	— nicht definiert! — <small>Diese Reihen divergieren.</small>	
<b>kontinuierlich</b>				
Gleichverteilung	$[a, b]$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponential $E(\lambda)$	$\mathbb{R}_{\geq 0}$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$\lambda^{-1}$	$\lambda^{-2}$
Normal $N(\mu, \sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$\frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$	$\mu$	$\sigma^2$
Cauchy $C(m, a)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + (x-m)^2}$	— nicht definiert! — <small>Diese Integrale divergieren.</small>	



**Der lokale Grenzwertsatz (LGS)** V407  
Fazit

Für die **Binomialverteilung**  $B(n, t)$  gilt  $\mu = nt$  und  $\sigma^2 = nt(1-t)$ . Sie ähnelt der **Normalverteilung**:  $B(n, t) \approx N(\mu, \sigma^2)$ , das heißt:

$$\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \approx \frac{e^{-\frac{(k-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \approx \int_{k-1/2}^{k+1/2} \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dx.$$

Dies nennt man auch Satz von de Moivre (1733) und Laplace (1812). Mühsame Summen ersetzen wir so durch bequemere Integrale:

$$\sum_{k=a}^b \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \int_{\xi=\alpha}^{\beta} \frac{e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}} d\xi + \delta$$

mit den Grenzen  $\alpha = (a - 1/2 - \mu)/\sigma$  und  $\beta = (b + 1/2 - \mu)/\sigma$ .

(1) Für  $\sigma \geq 5$  ist der Approximationsfehler  $\delta$  beschränkt durch

$$|\delta| < \frac{|1-2t|}{10\sigma} + \frac{1}{3\sigma^2} \leq \frac{1}{6\sigma} = \frac{1}{6\sqrt{nt(1-t)}}$$

☺ Gilt der Fehler als klein genug, so können wir die mühsame Summe der Binomialverteilung (links) durch das wesentlich bequemere Integral der Normalverteilung (rechts) ersetzen: Dieses liegt tabelliert vor. [V116]

**Der lokale Grenzwertsatz (LGS)** V408  
Fazit

(2) Ist eine genauere Approximation nötig, so addiert man zur obigen Näherung durch das Integral noch folgenden Korrekturterm  $\kappa$ :

$$\sum_{k=a}^b \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \int_{\xi=\alpha}^{\beta} \frac{e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}} d\xi + \kappa + \varepsilon$$

mit Korrektur  $\kappa = \frac{1-2t}{6\sigma\sqrt{2\pi}} \left[ (1-\xi^2) e^{-\xi^2/2} \right]_{\alpha}^{\beta}$

Der verbleibende Fehler  $\varepsilon$  ist noch eine Größenordnung kleiner, nämlich

$$|\kappa| < \frac{|1-2t|}{10\sigma}, \quad |\varepsilon| < \frac{0.15 + 0.18|1-2t|}{\sigma^2} < \frac{1}{3\sigma^2} = \frac{1}{3nt(1-t)}.$$

Speziell für  $t = 1/2$  oder  $\alpha = \beta$  verschwindet der Korrekturterm  $\kappa$ . Für  $n \rightarrow \infty$  geht der Fehler gegen Null mit  $1/\sqrt{n} \rightarrow 0$  bzw.  $1/n \rightarrow 0$ .

$\sigma \geq 5$	$\sigma \geq 8$	$\sigma \geq 13$	$\sigma \geq 19$	$\sigma \geq 26$
$ \delta  < 0.034$	$ \delta  < 0.0178$	$ \delta  < 0.0097$	$ \delta  < 0.0062$	$ \delta  < 0.0043$
$ \varepsilon  < 0.014$	$ \varepsilon  < 0.0053$	$ \varepsilon  < 0.0020$	$ \varepsilon  < 0.0010$	$ \varepsilon  < 0.0005$

Erklären Sie in eigenen Worten den lokalen Grenzwertsatz:

$$B(n, t) \approx N(\mu, \sigma^2)$$

In welchem Sinne nähert sich die Binomial- der Normalverteilung? Nennen / erfinden Sie mindestens zehn konkrete Anwendungsbeispiele, in denen diese Näherung praktisch nützlich ist, sinnvoll und hilfreich.

Wie lautet und was besagt der lokale Grenzwertsatz? Wie bestimmt man hierzu die nötigen Kenngrößen  $\mu$  und  $\sigma$ ? In welchen Situationen kann man den LGS anwenden und wie? Welche Voraussetzungen braucht man und welche Schlussfolgerung gewinnt man?

Woher kommen im LGS die Integrationsgrenzen  $\alpha = (a - 1/2 - \mu)/\sigma$  und  $\beta = (b + 1/2 - \mu)/\sigma$ ? Woher kommt die Stetigkeitskorrektur  $\pm 1/2$ ? Wann darf man sie ignorieren? Was passiert im Extremfall  $a = b$ ?

Wie lauten die Fehlerschranken im LGS? Was passiert für  $n \rightarrow \infty$ ? Wie verbessert man bei Bedarf die Näherung um eine Größenordnung? Wozu nützen die Schranken in konkreten Anwendungen, bei festem  $n$ ? Wann darf man sie getrost ignorieren? meistens? manchmal? nie?

Im Experiment  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  wollen Sie die Wkt  $p = \mathbf{P}(A)$  messen. Sie führen  $n$  unabhängige Versuche durch und erhalten  $k$  Treffer. Diese Stichprobe liefert für  $p$  Ihre **Punktschätzung**  $\hat{p} = k/n \in [0, 1]$ . Diese Zahl sagt leider rein gar nichts über die Güte Ihrer Schätzung!

**Aufgabe:** Bestimmen Sie zu  $k \in \{0, \dots, n\}$  ein **Intervall**  $I_k = [a_k, b_k]$ , das in  $\alpha = 95\%$  aller Stichproben die wahre Wkt  $p \in [0, 1]$  überdeckt.

**Lösung:** Wir setzen  $c := (1 - \alpha)/2$  und bestimmen  $a_k, b_k \in [0, 1]$  durch

$$f_k(a) := \sum_{j < k} B(n, a)(j) \stackrel{!}{=} c \quad \text{und} \quad g_k(b) := \sum_{j > k} B(n, b)(j) \stackrel{!}{=} c.$$

Dabei ist  $f_k$  ein Polynom und für  $k > 0$  streng fallend von  $f_k(0) = 1$  nach  $f_k(1) = 0$ . Daher existiert genau ein  $a_k \in [0, 1]$  mit  $f_k(a_k) = c$ . Für  $k = 0$  setzen wir  $a_0 := 0$ . Ebenso verfahren wir für  $b_k$  und setzen  $b_n := 1$ .

**Begründung:** Nicht-Überdeckung  $p \notin I_k$  bedeutet  $p < a_k$  oder  $b_k < p$ . Wir bestimmen  $\ell \in \{0, \dots, n\}$  durch  $a_\ell \leq p \leq b_\ell$  und  $p < a_k$  für  $k > \ell$ . Damit finden wir  $\mathbf{P}(a_X > p) = \sum_{k > \ell} B(n, p)(k) = g_\ell(p) \leq g_\ell(b_\ell) \leq c$ . Ebenso  $\mathbf{P}(b_X < p) \leq c$ . Somit gilt  $\mathbf{P}(I_X \ni p) \leq 2c$ , also  $\mathbf{P}(I_X \ni p) \geq \alpha$ .

Das Meinungsforschungsinstitut *Infratest dimap* schreibt über ihre Befragungsmethode auf [www.infratest-dimap.de/service/faqs](http://www.infratest-dimap.de/service/faqs) (aufgerufen am 10.03.2016) folgendes:

*Aus finanziellen und organisatorischen Gründen ist es nicht möglich, Millionen oder Hunderttausende Wahlberechtigte zu befragen. Die Wahlforschung arbeitet daher generell mit Stichproben. Befragt wird lediglich eine kleine Auswahl von Personen, zum Beispiel 1000, die für viele Millionen wahlberechtigte Bundesbürger stehen. [...]*

*Das Ziel, ein kleines Abbild des Ganzen zu bekommen, ist am besten mit einer Zufallsstichprobe zu erreichen. Sie stellt einerseits sicher, dass jeder einzelne Wahlberechtigte oder jeder einzelne Wähler prinzipiell die gleiche Chance besitzt, befragt zu werden, andererseits garantiert sie, dass Interviewer keinen subjektiven Einfluss auf die Auswahl der Befragten haben. [...]*

*Die Genauigkeit einer Befragung oder die Fehlergröße hängt ab von der Anzahl der befragten Personen. Faustregel: Eine Vervielfachung der Befragten halbiert den Zufallsfehler.*

*Wahltagsbefragungen sind meist exakter als Erhebungen in der Zwischen- und Vorwahlzeit. Bei Vorwählerhebungen befragt Infratest dimap in der Regel 1 000 Wahlberechtigte, am Wahlsonntag bei Landtags-, Bundestags- und Europawahlen aber bis zu 50 000 Wähler. [...]*

*Vorwählerhebungen finden in der Regel als computergestützte Telefonerhebung statt.*

**Aufgabe:** Erklären Sie möglichst genau die genannte Faustregel: Eine Vervielfachung der Befragten halbiert den Zufallsfehler.

Eine Wahl mit über 5 000 000 Stimmberechtigten steht bevor. Der Stimmanteil  $p \in [0.02, 0.98]$  einer Partei soll geschätzt werden. Hierzu werden  $n$  zufällige Personen befragt. Die Schätzung soll mit Wahrscheinlichkeit  $\geq 95\%$  bis auf einen Fehler von  $\leq 0.01$  genau sein.

**Aufgabe:** Wie viele Personen sollten hierfür befragt werden? Welche Näherungen nutzen Sie hierzu? mit welcher Güte?

**Lösung:** Von allen  $N$  Stimmberechtigten stimmen  $K$  für die Partei. Sei  $k$  die Anzahl der  $n$  befragten Personen, die sich für die Partei aussprechen. Diese Anzahl ist  $H(N, K, n)$ -verteilt (Stichprobe oZ). Für große  $N$  ist dies annähernd  $B(n, p)$ -verteilt (Stichprobe mZ).

Diese Näherung werden wir nachträglich rechtfertigen: Der totale Abstand von  $H(N, K, n)$  zu  $B(n, p)$  ist kleiner als  $n/N$ , für  $n \leq 10\,000$  und  $N \geq 5\,000\,000$  also kleiner als 0.002. Alternativ könnte man die Befragung auch so gestalten, dass statt der hypergeometrischen gleich die Binomialverteilung entsteht, nämlich durch Auslosung mit Zurücklegen.

Den unbekanntem Anteil  $p = K/N$  schätzen wir durch den Wert  $k/n$ . Fehler  $\leq 0.01$  bedeutet  $|k/n - p| \leq 0.01$ , also  $|k - np| \leq 0.01n$ . Das heißt  $a \leq k \leq b$  mit  $a = \lceil np - 0.01n \rceil$  und  $b = \lfloor np + 0.01n \rfloor$ .

Vergleichen Sie den LGS mit Poissons Gesetz der kleinen Zahlen:

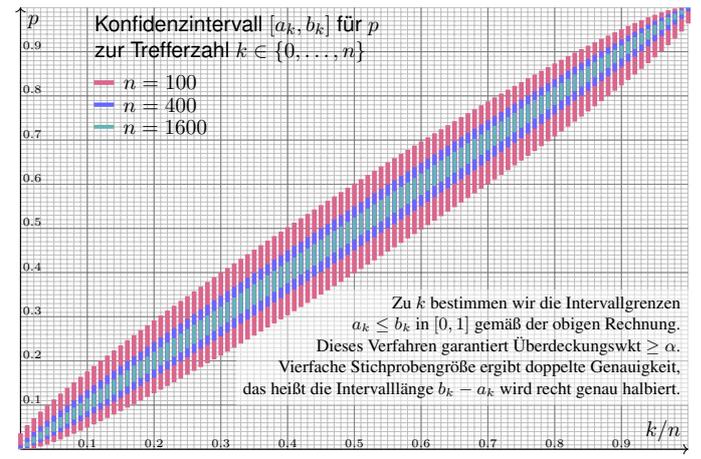
$$B(n, t) \approx P(\lambda)$$

In welchem Sinne nähert sich die Binomial- der Poisson-Verteilung? Nennen / erfinden Sie mindestens zehn konkrete Anwendungsbeispiele, in denen diese Näherung praktisch nützlich ist, sinnvoll und hilfreich.

Wie lautet und was besagt Poissons Gesetz der kleinen Zahlen? Wie bestimmt man hierzu die nötige Kenngröße  $\lambda$ ? In welchen Situationen kann man diese Näherung anwenden? Welche Voraussetzungen braucht man und welche Schlussfolgerung gewinnt man?

Wie lautet die Fehlerschranke beim Gesetz der kleinen Zahlen? Wie verhält sie sich für  $n \rightarrow \infty$ ? Wie muss  $t$  angepasst werden? Wozu nützt diese Schranke in konkreten Anwendungen, bei festem  $n$ ? Wann darf man sie getrost ignorieren? meistens? manchmal? nie?

*Die Klärung dieser Fragen ist Gegenstand von Kapitel U und V. Prüfen Sie sich selbst und lesen Sie alles nötige gründlich nach.*



Der Stimmanteil  $p \in [0.07, 0.93]$  einer Partei soll prognostiziert werden. Hierzu werden  $n = 1000$  zufällige Personen befragt. Den gesuchten Anteil  $p = K/N$  schätzen wir durch den Stichprobenanteil  $\hat{p} = k/n$ .

**Aufgabe:** Mit welcher Wkt  $q$  ist die Schätzung auf 0.01 genau?

**Lösung:** Die Anzahl  $k$  ist  $B(n, p)$ -verteilt. Erwartung  $\mu = np \in [70, 930]$ , Varianz  $\sigma^2 = np(1-p) \in [65, 250]$ , Streuung  $\sigma \in [8, 16]$  (ausgerundet). Abweichung  $|k/n - p| \leq 0.01$  bedeutet  $|k - np| \leq 0.01n = 10$ . Also

$$q = \sum_{k=\lceil np-10 \rceil}^{\lfloor np+10 \rfloor} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi(t) dt = 2 \int_0^{\alpha} \varphi(t) dt.$$

Hier ist  $\alpha = 10.5/\sigma \in [0.65, 1.32]$ . Tabelle ablesen:  $q \in [0.47, 0.82]$ . Der Näherungsfehler  $|\varepsilon| < 1/(3\sigma^2) < 0.006$  wurde hier mitgerechnet.

☺ Mit Wahrscheinlichkeit  $q \geq 47\%$  ist die Schätzung auf 0.01 genau.

$ k/n - p $	$\leq 0.01$	$\leq 0.02$	$\leq 0.03$	$\leq 0.04$	$\leq 0.05$
$\alpha$	[0.65, 1.32]	[1.28, 2.57]	[1.90, 3.82]	[2.53, 5.07]	[3.15, 6.32]
$q$	[0.47, 0.82]	[0.79, 0.99]	[0.94, 1.00]	[0.98, 1.00]	[0.99, 1.00]

Diese noch tolerierbare Abweichung tritt auf mit Wahrscheinlichkeit

$$\sum_{k=a}^b \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi(t) dt = 2 \int_0^{\alpha} \varphi(t) dt \stackrel{!}{\geq} 0.95$$

wobei  $\alpha = 0.01n/\sqrt{np(1-p)}$ . Aus der Tabelle lesen wir ab:  $\alpha \geq 2$ . Hieraus bestimmen wir eine geeignete Stichprobengröße  $n$ :

$$\alpha = \frac{0.01\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \geq 2 \iff \sqrt{n} \geq 200\sqrt{p(1-p)}$$

$$\iff n \geq 40\,000 \cdot p(1-p) \iff n \geq 10\,000$$

Wegen  $p(1-p) \leq 1/4$  genügt es in jedem Falle,  $n \geq 200^2 \cdot 1/4 = 10\,000$  zu wählen. Genauer: Für  $p \in [0.2, 0.8]$  gilt  $\sigma^2 = np(1-p) \in [1600, 2500]$ , also  $\sigma \in [40, 50]$ . Mit Rundung und Stetigkeitskorrektur gilt demnach  $\alpha' = (0.01n - 0.5)/\sigma \in [1.99, 2.49]$  und Wkt  $\geq 95.34\%$ . Für  $p \in [0.02, 0.2] \cup [0.8, 0.98]$  gilt  $\sigma^2 = np(1-p) \in [196, 1600]$ , also  $\sigma \in [14, 40]$ . Wir erhalten demnach  $\alpha' = (0.01n - 0.5)/\sigma \in [2.48, 7.11]$  und sogar Wkt  $\geq 98.68\%$ . Der Approximationsfehler des LGS ist höchstens  $|\varepsilon| < 1/(3\sigma^2) < 0.00021$  bzw.  $< 0.00171$ .

☺ Bei Stichprobengröße  $n \geq 10\,000$  ist die Schätzung  $k/n$  für  $K/N$  mit Wahrscheinlichkeit  $\geq 95\%$  bis auf einen Fehler von  $\leq 0.01$  genau.

Jede Messung unterliegt zufälligen Störungen, wir betrachten sie daher als eine Zufallsvariable  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir nehmen nun  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  an, das heißt, die Messwerte sind normalverteilt um den Mittelwert  $\mu \in \mathbb{R}$  mit Streuung  $\sigma \in \mathbb{R}_{>0}$ . Ziel der Messung ist die Schätzung des Wertes  $\mu$ .  
Wir untersuchen das Motto: „Die Wahrheit liegt irgendwo in der Mitte.“  
Sie betrachten folgende besonders simple Methode: Sie wiederholen die Messung  $n$  mal unabhängig und erhalten Messwerte  $X_1, \dots, X_n$ . Hieraus bilden Sie das Minimum  $A = \min\{X_1, \dots, X_n\}$  und Maximum  $B = \max\{X_1, \dots, X_n\}$  und nehmen als Schätzung das Intervall  $[A, B]$ .

**Aufgabe:** (1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit  $\mathbf{P}([A, B] \ni \mu)$ , dass Ihr Intervall tatsächlich den gesuchten Mittelwert  $\mu$  überdeckt. Wie verhält sich diese Wkt mit wachsender Fallzahl  $n = 1, 2, 3, \dots$ ?  
(2) Berechnen Sie die Wkten  $\mathbf{P}(B \leq \mu + \sigma)$  und  $\mathbf{P}(B \leq \mu + 2\sigma)$  etc., dass Ihre Schätzung  $[A, B]$  keine allzu große Unsicherheit offen lässt. Wie verhält sich diese Wkt mit wachsender Fallzahl  $n = 1, 2, 3, \dots$ ?  
(3) Warum ist diese Min-Max-Schätzung noch nicht zufriedenstellend?

(2) Laut Tabelle der Normalverteilung gilt  $\mathbf{P}(X_k \leq \mu + \sigma) \approx 0.84134$ . Demnach gilt  $\mathbf{P}(B \leq \mu + \sigma) \approx 0.84134^n \searrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Schade!  
Für  $n = 11$  finden wir  $\mathbf{P}(B \leq \mu + \sigma) \approx 0.84134^{11} \approx 0.15$ .

Laut Tabelle der Normalverteilung gilt  $\mathbf{P}(X_k \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.97725$ . Demnach gilt  $\mathbf{P}(B \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.97725^n \searrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Schade!  
Für  $n = 11$  finden wir  $\mathbf{P}(B \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.97725^{11} \approx 0.78$ .

Laut Tabelle der Normalverteilung gilt  $\mathbf{P}(X_k \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.99865$ . Demnach gilt  $\mathbf{P}(B \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.99865^n \searrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Schade!  
Für  $n = 11$  finden wir  $\mathbf{P}(B \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.99865^{11} \approx 0.98$ .

(3) Das hier genutzte Verfahren ist einfach und sicher, aber ungenau:  
😊 Die Berechnung von  $A = \min$  und  $B = \max$  ist denkbar einfach. Die Intervallschätzung  $[A, B]$  wird mit größerem  $n$  immer sicherer.  
😞 Leider wird sie gleichzeitig immer ungenauer, sogar sehr schnell, obwohl mehr Messwerte doch größere Genauigkeit bringen sollten!  
⚠️ Aus diesen triftigen Gründen nutzt man für die Berechnung von **Konfidenzintervallen** genauere Methoden (nach Neyman 1937).

**Lösung:** Wir rechnen den einfachsten Fall  $n = 2$  sorgfältig durch.

$$\hat{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \stackrel{n=2}{=} \frac{x_1 + x_2}{2}$$

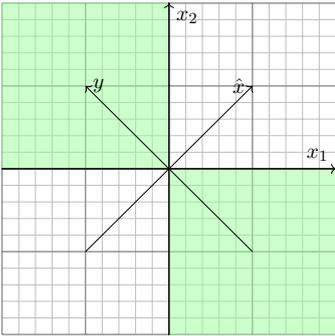
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \hat{x})^2 = \frac{(x_1 - x_2)^2}{2}$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2} = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{2}}$$

$$I_k = \left[ \hat{x} \pm k \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \right] = \left[ \frac{x_1 + x_2}{2} \pm k \frac{|x_1 - x_2|}{2} \right]$$

😊 Speziell für  $k = 1$  erhalten wir erneut  $I_1 = [\min(x_1, x_2), \max(x_1, x_2)]$ . Die beiden Messungen  $X_1, X_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  setzen wir als unabhängig und  $N(\mu, \sigma)$ -verteilt voraus. Das Intervall  $I_k \subseteq \mathbb{R}$  hängt nur von den beiden Messwerten  $x_1 = X_1(\omega)$  und  $x_2 = X_2(\omega)$  ab, und ist wie diese ebenso dem Zufall unterworfen, also dem zufälligen Ergebnis  $\Omega \ni \omega \mapsto (x_1, x_2)$ .

(1) Das Ereignis  $I_1 \ni \mu$  entspricht  $|\hat{X} - \mu| \leq |Y|$ . Skizze für  $\mu = 0$ :



Seine Wkt entspricht dem grünen Winkel, somit gilt  $\mathbf{P}(I_1 \ni \mu) = 1/2$ .  
😊 Dies entspricht der Min-Max-Schätzung aus der vorigen Aufgabe.

**Lösung:** (1) Nach Konstruktion unseres Verfahrens gilt immer  $A \leq B$ .  
Zu hohe Schätzung  $\mu < A \leq B$  bedeutet, dass  $n$  mal ausschließlich Werte  $X_1, \dots, X_n > \mu$  gemessen wurde. Wegen  $\mathbf{P}(X_k > \mu) = 1/2$  und Unabhängigkeit der Messungen geschieht dies mit Wkt  $\mathbf{P}(A > \mu) = 2^{-n}$ .  
Zu niedrige Schätzung  $A \leq B < \mu$  bedeutet, dass  $n$  mal ausschließlich Werte  $X_1, \dots, X_n < \mu$  gemessen wurde. Wegen  $\mathbf{P}(X_k < \mu) = 1/2$  und Unabhängigkeit der Messungen geschieht dies mit Wkt  $\mathbf{P}(B < \mu) = 2^{-n}$ .  
Das Ereignis  $A \leq \mu \leq B$  hat also die Wkt  $\mathbf{P}(A \leq \mu \leq B) = 1 - 2^{-n}$ .  
Für  $n = 1$  erhalten wir nur die Punktschätzung  $[A, B] = \{X_1\}$ . Ihre Trefferwahrscheinlichkeit  $\mathbf{P}(X_1 = \mu)$  ist tatsächlich gleich Null.  
Für  $n = 2$  ist die Trefferwkt  $\mathbf{P}(A \leq \mu \leq B) = 1/2$ : immerhin etwas.  
Für  $n = 3$  ist die Trefferwkt  $\mathbf{P}(A \leq \mu \leq B) = 3/4$ : etwas besser.  
Für  $n = 4$  ist die Trefferwkt  $\mathbf{P}(A \leq \mu \leq B) = 7/8$ : noch besser.  
Für  $n = 11$  ist die Trefferwkt  $\mathbf{P}(A \leq \mu \leq B) = 1 - 2^{-10} \approx 99.9\%$ .  
Für  $n \rightarrow \infty$  erhalten wir den Grenzwert  $\mathbf{P}(A \leq \mu \leq B) = 1 - 2^{1-n} \nearrow 1$ .

Als Stichprobe für  $X$  führen wir  $n$  **unabhängige Messungen** aus. Aus den so gewonnenen Messwerten  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  berechnen wir

den **Stichprobenmittelwert**  $\hat{x} := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$ ,

die **Stichprobenvarianz**  $\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \hat{x})^2$ ,

das **Konfidenzintervall**  $I_k := \left[ \hat{x} - k \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \hat{x} + k \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \right]$ .

**Aufgabe:** Für  $X \sim N(\mu, \sigma)$  machen wir  $n = 2$  Messungen.  
(1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit  $\mathbf{P}([\hat{x} \pm \hat{\sigma}/\sqrt{n}] \ni \mu)$ , dass das Intervall  $I_1$  tatsächlich den gesuchten Wert  $\mu$  überdeckt.  
(2) Berechnen Sie ebenso  $\mathbf{P}([\hat{x} \pm k\hat{\sigma}/\sqrt{n}] \ni \mu)$  für das Intervall  $I_k$ .  
😊 Größeres  $k$  bringt Sicherheit, mehr Messwerte bringen Genauigkeit!  
Für  $n = 2, 3, 4, \dots$  nutzen wir Gossets Student- $t$ -Verteilung (Satz V4A). Für große  $n$  nähert sie sich rasch der Normalverteilung, das vereinfacht.

Wir berechnen nun die Wahrscheinlichkeit  $\mathbf{P}(I_k \ni \mu)$ , dass unser zufälliges Intervall  $I_k \subseteq \mathbb{R}$  den tatsächlichen Wert  $\mu \in \mathbb{R}$  überdeckt. Dank Unabhängigkeit ist die Verteilung von  $(X_1, X_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine zweidimensionale Normalverteilung  $N(\mu, \sigma^2) \otimes N(\mu, \sigma^2)$  mit Dichte

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x_1 - \mu)^2 / (2\sigma^2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x_2 - \mu)^2 / (2\sigma^2)}$$

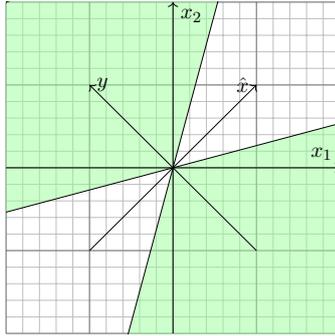
$$= \frac{1}{2\pi} e^{-|(x_1, x_2) - (\mu, \mu)|^2 / (2\sigma^2)}$$

Sie ist rotationssymmetrisch um ihren Schwerpunkt  $(\mu, \mu)$ , siehe V108. Unsere Formeln für  $\hat{x}$  und  $\hat{\sigma}$  legen die folgende Transformation nahe:

$$\left. \begin{aligned} \hat{X} &= \frac{1}{2}(X_1 + X_2) \\ Y &= \frac{1}{2}(X_2 - X_1) \end{aligned} \right\} \iff \begin{pmatrix} \hat{X} \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

Dies ist eine Drehstreckung: Drehung um  $45^\circ$  und Stauchung um  $\sqrt{2}$ . Demnach ist auch die Verteilung von  $(\hat{X}, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  normalverteilt und ebenso rotationssymmetrisch um ihren Schwerpunkt  $(\mu, 0)$ .

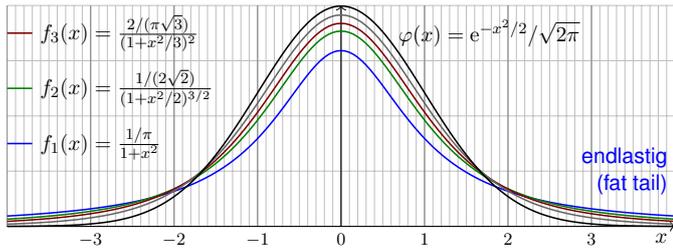
(2) Das Ereignis  $I_2 \ni \mu$  entspricht  $|\hat{X} - \mu| \leq 2|Y|$ . Skizze für  $\mu = 0$ :



Seine Wkt ist  $\mathbf{P}(I_2 \ni \mu) \approx 70\%$ , allgemein  $\mathbf{P}(I_k \ni \mu) = \frac{2}{\pi} \arctan(k)$ .  
😊 Für  $k \rightarrow \infty$  gilt demnach  $\mathbf{P}(I_k \ni \mu) = \frac{2}{\pi} \arctan(k) \nearrow 1$ .

Zur Anzahl  $\nu \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  von „Freiheitsgraden“ definieren wir die Wktsdichte

$$f_\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{\nu\pi}} (1 + x^2/\nu)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$



Normierung  $\int_{\mathbb{R}} f_\nu(x) dx = 1$  gelingt dank Gamma-Funktion. B316 C232  
 Für  $\nu = 1$  erhalten wir die obige Cauchy-Verteilung  $f_1(x) = \frac{1/\pi}{1+x^2}$ . V241  
 Für  $\nu \rightarrow \infty$  erhalten wir die Standard-Normalverteilung  $\varphi$ . (Übung!)

Diese Verteilung hat folgende zentrale Bedeutung in der Statistik:

**Satz V4A: Gosset 1908, alias „Student“**

Seien  $X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  unabhängig, normalverteilt,  $X_k \sim N(\mu, \sigma^2)$ .  
 Wir betrachten Stichprobenmittelwert, -Varianz und -Abweichung:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k, \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2 \quad \text{und} \quad T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

Dann sind die ZVaren  $\bar{X}$  und  $S^2$  stochastisch unabhängig, der Stichprobenmittelwert  $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$  ist normalverteilt, die Stichprobenvarianz  $S^2$  ist  $\chi^2$ -verteilt, und die Abweichung  $T$  ist Student-t-verteilt mit der oben angegebenen Dichte  $f_{n-1}$ .

Das bedeutet: Der Abstand des gemessenen Mittelwertes  $\bar{X}$  zum wahren (aber uns unbekanntem) Mittelwert  $\mu$  ist verteilt wie  $T S/\sqrt{n}$ . Den Fall  $n = 2$  haben wir oben ausgeführt; der allgemeine Fall gelingt ähnlich. Diese Rechnung und die  $\chi^2$ -Verteilung führe ich hier nicht aus.

Zum Konfidenzniveau  $\alpha$  nutzen wir das **Konfidenzintervall**

$$I_k = [\bar{X} - k S/\sqrt{n}, \bar{X} + k S/\sqrt{n}]$$

Den Wert  $k$  bestimmen wir dabei so, dass  $\int_{-k}^k f_\nu(x) dx = 1 - \alpha$  gilt.

$\alpha =$	0.500	0.750	0.800	0.900	0.950	0.980	0.990	0.998
$\nu = 1$	1.000	2.414	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.309
2	0.816	1.604	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327
3	0.765	1.423	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215
4	0.741	1.344	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	0.727	1.301	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
10	0.700	1.221	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
20	0.687	1.185	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
30	0.683	1.173	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
40	0.681	1.167	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307
50	0.679	1.164	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261
100	0.677	1.157	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174
200	0.676	1.154	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601	3.131
300	0.675	1.153	1.284	1.650	1.968	2.339	2.592	3.118
400	0.675	1.152	1.284	1.649	1.966	2.336	2.588	3.111
500	0.675	1.152	1.283	1.648	1.965	2.334	2.586	3.107
$\infty$	0.674	1.150	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090

(0) Durch Stichprobe wollen wir den Mittelwert  $\mu$  schätzen. Aus Messwerten  $X_1, X_2, \dots, X_n$  bestimmen wir dazu ein geeignetes Konfidenzintervall  $I = [A, B]$ . Dieses überdeckt den wahren (aber uns unbekanntem) Wert  $\mu$  mit der Wkt  $\mathbf{P}(I \ni \mu)$ . Wir geben uns ein Konfidenzniveau  $\alpha$  vor und verlangen  $\mathbf{P}(I \ni \mu) \geq \alpha$ . Typische Werte sind  $\alpha = 95\%$  oder  $\alpha = 99\%$ .

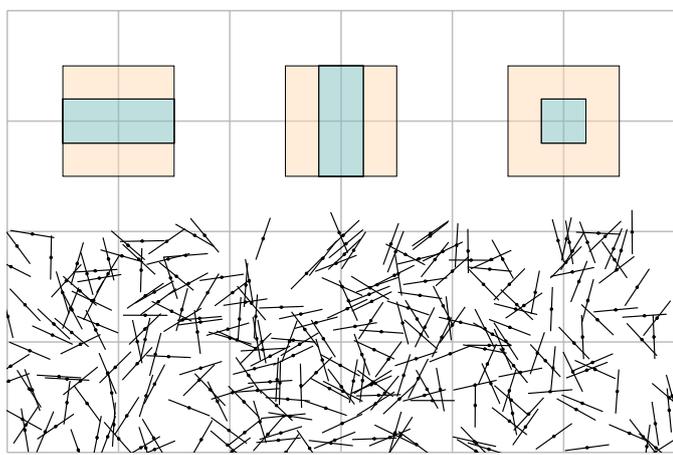
(1) Die Zufallsvariable  $\bar{X}$  ist  $N(\mu, \sigma^2/n)$ -verteilt. Ist die Varianz  $\sigma^2$  bekannt, so betrachten wir das Intervall  $I = [\bar{X} - \tau\sigma/\sqrt{n}, \bar{X} + \tau\sigma/\sqrt{n}]$  und bestimmen  $\tau$  so, dass  $\int_{-\tau}^{\tau} \varphi(x) dx = 1 - \alpha$ .

(2) In realistischen Anwendungen ist die Varianz  $\sigma^2$  unbekannt und muss ebenso wie  $\mu$  aus der Stichprobe geschätzt werden. Dies gelingt durch die (Bessel-korrigierte) Stichprobenvarianz  $S^2$ . Wir betrachten  $T = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$  als Abweichung vom Mittelwert. Bei großen Stichproben ( $n \rightarrow \infty$ ) nimmt man näherungsweise an, dass  $T$  normalverteilt ist, wie in (1), das vereinfacht.

(3) Bei kleinen Stichprobengrößen  $n$  ist dies jedoch allzu optimistisch. William Gosset stellte 1908 fest, dass  $T$  nicht normalverteilt ist, sondern der oben angegebenen Verteilung  $f_\nu$  folgt, wobei  $\nu = n - 1$ , genannt *Student-t-Verteilung*, kurz *t-Verteilung*. Das ist das richtige Modell! Die Abweichung von  $f_\nu$  zu  $\varphi$  ist für kleine  $n$  deutlich spürbar; für  $n \rightarrow \infty$  nähert sich  $f_\nu$  rasch der Standard-Normalverteilung  $\varphi$ . (Lehrreiche Übung: Rechnen Sie dies sorgfältig nach!)

Zur Mittelwertschätzung nutzen wir das Konfidenzintervall  $I_k = [\bar{X} - kS/\sqrt{n}, \bar{X} + kS/\sqrt{n}]$  und bestimmen den Wert  $k$  so, dass  $\int_{-k}^k f_\nu(x) dx = 1 - \alpha$  gilt. Die obige Tabelle zeigt hierzu Quantile der Student-t-Verteilungen. Das Ergebnis  $k$  ist etwas größer als der Wert  $\tau$  in (1).

*Fun fact:* Gosset arbeitete in der Dubliner Guinness-Brauerei. Da sie ihm die Veröffentlichung seines Artikels untersagte, veröffentlichte er kurzerhand unter dem Pseudonym „Student“.



**Aufgabe:** In der Ebene  $\mathbb{R}^2$  liegen die Geradenscharen  $X = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$  und  $Y = \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ . Sie werfen zufällig eine Münze vom Durchmesser  $\ell \in [0, 1]$  und beobachten, ob sie die Geraden  $X$  oder die Geraden  $Y$  schneidet.

- (1) Warum ist das Quadrat  $\Omega = [-1/2, 1/2]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$  mit kontinuierlicher Gleichverteilung ein geeignetes Modell für dieses Zufallsexperiment?
- (2) Wie wahrscheinlich ist es, dass die Münze die Geraden  $X$  schneidet?  $Y$  schneidet? Beide gleichzeitig? Sind beide stochastisch unabhängig?

**Lösung:** (1) Die Lage der Münze wird durch die Position  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  ihres Mittelpunktes festgelegt. (Alle Drehungen sind hier irrelevant.) Schnitte sind invariant unter ganzzahligen Verschiebungen um  $v \in \mathbb{Z}^2$ . Wir notieren nur die Position  $(x, y) \in \Omega$  zur nächstgelegenen Geraden. Die Koordinaten  $x, y \in [-1/2, 1/2]$  seien gleichverteilt und unabhängig. Dann ist  $\mathbf{P}(A) = \text{vol}_2(A)$  auf  $\Omega$  das richtige stochastische Modell.

(2) Die gefragten Wahrscheinlichkeiten lesen wir aus der Skizze ab: Das Ereignis  $A := \{\text{Münze trifft } X\}$  entspricht  $|y| \leq \ell/2$ , also  $\mathbf{P}(A) = \ell$ . Das Ereignis  $B := \{\text{Münze trifft } Y\}$  entspricht  $|x| \leq \ell/2$ , also  $\mathbf{P}(B) = \ell$ . Entsprechend gilt  $\mathbf{P}(A \cap B) = \ell^2 = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$ . Beide sind unabhängig!

Der junge Graf Georges-Louis de Buffon (1707–1788) warf Stöcke über die Schulter auf einen gekachelten Fußboden. Anschließend zählte er, wie oft sie die Fugen trafen. Die Berechnung dieser geometrischen Wahrscheinlichkeiten bezeichnet man als **Buffonsches Nadelproblem**. Als wunderbares Video zu mathematischer Eleganz: [Weitz, you.tu.be/YIKqZsz4faA](https://www.youtube.com/watch?v=YIKqZsz4faA)

- Aufgabe:** Sie werfen zufällig eine Nadel der Länge  $\ell \in [0, 1]$ .
- (1) Warum ist  $\Omega = [-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2] \times [0, 2\pi]$  mit kontinuierlicher Gleichverteilung ein geeignetes Modell für dieses Zufallsexperiment?
  - (2) Wie wahrscheinlich ist es, dass die Nadel die Geraden  $X$  schneidet?  $Y$  schneidet? Beide gleichzeitig? Sind beide stochastisch unabhängig?

**Lösung:** (1) Die Lage der Nadel wird durch die Position  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  ihres Mittelpunktes und den Winkel  $\varphi \in [0, 2\pi]$  festgelegt, gemessen zwischen der  $x$ -Achse und dem Vektor vom Mittelpunkt zur Spitze. Schnitte sind invariant unter ganzzahligen Verschiebungen um  $v \in \mathbb{Z}^2$ . Wir notieren daher nur die Position  $(x, y)$  zur nächstgelegenen Geraden. Wir erhalten so  $(x, y, \varphi) \in \Omega = [-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2] \times [0, 2\pi]$ . Annahme: Die drei Koordinaten  $x, y, \varphi$  sind jeweils gleichverteilt und unabhängig. Daher ist  $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2\pi} \text{vol}_3(A)$  auf  $\Omega$  das richtige stochastische Modell.

(2) Das Ereignis  $A := \{\text{Nadel trifft } X\}$  entspricht  $|y| \leq \ell/2 \cdot |\cos \varphi|$ . Also:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A) &= \frac{1}{2\pi} \text{vol}_3(A) = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{x=-1/2}^{1/2} \int_{y=-\ell/2 \cdot |\cos \varphi|}^{\ell/2 \cdot |\cos \varphi|} dy dx d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \ell |\cos \varphi| d\varphi = \frac{\ell}{\pi} \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi = \frac{\ell}{\pi} [\sin(\varphi)]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2\ell}{\pi} \end{aligned}$$

Das Ereignis  $B := \{\text{Nadel trifft } Y\}$  entspricht dann  $|x| \leq \ell/2 \cdot |\sin \varphi|$ . Dank Symmetrie gilt  $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)$ ... oder nachrechnen! Schließlich:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A \cap B) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{x=-\ell/2 \cdot |\sin \varphi|}^{\ell/2 \cdot |\sin \varphi|} \int_{y=-\ell/2 \cdot |\cos \varphi|}^{\ell/2 \cdot |\cos \varphi|} dy dx d\varphi \\ &= \frac{\ell^2}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} |\sin \varphi| \cdot |\cos \varphi| d\varphi = \frac{2\ell^2}{\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \\ &= \frac{\ell^2}{\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \sin(2\varphi) d\varphi = \frac{\ell^2}{\pi} \left[ -\frac{\cos(2\varphi)}{2} \right]_{\varphi=0}^{\pi/2} = \frac{\ell^2}{\pi} < \frac{4\ell^2}{\pi^2} = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) \end{aligned}$$

⚠ Die Ereignisse  $A$  und  $B$  sind nicht unabhängig! Das ist plausibel:  $A$  ist besonders wahrscheinlich für  $\varphi \approx \pm\pi/2$ , aber  $B$  eher für  $\varphi \approx 0, \pi$ .

Kapitel W

Der zentrale Grenzwertsatz

Zweck des vorliegenden Heftes ist eine axiomatische Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. [...] Vor Entstehung der Lebesgueschen Maß- und Integrationstheorie war diese Aufgabe ziemlich hoffnungslos. Nach den Lebesgueschen Untersuchungen lag die Analogie zwischen dem Maße einer Menge und der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses sowie zwischen dem Integral einer Funktion und der mathematischen Erwartung einer zufälligen Größe auf der Hand.

Andrei Kolmogorov (1902–1987),  
Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (1933)

Vollversion michael-eisermann.de/lehre/HM3 26.02.2025

Inhalt dieses Kapitels W

- Der zentrale Grenzwertsatz (ZGS)
  - Stochastisch unabhängige Zufallsvariablen
  - Beispiele und erste Beobachtungen
  - Der zentrale Grenzwertsatz
- Statistische Anwendungen
  - Konfidenzintervalle
  - Fehlerfortpflanzung
  - Regressionsanalyse
- Fazit: der zentrale Grenzwertsatz
  - Zusammenfassung und Verständnisfragen
  - Summen von Zufallsvariablen und Grenzwertsätze
  - Weitere Aufgaben und Anwendungsbeispiele
- Analytische Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung
  - Laplace- und Fourier-Transformation von WMaßen
  - Beweisidee des zentralen Grenzwertsatzes
  - Entropie verstehen und anwenden

Motivation und Zielsetzung

Wir kennen bereits zwei nützliche und wichtige Grenzwertsätze:

☺ Bei seltenen Ereignissen können wir die **Binomialverteilung**  $B(n, t)$  durch die **Poisson-Verteilung**  $P(nt)$  nähern mit guter Fehlerschranke. Das **Gesetz der kleinen Zahlen** besagt  $B(n, \lambda/n) \rightarrow P(\lambda)$  für  $n \rightarrow \infty$ .

☺ Der **lokale Grenzwertsatz** hingegen nützt für beliebige  $0 < t < 1$  und approximiert Binomialverteilungen durch **Normalverteilungen**:

$$P(a \leq S \leq b) \stackrel{\text{exakt}}{=} \sum_{k=a}^b \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \stackrel{\text{LGS}}{=} \int_{\xi=\alpha}^{\beta} \frac{e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}} d\xi + \delta$$

☺ Die Normalverteilung ist zudem **universell**: Sie entsteht immer, wenn sich viele unabhängige, ähnlich große Beiträge aufsummieren:

$$S = X_1 + \dots + X_n \implies P(a \leq S \leq b) \stackrel{\text{ZGS}}{=} \int_{\xi=\alpha}^{\beta} \frac{e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}} d\xi + \delta$$

Entscheidend ist hier, wie immer, den Fehler  $\delta$  geeignet zu beschränken. Die genaue Aussage ist Inhalt des **zentralen Grenzwertsatzes** W1D.

Vorgehensweise

Unser Ziel sind **rationale Entscheidungen unter Unsicherheit**. Hierzu müssen wir stochastische Gesetzmäßigkeiten klären und nutzen. Eine Messung betrachten wir als **Zufallsvariable**  $X : (\Omega, \mathcal{P}) \rightarrow \mathbb{R}$ ; sie definiert eine WV-Verteilung auf  $\mathbb{R}$ , Erwartung  $E(X)$  und Varianz  $V(X)$ . Wir können damit die **Chebychev-Ungleichung** T3F formulieren und hieraus das (schwache) **Gesetz der großen Zahlen** T3J ableiten. Entscheidend ist der Begriff der **Unabhängigkeit** von Zufallsvariablen. Die intuitive Anschauung präzisieren wir durch Definitionen und Sätze. Höhepunkt dieses Kapitels ist der **zentrale Grenzwertsatz** W1D. Diesen formuliere ich mit einer allgemeinen, expliziten Fehlerschranke. Die vom ZGS vorhergesagte **Normalverteilung** ist ein universelles Werkzeug und bietet für viele Situationen ein brauchbares Modell. Sie dient insbesondere zur Bestimmung von **Konfidenzintervallen** und wird daher in nahezu allen praktischen Anwendungen benötigt. Hierzu gebe ich abschließend erste einfache Anwendungsbeispiele. Mit diesen Grundlagen gewappnet beginnt die mathematische **Statistik**.

Erinnerung: Unabhängigkeit von Ereignissen

Wir erinnern an die Definition T2E der Unabhängigkeit: Im WRaum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  heißt eine Familie von Ereignissen  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  (**stochastisch**) **unabhängig** wenn folgende Produktformel gilt

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_\ell}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_\ell})$$

für jede Auswahl von Indizes  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_\ell \leq n$ .

Zwei Ereignisse  $A, B$  sind unabhängig, wenn gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

Drei Ereignisse  $A, B, C$  sind unabhängig, wenn gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A) P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B) P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) P(B) P(C)$$

⚠ Die Tripelbedingung folgt nicht aus den drei Paarbedingungen! Sie kennen dieses Problem von linearer Unabhängigkeit von Vektoren.

Erinnerung: Produktwahrscheinlichkeit

Definition W1A: Produkt von Wahrscheinlichkeitsräumen

Wir beschreiben die Durchführung unabhängiger Experimente durch Wahrscheinlichkeitsräume  $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mathcal{P}_1), \dots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mathcal{P}_n)$ .

Der **Produktraum**  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  basiert auf dem kartesischen Produkt

$$\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n = \{ (\omega_1, \dots, \omega_n) \mid \omega_1 \in \Omega_1, \dots, \omega_n \in \Omega_n \}.$$

Die **Ereignismenge**  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$  wird erzeugt von Produkten

$$A = A_1 \times \dots \times A_n \quad \text{mit} \quad A_1 \in \mathcal{A}_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}_n.$$

Das **Produktmaß**  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{P}_n : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  ist definiert durch

$$\mathcal{P}(A_1 \times \dots \times A_n) = \mathcal{P}_1(A_1) \dots \mathcal{P}_n(A_n).$$

Wir erhalten den WRaum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  durch eindeutige Fortsetzung.

Für diskrete WRäume kennen und nutzen wir dies bereits, siehe U1A. Sind  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n$  kontinuierlich auf  $\mathbb{R}$  mit Dichten  $f_1, \dots, f_n$ , so ist  $\mathcal{P}$  auf  $\mathbb{R}^n$  kontinuierlich, mit Produktdichte  $f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n)$ .

Unabhängige Zufallsvariablen

Zwei Zufallsvariablen  $X_1, X_2$  sind unabhängig, wenn das Ergebnis von  $X_1$  nicht die Wkten von  $X_2$  beeinflusst. Dies präzisieren wir wie folgt:

Definition W1B: Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Eine Familie  $X = (X_1, \dots, X_n)$  von Zufallsvariablen  $X_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt (**stochastisch**) **unabhängig**, wenn für alle Intervalle  $I_1, \dots, I_n \subseteq \mathbb{R}$  gilt

$$P(X_1 \in I_1, \dots, X_n \in I_n) = P(X_1 \in I_1) \dots P(X_n \in I_n).$$

Ausführlich heißt das: Im WRaum  $(\Omega, \mathcal{P})$  ist jede Familie  $(A_1, \dots, A_n)$  von Ereignissen  $A_k = X_k^{-1}(I_k) = \{ \omega \in \Omega \mid X_k(\omega) \in I_k \}$  unabhängig. Die gemeinsame Verteilung von  $X_1, \dots, X_n$  ist dann das Produktmaß

$$P_X = P_{(X_1, \dots, X_n)} = P_{X_1} \otimes \dots \otimes P_{X_n}.$$

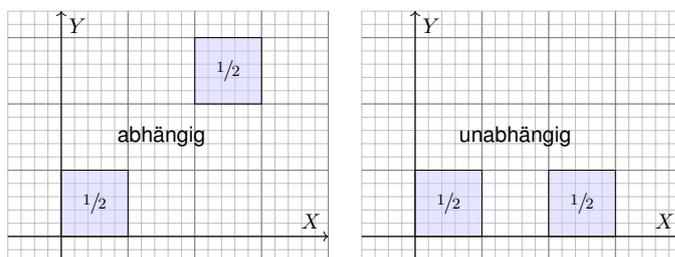
Sind  $P_{X_1}, \dots, P_{X_n}$  auf  $\mathbb{R}$  kontinuierliche WMaße mit Dichten  $f_1, \dots, f_n$ , so ist auch das Produktmaß  $P_X$  auf  $\mathbb{R}^n$  kontinuierlich, mit Produktdichte

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n).$$

Unabhängige Zufallsvariablen

Anschaulich: Zwei Zufallsvariablen  $X, Y$  sind unabhängig, wenn das Ergebnis von  $X$  nicht die Wkten von  $Y$  beeinflusst, und umgekehrt.

**Beispiel:** Die gemeinsame Verteilung von  $(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  sei wie folgt:



Die Skizze zeigt die Gleichverteilung auf den Mengen  $Q, R \subseteq \mathbb{R}^2$  mit  $Q = ([0, 1] \times [0, 1]) \cup ([2, 3] \times [2, 3])$ ,  $R = ([0, 1] \times [0, 1]) \cup ([2, 3] \times [0, 1])$ . Im ersten Fall ist das Paar  $(X, Y)$  abhängig, im zweiten unabhängig.

**Satz W1c:** Fubini für unabhängige Zufallsvariablen

(1) Erwartungen unabhängiger Zufallsvariablen  $X, Y$  multiplizieren sich:

$$\mathbf{E}(X \cdot Y) = \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y)$$

Ihre Kovarianz  $\text{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$  verschwindet somit.

(2) Varianzen unabhängiger Zufallsvariablen  $X, Y$  addieren sich:

$$\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$$

**Aufgabe:** Rechnen Sie dies nach! **Lösung:** (1) Dank Unabhängigkeit:

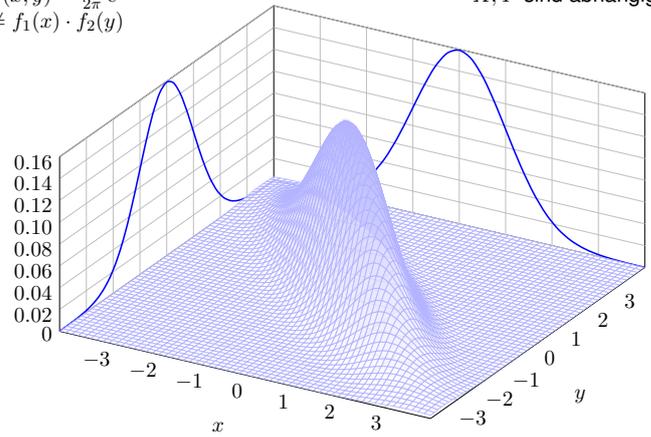
$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X \cdot Y) &\stackrel{\text{Def}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} xy \, d\mathbf{P}_{(X,Y)} && \stackrel{\text{Fub}}{\stackrel{\text{Un}}{=}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} xy \, d\mathbf{P}_X \, d\mathbf{P}_Y \\ &\stackrel{\text{Lin}}{=} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} x \, d\mathbf{P}_X \right) y \, d\mathbf{P}_Y && \stackrel{\text{Lin}}{=} \int_{\mathbb{R}} x \, d\mathbf{P}_X \cdot \int_{\mathbb{R}} y \, d\mathbf{P}_Y && \stackrel{\text{Def}}{=} \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y) \end{aligned}$$

(2) Wir setzen die Definition ein und vereinfachen geduldig: [T331]

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(X + Y) &\stackrel{\text{Def}}{\stackrel{\text{Lin}}{=}} \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}(X) + Y - \mathbf{E}(Y))^2] \\ &\stackrel{\text{Bin}}{=} \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}(X))^2 + (Y - \mathbf{E}(Y))^2 + 2(\mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y))] \end{aligned}$$

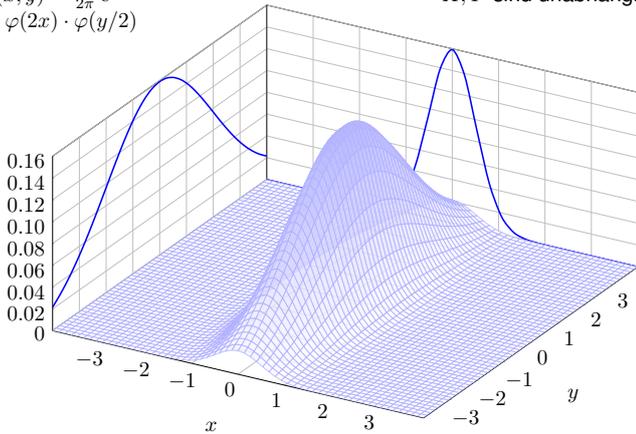
$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x+y)^2 - (x-y)^2 / 16} \quad X, Y \text{ sind abhängig!}$$

$$\neq f_1(x) \cdot f_2(y)$$



$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-2x^2 + y^2 / 8} \quad X, Y \text{ sind unabhängig!}$$

$$= \varphi(2x) \cdot \varphi(y/2)$$



Die  $n$ -dimensionale Standard-Normalverteilung hat die WDichte

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{(2\pi)^n}} = \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n).$$

Die Zufallsvariablen  $Z_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : z \mapsto z_k$  sind unabhängig und identisch verteilt gemäß der eindim. Standard-Normalverteilung,  $Z_k \sim N(0, 1)$ .

Sei nun  $X = (X_1, \dots, X_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Familie von Zufallsvariablen. Dies definiert den Vektor  $\mu \in \mathbb{R}^n$  mit  $\mu_k = \mathbf{E}(X_k)$  und die symmetrische Matrix  $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit  $\Sigma_{k\ell} = \text{Cov}(X_k, X_\ell)$ , insbesondere  $\Sigma_{kk} = \mathbf{V}(X_k)$ . Wir nehmen  $\Sigma$  als positiv definit an, insbesondere  $\det \Sigma > 0$ . Wir nennen  $X$  normalverteilt, kurz  $X \sim N(\mu, \Sigma)$ , falls  $\mathbf{P}_X$  folgende WDichte hat:

$$f(x) = \frac{\exp[-\frac{1}{2}(x - \mu)\Sigma^{-1}(x - \mu)]}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}}$$

**Übung:** (1) Für jede affin-lineare Transformation  $Y = AX + v$  mit Matrix  $A \in \text{GL}_n \mathbb{R}$  und Vektor  $v \in \mathbb{R}^n$  gilt  $Y \sim N(A\mu + v, A\Sigma A^{-1})$ .  
(2) Sind die Komponenten von  $X$  paarweise unkorreliert, so sind sie sogar stochastisch unabhängig (analog zu Indikatorfunktionen T350).

**Anwendung:** Jede Messung  $X_k$  ist zufälligen Störungen unterworfen. Sie habe Erwartung  $\mu_k = \mathbf{E}(X_k)$  und Varianz  $\sigma_k^2 = \mathbf{E}(|X_k - \mu_k|^2) > 0$ .

Die Summe  $S = X_1 + \dots + X_n$  hat die Erwartung  $\mu = \mu_1 + \dots + \mu_n$ . Bei Unabhängigkeit addieren sich die Varianzen  $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2$ .

Das sind soweit nur grobe Kenngrößen. Jetzt geschieht das Wunder:

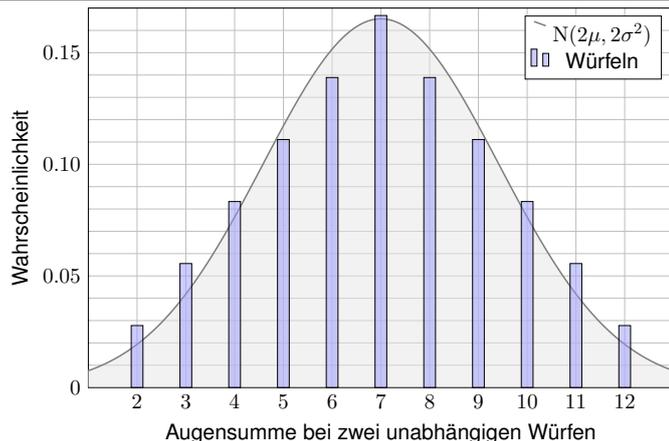
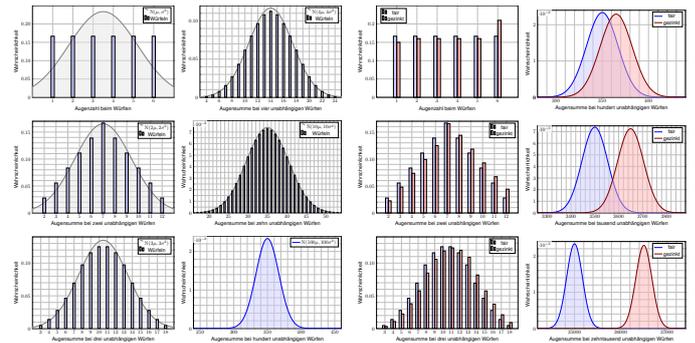
**Typischerweise** ähnelt die Verteilung von  $S$  der Normalverteilung:

$$S \sim \mathbf{P}_S \approx N(\mu, \sigma^2), \quad \text{das heißt ausgeschrieben}$$

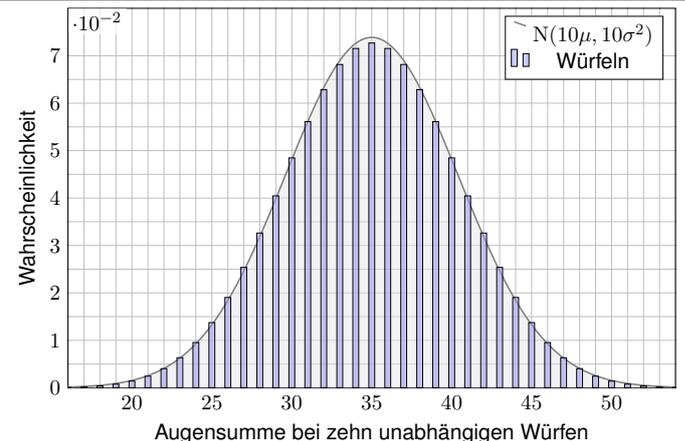
$$\mathbf{P}(a \leq S \leq b) \approx \int_{(a-\mu)/\sigma}^{(b-\mu)/\sigma} \frac{e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \, d\xi \stackrel{\text{Tabelle}}{=} \left[ \Phi \right]_{(a-\mu)/\sigma}^{(b-\mu)/\sigma}$$

Das ist eine enorme Vereinfachung: Die Verteilung von  $S$  ist kompliziert und meist unbekannt, die Normalverteilung hingegen ist explizit & leicht! Die Normalverteilung entsteht, egal welche Verteilungen die  $X_k$  haben! Wie gut ist die Approximation für festes  $n$ ? Wie groß ist der Fehler  $\delta$ ? Gilt  $\delta \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ ? Das ist Inhalt des zentralen Grenzwertsatzes!

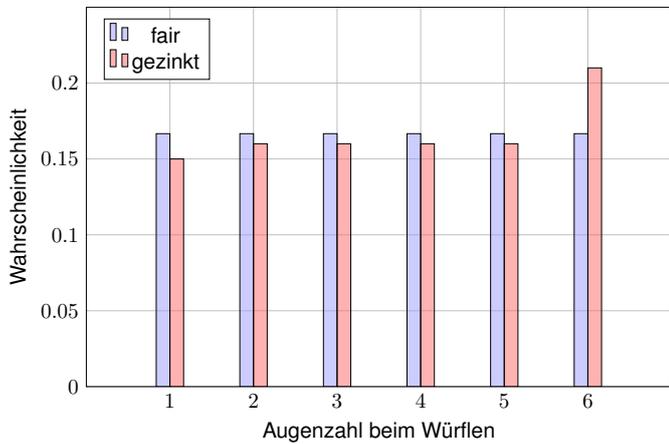
**Aufgabe:** Illustrieren Sie diese Näherung numerisch für Würfelsummen mit einem fairen Würfel (T105) und unserem gezinkten Würfel (T107). Anschließend erklärt Ihnen der zentrale Grenzwertsatz W1D, was von diesen konkreten Beobachtungen allgemein garantiert werden kann.



