Höhere Mathematik 3 (vertieft)

für Luft- und Raumfahrttechnik (LRT)
und Materialwissenschaft (MaWi)

erkennen.
verstehen.
anwenden.

Prof. Dr. Michael Eisermann
Institut für Geometrie und Topologie (IGT)
michael-eisermann.de/lehre/HM3

Universität Stuttgart

Wintersemester 2024/25
Vollversion 26.02.2025

Für die Mitteilung von Unklarheiten und Fehlern aller Art sowie für Verbesserungsvorschläge bin ich stets dankbar!

Habe Mut, dich deines eigenen Verstandes zu bedienen!

Much to learn, you still have.
This is just the beginning.

Urheberrecht und Haftungsausschluss

Die hier angebotenen Inhalte sind urheberrechtlich geschützt. Sie dürfen zu nicht-kommerziellen Zwecken in der Lehre verwendet werden, sofern die Quelle wie folgt vollständig angegeben wird.

Prof. Dr. Michael Eisermann: Vorlesungsunterlagen zur Höheren Mathematik,
Institut für Geometrie und Topologie (IGT), Universität Stuttgart,
michael-eisermann.de/lehre/HM3

Diese Unterlagen dienen zur Vorlesung *Höhere Mathematik 3 (vertieft)*. Sie sind konzipiert für das Mathematik-Grundstudium in den Natur- und Ingenieurwissenschaften und vermitteln einschlägiges Basiswissen. Zusammen mit den Grundlagen umfassen sie über 800 Aufgaben mit Lösungen, die Schönsten davon entstanden in Zusammenarbeit mit Dr. Friederike Stoll.

Die Inhalte wurden vom Autor mit größter Sorgfalt für die Präsentation in der Lehre erstellt. Sie werden allein zu Lehrzwecken zur Verfügung gestellt, in der Hoffnung, dass sie zum Lernen und Üben nützen mögen, ohne jeden Anspruch auf Eignung zu irgendeinem anderen Zweck. Sie sind keine Handlungsanweisung oder Empfehlung. Nur eigenständiges Denken hilft!

Kunst und Wissenschaft, Forschung und Lehre sind frei. (GG Art. 5.3.1) Der Autor übernimmt keinerlei Gewähr für die angebotenen Informationen und Daten, deren Aktualität, Korrektheit, Vollständigkeit, Qualität oder irgendeine Nutzbarkeit außerhalb der Lehre. Haftungsansprüche für mögliche Schäden, materieller oder immaterieller Art, sind grundsätzlich ausgeschlossen.

Für Inhalte externer Quellen, insb. verlinkter Webseiten, ist stets deren Anbieter verantwortlich.

Wie nutzen Sie dieses Vorlesungsskript?

Es gibt nichts Praktischeres als eine gute Theorie. (Immanuel Kant, 1724–1804)

Diese Folien dienen als Grundlage meiner Vorlesung. Wie von Studierenden gewünscht, können sie auch eigenständig genutzt werden, zum Nacharbeiten, zur Klausurvorbereitung, oder notfalls als Ersatz zur Vorlesung. Dazu sind *Definitionen* und *Sätze* mit zahlreichen *Übungen* verwoben; sie bilden daher kein knappes Nachschlageheft, sondern ein umfängliches Lese- und Arbeitsbuch.

Die Vortragsfolien sind durch blaue Titelbalken leicht zu erkennen. Dem studentischen Wunsche folgend präsentiere ich vielfältige *Beispiele* und *Aufgaben mit Lösungen*, zudem *Erläuterungen*, *Erinnerungen* und *Ergänzungen*, instruktive *Rechnungen* und manchmal *Beweise*. Dies folgt der bewährten Erfahrung, dass die Leserin und der Leser leichter eine vorhandene Übung, Erklärung oder Illustration übergehen kann, als eine fehlende selbst (er)finden. Möge es beiden nützen!

Ich versuche, jedes Thema so einfach wie möglich darzustellen, doch so präzise und ausführlich wie es für ein solides Verständnis nötig ist. Erklärungen und Hinweise, die ich in der Vorlesung mündlich gebe, sind hier schriftlich ausgeführt; sie nützen mir als Erinnerung, den Leser:innen als Erläuterung. Eine ideale Mischung für alle und jede:n gibt es leider nicht: Der Bedarf nach Umfang und Tiefe ist individuell unterschiedlich. Das Angebot ist reich. Dosieren Sie selbst!

Neben der *Vollversion* biete ich versuchsweise auch eine *Halbversion*, die mit der Axt auf halbe Länge gekürzt wurde, durch Löschung zahlreicher Beispiele und Aufgaben, Erinnerungen und Illustrationen, Ausführungen und Ergänzungen. Je nach Bedarf der Leser:in ist dies an manchen Stellen hilfreich, an anderen fehlt es. Wer es sich zutraut, nutzt die Vollversion und dosiert selbst.

Wozu benötigen Sie mathematische Methoden?

Alles Leben ist Problemlösen. (Sir Karl Popper, 1902–1994)

Verständnis und Beherrschung komplexer Zusammenhänge benötigen Empirie *und* Theorie, quantitative Modelle und sorgfältige Planung. Diese beruhen im Wesentlichen auf Mathematik. Der Beruf des Ingenieurs (m/w/d) und vieler anderer ist daher zunehmend mathematisch geprägt. Mathematische Methoden sind häufig Voraussetzung für den Erfolg technischer Entwicklungen; das gilt auch, wenn sie beim Endprodukt im Inneren wirken und oberflächlich nicht sichtbar sind. Deshalb nutzen Sie bereits im Studium vielfältige und umfangreiche mathematische Methoden, und hierzu legt Ihre Mathematikausbildung im Grundstudium das notwendige Fundament.

Es ist dabei völlig unmöglich, alle in späteren Anwendungen relevanten Techniken zu behandeln, sozusagen als Enzyklopädie auf Vorrat. Dazu sind die Anforderungsprofile allzu unterschiedlich: Was für den einen schon viel zu viel wäre, ist für die andere noch längst nicht umfassend genug. Zukünftige Ingenieur:innen sollen daher nicht nur die allgegenwärtigen Grundfertigkeiten lernen, sondern auch mathematische Denkweisen und systematische Problemlösung, um je nach Bedarf erforderliche neue Methoden selbstständig erwerben, vertiefen und anwenden zu können.

Es ist in hochqualifizierten Berufen unwahrscheinlich, dass Sie genau dieses oder jenes *Beispiel* wörtlich anwenden. Das gilt ganz allgemein, selbst für die bestmögliche Auswahl von Beispielen. Hingegen ist es wahrscheinlich, dass Sie diese oder ähnliche bewährte *Methoden* häufig nutzen. Sie sollen daher nicht nur *Beispiele* lernen, sondern zugleich möglichst vielseitige *Methoden*! Mathematik ist immer beides: sowohl abstrakte Theorie als auch konkrete Anwendung; sie sind keine Gegensätze, sie ergänzen sich, die eine kann nur mit der anderen dauerhaft erfolgreich sein.

Wozu lernen Sie Mathematik?

Hochtechnologie ist immer auch mathematische Technologie.

Sie haben forschungsorientierte Studiengänge gewählt, Sie studieren ambitionierte Fächer, hierzu brauchen Sie handfeste Mathematik.

Was Sie hier lernen, können Sie überall nutzbringend anwenden.
Mit diesen Werkzeugen können Sie auch dicke Bretter bohren.

Theorie und Anwendung sind keine Gegensätze, sie ergänzen sich und arbeiten wunderbar effizient zusammen wie linke und rechte Hand.

Mathematik ist zugleich abstrakte Theorie und konkrete Anwendung.
Dank Abstraktion ist sie universell anwendbar: Das ist ihre Stärke!

Wozu lernen Sie Mathematik?

Mathematik ist Grundlage und Werkzeug aller modernen Technologie.

Als Ingenieur:in brauchen Sie Ihr methodisches Handwerkszeug.
Dazu gehört als harter Kern und Grundlage die Höhere Mathematik.
Je anspruchsvoller die Aufgabe, desto wichtiger wird die Mathematik.

Sie können das begrüßen oder bejammern, es ist und bleibt Tatsache:
Theorie ist nicht Ballast oder Schikane, sondern effizientes Werkzeug.

Viele von Ihnen wissen bereits, dass Sie mathematische Werkzeuge dringend brauchen.
Andere finden es demnächst heraus, hoffentlich bereits in dieser Grundlagenvorlesung,
andernfalls nachfolgend in Anwendungen und Vertiefungen in Studium und Beruf.
Je früher und je gewissenhafter Sie Ihr Handwerkszeug erlernen, desto besser.

Die Mathematik bietet Ihnen extrem präzise und scharfe Werkzeuge.
Zur effizienten Nutzung brauchen Sie einige grundlegende Kenntnisse.
Greifen Sie nicht wahllos in die Kiste oder packen die Werkzeuge
am falschen Ende: Wissen macht Ah! Unwissen macht Aua!

Vor uns liegt ein sehr anspruchsvolles und sehr lohnendes Semester.
Ich beginne am Ende und will Ihnen zeigen, wo die Reise hingeht:
Wozu nutzen Sie diese Methoden? Welche Aufgaben können Sie
damit lösen, die jetzt noch außerhalb Ihrer Reichweite liegen?

Wozu lernen Sie jetzt schon Mathematik?

Frage nicht nur, was die HM jetzt schon für dich tun kann.
Frage vor allem, was du jetzt schon für die HM tun kannst.

James Montgomery Flagg, *Uncle Sam*, Bildquelle: wikimedia

Wenn du ein Schiff bauen willst, lehre deine Leute nicht nur
ihr Handwerk, sondern erwecke ihre Sehnsucht nach dem Meer!

Wozu lernen Sie jetzt schon Mathematik?

Dem Anwenden muss das Erkennen vorausgehen. (Max Planck, 1858–1947)

Manche:r schimpft auf die „lästige Theorie“ und scheitert alsbald an allzu naiver Anwendung, getreu dem Slogan „Plane nicht, irre lieber!“. Manchmal geht das gut, aber meist leider nicht. Wem nichts besseres einfällt, der prangert pauschal die „Theorielast“ des Studiums an und fordert unspezifisch aber publikumswirksam „Praxisbezug“. Hohle Sprüche werden gerne wiedergekäut.

Wer Mathematik anwendet, weiß es besser: Theorie ist keine Last, sondern wirksames Werkzeug. Gute Ingenieur:innen kennen die möglichen Methoden und entscheiden umsichtig und informiert. Die Erfahrung zeigt: Immer häufiger sind mathematische Methoden der Schlüssel zum Erfolg. Ambitionierte Studiengänge bauen daher konsequent auf umfassende mathematische Grundlagen.

Manche Studenten (m/w/d) des Ingenieurwesens skandieren die Forderung „Wir wollen keine Theorie, sondern nur Beispiele!“ Wenn das Ihre persönliche Überzeugung ist, überdenken Sie Ihre Studienwahl: Es gibt rein *anwendungsorientierte* Ausbildungen mit einem Minimum an Theorie. Für ein *forschungsorientiertes* Studium wäre das unzureichend, allzu einseitig und kurzsichtig. Wie oben erklärt, sollen Sie nicht nur *Beispiele* lernen, sondern möglichst vielseitige *Methoden*!

Der Nutzen konkreter Beispiele zum Erlernen einer Methode steht außer Frage. Ebenso wichtig ist jedoch die zugrundeliegende Theorie: Sie ordnet und erklärt. Das ist meist ein zweistufiger Vorgang: Diese Vorlesung rückt Beispiele soweit möglich in den Vordergrund, stellt aber auch die notwendige Theorie zur Verfestigung und Vertiefung bereit. Damit Sie sich diese Grundlagen möglichst gut aneignen können, werde ich Definitionen und Sätze explizit formulieren und ausführlich behandeln, und deren sichere Beherrschung später auch von Ihnen erwarten.

Mathematik ist schön und nützlich.

Als Ingenieur:in wollen Sie komplexe, praktische Probleme lösen. Dazu brauchen Sie theoretische Grundlagen und mathematische Methoden.

Sie haben forschungsorientierte Studiengänge gewählt: LRT und MaWi. Je anspruchsvoller die Aufgabe, desto mathematischer die Werkzeuge!

Genau zu diesem Ziel bietet und verlangt Ihr Studiengang die HM3. Mit Ihrem Engagement im Studium entscheiden Sie über Ihre Zukunft.

Die richtige Wahl: Aufwärtsspirale —
engagiert mitarbeiten, gemeinsam lernen, erfolgreich studieren.

Die falsche Wahl: Abwärtsspirale —
desinteressiert mitlaufen, planlos vertrödeln, frustriert aufgeben.

Lohnt sich Ihre Investition in die HM3? Ja, sicher! Fragen Sie Alumni...

1. spannende Themen, schöne und nützliche Mathematik.
2. klare Struktur, hervorragende Betreuung, faire Klausur.

Mathematik ist schön und nützlich.

Die HM3 lässt niemanden kalt. Es gibt zu ihr nur zwei Ansichten:

- Die einen lieben die HM3, sie wissen bereits, dass sie Mathematik dringend benötigen, sie erlernen und nutzen sie daher frühzeitig.
- Alle anderen hingegen... erst später.

Wir beantworten heute die großen Fragen des Lebens...
zumindest für dieses Semester in der Höheren Mathematik 3:

Was kann ich wissen?
Was soll ich tun?
Was darf ich hoffen?
Immanuel Kant (1724–1804)

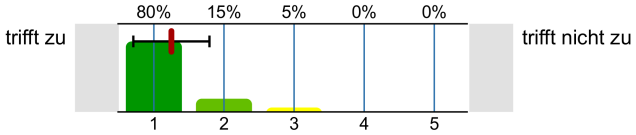
Die HM3 ist für Sie nicht nur Verpflichtung, sondern auch Chance!

Erkläre es mir, und ich werde es vergessen.
Zeige es mir, und ich werde mich erinnern.
Lass es mich tun, und ich werde es verstehen.
Konfuzius (551–497 v.Chr.)

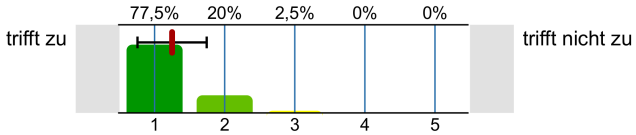
Mathematik ist schön und nützlich. . . und anspruchsvoll.

☺ In aller Bescheidenheit: Unsere HM3 ist sensationell gut.

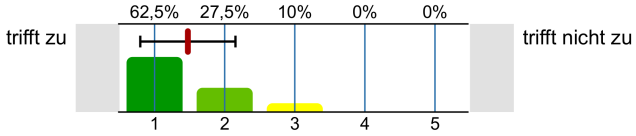
Die Lehrveranstaltung ist außerordentlich gut organisiert.



Es wird auf die Anliegen und Belange der Studierenden eingegangen.

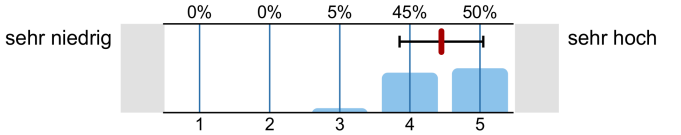


Ich habe durch die Teilnahme an dieser Lehrveranstaltung viel gelernt.

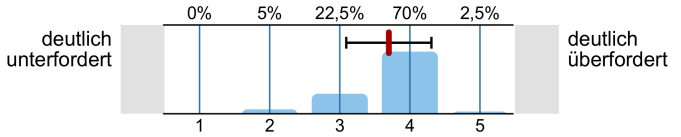


⚠ Klar und ehrlich: Studieren heißt sich bemühen!

Im Vergleich zu anderen Lehrveranstaltungen sind die Anforderungen in dieser LV an mich...



Die Lehrveranstaltung hat mich ...



Mathematik ist schön und nützlich. . . und anspruchsvoll.

Warum erzähle ich Ihnen das? Sie können mit uns rechnen!

Ich möchte, dass Sie vernünftig handeln und erfolgreich studieren.
Zu dieser Entscheidung gebe ich Ihnen die nötigen Informationen.
Sie haben die Freiheit, unvernünftig zu handeln und zu scheitern.
Ich kann Ihnen den Weg zeigen, gehen müssen Sie ihn selbst.

Die Rückmeldungen sind insgesamt sehr positiv, die Befragungen sind sensationell gut, besonders für eine Grundvorlesung am Studienanfang und zudem gar in der Mathematik, als Service im Ingenieurwesen. Unser Gesamtpaket der Höheren Mathematik 3 ist hervorragend.

Dafür arbeite ich extrem hart, genauer gesagt: Ihr gesamtes HM3-Team! Von Ihnen erwarte ich dasselbe: ernsthaftes Engagement und Mitarbeit. Mir ist wichtig, diese Grundfrage anfangs ein für alle mal zu klären. Anschließend können wir uns auf Inhalte konzentrieren!

Quidquid agis, prudenter agas et respice finem!
[Was immer du tust, handele klug und bedenke das Ende!]

Unser Ilias-Kurs ist informativ und liebevoll gestaltet.

Magazin > Naturwissenschaften und Mathematik > Mathematik > Lehrveranstaltungen > Winter 2024/25 > Höhere Mathematik 3 vertieft - WiSe 24/25

Höhere Mathematik 3 vertieft - WiSe 24/25

Aktionen

Inhalt | Timeline | Info | Mitglieder

Herzlich willkommen zur Höheren Mathematik 3 vertieft!

Startseite

In diesem Ilias-Kurs finden Sie Informationen und Online-Materialen zu unserer Veranstaltung:

- Zur **Vorlesung mit integrierter Vortragsübung** bieten wir Ihnen unser Skript, erprobt und umfassend. Gerne geschehen, möge es nützen!
- Jede Woche lösen Sie hier in Ilias ein **hilfreiches Quiz**. Damit wiederholen Sie den aktuellen Vorlesungsstoff und sind so für die Übungen bestens vorbereitet.
- Zur **Übung** erstellen wir für Sie jede Woche ein Übungsblatt mit gut abgestimmten Aufgaben. Die Präsenzübungen lösen Sie mit Ihren Kommiliton:innen in der Übung, als Vorbereitung für die Hausübungen.
- Im **Forum** können Sie anonym Ihre Fragen stellen und erhalten kompetente Auskunft.

V Q Ü S

HM3-Termine im Überblick

Vorlesung und integrierte Vortragsübung

- Dienstag, 8:00 - 9:30 Uhr in V 57.03
- Dienstag, 14:00 -15:30 Uhr in V47.02
- Freitag, 11:30 - 13:00 Uhr in V 47.01

Die **erste Vorlesung** findet am **Dienstag, den 15. Oktober 2024**, statt.

Quizze

Wöchentlich veranstalten wir ein Quiz jeweils von Freitag, 13 Uhr, bis Dienstag, 8 Uhr.

Das **erste Quiz** startet am **Freitag, den 18. Oktober 2024**.

Gruppenübungen

Die Gruppenübungen finden mittwochs, donnerstags und freitags in verschiedenen Blöcken statt. Die genauen Zeiten und Räume finden Sie im Gruppenübungsordner.

Die **Anmeldung zu den Übungen** findet am **Mittwoch, den 16. Oktober 2024, von 9 bis 17 Uhr** hier in Ilias statt. Treten Sie dazu einer der Ilias-Gruppen im Gruppenübungsordner bei.

Das **erste Übungsblatt** (Bonusblatt 0 zur Wiederholung) gibt es schon in der ersten Woche. Die **ersten Übungen** finden in der zweiten Vorlesungswoche statt, also am **23. bis 25. Oktober 2024**.

Unser HM3-Skript ist erprobt und umfassend.

Das HM3-Rundum-Glücklich-Paket: die Vorlesungsfolien eingebettet in ein Lese- und Arbeitsbuch

Wer vieles bringt, wird manchem etwas bringen.
JOHANN WOLFGANG VON GOETHE (1749–1832), *Faust*

Parallel zu meiner aktuellen Vorlesung HM3 stelle ich hier meine Folien zur Verfügung, erprobt und umfassend. Sie sind kein knappes Nachschlageheft, sondern ein umfängliches Lese- und Arbeitsbuch. Wer sie nur hastig durchblättert, wird ihren Umfang abschreckend finden. Wer sich jedoch ernsthaft einarbeitet, wird sie gut nutzen können.

1 von 112 Seitengröße

Höhere Mathematik 3 (vertieft)

für Luft- und Raumfahrttechnik (LRT)
und Materialwissenschaft (MaWi)

erkennen.
verstehen.
anwenden.

Prof. Dr. Michael Eisermann
Institut für Geometrie und Topologie (IGT)
michael-eisermann.de/lehre/HM3

Universität Stuttgart
Wintersemester 2024/25
Vollversion 30.09.2024

Für die Mitteilung von Unklarheiten und Fehlern aller Art sowie für Verbesserungsvorschläge bin ich stets dankbar!

Habe Mut, dich deines eigenen Verstandes zu bedienen!

Much to learn, you still have.
This is just the beginning.

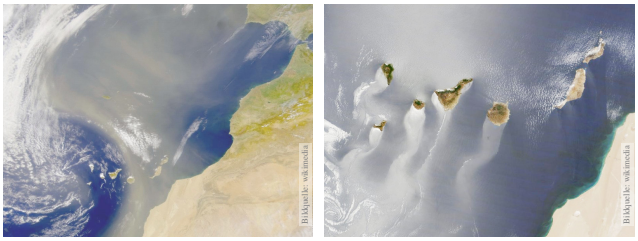
So nutzen Sie das Vorlesungsskript richtig.

blauer Titelbalken
= Vorlesung

weißer Titelbalken
= Hintergrund

Die Kontinuitätsgleichung der Strömungslehre 117

Ziel: Wie verhalten sich Strömungen? Welche Gleichungen gelten hier?



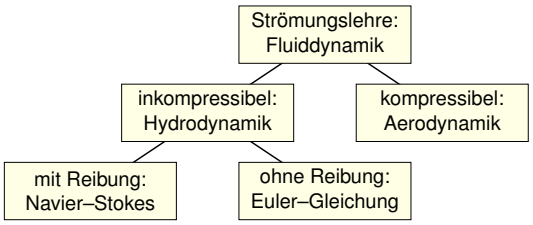
Luft- und Wasserströmung um die Kanarischen Inseln

(0) Wie beschreiben Sie eine Strömung in einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ über ein Zeitintervall $I = [t_0, t_1]$? Geschwindigkeit $\vec{v} : I \times \Omega \to \mathbb{R}^3 : (t, \vec{x}) \mapsto \vec{v}(t, \vec{x})$ und Massendichte $\varrho : I \times \Omega \to \mathbb{R} : (t, \vec{x}) \mapsto \varrho(t, \vec{x})$ und evtl. weitere Daten.

Die Massenstromdichte $\varrho\vec{v} : I \times \Omega \to \mathbb{R}^3$ beschreibt den Massenfluss. Im Strömungsbereich Ω werde Masse weder erzeugt noch vernichtet.

Die Kontinuitätsgleichung der Strömungslehre 118 Ausführung

Die Strömungsmechanik untersucht die Bewegung von fluiden Medien. Sie ist grundlegend für die Meteorologie, beim Bau von Flugzeugen, Schiffen, Autos, ... bis hin zu Verbrennungsmotoren: Alles fließt!



Ein Fluid heißt inkompressibel, wenn seine Dichte nicht vom Druck abhängt. Zum Beispiel ist dies bei Wasser eine gute Näherung für die meisten Anwendungen. Noch einfacher ist zunächst, überall konstante Dichte anzunehmen. Anders als Flüssigkeiten sind Gase leicht komprimierbar, ihre Dichte ist etwa 1000mal geringer, ihre thermische Ausdehnung größer. Für ihre Bewegung aber gelten weitgehend die gleichen Gesetze, zumindest bei nicht allzu großen Drücken und Geschwindigkeiten. Wir wenden uns hier der allgemein gültigen Kontinuitätsgleichung zu.

In jeder Vorlesung werden etwa 20 bis 25 Vorlesungsfolien besprochen; diese bilden den blauen Faden, das Kernprogramm, unser Grundgerüst.

Zu jeder Vorlesungsfolie gehören etwa drei Hintergrundfolien; sie bieten hilfreiche Erläuterungen und Ergänzungen, Anwendungen und Beispiele, Aufgaben und Lösungen, usw. Dosieren Sie selbst nach Ihrem Bedarf!

So nutzen Sie das Vorlesungsskript richtig.

Die Folien erfüllen eine doppelte Funktion. Für meinen Vortrag erstelle ich die Folien zur visuellen Unterstützung und nutze sie als Grundlage. Diese Vortragsfolien sind durch blaue Titelbalken leicht zu erkennen. Hier finden Sie alles Wesentliche, darauf sollten Sie sich konzentrieren.

Dieses Grundgerüst ergänze ich durch Hintergrundinformation in Form von Erläuterungen und Ausführungen, Erinnerungen und Ergänzungen, Aufgaben mit Lösungen, weiteren Beispielen und Rechnungen, etc. Dies folgt der bewährten Erfahrung, dass die Leserin und der Leser leichter eine vorhandene Übung, Erklärung oder Illustration übergehen können, als eine fehlende selbst (er)finden. Möge es beiden nützen!

Ich versuche, jedes Thema so klar und einfach wie möglich darzustellen, doch so präzise und ausführlich wie für ein solides Verständnis nötig ist. Erklärungen und Hinweise, die ich in der Vorlesung mündlich gebe, finden Sie hier zum Nachlesen noch einmal schriftlich ausgeführt; sie nützen mir als Erinnerung und beiden Lesern als Erläuterung.

Tipp: Ein fettgesetztes **Stichwort** kann mit „#Stichwort“ gesucht werden.

Kapitel A: Was sind und was sollen Integrale?

A1 Konstruktion des Volumens
- A1.1 Wie misst man Flächen- und Rauminhalt?
- A1.2 Was sind und was sollen Integrale?
- A1.3 Schreibweisen für Integrale

A2 Reelle Zahlen und reelle Funktionen
- A2.1 Der Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ der reellen Zahlen
- A2.2 Reelle Funktionen und ihre Operationen
- A2.3 Absolute Summation von Reihen

A3 Konstruktion des Integrals
- A3.1 Treppenfunktionen und ihr Integral
- A3.2 Einschachtelung und Ausschöpfung
- A3.3 Absolut integrierbare Funktionen

A4 Eigenschaften des Integrals
- A4.1 Zerlegung und Betragsabschätzung
- A4.2 Fast überall gleiche Funktionen
- A4.3 Erste Beispiele und Verständnisfragen

Kapitel B: Eindimensionale Integration

B1 Integration durch Einschachtelung (nach Riemann)
- B1.1 Treppenfunktionen und Integration durch Einschachtelung
- B1.2 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
- B1.3 Integrationsregeln und elementare Integralformeln

B2 Integration durch Ausschöpfung (nach Lebesgue)
- B2.1 Absolute Integration durch Ausschöpfung
- B2.2 Der Hauptsatz für integrierbare Funktionen
- B2.3 Uneigentliche Integrale und Cauchy–Hauptwert

B3 Integrale und Reihen
- B3.1 Vergleich von Integral und Reihe
- B3.2 Stirling–Formel und Gamma-Funktion
- B3.3 Konvergenzkriterien von Abel, Leibniz und Dirichlet

B4 Fazit: Eindimensionale Integration
- B4.1 Zusammenfassung und Verständnisfragen
- B4.2 Beispiele zur uneigentlichen Integration
- B4.3 Analytische und glatte Funktionen

Kapitel C: Mehrdimensionale Integration

C1 Der Satz von Fubini
- C1.1 Iterierte Integrale für nicht-negative Funktionen
- C1.2 Der Satz von Fubini für integrierbare Funktionen
- C1.3 Integration über Normalbereiche

C2 Der Transformationssatz
- C2.1 Neue Variablen als geschickte Koordinaten
- C2.2 Polarkoordinaten und das Gaußsche Integral
- C2.3 Zylinder- und Kugelkoordinaten

C3 Fazit: Hauptsatz, Fubini, Transformation
- C3.1 Zusammenfassung
- C3.2 Verständnisfragen
- C3.3 Normalbereiche

C4 Weitere Aufgaben und Anwendungen
- C4.1 Trägheitsmoment von Zylinder und Kugel
- C4.2 Warnende Gegenbeispiele zu Fubini
- C4.3 Volumina, Polstellen, Integrierbarkeit

Kapitel D: Integrale und Grenzwerte

D1 Vertauschen von Integral und Reihe
- D1.1 Absolute Konvergenz in L^1
- D1.2 Integration von Potenzreihen

D2 Vertauschen von Integral und Limes
- D2.1 Punktweise Konvergenz
- D2.2 Majorisierte Konvergenz

D3 Vertauschen von Integral und Ableitung
- D3.1 Kompakte Integrationsbereiche
- D3.2 Beliebige Integrationsbereiche

D4 Weitere Aufgaben und Anwendungen
- D4.1 Warnende Beispiele zur Vertauschung
- D4.2 Berechnung von Integralen und Reihen

D5 Kalkül der Distributionen
- D5.1 Lösungen der Wärmeleitungsgleichung
- D5.2 Distributionen und ihre Rechenregeln

Kapitel E: Integralsätze in der Ebene

E1 Die Integralsätze von Green und Gauß
- E1.1 Wegintegrale und Kurvenintegrale
- E1.2 Ebene Kompakta mit stückweise glattem Rand
- E1.3 Der Integralsatz von Green: anschauen und nachrechnen!
- E1.4 Der Integralsatz von Gauß: anschauen und nachrechnen!

E2 Anwendungsbeispiele
- E2.1 Schreibweise als Differentialform
- E2.2 Die Greenschen Flächenformeln
- E2.3 Arbeitsintegrale in der Thermodynamik
- E2.4 Flächeninhalt und Schwerpunkt

E3 Verständnisfragen und Aufgaben
- E3.1 Sherlock Holmes: Which way did the bicycle go?
- E3.2 Zwei prominente Vektorfelder: Wirbel und Quelle
- E3.3 Der Hauptsatz für Arbeitsintegrale: HDI
- E3.4 Lösung des Potentialproblems

Kapitel F: Integralsätze für komplexe Funktionen

F1 Crashkurs zum Residuensatz

F2 Komplexe Funktionen und Potenzreihen
- F2.1 Die Cauchy–Riemann–Differentialgleichungen
- F2.2 Exponentialfunktion und Zweige des Logarithmus
- F2.3 Laurent–Reihen, Polstellen und Residuen

F3 Die Integralformel von Cauchy
- F3.1 Integralsatz und Integralformel von Cauchy
- F3.2 Fundamentalsatz der Algebra und Nullstellensuche
- F3.3 Entwicklung in Potenzreihen und in Laurent–Reihen

F4 Der Residuensatz und Anwendungen
- F4.1 Das Residuum einer isolierten Singularität
- F4.2 Der Residuensatz für Kompakta
- F4.3 Anwendung auf reelle Integrale

F5 Fazit: Residuenkalkül
- F5.1 Verständnisfragen und Vertiefungen
- F5.2 Anwendungsbeispiele zum Residuenkalkül

Kapitel G: Integralsätze im Raum

G1 Crashkurs zu Integralsätzen im Raum
- G1.1 Flächenintegrale und Integralsätze im Raum
- G1.2 Einführendes Beispiel zum Satz von Stokes
- G1.3 Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß

G2 Flächenintegrale im Raum
- G2.1 Glatte Flächenstücke und Parametrisierungen
- G2.2 Kugelsegment, Kugelkappe, Torusfläche
- G2.3 Rotationskörper und Guldinsche Regeln

G3 Integralsätze im Raum
- G3.1 Die Integralsätze von Stokes und Gauß
- G3.2 Anwendung: das archimedische Prinzip
- G3.3 Numerik: Triangulierung und Linearisierung

G4 Fazit: Integralsätze
- G4.1 Zusammenfassung und Verständnisfragen
- G4.2 Weitere Aufgaben und Anwendungen
- G4.3 Geometrie auf gekrümmten Flächen

Kapitel H: Erste Anwendungen der Integralsätze

H1 Partielle Differentialgleichungen der Physik
- H1.1 Eulers Kontinuitätsgleichung
- H1.2 Fouriers Wärmeleitungsgleichung
- H1.3 Newtons Gravitationsgesetz
- H1.4 Maxwells Elektrodynamik

H2 Vektorfelder und Potentiale
- H2.1 Konservative Vektorfelder
- H2.2 Rotationsfreie Vektorfelder
- H2.3 Einfach zusammenhängende Gebiete
- H2.4 Radialsymmetrische Felder und Potentiale

H3 Fazit: Erste Anwendungen der Integralsätze
- H3.1 Zusammenfassung und Verständnisfragen
- H3.2 Weitere Aufgaben und Anwendungen
- H3.3 Notwendige und hinreichende Kriterien
- H3.4 Gegenläufige Wirbelfelder, Quadrupolis

Kapitel I: Fourier–Analyse periodischer Funktionen

I1 Die trigonometrische Orthonormalbasis
- I1.1 Periodische Funktionen, erste Beispiele
- I1.2 Periodische Fortsetzung, Spiegelung
- I1.3 Skalarprodukt und Orthonormalbasis

I2 Fourier–Analyse und das Dirichlet–Kriterium
- I2.1 Fourier–Entwicklung der Sägezahnfunktion
- I2.2 Das Konvergenz-Kriterium von Dirichlet
- I2.3 Fourier–Entwicklung von Treppenfunktionen

I3 Rechenregeln zu Integration und Glattheit
- I3.1 Integrieren und Differenzieren
- I3.2 Abklingen der Fourier–Koeffizienten
- I3.3 Von Potenzreihen zu Fourier–Reihen

I4 Fazit: Fourier–Analyse periodischer Funktionen
- I4.1 Zusammenfassung und Verständnisfragen
- I4.2 Weitere Aufgaben und Anwendungen

Kapitel J: Die Fourier–Isometrie

J1 Parseval–Gleichung und Fourier–Isometrie
- J1.1 Die Energiegleichung und erste Anwendungsbeispiele
- J1.2 Die Fourier–Isometrie zwischen Funktion und Spektrum
- J1.3 Isoperimetrische Optimierung durch Fourier–Reihen

J2 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz
- J2.1 Punktweise Konvergenz nach Dirichlet
- J2.2 Gleichmäßige Approximation nach Fejér
- J2.3 Wann gilt punktweise Konvergenz fast überall?

J3 Konvergenz im quadratischen Mittel
- J3.1 Bestapproximation durch Orthogonalprojektion
- J3.2 Konvergenz im quadratischen Mittel
- J3.3 Vergleich der drei Konvergenzbegriffe

J4 Fazit: Fourier–Analyse und Synthese
- J4.1 Zusammenfassung
- J4.2 Verständnisfragen

Kapitel K: Fourier–Transformation

K1 Erste Beispiele, Eigenschaften, Rechenregeln
- K1.1 Von der Fourier–Reihe zum Fourier–Integral
- K1.2 Einfache Beispiele und erste Eigenschaften
- K1.3 Der Umkehrsatz für Fourier–Transformierte

K2 Analytische Eigenschaften
- K2.1 Rechenregeln der Fourier–Transformation
- K2.2 Ableitung und Multiplikation
- K2.3 Faltung und Produkt

K3 Metrische Eigenschaften
- K3.1 Energiegleichung und Fourier–Isometrie
- K3.2 Die Unschärferelation für Fourier–Paare
- K3.3 Bedeutung in der Quantenmechanik

K4 Fazit: Fourier–Transformation
- K4.1 Zusammenfassung
- K4.2 Verständnisfragen
- K4.3 Weitere Aufgaben

Kapitel L: Laplace–Transformation

L1 Die Laplace–Transformation
- L1.1 Definition der Laplace–Transformation
- L1.2 Linearität und Ableitungsregel
- L1.3 Streckung, Dämpfung, Verschiebung

L2 Anwendung auf Differentialgleichungen
- L2.1 Tabelle einfacher Laplace–Transformierter
- L2.2 Lösung von Differentialgleichungen
- L2.3 Partialbruchzerlegung und Residuen

L3 Weitere Eigenschaften und Anwendungen
- L3.1 Rücktransformation und Injektivität
- L3.2 Faltung und Integralregel
- L3.3 Greensche Fundamentallösung

L4 Fazit: Laplace–Transformation
- L4.1 Vergleich von Laplace und Fourier
- L4.2 Anwendung in der Systemtheorie
- L4.3 Aufgaben zu Differentialgleichungen

Kapitel M: Gewöhnliche Differentialgleichungen

M1 Erste Beispiele von Differentialgleichungen
- M1.1 Einfache Beispiele aus der Mechanik
- M1.2 Separierbare Differentialgleichungen
- M1.3 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

M2 Exakte Differentialgleichungen
- M2.1 Exaktheit und Potential von $f(x,y) + g(x,y)\,y' = 0$
- M2.2 Lösung durch einen integrierenden Faktor
- M2.3 Lineare Differentialgleichungen

M3 Fazit: Existenz, Eindeutigkeit, Lösungsmethoden
- M3.1 Zusammenfassung und Verständnisfragen
- M3.2 Methodenvergleich: Viele Wege führen zum Ziel.
- M3.3 Gut & schlecht gestellte Anfangswertprobleme

M4 Weitere Aufgaben und Anwendungsbeispiele
- M4.1 Umformung und Lösung durch Substitution
- M4.2 Exakte Differentialgleichungen und Potentiale
- M4.3 Qualitative Analyse, Runden und Eingrenzen

Kapitel N: Differentialgleichungen höherer Ordnung

N1 Harmonische Schwingungen
- N1.1 Freie harmonische Schwingung
- N1.2 Erzwungene harmonische Schwingung

N2 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten
- N2.1 Charakteristisches Polynom und Fundamentalsystem
- N2.2 Lösungsansatz für spezielle rechte Seiten $r(x)\mathrm{e}^{\mu x}$
- N2.3 Greensche Lösungsformel für beliebige rechte Seiten

N3 Lineare Differentialgleichungen mit stetigen Koeffizienten
- N3.1 Fundamentalmatrix und Variation der Konstanten
- N3.2 Lösung durch Potenzreihenansatz

N4 Die Euler–Lagrange–Differentialgleichung
- N4.1 Optimierung durch Variationsrechnung
- N4.2 Lösung des Brachistochrone-Problems

N5 Fazit: Differentialgleichungen höherer Ordnung
- N5.1 Zusammenfassung und Verständnisfragen
- N5.2 Weitere Aufgaben und Methodenvergleich

Kapitel O: Dynamische Systeme

O1 Dynamische Systeme
- O1.1 Der harmonische Oszillator als dynamisches System
- O1.2 Gekoppelte Oszillatoren und Eigenfrequenzen
- O1.3 Mathematisches Pendel und Energiefläche
- O1.4 Das Näherungsverfahren von Runge–Kutta

O2 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen
- O2.1 Lokale Lösungen: Satz von Picard–Lindelöf
- O2.2 Fortsetzungen und maximale Lösungskurven
- O2.3 Sensible Abhängigkeit von den Anfangsdaten
- O2.4 Aufgaben zu Existenz und Eindeutigkeit und Stabilität

O3 Der Hauptsatz für lineare dynamische Systeme
- O3.1 Affin/Lineare Struktur des Lösungsraumes
- O3.2 Variation der Konstanten zur Partikulärlösung
- O3.3 Matrizenkalkül und Exponentialfunktion
- O3.4 Fundamentallösung homogener DGSysteme

Kapitel P: Autonome Systeme, Gleichgewicht und Stabilität

P1 Lineare DGSysteme mit konstanten Koeffizienten
- P1.1 Gekoppelte Oszillatoren und stehende Wellen
- P1.2 Lösungen mittels Eigenvektoren und Eigenfunktionen
- P1.3 Lösungen mittels Hauptvektoren und Hauptfunktionen
- P1.4 Von komplexen zu reellen Lösungen

P2 Gleichgewichtslagen und In/Stabilität von Fixpunkten
- P2.1 Linearisierung um Fixpunkte und In/Stabilität
- P2.2 Räuber-Beute-Modell nach Lotka–Volterra
- P2.3 Stabilitätsanalyse nach Lyapunov
- P2.4 Hamiltonsche Dynamik und Stabilität

P3 Fazit: Differentialgleichungssysteme
- P3.1 Zusammenfassung und Verständnisfragen
- P3.2 Reduktion der Ordnung und Methodenvergleich
- P3.3 Beispiele zur Dynamik um Fixpunkte und In/Stabilität
- P3.4 Invariante Mengen dank Tangentialbedingung

Kapitel Q: Partielle Differentialgleichungen (PDE)

Q1 Erste Beispiele partieller Differentialgleichungen
- Q1.1 Partielle Ableitungen und der Satz von Schwarz
- Q1.2 Cauchy–Riemann und Maxwell–Gleichungen
- Q1.3 Konvektion-Diffusion und Navier–Stokes–Gleichungen
- Q1.4 Ideale ebene Strömungen und holomorphe Funktionen

Q2 Lineare PDE erster Ordnung
- Q2.1 Lineare Differentialoperatoren
- Q2.2 Lösung entlang charakteristischer Kurven
- Q2.3 Die Charakteristikmethode und warnende Gegenbeispiele
- Q2.4 Transportgleichung mit konstanten Koeffizienten

Q3 Fazit: PDE erster Ordnung
- Q3.1 Zusammenfassung und Verständnisfragen
- Q3.2 Aufgaben zur Charakteristikmethode
- Q3.3 Lösung durch Potenzreihenansatz
- Q3.4 Methodenvergleich: Viele Wege führen zum Ziel.

Kapitel R: Lineare PDE zweiter Ordnung

R1 Lineare PDE zweiter Ordnung
- R1.1 Lösung durch Fourier–Transformation
- R1.2 Klassifikation linearer PDE zweiter Ordnung
- R1.3 Trennung der Variablen durch Produktansatz

R2 Anwendung auf die Potentialgleichung
- R2.1 Laplace–Gleichung auf einem Rechteck
- R2.2 Eindeutigkeit und Minimum-Maximum-Prinzip
- R2.3 Gut gestellt? Hadamards warnendes Gegenbeispiel

R3 Anwendung auf die Wellengleichung
- R3.1 Die harmonisch schwingende Saite
- R3.2 Wellengleichung und die gezupfte Saite
- R3.3 Die Energiemethode beweist die Eindeutigkeit.

R4 Fazit: PDE zweiter Ordnung
- R4.1 Zusammenfassung und Verständnisfragen
- R4.2 Aufgaben zur Separationsmethode

Kapitel S: Die Wärmeleitungsgleichung

S1 Die Wärmeleitungsgleichung und ihre freien Lösungen
- S1.1 Von der Wärmebilanz zur Differentialgleichung
- S1.2 Wärmeleitungskern und Superposition
- S1.3 Lösung durch Fourier–Transformation

S2 Die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung als ARWP
- S2.1 Wie schnell kühlt ein Stab über seine Enden ab?
- S2.2 Was passiert bei gleichmäßigem Aufheizen?
- S2.3 Was passiert bei Isolierung an den Rändern?

S3 Existenz und Eindeutigkeit und Näherung des ARWP
- S3.1 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen
- S3.2 Energie und Minimum-Maximum-Prinzip
- S3.3 Approximation durch finite Differenzen

S4 Die dreidimensionale Wärmeleitungsgleichung als ARWP
- S4.1 Wie schnell kühlt eine Kugel über ihren Rand ab?
- S4.2 Anwendungsbeispiele aus Küche, Keller, Krimi
- S4.3 Fazit: Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

Kapitel T: Wahrscheinlichkeitsrechnung

T1 Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume
- T1.1 Zufall und Wahrscheinlichkeit: Grundbegriffe
- T1.2 Rechnen mit Ereignissen: Wahrscheinlichkeitsräume

T2 Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit
- T2.1 Bedingte Wahrscheinlichkeiten, Formel von Bayes
- T2.2 Stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen

T3 Das Gesetz der großen Zahlen (GGZ)
- T3.1 Zufallsvariablen, Erwartung und Varianz
- T3.2 Die Ungleichungen von Pafnuty Chebychev
- T3.3 Unabhängige Wiederholung: Gesetz der großen Zahlen
- T3.4 Stochastische Abhängigkeit: Korrelation vs Kausalität

T4 Fazit: Wahrscheinlichkeitsrechnung
- T4.1 Weitere Aufgaben und Anwendungsbeispiele
- T4.2 Sex: Was nützen dem Pfau seine Federn?
- T4.3 Tischkicker: Das Runde muss ins Eckige.
- T4.4 Google: die zufällige Irrfahrt im Internet

Kapitel U: Kombinatorik und Näherungen

U1 Produktexperimente
- U1.1 Ausfallwahrscheinlichkeiten
- U1.2 Prognosen zu Reaktorunfällen
- U1.3 Kollision und Geburtstagsparadox

U2 Kombinatorik und Urnenmodelle
- U2.1 Kombinatorische Abzählformeln
- U2.2 Schubfachmodelle: $\{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, n\}$
- U2.3 Urnenmodelle: Ziehung von k aus n Kugeln

U3 Drei grundlegende stochastische Modelle
- U3.1 Hypergeometrische Verteilung: Stichproben
- U3.2 Binomialverteilung: unabhängige Versuche
- U3.3 Poisson–Verteilung: bequeme Näherung

U4 Fazit: hypergeometrisch, binomial, Poisson
- U4.1 Verständnisfragen und weitere Aufgaben
- U4.2 Poissons Gesetz der kleinen Zahlen
- U4.3 Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion

Kapitel V: Der lokale Grenzwertsatz

V1 Kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- V1.1 Kontinuierliche Verteilungen
- V1.2 Wahrscheinlichkeitsräume
- V1.3 Eindimensionale Normalverteilung

V2 Erwartung, Varianz, Streuung
- V2.1 Kumulative Verteilungsfunktion
- V2.2 Zufallsvariablen, Erwartung und Varianz
- V2.3 Verteilungen und ihre Kenngrößen

V3 Der lokale Grenzwertsatz (LGS)
- V3.1 Von der Binomial- zur Normalverteilung
- V3.2 Der lokale Grenzwertsatz $\mathrm{B}(n, t) \approx \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$
- V3.3 Erste Anwendungsbeispiele

V4 Fazit: der lokale Grenzwertsatz
- V4.1 Zusammenfassung und Verständnisfragen
- V4.2 Weitere Aufgaben und Anwendungsbeispiele
- V4.3 Kleine Stichprobe und Intervallschätzung

Kapitel W: Der zentrale Grenzwertsatz

W1 Der zentrale Grenzwertsatz (ZGS)
- W1.1 Stochastisch unabhängige Zufallsvariablen
- W1.2 Beispiele und erste Beobachtungen
- W1.3 Der zentrale Grenzwertsatz

W2 Statistische Anwendungen
- W2.1 Konfidenzintervalle
- W2.2 Fehlerfortpflanzung
- W2.3 Regressionsanalyse

W3 Fazit: der zentrale Grenzwertsatz
- W3.1 Zusammenfassung und Verständnisfragen
- W3.2 Summen von Zufallsvariablen und Grenzwertsätze
- W3.3 Weitere Aufgaben und Anwendungsbeispiele

W4 Analytische Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung
- W4.1 Laplace– und Fourier–Transformation von WMaßen
- W4.2 Beweisidee des zentralen Grenzwertsatzes
- W4.3 Entropie verstehen und anwenden

Kapitel Z: Zusammenfassung

Das letzte Kapitel versammelt alle Kapitelzusammenfassungen und bietet so eine Zusammenschau der wichtigsten Ergebnisse, Sätze und Methoden dieser Vorlesung zur Höheren Mathematik. Im Laufe des Semesters führen wir Sie Schritt für Schritt dorthin.

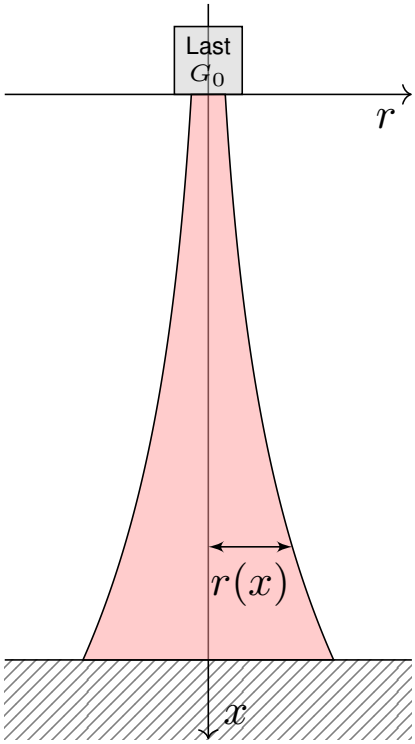
Diese Zusammenfassung ist dazu nur eine Gedächtnisstütze; zum soliden Verständnis benötigen Sie alle Grundlagen und viel Übung! Erfahrung, Umsicht und Verständnis lassen sich nicht eintrichtern, sondern nur durch regelmäßige Übung erwerben. Also: Üben Sie!

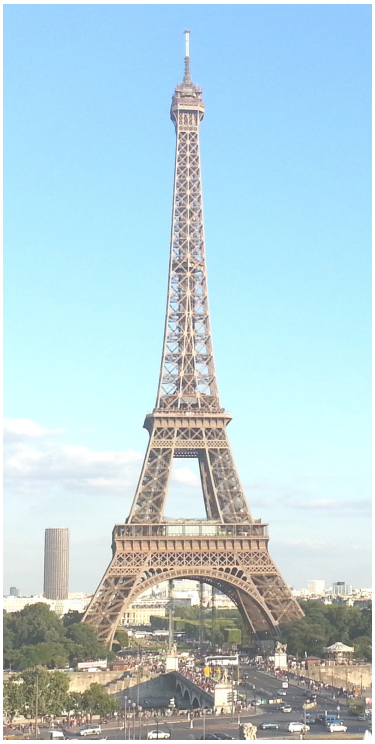
—

Wir beginnen diese Vorlesung mit einem Kapitel zur Vorschau; dies gibt zunächst eine Übersicht der zentralen Themen der HM3 und dient somit zu einer ersten Orientierung und zu Ihrer Motivation.

Auch wenn Sie die nötigen Methoden jetzt noch nicht kennen, so können Sie doch sinngemäß erahnen, welche Techniken Sie brauchen werden. Sie können jetzt schon die Ziele erkennen, auf die wir hinarbeiten. Diese Versprechen werde ich in den nächsten Wochen einlösen.

Ein hoher Turm braucht eine breite Basis.





Der Eiffelturm in Paris am Abend des 14.08.2013, Höhe 324m

Der Burj Khalifa in Dubai, Höhe 830m, Bildquelle: wikimedia

Aufgabe: Konstruieren Sie eine Säule aus einem Material konstanter Dichte ϱ, so dass der Druck (Last pro Fläche) überall konstant p ist.

Zahlenbeispiel: Beton $\varrho = 3\mathrm{g/cm}^3$, Last $G_0 = 4600\mathrm{kN}$, Radius $r_0 = 1\mathrm{m}$, Höhe $300\mathrm{m}$.
Unser Modell ist zwar extrem vereinfacht, aber es illustriert doch recht gut das Prinzip.

Ein hoher Turm braucht eine breite Basis.

Lösung: In Höhe x haben wir den Radius $r(x) > 0$ gemäß Skizze. Die Fläche ist $A(x) = \pi r(x)^2$, das Volumen $V(x) = \int_{h=0}^{x} \pi r(h)^2 \,\mathrm{d}h$, das Gewicht $G(x) = g\varrho V(x)$, der Druck $G(x)/A(x) = p$. Insgesamt:

$$g\varrho \cdot \int_{h=0}^{x} \pi r(h)^2 \,\mathrm{d}h \quad \overset{!}{=} \quad p \cdot \pi r(x)^2$$

Ableiten dieser Integralgleichung ergibt unsere Differentialgleichung:

$$g\varrho\, \pi r(x)^2 \quad = \quad 2p\, \pi r(x)\, r'(x).$$

Diese ist elementar lösbar. Wir trennen die Variablen und integrieren:

$$\frac{r'(x)}{r(x)} = \frac{g\varrho}{2p} =: c \quad \Rightarrow \quad \int_{h=0}^{x} \frac{r'(h)}{r(h)} \,\mathrm{d}h = \int_{h=0}^{x} c \,\mathrm{d}h \quad \Rightarrow \quad \ln r(x) - \ln r_0 = cx$$

Wir erhalten somit $r(x) = r_0\, \mathrm{e}^{cx}$. Der Radius wächst exponentiell!

Dank passender mathematischer Werkzeuge gelingt uns die Rechnung erfreulich leicht.
Im Zahlenbeispiel gilt $p \approx 1500\mathrm{kN/m}^2$ und $r(x) = 1\mathrm{m} \cdot \mathrm{e}^{x \cdot 0.01/\mathrm{m}}$, also $r(300\mathrm{m}) \approx 20\mathrm{m}$.
Probe / Plausibilität: Die Druckfestigkeit liegt je nach Beton zwischen 10 und $100\mathrm{N/mm}^2$.
Unsere Rechnung illustriert das Grundprinzip. Anwendungen berechnet man noch viel genauer!

Theorie und Anwendung: Modellierungskreislauf

☺ Abstraktion ist die Kunst, Wichtiges von Unwichtigem zu trennen. Differentialgleichungen nutzen wir zur Formulierung der Naturgesetze, sie sind die universelle Sprache der Naturwissenschaft und der Technik: Damit können wir Probleme formulieren, strukturieren, verstehen, lösen.

1. Grundlegendes Verständnis der vorliegenden Situation:
Um Anwendungen in der Physik, Mechanik, Thermodynamik, Strömungslehre, etc. zu verstehen, benötigen Sie zunächst die erforderlichen Grundkenntnisse der betroffenen Anwendungsgebiete: Naturgesetze, grundlegende Modelle, geeignete Vereinfachungen, etc.

☺ Erst so können Sie die Situation quantitativ und präzise erfassen.

2. Mathematische Modellierung der vorliegenden Situation:
Durch geeignete Vereinfachung, Formalisierung und Abstraktion erhalten Sie ein mathematisches Modell. Dieses besteht aus den relevanten Größen und den zwischen ihnen gelten Beziehungen, meist geeignete Gleichungen, sehr häufig Differentialgleichungen.

☺ Hierzu nutzen Sie die Techniken Ihrer HM und weitere nach Bedarf.

Theorie und Anwendung: Modellierungskreislauf

3. Lösung durch geeignete mathematische Werkzeuge: Dazu lernen Sie hier die grundlegenden Rechentechniken. Das ist ein weites Gebiet! Je nach Ihren Anwendungen vertiefen Sie die nötigen Techniken zur numerischen Näherung, zu partiellen Differentialgleichungen, etc.

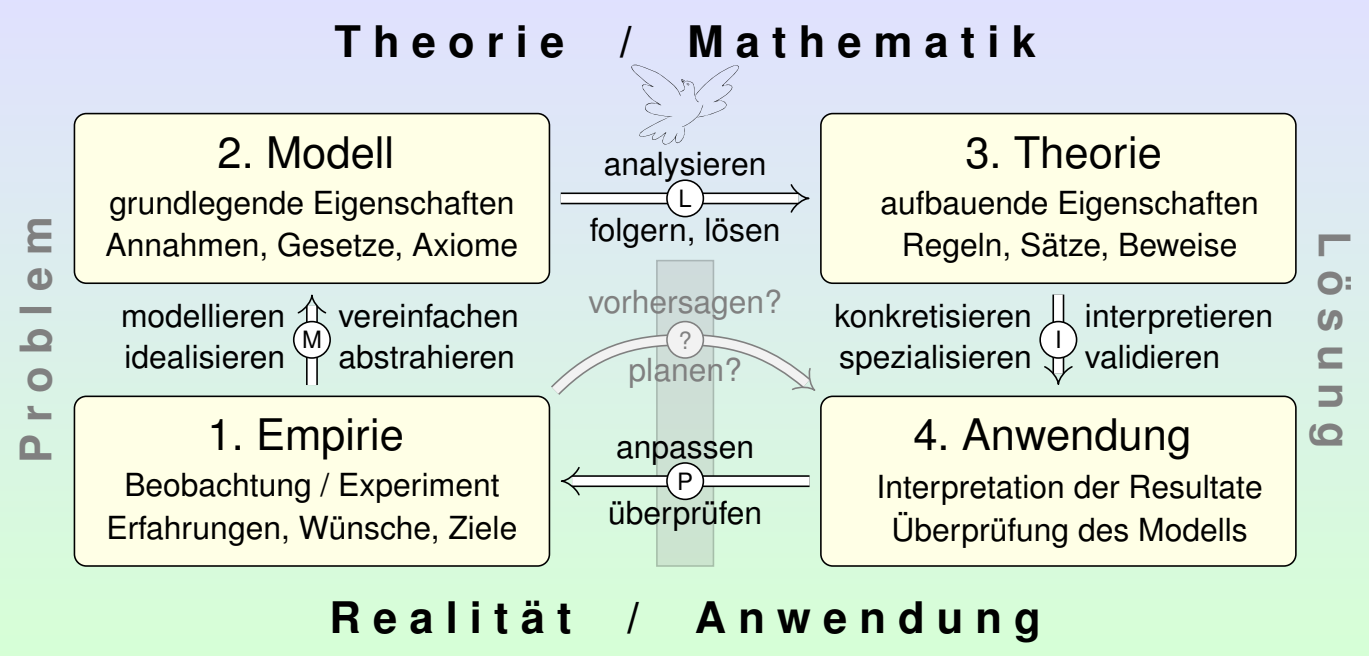
☺ Lösungen sind oft schwer zu finden, aber leicht zu überprüfen. Zur Sorgfalt gehört, die gefundenen / benachbarte / alle Lösungen zu prüfen, zu diskutieren und umsichtig alle Sonderfälle zu beachten.

4. Anpassung und Überprüfung anhand gegebener Daten:
Ist eine mathematische Lösung oder numerische Näherung gelungen, so passen Sie schließlich die noch freien Parameter des Modells an die gegebenen Daten an und überprüfen soweit möglich die Vorhersagen des Modells durch Experimente, Messungen, Alternativmodelle, etc.

⚠ Falls nötig muss erneut ab (1) ein besseres Modell erstellt werden.

Diese Vorlesung konzentriert sich auf Lösungsmethoden (Schritt 3). Aus Ihren Vorlesungen kennen Sie bereits einige Anwendungen (1,2,4), viele weitere werden noch folgen. Nutzen Sie diese Querverbindungen!

Warum ist Mathematik so erfolgreich?



Konkrete Anwendung benötigt abstrakte Kenntnisse; je anspruchsvoller, desto mathematischer! Alles Denken beruht auf Modellen; diese können *deskriptiv* oder *normativ* eingesetzt werden. Deskriptiv: beschreibend (Kettenlinie), erklärend (Planetenbewegung), vorhersagend (Wetter). Normativ: vorschreibend (Bauplan), planend (Raumsonde), gesetzgebend (Klimaschutz). Ingenieur:innen wollen beides, nicht nur passiv vorhersagen, sondern auch aktiv steuern und beeinflussen. Hierzu benötigen Sie ausreichend starke mathematische Werkzeuge.

Warum ist Mathematik so erfolgreich?

Die Differential- und Integralrechnung kennen Sie aus der HM1&2 und wissen bereits, wie nützlich sie Ihnen jetzt schon in Anwendungen ist. Diese Techniken werden wir dieses Semester ausbauen und vertiefen: Integralrechnung und ihre Anwendung auf Differentialgleichungen.

Hierzu möchte ich gleich zu Beginn einige berühmte Anwendungen skizzieren, so dass Sie sich einen ersten Eindruck verschaffen können. Im obigen Beispiel suchen wir eine geeignete Form unseres Turmes. Es ist demnach nicht nur eine Zahl gesucht, sondern eine Funktion!

Die Aufgabe führt zu einer Differentialgleichung, also einer Gleichung, in der die gesuchte Funktion $y(x)$ und ihre Ableitungen $y'(x)$ auftreten. Viele Modelle in Naturwissenschaft und Technik haben diese Form: **Differentialgleichungen sind die Sprache der Naturgesetze.**

Auch wenn Sie die nötigen Methoden jetzt noch nicht kennen, so können Sie doch sinngemäß erahnen, welche Techniken wir brauchen werden. Sie können so in etwa die Ziele erkennen, auf die wir hinarbeiten. Diese Versprechen werde ich in den nächsten Wochen einlösen.

Solide Fundamente

Pieter Breugel, *Der Turmbau zu Babel*, Bildquelle: wikimedia

Solide Fundamente

Ein hoher Turm braucht eine breite Basis. Diese Aussage, Sie ahnen es, ist eine Metapher für Ihre Ausbildung als zukünftige Ingenieur:innen. Sie wollen hoch hinaus, zunächst fachlich im Studium, später beruflich. Hierzu legen Sie im Grundstudium ein solides und breites Fundament.

Gerade in grundlagen- und forschungsorientierten Studiengängen wie LRT und MaWi werden Sie ein sehr breites Spektrum mathematischer Techniken anwenden, je nach Ihrer späteren Spezialisierung.

Im Kleinen ist es auch ein Bild für den Aufbau der Höheren Mathematik: Nach zwei Semestern HM1&2 haben Sie solide Grundlagen, auf denen wir in der nun anschließenden HM3 aufbauen können und werden.

Auch in diesem Semester HM3 brauchen wir solide Fundamente: Alles dreht sich um (ein- und mehrdimensionale) Integration. Diese lege ich daher ausreichend breit und tragfähig an.

Der effiziente und strenge Aufbau der Mathematik ist ein Segen, bei sträflichen Lücken leider auch ein Fluch. Bitte nehmen Sie daher diesen Aufbau von Anfang an ernst, es wird Ihnen dauerhaft nützen!

Newtons Himmelsmechanik: die Bewegungsgleichung

Aufgabe: Formulieren Sie die Bewegungsgleichungen von n Körpern mit Masse $m_k > 0$, Position $u_k(t) \in \mathbb{R}^3$ und Geschwindigkeit $v_k(t) \in \mathbb{R}^3$.

Lösung: Newtons Gravitationsgesetz ergibt die Differentialgleichungen

$$\boxed{\dot{u}_k = v_k, \quad \dot{v}_k = f_k(u) := \sum\nolimits_{j \neq k} \gamma\, m_j \, \frac{u_j - u_k}{|u_j - u_k|^3}.}$$

Vorgegeben sind die Anfangssdaten $u_k(0)$ und $v_k(0)$ zur Zeit $t = 0$.
Als Lösung gesucht ist die Bewegung $(u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n) : [0, T[\to \mathbb{R}^{6n}$.

Erlaubt ein so komplexes System immer genau eine Lösung? Ja, das ist der zentrale ∃&E-Satz! Kollision oder Expulsion nach ∞ sind möglich: Eventuell existiert die Lösung nur für eine kurze Zeit $T > 0$. Für manche Startwerte sind Lösungen periodisch, oder beinahe: Zu unserem Glück!

- ☺ Den Fall $n = 2$ lösen Kegelschnitte: Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln.
- ☹ Für $n \geq 3$ lässt sich dieses DGSystem i.A. nicht geschlossen lösen!
- ☺ Euler–Verfahren: diskrete Zeitschritte $0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \ldots$,

$$\begin{aligned} u_k(t_{i+1}) &\approx u_k(t_i) + v_k(t_i) \cdot (t_{i+1} - t_i), \\ v_k(t_{i+1}) &\approx v_k(t_i) + f_k(u) \cdot (t_{i+1} - t_i). \end{aligned}$$

Newtons Himmelsmechanik: der historische Triumph

Das Verständnis der **Himmelsmechanik** markiert den Übergang vom Mittelalter zur Neuzeit.

Die Beobachtung des Nachthimmels und seiner Sterne fasziniert uns Menschen seit Alters her. Neben den zahlreichen „Fixsternen“ (weit entfernte Sterne) erkennen wir einige „Wandelsterne“ (Planeten unseres Sonnensystems). Ihre Bewegung lässt Regeln erahnen, doch für Wandelsterne scheinen diese zunächst kompliziert und verwirrend. Sie quantitativ zu erfassen und gründlich zu verstehen, ist einer der großen Triumphe menschlicher Neugier und systematischer Forschung!

Von der Erde besehen scheinen sich alle Sterne um uns zu drehen, doch die exakte Bewegung der Planeten erweist sich als schrecklich kompliziert. Kopernikus' heliozentrisches Modell (1543) ist einfacher, daher nützlicher: Die Bahnen der Planeten um die Sonne erweisen sich recht genau als Ellipsen. Diese Koordinatentransformation hat enorme Wirkung und schreibt Weltgeschichte!

Aus Tycho Brahes präzisen **Beobachtungsdaten** leitete Johannes Kepler drei Gesetze ab, die die Ellipsenbewegung der Planeten um die Sonne gut *beschreiben*. Eine *Erklärung* der Bewegungen durch einheitliche physikalische Prinzipien gelang erst Isaac Newton 1686 mit seinen Principia!

Die moderne Naturwissenschaft beginnt mit Newtons Formulierung der drei Bewegungsgesetze, des universellen Gravitationsgesetzes und seiner Lösung des Zwei-Körper-Problems. Mit einer Handvoll physikalischer Prinzipien und den passenden mathematischen Werkzeugen konnte er die Keplerschen Regeln *erklären*, ja *herleiten*. Newtons revolutionäre Idee: Überall im Universum gelten dieselben Gesetze! Newtons Mechanik erklärt die Schwerkraft hier auf Erden ebenso wie außerirdische Phänomene: den Umlauf der Planeten um die Sonne und des Mondes um die Erde, sogar die Gezeiten unserer Meere, ebenso die Coriolis–Kraft und das Foucaultsche Pendel.

Newtons Himmelsmechanik: die Herausforderung

Allein schon das obige Differentialgleichungssystem zu formulieren, ist eine Meisterleistung der Mathematik und Physik der Neuzeit. Wir nennen dies **Himmelsmechanik** und sind völlig zu Recht stolz auf sie: Mathematische Sprache und Werkzeuge erleuchten die gesamte Entwicklung und ebnen den Weg von Beobachtung über Erklärung und Berechnung bis zur Raumfahrt.

Auch nach über 300 Jahren sind Newtons Gleichungen immer noch nützlich wie am ersten Tag! Daten ändern sich, Methoden bleiben bestehen. Solide mathematische Arbeit hat eine extrem lange Wirksamkeit. Daher lohnt es sich auch für Sie heute, in mathematische Grundlagen zu investieren und diese wirksamen Werkzeuge zu erlernen, anzuwenden und fortzuführen.

Die drei Fälle $n = 1$ und $n = 2$ sowie $n \geq 3$ sind sehr verschieden! Für einen einzigen Körper ($n = 1$) enthalten Newtons Gleichungen $\dot{u}_1 = v_1$ und $\dot{v}_1 = 0$ keine gravitative Wechselwirkung. Ihre Lösung ist eine **geradlinige Bewegung**, nämlich $u_1(t) = u_1(0) + v_1 t$.

Ein Zwei-Körper-System ($n = 2$) wie Sonne-Erde oder Erde-Mond ist bereits ausgesprochen interessant. Newton konnte seine Gleichungen hier gut lösen, sie ergeben Ellipsenbahnen und erklären die Keplerschen Gesetze. Allgemeiner sind auch Parabeln und Hyperbeln als Lösungen möglich, je nach Anfangsdaten $u_1(0), v_1(0), u_2(0), v_2(0)$. In allen Fällen gelingt die Lösung hier noch in geschlossener Form. Man nennt ein solches System **vollständig integrabel**. P270

Newton betrachtete anschließend das Drei-Körper-System Sonne-Erde-Mond. Dies entzog sich jedoch hartnäckig einer Lösung und wurde zum berühmtesten offenen Problem der Mathematik. Das **Drei-Körper-Problem** gilt bis heute als eines der schwierigsten Probleme, die zahlreichen Anstrengungen zu seiner Lösung erfordern und erzeugen immer wieder wichtige neue Methoden.

Newtons Himmelsmechanik: mögliche Lösungsmethoden

Für künstliche Satelliten wird das **zirkuläre restringierte Drei-Körper-Problem** (CR3BP) sehr ausgiebig untersucht: Zwei massereiche Körper umrunden sich kreisförmig, während der dritte Körper nahezu masselos ist. Hier findet man die berühmten fünf Lagrange–Punkte. P257

Nur wenige und sehr spezielle Sonderfälle des n–Körper-Problems sind geschlossen lösbar. Auch diese haben ihren eigenen Reiz: Seit 1994 wurden zahlreiche **Choreographien** entdeckt, in denen n Körper symmetrisch angeordnet werden und dann periodische Bahnen durchlaufen. Für generische Anfangsdaten hingegen ist die Bewegung **chaotisch** und kann nur numerisch annähernd berechnet werden. *Solving the Three Body Problem*, `youtu.be/et7XvBenEo8`.

Zum Kontrast untersuchen und vergleichen wir zwei klassische Anwendungen der Mechanik: Einerseits gekoppelte **lineare Systeme** wie harmonische Oszillatoren O101 P101, andererseits Planetenbewegung und ähnliche **nicht-lineare Systeme**. Nicht-lineare Systeme sind schwierig und verhalten sich oft chaotisch. Lineare Systeme sind besonders gutartig und einfach zu lösen. Daher sollten Sie Linearität erkennen und wertschätzen, verstehen und nutzen lernen!

Auch nicht-lineare Systeme lassen sich mitunter gut lösen, wie einfache Beispiele zeigen. Dies sind aber Ausnahmen und seltene Glücksfälle. Typischerweise sind nicht-lineare Systeme nicht geschlossen lösbar. Es bleibt dann nur die **numerische Approximation** mit Hilfe geeigneter Näherungsverfahren, z.B. das Euler–Verfahren oder besser gleich das Runge–Kutta–Verfahren. Mehr hierzu erfahren Sie in der Numerik. Aufbauend auf den mathematischen Grundlagen können Sie die Numerik von Differentialgleichungen nutzen und wo nötig vertiefen.

Allgemeine Grundlagen und konkrete Anwendungen ergänzen sich wunderbar.

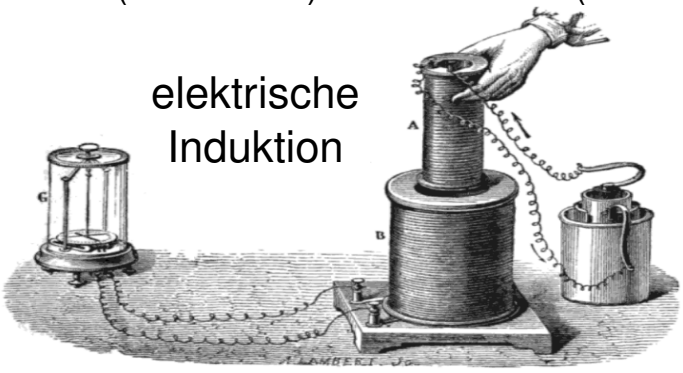
Maxwells Elektrodynamik

Michael Faraday
(1791–1867)

Königin Victoria
(1819–1901)

James Clerk Maxwell
(1831–1879)

elektrische
Induktion



$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\varrho, \quad \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0,$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}.$$

Maxwells Elektrodynamik

Michael Faraday (1791–1867) war ein englischer Physiker und gehört zu den einflussreichsten Wissenschaftlern der Menschheitsgeschichte. Er hatte kaum formale Ausbildung, aber eine präzise geometrische Anschauung. Seine experimentellen Ergebnisse fasste James Clerk Maxwell (1831–1879) zur elektromagnetischen Theorie zusammen.

Zu Lebzeiten war Faraday berühmt für seine öffentlichen Vorträge und Experimente zur Elektrizität, über die er an vorderster Front forschte. Zum Beispiel demonstrierte er anhand von Spulen und Magneten die Umwandlung von mechanischer Bewegung in Elektrizität und zurück. Das ist ein phantastischer und überaus nützlicher Zusammenhang!

Der Legende nach führte Faraday dies auch Königin Victoria vor, sie war amüsiert, aber auch skeptisch: „Elektrizität ist eine hübsche Spielerei, doch welchen Nutzen hat sie?“ Heutzutage scheint diese Frage naiv, geradezu ignorant; womöglich diente diese Konversation auch als intellektueller Schaukampf. Faraday antwortete diplomatisch und weitsichtig: „Madam, welchen Nutzen hat ein neugeborenes Baby?“

Maxwells Elektrodynamik

Jede:r Zuschauer:in konnte erkennen: Diese Grundlagenforschung war nicht bloß Spielerei, sondern eine phantastische neue Errungenschaft. Es braucht kaum Phantasie zur Anwendung: Mit Magneten und Spulen baut man Telegraphen, um Nachrichten blitzschnell zu übermitteln.

Aber die Geschichte ist noch nicht zu Ende, es kommt noch besser! Faradays Ergebnisse formulierte Maxwell 1865 in obigen Gleichungen. Erst seine einheitliche Theorie eröffnete völlig neue Anwendungen: Allein durch Rechnung erkannte er, was keiner zuvor gesehen hatte, und sagte die Möglichkeit elektromagnetischer Wellen voraus. Diese waren 1865 noch unbekannt und experimentell noch lange nicht zugänglich; ihr Nachweis gelang Heinrich Hertz 1886. Wir nutzen sie bis heute!

Maxwells Gleichungen sind abstrakt und nützlich. Damit erkannte er neue Zusammenhänge und neue Anwendungen. Selbst Faraday oder jeder noch so geschickte Experimentator hätte das nicht ahnen können. Erst das Wechselspiel von Theorie und Anwendung führt zum Erfolg!

☺ Dies ist das allgemeine Muster und Kennzeichen von Wissenschaft.

Warum hilft Abstraktion?

Mathematik ist zugleich abstrakte Theorie und konkrete Anwendung.
Sie erklärt und quantifiziert Zusammenhänge: Das ist ihr Nutzen!
Dank Abstraktion ist sie universell anwendbar: Das ist ihre Stärke!
Sie ist schön und gut: ästhetische Kunst und nützliches Handwerk.

> *Les mathématiques ont un triple but. Elles doivent fournir un instrument pour l'étude de la nature. Mais ce n'est pas tout: elles ont un but philosophique et, j'ose le dire, un but esthétique.*
>
> Henri Poincaré (1854–1912)

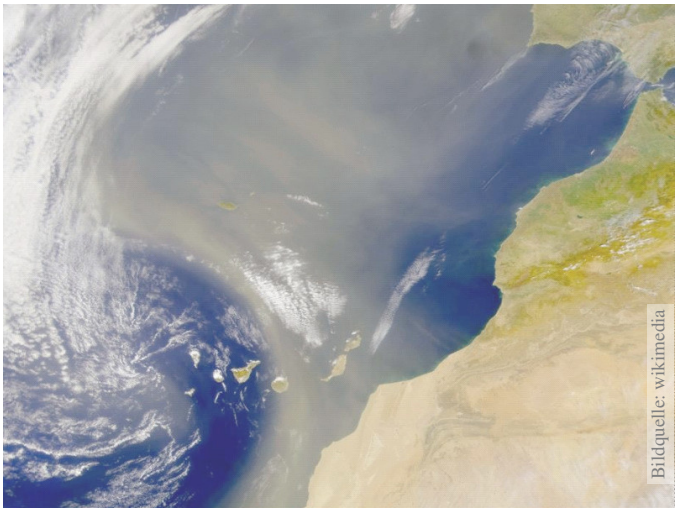
Das Wort „abstrakt“ missbraucht der Ignorant gern als Schimpfwort für alles, worüber ihm die Kenntnis fehlt oder wovor er die Mühe scheut.

Zur Klarstellung muss und will ich Partei ergreifen für die Abstraktion:
Abstraktion strukturiert und vereinfacht: Eine allgemeine Tatsache ist oft leichter zu verstehen und zu erklären als ihre zahlreichen Spezialfälle.
Denkökonomie: Daten ändern sich, Methoden bleiben bestehen.

☺ Daher betone ich konkrete historische Beispiele zum Wechselspiel von Theorie und Anwendung. Die Geschichte ist lehrreich und lohnend.

Die Kontinuitätsgleichung der Strömungslehre

Ziel: Wie verhalten sich Strömungen? Welche Gleichungen gelten hier?



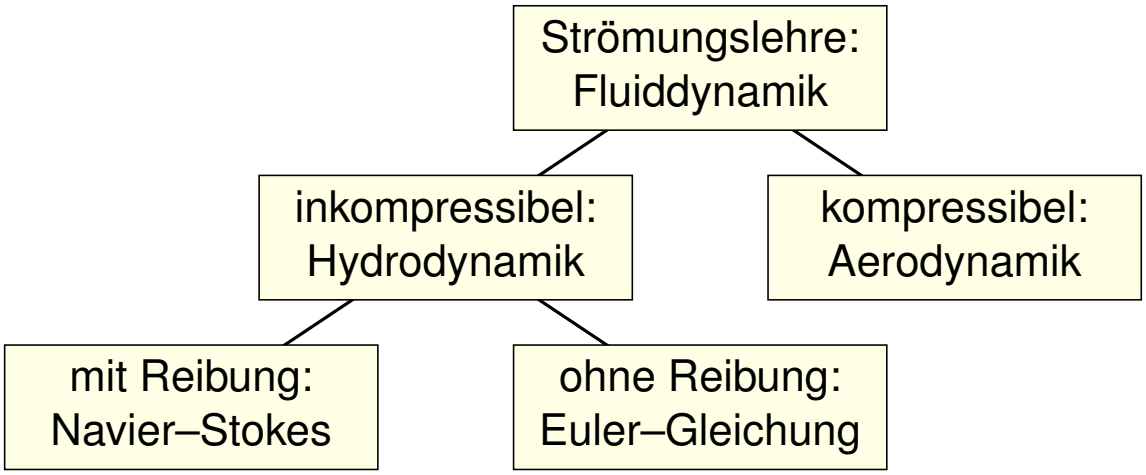
Luft- und Wasserströmung um die Kanarischen Inseln

(0) Wie beschreiben Sie eine Strömung in einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ über ein Zeitintervall $I = [t_0, t_1]$? Geschwindigkeit $\vec{v} : I \times \Omega \to \mathbb{R}^3 : (t, \vec{x}) \mapsto \vec{v}(t, \vec{x})$ und Massendichte $\varrho : I \times \Omega \to \mathbb{R} : (t, \vec{x}) \mapsto \varrho(t, \vec{x})$ und evtl. weitere Daten.

Die Massenstromdichte $\varrho\vec{v} : I \times \Omega \to \mathbb{R}^3$ beschreibt den Massenfluss. Im Strömungsbereich Ω werde Masse weder erzeugt noch vernichtet.

Die Kontinuitätsgleichung der Strömungslehre

Die Strömungsmechanik untersucht die Bewegung von fluiden Medien. Sie ist grundlegend für die Meteorologie, beim Bau von Flugzeugen, Schiffen, Autos, ... bis hin zu Verbrennungsmotoren: Alles fließt!



Ein Fluid heißt inkompressibel, wenn seine Dichte nicht vom Druck abhängt. Zum Beispiel ist dies bei Wasser eine gute Näherung für die meisten Anwendungen. Noch einfacher ist zunächst, überall konstante Dichte anzunehmen. Anders als Flüssigkeiten sind Gase leicht komprimierbar, ihre Dichte ist etwa 1000mal geringer, ihre thermische Ausdehnung größer. Für ihre Bewegung aber gelten weitgehend die gleichen Gesetze, zumindest bei nicht allzu großen Drücken und Geschwindigkeiten. Wir wenden uns hier der allgemein gültigen Kontinuitätsgleichung zu.

Die Kontinuitätsgleichung der Strömungslehre

Aufgabe: Welche Beziehung folgt aus der Massenerhaltung?

(1) Sei $K \Subset \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ kompakt, etwa ein Würfel. Formulieren Sie die Massenbilanz für K in Worten und als Volumen-/Flussintegrale.

(2) Formen Sie dies um zu einem einzigen Volumenintegral.

(3) Folgern Sie hieraus die zugehörige Differentialgleichung.

(4) Was folgt für inkompressible Strömungen, also für $\varrho = \mathrm{const}$?

Lösung: (1) Die über die Randfläche $S = \partial K$ ausströmende Masse geht der Gesamtmasse in K verloren. Als Integralgleichung formuliert:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_K \varrho \,\mathrm{d}K + \oiint_{S=\partial K} (\varrho \vec{v} \cdot \vec{n}) \,\mathrm{d}S = 0}$$

(2) Wir dürfen die Ableitung unters Integral ziehen dank Kompaktheit des Integrationsbereichs K und Stetigkeit der Ableitung $\partial\varrho/\partial t$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_K \varrho \,\mathrm{d}K \underset{\text{D3C}}{\overset{\text{Kpkt}}{=}} \iiint_K \frac{\partial \varrho}{\partial t} \,\mathrm{d}K$$

Die Kontinuitätsgleichung der Strömungslehre

Wir wollen auch das Flussintegral in diese Form bringen und dann beides zusammenfassen. Dies gelingt mit dem Satz von Gauß (G3G):

$$\oiint_{S=\partial K} (\varrho \vec{v} \cdot \vec{n}) \,\mathrm{d}S \underset{\text{G3G}}{\overset{\text{Gauß}}{=}} \iiint_K \operatorname{div}(\varrho \vec{v}) \,\mathrm{d}K$$

Dank Linearität des Integrals erhalten wir ein einziges Volumenintegral:

$$\iiint_K \left[\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \vec{v}) \right] \mathrm{d}K = 0$$

(3) Diese lokale Massenbilanz gilt für jedes Kompaktum $K \Subset \Omega$. Das gilt genau dann, wenn der (stetige!) Integrand verschwindet:

$$\boxed{\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \vec{v}) = 0}$$

Diese **Kontinuitätsgleichung** ist grundlegend für die Strömungslehre.

(4) Für inkompressible Strömungen gilt $\varrho = \mathrm{const}$ und somit $\operatorname{div} \vec{v} = 0$. Anschaulich: In jedes Volumen K fließt ebensoviel hinein wie heraus. Hierzu genügt allgemein bereits $\partial_t \varrho + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \varrho = 0$. Sehen Sie warum?

Von Integral- zu Differentialgleichungen

Wir haben oben aus einer Integralgleichung (der Massenerhaltung) eine Differentialgleichung abgeleitet (die Kontinuitätsgleichung). Dahinter steckt folgendes einfache und sehr nützliche Prinzip:

♦ Lemma H1A: Verschwindungslemma für Skalarfelder

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Gilt $\int_K f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ für jeden (kleinen) kompakten Würfel $K \Subset \Omega$, so folgt $f = 0$.

Aufgabe: Begründen Sie dies mit Hilfe der Stetigkeit von f.

Lösung: Wir wollen $f = 0$ zeigen.
Nehmen wir im Gegenteil an, es gälte $f \neq 0$.
Das bedeutet, es existiert ein Punkt $a \in \Omega$ mit $f(a) \neq 0$.

Wir können $f(a) > 0$ annehmen; der Fall $f(a) < 0$ ist analog.

Sei also $f(a) = 2b > 0$. Da f stetig ist, existiert um a ein kleiner Würfel $K \Subset \Omega$ mit Kantenlänge $\varepsilon > 0$, sodass $f(x) \geq b$ für alle $x \in K$ gilt.
Hieraus folgt die Abschätzung $\int_K f(x)\,\mathrm{d}x \geq b\,\mathrm{vol}_n(K) = b\,\varepsilon^n > 0$.

☺ Wenn also $\int_K f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ für alle Würfel $K \Subset \Omega$ gilt, so folgt $f = 0$.

Von Integral- zu Differentialgleichungen

Dieses Prinzip gilt ebenso für Flussintegrale von Vektorfeldern:

♦ Lemma H1B: Verschwindungslemma für Vektorfelder

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ stetig. Gilt $\int_S \vec{f}(x) \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = 0$ für jedes (kleine) achsenparallele Quadrat $S \Subset \Omega$, so folgt $\vec{f} = 0$.

Aufgabe: Begründen Sie dies mit Hilfe der Stetigkeit von $\vec{f}$.

Lösung: Wir wollen $\vec{f} = 0$ zeigen.
Nehmen wir im Gegenteil an, es gälte $\vec{f} \neq 0$.
Das heißt, es existiert ein Punkt $a \in \Omega$ mit $f_i(a) \neq 0$ für ein $i \in \{1, 2, 3\}$.

Wir können $i = 3$ annehmen; die Fälle $i = 1, 2$ sind analog.
Wir können $f_3(a) > 0$ annehmen; der Fall $f_3(a) < 0$ ist analog.
Sei also $f_3(a) = 2b > 0$. Da $\vec{f}$ und somit $f_1, f_2, f_3 : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig sind, existiert um a ein kleines Quadrat $S \Subset \Omega$ parallel zur (x_1, x_2)–Ebene mit Kantenlänge $\varepsilon > 0$, sodass hierauf $f_3(x) \geq b$ für alle $x \in S$ gilt.
Hieraus folgt die Abschätzung $\int_S \vec{f}(x) \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S \geq b\,\mathrm{vol}_2(S) = b\,\varepsilon^2 > 0$.

☺ Wenn $\int_S \vec{f}(x) \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = 0$ für alle Quadrate $S \Subset \Omega$ gilt, so folgt $\vec{f} = 0$.

Die Navier–Stokes–Gleichungen für inkompressible Fluide

Für **inkompressible Strömungen** gilt $\varrho = \mathrm{const}$ und somit $\operatorname{div} \vec{v} = 0$.
Es handelt sich um eine grundlegende **Erhaltungsgleichung**.
Diese beschreibt allerdings die Bewegung keineswegs vollständig.
Dazu werden weitere Erhaltungsgrößen wie Impuls / Energie benötigt.

Die Impulserhaltung führt zu den **Navier–Stokes–Gleichungen**:
Sei $\vec{\gamma}(t)$ die Bahn eines Teilchens der Strömung, d.h. $\dot{\vec{\gamma}}(t) = \vec{v}(t, \vec{\gamma}(t))$.
Newtons Gesetz „Kraft = Masse $\times$ Beschleunigung“ besagt hier:

$$\boxed{\varrho\, \ddot{\vec{\gamma}}(t) = \vec{F}\big(t, \vec{\gamma}(t)\big)}$$

Einsetzen und ausrechnen der linken Seite nach Kettenregel:

$$\frac{\mathrm{d}^2\gamma_i(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\dot{\gamma}_i(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_i(t, \vec{\gamma}(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial \gamma_k}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} v_k$$

Dies heißt **substantielle Ableitung** oder auch **konvektive Ableitung**.

Auf der rechten Seite setzt sich die Kraft $\vec{F}$ zusammen aus der Reibung, dem inneren Druck und äußeren Kräften, zum Beispiel der Schwerkraft.

Die Navier–Stokes–Gleichungen für inkompressible Fluide

Massenerhaltung: $$\operatorname{div} \vec{v} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0$$

Impulserhaltung: $$\underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial t}}_{\text{Änderung}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}}_{\text{Konvektion}} = \underbrace{\nu \Delta v_i}_{\text{Diffusion}} - \underbrace{\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x_i}}_{\text{interne Kraft}} + \underbrace{f_i}_{\text{extern}}$$

Diese $1 + n$ Gleichungen beschreiben die Strömungsgeschwindigkeit $\vec{v} : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ einer Flüssigkeit zur Zeit $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ am Ort $\vec{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ in der Ebene (n=2) oder im Raum (n=3), mit konstanter Massendichte $\varrho \in \mathbb{R}$ und Viskosität $\nu \in \mathbb{R}$, Druck $p : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ und äußerer Kraft $\vec{f} : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$. Sie sind zweiter Ordnung und nicht-linear in $\vec{v}$. Die Impulserhaltung ist Newtons Bewegungsgesetz: Links steht die Beschleunigung, als konvektive Ableitung. H111 Rechts stehen die Kräfte durch Reibung ν, Druck p und $\vec{f}$. Gegeben sind hierzu die äußere Kraft $\vec{f}$ sowie die Anfangsgeschwindigkeiten $\vec{v}(0, \vec{x})$ für $\vec{x} \in \Omega$. Gesucht sind die Funktionen $\vec{v}$ und p. Im zweidimensionalen Falle ist die Lösbarkeit bewiesen, im dreidimensionalen Falle noch nicht! Die Navier–Stokes–Gleichungen illustrieren die Schwierigkeit partieller Differentialgleichungen: Über dreidimensionale Lösungen weiß man allgemein wenig, z.B. sind Existenz und Regularität ungeklärt – trotz größter Anstrengungen. Das Clay Mathematics Institute hat dies im Jahr 2000 als eines von sieben Millenium-Problemen ausgelobt, mit einem Preisgeld von 1 Million Dollar.

Anwendung auf ideale ebene Strömungen

Komplexe Funktionen gehören zum mathematischen Grundwerkzeug. Auch darüber hinaus begegnen sie Ihnen häufig und nützen überall.

Die vorsichtige Ingenieur:in fragt sich: Lohnt sich diese Investition? Ja! Ich greife vor und nenne zwei wunderschöne klassische Anwendungen.

Wir können jede holomorphe Funktion $f(x+\mathrm{i}y) = u(x,y) - \mathrm{i}v(x,y)$ als ein Vektorfeld $(u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\operatorname{div}(u,v) = \operatorname{rot}(u,v) = 0$ betrachten.

♦ Satz Q1A: holomorphe Lösungen der Maxwell–Gleichung

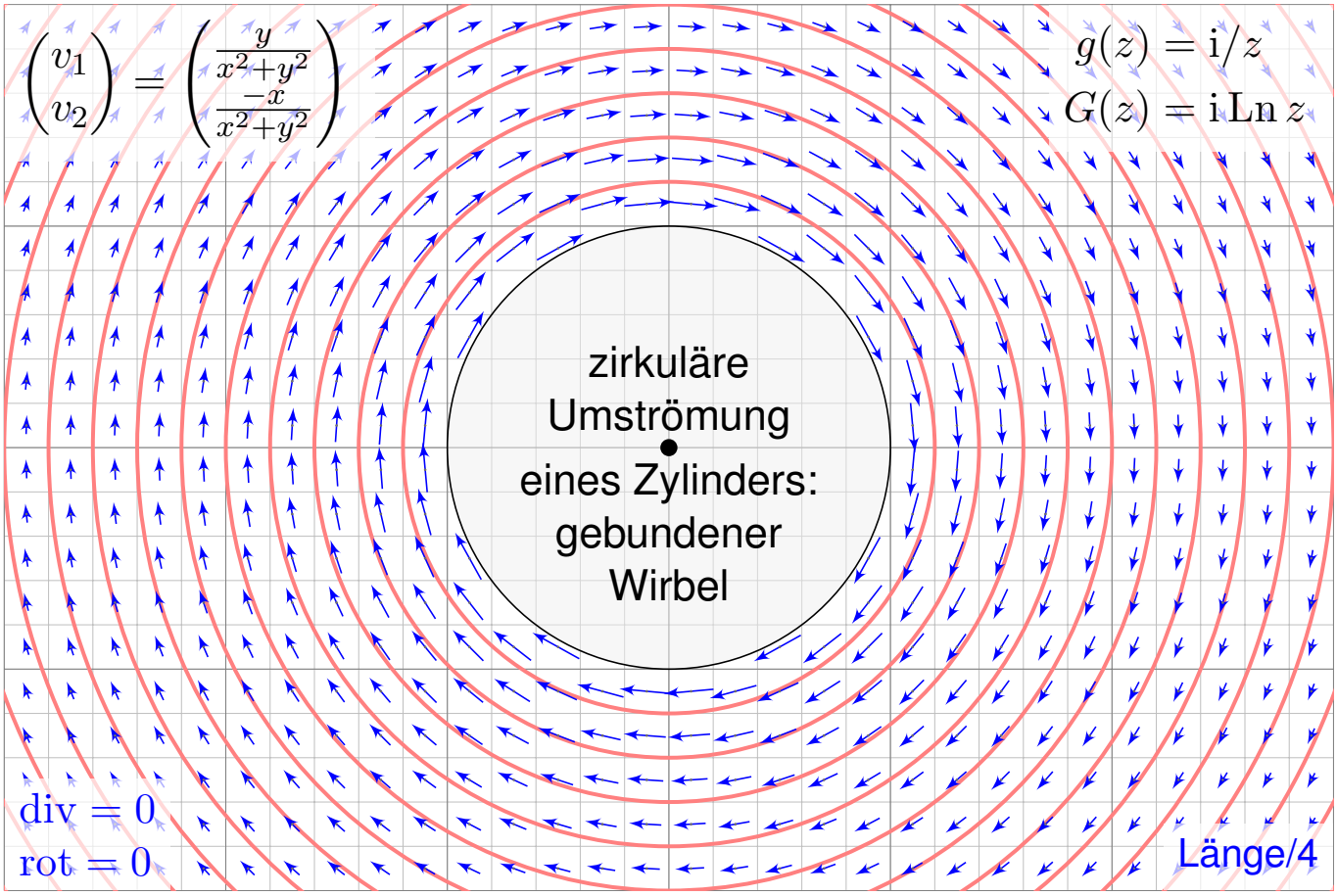
Jedes ebene statische E-Feld $\vec{E} : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \to \mathbb{R}^2$ ohne Quellen entspricht einer holomorphen Funktion $f = E_1 - \mathrm{i}E_2 : \mathbb{C} \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$ und umgekehrt.

♦ Satz Q1B: holomorphe Lösungen der Navier-Stokes-Gleichung

Jede ebene stationäre Strömung $v = (v_1, v_2) : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \to \mathbb{R}^2$ konstanter Dichte, ohne Wirbel, ohne Reibung und ohne äußere Kräfte entspricht einer holomorphen Funktion $f = v_1 - \mathrm{i}v_2 : \mathbb{C} \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$ und umgekehrt.

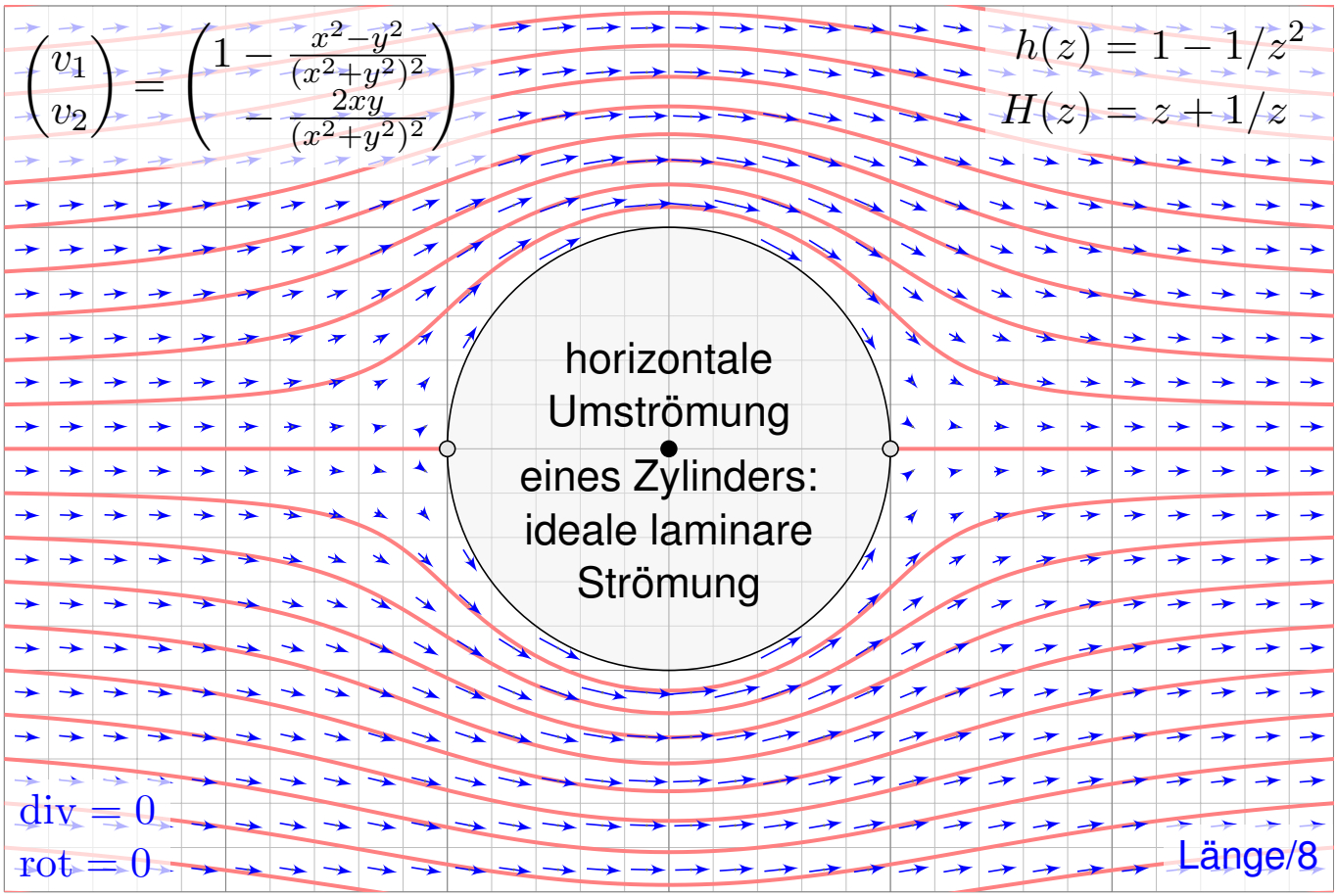
Vertiefungen und Anwendungen bieten die zugehörigen Vorlesungen.

Anwendung auf ideale ebene Strömungen



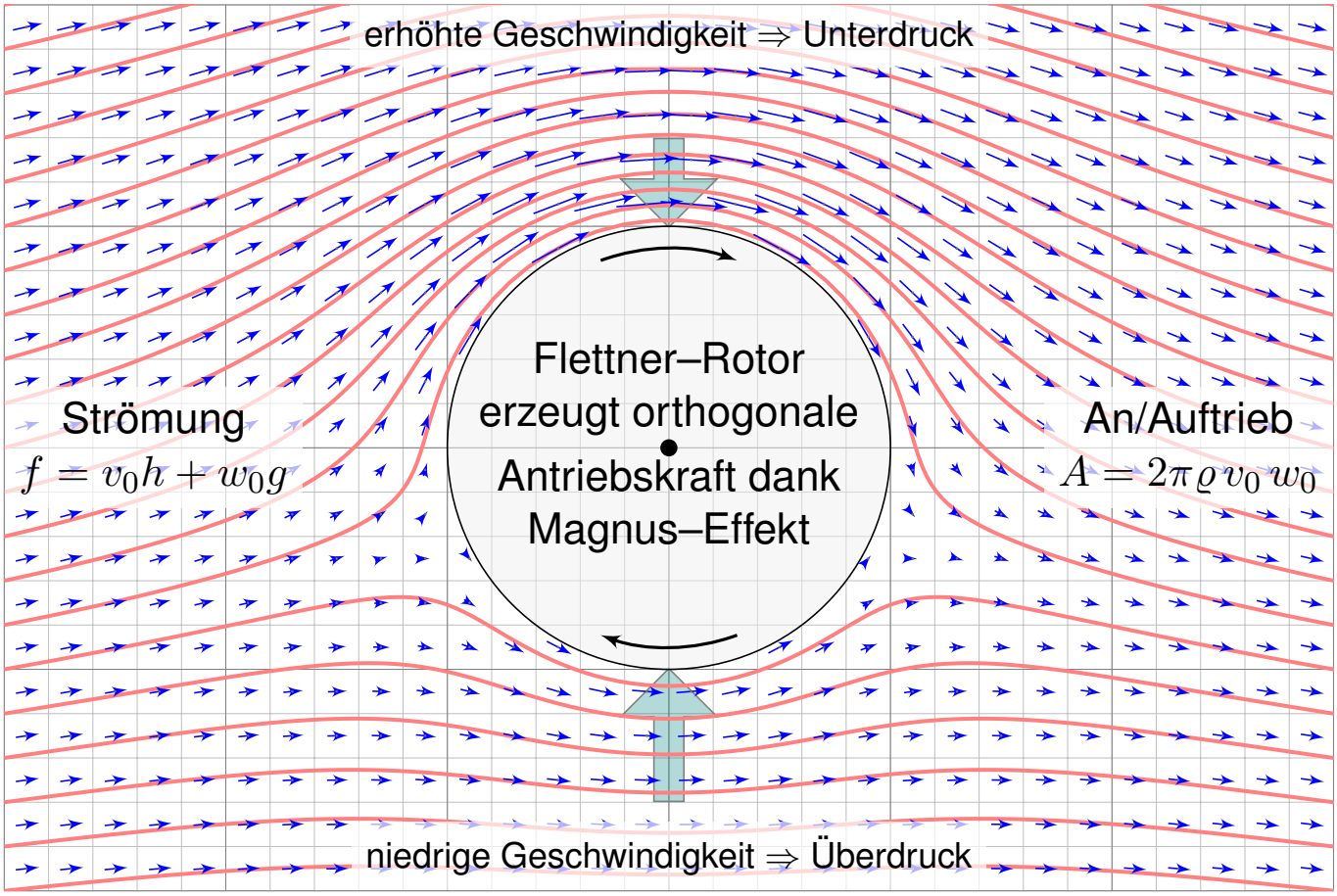
☺ Holomorphe Funktionen beschreiben Strömungen: Wirbelfeld.

Anwendung auf ideale ebene Strömungen



☺ Einfaches und intuitives Modell, exakte Lösung dank Holomorphie!

Anwendung auf ideale ebene Strömungen



☺ So berechneten Kutta und Joukowski die dynamische Auftriebskraft!

Was ist Mathematik?

Mathematik (gr. μαθηματική τέχνη) ist die 'Kunst des Erkennens'; sie ist schöpferischer und systematischer Prozess zum Lösen von Problemen.

Sie ist die **Sprache** des strukturierten logischen Denkens und damit unverzichtbare **Grundlage** für Naturwissenschaft und Technik. Sie ist

- **Werkzeugkasten**, um relevante Probleme eigenständig zu lösen,
- **Wissensgebiet**, allgemeine Kulturtechnik, Schlüsseltechnologie,
- **Wissenschaft**, Ideenschmiede, lebendiges Forschungsgebiet.

Wie ist Mathematik? Anstrengend, aber lohnend!

- abstrakt & schwierig, aber durch Übung erlernbar
- nützlich & effizient, meist an Anwendungen orientiert
- klar & einfach, auch überraschend, kunstvoll, schön

Was bedeutet „Höhere Mathematik"?

- Fortführung der Schulmathematik an der Hochschule
- Grundlage der Ingenieur- und Naturwissenschaften
- Rechentechniken für praktische Anwendungen

Mathematik ist universelle Sprache.

Jahrhunderte naturwissenschaftlicher und technischer Erfahrung lehren uns eindrücklich: **Mathematik ist die Sprache des Universums!**

Wir können diese Sprache verstehen und sprechen lernen.
Wir können sie anwenden und damit gezielt Probleme lösen.
Wie jede Sprache lernt man Mathematik durch Üben! Üben! Üben!

Die Grenzen meiner Sprache bedeuten die Grenzen meiner Welt.
Ludwig Wittgenstein (1889–1951), *Tractatus Logico-Philosophicus* (1921)

Als eindringliches Beispiel nenne ich wie skizziert die Elektrodynamik. Faradays Ergebnisse formulierte Maxwell 1865 als Induktionsgesetz

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\frac{1}{c} \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \bullet \vec{n}\, \mathrm{d}S \quad \text{bzw.} \quad \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0.$$

Maxwells einheitliche **Theorie** der Elektrodynamik eröffnete auch in der **Praxis** völlig neue Anwendungen. Dank seiner Gleichungen konnte er insbesondere die Möglichkeit elektromagnetischer Wellen vorhersagen. Diese waren 1865 noch unbekannt und experimentell nicht zugänglich; ihr Nachweis gelang Heinrich Hertz erst 1886. Wir nutzen sie bis heute!

Mathematik ist effizientes Werkzeug.

Dieselben mathematischen Formeln und Gleichungen treten in immer neuen Zusammenhängen auf und beschreiben völlig unterschiedliche Phänomene! Statt eines „elektrischen Feldes $\vec{E}$“ erscheint nun das „Strömungsfeld $\vec{v}$ einer Flüssigkeit“... oder allgemein ein „Vektorfeld f“: Abstraktion ist die Kunst, Wesentliches von Unwesentlichem zu trennen.

Der Kontext ändert sich, aber die Rechnung ist immer dieselbe!
Mathematische Modelle haben somit ihre eigenständige Bedeutung und ihre Wichtigkeit, daher lohnt es sich, sie eigenständig und allgemein zu untersuchen. Genau dies wollen wir in dieser Vorlesung tun, damit Sie für alle Fälle gewappnet sind, auch für zukünftige Anwendungen!

The enormous usefulness of mathematics in the natural sciences is something bordering on the mysterious and there is no rational explanation for it. [...] The miracle of the appropriateness of the language of mathematics [...] is a wonderful gift which we neither understand nor deserve. We should be grateful for it and hope that it will remain valid in future research.

Eugene Wigner (1902–1995), *The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences* (1960)

Mathematik ist Schlüsseltechnologie.

„Wir haben doch Computer! Wozu lernen wir noch Mathematik?“

Mathematische Modelle und Methoden erlernen Sie zunächst unter vereinfachten *Laborbedingungen*, in kleinem Maßstab, sozusagen unter dem Mikroskop. Unter *Industriebedingungen* ist ihre Vielfalt oft nur mit Computerhilfe voll auszuschöpfen. Umso wichtiger ist es, die Zusammenhänge und Mechanismen grundlegend zu verstehen:
Algorithmen und Programme übersetzen mathematische Modelle!

Meist können Sie nicht in ein laufendes Programm eingreifen, um ad hoc mit Ihrer „Intuition“, „Anschauung“ oder „gesundem Menschenverstand“ zu korrigieren, was die „dumme Maschine“ alleine nicht richtig macht. Im Gegenteil müssen Sie vorher verstehen, wie ein Verfahren im Detail funktioniert, um korrekte Anweisungen zu formulieren. Hierzu müssen Sie sorgfältig arbeiten, akribisch jeden möglichen Fall berücksichtigen.

Sie müssen dem Computer genau sagen, was er tun soll, oft auch wie. Das Ergebnis müssen Sie kritisch prüfen, verstehen und interpretieren. Die Mathematik stellt hierzu alles Nötige zur Verfügung. — Sie wollen Computer korrekt und effizient nutzen? Dazu brauchen Sie Mathematik!

Fouriers Wärmeleitungsgleichung

Ziel: Wie berechnen wir den Wärmefluss in einem Körper?

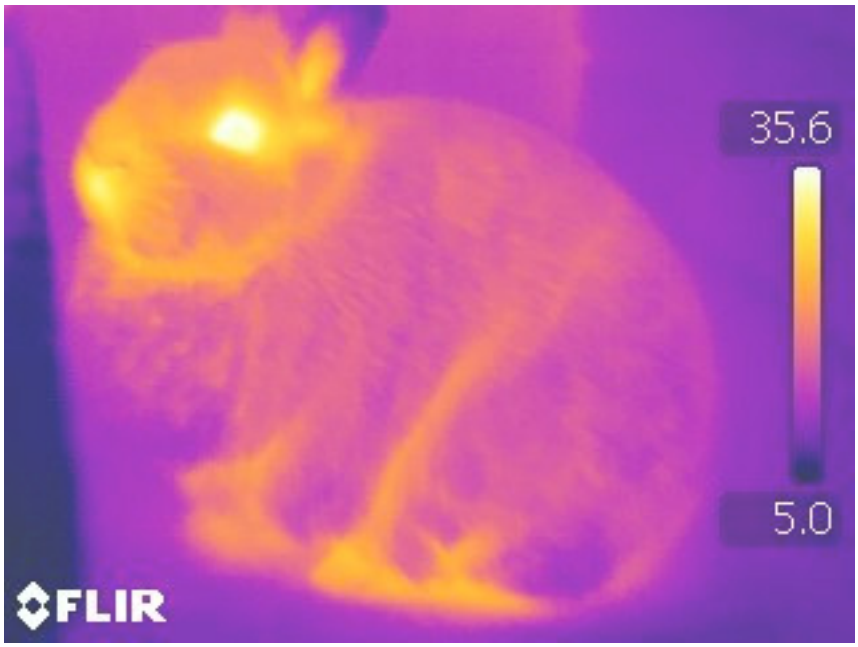


Bild- und Wärmequelle: Momo

Wärmebilanz für $K =$ Kaninchen bei $t \in$ Winter

Wir betrachten ein Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ und ein Zeitintervall $I = [t_0, t_1]$ und suchen eine Beziehung zwischen Wärmeleistungsdichte $q : I \times \Omega \to \mathbb{R}$, Wärmedichte $u : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ und Wärmefluss $\vec{f} : I \times \Omega \to \mathbb{R}^3$.

Fouriers Wärmeleitungsgleichung

Aufgabe: (1) Sei $K \Subset \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ kompakt, etwa ein Würfel. Formulieren Sie die Wärmebilanz für K in Worten und als Volumen-/Flussintegrale.

(2) Formen Sie dies um zu einem einzigen Volumenintegral.

(3) Folgern Sie hieraus die zugehörige Differentialgleichung.

(4) Vereinfachen Sie schließlich durch die Annahme $\vec{f} = -\kappa \nabla u$.

Lösung: (1) Für jedes Kompaktum $K \Subset \Omega$ gilt die Wärmebilanz:

Von den Wärmequellen in K zugeführte Energie
$=$ Zuwachs der in K enthaltenen Wärmeenergie
$+$ Wärmefluss über den Rand von K nach außen

Als Integralgleichung formuliert bedeutet dies:

$$\iiint_K q(t,x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_K u(t,x)\,\mathrm{d}x + \oiint_{S=\partial K} \vec{f}(t,x) \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S$$

Alle Funktionen seien so oft stetig differenzierbar wie in der folgenden Rechnung benötigt. Ich greife hier schon mal vor: q sei stetig, f einmal stetig diff'bar, u zweimal stetig diff'bar.

Fouriers Wärmeleitungsgleichung

(2) Mit Gauß (G3G) verwandeln wir Flussintegrale in Volumenintegrale:

$$\oiint_{S=\partial K} \vec{f}(t,x) \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S \overset{\text{Gauß}}{\underset{\text{G3G}}{=}} \iiint_K \nabla \cdot \vec{f}(t,x)\,\mathrm{d}x$$

Dürfen wir die Ableitung unters Integral ziehen? K kompakt, $\partial_t u$ stetig!

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_K u(t,x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Kpkt}}{\underset{\text{D3C}}{=}} \iiint_K \frac{\partial}{\partial t} u(t,x)\,\mathrm{d}x$$

Dank Linearität des Integrals erhalten wir ein einziges Volumenintegral:

$$\iiint_K \left[\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) + \nabla \cdot \vec{f}(t,x) - q(t,x)\right] \mathrm{d}x = 0.$$

(3) Diese lokale Wärmebilanz gilt für jedes Kompaktum $K \Subset \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$.
Das gilt genau dann, wenn der (stetige!) Integrand verschwindet (H1A):

$$\boxed{\partial_t u(t,x) + \nabla \cdot \vec{f}(t,x) = q(t,x)}$$

Diese Gleichung gilt überall dort, wo etwas entsteht (q), gespeichert wird (u) und fließt ($\vec{f}$). Die Wärmeleitungsgleichung heißt deshalb auch Diffusionsgleichung und tritt in vielfältigen Anwendungen auf. Wir werden sie am Ende des Semesters mit Fourier–Theorie lösen können. Spezialfall: Für $q = 0$ sowie $u = \varrho$ und $\vec{f} = \varrho\vec{v}$ erhalten wir erneut die Kontinuitätsgleichung.

Fouriers Wärmeleitungsgleichung

(4) Wärme fließt von warm nach kalt, genauer $\vec{f} = -\kappa\,\nabla u$. Einsetzen:

$$\partial_t u(t,x) + \nabla \cdot \big[-\kappa\,\nabla u(t,x)\big] = q(t,x)$$

Mit dem Laplace–Operator $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ schreiben wir dies kurz

$$\partial_t u - \kappa\,\Delta u = q \quad \text{mit} \quad \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2.$$

Physikalische Begründung: Wärme ist (vereinfacht) proportional zur Temperatur T, genauer $u = \varrho c T$ mit Dichte ϱ und Wärmekapazität c. Sie fließt proportional zur Temperaturdifferenz, also $\vec{f} = -\lambda\,\nabla T$ mit Wärmeleitfähigkeit λ. Demnach gilt $\vec{f} = -\kappa\,\nabla u$ mit $\kappa := \lambda/(\varrho c)$. S223
Zur Vereinfachung sei hier die Temperaturleitfähigkeit $\kappa(t,x)$ räumlich konstant und isotrop.

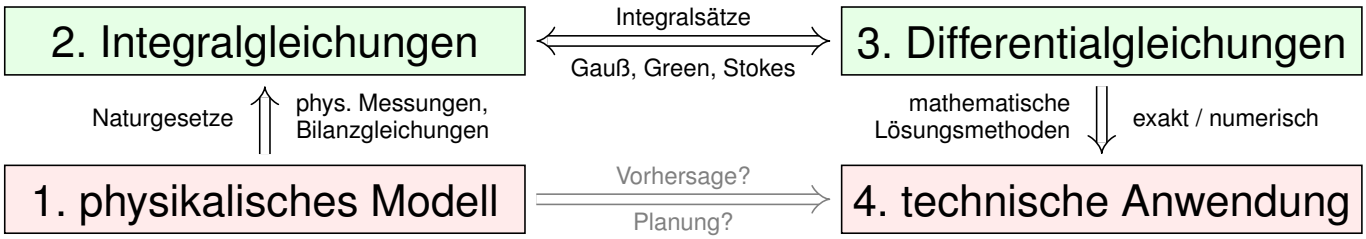
Wir erhalten so Fouriers berühmte **Wärmeleitungsgleichung** (1822):

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\,\Delta u = q \quad \text{mit} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}}$$

Dies ist eine lineare partielle Differentialgleichung in u (links) mit Inhomogenität q (rechts). Sie beschreibt, wie sich die Wärme in einem Körper ausbreitet. Joseph Fourier (1768–1830) hat sie in seiner Arbeit *Théorie analytique de la chaleur* 1822 erstmals eingehend untersucht und hierzu die nach ihm benannte Fourier–Theorie entwickelt, mit der wir uns dieses Semester beschäftigen. Gesucht ist u, gegeben sind Anfangswerte und q. Wie sehen die Lösungen aus? Im homogenen Fall ohne Quellen ($q = 0$) können wir die Fundamentallösung angeben! D516

Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

Was nützen uns solche Gleichungen? Welche Probleme lösen sie?
Typische Anwendungen verlaufen nach dem obigen Muster:

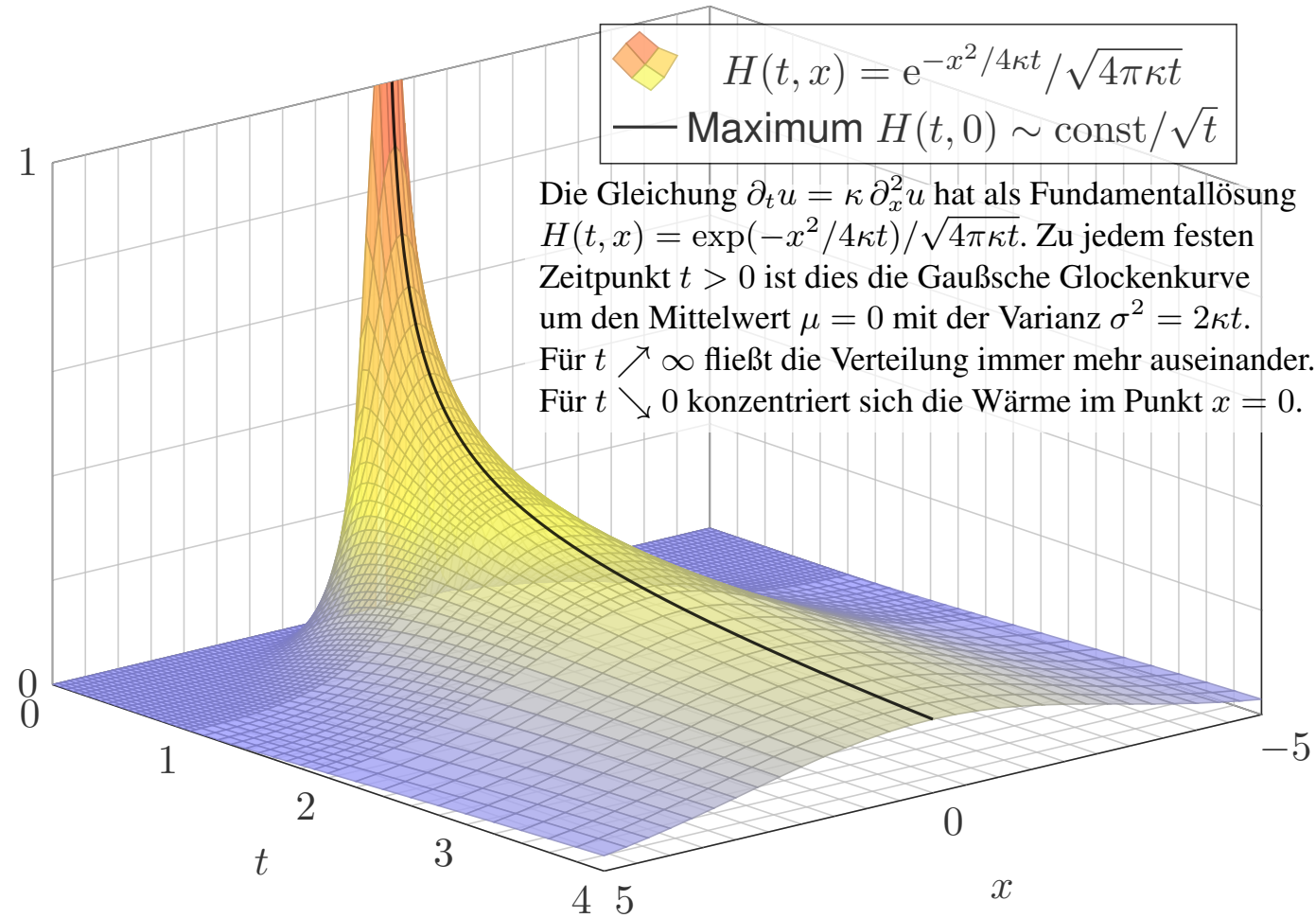


In einigen Paradebeispielen gelingt uns eine **explizite Lösung**:
☺ exakt, übersichtlich, leicht zu verstehen, zu prüfen und zu nutzen!
☹ Solche Lösungen sind leider meist auf einfache Fälle beschränkt.

In komplizierteren Fällen bleibt (nur) die **numerische Approximation**:
☹ unübersichtlich, schwerer zu verstehen, zu prüfen und zu nutzen.
☺ Näherungen sind mit Computerhilfe in vielen Fällen durchführbar!

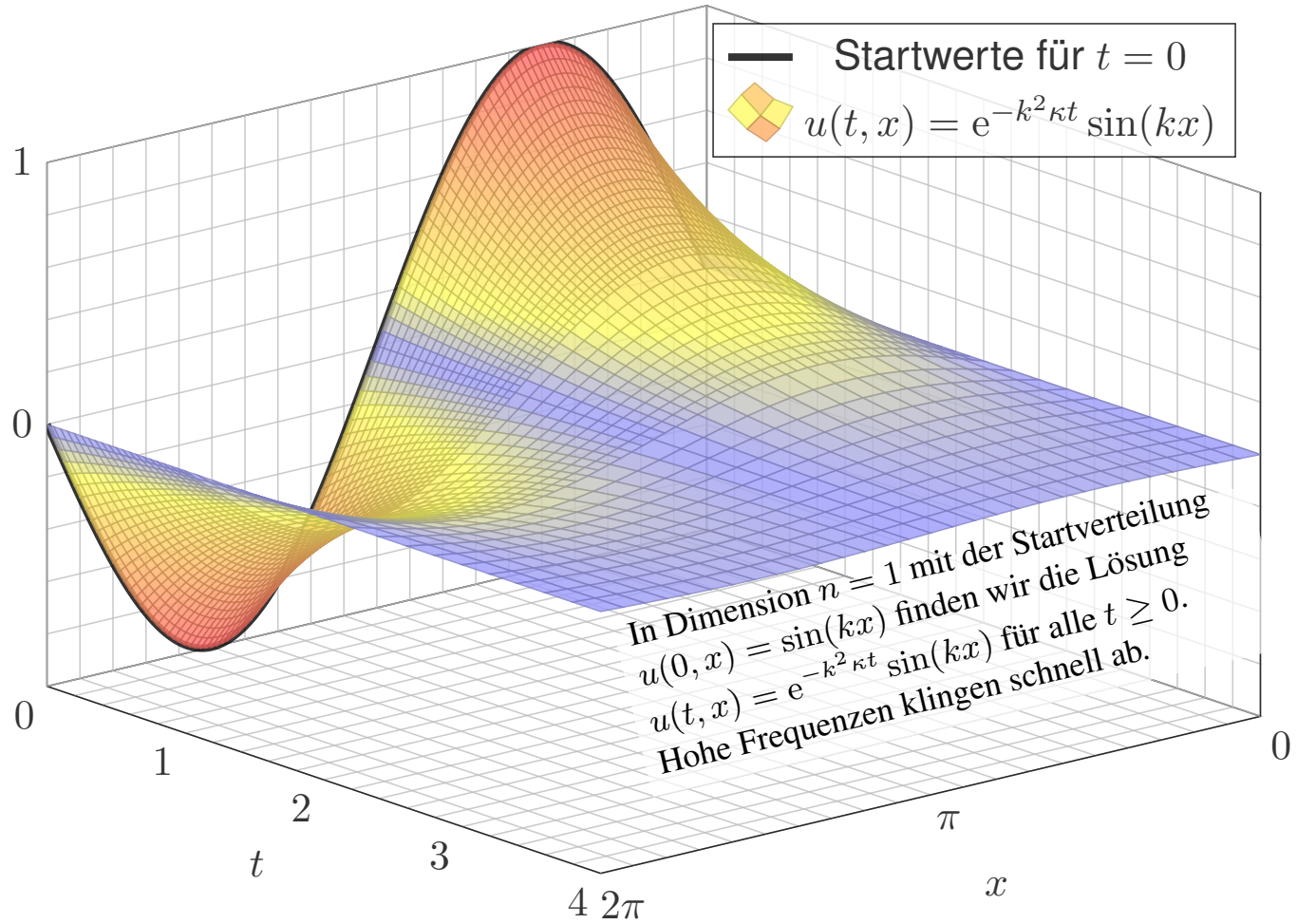
Auf beiden Wegen leisten Differentialgleichungen die Formulierung und anschließende Lösung des ursprünglichen (physikalischen) Problems. Meist geschieht dies eingebettet in einem Modellierungskreislauf. 105

Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung

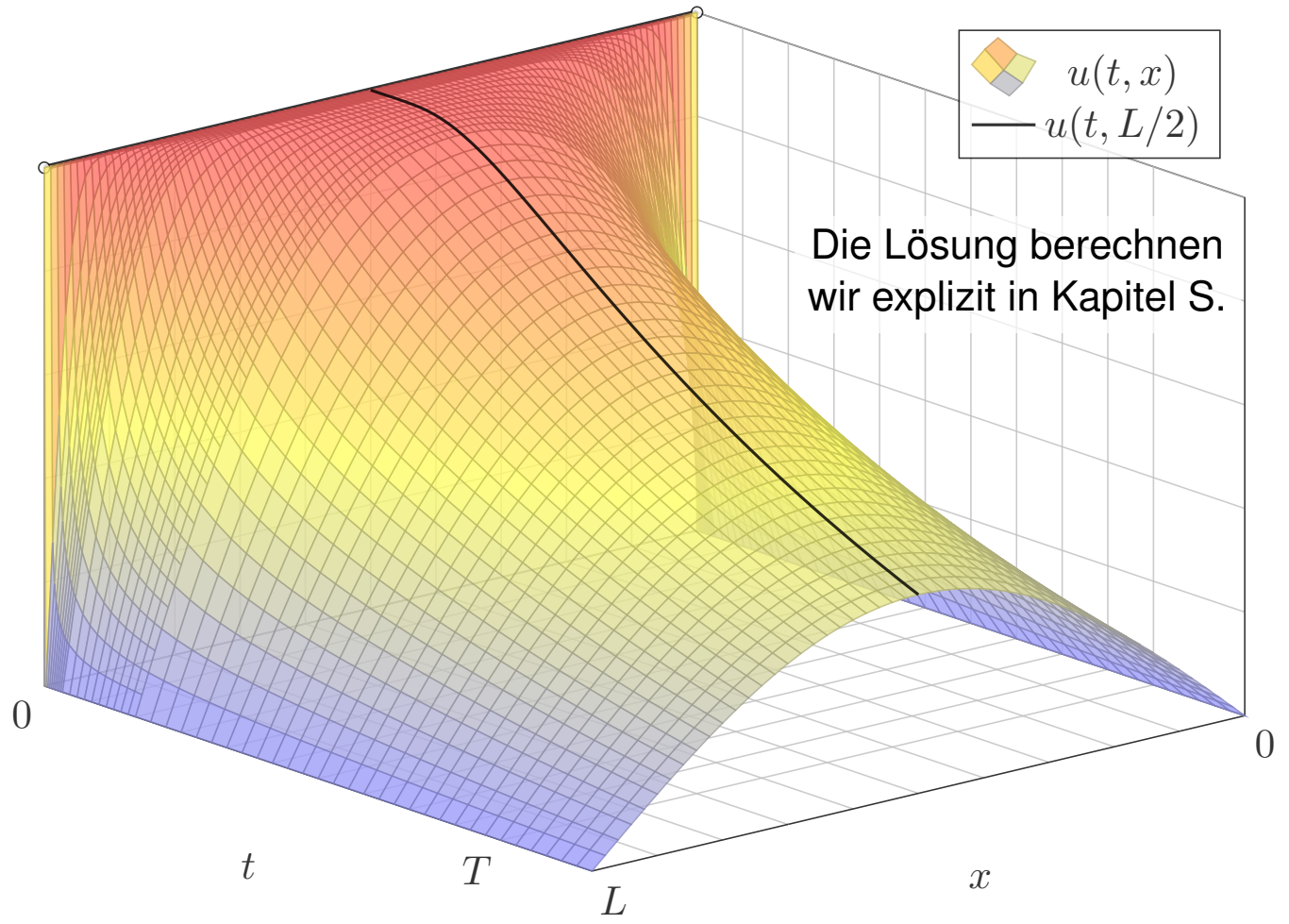


Die Gleichung $\partial_t u = \kappa\, \partial_x^2 u$ hat als Fundamentallösung $H(t,x) = \exp(-x^2/4\kappa t)/\sqrt{4\pi\kappa t}$. Zu jedem festen Zeitpunkt $t > 0$ ist dies die Gaußsche Glockenkurve um den Mittelwert $\mu = 0$ mit der Varianz $\sigma^2 = 2\kappa t$.
Für $t \nearrow \infty$ fließt die Verteilung immer mehr auseinander.
Für $t \searrow 0$ konzentriert sich die Wärme im Punkt $x = 0$.

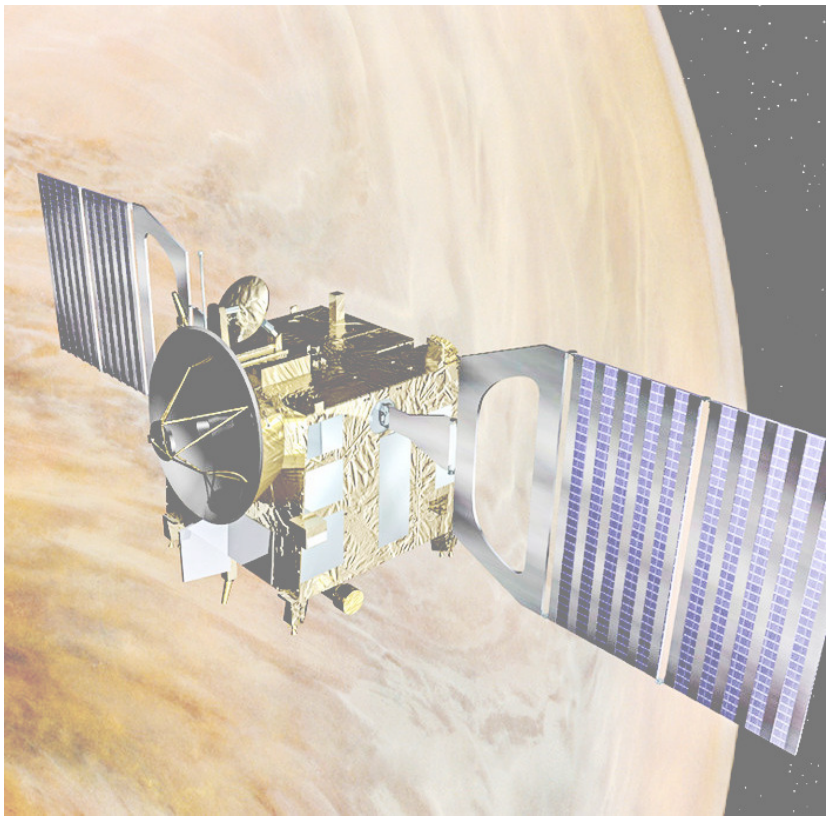
Eigenlösungen der Wärmeleitungsgleichung



Wie schnell kühlt ein Stab über seine Enden ab?



Mars & Venus Express



Missionen der ESA

Start Jun. 2003 in Baikonur
Mars-Orbit ab Jan. 2004
→ Suche nach Wasser

Start Nov. 2005 in Baikonur
Venus-Orbit ab Apr. 2006
→ Atmosphäre der Venus

Orbiter: Masse 633kg leer
plus Treibstoff (MMH+NTO)

Acht Steuertriebwerke mit
je 10N Schub (im Labor)

Fortsetzung oder Ende:
Wie lange reicht der Sprit?

Siehe `en.wikipedia.org/wiki/Mars_Express` und `/Venus_Express`

Mars & Venus Express

Design erfordert Entscheidungen und meist Kompromisse. Die ESA hat auf Messgeräte für die Tankfüllung verzichtet. Zum geplanten Ende der Mission stellt sich die Frage: Kann die Mission verlängert werden? Ist dazu noch genug Treibstoff im Tank? Wie kann man das mit ausreichender Sicherheit herausfinden? Idee: Die ESA verfügt über alle bisherigen Positions- und Steuerdaten. Hieraus könnte man jeweils die Trägheit berechnen und indirekt die Gesamtmasse! Geht das?

Realistische Analogie: Heutige Autos haben eine Masse von etwa 1.2 bis 1.6 Tonnen bei einem Tankvolumen von 50 bis 70 Litern. Sie fahren ein Auto ohne Tankanzeige, die Tankfüllung erspüren Sie in Kurven, beim Gasgeben und Abbremsen. Ist das verrückt? Ja. Ist das möglich? Schwierig! Man muss genau und sehr häufig messen – und dann die Messfehler rausfiltern!

Vereinfachte Analogie: Sie haben eine Gasflasche für einen Herd oder Grill: Leergewicht 6kg, Inhalt 0-5kg Propan, ebenfalls ohne Anzeige des Füllstandes. Sie können durch Schütteln recht gut erspüren, wie voll die Gasflasche ist. Probieren Sie es bei Gelegenheit mal aus!

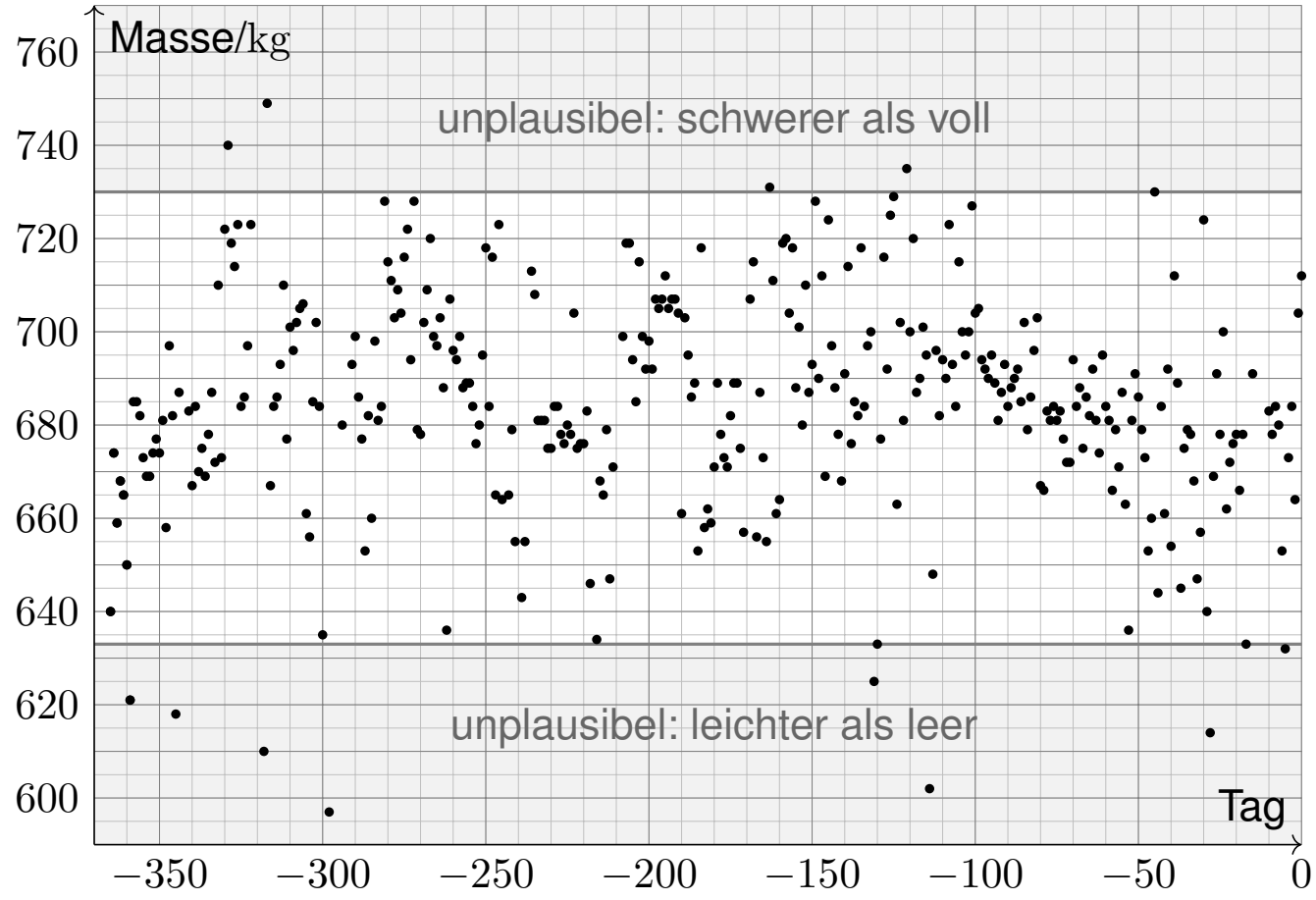
Jede Messung ist mit Fehlern behaftet: systematische müssen wir erkennen und dann korrigieren, bei zufälligen können wir dies nicht direkt! Wir müssen lernen, sie geschickt rauszufiltern, um ein möglichst verlässliches Ergebnis zu erhalten. Das ist das Ziel der mathematischen Statistik.

Es geht um rationale Entscheidungen unter Unsicherheit. Dafür genügt es nicht, eine willkürliche Schätzung auszuspucken! Die Anwendung ist ernst, es geht um Geld, wir müssen überzeugen. Wir wollen nicht nur eine gute Schätzung, sondern auch die Güte der Schätzung berechnen!

Hierzu will ich Sie mit meiner Einführung anleiten. Wer darüber hinaus ernsthafte statistische Analysen betreiben will/muss, kann sich darauf aufbauend in die Spezialliteratur einarbeiten.

Venus Express: Wieviel Treibstoff ist noch im Tank?

Aus Steuermanövern errechnete Masse für 366 Tage bis 31.12.2012.



Venus Express: Wieviel Treibstoff ist noch im Tank?

Impuls-Messungs-Methode (Impulse Measurement Method, IMM):
Aus Positions- und Steuerdaten errechnet man Werte für die Masse;
folgende Daten finden Sie unter `eiserm.de/lehre/HM3/VEX2012.txt`.

Tag	Datum	Masse
1	01.01.2012	640
2	02.01.2012	674
3	03.01.2012	659
...	...	...

Tag	Datum	Masse
...	...	...
364	29.12.2012	664
365	30.12.2012	704
366	31.12.2012	712

Datengewinnung ist mühsam, erfordert Umsicht und Sachkenntnis! Diese Daten stellt uns freundlicherweise Herr Caglayan Gürbüz zur Verfügung. Er hat 2012 die Höhere Mathematik 3 gehört und am IRS / ESOC seine Bachelor-Arbeit zum Mars & Venus Express geschrieben.

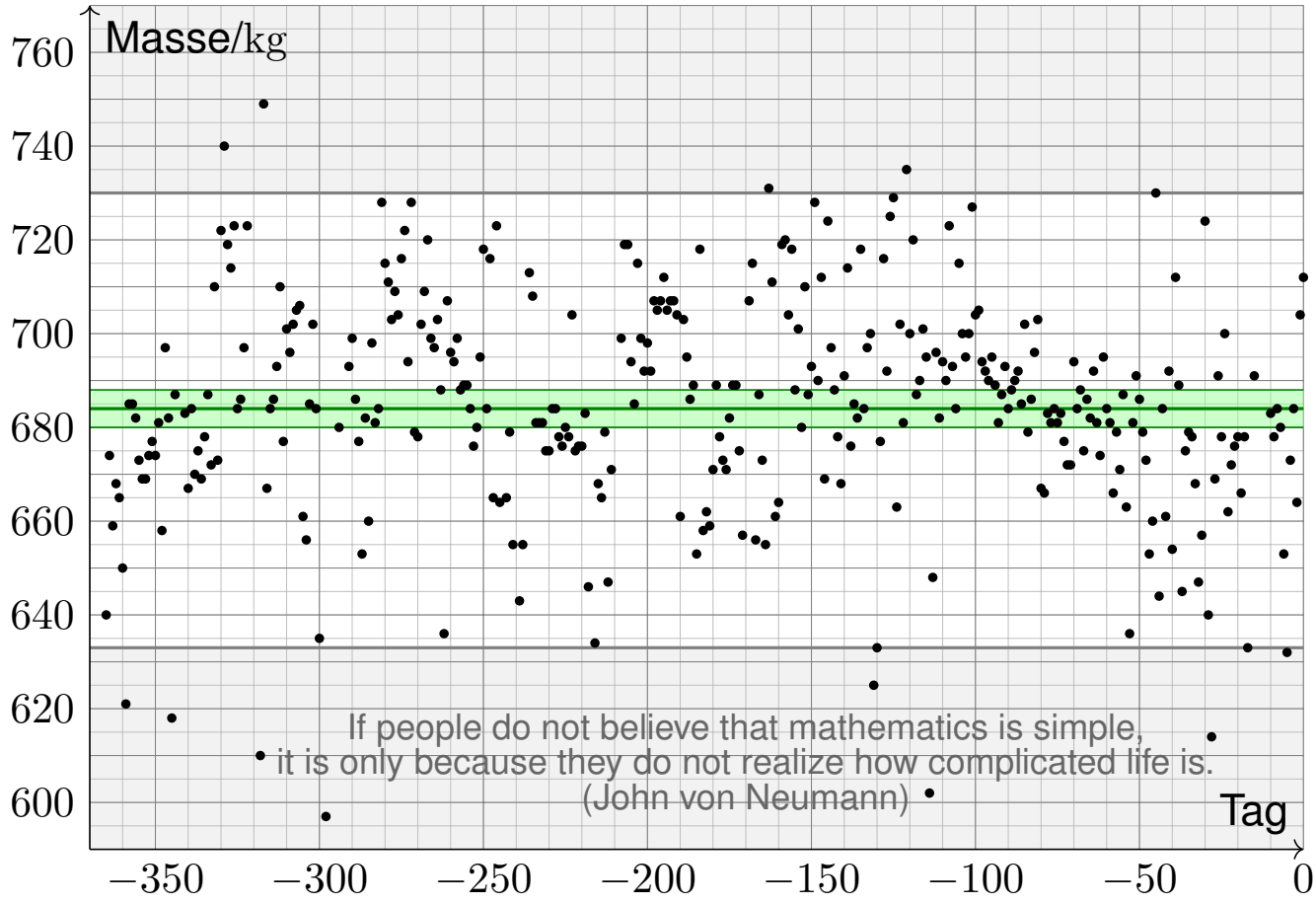
Rationale Entscheidung: Kann / sollte man die Mission verlängern? Grundlose Schätzungen sind sinnlos, wir brauchen Sicherheit!