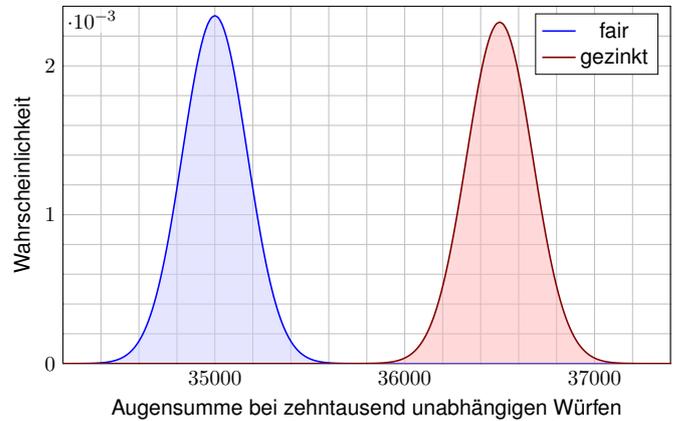
😊 Die Augensumme hat Erwartung  $2\mu = 7$  und Varianz  $2\sigma^2 = 35/6$ .



😊 Große Zahlen: Die Verteilung von  $\hat{X}$  konzentriert sich um  $\mu$ .



☺ Gezinkt ist die Erwartung  $\mu_2 = 3.65$  etwas größer als fair  $\mu_1 = 3.5$ .



☺ Bei zehntausend Würfeln unterscheiden sich die Ergebnisse sicher. So können wir den gezinkten Würfel experimentell erkennen! [W329](#)

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Experiments  $X_k$ , hier Würfeln, bestimmt die Erwartung  $\mu = \mathbf{E}(X_k)$  und die Varianz  $\sigma^2 = \mathbf{V}(X_k)$ . Das sind, wie immer so auch hier, die wichtigsten Kenngrößen.

☺ Die Summe  $S = X_1 + \dots + X_n$  von  $n$  unabhängigen Wiederholungen hat dann Erwartung  $n\mu$  und Varianz  $n\sigma^2$ . ☹ Sie ist nicht binomialverteilt, also können wir den lokalen Grenzwertsatz V3A hier nicht anwenden.

☺ Nach vielen Wiederholungen spielt die Ausgangsverteilung keine Rolle: Es entsteht immer annähernd die Normalverteilung  $N(n\mu, n\sigma^2)$ . Ihre universelle Rolle ist ein phantastisch nützliche Eigenschaft!

Man kann dies (etwas vage aber poetisch) auch wie folgt formulieren: Im Kleinen, bei einzelnen Experimenten regiert der Zufall ungezügelt; im Großen, bei vielen Experimenten muss er sich Gesetzen beugen.

☺ Diese Gesetzmäßigkeit müssen Sie kennen und sollten Sie nutzen: Solide Grundlagen ermöglichen Ihnen den sicheren Umgang mit Wkten. „Nul n'est censé ignorer la loi.“ [Niemand darf das Gesetz ignorieren.]

☺ Der ZGS besagt: Die Summe  $S = X_1 + \dots + X_n$  vieler unabhängiger, aber ähnlich großer Zufallsvariablen ist annähernd normalverteilt.

**Beispiel:** Für unabhängige und identisch verteilte 0–1–Zufallsvariablen  $X_k : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  ist  $S = X_1 + \dots + X_n$  exakt binomialverteilt,  $S \sim B(n, t)$ . Hier gilt  $B(n, t) \approx N(\mu, \sigma^2)$  mit expliziten Fehlerschranken (LGS, V3A).

☺ Im allgemeineren ZGS dürfen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  beliebig verteilt sein. Wir benötigen hierzu allerdings einige Vorsichtsmaßnahmen [W309](#):

- 1 Die Beiträge  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sollen unabhängig sein. Für  $S = X + X + \dots + X$  gilt der ZGS sicher nicht.
- 2 Die Beiträge  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sollen alle etwas streuen. Für  $S = 1 + 1 + \dots + 1$  gilt der ZGS sicher nicht.
- 3 Die Beiträge  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sollen „ähnlich groß“ sein.

Folgender Satz, formuliert nach A.C. Berry 1941 und C.G. Esséen 1944, präzisiert diese Voraussetzungen in Form des 2. und 3. Moments und quantifiziert den Approximationsfehler durch eine explizite Schranke.

☺ Allgemein gültige Näherung mit verlässlicher Fehlerabschätzung!

**Satz W1D: zentraler Grenzwertsatz, ZGS**

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  ein WRaum und  $X_1, X_2, X_3, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  unabhängig mit

- 1 endlichen Erwartungen  $\mu_k = \mathbf{E}(X_k)$  dank  $\mathbf{E}(|X_k|) < \infty$ ,
- 2 strikt positiven Varianzen  $\sigma_k^2 = \mathbf{E}(|X_k - \mu_k|^2) \geq \sigma_0^2 > 0$ ,
- 3 beschränkten dritten Momenten  $\rho_k^3 = \mathbf{E}(|X_k - \mu_k|^3) \leq \rho_0^3 < \infty$ .

Die Summe  $S = X_1 + \dots + X_n$  hat die Erwartung  $\mu = \mu_1 + \dots + \mu_n$  und die Varianz  $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2$ . Es gilt  $\mathbf{P}_S \approx N(\mu, \sigma^2)$ , genauer

$$\mathbf{P}(a \leq S \leq b) = \int_{(a-\mu)/\sigma}^{(b-\mu)/\sigma} \frac{e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}} d\xi + \delta,$$

$$|\delta| \leq \frac{\rho_1^3 + \dots + \rho_n^3}{(\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2)^{3/2}} \leq \frac{\rho_0^3}{\sigma_0^3 \sqrt{n}} \searrow 0.$$

Zentriert und normiert zu  $S^* := (S - \mu)/\sigma$  erhalten wir  $\mathbf{P}_{S^*} \approx N(0, 1)$ .

⚠ Alle drei Voraussetzungen (1–3) werden wirklich benötigt. [W309](#)

**Aufgabe:** Wer ist für  $X_1, \dots, X_n \sim B(1, t)$  genauer: ZGS oder LGS?

**Lösung:** Zu  $X_k \sim B(1, t)$  finden wir (T310)  $\mu_k = t$  und  $\sigma_k^2 = t(1-t)$  sowie  $\rho_k^3 = t(1-t)(t^2 + (1-t)^2)$ . Die Summe  $S = X_1 + \dots + X_n$  ist  $B(n, t)$ -verteilt mit  $\mu = nt$  und  $\sigma^2 = nt(1-t)$ , also exakt / genähert:

$$\mathbf{P}(a \leq S \leq b) = \sum_{k=a}^b \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \int_{(a-1/2-\mu)/\sigma}^{(b+1/2-\mu)/\sigma} \frac{e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}} d\xi + \delta$$

Für  $\sigma \geq 5$  ist der Approximationsfehler  $\delta$  im LGS/ZGS beschränkt durch

$$|\delta| \stackrel{\text{LGS}}{<} \frac{1}{6\sigma} = \frac{1}{6\sqrt{nt(1-t)}} \stackrel{\text{ZGS}}{<} \frac{\rho_0^3}{\sigma_0^3 \sqrt{n}} = \frac{t^2 + (1-t)^2}{\sqrt{nt(1-t)}}$$

Der LGS liefert die bessere Konstante:  $1 \geq t^2 + (1-t)^2 \geq 1/2 > 1/6$ . Die Fehlerschranke ist also um einen Faktor 3 bis 6 kleiner als im ZGS. Mit Korrekturterm  $\kappa$  sinkt der Fehler auf  $|\varepsilon| < 1/(3\sigma^2) = 1/[3nt(1-t)]$ .

- ☺ Der lokale Grenzwertsatz ist spezieller, dabei aber auch präziser.
- ☺ Der ZGS gilt nicht nur für  $S \sim B(n, t)$ , sondern viel allgemeiner!

Der LGS nutzt die Stetigkeitskorrektur  $\pm 1/2$  in den Integrationsgrenzen zur genaueren Approximation. Der ZGS kennt diese Korrektur nicht: Er gilt für kontinuierlich verteilte Zufallsvariablen ebenso wie für diskrete, und im kontinuierlichen Fall hat die Stetigkeitskorrektur keinen Sinn.

**Aufgabe:** Welcher Fehler entsteht hierdurch schlimmstenfalls?

**Lösung:** Für  $S \sim B(n, t)$  und  $k = 0, 1, \dots, n$  gilt exakt und nach LGS:

$$\mathbf{P}(k \leq S \leq k) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \stackrel{\text{LGS}}{\approx} \int_{(k-1/2-\mu)/\sigma}^{(k+1/2-\mu)/\sigma} \frac{e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}} d\xi$$

$$\approx \frac{e^{-(k-\mu)^2/2\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi nt(1-t)}}$$

Beachten Sie die Stetigkeitskorrektur  $\pm 1/2$  in den Integrationsgrenzen! Andernfalls wäre die Approximation  $\mathbf{P}(k \leq S \leq k) \approx 0$  völlig nutzlos.

Die obere Schranke erhalten wir für  $k = \mu$  und nutzen  $\sigma^2 = nt(1-t)$ . Hier nimmt die Normalverteilung (Glockenkurve) ihr Maximum an.

Der ZGS hingegen liefert ohne Stetigkeitskorrektur leider nur

$$\mathbf{P}(k \leq S \leq k) \stackrel{\text{ZGS}}{\approx} \int_{(k-\mu)/\sigma}^{(k-\mu)/\sigma} \frac{e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}} d\xi + \delta = 0 + \delta$$

Dieses Integral verschwindet! Belügt uns der ZGS in diesem Fall? Nein, er nützt nur nicht mehr viel, denn er besagt jetzt lediglich:

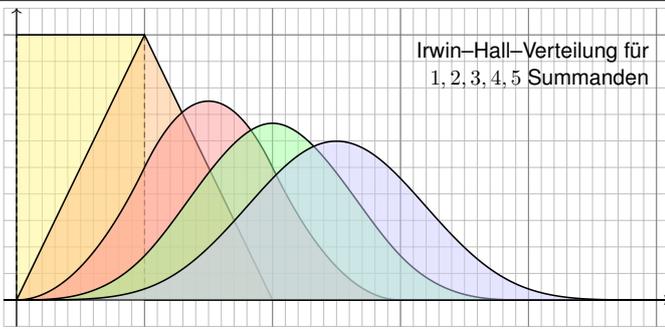
$$0 \leq \mathbf{P}(k \leq S \leq k) = \delta \leq \frac{\rho_0^3}{\sigma_0^3 \sqrt{n}}$$

Alles ist gut. Der Fehler  $\delta$  bleibt unter der Fehlerschranke des ZGS:

$$\frac{\rho_0^3}{\sigma_0^3 \sqrt{n}} = \frac{t^2 + (1-t)^2}{\sqrt{nt(1-t)}} \geq \frac{1}{2\sqrt{nt(1-t)}} \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi nt(1-t)}} \geq \delta \geq 0$$

In solch extremen Fällen wird man den ZGS wohl kaum nutzen wollen, doch sie illustrieren eindrücklich, was schlimmstenfalls passieren kann.

- ☺ Hier wird der ZGS zwar missbraucht, aber dank  $\delta$  bleibt alles richtig: Die Approximation kann schlecht sein, die Fehlerschranke stimmt immer.
- ☺ Der LGS mit Stetigkeitskorrektur ist hier wesentlich genauer.



**Aufgabe:** Wir betrachten unabhängige gleichverteilte Zufallsvariablen  $X_1, X_2, X_3, \dots : \Omega \rightarrow [0, 1]$ , das heißt  $X_k \sim P_1$  mit WDichte  $f_1 = \mathbf{I}_{[0,1]}$ . Welche Verteilung hat  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ ? Bestimmen Sie die Dichte:

$$f_n(x) = (f_{n-1} * f_1)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{n-1}(x-u)f_1(u) du = \int_{u=0}^1 f_{n-1}(x-u) du$$

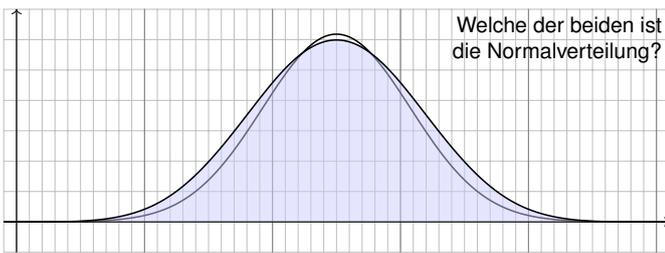
**Lösung:** Für  $x \in [0, n]$  gilt  $f_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} (x-k)^{n-1} / (n-1)!$ . Die Dichte  $f_n$  ist stückweise polynomiell vom Grad  $n$ . Für  $t \in [0, 1]$  gilt:

$$f_2(k+t) = \begin{cases} t & \text{für } k=0, \\ 1-t & \text{für } k=1. \end{cases}$$

$$f_3(k+t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & \text{für } k=0, \\ \frac{1}{2} + t - t^2 & \text{für } k=1, \\ \frac{1}{2} - t + \frac{1}{2}t^2 & \text{für } k=2. \end{cases}$$

$$f_4(k+t) = \begin{cases} \frac{1}{6}t^3 & \text{für } k=0, \\ \frac{1}{6}(1+3t+3t^2-3t^3) & \text{für } k=1, \\ \frac{1}{6}(4-6t^2+3t^3) & \text{für } k=2, \\ \frac{1}{6}(1-3t+3t^2-t^3) & \text{für } k=3. \end{cases}$$

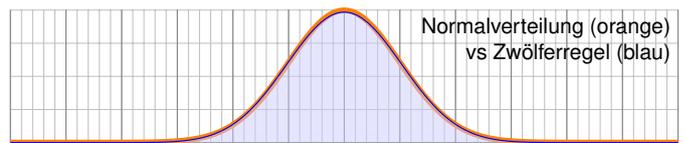
☺ Die ersten Terme  $f_1, f_2, \dots, f_5$  sind in obiger Graphik dargestellt.



Die obige Verteilung der fünffachen Summe  $S_5$  ähnelt augenscheinlich der Normalverteilung  $N(5/2, 5/12)$ . Der Vergleich zeigt Abweichungen.

⚠ Nicht jede glockenähnliche Kurve ist eine Normalverteilung! Die obigen Illustrationen zeigen eindrückliche Gegenbeispiele.

**Aufgabe:** Untersuchen Sie die **Zwölferregel**: „Wählt man Zufallszahlen  $X_1, \dots, X_{12}$  unabhängig und gleichverteilt im Intervall  $[-1/2, 1/2]$ , so ist ihre Summe  $S = X_1 + \dots + X_{12}$  näherungsweise std-normalverteilt.“

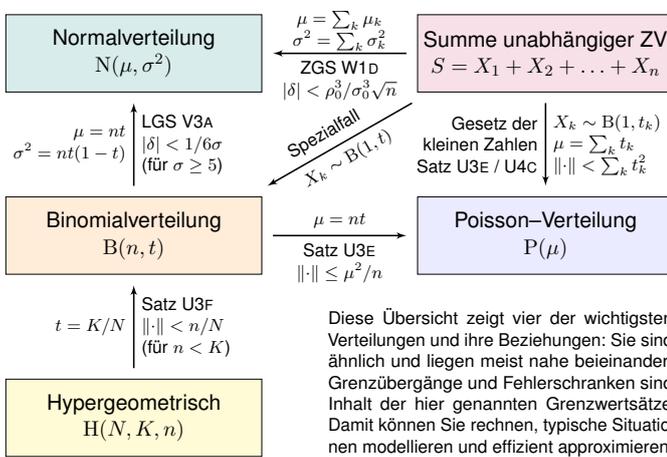


**Lösung:** Es gilt  $\mu_k = 0$ . Wir berechnen das  $n$ -te absolute Moment:

$$\int_{-1/2}^{1/2} |x|^n dx = 2 \int_{x=0}^{1/2} x^n dx = \frac{2}{n+1} [x^{n+1}]_{x=0}^{1/2} = \frac{2^{-n}}{n+1}$$

Demnach gilt  $\sigma_k^2 = 1/12$  und  $\rho_k^3 = 1/32$ . Die Summe  $S$  hat Erwartung  $\mathbb{E}(S) = 0$  und Varianz  $\mathbb{V}(S) = 1$ . Die Näherung ist recht brauchbar, doch die pessimistische Fehlerschranke des ZGS garantiert nur  $|\delta| \leq 12/32$ .

☺ Die **Polarmethode** ist wesentlich genauer und effizienter, siehe en.wikipedia.org/wiki/Marsaglia\_polar\_method: Sie erzeugt zwei exakt normalverteilte Zufallszahlen durch den Gaußschen Kunstgriff. Mathematische Sachkenntnis ermöglicht effiziente Lösungen.



Viele Zufallsexperimente beschreiben wir durch **Standardmodelle**. Hierzu nutzen wir vier besonders häufige und wichtige WVerteilungen:

- die hypergeometrische Verteilung  $H(N, K, n)$  für Stichproben oZ,
- die Binomialverteilung  $B(n, t)$  für Trefferzahlen und Stichproben mZ,
- die Poisson-Verteilung  $P(\mu)$  als Näherung für kleine Trefferwkt  $t$ ,
- die Normalverteilung  $N(\mu, \sigma^2)$  als Näherung für beliebige  $t \in ]0, 1[$ .

Viele Rechnungen vereinfachen wir durch asymptotische **Näherungen**:

- Für große Stichproben ( $N \rightarrow \infty$ ) gilt  $H(N, K, n) \approx B(n, K/N)$ .
- Gesetz der kleinen Zahlen:  $B(n, t) \approx P(nt)$  für kleines  $t$ .
- Lokaler Grenzwertsatz:  $B(n, t) \approx N(\mu, \sigma^2)$  für großes  $\sigma$ .

Insbesondere für eine **Summe  $S$  unabhängiger Zufallsvariablen** gilt:

- Als Spezialfall erhalten wir exakt die Binomialverteilung  $B(n, t)$ .
- Gesetz der kleinen Zahlen:  $P_S \approx P(\mu)$  für kleine  $t_k$ , siehe U4C.
- Zentraler Grenzwertsatz:  $P_S \approx N(\mu, \sigma^2)$ , siehe W1D.

☺ Unsere Sätze garantieren bequeme, allgemeine Fehlerschranken.

Dieser abschließende Rückblick ist auch ein guter Moment für eine grundsätzliche, strategische Frage: Wozu tun wir das alles? Warum geben wir uns soviel Mühe mit diesen Grenzwertsätzen? Machen heutige Computer nicht solche Näherungen überflüssig?

☺ Tatsächlich sind Computer eine enorme Hilfe; sie können dank brutaler Rechengewalt (engl. *brute force*) viele Probleme berechnen, die vor wenigen Jahrzehnten noch außerhalb unserer Reichweite lagen.

☺ Dazu helfen nicht nur schnellere Prozessoren, sondern mehr noch bessere mathematische Werkzeuge in Form effizienter Algorithmen. Dazu gehören insbesondere gute Näherungen und Grenzwertsätze!

Moore's Regel prognostiziert, dass Computer etwa alle 18 Monate ihre Leistung verdoppeln; bislang beschreibt dies recht gut die Entwicklung.

⚠ Auch wenn diese Faustregel weiterhin zutreffen sollte, fallen selbst einfache Berechnungen wie W321 leicht so groß aus, dass sie weit außer Reichweite liegen. Das Grundproblem bleibt somit immer bestehen.

⚠ Effiziente Näherungen bleiben daher weiterhin numerisch wichtig!

☺ Die Grenzwertsätze erklären Ihnen die logischen und numerischen **Beziehungen** zwischen den verschiedenen stochastischen Modellen. Die Struktur des vorgelegten Problems diktiert meist ein Modell, die gegebenen Daten kalibrieren es und bestimmen die Parameter. Anschließend können Sie das Modell modifizieren und vereinfachen, und innerhalb der Fehlergrenzen gegen ein einfacheres austauschen.

⚠ Diese Beziehungen helfen Ihnen, in praktischen Anwendungen das passende mathematische Werkzeug zu wählen und sicher zu rechnen.

☺ Dasselbe gilt für die Nutzung und **Programmierung** von Computern: Sie müssen dem Computer genau sagen, was er zu rechnen hat, und in vielen Fällen sogar, wie er zu rechnen hat. Denn nur Sie wissen, welche Genauigkeit Sie am Ende verlangen und wieviel Rechenzeit Sie dafür zur Verfügung stellen. Hierzu dient die Wahl der Methode, der Näherung. Schließlich müssen Sie computer-berechnete Ergebnisse verstehen, auf Korrektheit bzw. Plausibilität prüfen, interpretieren und anwenden.

⚠ Gerade hierzu dienen Gesetzmäßigkeiten und Rechenregeln!

**Lobeshymne auf den zentralen Grenzwertsatz** W129  
Ausführung

In Natur- und Ingenieurwissenschaften, in Wirtschaft und Gesellschaft treten **zufällige Größen**  $X$  auf. Sie sind meist unvermeidbar, genauere Informationen sind oft zu teuer oder manchmal gar nicht zugänglich.

Die Stochastik liefert Werkzeuge zum sicheren Umgang mit unsicheren Ereignissen, allgemein zum rationalen Entscheiden unter Unsicherheit. Hierzu ist es von zentraler Bedeutung, die **Verteilung**  $P_X$  zu kennen, oder zumindest so gut abzuschätzen wie es eben geht oder nötig ist.

Oft ist unsere Zufallsgröße  $S$  eine Summe zahlreicher kleiner Einflüsse, die unabhängig voneinander wirken. Der zentrale Grenzwertsatz erklärt, dass wir dann eine **Normalverteilung** erwarten dürfen,  $P_S \approx N(\mu, \sigma^2)$ .

Der Name des Satzes geht zurück auf George Pólyas Arbeit *Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung* von 1920.

Wie in der Mathematik üblich, geht man zum **Grenzwert** (Limes) über, um die Ergebnisse bequem und übersichtlich formulieren zu können. Für praktische Anwendungen ist eine **Fehlerschranke** notwendig für den Wechsel von  $P_S$  zu  $N(\mu, \sigma^2)$ . Satz W1D stellt hierzu alles bereit.

**Lobeshymne auf den zentralen Grenzwertsatz** W130  
Ausführung

☺ Der zentrale Grenzwertsatz ist ein phantastisches Ergebnis.

Er ist allgemein gültig und daher vielseitig anwendbar. Das ermöglicht die Modellierung, Berechnung und Erklärung vieler stochastischer Phänomene, die uns täglich umgeben. Implizit oder explizit wird er in praktisch allen naturwissenschaftlich-technischen Modellen oder industriellen Prozessen benutzt, in denen zufällige Schwankungen vorkommen.

☺ Die Voraussetzungen des ZGS sind sehr allgemein und oft erfüllt. Daher ist der ZGS nahezu überall anwendbar (anders als der LGS).

Zunächst setzen wir die Unabhängigkeit der Zufallsvariablen  $X_1, X_2, X_3, \dots$  voraus, was für viele Anwendungen realistisch ist. (Man kann dies weiter abschwächen, und ein kontrolliertes Maß an schwacher Abhängigkeit erlauben, aber dies würde uns hier zu weit vom Weg führen.)

Die vorausgesetzten Schranken  $\sigma_k \geq \sigma_0 > 0$  und  $\rho_k \leq \rho_0 < \infty$  des zentralen Grenzwertsatzes W1D stellen sicher, dass alle Beiträge  $X_1, X_2, X_3, \dots$  ähnlich stark streuen. Andernfalls könnte zum Beispiel  $X_1$  alle anderen Summanden  $X_2, X_3, \dots$  überwiegen, und in der Summe würde keine Normalverteilung entstehen, sondern im Wesentlichen die Verteilung von  $X_1$ . [W309](#)

☺ Eine allgegenwärtige Anwendung sind Konfidenzintervalle. [W209](#)

Diese werden überall in Naturwissenschaft und Technik verwendet, um die Genauigkeit einer Messung, Rechnung oder Spezifikation zu quantifizieren (Fehlerrechnung). Diese wichtige Information muss man mindestens passiv intuitiv verstehen, meist auch aktive präzise nutzen.

**Lobeshymne auf den zentralen Grenzwertsatz** W131  
Ausführung

☺ Sehr wenige Informationen reichen für den ZGS bereits aus!

Für die Näherung genügen Erwartungen  $\mu_k$  und Varianzen  $\sigma_k^2 \geq \sigma_0^2 > 0$ , für die Fehlerschranke die dritten Momente  $\rho_k^3 \leq \rho_0^3 < \infty$ , notfalls nach oben abgeschätzt. Das gelingt oft problemlos.

Ein besonders wichtiger Spezialfall ist die unabhängige Wiederholung von Messungen bzw. Experimenten: Hier sind die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig und identisch verteilt, insbesondere gilt für ihre Kenngrößen  $\mu_k = \mu_0, \sigma_k = \sigma_0, \rho_k = \rho_0$  für alle  $k = 1, 2, \dots, n$ . Zur Existenz dieser Integrale benötigen wir lediglich  $X_k \in L^3(\Omega; \mathbb{R})$ , denn  $L^3 \supseteq L^2 \supseteq L^1$ .

Der lokale Grenzwertsatz V3A ist bei Bedarf genauer: Dort geht es nur um Binomialverteilungen, dafür liefert der LGS den nützlichen Korrekturterm  $\kappa$  und wesentlich schärfere Fehlerschranken. Diese Verbesserung ist auch für den ZGS möglich und führt zur Edgeworth-Entwicklung mittels höherer Momente. Der obige zentrale Grenzwertsatz ist die erste Näherung dieser Reihe.

☺ Wir können den ZGS durch Fourier-Transformation nachrechnen.

Da wir die Fourier-Transformation aus Kapitel K bereits gut kennen, skizziere ich die Rechnung im Anhang zu diesem Kapitel, ab Seite W406. Die Idee ist einfach-genial und leicht zu verstehen!

⚠ Ohne die geforderten Momente gilt der ZGS im Allgemeinen nicht!

Wir finden hierzu einfache Gegenbeispiele, in denen der ZGS nicht anwendbar ist. [W309](#)

Die Cauchy-Verteilungen [W413](#) zum Beispiel erfüllen nicht die Voraussetzungen des ZGS und auch nicht seine Schlussfolgerung, denn sie konvergieren nicht gegen die Normalverteilung.

**Lobeshymne auf den zentralen Grenzwertsatz** W132  
Ausführung

☺ Der ZGS liefert eine explizite Fehlerschranke  $|\delta| \leq \rho_0^3 / \sigma_0^3 \sqrt{n}$ .

Der Grenzwertsatz in der Form  $P_S \approx N(\mu, \sigma^2)$  oder besser  $P_S \rightarrow N(\mu, \sigma^2)$  für  $n \rightarrow \infty$  ist eine qualitative Aussage: Er garantiert die Konvergenz der Verteilungen, sagt aber noch nichts über die Konvergenzgeschwindigkeit oder den Approximationsfehler für ein vorgegebenes  $n$ .

Oft verwendet man den ZGS nicht für  $n \rightarrow \infty$ , sondern als  $P_S \approx N(\mu, \sigma^2)$  für ein festes  $n$ . Für die konkrete Anwendung ist es dann wichtig zu wissen: Wie gut ist die Approximation? Obige Formulierung von Berry-Esséen ist eine quantitative Präzisierung: Sie besagt, wie schnell die Konvergenz ist (nämlich wie  $1/\sqrt{n} \rightarrow 0$ ) und garantiert sogar explizite Fehlerschranken!

Der LGS bietet eine genauere Schranke; symmetrisch oder mit Korrekturterm sinkt der Fehler sogar von  $|\delta| \leq \text{const}/\sqrt{n}$  auf  $|\varepsilon| \leq \text{const}/n$ . Wenn im ZGS eine ähnliche Garantie nötig sein sollte, müsste man genauere und umfangreichere Rechnungen anstrengen. Auch das kommt in sicherheitskritischen Anwendungen vor. Hierzu existiert eine ausgedehnte Spezialliteratur.

☺ Oft ist die Näherung besser als die pessimistische Fehlerschranke!

Die im zentralen Grenzwertsatz angegebene Fehlerschranke  $|\delta| \leq \rho_0^3 / \sigma_0^3 \sqrt{n}$  ist ein bequemer erster Schritt. In günstigen Fällen ist die Approximation tatsächlich besser, wie Beispiele zeigen. Die Fehlerschranke gilt allgemein, sie muss daher pessimistisch vom schlechtesten Fall ausgehen.

⚠ Beispiele zeigen den asymptotischen Fehler  $|\delta| \sim \text{const}/\sqrt{n}$ . [W317](#)

Diese Fehlerschranke lässt sich also allgemein nicht weiter verbessern.

**Anwendung auf Konfidenzintervalle** W201

**Anwendung:** Jede Messung  $X$  ist zufälligen Störungen unterworfen, Messwerte schwanken um den Erwartungswert  $\mu$  mit Streuung  $\sigma > 0$ .

**Beispiel:** Sie führen  $n = 400$  unabhängige Messungen  $X_1, X_2, \dots, X_{400}$  durch und erhalten Messwerte  $x_1, x_2, \dots, x_{400}$ . Sie schätzen  $\mu$  durch den

**Stichprobenmittelwert**  $\hat{x} := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$  Messung (Beispiel) 57.5

Die Streuung von  $X$  schätzen Sie (dank der Stichprobe) auf  $\sigma \approx 10$ . Wie genau ist  $\hat{x}$ ? Wo liegt vermutlich der wahre Erwartungswert  $\mu$ ?

$I_1 = [57, 58], I_2 = [56.5, 58.5], I_3 = [56, 59], I_k = [57.5 \pm k \cdot 0.5]$

**Aufgabe:** Welches Intervall  $I_k$  überdeckt den Erwartungswert  $\mu$  mit Sicherheit  $\alpha_k \geq 95\%$  bzw.  $\alpha_k \geq 99\%$ ? Was sagt Chebychev? der ZGS?

Der Erwartungswert  $\mu$  ist eine Konstante. Leider ist sie uns unbekannt. Das Ziel der Messung ist, diese Konstante  $\mu$  möglichst genau zu bestimmen. Als Schätzung für den Wert  $\mu$  dient uns  $\hat{x}$ .

Wie die Messwerte  $x_1, \dots, x_n$  ist auch  $\hat{x}$  zufälligen Schwankungen unterworfen. Wenn Sie eine neue unabhängige Stichprobe durchführen, erhalten Sie einen neuen Mittelwert  $\hat{x}$ , und mit ihm verschieben sich obige Intervalle. Wir wollen sichergehen und verlangen, dass in 95% aller Stichproben unser Intervall den wahren Wert  $\mu$  überdecken soll. Welchem Intervall vertrauen wir?

**Anwendung auf Konfidenzintervalle** W202

**Lösung:** Wir nutzen das Gesetz der großen Zahlen und den ZGS!

Der Mittelwert  $\hat{X} := \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$  unabhängiger Messungen hat Erwartung  $E(\hat{X}) = E(X) = \mu$  und Varianz  $V(\hat{X}) = V(X)/n$ . Also  $\sigma(\hat{X}) = \sigma(X)/\sqrt{n}$ . Im Beispiel gilt  $\sigma(\hat{X}) = 10/\sqrt{400} = 0.5$ .

Chebychev liefert eine einfache, aber leider nur grobe Abschätzung:

$$\alpha_1 \geq 1 - 1/1^2 = 0, \quad \alpha_2 \geq 1 - 1/2^2 \geq 75\%,$$

$$\alpha_3 \geq 1 - 1/3^2 > 88\%, \quad \alpha_4 \geq 1 - 1/4^2 > 93\%,$$

$$\alpha_5 \geq 1 - 1/5^2 \geq 96\%, \quad \alpha_{10} \geq 1 - 1/10^2 \geq 99\%,$$

Dank ZGS gilt annähernd  $\hat{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$  mit besseren Schranken:

$$\alpha_1 > 68.26\% - \delta, \quad \alpha_2 > 95.44\% - \delta,$$

$$\alpha_3 > 99.73\% - \delta, \quad \alpha_4 > 99.993\% - \delta,$$

$$\alpha_5 > 99.99994\% - \delta, \quad \alpha_6 > 99.9999998\% - \delta.$$

☺ Für die Normalverteilung gilt die 68–95–99–Regel [V120](#): Das  $2\sigma$ -Intervall genügt für 95%ige Sicherheit, und  $3\sigma$  für 99%.

**Anwendungsbeispiel: Meinungsforschung** W203

Eine Wahl mit über 5 000 000 Stimmberechtigten steht bevor. Der Stimmanteil  $p \in [0.02, 0.98]$  einer Partei soll geschätzt werden. Hierzu werden  $n$  zufällige Personen befragt. Die Schätzung soll mit Wahrscheinlichkeit  $\geq 95\%$  bis auf einen Fehler von  $\leq 0.01$  genau sein.

**Aufgabe:** Wie viele Personen sollten hierfür befragt werden?

**Lösung:** Sicherheit 95% garantieren wir mit einer  $2\sigma$ -Umgebung. Der empirische Mittelwert  $\hat{X} = (X_1 + \dots + X_n)/n$  hat die Varianz

$$V(\hat{X}) = \frac{1}{n} V(X) = \frac{p(1-p)}{n} \leq \frac{1}{4n}, \quad \sigma(\hat{X}) \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Wir wollen eine Genauigkeit von  $2\sigma(\hat{X}) \leq 0.01$ . Hierzu genügt

$$2\sigma(\hat{X}) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0.01, \quad \text{also } n \geq 10\,000.$$

☺ Die detaillierte Rechnung haben wir bereits im letzten Kapitel V mit dem LGS und allen Fehlerabschätzungen ausgeführt. [V415](#)

Mit der Approximation dieses Kapitels wird's ein Zweizeiler.

**Anwendungsbeispiel: Wareneingangsprüfung** W204  
Beispiel

Ihr Zulieferer schickt Ihnen  $N = 6000$  Bauteile (z.B. Temperaturfühler). Als Eingangsprüfung nehmen Sie eine Stichprobe von  $n = 200$  Teilen und prüfen die vereinbarten Anforderungen;  $k = 10$  Stück fallen durch.

**Aufgabe:** Wie viele Teile von den 6000 sind fehlerhaft? Geben Sie ein Intervall an, das den wahren Wert mit 95%iger Sicherheit überdeckt. (Für einen analogen, aber einfacheren Hypothesentest siehe [U331](#).)

**Lösung:** Wir schätzen den Anteil fehlerhafter Teile auf  $t = k/n = 5\%$ . Das entspräche  $K = Nt = 300$  Teilen in der gesamten Lieferung. Wie gut ist diese Schätzung? Einzelprüfung:  $\sigma^2(X) = t(1-t) \leq 0.08$ . Stichprobe:  $\sigma^2(\hat{X}) \leq 0.08/200 = 0.0004$ , Streuung  $\sigma(\hat{X}) \leq 0.02$ . Das  $2\sigma$ -Intervall um unsere Schätzung ist demnach:

Anteil  $t \in [0.01, 0.09]$ , absolut  $K \in [60, 540]$

Die Wareneingangsprüfung obliegt dem Käufer (§377 HGB). Hierzu gibt es normierte Methoden. Die Norm ISO2859 etwa beschreibt ein statistisches Qualitätsprüfungsverfahren für attributive Merkmale („in Ordnung“ / „nicht in Ordnung“). Sie wurde 1974 eingeführt und basiert auf dem Standard der amerikanischen Streitkräfte zur Qualitätsprüfung der anzukaufenden Ausrüstung.

**Beispiel:** Hilft Melatonin beim Einschlafen? Hierzu lesen wir *Effects of exogenous melatonin on sleep: a meta-analysis*. Sleep Medicine Reviews 9 (2005) 41–50. doi.org/10.1016/j.smrv.2004.06.004

*The study effect size was taken to be the difference between the response on placebo and the mean response on melatonin for each outcome measured. Melatonin [...] reduced sleep onset latency by 4.0 min (95% CI 2.5, 5.4) [...] and increased total sleep duration by 12.8 min (95% CI 2.9, 22.8).*

**Übung:** Lesen Sie laut vor und übersetzen Sie in Ihre eigenen Worte. Was wurde gemessen? Wie gerechnet? Was bedeuten diese Intervalle? (Zur umsichtigen Entscheidung müssen weitere Fragen geklärt werden; mehr zu Melatonin siehe Doktor Watson, [youtu.be/oQ-o0d60NuI](http://youtu.be/oQ-o0d60NuI).)

**Problem:** Jede Messung  $X$  unterliegt zufälligen Störungen, die wir nicht beseitigen können. Wir betrachten sie als Zufallsvariable  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Messwerte schwanken um den Erwartungswert  $\mu$  mit Streuung  $\sigma > 0$ .

☹ Die Erwartung  $\mu$  und die Verteilung von  $X$  sind jedoch unbekannt. Das Ziel unserer Messung ist,  $\mu$  möglichst genau zu bestimmen.

**Annahme:** Die Messung lässt sich beliebig, unabhängig wiederholen. Wir erhalten unabhängige Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots$  verteilt wie  $X$ , und

$$\text{die Schätzfunktion } \hat{X} := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

☺ Der **ZGS** hilft:  $\hat{X}$  ist annähernd normalverteilt, kurz  $\hat{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ . Für große  $n$  spielt die genaue Verteilung von  $X$  gar keine Rolle mehr!

**Anwendung:** Aus Messwerten  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  bilden wir

$$\text{den Stichprobenmittelwert } \hat{x} := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k.$$

Dieser wird meist vom Erwartungswert  $\mu = \mathbf{E}(X)$  abweichen! Als  $2\sigma$ -Konfidenzintervall dieser Stichprobe bezeichnet man

$$I_2 = [ \hat{x} - 2\sigma/\sqrt{n}, \hat{x} + 2\sigma/\sqrt{n} ].$$

Wie  $\hat{X}$  ist auch das Intervall  $I_2$  zufälligen Schwankungen unterworfen.

☺ Mit 95% Wkt überdeckt dieses Intervall den Erwartungswert  $\mu$ .

**Problem:** Wie die Erwartung  $\mu$  ist auch die Streuung  $\sigma$  unbekannt. **Lösung:** Wir schätzen die Varianz  $\sigma^2$  durch die (Bessel-korrigierte)

$$\text{Stichprobenvarianz } \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \hat{x})^2.$$

⚠ Der korrigierte Nenner  $n-1$  sichert Erwartungstreue:  $\mathbf{E}(S^2) = \sigma^2$ . Für große  $n$  ist der Unterschied zwischen  $n$  und  $n-1$  unerheblich. Wir rechnen nach: Der Schätzer  $\hat{X}$  für  $\mu$  ist erwartungstreu, denn

$$\mathbf{E}[\hat{X}] = \mathbf{E}\left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{E}[X_k] = \frac{1}{n} n\mu = \mu$$

Ist der Erwartungswert  $\mu$  bekannt, so schätzen wir die Varianz  $\sigma$  durch

$$S_0^2 := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \mu)^2, \quad \text{denn in Erwartung gilt tatsächlich}$$

$$\mathbf{E}[S_0^2] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{E}[(X_k - \mu)^2] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{V}[X_k] = \frac{1}{n} n\sigma^2 = \sigma^2.$$

Ist  $\mu$  unbekannt, so würde man naiv zunächst folgendes versuchen:

$$\begin{aligned} S_1^2 &:= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \hat{X})^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [(X_k - \mu) - (\hat{X} - \mu)]^2 \\ &= \left[ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \mu)^2 \right] - 2 \left[ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \mu)(\hat{X} - \mu) \right] + (\hat{X} - \mu)^2 \\ &= \left[ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \mu)^2 \right] - (\hat{X} - \mu)^2 \end{aligned}$$

Somit gilt  $\mathbf{E}(S_1^2) = \mathbf{V}(X) - \mathbf{V}(\hat{X}) = \sigma^2 - \sigma^2/n = \sigma^2 \cdot (n-1)/n$ .

Als Schätzer nimmt man daher die korrigierte Stichprobenvarianz

$$S^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \hat{X})^2.$$

Dieser Schätzer ist nun erwartungstreu, das heißt  $\mathbf{E}(S^2) = \sigma^2$ .

Das Gesetz der großen Zahlen T3J garantiert die Konvergenz

$$\hat{X} \rightarrow \mathbf{E}(\hat{X}) = \mu \quad \text{und} \quad S^2 \rightarrow \mathbf{E}(S^2) = \sigma^2 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

**Satz W2A: Konfidenzintervalle**

Als Stichprobe für  $X$  führen wir  $n$  **unabhängige Messungen** aus. Aus den so gewonnenen Messwerten  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  berechnen wir

den **Stichprobenmittelwert**  $\hat{x} := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k,$

die **Stichprobenvarianz**  $\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \hat{x})^2,$

das  **$2\sigma$ -Konfidenzintervall**  $I_2 := \left[ \hat{x} - 2\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \hat{x} + 2\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \right].$

Für große  $n$  gilt: Bei 95% aller Stichproben überdeckt das Intervall  $I_2$  den (konstanten, aber uns unbekanntem) Erwartungswert  $\mu = \mathbf{E}(X)$ .

☺ Ein wunderbar praktischer Satz! Was genau bedeutet hier „große  $n$ “? Als Faustregel wird oft  $n \geq 30$  gefordert. Satz V4A: Bei Normalverteilung genügt  $n \geq 60$ . Bei ungünstiger Verteilung von  $X$  ist größeres  $n$  nötig.

☺ Das  $2\sigma$ -Intervall liefert 95% Sicherheit, das  $3\sigma$ -Intervall über 99%. Bei sicherheitskritischen Anwendungen wird man noch mehr verlangen. Als ein extremes Sicherheitsniveau wurde etwa  $6\sigma$  propagiert, was bei exakter Normalverteilung über 99.999998% Sicherheit bedeutet. [W201](#)

**Kosten-Nutzen-Abwägung:** Kleines  $n$  ist billig, großes  $n$  ist präzise: Mit wachsendem  $n$  wird der Intervallradius  $2\hat{\sigma}/\sqrt{n}$  beliebig klein. Der Nenner  $\sqrt{n}$  bedeutet: Für doppelte Genauigkeit braucht man eine viermal größere Stichprobe, für zehnfache Genauigkeit eine 100mal größere Stichprobe. Das ist Fluch und Segen der großen Zahlen!

⚠ Sicherheit  $\geq 95\%$  für das  $2\sigma$ -Intervall gilt für „hinreichend große  $n$ “. Solche Faustregeln ganz ohne Begründung sind Autoritätsargumente; manchmal beruhen sie auf etwas Erfahrung, meist jedoch auf Unwissen. Kleine Stichproben erfordern Korrekturen. Den Fall  $n = 2$  skizziere ich ab V420. Allgemein antwortet der Satz V4A von Gosset alias „Student“.

Ich belasse es bei diesem Überblick. Für die ernsthafte Anwendung statistischer Methoden verweise ich auf die umfangreiche Literatur.

⚠ Ich warne vorsorglich vor einem weitverbreiteten **Missverständnis**: Man sagt „Mit Wkt  $\geq 95\%$  überdeckt das Intervall  $I$  den wahren Wert  $\mu$ .“ Das ist bequem, aber irreführend; die Interpretation müssen wir klären.

Der Mittelwert  $\mu = \mathbf{E}(X) \in \mathbb{R}$  ist eine **Zahl**, unbekannt aber konstant. Aus den Messdaten  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  berechnen wir ein Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Entweder liegt  $\mu$  in  $I$  oder nicht: Das ist eine Aussage über eine feste Zahl  $\mu$  und ein festes Intervall  $I$ , mit Wkt hat das nichts mehr zu tun.

⚠ Die Aussage „mit Wkt  $\geq 95\%$ “ betrifft genau genommen also nicht ein einzelnes berechnetes Intervall, sondern das **Verfahren** insgesamt: Bei unabhängiger Wiederholung können wir jedesmal dieses Verfahren anwenden, und in  $\geq 95\%$  aller Fälle werden wir damit richtig liegen.

⚠ Das Verfahren ist einfach, doch seine Interpretation erfordert Übung! Am besten spielen Sie es gegeneinander: [eiser.de/lehre/Konfidenz](http://eiser.de/lehre/Konfidenz) Zur Illustration gebe ich zwei Beispiele: zunächst ein etwas künstliches, aber besonders einfaches zum Würfeln, sodann ein sehr realistisches, aber auch komplizierteres mit echten Daten zum Venus-Express.

Die Graphik zeigt 100 Konfidenzintervalle  $[\hat{x} \pm 2\hat{\sigma}/\sqrt{n}]$ , Sicherheitsniveau  $\geq 95\%$ .

Illustration: Wir werfen 400 mal einen fairen Würfel. Wir wissen  $\mu = 3.5$  und  $\sigma = \sqrt{35/12} \approx 1.70783$ . Die Messwerte schwanken, und mit ihnen Stichproben-Mittelwert  $\hat{x} \approx \mu$  und -Streuung  $\hat{\sigma} \approx \sigma$ . Jede Stichprobe liefert daher ihr eigenes Konfidenzintervall. Bei unserer Simulation überdecken 96 Intervalle den Erwartungswert  $\mu = 3.5$ , die übrigen 4 Intervalle (in rot) tun dies nicht.

Dieses Beispiel ist etwas künstlich, dafür aber besonders leicht zu verstehen. In realistischen Anwendungen kennt man den wahren Mittelwert  $\mu$  und die wahre Streuung  $\sigma$  nicht, sondern will  $I$  muss sie durch Stichprobe schätzen. Genau dieses Verfahren wenden wir hier 100 mal an.

Im Allgemeinen weiß man nicht, ob man eine typische Stichprobe erwischt (schwarz) oder viele Ausreißer (rot). Das Verfahren kann keine absolute Sicherheit garantieren, aber immerhin 95%. Die  $3\sigma$ -Umgebung liefert 99%, etc.

Ausprobieren: [eiser.de/lehre/Konfidenz](http://eiser.de/lehre/Konfidenz)

Das Ergebnis einer Messung  $X$  hängt ab vom wahren Wert  $x$  (dieser ist meist unbekannt und wird gesucht) und einem Fehler  $F_X$  als Störung:

$$X = x + F_X \quad \text{etwa mit} \quad F_X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$$

In der Praxis nehmen wir zur Vereinfachung meist an, dass der Fehler  $F_X$  die Summe von vielen unabhängigen Fehlerquellen ist. Der zentrale Grenzwertsatz W1D sagt dann für  $F_X$  eine Normalverteilung voraus.

Der Fehler  $F_X$  wird beschrieben durch zwei Kenngrößen:

- 1 einem systematischen (konstanten) Fehler  $\mu_X$ ,
- 2 einem stochastischen Fehler mit Streuung  $\sigma_X$ .

☺ Für normalverteilte Fehler genügen bereits diese zwei Parameter. Wiederholte Messung ergibt immer denselben systematischen Fehler. Mittelwertbildung reduziert nur den stochastischen Fehler, siehe oben! Systematische Fehler entstehen durch falsche Justierung oder Nutzung der Messinstrumente, oder falsche Theorie, siehe etwa GPS (W217). Idealfall: Nach Behebung aller systematischen Fehler gilt  $\mu_X = 0$ .

**Aufgabe:** Wir betrachten das Ohmsche Gesetz  $R = U/I$ . Wie pflanzen sich Messfehler von  $U$  und  $I$  auf  $R$  fort? systematisch? stochastisch?

**Lösung:** Für  $R = U/I$  gilt  $\partial R/\partial U = 1/I$  und  $\partial R/\partial I = -U/I^2$ . Für hinreichend **kleine Fehler** gilt demnach näherungsweise:

systematischer Fehler  $\mu_R \approx \frac{1}{I} \mu_U - \frac{U}{I^2} \mu_I$

stochastischer Fehler  $\sigma_R^2 \approx \frac{1}{I^2} \sigma_U^2 + \frac{U^2}{I^4} \sigma_I^2$

Nach Behebung aller systematischen Fehler gilt  $\mu_U = 0$  und  $\mu_I = 0$ . Wir messen die Spannung  $U = \bar{U} \pm \sigma_U$  und den Strom  $I = \bar{I} \pm \sigma_I$  als Mittelwerte  $\bar{U}$  und  $\bar{I}$  mit stochastischen Fehlern  $\pm \sigma_U$  und  $\pm \sigma_I$ . Daraus berechnen wir den Widerstand  $R = \bar{R} \pm \sigma_R$  als den Mittelwert  $\bar{R} = \bar{U}/\bar{I}$  mit stochastischem Fehler  $\sigma_R$  gemäß der Fehlerfortpflanzung

$$\sigma_R = \sqrt{(1/\bar{I}^2) \sigma_U^2 + (\bar{U}/\bar{I}^4) \sigma_I^2}$$

☺ Dank Unabhängigkeit heben sich stochastische Fehler teilweise auf.

**Einsteins Relativität** wird verehrt als Inbegriff einer genialen Theorie, sie genießt Kultstatus in der Popkultur. Wie jede mathematische Theorie gilt sie vielen jedoch als nutzlos-abstrakt und fern alltäglichen Lebens. Das Gegenteil ist der Fall: Wir alle nutzen die Relativitätstheorie täglich! Sie ist nicht nur Grundlage der modernen Astronomie, von schwarzen Löchern bis Gravitationswellen, sondern mitten im Alltag angekommen, insbesondere in den Milliardenprojekten rund um Satellitennavigation.

Flugzeuge, Schiffe, Autos, Mobiltelefone nutzen Satellitennavigation, genauer das **Global Navigation Satellite System** (GNSS) und speziell das US-amerikanische **NAVSTAR Global Positioning System** (GPS). Relativität ist dabei nicht bloß eine unwichtige Spitzfindigkeit, sondern ihr genaues Verständnis und ihre praktische Anwendung sind essentiell für das Funktionieren der Navigation. Ohne präzise Theorie geht es nicht! Die GPS-Konfiguration besteht aus (mindestens) 24 Satelliten, sodass von jedem Punkt der Erde zu jeder Zeit mindestens vier sichtbar sind. Jeder Satellit  $S_i$  sendet ständig seine aktuelle Position und Systemzeit. Aus der Signallaufzeit berechnet der Empfänger die Entfernung  $r_i$  zu  $S_i$ .

Um die nötige extreme Präzision zu gewährleisten, müssen vermeidbare Fehler als solche erkannt und möglichst behoben werden. Dazu zählen insbesondere relativistische Effekte, diese sind hier deutlich spürbar! Ein Objekt mit Geschwindigkeit  $v$  im Erdgravitationsfeld  $GM/r$  hat eine Eigenzeit  $\Delta\tau$  im Vergleich zur Referenzzeit  $\Delta t$  weit außerhalb der Erde:

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta t} \approx 1 - \left( \frac{v^2}{2c^2} + \frac{GM}{rc^2} \right)$$

Im Vergleich zwischen Satellit  $S$  und Empfänger  $E$  erhalten wir somit:

$$\frac{\Delta\tau_S}{\Delta\tau_E} \approx 1 - \left( \frac{v_S^2}{2c^2} + \frac{GM}{r_S c^2} \right) + \left( \frac{v_E^2}{2c^2} + \frac{GM}{r_E c^2} \right)$$

Für GPS-Satelliten gilt  $r_S \approx 26580$  km und  $v_S \approx 3872$  m/s. Am Äquator haben wir  $r_E \approx 6380$  km und  $v_E \approx 464$  m/s. Die Korrekturen sind also:

SRT:  $\frac{v_E^2}{2c^2} - \frac{v_S^2}{2c^2} \approx -8.3 \cdot 10^{-11} \approx -7.2 \mu\text{s/day}$

GRT:  $\frac{GM}{r_E c^2} - \frac{GM}{r_S c^2} \approx 5.31 \cdot 10^{-10} \approx 45.9 \mu\text{s/day}$

Die Messwerte  $X, Y$  verarbeiten wir zu einer Zielgröße  $Z = f(X, Y)$ . Im einfachsten Falle ist die hier genutzte Funktion  $f$  affin-linear:

$$f(X, Y) = f(x, y) + c_1 \cdot \underbrace{(X - x)}_{= F_X} + c_2 \cdot \underbrace{(Y - y)}_{= F_Y}$$

$$z = f(x, y)$$

$$\mu_Z = c_1 \mu_X + c_2 \mu_Y$$

$$\sigma_Z^2 = c_1^2 \sigma_X^2 + c_2^2 \sigma_Y^2 + 2c_1 c_2 \text{Cov}(X, Y)$$

Wir berechnen so  $Z = z + F_Z$  als den wahren Wert  $z = f(x, y)$  plus den Fehler  $F_Z \sim N(\mu_Z, \sigma_Z^2)$ . Der systematische Fehler pflanzt sich linear fort. Bei unabhängigen stochastischen Fehlern addieren sich die Varianzen. Im allgemeinen Falle linearisieren wir um  $(x, y)$  nach Taylor:

$$f(X, Y) \approx f(x, y) + \underbrace{\partial_1 f(x, y)}_{= c_1} \cdot \underbrace{(X - x)}_{= F_X} + \underbrace{\partial_2 f(x, y)}_{= c_2} \cdot \underbrace{(Y - y)}_{= F_Y}$$

$$z = f(x, y)$$

$$\mu_Z \approx \partial_1 f(x, y) \mu_X + \partial_2 f(x, y) \mu_Y \quad (\text{systematisch})$$

$$\sigma_Z^2 \approx [\partial_1 f(x, y)]^2 \sigma_X^2 + [\partial_2 f(x, y)]^2 \sigma_Y^2 \quad (\text{stochastisch})$$

Erste Annahme: Die Fehler  $F_U$  und  $F_I$  sind stochastisch unabhängig. In diesem Falle addieren sich die Varianzen, nicht die Streuungen! Das ist anschaulich plausibel: Dank Unabhängigkeit heben sich stochastische Fehler teilweise auf. Wir nutzen dies im Gesetz der großen Zahlen T31.

Zweite Annahme: Die Fehler  $F_U$  und  $F_I$  sind klein genug, sodass wir die Linearisierung als Näherung nutzen können. Genau genommen müssten wir den Satz B4C von Taylor nutzen und das Restglied abschätzen. Das wird in der hastigen Praxis meist ignoriert. Wird schon gut gehen!

Im folgenden Beispiel ist die Rechnung tatsächlich linear, auch ohne Taylor-Approximation.

**Aufgabe:** Sie wollen Ihre Hauskatze wiegen ( $\approx 4$ kg). Dazu haben Sie eine Personenwaage ( $\pm 1\%$ ), auf der Ihre Katze aber nicht stehenbleibt. Sie halten daher Ihre Katze auf dem Arm und wiegen sich gemeinsam (Messwert  $X$ ), davon subtrahieren Sie Ihr eigenes Gewicht ( $Y \approx 75$ kg). Wie genau können Sie damit das Gewicht Ihrer Katze bestimmen?

**Lösung:** Wir berechnen  $Z = X - Y$  und erwarten einen Wert  $z < 5$ kg. Dabei gilt  $X = x \pm \sigma_X$  mit  $\sigma_X \approx 790$ g und  $Y = y \pm \sigma_Y$  mit  $\sigma_Y \approx 750$ g. Die Differenz  $Z = X - Y$  hat den Mittelwert  $z = x - y$  und die Streuung  $\sigma_Z = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2} \approx 1.1$ kg. Der relative Fehler ist demnach über 25%.

☺ Wiederholung und Mittelwert reduzieren den stochastischen Fehler!

Die Entfernung  $r_1$  zu einem ersten Satelliten  $S_1$  genügt noch nicht: Der Empfänger findet sich irgendwo auf der Sphäre um  $S_1$  mit Radius  $r_1$ . Die Entfernung  $r_2$  zu einem zweiten Satelliten  $S_2$  schränkt weiter ein: Schnittmenge zweier Sphären (in allgemeiner Lage) ist eine Kreislinie. Die Entfernung  $r_3$  zu einem dritten Satelliten  $S_3$  lässt als Schnittmenge nur noch zwei Punkte. Eine der beiden Lösungen liegt weit über der Erde, somit ist die andere als richtige erkennbar. Diese quadratischen Gleichungen werden in kartesischen Koordinaten gelöst und geozentrisch in Kugelkoordinaten (C237) umgerechnet zu geographischer Länge  $\varphi$ , Breite  $\vartheta$ , Höhe  $h = r - r_E$ .

Wir benötigen Präzision! Jeder Satellit trägt eine Atomuhr mit einer wöchentlichen Genauigkeit von  $\theta \approx 1 \text{ ns} = 10^{-9} \text{ s}$ . Im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit  $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$  entspricht das der räumlichen Entfernung  $c\theta \approx 30 \text{ cm}$ . Handelsübliche mobile GPS-Empfänger haben jedoch keine langzeitstabile Atomuhr, sondern nur eine lokale Messgenauigkeit um 10 ns, also etwa 3 m. Hinzu kommen zufällige Störungen und Messfehler. Die erreichte Genauigkeit ist bemerkenswert und liegt bei etwa 10 m! Im Auto genügt dies gerade noch für Position und Geschwindigkeit.

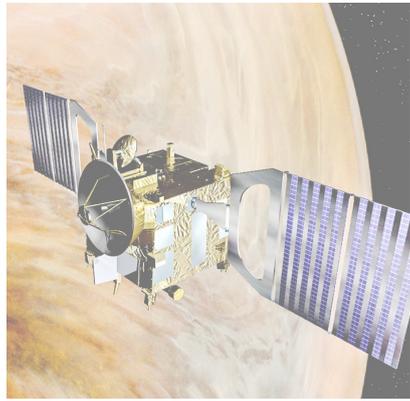
Räumlich genügen die Abstände zu drei Satelliten. GPS-Empfänger führen keine ausreichend genaue absolute Uhrzeit, um die Laufzeiten präzise genug zu messen. Deshalb wird zusätzlich das Signal eines vierten Satelliten genutzt, und so die obige Rechnung statt im euklidischen  $\mathbb{R}^3$  in der vierdimensionalen Minkowski-Raumzeit  $\mathbb{R}^{3+1}$  durchgeführt. Das Prinzip ist dasselbe.

☐ Siehe G. Strang, K. Borre: *Linear Algebra, Geodesy, and GPS* (1997) sowie für offizielle technische Spezifikationen [www.navcen.uscg.gov/pubs/gps/signspec/gpspsps1.pdf](http://www.navcen.uscg.gov/pubs/gps/signspec/gpspsps1.pdf). Damit können Sie die konkreten Daten einsetzen und selbständig alle Rechnungen prüfen. Die Mühe lohnt sich, denn GPS ist ein mathematisch-physikalisch-technisches Meisterwerk.

Aufgrund spezieller Relativität (SRT) gehen Satellitenuhren um 7200 ns pro Tag nach, aufgrund allgemeiner Relativität (GRT) um 45900 ns vor, in der Summe also 38600 ns vor. Wir benötigen aber eine Genauigkeit im Bereich von wenigen Nanosekunden! Dazu wird ein genial-einfacher Trick angewendet: Die Satellitenuhren werden nicht auf ihre nominelle Frequenz 10.23 Mhz geeicht, sondern auf 10.229999995453 Mhz. Das erledigt die relativistisch nötige Korrektur! Von der Erde aus gesehen ticken die Satelliten mit der gewünschten Frequenz von 10.23 Mhz.

Die Physik arbeitet seit über hundert Jahren mit Einsteins spezieller Relativitätstheorie (1905) und seiner allgemeinen Relativitätstheorie (1915). Beide sind in vielen Situationen mit großer Genauigkeit experimentell überprüft worden, zum Beispiel durch astronomische Beobachtungen, beim Mion-Zerfall in der Erdatmosphäre, in Teilchenbeschleunigern, und vielen mehr. Die sehr genauen Zeitmessungen des GPSsystems sind eine weitere beeindruckende Illustration. Hier wirkt die Theorie auch umgekehrt auf ingenieurtechnische Fragen der Konstruktion: Um die nötige Zeitgenauigkeit zu garantieren, wurden die Satelliten sorgfältig relativistisch korrekt konstruiert. Damit ist Einsteins Relativitätstheorie innerhalb eines Jahrhunderts alltagsrelevant geworden.