Techniken: Erwartung und Streuung, Stichproben und Schätzung, Gesetz der großen Zahlen, zentraler Grenzwertsatz, Konfidenzintervall

☺ *This is rocket science.* Mathematische Statistik zeigt, wie es geht.

Mathematische Statistik: Konfidenzintervalle

Jahresmittelwert der Gesamtmasse mit 3σ–Konfidenzintervall.



Mathematische Statistik: Konfidenzintervalle

Aufgabe: Wie groß war der Tankinhalt im Jahresmittel 2012?
Geben Sie das 3σ–Konfidenzintervall an (für 99%ige Sicherheit).

Lösung: Unser Datensatz liefert Mittelwert und Streuung:
Der Stichprobenmittelwert ist $\hat{m} = 684\text{kg}$. Dies schätzt die Masse m.
Die Stichprobenstreuung ist $\hat{\sigma}_m = 24.6\text{kg}$. Dies schätzt die Streuung.

Bei $n = 345$ Datenpunkten gilt $\hat{\sigma}_{\hat{m}} = \hat{\sigma}_m/\sqrt{n} = 1.33\text{kg}$. Großes n hilft!
Das 3σ–Intervall $[\hat{m} \pm 3\hat{\sigma}_{\hat{m}}] = [680; 688]\text{kg}$ ist erstaunlich schmal!
Der Tankinhalt betrug demnach $[47; 55]\text{kg}$ mit 99%iger Sicherheit.

☹ Messdaten sind voller Messfehler und anderer Ungenauigkeiten.

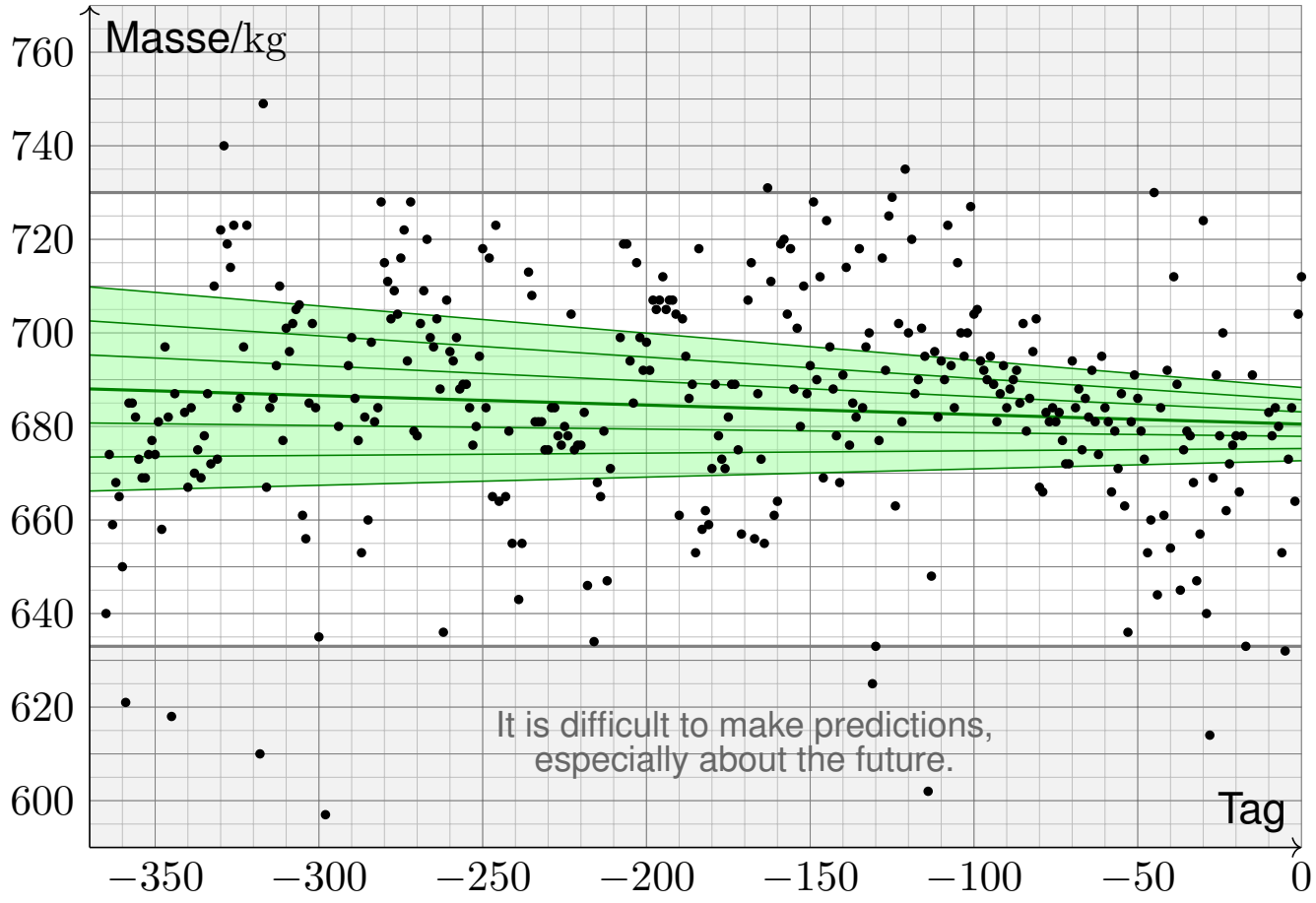
☺ Unsere Daten sind schmutzig doch glücklicherweise sehr zahlreich:
Wir können Gesetze der großen Zahlen und Grenzwertsätze nutzen!

☺ Dank passender Technik können Sie so präzise Schlüsse ziehen!
Dank Statistik fördern Sie Information zutage, die zuvor verborgen war.

⚠ Jede Prognose ist höchstens so gut wie die zugrundeliegenden Daten! Zufällige Fehler können wir durch große Messreihen rausfiltern, systematische Fehler nicht! Hier helfen nur Umsicht und Sachkenntnis!

Mathematische Statistik: lineare Regression

Regressionsgerade mit Konfidenzintervallen: 1σ, 2σ, 3σ.



Mathematische Statistik: lineare Regression

Aufgabe: Wie groß war der Tankinhalt Ende 2012?
Wie lange reicht es noch? Wie sicher ist Ihre Prognose?

Lösung: Unser Datensatz liefert die Regressionsgerade $y = \hat{a} + \hat{b}\,x$:
Ende 2012 ist die Gesamtmasse $\hat{a} = 680.5\mathrm{kg}$ mit Streuung $\hat{\sigma}_{\hat{a}} = 2.6\mathrm{kg}$.
Im Tank verbleiben $\hat{t} = 47.5\mathrm{kg}$ Treibstoff mit Streuung $\hat{\sigma}_{\hat{t}} = 2.6\mathrm{kg}$.
Der Verbrauch ist $\hat{b} = -20.3\mathrm{g/Tag}$ mit Streuung $\hat{\sigma}_{\hat{b}} = 12.6\mathrm{g/Tag}$.

Sehr grobe Prognose der verbleibenden Missionsdauer: 2300 Tage.
Wie verlässlich ist diese Prognose aufgrund unserer Messdaten?

Mit 95% Sicherheit reicht der Treibstoff noch für über 930 Tage:
Tank $[\hat{t} \pm 2\hat{\sigma}_{\hat{t}}] \subseteq [42.3; 52.7]\mathrm{kg}$, Verbrauch $[\hat{b} \pm 2\hat{\sigma}_{\hat{b}}] \subseteq [-45.5; 4.9]\mathrm{g/Tag}$.

Mit 99% Sicherheit reicht der Treibstoff noch für über 680 Tage:
Tank $[\hat{t} \pm 3\hat{\sigma}_{\hat{t}}] \subseteq [39.7; 55.3]\mathrm{kg}$, Verbrauch $[\hat{b} \pm 3\hat{\sigma}_{\hat{b}}] \subseteq [-58.1; 17.5]\mathrm{g/Tag}$.

☺ Wir extrahieren sorgsam, was die vorliegenden Daten hergeben!
⚠ Systematische Fehler? physikalische Annahmen? Alternativen?
War 2012 ein typisches Jahr? Wenn man Sprit spart, reicht er länger!
VEX wird 2013/14 tiefer in Atmosphäre abgesenkt, der Verbrauch steigt.
Die Mission endet im Dezember 2014 wegen Treibstoffmangels. Wow!

Themen der HM1&2: Voraussetzung

Lineare Algebra und Geometrie:

- Reelle und komplexe Zahlen $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$
- Euklidische Vektorräume $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$
- Matrizen & lineare Gleichungssysteme $Ax = y$
- Eigenvektoren und Diagonalisierung $Av = \lambda v$
- Normalformen für Quadriken $x^2 - y^2 = 1$

Analysis:

- Konvergenz von Folgen und Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$
- Funktionen, Grenzwerte und Stetigkeit $\lim_{x \to x_0} f(x)$
- Differential- und Integralrechnung $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F]_a^b$
- Differentialrechnung mehrerer Variablen $\partial_x \partial_y f = \partial_y \partial_x f$
- Vektorfelder, Wegintegrale und Potentiale $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$

☺ Auf die Beherrschung all dieser Grundlagen können Sie stolz sein, als Handwerkszeug schon jetzt im Studium und ebenso später im Beruf!

Themen der HM3: Zielsetzung

Die HM3 bietet viel und verlangt viel . . . in kurzer Zeit (37 Termine):

- Mehrdimensionale Integration (4) $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x$
- Integralsätze in Ebene und Raum (7) $\int_B \mathrm{d}f = \int_{\partial B} f$
- Fourier–Analyse und Laplace–Transformation (5) $f(t) \sim \sum c_k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$
- Gewöhnliche Differentialgleichungen (8) $u'(t) = f(t, u(t))$
- Partielle Differentialgleichungen (4) $\partial_t\, u(t,x) = \partial_x^2\, u(t,x)$
- Wahrscheinlichkeitsrechnung (8) $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

☺ Diese mächtigen Techniken sind in Anwendungen allgegenwärtig. Jedes dieser Themen verdient eigentlich seine eigene Vorlesung. . . Sie bekommen alles als „*Best-of*“ in einem einzigen Semester!

Ziele der HM3 laut Modulbeschreibung

Die Studierenden verfügen über grundlegende Kenntnisse

- der Integralrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher,
- gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen,
- Fourier–Reihen und Integraltransformationen sowie Stochastik.

Sie können die behandelten Methoden selbstständig, sicher, kritisch, korrekt und kreativ anwenden.

Sie besitzen die mathematische Grundlage für das Verständnis quantitativer Modelle aus den Ingenieurwissenschaften. Sie können sich mit Spezialist:innen aus dem ingenieurs- und naturwissenschaftlichen Umfeld über die benutzten mathematischen Methoden verständigen.

Konkrete Anwendung benötigt abstrakte Kenntnisse; je anspruchsvoller, desto mathematischer! Daher Ihr Ziel: Sie beherrschen Ihr Handwerk, verstehen die Grundlagen und wenden passende Werkzeuge fachgerecht an. Sie müssen dazu das Rad nicht neu erfinden: Ihr Studium bündelt die Erfahrung vieler Generationen. Diesen Erfahrungsschatz sollen sie kennen und nutzen lernen. Das gilt insbesondere für die Mathematik: Hier erlernen Sie Ihre Denk- und Rechenwerkzeuge. Man kann Techniken auch oberflächlich kennen, aber ohne Übung nicht effizient anwenden. Aus diesem Grund sollen sie jede Woche die Übungen ausgiebig und selbstkritisch nutzen!

Ziele Ihrer universitären Ausbildung

Aus dieser ambitionierten Zielsetzung ergibt sich die Vorgehensweise:

- **Selbstständig:** Es geht nicht nur um Auswendiglernen, sondern um Verstehen und unabhängige Urteilsfähigkeit.
- **Sicher:** Es geht nicht nur um Intuition oder Spekulieren, sondern um nachvollziehbare Argumente und Rechnungen.
- **Kritisch:** Es geht nicht nur um Glauben oder (Auto)Suggestion, sondern um (selbst)kritische Fragen und sorgfältige Antworten.
- **Korrekt:** Sie beherrschen Definitionen, Sätze, Methoden, Proben. Gegenbeispiele zeigen Fehlerquellen, die es zu vermeiden gilt.
- **Kreativ:** Es geht nicht nur um fertige Rezepte, sondern um eigenständige Anwendung.

Manche:r möchte Werkzeuge anwenden, auch ohne zu verstehen. „Echte Macher lesen keine Bedienungsanleitung.“ Für Low-Tech mag das vielleicht genügen, bei High-Tech sicher nicht. Auch im Studium lockt diese scheinbare Abkürzung: unverstandene Rezepte blind anwenden. Das ist weder selbstständig noch sicher, weder kritisch noch kreativ, und meist nicht korrekt! Kurzum: Ohne Grundlagenwissen tappen Sie im Dunkeln und können die Werkzeuge nicht richtig nutzen. Damit verbauen Sie sich den Weg zu effizienten Lösungen, oder schlimmer noch, treffen fatale Fehlentscheidungen. Seriöse Ingenieursarbeit braucht grundlegendes Verständnis!

Zeitplan dieses Semesters

Alle Informationen zur HM3 finden Sie in unserem liebevoll gestalteten Ilias-Kurs sowie ergänzend auf der öffentlichen Webseite der HM3.

Vorlesung und Vortragsübung ab dem 15.10.2024:

wöchentlich	Di	8:00 – 9:30	V 57.03
wöchentlich	Di	14:00 – 15:30	V 47.02
wöchentlich	Fr	11:30 – 13:00	V 47.01

Gruppenübungen ab der zweiten Vorlesungswoche, siehe Ilias.

Der **Übungsschein** ist Voraussetzung für die Abschlussklausur:

- mindestens 50% der Punkte in den wöchentlichen Quizzen,
- mindestens 50% der Punkte der schriftlichen Hausübungen.

Scheinklausuren bleiben sinnvoll, für die HM3 derzeit ausgesetzt.

Klausur: Anfang März / Anfang September

Spacenight: Mai 2025

Some dance to remember,
some dance to forget.

Ablauf der Übungen

Wir führen das bewährte **Übungssystem** der HM1&2 in der HM3 fort: Sie bekommen Präsenzübungen (leicht, zum Einüben und Wiederholen) sowie Hausübungen (etwa mittelschwer, zum Trainieren und Vertiefen), darunter auch umfassendere, aus denen sich Klausuraufgaben ableiten.

Für Ihren Lernerfolg entscheidend ist, dass Sie sich gut vorbereiten, engagiert mitarbeiten und selbständig Ihre Hausübungen bearbeiten. Das wöchentliche Quizz bildet die Brücke von der Vorlesung zur Übung: Hier wiederholen Sie wichtige Begriffe und verfestigen neue Techniken.

Ihre Ausbildung verfolgt ein doppeltes Ziel: **Wissen** und **Können**. Sie benötigen beides! Mit den Grundlagen der Vorlesung und dem Training der Übungen können Sie (klausur)typische Aufgaben lösen. Ohne Grundlagen oder ohne eigene Übung kommen Sie nicht weiter.

Das klingt sportlich und ist es auch: ideales wöchentliches Training. Es erfüllt den vehementen studentischen Wunsch nach regelmäßiger Übung klausurtypischer Aufgaben. Das ist anstrengend, aber lohnend! Wer die Mühe scheut und die Hilfe ausschlägt, dem ist nicht zu helfen.

Wie gelingt Ihnen die HM3?

Selbstverständliche Voraussetzungen:

- **Sichere Beherrschung** aller Grundlagen aus der HM1&2
- **Wöchentliche Bearbeitung** von Vorlesung, Quiz und Übungen

Die Höhere Mathematik 3 entspricht 9 LP: insgesamt 270h

- **Präsenz:** 15 Wochen à 2h Übung + 5h Vorlesung/VÜ = 105h
- **Individuelle Arbeit:** ca. ein weiterer Tag (7h) pro Woche = 105h
- **Wiederholung** zur Prüfungsvorbereitung: 1 bis 2 Wochen = 60h

Sie können Ihre Zeit anders aufteilen, aber viel Spielraum bleibt nicht. Es gilt die Erhaltung der Arbeit: Die 270 Stunden werden Sie brauchen!

Beispiel: Wer beschließt, Vorlesung und Übung zu schwänzen und jeweils nur das Übungsblatt in 2h abzuschreiben, der muss zur Klausur etwa 240h in Eigenregie nachholen, alleine! Das sind sechs Wochen konzentrierte Eigenarbeit . . . und scheitert erfahrungsgemäß.

Qui va lentement, va sûrement, et qui va sûrement, va loin.
[Wer langsam geht, geht sicher, und wer sicher geht, kommt weit.]

Wie gelingt Ihnen das Studium?

Die Universität als Wissenstrichter?

Erwarten Sie nicht, dass irgendjemand Ihnen irgendetwas beibringen könnte — ohne Ihr Zutun. Ich kann Ihnen viel Spannendes erzählen, doch nur Sie selbst können sich Verständnis erarbeiten. Zwei Faktoren bestimmen Ihren Lernerfolg: extrinsische Anregung und intrisische Motivation!

Diese Vorlesung wird Ihnen viele interessante Dinge zeigen, Phänomene und Beispiele erläutern, Argumente und Rechenregeln erklären. Wenn Sie möchten, kann das eine große Hilfe sein, doch letztlich müssen Sie selbst dieses Material eigenständig durcharbeiten, um es zu beherrschen.

Ziel Ihres Studiums: Schärfen Sie Ihr Werkzeug!

Alice trifft Bob, der sich mit stumpfer Axt abmüht, einen Baum zu fällen. „Schärf deine Axt! Dann gelingt dir deine Arbeit leichter.“, rät Alice ihm. Das weist Bob zurück: „Dazu fehlt mir die Zeit, ich muss Bäume fällen!“ Das ist, kurz gesagt, die Entscheidung Ihres Studiums, ja Ihres Lebens.

Verdammte Axt: erst investieren, dann profitieren

☺ Genau dazu studieren Sie: Hier schärfen Sie Ihre Denk-Werkzeuge, um effizient arbeiten zu können. Alice hat das verstanden. „Das Studium ist abstrakter Quatsch und völlig nutzlos für die Praxis.“ Wenn das Bobs Überzeugung ist, dann bitte soll er konsequent sein und nicht studieren.

Sie haben die Wahl, beide Alternativen sind gangbar. Vielleicht möchten Sie sich rasch in der viel gelobten „Praxis“ austoben und keine Zeit in die oft geschmähte „Theorie“ investieren. Auch mit stumpfer Axt können Sie Bäume fällen, mühsam zwar, doch für wenige kleine wird es reichen.

Die Kunst des Lernens, ganz allgemein des verausschauenden Planens, ist die Balance zwischen sofortigem Nutzen und langfristiger Investition. Wenn Sie richtig studieren, erreichen Sie beides, sowohl langfristigen Nutzen durch Wissen und Können als auch Freude schon beim Lernen.

Das ist eine grundlegende Einsicht und vielfach bewährte Weisheit, so in dem lateinischen Motto *Festina lente*, übersetzt „Eile langsam!“, sinngemäß „Eile mit Weile!“. Jedes ernsthafe Vorhaben gelingt Ihnen am besten im richtigen Gleichgewicht zwischen zügig und sorgsam.

Verdammte Axt: erst investieren, dann profitieren

☺ Als Mahnung im Handwerk: *Measure twice, cut once!*
Schlechte Vorbereitung verschwendet Zeit und Ressourcen.
Als Motto der Navy Seals: *Slow is smooth, and smooth is fast!*
Gute Vorbereitung sorgt für reibungslose, effiziente Abläufe.

In seiner Fabel vom Hasen und der Schildkröte schreibt Jean de La Fontaine (1621–1695): *Rien ne sert de courir; il faut partir à point.*
Es nützt nichts zu rennen; man muss rechtzeitig starten.
Besonnenheit und Zielstrebigkeit setzen sich durch.

? Was bedeutet das für Ihr Studium, speziell in dieser Veranstaltung?
Anfangs fällt Ihnen die Anwendung vermutlich schwer. Jetzt wissen Sie, warum: Schärfen Sie Ihre Werkzeuge, lernen Sie Definitionen und Sätze, üben Sie Mathematik, das wirkt, so gelingen Ihnen die Anwendungen!

Manche lebt achtsam, anderer schimpft achtlos auf die „lästige Theorie“ und scheitert alsbald an allzu naiver Anwendung, getreu dem Slogan „Plane nicht, irre lieber!“. Manchmal geht das gut, meist leider nicht.
Was immer du tust, handele klug und bedenke das Ende!

Verdammte Axt: erst investieren, dann profitieren

Warum erzähle ich das? Die meisten Studierenden kommen an die Uni mit ihren eingefahrenen Gewohnheiten, manche gut und viele schlecht. Bitte studieren Sie selbstbewusst und selbstkritisch, legen Sie schlechte Gewohnheiten ab, erlernen Sie gute Gewohnheiten! Wir leiten Sie an und geben beste Praktiken weiter. Nehmen und wenden Sie dies an!

We must choose between what is easy and what is right.

Albus Dumbledore

Die Schule hat Ihnen herzlich wenig Mathematik zugetraut. Anfangs mag das gefallen, es ist ja so leicht! Doch dann haben Sie sich entschieden, Ingenieurwesen oder Physik oder Mathe zu studieren, und darauf hatte die Schule Sie in keinster Weise vorbereitet. Ihre Axt war leider stumpf!

Manch verlockende „Abkürzung“ ist letztlich Irrweg und Vergeudung.
Manch vermeintlicher „Umweg“ erweist sich als zielführend und effizient.
In dieser gut durchdachten Vorlesung und den zugehörigen Übungen machen wir Sie mit den nötigen, scharfen Werkzeugen vertraut und leiten Sie an zum fachgerechten Gebrauch. Diese Mühe lohnt sich!

Wie studiere ich richtig?

Ihr Ziel sind Erwerb von Techniken und Training Ihrer Fertigkeiten. Hierzu erkläre ich Ihnen, wie Sie erfolgreich Mathematik lernen.

Die HM3 bietet viel und verlangt viel. Jede Woche erkläre ich Ihnen neue Werkzeuge, die Ihnen in vielfältigen Anwendungen nützen werden. Schon nach wenigen Wochen werden wir recht viel Gepäck beisammen haben. Wichtig ist daher, dass Sie im Semester nicht den Anschluss verlieren! Das 15wöchige Programm lässt sich unmöglich im Schnelldurchgang nachholen.

Die genannten Themen der HM3 sind nützlich und vielseitig, diese Techniken werden überall in den Ingenieurwissenschaften genutzt, je nach Spezialisierung sogar noch wesentlich mehr. Andernorts reserviert man für die HM3&4 zwei Semester, in Stuttgart nur eins. Unser Programm ist daher sehr voll: Für jedes Thema stehen nur 2 bis 3 Wochen zur Verfügung. Die knappe Zeit müssen Sie nutzen. Vertrödeln Sie nicht das Semester, indem Sie nur mit einem Ohr zuhören; das bringt rein gar nichts – außer Ohrenkitzel und dem trügerischen Gefühl, irgendwie mitzulaufen.

Die obige Rechnung ist keine Übertreibung: Sie brauchen ca. 7 Stunden Eigenarbeit jede Woche!

Noch einmal quer gerechnet: Diese Veranstaltung macht fast ein Drittel Ihres Semesters aus. Bei einer Arbeitswoche von 6 Tagen müssen Sie zwei Tage für die Mathematik einplanen. Davon verbringen Sie bereits 7 Stunden mit Übung und Vorlesung. Der wichtigste Teil sind die verbleibenden ca. 7 Stunden eigene Arbeit! Wer nur einen Teil der Zeit investiert, wird auch nur einen Teil des Stoffes durcharbeiten. Das muss Ihnen klar sein, wenn Sie Ihre Zeit einteilen.

Wie studiere ich richtig?

Engagieren Sie sich und nutzen Sie intensiv Ihre Studienzeit! Ohne Fleiß und Ausdauer können Sie Wissen und Können nicht erwerben.

studēre (lat.): sich bemühen, beschäftigen, streben, widmen, bilden. Partizip präs. aktiv: *studens* ‘studierend’ > der Student / die Studentin. Student / studierend ist, wer sich aktiv um seine Bildung bemüht. (Zur Wortbedeutung siehe `de.wiktionary.org/wiki/studieren`.)

In dieser Vorlesung präsentiere ich Ihnen nur wenige Definitionen und Sätze, dafür umso mehr Anwendungen in Form von Übungsaufgaben. Beides müssen Sie sorgfältig durcharbeiten, nur so verstehen und beherrschen Sie es. Alles können Sie selbst ausprobieren: Üben! Üben! Üben!

Sie wünschen sich ausschließlich Beispiele ohne jede Theorie? Das reicht nur für den ersten Schritt und wird schnell ineffizient. Sie benötigen sowohl handfeste Beispiele als auch die zugrundeliegende Theorie, wie linke und rechte Hand! Beides zusammen garantiert Ihren Erfolg.

Die Mathematik ist extrem klar strukturiert, das erleichtert das Lernen!

Haben Sie keine Angst vor neuen Begriffen: Definitionen erklären,
Beispiele illustrieren und Sätze bündeln die Rechenregeln.

Ein gut verstandenes Beispiel nützt Ihnen mehr als ein schlecht verstandener Satz.
Nutzen Sie ernsthaft die zahlreichen Aufgaben für Ihre eigene Übung!

Erarbeiten Sie sich parallel dazu die nötigen Grundlagen und verfestigen Sie Ihr Wissen in Form von Definitionen und Sätzen. Ein gut verstandener Satz bündelt 1000 Beispiele.

Wie kann / soll ich Mathematik lernen?

Mancher lernt gut aus Büchern, eine andere besser aus Vorlesungen, eine dritte beginnt mit den Übungen, ein vierter mit den Klausuren. Alle schauen gerne Videos, das ist unterhaltsam und vielleicht auch hilfreich. Ihre individuellen Lernstrategien und Motivationen kennen Sie selbst am besten und sollten sie optimieren. Nehmen Sie die Herausforderung an und werden Sie aktiv!

Die oben erklärte Struktur ist eine Besonderheit der Mathematik: Definition, Beispiel, Satz, Beweis, Anwendung, ... Sie hat sich aus guten Gründen so entwickelt: Sie strukturiert die Darstellung und betont das Wesentliche. Sie wird überall genutzt, weil sie sich bewährt.
Es gibt keinen Grund, sie zu fürchten, im Gegenteil: Nutzen Sie sie als Hilfestellung!

Das bloße Lesen / Hören / Zuschauen ist leider wenig ergiebig, dieser Eindruck bleibt passiv, oberflächlich und flüchtig. Klavierspielen lernen Sie nicht durch den Besuch von Konzerten!
Sie müssen selbst aktiv werden und schrittweise lernen, Probleme eigenständig zu lösen.
Es ist und bleibt eine menschliche Grundtatsache: Wir leben und streben, lernen und entwickeln uns, indem wir uns Erfahrungen, Wissen und Können aktiv und eigenständig aneignen.

- Bilden Sie Lerngruppen, diskutieren Sie die Aufgaben und Ihre Lösungen!
- Bleiben Sie neugierig, präzisieren Sie Ihre Ideen und klären Sie Ihre Fragen!
- Arbeiten Sie mit Stift und Papier: Nicht abschreiben, eigenständig arbeiten!

Besonders gut bewährt sich die Kombination aus kontinuierlicher eigener Vorbereitung und gemeinsamer Diskussion in der Gruppe. Genau darauf zielen unsere wöchentlichen Übungen. Vertrödeln Sie während des Semester nicht diese entscheidende Hilfestellung.

Wie kann / soll ich Mathematik lernen?

Faire Klausur bedeutet: Ihr Erfolg ist proportional zu Ihrem Können. Klausur ist keine Lotterie: Ihr Können ist proportional zur Ihrer Übung.

Für die Scheinklausuren verschlafen viele den Start ins Semester und zum wöchentlichen Lernen. Das Studium, insbesondere der Mathematik, erfordert Ausdauer, Fleiß und Disziplin. Nicht jede:r ist dazu bereit, manche geben leichtfertig auf und schieben ins nächste Jahr. Tun Sie das nicht!
In den Modulprüfungen hingegen waren die Klausurergebnisse der letzten Jahre erfreulich gut. Das ist kein Widerspruch, sondern das Ergebnis von einem Semester Vorbereitung und Training.

Das Semester war anstrengend aber erfolgreich, alle konnten das spüren: Viele Teilnehmer:innen haben Vorlesung und Übungen engagiert genutzt und waren dementsprechend gut vorbereitet. Das zahlt sich aus! Auch dieses Jahr gilt: Wer dabei bleibt und wöchentlich mitarbeitet, ist aller Erfahrung nach gut vorbereitet und hat schließlich wenig Schwierigkeiten mit der Klausur.

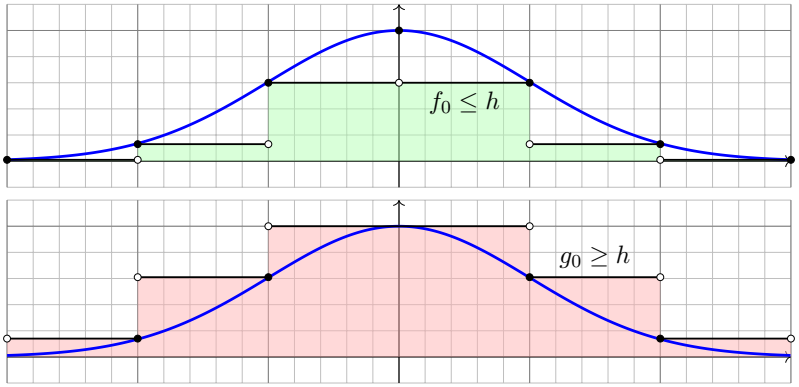
Engagieren Sie sich ab der ersten Woche! Pokern Sie nicht auf eine knappe Vier, das geht meist schief. Seien Sie mutig und arbeiten Sie auf eine Zwei oder Drei, dann läuft's. Doppelter Vorteil: Die mathematischen Grundlagen, die Sie jetzt hier lernen, nützen Ihnen auch sonst überall!

Wenn Sie durchfallen wollen, ignorieren Sie meine Ratschläge. Leider tun das einige, zu viele. Dann müssen Sie nächstes Jahr wieder ran oder Ihr Studium beenden. Manche finden Kamikaze scheinbar toll, ich kann davon nur abraten. Studieren Sie ernsthaft, studieren Sie richtig!

Wir sorgen dafür, dass Sie in dieser Veranstaltung alles Nötige lernen und trainieren können. Nutzen Sie diese Chance und erfüllen Sie Ihren Teil! Verdienen Sie sich eine gute Note!

Kapitel A

Was sind und was sollen Integrale?



Alles messen, was messbar ist –
und messbar machen, was noch nicht messbar ist.

Galileo Galilei (1564–1642)

Inhalt dieses Kapitels A

1 Konstruktion des Volumens
- Wie misst man Flächen- und Rauminhalt?
- Was sind und was sollen Integrale?
- Schreibweisen für Integrale

2 Reelle Zahlen und reelle Funktionen
- Der Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ der reellen Zahlen
- Reelle Funktionen und ihre Operationen
- Absolute Summation von Reihen

3 Konstruktion des Integrals
- Treppenfunktionen und ihr Integral
- Einschachtelung und Ausschöpfung
- Absolut integrierbare Funktionen

4 Eigenschaften des Integrals
- Zerlegung und Betragsabschätzung
- Fast überall gleiche Funktionen
- Erste Beispiele und Verständnisfragen

Integration: Theorie und Anwendung

Bernhard Riemann
(1826–1866)

Emile Borel
(1871–1956)

Henri Lebesgue
(1875–1941)

Bildquelle: wikipedia.org

Integration ist ein mächtiges und allgegenwärtiges Werkzeug.
Wir werden der Reihe nach drei fundamentale Fragen klären:

1. Konstruktion: Was sind und was sollen Integrale?
2. Werkzeugkasten: Welche Rechenregeln gelten?
3. Training: Wie berechnen wir konkrete Beispiele?

Integration: Theorie und Anwendung

Differenziert und integriert wird seit Newton (1643–1727) und Leibniz (1646–1716). Ihre **Infinitesimalrechnung** ist überaus erfolgreich und wird systematisch weiterentwickelt. Die Integrationstheorie ist eine Errungenschaft des 19. Jahrhunderts (dank Riemann, Darboux, Jordan, ...) und vollendet zu Beginn des 20. Jahrhunderts (dank Borel, Baire, Lebesgue, ...).

Auch nach über hundert Jahren bewährt sie sich täglich in ihren zahlreichen **Anwendungen**, von der Fourier–Analyse in der Signalverarbeitung über die allgegenwärtige Wahrscheinlichkeitsrechnung bis zur Quantenphysik. Das wird auch in weiteren hundert Jahren noch so sein: Solide mathematische Arbeit hat einen extrem langen Nutzen. Die Investition lohnt sich!

Die Integration wird uns die ersten Wochen beschäftigen, ihre Anwendungen das gesamte Semester. Dieses Überblickskapitel gibt zunächst eine erste **Kurzanleitung** zur Integration. In der Praxis stehen Sie vor allem vor der letzten Frage (3): Zu einer vorgelegten Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ wollen Sie das Integral $\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x$ berechnen. Dazu brauchen Sie geeignete Werkzeuge, insbesondere ausreichend starke Rechenregeln (2). Um diese überhaupt erst zu erhalten und zu verstehen, müssen wir die erste Frage klären: (1) Was bedeutet Integration?

Zur Not kann man versuchen, sich allein auf die besonders relevante dritte Frage zu stützen und möglichst viele Beispiele auswendig zu lernen. Erfahrungsgemäß erscheinen diese dann jedoch unzusammenhängend und eher verwirrend. Es ist wesentlich effizienter, sich zuerst den nötigen Überblick zu verschaffen, um so allen Anwendungen gemeinsam die nötige Struktur zu geben. Eine **solide Grundlegung** ist wichtig, um zu wissen, wovon wir reden! Ich erkläre Ihnen hierzu eine Handvoll Prinzipien, auf denen die gesamte Integration aufbaut. In den folgenden Kapitel entwickeln wir hieraus praktische Rechenregeln, illustrative Beispiele und erste Anwendungen.

Ziele: grundlegende Integrationstechniken

Wir nutzen den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI):

$$\int_{x=a}^{b} F'(x)\,\mathrm{d}x \underset{\text{B1I}}{\overset{\text{HDI}}{=}} \Big[F(x)\Big]_{x=a}^{b} := F(b) - F(a)$$

Bei absoluter Integrierbarkeit können wir iterierte Integrale nutzen:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n) \underset{\text{C1E}}{\overset{\text{Fub}}{=}} \int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$

Für C^1–Koordinatenwechsel $\Phi : X \xrightarrow{\sim} Y$ gilt der Transformationssatz:

$$\int_Y f(y)\,\mathrm{d}y \underset{\text{C2B}}{\overset{\text{Trafo}}{=}} \int_X f(\Phi(x))\cdot|\det\Phi'(x)|\,\mathrm{d}x$$

Bei majorisierter Konvergenz vertauschen Grenzwert und Integral:

$$\int_\Omega \Big[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big]\,\mathrm{d}x \underset{\text{D2D}}{\overset{\text{MaK}}{=}} \lim_{n\to\infty}\Big[\int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}x\Big]$$

☺ Diese Sätze lassen sich oft anwenden und zur Berechnung nutzen.
⚠ Vorsichtsmaßnahmen sind nötig, die müssen Sie beherrschen.

Ziele: Differential- und Integralsätze

Der eindimensionale Hauptsatz hat mehrdimensionale Folgerungen!
Arbeitsintegral für orient. Kurven Γ und Skalarfelder $g : \mathbb{R}^3 \supseteq \Gamma \to \mathbb{R}$:

$$\int_\Gamma \operatorname{grad}(g)\bullet\mathrm{d}\Gamma \underset{\text{E3C}}{\overset{\text{HDI}}{=}} \sum\nolimits_{s\in\partial\Gamma} g(s)\,n(s)$$

Ist die Kurve Γ geschlossen, also $\partial\Gamma = \emptyset$, so folgt $\oint_\Gamma \operatorname{grad}(g)\bullet\mathrm{d}\Gamma = 0$.
Satz von Stokes für orient. Flächen S und Vektorfelder $f : \mathbb{R}^3 \supseteq S \to \mathbb{R}^3$:

$$\int_S \operatorname{rot}(f)\bullet\mathrm{d}S \underset{\text{G1A}}{\overset{\text{Stokes}}{=}} \int_{\Gamma=\partial S} f\bullet\mathrm{d}\Gamma$$

Ist die Fläche S geschlossen, also $\partial S = \emptyset$, so folgt $\oint_S \operatorname{rot}(f)\bullet\mathrm{d}S = 0$.
Satz von Gauß für Volumina $V \subseteq \mathbb{R}^3$ und Vektorfelder $f : \mathbb{R}^3 \supseteq V \to \mathbb{R}^3$:

$$\int_V \operatorname{div}(f)\,\mathrm{d}V \underset{\text{G3G}}{\overset{\text{Gauß}}{=}} \int_{S=\partial V} f\bullet\mathrm{d}S$$

Hierbei sind $\Gamma, S, V \Subset \mathbb{R}^3$ kompakt und stückweise glatt, f, g zumindest definiert auf einer offenen Umgebung und dort stetig differenzierbar.

Welche Anwendungen hat die Integration?

Damit haben wir die ersten wichtigen Themen genannt:

- Ein- und mehrdimensionale Integration.
- Integralsätze in der Ebene $\mathbb{R}^2$ und im Raum $\mathbb{R}^3$.
- Anwendungen in Natur- und Ingenieurwissenschaften.

Dank ihrer zahlreichen Anwendungen ist die Integration unentbehrliches Werkzeug und grundlegend in den Ingenieur- und Naturwissenschaften.

Erste wichtige Anwendungen werden wir in dieser Vorlesung vorstellen:

- Fourier–Reihen, Fourier– und Laplace–Transformation.
- Lösung gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen.
- Wahrscheinlichkeitsrechnung, kontinuierliche Verteilungen.

Die hier genannten Themen sind das umfassende Ziel dieser Vorlesung. Der Weg ist steil, doch unser ambitioniertes Ziel ist überaus lohnend!

☺ Damit Sie diese Werkzeuge sicher und effizient nutzen können, werden wir zunächst die grundlegenden Rechenregeln darlegen.

Wozu brauchen Sie Definitionen und Sätze?

Sie können die Integration als eine Maschine auffassen: Aus jeder integrierbaren Funktion f macht sie eine Zahl $\int f$. Für die Praxis sollen Sie lernen, diese Maschine korrekt und effizient zu nutzen. Dazu müssen Sie ihren grundlegenden Aufbau und ihre Funktionsweise verstehen.

Dieses Kapitel gibt hierzu die **Kurzanleitung zur Integration**: Um überhaupt von Integralen sprechen zu können, erkläre ich hier zunächst, was Integrale sind und nach welchen Regeln sie funktionieren. Der Schnelldurchgang ist noch zu knapp, gibt aber einen guten ersten Überblick.

In den folgenden Kapiteln entwickeln wir **Rechentechniken**, wie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung B1I, den Satz von Fubini C1E, den Transformationssatz C2B, schließlich die Integralsätze von Gauß und Stokes. Alle diese Sätze und Rechenregeln beruhen auf der in diesem ersten Kapitel gegebenen Definition des Integrals und lassen sich daraus ableiten.

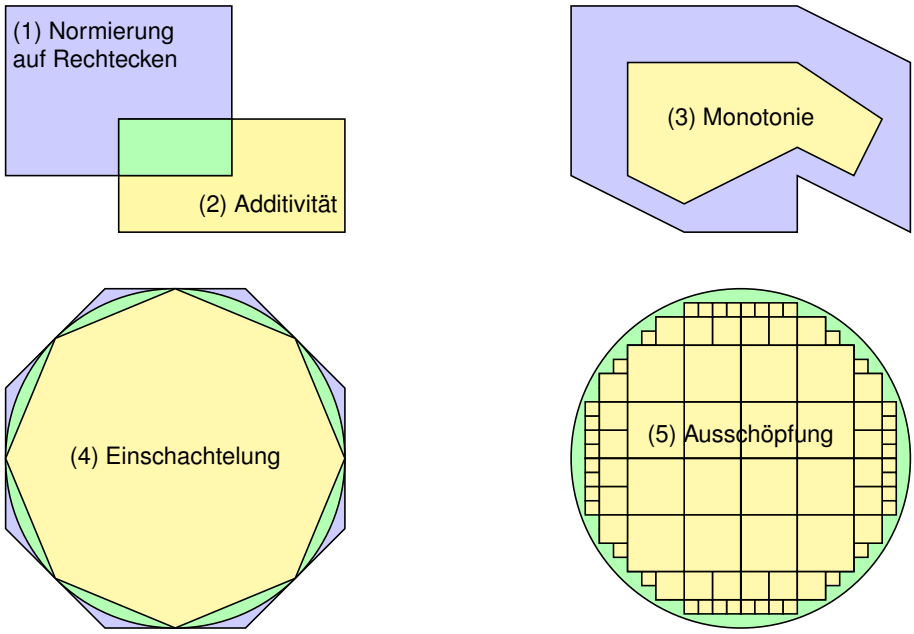
Für die Anwendung sollen Sie vor allem konkrete Beispiele beherrschen. Reicht es also, nur Beispiele zu lernen? Es ist wie mit den Spielregeln beim Sport (Handball, Cricket, Schach): Es ist mühsam, unsicher und ineffizient, diese nur durch Beobachten von Spielen zu erraten, zudem könnte man niemals sicher sein, wirklich alle Regeln zu kennen und zu verstehen.

Daher ist es effizienter, von Anfang an die fundamentalen **Regeln** darzulegen und zugleich auch lehrreiche **Beispiele** zu untersuchen. Diesen werden wir uns in den folgenden Kapiteln widmen.

We think in generalities, but we live in detail.
(Alfred North Whitehead, 1861–1947)

Wie misst man Flächen- und Rauminhalt?

Teilmengen $A \subseteq \mathbb{R}^2$ wollen wir ihren Flächeninhalt $\mathrm{vol}_2(A)$ zuweisen.
Problem: Nach welchen **Regeln**? Welche Mengen sind **messbar**?



Ebenso für den Rauminhalt $\mathrm{vol}_3(A)$ von Teilmengen $A \subseteq \mathbb{R}^3$, und allgemein für das n–dim. Volumen $\mathrm{vol}_n(A)$ von Teilmengen $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definition: Messbare Mengen und ihr Volumen

Messbare Mengen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und ihr n–dimensionales Volumen $\mathrm{vol}_n(A) \in [0, \infty]$ definieren wir nach folgenden fünf Grundregeln:

(1) **Normierung:** Jeder n–dimensionale Quader $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist messbar, und sein Volumen $\mathrm{vol}(A)$ ist das Produkt seiner Seitenlängen.
☺ Speziell für die leere Menge $\emptyset$ folgt daraus $\mathrm{vol}(\emptyset) = 0$.

(2) **Additivität:** Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar, so auch $A \cup B$ und $A \cap B$, und für diese vier gilt $\mathrm{vol}(A) + \mathrm{vol}(B) = \mathrm{vol}(A \cup B) + \mathrm{vol}(A \cap B)$.
☺ Für $A \cap B = \emptyset$ folgt $\mathrm{vol}(A \sqcup B) = \mathrm{vol}(A) + \mathrm{vol}(B)$ dank $\mathrm{vol}(\emptyset) = 0$.

(3) **Monotonie:** Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar, so auch $C = B \smallsetminus A$.
☺ Aus $A \subseteq B$ folgt $B = A \sqcup C$ und $\mathrm{vol}(A) \leq \mathrm{vol}(B)$ dank Additivität (2).

(4) **Einschachtelung:** Gilt $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq C \subseteq \ldots \subseteq B_2 \subseteq B_1 \subseteq B_0$ mit A_k, B_k messbar und $\mathrm{vol}(B_k \smallsetminus A_k) \searrow 0$, so ist auch C messbar.
☺ Dank Monotonie (3) folgt daraus $\mathrm{vol}(A_k) \nearrow \mathrm{vol}(C) \swarrow \mathrm{vol}(B_k)$.

(5) **Ausschöpfung:** Sind $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ messbar, so auch ihre Vereinigung $A = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots$, und dabei gilt $\mathrm{vol}(A_k) \nearrow \mathrm{vol}(A)$.

Grundlegende Eigenschaften des Volumens

☺ Auf diesen fünf einfachen Grundregeln beruht die gesamte Integration! Damit berechnen wir den Flächeninhalt von Polgonen, Kreisen, etc. sowie den Rauminhalt von Polyedern, Kugeln, etc.

Im Prinzip ist damit alles über die Integration gesagt. Wir benötigen dennoch etwas mehr Zeit: Sie sollen die nötigen Rechentechniken beherrschen sowie wichtige Beispiele und Anwendungen.

Wir fragen als erstes: Ist das Ergebnis eindeutig, wohldefiniert, unabhängig vom Rechenweg? Die Eindeutigkeit ist für alles Weitere unabdingbar und keineswegs selbstverständlich. A409

Satz A1A: Lebesgue 1901

Mit diesen fünf Regeln können wir jeder messbaren Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eindeutig ihr Volumen $\operatorname{vol}_n(A) \in [0, \infty]$ zuweisen und somit ausrechnen.

Alle natürlich auftretenden Mengen sind auf diese Weise messbar:

- Alle offenen und alle abgeschlossenen Mengen in $\mathbb{R}^n$ sind messbar.
- Ist eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar, so auch ihr Komplement $\mathbb{R}^n \smallsetminus A$.
- Sind die vorgelegten Mengen $A_0, A_1, A_2, \ldots \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar, so auch ihr Durchschnitt $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$ und ihre Vereinigung $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$.
- Für jede disjunkte Vereinigung gilt $\operatorname{vol}(\bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{vol}(A_k)$. Diese wichtige und nützliche Eigenschaft heißt **σ–Additivität**.

Grundlegende Eigenschaften eines Maßes

Das n–dimensionale Volumen vol_n ist demnach ein σ–additives Maß im folgenden Sinne; die Bezeichnung „σ“ steht dabei für „abzählbar“.

Definition A1B: Maßraum

Ein **Maßraum** $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ besteht aus

- einer **Grundmenge** Ω,
- einer **σ–Algebra** $\mathscr{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ und
- einem **σ–additiven Maß** $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$

mit folgenden grundlegenden Eigenschaften, wie oben erklärt:

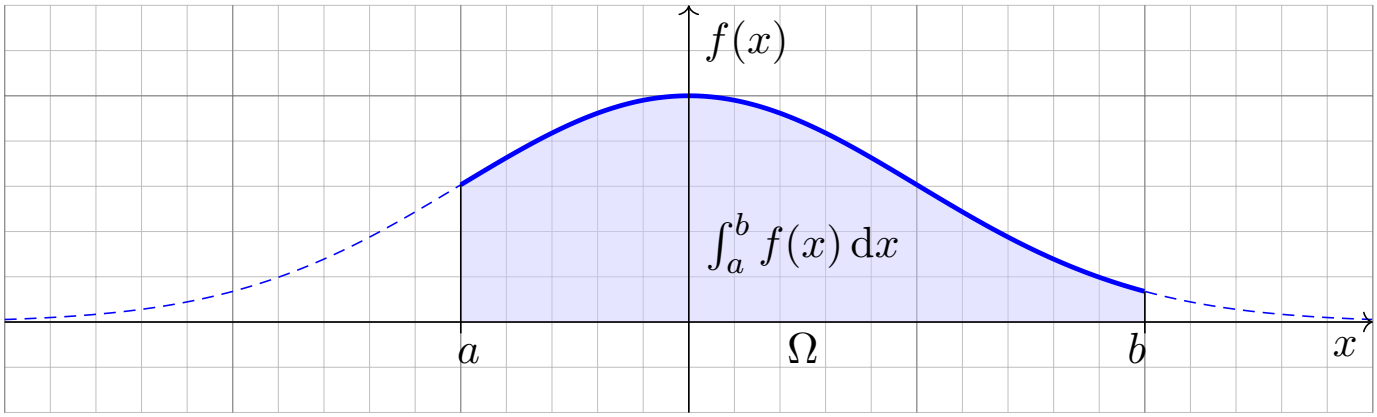
1. **Leere Menge:** Es gilt $\emptyset \in \mathscr{A}$ und $\mu(\emptyset) = 0$.
2. **Komplemente:** Aus $A \in \mathscr{A}$ folgt $(\Omega \smallsetminus A) \in \mathscr{A}$.
3. **σ–Additivität:** Aus $A_0, A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}$ folgt $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathscr{A}$ sowie

$$\mu\Big(\bigsqcup_{k=0}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k) \quad \text{falls } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j.$$

Jeder messbaren Menge $A \subseteq \Omega$ wird ihr Maß $\mu(A) \in [0, \infty]$ zugeordnet. Diese Sichtweise nutzen wir später für Wahrscheinlichkeitsmaße (V1C).

Was sind und was sollen Integrale?

Beispiel: Wir integrieren $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$ über $\Omega = [-1, 2]$.



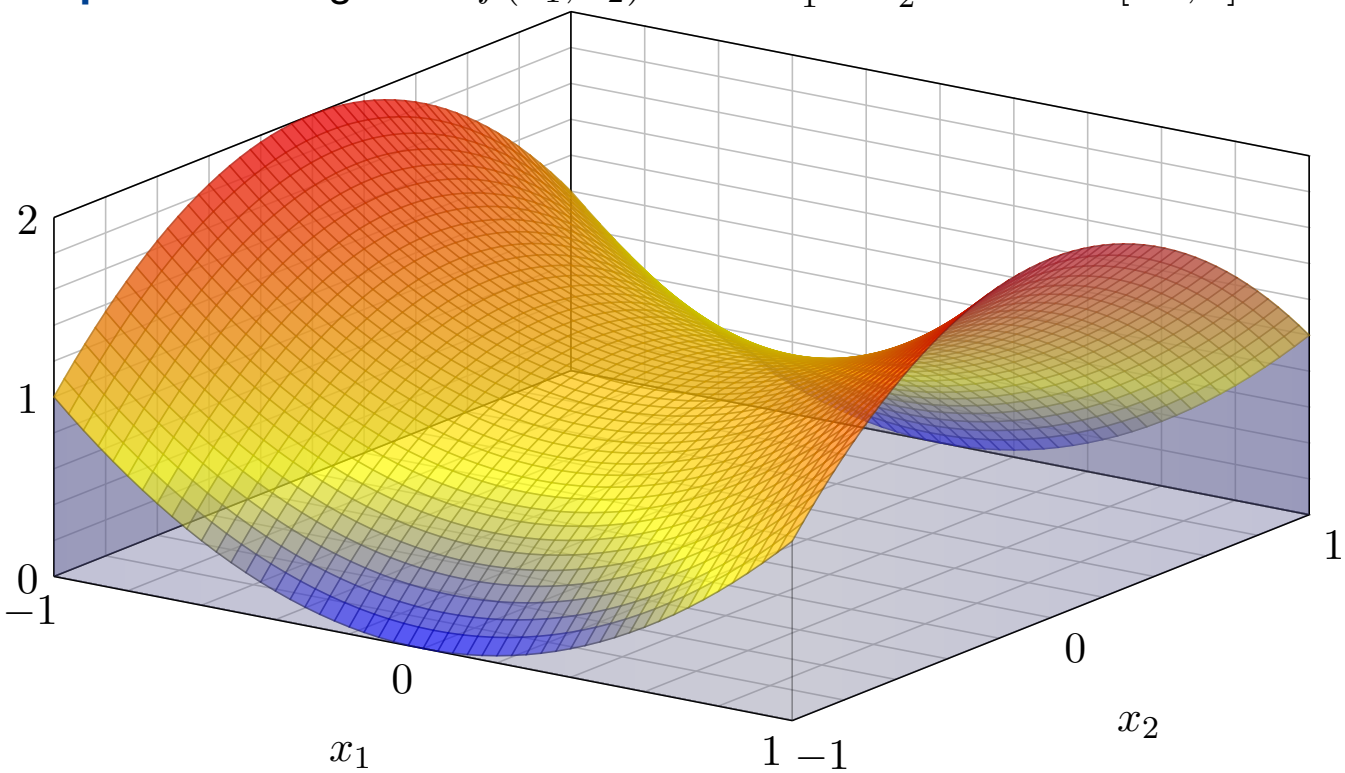
Zur Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert eine Integralfunktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ mit $F' = f$ dank Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (B1I). Leider ist F nicht elementar (B1P). Schon in solch einfachen Beispielen benötigen wir die geometrische Integraldefinition als Fläche!

Grundidee: Sei $\Omega = [a, b]$ ein Intervall und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig.
Das Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ misst die Fläche unter dem Graphen von f.

Verallgemeinerung: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig.
Das Integral $\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x$ misst das Volumen unter dem Graphen von f.

Was sind und was sollen Integrale?

Beispiel: Wir integrieren $f(x_1, x_2) = 1 + x_1^2 - x_2^2$ über $\Omega = [-1, 1]^2$.



Gesucht ist das Volumen unter dem Graphen, also $\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x$. Dieses sehr einfache Beispiel lässt sich auch ohne Rechnung lösen: $\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x = 4$. Können Sie es sehen? und ausrechnen? Solide Grundlagen helfen der geometrischen Anschauung und dann der formalen Ausführung!

Bewährte Schreibweisen und Gedächtnisstützen

Das Integral einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \to \mathbb{R}$ schreiben wir wahlweise

$$\int_\Omega f = \int_\Omega f \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x\in\Omega} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Die Bezeichnung der Integrationsvariablen ist dabei willkürlich:

$$\int_\Omega f = \int_\Omega f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\Omega f(u)\,\mathrm{d}u = \int_\Omega f(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \dots$$

Speziell für $\Omega = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ schreiben wir auch:

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x=a}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \dots$$

Zweidimensional, für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$, schreiben wir auch:

$$\int_\Omega f = \int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{(u,v)\in\Omega} f(u,v)\,\mathrm{d}(u,v) = \dots$$

Dreidimensional, für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$, schreiben wir auch:

$$\int_\Omega f = \int_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_{(u,v,w)\in\Omega} f(u,v,w)\,\mathrm{d}(u,v,w) = \dots$$

Bewährte Schreibweisen und Gedächtnisstützen

Zwei- und dreidimensionale Integrale schreiben manche lieber so:

$$\iint_\Omega f = \iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \qquad = \iint_{(u,v)\in\Omega} f(u,v)\,\mathrm{d}(u,v) \qquad = \dots$$

$$\iiint_\Omega f = \iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \iiint_{(u,v,w)\in\Omega} f(u,v,w)\,\mathrm{d}(u,v,w) = \dots$$

Diese dekorative Schreibweise betont, dass wir mit zwei- bzw. dreidimensionalen Integralen arbeiten, ist aber ansonsten entbehrlich: Der Integrationsbereich $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ weiß ja, in welcher Dimension n er lebt! Das bildhafte Symbol ist eine hilfreiche Gedächtnisstütze für die Leser:in, nicht mehr, nicht weniger. Das Integral ist unabhängig von der Schreibweise dasselbe wie zuvor.

Redundanz schadet selten, oft bietet sie nützliche Erinnerung und willkommene Hilfestellung. Für die Praxis empfiehlt es sich, überflüssige Schnörkel wegzulassen und nur das Wesentliche so klar und präzise zu notieren, dass Lese- und Rechenfehler weitestgehend vermieden werden. Alle genannten Schreibweisen haben sich hierzu bewährt, alle erfordern Verständnis und Übung.

Eine gute Notation vermeidet Fehler und Missverständnisse. Das ist nicht nur eine mathematische Frage, sondern vor allem eine der Klarheit, der Bequemlichkeit und der jeweiligen Tradition. Die wahre Kraft der Begriffe steckt nicht in ihrer *Schreibung*, sondern in ihrer *Bedeutung*! Das können wir nun klar und präzise formulieren dank Ihrer guten Grundlagen aus der HM1&2.

Aufbau des Zahlensystems

Unser Fundament ist das Zahlensystem $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

📖 Zur Wiederholung der Grundlagen siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, Kapitel 0 und 1. Aufbau: Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ dienen zum **Zählen**. Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ lösen das Problem der Subtraktion. Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \{\, a/b \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \,\}$ lösen das Problem der Division. Sie bilden einen geordneten Körper $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$, sind aber noch unvollständig: Zahlen wie $\sqrt{2}$, e, π, etc. sind nicht rational! Um dieses Problem zu lösen, müssen wir einen entscheidenden Schritt weiter gehen und die rationalen zu den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ vervollständigen. Die reellen Zahlen dienen zum **Messen**. Sie sind die unabdingbare Grundlage der Analysis: Grenzwerte von Folgen und von Reihen, Ableitungen und Integrale, etc. ergeben erst auf Grundlage der reellen Zahlen einen Sinn.

Die reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ sind ein geordneter Körper und zudem vollständig. Vollständigkeit bedeutet: Jede nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ besitzt in $\mathbb{R}$ eine kleinste obere Schranke. Diese nennen wir das Supremum von M und bezeichnen sie mit $\sup M$. Gleiches gilt für die größte untere Schranke, das Infimum von M, geschrieben $\inf M$. Aus den Körperaxiomen, der Anordnung und der Vollständigkeit entspringen alle weiteren Eigenschaften der reellen Zahlen, sodann der komplexen Zahlen, der reellen und komplexen Funktionen, der Differential- und Integralrechnung, … schließlich der gesamten Analysis!

Die komplexen Zahlen $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sind ein Körper und algebraisch abgeschlossen (F3C): In $\mathbb{R}$ hat die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ keine Lösung. In $\mathbb{C} = \mathbb{R}[\mathrm{i}]$ führen wir hierzu die Zahl i ein. Über $\mathbb{C}$ zerfällt *jedes* Polynom $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ in Linearfaktoren (F3C). Viele Rechnungen gelingen nur mit komplexen Zahlen, weitere werden so besonders effizient.

Absolutbetrag und Abstand reeller Zahlen

Die reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ sind ein vollständiger geordneter Körper. Aus der Anordnung gewinnen wir insbesondere den **Absolutbetrag**

$$|\text{-}| \,:\, \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \,:\, x \mapsto |x| := \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0, \\ -x & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Dies ist eine **Norm** mit folgenden Eigenschaften:

- Definitheit: $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.
- Multiplikativität: $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- Subadditivität: $|x + y| \leq |x| + |y|$

Dies wiederum definiert für alle $a, b \in \mathbb{R}$ den **Abstand** $|a - b|$.

- Definitheit: $|a - b| = 0$ genau dann, wenn $a = b$.
- Symmetrie: $|a - b| = |b - a|$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.
- Dreiecksungleichung: $|a - c| \leq |a - b| + |b - c|$

Norm und Abstand werden wir später auf $\mathbb{C}$ sowie $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ und noch allgemeinere Vektorräume übertragen, z.B. Funktionenräume. Diese können wir meist nicht sinnvoll anordnen, aber Norm, Abstand und Konvergenz dienen auch dort als zentrale Werkzeuge (C4J, U4B).

Konvergenz reeller Zahlenfolgen

Eine **Folge** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen ist eine Abbildung $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}:n\mapsto a_n$. Jeder natürlichen Zahl $n\in\mathbb{N}$ wird eine reelle Zahl $a_n\in\mathbb{R}$ zugeordnet.

Vorgelegt seien Schranken $s,t\in\mathbb{R}$. Gilt $a_n\geq s$ für alle $n\in\mathbb{N}$, so nennen wir die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **nach unten beschränkt** durch s. Gilt $a_n\leq t$ für alle $n\in\mathbb{N}$, so nennen wir die Folge **nach oben beschränkt** durch t.

Definition A2A: Konvergenz einer reellen Zahlenfolge

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ **konvergiert** gegen eine reelle Zahl $a\in\mathbb{R}$, wenn der Abstand $|a-a_n|$ schließlich beliebig klein wird, genauer:

Für jedes noch so kleine $\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$ existiert ein Index $m\in\mathbb{N}$, sodass für alle folgenden Indizes $n\geq m$ die Ungleichung $|a-a_n|\leq\varepsilon$ gilt.

In diesem Falle schreiben wir $a_n\to a$ für $n\to\infty$, oder kurz $a_n\to a$.
Den **Grenzwert** schreibt man $\lim_{n\to\infty}a_n=a$, oder kurz $\lim a_n=a$.
Beispiel: Für $|q|<1$ gilt $q^n\to 0$ sowie $\sum_{k=0}^n q^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\to\frac{1}{1-q}$.
Die Folge $x_0=0,\ x_1=0.9,\ x_2=0.99,\ x_3=0.999,\ \ldots,\ x_n=1-10^{-n}$ konvergiert gegen 1. Das ist das ganze Geheimnis hinter der Gleichung $0.999999999\ldots=1$. Diese Erkenntnis ist keineswegs selbstverständlich!

Uneigentliche Konvergenz gegen $\pm\infty$

Jede in $\mathbb{R}$ konvergente Folge ist beschränkt. Die Umkehrung gilt nicht:
Die Folge $(-1)^n$ ist beschränkt, konvergiert aber dennoch nicht in $\mathbb{R}$.
Die Folge $(1,2,3,\ldots)$ wächst unbeschränkt und konvergiert nicht in $\mathbb{R}$.
Auch die harmonische Reihe $a_n=\sum_{k=1}^n 1/k$ wächst unbeschränkt.
Diese Beispiele führen uns zur bestimmten Divergenz gegen $\pm\infty$:

Definition A2B: uneigentliche Konvergenz, bestimmte Divergenz

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ heißt **divergent**, wenn sie nicht konvergiert. Das heißt, es gibt keine reelle Zahl $a\in\mathbb{R}$, für die $a_n\to a$ gilt.

Wir sagen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **divergiert (bestimmt)** gegen $+\infty$ oder **konvergiert (uneigentlich)** gegen $+\infty$, wenn zu jeder Schranke $s\in\mathbb{R}$ ein Index $m\in\mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n\geq m$ die Ungleichung $a_n\geq s$ gilt.

Entsprechend sagen wir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **divergiert (bestimmt)** gegen $-\infty$ oder **konvergiert (uneigentlich)** gegen $-\infty$, wenn zu jeder Schranke $s\in\mathbb{R}$ ein Index $m\in\mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n\geq m$ gilt $a_n\leq s$.

Beispiele: $n^a\to 0$ für $a<0$, $n^0=1\to 1$ für $a=0$, $n^a\to\infty$ für $a>0$.
Es gilt $\sum_{k=1}^n 1/k\to\infty$ für $n\to\infty$, somit $\sum_{k=1}^n 1/k^a\to\infty$ für $a\leq 1$.

Die reelle Zahlengerade erweitert um $\pm\infty$

Die reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ sind ein vollständiger geordneter Körper. Bei Grenzwerten und Integration müssen wir auch mit $\pm\infty$ umgehen. Hierzu nutzen wir die **erweiterte Zahlengerade** $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Die Ordnung setzen wir fort durch $-\infty < a < +\infty$ für alle $a \in \mathbb{R}$. Addition und Multiplikation setzen wir für $\pm\infty$ und $a, b \in \mathbb{R}$ fort:

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

$+$	$-\infty$	b	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?0?
a	$-\infty$	$a+b$	$+\infty$
$+\infty$	?0?	$+\infty$	$+\infty$

$\cdot$	$-\infty$	$b<0$	$b=0$	$b>0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	$-\infty$	$-\infty$
$a<0$	$+\infty$	$a\cdot b$	0	$a\cdot b$	$-\infty$
$a=0$	0	0	0	0	0
$a>0$	$-\infty$	$a\cdot b$	0	$a\cdot b$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$

Grün: Verknüpfung in $\mathbb{R}$; gelb: sinnvoll für die Grenzwertrechnung in $\bar{\mathbb{R}}$; rot: nur für die Integralrechnung gebräuchlich. $(\bar{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ ist kein Körper!

⚠ Die Addition ist nicht assoziativ: $(+\infty + -\infty) + 1 \neq +\infty + (-\infty + 1)$.

☺ Im Halbring $([0, \infty], +, \cdot)$ gelten alle Eigenschaften außer Inverse.

Die reelle Zahlengerade erweitert um $\pm\infty$

☺ Für **Grenzwerte in $\mathbb{R}$** gelten die nützlichen Rechenregeln

$$\lim(a_n + b_n) = (\lim a_n) + (\lim b_n),$$
$$\lim(a_n \cdot b_n) = (\lim a_n) \cdot (\lim b_n).$$

☺ In den gelb markierten Fällen gilt dies auch noch für uneigentliche Grenzwerte. Das kennen Sie gut aus der Analysis und nutzen es seither.

⚠ Vorsicht: Die rot markierte Konvention $0 \cdot (\pm\infty) = 0$ nutzen wir ausschließlich in der Integralrechnung; sie ist nur hier sinnvoll.

☹ Für die Konvergenzrechnung ist sie nutzlos! Warnende Beispiele:
Es gilt $a_n = 6/n \to 0$ und $b_n = 7n \to +\infty$, aber $a_n \cdot b_n \to 42$.
Es gilt $a_n = 6/n^2 \to 0$ und $b_n = 7n \to +\infty$, aber $a_n \cdot b_n \to 0$.
Es gilt $a_n = 6/n \to 0$ und $b_n = 7n^2 \to +\infty$, aber $a_n \cdot b_n \to +\infty$.

☹ Die Konvention $(+\infty) + (-\infty) = 0$ ist vollkommen willkürlich.
Es gilt $a_n = n \to +\infty$ und $b_n = 42 - n \to -\infty$, aber $a_n + b_n \to 42$.
Es gilt $a_n = n \to +\infty$ und $b_n = \sqrt{n} - n \to -\infty$, aber $a_n + b_n \to +\infty$.
Es gilt $a_n = n \to +\infty$ und $b_n = (-1)^n - n \to -\infty$, aber $a_n + b_n$ divergiert.

Monotone Konvergenz reeller Zahlen

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\bar{\mathbb{R}}$ heißt **monoton wachsend**, wenn gilt

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots$$

also $a_m \leq a_n$ für alle $m \leq n$. Wir schreiben dann kurz $a_n \nearrow$.

- Ist die Folge in $\mathbb{R}$ nicht nach oben beschränkt, so gilt $a_n \to +\infty$.
- Ist die Folge in $\mathbb{R}$ nach oben beschränkt, so existiert eine kleinste obere Schranke in $\mathbb{R}$: Für $a = \sup\{\, a_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ gilt dann $a_n \to a$.

Zur Betonung der Monotonie schreiben wir $a_n \nearrow a$ bzw. $a_n \nearrow +\infty$.

Entsprechend heißt $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\bar{\mathbb{R}}$ **monoton fallend**, wenn gilt

$$b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \ldots$$

also $b_m \geq b_n$ für alle $m \leq n$. Wir schreiben dann kurz $b_n \searrow$.

- Ist die Folge in $\mathbb{R}$ nicht nach unten beschränkt, so gilt $b_n \to -\infty$.
- Ist die Folge in $\mathbb{R}$ nach unten beschränkt, so existiert eine größte untere Schranke in $\mathbb{R}$: Für $b = \inf\{\, a_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ gilt dann $b_n \to b$.

Zur Betonung der Monotonie schreiben wir $b_n \searrow b$ bzw. $b_n \searrow -\infty$.

Limes superior und Limes inferior

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in der erweiterten Zahlengeraden $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
Die Folge $a_n = \inf_{k\geq n} x_k$ ist monoton wachsend, also gilt $a_n \nearrow a \in \bar{\mathbb{R}}$.
Die Folge $b_n = \sup_{k\geq n} x_k$ ist monoton fallend, also gilt $b_n \searrow b \in \bar{\mathbb{R}}$.
Für die Folge (x_n) ist a der kleinste und b der größte Häufungspunkt.
Beispiel: Für $x_n = (-1)^n$ gilt $a_n = -1$ und $b_n = +1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Definition A2C: Limes superior und Limes inferior

Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\bar{\mathbb{R}}$ definieren wir

$$\liminf x_n := \lim_{n\to\infty} \Big(\inf_{k\geq n} x_k\Big) \quad \in \quad \bar{\mathbb{R}},$$

$$\limsup x_n := \lim_{n\to\infty} \Big(\sup_{k\geq n} x_k\Big) \quad \in \quad \bar{\mathbb{R}}.$$

Proposition A2D: Konvergenzkriterium in $\bar{\mathbb{R}}$

Genau dann konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\bar{\mathbb{R}}$, wenn $\limsup x_n = \liminf x_n$ gilt.

Reelle Funktionen

Sei Ω eine Menge. Eine reelle Funktion $f:\Omega\to\mathbb{R}$ ordnet jedem $x\in\Omega$ eine reelle Zahl $f(x)$ zu. Diese Zuordnung schreiben wir $x\mapsto f(x)$.
Die Menge aller reellen Funktionen $f:\Omega\to\mathbb{R}$ bezeichnen wir mit

$$\mathbb{R}^\Omega = \mathrm{Abb}(\Omega,\mathbb{R}) = \left\{\, f:\Omega\to\mathbb{R} : x\mapsto f(x) \,\right\}.$$

Speziell für $\Omega=\{1,\dots,n\}$ erhalten wir den vertrauten Raum

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Abb}(\{1,\dots,n\},\mathbb{R}) = \left\{\, (x_1,\dots,x_n) \;\middle|\; x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R} \,\right\}.$$

Für $\Omega=\mathbb{N}$ erhalten wir die Menge aller reellen Folgen

$$\mathbb{R}^\mathbb{N} = \mathrm{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{R}) = \left\{\, (x_0,x_1,x_2,\dots) \;\middle|\; x_0,x_1,x_2,\dots\in\mathbb{R} \,\right\}.$$

Für $\Omega=\mathbb{R}$ erhalten wir die Menge aller reellen Funktionen

$$\mathbb{R}^\mathbb{R} = \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \left\{\, f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} : x\mapsto f(x) \,\right\}.$$

Der Träger (engl. *support*) einer Funktion $f:\Omega\to\mathbb{R}$ ist die Teilmenge $\left\{\, x\in\Omega \;\middle|\; f(x)\neq 0 \,\right\}$, wo f nicht verschwindet, genauer ihr Abschluss

$$\mathrm{supp}(f) := \overline{\left\{\, x\in\Omega \;\middle|\; f(x)\neq 0 \,\right\}}.$$

Dasselbe vereinbaren wir für Funktionen mit Werten in $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ oder $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{C}^n$ oder allgemein in einer beliebigen Zielmenge.

Punktweise Verknüpfung und Vergleich

Für je zwei Funktionen $f,g:\Omega\to\mathbb{R}$ definieren wir ihre Summe

$$f+g:\Omega\to\mathbb{R} \quad \text{durch} \quad (f+g)(x) = f(x)+g(x)$$

punktweise für jedes $x\in\Omega$. Für jede Konstante $c\in\mathbb{R}$ definieren wir

$$cf:\Omega\to\mathbb{R} \quad \text{durch} \quad (cf)(x) = cf(x).$$

Hierdurch wird $(\mathbb{R}^\Omega,+,\cdot)$ zu einem Vektorraum über $\mathbb{R}$. (Übung!)
Ebenso definieren wir zu $f,g:\Omega\to\mathbb{R}$ das punktweise Produkt

$$f\cdot g:\Omega\to\mathbb{R} \quad \text{durch} \quad (f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x).$$

Hierdurch wird $(\mathbb{R}^\Omega,+,\cdot)$ sogar zu einer Algebra über $\mathbb{R}$. (Übung!)
Dasselbe vereinbaren wir ebenso für Funktionen mit Werten in $\mathbb{C}$.
Schließlich definieren wir auch die Relation $f\le g$ punktweise:

$$f\le g \quad :\Longleftrightarrow \quad f(x)\le g(x) \text{ für alle } x\in\Omega.$$

Auch $\min(f,g),\max(f,g):\Omega\to\mathbb{R}$ sind punktweise definiert durch

$$\min(f,g)(x) = \min(f(x),g(x)), \quad \max(f,g)(x) = \max(f(x),g(x)).$$

Dasselbe vereinbaren wir für Funktionen mit Werten in $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.

Monotone Konvergenz reeller Zahlen und Funktionen

Die erweiterte Zahlengerade $\bar{\mathbb{R}}$ vereinfacht Konvergenzaussagen:

Satz A2E: Supremum und Infimum in $\bar{\mathbb{R}}$

Jede Teilmenge $M \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ hat ein Supremum und ein Infimum in $\bar{\mathbb{R}}$.

Ist die Menge M leer, so gilt $\sup \emptyset = -\infty$ und $\inf \emptyset = +\infty$.

Satz A2F: monotone Konvergenz von Zahlenfolgen

Jede wachsende Folge $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots$ in $\bar{\mathbb{R}}$ konvergiert gegen einen Grenzwert $a \in \bar{\mathbb{R}}$. Wir schreiben hierfür kurz $a_k \nearrow a$.

Für $b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \ldots$ in $\bar{\mathbb{R}}$ gilt entsprechend $b_k \searrow b$ mit $b \in \bar{\mathbb{R}}$.

Satz A2G: monotone Konvergenz von Funktionenfolgen

Jede wachsende Folge $f_0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ von Funktionen $f_k : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ konvergiert punktweise gegen eine Grenzfunktion $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$.
Das heißt, für jedes $x \in \Omega$ gilt $f_k(x) \nearrow f(x)$, kurz $f_k \nearrow f$.

Für $g_0 \geq g_1 \geq g_2 \geq \ldots : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ gilt entsprechend $g_k \searrow g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$.

Beispiele zur monotonen Konvergenz

Aufgabe: Untersuchen Sie Monotonie und Konvergenz der Folge x^n sowie der Funktionenfolge $f_n(x) = x^n$ auf $[0,1]$, $[1,\infty[$, $[0,\infty[= \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Lösung: (1) Für $x \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Folge $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Für $x > 1$ gilt $x^n \nearrow +\infty$ (monoton wachsend).
Für $x = 1$ gilt $x^n = 1$, also $x^n \to 1$ (konstant).
Für $0 \leq x < 1$ gilt $x^n \searrow 0$ (monoton fallend).
Für $-1 < x < 0$ gilt $x^n \to 0$ aber nicht monoton.
Für $x = -1$ konvergiert $x^n = (-1)^n$ nicht.
Für $x < -1$ gilt absolut $|x^n| \nearrow +\infty$,
aber weder $x^n \to +\infty$ noch $x^n \to -\infty$.

(2) Für $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = x^n$ gilt $f_n \searrow f$
mit $f(x) = 0$ für $0 \leq x < 1$, und $f(1) = 1$.

Für $f_n : [1,\infty[\to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = x^n$ gilt $f_n \nearrow f$
mit $f(x) = +\infty$ für $x > 1$, und $f(1) = 1$.

Für $f_n : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = x^n$ gilt $f_n \to f$ punktweise,
aber nicht monoton: weder $f_n \searrow f$ noch $f_n \nearrow f$.

Von endlichen zu unendlichen Summen

Um Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ zu nutzen, müssen wir ihren Grenzwert erklären. Allgemeiner betrachten wir auch Reihen wie $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k$ oder $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k$.
📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §1.8–1.9.

Sei Ω eine Menge, etwa $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{Z}$. Sei $f:\Omega\to\mathbb{R}$ eine Abbildung, d.h. jedem Element $x\in\Omega$ wird eine reelle Zahl $f(x)\in\mathbb{R}$ zugeordnet.

Start: Ist $E=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}\subseteq\Omega$ eine endliche Menge, so definieren wir die Summe von f über E rekursiv durch wiederholtes Addieren:

$$\sum_{x\in E} f(x) := f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n).$$

Dank Assoziativität und Kommutativität in $(\mathbb{R},+)$ ist diese Summe wohldefiniert, also unabhängig von Klammerung und Reihenfolge.

Ziel: Wie können wir unendliche Summen definieren? Da hierbei auch unendliche Werte auftreten können, betrachten wir Summen in $\bar{\mathbb{R}}$.

Leider ist $(\bar{\mathbb{R}},+,\cdot)$ kein Körper; insb. ist die Addition nicht assoziativ: $(+\infty+-\infty)+1\neq+\infty+(-\infty+1)$. Wir müssen also aufpassen!

Rechenregeln in $[0,\infty]$

☺ Zur Vereinfachung summieren wir zunächst nur in $([0,\infty],+,\cdot,<)$. Dies ist zwar kein Körper, aber immerhin ein **geordneter Halbring**:

Die Addition ist assoziativ und kommutativ. Neutrales Element für die Addition ist 0. Die üblichen Rechenregeln gelten also bis auf Inverse.

Die Multiplikation ist assoziativ und kommutativ. Neutrales Element für die Multiplikation ist 1. Die Multiplikation ist distributiv über die Addition.

Die Anordnung von $[0,\infty]$ ist verträglich mit Addition und Multiplikation: Für alle $a\le a'$ und $b\le b'$ in $[0,\infty]$ gilt $a+a'\le b+b'$ und $a\cdot a'\le b\cdot b'$.

Sei Ω eine Menge und $f:\Omega\to[0,\infty]$ eine nicht-negative Funktion. Ist $E=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}\subseteq\Omega$ endlich, so definieren wir die Summe

$$\sum_{x\in E} f(x) := f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n).$$

Dank Assoziativität und Kommutativität in $([0,\infty],+)$ ist diese Summe wohldefiniert, also unabhängig von Klammerung und Reihenfolge.

Summation in $[0,\infty]$

Definition A2H: unendliche Summe in $[0,\infty]$

Sei Ω eine Menge und $f:\Omega\to[0,\infty]$ eine nicht-negative Funktion. Die Summe über Ω ist das Supremum aller endlichen Teilsummen:

$$\boxed{\sum\nolimits_{x\in\Omega} f(x) := \sup\Big\{ \sum\nolimits_{x\in E} f(x) \;\Big|\; E\subseteq\Omega \text{ endlich} \Big\}.}$$

Normierung:
Gilt $f(a)=1$ für ein $a\in\Omega$ und $f(x)=0$ für alle $x\neq a$, so folgt $\sum f = 1$.

Linearität:
Für $f,g:\Omega\to[0,\infty]$ und $a,b\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt $\sum(af+bg) = a\sum f + b\sum g$.

Ausschöpfung:
Für $f_0\leq f_1\leq f_2\leq\cdots\leq f:\Omega\to[0,\infty]$ mit $f_k\nearrow f$ gilt $\sum f_k \nearrow \sum f$.

Diese drei Eigenschaften charakterisieren die Summation: Normierung und Linearität bestimmen endliche Summen: Hat $\Omega\to[0,\infty]$ endlichen Träger $\operatorname{supp}(f)=\{x_1,\dots,x_n\}\subseteq\Omega$, so gilt $\sum_{x\in\Omega} f(x) = f(x_1)+\cdots+f(x_n)$. Ausschöpfung $f_n\nearrow f$ leistet den Übergang zu abzählbar unendlichen Summen. Gilt $f(x)>0$ für überabzählbar viele $x\in\Omega$, so folgt stets $\sum f=\infty$, denn es gibt eine Zahl $k\in\mathbb{N}_{\geq 1}$, für die die Menge $\{\, x\in\Omega \mid f(x)\geq 1/k \,\}$ unendlich ist.

Summation in $[0,\infty]$

Satz A2I: Umordnungssatz in $[0,\infty]$

Sei $f:\Omega\to[0,\infty]$. Für jede Zerlegung $\Omega=\bigsqcup_{i\in I}\Omega_i$ gilt

$$\sum_{x\in\Omega} f(x) = \sum_{i\in I}\Big[\sum_{x\in\Omega_i} f(x)\Big].$$

☺ Eine besondere Summationsreihenfolge wird hier nicht benötigt: Bei Summation in $[0,\infty]$ dürfen wir beliebig umgruppieren und umordnen! Hierbei ist $\Omega=\bigsqcup_{i\in I}\Omega_i$ eine Zerlegung der Indexmenge Ω in disjunkte Teilmengen $\Omega_i\subseteq\Omega$, also $\Omega=\bigcup_{i\in I}\Omega_i$ und $\Omega_i\cap\Omega_j=\emptyset$ für $i\neq j$.

Der Umordnungssatz folgt aus unserer geschickten Konstruktion A2H: Dank Assoziativität und Kommutativität in $([0,\infty],+)$ gilt die gewünschte Gleichheit zunächst für endliche Summen. Durch Übergang zum Supremum gilt die Gleichung dann auch für beliebige Familien in $[0,\infty]$.

Beispiel: Für jede Familie $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $a_i\in[0,\infty]$ gilt

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i = \sum_{j\in\mathbb{N}}(a_{2j}+a_{2j+1}) = \sum_{k\in\mathbb{N}}(a_{2k}+a_{4k+1}+a_{4k+3}).$$

Notation: Jede Abbildung $f:\Omega\to\bar{\mathbb{R}}$ können wir als Familie $(f(x))_{x\in\Omega}$ betrachten. So schreiben wir zum Beispiel $a:I\to\bar{\mathbb{R}}$ auch als $(a_i)_{i\in I}$.

Zentrales Beispiel: die geometrische Reihe

Beispiel: Für $0 \leq q < 1$ summieren wir $(q^k)_{k\in\mathbb{N}}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(q^0 + q^1 + \cdots + q^n)(1-q) = 1 - q^{n+1}.$$

Hieraus erhalten wir explizit Summenformel und Grenzwert:

$$q^0 + q^1 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \nearrow \quad \frac{1}{1-q}.$$

Für die Summe über $\mathbb{N}$ erhalten wir so die bekannte Formel

$$\boxed{\sum_{k\in\mathbb{N}} q^k = \frac{1}{1-q}.}$$

☺ Die **geometrische Reihe** ist sehr einfach, doch ungemein nützlich. Sie ist die erste Reihe, für die wir Konvergenzverhalten und Grenzwert explizit bestimmen können. Durch Vergleich mit schwierigeren Reihen erhalten wir eine Fülle von Konvergenzkriterien und Abschätzungen!

Wir wollen als nächstes auch negative Summanden zulassen.
Hierzu summieren wir Positivteil und Negativteil getrennt.

Absolut summierbare Familien in $\mathbb{R}$

Jede Familie $(a_i)_{i\in I}$ reeller Zahlen $a_i \in \mathbb{R}$ können wir zerlegen in **Positivteil** $a_i^+ = \max(0, a_i)$ und **Negativteil** $a_i^- = \max(0, -a_i)$.
Wir erhalten hieraus $a_i = a_i^+ - a_i^-$ und $|a_i| = a_i^+ + a_i^-$.

Definition A2J: absolut summierbare Familien in $\mathbb{R}$

(1) Für jede Familie $(a_i)_{i\in I}$ reeller Zahlen $a_i \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sum_{i\in I} |a_i| = \sum_{i\in I} a_i^+ + \sum_{i\in I} a_i^-.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so nennen wir $(a_i)_{i\in I}$ **absolut summierbar**.
In diesem Falle können wir die Summe von $(a_i)_{i\in I}$ definieren durch

$$\boxed{\sum_{i\in I} a_i := \sum_{i\in I} a_i^+ - \sum_{i\in I} a_i^-.}$$

☺ Eine besondere Summationsreihenfolge wird hier nicht benötigt!
☺ Die so definierte Summation ist $\mathbb{R}$–linear. Der Nachweis ist länglich.
☺ Es gelten die Ihnen bereits vertrauten und bewährten Rechenregeln.

Absolut summierbare Familien in $\mathbb{C}$

Jede Familie $(c_i)_{i\in I}$ komplexer Zahlen $c_i \in \mathbb{C}$ können wir zerlegen in **Realteil** $a_i = \operatorname{Re} c_i$ und **Imaginärteil** $b_i = \operatorname{Im} c_i$, und beide sind reell. Es gilt $c_i = a_i + \mathrm{i}b_i$ und $|c_i|^2 = |a_i|^2 + |b_i|^2$ und $|a_i|, |b_i| \le |c_i| \le |a_i| + |b_i|$.

Definition A2K: absolut summierbare Familien in $\mathbb{C}$

Für jede Familie $(c_i)_{i\in I}$ komplexer Zahlen $c_i = a_i + \mathrm{i}b_i \in \mathbb{C}$ gilt

$$\sum_{i\in I}|a_i|, \sum_{i\in I}|b_i| \quad \le \quad \sum_{i\in I}|c_i| \quad \le \quad \sum_{i\in I}|a_i| + \sum_{i\in I}|b_i|.$$

Sind diese Werte endlich, so nennen wir $(c_i)_{i\in I}$ **absolut summierbar**. In diesem Falle können wir die Summe von $(c_i)_{i\in I}$ definieren durch

$$\boxed{\sum_{i\in I} c_i := \sum_{i\in I} a_i + \mathrm{i}\sum_{i\in I} b_i.}$$

- ☺ Eine besondere Summationsreihenfolge wird hier nicht benötigt!
- ☺ Die so definierte Summation ist $\mathbb{C}$–linear. Der Nachweis ist länglich.
- ☺ Es gelten die Ihnen bereits vertrauten und bewährten Rechenregeln.

Anwendung: Potenzreihen

Satz A2L: Majorantenkriterium für Reihen

Aus $|c_i| \le q_i$ folgt $\sum_{i\in I}|c_i| \le \sum_{i\in I} q_i$ dank Monotonie. Ist die zweite Summe endlich, so auch die erste, und $(c_i)_{i\in I}$ ist absolut summierbar.

Erfüllt $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ speziell $|c_k| \le Mq^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, wobei $q \in [0,1[$, $M \in \mathbb{R}$, so ist $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ absolut summierbar: $\left|\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k\right| \le \sum_{k\in\mathbb{N}}|c_k| \le M/(1-q)$.

Satz A2M: Konvergenzradius einer Potenzreihe

Für jede Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ definieren wir den **Konvergenzradius**

$$\boxed{\rho := 1/\limsup \sqrt[k]{|a_k|}.}$$

Für $|z| < \rho$ konvergiert die Reihe absolut, für $|z| > \rho$ divergiert sie.

Beweis: Sei $0 \le \rho < \infty$ und $|a_k|\rho^k \le M$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Für $|z| \le q\rho$ mit $0 \le q < 1$ folgt $|a_k z^k| = |a_k|\rho^k q^k \le Mq^k$, also $\sum_{k\in\mathbb{N}}|a_k z^k| \le M/(1-q)$.

Beispiel: Die Exponentialreihe $\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$ konvergiert absolut in jedem Punkt $z \in \mathbb{C}$: Hier gilt $\sqrt[k]{1/k!} \searrow 0$, Konvergenzradius $\rho = \infty$.

Der Umordnungssatz

Satz A2N: großer Umordnungssatz

(1) Sei $(a_i)_{i\in I}$ eine Familie in $\mathbb{C}$. Für jede Zerlegung $I = \bigsqcup_{j\in J} I_j$ gilt

$$\sum_{i\in I} |a_i| = \sum_{j\in J} \sum_{i\in I_j} |a_i|.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so ist $(a_i)_{i\in I}$ absolut summierbar, und es gilt

$$\boxed{\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J} \sum_{i\in I_j} a_i.}$$

Beweis: Die erste Gleichung ist unser obiger Umordnungssatz A2I für Familien in $[0,\infty]$. Für jede absolut summierbare Familie $(a_i)_{i\in I}$ in $\mathbb{R}$ folgt die zweite Gleichung aus der ersten:

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I} a_i &\overset{\text{Def}}{=} \sum_{i\in I} a_i^+ - \sum_{i\in I} a_i^- \overset{\text{A2I}}{=} \sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} a_i^+ - \sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} a_i^- \\ &\overset{\text{Lin}}{=} \sum_{j\in J}\Big[\sum_{i\in I_j} a_i^+ - \sum_{i\in I_j} a_i^-\Big] \overset{\text{Def}}{=} \sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} a_i\end{aligned}$$

Jede absolut summierbare Familie $(c_i)_{i\in I}$ in $\mathbb{C}$ zerlegen wir ebenso in Real- und Imaginärteil.

Der Umordnungssatz

Korollar A2O: kleiner Umordnungssatz

(1) Sei $(a_i)_{i\in I}$ eine Familie in $\mathbb{C}$. Für jede Bijektion $\varphi : J \to I$ gilt

$$\sum_{i\in I} |a_i| = \sum_{j\in J} |a_{\varphi(j)}|.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so ist $(a_i)_{i\in I}$ absolut summierbar, und es gilt

$$\boxed{\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J} a_{\varphi(j)}.}$$

Beweis: Der kleine Umordnungssatz A2O folgt aus dem großen A2N mittels $I_j = \{\varphi(j)\}$: Hier wird tatsächlich nur umgeordnet, aber nicht umgruppiert und nichts zusammengefasst.

🙂 Der kleine Umordnungssatz ist analog zum Transformationssatz für Integrale (Satz C2B). Bei Integralen müssen wir zudem die Volumenverzerrung berücksichtigen; dazu später mehr.

🙂 Der folgende Umordnungssatz ist analog zum Satz von Fubini für Integrale (Satz C1E). In allen Fällen ist die absolute Summierbarkeit bzw. absolute Integrierbarkeit wesentlich!

⚠ Ohne absolute Summierbarkeit gibt es drastische Gegenbeispiele! C117

Der Umordnungssatz

Eine Doppelfolge $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ ist eine Abbildung $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{C}$.
Jedem Indexpaar $(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ wird eine Zahl $a_{ij}\in\mathbb{C}$ zugeordnet.

Korollar A2P: Cauchy–Umordnungssatz

(1) Für jede Doppelfolge $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ gilt

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} |a_{ij}| = \sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}}|a_{ij}| = \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{i\in\mathbb{N}}|a_{ij}| = \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{i+j=k}|a_{ij}|$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so ist (a_{ij}) absolut summierbar, und es gilt

$$\boxed{\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{i\in\mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{i+j=k} a_{ij}.}$$

Beweis: Der Cauchy–Umordnungssatz A2P folgt aus dem großen Umordnungssatz A2N, indem wir die Indexmenge $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ geeignet zerlegen. Am besten machen Sie sich Skizzen: Zunächst $\mathbb{N}\times\mathbb{N}=\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} J_i$ mit $J_i=\{i\}\times\mathbb{N}$, dann $\mathbb{N}\times\mathbb{N}=\bigsqcup_{j\in\mathbb{N}} I_j$ mit $I_j=\mathbb{N}\times\{j\}$, schließlich $\mathbb{N}\times\mathbb{N}=\bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} D_k$ mit den Diagonalen $D_k=\{\,(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\mid i+j=k\,\}$.

⚠ Ohne absolute Summierbarkeit gibt es drastische Gegenbeispiele! C117

Anwendung auf die Exponentialfunktion

Aufgabe: Aus der Exponentialreihe folgt die **Funktionalgleichung**

$$\boxed{\exp(z+w)=\exp(z)\exp(w) \quad \text{für alle} \quad z,w\in\mathbb{C}.}$$

Nachrechnen: Dank Umordnungssatz und binomischer Formel gilt:

$$\exp(z)\exp(w) = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{w^\ell}{\ell!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k+\ell=n}\frac{z^k}{k!}\frac{w^\ell}{\ell!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z+w)^n = \exp(z+w).$$

☺ Dies entspricht dem **Potenzgesetz**, daher die Kurzschreibweise

$$\mathrm{e}^z := \exp(z) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z\,\mathrm{e}^w.$$

☺ Zusammen mit der wichtigen **Euler–Formel** $\exp(\mathrm{i}z)=\cos z+\mathrm{i}\sin z$ erhalten wir hieraus sofort **Additionstheoreme** für $\sin$ und $\cos$. B125
(Wiederholen und beweisen Sie diese als lehrreiche Übung.)

Intervalle und ihre Länge

Definition A3A: Intervalle und ihre Länge

Eine Teilmenge $I \subseteq \mathbb{R}$ heißt **Intervall**, falls für alle $a < x < b$ in $\mathbb{R}$ mit $a, b \in I$ auch $x \in I$ gilt. Für $a \leq b$ haben wir die **endlichen Intervalle**

$$[a,b] := \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \,\}, \qquad]a,b[:= \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \,\},$$
$$[a,b[:= \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \,\}, \qquad]a,b] := \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \,\},$$

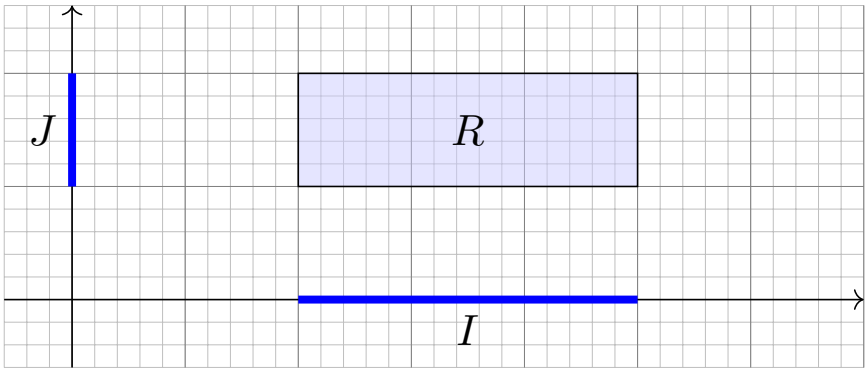
sowie die **unendlichen Intervalle** wie $]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$ und

$$[a,+\infty[:= \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \,\}, \qquad]a,+\infty[:= \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x \,\},$$
$$]-\infty,b] := \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \leq b \,\}, \qquad]-\infty,b[:= \{\, x \in \mathbb{R} \mid x < b \,\}.$$

Jedem Intervall $I \neq \emptyset$ ordnen wir die **Länge** $\mathrm{vol}_1(I) := \sup I - \inf I$ zu. Der leeren Menge $\emptyset \subseteq \mathbb{R}$ weisen wir die Länge $\mathrm{vol}_1(\emptyset) := 0$ zu.

Da $(\mathbb{R}, <)$ vollständig ist, ist jedes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ tatsächlich von einem dieser zehn Typen! Die endlichen Intervalle $[a,b]$, $]a,b[$, $[a,b[$, $]a,b]$ haben Länge $b-a$. Die Länge 0 haben neben $\emptyset$ nur die einpunktigen Intervalle $[a,a] = \{a\}$. Alle unendlichen Intervalle haben die Länge $+\infty$. Das Intervall $[a,b]$ ist kompakt. Die Intervalle $]a,b[$ sowie $]a,+\infty[$ und $]-\infty,b[$ sind offen.

Rechtecke und ihr Flächeninhalt



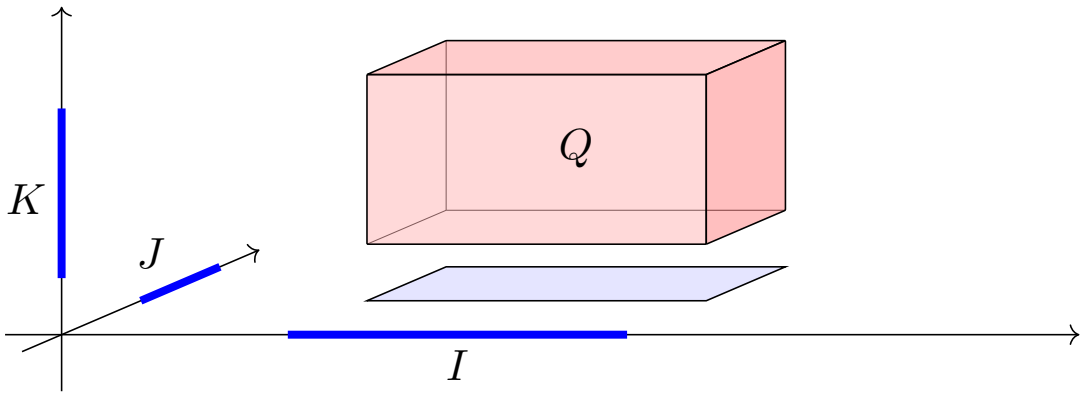
Je zwei Intervalle $I, J \subseteq \mathbb{R}$ definieren ein achsenparalleles **Rechteck**

$$R = I \times J = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I,\ y \in J \,\}.$$

Es hat den **Flächeninhalt** $\mathrm{vol}_2(R) := \mathrm{vol}_1(I) \cdot \mathrm{vol}_1(J)$.

Hat eines der Intervalle Länge 0, so hat das Rechteck den Flächeninhalt 0. Haben beide Intervalle positive Länge, so hat R positiven Flächeninhalt. Ist zudem mindestens eines der Intervalle unendlich, so hat R unendlichen Flächeninhalt. Zum Beispiel gilt $\mathrm{vol}_2(\mathbb{R}^2) = +\infty$, ebenso $\mathrm{vol}_2(\mathbb{R} \times [0,1]) = +\infty$, aber $\mathrm{vol}_2(\mathbb{R} \times \{a\}) = 0$, gemäß der Konvention von Seite A205. Sind beide Intervalle $I, J \subseteq \mathbb{R}$ endlich / kompakt / offen, so auch das Rechteck $I \times J \subseteq \mathbb{R}^2$. Dasselbe Prinzip gilt in jeder Dimension! Zur Verdeutlichung skizziere ich Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^3$.

Quader und ihr Rauminhalt



Je drei Intervalle $I, J, K \subseteq \mathbb{R}$ definieren einen achsenparallelen **Quader**

$$Q = I \times J \times K = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in I,\ y \in J,\ z \in K \,\}.$$

Er hat den **Rauminhalt** $\mathrm{vol}_3(Q) := \mathrm{vol}_1(I) \cdot \mathrm{vol}_1(J) \cdot \mathrm{vol}_1(K)$.

Hat eines der Intervalle Länge 0, so hat der Quader den Rauminhalt 0. Haben alle Intervalle positive Länge, so hat Q positiven Rauminhalt. Ist zudem mindestens eines der Intervalle unendlich, so hat Q unendlichen Rauminhalt. Insbesondere gilt somit $\mathrm{vol}_3(\mathbb{R}^3) = +\infty$. Sind alle drei Intervalle I, J, K endlich / kompakt / offen, so auch der Quader $I \times J \times K$. Die Dimensionen $n = 1, 2, 3$ habe ich zur Betonung gesondert behandelt. Dasselbe Prinzip gilt in jeder Dimension! Das ist zwar schwer zu zeichnen, aber rechnen lässt sich damit ebenso gut.

Quader in beliebiger Dimension

Definition A3B: n–dimensionale Quader und ihr Volumen

Eine Teilmenge $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt achsenparalleler **Quader**, falls

$$Q = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$$

mit Intervallen $I_1, I_2, \ldots, I_n \subseteq \mathbb{R}$. Sein n–dimensionales **Volumen** ist

$$\mathrm{vol}_n(Q) := \mathrm{vol}_1(I_1) \cdot \mathrm{vol}_1(I_2) \cdots \mathrm{vol}_1(I_n).$$

Hat eines der Intervalle Länge 0, so hat der Quader das Volumen 0. Haben alle Intervalle positive Länge, so hat Q positives Volumen; ist zudem eines der Intervalle unendlich, so hat Q unendliches Volumen.

☺ Im Satz C1E von Fubini führen wir diese iterative Berechnung fort.

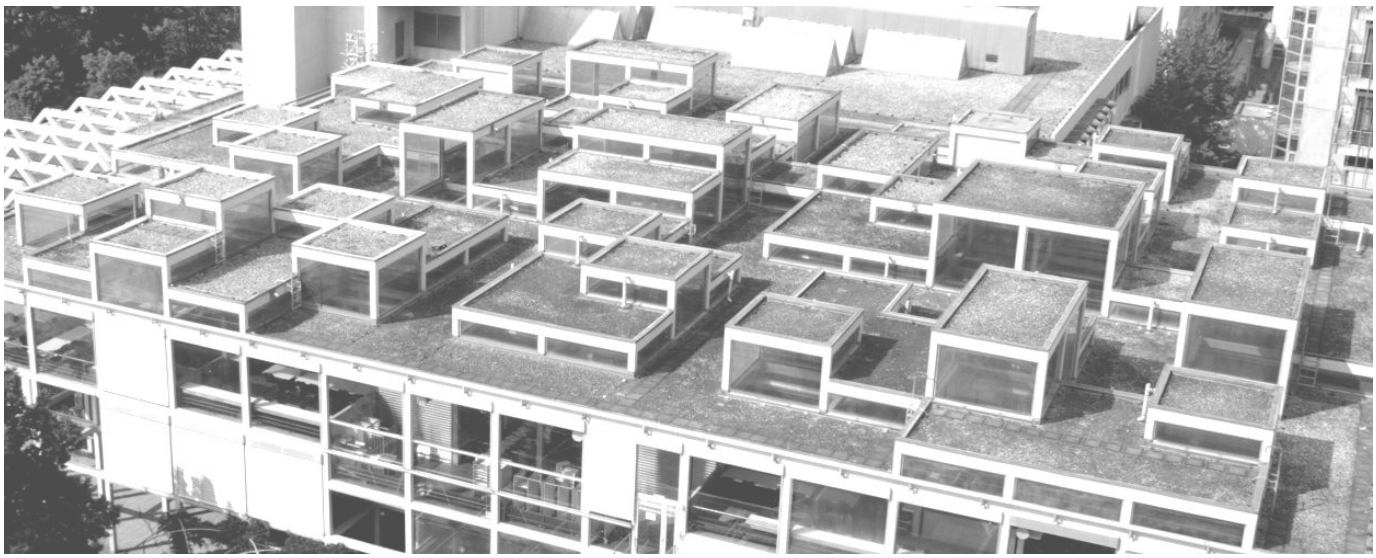
Proposition A3C: Streckung und Verschiebung

Für $a \in \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}^n$ gilt $\mathrm{vol}_n(aQ + v) = |a|^n \, \mathrm{vol}_n(Q)$.

Übung: Zeigen Sie dies! Zu Streckung und Stauchung siehe Satz A4I.

☺ Im allgemeinen Transformationssatz C2B führen wir diese Idee fort.

Grundidee: Das Integral misst das Volumen.



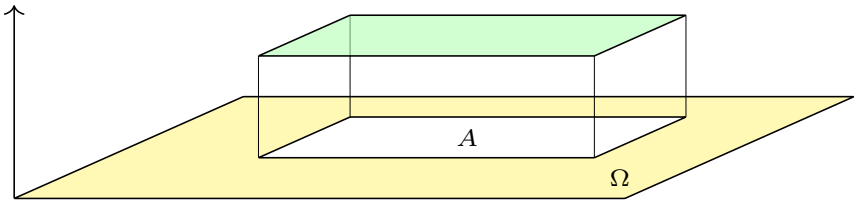
Die Mensa der Universität Stuttgart auf dem Campus Vaihingen
aus Sicht der Mathematik (Pfaffenwaldring 57, 7. Stock)

Die Dachfläche können wir uns als Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ vorstellen.
Das Integral $\int_\Omega f$ misst das Volumen unter dem Funktionsgraphen.
Dies lässt sich für Treppenfunktionen besonders leicht ausrechnen.
Hierzu nutzen wir die folgende Notation und einfache Integralformel.

Indikatorfunktionen

Die **Indikatorfunktion** einer Teilmenge $A \subseteq \Omega$ definieren wir durch

$$\mathbf{I}_A \,:\, \Omega \to \mathbb{R} \,:\, x \mapsto \mathbf{I}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{für } x \notin A. \end{cases}$$



Das Integral misst das Volumen unter dem Funktionsgraphen, hier also

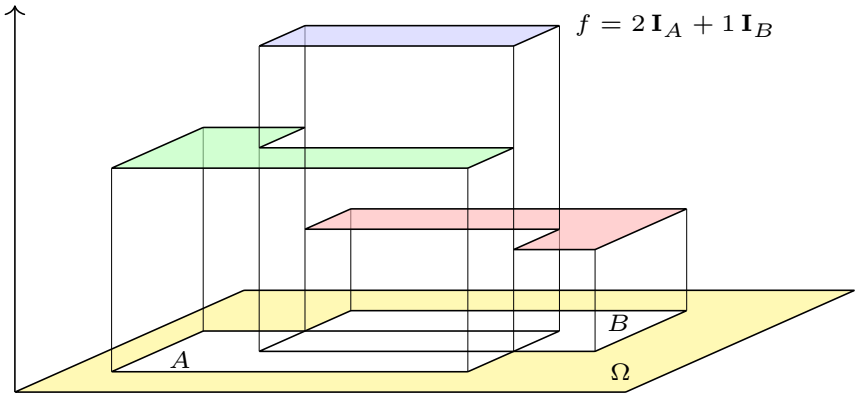
$$\int_\Omega \mathbf{I}_A = \mathrm{vol}_n(A) \quad \text{und allgemein} \quad \int_\Omega c\,\mathbf{I}_A = c\,\mathrm{vol}_n(A).$$

☺ Dies ist die bewährte Regel „Volumen = Grundfläche mal Höhe“.
Sie ist der Ausgangspunkt für die Integration, die wir nun ausführen.
Hierzu betrachten wir Indikatorfunktionen von Quadern $A \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$
und bilden daraus die Treppenfunktionen als Linearkombinationen.

Von Indikatorfunktionen zu Treppenfunktionen

Zu Quadern $Q_k \subseteq \Omega$ und $c_k \in \mathbb{R}$ definieren wir die **Treppenfunktion**

$$f = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \, \mathbf{I}_{Q_k} \, .$$



Das Integral misst das Volumen unter dem Funktionsgraphen, hier also

$$\int_\Omega f = \int_\Omega \left[\sum_{k=1}^{\ell} c_k \, \mathbf{I}_{Q_k} \right] = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \left[\int_\Omega \mathbf{I}_{Q_k} \right] = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \, \mathrm{vol}_n(Q_k).$$

☺ Die Menge $T(\Omega)$ aller Treppenfunktionen ist ein $\mathbb{R}$–Vektorraum. Hierauf ist das Integral $\int_\Omega : T(\Omega) \to \mathbb{R}$ normiert, linear und monoton. Das ist anschaulich plausibel; wir rechnen es später sorgfältig nach: zunächst eindimensional B1A, dann induktiv mehrdimensional C1A.

Von Indikatorfunktionen zu Treppenfunktionen

Treppenfunktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ sind Linearkombinationen von Indikatorfunktionen $\mathbf{I}_Q$ endlicher Quader $Q \subseteq \Omega$. Anders gesagt, die Indikatorfunktionen $\mathbf{I}_Q$ sind ein Erzeugendensystem von $T(\Omega)$.

Sie sind jedoch keine Basis: Die Darstellung $f = \sum_{k=1}^{r} c_k \, \mathbf{I}_{Q_k}$ ist keineswegs eindeutig! Man kann jede Treppenfunktion f auf unendlich viele Weisen als Summe $f = \sum_{k=1}^{s} c'_k \, \mathbf{I}_{Q'_k}$ schreiben.

Glücklicherweise ist das obige Integral $\int f$ dennoch wohldefiniert, wie wir in B1A und C1A nachrechnen: Aus $\sum_{k=1}^{r} c_k \, \mathbf{I}_{Q_k} = \sum_{k=1}^{s} c'_k \, \mathbf{I}_{Q'_k}$ folgt tatsächlich $\sum_{k=1}^{r} c_k \, \mathrm{vol}_n(Q_k) = \sum_{k=1}^{s} c'_k \, \mathrm{vol}_n(Q'_k)$. Alles wird gut!

Die Quader Q_k dürfen sich überlappen, man kann sie aber auch stets disjunkt wählen. Die Treppenfunktion f der obigen Skizze zum Beispiel kann man darstellen als Summe über zwei Rechtecke, oder auch als Summe über (mindestens fünf) disjunkte Rechtecke. Sehen Sie wie?

Hieraus folgen weitere schöne Eigenschaften: Mit f, g sind auch das Produkt $f \cdot g$ sowie $\min(f, g)$ und $\max(f, g)$ Treppenfunktionen. Das Integral ist zudem monoton, das heißt, aus $f \le g$ folgt $\int f \le \int g$.

Definition: messbare Funktionen und ihr Integral

A309

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader. Messbare Funktionen $f : \Omega \to [0, \infty]$ und ihr Integral $\int_\Omega f \in [0, \infty]$ definieren wir nach folgenden fünf Grundregeln:

(1) **Normierung:** Für jeden endlichen Quader $A \subseteq \Omega$ ist die zugehörige Indikatorfunktion $\mathbf{I}_A : \Omega \to [0, \infty]$ messbar, und es gilt $\int_\Omega \mathbf{I}_A = \mathrm{vol}_n(A)$.
☺ Speziell für die Nullfunktion $0 = \mathbf{I}_\emptyset$ folgt daraus $\int_\Omega 0 = 0$.

(2) **Linearität:** Sind f, g messbar, so auch jede Positivkombination $af + bg$ mit $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, und es gilt $\int_\Omega (af + bg) = a \int_\Omega f + b \int_\Omega g$.

(3) **Monotonie:** Sind f, g messbar, so auch $h = \max(g - f, 0)$.
☺ Aus $f \leq g$ folgt $h = g - f$ und $\int_\Omega f \leq \int_\Omega g$ dank Additivität (2).

(4) **Einschachtelung:** Gilt $f_0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq h \leq \ldots \leq g_2 \leq g_1 \leq g_0$ mit f_k, g_k messbar und $\int_\Omega (g_k - f_k) \searrow 0$, so ist auch h messbar.
☺ Dank Monotonie (3) folgt daraus $\int_\Omega f_k \nearrow \int_\Omega h \swarrow \int_\Omega g_k$.

(5) **Ausschöpfung:** Sind $f_0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ messbar mit $f_k \nearrow f$, so ist auch f messbar, und es gilt $\int_\Omega f_k \nearrow \int_\Omega f$ (monotone Konvergenz).
☺ Genial einfach. Einfach genial. Das alles passt auf eine Postkarte.

Ist diese Definition gut und sinnvoll?

A310
Ausführung

Wir formulieren hier sorgsam, welche grundlegenden Eigenschaften (1–5) das Integral haben soll. Hieraus werden wir alle nötigen Rechenregeln ableiten, sowie zahlreiche Tricks und Kunstgriffe. Man könnte befürchten, dass wir hier zu wenig verlangen, und sich unser Integralbegriff später als unzureichend erweist. Die Erfahrung zeigt, dass dies nicht der Fall ist: Die obige Definition ist das Destillat einer jahrhundertelangen Entwicklung und hat sich als Grundlage überall bewährt.

Es könnte andererseits auch sein, dass wir hier zu viel verlangen, und sich diese Wünsche nicht erfüllen lassen. Was kann schiefgehen? Man könnte etwa befürchten, dass einer Funktion f auf einem Rechenweg das Integral $\int_\Omega f = 42$ zugeordnet wird, und auf einem anderen Rechenweg das Integral $\int_\Omega f = 17$. Unsere Definition wäre dann in sich widersprüchlich und somit wertlos. Solche warnenden Beispiele begegnen uns tatsächlich bei falscher Anwendung des HDI B415, des Satzes von Fubini C409 C413 oder Grenzwerten unter dem Integral D101 D409.

Kurz gesagt: Wir dürfen uns vieles wünschen, aber nicht alles ist erfüllbar. Vor allem müssen wir Mehrdeutigkeiten und Widersprüche vermeiden! Dies sicherzustellen, ist die Hauptaufgabe der mathematischen Ausarbeitung, die wir hier nicht unternehmen. Die folgenden Sätze besagen, dass die hier gegebene Definition tatsächlich zu einem wohldefinierten Integralbegriff führt. Immerhin können wir so die zugrundliegenden Ideen präzise als Definitionen formulieren; das ist das bescheidene Ziel dieses Kapitels und die unverzichtbare Grundlage für alles Weitere.

The method of postulating what we want has many advantages;
they are the same as the advantages of theft over honest toil.
(Bertrand Russell, 1872–1970, *Introduction to Mathematical Philosophy*)

Wünsche (1–3) lassen sich erfüllen.

Satz A3D: Treppenfunktionen und ihr Integral

Wünsche (1–3) lassen sich erfüllen. Die kleinste Funktionenmenge, für die dies möglich ist, sind die **Treppenfunktionen** $f : \Omega \to [0, \infty[$,

$$f = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \, \mathbf{I}_{Q_k} \quad \text{mit } c_k \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ und } Q_k \subseteq \mathbb{R}^n \text{ endliche Quader.}$$

Hierauf ist das Integral eindeutig durch (1–3) bestimmt, denn es gilt

$$\int_\Omega f = \int_\Omega \left[\sum_{k=1}^{\ell} c_k \, \mathbf{I}_{Q_k} \right] = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \left[\int_\Omega \mathbf{I}_{Q_k} \right] = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \operatorname{vol}_n(Q_k).$$

Beweisidee: Eigenschaften (1–3) ziehen die obige Summenformel für das Integral nach sich. Umgekehrt ist diese Summenformel auf Treppenfunktionen wohldefiniert und erfüllt (1–3). Wohldefiniertheit ist trickreich: Wir beweisen sie sorgsam zunächst für Treppenfunktionen in Dimension $n = 1$ (Satz B1A), dann induktiv in jeder Dimension $n = 2, 3, 4, \ldots$ (Satz C1A).

Treppenfunktionen sind ein guter Ausgangspunkt, reichen aber für realistische Anwendungen noch nicht aus. Zu allgemeineren Funktionen gelangen wir durch Grenzübergang (4) und (5).

Wünsche (1–4) lassen sich erfüllen.

Bestünde die Welt nur aus Treppenfunktionen, so wären wir jetzt fertig. Allgemeinere Funktionen $f : \Omega \to [0, \infty]$ integrieren wir im Folgenden mit Hilfe von Treppenfunktionen durch Einschachtelung und Ausschöpfung.

Wir nutzen zunächst die Einschachtelung (4): Zum kompakten Quader Ω und jeder beschränkten Funktion $f : \Omega \to [0, \infty[$ definieren wir ihr

$$\text{Unterintegral } I(f) := \sup \left\{ \sum_{k=1}^{\ell} a_k \operatorname{vol}_n(A_k) \;\middle|\; \sum_{k=1}^{\ell} a_k \, \mathbf{I}_{A_k} \leq f \right\} \in [0, \infty[,$$

$$\text{Oberintegral } J(f) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\ell} b_k \operatorname{vol}_n(B_k) \;\middle|\; f \leq \sum_{k=1}^{\ell} b_k \, \mathbf{I}_{B_k} \right\} \in [0, \infty[,$$

wobei $A_k, B_k \subseteq \Omega$ Quader sind und $a_k, b_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ für alle $k = 1, \ldots, \ell$. Dank (3) folgt aus dieser Definition sofort die Ungleichung $I(f) \leq J(f)$.

Wir nennen f **Riemann–integrierbar**, wenn hierbei $I(f) = J(f)$ gilt; in diesem Falle definieren wir ihr **Integral** durch $\int_\Omega f := I(f) = J(f)$.

Man prüft geduldig alle Forderungen nach: Die Riemann–integrierbaren Funktionen und ihr Integral erfüllen alle Axiome (1–4), wie gewünscht.

Wünsche (1–4) lassen sich erfüllen.

Satz A3E: Riemann 1854, Darboux 1875

Wünsche (1–4) lassen sich erfüllen. Die kleinste Funktionenmenge, für die dies möglich ist, sind die **Riemann–integrierbaren Funktionen** $f : \Omega \to [0, \infty[$. Hierauf ist das Integral eindeutig durch (1–4) bestimmt.

☺ Die Konstruktion über Riemann–Summen kennen Sie aus der HM2.

☺ Diese Menge enthält alle Treppenfunktionen und noch viel mehr, z.B. stetige Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ auf kompakten Quadern $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$.

☹ Viele für uns wichtige Funktionen sind nicht Riemann–integrierbar.

Satz A3F: Charakterisierung R-integrierbarer Funktionen

Genau dann ist f Riemann–integrierbar, wenn f beschränkten Träger und beschränkten Wertebereich hat und zudem fast überall stetig ist.

Beschränkter Träger heißt: Es gibt einen kompakten Quader $Q \Subset \Omega$, sodass $f(x) = 0$ für alle $x \notin Q$ gilt. Beschränkter Wertebereich heißt: Es gibt ein kompaktes Intervall $[a, b] \Subset \mathbb{R}$, sodass $f(\Omega) \subseteq [a, b]$ gilt. Insbesondere darf f keine Polstellen haben, sonst wäre sie unbeschränkt. Fast überall stetig heißt: Für die Menge $U \subseteq \Omega$ der Unstetigkeitsstellen gilt $\mathrm{vol}_n(U) = 0$.

Von Riemann zu Lebesgue

Das Integrationsprinzip durch Einschachtelung geht zurück auf Bernhard Riemann: *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*, Habilitationsschrift 1854. Der Satz A3E von Riemann besagt, dass wir über Treppenfunktionen und Einschachtelung einen sinnvollen Integralbegriff erhalten. (Die Bedingung $f \geq 0$ spielt hierbei noch keine Rolle.)

Das Einschachtelungsprinzip kann man direkt zur numerischen Näherung nutzen, insbesondere wenn eine exakte Rechnung zu aufwändig ist – oder in geschlossener Form gar unmöglich ist.

Satz A3F charakterisiert die Riemann–integrierbaren Funktionen. Einerseits ist diese Menge recht groß: Sie enthält alle stetigen Funktionen. Andererseits sind viele wichtige Funktionen nicht Riemann–integrierbar, insbesondere solche mit Polstellen oder unbeschränktem Träger.

Man kann versuchen, „Integration light“ zu lehren, und zum Beispiel die Entwicklung bei Riemann im 19. Jahrhundert enden zu lassen. Selbst in einfachen Anwendungen wird jedoch mehr gebraucht! Deshalb will ich Ihnen die Errungenschaften des 20. Jahrhunderts mitgeben.

Das Integrationsprinzip durch Ausschöpfung geht zurück auf Henri Lebesgue: *Sur une généralisation de l'intégrale définie*, Comptes Rendus de l'Académie de Sciences 132 (1901), pp. 1025–1028. Der folgende Satz A3G von Lebesgue besagt, dass wir so einen sinnvollen und wohldefinierten Integralbegriff erhalten. Kurz gesagt: Lebesgue vervollständigt das von Riemann eingeführte Integral. Die Rechenregeln werden hierdurch wesentlich allgemeiner, flexibler und oft sogar einfacher! (Die Beweise sind etwas technischer, aber das ist hier nicht unsere Sorge.)

Die fünf Grundregeln erlauben *im Prinzip* bereits die Berechnung; *effiziente Rechenregeln* sind anschließend ein eigenes Thema. Wir werden einige davon in den nächsten Kapiteln erarbeiten.

Wünsche (1–5) lassen sich erfüllen.

Lassen sich die simplen aber strengen Anforderungen (1–5) erfüllen? Das ist keineswegs offensichtlich und war lange ein offenes Problem!

Henri Lebesgue verdanken wir folgende einfach-geniale Konstruktion: Wir erweitern endliche Riemann–Summen zu abzählbaren Reihen. Zu jeder nicht-negativen Funktion $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ definieren wir ihr

$$\text{Unterintegral } I(f) := \sup\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k \operatorname{vol}_n(A_k) \;\middle|\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathbf{I}_{A_k} \le f \right\} \in [0, \infty],$$

$$\text{Oberintegral } J(f) := \inf\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} b_k \operatorname{vol}_n(B_k) \;\middle|\; f \le \sum_{k=0}^{\infty} b_k \mathbf{I}_{B_k} \right\} \in [0, \infty],$$

wobei $A_k, B_k \subseteq \Omega$ endliche Quader sind und $a_k, b_k \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Man folgert aus dieser Definition zunächst die Ungleichung $I(f) \le J(f)$.

Die Funktion f nennen wir **Lebesgue–messbar**, wenn $I(f) = J(f)$ gilt; in diesem Falle definieren wir ihr **Integral** durch $\int_\Omega f := I(f) = J(f)$.

Man prüft geduldig alle Forderungen nach: Die Lebesgue–messbaren Funktionen und ihr Integral erfüllen alle Axiome (1–5), wie gewünscht.

Wünsche (1–5) lassen sich erfüllen.

Satz A3G: Lebesgue 1901

Wünsche (1–5) lassen sich erfüllen. Die kleinste Funktionenmenge, für die dies möglich ist, sind die **Lebesgue–messbaren Funktionen** $f : \Omega \to [0, \infty]$. Hierauf ist das Integral eindeutig durch (1–5) bestimmt.

☺ Die nächsten Kapitel entwickeln praktische Rechenmethoden.

Satz A3H: Messbarkeit ist unkaputtbar

(a) Alle Treppenfunktionen und alle stetigen Funktionen sind messbar.
(b) Mit f, g sind $f + g$ und $f \cdot g$ sowie $\min(f, g)$ und $\max(f, g)$ messbar.
(c) Konvergiert $f_k \to f$ und sind alle f_k messbar, so ist auch f messbar.

☺ Ganz einfach: Alle für uns wichtigen Funktionen sind messbar!

Die ersten beiden Aussagen gelten auch für Riemann–integrierbare Funktionen. Vollständigkeit unter Grenzübergängen gilt erst für die größere Klasse aller Lebesgue–messbaren Funktionen!

Im Folgenden werden wir Funktionen stets als messbar voraussetzen. Da wir in dieser Vorlesung keine einzige nicht-messbare Funktion sehen werden, könnte ich ebenso gut den vorsichtigen Zusatz „Sei f eine messbare Funktion…“ weglassen. Ich bringe das oft nicht übers Herz.

Integration über beliebige Bereiche

Bislang war der Integrationsbereich ein Quader $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, etwa $\Omega = \mathbb{R}^n$. Unsere Konstruktion gelingt ebenso für jede offene Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Integrale über beliebige Teilmengen $A \subseteq \Omega$ erklären wir wie folgt:

Definition A3I: Integration über beliebige Bereiche

Zu jeder Funktion $f : \Omega \supseteq A \to [0, \infty]$ definieren wir ihre **Fortsetzung**

$$\tilde{f} \,:\, \Omega \to [0,\infty] \,:\, x \mapsto \tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{für } x \notin A. \end{cases}$$

Wir nennen die Funktion f auf A **messbar**, wenn ihre Fortsetzung $\tilde{f}$ auf Ω messbar ist. In diesem Falle definieren wir ihr **Integral** durch

$$\boxed{\int_A f(x)\,\mathrm{d}x := \int_\Omega \tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x.}$$

☺ Das nutzen wir häufig zur Integration über $A \subseteq \mathbb{R}^n$ in $\Omega = \mathbb{R}^n$. Damit lässt sich die Integration auf allgemeine Bereiche anwenden, insbesondere mit dem Satz von Fubini auf Normalbereiche (Kapitel C).

Volumen als Integral

Wir betrachten einen Integrationsbereich $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, zum Beispiel $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Satz A3J: messbare Mengen und ihr Volumen

Genau dann ist eine Menge $A \subseteq \Omega$ messbar, wenn ihre Indikatorfunktion $\mathbf{I}_A : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar ist. In diesem Falle gilt für ihr Volumen

$$\boxed{\mathrm{vol}_n(A) = \int_A 1\,\mathrm{d}x := \int_\Omega \mathbf{I}_A(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Ist die Funktion $f : \Omega \to [0, \infty]$ messbar, so auch $\mathbf{I}_A \cdot f$, und es gilt

$$\boxed{\int_A f(x)\,\mathrm{d}x := \int_\Omega \mathbf{I}_A(x)\, f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Sind diese Integral endlich, so nennen wir A bzw. f über A integrierbar.

☺ Wenn Sie integrieren können, dann können Sie damit auch Volumina bestimmen. Die Indikatorfunktion $\mathbf{I}_A$ schneidet außerhalb von A alles ab.

☺ Oft integrieren wir statt über A lieber über die schönere Menge Ω.

Rechenregeln für Indikatorfunktionen

Übung: (1) Für je zwei Teilmengen $A, B \subseteq \Omega$ gilt

$$\mathbf{I}_A \leq \mathbf{I}_B \quad \text{genau dann, wenn} \quad A \subseteq B.$$

(2) Für Schnitt und Vereinigung von Mengen gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{A\cap B} &= \min(\mathbf{I}_A, \mathbf{I}_B) \ = \mathbf{I}_A \cdot \mathbf{I}_B, \\ \mathbf{I}_{A\cup B} &= \max(\mathbf{I}_A, \mathbf{I}_B) = \mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B - \mathbf{I}_A \cdot \mathbf{I}_B\,. \end{aligned}$$

(3) Für Produkt und Summe von Indikatorfunktionen gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_A \cdot \mathbf{I}_B &= \mathbf{I}_{A\cap B}, \\ \mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B &= \mathbf{I}_{A\cup B} + \mathbf{I}_{A\cap B}\,. \end{aligned}$$

Bei disjunkter Vereinigung gilt $A \cap B = \emptyset$, und der letzte Term entfällt.

(4) Für das kartesische Produkt von zwei Mengen $A \subseteq \mathbb{R}^p$ und $B \subseteq \mathbb{R}^q$ sowie je zwei Punkte $x \in \mathbb{R}^p$ und $y \in \mathbb{R}^q$ gilt die Produktformel

$$\mathbf{I}_{A\times B}(x, y) = \mathbf{I}_A(x) \cdot \mathbf{I}_B(y).$$

Durch Integration erhalten wir hieraus die folgenden Rechenregeln.

Rechenregeln für das Volumen

Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar, so auch $A \cap B$ und $A \cup B$, und es gilt

$$\boxed{\mathrm{vol}(A) + \mathrm{vol}(B) = \mathrm{vol}(A \cup B) + \mathrm{vol}(A \cap B).}$$

Bei disjunkter Vereinigung entfällt der letzte Term, daher gilt

$$\boxed{\mathrm{vol}(A \cup B) = \mathrm{vol}(A) + \mathrm{vol}(B) \quad \text{falls} \quad A \cap B = \emptyset.}$$

Sind die Mengen $A_1, A_2, A_3, \ldots \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar, so gilt

$$\boxed{\mathrm{vol}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) \leq \mathrm{vol}(A_1) + \mathrm{vol}(A_2) + \mathrm{vol}(A_3) + \ldots.}$$

Gleichheit gilt, wenn alle $A_1, A_2, A_3, \ldots$ paarweise disjunkt sind.

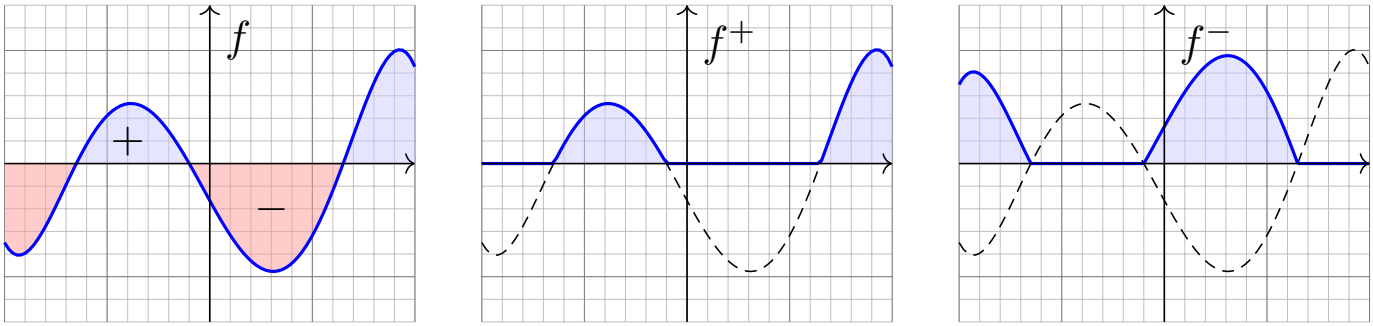
$$\boxed{A \subseteq B \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{vol}(A) \leq \mathrm{vol}(B).}$$

Sind $A \subseteq \mathbb{R}^p$ und $B \subseteq \mathbb{R}^q$ messbar, so auch $A \times B \subseteq \mathbb{R}^{p+q}$, und es gilt

$$\boxed{\mathrm{vol}(A \times B) = \mathrm{vol}(A) \cdot \mathrm{vol}(B).}$$

Positive und negative Beiträge zum Integral

Bislang haben wir das Integral nur für nicht-negative Funktionen erklärt; das entspricht der Idee des Volumens und vereinfacht die Formulierung. Zu integrieren sei nun eine Funktion $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$, wobei $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Wo immer f negativ ist, ist das Volumen negativ in Ansatz zu bringen.



Wir zerlegen $f = f^+ - f^-$ in **Positivteil** f^+ und **Negativteil** f^- gemäß

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } f(x) > 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{falls } f(x) < 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beim Integral soll f^- negativ zählen, also $\int_\Omega f := \int_\Omega f^+ - \int_\Omega f^-$.

⚠ Diese Differenz ist nur sinnvoll, wenn beide Integrale endlich sind.

Absolut integrierbare Funktionen und ihr Integral

Definition A3K: absolut integrierbare Funktionen und ihr Integral

Für jede Funktion $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ gilt $f = f^+ - f^-$ und $|f| = f^+ + f^-$.
Genau dann ist f **messbar**, wenn $f^\pm : \Omega \to [0, \infty]$ messbar sind.
(1) In diesem Falle ist auch $|f| = f^+ + f^-$ messbar, und somit gilt

$$\int_\Omega |f(x)| \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f^+(x) \, \mathrm{d}x + \int_\Omega f^-(x) \, \mathrm{d}x.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so nennen wir f **(absolut) integrierbar**.
In diesem Falle können wir das Integral von f definieren durch

$$\boxed{\int_\Omega f(x) \, \mathrm{d}x := \int_\Omega f^+(x) \, \mathrm{d}x - \int_\Omega f^-(x) \, \mathrm{d}x.}$$

⚠ Die Differenz $\infty - \infty$ ist sinnlos! Zur Integration von $f = f^+ - f^-$ müssen Positivteil f^+ und Negativteil f^- endliche Integrale liefern.

☺ Das Kriterium $\int_\Omega |f(x)| \, \mathrm{d}x < \infty$ ist einfach, präzise und bequem. Geschickte Abschätzung vermeidet die mühsame Berechnung von $f^\pm$.

Absolut integrierbare Funktionen und ihr Integral

Satz A3L: absolut integrierbare Funktionen und ihr Integral

Wir betrachten einen Integrationsbereich $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, zum Beispiel $\Omega = \mathbb{R}^n$. Die Menge aller (messbaren und) absolut integrierbaren Funktionen

$$L^1(\Omega) = L^1(\Omega, \mathbb{R}) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \;\middle|\; \int_\Omega |f(x)| \, \mathrm{d}x < \infty \right\}$$

ist ein $\mathbb{R}$–Vektorraum. Hierauf ist das Integral eine $\mathbb{R}$–lineare Abbildung

$$L^1(\Omega) \to \mathbb{R} \;:\; f \mapsto \int_\Omega f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Sie ist normiert, monoton, erfüllt Einschachtelung und Ausschöpfung. Durch diese fünf Eigenschaften ist das Integral eindeutig bestimmt.

☺ Damit haben wir die Konstruktion des Integrals abgeschlossen! Es erfüllt unsere Wunschliste und ist hierdurch eindeutig bestimmt.

Das so definierte Integral ist tatsächlich $\mathbb{R}$–linear. Das ist eine erste wichtige Rechenregel! Der Nachweis ist einfach, aber etwas länglich.

In den nächsten Kapiteln geht es um weitere praktische Rechenregeln. Die explizite Berechnung von Integralen erfordert Werkzeug und Übung!

Das Integral als Konstruktionsaufgabe

Wir haben in diesem Kapitel folgende **Konstruktionsaufgabe** gelöst:

$$(\text{integrierbare Funktion } f : \Omega \to \mathbb{R}) \;\mapsto\; \left(\text{Integral } \int_\Omega f(x) \, \mathrm{d}x\right)$$

Wie definieren wir das Integral? **Geometrische Bedeutung!**

- Quadervolumen für Treppenfunktionen.
- Einschachtelung für stetige Funktionen.
- Ausschöpfung zwecks Vollständigkeit.

Welche Funktionen sind messbar? **Alle für uns wichtigen!**

- Alle Treppenfunktionen
- Alle stetigen Funktionen
- Vollständig unter Grenzübergang

Wie gehen wir effizient damit um? **Praktische Rechenregeln!**

- Hauptsatz der Differential und Integralrechnung (B1I)
- Fubini (C1E): Reduktion auf iterierte eindimensionale Integrale
- Transformationssatz (C2B): Wahl neuer Variablen als Koordinaten

Komplexe Funktionen und ihr Integral

Viele Anwendungen nutzen neben reellen auch komplexe Funktionen.
Jede komplexe Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ können wir zerlegen in ihren

Realteil $\quad \operatorname{Re} f \,:\, \Omega \to \mathbb{R} \,:\, x \mapsto \operatorname{Re} f(x)$ und
Imaginärteil $\quad \operatorname{Im} f \,:\, \Omega \to \mathbb{R} \,:\, x \mapsto \operatorname{Im} f(x)$.

Hieraus lässt sich f zusammensetzen gemäß $f = \operatorname{Re} f + \mathrm{i} \operatorname{Im} f$.
Es gilt $|f|^2 = |\operatorname{Re} f|^2 + |\operatorname{Im} f|^2$ und $|\operatorname{Re} f|, |\operatorname{Im} f| \le |f| \le |\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f|$.

Definition A4A: absolut integrierbare Funktionen und ihr Integral

Wir nennen $f : \Omega \to \mathbb{C}$ **messbar**, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ messbar sind.
Wir nennen f **integrierbar**, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ integrierbar sind.
Äquivalent hierzu: die Funktion f ist messbar und $\int_\Omega |f| < \infty$.
In diesem Falle können wir das Integral von f definieren durch

$$\boxed{\int_\Omega f := \int_\Omega \operatorname{Re} f + \mathrm{i} \int_\Omega \operatorname{Im} f.}$$

Komplexe Funktionen und ihr Integral

Ebenso wie für reelle Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ bilden auch für komplexe Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{C}$ die absolut integrierbaren einen Vektorraum:

Satz A4B: absolut integrierbare Funktionen und ihr Integral

Wir betrachten einen Integrationsbereich $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, zum Beispiel $\Omega = \mathbb{R}^n$.
Die Menge aller (messbaren und) absolut integrierbaren Funktionen

$$L^1(\Omega) = L^1(\Omega, \mathbb{C}) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C} \;\middle|\; \int_\Omega |f(x)| \,\mathrm{d}x < \infty \right\}$$

ist ein $\mathbb{C}$–Vektorraum. Hierauf ist das Integral eine $\mathbb{C}$–lineare Abbildung

$$L^1(\Omega) \to \mathbb{C} \,:\, f \mapsto \int_\Omega f(x) \,\mathrm{d}x.$$

☺ Wegen $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ ist das reelle Integral ein Spezialfall des komplexen. Über $\mathbb{R}$ nutzen wir zudem Monotonie, Einschachtelung, Ausschöpfung.

☺ Von $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{C}$ genügt die Zerlegung in Real- und Imaginärteil, und die $\mathbb{R}$–Linearität überträgt unsere Rechenregeln aufs komplexe Integral.

☺ Das so definierte Integral ist tatsächlich $\mathbb{C}$–linear. Das ist eine sehr nützliche Rechenregel! Der Nachweis ist einfach, aber etwas länglich.

Satz A4c: Zerlegung und Betragsabschätzung

Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und $f : A \cup B \to \mathbb{C}$ absolut integrierbar.

(1) Das Integral ist linear; dank $\mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B = \mathbf{I}_{A\cup B} + \mathbf{I}_{A\cap B}$ folgt daher:

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}x + \int_B f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{A\cup B} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{A\cap B} f(x)\,\mathrm{d}x$$

(2) Im Falle $\mathrm{vol}_n(A \cap B) = 0$ entfällt der letzte Term. Insbesondere:

$$\int_{A\cup B} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_A f(x)\,\mathrm{d}x + \int_B f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{falls } A \cap B = \emptyset$$

(3) Für den Betrag des Integrals gilt folgende Abschätzung:

$$\left|\int_A f(x)\,\mathrm{d}x\right| \;\le\; \int_A \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x \;\le\; \sup_A |f| \cdot \mathrm{vol}(A)$$

Bei diesem Produkt gilt die übliche Konvention $\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty = 0$.

Aufgabe: Rechnen Sie die Formeln aus A4c sorgfältig nach.

Lösung: (1) Mit A und B sind auch $A \cup B$ und $A \cap B$ messbar.
Wir setzen voraus, dass f auf $A \cup B$ absolut integrierbar ist,
also ebenso auf den Teilmengen A und B sowie $A \cap B$ dank

$$\mathbf{I}_A \cdot |f|, \quad \mathbf{I}_B \cdot |f|, \quad \mathbf{I}_{A\cap B} \cdot |f| \quad \le \quad \mathbf{I}_{A\cup B} \cdot |f|.$$

Für die Indikatorfunktionen wissen wir $\mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B = \mathbf{I}_{A\cup B} + \mathbf{I}_{A\cap B}$.
Multiplikation mit f und Linearität des Integrals ergeben sofort (1).

(2) Dies ist ein Spezialfall von (1) für $\mathrm{vol}_n(A \cap B) = 0$ dank (3).

(3) Ist f reell, so gilt $-|f| \le f \le |f| \le \sup|f|$, dank Monotonie also

$$-\int_A |f(x)|\,\mathrm{d}x \le \int_A f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_A |f(x)|\,\mathrm{d}x \le \sup_A |f| \cdot \mathrm{vol}(A).$$

Im allgemeinen Fall ist f komplex. Sei $z := \int f$. Der Fall $z = 0$ ist klar.
Wir untersuchen den Fall $z \neq 0$. Für $w := \overline{z}/|z|$ gilt $wz = |z| \in \mathbb{R}$, also:

$$\left|\int f\right| = w \int f = \int (wf) = \mathrm{Re} \int (wf) = \int \mathrm{Re}(wf) \le \int |wf| = \int |f|$$

Nullmengen sind vernachlässigbar.

☺ Mengen $N \subseteq \mathbb{R}^n$ vom Volumen Null sind meist vernachlässigbar.

Definition A4D: Nullmenge

Wir nennen $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine **Nullmenge**, wenn $\mathrm{vol}_n(N) = 0$ gilt.

Aus den Rechenregeln für Integral und Volumen A320 folgt für $n \geq 1$:

- Jede endliche / abzählbare Menge $N \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine Nullmenge.
- Jeder Teilraum $N \subseteq \mathbb{R}^n$ der Dimension $< n$ ist eine Nullmenge.
- Jede abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist eine Nullmenge.
- Jede Teilmenge einer Nullmenge ist selbst eine Nullmenge.

Satz A4E: Funktionen auf einer Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}^n$

Jede Funktion $f : N \to \bar{\mathbb{R}}$ ist integrierbar, und es gilt $\int_N f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
Dasselbe gilt für Funktionen $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ mit $\tilde{f}(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \smallsetminus N$.

Beweis: Dies folgt aus der Betragsabschätzung A4C:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x \right| = \left| \int_N f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \sup|f| \cdot \mathrm{vol}(N) = 0$$

Fast überall gleiche Funktionen

Definition A4F: Gleichheit fast überall

Seien $f, g : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ Funktionen. Es gilt $f = g$ **fast überall**, wenn

$$N = \{\, x \in \Omega \mid f(x) \neq g(x) \,\}$$

eine Nullmenge ist, also $\mathrm{vol}_n(N) = 0$ erfüllt. Das bedeutet $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \Omega$ bis auf eine Ausnahmemenge $N \subseteq \Omega$ vom Volumen Null.

☺ Wir dürfen integrierbare Funktionen auf jeder Nullmenge beliebig abändern, Integrierbarkeit und Integral bleiben dabei unverändert:

Satz A4G: Verschwindungs- und Vergleichssatz

1. Gilt $f = g$ fast überall und ist f integrierbar, so auch g, und es gilt $\int_A f = \int_A g$ für jede messbare Menge $A \subseteq \Omega$.
2. Genau dann gilt $\int_\Omega |f| = 0$, wenn $f = 0$ fast überall gilt.
3. Seien $f, g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ integrierbar. Genau dann gilt $\int_A f = \int_A g$ für jede messbare Menge $A \subseteq \Omega$, wenn $f = g$ fast überall gilt.

Fast überall gleiche Funktionen

☺ Zwei fast überall gleiche Funktionen verhalten sich bei Integration genau gleich. Wir dürfen und werden sie meist als gleich betrachten.

Beweis des Satzes: (1) Gilt $g = f$ fast überall, bis auf eine Nullmenge $N \subseteq \Omega$, so ist $h := g - f$ fast überall Null, somit integrierbar (A4E), also auch $g = f + h$. Für $A \subseteq \Omega$ messbar gilt $\int_A g = \int_{A \smallsetminus N} g + \int_N g = \int_{A \smallsetminus N} f + \int_N g = \int_A f$.

(2) Die Implikation „$\Leftarrow$“ folgt aus (1). Die Implikation “$\Rightarrow$“ sehen wir so: Sei $\int_\Omega |f| = 0$. Für $A_k := \{\, x \in \Omega \mid |f(x)| \geq \frac{1}{k} \,\}$ gilt $0 \leq \operatorname{vol}_n(A_k) \leq k \int |f| = 0$, also $\operatorname{vol}_n(A_k) = 0$. Die Menge $N := \{\, x \in \Omega \mid f(x) \neq 0 \,\} = \{\, x \in \Omega \mid |f(x)| > 0 \,\}$ ist abzählbare Vereinigung dieser Nullmengen, $N = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$. Daraus folgt $0 \leq \operatorname{vol}_n(N) \leq \sum_{k=1}^\infty \operatorname{vol}_n(A_k) = 0$, siehe Seite A320, also $\operatorname{vol}_n(N) = 0$. Alternativ: Aus $A_k \nearrow N$ folgt $0 = \operatorname{vol}_n(A_k) \nearrow \operatorname{vol}_n(N) = 0$.

(3) Die Implikation „$\Leftarrow$“ folgt aus (1). Die Implikation “$\Rightarrow$“ sehen wir dank (2) so: Die Menge $A = \{\, x \in \Omega \mid f(x) > g(x) \,\}$ ist messbar, und es gilt $\int_A (f - g) = 0$, also ist A eine Nullmenge. Ebenso ist $B = \{\, x \in \Omega \mid g(x) > f(x) \,\}$ eine Nullmenge. Somit ist auch ihre Vereinigung $N = A \cup B = \{\, x \in \Omega \mid f(x) \neq g(x) \,\}$ eine Nullmenge.

Entsprechend definieren wir „$f \leq g$ fast überall“ und „$f \geq g$ fast überall“. Ebenso sagen wir, es gilt punktweise Konvergenz $f_k \to f$ fast überall, wenn die Menge $N \subseteq \Omega$ aller Ausnahmepunkte eine Nullmenge ist, wenn also $f_k(x) \to f(x)$ für alle $x \in \Omega \smallsetminus N$ gilt sowie $\operatorname{vol}_n(N) = 0$.

Messung stetiger Funktionen durch Integrale

☺ Für *stetige* Funktionen können wir diesen Test wie folgt verschärfen:

Satz A4H: Verschwindungs- und Vergleichssatz

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Gilt $f(a) \neq 0$ für ein $a \in \Omega$, dann existiert ein (beliebig kleiner) Quader $Q \subseteq \Omega$ um a mit $\int_Q f(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$.

1. Gilt $\int_Q f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ für alle Quader $Q \subseteq \Omega$, so folgt $f = 0$.
2. Sind $g, h : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig und gilt $\int_Q g(x)\,\mathrm{d}x = \int_Q h(x)\,\mathrm{d}x$ für alle Quader $Q \subseteq \Omega$, so folgt $g = h$, also $g(x) = h(x)$ für alle $x \in \Omega$.

Beweis: Wir können $f(a) = 2b > 0$ annehmen. (Für $f(a) < 0$ betrachten wir $-f$ statt f.) Da Ω offen und f stetig ist, existiert um a ein kleiner Würfel $Q \subseteq \Omega$ mit Kantenlänge $\varepsilon > 0$, sodass $f(x) \geq b$ für alle $x \in Q$ gilt. Das bedeutet $f \cdot \mathbf{I}_Q \geq b \cdot \mathbf{I}_Q$, dank Monotonie des Integrals also $\int_Q f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_Q b\,\mathrm{d}x = b \operatorname{vol}_n(Q) = b\varepsilon^n > 0$. Hieraus folgt die Aussage (1).

Für (2) wenden wir (1) an auf die Differenz $f = g - h$ und folgern $f = 0$. □

Das Argument gilt nicht nur für offene Mengen, sondern ebenso für jeden Quader $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit nicht-leerem Inneren, und allgemeiner für jede Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, deren Randpunkte alle vom Inneren aus erreichbar sind: Gilt $\int_Q f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ für alle Quader $Q \subseteq \Omega$, so gilt $f = 0$ nach obigem Satz im Inneren von Ω, und dank Stetigkeit auf seinem Abschluss, also ganz Ω.

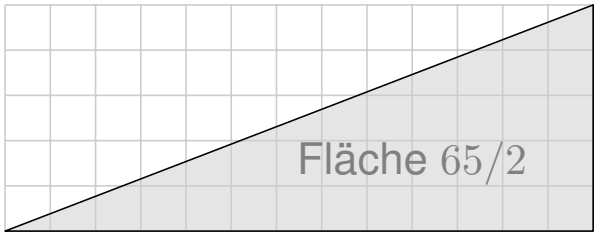
Verständnisfrage: das fehlende Quadrat

Wir können jeder messbaren Menge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ihren Flächeninhalt $\mathrm{vol}_2(A)$ zuordnen gemäß den fünf oben erklärten Grundregeln. A102 Hieraus berechnen wir die Fläche von Rechtecken, Dreiecken, usw.

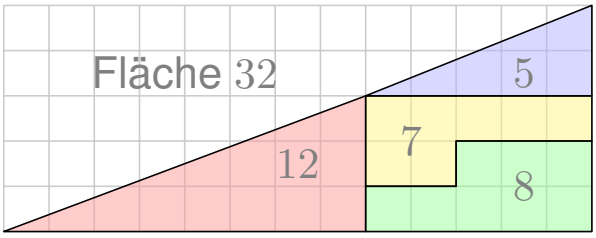
Es ist bemerkenswert, dass das Ergebnis immer eindeutig ist, insbesondere unabhängig vom Rechenweg! Oder etwa doch nicht?

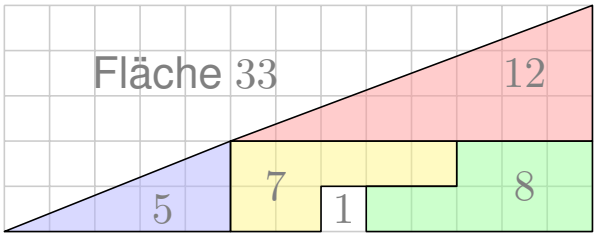
Wir zerlegen das rechtwinklige Dreieck Δ mit Kathetenlängen 13 und 5 wie skizziert und berechnen den Flächeninhalt $\mathrm{vol}_2(\Delta)$ auf drei Weisen:

Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck?



Ist die Antwort eindeutig?





Verständnisfrage: das fehlende Quadrat

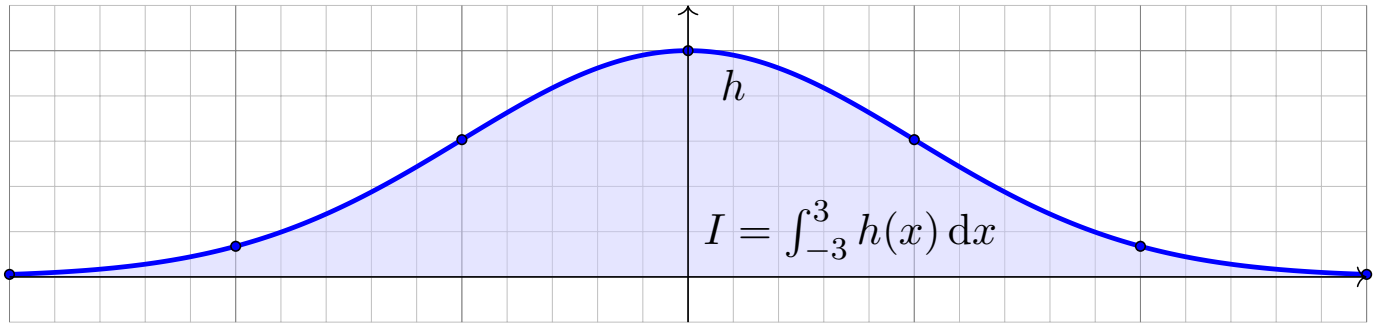
Für Volumen und Integral haben wir fünf Grundregeln: Normierung, Additivität / Linearität, Monotonie, Einschachtelung und Ausschöpfung. Satz A1A garantiert: Mit diesen fünf Grundregeln können wir jeder messbaren Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eindeutig ihr Volumen $\mathrm{vol}_n(A) \in [0, \infty]$ zuweisen und ausrechnen. Allgemeiner garantiert Satz A3G: Mit diesen fünf Grundregeln können wir jeder messbaren Funktion $f : \Omega \to [0, \infty]$ eindeutig ihr Integral $\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x \in [0, \infty]$ zuweisen und ausrechnen.

Die vorliegende Übung stellt diese zentrale Zusage auf die Probe! Sind die Sätze A1A und A3G falsch? Oder wo sonst liegt der Fehler?

Lösung: Die links gezeigten Mengen nennen wir A_5, A_7, A_8, A_{12}. Jede hat den angegebenen Flächeninhalt $\mathrm{vol}_2(A_k) = k$. Je zwei sind fast disjunkt: Ihr Schnitt $A_k \cap A_\ell$ ist eine Nullmenge, hat also Flächeninhalt $\mathrm{vol}_2(A_k \cap A_\ell) = 0$ für $k \neq \ell$. Dank unserer Rechenregeln erhalten wir für $A = A_5 \cup A_7 \cup A_8 \cup A_{12}$ demnach den Flächeninhalt $\mathrm{vol}_2(A) = 5 + 7 + 8 + 12 = 32$. Auf der rechten Seite betrachten wir entsprechend die Mengen $B_1, B_5, B_7, B_8, B_{12}$. Für ihre Vereinigung $B = B_1 \cup B_5 \cup B_7 \cup B_8 \cup B_{12}$ erhalten wir $\mathrm{vol}_2(B) = 1 + 5 + 7 + 8 + 12 = 33$.

Für das Dreieck Δ hingegen erhalten wir $\mathrm{vol}_2(\Delta) = 65/2 = 32.5$. Die Skizze suggeriert $A = \Delta = B$ und provoziert damit den Widerspruch. Bei genauerem Hinsehen erkennen Sie jedoch $A \subsetneq \Delta \subsetneq B$. Diese Einschachtelung zeigt $\mathrm{vol}_2(A) = 32 \leq \mathrm{vol}_2(\Delta) \leq 33 = \mathrm{vol}_2(B)$. Alles wird gut! Der einzige Fehler liegt hier in der leichtfertigen Behauptung $A = \Delta = B$.

Verständnisfrage: numerische Integration

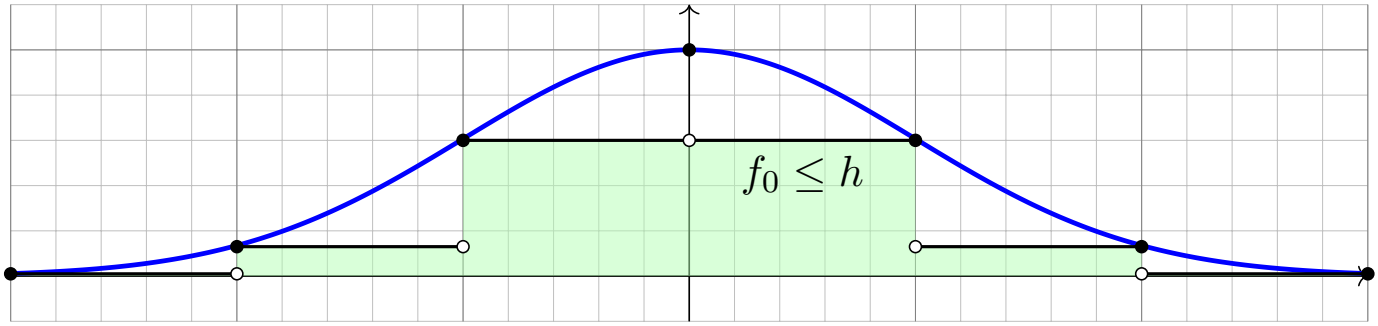


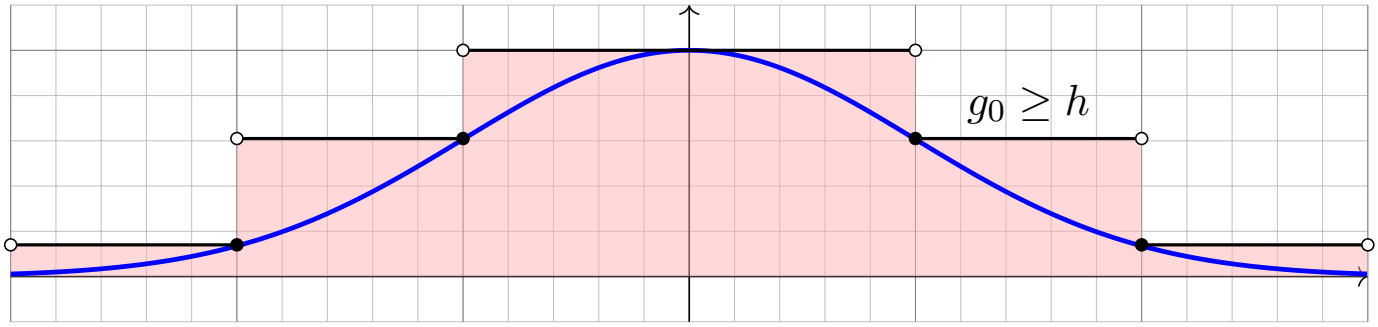
Die Funktion $h : [-3, 3] \to \mathbb{R}$ wächst auf $[-3, 0]$ und fällt auf $[0, 3]$.
Als Stützstellen haben wir nur die Daten $h(0) = 1$, $h(\pm 1) \in [0.60, 0.61]$, $h(\pm 2) \in [0.13, 0.14]$, $h(\pm 3) \in [0.01, 0.02]$ jeweils auf 10^{-2} genau.

Aufgabe: Wie groß ist $I = \int_{-3}^{3} h(x)\,\mathrm{d}x$ mindestens? höchstens?
Finden Sie die optimale Einschachtelung durch Treppenfunktionen!

Lösung: Die Monotonie von h und die gegebenen Stützstellen liefern $f_0 \le h \le g_0$ mit
$f_0 = 0.01\,\mathbf{I}_{[-3,-2[} + 0.13\,\mathbf{I}_{[-2,-1[} + 0.60\,\mathbf{I}_{[-1,0[} + \mathbf{I}_{\{0\}} + 0.60\,\mathbf{I}_{]0,1]} + 0.13\,\mathbf{I}_{]1,2]} + 0.01\,\mathbf{I}_{]2,3]}$,
$g_0 = 0.02\,\mathbf{I}_{\{-3\}} + 0.14\,\mathbf{I}_{]-3,-2]} + 0.61\,\mathbf{I}_{]-2,-1]} + \mathbf{I}_{]-1,1[} + 0.61\,\mathbf{I}_{[1,2[} + 0.14\,\mathbf{I}_{[2,3[} + 0.02\,\mathbf{I}_{\{3\}}$.
Dank Monotonie des Integrals erhalten wir die Schranken $A_0 \le I \le B_0$, hier mit den Werten
$A_0 = \int f_0(x)\mathrm{d}x = 0.01 + 0.13 + 0.60 + 0.60 + 0.13 + 0.01 = 1.48$,
$B_0 = \int g_0(x)\mathrm{d}x = 0.14 + 0.61 + 1.00 + 1.00 + 0.61 + 0.14 = 3.50$.
Dank richtiger Rundung ist diese Einschachtelung nachweislich korrekt und soweit optimal.

Verständnisfrage: numerische Integration





Allein aus diesen spärlichen Daten gewinnen wir eine (soweit optimale) Einschachtelung durch zwei Treppenfunktionen $f_0 \le h \le g_0$. Aus diesen berechnen wir möglichst genaue Ober- und Untergrenzen für das Integral $I = \int_{-3}^{3} h(x)\,\mathrm{d}x$. Die so berechneten Schranken sind leider noch sehr grob. Zwecks besserer Einschachtelung können wir die Rechnung durch weitere Stützstellen verfeinern und den verbleibenden Fehler beliebig klein machen, also $B_n - A_n \searrow 0$ erreichen. Dies ist der erste Schritt in numerischer Integration; mehr hierzu erfahren Sie in der Numerik.

Verständnisfragen: Rechenregeln

Aufgabe: Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze Begründung (ein Ergebnis der Vorlesung oder ein Gegenbeispiel).

(1) Gilt $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,\mathrm{d}x$?

(2) Gilt $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,\mathrm{d}x$?

(3) Aus $f \le g$ folgt $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,\mathrm{d}x$?

(4) Aus $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,\mathrm{d}x$ folgt $f \le g$?

(5) Gilt $|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x| = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,\mathrm{d}x$? oder $\ge$? oder $\le$?

(6) Aus $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,\mathrm{d}x = 0$ folgt $f = 0$? oder $f = 0$ fast überall?

(7) Aus $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,\mathrm{d}x = 0$ und f stetig folgt $f = 0$?

(8) Aus $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ folgt $f = 0$?

Hierbei seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar. (Der Fall $n = 1$ genügt, denn Skizzen sind dann leichter, der Fall $n \ge 2$ verläuft jeweils genauso.)

Lösung: (1) Ja, das Integral ist linear. (2) Nein, Gegenbeispiel $f = \mathbf{I}_{[0,1]}$ und $g = \mathbf{I}_{[2,3]}$. (3) Ja, das Integral ist monoton. (4) Nein, Gegenbeispiel $f = \mathbf{I}_{[0,1]} - \mathbf{I}_{[1,2]}$ und $g = 0$. (5) Für $f = \mathbf{I}_{[0,1]} - \mathbf{I}_{[1,2]}$ gilt „$<$“. Nur „$\le$“ gilt immer. (6) Nein, Gegenbeispiel $f = \mathbf{I}_{\{a\}}$. Es gilt nur $f = 0$ fast überall. (7) Ja, siehe oben. (8) Nein, Gegenbeispiel $f = \mathbf{I}_{[0,1]} - \mathbf{I}_{[1,2]}$.

Verständnisfragen: Rechenregeln

Sie kennen und nutzen die Rechenregeln der reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$: Assoziativität, Kommutativität, Neutrale, Inverse, Distributivität, Ordnung.

Aufgabe: (1) Formulieren Sie diese Rechenregeln einmal explizit aus. (2) Welche gelten noch für $(\bar{\mathbb{R}}, +, \cdot, <)$? (3) Welche für $([0, \infty], +, \cdot, <)$?

Lösung: (1) Zur Wiederholung zu $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §0.2. Die erweiterte Zahlengerade $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ haben wir auf Seite A205 erklärt: Addition, Multiplikation, Anordnung. Die kritischen Fälle sind $0 \cdot (\pm\infty) = 0$ und $\infty + (-\infty) = 0$.

(2) Für $(\bar{\mathbb{R}}, +, \cdot, <)$ ist die Null neutral bei Addition. Die Eins ist neutral bei Multiplikation. Kommutativität gilt offensichtlich nach Tabelle. Alles andere ist jedoch nicht mehr gültig: Das Assoziativgesetz gilt in $(\bar{\mathbb{R}}, +)$ nicht, denn $(\infty - \infty) + 1 = 0 + 1 = 1$ ist nicht gleich $\infty + (-\infty + 1) = \infty - \infty = 0$. Auch existiert zu $\pm\infty$ in $(\bar{\mathbb{R}}, \cdot)$ kein multiplikatives Inverses. Das vertraute Distributivgesetz $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ gilt ebenfalls nicht, denn $(\infty - 1) \cdot \infty = \infty \cdot \infty = \infty$ ist nicht gleich $(\infty \cdot \infty) + (-1 \cdot \infty) = \infty - \infty = 0$.

☹ Aus diesem Grund können wir in $(\bar{\mathbb{R}}, +, \cdot, <)$ nicht so schön einfach arbeiten wie in $\mathbb{R}$!

(3) Für $([0, \infty], +, \cdot, <)$ gelten alle Rechenregeln, bis auf die Existenz der Inversen. Man prüft dies wie in (2) geduldig und gewissenhaft für jede Rechenregel einzeln nach.

☺ Aus diesem Grund können wir in $[0, \infty]$ vernünftig arbeiten, zum Beispiel integrieren!

Verständnisfragen: Nullmengen

A415
Übung

Aufgabe: (1) Bestimmen Sie $\mathrm{vol}_1(\{a_1,\dots,a_n\})$, $\mathrm{vol}_1(\mathbb{Q})$ und $\mathrm{vol}_1(\mathbb{R})$.
(2) Berechnen Sie $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x$; hierbei seien $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ in $\mathbb{R}$ und die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ erfülle $f(x)=0$ für $x \notin \{a_1,a_2,\dots,a_n\}$.
(3) Berechnen Sie $\int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{d}x$; hierbei sei die Funktion $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gegeben durch $g(x)=x$ für $x\in\mathbb{N}$ und $g(x)=0$ für $x\notin\mathbb{N}$.
(4) Bestimmen und vergleichen Sie das Volumen $\mathrm{vol}_2(\mathbb{R}\times\{a\})$ sowie

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{\mathbb{R}\times\{a\}}(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x := \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad f(x) := \int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{\mathbb{R}\times\{a\}}(x,y)\,\mathrm{d}y,$$
$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{\mathbb{R}\times\{a\}}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y := \int_{\mathbb{R}} g(y)\,\mathrm{d}y, \quad g(y) := \int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{\mathbb{R}\times\{a\}}(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

Lösung: (1) Für $x\in\mathbb{R}^n$ ist $\{x\}=[x_1,x_1]\times\dots\times[x_n,x_n]$ ein Quader mit $\mathrm{vol}_n(\{x\})=0$. Aus der Additivität des Volumens folgt $\mathrm{vol}_n(\{a_1,\dots,a_n\})=0$ für jede *endliche* Menge. Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist *abzählbar*, also $\mathbb{Q}=\{a_0,a_1,a_2,\dots\}$. (Warum?) Durch Ausschöpfung folgt $\mathrm{vol}_1(\mathbb{Q}) = \lim \mathrm{vol}_1(\{a_1,\dots,a_n\}) = \lim 0 = 0$.

(2) Es gilt $f=\sum_{i=1}^n f(a_i)\,\mathbf{I}_{\{a_i\}}$, dank Linearität $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n f(a_i)\,\mathrm{vol}_1(\{a_i\}) = 0$.

(3) Wir schöpfen g aus durch die Funktionen $g_k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $g_k(x)=x$ für $x\in\{1,\dots,k\}$ und $g_k(x)=0$ sonst. Es gilt $g_k \nearrow g$, also $\int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}} g_k(x)\,\mathrm{d}x = 0$ dank (2).

Verständnisfragen: Doppelintegrale

A416
Übung

Wir untersuchen für $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ die Gültigkeit folgender Gleichung:

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \overset{?}{=} \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \overset{?}{=} \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$$

Sie gilt für sehr viele Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ aber nicht für alle!

Aufgabe: (0) Gilt $\mathbf{I}_{[a,b]\times[c,d]}(x,y) = \mathbf{I}_{[a,b]}(x)\cdot\mathbf{I}_{[c,d]}(y)$ für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$? Gilt für $X\subseteq\mathbb{R}^p$ und $Y\subseteq\mathbb{R}^q$ allgemein $\mathbf{I}_{X\times Y}(x,y) = \mathbf{I}_X(x)\cdot\mathbf{I}_Y(y)$?
(1) Berechnen und vergleichen Sie die drei obigen Integrale für die Indikatorfunktion $f=\mathbf{I}_Q$ eines Rechtecks $Q=[a,b]\times[c,d]\subseteq\mathbb{R}^2$.
(2) Gilt die Gleichung für alle Treppenfunktionen $f=\sum_{k=1}^\ell c_k\,\mathbf{I}_{Q_k}$? Bleibt sie erhalten bei Linearkombinationen $f=\sum_{k=1}^n c_k f_k$?
(3) Bleibt sie erhalten bei monotoner Konvergenz $f_k \nearrow f$?
(4) Skizzieren Sie $f=\sum_{k=0}^\infty \mathbf{I}_{[k,k+1]\times[k,k+1]} - \mathbf{I}_{[k+1,k+2]\times[k,k+1]}$. C414
Berechnen und vergleichen und bestaunen Sie die Doppelintegrale!

Lösung: Dies führen wir am Anfang von Kapitel C aus. Die Rechnungen beruhen allein auf der Definition des Integrals und sind schon jetzt unmittelbar möglich. Sie sind eine gute Übung, um sich mit dem zweidimensionalen Integral und dem Satz von Fubini vertraut zu machen!

Verständnisfragen: Dehnübungen

Aufgabe: Skizzieren Sie die Indikatorfunktion $f = \mathbf{I}_{[0,2]}$ sowie ihre Integralfunktion $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ und bestimmen Sie $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Dasselbe für $g = \mathbf{I}_{[1,4]}$, die Linearkombination $h = 2f + 3g$, das Produkt $k = f \cdot g$, die Skalierung $\ell = f(2x-6)$ und allgemein $f(ax)$ und $f(x+b)$.

Wie verhält sich das Integral $\int_{\mathbb{R}} \ldots\,\mathrm{d}x$ unter diesen Operationen?

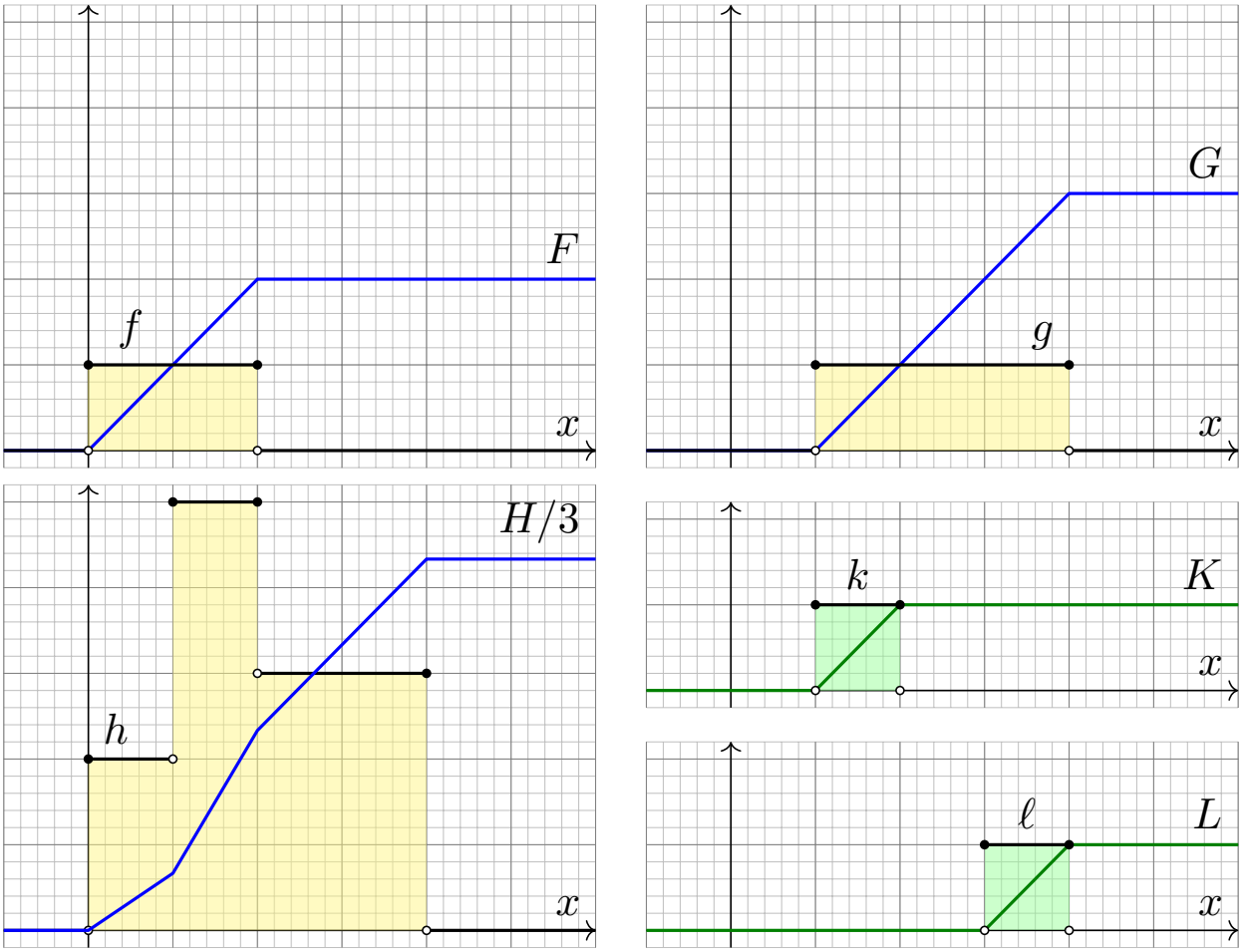
Lösung: Es gilt $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ und $\int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{d}x = 3$. (Skizze!) Funktionen werden punktweise verknüpft, daher bleiben Summe und Produkt von Indikatorfunktionen stückweise konstant. Insbesondere sind auch Linearkombination $h = 2f + 3g$ und Produkt $k = f \cdot g$ wieder Treppenfunktionen, allerdings im Allgemeinen zu feineren Unterteilungen. (Skizze!)

Das Integral ist $\mathbb{R}$–linear, hier $\int_{\mathbb{R}} 2f(x) + 3g(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{d}x = 13$. Das Integral ist insbesondere additiv, aber im Allgemeinen nicht multiplikativ! In unserem Beispiel gilt $f \cdot g = \mathbf{I}_{[1,2]}$, also $\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 1 \neq \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{d}x = 2 \cdot 3$.

Bei $f(x+b)$ wird f um b nach links (!) verschoben. Bei $f(ax)$ wird f um a gestaucht (!), d.h. $f(2x)$ hat die halbe Breite. Die Funktion $f(2x-6)$ entsteht aus f durch Verschieben um 6 nach rechts und anschließendes Stauchen um den Faktor 2. In unserem Beispiel $f = \mathbf{I}_{[0,2]}$ gilt somit $f(2x) = \mathbf{I}_{[0,1]}(x)$ und $f(x-6) = \mathbf{I}_{[6,8]}$ sowie $f(2x-6) = \mathbf{I}_{[3,4]}(x)$. Skizze! Punktprobe!

Das Integral ist invariant unter Verschiebung, aber $\int_{\mathbb{R}} f(ax)\,\mathrm{d}x = |a|^{-1}\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x$ für $a \neq 0$. Dies ist anschaulich der Flächeninhalt der in x–Richtung um den Faktor a gestauchten Funktion.

Verständnisfragen: Dehnübungen



Verständnisfragen: Verschiebung und Skalierung

Aufgabe: Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f = \mathbf{I}_Q$ seine Indikatorfunktion.

(1) Sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : g(x) = f(x - v)$ die um $v \in \mathbb{R}$ verschobene Funktion.
Ist auch g eine Indikatorfunktion? eines Quaders? Welches Quaders?
Welche Beziehung gilt zwischen $\int_{\mathbb{R}^n} f(x - v)\,\mathrm{d}x$ und $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x$?

(2) Sei $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : g(x) = f(c^{-1}x)$ die um $c \in \mathbb{R}_{>0}$ gestreckte Funktion.
Ist auch h eine Indikatorfunktion? eines Quaders? Welches Quaders?
Welche Beziehung gilt zwischen $\int_{\mathbb{R}^n} f(c^{-1}x)\,\mathrm{d}x$ und $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x$?

Lösung: (1) In Dimension $n = 1$ betrachten wir Intervalle $Q = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$:
Genau dann gilt $x - v \in [a, b]$, wenn $x \in [a + v, b + v]$ erfüllt ist.

Allgemein für jede Teilmenge $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ und jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ gilt
$x - v \in Q$ genau dann, wenn $x \in Q + v := \{\, q + v \mid q \in Q \,\}$ erfüllt ist.

Zum Quader $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$ und $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$
gilt hierbei $Q + v = [a_1 + v_1, b_1 + v_1] \times \cdots \times [a_n + v_n, b_n + v_n] \subseteq \mathbb{R}^n$.

Für $f = \mathbf{I}_Q$ gilt demnach $g(x) = f(x - v) = \mathbf{I}_{Q+v}(x)$, also $g = \mathbf{I}_{Q+v}$.
Nach Definition A3B gilt $\mathrm{vol}_n(Q + v) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n) = \mathrm{vol}_n(Q)$.

☺ Wir erhalten hier also $\int_{\mathbb{R}^n} f(x - v)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x$. Gut zu wissen!

Verständnisfragen: Verschiebung und Skalierung

(2) In Dimension $n = 1$ betrachten wir Intervalle $Q = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$:
Im Falle $c > 0$ gilt $c^{-1}x \in [a, b]$ genau dann, wenn $x \in [ca, cb]$ erfüllt ist.
Im Falle $c < 0$ gilt $c^{-1}x \in [a, b]$ genau dann, wenn $x \in [cb, ca]$ erfüllt ist.

Allgemein für jede Teilmenge $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ und jeden Faktor $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
gilt $c^{-1}x \in Q$ genau dann, wenn $x \in c\,Q := \{\, cq \mid q \in Q \,\}$ erfüllt ist.

Zum Quader $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist hierbei
$c\,Q = [ca_1, cb_1] \times \cdots \times [ca_n, cb_n] \subseteq \mathbb{R}^n$ der um c gestreckte Quader.

Für $c \in \mathbb{R}_{\leq 0}$ gilt entsprechend $c\,Q = [cb_1, ca_1] \times \cdots \times [cb_n, ca_n] \subseteq \mathbb{R}^n$:
Die Streckung um den Faktor -1 ist eine Punktspiegelung am Ursprung.

Für $f = \mathbf{I}_Q$ gilt demnach $h(x) = f(c^{-1}x) = \mathbf{I}_{c\,Q}(x)$, also $g = \mathbf{I}_{c\,Q}$.
Nach Definition A3B gilt für das Quadervolumen bei Streckung:

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_n(c\,Q) &= |cb_1 - ca_1| \cdots |cb_n - ca_n| \\ &= |c|^n (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n) = |c|^n \,\mathrm{vol}_n(Q)\end{aligned}$$

☺ Wir erhalten hier also $\int_{\mathbb{R}^n} f(c^{-1}x)\,\mathrm{d}x = |c|^n \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x$.
Ist das anschaulich klar? Machen Sie es sich klar!

Satz A4I: Translationsinvarianz, Streckung und Stauchung

Gegeben sei eine messbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sowie ein beliebiger Streckfaktor $a \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ und ein Verschiebungsvektor $b \in \mathbb{R}^n$.
(1) Dann ist auch die Funktion $x \mapsto f(ax+b)$ messbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \big|f(ax+b)\big| \,\mathrm{d}x = \frac{1}{|a|^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \,\mathrm{d}x.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so ist f absolut integrierbar, und dann gilt

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^n} f(ax+b) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{|a|^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \,\mathrm{d}x.}$$

Verschiebung um einen Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ ändert den Wert des Integrals nicht. Stauchung um den Faktor a multipliziert das Integral mit $1/|a|^n$.

Ausblick: Transformation von Integralen werden wir in Kapitel C mit dem Transformationssatz wesentlich allgemeiner formulieren und zu einer zentralen praktischen Rechentechnik ausbauen. Speziell Verschiebung und Stauchung sind nützlich und dienen hier als erste schöne Illustration.

Aufgabe: Folgern Sie den Satz aus den fünf Grundregeln des Integrals:
(1) Gilt die Aussage für Indikatorfunktionen $f = \mathbf{I}_Q$ von Quadern?
(2) Überträgt sie sich auf Treppenfunktionen $f = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \, \mathbf{I}_{Q_k}$?
(3) Bleibt sie erhalten bei Einschachtelung und Ausschöpfung?
(4) Bleibt sie erhalten bei Zerlegung in Positiv- und Negativteil?

Lösung: (1) Ja, dies haben wir in der vorigen Aufgabe nachgerechnet.
(2) Dank Linearität des Integrals gilt dann für jede Treppenfunktion:

$$\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \int \sum_{k=1}^{\ell} c_k \, \mathbf{I}_{Q_k}(ax+b)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \int \mathbf{I}_{Q_k}(ax+b)\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{k=1}^{\ell} \frac{c_k}{|a|^n} \int \mathbf{I}_{Q_k}(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{|a|^n} \sum_{k=1}^{\ell} c_k \int \mathbf{I}_{Q_k}(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{|a|^n} \int f(x)\mathrm{d}x$$

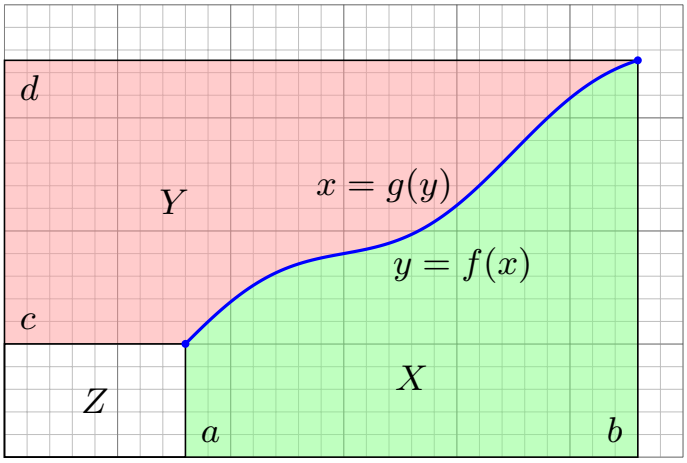
Die Aussage bleibt erhalten bei (3) Einschachtelung und Ausschöpfung und schließlich auch bei (4) Zerlegung in Positiv- und Negativteil.
(Übung: Schreiben Sie dies wie in (2) ebenso geduldig aus.)
Somit gilt die Aussage für alle messbaren Funktionen.

Integral der Umkehrfunktion: von $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ zu $\int_c^d f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y$

Die Funktion $f\colon [a,b] \to [c,d]$ sei stetig und streng monoton wachsend von $f(a) = c$ nach $f(b) = d$, mit $0 \le a < b$ und $0 \le c < d$. Dann existiert die Umkehrfunktion $g\colon [c,d] \to [a,b]$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_{[a,b]}$ und $f \circ g = \mathrm{id}_{[c,d]}$. Auch g ist dann streng monoton wachsend, von $g(c) = a$ nach $g(d) = b$.

Aufgabe: Die folgende Gleichung ist herzuleiten bzw. nachzuweisen:

$$\int_{x=a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{y=c}^{d} g(y)\,\mathrm{d}y = bd - ac$$



Lösung: Die Graphik zeigt den geometrischen Beweis, ganz ohne Rechnung, gar ohne Worte. Falls gewünscht, hier die Worte: Das Rechteck $Q = [0,b] \times [0,d] = X \cup Y \cup Z$ besteht aus $X = \{\, (x,y) \mid a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x) \,\}$, $Y = \{\, (x,y) \mid c \le y \le d,\ 0 \le x \le g(y) \,\}$ und $Z = [0,a[\, \times [0,c[$. Die drei Flächeninhalte addieren sich, denn $X \cap Z = Y \cap Z = \emptyset$ und $\mathrm{vol}_2(X \cap Y) = 0$. Mit $\mathrm{vol}_2(X) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ und $\mathrm{vol}_2(Y) = \int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y$ folgt die Gleichung. (Allgemein: Youngs Integralungleichung C4K)

Integral der Umkehrfunktion: von $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ zu $\int_c^d f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y$

Die Gleichung ist überraschend einfach, und der Beweis ist einfach-genial. Ist das nur ein naiver Taschenspielertrick, oder können wir die Rechnung begründen? Was genau benötigen wir dazu?

Erste Methode: Wir nutzen die (fast) disjunkte Vereinigung $Q = X \cup Y \cup Z$ und „Das Integral ist der Flächeninhalt unter dem Graphen.“ Eine präzise, universelle Begründung liefert der Satz von Fubini C1E: Die zu messenden Mengen X und Y sowie $X \cap Y$ sind Normalbereiche (C1G), daher gilt $\mathrm{vol}_2(X) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ und $\mathrm{vol}_2(Y) = \int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y$ sowie $\mathrm{vol}_2(X \cap Y) = 0$. (C1H)

Zweite Methode: Wir nutzen den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI, B1I). Zu f und g existieren Stammfunktionen F und G. Die behauptete Formel besagt für $x \in [a,b]$ gerade $h(x) := F(x) - F(a) + G(f(x)) - G(f(a)) - xf(x) + af(a) \overset{!}{=} 0$. Ableiten ergibt $h'(x) = f(x) + g(f(x))f'(x) - f(x) - xf'(x) = 0$ dank Kettenregel und Produktregel. Somit ist $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ konstant. Aus $h(a) = 0$ folgt $h = 0$, also die behauptete Gleichung.

⚠ Hierzu müssen wir f als stetig differenzierbar voraussetzen. Steht die Formel erst einmal da, dann können wir sie so sehr leicht *nachrechnen*. Doch wie können wir sie überhaupt erst *finden*?

Dritte Methode: Zur Berechnung nutzen wir alle Regeln der Integrationskunst, wir substituieren $y = f(x)$ und $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$, nutzen die Eigenschaft $g(f(x)) = x$ und integrieren partiell:

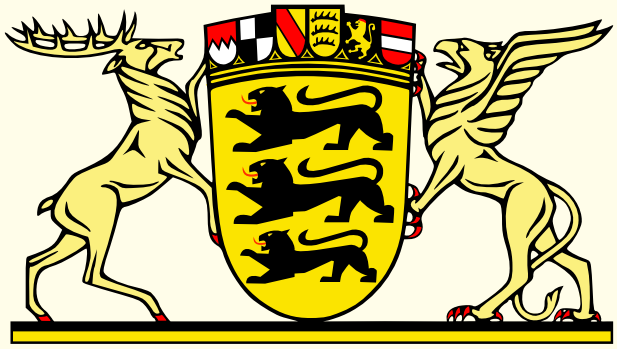
$$\begin{aligned}
\int_{y=c}^{d} g(y)\,\mathrm{d}y &\overset{\text{Subs}}{\underset{\text{B1K}}{=}} \int_{x=a}^{b} g(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x &&= \int_{x=a}^{b} xf'(x)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{part}}{\underset{\text{B1J}}{=}} \big[xf(x)\big]_{x=a}^{b} - \int_{x=a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x &&= bd - ac - \int_{x=a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

☺ Mehrere Wege führen also zum Ziel, alle sind lehrreich. Eine solide Grundlegung ist wichtig, damit wir genau wissen, wovon wir reden, und sicher rechnen können. Die Investition lohnt sich!

Kapitel B

Eindimensionale Integration

Differenzieren ist Handwerk,
Integrieren ist Kunst.



Ministerium für Integration

Inhalt dieses Kapitels B

1 Integration durch Einschachtelung (nach Riemann)
- Treppenfunktionen und Integration durch Einschachtelung
- Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
- Integrationsregeln und elementare Integralformeln

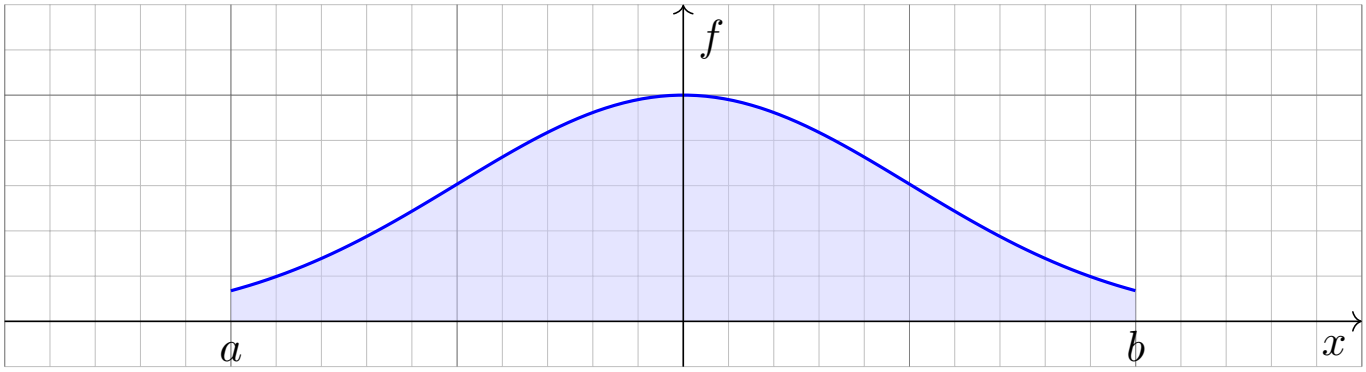
2 Integration durch Ausschöpfung (nach Lebesgue)
- Absolute Integration durch Ausschöpfung
- Der Hauptsatz für integrierbare Funktionen
- Uneigentliche Integrale und Cauchy–Hauptwert

3 Integrale und Reihen
- Vergleich von Integral und Reihe
- Stirling–Formel und Gamma-Funktion
- Konvergenzkriterien von Abel, Leibniz und Dirichlet

4 Fazit: Eindimensionale Integration
- Zusammenfassung und Verständnisfragen
- Beispiele zur uneigentlichen Integration
- Analytische und glatte Funktionen

Motivation und Zielsetzung

Das Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ misst die Fläche unter dem Graphen von f:



- Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so reicht Einschachtelung zur Integration.
- Hieraus folgern wir nützliche Rechenregeln des Integrals:

  Hauptsatz: Für $F' = f$ gilt $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

  Substitution: $\int_a^b f(g(t))\,g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$

  Produktregel: $\int_a^b f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x = [fg]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$
- Manche Funktionen kann man so noch nicht integrieren.
- Für diese nutzen wir das Prinzip der Ausschöpfung.

Vorgehensweise

⚠ Das Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ist zuerst Flächeninhalt und dann erst Stammfunktion, dank HDI! Aus Bequemlichkeit wird es oft umgekehrt dargestellt: Das ist gut gemeint, aber auch irreführend.

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist keine *Definition* für das Integral, sondern eine *Folgerung*: Der HDI gilt nur eindimensional, für stetige Integranden auf einem Intervall $[a, b]$. Für die höherdimensionale Integration hat der Begriff der *Stammfunktion* zunächst keinen Sinn, *Flächeninhalt* und *Volumen* hingegen schon! Diese Sichtweise ist daher tragfähiger.

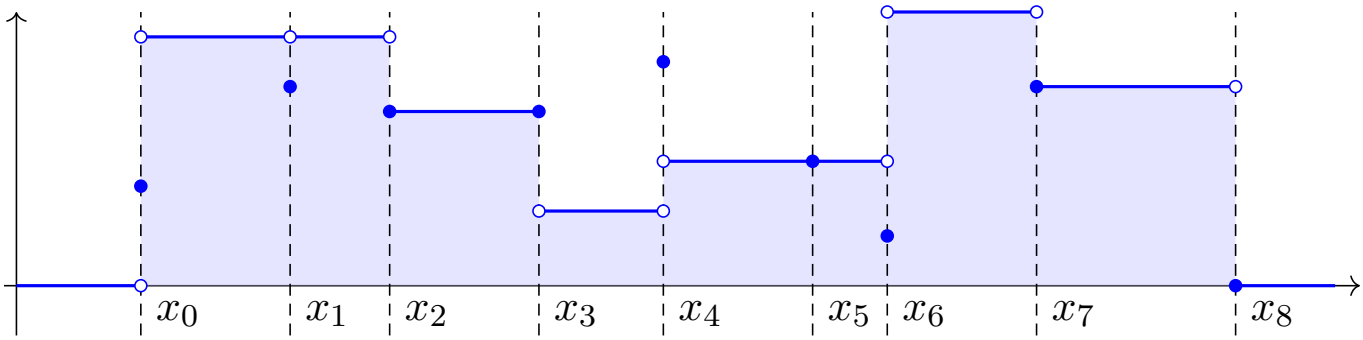
Wir beginnen mit eindimensionalen Treppenfunktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dank der Anordnung des reellen Zahlkörpers $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ sind diese sofort zugänglich. Hierauf können wir das Integral in der gewünschten Weise konstruieren und alle erhofften Eigenschaften nachrechnen (Satz B1A).

Getreu den im vorigen Kapitel A formulierten fünf grundlegenden Integrationsregeln erklären wir in diesem Kapitel die eindimensionale Integration durch *Einschachtelung* und *Ausschöpfung*. Es geht zunächst um die Grundlagen, die Sie aus der HM2 kennen und hier beherrschen müssen, sodann um die nötigen Vertiefungen sowie viele Beispiele. Damit soll dieses Kapitel den Weg ebnen zur mehrdimensionalen Integration, der wir uns in den folgenden Kapiteln widmen.

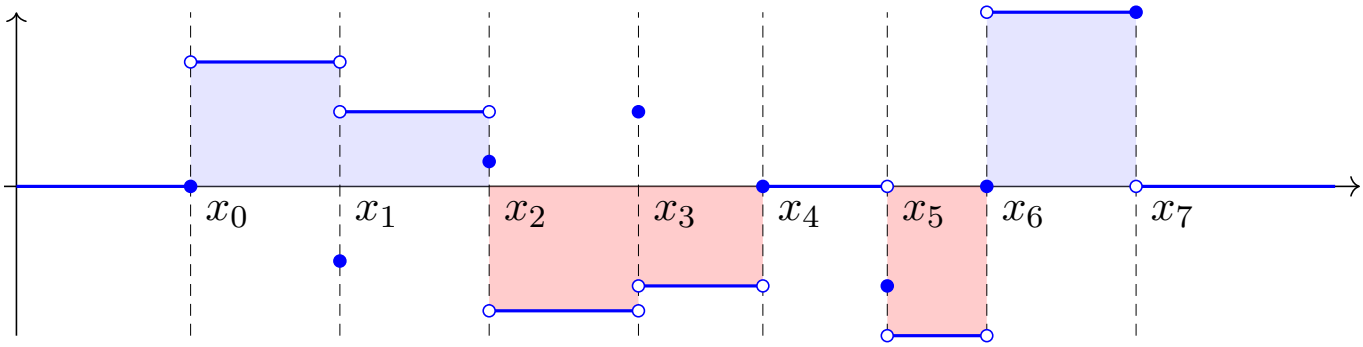
Für viele Anwendungen wichtig ist insbesondere das Zusammenspiel von *Integralen und Reihen*. Während es im Kapitel A zunächst um die *Definition* des Integrals ging, kommen wir in diesem Kapitel B zur Praxis des *Integrierens*. Das ist ein weites Feld, zu dem ich eine komprimierte Einführung gebe. Hier brauchen Sie Ihre Rechenfertigkeiten! Integrieren erfordert Geschick, Übung und Erfahrung, gemäß obigem Motto: *Differenzieren ist Handwerk, Integrieren ist Kunst.*

📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, Kapitel 3.

Eindimensionale Treppenfunktionen



Treppenfunktionen sind stückweise konstant. Das Integral, also der Flächeninhalt unter dem Graphen, lässt sich hier leicht bestimmen als Summe der Rechteckflächen. Genau dies besagt die folgende Formel, und sie hat alle richtigen Eigenschaften! Pikantes Detail: In einzelnen Punkten $x_0, x_1, \ldots, x_\ell$ sind die Funktionswerte beliebig; sie fallen bei der Integration nicht ins Gewicht. Auf Intervallen, wo die Funktion negativ ist, wird der Flächeninhalt negativ in Ansatz gebracht.



Das Integral für eindimsionale Treppenfunktionen

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt **Treppenfunktion**, wenn sie stückweise konstant ist. Ausführlich heißt das, es existiert eine Unterteilung $U = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_\ell\} \subseteq \Omega$ und Werte $f_1, \ldots, f_\ell \in \mathbb{R}$, so dass $f(x) = f_k$ für $x_{k-1} < x < x_k$, sowie $f(x) = 0$ für $x < x_0$ und $x > x_\ell$. Bezüglich dieser Unterteilung U definieren wir das **Integral** von f durch

$$\int_{\Omega,U} f(x)\,\mathrm{d}x := \sum_{k=1}^{\ell} f_k \cdot (x_k - x_{k-1}).$$

Satz B1A: Integration eindimensionaler Treppenfunktionen

Das Integral $\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x$ ist wohldefiniert: Es hängt nur von der Funktion f ab, nicht jedoch von unserer willkürlichen Wahl einer Unterteilung U.

Die Menge $T(\Omega)$ aller Treppenfunktionen auf Ω ist ein $\mathbb{R}$–Vektorraum; er wird erzeugt von den Indikatorfunktionen endlicher Intervalle $Q \subseteq \Omega$.

Hierauf ist das Integral $\int_\Omega : T(\Omega) \to \mathbb{R}$ linear und normiert gemäß $\int_\Omega \mathbf{I}_Q(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{vol}_1(Q)$ und wird hierdurch eindeutig bestimmt.

Es ist zudem monoton: Aus $f \le g$ folgt $\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_\Omega g(x)\,\mathrm{d}x$.

Das Integral für eindimensionale Treppenfunktionen

B103
Ausführung

Zu jeder Treppenfunktion f existieren mehrere mögliche Unterteilungen $U \subseteq \Omega$, zum Beispiel können wir U durch weitere Zwischenstellen zu $U' \supseteq U$ verfeinern. Das oben definierte Integral $\int_{\Omega,U} f(x)\,\mathrm{d}x$ ändert sich dadurch nicht! Dies wollen wir zur Sicherheit als erstes nachrechnen:

Wohldefiniertheit: Wir fügen zu $U = \{x_0 < x_1 < \dots < x_\ell\}$ einen Teilungspunkt x_* hinzu, $\{\dots < x_{k-1} < x_* < x_k < \dots\}$. Das ändert die Terme der Summe, aber nicht ihr Ergebnis, denn $f_k \cdot (x_* - x_{k-1}) + f_k \cdot (x_k - x_*) = f_k \cdot (x_* - x_{k-1} + x_k - x_*) = f_k \cdot (x_k - x_{k-1})$.

Je zwei Unterteilungen $U = \{x_0 < x_1 < \dots < x_\ell\}$ und $U' = \{x'_0 < x'_1 < \dots < x'_m\}$ haben gemeinsame Verfeinerungen: Die kleinstmögliche ist ihre Vereinigung $U \cup U'$. Schrittweises Verfeinern zeigt dann $\int_{\Omega,U} f(x)\,\mathrm{d}x = \dots = \int_{\Omega,U\cup U'} f(x)\,\mathrm{d}x = \dots = \int_{\Omega,U'} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Die Wohldefiniertheit ist das Fundament. Daraus ergeben sich sofort folgende Eigenschaften:

Normierung: Für jedes Intervall $Q = [a,b] \subseteq \Omega$ ist die Indikatorfunktion $\mathbf{I}_Q : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion zu $U = \{a < b\}$, und ihr Integral $\int_\Omega \mathbf{I}_Q = b - a = \mathrm{vol}_1(Q)$ misst die Länge.

Skalierung: Ist $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion zur Unterteilung $U = \{x_0 < x_1 < \dots < x_\ell\}$, so auch jedes Vielfache $cf : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $c \in \mathbb{R}$, sogar zu derselben Unterteilung U, und es gilt $\int_\Omega cf(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\ell} (cf_k)\,(x_k - x_{k-1}) = c \sum_{k=1}^{\ell} f_k\,(x_k - x_{k-1}) = c \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x$.

Additivität: Sind f, g Treppenfunktionen zu U, U', so auch $f + g$ zu $U \cup U'$, und das Integral ist additiv: $\int_\Omega f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\ell} (f_k + g_k)\,(x_k - x_{k-1}) = \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega g(x)\,\mathrm{d}x$.

Monotonie: Sind f, g Treppenfunktionen, zur Unterteilung $U \cup U'$, und gilt $f \le g$, so folgt die Ungleichung $\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\ell} f_k(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^{\ell} g_k(x_k - x_{k-1}) = \int_\Omega g(x)\,\mathrm{d}x$.

Treppenfunktionen und Indikatorfunktionen

B104
Ausführung

Jede Indikatorfunktion $\mathbf{I}_{Q_k}$ ist eine Treppenfunktion, also auch die Summe $\sum_{k=1}^{\ell} c_k\,\mathbf{I}_{Q_k}$. Umgekehrt lässt sich jede Treppenfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so schreiben: Gilt $f(x) = f_k$ für $x_{k-1} < x < x_k$ und $k = 0, \dots, \ell$, sowie $f(x) = 0$ für $x < x_0$ und für $x > x_\ell$, so gilt

$$f = \sum_{k=1}^{\ell} f_k\,\mathbf{I}_{]x_{k-1},x_k[} + \sum_{k=0}^{\ell} f(x_k)\,\mathbf{I}_{[x_k,x_k]}\,.$$

Jede Treppenfunktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ist demnach von der Form $f = \sum_{k=1}^{\ell} c_k\,\mathbf{I}_{Q_k}$ mit $c_k \in \mathbb{R}$ und endlichen Intervallen $Q_k \subseteq \Omega$. Anders gesagt, die Indikatorfunktionen $\mathbf{I}_Q$ endlicher Intervalle $Q \subseteq \Omega$ sind ein Erzeugendensystem von $T(\Omega)$. Vorsicht ist geboten: Sie sind keine Basis! Z.B. gilt $\mathbf{I}_{[0,2[} = \mathbf{I}_{[0,1[} + \mathbf{I}_{[1,2[}$, also sind diese drei Indikatorfunktionen linear abhängig.

Dennoch wollen und können wir hierauf das Integral erklären! Die obigen Rechnungen zeigen, dass das Ergebnis tatsächlich wohldefiniert ist. Dank Additivität, Skalierung, Normierung gilt:

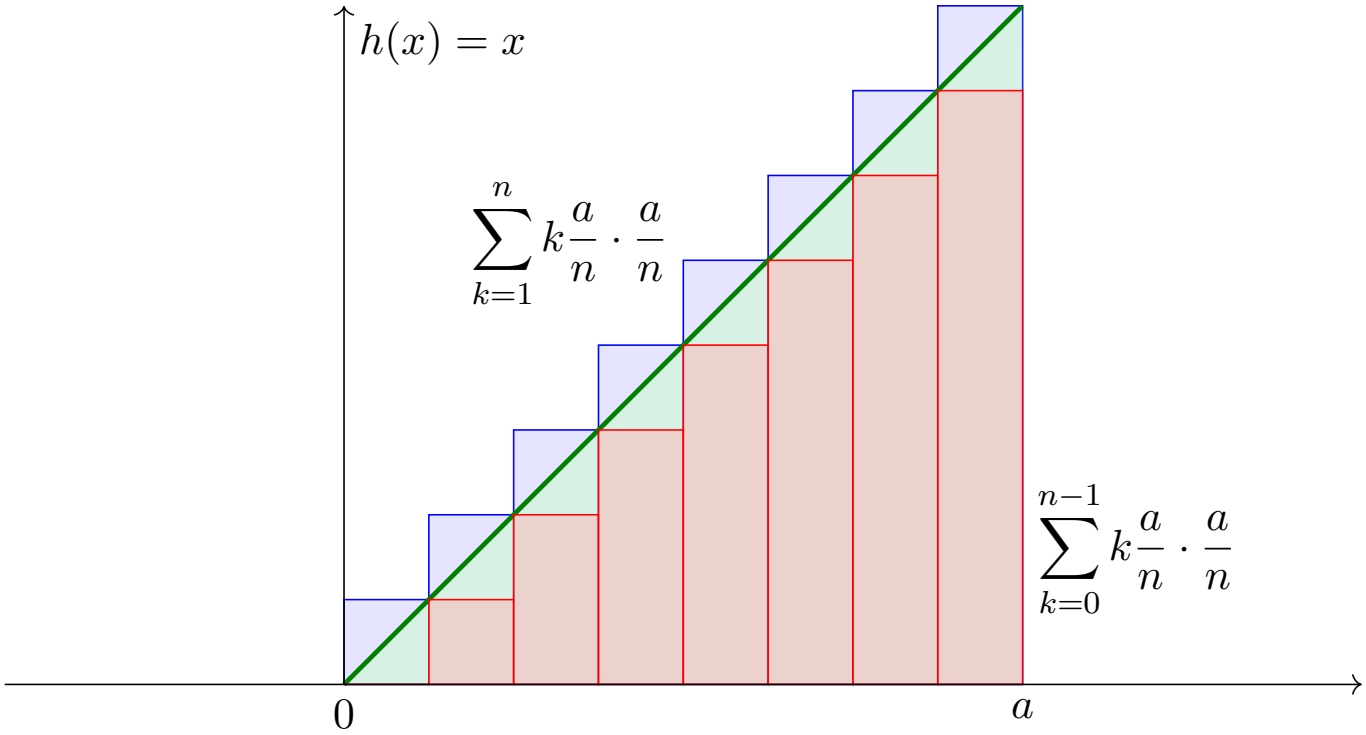
$$\int_\Omega \Big(\sum_{k=1}^{\ell} c_k\,\mathbf{I}_{Q_k}\Big) = \sum_{k=1}^{\ell} \int_\Omega \Big(c_k\,\mathbf{I}_{Q_k}\Big) = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \int_\Omega \mathbf{I}_{Q_k} = \sum_{k=1}^{\ell} c_k\,\mathrm{vol}_1(Q_k).$$

Für eindimensionale Treppenfunktionen ist damit alles geklärt. Wir werden diese Konstruktion im nächsten Kapitel C auf mehrdimensionale Treppenfunktionen verallgemeinern (Satz C1A).

Bestünde die Welt nur aus Treppenfunktionen, so wären wir jetzt fertig. Interessant sind aber vor allem Funktionen, die nicht so simpel sind wie Treppenfunktionen. Diese integrieren wir im Folgenden mit Hilfe von Treppenfunktionen durch Einschachtelung und Ausschöpfung.

Beispiel: Integration durch Einschachtelung

Aufgabe: Zu integrieren sei $h : [0, a] \to \mathbb{R} : x \mapsto x$. Berechnen Sie Unter- und Obersummen bei äquidistanter Unterteilung sowie den Grenzwert.



Lösung: Für die Integrale gilt $\frac{(n-1)n}{2}\frac{a^2}{n^2} \nearrow \frac{a^2}{2} \swarrow \frac{n(n+1)}{2}\frac{a^2}{n^2}$.

Beispiel: Integration durch Einschachtelung

Ausführlich: Wir nutzen $\sum_{k=0}^{n-1} k = n(n-1)/2$. (Übung: Rechnen Sie es nach per Induktion! Siehe HM1 Beispiel 1.2.2 oder später B305.)

Wir konstruieren Treppenfunktionen $f_n, g_n : [0, a] \to \mathbb{R}$ mit $f_n \le h \le g_n$. Hierzu unterteilen wir das Intervall $[0, a]$ durch $x_k = k\frac{a}{n}$ mit $k = 0, \dots, n$. Sei f_n konstant auf $]x_{k-1}, x_k[$ mit Wert $\min_{[x_{k-1},x_k]} h = x_{k-1}$. Dann gilt:

$$\int_{x=0}^{a} f_n(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} k\frac{a}{n} \cdot \frac{a}{n} \;=\; \frac{(n-1)n}{2}\frac{a^2}{n^2} \;\nearrow\; \frac{1}{2}a^2$$

Sei g_n konstant auf $]x_{k-1}, x_k[$ mit Wert $\max_{[x_{k-1},x_k]} h = x_k$. Dann gilt:

$$\int_{x=0}^{a} g_n(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \sum_{k=1}^{n} k\frac{a}{n} \cdot \frac{a}{n} \;=\; \frac{n(n+1)}{2}\frac{a^2}{n^2} \;\searrow\; \frac{1}{2}a^2$$

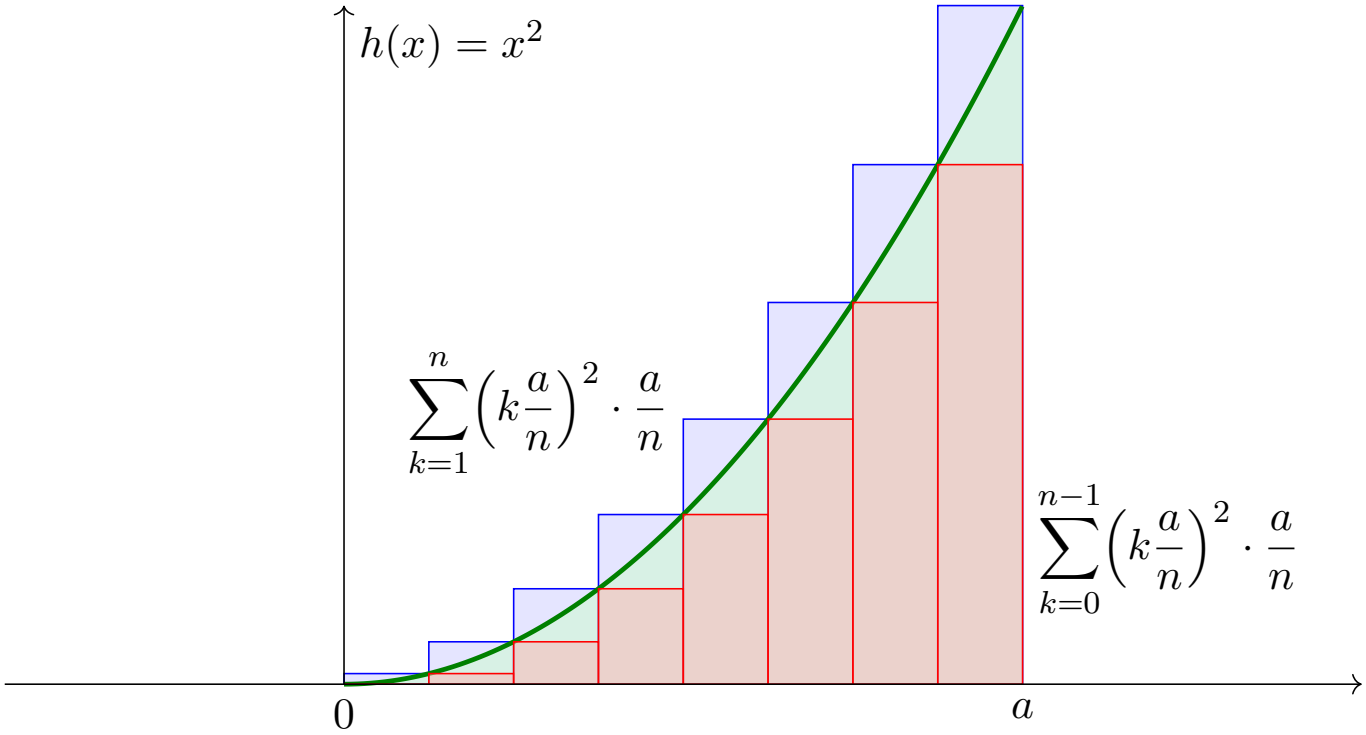
Für $n \to \infty$ gilt $\int_0^a (g_n - f_n) \to 0$, also ist h integrierbar. Wir erhalten:

$$\boxed{\int_0^a x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}a^2}$$

☺ Dieses Ergebnis ist anschaulich-geometrisch klar. Sehen Sie wie?

Beispiel: Integration durch Einschachtelung

Aufgabe: Zu integrieren sei $h : [0, a] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$. Berechnen Sie Unter- und Obersummen bei äquidistanter Unterteilung sowie den Grenzwert.



Lösung: Für die Integrale gilt $\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\frac{a^3}{n^3} \nearrow \frac{a^3}{3} \swarrow \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\frac{a^3}{n^3}$.

Beispiel: Integration durch Einschachtelung

Ausführlich: Wir nutzen $\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = (n-1)n(2n-1)/6$. (Rechnen Sie es nach per Induktion! Siehe HM1 Beispiel 1.2.4 oder später B305.)

Wie zuvor unterteilen wir $[0, a]$ durch $x_k = k\frac{a}{n}$ mit $k = 0, \dots, n$.
Sei f_n konstant auf $]x_{k-1}, x_k[$ mit Wert $\min_{[x_{k-1},x_k]} h = x_{k-1}^2$. Dann gilt:

$$\int_{x=0}^{a} f_n(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \frac{a^2}{n^2} \cdot \frac{a}{n} \;=\; \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\frac{a^3}{n^3} \;\nearrow\; \frac{1}{3}a^3$$

Sei g_n konstant auf $]x_{k-1}, x_k[$ mit Wert $\max_{[x_{k-1},x_k]} h = x_k^2$. Dann gilt:

$$\int_{x=0}^{a} g_n(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{a^2}{n^2} \cdot \frac{a}{n} \;=\; \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\frac{a^3}{n^3} \;\searrow\; \frac{1}{3}a^3$$

Für $n \to \infty$ gilt $\int_0^a (g_n - f_n) \to 0$, also ist h integrierbar. Wir erhalten:

$$\boxed{\int_0^a x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}a^3}$$

☺ Einschachtelung liefert für jede monotone (B1B) oder stetige (B1C) Funktion konvergente Abschätzungen durch untere & obere Schranken!

Integration durch Einschachtelung

Wir wollen $h : \Omega \to \mathbb{R}$ einschachteln durch Treppenfunktionen

$$f_0 \le f_1 \le f_2 \le \dots \quad \le \quad h \quad \le \quad \dots \le g_2 \le g_1 \le g_0.$$

Für $A_k = \int_\Omega f_k(x)\,\mathrm{d}x$ und $B_k = \int_\Omega g_k(x)\,\mathrm{d}x$ gilt dank Monotonie

$$A_0 \le A_1 \le A_2 \le \dots \quad \le \quad \le \quad \dots \le B_2 \le B_1 \le B_0.$$

Für $k \to \infty$ erhalten wir hieraus die monotonen Grenzwerte

$$\int_\Omega f_k(x)\,\mathrm{d}x = A_k \nearrow A \le \boxed{¿\int_\Omega h(x)\,\mathrm{d}x\,?} \le B \swarrow B_k = \int_\Omega g_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

Die Gleichheit $A = B$ bedeutet $\int_\Omega \big[g_k(x) - f_k(x)\big]\,\mathrm{d}x \searrow 0$.
Das heißt, die Fläche zwischen f_k und g_k wird beliebig klein.
In diesem Falle nennen wir h **Riemann–integrierbar** und erhalten

$$\int_\Omega h(x)\,\mathrm{d}x = A = B.$$

☺ Diese Integrationsmethode ist das **Prinzip der Einschachtelung**.
Das Ergebnis ist wohldefiniert, d.h. es hängt nur von der Funktion f ab, nicht jedoch von unserer willkürlichen Wahl einer Einschachtelung.

Einschachtelung monotoner Funktionen

Die beiden obigen Beispiele illustrieren zwei allgemeine Regeln:
Monotone bzw. stetige Funktionen sind Riemann–integrierbar, d.h. sie lassen sich durch Treppenfunktionen beliebig genau einschachteln.
Die Beweise sind leicht und verlaufen genau wie obige Beispiele:

Satz B1B: Integration monotoner Funktionen

Jede monotone Funktion $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann–integrierbar.

Beweis: Wir nehmen h als monoton wachsend an, also nicht-fallend.
Das heißt ausführlich: Für alle $s \le t$ im Intervall $[a, b]$ gilt $h(s) \le h(t)$.
Wir konstruieren Treppenfunktionen f_n, g_n mit $f_n \le h \le g_n$ wie folgt:
Wir unterteilen $[a, b]$ durch $x_k = a + k(b - a)/n$ mit $k = 0, \dots, n$.
Sei f_n konstant auf $]x_{k-1}, x_k[$ mit Wert $\min_{[x_{k-1},x_k]} h = h(x_{k-1})$.
Sei g_n konstant auf $]x_{k-1}, x_k[$ mit Wert $\max_{[x_{k-1},x_k]} h = h(x_k)$.
Nach Konstruktion sind dies Treppenfunktionen mit $f_n \le h \le g_n$ und

$$\int_a^b g_n(x) - f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n \frac{h(x_k) - h(x_{k-1})}{n} = \frac{h(b) - h(a)}{n} \searrow 0.$$

Einschachtelung stetiger Funktionen

Satz B1C: Integration stetiger Funktionen

Jede stetige Funktion $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann–integrierbar.

Beweis: Da das Intervall $[a, b]$ kompakt ist, ist h gleichmäßig stetig. Das heißt ausführlich, für jedes noch so kleine $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass für kleine Abstände $|x - x'| \le \delta$ stets $|f(x) - f(x')| \le \varepsilon$ folgt.

Wir konstruieren Treppenfunktionen f_n, g_n mit $f_n \le h \le g_n$ wie folgt:
Wir unterteilen $[a, b]$ durch $x_k = a + k(b - a)/n$ mit $k = 0, \dots, n$.
Sei f_n konstant auf $]x_{k-1}, x_k[$ mit Wert $\min_{[x_{k-1},x_k]} h$.
Sei g_n konstant auf $]x_{k-1}, x_k[$ mit Wert $\max_{[x_{k-1},x_k]} h$.

Nach Konstruktion sind dies Treppenfunktionen mit $f_n \le h \le g_n$.
Es bleibt noch $\int_a^b g_n(x) - f_n(x)\,\mathrm{d}x \to 0$ für $n \to \infty$ nachzuweisen.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dank gleichmäßiger Stetigkeit existiert dazu $\delta > 0$, sodass $|f(x) - f(x')| \le \varepsilon$ gilt für alle $x, x' \in [a, b]$ mit $|x - x'| \le \delta$.
Für $(b - a)/n \le \delta$ folgt $g_n - f_n \le \varepsilon$, also $\int_a^b g_n(x) - f_n(x)\,\mathrm{d}x \le \varepsilon \cdot (b - a)$.
Für $n \to \infty$ zeigt dies $\int_a^b g_n(x) - f_n(x)\,\mathrm{d}x \to 0$, wie behauptet.

Stückweise Integration

Satz B1D: stückweise Integration

Sei $a < b < c$. Genau dann ist $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ Riemann–integrierbar, wenn beide Einschränkungen $f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ es sind; dann gilt

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Beweis: Jede Einschachtelung von $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ können wir verfeinern, indem wir der Unterteilung von $[a, c]$ den Teilungspunkt b hinzufügen. Die Gleichung gilt für Unter- und Obersummen, also auch im Grenzwert.

Für alle $a \le b$ vereinbaren wir zudem die Vorzeichenregel

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

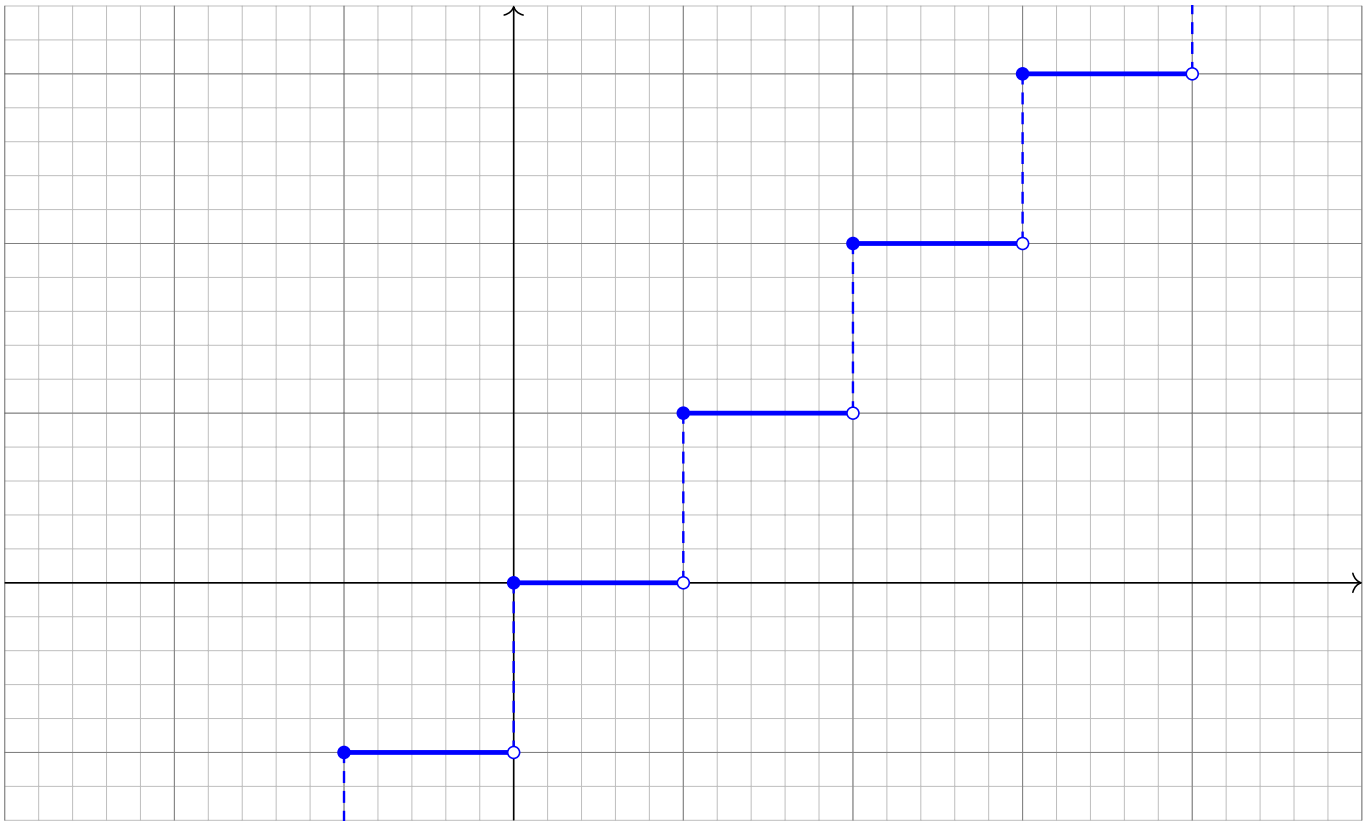
Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ integrierbar und $a, b, c \in \Omega$, so gilt

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Stückweise stetige Funktionen

B113
Ausführung

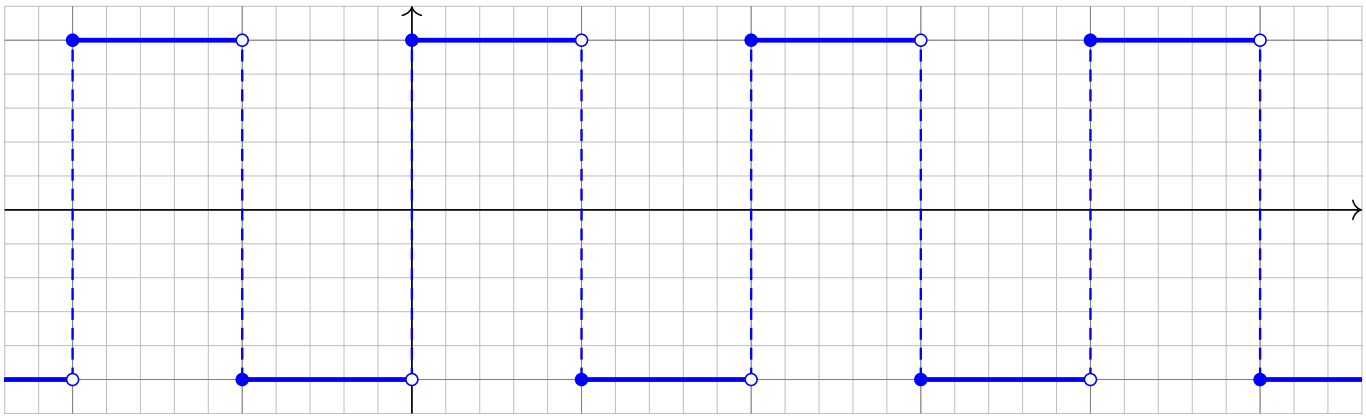
Die **Gauß–Klammer** $\lfloor x \rfloor := \max\{\, k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x \,\}$ ist stückweise stetig:



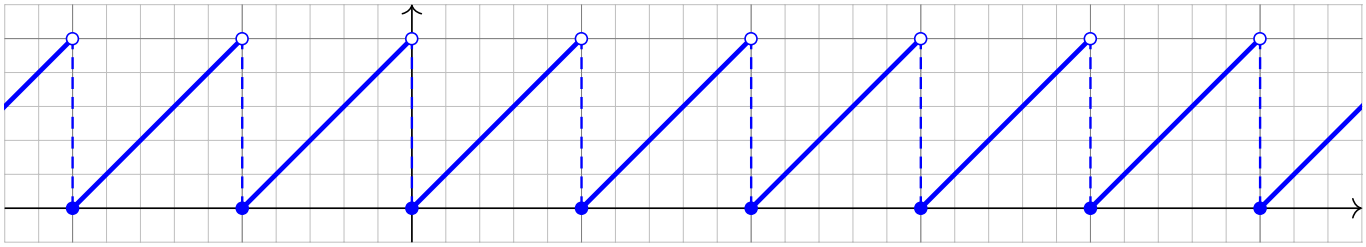
Stückweise stetige Funktionen

B114
Ausführung

Die **Rechteckfunktion** $r(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$ ist stückweise konstant.



Die **Sägezahnfunktion** $s(x) = x - \lfloor x \rfloor$ ist stückweise affin-linear.



Diese Funktionen haben Sprungstellen und sind nur stückweise stetig.

Stückweise stetige Funktionen

Definition B1E: stückweise stetige Funktionen

(0) Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **stückweise stetig**, wenn es eine Unterteilung $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_\ell = b$ und stetige Funktionen $f_k : [x_{k-1}, x_k] \to \mathbb{R}$ gibt, sodass $f(x) = f_k(x)$ für alle $x_{k-1} < x < x_k$ gilt.

(1) Gilt zudem $f(x_k) = \frac{1}{2}\big[f_{k-1}(x_k) + f_k(x_k)\big]$ an jeder (eventuellen) Sprungstelle x_k für $k = 1, \ldots, \ell - 1$, so nennen wir f **sprungnormiert**.

(2) Entsprechend nennen wir f **stückweise C^n**, falls $f_1, \ldots, f_\ell \in C^n$ gilt. Hierbei ist C^n die Klasse der n-fach stetig differenzierbaren Funktionen. **Stückweise stetig diff'bar** bedeutet traditionell C^0 und stückweise C^1.

(0) Äquivalente Definition: Die Funktion f ist auf jedem der offenen Intervalle $]x_{k-1}, x_k[$ stetig, und $f(x)$ hat an den Intervallgrenzen für $x \searrow x_{k-1}$ sowie für $x \nearrow x_k$ einen Grenzwert in $\mathbb{R}$.

Anschaulich gesagt: f hat nur endlich viele Sprungstellen und endliche Sprunghöhen. An den Intervallgrenzen $x_0, x_1, \ldots, x_\ell$ hingegen muss f nicht stetig sein. Die Funktionswerte $f(x_k)$ sind beliebig; sie fallen bei der von uns anvisierten Integration ohnehin nicht ins Gewicht.

(1) Durch Korrektur an den Sprungstellen können wir f sprungnormieren. Das Integral ändert sich dadurch nicht. Die Normierung ist oft hilfreich, etwa bei Fourier–Reihen und –Integralen.

Integration stückweise stetiger Funktionen

Es gibt gute Gründe, auch nicht-stetige Funktionen zu behandeln und integrieren zu lernen. In der Signalverarbeitung und Fourier–Analyse zum Beispiel betrachtet man auch Signale mit Sprungstellen, wie die oben gezeigte Rechteckfunktion oder die Sägezahnfunktion.

Satz B1F: Integration stückweise stetiger Funktionen

Jede stückweise stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar gemäß

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} f_1(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + \int_{x_{\ell-1}}^{x_\ell} f_\ell(x)\,\mathrm{d}x.$$

Die Menge $S([a, b])$ aller stückweise stetigen Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist ein Vektorraum, und somit ein Untervektorraum in $R([a, b])$. Hierauf ist das Integral $f \mapsto \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ eine $\mathbb{R}$–lineare Abbildung $S([a, b]) \to \mathbb{R}$.

Wie schon bei Treppenfunktionen gibt es für stückweise stetige Funktionen mehrere mögliche Unterteilungen, z.B. kann man jede Unterteilung durch Hinzunahme weiterer Stellen verfeinern. Der Wert des obigen Integrals als Summe über die Unterteilung ändert sich dadurch nicht!

Die Existenz der Grenzwerte an den Intervallgrenzen verhindert Polstellen und Schlimmeres. Gegenbeispiele sind $f, g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1/\sqrt{|x|}$ und $g(x) = \sin(\pi/|x|)$. B118
Diese sind stetig auf $[-1, 0[$ und $]0, 1]$, aber *nicht* stückweise stetig auf $[-1, 1]$!

Riemann–integrierbare Funktionen

Satz B1G: Charakterisierung R-integrierbarer Funktionen

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Die Menge $R(\Omega)$ aller Riemann–integrierbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{R}$–Vektorraum. Hierauf ist das Integral

$$\int_\Omega \; : \; R(\Omega) \to \mathbb{R} \; : \; f \mapsto \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x$$

linear, normiert, monoton, und erfüllt das Prinzip der Einschachtelung.

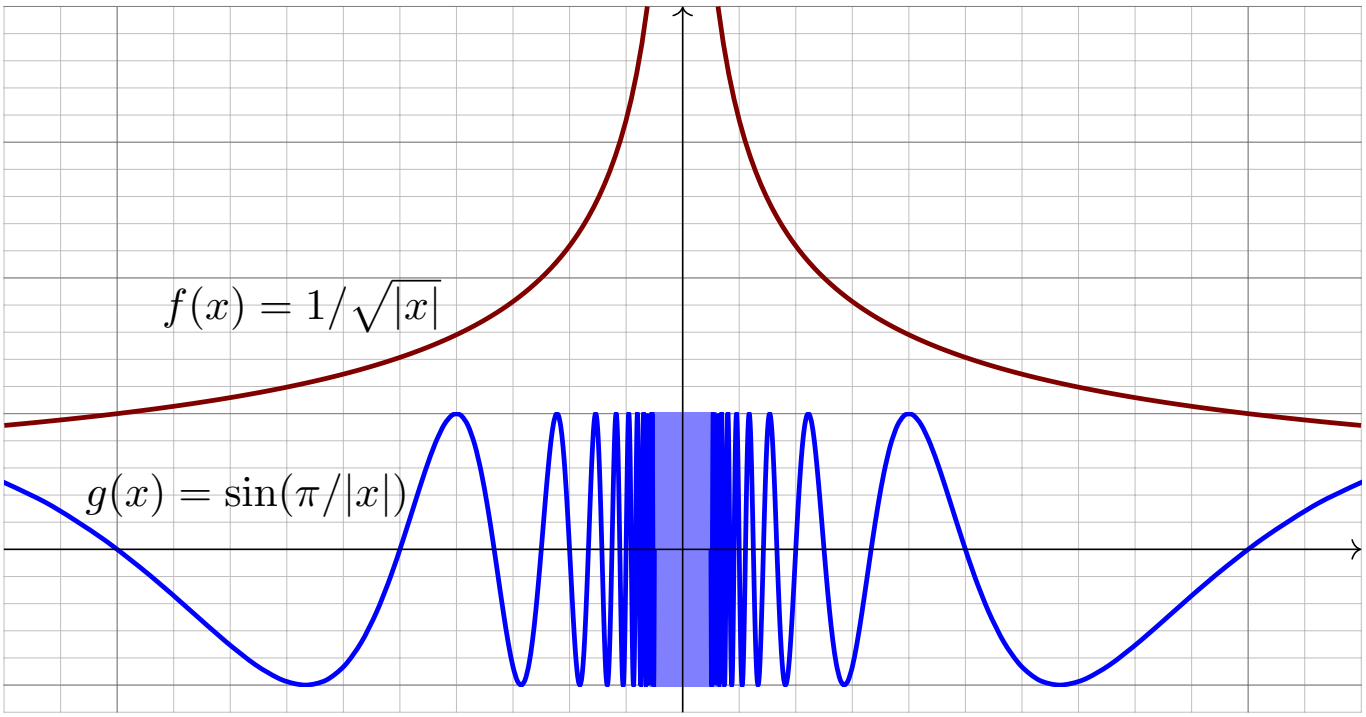
Hierbei ist $R(\Omega)$ der kleinste Funktionenraum, für den dies möglich ist, und auf $R(\Omega)$ ist das (Riemann–)Integral hierdurch eindeutig bestimmt.

Jede stetige / monotone Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist R-integrierbar, ebenso jede stückweise stetige / stückweise monotone Funktion.

$$\begin{array}{rcl} & & C([a,b]) := \{\, f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \,\} \\ & & \cap\!\!\!\!\neq \\ R([a,b]) & \supsetneq & S([a,b]) := \{\, f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stückweise stetig} \,\} \\ & & \cup\!\!\!\!\neq \\ & & T([a,b]) := \{\, f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ Treppenfunktion} \,\} \end{array}$$

Welche Funktionen sind Riemann–integrierbar?

Nicht stückweise stetig sind z.B. folgende Funktionen $f, g : [-1,1] \to \mathbb{R}$:



Übung: Die Funktion g ist Riemann–integrierbar, aber f hingegen nicht. Einschachtelung gelingt für f nicht, aber mit Ausschöpfung geht's. B208

Welche Funktionen sind Riemann–integrierbar?

Satz B1H: Charakterisierung R-integrierbarer Funktionen

Genau dann ist eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann–integrierbar, wenn sie beschränkt ist und fast überall stetig (bis auf eine Nullmenge).

Berühmte Beispiele: Die **kleine Dirichlet–Funktion** $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{b} & \text{falls } x = \frac{a}{b} \text{ mit } a, b \in \mathbb{N} \text{ und } \mathrm{ggT}(a,b) = 1. \end{cases}$$

ist unstetig in jedem rationalen Punkt, jedoch stetig in jedem irrationalen. Sie ist also fast überall stetig und demnach auch Riemann–integrierbar. Übung: durch Treppenfunktionen einschachteln und Integral bestimmen.

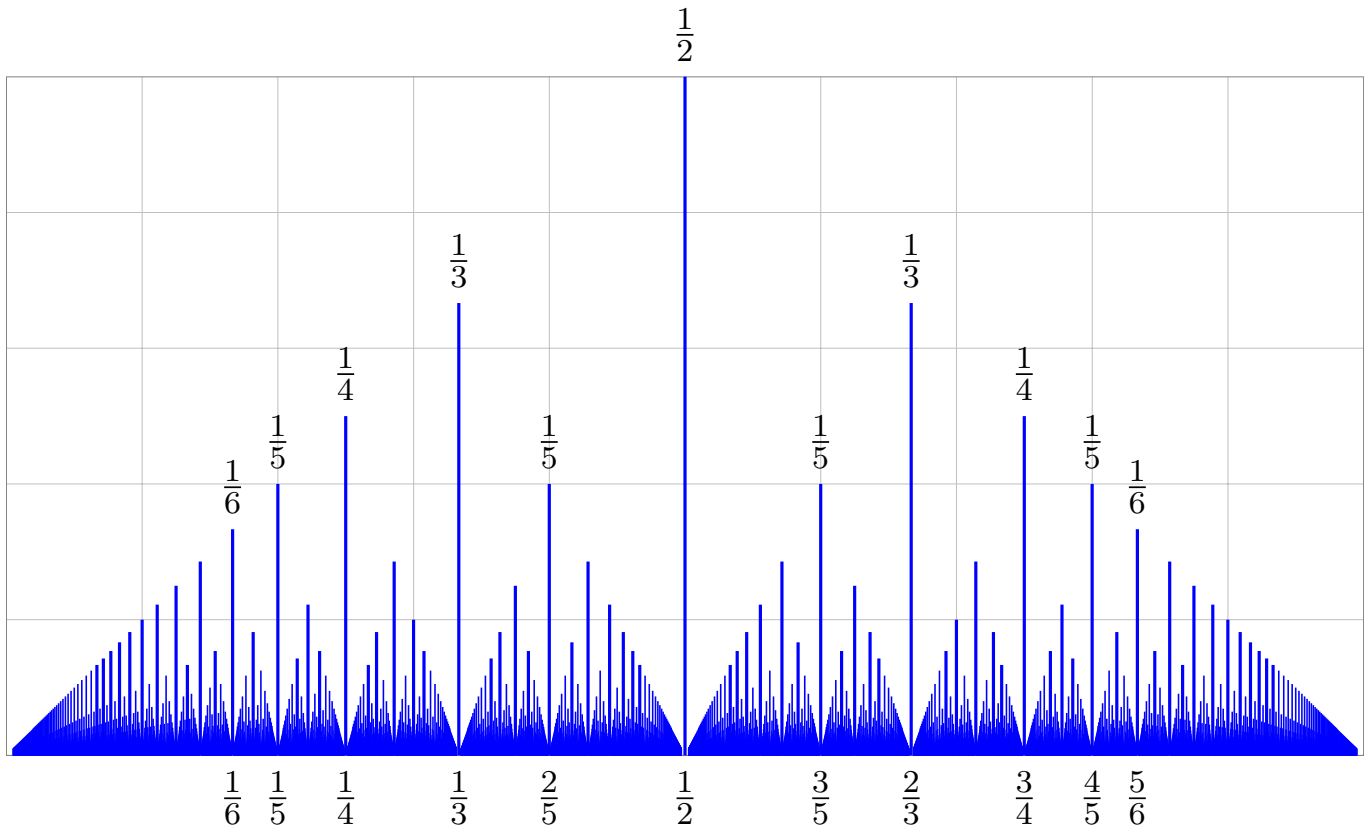
Die **Dirichlet–Funktion** $f = \mathbf{I}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

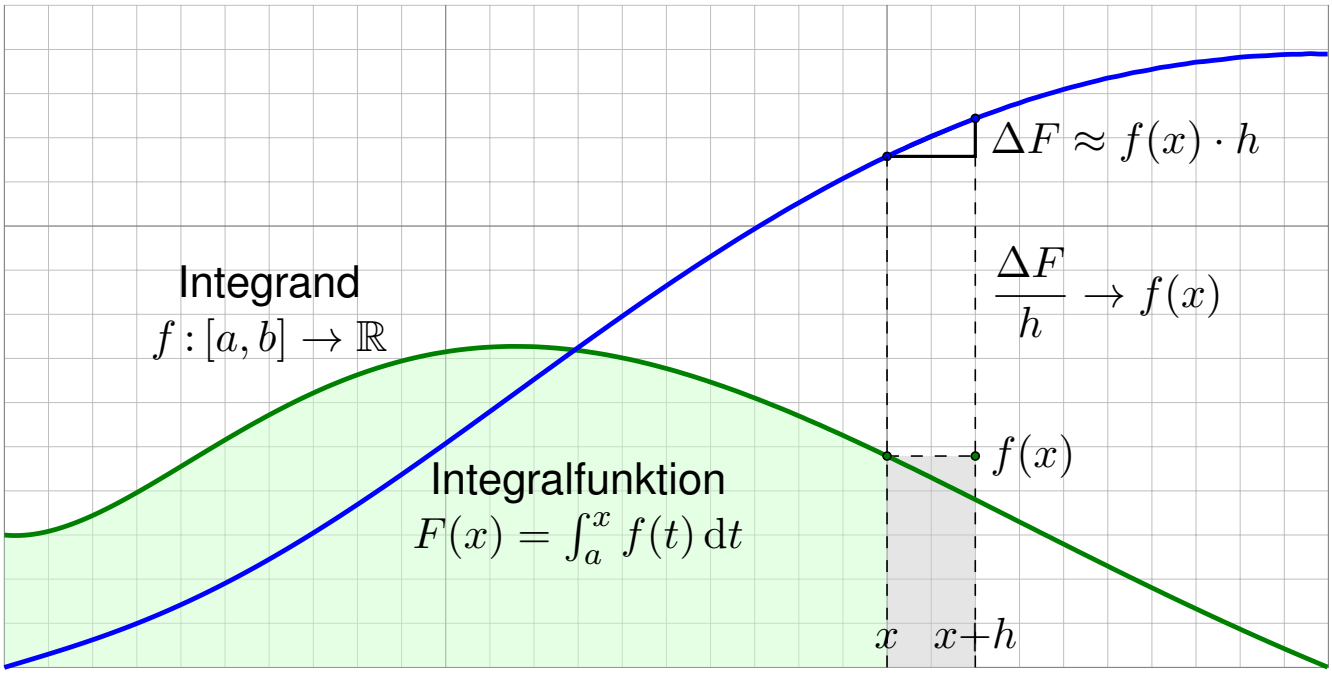
Sie ist in jedem Punkt $x \in [0, 1]$ unstetig also nicht Riemann–integrierbar. Übung: Einschachtelung misslingt hier, Ausschöpfung gelingt mühelos!

Die kleine Dirichlet–Funktion

Für jeden gekürzten Bruch $\frac{a}{b}$ sei $g(\frac{a}{b}) = \frac{1}{b}$, und $g(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Diese bemerkenswerte Funktion ist in jedem rationalen Punkt unstetig.



Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung



Der Hauptsatz besagt anschaulich: Die Steigung der Integralfunktion $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ ist der Wert $f(x)$ des Integranden, also $F'(x) = f(x)$. Diese Beziehung wollen wir präzise formulieren und nutzen lernen.

Stroppel, Höhere Mathematik 2, §3.6. Hauptsatzkantate, `youtu.be/4n6aB4aasyg`.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar, dank Satz B1C.

Wir definieren ihre **Integralfunktion** $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) = \int_{t=a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Für die Fläche über dem Intervall $[x, x + h]$ finden wir

$$F(x + h) - F(x) = \int_{t=x}^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \approx \quad f(x) \cdot h.$$

Genauer gilt folgende Einschachtelung:

$$h \cdot \min_{[x,x+h]} f \quad \le \quad \int_{t=x}^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \le \quad h \cdot \max_{[x,x+h]} f.$$

Für $h \to 0$ finden wir dank der Stetigkeit von f im Punkt x somit

$$\frac{F(x + h) - F(x)}{h} \quad = \quad \frac{1}{h} \int_{t=x}^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \to \quad f(x).$$

Also gilt $F'(x) = f(x)$. Das eröffnet eine wunderbare Rechentechnik!

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Satz B1I: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar. Ihre Integralfunktion

$$F : [a, b] \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

ist differenzierbar, und für die Ableitung gilt $F' = f$. Ist umgekehrt $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit stetiger Ableitung $f = F'$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F\Big]_a^b \quad \text{mit} \quad \Big[F\Big]_a^b := F(b) - F(a).$$

Diese Aussagen heißen auch 1. und 2. Hauptsatz. Im Falle $F' = f$ bzw. $F = \int f + \mathrm{const}$ heißt F **Stammfunktion** zu f. Anwendungsbeispiele:

$$\begin{aligned}
\int_{x=0}^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x &= \Big[-\cos x\Big]_{x=0}^{\pi} &&= 1 - (-1) &&= 2 \\
\int_{x=0}^{\pi} x\,\sin x\,\mathrm{d}x &= \Big[\sin x - x\cos x\Big]_{x=0}^{\pi} &&= \pi - 0 &&= \pi
\end{aligned}$$

Grundintegrale: elementare Stammfunktionen

$$\int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} \quad (a \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x|$$

$$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \qquad \int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x \qquad \int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x$$

$$\int \cosh x\,\mathrm{d}x = \sinh x \qquad \int \sinh x\,\mathrm{d}x = \cosh x$$

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2}\,\mathrm{d}x = \tan x \qquad \int \frac{1}{(\sin x)^2}\,\mathrm{d}x = -\cot x$$

$$\int \frac{1}{(\cosh x)^2}\,\mathrm{d}x = \tanh x \qquad \int \frac{1}{(\sinh x)^2}\,\mathrm{d}x = -\coth x$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x \qquad \int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \ln\sqrt{\left|\tfrac{x+1}{x-1}\right|}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arsinh} x$$

☺ Übung: Machen Sie wie immer die Probe durch sorgfältiges Ableiten!

Erinnerung: Kreis- und Hyperbelfunktionen

Viele wichtige Funktionen lassen sich als **Potenzreihen** darstellen:

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \qquad = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$$

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \qquad = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

$$\cosh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} z^{2k} \qquad = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots$$

$$\sinh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1} \qquad = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \dots$$

Jede dieser fünf Reihen hat unendlichen Konvergenzradius,
sie konvergiert daher für jeden Parameter $z \in \mathbb{R}$, sogar $z \in \mathbb{C}$.

Erinnerung: Kreis- und Hyperbelfunktionen

Aus diesen Potenzreihen lesen wir die **Euler–Formeln** ab:

$$\exp(\mathrm{i}z) = \cos z + \mathrm{i} \sin z, \qquad \cos(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}, \qquad \sin(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}},$$

$$\exp(z) = \cosh z + \sinh z, \quad \cosh(z) = \frac{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}{2}, \qquad \sinh(z) = \frac{\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}}{2}.$$

Hieraus folgen sofort die geometrisch nützlichen Gleichungen

$$\cos(z)^2 + \sin(z)^2 = 1 \quad \text{sowie} \quad \cosh(z)^2 - \sinh(z)^2 = 1.$$

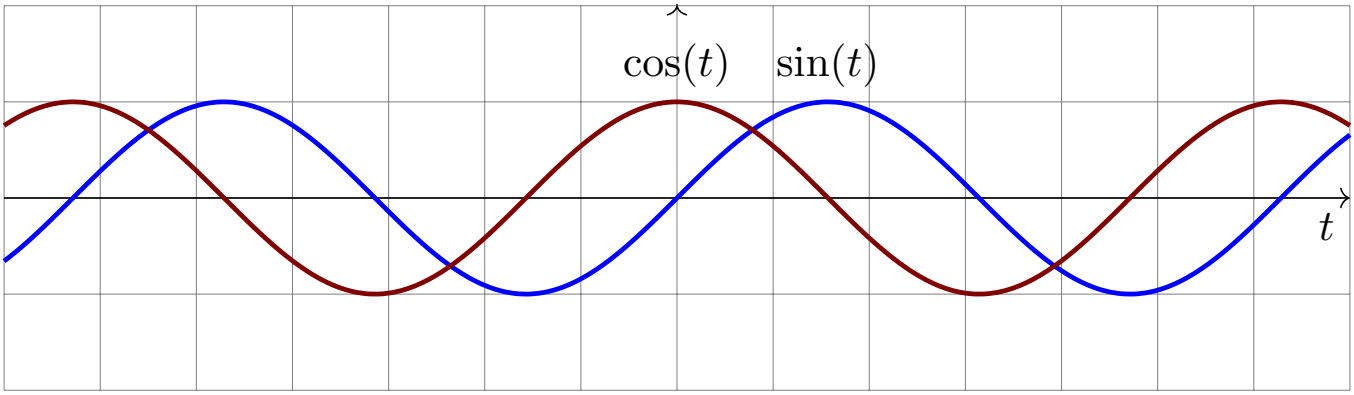
Auch die Ableitungen lesen wir direkt aus den Potenzreihen ab,
denn Potenzreihen dürfen wir termweise ableiten und erhalten so:

$$\exp' = \exp, \quad \sin' = \cos, \quad \cos' = -\sin, \quad \sinh' = \cosh, \quad \cosh' = \sinh$$

Diese Funktionen sind daher auch bei der Integration sehr nützlich!
Ebenso nutzen wir ihre Umkehrfunktionen, eingeschränkt soweit nötig:

$$\ln, \quad \arcsin, \quad \arccos, \quad \operatorname{arsinh}, \quad \operatorname{arcosh}$$

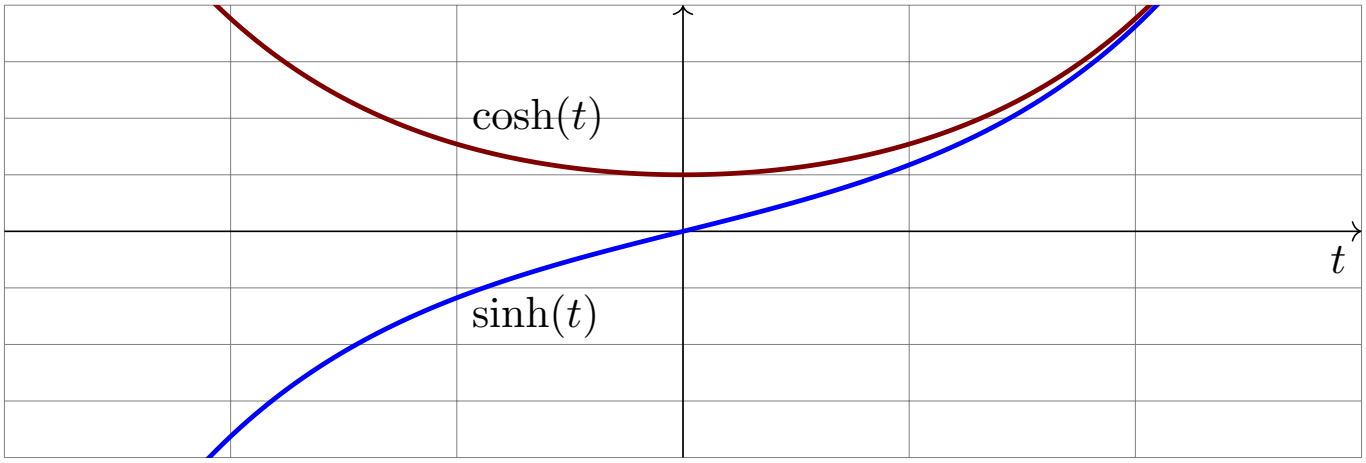
Erinnerung: Kreis- und Hyperbelfunktionen



Die trigonometrischen Funktionen $\sin, \cos$ heißen **Kreisfunktionen**, denn $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ parametrisiert die Kreislinie $x^2 + y^2 = 1$.
Sie sind periodisch mit Periode 2π, wobei $\pi = 3.14159265\ldots$.
Ausmultiplizieren der Euler–Formeln ergibt **Additionstheoreme**:

$$\begin{aligned}
\sin(s+t) &= \sin(s)\cos(t) + \cos(s)\sin(t),\\
\sin(2t) &= 2\sin(t)\cos(t)\\
\cos(s+t) &= \cos(s)\cos(t) - \sin(s)\sin(t),\\
\cos(2t) &= \cos(t)^2 - \sin(t)^2 = 1 - 2\sin(t)^2.
\end{aligned}$$

Erinnerung: Kreis- und Hyperbelfunktionen



Die Funktionen $\sinh, \cosh$ heißen entsprechend **Hyperbelfunktionen**, denn $t \mapsto (\cosh t, \sinh t)$ parametrisiert die Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$, $x > 0$.
Ausmultiplizieren der Euler–Formeln ergibt **Additionstheoreme**:

$$\begin{aligned}
\sinh(s+t) &= \sinh(s)\cosh(t) + \cosh(s)\sinh(t),\\
\sinh(2t) &= 2\sinh(t)\cosh(t)\\
\cosh(s+t) &= \cosh(s)\cosh(t) + \sinh(s)\sinh(t),\\
\cosh(2t) &= \cosh(t)^2 + \sinh(t)^2 = 2\cosh(t)^2 - 1.
\end{aligned}$$

Produktregel $\Rightarrow$ partielle Integration

Korollar B1J: partielle Integration

Für alle stetig differenzierbaren Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{x=a}^{b} f(x)\, g'(x)\, \mathrm{d}x = \Big[f(x)\, g(x)\Big]_{x=a}^{b} - \int_{x=a}^{b} f'(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x.$$

Nachweis dank HDI: Es gilt $[fg]' = f'g + fg'$, also $\int_a^b (f'g + fg') = [fg]_a^b$.
Dank Linearität des Integrals erhalten wir $\int_a^b (f'g) + \int_a^b (fg') = [fg]_a^b$.

☺ Zwecks Vereinfachung wählt man die Faktoren geschickt. Beispiel:

$$\int x^n \ln x\, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \int \frac{x^n}{n+1}\, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right)$$

☺ Manchmal nützt als Trick, den Faktor 1 einzuführen. Beispiel:

$$\int (\ln x)^n\, \mathrm{d}x = \int 1 \cdot (\ln x)^n\, \mathrm{d}x = x \cdot (\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1}\, \mathrm{d}x$$

Letzteres behandelt man ebenso, bis man bei $(\ln x)^0$ ankommt.

Beispiele zur partiellen Integration

Rekursion: Manche Integrale muss man mehrfach partiell integrieren.

$$\begin{aligned}
\int x^n\, \mathrm{e}^x\, \mathrm{d}x &= x^n\, \mathrm{e}^x - n \int x^{n-1}\, \mathrm{e}^x\, \mathrm{d}x, \\
\int x^n \sin x\, \mathrm{d}x &= -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x\, \mathrm{d}x, \\
\int x^n \cos x\, \mathrm{d}x &= x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x\, \mathrm{d}x. \\
\int \sin(x)^n\, \mathrm{d}x &= -\frac{1}{n} \sin(x)^{n-1} \cos(x) + \frac{n-1}{n} \int \sin(x)^{n-2}\, \mathrm{d}x \\
\int \cos(x)^n\, \mathrm{d}x &= +\frac{1}{n} \cos(x)^{n-1} \sin(x) + \frac{n-1}{n} \int \cos(x)^{n-2}\, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Für $I_n = \int_{x=0}^{\pi/2} \sin(x)^n\, \mathrm{d}x$ gilt $I_0 = \frac{\pi}{2}$ und $I_1 = 1$ und weiter $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$:

$$\begin{aligned}
\int_{x=0}^{\pi/2} \sin(x)^{2k}\, \mathrm{d}x &= \frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} = \frac{\pi}{2} \frac{(2k)!}{k!^2 \cdot 2^{2k}}, \\
\int_{x=0}^{\pi/2} \sin(x)^{2k+1}\, \mathrm{d}x &= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k+1)} = \frac{k!^2 \cdot 2^{2k}}{(2k+1)!}.
\end{aligned}$$

Kettenregel ⇒ Substitution

Korollar B1K: Integration durch Substitution

Für $g : [a, b] \to [c, d]$ stetig differenzierbar und $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ stetig gilt

$$\boxed{\int_{t=a}^{b} f(g(t))\, g'(t)\, \mathrm{d}t = \int_{u=g(a)}^{g(b)} f(u)\, \mathrm{d}u.}$$

Nachweis dank HDI: Für $F(s) = \int_c^s f(u)\, \mathrm{d}u$ gilt $F(g(t))' = f(g(t))\, g'(t)$.
Hieraus erhalten wir $\int_a^b f(g(t))\, g'(t)\, \mathrm{d}t = [F(g(t))]_a^b = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, \mathrm{d}u$.
Damit dies auch für $g(b) < g(a)$ gilt, vereinbaren wir $\int_\alpha^\beta := -\int_\beta^\alpha$.

☺ Merkregel: Für $u = g(t)$ gilt $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = g'(t)$, also $\mathrm{d}u = g'(t)\, \mathrm{d}t$. Beispiel:

$$\int_{t=0}^{2} \cos(t^2 + 1) \cdot 2t\, \mathrm{d}t = \int_{u=1}^{5} \cos(u)\, \mathrm{d}u = \Big[\sin(u)\Big]_{u=1}^{5} = \sin(5) - \sin(1)$$

Hier substituieren wir $u = g(t) = t^2 + 1$. Demnach gilt $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = g'(t) = 2t$.
Die Integrationsgrenzen müssen von t nach u angepasst werden:
Wenn t von 0 bis 2 läuft, dann läuft u von $g(0) = 1$ bis $g(2) = 5$.

Beispiele zur Substitution

Eine wichtige Anwendung ist die **logarithmische Ableitung**:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, \mathrm{d}x = \ln|f(x)|$$

Typische Beispiele, die Sie (er)kennen sollten:

$$\int \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x = \int \frac{(x)'}{x}\, \mathrm{d}x = \ln x \quad \text{für } x > 0$$

$$\int \frac{1}{x \ln x}\, \mathrm{d}x = \int \frac{(\ln x)'}{\ln x}\, \mathrm{d}x = \ln \ln x \quad \text{für } x > 1$$

$$\int \frac{1}{x \ln x \ln \ln x}\, \mathrm{d}x = \int \frac{(\ln \ln x)'}{\ln \ln x}\, \mathrm{d}x = \ln \ln \ln x \quad \text{für } x > \mathrm{e}$$

$$\int \tan(x)\, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, \mathrm{d}x = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\, \mathrm{d}x = -\ln|\cos x|$$

$$\int \cot(x)\, \mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, \mathrm{d}x = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x}\, \mathrm{d}x = \ln|\sin x|$$

📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §3.1–3.3.

Integration rationaler Funktionen

Ein Polynom $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ abzuleiten ist leicht: Man erhält $p'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1}$, also wieder ein Polynom. Ebenso leicht können wir integrieren und erhalten wieder ein Polynom:

$$\int p(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{const} + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

Auch eine rationale Funktion $r(x) = p(x)/q(x)$ abzuleiten ist leicht:

$$r'(x) = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{q(x)^2}$$

Für jede rationale Funktion $r(x)$ ist die Ableitung $r'(x)$ wieder rational, aber Stammfunktionen im Allgemeinen nicht! Manche Integrale führen zu $\ln$ und $\arctan$ und somit aus den rationalen Funktionen hinaus:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| \quad \text{und} \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \arctan x$$

☺ Das ist aber auch schon das Schlimmste, was passieren kann. . . Der folgende Satz erklärt, wie man rationale Funktionen integriert.

Integration rationaler Funktionen

📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §3.4. Jede rationale Funktion $r(x) = p(x)/q(x)$ ist elementar integrierbar durch Partialbruchzerlegung und unsere Grundintegrale. Beispiele:

$$r(x) = \frac{4x^2 - 7x + 25}{x^3 - 6x^2 + 3x + 10} = \frac{2}{x+1} - \frac{3}{x-2} + \frac{5}{x-5}$$

$$\Longrightarrow \int r(x)\,\mathrm{d}x = 2\ln|x+1| - 3\ln|x-2| + 5\ln|x-5|$$

$$r(x) = \frac{3x^2 - 3x - 10}{x^3 - 5x^2 + 11x - 15} = \frac{1}{x-3} + \frac{2x+5}{x^2+2x+5}$$

$$\Longrightarrow \int r(x)\,\mathrm{d}x = \ln|x-3| + \ln|x^2+2x+5| + \frac{7}{2}\arctan\frac{x-1}{2}$$

☺ Die Rechnung mag lang und mühsam sein, aber sie gelingt immer! Insbesondere kann ein Computer-Algebra-System sie für uns ausführen.

☺ Der folgende Satz liefert die elementaren Integrale der Partialbrüche. Der Fundamentalsatz der Algebra garantiert uns über $\mathbb{R}$, dass wir jede rationale Funktion als Summe solcher Partialbrüche schreiben können.

Integration rationaler Funktionen

Satz B1L: Integration rationaler Funktionen

Jede rationale Funktion $r(x) = p(x)/q(x)$ ist elementar integrierbar durch Partialbruchzerlegung (B1N) und folgende Grundintegrale:

$$\int \frac{a}{x-u}\,\mathrm{d}x = a\ln|x-u|$$

$$\int \frac{a}{(x-u)^k}\,\mathrm{d}x = \frac{-a}{(k-1)(x-u)^k} \qquad (k \geq 2)$$

$$\int \frac{ax+b}{x^2+2vx+u}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2}\ln|x^2+2vx+u| + \frac{b-av}{\sqrt{u-v^2}}\arctan\frac{x+v}{\sqrt{u-v^2}}$$

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+2vx+u)^k}\,\mathrm{d}x = \frac{(b-av)x+(bv-au)}{2(k-1)(u-v^2)(x^2+2vx+u)^{k-1}} + \frac{(2k-3)(b-av)}{2(k-1)(u-v^2)}\int \frac{1}{(x^2+2vx+u)^{k-1}}\,\mathrm{d}x$$

☺ Zum Nachweis genügt es, geduldig und gewissenhaft abzuleiten. Probe als Übung: Die Formeln sind furchteinflößend, aber elementar!

Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen

Satz B1M: Fundamentalsatz der Algebra, reelle Zerlegung

Jedes reelle Polynom $q \in \mathbb{R}[x]^*$ lässt sich zerlegen in $q = u\,q_1^{k_1}\cdots q_m^{k_m}$ mit $u \in \mathbb{R}^*$ und affin-linearen Faktoren $q_j(x) = x - u_j$ mit $u_j \in \mathbb{R}$ oder quadratischen $q_j(x) = x^2 + 2v_jx + u_j$ mit $u_j, v_j \in \mathbb{R}$ und $v_j^2 - u_j < 0$. Hierbei können wir $k_i \geq 1$ annehmen für alle i sowie $q_i \neq q_j$ für $i \neq j$.

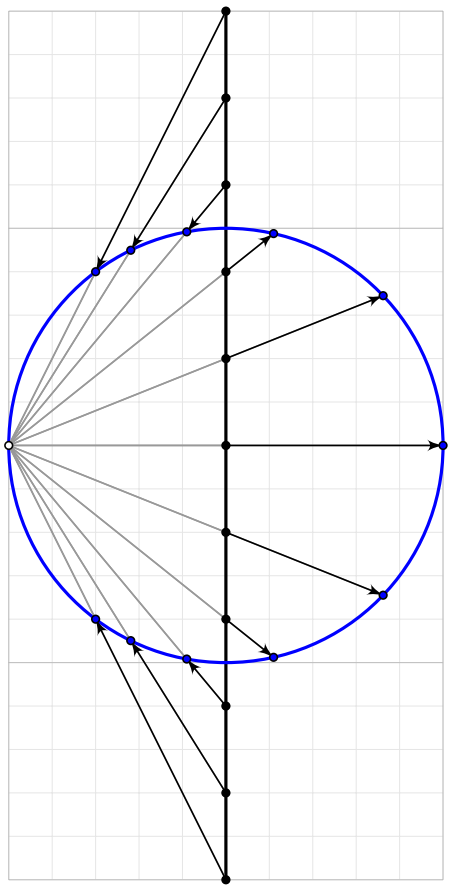
Korollar B1N: reelle Partialbruchzerlegung

Jede rationale Funktion $\frac{p}{q} \in \mathbb{R}(x)$ ist Summe von Partialbrüchen

$$\frac{p}{q} = p_0 + \frac{p_{1,1}}{q_1} + \frac{p_{1,2}}{q_1^2} + \cdots + \frac{p_{1,k_1}}{q_1^{k_1}} + \ldots + \frac{p_{m,1}}{q_m} + \frac{p_{m,2}}{q_m^2} + \cdots + \frac{p_{m,k_m}}{q_m^{k_m}}$$

mit Polynomen $p_0, p_{i,j} \in \mathbb{R}[x]$ und $\deg p_{i,j} < \deg q_i \leq 2$ wie oben. Zusammen mit Satz B1L gelingt so die elementare Integration.

Weierstraß' trigonometrische Generalsubstitution



Ein elegant-raffinierter Integrationstrick wurde von Weierstraß entwickelt: Die **trigonometrische Generalsubstitution** löst eine große Familie von Integralen durch elementare Stammfunktionen.

Die Kreislinie $\mathbb{S}^1 = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \,\}$ parametrisieren wir **trigonometrisch** durch

$$]-\pi,\pi[\ \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1 \smallsetminus \{(-1,0)\} : s \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}s} = (\cos s, \sin s).$$

Alternativ gelingt dies auch **stereographisch**:

$$f : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1 \smallsetminus \{(-1,0)\} : t \mapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right),$$
$$g : \mathbb{S}^1 \smallsetminus \{(-1,0)\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \frac{y}{1+x}.$$

Dies sind zueinander inverse Bijektionen, denn es gilt $g(f(t)) = t$ und $f(g(x,y)) = (x,y)$. Übung!

Weierstraß' trigonometrische Generalsubstitution

Satz B1O: rationale Integranden in $\sin s$ und $\cos s$

Beide Parametrisierungen können wir ineinander umrechnen gemäß

$$\sin s = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos s = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan s = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \cot s = \frac{1-t^2}{2t},$$
$$t = \tan(s/2), \quad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}s}{1+\cos(s)}, \quad s = 2\arctan t, \quad \mathrm{d}s = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

Sei $R(x,y) = P(x,y)/Q(x,y)$ eine rationale Funktion, mit $P, Q \in \mathbb{R}[x,y]$ und $Q(\cos s, \sin s) \neq 0$ für alle $s \in I \subseteq]-\pi,\pi[$. Auf I erhalten wir gemäß

$$\int R(\cos s, \sin s)\,\mathrm{d}s = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

einen rationalen Integranden in t. Diesen können wir dank Satz B1L elementar integrieren und anschließend $s = 2\arctan t$ rücksubstituieren.

Übung: Die Formeln liegen explizit vor; rechnen Sie alle sorgfältig nach!

☺ Jede rationale Funktion in $\sin s$, $\cos s$ wird so elementar integrierbar.

Weierstraß' trigonometrische Generalsubstitution

B139
Beispiel

Aufgabe: Finden Sie auf dem Intervall $I =]0, \pi[$ Stammfunktionen zu

$$\frac{1}{\sin s} \quad \text{und} \quad \frac{2}{3+\cos s} \quad \text{und} \quad \frac{1-\sin s}{(1-\cos s)\sin s}.$$

Lösung: Wir nutzen Weierstraß' trigonometrische Generalsubstitution:

$$\int \frac{\mathrm{d}s}{\sin s} = \int \frac{(1+t^2)}{2t}\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln t = \ln\tan(s/2)$$

$$\int \frac{2}{3+\cos s}\,\mathrm{d}s = \int \frac{2}{3+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int \frac{2}{2+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \sqrt{2}\arctan\Big(\frac{t}{\sqrt{2}}\Big) = \sqrt{2}\arctan\Big(\frac{\tan(s/2)}{\sqrt{2}}\Big)$$

$$\int \frac{1-\sin s}{(1-\cos s)\sin s}\,\mathrm{d}s = \int \frac{1}{2}t^{-1} - t^{-2} + \frac{1}{2}t^{-3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln t + t^{-1} - \frac{1}{4}t^{-2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\tan(s/2) + \cot(s/2) - \frac{1}{4}\cot^2(s/2)$$

☺ Machen Sie wie immer die Probe durch sorgfältiges Ableiten!
Die Rechnung mag länglich sein, aber sie ist vollkommen elementar.

Weierstraß' trigonometrische Generalsubstitution

B140
Beispiel

Diese Substitution mutet zunächst an wie Magie, sie entspringt jedoch zwei sehr einfachen Parametrisierungen der Kreislinie $x^2 + y^2 = 1$:

$$(x, y) = (\cos s, \sin s) = \Big(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\Big)$$

☺ Dieser Trick funktioniert ebenso für die Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$:

$$(x, y) = (\cosh s, \sinh s) = \Big(\frac{1+t^2}{1-t^2}, \frac{2t}{1-t^2}\Big)$$

Ebene Kurvenintegrale werden wir in Kapitel E ausführlicher behandeln, insbesondere auch die Frage nach geeigneten (Um)Parametrisierungen.

☺ Geschlossene Wegintegrale der Form

$$\int_{s=0}^{2\pi} R(\cos s, \sin s)\,\mathrm{d}s$$

werden wir in Kapitel F mit dem Residuensatz berechnen (Satz F4H).

☺ Weierstraß' trigonometrische Generalsubstitution ist daher keine obskure Randerscheinung, sondern eine vielseitige Rechenmethode, die zahlreiche schöne Aspekte verbindet, geometrisch und analytisch.

Algebraische und transzendente Funktionen

Die einfachsten Funktionen sind **konstant** a_0, **affin-linear** $a_0 + a_1 x$, **quadratisch** $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, **kubisch** $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$, ... **polynomiell** $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, **rational** $r(x) = p(x)/q(x)$.

Die konstanten Funktionen bilden einen $\mathbb{R}$–Vektorraum, ebenso die Menge aller affin-linearen Funktionen, quadratischen, kubischen, etc. Polynome bilden den Ring $\mathbb{R}[x]$, rationale Funktionen den Körper $\mathbb{R}(x)$.

Eine Funktion $f(x)$ heißt **algebraisch**, wenn sie eine polynomielle Gleichung der Form $p_n(x) f(x)^n + \cdots + p_1(x) f(x) + p_0(x) = 0$ erfüllt, z.B. Kompositionen rationaler Ausdrücke von Wurzelfunktionen $\sqrt[n]{x}$. Die Funktion $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$ etwa erfüllt $f(x)^2 - 2x f(x) - 1 = 0$.

Ist sie nicht algebraisch, so heißt f **transzendent**. Wichtige Beispiele sind $\exp$ und $\ln$, die **trigonometrischen Funktionen** $\sin$, $\cos$, $\tan$, $\cot$, **Hyperbelfunktionen** $\sinh$, $\cosh$, $\tanh$, $\coth$, **Arkusfunktionen** $\arcsin$, $\arccos$, $\arctan$, arccot, **Areafunktionen** arsinh, arcosh, artanh, arcoth.

☺ All diese Funktionen nennen wir **elementare Grundfunktionen**. Diesen begegnen Sie in Theorie und Anwendungen besonders häufig.

Elementare Funktionen

Elementare Funktionen sind endliche Ausdrücke dieser Funktionen, also Konstanten, x, $\exp(x)$, $\ln(x)$, ... und alles, was hieraus durch Grundrechenarten $+, -, \cdot, /$ und Komposition $\circ$ entsteht, jeweils auf offenen Definitionsintervallen. Beispiel: $\sqrt[n]{x} = \exp(\ln(x)/n)$ für $x > 0$. Kurzum jede Funktion, die wir „geschlossen hinschreiben“ können.

Wir nennen f **elementar integrierbar**, wenn auch $\int f$ elementar ist. Elementare Funktionen sind stetig und somit über $[a, b]$ integrierbar. Sie sind abgeschlossen unter Ableitung, aber nicht unter Integration! Glücklicherweise haben obige Beispiele elementare Stammfunktionen.

Man sagt scherzhaft „Bronstein–integrierbar“, denn diese Funktionen lassen sich integrieren durch Nachschlagen in Integraltafeln wie dem umfangreichen *Taschenbuch der Mathematik* von I.N. Bronstein und K.A. Semendjajew. Noch bequemer sind Computer-Algebra-Systeme, die Integrationsregeln und Tafeln benutzerfreundlich implementieren.

⚠ Viele elementare Funktionen sind nicht elementar integrierbar! Prominente Beispiele sind $\exp(-x^2/2)$ B145 und $\operatorname{si}(x) = \sin(x)/x$ B149.

Analytische Funktionen

📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §1.14.
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ offen. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt **analytisch** im Punkt $x_0 \in \Omega$, wenn sie sich lokal um x_0 in eine konvergente Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

entwickeln lässt. Gilt dies in jedem Punkt, so heißt f analytisch auf Ω.

Analytische Funktionen sind z.B. $x \mapsto cx^a$, e^x, $\sin x$, $\cos x$, und mit f, g auch $f \pm g$ und $f \cdot g$ und f/g sowie $f \circ g$ und f^{-1} jeweils wo definiert; die Definitionsbereiche müssen ggf. geeignet eingeschränkt werden. Jede elementare Funktion ist analytisch, zudem viele weitere.

🙂 Die analytischen Funktionen sind abgeschlossen unter **Integration**:

$$F(x) = \mathrm{const} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k-1}}{k} (x - x_0)^k$$

Potenzreihen dürfen wir termweise ableiten und erhalten $F'(x) = f(x)$.

Analytische vs elementare Funktionen

In der Mathematik versteht man unter einer **analytischen Funktion** $f : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \to \mathbb{R}$ oder allgemeiner $f : \mathbb{C}^n \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$ eine Abbildung, die sich lokal als konvergente Potenzreihe darstellen lässt, wie oben erklärt.

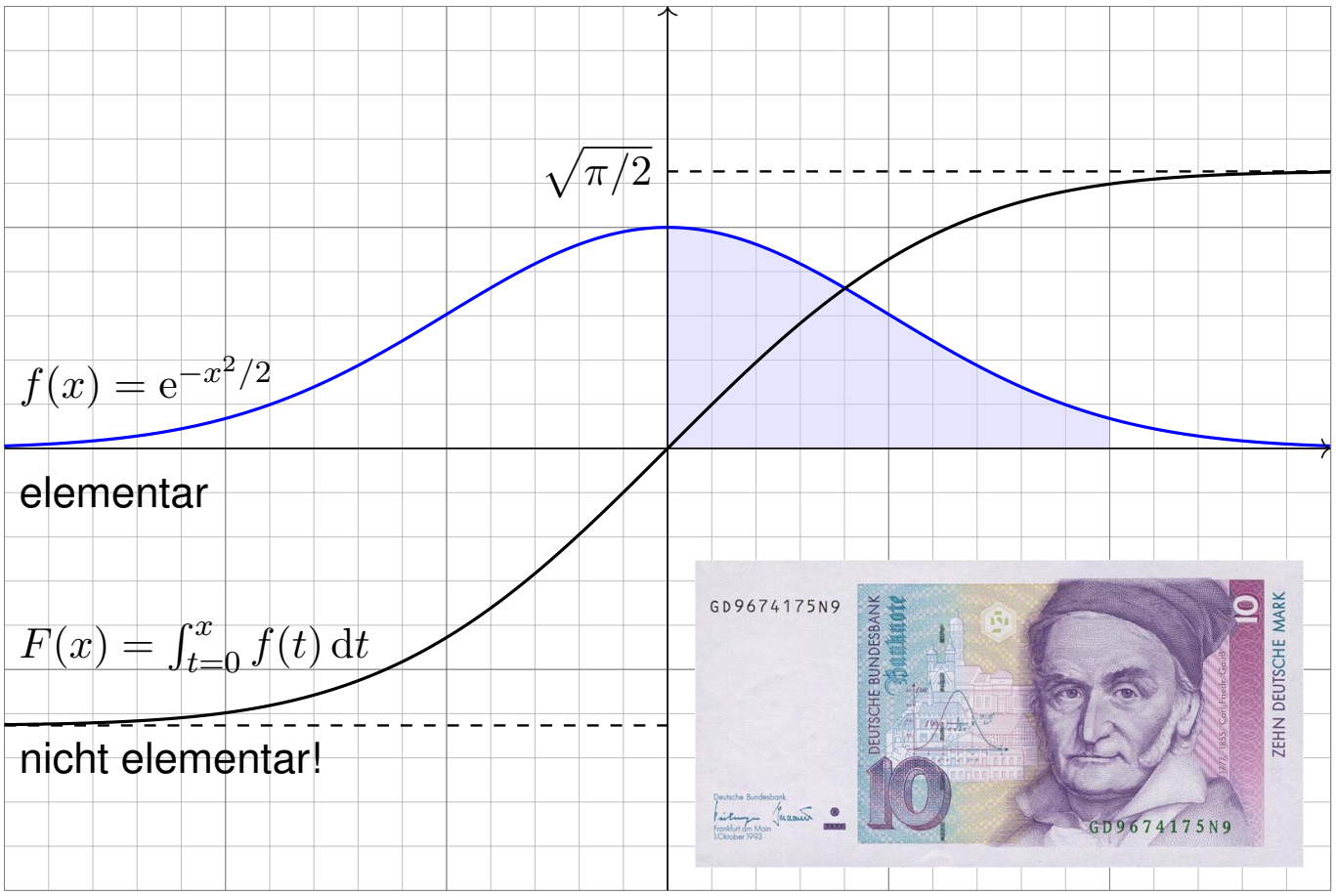
Außerhalb der Mathematik werden die Begriffe „elementare Funktion“ und „analytischer Ausdruck“ oft synonym verwendet. Diese Wortwahl ist sehr unglücklich und stiftet heillose Verwirrung. Daher verwende ich zur klaren Unterscheidung ausdrücklich den Begriff **elementare Funktion**.

Die elementaren Funktionen kennen und verstehen wir besonders gut, wir können gut mit ihnen rechnen, d.h. wir können sie zur Vereinfachung geschickt umformen, und so lässt sich manches Ergebnis schließlich „in geschlossener Form“ angeben. Das gelingt jedoch leider nicht immer!

Welche Funktionen man als elementar betrachtet, hängt vom Kontext ab. Zum Beispiel würde man die Gamma– und Bessel–Funktionen wohl dazuzählen, nicht aber (unvereinfachte) Grenzwerte und Integrale.

⚠ Klausuraufgaben verlangen häufig genau dies: „Integrieren Sie…“ bedeutet implizit „Geben Sie das Ergebnis in geschlossener Form an.“

Gaußsche Glockenkurve und Fehlerintegral



Stammfunktion der Glockenkurve als Potenzreihe

Satz B1P: Liouville 1835

Die Glockenkurve $f(x) = \exp(-x^2/2)$ ist analytisch, sogar **elementar**, aber ihre Integralfunktion $F(x) = \int_{t=0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ ist **nicht elementar**.

☺ Die Gaußsche Glockenkurve f und ihre Integralfunktion F spielen eine zentrale Rolle in Theorie und vielen Anwendungen, insbesondere in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Hierzu müssen wir das Integral $F(x)$ konkret berechnen, meist für kleine Werte wie $x \in [-4, 4]$.

☺ Wir werden später $\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$ ausrechnen C230 dank zweidimensionaler Integration, Fubini und Transformationssatz.

☹ Für F existiert keine elementare Formel. Auch dieses negative Ergebnis ist nützlich: Es hat keinen Sinn, sich vergebens abzumühen. Die umsichtige Ingenieur:in versteht, was *möglich* ist, und was *nicht*.

☺ Die Darstellung von f und F als Potenzreihe erlaubt eine elegante und extrem effiziente numerische Berechnung. Hierzu dient die folgende Aufgabe; damit können wir die Funktion F bequem tabellieren. V114

Stammfunktion der Glockenkurve als Potenzreihe

Aufgabe: (1) Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$ und ihre Stammfunktion $F(x) = \int_{t=0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ in Potenzreihen um $x = 0$.

(2) Approximieren Sie $F(x)$ durch ein geeignetes Polynom $F_n(x)$ in allen Punkten $x \in [-4, 4]$ bis auf einen Fehler $\delta < \varepsilon = 10^{-7}$.

Lösung: (1) Dank der Reihe $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ finden wir mühelos

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,2^k}\,x^{2k} \quad \Longrightarrow \quad F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,2^k\,(2k+1)}\,x^{2k+1}.$$

☺ Zur Probe nutzen wir umgekehrt den HDI, denn Potenzreihen dürfen wir termweises ableiten. Wir sehen $F' = f$ und $F(0) = 0$, also $F(x) = \int_{t=0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$. 📖 Analysis, Beispiel 3.8.5. Zur Vertauschung des Integrals mit einer absolut konvergenten Reihe siehe Seite D106.

☺ Jede Potenzreihe verhält sich in ihrem Konvergenzkreis wie ein Polynom unendlichen Grades. Damit können Sie rechnen, bequem und effizient, wie Sie dies in der HM2 gelernt haben. Ihre Investition in die mathematischen Grundlagen zahlt sich aus, bereits hier und immer wieder!

☺ Die Darstellung als Potenzreihe nutzen wir für viele Funktionen. Sie ist für alle praktischen wie theoretischen Belange beinahe ebenso gut wie eine Darstellung durch elementare Funktionen. Hier ist eine elementare Integration unmöglich, die analytische Integration gelingt jedoch leicht.

Stammfunktion der Glockenkurve als Potenzreihe

(2) Wir berechnen $F(x)$ für $x \in [-4, 4]$ auf 10^{-7} genau. Hierzu nutzen wir die obige Reihe: Dies ist eine alternierende Reihe (à la Leibniz), hierfür kennen wir eine bequeme Fehlerschranke (Satz B3G). Für $n \geq 8$ gilt

$$\left| F(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2^k k!(2k+1)} \right| = \left| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2^k k!(2k+1)} \right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)}.$$

Wann ist n groß genug? Auswerten dieser Schranke ergibt

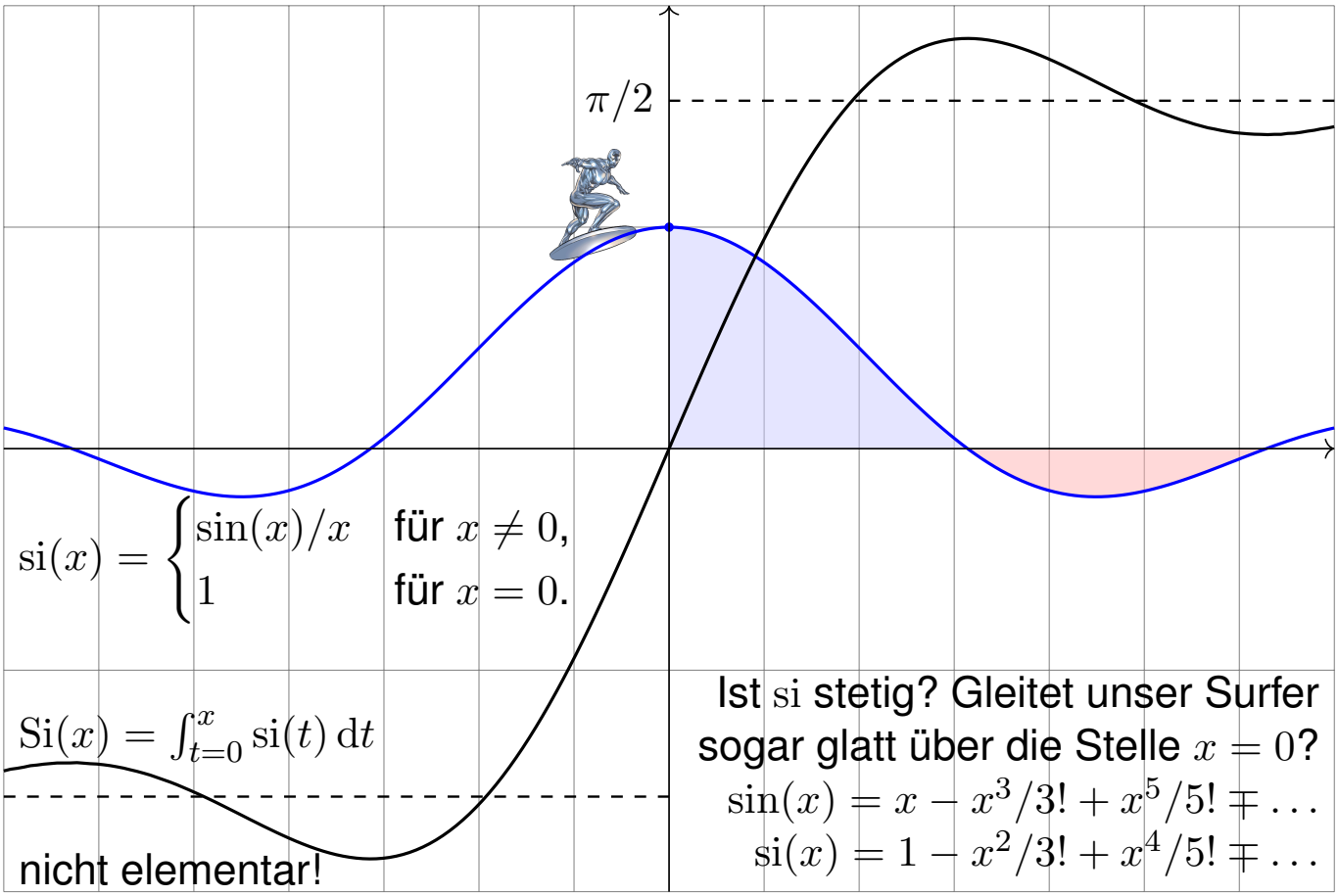
$$n = 30: \quad \frac{4^{61}}{2^{30} \cdot 30! \cdot 61} \gtrapprox 3 \cdot 10^{-7}, \qquad n = 31: \quad \frac{4^{63}}{2^{31} \cdot 31! \cdot 63} \lessapprox 0.8 \cdot 10^{-7}.$$

Eine geeignete Approximation ist demnach folgendes Polynom:

$$\boxed{F(x) = \sum_{k=0}^{30} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2^k k!(2k+1)} + \delta \quad \text{mit} \quad |\delta| \leq \frac{|x|^{63}}{2^{31} \cdot 31! \cdot 63} < 10^{-7}.}$$

☺ Wir erhalten so alle Werte $F(x)$ für $x \in [-4, 4]$ auf 10^{-7} genau. Diese Näherung kann nun ein Computer numerisch auswerten. V114

Spaltfunktion und Integralsinus



Integralsinus als Potenzreihe

Satz B1Q: Liouville 1835

Die Spaltfunktion $\mathrm{si} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig, analytisch, sogar **elementar**, aber ihre Integralfunktion $\mathrm{Si}(x) = \int_{t=0}^{x} \mathrm{si}(t)\,\mathrm{d}t$ ist **nicht elementar**.