*Fake science?* In Diskussionsforen tobt die Debatte, ob die relativistischen Korrekturen für das Funktionieren des GPSsystems *absolut notwendig* sind, oder ob es auch irgendwie anders ginge: Speziell für die Positionsbestimmung könnte der Empfänger die Absolutzeit überflüssig machen, indem er nur Laufzeitdifferenzen misst und verrechnet. Das ist eine alternative Herangehensweise, zur Ausführung siehe etwa [www.alternativephysics.org/book/GPSmythology.htm](http://www.alternativephysics.org/book/GPSmythology.htm). Klar ist und bleibt dabei: Die Zeitdilatation ist real, sie wird im GPSsystem tatsächlich gemessen, und ihre Korrektur ist zur *globalen* Kalibrierung der GPSsystemzeit notwendig. *Science works!*



Missionen der ESA  
 Start Jun. 2003 in Baikonur  
 Mars-Orbit ab Jan. 2004  
 → Suche nach Wasser  
 Start Nov. 2005 in Baikonur  
 Venus-Orbit ab Apr. 2006  
 → Atmosphäre der Venus  
 Orbiter: Masse 633kg leer plus Treibstoff (MMH+NTO)  
 Acht Steuertriebwerke mit je 10N Schub (im Labor)  
 Fortsetzung oder Ende:  
 Wie lange reicht der Sprit?

Siehe [en.wikipedia.org/wiki/Mars\\_Express](http://en.wikipedia.org/wiki/Mars_Express) und [/Venus\\_Express](http://en.wikipedia.org/wiki/Venus_Express)

Design erfordert Entscheidungen und meist Kompromisse. Die ESA hat auf Messgeräte für die Tankfüllung verzichtet. Zum geplanten Ende der Mission stellt sich die Frage: Kann die Mission verlängert werden? Ist dazu noch genug Treibstoff im Tank? Wie kann man das mit ausreichender Sicherheit herausfinden? Idee: Die ESA verfügt über alle bisherigen Positions- und Steuerdaten. Hieraus könnte man jeweils die Trägheit berechnen und indirekt die Gesamtmasse! Geht das?

Realistische Analogie: Heutige Autos haben eine Masse von etwa 1.2 bis 1.6 Tonnen bei einem Tankvolumen von 50 bis 70 Litern. Sie fahren ein Auto ohne Tankanzeige, die Tankfüllung erspüren Sie in Kurven, beim Gasgeben und Abbremsen. Ist das verrückt? Ja. Ist das möglich? Schwierig! Man muss genau und sehr häufig messen – und dann die Messfehler rausfiltern!

Vereinfachte Analogie: Sie haben eine Gasflasche für einen Herd oder Grill: Leergewicht 6kg, Inhalt 0-5kg Propan, ebenfalls ohne Anzeige des Füllstandes. Sie können durch Schütteln recht gut erspüren, wie voll die Gasflasche ist. Probieren Sie es bei Gelegenheit mal aus!

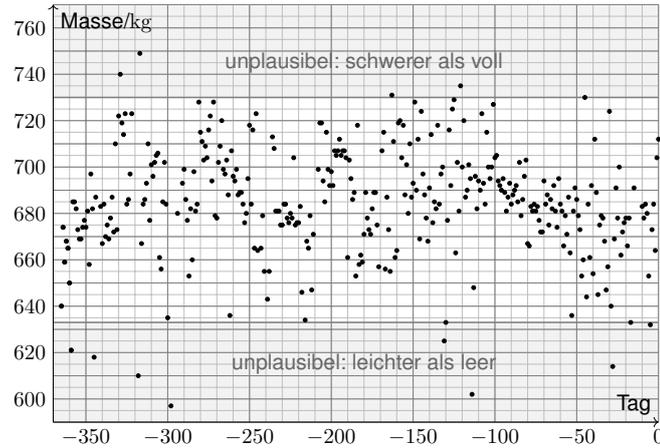
Jede Messung ist mit Fehlern behaftet: systematische müssen wir erkennen und dann korrigieren, bei zufälligen können wir dies nicht direkt! Wir müssen lernen, sie geschickt rauszufiltern, um ein möglichst verlässliches Ergebnis zu erhalten. Das ist das Ziel der mathematischen Statistik.

Es geht um rationale Entscheidungen unter Unsicherheit. Dafür genügt es nicht, eine willkürliche Schätzung auszuspecken! Die Anwendung ist ernst, es geht um Geld, wir müssen überzeugen. Wir wollen nicht nur eine gute Schätzung, sondern auch die Güte der Schätzung berechnen!

Hierzu will ich Sie mit meiner Einführung anleiten. Wer darüber hinaus ernsthafte statistische Analysen betreiben will/muss, kann sich darauf aufbauend in die Spezialliteratur einarbeiten.

Venus Express: Wieviel Treibstoff ist noch im Tank?

Aus Steuermanövern errechnete Masse für 366 Tage bis 31.12.2012.



Venus Express: Wieviel Treibstoff ist noch im Tank?

Impuls-Messungs-Methode (Impulse Measurement Method, IMM): Aus Positions- und Steuerdaten errechnet man Werte für die Masse; folgende Daten finden Sie unter [eiserm.de/lehre/HM3/VEX2012.txt](http://eiserm.de/lehre/HM3/VEX2012.txt).

Tag	Datum	Masse	Tag	Datum	Masse
1	01.01.2012	640	...	...	...
2	02.01.2012	674	364	29.12.2012	664
3	03.01.2012	659	365	30.12.2012	704
...	...	...	366	31.12.2012	712

**Datengewinnung** ist mühsam, erfordert Umsicht und Sachkenntnis! Diese Daten stellt uns freundlicherweise Herr Catlagan Gürbüz zur Verfügung. Er hat 2012 die Höhere Mathematik 3 gehört und am IRS / ESOC seine Bachelor-Arbeit zum Mars & Venus Express geschrieben.

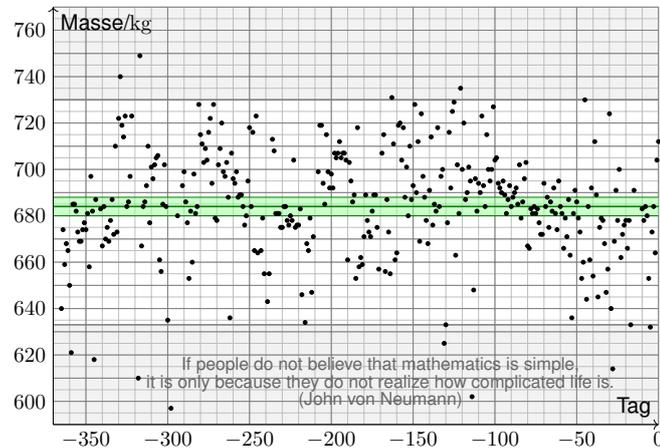
**Rationale Entscheidung:** Kann / sollte man die Mission verlängern? Grundlose Schätzungen sind sinnlos, wir brauchen Sicherheit!

**Techniken:** Erwartung und Streuung, Stichproben und Schätzung, Gesetz der großen Zahlen, zentraler Grenzwertsatz, Konfidenzintervall

☺ *This is rocket science.* Mathematische Statistik zeigt, wie es geht.

Mathematische Statistik: Konfidenzintervalle

Jahresmittelwert der Gesamtmasse mit 3σ-Konfidenzintervall.



Mathematische Statistik: Konfidenzintervalle

**Aufgabe:** Wie groß war der Tankinhalt im Jahresmittel 2012? Geben Sie das 3σ-Konfidenzintervall an (für 99%ige Sicherheit).

**Lösung:** Unser Datensatz liefert Mittelwert und Streuung: Der Stichprobenmittelwert ist  $\hat{m} = 684\text{kg}$ . Dies schätzt die Masse  $m$ . Die Stichprobenstreuung ist  $\hat{\sigma}_m = 24.6\text{kg}$ . Dies schätzt die Streuung.

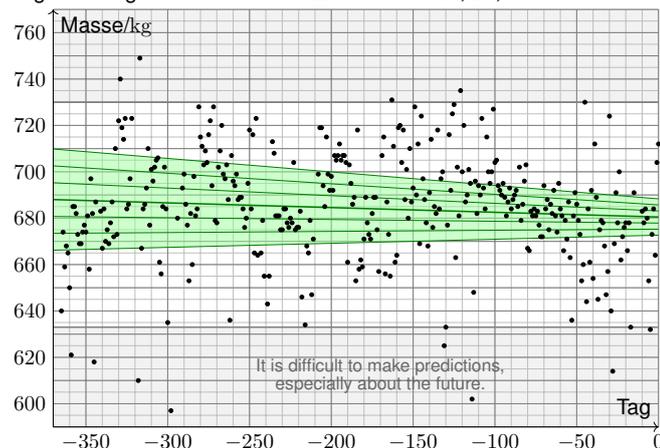
Bei  $n = 345$  Datenpunkten gilt  $\hat{\sigma}_{\hat{m}} = \hat{\sigma}_m / \sqrt{n} = 1.33\text{kg}$ . Großes  $n$  hilft! Das 3σ-Intervall  $[\hat{m} \pm 3\hat{\sigma}_{\hat{m}}] = [680; 688]\text{kg}$  ist erstaunlich schmal! Der Tankinhalt betrug demnach  $[47; 55]\text{kg}$  mit 99%iger Sicherheit.

- ☹ Messdaten sind voller Messfehler und anderer Ungenauigkeiten.
- ☺ Unsere Daten sind schmutzig doch glücklicherweise sehr zahlreich: Wir können Gesetze der großen Zahlen und Grenzwertsätze nutzen!
- ☺ Dank passender Technik können Sie so präzise Schlüsse ziehen! Dank Statistik fördern Sie Information zutage, die zuvor verborgen war.

⚠ Jede Prognose ist höchstens so gut wie die zugrundeliegenden Daten! Zufällige Fehler können wir durch große Messreihen rausfiltern, systematische Fehler nicht! Hier helfen nur Umsicht und Sachkenntnis!

Mathematische Statistik: lineare Regression

Regressionsgerade mit Konfidenzintervallen: 1σ, 2σ, 3σ.



Mathematische Statistik: lineare Regression

**Aufgabe:** Wie groß war der Tankinhalt Ende 2012? Wie lange reicht es noch? Wie sicher ist Ihre Prognose?

**Lösung:** Unser Datensatz liefert die Regressionsgerade  $y = \hat{a} + \hat{b}x$ : Ende 2012 ist die Gesamtmasse  $\hat{a} = 680.5\text{kg}$  mit Streuung  $\hat{\sigma}_{\hat{a}} = 2.6\text{kg}$ . Im Tank verbleiben  $\hat{t} = 47.5\text{kg}$  Treibstoff mit Streuung  $\hat{\sigma}_{\hat{t}} = 2.6\text{kg}$ . Der Verbrauch ist  $\hat{b} = -20.3\text{g/Tag}$  mit Streuung  $\hat{\sigma}_{\hat{b}} = 12.6\text{g/Tag}$ .

Sehr grobe Prognose der verbleibenden Missionsdauer: 2300 Tage. Wie verlässlich ist diese Prognose aufgrund unserer Messdaten? Mit 95% Sicherheit reicht der Treibstoff noch für über 930 Tage: Tank  $[\hat{t} \pm 2\hat{\sigma}_{\hat{t}}] \subseteq [42.3; 52.7]\text{kg}$ , Verbrauch  $[\hat{b} \pm 2\hat{\sigma}_{\hat{b}}] \subseteq [-45.5; 4.9]\text{g/Tag}$ . Mit 99% Sicherheit reicht der Treibstoff noch für über 680 Tage: Tank  $[\hat{t} \pm 3\hat{\sigma}_{\hat{t}}] \subseteq [39.7; 55.3]\text{kg}$ , Verbrauch  $[\hat{b} \pm 3\hat{\sigma}_{\hat{b}}] \subseteq [-58.1; 17.5]\text{g/Tag}$ .

- ☺ Wir extrahieren sorgsam, was die vorliegenden Daten hergeben!
- ⚠ Systematische Fehler? physikalische Annahmen? Alternativen? War 2012 ein typisches Jahr? Wenn man Sprit spart, reicht er länger! VEX wird 2013/14 tiefer in Atmosphäre abgesenkt, der Verbrauch steigt. Die Mission endet im Dezember 2014 wegen Treibstoffmangels. Wow!

Das Ergebnis  $X$  einer Messung hängt von zufälligen Störungen  $F$  ab:

$$X = x + F \quad \text{etwa mit} \quad F \sim N(0, \sigma_F^2)$$

Das heißt: Die Messung  $X = x + F$  schwankt um den Wert  $x = \mathbf{E}(X)$ , der Fehler  $F = X - x$  hat Erwartung  $\mathbf{E}(F) = 0$  und Varianz  $\mathbf{V}(F) = \sigma_F^2$ .

Problem: Erwartung  $\mathbf{E}(X) = x$  und Varianz  $\mathbf{V}(X) = \sigma_F^2$  sind uns nicht bekannt. Wir wollen sie durch wiederholte Messungen ermitteln.

Unabhängige Wiederholung ergibt die Messwerte  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Erwartung  $\mu_X = x$  und Varianz  $\sigma_X^2 = \sigma_F^2$  schätzen wir hieraus wie folgt:

$$x \approx \hat{x} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \sigma_X^2 \approx \hat{\sigma}_X^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x})^2, \quad \sigma_X \approx \hat{\sigma}_X := \frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}}$$

Hieraus erhalten wir Konfidenzintervalle für den gesuchten Wert  $x$ :

$$I_2 = [\hat{x} \pm 2\hat{\sigma}_X] = [\hat{x} - 2\hat{\sigma}_X; \hat{x} + 2\hat{\sigma}_X] \quad \ni x \text{ mit } 95\% \text{ Sicherheit}$$

$$I_3 = [\hat{x} \pm 3\hat{\sigma}_X] = [\hat{x} - 3\hat{\sigma}_X; \hat{x} + 3\hat{\sigma}_X] \quad \ni x \text{ mit } 99\% \text{ Sicherheit}$$

Wir nehmen an,  $Y$  hängt linear von  $X$  ab plus zufällige Störung  $F$ :

$$Y = a + bX + F \quad \text{etwa mit} \quad F \sim N(0, \sigma_F^2)$$

Unabhängige Wiederholung ergibt die Messdaten  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ .

Die **Regressionsparameter**  $a$  und  $b$  schätzen wir hieraus wie folgt:

$$b \approx \hat{b} := \frac{\sum (x_i - \hat{x})(y_i - \hat{y})}{\sum (x_i - \hat{x})^2}, \quad a \approx \hat{a} := \hat{y} - \hat{b}\hat{x}$$

Die **Güte dieser Schätzungen** wird bestimmt durch die Varianzen:

$$\sigma_b^2 \approx \hat{\sigma}_b^2 := \frac{\sum (\hat{a} + \hat{b}x_i - y_i)^2}{(n-2) \sum (x_i - \hat{x})^2}, \quad \sigma_a^2 \approx \hat{\sigma}_a^2 := \frac{\hat{\sigma}_b^2}{n} \sum x_i^2$$

Wir erhalten **Konfidenzintervalle** für die gesuchten Werte  $a$  bzw.  $b$ :

$$\hat{I}_2 = [\hat{a} \pm 2\hat{\sigma}_a] = [\hat{a} - 2\hat{\sigma}_a; \hat{a} + 2\hat{\sigma}_a] \quad \ni a \text{ mit } 95\% \text{ Sicherheit}$$

$$\hat{I}_3 = [\hat{a} \pm 3\hat{\sigma}_a] = [\hat{a} - 3\hat{\sigma}_a; \hat{a} + 3\hat{\sigma}_a] \quad \ni a \text{ mit } 99\% \text{ Sicherheit}$$

Wir nehmen an,  $y_i$  hängt linear von  $x_i$  ab plus zufällige Störung  $f_i$ :

$$y_i = a + bx_i + f_i \quad \text{mit Fehler} \quad f_i = y_i - a - bx_i$$

Wir suchen nach der Geraden, die diese Fehler insgesamt minimiert:

$$Q(a, b) := \sum_{i=1}^n f_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2 \quad \xrightarrow{!} \quad \min$$

Das ist eine positive quadratische Funktion in  $a$  und  $b$ . Minimum:

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = \sum_{i=1}^n 2(y_i - a - bx_i) \cdot (-1) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b} = \sum_{i=1}^n 2(y_i - a - bx_i) \cdot (-x_i) \stackrel{!}{=} 0$$

Dieses lineare Gleichungssystem führt zu den obigen Formeln:

$$\hat{a} = \hat{y} - \hat{b}\hat{x}, \quad \hat{b} = \frac{\sum (x_i - \hat{x})(y_i - \hat{y})}{\sum (x_i - \hat{x})^2} = \frac{\sum x_i y_i - n\hat{x}\hat{y}}{\sum x_i^2 - n\hat{x}^2}$$

😊 Geometrisch: Für die zentrierten Vektoren  $\vec{x}_i = x_i - \hat{x}$  und  $\vec{y}_i = y_i - \hat{y}$  berechnet sich  $\hat{b} = \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle / \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle$  durch Skalarprodukte!

Wir nehmen an,  $Y$  hängt linear von  $X$  ab plus zufällige Störung  $F$ :

$$Y = a + bX + F \quad \text{etwa mit} \quad F \sim N(0, \sigma_F^2)$$

Wie gut ist unsere Schätzung  $\hat{a}, \hat{b}$  für die unbekannt Parameter  $a, b$ ?

Wir betrachten unabhängig wiederholte Messungen  $(X_i, Y_i)$  und analysieren unsere Schätzungen  $\hat{a}, \hat{b}$  als Zufallsvariable  $\hat{A}, \hat{B}$ :

$$Y_i = a + bX_i + F_i, \quad F_i \sim N(0, \sigma_F^2)$$

$$\hat{X} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \hat{Y} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$$

$$\hat{B} = \frac{\sum (X_i - \hat{X})(Y_i - \hat{Y})}{\sum (X_i - \hat{X})^2}, \quad \hat{A} = \hat{Y} - \hat{B}\hat{X}$$

Wir nehmen vereinfachend an, die additiven Fehler  $F_i \sim N(0, \sigma_F^2)$  sind normalverteilt. Dann sind die Zufallsvariablen  $\hat{A}$  und  $\hat{B}$  normalverteilt; allgemein gilt dies für große  $n$  in guter Näherung dank ZGS.

Gesucht ist der wahre Wert  $x$ , doch dieser ist uns leider unbekannt.

Wir schätzen ihn durch  $\hat{x}$  anhand der Messdaten  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Die Güte dieser Schätzung wird bestimmt durch die Varianz  $\sigma_X^2$ .

Wir schätzen sie wiederum durch die Stichprobenvarianz  $\hat{\sigma}_X^2$ .

Grundlegende Annahmen unseres **stochastischen Modells**:

Der Messfehler  $F$  ist zufällig und hat **Mittelwert**  $\mathbf{E}(F) = 0$ .

Andernfalls machen wir einen **systematischen Fehler**!

Den Fehler  $F$  können wir nicht direkt beobachtet (und korrigieren).

Je mehr Messwerte wir haben, desto besser können wir ihn rausfiltern:

Mit Wkt 95% überdeckt das Konfidenzintervall  $I_2$  den wahren Wert  $x$ .

Mit Wkt 99% überdeckt das Konfidenzintervall  $I_3$  den wahren Wert  $x$ .

Dies sind die Konfidenzniveaus 95% bzw. 99% der **Normalverteilung**!

Sie gilt falls  $F \sim N(0, \sigma_F^2)$  normalverteilt ist oder  $n$  ausreichend groß, denn  $\hat{X} \sim N(x, \sigma_F^2/n)$  gilt exakt oder in guter Näherung dank ZGS.

😊 Mit hinreichend vielen Messdaten bestimmen wir  $x$  beliebig genau.

Merke: Doppelte Genauigkeit kostet viermal so viele Messungen.

Gesucht sind die Werte  $a, b$ , doch diese sind uns leider unbekannt.

Wir schätzen sie durch  $\hat{a}, \hat{b}$  anhand der Messdaten  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ .

Grundlegende Annahmen unseres **stochastischen Modells**:

Der Messfehler  $F$  ist unabhängig von  $X$  mit **Mittelwert**  $\mathbf{E}(F) = 0$ .

Andernfalls machen wir immer denselben **systematischen Fehler**!

Den Fehler  $F$  können wir weder direkt beobachten noch korrigieren.

Je mehr Messwerte wir haben, desto besser können wir ihn rausfiltern:

Mit Wkt 95% überdeckt das Konfidenzintervall  $I_2$  den wahren Wert  $a$ .

Mit Wkt 99% überdeckt das Konfidenzintervall  $I_3$  den wahren Wert  $a$ .

Auch hier nutzen wir die Konfidenzniveaus der **Normalverteilung**!

Sie gilt falls  $F \sim N(0, \sigma_F^2)$  normalverteilt ist oder  $n$  ausreichend groß, denn  $\hat{A} \sim N(a, \sigma_a^2)$  und  $\hat{B} \sim N(b, \sigma_b^2)$  gilt exakt oder in guter Näherung.

😊 Ausreichend viele Messdaten bestimmen  $a, b$  beliebig genau.

Zudem erhalten wir eine Schätzung für die Güte der Näherung.

⚠ Jede gegebene Messreihe liefert nur eine begrenzte Genauigkeit.

Doppelte Genauigkeit kostet viermal so viele Messungen.

Wir nennen  $y = \hat{a} + \hat{b}x$  die **Kleinste-Quadrate-Gerade** (KQ-Gerade).

Der Wert  $\hat{y}_i = \hat{a} + \hat{b}x_i$  heißt der **KQ-gefitete Wert** und entsprechend die Abweichung  $\hat{f}_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - \hat{a} + \hat{b}x_i$  der **KQ-gefitete Fehler**.

Eigenschaften: Die Summe aller Fehler  $\hat{f}_i = y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i$  ist Null.

Liegen alle Datenpunkte  $(x_i, y_i)$  auf einer Geraden  $y = a + bx$ ,

so gilt  $\hat{a} = a$  und  $\hat{b} = b$  mit perfektem Fit:  $\hat{y}_i = y_i$  und  $\hat{f}_i = 0$ .

Wie gut beschreibt die Gerade die Daten? **Korrelationskoeffizient**

$$r(x, y) := \frac{\sum (x_i - \hat{x})(y_i - \hat{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \hat{x})^2} \sqrt{\sum (y_i - \hat{y})^2}} = \frac{\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle}{\sqrt{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle} \sqrt{\langle \vec{y} | \vec{y} \rangle}}$$

Es gilt  $-1 \leq r \leq 1$ , mit  $r = \pm 1$  genau dann, wenn alle Daten auf einer Geraden liegen: gleichsinnig für  $r = +1$  und gegensinnig für  $r = -1$ .

Die Linearisierung ist gut für große Werte von  $r^2$ , schlecht für kleine.

Geometrisch bedeutet  $r = 0$ : Die Vektoren  $\vec{x}, \vec{y}$  stehen **senkrecht**.

Stochastisch: Die Zufallsvariablen  $x, y$  sind **linear unkorreliert**.

Für Skalarprodukte  $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$  gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung. [134]

📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §3.5.

Für die Erwartungen finden wir (nach kurzer Rechnung):

$$\mathbf{E}(\hat{B}) = b \approx \hat{b} := \frac{\sum (x_i - \hat{x})(y_i - \hat{y})}{\sum (x_i - \hat{x})^2}, \quad \mathbf{E}(\hat{A}) = a \approx \hat{a} := \hat{y} - \hat{b}\hat{x}$$

Für die Varianzen finden wir (nach längerer Rechnung):

$$\mathbf{V}(\hat{B}) = \frac{\sigma_F^2}{n \mathbf{V}(X)} \approx \hat{\sigma}_b^2 := \frac{\sum (\hat{a} + \hat{b}x_i - y_i)^2}{(n-2) \sum (x_i - \hat{x})^2}$$

$$\mathbf{V}(\hat{A}) = \frac{\sigma_F^2 \mathbf{E}(X^2)}{n \mathbf{V}(X)} \approx \hat{\sigma}_a^2 := \hat{\sigma}_b^2 \cdot \frac{1}{n} \sum x_i^2$$

Die Form der Varianzschätzer ist plausibel, die kleine Korrektur von  $1/n$  zu  $1/(n-1)$  oder  $1/(n-2)$  sichert die richtige Erwartung.

(Für große  $n$ , etwa  $n \gg 100$ , ist diese Korrektur meist unerheblich.)

Hieraus erhalten wir Vertrauensintervalle, etwa  $2\sigma$  zu 95% Sicherheit.

Der Aufwand lohnt sich: Wir gewinnen ein Maß für die (Un)Sicherheit.

😊 Wir bekommen nicht nur **Punktschätzer** der gesuchten Werte  $a, b$ , sondern sogar **Intervallschätzer**: Das enthält viel mehr Information!

⚠ Grundlose Schätzungen sind sinnlos, wir brauchen Sicherheit!

**Zufallsvariablen und Erwartungswerte** W301  
Fazit

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  ein WRaum, zum Beispiel diskret oder kontinuierlich. [V112]  
 Eine reelle **Zufallsvariable** ist eine messbare Funktion  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . [V211]  
 Sie ordnet jedem Zufallsergebnis  $\omega \in \Omega$  eine reelle Zahl  $X(\omega) \in \mathbb{R}$  zu.  
 Im Bildbereich  $\mathbb{R}$  definiert sie die **Verteilung**  $\mathbf{P}_X: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$  durch

$$\mathbf{P}_X(B) = \mathbf{P}(X \in B) = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}).$$

Ihr **Erwartungswert** ist gegeben durch

$$\mu = \mathbf{E}(X) := \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbf{P} = \int_{\mathbb{R}} x d\mathbf{P}_X.$$

Ist die Verteilung  $\mathbf{P}_X$  auf  $\mathbb{R}$  kontinuierlich mit Dichte  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , so gilt

$$\mathbf{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx.$$

Ist  $\mathbf{P}_X$  diskret mit Wkten  $p(x) = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\})$ , so gilt

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x p(x).$$

⚠ Wir setzen hierzu absolute Integrierbarkeit / Summierbarkeit voraus!

**Varianz und Streuung** W302  
Fazit

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  ein WRaum und  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Zufallsvariable.  
 Sei  $\mathbf{E}(|X|) < \infty$ , so dass der Erwartungswert  $\mu = \mathbf{E}(X)$  existiert.  
 Das (absolute, zentrierte)  **$n$ -te Moment** von  $X$  ist gegeben durch

$$\rho^n(X) := \mathbf{E}[|X - \mu|^n].$$

Fall  $n = 2$ : Die **Varianz** von  $X$  ist die mittlere quadratische Abweichung

$$\sigma^2(X) = \mathbf{V}(X) := \mathbf{E}[(X - \mu)^2] = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 \geq 0.$$

Die **Streuung** oder **Standardabweichung** ist  $\sigma(X) := \sqrt{\mathbf{V}(X)}$ .  
 Nach Chebychev gelten folgende Abschätzungen für alle  $h, k > 0$ :

$$\mathbf{P}[|X - \mu| \geq k\sigma] \leq \frac{1}{k^2}, \quad \mathbf{P}[\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma] \geq 1 - \frac{1}{k^2},$$

$$\mathbf{P}[X \geq \mu + k\sigma] \leq \frac{1}{1 + k^2}, \quad \mathbf{P}[\mu - h\sigma < X < \mu + k\sigma] \geq \frac{4(hk - 1)}{(h + k)^2}$$

☺ Kennen Sie nur  $\mu$  und  $\sigma$ , so sind diese Ungleichungen optimal.  
 Die Wkt großer Abweichungen fällt mindestens quadratisch, mit  $1/k^2$ .

**Unabhängige Zufallsvariablen** W303  
Fazit

Eine Familie  $X = (X_1, \dots, X_n)$  von Zufallsvariablen  $X_k: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **(stochastisch) unabhängig**, wenn für alle Intervalle  $I_1, \dots, I_n \subseteq \mathbb{R}$  gilt

$$\mathbf{P}(X_1 \in I_1, \dots, X_n \in I_n) = \mathbf{P}(X_1 \in I_1) \cdots \mathbf{P}(X_n \in I_n).$$

Die gemeinsame Verteilung von  $X_1, \dots, X_n$  ist dann das Produktmaß

$$\mathbf{P}_X = \mathbf{P}_{(X_1, \dots, X_n)} = \mathbf{P}_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{P}_{X_n}.$$

Sind  $\mathbf{P}_{X_1}, \dots, \mathbf{P}_{X_n}$  auf  $\mathbb{R}$  kontinuierliche WMaße mit Dichten  $f_1, \dots, f_n$ , so ist auch das Produktmaß  $\mathbf{P}_X$  auf  $\mathbb{R}^n$  kontinuierlich, mit Produktdichte

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n).$$

Erwartungen unabhängiger Zufallsvariablen  $X, Y$  multiplizieren sich:

$$\mathbf{E}(X \cdot Y) = \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y)$$

Ihre Kovarianz  $\text{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$  verschwindet somit.  
 Varianzen unabhängiger Zufallsvariablen  $X, Y$  addieren sich:

$$\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$$

⚠ Für abhängige Zufallsvariablen gilt dies im Allgemeinen nicht!

**Das Gesetz der großen Zahlen** W304  
Fazit

Eine Messung / ein Experiment entspricht einer Zufallsvariablen  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit Erwartung  $\mu = \mathbf{E}(X)$  und Varianz  $\sigma^2 = \mathbf{V}(X) < \infty$ .  
 Wir führen unabhängige Wiederholungen  $X_1, X_2, X_3, \dots$  durch.  
 Aus diesen Messwerten bilden wir den **empirischen Mittelwert**

$$\hat{X} := \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n).$$

Es gilt  $\mathbf{E}(\hat{X}) = \mu$  und dank Unabhängigkeit zudem  $\mathbf{V}(\hat{X}) = \sigma^2/n$ .  
 Mit zunehmendem  $n$  streut  $\hat{X}$  immer weniger, denn  $\hat{\sigma} = \sigma/\sqrt{n} \rightarrow 0$ .  
 Der Mittelwert  $\hat{X}$  nähert sich dem Erwartungswert  $\mu$ : Für jedes  $\varepsilon > 0$  gilt

$$\mathbf{P}[|\hat{X} - \mu| \geq \varepsilon] \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \searrow 0.$$

Dieser Grenzwert besagt in Worten: Große Abweichungen  $|\hat{X} - \mu| \geq \varepsilon$  werden beliebig unwahrscheinlich, wenn wir  $n$  hinreichend groß wählen.  
 In praktischen Anwendungen möchte man  $n$  nicht allzu groß wählen, denn wiederholte Messungen sind teuer. Wir brauchen daher bessere Schranken für die Abweichung  $\mathbf{P}(|\hat{X} - \mu| \geq \varepsilon)$ . Diese liefert der ZGS!

**Der zentrale Grenzwertsatz (ZGS)** W305  
Fazit

Der ZGS besagt: Die Summe  $S = X_1 + \dots + X_n$  vieler unabhängiger, aber ähnlich großer Zufallsvariablen ist annähernd normalverteilt.  
 Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  ein WRaum und  $X_1, X_2, X_3, \dots: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  unabhängig mit

- 1 endlichen Erwartungen  $\mu_k = \mathbf{E}(X_k)$  dank  $\mathbf{E}(|X_k|) < \infty$ ,
- 2 strikt positiven Varianzen  $\sigma_k^2 = \mathbf{E}(|X_k - \mu_k|^2) \geq \sigma_0^2 > 0$ ,
- 3 beschränkten dritten Momenten  $\rho_k^3 = \mathbf{E}(|X_k - \mu_k|^3) \leq \rho_0^3 < \infty$ .

Die Summe  $S = X_1 + \dots + X_n$  hat die Erwartung  $\mu = \mu_1 + \dots + \mu_n$  und die Varianz  $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2$ . Es gilt  $\mathbf{P}_S \approx N(\mu, \sigma^2)$ , genauer

$$\mathbf{P}(a \leq S \leq b) = \int_{(a-\mu)/\sigma}^{(b-\mu)/\sigma} \frac{e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}} d\xi + \delta,$$

$$|\delta| \leq \frac{\rho_1^3 + \dots + \rho_n^3}{(\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2)^{3/2}} \leq \frac{\rho_0^3}{\sigma_0^3 \sqrt{n}} \searrow 0.$$

Zentriert und normiert zu  $S^* := (S - \mu)/\sigma$  erhalten wir  $\mathbf{P}_{S^*} \approx N(0, 1)$ .  
 Der lokale Grenzwertsatz V3A ist spezieller, dabei aber auch präziser.

**Konfidenzintervalle** W306  
Fazit

In der Praxis ist folgende Anwendung des ZGS besonders wichtig:  
 Als Stichprobe für  $X$  führen wir  $n$  **unabhängige Messungen** aus.  
 Aus den so gewonnenen Messwerten  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  berechnen wir

den **Stichprobenmittelwert**  $\hat{x} := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$ ,

die **Stichprobenvarianz**  $\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \hat{x})^2$ ,

das **2 $\sigma$ -Konfidenzintervall**  $I_2 := \left[ \hat{x} - 2 \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \hat{x} + 2 \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \right]$ .

Für große  $n$  gilt: Bei 95% aller Stichproben überdeckt das 2 $\sigma$ -Intervall  $I_2$  den (konstanten aber uns unbekanntem) Erwartungswert  $\mu = \mathbf{E}(X)$ .  
 Noch strenger: Bei 99% aller Stichproben überdeckt das 3 $\sigma$ -Intervall  $I_3$  den (konstanten aber uns unbekanntem) Erwartungswert  $\mu = \mathbf{E}(X)$ .  
 Der Nenner  $\sqrt{n}$  bedeutet: Für doppelte Genauigkeit braucht man eine viermal größere Stichprobe, für zehnfache Genauigkeit eine 100mal größere Stichprobe. Das ist Fluch und Segen der großen Zahlen!

**Verständnisfragen: Zufallsvariablen** W307  
Fazit

Versuchen Sie, folgende Fragen frei aber genau zu beantworten, etwa so, wie Sie dies einer Kommiliton:in / Kolleg:in erklären wollen.

Was ist ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ? Was ist hierauf eine (reelle) Zufallsvariable  $X$ ? Was ist ihre Verteilung  $\mathbf{P}_X$  im Bildraum  $\mathbb{R}$ ? Erinnerung: Wann ist  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  diskret? endlich? laplacesch?

Wie berechnet man den Erwartungswert  $\mu = \mathbf{E}(X)$ ? bei diskreter Verteilung? bei kontinuierlicher Verteilung? Wie berechnet man die Varianz  $\sigma^2 = \mathbf{V}(X)$  und Streuung  $\sigma$ ? Was sind die Momente von  $X$ ?

Nennen Sie wichtige Verteilungen und ihre Anwendungen.  
 Was sind ihre Kenngrößen  $\mu$  und  $\sigma$ ? Wie berechnet man sie?  
 Wie verhalten sie sich bei einer affinen Skalierung  $Y = aX + b$ ?

Wie lauten und was besagen die Ungleichungen von Chebychev?  
 Wann lassen sie sich anwenden, was muss man hierzu wissen?

Gibt es genauere Ungleichungen, wenn man die Verteilung kennt?  
 Was gilt für die Normalverteilung? Was besagt die 68–95–99–Regel?

**Verständnisfragen: zentraler Grenzwertsatz** W308  
Fazit

Wann sind zwei Zufallsvariablen  $X, Y$  unabhängig? Wann sind die Indikatorfunktionen  $\mathbf{I}_A, \mathbf{I}_B$  zweier Ereignisse  $A, B \subseteq \Omega$  unabhängig? Kennen Sie weitere Beispiele von un/abhängigen Zufallsvariablen?

Gilt stets  $\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y)$ ? und  $\mathbf{E}(X \cdot Y) = \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y)$ ? und  $\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$ ? Was gilt bei Unabhängigkeit?

Was sind Erwartungswert und Varianz für  $B(1, t)$ ? Wie kann man hieraus mühelos Erwartungswert und Varianz von  $B(n, t)$  ablesen?

Was besagt das Gesetz der großen Zahlen? Wie kann man Wkten / Erwartungswerte empirisch messen? Wie schnell ist die Konvergenz?

Was besagt der zentrale Grenzwertsatz? Welche drei Voraussetzungen braucht, welche Schlussfolgerung gewinnt man? Wie schnell ist die Konvergenz? Was ist gleich / anders beim lokalen Grenzwertsatz?

Wie berechnet man Stichprobenmittelwert und -Varianz?  
 Wie bestimmt man hieraus das Konfidenzintervall der Stichprobe?  
 Wie liegt es zum (gesuchten aber unbekanntem) Erwartungswert?

ZGS: Wann erhalten wir nicht die Normalverteilung?

W309  
Ausführung

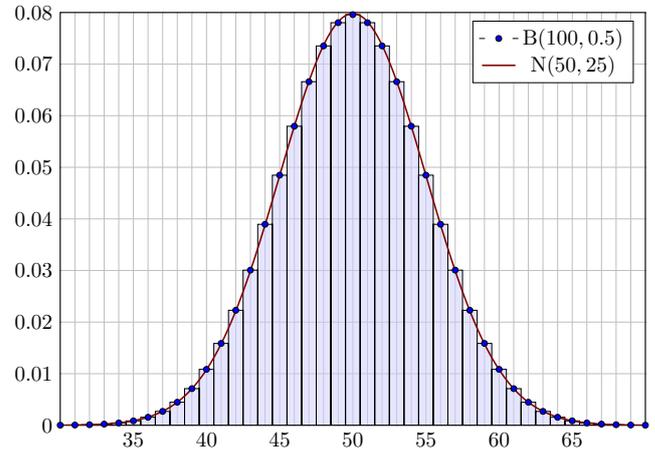
⚠ Die Voraussetzungen  $\sigma_k \geq \sigma_0 > 0$  und  $\rho_k \leq \rho_0 < \infty$  des zentralen Grenzwertsatzes W1D stellen sicher, dass alle Beiträge  $X_1, X_2, X_3, \dots$  ähnlich stark streuen. Andernfalls können wir nicht garantieren, dass ihre Summen  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  sich der Normalverteilung nähern. Warnende Gegenbeispiele illustrieren dies, einfach aber eindrücklich: Seien  $X_1, X_2, X_3, \dots : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  unabhängig und jeweils gleichverteilt.

**Aufgabe:** (1) Wir betrachten die Summe  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  sowie ihre Normierung  $S_n^* = (S_n - \mu(S_n))/\sigma(S_n)$ , sodass  $\mu(S_n^*) = 0$  und  $\sigma(S_n^*) = 1$ .

- (a) Berechnen Sie explizit  $\mu(X_k), \sigma(X_k), \rho(X_k)$  sowie  $\mu(S_n), \sigma(S_n)$ .
  - (b) Bestimmen Sie die Verteilung  $P_{S_n}$ , skizzieren Sie die ersten Fälle.
  - (c) Welche Voraussetzungen des ZGS sind erfüllt, welche nicht?
  - (d) Welcher Grenzverteilung nähern sich  $P_{S_n}$  bzw.  $P_{S_n^*}$  für  $n \rightarrow \infty$ ?
- (2) Dieselben Fragen (a–d) für  $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$  mit  $Y_k = X_1$ .
- (3) Dieselben Fragen (a–d) für  $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$  mit  $Y_k = 2^{-k} X_k$ .
- (4) Dieselben Fragen (a–d) für  $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$  mit  $Y_k = 2^{k-1} X_k$ .
- Variante:  $X_1, X_2, X_3, \dots : \Omega \rightarrow \{-1, 0, +1\}$  und (3–4) zur Basis 3 statt 2.

ZGS: Wann erhalten wir nicht die Normalverteilung?

W310  
Ausführung



ZGS: Wann erhalten wir nicht die Normalverteilung?

W311  
Ausführung

**Lösung:** (1a) Hier gilt  $\mu(X_k) = 1/2$  und  $\sigma^2(X_k) = 1/4$  und  $\rho^3(X_k) = 1/8$ , dank Linearität  $\mu(S_n) = n/2$ , zudem dank Unabhängigkeit  $\sigma^2(S_n) = n/4$ .

(1b) Wir wissen bereits  $P_{S_n} = B(n, p)$  mit  $p = 1/2$ , also ausgeschrieben:

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}$$

- (1c) Alle drei Voraussetzungen des Satzes W1D sind hier erfüllt! ✓✓✓
- (1d) Dank ZGS erhalten wir  $P_{S_n^*} \rightarrow N(0, 1)$ . Ausführlich und genauer:

$$P(a \leq S_n \leq b) = \int_{(a-\mu_n)/\sigma_n}^{(b-\mu_n)/\sigma_n} \frac{e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}} d\xi + \delta$$

$$P(\alpha \leq S_n^* \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}} d\xi + \delta$$

mit der Fehlerschranke  $|\delta| \leq 1/\sqrt{n} \rightarrow 0$ . Der lokale Grenzwertsatz V3A garantiert die noch bessere Fehlerschranke  $|\delta| \leq 4/3n$  für  $n \geq 100$ .  
⚠ Ohne Normierung gilt  $P(S_n \in [a, b]) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . (Skizze!)

ZGS: Wann erhalten wir nicht die Normalverteilung?

W312  
Ausführung

(2a) Wie in (1a) gilt  $\mu(Y_k) = 1/2$  und  $\sigma^2(Y_k) = 1/4$  und  $\rho^3(Y_k) = 1/8$ . Für die Summe  $S_n = nX_1$  gilt  $\mu(S_n) = n/2$  aber  $\sigma^2(S_n) = n^2/4$ .

(2b) Die Summe  $S_n$  ist gleichverteilt auf  $\{0, n\}$ , das heißt, sie nimmt nur zwei Werte an:  $P(S_n=0) = P(S_n=n) = 1/2$ . Normiert ist  $S_n^* = 2X_1 - 1$  gleichverteilt auf  $\{-1, +1\}$ .

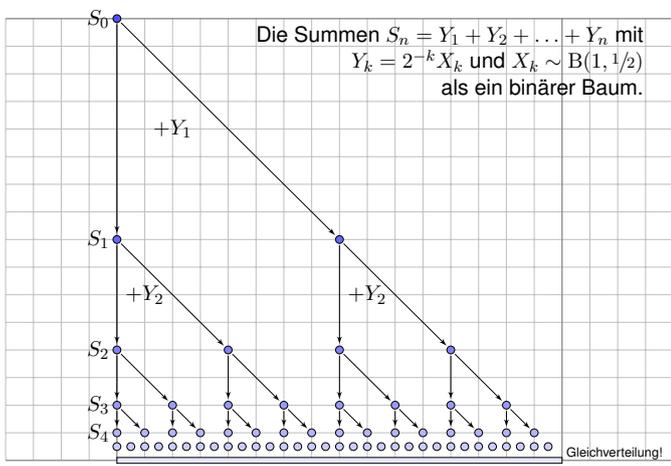
(2c) Nur zwei der drei Voraussetzungen des ZGS sind hier erfüllt: Die Varianzen  $\sigma_k^2 = 1/4 > 0$  sind strikt positiv. ✓ Die dritten Momente  $\rho_k^3 = 1/8 < \infty$  sind beschränkt. ✓ Aber die Zufallsvariablen  $Y_1, Y_2, \dots$  sind nicht unabhängig! ✗

⚠ Der zentrale Grenzwertsatz lässt sich daher hier nicht anwenden. Tatsächlich konvergiert  $P_{S_n^*}$  nicht gegen die Normalverteilung  $N(0, 1)$ !

(2d) Für alle  $n$  ist die normierte Summe  $S_n^*$  gleichverteilt auf  $\{-1, +1\}$ .  
⚠ Ohne Normierung gilt für  $n \rightarrow \infty$  der Grenzwert  $P(S_n \in [a, b]) \rightarrow 0$  falls  $0 \notin [a, b]$  und  $P(S_n \in [a, b]) \rightarrow 1/2$  falls  $0 \in [a, b]$ . Das ist keine WVerteilung mehr: Wie in (1d) verschwindet Masse nach Unendlich.

ZGS: Wann erhalten wir nicht die Normalverteilung?

W313  
Ausführung



ZGS: Wann erhalten wir nicht die Normalverteilung?

W314  
Ausführung

(3a) Für  $Y_k = 2^{-k} X_k$  gilt dank (1a) nach Skalierung  $\mu(Y_k) = 2^{-k}/2$  und  $\sigma^2(Y_k) = 2^{-2k}/4$  und  $\rho^3(Y_k) = 2^{-3k}/8$ . Dank Linearität gilt dann  $\mu(S_n) = (1 - 2^{-2n})/2$ , dank Unabhängigkeit  $\sigma^2(S_n) = (1 - 2^{-2n})/12$ .

(3b) Im Binärsystem gilt:  
$$S_n = 2^{-1} X_1 + 2^{-2} X_2 + \dots + 2^{-n} X_n = (0.X_1 X_2 \dots X_n)_{\text{bin}}$$
  
Demnach ist  $P_{S_n}$  die Gleichverteilung auf der endlichen Menge  
$$M_n = \{ m/2^n \mid m = 0, 1, \dots, 2^n - 1 \} \subseteq [0, 1].$$

(3c) Nur zwei der drei Voraussetzungen des ZGS sind hier erfüllt: Die Zufallsvariablen  $Y_k = 2^{-k} X_k$  sind untereinander unabhängig. ✓ Die dritten Momente  $\rho_k^3 = 2^{-3k}/8 \leq \rho_1^3 = 1/64 < \infty$  sind beschränkt. ✓ Hingegen gilt  $\sigma_k^2 = 2^{-2k}/4 \searrow 0$ , also nicht  $\sigma_k \geq \sigma_0 > 0$ . ✗

⚠ Der zentrale Grenzwertsatz lässt sich daher hier nicht anwenden. Genauer zeigen wir schließlich, dass die Verteilungen  $P_{S_n}$  bzw.  $P_{S_n^*}$  tatsächlich nicht gegen die Normalverteilung konvergieren!

ZGS: Wann erhalten wir nicht die Normalverteilung?

W315  
Ausführung

(3d) Für  $n \rightarrow \infty$  nähert sich  $P_{S_n}$  der Gleichverteilung auf  $[0, 1]$ . Dank (3b) scheint dies plausibel. Wir rechnen es ausführlich nach. Für alle  $0 \leq a < b \leq 1$  und  $k \in \mathbb{N}$  gelten folgende Implikationen:

$$|[a, b] \cap M_n| = k$$

$$\implies k2^{-n} \leq |b - a| < (k + 1)2^{-n}$$

$$\implies |[a, b] \cap M_n| \in \{k, k + 1\}$$

Man beweist dies für  $k = 0$  und per Induktion für  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Also:

$$P(S_n \in [a, b]) \in \frac{\lfloor (b - a)2^n \rfloor + \{0, 1\}}{2^n} \rightarrow |b - a|$$

😊 Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis  $S_n \in [a, b]$  geht für  $n \rightarrow \infty$  gegen die Intervalllänge  $|b - a|$ . Das ist die Gleichverteilung auf  $[0, 1]$ . Demnach konvergiert die normierte Zufallsvariable  $S_n^* = (S_n - \mu(S_n))/\sigma(S_n)$  gegen die kontinuierliche Gleichverteilung auf dem Intervall  $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ . All diese Verteilungen haben Erwartung 0 und Streuung 1. [V235]

ZGS: Wann erhalten wir nicht die Normalverteilung?

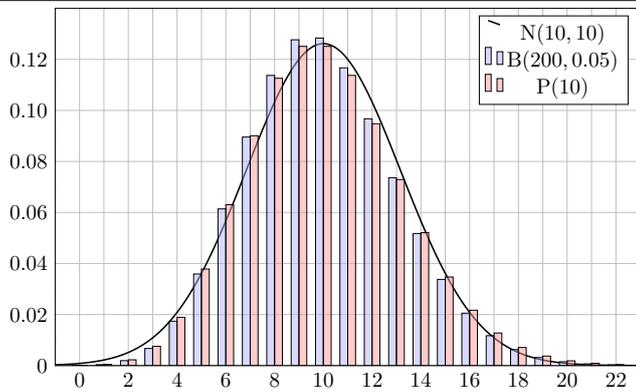
W316  
Ausführung

(4a) Für  $Y_k = 2^{k-1} X_k$  gilt nach (1a) dank Skalierung  $\mu(Y_k) = 2^{k-1}/2$  und  $\sigma^2(Y_k) = 2^{2k-2}/4$  und  $\rho^3(Y_k) = 2^{3k-3}/8$ . Dank Linearität gilt  $\mu(S_n) = (2^n - 1)/2$  dank Unabhängigkeit  $\sigma^2(S_n) = (2^{2n} - 1)/12$ .

(4b) Im Binärsystem gilt:  
$$S_n = X_1 + 2X_2 + \dots + 2^{n-1} X_n = (X_n \dots X_2 X_1)_{\text{bin}}$$
  
Demnach ist  $P_{S_n}$  die Gleichverteilung auf der endlichen Menge  
$$M_n = \{0, 1, \dots, 2^n - 1\} \subseteq \mathbb{N}.$$

(4c) Nur zwei der drei Voraussetzungen des ZGS sind hier erfüllt: Die Zufallsvariablen  $Y_k = 2^{-k} X_k$  sind untereinander unabhängig. ✓ Die Varianzen  $\sigma_k^2 = 2^{2k-2}/4 \geq \sigma_1^2 = 1/4 > 0$  sind strikt positiv. ✓ Hingegen gilt  $\rho_k^3 = 2^{3k-3}/8 \nearrow \infty$ , also nicht  $\rho_k \leq \rho_0 < \infty$ . ✗

⚠ Der zentrale Grenzwertsatz lässt sich daher hier nicht anwenden. Wie in (3d) folgt, dass die Verteilung von  $S_n^*$  tatsächlich nicht gegen  $N(0, 1)$  konvergiert, sondern gegen die Gleichverteilung auf  $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ .



**Aufgabe:** Die Poisson-Näherung  $B(n, \mu/n) \rightarrow P(\mu)$  für  $n \rightarrow \infty$  und der LGS  $B(n, \mu/n) \approx N(\mu, \mu)$  zeigen  $P(\mu) \approx N(\mu, \mu)$  wie skizziert. Welche Fehlerschranke gilt demnach zwischen  $P(\mu)$  und  $N(\mu, \mu)$ ?

Fixpunkte zufälliger Abbildungen

**Aufgabe:** (1) Wir betrachten zufällige Abbildungen  $\omega: I \rightarrow I$  der Menge  $I = \{1, \dots, n\}$  in sich. Hierzu sei  $(\Omega = I^I, \mathcal{P})$  laplacesch mit  $|\Omega| = n^n$ .

Zu  $\omega \in \Omega$  sei  $F(\omega) := \#\{i \in I \mid \omega(i) = i\}$  die Anzahl der Fixpunkte.

- (a) Bestimmen Sie die Erwartung  $\mathbf{E}(F)$  und die Varianz  $\mathbf{V}(F)$ .
- (b) Ist die Zufallsvariable  $F$  binomial- oder Poisson-verteilt?

(2) Dieselben Fragen für zufällige Permutationen  $\omega: I \xrightarrow{\sim} I$ .

**Lösung:** Die Rechnung scheint zunächst schwierig, gar hoffnungslos. Unsere mathematischen Werkzeuge helfen: Geschickt zerlegen wir  $F = F_1 + \dots + F_n$  mit  $F_i(\omega) = 1$  falls  $\omega(i) = i$  und  $F_i(\omega) = 0$  sonst.

(1a) Es gilt  $\mathbf{E}(F_i) = 1/n$ , dank Linearität der Erwartung also  $\mathbf{E}(F) = 1$ . Zur Varianz  $\mathbf{V}(F) = \mathbf{E}(F^2) - \mathbf{E}(F)^2$  gilt  $F^2 = \sum_i F_i^2 + 2 \sum_{i < j} F_i F_j$ . Hierbei ist  $F_i^2 = F_i$ , also  $\mathbf{E}(F_i^2) = 1/n$ , sowie  $\mathbf{E}(F_i F_j) = 1/n^2$ . Somit gilt  $\mathbf{V}(F) = \mathbf{E}(F^2) - \mathbf{E}(F)^2 = n(n-1)/n^2 = 1 - 1/n$ .

(1b) Die Zufallsvariablen  $F_1, \dots, F_n$  sind unabhängig  $B(1, 1/n)$ -verteilt. Somit ist  $F \sim B(n, 1/n)$  tatsächlich binomialverteilt. Für große  $n$  gilt die Näherung  $\mathbf{P}_F \approx P(1)$  dank Poissons Gesetz der kleinen Zahlen U3E.

Anwendungsbeispiel: radioaktiver Zerfall

Ein Atom Uran 238 zerfällt in der nächsten Stunde mit Wkt  $2 \cdot 10^{-14}$ . Eine Probe von 20mg enthält etwa  $5 \cdot 10^{19}$  Atome. Wir nehmen Zerfälle als stochastisch unabhängig an, insbesondere ohne Kettenreaktion. U461

- Aufgabe:** Sei  $X$  die Gesamtzahl der Zerfälle in der nächsten Stunde.
- (1) Nennen Sie die exakte Verteilung (in diesem vereinfachten Modell).
  - (2) Berechnen Sie Erwartung  $\mu = \mathbf{E}(X)$ , Varianz  $\sigma^2 = \mathbf{V}(X)$ , Streuung. Runden Sie jedes Ergebnis auf die nächstgelegene ganze Zahl.
  - (3) Wie klein ist der totale Abstand zur Poisson-Verteilung  $P(\mu)$ ?
  - (4) Wie klein ist der Näherungsfehler zur Normalverteilung  $N(\mu, \sigma^2)$ ?
  - (5) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit  $\mathbf{P}(|X - \mu| \leq 2500)$  in Prozent, gerundet auf den nächstgelegenen Prozentpunkt.
  - (6) Ist unser Modell für Uran 238 realistisch? Warum / warum nicht?
  - (7) Würden Sie diese Rechnung ebenso durchführen bei Uran 235? (Spaltbares Material wie Uran 235 kann zur Kettenreaktion führen. Dies wird genutzt zum Beispiel als Kernreaktor oder als Kernwaffe.)

Anwendungsbeispiel: radioaktiver Zerfall

(5) Dank (4) ist die Normalverteilung ausreichend genau:

$$\mathbf{P}(|X - \mu| \leq 2500) \approx \int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi(t) dt = 2 \cdot \int_{t=0}^{2.5} \varphi(t) dt \approx 2 \cdot 0.49379 = 0.98758 \approx 99\%$$

- 😊 Wir entscheiden uns hier für den lokalen Grenzwertsatz V3A und nähern die Binomialverteilung durch die Normalverteilung. Dank unserer Fehlerabschätzung (4) ist das genau genug. Genau genommen müssten wir mit  $\alpha = 2500.5/\sigma = 2.5005$  rechnen, aber die Stetigkeitskorrektur ist hier klein und fällt nicht ins Gewicht.
- 😊 Die Poisson-Verteilung wäre nach (3) eine noch bessere Näherung. Für  $\mathbf{P}(1\,000\,000)$  haben wir hier allerdings keine Tabelle vorliegen. Es gibt auch kumulative Tabellen zu Poisson-Verteilungen  $P(\mu)$ ; noch bequemer ist heutzutage die Nutzung eines Computers.
- ⚠️ Auch Computer können  $\mathbf{P}_X = B(n, p)$  für  $n = 5 \cdot 10^{19}$  in realistischer Zeit nicht direkt berechnen, etwa die exakte Summe  $\sum_{k=a}^b B(n, p)(k)$ . Hierzu nutzen wir Näherungen wie  $\mathbf{P}_X \approx N(\mu, \sigma^2)$  oder  $\mathbf{P}_X \approx P(\mu)$ .

**Lösung:** Für  $\mu \geq 0$  ist die Poisson-Verteilung gegeben durch

$$P(\mu) : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1] \quad \text{mit} \quad P(\mu)(k) = e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!}.$$

Sie hat Erwartung  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2 = \mu$ . Für  $t = \mu/n$  und  $n \rightarrow \infty$  gilt

$$B(n, t) \rightarrow P(\mu) \quad \text{also punktweise} \quad \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \rightarrow e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!}.$$

Dank LGS nähert sich also auch die Poisson- der Normalverteilung:

$$\begin{aligned} \sum_{k=a}^b \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} &\rightarrow \sum_{k=a}^b e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}} d\xi + \delta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}} d\xi + \left[ \frac{1-\xi^2}{6\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/2} \right]_{\alpha}^{\beta} + \varepsilon \end{aligned}$$

mit den Grenzen  $\alpha = (a - 1/2 - \mu)/\sigma$  und  $\beta = (b + 1/2 - \mu)/\sigma$  und Fehlerschranken  $|\delta| < 1/(6\sigma)$  bzw.  $|\varepsilon| < 1/(3\sigma^2)$  für  $\sigma \geq 5$ .

😊 Dies zeigt  $|\delta| < 1/\sigma \rightarrow 0$ , aber auch  $|\delta| \sim \text{const}/\sqrt{n}$  im ZGS.

Fixpunkte zufälliger Permutationen

(2a) Wir nutzen weiterhin die Summenzerlegung  $F = F_1 + \dots + F_n$ . Diese Zufallsvariablen auf  $\Omega = \{\omega: I \rightarrow I\}$  schränken wir nun jedoch ein auf  $\Omega' = \{\omega: I \xrightarrow{\sim} I\}$ . Auch  $(\Omega', \mathcal{P}')$  ist laplacesch, wobei  $|\Omega'| = n!$ . Auch hier gilt  $\mathbf{E}(F_i) = 1/n$ , dank Linearität der Erwartung also  $\mathbf{E}(F) = 1$ . Im Unterschied zu (1) gilt jedoch  $\mathbf{E}(F_i F_j) = 1/(n-1)$ , somit  $\mathbf{V}(F) = 1$ .

😊 Einfache Merkregel: Eine zufällige Permutation hat  $1 \pm 1$  Fixpunkte.

⚠️ Auf  $(\Omega', \mathcal{P}')$  sind die Zufallsvariablen  $F_1, \dots, F_n$  nicht unabhängig! Wegen  $\text{Cov}(F_i, F_j) = \mathbf{E}(F_i F_j) - \mathbf{E}(F_i)\mathbf{E}(F_j) = 1/(n-1) - 1/n^2 > 0$  sind sie positiv korreliert, wie anschaulich zu erwarten, wenn auch nur schwach. Ihre Varianzen  $\mathbf{V}(F_i)$  addieren sich nicht zu  $\mathbf{V}(F)$ , nur dank Korrektur gemäß  $\mathbf{V}(F) = \sum_i \mathbf{V}(F_i) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(F_i, F_j) = (1-1/n) + 1/n = 1$ .

(2b) Die Zufallsvariable  $F: (\Omega', \mathcal{P}') \rightarrow \mathbb{N}$  ist nicht exakt Poisson-verteilt, da sie nur ein endliches Bild  $\{0, 1, \dots, n\}$  hat. Für  $n \rightarrow \infty$  nimmt die Korrelation ab, und wir vermuten die Näherung  $\mathbf{P}_F \approx P(1)$  wie in (1). Numerisches Experiment oder sorgfältige Rechnung bestätigen dies. Die Normalverteilung  $N(1, 1)$  ist offensichtlich eine schlechte Näherung.

Anwendungsbeispiel: radioaktiver Zerfall

**Lösung:** (1) Es handelt sich um die Binomialverteilung  $B(n, p)$ :

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad n = 5 \cdot 10^{19}, \quad p = 2 \cdot 10^{-14}$$

(2) Erwartung, Varianz und Streuung von  $B(n, p)$  sind

$$\begin{aligned} \mu = \mathbf{E}(X) &= np = 5 \cdot 10^{19} \cdot 2 \cdot 10^{-14} = 10^6 \\ \sigma^2 = \mathbf{V}(X) &= np(1-p) = 10^6 - 2 \cdot 10^{-8} \approx 10^6 \\ \sigma = \sqrt{\mathbf{V}(X)} &= \sqrt{10^6 - 2 \cdot 10^{-8}} \approx \sqrt{10^6} = 10^3 \end{aligned}$$

- (3) Es gilt  $\|\mathbf{P}_X - P(\mu)\| \leq np^2 = 5 \cdot 10^{19} \cdot 4 \cdot 10^{-28} = 2 \cdot 10^{-8}$ .
- (4) Im LGS bzw. ZGS gilt für den Approximationsfehler  $\delta$  die Schranke

$$|\delta| \leq \frac{|1-2p|}{10\sigma} + \frac{1}{3\sigma^2} < \frac{1}{6\sigma} < \frac{1}{\sigma} = 10^{-3}.$$

Mancher verwendet die Grenzwertsätze nur geföhlt „nach Erfahrung“. Fehlerschranken sind verlässlicher als ein vages subjektives Gefühl. Sie helfen insbesondere auch dort, wo noch keine Erfahrung vorliegt!