Aufgabe: Entwickeln Sie si und Si als Potenzreihe. **Lösung:** :

$$\mathrm{si}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Si}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!(2k+1)} x^{2k+1}$$

Zur Probe nutzen wir umgekehrt den HDI, denn Potenzreihen dürfen wir termweises ableiten. Wir sehen $\mathrm{Si}' = \mathrm{si}$ und $\mathrm{Si}(0) = 0$, also $\mathrm{Si}(x) = \int_{t=0}^{x} \mathrm{si}(t)\,\mathrm{d}t$. 📖 Analysis, Beispiel 3.8.7. Zur Vertauschung des Integrals mit einer absolut konvergenten Reihe siehe Seite D106.

☺ Die Darstellung als Potenzreihe nutzen wir für viele Funktionen. Sie ist für alle praktischen wie theoretischen Belange beinahe ebenso gut wie eine Darstellung durch elementare Funktionen. Die Spaltfunktion si und der Integralsinus Si treten zum Beispiel bei Beugung von Lichtwellen an einem Spalt auf. Äquivalent hierzu begegnet uns die Spaltfunktion als Fourier–Transformierte der Rechteckfunktion. K107 Anwendung: So werden mikroskopisch kleine Strukturen gemessen. Wir werden etwas später sogar den Grenzwert $\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \pi$ ausrechnen können, allerdings erst dank zweidimensionaler Integration, Integralsätzen und Residuenkalkül. F425 Unerschrockenen gelingt dies auch eindimensional mit der Laplace–Transformation. L409

Elementar integrierbar oder nicht. . . ?

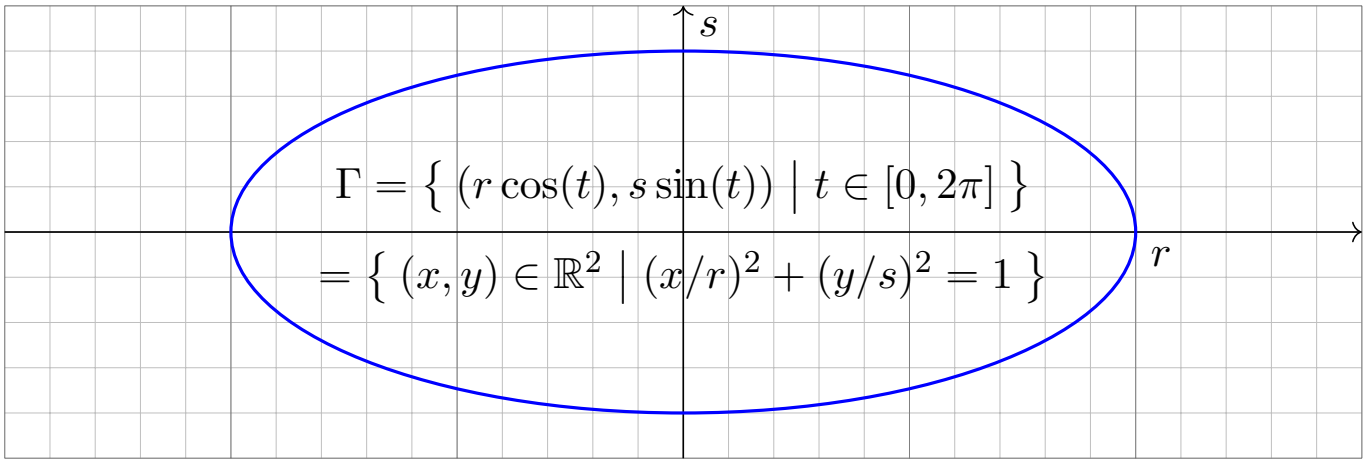
⚠ Elementare Fragen erfordern oft nicht-elementare Antworten.
Elementare Integrierbarkeit sieht man dem Integranden nicht leicht an:

elementar integrierbar	nicht elementar integrierbar
e^x	$\mathrm{e}^{x^2},\ \mathrm{e}^x/x$
$\ln x$	$\ln\ln x,\ \sqrt{\ln x}$
$\sin x,\ \cos x$	$\sin(x)/x$
$\sqrt{\tan x}$	$\sqrt{\cos x}$
$\ln(x)/x$	$\ln(x)/(x-1)$
$\sqrt{1+x^2}$	$\sqrt[3]{1+x^2}$
$x^x + x^x \ln x$	$x^x,\ x^x \ln x$
$x \,/\, \sqrt{x^4+10x^2-96x-71}$	$x \,/\, \sqrt{x^4+10x^2-96x-72}$

☺ Computer-Algebra-Systeme nutzen den **Algorithmus von Risch**:
Er findet entweder eine elementare Stammfunktion, falls eine existiert, oder aber er erkennt ihre Nicht-Existenz. Das ist phantastisch-genial!

Die Kurvenlänge von Ellipsen

Die **Ellipse** Γ um den Nullpunkt $(0,0)$ mit Radien $r, s > 0$:



Der umschlossene **Flächeninhalt** ist $\mathrm{vol}_2(A) = \pi r s$. (Warum?)
Die **Kurvenlänge** von Γ ist gegeben durch das elliptische Integral

$$\mathrm{vol}_1(\Gamma) = \int_{t=0}^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin(t)^2 + s^2 \cos(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Kurvenintegrale werden wir in Kapitel E noch ausführlicher behandeln.
Für $r \neq s$ lässt es sich nicht durch elementare Funktionen ausdrücken!
Dies gelingt als Potenzreihe in der **Exzentrizität** $\varepsilon := \sqrt{1 - s^2/r^2}$. E040

Viele Funktionen sind nicht Riemann–integrierbar.

Riemann–integrierbare Funktionen schachteln wir ein durch Treppenfunktionen (A3E).
Diese Technik funktioniert bestens für stetige Funktionen, stößt aber schnell an ihre Grenzen:

♦ Satz A3F: Riemann–Integrierbarkeit, hier eindimensional

Genau dann ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann–integrierbar, wenn gilt:

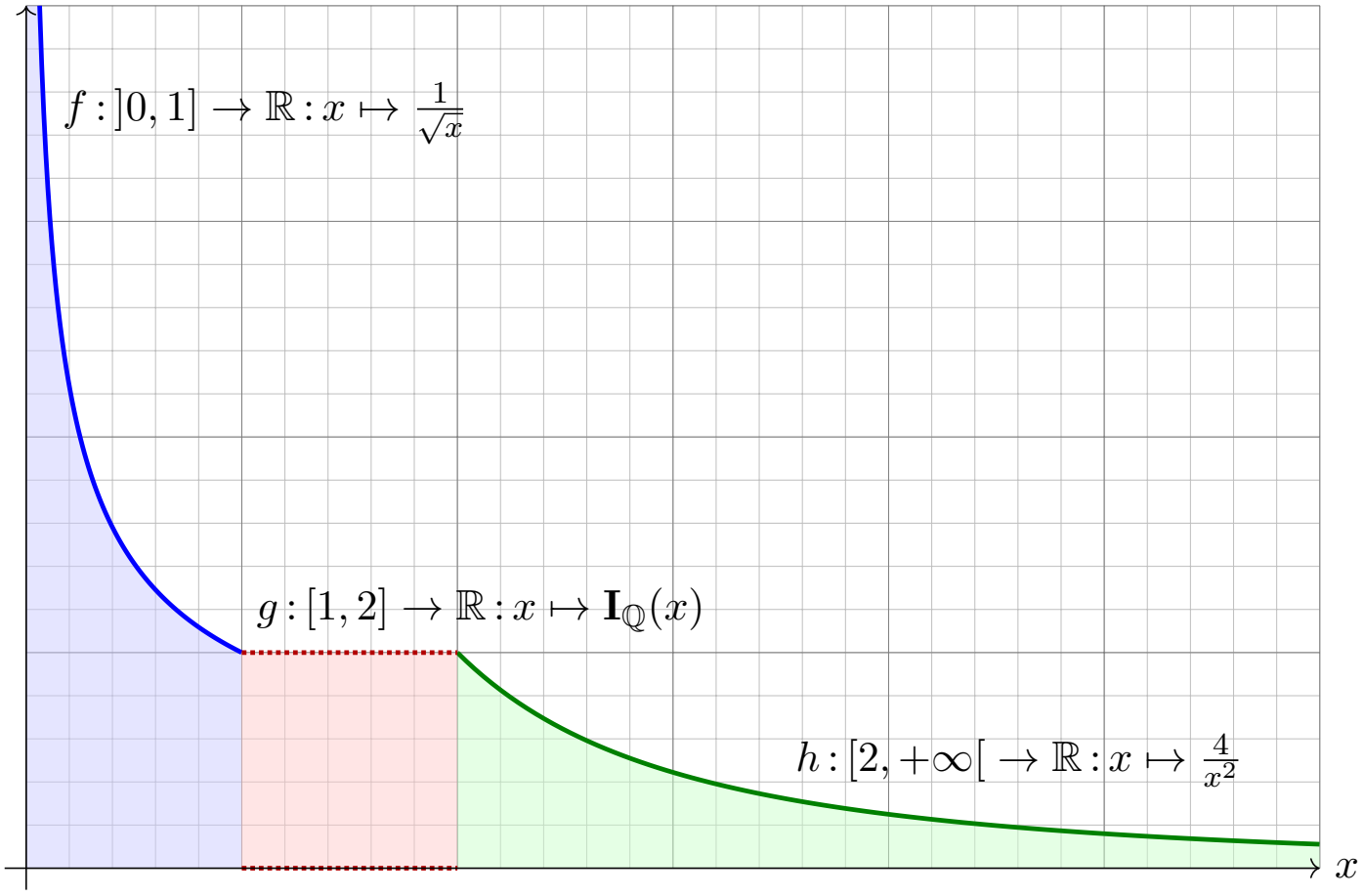
- Die Funktion f hat beschränkten Träger:
  Es gibt ein endliches Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ sodass $f(x) = 0$ für $x \notin I$.
- Die Funktion f hat beschränkten Wertebereich:
  Es gibt ein endliches Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ sodass $f(I) \subseteq J$.
- Die Funktion f ist fast überall stetig:
  Für die Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ der Unstetigkeitsstellen gilt $\mathrm{vol}_1(U) = 0$.

☺ Alle stetigen Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sind Riemann–integrierbar.

☹ Viele Funktionen sind allein mit Einschachtelung nicht integrierbar.

Die nächste Seite zeigt drei typische Beispiele. Bei f ist der Wertebereich unbeschränkt, bei h hingegen der Träger: Diese lassen sich nicht durch Treppenfunktionen einschachteln! Die Funktion g ist in jedem Punkt unstetig: Zwar lässt sie sich durch Treppenfunktionen einschachteln, aber nicht beliebig genau, denn die Fläche dazwischen beträgt mindestens 1.

Viele Funktionen sind nicht Riemann–integrierbar.



Erinnerung: Monotone Konvergenz

Die erweiterte Zahlengerade $\bar{\mathbb{R}}$ vereinfacht Konvergenzaussagen:

♦ Satz A2E: Supremum und Infimum in $\bar{\mathbb{R}}$

Jede Teilmenge $M \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ hat ein Supremum und ein Infimum in $\bar{\mathbb{R}}$.

Ist die Menge M leer, so gilt $\sup \emptyset = -\infty$ und $\inf \emptyset = +\infty$.

♦ Satz A2F: monotone Konvergenz von Zahlenfolgen

Jede wachsende Folge $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots$ in $\bar{\mathbb{R}}$ konvergiert gegen einen Grenzwert $a \in \bar{\mathbb{R}}$. Wir schreiben hierfür kurz $a_k \nearrow a$.

Für $b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots$ in $\bar{\mathbb{R}}$ gilt entsprechend $b_k \searrow b$ mit $b \in \bar{\mathbb{R}}$.

♦ Satz A2G: monotone Konvergenz von Funktionenfolgen

Jede wachsende Folge $f_0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ von Funktionen $f_k : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ konvergiert punktweise gegen eine Grenzfunktion $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$.
Das heißt, für jedes $x \in \Omega$ gilt $f_k(x) \nearrow f(x)$, kurz $f_k \nearrow f$.

Für $g_0 \geq g_1 \geq g_2 \geq \dots : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ gilt entsprechend $g_k \searrow g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$.

Integration durch Ausschöpfung

Wir wollen $f : \Omega \to [0, \infty]$ ausschöpfen durch messbare Funktionen

$$f_0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots \quad \text{mit} \quad f_k \nearrow f.$$

D.h. es gilt monotone Konvergenz $f_k(x) \nearrow f(x)$ für jedes $x \in \Omega$.

Dank Monotonie des Integrals gilt dann

$$\int_\Omega f_0(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega f_1(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega f_2(x)\,\mathrm{d}x \leq \dots$$

Hieraus folgt Konvergenz $\int_\Omega f_k(x)\,\mathrm{d}x \nearrow A$ gegen ein $A \in [0, \infty]$.

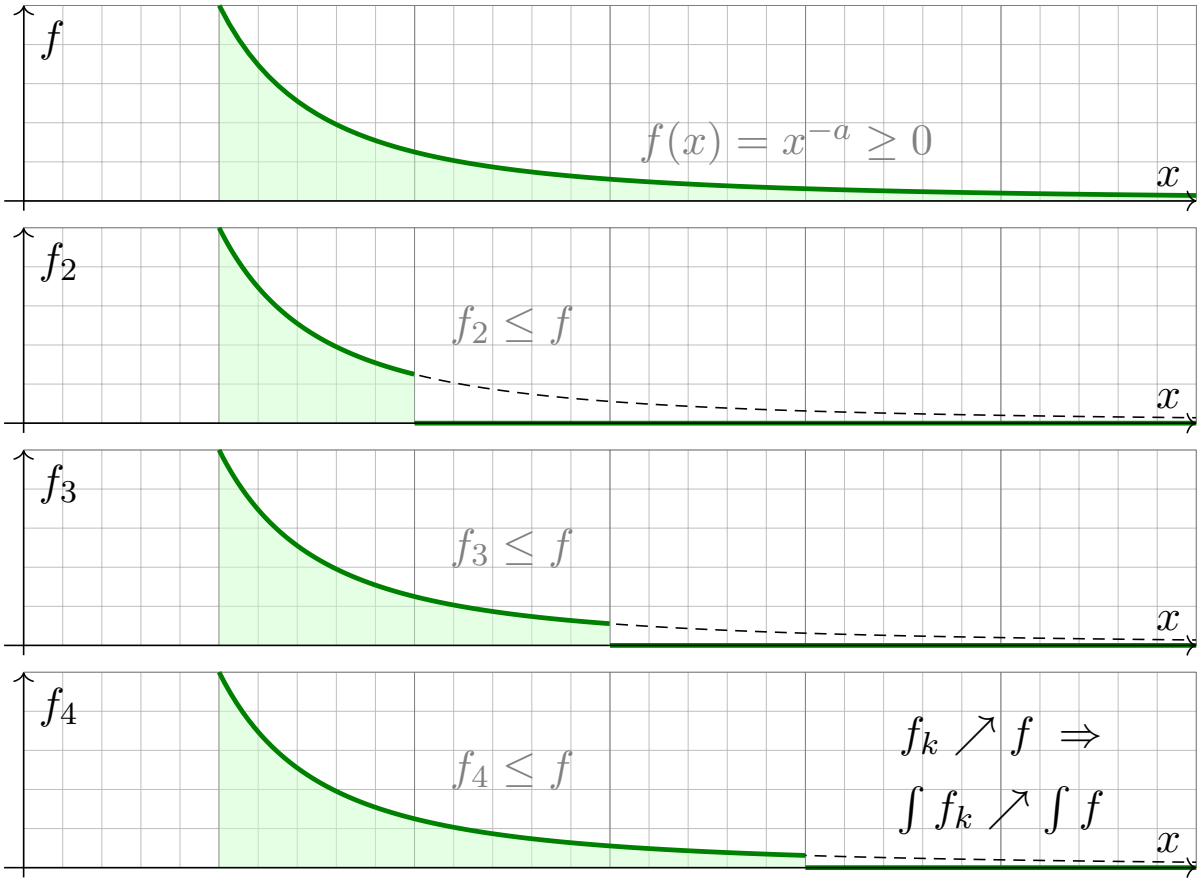
Auch die Grenzfunktion f ist dann messbar (A3G), und wir erhalten

$$\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x = A.$$

☺ Diese Integrationsmethode ist das **Prinzip der Ausschöpfung**.

Das Ergebnis ist wohldefiniert, d.h. es hängt nur von der Funktion f ab, nicht jedoch von unserer willkürlichen Wahl einer Ausschöpfung $f_k \nearrow f$.

Beispiel: Integration durch Ausschöpfung



📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, Beispiel 3.7.8 und später B217.
Die Funktion f ist nicht Riemann–integrierbar, da ihr Träger $[1, +\infty[$ nicht beschränkt ist.

Beispiel: Integration durch Ausschöpfung

Aufgabe: Integriere $f(x) = x^{-a}$ auf $\Omega = [1, +\infty[$ durch Ausschöpfung.

Lösung: Für $f_k = f \cdot \mathbf{I}_{[1,k]}$ gilt $f_k \nearrow f$. (1) Für $a = 1$ finden wir

$$\int_\Omega f_k(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Def}}{=} \int_{x=1}^{k} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \overset{\text{HDI}}{=} \Big[\ln x\Big]_{x=1}^{k} = \ln k \nearrow +\infty.$$

(2) Für $a < 1$ fällt f noch langsamer:

$$\int_\Omega f_k(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Def}}{=} \int_{x=1}^{k} x^{-a}\,\mathrm{d}x \overset{\text{HDI}}{=} \left[\frac{x^{1-a}}{1-a}\right]_{x=1}^{k} = \frac{k^{1-a}-1}{1-a} \nearrow +\infty$$

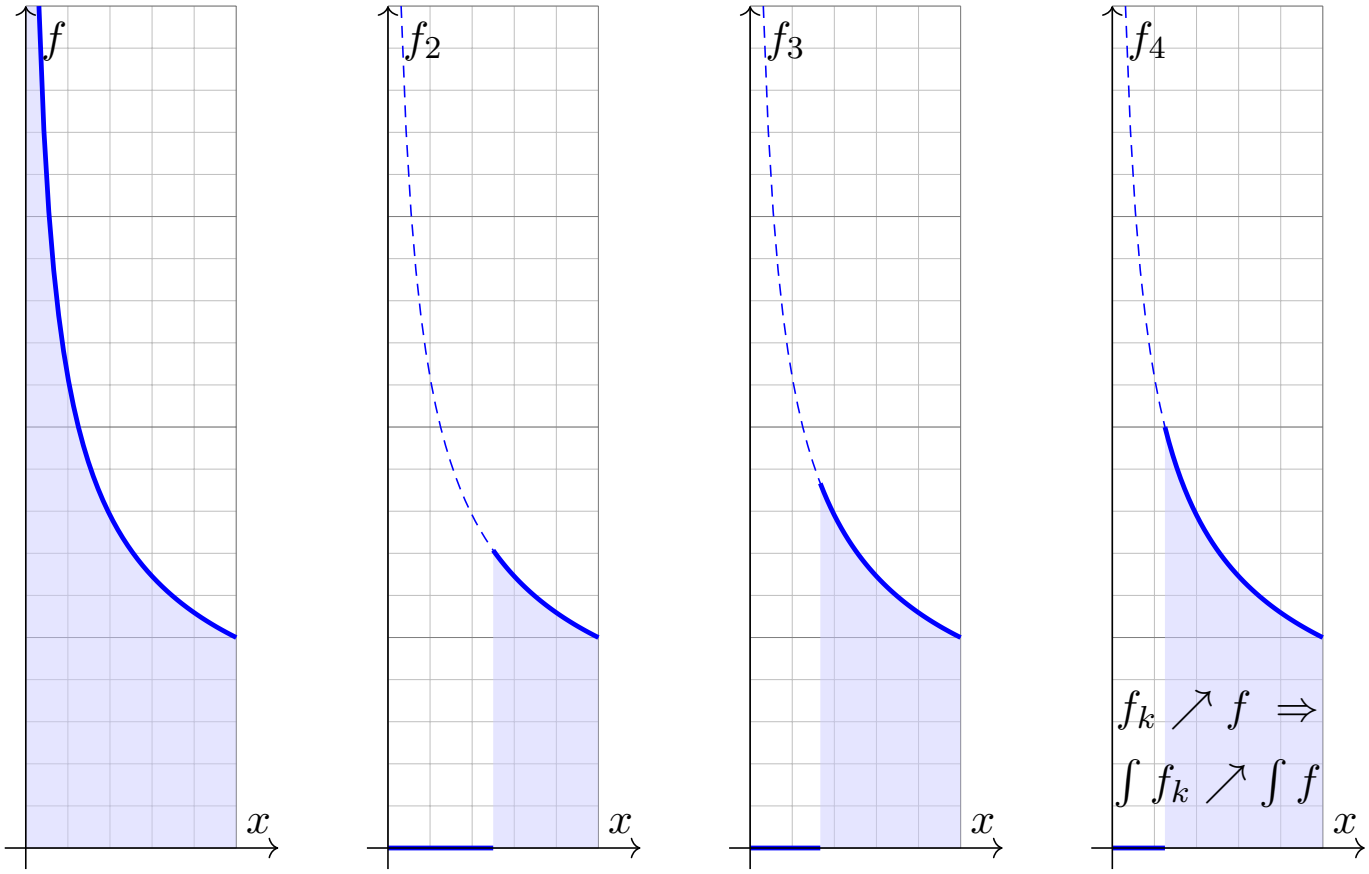
(3) Nur für $a > 1$ fällt f schnell genug:

$$\int_\Omega f_k(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Def}}{=} \int_{x=1}^{k} x^{-a}\,\mathrm{d}x \overset{\text{HDI}}{=} \left[\frac{x^{1-a}}{1-a}\right]_{x=1}^{k} = \frac{1-k^{1-a}}{a-1} \nearrow \frac{1}{a-1}$$

Dank Ausschöpfung $f_k \nearrow f$ gilt $\int_\Omega f_k \nearrow \int_\Omega f$. Wir erhalten also

$$\int_{x=1}^{k} \frac{1}{x^a}\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{matrix} \ln k & \text{für } a = 1 \\ \frac{1-k^{1-a}}{a-1} & \text{für } a \neq 1 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{k\to\infty} \left\{\begin{matrix} +\infty & \text{für } a \leq 1, \\ \frac{1}{a-1} & \text{für } a > 1. \end{matrix}\right.$$

Beispiel: Integration durch Ausschöpfung



📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, Beispiel 3.7.9 und später B217.
Die Funktion $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ ist nicht Riemann–integrierbar, da sie nicht beschränkt ist.

Beispiel: Integration durch Ausschöpfung

Aufgabe: Integriere $f(x) = x^{-a}$ auf $\Omega =]0,1]$ durch Ausschöpfung.

Lösung: Für $f_k = f \cdot \mathbf{I}_{[1/k,1]}$ gilt $f_k \nearrow f$. (1) Für $a = 1$ finden wir

$$\int_\Omega f_k(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Def}}{=} \int_{x=1/k}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \overset{\text{HDI}}{=} \Big[\ln x\Big]_{x=1/k}^{1} = \ln k \nearrow +\infty.$$

(2) Für $a > 1$ wächst f sogar noch schneller:

$$\int_\Omega f_k(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Def}}{=} \int_{x=1/k}^{1} x^{-a}\,\mathrm{d}x \overset{\text{HDI}}{=} \left[\frac{x^{1-a}}{1-a}\right]_{x=1/k}^{1} = \frac{k^{a-1}-1}{a-1} \nearrow +\infty$$

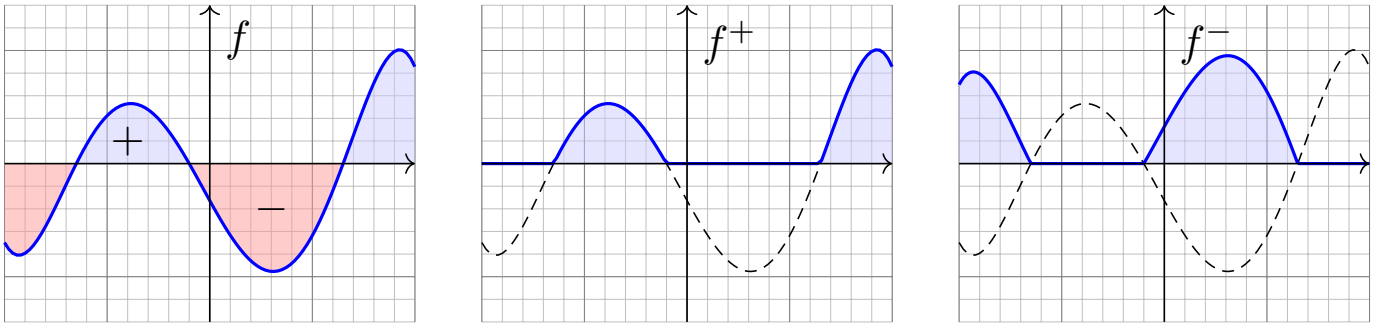
(3) Nur für $a < 1$ wächst f langsam genug:

$$\int_\Omega f_k(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Def}}{=} \int_{x=1/k}^{1} x^{-a}\,\mathrm{d}x \overset{\text{HDI}}{=} \left[\frac{x^{1-a}}{1-a}\right]_{x=1/k}^{1} = \frac{1-k^{a-1}}{1-a} \nearrow \frac{1}{1-a}$$

Dank Ausschöpfung $f_k \nearrow f$ gilt $\int_\Omega f_k \nearrow \int_\Omega f$. Wir erhalten also

$$\boxed{\int_{x=1/k}^{1} \frac{1}{x^a}\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{matrix} \ln k & \text{für } a = 1 \\ \frac{1-k^{a-1}}{1-a} & \text{für } a \neq 1 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{k\to\infty} \left\{\begin{matrix} +\infty & \text{für } a \geq 1, \\ \frac{1}{1-a} & \text{für } a < 1. \end{matrix}\right.}$$

Absolut integrierbare Funktionen und ihr Integral



Bislang haben wir positive Funktionen durch Ausschöpfung integriert.
Das passt zur Idee des Volumens und vereinfacht die Formulierung.

Für beliebige Funktionen $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ können wir wie folgt vorgehen:
Wir zerlegen $f = f^+ - f^-$ in **Positivteil** f^+ und **Negativteil** f^- gemäß

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } f(x) > 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{falls } f(x) < 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für jede Funktion $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ gilt $f = f^+ - f^-$ und $|f| = f^+ + f^-$.
Umgekehrt gilt allgemein $f^\pm = \max(0, \pm f) = \frac{1}{2}(|f| \pm f)$.
Für $f(x) = \pm\infty$ nutzen wir die Konvention $\infty - \infty = 0$.

Absolut integrierbare Funktionen und ihr Integral

Zur Erinnerung an A3K: In einer Dimension sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall.

Definition B2A: absolut integrierbare Funktionen und ihr Integral

Genau dann ist $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ **messbar**, wenn $f^\pm : \Omega \to [0, \infty]$ messbar sind.
(1) In diesem Fall ist auch $|f| = f^+ + f^-$ messbar, und somit gilt

$$\int_\Omega |f(x)| \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f^+(x) \, \mathrm{d}x + \int_\Omega f^-(x) \, \mathrm{d}x.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so nennen wir f **(absolut) integrierbar**.
In diesem Fall können wir das Integral von f definieren durch

$$\boxed{\int_\Omega f(x) \, \mathrm{d}x := \int_\Omega f^+(x) \, \mathrm{d}x - \int_\Omega f^-(x) \, \mathrm{d}x.}$$

⚠ Die Differenz $\infty - \infty$ ist sinnlos! Zur Integration von $f = f^+ - f^-$ müssen Positivteil f^+ und Negativteil f^- endliche Integrale liefern.

☺ Das Kriterium $\int_\Omega |f(x)| \, \mathrm{d}x < \infty$ ist einfach, präzise und bequem.
Geschickte Abschätzung vermeidet die mühsame Berechnung von $f^\pm$.

Absolut integrierbare Funktionen und ihr Integral

Beispiel: Für die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=\sin(x)/x$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f^+(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f^-(x)\,\mathrm{d}x = \infty.$$

Demnach ist f also nicht *absolut integrierbar*. (Seite B149 zeigt eine Skizze, die ausführliche Rechnung diskutieren wir auf Seite B421.)
In diesem Fall hat es keinen Sinn, die Differenz $\infty-\infty$ zu betrachten!

Wir werden daher meist die **absolute Integrierbarkeit** voraussetzen.
In diesem besten Falle haben f^+, f^- endliches Integral, und wir setzen

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} f^-(x)\,\mathrm{d}x.$$

Andernfalls haben viele Integrale zunächst keinen Sinn! Notfalls müssen wir **uneigentliche Integrale** oder den **Cauchy–Hauptwert** nutzen:

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{oder} \quad \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^r f(x)\,\mathrm{d}x$$

Diese Konstruktionen sind etwas subtiler und leider weniger robust. B417
Die beste und robusteste Eigenschaft ist die absolute Integrierbarkeit.

Absolut integrierbare Funktionen und ihr Integral

Wir wollen möglichst allgemeine Funktionen $f:\Omega\to\bar{\mathbb{R}}$ integrieren.
Zudem sollen die Rechenregeln möglichst einfach und allgemein sein.
Dies gelingt nach Lebesgue mit den absolut integrierbaren Funktionen.
Zur Erinnerung an A3L: In einer Dimension sei $\Omega\subseteq\mathbb{R}$ ein Intervall.

Satz B2B: absolut integrierbare Funktionen und ihr Integral

Wir betrachten ein Integrationsintervall $\Omega\subseteq\mathbb{R}$, etwa $\Omega=\mathbb{R}$.
Die Menge aller (messbaren und) absolut integrierbaren Funktionen

$$L^1(\Omega)=L^1(\Omega,\mathbb{R}) := \left\{\, f:\Omega\to\mathbb{R} \;\middle|\; \textstyle\int_\Omega |f(x)|\,\mathrm{d}x<\infty \,\right\}$$

ist ein $\mathbb{R}$–Vektorraum. Hierauf ist das Integral eine $\mathbb{R}$–lineare Abbildung

$$\textstyle\int_\Omega \;:\; L^1(\Omega)\to\mathbb{R} \;:\; f\mapsto \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Sie ist normiert, monoton, erfüllt Einschachtelung und Ausschöpfung.

Hierbei ist $L^1(\Omega)$ der kleinste Funktionenraum, für den dies möglich ist, und auf $L^1(\Omega)$ ist das (Lebesgue–)Integral hierdurch eindeutig bestimmt.

Der Hauptsatz für stückweise stetige Funktionen

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist das Arbeitspferd der eindimensionalen Integration. In vielen Anwendungen, auch später in dieser Vorlesung, werden zudem stückweise stetige Funktionen (B1E) integriert. Die Ausformulierung das Hauptsatzes ist hier nicht schwer:

Satz B2C: Hauptsatz für stückweise stetige Funktionen

Ist $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit stückweise stetiger Ableitung $f = F'$, so gilt

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Ist umgekehrt eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stückweise stetig, so ist

$$F : [a, b] \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

stetig und erfüllt $F'(x) = f(x)$ für alle bis auf endlich viele $x \in [a, b]$.

☺ Der Satz folgt aus dem HDI (B1I) durch stückweise Integration.
Die folgende Optimierung ist technisch, zahlt sich aber später aus.

Der Hauptsatz für integrierbare Funktionen

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt viel allgemeiner für alle absolut integrierbaren Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, egal ob stetig, stückweise stetig, oder sehr unstetig. Die Integralfunktion F ist dann nicht mehr überall differenzierbar, aber immerhin fast überall. Die genaue Formulierung beruht auf dem Begriff der absoluten Stetigkeit (📖 Heuser §131):

Definition B2D: absolut stetige Funktionen

Eine Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **absolut stetig**, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass gilt: Aus $a \le a_1 < b_1 \le \cdots \le a_n < b_n \le b$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $\sum_{k=1}^n |a_k - b_k| < \delta$ folgt $\sum_{k=1}^n |F(a_k) - F(b_k)| < \varepsilon$.

Für $n = 1$ ist dies die gleichmäßige Stetigkeit; diese wird hier für n Intervalle verschärft. Absolute Stetigkeit liegt zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit, allgemein gilt nämlich: stetig differenzierbar $\Longrightarrow$ stetig und stückweise stetig differenzierbar $\Longrightarrow$ Lipschitz–stetig $\Longrightarrow$ absolut stetig $\Longrightarrow$ gleichmäßig stetig $\Longrightarrow$ stetig. Die Umkehrungen gelten im Allgemeinen nicht.

Lipschitz–Stetigkeit von $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ bedeutet, dass F beschränkte Differenzenquotienten hat, also $|\frac{F(s)-F(t)}{s-t}| \le L$ für eine Konstante $L \in \mathbb{R}$ und alle $s \ne t$ in $[a, b]$. Das ist oft nützlich.

Der folgende Satz von Lebesgue verallgemeinert den Hauptsatz B1I der Differential- und Integralrechnung von (stückweise) stetigen Integranden zu absolut integrierbaren Integranden. Dieses Ergebnis beinhaltet die Integralfunktionen aller stückweise stetigen Funktionen und auch sonst alle Funktionen, die uns im Folgenden begegnen werden.

Der Hauptsatz für integrierbare Funktionen

☺ Die absolute Stetigkeit ist maßgeschneidert für den HDI, denn sie charakterisiert genau die Integralfunktionen:

Satz B2E: Hauptsatz für absolut integrierbare Funktionen

Ist $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ absolut stetig, so ist F fast überall differenzierbar, ihre Ableitung $f = F' : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist absolut integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Ist umgekehrt eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ absolut integrierbar, so ist

$$F : [a, b] \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

absolut stetig, fast überall differenzierbar, und fast überall gilt $F' = f$.

Hierzu definieren wir die Ableitungsfunktion $F' : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch den Differentialquotienten $F'(x) = \lim_{\xi \to x}(F(\xi) - F(x))/(\xi - x)$ für alle $x \in [a, b]$, in denen dieser Grenzwert existiert, und $F'(x) := 0$ sonst.

Der Hauptsatz für integrierbare Funktionen

☺ Absolute Stetigkeit lässt sich somit leicht charakterisieren:

Korollar B2F: absolut stetig und absolut integrierbar

Genau dann ist $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ absolut stetig, wenn es eine absolut integrierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gibt mit $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

☺ Die partielle Integration gilt in allgemeiner Fassung:

Korollar B2G: partielle Integration, vgl. B1J

Sind $F, G : [a, b] \to \mathbb{R}$ absolut stetig, so auch FG, fast überall gilt $(FG)' = F'G + FG'$ und somit $\int_a^b FG' = [FG]_a^b - \int_a^b F'G$.

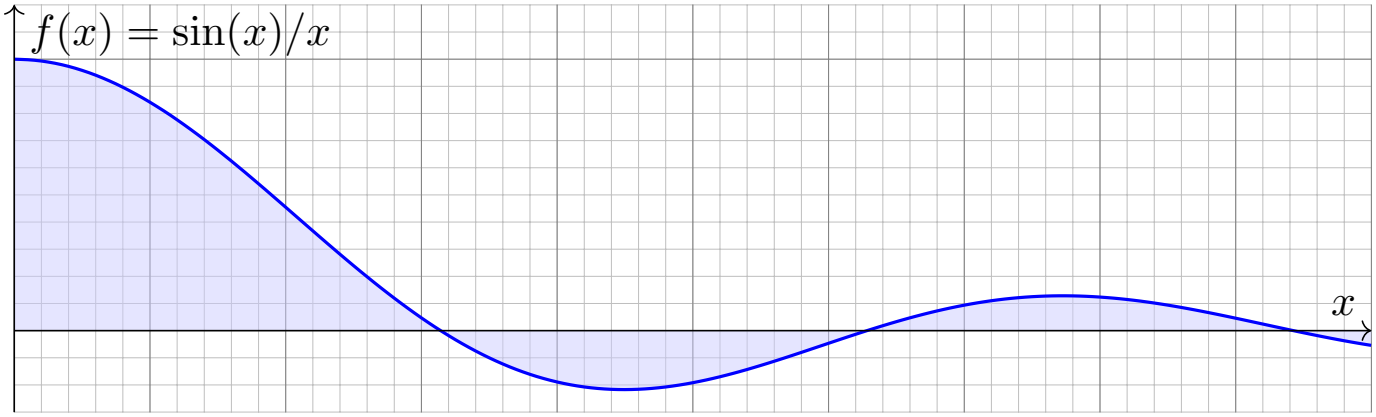
☺ Die Substitutionsregel gilt noch für monotone Parameterwechsel:

Korollar B2H: Substitutionsregel, vgl. B1K

Sei $g : [a, b] \to [c, d]$ monoton und absolut stetig. Ist $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ absolut integrierbar, so auch $(f \circ g) \cdot g'$ und $\int_a^b f(g(t))\,g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,\mathrm{d}u$.

Uneigentliche Integrale: einseitig

Zu integrieren sei $f : [a, b[\to \bar{\mathbb{R}}$, wobei $-\infty < a < b \leq +\infty$.



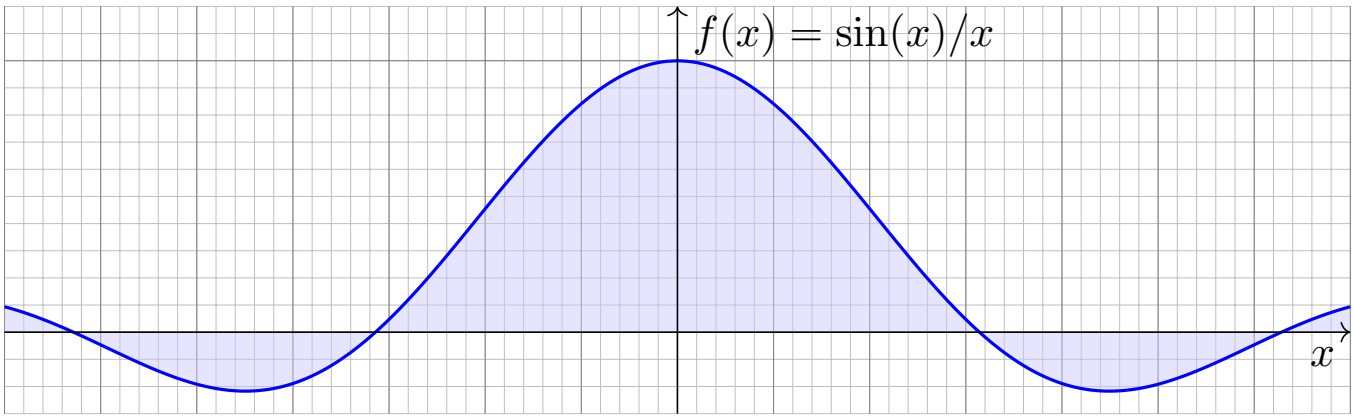
Die Funktion f sei auf jedem Teilintervall $[a, \beta] \subseteq [a, b[$ integrierbar.
Wir nennen f **uneigentlich integrierbar** auf $[a, b[$, wenn der Grenzwert

$$\int_a^{\to b} f(x)\,\mathrm{d}x \quad := \quad \lim_{\beta \nearrow b} \int_a^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}x$$

in $\mathbb{R}$ existiert. Er heißt dann **uneigentliches Integral** von f auf $[a, b[$.
📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §3.7.

Uneigentliches Integral: beidseitig

Zu integrieren sei $f :]a, b[\to \bar{\mathbb{R}}$, wobei $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.



Die Funktion f sei auf jedem Teilintervall $[\alpha, \beta] \subseteq]a, b[$ integrierbar.

$$\int_{\to a}^{\to b} f(x)\,\mathrm{d}x \quad := \quad \lim_{\alpha \searrow a} \int_{\alpha}^{z} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\beta \nearrow b} \int_{z}^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Wir nennen f **uneigentlich integrierbar**, wenn beide Grenzwerte in $\mathbb{R}$ existieren. Ihre Summe heißt **uneigentliches Integral** von f auf $]a, b[$.
Dies ist unabhängig von der Wahl des Teilungspunktes $z \in]a, b[$.

Uneigentliche Integrale und Cauchy–Hauptwert

Zur Integration über ganz $\mathbb{R}$ haben wir drei nützliche Möglichkeiten:

(1) Bei **absoluter Integration** zerlegen wir $f = f^+ - f^-$ und setzen

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x := \int_{\mathbb{R}} f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} f^-(x)\,\mathrm{d}x.$$

⚠ Hierzu müssen rechts beide Integrale endlich sein.

☺ Dieser Integrationsbegriff gilt allgemein über $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ (A3K).

(2) Das **uneigentliche Integral** von f ist die Summe der Grenzwerte

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{a\to-\infty} \int_a^z f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty} \int_z^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

⚠ Hierzu müssen beide Grenzwerte existieren und endlich sein.

☺ Existiert das Integral (1) so auch (2) und beide sind gleich. B221

(3) Der **Cauchy–Hauptwert** von f ist der Grenzwert (falls existent)

$$(\mathrm{CH}) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

☺ Existiert das Integral (2) so auch (3) und beide sind gleich. B223

⚠ Die Umkehrungen (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) gelten im Allgemeinen nicht. B417

Uneigentliche Integrale und Cauchy–Hauptwert

Diese drei Begriffe hängen eng miteinander zusammen:

$$\text{absolut} \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \text{uneigentlich} \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \text{Cauchy–Hauptwert}$$

Für das absolute Integral (1) von $f = f^+ - f^-$ integrieren wir Positivteil f^+ und Negativteil f^- getrennt. Sind beide Integrale endlich, so können wir ihre Differenz bilden, das Ergebnis ist das absolute Integral von f.

Sollte f nicht absolut integrierbar sein, so betrachten wir stattdessen allgemeiner (2) oder gar (3). Wir nehmen hierzu an, dass f wenigstens über jedem endlichen Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ absolut integrierbar ist.

Für das uneigentliche Integral (2) wählen wir einen Teilungspunkt z, zum Beispiel $z = 0$. (Das Ergebnis ist von dieser Wahl unabhängig.) Wenn beide Grenzwerte $\lim_{a\to-\infty} \int_a^z f(x)\,\mathrm{d}x$ und $\lim_{b\to+\infty} \int_z^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existieren, so nennen wir f uneigentlich integrierbar und definieren das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ wie oben als ihre Summe.

Für den Cauchy–Hauptwert (3) bilden wir das Integral $\int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x$ über das symmetrische Intervall $[-r, r]$ und bilden den Grenzwert $r \to \infty$. Wenn dieser existiert, so nennen wir ihn den Cauchy–Hauptwert.

Absolute impliziert uneigentliche Integrierbarkeit

Satz B2I: Absolute impliziert uneigentliche Integrierbarkeit.

(1) Für jede messbare Funktion $f :]a,b[\to \bar{\mathbb{R}}$ und $z \in]a,b[$ gilt

$$\lim_{\alpha \searrow a} \int_\alpha^z |f(x)|\,\mathrm{d}x + \lim_{\beta \nearrow b} \int_z^\beta |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{]a,b[} |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so ist f absolut integrierbar, und es gilt

$$\lim_{\alpha \searrow a} \int_\alpha^z f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\beta \nearrow b} \int_z^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{]a,b[} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Für nicht-negative Funktionen $f \geq 0$ stimmen also beide Integrationsmethoden (absolut vs uneigentlich) überein und liefern dasselbe Ergebnis. Für absolut integrierbare Funktionen f ist die Definition $\int f = \int f^+ - \int f^-$ die robustere Methode mit besseren Eigenschaften. Wenn sie möglich ist, so impliziert sie insbesondere die uneigentliche Integrierbarkeit. Wie unten erläutert gibt es jedoch auch Funktionen, die nicht absolut, sondern nur uneigentlich integrierbar sind. In solchen Notfällen müssen wir uns mit uneigentlichen Integralen begnügen, auch wenn sie weniger gute Eigenschaften haben. Das ist später für Fourier–Integrale immer wieder nützlich.

Absolute impliziert uneigentliche Integrierbarkeit

Nachrechnen: Sei $\alpha_n \searrow a$ und $\beta_n \nearrow b$ Folgen mit $\alpha_n < z < \beta_n$.
Sei zunächst $f \geq 0$. Für $f_n = \mathbf{I}_{[\alpha_n,\beta_n]} f$ gilt dann $f_n \nearrow f$, also

$$\int_{\alpha_n}^z f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{]a,z]} f_n(x)\,\mathrm{d}x \quad \nearrow \quad \int_{]a,z]} f(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int_z^{\beta_n} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[z,b[} f_n(x)\,\mathrm{d}x \quad \nearrow \quad \int_{[z,b[} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dies beweist die erste Gleichung. Ist f absolut integrierbar, so gilt

$$\int_{\alpha_n}^z f = \int_{\alpha_n}^z f^+ - \int_{\alpha_n}^z f^- \quad \to \quad \int_{]a,z]} f^+ - \int_{]a,z]} f^- = \int_{]a,z]} f,$$
$$\int_z^{\beta_n} f = \int_z^{\beta_n} f^+ - \int_z^{\beta_n} f^- \quad \to \quad \int_{[z,b[} f^+ - \int_{[z,b[} f^- = \int_{[z,b[} f.$$

Demnach existiert beide Grenzwerte, und es gilt die zweite Gleichung.

⚠ Ist f nicht absolut integrierbar, so existiert in manchen Fällen wenigstens noch das uneigentliche Integral. Das ist sein Zweck.

Uneigentliches Integral: Cauchy–Hauptwert

Der **Cauchy–Hauptwert** einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ ist

$$(\mathrm{CH}) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x$$

insofern dieser Grenzwert in $\mathbb{R}$ existiert. Diese Vereinbarung erlaubt uns, auch manch divergenten Integralen noch einen Wert zuzuordnen, sofern sich divergente Teile verschiedenen Vorzeichens gegenseitig aufheben.

Satz B2J: Absolute Integrierbarkeit impliziert Cauchy–Hauptwert.

(1) Für jede messbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ gilt

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so ist f absolut integrierbar, und es gilt

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Uneigentliches Integral: Cauchy–Hauptwert

Bemerkung: In Definition und Satz nehmen wir stillschweigend an, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ auf jedem Intervall $[-r, r]$ integrierbar ist.

Nachrechnen: Sei $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $r_n \nearrow +\infty$.
Sei zunächst $f \geq 0$. Für $f_n = \mathbf{I}_{[-r_n,r_n]}\, f$ gilt dann $f_n \nearrow f$, also

$$\int_{-r_n}^{r_n} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,\mathrm{d}x \quad \nearrow \quad \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

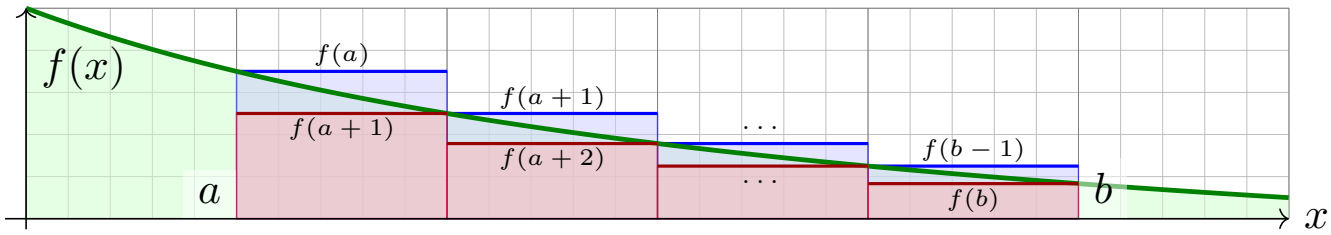
Dies zeigt die erste Gleichung. Ist f auf $\mathbb{R}$ absolut integrierbar, so gilt

$$\int_{-r_n}^{r_n} f = \int_{-r_n}^{r_n} f^+ - \int_{-r}^{r} f^- \quad \to \quad \int_{\mathbb{R}} f^+ - \int_{\mathbb{R}} f^- = \int_{\mathbb{R}} f.$$

Demnach existiert dieser Grenzwert, und es gilt die zweite Gleichung.

⚠ Ist f weder absolut noch uneigentlich integrierbar, so existiert manchmal wenigstens noch der Cauchy–Hauptwert. Genau das ist sein Zweck. Er hat nicht ganz so gute Eigenschaften, ist aber besser als nichts.

Monotoner Vergleich von Summe und Integral



Satz B3A: monotoner Vergleich von Integral und Reihe

Sei $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ monoton fallend. Für alle $a < b$ in $\mathbb{N}$ gilt dann:

$$\sum_{k=a+1}^{b} f(k) \quad \leq \quad \int_{x=a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \leq \quad \sum_{k=a}^{b-1} f(k)$$

Durch Umstellung ist hierzu äquivalent:

$$\int_{x=a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \leq \quad \sum_{k=a}^{b-1} f(k) \quad \leq \quad f(a) + \int_{x=a}^{b-1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

☺ Reihe und Integral haben gleiches Konvergenzverhalten für $b \to \infty$.
☺ Beide können gegenseitig als Näherung genutzt werden.

Anwendung auf die harmonische Reihe

Aufgabe: Wir untersuchen die **harmonische Reihe**

$$H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

(1) Schachteln Sie den Wert H_n ein durch den Logarithmus $\ln(n)$.
(2) Folgern Sie das Konvergenzverhalten von H_n für $n \to \infty$.
(3) Bei welchem Index n überschreitet H_n den Wert 1000?

Lösung: (1) Für die Funktion $f(x) = 1/x$ erhalten wir dank Satz B3A:

$$\ln(n) \quad < \quad \ln(n+1) \quad \leq \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \leq \quad 1 + \ln(n)$$

☺ Die harmonische Reihe wächst wie der natürliche Logarithmus!
(2) Insbesondere erhalten wir die Divergenz $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to \infty$ für $n \to \infty$.
(3) Bei $n \approx \mathrm{e}^{1000} \approx 2 \cdot 10^{434}$. Wir werden das also sicher nie erleben!
📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §1.8–§1.9.
☺ Den Vergleich von Summe und Integral nutzen wir ausgiebig für den lokalen Grenzwertsatz in der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Kapitel V).

Konvergenz von Integralen und Reihen

Aufgabe: (1) Finden Sie Stammfunktionen zu den Funktionen

$$\frac{1}{x^s}, \qquad \frac{1}{x\,(\ln x)^s}, \qquad \frac{1}{x\,\ln x\,(\ln\ln x)^s}.$$

(2) Für welche Exponenten $s \in \mathbb{R}$ konvergieren folgende Reihen?

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\,(\ln k)^s}, \qquad \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k\,\ln k\,(\ln\ln k)^s}$$

Lösung: (1) Wir unterscheiden die Fälle $s = 1$ und $s \neq 1$:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln(x), \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \ln\ln x, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\ln\ln x} = \ln\ln\ln x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s}, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^s} = \frac{(\ln x)^{1-s}}{1-s}, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x(\ln\ln x)^s} = \frac{(\ln\ln x)^{1-s}}{1-s}$$

(2) Für $s \leq 1$ divergieren die Integrale, also auch die Reihen (B3A).
Für $s > 1$ konvergieren die Integrale, also auch die Reihen. (Elementare Grenzwerte sind nur für spezielle Werte wie $s = 2, 4, 6, 8, \ldots$ bekannt.)

Approximation einer Dirichlet–Reihe durch Integrale

Aufgabe: Berechnen Sie durch Summation näherungsweise den Wert

$$\zeta(3) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \quad \text{der Riemannschen Zeta–Funktion} \quad \zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

bis auf einen Fehler $\leq \varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-6}$, also sechs Nachkommastellen.
Wie kontrollieren Sie den Fehler? Wie weit müssen Sie summieren?

Lösung: Wir berechnen die endlichen Summen $s_n = \sum_{k=1}^{n} k^{-3}$ und wählen n so, dass der Rest $\zeta(3) - s_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-3}$ kleiner als ε ist:

$$0 \;<\; \int_{x=n+1}^{\infty} x^{-3}\,\mathrm{d}x \;<\; \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-3} \;<\; \int_{x=n}^{\infty} x^{-3}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{2n^2} \;\overset{!}{\leq}\; \varepsilon$$

Die Wahl $n = 1000$ garantiert einen Fehler $\leq 0.5 \cdot 10^{-6} = 0.0000005$.
Wir finden $s_{1000} = 1.20205640\ldots$, also $1.20205689 < \zeta(3) < 1.20205691$.

☺ Noch besser: $s_n + (n+1)^{-2}/2 \leq \zeta(3) \leq s_n + n^{-2}/2$, Fehler $< n^{-3}$.
Mit diesem raffinierten Trick genügt schon die Summation bis $n = 100$.

☺ Mit Fourier–Reihen (Kapitel I) finden wir $\zeta(2) = \pi^2/6$, $\zeta(4) = \pi^4/90$, $\zeta(6) = \pi^6/945$. Für $\zeta(3)$, $\zeta(5)$, $\zeta(7)$ sind keine solchen Formeln bekannt.

HDI: diskrete Version für Summen

Aufgabe: (1) Nennen und beweisen Sie die Summenformeln zu

$$\sum_{k=0}^{n-1} 1, \qquad \sum_{k=0}^{n-1} k, \qquad \sum_{k=0}^{n-1} k^2, \qquad \sum_{k=0}^{n-1} k^3, \qquad \ldots$$

📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, Beispiele 1.2.2 und 1.2.4.

(2) Allgemein: Formulieren Sie die diskrete Version des HDI (Satz B1I).

(3) Analog zu monoton fallenden Funktionen sei nun $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ monoton wachsend. Formulieren und beweisen Sie (wie in Satz B3A) Ungleichungen zwischen Summe $\sum_{k=m}^{n} f(k)$ und Integral $\int_{x=a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$

(4) Beweisen Sie für jedes $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Ungleichung der Form

$$c_s\,(n-1)^{s+1} \quad \leq \quad \sum_{k=0}^{n-1} k^s \quad \leq \quad c_s\,n^{s+1}$$

mit einer passenden Konstanten $c_s \in \mathbb{R}$, und allgemeiner

$$c_s\left[(b-1)^{s+1} - (a-1)^{s+1}\right] \quad \leq \quad \sum_{k=a}^{b-1} k^s \quad \leq \quad c_s\left[b^{s+1} - a^{s+1}\right].$$

HDI: diskrete Version für Summen

Lösung: (1) Wir kennen bzw. finden die Summenformeln

$$\sum_{k=0}^{n-1} 1 = n, \qquad \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2},$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}, \qquad \sum_{k=0}^{n-1} k^3 = \frac{n^2(n-1)^2}{4}.$$

(2) Liegt eine solche Formel $\sum_{k=0}^{n-1} f(k) = [F]_0^n$ bereits (als Vermutung) vor, so gelingt der Beweis leicht durch folgende „diskrete Ableitung“:

Satz B3B: HDI, diskrete Version für Summen

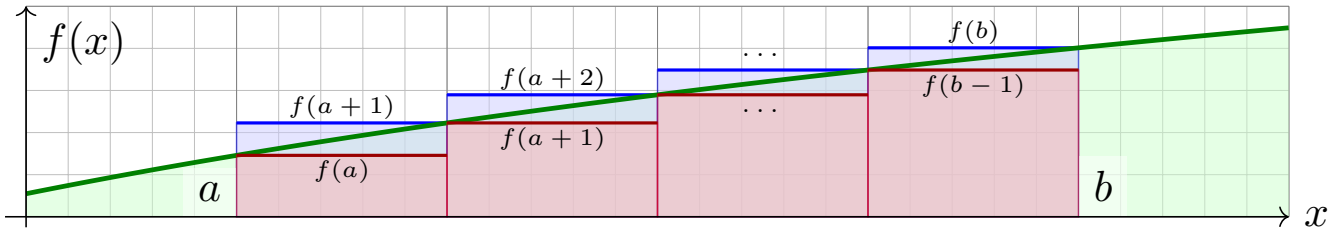
Für $f, F : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ gelte $f(k) = F(k+1) - F(k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.
Durch Summation erhalten wir hieraus die Teleskopsumme

$$\sum_{k=a}^{b-1} f(k) = \sum_{k=a}^{b-1} \big[F(k+1) - F(k)\big] = F(b) - F(a) =: \big[F\big]_a^b.$$

Beispiele sind $f(k) = 1$, $F(k) = k$ und $f(k) = k$, $F(k) = k(k-1)/2$ etc. wie oben angegeben. Man rechnet dies nun leicht / mechanisch nach.

Monotoner Vergleich von Summe und Integral

(3) Wir machen eine Skizze und lesen die Ungleichungen ab:



Satz B3C: monotoner Vergleich von Summe und Integral

Sei $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ monoton wachsend. Für alle $a < b$ in $\mathbb{N}$ gilt dann:

$$\sum_{k=a}^{b-1} f(k) \quad \leq \quad \int_{x=a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \leq \quad \sum_{k=a+1}^{b} f(k)$$

Durch Umstellung ist hierzu äquivalent:

$$f(a) + \int_{x=a}^{b-1} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \leq \quad \sum_{k=a}^{b-1} f(k) \quad \leq \quad \int_{x=a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Übung: Beweisen Sie die Sätze B3A, B3B, B3C sorgsam per Induktion.

Monotoner Vergleich von Reihe und Integral

(4) Wir wenden den Satz auf die Funktion $f(x) = x^s$ mit $s \geq 0$ an.
Dank der Stammfunktion $\int x^s\,\mathrm{d}x = x^{s+1}/(s+1)$ erhalten wir

$$\left[\frac{x^{s+1}}{s+1}\right]_{a-1}^{b-1} \quad \leq \quad \sum_{k=a}^{b-1} k^s \quad \leq \quad \left[\frac{x^{s+1}}{s+1}\right]_{a}^{b}.$$

Im Spezialfall $a = 0$ und $b = n-1$ folgt hieraus

$$\frac{(n-1)^{s+1}}{s+1} \quad \leq \quad \sum_{k=0}^{n-1} k^s \quad \leq \quad \frac{n^{s+1}}{s+1}.$$

☺ Wir sehen insbesondere, dass wir die Konstante $c_s = 1/(s+1)$ nicht anders wählen können, in diesem Sinne sind diese Schranken optimal.

☺ Wir erhalten so eine nützliche Näherungsformel für $\sum_{k=0}^{n-1} k^s$, genauer sogar eine Einschachtelung: verlässlich und beweisbar.

☺ Wenn's exakt sein muss, haben wir obige Summenformeln (1). Diese liefern den exakten Wert, sind dafür aber etwas mühsamer.

Näherungsformel für die Fakultät $n!$

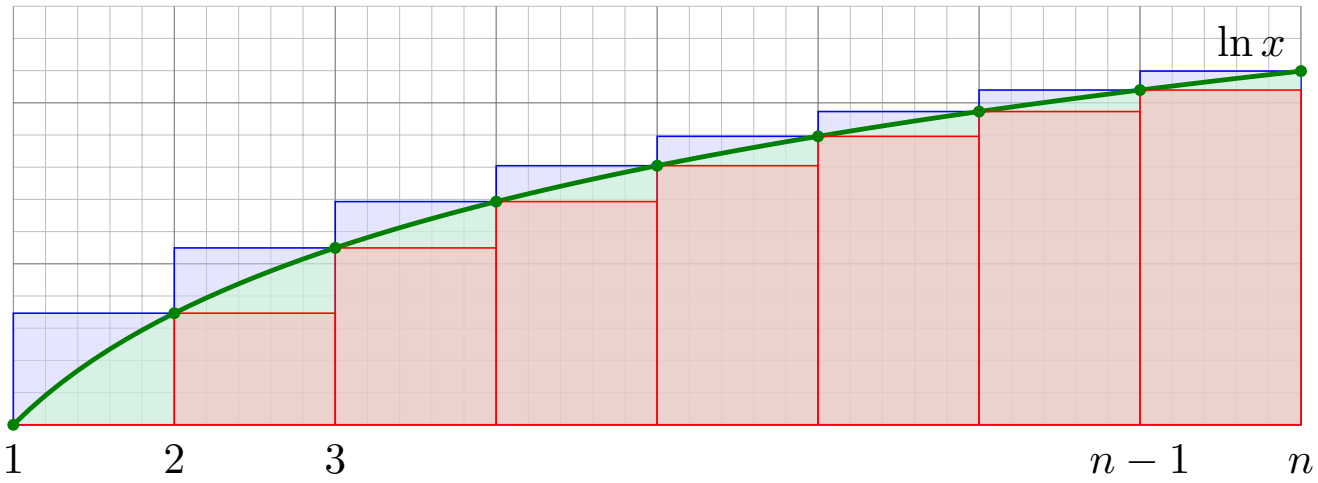
☺ Mit Integralen können Sie nicht nur Flächeninhalte bestimmen, sondern auch Summen und Produkte berechnen oder approximieren. Als wichtiges Beispiel betrachten wir hier die Formel von Stirling.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die **Fakultät** definiert durch $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.
Für $n \to \infty$ suchen wir eine einfache, aber gute Näherungsformel.

$0! = 1$	$7! = 5\,040$	$14! = 87\,178\,291\,200$
$1! = 1$	$8! = 40\,320$	$15! = 1\,307\,674\,368\,000$
$2! = 2$	$9! = 362\,880$	$16! = 20\,922\,789\,888\,000$
$3! = 6$	$10! = 3\,628\,800$	$17! = 355\,687\,428\,096\,000$
$4! = 24$	$11! = 39\,916\,800$	$18! = 6\,402\,373\,705\,728\,000$
$5! = 120$	$12! = 479\,001\,600$	$19! = 121\,645\,100\,408\,832\,000$
$6! = 720$	$13! = 6\,227\,020\,800$	$20! = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000$

Aufgabe: (1) Gewinnen Sie Abschätzungen für $n!$ (grobe Ungleichung) durch den Vergleich von Integral $\int_{x=1}^{n} \ln x \, \mathrm{d}x$ und Summe $\sum_{k=1}^{n} \ln k$.
(2) Nutzen Sie die Trapezregel für eine bessere Näherung.

Stirling–Formel: grobe Ungleichung



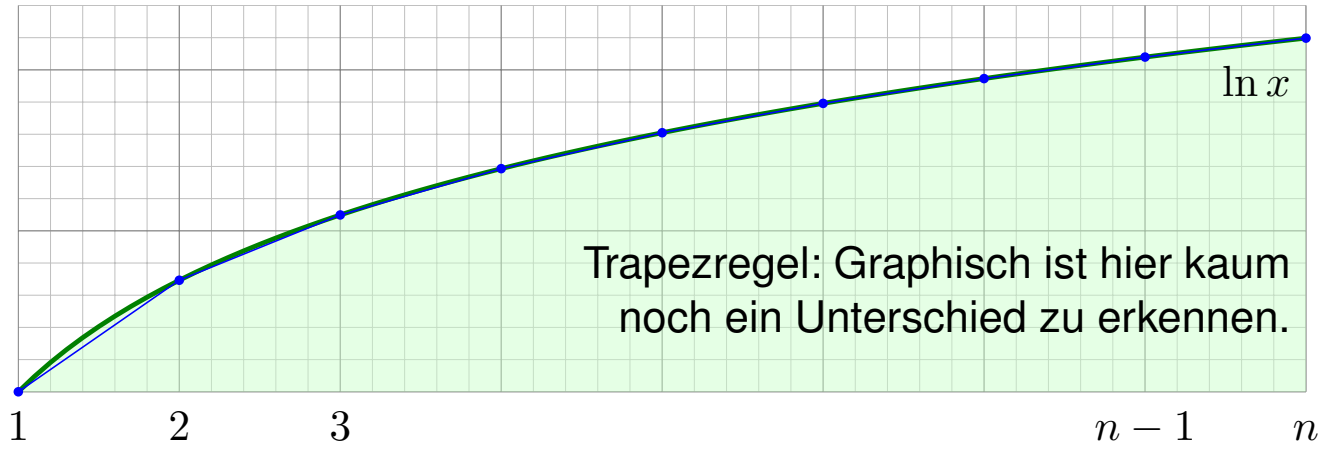
Lösung: (1) Wir vergleichen Integral und Summe:

$$\begin{aligned} & \int_1^n \ln x \, \mathrm{d}x = \big[x \ln x - x\big]_1^n = n \ln n - n + 1 \\ < \quad & \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln(n-1) + \ln n = \ln(n!) \\ < \quad & \int_1^n \ln x \, \mathrm{d}x + \ln n = (n+1) \ln n - n + 1 \end{aligned}$$

Dank Monotonie der Exponentialfunktion erhalten wir

$$\mathrm{e} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n < n! < \mathrm{e}\, n \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

Stirling–Formel: bessere Näherung



(2) Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gilt dank Trapezregel und Konkavität:

$$\int_1^n \ln x \, \mathrm{d}x \;\gtrapprox\; \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln(k) + \ln(k+1)}{2} \;=\; \ln(n!) - \frac{\ln(n)}{2}$$

Dank Monotonie der Exponentialfunktion erhalten wir

$$n! \lessapprox \mathrm{e}\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

☺ Diese Abschätzung ist um einen Faktor $\sqrt{n}$ besser als die vorige. Bis auf den konstanten Faktor e ist dies die berühmte Stirling–Formel!

Stirling–Formel: asymptotische Äquivalenz

Die Ähnlichkeit von $n!$ und $\sqrt{n}(\frac{n}{\mathrm{e}})^n$ haben wir oben erklärt durch Vergleich von Summe und Integral. Die dabei gefundene Konstante $\mathrm{e} \approx 2.7183$ ist allerdings noch etwas zu groß. Die richtige Konstante $\sqrt{2\pi} \approx 2.5066$ werden wir später ausrechnen können, siehe D435.

Satz B3D: Stirling–Formel mit Fehlerschranke

Für $n \to \infty$ gilt die asymptotische Äquivalenz

$$\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.}$$

Die Äquivalenz $f(n) \sim g(n)$ bedeutet $f(n)/g(n) \to 1$ für $n \to \infty$.

Genauer gilt

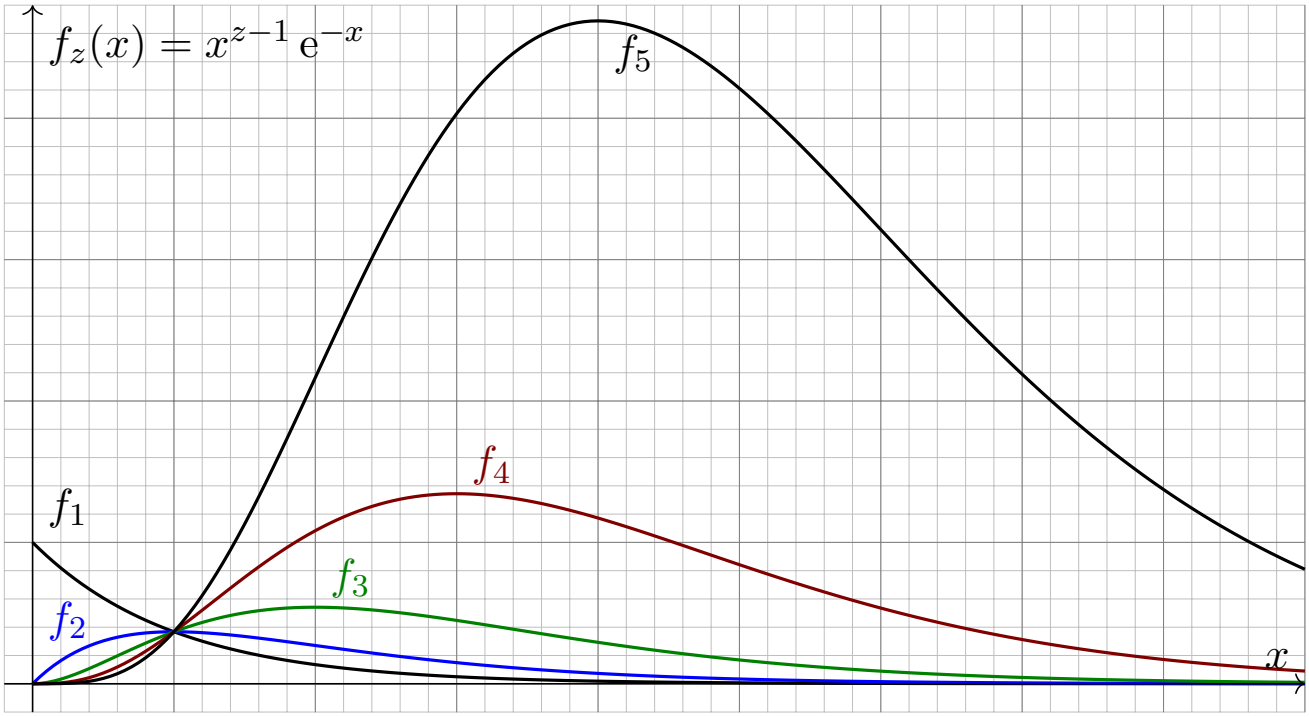
$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \cdot \mathrm{e}^{\varepsilon(n)}$$

mit Fehlerschranke

$$0 \leq \frac{1}{12n+1} \leq \varepsilon(n) \leq \frac{1}{12n} \searrow 0.$$

Berechnung der Gamma-Funktion $\Gamma(n) = (n-1)!$

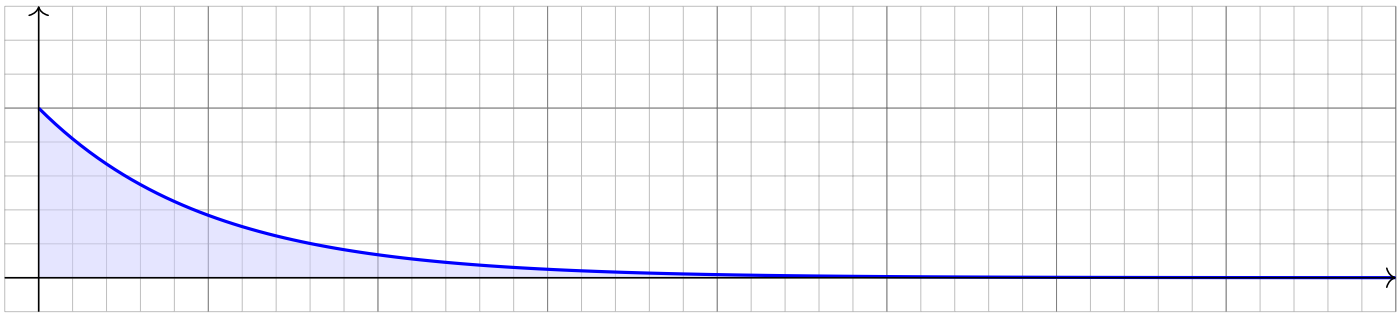
Die **Gamma-Funktion** ist $\Gamma : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0} : z \mapsto \Gamma(z) := \int_{x=0}^{\infty} x^{z-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.
Dieses Integral konvergiert für alle $z > 0$ und divergiert für $z \leq 0$. B208



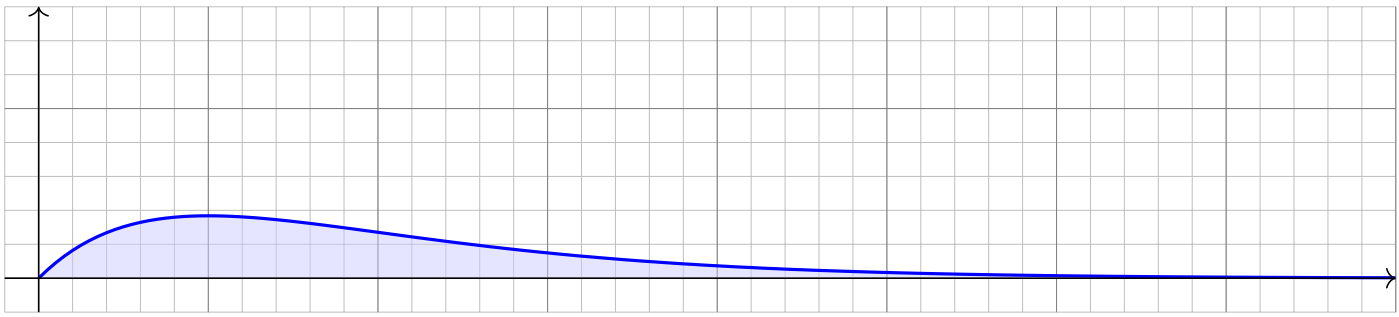
Aufgabe: Berechnen Sie $\Gamma(1), \Gamma(2), \Gamma(3), \Gamma(4), \ldots$, allgemein $\Gamma(n+1)$.
Zeigen Sie hierzu die Funktionalgleichung $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ für $z > 0$.

Berechnung der Gamma-Funktion $\Gamma(n) = (n-1)!$

📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, 3.7.13.

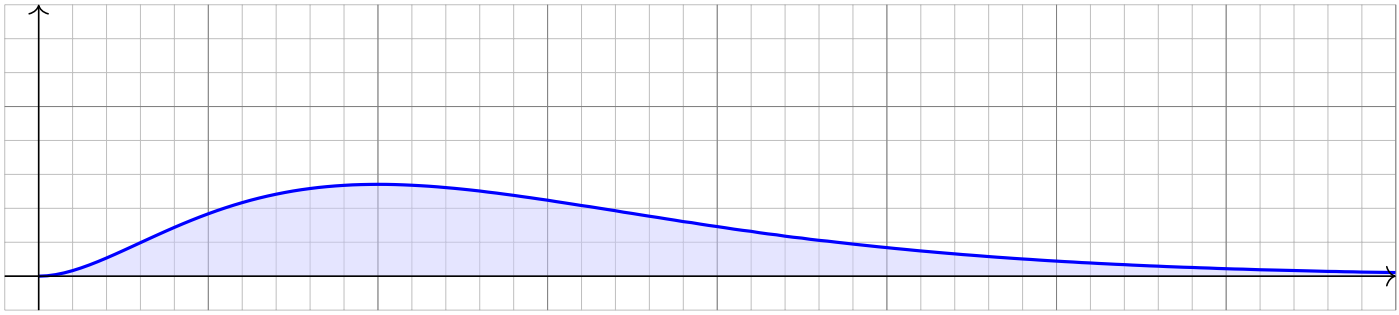


$$\Gamma(1) = \int_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to+\infty} \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_{x=0}^{k} = \lim_{k\to+\infty} \Big(1 - \mathrm{e}^{-k}\Big) = 1$$

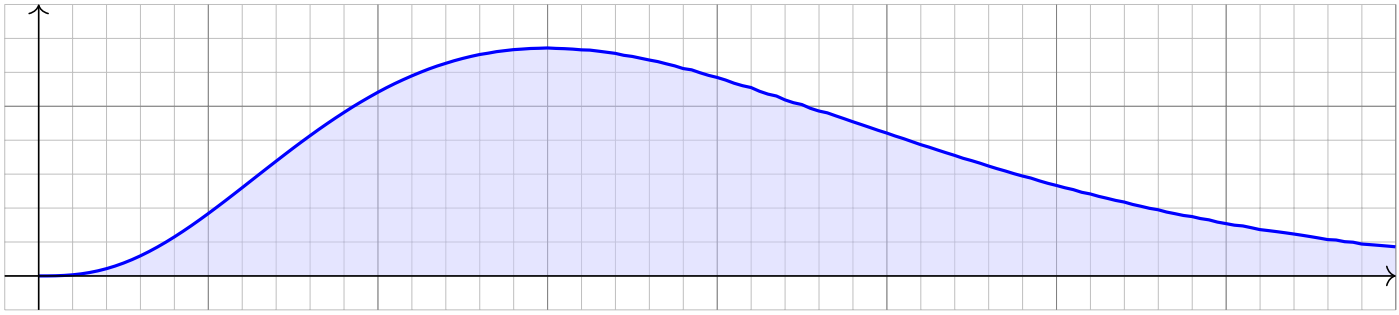


$$\Gamma(2) = \int_{x=0}^{\infty} x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \Big[-x\,\mathrm{e}^{-x}\Big]_{x=0}^{\infty} + \int_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$$

Berechnung der Gamma-Funktion $\Gamma(n) = (n-1)!$



$$\Gamma(3) = \int_{x=0}^{\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \Big[-x^2\,\mathrm{e}^{-x}\Big]_{x=0}^{\infty} + 2\int_{x=0}^{\infty} x^1\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 2\cdot 1 = 2$$



$$\Gamma(4) = \int_{x=0}^{\infty} x^3\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \Big[-x^3\,\mathrm{e}^{-x}\Big]_{x=0}^{\infty} + 3\int_{x=0}^{\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 3\cdot 2 = 6$$

Berechnung der Gamma-Funktion $\Gamma(n) = (n-1)!$

Wir nutzen Ausschöpfung und partielle Integration:

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_{x=0}^{\infty} x^z\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_{x=0}^{k} x^z\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{k\to\infty}\left(\Big[-x^z\,\mathrm{e}^{-x}\Big]_{x=0}^{k} + z\int_{x=0}^{k} x^{z-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= z\int_{x=0}^{\infty} x^{z-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = z\,\Gamma(z).\end{aligned}$$

Satz B3E: Funktionalgleichung der Gamma-Funktion

Für alle $z > 0$ gilt

$$\boxed{\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z).}$$

Mit $\Gamma(1) = 1$ folgt per Induktion $\Gamma(n+1) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die Gamma-Funktion $\Gamma : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ interpoliert in diesem Sinne die Faktultät $! : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Sie ist zudem logarithmisch konvex, d.h. $\ln\Gamma$ ist konvex. Diese Eigenschaften charakterisieren die Gamma-Funktion (Satz von Bohr): Ist eine Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ logarithmisch konvex und erfüllt $f(1) = 1$ sowie $f(z+1) = z\,f(z)$ für alle $z > 0$, dann folgt daraus bereits $f = \Gamma$.

Konvergenz von Reihen

Aufgabe: Wiederholen Sie aus der HM2 die Grundbegriffe zu Reihen:
📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §1.7–§1.9.

(1) Definieren Sie **(absolute) Konvergenz** und **Grenzwert** einer Reihe

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \qquad \text{mit Termen } a_k \in \mathbb{C}.$$

Hängt die Konvergenz vom Startindex k_0 ab? und der Grenzwert?
Was sagen Sie zur Behauptung $1+2+3+4+5+\cdots = -1/12$?

(2) Untersuchen Sie Konvergenz und ggf. Grenzwert der Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad \text{für } z \in \mathbb{C}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^n}{k!} \quad \text{für } z \in \mathbb{C}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \quad \text{für } s \in \mathbb{R}.$$

Welche Kriterien für Konvergenz bzw. Divergenz kennen Sie?

(3) Untersuchen Sie Konvergenz und ggf. Grenzwert der Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Für $x = 1$? Was besagt das Kriterium von Leibniz? Dirichlet? Abel?

Konvergenz von Reihen

Lösung: (1) Wir nutzen die Folge der **Partialsummen** $s_n := \sum_{k=k_0}^{n} a_k$.
Die Reihe **konvergiert** genau dann, wenn s_n für $n \to \infty$ konvergiert.
Gilt Konvergenz $s_n \to s$ für $n \to \infty$, so schreiben wir $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k = s$.

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=k_0}^{n} a_k$$

Gemäß dieser Definition gilt $1+2+3+4+5+\cdots = \infty$. (Wer's anders will, muss eine andere Art der Konvergenz von Reihen vereinbaren.)

Nullfolgenkriterium: Konvergiert die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$, so gilt $a_k \to 0$.
Die Umkehrung gilt nicht, siehe harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k = \infty$.
☺ Dieses Kriterium ist notwendig, aber nicht hinreichend. B302

Cauchy–Kriterium: Die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $k_1 \geq k_0$ existiert mit $|\sum_{k=m}^{n} a_k| \leq \varepsilon$ für alle $m, n \geq k_1$.
☺ Hieraus folgt das vielseitige Majoranten-Minoraten-Kriterium:

Die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ **konvergiert absolut**, wenn $\sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k| < \infty$ gilt.
Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent, dank Cauchy–Kriterium.
Die Umkehrung gilt nicht, wie die beiden Reihen aus (3) in $x = 1$ zeigen.

Konvergenz von Reihen

(2) Für $|z| < 1$ konvergiert die **geometrische Reihe** und zwar absolut:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots \quad = \frac{1}{1-z}$$

Für $|z| \geq 1$ divergiert diese Reihe. (Die Funktion rechts ist zwar für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ definiert, aber die Reihe links konvergiert nur für $|z| < 1$.)

☺ Hieraus folgt das **Quotienten-** und das **Wurzel-Kriterium**.

Für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die **Exponentialreihe** und zwar absolut:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots = \exp(z)$$

Die Reihe $\sum k^{-s}$ konvergiert für $s > 1$ und divergiert für $s \leq 1$. B303

(3) Diese beiden berühmten Reihen konvergieren, aber nicht absolut:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots \quad = \ln 2$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots = \frac{\pi}{4} = \arctan(1)$$

Konvergenz von Reihen

Die Grenzwerte der beiden Reihen können wir wie folgt nachrechnen:

$$\ln 2 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x} \right) \mathrm{d}x$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

$$\left| \ln 2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \right| = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \to 0$$

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2} \right) \mathrm{d}x$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\left| \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \right| = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^{2n+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n+3} \to 0$$

Abelscher Grenzwertsatz

Beide Grenzwerte sind Spezialfälle eines allgemeinen Sachverhalts:

☺ Jede Potenzreihe ist stetig im **Inneren** ihres Konvergenzkreises.
Abels Grenzwertsatz ergänzt dies zur Stetigkeit in **Randpunkten**!

Satz B3F: Abelscher Grenzwertsatz

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe komplexer Zahlen $a_k \in \mathbb{C}$.
Dann konvergiert die Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ für alle $x \in [0,1]$ und die so definierte Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ ist stetig, sogar in $x = 1$.
Für $x \nearrow 1$ konvergiert also $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ gegen $f(1) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Beispiel: Für alle $x \in [0,1[$ gilt die Reihenentwicklung

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots$$

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \dots$$

Für $x \nearrow 1$ erhalten wir dank Abel die obigen Grenzwerte.

Konvergenzkriterium von Leibniz

Wir untersuchen die Konvergenz von Reihen und Integralen der Form

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_k,$$

$$(2) \qquad \int_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\, a(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{r\to\infty} \int_{x=0}^{r} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\, a(x)\,\mathrm{d}x, \quad \omega \neq 0.$$

Satz B3G: Leibniz–Kriterium für Reihen

Die Folge $a_k \in \mathbb{R}$ sei monoton fallend gegen 0, kurz $a_k \searrow 0$,
also $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots$ und $a_k \to 0$. Dann konvergiert die Reihe (1),
und wir haben die Fehlerschranke $|\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k a_k| \leq a_n \searrow 0$.

Satz B3H: Leibniz–Kriterium für Integrale

Die Funktion $a : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ sei monoton fallend gegen 0, kurz $a(x) \searrow 0$,
Dann konvergiert das Integral (2), ebenso mit $\cos(\omega x)$ und $\sin(\omega x)$.

Das Leibniz–Kriterium zur Konvergenz von Reihen kennen Sie aus der HM2. Wir betrachten und beweisen im Folgenden gleich die Verallgemeinerung zum Konvergenzkriterium von Dirichlet.

Konvergenzkriterium von Dirichlet

Wir untersuchen die Konvergenz von Reihen und Integralen der Form

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, b_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, b_k,$$

$$(2) \qquad \int_{x=0}^{\infty} a(x)\, b(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty} \int_{x=0}^{r} a(x)\, b(x)\, \mathrm{d}x.$$

Satz B3I: Dirichlet–Kriterium für Reihen

Die Folge $a_k \in \mathbb{R}$ sei monoton fallend gegen 0, kurz $a_k \searrow 0$.
Die Folge $b_k \in \mathbb{C}$ habe beschränkte Partialsummen $B_n = \sum_{k=0}^{n-1} b_k$, das heißt $|B_n| \le M$ für eine Konstante $M \in \mathbb{R}$ und alle Indizes $n \in \mathbb{N}$.
Dann konvergiert die Reihe (1) mit Fehler $\le 2Ma_n \searrow 0$ für $n \to \infty$.

Satz B3J: Dirichlet–Kriterium für Integrale

Die Funktion $a : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}$ sei monoton fallend gegen 0, kurz $a(x) \searrow 0$.
Die Funktion $b : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{C}$ sei auf jedem Intervall $[0, r]$ integrierbar mit beschränkter Integralfunktion $B(r) = \int_0^r b(x)\, \mathrm{d}x$, das heißt $|B(r)| \le M$.
Dann konvergiert das Integral (2) mit Fehler $\le 2Ma(r) \searrow 0$ für $r \to \infty$.

Konvergenzkriterium von Dirichlet

Beweis für Reihen: Per Induktion zeigt man für alle $n < p$ folgende **partielle Summation**:

$$\sum_{k=n}^{p-1} a_k b_k = \sum_{k=n}^{p-1} a_k (B_{k+1} - B_k) = a_p B_p - a_n B_n - \sum_{k=n}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) B_{k+1}$$

Dies ist im Betrag $\le 2a_n M \searrow 0$, denn $|a_p B_p| \le a_p M$ und $|a_n B_n| \le a_n M$ sowie

$$\left| \sum_{k=n}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) B_{k+1} \right| \le \sum_{k=n}^{p-1} \big|(a_{k+1} - a_k) B_k\big| \le \sum_{k=n}^{p-1} (a_k - a_{k+1}) M = (a_n - a_p) M.$$

Dank Cauchy–Kriterium konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{n-1} a_k b_k$ gegen einen Grenzwert $s \in \mathbb{R}$.
Zudem liefert unsere Rechnung die explizite Fehlerschranke $|s - \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_k| \le 2Ma_n$.

Beweis für Integrale: Zur technischen Vereinfachung der Rechnung nehmen wir zusätzlich $a \in C^1(\mathbb{R}_{\ge 0}, \mathbb{R})$ und $b \in C^0(\mathbb{R}_{\ge 0}, \mathbb{C})$ an. Wir können dann **partielle Integration** B1J nutzen:

$$\int_{x=r}^{s} a(x)\, b(x)\, \mathrm{d}x = \int_{x=r}^{s} a(x)\, B'(x)\, \mathrm{d}x = \Big[a(x)\, B(x)\Big]_r^s - \int_{x=r}^{s} a'(x)\, B(x)\, \mathrm{d}x$$

Dies ist im Betrag $\le 2a(r)M$, denn $|a(s)B(s)| \le a(s)M$ und $|a(r)B(r)| \le a(r)M$ sowie

$$\left| \int_{x=r}^{s} a'(x)\, B(x)\, \mathrm{d}x \right| \le \int_{x=r}^{s} \big|a'(x)\, B(x)\big|\, \mathrm{d}x \le \int_{x=r}^{s} -a'(x) M\, \mathrm{d}x = \big[a(r) - a(s)\big] M.$$

Demnach konvergiert das Integral $\int_{x=0}^{r} a(x)\, b(x)\, \mathrm{d}x$ gegen einen Grenzwert $I \in \mathbb{R}$; zudem erhalten wir die explizite Fehlerschranke $|I - \int_{x=0}^{r} a(x)\, b(x)\, \mathrm{d}x| \le 2Ma(r) \searrow 0$ für $r \to \infty$.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

B401
Fazit

Der **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung** B1I erklärt, in welchem Sinne Differenzieren und Integrieren einander umkehren:

Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar. Ihre Integralfunktion

$$F : [a, b] \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

ist differenzierbar, und für die Ableitung gilt $F' = f$. Ist umgekehrt $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit stetiger Ableitung $f = F'$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F\Big]_a^b \quad \text{mit} \quad \Big[F\Big]_a^b := F(b) - F(a).$$

☺ Der HDI ist das Arbeitspferd der eindimensionalen Integration: die Berechnung vieler elementarer Integrale gelingt erst dank HDI.

Dieser nützliche Zusammenhang gilt noch wesentlich allgemeiner:

f stetig	$\Longleftrightarrow$	F stetig differenzierbar	B123
f stückweise stetig	$\Longleftrightarrow$	F stückweise stetig differenzierbar	B213
f absolut integrierbar	$\Longleftrightarrow$	F absolut stetig	B214

Elementare Grundintegrale / Stammfunktionen

B402
Fazit

$$\int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} \quad (a \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x|$$

$$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \qquad \int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x \qquad \int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x$$

$$\int \cosh x\,\mathrm{d}x = \sinh x \qquad \int \sinh x\,\mathrm{d}x = \cosh x$$

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2}\,\mathrm{d}x = \tan x \qquad \int \frac{1}{(\sin x)^2}\,\mathrm{d}x = -\cot x$$

$$\int \frac{1}{(\cosh x)^2}\,\mathrm{d}x = \tanh x \qquad \int \frac{1}{(\sinh x)^2}\,\mathrm{d}x = -\coth x$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x \qquad \int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \ln\sqrt{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arsinh} x$$

☺ Probe als Übung: Integrale sind durch Ableiten leicht nachzuprüfen!

Partielle Integration und Substitution

B403
Fazit

Aus der Produktregel folgt dank HDI die **partielle Integration** B129:
Für alle stetig differenzierbaren Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{x=a}^{b} f(x)\, g'(x)\, \mathrm{d}x = \Big[f(x)\, g(x)\Big]_{x=a}^{b} - \int_{x=a}^{b} f'(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x.$$

Aus der Kettenregel folgt dank HDI die **Substitutionsregel** B131:
Für $g : [a, b] \to [c, d]$ stetig differenzierbar und $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ stetig gilt

$$\int_{t=a}^{b} f(g(t))\, g'(t)\, \mathrm{d}t = \int_{u=g(a)}^{g(b)} f(u)\, \mathrm{d}u.$$

☺ Damit lassen sich bereits viele Integrale elementar berechnen.

☺ Jede rationale Funktion $r(x) = p(x)/q(x)$ ist elementar integrierbar durch Partialbruchzerlegung und unsere Grundintegrale. B135

⚠ Viele elementare Funktionen sind nicht elementar integrierbar! Prominenteste Beispiele sind die Glockenkurve $\exp(-x^2/2)$ B145 und die Spaltfunktion $\mathrm{si}(x) = \sin(x)/x$ B149. Hier nutzen wir Potenzreihen o.ä.

Uneigentliche Integrale und Cauchy–Hauptwert

B404
Fazit

Zur Integration über ganz $\mathbb{R}$ haben wir drei nützliche Möglichkeiten:

(1) Bei **absoluter Integration** zerlegen wir $f = f^+ - f^-$ und setzen

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{d}x := \int_{\mathbb{R}} f^+(x)\, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} f^-(x)\, \mathrm{d}x.$$

⚠ Hierzu müssen rechts beide Integrale endlich sein.

☺ Dieser Integrationsbegriff gilt allgemein über $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ (A3K).

(2) Das **uneigentliche Integral** von f ist die Summe der Grenzwerte

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \mathrm{d}x := \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{z} f(x)\, \mathrm{d}x + \lim_{b \to +\infty} \int_{z}^{b} f(x)\, \mathrm{d}x.$$

⚠ Hierzu müssen beide Grenzwerte existieren und endlich sein.

☺ Existiert das Integral (1) so auch (2) und beide sind gleich. B221

(3) Der **Cauchy–Hauptwert** von f ist der Grenzwert (falls existent)

$$(\mathrm{CH}) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \mathrm{d}x := \lim_{r \to \infty} \int_{-r}^{r} f(x)\, \mathrm{d}x.$$

☺ Existiert das Integral (2) so auch (3) und beide sind gleich. B223

⚠ Die Umkehrungen (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) gelten im Allgemeinen nicht. B417

Vergleich von Reihe und Integral

B405
Fazit

Sei $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ monoton fallend. Für alle $a \leq b$ in $\mathbb{N}$ gilt dann

$$\int_{x=a}^{b+1} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \leq \quad \sum_{k=a}^{b} f(k) \quad \leq \quad f(a) + \int_{x=a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Das ist oft eine nützliche Näherung: Wir ersetzen mühsame Summen durch bequeme Integral, oder auch umgekehrt je nach Anwendung. Durch Grenzübergang $b \to \infty$ erhalten wir

$$\int_{x=a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \leq \quad \sum_{k=a}^{\infty} f(k) \quad \leq \quad f(a) + \int_{x=a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Insbesondere haben Reihe und Integral gleiches Konvergenzverhalten.

Beispiel: Für die Funktion $f(x) = 1/x$ erhalten wir

$$\ln(n+1) \quad \leq \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \leq \quad 1 + \ln(n)$$

☺ Die **harmonische Reihe** wächst wie der natürliche Logarithmus! Insbesondere erkennen wir die Divergenz $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to \infty$ für $n \to \infty$.

Abelscher Grenzwertsatz

B406
Fazit

☺ Jede Potenzreihe ist stetig im **Inneren** ihres Konvergenzkreises. Abels Grenzwertsatz ergänzt dies zur Stetigkeit in **Randpunkten**:

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe komplexer Zahlen $a_k \in \mathbb{C}$. Dann konvergiert die Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ für alle $x \in [0,1]$ und die so definierte Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ ist stetig, sogar in $x = 1$. Für $x \nearrow 1$ konvergiert also $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ gegen $f(1) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Beispiel: Für alle $x \in [0,1[$ gilt die Reihenentwicklung

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \qquad = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \ldots$$

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \qquad = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \ldots$$

Für $x \nearrow 1$ erhalten wir dank Abel die beiden berühmten Reihen

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.}$$

Konvergenzkriterium von Leibniz

Wir untersuchen die Konvergenz von Reihen und Integralen der Form

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k := \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a_k,$$

$$(2) \qquad \int_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\, a(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{r\to\infty}\int_{x=0}^{r} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\, a(x)\,\mathrm{d}x, \quad \omega \neq 0.$$

(1) Die Folge $a_k \in \mathbb{R}$ sei monoton fallend gegen 0, kurz $a_k \searrow 0$, also $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \ldots$ und $a_k \to 0$. Dann konvergiert die Reihe (1), und wir haben die Fehlerabschätzung $|\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^k a_k| \leq a_n \searrow 0$.

(2) Die Funktion $a\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ sei monoton fallend gegen 0, kurz $a(x) \searrow 0$, Dann konvergiert das Integral (2), ebenso mit $\cos(\omega x)$ und $\sin(\omega x)$.

Beispiel: Das Leibniz–Kriterium sichert die Konvergenz von Reihen wie den beiden obigen $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k/(k+1)$ und $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k/(2k+1)$.

☹ Über den Grenzwert macht das Leibniz–Kriterium keine Aussage.

☺ Immerhin erlaubt es praktische Näherungen mit Fehlerabschätzung!

Für die Konvergenz trigonometrischer Reihen wie $\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}/k^a$ oder $\sum_{k=1}^{\infty}\cos(kx)/k^a$ oder $\sum_{k=1}^{\infty}\sin(kx)/k^a$ nutzen wir folgendes Kriterium.

Konvergenzkriterium von Dirichlet

Wir untersuchen die Konvergenz von Reihen und Integralen der Form

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, b_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} a_k\, b_k,$$

$$(2) \qquad \int_{x=0}^{\infty} a(x)\, b(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty}\int_{x=0}^{r} a(x)\, b(x)\,\mathrm{d}x.$$

(1) Die Folge $a_k \in \mathbb{R}$ sei monoton fallend gegen 0, kurz $a_k \searrow 0$.
Die Folge $b_k \in \mathbb{C}$ habe beschränkte Partialsummen $B_n = \sum_{k=0}^{n-1} b_k$, das heißt $|B_n| \leq M$ für eine Konstante $M \in \mathbb{R}$ und alle Indizes $n \in \mathbb{N}$.
Dann konvergiert die Reihe (1) mit Fehler $\leq 2Ma_n \searrow 0$ für $n \to \infty$.

(2) Die Funktion $a\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ sei monoton fallend gegen 0, kurz $a(x) \searrow 0$.
Die Funktion $b\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ sei auf jedem Intervall $[0, r]$ integrierbar mit beschränkter Integralfunktion $B(r) = \int_0^r b(x)\,\mathrm{d}x$, das heißt $|B(r)| \leq M$.
Dann konvergiert das Integral (2) mit Fehler $\leq 2Ma(r) \searrow 0$ für $r \to \infty$.

☹ Über den Grenzwert macht das Dirichlet–Kriterium keine Aussage.

☺ Immerhin erlaubt es praktische Näherungen mit Fehlerabschätzung!

Integration mittels Substitution

Aufgabe: Berechnen Sie für $x \in [-a, a]$ die folgende Stammfunktion:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \mathrm{const}$$

(1) Wie prüfen Sie diese Gleichung? (2) Wie finden Sie sie?

Lösung: (1) Sie prüfen diese Gleichung durch sorgfältiges Ableiten.
(2) Finden ist schwieriger als Prüfen! Wir substituieren $x = a\sin(t)$:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \sqrt{a^2 - a^2\sin(t)^2} \cdot a\cos(t)\,\mathrm{d}t \\
&= a^2 \int \cos(t)^2\,\mathrm{d}t \\
&= a^2 \int \frac{1 + \cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin(2t) + \mathrm{const}
\end{aligned}$$

Integration mittels Substitution

Die Rücksubstitution $t = \arcsin(x/a)$ erfordert Sorgfalt:

$$\begin{aligned}
\frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin(2t) &= \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{2}\sin(t)\cos(t) \\
&= \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{2}\sin(t)\sqrt{1 - \sin(t)^2} \\
&= \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{a^2}{2}\left(\frac{x}{a}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \\
&= \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}
\end{aligned}$$

☺ Das ist die ersehnte Formel. Probe durch sorgsames Ableiten (1).

Fingerübung: Entwickeln Sie alle hier benötigten Identitäten aus den Euler–Formeln $\cos(t) = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})/2$ und $\sin(t) = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})/2\mathrm{i}$.

Alternativ kann man solche Formeln nachschlagen in Integraltafeln wie dem umfangreichen *Taschenbuch der Mathematik* von I.N. Bronstein und K.A. Semendjajew. Noch bequemer sind Computer-Algebra-Systeme.

⚠ Einfache Integrale sollten Sie erkennen und berechnen können.

Integration mittels Substitution

Aufgabe: Berechnen Sie für $x \in \mathbb{R}$ die folgende Stammfunktion:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right) + \mathrm{const}\\ &= \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + \mathrm{const}\end{aligned}$$

(1) Wie prüfen Sie diese Gleichung? (2) Wie finden Sie sie?

Lösung: (1) Sie prüfen diese Gleichung durch sorgfältiges Ableiten.
(2) Finden ist schwieriger als Prüfen! Wir substituieren $x = a\sinh(t)$:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \sqrt{a^2+a^2\sinh(t)^2}\cdot a\cosh(t)\,\mathrm{d}t\\ &= a^2\int \cosh(t)^2\,\mathrm{d}t\\ &= a^2\int \frac{1+\cosh(2t)}{2}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sinh(2t) + \mathrm{const}\end{aligned}$$

Integration mittels Substitution

Die Rücksubstitution $t = \operatorname{arsinh}(x/a)$ erfordert Sorgfalt:

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sinh(2t) &= \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{2}\sinh(t)\cosh(t)\\ &= \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{2}\sinh(t)\sqrt{1+\sinh(t)^2}\\ &= \frac{a^2}{2}\operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{a^2}{2}\left(\frac{x}{a}\right)\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\\ &= \frac{a^2}{2}\operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}\end{aligned}$$

☺ Das ist die ersehnte Formel. Probe durch sorgsames Ableiten (1).

Nützliche Fingerübung: Entwickeln Sie alle hier benötigten Identitäten aus den Formeln $\cosh(t) = (\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})/2$ und $\sinh(t) = (\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t})/2$.
Mit der Mitternachtsformel erhalten Sie hieraus schließlich:

$$\operatorname{arsinh}(t) = \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)$$

⚠ Einfache Integrale sollten Sie erkennen und berechnen können.

Verständnisfragen: elementare Stammfunktionen

Aufgabe: Zu folgenden Funktionen sollten Sie Stammfunktionen auswendig kennen und auch durch Ableiten nachprüfen können.

$$\int x^a \,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x, \quad \int \ln x\,\mathrm{d}x,$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x, \quad \int \cos x\,\mathrm{d}x, \quad \int \sinh x\,\mathrm{d}x, \quad \int \cosh x\,\mathrm{d}x,$$

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{(\sin x)^2}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{(\cosh x)^2}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{(\sinh x)^2}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Lösung: Diese Stammfunktionen finden Sie auf Seite B124.
Versuchen Sie, alle gewissenhaft durch Ableiten nachzuprüfen.

☺ Umfassende Integraltafeln finden Sie online zum Beispiel unter
`de.wikibooks.org/wiki/Formelsammlung_Mathematik:_Integrale`.
Heutzutage sind Computer-Algebra-Systeme der bequemste Zugang.

⚠ Einfache Integrale sollen Sie sicher erkennen und selbst berechnen.

Verständnisfragen: der Hauptsatz

Nochmal der Hauptsatz: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $C^k = C^k(\Omega, \mathbb{R})$ die Menge aller k-mal stetig differenzierbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Aufgabe: Differenzieren und Integrieren definieren zwei Abbildungen

$$D : C^1 \to C^0 : F \mapsto f \quad \text{mit} \quad f(x) = \lim_{t \to x} \frac{F(t) - F(x)}{t - x},$$

$$I : C^0 \to C^1 : f \mapsto F \quad \text{mit} \quad F(x) = \int_{t=x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(1) Gilt $(D \circ I)f = f$ für $f \in C^0$? Gilt $(I \circ D)F = F - F(x_0)$ für $F \in C^1$?
(2) Sind C^1 und C^0 Vektorräume? Sind D und I lineare Abbildungen?
(3) Was sind Bild und Kern von D? Was sind Kern und Bild von I?

☺ Diese Sichtweise nutzen wir später für Differentialgleichungen.

Lösung: (1) Das sind die beiden Aussagen des Hauptsatzes B1ı (HDI).
(2) Ja, C^1 und C^0 sind Vektorräume, und hierauf sind D und I linear.
(3) Dank $(D \circ I)f = f$ ist D surjektiv, also $\mathrm{Bild}(D) = C^0$.
Ebenso ist I injektiv, äquivalent hierzu gilt $\mathrm{Kern}(I) = \{0\}$.
Aus $(I \circ D)F = F - F(x_0)$ folgt $\mathrm{Bild}(I) = \{\, F \in C^1 \mid F(x_0) = 0 \,\}$.
Für $DF = 0$ folgt $F - F(x_0) = 0$, demnach gilt $\mathrm{Kern}(D) = \{\mathrm{const}\}$.

Verständnisfragen: mögliche Fehlerquellen

B415
Übung

Aufgabe: Die Ableitung von $-x^{-1}$ ist x^{-2}, also gilt $\int 1/x^2 \,\mathrm{d}x = -1/x$. Was halten Sie von folgenden Rechnungen? Stimmt das Ergebnis?

(1) $$\int_{+1}^{2} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \overset{?}{=} \left[\frac{-1}{x}\right]_{+1}^{2} = -\frac{1}{2} + 1 = +\frac{1}{2}$$

(2) $$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \overset{?}{=} \left[\frac{-1}{x}\right]_{-1}^{2} = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$$

(3) $$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \overset{\text{part}}{\underset{\text{B1J}}{=}} x \cdot \frac{1}{x} - \int x \cdot \frac{-1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1 + \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow \qquad 0 \overset{?}{=} 1$$

Lösung: (1) Ja, dies gilt dank HDI für $1/x^2$ auf dem Intervall $[1,2]$.

(2) Der HDI gilt nur auf Intervallen, aber auf $[-1,2] \smallsetminus \{0\}$ gilt er nicht! $1/x^2$ ist positiv, also auch $\int_{-1}^{2} 1/x^2 \,\mathrm{d}x$; genauer $\int_{-1}^{2} 1/x^2 \,\mathrm{d}x = \infty$. B208 Obige Rechnung und das Ergebnis $-3/2$ sind also kompletter Unsinn.

(3) Lesen Sie Korollar B1J zur partiellen Integration nochmal genau!

☺ Wir brauchen Rechenregeln, möglichst präzise formuliert als Sätze. Die Voraussetzungen klären, wann und wie wir sie anwenden können.

Verständnisfragen: Funktionenklassen

B416
Übung

Aufgabe: Welche Aussagen über Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sind wahr? Begründen Sie durch ein Ergebnis der Vorlesung oder Gegenbeispiel.

(1) Ist jede differenzierbare Funktion stetig? und umgekehrt?

(2) Ist jede stetige Funktion integrierbar? und umgekehrt?

(3) Jede rationale Funktion f ist diff'bar und f' ist rational.

(4) Jede rationale Funktion f ist integrierbar und $\int f$ ist rational.

(5) Jede elementare Funktion f ist diff'bar und f' ist elementar.

(6) Jede elementare Funktion f ist integrierbar und $\int f$ ist elementar.

(7) Jede analytische Funktion f ist diff'bar, und f' ist analytisch.

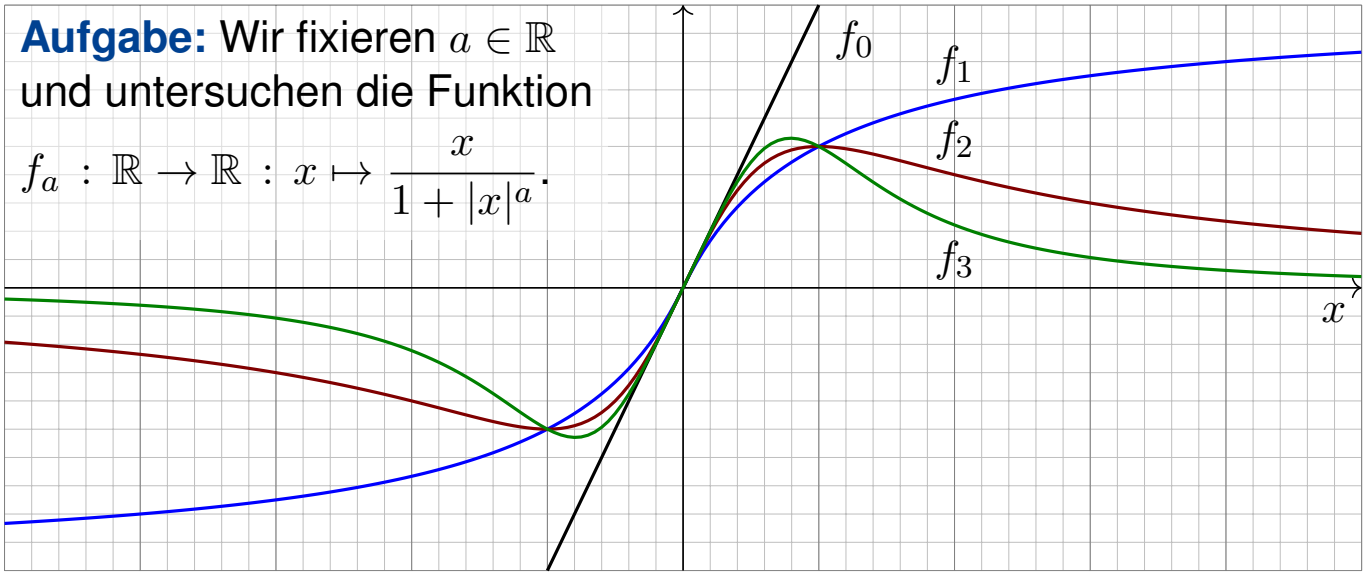
(8) Jede analytische Funktion f ist integrierbar, und $\int f$ ist analytisch.

Lösung: (1) Ja, dank Definition / Nein, Gegenbeispiel $f(x) = |x|$. (2) Ja, dank HDI / Nein, Gegenbsp. $f = \mathbf{I}_{[0,1]}$. (3) Ja/Ja, dank Quotientenregel. (4) Ja/Nein, Gegenbsp. $\int 1/x \,\mathrm{d}x = \ln|x|$. (5) Ja/Ja: Jede elementare Grundfunktion B141 ist diff'bar, sogar analytisch, auf ihrem offenen (!) Definitionsintervall, mit elementarer Ableitung, somit auch Summe, Produkt, Komposition. Andernfalls erhalten wir Gegenbeispiele wie $\sqrt{x}$ oder $|x| = \sqrt{x^2}$. (6) Ja/Nein, $\exp(-x^2)$ und $\sin(x)/x$ sind elementar, aber ihre Stammfunktionen nicht. (7) Ja/Ja. (8) Ja/Ja. Wiederholung!

Beispiele zur uneigentlichen Integration

Aufgabe: Wir fixieren $a \in \mathbb{R}$ und untersuchen die Funktion

$$f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x}{1+|x|^a}.$$



(1) Für welche $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist f_a absolut integrierbar? (2) uneigentlich?

(3) Für welche $a \in \mathbb{R}$ existiert zu $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Cauchy–Hauptwert?

(4) Sind diese drei Integraldefinitionen translationsinvariant?

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-x_0)\,\mathrm{d}x \quad \overset{?}{=} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Beispiele zur uneigentlichen Integration

Lösung: (1) Für $x \to \infty$ gilt $f_a(x) \sim x^{1-a}$. Genauer: Für $x \geq 1$ gilt

$$\frac{x}{2x^a} \quad \leq \quad \frac{x}{1+|x|^a} \quad \leq \quad \frac{x}{x^a}$$

Daher ist f_a absolut integrierbar für $a > 2$, aber nicht für $a \leq 2$.

Ausführlich: Für $a > 2$ und $x \geq 1$ nutzen wir das Majorantenkriterium:

$$\int_{x=1}^{r} \frac{x}{1+|x|^a}\,\mathrm{d}x \leq \int_{x=1}^{r} x^{1-a}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{2-a}}{2-a}\right]_{x=1}^{r} = \frac{r^{2-a}-1}{2-a} \to \frac{1}{a-2} < \infty$$

Für $a < 2$ und $x \geq 1$ hingegen nutzen wir das Minorantenkriterium:

$$\int_{x=1}^{r} \frac{x}{1+|x|^a}\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{2}\int_{x=1}^{r} x^{1-a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{x^{2-a}}{2-a}\right]_{x=1}^{r} = \frac{r^{2-a}-1}{2-a} \to \infty$$

Im Grenzfall $a = 2$ ist das letzte Integral $1/2 \ln(r) \to \infty$.

(2) Ebenso für uneigentliche Integrierbarkeit, denn $f_a(x) \geq 0$ für $x \geq 0$.

(3) Der Cauchy–Hauptwert von f_a existiert offensichtlich für alle $a \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-r}^{r} \frac{x}{1+|x|^a}\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \frac{x}{1+|x|^a}\,\mathrm{d}x = 0$$

Beispiele zur uneigentlichen Integration

(4) Das absolute Integral ist translationsinvariant dank Konstruktion.

☺ Dasselbe gilt auch für uneigentliche Integrale, denn das Ergebnis ist unabhängig vom willkürlich gewählten Teilungspunkt $z \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-x_0)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^z f(x-x_0)\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_z^b f(x-x_0)\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_{a-x_0}^{z-x_0} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_{z-x_0}^{b-x_0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

⚠ Der schwächere Cauchy–Hauptwert ist nicht translationsinvariant:

$$\int_{-r}^{r} \frac{x+x_0}{1+|x+x_0|}\,\mathrm{d}x = \int_{-r+x_0}^{r+x_0} \frac{x}{1+|x|}\,\mathrm{d}x = \int_{r-x_0}^{r+x_0} \frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

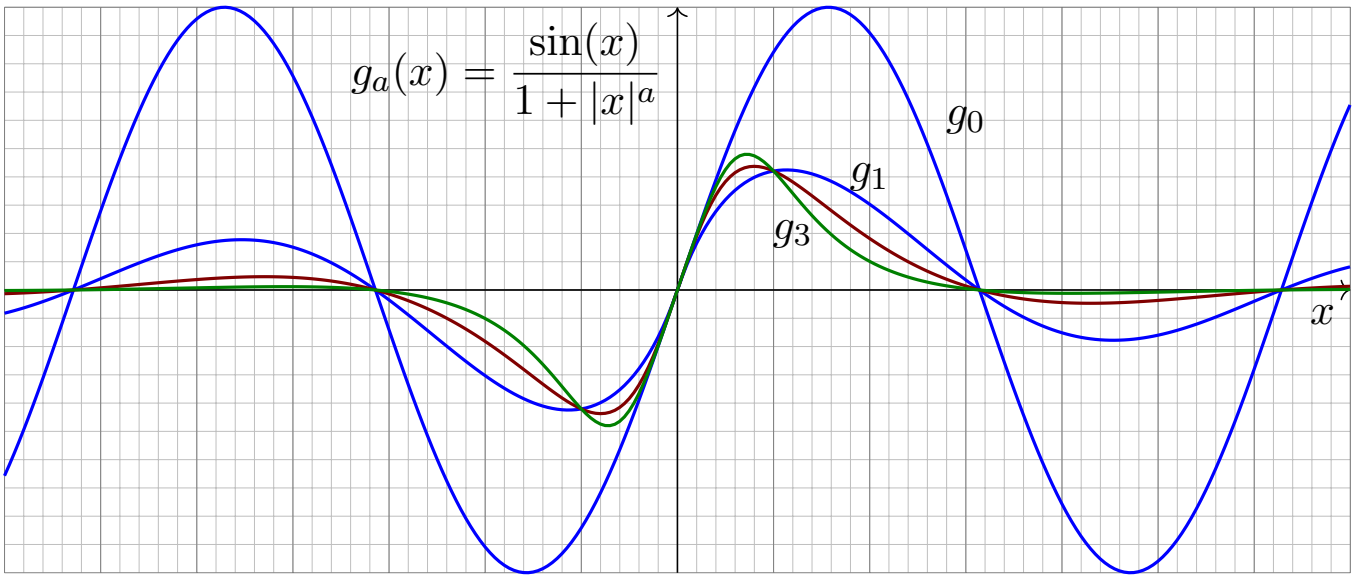
$$= \Big[x - \ln(1+x)\Big]_{r-x_0}^{r+x_0} = 2x_0 + \ln\frac{1+r-x_0}{1+r+x_0} \to 2x_0 \quad \text{für } r\to\infty$$

⚠ Nicht einmal seine Existenz bleibt unter Translation erhalten:

$$\int_{-r}^{r} x + x_0\,\mathrm{d}x = 2rx_0 \to \operatorname{sign}(x_0)\cdot\infty \quad \text{für } r\to\infty$$

☺ Die beste und robusteste Eigenschaft ist absolute Integrierbarkeit.

Beispiele zur uneigentlichen Integration



Aufgabe: Wir untersuchen $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g_a(x) = \sin(x)/(1+|x|^a)$.
Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ ist g_a absolut integrierbar? uneigentlich? CH?

Lösung: Absolut integrierbar für $a > 1$, aber nicht für $a \le 1$
Uneigentlich integrierbar für $a > 0$, aber nicht für $a \le 0$.
Für jedes a existiert der Cauchy–Hauptwert und ist gleich 0.
Die ausführliche Rechnung verläuft analog zur folgenden Aufgabe.

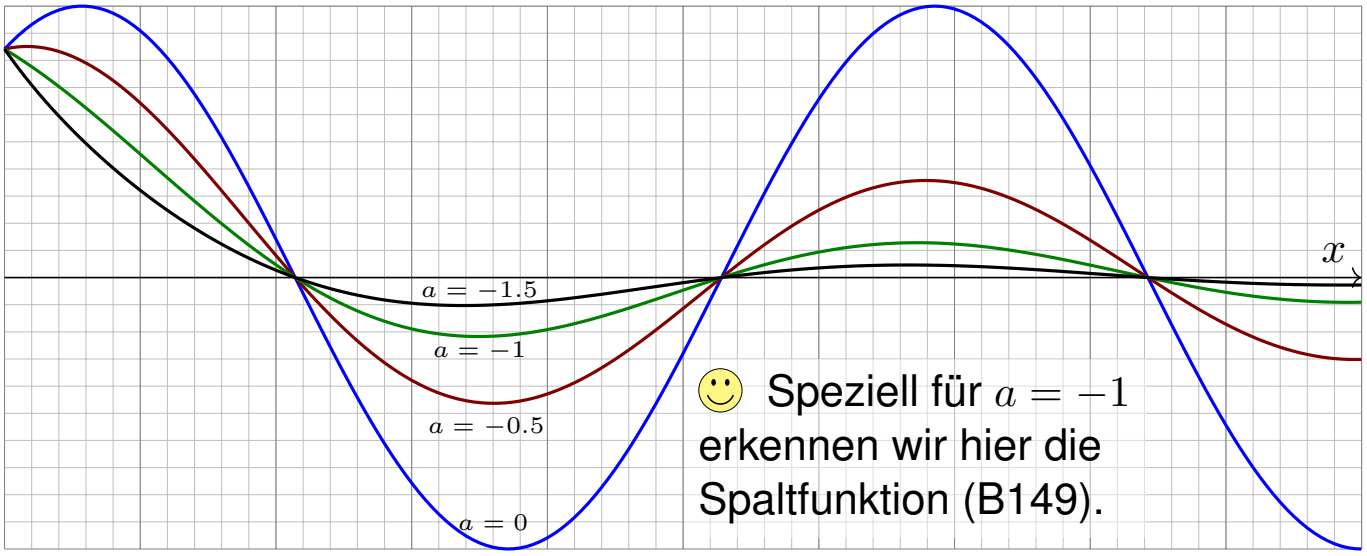
Absolute und uneigentliche Integrierbarkeit

Aufgabe: Wir untersuchen $f : [1, \infty] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^a \sin(x)$.

(1) Skizzieren Sie diese Funktion für verschiedene Parameter $a \in \mathbb{R}$.

(2) Für welche Parameter $a \in \mathbb{R}$ ist f absolut integrierbar?

(3) Für welche Parameter $a \in \mathbb{R}$ ist f uneigentlich integrierbar?



Solche Integrale treten in der Fourier–Theorie häufig auf (Kapitel K). Die zugehörigen Konvergenzfragen sind knifflig, aber auch lohnend.

Absolute und uneigentliche Integrierbarkeit

(2) Wir fragen nach der Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{r\to\infty} \int_{x=1}^{r} \left|x^a \sin(x)\right| \mathrm{d}x.$$

Für $a < -1$ folgt die Konvergenz aus dem Majorantenkriterium:

$$\int_{x=1}^{r} \left|x^a \sin(x)\right| \mathrm{d}x \le \int_{x=1}^{r} x^a \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{a+1}}{a+1}\right]_1^r = \frac{r^{a+1}-1}{a+1} \to \frac{-1}{a+1} < \infty$$

Für $-1 \le a \le 0$ folgt die Divergenz aus dem Minorantenkriterium:

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left|x^a \sin(x)\right| \mathrm{d}x \ge (k\pi)^a \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left|\sin(x)\right| \mathrm{d}x \ge 2(k\pi)^a$$

Wir erhalten als untere Abschätzung eine divergente Reihe: B303

$$\int_{x=\pi}^{\infty} \left|x^a \sin(x)\right| \mathrm{d}x = \sum_{k=2}^{\infty} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left|x^a \sin(x)\right| \mathrm{d}x \ge \sum_{k=2}^{\infty} 2(k\pi)^a = \infty$$

Für $a > 0$ folgt die Divergenz ebenso aus dem Minorantenkriterium.

Absolute und uneigentliche Integrierbarkeit

(3) Wir fragen nach der Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{r\to\infty} \int_{x=1}^{r} x^a \sin(x)\,\mathrm{d}x.$$

Für $a \geq 0$ existiert dieser Grenzwert nicht: Dies sieht man wie zuvor mit dem Minorantenkriterium. Für $a < 0$ hingegen existiert der Grenzwert!

Dies folgt bequem aus dem Konvergenzkriterium von Leibniz (B3H) bzw. allgemeiner aus dem Konvergenzkriterium von Dirichlet (B3I).

Konkret geht's so: Wir integrieren partiell und schauen genauer hin.

$$\begin{aligned}\int_{x=1}^{r} x^a \sin(x)\,\mathrm{d}x &= \Big[-x^a\cos(x)\Big]_{x=1}^{r} + \int_{x=1}^{r} a x^{a-1}\cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \cos(1) - r^a\cos(r) + \int_{x=1}^{r} a x^{a-1}\cos(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Es gilt $r^a\cos(r) \to 0$ und das letzte Integral konvergiert absolut:

$$\int_{x=1}^{r} \big|a x^{a-1}\cos(x)\big|\,\mathrm{d}x \leq \int_{x=1}^{r} -a x^{a-1}\,\mathrm{d}x = \Big[-x^a\Big]_{x=1}^{r} = 1 - r^a \to 1$$

Integrierbarkeit und Konvergenzkriterien

Aufgabe: Erklären Sie durch geeignete Sätze oder Gegenbeispiele:
(1) Damit die Reihe $\sum_{k=a}^{\infty} f(k) = \lim_{r\to\infty}\sum_{k=a}^{r} f(k)$ konvergiert, ist das Kriterium $f(k) \to 0$ für $k \to \infty$ (a) hinreichend? (b) notwendig?
(2) Damit das Integral $\int_{x=a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty}\int_{x=a}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert, ist das Kriterium $f(x) \to 0$ für $x \to \infty$ (a) hinreichend? (b) notwendig?

Lösung: (1) Das Kriterium $f(k) \to 0$ für $k \to \infty$ ist nicht hinreichend, wie die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ zeigt. Es ist aber notwendig dank Cauchy–Kriterium, siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, Lemma 1.9.1.
(2) Das Kriterium $f(x) \to 0$ für $x \to \infty$ ist auch für Integrale nicht hinreichend, wie (nochmals) das Beispiel $\int_{x=1}^{\infty} x^{-1}\,\mathrm{d}x$ zeigt. B206
Es ist auch nicht notwendig, wie das Fresnel–Integral $\int_{x=1}^{\infty} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ zeigt! Wir substituieren $u = x^2$; mit $x = \sqrt{u}$ und $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}u^{-1/2}\,\mathrm{d}u$ gilt:

$$\int_{x=1}^{r} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \int_{u=1}^{r^2} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

Dieses Integral konvergiert für $r \to \infty$, wie die vorige Aufgabe zeigt. Den Grenzwert berechnen wir später mit komplexer Integration. F529

Verständnisfragen: Differenzierbarkeit

Aufgabe: (1) Nennen Sie eine Funktion $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die stetig ist, aber (in mindestens einem Punkt) nicht differenzierbar, somit $f_0 \in C^0 \smallsetminus C^1$.

(2) Nennen Sie eine Funktion $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die einmal stetig differenzierbar ist, aber nicht zweimal, somit $f_1 \in C^1 \smallsetminus C^2$.

(3) Nennen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die n-mal stetig differenzierbar ist, aber nicht $(n+1)$-mal, somit $f_n \in C^n \smallsetminus C^{n+1}$.

Lösung: (1) Die Betragsfunktion $f_0(x) = |x|$ ist stetig, auch in $x = 0$. Sie ist aber im Punkt $x = 0$ nicht differenzierbar (Skizze!), denn

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{f_0(x) - f_0(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{x}{x} = 1, \quad \lim_{x \nearrow 0} \frac{f_0(x) - f_0(0)}{x - 0} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{-x}{x} = -1.$$

(2) Die Funktion $f_1(x) = \int_{t=0}^{x} f_0(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}x|x|$ ist diff'bar mit $f_1' = f_0$ (dank HDI oder direkt), also stetig diff'bar, aber nicht zweimal diff'bar.

(3) Sei $n \geq 1$. Aus der gegebenen Funktion $f_{n-1} \in C^{n-1} \smallsetminus C^n$ gewinnen wir durch Integration die Funktion $f_n(x) = \int_{t=0}^{x} f_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t$. Dank HDI ist f_n diff'bar mit $f_n' = f_{n-1}$. Demnach gilt $f_n \in C^n \smallsetminus C^{n-1}$, wie gewünscht. Angefangen mit $f_0(x) = |x|$ erhalten wir induktiv $f_n(x) = \frac{1}{n!}x^{n-1}|x|$.

Verständnisfragen: stetige Differenzierbarkeit

📖 Siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, Kapitel 2, insb. 2.2.14.
Für Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kennen Sie die Begriffe **differenzierbar** und **stetig differenzierbar**. Sie fragen sich, worin der Unterschied besteht? Sehr gut! Solche Fragen klären Sie am besten durch gute Beispiele:

Aufgabe: Skizzieren Sie für einige Exponenten $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} |x|^\alpha \sin(1/|x|) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(0) Ist f_α auf $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ stetig (C^0)? stetig differenzierbar (C^1)? mehrfach (C^n)? sogar glatt (C^∞)? oder gar analytisch (C^ω)?

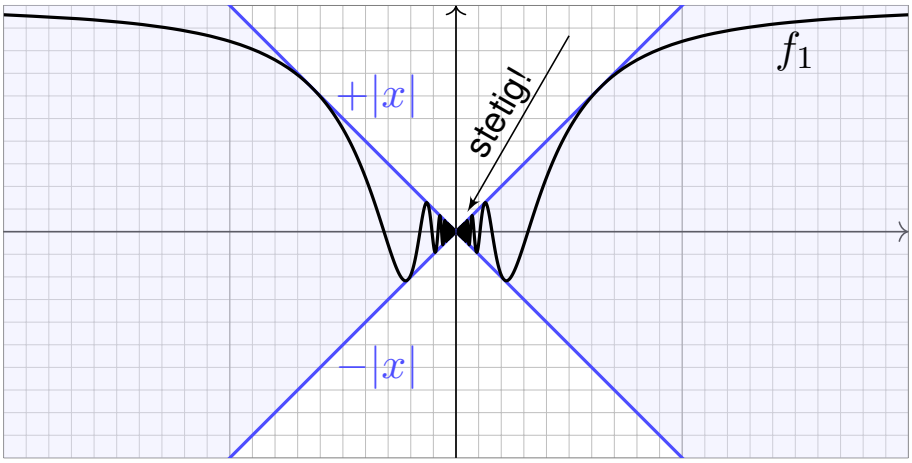
Für welche Exponenten α ist diese Funktion (1) stetig, also $f_\alpha \in C^0$? (2) überall differenzierbar? (3) stetig differenzierbar, also $f_\alpha \in C^1$?

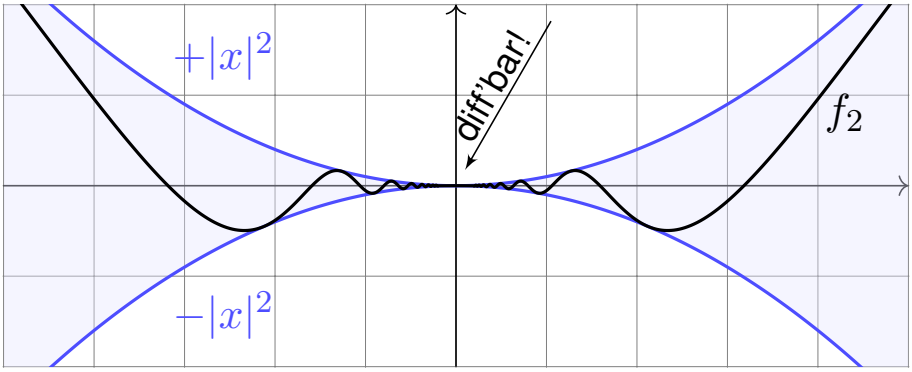
(4) Nennen Sie eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die überall differenzierbar ist, aber deren Ableitungsfunktion $g' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht überall stetig ist.

(5) Nennen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ eine Funktion $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die n-mal differenzierbar ist, aber deren n-te Ableitung nicht stetig ist.

Verständnisfragen: stetige Differenzierbarkeit

Schnelle Oszillation $\sin(1/|x|)$ mit gedämpfter Amplitude $|x|^\alpha$:





Verständnisfragen: stetige Differenzierbarkeit

Lösung: (0) Auf $\mathbb{R}^*$ ist f_α stetig / differenzierbar / glatt / analytisch, denn f_α ist Produkt und Komposition solcher Funktionen: x^α und $\sin(x)$.

(1) Für $\alpha > 0$ ist f_α stetig im Punkt 0, denn $|f_\alpha(x)| \le |x|^\alpha \to 0$ für $x \to 0$. Für $\alpha \le 0$ hingegen ist f_α in 0 unstetig: Der Grenzwert existiert nicht!

(2) Für $\alpha > 1$ ist f_α im Punkt 0 differenzierbar: Für $x \searrow 0$ gilt $(f_\alpha(x) - f_\alpha(0))/(x-0) = x^{\alpha-1}\sin(1/x) \to 0$, also $f'_\alpha(0) = 0$. Für $\alpha \le 1$ hingegen existiert dieser Grenzwert nicht!

(3) Für $x > 0$ gilt $f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}\sin(1/x) - x^{\alpha-2}\cos(1/x)$. Für $1 < \alpha \le 2$ ist demnach f_α differenzierbar, aber f'_α nicht stetig.

(4) Gemäß (3) ist $g(x) = f_2(x) = x^2\sin(1/x)$ ein einfaches Beispiel.

(5) Sei $n \ge 2$, und $g_{n-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei $(n-1)$-mal differenzierbar, aber $g_{n-1}^{(n-1)}$ sei nicht stetig. Durch Integration gewinnen wir die Funktion $g_n(x) = \int_{t=0}^x g_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t$. Dank HDI ist g_n diff'bar mit $g'_n = g_{n-1}$, also n-mal diff'bar, aber $g_n^{(n)} = g_{n-1}^{(n-1)}$ ist nicht stetig, wie gewünscht.

Explizit gelingt $g_n(0) = 0$ und $g_n(x) = |x|^{2n}\sin(1/|x|)$ oder alternativ $g_n(x) = |x|^{n+1}\sin(\ln|x|)$: wie in (1–3) genügt sorgfältige Nachrechnen!

Takagi: stetig aber nirgends differenzierbar

Aufgabe: (1) Skizzieren Sie die Funktion $f_1(x) = \operatorname{dist}(x, \mathbb{Z})$, also den Abstand von $x \in \mathbb{R}$ zur nächsten ganzen Zahl $a \in \mathbb{Z}$. Skizzieren Sie ebenso $f_n(x) = \operatorname{dist}(x, \frac{1}{n!}\mathbb{Z})$ für $n = 2, 3, 4, 5$.
(2) Skizzieren Sie $g_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$. Warum gilt $g_n \nearrow g$?
(3) Berechnen Sie die Integrale $\int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x$ und schließlich $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

Lösung: (2) Wegen $f_n \geq 0$ gilt $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \ldots$. Wegen $|f_n| \leq \frac{1}{2n!}$ gilt

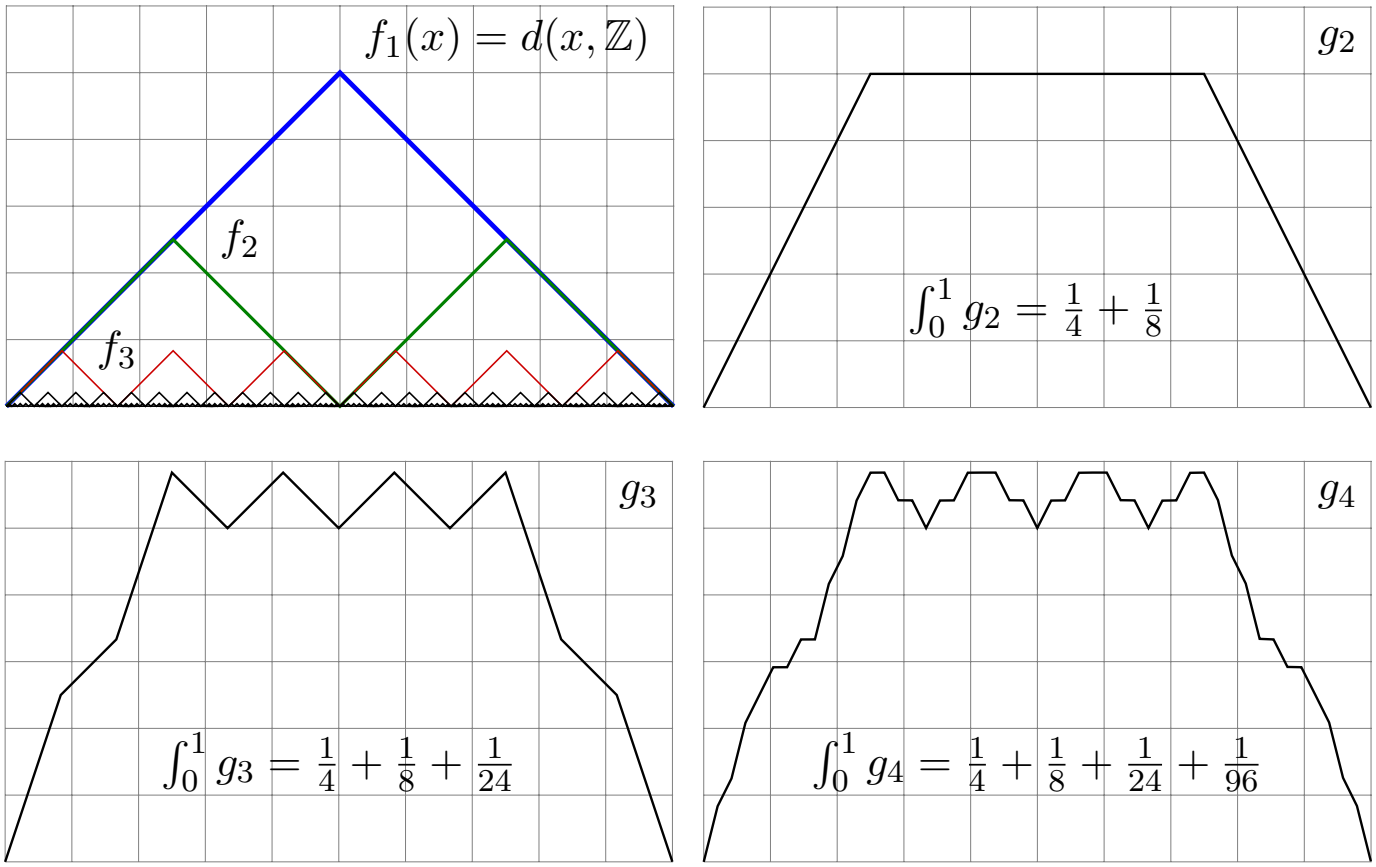
$$g_n(x) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k!} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k!} = \frac{1}{2}\left[-1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\right] = \frac{\mathrm{e}-1}{2} \approx 0.85914.$$

Für jedes feste $x \in \mathbb{R}$ ist die Folge $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und beschränkt, also konvergent. Den Grenzwert bezeichnen wir mit $g(x)$.
(3) Wir sehen $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4n!}$, dank Linearität des Integrals also $\int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k!}$, und dank monotoner Konvergenz schließlich

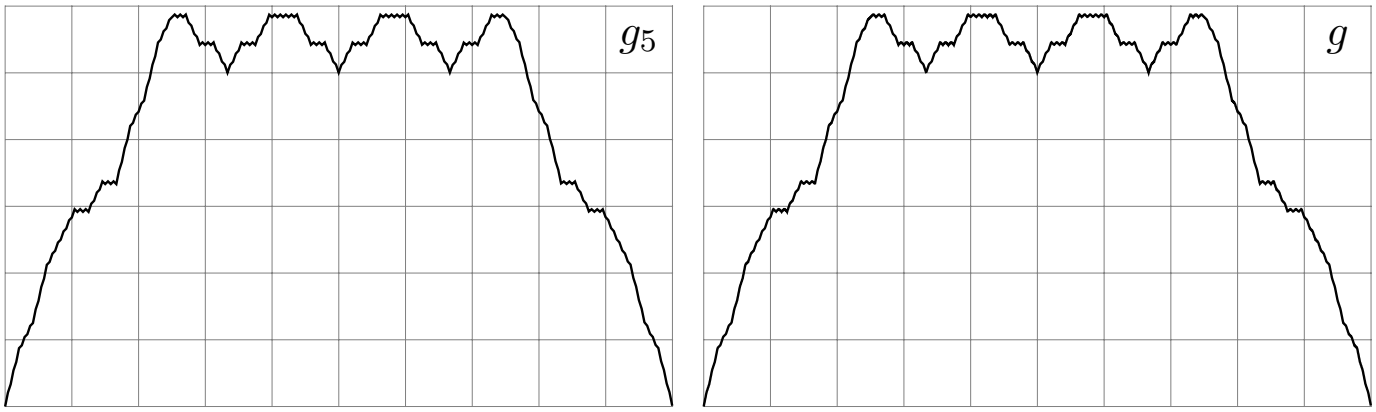
$$\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k!} = \frac{1}{4}\left[-1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\right] = \frac{\mathrm{e}-1}{4} \approx 0.42957.$$

☺ Unsere Integrationstechniken lösen auch dieses Problem elegant.

Takagi: stetig aber nirgends differenzierbar



Takagi: stetig aber nirgends differenzierbar



Satz B4A: Takagi 1901

Die so definierte **Takagi–Funktion** $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{dist}(x, \frac{1}{n!}\mathbb{Z})$ hat eine Reihe überaus bemerkenswerter Eigenschaften:

1. Die Funktion g ist stetig, aber in keinem Punkt differenzierbar.
2. Die Funktion g ist auf keinem Intervall $[a, b]$ mit $a < b$ monoton.
3. Sie nimmt in jedem Punkt $x \in \mathbb{Q}$ ein striktes lokales Minimum an.

☺ Das klingt unglaublich, ist aber wahr! Wer hätte das gedacht?
Das Beste daran: Alles ist explizit, Sie können es direkt nachrechnen.

Takagi: stetig aber nirgends differenzierbar

Beweis: (1a) Die Funktion $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig für jedes $k \in \mathbb{N}$, also auch $g_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$. Zudem gilt $0 \le g(x) - g_n(x) \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2k!} \le \frac{1}{k!} \searrow 0$. Die Konvergenz $g_n \to g$ ist also gleichmäßig auf $\mathbb{R}$. Daher ist auch die Grenzfunktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig.

(1b) Sei $x \in \mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion f_n zwischen den Punkten $\frac{1}{2n!}\mathbb{Z}$ stückweise affin mit Steigung ± 1. Somit ist f_n affin auf $[x - \frac{1}{4n!}, x]$ oder auf $[x, x + \frac{1}{4n!}]$. Für $n \ge 3$ wählen wir $h_n = \pm \frac{1}{(n+1)!}$ so, dass f_n zwischen x und $x + h_n$ affin ist. Gleiches gilt dann für alle f_k mit $1 \le k \le n$. Für $k \ge n + 1$ hingegen gilt $f_k(x + h_n) = f_k(x)$. Der Differenzenquotient ist

$$q_n := \frac{f(x + h_n) - f(x)}{h_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k(x + h_n) - f_k(x)}{h_n} = \sum_{k=1}^{n} \pm 1.$$

Daher hat die Folge $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keinen Grenzwert. Das heißt, f ist in x nicht differenzierbar.

Aus (3) folgt (2); es reicht also, Aussage (3) zu zeigen. Jede rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ lässt sich schreiben als $x = a/n!$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}_{\ge 1}$. (Warum?) Wir zeigen $g(u) > g(x)$ für alle $u \in \mathbb{R}$ mit $0 < |u - x| < r := 1/(2n)!$. Die Funktion $g_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} f_k$ ist auf $[x - r, x + r]$ stückweise affin, und die Steigung liegt überall zwischen $1 - n$ und $n - 1$. Die Funktion $h = \sum_{k=n}^{2n-1} f_k$ hingegen erfüllt $h(u) = n|u - x|$ für alle $u \in [x - r, x + r]$. Demnach ist die Summe $g_{2n-1} = g_{n-1} + h$ streng fallend auf $[x - r, x]$ und streng wachsend auf $[x, x + r]$. Insbesondere ist x das strikte Minimum von g_{2n-1} eingeschränkt auf $[x - r, x + r]$. Für alle $k \ge 2n$ gilt $f_k(x) = 0$ und $f_k(u) \ge 0$ für alle u. Deshalb ist x das strikte Minimum auch von g eingeschränkt auf die hinreichend kleine Umgebung $[x - r, x + r]$. □

Der Mittelwertsatz der Integralrechnung

Satz B4B: Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $g \geq 0$ (oder $g \leq 0$). Dann existiert ein Punkt $\xi \in [a, b]$ mit der Mittelwerteigenschaft

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x.$$

Im Spezialfall $g = 1$ erhalten wir $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = f(\xi) \cdot (b - a)$.
Im Falle $\int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x = 1$ erhalten wir $\int_a^b f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x = f(\xi)$.

Aufgabe: Beweisen Sie diese Aussage!

Lösung: Auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ existieren $m := \min f$ und $M := \max f$. Wegen $g \geq 0$ auf ganz $[a, b]$ gilt damit $mg \leq fg \leq Mg$.
Das Integral ist monoton und linear, also folgt $m \int g \leq \int fg \leq M \int g$.
Demnach existiert ein Faktor $\mu \in [m, M]$ mit $\int fg = \mu \int g$.
Wir nutzen den Zwischenwertsatz für die stetige Funktion f:
Es existiert $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = \mu$. Somit gilt $\int fg = f(\xi) \int g$.

Taylor–Polynom und Restglied

Satz B4C: Taylor–Polynom und Restglied

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ sei $(n + 1)$-mal stetig diff'bar.
Das n-te **Taylor–Polynom** von f zum Entwicklungspunkt $a \in I$ ist

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

Für alle $x \in I$ sei $R_n(x) := f(x) - T_n(x)$ das **Restglied**. (1) Es gilt

$$R_n(x) = \int_{t=a}^{x} \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, \mathrm{d}t \quad \text{(Integralform)}$$

(2) Zu jedem $x \in I$ existiert ein ξ zwischen a und x mit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1} \quad \text{(Lagrange–Form)}$$

☺ Die Lagrange–Form des Restglieds gilt sogar, wenn f nur $(n + 1)$-mal differenzierbar ist; die Stetigkeit von $f^{(n+1)}$ benötigen wir hierzu nicht. Der Beweis unter dieser schwächeren Voraussetzung ist allerdings etwas trickreicher, siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §2.6.

Taylor–Polynom und Restglied

Aufgabe: Beweisen Sie Aussage (1) für $n = 0, 1, 2, \ldots$ per Induktion. Folgern Sie (2) mit dem Mittelwertsatz B4B der Integralrechnung.

Lösung: (1) Induktionsanfang: Der Fall $n = 0$ ist der HDI

$$f(x) = f(a) + \int_{t=a}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t = T_0(x) + R_0(x).$$

Induktionsschritt: Sei $n \geq 1$ und Aussage (1) gelte für $n - 1$.
Wir haben also $f(x) = T_{n-1}(x) + R_{n-1}(x)$ mit dem Restglied

$$\begin{aligned} R_{n-1}(x) &= \int_{t=a}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\right]_{t=a}^{x} + \int_{t=a}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_{t=a}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Hieraus folgt $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ wie in Aussage (1) behauptet.
☺ Somit gilt die Restgliedformel (1) für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$.

Taylor–Polynom und Restglied

(2) Sei zunächst $x \geq a$. Somit gilt $(x-t)^n \geq 0$ für alle $t \in [a, x]$.
Nach dem Mittelwertsatz B4B existiert ein $\xi \in [a, x]$ mit

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \int_{t=a}^{x} f^{(n+1)}(t)\,\frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t = f^{(n+1)}(\xi) \int_{t=a}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t \\ &= f^{(n+1)}(\xi)\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_{t=a}^{x} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \end{aligned}$$

Den Fall $x \leq a$ mit $(x-t)^n \leq 0$ oder ≥ 0 behandelt man ebenso:
Der Mittelwertsatz B4B gilt wörtlich genauso und garantiert $\xi \in [x, a]$.
☺ Somit gilt die Restgliedformel (2) für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$.

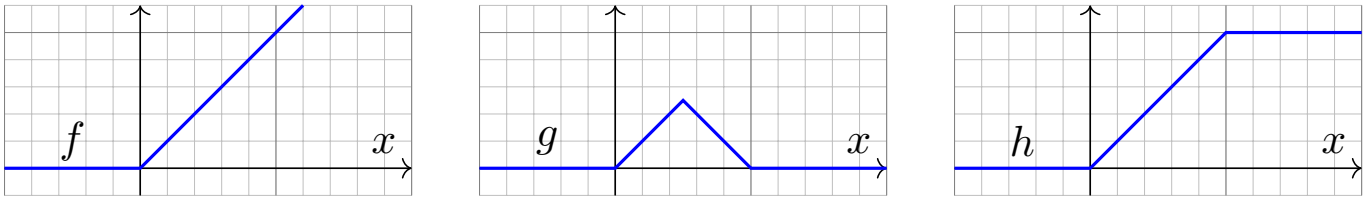
Bereits der Fall $n = 0$ ist sehr nützlich; wir halten ihn gesondert fest:

Korollar B4D: Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Ist $f : [a, x] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so existiert ein $\xi \in [a, x]$ mit

$$f(x) = f(a) + f'(\xi)(x-a)$$

Polygonzüge sind stetig, aber nicht glatt.



Wir suchen Funktionen $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

- $f(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $f(x) > 0$ für $x > 0$,
- $g(x) > 0$ für $0 < x < 1$ und $g(x) = 0$ sonst,
- h monoton mit $h(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $h(x) = 1$ für $x \geq 1$.

Wenn wir nur Stetigkeit (C^0) verlangen, so ist die Lösung leicht:
Hierzu genügen stückweise affin-lineare Funktionen wie skizziert.

☹ Diese Funktionen sind stetig, aber nicht differenzierbar.

Wir können zudem Differenzierbarkeit erreichen, genauer sogar C^k,
indem wir stückweise Polynomfunktionen vom Grad $k+1$ verkleben.

☺ Können wir auch C^∞–glatte Funktionen f, g, h erreichen? Ja!

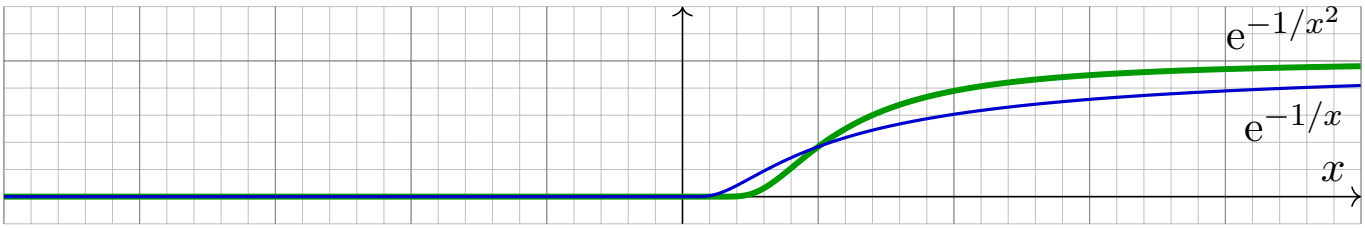
Das ist erstaunlich, die Ausführung ist keineswegs offensichtlich.
Die folgende Aufgabe erklärt hierzu die klassische Konstruktion.

Diese Funktion ist glatt, aber nicht analytisch.

Aufgabe: (0) Skizzieren Sie für $\alpha > 0$ die bemerkenswerte Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^\alpha} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

Lösung: Einige Auswertungen ergeben folgendes Bild für $\alpha = 1, 2$:



Diese bemerkenswerte Funktion hat erstaunliche Eigenschaften: Sie ist überall auf $\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ analytisch, also lokal durch eine Potenzreihe darstellbar. Auf $\mathbb{R}_{<0}$ ist dies trivial, auf $\mathbb{R}_{>0}$ gilt es dank Komposition analytischer Funktionen. An der Klebestelle 0 ist die Funktion f immerhin noch C^∞–glatt, aber nicht mehr analytisch. Diese berühmte Funktion dient uns hier zunächst als Werkstück zur Illustration, später werden wir sie als Werkzeug nutzen, zur Konstruktion glatter Testfunktionen für Distributionen D529 und von exotischen Gegenbeispielen zu PDEs S108.

📖 Für die Funktion e^{-1/x^2} mit $\alpha = 2$ siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, Beispiel 2.6.12.
Sie begegnet uns auch als eine Lösung der rationalen Differentialgleichung $x^3 y' = 2y$ M321.

Ist diese Funktion wirklich glatt?

Aufgabe: Sei $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} : x \mapsto g(x) := c_1 x^{e_1} + c_1 x^{e_2} + \cdots + c_n x^{e_n}$, mit Koeffizienten $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ und Exponenten $e_1, e_2, \ldots, e_n \in \mathbb{R}$, und

$$f \,:\, \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,:\, x \mapsto f(x) := \begin{cases} g(x)\,\mathrm{e}^{-1/x^\alpha} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \le 0. \end{cases}$$

(1) Ist f stetig? in $x \neq 0$? in $x = 0$? differenzierbar? in $x \neq 0$? in $x = 0$? Wie rechnet man die Ableitung aus? in $x \neq 0$? in $x = 0$? Zeigen Sie:

$$f'(x) = \begin{cases} \left[g'(x) + g(x) \cdot \alpha / x^{\alpha+1}\right] \mathrm{e}^{-1/x^\alpha} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \le 0. \end{cases}$$

(2) Ist f stetig diff'bar? zweimal? beliebig oft? also $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?
(3a) Berechnen Sie die Taylor–Reihe der Funktion f um $x = 0$.
(3b) Konvergiert die Taylor–Reihe? Konvergiert sie gegen f?
(3c) Ist die Funktion f analytisch? in $x \neq 0$? in $x = 0$?

⚠ Nicht jede C^∞–Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lässt sich in eine Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ entwickeln: Die zu f gehörige Taylor–Reihe kann divergieren! Selbst wenn sie konvergiert, so nicht unbedingt gegen f!

Ist diese Funktion wirklich glatt?

Lösung: (1) In jedem Punkt $x \neq 0$ ist f stetig / glatt / analytisch, denn dort ist f eine Komposition stetiger / glatter / analytischer Funktionen. Die angegebene Ableitung $f'(x)$ folgt aus Produkt- und Kettenregel. Es bleibt nur noch das Verhalten in $x = 0$ zu klären. Für $x \searrow 0$ gilt:

$$f(x) = g(x) \Big/ \left(1 + \frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{2! x^{2\alpha}} + \frac{1}{3! x^{3\alpha}} + \frac{1}{4! x^{4\alpha}} + \ldots\right) \;\to\; 0$$

Für $x \nearrow 0$ gilt $f(x) = 0 \to 0$. Somit ist f stetig in 0. Für $x \searrow 0$ gilt:

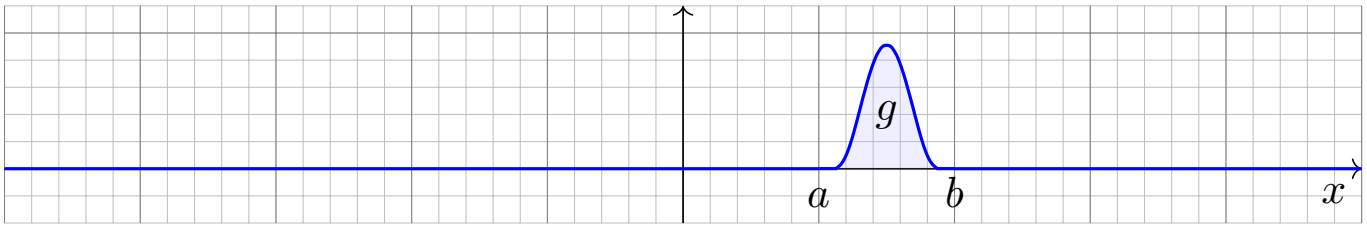
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{g(x)}{x} \Big/ \left(1 + \frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{2! x^{2\alpha}} + \ldots\right) \;\to\; 0$$

Rechtsseitig gilt $f'(0+) = 0$. Linksseitig gilt trivialerweise $f'(0-) = 0$. Also ist f tatsächlich differenzierbar in 0, und die Ableitung ist $f'(0) = 0$.

(2) Die Ableitung f' ist von derselben Form, dank (1) also differenzierbar. Per Induktion ist f somit beliebig oft differenzierbar, kurz $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(3) Für $k \in \mathbb{N}$ gilt $f^{(k)}(0) = 0$. Die Taylor–Reihe in 0 ist also $T(x) = 0$. Sie konvergiert, aber nicht gegen $f \neq 0$! Somit ist f in 0 nicht analytisch.

Hutfunktionen: glatt mit kompaktem Träger



Gibt es C^∞–glatte Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) > 0$ für $0 < x < 1$ und $g(x) = 0$ sonst? Wie konstruiert man eine solche? Allgemein gefragt:

Aufgabe: (4) Vorgegeben seien $a < b$ in $\mathbb{R}$. Konstruieren Sie eine stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) > 0$ für $a < x < b$ und $g(x) = 0$ sonst. Gelingt dies glatt, also $g \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$? analytisch, kurz $g \in C^\omega(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Bei Konstruktionsaufgaben geht es darum, eine Lösung mit den geforderten Eigenschaften zu konstruieren, und zwar möglichst explizit und direkt, und ihre Eigenschaften nachzuweisen. Natürlich kann man eine Skizze wie oben anfertigen und frech behaupten: „Voilà, hier ist eine Lösung!“ Es bleibt allerdings nachzuweisen, dass dies tatsächlich glatt möglich ist, also beliebig oft differenzierbar, selbst in den Klebestellen a und b. Genau hierzu dient diese Aufgabe. Dass dies keineswegs selbstverständlich ist, zeigt hier eindrücklich bereits die letzte Frage: Wenn wir analytische Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fordern, so ist diese Konstruktion unmöglich! Wir müssen daher zunächst befürchten, dass dies auch für C^∞–glatte Funktionen misslingt. Wir schaffen nun Klarheit, indem wir die Konstruktion solcher „Hutfunktionen“ ausführen.

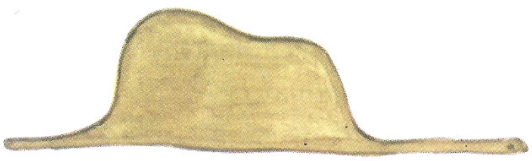
Hutfunktionen: glatt mit kompaktem Träger

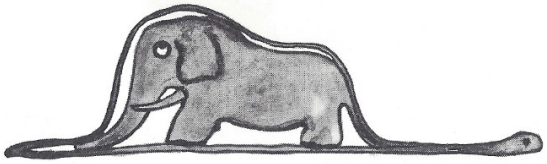
Lösung: Stetig ist's jeweils leicht, zum Beispiel stückweise affin-linear.

Wir nutzen f aus der vorigen Aufgabe und $g(x) := f((b-x)(x-a))$. Diese Funktion ist glatt als Komposition glatter Funktionen.

Ebenso möglich ist die Funktion $g(x) = f(b-x)\, f(x-a)$. Diese Funktion ist glatt als Produkt glatter Funktionen.

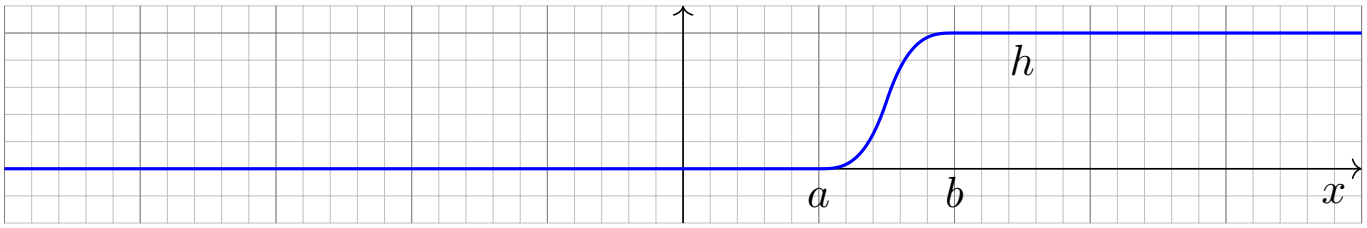
In beiden Fällen gilt $g(x) > 0$ für $a < x < b$ und $g(x) = 0$ sonst. Hingegen ist g nicht analytisch in den Klebestellen a und b, siehe (3).





Diese Zeichnungen stammen aus der berühmten Erzählung „Le Petit Prince“ des französischen Autors und Piloten Antoine de Saint-Exupéry (1900–1944). Das Bild links zeigt entgegen dem ersten Anschein keinen Hut, sondern eine Riesenschlange, die einen Elefanten verdaut (rechts). Er schreibt hierzu: *J'ai montré mon chef-d'œuvre aux grandes personnes et je leur ai demandé si mon dessin leur faisait peur. Elles m'ont répondu : « Pourquoi un chapeau ferait-il peur ? »* Auch wir haben keine Angst vor Hutfunktionen, im Gegenteil nutzen wir diese wundersamen Wesen im Folgenden raffiniert zur Konstruktion weiterer erstaunlicher und nützlicher Funktionen.

Hutfunktionen: glatt mit kompaktem Träger



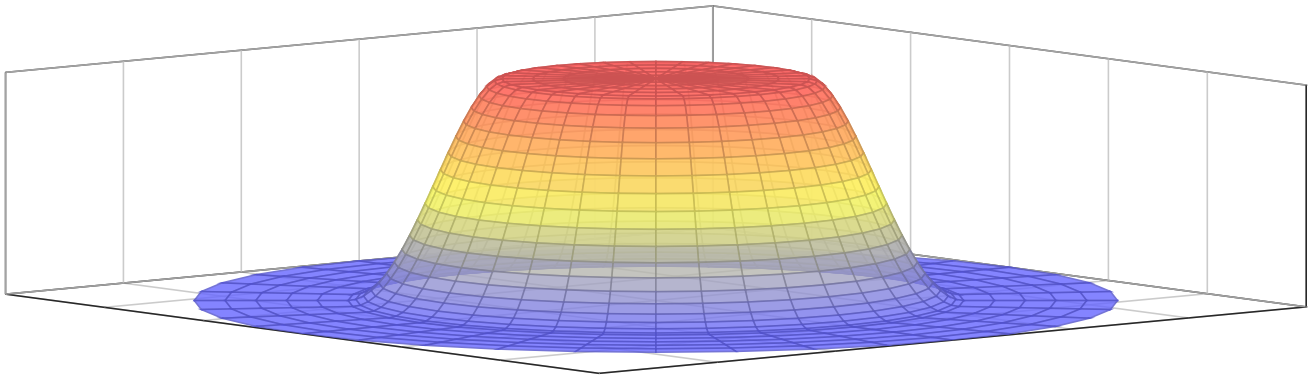
Aufgabe: (5) Vorgegeben seien $a < b$ in $\mathbb{R}$ wie zuvor. Konstruieren Sie eine stetige Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = 0$ für $x \le a$ und $h(x) = 1$ für $x \ge b$ und strikt monoton auf $[a, b]$. Gelingt dies glatt? analytisch?

Lösung: Stetig ist's jeweils leicht, zum Beispiel stückweise affin-linear. Für C^∞–glatte Funktionen nutzen wir eine glatte Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) > 0$ für $a < x < b$ und $g(x) = 0$ sonst aus der vorigen Aufgabe (4).

(5) Wir haben $c := \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > 0$ und setzen $h(x) := c^{-1} \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$. Die Funktion h ist glatt dank HDI (B1I) und erfüllt alle Forderungen. Hingegen ist h nicht analytisch in den Klebestellen a und b, siehe (4).

⚠ Glatte Funktionen sind flexibel, analytische Funktionen hingegen sind starr. Für Letztere gilt der Eindeutigkeitssatz: Haben zwei analytische Funktionen $\varphi, \psi : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}$ in einem Punkt x_0 dieselben Ableitungen $\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so gilt $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle $x \in I$. Sind sie gleich auf einer beliebig kleinen Umgebung von x_0, so sind sie überall gleich.

Glatte Hutfunktionen auf Bällen



Satz B4E: glatte Hutfunktionen auf Bällen

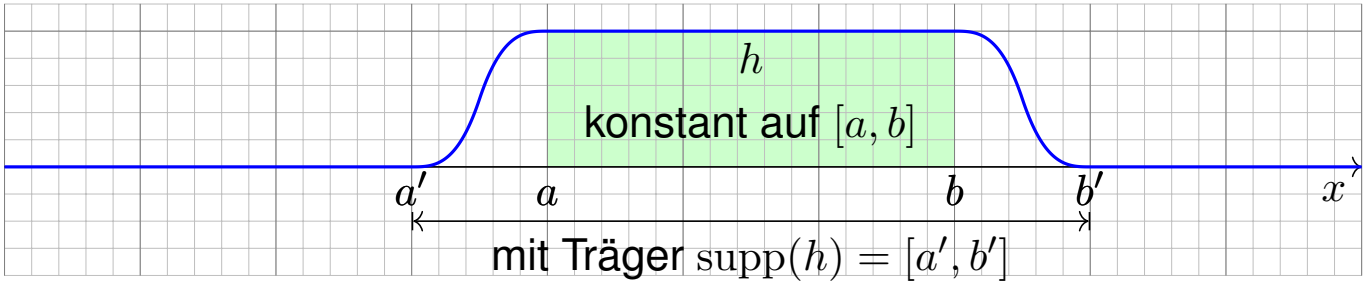
Gegeben seien Radien $0 \le a < b < \infty$. Im $\mathbb{R}^n$ definiert dies die Bälle

$$A = \bar{B}(0, a) = \left\{\, x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_1^2 + \cdots + x_n^2 \le a^2 \,\right\},$$
$$B = B(0, b) = \left\{\, x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_1^2 + \cdots + x_n^2 < b^2 \,\right\}.$$

Hierzu können wir eine glatte Funktion $h : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ konstruieren mit $h = 1$ auf A und $h = 0$ außerhalb B sowie $0 < h < 1$ auf $B \smallsetminus A$.

Beweis: Das gelingt wie in (5) durch $h(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1^2 + \cdots + x_n^2)$ mit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt, wobei $g(r) = 1$ für $r \le a^2$ und $g(r) = 0$ für $r \ge b^2$.

Glatte Hutfunktionen auf Intervallen



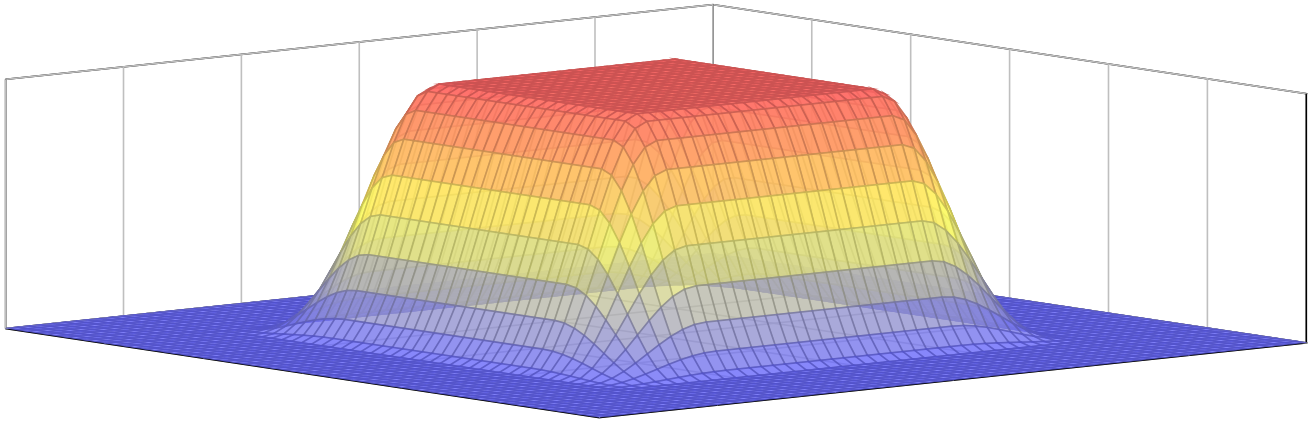
Aufgabe: (6) Vorgegeben seien nun $a' < a \le b < b$ in $\mathbb{R}$.
Konstruieren Sie eine C^∞–glatte Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie skizziert:
konstant $h = 1$ auf dem Intervall $[a, b]$ und $h = 0$ außerhalb von $]a', b'[$
sowie strikt wachsend links auf $[a', a]$ und strikt fallend rechts auf $[b, b']$.

Lösung: Stetig ist's jeweils leicht, zum Beispiel stückweise affin-linear.
Für C^∞–glatte Funktionen nutzen wir zwei glatte Funktionen aus (5):

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $x \le a'$ und $f(x) = 1$ für $x \ge a$,
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = 0$ für $x \le b$ und $g(x) = 1$ für $x \ge b'$.

Das Produkt $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : h(x) = f(x) \cdot (1 - g(x))$ erfüllt alle Forderungen:
Die Funktion h ist offensichtlich glatt als Produkt glatter Funktionen,
zudem gilt $h = f$ auf $]-\infty, b]$ und $h = 1 - g$ auf $[a, +\infty[$.

Glatte Hutfunktionen auf Quadern



Satz B4F: glatte Hutfunktionen auf Quadern

Seien $a'_i < a_i \le b_i < b'_i$ für $i = 1, \dots, n$. Im $\mathbb{R}^n$ definiert dies die Quader

$$A = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n],$$
$$B =]a'_1, b'_1[\times \cdots \times]a'_n, b'_n[.$$

Hierzu können wir eine glatte Funktion $h : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ konstruieren mit
$h = 1$ auf A und $h = 0$ außerhalb B sowie $0 < h < 1$ auf $B \smallsetminus A$.

Beweis: Dies gelingt wie in (6) durch $h(x_1, \dots, x_n) = h_1(x_1) \cdots h_n(x_n)$.
☺ Das ähnelt einer Indikatorfunktion A306, doch mit glattem Übergang.

Glatte Hutfunktionen als Testfunktionen

Glatte Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sind bemerkenswert flexibel: Die vorigen Konstruktionen zeigen, dass die Menge $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ der glatten Funktionen mit kompaktem Träger erstaunlich reichhaltig ist. Eine erste Anwendung:

Satz B4G: Verschwindungs- und Vergleichssatz

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, zum Beispiel $\Omega =]\alpha, \beta[$ oder $\Omega = \mathbb{R}$. Für jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \supseteq \Omega \to \mathbb{R}$ sind dann äquivalent:

0. $f = 0$, das heißt Gleichheit $f(x) = 0$ in jedem Punkt $x \in \Omega$.
1. $\int_\Omega |f(x)| \, \mathrm{d}x = 0$, das heißt die L^1–Norm verschwindet.
2. $\int_A f(x) \, \mathrm{d}x = 0$ für jedes kompakte Intervall $A = [a, b] \Subset \Omega$.
3. $\int_\Omega f(x) \, \varphi(x) \, \mathrm{d}x = 0$ für jede Testfunktion $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Für je zwei stetige Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind demnach äquivalent:

0. $f = g$, das heißt Gleichheit $f(x) = g(x)$ in jedem Punkt $x \in \Omega$.
1. $\int_\Omega |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x = 0$, das heißt der L^1–Abstand verschwindet.
2. $\int_A f(x) \, \mathrm{d}x = \int_A g(x) \, \mathrm{d}x$ für jedes kompakte Intervall $A \Subset \Omega$.
3. $\int_\Omega f(x) \, \varphi(x) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega g(x) \, \varphi(x) \, \mathrm{d}x$ für jede Testfunktion $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Glatte Hutfunktionen als Testfunktionen

Aufgabe: Erkären Sie diesen Satz anschaulich. Dann beweisen Sie ihn!

Lösung: Die Implikationen „(0) $\Rightarrow$ (1,2,3)“ sind trivial. Wir zeigen die Umkehrungen durch Kontraposition: Angenommen $f \neq 0$, das heißt es gilt $f(a) \neq 0$ für ein $a \in \Omega$. Wir dürfen $f(a) = 2b > 0$ annehmen. (Im entgegengesetzen Falle $f(a) < 0$ betrachten wir $-f$ statt f.) Da $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ offen und hierauf $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig ist, existiert $\varepsilon > 0$ mit $B :=]a - 2\varepsilon, a + 2\varepsilon[\subseteq \Omega$ worauf $f \geq b$ gilt. Sei $A := [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.

„(1) $\Rightarrow$ (0)“: Es gilt $\int_\Omega |f| \geq \int_A |f| \geq \int_A b = b \operatorname{vol}_1(A) = 2\varepsilon b > 0$.

„(2) $\Rightarrow$ (0)“: Es gilt $\int_A f \geq \int_A b = b \operatorname{vol}_1(A) = 2\varepsilon b \neq 0$.

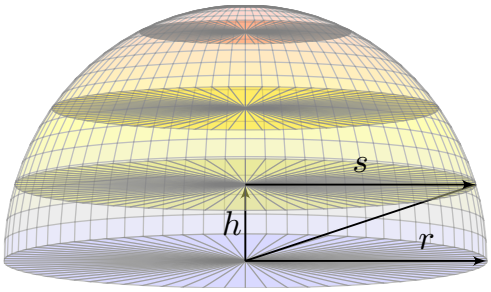
„(3) $\Rightarrow$ (0)“: Dank Satz B4E / B4F existiert eine C^∞–Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\varphi(x) = 1$ für $x \in A$ und $\varphi(x) = 0$ für $x \in \Omega \smallsetminus B$. Dank Monotonie des Integrals gilt dann wie zuvor:

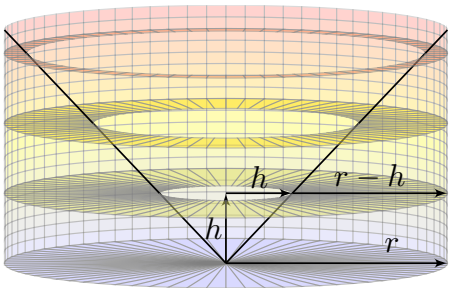
$$\int_\Omega f(x) \, \varphi(x) \, \mathrm{d}x = \int_B f(x) \, \varphi(x) \, \mathrm{d}x \geq \int_B b \, \varphi(x) \, \mathrm{d}x > 2\varepsilon b > 0$$

☺ Wir können $f = 0$ durch jedes dieser drei Kriterien (1,2,3) testen. Ebenso $f = g$, indem wir den Satz auf die Differenz $f - g$ anwenden.

Kapitel C

Mehrdimensionale Integration





Wie machen wir's, daß alles frisch und neu
Und mit Bedeutung auch gefällig sei? [...]
Ein jeder sucht sich endlich selbst was aus.
Wer vieles bringt, wird manchem etwas bringen;
Und jeder geht zufrieden aus dem Haus.

Johann Wolfgang von Goethe (1749–1832), *Faust* (1808)

Inhalt dieses Kapitels C

1 Der Satz von Fubini
- Iterierte Integrale für nicht-negative Funktionen
- Der Satz von Fubini für integrierbare Funktionen
- Integration über Normalbereiche

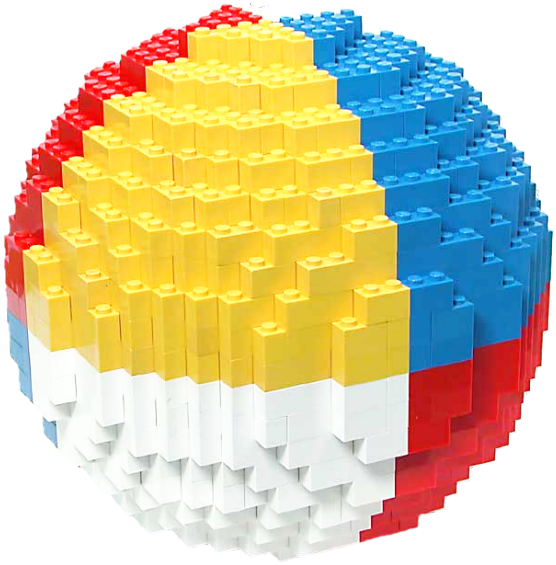
2 Der Transformationssatz
- Neue Variablen als geschickte Koordinaten
- Polarkoordinaten und das Gaußsche Integral
- Zylinder- und Kugelkoordinaten

3 Fazit: Hauptsatz, Fubini, Transformation
- Zusammenfassung
- Verständnisfragen
- Normalbereiche

4 Weitere Aufgaben und Anwendungen
- Trägheitsmoment von Zylinder und Kugel
- Warnende Gegenbeispiele zu Fubini
- Volumina, Polstellen, Integrierbarkeit

Mehrdimensionales Volumen

Das Integral misst das Volumen. Die Grundidee ist denkbar einfach: Jedem Quader $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$ können wir unmittelbar sein Volumen zuordnen, nämlich das Produkt seiner Seitenlängen (A3B).



Wir wollen jedoch nicht nur das Volumen von Quadern messen, sondern von beliebigen Mengen:

Der disjunkten Vereinigung mehrerer Quader ordnen wir die Summe ihrer Volumina zu.

(Bei einer beliebigen Vereinigung ist zur Korrektur das Volumen der Überschneidungen abzuziehen.)

Damit können wir das Volumen beliebiger Mengen approximieren, und schließlich durch Grenzübergang sogar exakt bestimmen.

Mehrdimensionale Integration

In Kapitel A haben wir grundlegend erklärt, was Integrale $\int_\Omega f$ bedeuten. In Kapitel B haben wir eindimensionale Integrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ berechnet, insb. dank des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung (B1I). Für mehrdimensionale Integrale folgen nun zwei wichtige Techniken:

- Der Satz von Fubini C1E führt die n–dimensionale Integration zurück auf n-fach iterierte eindimensionale Integration. Das hilft.
- Der Transformationssatz C2B verallgemeinert die eindimensionale Substitution und ermöglicht, geschickte Koordinaten zu wählen.

Mit diesen drei Grundtechniken lassen sich bereits sehr viele Integrale effizient berechnen. Hierauf aufbauend kommen in den folgenden Kapiteln weitere bewährte und nützliche Rechentechniken hinzu:

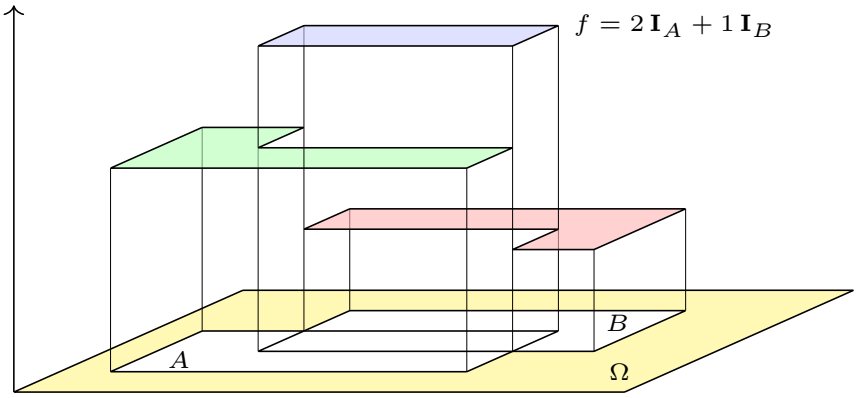
- Vertauschung von Integralen und Grenzwerten (Kapitel D)
- Integralsätze von Gauß / Green / Stokes (Kapitel E, G, H)
- Wegintegrale holomorpher Funktionen und Residuen (Kapitel F)

Damit haben Sie einen umfangreichen Werkzeugkasten zur Integration, der Ihnen als Grundlage für die meisten Anwendungen ausreichen wird.

Integration von Treppenfunktionen

Zu Quadern $Q_k \subseteq \mathbb{R}^n$ und $c_k \in \mathbb{R}$ definieren wir die **Treppenfunktion**

$$f = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \, \mathbf{I}_{Q_k} \, .$$



All diese Treppenfunktionen bilden den $\mathbb{R}$–Vektorraum $T_n = T(\mathbb{R}^n)$. Das Integral $T_n \to \mathbb{R} : f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x$ misst das Volumen unter dem Funktionsgraphen, also $\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{I}_Q(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{vol}_n(Q)$ und linear fortgesetzt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[\sum_{k=1}^{\ell} c_k \, \mathbf{I}_{Q_k}(x) \right] \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{I}_{Q_k}(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \, \mathrm{vol}_n(Q_k).$$

Treppenfunktionen sind ein nützliches Werkzeug zur Approximation weiterer Funktionen; ihr Integral ist dazu ein erster wichtiger Schritt.

Integration von Treppenfunktionen

Wir führen die n–dimensionale Konstruktion nun sorgfältig aus.

Satz C1A: Existenz und Eindeutigkeit des Integrals

(0) Es existiert genau eine $\mathbb{R}$–lineare Abbildung $I_n : T_n \to \mathbb{R}$ mit der Normierung $I_n(\mathbf{I}_Q) = \mathrm{vol}_n(Q)$ für jeden endlichen Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$.

Diese Abbildung I_n ist zudem monoton: Aus $f \le g$ folgt $I_n(f) \le I_n(g)$.

(1) Das eindimensionale Integral $I_1 : T_1 \to \mathbb{R} : f \mapsto \int_{x \in \mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x$ kennen wir bereits (Satz B1A). Hieraus gewinnen wir $I_n : T_n \to \mathbb{R}$ iterativ gemäß

$$I_n(f) = \int_{x_1 \in \mathbb{R}} \int_{x_2 \in \mathbb{R}} \cdots \int_{x_n \in \mathbb{R}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_n \cdots \mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1$$

Diese Konstruktion integriert n-fach eindimensionale Treppenfunktionen.

☺ Wir nutzen fortan die übliche Schreibweise $\int_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x := I_n(f)$.

☺ Linearität und Normierung garantieren genau die ersehnte Formel

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[\sum_{k=1}^{\ell} c_k \, \mathbf{I}_{Q_k}(x) \right] \mathrm{d}x \overset{\text{Lin}}{=} \sum_{k=1}^{\ell} c_k \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{I}_{Q_k}(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Norm}}{=} \sum_{k=1}^{\ell} c_k \, \mathrm{vol}_n(Q_k).$$

Was bedeutet „wohldefiniert“?

Was genau ist hier zu beweisen? Ist die Aussage nicht trivial? Nein! Warum genügt nicht einfach die letzte Formel als Definition? Ich nenne drei Gegenbeispiele, um Sie vor naiver Formelgläubigkeit zu schützen!

Wir wollen jeder Treppenfunktion $f \in T_n$ eine Zahl zuordnen gemäß

$$f = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \, \mathbf{I}_{Q_k} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} M(f) &:= \max\{c_1, \dots, c_\ell\}, \\ N(f) &:= \textstyle\sum_{k=1}^{\ell} c_k^2 \operatorname{vol}(Q_k), \\ Q(f) &:= \textstyle\sum_{k=1}^{\ell} c_k \operatorname{vol}(Q_k)^2. \end{aligned}$$

Aufgabe: Was ist hieran gefährlich falsch? Sind M, N, Q wohldefiniert? Versuchen Sie, diese Werte für folgende Funktionen zu bestimmen:

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \cdot \mathbf{I}_{[0,1]} &&= (+1) \cdot \mathbf{I}_{[0,1]} + (-1) \cdot \mathbf{I}_{[0,1]} \\ f &= 2 \cdot \mathbf{I}_{[0,2]} + 3 \cdot \mathbf{I}_{[1,3]} &&= 2 \cdot \mathbf{I}_{[0,1[} + 5 \cdot \mathbf{I}_{[1,2]} + 3 \cdot \mathbf{I}_{]2,3]} \\ g &= 7 \cdot \mathbf{I}_{[0,1[} - 6 \cdot \mathbf{I}_{[1,3]} &&= 7 \cdot \mathbf{I}_{[0,1[} - 6 \cdot \mathbf{I}_{[1,2]} - 6 \cdot \mathbf{I}_{]2,3]} \end{aligned}$$

Lösung: Die Zuordnungen M, N, Q sind überhaupt nicht wohldefiniert! ⚠ Verschiedene Darstellungen / Schreibweisen derselben Funktion liefern verschiedene Ergebnisse: Das ergibt überhaupt keinen Sinn!

Was bedeutet „wohldefiniert“?

☺ Treppenfunktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sind Linearkombinationen von Indikatorfunktionen $\mathbf{I}_Q$ endlicher Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$. Anders gesagt, die Indikatorfunktionen $\mathbf{I}_Q$ sind ein Erzeugendensystem von T_n.

☹ Sie sind jedoch keine Basis: Die Darstellung $f = \sum_{k=1}^{r} c_k \, \mathbf{I}_{Q_k}$ ist keineswegs eindeutig! Wir können jede Treppenfunktion f auf unendlich viele Weisen als Summe $f = \sum_{k=1}^{s} c'_k \, \mathbf{I}_{Q'_k}$ schreiben.

☹ Die Werte M, N, Q hängen nicht von der Funktion f ab, sondern von der (willkürlich gewählten!) Darstellung als Linearkombination.

☺ Glücklicherweise ist das obige Integral $I_n : T_n \to \mathbb{R}$ wohldefiniert, und genau das ist die Aussage des zu beweisenden Satzes C1A: Aus $\sum_{k=1}^{r} c_k \, \mathbf{I}_{Q_k} = \sum_{\ell=1}^{s} c'_\ell \, \mathbf{I}_{Q'_\ell}$ folgt $\sum_{k=1}^{r} c_k \operatorname{vol}_n(Q_k) = \sum_{\ell=1}^{s} c'_\ell \operatorname{vol}_n(Q'_\ell)$.

☺ Bemerkung: Die Quader Q_k dürfen sich überlappen, man kann sie aber auch stets disjunkt wählen. In diesem Falle gilt $M(f) = \max f$ und $N(f) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x$. (Warum?) Auf *disjunkten* Linearkombinationen sind somit M und N wohldefiniert. Auch disjunkte Darstellungen sind jedoch noch keineswegs eindeutig. Das Beispiel Q ist selbst durch Disjunktheit nicht zu retten, da es sich bei Verfeinerung ändert.

Integration von Treppenfunktionen

Aufgabe: Beweisen Sie Satz C1A! *Hinweis:* Sie müssen hierzu nichts neu erfinden, denn die Formulierung ist bereits vollkommen explizit; es genügt, alle Schritte geduldig und sorgsam nachzurechnen.

Lösung: Wir suchen eine Abbildung $I_n : T_n \to \mathbb{R}$ mit den genannten Eigenschaften; sie soll linear und normiert und monoton sein.

Der Satz macht hierzu zwei Aussagen: Existenz und Eindeutigkeit. Das heißt, es gibt eine korrekte Lösung I_n, und zwar genau eine.

Andernfalls wäre zu befürchten, dass es mehrere Lösungen gibt... oder auch gar keine! Hierzu verschaffen wir uns nun Klarheit.

(1) Die **Eindeutigkeit** ist hier besonders leicht: Gegeben seien zwei Abbildungen $I_n, I'_n : T_n \to \mathbb{R}$, beide seien (a) linear und (b) normiert. Für jede Treppenfunktion $f = \sum_{k=1}^r c_k \mathbf{I}_{Q_k}$ folgt $I_n(f) = I'_n(f)$, denn

$$\begin{aligned} I_n(f) &= I_n\big(\textstyle\sum_{k=1}^r c_k \mathbf{I}_{Q_k}\big) \overset{\text{(a)}}{=} \textstyle\sum_{k=1}^r c_k I_n(\mathbf{I}_{Q_k}) \overset{\text{(b)}}{=} \textstyle\sum_{k=1}^r c_k \operatorname{vol}_n(Q_k) \\ I'_n(f) &= I'_n\big(\textstyle\sum_{k=1}^r c_k \mathbf{I}_{Q_k}\big) \overset{\text{(a)}}{=} \textstyle\sum_{k=1}^r c_k I'_n(\mathbf{I}_{Q_k}) \overset{\text{(b)}}{=} \textstyle\sum_{k=1}^r c_k \operatorname{vol}_n(Q_k) \end{aligned}$$

☺ Das beweist $I_n = I'_n$: Es kann höchstens eine Lösung geben!

Integration von Treppenfunktionen

(2) Wesentlich kniffliger ist es, die **Existenz** einer Lösung zu beweisen. Hierzu müssen wir tatsächlich eine Abbildung $I_n : T_n \to \mathbb{R}$ **konstruieren**, die linear, normiert und monoton ist. Satz C1A erklärt, wie das gelingt:

(2a) Das eindimensionale Integral $I_1 : T_1 \to \mathbb{R} : f \mapsto \int_{x\in\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x$ kennen wir bereits aus Satz B1A: Unsere dortige Sorgfalt war gut investiert!

Wir bilden damit das n-fach iterierte Integral wie in C1A angegeben:

(2b) Für jede n–dimensionale Treppenfunktion $f \in T_n$ und $u \in \mathbb{R}^{n-1}$ ist $f_u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : v \mapsto f(u_1, \ldots, u_{n-1}, v)$ eine eindim. Treppenfunktion: Für jeden Quader $Q = Q^* \times [a, b]$ gilt $\mathbf{I}_Q(u, v) = \mathbf{I}_{Q^*}(u) \cdot \mathbf{I}_{[a,b]}(v)$. Aus $f = \sum_{k=1}^r c_k \mathbf{I}_{Q_k} \in T_n$ folgt $f_u = \sum_{k=1}^r c_k \mathbf{I}_{Q_k^*}(u)\, \mathbf{I}_{[a_k,b_k]} \in T_1$.

(2c) Zur leichteren Schreibweise definieren wir hilfsweise die Abbildung $J_n : T_n \to \operatorname{Abb}(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R})$ als Integration über die letzte Variable, also:

$$\begin{aligned} J_n : f \mapsto f^*, \quad f^*(x_1, \ldots, x_{n-1}) &:= I_1\big[x_n \mapsto f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)\big] \\ &= \int_{x_n\in\mathbb{R}} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)\,\mathrm{d}x_n \end{aligned}$$

Wir wenden hier (2a) an, und dank (2b) dürfen wir dies auch.

Integration von Treppenfunktionen

(2d) Die Abbildung I_1 ist linear und monoton, also auch J_n.

(2e) Speziell für $f = c\,\mathbf{I}_Q$ mit $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{n-1}, b_{n-1}] \times [a_n, b_n]$ gilt $f^* = c^*\,\mathbf{I}_{Q^*}$ mit $c^* = (b_n - a_n)\,c$ und $Q^* = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{n-1}, b_{n-1}]$.

Für jede Treppenfunktion $f = \sum_{k=1}^r c_k\,\mathbf{I}_{Q_k} \in T_n$ ist dank Linearität demnach $J_n(f) = f^* = \sum_{k=1}^r c_k^*\,\mathbf{I}_{Q_k^*} \in T_{n-1}$ eine Treppenfunktion.

Die einfache Integration liefert uns somit die Abbildung $J_n : T_n \to T_{n-1}$.

(2f) Dies können wir iterieren und erhalten so die n-fache Integration:

$$I_n \;:\; T_n \xrightarrow{J_n} T_{n-1} \xrightarrow{J_{n-1}} \dots \xrightarrow{J_2} T_1 \xrightarrow{J_1 = I_1} \mathbb{R}$$

Jede der Abbildungen $J_n, J_{n-1}, \dots, J_2, J_1 = I_1$ ist linear und monoton, also auch ihre Komposition $I_n = I_1 \circ J_2 \circ \cdots \circ J_{n-1} \circ J_n : T_n \to \mathbb{R}$.

(2g) Für jeden Quader $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{n-1}, b_{n-1}] \times [a_n, b_n]$ gilt schließlich $I_n(\mathbf{I}_Q) = (b_1 - a_1) \cdots (b_{n-1} - a_{n-1}) \cdot (b_n - a_n) = \mathrm{vol}_n(Q)$.

☺ Damit haben wir aus $I_1 : T_1 \to \mathbb{R}$ explizit eine Abbildung $I_n : T_n \to \mathbb{R}$ konstruiert, die alle Anforderungen erfüllt. Das beweist die Existenz!

Integration von Treppenfunktionen

Aussagen zu **Existenz und Eindeutig** von Lösungen sind eine typisch mathematische Vorgehensweise und zur Grundlegung unentbehrlich. Muss die Ingenieur:in das wissen? Was genau kann sie hierbei lernen?

☺ Diese ausführliche Übung zeigt exemplarisch, wieviel Umsicht und Sorgfalt nötig sind, um eine nicht-triviale Konstruktionsaufgabe zu lösen. Das gilt selbst für die (scheinbar simple) lineare Abbildung $I_n : T_n \to \mathbb{R}$.

Aus der Linearen Algebra wissen Sie: Wenn Sie eine Basis $(b_i)_{i \in I}$ von T_n haben, so genügt es, den Wert $I_n(b_i)$ für jedes $i \in I$ vorzuschreiben. Da sich jeder Vektor $f \in T_n$ eindeutig als $f = \sum_i \lambda_{i \in I} b_i$ linearkombiniert, folgt hieraus $I_n(f) = \sum_i \lambda_i I_n(b_i)$, und dies konstruiert die Abbildung I_n.

⚠ Dieses einfache Argument steht uns hier leider nicht zur Verfügung: Das Erzeugendensystem $(\mathbf{I}_Q)_{Q \subseteq \mathbb{R}^n}$ von $T_n = T(\mathbb{R}^n)$ ist keine Basis; Darstellungen $f = \sum_{k=1}^r c_k\,\mathbf{I}_{Q_k}$ sind keineswegs eindeutig! C103

Die Konstruktion muss daher den Relationen zwischen den Erzeugern $\mathbf{I}_Q$ Rechnung tragen. Genau dies ist der Inhalt der Sätze B1A und C1A. Diese Überlegungen bauen wir nun zum Satz von Fubini aus.

Fubini: Flächenintegral vs Doppelintegrale

Wir untersuchen für $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Gültigkeit der Fubini–Gleichung:

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \overset{?}{=} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y \overset{?}{=} \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$$

Sie gilt für sehr viele Funktion $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, aber nicht für alle! C117 C414

Aufgabe: (0) Gilt $\mathbf{I}_{[a,b]\times[c,d]}(x,y) = \mathbf{I}_{[a,b]}(x) \cdot \mathbf{I}_{[c,d]}(y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$?
(1) Berechnen und vergleichen Sie die drei obigen Integrale für die Indikatorfunktion $f = \mathbf{I}_Q$ eines Rechtecks $Q = [a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$.
(2) Gilt die Gleichung für alle Treppenfunktionen $f = \sum_{k=1}^n c_k\,\mathbf{I}_{Q_k}$? Bleibt sie erhalten bei Linearkombinationen $f = \sum_{k=1}^n c_k f_k$?
(3) Bleibt die Gleichung erhalten bei monotoner Konvergenz $f_k \nearrow f$?

Notation: Bei doppelten oder mehrfachen Integralen lassen wir im Folgenden meist die Klammern weg und vereinbaren, dass zum ersten Integralzeichen $\int_{x\in X}$ immer die letzte Integrationsvariable $\mathrm{d}x$ gehört.
☺ Das Symbolpaar $\int_{x\in X} \ldots \mathrm{d}x$ wirkt somit immer als Klammer.

Fubini: Flächenintegral vs Doppelintegrale

(0) Ja. Unterscheiden Sie die vier Fälle $x \lesseqgtr [a,b]$ und $y \lesseqgtr [c,d]$.
(1) Damit können wir die iterierten Integrale leicht ausrechnen:

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_Q(x,y)\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{[a,b]}(x) \cdot \mathbf{I}_{[c,d]}(y)\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{Lin}}{\underset{\text{A3L}}{=}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{[a,b]}(x) \cdot \left[\int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{[c,d]}(y)\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \overset{\text{Lin}}{\underset{\text{A3L}}{=}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{[a,b]}(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{[c,d]}(y)\,\mathrm{d}y$$

Dasselbe gilt bei umgekehrter Integrationsreihenfolge:

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_Q(x,y)\,\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{[a,b]}(x) \cdot \mathbf{I}_{[c,d]}(y)\,\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y$$

$$\overset{\text{Lin}}{\underset{\text{A3L}}{=}} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{[a,b]}(x)\,\mathrm{d}x \right] \cdot \mathbf{I}_{[c,d]}(y)\,\mathrm{d}y \overset{\text{Lin}}{\underset{\text{A3L}}{=}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{[a,b]}(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{[c,d]}(y)\,\mathrm{d}y$$

Schließlich ist das Flächenintegral auf Rechtecken normiert:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{I}_Q(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \overset{\text{Def}}{\underset{\text{A3G}}{=}} \mathrm{vol}_2(Q) = (b-a)(d-c)$$

☺ Fubini gilt für $f = \mathbf{I}_Q$ und jedes Rechteck $Q = [a,b] \times [c,d]$.

Fubini: Flächenintegral vs Doppelintegrale

(2) Für jede Linearkombination $f = \sum_{k=1}^{n} c_k f_k$ finden wir:

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{n} c_k f_k(x,y)\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \overset{\text{Lin}}{\underset{\text{A3L}}{=}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{n} c_k \left[\int_{\mathbb{R}} f_k(x,y)\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{Lin}}{\underset{\text{A3L}}{=}} \sum_{k=1}^{n} c_k \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f_k(x,y)\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$$

Dasselbe gilt bei umgekehrter Integrationsreihenfolge:

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{n} c_k f_k(x,y)\,\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y \overset{\text{Lin}}{\underset{\text{A3L}}{=}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{n} c_k \left[\int_{\mathbb{R}} f_k(x,y)\,\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y$$

$$\overset{\text{Lin}}{\underset{\text{A3L}}{=}} \sum_{k=1}^{n} c_k \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f_k(x,y)\,\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y$$

Schließlich ist auch das Flächenintegral linear:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \sum_{k=1}^{n} c_k f_k(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \overset{\text{Lin}}{\underset{\text{A3L}}{=}} \sum_{k=1}^{n} c_k \int_{\mathbb{R}^2} f_k(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$$

☺ Gilt Fubini für $f_1, f_2, \ldots, f_n$, so auch für jede Linearkombination f.

Fubini: Flächenintegral vs Doppelintegrale

(3) Für $0 \le f_1 \le f_2 \le \ldots$ und monotone Konvergenz $f_k \nearrow f$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \lim_{k\to\infty} f_k(x,y)\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{MoK}}{\underset{\text{A3G}}{=}} \int_{\mathbb{R}} \lim_{k\to\infty} \left[\int_{\mathbb{R}} f_k(x,y)\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \overset{\text{MoK}}{\underset{\text{A3G}}{=}} \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f_k(x,y)\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$$

Dasselbe gilt bei umgekehrter Integrationsreihenfolge:

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \lim_{k\to\infty} f_k(x,y)\,\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y$$

$$\overset{\text{MoK}}{\underset{\text{A3G}}{=}} \int_{\mathbb{R}} \lim_{k\to\infty} \left[\int_{\mathbb{R}} f_k(x,y)\,\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y \overset{\text{MoK}}{\underset{\text{A3G}}{=}} \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f_k(x,y)\,\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y$$

Auch für das Flächenintegral gilt bei monotoner Konvergenz:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} \lim_{k\to\infty} f_k(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \overset{\text{MoK}}{\underset{\text{A3G}}{=}} \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} f_k(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$$

☺ Gilt Fubini für $0 \le f_1 \le f_2 \le \ldots$, so auch für ihre Grenzfunktion f.

Fubini für nicht-negative Funktionen

Die Rechnungen zu dieser Konstruktion beweisen die Formel von Fubini für alle Treppenfunktionen, und per Grenzübergang für alle messbaren Funktionen $f : X \times Y \to [0, \infty]$. Allein die Einschachtelung ist mühsam, diese rechnen wir hier nicht nach. Zusammenfassend erhalten wir:

Satz C1B: Fubini für nicht-negative Funktionen

Seien $X_1, \dots, X_n \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle, also $X_1 \times \cdots \times X_n \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader.

Für jede messbare Funktion $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to [0, \infty]$ gilt

$$\int_{X_1 \times \cdots \times X_n} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{X_1} \dots \int_{X_n} f(x_1, \dots, x_n)\,\mathrm{d}x_n \dots \mathrm{d}x_1.$$

Dasselbe Ergebnis gilt bei beliebiger Integrationsreihenfolge.

- ☺ Eindimensionale Integrale beherrschen wir recht gut dank HDI.
- ☺ Fubini reduziert mehrdimensionale Integrale auf eindimensionale.
- ☺ Wir dürfen uns jeweils die bequemste Reihenfolge aussuchen.
- ☺ Der Satz gilt allgemein für $X_1 \subseteq \mathbb{R}^{d_1}, \dots, X_n \subseteq \mathbb{R}^{d_n}$ messbar.

Fubini für nicht-negative Funktionen

Für manche Anwendungen ist folgende Zusammenfassung flexibler: Wir gruppieren $X = X_1 \times \cdots \times X_p$ und $Y = X_{p+1} \times \cdots \times X_{p+q}$.

Satz C1C: Fubini für nicht-negative Funktionen

Seien $X \subseteq \mathbb{R}^p$ und $Y \subseteq \mathbb{R}^q$ messbar und $\Omega = X \times Y \subseteq \mathbb{R}^{p+q}$.

Für jede messbare Funktion $f : X \times Y \to [0, \infty]$ gilt

$$\int_{X \times Y} f(x, y)\,\mathrm{d}(x, y) = \int_X \int_Y f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_Y \int_X f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Erläuterung: Das zweite Integral bedeutet: Zu festem $x \in X$ integrieren wir die Funktion $f_x : Y \to [0, \infty] : y \mapsto f(x, y)$ und erhalten $F : X \to [0, \infty] : x \mapsto F(x) := \int_Y f(x, y)\,\mathrm{d}y$; deren Integral ist $\int_X \int_Y f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x := \int_X F(x)\,\mathrm{d}x$. Entsprechend für das dritte Integral.

Wenn das Integral $\int_Y f(x, y)\,\mathrm{d}y$ für jedes $x \in X$ existiert, dann gilt die erste Gleichung wie angegeben. Es kann jedoch vorkommen, dass die Funktion $f_x : Y \to [0, \infty]$ für einige wenige $x \in X$ gar nicht messbar ist. Glücklicherweise ist f_x für fast jedes $x \in X$ messbar, eventuell mit Ausnahme einer vernachlässigbaren Menge $N \subseteq X$ vom Volumen Null. Wir definieren dann $F : X \to [0, \infty]$ durch $F(x) := \int_Y f(x, y)\,\mathrm{d}y$ für $x \in X \smallsetminus N$, sowie $F(x) = 0$ für $x \in N$. Dann besagt der Satz, dass F messbar ist und $\int_{X \times Y} f(x, y)\,\mathrm{d}(x, y) = \int_X F(x)\,\mathrm{d}x$ gilt.

Beispiel in Dimension 2

C115
Übung

Aufgabe: Berechnen Sie $\int_{[0,1]\times[1,2]} 36xy^2 \,\mathrm{d}(x,y)$ mit Fubini.

Lösung: Erste Rechnung, erst über y integrieren, dann über x:

$$\int_{[0,1]\times[1,2]} 36xy^2 \,\mathrm{d}(x,y) \overset{\text{Fub}}{\underset{\text{C1B}}{=}} \int_{x=0}^{1} \left[\int_{y=1}^{2} 36xy^2 \,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \int_{x=0}^{1} \Big[12xy^3\Big]_{y=1}^{2} \mathrm{d}x = \int_{x=0}^{1} 84x \,\mathrm{d}x \overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \Big[42x^2\Big]_{x=0}^{1} = 42$$

Andersrum geht es auch, erst über x integrieren, dann über y:

$$\int_{[0,1]\times[1,2]} 36xy^2 \,\mathrm{d}(x,y) \overset{\text{Fub}}{\underset{\text{C1B}}{=}} \int_{y=1}^{2} \left[\int_{x=0}^{1} 36xy^2 \,\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y$$

$$\overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \int_{y=1}^{2} \Big[18x^2y^2\Big]_{x=0}^{1} \mathrm{d}y = \int_{y=1}^{2} 18y^2 \,\mathrm{d}y \overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \Big[6y^3\Big]_{y=1}^{2} = 42$$

Notation: Insbesondere bei iterierten Integralen kann es hilfreich sein, die jeweilige Variable zusätzlich auch unter dem Integralzeichen zu notieren, wie in obigen Rechnungen geschehen. Dies dient der Betonung und hat den Vorteil, dass wir beim Lesen von links nach rechts schon am Anfang wissen, was uns am Ende erwartet. Diese ausführliche Notation ist zwar etwas redundant, aber gerade deshalb in handschriftlichen Rechnungen weniger fehleranfällig. Möge es nützen!

Beispiel in Dimension 3

C116
Übung

Aufgabe: Integrieren Sie $f(x) = x_1(x_2^2 + x_3)$ über $[0,1] \times [1,2] \times [0,2]$. Wie viele Reihenfolgen sind möglich? Liefern alle dasselbe Ergebnis?

Lösung: Das Integral berechnen wir mit Fubini:

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]\times[1,2]\times[0,2]} f(x) \,\mathrm{d}x &= \int_{x_1=0}^{1} \int_{x_2=1}^{2} \int_{x_3=0}^{2} x_1(x_2^2 + x_3) \,\mathrm{d}x_3 \,\mathrm{d}x_2 \,\mathrm{d}x_1 \\
&= \int_{x_1=0}^{1} \int_{x_2=1}^{2} \Big[x_1\big(x_2^2 x_3 + \tfrac{1}{2}x_3^2\big)\Big]_{x_3=0}^{2} \mathrm{d}x_2 \,\mathrm{d}x_1 \\
&= \int_{x_1=0}^{1} \int_{x_2=1}^{2} x_1(2x_2^2 + 2) \,\mathrm{d}x_2 \,\mathrm{d}x_1 \\
&= \int_{x_1=0}^{1} x_1 \Big[\frac{2}{3}x_2^3 + 2x_2\Big]_{x_2=1}^{2} \mathrm{d}x_1 \\
&= \int_{x_1=0}^{1} x_1 \frac{20}{3} \,\mathrm{d}x_1 = \frac{10}{3}
\end{aligned}$$

☺ Wir dürfen hier die Integrationsreihenfolge beliebig vertauschen: Alle sechs Reihenfolgen liefern dasselbe Ergebnis: Probieren Sie es!

Tabellenkalkulation: Vertauschbarkeit gilt nicht immer!

C117
Beispiel

Ist es in Tabellen egal, ob Sie erst Zeilen oder erst Spalten summieren? Klar, bei endlichen Tabellen! Für unendliche gibt es Überraschungen: Sei $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $a(i,i) = +1$ und $a(i+1,i) = -1$ und sonst $= 0$.

$\vdots$	j					$\iddots$
0					$+1$	$\iddots$
0				$+1$	-1	
0			$+1$	-1		
0		$+1$	-1			
0	$+1$	-1				i
	$+1$	0	0	0	0	$\cdots$

Zeilen zuerst:

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} a(i,j) = 0$$

Spalten zuerst:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a(i,j) = +1$$

⚠ Umordnung verlangt absolute Summierbarkeit!

☹ Das ist ja fürchterlich! Kann das auch bei Integralen passieren? Ja!

Umordnung absolut summierbarer Reihen

C118
Erinnerung

Wir erinnern an folgenden wichtigen Umordnungssatz A2P:

Satz C1D: Cauchy–Umordnungssatz

(1) Für jede Doppelfolge $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ gilt

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} |a_{ij}| = \sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} |a_{ij}| = \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{i\in\mathbb{N}} |a_{ij}| = \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{i+j=k} |a_{ij}|.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so ist (a_{ij}) absolut summierbar, und dann gilt

$$\boxed{\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{i\in\mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{i+j=k} a_{ij}.}$$

☺ Diese nützliche Rechenregel hat zahlreiche Anwendungen, zum Beispiel die Multiplikation von Reihen, insbesondere Potenzreihen.

⚠ Unser obiges Beispiel ist nicht absolut summierbar, und die Umordnung der Reihe schlägt tatsächlich fehl!

Kann das auch bei Integration über $[0,1] \times [0,1]$ passieren? Ja! C409

Vertauschbarkeit gilt nicht immer!

C119
Beispiel

Aufgabe: (0) Man skizziere die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\mathbf{I}_{[k,k+1[\times[k,k+1[} - \mathbf{I}_{[k+1,k+2[\times[k,k+1[} \Big).$$

(1) Man berechne und vergleiche und bestaune die Doppelintegrale

$$\int_{y\in\mathbb{R}} \int_{x\in\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \overset{?}{=} \quad \int_{x\in\mathbb{R}} \int_{y\in\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

(2) Widerspricht das Fubini? Was erhält man für f^+ und f^- sowie $|f|$?

Lösung: (1a) Zeilen, erst nach x und dann nach y integrieren:

$$\int_{y\in\mathbb{R}} \int_{x\in\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{y\in\mathbb{R}} 0\,\mathrm{d}y = 0$$

(1b) Spalten, erst nach y und dann nach x integrieren:

$$\int_{x\in\mathbb{R}} \int_{y\in\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{x\in\mathbb{R}} \mathbf{I}_{[0,1[}(x)\,\mathrm{d}x = +1$$

⚠ Das zeigt, dass wir nicht blind drauflos rechnen dürfen!

Vertauschbarkeit gilt nicht immer!

C120
Ausführung

(2) Für den Positivteil $f^+ = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{I}_{[k,k+1[\times[k,k+1[}$ gilt dank Fubini C1B:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f^+(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f^+(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f^+(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = +\infty$$

Für den Negativteil $f^- = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{I}_{[k+1,k+2[\times[k,k+1[}$ gilt dank Fubini C1B:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f^-(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f^-(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f^-(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = +\infty$$

⚠ Die Differenz $\int f^+ - \int f^-$ hat nur Sinn, wenn beide endlich sind.
Dies ist genau dann der Fall, wenn $|f| = f^+ + f^-$ integrierbar ist.

Das Problem ist hier offensichtlich, f ist nicht absolut integrierbar:

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} f^+(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) + \int_{\mathbb{R}^2} f^-(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = +\infty$$

⚠ Dieses grundlegende Problem müssen wir kennen und vermeiden, wenn wir Doppelintegrale und den Satz von Fubini anwenden wollen.

☺ Die gute Nachricht: Diese Vorsichtsmaßnahme ist schon alles!

Fubini für absolut integrierbare Funktionen

Bislang haben wir Fubini (Satz C1B) nur für nicht-negative Funktionen!
Dank Zerlegung in Positiv- und Negativteil (A3K) folgt daraus allgemein:

Satz C1E: Fubini 1907

Seien $X \subseteq \mathbb{R}^p$ und $Y \subseteq \mathbb{R}^q$ messbare Teilmengen.

(1) Für jede messbare Funktion $f : X \times Y \to \bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ gilt

$$\int_{X\times Y} |f(x,y)| \,\mathrm{d}(x,y) = \int_X \int_Y |f(x,y)| \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_Y \int_X |f(x,y)| \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so ist f absolut integrierbar, und dann gilt

$$\boxed{\int_{X\times Y} f(x,y) \,\mathrm{d}(x,y) = \int_X \int_Y f(x,y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_Y \int_X f(x,y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.}$$

☺ Fubini reduziert mehrdimensionale Integrale auf eindimensionale.
☺ Wir brauchen absolute Integrierbarkeit: genau die, mehr nicht.
☺ Wir dürfen uns dann die bequemste Reihenfolge aussuchen.

Wann gilt Vertauschbarkeit?

☺ Fubini und die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge gilt
- für alle nicht-negativen Funktionen $f : X \times Y \to [0, \infty]$,
- für alle absolut integrierbaren Funktionen $f : X \times Y \to \bar{\mathbb{R}}$,
- zum Beispiel, wenn X, Y und f beschränkt sind,
- insbesondere für X, Y kompakt und f stetig.

⚠ Für die ersehnte Gleichheit sind diese Voraussetzungen wesentlich!
Aufgaben am Kapitelende zeigen lehrreiche Gegenbeispiele. C409 C413
Zur korrekten Anwendung müssen Sie dieses Problem beherrschen.

Der Satz von Fubini ist ungemein praktisch, wie wir bereits gesehen haben, denn er erlaubt uns, die mehrdimensionale Integration auf die leichtere eindimensionale Integration zurückzuführen.

Der erste Teil des Satzes besagt ausführlicher: Die Funktion $g_x : Y \to \bar{\mathbb{R}} : y \mapsto |f(x,y)|$ ist für fast jedes $x \in X$ messbar, eventuell mit Ausnahme einer Nullmenge $N \subseteq X$. Wir definieren $G : X \to [0, \infty]$ durch $G(x) := \int_Y |f(x,y)| \,\mathrm{d}y$ für $x \in X \smallsetminus N$, sowie $G(x) = 0$ für $x \in N$. Dann ist G messbar, und es gilt $\int_{X\times Y} |f(x,y)| \,\mathrm{d}(x,y) = \int_X G(x) \,\mathrm{d}x$.

Der zweite Teil des Satzes besagt ausführlicher: Die Funktion $f_x : Y \to \bar{\mathbb{R}} : y \mapsto f(x,y)$ ist für fast jedes $x \in X$ integrierbar, eventuell mit Ausnahme einer Nullmenge $N \subseteq X$. Die Funktion $F : X \to \mathbb{R}$ mit $F(x) := \int_Y f(x,y) \,\mathrm{d}y$ für alle $x \in X \smallsetminus N$, sowie $F(x) = 0$ für $x \in N$, ist integrierbar und erfüllt $\int_{X\times Y} f(x,y) \,\mathrm{d}(x,y) = \int_X F(x) \,\mathrm{d}x$. Ebenso für das zweite Integral.

Flächeninhalt einer Kreisscheibe

C123
Übung

Aufgabe: Berechnen Sie den Flächeninhalt der **Kreisscheibe**

$$D = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le r^2 \,\}$$
$$= \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -r \le x \le r,\ -\sqrt{r^2 - x^2} \le y \le \sqrt{r^2 - x^2} \,\}.$$

Lösung: Dank Fubini genügt eindimensionale Integration:

$$\mathrm{vol}_2(D) \overset{\text{Def}}{\underset{\text{A3J}}{=}} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{I}_D(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \overset{\text{Fub}}{\underset{\text{C1E}}{=}} \int_{x\in\mathbb{R}} \int_{y\in\mathbb{R}} \mathbf{I}_D(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{Def}}{=} \int_{x=-r}^{r} \int_{y=-\sqrt{r^2-x^2}}^{+\sqrt{r^2-x^2}} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \overset{\text{Def}}{\underset{\text{HDI}}{=}} \int_{x=-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

Substitution $x = -r\cos(u)$ und $\mathrm{d}x = r\sin(u)\,\mathrm{d}u$ mit $u \in [0,\pi]$:

$$\overset{\text{Subs}}{\underset{\text{B1K}}{=}} \int_{u=0}^{\pi} 2\sqrt{r^2 - r^2\cos(u)^2} \cdot r\sin(u)\,\mathrm{d}u \overset{\text{Trig}}{=} r^2 \int_{u=0}^{\pi} 2\sin(u)^2\,\mathrm{d}u$$

$$\overset{\text{Trig}}{=} r^2 \int_{u=0}^{\pi} 1 - \cos(2u)\,\mathrm{d}u \overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} r^2 \Big[u - \frac{1}{2}\sin(2u)\Big]_{u=0}^{\pi} = \pi r^2$$

☺ Das Ergebnis kannten Sie bereits. Nun können Sie es ausrechnen!

Rauminhalt einer Kugel

C124
Übung

Aufgabe: Berechnen Sie den Rauminhalt einer **Kugel** vom Radius r:

$$K = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le r^2 \,\}$$
$$= \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -r \le z \le r,\ x^2 + y^2 \le r^2 - z^2 \,\}$$

Lösung: Dank Fubini und der vorigen Aufgabe finden wir:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{I}_K(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) \overset{\text{Fub}}{\underset{\text{C1E}}{=}} \int_{z=-r}^{r} \int_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \mathbf{I}_K(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y)\,\mathrm{d}z$$

$$\overset{\text{s.o.}}{=} \int_{z=-r}^{r} \pi(r^2 - z^2)\,\mathrm{d}z \overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \pi\Big[zr^2 - \frac{1}{3}z^3\Big]_{z=-r}^{r} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

☺ Die Rechnung fällt hier sogar noch einfacher aus als für die Kreisscheibe.

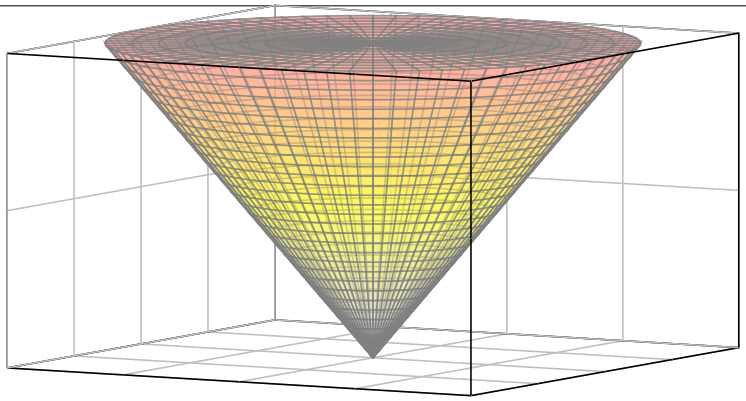
☺ Der Term r^3 ist plausibel, denn die Kugel wächst in jede Richtung proportional zu r. Die Konstante $\frac{4}{3}\pi$ hingegen kann man nicht raten. Wir gewinnen sie aus der Integration!

☺ Rekursiv können Sie mit derselben Rechnung in jeder Dimension $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ das Volumen der Kugel $D_r^n = \{\, (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \le r^2 \,\}$ bestimmen: C425

n	0	1	2	3	4	5	6	…
$\mathrm{vol}_n(D_r^n)$	1	$2r$	πr^2	$\frac{4}{3}\pi r^3$	$\frac{1}{2}\pi^2 r^4$	$\frac{8}{15}\pi^2 r^5$	$\frac{1}{6}\pi^3 r^6$	…

Volumen eines Kegels

C125
Übung



Aufgabe: Berechnen Sie das Volumen des **Kegels**

$$K = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le h,\ x^2 + y^2 \le z^2 \,\}.$$

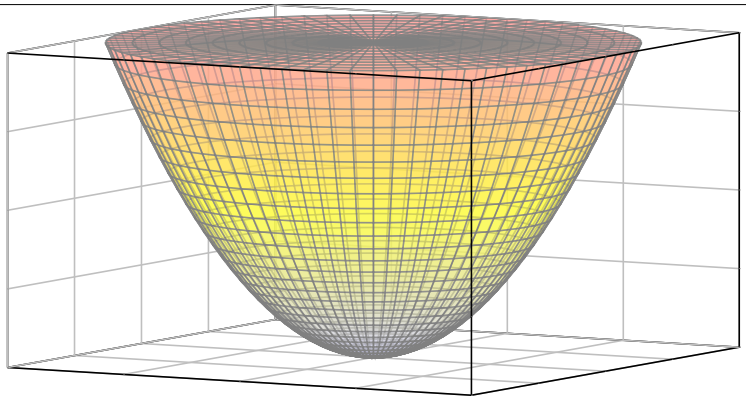
Lösung: Dank Fubini und geschickter Aufspaltung gilt:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{I}_K(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_{z=0}^{h} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{I}_K(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^h \pi z^2\,\mathrm{d}z = \left[\frac{\pi}{3} z^3\right]_{z=0}^{h} = \frac{\pi}{3} h^3.\end{aligned}$$

☺ Glas: Um die doppelte Höhe zu erreichen, benötigen Sie achtmal soviel Flüssigkeit.
Der Term h^3 ist plausibel, denn der Kegel wächst in jede Richtung proportional zu h.
Allgemein ist das Volumen eines dreidimensionalen Kegels $\frac{1}{3}$ mal Grundfläche mal Höhe.

Volumen eines Rotationsparaboloids

C126
Übung



Aufgabe: Berechnen Sie das Volumen des **Rotationsparaboloids**

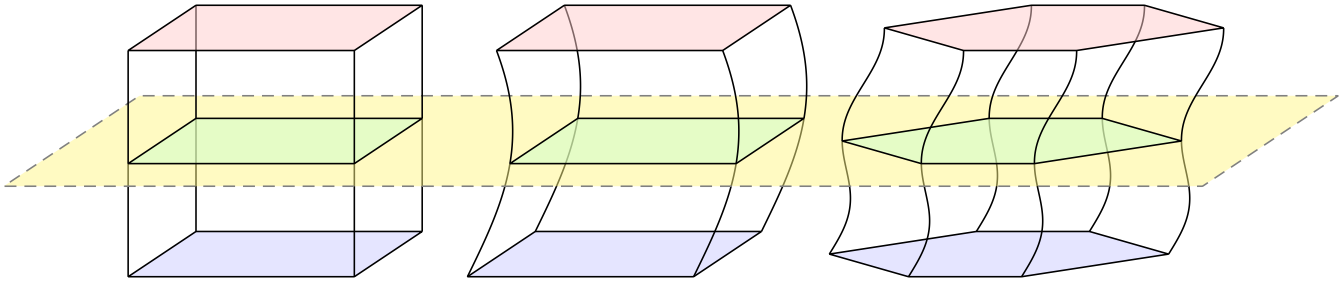
$$P = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le h,\ x^2 + y^2 \le z \,\}.$$

Lösung: Dank Fubini und geschickter Aufspaltung gilt:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{I}_P(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_{z=0}^{h} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{I}_P(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{z=0}^{h} \pi z\,\mathrm{d}z = \left[\frac{\pi}{2} z^2\right]_{z=0}^{h} = \frac{\pi}{2} h^2.\end{aligned}$$

☺ Glas: Um die doppelte Höhe zu erreichen, benötigen Sie viermal soviel Flüssigkeit.
Der Term h^2 ist kein Tippfehler, auch wenn man hier naiv vielleicht h^3 erwarten würde!
Anders als im vorigen Beispiel des Kegels wächst hier das Volumen tatsächlich nur mit h^2.

Das Prinzip von Cavalieri



Korollar C1F: Cavalieri 1635 / Spezialfall des Satzes von Fubini

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Zu jedem $t \in \mathbb{R}$ bezeichne A_t die Schnittmenge

$$A_t = \left\{ (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \;\middle|\; (x_1, \ldots, x_{n-1}, t) \in A \right\}.$$

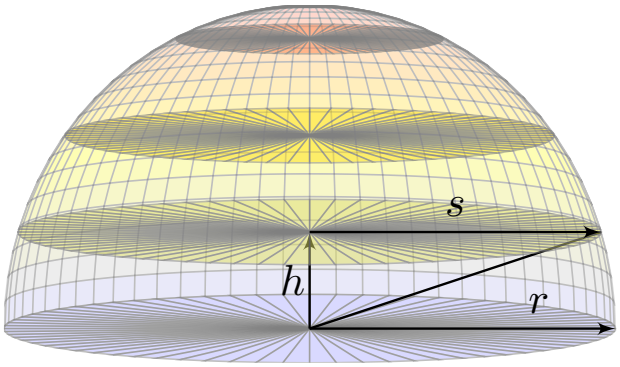
Dann gilt

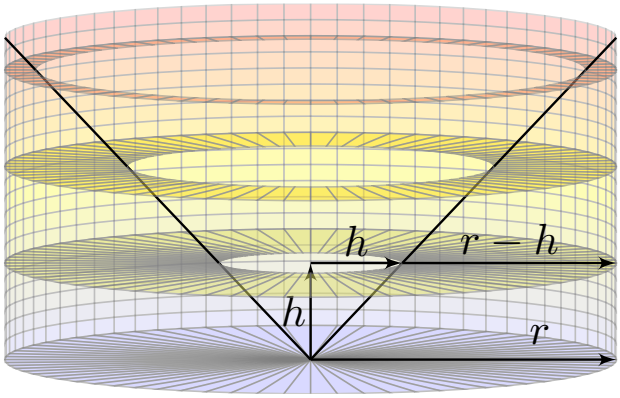
$$\boxed{\mathrm{vol}_n(A) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{vol}_{n-1}(A_t)\,\mathrm{d}t.}$$

Dies erlaubt einfache Vergleiche wie skizziert: Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Mengen mit $\mathrm{vol}_{n-1}(A_t) = \mathrm{vol}_{n-1}(B_t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so folgt $\mathrm{vol}_n(A) = \mathrm{vol}_n(B)$.

Kugelvolumen nach Archimedes

Das Prinzip von Cavalieri ist recht intuitiv. Manche nennen es den „Satz vom geschnittenen Brot“. Wir haben dieses Prinzip bereits bei den vorigen Volumenberechnungen angewendet. Manchmal können wir durch einen geschickten Vergleich das Volumen (fast) ohne Integral-Rechnung bestimmen. Das Kugelvolumen können wir dank Cavalieri geometrisch verstehen:

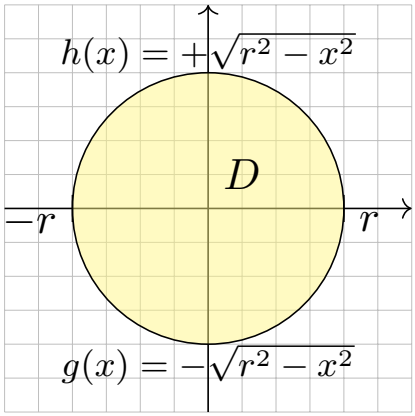




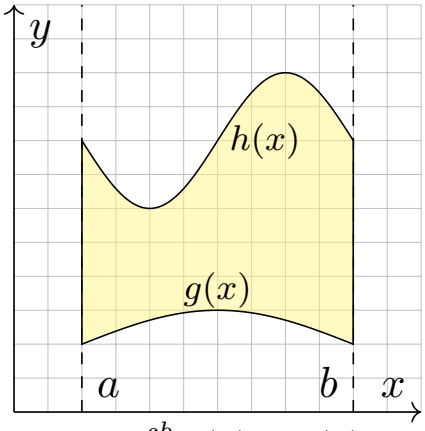
$$\begin{aligned} \text{Volumen der Halbkugel} &= \text{Volumen des Zylinders minus Kegel} \\ &= \pi r^2 \cdot r - \tfrac{1}{3}\pi r^2 \cdot r = \tfrac{2}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

Links: Auf der Höhe h ist der Kreisradius s gegeben durch $s^2 = r^2 - h^2$, die Kreisscheibe hat also den Flächeninhalt $\pi s^2 = \pi r^2 - \pi h^2$. Rechts: In Höhe h hat der Kreisring den Flächeninhalt $\pi r^2 - \pi h^2$. Nach dem Prinzip von Cavalieri haben somit beide Körper denselben Rauminhalt!

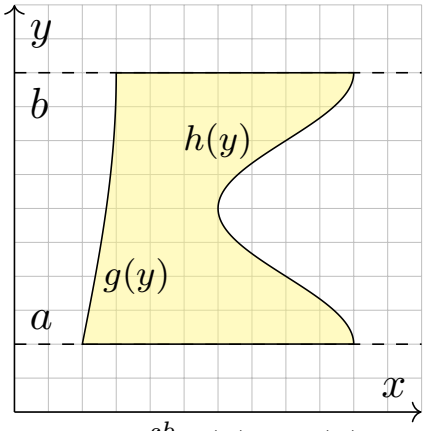
Normalbereiche (aka schlichte Bereiche)



$\mathrm{vol}_2(D) = \pi r^2$



$\mathrm{vol}_2 = \int_a^b h(x) - g(x)\,\mathrm{d}x$



$\mathrm{vol}_2 = \int_a^b h(y) - g(y)\,\mathrm{d}y$

Definition C1G: ebener Normalbereich

Eine Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt **Normalbereich in y–Richtung**, wenn

$$B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \le x \le b,\ g(x) \le y \le h(x) \right\}.$$

mit $g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g \le h$. Entsprechend **in x–Richtung**, wenn

$$B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \le y \le b,\ g(y) \le x \le h(y) \right\}.$$

Gilt beides, so nennen wir $B \subseteq \mathbb{R}^2$ einen **Binormalbereich**.

Integration über ebene Normalbereiche

Satz C1H: Fubini für ebene Normalbereiche

Jeder Normalbereich $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ist kompakt, somit messbar, $\mathrm{vol}_2(B) < \infty$.
Sei $f : B \to \mathbb{R}$ absolut integrierbar, z.B. beschränkt oder gar stetig.
Für $B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \le x \le b,\ g(x) \le y \le h(x) \right\}$ gilt dank Fubini

$$\boxed{\int_B f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{x=a}^{b} \int_{y=g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.}$$

Für $B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \le y \le b,\ g(y) \le x \le h(y) \right\}$ gilt dank Fubini

$$\boxed{\int_B f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{y=a}^{b} \int_{x=g(y)}^{h(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.}$$

⚠ Zur Anwendung müssen Sie die Grenzen a, b, g, h des Bereichs B korrekt bestimmen. A423
Manche Bereiche sind Normalbereiche sowohl in x– als auch in y–Richtung: Sie haben dann die Wahl und können sich den leichtesten Rechenweg aussuchen. Unsere Konstruktion des Integrals stellt sicher, dass das Ergebnis wohldefiniert ist, also unabhängig ist vom gewählten Rechenweg!

Integration über eine Kreisscheibe

C131
Übung

Aufgabe: Integrieren Sie $f(x,y) = x^2 + y^2$ über die Kreisscheibe

$$\begin{aligned} D &= \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le r^2 \,\} \\ &= \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -r \le x \le r,\ -\sqrt{r^2 - x^2} \le y \le \sqrt{r^2 - x^2} \,\} \\ &= \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -r \le y \le r,\ -\sqrt{r^2 - y^2} \le x \le \sqrt{r^2 - y^2} \,\} \end{aligned}$$

Lösung: Wir wählen eine Beschreibung als Normalbereich:

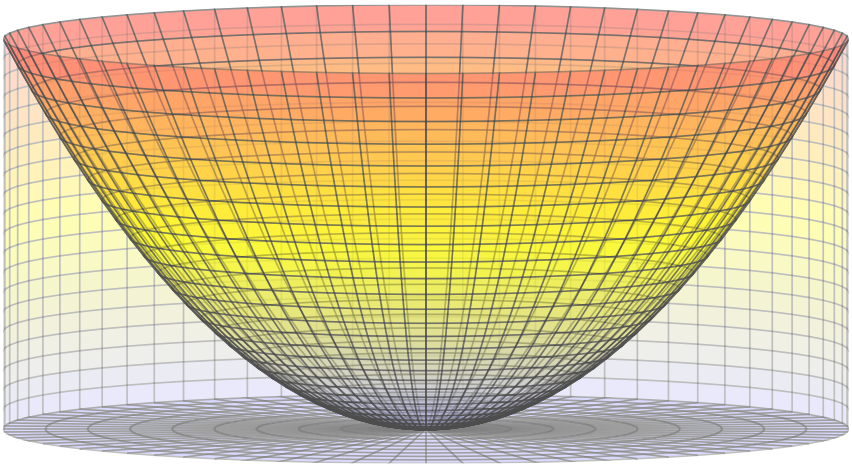
$$\begin{aligned} \int_D f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_{x^2+y^2\le r} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}(x,y) \\ = \int_{x=-r}^{r} \int_{y=-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_{x=-r}^{r} \Big[x^2 y + \tfrac{1}{3}y^3\Big]_{y=-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \mathrm{d}x \\ = \int_{x=-r}^{r} \tfrac{2}{3}\sqrt{r^2-x^2}\,(2x^2+r^2)\,\mathrm{d}x &= \ldots \ldots = \frac{\pi}{2} r^4 \end{aligned}$$

Wenn Sie Herausforderungen mögen, versuchen Sie doch mal, das letzte Integral auszurechnen. Wenn Sie es lieber bequem mögen: Später gelingt die Rechnung spürbar leichter mit dem Transformationssatz. C402 Die Wahl eines geschickten Rechenweges erfordert Übung!

Integration über eine Kreisscheibe

C132
Übung

Dieses Integral entspricht dem Trägheitsmoment eines Zylinders. C402
Anschaulich misst $\int_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}(x,y)$ das Volumen der Menge Q zwischen der Kreisscheibe $D \times \{0\}$ und der Fläche $z = x^2 + y^2$.



Das ist der Zylinder $Z = D \times [0, r^2]$ ohne das Rotationsparaboloid C126

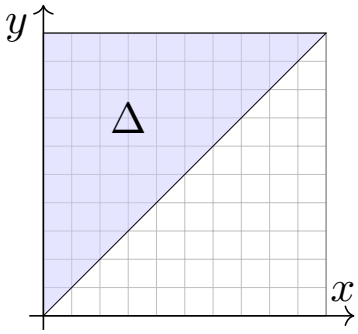
$$P = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le z \le r^2 \,\}.$$

Hier gilt $Z = Q \cup P$ mit $\mathrm{vol}_3(Q \cap P) = 0$. Dank Additivität A320 folgt

$$\mathrm{vol}_3(Q) = \mathrm{vol}_3(Z) - \mathrm{vol}_3(P) = \pi r^4 - \frac{\pi}{2} r^4 = \frac{\pi}{2} r^4.$$

Die Qual der Wahl… der Integrationsreihenfolge

Aufgabe: Integrieren Sie $f(x,y) = \mathrm{e}^{-y^2/2}$, $\sin(y^2)$, $\frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}$, $\frac{\sin(y)}{y}$, … über



$$\Delta = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le y \le 1 \,\}.$$

Lösung: Normalbereich in y– und x–Richtung:

$$\begin{aligned}\Delta &= \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ x \le y \le 1 \,\} \\ &= \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le y \,\}.\end{aligned}$$

☹ Der erste Anlauf ist nicht elementar integrierbar: Holzweg!

$$\int_\Delta f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \underset{\text{C1E}}{\overset{\text{Fub}}{=}} \int_{x=0}^1 \int_{y=x}^1 \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

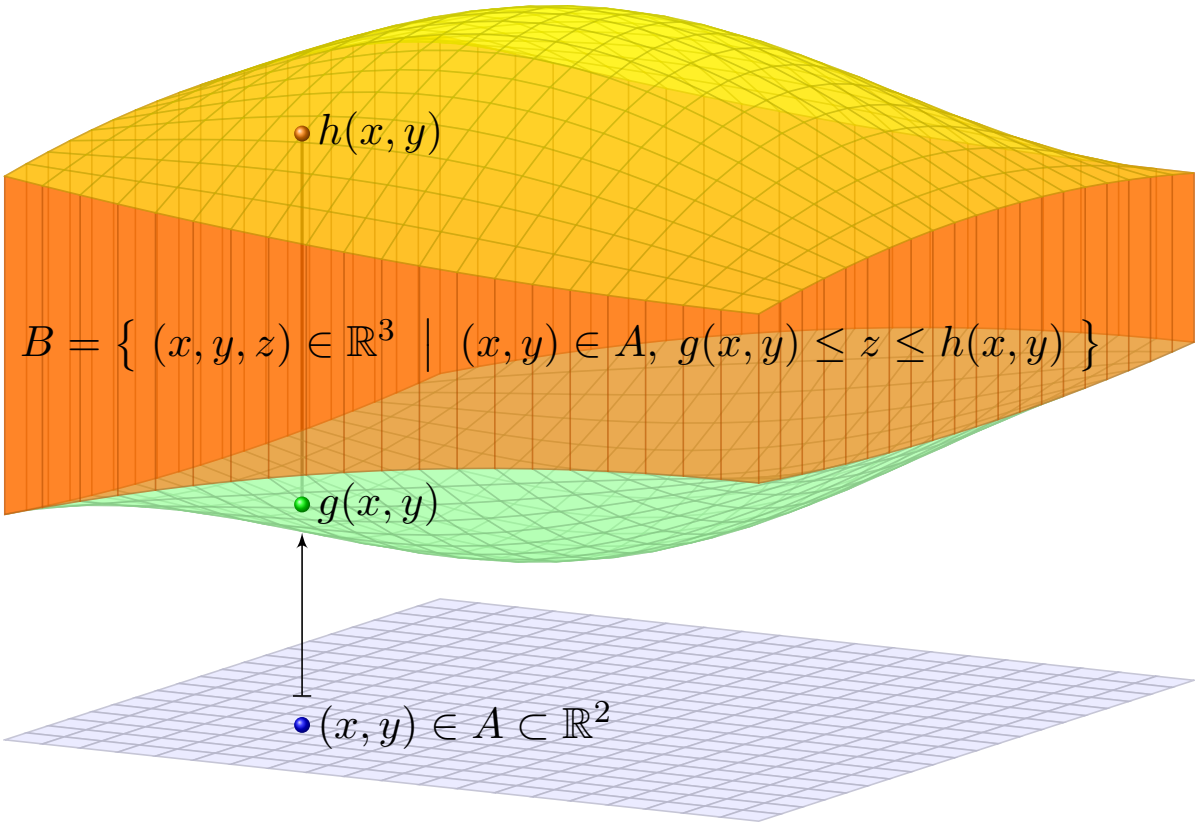
☺ Bei umgekehrter Integrationsreihenfolge gelingt es jedoch leicht:

$$\int_\Delta f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \underset{\text{C1E}}{\overset{\text{Fub}}{=}} \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^y \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \underset{\text{B1I}}{\overset{\text{HDI}}{=}} \int_{y=0}^1 \Big[x\,\mathrm{e}^{-y^2/2}\Big]_{x=0}^y \mathrm{d}y$$

$$= \int_{y=0}^1 y\,\mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y \underset{\text{B1I}}{\overset{\text{HDI}}{=}} \Big[-\mathrm{e}^{-y^2/2}\Big]_{y=0}^1 = 1 - \mathrm{e}^{-1/2} \approx 0.39347$$

Normalbereiche in höherer Dimension

Der Begriff der Normalbereiche überträgt sich in naheliegender Weise von ebenen Bereichen $B \subseteq \mathbb{R}^2$ auf $B \subseteq \mathbb{R}^n$ in beliebiger Dimension:



Integration über Normalbereiche

Definition C1I: Normalbereich

Eine Menge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **Normalbereich** in k-ter Richtung, wenn

$$B = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \in A, \\ g(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \le x_k \le h(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \,\}$$

mit $A \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ kompakt und stetigen Randfunktionen $g, h : A \to \mathbb{R}$.

In Worten: Die Grenzen für x_k hängen von den anderen Variablen ab.

Satz C1J: Fubini für Normalbereiche

Jeder Normalbereich $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ist kompakt und somit auch messbar.
Ist $f : B \to \mathbb{R}$ absolut integrierbar, z.B. beschränkt oder gar stetig, dann

$$\int_B f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{u \in A} \int_{v=g(u)}^{h(u)} f(u_1, \dots, u_{k-1}, v, u_{k+1}, \dots, u_n)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u$$

Ist auch A ein Normalbereich, so können wir das Verfahren iterieren...
Die Grenzen jeder Variable x_k hängen von den vorigen $x_1, \dots, x_{k-1}$ ab.

Integration über iterierte Normalbereiche

Satz C1K: Fubini für iterierte Normalbereiche

Das Integral jeder absolut integrierbaren Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ über

$$B = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid a_k(x_1, \dots, x_{k-1}) \le x_k \le b_k(x_1, \dots, x_{k-1}) \text{ für alle } k \,\}$$

lässt sich durch iterierte eindimensionale Integrale berechnen:

$$\int_B f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_1=a_1}^{b_1} \int_{x_2=a_2(x_1)}^{b_2(x_1)} \cdots \int_{x_n=a_n(x_1,\dots,x_{n-1})}^{b_n(x_1,\dots,x_{n-1})} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\,\mathrm{d}x_n \cdots \mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1.$$

Übung: Zu $r \in \mathbb{R}_{>0}$ betrachten wir den n–dimensionalen Simplex

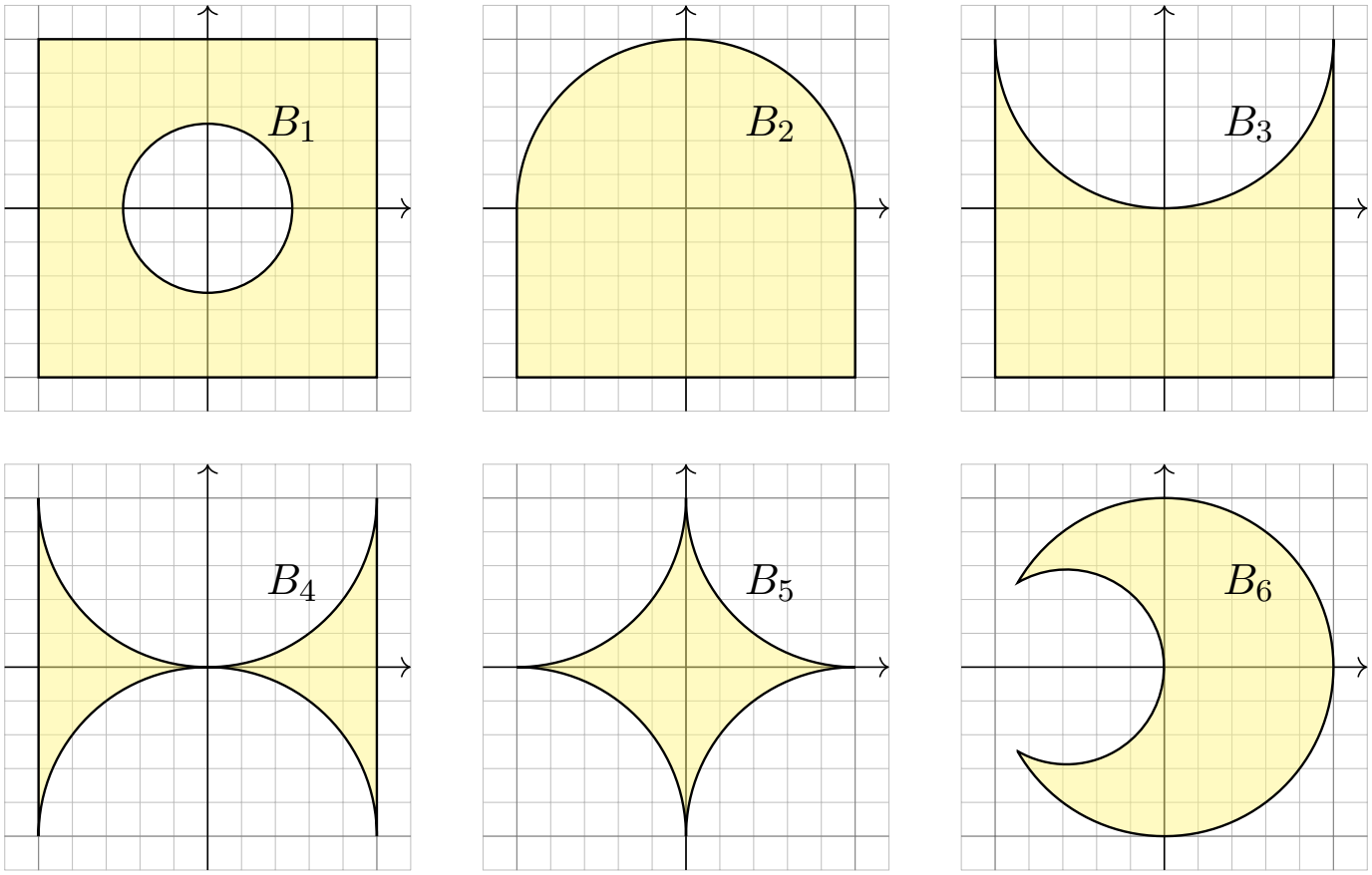
$$\Delta_r^n = \{\, (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \le x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n \le r \,\}.$$

Skizzieren Sie $\Delta_r^1, \Delta_r^2, \Delta_r^3$ und berechnen Sie rekursiv das Volumen

$$\mathrm{vol}_n(\Delta_r^n) = \int_{x_n=0}^{r} \int_{x_{n-1}=0}^{x_n} \cdots \int_{x_2=0}^{x_3} \int_{x_1=0}^{x_2} 1\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_{n-1}\,\mathrm{d}x_n.$$

Lösung: Siehe Seite C425. Es gibt einige schöne Überraschungen!

Normalbereich oder nicht?



Normalbereich oder nicht?

Sehr oft müssen Sie zwischen Bild und Formel übersetzen, zwischen geometrischer und analytischer Beschreibung der Problemstellung.
Die Analytische Geometrie gibt Ihnen hierzu Werkzeuge: Koordinaten!
Diese nutzen Sie überall, zum Beispiel in der Konstruktionslehre bei der Bemessung und rechnerischen Auslegung der genutzten Bauteile.
In Koordinaten sind Normalbereiche hierzu ein vielseitiges Werkzeug.
Zur Illustration zeige ich einige Beispiele, von einfach bis knifflig:

Aufgabe: Die oben gezeigten kompakten Bereiche $B_1, B_2, \ldots, B_6 \subseteq \mathbb{R}^2$ entstehen durch Vereinigung und Differenz aus Rechtecken $[a,b] \times [c,d]$ und Kreisscheiben, abgeschlossen $\bar{B}((p,q),r)$ bzw. offen $B((p,q),r)$.

(a) Beschreiben Sie die Menge B_i als Vereinigung bzw. Differenz.

(b) Ist B_i ein Normalbereich in y–Richtung? oder in x–Richtung?
Wenn ja, mit welchen Grenzen a, b, g, h? *Explicit is beautiful!*

(c) Schreiben Sie $\int_{B_i} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$ soweit möglich als Doppelintegral.
(Die konkrete Rechnung zu gegebenem f führen wir hier nicht aus; die Techniken zur eindimensionalen Integration kennen Sie bereits.)

Normalbereich oder nicht?

Lösung: (1a) Die Skizze zeigt $B_1 = [-1,1]^2 \setminus B((0,0), 1/2)$.

(1b) Dies ist kein Normalbereich in y–Richtung: Der Schnitt von B_1 mit der Geraden $\{x = 0\}$ besteht aus zwei Intervallen, nicht aus einem! Ebenso ist B_1 kein Normalbereich in x–Richtung: Symmetrie!

(1c) Hierzu müsste man B_1 in Normalbereiche zerlegen, etwa so:

$$+ \int_{x=-1}^{x=-1/2} \int_{y=-1}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{x=-1/2}^{1/2} \int_{y=-1}^{-\sqrt{1/4-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$
$$+ \int_{x=-1/2}^{1/2} \int_{y=\sqrt{1/4-x^2}}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{x=1/2}^{1} \int_{y=-1}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Genauso gelingt es in x–Richtung: Symmetrie! Eine Alternative wäre:

$$\int_{B_1} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{[-1,1]^2} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) - \int_{B((0,0),1/2)} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$$

Hierzu muss f auf $[-1,1]^2$ gegeben und zudem absolut integrierbar ist. (Wenn Sie eine Polstelle umgehen müssen, dann hilft dieser Trick nicht.) Der weitere Rechenweg hängt vom gegebenen Integranden f ab.

Normalbereich oder nicht?

(2a) Die Skizze zeigt $B_2 = ([-1,1] \times [-1,0]) \cup \bar{B}((0,0),1)$.

(2b) Dies ist ein Normalbereich in y–Richtung:

$$B_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \underbrace{-1}_{a} \le x \le \underbrace{+1}_{b},\ \underbrace{-1}_{g(x)} \le y \le \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{h(x)} \right\}$$

Es ist zudem ein Normalbereich in x–Richtung:

$$B_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -1 \le y \le +1,\ g(y) \le x \le h(x) \right\}$$

Für $-1 \le y \le 0$ gilt hierbei $g(y) = -1$ und $h(y) = +1$;
für $0 \le y \le 1$ gilt $g(y) = -\sqrt{1-y^2}$ und $h(y) = \sqrt{1-y^2}$.

(2c) Integrale über B_2 können wie demnach wie folgt schreiben:

$$\int_{B_2} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{x=-1}^{1} \int_{y=-1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_{y=-1}^{0} \int_{x=-1}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{y=0}^{1} \int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Vorteil: Das erste Doppelintegral ist etwas leichter auszuschreiben.
Der weitere Rechenweg hängt vom gegebenen Integranden f ab.

Normalbereich oder nicht?

(3a) Die Skizze zeigt $B_3 = [-1,1]^2 \setminus B((0,1),1)$.

(3b) Dies ist ein Normalbereich in y–Richtung:

$$B_3 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \underbrace{-1}_{a} \le x \le \underbrace{+1}_{b},\ \underbrace{-1}_{g(x)} \le y \le \underbrace{1-\sqrt{1-x^2}}_{h(x)} \right\}$$

Hingegen ist B_3 kein Normalbereich in x–Richtung: Für jedes $c \in \,]0,1]$ besteht der Schnitt $B_3 \cap \{y = c\}$ aus zwei Intervallen, nicht aus einem!

(Falls nötig oder gewünscht können wir B_3 geeignet unterteilen, sodass zwei Normalbereiche in x–Richtung entstehen.)

(3c) Integrale über B_3 können wie demnach wie folgt schreiben:

$$\int_{B_3} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{x=-1}^{1} \int_{y=-1}^{1-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Der weitere Rechenweg hängt vom gegebenen Integranden f ab.

Normalbereich oder nicht?

(4a) Die Skizze zeigt $B_4 = [-1,1]^2 \setminus \big[B((0,1),1) \cup B((0,-1),1)\big]$.

(4b) Dies ist ein Normalbereich in y–Richtung:

$$B_4 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \underbrace{-1}_{a} \le x \le \underbrace{+1}_{b},\ \underbrace{\sqrt{1-x^2}-1}_{g(x)} \le y \le \underbrace{1-\sqrt{1-x^2}}_{h(x)} \right\}$$

Hingegen ist B_4 kein Normalbereich in x–Richtung: Für $c \in [-1,1] \setminus \{0\}$ besteht der Schnitt $B_4 \cap \{y = c\}$ aus zwei Intervallen, nicht aus einem!

(Falls nötig oder gewünscht können wir B_4 geeignet unterteilen, sodass zwei Normalbereiche in x–Richtung entstehen.)

(4c) Integrale über B_4 können wie demnach wie folgt schreiben:

$$\int_{B_4} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{x=-1}^{1} \int_{y=\sqrt{1-x^2}-1}^{1-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Der weitere Rechenweg hängt vom gegebenen Integranden f ab.

Normalbereich oder nicht?

(5a) Die Skizze zeigt $B_5 = [-1,1]^2 \setminus \bigcup B((\pm 1, \pm 1), 1)$.

(5b) Dies ist ein Normalbereich in y–Richtung:

$$B_5 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -1 \le x \le 1,\; g(x) \le y \le h(x) \right\}$$

Wie finden wir $g(x)$ und $h(x)$? Die Kreisgleichung $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ liefert den Viertelbogen oben rechts: $y = 1 - \sqrt{1-(1-x)^2}$. Demnach:

$$g(x) = \sqrt{1-(1-|x|)^2} - 1, \qquad h(x) \;\; = 1 - \sqrt{1-(1-|x|)^2}$$

Genauso gelingt es in x–Richtung: Nutzen Sie die Symmetrie!

(5c) Integrale über B_5 können wie demnach wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}\int_{B_5} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_{x=-1}^{1} \int_{y=\sqrt{1-(1-|x|)^2}-1}^{1-\sqrt{1-(1-|x|)^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{y=-1}^{1} \int_{x=\sqrt{1-(1-|x|)^2}-1}^{1-\sqrt{1-(1-|x|)^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

Der weitere Rechenweg hängt vom gegebenen Integranden f ab.

Normalbereich oder nicht?

(6a) Die Skizze zeigt $B_6 = \bar{B}((0,0),1) \setminus B((-r,0),r)$ für $r \approx 0.58$.

(6b) Dies ist kein Normalbereich in y–Richtung: Der Schnitt von B_6 mit der Geraden $\{x = -0.5\}$ besteht aus zwei Intervallen, nicht aus einem! Ebenso ist B_6 kein Normalbereich in x–Richtung: Der Schnitt von B_6 mit der Geraden $\{y = 0.5\}$ besteht aus einem Intervall und einem Punkt.

(6c) Wenn der Integrationsbereich B_6 schon so mühsam ist, dann wohl auch das Integral $\int_{B_6} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$. Oft hilft der folgende einfache Trick:

$$\int_{B_6} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{\bar{B}((0,0),1)} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) - \int_A f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$$

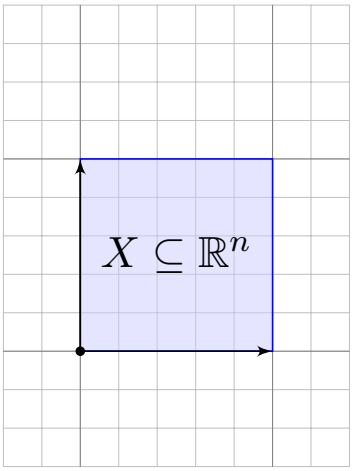
Hierzu nehmen wir an, dass unser Integrand f bereits auf der großen Kreisscheibe $\bar{B}((0,0),1)$ gegeben ist und dort absolut integrierbar ist. (Wenn Sie eine Polstelle umgehen müssen, dann hilft dieser Trick nicht.)

Das letzte Integral geht nicht über die ganze Kreisscheibe $B((-r,0),r)$, das wäre zuviel, sondern nur über $A = \bar{B}((0,0),1) \cap B((-r,0),r)$; dies kann man als y–Normalbereich darstellen, nach genauerer Rechnung.

Der weitere Rechenweg hängt vom gegebenen Integranden f ab.

Transformation von Volumina

Wie verhält sich das Volumen von $X \subseteq \mathbb{R}^n$ unter Transformationen?

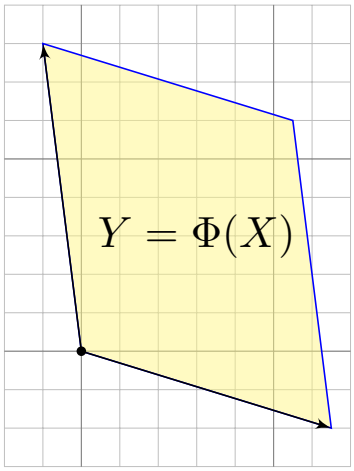


Affin-lineare Abb.

$$\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$x \mapsto y = v + Tx$$

Beispiel: $v = 0$

$$T = \begin{pmatrix} 1.3 & -0.2 \\ -0.4 & 1.6 \end{pmatrix}$$

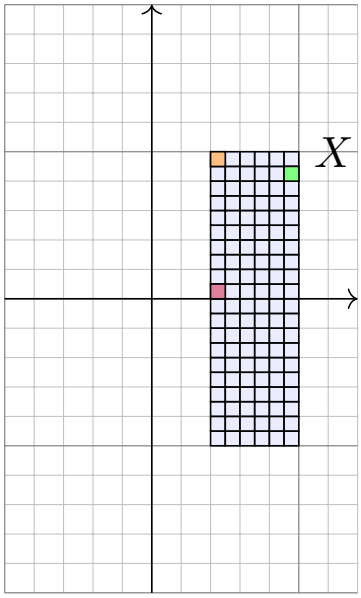


Wie verhält sich das Volumen unter affin-linearen Abbildungen?

$$\boxed{\mathrm{vol}_n(Y) = \mathrm{vol}_n(X) \cdot |\det(T)|}$$

📖 Siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §4.11. Das ist speziell für $n = 2$ das Kreuzprodukt, für $n = 3$ das Spatprodukt. Wir können die Formel dank Fubini und Substitution nachrechnen, siehe unten C2F. Beispiele: Für Drehungen gilt $\det T = +1$, für Spiegelungen $\det T = -1$. Für die allseitige Streckung mit konstantem Faktor $a \in \mathbb{R}$ gilt $\det T = a^n$.

Transformation von Volumina



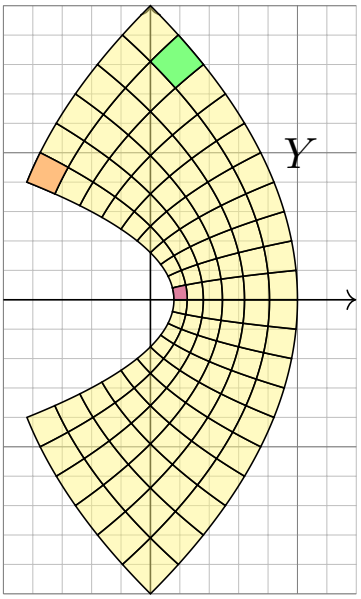
Stetig diff'bare Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R}^n \supseteq X \to Y \subseteq \mathbb{R}^n$$
$$\Phi(x + h) \approx \Phi(x) + \Phi'(x)h$$

$$\Phi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Phi' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{pmatrix}$$

$$\det \Phi' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 4(x_1^2 + x_2^2)$$



Satz C2A: Transformationssatz für n–dimensionale Volumina

Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und $\Phi : X \to Y$ bijektiv und stetig diff'bar:

$$\boxed{\mathrm{vol}_n(Y) = \int_Y 1 \, \mathrm{d}y \quad = \quad \int_X \underbrace{|\det \Phi'(x)|}_{\text{Fu'det}} \, \mathrm{d}x}$$

Transformation von Volumina

Die Abbildung $\Phi : X \to Y$ beschreibt einen **Koordinatenwechsel**:
Sie ordnet jedem Punkt $x \in X$ genau einen Bildpunkt $y = \Phi(x) \in Y$ zu.
Bijektivität bedeutet: Zu jedem $y \in Y$ existiert genau ein Urbild $x \in X$.
(Injektiv/surjektiv: Jedes y wird höchstens/mindestens einmal getroffen.)

Die Punkte $y \in Y$ können wir also auf zwei Arten beschreiben:
durch ihre kartesischen Koordinaten $y = (y_1, \ldots, y_n)$, wie immer,
aber ebenso durch die krummlinigen Koordinaten $y = \Phi(x_1, \ldots, x_n)$.

Was heißt hier $\Phi : X \to Y$ stetig differenzierbar mit Ableitung Φ'?
Wenn der Integrationsbereich $X \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht offen ist, so verlangen wir
$\Phi : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar auf einer offenen Umgebung $U \supseteq X$.

Die Ableitung $\Phi' : U \to \mathbb{R}^{n \times n}$ ist dann die **Jacobi–Matrix**

$$\Phi' = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Die Funktion $\det \Phi' : U \to \mathbb{R}$ heißt **Funktionaldeterminante** von Φ.

Transformation von Volumina

Der Betrag $|\det \Phi'|$ misst die durch Φ bewirkte **Volumenverzerrung**.
Die hier als Beispiel gezeigte Abbildung $x \mapsto y = \Phi(x)$ ist nicht linear.
Wir sehen: Die Volumenverzerrung $|\det \Phi'(x)|$ hängt vom Punkt x ab!

☺ Die Transformationsformel wird wunderbar anschaulich durch die Taylor–Entwicklung $\Phi(x + h) \approx \Phi(x) + \Phi'(x)h$ bis zum linearen Term. Kleine Quader $x + A$ werden abgebildet auf $\Phi(A) \approx \Phi(x) + \Phi'(x)(A)$, also $\mathrm{vol}_n(\Phi(A)) \approx \mathrm{vol}_n(A) \cdot |\det \Phi'(x)|$ wie zuvor erklärt. Summation über eine Zerlegung in viele kleine Quader ergibt die obige Formel.

☺ Umparametrisierung: Der Satz erlaubt, im Integral zu geschickten Koordinaten zu wechseln und so die Rechnung zu vereinfachen. Vermutet wurde der Transformationssatz schon von Euler (1769) für Doppelintegrale und von Lagrange (1773) für Dreifachintegrale — und von allen ausgiebig genutzt. Ein strenger Beweis ist technisch schwierig und wurde erst über hundert Jahre später von Cartan (1890) entwickelt.

☺ Praktische Anwendung: Statt Φ bijektiv genügt, dass Φ injektiv ist bis auf eine Nullmenge in X und surjektiv bis auf eine Nullmenge in Y.

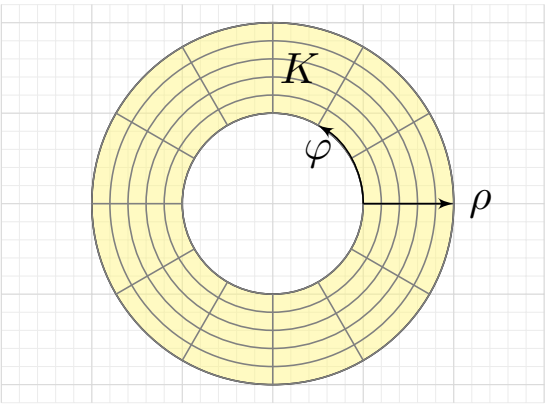
Polarkoordinaten

C205
Beispiel

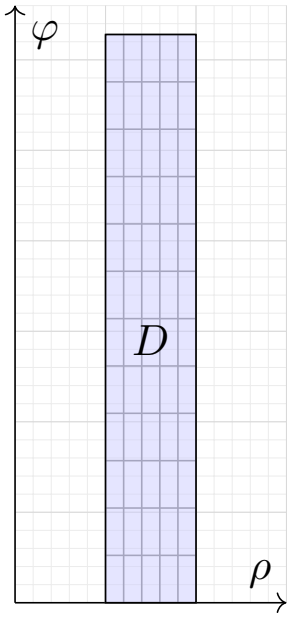
Aufgabe: Parametrisieren Sie den Kreisring

$$K = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid r_0^2 \le x^2 + y^2 \le r_1^2 \,\}$$

in Polarkoordinaten. Berechnen Sie so seine Fläche.



$\xleftarrow{\Phi}$



Lösung: Für K sind Polarkoordinaten besonders gut angepasst!

$$K = \{\, (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) \mid r_0 \le \rho \le r_1,\ 0 \le \varphi < 2\pi \,\}$$

☺ Die Skizze zeigt die Volumenverzerrung proportional zu $\det \Phi' = \rho$.
Die kleinen Rechtecke wiegen weniger, die großen Rechtecke mehr!

Polarkoordinaten

C206
Beispiel

Als **Parametrisierung** nutzen wir (wie skizziert und vorgeschlagen)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \end{pmatrix} =: \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad (\rho,\varphi) \in [r_0, r_1] \times [0, 2\pi[\,=: D.$$

☺ Die Abbildung $\Phi : D \to K$ ist bijektiv und stetig differenzierbar.
Wir berechnen ihre **Jacobi–Matrix** und **Funktionaldeterminante**:

$$\Phi'\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\varphi)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \det \Phi'\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} = \rho$$

Flächenberechnung dank **Transformationssatz** und **Fubini** und **HDI**:

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_2(K) &= \int_K 1 \,\mathrm{d}(x,y) \overset{\text{Trafo}}{\underset{\text{C2A}}{=}} \int_D \underbrace{\rho}_{\text{Fu'det}} \,\mathrm{d}(\rho,\varphi) \overset{\text{Fub}}{\underset{\text{C1E}}{=}} \int_{\rho=r_0}^{r_1} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\rho \\ &\overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \int_{\rho=r_0}^{r_1} 2\pi\rho \,\mathrm{d}\rho \overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \Big[\pi\rho^2\Big]_{\rho=r_0}^{r_1} = \pi(r_1^2 - r_0^2) \end{aligned}$$

☺ Plausibilitätsprüfung: Dasselbe Ergebnis folgt aus der Kreisfläche.
⚠ Es gilt $\mathrm{vol}_2(D) = 2\pi(r_1 - r_0)$. Man beachte die Volumenverzerrung!

Polarkoordinaten

Auf dem Definitionsbereich $D = [r_1, r_2] \times [0, 2\pi[$ definiert $\Phi : D \to K$ eine Bijektion, wie im Satz verlangt. Ebenso $[r_0, r_1] \times [-\pi, \pi[$, oder

$$\begin{array}{llll} [r_0, r_1], & [r_0, r_1[, &]r_0, r_1], &]r_0, r_1[, \\ [0, 2\pi], & [0, 2\pi[, &]0, 2\pi], &]0, 2\pi[. \end{array}$$

⚠ Für manche dieser Wahlen ist Φ nicht injektiv bzw. nicht surjektiv. Der Unterschied ist nur eine Menge vom Volumen 0, also unwesentlich.

Aufgabe: Was erhalten Sie bei den folgenden Polarkoordinaten?

$$\Phi_1 : X_1 = [r_0, r_1] \times [0, \pi] \to K, \qquad \Phi_7 : X_7 = [r_0, r_1] \times [0, 7\pi] \to K.$$

Gilt hier die Volumenformel $\mathrm{vol}_2(K) = \int_X |\det \Phi'(x)| \, \mathrm{d}x$? Begründung?

Lösung: Die Abbildung Φ_1 ist injektiv, aber nicht surjektiv: Nur der obere Halbring wird durchlaufen, daher wird auch nur seine Fläche integriert.

Die Abbildung Φ_7 hingegen ist surjektiv, aber nicht injektiv: Der Kreisring wird dreimal durchlaufen, der obere Halbring sogar noch ein viertes Mal. Daher wird die Fläche drei bzw. viermal gezählt. So wird es nichts!

Polarkoordinaten

Aufgabe: Was passiert, wenn Sie im Transformationssatz für Volumina (C2A) bei der Funktionaldeterminante den Betrag weglassen?

$$\mathrm{vol}_n(Y) = \int_Y 1 \, \mathrm{d}y \quad \overset{?}{=} \quad \int_X \det \Phi'(x) \, \mathrm{d}x$$

Lösung: Wir zerlegen den Integrationsbereich X in drei Teile:

$$\begin{aligned} X_0 &= \{\, x \in X \mid \det \Phi'(x) = 0 \,\} \\ X_+ &= \{\, x \in X \mid \det \Phi'(x) > 0 \,\} \\ X_- &= \{\, x \in X \mid \det \Phi'(x) < 0 \,\} \end{aligned}$$

Über X_0 verschwindet das rechte Integral, denn der Integrand ist Null. Das linke Integral verschwindet über $Y_0 = \Phi(X_0)$, da vom Volumen 0. Für die Einschränkung $\Phi : X \smallsetminus X_0 \to Y \smallsetminus Y_0$ gilt überall $\det \Phi' \neq 0$.

Das Integral über X_+ wird wie zuvor positiv gezählt. Das Integral über X_- hingegen wird negativ gezählt, da wir es umgekehrt orientieren.

Wenn wir also links das (unorientierte) positive Volumen von Y messen wollen, dann müssen wir rechts den Betrag der Determinante nehmen.

Der Transformationssatz

Satz C2B: Transformationsatz für n–dimensionale Integrale

Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und $\Phi : X \to Y$ bijektiv und stetig diff'bar.

(1) Ist $f : Y \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar, so auch $(f \circ \Phi) \cdot \det \Phi' : X \to \bar{\mathbb{R}}$, und es gilt

$$\int_Y |f(y)| \, \mathrm{d}y \;=\; \int_X |f(\Phi(x))| \cdot |\det \Phi'(x)| \, \mathrm{d}x.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so ist f absolut integrierbar, und dann gilt

$$\boxed{\int_Y f(y) \, \mathrm{d}y \;=\; \int_X f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)| \, \mathrm{d}x.}$$

Merkregel analog zur Substitution: Für $y = \Phi(x)$ gilt $\mathrm{d}y = |\det \Phi'(x)| \, \mathrm{d}x$.

☺ Umparametrisierung: Der Satz erlaubt, im Integral zu geschickten Koordinaten zu wechseln und so unsere Rechnung zu vereinfachen.

☺ Praktische Anwendung: Statt Φ bijektiv genügt, dass Φ injektiv ist bis auf eine Nullmenge in X und surjektiv bis auf eine Nullmenge in Y.

Transformationssatz vs Substitutionsregel

Aufgabe: Folgern Sie in Dimension $n = 1$ die obige Formel des Transformationssatzes C2B aus der Substitutionsregel B1K.

Lösung: Der HDI impliziert die bekannte Substitutionsregel B1K:

$$\int_{x=a}^{b} f(\Phi(x)) \, \Phi'(x) \, \mathrm{d}x = \int_{y=\Phi(a)}^{\Phi(b)} f(y) \, \mathrm{d}y.$$

Hierzu sei $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar und $f : \mathbb{R} \supseteq \Phi([a, b]) \to \mathbb{R}$ stetig. In Satz C2B setzen wir zusätzlich $\Phi : [a, b] \to [c, d]$ als bijektiv voraus. Wir unterscheiden daher zwei Fälle, je nachdem, ob Φ wächst oder fällt.

(1) Ist $\Phi : [a, b] \to [c, d]$ wachsend, $\Phi' \geq 0$, $\Phi(a) = c$, $\Phi(b) = d$, so gilt:

$$\int_{[a,b]} (f \circ \Phi) \, |\Phi'| \;=\; \int_a^b (f \circ \Phi) \, \Phi' \;=\; \int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} f \;=\; \int_{[c,d]} f$$

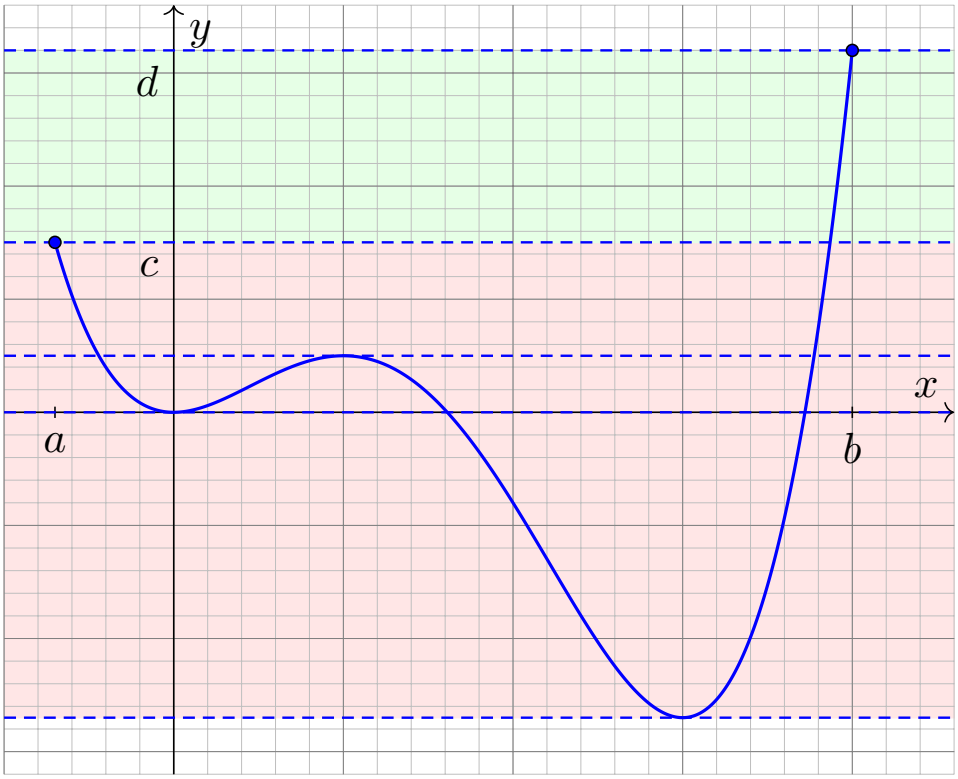
(2) Ist $\Phi : [a, b] \to [c, d]$ fallend, $\Phi' \leq 0$, $\Phi(a) = d$, $\Phi(b) = c$, so gilt:

$$\int_{[a,b]} (f \circ \Phi) \, |\Phi'| \;=\; -\int_a^b (f \circ \Phi) \, \Phi' \;=\; -\int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} f \;=\; \int_{\Phi(b)}^{\Phi(a)} f \;=\; \int_{[c,d]} f$$

☺ In beiden Fällen gilt der Transformationssatz C2B wie angegeben.

Transformationssatz vs Substitutionsregel

Aufgabe: Untersuchen Sie (für $f = 1$) die nicht-bijektive Transformation $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $\Phi(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$ sowie $a = -0.7$, $b = 4$. Was sagt die Substitutionsregel? Was sagt der Transformationssatz?



$n = 0 \quad m = 0$

$n = 1 \quad m = 1$

$n = 2 \quad m = 0$

$n = 4 \quad m = 0$

$n = 2 \quad m = 0$

$n = 0 \quad m = 0$

Transformationssatz vs Substitutionsregel

Lösung: Die Funktion Φ verläuft von $c = \Phi(a) \approx 15$ nach $d = \Phi(b) = 32$, allerdings nicht monoton. Die Substitutionsregel B1K lässt sich dennoch anwenden. Für jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \supseteq \Phi([a, b]) \to \mathbb{R}$ gilt demnach:

$$\int_{x=a}^{b} f(\Phi(x))\, \Phi'(x)\, \mathrm{d}x \;=\; \int_{y=c}^{d} f(y)\, \mathrm{d}y.$$

Der Transformationssatz verlangt zudem Bijektivität; sie gilt hier nicht!

$$\int_{[a,b]} f(\Phi(x))\, |\Phi'(x)|\, \mathrm{d}x \;\neq\; \int_{[c,d]} f(y)\, \mathrm{d}y.$$

Eine Kurvendiskussion liefert für Φ den oben skizzierten Verlauf mit lok. Minimum in $x = 0$, $\Phi(0) = 0$, lok. Maximum in $x = 1$, $\Phi(1) = 5$, lok. Minimum in $x = 3$, $\Phi(0) = -27$. Somit durchläuft Φ auch Punkte in $[-27, c]$ zwei- bzw. viermal! Anders als die Substitutionsregel integriert die Transformationsformel (mit Betrag) sie fälschlicherweise mit auf.

In der orientierten Zählweise (ohne Betrag) bleibt in der Gesamtbilanz nur das Integral über $[c, d]$: Genau das besagt die Substitutionsregel!

Transformationssatz mit Orientierung

Obiger Satz C2B verlangt **bijektive** Parametrisierungen $\Phi : X \to Y$, das heißt, zu jedem $y \in Y$ existiert genau ein $x \in X$ mit $\Phi(x) = y$.

☺ Geeignet umformuliert gilt der Satz auch ohne Bijektivität – und hat dieselben schönen Eigenschaften wie die Substitutionsregel für $n = 1$!

Zu jedem Punkt $y \in Y$ zählen wir die **Urbilder** bezüglich $f : X \to Y$:

$$n : Y \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \quad n(y) := \#\{\, x \in X \mid f(x) = y,\ \det \Phi'(x) \neq 0 \,\}$$

Genauer zählen wir zum Punkt $y \in Y$ **positive und negative Urbilder**:

$$n_\pm : Y \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \quad n_\pm(y) := \#\{\, x \in X \mid f(x) = y,\ \det \Phi'(x) \gtrless 0 \,\}$$

Wir erhalten so die **geometrische Vielfachheit** $n = n_+ + n_-$ und die **algebraische Vielfachheit** $m := n_+ - n_-$ aufgrund der Orientierung.

Beispiel: Die Werte sind in der vorigen Kurvendiskussion angegeben. Dies entspricht anschaulich der Durchlaufungsrichtung (hoch/runter).

Transformationssatz mit Orientierung

Satz C2C: Transformationsatz mit Orientierung

Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und $\Phi : X \to Y$ stetig diff'bar. Dann sind

$$\begin{aligned} n_+ : Y \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \quad n_+(y) &:= \#\{\, x \in X \mid f(x) = y,\ \det \Phi'(x) > 0 \,\}, \\ n_- : Y \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \quad n_-(y) &:= \#\{\, x \in X \mid f(x) = y,\ \det \Phi'(x) < 0 \,\}, \end{aligned}$$

messbare Funktionen, ebenso $n := n_+ + n_-$ und $m := n_+ - n_-$.

(1) Ist $f : Y \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar, so auch $(f \circ \Phi) \cdot \det \Phi' : X \to \bar{\mathbb{R}}$, und es gilt

$$\int_X \big|f(\Phi(x))\big| \cdot \big|\det \Phi'(x)\big| \,\mathrm{d}x \;=\; \int_Y \big|f(y)\big| \cdot n(y) \,\mathrm{d}y.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so gilt absolute Integrierbarkeit und

$$\boxed{\begin{aligned} \int_X f(\Phi(x)) \cdot \big|\det \Phi'(x)\big| \,\mathrm{d}x \;&=\; \int_Y f(y) \cdot n(y) \,\mathrm{d}y, \\ \int_X f(\Phi(x)) \cdot \det \Phi'(x) \,\mathrm{d}x \;&=\; \int_Y f(y) \cdot m(y) \,\mathrm{d}y. \end{aligned}}$$

Transformationssatz mit Orientierung

Aufgabe: Überprüfen Sie diesen Satz im obigen Beispiel:

$$\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2, \quad a = -0.7, \quad b = 4$$

Stimmen Substitutionsregel und Transformationsformel nun überein?

Lösung: Φ verläuft von $c = \Phi(a) \approx 15$ nach $d = \Phi(b) = 32$.
Die vertraute Substitutionsregel B1K besagt demnach:

$$\int_{x=a}^{b} f(\Phi(x))\,\Phi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{y=\Phi(a)}^{\Phi(b)} f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{y=c}^{d} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Die algebraische Vielfachheit m ist $m = 1$ auf $]c,d]$ und $m = 0$ sonst.
Die orientierte Transformationsformel C2C besagt demnach:

$$\int_{[a,b]} f(\Phi(x))\,\Phi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(y) \cdot m(y)\,\mathrm{d}y = \int_{[c,d]} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

☺ Dank der algebraischen Vielfachheit m stimmen beide nun überein!

Transformationssatz mit Orientierung

Die orientierten Formeln klären zwei Aspekte der Transformation:

(1) Der Transformationssatz verlangt $\Phi : X \to Y$ bijektiv. Die orientierte Formulierung erlaubt beliebige Φ, da nun die Vielfachheiten zählen.

(2) Der Transformationssatz nutzt zunächst nur $|\det \Phi'|$. Die orientierte Fassung unterscheidet positive Orientierung $\det \Phi' > 0$ und negative Orientierung $\det \Phi' < 0$ und zählt die Urbilder entsprechend.

Die beiden wichtigsten Spezialfälle kennen wir bereits:
Ist $\Phi : X \to Y$ bijektiv und $\det \Phi' > 0$, so gilt $n^+ = 1$ und $n^- = 0$.
Ist $\Phi : X \to Y$ bijektiv und $\det \Phi' < 0$, so gilt $n^+ = 0$ und $n^- = 1$.

Die Formulierung mit Orientierung und Vielfachheiten ist dann genau der obige Transformationssatz mit Absolutbetrag ohne Vielfachheiten.

Umgekehrt folgt aus der absoluten die orientierte Formel durch Zerlegen und Aufsummieren. Beide Sätze C2B und C2C sind demnach äquivalent.

Wir nutzen im Folgenden meist bijektive, positive Parametrisierungen. Diese Einschränkung vereinfacht die Formulierung wie oben diskutiert.

Einfache Transformationen auf Normalbereichen

In Dimension $n = 1$ ist uns der Transformationssatz C2B bereits vertraut.
In Dimension $n \geq 2$ rechnen wir ihn für einfache Transformationen nach:
☺ Hierzu genügen uns bereits Fubini (C1E) und Substitution (B1K).

Sei $X = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ ein Quader und $\Phi : \mathbb{R}^n \supseteq X \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $\partial_i \Phi_i > 0$ sowie $\partial_j \Phi_i = 0$ für $j > i$. Für $n = 2$ kurz:

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \supseteq X \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1(x_1, x_2) \\ \Phi_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} >0 & =0 \\ * & >0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \det \Phi' = \partial_1 \Phi_1 \cdot \partial_2 \Phi_2 > 0$$

Das heißt, die Jacobi–Matrix Φ' soll eine untere Dreiecksmatrix sein.

Lemma C2D: einfache Transformationen

Für solch einfache Transformationen gilt die Formel C2B.

Aufgabe: (1) Beschreiben Sie das Bild $Y = \Phi(X)$ als Normalbereich.
(2) Ist $\Phi : X \to Y$ bijektiv? Auch wenn statt $\partial_i \Phi_i > 0$ nur $\partial_i \Phi_i \geq 0$ gilt?
(3) Folgern Sie die Transformationsformel aus Fubini und Substitution.

Einfache Transformationen auf Normalbereichen

Lösung: Wir führen hier $n = 2$ aus; der Fall $n \geq 3$ verläuft genauso.

(1) Wegen $\partial_2 \Phi_1 = 0$ hängt $\Phi_1(x_1, x_2)$ nicht von x_2 ab, wir schreiben kurz $\Phi_1(x_1, x_2) = \Phi_1(x_1)$. Wegen $\partial_1 \Phi_1 > 0$ ist $x_1 \mapsto \Phi_1(x_1)$ streng wachsend, somit bijektiv von $[a_1, b_1]$ auf $[c_1, d_1]$ mit $c_1 = \Phi_1(a_1)$ und $d_1 = \Phi_1(b_1)$.

Zu jedem $x_1 \in [a_1, b_1]$ ist die Funktion $x_2 \mapsto \Phi_2(x_1, x_2)$ streng wachsend, somit bijektiv von $[a_2, b_2]$ auf $[c_2(x_1), d_2(x_1)]$ mit $c_2(x_1) = \Phi_2(x_1, a_2)$ und $d_2(x_1) = \Phi_2(x_1, b_2)$. Das Bild $Y = \Phi(X)$ ist daher ein Normalbereich:

$$Y = \Phi(X) = \left\{ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; c_1 \leq y_1 \leq d_1,\ g(y_1) \leq y_2 \leq h(y_1) \right\}$$

mit den Randfunktionen $g(y_1) = c_2(\Phi_1^{-1}(y_1))$ und $h(y_1) = d_2(\Phi_1^{-1}(y_1))$.

(2) Ja, $\Phi : X \to Y$ ist bijektiv: Surjektiv auf Y nach Konstruktion.
Zudem ist Φ injektiv, denn es erhält die lexikographische Ordnung:
Für $(x_1, x_2) \neq (x_1', x_2')$ unterscheiden wir zwei mögliche Fälle:
Für $x_1 \lesseqgtr x_1'$ gilt $y_1 \lesseqgtr y_1'$. Für $x_1 = x_1'$ gilt $x_2 \lesseqgtr x_2'$ und somit $y_2 \lesseqgtr y_2'$.

Fordern wir nur $\partial_1 \Phi_1 \geq 0$ und $\partial_2 \Phi_2 \geq 0$, so gilt statt „streng wachsend“ nur noch „schwach wachsend“, und $\Phi : X \to Y$ ist i.A. nicht mehr bijektiv.

Einfache Transformationen auf Normalbereichen

C219
Ausführung

(3) Die Transformationsformel folgt nun dank Fubini und Substitution:

$$\int_Y f(y)\,\mathrm{d}y \overset{\text{Fub}}{\underset{\text{C1E}}{=}} \int_{y_1=c_1}^{d_1} \int_{y_2=g(y_1)}^{h(y_1)} f(y_1,y_2)\,\mathrm{d}y_2\,\mathrm{d}y_1$$

$$\overset{\text{Subs}}{\underset{\text{B1K}}{=}} \int_{x_1=a_1}^{b_1} \int_{y_2=\Phi_2(x_1,a_2)}^{\Phi_2(x_1,b_2)} f(\Phi_1(x_1),y_2)\,\mathrm{d}y_2 \cdot \partial_1\Phi_1(x_1)\,\mathrm{d}x_1$$

$$\overset{\text{Subs}}{\underset{\text{B1K}}{=}} \int_{x_1=a_1}^{b_1} \int_{x_2=a_2}^{a_2} f(\Phi_1(x_1),\Phi_2(x_1,x_2)) \cdot \partial_2\Phi_2(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_2 \cdot \partial_1\Phi_1(x_1)\,\mathrm{d}x_1$$

$$\overset{\text{Det}}{=} \int_{x_1=a_1}^{b_1} \int_{x_2=a_2}^{a_2} f(\Phi_1(x_1),\Phi_2(x_1,x_2)) \cdot |\det \Phi'(x_1,x_2)|\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1$$

$$\overset{\text{Fub}}{\underset{\text{C1E}}{=}} \int_X f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)|\,\mathrm{d}x$$

In dieser Rechnung nehmen wir f als stetig an: Die Integrationsbereiche Y und X sind kompakt, hierauf sind f bzw. $(f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'|$ stetig und somit absolut integrierbar, daher können wir Fubini C1E anwenden. Ebenso können wir die Substitution B1K anwenden. Per Grenzübergang gilt die Transformationsformel dann für jede absolut integrierbare Funktion f wie in Satz C2B. Die Rechnung (3) gilt wörtlich genauso, wenn wir allgemeiner nur $\partial_1\Phi_1 \geq 0$ und $\partial_2\Phi_2 \geq 0$ fordern. Wenn wir auch dies noch fallen lassen, so erhalten wir die Formel aus Satz C2C.