Anwendungsbeispiel: radioaktiver Zerfall

- (6) Ja. Zwischen Uran 238 findet nahezu keine Wechselwirkung statt.
- (7) Nein. Die stochastische Unabhängigkeit der Zerfälle gilt nicht mehr! ⚠️ Allein die größere Zerfallswkt  $p \in [0, 1]$  ändert noch nicht das Modell. Doch unser Modell  $B(n, p)$  beruht auf stochastischer *Unabhängigkeit!* Andernfalls ist die Anzahl  $X$  der Zerfälle nicht mehr binomialverteilt. U461
- Eine fahrlässige, falsche Modellbildung kann zu Katastrophen führen! Zwar sind die Werte innerhalb des Modells noch rechnerisch richtig, aber das gewählte Modell beschreibt keineswegs die Wirklichkeit.
- Die Grundlagen der Kernphysik gehören natürlich nicht zur HM3, aber soviel Anwendungsbezug gehört zur Allgemeinbildung für technisch Gebildete, gerade angehende Ingenieur:innen. Ein qualitatives Modell kennen Sie vielleicht aus der Schule: Die Kettenreaktion entsteht, weil beim Zerfall Neutronen emittiert werden, die von anderen Atomkernen absorbiert werden und diese zum Zerfall anregen. Das ist das Gegenteil von Unabhängigkeit! Otto Hahn (1879–1968) bekam für diese wichtige Entdeckung 1945 den Nobelpreis für Chemie. Ihre Anwendungen, zum Guten wie zum Bösen, prägen das 20. Jahrhundert und wirken fort.

**Anwendung des ZGS auf den fairen Würfel** W325  
Erläuterung

**Aufgabe:** Sie würfeln 100 mal mit einem fairen Würfel. Mit welcher Wkt erhalten Sie eine Augensumme  $S \geq 390$ ? Was sagt Chebychev? der ZGS? der LGS? die exakte Rechnung?

**Lösung:** Für die Augenzahl  $X$  bei einem fairen Würfel gilt:

$$\mathbf{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 21/6 = 3.5$$

$$\mathbf{E}(X^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} = 91/6$$

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = 91/6 - 49/4 = 35/12 \approx 2.9167$$

Für einmaliges Würfeln erhalten wir also folgende Kenngrößen:

$$\mu(X) = 3.5, \quad \sigma^2(X) \approx 2.9167, \quad \sigma(X) \approx 1.7078$$

Für die Augensumme  $S$  bei 100 unabhängigen Würfeln gilt demnach:

$$\mu(S) = 350, \quad \sigma^2(S) = 291.67, \quad \sigma(S) \approx 17.078$$

☺ Man bewundere die Magie der großen Zahlen!

Erwartungswert und Varianz werden mit  $n = 100$  multipliziert, die Streuung jedoch nur mit  $\sqrt{n} = 10$ . Im Verhältnis zum Erwartungswert 350 wird die Streuung 17 deutlich geringer! Aus diesem Grund liefern größere Stichproben zuverlässigere Ergebnisse. Doch alles im Leben hat seinen Preis: Für 10mal höhere Genauigkeit benötigt man eine 100mal größere Stichprobe!

**Anwendung des ZGS auf den fairen Würfel** W326  
Erläuterung

**Abweichung vom Erwartungswert:** Für  $S \geq 390 = \mu + \alpha\sigma$  gilt

$$\alpha = (390 - \mu)/\sigma = (390 - 350)/17 \approx 2.34.$$

**Chebychev** gilt allgemein und liefert eine erste grobe Abschätzung:

$$\mathbf{P}(S \geq 390) \leq \frac{1}{1 + \alpha^2} \lesssim 0.16$$

Der **LGS** lässt sich nicht anwenden, da  $S$  nicht binomialverteilt ist! Der **zentrale Grenzwertsatz** nutzt die Normalverteilung als Näherung:

$$\mathbf{P}(S \geq 390) \approx \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}} d\xi \approx 0.01$$

Hierzu genügt es, die Tabelle abzulesen:  $\mathbf{P}(S \geq 390) \approx 0.5 - 0.49036 = 0.00964$ . Der ZGS garantiert nur die pessimistische Fehlerschranke  $|\delta| < 13\%$ , mit  $\rho^3(X) = 6.375$ . Wir nehmen optimistisch an, dass die Normalverteilung hier wesentlich besser approximiert. In diesem konkreten Fall können wir das durch eine exakte Rechnung direkt nachprüfen:

**Exakte Rechnung:** Durch mühsames Aufsummieren erhalten wir:

$$\mathbf{P}(S \geq 390) = 0.0102875 \dots \approx 1\%$$

**Anwendung des ZGS auf gezinkten Würfel** W327  
Erläuterung

**Aufgabe:** Sie würfeln 100 mal mit unserem gezinkten Würfel (T107). Mit welcher Wkt erhalten Sie dabei eine Augensumme  $S \geq 390$ ? Was sagt Chebychev? der ZGS? der LGS? die exakte Rechnung?

**Lösung:** Für die Augenzahl  $Y$  bei unserem gezinkten Würfel gilt:

$$\mathbf{E}(Y) = 1 \cdot 0.15 + 2 \cdot 0.16 + 3 \cdot 0.16 + 4 \cdot 0.16 + 5 \cdot 0.16 + 6 \cdot 0.21 = 3.65$$

$$\mathbf{E}(Y^2) = 1^2 \cdot 0.15 + 2^2 \cdot 0.16 + 3^2 \cdot 0.16 + 4^2 \cdot 0.16 + 5^2 \cdot 0.16 + 6^2 \cdot 0.21$$

$$\mathbf{V}(Y) = \mathbf{E}(Y^2) - \mathbf{E}(Y)^2 = 16.35 - 13.3225 = 3.0275$$

Für einmaliges Würfeln erhalten wir also folgende Kenngrößen:

$$\mu(Y) = 3.65, \quad \sigma^2(Y) \approx 3.0275, \quad \sigma(Y) \approx 1.74$$

Für die Augensumme  $S$  bei 100 unabhängigen Würfeln gilt demnach:

$$\mu(S) = 365, \quad \sigma^2(S) = 302.75, \quad \sigma \approx 17.4$$

☺ Man bewundere die Magie der großen Zahlen!

Erwartungswert und Varianz werden mit  $n = 100$  multipliziert, die Streuung jedoch nur mit  $\sqrt{n} = 10$ . Im Verhältnis zum Erwartungswert 365 wird die Streuung 17.4 deutlich geringer! Aus diesem Grund liefern größere Stichproben zuverlässigere Ergebnisse. Doch alles im Leben hat seinen Preis: Für 10mal höhere Genauigkeit benötigt man eine 100mal größere Stichprobe!

**Anwendung des ZGS auf gezinkten Würfel** W328  
Erläuterung

**Abweichung vom Erwartungswert:** Für  $S \geq 390 = \mu + \alpha\sigma$  gilt

$$\alpha = (390 - \mu)/\sigma = (390 - 365)/17.4 \approx 1.44.$$

**Chebychev** gilt allgemein und liefert eine erste grobe Abschätzung:

$$\mathbf{P}(S \geq 390) \leq \frac{1}{1 + \alpha^2} \approx 0.33$$

Der **LGS** lässt sich nicht anwenden, da  $S$  nicht binomialverteilt ist! Der **zentrale Grenzwertsatz** nutzt die Normalverteilung als Näherung:

$$\mathbf{P}(S \geq 390) \approx \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}} d\xi \approx 0.075$$

Hierzu genügt es, die Tabelle abzulesen:  $\mathbf{P}(S \geq 390) \approx 0.5 - 0.42507 = 0.07493 \approx 7.5\%$ . Der ZGS garantiert nur die pessimistische Fehlerschranke  $|\delta| < 13\%$ , mit  $\rho^3(Y) = 6.745$ . Wir nehmen optimistisch an, dass die Normalverteilung hier wesentlich besser approximiert. In diesem konkreten Fall können wir das durch eine exakte Rechnung direkt nachprüfen:

**Exakte Rechnung:** Durch mühsames Aufsummieren erhalten wir:

$$\mathbf{P}(S \geq 390) = 0.0794448 \dots \approx 8\%$$

**Anwendung: fair oder gezinkt?** W329  
Erläuterung

**Aufgabe:** Sie haben drei Würfel, zwei faire und unseren gezinkten (alle äußerlich gleich). Sie wählen einen zufällig und würfeln damit 100 mal. (1) Mit welcher Wkt erhalten Sie dabei eine Augensumme  $S \geq 390$ ? (2) Angenommen  $S \geq 390$ : Mit welcher Wkt ist der Würfel gezinkt?

**Lösung:** (1) Die totale Wahrscheinlichkeit (T2B) ist:

$$\mathbf{P}(S \geq 390) = \mathbf{P}(S \geq 390|\text{fair}) \mathbf{P}(\text{fair}) + \mathbf{P}(S \geq 390|\text{zink}) \mathbf{P}(\text{zink})$$

$$\approx 0.01 \cdot 2/3 + 0.08 \cdot 1/3 = 1/30 \approx 3.33\%$$

(2) Nach der Formel von Bayes (T2B) gilt:

$$\mathbf{P}(\text{zink}|S \geq 390) = \frac{\mathbf{P}(S \geq 390|\text{zink}) \mathbf{P}(\text{zink})}{\mathbf{P}(S \geq 390)} \approx \frac{0.08 \cdot 1/3}{1/30} = 80\%$$

Das Auftreten einer Augensumme  $\geq 390$  ist demnach ein starkes Indiz, dass der von uns gewählte Würfel nicht fair, sondern der gezinkte ist.

☺ Leistungsstarke Theorie ermöglicht effiziente Berechnung. Zu Klarheit, Verständnis und Korrektheit hilft eine präzise Notation.

**Anwendung: fair oder gezinkt?** W330  
Erläuterung

Wir frisken hier nochmals unsere Grundlagen aus Kapitel T auf. Dank der Formel von Bayes sind solche Rechnungen meist leicht – und doch oft überraschend. Üben Sie sich mit diesem Werkzeug! Berechnung und Interpretation des Ergebnisses erfordern Übung.

Ohne weitere Information ist der von Ihnen gewählte Würfel mit Wkt  $1/3$  gezinkt und mit Wkt  $2/3$  fair. Nach Durchführung des Tests mit dem Ergebnis  $S \geq 390$  ist er mit deutlich höherer Wkt von 80% gezinkt. Das ist plausibel; die genaue Wkt erfordert präzise Rechnung.

Wir können nicht 100% sicher sein, aber der Test spricht dafür, dass der Würfel nicht fair ist. Ist eine höhere Sicherheit nötig, dann sollten Sie weitere Tests durchführen. Eine größere Datenreihe liefert größere Genauigkeit bzw. größere Sicherheit (wenn auch nie 100%).

Dieses einfache Anwendungsbeispiel ist leicht, doch repräsentativ. Stochastik (WRechnung und Statistik) ist die Mathematik des Zufalls. Unser Ziel dabei sind rationale Entscheidungen unter Unsicherheit. Wir suchen nachvollziehbar begründete, quantitative Aussagen.

**Anwendung: ZGS oder LGS?** W331  
Erläuterung

**Aufgabe:** In einer Geburtsklinik beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine Jungengeburt  $t = 0.514$ . Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von den nächsten  $n = 1000$  Neugeborenen genau  $k = 514$  Jungen sind? Was sagt Chebychev? der ZGS? der LGS? die exakte Rechnung?

**Lösung:** Wir haben  $S \sim B(n, t)$ . Wir suchen  $\mathbf{P}(S = k)$ . Es gilt:

$$\mu = \mathbf{E}(S) = nt = 514, \quad \sigma^2 = \mathbf{V}(S) = nt(1-t) \approx 249.8, \quad \sigma \approx 15.8$$

⚠ Chebychev nützt für Intervalle um  $\mu$ , aber nicht für einzelne Punkte! Das gilt auch für den ZGS. Mangels Stetigkeitskorrektur liefert er nur

$$\mathbf{P}(k \leq S \leq k) = \int_{(k-\mu)/\sigma}^{(k-\mu)/\sigma} \frac{e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}} d\xi + \delta$$

Pech: Das Integral verschwindet! Die Fehlerschranke liefert immerhin

$$0 \leq \mathbf{P}(k \leq S \leq k) = \delta \leq \frac{1}{2\sqrt{nt(1-t)}} \lesssim 0.032.$$

☹ Die Ungleichung stimmt, aber damit sind wir noch nicht zufrieden!

**Anwendung: ZGS oder LGS?** W332  
Erläuterung

☺ Der LGS ist besser: Dank seiner Stetigkeitskorrektur liefert er

$$\mathbf{P}(k \leq S \leq k) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \approx \int_{(k-1/2-\mu)/\sigma}^{(k+1/2-\mu)/\sigma} \frac{e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}} d\xi$$

$$\approx \frac{e^{-(k-\mu)^2/2\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \stackrel{(k=\mu)}{\approx} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \approx 0.0252412 \dots$$

Die Fehlerschranke ist wegen  $\kappa \approx 0$  hier  $|\varepsilon| < 1/(3\sigma^2) < 0.0014$ .

☺ Noch besser: Die exakte Rechnung ist hier direkt und mühelos!

$$\mathbf{P}(S = k) = \binom{1000}{514} (0.514)^{514} (0.486)^{486} = 0.0252349 \dots$$

Was lernen wir daraus? Augen auf bei der Methodenwahl!

Diese bemerkenswerten Grenzwertsätze bilden einen umfangreichen Werkzeugkasten: Sie liefern mächtige Werkzeuge und ganz praktische Rechenregeln. Um sie zu nutzen, muss man die Voraussetzungen kennen und die Schlussfolgerungen verstehen. Es lohnt sich!

**Aufgabe:** Ein Elektroniksystem habe  $n = 10^6$  unabhängige Bauteile mit den Fehlerwkten  $p_k$ . Wir wissen nur  $10^{-4} \leq p_k \leq 10^{-2}$  laut Spezifikation. Sie interessiert die Gesamtzahl  $S = \sum_{k=1}^n X_k$  der auftretenden Fehler.

Wir denken an eine mehrjährige Marsmission, Störungen durch Sonnenwind, oder ähnliches. Fehler sind zahlreich, daher wollen wir ausreichend Redundanz für ein solches System. Ein explizites Beispiel für  $n = 3$  haben wir auf Seite T409 ausführlich diskutiert.

(1) Berechnen Sie Erwartung  $\mu = \mathbf{E}(S)$  und Varianz  $\sigma^2 = \mathbf{V}(S)$ . Ist hier die Verteilung durch die Kenngrößen  $(\mu, \sigma)$  bereits festgelegt?

$$\mu = \mathbf{E}(S) = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(X_k) = \sum_{k=1}^n p_k \in [100, 10\,000]$$

Da die  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig sind, addieren sich auch die Varianzen:

$$\sigma^2 = \mathbf{V}(S) = \sum_{k=1}^n \mathbf{V}(X_k) = \sum_{k=1}^n p_k(1-p_k) \in [99.99, 9900].$$

☺ Wegen  $(1-p_k) \in [0.99, 1]$  gilt hier  $\sigma^2 \approx \mu$  bis auf 1% genau.

⚠ Die exakte Verteilung ist allein durch  $(\mu, \sigma)$  noch nicht festgelegt.

(2) Welche Modelle beschreiben die Verteilung von  $S$  exakt / approx.? Binomial? Poisson? LGS? ZGS? mit welchen Fehlerschranken?

☹ Die Summe ist nicht binomialverteilt, da die  $p_k$  verschieden sind.

Erinnerung: Die Binomialverteilung  $B(n, p)$  entsteht bei  $n$  unabhängigen Experimenten mit identischer Trefferwkt  $p$ . Das ist hier nicht der Fall, also ist dieses Modell eher ungeeignet. Allgemein siehe [de.wikipedia.org/wiki/Verallgemeinerte\\_Binomialverteilung](http://de.wikipedia.org/wiki/Verallgemeinerte_Binomialverteilung).

☺ Poissons Gesetz der kleinen Zahlen liefert  $P_S \approx P(\mu)$  mit Fehler

$$\|P_S - P(\mu)\| \leq p_1^2 + \dots + p_n^2 \in [0.01, 100].$$

☹ Der LGS lässt sich nicht anwenden, da  $S$  nicht binomialverteilt ist.

☺ Der ZGS ist anwendbar und liefert  $P_S \approx N(\mu, \sigma^2)$  mit Fehler

$$|\delta| \leq \frac{\rho_1^3 + \dots + \rho_n^3}{(\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2)^{3/2}} \approx \frac{\mu}{\mu^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \in [0.01, 0.1].$$

Daher nutzen wir den ZGS für große  $p_k$  und Poisson für kleine  $p_k$ .

Die einzelnen Summanden von  $S = X_1 + \dots + X_n$  sind leicht zu verstehen:  $X_k \sim B(1, p_k)$  hat Erwartung  $\mu_k = \mathbf{E}(X_k) = p_k$ , Varianz  $\sigma_k^2 = \mathbf{V}(X_k) = p_k(1-p_k) \approx p_k$ , drittes Moment  $\rho_k^3 = \mathbf{E}(|X_k - \mu_k|^3) = p_k(1-p_k)(p_k^2 + (1-p_k)^2) \approx p_k$ . Trotz der großen Zahl  $n = 10^6$  ist die Fehlerschranke nicht besonders gut. Für Poisson sieht's allerdings auch nicht besser aus.

(3a) Wie beurteilen Sie einen Testlauf mit mehr als 11 000 Fehlern? Im Extremfall  $\mu = 10\,000$  und  $\sigma = 100$  liefert Chebychev ganz grob

$$\mathbf{P}(S \geq 11\,000) \leq \frac{1}{1+k^2} < 0.01 \quad \text{mit } k = 10.$$

Für die Normalverteilung sind  $10\sigma$ -Abweichungen unwahrscheinlich:

$$\int_{10}^{\infty} \frac{e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}} d\xi < 10^{-23}, \quad \text{aber leider nur } |\delta| \leq 1/\sqrt{\mu} \in [0.01, 0.1].$$

Wenn wir der Normalverteilung glauben, dann ist eine  $10\sigma$ -Abweichung praktisch unmöglich: Sie ist unwahrscheinlicher als dreimal nacheinander sechs Richtige im Lotto zu tippen!

Exakt liegt hier allerdings nicht die Normalverteilung  $N(\mu, \sigma^2)$  vor, daher müssen wir zusätzlich den Approximationsfehler berücksichtigen: Unsere Schranke aus (2) ist hier leider recht grob.

Für  $\mu < 10\,000$  wird alles nur noch schlimmer. Nach Beobachtung von 11 000 Fehlern scheint das Modell jedenfalls nicht mehr glaubwürdig! Dann ist die Annahme  $p_k \leq 10^{-2}$  nicht haltbar oder die Unabhängigkeit nicht gegeben: Vielleicht beeinflusst ein Fehler die anderen (z.B. durch lokale Überhitzung) oder externe Einflüsse provozieren massenhafte Fehler (z.B. Strahlung). Dem Modell liegen wichtige Annahmen zu Grunde; diese müssen kritisch überprüft werden.

(3b) Wie beurteilen Sie einen Testlauf mit etwa 10 100 Fehlern?

Das ist etwa mit  $\mu = 10\,000$  und  $\sigma = 100$  durchaus vereinbar.

(4) Durch  $N = 25$  Testläufe ermitteln Sie  $\hat{x} \approx 3600$  und  $\sigma^2 \approx 3600$ . Welches Konfidenzintervall überdeckt  $\mu$  mit 95%iger Sicherheit?

Wir haben die Streuung  $\sigma \approx 60$  und  $\sqrt{N} = 5$ , also  $2\sigma/\sqrt{N} = 24$ . Als  $2\sigma$ -Intervall finden wir [3576, 3624]. Das ist bereits recht genau.

(5) Wie viele Testläufe brächten eine  $2\sigma$ -Genauigkeit von  $\pm 10$ ?

Wir verlangen  $2\sigma/\sqrt{N} \leq 10$ , im oben Beispiel  $\sigma \approx 60$  also  $N \geq 144$ . Das ist genauer, aber vielleicht auch zu aufwändig, das heißt zu teuer.

Vielleicht ist das Intervall aus (4) oder noch größer bereits gut genug; das ist eine strategische Entscheidung und hängt vom Kontext ab, vor allem von der weiteren Verwendung dieser Daten und Schätzungen.

Wir suchen nachvollziehbar begründete, quantitative Aussagen.

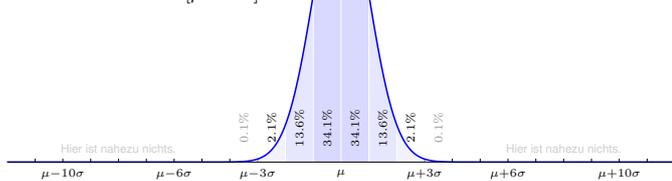
☺ Mit den Werkzeugen der Mathematik sind Sie dafür gewappnet.

„We were seeing things that were 25-standard deviation moves, several days in a row.“, sagte der damalige Finanzvorstand von Goldman-Sachs, David Viniar, der Financial Times im August des Krisenjahres 2007.

**Aufgabe:** Ist das plausibel? Meint er ernsthaft die Normalverteilung? Sollte er sein Modell für diese Wahrscheinlichkeiten überdenken?

Die Normalverteilung  $N(\mu, \sigma^2)$  ist extrem konzentriert um  $\mu$ , insbesondere auf  $[\mu \pm 3\sigma]$ :

Von fern betrachtet sieht sie nicht aus wie eine Glocke, sondern wie eine Nadel!



**Lösung:** Für die Normalverteilung ist das sicher nicht plausibel!

Die Wkt für  $k\sigma$ -Abweichungen nach Normalverteilung und Chebychev:

$$p_k = \int_{x=k}^{\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx \leq \frac{1}{1+k^2}$$

Chebychev gilt für alle Verteilungen. Die Wkt  $< 1/2500 = 0.04\%$  ist klein, und das auch noch mehrfach hintereinander! Das wäre extremes Pech. Die genaueren Werte von  $p_k$  entnehmen wir der (erweiterten) Tabelle:

$k =$	2	3	4	5	6
$p_k \lesssim$	0.02275	0.00135	$3.2 \cdot 10^{-5}$	$2.9 \cdot 10^{-7}$	$9.9 \cdot 10^{-10}$
$k =$	7	10	15	20	25
$p_k \lesssim$	$1.3 \cdot 10^{-12}$	$7.7 \cdot 10^{-24}$	$3.7 \cdot 10^{-51}$	$2.8 \cdot 10^{-87}$	$3.1 \cdot 10^{-136}$

Letzteres ist unwahrscheinlicher als 20mal nacheinander im Lotto sechs Richtige zu tippen. Das genannte Modell scheint unplausibel / unseriös.

Durch mathematische Kompetenz können Sie überzeugen und glänzen, aber durch Inkompetenz machen Sie sich unglaubwürdig und lächerlich.

Wir untersuchen die Summe  $S = X_1 + \dots + X_n$  von  $n$  unabhängigen ZVaren  $X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Als Verteilungen betrachten wir dabei:

- $X_k \sim N(\mu_k, \sigma_k^2)$  normalverteilt mit  $\mu_k, \sigma_k \in \mathbb{R}$
- $X_k \sim B(1, t_k)$  mit  $t_k \in [0.1, 0.9]$  abhängig von  $k$
- $X_k \sim B(1, t)$  mit  $t \in [0.1, 0.9]$  unabhängig von  $k$
- $X_k \sim B(N_k, t)$  mit  $N_k \in \mathbb{N}$  und  $t \in [0.1, 0.9]$
- Denken Sie sich zehn weitere, ebenso konkrete Beispiele aus, etwa jede Zufallsvariable  $X_k \sim P(\mu_k)$  Poisson-verteilt oder  $X_k \sim G(q_k)$  geometrisch verteilt oder  $X_k \sim H(N_k, K_k, n_k)$  hypergeometrisch, etc.

- Aufgabe:** (a) Auf welche Summen  $S$  lässt sich der ZGS anwenden?  
 (b) Auf welche lässt sich zudem der speziellere LGS anwenden?  
 (c) Was lässt sich jeweils über den Approximationsfehler  $\delta$  sagen?  
 (d) In welchen Fällen kennen Sie die exakte Verteilung von  $S$ ?

**Lösung:** (1) Der ZGS lässt sich anwenden, aber nicht der LGS da die Summe  $S$  nicht binomialverteilt ist. Sie ist hier exakt normalverteilt:

$$S \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \text{mit } \mu = \sum_{k=1}^n \mu_k \quad \text{und} \quad \sigma^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$$

Der Approximationsfehler ist demnach  $\delta = 0$ , siehe folgende Aufgaben.

(2) Der ZGS lässt sich anwenden, der LGS jedoch nicht, da die Summe  $S$  nicht binomialverteilt ist. Den Approximationsfehler  $\delta$  entnehmen wir Satz W1D. Ein solches Beispiel diskutiert die obige Aufgabe W333.

(3) Die exakte Verteilung ist hier die Binomialverteilung  $S \sim B(n, t)$ . Der ZGS lässt sich anwenden, der LGS auch und liefert eine bessere Näherung. Den Fehler  $\delta$  bzw. korrigiert  $\varepsilon$  entnehmen wir Satz V3A.

(4) Die exakte Verteilung ist hier  $S \sim B(N, t)$  mit  $N = N_1 + \dots + N_n$ . Der ZGS lässt sich anwenden, der LGS auch, wenn man es richtig anstellt. Zur Summe von binomialverteilten ZVaren siehe unten.

Summe normalverteilter Zufallsvariablen

W341  
Ausführung

**Aufgabe:** Die Zufallsvariablen  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$  und  $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$  seien unabhängig und normalverteilt mit den angegebenen Parametern.

Bestimmen Sie für die Summe  $S = X + Y$  den Erwartungswert  $E(S)$  und die Varianz  $V(S)$  sowie die Verteilung auf  $\mathbb{R}$ . Ist  $S$  normalverteilt?

**Lösung:** Dank Linearität addieren sich die Erwartungswerte:

$$E(S) = E(X + Y) = E(X) + E(Y) = \mu_1 + \mu_2$$

Dank Unabhängigkeit addieren sich auch die Varianzen:

$$V(S) = V(X + Y) = V(X) + V(Y) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$$

Schließlich berechnen wir die Verteilung von  $S$  dank Unabhängigkeit:

$$N(\mu_1, \sigma_1^2) * N(\mu_2, \sigma_2^2) = N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

Das ist keineswegs offensichtlich! Sie können die Faltung geduldig direkt ausrechnen oder noch geschickter mit Fourier-Transformation. [K417]

Summe normalverteilter Zufallsvariablen

W342  
Ausführung

**Aufgabe:** Seien  $X_1, X_2, X_3, \dots$  unabhängige Zufallsvariablen, und jede sei normalverteilt gemäß  $X_k \sim N(\mu_k, \sigma_k^2)$  mit  $\mu_k, \sigma_k \in \mathbb{R}$ .

Bestimmen Sie für die Summe  $S = X_1 + \dots + X_n$  die Erwartung  $E(S)$  und die Varianz  $V(S)$  sowie die Verteilung auf  $\mathbb{R}$ . Gilt hier der ZGS?

Es darf gelacht werden: Wie groß ist der Approximationsfehler  $\delta$ ?

**Lösung:** Dank Linearität addieren sich die Erwartungswerte:

$$E(S) = E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = \mu_1 + \dots + \mu_n =: \mu$$

Dank Unabhängigkeit addieren sich auch die Varianzen:

$$V(S) = V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n) = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2 =: \sigma^2$$

Aus der vorigen Aufgabe erhalten wir die Verteilung  $S \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

(Wir haben dies für zwei Summanden explizit nachgerechnet.

Für  $n$  Summanden folgt es dann offensichtlich durch Induktion.)

☺ Hier gilt der ZGS exakt, d.h. mit Approximationsfehler  $\delta = 0$ .

Summe binomialverteilter Zufallsvariablen

W343  
Ausführung

**Aufgabe:** Seien  $X \sim B(1, p)$  und  $Y \sim B(1, q)$  unabhängig mit  $p, q > 0$ . Bestimmen Sie für die Summe  $S = X + Y$  die Erwartung  $E(S)$  und die Varianz  $V(S)$  sowie die Verteilung auf  $\{0, 1, 2\}$ . Ist  $S$  binomialverteilt?

**Lösung:** Dank Linearität addieren sich die Erwartungswerte:

$$E(S) = E(X + Y) = E(X) + E(Y) = p + q$$

Dank Unabhängigkeit addieren sich auch die Varianzen:

$$V(S) = V(X + Y) = V(X) + V(Y) = p(1-p) + q(1-q).$$

Schließlich berechnen wir die Verteilung von  $S$  dank Unabhängigkeit:

$$P(S=0) = (1-p)(1-q), \quad P(S=1) = p(1-q) + (1-p)q, \quad P(S=2) = pq$$

Wäre dies binomialverteilt, so hätten wir  $S \sim B(2, t)$  für ein  $t \in [0, 1]$ .

Der Vergleich von  $E(S) = 2t = p + q$  und  $P(S=2) = t^2 = pq$  zeigt  $p = q$ .

Eine Binomialverteilung erhalten wir demnach nur für den Fall  $p = q!$

de.wikipedia.org/wiki/Verallgemeinerte\_Binomialverteilung

Im Sonderfall  $p = 0$  gilt  $S \sim B(1, q)$ ; für  $q = 0$  gilt  $S \sim B(1, p)$ .

Summe binomialverteilter Zufallsvariablen

W344  
Ausführung

**Aufgabe:** Seien  $X \sim B(m, t)$  und  $Y \sim B(n, t)$  unabhängig,  $m, n \in \mathbb{N}$ . Bestimmen Sie für  $S = X + Y$  die Erwartung  $E(S)$  und Varianz  $V(S)$ . Ist die Summe  $S = X + Y$  binomialverteilt? Mit welchen Parametern?

**Lösung:** Wir wissen  $E(X) = mt$  und  $V(X) = mt(1-t)$ , entsprechend  $E(Y) = nt$  und  $V(Y) = nt(1-t)$ . Dank Linearität der Erwartung folgt

$$E(S) = E(X + Y) = E(X) + E(Y) = (m + n)t.$$

Dank Unabhängigkeit addieren sich auch die Varianzen:

$$V(S) = V(X + Y) = V(X) + V(Y) = (m + n)t(1-t).$$

Wie finden wir geschickt die Verteilung von  $S$ ? durch direkte Rechnung?

Wir nutzen die Darstellung  $X = X_1 + \dots + X_m$  und  $Y = Y_1 + \dots + Y_n$

als Summe unabhängiger Zufallsvariablen  $X_i, Y_j \sim B(1, t)$ .

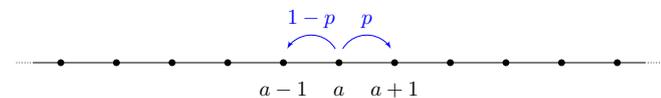
Hieraus folgt  $S \sim B(m + n, t)$  ohne weitere Rechnung.

☺ Dieser Rechenrick vereinfacht die Aufgabe ungemein! Zur expliziten

Faltung nutzen wir dankend gerne erzeugende Funktionen (Satz U4E).

Zufällige Irrfahrt / Random Walk

W345  
Ausführung



Zufällige Irrfahrt: Zur Zeit  $t = 0$  starten Sie im Punkt  $S_0 = a$ .

Im Schritt von  $S_t$  nach  $S_{t+1}$  gehen Sie mit Wahrscheinlichkeit  $p \in [0, 1]$  nach rechts und entsprechend mit Wahrscheinlichkeit  $(1-p)$  nach links.

Das heißt,  $S_t: \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$  ist gegeben durch  $S_t = a + X_1 + \dots + X_t$  mit unabhängigen Zuwächsen,  $P_a(X_t=+1) = p$  und  $P_a(X_t=-1) = 1-p$ .

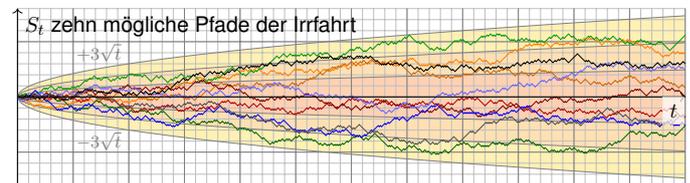
Das ist ein einfaches aber wichtiges Modell. Mögliche Anwendung: Kontostand bei zufälligen Gewinnen und Verlusten. Daher werden solche Irrfahrten als Modelle für Aktienkurse genutzt.

Ähnlich entsteht die Brownsche Bewegung durch Wärmebewegung. Der schottische Botaniker Robert Brown (1773–1858) entdeckte 1827 unter dem Mikroskop das unregelmäßige Zittern von Pollen in Wasser. Anfangs hielt er Pollen für belebt, doch er fand dasselbe bei Staubteilchen.

Albert Einstein erklärte die Zitterbewegung 1905 durch die ungeordnete Wärmebewegung der Wassermoleküle, die aus allen Richtungen in großer Zahl gegen die Pollen stoßen. Quantitativ konnte er so die Größe von Atomen bestimmen und die Anzahl pro Mol, die Avogadro-Zahl. Die präzisen quantitativen Vorhersagen wurden in den Folgejahren experimentell bestätigt.

Zufällige Irrfahrt / Random Walk

W346  
Ausführung



**Aufgabe:** (1) Bestimmen Sie zu  $S_t$  die Verteilung, Erwartung, Streuung. Wir untersuchen speziell den symmetrischen Fall  $p = 1/2$ , ohne Drift.

(2) Sie beginnen im Startpunkt  $a \in \mathbb{Z}$  und fixieren einen Zielpunkt  $z \in \mathbb{Z}$ . Wie groß ist die Wkt  $u(a) \in [0, 1]$ , das Ziel  $z$  irgendwann zu erreichen?

(3) Wie groß ist hierbei die erwartete Reisezeit von  $a$  nach  $z$ ?

**Lösung:** (1) Wir erhalten eine Binomialverteilung, affin transformiert:

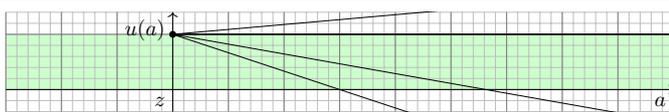
$$P_a(S_t = a - t + 2k) = \binom{t}{k} p^k (1-p)^{t-k} = \binom{t}{k} \frac{1}{2^t} \text{ für } t, k \in \mathbb{N} \text{ und } p = \frac{1}{2}.$$

Somit gilt  $E(S_t) = a$  und  $V(S_t) = t$ , also  $\sigma(S_t) = \sqrt{t}$  und  $S_t \approx N(a, t)$ .

☺ Wir erkennen die Lösung D5D der Wärmeleitungsgleichung!

Zufällige Irrfahrt / Random Walk

W347  
Ausführung



(2) Offensichtlich gilt  $u(z) = 1$ , denn hier ist der Start auch das Ziel.

Für  $a > z$  gilt die Mittelwertegenschaft  $u(a) = \frac{1}{2}u(a+1) + \frac{1}{2}u(a-1)$ .

Somit ist  $u: \mathbb{Z}_{\geq z} \rightarrow [0, 1]$  eine Gerade,  $u(a) = 1 + m(a-z)$ . (Warum?)

Zudem ist  $u$  beschränkt,  $0 \leq u \leq 1$ , daher folgt  $m = 0$ . Ebenso auf  $\mathbb{Z}_{\leq z}$ .

Die Gerade finden wir durch vollständige Induktion: Aus  $u(z) = 1$  und  $u(z+1) = 1 + m$  folgt  $u(a+1) = 2u(a) - u(a-1) = [2 + 2m(a-z)] - [1 + m(a-1-z)] = 1 + m(a+1-z)$ .

☺ Bei einer symmetrischen Irrfahrt ( $p = 1/2$ , ohne Drift) erreichen wir jeden Punkt mit Wkt 1! George Pólya (1887–1985) zeigte 1921: Jeden Punkt in  $\mathbb{Z}$  besuchen wir mit Wkt 1 unendlich oft. Dies gilt ebenso in Dimension 2 bei Irrfahrt auf dem ebenen Gitter  $\mathbb{Z}^2$ . Erstaunlicherweise gilt es nicht mehr in Dimension  $n \geq 3$  bei Irrfahrt auf dem Gitter  $\mathbb{Z}^n$ . Anschaulich bedeutet das: Ein betrunkenen Mensch findet sicher irgendwann nach Hause, ein betrunkenen Fisch hingegen nicht!

☐ Ausführung bei Feller, *Introduction to Probability*, vol. 1 (1968), §XIV.7: Das Sprichwort „Alle Wege führen nach Rom.“ stimmt zumindest zweidimensional. Dreidimensional ist die Rückkehrwahrscheinlichkeit nur etwa 34%, siehe en.wikipedia.org/wiki/Random\_walk.

Zufällige Irrfahrt / Random Walk

W348  
Ausführung

(3) Sei  $T_z \in \mathbb{N}$  die Zeit des ersten Besuchs im Zielpunkt  $z$  und  $E_a(T_z)$  die erwartete Reisezeit vom Startpunkt  $a$  zum Zielpunkt  $z$ . Dies ist invariant unter Verschiebungen, also  $E_{a+k}(T_{z+k}) = E_a(T_z)$ .

Zunächst gilt  $E_a(T_a) = 0$ . Für  $a \neq z$  zeigen wir nun  $E_a(T_z) = \infty$ :

$$x := E_0(T_1) = \frac{1}{2} [ \underbrace{E_1(T_1)}_{=0} + E_{-1}(T_1) ] + 1 = \frac{1}{2} E_{-1}(T_1) + 1$$

$$E_{-1}(T_1) = \underbrace{E_{-1}(T_0)}_{=x} + \underbrace{E_0(T_1)}_{=x} = 2x$$

Hieraus folgt  $x = \frac{1}{2}(2x) + 1 = x + 1$ . Das ist für  $x \in \mathbb{R}$  unmöglich.

Es bleibt nur  $E_0(T_1) = x = \infty$ , erst recht  $E_0(T_z) = \infty$  für alle  $z \neq 0$ .

☺ Bei einer symmetrischen Irrfahrt ( $p = 1/2$ , ohne Drift) erreichen wir jeden Punkt mit Wkt 1, aber die erwartete Reisezeit ist unendlich!

Die Rechnung ist einfach, dank unserer geschickten Formalisierung.

Die Interpretation hingegen muss man erst einmal verarbeiten.

Die naive Anschauung kann einen hier leicht narren.

😊 Die Laplace-Transformation ist in vielen Bereichen ein nützliches Werkzeug, insbesondere bei Differentialgleichungen, siehe Kapitel L. Mathematische Abstraktion hilft: *Learn once, apply everywhere!*  
 😊 Erfreulicherweise lassen sich solche Integraltransformationen auch in der WTheorie ganz wunderbar nutzen. Diese effiziente und elegante Rechentechnik will ich im Folgenden kurz skizzieren.

**Motivation:** Zu  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$  haben wir die erzeugende Funktion (U4E)

$$G(z) = \mathbf{E}[z^X] \quad \text{zumindest für } |z| \leq 1.$$

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung treten erzeugende Funktionen  $G(z) = \mathbf{E}[z^X]$  natürlich auf, wenn man Zufallsvariablen  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$  effizient behandeln will. Wir haben dies in Beispielen ausgeführt.

Entsprechendes wünschen wir uns für Zufallsvariablen  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Der Erwartungswert  $\mathbf{E}(z^X)$  existiert für  $z = 1$ , denn  $\mathbf{E}(1^X) = \mathbf{E}(1) = 1$ . Für  $0 < z \leq 1$  gilt die Majorante  $0 < z^X \leq 1$ , also existiert auch  $\mathbf{E}[z^X]$ . Wir parametrisieren  $z = e^{-s} \in ]0, 1]$  durch  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  und vereinbaren:

**Aufgabe:** (1) Für die Laplace-Transformierte  $F(s) = \mathbf{E}[e^{-sX}]$  gilt

$$F(0) = \mathbf{E}(1) = 1, \quad F'(0) = -\mathbf{E}(X), \quad F''(0) = \mathbf{E}(X^2).$$

(2) Berechnen Sie  $F(s)$  sowie  $\mathbf{E}(X)$  und  $\mathbf{V}(X)$  für  $X \sim E(\lambda)$ , also die Exponentialverteilung mit Dichte  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$  für  $x \geq 0$ .

**Lösung:** (1) Wir nehmen an, dass diese Erwartungswerte existieren:

$$\mathbf{E}(X) = \int_{x=0}^{\infty} x f(x) dx, \quad \mathbf{E}(X^2) = \int_{x=0}^{\infty} x^2 f(x) dx.$$

Wir dürfen dann die Ableitung unter das Integral ziehen und erhalten

$$F'(s) = \int_{x=0}^{\infty} -x e^{-sx} f(x) dx, \quad F''(s) = \int_{x=0}^{\infty} x^2 e^{-sx} f(x) dx.$$

Für  $s = 0$  ergeben sich hieraus obige Formeln. Sehr praktisch!

😊 Die Laplace-Transformierte ist sogar holomorph, siehe Satz L1B. Erneut lohnt sich Ihre Investition in solide mathematische Grundlagen.

**Motivation:** Die vorigen Rechnungen sind sehr effizient und elegant. Zur Zufallsvariablen  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$  nutzen wir die erzeugende Funktion

$$G(z) = \mathbf{E}[z^X] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(X=k) \cdot z^k \quad \text{zumindest für } |z| \leq 1.$$

Allgemein für  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$ , eventuell mit negativen Werten, haben wir

$$G(z) = \mathbf{E}[z^X] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(X=k) \cdot z^k \quad \text{zumindest für } |z| = 1.$$

Mit diesen Potenzreihen können wir wunderbar arbeiten, siehe U4D. Die erzeugende Funktion  $G(z)$  ist eine konzise Schreibweise für die (beliebig komplizierte) Verteilung der Zufallsvariablen  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$ .

Entsprechendes wünschen wir uns auch für Zufallsvariablen  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Der Erwartungswert  $\mathbf{E}(z^X)$  existiert für  $|z| = 1$ , denn  $\mathbf{E}(1^X) = \mathbf{E}(1) = 1$ . Wir parametrisieren daher  $z = e^{-i\xi} \in \mathbb{S}^1$  durch  $\xi \in \mathbb{R}$  und vereinbaren:

**Wiederholung:** Nennen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte  $f(x)$  einer normalverteilten Zufallsvariablen  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  sowie die Fourier-Transformierte  $F(\xi) = \mathbf{E}[e^{-i\xi X}]$  und ihre Rücktransformation.

**Lösung:** Für die Normalverteilung  $N(\mu, \sigma^2)$  wissen wir [K12B](#)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \implies F(\xi) = e^{-i\mu\xi - \sigma^2\xi^2/2}.$$

Durch Rücktransformation von  $F$  lässt sich  $f$  rekonstruieren:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

⚠ Man beachte die hier gewählte Konvention der Normierung.

😊 Die Fourier-Transformation  $f \mapsto F$  verliert keine Information: Die Rücktransformation rekonstruiert die ursprüngliche Verteilung. Erneut lohnt sich Ihre Investition in solide mathematische Grundlagen.

**Definition W4A:** Laplace-Transformierte eines WMaßes auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}$

Für jedes WMaß  $\mathbf{P}_X$  auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  ist seine **Laplace-Transformierte**:

$$F : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R} : s \mapsto F(s) := \mathbf{E}[e^{-sX}] = \int_{x=0}^{\infty} e^{-sx} d\mathbf{P}_X$$

Für eine kontinuierliche Verteilung  $\mathbf{P}_X$  mit Dichte  $f$  erhalten wir also

$$F(s) = \int_{x=0}^{\infty} e^{-sx} f(x) dx.$$

Die Majorante  $|e^{-sx}| \leq 1$  sichert absolute Integrierbarkeit und  $|F(s)| \leq 1$ . Allgemeiner erhalten wir so die stetige Funktion  $F : \mathbb{C}_{\text{Re} \geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$ . Sie ist holomorph auf der offenen Halbebene  $\mathbb{C}_{\text{Re} > 0}$ .

😊 Hier tritt die Laplace-Transformierte  $F(s) = \mathbf{E}[e^{-sX}]$  natürlich auf, um kontinuierliche Zufallsvariablen  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  effizient zu behandeln. Dies möchte ich mit einem kurzen Rechenbeispiel illustrieren.

(2) Sei  $X$  exponentialverteilt gemäß  $E(\lambda)$  mit  $\lambda > 0$ , mit Dichte

$$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto f(x) = \lambda e^{-\lambda x}.$$

Ihre Laplace-Transformierte rechnen wir direkt aus:

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_{x=0}^{\infty} e^{-sx} f(x) dx = \int_{x=0}^{\infty} e^{-sx} \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda \int_{x=0}^{\infty} e^{-(s+\lambda)x} dx = \frac{\lambda}{s+\lambda} \left[ -e^{-(s+\lambda)x} \right]_{x=0}^{\infty} = \frac{\lambda}{s+\lambda} \end{aligned}$$

Plausibilitätscheck: Es gilt tatsächlich  $F(0) = 1$ , so wie es sein muss. Aus der Funktion  $F$  berechnen wir leicht Erwartungswert und Varianz:

$$\begin{aligned} F'(s) &= \frac{-\lambda}{(s+\lambda)^2} \implies \mathbf{E}(X) = -F'(0) = \frac{1}{\lambda}, \\ F''(s) &= \frac{2\lambda}{(s+\lambda)^2} \implies \mathbf{E}(X^2) = F''(0) = \frac{2}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Wir erhalten  $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$ , wie zuvor berechnet. [V243](#)

**Definition W4B:** Fourier-Transformierte eines WMaßes auf  $\mathbb{R}$

Für jedes WMaß  $\mathbf{P}_X$  auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  ist seine **Fourier-Transformierte**

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : \xi \mapsto F(\xi) := \mathbf{E}[e^{-i\xi X}] = \int_{x \in \mathbb{R}} e^{-i\xi x} d\mathbf{P}_X$$

Für eine kontinuierliche Verteilung  $\mathbf{P}_X$  mit Dichte  $f$  erhalten wir also

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx.$$

Die Majorante  $|e^{-i\xi x}| \leq 1$  sichert absolute Integrierbarkeit und  $|F(s)| \leq 1$ .

⚠ Man beachte die hier gewählte Konvention der Normierung: Zur Bequemlichkeit lasse ich den Normierungsfaktor  $1/\sqrt{2\pi}$  weg. In der Rücktransformation benötigen wir dann den Faktor  $1/2\pi$ .

😊 Fourier  $\mathbf{E}[e^{-i\xi X}]$  ist ein Spezialfall von Laplace  $\mathbf{E}[e^{-sX}]$  eingeschränkt auf die imaginäre Achse  $s = i\xi$  mit  $\xi \in \mathbb{R}$ .

😊 Die Fourier-Transformation ist ein mächtiges Universalwerkzeug. Wir haben dieser wichtigen Technik daher ein eigenes Kapitel gewidmet. Die dort erlernten Rechenmethoden zahlen sich bei der Behandlung vieler Probleme aus, so auch hier für die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Zudem haben wir wichtige Beispiele und Erfahrungen gesammelt, die in vielen Problemstellungen erneut und abgewandelt auftreten.

😊 Erzeugende Funktionen  $\mathbf{E}[z^X]$ , Laplace-Transformierte  $\mathbf{E}[e^{-sX}]$  und Fourier-Transformierte  $\mathbf{E}[e^{-i\xi X}]$  sind nützliche Rechenmethoden. Sie entspringen alle derselben natürlichen Idee, wie hier skizziert: Transformation reorganisiert alle Informationen auf praktische Weise. Die Momente der Verteilung entsprechen nun Ableitungen, so werden insbesondere Erwartung und Varianz rechnerisch leicht zugänglich.

Durch Rücktransformation lässt sich jeweils die ursprüngliche Verteilung rekonstruieren, es geht also tatsächlich keinerlei Information verloren. Zur Illustration will ich als Hauptergebnis den zentralen Grenzwertsatz (ZGS W1D) mit der Fourier-Transformation erklären und nachrechnen.

**Aufgabe:** Berechnen Sie  $F(0)$ ,  $F'(0)$ ,  $F''(0)$  und  $F'''(0)$  sowie hiermit für  $\mu = 0$  die Taylor-Entwicklung zweiter Ordnung von  $F(\xi)$  um  $\xi = 0$ .

**Lösung:** Existieren die Momente  $\int_{\mathbb{R}} |x|^k f(x) dx < \infty$  für  $k = 1, 2, 3, \dots$ , so dürfen wir für  $F^{(k)}$  die Ableitung unter Integral ziehen [K205]:

$$F'(\xi) = \frac{d}{d\xi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial \xi} e^{-i\xi x} f(x) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} (-ix) e^{-i\xi x} f(x) dx \implies F'(0) = -iE(X)$$

$$F''(\xi) = \int_{\mathbb{R}} (-x^2) e^{-i\xi x} f(x) dx \implies F''(0) = -E(X^2)$$

$$F'''(\xi) = \int_{\mathbb{R}} (ix^3) e^{-i\xi x} f(x) dx \implies F'''(0) = iE(X^3)$$

☺ Für  $\mu = 0$  und  $\sigma^2 > 0$  hat  $F$  demnach die Taylor-Entwicklung

$$F(\xi) = 1 - \sigma^2 \xi^2 / 2 + \dots$$

Das dritte Moment liefert eine Fehlerschranke  $O(\xi^3)$  für das Restglied.  
☐ Ausführung bei Feller, *Introduction to Probability*, vol. 2 (1971), §XVI

**Lemma W4c:** Summe unabhängiger Zufallsvariablen

Seien  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  unabhängige ZV mit Transformierten  $F_X, F_Y$ . Die Summe  $X + Y$  hat dann die Transformierte  $F_{X+Y} = F_X \cdot F_Y$ .

**Nachrechnen:** Auch  $e^{-i\xi X}$  und  $e^{-i\xi Y}$  sind unabhängig, also gilt

$$F_{X+Y}(\xi) = E[e^{-i\xi(X+Y)}]$$

$$= E[e^{-i\xi X} \cdot e^{-i\xi Y}]$$

$$= E[e^{-i\xi X}] \cdot E[e^{-i\xi Y}] = F_X(\xi) \cdot F_Y(\xi)$$

☺ Das ist der entscheidende Trick! Er vereinfacht unsere Rechnung.

Damit haben wir alle Werkzeuge, um den zentralen Grenzwertsatz zu beweisen! Ich formuliere ihn in vereinfachter Form für identisch verteilte, unabhängige Zufallsvariablen. Vor allem aber zeige ich die Konvergenz ohne eine explizite Fehlerschranke, um alle Argumente so einfach wie möglich zu halten. Für eine detaillierte Ausarbeitung müsste man die Fehlerterme kontrollieren, die hier nur mit „...“ abgekürzt werden.

Beweis des zentralen Grenzwertsatzes

Seien  $X_1, X_2, X_3, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  unabhängige Zufallsvariablen. Es gelte  $E(X_k) = \mu$  und  $E(X_k^2) = \sigma^2 > 0$  sowie  $E(|X_k|^3) \leq \rho^3 < \infty$ . Die Summe  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  hat Erwartung  $n\mu$  und Varianz  $n\sigma^2$ . Wir normieren  $S_n$  zu Erwartung 0 und Varianz 1 durch die Skalierung

$$S_n^* := \frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

Wir wollen nun  $P_{S_n} \approx N(n\mu, n\sigma^2)$  zeigen, normiert also  $P_{S_n^*} \approx N(0, 1)$ . Fehlerschranken sind für die Praxis wichtig, aber schwerer zu zeigen. In dieser Skizze begnügen wir uns mit dem Grenzwert für  $n \rightarrow \infty$ .

**Satz W4d:** zentraler Grenzwertsatz, ohne Fehlerschranken

Die Verteilung von  $S_n^*$  konvergiert gegen die Normalverteilung  $N(0, 1)$ .

☺ Das ist die qualitative Aussage  $P_S \approx N(n\mu, n\sigma^2)$  aus Satz W1d. Die quantitative Fehlerabschätzung lassen wir hier außer Acht.

Beweis des zentralen Grenzwertsatzes

**Aufgabe:** (1) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte  $F_n$  von  $S_n^*$ .  
(2) Wie folgt hieraus der zentrale Grenzwertsatz für  $n \rightarrow \infty$ ?  
(3) Warum geht das plötzlich so leicht?

**Beweis:** (1) Die Transformierte von  $\frac{X_k - \mu}{\sigma\sqrt{n}}$  ist  $F_k(\xi) = 1 - \xi^2/2n + \dots$ . Die Transformierte der Summe  $S_n^*$  ist das Produkt der Transformaten:

$$F_n(\xi) = (1 - \xi^2/2n + \dots)^n \rightarrow \exp(-\xi^2/2) = F(\xi) \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

(2) Der Grenzwert  $F$  ist die Transformierte der Normalverteilung  $N(0, 1)$ ! Rücktransformation: Die Verteilung von  $S_n^*$  konvergiert gegen  $N(0, 1)$ .

(3) Das geht leicht dank starker Werkzeuge wie Fourier-Transformation! Zwecks Vereinfachung verzichten wir zudem auf Fehlerabschätzungen.

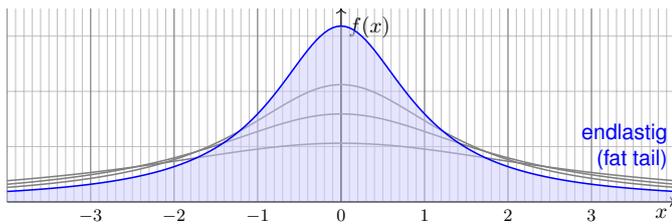
☺ Damit können wir den ZGS zumindest qualitativ nachrechnen: Für großes  $n$  ist  $X_1 + \dots + X_n$  annähernd  $N(n\mu, n\sigma^2)$ -verteilt.

Fourier-Transformation der Cauchy-Verteilung

**Aufgabe:** Ist für  $a > 0$  die folgende Funktion eine WDichte?

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2}$$

Bestimmen Sie Erwartung und Varianz und Fourier-Transformierte.



⚠ Der Graph erinnert grob an die Glockenkurve  $\varphi(x) = e^{-x^2/2} / \sqrt{2\pi}$ . Doch Vorsicht: Die Cauchy-Verteilung hat völlig andere Eigenschaften! Vor allem klingt  $f(x)$  nicht exponentiell ab, sondern nur wie  $x \mapsto 1/x^2$ . Das hat dramatische Konsequenzen: Die Erwartung existiert nicht!

Fourier-Transformation der Cauchy-Verteilung

**Lösung:** Wir haben  $f \geq 0$  und die Gesamtmasse ist

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \left[ \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \right]_{x=-\infty}^{\infty} = 1$$

Für Erwartung und Varianz benötigen wir folgende Integrale:

$$E = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{ax}{a^2 + x^2} dx = ? \quad \text{und} \quad V = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{ax^2}{a^2 + x^2} dx = \infty.$$

Das erste ist nicht absolut integrierbar, nur als Cauchy-Hauptwert. Der Median ist offensichtlich 0, aber die Erwartung existiert nicht! Hier haben Erwartungswert und Varianz demnach keinen Sinn.

Die Fourier-Transformierte haben wir bereits berechnet [K113]:

$$F(\xi) = E[e^{-i\xi X}] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} e^{-i\xi x} \cdot \frac{a}{a^2 + x^2} dx = e^{-a|\xi|}$$

☺ Die ursprüngliche WDichte  $f$  rekonstruieren wir hieraus durch Rücktransformation. Man beachte, dass  $F$  in 0 nicht differenzierbar ist. Dies entspricht der Tatsache, dass der Erwartungswert  $E$  nicht existiert.

Fourier-Transformation der Cauchy-Verteilung

Die **Cauchy-Verteilung**  $C(a)$  mit  $a > 0$  ist gegeben durch die Dichte

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2}$$

**Aufgabe:** Seien  $X \sim C(a)$  und  $Y \sim C(b)$  unabhängig Cauchy-verteilt. Ist ihre Summe  $S = X + Y$  Cauchy-verteilt? Mit welchem Parameter?

**Lösung:** Wir wissen  $E[e^{-i\xi X}] = e^{-a|\xi|}$  und ebenso  $E[e^{-i\xi Y}] = e^{-b|\xi|}$ . Dank Unabhängigkeit von  $X$  und  $Y$  gilt für die Summe  $S = X + Y$  somit

$$E[e^{-i\xi S}] = E[e^{-i\xi(X+Y)}]$$

$$= E[e^{-i\xi X} \cdot e^{-i\xi Y}]$$

$$= E[e^{-i\xi X}] \cdot E[e^{-i\xi Y}] = e^{-a|\xi|} \cdot e^{-b|\xi|} = e^{-(a+b)|\xi|}$$

Durch Rücktransformation gewinnen wir hieraus die Verteilung von  $S$ : Demnach ist die Summe ebenfalls Cauchy-verteilt gemäß  $C(a+b)$ . Sie können dies auch direkt aus dem Faltungsintegral nachrechnen.

☺ Die Cauchy-Verteilungen  $(C(a))_{a \in \mathbb{R}_{>0}}$  sind stabil unter Faltung!

Fourier-Transformation der Cauchy-Verteilung

Seien  $X_1, \dots, X_n \sim C(a)$  unabhängig und identisch Cauchy-verteilt. Wie im ZGS betrachten wir die (wie üblich normierte) Summe

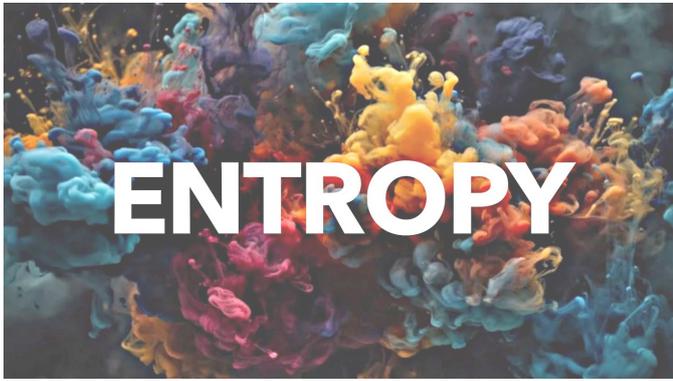
$$S_n^* := \frac{1}{\sqrt{n}} (X_1 + \dots + X_n).$$

**Aufgabe:** Welche Verteilung  $P_{S_n^*}$  hat die Zufallsvariable  $S_n^*$ ? Konvergiert  $P_{S_n^*}$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen eine Normalverteilung?

**Lösung:** Die Summe  $X_1 + \dots + X_n$  ist  $C(na)$ -verteilt. Durch den Normierungsfaktor  $1/\sqrt{n}$  ist  $S_n^*$  dann  $C(a)$ -verteilt. Für  $n \rightarrow \infty$  ist die Verteilung fix und konvergiert somit gegen  $C(a)$ . Insbesondere konvergiert sie keineswegs gegen eine Normalverteilung!

⚠ Die Cauchy-Verteilungen  $C(a)$  erfüllen nicht die Voraussetzungen des ZGS (W1d): Die geforderten Momente  $\mu, \sigma, \rho$  existieren nicht! Daher lässt sich der zentrale Grenzwertsatz hier nicht anwenden.

☺ Unsere explizite Rechnung zeigt tatsächlich genauer noch mehr: Die Verteilung der Summe konvergiert nicht gegen die Normalverteilung!



The most misunderstood concept in physics  
 ▶ Veritasium, you.tu.be/DxL2HoqLbyA

- 1) Die Energie der Welt ist constant.
- 2) Die Entropie der Welt strebt einem Maximum zu.