Die Transformationsformel bei Komposition

C220
Ausführung

Lemma C2E: Komposition von Transformationen

Gilt die Formel C2B für die Transformationen $\Phi : X \to Y$ und $\Psi : Y \to Z$, dann gilt sie auch für ihre Komposition $H = \Psi \circ \Phi : X \to Z$.

Aufgabe: Rechnen Sie diese Aussage nach! Die Formel gilt also für alle Transformationen wie in der vorigen Aufgabe und ihre Kompositionen.

Lösung: Wir nehmen an, die Transformationsformel gilt für Φ und Ψ:

$$\int_Z f(z)\,\mathrm{d}z \overset{\text{Trafo}}{\underset{\text{C2B}}{=}} \int_Y f(\Psi(y)) \cdot |\det \Psi'(y)|\,\mathrm{d}y$$

$$\overset{\text{Trafo}}{\underset{\text{C2B}}{=}} \int_X f(\Psi(\Phi(x))) \cdot |\det \Psi'(\Phi(x))| \cdot |\det \Phi'(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{Komp}}{=} \int_X f(H(x)) \cdot |\det H'(x)|\,\mathrm{d}x$$

Für $H(x) = \Psi(\Phi(x))$ gilt die Kettenregel $H'(x) = \Psi'(\Phi(x)) \cdot \Phi'(x)$ der Jacobi–Matrizen (Nachrechnen!), und die Determinante ist multiplikativ.

Affin-lineare Transformationen

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : x \mapsto Ax + v$ affin-linear.
Für $n = 2$ betrachten wir folgende **elementaren Transformationen**:

Verschiebung $\Phi_0 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + v_1 \\ x_2 + v_2 \end{pmatrix}, \quad v \in \mathbb{R}^2$

Streckung $\Phi_1 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ bx_2 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}_{>0}$

Scherung $\Phi_2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ax_1 + x_2 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$

Spiegelung $\Phi_3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

Lemma C2F: affin-lineare Transformationen

Für jede affin-lineare Transformation $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gilt die Formel C2B.

Aufgabe: (1) Zeigen Sie dies für die elementaren Transformationen!
(2) Dank Gauß–Algorithmus ist jede affin–lineare Transformation eine Komposition von elementaren. Folgern Sie hieraus das Lemma!

Affin-lineare Transformationen

Lösung: (1) Die ersten drei Transformationen Φ_0, Φ_1, Φ_2 erfüllen unmittelbar die Bedingung $\Phi' = \left(\begin{smallmatrix} >0 & =0 \\ * & >0 \end{smallmatrix}\right)$ des obigen Lemmas C2D. Demnach gilt hier die Transformationsformel C2B. (Wenn Sie möchten, können Sie diese Spezialfälle als Übung nochmal direkt nachrechnen.)

Wie untersuchen daher nur noch den verbleibenden letzten Fall Φ_3.
Es gilt $\Phi_3 : X \xrightarrow{\sim} Y$ mit $X = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ und $Y = [a_2, b_2] \times [a_1, b_1]$.
Die Jacobi–Matrix $\Phi_3'(x) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ hat Determinante $\det \Phi_3'(x) = -1$.
Dank Fubini und den Substitutionen $y_1 = x_2$ und $y_2 = x_1$ finden wir:

$$\begin{aligned}
\int_Y f(y_1, y_2)\,\mathrm{d}(y_1, y_2) &\overset{\text{Fub}}{\underset{\text{C1E}}{=}} \int_{y_1=a_2}^{b_2} \int_{y_2=a_1}^{b_1} f(y_1, y_2)\,\mathrm{d}y_2\,\mathrm{d}y_1 \\
&\overset{\text{Subs}}{\underset{\text{B1K}}{=}} \int_{x_2=a_2}^{b_2} \int_{x_1=a_1}^{b_1} f(x_2, x_1)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \\
&\overset{\text{Fub}}{\underset{\text{C1E}}{=}} \int_X f(x_2, x_1)\,\mathrm{d}(x_1, x_2) \\
&\overset{\text{Fub}}{\underset{\text{C1E}}{=}} \int_X f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)|\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Affin-lineare Transformationen

(2) Sei $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : x \mapsto Ax + v$ eine affin-lineare Transformation.
Das Integral ist invariant unter Verschiebung $\Psi : x \mapsto x + v$, mit $v \in \mathbb{R}^n$.
Wir untersuchen lineare Transformationen $\Phi : x \mapsto Ax$, mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

Die vorigen Rechnungen zeigen die Transformationsformel C2B für

1. jede Diagonalmatrix $A = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n)$,
2. Scherung / die Addition einer Zeile zu einer anderen,
3. Spiegelung / die Vertauschung zweier Zeilen oder Spalten.

Mit dem Gauß–Algorithmus lässt sich jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ allein durch die beiden Operationen (2) und (3) auf Diagonalgestalt (1) bringen.

📖 Siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §4.7–4.12.

Für jede dieser elementaren Transformationen gilt die Formel C2B, dank Lemma C2E gilt sie dann auch für ihre Komposition A.

Somit gilt die ersehnte Formel C2B für jede affin-lineare Transformation $\Phi : x \mapsto Ax + v$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $v \in \mathbb{R}^n$. 🙂 Das wollten wir zeigen.

🙂 Die Rechnung ist zwar länglich, aber elementar. Sie rechtfertigt die eingangs motivierte Volumenverzerrung affiner Transformationen. C201

Allgemeine Transformationen

Die vorigen Übungen und Lemmata zeigen wichtige Spezialfälle des Transformationssatzes C2B: Wir können sie explizit nachrechnen und erfahren dabei, *wie* und *warum* die angegebene Formel funktioniert.

Der Transformationssatz gilt für alle einfachen Transformationen (C2D) und für ihre Kompositionen (C2E). Es genügt demnach nachzuweisen, dass *jede* Transformation eine Komposition von einfachen ist.

Für affin-lineare Transformationen (C2F) haben wir dies mit Hilfe des Gauß–Algorithmus erledigt. Im allgemeinen Falle gelingt dies genauso, zumindest nach geeigneter Zerlegung. Die technischen Details sind etwas aufwändiger, ich begnüge mich hier daher mit dieser Skizze.

Anstelle eines Beweises möchte ich als versöhnliches Fazit festhalten:
🙂 Der Transformationssatz ist geometrisch anschaulich und intuitiv.
🙂 Seine Voraussetzungen sind wichtig, aber sehr milde und oft erfüllt.
🙂 Er folgt aus Fubini und HDI, hier eindimensionale Substitution:
Diese Kernidee können wir wie gezeigt direkt explizit nachrechnen!
Nach diesen *Grundlagen* widmen wir uns nun den *Anwendungen*. . .

Das Gaußsche Integral

☺ Eine berühmte Anwendung der zweidimensionalen Integration:

Aufgabe: (1) Skizzieren Sie die **Gaußsche Glockenkurve**

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad f(x)=\mathrm{e}^{-x^2/2}, \qquad \text{sowie die Glockenfläche}$$
$$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, \qquad g(x,y)=f(x)f(y) \qquad \text{für } x,y\in[-3,3].$$

(2) Können Sie $\int_a^b \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$ in geschlossener Form angeben?

(3) Berechnen Sie zur Funktion g das Flächenintegral

$$\int_K \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}\,\mathrm{d}(x,y)$$

über dem Kreisring $K=\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a^2\le x^2+y^2\le b^2\,\}$.

(4) Welches Integral erhalten Sie für $a\to 0$ und $b\to\infty$?

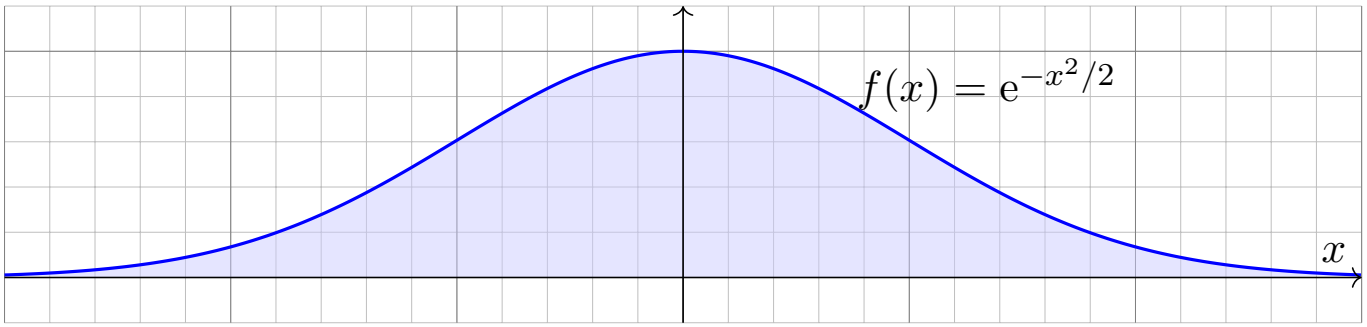
(5) Bestimmen Sie hiermit das Integral $I=\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$.

☹ Dieses Integral konnten wir mit eindim. Integration nicht berechnen.

☺ Mit zweidimensionaler Integration hingegen gelingt es nun leicht!

Das Gaußsche Integral

Lösung: (1) Skizze der Gaußschen Glockenkurve:



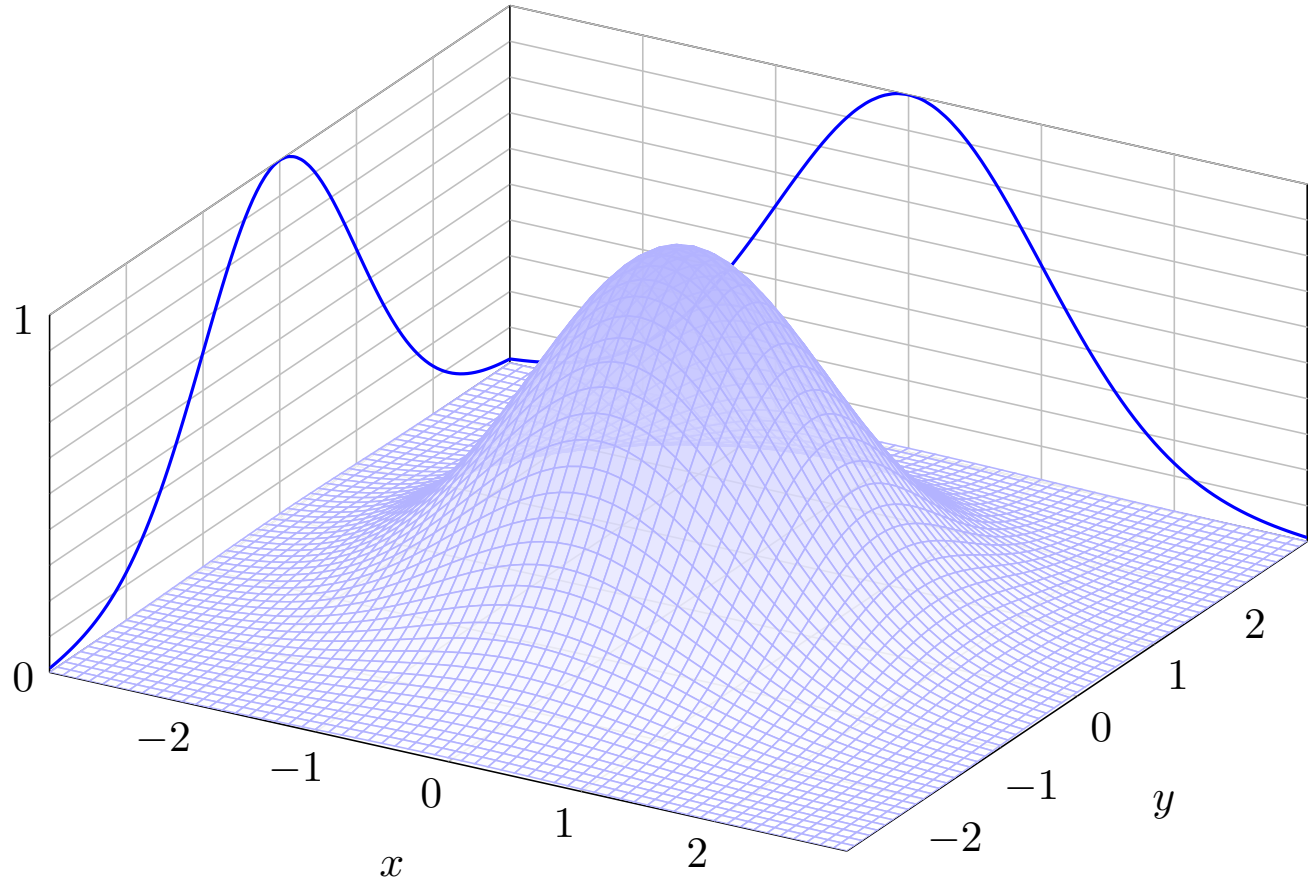
Ihre Streckungen und Verschiebungen heißen ebenfalls Glockenkurven. Sie spielen eine wichtige Rolle in der Wahrscheinlichkeitsrechnung beim zentralen Grenzwertsatz W1D; er wird uns in Kapitel W beschäftigen.

(2) Die Integralfunktion $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ erlaubt keine geschlossene Formel, ebensowenig die bestimmten Integrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b)-F(a)$.

Ich warne vorsorglich vor einem verbreiteten Missverständnis: Die Funktion f ist stetig und somit integrierbar (Satz B1C), daher *existieren* die bestimmen Integrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ und somit auch die Integralfunktion $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Allerdings kann diese nicht durch *elementare Funktionen* (also durch exp, log, sin, cos, ...) in geschlossener Form dargestellt werden. B145 Das ist nachweislich unmöglich. Es ist aussichtslos danach zu suchen!

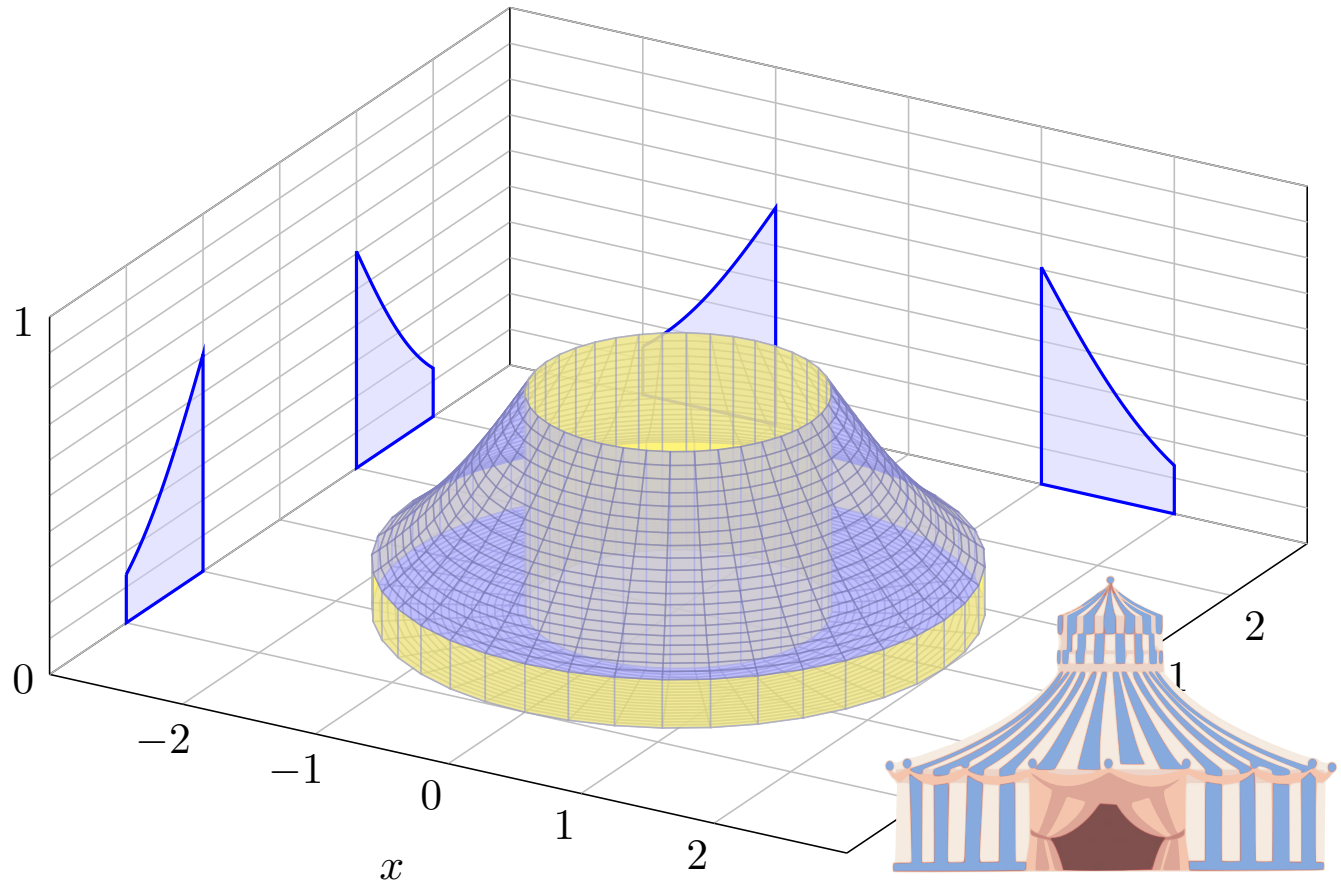
Das Gaußsche Integral

Skizze der Gaußschen Glockenfläche $g(x, y) = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}$:



Das Gaußsche Integral

Diese Funktion g wollen wir über den Kreisring K integrieren:



Das Gaußsche Integral

(3) In Polarkoordinaten $(x,y) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$ gilt $\mathrm{d}(x,y) = \rho\,\mathrm{d}(\rho,\varphi)$. Die Integration gelingt dank Transformationssatz, Fubini und HDI:

$$\begin{aligned}
&\int_K \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}\,\mathrm{d}(x,y) &&\overset{\substack{\text{Trafo}\\ \text{C2B}}}{=} \int_{[a,b]\times[0,2\pi]} \mathrm{e}^{-\rho^2/2}\cdot \underbrace{\rho}_{\text{Fu'det}}\,\mathrm{d}(\rho,\varphi)\\
&\overset{\substack{\text{Fub}\\ \text{C1E}}}{=} \int_{\rho=a}^{b}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho\,\mathrm{e}^{-\rho^2/2}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho &&\overset{\substack{\text{HDI}\\ \text{B1I}}}{=} \int_{\rho=a}^{b} 2\pi\rho\,\mathrm{e}^{-\rho^2/2}\,\mathrm{d}\rho\\
&\overset{\substack{\text{HDI}\\ \text{B1I}}}{=} \Big[-2\pi\,\mathrm{e}^{-\rho^2/2}\Big]_{\rho=a}^{b} &&= 2\pi\Big(\mathrm{e}^{-a^2/2} - \mathrm{e}^{-b^2/2}\Big)
\end{aligned}$$

(4) Für $a \to 0$ und $b \to \infty$ finden wir:

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}\,\mathrm{d}(x,y) = 2\pi}$$

☹ Das eindim. Integral $\int_a^b \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$ können wir nicht direkt angreifen.

☺ Das zweidim. Integral $\int_K \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}\,\mathrm{d}(x,y)$ ist hingegen leicht dank des Faktors ρ. Vergessen Sie nie nie nie die Funktionaldeterminante!

Das Gaußsche Integral

(5) Schließlich gelingt uns so auch das eindimensionale Integral:

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x\right)^2$$

Kunstgriff: Statt I berechnen wir I^2!

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \cdot \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y &&\overset{\substack{\text{Lin}\\ \text{A3L}}}{=} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2}\cdot\left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\
&\overset{\substack{\text{Lin}\\ \text{A3L}}}{=} \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2}\cdot \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &&\overset{\text{Exp}}{=} \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\
&\overset{\substack{\text{Fub}\\ \text{C1E}}}{=} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}\,\mathrm{d}(x,y) &&\overset{(4)}{=} 2\pi
\end{aligned}$$

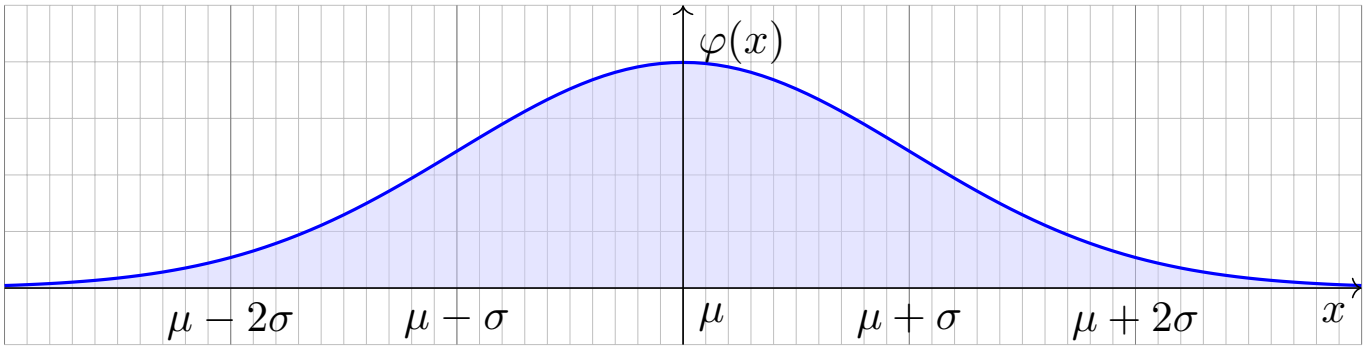
Satz C2G: Gaußsches Integral

Es gilt
$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}.$$

☺ Dies ist ein eindimensionales Integral, aber allein mit eindim. Methoden schafft man es nicht. Erst durch die Berechnung als zweidimensionales Integral löst sich alles in Wohlgefallen auf!

Die Gaußsche Normalverteilung

C231
Übung



Sei $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ mit $\sigma > 0$. Die Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

heißt (Dichte der) **Normalverteilung** mit Mittelwert μ und Streuung σ.
Sie spielt in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine zentrale Rolle.

- Wahrscheinlichkeitsdichte: $\varphi \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$
- Hier gilt Schwerpunkt = Mittelwert = $\int_{\mathbb{R}} x\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \mu$.
- Trägheitsmoment = Varianz = $\int_{\mathbb{R}} (x-\mu)^2 \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \sigma^2$

Die Gamma–Funktion an halbzahligen Stellen

C232
Übung

Wir kennen die Gamma–Funktion B313

$$\Gamma \,:\, \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0} \,:\, z \mapsto \Gamma(z) = \int_{x=0}^{\infty} x^{z-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe: Berechnen Sie den Wert $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{x=0}^{\infty} x^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$

Lösung: Die Substitution $x = u^2$ und $\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$ ergibt:

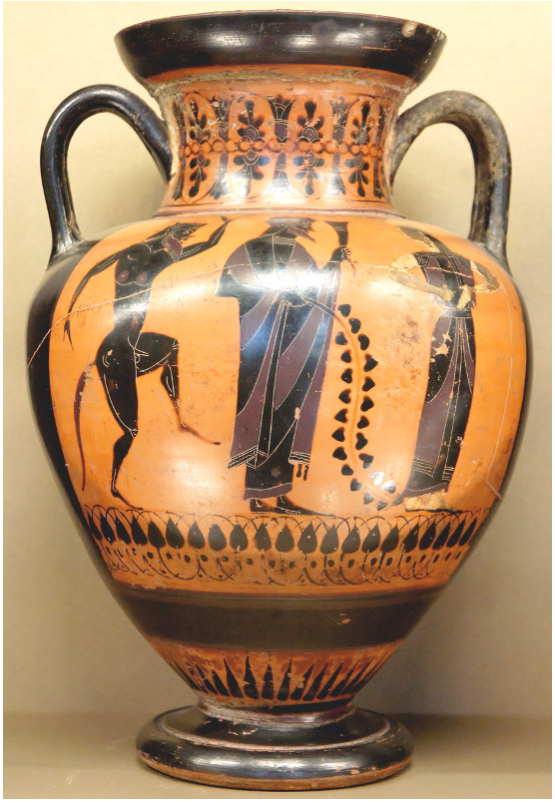
$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_{u=0}^{\infty} u^{-1}\,\mathrm{e}^{-u^2} \cdot 2u\,\mathrm{d}u \;=\; 2\int_{u=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{u=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{v=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-v^2/2}\,\mathrm{d}v \;=\; \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

- Dank der Funktionalgleichung $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ aus Satz B3E folgt:

Satz C2H: Gamma–Funktion an halbzahligen Stellen

Es gilt $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ und $\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}.$

Zylinderkoordinaten

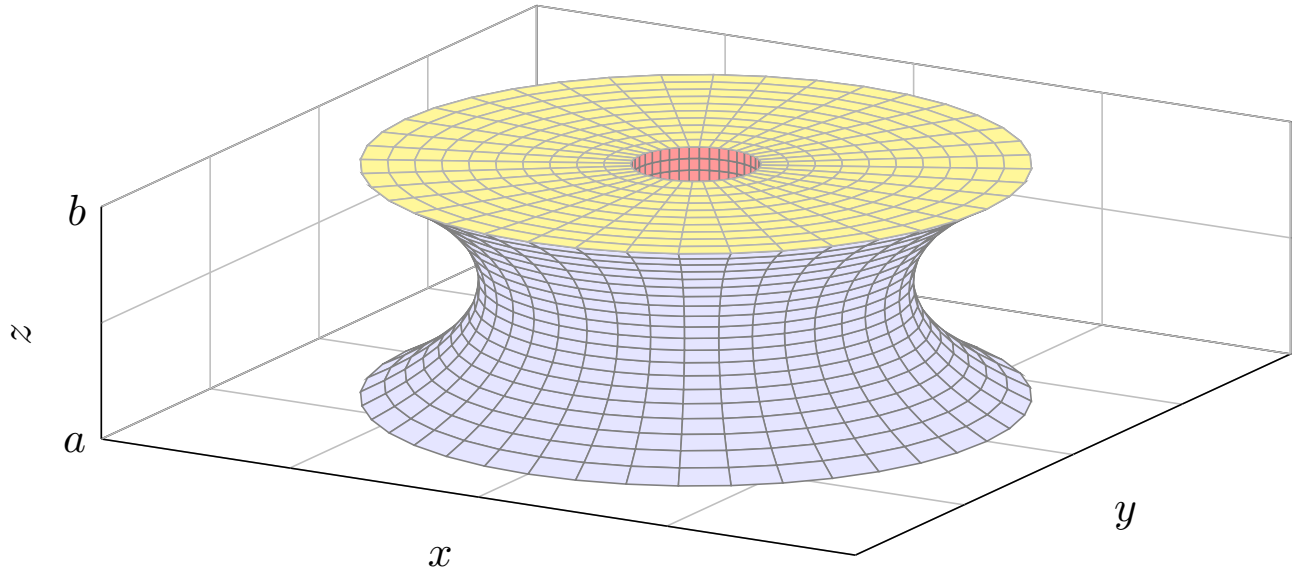


Griechische Amphore aus dem Louvre, Bildquelle: wikimedia.org

Stuttgarter Fernsehturm, Bildquelle: wikimedia.org

Zylinderkoordinaten eignen sich bei Rotationssymmetrie bezüglich einer Achse, zum Beispiel zur Parametrisierung von Rotationskörpern.

Zylinderkoordinaten



Aufgabe: Bestimmen Sie das Volumen des Rotationskörpers

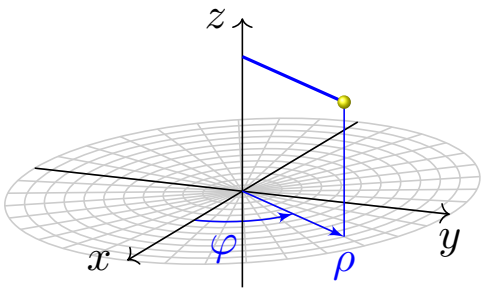
$$R = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a \leq z \leq b,\ r_0(z)^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_1(z)^2 \right\}$$

(1) in Zylinderkoordinaten und (2) mit Fubini (zum Vergleich).

(3) Was erhalten Sie für $-1 \leq z \leq 1$ mit $r_0 = 0$ und $r_1(z) = \cosh(z)$?

Zylinderkoordinaten

Lösung: Wir nutzen **Zylinderkoordinaten** um die z–Achse:



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} =: \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$\Phi : D \to R$ mit $D = \{\, (\rho, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \le z \le b,\ r_0(z) \le \rho \le r_1(z),\ 0 \le \varphi \le 2\pi \,\}$

Die **Funktionaldeterminante** ist wie zuvor bei Polarkoordinaten:

$$\Phi' \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,z)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \det \Phi' \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \rho$$

Wir erhalten folgende Parametrisierung unseres Rotationskörpers:

$$\begin{aligned} R &= \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \le z \le b,\ r_0(z)^2 \le x^2 + y^2 \le r_1(z)^2 \,\} \\ &= \{\, (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z) \mid a \le z \le b,\ r_0(z) \le \rho \le r_1(z),\ 0 \le \varphi \le 2\pi \,\} \end{aligned}$$

Anschauung: Die drei Spalten von Φ' sind die Tangentialvektoren in Richtung ρ, φ, z. Diese drei stehen hier orthogonal zueinander. Die Determinante ist daher das Produkt ihrer Längen $1, \rho, 1$.

Volumen eines Rotationskörpers

(1) Volumenberechnung in Zylinderkoordinaten, $\mathrm{d}(x,y,z) = \rho\,\mathrm{d}(z,\rho,\varphi)$:

$$\mathrm{vol}_3(R) = \int_R 1\,\mathrm{d}(x,y,z) \overset{\text{Trafo}}{\underset{\text{C2B}}{=}} \int_D \rho\,\mathrm{d}(z,\rho,\varphi) \overset{\text{Fub}}{\underset{\text{C1E}}{=}} \int_{z=a}^{b} \int_{\rho=r_0(z)}^{r_1(z)} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z$$

$$\overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \int_{z=a}^{b} \int_{\rho=r_0(z)}^{r_1(z)} 2\pi\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z \overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \int_{z=a}^{b} \Big[\pi\rho^2\Big]_{r_0(z)}^{r_1(z)} \mathrm{d}z = \int_{z=a}^{b} \pi r_1(z)^2 - \pi r_0(z)^2 \mathrm{d}z$$

(2) Mit Fubini und Kreisringen erhalten wir dasselbe Ergebnis:

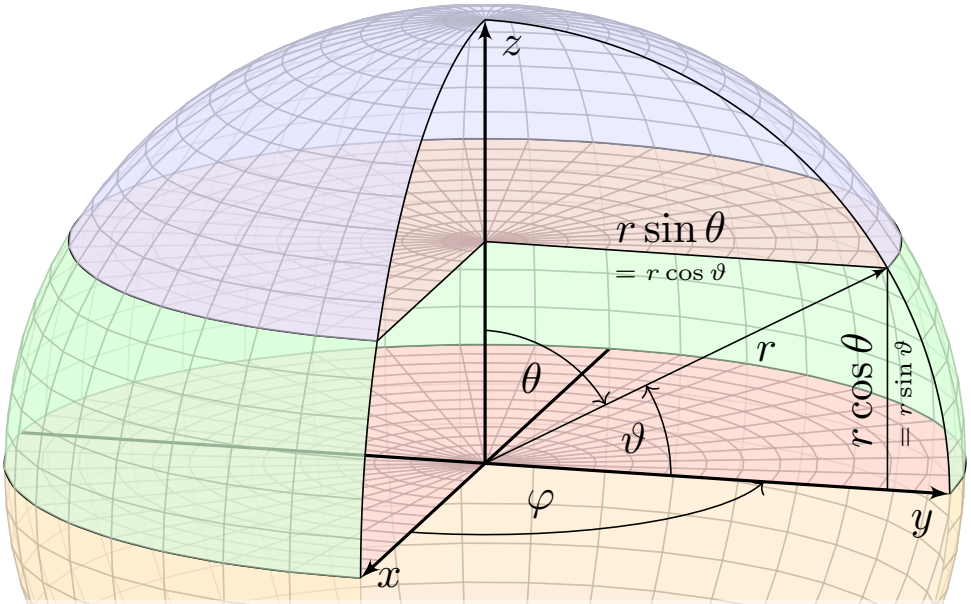
$$\mathrm{vol}_3(R) \overset{\text{Fub}}{\underset{\text{C1E}}{=}} \int_{z=a}^{b} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{I}_R(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y)\,\mathrm{d}z \overset{\text{Kreis}}{\underset{\text{C205}}{=}} \int_{z=a}^{b} \pi r_1(z)^2 - \pi r_0(z)^2\,\mathrm{d}z$$

(3) Für $r_0, r_1 : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit $r_0 = 0$ und $r_1(z) = \cosh(z)$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_3(R) &\overset{(1)}{=} \int_{z=-1}^{1} \pi\cosh(z)^2\,\mathrm{d}z \overset{\text{Hyp}}{=} \pi \int_{z=-1}^{1} \frac{1}{2}\cosh(2z) + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}z \\ &= \pi\Big[\frac{1}{4}\sinh(2z) + \frac{z}{2}\Big]_{z=-1}^{1} = \pi\Big(\frac{1}{2}\sinh(2) + 1\Big) \approx 8.84 \end{aligned}$$

(Additionstheoreme für $\cosh$ und $\sinh$ oder einfach ausmultiplizieren.)

Kugelkoordinaten



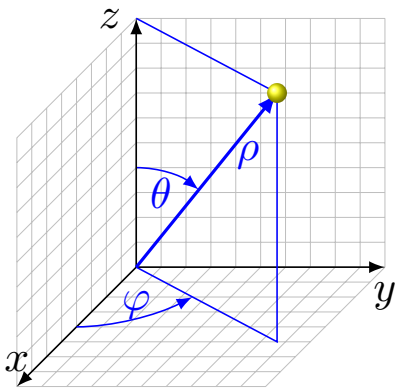
Aufgabe: Bestimmen Sie das Volumen der **Kugel** vom Radius r:

$$K = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le r^2 \,\}$$

(1) in Kugelkoordinaten und (2) als Rotationskörper (zum Vergleich).

Der Poldistanzwinkel θ läuft vom Nordpol $\theta = 0$ zum Südpol $\theta = \pi$, die geographische Breite $\vartheta = \pi/2 - \theta$ hingegen vom Äquator $\vartheta = 0$ zu den Polen $\vartheta = \pm\pi/2$. Der Azimutwinkel φ ist nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt; als Standardbereich wählen wir $[0, 2\pi[$, alternativ $]-\pi, \pi]$.

Kugelkoordinaten



Wir parametrisieren durch **Kugelkoordinaten**:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \sin\theta \cos\varphi \\ \rho \sin\theta \sin\varphi \\ \rho \cos\theta \end{pmatrix} =: \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$$

$$\Phi : D \to K \quad \text{mit} \quad D = \{\, (\rho,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le \rho \le r, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \,\}$$

Wir berechnen die **Jacobi–Matrix** und **Funktionaldeterminante**:

$$\Phi' \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \qquad \det \Phi' = \rho^2 \sin\theta \qquad \text{(Übung!)}$$

☺ Hier ist (ρ,θ,φ) ein rechtshändiges Koordinatensystem, $\det \Phi' \ge 0$. Hingegen wäre (ρ,φ,θ) linkshändig. Unser Integral ist nicht orientiert, also rechnen wir mit dem Absolutbetrag $|\det \Phi'|$. Anschauung: Die drei Spalten sind die Tangentialvektoren in Richtung ρ, θ, φ. Diese drei stehen hier orthogonal zueinander. Die Determinante ist daher das Produkt ihrer Längen $1, \rho, \rho\sin\theta$.

Kugelvolumen

C239
Übung

Lösung: (1) Das Volumen berechnen wir in **Kugelkoordinaten**:

$$\mathrm{vol}_3(K) = \int_K 1\,\mathrm{d}(x,y,z) \overset{\text{Trafo}}{\underset{\text{C2B}}{=}} \int_D \underbrace{\rho^2 \sin\theta}_{\text{Fu'det}}\,\mathrm{d}(\rho,\theta,\varphi)$$

$$\overset{\text{Fub}}{\underset{\text{C1E}}{=}} \int_{\rho=0}^{r}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho \overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \int_{\rho=0}^{r}\int_{\theta=0}^{\pi} 2\pi\rho^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho$$

$$\overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \int_{\rho=0}^{r} 2\pi\Big[-\rho^2\cos\theta\Big]_{\theta=0}^{\pi}\mathrm{d}\rho = \int_{\rho=0}^{r} 4\pi\rho^2\,\mathrm{d}\rho \overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \Big[\frac{4\pi}{3}\rho^3\Big]_{\rho=0}^{r} = \frac{4\pi}{3}r^3$$

☺ Der Term r^3 ist plausibel, denn die Kugel wächst in jede Richtung proportional zu r.
Die Konstante $\frac{4}{3}\pi$ hingegen kann man nicht raten, sondern nur durch Integration berechnen.

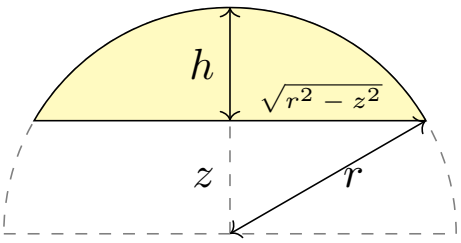
(2) Zum Vergleich die Rechnung als **Rotationskörper**:

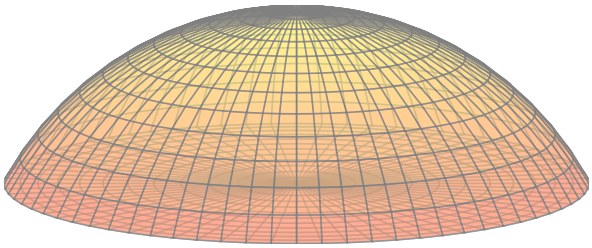
$$\mathrm{vol}_3(K) \overset{\text{Fub}}{\underset{\text{C1E}}{=}} \int_{z=-r}^{r} \pi(r^2 - z^2)\,\mathrm{d}z \overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \pi\Big[r^2 z - \frac{z^3}{3}\Big]_{z=-r}^{r} = \frac{4\pi}{3}r^3$$

☺ Das Ergebnis ist dasselbe, nur der Rechenweg ändert sich. Sie haben hier freie Wahl!
Die Kugel ist ein Rotationskörper, also bieten sich neben Kugel- auch Zylinderkoordinaten an.
Je nach Problemstellung ist es eine Kunst, besonders gut angepasste Koordinaten zu wählen.
Hier hilft nur Erfahrung; die erwerben Sie, wie immer im Leben, nur durch eigene Übung.

Kugelsegment

C240
Übung





Aufgabe: Bestimmen Sie das Volumen des **Kugelsegments**

$$K = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le r^2,\ r - h \le z \le r \,\}.$$

Lösung: Wir nutzen Zylinderkoordinaten und $\mathrm{d}(x,y,z) = \rho\,\mathrm{d}(z,\rho,\varphi)$:

$$\mathrm{vol}_3(K) = \int_K 1\,\mathrm{d}(x,y,z) \overset{\text{Trafo}}{\underset{\text{Fub}}{=}} \int_{z=r-h}^{r}\int_{\rho=0}^{\sqrt{r^2-z^2}}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \underbrace{\rho}_{\text{Fu'det}}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z$$

$$\overset{\text{s.o.}}{=} \int_{z=r-h}^{r} \pi(r^2 - z^2)\,\mathrm{d}z \overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \pi\Big[r^2 z - \frac{z^3}{3}\Big]_{z=r-h}^{r} = \ldots = \pi h^2\Big(r - \frac{h}{3}\Big)$$

Ist das plausibel? Wir machen die Probe für Halb- bzw. Vollkugel:

$$h = r \implies \mathrm{vol}_3(K) = \frac{2\pi}{3}r^3, \qquad h = 2r \implies \mathrm{vol}_3(K) = \frac{4\pi}{3}r^3$$

☺ Vergessen Sie nie… nie… nie… die Funktionaldeterminante!

Komplexe Funktionen und ihr Integral

Auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ betrachten wir neben reellen auch komplexe Funktionen. Jede komplexe Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ können wir zerlegen in ihren

Realteil $\operatorname{Re} f : \Omega \to \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{Re} f(x)$, und

Imaginärteil $\operatorname{Im} f : \Omega \to \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{Im} f(x)$.

Hieraus lässt sich f zusammensetzen gemäß $f = \operatorname{Re} f + \mathrm{i} \operatorname{Im} f$.
Es gilt $|f|^2 = |\operatorname{Re} f|^2 + |\operatorname{Im} f|^2$ und $|\operatorname{Re} f|, |\operatorname{Im} f| \leq |f| \leq |\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f|$.

Wir nennen $f : \Omega \to \mathbb{C}$ **messbar**, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ messbar sind.
Wir nennen f **integrierbar**, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ integrierbar sind.
Äquivalent hierzu: die Funktion f ist messbar und $\int_\Omega |f| < \infty$.
In diesem Fall können wir das Integral von f definieren durch

$$\boxed{\int_\Omega f := \int_\Omega \operatorname{Re} f + \mathrm{i} \int_\Omega \operatorname{Im} f.}$$

☺ Wegen $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ ist das reelle Integral ein Spezialfall des komplexen.

☺ Linearität überträgt unsere Rechenregeln aufs komplexe Integral.

Der Hauptsatz (HDI) für komplexe Integrale

☺ Wir formulieren allgemeine Rechenregeln gleich reell und komplex.
Der HDI gilt wörtlich für komplexe genauso wie für reelle Funktionen:
Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ ist integrierbar. Ihre Integralfunktion

$$F : [a, b] \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

ist differenzierbar, und für die Ableitung gilt $F' = f$. Ist umgekehrt $F : [a, b] \to \mathbb{C}$ differenzierbar mit stetiger Ableitung $f = F'$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F\Big]_a^b \quad \text{mit} \quad \Big[F\Big]_a^b := F(b) - F(a).$$

Beispiel: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt:

$$\boxed{\int_{t=a}^b \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\Big]_{t=a}^b}$$

☺ Alles gilt ebenso für $f : [a, b] \to \mathbb{C}^n$ und $f : [a, b] \to \mathbb{C}^{n \times n}$, wobei komponentenweise integriert und differenziert wird.

Der Satz von Fubini

C303
Fazit

Seien $X \subseteq \mathbb{R}^p$ und $Y \subseteq \mathbb{R}^q$ messbare Teilmengen, zum Beispiel Quader. Der Satz von Fubini C1E führt die Integration über $X \times Y$ zurück auf die (iterierte aber jeweils einfache) Integration über X und über Y. Das hilft.

(1) Absolute Integration: Für jede messbare Funktion $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ gilt

$$\int_{X\times Y} \big|f(x,y)\big| \,\mathrm{d}(x,y) = \int_X \int_Y |f(x,y)| \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_Y \int_X |f(x,y)| \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so ist f absolut integrierbar, und dann gilt

$$\boxed{\int_{X\times Y} f(x,y) \,\mathrm{d}(x,y) = \int_X \int_Y f(x,y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_Y \int_X f(x,y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.}$$

⚠ Hierzu ist die absolute Integrierbarkeit (1) wesentlich! Andernfalls ist das linke Integral nicht definiert und die rechten beiden evtl. verschieden.

Für einfache, aber drastische Gegenbeispiele siehe C117, C409, C413. Diese Vorsichtsmaßnahme ist also nötig, die müssen Sie beherrschen.

☺ Absolute Integrierbarkeit und somit Vertauschbarkeit gilt, wenn X, Y und f beschränkt sind, also insbesondere für X, Y kompakt und f stetig.

Integration über Normalbereiche

C304
Fazit

Integration über Normalbereiche ist ein wichtiger Spezialfall und die wohl häufigste Anwendung des Satzes von Fubini:

Das Integral einer absolut integrierbaren Funktion $f : B \to \mathbb{C}$ über

$$B = \left\{\, x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; a_k(x_1,\dots,x_{k-1}) \le x_k \le b_k(x_1,\dots,x_{k-1}) \text{ für alle } k \,\right\}$$

lässt sich durch iterierte eindimensionale Integrale berechnen:

$$\int_B f(x) \,\mathrm{d}x = \int_{x_1=a_1}^{b_1} \int_{x_2=a_2(x_1)}^{b_2(x_1)} \cdots \int_{x_n=a_n(x_1,\dots,x_{n-1})}^{b_n(x_1,\dots,x_{n-1})} f(x_1,x_2,\dots,x_n) \,\mathrm{d}x_n \cdots \mathrm{d}x_2 \,\mathrm{d}x_1$$

☺ Dies gilt ebenso bei jeder anderen Reihenfolge der Variablen. Sie haben hier also die Wahl der Integrationsreihenfolge.

⚠ Man muss hierzu allerdings die Integrationsgrenzen umschreiben! Geometrische Hilfe: Das gelingt einfach und sicher anhand einer Skizze.

⚠ Das Ergebnis ist dasselbe, aber der Rechenweg kann verschieden schwierig sein. Für ein bemerkenswertes Beispiel siehe C133.

Der Transformationssatz

Der Transformationssatz C2B verallgemeinert die eindimensionale Substitution: Wir wählen neue Variablen als geschickte Koordinaten.

Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und $\Phi : X \to Y$ bijektiv und stetig diff'bar.
(1) Ist $f : Y \to \mathbb{C}$ messbar, so auch $(f \circ \Phi) \cdot \det \Phi' : X \to \mathbb{C}$, und es gilt

$$\int_Y |f(y)| \, \mathrm{d}y \;=\; \int_X |f(\Phi(x))| \cdot |\det \Phi'(x)| \, \mathrm{d}x.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so ist f absolut integrierbar, und dann gilt

$$\boxed{\int_Y f(y) \, \mathrm{d}y \;=\; \int_X f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)| \, \mathrm{d}x.}$$

⚠ Auch hier ist die absolute Integrierbarkeit (1) wesentlich! C413

Die Ableitung $\Phi' : X \to \mathbb{R}^{n \times n}$ ist die **Jacobi–Matrix**, $\Phi' = (\partial_j \Phi_i)_{ij}$.
Die Funktion $\det \Phi' : X \to \mathbb{R}$ ist hierzu die **Funktionaldeterminante**.
Ihr Betrag $|\det \Phi'|$ misst die durch Φ bewirkte **Volumenverzerrung**.

☺ Für eindimensionale Integrale entspricht dies der Substitutionsregel.
Allerdings nehmen wir hier den Betrag und vergessen die Orientierung.
Allgemeiner formuliert Satz C2C die orientierte Version mit Vorzeichen.

Polarkoordinaten

Fubini und Transformation sind zwei häufig genutzte Techniken.
Polarkoordinaten sind eine einfache und häufige Anwendung.

Zu Radien $0 \le r_0 < r_1 < \infty$ betrachten wir den Kreisring

$$K = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid r_0^2 \le x^2 + y^2 \le r_1^2 \,\}.$$

Diesen können wir durch **Polarkoordinaten** parametrisieren:

$$\Phi : [r_0, r_1] \times [0, 2\pi] \to K \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \end{pmatrix} =: \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix}$$

Jacobi–Matrix und Funktionaldeterminante sind hier:

$$\Phi' = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \varphi)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \det \Phi' = \rho$$

Für jede absolut integrierbare Funktion $f : K \to \mathbb{C}$ gilt somit:

$$\boxed{\int_K f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mathrm{d}(x, y) \overset{\text{Trafo}}{\underset{\text{Fub}}{=}} \int_{\rho = r_0}^{r_1} \int_{\varphi = 0}^{2\pi} f \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \end{pmatrix} \underbrace{\rho}_{\text{Fu'det}} \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\rho}$$

Zylinderkoordinaten

Fubini und Transformation sind zwei häufig genutzte Techniken.
Zylinderkoordinaten sind eine einfache und häufige Anwendung.

Zu Radien $r_0, r_1 : [a,b] \to \mathbb{R}_{>0}$ betrachten wir den Rotationskörper

$$K = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a \le z \le b,\; r_0(z)^2 \le x^2 + y^2 \le r_1(z)^2 \right\}.$$

Diesen können wir durch **Zylinderkoordinaten** parametrisieren:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos\varphi \\ \rho \sin\varphi \\ z \end{pmatrix} =: \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

mit den Grenzen $a \le z \le b$ und $0 \le \varphi \le 2\pi$ sowie $r_0(z) \le \rho \le r_1(z)$.

Die Funktionaldeterminante ist hier wie zuvor $\det \Phi' = \rho$. (Übung!)

Für jede absolut integrierbare Funktion $f : K \to \mathbb{C}$ gilt somit:

$$\boxed{\int_K f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mathrm{d}(x,y,z) \overset{\text{Trafo}}{\underset{\text{Fub}}{=}} \int_{z=a}^{b} \int_{\rho=r_0(z)}^{r_1(z)} \int_{\varphi=0}^{2\pi} f \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \underbrace{\rho}_{\text{Fu'det}} \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}z}$$

Kugelkoordinaten

Fubini und Transformation sind zwei häufig genutzte Techniken.
Kugelkoordinaten sind eine einfache und häufige Anwendung.

Zum Radius $r > 0$ betrachten wir die Kugelschale

$$K = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; r_0^2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le r_1^2 \right\}.$$

Diese können wir durch **Kugelkoordinaten** parametrisieren:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos\varphi \sin\theta \\ \rho \sin\varphi \sin\theta \\ \rho \cos\theta \end{pmatrix} =: \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$$

mit den Grenzen $r_0 \le \rho \le r_1$ und $0 \le \theta \le \pi$ sowie $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Die Funktionaldeterminante ist hier $\det \Phi' = \rho^2 \sin\theta$. (Übung!)

Für jede absolut integrierbare Funktion $f : K \to \mathbb{C}$ gilt somit:

$$\boxed{\int_K f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mathrm{d}(x,y,z) \overset{\text{Trafo}}{\underset{\text{Fub}}{=}} \int_{\rho=r_0}^{r_1} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} f \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi\sin\theta \\ \rho\sin\varphi\sin\theta \\ \rho\cos\theta \end{pmatrix} \underbrace{\rho^2 \sin\theta}_{\text{Fu'det}} \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\rho}$$

Verständnisfragen

Was besagt der Hauptsatz (HDI)? Unter welchen Voraussetzungen?

Was besagt der Satz von Fubini? Unter welchen Voraussetzungen?
Nennen Sie (mindestens) ein Beispiel, wo Vertauschung nicht gilt.

Was besagt der Transformationssatz? Welche Voraussetzungen?
Was ist und wozu dient hier die Funktionaldeterminante?

Formulieren Sie Polarkoordinaten, Zylinder- und Kugelkoordinaten.
Berechnen Sie ausführlich jeweils die Funktionaldeterminante.
Ist die Orientierung positiv? Welche Varianten sind nützlich:
verschiedene Achsen? verschiedene Winkelkonventionen?

Wir nutzen $(x, y, z) = (\rho \sin\theta \cos\varphi, \rho \sin\theta \sin\varphi, \rho \cos\theta) =: \Phi(\rho, \theta, \varphi)$.
Welche Parameterbereiche D_i passen zur Kugel K vom Radius r?

$$D_1 = [0, r] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi], \qquad D_2 = [0, r] \times [0, \pi] \times [0, \pi],$$
$$D_3 = [0, r] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi], \qquad D_4 = [0, r] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi].$$

Ist damit $\Phi_i : D_i \to K$ surjektiv? injektiv? bis auf eine Nullmenge?

Verständnisfragen

Was sind Normalbereiche? Wie können Sie hierüber integrieren?
Kann eine Menge $B \subseteq \mathbb{R}^2$ auch zweifach ein Normalbereich sein,
also zugleich in x– und in y–Richtung? Kennen Sie Beispiele?

Warum ist folgende beliebte Vertauschung vollkommen unsinnig?

$$\int_{x=a}^{b} \int_{y=g(x)}^{h(x)} f(x, y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \quad \stackrel{?}{=} \quad \int_{y=g(x)}^{h(x)} \int_{x=a}^{b} f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

Liefern die folgenden Integrale für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dasselbe Ergebnis?

$$\int_{0 \leq x \leq y \leq 1} f(x, y) \, \mathrm{d}(x, y) \quad \stackrel{?}{=} \quad \int_{x=0}^{1} \int_{y=x}^{1} f(x, y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$
$$\int_{0 \leq x \leq y \leq 1} f(x, y) \, \mathrm{d}(x, y) \quad \stackrel{?}{=} \quad \int_{y=0}^{1} \int_{x=0}^{y} f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

Wenn alle drei Integrale dasselbe ergeben, warum müssen Sie dennoch manchmal verschiedene Integrationsreihenfolgen ausprobieren? C133

Normalbereiche

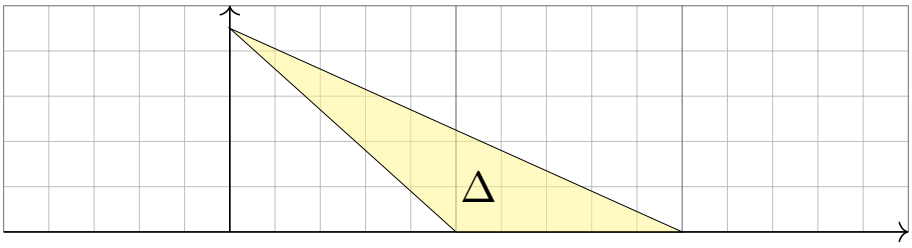
Aufgabe: (1) Skizzieren Sie das (ausgefüllte) Dreieck $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ mit den Eckpunkten $(a,0)$, $(b,0)$, $(0,c)$, wobei $0 < a < b$ und $0 < c$.

(2) Ist Δ ein Normalbereich in x–Richtung? in y–Richtung? Wie?

(3) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks als Doppelintegral. Überprüfen Sie das Ergebnis mit Hilfe Ihrer Geometriekenntnisse.

(4) Die Massendichte $\varrho\colon \Delta \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $\varrho(x,y) = xy$. Berechnen Sie die Gesamtmasse $M = \int_\Delta \varrho(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$ des Dreiecks.

Lösung: (1) Ein solches Dreieck Δ sieht etwa so aus:



(2) Dies ist ein Normalbereich in x–Richtung mit den Randfunktionen $g,h\colon [0,c] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(y) = a - ya/c$ und $h(y) = b - yb/c$, und ebenso ein Normalbereich in y–Richtung mit den Randfunktionen $g,h\colon [0,b] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \max(0, c - xc/a)$ und $h(x) = c - xc/b$.

Normalbereiche

(3) Als Flächeninhalt finden wir dank Fubini für Normalbereiche:

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_2(\Delta) &= \int_{y=0}^{c} \int_{x=a-ya/c}^{b-yb/c} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad = \int_{y=0}^{c} (b-a) - \frac{b-a}{c} y\,\mathrm{d}y \\ &= \Big[(b-a)y - \frac{b-a}{2c}y^2\Big]_{y=0}^{c} = \frac{(b-a)c}{2}\end{aligned}$$

☺ Das ist die bekannte Formel „Grundseite mal Höhe durch zwei“.

(4) Die Gesamtmasse berechnen wir durch Integration der Dichte ϱ:

$$\begin{aligned}M &= \int_{y=0}^{c} \int_{x=a-ya/c}^{b-yb/c} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{y=0}^{c} \Big[\frac{x^2 y}{2}\Big]_{x=a-ya/c}^{b-yb/c} \mathrm{d}y \\ &= \int_{y=0}^{c} \frac{b^2-a^2}{2c^2}y^3 + \frac{a^2-b^2}{c}y^2 + \frac{b^2-a^2}{2}y\,\mathrm{d}y \\ &= \Big[\frac{b^2-a^2}{8c^2}y^4 + \frac{a^2-b^2}{3c}y^3 + \frac{b^2-a^2}{4}y\Big]_{y=0}^{c} = \frac{(b^2-a^2)c^2}{24}\end{aligned}$$

☺ Ein Hoch auf Fubini! Anschließend genügen Geduld und Sorgfalt.

Normalbereiche

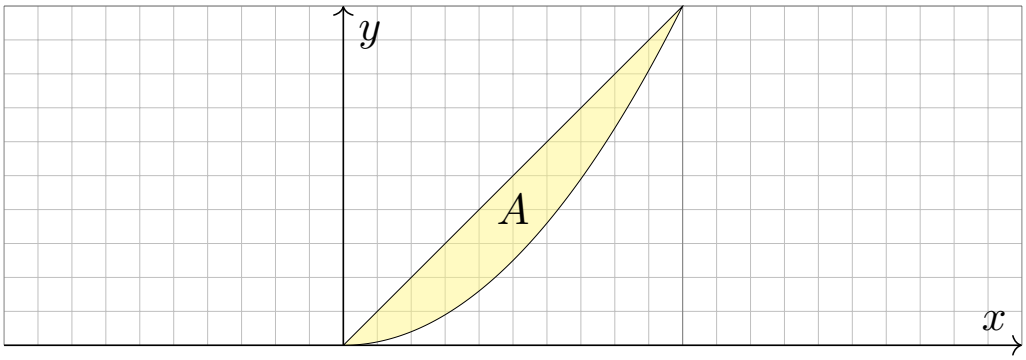
Aufgabe: (1) Skizzieren Sie das endliche Flächenstück $A \subseteq \mathbb{R}^2$, das von der Geraden $y = x$ und der Parabel $y = x^2$ berandet wird.

(2) Ist A ein Normalbereich in x–Richtung? in y–Richtung? Wie?

(3) Berechnen Sie den Flächeninhalt $\mathrm{vol}_2(A)$ auf beide Weisen.

(4) Berechnen Sie den Schwerpunkt bei homogener Masseverteilung.

Lösung: (1) Unser Flächenstück A sieht so aus:



(2) Dies ist ein Normalbereich in y–Richtung mit den Randfunktionen $g, h : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x^2$ und $h(x) = x$, und ebenso in x–Richtung mit den Randfunktionen $g, h : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $g(y) = y$ und $h(y) = \sqrt{y}$.

Normalbereiche

(3) Als Flächeninhalt finden wir dank Fubini für Normalbereiche:

$$\mathrm{vol}_2(A) = \int_{x=0}^{1} \int_{y=x^2}^{x} 1 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{1} x - x^2 \,\mathrm{d}x = \Big[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big]_{x=0}^{1} = \frac{1}{6}$$

Anders herum geht es auch, unter Beachtung der neuen Grenzen:

$$\mathrm{vol}_2(A) = \int_{y=0}^{1} \int_{x=y}^{\sqrt{y}} 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_{y=0}^{1} \sqrt{y} - y \,\mathrm{d}y = \Big[\frac{2y^{3/2}}{3} - \frac{y^2}{2}\Big]_{y=0}^{1} = \frac{1}{6}$$

(4) Die Koordinaten des Schwerpunktes $S(A) = (S_x, S_y)$ von A sind:

$$\begin{aligned}
S_x &= 6 \int_{x=0}^{1} \int_{y=x^2}^{x} x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = 6 \int_{x=0}^{1} \Big[xy\Big]_{y=x^2}^{x} \,\mathrm{d}x \\
&= 6 \int_{x=0}^{1} x^2 - x^3 \,\mathrm{d}x = 6 \Big[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\Big]_{x=0}^{1} = \frac{1}{2} \\
S_y &= 6 \int_{x=0}^{1} \int_{y=x^2}^{x} y \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = 6 \int_{x=0}^{1} \Big[\frac{y^2}{2}\Big]_{y=x^2}^{x} \,\mathrm{d}x \\
&= 6 \int_{x=0}^{1} \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} \,\mathrm{d}x = 6 \Big[\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{10}\Big]_{x=0}^{1} = \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

Normalbereiche

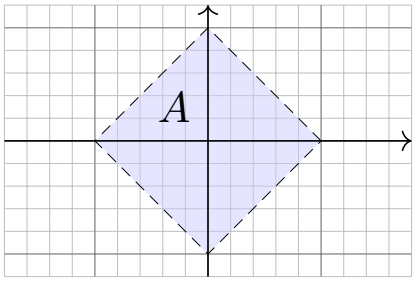
Aufgabe: (1) Skizzieren Sie $A = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| < 1 \,\}$ und $B = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq \pi/2,\ |y| \leq \cos(x) \,\}$ sowie $C = B \smallsetminus A$.

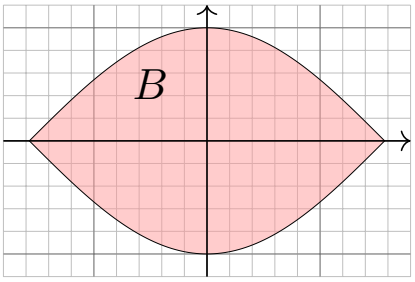
(2) Unterteilen Sie C in vier kongruente Binormalbereiche.

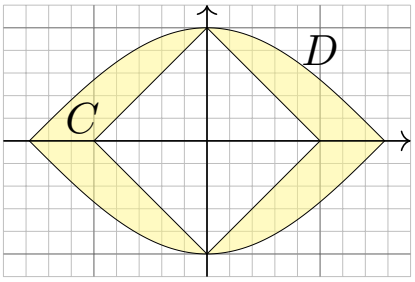
(3) Berechnen Sie den Flächeninhalt von C auf beide Weisen.

(4) Gegenprobe: Können Sie den Flächeninhalt auch direkt sehen?

Lösung: (1) Unsere Mengen $A, B, C \subseteq \mathbb{R}^2$ sehen so aus:







(2) In jedem Quadranten erhalten wir einen Binormalbereich, etwa

$$\begin{aligned} D = C \cap \mathbb{R}^2_{\geq 0} &= \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \pi/2,\ \max(0, 1-x) \leq y \leq \cos(x) \,\} \\ &= \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1,\ 1-y \leq x \leq \arccos(y) \,\} \end{aligned}$$

Normalbereiche

(3) Aus Symmetriegründen gilt $\mathrm{vol}_2(C) = 4\,\mathrm{vol}_2(D)$.
Den Flächeninhalt von D berechnen wir mit Fubini:

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_2(D) &= \int_{x=0}^{1} \int_{y=1-x}^{\cos(x)} 1 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{x=1}^{\pi/2} \int_{y=0}^{\cos(x)} 1 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{x=0}^{1} \cos(x) + x - 1 \,\mathrm{d}x + \int_{x=1}^{\pi/2} \cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[\sin(x) + \frac{x^2}{2} - x\Big]_{x=0}^{1} + \Big[\sin(x)\Big]_{x=1}^{\pi/2} = 1/2 \end{aligned}$$

Alternative: Wir integrieren zuerst über x und dann über y.

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_2(D) &= \int_{y=0}^{1} \int_{x=1-y}^{\arccos(y)} 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{y=0}^{1} \arccos(y) + y - 1 \,\mathrm{d}y \\ &= \Big[y\arccos(y) - \sqrt{1-y^2} + \frac{y^2}{2} - y\Big]_{x=0}^{1} = 1/2 \end{aligned}$$

(4) Das Quadrat A mit Seitenlänge $\sqrt{2}$ hat Flächeninhalt $\mathrm{vol}_2(A) = 2$.
Der Flächeninhalt unter $\cos(x)$ über $[-\pi/2, \pi/2]$ ist 2, also $\mathrm{vol}_2(B) = 4$.
Wegen $C = B \smallsetminus A$ und $A \subseteq B$ gilt $\mathrm{vol}_2(B \smallsetminus A) = \mathrm{vol}_2(B) - \mathrm{vol}_2(A) = 2$.

Masse, Schwerpunkt, Trägheitsmoment

C401
Übung

Aufgabe: Gegeben sei ein (kompakter) Körper $K \subseteq \mathbb{R}^3$ und seine (stetige) Massendichte $\varrho : K \to \mathbb{R}$. Wie berechnen Sie daraus die Gesamtmasse, den Schwerpunkt und die Trägheitsmomente?

Lösung: (1) Berechnung der **Masse** m des Körpers K mit Dichte ϱ:

$$\boxed{m = m(K, \varrho) = \int_K \varrho(x_1, x_2, x_3)\, \mathrm{d}(x_1, x_2, x_3)}$$

(2) **Schwerpunkt** $s = (s_1, s_2, s_3)$ des Körpers K mit Dichte ϱ:

$$\boxed{s_i = s_i(K, \varrho) = \frac{1}{m} \int_K x_i\, \varrho(x_1, x_2, x_3)\, \mathrm{d}(x_1, x_2, x_3)}$$

(3) **Trägheitsmoment** I_3 des Körpers K bzgl. der x_3–Achse:

$$\boxed{I_3 = I_3(K, \varrho) = \int_K (x_1^2 + x_2^2)\, \varrho(x_1, x_2, x_3)\, \mathrm{d}(x_1, x_2, x_3)}$$

☺ Ähnliche Rechnungen nutzen wir in der Wahrscheinlichkeitstheorie für Erwartung und Varianz einer stetigen WVerteilung ϱ (s. Kapitel V).

Trägheitsmoment eines Zylinders

C402
Übung

Aufgabe: Berechnen Sie das Trägheitsmoment $I_z(K)$ des Zylinders

$$K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 \le r^2,\ 0 \le z \le h \right\}$$

bezüglich der z–Achse. Die Massendichte ϱ auf K sei konstant.

Lösung: In Zylinderkoordinaten $(x, y, z) = (\rho \cos\varphi, \rho \sin\varphi, z)$ gilt $\mathrm{d}(x, y, z) = \rho\, \mathrm{d}(\rho, \varphi, z)$. Für das Trägheitsmoment finden wir:

$$\begin{aligned}
I_z(K) &\overset{\text{Def}}{=} \int_K (x^2 + y^2)\, \varrho(x, y, z)\, \mathrm{d}(x, y, z) \\
&\underset{\text{Fub}}{\overset{\text{Trafo}}{=}} \varrho \cdot \int_{z=0}^{h} \int_{\rho=0}^{r} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho^2 \cdot \underbrace{\rho}_{\text{Fu'det}}\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}z \\
&\underset{\text{Lin}}{\overset{\text{HDI}}{=}} \varrho \cdot 2\pi h \int_{\rho=0}^{r} \rho^3\, \mathrm{d}\rho \overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \varrho \cdot 2\pi h \cdot \frac{r^4}{4} \\
&= \varrho \cdot \underbrace{\pi r^2 h}_{= \mathrm{vol}_3(K)} \cdot \frac{1}{2} r^2 = \frac{1}{2} m r^2
\end{aligned}$$

Das traditionelle Formelzeichen für die Dichte ist ϱ. Als Integrationsvariable nutzen wir gerne ρ. Ungeschickt? Ich wollte keines von beiden ändern, also unterscheide ich sie in der Schreibweise.

Trägheitsmoment einer Kugel

Aufgabe: Berechnen Sie das Trägheitsmoment $I_z(K)$ der Kugel

$$K = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le r^2 \,\}$$

(1) in Kugelkoordinaten und zum Vergleich (2) in Zylinderkoordinaten. Die Massendichte ϱ auf K sei konstant (wie zuvor, zur Vereinfachung).

Lösung: (1) Für $(x,y,z) = (\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)$ gilt $\mathrm{d}(x,y,z) = \rho^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}(\rho,\theta,\varphi)$. Für das Trägheitsmoment finden wir:

$$\begin{aligned}
I_z(K) &\overset{\text{Def}}{=} \int_K (x^2+y^2)\,\varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) \\
&\overset{\text{Trafo}}{\underset{\text{Fub}}{=}} \varrho\cdot\int_{\rho=0}^{r}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho^2\sin(\theta)^2\cdot\underbrace{\rho^2\sin(\theta)}_{\text{Fu'det}}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho \\
&\overset{\text{HDI}}{\underset{\text{Lin}}{=}} \varrho\cdot 2\pi\int_{\rho=0}^{r}\rho^4\,\mathrm{d}\rho\int_{\theta=0}^{\pi}\sin(\theta)^3\,\mathrm{d}\theta \overset{\text{part}}{\underset{\text{B130}}{=}} \varrho\cdot 2\pi\cdot\frac{r^5}{5}\cdot\frac{4}{3} \\
&= \varrho\cdot\underbrace{\frac{4}{3}\pi r^3}_{=\,\mathrm{vol}_3(K)}\cdot\frac{2}{5}r^2 = \frac{2}{5}mr^2
\end{aligned}$$

Trägheitsmoment einer Kugel

(2) Alternative Berechnung in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned}
I_z(K) &= \int_K (x^2+y^2)\,\varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) \\
&= \varrho\cdot\int_{z=-r}^{r}\int_{D(z)} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}(x,y)\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

mit der Kreisscheibe $D(z) = \{\, (x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le r^2 - z^2 \,\}$; das innere Integral erkennen wir geometrisch oder aus der vorigen Aufgabe!

$$\begin{aligned}
I_z(K) &= \varrho\cdot\int_{z=-r}^{r}\frac{\pi}{2}(r^2-z^2)^2\,\mathrm{d}z = \varrho\cdot\frac{\pi}{2}\int_{z=-r}^{r} r^4 - 2r^2z^2 + z^4\,\mathrm{d}z \\
&= \varrho\cdot\frac{\pi}{2}\left[r^4z - \frac{2}{3}r^2z^3 + \frac{1}{5}r^5\right]_{z=-r}^{r} = \varrho\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{16}{15}r^5 = \cdots = \frac{2}{5}mr^2
\end{aligned}$$

☺ Das Ergebnis ist dasselbe, nur der Rechenweg ändert sich. Jede:r hat die Wahl, sich die bequemste Rechnung auszusuchen.

☺ Einfache Körper wie Zylinder, Kugel, etc. kommen häufig vor, ihre Trägheitsmomente finden Sie daher in jeder guten Formelsammlung.

▶ Steve Mould: *The Turntable Paradox*, `youtu.be/3oM7hX3UUEU`.

Trägheitstensor eines starren Körpers

In kartesischen Koordinaten berechnet sich der **Schwerpunkt** durch

$$s = \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \int_K \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z).$$

Wie oben erklärt wird hierzu in jeder der drei Komponenten integriert, gewichtet durch die Massendichte $\varrho\colon K \to \mathbb{R}$, normiert auf Masse 1.

Meist legt man den Schwerpunkt in den Ursprung; dies gelingt durch die Verschiebung in Schwerpunktkoordinaten $(\hat{x},\hat{y},\hat{z}) = (x-\overline{x}, y-\overline{y}, z-\overline{z})$.

Der **Trägheitstensor** Θ der Körpers K ist dann gegeben durch:

$$\Theta = \int_K \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2+z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2+y^2 \end{pmatrix} \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z)$$

Auf der Diagonalen stehen die Trägheitsmomente bezüglich der drei Achsen (x, y, z). Diese nennt man auch die **Hauptträgheitsmomente**. Außerhalb der Diagonalen stehen die **Deviationsmomente**.

Hauptachsentransformation

☺ Der Trägheitstensor $\Theta \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist eine **reelle symmetrische Matrix**.

In der linearen Algebra (§5.4, Satz 5.4.2) haben Sie gelernt, dass und wie sich jede symmetrische Matrix diagonalisieren lässt: Sie können Θ in einer geeigneten Basis $\mathscr{B} = (b_1, b_2, b_3)$ als Diagonalmatrix darstellen. Die Basiswechselmatrix $B \in \mathrm{GL}_3\,\mathbb{R}$ hat die Spalten b_1, b_2, b_2.

In physikalischen Anwendungen verlangen wir in der Regel längen- und winkeltreue Transformationen. Hierzu muss B eine orthogonale Matrix sein, am besten mit positiver Determinante, also eine Drehung des $\mathbb{R}^3$.

In der linearen Algebra haben Sie genau diesen Sachverhalt bewiesen! Wir können zu Θ eine positive Orthonormalbasis $\mathscr{B} = (b_1, b_2, b_3)$ aus Eigenvektoren von Θ berechnen. Für die Basiswechselmatrix bedeutet das $B \in \mathrm{SO}_3\,\mathbb{R}$, also $B^\intercal B = 1$ und $\det B = 1$. Kurzum:

$$\exists B \in \mathrm{SO}_3\,\mathbb{R} \;:\; B^\intercal \cdot \Theta \cdot B = \mathrm{diag}(I_1, I_2, I_3)$$

☺ Diese Vereinfachung nennt man **Hauptachsentransformation**. Anschaulich können wir also jeden (!) Körper K so geschickt drehen, dass sein Trägheitstensor besonders einfach wird, nämlich diagonal.

Trägheitstensor eines Quaders

Aufgabe: (1) Was ist der Schwerpunkt des achsenparallelen Quaders

$$Q = [0, a] \times [0, b] \times [0, c]?$$

Welchen Körper erhalten Sie nach Zentrierung?

(2) Berechnen Sie den Trägheitstensor des zentrierten Quaders

$$K = [-a/2, a/2] \times [-b/2, b/2] \times [-c/2, c/2].$$

Was sind in diesem Falle die Hauptträgheitsachsen?

Lösung: (1) Der Schwerpunkt ist $S(Q) = (a/2, b/2, c/2)$.
Verschiebung in Schwerpunktkoordinaten ergibt K.

(2) Der Trägheitstensor des zentrierten Quaders K ist

$$\Theta = \frac{m}{12} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 + c^2 \end{pmatrix}$$

Trägheitstensor und Kreiselbewegung

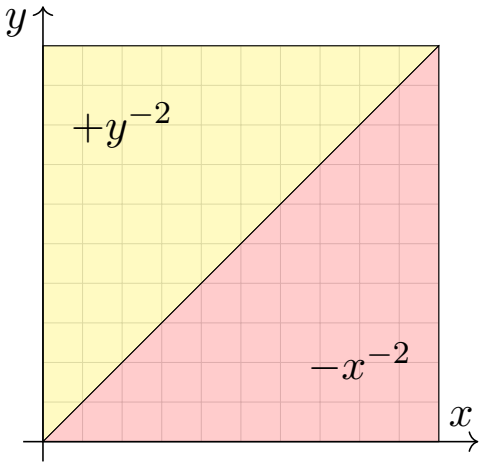
☺ In diesem Falle sind die kartesischen Koordinatenachsen bereits die Hauptträgheitsachsen unseres Körpers K. Nach einer Drehung ist der Quader im Allgemeinen nicht mehr achsenparallel; die Matrix wäre wesentlich komplizierter: sowohl die Rechnung als auch das Ergebnis!

☺ Die Hauptträgheitsachsen eines Körpers sind mathematisch hilfreich und auch physikalisch relevant: Sie sind fix bei freier Kreiselbewegung, zudem stabil für das maximale und das minimale Trägheitsmoment, aber instabil für das mittlere: Kleine Störungen führen zum Torkeln! Probieren Sie es selbst aus: Das ist der berühmt-berüchtigte Tennisschlägereffekt, siehe Satz P2E und `en.wikipedia.org/wiki/Tennis_racket_theorem`.

☺ Die Erde vollführt eine komplizierte Kreiselbewegung. Ihre Rotation äußert sich direkt in der Coriolis–Kraft (Foucaultsches Pendel, Zyklone). Die leichte Abplattung der Erde und die Anziehung der Sonne bewirken ein Drehmoment und somit eine Präzession der Erdachse (Periode von 26000 Jahren). Der Mond verursacht ebenso eine Nutation (19 Jahre). Diese Effekte beeinflussen das Klima und somit das Leben auf der Erde.

Fubini: Lesen Sie die Gebrauchsanweisung!

C409
Ausführung



Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} +y^{-2} & \text{für } 0 < x < y < 1, \\ -x^{-2} & \text{für } 0 < y < x < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Random fun fact (von Sheldon Cooper): Die rot-gelbe Flagge steht im internationalen Flaggenalphabet für den Buchstaben O wie „Oscar“ und für „Person über Bord!“.

Aufgabe: (1) Man berechne und vergleiche und bestaune:

$$\int_{y=0}^{1} \int_{x=0}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \overset{?}{=} \quad \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

(2) Widerspricht das Fubini? Ist f absolut integrierbar? Man berechne

$$\int_{[0,1]^2} |f(x,y)|\,\mathrm{d}(x,y).$$

Wiederholen Sie sorgsam den Satz von Fubini C1B für nicht-negative Funktionen und allgemein C1E für absolut integrierbare Funktionen!

Fubini: Lesen Sie die Gebrauchsanweisung!

C410
Ausführung

Lösung: (1a) Zu jedem $y \in \,]0,1[$ berechnen wir das innere Integral:

$$\int_{x=0}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{y} y^{-2}\,\mathrm{d}x + \int_{x=y}^{1} -x^{-2}\,\mathrm{d}x = +y^{-1} + \Big[x^{-1}\Big]_{x=y}^{1} = +1$$

Für das erste Doppelintegral erhalten wir also

$$\int_{y=0}^{1} \int_{x=0}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{y=0}^{1} (+1)\,\mathrm{d}y = +1.$$

(1b) Ebenso zu jedem $x \in \,]0,1[$ berechnen wir das innere Integral:

$$\int_{y=0}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{y=0}^{x} -x^{-2}\,\mathrm{d}y + \int_{y=x}^{1} y^{-2}\,\mathrm{d}y = -x^{-1} + \Big[-y^{-1}\Big]_{y=x}^{1} = -1$$

Für das zweite Doppelintegral erhalten wir also

$$\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{1} (-1)\,\mathrm{d}x = -1.$$

⚠ Skandalös: Die Integrationsreihenfolge ändert hier das Ergebnis! Das darf nicht sein, das Ergebnis einer Rechnung muss eindeutig sein, das heißt objektiv, unabhängig vom individuell gewählten Rechenweg.

Fubini: Lesen Sie die Gebrauchsanweisung!

(2) Dank Fubini C1B für nicht-negative Funktionen wissen wir:

$$\int_{[0,1]^2} |f(x,y)| \,\mathrm{d}(x,y) = \int_{y=0}^{1} \int_{x=0}^{1} |f(x,y)| \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$
$$= \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} |f(x,y)| \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = +\infty.$$

Zu jedem festen $y \in \,]0,1[$ berechnen wir zunächst das innere Integral:

$$\int_{x=0}^{1} |f(x,y)| \,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{y} y^{-2} \,\mathrm{d}x + \int_{x=y}^{1} x^{-2} \,\mathrm{d}x = 2y^{-1} - 1$$

Für das erste Doppelintegral erhalten wir also

$$\int_{y=0}^{1} \int_{x=0}^{1} |f(x,y)| \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_{y=0}^{1} 2y^{-1} - 1 \,\mathrm{d}y = +\infty.$$

⚠ Die Funktion $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ ist demnach nicht absolut integrierbar!
Das erklärt, warum wir den Satz von Fubini nicht auf f anwenden können: Die Voraussetzung $\int |f(x,y)| \,\mathrm{d}(x,y) < \infty$ ist nicht erfüllt!

Fubini: Lesen Sie die Gebrauchsanweisung!

Aufgabe: Sei $Q = [0,1]^2$ das Einheitsquadrat, zerlegt in die Dreiecke

$$D = \{\, x \geq y \,\} = [(0,0),(1,0),(1,1)],$$
$$E = \{\, x \leq y \,\} = [(0,0),(1,1),(0,1)].$$

Für $x, y \in [0,1]$ wollen wir $f(x,y) = (x-y)/(x+y)^3$ definieren.

(0) Wo gilt $f \geq 0$? Wo gilt $f \leq 0$? Wo ist f nicht definiert?

(1) Kann f im Punkt $(0,0)$ stetig fortgesetzt werden?

(2) Berechnen, vergleichen und bestaunen Sie die Doppelintegrale

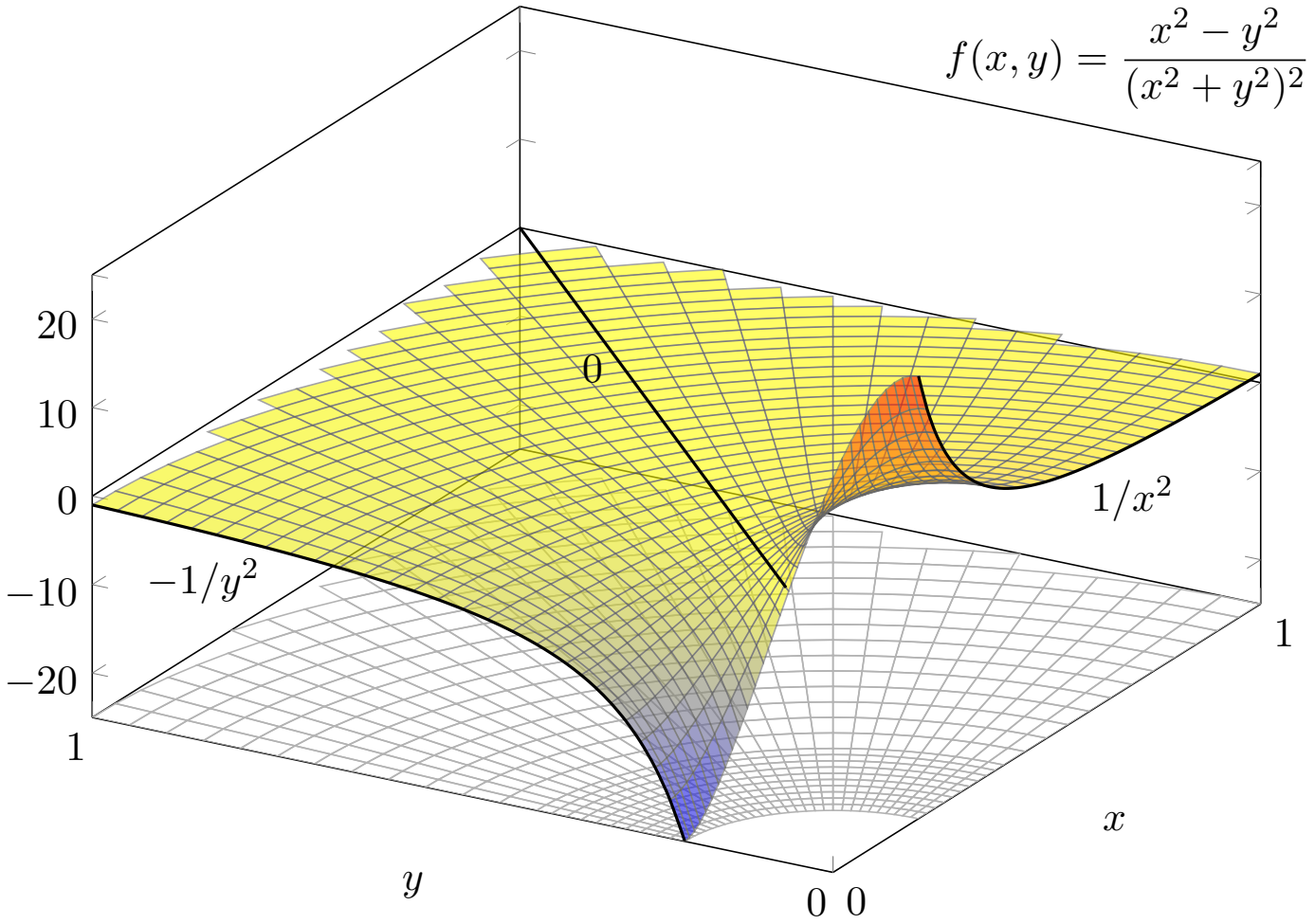
$$\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} f(x,y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \int_{y=0}^{1} \int_{x=0}^{1} f(x,y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

(3) Welche der folgenden Integrale sind definiert? Welche sind endlich?

$$\int_D f(x,y) \,\mathrm{d}(x,y), \quad \int_Q |f(x,y)| \,\mathrm{d}(x,y), \quad \int_Q f(x,y) \,\mathrm{d}(x,y)$$

(4) Ist f auf Q absolut integrierbar? Ist Fubini anwendbar?

Fubini: ein rationales Gegenbeispiel



Fubini: ein rationales Gegenbeispiel

Die vorige Rechnung ist leicht, aber die Funktion f etwas künstlich: Sie ist stückweise definiert und zudem unstetig auf der Diagonalen.

Ist dies möglich für eine *rationale* Funktion $f(x,y) = P(x,y)/Q(x,y)$, also einen Quotienten von Polynomen P und Q? Erstaunlicherweise ja!

⚠ Schon eine einzige Polstelle kann uns in Schwierigkeiten bringen:

Aufgabe: (1) Man berechne und vergleiche und bestaune:

$$\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \quad \overset{?}{=} \quad \int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Als Integrand betrachten wir hier die rationale Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0) \text{ und } f(0,0) := 0.$$

(2) Integrieren Sie $f(x,y)$ über den Viertelkreis in Polarkoordinaten. Lässt sich hier die Transformationsformel anwenden? Warum / nicht?

(3) Ist f über $[0,1]^2$ absolut integrierbar? über $[0,1]^2 \smallsetminus [0,\varepsilon[^2$ für $\varepsilon > 0$?

Fubini: ein rationales Gegenbeispiel

Lösung: (1a) Zunächst berechnen wir das erste Integral:

$$\int_{y=0}^{1} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y \overset{\text{PBZ}}{\underset{\text{Probe!}}{=}} \left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_{y=0}^{1} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \Big[\arctan(x)\Big]_{x=0}^{1} = \frac{\pi}{4}$$

(1b) Im zweiten Integral tauschen die Variablen x und y die Rollen:

$$\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\frac{\pi}{4}.$$

⚠ Die beiden Integrale vertauschen in diesem Falle also nicht!
Und das bei denkbar einfachem Integranden: eine rationale Funktion!

☺ Der Integrand hat eine interessante geometrische Interpretation, wie die obige Rechnung bereits andeutet: Für $x \neq 0$ bzw. $y \neq 0$ gilt

$$f(x,y) = -\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\arctan\Big(\frac{y}{x}\Big) = \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\arctan\Big(\frac{x}{y}\Big).$$

Daher können wir hier glücklicherweise alles explizit nachrechnen.

Fubini: ein rationales Gegenbeispiel

(2) In Polarkoordinaten $(x,y) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$ erhalten wir

$$g(\rho,\varphi) := f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = \cos(2\varphi)/\rho^2.$$

Additionstheoreme! Die Skizze zeigt f. Die nächste Katastrophe:

$$\int_{\rho=0}^{r}\int_{\varphi=0}^{\pi/2} \frac{\cos(2\varphi)}{\rho^2}\cdot \underbrace{\rho}_{\text{Fu'det}}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho = 0$$

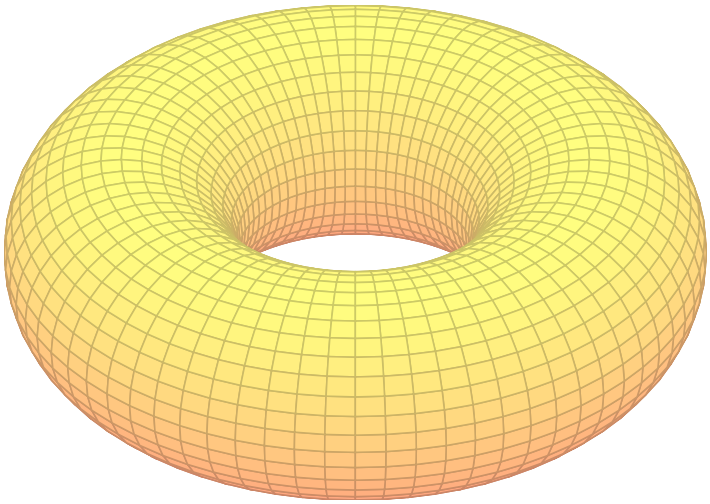
⚠ Auch die Transformationsformel lässt sich hier nicht anwenden!
Wir verlangen absolute Integrierbarkeit. Sonst ist Vorsicht geboten!

(3) Wäre $f:[0,1]^2 \to \mathbb{R}$ absolut integrierbar, so müssten nach Satz C1E von Fubini beide Integrationsreihenfolgen denselben Wert ergeben. Das ist hier nicht der Fall, also ist f nicht absolut integrierbar.

$$\int_{\rho=0}^{r}\int_{\varphi=0}^{\pi/2} \frac{|\cos(2\varphi)|}{\rho}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho = \int_{\rho=0}^{r} \frac{1}{\rho}\,\mathrm{d}\rho = \infty$$

Die Funktion $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist überall stetig bis auf den Punkt $(0,0)$.
Sie ist über jedem Kompaktum $K \Subset \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$ absolut integrierbar, insbesondere über $[0,1]^2 \smallsetminus [0,\varepsilon[^2$ mit $\varepsilon > 0$. Das Problem sitzt um $(0,0)$!

Volumen eines Volltorus / Donuts



Aufgabe: Bestimmen Sie für $0 < r < R$ das Volumen des Volltorus

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} (R + \rho \sin\theta)\cos\varphi \\ (R + \rho \sin\theta)\sin\varphi \\ \rho\cos\theta \end{pmatrix} =: \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \le \rho \le r \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{matrix} \right\}.$$

(1) in Toruskoordinaten und (2) als Rotationskörper (zum Vergleich).

Der Volltorus V besteht aus dem Kreis $K_R = \{ (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = R^2 \}$ sowie allen Punkten mit Abstand $\le r$ zu K_R. Die obige Abbildung skizziert dies für $R = 2$ und $r = 1$.

Volumen eines Volltorus / Donuts

Lösung: (1) Wir nutzen die angegebene Parametrisierung Φ:

$$\Phi' = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -(R + \rho\sin\theta)\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & (R + \rho\sin\theta)\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det \Phi' = \rho\,(R + \rho\sin\theta) \quad \text{(plausibel, rechtshändig)}$$

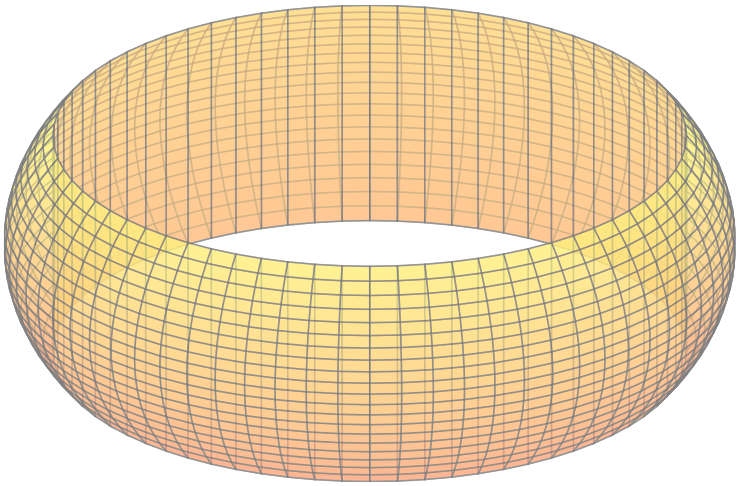
Volumenberechnung dank **Transformationssatz** und **Fubini** und **HDI**:

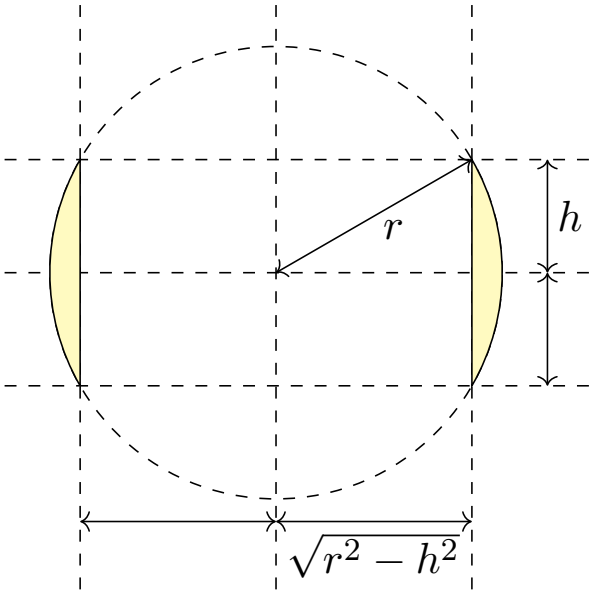
$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_3(V) &= \int_V 1 \,\mathrm{d}(x, y, z) = \int_{\rho=0}^{r} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho\,(R + \rho\sin\theta)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho \\ &= 2\pi \int_{\rho=0}^{r} \Big[\rho\,(R\theta - \rho\cos\theta)\Big]_{\theta=0}^{2\pi} \mathrm{d}\rho = 2\pi \int_{\rho=0}^{r} \rho \cdot R \cdot 2\pi\,\mathrm{d}\rho \\ &= (2\pi)^2 R \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{\rho=0}^{r} = 2\pi R \cdot \pi r^2 \end{aligned}$$

☺ Dies entspricht der Guldinschen Volumenregel G2B für Rotationskörper: πr^2 ist der Flächeninhalt des kleinen Kreises, $2\pi R$ ist der bei Rotation zurückgelegte Weg seines Schwerpunkts.

Serviettenring / the napkin ring problem

C419
Übung





Aufgabe: (1) Bestimmen Sie das Volumen des **Serviettenrings**

$$S = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le r^2,\ x^2+y^2 \ge r^2-h^2 \,\}$$

(2) Hängt das Volumen von der Höhe h ab? und vom Radius r?
Ist das plausibel? Prüfen Sie dies mit Hilfe der vorigen Aufgaben! C240
(Einfache Körper taugen gut für Klausuraufgaben, etwa Februar 2013.)

Serviettenring / the napkin ring problem

C420
Übung

Lösung: Für Rotationskörper können wir Zylinderkoordinaten nutzen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_3(S) &= \int_{z=-h}^{h} \int_{\rho=\sqrt{r^2-h^2}}^{\sqrt{r^2-z^2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}z \overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \int_{z=-h}^{h} \int_{\rho=\sqrt{r^2-h^2}}^{\sqrt{r^2-z^2}} 2\pi\rho \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}z \\
&\overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \int_{z=-h}^{h} \pi \Big[\rho^2\Big]_{\rho=\sqrt{r^2-h^2}}^{\sqrt{r^2-z^2}} \mathrm{d}z = \pi \int_{z=-h}^{h} h^2 - z^2 \,\mathrm{d}z \\
&\overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \pi \Big[h^2 z - \frac{z^3}{3}\Big]_{z=-h}^{h} = \frac{4\pi}{3} h^3 \qquad \text{(Kugel vom Radius } h\text{!)}
\end{aligned}$$

Das Volumen hängt nur von der Höhe h ab, aber nicht vom Radius r.
Außerdem ist das zugleich das Volumen der Kugel vom Radius h.
Das ist auf den ersten Blick höchst erstaunlich! Ist es plausibel?

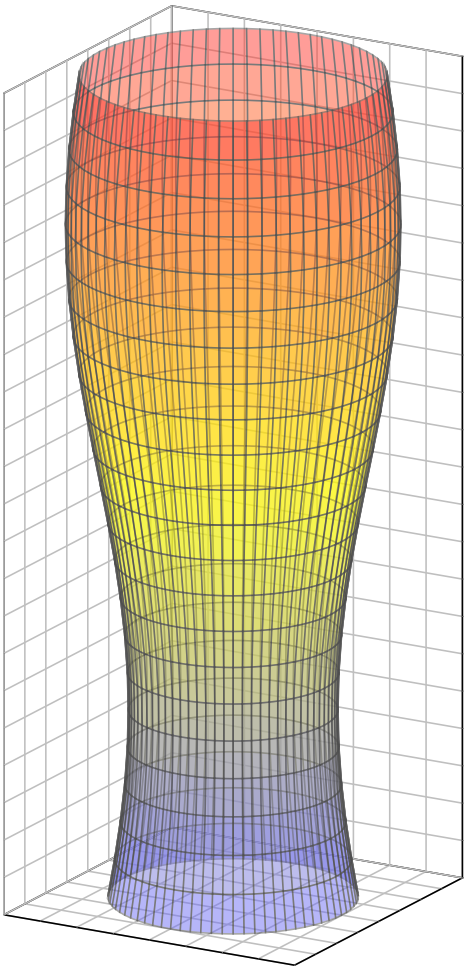
- Für $h = r$ erhalten wir das volle Kugelvolumen, wie es sein soll.
- Summe: Kugel C239 = Zylinder + Segmente C240 + Ring C419
- Alternative Rechnung mit Fubini, das gelingt ebenso leicht:

$$\mathrm{vol}_3(S) = \int_{z=-h}^{h} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{I}_R(x,y,z) \,\mathrm{d}(x,y) \,\mathrm{d}z = \pi \int_{z=-h}^{h} (r^2-z^2) - (r^2-h^2) \,\mathrm{d}z$$

Ein schönes Video von *Vsauce* hierzu: `youtu.be/J51ncHP_BrY`.

Volumen eines Bierglases

C421
Übung



Volumen eines Bierglases

C422
Übung

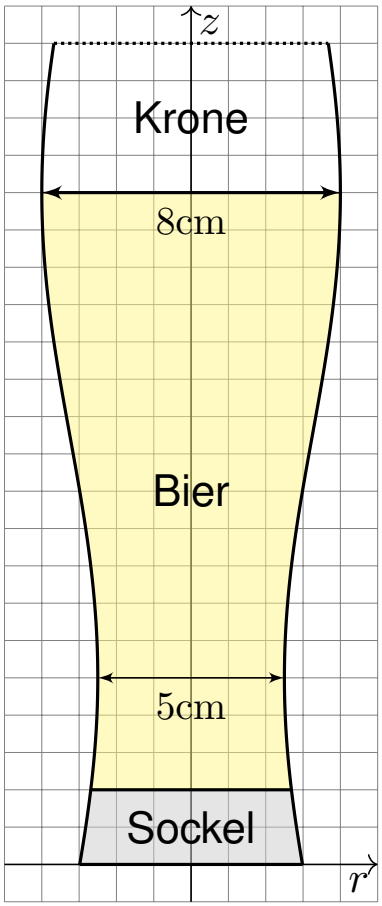
Viele Objekte unseres Alltags sind rotationssymmetrisch,
aus praktischen Gründen der Herstellung oder der Nutzung,
zum Beispiel rotierende Maschinenteile oder Werkstücke.
Die Töpferscheibe wird seit Jahrtausenden genutzt. C233

Zur Beschreibung und Parametrisierung solcher Rotationskörper
ist die Wahl von Zylinderkoordinaten meist natürlich und nützlich.
Zur Illustration dieses Kapitels wollen wir dies an einem schönen
(nicht ganz bierernsten) Anwendungsbeispiel durchrechnen.

Sie können das Volumen eines Weizenbierglases leicht experimentell
messen: Hierzu genügen ein geeignetes Glas und eine Flasche Bier.
Dies wird täglich hundertausendfach erprobt, zumeist erfolgreich.
Hierzu ein Stuttgarter Science Pub: `youtu.be/c4_GFCiem1c`.

Wir wollen es zur Illustration unserer Techniken einmal ausrechnen.
Danach werden Sie Weizenbiergläser mit anderen Augen sehen.
Das Beste daran: Hier arbeiten Theorie und Praxis Hand in Hand.
Das Ergebnis Ihrer Rechnung können Sie empirisch testen: Prost!

Volumen eines Bierglases



Weizenbiergläser sind hoch und geschwungen. Falls Sie auf einer Party zufällig Zeit dazu haben sollten, vermessen Sie ein Glas und erstellen Sie eine Parametrisierung: steigert den Nerd-Faktor! Für diese Vorlesung habe ich genau das getan:

Einige Messungen führen zu folgendem Modell: $G = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 22,\ x^2 + y^2 \le r(z)^2 \,\}$ mit einer Radiusfunktion $r(z) = a + b\sin(cz + d)$. Warum? Weil es gut passt. In Fourier we trust!

Alle Längen in cm, siehe nebenstehende Skizze: Der Durchmesser variiert von $5\mathrm{cm}$ auf $5\mathrm{cm}$ Höhe bis $8\mathrm{cm}$ auf $18\mathrm{cm}$ Höhe, Letzteres ist die Höhe des Füllstrichs. Der Glasboden innen liegt $2\mathrm{cm}$ hoch. Diese Daten dürfen Sie gerne nachmessen!

Aufgabe: Berechnen Sie das Biervolumen. Prost! Ist das Ergebnis Ihrer Erfahrung nach plausibel?

Volumen eines Bierglases

Lösung: Die Messdaten kalibrieren die Parameter unseres Modells: Wir finden $a = 13/4$ und $b = 3/4$ sowie $c = \pi/13$ und $d = -\pi\, 23/26$. Das gesuchte Volumen berechnen wir wie üblich dank Fubini:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_3(B) &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{I}_B(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_{z=2}^{18} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{I}_B(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{z=2}^{18} \pi r(z)^2\,\mathrm{d}z = \pi \int_{z=2}^{18} \Big[a + b\sin(cz+d)\Big]^2\,\mathrm{d}z \\
&= \pi \int_{z=2}^{18} a^2 + 2ab\sin(cz+d) + b^2\sin(cz+d)^2\,\mathrm{d}z \\
&= \pi \int_{z=2}^{18} a^2 + 2ab\sin(cz+d) + \frac{b^2}{2}\Big[1 - \cos(2cz+2d)\Big]\,\mathrm{d}z \\
&= \pi \Big[a^2 z - \frac{2ab}{c}\cos(cz+d) + \frac{b^2}{2}z - \frac{b^2}{4c}\sin(2cz+2d)\Big]_{z=2}^{18} \\
&= 504.856 \qquad \text{(Kalibrierung einsetzen und ausrechen!)}
\end{aligned}$$

☺ Das Ergebnis ist plausibel; $500\mathrm{cm}^3 = 0.5l$ ist für Weizenbier üblich. Im Rahmen der Messgenauigkeiten ist $505\mathrm{cm}^3$ erstaunlich präzise (1%).

Volumen n–dimensionaler Körper

Aufgabe: Zu $r \in \mathbb{R}_{>0}$ betrachten wir den n–dimensionalen Simplex

$$\Delta_r^n = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; 0 \le x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n \le r \right\}.$$

(1) Skizzieren Sie $\Delta_r^1, \Delta_r^2, \Delta_r^3$ und berechnen Sie das Volumen

$$\mathrm{vol}_n(\Delta_r^n) = \int_{x_n=0}^{r} \int_{x_{n-1}=0}^{x_n} \cdots \int_{x_2=0}^{x_3} \int_{x_1=0}^{x_2} 1 \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_{n-1} \,\mathrm{d}x_n.$$

(2) Berechnen Sie das Volumen des n–dimensionalen Würfels

$$W_r^n = [-r, r]^n = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_1, \dots, x_n \in [-r, r] \right\}.$$

(3) Berechnen Sie das Volumen der n–dimensionalen Kugel

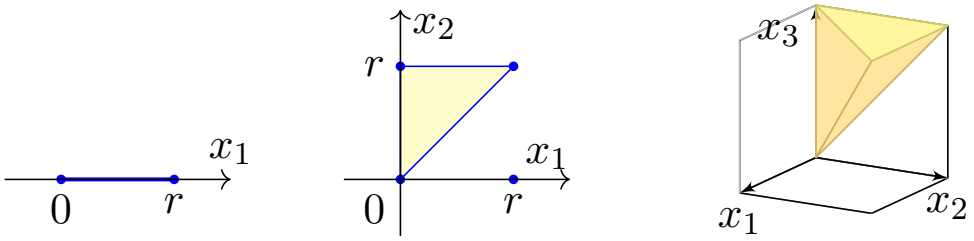
$$D_r^n = \bar{B}_{\mathbb{R}^n}(0, r) = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_1^2 + \dots + x_n^2 \le r^2 \right\}.$$

Gilt $\mathrm{vol}_n(D_r^n)/\mathrm{vol}_n(W_r^n) \searrow 0$? Ist das plausibel? (Vielleicht glauben Sie nur an Dimension 2 und 3, aber rechnen können Sie es ganz allgemein. Religiöse Bedenken oder gar Ausreden sind hier nicht angebracht.)

☺ Fassen Sie Mut und Zutrauen... auch zu hohen Dimensionen!

Volumen n–dimensionaler Simplizes

Lösung: (1) Wir machen eine Skizze, das hilft fast immer zur Klärung:



Die Eckpunkte des Tretraeders sind $(0,0,0)$, $(0,0,r)$, $(0,r,r)$, (r,r,r).

$$\mathrm{vol}_0(\Delta_r^0) = 1, \quad \mathrm{vol}_1(\Delta_r^1) = r, \quad \mathrm{vol}_2(\Delta_r^2) = \frac{r^2}{2}, \quad \mathrm{vol}_3(\Delta_r^3) = \frac{r^3}{6}.$$

Wir vermuten $\mathrm{vol}_n(\Delta_r^n) = \frac{r^n}{n!}$ und bestätigen dies per Induktion:

$$\mathrm{vol}_n(\Delta_r^n) = \int_{x_n=0}^{r} \int_{x_{n-1}=0}^{x_n} \cdots \int_{x_2=0}^{x_3} \int_{x_1=0}^{x_2} 1 \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_{n-1} \,\mathrm{d}x_n$$

$$= \int_{x_n=0}^{r} \mathrm{vol}_{n-1}(\Delta_{x_n}^{n-1}) \,\mathrm{d}x_n = \int_{x_n=0}^{r} \frac{(x_n)^{n-1}}{(n-1)!} \,\mathrm{d}x_n = \left[\frac{(x_n)^n}{n!} \right]_{x_n=0}^{r} = \frac{r^n}{n!}$$

☺ Plausibel: Der Würfel $[0, r]^n$ zerlegt sich in $n!$ kongruente Simplizes.

☺ *Random fun fact:* Die Summe ist $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{vol}_n(\Delta_r^n) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n/n! = \mathrm{e}^r$.

Volumen n–dimensionaler Kugeln

(2) Für den Würfel $W_r^n = [-r, r]^n$ gilt $\mathrm{vol}_n(W_r^n) = (2r)^n$. Dies folgt direkt aus der Definition des Volumens, und ebenso mit Fubini per Induktion:

$$\mathrm{vol}_n(W_r^n) = \int_{x_n=-r}^{r} \mathrm{vol}_{n-1}(W_r^{n-1}) = \int_{x_n=-r}^{r} (2r)^{n-1}\,\mathrm{d}x_n = (2r)^n$$

(3) Für die Kugel D_r^n gilt $\mathrm{vol}_n(D_r^n) = \tau_n r^n$ mit $\tau_n := \mathrm{vol}_n(D_1^n)$.

n	0	1	2	3	4	5	6	...
$\mathrm{vol}_n(D_r^n)$	1	$2r$	πr^2	$\frac{4}{3}\pi r^3$	$\frac{1}{2}\pi^2 r^4$	$\frac{8}{15}\pi^2 r^5$	$\frac{1}{6}\pi^3 r^6$	...

Wir berechnen die Konstante τ_n rekursiv, wie zuvor erklärt: C123

$$\tau_n = \mathrm{vol}_n(D_1^n) = \int_{x_n=-1}^{1} \tau_{n-1}\big(\sqrt{1-x_n^2}\big)^{n-1}\,\mathrm{d}x_n = \tau_{n-1}\int_{x=0}^{\pi} \sin(x)^n\,\mathrm{d}x$$

Hierzu substituieren wir $x_n = -\cos(x)$ für $x \in [0, \pi]$ und $\mathrm{d}x_n = \sin(x)\,\mathrm{d}x$. Das Wallis–Integral $I_n = \int_{x=0}^{\pi} \sin(x)^n\,\mathrm{d}x$ integrieren wir partiell B130 bezüglich $\sin(x)^{n-1} \cdot \sin(x)$ und nutzen $\cos(x)^2 = 1 - \sin(x)^2$:

$$\int \sin(x)^n\,\mathrm{d}x = -\sin(x)^{n-1}\cos(x) + \int (n-1)\sin(x)^{n-2}\big(1-\sin(x)^2\big)\,\mathrm{d}x$$

Volumen n–dimensionaler Kugeln

Auflösen nach $\int \sin(x)^n\,\mathrm{d}x$ ergibt die schöne Rekursionsformel

$$\int \sin(x)^n\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\sin(x)^{n-1}\cos(x) + \frac{n-1}{n}\int \sin(x)^{n-2}\,\mathrm{d}x.$$

Für $I_n = \int_{x=0}^{\pi} \sin(x)^n\,\mathrm{d}x$ gilt $I_0 = \pi$ und $I_1 = 2$ und weiter $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$:

$$\int_{x=0}^{\pi} \sin(x)^{2k}\,\mathrm{d}x = \pi \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)} = \pi \cdot \frac{(2k)!}{k!^2 \cdot 2^{2k}},$$

$$\int_{x=0}^{\pi} \sin(x)^{2k+1}\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2k+1)} = 2 \cdot \frac{k!^2 \cdot 2^{2k}}{(2k+1)!}.$$

Es gilt $I_n I_{n-1} = 2\pi/n$ und somit $\tau_n = \tau_{n-2} \cdot 2\pi/n$. Wir erhalten also

$$\boxed{\tau_{2k} = \frac{\pi^k}{k!} \quad \text{und} \quad \tau_{2k+1} = \frac{2^{k+1}}{1\cdot 3\cdots(2k+1)}\pi^k.}$$

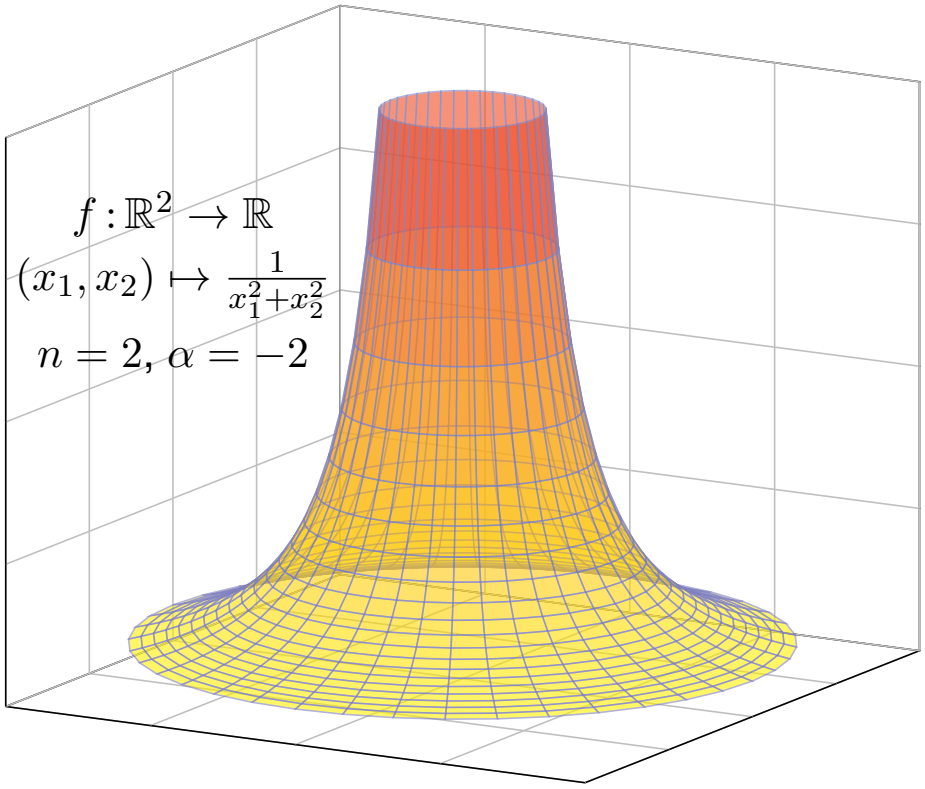
Die Gamma–Funktion fasst beide Fälle elegant zusammen (C2H):

$$\boxed{\mathrm{vol}_n(D_r^n) = \tau_n r^n \quad \text{mit} \quad \tau_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}.}$$

☺ *Random fun fact:* Es gilt $\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{vol}_n(D_r^{2k}) = \sum_{k=0}^{\infty} (\pi r)^k / k! = \mathrm{e}^{\pi r}$.

Polstellen und lokale Integrierbarkeit

Für $x \in \mathbb{R}^n$ nutzen wir die euklidische Norm $|x| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.
Aufgabe: Berechnen Sie $\int_{a \le |x| \le b} |x|^\alpha \, \mathrm{d}x$ und $\int_{\mathbb{R}^n} |x|^\alpha \, \mathrm{d}x$ für $n = 1, 2, 3$.
Ist der Grenzwert für $a \searrow 0$ endlich? und der Grenzwert für $b \nearrow \infty$?



Polstellen und lokale Integrierbarkeit

Lösung: Sei $0 < a < b$. (1) Für $n = 1$ und $\alpha \neq -1$ finden wir

$$\int_{a \le |x| \le b} |x|^\alpha \, \mathrm{d}x = 2 \int_{x=a}^{b} x^\alpha \, \mathrm{d}x = 2 \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_{x=a}^{b} = 2 \, \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

Im Sonderfall $\alpha = -1$ finden wir entsprechend $2(\ln b - \ln a) = 2 \ln(b/a)$.
Der Grenzwert für $a \searrow 0$ ist endlich für $\alpha > -1$, unendlich für $\alpha \le -1$.
Der Grenzwert für $b \nearrow \infty$ ist endlich für $\alpha < -1$, unendlich für $\alpha \ge -1$.
Das Integral $\int_{\mathbb{R}} |x|^\alpha \, \mathrm{d}x$ ist unendlich für jeden Exponenten $\alpha \in \mathbb{R}$.

(2) In Dimension $n = 2$ nutzen wir Polarkoordinaten:

$$\int_{a \le |x| \le b} |x|^\alpha \, \mathrm{d}x = \int_{\rho=a}^{b} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho^\alpha \cdot \underbrace{\rho}_{\text{Fu'det}} \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\rho = 2\pi \left[\frac{\rho^{\alpha+2}}{\alpha+2} \right]_{\rho=a}^{b}$$

Im Sonderfall $\alpha = -2$ finden wir ebenso $2\pi(\ln b - \ln a) = 2\pi \ln(b/a)$.
Der Grenzwert für $a \searrow 0$ ist endlich für $\alpha > -2$, unendlich für $\alpha \le -2$.
Der Grenzwert für $b \nearrow \infty$ ist endlich für $\alpha < -2$, unendlich für $\alpha \ge -2$.
Das Integral $\int_{\mathbb{R}^2} |x|^\alpha \, \mathrm{d}x$ ist unendlich für jeden Exponenten $\alpha \in \mathbb{R}$.

(3) In Dimension $n = 3$ nutzen wir Kugelkoordinaten:

$$\int_{a\le|x|\le b} |x|^\alpha \,\mathrm{d}x = \int_{\rho=a}^{b}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho^\alpha \cdot \underbrace{\rho^2 \sin(\theta)}_{\text{Fu'det}} \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho = 4\pi\left[\frac{\rho^{\alpha+3}}{\alpha+3}\right]_{\rho=a}^{b}$$

Im Sonderfall $\alpha = -3$ finden wir ebenso $4\pi(\ln b - \ln a) = 4\pi \ln(b/a)$.
Der Grenzwert für $a \searrow 0$ ist endlich für $\alpha > -3$, unendlich für $\alpha \le -3$.
Der Grenzwert für $b \nearrow \infty$ ist endlich für $\alpha < -3$, unendlich für $\alpha \ge -3$.
Das Integral $\int_{\mathbb{R}^3} |x|^\alpha \,\mathrm{d}x$ ist unendlich für jeden Exponenten $\alpha \in \mathbb{R}$.

(4) Zur Information: In jeder Dimension $n \ge 1$ gilt $\mathrm{vol}_n(D_r^n) = \tau_n r^n$ und

$$\int_{a\le|x|\le b} |x|^\alpha \,\mathrm{d}x = \int_{\rho=a}^{b} r^\alpha \cdot n\tau_n r^{n-1} \,\mathrm{d}\rho = n\tau_n\left[\frac{\rho^{\alpha+n}}{\alpha+n}\right]_{\rho=a}^{b}$$

Im Sonderfall $\alpha = -n$ finden wir ebenso $n\tau_n(\ln b - \ln a) = n\tau_n \ln(b/a)$.
⚠ Das Integral $\int_{\mathbb{R}^n} |x|^\alpha \,\mathrm{d}x$ ist unendlich für jeden Exponenten $\alpha \in \mathbb{R}$.
☺ Ob eine Polstelle von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *lokal* integrierbar ist, hängt von ihrer Ordnung ab — und bemerkenswerterweise auch von der Dimension n!
Wir halten die Ergebnisse dieser Aufgabe im folgenden Satz fest.

Satz C4A: lokale Integrierbarkeit einer Polstelle

Das globale n–dimensionale Integral $\int_{\mathbb{R}^n} |x|^\alpha \,\mathrm{d}x$ ist unendlich für jeden Exponenten $\alpha \in \mathbb{R}$ und in jeder Dimension $n \ge 1$. Genauer gilt für $r > 0$:

Das Integral $\int_{|x|\ge r} |x|^\alpha \,\mathrm{d}x$ ist unendlich für $\alpha \ge -n$, endlich für $\alpha < -n$.

Lokal gilt: $\int_{|x|\le r} |x|^\alpha \,\mathrm{d}x$ ist unendlich für $\alpha \le -n$, endlich für $\alpha > -n$,

$$\int_{|x|\le r} |x|^\alpha \,\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\,\frac{r^{\alpha+1}}{\alpha+1} & \text{in Dimension } n = 1, \\ 2\pi\,\frac{r^{\alpha+2}}{\alpha+2} & \text{in Dimension } n = 2, \\ 4\pi\,\frac{r^{\alpha+3}}{\alpha+3} & \text{in Dimension } n = 3, \\ n\tau_n\,\frac{r^{\alpha+n}}{\alpha+n} & \text{in jeder Dimension } n. \end{cases}$$

Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|^\alpha$ ist **lokal integrierbar** für $\alpha > -n$.
Wir präzisieren diesen nützlichen Begriff nachfolgend in Definition C4H.
Ähnliche Fragen begegnen uns häufig, daher lohnt es, das passende Vokabular der L^p–Räume und geeignete Werkzeuge zu entwickeln.

Lokal beschränkte Funktionen

Im Folgenden sei Ω eine Menge, etwa $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Wie üblich sei $\mathbb{K}$ der reelle Körper $\mathbb{R}$ oder der komplexe Körper $\mathbb{C}$.

Definition C4B: lokal beschränkte Funktion

(1) Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{K}$ heißt **beschränkt**, wenn eine geeignete Konstante $M \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $|f(x)| \le M$ für alle $x \in \Omega$ gilt. Die kleinste solche Schranke ist das **Supremum**

$$\big|f\big|_\Omega := \sup\nolimits_{x\in\Omega}\big|f(x)\big| = \inf\big\{\, M \in \mathbb{R} \;\big|\; \{\, x \in \Omega \,:\, |f(x)| > M \,\} = \emptyset \,\big\}.$$

Die Menge aller beschränkten Funktionen auf Ω schreiben wir

$$B(\Omega) = B(\Omega, \mathbb{K}) := \big\{\, f : \Omega \to \mathbb{K} \;\big|\; |f|_\Omega < \infty \,\big\}.$$

(2) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Wir nennen $f : \Omega \to K$ **lokal beschränkt**, wenn f auf jedem Kompaktum $K \Subset \Omega$ beschränkt ist, also $\big|f\big|_K < \infty$ gilt. Die Menge dieser Funktionen schreiben wir $B_{\text{loc}}(\Omega) = B_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{K})$.

Der Buchstabe „B“ steht für *beschränkt*, engl. *bounded*, frz. *borné*, und in $C(\Omega) = C(\Omega, \mathbb{K})$ steht das „C“ für *stetig*, engl. *continuous*, frz. *continu*.

Lokal beschränkte Funktionen

Aufgabe: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und nicht leer.
(1) Erklären Sie $B(\Omega) \subsetneq B_{\text{loc}}(\Omega) \supsetneq C(\Omega)$ sowie $B(\Omega) \not\subseteq\not\supseteq C(\Omega)$.
(2) Ist $f : \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|^\alpha$ beschränkt? lokal beschränkt?

Lösung: (1a) Es gilt $C(\Omega) \subseteq B_{\text{loc}}(\Omega)$: Sei $f \in C(\Omega)$, also $f : \Omega \to \mathbb{K}$ stetig. Ist $K \Subset \Omega$ kompakt, so nimmt die stetige Funktion $|f|$ auf K ihr Maximum an, also $|f|_K = \max\big|f|_K\big| < \infty$. Das zeigt $f \in B_{\text{loc}}(\Omega)$.

(1b) Umgekehrt gilt jedoch $C(\Omega) \not\supseteq B_{\text{loc}}(\Omega)$: Für jeden Punkt $p \in \Omega$ ist die Indikatorfunktion $f = \mathbf{I}_{\{p\}}$ beschränkt, $|f|_\Omega = 1$, aber unstetig.

(1c) Es gilt $B(\Omega) \subseteq B_{\text{loc}}(\Omega)$: Sei $f \in B(\Omega)$, also $f : \Omega \to \mathbb{K}$ beschränkt. Für jede Teilmenge $K \subseteq \Omega$ gilt dann offensichtlich $|f|_K \le |f|_\Omega < \infty$, insbesondere gilt dies für Kompakta $K \Subset \Omega$. Das zeigt $f \in B_{\text{loc}}(\Omega)$.

(1d) Umgekehrt gilt jedoch $B(\Omega) \not\supseteq B_{\text{loc}}(\Omega)$: Es gibt Funktionen, die lokal aber nicht global beschränkt sind. Auf $\Omega = \mathbb{R}^n$ etwa genügt $f(x) = |x|$. Andernfalls genügt die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R} : x \mapsto 1/|x - p|$ für einen Randpunkt $p \in \partial\Omega$; sie ist auf ganz Ω stetig, dank (1a) also lokal beschränkt, aber nicht beschränkt, denn für $x \to p$ gilt $f(x) \to \infty$.

(2) Unbeschränkt für $\alpha \neq 0$, stetig auf $\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$, also lokal beschränkt!

Lokal beschränkte Funktionen

Aufgabe: (3) Zeigen Sie $|\lambda f|_\Omega = |\lambda| \cdot |f|_\Omega$ für alle $f : \Omega \to \mathbb{K}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.
(4) Zeigen Sie die Ungleichung $|f + g|_\Omega \le |f|_\Omega + |g|_\Omega$ für $f, g : \Omega \to \mathbb{K}$.
(5) Wie folgt aus (3,4), dass $B(\Omega) = B(\Omega, \mathbb{K})$ ein $\mathbb{K}$–Vektorraum ist?

Lösung: (3) Aus $|f(x)| \le |f|_\Omega$ folgt $|\lambda f(x)| = |\lambda| \cdot |f(x)| \le \lambda \cdot |f|_\Omega$.
Das Supremum über alle $x \in \Omega$ erfüllt demnach $|\lambda f|_\Omega \le |\lambda| \cdot |f|_\Omega$.

(4) In jedem Punkt $x \in \Omega$ gilt $|f(x)| \le |f|_\Omega$ und $|g(x)| \le |g|_\Omega$.
Daraus folgt unmittelbar $|f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le |f|_\Omega + |g|_\Omega$.
Das Supremum über alle $x \in \Omega$ erfüllt demnach $|f + g|_\Omega \le |f|_\Omega + |g|_\Omega$.

(5) Die Menge $\mathbb{K}^\Omega = \mathrm{Abb}(\Omega, \mathbb{K}) = \{\, f : \Omega \to \mathbb{K} \,\}$ *aller* Funktionen von Ω nach $\mathbb{K}$ ist ein $\mathbb{K}$–Vektorraum bezüglich punktweiser Addition und punktweiser Multiplikation mit Skalaren, siehe Seite A210.

Hierin ist die Teilmenge $B(\Omega) = B(\Omega, \mathbb{K}) = \left\{\, f : \Omega \to \mathbb{K} \;\middle|\; |f|_\Omega < \infty \,\right\}$ ein Untervektorraum: Die Nullfunktion gehört zu $B(\Omega)$, da $|0|_\Omega = 0 < \infty$.
Für jede Funktion $f \in B(\Omega)$ und jeden Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\lambda f \in B(\Omega)$, denn $|\lambda f|_\Omega = |\lambda| \cdot |f|_\Omega < \infty$ dank (3). Für je zwei Funktionen $f, g \in B(\Omega)$ gilt $f + g \in B(\Omega)$, denn $|f + g|_\Omega \le |f|_\Omega + |g|_\Omega < \infty$ dank (4).

Lokal beschränkte Funktionen

Aufgabe: Funktionen $f, g : \Omega \to \mathbb{K}$ können wir auch multiplizieren:
(6) Zeigen Sie die Ungleichung $|f \cdot g|_\Omega \le |f|_\Omega \cdot |g|_\Omega$ für $f, g : \Omega \to \mathbb{K}$.
(7) Ist $B(\Omega)$ eine $\mathbb{K}$–Algebra, gilt also $f \cdot g \in B(\Omega)$ für $f, g \in B(\Omega)$?
(8) Ist auch $B_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ein $\mathbb{K}$–Vektorraum? und eine $\mathbb{K}$–Algebra?

Lösung: (6) In jedem Punkt $x \in \Omega$ gilt $|f(x)| \le |f|_\Omega$ und $|g(x)| \le |g|_\Omega$.
Daraus folgt unmittelbar $|f(x) \cdot g(x)| \le |f(x)| \cdot |g(x)| \le |f|_\Omega \cdot |g|_\Omega$.
Das Supremum über alle $x \in \Omega$ erfüllt demnach $|f \cdot g|_\Omega \le |f|_\Omega \cdot |g|_\Omega$.

(7) Für $f, g \in B(\Omega)$ gilt $f \cdot g \in B(\Omega)$, denn $|f \cdot g|_\Omega \le |f|_\Omega \cdot |g|_\Omega < \infty$.
Somit ist $B(\Omega)$ tatsächlich eine $\mathbb{K}$–Unteralgebra von $\mathbb{K}^\Omega = \mathrm{Abb}(\Omega, \mathbb{K})$.

(8) Ja, auch $B_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ist ein $\mathbb{K}$–Vektorraum und sogar eine $\mathbb{K}$–Algebra:
Sind die Funktionen $f, g : \Omega \to \mathbb{K}$ lokal beschränkt, also beschränkt auf jedem Kompaktum $K \Subset \Omega$, so gilt dies auch für λf sowie $f + g$ und $f \cdot g$.
Es genügt, die Argumente (3–7) auf jedes Kompaktum K anzuwenden.

☺ Diese Aufgabe und ihre Lösung sind pedantisch und kleinschrittig, um die grundlegenden Begriffe und Argumente einmal einzuüben.
Wie so oft gilt auch hier: Mit der nötigen Sorgfalt gelingt es leicht.

Essentiell beschränkte Funktionen

Definition C4c: essentiell beschränkte Funktion

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \to \mathbb{K}$ heißt **essentiell beschränkt**, wenn eine Konstante $M \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $|f(x)| \le M$ für fast alle $x \in \Omega$ gilt. Die kleinste solche Konstante ist das **essentielle Supremum**

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^\infty} &:= \operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)| \\ &:= \inf\big\{\, M \in \mathbb{R} \;\big|\; \operatorname{vol}_n\{\, x \in \Omega \,:\, |f(x)| > M \,\} = 0 \,\big\}. \end{aligned}$$

Nach Änderung auf einer Nullmenge ist f beschränkt, also $|f| \le M$. Die Menge aller essentiell beschränkten Funktionen schreiben wir

$$L^\infty(\Omega) = L^\infty(\Omega, \mathbb{K}) := \big\{\, f : \Omega \to \mathbb{K} \;\big|\; \|f\|_{L^\infty} < \infty \,\big\}.$$

Verlangen wir dies nur lokal, für alle Kompakta $K \Subset \Omega$, so erhalten wir

$$L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega) = L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{K}) := \big\{\, f : \Omega \to \mathbb{K} \;\big|\; \|f\|_{L^\infty(K)} < \infty \text{ für alle } K \Subset \Omega \,\big\}.$$

Es genügt, dies auf Bällen $K = \bar{B}(a, \varepsilon) \subseteq \Omega$ zu testen für $a \in \Omega$, $\varepsilon > 0$. Auf $\Omega = \mathbb{R}^n$ reicht es, dies für $K = \bar{B}(0, r)$ und $r = 1, 2, 3, \ldots$ zu testen.

Essentiell beschränkte Funktionen

Aufgabe: (1) Zur Illustration untersuchen wir $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \sin(x) + x\,\mathbf{I}_{\mathbb{Z}\pi}(x)$ und $h(x) = \mathbf{I}_{\mathbb{Q}^*}(x)/|x|$. Bestimmen Sie hierzu jeweils $\inf$ und $\sup$ sowie $\operatorname{ess\,inf}$ und $\operatorname{ess\,sup}$.

(2) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Erklären Sie die folgenden Inklusionen:

$$\begin{array}{ccc} L^\infty(\Omega) & \subsetneq & L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega) \\ \cup\!\!\!\!\!\!\neq & \not\subset\;\not\supset & \cup\!\!\!\!\!\!\neq \\ B(\Omega) & \subsetneq & B_{\mathrm{loc}}(\Omega) \end{array}$$

(3) Zeigen Sie für alle $f, g : \Omega \to \mathbb{K}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ folgende Un/Gleichungen:

$$\begin{aligned} \|\lambda \cdot f\|_{L^\infty} &= |\lambda| \cdot \|f\|_{L^\infty} \\ \|f + g\|_{L^\infty} &\le \|f\|_{L^\infty} + \|g\|_{L^\infty} \\ \|f \cdot g\|_{L^\infty} &\le \|f\|_{L^\infty} \cdot \|g\|_{L^\infty} \end{aligned}$$

(4) Ist $L^\infty(\Omega)$ ein $\mathbb{K}$–Vektorraum? eine $\mathbb{K}$–Algebra? und $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$?

(5) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Beweisen oder widerlegen Sie die naheliegende Vermutung $\operatorname{ess\,sup} f = \sup f$ und $\operatorname{ess\,inf} f = \inf f$.

Essentiell beschränkte Funktionen

Lösung: (1a) Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)$ gilt $\inf f = -1$ und $\sup f = +1$, also $|f|_{\mathbb{R}} = \sup|f| = 1$, und f ist beschränkt, kurz $f \in B(\mathbb{R})$. Ebenso finden wir $\operatorname{ess\,inf} f = -1$ und $\operatorname{ess\,sup} f = +1$, somit $\|f\|_{L^\infty} = 1$.

(1b) Für g gilt $g(k\pi) = k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$, somit $\inf g = -\infty$ und $\sup g = +\infty$, also $|g|_{\mathbb{R}} = \sup|g| = \infty$, demnach ist g unbeschränkt, kurz $g \notin B(\mathbb{R})$. Jedoch finden wir $\operatorname{ess\,inf} g = -1$ und $\operatorname{ess\,sup} g = +1$, somit $\|g\|_{L^\infty} = 1$. Essentiell beschränkt: Nach Änderung auf der Nullmenge $\mathbb{Z}\pi$ gilt $g = f$.

(1c) Für h gilt $h(x) = 1/|x|$ für $x \in \mathbb{Q}^*$ und $h(x) = 0$ sonst, somit $\inf h = 0$ und $\sup h = +\infty$, also $|h|_{\mathbb{R}} = \sup|h| = \infty$, und h ist unbeschränkt. Jedoch finden wir $\operatorname{ess\,inf} h = 0$ und $\operatorname{ess\,sup} h = 0$, somit $\|h\|_{L^\infty} = 0$. Essentiell beschränkt: Nach Änderung auf der Nullmenge $\mathbb{Q}$ gilt $h = 0$.

(2) Die vier angegebenen Inklusionen sind klar aufgrund der Definition. Die sechs negierten Inklusionen werden widerlegt durch Funktionen wie $f(x) = |x|$ (horizontal) und $g(x) = \mathbf{I}_{\mathbb{Q}^n \setminus \{0\}}(x)/|x|$ (vertikal) auf $\Omega = \mathbb{R}^n$. Für $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$ offen variieren wir diese Gegenbeispiele: Es genügen $f(x) = 1/|x - p|$ für einen Randpunkt $p \in \partial\Omega$ oder $g(x - p)$ für $p \in \Omega$.

Essentiell beschränkte Funktionen

(3) Zu $\|f\|_{L^\infty} = M_1$ existiert eine Nullmenge $N_1 \subseteq \Omega$, $\operatorname{vol}_n(N_1) = 0$, sodass $|f(x)| \le M_1$ für $x \in \Omega \setminus N_1$; zu $\|g\|_{L^\infty} = M_2$ ebenso $N_2 \subseteq \Omega$. Für $N = N_1 \cup N_2$ gilt dann $0 \le \operatorname{vol}_n(N) \le \operatorname{vol}_n(N_1) + \operatorname{vol}_n(N_2) = 0$. Für alle $x \in \Omega \setminus N$ gilt $|f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le M_1 + M_2$. Das zeigt $\|f + g\|_{L^\infty} = \operatorname{ess\,sup}|f + g| \le M_1 + M_2 = \|f\|_{L^\infty} + \|g\|_{L^\infty}$. Ebenso gilt $\|f \cdot g\|_{L^\infty} \le \|f\|_{L^\infty} \cdot \|g\|_{L^\infty}$ und $\|\lambda \cdot f\|_{L^\infty} = |\lambda| \cdot \|f\|_{L^\infty}$.

(4) Aus (3) folgt, dass $L^\infty(\Omega)$ ein $\mathbb{K}$–Vektorraum ist und eine $\mathbb{K}$–Algebra, wie in der vorigen Aufgabe ausgeführt. Dasselbe gilt auch für $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

(5) Die Ungleichung $\operatorname{ess\,sup} f \le \sup f =: M$ gilt für jede Funktion f. Wir zeigen nun $\operatorname{ess\,sup} f \ge \sup f$ für jede stetige Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Wir nehmen $M < \infty$ an; der Fall $M = \infty$ verläuft anschließend genauso. Zu jedem noch so kleinen $\varepsilon > 0$ existiert ein $x \in \Omega$ mit $f(x) \ge M - \varepsilon/2$. Da f stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, sodass $f > M - \varepsilon$ auf $B(x, \delta)$ gilt. Wegen $\operatorname{vol}_n B(x, \delta) > 0$ muss demnach $\operatorname{ess\,sup} f > M - \varepsilon$ gelten. Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt $\operatorname{ess\,sup} f \ge M$, wie behauptet.

☺ Für jede stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \to \mathbb{R}$ gilt $\operatorname{ess\,sup} f = \sup f$ und $\operatorname{ess\,inf} f = \inf f$. Insbesondere folgt hieraus $|f|_\Omega = \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Absolut integrierbare Funktionen

Definition C4D: absolut integrierbare Funktion

Eine messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{K}$ heißt (absolut) **integrierbar**, wenn

$$\|f\|_{L^1} := \int_\Omega |f(x)| \, \mathrm{d}x < \infty. \quad \text{(endliche } L^1\text{–Norm)}$$

Die Menge aller absolut integrierbaren Funktionen auf Ω ist

$$L^1 = L^1(\Omega) = L^1(\Omega, \mathbb{K}) := \{ f : \Omega \to \mathbb{K} \mid \|f\|_{L^1} < \infty \}.$$

Satz C4E: absolut integrierbare Funktion

Die Menge $L^1(\Omega, \mathbb{K}) \subseteq \mathrm{Abb}(\Omega, \mathbb{K})$ ist ein $\mathbb{K}$–Untervektorraum, denn für alle Funktionen $f, g : \Omega \to \mathbb{K}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gelten die Un/Gleichungen

$$\|\lambda \cdot f\|_{L^1} = |\lambda| \cdot \|f\|_{L^1},$$
$$\|f + g\|_{L^1} \le \|f\|_{L^1} + \|g\|_{L^1}.$$

Hierauf ist das Integral $L^1 \to \mathbb{K} : f \mapsto \int_\Omega f(x) \, \mathrm{d}x$ definiert und $\mathbb{K}$–linear.

Quadratisch integrierbare Funktionen

Definition C4F: quadratisch integrierbare Funktion

Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{K}$ heißt **quadratisch integrierbar**, wenn

$$\|f\|_{L^2}^2 := \int_\Omega |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \infty. \quad \text{(endliche } L^2\text{–Norm)}$$

Die Menge aller quadratisch integrierbaren Funktionen auf Ω ist

$$L^2 = L^2(\Omega) = L^2(\Omega, \mathbb{K}) := \{ f : \Omega \to \mathbb{K} \mid \|f\|_{L^2} < \infty \}.$$

Satz C4G: quadratisch integrierbare Funktion

Die Menge $L^2(\Omega, \mathbb{K}) \subseteq \mathrm{Abb}(\Omega, \mathbb{K})$ ist ein $\mathbb{K}$–Untervektorraum dank

$$\|\lambda \cdot f\|_{L^2} = |\lambda| \cdot \|f\|_{L^2},$$
$$\|f + g\|_{L^2} \le \|f\|_{L^2} + \|g\|_{L^2}.$$

Wir haben $\cdot : L^2 \times L^2 \to L^1$ dank Cauchy–Schwarz I1H (allgemein C4L):

$$\|f \cdot g\|_{L^1} \le \|f\|_{L^2} \cdot \|g\|_{L^2}.$$

Motivation zu Integralungleichungen

Wir beschäftigen uns im Folgenden mit L^p–Normen und Ungleichungen nach Vorbild der zentralen Cauchy–Schwarz–Ungleichung (Satz I1H).

Muss die Ingenieur:in das unbedingt wissen? Oder genügt es notfalls, eine freundliche Mathematiker:in zu fragen? Das hängt wie immer vom Anwendungsgebiet ab und den dort typischen Anforderungen. . . .

Im Allgemeinen hilft es, möglichst wirksame Werkzeuge zu kennen! Ein paar Worte zur Motivation scheinen mir daher angebracht.

Die Algebra lehrt zunächst das Lösen von gewissen **Gleichungen**, die Analysis erklärt und nutzt zudem vor allem **Ungleichungen**.

Ich möchte sogar sagen: *Alle* Techniken der Analysis und Numerik beruhen letztlich auf Ungleichungen und (Fehler-)Abschätzungen, insbesondere bei allen Fragen zu Approximation und Konvergenz.

Auch und ganz besonders für Integrale und Reihen wünschen wir uns daher möglichst vielseitige, bequeme und hilfreiche Abschätzungen.

Die folgenden Definitionen erklären hierzu das nötige Vokabular, anschließend klären wir einige nützliche Ungleichungen.

Lokal integrierbare Funktionen

Definition C4H: lokal integrierbare Funktion

Vorgegeben sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ und $1 \le p < \infty$. Wie üblich sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
Eine messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{K}$ heißt **p–integrierbar**, wenn

$$\|f\|_{L^p}^p := \int_\Omega |f(x)|^p \,\mathrm{d}x < \infty. \quad \text{(endliche } L^p\text{–Norm)}$$

Für $p = 1$ ist f absolut integrierbar, für $p = 2$ quadratisch integrierbar, für $p = \infty$ ersetzen wir das Integral durch das essentielle Supremum.

Die Menge aller p–integrierbaren Funktionen auf Ω ist

$$L^p = L^p(\Omega) = L^p(\Omega, \mathbb{K}) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{K} \;\middle|\; \|f\|_{L^p} < \infty \right\}.$$

Verlangen wir dies nur lokal, für alle Kompakta $K \Subset \Omega$, so erhalten wir

$$L^p_{\text{loc}}(\Omega) = L^p_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{K}) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{K} \;\middle|\; \|f\|_{L^p(K)} < \infty \text{ für alle } K \Subset \Omega \right\}.$$

Es genügt, dies auf Bällen $K = \bar{B}(a, \varepsilon) \subseteq \Omega$ zu testen für $a \in \Omega$, $\varepsilon > 0$.
Auf $\Omega = \mathbb{R}^n$ reicht es, dies für $K = \bar{B}(0, r)$ und $r = 1, 2, 3, \ldots$ zu testen.