Rudolf Clausius (1822–1888), *Mechanische Wärmetheorie* (1865)

*You may see a cup of tea fall off a table and break into pieces on the floor. . . But you will never see the cup gather itself back together and jump back on the table. The increase of disorder, or entropy, is what distinguishes the past from the future, giving a direction to time.*

Stephen Hawking (1942–2018), *A Brief History of Time* (1988)

*The fact that you can remember yesterday but not tomorrow is because of entropy. [...] So I think that entropy is underappreciated as something that has a crucial role in how we go through life.*

Sean M. Carroll (1966–), *The Passage of Time and the Meaning of Life*  
 ▶ you.tu.be/KFYXCqUTmI, ausführlich /EntaPoSEXog

Die **Wärmelehre** ist eine wissenschaftlich-technische Errungenschaft des 19. Jahrhunderts und prägt unsere hochtechnisierte Zivilisation.

(1) Die **technische Thermodynamik** beschreibt **makroskopische Phänomene** durch Temperatur, Wärme, Druck, Volumen, Arbeit, etc. und ihre Änderung in Prozessen (Hauptsätze, Zustandsgleichungen). Sie ist grundlegend zur Konstruktion und Analyse von Maschinen.

Ihre grobe Sichtweise (aka Abstraktion) ist didaktische Herausforderung und methodische Stärke; dadurch wird sie extrem vielseitig anwendbar auf große Klassen von Systemen und Prozessen.

(2) Die **statistische Physik** untersucht die **mikroskopischen Zustände** der Teilchen (Moleküle). Sie erklärt die makroskopischen Phänomene durch klassische Mechanik (Energie, Impuls, etc.) und dient so als theoretisches Fundament der Thermodynamik (Mikrofundierung).

Analogie in der Wirtschaftslehre: Die **Makroökonomik** untersucht übergeordnete Größen und Kennzahlen: Investition & Konsum, Export & Import, Staatsausgaben & Steuern, Geldpolitik, etc. Die **Mikroökonomik**, insbesondere die Spieltheorie, untersucht das Verhalten einzelner Akteure (Menschen, Haushalte, Unternehmen). Auch dies dient der Mikrofundierung, also dem detaillierten mikroökonomischen Verständnis der makroökonomisch beobachtbaren Phänomene.

**0. Hauptsatz:** Die Temperatur  $T > 0$  eines Systems (im thermischen Gleichgewicht) beschreibt die mittlere Energie ungeordneter Bewegung.

Die Thermodynamik handelt von Temperatur, Wärme und Entropie. Allgemein beschreibt sie Vielteilchensysteme und hat daher eine fundamentale Stellung in Naturwissenschaft und Technik. Gegenüber Systemen mit wenigen Teilchen zeigen sich hier völlig neue Erscheinungen wie die Irreversibilität fast aller makroskopischen Prozesse. Die Entropie kennt nur eine Richtung!

**1. Hauptsatz:** Die Energie  $U$  bleibt erhalten gemäß  $dU = dQ + dW$ .

Es gibt kein Perpetuum Mobile erster Art: Keine Maschine kann aus nichts Arbeit verrichten. Die Thermodynamik wirkt als Systemtheorie: Jedes Teilsystem wird als Black Box durch nur wenige Parameter beschrieben (Temperatur  $T$ , Druck  $p$ , Volumen  $V$ , etc.) und wechselwirkt durch Ströme (Energie  $dU$ , Arbeit  $dW = p dV +$  weitere, Wärme  $dQ$ , Entropie  $dS$ , etc.)

**2. Hauptsatz:** Die Entropie  $S$  wächst gemäß  $dS = dQ/T \geq 0$ .

In jedem abgeschlossenen System kann die Entropie nur anwachsen:  $S_1 - S_0 = \int_{t_0}^{t_1} dQ/T \geq 0$ . Bestenfalls bleibt sie konstant, bei reversiblen Prozessen. Das hat weitreichende Konsequenzen: **Carnot:** Wärmeenergie kann niemals vollständig in mechanische Arbeit umgewandelt werden. **Kelvin, Planck:** Es gibt kein Perpetuum Mobile zweiter Art. Keine Maschine kann mechanische Arbeit verrichten allein durch Abkühlung eines Wärmespeichers.

**3. Hauptsatz:** Im idealen Grundzustand gilt  $U = 0$  und  $T = 0$  und  $S = 0$ .

Wir betrachten einen endlichen WRaum  $(\Omega, P)$  mit  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  als **M** „Lostopf“, **P** „Zustandsraum“ oder **Q** „Quelle zufälliger Nachrichten“. Das Ergebnis  $\omega_i$  hat Wkt  $p_i \in [0, 1]$  und Überraschung  $-\log_2 p_i \in [0, \infty]$ .

$p$	1	1/2	1/4	1/8	...	0
$-\log_2 p$	0	1	2	3	...	$\infty$

Das misst den Informationsgehalt der Nachricht  $\omega_i$  in Bit, zur Basis 2. Jede andere Basis  $b$  skaliert die Information gemäß  $\log_b p = \ln(p) / \ln(b)$ . Unabhängigkeit heißt Wkten multiplizieren, Überraschungen addieren.

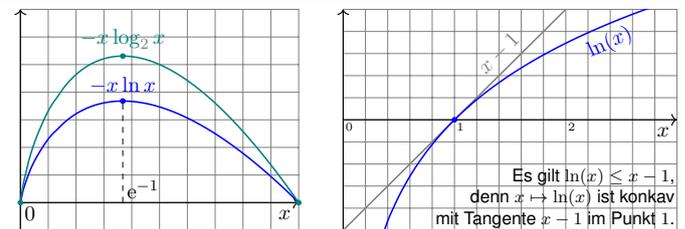
Die **Entropie** ist die erwartete Überraschung oder mittlere Information:

$$H_2(P) := \mathbf{E}_P[\omega_i \mapsto -\log_2 p_i] = -\sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

**Beispiel:** Münzwurf  $\Omega = \{0 = \text{Kopf}, 1 = \text{Zahl}, 2 = \text{Rand}\}$  mit den Wkten  $q = (0.50, 0.50, 0.00)$  und  $p = (0.49, 0.49, 0.02)$ .

$$H(Q) \stackrel{\text{Def}}{=} 0.50 \cdot 1.00 + 0.50 \cdot 1.00 + 0.00 \cdot \infty = 1.00$$

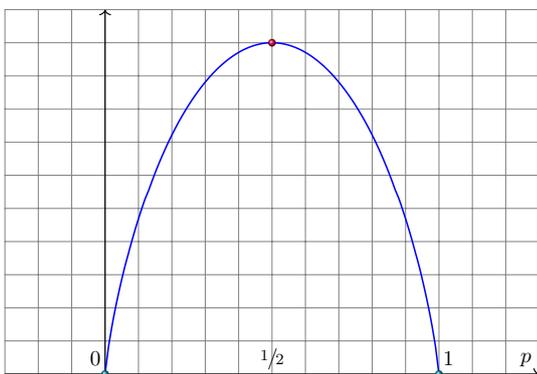
$$H(P) \approx 0.49 \cdot 1.03 + 0.49 \cdot 1.03 + 0.02 \cdot 5.64 \approx 1.12$$



Eingeführt wurde die Entropie 1865 von Rudolf Clausius im 2. Hauptsatz der Thermodynamik. Ludwig Boltzmann und Willard Gibbs erklärten sie 1875 in der statistischen Mechanik durch  $S = -k \sum_i p_i \ln(p_i)$  mit den Wkten  $p_i$  aller Mikrozustände  $i$ , skaliert durch die Boltzmann-Konstante  $k = 1.38 \times 10^{-23}$  J/K. Claude Shannon klärte 1948 optimale Codierung von Information durch die Entropie und gründete die Informationstheorie. **Q** Thomas M. Cover, Joy A. Thomas: *Information Theory*. Wiley 2006 Entropie spielt überall eine zentrale Rolle, von Quanten über Strömung zu schwarzen Löchern, von Kommunikation zu maschinellem Lernen.

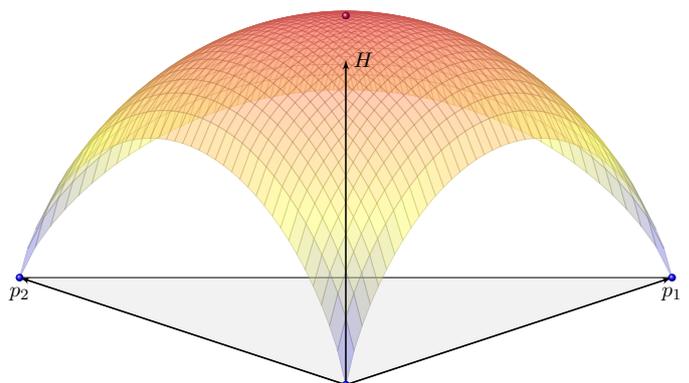
Auf  $\Omega = \{1, 2\}$  hat die WVerteilung  $P := (p, 1 - p)$  die Entropie

$$H(P) = -p \log(p) - (1 - p) \log(1 - p).$$



Auf  $\Omega = \{1, 2, 3\}$  hat die WVerteilung  $P := (p_1, p_2, p_3)$  die Entropie

$$H(P) = -p_1 \log p_1 - p_2 \log p_2 - p_3 \log p_3.$$



**Die Kreuzentropie  $H(P, Q)$  misst die Überraschung.** W425

Ofst schätzen wir die wahre Verteilung  $P$  (engl. *ground truth*) durch ein Modell  $Q$ . Das Ergebnis  $\omega_i$  hat Wkt  $p_i$ , aber die Überraschung  $-\log q_i$  als unser Maß der Information. Erstere ist objektiv, also physikalisch real, zweiteere subjektiv, eine Eigenschaft unseres Modells der Wirklichkeit.

$$H(P, Q) := \mathbf{E}_P[\omega_i \mapsto -\log q_i] = -\sum_{i=1}^n p_i \log q_i \in [0, \infty]$$

experimentell messbar

Die **Kreuzentropie** von  $P$  und  $Q$  ist auch hier die „mittlere Information“ oder die „erwartete Überraschung“ des Modells  $Q$  in der Wirklichkeit  $P$ . Diese kann durch Stichprobe geschätzt werden (Monte Carlo Methode).  
**The Key Equation Behind Probability.** [youtu.be/KHVR587oW8I](https://youtu.be/KHVR587oW8I)

**Beispiel:** Weiter sei  $q = (0.50, 0.50, 0.00)$  und  $p = (0.49, 0.49, 0.02)$ .

$$H(P, Q) = 0.49 \cdot 1.00 + 0.49 \cdot 1.00 + 0.02 \cdot \infty = \infty$$

Ist das Modell  $q' = (0.46, 0.46, 0.08)$  näher an der Realität?

$$H(P, Q') \approx 0.49 \cdot 1.12 + 0.49 \cdot 1.12 + 0.02 \cdot 3.64 \approx 1.17$$

$$H(P, P) \approx 0.49 \cdot 1.03 + 0.49 \cdot 1.03 + 0.02 \cdot 5.64 \approx 1.12$$

**Die relative Entropie  $D(P, Q)$  misst die Abweichung.** W426

Die **relative Entropie** des Modells  $Q$  bezüglich der Wirklichkeit  $P$ , oder **Kullback–Leibler–Divergenz**, ist die „zusätzliche Überraschung“:

$$D(P, Q) := \underbrace{H(P, Q)}_{\text{exp. messbar}} - \underbrace{H(P)}_{\text{konstant}} = \sum_{i=1}^n p_i \log \frac{p_i}{q_i} \in [0, \infty]$$

Divergenz: Gilt  $D(P, Q') < D(P, Q)$ , so weicht  $Q'$  weniger ab als  $Q$ .

**Satz W4E: Gibbs' Informationsungleichung**

Es gilt  $D(P, Q) \geq 0$ , also  $H(P, Q) \geq H(P)$ , mit Gleichheit nur für  $P = Q$ .

**Beweis:** Für  $x \in \mathbb{R}_{>0}$  gilt  $\ln(x) \leq x - 1$ , mit Gleichheit gdw  $x = 1$ . Also:

$$-\sum_i p_i \ln(q_i/p_i) \stackrel{(1)}{\geq} -\sum_i p_i (q_i/p_i - 1) \stackrel{(2)}{\geq} \sum_i p_i - q_i \stackrel{\text{Wk1}}{=} 0$$

In den ersten beiden Summen setzen wir  $0 \cdot (\pm\infty) := 0$ . Hier zählen also nur Indizes  $i$  mit  $p_i > 0$ . In der dritten Summe zählen alle Indizes  $i$ , auch mit  $p_i = 0$ , daher die Ungleichung (2). Gleichheit gilt genau dann, wenn  $p_i = q_i$  für alle  $i$  gilt: Für  $p_i > 0$  folgt dies aus (1), für  $p_i = 0$  aus (2).  $\square$

**Maximale Entropie: die diskrete Gleichverteilung** W427

😊 Auf  $\Omega = \{1, \dots, n\}$  maximiert  $Q := (1/n, \dots, 1/n)$  die Entropie:

**Satz W4F: Die diskrete Gleichverteilung maximiert die Entropie.**

Jedes WMaß  $P$  auf  $\Omega = \{1, \dots, n\}$  erfüllt  $0 \leq H(P) \leq \log n$ .

(1) Maximum: Genau dann gilt  $H(P) = \log n$ , wenn  $P$  gleichverteilt ist.  
 (2) Minimum: Genau dann gilt  $H(P) = 0$ , wenn  $p_i = 1$  für ein  $i \in \Omega$  gilt.

**Beweis:** (1) Dank Gibbs' Informationsungleichung  $H(P) \leq H(P, Q)$  gilt:

$$H(P) \stackrel{\text{W4E}}{\leq} H(P, Q) \stackrel{\text{Def}}{=} -\sum_{i=1}^n p_i \log q_i \stackrel{Q}{=} -\sum_{i=1}^n p_i \log n \stackrel{P}{=} \log n$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn  $p_i = q_i$  für alle  $i \in \Omega$ , also  $P = Q$ .

(2) Für alle  $x \in [0, 1]$  gilt  $-x \log x \geq 0$ , also  $H(P) = -\sum_i p_i \log p_i \geq 0$ . Gleichheit  $-x \log x = 0$  gilt nur für  $x \in \{0, 1\}$ . Aus  $H(P) = 0$  folgt also  $p_1, \dots, p_n \in \{0, 1\}$ . Mit  $\sum_i p_i = 1$  folgt  $p_i = 1$  für genau ein  $i \in \Omega$ .  $\square$

**Prinzip der Indifferenz** (Laplace 1812): Wenn keine Gründe vorliegen, irgendein Ergebnis zu begünstigen, so sind alle gleich wahrscheinlich. Dieses Modell maximiert die Symmetrie... und zugleich die Entropie!

**Maximale Entropie: die diskrete Gleichverteilung** W428 Erläuterung

😊 Für  $n = 2$  und  $n = 3$  sehen wir das sehr schön in obigen Graphiken. Allgemein hilft uns hier die Informationsungleichung! Oder Lagrange:

**Aufgabe:** Maximieren Sie die Entropie  $H(p_1, \dots, p_n) = -\sum_{i=1}^n p_i \ln p_i$  unter der Nebenbedingung  $g(p) := p_1 + \dots + p_n = 1$  und  $p_1, \dots, p_n \geq 0$ .

**Lösung:** Wir erinnern uns an den Satz über Lagrange-Multiplikatoren und lösen  $\nabla H = -\lambda \nabla g$ . Aus  $-\ln p_i - 1 = -\lambda$  folgt erneut  $p_i = q_i := 1/n$ .

Ist dies das globale Maximum? Der Definitionsbereich  $\Delta$  ist kompakt, hierauf ist  $H: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, nimmt also Minimum und Maximum an. Im Inneren  $\Delta^\circ$  ist  $q$  die einzige kritische Stelle, mit Wert  $H(q) = \ln(n)$ . Auf dem Rand  $\partial\Delta$  gilt  $H(\partial\Delta) = [0, \ln(n-1)]$  per Induktion über  $n$ . Also gilt  $H(\Delta) = [0, \ln(n)]$  mit  $q$  als einziger Maximalstelle. Raffiniert!

😊 Gibbs' Ungleichung / Konkavität erledigt alles auf einen Schlag!  
 😊 Ist dieses Ergebnis nicht offensichtlich? Nein, erst im Rückblick!  
 😊 Das Maximum zu bestimmen, übersichtlich und nachvollziehbar, ist nicht trivial, insbesondere in höherer Dimension. Es ist eine erste, effiziente und elegante Anwendung von Gibbs' Informationsungleichung.

**Maximale Entropie: die Boltzmann-Verteilung** W429

Ein Teilchen gerät in Zustand  $\omega_i \in \Omega$  mit Energie  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}: \omega_i \mapsto u_i$ . Zustände hoher Energie sind unwahrscheinlicher, aber wie genau?

Zur Wkt macht Boltzmann den Exponentialansatz  $q_i = \exp(-\alpha - \beta u_i)$ . Hier ist  $\beta := 1/(kT)$  mit Temperatur  $T > 0$  und Boltzmann-Konstante  $k = 1.38 \times 10^{-23}$  J/K. Normierung: Wir bestimmen die Zustandssumme  $Z := \sum_i \exp(-\beta u_i) > 0$  und erhalten  $\alpha := \ln Z \in \mathbb{R}$ ; damit gilt  $\sum_i q_i = 1$ . Sie hat Energie  $E(Q) = \sum_i q_i u_i$  und Entropie  $S(Q) = k \sum_i q_i (\alpha + \beta u_i)$ . Die Shannon-Entropie  $H$  skalieren wir zur Gibbs-Entropie  $S = k \ln(2) H$ .

**Satz W4G: Boltzmann maximiert die Entropie.**

Jedes WMaß  $P$  auf  $\Omega$  mit der Energieschranke  $E(P) \leq E(Q)$  erfüllt auch die Entropieschranke  $S(P) \leq S(Q)$ , und Gleichheit gilt nur für  $P = Q$ .

**Beweis:** Dank Gibbs' Informationsungleichung  $S(P) \leq S(P, Q)$  gilt:

$$S(P) \stackrel{\text{W4E}}{\leq} k \sum_i p_i (\alpha + \beta u_i) \stackrel{\text{Lin}}{=} k[\alpha + \beta E(P)] \stackrel{\text{Wk}}{\leq} k[\alpha + \beta E(Q)]$$

Für  $P = Q$  gilt Gleichheit, sonst die strikte Ungleichung „<“.  $\square$

**Maximale Entropie: geometrische Verteilung** W430 Erläuterung

**Beispiele:** (1) Bei  $n$  Zuständen  $\omega_1, \dots, \omega_n$  gleicher Energie  $u_i = \text{const}$  erhalten wir erneut die Gleichverteilung  $q_i = 1/n$  wie oben in Satz W4F.  
 (2) Auf  $\Omega = \mathbb{N}$  ist die geometrische Verteilung  $q_i = (1-q)q^i$  mit  $q \in [0, 1[$  die Boltzmann-Verteilung zu  $u_i = i$  und  $\beta = -\ln q$  und  $\alpha = -\ln(1-q)$ . Sie hat Erwartung / Energie  $E(Q) = \sum_{i=0}^{\infty} q_i \cdot i = q/(1-q)$  und Entropie

$$H(Q) = -\sum_{i=0}^{\infty} q_i [\ln(1-q) + i \ln q] = -\ln(1-q) - \ln q \cdot q/(1-q).$$

**Übung:** Jedes WMaß  $P$  auf  $\mathbb{N}$  mit Erwartung  $E(P) \leq E(Q) = q/(1-q)$  erfüllt die Entropieschranke  $H(P) \leq H(Q)$ , mit Gleichheit nur für  $P = Q$ .

😊 Unter allen WMaßen  $P$  auf  $\Omega = \mathbb{N}$  mit Erwartung  $\leq \mu < \infty$  maximiert die obige geometrische Verteilung  $Q$  mit  $\mu = q/(1-q)$  die Entropie; dabei gilt  $q = \mu/(1+\mu)$  und  $H(Q) = (1+\mu) \ln(1+\mu) - \mu \ln \mu$ .

**Methode der maximalen Entropie** (Jaynes 1957): Erlauben die Daten mehrere Verteilungen, so wählen wir diejenige mit maximaler Entropie.

**Jaynes' Methode der maximalen Entropie** W431 Erläuterung

Wir suchen WVerteilungen mit vorgegebenen Eigenschaften, wie z.B. Erwartung und Varianz, und wählen diejenige mit maximaler Entropie. Jede mit kleinerer Entropie enthält mehr Information / Struktur als unsere Messdaten stützen. Laplace' Prinzip der Indifferenz ist der Spezialfall.

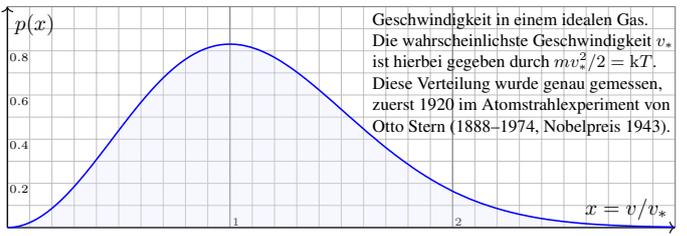
**Aufgabe:** Ein fairer Würfel  $\Omega = \{1, \dots, 6\}$  mit  $P = (1/6, \dots, 1/6)$  hat die erwartete Augenzahl  $\mu = 3.5$ . Sie messen  $\mu_1 = 4.7$ , andermal  $\mu_2 = 2.8$ . Welches Modellmaß  $Q$  auf  $\Omega$  wählen Sie? Die Frage ist unterbestimmt!

**Lösung:** Gemäß der Methode der maximalen Entropie macht Jaynes den Ansatz  $q_i = \exp(-\alpha - \beta i)$  mit  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Numerisch bestimmen wir den Parameter  $\beta \in \mathbb{R}$  mit  $\mu(\beta) = (\sum_{i=1}^6 e^{-\beta i} \cdot i) / (\sum_{i=1}^6 e^{-\beta i})$  und finden  $\beta_1 \approx -0.463$  und  $Q_1 \approx (0.039, 0.062, 0.098, 0.157, 0.249, 0.395)$  ebenso  $\beta_2 \approx +0.249$  und  $Q_2 \approx (0.284, 0.221, 0.172, 0.134, 0.104, 0.081)$ . *Whaaa?*

Für Jaynes war dies zuerst eine Frage der Logik, dann erst der Physik. Die statistische Mechanik liefert überzeugende weitere Argumente und begründet so den 2. Hauptsatz: Jedes physikalische System strebt zum thermischen Gleichgewicht, das heißt zum Zustand maximaler Entropie.

**Maxwell-Verteilung der Geschwindigkeit im idealen Gas** W432

Zustände hoher Energie werden seltener angenommen. Mit dem obigen Exponentialansatz konnten Boltzmann und Gibbs dies quantifizieren!



Geschwindigkeit in einem idealen Gas. Die wahrscheinlichste Geschwindigkeit  $v_*$  ist hierbei gegeben durch  $mv_*^2/2 = kT$ . Diese Verteilung wurde genau gemessen, zuerst 1920 im Atomstrahllexperiment von Otto Stern (1888–1974, Nobelpreis 1943).

In einem idealen Gas ist die Teilchenenergie rein kinetisch,  $E = mv^2/2$ . Im thermischen Gleichgewicht ist die Wkt proportional zu  $\exp(-E/kT)$ . In 3 Dimensionen gilt  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ . Die Zustände gleicher Energie füllen also die (Energie-)Kugelschale  $[v, v + dv]$  vom Volumen  $4\pi v^2 dv$ . Für  $x = v/v_*$  mit  $mv_*^2/2 = kT$  ist die WDichte  $p(x) = e^{-x^2} \cdot x^2 \cdot 4/\sqrt{\pi}$ .

**Kontinuierliche WVerteilungen auf  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  und ihre Entropie** W433

Auf  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  sei  $P$  ein WMaß mit Dichte  $p: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  und  $\int_{\Omega} p(x) dx = 1$ . Ihre (natürliche) **Entropie** definieren wir (nun zur Basis  $e$ ) durch

$$H(P) := - \int_{x \in \Omega} p(x) \ln p(x) dx \in \bar{\mathbb{R}}$$

gemessen in Nat (*natural unit of information*), alternativ Bit zur Basis 2. Die **Kreuzentropie** kontinuierlicher WVerteilungen  $P$  und  $Q$  ist demnach

$$H(P, Q) := - \int_{x \in \Omega} p(x) \ln q(x) dx \in \bar{\mathbb{R}}.$$

Die **relative Entropie** des Modells  $Q$  bezüglich der Wirklichkeit  $P$  ist

$$D(P, Q) := H(P, Q) - H(P) = \int_{x \in \Omega} p(x) \ln \frac{p(x)}{q(x)} dx \in \bar{\mathbb{R}}.$$

**Aufgabe:** Weiterhin gilt Gibbs' Informationsungleichung (Satz W4E), also  $D(P, Q) \geq 0$ , somit  $H(P, Q) \geq H(P)$ . Gleichheit gilt genau dann, wenn  $p(x) = q(x)$  für fast alle  $x \in \Omega$  gilt, somit  $P = Q$ . Sind die Dichten  $p, q: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  sogar stetig, so gilt  $p(x) = q(x)$  in jedem Punkt  $x \in \Omega$ .

**Maximale Entropie: kontinuierliche Gleichverteilung** W434

Auf  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $0 < \text{vol}_n(\Omega) < \infty$  hat die Gleichverteilung  $Q$  die Dichte

$$q: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}: q(x) = 1/\text{vol}_n(\Omega).$$

**Satz W4H:** Die Gleichverteilung maximiert die Entropie.  
(0) Für jedes kontinuierliche WMaß  $P$  auf  $\Omega$  gilt die Schranke

$$H(P) \leq H(Q) = \ln \text{vol}_n(\Omega).$$

Gleichheit gilt genau für  $P = Q$ , die Gleichverteilung auf  $\Omega$ .

**Beweis:** Dank Gibbs' Informationsungleichung  $H(P) \leq H(P, Q)$  gilt:

$$H(P) \leq \int_{x \in \Omega} p(x) \ln \text{vol}_n(\Omega) dx \stackrel{P}{=} \ln \text{vol}_n(\Omega)$$

Für  $P = Q$  gilt Gleichheit, sonst die strikte Ungleichung „ $<$ “. □

**Beispiel:** Die Gleichverteilung auf  $[0, 1]^n$  hat die Entropie  $\ln 1 = 0$ .  
⚠ Die kontinuierliche Entropie kann negativ sein, die diskrete niemals.

**Maximale Entropie: Exponentialverteilung  $E(\mu^{-1})$**  W435

Auf  $\Omega = \mathbb{R}_{\geq 0}$  hat die Exponentialverteilung  $Q := E(\mu^{-1})$  die Dichte

$$q: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}: q(x) = e^{-x/\mu} \cdot \mu^{-1}$$

mit Erwartung  $\mu \in \mathbb{R}_{> 0}$ . Diese können wir wie folgt charakterisieren:

**Satz W4H:** Die Exponentialverteilung maximiert die Entropie.  
(1) Für jedes kontinuierliche WMaß  $P$  auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  mit Erwartung  $\leq \mu$  gilt

$$H(P) \leq H(Q) = 1 + \ln \mu.$$

Gleichheit gilt genau für  $P = Q$ , die Exponentialverteilung  $E(\mu^{-1})$ .

**Beweis:** Dank Gibbs' Informationsungleichung  $H(P) \leq H(P, Q)$  gilt:

$$H(P) \leq \int_{x=0}^{\infty} p(x) \left[ \frac{x}{\mu} + \ln \mu \right] dx \stackrel{P}{\leq} 1 + \ln \mu$$

Für  $P = Q$  gilt Gleichheit, sonst die strikte Ungleichung „ $<$ “. □

**Beispiel:** Die Verteilung  $E(1)$  hat die Dichte  $x \mapsto e^{-x}$  und die Entropie 1.

**Maximale Entropie: Normalverteilung  $N(\mu, \sigma^2)$**  W436

Auf  $\Omega = \mathbb{R}$  hat die Normalverteilung  $Q := N(\mu, \sigma^2)$  die Dichte

$$q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}: q(x) = e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

mit Erwartung  $\mu \in \mathbb{R}$  und Varianz  $\sigma^2 \in \mathbb{R}_{> 0}$ . Entropie-Charakterisierung:

**Satz W4H:** Die Normalverteilung maximiert die Entropie.  
(2) Für jedes kont. WMaß  $P$  auf  $\mathbb{R}$  mit Erwartung  $\mu$  und Varianz  $\leq \sigma^2$  gilt

$$H(P) \leq H(Q) = \ln \sqrt{2\pi} e + \ln \sigma$$

Gleichheit gilt genau für  $P = Q$ , die Normalverteilung  $N(\mu, \sigma^2)$ .

**Beweis:** Dank Gibbs' Informationsungleichung  $H(P) \leq H(P, Q)$  gilt:

$$H(P) \leq \int_{\mathbb{R}} p(x) \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 + \ln(\sigma\sqrt{2\pi}) \right] dx \stackrel{P}{\leq} \frac{1}{2} + \ln(\sigma\sqrt{2\pi})$$

Für  $P = Q$  gilt Gleichheit, sonst die strikte Ungleichung „ $<$ “. □

**Beispiel:** Die Normalverteilung  $N(0, 1)$  hat Entropie  $\ln \sqrt{2\pi} e \approx 1.419$ .

**Entropie im zentralen Grenzwertsatz (ZGS)** W437

Die obigen Rechnungen zeigen eindrucksvolle Beispiele und lassen die große Bedeutung der Entropie erahnen. Als Ausblick skizziere ich drei Anwendungen: Grenzwertsatz, maschinelles Lernen, Thermodynamik.

Gegeben seien unabhängige ZVariablen  $X_1, X_2, \dots: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Summe  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  ist annähernd normalverteilt, also  $S_n \approx N(\mu_n, \sigma_n^2)$  mit  $\mu_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(X_i)$  und  $\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^n \mathbf{V}(X_i)$ . Zentriert und normiert erhalten wir  $S_n^* := (S_n - \mu_n)/\sigma_n \approx N(0, 1)$ . Die Entropie strebt für  $n \rightarrow \infty$  zum Maximum,  $H(S_n^*) \nearrow H(N(0, 1))$ . Die Entropie treibt so die Konvergenz der Verteilungen,  $S_n^* \rightarrow N(0, 1)$ .

Physikalische Anschauung: Die vielen unabhängigen Summanden in  $S_n^*$  sorgen für hohe Entropie. Mit wachsendem  $n$  nähert sich die Entropie dem Maximum... der Normalverteilung, wie in Satz W4H gesehen.

Oft wird der ZGS durch Fourier-Transformation bewiesen. Das ist genial, aber auch etwas unintuitiv. Das Entropie-Argument hingegen entspricht direkt unserer physikalischen Anschauung aus dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik, ist in diesem Sinne also intuitiv näherliegend.

**Entropie im zentralen Grenzwertsatz (ZGS)** W438  
Erläuterung

☺ Mit diesem letzten Höhepunkt endet unsere kurze Einführung in die wunderbare Welt der Wahrscheinlichkeit und insgesamt diese Vorlesung. Unser Weg war lang, auch anstrengend, doch er hat sich wieder gelohnt!

Unsere Beispiele illustrieren eindrücklich: Wahrscheinlichkeit begegnet Ihnen überall, ob Sie wollen oder nicht, in alltäglichen Entscheidungen ebenso wie in Mathematik, Physik und technischen Anwendungen bis hin zu gesellschaftlichen und ökonomischen Belangen.

Unser Ziel sind rationale Entscheidungen unter Unsicherheit. Die Erfahrung zeigt: Auch mit dem Zufall können wir rechnen! Wir wollen nachvollziehbar begründete, quantitative Aussagen. Die Mathematik stellt Ihnen dafür alle Werkzeuge bereit.

Das gilt allgemein für jede physikalisch-technische Betrachtung und insbesondere für raffinierte, fortgeschrittene Konzepte wie die Entropie. Damit können Sie nun der vagen Idee vom „Maß für die Unordnung“ einen präzisen mathematischen Sinn geben.

**Divergenz und Entropie im maschinellen Lernen (ML)** W439  
Erläuterung

Shannon verband 1948 die fundamentalen Begriffe „Information“ und „Entropie“. Jüngst feiert dies im maschinellen Lernen große Erfolge:

Wie kann ein Computer aus Daten lernen? Die Grundidee ist einfach: Die Wirklichkeit entspricht einem WMaß  $P$  (*ground truth*). Das Training anhand von Beispieldaten erzeugt ein approximatives WMaß  $Q$  (*model*). Wie gut ist es? Die Divergenz  $D(P, Q) = H(P, Q) - H(P) \geq 0$  misst die Abweichung des Modells  $Q$  von der Wirklichkeit  $P$ . Diese Zielgröße wollen wir minimieren: Die Entropie misst den Lernfortschritt!

Problem: Leider kennen wir die Entropie  $H(P)$  der Wirklichkeit  $P$  nicht. Geniale Lösung: Es genügt, die Kreuzentropie  $H(P, Q)$  zu minimieren. Sie kann durch Stichprobe geschätzt werden (Monte Carlo Methode). So kann die Güte verbessert und durch Training optimiert werden.

Aus diesem Grund ist die Kreuzentropie  $H(P, Q)$  die zentrale Zielgröße im maschinellen Lernen (ML). Die Erfolge der generativen künstlichen Intelligenz (genAI) beruhen maßgeblich auf dieser fundamentalen Idee und ihrer effizienten Implementierung für gigantisch große Modelle.

**Zum guten Schluss** W440  
Erläuterung

*So jung und mit so geringer Entropie  
kommen wir nie wieder zusammen.*

📺 [Tocotronnic, youtu.be/CpqcZB3sMg](https://www.youtube.com/channel/UCpqcZB3sMg)

In Ihrem Leben, Studium und Karriere, werden diese zentralen Themen eine Rolle spielen. Bewährte Techniken des Ingenieurwesens werden erweitert durch Künstliche Intelligenz, demnächst Quantum Computing, zukünftig noch weitere Ideen, die derzeit noch niemand ahnt.

Ihre mathematische Ausbildung wird Ihnen überall gute Dienste leisten.

Ich wünsche Ihnen, die hier dargelegten Werkzeuge bieten Ihnen eine gute Grundlage im Studium und einen Einstieg zur weiteren Vertiefung. Ich hoffe, damit bleiben die vielen wichtigen Anwendungen nicht „most misunderstood“, sondern führen Sie zu einem besseren Verständnis.



Habe Mut, dich deines eigenen Verstandes zu bedienen!

Much to learn, you still have.  
This is just the beginning.



Kapitel Z

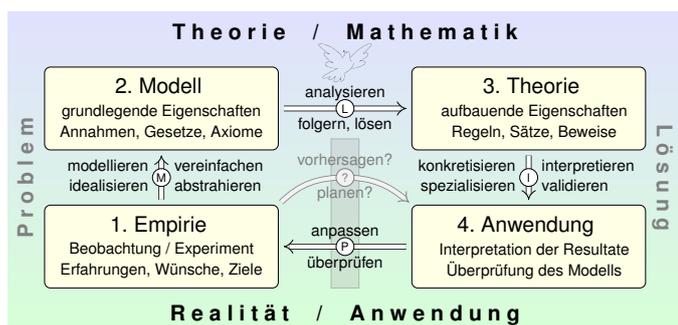
Zusammenfassung

*Wir stehen selbst enttäuscht und sehn betroffen  
Den Vorhang zu und alle Fragen offen.*

Bertolt Brecht (1898–1956), *Der gute Mensch von Sezuan* (1940)

- 1 Integration in mehreren Dimensionen
- 2 Integralsätze in der Ebene und im Raum
- 3 Fourier–Analyse und Laplace–Transformation
- 4 Gewöhnliche Differentialgleichungen (ODE)
- 5 Partielle Differentialgleichungen (PDE)
- 6 Wahrscheinlichkeitsrechnung

Warum ist Mathematik so erfolgreich?



Konkrete Anwendung benötigt abstrakte Kenntnisse; je anspruchsvoller, desto mathematischer! Alles Denken beruht auf Modellen; diese können *deskriptiv* oder *normativ* eingesetzt werden. Deskriptiv: beschreibend (Kettenlinie), erklärend (Planetenbewegung), vorhersagend (Wetter). Normativ: vorschreibend (Bauplan), planend (Raumsonde), gesetzgebend (Klimaschutz). Ingenieur:innen wollen beides, nicht nur passiv vorhersagen, sondern auch aktiv steuern und beeinflussen. Hierzu benötigen Sie ausreichend starke mathematische Werkzeuge.

Warum ist Mathematik so erfolgreich?

Typische Anwendungen verlaufen in folgenden Schritten:

- 1. Grundlegendes Verständnis der vorliegenden Situation:** Möglichst präzise Erfassung durch (passive) Beobachtungen, (aktive) Experimente, Formulierung von Naturgesetzen, Arbeitshypothesen, etc.
- 2. Mathematische Modellierung der vorliegenden Situation:** Vereinfachung und Abstraktion zu einem mathematischen Modell. Dieses besteht aus den relevanten Größen und ihren Beziehungen.
- 3. Lösung durch geeignete mathematische Werkzeuge:** Hierzu nutzen Sie die Techniken Ihrer HM und weitere nach Bedarf. Ziel: Sie kennen und nutzen die möglichen Methoden, Sie optimieren Aufwand und Genauigkeit, Sie entscheiden umsichtig und informiert.
- 4. Anpassung und Überprüfung anhand gegebener Daten:** Ist eine mathematische Lösung oder numerische Näherung gelungen, so passen Sie schließlich die noch freien Parameter des Modells den gegebenen Daten an und überprüfen soweit möglich die Vorhersagen des Modells durch Experimente, Messungen, Alternativmodelle, etc. Falls nötig muss erneut ab (1) ein besseres Modell erstellt werden.

Mathematische Methoden in den Ingenieurwissenschaften

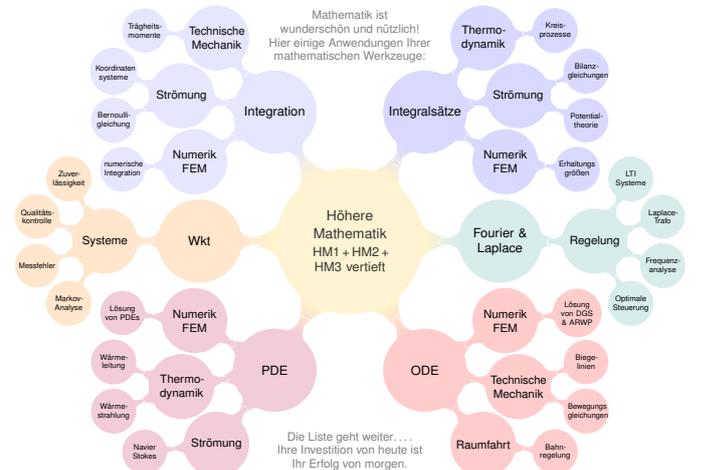


Als Ingenieur:in brauchen Sie Ihr methodisches Handwerkszeug. Dazu gehört als harter Kern und Grundlage die Höhere Mathematik. Je anspruchsvoller die Aufgabe, desto wichtiger wird die Mathematik.

Mathematik ist zugleich abstrakte Theorie und konkrete Anwendung. Sie erklärt und quantifiziert Zusammenhänge: Das ist ihr Nutzen! Dank Abstraktion ist sie universell anwendbar: Das ist ihre Stärke!

Abstraktion strukturiert und vereinfacht: Eine allgemeine Tatsache ist oft leichter zu verstehen und zu erklären als ihre zahlreichen Spezialfälle. Denkökonomie: Daten ändern sich, Methoden bleiben bestehen.

Einige Anwendungen Ihrer mathematischen Werkzeuge



Schlusswort (nach Richard P. Feynman)

*Nun habe ich [...] lang zu Ihnen gesprochen und höre nun damit auf. Einerseits möchte ich mich entschuldigen und andererseits wieder nicht. Ich hoffe – ja, ich weiß –, dass zwei oder drei Dutzend von Ihnen allem mit großer Spannung folgen konnten und eine angenehme Zeit damit verbrachten. Aber ich weiß auch, dass die Kräfte der Lehre von sehr geringer Wirkung sind, außer in jenen glücklichen Umständen, in denen sie praktisch überflüssig sind. Daher darf ich im Hinblick auf die zwei oder drei Dutzend, die alles verstanden haben, sagen, dass ich nichts anderes getan habe, als Ihnen die Dinge zu zeigen. Was die anderen betrifft, tut es mir leid, wenn ich Ihren Widerwillen gegen dieses Fachgebiet erregt habe. [...] Ich hoffe nur, dass ich Sie nicht ernsthaft verwirrt habe, und dass Sie dieses interessante Geschäft nicht aufgeben. Ich hoffe, dass jemand anderes es Ihnen so beibringen kann, dass es Ihnen nicht im Magen liegt, und dass sie trotz allem eines Tages feststellen, dass es nicht so schrecklich ist, wie es aussieht.*

Richard P. Feynman (1918–1988),  
Epilog seiner Vorlesungen über Physik (1965)  
[www.feynmanlectures.caltech.edu/III\\_22.html](http://www.feynmanlectures.caltech.edu/III_22.html)

Zusammenfassung Ihrer HM3

Dieses letzte Kapitel Z versammelt alle Kapitelzusammenfassungen. Es bietet eine knize Bilanz der wichtigsten Ergebnisse und Techniken. Es nützt nur schwer als Einstieg, wohl als Übersicht und Erinnerung. Hierzu sind Rückverweise auf die einzelnen Themen angegeben. Diese Zusammenfassung dient nur im Rückblick als Gedächtnisstütze; zum soliden Verständnis benötigen Sie alle Grundlagen und viel Übung! Dazu hat Ihr HM3-Team Sie das gesamte Semester umfassend betreut. Insbesondere wiederhole ich hier nur Definitionen und Sätze, aber kaum Beispiele und Übungen. Erfahrung, Umsicht und Verständnis lassen sich nicht eintrichtern, sondern nur durch Übung erwerben. Also: Üben Sie! Detaillierte Beispiele, Übungen und Erläuterungen zu jedem Thema bieten die zugehörigen Kapitel und die weiterführende Literatur. Ihre Werkzeuge können Sie nun anwenden und vertiefen.

*Kafkas ganze Kunst besteht darin, den Leser zum Wiederlesen zu zwingen. [...] Genau das hat der Verfasser beabsichtigt.*  
Albert Camus (1913–1960), *Der Mythos des Sisyphos* (1942)

**Definition und erste Eigenschaften des Integrals** Z101  
Fazit

☺ Das Integral  $\int_{\Omega} f$  misst das Volumen unter dem Graphen von  $f$ . Hierzu sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Quader. Messbare Funktionen  $f: \Omega \rightarrow [0, \infty]$  und ihr Integral  $\int_{\Omega} f \in [0, \infty]$  definieren wir nach folgenden fünf Grundregeln:

(1) **Normierung:** Für jeden endlichen Quader  $A \subseteq \Omega$  ist die Indikatorfunktion  $\mathbf{1}_A: \Omega \rightarrow [0, \infty]$  messbar, und es gilt  $\int_{\Omega} \mathbf{1}_A = \text{vol}_n(A)$ .

(2) **Linearität:** Sind  $f, g$  messbar, so auch jede Linearkombination  $af + bg$  mit  $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , und es gilt  $\int_{\Omega}(af + bg) = a \int_{\Omega} f + b \int_{\Omega} g$ .

(3) **Monotonie:** Sind  $f, g$  messbar, so auch  $h = \max(g - f, 0)$ . Aus  $f \leq g$  folgt  $h = g - f$  und  $\int_{\Omega} f \leq \int_{\Omega} g$  dank Additivität.

(4) **Einschachtelung:** Gilt  $f_0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq h \leq \dots \leq g_2 \leq g_1 \leq g_0$  mit  $f_k, g_k$  messbar und  $\int_{\Omega}(g_k - f_k) \searrow 0$ , so ist auch  $h$  messbar. Dank Monotonie gilt dann  $\int_{\Omega} f_k \nearrow \int_{\Omega} h \searrow \int_{\Omega} g_k$ .

(5) **Ausschöpfung:** Sind  $f_0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$  messbar mit  $f_k \nearrow f$ , so ist auch  $f$  messbar, und es gilt  $\int_{\Omega} f_k \nearrow \int_{\Omega} f$ .

☺ Diese Wünsche lassen sich erfüllen: Die kleinste Funktionenmenge, für die dies möglich ist, sind die **Lebesgue-messbaren Funktionen**  $f: \Omega \rightarrow [0, \infty]$ . Hierauf ist das Integral eindeutig durch (1–5) bestimmt.

**Definition und erste Eigenschaften des Integrals** Z102  
Fazit

☺ Ganz einfach: Alle für uns wichtigen Funktionen sind messbar! Alle Treppenfunktionen und alle stetigen Funktionen sind messbar. Mit  $f, g$  sind  $f + g$  und  $f \cdot g$  sowie  $\min(f, g)$  und  $\max(f, g)$  messbar. Konvergiert  $f_k \rightarrow f$  und sind alle  $f_k$  messbar, so ist auch  $f$  messbar. Wir nennen  $f: \mathbb{R}^n \supseteq A \rightarrow [0, \infty]$  messbar, wenn die triviale Fortsetzung  $\tilde{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$  messbar ist, wobei  $\tilde{f}(x) = f(x)$  für  $x \in A$  und  $\tilde{f}(x) = 0$  sonst. Wir definieren dann das Integral von  $f$  durch

$$\int_A f(x) dx := \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x) dx.$$

Genau dann ist eine Menge  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  messbar, wenn  $\mathbf{1}_A$  messbar ist, und

$$\text{vol}_n(A) = \int_A 1 dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_A(x) dx.$$

Ist zudem die Funktion  $f: \Omega \rightarrow [0, \infty]$  messbar, so auch  $\mathbf{1}_A \cdot f$ , und es gilt

$$\int_A f(x) dx = \int_{\Omega} \mathbf{1}_A(x) f(x) dx.$$

**Definition und erste Eigenschaften des Integrals** Z103  
Fazit

Das Integral von  $f: \Omega \rightarrow [0, \infty]$  interpretieren wir als Volumen unter  $f$ . Zu integrieren sei nun eine Funktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ . Wo immer  $f$  negativ ist, ist das Volumen negativ in Ansatz zu bringen. Wir zerlegen  $f = f^+ - f^-$  in **Positivteil**  $f^+$  und **Negativteil**  $f^-$  gemäß

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } f(x) > 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{falls } f(x) < 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt  $f = f^+ - f^-$  und  $|f| = f^+ + f^-$  und umgekehrt  $f^{\pm} = \frac{1}{2}(|f| \pm f)$ . Genau dann ist  $f$  messbar, wenn  $f^{\pm}: \Omega \rightarrow [0, \infty]$  messbar sind.

(1) In diesem Fall ist auch  $|f| = f^+ + f^-$  messbar, und somit gilt

$$\int_{\Omega} |f(x)| dx = \int_{\Omega} f^+(x) dx + \int_{\Omega} f^-(x) dx.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so nennen wir  $f$  **(absolut) integrierbar**. In diesem Fall können wir das Integral von  $f$  definieren durch

$$\int_{\Omega} f(x) dx := \int_{\Omega} f^+(x) dx - \int_{\Omega} f^-(x) dx.$$

**Definition und erste Eigenschaften des Integrals** Z104  
Fazit

☺ Die Menge aller absolut integrierbaren Funktionen

$$L^1(\Omega) = \{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} |f(x)| dx < \infty \}$$

ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Hierauf ist das Integral eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung

$$L^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_{\Omega} f(x) dx.$$

Sie ist normiert, monoton, erfüllt Einschachtelung und Ausschöpfung. Durch diese Eigenschaften ist das Integral eindeutig bestimmt.

☺ Das Integral ist linear; dank  $\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_{A \cup B} + \mathbf{1}_{A \cap B}$  folgt daher

$$\int_A f(x) dx + \int_B f(x) dx = \int_{A \cup B} f(x) dx + \int_{A \cap B} f(x) dx.$$

Der letzte Term entfällt falls  $\text{vol}_n(A \cap B) = 0$ , insb. falls  $A \cap B = \emptyset$ .

☺ Das Integral ist monoton; dank  $-|f| \leq f \leq |f| \leq \sup|f|$  folgt daher

$$\left| \int_A f(x) dx \right| \leq \int_A |f(x)| dx \leq \sup_A |f| \cdot \text{vol}(A).$$

☺ Zwei fast überall gleiche Funktionen verhalten sich bei Integration genau gleich. Wir dürfen und werden sie daher als gleich betrachten.

**Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung** Z105  
Fazit

Der **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung** B11 erklärt, in welchem Sinne Differenzieren und Integrieren einander umkehren: Jede stetige Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist integrierbar. Ihre Integralfunktion

$$F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) := \int_a^x f(t) dt$$

ist differenzierbar, und für die Ableitung gilt  $F' = f$ . Ist umgekehrt  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar mit stetiger Ableitung  $f = F'$ , so gilt

$$\int_a^b f(x) dx = [F]_a^b \quad \text{mit} \quad [F]_a^b := F(b) - F(a).$$

☺ Der HDI ist das Arbeitspferd der eindimensionalen Integration: die Berechnung vieler elementarer Integrale gelingt erst dank HDI. Dieser nützliche Zusammenhang gilt noch wesentlich allgemeiner:

$f$ stetig	$\iff$	$F$ stetig differenzierbar	<b>B123</b>
$f$ stückweise stetig	$\iff$	$F$ stückweise stetig differenzierbar	<b>B213</b>
$f$ absolut integrierbar	$\iff$	$F$ absolut stetig	<b>B214</b>

**Elementare Grundintegrale / Stammfunktionen** Z106  
Fazit

$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} \quad (a \neq -1)$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x $
$\int e^x dx = e^x$	$\int \ln x dx = x \ln x - x$
$\int \cos x dx = \sin x$	$\int \sin x dx = -\cos x$
$\int \cosh x dx = \sinh x$	$\int \sinh x dx = \cosh x$
$\int \frac{1}{(\cos x)^2} dx = \tan x$	$\int \frac{1}{(\sin x)^2} dx = -\cot x$
$\int \frac{1}{(\cosh x)^2} dx = \tanh x$	$\int \frac{1}{(\sinh x)^2} dx = -\coth x$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x$	$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \ln \sqrt{\left  \frac{x+1}{x-1} \right }$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$	$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \text{arsinh } x$

☺ Probe als Übung: Integrale sind durch Ableiten leicht nachzuprüfen!

**Partielle Integration und Substitution** Z107  
Fazit

Aus der Produktregel folgt dank HDI die **partielle Integration** **B129**: Für alle stetig differenzierbaren Funktionen  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$\int_{x=a}^b f(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)]_{x=a}^b - \int_{x=a}^b f'(x) g(x) dx.$$

Aus der Kettenregel folgt dank HDI die **Substitutionsregel** **B131**: Für  $g: [a, b] \rightarrow [c, d]$  stetig differenzierbar und  $f: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig gilt

$$\int_{t=a}^b f(g(t)) g'(t) dt = \int_{u=g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

☺ Damit lassen sich bereits viele Integrale elementar berechnen.

☺ Jede rationale Funktion  $r(x) = p(x)/q(x)$  ist elementar integrierbar durch Partialbruchzerlegung und unsere Grundintegrale. **B135**

⚠ Viele elementare Funktionen sind nicht elementar integrierbar! Prominenteste Beispiele sind die Glockenkurve  $\exp(-x^2/2)$  **B145** und die Spaltfunktion  $\text{si}(x) = \sin(x)/x$  **B149**. Hier nutzen wir Potenzreihen o.ä.

**Uneigentliche Integrale und Cauchy-Hauptwert** Z108  
Fazit

Zur Integration über ganz  $\mathbb{R}$  haben wir drei nützliche Möglichkeiten:

(1) Bei **absoluter Integration** zerlegen wir  $f = f^+ - f^-$  und setzen

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx := \int_{\mathbb{R}} f^+(x) dx - \int_{\mathbb{R}} f^-(x) dx.$$

⚠ Hierzu müssen rechts beide Integrale endlich sein.

☺ Dieser Integrationsbegriff gilt allgemein über  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  (A3K).

(2) Das **uneigentliche Integral** von  $f$  ist die Summe der Grenzwerte

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^z f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_z^b f(x) dx.$$

⚠ Hierzu müssen beide Grenzwerte existieren und endlich sein.

☺ Existiert das Integral (1) so auch (2) und beide sind gleich. **B221**

(3) Der **Cauchy-Hauptwert** von  $f$  ist der Grenzwert (falls existent)

$$(\text{CH}) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx.$$

☺ Existiert das Integral (2) so auch (3) und beide sind gleich. **B223**

⚠ Die Umkehrungen (3)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (1) gelten im Allgemeinen nicht. **B417**

**Vergleich von Reihe und Integral** Z109  
Fazit

Sei  $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  monoton fallend. Für alle  $a \leq b$  in  $\mathbb{N}$  gilt dann

$$\int_{x=a}^{b+1} f(x) dx \leq \sum_{k=a}^b f(k) \leq f(a) + \int_{x=a}^b f(x) dx.$$

Das ist oft eine nützliche Näherung: Wir ersetzen mühsame Summen durch bequeme Integral, oder auch umgekehrt je nach Anwendung. Durch Grenzübergang  $b \rightarrow \infty$  erhalten wir

$$\int_{x=a}^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{k=a}^{\infty} f(k) \leq f(a) + \int_{x=a}^{\infty} f(x) dx.$$

Insbesondere haben Reihe und Integral gleiches Konvergenzverhalten.

**Beispiel:** Für die Funktion  $f(x) = 1/x$  erhalten wir

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$$

☺ Die **harmonische Reihe** wächst wie der natürliche Logarithmus! Insbesondere erkennen wir die Divergenz  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ .

**Abelscher Grenzwertsatz** Z110  
Fazit

☺ Jede Potenzreihe ist stetig im **Inneren** ihres Konvergenzkreises. Abels Grenzwertsatz ergänzt dies zur Stetigkeit in **Randpunkten**:

Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  eine konvergente Reihe komplexer Zahlen  $a_k \in \mathbb{C}$ . Dann konvergiert die Potenzreihe  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  für alle  $x \in [0, 1]$  und die so definierte Funktion  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  ist stetig, sogar in  $x = 1$ . Für  $x \nearrow 1$  konvergiert also  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  gegen  $f(1) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ .

**Beispiel:** Für alle  $x \in [0, 1[$  gilt die Reihenentwicklung

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots$$

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \dots$$

Für  $x \nearrow 1$  erhalten wir dank Abel die beiden berühmten Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

**Konvergenzkriterium von Leibniz** Z111  
Fazit

Wir untersuchen die Konvergenz von Reihen und Integralen der Form

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_k,$$

$$(2) \quad \int_{x=0}^{\infty} e^{i\omega x} a(x) dx := \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{x=0}^r e^{i\omega x} a(x) dx, \quad \omega \neq 0.$$

(1) Die Folge  $a_k \in \mathbb{R}$  sei monoton fallend gegen 0, kurz  $a_k \searrow 0$ , also  $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots$  und  $a_k \rightarrow 0$ . Dann konvergiert die Reihe (1), und wir haben die Fehlerabschätzung  $|\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k a_k| \leq a_n \searrow 0$ .

(2) Die Funktion  $a: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  sei monoton fallend gegen 0, kurz  $a(x) \searrow 0$ , dann konvergiert das Integral (2), ebenso mit  $\cos(\omega x)$  und  $\sin(\omega x)$ .

**Beispiel:** Das Leibniz-Kriterium sichert die Konvergenz von Reihen wie den beiden obigen  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k / (k+1)$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k / (2k+1)$ .

☹ Über den Grenzwert macht das Leibniz-Kriterium keine Aussage.

☺ Immerhin erlaubt es praktische Näherungen mit Fehlerabschätzung!

Für die Konvergenz trigonometrischer Reihen wie  $\sum_{k=1}^{\infty} e^{ikx}/k^a$  oder  $\sum_{k=1}^{\infty} \cos(kx)/k^a$  oder  $\sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx)/k^a$  nutzen wir folgendes Kriterium.

**Konvergenzkriterium von Dirichlet** Z112  
Fazit

Wir untersuchen die Konvergenz von Reihen und Integralen der Form

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_k,$$

$$(2) \quad \int_{x=0}^{\infty} a(x) b(x) dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{x=0}^r a(x) b(x) dx.$$

(1) Die Folge  $a_k \in \mathbb{R}$  sei monoton fallend gegen 0, kurz  $a_k \searrow 0$ . Die Folge  $b_k \in \mathbb{C}$  habe beschränkte Partialsummen  $B_n = \sum_{k=0}^{n-1} b_k$ , das heißt  $|B_n| \leq M$  für eine Konstante  $M \in \mathbb{R}$  und alle Indizes  $n \in \mathbb{N}$ . Dann konvergiert die Reihe (1) mit Fehler  $\leq 2M a_n \searrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

(2) Die Funktion  $a: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  sei monoton fallend gegen 0, kurz  $a(x) \searrow 0$ . Die Funktion  $b: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$  sei auf jedem Intervall  $[0, r]$  integrierbar mit beschränkter Integralfunktion  $B(r) = \int_0^r b(x) dx$ , das heißt  $|B(r)| \leq M$ . Dann konvergiert das Integral (2) mit Fehler  $\leq 2M a(r) \searrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$ .

☹ Über den Grenzwert macht das Dirichlet-Kriterium keine Aussage.

☺ Immerhin erlaubt es praktische Näherungen mit Fehlerabschätzung!

**Komplexe Funktionen und ihr Integral** Z113  
Fazit

Auf  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  betrachten wir neben reellen auch komplexe Funktionen. Jede komplexe Funktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  können wir zerlegen in ihren

**Realteil**  $\operatorname{Re} f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \operatorname{Re} f(x)$ , und  
**Imaginärteil**  $\operatorname{Im} f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \operatorname{Im} f(x)$ .

Hieraus lässt sich  $f$  zusammensetzen gemäß  $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$ .  
 Es gilt  $|f|^2 = |\operatorname{Re} f|^2 + |\operatorname{Im} f|^2$  und  $|\operatorname{Re} f|, |\operatorname{Im} f| \leq |f| \leq |\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f|$ .

Wir nennen  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  **messbar**, wenn  $\operatorname{Re} f$  und  $\operatorname{Im} f$  messbar sind.  
 Wir nennen  $f$  **integrierbar**, wenn  $\operatorname{Re} f$  und  $\operatorname{Im} f$  integrierbar sind.  
 Äquivalent hierzu: die Funktion  $f$  ist messbar und  $\int_{\Omega} |f| < \infty$ .  
 In diesem Fall können wir das Integral von  $f$  definieren durch

$$\int_{\Omega} f := \int_{\Omega} \operatorname{Re} f + i \int_{\Omega} \operatorname{Im} f.$$

☺ Wegen  $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$  ist das reelle Integral ein Spezialfall des komplexen.  
 ☺ Linearität überträgt unsere Rechenregeln aufs komplexe Integral.

**Der Hauptsatz (HDI) für komplexe Integrale** Z114  
Fazit

☺ Wir formulieren allgemeine Rechenregeln gleich reell und komplex. Der HDI gilt wörtlich für komplexe genauso wie für reelle Funktionen:  
 Jede stetige Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ist integrierbar. Ihre Integralfunktion

$$F: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad F(x) := \int_a^x f(t) dt$$

ist differenzierbar, und für die Ableitung gilt  $F' = f$ . Ist umgekehrt  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  differenzierbar mit stetiger Ableitung  $f = F'$ , so gilt

$$\int_a^b f(x) dx = [F]_a^b \quad \text{mit} \quad [F]_a^b := F(b) - F(a).$$

**Beispiel:** Für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  gilt:

$$\int_{t=a}^b e^{i\omega t} dt = \left[ \frac{1}{i\omega} e^{i\omega t} \right]_{t=a}^b$$

☺ Alles gilt ebenso für  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^n$  und  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ , wobei komponentenweise integriert und differenziert wird.

**Der Satz von Fubini** Z115  
Fazit

Seien  $X \subseteq \mathbb{R}^p$  und  $Y \subseteq \mathbb{R}^q$  messbare Teilmengen, zum Beispiel Quader. Der Satz von Fubini C1E führt die Integration über  $X \times Y$  zurück auf die (iterierte aber jeweils einfache) Integration über  $X$  und über  $Y$ . Das hilft.

(1) Absolute Integration: Für jede messbare Funktion  $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$  gilt

$$\int_{X \times Y} |f(x, y)| d(x, y) = \int_X \int_Y |f(x, y)| dy dx = \int_Y \int_X |f(x, y)| dx dy.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so ist  $f$  absolut integrierbar, und dann gilt

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d(x, y) = \int_X \int_Y f(x, y) dy dx = \int_Y \int_X f(x, y) dx dy.$$

⚠ Hierzu ist die absolute Integrierbarkeit (1) wesentlich! Andernfalls ist das linke Integral nicht definiert und die rechten beiden evtl. verschieden.  
 Für einfache, aber drastische Gegenbeispiele siehe C117, C409, C413.  
 Diese Vorsichtsmaßnahme ist also nötig, die müssen Sie beherrschen.

☺ Absolute Integrierbarkeit und somit Vertauschbarkeit gilt, wenn  $X, Y$  und  $f$  beschränkt sind, also insbesondere für  $X, Y$  kompakt und  $f$  stetig.

**Integration über Normalbereiche** Z116  
Fazit

Integration über Normalbereiche ist ein wichtiger Spezialfall und die wohl häufigste Anwendung des Satzes von Fubini:  
 Das Integral einer absolut integrierbaren Funktion  $f: B \rightarrow \mathbb{C}$  über

$$B = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid a_k(x_1, \dots, x_{k-1}) \leq x_k \leq b_k(x_1, \dots, x_{k-1}) \text{ für alle } k \}$$

lässt sich durch iterierte eindimensionale Integrale berechnen:

$$\int_B f(x) dx = \int_{x_1=a_1}^{b_1} \int_{x_2=a_2(x_1)}^{b_2(x_1)} \dots \int_{x_n=a_n(x_1, \dots, x_{n-1})}^{b_n(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \dots dx_2 dx_1$$

☺ Dies gilt ebenso bei jeder anderen Reihenfolge der Variablen. Sie haben hier also die Wahl der Integrationsreihenfolge.

⚠ Man muss hierzu allerdings die Integrationsgrenzen umschreiben! Geometrische Hilfe: Das gelingt einfach und sicher anhand einer Skizze.

⚠ Das Ergebnis ist dasselbe, aber der Rechenweg kann verschieden schwierig sein. Für ein bemerkenswertes Beispiel siehe C133.

**Der Transformationssatz** Z117  
Fazit

Der Transformationssatz C2B verallgemeinert die eindimensionale Substitution: Wir wählen neue Variablen als geschickte Koordinaten. Seien  $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$  messbar und  $\Phi: X \rightarrow Y$  bijektiv und stetig diff'bar.

(1) Ist  $f: Y \rightarrow \mathbb{C}$  messbar, so auch  $(f \circ \Phi) \cdot \det \Phi': X \rightarrow \mathbb{C}$ , und es gilt

$$\int_Y |f(y)| dy = \int_X |f(\Phi(x))| \cdot |\det \Phi'(x)| dx.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so ist  $f$  absolut integrierbar, und dann gilt

$$\int_Y f(y) dy = \int_X f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)| dx.$$

⚠ Auch hier ist die absolute Integrierbarkeit (1) wesentlich! [C413](#)  
Die Ableitung  $\Phi': X \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  ist die **Jacobi-Matrix**,  $\Phi' = (\partial_j \Phi_i)_{ij}$ .  
Die Funktion  $\det \Phi': X \rightarrow \mathbb{R}$  ist hierzu die **Funktionaldeterminante**.  
Ihr Betrag  $|\det \Phi'|$  misst die durch  $\Phi$  bewirkte **Volumenverzerrung**.

😊 Für eindimensionale Integrale entspricht dies der Substitutionsregel. Allerdings nehmen wir hier den Betrag und vergessen die Orientierung. Allgemeiner formuliert Satz C2c die orientierte Version mit Vorzeichen.

**Polarkoordinaten** Z118  
Fazit

Fubini und Transformation sind zwei häufig genutzte Techniken. Polarkoordinaten sind eine einfache und häufige Anwendung. Zu Radien  $0 \leq r_0 < r_1 < \infty$  betrachten wir den Kreisring

$$K = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid r_0^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_1^2 \}.$$

Diesen können wir durch **Polarkoordinaten** parametrisieren:

$$\Phi: [r_0, r_1] \times [0, 2\pi] \rightarrow K \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \end{pmatrix} =: \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix}$$

Jacobi-Matrix und Funktionaldeterminante sind hier:

$$\Phi' = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \varphi)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix} \implies \det \Phi' = \rho$$

Für jede absolut integrierbare Funktion  $f: K \rightarrow \mathbb{C}$  gilt somit:

$$\int_K f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} d(x, y) \stackrel{\text{Trafo}}{\underset{\text{Fub}}{=}} \int_{\rho=r_0}^{r_1} \int_{\varphi=0}^{2\pi} f \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \end{pmatrix} \underbrace{\rho}_{\text{Fu'det}} d\varphi d\rho$$

**Zylinderkoordinaten** Z119  
Fazit

Fubini und Transformation sind zwei häufig genutzte Techniken. Zylinderkoordinaten sind eine einfache und häufige Anwendung. Zu Radien  $r_0, r_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  betrachten wir den Rotationskörper

$$K = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq z \leq b, r_0(z)^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_1(z)^2 \}.$$

Diesen können wir durch **Zylinderkoordinaten** parametrisieren:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} =: \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

mit den Grenzen  $a \leq z \leq b$  und  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  sowie  $r_0(z) \leq \rho \leq r_1(z)$ . Die Funktionaldeterminante ist hier wie zuvor  $\det \Phi' = \rho$ . (Übung!)

Für jede absolut integrierbare Funktion  $f: K \rightarrow \mathbb{C}$  gilt somit:

$$\int_K f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} d(x, y, z) \stackrel{\text{Trafo}}{\underset{\text{Fub}}{=}} \int_{z=a}^b \int_{\rho=r_0(z)}^{r_1(z)} \int_{\varphi=0}^{2\pi} f \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \underbrace{\rho}_{\text{Fu'det}} d\varphi d\rho dz$$

**Kugelkoordinaten** Z120  
Fazit

Fubini und Transformation sind zwei häufig genutzte Techniken. Kugelkoordinaten sind eine einfache und häufige Anwendung. Zum Radius  $r > 0$  betrachten wir die Kugelschale

$$K = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r_0^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq r_1^2 \}.$$

Diese können wir durch **Kugelkoordinaten** parametrisieren:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \sin \theta \\ \rho \sin \varphi \sin \theta \\ \rho \cos \theta \end{pmatrix} =: \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix}$$

mit den Grenzen  $r_0 \leq \rho \leq r_1$  und  $0 \leq \theta \leq \pi$  sowie  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Die Funktionaldeterminante ist hier  $\det \Phi' = \rho^2 \sin \theta$ . (Übung!)

Für jede absolut integrierbare Funktion  $f: K \rightarrow \mathbb{C}$  gilt somit:

$$\int_K f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} d(x, y, z) \stackrel{\text{Trafo}}{\underset{\text{Fub}}{=}} \int_{\rho=r_0}^{r_1} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} f \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \sin \theta \\ \rho \sin \varphi \sin \theta \\ \rho \cos \theta \end{pmatrix} \underbrace{\rho^2 \sin \theta}_{\text{Fu'det}} d\varphi d\theta d\rho$$

**Wann vertauschen Integral und Reihe?** Z121  
Fazit

Für  $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$  möchten wir Integral und Reihe vertauschen:

$$\int_{\Omega} \left( \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right) dx \stackrel{?}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \int_{\Omega} f_k(x) dx \right)$$

⚠ Einfache Gegenbeispiele zeigen: Vertauschbarkeit gilt nicht immer!

Für die Vertauschbarkeit haben wir folgende **hinreichende Kriterien**:

- Gleichheit gilt für  $f_k \geq 0$ : monotone Konvergenz! [A309](#)
- Gleichheit gilt für  $\int \sum |f_k| < \infty$  bzw. für  $\sum \int |f_k| < \infty$ , [D106](#)
- insbesondere für konvergente Potenzreihen,  $f_k(x) = a_k x^k$ , [D107](#)

😊 Dieses einfache Kriterium ist in vielen Anwendungen nützlich. Es verhindert insbesondere, dass Masse nach Unendlich verschwindet.

⚠ Andernfalls ist Vorsicht geboten: Vertauschbarkeit gilt nicht immer! Schon in einfachsten Gegenbeispielen gilt  $\int \sum f_k \neq \sum \int f_k$ . [D101](#)

⚠ Diese Kriterien sind hinreichend, aber i.A. nicht notwendig. [D429](#)  
Die majorisierte Konvergenz erlaubt genauere Aussagen.

**Wann vertauschen Integral und Limes?** Z122  
Fazit

Für  $f_n \rightarrow f$  möchten wir Integral und Limes vertauschen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx \stackrel{?}{=} \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

⚠ Einfache Gegenbeispiele zeigen: Vertauschbarkeit gilt nicht immer!

Für die Vertauschbarkeit haben wir folgende **hinreichende Kriterien**:

- Gleichheit gilt bei monotoner Konvergenz  $0 \leq f_n \nearrow f$ , [A309](#)
- bei majorisierter Konvergenz  $f_n \rightarrow f$  mit  $|f_n| \leq h$  und  $\int_{\Omega} h < \infty$ ,
- insbesondere, wenn  $\text{vol}(\Omega) < \infty$  und  $|f_n| \leq M \in \mathbb{R}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

😊 Dies verhindert, dass Masse nach Unendlich verschwindet.

😊 Sei  $h: \Omega \rightarrow [0, \infty]$  integrierbar. Auf der Teilmenge aller messbaren Funktionen  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  mit Schranke  $|f| \leq h$  ist die Zuordnung  $f \mapsto \int_{\Omega} f$  folgenstetig: Aus punktwieser Konvergenz  $f_n \rightarrow f$  folgt  $\int_{\Omega} f_n \rightarrow \int_{\Omega} f$ . Dies ist eine starke und nützliche Stetigkeitseigenschaft des Integrals!

⚠ Andernfalls ist Vorsicht geboten: Vertauschbarkeit gilt nicht immer! Wie zuvor gesehen können selbst einfache Beispiele fehlschlagen.

**Stetigkeit von Parameterintegralen** Z123  
Fazit

Wir wollen Stetigkeit nutzen und Grenzwerte unter das Integral ziehen:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_Y f(x, y) dy \stackrel{?}{=} \int_Y \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) dy = \int_Y f(x_0, y) dy$$

⚠ Einfache Gegenbeispiele zeigen: Vertauschbarkeit gilt nicht immer!

Sei  $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $X \subseteq \mathbb{R}^p$  offen und  $Y \subseteq \mathbb{R}^q$ . Zudem existiere

$$F: X \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad F(x) := \int_Y f(x, y) dy.$$

Für die Stetigkeit von  $F$  haben wir folgende **hinreichende Kriterien**:

- Sie gilt, wenn  $f$  stetig ist und  $Y$  kompakt, oder allgemeiner,
- wenn  $f$  bezüglich  $x$  stetig ist und über  $Y$  majorisiert integrierbar.

In diesem Fall dürfen wir den Grenzwert unter das Integral ziehen:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_Y f(x, y) dy \stackrel{!}{=} \int_Y \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) dy = \int_Y f(x_0, y) dy.$$

**Ableitung von Parameterintegralen** Z124  
Fazit

Wir wollen differenzieren und die Ableitung unter das Integral ziehen:

$$F(x) = \int_Y f(x, y) dy \implies \frac{\partial}{\partial x_j} F(x) \stackrel{?}{=} \int_Y \frac{\partial}{\partial x_j} f(x, y) dy$$

⚠ Einfache Gegenbeispiele zeigen: Vertauschbarkeit gilt nicht immer!

Sei  $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $X \subseteq \mathbb{R}^p$  offen und  $Y \subseteq \mathbb{R}^q$ . Zudem existiere

$$F: X \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad F(x) := \int_Y f(x, y) dy.$$

Für die stetige Differenzierbarkeit von  $F$  haben wir folgende Kriterien:

- Sie gilt, wenn  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  stetig ist und  $Y$  kompakt, oder allgemeiner,
- wenn  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  bezüglich  $x_j$  stetig ist und über  $Y$  majorisiert int'bar.

In diesem Fall dürfen wir die Ableitung unter das Integral ziehen:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} F(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_Y f(x, y) dy \stackrel{!}{=} \int_Y \frac{\partial}{\partial x_j} f(x, y) dy.$$

Kurvenintegrale	Z201 Fazit
<p>Ein <b>Weg</b> ist eine stetige Abbildung <math>\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n</math>, hier meist <math>n \in \{2, 3\}</math>. Er parametrisiert die <b>Kurve</b> <math>\Gamma = \{\gamma(t) \mid a \leq t \leq b\} \subseteq \mathbb{R}^n</math> als Bildmenge. Der Weg heißt <b>regulär</b>, wenn <math>\gamma</math> injektiv ist und stetig differenzierbar mit <math>\gamma'(t) \neq 0</math> für alle <math>t \in [a, b]</math>. Seine Bildmenge <math>\Gamma</math> heißt dann <b>glatte Kurve</b>. Am Punkt <math>s = \gamma(t)</math> heftet das infinitesimale <b>Wegelement</b> <math>ds = \gamma'(t) dt</math>. Das <b>Kurvenintegral</b> eines Skalarfeldes <math>g: \mathbb{R}^n \supseteq \Gamma \rightarrow \mathbb{R}</math> entlang <math>\gamma</math> ist</p> $\int_{\Gamma} g  d\Gamma  = \int_{s \in \Gamma} g(s)  ds  := \int_{t=a}^b g(\gamma(t)) \cdot  \gamma'(t)  dt.$ <p>Speziell für <math>g = 1</math> erhalten wir so die Länge <math>\text{vol}_1(\Gamma) = \ell(\gamma)</math> der Kurve <math>\Gamma</math>. Das <b>Arbeitsintegral</b> eines Vektorfeldes <math>f: \mathbb{R}^n \supseteq \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n</math> entlang <math>\gamma</math> ist</p> $\int_{\Gamma} f \cdot d\Gamma = \int_{s \in \Gamma} f(s) \cdot ds := \int_{t=a}^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$ <p>Das Arbeitsintegral wechselt das Vorzeichen bei Orientierungsumkehr.</p> <p>😊 Diese Integrale sind invariant bei (positiver) Umparametrisierung und somit wohldefiniert für jede (orientierte) stückweise glatte Kurve <math>\Gamma</math>.</p>	

Glatte Flächenstücke	Z202 Fazit
<p><math>D \subseteq \mathbb{R}^2</math> heißt <b>Kompaktum mit stückweise glattem Rand</b>, wenn gilt:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>D</math> ist kompakt und der Rand <math>\partial D</math> ist eine stückweise glatte Kurve.</li> <li>In jedem regulären Randpunkt <math>s \in \partial D</math> liegt das Innere von <math>D</math> auf der einen Seite von <math>\partial D</math> und das Äußere auf der anderen Seite.</li> </ul> <p>Beispiele: Rechtecke, Polygone, Kreisscheiben, Kreisringe, ...</p> <p>Der Rand ist <b>positiv orientiert</b>, wenn <math>D</math> stets links von <math>\partial D</math> liegt. Die Einheitstangente <math>t_{\partial D}: \partial D \rightarrow \mathbb{R}^2</math> zeigt in Richtung der Orientierung, die Einheitsnormale <math>n_{\partial D} = \circlearrowleft t_{\partial D}: \partial D \rightarrow \mathbb{R}^2</math> zeigt überall aus <math>D</math> heraus.</p> <p>Sei <math>D \subseteq \mathbb{R}^2</math> zusammenhängend kompakt mit stückweise glattem Rand. Ein parametrisiertes <b>Flächenstück</b> ist eine <math>C^1</math>-Abbildung <math>\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3</math>. Senkrecht auf den <b>Tangentenvektoren</b> <math>\partial_x \Phi(x, y)</math> und <math>\partial_y \Phi(x, y)</math> steht der <b>Normalenvektor</b> <math>\partial_x \Phi(x, y) \times \partial_y \Phi(x, y)</math> für <math>(x, y) \in D</math>. Die Parametrisierung <math>\Phi</math> heißt <b>regulär</b>, wenn sie injektiv ist und zudem <math>\partial_x \Phi(x, y) \times \partial_y \Phi(x, y) \neq 0</math> in jedem Punkt <math>(x, y) \in D</math> erfüllt. Das Bild <math>S = \Phi(D) \subseteq \mathbb{R}^3</math> heißt dann <b>glattes Flächenstück</b>. Der Rand <math>\partial S := \Phi(\partial D)</math> ist dann eine stückweise glatte Kurve.</p>	

Flächenintegrale	Z203 Fazit
<p>Flächen <math>S \subseteq \mathbb{R}^3</math> parametrisieren wir (stückweise) durch <math>\Phi: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow S</math>. An <math>s = \Phi(x, y)</math> heftet das inf. Flächenelement <math>dS = (\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi) d(x, y)</math>. Das <b>Flächenintegral</b> eines Skalarfeldes <math>g: \mathbb{R}^3 \supseteq S \rightarrow \mathbb{R}</math> entlang <math>\Phi</math> ist</p> $\int_{s \in S} g(s)  dS  := \int_{(x,y) \in D} g(\Phi(x, y)) \cdot  \partial_x \Phi(x, y) \times \partial_y \Phi(x, y)  d(x, y).$ <p>Speziell für <math>g = 1</math> erhalten wir den Inhalt <math>\text{vol}_2(\Phi) = \text{vol}_2(S)</math> der Fläche <math>S</math>. Das <b>Flussintegral</b> eines Vektorfeldes <math>f: \mathbb{R}^3 \supseteq S \rightarrow \mathbb{R}^3</math> entlang <math>\Phi</math> ist</p> $\int_{s \in S} f(s) \cdot dS := \int_{(x,y) \in D} f(\Phi(x, y)) \cdot (\partial_x \Phi(x, y) \times \partial_y \Phi(x, y)) d(x, y).$ <p>Der Normalenvektor <math>\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi</math> im Punkt <math>\Phi(x, y)</math> steht senkrecht auf <math>S</math>. Für das Flussintegral zählt daher nur der Anteil von <math>f</math> senkrecht zu <math>S</math>. Das Flussintegral wechselt das Vorzeichen bei Orientierungsumkehr.</p> <p>😊 Diese Integrale sind invariant bei (positiver) Umparametrisierung, somit wohldefiniert für jede (orientierte) stückweise glatte Fläche <math>S</math>.</p>	

Kompakta mit stückweise glattem Rand	Z204 Fazit
<p>Hier ist <math> dS  =  d\Phi  =  \partial_x \Phi \times \partial_y \Phi  d(x, y)</math> das <b>skalare Flächenelement</b> und <math>dS = d\Phi = (\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi) d(x, y)</math> das <b>vektorielle Flächenelement</b>. Die Zerlegung <math>dS = n(s)  dS </math> definiert die Einheitsnormale <math>n: S \rightarrow \mathbb{R}^3</math>. Diese definiert für jedes Flächenstück eine der beiden Orientierungen. Für stückweise glatte Flächen verlangen wir, dass die Orientierungen einzelner Flächenstücke am gemeinsamen Rand zusammenpassen.</p> <p>😊 Zur numerischen Approximation können wir die Kurve / Fläche triangulieren und das Vektorfeld linearisieren / Taylor-entwickeln. Für Polygone [E017] oder Polyeder [G325] und lineare Vektorfelder ist dies exakt.</p> <p><math>V \subseteq \mathbb{R}^3</math> heißt <b>Kompaktum mit stückweise glattem Rand</b>, wenn gilt:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>V</math> ist kompakt und der Rand <math>\partial V</math> ist eine stückweise glatte Fläche.</li> <li>In jedem regulären Punkt <math>s \in \partial V</math> liegt das Innere von <math>V</math> auf der einen Seite von <math>\partial V</math> und das Äußere von <math>V</math> auf der anderen Seite.</li> </ul> <p>Beispiele: Quader, Polyeder, Vollkugeln, Kugelschalen, Volltori, ...</p> <p>Der Rand <math>\partial V</math> ist <b>positiv orientiert</b>, wenn <math>n_{\partial V}</math> stets nach außen zeigt. Die Einheitsnormale ist der Einheitsvektor in Richtung <math>d\Phi = n_{\partial V}  d\Phi </math>.</p>	

Der HDI als eindimensionaler Integralsatz	Z205 Fazit
<p>Unsere Integralsätze beruhen alle auf dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI, Satz B11) und verallgemeinern diesen:</p> <p><b>1dim:</b> Jedes kompakte Intervall <math>[a, b] \subseteq \mathbb{R}</math> hat als Rand <math>\partial[a, b] = \{a, b\}</math>. Der Startpunkt zählt negativ, <math>n(a) = -1</math>, der Zielpunkt positiv, <math>n(b) = +1</math>. Für jede stetig differenzierbare Funktion <math>f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}</math> gilt dann</p> $\int_{s \in [a,b]} f'(s) ds \stackrel{\text{HDI}}{=} \sum_{s \in \{a,b\}} f(s) n(s) = f(b) - f(a).$ <p><b>Allgemein:</b> Sei <math>\Omega \subseteq \mathbb{R}^n</math> offen und <math>f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}</math> stetig differenzierbar. Zudem sei <math>\Gamma \subseteq \Omega</math> eine stückweise glatte und orientierte Kurve. Für das Arbeitsintegral von <math>f' = \text{grad } f</math> entlang <math>\Gamma</math> gilt dann:</p> $\int_{s \in \Gamma} f'(s) \cdot ds \stackrel{\text{HDI}}{=} \sum_{s \in \partial \Gamma} f(s) n(s)$ <p>Die Orientierung teilt die Randpunkte <math>s \in \partial \Gamma</math> in Start- und Zielpunkte; Startpunkte zählen negativ, <math>n(s) = -1</math>, Zielpunkte positiv, <math>n(s) = +1</math>. Ist die Kurve <math>\Gamma</math> geschlossen, also <math>\partial \Gamma = \emptyset</math>, so folgt <math>\oint_{s \in \Gamma} f'(s) \cdot ds = 0</math>.</p>	

Der Integralsatz von Gauß	Z206 Fazit
<p>😊 Der Satz von Gauß in der Ebene <math>\mathbb{R}^2</math> und im Raum <math>\mathbb{R}^3</math> besagt: Das Volumenintegral der Divergenz <math>\text{div}(f)</math> über das Kompaktum <math>V</math> ist gleich dem Flussintegral von <math>f</math> nach außen über die Randfläche <math>\partial V</math>.</p> <p><b>2dim:</b> Sei <math>D \subseteq \mathbb{R}^2</math> kompakt mit stückweise glatter Randkurve <math>\Gamma = \partial D</math>. Sei <math>n: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^2: s \mapsto n(s)</math> die nach außen weisende Einheitsnormale. Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld <math>f: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^2</math> gilt dann</p> $\int_{(x,y) \in D} \text{div } f(x, y) d(x, y) \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_{s \in \Gamma} f(s) \cdot n(s)  ds  = \int_{s \in \Gamma} f(s) \times ds.$ <p><b>3dim:</b> Sei <math>V \subseteq \mathbb{R}^3</math> kompakt mit stückweise glatter Randfläche <math>S = \partial V</math>. Sei <math>n: S \rightarrow \mathbb{R}^3: s \mapsto n(s)</math> die nach außen weisende Einheitsnormale. Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld <math>f: \mathbb{R}^3 \supseteq V \rightarrow \mathbb{R}^3</math> gilt dann</p> $\int_{(x,y,z) \in V} \text{div } f(x, y, z) d(x, y, z) \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_{s \in S} f(s) \cdot n(s)  dS  = \int_{s \in S} f(s) \cdot dS.$ <p>Gleichwertige Schreibweise mit <math>n(s)  ds  = \circlearrowleft ds</math> bzw. <math>dS = n(s)  dS </math>.</p>	

Der Integralsatz von Green und Stokes	Z207 Fazit
<p>😊 Der Satz von Green in der Ebene bzw. von Stokes im Raum: Das Flächenintegral der Rotation <math>\text{rot}(f)</math> über die Fläche <math>S</math> ist gleich dem Arbeitsintegral von <math>f</math> entlang der Randkurve <math>\partial S</math>.</p> <p><b>2dim:</b> Sei <math>S \subseteq \mathbb{R}^2</math> kompakt mit stückweise glatter Randkurve <math>\Gamma = \partial S</math>. Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld <math>f: \mathbb{R}^2 \supseteq S \rightarrow \mathbb{R}^2</math> gilt dann</p> $\int_{s \in S} \text{rot } f(s) \cdot dS \stackrel{\text{Green}}{=} \int_{s \in \Gamma} f(s) \cdot ds.$ <p><b>3dim:</b> Allgemeiner gilt dies für jede stückweise glatte, orientierte Fläche <math>S \subseteq \mathbb{R}^3</math> und jedes stetig differenzierbare Vektorfeld <math>f: \mathbb{R}^3 \supseteq S \rightarrow \mathbb{R}^3</math>. Die Zerlegung <math>dS = n(s)  dS </math> ergibt das gleichwertige Flächenintegral</p> $\int_{s \in S} \text{rot } f(s) \cdot n(s)  dS  \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{s \in \Gamma} f(s) \cdot ds.$ <p>Die stückweise glatte Randkurve <math>\Gamma = \partial S</math> sei hierbei positiv orientiert. Liegt die Fläche <math>S</math> in einer Ebene, so reduziert sich Stokes zu Green.</p>	

Zusammenfassung und Rückblick	Z208 Fazit
<p>Diese Integralsätze sind gut und schön! Geht es auch einfacher? Nein, denn Sie sollen nicht nur fühlen, sondern auch rechnen können! Zur präzisen Formulierung und konkreten Berechnung benötigen Sie daher alle Werkzeuge für Kurven-, Flächen- und Volumenintegrale. Hierzu brauchen Sie solide Grundlagen und effiziente Methoden: Definitionen &amp; Sätze, Beispiele &amp; Rechenricks... sowie Übung!</p> <p>Nochmal die Lernziele laut Modulhandbuch:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Die Studierenden verfügen über grundlegende Kenntnisse zur Integralrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher. [...]</li> <li>Sie sind in der Lage, die behandelten Methoden selbstständig, sicher, kritisch, korrekt und kreativ anzuwenden.</li> <li>Sie besitzen die mathematische Grundlage für das Verständnis quantitativer Modelle aus den Ingenieurwissenschaften.</li> <li>Sie können sich mit Spezialist:innen aus dem ingenieurs- und naturwissenschaftlichen Umfeld über die benutzten mathematischen Methoden verständigen.</li> </ul>	

**Holomorphe Funktionen und Laurent-Reihen** Z209  
Fazit

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen. Der Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$  sei stückweise stetig diff'bar. Das **komplexe Wegintegral** einer stetigen Funktion  $f: \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  ist

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_{t=a}^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt. \quad \text{Merkregel: } z = \gamma(t), dz = \gamma'(t) dt$$

Eine komplexe Funktion  $f = u + iv: \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **holomorph**, wenn sie auf ganz  $\Omega$  komplex differenzierbar ist und  $f': \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  stetig.

⇔ **Cauchy-Riemann-Gleichungen**  $\partial_x u = \partial_y v$  und  $\partial_x v = -\partial_y u$ .

⇔ Die **Strömung**  $\vec{f} = (u, -v): \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  erfüllt  $\text{div } \vec{f} = \text{rot } \vec{f} = 0$ .

⇔ Auf jeder Kreisscheibe  $B(z_0, \rho) \subseteq \Omega$  gleicht  $f$  einer **Potenzreihe**:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit} \quad a_k := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$$

⇔ Auf jedem Kreisring  $K(z_0, \sigma, \rho) \subseteq \Omega$  gleicht  $f$  einer **Laurent-Reihe**:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit} \quad a_k := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$$

Der Koeffizient  $\text{res}_{z_0}(f) := a_{-1}$  heißt das **Residuum** von  $f$  in  $z_0$ .

**Der Residuensatz für Kompakta** Z210  
Fazit

Wir nutzen den Satz von Green / Gauß in der komplexen Ebene  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ . Für holomorphe Funktionen erhalten wir so den **Residuensatz F40**:

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f: \Omega \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph auf  $\Omega$  bis auf eine Menge  $S$  isolierter Singularitäten. Sei  $D \subseteq \Omega$  kompakt mit stückweise glattem Rand, wobei  $\partial D \cap S = \emptyset$ . Dann gilt

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i \sum_{s \in \tilde{D}} \text{res}_s(f).$$

Das **Residuum** von  $f: K(s, 0, \rho) \rightarrow \mathbb{C}$  im Punkt  $s$  ist definiert durch

$$\text{res}_s(f) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(s, r)} f(z) dz \quad \text{für } 0 < r < \rho.$$

Ist  $s$  eine **höchstens  $n$ -fache Polstelle** von  $f$ , so gilt

$$\text{res}_s(f) = \lim_{z \rightarrow s} \frac{1}{(n-1)!} \left( \frac{d}{dz} \right)^{n-1} [(z-s)^n f(z)].$$

Für  $f = p/q$  mit **einfacher Polstelle**  $s$  gilt  $\text{res}_s(p/q) = p(s)/q'(s)$ .

☺ Damit lassen sich Residuen in Polstellen meist leicht berechnen.

**Residuenkalkül für reelle Integrale** Z211  
Fazit

(1) Sei  $R(x, y) = P(x, y)/Q(x, y)$  eine rationale Funktion mit Nenner  $Q(\cos t, \sin t) \neq 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Dann ergibt die Weierstraß-Substitution

$$f(z) := \frac{1}{iz} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)$$

eine rationale Funktion in  $z$  ohne Polstellen auf  $\partial B(0, 1)$ , und es gilt

$$\int_{t=0}^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = \int_{\partial B(0,1)} f(z) dz = 2\pi i \sum_{s \in B(0,1)} \text{res}_s(f).$$

(2) Sei  $f(z) = p(z)/q(z)$  eine rationale Funktion; reelle Polstellen  $z \in \mathbb{R}$  seien höchstens einfach. Für  $\deg(q) \geq \deg(p) + 2$  und  $u \geq 0$  gilt dann:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iux} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im}(s)>0} \text{res}_s[f(z) e^{iuz}] + \pi i \sum_{\text{Im}(s)=0} \text{res}_s[f(z) e^{iuz}]$$

Diese Gleichung gilt auch noch im Falle  $\deg(q) \geq \deg(p) + 1$  und  $u > 0$ .

**Residuenkalkül für reelle Integrale** Z212  
Fazit

(3) Sei  $f(z) = p(z)/q(z)$  rational mit  $p, q \in \mathbb{C}[z]$  und  $\deg q \geq \deg p + 2$ , aber ohne Polstellen in  $\mathbb{R}_{>0}$ , gekürzt also  $q(x) \neq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}_{>0}$ . Dann gelten folgende Formeln für Integrale über die reelle Halbachse:

$$\int_{x=0}^{\infty} f(x) dx = - \sum_{s \neq 0} \text{res}_{z=s} [f(z) \ln(z)]$$

$$\int_{x=0}^{\infty} f(x) \ln(x) dx = -\frac{1}{2} \sum_{s \neq 0} \text{res}_{z=s} [f(z) \ln(z)^2] - \pi i \int_{x=0}^{\infty} f(x) dx$$

$$\int_{x=0}^{\infty} f(x) x^\alpha dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \sum_{s \neq 0} \text{res}_{z=s} [f(z) z^\alpha] \quad \text{für } 0 < \alpha < 1$$

Hierbei nutzen wir für jede komplexe Zahl  $z = r e^{i\varphi}$  mit  $0 < r < \infty$  und  $0 \leq \varphi < 2\pi$  ihren komplexen Logarithmus mit  $\ln z := \ln r + i\varphi$ . Auf  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{>0}$  entspricht dies dem Nebenweig  $\ln = \ln_r$  aus Satz F2M. Für  $\alpha \in \mathbb{R}$  setzen wir  $z^\alpha := e^{\alpha \ln z}$ . Auf  $\mathbb{R}_{>0}$  sind das die üblichen reellen Definitionen; ihre komplexen Fortsetzungen sind unstetig quer zu  $\mathbb{R}_{>0}$ .

**Physikalische Anwendungen der Integralsätze** Z213  
Fazit

**Strömungslehre:** Die Massenbilanz als Integralgleichung:

$$\frac{d}{dt} \iiint_K \rho dK + \iint_{S=\partial K} (\rho \vec{v} \cdot \vec{n}) dS = 0$$

Hieraus erhalten wir dank Gauß die **Kontinuitätsgleichung**:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad \text{bei } \rho = \text{const also } \text{div } \vec{v} = 0$$

**Wärmeleitung:** Die Wärmebilanz als Integralgleichung:

$$\iiint_K q(t, x) dx = \frac{d}{dt} \iiint_K u(t, x) dx + \iint_{S=\partial K} \vec{f}(t, x) \cdot \vec{n} dS$$

Hieraus erhalten wir Fouriers berühmte **Wärmeleitungsgleichung**:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \Delta u = q \quad \text{mit} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

☺ Diese Differentialgleichung können wir lösen, exakt oder numerisch.

**Physikalische Anwendungen der Integralsätze** Z214  
Fazit

**Elektrodynamik:** Die Maxwell-Gleichungen als Integralgleichungen:

Coulomb Ladungsgesetz  $\iint_{\partial V} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V 4\pi \rho dV$

Faraday Induktionsgesetz  $\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{1}{c} \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS$

Gauß Quellenfreiheit  $\iint_{\partial V} \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0$

Ampère Durchflutungsgesetz  $\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{c} \iint_S \left( 4\pi \vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} dS$

Dank Gauß und Stokes erhalten wir hieraus Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 4\pi \rho, & \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, & \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{J}. \end{aligned}$$

☺ Daraus folgen insbesondere Ladungserhaltung und Wellengleichung.

**Exakte und konservative Vektorfelder** Z215  
Fazit

Ein Vektorfeld  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt **exakt**, oder **Gradientenfeld**, wenn es ein Potential erlaubt, also ein Skalarfeld  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F' = f$  existiert.

$$f = F' = \text{grad } F = (\partial_1 F, \dots, \partial_n F) = \left( \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right).$$

☺ Für jeden stückweise stetig diff'baren Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  gilt dann:

$$\int_{\gamma} f \cdot d\gamma = \int_{t=a}^b F'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_{t=a}^b \frac{dF(\gamma(t))}{dt} dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Ist der Weg  $\gamma$  geschlossen,  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , so folgt demnach  $\oint_{\gamma} f \cdot d\gamma = 0$ .

Ein Vektorfeld  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt **konservativ**, oder **global wirbelfrei**, wenn  $\oint_{\gamma} f \cdot d\gamma = 0$  für jeden geschlossenen Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  gilt.

☺ Das garantiert: Arbeitsintegrale hängen nur von Start und Ziel ab.

Diese beiden Begriffe erweisen sich als äquivalent (Hauptsatz H2A):

(1) Besitzt das Vektorfeld  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Potential, so ist  $f$  konservativ.

(2) Ist umgekehrt  $f$  konservativ, so ist  $F(x) = \int_{s=p}^x f(s) \cdot ds$  ein Potential.

☺ Der Wert  $F(x)$  ist wohldefiniert, unabhängig vom gewählten Weg  $\gamma$ .

**Konstruktion von Potentialen** Z216  
Fazit

Lösung des Potentialproblems bei einfachem Zusammenhang (H2E):

Unser Gebiet  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  sei einfach zusammenhängend, z.B. konvex oder sternförmig zu  $p$ . Ein  $C^1$ -Vektorfeld  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  erlaubt genau dann ein Potential  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ , wenn  $f$  rotationsfrei ist, also  $\partial_j f_i = \partial_i f_j$  erfüllt.

In diesem Fall erhalten wir ein Potential durch das Arbeitsintegral

$$F(x) = \int_{s=p}^x f(s) \cdot ds = \int_{t=a}^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \gamma: [a, b] \rightarrow U, \\ \gamma(a)=p, \gamma(b)=x. \end{cases}$$

$f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist exakt, $\exists F: U \rightarrow \mathbb{R}: F' = f$	$\xleftrightarrow{f \text{ stetig diff'bar}}$ $\xleftrightarrow{U \text{ einfach zshgd}}$	$f$ ist rotationsfrei, $\partial_j f_i = \partial_i f_j$ auf $U$
<b>global</b>	$\text{HDI} \Downarrow \Uparrow \text{Arbeitsintegral}$	$f$ stetig diff'bar $\Uparrow \Downarrow$ Stokes
$f$ ist konservativ, $\oint_{\gamma} f \cdot d\gamma = 0$ in $U$	$\xleftrightarrow{\text{immer}}$ $\xleftrightarrow{U \text{ einfach zshgd}}$	$f$ ist lokal konservativ, $\oint_{\gamma} f \cdot d\gamma = 0$ lokal

Zusammenfassung und Verständnisfragen		Z217 Fazit
<b>Aufgabe:</b> Unter welchen Voraussetzungen gilt...?		
(1)	$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$	
(2)	$\int_X \int_Y f(x, y) dy dx = \int_Y \int_X f(x, y) dx dy$	
(3)	$\int_Y f(y) dy = \int_X f(\Phi(x))  \det \Phi'(x)  dx$	
(4)	$\int_{\Omega} \sum_{k=0}^n f_k(x) dx = \sum_{k=0}^n \int_{\Omega} f_k(x) dx$	
(5)	$\int_{\Omega} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Omega} f_k(x) dx$	
(6)	$\int_{\Omega} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k(x) dx$	
(7)	$\frac{d}{dx} \int_Y f(x, y) dy = \int_Y \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) dy$	

Zusammenfassung und Verständnisfragen		Z218 Fazit
(1) Voraussetzungen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung [E123], kurz HDI: Die Funktion $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ sei stetig differenzierbar mit Ableitung $f = F'$ . (Es genügt $F$ stetig und stückweise stetig differenzierbar [E213], oder noch allgemeiner $F$ absolut stetig [E214].)		
(2) Gegenbeispiele [E414]: Vertauschbarkeit gilt nicht immer! Voraussetzungen des Satzes von Fubini [E121]: $f: X \times Y \rightarrow [0, \infty]$ sei messbar oder $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ absolut integrierbar.		
(3) Voraussetzungen des Transformationssatzes [E209]: Die Mengen $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ seien messbar, $f: Y \rightarrow [0, \infty]$ messbar oder $f: Y \rightarrow \mathbb{C}$ absolut integrierbar, $\Phi: X \rightarrow Y$ stetig differenzierbar und bijektiv (zumindest injektiv und surjektiv bis auf Ausnahmefolgen vom Volumen Null).		
(4) Das Integral ist linear! Die Behauptung gilt unter den üblichen Vorsichtsmaßnahmen: $f_k: \Omega \rightarrow [0, \infty]$ messbar oder $f_k: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ absolut integrierbar.		
(5) Gegenbeispiele [E101]: Für Reihen, also unendliche Summen, gilt Vertauschung nicht immer! Hinreichend ist $f_k: \Omega \rightarrow [0, \infty]$ messbar oder $L^1$ -Konvergenz $\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Omega}  f_k  \leq \infty$ . [E106]		
(6) Für Grenzwerte und Integrale gilt Vertauschung nicht immer! [E207] Voraussetzungen für den Satz der majorisierten Konvergenz [E209]: Hinreichend ist punktweise Konvergenz $f_k \rightarrow f$ (fast überall) und eine absolut integrierbare Majorante $g$ mit $ f_k  \leq g$ (fast überall) für alle $k$ .		
(7) Gegenbeispiele [E409]: Leider kann man nicht immer die Ableitung unter das Integral ziehen! Hinreichend ist insb. $Y$ kompakt und $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und stetig nach $x$ differenzierbar. Allgemein wie bei der majorisierten Konvergenz [E209]: Für jedes $x$ ist $y \mapsto f(x, y)$ integrierbar über $Y$ , für fast jedes $y$ ist $x \mapsto f(x, y)$ stetig differenzierbar nach $x$ , und zudem existiert eine integrierbare Majorante $g(y)$ , das heißt, $ (\partial f_y / \partial x_j)(x, y)  \leq g(y)$ für alle $x$ und fast alle $y$ .		

Zusammenfassung und Verständnisfragen		Z219 Fazit
<b>Aufgabe:</b> Was ist ein Skalarfeld $g$ ? ein Vektorfeld $f$ ? Unter welchen Voraussetzungen gilt...?		
(1)	$\partial_i \partial_j g = \partial_j \partial_i g$	
(2)	$\text{rot grad } g = 0$	
(3)	$\text{div rot } f = 0$	
(4)	$\int_{s \in \Gamma} \text{grad } g(s) \cdot ds = \sum_{s \in \partial \Gamma} g(s) n(s)$	
(5)	$\int_{s \in S} \text{rot } f(s) \cdot dS = \int_{s \in \partial S} f(s) \cdot ds$	
(6)	$\int_{v \in V} \text{div } f(v) dV = \int_{s \in \partial V} f(s) \cdot dS$	
Erklären Sie Bedeutung, Definition und Funktionsweise dieser Formeln. Welche physikalischen und mathematischen Anwendungen kennen Sie?		

Zusammenfassung und Verständnisfragen		Z220 Fazit
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Gebiet, also eine offene zusammenhängende Teilmenge. Hierauf betrachten wir ein Skalarfeld $g$ , also eine stetige Abbildung $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , sowie ein Vektorfeld $f$ , also eine stetige Abbildung $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Sind diese zudem stetig differenzierbar, so definieren wir wie üblich die Ableitungen grad, rot, div, siehe zum Beispiel die Wiederholung zu Beginn von Kapitel H.		
Aussage (1) gilt für alle zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ : Das ist der Satz von Schwarz (D4A). Damit rechnet man die angegebenen Identitäten (2) und (3) leicht nach. [H14]		
Die Gleichungen (4–6) sind unsere Integralsätze. Hierzu seien $f$ und $g$ stetig differenzierbar. (Etwas weniger genügt, zum Beispiel Lipschitz-stetig und somit fast überall differenzierbar.)		
Für den HDI (4) sei $\Gamma \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ eine stückweise glatte Kurve vom Startpunkt $p$ zum Zielpunkt $q$ mit vektorielllem Wegelement $ds$ . Hierzu sei $\Gamma$ orientiert; genau wie beim eindimensionalen HDI werten wir Startpunkte negativ, $n(p) = -1$ , und Zielpunkte positiv, $n(q) = +1$ . Allgemein kann eine solche Kurve $\Gamma$ mehrere Komponenten und mehrere Randpunkte $s \in \partial \Gamma$ haben.		
Für Stokes (5) sei $S \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ eine orientierte, stückweise glatte Fläche mit vektorielllem Flächenelement $dS = n  dS $ , also Einheitsnormale $n: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ und skalarem Flächenelement $ dS $ . Die Randkurve $\Gamma = \partial S$ ist dann ebenfalls stückweise glatt und wird positiv orientiert gemäß der Rechte-Hand-Regel. (Für ebene Flächen $S \subseteq \mathbb{R}^2$ entspricht der Satz von Stokes im Raum $\mathbb{R}^3$ dem Satz von Green in der Ebene $\mathbb{R}^2$ , siehe Kapitel E. Beide sind äquivalent.)		
Für Gauß (6) schließlich sei $V \subseteq \Omega$ ein Kompaktum mit stückweise glatter Randfläche $\partial V$ und dem üblichen euklidischen Volumenelement $dV = d(x_1, x_2, x_3)$ . Die Randfläche $S = \partial V$ wird orientiert durch die nach außen weisende Einheitsnormale $n: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ , so dass $dS = n  dS $ .		

Zusammenfassung und Verständnisfragen		Z221 Fazit
<b>Aufgabe:</b> Sei $A \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Gerade, $D$ eine Kreisscheibe um $0$ sowie $K$ eine Kugel um $0$ . Begründen oder widerlegen Sie:		
(1)	Jeder stetige Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ hat endliche Länge.	
(2)	Jeder stetig diff'bare Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ hat endliche Länge.	
(3)	Für $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\text{div}(f) = 0$ gilt $\int_{\partial D} f(s) \cdot ds = 0$ .	
(4)	Für $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\text{rot}(f) = 0$ gilt $\int_{\partial D} f(s) \cdot ds = 0$ .	
(5)	Für $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\text{rot}(f) = 0$ gilt $\int_{\partial D} f(s) \cdot ds = 0$ .	
(6)	Für $f: \mathbb{R}^3 \setminus A \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\text{rot}(f) = 0$ gilt $\int_{\partial D} f(s) \cdot ds = 0$ .	
(7)	Für $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\text{div}(f) = 0$ gilt $\int_{\partial K} f(s) \cdot dS = 0$ .	
(8)	Für $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $f(x) = \text{const} \cdot x/ x ^n$ gilt $\text{div}(f) = 0$ .	
(9)	Für $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\text{div}(f) = 0$ gilt $f(x) = \text{const} \cdot x/ x ^n$ .	
(0) Wikipedia zu <i>Konservative Kraft</i> (aufgerufen 11.11.2024): „Äquivalent sind: 1. Die Arbeit entlang jeder beliebigen geschlossenen Kurve innerhalb des Feldes ist gleich Null. [...] 4. Das Feld ist auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet definiert und [dort rotationsfrei].“		

Zusammenfassung und Verständnisfragen		Z222 Fazit
Aussage (1) gilt nicht. Die Kochkurve ist ein beliebtes Gegenbeispiel. [E104]		
Aussage (2) gilt dank der Integralformel $\ell(\gamma) = \int_a^b  \gamma'(t)  dt$ für die Weglänge. [E107]		
Aussage (3) gilt nicht immer! Gegenbeispiel ist das Quellenfeld $f(x, y) := (x, y)/(x^2 + y^2)$ . [E317] Hier gilt $\text{div}(f) = 0$ auf ganz $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und dennoch $\int_{\partial D} f(s) \cdot ds = 2\pi$ .		
Aussage (4) gilt nicht immer! Gegenbeispiel ist das Wirbelfeld $f(x, y) := (-y, x)/(x^2 + y^2)$ . [E317] Hier gilt $\text{rot}(f) = 0$ auf ganz $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und dennoch $\int_{\partial D} f(s) \cdot ds = 2\pi$ .		
Aussage (5) gilt dank Stokes und der Geometrie des Raumes: Wir haben $\partial D = \partial S$ für eine Hemisphäre $S \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , also $\int_{\partial D} f(s) \cdot ds = \int_{\partial S} f(s) \cdot ds = \int_S \text{rot}(f) \cdot dS = 0$ . Allgemein: Das Gebiet $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ist zwar nicht konvex oder sternförmig, aber dennoch einfach zusammenhängend! Das bedeutet, jede geschlossene Kurve $\Gamma$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ist zusammenziehbar, somit verschwindet längs $\Gamma$ das Arbeitsintegral jedes rotationsfreien Vektorfeldes.		
Aussage (6) gilt nicht immer! Gegenbeispiel ist das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters $A$ , etwa das Wirbelfeld $f(x, y, z) = (-y, x, 0)/(x^2 + y^2)$ um die $z$ -Achse $A$ . [H154] Hier gilt $\text{rot}(f) = 0$ auf ganz $\mathbb{R}^3 \setminus A$ und dennoch $\int_{\partial D} f(s) \cdot ds = 2\pi$ .		
Aussage (7) gilt nicht immer! Gegenbeispiel ist das Feld einer im Ursprung konzentrierten Masse oder Ladung, also das Quellenfeld $f(x, y, z) = (x, y, z)/(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$ . [H37] Hier gilt $\text{div}(f) = 0$ auf ganz $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und dennoch $\int_{\partial K} f(s) \cdot dS = 4\pi$ .		
Aussage (8) rechnet man leicht nach. [E227] Die Umkehrung (9) ist falsch, zum Beispiel erfüllt jedes konstante Vektorfeld $f$ auch $\text{div}(f) = 0$ . Wenn wir jedoch verlangen, dass $f$ divergenzfrei und zudem <i>radialsymmetrisch</i> ist, so folgt tatsächlich $f(x) = \text{const} \cdot x/ x ^n$ , siehe Satz H2F.		

Zusammenfassung und Verständnisfragen		Z223 Fazit
<b>Aufgabe:</b> Begründen Sie durch ein Ergebnis Ihrer Vorlesung oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel aus Ihrem Fundus:		
(1)	Jedes Vektorfeld $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ hat ein Potential.	
(2)	Jedes Vektorfeld $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ hat ein Potential.	
(3)	Jedes Vektorfeld $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\text{rot}(f) = 0$ hat ein Potential.	
(4)	Jedes Vektorfeld $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\partial_i f_j = \partial_j f_i$ hat ein Potential.	
(5)	Jedes Vektorfeld $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\text{rot}(f) = 0$ hat ein Potential.	
(6)	Jedes Vektorfeld $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\text{rot}(f) = 0$ hat ein Potential.	
(7)	Jedes Vektorfeld $f: \mathbb{R}^3 \setminus A \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\text{rot}(f) = 0$ hat ein Potential. Hierbei sei $A \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Gerade, etwa die $z$ -Achse.	
(8)	Jedes Feld $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n: f(x) = g( x ) \cdot x/ x $ hat ein Potential.	
(9) Wikipedia zu <i>Rotation eines Vektorfeldes</i> (aufgerufen 11.11.2021): „Die Divergenz der Rotation eines Vektorfeldes ist gleich null. Umgekehrt ist in einfach zusammenhängenden Gebieten [im $\mathbb{R}^3$ ] ein Feld, dessen Divergenz gleich null ist, die Rotation eines anderen Vektorfeldes.“		

Zusammenfassung und Verständnisfragen		Z224 Fazit
Aussage (1) gilt immer: Dank HDI ist $F(x) = \int_{t=0}^x f(t) dt$ eine Stammfunktion, also $F' = f$ .		
Aussage (2) gilt nicht immer: Notwendiges Kriterium ist $\text{rot}(f) = 0$ . Beispiel: Das Vektorfeld $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = (-y, x)$ erfüllt $\text{rot}(f) = 2 \neq 0$ . Demnach erlaubt $f$ kein Potential, das heißt, es gibt keine Funktion $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\text{grad } F = f$ . Unnötig danach zu suchen!		
Aussagen (3) und (4) gelten immer: Auf einfach zusammenhängenden Gebieten (wie $\mathbb{R}^n$ ) ist für $C^1$ -Vektorfelder $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ das notwendige Kriterium $\text{rot}(f) = 0$ auch hinreichend. [H215]		
Aussage (5) gilt nicht immer. Unser zentrales Gegenbeispiel ist das Wirbelfeld. [H205] Hier gilt $\text{rot}(f) = 0$ auf ganz $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , aber dennoch $\oint_{\partial B(0,r)} f(s) \cdot ds = 2\pi$ .		
Aussage (6) gilt immer, denn im Gegensatz zur punktierten Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist der punktierte Raum $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ einfach zusammenhängend. Hier ist $\text{rot}(f) = 0$ hinreichend. [H215]		
Aussage (7) gilt nicht immer. Gegenbeispiel ist das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters $A$ , etwa das Wirbelfeld $f(x, y, z) = (-y, x, 0)/(x^2 + y^2)$ um die $z$ -Achse $A$ . Hier gilt $\text{rot}(f) = 0$ auf ganz $\mathbb{R}^3 \setminus A$ , aber dennoch $\oint_{\partial D} f(s) \cdot ds = 2\pi$ . [H154]		
(8) Zu $f(x) = g( x ) \cdot x/ x $ mit $g$ stetig finden wir explizit das Potential $F(x) = G( x )$ mit $G(r) = \int_r^0 g(\rho) d\rho$ . Leiten Sie es geduldig ab. Sie finden $\text{grad } F = f$ . Somit rot $f = 0$ . [H104]		
(9) Ja. [H10] Nein! Prominentes Gegenbeispiel: Das Gebiet $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ist einfach zshg. [H217] Das (Gravitations-)Vektorfeld $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3: x \mapsto x/ x ^3$ erfüllt $\text{div}(f) = 0$ auf ganz $U$ . [H37] Für jede Sphäre $S$ um $0$ gilt $\int_S f \cdot dS = 4\pi > 0$ . [H37] Somit ist $f = \text{rot}(g)$ unmöglich! [G316] Dank $\partial S = \emptyset$ und dem Satz von Stokes (G3E) gilt nämlich $\int_S \text{rot}(g) \cdot dS = \int_{\partial S} g \cdot ds = 0$ .		

Für Funktionen  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  definieren wir ihr **Skalarprodukt** durch

$$L^p \times L^q \rightarrow \mathbb{C} : (f, g) \mapsto \langle f | g \rangle := \frac{1}{b-a} \int_a^b \overline{f(t)} g(t) dt.$$

Der Integrand  $\overline{f}g$  sei absolut integrierbar, etwa  $f \in L^\infty$  beschränkt und  $g \in L^1$  absolut integrierbar, allgemein  $f \in L^p, g \in L^q$  mit  $1/p + 1/q = 1$ . Bei Periode  $T$  wählen wir ein beliebiges Intervall der Länge  $b - a = T$ . Dieses Periodenintegral ist invariant bei Verschieben oder Vervielfachen. Sei  $\omega = 2\pi/T$ . Als **Basisfunktion**  $e_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  definieren wir

$$e_k(t) := e^{ik\omega t} = \cos(k\omega t) + i \sin(k\omega t).$$

Für diese Funktionen gelten die **Orthonormalitätsrelationen**

$$\langle e_k | e_\ell \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell: \text{ paarweise Orthogonalität,} \\ 1 & \text{für } k = \ell: \text{ Normierung auf Länge 1.} \end{cases}$$

Ähnliche, etwas kompliziertere Formeln gelten für  $\cos(k\omega t)$  und  $\sin(k\omega t)$ .  
 ☺ Meist gehen wir mit  $x = \omega t$  zur Periode  $T = 2\pi$  und  $\omega = 1$  über.

Allgemein: Ist  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  periodisch und über  $[0, T]$  integrierbar, dann definieren wir durch obige Formeln die **Fourier-Koeffizienten** von  $f$ . Diese Koeffizienten von  $f$  fassen wir zur **Fourier-Reihe** zusammen:

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t).$$

⚠ Diese Reihe ist zunächst nur eine symbolische Schreibweise! Gelesen: „Die Funktion  $f$  hat die Fourier-Koeffizienten  $c_k$  bzw.  $a_k, b_k$ .“ Aufgrund der **Euler-Formel**  $e^{ik\omega t} = \cos(k\omega t) + i \sin(k\omega t)$  gilt dabei

$$a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = i(c_k - c_{-k}),$$

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}.$$

Ist  $f$  **reell**, also  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , so gilt  $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ , also  $c_{-k} = \overline{c_k}$ .  
 Ist  $f$  **gerade**, so liefert  $f$  eine **Cosinusreihe**,  $b_k = 0, c_{-k} = c_k$ .  
 Ist  $f$  **ungerade**, so liefert  $f$  eine **Sinusreihe**,  $a_k = 0, c_{-k} = -c_k$ .

Für unsere Sägezahnfunktion [1205] finden wir:

$$f(x) = 2 \left[ \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \dots \right]$$

Für die Parabelfunktion  $F(x) = \int_{t=0}^x f(t) dt$  folgt [1321]:

$$F(x) = \frac{\pi^2}{6} - 2 \left[ \cos x - \frac{1}{2^2} \cos 2x + \frac{1}{3^2} \cos 3x - \frac{1}{4^2} \cos 4x + \dots \right]$$

Für unsere Rechteckfunktion [1225] finden wir:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left[ \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x + \dots \right]$$

Für die Dreieckfunktion  $F(x) = \int_{t=0}^x f(t) dt$  folgt [1309]:

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[ \cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \frac{1}{7^2} \cos 7x + \dots \right]$$

☺ Es gilt Konvergenz in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$ : Wir schreiben „=“ statt „~“.  
 ☺ Wir sehen explizit, wie schnell die Fourier-Koeffizienten abklingen.

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  absolut integrierbar auf  $[0, T]$  und  $T$ -periodisch. Wir entwickeln  $f$  in **Harmonische** zur Grundfrequenz  $\omega = 2\pi/T$ :

$$f \circ \hat{f}, \quad \hat{f}(k) := \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} f(t) dt, \quad f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ik\omega t}.$$

Diese **Analyse** zerlegt das Signal  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  in sein Spektrum  $\hat{f}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ . Die Reihe ist wie zuvor zunächst nur eine symbolische Schreibweise; wir schreiben Gleichheit nur im Falle der (punktweisen) Konvergenz. Für diese Fourier-Analyse gelten folgende nützliche Rechenregeln:

Linearität:	$a f \circ \hat{a}\hat{f},$	$f + g \circ \hat{f} + \hat{g},$
Symmetrie:	$f(-t) \circ \hat{f}(-k),$	$\overline{f(t)} \circ \overline{\hat{f}(-k)},$
Verschiebung:	$f(t-a) \circ e^{-ik\omega a} \hat{f}(k),$	$e^{i\ell\omega t} f(t) \circ \hat{f}(k-\ell),$
Produkte:	$f \cdot g \circ \hat{f} * \hat{g},$	$f * g \circ \hat{f} \cdot \hat{g}.$

**Trigonometrisches Polynom** nennt man jede  $\mathbb{C}$ -Linearkombination

$$f(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t).$$

☺ Die Menge aller Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ist ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum. Hierin ist die Teilmenge aller  $T$ -periodischen Funktionen ein Untervektorraum. Die Basisfunktion  $e_k$  spannen den Unterraum der trigon. Polynome auf. Jede solche Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  bestimmt ihre Koeffizienten gemäß

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} f(t) dt = \langle e^{ik\omega t} | f \rangle \text{ bzw.}$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{t=0}^T \cos(k\omega t) f(t) dt = 2 \langle \cos(k\omega t) | f \rangle,$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{t=0}^T \sin(k\omega t) f(t) dt = 2 \langle \sin(k\omega t) | f \rangle.$$

☺ Formeln für  $c_k$  sind meist einfacher und übersichtlicher als für  $a_k, b_k$ .

Zur Funktion  $f$  ist  $f_n(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega t}$  ihr  $n$ -tes **Fourier-Polynom**. Wir sagen, die Fourier-Reihe von  $f$  **konvergiert im Punkt**  $t \in \mathbb{R}$ , wenn die Zahlenfolge  $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{C}$  für  $n \rightarrow \infty$  konvergiert. Beispiel: Ist  $f$  im Punkt  $t$  differenzierbar, so folgt  $f_n(t) \rightarrow f(t)$ . Allgemeiner gilt Satz 12A:

(1) Angenommen,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  erfüllt die Dirichlet-Bedingung im Punkt  $t$ , d.h. beide Grenzwerte  $f(t \pm)$  und beide Ableitungen  $f'(t \pm)$  existieren. Dann konvergiert in diesem Punkt  $t$  die Fourier-Reihe  $f_n(t)$  gemäß

$$f_n(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega t} \rightarrow \frac{1}{2} [f(t+) + f(t-)] \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

(2) Ist  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und stückweise stetig differenzierbar mit  $|f'| \leq L$ , so konvergiert die Fourier-Reihe  $f_n \rightarrow f$  sogar gleichmäßig auf ganz  $\mathbb{R}$ :

$$|f_n(t) - f(t)| \leq 2L/\omega \cdot \ln(n)/n \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

(3) Ist  $f$  mindestens  $d$ -mal stetig differenzierbar, so ist die gleichmäßige Konvergenz entsprechend schneller gemäß  $|f_n - f| \leq \text{const} \cdot \ln(n)/n^d$ .

⚠ Fourier-Reihen können wir **nicht immer termweise ableiten!** [1319]  
 ☺ Hingegen können wir sie **immer termweise integrieren!** [1318]

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  periodisch und integrierbar, und  $F(t) := C + \int_{u=0}^t f(u) du$ . Genau dann ist  $F$  periodisch, wenn  $\int_{u=0}^T f(u) du = 0$ . In diesem Fall gilt:

$$f(t) \sim c_0 + \sum_{k \neq 0} c_k e^{ik\omega t} \iff F(t) \sim C_0 + \sum_{k \neq 0} \frac{c_k}{ik\omega} e^{ik\omega t}$$

☺ Wir können die Umkehrung sorgsam als Ableitungsregel für  $F$  lesen: Hierzu sei  $F$  **absolut stetig** mit  $F' = f$ , also  $F(t) = F(0) + \int_{u=0}^t f(u) du$ . Zum Beispiel genügt:  $F$  stetig und stückweise stetig differenzierbar.