Vergleich der L^p–Funktionenräume

Zwischen den L^p–Räumen bestehen folgende Beziehungen:

Satz C4I: Vergleich der L^p–Räume

(1) Sei $1 \le p < q < \infty$. Für $f : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \to \mathbb{R}$ gelten die Abschätzungen

$$\|f\|_{L^p}^p \le \mathrm{vol}_n(\Omega) + \|f\|_{L^q}^q \quad \text{und} \quad \|f\|_{L^p}^p \le \mathrm{vol}_n(\Omega) \cdot \|f\|_{L^\infty}^p .$$

(2) Für $1 < p < q < \infty$ und endliches Volumen $0 < \mathrm{vol}_n(\Omega) < \infty$, insb. für alle Kompakta wie zum Beispiel $\bar{B}(a,r)$, gelten daher die Inklusionen

$$L^1(\Omega) \supsetneq L^p(\Omega) \supsetneq L^q(\Omega) \supsetneq L^\infty(\Omega)$$

(3) Bei unendlichem Volumen, insbesondere für $\Omega = \mathbb{R}^n$, gilt weder die Inklusion $L^p(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$ noch die umgekehrte Inklusion $L^p(\Omega) \supseteq L^q(\Omega)$.

Beispiel: Für Fourier–Reihen spielt $L^2([0,2\pi])$ eine zentrale Rolle. Gemäß Satz C4I gilt hier $L^1([0,2\pi]) \supsetneq L^2([0,2\pi]) \supsetneq L^\infty([0,2\pi])$.

Die Fourier–Transformation nutzt entsprechend die Räume $L^1(\mathbb{R})$ und $L^2(\mathbb{R})$ und $L^\infty(\mathbb{R})$, doch hier gilt leider $L^1(\mathbb{R}) \not\subseteq\not\supseteq L^2(\mathbb{R}) \not\subseteq\not\supseteq L^\infty(\mathbb{R})$.

Vergleich der L^p–Funktionenräume

Aufgabe: Beweisen Sie (1) durch die Abschätzung $|f|^p \le 1 + |f|^q$. Finden Sie Gegenbeispiele für die nicht geltenden Inklusionen (1,2).

Lösung: (1) Zwei Fälle: Für $0 \le a \le 1$ gilt $a^p \le 1 \le 1 + a^q$. Für $1 \le a$ gilt $1 \le a^p \le a^q$ wegen $p \le q$ und Monotonie der Funktion $t \mapsto a^t = \mathrm{e}^{t \ln a}$. Integration von $|f|^p \le 1 + |f|^q$ über Ω ergibt $\|f\|_{L^p}^p \le \mathrm{vol}_n(\Omega) + \|f\|_{L^q}^q$. Ist also $\|f\|_{L^q}$ endlich, so auch $\|f\|_{L^p}$. Das bedeutet $L^p(\Omega) \supseteq L^q(\Omega)$.

(2) Gegenbeispiele liefern Funktionen wie $f(x) = |x|^{-n/q}$ (Satz C4A). Hierzu sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, nach Verschiebung $\Omega \supseteq \bar{B}(0,r) =: K$ mit $r > 0$. Die Funktion $f(x) = |x|^{-n/q}\,\mathbf{I}_K(x)$ ist nicht q–integrierbar, $\|f\|_{L^q(\Omega)} = \infty$, wohl aber p–integrierbar, $\|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty$ für alle Exponenten $p < q$. Dies zeigt $f \in L^p(\Omega)$ aber $f \notin L^q(\Omega)$, also $L^p(\Omega) \not\subseteq L^q(\Omega)$.

(3) Wir nehmen zur Vereinfachung $\Omega = \mathbb{R}^n$ an und setzen $K = \bar{B}(0,1)$. Die Funktion $f(x) = |x|^{-n/q}\,\mathbf{I}_K(x)$ erfüllt $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ aber $f \notin L^q(\mathbb{R}^n)$, wie bereits in (1) gesehen, somit gilt auch hier $L^p(\mathbb{R}^n) \not\subseteq L^q(\mathbb{R}^n)$.

Für $U = \mathbb{R}^n \setminus B(0,1)$ und $g(x) = |x|^{-n/p}\,\mathbf{I}_U(x)$ gilt $\|g\|_{L^p} = \infty$ aber $\|g\|_{L^q} < \infty$ für $q > p$, siehe Satz C4A, also $g \notin L^p(\mathbb{R}^n)$ aber $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Das zeigt $L^p(\mathbb{R}^n) \not\supseteq L^q(\mathbb{R}^n)$. (Allgemein: $\mathrm{vol}_n(\Omega) = \infty$ gelingt ähnlich.)

Motivation zur Hölder–Minkowski–Ungleichung

☺ Dank der $\mathbb{K}$–Vektorraumstruktur auf $L^1 = L^1(\Omega, \mathbb{K})$ können wir Funktionen $f, g \in L^1$ **linear kombinieren** und wissen $\alpha f + \beta g \in L^1$. Das Integral $\int : L^1(\Omega, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ ist eine $\mathbb{K}$–lineare Abbildung (A3L, A4B).

Oft wollen / müssen wir Funktionen $f, g : \Omega \to \mathbb{K}$ auch **multiplizieren**. Sei $p, q \in [1, \infty]$ mit $1/p + 1/q = 1$, etwa $(p, q) = (1, \infty), (2, 2), (\infty, 1)$. Wir haben $\cdot : L^p \times L^q \to L^1$ dank der **Hölder–Ungleichung** (C4L)

$$\|f \cdot g\|_{L^1} \le \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}.$$

Für $(p, q) = (1, \infty), (\infty, 1)$ ist die Hölder–Ungleichung leicht: Übung! Im Spezialfall $p = q = 2$ ist dies die Cauchy–Schwarz–Ungleichung.

Wir haben $+ : L^p \times L^p \to L^p$ dank der **Minkowski–Ungleichung** (C4L)

$$\|f + g\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Für $p = 1$ und $p = \infty$ ist die Minkowski–Ungleichung leicht: Übung! Für $1 < p < \infty$ werden wir sie anschließend ausführlich nachrechnen.

☺ Diese allgemeinen Ungleichungen ersparen uns viel Arbeit, da wir nicht jedes mal erneut die Integrierbarkeit individuell prüfen müssen.

Vektorräume und Vektornormen

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ kennen und lieben wir den $\mathbb{K}$–Vektorraum $V = \mathbb{K}^n$. I129
Für $u \in \mathbb{K}^n$ nutzen wir die euklidische Norm $\|u\| := \sqrt{|u_1|^2 + \cdots + |u_n|^2}$.
Diese erfreut sich folgender Eigenschaften für alle $u, v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$:

(N1) $\|v\| \ge 0$, und $\|v\| > 0$ für $v \ne 0$ (positive Definitheit)
(N2) $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ (Homogenität über $\mathbb{K}$)
(N3) $\|u + v\| \le \|u\| + \|v\|$ (Dreiecksungleichung)

Diese Rechenregeln nutzen wir oft. Sie verdienen einen Namen:

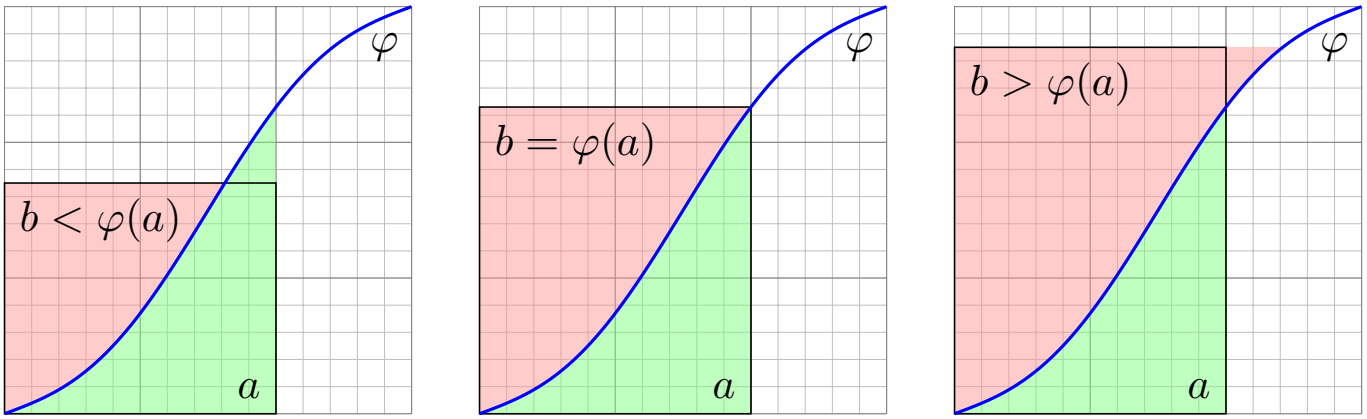
Definition C4J: normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum

Sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, zum Beispiel $V = \mathbb{K}^n$. Eine **Norm** auf V ist eine Abbildung $\|-\| : V \to \mathbb{R}_{\ge 0}$, die (N1–3) erfüllt.

Dies induziert eine **Metrik:** Der Abstand zweier Vektoren u, v ist $\|u - v\|$. Die **Konvergenz** $v_n \to v$ in $(V, \|-\|)$ ist definiert durch $\|v_n - v\| \to 0$.

Beispiel: In $C(\Omega)$ mit Supremumsnorm $|\text{-}|_\Omega$ ist dies die gleichmäßige Konvergenz, mit der L^1–Norm $\|-\|_{L^1}$ hingegen die Konvergenz im Mittel. Minkowski besagt, dass $(L^p(\Omega), \|-\|_{L^p})$ ein normierter Vektorraum ist.

Youngs Integralungleichung



Satz C4K: Youngs Integralungleichung

Sei $\varphi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig, streng monoton, mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(x) \nearrow \infty$ für $x \nearrow \infty$, zum Beispiel $\varphi(x) = x^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann ist φ bijektiv, und ihre Umkehrfunktion $\psi = \varphi^{-1} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ hat dieselben Eigenschaften.

Für alle $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt dann, wie oben illustriert, folgende Ungleichung:

$$a \cdot b \;\leq\; \int_{x=0}^{a} \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{y=0}^{b} \psi(y)\,\mathrm{d}y$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $b = \varphi(a)$ gilt, siehe Skizze (und A423).

Die Hölder–Minkowski–Ungleichung

Satz C4L: Hölder–Minkowski–Ungleichung

(0) Sei $1 < p < \infty$ und $q = p/(p-1) > 1$, sodass $1/p + 1/q = 1$ gilt.
Satz C4K ergibt für $\varphi(x) = x^{p-1}$ und $\psi(y) = y^{q-1}$ die Ungleichung

$$a \cdot b \;\leq\; a^p/p + b^q/q$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Gleichheit gilt genau dann, wenn $a^p = b^q$.

(1) Sei $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $1/p + 1/q = 1$, eventuell $\{p, q\} = \{1, \infty\}$.
Für $f \in L^p(\Omega)$ und $g \in L^q(\Omega)$ gilt $f \cdot g \in L^1(\Omega)$, genauer:

$$\|f \cdot g\|_{L^1} \;\leq\; \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$$

Gleichheit gilt gdw $|f(x)|^p = \mathrm{const} \cdot |g(x)|^q$ für fast alle $x \in \Omega$ gilt.

(2) Für $1 \leq p \leq \infty$ und alle $f, g \in L^p(\Omega)$ gilt $f + g \in L^p(\Omega)$, genauer:

$$\|f + g\|_{L^p} \;\leq\; \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$$

Insbesondere ist $L^p(\Omega, \mathbb{K})$ ein $\mathbb{K}$–Vektorraum mit Norm $\|-\|_{L^p}$.
Genau dann gilt $\|f\|_{L^p} = 0$, wenn $f(x) = 0$ für fast alle $x \in \Omega$ gilt.

Beweis der Hölder–Ungleichung

Beweis: (1) Aus $\|f\|_{L^p} = 0$ folgt $f(x) = 0$ für fast alle $x \in \Omega$ (Satz A4G), also $f(x) \cdot g(x) = 0$, somit $\|f \cdot g\|_{L^1} = 0$, und die Ungleichung ist erfüllt. Gleiches gilt falls $\|g\|_{L^q} = 0$. Im Folgenden sei $\|f\|_{L^p} > 0$ und $\|g\|_{L^p} > 0$. Dank (0) haben wir in jedem Punkt $x \in \Omega$ die Ungleichung

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p}} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q}} \le \frac{|f(x)|^p}{p\,\|f\|_{L^p}^p} + \frac{|g(x)|^q}{q\,\|g\|_{L^q}^q}.$$

Das Integral über $x \in \Omega$ erhält diese Ungleichung dank Monotonie:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}} \int |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x &\le \frac{1}{p\,\|f\|_{L^p}^p} \int |f(x)|^p\,\mathrm{d}x + \frac{1}{q\,\|g\|_{L^q}^q} \int |g(x)|^q\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\|f\|_{L^p}^p}{p\,\|f\|_{L^p}^p} + \frac{\|g\|_{L^q}^q}{q\,\|g\|_{L^q}^q} \quad = \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \quad = \quad 1\end{aligned}$$

Dies zeigt die ersehnte Hölder–Ungleichung $\|f \cdot g\|_{L^1} \le \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$. Gilt $|f(x)|^p = \mathrm{const} \cdot |g(x)|^q$ für fast alle $x \in \Omega$ gilt, so folgt Gleichheit $\|f \cdot g\|_{L^1} = \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$. Die Umkehrung führen wir nicht weiter aus.

(2) Für $p = 1$ und $p = \infty$ ist die Minkowski–Ungleichung leicht: Übung! Im Folgenden sei also $1 < p, q < \infty$. Wie zuvor gelte $1/p + 1/q = 1$.

Beweis der Minkowski–Ungleichung

Seien $f, g \in L^p$. Die folgende grobe Abschätzung zeigt $f + g \in L^p$:

$$\begin{aligned}|f+g|^p \le (|f|+|g|)^p &\le (2\max\{|f|,|g|\})^p \\ &= 2^p \max\{|f|^p, |g|^p\} \le 2^p(|f|^p + |g|^p)\end{aligned}$$

Integration über $x \in \Omega$ zeigt $\|f+g\|_{L^p}^p \le 2^p(\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p) < \infty$. Sei nun also $0 < \|f+g\|_{L^p} < \infty$. Wir nutzen die Hölder–Ungleichung:

$$\begin{aligned}\big\|f+g\big\|_{L^p}^p &= \big\||f+g|^p\big\|_{L^1} \\ &= \big\||f+g| \cdot |f+g|^{p-1}\big\|_{L^1} \\ &\le \big\||f| \cdot |f+g|^{p-1}\big\|_{L^1} + \big\||g| \cdot |f+g|^{p-1}\big\|_{L^1} \\ &\le \big\|f\big\|_{L^p} \cdot \big\||f+g|^{p-1}\big\|_{L^q} + \big\|g\big\|_{L^p} \cdot \big\||f+g|^{p-1}\big\|_{L^q} \\ &= \big[\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}\big] \cdot \big\||f+g|^{(p-1)q}\big\|_{L^1}^{1/q}\end{aligned}$$

Dank $(p-1)q = p$ ist der letzte Faktor gleich $\big\||f+g|^p\big\|_{L^1}^{1/q} = \big\|f+g\big\|_{L^p}^{p/q}$. Division ergibt die ersehnte Minkowski–Ungleichung für $\big\|f+g\big\|_{L^p}$.

Zusammenfassung: die L^p–Funktionenräume

Wie üblich sei $\mathbb{K}$ der reelle Körper $\mathbb{R}$ oder der komplexe Körper $\mathbb{C}$.
Für $1 \le p \le \infty$ und $f : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \to \mathbb{K}$ definieren wir die **L^p–Norm**

$$\|f\|_{L^p} := \Big[\int_{x\in\Omega} \big|f(x)\big|^p \,\mathrm{d}x \Big]^{1/p} \quad \text{wobei} \quad \|f\|_{L^\infty} := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} \big|f(x)\big|.$$

Die **L^p–integrierbaren** Funktionen bilden den $\mathbb{K}$–Vektorraum

$$L^p = L^p(\Omega) = L^p(\Omega,\mathbb{K}) := \big\{\, f : \Omega \to \mathbb{K} \;\big|\; \|f\|_{L^p} < \infty \,\big\}.$$

Hier bedeutet L^1 absolut integrierbar und L^∞ essentiell beschränkt.
Gleichheit $f = g$ in $L^p(\Omega,\mathbb{K})$ bedeutet $f(x) = g(x)$ für fast alle $x \in \Omega$.
Für $\emptyset < \mathrm{vol}(\Omega) < \infty$ und $1 < p < q < \infty$ gilt $L^1 \supsetneq L^p \supsetneq L^q \supsetneq L^\infty$.
Für $p, q \in [1,\infty]$ mit $1/p + 1/q = 1$ erhalten wir die **bilineare Paarung**

$$\langle\,\text{-}\,|\,\text{-}\,\rangle : L^p \times L^q \to \mathbb{K} \quad \text{mit} \quad \langle\, f \mid g \,\rangle := \int_{x\in\Omega} \overline{f(x)}\, g(x) \,\mathrm{d}x.$$

Das Produkt ist absolut integrierbar dank der **Hölder–Ungleichung**:

$$\|f \cdot g\|_{L^1} \le \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$$

☺ Im Spezialfall $p = q = 2$ ist dies die Cauchy–Schwarz–Ungleichung.

Diskretes Analogon: die ℓ^p–Folgenräume

Sei Ω eine Menge, etwa $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$ oder $\Omega = \mathbb{N}$ oder $\Omega = \mathbb{Z}$.
Für $1 \le p \le \infty$ und $f : \Omega \to \mathbb{K}$ definieren wir die **ℓ^p–Norm**

$$\|f\|_{\ell^p} := \Big[\sum_{k\in\Omega} \big|f(k)\big|^p \Big]^{1/p} \quad \text{wobei} \quad \|f\|_{\ell^\infty} := \sup_{k\in\Omega} \big|f(k)\big|.$$

Die **ℓ^p–summierbaren** Folgen bilden den $\mathbb{K}$–Vektorraum

$$\ell^p = \ell^p(\Omega) = \ell^p(\Omega,\mathbb{K}) := \big\{\, f : \Omega \to \mathbb{K} \;\big|\; \|f\|_{\ell^p} < \infty \,\big\}.$$

Demnach bedeutet ℓ^1 absolut summierbar, ℓ^2 quadratisch summierbar und ℓ^∞ beschränkt. Für Ω unendlich und $1 \le p < q \le \infty$ gilt $\ell^p \subsetneq \ell^q$.
Für $p, q \in [1,\infty]$ mit $1/p + 1/q = 1$ erhalten wir die **bilineare Paarung**

$$\langle\,\text{-}\,|\,\text{-}\,\rangle : \ell^p \times \ell^q \to \mathbb{K} \quad \text{mit} \quad \langle\, f \mid g \,\rangle := \sum_{k\in\Omega} \overline{f(k)}\, g(k).$$

Das Produkt ist absolut summierbar dank der **Hölder–Ungleichung**:

$$\|f \cdot g\|_{\ell^1} \le \|f\|_{\ell^p} \cdot \|g\|_{\ell^q}$$

☺ Im Spezialfall $p = q = 2$ ist dies die Cauchy–Schwarz–Ungleichung.

Vergleich der L^p– und ℓ^p–Räume

Eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : k \mapsto f_k$ ist eine reelle Zahlenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
Für Fourier–Reihen betrachten wir $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, also $\Omega = \mathbb{Z}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Summen von Folgen verhalten sich wie Integrale von Funktionen:

$f : \Omega \to \mathbb{K}$	$f : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \to \mathbb{K}$
$\lVert f\rVert_{\ell^1} := \sum_{x\in\Omega} \lvert f(x)\rvert$	$\lVert f\rVert_{L^1} := \int_{x\in\Omega} \lvert f(x)\rvert \,\mathrm{d}x$
$\lVert f\rVert_{\ell^2} := \left[\sum_{x\in\Omega} \lvert f(x)\rvert^2\right]^{\frac{1}{2}}$	$\lVert f\rVert_{L^2} := \left[\int_{x\in\Omega} \lvert f(x)\rvert^2 \,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}$
$\lVert f\rVert_{\ell^p} := \left[\sum_{x\in\Omega} \lvert f(x)\rvert^p\right]^{\frac{1}{p}}$	$\lVert f\rVert_{L^p} := \left[\int_{x\in\Omega} \lvert f(x)\rvert^p\right]^{\frac{1}{p}}$
$\lVert f\rVert_{\ell^\infty} := \sup_{x\in\Omega} \lvert f(x)\rvert$	$\lVert f\rVert_{L^\infty} := \operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} \lvert f(x)\rvert.$

☺ Gut für uns: Es gelten im Wesentlichen dieselben Rechenregeln.
Die Fourier–Isometrie $\mathscr{F} : L^2([0,2\pi],\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ übersetzt verlustfrei zwischen Funktionen und Folgen! Wir führen dies in Kapitel I und J aus.

Vergleich der L^p– und ℓ^p–Räume

Die Cauchy–Schwarz–Ungleichung $\lVert f\cdot g\rVert_{L^1} \le \lVert f\rVert_{L^2}\cdot\lVert g\rVert_{L^2}$ und die Hölder–Minkowski–Ungleichung gelten nicht nur für Integrale, sondern wörtlich genauso für Summen und Reihen. Wir führen dies hier aus, als lehrreiche Übung zur Wiederholung und der sorgfältigen Argumentation.

Übung: (1) Wiederholen Sie die Definition von $\lVert -\rVert_{L^p}$ und $L^p(\Omega,\mathbb{K})$ und führen Sie die obige Definition von $\lVert -\rVert_{\ell^p}$ und $\ell^p(\Omega,\mathbb{K})$ aus.

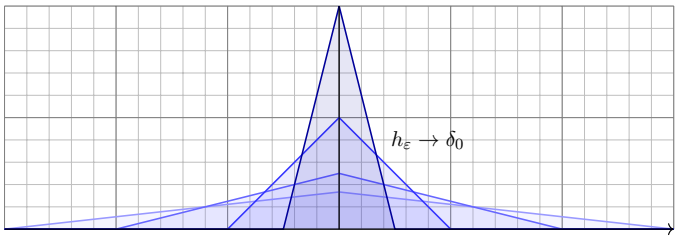
(2) Warum ist $L^p(\Omega,\mathbb{K})$ bzw. $\ell^p(\Omega,\mathbb{K})$ ein $\mathbb{K}$–Vektorraum?
Die Fälle $p = 1$ und $p = \infty$ sind besonders leicht: Warum und wie?
Der Fall $p = 2$ gelingt durch die Cauchy–Schwarz–Ungleichung: Wie?
Der allgemeine Fall $1 < p < \infty$ benötigt Hölder–Minkowski (C4L):
Wiederholen Sie dies für L^p und beweisen Sie es analog für ℓ^p.

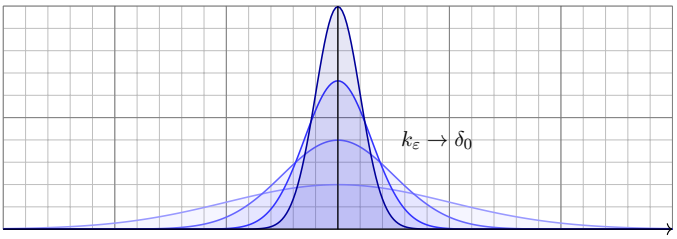
(3) Für $\emptyset < \operatorname{vol}(\Omega) < \infty$ und $1 < p < q < \infty$ gilt $L^1 \supsetneq L^p \supsetneq L^q \supsetneq L^\infty$.
Diskret gilt $\ell^1 \subsetneq \ell^p \subsetneq \ell^q \subsetneq \ell^\infty$; es genügt, dies für $\Omega = \mathbb{N}$ zu diskutieren.
Hier unterscheiden sich die Räume $L^p([0,2\pi])$ und $\ell^p(\mathbb{Z})$ für $1 \le p \le \infty$.

(4) Warum ist $L^\infty(\Omega,\mathbb{K})$ eine $\mathbb{K}$–Algebra, nicht aber $L^p(\Omega,\mathbb{K})$ für $p < \infty$?
Überraschung: Warum ist $\ell^p(\Omega,\mathbb{K})$ eine $\mathbb{K}$–Algebra für alle $1 \le p \le \infty$?

Kapitel D

Integrale und Grenzwerte





Then I come along and try differentiating under the integral sign, and often it worked. So I got a great reputation for doing integrals, only because my box of tools was different from everybody else's, and they had tried all their tools on it before giving the problem to me.

Richard Feynman (1918–1988), *Surely You're Joking, Mr. Feynman!* (1985)

Inhalt dieses Kapitels D

1 Vertauschen von Integral und Reihe
- Absolute Konvergenz in L^1
- Integration von Potenzreihen

2 Vertauschen von Integral und Limes
- Punktweise Konvergenz
- Majorisierte Konvergenz

3 Vertauschen von Integral und Ableitung
- Kompakte Integrationsbereiche
- Beliebige Integrationsbereiche

4 Weitere Aufgaben und Anwendungen
- Warnende Beispiele zur Vertauschung
- Berechnung von Integralen und Reihen

5 Kalkül der Distributionen
- Lösungen der Wärmeleitungsgleichung
- Distributionen und ihre Rechenregeln

Wann vertauschen Integral und Limes?

Integration einer Reihe: Unter welchen Voraussetzungen gilt

$$\int_\Omega \left[\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right] \mathrm{d}x \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_\Omega f_k(x)\,\mathrm{d}x \right] \quad ?$$

Stetigkeit des Integrals: Unter welchen Voraussetzungen gilt

$$\int_\Omega \left[\lim_{k\to\infty} f_k(x) \right] \mathrm{d}x \quad = \quad \lim_{k\to\infty} \left[\int_\Omega f_k(x)\,\mathrm{d}x \right] \quad ?$$

Ableitung des Integrals: Unter welchen Voraussetzungen gilt

$$\int_Y \left[\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \right] \mathrm{d}y \quad = \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y \right] \quad ?$$

☺ Diese Rechentechniken sind oft hilfreich. Die wollen Sie nutzen.

☹ Die Gleichungen gelten nicht immer! Das müssen Sie wissen.

☺ Es gibt einfache Kriterien. Die sollen Sie beherrschen.

Das zentrale Kriterium ist die majorisierte Integrierbarkeit.

Vorgehensweise

In Rechnungen möchten Sie oft Integral und Grenzwert vertauschen. In Anwendungen treten diese Umformungen häufig auf. Leider werden sie oft blind oder nach Gefühl angewendet, oder gar so getan, als gälten sie einfach immer. Das ist nicht richtig, wie wir an Beispielen sehen.

Die Gleichungen gelten aber doch häufig genug, um nützlich zu sein, und zahlreiche Anwendungen illustrieren die Kraft dieser Methoden. Zur korrekten Verwendung benötigen Sie also geeignete Kriterien!

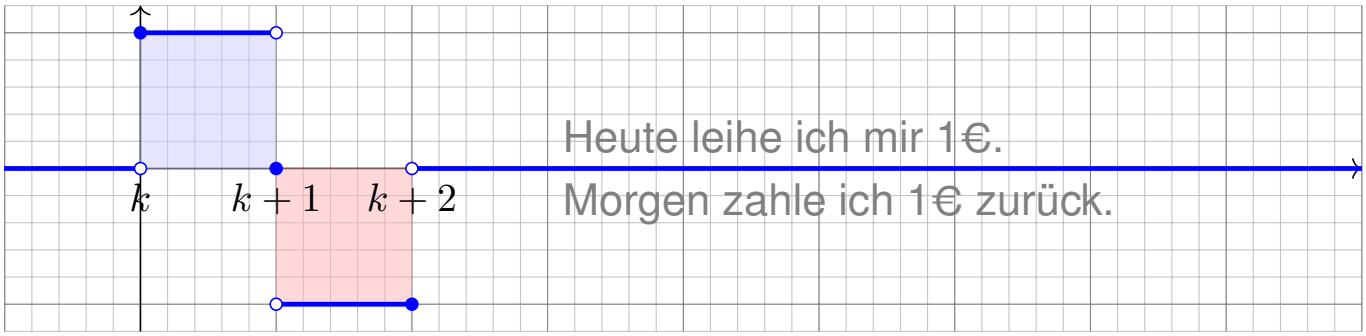
Wir wollen daher in diesem Kapitel die Voraussetzungen erläutern und die ersehnten Rechenregeln ableiten. Als Mahnung zur Sorgfalt illustrieren einfache Gegenbeispiele, wann die Formeln nicht gelten.

Als erste Warnung nenne ich folgenden beliebten Finanztrick:
Am Tag 1 leihe ich mir 1 Euro, den ich dann am Tag 2 zurückzahle.
Auch am Tag 2 leihe ich mir 1 Euro, den ich am Tag 3 zurückzahle.
Dies setze ich nun unbegrenzt fort. Was ich leihe, zahle ich zurück…
dennoch verschafft mir diese Reihe 1 Euro, den ich nie zurückzahle!
Anschaulich: Die Schulden werden nach Unendlich verschoben.
Vor dieser Methode möchte ich hier ausdrücklich warnen!

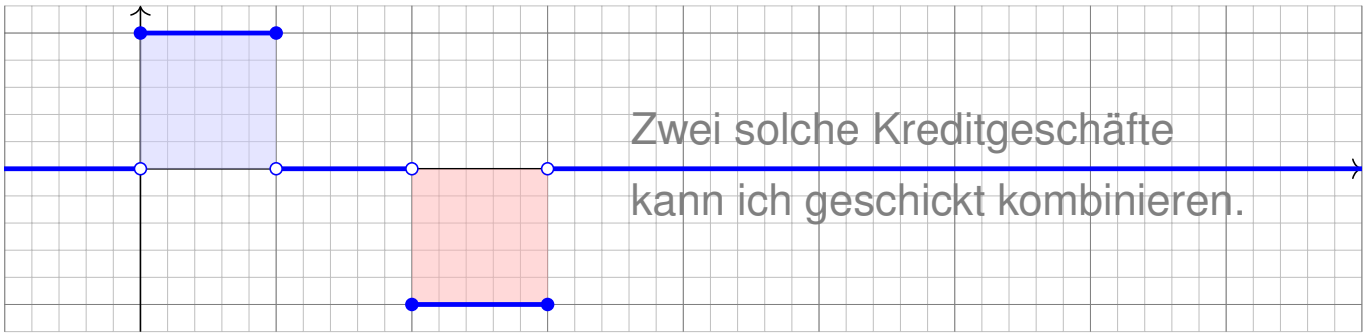
Kreative Kreditrechnung und Umordnungsschwindel

D101
Beispiel

Kredit und Tilgung: Skizzieren Sie $f_k = \mathbf{I}_{[k,k+1]} - \mathbf{I}_{[k+1,k+2]}$ für $k \in \mathbb{N}$.



Offensichtlich gilt $\int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

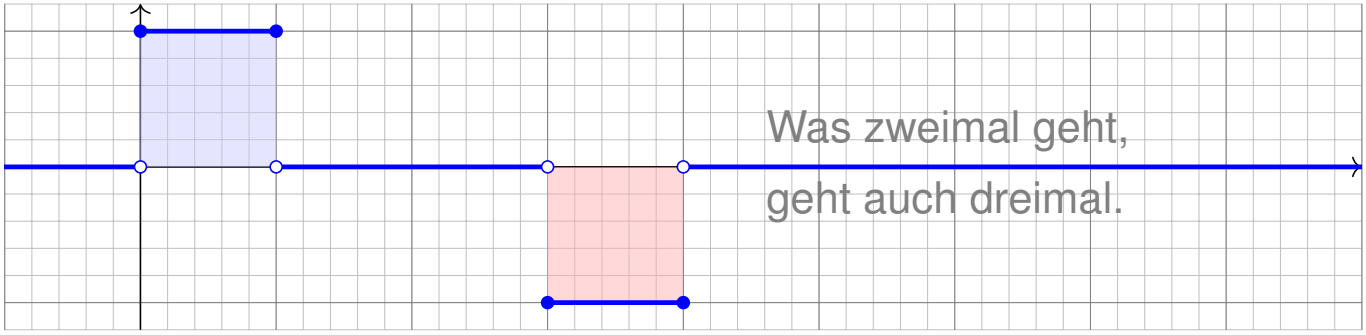


Auch für $g_1 = f_0 + f_1$ ist das Integral Null.

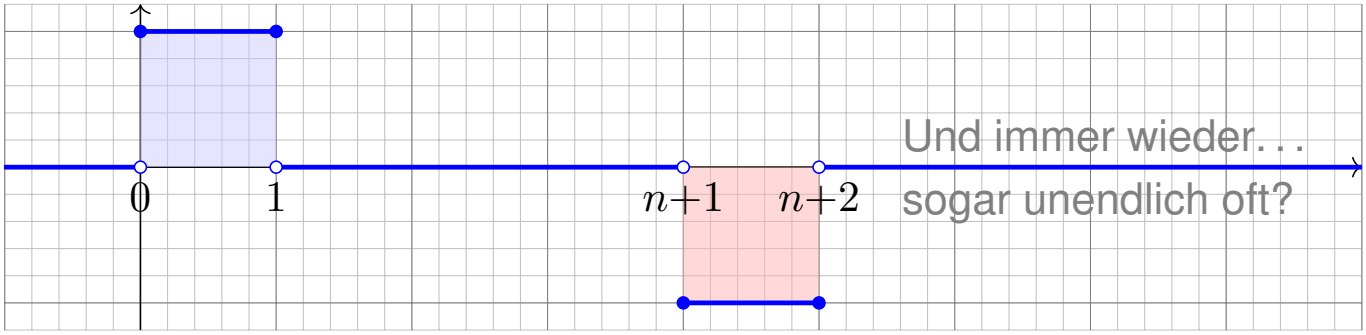
Kreative Kreditrechnung und Umordnungsschwindel

D102
Beispiel

Graph zu $g_2 = f_0 + f_1 + f_2$:



Graph zur Teleskopsumme $g_n = f_0 + f_1 + \cdots + f_n$:



Das Integral $\int_{\mathbb{R}} g_n(x)\,\mathrm{d}x$ ist jeweils Null. Was passiert für $n \to \infty$?

Kreative Kreditrechnung und Umordnungsschwindel

Aufgabe: Man berechne und vergleiche und bestaune:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,\mathrm{d}x\right] \quad \overset{?}{=} \quad \int_{\mathbb{R}}\left[\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\right]\mathrm{d}x$$

Lösung: (a) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sehen wir (rechnerisch oder graphisch):

$$\int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,\mathrm{d}x\right] = 0$$

(b) Andererseits kennen wir für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Teleskopsumme

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = \mathbf{I}_{[0,1]}(x) - \mathbf{I}_{[n+1,n+2]}(x) \quad \to \quad \mathbf{I}_{[0,1]}(x).$$

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $n \to \infty$ gilt daher punktweise Konvergenz:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \mathbf{I}_{[0,1]}(x) \qquad \Longrightarrow \qquad \int_{\mathbb{R}}\left[\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\right]\mathrm{d}x = 1$$

Kreative Kreditrechnung und Umordnungsschwindel

☹ Integral und Reihe vertauschen im Allgemeinen nicht!
Dies ist ein sehr einfaches, doch frappierendes Beispiel:
Für die Funktionen $f_k = \mathbf{I}_{[k,k+1]} - \mathbf{I}_{[k+1,k+2]}$ gilt

$$\int_{\Omega}\left[\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\right]\mathrm{d}x \quad \neq \quad \sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_{\Omega} f_k(x)\,\mathrm{d}x\right].$$

Anschauliche Ursache: „Masse verschwindet nach Unendlich“.

⚠ Im Kreditbeispiel: Wir leihen uns Geld, das wir nie zurückzahlen.
Wir vertrösten immer auf morgen, doch lösen das Versprechen nie ein.
(Schneeballsystem, Ponzi–Betrug, „robbing Peter to pay Paul“)

⚠ In den meisten Anwendungen sollte diese Pathologie nicht auftreten.
Wir müssen dazu die Erhaltung der Masse explizit sicherstellen,
gegebenenfalls separat nachweisen oder ausrücklich fordern.

☺ Mathematisch garantieren wir dies durch Fubini D1A oder
allgemeiner den Satz von der majorisierten Konvergenz D2D.
Damit lässt sich das Problem präzise benennen und lösen.

Vertauschen von Integral und Reihe

Aufgabe: Zeigen Sie $\int_\Omega \sum_{k=0}^\infty f_k = \sum_{k=0}^\infty \int_\Omega f_k$ für $f_k : \Omega \to [0,\infty]$.

Lösung: Dank Linearität des Integrals gilt für endliche Summen:

$$I_n := \int_\Omega \sum_{k=0}^n f_k = \sum_{k=0}^n \int_\Omega f_k$$

Dank $f_k \geq 0$ gilt monotone Konvergenz $\sum_{k=0}^n f_k \nearrow \sum_{k=0}^\infty f_k$, also

$$I_n = \int_\Omega \sum_{k=0}^n f_k \quad \nearrow \quad \int_\Omega \sum_{k=0}^\infty f_k =: A.$$

Aus $\int_\Omega f_k \geq 0$ folgt ebenso die monotone Konvergenz der Reihe

$$I_n = \sum_{k=0}^n \int_\Omega f_k \quad \nearrow \quad \sum_{k=0}^\infty \int_\Omega f_k =: B.$$

Die Folge I_n kann nur einen Grenzwert haben! Wir folgern $A = B$:

$$\int_\Omega \sum_{k=0}^\infty f_k = \sum_{k=0}^\infty \int_\Omega f_k$$

☺ Alles wird gut! Dies wollen wir nun als Satz zusammenfassen.

Vertauschen von Integral und Reihe

Satz D1A: Fubini für absolut konvergente Reihen

Sei $f_0, f_1, f_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{C}$ eine Folge messbarer Funktionen. Dann gilt

$$\int_\Omega \sum_{k=0}^\infty |f_k| \quad = \quad \sum_{k=0}^\infty \int_\Omega |f_k|.$$

Ist dieser Wert endlich, so ist $f = \sum_{k=0}^\infty f_k$ in fast allen Punkten $x \in \Omega$ absolut konvergent, zudem über Ω absolut integrierbar, und es gilt

$$\boxed{\int_\Omega \sum_{k=0}^\infty f_k \quad = \quad \sum_{k=0}^\infty \int_\Omega f_k.}$$

☺ Beachten Sie die Parallele: Der Satz C1E von Fubini besagt dasselbe für Integrale.

Beweis: Die erste Gleichung haben wir gezeigt. Die Punkte $x \in \Omega$ mit $\sum_{k=0}^\infty |f_k(x)| = +\infty$ bilden eine Nullmenge N. Für alle $x \in \Omega \smallsetminus N$ gilt $\sum_{k=0}^\infty |f_k(x)| < +\infty$, und wir definieren $f(x) = \sum_{k=0}^\infty f_k(x)$ durch diese absolut konvergente Reihe. Für $x \in N$ setzen wir $f(x) = 0$. Die zweite Gleichung gilt für $f_k : \Omega \to [0,\infty]$. Sie folgt für reelle Funktionen durch Zerlegung $f_k = f_k^+ - f_k^-$, und sodann für komplexe Funktionen durch Zerlegung $f_k = \operatorname{Re} f_k + \mathrm{i} \operatorname{Im} f_k$.

Integration von Potenzreihen

D107
Beispiel

Aufgabe: Gegeben sei eine konvergente Potenzreihe

$$f \,:\,]-\rho,\rho[\, \to \mathbb{R} \,:\, x \mapsto f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

(1) Entwickeln Sie $F(x) = \int_{t=0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x$ ebenso als Potenzreihe.
(2) Konkretes Beispiel: Entwickeln und integrieren Sie $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

Lösung: (1) Dank D1A dürfen wir Integral und Reihe vertauschen:

$$F(x) = \int_{t=0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{x} \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k\right] \mathrm{d}t \overset{\text{D1A}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_{t=0}^{x} a_k t^k\,\mathrm{d}t\right]$$

$$\overset{\text{HDI}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k-1}}{k} x^k$$

☺ Die Vertauschung gilt hier dank absoluter Konvergenz auf $[0,x]$.
☺ Probe durch termweises ableiten. (2) Konkretes Beispiel: B145

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k} \quad \overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} x^{2k+1}.$$

Wann vertauschen Integral und Reihe?

D108
Ausführung

Für $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ möchten wir Integral und Reihe vertauschen:

$$\int_{\Omega} \left[\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\right] \mathrm{d}x \quad \overset{?}{=} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_{\Omega} f_k(x)\,\mathrm{d}x\right]$$

Hierfür haben wir folgende hinreichende Kriterien:

- Gleichheit gilt für $f_k \geq 0$: monotone Konvergenz! A309
- Gleichheit gilt für $\int \sum |f_k| < \infty$ bzw. für $\sum \int |f_k| < \infty$, D106
- insbesondere für konvergente Potenzreihen, $f_k(x) = a_k x^k$. D107

⚠ Andernfalls ist Vorsicht geboten: Vertauschbarkeit gilt nicht immer!
⚠ Diese Kriterien sind hinreichend, aber i.A. nicht notwendig. D429

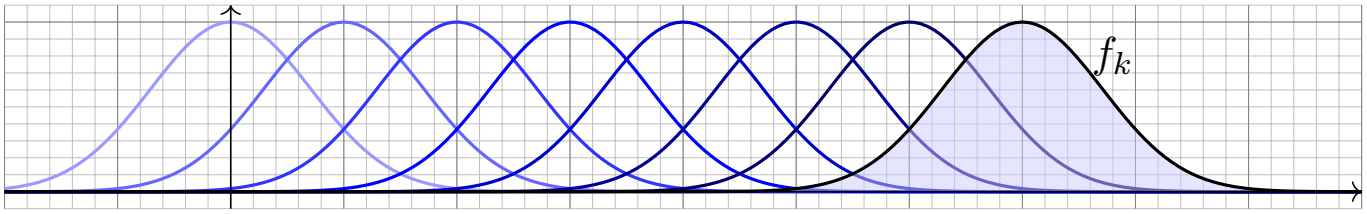
Im obigen Gegenbeispiel gilt $\sum \int f_k \neq \int \sum f_k$. Die Konvergenz ist hier nicht monoton, denn f_k hat einen positiven und einen negativen Teil. Zudem gilt $\sum \int |f_k| = \int \sum |f_n| = \infty$. Unsere einfachen Kriterien sind hier demnach nicht anwendbar und lassen keinen Schluss zu. Wir haben daher $\sum \int f_k$ und $\int \sum f_k$ getrennt ausgerechnet, um explizit vergleichen zu können: Bemerkenswerterweise gilt $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,\mathrm{d}x\right) = 0$, aber $\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\right) \mathrm{d}x = 1$. Konkrete Gegen/Beispiele wie diese sind lehrreich. Rechnen reinigt die Seele! Sätze klären und ordnen Phänomene und liefern universelle Werkzeuge.

Punktweise Konvergenz einer Funktionenfolge

Definition D2A: punktweise Konvergenz

Wir sagen, die Funktionenfolge $f_k : \Omega \to \mathbb{C}$ **konvergiert punktweise** gegen die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$, wenn $f_k(x) \to f(x)$ für jedes $x \in \Omega$ gilt

Aufgabe: Skizzieren Sie $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{e}^{-(x-k)^2}$ für $k \in \mathbb{N}$.
(1) Konvergiert f_k punktweise? Gegen welche Grenzfunktion f?
(2) Vergleichen Sie $\int_{\mathbb{R}} \lim_{k\to\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x$ und $\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,\mathrm{d}x$.



Lösung: (1) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $k \to \infty$ gilt $f_k(x) \to 0$. (2) Daher gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{k\to\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} 0\,\mathrm{d}x = 0 \quad \neq \quad \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}$$

⚠ Anschauliche Ursache: „Masse verschwindet nach Unendlich“.

Punktweise Konvergenz einer Funktionenfolge

Dasselbe Problem entsteht für jede integrierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x) \to 0$ für $|x| \to \infty$, etwa die Indikatorfunktion $f = \mathbf{I}_Q$ zu einen endlichen Quader Q, und ihre Verschiebungen $f_k(x) = f(x - kv)$.

In vielen Rechnungen stehen wir vor der Frage: Wie verhalten sich die Integrale $\int_\Omega f_k$ und $\int_\Omega f$ bei punktweiser Konvergenz $f_k \to f$?

☹ Stetigkeit und Integrierbarkeit können verloren gehen!
Die nachfolgende Aufgabe zeigt ein einfaches Beispiel.

☺ Messbarkeit ist unkaputtbar! Sind alle f_k messbar und konvergiert $f_k \to f$ punktweise, dann ist auch die Grenzfunktion f messbar. A316

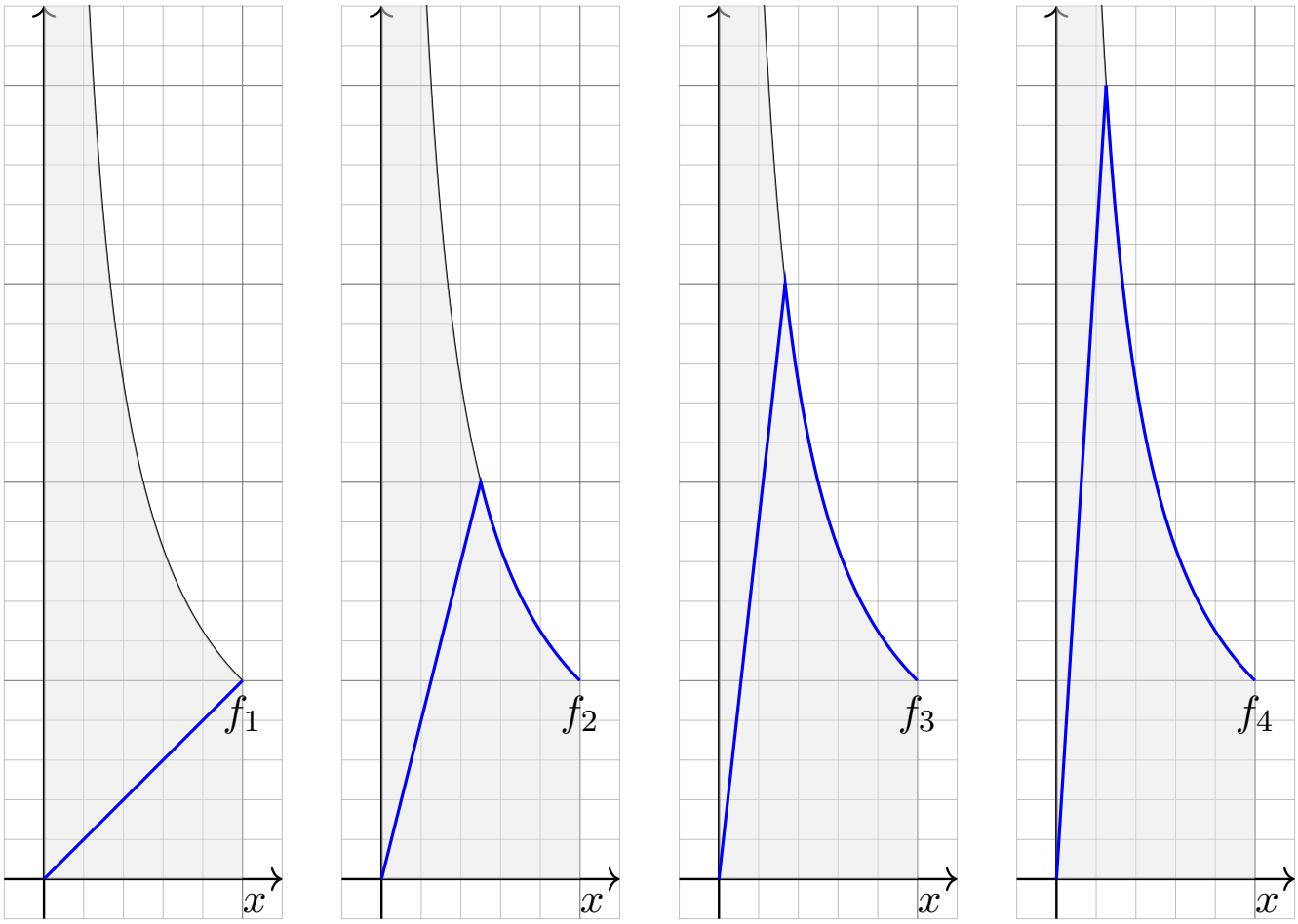
☺ Monotone Konvergenz funktioniert immer! A309
Aus monotoner Konvergenz $0 \le f_k \nearrow f$ folgt stets $\int_\Omega f_k \nearrow \int_\Omega f$.

☹ Im Allgemeinen folgt aus $f_k \to f$ jedoch nicht $\int_\Omega f_k \to \int_\Omega f$.
Typisches Problem: „Masse verschwindet nach Unendlich“.

Unter welchen Voraussetzungen können wir $\int_\Omega f_k \to \int_\Omega f$ schließen?
Als praktisches Kriterium werden wir die majorisierte Integrierbarkeit nutzen. Zur Motivation stelle ich ein paar warnende Beispiele voran.

Stetigkeit und Integrierbarkeit sind zerbrechlich!

D203
Ausführung



Stetigkeit und Integrierbarkeit sind zerbrechlich!

D204
Ausführung

Aufgabe: Skizzieren Sie für $k = 1, 2, 3, \ldots$ die Funktion

$$f_k \,:\, [0,1] \to \mathbb{R} \,:\, x \mapsto \begin{cases} k^2 x & \text{für } 0 \le x \le \frac{1}{k}, \\ \frac{1}{x} & \text{für } \frac{1}{k} \le x \le 1. \end{cases}$$

(1) Bestimmen Sie punktweise die Grenzfunktion $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$.
(2) Ist jede Funktion f_k stetig? integrierbar? und die Grenzfunktion f?

Lösung: (1) Für festes $x \in [0,1]$ finden wir den Grenzwert

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) := \begin{cases} 1/x & \text{für } 0 < x \le 1, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(2) Jede der Funktionen $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist stetig und somit integrierbar. Die Grenzfunktion f hingegen ist weder stetig noch absolut integrierbar.

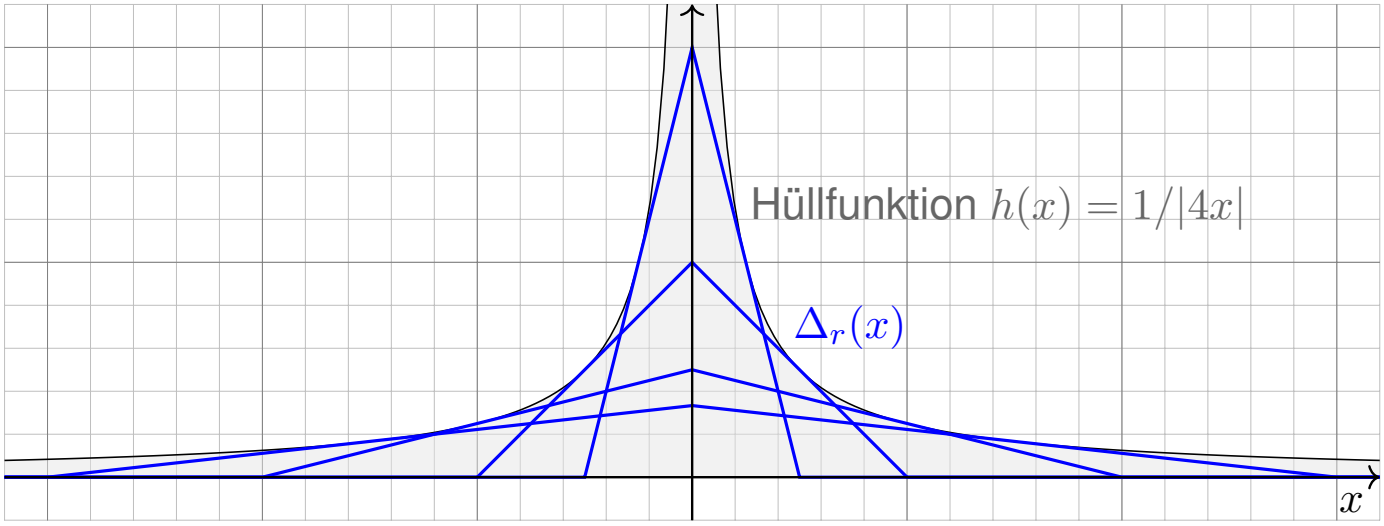
⚠ Sind alle Funktionen f_k stetig bzw. integrierbar, so kann man nicht auf die Stetigkeit bzw. Integrierbarkeit der Grenzfunktion f schließen!
⚠ Selbst wenn alle f_k und die Grenzfunktion f integrierbar sind, wie oben, gilt im Allgemeinen nicht die Konvergenz der Integralfolge!

Integral und Limes vertauschen nicht immer!

D205
Ausführung

Aufgabe: Skizzieren Sie für $r \in \mathbb{R}_{>0}$ die Dreiecksfunktion

$$\Delta_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \Delta_r(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| \geq r, \\ \frac{r-|x|}{r^2} & \text{für } |x| \leq r. \end{cases}$$



(1) Berechnen Sie $\lim\limits_{r\to\infty} \Delta_r(x)$. Gilt $\lim\limits_{r\to\infty} \int \Delta_r(x)\,\mathrm{d}x = \int \lim\limits_{r\to\infty} \Delta_r(x)\,\mathrm{d}x$?

(2) Berechnen Sie $\lim\limits_{r\to 0} \Delta_r(x)$. Gilt $\lim\limits_{r\to 0} \int \Delta_r(x)\,\mathrm{d}x = \int \lim\limits_{r\to 0} \Delta_r(x)\,\mathrm{d}x$?

Integral und Limes vertauschen nicht immer!

D206
Ausführung

Lösung: Für jedes $r > 0$ gilt $\int_{\mathbb{R}} \Delta_r(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

(1) Für festes $x \in \mathbb{R}$ und $r \to \infty$ finden wir den Grenzwert

$$\lim_{r\to\infty} \Delta_r(x) = 0.$$

Die Grenzfunktion hat daher Integral 0. Demnach gilt:

$$\lim_{r\to\infty} \int \Delta_r(x)\,\mathrm{d}x = 1 \quad \neq \quad 0 = \int \lim_{r\to\infty} \Delta_r(x)\,\mathrm{d}x$$

(2) Für festes $x \in \mathbb{R}$ und $r \to 0$ finden wir den Grenzwert

$$\lim_{r\to 0} \Delta_r(x) = \Delta_0(x) := \begin{cases} \infty & \text{für } x = 0, \\ 0 & \text{für } x \neq 0. \end{cases}$$

Die Grenzfunktion hat daher Integral 0. Demnach gilt:

$$\lim_{r\to 0} \int \Delta_r(x)\,\mathrm{d}x = 1 \quad \neq \quad 0 = \int \lim_{r\to 0} \Delta_r(x)\,\mathrm{d}x$$

⚠ Die Ursache des Problems ist in beiden Fällen anschaulich klar: Masse „verschwindet nach Unendlich“ und fehlt daher im Integral.

Majorisierte Integrierbarkeit: Definition

Definition D2B: majorisierte Integrierbarkeit

Sei $(f_i)_{i\in I}$ eine Familie messbarer Funktionen $f_i : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $i \in I$.

Wir nennen $h : \Omega \to [0,\infty]$ **Majorante**, wenn $|f_i| \le h$ für alle $i \in I$ gilt.

Die Familie heißt **majorisiert integrierbar**, wenn eine integrierbare Majorante existiert, also $h : \Omega \to [0,\infty]$ mit $|f_i| \le h$ und $\int_\Omega h < \infty$.

☺ Die Integrierbarkeit $\int_\Omega h < \infty$ der Majorante garantiert, dass keine Masse nach Unendlich verschwinden kann.

☺ Aus der Majoration $|f_i| \le h$ folgt $\int_\Omega |f_i| \le \int_\Omega h < \infty$, insbesondere ist jede einzelne der Funktionen f_i integrierbar.

⚠ Selbst wenn jede einzelne Funktion f_i integrierbar ist, folgt daraus noch nicht, dass die gesamte Familie $(f_i)_{i\in I}$ majorisiert integrierbar ist!

Beispiel: Zu $r \in \mathbb{R}_{>0}$ sei $\Delta_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \max(0, \frac{r-|x|}{r^2})$.
Zur Familie $(\Delta_r)_{r\in\mathbb{R}_{>0}}$ ist $h(x) = 1/|4x|$ eine Majorante.
Dies ist sogar die kleinste Majorante, denn $\Delta_{2|x|}(x) = h(x)$.
Die Familie $(\Delta_r)_{r\in\mathbb{R}_{>0}}$ ist daher nicht majorisiert integrierbar.

Majorisierte Integrierbarkeit: Hüllfunktion

Das vorige Beispiel ist durchaus typisch:

Proposition D2C: Hüllfunktion

Eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ messbarer Funktionen $f_0, f_1, f_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{C}$ ist genau dann majorisiert integrierbar, wenn ihre **Hüllfunktion**

$$h = \sup_{k\in\mathbb{N}} |f_k| \;:\; \Omega \to \mathbb{R}_{\ge 0} \;:\; x \mapsto h(x) = \sup_{k\in\mathbb{N}} |f_k(x)|,$$

absolut integrierbar ist, also $\int_\Omega h < \infty$ erfüllt.

Beweis: Mit f_k ist auch $|f_k|$ messbar, ebenso $h_k = \max\{|f_0|, \ldots, |f_k|\}$.
Somit ist auch die obige Hüllfunktion $h := \lim h_k = \sup |f_k|$ messbar.

Wegen $|f_k| \le h$ ist dies eine Majorante, und zwar die kleinst mögliche.
Damit ist die behauptete Äquivalenz klar dank Monotonie des Integrals.

Beispiel: Für die wandernden Glockenkurven $f_a(x) = s\,\mathrm{e}^{-(x-a)^2}$ mit $a \in \mathbb{R}$ ist die Hüllfunktion $h = 1$: Man betrachte hierzu obige Skizze.

Die Familie $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ ist also nicht majorisiert integrierbar.

Der Satz von der majorisierten Konvergenz

Unter welchen Vorsichtsmaßnahmen gilt folgende nützliche Formel?

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Satz D2D: majorisierte Konvergenz, Lebesgue 1901

Sei $f_0, f_1, f_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{C}$ eine Folge messbarer Funktionen.

(1) Konvergiert f_n punktweise gegen $f : \Omega \to \mathbb{C}$, so ist auch f messbar.

(2) Existiert eine **integrierbare Majorante** $h : \Omega \to \mathbb{R}$, mit $|f_n| \le h$ und $\int_\Omega h < \infty$, so ist f int'bar, es gilt $\int_\Omega |f_n - f| \to 0$ und somit $\int_\Omega f_n \to \int_\Omega f$.

☺ Dies ist eine nützliche Stetigkeitseigenschaft des Integrals!

⚠ Die punktweise Konvergenz (1) allein genügt nicht, siehe Beispiele.
Die integrierbare Majorante (2) ist daher wesentliche Voraussetzung:

Die Majorante verhindert, dass Masse nach Unendlich verschwindet!
In den obigen Beispielen war genau dies die Ursache des Problems.

☺ Anwendungsbeispiel: $\mathrm{vol}(\Omega) < \infty$ und $|f_n| \le M \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis der majorisierten Konvergenz

Nachrechnen: (1) Monotone Grenzwerte messbarer Funktionen sind messbar. A309
Alle f_n sind messbar, also auch $f_{n,k} := \min\{f_n, \ldots, f_k\}$ und $f_{n,k} \searrow g_n := \inf_{k\ge n} f_k$.
Es gilt $g_n \nearrow \lim g_n = \liminf f_n = \lim f_n = f$ nach Voraussetzung, also ist auch f messbar.

(2) Wir beginnen mit der Ungleichung $0 \le \left|\int f_n - \int f\right| = \left|\int (f_n - f)\right| \le \int |f_n - f|$.
Wir zeigen nun, dass die rechte Seite $\int |f_n - f|$ für $n \to \infty$ gegen Null strebt.
Die folgende Rechnung ist technisch, aber jeder einzelne Schritt ist leicht.

Lemma von Fatou: Sind $f_n : \Omega \to [0, \infty]$ messbar, dann gilt $\int \liminf f_n \le \liminf \int f_n$.

Beweis des Lemmas: Für $g_n := \inf_{k\ge n} f_k$ gilt $g_n \le f_n$ und $g_n \nearrow g = \liminf f_n$, also

$$\int \liminf f_n \quad = \quad \int \lim g_n \quad \underset{\text{A3G}}{\overset{\text{MoK}}{=}} \quad \lim \int g_n \quad = \quad \liminf \int g_n \quad \le \quad \liminf \int f_n .$$

Beweis des Satzes der majorisierten Konvergenz: Es gelte $f_n \to f$ (zumindest fast überall).
Aus $|f_n| \le h$ folgt $|f| \le h$ (fast überall), somit $|f - f_n| \le |f| + |f_n| \le 2h$. Mit Fatou folgt:

$$\begin{aligned} \int 2h = \int \liminf \Big(2h - |f_n - f|\Big) \quad &\le \liminf \int \Big(2h - |f_n - f|\Big) \\ = \liminf \left(\int 2h - \int |f_n - f|\right) &= \int 2h - \limsup \int |f_n - f| \end{aligned}$$

Wir setzen $\int 2h$ als endlich voraus. Daher können wir diesen Wert auf beiden Seiten subtrahieren.
Wir erhalten $\limsup \int |f_n - f| \le 0$. Mit $\int |f_n - f| \ge 0$ folgt schließlich $\lim \int |f_n - f| = 0$.

Nochmal Integral und Reihe

Beispiel: Sei $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen $g_k : \Omega \to \mathbb{C}$ mit

$$\int_\Omega \sum_{k=0}^{\infty} |g_k| \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \int_\Omega |g_k| < \infty.$$

Dank majorisierter Konvergenz erhalten wir erneut

$$\int_\Omega \sum_{k=0}^{\infty} g_k \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \int_\Omega g_k.$$

Für $n \to \infty$ gilt (fast überall) punktweise Konvergenz

$$f_n = \sum_{k=0}^{n} g_k \quad \to \quad f = \sum_{k=0}^{\infty} g_k.$$

Zudem ist $h = \sum_{k=0}^{\infty} |g_k|$ eine Majorante für $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und somit

$$\int_\Omega f_n = \int_\Omega \sum_{k=0}^{n} g_k \quad \to \quad \int_\Omega f = \int_\Omega \sum_{k=0}^{\infty} g_k.$$

Wann vertauschen Integral und Limes?

Für $f_n \to f$ möchten wir Integral und Limes vertauschen:

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}x \quad \overset{?}{=} \quad \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Dies ist eine starke und nützliche Stetigkeitseigenschaft des Integrals!

Hierfür haben wir folgende hinreichende Kriterien:

- Gleichheit gilt bei monotoner Konvergenz $0 \le f_n \nearrow f$, A309
- bei majorisierter Konvergenz $f_n \to f$ mit $|f_n| \le h$ und $\int_\Omega h < \infty$,
- insbesondere, wenn $\mathrm{vol}(\Omega) < \infty$ und $|f_n| \le M \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

☺ Dies verhindert, dass Masse nach Unendlich verschwindet.

☺ Sei $h : \Omega \to [0, \infty]$ integrierbar. Auf der Teilmenge aller messbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{C}$ mit Schranke $|f| \le h$ ist die Zuordnung $f \mapsto \int_\Omega f$ folgenstetig: Aus punktweiser Konvergenz $f_n \to f$ folgt $\int_\Omega f_n \to \int_\Omega f$.

⚠ Andernfalls ist Vorsicht geboten: Vertauschbarkeit gilt nicht immer! Wie zuvor gesehen können selbst einfache Beispiele fehlschlagen.

Parameterabhängige Integrale

Ein **parameterabhängiges Integral** ist von der Form

$$F(x) = \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y \quad \text{mit} \quad f : X \times Y \to \mathbb{C}.$$

Beispiele: (1) Wir kennen dies bereits von **Doppelintegralen**

$$\int_X \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_X F(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2) Das **Newton–Potential** einer Massenverteilung $\varrho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ist

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) = \int_{y \in \mathbb{R}^3} \frac{\varrho(y)}{|y-x|}\,\mathrm{d}y.$$

(3) Die **Fourier–Transformierte** einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Ist F stetig? diff'bar? Wann dürfen wir ∂_x unters Integral ziehen?

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y \quad \overset{?}{=} \quad \int_Y \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

Parameterintegrale auf Rechtecken

Wir beginnen mit Parameterintegralen der einfachsten Bauart:

Satz D3A: Parameterintegrale auf Rechtecken

Ist $f : [x_0, x_1] \times [y_0, y_1] \to \mathbb{C}$ stetig, so auch die Funktion

$$F : [x_0, x_1] \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad F(x) := \int_{y=y_0}^{y_1} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Ist zudem f stetig diff'bar bezüglich x, so auch F, und es gilt

$$\boxed{F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{y=y_0}^{y_1} f(x,y)\,\mathrm{d}y \;=\; \int_{y=y_0}^{y_1} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,\mathrm{d}y.}$$

In diesem Falle dürfen wir also die Ableitung unter das Integral ziehen.

☺ Die Stetigkeit von f bzw. $\frac{\partial f}{\partial x}$ sind naheliegende Voraussetzungen.

☺ Die Kompaktheit von $[y_0, y_1]$ verhindert, dass Masse verschwindet!

Dies ist ein Spezialfall der viel allgemeineren Sätze D3D und D3E zur Stetigkeit und Ableitung von Parameterintegralen. Wir beweisen sie nachfolgend dank majorisierter Integrierbarkeit.

Leibniz–Regel für Parameterintegrale

Etwas allgemeiner und noch nützlicher sind Normalbereiche:

Satz D3B: Leibniz–Regel für Parameterintegrale

Seien $g, h : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $g \le h$. Auf dem Normalbereich

$$B = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_0 \le x \le x_1,\ g(x) \le y \le h(x) \,\}$$

sei $f : B \to \mathbb{C}$ stetig. Integration nach y ergibt die stetige Funktion

$$F : [x_0, x_1] \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad F(x) := \int_{y=g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Sind zudem f, g, h stetig diff'bar bezüglich x, so auch F, und es gilt

$$\boxed{F'(x) = h'(x)\, f\big(x, h(x)\big) - g'(x)\, f\big(x, g(x)\big) + \int_{y=g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}y}$$

☺ Bei festen Grenzen $g(x) = y_0$ und $h(x) = y_1$ erhalten wir Satz D3A.

☺ Als Spezialfall enthält Satz D3B den HDI: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{y=a}^{x} f(y)\,\mathrm{d}y = f(x)$.

Leibniz–Regel für Parameterintegrale

☺ Wie zuvor können wir die Ableitung unter das Integral ziehen.
Als Randterme kommen die Ableitungen der Intervallgrenzen hinzu!

Beweis: Zur Vereinfachung sei f auf ganz $\mathbb{R}^2$ fortgesetzt zu einer stetigen Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$. Als Hilfsfunktion definieren wir

$$G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C} \quad \text{durch} \quad G(x,u,v) := \int_{y=u}^{v} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Sie ist stetig in u, v, x dank Satz D3A, und sogar stetig differenzierbar nach u, v, x dank Satz D3A für $x_0 \le x \le x_1$ und $g(x) \le u \le v \le h(x)$. Somit ist die Verkettung $F(x) = G\big(x, g(x), h(x)\big)$ stetig in x, sogar C^1.
Für die Ableitung F' finden wir dank Kettenregel, Satz D3A und HDI:

$$F'(x) = \frac{\partial G}{\partial x}\big(x, g(x), h(x)\big) + \frac{\partial G}{\partial u}(\dots)\,\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x) + \frac{\partial G}{\partial v}(\dots)\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}(x)$$

$$= \int_{y=g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}y - f\big(x, g(x)\big)\, g'(x) + f\big(x, h(x)\big)\, h'(x)$$

☺ Für diese etwas längliche Ableitung genügen Geduld und Sorgfalt.
Diese Leibniz–Formel nützt in vielen Rechnungen, zum Beispiel N247.

Parameterintegrale über Kompakta

Alles bleibt einfach, solange wir über Kompakta integrieren:

Satz D3C: Parameterintegrale über Kompakta

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^p$ offen, $Y \subseteq \mathbb{R}^q$ kompakt. Ist $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ stetig, so auch

$$F : X \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad F(x) := \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Ist zudem f stetig diff'bar bezüglich x_j, so auch F, und es gilt

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_j} F(x) \;=\; \frac{\partial}{\partial x_j} \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y \;=\; \int_Y \frac{\partial}{\partial x_j} f(x,y)\,\mathrm{d}y.}$$

In diesem Falle dürfen wir also die Ableitung unter das Integral ziehen.

- Die Stetigkeit von f bzw. $\frac{\partial f}{\partial x}$ sind naheliegende Voraussetzungen.
- Die Kompaktheit von Y verhindert, dass Masse verschwindet!

Dies ist ein Spezialfall der noch allgemeineren Sätze D3D und D3E zur Stetigkeit und Ableitung von Parameterintegralen: Falls Y nicht kompakt ist, benötigen wir majorisierte Integrierbarkeit.

Parameterintegrale über Kompakta

Beweis: (1) Stetigkeit von F gilt dank majorisierter Konvergenz D2D: Der Ball $\bar{B}(x_0,r) \subseteq X$ ist kompakt, ebenso $K = \bar{B}(x_0,r) \times Y$, hierauf ist die stetige Funktion f beschränkt, $f(x,y) \le h(y) := M = \max\big|f|_K\big|$, also $f(x,-)$ majorisiert integrierbar dank $\int_Y h(y)\,\mathrm{d}y = M\,\mathrm{vol}(Y) < \infty$.

(2) Sei $p = 1$ und $x \in [a,b] \subseteq X$. Dank HDI und Fubini berechnen wir

$$\begin{aligned} F(x) - F(a) &\overset{\text{Lin}}{\underset{\text{A3L}}{=}} \int_Y f(x,y) - f(a,y)\,\mathrm{d}y \overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \int_Y \int_{t=a}^{x} \frac{\partial}{\partial t} f(t,y)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y \\ &\overset{\text{Fub}}{\underset{\text{C1E}}{=}} \int_{[a,x]\times Y} \frac{\partial}{\partial t} f(t,y)\,\mathrm{d}(t,y) \overset{\text{Fub}}{\underset{\text{C1E}}{=}} \int_{t=a}^{x} \int_Y \frac{\partial}{\partial t} f(t,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Nochmals dank HDI und Stetigkeit von $\partial_1 f$ folgt hieraus

$$F'(x) \overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \int_Y \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Erläuterung: Die Vertauschung von Ableitung und Integral (2) führen wir dank HDI zurück auf die Vertauschung von zwei Integralen. Der HDI lässt sich anwenden, da $\partial_1 f$ stetig ist. Der Satz von Fubini lässt sich anwenden, da $\partial_1 f$ stetig ist und somit absolut integrierbar auf $[a,x] \times Y$. Dank (1) ist $t \mapsto \int_Y \frac{\partial}{\partial t} f(t,y)\,\mathrm{d}y$ stetig, daher können wir im letzten Schritt den HDI anwenden.

Stetigkeit von Parameterintegralen

Wann dürfen wir Grenzwerte unter das Integral ziehen?

$$\lim_{x\to x_0}\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y \overset{?}{=} \int_Y \lim_{x\to x_0} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_Y f(x_0,y)\,\mathrm{d}y$$

Satz D3D: Stetigkeit von Parameterintegralen

Sei $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ mit $X \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $Y \subseteq \mathbb{R}^q$. Zudem existiere

$$F(x) := \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y \quad \text{für jedes } x \in X.$$

Für die Stetigkeit von $F : X \to \mathbb{C}$ haben wir folgende Kriterien:

- Sie gilt, wenn f stetig ist und Y kompakt, oder allgemeiner,
- wenn f bezüglich x stetig ist und über Y majorisiert integrierbar.
  Majorante $h : Y \to [0,\infty]$ mit $|f(x,y)| \le h(y)$ und $\int_Y h(y)\,\mathrm{d}y < \infty$

In diesem Fall dürfen wir den Grenzwert unter das Integral ziehen:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y \overset{!}{=} \int_Y \lim_{x\to x_0} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_Y f(x_0,y)\,\mathrm{d}y.}$$

Stetigkeit von Parameterintegralen

Nachrechnen: Für $x \to x_0$ gilt dank majorisierter Konvergenz D2D:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} F(x) &= \lim_{x\to x_0}\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y \overset{(1)}{=} \int_Y \lim_{x\to x_0} f(x,y)\,\mathrm{d}y \\ &\overset{(2)}{=} \int_Y f(x_0,y)\,\mathrm{d}y = F(x_0)\end{aligned}$$

Erläuterung: Wir sehen hieran, dass für die Stetigkeit von F im Punkt $x_0 \in X$ genügen:

- Für jedes $y \in Y$ ist die Abbildung $f(-,y) : X \to \mathbb{C} : x \mapsto f(x,y)$ in x_0 stetig.
  Das bedeutet $\lim_{x\to x_0} f(x,y) = f(x_0,y)$ für alle $x \to x_0$ und festes $y \in Y$. $\Rightarrow$ (2)
- Für alle $x \in X$, oder zumindest alle x in einer kleinen Umgebung $\bar{B}(x_0,r)$ von x_0,
  ist die Abbildung $f(x,-) : Y \to \mathbb{C} : y \mapsto f(x,y)$ majorisiert integrierbar. $\Rightarrow$ (1)

Diese Bedingungen sind automatisch erfüllt, wenn $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ stetig und Y kompakt ist:
Als Majorante wählen wir dann die Konstante $M = \max\{\, |f(x,y)| \mid x \in \bar{B}(x_0,r),\ y \in Y \,\}$.
Hier ist $\bar{B}(x_0,r) \subseteq X$ der abgeschlossene Ball mit Mittelpunkt x_0 und Radius $0 < r < \infty$.
Somit ist auch die Produktmenge $\bar{B}(x_0,r) \times Y$ kompakt, und hierauf ist f beschränkt.

☺ Die Kompaktheit von Y bzw. die integrierbare Majorante verhindert, dass beim Grenzübergang Masse nach Unendlich verschwindet!

⚠ Andernfalls ist Vorsicht geboten: Stetigkeit gilt nicht immer! D409

Ableitung von Parameterintegralen

Wann dürfen wir die Ableitung unter das Integral ziehen?

$$F(x) = \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x_j} F(x) \overset{?}{=} \int_Y \frac{\partial}{\partial x_j} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

Satz D3E: Ableitung von Parameterintegralen

Sei $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ mit $X \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $Y \subseteq \mathbb{R}^q$. Zudem existiere

$$F : X \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad F(x) := \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Für die stetige Differenzierbarkeit von F haben wir folgende Kriterien:

- Sie gilt, wenn $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ stetig ist und Y kompakt, oder allgemeiner,
- wenn $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ bezüglich x_j stetig ist und über Y majorisiert int'bar.
  Majorante $h : Y \to [0,\infty]$ mit $\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|(x,y) \le h(y)$ und $\int_Y h(y)\,\mathrm{d}y < \infty$

In diesem Fall dürfen wir die Ableitung unter das Integral ziehen:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_j} F(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y \overset{!}{=} \int_Y \frac{\partial}{\partial x_j} f(x,y)\,\mathrm{d}y.}$$

Ableitung von Parameterintegralen

Nachrechnen: Zur Vereinfachung sei $p = 1$ und $x \in [a,b] \subseteq X$.

$$F(x) - F(a) \underset{\text{A3L}}{\overset{\text{Lin}}{=}} \int_Y f(x,y) - f(a,y)\,\mathrm{d}y \underset{\text{B1I}}{\overset{\text{HDI}}{=}} \int_Y \int_{t=a}^{x} \frac{\partial}{\partial t} f(t,y)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y$$

$$\underset{\text{C1E}}{\overset{\text{Fub}}{=}} \int_{[a,x]\times Y} \frac{\partial}{\partial t} f(t,y)\,\mathrm{d}(t,y) \underset{\text{C1E}}{\overset{\text{Fub}}{=}} \int_{t=a}^{x} \int_Y \frac{\partial}{\partial t} f(t,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t$$

Nochmals dank HDI und Stetigkeit von $\partial_1 f$ folgt hieraus

$$F'(x) \underset{\text{B1I}}{\overset{\text{HDI}}{=}} \int_Y \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Erläuterung: Die Vertauschung von Ableitung und Integral führen wir dank HDI zurück auf die Vertauschung von Integralen. Fubini lässt sich hier anwenden, da $\partial_1 f$ majorisiert integrierbar ist und somit absolut integrierbar auf $[a,x] \times Y$: Für $h : Y \to [0,\infty]$ mit $\int_Y h(y)\,\mathrm{d}y < \infty$ und $|\partial_t f(x,y)| \le h(y)$ gilt $\int_{[a,x]\times Y} |\partial_t f(t,y)|\,\mathrm{d}(t,y) \le |x-a| \int_Y h(y)\,\mathrm{d}y < \infty$. Dank D3D ist $t \mapsto \int_Y \partial_t f(t,y)\,\mathrm{d}y$ stetig, daher können wir im letzten Schritt erneut den HDI anwenden.

☺ Die Kompaktheit von Y bzw. die integrierbare Majorante verhindert, dass beim Grenzübergang Masse nach Unendlich verschwindet!

⚠ Andernfalls ist Vorsicht geboten: Vertauschbarkeit gilt nicht immer!

Ableitung von Parameterintegralen

Als alternativen Beweis der Ableitungsformel weisen wir direkt folgende Gleichungen nach:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j} F(x) &\overset{(1)}{=} \lim_{t\to 0} \frac{F(x+te_j)-F(x)}{t} &&\overset{(2)}{=} \lim_{t\to 0} \int_Y \frac{f(x+te_j,y)-f(x,y)}{t}\,\mathrm{d}y \\
&\overset{(3)}{=} \int_Y \lim_{t\to 0} \frac{f(x+te_j,y)-f(x,y)}{t}\,\mathrm{d}y &&\overset{(4)}{=} \int_Y \frac{\partial}{\partial x_j} f(x,y)\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Gleichung (1) und (4) ist die Definition der partiellen Ableitung, (2) gilt dank Linearität des Integrals, also bleibt (3) zu zeigen. Dank der vorausgesetzten majorisierten Integrierbarkeit existiert eine Funktion $h : Y \to [0,\infty]$ mit $\int_Y h(y)\,\mathrm{d}y < \infty$ und $|(\partial f/\partial x_j)(x,y)| \le h(y)$.

Nach dem Mittelwertsatz der eindimensionalen Differentialrechnung (B4B) gilt

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+te_j,y)-f(x,y)}{t} &= \frac{\partial f}{\partial x_j}(x+\tau e_j,y) \qquad \text{für ein } \tau \in [0,t], \text{ also} \\
\left|\frac{f(x+te_j,y)-f(x,y)}{t}\right| &= \left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x+\tau e_j,y)\right| \quad \le h(y).
\end{aligned}$$

Somit gilt (3) dank majorisierter Konvergenz. Hierfür genügen also folgende Voraussetzungen:

- Für jedes $y \in Y$ ist die Abbildung $x \mapsto f(x,y)$ nach x_j differenzierbar.
- Für die Ableitung $\partial f/\partial x_j$ existiert eine integrierbare Majorante h, das heißt $|(\partial f/\partial x_j)(x,y)| \le h(y)$ und $\int_Y h(y)\,\mathrm{d}y < \infty$.

Ist die Ableitung $\partial f/\partial x_j$ zudem stetig in x_j, so auch die Ableitung $\partial F/\partial x_j$.

Rückblick: Was haben wir erreicht?

Zum Abschluss blicken wir kurz zurück auf die Entwicklung der Integration in den Kapiteln A bis D. Die ursprünglich formulierten Ziele und Probleme liegen nun klar vor uns, ebenso die inzwischen zu ihrer Lösung bereitgestellten Werkzeuge und ihre ersten Anwendungen.

Wir wollen ein- und mehrdimensionale Integrale verstehen und berechnen, zunächst mittels Normierung, Linearität, Monotonie, sodann dank Einschachtelung und Ausschöpfung. Diese axiomatische Grundlage dient zur *Definition* und *Konstruktion* des Integrals.

Hieraus haben wir die wichtigsten Rechenregeln erarbeitet: eindimensional den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI), mehrdimensional den Satz von Fubini und den Transformationssatz, sowie allgemein die Grenzwertsätze der monotonen und majorisierten Konvergenz. Dies sind mächtige Werkzeuge, wie schon die bisherigen Beispiele belegen.

Wir wünschen uns möglichst einfache und vielseitige Rechenregeln der Art: „Aus $f_n \to f$ folgt $\int_\Omega f_n \to \int_\Omega f$.“ Hierzu reicht die Integration stetiger Funktionen à la Riemann nicht aus, denn sie können beim Grenzübergang $f_n \to f$ zerbrechen. Die Integration nach Lebesgue ist hier wesentlich robuster: Sind alle f_n messbar, dann auch die Grenzfunktion f. Wir erhalten auf diesem Weg einfache und vielseitige Konvergenzsätze, wie dieses Kapitel D eindrucksvoll zeigt.

Gegenbeispiele zeigen aber auch, dass man diese Rechenregeln nicht blind anwenden darf. Wenn man es experimentell angeht, sollte man sich zumindest der Risiken bewusst sein. Für die Korrektheit des Ergebnisses haben wir nun einfache Kriterien, die Sie kennen und beherrschen sollen. Es lohnt sich! Hierzu dient die präzise Formulierung der Rechenregeln in Form von Sätzen: Das ist zugegeben etwas länglich, aber Qualität hat nun einmal ihren Preis.

Wann vertauschen Integral und Reihe?

D313
Fazit

Für $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ möchten wir Integral und Reihe vertauschen:

$$\int_\Omega \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right) \mathrm{d}x \quad \stackrel{?}{=} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_\Omega f_k(x) \, \mathrm{d}x \right)$$

⚠ Einfache Gegenbeispiele zeigen: Vertauschbarkeit gilt nicht immer!

Für die Vertauschbarkeit haben wir folgende **hinreichende Kriterien**:

- Gleichheit gilt für $f_k \geq 0$: monotone Konvergenz! A309
- Gleichheit gilt für $\int \sum |f_k| < \infty$ bzw. für $\sum \int |f_k| < \infty$, D106
- insbesondere für konvergente Potenzreihen, $f_k(x) = a_k x^k$. D107

☺ Dieses einfache Kriterium ist in vielen Anwendungen nützlich.
Es verhindert insbesondere, dass Masse nach Unendlich verschwindet.

⚠ Andernfalls ist Vorsicht geboten: Vertauschbarkeit gilt nicht immer!
Schon in einfachsten Gegenbeispielen gilt $\sum \int f_k \neq \int \sum f_k$. D101

⚠ Diese Kriterien sind hinreichend, aber i.A. nicht notwendig. D429
Die majorisierte Konvergenz erlaubt genauere Aussagen.

Wann vertauschen Integral und Limes?

D314
Fazit

Für $f_n \to f$ möchten wir Integral und Limes vertauschen:

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x) \, \mathrm{d}x \quad \stackrel{?}{=} \quad \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n(x) \, \mathrm{d}x$$

⚠ Einfache Gegenbeispiele zeigen: Vertauschbarkeit gilt nicht immer!

Für die Vertauschbarkeit haben wir folgende **hinreichende Kriterien**:

- Gleichheit gilt bei monotoner Konvergenz $0 \leq f_n \nearrow f$, A309
- bei majorisierter Konvergenz $f_n \to f$ mit $|f_n| \leq h$ und $\int_\Omega h < \infty$,
- insbesondere, wenn $\mathrm{vol}(\Omega) < \infty$ und $|f_n| \leq M \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

☺ Dies verhindert, dass Masse nach Unendlich verschwindet.

☺ Sei $h : \Omega \to [0, \infty]$ integrierbar. Auf der Teilmenge aller messbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{C}$ mit Schranke $|f| \leq h$ ist die Zuordnung $f \mapsto \int_\Omega f$ folgenstetig: Aus punktweiser Konvergenz $f_n \to f$ folgt $\int_\Omega f_n \to \int_\Omega f$.
Dies ist eine starke und nützliche Stetigkeitseigenschaft des Integrals!

⚠ Andernfalls ist Vorsicht geboten: Vertauschbarkeit gilt nicht immer!
Wie zuvor gesehen können selbst einfache Beispiele fehlschlagen.

Stetigkeit von Parameterintegralen

D315
Fazit

Wir wollen Stetigkeit nutzen und Grenzwerte unter das Integral ziehen:

$$\lim_{x\to x_0}\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y \overset{?}{=} \int_Y \lim_{x\to x_0} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_Y f(x_0,y)\,\mathrm{d}y$$

⚠ Einfache Gegenbeispiele zeigen: Vertauschbarkeit gilt nicht immer!

Sei $f: X\times Y\to\mathbb{C}$ mit $X\subseteq\mathbb{R}^p$ offen und $Y\subseteq\mathbb{R}^q$. Zudem existiere

$$F: X\to\mathbb{C} \quad \text{mit} \quad F(x) := \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Für die Stetigkeit von F haben wir folgende **hinreichende Kriterien**:

- Sie gilt, wenn f stetig ist und Y kompakt, oder allgemeiner,
- wenn f bezüglich x stetig ist und über Y majorisiert integrierbar.

In diesem Fall dürfen wir den Grenzwert unter das Integral ziehen:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y \overset{!}{=} \int_Y \lim_{x\to x_0} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_Y f(x_0,y)\,\mathrm{d}y.}$$

Ableitung von Parameterintegralen

D316
Fazit

Wir wollen differenzieren und die Ableitung unter das Integral ziehen:

$$F(x) = \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial}{\partial x_j}F(x) \overset{?}{=} \int_Y \frac{\partial}{\partial x_j} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

⚠ Einfache Gegenbeispiele zeigen: Vertauschbarkeit gilt nicht immer!

Sei $f: X\times Y\to\mathbb{C}$ mit $X\subseteq\mathbb{R}^p$ offen und $Y\subseteq\mathbb{R}^q$. Zudem existiere

$$F: X\to\mathbb{C} \quad \text{mit} \quad F(x) := \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Für die stetige Differenzierbarkeit von F haben wir folgende Kriterien:

- Sie gilt, wenn $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ stetig ist und Y kompakt, oder allgemeiner,
- wenn $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ bezüglich x_j stetig ist und über Y majorisiert int'bar.

In diesem Fall dürfen wir die Ableitung unter das Integral ziehen:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_j}F(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y \overset{!}{=} \int_Y \frac{\partial}{\partial x_j} f(x,y)\,\mathrm{d}y.}$$

Satz D4A: Vertauschbarkeit partieller Ableitungen, Schwarz 1873

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und hierauf $F : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ und $a \in U$ gilt dann $\partial_j \partial_i F(a) = \partial_i \partial_j F(a)$.

Die Hesse–Matrix $(\partial_j \partial_i F)_{i,j} : U \to \mathbb{R}^{n \times n}$ ist in jedem Punkt symmetrisch, das Gradientenfeld $f = (\partial_1 F, \ldots, \partial_n F) : U \to \mathbb{R}^n$ ist somit rotationsfrei.

☺ Die Vertauschung $\partial_j \partial_i = \partial_i \partial_j$ ist ungemein nützlich, und wir wollen sie eigentlich immer anwenden. Es gibt jedoch eine Voraussetzung!

⚠ Wenn man die Bedingung $F \in C^2(U, \mathbb{R})$, also Existenz und Stetigkeit der zweiten Ableitungen, weiter abschwächt zur minimalen Bedingung „F ist zweimal partiell differenzierbar“, dann gilt die Vertauschbarkeit im Allgemeinen nicht! Es gibt dann Gegenbeispiele wie das folgende.

Beweis des Satzes: Wir dürfen $n = 2$ sowie $i = 1$, $j = 2$ annehmen. Nach Verschiebung dürfen wir zudem $a = (0, 0) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ annehmen. Da $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen ist, gibt es ein $\delta > 0$, sodass $[0, \delta] \times [0, \delta] \subseteq U$ gilt. Für $(x, y) \in U$ sei $G_y(x) := F(x, y) - F(x, 0)$. Dank Mittelwertsatz für $x \mapsto G_y(x)$ gilt $G_y(x) - G_y(0) = G_y'(\xi) \cdot x$ für ein geeignetes $0 \le \xi \le x$.

Wir untersuchen $G_y'(\xi) = \partial_1 F(\xi, y) - \partial_1 F(\xi, 0)$: Dank Mittelwertsatz für $y \mapsto \partial_1 F(\xi, y)$ gilt $G_y'(\xi) = \partial_1 F(\xi, y) - \partial_1 F(\xi, 0) = \partial_2 \partial_1 F(\xi, \eta) \cdot y$ für ein geeignetes $0 \le \eta \le y$. Wir erhalten also zu $x, y \in [0, \delta]$ insgesamt:

$$F(x, y) - F(x, 0) - F(0, y) + F(0, 0) = \partial_2 \partial_1 F(\xi, \eta) \cdot xy$$

Wenn wir statt y zuerst x festhalten, dann erhalten wir ebenso:

$$F(x, y) - F(0, y) - F(x, 0) + F(0, 0) = \partial_1 \partial_2 F(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \cdot xy$$

Hierbei hängen $(\xi, \eta), (\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \in [0, x] \times [0, y]$ wie erklärt von (x, y) ab. Für $(x, y) \in]0, \delta]^2 \subseteq U$ dividieren wir durch $xy \neq 0$ und erhalten

$$\partial_2 \partial_1 F(\xi, \eta) = \partial_1 \partial_2 F(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}).$$

Im Grenzwert für $(x, y) \to (0, 0)$ gilt $(\xi, \eta) \to (0, 0)$ und $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \to (0, 0)$. Dank der Stetigkeit der zweiten Ableitungen $\partial_2 \partial_1 F$ und $\partial_1 \partial_2 F$ folgt

$$\partial_2 \partial_1 F(0, 0) = \partial_1 \partial_2 F(0, 0).$$

Damit ist die Vertauschbarkeit $\partial_2 \partial_1 F = \partial_1 \partial_2 F$ bewiesen.

Gegenbeispiel zur Vertauschbarkeit

Aufgabe: Wir untersuchen die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $F(0,0)$ und

$$F(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0).$$

Berechnen Sie (1) $f = \operatorname{grad} F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und (2) $g = \operatorname{rot} f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Gilt $\operatorname{rot} \operatorname{grad} F = 0$? Erklären Sie! Ist f stetig (C^0)? stetig diff'bar (C^1)? Vertauschen die partiellen Ableitungen? Gilt der Satz von Schwarz?

Lösung: (1) In jedem Punkt $(x,y) \neq (0,0)$ gilt dank Quotientenregel

$$f = (\partial_x F, \partial_y F) = \left(y\,\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}, x\,\frac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2} \right)$$

Im Punkt $(x,y) = (0,0)$ müssen wir genauer hinschauen:

$$F(x,0) = 0 \implies (\partial_x F)(0,0) = 0$$
$$F(0,y) = 0 \implies (\partial_y F)(0,0) = 0$$

Das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist stetig: Die Kreislinie $x^2+y^2 = r^2$ ist kompakt, daher nimmt $|x^4 \pm 4x^2y^2 - y^4|/r^4$ hierauf ein Maximum $M(r)$ an. Zu verschiedenen Radien $r > 0$ bleibt $M(r)$ unverändert. Die Faktoren y, x sichern Konvergenz $f(x,y) \to (0,0)$ für $(x,y) \to (0,0)$.

Gegenbeispiel zur Vertauschbarkeit

(2) Wir berechnen $g = \operatorname{rot} f = (\partial_x f_2 - \partial_y f_1) = (\partial_x \partial_y F - \partial_y \partial_x F)$:
Auf $U = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$ gilt $F \in C^2$, also $\operatorname{rot} f = 0$ dank Schwarz (D4A).
Übung: Sie können $\partial_x f_2$ und $\partial_y f_1$ explizit ausrechnen und vergleichen.
Im Punkt $(x,y) = (0,0)$ müssen wir erneut genauer hinschauen:

$$f_2(x,0) = \frac{+x^5}{x^4} = +x \implies (\partial_x f_2)(0,0) = +1$$
$$f_1(0,y) = \frac{-y^5}{y^4} = -y \implies (\partial_y f_1)(0,0) = -1.$$

Somit erhalten wir schließlich für jeden Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ die Rotation

$$g(x,y) = \operatorname{rot}(f)(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 2 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

⚠ Das Vektorfeld f hat ein Potential F, aber dennoch gilt $\operatorname{rot} f \neq 0$.

Erklärung: Es mangelt an Differenzierbarkeit! (1) Die Funktion F ist C^1, aber nicht C^2, und die Vertauschbarkeit $\partial_x \partial_y F = \partial_y \partial_x F$ gilt hier nicht! Der Satz von Schwarz gilt immer noch, lässt sich aber hier nicht anwenden. Auf $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$ gilt $F \in C^\infty$, somit $\partial_y \partial_x F = \partial_x \partial_y F$.
(2) Das Vektorfeld $f = \operatorname{grad} F$ ist stetig (C^0) und differenzierbar, aber nicht stetig diff'bar (C^1). Das bequeme Kriterium „exakt $\Rightarrow$ rotationsfrei“ dank Schwarz lässt sich hier nicht anwenden!

Vertauschbarkeit: Fubini impliziert Schwarz.

Der Satz von Fubini (C1E) besagt in der einfachsten Form

$$\boxed{\int_{x=a_1}^{b_1}\int_{y=a_2}^{b_2} g(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{y=a_2}^{b_2}\int_{x=a_1}^{b_1} g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$

für jede stetige Funktion g auf $Q := [a_1,b_1]\times[a_2,b_2] \subseteq \mathbb{R}^2$. Geometrisch ist das anschaulich: Beide Integrale ergeben das Volumen $\int_Q g$ unter g.

Der Satz von Schwarz (D4A) garantiert die Vertauschbarkeit

$$\boxed{\partial_2\partial_1 F = \partial_1\partial_2 F}$$

für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $F : \mathbb{R}^2 \supseteq U \to \mathbb{R}$.
Das ist geometrisch weit weniger anschaulich. Wer Satz D4A für anschaulich oder gar selbstverständlich hält, der wiederhole und untersuche das Gegenbeispiel D403 sowie den Beweis des Satzes!

Fubini ist zentral für die mehrdimensionale Integralrechnung.
Schwarz ist zentral für die mehrdimensionale Differentialrechnung.
Der HDI (B1I) übersetzt zwischen beiden: Fubini impliziert Schwarz!

Vertauschbarkeit: Fubini impliziert Schwarz.

Mit dem Satz von Fubini wollen die den Satz von Schwarz zeigen:

Satz D4B: Vertauschbarkeit partieller Ableitungen

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und hierauf $F : U \to \mathbb{R}$ eine beliebige stetige Funktion. Seien $i,j \in \{1,\dots,n\}$ zwei Indizes. Wir setzen voraus: Die partiellen Ableitungen $\partial_i F$ und $\partial_j F$ sowie $\partial_j\partial_i F$ existieren und sind stetig. Dann existiert auch die Ableitung $\partial_i\partial_j F$, und es gilt $\partial_j\partial_i F = \partial_i\partial_j F$.

☺ Diese Formulierung ist etwas genauer und stärker als Satz D4A: Wir verlangen nur die Existenz und Stetigkeit der Ableitungen $\partial_i F$ und $\partial_j F$ sowie $\partial_j\partial_i F$. Die Existenz und Stetigkeit der Ableitung $\partial_i\partial_j F$ hingegen wird nicht gefordert, sondern gleich mit gefolgert!

Aufgabe: Wir dürfen $n = 2$ sowie $i = 1$, $j = 2$ annehmen. Zeigen Sie:

$$\int_{u=a_1}^{x}\int_{v=a_2}^{y} \partial_2\partial_1 F(u,v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = F(x,y) - F(a_1,y) - F(x,a_2) + F(a_1,a_2)$$

Nutzen Sie Fubini und berechnen Sie $\partial_1\partial_2 F = \partial_2\partial_1 F$. Erklären Sie in jedem Rechenschritt, welchen Satz / welche Rechenregel Sie benutzen!

Vertauschbarkeit: Fubini impliziert Schwarz.

Lösung: Wir zeigen die Behauptung in jedem Punkt $a = (a_1, a_2) \in U$. Da der Definitionsbereich U offen ist, können wir $b_1 > a_1$ und $b_2 > a_2$ hinreichend nahe wählen, so dass $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subseteq U$ gilt.

Für alle $x \in [a_1, b_1]$ und $y \in [a_2, b_2]$ finden wir dank HDI (Satz B1I):

$$\begin{aligned}\int_{u=a_1}^{x} \int_{v=a_2}^{y} \partial_2\partial_1 F(u,v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u &= \int_{u=a_1}^{x} \partial_1 F(u,y) - \partial_1 F(u,a_2)\,\mathrm{d}u \\ &= F(x,y) - F(a_1,y) - F(x,a_2) + F(a_1,a_2)\end{aligned}$$

Hier nutzen wir zuerst, dass zu festem u die Abbildung $v \mapsto \partial_1 F(u,v)$ stetig differenzierbar ist mit Ableitung $v \mapsto \partial_2\partial_1 F(u,v)$, sodann dass die Abbildung $u \mapsto F(u,y) - F(u,a_2)$ stetig differenzierbar ist mit Ableitung $u \mapsto \partial_1 F(u,y) - \partial_1 F(u,a_2)$. Daher dürfen wir in beiden Fällen den (zweiten) Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung anwenden!

Dank Fubini (C1E) dürfen wir die Integrationsreihenfolge vertauschen:

$$\int_{v=a_2}^{y} \int_{u=a_1}^{x} \partial_2\partial_1 F(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = F(x,y) - F(a_1,y) - F(x,a_2) + F(a_1,a_2)$$

Vertauschbarkeit: Fubini impliziert Schwarz.

Der Integrand $v \mapsto \int_{u=a_1}^{x} \partial_2\partial_1 F(u,v)\,\mathrm{d}u$ ist stetig dank Satz D3A. Dank dem (erstem) Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (B1I) können wir daher das linke Integral nach y ableiten und erhalten:

$$\int_{u=a_1}^{x} \partial_2\partial_1 F(u,y)\,\mathrm{d}u = \partial_2 F(x,y) - \partial_2 F(a_1,y)$$

Auch der Integrand $u \mapsto \partial_2\partial_1 F(u,y)$ ist stetig nach Voraussetzung. Dank dem (erstem) Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (B1I) können wir daher das linke Integral nach x ableiten und erhalten:

$$\partial_2\partial_1 F(x,y) = \partial_1\partial_2 F(x,y)$$

Dies gilt insbesondere im Punkt $(x,y) = (a_1,a_2)$, den wir beliebig vorgegeben haben. Somit gilt $\partial_2\partial_1 F = \partial_1\partial_2 F$ auf ganz U.

☺ Diese sorgfältige aber leichte Rechnung zeigt: Fubini impliziert Schwarz. Umgekehrt impliziert ebenso Schwarz auch Fubini in der angegebenen einfachsten Form; dies führen wir hier nicht weiter aus.

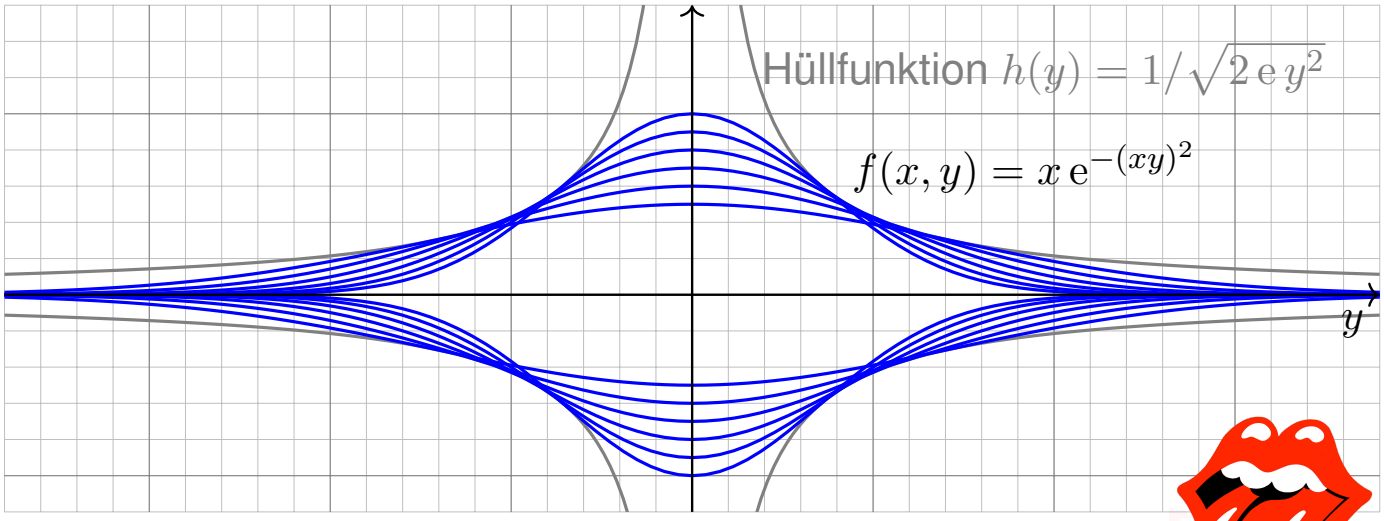
Stetigkeit und Ableitung des Integrals

D409
Übung

Aufgabe: Man skizziere und berechne und vergleiche und bestaune:

$$\lim_{x\to 0}\left[\int_{\mathbb{R}} x\,\mathrm{e}^{-(xy)^2}\,\mathrm{d}y\right] \quad \overset{?}{=} \quad \int_{\mathbb{R}} \lim_{x\to 0}\left[x\,\mathrm{e}^{-(xy)^2}\right]\mathrm{d}y$$

Lösung: (1) Skizze des Integranden $f(x,y) = x\,\mathrm{e}^{-(xy)^2}$:



⚠ Der Integrationsbereich $\mathbb{R}$ ist hier nicht kompakt.
Die Hüllfunktion hat unendliches Integral. Also Vorsicht!

Stetigkeit und Ableitung des Integrals

D410
Übung

(2) Zur Integration substituieren wir $u = xy$ und $\mathrm{d}u = |x|\mathrm{d}y$:

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} x\,\mathrm{e}^{-(xy)^2}\,\mathrm{d}y = \operatorname{sign}(x)\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(xy)^2}|x|\,\mathrm{d}y$$

$$\overset{\text{Trafo}}{\underset{\text{C2B}}{=}} \operatorname{sign}(x)\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u \overset{\text{Gauß}}{\underset{\text{C2G}}{=}} \operatorname{sign}(x)\sqrt{\pi}$$

Für die Funktion $g(u) = \mathrm{e}^{-u^2}$ kennen wir das Integral $\int_{\mathbb{R}} g(u)\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$.
Für festes $x > 0$ ist $f(x,y) = x\,g(xy)$ die vertikale Streckung um x und horizontale Stauchung um x, hat also genau dieselbe Fläche wie g!
Das Umklappen des Vorzeichens ist in der Skizze gut zu erkennen.

Obwohl der Integrand $f(x,y)$ stetig ist, ist das Integral $F(x)$ unstetig!

$$\lim_{x\searrow 0}\left[\int_{\mathbb{R}} x\,\mathrm{e}^{-(xy)^2}\,\mathrm{d}y\right] = \lim_{x\searrow 0} F(x) = \sqrt{\pi}, \quad \text{aber}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{x\searrow 0}\left[x\,\mathrm{e}^{-(xy)^2}\right]\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} 0\,\mathrm{d}y = 0. \quad \text{Sapristi!}$$

⚠ Zur seriösen Rechnung muss man die Voraussetzungen beachten!
Das Problem verschwindet unter einer integrierbaren Majorante (D3D).

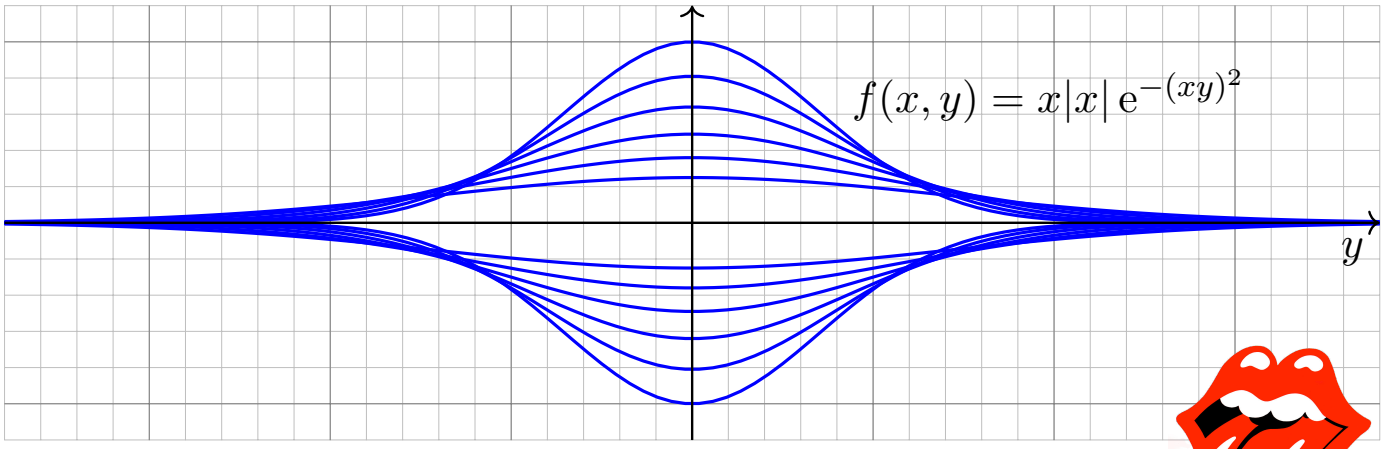
Stetigkeit und Ableitung des Integrals

D411
Übung

Aufgabe: Man skizziere und berechne und vergleiche und bestaune:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_{\mathbb{R}} x|x|\,\mathrm{e}^{-(xy)^2}\,\mathrm{d}y\right] \overset{?}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x}\left[x|x|\,\mathrm{e}^{-(xy)^2}\right]\mathrm{d}y \quad \text{in } x=0$$

Lösung: (1) Skizze des Integranden $f(x,y) = x|x|\,\mathrm{e}^{-(xy)^2}$:



⚠ Der Integrationsbereich $\mathbb{R}$ ist hier nicht kompakt.
Wir treffen dieselben Probleme wie zuvor. Also Vorsicht!
You can't always get what you want, but you get what you need.

Stetigkeit und Ableitung des Integrals

D412
Übung

(2) Die Funktion $f(x,y) = x|x|\,g(xy)$ mit $g(u) = \mathrm{e}^{-u^2}$ ist stetig diff'bar.
Das Integral berechnen wir dank Substitution $u = xy$ und $\mathrm{d}u = |x|\mathrm{d}y$:

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} x|x|\,g(xy)\,\mathrm{d}y \underset{\text{C2B}}{\overset{\text{Trafo}}{=}} x\int_{\mathbb{R}} g(u)\,\mathrm{d}u \underset{\text{C2G}}{\overset{\text{Gauß}}{=}} x\sqrt{\pi}$$

Ableiten des Integranden hingegen liefert:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 2|x|\,g(xy) + x|x|\,y\,g'(xy)$$

Das verschwindet für $x = 0$. Wir erhalten also

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x}\left[x|x|\,\mathrm{e}^{-(xy)^2}\right]_{x=0}\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} 0\,\mathrm{d}y = 0, \quad \text{aber}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_{\mathbb{R}} x|x|\,\mathrm{e}^{-(xy)^2}\,\mathrm{d}y\right]_{x=0} = \frac{\partial}{\partial x}\left[x\sqrt{\pi}\right]_{x=0} = \sqrt{\pi}. \quad \text{Sapristi!}$$

⚠ Zur seriösen Rechnung muss man die Voraussetzungen beachten!
Das Problem verschwindet unter einer integrierbaren Majorante (D3E).

Stetigkeit und Ableitung des Integrals

Verallgemeinerung: Die Funktion $g(u) = \mathrm{e}^{-u^2}$ (Glockenkurve) dient in den beiden vorigen Aufgaben als schönes und konkretes Beispiel.

Das Phänomen besteht jedoch für jede Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.
Das Integral $a := \int_{\mathbb{R}} g(u)\,\mathrm{d}u$ erfülle hierzu lediglich $0 < a < \infty$.

Selbst harmlose Funktionen wie die Glockenkurve $g(u) = \mathrm{e}^{-u^2}$ oder die Dreiecksfunktion $g(u) = \Delta_1(u)$ illustrieren das Problem. D205

Diskutieren Sie den allgemeinen Fall nach diesem Vorbild:

Aufgabe: Man berechne und vergleiche und bestaune:

$$\lim_{x\searrow 0}\left[\int_{\mathbb{R}} x\,g(xy)\,\mathrm{d}y\right] \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}} \lim_{x\searrow 0}\Big[x\,g(xy)\Big]\,\mathrm{d}y \quad \text{sowie}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_{\mathbb{R}} x|x|\,g(xy)\,\mathrm{d}y\right] \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x}\Big[x|x|\,g(xy)\Big]\,\mathrm{d}y \quad \text{in } x = 0.$$

Lässt sich Kompaktheit nutzen? Majorisierte Integrierbarkeit?
Ist der Integrand stetig bzw. stetig diff'bar? Und das Integral?

Stetigkeit und Ableitung des Integrals

Lösung: Zur Integration substituieren wir $u = xy$ und $\mathrm{d}u = |x|\mathrm{d}y$:

$$\begin{aligned} F(x) \quad &:= \quad \int_{\mathbb{R}} x\,g(xy)\,\mathrm{d}y \quad &&= \quad \operatorname{sign}(x)\int_{\mathbb{R}} g(xy)\,|x|\,\mathrm{d}y \\ &= \quad \operatorname{sign}(x)\int_{\mathbb{R}} g(u)\,\mathrm{d}u \quad &&= \quad \operatorname{sign}(x)\,a \end{aligned}$$

Wie zuvor ist dieses Parameterintegral $F(x)$ unstetig in $x = 0$. (Skizze!)
Wir finden $\lim_{x\searrow 0}\left[\int_{\mathbb{R}} x\,g(xy)\,\mathrm{d}y\right] = a$, aber $\int_{\mathbb{R}} \lim_{x\searrow 0}\big[x\,g(xy)\big]\,\mathrm{d}y = 0$.
Kompaktheit oder majorisierte Integrierbarkeit (D3D) gelten hier nicht!

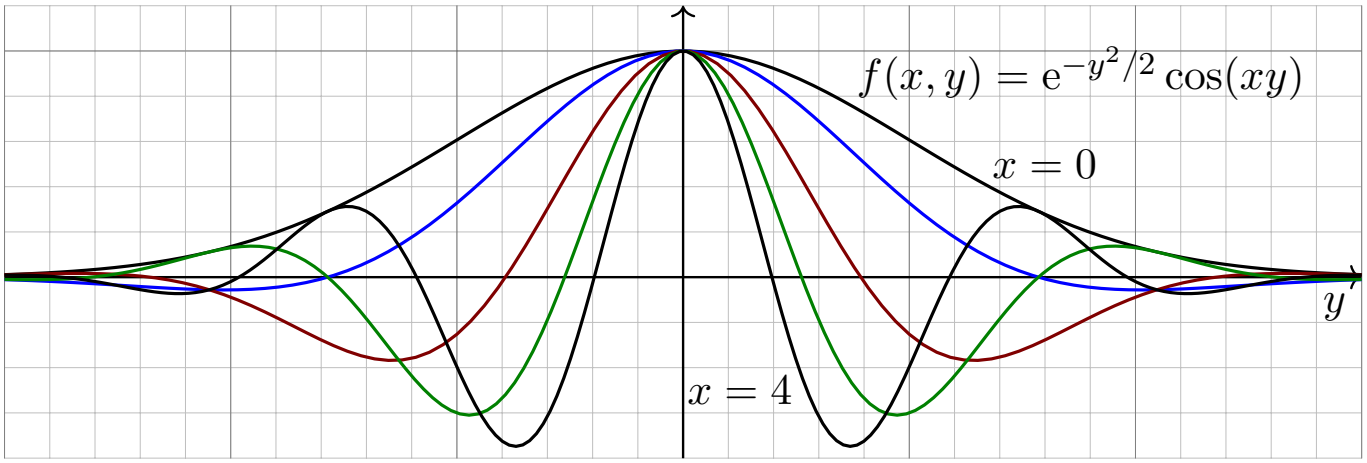
Entsprechendes gilt für die Ableitung von $F(x) = \int_{\mathbb{R}} x|x|\,g(xy)\,\mathrm{d}y$.
Die Rechnung der vorigen Aufgabe überträgt sich wörtlich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_{\mathbb{R}} x|x|\,g(xy)\,\mathrm{d}y\right]_{x=0} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big[xa\Big]_{x=0} = a, \quad \text{aber} \\ \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x}\Big[x|x|\,g(xy)\Big]_{x=0}\,\mathrm{d}y &= \int_{\mathbb{R}} 0\,\mathrm{d}y = 0. \quad \text{Sapristi!} \end{aligned}$$

⚠ Vorsichtsmaßnahmen sind nötig, die müssen Sie beherrschen.
Das Problem verschwindet unter einer integrierbaren Majorante (D3E).

Fourier–Transformierte der Normalverteilung: Feynman–Trick

☺ Nach den Warnungen hier ein gutartiges und nützliches Beispiel:



Aufgabe: (0) Skizzieren Sie die Funktion $f(x,y) = \mathrm{e}^{-y^2/2}\cos(xy)$.
(1) Erlaubt $\partial_x f(x,y)$ eine integrierbare Majorante $h(y)$?
(2) Berechnen Sie das parameterabhängige Integral

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) = \int_{y=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2/2}\cos(xy)\,\mathrm{d}y.$$

Hinweis: Zeigen Sie $F'(x) = -xF(x)$, indem Sie die Ableitung $\partial_x F(x)$ unter das Integral ziehen und partiell integrieren. Lösen Sie nach F auf.

Fourier–Transformierte der Normalverteilung: Feynman–Trick

Lösung: (1) Ableitung und integrierbare Majorante:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| = \left|\mathrm{e}^{-y^2/2}\cdot(-y)\sin(xy)\right| \le \mathrm{e}^{-y^2/2}|y| =: h(y)$$

(2) Dank Vorbereitung (1) dürfen wir ∂_x unter das Integral ziehen:

$$F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{y=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2/2}\cos(xy)\,\mathrm{d}y \overset{\text{D3E}}{\underset{(1)}{=}} \int_{y=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2/2}(-y)\sin(xy)\,\mathrm{d}y$$

$$\overset{\text{part}}{=} \Big[\mathrm{e}^{-y^2/2}\sin(xy)\Big]_{y=-\infty}^{+\infty} - \int_{y=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2/2}x\cos(xy)\,\mathrm{d}y = -xF(x)$$

Demnach genügt $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung $F'(x) = -xF(x)$.
Wir trennen die Variablen gemäß $F'(x)/F(x) = -x$
und integrieren zu $\ln F(x) - \ln F(0) = -x^2/2$.
Wir erhalten die Lösung $F(x) = F(0)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$.
Mit $F(0) = \sqrt{2\pi}$ folgt $F(x) = \sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$.

☺ Leistungsstarke Theorie ermöglicht effiziente Berechnung.

Berechnung der Gamma–Funktion: Feynman–Trick

D417
Übung

Aufgabe: (1) Für $t > 0$ berechne man das Integral

$$\int_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x.$$

(2) Durch Ableiten unter dem Integral berechne man

$$\int_{x=0}^{\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x.$$

(3) Warum dürfen wir in (2) die Ableitung ∂_t unter das Integral ziehen?

Das Integral (2) ist die Laplace–Transformierte der Polynomfunktionen $x \mapsto x^n$, siehe Kapitel L. Die Rechnung gelingt mit partieller Integration B316, etwas mühsam. Differenzieren ist leichter.

Was soll Frage (3) bedeuten? Natürlich dürfen wir unter dem Integral nach t ableiten: Das ist ein freies Land, und niemand kann uns das Ableiten verbieten! Wir können erst nach t ableiten und dann über x integrieren oder umgekehrt. Es ist jedoch im Allgemeinen nicht klar, ob diese beiden Rechnungen dasselbe Ergebnis liefern. Der obige Satz D3E rechtfertigt hier die Gleichheit!

Lösung: (1) Integriert wird hier über x bei festem Parameter t:

$$\int_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x \;=\; \Big[-\frac{\mathrm{e}^{-tx}}{t}\Big]_{x=0}^{\infty} \;=\; \frac{1}{t}.$$

Berechnung der Gamma–Funktion: Feynman–Trick

D418
Übung

(2) Wenn wir ∂_t unter das Integral ziehen dürfen, so erhalten wir:

$$\int_{x=0}^{\infty} -x\,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x \overset{\text{D3E}}{\underset{?}{=}} -\frac{1}{t^2} \quad \text{also} \quad \int_{x=0}^{\infty} x\,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{t^2},$$

$$\int_{x=0}^{\infty} -x^2\,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x \overset{\text{D3E}}{\underset{?}{=}} -\frac{2}{t^3} \quad \text{also} \quad \int_{x=0}^{\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{t^3},$$

$$\int_{x=0}^{\infty} -x^3\,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x \overset{\text{D3E}}{\underset{?}{=}} -\frac{3!}{t^4} \quad \text{also} \quad \int_{x=0}^{\infty} x^3\,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x = \frac{3!}{t^4}.$$

Per Induktion erhalten wir daraus mühelos die ersehnte Antwort:

$$\boxed{\int_{x=0}^{\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x = \frac{n!}{t^{n+1}}, \quad \text{speziell} \quad \int_{x=0}^{\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = n!}$$

(3) Für $0 < a < b$ finden wir eine von $t \in [a, b]$ unabhängige Majorante:

$$\big|-x^n\,\mathrm{e}^{-tx}\big| \le x^n\,\mathrm{e}^{-ax} =: h(x) \le \frac{\mathrm{const}}{1+x^2} \quad \text{also} \quad \int_{x=0}^{\infty} h(x)\,\mathrm{d}x < \infty$$

☺ Alle betrachteten Ableitungen sind (lokal) majorisiert integrierbar. Dank Satz D3E dürfen wir in (2) die Ableitung unter das Integral ziehen.

Momente der Normalverteilung: Feynman–Trick

D419
Übung

Aufgabe: (1) Für $t > 0$ berechne man das Integral

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

(2) Durch Ableiten unter dem Integral berechne man

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^{2k}\,\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

(3) Warum dürfen wir in (2) die Ableitung ∂_t unter das Integral ziehen?

Die Funktion $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$ ist die Dichte der Standard-Normalverteilung, die in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine zentrale Rolle spielt. Das Integral über $x\varphi(x)$ ist ihr Mittelwert (Schwerpunkt), hier $= 0$ aus Symmetriegründen. Das Integral über $x^2\varphi(x)$ ist ihre Varianz (Trägheitsmoment). Allgemein nennt man das Integral über $x^n\varphi(x)$ das n-te Moment.

Der zweite Parameter t wird hier trickreich eingeführt, um unterm Integral zu differenzieren, motiviert durch den Erfolg (2) und gerechtfertigt durch die integrierbare Majorante (3).

Lösung: (1) Wir substituieren durch $u = \sqrt{t}\,x$ und $\mathrm{d}u = \sqrt{t}\,\mathrm{d}x$, also

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u \;=\; t^{-\frac{1}{2}}.$$

Momente der Normalverteilung: Feynman–Trick

D420
Übung

(2) Wenn wir ∂_t unter das Integral ziehen dürfen, so erhalten wir:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} -\frac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \overset{\text{D3E}}{\underset{?}{=}} -\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}} \quad \text{also} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^2\,\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = t^{-\frac{3}{2}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} -\frac{x^4}{2}\,\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \overset{\text{D3E}}{\underset{?}{=}} -\frac{3}{2}t^{-\frac{5}{2}} \quad \text{also} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^4\,\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = 3\cdot t^{-\frac{5}{2}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} -\frac{x^6}{2}\,\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \overset{\text{D3E}}{\underset{?}{=}} -\frac{3\cdot 5}{2}t^{-\frac{7}{2}} \quad \text{also} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^6\,\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = 3\cdot 5\cdot t^{-\frac{7}{2}}.$$

Per Induktion erhalten wir daraus mühelos die ersehnte Antwort:

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} x^{2k}\,\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)\cdot t^{-\frac{2k+1}{2}}\sqrt{2\pi}.}$$

(3) Für $0 < a < b$ finden wir eine von $t \in [a,b]$ unabhängige Majorante:

$$\left|-x^{2n}\,\mathrm{e}^{-tx^2/2}\right| \le x^{2n}\,\mathrm{e}^{-ax^2/2} =: h(x) \le \frac{\mathrm{const}}{1+x^2} \quad \text{also} \quad \int_{\mathbb{R}} h(x)\,\mathrm{d}x < \infty$$

☺ Alle betrachteten Ableitungen sind (lokal) majorisiert integrierbar. Dank Satz D3E dürfen wir in (2) die Ableitung unter das Integral ziehen.

Weitere schöne Anwendungsbeispiele zum Feynman–Trick

Aufgabe: Berechnen Sie (möglichst geschickt)

$$\int_{x=0}^{1} x^5 \,\mathrm{d}x, \quad \int_{x=0}^{1} x^5 \ln(x) \,\mathrm{d}x, \quad \int_{x=0}^{1} x^5 \ln(x)^2 \,\mathrm{d}x, \quad \int_{x=0}^{1} x^5 \ln(x)^3 \,\mathrm{d}x.$$

Lösung: Manchmal ist allgemeiner spürbar leichter! Wir berechnen

$$F(t) := \int_{x=0}^{1} x^t \,\mathrm{d}x = (t+1)^{-1} \quad \text{für } t > -1. \qquad \xrightarrow{t=5} \frac{1}{6}$$

Wenn wir die Ableitung unter das Integral ziehen dürfen, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\int_{x=0}^{1} x^t \ln(x) \,\mathrm{d}x &\overset{?}{=} F'(t) &&= -(t+1)^{-2} &&\xrightarrow{t=5} \frac{-1}{36} \\
\int_{x=0}^{1} x^t \ln(x)^2 \,\mathrm{d}x &\overset{?}{=} F''(t) &&= +2(t+1)^{-3} &&\xrightarrow{t=5} \frac{1}{108} \\
\int_{x=0}^{1} x^t \ln(x)^3 \,\mathrm{d}x &\overset{?}{=} F'''(t) &&= -6(t+1)^{-4} &&\xrightarrow{t=5} \frac{-1}{216}
\end{aligned}$$

Übung: Erklären Sie die Gleichheiten „$\overset{?}{=}$“. Welche Sätze greifen hier? Alternativ können Sie hier partiell integrieren. Finden Sie das leichter?

Weitere schöne Anwendungsbeispiele zum Feynman–Trick

Aufgabe: Berechnen Sie (möglichst geschickt)

$$\int_{x=0}^{1} \frac{x^0 - 1}{\ln x} \,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \int_{x=0}^{1} \frac{x^1 - 1}{\ln x} \,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \int_{x=0}^{1} \frac{x^2 - 1}{\ln x} \,\mathrm{d}x.$$

Lösung: Manchmal ist allgemeiner spürbar leichter! Wir berechnen

$$F(t) := \int_{x=0}^{1} \frac{x^t - 1}{\ln x} \,\mathrm{d}x \qquad \text{für } t > -1.$$

Unser erstes Integral $F(0) = 0$ ist leicht. Wir suchen nun $F(1)$ und $F(2)$. Wenn wir die Ableitung unter das Integral ziehen dürfen, so erhalten wir:

$$F'(t) \overset{?}{=} \int_{x=0}^{1} \partial_t \Big[\frac{x^t - 1}{\ln x}\Big] \,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{1} x^t \,\mathrm{d}x = \Big[\frac{x^{t+1}}{t+1}\Big]_{x=0}^{1} = \frac{1}{t+1}$$

Der HDI beschert uns nun das ersehnte Ergebnis:

$$F(t) = F(t) - F(0) = \int_{s=0}^{t} \frac{1}{s+1} \,\mathrm{d}s = \Big[\ln(s+1)\Big]_{s=0}^{t} = \ln(t+1)$$

Übung: Erklären Sie die Gleichheit „$\overset{?}{=}$“. Welche Sätze greifen hier?

Ein kniffliges Anwendungsbeispiel zum Feynman–Trick

Aufgabe: Berechnen Sie das berühmt-berüchtigte Dirichlet–Integral

$$I := \int_{x=0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

(1) als Parameterintegral $F(t) := \int_{x=0}^{\infty} \sin(x)/x \cdot \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}x$ à la Laplace und
(2) als Doppelintegral mit $\int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = 1/x$ dank Fubini. (Siehe F425)

Lösung: (1) Wenn wir die Ableitung unter das Integral ziehen dürfen:

$$F'(t) \overset{?}{=} \int_{x=0}^{\infty} -\sin(x)\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}x \overset{(3)}{=} \frac{-1}{1+t^2}$$

Für $t \to \infty$ gilt $F(t) \to 0$. Der HDI beschert uns das ersehnte Ergebnis:

$$I = F(0) \overset{?}{=} \int_{t=0}^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \Big[\arctan t\Big]_{t=0}^{\infty} = \frac{\pi}{2}$$

(2) Wenn wir hier Integrale vertauschen dürfen, so erhalten wir:

$$I = \int_{x=0}^{\infty}\int_{t=0}^{\infty} \frac{\sin(x)}{\mathrm{e}^{xt}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \overset{?}{=} \int_{t=0}^{\infty}\int_{x=0}^{\infty} \frac{\sin(x)}{\mathrm{e}^{xt}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \overset{(3)}{=} \int_{t=0}^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

Übung: Erklären Sie die Gleichheiten „$\overset{?}{=}$“. Das ist nicht leicht! (L409)

Ein kniffliges Anwendungsbeispiel zum Feynman–Trick

Aufgabe: Wie löst man das hier auftretende Integral (3)? (Siehe L101)

Lösung: (3) Manchmal ist allgemeiner spürbar leichter, so auch hier. Wir fassen Mut und berechnen für $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und $b \in \mathbb{R}$ allgemein

$$U := \int_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad V := \int_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax}\sin(bx)\,\mathrm{d}x.$$

Dies sind der Realteil und der Imaginärteil der Exponentialfunktion!

$$U + \mathrm{i}V = \int_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{(-a+\mathrm{i}b)x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{e}^{(-a+\mathrm{i}b)x}}{-a+\mathrm{i}b}\right]_{x=0}^{\infty} = \frac{1}{a-\mathrm{i}b} = \frac{a+\mathrm{i}b}{a^2+b^2}$$

Daraus folgen die beiden gesuchten reellen Integrale:

$$U = \frac{a}{a^2+b^2} \quad \text{und} \quad V = \frac{b}{a^2+b^2}$$

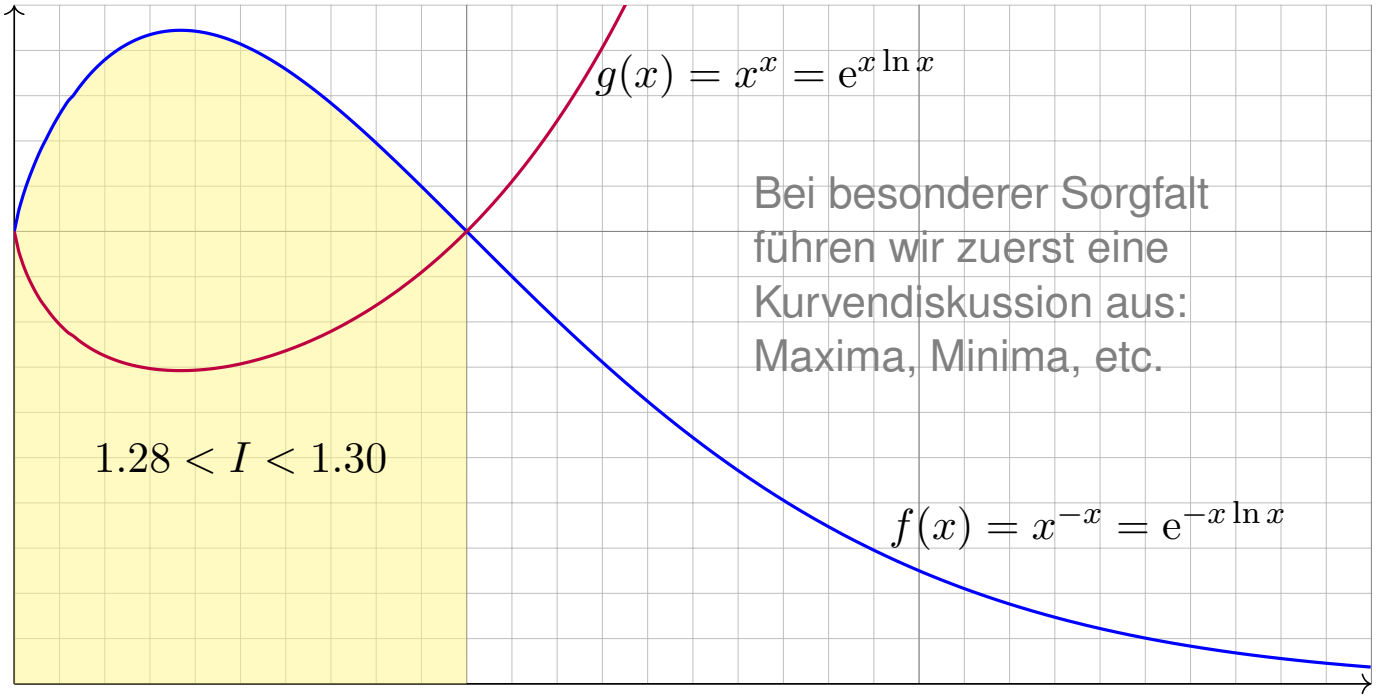
☺ Wir tauschen *zwei* mühsame reelle Integrale gegen *ein* komplexes, und dieses gelingt spielend leicht. Integration ist eine Kunst, sie kann große Freude bereiten, doch sie erfordert auch Erfahrung und Übung, Geduld und Sorgfalt. Wir wollen die Techniken schrittweise ausbauen.

Schwieriges Integral wird zu einfacher Reihe.

D425
Übung

Aufgabe: (1) Skizzieren Sie die Funktion $f(x) = x^{-x} = \mathrm{e}^{-x\ln x}$ auf $[0,3]$. Schätzen Sie damit graphisch-numerisch das Integral $I = \int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Lösung: (1) Auswertung einiger Punkte ergibt das folgende Bild:
Wir nutzen hierzu insbesondere den Grenzwert $\lim_{x\searrow 0}[x^{-x}] = 1$.



Schwieriges Integral wird zu einfacher Reihe.

D426
Übung

Aufgabe: (2) Zeigen Sie folgende erstaunliche Gleichung:

$$\boxed{\int_{x=0}^{1} x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-k}}$$

Anleitung: (a) Setzen Sie für den Integranden die Exponentialreihe ein.
(b) Vertauschen Sie Integral und Reihe. Warum gilt dabei Gleichheit?
(c) Erinnern Sie sich an den Feynman–Trick D421 zur Berechnung von

$$\int_{x=0}^{1} x^t(-\ln x)^k\,\mathrm{d}x = \frac{k!}{(t+1)^{k+1}} \quad \text{für } t > -1 \text{ und } k \in \mathbb{N}.$$

(3) Berechnen Sie damit das Integral bis auf einen Fehler $\varepsilon \le 10^{-9}$.
(a) Für den Fehler bei Reihenabbruch gilt dank geometrischer Reihe:

$$\varepsilon_{n-1} := \sum_{k=n}^{\infty} k^{-k} < \sum_{k=n}^{\infty} n^{-k} = \frac{1}{n^n}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^k = \frac{1}{n^n(1-1/n)} \overset{!}{\le} 10^{-9}$$

(b) Bis zu welchem Term müssen Sie numerisch summieren?

Schwieriges Integral wird zu einfacher Reihe.

Lösung: (2) Wir nutzen sorgsam unsere Integrationswerkzeuge:

$$\begin{aligned}
\int_{x=0}^{1} x^{-x}\,\mathrm{d}x &= \int_{x=0}^{1} \mathrm{e}^{-x\ln x}\,\mathrm{d}x \\
&\overset{(a)}{=} \int_{x=0}^{1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k(-\ln x)^k}{k!}\,\mathrm{d}x \\
&\overset{(b)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{x=0}^{1} x^k(-\ln x)^k\,\mathrm{d}x \\
&\overset{(c)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-k}
\end{aligned}$$

☺ Die einzige nicht-elementare Umformung ist die Vertauschung von Integral und Reihe (b). Die hier summierten Funktionen sind alle positiv, also ändert die Vertauschung das Ergebnis nicht, siehe Fubini D1A.

☺ Erfahrung zahlt sich aus: Das innere Integral (c) kennen wir bereits.

Schwieriges Integral wird zu einfacher Reihe.

(3) Die Reihe konvergiert glücklicherweise extrem schnell!
Es genügt, die ersten neun Terme ($k = 1, 2, \ldots, 9$) zu summieren:

$$\sum_{k=1}^{9} k^{-k} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{27} + \frac{1}{256} + \frac{1}{3125} + \cdots + \frac{1}{9^9} = 1.2912859969590\ldots$$

Der Fehler ist $\varepsilon_9 = \sum_{k=10}^{\infty} k^{-k} < \frac{1}{0.9\cdot 10^{10}} = 1.111\ldots\cdot 10^{-10} < 10^{-9}$.
Längere Summation liefert schnell und bequem weitere Dezimalstellen:

$$\boxed{\int_{x=0}^{1} x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-k} = 1.29128599706266\ldots}$$

☺ Plausibilitätscheck: Die ersten zwei Nachkommastellen entsprechen unserer Graphik. Hier können Sie weitere numerische Methoden testen.

▶ *The Bernoulli Integral is ridiculous,* `youtu.be/PxyK_Tsnz10`.
Dort wird Schritt (2c) durch Substitution gelöst, das ist mühsamer.
Wir genießen, leistungsstarke Theorie ermöglicht effiziente Berechnung.

Absolute vs majorisierte Konvergenz

D429
Übung

Aufgabe: (1) Man berechne und vergleiche

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_{x=0}^{\infty}(-1)^k\,\mathrm{e}^{-(k+1)x}\,\mathrm{d}x\right],\qquad \int_{x=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\mathrm{e}^{-(k+1)x}\right]\mathrm{d}x.$$

(2) Gilt absolute Konvergenz? Was ist hierbei die Hüllfunktion?
(3) Gilt majorisierte Integrierbarkeit? Was ist die Hüllfunktion?

Lösung: (1) Wir können beide Seiten direkt ausrechnen:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_{x=0}^{\infty}(-1)^k\,\mathrm{e}^{-(k+1)x}\,\mathrm{d}x\right] = \sum_{k=0}\frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2)$$

$$\int_{x=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\mathrm{e}^{-(k+1)x}\right]\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{u=0}^{1}\frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln(1+u)\Big]_{u=0}^{1} = \ln(2)$$

☺ Dank unserer Integrations- und Summationstechniken gelingt die direkte Rechnung auf beiden Seiten. Demnach gilt Vertauschbarkeit.

Absolute vs majorisierte Konvergenz

D430
Übung

(2) Als Hüllfunktion der absoluten Integranden finden wir:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-(k+1)x} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}$$

Diese ist nicht integrierbar; wir substituieren $u=\mathrm{e}^{-x}$ und erhalten:

$$\int_{x=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int_{u=0}^{1}\frac{1}{1-u}\,\mathrm{d}x = \Big[-\ln(1-u)\Big]_{u=0}^{1} = +\infty$$

(3) Mit alternierenden Vorzeichen hingegen finden wir dank Leibniz:

$$\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,\mathrm{e}^{-(k+1)x}\right| \le \mathrm{e}^{-x}$$

Die Hüllfunktion $h(x)=\mathrm{e}^{-x}$ ist viel sparsamer und bleibt integrierbar:

$$\int_{x=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_{x=0}^{\infty} = 1 < +\infty$$

Hier gilt nicht absolute Konvergenz, aber majorisierte Konvergenz!
☺ Dies genügt, um Integral und Reihe vertauschen zu dürfen (D2D).

Die Wallis–Reihe für $\pi/2$

D431
Übung

Aufgabe: Die geometrische Reihe für $q = \sin(x)^2/2 \in [0, 1/2]$ zeigt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(x)^{2k+1}}{2^k} = \frac{2\sin(x)}{2-\sin(x)^2}.$$

Integrieren Sie über $[0, \pi/2]$ und berechnen Sie so die **Wallis–Reihe**:

$$\boxed{1 + \frac{1}{3} + \frac{1\cdot 2}{3\cdot 5} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2k+1)} = \frac{\pi}{2}}$$

☺ Konvergiert die Reihe? Ist der Grenzwert plausibel? Die Majorante $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 2$ beweist die Konvergenz gegen einen Grenzwert $\in [1, 2]$.

Lösung: Auf der rechten Seite erhalten wir dank Substitution

$$\int_{x=0}^{\pi/2} \frac{2\sin(x)}{2-\sin(x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{\pi/2} \frac{2\sin(x)}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \Big[-2\arctan(\cos x)\Big]_{x=0}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}.$$

Links gilt dank absoluter Konvergenz der geometrischen Reihe:

$$\int_{x=0}^{\pi/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(x)^{2k+1}}{2^k}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x=0}^{\pi/2} \frac{\sin(x)^{2k+1}}{2^k}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1\cdot 2\cdots k}{3\cdot 5\cdots(2k+1)}$$

Die Wallis–Reihe für $\pi/2$

D432
Übung

Zur Erinnerung: Stammfunktionen zu $\sin(x)^n$ und $\cos(x)^n$ berechnen wir, wie bereits gesehen B130, rekursiv durch partielle Integration:

$$\int \sin(x)^n\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\sin(x)^{n-1}\cos(x) + \frac{n-1}{n}\int \sin(x)^{n-2}\,\mathrm{d}x$$
$$\int \cos(x)^n\,\mathrm{d}x = +\frac{1}{n}\cos(x)^{n-1}\sin(x) + \frac{n-1}{n}\int \cos(x)^{n-2}\,\mathrm{d}x$$

Für $I_n = \int_{x=0}^{\pi/2} \sin(x)^n\,\mathrm{d}x$ gilt $I_0 = \frac{\pi}{2}$ und $I_1 = 1$ und weiter $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$:

$$\int_{x=0}^{\pi/2} \sin(x)^{2k}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)} = \frac{\pi}{2}\frac{(2k)!}{k!^2\cdot 2^{2k}},$$
$$\int_{x=0}^{\pi/2} \sin(x)^{2k+1}\,\mathrm{d}x = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2k+1)} = \frac{k!^2\cdot 2^{2k}}{(2k+1)!}.$$

☺ Einsetzen in obige Reihe beschert uns die schöne Wallis–Formel. Ist die Rechnung auch lang und mühsam, jeder Schritt ist klar und leicht.

☺ Leistungsstarke Theorie ermöglicht effiziente Berechnung.

Stirlings Näherungsformel für $n!$

D433
Ausführung

Für $n \in \mathbb{N}$ ist die **Fakultät** definiert durch $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$

$0! = 1$	$7! = 5\,040$	$14! = 87\,178\,291\,200$
$1! = 1$	$8! = 40\,320$	$15! = 1\,307\,674\,368\,000$
$2! = 2$	$9! = 362\,880$	$16! = 20\,922\,789\,888\,000$
$3! = 6$	$10! = 3\,628\,800$	$17! = 355\,687\,428\,096\,000$
$4! = 24$	$11! = 39\,916\,800$	$18! = 6\,402\,373\,705\,728\,000$
$5! = 120$	$12! = 479\,001\,600$	$19! = 121\,645\,100\,408\,832\,000$
$6! = 720$	$13! = 6\,227\,020\,800$	$20! = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000$

Für große n ist die exakte Berechnung mühsam und oft gar nicht nötig:
Für $n \to \infty$ suchen wir für $n!$ eine einfache aber gute Näherungsformel.