**Glattheit** entspricht schnellem **Abklingen** der Fourier-Koeffizienten: Für jede integrierbare Funktion  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  gilt  $|c_k| \rightarrow 0$  für  $|k| \rightarrow \infty$ . Ist  $f$  mindestens  $d$ -mal stetig differenzierbar, so gilt sogar  $|k^d c_k| \rightarrow 0$ . Umgekehrt: Gilt  $\sum |c_k| < \infty$ , zum Beispiel  $|c_k| \leq c/|k|^\alpha$  für  $\alpha > 1$ , so konvergiert  $\sum c_k e_k$  gleichmäßig gegen eine stetige Funktion  $f$ . Gilt sogar  $\sum |k^d c_k| < \infty$ , so ist  $f$  mindestens  $d$ -mal stetig diff'bar.

☺ Diese nützlichen Eigenschaften vereinfachen unsere Rechnungen. Linearität, Symmetrie und Verschiebung rechnet man leicht nach.

Die Fourier-Analyse übersetzt das punktweise Produkt  $h = f \cdot g$  der Signale in das Faltungsprodukt  $\hat{h} = \hat{f} * \hat{g}$  der Spektren:

$$h = f \cdot g \circ \hat{h} = \hat{f} * \hat{g} \text{ mit } \hat{h}(k) = \sum_{m+n=k} \hat{f}(m) \hat{g}(n)$$

Konvergenz und Summierbarkeit sind garantiert falls  $\hat{f}, \hat{g} \in \ell^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ : Aus  $\sum |\hat{f}(m)| < \infty$  und  $\sum |\hat{g}(n)| < \infty$  folgt dann  $\sum |\hat{h}(k)| < \infty$ .

Umgekehrt gilt: Die Fourier-Analyse übersetzt das Faltungsprodukt  $h = f * g$  der Signale in das punktweise Produkt  $\hat{h} = \hat{f} \cdot \hat{g}$  der Spektren:

$$h = f * g \circ \hat{h} = \hat{f} \cdot \hat{g} \text{ mit } h(t) = \frac{1}{T} \int_{u=0}^T f(u) g(t-u) du.$$

Konvergenz und Integrierbarkeit sind garantiert falls  $f, g \in L^1([0, T], \mathbb{C})$ : Aus  $\int_{u=0}^T |f(u)| du < \infty$  und  $\int_{u=0}^T |g(v)| dv < \infty$  folgt  $\int_{t=0}^T |h(t)| dt < \infty$ .

Es gilt die **Parseval-Gleichung**, auch **Energiegleichung** genannt:

$$\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{\ell^2} \quad \text{also} \quad \frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2$$

Ist dieser Wert endlich, so ist die Funktion  $f$  quadrat-integrierbar, kurz  $f \in L^2$ , und die Koeffizientenfolge  $\hat{f}$  ist quadrat-summierbar, kurz  $\hat{f} \in \ell^2$ . Alternativ nutzen wir die Co/Sinus-Reihe mit  $c_{\pm k} = \frac{1}{2}(a_k \mp ib_k)$ :

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$$

$$\frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2.$$

Für  $f, g \in L^2$  gilt die **Parseval-Gleichung** zudem für Skalarprodukte:

$$\langle f | g \rangle = \langle \hat{f} | \hat{g} \rangle \quad \text{also} \quad \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \overline{f(t)} g(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(k)} \hat{g}(k)$$

Die **Fourier-Isometrie** J1A ist folgende Analyse / Synthese:

$$(\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}) : L^2([0, T], \mathbb{C}) \cong \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) : f \leftrightarrow \hat{f}$$

Jeder Funktion  $f \in L^2$  ordnen wir ihre Fourier-Koeffizienten  $\hat{f} \in \ell^2$  zu:

$$\mathcal{F} : L^2 \rightarrow \ell^2 : f \mapsto \hat{f} \quad \text{mit} \quad \hat{f}(k) = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} f(t) dt$$

Umgekehrt definiert jede Koeffizientenfolge  $\hat{f} \in \ell^2$  eine Funktion  $f \in L^2$ :

$$\mathcal{F}^{-1} : \ell^2 \rightarrow L^2 : \hat{f} \mapsto f \quad \text{mit} \quad f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ik\omega t}$$

Diese Abbildungen sind  $\mathbb{C}$ -linear und zueinander inverse Isometrien zwischen dem Funktionenraum  $L^2([0, T], \mathbb{C})$  und Folgenraum  $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ .

😊 Funktionen  $f \in L^2$  und Folgen  $\hat{f} \in \ell^2$  entsprechen sich verlustfrei. Norm und Skalarprodukt bleiben erhalten dank Parseval-Gleichung.

😊 Eine Anwendung ist die **isoperimetrische Ungleichung** J1B: Allein der Kreis maximiert den umschlossenen Flächeninhalt  $F$ .

Die **quadrat-integrierbaren** Funktionen bilden den  $\mathbb{C}$ -Vektorraum

$$L^2 = L^2([0, T], \mathbb{C}) := \left\{ f : [0, T] \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{t=0}^T |f(t)|^2 dt < \infty \right\}.$$

Hierauf haben wir als **Skalarprodukt** und **Norm** die Integrale

$$\langle f | g \rangle_{L^2} := \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \overline{f(t)} g(t) dt \quad \text{und} \quad \|f\|_{L^2} := \frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f(t)|^2 dt.$$

Die **quadrat-summierbaren** Folgen bilden den  $\mathbb{C}$ -Vektorraum

$$\ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) := \left\{ \hat{f} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 < \infty \right\}.$$

Hierauf haben wir als **Skalarprodukt** und **Norm** die Summen

$$\langle \hat{f} | \hat{g} \rangle_{\ell^2} := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(k)} \hat{g}(k) \quad \text{und} \quad \|\hat{f}\|_{\ell^2} := \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2.$$

Das Produkt ist absolut integrierbar/summierbar dank Cauchy-Schwarz.

😊 Beide Vektorräume  $L^2$  und  $\ell^2$  scheinen zunächst sehr verschieden. Die Fourier-Isometrie enthüllt jedoch das Gegenteil: Sie sind isomorph!

Die Fourier-Isometrie nutzt wesentlich die Begriffe der linearen Algebra: Vektorräume mit Skalarprodukt I1G, Cauchy-Schwarz-Ungleichung I1H, Satz des Pythagoras I1I, Orthonormalisierung I1J. Zentrales Beispiel:

Die Menge aller Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ist ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum. Hierin ist die Teilmenge der  $T$ -periodischen Funktionen ein Untervektorraum.

Die Funktionen  $e_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : t \mapsto e^{ik\omega t} = \cos(k\omega t) + i \sin(k\omega t)$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  spannen den Unterraum  $V = \{ \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega t} \mid n \in \mathbb{N}, c_k \in \mathbb{C} \}$  aller trigonometrischen Polynome auf und sind hierin eine Orthonormalbasis.

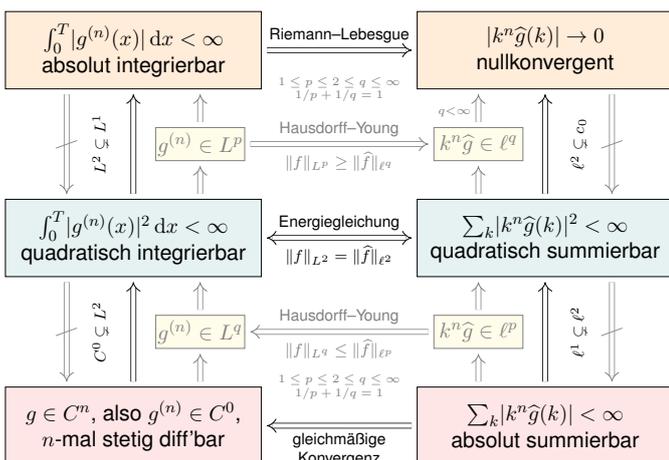
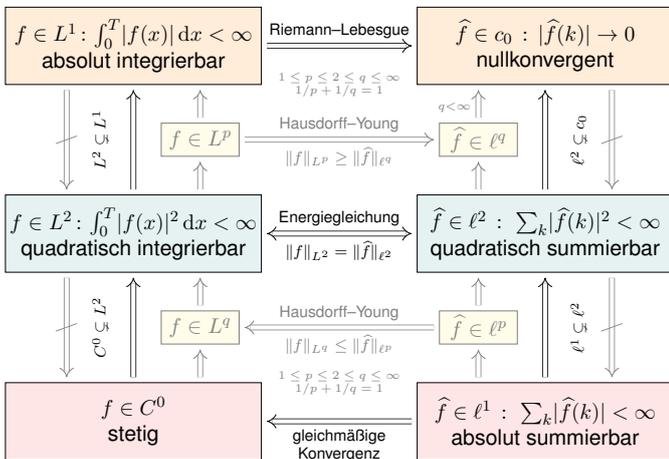
Die Vervollständigung dieses Raumes  $V$  bezüglich der  $L^2$ -Norm ist der Raum  $L^2 = L^2([0, T], \mathbb{C})$  aller quadrat-integrierbaren Funktionen.

Auch die Menge aller Folgen  $\hat{f} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  ist ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum.

Die Folgen  $\delta_k : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\delta_k(k) = 1$  und  $\delta_k(\ell) = 0$  für  $\ell \neq k$  spannen den Unterraum  $W = \{ \sum_{k=-n}^n c_k \delta_k \mid n \in \mathbb{N}, c_k \in \mathbb{C} \}$  aller Folgen mit endlichem Träger auf und sind hierin eine Orthonormalbasis.

Die Vervollständigung dieses Raumes  $W$  bezüglich der  $\ell^2$ -Norm ist der Raum  $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$  aller quadrat-summierbaren Folgen.

😊 Die Fourier-Isometrie  $f \leftrightarrow \hat{f}$  liefert  $V \cong W$ , vervollständigt  $L^2 \cong \ell^2$ .



Wir fassen die Beziehungen dieser drei Konvergenzarten zusammen. Seien  $f_0, f_1, f_2, \dots, f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  Funktionen auf einer Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ .

**Gleichmäßige Konvergenz:**  
 $\sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$

$\text{vol } \Omega < \infty \iff \text{immer}$

**Konvergenz im quadratischen Mittel:**  
 $\int_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)|^2 dx \rightarrow 0$

**Punktweise Konvergenz:**  
 $f_n(x) \rightarrow f(x)$  in jedem Punkt  $x \in \Omega$

😊 Die Implikation „gleichmäßig  $\Rightarrow L^p$ “ folgt sofort aus der Ungleichung

$$\int_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)|^p dx \leq \text{vol}(\Omega) \cdot (\sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)|)^p \rightarrow 0.$$

😊 Die Implikation „gleichmäßig  $\Rightarrow$  punktweise“ ist klar: Für  $x \in \Omega$  gilt

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0.$$

⚠ Die Umkehrungen gelten nicht, siehe Gegenbeispiele. [J319](#) [J320](#)

Die **Fourier-Transformierte** von  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ist definiert durch

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx \quad \text{für } \xi \in \mathbb{R}.$$

Wir fordern hierzu, dass  $f$  auf jedem Intervall  $[-r, r]$  integrierbar ist. Unter dem Integral über  $\mathbb{R}$  verstehen wir hier den **Cauchy-Hauptwert**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx := \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r e^{-i\xi x} f(x) dx.$$

Die Zuordnung  $\mathcal{F}: f \mapsto \hat{f}$  heißt **Fourier-Transformation**. Die **inverse Fourier-Transformation**  $\mathcal{F}^{-1}: \hat{f} \mapsto f$  ist

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Dies kürzen wir ab als **Fourier-Transformationspaar**  $f \circ \hat{f}$ . Die Fourier-Transformation ist linear, kurz  $a f + b g \circ a \hat{f} + b \hat{g}$ .

Beispiele:

$$e^{-x^2/2} \circ e^{-\xi^2/2}$$

$$e^{-a|x|} \circ \sqrt{2/\pi} a/(a^2 + \xi^2)$$

$$\mathbf{1}_{[-r,r]}(x) \circ \sqrt{2/\pi} \sin(\xi r)/\xi$$

Ist  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  absolut integrierbar, also  $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty$ , dann gilt: Die Fourier-Transformierte  $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ist stetig und beschränkt:

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}$$

Sie verschwindet im Unendlichen (Riemann-Lebesgue-Lemma):

$$|\hat{f}(\xi)| \rightarrow 0 \quad \text{für } |\xi| \rightarrow \infty$$

Zudem gilt die Plancherel-Gleichung (Energiegleichung):

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

Für die Transformation  $f(x) \circ \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx$  gilt:

$$af(x) \circ a\hat{f}(\xi), \quad f(x) + g(x) \circ \hat{f}(\xi) + \hat{g}(\xi),$$

$$f(-x) \circ \hat{f}(-\xi), \quad \overline{f(x)} \circ \overline{\hat{f}(-\xi)},$$

$$f(ax) \circ \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right), \quad \frac{1}{|a|} f\left(\frac{x}{a}\right) \circ \hat{f}(a\xi),$$

$$f(x-a) \circ e^{-i\xi a} \hat{f}(\xi), \quad e^{iax} f(x) \circ \hat{f}(\xi - a),$$

$$\partial_x f(x) \underset{K2A}{\circ} i\xi \hat{f}(\xi), \quad x f(x) \underset{K2A}{\circ} i\partial_\xi \hat{f}(\xi),$$

$$(f * g)(x) \underset{K2B}{\circ} \sqrt{2\pi} \cdot \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi), \quad f(x) \cdot g(x) \underset{K2B}{\circ} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\hat{f} * \hat{g})(\xi).$$

- ⚠ Die letzten vier erfordern  $L^1$ -Voraussetzungen, siehe K2A und K2B.
- 😊 Glattheit der Funktion  $f$  entspricht schnellem Abklingen von  $\hat{f}$ .
- 😊 Schnelles Abklingen der Funktion  $f$  entspricht Glattheit von  $\hat{f}$ .

Sind  $f, \hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  absolut integrierbar und stetig, so gilt punktweise

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi = f(x) \circ \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx.$$

Die linke Gleichung gilt, ebenso punktweise, wenn  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  absolut integrierbar ist und stückweise stetig differenzierbar und sprungnormiert.

Die quadrat-integrierbaren Funktionen bilden den  $\mathbb{C}$ -Vektorraum

$$L^2 = L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) := \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \right\}.$$

Die Fourier-Transformation definiert eine Isometrie  $\mathcal{F}: L^2 \rightarrow L^2$ , also

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \quad \text{und} \quad \langle f | g \rangle = \langle \hat{f} | \hat{g} \rangle \quad \text{für } f, g \in L^2.$$

Unschärfe ist anschaulich: Ist  $f$  schmal, so ist  $\hat{f}$  breit, und umgekehrt. Quantitativ: Für alle  $f \in L^2$  gilt die Unschärferelation  $V(f) \cdot V(\hat{f}) \geq \frac{1}{4}$ . Optimalfall: Gleichheit gilt genau dann, wenn  $f$  eine Glockenkurve ist.

Die **Laplace-Transformierte** von  $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$  ist definiert durch

$$f(t) \circ F(s) := \mathcal{L}(f)(s) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Die **Konvergenzabszisse** ist  $\sigma := \inf\{s \in \mathbb{R} \mid F(s) \text{ konvergiert}\}$ . Das Integral konvergiert für alle  $s > \sigma$  und divergiert für alle  $s < \sigma$ . Es definiert eine holomorphe Funktion  $F: \mathbb{C}_{\text{Re} > \sigma} \rightarrow \mathbb{C}$ . Umgekehrt gilt

$$F(s) \circ f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{(s+ix)t} F(s+ix) dx$$

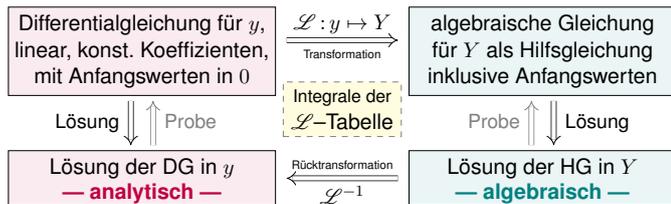
für jedes  $s > \sigma$  und fast alle  $t \geq 0$ , und immer wo  $f$  stetig diff'bar ist. Insbesondere ist  $\mathcal{L}$  injektiv, das heißt, aus  $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$  folgt  $f = g$ . (Wir identifizieren Funktionen, die nur auf einer Nullmenge differieren.)

Residuen: Hat  $F$  in  $\mathbb{C}$  nur isolierte Singularitäten und klingt ab, so gilt

$$\mathcal{L}^{-1}(F)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{(s+ix)t} F(s+ix) dx = \sum_{z_0 \in \mathbb{C}} \text{res}_{z=z_0} [e^{zt} F(z)].$$

$f(t)_{t \geq 0}$	$F(s)_{\text{Re}(s) > \sigma}$	$f(t)_{t \geq 0}$	$F(s) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt$
1	$\frac{1}{s}$	$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}$	$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$f(at), a > 0$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as} F(s)$

Laplace-Transformation kann lineare Differentialgleichungen lösen:



Anstatt das Anfangswertproblem im Original direkt zu lösen, machen wir den gezeigten Umweg über den Bildraum; das ist manchmal leichter.

- 😊 Die Methode der Laplace-Transformation ist dann effizient, wenn Sie jeden der drei Schritte effizient ausführen können.
- 😊 Ausführliche  $\mathcal{L}$ -Tabellen finden Sie in Lehrbüchern, Formelsammlungen und Computer-Algebra-Systemen.
- 😊 Zudem nutzen wir die obigen Rechenregeln für  $\mathcal{L}$  und  $\mathcal{L}^{-1}$ , sowie Basisalgorithmen wie Partialbruchzerlegung (PBZ), etc.

**Aufgabe:** Begründen Sie durch ein Ergebnis Ihrer Vorlesung oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel aus Ihrem Fundus:

- (1) Jede Funktion  $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$  ist  $\mathcal{L}$ -transformierbar.
- (2) Welche Bedingungen garantieren  $\mathcal{L}$ -Transformierbarkeit?
- (3) Ist jede  $\mathcal{L}$ -Transformierte  $F: \mathbb{C}_{\text{Re} > \sigma} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph? Warum?
- (4) Lässt sich jede  $\mathcal{L}$ -Transformierte  $F$  holomorph auf  $\mathbb{C}$  fortsetzen?
- (5) Ist die Transformation  $f \circ F = \mathcal{L}(f)$  linear? Ist sie injektiv?
- (6) Lässt sich  $F$  zu  $f$  rücktransformieren? Wie? Inwiefern eindeutig?
- (7) Ist jede rationale Funktion  $F = P/Q$  eine  $\mathcal{L}$ -Transformierte? Wie?

**Lösung:** (1) Nein, einfache Gegenbeispiele sind  $f(t) = 1/t$  und  $f(t) = \exp(t^2)$ . (L30)  
 (2) Wir fordern, dass  $f$  auf jedem endlichen Intervall  $[0, r]$  integrierbar ist und höchstens exponentiell wächst gemäß  $|f(t)| \leq ce^{ct}$  für alle  $t \geq 0$  und Konstanten  $c, \sigma \in \mathbb{R}$ . (L34)  
 (3) Ja, wir ziehen die Ableitung unters Integral (L1B) dank majorisierter Integrierbarkeit (D3E).  
 (4) Nein, schon für  $1 \circ 1/s$  müssen wir mit Polstellen rechnen. (Es gibt noch schlimmeres.)  
 (5) Ja, die Transformation  $f \circ F = \mathcal{L}(f)$  ist linear (L1C). Sie ist im Wesentlichen injektiv:  
 (6) Die Umkehrformel  $F \mapsto f = \mathcal{L}^{-1}(F)$  bestimmt  $f$  zumindest fast überall (Satz L3A): Wir können  $f$  auf jeder Menge vom Maß 0 beliebig abändern, ohne das Integral  $F(s)$  zu beeinflussen. Eindeutigkeit gilt, wenn  $f$  stückweise stetig differenzierbar ist und zudem sprungnormiert.  
 (7) Nein, für  $s \rightarrow \infty$  muss  $F(s) \rightarrow 0$  gelten! (L34) Für  $\deg P < \deg Q$  gelingt's mit PBZ.

**Elementar lösbare Differentialgleichungen** Z401  
Fazit

Sei  $f: \mathbb{R}^2 \supseteq G \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Zu lösen sei die **Differentialgleichung**

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0.$$

Qualitativer Überblick dank **Existenz- und Eindeigkeitssatz M1c**:

- (1) Im Inneren  $G$  existieren Lösungen und laufen bis zum Rand  $\partial G$ .
- (2) Ist  $f$  stetig diff'bar nach  $y$ , so ist die Lösung durch  $(x_0, y_0) \in G$  eindeutig bestimmt und hängt stetig von diesen Anfangswerten ab.

Elementar lösen können wir vor allem **exakte Differentialgleichungen**:

- $f(x, y) + g(x, y) y' = 0$  ist exakt, wenn  $(f, g) = \text{grad } \Phi$ . **M206**

Wichtige **Spezialfälle** hiervon sind:

- $y' = f(x)$  durch Integration dank HDI. **B123**
- $y' = g(x) h(y)$  durch Trennung der Variablen. **M118**
- $y' = a(x) y + b(x)$  lineare DG, explizite Lösungsformel. **M222**

Durch **Substitution** hierauf zurückführbar sind:

- $y' = f(ax + by + c)$  mit Substitution  $v = ax + by + c$ . **M409**
- $y' = f(y/x)$  Ähnlichkeits-DG, mit Substitution  $v = y/x$ . **M411**
- $y' = a(x) y + b(x) y^n$  Bernoulli-DG, mit Substitution  $v = y^{1-n}$ . **M413**

**Existenz, Eindeutigkeit, Lösungsmethoden** Z402  
Fazit

Kapitel M präsentiert die wichtigsten Lösungsmethoden für gewöhnliche eindimensionale Differentialgleichungen sowie Anwendungsbeispiele. Zahlreiche Aufgaben üben, illustrieren und vertiefen diese Techniken. Das ist für Differentialgleichungen unentbehrlich: Üben, üben, üben! Eine Lösung zu finden ist schwer, sie zu überprüfen ist meist leicht. Deshalb sollen Sie am Ende jeder Rechnung die Probe machen!

Trotz allgemeiner Lösungstheorie und -methoden hat jede DG ihre Eigenarten: Man muss genau hinschauen und sorgfältig arbeiten! Insbesondere ist zu klären und bei jeder Rechnung zu beachten, auf welchem Gebiet  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  die DG definiert und Lösungen gesucht sind. Bei allen Umformungen ist sicherzustellen oder nachträglich zu prüfen, dass keine fiktiven Lösungen hinzukommen oder echte verloren gehen. Zur Sorgfalt gehört, die gefundenen / benachbarte / alle Lösungen zu prüfen, zu skizzieren, zu diskutieren und alle Sonderfälle zu beachten.

Zur Vertiefung und für zahlreiche Anwendungsbeispiele siehe H. Heuser: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Vieweg, 6. Aufl. 2009

**Zusammenfassung und Verständnisfragen** Z403  
Fazit

**Aufgabe:** Begründen Sie durch ein Ergebnis Ihrer Vorlesung oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel aus Ihrem Fundus:

- (1) Sei  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Zu jedem Startpunkt  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  existiert ein Intervall  $[x_0, x_1]$  mit  $x_1 > x_0$  und eine Funktion  $y: [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $y(x_0) = y_0$  und  $y'(x) = f(x, y(x))$  für alle  $x \in [x_0, x_1]$ .
- (2) Sei  $f: [x_0, x_1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $y_0 \in \mathbb{R}$ . Dann existiert eine Lösung  $y: [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $y(x_0) = y_0$  und  $y'(x) = f(x, y(x))$  für alle  $x \in [x_0, x_1]$ .
- (3) Sei  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Für je zwei Funktionen  $y, \tilde{y}: [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $y(x_0) = \tilde{y}(x_0) = y_0$  sowie  $y'(x) = f(x, y(x))$  und  $\tilde{y}'(x) = f(x, \tilde{y}(x))$  für alle  $x \in [x_0, x_1]$  gilt Gleichheit  $y(x) = \tilde{y}(x)$  für alle  $x \in [x_0, x_1]$ .
- (4) Sei  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und nach  $y$  stetig differenzierbar. Für je zwei Lösungen wie in (3) gilt Gleichheit  $y(x) = \tilde{y}(x)$  für alle  $x \in [x_0, x_1]$ .
- (5) Ist jede separierbare DG exakt? bis auf integrierenden Faktor?
- (6) Ist jede lineare DG exakt? bis auf einen integrierenden Faktor?
- (7) Ist jede exakte DG separierbar? Ist jede exakte DG linear? Nennen Sie eine exakte DG, die weder separierbar noch linear ist.

**Zusammenfassung und Verständnisfragen** Z404  
Fazit

**Lösung:** (1) Ja, das ist die Existenzaussage des  $\exists$ &E-Satzes M1c. (2) Nein, wir können das Lösungsintervall  $[x_0, x_1]$  nicht vorschreiben: Die Lösung  $y$  startet in  $y(x_0) = y_0$ , kann aber noch vor Erreichen von  $x_1$  an den Rand gelangen **M115** oder nach Unendlich entkommen **M113**. (3) Nein, die Stetigkeit der rechten Seite  $f$  allein reicht hierzu nicht. Ein anschauliches Gegenbeispiel ist Torricellis Wasseruhr  $y' = \sqrt{|y|}$  **M123**; ganz ähnlich ist  $y' = \sqrt[3]{y(x)^2}$  **M325** und allgemein  $y' = |y|^\alpha$  **O233**. (4) Ja, das ist die Eindeigkeitsaussage des  $\exists$ &E-Satzes M1c. (5) Die separierbare DG  $y' = g(x)h(y)$  schreiben wir  $g(x)h(y) - y' = 0$ . In dieser Form ist sie exakt nur für  $g(x) = 0$  oder  $h'(y) = 0$ . Sie wird exakt durch Multiplikation mit dem integrierenden Faktor  $1/h(y)$ . **M211** (6) Die lineare DG  $y' = a(x)y + b(x)$  schreiben wir  $a(x)y + b(x) - y' = 0$ . In dieser Form ist sie exakt nur für  $a(x) = 0$ . Sie wird exakt durch Multiplikation mit dem integrierenden Faktor  $e^{-A(x)}$  mit  $A' = a$ . **M221** (7) Nicht jede exakte DG ist separierbar, ebenso ist nicht jede linear. Beispiele sind leicht zu konstruieren:  $x + y^2 + 2xyy' = 0$  für  $x, y > 0$  ist exakt, aber  $y' = 1/2(y/x + 1/y)$  ist weder linear noch separierbar. **M316**

**Separierbare Differentialgleichungen** Z405  
Fazit

Satz M1A erklärt die Lösung **separierbarer Differentialgleichungen**:

$$y' = g(x) h(y) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0$$

Gegeben sind hierzu stetige Funktionen  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $h: J \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  auf Intervallen  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  sowie Anfangswerte  $x_0 \in I$  und  $y_0 \in J$ . Wir definieren Stammfunktionen  $G: I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $H: J \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$G(x) := \int_{t=x_0}^x g(t) dt \quad \text{und} \quad H(y) := \int_{u=y_0}^y \frac{1}{h(u)} du.$$

Die Funktion  $H$  ist streng monoton, also bijektiv auf ihr Bild  $H(J) \subseteq \mathbb{R}$ . Sei  $I_0 \subseteq I$  ein hinreichend kleines Intervall um  $x_0 \in I_0$  mit  $G(I_0) \subseteq H(J)$ . Das AWP erlaubt genau eine Lösung  $y: \mathbb{R} \supseteq I_0 \rightarrow J \subseteq \mathbb{R}$ , nämlich

$$y(x) = H^{-1}(G(x)).$$

😊 Lösungsformel    😊 Eindeutigkeit    😊 Stetig abhängig von  $(x_0, y_0)$   
😊 Die Probe ist leicht! Einsetzen und sorgfältig nachrechnen. . .

**Lineare Differentialgleichungen** Z406  
Fazit

Satz M2E erklärt die Lösungsformel für **lineare DG erster Ordnung**:

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0$$

Hierzu sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $a, b: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $x_0 \in I$  und  $y_0 \in \mathbb{R}$ . Die homogene DG  $y'(x) = a(x)y(x)$  mit  $y(x_0) = y_0$  wird gelöst durch  $y_1(x) = e^{A(x)} y_0$  mit  $A(x) = \int_{x_0}^x a(t) dt$ . Zur inhomogenen Gleichung existiert genau eine Lösung  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ , und diese ist gegeben durch

$$y(x) = e^{A(x)} \int_{t=x_0}^x e^{-A(t)} b(t) dt + e^{A(x)} y_0.$$

😊 Lösungsformel    😊 Eindeutigkeit    😊 Stetig abhängig von  $(x_0, y_0)$   
😊 Für  $a = 0$  ist's der HDI.    😊 Für  $b = 0$  entfällt der inhomogene Term.  
😊 Die Lösungsmenge  $\{y_b + e^A y_0 \mid y_0 \in \mathbb{R}\}$  ist ein affiner Raum. „Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen“.  
😊 Diese Lösungsformel gilt allgemein für lineare DGSysteme (O3D).  
😊 Die Probe ist leicht! Einsetzen und sorgfältig nachrechnen. . .

**Exakte Differentialgleichungen** Z407  
Fazit

Jedes stetige Vektorfeld  $(f, g): \mathbb{R}^2 \supseteq G \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $G$  offen, definiert eine DG

$$f(x, y) + g(x, y) y' = 0.$$

Diese DG heißt **exakt**, wenn ein Potential  $\Phi$  zu  $(f, g)$  existiert, also eine  $C^1$ -Funktion  $\Phi: \mathbb{R}^2 \supseteq G \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\text{grad } \Phi = (f, g)$ , d.h.  $\partial_x \Phi = f$ ,  $\partial_y \Phi = g$ . Satz M2A erklärt die Lösungskurven exakter Differentialgleichung: Die Lösungen  $x \mapsto (x, y(x))$  der DG sind Äquipotentialkurven von  $\Phi$ .

- (1) Eine differenzierbare Funktion  $y: \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann Lösung der Differentialgleichung, wenn  $\Phi(x, y(x)) = \text{const}$  für alle  $x \in I$  gilt.
- (2) Zu jedem Punkt  $(x_0, y_0) \in G$  mit  $g(x_0, y_0) \neq 0$  existiert ein offenes Intervall  $I$  um  $x_0$  und eine eindeutige Lösung  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $y(x_0) = y_0$ .

😊 Implizite Lösung    😊 Eindeutigkeit    😊 Stetig abhängig von  $(x_0, y_0)$   
😊 Explizit: Wir können  $\Phi(x, y(x)) = c := \Phi(x_0, y_0)$  nach  $y(x)$  auflösen, zumindest lokal falls  $g(x_0, y_0) \neq 0$  dank Satz über implizite Funktionen. Wie leicht die explizite Auflösung gelingt, hängt vom Einzelfall ab.

**Integrierende Faktoren** Z408  
Fazit

Eine Funktion  $\lambda: G \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  heißt **integrierender Faktor** zu  $(f, g)$ , wenn das skalierte Vektorfeld  $(\lambda f, \lambda g): G \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein Potential hat. Beispiele: Separierbar  $\lambda(y) = 1/h(y)$  **M211**, linear  $\lambda(x) = e^{-A(x)}$  **M221**.

Satz M2c erklärt integrierende Faktoren in nur einer Variablen: Für jeden nur von  $x$  abhängigen integrierenden Faktor  $\lambda = \lambda(x)$  gilt:

$$\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = \frac{\partial_y f(x, y) - \partial_x g(x, y)}{g(x, y)}, \quad \text{kurz:} \quad \frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = -\frac{\text{rot}(f, g)}{g}(x, y)$$

Für jeden nur von  $y$  abhängigen integrierenden Faktor  $\lambda = \lambda(y)$  gilt:

$$\frac{\lambda'(y)}{\lambda(y)} = \frac{\partial_x g(x, y) - \partial_y f(x, y)}{f(x, y)}, \quad \text{kurz:} \quad \frac{\lambda'(y)}{\lambda(y)} = +\frac{\text{rot}(f, g)}{f}(x, y)$$

Dies ist lösbar, wenn auch die rechte Seite nur von  $x$  bzw.  $y$  abhängt. Ob eine dieser Lösungen möglich ist, muss man jeweils ausprobieren.  
😊 Vorgehensweise: Man prüft zunächst  $\text{rot}(f, g) = 0$ . Falls möglich, berechnet man ein Potential  $\Phi$  zu  $(f, g)$ , notfalls nur lokal um  $(x_0, y_0)$ . Andernfalls versucht man einen der beiden obigen Korrekturfaktoren  $\lambda$ .

**Lineare DG  $n$ -ter Ordnung** Z409  
Fazit

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b: I \rightarrow \mathbb{K}$  stetig,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ . Dies definiert eine **lineare Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung**

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x).$$

Die stetigen Funktionen  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}: I \rightarrow \mathbb{K}$  heißen **Koeffizienten**. Die stetige Funktion  $b: I \rightarrow \mathbb{K}$  heißt **Störterm** oder kurz **rechte Seite**. Links wirkt der **lineare Differentialoperator**  $L: C^n(I, \mathbb{K}) \rightarrow C^0(I, \mathbb{K})$ ,

$$L = a_0 \partial^0 + a_1 \partial^1 + \dots + a_{n-1} \partial^{n-1} + \partial^n,$$

$$y \mapsto a_0 y + a_1 y' + \dots + a_{n-1} y^{(n-1)} + y^{(n)}.$$

Wir suchen alle Funktionen  $y: I \rightarrow \mathbb{K}$ , die die Gleichung  $Ly = b$  erfüllen. Linearität bedeutet  $L(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 L(y_1) + c_2 L(y_2)$  für  $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$ . In anderen Worten: Aus Lösungen  $y_1$  zu  $b_1$  und  $y_2$  zu  $b_2$  ergibt die Linearkombination  $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$  eine Lösung zu  $b = c_1 b_1 + c_2 b_2$ . Zu  $Ly = b$  gehört die **homogene lineare Differentialgleichung**  $Ly = 0$ . Als Lösungsmenge suchen wir also den Kern der linearen Abbildung  $L$ .

**Lineare DG  $n$ -ter Ordnung** Z410  
Fazit

Qualitativer Überblick dank **Existenz- und Eindeigkeitsatz N3A** (Fortsetzung von M1C, konstruktiv M2E, später O1B, konstruktiv O2A):

Zu jedem Anfangsdatum  $(x_0, v_0, \dots, v_{n-1}) \in I \times \mathbb{K}^n$  existiert genau eine Lösung  $y: I \rightarrow \mathbb{K}$  mit  $Ly = b$  und  $y(x_0) = v_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = v_{n-1}$ .

Die Lösungsmenge  $L_0 = \{y: I \rightarrow \mathbb{K} \mid Ly = 0\}$  ist ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum der Dimension  $n$ : Wir wählen ein Fundamentalsystem  $y_1, \dots, y_n \in L_0$  von  $n$  linear unabhängigen Lösungen und erhalten:

$$L_0 = \{c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}\} \cong \mathbb{K}^n$$

Die Lösungsmenge  $L_b = \{y: I \rightarrow \mathbb{K} \mid Ly = b\}$  ist ein affiner Raum. Für jede Partikulärlösung  $y_b \in L_b$  gilt  $L_b = y_b + L_0$ , ausgeschrieben:

$$L_b = y_b + L_0 = \{y_b + c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}\}$$

„Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen“  
Sind Anfangswerte  $y(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$  vorgegeben, so kann man hieraus  $c_1, \dots, c_n$  eindeutig bestimmen (lineares Gleichungssystem).

**Lineare DG  $n$ -ter Ordnung** Z411  
Fazit

Besonders leicht sind **lineare DG mit konstanten Koeffizienten**:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0$$

Kurzschreibweise  $p(\partial)y = 0$  mit dem **charakteristischen Polynom**

$$p(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Jede  $k$ -fache Nullstelle  $\lambda \in \mathbb{C}$  liefert  $k$  linear unabhängige Lösungen

$$e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda x}.$$

Ist  $p \in \mathbb{R}[x]$  reell und  $\lambda = \sigma + i\omega$  mit  $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$  und  $\omega \neq 0$  eine  $k$ -fache Nullstelle, so gilt dies auch für die komplex-konjugierte Zahl  $\bar{\lambda} = \sigma - i\omega$ . Durch Linearkombination erhalten wir die zugehörigen reellen Lösungen; sie entsprechen Real- und Imaginärteil der komplexen Lösungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda x} \\ e^{\bar{\lambda} x}, \dots, x^{k-1} e^{\bar{\lambda} x} \end{array} \right\} \xleftrightarrow{\text{Basisswechsel}} \left\{ \begin{array}{l} e^{\sigma x} \cos(\omega x), \dots, x^{k-1} e^{\sigma x} \cos(\omega x) \\ e^{\sigma x} \sin(\omega x), \dots, x^{k-1} e^{\sigma x} \sin(\omega x) \end{array} \right\}$$

**Lineare DG  $n$ -ter Ordnung** Z412  
Fazit

Zu lösen sei schließlich eine **inhomogene lineare DG**  $p(\partial)y(x) = b(x)$ :

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = b(x)$$

Eine Lösung  $y_b$  gewinnen wir durch **Variation der Konstanten** (N3C) oder Faltung von  $b$  mit der **Greenschen Fundamentallösung**  $u$  (N2F), für die  $p(\partial)u = 0$  und  $u(0) = \dots = u^{(n-2)}(0) = 0, u^{(n-1)}(0) = 1$  gilt:

$$y_b(x) = \int_{t=x_0}^x u(x-t) b(t) dt$$

Für **spezielle rechte Seiten** lohnt sich folgender Ansatz (N2E):  
Zu lösen sei  $p(\partial)y(x) = r(x)e^{\mu x}$  mit Polynomen  $p, r \in \mathbb{C}[x]$ .  
Ist  $\mu$  eine  $k$ -fache Nullstelle von  $p$ , so existiert eine Lösung

$$y_b(x) = q(x) x^k e^{\mu x}$$

mit einem eindeutigen Polynom  $q \in \mathbb{C}[x]$  vom Grad  $\deg q = \deg r$ .  
Speziell  $p(\partial)y(x) = e^{\mu x}$  wird gelöst durch  $y_b(x) = e^{\mu x} x^k / p^{(k)}(\mu)$ .

**Differentialgleichung in Potenzreihen** Z413  
Fazit

Für manche Differentialgleichungen reichen elementare Funktionen nicht aus; es werden neue Funktionen als Lösungen benötigt bzw. konstruiert. Bessel-Funktionen sind ein prominentes Beispiel. [N321](#)

Zu lösen sei eine analytische Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

mit gegebenen Anfangsdaten  $y(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$  und einer Potenzreihe

$$f(x, u_0, u_1, \dots, u_{n-1}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}} c_\alpha u_0^{\alpha_0} u_1^{\alpha_1} \dots u_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x^{\alpha_n}.$$

Diese DG wird von genau einer Potenzreihe  $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  erfüllt: Aus den vorgegebenen Anfangsdaten  $a_0, \dots, a_{n-1}$  berechnen sich rekursiv alle weiteren Koeffizienten  $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$  der Reihe.

😊 Hat diese Potenzreihe einen Konvergenzradius  $\rho > 0$ , dann löst die so definierte Funktion  $y: ]-\rho, \rho[ \rightarrow \mathbb{R}$  die gegebene Differentialgleichung.

😊 Dieses Verfahren ist manchmal mühsam, aber immer konstruktiv!

**Euler-Lagrange-Differentialgleichung** Z414  
Fazit

Gegeben sei ein **Wirkungsfunktional**  $S: C^2([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$y \mapsto S(y) := \int_{x=a}^b F(x, y(x), y'(x)) dx$$

mit einer  $C^2$ -Funktion  $F: [a, b] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, q, p) \mapsto F(x, q, p)$ .

Dann gilt die **Euler-Lagrange-Differentialgleichung** (Satz N4B):  
Ist  $y \in C^2$  **extremal**, also minimal  $S(y) \leq S(z)$  für alle  $z \in C^2$  oder maximal  $S(y) \geq S(z)$  für alle  $z \in C^2$ , dann erfüllt  $y$  die Gleichung

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial q} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial p} \right] (x, y(x), y'(x)) = 0.$$

Ausgeschrieben bedeutet das: Für alle  $x \in [a, b]$  gilt die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial q}(x, y(x), y'(x)) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial p}(\dots) + \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial p}(\dots) y'(x) + \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}(\dots) y''(x).$$

😊 Mit dieser Differentialgleichung können wir  $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  berechnen!  
Dies ist die Grundlage der Optimierung durch Variationsrechnung. [N401](#)

**Verständnisfragen** Z415  
Fazit

Versuchen Sie, folgende Fragen frei aber genau zu beantworten, etwa so, wie Sie dies einer Kommiliton:in / Kolleg:in erklären wollen.

- (1) Was ist ein linearer Differentialoperator  $L: C^n(I, \mathbb{K}) \rightarrow C^0(I, \mathbb{K})$ ?
- (2) Ist diese Abbildung  $L$  injektiv? Welche Dimension hat ihr Kern?
- (3) Welche Struktur hat die Lösungsmenge der Gleichung  $Ly = 0$ ?
- (4) Was versteht man unter einem Fundamentalsystem?
- (5) Ist diese Abbildung  $L: C^n(I, \mathbb{K}) \rightarrow C^0(I, \mathbb{K})$  surjektiv?
- (6) Wie bestimmt man zu  $b \in C^0$  ein Urbild  $y \in C^n$  mit  $Ly = b$ ?
- (7) Welche Struktur hat die Lösungsmenge der Gleichung  $Ly = b$ ?

**Lösung:** (1) Dies ist eine Zuordnung  $L: y \mapsto a_0 y + a_1 y' + \dots + a_{n-1} y^{(n-1)} + y^{(n)}$  mit Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in C^0(I, \mathbb{K})$ , eventuell konstant. (Zur Vereinfachung  $a_n = 1$ .)  
(2) Die Abbildung  $L: C^n(I, \mathbb{K}) \rightarrow C^0(I, \mathbb{K})$  ist linear. Sie ist für  $n \geq 1$  nicht injektiv, genauer:  
(3) Die Lösungsmenge  $\ker L = \{y \in C^n \mid Ly = 0\}$  ist ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum der Dimension  $n$ .  
(4) Ein Fundamentalsystem ist eine Basis  $y_1, \dots, y_n \in \ker L$ . (5) Die Abbildung  $L$  ist surjektiv:  
(6) Partikulärlösungen  $y_b$  mit  $Ly_b = b$  finden wir durch die Greensche Lösungsformel [N245](#) oder Variation der Konstanten [N311](#) oder geeigneten Ansatz für spezielle rechte Seiten [N271](#).  
(7) Die Lösungsmenge der Gleichung  $Ly = b$  ist ein affiner Raum der Dimension  $n$ , explizit ausgeschrieben  $\{y: I \rightarrow \mathbb{K} \mid Ly = b\} = \{y_b + c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}\}$ .

**Verständnisfragen** Z416  
Fazit

- (1) Was ist eine lineare Differentialgleichung  $Ly = 0$  mit konstanten Koeffizienten? Was ist ihr charakteristisches Polynom?
- (2) Wie bestimmt man hierzu ein Fundamentalsystem?
- (3) Wie bestimmt man zu  $b \in C^0$  ein Urbild  $y \in C^n$  mit  $Ly = b$ ?
- (4) Was versteht man unter einer speziellen rechten Seite  $b$ ? Wie bestimmt man hierzu ein Urbild  $y \in C^n$  mit  $Ly = b$ ?
- (5) Was versteht man in diesem Zusammenhang unter Resonanz?
- (6) Was ist die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators? Wie löst man sie? Was passiert bei harmonischer Anregung? Was versteht man unter dem Begriff Resonanzkatastrophe?

**Lösung:** (1) Hier gilt  $L: y \mapsto a_0 y + a_1 y' + \dots + a_{n-1} y^{(n-1)} + y^{(n)}$  mit konstanten Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ . Wir schreiben hierfür kurz  $Ly = p(\partial)y$  mit  $\partial = d/dx$  und dem charakteristischen Polynom  $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n \in \mathbb{K}[x]$ .  
(2) Der Exponentialansatz N2D liefert hier stets  $n$  unabhängige Lösungen  $y_1, \dots, y_n \in \ker L$ .  
(3) Neben Greenscher Lösungsformel [N245](#) und Variation der Konstanten [N311](#) lohnt sich meist  
(4) der passende Ansatz für spezielle rechte Seiten  $r(x)e^{\mu x}, e^{\sigma x} \cos(\tau x), e^{\sigma x} \sin(\tau x)$ . [N271](#)  
(5) Bei  $p(\partial)y = r(x)e^{\mu x}$  liegt ( $k$ -fache) Resonanz vor, falls die Anregung  $\mu$  eine ( $k$ -fache) Nullstelle des char. Polynoms  $p$  trifft. (6) Siehe die Ausführung am Anfang des Kapitels N.

**Differentialgleichungssysteme** können wir auf 1. Ordnung reduzieren:

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1(t, y_1(t), \dots, y_n(t)), \\ \vdots \\ y_n'(t) = f_n(t, y_1(t), \dots, y_n(t)). \end{cases}$$

Mit  $y = (y_1, \dots, y_n)$  und  $f = (f_1, \dots, f_n)$  bündeln wir dies prägnant und übersichtlich als eine **vektorwertige Differentialgleichung**:

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

Gegeben ist hierzu die stetige Funktion  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n \supseteq G \rightarrow \mathbb{K}^n$ . Gesucht sind alle Funktionen  $y: I \rightarrow \mathbb{K}^n$  auf einem (maximalen) Intervall  $I$ , die  $(t, y(t)) \in G$  und die Gleichung  $y'(t) = f(t, y(t))$  für alle  $t \in I$  erfüllen.

Qualitativer Überblick dank **Existenz- und Eindeutigkeitsatz** O1B:

- (1) Zu jedem Startpunkt  $(t_0, y_0)$  im Inneren  $\overset{\circ}{G}$  existieren Lösungen; jede kann beidseitig bis zum Rand von  $G$  (oder  $\infty$ ) fortgesetzt werden.
- (2) Ist  $f(t, y)$  stetig diff'bar nach  $y$ , so ist die Lösung durch  $(t_0, y_0) \in \overset{\circ}{G}$  eindeutig bestimmt und hängt stetig von diesen Anfangswerten ab.

Ein **homogenes lineares DGS** erster Ordnung ist von der Form

$$y'(t) = A(t)y(t).$$

Gegeben ist hierzu eine stetige **Koeffizientenmatrix**  $A: I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ . Die Lösungsmenge  $L_0 = \{y: I \rightarrow \mathbb{K}^n \mid y' = Ay\}$  ist ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum der Dimension  $n$ : Wir wählen ein **Fundamentalsystem**  $y_1, \dots, y_n \in L_0$  von  $n$  linear unabhängigen Lösungen. Bezüglich dieser Basis gilt dann:

$$L_0 = \{c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}\} \cong \mathbb{K}^n$$

Ein (inhomogenes) **lineares DGS** ist von der Form

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t).$$

Gegeben ist hier neben  $A: I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  ein stetiger **Störterm**  $b: I \rightarrow \mathbb{K}^n$ . Eine partikuläre Lösung  $y_b$  liefert die **Variation der Konstanten** (O3D). Die Lösungsmenge  $L_b = \{y: I \rightarrow \mathbb{K}^n \mid y' = Ay + b\}$  ist ein affiner Raum:

$$L_b = y_b + L_0 = \{y_b + c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}\}$$

„Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen.“

Sei  $A: I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  stetig. Die **matrixwertige Differentialgleichung**

$$W'(t) = A(t)W(t) \quad \text{mit} \quad W(t_0) = E$$

erlaubt die **Fundamentallösung**  $W: I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  gegeben durch

$$W(t) = E + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t_0}^t A(t_k) \cdots \int_{t_2=t_0}^{t_3} A(t_2) \int_{t_1=t_0}^{t_2} A(t_1) dt_1 dt_2 \cdots dt_k.$$

Für jedes  $t \in I$  ist die Reihe absolut konvergent und  $W(t)$  invertierbar. Zu jedem  $y_0 \in \mathbb{K}^n$  hat daher die **vektorwertige Differentialgleichung**

$$y'(t) = A(t)y(t) \quad \text{mit} \quad y(t_0) = y_0$$

genau eine Lösung  $y: I \rightarrow \mathbb{K}^n$ , nämlich  $y(t) = W(t)y_0$ . Somit hat die Differentialgleichung  $y' = Ay$  als Lösungsmenge den  $\mathbb{K}$ -Vektorraum

$$L_0 = \{W y_0 \mid y_0 \in \mathbb{K}^n\}.$$

☺ Diese allgemeine Lösungsformel ist einfach und übersichtlich.

Lösungen  $y_1, \dots, y_n: I \rightarrow \mathbb{K}^n$  bündeln wir zur **Fundamentalmatrix**:

$$Y: I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}, \quad Y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t)) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) & y_{21}(t) & \dots & y_{n1}(t) \\ y_{12}(t) & y_{22}(t) & \dots & y_{n2}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1n}(t) & y_{2n}(t) & \dots & y_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

Die folgenden vier Aussagen sind untereinander äquivalent:

- (a) Die Funktionen  $y_1, \dots, y_n: I \rightarrow \mathbb{K}^n$  sind linear unabhängig über  $\mathbb{K}$ .
- (b) Die Vektoren  $y_1(t), \dots, y_n(t)$  sind linear unabhängig für jedes  $t \in I$ .
- (c) Die Vektoren  $y_1(t), \dots, y_n(t)$  sind linear unabhängig für ein  $t \in I$ .
- (d) Die Determinante erfüllt  $\det Y(t) \neq 0$  für ein und damit alle  $t \in I$ .

Man nennt  $Y(t)$  auch die **Wronski-Matrix** der Funktionen  $y_1, \dots, y_n$ . Die **Wronski-Determinante**  $w(t) = \det Y(t)$  entwickelt sich gemäß

$$w(t) = w(t_0) \cdot \exp \left[ \int_{t_0}^t \text{tr} A(\tau) d\tau \right].$$

Unsere **Fundamentallösung**  $W$  ist der Spezialfall mit  $W(t_0) = E$ ; Umrechnung via  $Y(t) = W(t)Y(t_0)$  bzw.  $W(t) = Y(t)Y(t_0)^{-1}$ .

Seien  $A: I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  und  $b: I \rightarrow \mathbb{K}^n$  stetig,  $Y = (y_1, \dots, y_n): I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  eine Fundamentalmatrix der homogenen Gleichung  $Y'(t) = A(t)Y(t)$ .

Zu lösen sei das inhomogene Differentialgleichungssystem

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t) \quad \text{mit} \quad y(t_0) = y_0.$$

Eine Lösung  $y_b$  erhalten wir durch **Variation der Konstanten**. O311

Zu jedem Anfangswert  $y_0 \in \mathbb{K}^n$  existiert genau eine Lösung, nämlich

$$y(t) = Y(t) \int_{t_0}^t Y(\tau)^{-1} b(\tau) d\tau + Y(t)Y(t_0)^{-1} y_0.$$

Somit hat die Differentialgleichung  $y' = Ay + b$  als Lösungsmenge

$$L_b = y_b + L_0 = \{y_b + W y_0 \mid y_0 \in \mathbb{K}^n\}.$$

Dies ist ein affiner Raum der Dimension  $n$  und präzisiert die Merkregel: „Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen.“

Häufig trifft man **lineare DGS mit konstanten Koeffizienten**, z.B. durch Linearisierung autonomer DGS mit Fixpunkte (§P2). Gegeben sei eine Matrix  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ . Zu lösen sei das DGS

$$y'(t) = A y(t) \quad \text{für} \quad y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n.$$

Zu jedem Startvektor  $y(t_0) = y_0$  existiert genau eine Lösung, nämlich

$$y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n \quad \text{mit} \quad y(t) = e^{(t-t_0)A} y_0.$$

Die Berechnung dieser Matrix-Exponentialfunktion ist leider schwierig.

☺ Eigen- & Hauptvektoren können dies dramatisch vereinfachen:

Eigenvektoren  $v_1, \dots, v_\ell \in \mathbb{K}^n$  mit  $Av_k = \lambda_k v_k$  liefern **Eigenfunktionen**

$$y_1, \dots, y_\ell: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n \quad \text{mit} \quad y_k(t) = e^{\lambda_k t} v_k.$$

Genau dann sind die Eigenfunktionen  $y_1, \dots, y_\ell$  **linear unabhängig**, wenn die Eigenvektoren  $v_1, \dots, v_\ell \in \mathbb{K}^n$  linear unabhängig sind.

Genau dann sind  $y_1, \dots, y_n$  eine **Basis** des Lösungsraumes der DG, wenn die Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis des Raumes  $\mathbb{K}^n$  sind.

Sei  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  eine Matrix und  $\lambda \in \mathbb{K}$  ein Skalar. Eine **Hauptvektorkette**

$$0 \xleftarrow{A-\lambda} v_1 \xleftarrow{A-\lambda} v_2 \xleftarrow{A-\lambda} \dots \xleftarrow{A-\lambda} v_\ell$$

besteht aus Vektoren  $0 \neq v_1, \dots, v_\ell \in \mathbb{K}^n$  mit  $(A - \lambda)v_k = v_{k-1}$ .

Diese löst das DGS durch **Hauptfunktionen**  $y_1, \dots, y_\ell$  mit

$$y_k(t) = e^{\lambda t} \left[ v_k + t v_{k-1} + \frac{t^2}{2} v_{k-2} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} v_1 \right]$$

☺ Ist  $A$  **diagonalisierbar**, so können wir die Differentialgleichungen vollständig entkoppeln (P1B): Wir finden eine Basis  $(v_1, \dots, v_n)$  des  $\mathbb{C}^n$  aus Eigenvektoren,  $Av_k = \lambda_k v_k$ . Diese liefert uns sofort eine Basis aus Eigenfunktionen  $y_1, \dots, y_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  mit  $y_k(t) = e^{\lambda_k t} v_k$ .

Dies vereinfacht die Berechnung der obigen Matrix-Exponentialfunktion.

☺ Ist  $A$  **nicht diagonalisierbar**, so doch immerhin noch jordanisierbar: Es existiert eine Basis des Raumes  $\mathbb{C}^n$  aus Hauptvektoren, und diese liefern eine Basis des Lösungsraumes  $L_0$  aus Hauptfunktionen.

☺ Zu jeder Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  existiert eine Basis aus Hauptvektorketten. Das obige Verfahren führt also stets zu einer Basis des Lösungsraums. Ist die Matrix reell,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , so fordert man meist reelle Lösungen. Sei  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{C}^n$  eine Hauptvektorkette zum Eigenwert  $\lambda = \sigma + i\omega$ . Dann ist  $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$  eine Hauptvektorkette zum Eigenwert  $\bar{\lambda} = \sigma - i\omega$ . Dank Basiswechsel hat das DGS folgende **reelle Lösungen**

$$\begin{aligned} \text{Re } y_k(t) &= e^{\sigma t} \text{Re} \left( e^{i\omega t} \left[ v_k + t v_{k-1} + \frac{t^2}{2} v_{k-2} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} v_1 \right] \right), \\ \text{Im } y_k(t) &= e^{\sigma t} \text{Im} \left( e^{i\omega t} \left[ v_k + t v_{k-1} + \frac{t^2}{2} v_{k-2} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} v_1 \right] \right). \end{aligned}$$

Wir erkennen hieran insbesondere das **asymptotische Verhalten**:

Für  $\sigma < 0$  gilt exponentielles Abklingen,  $|y_k(t)| \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ .

Für  $\sigma > 0$  gilt exponentielles Wachstum,  $|y_k(t)| \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow \infty$ .

Für  $\sigma = 0$  ist  $y_1$  beschränkt, aber  $y_2, \dots, y_\ell$  wachsen polynomiell.

☺ Das Eigenwert-Kriterium gilt allgemein für Linearisierungen (P2D).

Die **Cauchy–Riemann–Gleichungen** für  $u, v: \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  lauten

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

- ⇔ Das Vektorfeld  $(u, -v)$  erfüllt  $\operatorname{div}(u, -v) = 0$  und  $\operatorname{rot}(u, -v) = 0$ .
- ⇔ Die komplexe Funktion  $f = u + iv: \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  ist **holomorph**.
- ⇔ Lokal ist  $f$  eine komplexe **Potenzreihe**,  $f(z) = \sum a_k(z - z_0)^k$ .
- ⇒ Beide Funktionen  $u, v$  sind **harmonisch**, also  $\Delta u = \Delta v = 0$ .

Die **Maxwell–Gleichungen** für die Felder  $\vec{E}, \vec{B}: \mathbb{R}^4 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  lauten

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho, & \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, & \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \end{aligned}$$

Jede ebene stationäre Lösung  $\vec{E}: \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  ohne Quellen entspricht einer holomorphen Funktion  $f = E_1 - iE_2: \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  und umgekehrt.

Allgemeine **Bilanzgleichung** / Transportgleichung der Strömungslehre:

$$\underbrace{\partial_t u(t, x)}_{\text{Änderungsrate}} + \underbrace{\nabla \cdot [\vec{v} u(t, x)]}_{\text{Zu/Abfluss: Konvektion}} = \underbrace{\nabla \cdot [\kappa \nabla u(t, x)]}_{\text{Diffusion: div grad}} + \underbrace{c u(t, x)}_{\text{Wachstum/Zerfall}} + \underbrace{q(t, x)}_{\text{Quellen}}$$

Angewendet auf die Impulsdichte  $\vec{u} = \vec{v}\rho$  erhalten wir daraus die **Navier–Stokes–Gleichungen** für inkompressible Fluide:

$$\begin{aligned} \text{Massenerhaltung: } \operatorname{div} \vec{v} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0 \\ \text{Impulserhaltung: } \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} &= \nu \Delta v_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i \end{aligned}$$

Änderung
Konvektion
Diffusion
interne Kraft
extern

Jede ebene stationäre Strömung  $v = (v_1, v_2): \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  konstanter Dichte ohne Wirbel, ohne Reibung und ohne äußere Kräfte entspricht einer holomorphen Funktion  $f = v_1 - iv_2: \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  und umgekehrt. Der Druck  $p$  berechnet sich hieraus durch  $p + (\rho/2)(v_1^2 + v_2^2) = \text{const.}$

Zu lösen sei eine **quasi-lineare PDE erster Ordnung**

$$\begin{aligned} a(x, y, u) \partial_x u + b(x, y, u) \partial_y u &= f(x, y, u) \quad \text{für alle } (x, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2, \\ \text{mit Anfangswerten } u(x, y) &= u_0(x, y) \quad \text{für alle } (x, y) \in A \subseteq \Omega. \end{aligned}$$

Gegeben sind hierzu das Definitionsgebiet  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  und die stetigen Koeffizientenfunktionen  $a, b, f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , gesucht ist  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Auf einer Teilmenge  $A \subseteq \Omega$  gibt  $u_0: A \rightarrow \mathbb{R}$  die Anfangswerte vor.

Eine **charakteristische Kurve** der PDE zum Startpunkt  $(x_0, y_0) \in A$  ist ein  $C^1$ -Weg  $\gamma: \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \Omega \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^3$  mit  $s \mapsto (X(s), Y(s), U(s))$  und

$$\begin{aligned} X(0) &= x_0, & X' &= a(X, Y, U), \\ Y(0) &= y_0, & Y' &= b(X, Y, U), \\ U(0) &= u_0(x_0, y_0), & U' &= f(X, Y, U). \end{aligned}$$

- ☺ Solche gewöhnlichen DGSysteme können wir bereits gut lösen! Sind  $a, b, f$  stetig diff'bar, so hat das AWP genau eine maximale Lösung.
- ☺ Der Startwert wird entlang der Charakteristik transportiert (Q2D): Jede Lösung  $u$  der PDE erfüllt  $u(X(s), Y(s)) = U(s)$  für alle  $s \in I$ .

Wir betrachten lineare PDE erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Nach Division durch einen der Koeffizienten erhalten wir folgende Form:

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) + b \partial_x u(t, x) + c u(t, x) &= f(t, x) \quad \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}, \\ \text{mit Anfangswerten } u(0, x) &= g(x) \quad \text{für } t = 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Gegeben sind die konstanten Koeffizienten  $a = 1, b, c \in \mathbb{R}$  sowie stetige Funktionen  $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , gesucht ist  $u: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dieses Problem hat genau eine Lösung  $u: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , nämlich

$$u(t, x) = g(x - bt) e^{-ct} + \int_{\tau=0}^t f(\tau, x - bt + b\tau) e^{c(\tau-t)} d\tau$$

- ☺ Machen Sie die Probe: einsetzen und sorgfältig nachrechnen!
- ☺ Das ist ein seltener Glücksfall: Zu dieser Problemklasse haben wir mühelos eine allgemein gültige und explizite Integralformel gefunden.
- ☺ Allgemeiner gelingt diese Rechnung ebenso für Gleichungen  $\partial_t u(t, x) + b(t) \partial_x u(t, x) + c(t, x) u(t, x) = f(t, x)$ , siehe Satz Q3A.
- ⚠ Die meisten PDE lassen sich nicht einfach mit Integralformeln lösen.

☹ Nicht jede PDE besitzt eine Lösung; selbst wenn sie eine besitzt, so doch meist nicht elementar, das heißt in geschlossener Form.

☺ In solchen Fällen hilft meist nur der **Potenzreihenansatz** Q333: Existenz- und Eindeutigkeitsatz Q3B von Cauchy–Kowalewskaja

☺ **Fourier–Transformation** löst  $P(\partial) u(x) = g(x)$  für jedes Polynom  $P(x) = \sum a_\nu x^\nu$ . Die Transformation ergibt nämlich  $P(i\xi) \hat{u}(\xi) = \hat{g}(\xi)$ , Auflösen zu  $\hat{u}(\xi) = \hat{g}(\xi)/P(i\xi)$  und Rücktransformation liefert dann  $u$ : Dies garantiert der Existenzsatz R1A von Ehrenpreis–Malgrange.

In der Praxis treten sehr häufig partielle Differentialgleichungen auf. Erfahrungsgemäß sind die allermeisten höchstens **zweiter Ordnung**.

☺ Lineare PDE **erster** Ordnung lösen wir entlang **Charakteristiken**. Die wichtigsten linearen PDE **zweiter** Ordnung sind folgende Modelle: Die Poisson–Gleichung  $\Delta u = \rho$ , die Wellengleichung  $\partial_t^2 u - c^2 \Delta u = \rho$  und die Wärmeleitungsgleichung  $\partial_t u - \kappa \Delta u = q$  mit  $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ . Nach diesen drei Modellgleichungen klassifiziert man lineare PDE zweiter Ordnung in **elliptisch**, **hyperbolisch** und **parabolisch** R110.

Zu lösen sei eine **separierbare Differentialgleichung** der Form

$$P(x, \partial_x) u(x, y) = Q(y, \partial_y) u(x, y).$$

Gegeben sind Intervalle  $X, Y \subseteq \mathbb{R}$  und hierauf die Differentialoperatoren  $P(x, \partial_x) = \sum_{j=0}^m a_j(x) \partial_x^j$  und  $Q(y, \partial_y) = \sum_{k=0}^n b_k(y) \partial_y^k$  mit  $a_j, b_k$  stetig. Das bedeutet anschaulich:  $P$  operiert nur auf  $x$  und  $Q$  operiert nur auf  $y$ . Als Lösungen gesucht sind Funktionen  $u: X \times Y \rightarrow \mathbb{K}: (x, y) \mapsto u(x, y)$ . In diesem Falle eignet sich der **Produktansatz** gemäß Satz R1D:

Sei  $u: X \times Y \rightarrow \mathbb{K}: u(x, y) = v(x) \cdot w(y)$  Produkt von  $0 \neq v \in C^m(X, \mathbb{K})$  und  $0 \neq w \in C^n(Y, \mathbb{K})$ . Dann ist die obige PDE äquivalent zu den beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen / Eigenwertgleichungen

$$P(x, \partial_x) v(x) = \lambda v(x) \quad \text{und} \quad Q(y, \partial_y) w(y) = \lambda w(y)$$

mit einem gemeinsamen Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{K}$  als **Separationskonstante**. Lösung sind Eigenfunktionen  $u(x, y) = v(x)w(y)$  und Superpositionen. Gleiches gilt für  $u(x_1, \dots, x_n) = u_1(x_1) \cdots u_n(x_n)$  in mehreren Variablen.

Die Konstruktion einer Lösung oder erfolgreiche Probe eines Kandidaten zeigt die **Existenz** einer Lösung, aber noch nicht die **Eindeutigkeit**: Es könnte weitere Lösungen geben, die unserem Ansatz entgehen.

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet, also der Abschluss  $\bar{\Omega}$  kompakt.

(0) Löst  $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  die homogene Poisson–Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0 \quad \text{für jeden inneren Punkt } x \in \Omega, \\ u(x) &= 0 \quad \text{für jeden Randpunkt } x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

dann gilt  $u(x) = 0$  für alle  $x \in \bar{\Omega}$ .

(1) Lösen  $\tilde{u}, \hat{u}: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  die inhomogene Poisson–Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= q(x) \quad \text{für jeden inneren Punkt } x \in \Omega, \\ u(x) &= g(x) \quad \text{für jeden Randpunkt } x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

dann gilt  $\hat{u}(x) = \tilde{u}(x)$  für alle  $x \in \bar{\Omega}$ .

Wie üblich folgt (1) aus (0) dank Linearität: Angenommen  $\tilde{u}, \hat{u}$  erfüllen (1). Die Differenz  $u = \tilde{u} - \hat{u}$  erfüllt dann (0). Also gilt  $u = 0$  und somit  $\tilde{u} = \hat{u}$ .

Beweise für die Eindeutigkeit liefern die **Energiemethode** und das folgende **Minimum-Maximum-Prinzip** für harmonische Funktionen.

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet, also der Abschluss  $\bar{\Omega}$  kompakt. Sei  $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Da  $\bar{\Omega}$  und  $\partial\Omega$  kompakt sind, nimmt  $u$  hierauf jeweils ein Minimum und ein Maximum an. Wegen  $\bar{\Omega} \supseteq \partial\Omega$  gilt dann allgemein:

$$\min_{\bar{\Omega}} u \leq \min_{\partial\Omega} u \quad \text{und} \quad \max_{\bar{\Omega}} u \geq \max_{\partial\Omega} u$$

Zudem sei  $u$  harmonisch auf dem Inneren  $\Omega$ , also  $u \in C^2$  und  $\Delta u = 0$ .

(1) Dann nimmt  $u$  sein Minimum und Maximum auf dem Rand  $\partial\Omega$  an:

$$\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u \quad \text{und} \quad \max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$$

Seien  $u, v: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und auf dem Inneren  $\Omega$  harmonisch. Dann gilt: (2) Monotonie: Aus  $u \leq v$  auf dem Rand  $\partial\Omega$  folgt  $u \leq v$  auf ganz  $\bar{\Omega}$ . (3) Eindeutigkeit: Aus  $u = v$  auf dem Rand  $\partial\Omega$  folgt  $u = v$  auf ganz  $\bar{\Omega}$ .

☺ Dies können wir zur Eingrenzung durch Ober/Unterslösungen nutzen. Das Minimum-Maximum-Prinzip gilt ebenso diskret für endliche Graphen (Satz T4B) und beweist neben Eindeutigkeit auch Existenz der Lösung!

**Homogene Wärmeleitungsgleichung auf  $\mathbb{R}^n$**  Z509  
Fazit

Fouriers berühmte Wärmeleitungsgleichung  $\partial_t u - \kappa \Delta u = q$  folgt aus der Wärmebilanz für den Wärmefluss dank unserer Integralsätze.

Die homogene Gleichung  $\partial_t u = \kappa \Delta u$  hat als Fundamentallösung eine auseinanderfließende Glockenkurve, den **Wärmeleitungskern**

$$H : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : H(t, x) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi\kappa t})^n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\kappa t}\right).$$

Die Konstanten sichern die Normierung  $\int_{x \in \mathbb{R}^n} H(t, x) dx = 1$  für  $t > 0$ . In Satz D5D haben wir die Gleichung  $(\partial_t - \kappa \Delta)H = 0$  nachgerechnet.

Ist für  $t = 0$  die Wärmeverteilung  $u_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  vorgegeben,  $u_0 \in C_b$ , so erhalten wir die Lösung durch **Superposition** (Faltung, siehe D5E)

$$u : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : u(t, x) = \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} H(t, x - \xi) u_0(\xi) d\xi.$$

Für  $t \searrow 0$  gilt dann  $u(t, x) \rightarrow u_0(x)$ . Durch Ableiten unter dem Integral finden wir  $(\partial_t - \kappa \Delta)u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\xi) (\partial_t - \kappa \Delta)H(t, x - \xi) d\xi = 0$ .

**Inhomogene Wärmeleitungsgleichung auf  $\mathbb{R}^n$**  Z510  
Fazit

Zu lösen sei die inhomogene Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) - \kappa \Delta u(t, x) &= f(t, x) \quad \text{für alle } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) &= u_0(x) \quad \text{Anfangswerte für } x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

Gegeben sei  $u_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit Schranke  $|u_0(x)| \leq a e^{b|x|^\alpha}$ ,  $\alpha < 2$  sowie  $f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und stetig differenzierbar.

**Existenz:** Dann wird unser Problem gelöst durch das Integral

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} H(t, x - \xi) u_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} H(t - \tau, x - \xi) f(\tau, \xi) d\xi d\tau.$$

Zu jedem  $T > 0$  gilt eine Schranke  $|u(t, x)| \leq A e^{Bx^2}$  auf  $[0, T] \times \mathbb{R}$ .

**Eindeutigkeit:** Unsere Lösung  $u$  ist die einzige mit dieser Schranke.

⚠ Ohne diese Schranke gibt es exotische Gegenbeispiele (S1B). Mehrdeutigkeiten müssen wir erkennen und nötigenfalls auch lösen: Sind noch mehrere Lösungen möglich, so stellen wir geeignete weitere Bedingungen, um die physikalisch sinnvollen Lösungen herauszuheben.

**Randbedingungen und Eindeutigkeit** Z511  
Fazit

Für die Wärmeleitungsgleichung mit Anfangs- und Randbedingungen (ARWP) nutzen wir den folgenden Eindeutigkeitsatz S3C:

(0) Löst  $u : [0, T] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  die homogene Wärmeleitungsgleichung  $\partial_t u(t, x) - \kappa \partial_x^2 u(t, x) = 0$  für  $0 < t < T$  und  $a < x < b$ ,

$$\begin{cases} u(t, a) = u(t, b) = 0 & \text{Dirichlet-Randbedingungen für } t > 0 \text{ oder} \\ \partial_x u(t, a) = \partial_x u(t, b) = 0 & \text{Neumann-Randbedingungen für } t > 0, \\ u(0, x) = 0 & \text{Anfangswerte für } t = 0 \text{ und } a < x < b, \end{cases}$$

dann gilt  $u(t, x) = 0$  für alle  $(t, x) \in [0, T] \times [a, b]$ .

(1) Lösen  $\tilde{u}, \hat{u} : [0, T] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) - \kappa \partial_x^2 u(t, x) &= f(t, x), \\ \begin{cases} u(t, a) = \ell(t), u(t, b) = r(t) \text{ oder} \\ \partial_x u(t, a) = \ell(t), \partial_x u(t, b) = r(t), \end{cases} \\ u(0, x) &= g(x), \end{aligned}$$

dann gilt  $\tilde{u}(t, x) = \hat{u}(t, x)$  für alle  $(t, x) \in [0, T] \times [a, b]$ .

**Das Minimum-Maximum-Prinzip** Z512  
Fazit

Sei  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  kompakt und  $\Omega_T = [0, T] \times K$ . Für  $u : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}$  untersuchen wir die Wärmeleitungsgleichung  $\partial_t u = \Delta u$ . Hierzu zerlegen wir  $\Omega_T$  in das parabolische Innere  $D_T = ]0, T] \times \overset{\circ}{K}$  und den parabolische Rand  $B_T = ([0, T] \times \partial K) \cup (\{0\} \times K)$ .

Auf  $\Omega_T = [0, T] \times K$  sei  $u : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Da  $\Omega_T$  und  $B_T$  kompakt sind, nimmt  $u$  hierauf Minimum und Maximum an. Wegen  $\Omega_T \supseteq B_T$  gilt also:

$$\min_{\Omega_T} u \leq \min_{B_T} u \quad \text{und} \quad \max_{\Omega_T} u \geq \max_{B_T} u$$

Zudem gelte  $\partial_t u = \Delta u$  auf dem parabolischen Inneren  $D_T = ]0, T] \times \overset{\circ}{K}$ .

(1) Dann nimmt  $u$  sein Minimum und Maximum auf dem Rand  $B_T$  an:

$$\min_{\Omega_T} u = \min_{B_T} u \quad \text{und} \quad \max_{\Omega_T} u = \max_{B_T} u$$

Seien  $u, v : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Lösungen,  $\partial_t u = \Delta u$  und  $\partial_t v = \Delta v$  auf  $D_T$ .

(2) Monotonie: Aus  $u \leq v$  auf dem Rand  $B_T$  folgt  $u \leq v$  auf ganz  $\Omega_T$ .

(3) Eindeutigkeit: Aus  $u = v$  auf dem Rand  $B_T$  folgt  $u = v$  auf ganz  $\Omega_T$ .

Das Prinzip gilt ebenso harmonisch (Satz R2C) und diskret (Satz T4B).

**Wärmeleitung eines Stabes** Z513  
Fazit

Zu lösen sei die eindimensionale homogene Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) - \kappa \partial_x^2 u(t, x) &= 0 \quad \text{für alle } t > 0 \text{ und } 0 < x < L, \\ u(t, 0) = u(t, L) &= 0 \quad \text{Randbedingungen für } t \geq 0, \\ u(0, x) &= g(x) \quad \text{Anfangswerte für } 0 < x < L. \end{aligned}$$

Gegeben sei  $g : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig oder allgemeiner  $g \in L^2([0, L])$ , entwickelt als  $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x/L)$  mit  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ . Dann wird unser Anfangs- und Randwertproblem gelöst durch

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t/T} \sin(n\pi x/L).$$

Die natürliche Zeitskala ist die Abklingzeit  $T = L^2/\kappa\pi^2$  (Eigenzeit). Gilt sogar  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ , so ist  $u$  in  $t = 0$  stetig und dort gleich  $g$ .

- 😊 So können Sie Abkühlen und Aufheizen explizit berechnen: Diese Eigenfunktionen diagonalisieren die Wärmeleitungsgleichung.
- 😊 Numerisch sehr effizient für  $t > T$  dank exponentiellem Abklingen.

**Wärmeleitung eines Stabes** Z514  
Fazit

Speziell für konstante Anfangswerte  $g(x) = 1$  erhalten wir die Lösung

$$u(t, x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(2k+1)^2 t/T} \frac{\sin((2k+1)\pi x/L)}{(2k+1)}.$$

Die Kerntemperatur im Stabmittelpunkt  $x = L/2$  ist demnach

$$u(t, \frac{L}{2}) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(2k+1)^2 t/T} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} \stackrel{t \gg T}{\approx} \frac{4}{\pi} e^{-t/T}.$$

- 😊 Die Abkühlung ist exponentiell, sehr gute Näherung für  $t > T$ . Bei doppelter Länge dauert die Abkühlung viermal so lange.
- 😊 Hohe Frequenzen klingen besonders schnell ab. Das ist numerisch günstig, führt zu schneller Konvergenz und Glättungseigenschaft:
- 😊 Zu  $t = 0$  dürfen die Anfangsdaten  $u(0, x)$  beliebig rau sein, sogar unstetig, doch zu jedem Zeitpunkt  $t > 0$  ist die Lösung  $u(t, x)$  glatt.

Dieselbe Methode löst die inhomogene Gleichung  $\partial_t u - \kappa \partial_x^2 u = f$  mit den jeweiligen Randbedingungen: Dirichlet, Neumann, etc.

**Wärmeleitung einer Kugel** Z515  
Fazit

Zu lösen sei die sphärische homogene Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, r) &= \frac{\kappa}{r^2} \partial_r [r^2 \partial_r u(t, r)] \quad \text{für alle } t > 0 \text{ und } 0 < r < R, \\ u(t, R) &= 0 \quad \text{Randbedingungen für } t \geq 0, \\ u(0, r) &= 1 \quad \text{Anfangswerte für } 0 < r < R. \end{aligned}$$

Gegeben sei  $g : [0, R] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig oder allgemeiner  $g \in L^2([0, R])$ , entwickelt als  $g(r) \cdot r = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi r/R)$  mit  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ . Dann wird unser Anfangs- und Randwertproblem gelöst durch

$$u(t, r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t/T} \sin(n\pi r/R).$$

Die natürliche Zeitskala ist die Abklingzeit  $T = R^2/\kappa\pi^2$  (Eigenzeit). Gilt sogar  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ , so ist  $u$  in  $t = 0$  stetig und dort gleich  $g$ .

- 😊 So können Sie Abkühlen und Aufheizen explizit berechnen: Diese Eigenfunktionen diagonalisieren die Wärmeleitungsgleichung.
- 😊 Numerisch sehr effizient für  $t > T$  dank exponentiellem Abklingen.

**Wärmeleitung einer Kugel** Z516  
Fazit

Speziell für konstante Anfangswerte  $g(r) = 1$  erhalten wir die Lösung

$$u(t, r) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n^2 t/T} \frac{\sin(n\pi r/R)}{n\pi r/R}.$$

Die Kerntemperatur im Kugelmittelpunkt  $r = 0$  ist demnach

$$u(t, 0) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n^2 t/T} \stackrel{t \gg T}{\approx} 2 e^{-t/T}.$$

- 😊 Die Abkühlung ist exponentiell, sehr gute Näherung für  $t > 2T$ . Bei doppeltem Radius dauert die Abkühlung viermal so lange.
- 😊 Hohe Frequenzen klingen besonders schnell ab. Das ist numerisch günstig, führt zu schneller Konvergenz und Glättungseigenschaft:
- 😊 Zu  $t = 0$  dürfen die Anfangsdaten  $u(0, r)$  beliebig rau sein, sogar unstetig, doch zu jedem Zeitpunkt  $t > 0$  ist die Lösung  $u(t, r)$  glatt.

Dieselbe Methode löst die inhomogene Wärmeleitungsgleichung mit den jeweiligen Randbedingungen: Dirichlet, Neumann, etc.

**Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume** Z601  
Fazit

Ein **diskreter Wahrscheinlichkeitsraum**  $(\Omega, \mathcal{P})$  besteht aus

- einer Menge  $\Omega$  von möglichen Ergebnissen und
- einer normierten und additiven Abbildung  $\mathcal{P}: \mathfrak{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ .

Letzteres bedeutet  $\mathcal{P}(\Omega) = 1$  und  $\mathcal{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathcal{P}(\{\omega\})$  für alle  $A \subseteq \Omega$ .

Jedes Element  $\omega \in \Omega$  heißt **Ergebnis**, somit ist  $\Omega$  die **Ergebnismenge**. Jede Teilmenge  $A \subseteq \Omega$  heißt **Ereignis**, somit  $\mathfrak{P}(\Omega)$  die **Ereignismenge**. Das Ereignis  $A$  tritt genau dann ein, wenn ein Ergebnis  $\omega \in A$  eintritt. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist das **Wahrscheinlichkeitsmaß**  $\mathcal{P}(A)$ .

Spezialfall: Ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{P})$  heißt **endlich**, wenn die Ergebnismenge  $\Omega$  endlich ist. Er heißt **laplacesch**, wenn zudem alle Ergebnisse  $\omega \in \Omega$  gleich wahrscheinlich sind. Für das **Laplace-Wahrscheinlichkeitsmaß** auf  $\Omega$  gilt daher

$$\mathcal{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der Ergebnisse in } A}{\text{Anzahl aller Ergebnisse in } \Omega} = \frac{\text{günstige Ergebnisse}}{\text{mögliche Ergebnisse}}$$

☺ Für Laplace-Experimente berechnet man die Wkten durch Abzählen der Ergebnisse. Hierbei helfen kombinatorische Abzählformeln.

**Rechnen mit Ereignissen** Z602  
Fazit

Alle Ergebnisse fassen wir zur **Ergebnismenge**  $\Omega$  zusammen. Jedes Element  $\omega \in \Omega$  heißt **Ergebnis**. Jede Teilmenge  $A \subseteq \Omega$  heißt **Ereignis**.

Menge	Bedeutung als Zufallsereignis
$\Omega$	Das sichere Ereignis: $\Omega$ tritt immer ein.
$\emptyset$	Das unmögliche Ereignis: $\emptyset$ tritt nie ein.
$A \subseteq \Omega$	Das Ereignis $A$ tritt ein bei jedem Ergebnis $\omega \in A$ .
$\Omega \setminus A$	Komplement: $\bar{A} = \Omega \setminus A$ tritt ein, wenn $A$ nicht eintritt.
$A \subseteq B$	Teilmenge: Immer wenn $A$ eintritt, dann auch $B$ .
$B \setminus A$	Restmenge: Das Ereignis $B$ tritt ein, aber nicht $A$ .
$A \cap B$	Schnittmenge: Die Ereignisse $A$ und $B$ treten beide ein.
$A \cup B$	Das Ereignis $A$ oder $B$ tritt ein (evtl. auch beide).
$A \sqcup B$	Das Ereignis $A$ oder $B$ tritt ein, wobei $A \cap B = \emptyset$ .
$A \Delta B$	Entweder $A$ oder $B$ tritt ein (aber nicht beide).

Unser Ziel sind nachvollziehbar begründete, quantitative Aussagen.  
☺ Diese Notation erlaubt präzises Rechnen mit Zufallsereignissen.

**Bedingte Wahrscheinlichkeit** Z603  
Fazit

Sei  $(\Omega, \mathcal{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $B \subseteq \Omega$  ein Ereignis mit Wahrscheinlichkeit  $\mathcal{P}(B) > 0$ . Für jedes Ereignis  $A \subseteq \Omega$  definieren wir die **Wahrscheinlichkeit von  $A$  unter der Bedingung  $B$**  durch

$$\mathcal{P}(A|B) := \mathcal{P}_B(A) := \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B)}$$

Sei  $\Omega = B_1 \sqcup B_2 \sqcup \dots \sqcup B_\ell$  eine Zerlegung in disjunkte Ereignisse. Für  $A \subseteq \Omega$  gilt dann die **Formel der totalen Wahrscheinlichkeit**:

$$\mathcal{P}(A) = \sum_{k=1}^{\ell} \mathcal{P}(A \cap B_k) = \sum_{k=1}^{\ell} \mathcal{P}(A|B_k) \mathcal{P}(B_k)$$

Im Falle  $\mathcal{P}(A) > 0$  gilt zudem die **Formel von Bayes** (Satz T2B):

$$\mathcal{P}(B_i|A) = \frac{\mathcal{P}(A|B_i) \mathcal{P}(B_i)}{\mathcal{P}(A)} = \frac{\mathcal{P}(A|B_i) \mathcal{P}(B_i)}{\sum_{k=1}^{\ell} \mathcal{P}(A|B_k) \mathcal{P}(B_k)}$$

☺ Bequeme Notation und präzises Rechnen mit Zufallsereignissen.  
☺ Die Rechnung ist meist leicht, die Interpretation erfordert Übung.

**Stochastische Unabhängigkeit** Z604  
Fazit

Eine Familie von Ereignissen  $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq \Omega$  heißt (**stochastisch**) **unabhängig**, wenn alle Schnittmengen die Produktregel erfüllen:

$$\mathcal{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_\ell}) = \mathcal{P}(A_{i_1}) \mathcal{P}(A_{i_2}) \dots \mathcal{P}(A_{i_\ell})$$

für jede Auswahl  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_\ell \leq n$ : Die Wkt jedes Schnitts ist das Produkt der Wahrscheinlichkeiten. Für unabhängige Ereignisse lassen sich damit die Wkten aller erzeugten Ereignisse berechnen. Das heißt, zwei Ereignisse  $A, B \subseteq \Omega$  sind unabhängig, wenn gilt:

- $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \mathcal{P}(B)$ .

Drei Ereignisse  $A, B, C \subseteq \Omega$  sind unabhängig, wenn gilt:

- $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \mathcal{P}(B)$ ,
- $\mathcal{P}(A \cap C) = \mathcal{P}(A) \mathcal{P}(C)$ ,
- $\mathcal{P}(B \cap C) = \mathcal{P}(B) \mathcal{P}(C)$ ,
- $\mathcal{P}(A \cap B \cap C) = \mathcal{P}(A) \mathcal{P}(B) \mathcal{P}(C)$ .

⚠ Die Tripelbedingung folgt nicht aus den drei Paarbedingungen! [T226]

**Ausfallwahrscheinlichkeit** Z605  
Fazit

Von  $n$  **unabhängigen** Teilen habe jedes Ausfallwkt  $p$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\text{Alle Teile funktionieren}) &= (1-p)^n \approx e^{-np} \\ \mathcal{P}(\text{Mindestens eins fällt aus}) &= 1 - (1-p)^n \approx 1 - e^{-np} \end{aligned}$$

Taylor-Entwicklung: Es gilt  $\exp(x) \approx 1+x$  und  $\exp(-x) \approx 1-x$ .  
Genauer: Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $\exp(x) \geq 1+x$  und  $\exp(-x) \geq 1-x$ , und für  $x \approx 0$  gilt zudem  $\exp(x) \approx 1+x$  und  $\exp(-x) \approx 1-x$ .

Eine Maschine bestehe aus vielen **unabhängigen** Teilen  $T_1, \dots, T_n$ . Jedes Teil  $T_k$  hat eine gewisse Ausfallwahrscheinlichkeit  $p_k \in [0, 1]$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\text{Alle Teile funktionieren}) &= (1-p_1) \dots (1-p_n) \\ &\approx e^{-p_1} \dots e^{-p_n} = e^{-(p_1 + \dots + p_n)} \\ \mathcal{P}(\text{Mindestens eins fällt aus}) &= 1 - (1-p_1) \dots (1-p_n) \\ &\approx 1 - e^{-(p_1 + \dots + p_n)}. \end{aligned}$$

☺ Die Näherung ist praktisch für  $p_1, \dots, p_n$  klein und  $n$  groß. Dies ist die Poisson-Verteilung  $\mathcal{P}(\lambda)$  mit  $\lambda = p_1 + \dots + p_n$ . [U314]

**Kollisionswahrscheinlichkeit** Z606  
Fazit

Aus  $n$  Möglichkeiten wird  $k$  mal zufällig ausgewählt (wobei  $1 \leq k \leq n$ ). Die Wahrscheinlichkeit  $P_{n,k}$ , dabei  $k$  verschiedene auszuwählen, ist

$$P_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)! k!} \approx \exp\left(-\frac{k(k-1)}{2n}\right)$$

☺ Der Graph ist die rechte Hälfte der Gaußschen Glockenkurve  $e^{-x^2/2}$ . Die Wahrscheinlichkeit  $Q_{n,k}$  mindestens einer Kollision ist demnach

$$Q_{n,k} = 1 - P_{n,k} \approx 1 - \exp\left(-\frac{k(k-1)}{2n}\right)$$

**Geburtstagsparadox:** Mit welcher Wkt  $Q$  sind unter  $k = 25$  zufälligen Personen mindestens zwei am gleichen Tag des Jahres geboren?  
**Lösung:** Für  $k = 25$  und  $n = 365$  gilt  $P \approx e^{-0.821} \approx 0.44$ , also  $Q \approx 0.56$ .  
☺ Intuitiv halten viele eine Kollision für unwahrscheinlich. Tatsächlich liegt die Wkt bei über 50%, daher trägt dieses überraschende Ergebnis den Namen „Geburtstagsparadox“. Probieren Sie es selbst einmal aus!

**Kombinatorik / Schubfachmodelle** Z607  
Fazit

Auf wie viele Arten können wir  $k$  Objekte auf  $n$  Fächer verteilen?

Schubfachmodell	unterscheidbare Objekte	unterscheidbare Objekte
beliebig viele Objekte pro Fach	$n^k$	$\binom{n+k-1}{k}$
höchstens eins pro Fach (injektiv)	$\frac{n!}{(n-k)!} = k! \binom{n}{k}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
mindestens eins pro Fach (surjektiv)	$n! \left\{ \begin{matrix} k \\ n \end{matrix} \right\}$	$\binom{k-1}{n-1}$

Unterscheidbare Objekte denken wir uns mit  $1, \dots, k$  nummeriert. Bei ununterscheidbaren Objekten dürfen wir Objekte untereinander vertauschen: Das bedeutet, wir betrachten Anordnungen dann als gleich, wenn sie sich nur durch die Nummerierung der Objekte unterscheiden. (Für Ausführungen siehe en.wikipedia.org/wiki/Twelvefold\_way.)

**Kombinatorik / Urnenmodelle** Z608  
Fazit

Aus  $n$  durchnummerierten Kugeln ziehen wir  $k$  Kugeln (oder Lose): Ziehung mit / ohne Zurücklegen, Ergebnis mit / ohne Reihenfolge. Die Gesamtzahl der möglichen Ergebnisse berechnet sich wie folgt:

Urnenmodell	mR: mit Reihenfolge	oR: ohne Reihenfolge
oZ: ohne Zurücklegen	$\frac{n!}{(n-k)!} = k! \binom{n}{k}$ <small>Laplace!</small>	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ <small>Laplace!</small>
mZ: mit Zurücklegen	$n^k$ <small>Laplace!</small>	$\binom{n+k-1}{k}$ <small>nicht Laplace!</small>

**Beispiel:** In einer Urne liegen  $N$  Kugeln, davon sind genau  $K$  rot. Wir ziehen zufällig  $n$  der  $N$  Kugeln (oZoR). Welche Wkt hat das Ereignis  $A_k =$  „Es werden genau  $k$  der  $K$  roten Kugeln gezogen“? **Lösung:**

$$\mathcal{P}(A_k) = \frac{|A_k|}{|\Omega|} = \binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k} / \binom{N}{n}$$

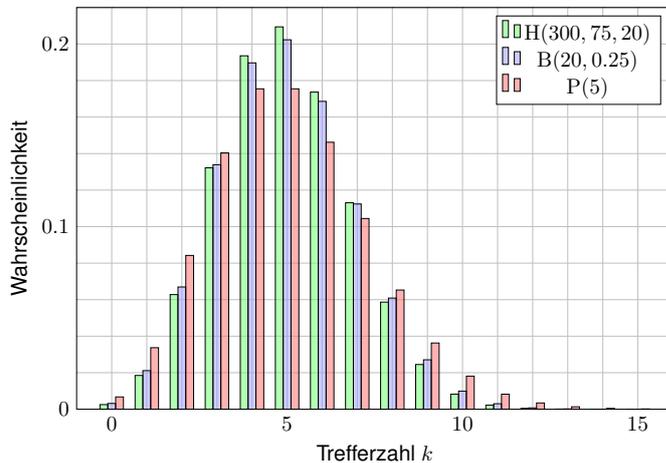
Oft wollen oder müssen wir zwei WMaße  $P_0$  und  $P_1$  auf  $\Omega$  vergleichen: Ist  $P_0$  mühsam aber  $P_1$  bequem, so wollen wir  $P_0$  durch  $P_1$  ersetzen. Die beiden WMaße  $P_0$  und  $P_1$  ordnen jedem Ereignis  $A \subseteq \Omega$  die Wkten  $P_0(A)$  bzw.  $P_1(A)$  zu. Der **totale Abstand** zwischen  $P_0$  und  $P_1$  ist das Supremum, die größtmögliche Abweichung, die hierbei auftreten kann:

$$\|P_0 - P_1\| := \sup_{A \subseteq \Omega} |P_0(A) - P_1(A)| = \frac{1}{2} \sum_{\omega \in \Omega} |P_0(\{\omega\}) - P_1(\{\omega\})|$$

Diese Fehlerschranke nutzen wir bei näherungsweise Rechnungen: Ist der Abstand klein genug, etwa  $\|P_0 - P_1\| \leq \varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-3}$ , so können wir  $P_0(A)$  durch  $P_1(A)$  ersetzen und machen dabei schlimmstenfalls einen Fehler von  $\varepsilon$ , das heißt, es gilt  $P_0(A) = P_1(A) + \delta$  mit  $|\delta| \leq \varepsilon$ .

Der totale Abstand ist (bis auf einen Faktor 1/2) die Summe über alle punktwisen Abstände: Die linke Seite  $\sup_{A \subseteq \Omega}$  ist leicht zu verstehen, die rechte Seite  $\sum_{\omega \in \Omega}$  ist leicht zu berechnen. Diese Umformulierung ist oft leichter zugänglich: Es genügt, die absolute Differenz über alle Ergebnisse zu addieren. Die genaue Rechnung [U318] beweist dies und erklärt den Faktor 1/2.

Die Rechnung zeigt zudem, dass das Supremum angenommen wird, also ein Maximum ist. Für die Menge  $A = \{\omega \in \Omega \mid P_0(\{\omega\}) > P_1(\{\omega\})\}$  gilt  $\|P_0 - P_1\| = |P_0(A) - P_1(A)|$ .



Stichprobe: Gesamtgröße  $N$ , davon  $K$  Treffer, Stichprobengröße  $n$ . Die Trefferzahl  $k$  folgt der **hypergeometrischen Verteilung**

$$H(N, K, n)(k) = \binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k} / \binom{N}{n}$$

Ein Experiment mit Trefferwkt  $t$  mit  $n$ -mal unabhängig wiederholt, z.B. Stichprobengröße  $n$  mit Zurücklegen, Trefferwkt  $t = K/N$ .

Die Trefferzahl  $k$  folgt hier der **Binomialverteilung**

$$B(n, t)(k) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$$

Damit sind  $H(N, K, n)$  und  $B(n, t)$  WVerteilungen auf  $\{0, \dots, n\} \subseteq \mathbb{N}$ .

Für  $N \rightarrow \infty$  und  $K/N \rightarrow t$  gilt die Konvergenz  $H(N, K, n) \rightarrow B(n, t)$ .

Genauer gilt für  $K > n$  folgende Abschätzung des **totalen Abstands**

$$\|H(N, K, n) - B(n, K/N)\| < n/N$$

Die **Poisson-Verteilung**  $P(\lambda)$  zum Parameter  $\lambda \geq 0$  ist gegeben durch

$$P(\lambda)(k) = e^{-\lambda} \lambda^k / k!$$

Damit ist  $P(\lambda)$  eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ . Das Gesetz der kleinen Zahlen besagt  $B(n, \lambda/n) \rightarrow P(\lambda)$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Genauer gilt folgende Abschätzung des **totalen Abstands**:

$$\|B(n, \lambda/n) - P(\lambda)\| \leq \lambda^2/n$$

Für Trefferwahrscheinlichkeit  $t \in [0, 1]$  und  $\lambda = nt$  erhalten wir

$$\|B(n, t) - P(nt)\| \leq nt^2$$

☺ Je nach geforderter Genauigkeit können wir so bequem von hypergeometrisch über binomial zu Poisson übergehen.

☺ Das verallgemeinert und präzisiert die Näherungsformel [U108] für Ausfallwahrscheinlichkeiten bei  $n$  gleichen unabhängigen Bauteilen.

Mit Kolmogorovs Axiomen (V1c) fixieren wir die grundlegenden Forderungen für WMaße, woraus alle weiteren Rechenregeln folgen:

Ein **Wahrscheinlichkeitsraum**  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  besteht aus

- einer **Ergebnismenge**  $\Omega$ ,
- einer **Ereignismenge**  $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$  und
- einem **Wahrscheinlichkeitsmaß**  $P: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ ,

mit folgenden grundlegenden Eigenschaften:

- 1 **Normierung:** Es gilt  $\Omega \in \mathcal{A}$  und  $P(\Omega) = 1$ .
- 2 **Komplemente:** Aus  $A \in \mathcal{A}$  folgt  $(\Omega \setminus A) \in \mathcal{A}$ .
- 3  **$\sigma$ -Additivität:** Aus  $A_0, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$  folgt  $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$ , sowie

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} P(A_k) \quad \text{wenn } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j.$$

Die Bezeichnung „ $\sigma$ “ steht abkürzend für „abzählbar“. Wir nennen  $\mathcal{A}$  eine  **$\sigma$ -Algebra** und hierauf  $P: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  ein  **$\sigma$ -additives Maß**.

Wichtigste Beispiele sind diskrete und kontinuierliche WRäume. Auch Mischungen aus diskret und kontinuierlich sind möglich.

Eine **diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung** auf  $\Omega$  ist eine Funktion

$$p: \Omega \rightarrow [0, 1] \quad \text{mit Gesamtmasse} \quad \sum_{x \in \Omega} p(x) = 1.$$

Diese definiert ein **diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß**

$$P: \mathfrak{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1] \quad \text{durch} \quad P(A) := \sum_{x \in A} p(x).$$

Hierbei ist  $\mathfrak{P}(\Omega)$  die Familie aller Teilmengen  $A \subseteq \Omega$ .

Eine **kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung** oder **WDichte** auf einer Ergebnismenge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ist eine messbare Funktion

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \text{mit Gesamtmasse} \quad \int_{\Omega} f(x) dx = 1.$$

Diese definiert ein **kontinuierliches Wahrscheinlichkeitsmaß**

$$P: \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow [0, 1] \quad \text{durch} \quad P(A) := \int_A f(x) dx.$$

Hierbei ist  $\mathcal{B}(\Omega)$  die Familie aller messbaren Teilmengen  $A \subseteq \Omega$ .

Sei  $P$  ein WMaß auf  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , zum Beispiel diskret oder kontinuierlich. Der Schwerpunkt der Verteilung  $P$  heißt **Mittelwert** oder **Erwartung**:

$$\mu := \sum_{x \in \Omega} x p(x) \quad \text{bzw.} \quad \mu := \int_{x \in \Omega} x f(x) dx.$$

Hierbei setzen wir absolute Summierbarkeit / Integrierbarkeit voraus.

Die **Varianz** der Verteilung ist ihr Trägheitsmoment bezüglich  $\mu$ :

$$\sigma^2 := \sum_{x \in \Omega} (x - \mu)^2 p(x) = \left[ \sum_{x \in \Omega} x^2 p(x) \right] - \mu^2 \geq 0 \quad \text{bzw.}$$

$$\sigma^2 := \int_{x \in \Omega} (x - \mu)^2 f(x) dx = \int_{x \in \Omega} x^2 f(x) dx - \mu^2 \geq 0.$$

Die Wurzel  $\sigma \geq 0$  dieses Wertes heißt die **Streuung** der Verteilung. Anschaulich misst  $\sigma$ , wie weit die Werte um den Mittelwert  $\mu$  streuen.

Man nennt die Streuung  $\sigma$  daher auch die **Standardabweichung**.

Genau dann gilt  $\sigma = 0$ , wenn  $P$  auf den Punkt  $\mu$  konzentriert ist, d.h. für  $A \subseteq \mathbb{R}$  gilt  $P(A) = 1$  falls  $\mu \in A$  und  $P(A) = 0$  falls  $\mu \notin A$ .

**Aufgabe:** Welche der folgenden Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sind WDichten?

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1/c}{1 + |x|}, & f(x) &= \frac{1/c}{1 + |x|^2}, \\ f(x) &= \frac{1/c}{1 + |x|^3}, & f(x) &= \frac{1/c}{1 + |x|^\alpha}, \\ g(x) &= \frac{1/c}{1 + |x|^\alpha \ln(e + |x|)}, & h(x) &= \frac{1/c}{1 + |x|^\alpha \ln(e + |x|)^2}, \end{aligned}$$

mit geeignetem  $c \in \mathbb{R}$ . Für welche existieren Erwartung und Varianz?

**Lösung:** Wir haben jeweils  $f \geq 0$ . Die erste lässt sich nicht normieren:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + |x|^\alpha} dx = \begin{cases} +\infty & \text{für } \alpha \leq 1, \\ < \infty & \text{für } \alpha > 1. \end{cases}$$

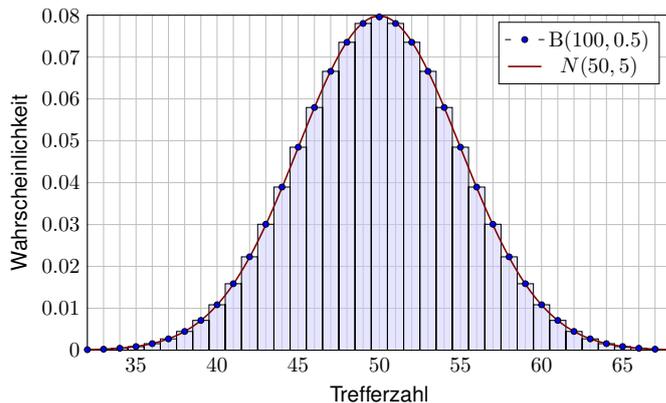
Für  $\alpha = 2$  erhalten wir die Cauchy-Verteilung  $f(x) = \frac{1/\pi}{1+x^2}$ . [V241] Das Integral konvergiert für  $\alpha > 1$ . Für die Erwartung braucht's  $\alpha > 2$ . Für die Varianz braucht's  $\alpha > 3$ . Für  $h$  genügt jeweils schon  $\alpha \geq 1, 2, 3$ .

diskret	$\Omega$	$p(k) = \mathbf{P}(\{k\})$	$\mathbf{E}$	$\mathbf{V}$
Gleichverteilung	$\{a, \dots, b\}$	$\frac{1}{b-a+1}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$
Hyperg. $H(N, K, n)$	$\{0, \dots, n\}$	$\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k} / \binom{N}{n}$	$n \frac{K}{N}$	$n \frac{K}{N} \frac{N-K}{N} \frac{N-n}{N-1}$
Binomial $B(n, t)$	$\{0, \dots, n\}$	$\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$	$nt$	$nt(1-t)$
Poisson $P(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$e^{-\lambda} \lambda^k / k!$	$\lambda$	$\lambda$
Geometrisch $G(q)$	$\mathbb{N}_{\geq 1}$	$(1-q)q^{k-1}$	$\frac{1}{1-q}$	$\frac{q}{(1-q)^2}$
Zeta $Z(s), s=2$	$\mathbb{N}_{\geq 1}$	$\frac{6}{\pi^2} \frac{1}{k^2}$	— nicht definiert! — <small>Diese Reihen divergieren.</small>	

kontinuierlich	$\Omega$	Dichte $f(x)$	$\mathbf{E}$	$\mathbf{V}$
Gleichverteilung	$[a, b]$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponential $E(\lambda)$	$\mathbb{R}_{\geq 0}$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$\lambda^{-1}$	$\lambda^{-2}$
Normal $N(\mu, \sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$\frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$	$\mu$	$\sigma^2$
Cauchy $C(m, a)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2+(x-m)^2}$	— nicht definiert! — <small>Diese Integrale divergieren.</small>	

Grundbeobachtung: Binomialverteilungen ähneln Normalverteilungen. Der lokale Grenzwertsatz präzisiert dies und sichert Fehlerschranken.



Für die **Binomialverteilung**  $B(n, t)$  gilt  $\mu = nt$  und  $\sigma^2 = nt(1-t)$ . Sie ähnelt der **Normalverteilung**:  $B(n, t) \approx N(\mu, \sigma^2)$ , das heißt:

$$\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \approx \frac{e^{-\frac{(k-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \approx \int_{k-1/2}^{k+1/2} \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dx.$$

Dies nennt man auch Satz von de Moivre (1733) und Laplace (1812). Mühsame Summen ersetzen wir so durch bequemere Integrale:

$$\sum_{k=a}^b \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \int_{\xi=\alpha}^{\beta} \frac{e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}} d\xi + \delta$$

mit den Grenzen  $\alpha = (a - 1/2 - \mu)/\sigma$  und  $\beta = (b + 1/2 - \mu)/\sigma$ .

(1) Für  $\sigma \geq 5$  ist der Approximationsfehler  $\delta$  beschränkt durch

$$|\delta| < \frac{|1-2t|}{10\sigma} + \frac{1}{3\sigma^2} \leq \frac{1}{6\sigma} = \frac{1}{6\sqrt{nt(1-t)}}$$

☺ Gilt der Fehler als klein genug, so können wir die mühsame Summe der Binomialverteilung (links) durch das wesentlich bequemere Integral der Normalverteilung (rechts) ersetzen: Dieses liegt tabelliert vor. [\[V116\]](#)

(2) Ist eine genauere Approximation nötig, so addiert man zur obigen Näherung durch das Integral noch folgenden Korrekturterm  $\kappa$ :

$$\sum_{k=a}^b \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \int_{\xi=\alpha}^{\beta} \frac{e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}} d\xi + \kappa + \varepsilon$$

mit Korrektur  $\kappa = \frac{1-2t}{6\sigma\sqrt{2\pi}} \left[ (1-\xi^2) e^{-\xi^2/2} \right]_{\alpha}^{\beta}$

Der verbleibende Fehler  $\varepsilon$  ist noch eine Größenordnung kleiner, nämlich

$$|\kappa| < \frac{|1-2t|}{10\sigma}, \quad |\varepsilon| < \frac{0.15 + 0.18|1-2t|}{\sigma^2} < \frac{1}{3\sigma^2} = \frac{1}{3nt(1-t)}.$$

Speziell für  $t = 1/2$  oder  $\alpha = \beta$  verschwindet der Korrekturterm  $\kappa$ .

Für  $n \rightarrow \infty$  geht der Fehler gegen Null mit  $1/\sqrt{n} \rightarrow 0$  bzw.  $1/n \rightarrow 0$ .

$\sigma \geq 5$	$\sigma \geq 8$	$\sigma \geq 13$	$\sigma \geq 19$	$\sigma \geq 26$
$ \delta  < 0.034$	$ \delta  < 0.0178$	$ \delta  < 0.0097$	$ \delta  < 0.0062$	$ \delta  < 0.0043$
$ \varepsilon  < 0.014$	$ \varepsilon  < 0.0053$	$ \varepsilon  < 0.0020$	$ \varepsilon  < 0.0010$	$ \varepsilon  < 0.0005$

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  ein WRaum, zum Beispiel diskret oder kontinuierlich. [\[V112\]](#)

Eine reelle **Zufallsvariable** ist eine messbare Funktion  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . [\[V211\]](#)

Sie ordnet jedem Zufallsergebnis  $\omega \in \Omega$  eine reelle Zahl  $X(\omega) \in \mathbb{R}$  zu.

Im Bildbereich  $\mathbb{R}$  definiert sie die **Verteilung**  $\mathbf{P}_X: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$  durch

$$\mathbf{P}_X(B) = \mathbf{P}(X \in B) = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}).$$

Ihr **Erwartungswert** ist gegeben durch

$$\mu = \mathbf{E}(X) := \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbf{P} = \int_{\mathbb{R}} x d\mathbf{P}_X.$$

Ist die Verteilung  $\mathbf{P}_X$  auf  $\mathbb{R}$  kontinuierlich mit Dichte  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , so gilt

$$\mathbf{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx.$$

Ist  $\mathbf{P}_X$  diskret mit Wkten  $p(x) = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\})$ , so gilt

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x p(x).$$

⚠ Wir setzen hierzu absolute Integrierbarkeit / Summierbarkeit voraus!

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  ein WRaum und  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Zufallsvariable.

Sei  $\mathbf{E}(|X|) < \infty$ , so dass der Erwartungswert  $\mu = \mathbf{E}(X)$  existiert.

Das (absolute, zentrierte) **n-te Moment** von  $X$  ist gegeben durch

$$\rho^n(X) := \mathbf{E}[|X - \mu|^n].$$

Fall  $n = 2$ : Die **Varianz** von  $X$  ist die mittlere quadratische Abweichung

$$\sigma^2(X) = \mathbf{V}(X) := \mathbf{E}[(X - \mu)^2] = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 \geq 0.$$

Die **Streuung** oder **Standardabweichung** ist  $\sigma(X) := \sqrt{\mathbf{V}(X)}$ .

Nach Chebychev gelten folgende Abschätzungen für alle  $h, k > 0$ :

$$\mathbf{P}[|X - \mu| \geq k\sigma] \leq \frac{1}{k^2}, \quad \mathbf{P}[\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma] \geq 1 - \frac{1}{k^2},$$

$$\mathbf{P}[X \geq \mu + k\sigma] \leq \frac{1}{1+k^2}, \quad \mathbf{P}[\mu - h\sigma < X < \mu + k\sigma] \geq \frac{4(hk-1)}{(h+k)^2}$$

☺ Kennen Sie nur  $\mu$  und  $\sigma$ , so sind diese Ungleichungen optimal.

Die Wkt großer Abweichungen fällt mindestens quadratisch, mit  $1/k^2$ .

Eine Familie  $X = (X_1, \dots, X_n)$  von Zufallsvariablen  $X_k: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **(stochastisch) unabhängig**, wenn für alle Intervalle  $I_1, \dots, I_n \subseteq \mathbb{R}$  gilt

$$\mathbf{P}(X_1 \in I_1, \dots, X_n \in I_n) = \mathbf{P}(X_1 \in I_1) \cdots \mathbf{P}(X_n \in I_n).$$

Die gemeinsame Verteilung von  $X_1, \dots, X_n$  ist dann das Produktmaß

$$\mathbf{P}_X = \mathbf{P}_{(X_1, \dots, X_n)} = \mathbf{P}_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{P}_{X_n}.$$

Sind  $\mathbf{P}_{X_1}, \dots, \mathbf{P}_{X_n}$  auf  $\mathbb{R}$  kontinuierliche WMaße mit Dichten  $f_1, \dots, f_n$ , so ist auch das Produktmaß  $\mathbf{P}_X$  auf  $\mathbb{R}^n$  kontinuierlich, mit Produktdichte

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n).$$

Erwartungen unabhängiger Zufallsvariablen  $X, Y$  multiplizieren sich:

$$\mathbf{E}(X \cdot Y) = \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y)$$

Ihre Kovarianz  $\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$  verschwindet somit.

Varianzen unabhängiger Zufallsvariablen  $X, Y$  addieren sich:

$$\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\mathbf{Cov}(X, Y)$$

⚠ Für abhängige Zufallsvariablen gilt dies im Allgemeinen nicht!

Eine Messung / ein Experiment entspricht einer Zufallsvariablen  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit Erwartung  $\mu = \mathbf{E}(X)$  und Varianz  $\sigma^2 = \mathbf{V}(X) < \infty$ .

Wir führen unabhängige Wiederholungen  $X_1, X_2, X_3, \dots$  durch. Aus diesen Messwerten bilden wir den **empirischen Mittelwert**

$$\hat{X} := \frac{1}{n} (X_1 + \dots + X_n).$$

Es gilt  $\mathbf{E}(\hat{X}) = \mu$  und dank Unabhängigkeit zudem  $\mathbf{V}(\hat{X}) = \sigma^2/n$ .

Mit zunehmendem  $n$  streut  $\hat{X}$  immer weniger, denn  $\hat{\sigma} = \sigma/\sqrt{n} \rightarrow 0$ .

Der Mittelwert  $\hat{X}$  nähert sich dem Erwartungswert  $\mu$ . Für jedes  $\varepsilon > 0$  gilt

$$\mathbf{P}[|\hat{X} - \mu| \geq \varepsilon] \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \searrow 0.$$

Dieser Grenzwert besagt in Worten: Große Abweichungen  $|\hat{X} - \mu| \geq \varepsilon$  werden beliebig unwahrscheinlich, wenn wir  $n$  hinreichend groß wählen.

In praktischen Anwendungen möchte man  $n$  nicht allzu groß wählen, denn wiederholte Messungen sind teuer. Wir brauchen daher bessere Schranken für die Abweichung  $\mathbf{P}(|\hat{X} - \mu| \geq \varepsilon)$ . Diese liefert der ZGS!

**Der zentrale Grenzwertsatz (ZGS)** Z626  
Fazit

Der ZGS besagt: Die Summe  $S = X_1 + \dots + X_n$  vieler unabhängiger, aber ähnlich großer Zufallsvariablen ist annähernd normalverteilt.

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  ein WRaum und  $X_1, X_2, X_3, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  unabhängig mit

- 1 endlichen Erwartungen  $\mu_k = \mathbf{E}(X_k)$  dank  $\mathbf{E}(|X_k|) < \infty$ ,
- 2 strikt positiven Varianzen  $\sigma_k^2 = \mathbf{E}(|X_k - \mu_k|^2) \geq \sigma_0^2 > 0$ ,
- 3 beschränkten dritten Momenten  $\rho_k^3 = \mathbf{E}(|X_k - \mu_k|^3) \leq \rho_0^3 < \infty$ .

Die Summe  $S = X_1 + \dots + X_n$  hat die Erwartung  $\mu = \mu_1 + \dots + \mu_n$  und die Varianz  $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2$ . Es gilt  $\mathbf{P}_S \approx N(\mu, \sigma^2)$ , genauer

$$\mathbf{P}(a \leq S \leq b) = \int_{(a-\mu)/\sigma}^{(b-\mu)/\sigma} \frac{e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}} d\xi + \delta,$$

$$|\delta| \leq \frac{\rho_1^3 + \dots + \rho_n^3}{(\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2)^{3/2}} \leq \frac{\rho_0^3}{\sigma_0^3 \sqrt{n}} \searrow 0.$$

Zentriert und normiert zu  $S^* := (S - \mu)/\sigma$  erhalten wir  $\mathbf{P}_{S^*} \approx N(0, 1)$ . Der lokale Grenzwertsatz V3A ist spezieller, dabei aber auch präziser.

**Konfidenzintervalle** Z626  
Fazit

In der Praxis ist folgende Anwendung des ZGS besonders wichtig: Als Stichprobe für  $X$  führen wir  $n$  **unabhängige Messungen** aus. Aus den so gewonnenen Messwerten  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  berechnen wir

den **Stichprobenmittelwert**  $\hat{x} := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$ ,

die **Stichprobenvarianz**  $\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \hat{x})^2$ ,

das **2 $\sigma$ -Konfidenzintervall**  $I_2 := \left[ \hat{x} - 2 \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \hat{x} + 2 \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \right]$ .

Für große  $n$  gilt: Bei 95% aller Stichproben überdeckt das 2 $\sigma$ -Intervall  $I_2$  den (konstanten aber uns unbekanntem) Erwartungswert  $\mu = \mathbf{E}(X)$ .  
 Noch strenger: Bei 99% aller Stichproben überdeckt das 3 $\sigma$ -Intervall  $I_3$  den (konstanten aber uns unbekanntem) Erwartungswert  $\mu = \mathbf{E}(X)$ .  
 Der Nenner  $\sqrt{n}$  bedeutet: Für doppelte Genauigkeit braucht man eine viermal größere Stichprobe, für zehnfache Genauigkeit eine 100mal größere Stichprobe. Das ist Fluch und Segen der großen Zahlen!

**Verständnisfragen: Zufallsvariablen** Z627  
Fazit

Versuchen Sie, folgende Fragen frei aber genau zu beantworten, etwa so, wie Sie dies einer Kommiliton:in / Kolleg:in erklären wollen.

Was ist ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ? Was ist hierauf eine (reelle) Zufallsvariable  $X$ ? Was ist ihre Verteilung  $\mathbf{P}_X$  im Bildraum  $\mathbb{R}$ ? Erinnerung: Wann ist  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  diskret? endlich? laplacesch?

Wie berechnet man den Erwartungswert  $\mu = \mathbf{E}(X)$ ? bei diskreter Verteilung? bei kontinuierlicher Verteilung? Wie berechnet man die Varianz  $\sigma^2 = \mathbf{V}(X)$  und Streuung  $\sigma$ ? Was sind die Momente von  $X$ ?

Nennen Sie wichtige Verteilungen und ihre Anwendungen. Was sind ihre Kenngrößen  $\mu$  und  $\sigma$ ? Wie berechnet man sie? Wie verhalten sie sich bei einer affinen Skalierung  $Y = aX + b$ ?

Wie lauten und was besagen die Ungleichungen von Chebychev? Wann lassen sie sich anwenden, was muss man hierzu wissen?

Gibt es genauere Ungleichungen, wenn man die Verteilung kennt? Was gilt für die Normalverteilung? Was besagt die 68–95–99–Regel?

**Verständnisfragen: zentraler Grenzwertsatz** Z628  
Fazit

Wann sind zwei Zufallsvariablen  $X, Y$  unabhängig? Wann sind die Indikatorfunktionen  $\mathbf{I}_A, \mathbf{I}_B$  zweier Ereignisse  $A, B \subseteq \Omega$  unabhängig? Kennen Sie weitere Beispiele von un/abhängigen Zufallsvariablen?

Gilt stets  $\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y)$ ? und  $\mathbf{E}(X \cdot Y) = \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y)$ ? und  $\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$ ? Was gilt bei Unabhängigkeit?

Was sind Erwartungswert und Varianz für  $B(1, t)$ ? Wie kann man hieraus mühelos Erwartungswert und Varianz von  $B(n, t)$  ablesen?

Was besagt das Gesetz der großen Zahlen? Wie kann man Wkten / Erwartungswerte empirisch messen? Wie schnell ist die Konvergenz?

Was besagt der zentrale Grenzwertsatz? Welche drei Voraussetzungen braucht, welche Schlussfolgerung gewinnt man? Wie schnell ist die Konvergenz? Was ist gleich / anders beim lokalen Grenzwertsatz?

Wie berechnet man Stichprobenmittelwert und -Varianz? Wie bestimmt man hieraus das Konfidenzintervall der Stichprobe? Wie liegt es zum (gesuchten aber unbekanntem) Erwartungswert?

**Weise Worte zum guten Ausgang** Z629  
Ergänzung

*La bêtise n'est pas mon fort.*  
[Dummheit ist nicht meine Stärke.]  
Paul Valéry (1871–1945)

*Monsieur Cauchy annonce, que, pour se conformer au vœu du Conseil, il ne s'attachera plus à donner, comme il a fait jusqu'à présent, des démonstrations parfaitement rigoureuse.*  
Conseil d'instruction de l'École Polytechnique (1825)

*Je dois dire qu'il n'y avait pas un cours de Lebesgue où l'on ne riait pas d'une manière infiniment agréable. Je soupçonne même qu'au moins le tiers des gens venait au cours de Lebesgue pour s'amuser. C'était infiniment intéressant, infiniment profond.*  
Szolem Mandelbrojt (1899–1983), *Souvenirs à bâtons rompus*

**Weise Worte zum guten Ausgang** Z630  
Ergänzung

*Why waste time learning, when ignorance is instantaneous?*  
Hobbes (1985–1995)

*Mathematik lernen Sie nicht durch Zuschauen allein, sondern durch eigene Arbeit und regelmäßige Übung! Klavierspielen lernen Sie ja auch nicht durch den Besuch von Konzerten.*  
nach Carl Runge (1856–1927)

*If you stop at general math, you're only going to make general math money.*  
Snoop Dogg (1971–)

**Weise Worte zum guten Ausgang** Z631  
Ergänzung

*While physics and mathematics may tell us how the universe began, they are not much use in predicting human behavior because there are far too many equations to solve. I'm no better than anyone else at understanding what makes people tick.*  
Stephen Hawking (1942–2018)

*Es gibt drei Möglichkeiten, klug zu handeln:*  
1. Durch Nachahmen — Das ist die leichteste.  
2. Durch Nachdenken — Das ist die edelste.  
3. Durch Erfahrung — Das ist die bitterste.

*Erkläre es mir, und ich werde es vergessen.  
Zeige es mir, und ich werde mich erinnern.  
Lass es mich tun, und ich werde es verstehen.*  
Konfuzius (551–497 v.Chr.)

**Weise Worte zum guten Ausgang** Z632  
Ergänzung

*It was the best of times, it was the worst of times, it was the age of wisdom, it was the age of foolishness, it was the epoch of belief, it was the epoch of incredulity, it was the season of Light, it was the season of Darkness, it was the spring of hope, it was the winter of despair.*  
Charles Dickens (1812–1870), *A Tale of Two Cities* (1859)

*Manches sagt ich, mehr noch wollt ich, ließe zur Rede Raum das Geschick. Die Stimme weicht, Wunden schwellen: Wahres sprach ich; will nun enden.*  
Edda, das dritte Lied von Sigurd dem Fafnirstödter

*Prophetische Rede verachtet nicht. Alles aber prüfet, das Gute behaltet.*  
Die Bibel, 1. Thessalonicher 5, 20–21