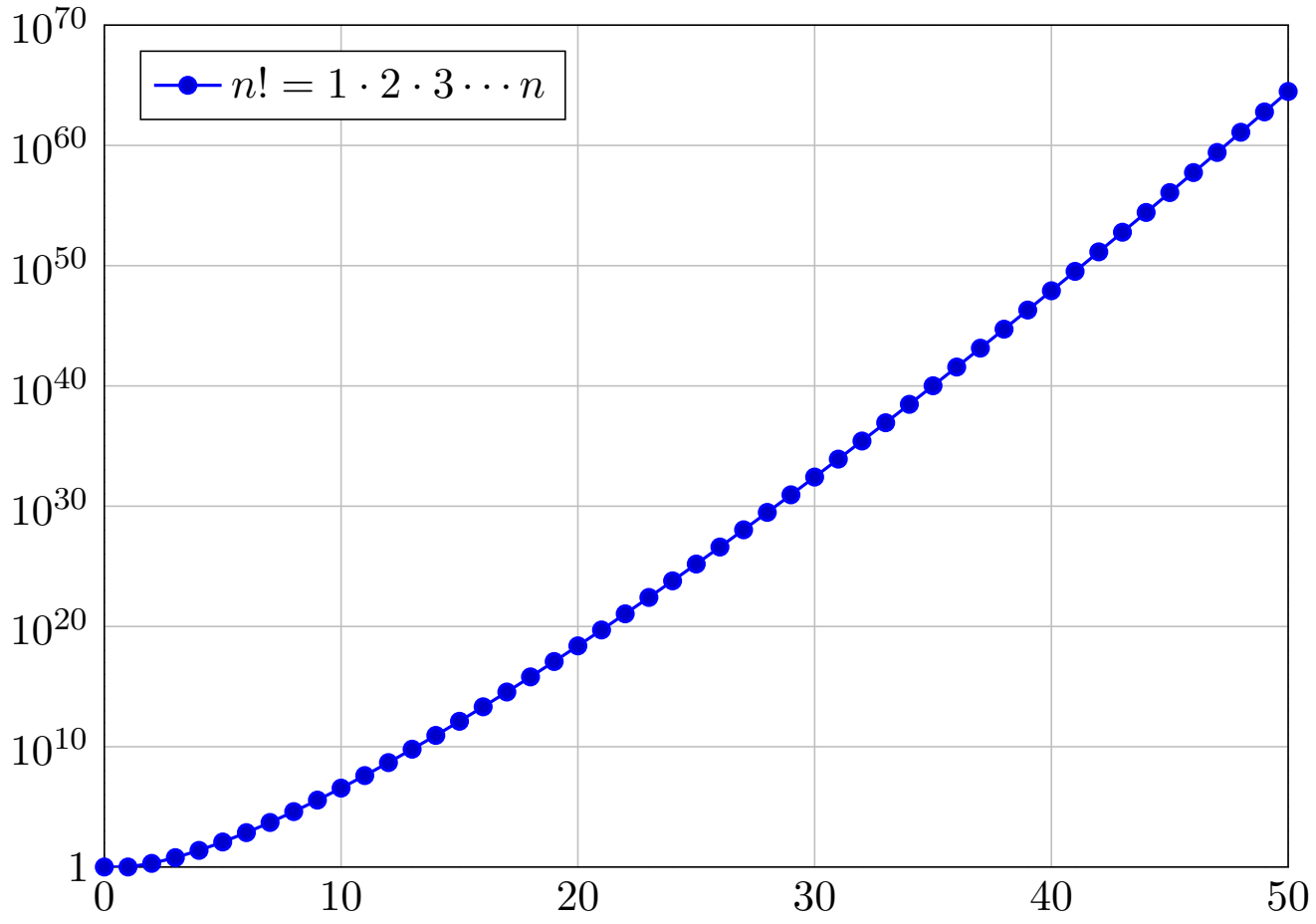
Unsere vorigen Abschätzungen B312 legen folgende Asymptotik nahe:

$$n! \sim \text{const} \cdot \sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

Dies wollen wir nun nachrechnen und auch die Konstante bestimmen.

Stirlings Näherungsformel für $n!$

D434
Ausführung



Stirlings Näherungsformel für $n!$

D435
Ausführung

Aufgabe: Dank der Gamma–Funktion wissen wir $n! = \int_{x=0}^{\infty} x^n \, \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x$. Bestimmen Sie hieraus den Grenzwert von $n! \,/\, \sqrt{n}(n/\,\mathrm{e})^n$ für $n \to \infty$.

Die grundlegende Idee erklärt das Video `youtu.be/JsUI4OuSOTU`. Der genaue Grenzwert ist das Ziel der folgenden Rechnung.

Anleitung: Nutzen Sie hierzu die majorisierte Konvergenz dank der folgenden beiden Hilfsaussagen, die Sie anschließend nachrechnen:

(1) Punktweise für jedes $t \in \mathbb{R}$ und $n \to \infty$ gilt die Konvergenz

$$f_n(t) := \exp\left[n\left(\ln\left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right] \cdot \mathbf{I}_{[-\sqrt{n},+\infty[}(t) \quad \to \quad \mathrm{e}^{-t^2/2}.$$

(2) Zudem ist die Familie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ majorisiert integrierbar.

Lösung: Einsetzen des Integrals und Umformen ergibt:

$$\frac{n!}{\sqrt{n}(n/\,\mathrm{e})^n} = \int_{x=0}^{\infty} \exp\left[n\left(\ln\left(\frac{x}{n}\right) + 1 - \frac{x}{n}\right)\right] \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{n}}$$

Stirlings Näherungsformel für $n!$

D436
Ausführung

Substitution $x = \sqrt{n}\,t + n$ bedeutet $\mathrm{d}x = \sqrt{n}\,\mathrm{d}t$ und $\frac{x}{n} = 1 + \frac{t}{\sqrt{n}}$, also:

$$\frac{n!}{\sqrt{n}(n/\,\mathrm{e})^n} = \int_{t=-\sqrt{n}}^{\infty} \exp\left[n\left(\ln\left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right] \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Uns interessiert hier das Verhalten für $n \to \infty$. Dank majorisierter Konvergenz (1-2) und Satz D2D vertauschen Limes und Integral:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{MaK}}{\underset{\text{D2D}}{=}} \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \overset{(1)}{=} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t \overset{\text{Gauß}}{\underset{\text{C2G}}{=}} \sqrt{2\pi}$$

Damit erhalten wir schließlich das Wachstumsverhalten der Fakultät $n \mapsto n!$ durch die Stirling–Formel als asymptotische Näherung (B3D):

Satz D4C: Stirling–Formel

Für $n \to \infty$ gilt der Grenzwert $\quad n! \,/\, \sqrt{n}(n/\,\mathrm{e})^n \to \sqrt{2\pi}$.

Leistungsstarke Theorie ermöglicht effiziente Berechnung.

Übung: Rechnen Sie die Voraussetztungen (1-2) sorgfältig nach.

Newton–Potential und Gravitationsfeld

Beispiel: Das **Newton–Potential** einer Masse m im Punkt $y \in \mathbb{R}^3$ ist

(1) $$F : \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{y\} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) = \frac{m}{|y-x|}.$$

(Gravitationskonstante und etwaige Vorzeichen lasse ich hier weg.)
Für jede diskrete Verteilung der Massen $m_1, \ldots, m_N$ in den Punkten $y_1, \ldots, y_N \in \mathbb{R}^3$ erhalten wir entsprechend die **Superposition** (Summe)

(2) $$F : \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{y_1, \ldots, y_N\} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{|y_i - x|}.$$

Für eine kontinuierliche Verteilung betrachten wir eine integrierbare Massendichte $\varrho : K \to \mathbb{R}$ auf einem beliebigen Kompaktum $K \subseteq \mathbb{R}^3$.
Außerhalb von K ist das Potential die **Superposition** (Faltung, D5E)

(3) $$F : \mathbb{R}^3 \smallsetminus K \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) = \int_{y \in K} \frac{\varrho(y)}{|y-x|} \, \mathrm{d}y.$$

Aufgabe: (a) Berechnen Sie jeweils das **Gravitationsfeld** $f = \operatorname{grad} F$.
(b) Ist das Potential F auf $\mathbb{R}^3 \smallsetminus K$ harmonisch, gilt hier also $\Delta F = 0$?
Dürfen wir hier die Ableitungen unter das Integral ziehen? Warum?

Newton–Potential und Gravitationsfeld

Zur Erinnerung: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Teilmenge und $F : U \to \mathbb{R}$.
Für $F \in C^1(U, \mathbb{R})$ ist der **Gradient** $f = \operatorname{grad} F : U \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\operatorname{grad} F = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_2}, \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \right).$$

Für $F \in C^2(U, \mathbb{R})$ gilt $f \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$, und für die **Divergenz** von f folgt

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} = \Delta F.$$

Dies führt zum **Laplace–Operator** $\Delta : C^2(U, \mathbb{R}) \to C^0(U, \mathbb{R}) : F \mapsto \Delta F$,

$$\Delta = \operatorname{div} \circ \operatorname{grad} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

Eine Funktion F mit der Eigenschaft $\Delta F = 0$ heißt **harmonisch**.
Mit anderen Worten, die Funktion $F : \mathbb{R}^3 \supseteq U \to \mathbb{R}$ ist zweimal stetig differenzierbar und eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\Delta F = 0.$$

Dies ist die **homogene Potentialgleichung** oder **Laplace–Gleichung**.

Newton–Potential und Gravitationsfeld

D439
Ausführung

Lösung: (1) Wir berechnen (a) und (b) zunächst für eine Punktmasse:

$$F(x) = \frac{m}{|y-x|} \;\Rightarrow\; f(x) = \operatorname{grad} F(x) = m\,\frac{y-x}{|y-x|^3} \;\Rightarrow\; \Delta F = \operatorname{div} f = 0$$

(1a) Nachrechnen für die i-te Koordinate $f_i = \partial F/\partial x_i$:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sum_{j=1}^{3}(y_j - x_j)^2\right]^{-1/2} = \left[\sum (y_j - x_j)^2\right]^{-3/2}(y_i - x_i) = \frac{y_i - x_i}{|y-x|^3}$$

(1b) Nochmaliges Ableiten ergibt analog:

$$\frac{\partial^2 F_i}{\partial x_i^2} = \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{y_i - x_i}{|y-x|^3} = \frac{-1}{|y-x|^3} + 3\frac{(y_i - x_i)^2}{|y-x|^5}$$

Für den Laplace–Operator $\Delta F = \operatorname{div} f$ erhalten wir schließlich:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} = 0$$

Somit gilt $\Delta F = 0$: Die Funktion $F : \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{y\} \to \mathbb{R}$ ist harmonisch!

Newton–Potential und Gravitationsfeld

D440
Ausführung

(2) Für eine Summe von Punktmassen gilt dank Linearität der Ableitung:

$$F(x) = \sum_i \frac{m_i}{|y_i - x|} \;\Rightarrow\; f(x) = \sum_i m_i\,\frac{y_i - x}{|y_i - x|^3} \;\Rightarrow\; \Delta F = \operatorname{div} f = 0$$

(3) Zur Massendichte $\varrho : K \to \mathbb{R}$ erhalten wir die Superposition (Faltung)

$$F : \mathbb{R}^3 \smallsetminus K \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) = \int_{y\in K} \frac{\varrho(y)}{|y-x|}\,\mathrm{d}y.$$

(3a) Das zugehörige Gravitationsfeld $f = \operatorname{grad} F$ ist (dank Satz D3c)

$$f(x) = \operatorname{grad}\int_K \frac{\varrho(y)}{|y-x|}\,\mathrm{d}y \overset{\text{D3c}}{=} \int_K \operatorname{grad}\frac{\varrho(y)}{|y-x|}\,\mathrm{d}y = \int_K \frac{y-x}{|y-x|^3}\,\varrho(y)\,\mathrm{d}y.$$

(3b) Somit ist das Newton–Potential F auf $\mathbb{R}^3 \smallsetminus K$ harmonisch, denn

$$\Delta F(x) = \Delta\int_K \frac{\varrho(y)}{|y-x|}\,\mathrm{d}y \overset{\text{D3c}}{=} \int_K \Delta\frac{\varrho(y)}{|y-x|}\,\mathrm{d}y = \int_K 0\,\mathrm{d}y = 0.$$

☺ Ableitungen und Integral vertauschen, da der Integrationsbereich K kompakt ist und der Integrand in $x \in \mathbb{R}^3 \smallsetminus K$ stetig differenzierbar (D3c).

Glättungskern (aka mollifier, bump function)

Aufgabe: (1) Skizzieren Sie (für $n = 1$) die Funktion

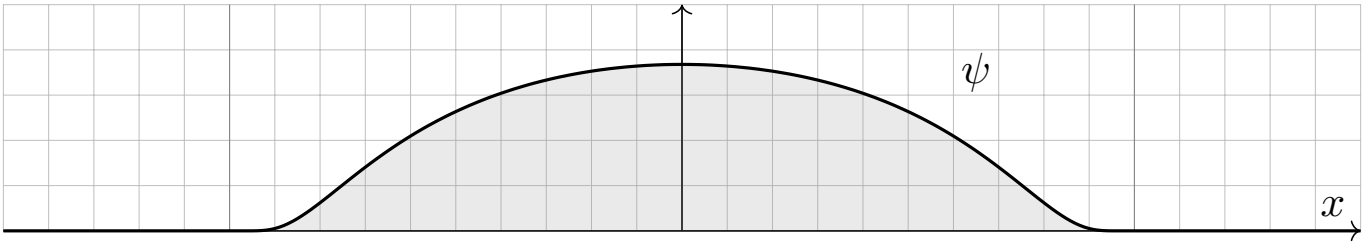
$$\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/(1-|x|^2)} & \text{für } |x| < 1, \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1. \end{cases}$$

(2) Warum ist das Integral $c := \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\,\mathrm{d}x$ strikt positiv? Schätzen Sie diesen Wert graphisch-numerisch aus Ihrer Skizze (in Dimension $n = 1$).

(3) Ist ψ glatt, also $\psi \in C^\infty$? Was ist ihr Träger? Ist er kompakt?

(4) Das Vielfache $\varphi := \psi/c$ hat die Gesamtmasse $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Skizzieren Sie die skalierte Funktion $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto \varphi(x/\varepsilon)/\varepsilon^n$ für $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Ist φ_ε ebenfalls glatt? Gilt weiterhin $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$?

Lösung: (1) Auswertung einiger Punkte ergibt das folgende Bild:



Glättungskern (aka mollifier, bump function)

(2) Das Integral entspricht der Fläche, hier gerundet etwa 44 Quadrate. Wir schätzen so $c = \int_{\mathbb{R}} \psi(x)\,\mathrm{d}x \approx 0.44$. Es gibt für dieses Integral keine geschlossene Formel als elementaren Ausdruck. Eine noch genauere Näherung $c \approx 0.4439938\ldots$ erhält man durch numerische Integration.

Allgemein in Dimension $n \geq 1$ ist die Funktion ψ rotationssymmetrisch. Das Volumen $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\,\mathrm{d}x$ lässt sich ebenso nur numerisch berechnen. Auf den genauen Wert kommt es uns im Folgenden nicht weiter an.

(3) Die Funktion ψ ist offensichtlich glatt im Gebiet $|x| > 1$ und ebenso für $|x| < 1$. Entlang der Sphäre $|x| = 1$ müssen wir genauer hinschauen! Von Seite B438 wiedererkennen wir die bemerkenswerte Funktion

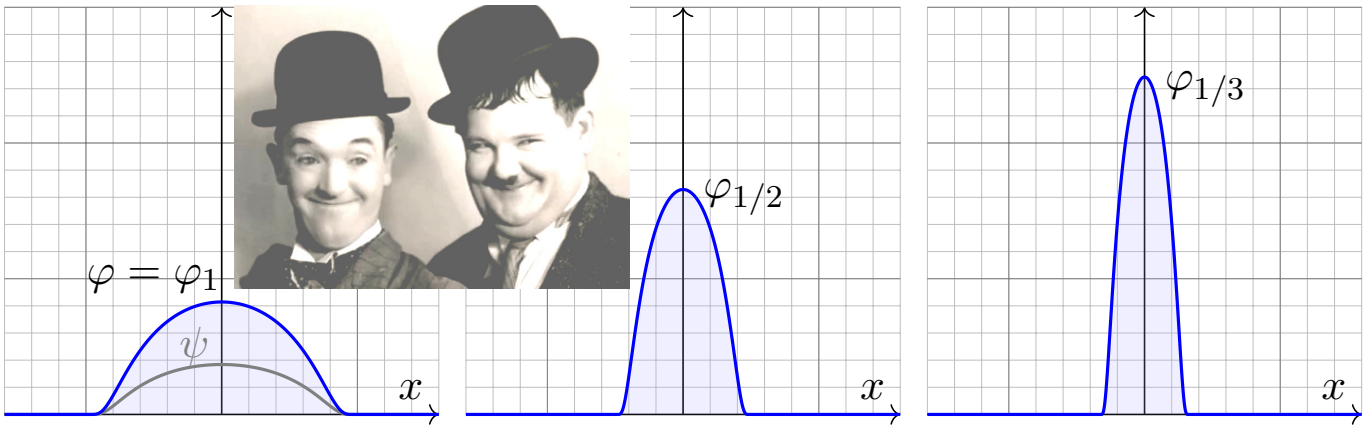
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

Dort haben wir sorgfältig nachgerechnet, dass f glatt ist. Somit ist auch $\psi(x) = f(1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2)$ glatt, da Komposition glatter Funktionen. Der Träger $\operatorname{supp}\psi = \bar{B}(0,1)$ ist der abgeschlossene Einheitsball, also kompakt. Die Skizze zeigt den eindimensionalen Fall $\bar{B}(0,1) = [-1,1]$.

Glättungskern (aka mollifier, bump function)

(4) Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Die skalierte Funktion $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto \varphi(x/\varepsilon)/\varepsilon^n$ ist glatt, erfüllt $\varphi_\varepsilon \geq 0$ und $\operatorname{supp} \varphi_\varepsilon = \bar{B}(0,\varepsilon)$ sowie $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

☺ Dies ist ein besonders anschaulicher Spezialfall des Transformationsatzes für n–dimensionale Integrale (C2B).



☺ Anschaulich: Für $\varepsilon \searrow 0$ konzentriert sich φ_ε immer mehr um den Nullpunkt. Die korrekt gewählte Skalierung erhält die Gesamtmasse!

☺ Der Grenzwert für $\varepsilon \searrow 0$ ergibt die ominöse **Dirac–Funktion** D553. Unter dem Integral hingegen erhalten wir das **Dirac–Funktional** D5L.

Glättungskern (aka mollifier, bump function)

Und die Moral von der Geschicht? Was nützen uns Hutfunktionen? In Kapitel B dienten sie zunächst als Werkstück zur Fingerübung, um daran unsere bisherigen Techniken zu testen und zu schärfen: Integration, Taylor–Reihen, glatte und analytische Funktionen, etc. . .

Glatte Funktionen sind flexibel, analytische Funktionen hingegen sind starr. Für Letztere gilt der Eindeutigkeitssatz: Haben zwei analytische Funktionen $\varphi, \psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in einem Punkt x_0 dieselben Ableitungen $\partial^\alpha \varphi(x_0) = \partial^\alpha \psi(x_0)$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$, so gilt $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Ebenso: Stimmen zwei analytische Funktionen $\varphi, \psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auf einer (beliebig kleinen) offenen Menge $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{R}^n$ überein, also $\varphi|_U = \psi|_U$, so gilt $\varphi = \psi$ auf $\mathbb{R}^n$. Analytisch und kompakt getragen bedeutet Null!

Glatte Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ hingegen sind bemerkenswert flexibel: Die vorigen Konstruktionen zeigen, dass der Vektorraum $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ aller glatten Funktionen mit kompaktem Träger erstaunlich reichhaltig ist.

Insbesondere dienen glatte Hutfunktionen als Testfunktionen wie in B4G. In diesem Kapitel nutzen wir sie nun zur Konstruktion von Distributionen. Diese einfache Idee entfaltet sich zu einer wunderbaren Rechentechnik!

Mittelwertsatz der mehrdim. Integralrechnung

In diesem Kapitel geht es um **Integrale und Grenzwerte**. Eine wichtige und häufige Anwendung sind Mittelwerte durch gewichtete Integrale, etwa eine lokale Masseverteilung. Anschaulich-physikalisch entspricht dies einer Messung, etwa lokal in einem kleinen Ball um a mit Radius r. Uns interessiert der Grenzübergang $r \searrow 0$. Hierzu dient der folgende Mittelwertsatz; den eindimensionalen Fall B4B kennen Sie bereits.

Satz D5A: Mittelwertsatz der mehrdim. Integralrechnung

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader $K = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ mit $a_i \le b_i$ in $\mathbb{R}$ oder ein Ball $K = \bar{B}(a, r)$ um den Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ mit Radius $r \in \mathbb{R}_{\ge 0}$.

Sei $f : K \to \mathbb{R}$ stetig, $g : K \to \mathbb{R}$ integrierbar und $g \ge 0$ (oder $g \le 0$). Dann existiert ein Punkt $\xi \in K$ mit der Mittelwerteigenschaft

$$\boxed{\int_K f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x = f(\xi) \int_K g(x)\, \mathrm{d}x.}$$

Im Spezialfall $g = 1$ erhalten wir $\int_K f(x)\, \mathrm{d}x = f(\xi) \cdot \mathrm{vol}_n(K)$.

Im Falle $\int_K g(x)\, \mathrm{d}x = 1$ erhalten wir $\int_K f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x = f(\xi)$.

Mittelwertsatz der mehrdim. Integralrechnung

Aufgabe: Wiederholen Sie den eindimensionalen Mittelwertsatz B4B. Beweisen Sie nach diesem Vorbild den mehrdimensionalen Satz D5A.

Lösung: Die Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ist wegzusammenhängend und kompakt. Hierauf nimmt die stetige Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ ihr Minimum $m = f(x_m)$ und ihr Maximum $M = f(x_M)$ an, also $m \le f(x) \le M$ für alle $x \in K$.

Wegen $g \ge 0$ folgt daraus $m\, g(x) \le f(x)\, g(x) \le M\, g(x)$ für alle $x \in K$. Das Integral ist monoton und linear, also folgt $m \int g \le \int fg \le M \int g$. Demnach existiert ein Faktor $\mu \in [m, M]$, sodass $\int fg = \mu \int g$ gilt.

Wir nutzen nun den Zwischenwertsatz für die stetige Funktion f: Es existiert ein Punkt $\xi \in K$ mit $f(\xi) = \mu$. Somit gilt $\int fg = f(\xi) \int g$.

Genauer: Wir betrachten den Weg $\gamma : [0, 1] \to K : t \mapsto (1 - t)x_m + tx_M$ von $\gamma(0) = x_m$ nach $\gamma(1) = x_M$. Die Komposition $\varphi = f \circ \gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}$ verläuft stetig von $\varphi(0) = m$ nach $\varphi(1) = M$. Also existiert ein $\tau \in [0, 1]$ mit $\varphi(\tau) = \mu$. Der Punkt $\xi = \gamma(\tau) \in K$ leistet demnach das Gewünschte.

☺ Statt Quader oder Ball genügt es, dass der Definitionsbereich K kompakt und wegzusammenhängend ist. Beides wird wirklich benötigt.

Infinitesimale Mittelwerte und Lebesgue–Punkte

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar mit $0 < \mathrm{vol}_n(\Omega) < \infty$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ integrierbar. Wir definieren den **Mittelwert** von f auf Ω durch das normierte Integral

$$\boxed{\fint_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x := \frac{1}{\mathrm{vol}_n(\Omega)} \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Satz D5B: Jeder Stetigkeitspunkt ist ein Lebesgue–Punkt.

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar, d.h. integrierbar auf jedem Ball $\bar{B}(a,r)$. Ist f in a stetig, so gelten für $r \to 0$ die beiden Mittelwerteigenschaften

$$(1) \quad \fint_{\bar{B}(a,r)} f(x)\,\mathrm{d}x \to f(a) \quad \text{und} \quad (2) \quad \fint_{\bar{B}(a,r)} \big|f(x) - f(a)\big|\,\mathrm{d}x \to 0.$$

Allgemein gilt die Implikation (2) $\Rightarrow$ (1), aber nicht umgekehrt (1) $\Rightarrow$ (2). Meist nutzen bzw. fordern wir deshalb die stärkere Bedingung (2). Wir nennen a einen **Lebesgue–Punkt**, wenn (2) gilt; damit folgt (1).

Aufgabe: Rechnen Sie die Aussagen des Satzes sorgfältig nach! In welchen Punkten erfüllt $f = \mathrm{sign} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Eigenschaft (1) bzw. (2)?

Infinitesimale Mittelwerte und Lebesgue–Punkte

Lösung: Stetigkeit der Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ im Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ bedeutet: Zu jedem noch so kleinen $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert ein Radius $r_\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass für $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x - a| \le r_\varepsilon$ stets $|f(x) - f(a)| \le \varepsilon$ gilt. Für $r \le r_\varepsilon$ folgt:

$$\fint_{\bar{B}(a,r)} \big|f(x) - f(a)\big|\,\mathrm{d}x \quad \le \quad \fint_{\bar{B}(a,r)} \varepsilon\,\mathrm{d}x = \varepsilon$$

Stetigkeit in a impliziert demnach (2). Allgemein folgt (1) aus (2):

$$\left|\fint_{\bar{B}(a,r)} f(x)\,\mathrm{d}x - f(a)\right| = \left|\fint_{\bar{B}(a,r)} f(x) - f(a)\,\mathrm{d}x\right| \le \fint_{\bar{B}(a,r)} \big|f(x) - f(a)\big|\,\mathrm{d}x$$

Für $r \to 0$ geht die rechte Seite gegen Null (2), also auch die linke (1).

⚠ Die umgekehrte Implikation „(1) $\Rightarrow$ (2)“ gilt im Allgemeinen nicht. Als Gegenbeispiel betrachten wir $f = \mathrm{sign} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt $a = 0$:

$$\fint_{\bar{B}(0,r)} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad = \frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} \mathrm{sign}(x)\,\mathrm{d}x \quad = 0 \to f(0) = 0,$$

$$\fint_{\bar{B}(0,r)} \big|f(x) - f(0)\big|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} \big|\mathrm{sign}(x)\big|\,\mathrm{d}x = 1 \not\to 0.$$

In jedem Punkt $a \neq 0$ ist f stetig, also gilt (2) und somit auch (1).

Gewichtete Mittelwerte: das Integral als Messgerät

D509
Ergänzung

Aufgabe: Skizzieren Sie für $\varepsilon \searrow 0$ die folgenden Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\,\mathbf{I}_{[0,\varepsilon]},\quad g_\varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon}\,\mathbf{I}_{[-\varepsilon,\varepsilon]},\quad h_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon - |x|}{\varepsilon^2}\,\mathbf{I}_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(x),\quad k_\varepsilon(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2\varepsilon^2}}{\varepsilon\sqrt{2\pi}}$$

(1) Berechnen Sie die punktweise Grenzfunktion $f(x) = \lim_{\varepsilon\searrow 0} f_\varepsilon(x)$.
(2) Gilt $\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x$ für $\varepsilon \searrow 0$? Wo liegt hier das Problem?
(3) Gilt $\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ für jede Funktion $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$?
(4) Gilt $\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x \to \varphi(0)$, also $f_\varepsilon \to \delta_0$ im Distributionensinne?
(5) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar mit Gesamtmasse $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.
Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ erfüllt $f_\varepsilon(x) := f(x/\varepsilon)/\varepsilon^n$ ebenso $\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = 1$.
Gilt $\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x \to \varphi(0)$, also $f_\varepsilon \to \delta_0$ im Distributionensinne?

Lösung: (1) Wir finden $f(0) = \infty$ und $f(x) = 0$ für $x \neq 0$. (2) Daher gilt $\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = 1 \not\to 0 = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x$. Masse verschwindet nach Unendlich! Ebenso schlägt (3) fehl. Hingegen gilt (4) sobald φ stetig ist (im Punkt 0).
☺ Dies ist genau die Rechnung, die uns zum HDI geführt hat! B122
Die anderen Beispiele sind analog, siehe Dreiecksfunktionen D205 und Glockenfunktionen D409. Allgemein zu (5) gilt folgender Grenzwertsatz.

Gewichtete Mittelwerte: das Integral als Messgerät

D510
Ergänzung

Je nach Anwendung wird nicht über $\bar{B}(a,r)$ gleichverteilt gemittelt, sondern gewichtet. Auch hierfür benötigen wir geeignete Werkzeuge:

Satz D5c: Grenzwertsatz für gewichtete Mittelwerte

(1) Für jedes $\varepsilon > 0$ sei $f_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Funktion mit Gesamtmasse $\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = 1$ und Träger $\operatorname{supp}(f_\varepsilon) \subseteq \bar{B}(0, r_\varepsilon)$, wobei $r_\varepsilon \to 0$ für $\varepsilon \to 0$.
Dann gilt $\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x \to \varphi(0)$ für jede Testfunktion $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$.
Hierzu genügt bereits, dass $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ im Punkt 0 stetig ist.

(2) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar mit Gesamtmasse $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.
Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ erfüllt $f_\varepsilon(x) := f(x/\varepsilon)/\varepsilon^n$ ebenso $\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = 1$.
Damit gilt $\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x \to \varphi(0)$ für jede Testfunktion $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^n)$.
Hierzu genügt φ stetig in 0 und essentiell beschränkt, $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

⚠ In vielen Anwendungen ist der Träger $\operatorname{supp}(f_\varepsilon)$ nicht kompakt; dann können wir (1) nicht nutzen, sondern benötigen den Fall (2).

☺ In beiden Fällen (1) und (2) gilt $f_\varepsilon \to \delta_0$ im Distributionensinne D5i.
Diese einfache Idee entfaltet sich zu einer wunderbaren Rechentechnik.

Gewichtete Mittelwerte: das Integral als Messgerät

Aufgabe: Rechnen Sie die Aussagen des Satzes sorgfältig nach!

Lösung: (1a) Zur Vereinfachung sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig auf ganz $\mathbb{R}^n$. Der Mittelwertsatz D5A der Integralrechnung garantiert dann

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\bar{B}(0,r_\varepsilon)} f_\varepsilon(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(\xi_\varepsilon).$$

Genauer: Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert ein geeignetes $\xi_\varepsilon \in \bar{B}(0, r_\varepsilon)$. Für $\varepsilon \to 0$ gilt $r_\varepsilon \to 0$, also auch $\xi_\varepsilon \to 0$ und somit $\varphi(\xi_\varepsilon) \to \varphi(0)$.

(1b) Wir setzen nun nur noch voraus, dass φ stetig im Punkt 0 ist. Sei $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$. Es existiert ein Radius $r \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass für $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x - 0| \le r$ stets $|\varphi(x) - \varphi(0)| \le \delta$ gilt. Insbesondere ist φ auf $\bar{B}(0, r_\varepsilon)$ beschränkt und somit absolut integrierbar. Dank $r_\varepsilon \to 0$ existiert ein $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass für ε mit $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ stets $r_\varepsilon \le r$ gilt. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x - \varphi(0)\right| &= \left|\int_{\bar{B}(0,r_\varepsilon)} f_\varepsilon(x)\,\big[\varphi(x) - \varphi(0)\big]\,\mathrm{d}x\right| \\
\le \int_{\bar{B}(0,r_\varepsilon)} f_\varepsilon(x)\,\big|\varphi(x) - \varphi(0)\big|\,\mathrm{d}x &\le \int_{\bar{B}(0,r_\varepsilon)} f_\varepsilon(x)\,\delta\,\mathrm{d}x \quad = \quad \delta
\end{aligned}$$

Gewichtete Mittelwerte: das Integral als Messgerät

☺ Die erste Rechnung (1a) gelingt leicht dank Mittelwertsatz D5A. Der allgemeinere Fall (1b) ist mühsamer, gelingt aber letztlich genauso. Im Fall (2) hingegen ist der Träger $\operatorname{supp}(f_\varepsilon)$ nicht notwendig kompakt:

(2a) Zur Vereinfachung des Integrals nutzen wir die Substitution $x = \varepsilon y$:

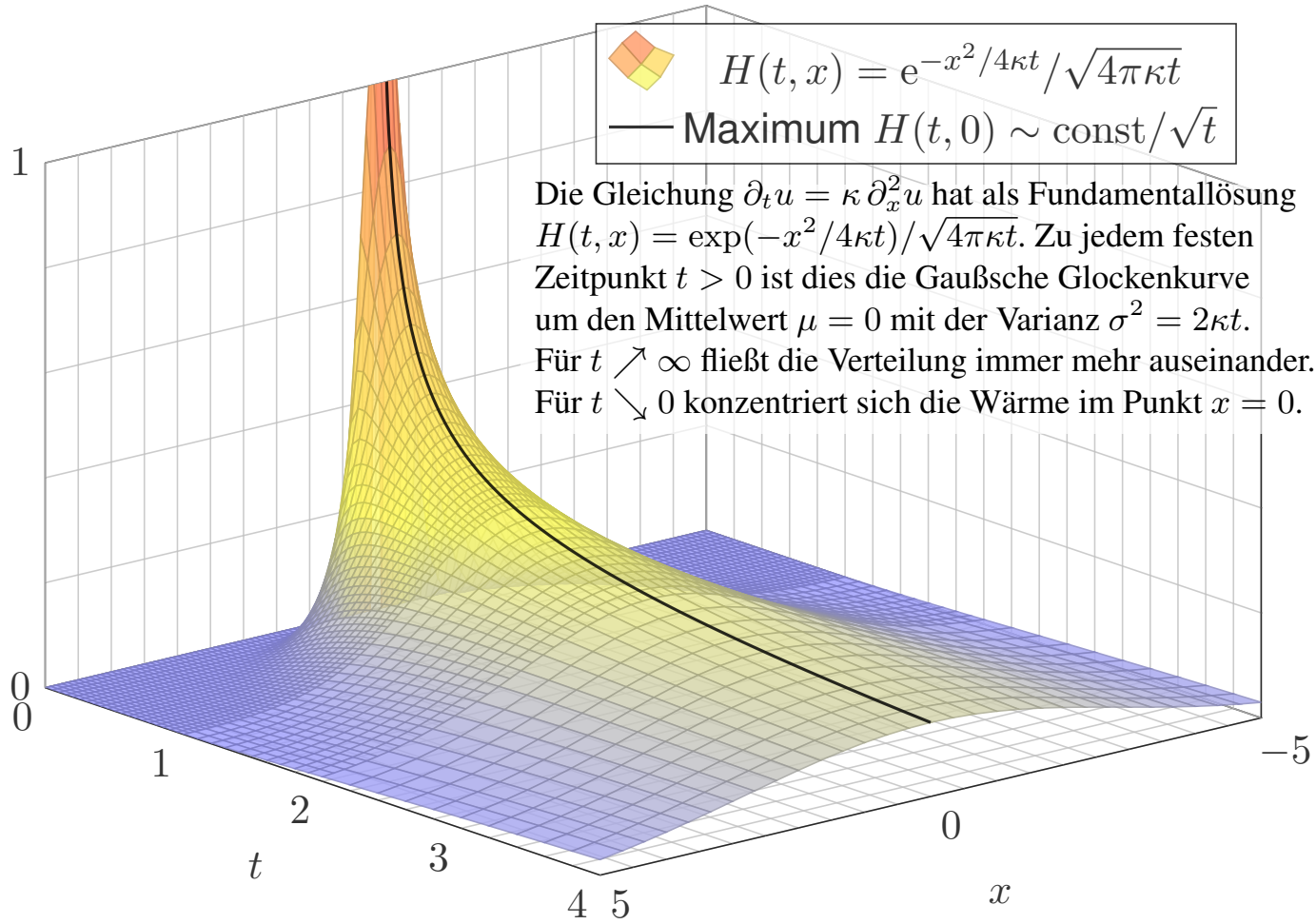
$$\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\varepsilon^n} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,\varphi(\varepsilon y)\,\mathrm{d}y$$

Für den Grenzwert $\varepsilon \searrow 0$ nutzen wir die majorisierte Konvergenz D2D: Die Majorante $|f(y)\,\varphi(\varepsilon y)| \le |f(y)| \cdot M$ mit $M := \sup|\varphi|$ ist integrierbar. Für jeden Punkt $y \in \mathbb{R}^n$ gilt $\lim_{\varepsilon \searrow 0} f(y)\,\varphi(\varepsilon y) = f(y)\,\varphi(0)$. Also folgt:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int f_\varepsilon(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int f(y)\,\varphi(\varepsilon y)\,\mathrm{d}y = \int \lim_{\varepsilon \searrow 0} \Big[f(y)\,\varphi(\varepsilon y)\Big]\,\mathrm{d}y \\
= \int f(y)\,\varphi(0)\,\mathrm{d}y \quad &= \varphi(0) \int f(y)\,\mathrm{d}y \qquad = \varphi(0)
\end{aligned}$$

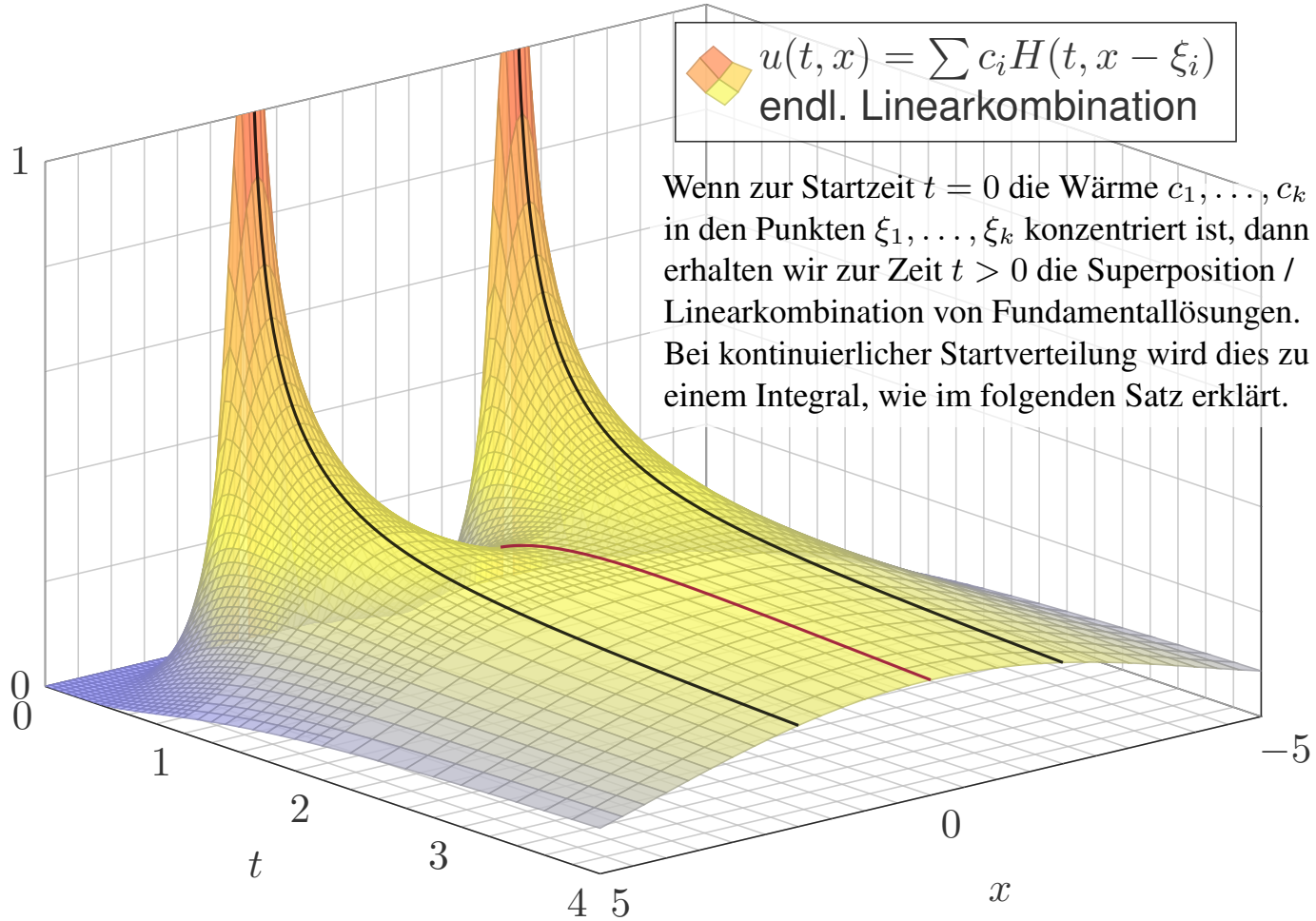
(2b) Wir nutzen in (2a) nur $M = \operatorname{ess\,sup}|\varphi| < \infty$ und Stetigkeit in 0.

Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung



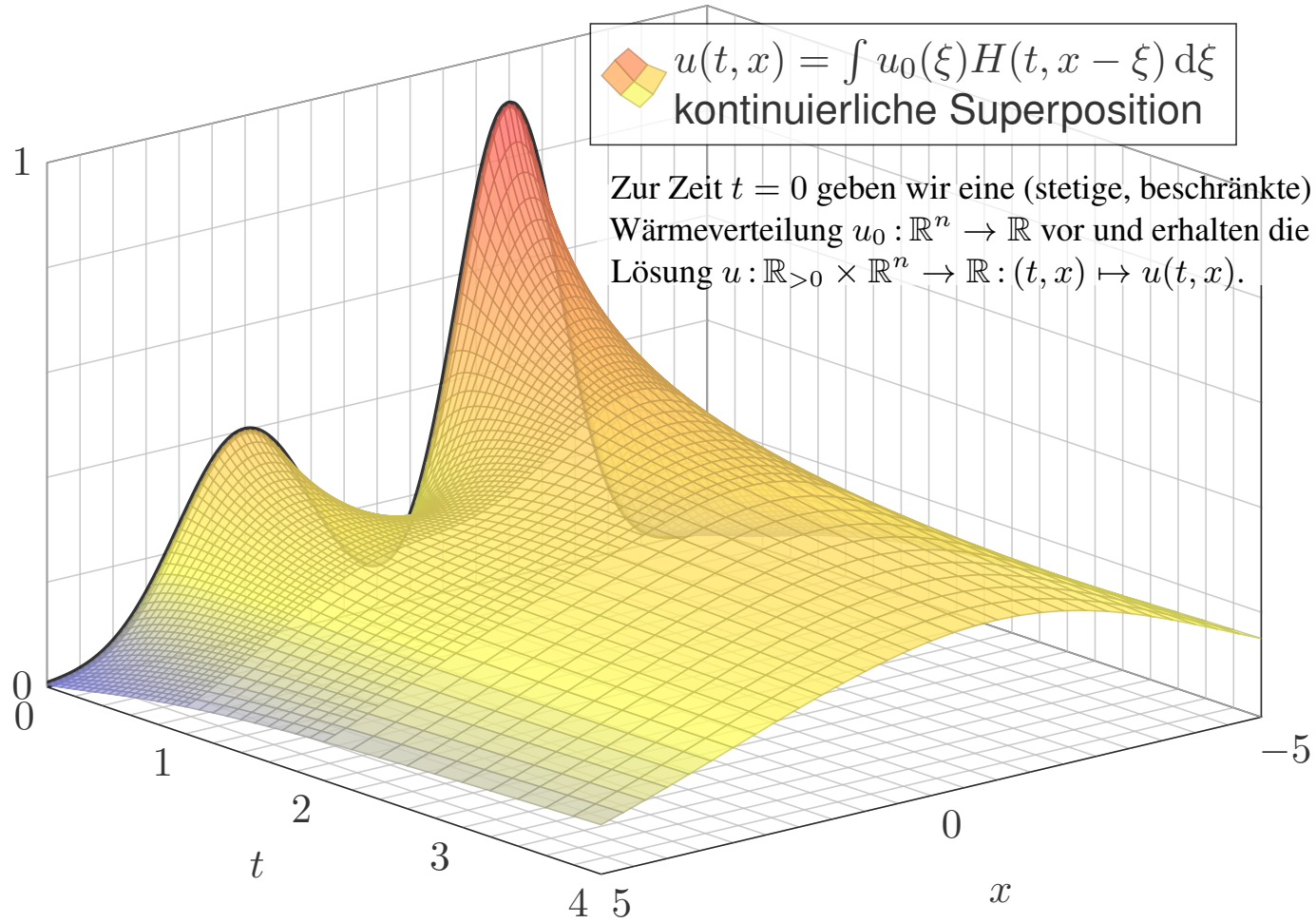
Die Gleichung $\partial_t u = \kappa\, \partial_x^2 u$ hat als Fundamentallösung $H(t,x) = \exp(-x^2/4\kappa t)/\sqrt{4\pi\kappa t}$. Zu jedem festen Zeitpunkt $t > 0$ ist dies die Gaußsche Glockenkurve um den Mittelwert $\mu = 0$ mit der Varianz $\sigma^2 = 2\kappa t$. Für $t \nearrow \infty$ fließt die Verteilung immer mehr auseinander. Für $t \searrow 0$ konzentriert sich die Wärme im Punkt $x = 0$.

Superposition von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung



Wenn zur Startzeit $t = 0$ die Wärme $c_1, \ldots, c_k$ in den Punkten $\xi_1, \ldots, \xi_k$ konzentriert ist, dann erhalten wir zur Zeit $t > 0$ die Superposition / Linearkombination von Fundamentallösungen. Bei kontinuierlicher Startverteilung wird dies zu einem Integral, wie im folgenden Satz erklärt.

Superposition von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung



Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

Satz D5D: Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

(1) Die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = \kappa\,\Delta u$ hat als Fundamentallösung eine auseinanderfließende Glockenkurve, den **Wärmeleitungskern**

$$H \,:\, \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \,:\, H(t,x) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi\kappa t})^n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\kappa t}\right).$$

Die Konstanten sichern die Normierung $\int_{x\in\mathbb{R}^n} H(t,x)\,\mathrm{d}x = 1$ für $t > 0$.

(2) Für $t = 0$ sei die Wärmeverteilung $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vorgegeben, $u_0 \in C_b$. Für $t > 0$ erhalten wir die Lösung durch **Superposition** (Faltung D5E):

$$u \,:\, \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \,:\, u(t,x) = \int_{\xi\in\mathbb{R}^n} H(t, x-\xi)\, u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

Sie erfüllt $\partial_t u = \kappa\,\Delta u$ für $t > 0$ sowie $\lim_{t\searrow 0} u(t,x) = u_0(x)$.

(3) Aus $u(0,x) = \sin(kx)$ für $t = 0$ folgt $u(t,x) = \mathrm{e}^{-k^2\kappa t}\sin(kx)$ für $t \geq 0$.
Aus $u(0,x) = \sum_k c_k \sin(kx)$ folgt $u(t,x) = \sum_k c_k\,\mathrm{e}^{-k^2\kappa t}\sin(kx)$ für $t \geq 0$.
Die Wärmeleitung glättet: Hohe Frequenzen klingen extrem schnell ab.

Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

Aufgabe: (1a) Berechnen Sie die Ableitungen $\partial H/\partial t$ und $\partial^2 H/\partial x_i^2$. Prüfen Sie so nach, dass H tatsächlich die Gleichung $\partial_t H = \kappa\,\Delta H$ löst.

Lösung: (1a) Wir untersuchen die Funktion $H : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$H(t, x_1, \ldots, x_n) = (4\pi\kappa t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{4\kappa t}\right)$$

Wir leiten zweimal nach $x_1, \ldots, x_n$ und einmal nach t ab:

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = (4\pi\kappa t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\kappa t}\right) \frac{-x_i}{2\kappa t}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_i^2} = (4\pi\kappa t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\kappa t}\right) \frac{x_i^2}{4\kappa^2 t^2} - \quad 2\pi(4\pi\kappa t)^{-\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\kappa t}\right)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = (4\pi\kappa t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\kappa t}\right) \frac{|x|^2}{4\kappa t^2} \quad - 2\pi\kappa n(4\pi\kappa t)^{-\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\kappa t}\right)$$

Die Summe ergibt das erhoffte Ergebnis $\partial_t H = \kappa\,\Delta H$:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \kappa\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 H}{\partial x_n^2}\right)$$

Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

☺ Unsere Fundamentallösung H erfüllt $(\partial_t - \kappa\,\Delta)H = 0$. Diese schöne Funktion ist vollkommen explizit und sehr nützlich! Wir wollen uns mit ihr vertraut machen und hieraus weitere, gar alle Lösungen konstruieren.

Aufgabe: (1b) Skizzieren Sie $H : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $n = 1$ und $\kappa = 1$.

(1c) Für alle $t \in \mathbb{R}_{>0}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $H(t, x) \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}^n} H(t, x)\,\mathrm{d}x = 1$. Für $t \searrow 0$ ist die Verteilung $H(t, x)$ beliebig eng um $x = 0$ konzentriert.

(1d) Löst auch $u(t, x) = \sum_{j=1}^N c_j H(t, x - \xi_j)$ die Gleichung $\partial_t u = k\,\Delta u$? Welche Startverteilung erhalten wir hier für $t \searrow 0$?

(1e) Zu $t = 0$ konzentrieren wir jeweils die Wärmemenge 1 in $x = \pm 2$. Wie fließt die Wärme? Welche Wärmedichte wird in $x = 0$ erreicht?

Lösung: (1b) Unsere erste Graphik D513 zeigt die Diffusion der Wärmemenge 1, die zur Zeit $t = 0$ im Punkt $x = 0$ konzentriert ist.

(1c) Für festes $t > 0$ ist $H(t, x)$ eine Gaußsche Glockenkurve mit Mittelwert $\mu = 0$ und Streuung $\sigma = \sqrt{2\kappa t}$. C231 Für $t \searrow 0$ gilt $\sigma \searrow 0$: Anschaulich konzentriert sich die Verteilung beliebig eng um $x = 0$.

Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

(1d) Jede Verschiebung $H(t, x-\xi)$ nach $\xi \in \mathbb{R}^n$ löst obige PDE, also auch jede Linearkombination $u(t,x) = \sum_{j=1}^N c_j H(t, x-\xi_j)$: Da unsere PDE linear ist, erhalten wir mühelos $(\partial_t - \kappa\,\Delta)u = 0$.

Diese Lösung beginnt mit Wärmemenge c_j im Punkt ξ_j für $j = 1, \ldots, N$. Damit können wir jede **diskrete Anfangsverteilung** lösen! Beispiel:

(1e) Die zweite Graphik D514 zeigt die Diffusion der Wärmemenge 2, die zur Zeit $t = 0$ in den Punkten $x = \pm 2$ konzentriert ist. Für $t > 0$ ist dies die Überlagerung von zwei Glockenkurven mit $\mu = \pm 2$ und $\sigma = \sqrt{2\kappa t}$.

Im Punkt $x = 0$ steigt die Wärmemenge für $0 \le t \le t_0$ und fällt für $t \ge t_0$ gegen 0. Die expliziten Werte berechnet man durch Kurvendiskussion.

Eine **kontinuierliche Anfangsverteilung** $u_0(x)$ führt entsprechend zu

$$u(t,x) = \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} H(t, x-\xi)\, u_0(\xi)\, \mathrm{d}\xi.$$

Das ist die kontinuierliche Superposition von Fundamentallösungen. Auch diese Lösung $u(t,x)$ wollen wir schließlich nachrechnen.

Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

Aufgabe: (2) Rechnen Sie für jede Startverteilung $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ nach, dass die angegebene Funktion $u : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Lösung ist.

Lösung: (2a) Wir ziehen die **Ableitung unters Integral** und erhalten:

$$(\partial_t - \kappa\,\Delta)u(t,x) = \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} u_0(\xi)\, \underbrace{(\partial_t - \kappa\,\Delta)H(t, x-\xi)}_{=\,0,\ \text{Fundamentallösung!}}\, \mathrm{d}\xi = 0$$

Ist dies gerechtfertigt? Ja, denn die partiellen Ableitungen aus (1) sind majorisiert integrierbar! Dies prüft man geduldig nach, siehe D419.

(2b) Dank **Transformationssatz** gilt für $\zeta = x - \xi$ und $\xi = x - \zeta$:

$$u(t,x) = \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} u_0(\xi)\, H(t, x-\xi)\, \mathrm{d}\xi = \int_{\zeta \in \mathbb{R}^n} u_0(x-\zeta)\, H(t,\zeta)\, \mathrm{d}\zeta$$

Damit prüfen wir schließlich die **Anfangswerte** für $t = 0$ nach:

$$\lim_{t \searrow 0} u(t,x) = \lim_{t \searrow 0} \int_{\zeta \in \mathbb{R}^n} u_0(x-\zeta)\, H(t,\zeta)\, \mathrm{d}\zeta = u_0(x)$$

Die Verteilung $\zeta \mapsto H(t,\zeta)$ hat Gesamtmasse 1, für $t \searrow 0$ beliebig eng um $\zeta = 0$ konzentriert, das Integral geht daher gegen $u_0(x)$. Satz D5c: Hierzu sei u_0 stetig (zumindest im Punkt x) und (essentiell) beschränkt.

Faltung von Funktionen: Motivation

Die **Wärmeleitungsgleichung** $\partial_t u = \kappa\,\Delta u$ hat die Fundamentallösung $H : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, wie oben erklärt. Zur Startverteilung $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ erhalten wir die zugehörige Lösung u durch **Superposition** (Faltung)

$$u \,:\, \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \,:\, u(t,x) = \int_{\xi\in\mathbb{R}^n} H(t, x-\xi)\, u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Das **Newton–Potential** einer Masse m im Nullpunkt ist $F(x) = m/|x|$. Dies ist die Fundamentallösung der Potentialgleichung $\Delta F = 0$ auf dem Gebiet $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\}$. (Etwaige Konstanten und Vorzeichen lasse ich weg.)

Für eine kontinuierliche Verteilung betrachten wir eine integrierbare Massendichte $\varrho : K \to \mathbb{R}$ auf einem beliebigen Kompaktum $K \subseteq \mathbb{R}^3$. Außerhalb von K ist das Potential dann die **Superposition** (Faltung)

$$F \,:\, \mathbb{R}^3 \smallsetminus K \to \mathbb{R} \,:\, F(x) = \int_{\xi\in K} \frac{\varrho(\xi)}{|\xi - x|}\,\mathrm{d}\xi.$$

Gleiches gilt für das elektrische Potential einer Ladungsverteilung und ebenso in zahlreichen ähnlichen Anwendungen der Potentialtheorie. Solche Integrale treten in vielen physikalisch-technischen Anwendungen auf, daher auch in der Mathematik. Damit wollen wir nun rechnen lernen.

Faltung von Funktionen: Definition

Definition D5E: Faltung von Funktionen

Zu Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definieren wir ihre **Faltung** $f * g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$,

$$\boxed{(f*g)(x) := \int_{y\in\mathbb{R}^n} f(y)\, g(x-y)\,\mathrm{d}y = \int_{y\in\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\,\mathrm{d}y.}$$

Hierzu verlangen wir jeweils, dass der Integrand absolut integrierbar ist, zumindest für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$, also alle bis auf eine Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}^n$.

Die folgenden hilfreichen Sätze geben Auskunft, wann diese wesentliche Voraussetzung erfüllt ist, und welche Eigenschaften wir erwarten dürfen.

Satz D5F: Faltung von L^1–Funktionen

(0) Sind $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ absolut integrierbar, dann auch $a, b, c : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{C}$ mit $a(x,y) = f(x)\,g(y)$, $b(x,y) = f(y)\,g(x-y)$, $c(x,y) = f(x-y)\,g(y)$, denn für die L^1–Normen gilt $\|a\|_{L^1} = \|b\|_{L^1} = \|c\|_{L^1} = \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1}$.

(1) Das **Faltungsprodukt** $* : L^1(\mathbb{R}^n) \times L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n) : (f,g) \mapsto f*g$ erfüllt $\|f*g\|_{L^1} \le \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1}$, ist bilinear, kommutativ und assoziativ.

Faltung von Funktionen: Existenz

D523
Ergänzung

Aufgabe: Rechnen Sie diese Un/Gleichungen sorgfältig nach!

Lösung: (0a) Wir nutzen unmittelbar den Satz C1E von Fubini:

$$\int_{(x,y)\in\mathbb{R}^{2n}} \big|f(x)\cdot g(y)\big|\,\mathrm{d}(x,y) \overset{\text{Fub}}{\underset{\text{C1E}}{=}} \int_{x\in\mathbb{R}^n}\int_{y\in\mathbb{R}^n} \big|f(x)\big|\cdot\big|g(y)\big|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{Lin}}{\underset{\text{A3L}}{=}} \int_{x\in\mathbb{R}^n} \big|f(x)\big|\cdot\int_{y\in\mathbb{R}^n}\big|g(y)\big|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \overset{\text{Lin}}{\underset{\text{A3L}}{=}} \int_{x\in\mathbb{R}^n}\big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x\cdot\int_{y\in\mathbb{R}^n}\big|g(y)\big|\,\mathrm{d}y$$

Ebenso können wir umgekehrt erst über x und dann über y integrieren.

(0b) Für $b(x,y) = f(y)\,g(x-y) = a(y,x-y) = a\circ\Phi(x,y)$ nutzen wir den Transformationssatz C2B mit $\Phi(x,y) = (y,x-y)$ und $|\det\Phi'| = 1$.

(0c) Für $c(x,y) = f(x-y)\,g(y) = a(x-y,y) = a\circ\Psi(x,y)$ nutzen wir den Transformationssatz C2B mit $\Psi(x,y) = (x-y,y)$ und $|\det\Psi'| = 1$.

(1a) Dank (0) sind die beiden Integranden b und c absolut integrierbar. Dank Fubini C1E existiert für alle $x\in\mathbb{R}^n\smallsetminus N$ das Integral über $y\in\mathbb{R}^n$. Die Ausnahmemenge $N\subseteq\mathbb{R}^n$ ist vom Volumen Null, also $\mathrm{vol}_n(N) = 0$.

(1b) Beide Integrale sind gleich dank Transformation C2B $y = x - y'$.

Faltung von Funktionen: L^1–Norm

D524
Ergänzung

(1c) Für die L^1–Norm der Faltung $f * g$ gilt, wie bereits in (0) gesehen:

$$\begin{aligned}
\big\|f*g\big\|_{L^1} &\overset{\text{Def}}{=} \int_{x\in\mathbb{R}^n}\big|(f*g)(x)\big|\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Def}}{=} \int_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\int_{y\in\mathbb{R}^n} f(y)\,g(x-y)\,\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}x \\
&\le \int_{x\in\mathbb{R}^n}\int_{y\in\mathbb{R}^n}\big|f(y)\big|\cdot\big|g(x-y)\big|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Fub}}{\underset{\text{C1E}}{=}} \int_{y\in\mathbb{R}^n}\int_{x\in\mathbb{R}^n}\big|f(y)\big|\cdot\big|g(x-y)\big|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&\overset{\text{Lin}}{\underset{\text{A3L}}{=}} \int_{y\in\mathbb{R}^n}\big|f(y)\big|\cdot\int_{x\in\mathbb{R}^n}\big|g(x-y)\big|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&\overset{\text{Trafo}}{\underset{\text{C2B}}{=}} \int_{y\in\mathbb{R}^n}\big|f(y)\big|\cdot\int_{x\in\mathbb{R}^n}\big|g(x)\big|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&\overset{\text{Lin}}{\underset{\text{A3L}}{=}} \int_{y\in\mathbb{R}^n}\big|f(y)\big|\,\mathrm{d}y\cdot\int_{x\in\mathbb{R}^n}\big|g(x)\big|\,\mathrm{d}x \qquad = \big\|f\big\|_{L^1}\cdot\big\|g\big\|_{L^1}
\end{aligned}$$

Faltung von Funktionen: Rechenregeln

(1d) Linearität: Das Integral $L^1 \to \mathbb{C} : h \mapsto \int h(x)\,\mathrm{d}x$ ist linear. Es folgt: Zu jedem festen g ist die Zuordnung $f \mapsto f * g$ linear. Ebenso $g \mapsto f * g$.
Kommutativität: Dank (1b) gilt $(f * g)(x) = (g * f)(x)$ für $x \in \mathbb{R}^n \smallsetminus N$.
☺ Hierfür genügt bereits die absolute Integrierbarkeit von b bzw. c.
(1e) Assoziativität: Wir setzen die Definition ein und rechnen geduldig:

$$\begin{aligned}
((f * g) * h)(x) &= \int_{y \in \mathbb{R}^n} \overbrace{\int_{z \in \mathbb{R}^n} f(y-z) \cdot g(z)\,\mathrm{d}z}^{(f*g)(y)} \cdot h(x-y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{z \in \mathbb{R}^n} f(y-z) \cdot g(z) \cdot h(x-y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y \\
(f * (g * h))(x) &= \int_{y' \in \mathbb{R}^n} f(x-y') \cdot \overbrace{\int_{z \in \mathbb{R}^n} g(z) \cdot h(y'-z)\,\mathrm{d}z}^{(g*h)(y')}\,\mathrm{d}y' \\
&= \int_{y' \in \mathbb{R}^n} \int_{z \in \mathbb{R}^n} f(x-y') \cdot g(z) \cdot h(y'-z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y'
\end{aligned}$$

Beide Integrale sind gleich: Dank Fubini können wir die Integration über y, y' nach innen ziehen und so die Substitution $y' = x - y + z$ anwenden.

Faltung: Beschränktheit, Stetigkeit und Ableitung

Satz D5G: Faltung: Beschränktheit, Stetigkeit und Ableitung

(0) Für $(f, g) \in L^\infty \times L^1$ ist $f * g$ definiert und $\|f * g\|_{L^\infty} \le \|f\|_{L^\infty} \cdot \|g\|_{L^1}$.
(1) Für $(f, g) \in C_b \times L^1$ gilt $f * g \in C_b$ und $|f * g|_{\mathbb{R}^n} \le |f|_{\mathbb{R}^n} \cdot \|g\|_{L^1}$.
(2) Für $(f, g) \in C_b^1 \times L^1$ bzw. $L^1 \times C_b^1$ gilt $f * g \in C_b^1$ und

$$\boxed{\partial_i(f * g) = (\partial_i f) * g \quad \text{bzw.} \quad \partial_i(f * g) = f * (\partial_i g).}$$

Aufgabe: Rechnen Sie diese Un/Gleichungen sorgfältig nach!
Lösung: (0) Es gilt $|f(x)| \le M := \|f\|_{L^\infty}$ für $x \in \mathbb{R}^n \smallsetminus N$, $\mathrm{vol}_n(N) = 0$.

$$\begin{aligned}
\big|(f * g)(x)\big| &= \left| \int_{y \in \mathbb{R}^n} f(x-y)\,g(y)\,\mathrm{d}y \right| \le \int_{y \in \mathbb{R}^n} \big|f(x-y)\,g(y)\big|\,\mathrm{d}y \\
&\le \int_{y \in \mathbb{R}^n} M \cdot \big|g(y)\big|\,\mathrm{d}y = M \int_{y \in \mathbb{R}^n} \big|g(y)\big|\,\mathrm{d}y = M \cdot \|g\|_{L^1}
\end{aligned}$$

Dies zeigt die absolute Integrierbarkeit, also existiert die Faltung $f * g$.
Das essentielle Supremum über $x \in \mathbb{R}^n$ ist $\|f * g\|_{L^\infty} \le \|f\|_{L^\infty} \cdot \|g\|_{L^1}$.
Genauso zeigen wir $\|f * g\|_{L^\infty} \le \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^\infty}$, etwa dank $f * g = g * f$.

Faltung von Funktionen: Stetigkeit

(1) Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ sei stetig und beschränkt, kurz $f \in C_b$.
Wir wollen den Grenzwert $\lim_{x\to x_0}$ unter das Integral ziehen:

$$\lim_{x\to x_0} (f * g)(x) = \lim_{x\to x_0} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{x\to x_0} \Big[f(x-y)\, g(y) \Big]\, \mathrm{d}y$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x_0-y)\, g(y)\, \mathrm{d}y \qquad = (f * g)(x_0)$$

Ist das gerechtfertigt? Wir nutzen Satz D3D: Der Integrand $f(x-y)\, g(y)$ ist in x stetig und in y integrierbar mit Majorante $h(y) = |f|_{\mathbb{R}^n} \cdot g(y)$.

Somit ist $f * g$ stetig und nach (0) beschränkt: $|f * g|_{\mathbb{R}^n} \le |f|_{\mathbb{R}^n} \cdot \|g\|_{L^1}$.
Ebenso für $f \in L^1$ und $g \in C_b$ gilt $f * g \in C_b$ und $|f * g|_{\mathbb{R}^n} \le \|f\|_{L^1} \cdot |g|_{\mathbb{R}^n}$.
Hierzu können wir auch die Kommutativität $f * g = g * f$ nutzen.

☺ Ist einer der Faktoren f oder g stetig und beschränkt, so auch $f * g$.
Das ist eine einfache Stetigkeitsregel, die sich häufig nutzen lässt.

☺ Slogan: Die Faltung $f * g$ erbt die besten Eigenschaften von f und g, etwa Beschränktheit (0) oder Stetigkeit (1) oder Differenzierbarkeit (2).

Faltung von Funktionen: Ableitung

(2) Die Funktionen f und $\partial_i f$ seien stetig und beschränkt.
Wir wollen die Ableitung ∂_i unter das Integral ziehen:

$$\partial_i (f * g)(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big[f(x-y)\, g(y) \Big]\, \mathrm{d}y$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_i f)(x-y)\, g(y)\, \mathrm{d}y \;\; = ((\partial_i f) * g)(x)$$

Wir nutzen hierzu Satz D3E: Der Integrand $(\partial_i f)(x-y)\, g(y)$ ist in x stetig und in y integrierbar mit Majorante $h(y) = |\partial_i f|_{\mathbb{R}^n} \cdot g(y)$.

☺ Wir erhalten $\partial_i (f * g) = (\partial_i f) * g$ und $|\partial_i (f * g)|_{\mathbb{R}^n} \le |\partial_i f|_{\mathbb{R}^n} \cdot \|g\|_{L^1}$.
Analog gilt $\partial_i (f * g) = f * (\partial_i g)$ und $|\partial_i (f * g)|_{\mathbb{R}^n} \le \|\partial_i f\|_{L^1} \cdot |g|_{\mathbb{R}^n}$.

☺ Das sind hilfreiche Ableitungsregeln, die oft auftreten und nützen.

☺ Ist einer der beiden Faktoren f, g glatt, sagen wir $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, und jede Ableitung $\partial^\alpha f$ beschränkt, so gilt dies auch für $f * g$.

☺ Slogan: Die Faltung $f * g$ erbt die besten Eigenschaften von f und g, etwa Beschränktheit (0) oder Stetigkeit (1) oder Differenzierbarkeit (2).

Motivation: Was sind Distributionen?

Der Kalkül der Distributionen vereinfacht viele Rechnungen, manchen gibt er überhaupt erst einen wohldefinierten Sinn, oft stützt und präzisiert er wunderbar unsere physikalische Anschauung und die Anwendungen.

Wir können damit jeder stetigen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Ableitung zuordnen, selbst wenn f klassisch nicht differenzierbar ist (wie B4A).

Hierzu verallgemeinern wir den Funktionsbegriff zu **Distributionen**, die man daher auch als **verallgemeinerte Funktionen** bezeichnet.
Die Idee ist einfach: Wir messen f durch **Testfunktionen** φ gemäß

$$\Lambda_f(\varphi) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Wir begreifen f also als lineare Abbildung $\Lambda_f : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x$.
Ist φ glatt mit kompaktem Träger, so existiert dieses Integral immer.
Ist zudem auch f stetig differenzierbar, so gilt dank partieller Integration

$$\Lambda_{f'}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f'(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Die Randterme $[f\varphi]_{-r}^{+r}$ verschwinden für jede Testfunktion φ und $r \to \infty$.
Die rechte Seite betrifft nur f, nicht f', und gilt für alle Testfunktionen φ.

Motivation: Was sind Distributionen?

Dies legt nahe, die **Distributionsableitung** von f zu definieren durch

$$(\Lambda_f)'(\varphi) := -\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ist f stetig differenzierbar, so gilt $(\Lambda_f)' = \Lambda_{f'}$, wie oben gesehen, und die Distributionsableitung stimmt mit der klassischen Ableitung überein.

Dieser Ableitungsprozess lässt sich nun beliebig wiederholen:
Die k-te Distributionsableitung von f ist demnach

$$(\Lambda_f)^{(k)}(\varphi) := (-1)^k \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi^{(k)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Wir können so jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auffassen als eine verallgemeinerte Funktion Λ_f (Distribution). Im Distributionensinne ist Λ_f beliebig oft differenzierbar. Die Ableitungen $(\Lambda_f)^{(k)}$ sind Distributionen, im Allgemeinen sind sie jedoch keine klassischen Funktionen mehr.

Wir verlangen C^∞–Glattheit nur für die Testfunktionen φ. Für unsere Funktion f hingegen genügt lokale Integrierbarkeit C444; wir fordern keinerlei Glattheit. Diese Sichtweise ist ebenso einfach wie genial!
Sie erfordert lediglich den Mut, Funktionen allgemeiner zu begreifen.

Motivation: Anwendungen von Distributionen

D531
Ergänzung

Damit erreichen wir folgende drastische Vereinfachungen:

- Jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine Distribution, allgemeiner sogar jede lokal integrierbare Funktion (D5J).
- Jede Distribution ist differenzierbar im Distributionensinne, und ihre Ableitung ist selbst wiederum eine Distribution (D5N).
- Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so gilt $(\Lambda_f)' = \Lambda_{f'}$: Klassische und Distributionsableitung sind dann identisch (D5N).
- Die klassischen Ableitungsregeln gelten weiterhin (D5O).
- Grenzübergänge und Ableitungen / Integrale vertauschen unter sehr allgemeinen Voraussetzungen (D5N).

Insbesondere bei **partiellen Differentialgleichungen** treten peinliche Schwierigkeiten auf, die erst mit Distributionen gelöst werden können. Zum Beispiel erfüllt die klassische Ableitung die Vertauschungsregel $\partial_i \partial_j \varphi = \partial_j \partial_i \varphi$ nur für hinreichend glatte Funktionen (C^2, siehe D4A). Für Distributionen hingegen gilt sie immer! Sie erahnen hieran bereits, dass Distributionen wirklich das Leben vereinfachen. Genauer gesagt: Distributionen vervollständigen die Differential- und Integralrechnung.

Motivation: Geschichte der Distributionen

D532
Ergänzung

Der **Kalkül der Distributionen** entspringt praktischen Bedürfnissen und entstand seit etwa 1900 in der Physik und den Ingenieurwissenschaften zunächst als nützliche Rechentechnik ohne theoretische Grundlage: Dort treten partielle Differentialgleichungen auf, die keine klassischen Lösungen haben, sehr wohl aber Lösungen im Distributionensinne. (Heaviside in den 1880er Jahren, Dirac und Sobolev in den 1930ern).

Aus diesem Grund sind Distributionen sehr natürlich und unumgänglich. In Physik und Elektrotechnik treten häufig das Dirac–Funktional δ_0 D553 und die Heaviside–Funktion $u = \mathbf{I}_{[0,\infty[}$ D570 auf. Hier drängen sich die beliebten Rechenregeln $\int_{-\infty}^{x} \delta_0(t)\,\mathrm{d}t = u(x)$ und $u'(x) = \delta_0(x)$ geradezu auf, sie haben aber klassisch überhaupt keinen Sinn. Erst Distributionen klären dieses Mysterium und lösen so alle Sorgen in Wohlgefallen auf.

Die **Theorie der Distributionen**, die den Kalkül begründet, rechtfertigt und vollendet, wurde erst in den 1940er Jahren von Laurent Schwartz entwickelt; sie dient bis heute als Grundstein und bewährt sich täglich. Hierfür erhielt er auf dem Internationalen Mathematikerkongress 1950 die Fields–Medaille, eine der höchsten Auszeichnungen der Mathematik.

Motivation: Lösungen der Wellengleichung

Wir suchen Lösungen $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ der eindim. **Wellengleichung**:

$$\boxed{\partial_t^2\, u(t,x) = c^2\, \partial_x^2\, u(t,x)}$$

Diese fundamentale Gleichung beschreibt lineare Wellen aller Art, zum Beispiel eine schwingende Saite eines Musikinstruments. R301

Wir wünschen uns hierzu eine allgemeine mathematische Theorie, die der physikalischen Anschauung und dem Experiment entspricht.

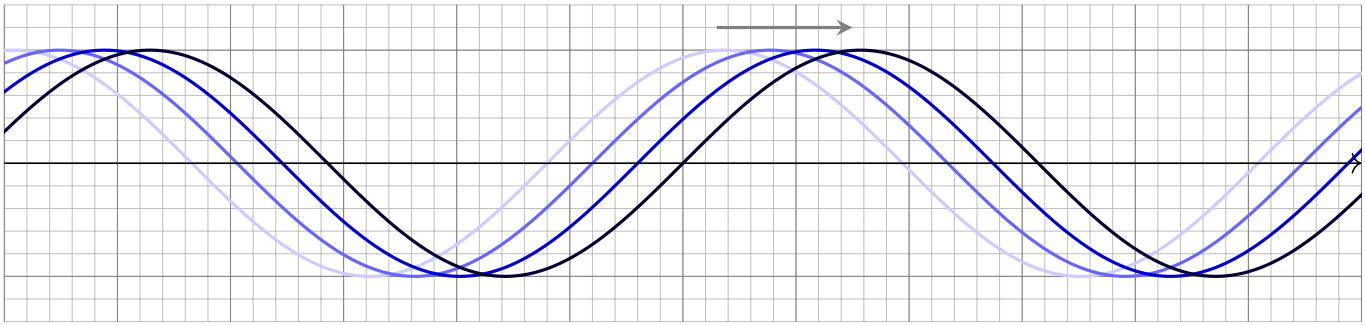
Aufgabe: (1) Ist $u(t,x) = \sin(x - ct)$ eine Lösung? und $\sin(x + ct)$? Was bedeuten diese Lösungen intuitiv / anschaulich / graphisch?

(2) Ist auch $u(t,x) = f(x \pm ct)$ für $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ eine Lösung? Etwa für die gaußsche Glockenkurve $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$?

(3) Ist $u(t,x) = f(x \pm ct)$ für jede stetige Funktion $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ eine Lösung? Etwa für die Dreiecksfunktion $f(x) = \max\{\,0,\, 1 - |x|\,\}$?

Ist aus physikalischer Sicht $f \in C^2$ notwendig oder genügt $f \in C^0$? Wie bringen Distributionen hier Theorie und Anwendung in Einklang?

Motivation: Lösungen der Wellengleichung



Lösung: (1) Zunächst untersuchen wir die Funktion $u(t,x) = \sin(x - ct)$. Wir leiten zweimal ab und prüfen, ob die Wellengleichung erfüllt ist:

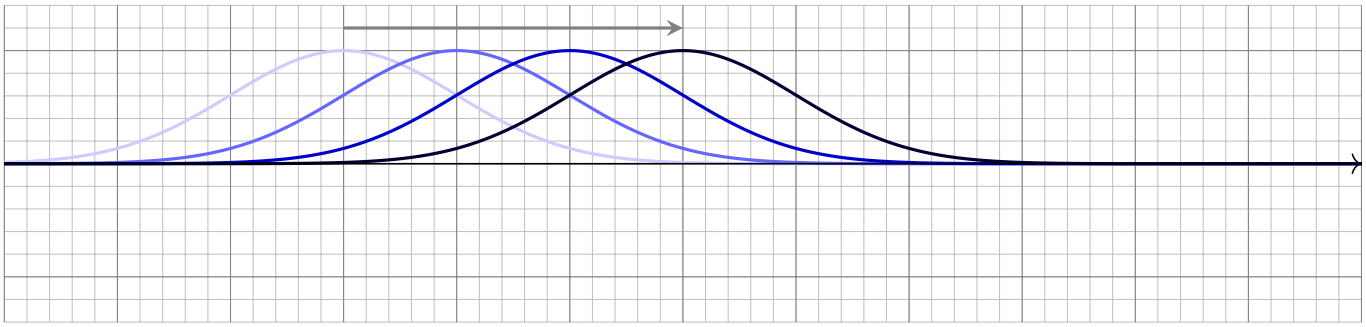
$$\partial_t\, u(t,x) = -c\cos(x - ct), \qquad \partial_x\, u(t,x) = +\cos(x - ct),$$
$$\partial_t^2\, u(t,x) = -c^2 \sin(x - ct), \qquad \partial_x^2\, u(t,x) = -\sin(x - ct).$$

Tatsächlich gilt $\partial_t^2\, u(t,x) = c^2\, \partial_x^2\, u(t,x)$, wie gefordert.

☺ Anschaulich ist $u(t,x) = \sin(x - ct)$ eine sinusförmige Welle, die sich mit konstanter Geschwindigkeit c nach rechts bewegt.

Entsprechend ist auch $v(t,x) = \sin(x + ct)$ eine Lösung: Dies ist eine sinusförmige Welle, die sich mit Geschwindigkeit c nach links bewegt.

Motivation: Lösungen der Wellengleichung



(2) Sodann untersuchen wir allgemein die Funktion $u(t,x) = f(x-ct)$. Wir leiten ab und prüfen, ob die ersehnte Wellengleichung erfüllt ist:

$$\partial_t\, u(t,x) = -cf'(x-ct), \qquad \partial_x\, u(t,x) = f'(x-ct),$$
$$\partial_t^2\, u(t,x) = c^2 f''(x-ct), \qquad \partial_x^2\, u(t,x) = f''(x-ct).$$

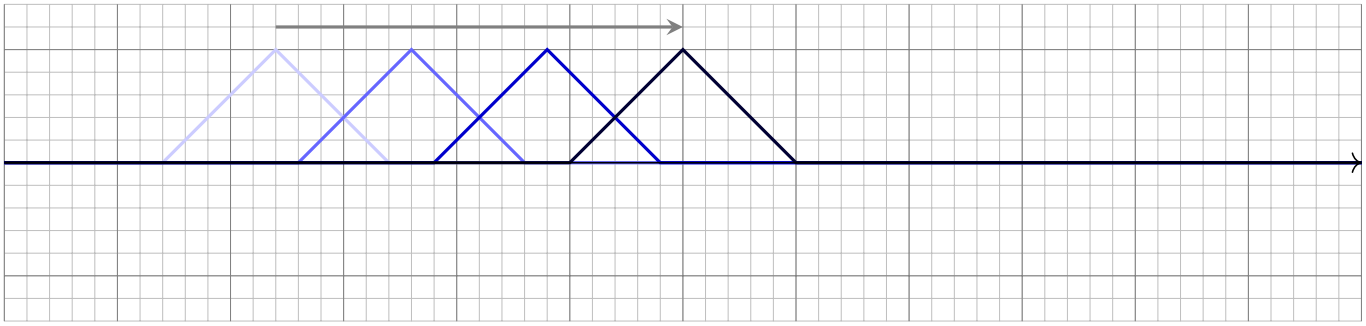
Tatsächlich gilt dann $\partial_t^2\, u(t,x) = c^2\, \partial_x^2\, u(t,x)$, wie gefordert.

Anschaulich ist diese Lösung $u(t,x) = f(x \mp ct)$ eine f–förmige Welle, die sich mit konstanter Geschwindigkeit c nach rechts / links bewegt.

☺ Man spricht ganz anschaulich von einem **Wellenpaket** der Form f.

⚠ Wir setzen vorsorglich f als zweimal stetig differenzierbar voraus.

Motivation: Lösungen der Wellengleichung



(3) Die vorige Rechnung gilt für alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; wir müssen allerdings f als zweimal stetig differenzierbar voraussetzen, damit wir die benötigten Ableitungen f' und f'' definieren und nutzen können.

Die Dreiecksfunktion $f(x) = \max\{\,0,\, 1-|x|\,\}$ ist zwar stetig, aber nicht differenzierbar (in 0 und ± 1). Dennoch ist $u(t,x) = f(x \pm ct)$ physikalisch durchaus sinnvoll. Unsere Theorie verlangt unnötige Einschränkungen!

☺ Die Theorie der Distributionen erlaubt, zu jeder stetigen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die (Distributions-)Ableitungen f' und f'' etc. zu definieren. In diesem Sinne löst $u(t,x) = f(x \pm ct)$ tatsächlich die Wellengleichung!

☺ Dies vervollständigt die Lösungsmenge, wie physikalisch erwünscht! Wieder einmal liefert abstrakte Mathematik konkret nutzbare Werkzeuge.

Testfunktionen: der Vektorraum $\mathscr{D}(\Omega)$

Der erste Schritt ist die Festlegung geeigneter **Testfunktionen**:

Eine Funktion $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt **glatt** (kurz C^∞), wenn sie **beliebig oft differenzierbar** ist, also alle Ableitungen $\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f$ existieren.

Sind f und g glatt, so auch λf für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ sowie $f+g$ und $f \cdot g$.
Die Menge $C^\infty(\mathbb{R}^n) := C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ aller glatten Funktionen $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bildet somit einen **$\mathbb{R}$–Vektorraum** und sogar eine **$\mathbb{R}$–Algebra** mit Eins.

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Der **Vektorraum der Testfunktionen** auf Ω ist

$$\mathscr{D}(\Omega) := C_c^\infty(\Omega) := \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \;\middle|\; \operatorname{supp}(\varphi) \Subset \Omega \right\}.$$

Der **Träger** (engl. *support*) der Funktion $\varphi:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist die Teilmenge $\left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \varphi(x) \neq 0 \right\}$, wo φ nicht verschwindet, genauer ihr Abschluss

$$\operatorname{supp}(\varphi) := \overline{\left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \varphi(x) \neq 0 \right\}}.$$

Wir schreiben $K \subseteq \Omega$, wenn K eine Teilmenge von Ω ist, und $K \Subset \Omega$, wenn K zudem kompakt ist, also beschränkt und abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$.

Übung: Ist auch $\mathscr{D}(\Omega)$ ein $\mathbb{R}$–Vektorraum? eine $\mathbb{R}$–Algebra? mit Eins? Können Sie Beispiele $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ konstruieren? Siehe B4E und B4F!

Testfunktionen: Konvergenz in $\mathscr{D}(\Omega)$

Der zweite Schritt ist die Klärung des passenden **Konvergenzbegriffs**:

Für $\varphi:\Omega \to \mathbb{R}$ stetig und $K \Subset \Omega$ nutzen wir die **Maximumsnorm**

$$|\varphi|_K := \max\left\{ |\varphi(x)| \;\middle|\; x \in K \right\}.$$

Wir nennen $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathscr{D}(\Omega)$ eine **Nullfolge**, kurz $\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{D}} 0$, wenn gilt:

1. $\operatorname{supp}(\varphi_k) \subseteq K$ für ein Kompaktum $K \Subset \Omega$ und alle $k \in \mathbb{N}$,
2. $|\partial^\nu \varphi_k|_K \to 0$ für jeden Multiindex $\nu \in \mathbb{N}^n$ und $k \to \infty$.

(1) Alle Träger $\operatorname{supp}(\varphi_k)$ liegen in einem *gemeinsamen* Kompaktum $K \Subset \Omega$; sie dürfen Ω nicht ausschöpfen oder nach Unendlich entkommen. (2) Die Bedingung $|\varphi_k|_K \to 0$ bedeutet, dass φ_k *gleichmäßig* gegen die Nullfunktion 0 konvergiert. Dies fordern wir zudem für alle Ableitungen $(\partial^\nu \varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Mit dieser strengen Forderung erreichen wir, dass der Ableitungsoperator stetig ist:

Lemma D5H: Auf Testfunktionen ist die Ableitung stetig!

Der Ableitungsoperator $\partial^\alpha : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathscr{D}(\Omega)$ ist linear und zudem stetig, denn für jede Nullfolge $\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{D}} 0$ in $\mathscr{D}(\Omega)$ gilt insbesondere $\partial^\alpha \varphi_k \xrightarrow{\mathscr{D}} 0$.

Eine Abbildung $\Lambda : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R} : \varphi \mapsto \Lambda(\varphi)$ nennen wir **Funktional**. Ein lineares Funktional Λ ist **stetig**, wenn Λ jede Nullfolge $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathscr{D}(\Omega)$ abbildet in eine Nullfolge $(\Lambda(\varphi_k))_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$: Aus $\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{D}} 0$ in $\mathscr{D}(\Omega)$ folgt $\Lambda(\varphi_k) \to 0$ in $\mathbb{R}$. Solche Abbildungen heißen **Distributionen**.

Distributionen sind dual zu Testfunktionen.

Unsere Motivation und Vorbereitung führen zu folgender Präzisierung:

Definition D5I: Distributionen

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Der **Vektorraum der Testfunktionen** auf Ω ist

$$\mathscr{D}(\Omega) := C_c^\infty(\Omega) := \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \;\middle|\; \operatorname{supp}(\varphi) \Subset \Omega \right\}.$$

Eine **Distribution** auf Ω ist, dual hierzu, ein stetiges lineares Funktional $\Lambda : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$. Die Stetigkeit von Λ bedeutet dabei, wie oben erklärt:

$$\text{Aus } \varphi_k \xrightarrow{\mathscr{D}} 0 \text{ in } \mathscr{D}(\Omega) \text{ folgt } \Lambda(\varphi_k) \to 0 \text{ in } \mathbb{R}.$$

Den Vektorraum aller Distributionen auf Ω bezeichnen wir mit

$$\mathscr{D}'(\Omega) := \left\{ \Lambda : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R} \;\middle|\; \Lambda \text{ ist linear und stetig} \right\}.$$

Eine Folge $(\Lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathscr{D}'(\Omega)$ **konvergiert** gegen $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$ **im Distributionensinne**, kurz $\Lambda_k \xrightarrow{\mathscr{D}'} \Lambda$, wenn gilt:

$$\Lambda_k(\varphi) \to \Lambda(\varphi) \text{ in } \mathbb{R} \text{ für jede Testfunktion } \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$$

Distributionen sind dual zu Testfunktionen.

Diese Definition fasst unsere mathematischen Vorüberlegungen zusammen und präzisiert sie — als Fundament für alles Folgende. Sie entspricht zudem sehr intuitiv dem physikalischen Messvorgang:

Angenommen, eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ beschreibt eine physikalische Größe $f(x)$ als Funktion des Ortes $x \in \mathbb{R}^n$, etwa die Temperatur, die Massendichte oder die elektrische Ladungsdichte. Kein Messvorgang ist so präzise, dass er den Wert $f(x)$ genau im Punkt x ermitteln könnte. Vielmehr liefert die Messung einen gemittelten Wert $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x$, wobei φ dem Messverfahren entspricht. Zur Illustration stellen wir uns $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ mit $\varphi \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$ vor. Je stärker φ um den Punkt x konzentriert ist, desto genauer entspricht die Messung dem Wert $f(x)$. Wir messen also f, indem wir mit Funktionen φ testen, und dies ist unser einziger Zugang zur Funktion f: Sie äußert sich allein durch ihr Wirkung auf Testfunktionen φ, nur darin besteht f, siehe D5K.

Mit D5I erheben wir diese Sichtweise zur Definition: Eine Distribution Λ ordnet jeder Testfunktion φ eine reelle Zahl $\Lambda(\varphi)$ zu, als Ergebnis der Messung. Diese Zuordnung $\varphi \mapsto \Lambda(\varphi)$ soll linear und stetig in φ sein.

Lokal integrierbare Funktionen sind Distributionen.

Satz D5J: Lokal integrierbare Funktionen sind Distributionen.

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Jede lokal integrierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \to \mathbb{R}$ definiert eine Distribution $\Lambda_f : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R} : \varphi \mapsto \Lambda_f(\varphi)$ durch das Integral

$$\Lambda_f(\varphi) := \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Die Zuordnung $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega) : f \mapsto \Lambda_f$ ist linear und stetig, jedoch nicht injektiv: Der Kern sind die Nullfunktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$, also genau diejenigen Funktionen, die fast überall gleich Null sind. Für $f, g \in C(\Omega)$ hingegen gilt $\Lambda_f = \Lambda_g$ genau dann, wenn $f = g$ gilt.

Jede Distribution $\Lambda : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, die sich als $\Lambda = \Lambda_f$ durch eine Funktion $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ darstellen lässt, heißt **regulär**, andernfalls heißt Λ **singulär**.

☺ Mittels $f \mapsto \Lambda_f$ betrachten wir jede lokal integrierbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ als Distribution und sagen hierzu „f im Distributionensinne“. Genau dann gilt $\Lambda_f = \Lambda_g$ in $\mathscr{D}'(\Omega)$, wenn fast überall $f = g$ gilt (D5K).

Aufgabe: Rechnen Sie die hier gemachten Aussagen sorgfältig nach!

Lokal integrierbare Funktionen sind Distributionen.

(1) Jede Testfunktion $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ ist eine glatte Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit kompakten Träger $K := \operatorname{supp}(\varphi) \Subset \Omega$. Unsere gegebene Funktion $f : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \to \mathbb{R}$ ist lokal integrierbar, demnach gilt $\int_K |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$. Wir erhalten hieraus die folgende Schranke bezüglich L^1–Norm:

$$\int_\Omega \big|f(x)\,\varphi(x)\big|\mathrm{d}x = \int_K \big|f(x)\big| \cdot \big|\varphi(x)\big|\mathrm{d}x \le \int_K \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x \cdot |\varphi|_K < \infty$$

Insbesondere ist das Integral $\Lambda_f(\varphi) := \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ wohldefiniert.

(2) Damit Λ_f eine Distribution ist, haben wir zweierlei sicherzustellen: Die Abbildung $\varphi \mapsto \Lambda_f(\varphi)$ ist (a) linear in φ und zudem (b) stetig in φ.

(2a) Die Abbildung $\varphi \mapsto \Lambda_f(\varphi)$ ist linear in φ dank Linearität des Integrals: Für alle $\varphi, \psi \in \mathscr{D}(\Omega)$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt nämlich:

$$\begin{aligned}\Lambda_f(\lambda\varphi + \mu\psi) &= \int_\Omega f(x)\,\big[\lambda\varphi(x) + \mu\psi(x)\big]\,\mathrm{d}x \\ &= \lambda\int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \mu\int_\Omega f(x)\,\psi(x)\,\mathrm{d}x = \lambda\Lambda_f(\varphi) + \mu\Lambda_f(\psi)\end{aligned}$$

Lokal integrierbare Funktionen sind Distributionen.

(2b) Die Abbildung $\varphi \mapsto \Lambda_f(\varphi)$ ist stetig in φ dank obiger Abschätzung: Zu jeder Nullfolge $\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{D}} 0$ existiert ein gemeinsames Kompaktum $K \Subset \Omega$ mit $\operatorname{supp}(\varphi_k) \subseteq K$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und hierauf gilt gleichmäßige Konvergenz $|\partial^\alpha \varphi_k|_K \to 0$ für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}^n$ und $k \to \infty$. Hieraus folgt dank der oben erklärten Ungleichung:

$$\begin{aligned}\big|\Lambda_f(\varphi_k)\big| = \left|\int_\Omega f(x)\,\varphi_k(x)\,\mathrm{d}x\right| &\le \int_\Omega \big|f(x)\,\varphi_k(x)\big|\mathrm{d}x \\ &\le \int_K |f(x)|\,\mathrm{d}x \cdot |\varphi_k|_K \to 0\end{aligned}$$

Dies beweist die Stetigkeit: Aus $\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{D}} 0$ in $\mathscr{D}(\Omega)$ folgt $\Lambda(\varphi_k) \to 0$ in $\mathbb{R}$. Somit ist $\varphi \mapsto \Lambda_f(\varphi)$ linear und stetig, also eine Distribution $\Lambda_f \in \mathscr{D}'(\Omega)$.

(3a) Die Zuordnung $f \mapsto \Lambda_f$ ist linear in f dank Linearität des Integrals:

$$\begin{aligned}\Lambda_{\lambda f+\mu g}(\varphi) &= \int_\Omega \big[\lambda f(x) + \mu g(x)\big]\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lambda \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_\Omega g(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \lambda\Lambda_f(\varphi) + \mu\Lambda_g(\varphi)\end{aligned}$$

Lokal integrierbare Funktionen sind Distributionen.

(3b) Die Zuordnung $f \mapsto \Lambda_f$ ist stetig in f dank der obigen Abschätzung: Seien $f_0, f_1, f_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar. Auf jedem Kompaktum $K \Subset \Omega$ gelte L^1–Konvergenz $f_k \to 0$, also $\int_K |f_k| \to 0$ für $k \to \infty$. Dann folgt $\Lambda_{f_k} \to \Lambda_0$, denn $|\Lambda_{f_k}(\varphi)| \le \int_K |f_k(x)|\,\mathrm{d}x \cdot |\varphi|_K \to 0$.

(3c) Wir zeigen schließlich (wie in B4G) die Injektivität der Zuordnung

$$C(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega)\ :\ f \mapsto \Lambda_f.$$

Dank Linearität (3a) genügt zu zeigen: Für jede stetige Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\Lambda_f = 0$ gilt $f = 0$. Äquivalent hierzu beweisen wir die Kontraposition: Für jede stetige Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $f \neq 0$ gilt $\Lambda_f \neq 0$.

Angenommen $f \neq 0$, das heißt $f(a) \neq 0$ für ein $a \in \Omega$. Wir dürfen $f(a) = 2b > 0$ annehmen. (Für $f(a) < 0$ betrachten wir $-f$ statt f.) Da $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und hierauf $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig ist, existiert um a ein Ball $B(a, 2\varepsilon) \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\varepsilon > 0$, sodass $f(x) \ge b$ für alle $x \in B(a, 2\varepsilon)$ gilt. Dank B4E existiert eine Hutfunktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ mit $\operatorname{supp}(\varphi) = \bar{B}(a, \varepsilon)$. Wir erhalten $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ mit $\Lambda_f(\varphi) \neq 0$: Dank Monotonie und Linearität des Integrals gilt $\int_\Omega f\varphi = \int_{\bar{B}(a,\varepsilon)} f\varphi \ge \int_{\bar{B}(a,\varepsilon)} b\varphi = b \int_{\bar{B}(a,\varepsilon)} \varphi > 0$.

Satz D5K: Verschwindungs- und Vergleichssatz

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Für jede Funktion $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ sind äquivalent:

0 $f = 0$ fast überall, das heißt $\operatorname{vol}_n(\{\, x \in \Omega \mid f(x) \neq 0 \,\}) = 0$.

1 $\int_\Omega |f(x)| \,\mathrm{d}x = 0$, das heißt die L^1–Norm verschwindet.

2 $\Lambda_f = 0$, also $\int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$ für jede Testfunktion $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$.

3 $\int_A f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ für jeden kompakten Quader $A \subseteq \Omega$.

4 $\int_A f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ für jede beschränkte messbare Menge $A \subseteq \Omega$.

Für je zwei Funktionen $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ sind demnach äquivalent:

0 $f = g$ fast überall, das heißt $\operatorname{vol}_n(\{\, x \in \Omega \mid f(x) \neq g(x) \,\}) = 0$.

1 $\int_\Omega |f(x) - g(x)| \,\mathrm{d}x = 0$, das heißt der L^1–Abstand verschwindet.

2 $\Lambda_f = \Lambda_g$, also $\int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega g(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$.

3 $\int_A f(x)\,\mathrm{d}x = \int_A g(x)\,\mathrm{d}x$ für jeden kompakten Quader $A \subseteq \Omega$.

4 $\int_A f(x)\,\mathrm{d}x = \int_A g(x)\,\mathrm{d}x$ für alle $A \subseteq \Omega$ beschränkt und messbar.

In (2) genügen bereits $\varphi \in \mathscr{D}_\otimes(\Omega)$, das sind Testfunktionen $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ in Produktform $\varphi(x) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n)$, wobei $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

Aufgabe: Zeigen Sie die Implikationen $(1) \Leftrightarrow (0) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$.

Lösung: Die Implikationen „$(0) \Rightarrow (1,2,3,4)$“ sind offensichtlich (A4G): Jeder Integrand ist fast überall Null, somit verschwindet das Integral.

„$(1) \Rightarrow (0)$“: Diese Umkehrung garantiert der Verschwindungssatz A4G.

„$(2) \Rightarrow (3)$“: Sei $A = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subseteq \Omega$ ein kompakter Quader. Wäre die Indikatorfunktion $\varphi := \mathbf{I}_A : \Omega \to \mathbb{R}$ hier als Testfunktion zulässig, so könnten wir (2) direkt auf $\int_A f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ anwenden. Leider gilt $\mathbf{I}_A \notin \mathscr{D}(\Omega)$, doch wir können $\varphi_k \searrow \mathbf{I}_A$ durch Testfunktionen $\varphi_k \in \mathscr{D}(\Omega)$ approximieren und erhalten dank Grenzwertsatz D2D:

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \lim_{k\to\infty} f(x)\,\varphi_k(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f(x)\,\varphi_k(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Ausführlich B441: Zum gegebenen Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ konstruieren wir eine glatte Hutfunktion $\psi = \psi_k^{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\psi(x) = 1$ für $a \leq x \leq b$ und $\psi(x) = 0$ für $x \leq a - 1/k$ und für $x \geq b + 1/k$ sowie monoton wachsend auf $[a - 1/k, a]$ und monoton fallend auf $[b, b + 1/k]$. Wir definieren $\varphi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch das Produkt $\varphi_k(x_1, \ldots, x_n) = \psi_k^{a_1,b_1}(x_1) \cdots \psi_k^{a_n,b_n}(x_n)$.

Der Verschwindungs- und Vergleichssatz

„$(3) \Rightarrow (4)$“: Nach Voraussetzung (3) gilt $\int_A f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ für alle kompakten Quader $A_1, A_2, \ldots \subseteq \Omega$. Daraus folgt es für Vereinigungen:

$$\int_{A_1 \cup A_2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{A_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{A_2} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{A_1 \cap A_2} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Per Induktion folgt dasselbe für jede k-fache Vereinigung:

$$\begin{aligned}\int_{A_1 \cup \cdots \cup A_{k-1} \cup A_k} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{A_1 \cup \cdots \cup A_{k-1}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{A_k} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\quad - \int_{(A_1 \cap A_k) \cup \cdots \cup (A_{k-1} \cap A_k)} f(x)\,\mathrm{d}x \quad = 0\end{aligned}$$

Dank Grenzwertsatz D2D gilt dies für jede abzählbare Vereinigung $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ von Quadern $A_k \subseteq K$ in einem Kompaktum $K \subseteq \Omega$:

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k \to \infty} \int_{A_1 \cup \cdots \cup A_k} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Ebenso folgt $\int_A f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ für jede beschränkte Borel–Menge $A \subseteq \Omega$.

Der Verschwindungs- und Vergleichssatz

Wir setzen hier die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ nur als lokal integrierbar voraus. Die Beschränktheit von A ist daher technisch notwendig: Sie garantiert, dass A in einem geeigneten Kompaktum $K \subseteq \Omega$ liegt; nur so können wir die Voraussetzung $\int_K |f| < \infty$ und majorisierte Konvergenz D2D nutzen. Auch $\int_A f(x)\,\mathrm{d}x$ ist zunächst nur definiert für A beschränkt und messbar.

„$(4) \Rightarrow (1)$“: Wir zerlegen Ω in die drei messbaren Teilmengen

$$\begin{aligned} A_+ &:= \{\, x \in \Omega \mid f(x) > 0 \,\}, \\ A_- &:= \{\, x \in \Omega \mid f(x) < 0 \,\}, \\ A_0 &:= \{\, x \in \Omega \mid f(x) = 0 \,\}. \end{aligned}$$

Dank Voraussetzung (4) und monotoner Konvergenz folgt schließlich

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \cap \bar{B}(0,r)} |f(x)|\,\mathrm{d}x &= \int_{A_+ \cap \bar{B}(0,r)} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{A_- \cap \bar{B}(0,r)} f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \\ \int_{\Omega} |f(x)|\,\mathrm{d}x &= \lim_{r \to \infty} \int_{\Omega \cap \bar{B}(0,r)} |f(x)|\,\mathrm{d}x \qquad = 0. \end{aligned}$$

☺ Wir können $f = 0$ durch jedes dieser vier Kriterien (1–4) testen. Ebenso $f = g$, indem wir den Satz auf die Differenz $f - g$ anwenden.

Das Dirac–Funktional ist eine Distribution.

Definition D5L: Dirac–Funktional

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, und hierin sei $p \in \Omega$ ein Punkt.
Wie zuvor ist $\mathscr{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$ der Vektorraum der Testfunktionen.
Das **Dirac–Funktional** δ_p ist die Auswertung im Punkt p, also

$$\delta_p \,:\, \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R} \,:\, \varphi \mapsto \varphi(p).$$

Für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}^n$ definieren wir allgemeiner

$$\delta_p^\alpha \,:\, \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R} \,:\, \varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|}\, \partial^\alpha \varphi(p).$$

Aufgabe: Sind dies Distributionen? Was ist hierfür zu prüfen?

Lösung: Nach Definition D5I müssen wir Linearität und Stetigkeit der Zuordnung $\delta_p^\alpha : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R} : \varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|}\, \partial^\alpha \varphi(p)$ prüfen. Beides ist klar!

Linearität: Für je zwei Testfunktionen $\varphi, \psi \in \mathscr{D}(\Omega)$ und reelle Konstanten $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt dank Linearität der Ableitung $\delta_p^\alpha(\lambda\varphi + \mu\psi) = (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha(\lambda\varphi + \mu\psi)(p) = \lambda\delta_p^\alpha(\varphi) + \mu\delta_p^\alpha(\psi)$.
Stetigkeit: Sei $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathscr{D}(\Omega)$ eine Nullfolge. Das heißt, es gibt ein Kompaktum $K \Subset \Omega$ mit $\operatorname{supp}(\varphi_k) \subseteq K$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und $|\partial^\alpha \varphi_k|_K \to 0$ für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}^n$ und $k \to \infty$. Hieraus folgt insbesondere $|\delta_p^\alpha(\varphi_k)| = |\partial^\alpha \varphi_k(p)| \le |\partial^\alpha \varphi_k|_K \to 0$, also $\delta_p^\alpha(\varphi_k) \to 0$.

Das Dirac–Funktional ist eine Distribution.

⚠ Es gibt keine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die das Funktional δ_p darstellt, also $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(p)$ für alle Testfunktionen $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ erfüllt.
Eine Massenverteilung mit Dichte $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ hat die Gesamtmasse

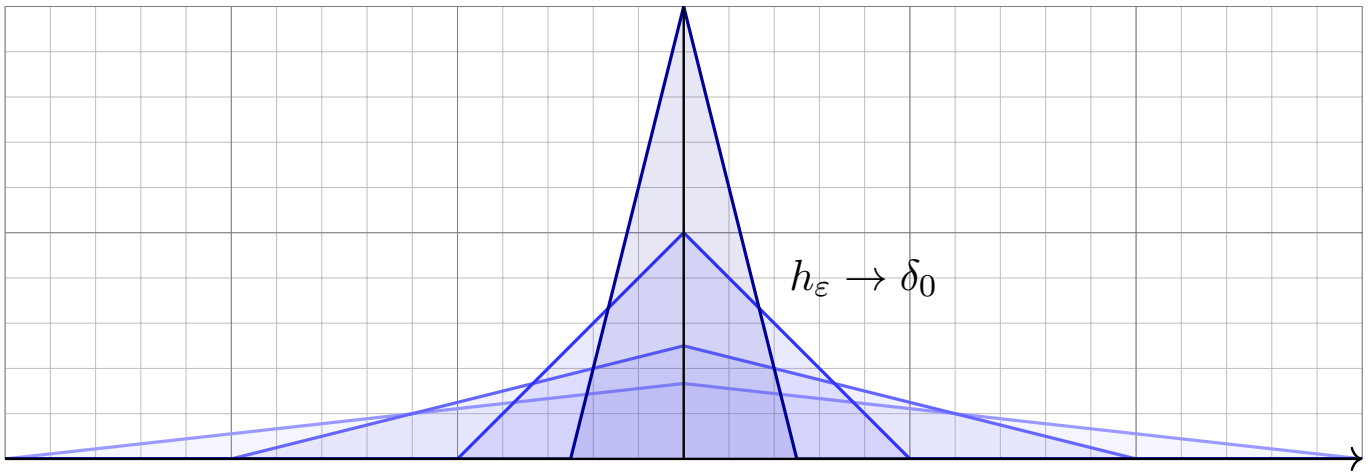
$$m = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

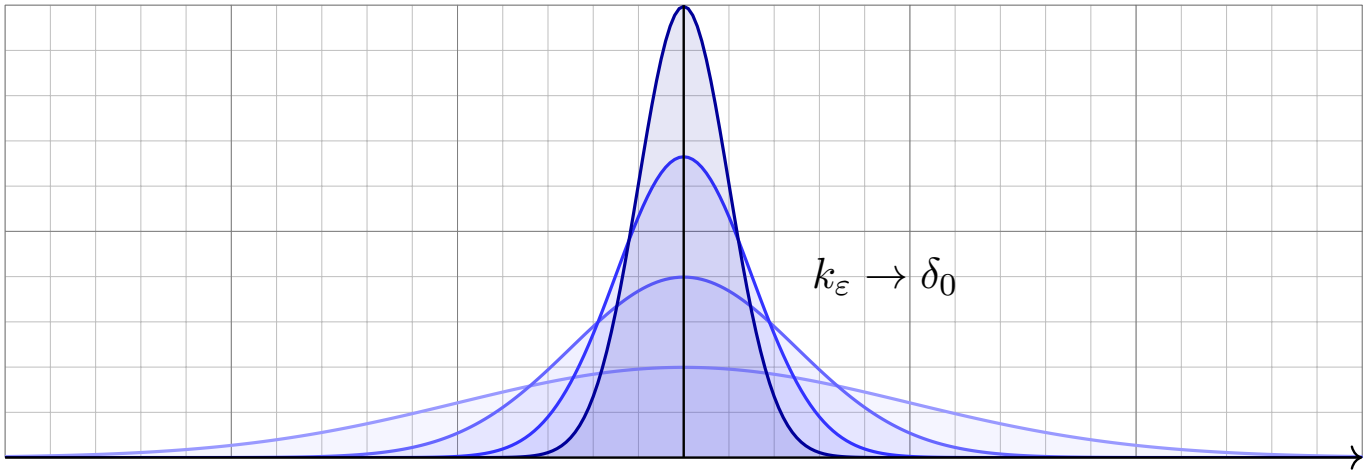
Wie beschreiben wir eine punktförmige Masse m im Punkt $p \in \mathbb{R}^n$?
In diesem Punkt herrscht dann wohl eine „unendlich große“ Dichte;
naiv denken wir an $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $x \neq p$ und $f(p) = \infty$.
⚠ Das Integral $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x$ ergibt immer Null, selbst wenn der Wert $f(p)$ noch so unendlich ist, denn der Träger $\{p\}$ ist eine Nullmenge. A405
Was wir jedoch wollen, ist eine Punktmasse δ_p, sodass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta_p(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(p).$$

⚠ Keine Funktion kann das leisten: Hierzu benötigen wir Distributionen!
Hingegen können wir δ_p durch Funktionen $f_\varepsilon \to \delta_p$ approximieren, indem wir die Masse 1 immer dichter um den Punkt p konzentrieren.
Die folgenden Beispiele und Satz D5C präzisieren diese Anschauung.

Approximationen des Dirac–Funktionals





Approximationen des Dirac–Funktionals

Aufgabe: Skizzieren Sie für $\varepsilon \searrow 0$ die folgenden Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\,\mathbf{I}_{[0,\varepsilon]}, \quad g_\varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon}\,\mathbf{I}_{[-\varepsilon,\varepsilon]}, \quad h_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon - |x|}{\varepsilon^2}\,\mathbf{I}_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(x), \quad k_\varepsilon(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2\varepsilon^2}}{\varepsilon\sqrt{2\pi}}$$

(1) Berechnen Sie die punktweise Grenzfunktion $f(x) = \lim_{\varepsilon\searrow 0} f_\varepsilon(x)$.
(2) Gilt $\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x$ für $\varepsilon \searrow 0$? Wo liegt hier das Problem?
(3) Gilt $\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ jede Funktion $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$?
(4) Gilt $\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x \to \varphi(0)$, also $f_\varepsilon \to \delta_0$ im Distributionensinne?
(5) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar mit Gesamtmasse $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.
Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ erfüllt $f_\varepsilon(x) := f(x/\varepsilon)/\varepsilon^n$ ebenso $\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = 1$.
Gilt $\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x \to \varphi(0)$, also $f_\varepsilon \to \delta_0$ im Distributionensinne?

Lösung: (1) Wir finden $f(0) = \infty$ und $f(x) = 0$ für $x \neq 0$. (2) Daher gilt $\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = 1 \not\to 0 = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x$. Masse verschwindet nach Unendlich! Ebenso schlägt (3) fehl. Hingegen gilt (4) sobald φ stetig ist (im Punkt 0).
☺ Dies ist genau die Rechnung, die uns zum HDI geführt hat! B122
Die anderen Beispiele sind analog, siehe Dreiecksfunktionen D205 und Glockenfunktionen D409. Allgemein zu (5) gilt der Grenzwertsatz D5c!

Häufige Fehler, Lug und Trug

☺ Unsere Definition D5L ist einfach und klar: Das **Dirac–Funktional**

$$\delta_0 \,:\, \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \,:\, \varphi \mapsto \varphi(0).$$

ordnet jeder Testfunktion $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ ihre Auswertung $\varphi(0) \in \mathbb{R}$ zu.

⚠ Manche sprechen stattdessen lieber von der **Dirac–Funktion**

$$f \,:\, \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,:\, x \mapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 0, \\ \infty & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Zudem wird die Gesamtmasse $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ gefordert / vereinbart und die Rechenregel $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0)$ eingeführt / behauptet.

Aufgabe: Was ist hieran falsch? Wann & wie lässt sich das retten?

Lösung: Die Funktion f hat die ersehnten Eigenschaften nicht! Das lässt sich nicht retten, es hilft kein Jammern, Behaupten, Verhandeln.

⚠ Es gilt $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ und $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$ für alle Funktionen φ.

☺ Wir wollen $\delta_0 : \varphi \mapsto \varphi(0)$, also ist Definition D5L der richtige Weg! Alles andere ist naives Wunschdenken, falsch und/oder unnütz.

Häufige Fehler, Lug und Trug

Die obige Dirac–Funktion f soll ein punktförmiges Teilchen modellieren, mit Masse 1 konzentriert im Nullpunkt, insbesondere $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

⚠ Demnach entspräche $5f$ einem Teilchen mit Masse 5 im Nullpunkt.

Aufgabe: Was ist hieran falsch? Wann & wie lässt sich das retten?

Lösung: Wir multiplizieren punktweise: $5 \cdot 0 = 0$ und $5 \cdot \infty = \infty$. Demnach gilt $5f = f$ und $\int_{\mathbb{R}} 5f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, aber $5\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 5$. Das widerspricht grundlegend der Linearität des Integrals!

Nochmal: Die Funktion f hat die ersehnten Eigenschaften nicht!

☺ Auch hier ist Definition D5L der richtige Weg! Distributionen sind Funktionale, stetige lineare Abbildungen $\Lambda : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$. Sie bilden selbst einen Vektorraum, indem wir sie punktweise addieren und mit Skalaren multiplizieren. Im Beispiel erhalten wir $5\delta_0 : \varphi \mapsto 5\varphi(0)$, wie gewünscht.

⚠ Anschauung, Intuition, Heuristik können helfen, wenn sie den Fakten entsprechen; sonst hindern sie das Verständnis mehr als sie nützen.

☺ Letztlich ist es egal, wie wir eine Distribution Λ veranschaulichen. Es zählt allein, was sie *tut*, also ihr Verhalten $\varphi \mapsto \Lambda(\varphi)$ wie in D5L.

Das Dirac–Funktional ist singulär.

Die oben vorgeschlagene Dirac–Funktion f hat nicht die richtigen Eigenschaften. Gelingt uns dies mit irgendeiner anderen Funktion g?

⚠ Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $p \in \Omega$. Nehmen wir optimistisch an, es gäbe eine lokal integrierbare Funktion $g : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\int_\Omega g(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0)$ für jede Testfunktion $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Wie müsste solch ein g aussehen?

Aufgabe: (1) Es gilt $g(x) = 0$ für fast alle $x \in \Omega$, das heißt, g ist eine Nullfunktion. Hinweis: Nutzen Sie den Verschwindungssatz D5K.

(2) Daraus folgt $\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$ für jede Testfunktion $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, ganz im Widerspruch zu unserer Annahme! Es ist aussichtslos.

Lösung: (1) Auf der offenen Menge $U = \Omega \smallsetminus \{p\}$ verschwindet δ_p: Für jede Testfunktion $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ mit $\operatorname{supp}\varphi \Subset U$ gilt $\delta_p(\varphi) = \varphi(p) = 0$. Gilt $\delta_p = \Lambda_g$ wie angenommen, so besagt der Verschwindungssatz D5K: Es gilt $g(x) = 0$ für fast alle $x \in U$, somit für fast alle $x \in \Omega = U \cup \{p\}$.

(2) Aus $g = 0$ fast überall folgt $\Lambda_g = 0$, also insbesondere $\Lambda_g \neq \delta_0$.

☺ Wir nutzen und erproben hier unsere Integrations-Werkzeuge: Die Dirac–Distribution δ_p ist tatsächlich nicht regulär, sondern singulär.

Funktionale und Funktionswerte

☺ Eine Distribution Λ ist ein **Funktional** $\Lambda : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R} : \varphi \mapsto \Lambda(\varphi)$.

⚠ Manche schreiben diese Zuordnung traditionell als **Integral**:

$$\Lambda(\varphi) = \int_\Omega \Lambda(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe: Was ist hieran falsch? Wann & wie lässt sich das retten?

Lösung: Jede Distrubition ist ein *Funktional* $\Lambda : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$: Wir müssen sie mit Testfunktionen $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ füttern. Sie ist keine *Funktion* $f : \Omega \to \mathbb{R}$: Wir können Λ nicht auf Punkten $x \in \Omega$ auswerten! Das frisst sie nicht.

Der Integrand hat also keinen Sinn. Manche wollen das Integral dennoch beibehalten, und *definieren* es kurzerhand durch die linke Seite. Na gut.

Etwas besser sieht es bei einer *regulären* Distribution $\Lambda = \Lambda_f$ aus, gegeben durch $\varphi \mapsto \Lambda_f(\varphi) = \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x$: Hier wird Λ konkret durch die (lokal integrierbare) Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ dargestellt. Doch selbst hier hat ein einzelner Funktionswert $f(x)$ keine Bedeutung, denn wir dürfen f beliebig abändern auf jeder Menge vom Volumen 0 (siehe Satz D5J).

Erst bei stetigen Funktionen ist f eindeutig festgelegt, siehe Satz D5J.

Der Träger einer Distribution

Eine Distribution ist eine stetige lineare Abbildung $\Lambda : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$;
sie ordnet jeder Testfunktion $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ ihren Wert $\Lambda(\varphi) \in \mathbb{R}$ zu.
Es hat keinerlei Sinn, $\Lambda(x)$ in einem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ auszuwerten!
Immerhin können wir Λ auf jede offene Menge $U \subseteq \Omega$ einschränken:
Dank $\mathscr{D}(U) \subseteq \mathscr{D}(\Omega)$ erhalten wir $\Lambda|_U := \Lambda|_{\mathscr{D}(U)} : \mathscr{D}(U) \to \mathbb{R} : \varphi \mapsto \Lambda(\varphi)$.

Definition D5M: Träger einer Distribution

Sei $\Lambda : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ eine Distribution. Sie **verschwindet** auf einer offenen Menge $U \subseteq \Omega$, kurz $\Lambda|_U = 0$, wenn $\Lambda(\varphi) = 0$ für alle $\varphi \in \mathscr{D}(U)$ gilt.

Sei $V = \bigcup\{\, U \subseteq \Omega \mid U \text{ offen und } \Lambda|_U = 0 \,\}$ die Vereinigung all dieser offenen Mengen. Dann ist auch V offen, und Λ verschwindet auf V. Somit ist V die größte offene Menge, auf der Λ verschwindet.

Den **Träger** $\operatorname{supp} \Lambda := \Omega \smallsetminus V$ definieren wir als das Komplement.

Beispiele: In den folgenden Aufgaben rechnen wir sorgfältig nach:

1. Das Dirac–Funktional $\delta_p^\alpha : \varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(p)$ hat den Träger $\{p\}$.
2. Für jede stetige Funktion $f \in C(\Omega) \subseteq L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ hat die zugehörige Distribution $\Lambda_f : \varphi \mapsto \int_\Omega f(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x$ den Träger $\operatorname{supp}(f)$.

Der Träger einer Distribution

Aufgabe: Zu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $p \in \Omega$ untersuchen wir die Distributionen

$$\delta_p^\alpha \;:\; \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R} \;:\; \varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(p).$$

(1) Konstruieren Sie zu jedem Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}^n$ eine Testfunktion $\varphi_\alpha \in \mathscr{D}(\Omega)$ mit $\delta_p^\alpha(\varphi_\alpha) = 1$ und $\delta_p^\nu(\varphi_\alpha) = 0$ für alle $\nu \in \mathbb{N}^n \smallsetminus \{\alpha\}$.

(2) Ist die Familie $(\delta_p^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ in $\mathscr{D}'(\Omega)$ linear unabhängig?

(3) Auf welchen offenen Mengen $U \subseteq \Omega$ verschwindet δ_p^α?
Was ist die größte? Was bleibt als Träger $\operatorname{supp}(\delta_p^\alpha)$?

Wir untersuchen ebenso zu $f \in C(\Omega) \subseteq L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ die reguläre Distribution

$$\Lambda_f \;:\; \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R} \;:\; \varphi \mapsto \int_\Omega f(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x.$$

(4) Für $U \subseteq \Omega$ offen gilt $\Lambda_f|_U = 0$ genau dann, wenn $f|_U = 0$ gilt.

(5) Vereinigung dieser Mengen ist $V = \Omega \smallsetminus \operatorname{supp}(f)$.

(6) Als Träger bleibt $\operatorname{supp}(\Lambda_f) = \operatorname{supp}(f)$.

Der Träger einer Distribution

Lösung: (1) Nach Verschiebung dürfen wir $p = 0 \in \Omega$ annehmen. Für $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ finden wir $\partial^\alpha x^\alpha = \alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!$. Die Funktion $g_\alpha(x) = (-1)^{|\alpha|} x^\alpha / \alpha!$ erfüllt $\delta_0^\alpha(g_\alpha) = 1$ und $\delta_0^\nu(g_\alpha) = 0$ für alle $\nu \neq \alpha$. Sie ist glatt, $g_\alpha \in C^\infty(\Omega)$, aber ihr Träger $\operatorname{supp}(g_\alpha) = \mathbb{R}^n$ nicht kompakt. Wir wählen eine Hutfunktion $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ mit $\psi = 1$ auf $\bar{B}(0,\varepsilon) \Subset \Omega$. Dann ist $\varphi_\alpha := g_\alpha \cdot \psi$ glatt mit kompaktem Träger $\operatorname{supp} \varphi_\alpha = \operatorname{supp} \psi$. Auf $\bar{B}(0,\varepsilon)$ gilt $\varphi_\alpha = g_\alpha$, also $\delta_0^\alpha(\varphi_\alpha) = 1$ und $\delta_0^\nu(\varphi_\alpha) = 0$ für alle $\nu \neq \alpha$.

(2) Ja, dank (1) ist die Familie $(\delta_p^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ in $\mathscr{D}'(\Omega)$ linear unabhängig! Angenommen, in $\mathscr{D}'$ gäbe es eine Linearkombination $\sum_\nu \lambda_\nu \delta_p^\nu = 0$ mit Koeffizienten $\lambda_\nu \in \mathbb{R}$, von denen nur endlich viele ungleich Null sind. Wir haben zu zeigen, dass alle Koeffizienten λ_ν gleich Null sind. Angewendet auf die Testfunktion φ_α erhalten wir sofort $\lambda_\alpha = 0$.

(3) Gilt $p \in U$ so verschwindet δ_p^α nicht auf U, denn dank (1) existiert eine Testfunktion $\varphi_\alpha \in \mathscr{D}(U)$ mit $\delta_p^\alpha(\varphi_\alpha) = 1 \neq 0$. Gilt hingegen $p \notin U$, so gilt $\delta_p^\alpha(\varphi) = 0$ für jede Testfunktion $\varphi \in \mathscr{D}(U)$, denn $p \notin \operatorname{supp} \varphi$. Die größte offene Menge, auf der δ_p^α verschwindet, ist also $V = \Omega \smallsetminus \{p\}$. Als Träger von δ_p^α bleibt folglich nur noch $\operatorname{supp}(\delta_p^\alpha) = \Omega \smallsetminus V = \{p\}$.

Der Träger einer Distribution

(4) Wir überlegen uns zunächst $\Lambda_f|_U = \Lambda_{f|U}$: Für $\varphi \in \mathscr{U}$ gilt nämlich:

$$\Lambda_f|_U(\varphi) = \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_U f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \Lambda_{f|U}(\varphi)$$

Dank Satz D5J wissen wir: $\Lambda_f|_U = \Lambda_{f|U} = 0$ bedeutet $f|_U = 0$.

Wir wiederholen dieses einfache aber zentrale Argument. Wir beweisen die Kontraposition: Angenommen, es gälte $f|_U \neq 0$, das heißt $f(a) \neq 0$ für ein $a \in U$. Wir dürfen $f(a) = 2b > 0$ annehmen. (Im entgegengesetzten Fall $f(a) < 0$ betrachten wir $-f$ statt f.) Da $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig ist, existiert um a ein Ball $B(a, 2\varepsilon) \subseteq U$ mit $\varepsilon > 0$, sodass $f(x) \geq b$ für alle $x \in B(x, 2\varepsilon)$ gilt. Dank B4E existiert eine Hutfunktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit dem Träger $\operatorname{supp}(\varphi) = \bar{B}(a,\varepsilon)$. Wir erhalten $\varphi \in \mathscr{D}(U)$ mit $\Lambda_f(\varphi) \neq 0$: Dank Monotonie und Linearität des Integrals gilt $\int_\Omega f\varphi = \int_{\bar{B}(a,\varepsilon)} f\varphi \geq \int_{\bar{B}(a,\varepsilon)} b\varphi = b \int_{\bar{B}(a,\varepsilon)} \varphi > 0$. Das zeigt $\Lambda_f|_U \neq 0$.

In Worten: Die Distribution Λ_f verschwindet auf der offenen Menge $U \subseteq \Omega$ genau dann, wenn die Funktion $f \in C(\Omega)$ auf U verschwindet. Die anschließenden Aussagen (5) und (6) sind dann klar aufgrund der Definition des Trägers der Funktion f als Abschluss

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{\, x \in \Omega \mid f(x) \neq 0 \,\}}.$$

☺ Damit können wir den Träger in den folgenden Beispielen ablesen.

Distribution oder nicht?

D561
Ergänzung

Aufgabe: Welche der folgenden Zuordnungen $A, B, C, \ldots : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ist eine Distribution? Was ist ihr Träger? Ist sie regulär oder singulär? Falls möglich, stellen Sie sie durch eine Funktion $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ dar.

$$A : \varphi \mapsto \sum_{k=1}^{n} \varphi(k), \qquad B : \varphi \mapsto \sum_{k=1}^{n} \varphi(0)^k, \qquad C : \varphi \mapsto \sum_{k=1}^{n} \varphi(k)^0,$$

$$D : \varphi \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(k), \qquad E : \varphi \mapsto \sum_{k\in\mathbb{N}} \varphi^{(k)}(0), \qquad F : \varphi \mapsto \sum_{k\in\mathbb{N}} \varphi^{(k)}(k),$$

$$G : \varphi \mapsto \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x, \qquad H : \varphi \mapsto \int_0^\infty \mathrm{e}^x \varphi(x)\,\mathrm{d}x, \qquad I : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$J : \varphi \mapsto \int_a^b \varphi'(x)\,\mathrm{d}x, \qquad K : \varphi \mapsto \int_0^\infty \mathrm{e}^x \varphi'(x)\,\mathrm{d}x, \qquad L : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$M : \varphi \mapsto \int_0^\infty x^a \varphi(x)\,\mathrm{d}x, \qquad N : \varphi \mapsto \int_0^\infty x^a \varphi'(x)\,\mathrm{d}x, \qquad O : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} |x| \varphi''(x)\,\mathrm{d}x$$

Distribution oder nicht?

D562
Ergänzung

$A = \sum_{k=1}^{n} \delta_k$ ist eine singuläre Distribution, getragen auf $\{1, 2, \ldots, n\}$.

B ist für $n \geq 2$ nicht linear in φ, also keine Distribution.

$C = n$ ist für $n \geq 1$ nicht linear, also keine Distribution.

$D = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k$ ist eine singuläre Distribution, getragen auf der Menge $\mathbb{Z}$. Jede Testfunktion φ hat kompakten Träger, also ist die Summe endlich.

E ist nicht einmal wohldefiniert, da die Reihe divergieren kann.
Beispiel: Sei $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Testfunktion mit $\psi(x) = 1$ für $x \in [-1, 1]$.
Für $\varphi(x) = \mathrm{e}^x\, \psi(x)$ gilt $\varphi^{(k)}(x) = \mathrm{e}^x$ für alle $x \in [-1, 1]$ und $k \in \mathbb{N}$.

$F = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k^k$ ist eine singuläre Distribution, getragen auf der Menge $\mathbb{N}$. Jede Testfunktion φ hat kompakten Träger, also ist die Summe endlich.

$G = \Lambda_f$ mit $f = \mathbf{I}_{[a,b]} \in L^1(\mathbb{R})$ ist eine reguläre Distribution, getragen auf dem kompakten Intervall $[a, b]$.

$H = \Lambda_f$ mit $f(x) = \mathbf{I}_{[0,\infty[}(x)\, \mathrm{e}^x$ ist eine reguläre Distribution, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, getragen auf $[0, \infty[$. Für jede Testfunktion φ ist das Integral endlich.

$I = \Lambda_f$ mit $f = 1 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ ist eine reguläre Distribution, getragen auf $\mathbb{R}$.

Distribution oder nicht?

$J = \delta_b - \delta_a$ ist eine singuläre Distribution, getragen auf $\{a, b\}$.

Für K nutzen wir partielle Integration. Für $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-r, r]$ gilt:

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^x\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^r \mathrm{e}^x\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{e}^x\,\varphi(x)\Big]_0^r - \int_0^r \mathrm{e}^x\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= -\varphi(0) - \int_0^\infty \mathrm{e}^x\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

$K = -\delta_0 - \Lambda_f$ mit $f(x) = \mathbf{I}_{[0,\infty[}(x)\,\mathrm{e}^x$ ist eine singuläre Distribution, getragen auf $[0, \infty[$. Sie hat einen singulären und einen regulären Teil.

$L = 0$ ist die triviale Distribution, denn für $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-r, r]$ gilt:

$$\int_{-\infty}^\infty \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-r}^r \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\varphi(x)\Big]_{-r}^r = 0$$

Für Exponenten $a > -1$ ist x^a lokal integrierbar B208; also ist $M = \Lambda_f$ mit $f(x) = \mathbf{I}_{]0,\infty[}(x)\,x^a$ eine reguläre Distribution, getragen auf $[0, \infty[$.
Für $a \le -1$ hingegen ist M nicht einmal wohldefiniert, denn es gilt $\int_0^\varepsilon x^a\,\mathrm{d}x = \infty$ B208 und ebenso $\int_0^\varepsilon x^a\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \pm\infty$ für $\varphi(0) \neq 0$.

Distribution oder nicht?

Für $a = 0$ gilt $N = -\delta_0$. Für $a > 0$ und $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-r, r]$ gilt:

$$\int_0^\infty x^a\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^r x^a\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[x^a\,\varphi(x)\Big]_0^r - \int_0^r a x^{a-1}\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= -a\int_0^\infty x^{a-1}\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

Für jeden Exponenten $a > 0$ ist demnach $N = -a\Lambda_f$ mit $f(x) = \mathbf{I}_{[0,\infty[}(x)\,x^{a-1}$ eine reguläre Distribution, getragen auf $[0, \infty[$.
Für $-1 < a \le 0$ ist N eine wohldefinierte Distribution, aber singulär.
Für $a \le -1$ ist N nicht wohldefiniert, genauso wie oben für M erklärt.

$O = 2\delta_0$ ist eine singuläre Distribution getragen auf $\{0\}$.
Für $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-r, r]$ zerlegen wir $\int_{\mathbb{R}} |x|\varphi''(x)\,\mathrm{d}x$ in zwei Integrale:

$$\int_0^r (+x)\,\varphi''(x)\,\mathrm{d}x = +\Big[x\,\varphi'(x)\Big]_0^r - \int_0^r \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\varphi(x)\Big]_0^r = \varphi(0)$$
$$\int_{-r}^0 (-x)\,\varphi''(x)\,\mathrm{d}x = -\Big[x\,\varphi'(x)\Big]_{-r}^0 + \int_{-r}^0 \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\varphi(x)\Big]_{-r}^0 = \varphi(0)$$

Distributionen sind beliebig oft differenzierbar.

Satz D5N: Distributionsableitung

Sei $\Lambda : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ eine Distribution und $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ein Multiindex.

(1) Wir erhalten erneut eine Distribution durch die Ableitung

$$\partial^\alpha \Lambda := \Lambda \circ (-\partial)^\alpha \;:\; \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R} \;:\; \varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|} \Lambda(\partial^\alpha \varphi).$$

(2) Hat $f : \Omega \to \mathbb{R}$ die stetige Ableitung $\partial^\alpha f$, so gilt $\partial^\alpha \Lambda_f = \Lambda_{\partial^\alpha f}$. Distributions- und klassische Ableitung stimmen hier also überein.

(3) Konvergenz $\Lambda_n \to \Lambda$ in $\mathscr{D}'(\Omega)$ für $n \to \infty$ impliziert $\partial^\alpha \Lambda_n \to \partial^\alpha \Lambda$. Das bedeutet: Auf Distributionen ist die Ableitung $\Lambda \mapsto \partial^\alpha \Lambda$ stetig!

Aufgabe: Rechnen Sie alle Aussagen des Satzes sorgfältig nach!

Lösung: (1) Die Ableitung $\partial^\alpha : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathscr{D}(\Omega)$ ist linear und stetig (D5H), ebenso $\Lambda : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, also auch ihre Komposition $\partial^\alpha \Lambda = \Lambda \circ (-\partial)^\alpha$.

(2) Umwälzen wie in D5P mit partieller Integration ergibt wie erwartet $(\partial^\alpha \Lambda_f)(\varphi) = \int_\Omega f(x)\,(-\partial)^\alpha \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega (\partial^\alpha f)(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \Lambda_{\partial^\alpha f}(\varphi)$.

(3) Wir haben $\Lambda_n(\varphi) \to \Lambda(\varphi)$ für jede Testfunktion $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ nach D5I, insbesondere $\big[\partial^\alpha \Lambda_n\big](\varphi) = \Lambda_n\big[(-\partial)^\alpha \varphi\big] \to \Lambda\big[(-\partial)^\alpha \varphi\big] = \big[\partial^\alpha \Lambda_n\big](\varphi)$.

Ableitung und Konvergenz von Distributionen

Aufgabe: Skizzieren Sie die reellen Funktionen $f_n, g_n, h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = \sin(nx)/n$ und $g_n(x) = \cos(nx)$ und $h_n(x) = -\sin(nx) \cdot n$.

(1) Gilt gleichmäßige Konvergenz $f_n \to 0$? und $g_n \to 0$? und $h_n \to 0$?

(2) Konvergieren die zugehörigen Distributionen in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ gegen Null?

Lösung: (1) Für die Supremumsnorm finden wir $|f_n|_\mathbb{R} = 1/n \searrow 0$, also $f_n \to 0$ gleichmäßig. Hingegen gilt $|g_n|_\mathbb{R} = 1 \not\to 0$ und $|h_n|_\mathbb{R} = n \nearrow \infty$.

(2) In $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ gilt $\Lambda_{f_n} \to 0$: Jede Testfunktion $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ hat kompakten Träger $K := \operatorname{supp}(\varphi) \Subset \mathbb{R}$ und erfüllt somit $|\varphi|_K < \infty$. Demnach gilt:

$$\begin{aligned} \big|\Lambda_{f_n}(\varphi)\big| &= \Big|\int_\mathbb{R} f_n(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x\Big| \quad \le \int_\mathbb{R} \big|f_n(x)\big| \cdot |\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\le \operatorname{vol}_1(K) \cdot \big|f_n\big|_K \cdot \big|\varphi\big|_K = \operatorname{vol}_1(K) \cdot \frac{1}{n} \cdot \big|\varphi\big|_K \quad \to 0 \end{aligned}$$

Dank Satz D5N folgt $\Lambda_{g_n} = \Lambda_{f_n'} = \Lambda_{f_n}' \to 0$ und $\Lambda_{h_n} = \Lambda_{f_n''} = \Lambda_{f_n}'' \to 0$.

☺ Die Funktionen h_n oszillieren immer schneller und stärker, doch der Mittelwert $\int_\mathbb{R} h_n(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ schluckt Oszillationen und geht gegen Null.

☺ Sie können es direkt nachrechnen: zweimal partiell integrieren!

Produkt von Distribution und glatter Funktion

⚠ Das Produkt von zwei Distributionen ergibt keine Distribution:
Die Zuordnung $\Lambda_1 \cdot \Lambda_2 \,:\, \varphi \mapsto \Lambda_1(\varphi) \cdot \Lambda_2(\varphi)$ ist nicht linear in φ.
Immerhin gelingt das Produkt von Distribution und glatter Funktion:

Satz D5○: Produkt von Distribution und glatter Funktion

Sei $\Lambda : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ eine Distribution und $g \in C^\infty(\Omega)$ eine glatte Funktion.

(1) Wir erhalten erneut eine Distribution durch ihr Produkt

$$\Lambda \cdot g \,:\, \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R} \,:\, \varphi \mapsto \Lambda(g \cdot \varphi)$$

(2) Konsistenz: Für jede reguläre Distribution gilt $(\Lambda_f) \cdot g = \Lambda_{(f \cdot g)}$.

(3) Das so definierte Produkt $\cdot : \mathscr{D}'(\Omega) \times C^\infty(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega)$ ist bilinear, es gilt $\Lambda \cdot 1 = \Lambda$ und $(\Lambda \cdot g) \cdot h = \Lambda \cdot (g \cdot h)$ sowie die Leibniz–Regel

$$\partial_i(\Lambda \cdot g) = (\partial_i \Lambda) \cdot g + \Lambda \cdot (\partial_i g).$$

☺ Wie $\mathscr{D}(\Omega)$ ist auch $\mathscr{D}'(\Omega)$ ein Vektorraum über dem Grundkörper $\mathbb{R}$.
☺ Wie $\mathscr{D}(\Omega)$ wird nun auch $\mathscr{D}'(\Omega)$ ein Modul über der Algebra $C^\infty(\Omega)$.

Produkt von Distribution und glatter Funktion

Aufgabe: Rechnen Sie alle Aussagen des Satzes sorgfältig nach!

Lösung: (1) Für $g \in C^\infty(\Omega)$ und $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ gilt $g \cdot \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.
Hierauf können wir $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$ auswerten, somit ist $\Lambda \cdot g$ wohldefiniert.
Die Zuordnung $\varphi \mapsto \Lambda(g \cdot \varphi)$ ist linear und stetig, also eine Distribution.

(2) Es gilt $(\Lambda_f \cdot g)(\varphi) = \Lambda_f(g \cdot \varphi) = \int_\Omega f(x)\, g(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \Lambda_{f \cdot g}(\varphi)$.

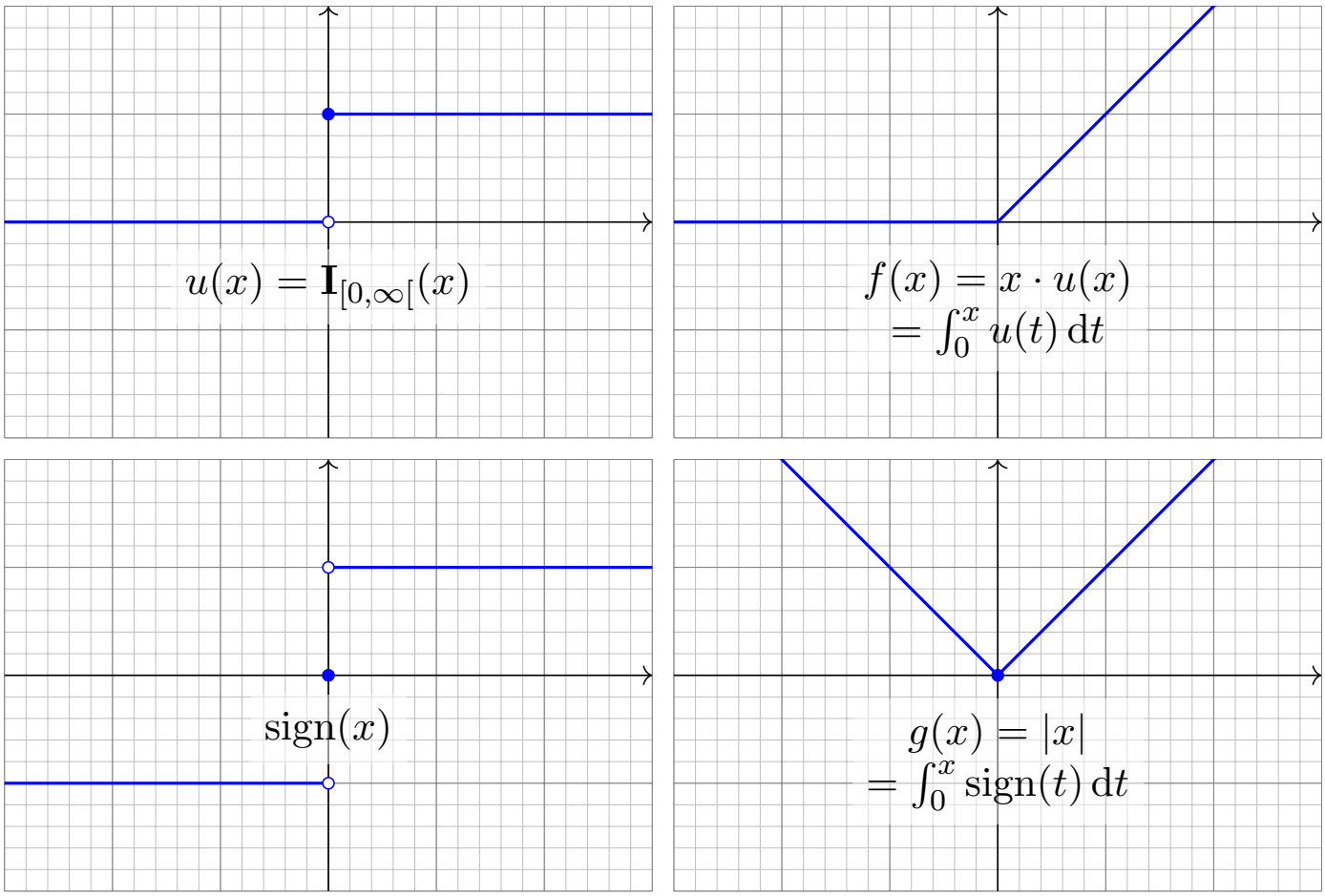
(3) Die behaupteten Rechenregeln werden offensichtlich, sobald man sie ausschreibt; wir rechnen hier exemplarisch nur die Leibniz–Regel nach.
Für $g \in C^\infty(\Omega)$ und $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ gilt $g \cdot \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, wie gesehen, und die übliche Leibniz–Regel $\partial_i(g \cdot \varphi) = (\partial_i g) \cdot \varphi + g \cdot (\partial_i \varphi)$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
&\big[\partial_i(\Lambda \cdot g)\big](\varphi) && = \big[\Lambda \cdot g\big](-\partial_i \varphi) \\
&= \Lambda\big[g \cdot (-\partial_i)\varphi\big] && = \Lambda\big[(\partial_i g) \cdot \varphi - \partial_i(g \cdot \varphi)\big] \\
&= \Lambda\big[(\partial_i g) \cdot \varphi\big] - \Lambda\big[\partial_i(g \cdot \varphi)\big] && = \Lambda\big[(\partial_i g) \cdot \varphi\big] + (\partial_i \Lambda)(g \cdot \varphi) \\
&= \big[\Lambda \cdot (\partial_i g)\big](\varphi) + \big[(\partial_i \Lambda) \cdot g\big](\varphi) && = \big[\Lambda \cdot (\partial_i g) + (\partial_i \Lambda) \cdot g\big](\varphi)
\end{aligned}$$

Da dies für jede Testfunktion $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ gilt, schließen wir

$$\partial_i(\Lambda \cdot g) = \Lambda \cdot (\partial_i g) + (\partial_i \Lambda) \cdot g.$$

Die Heaviside–Sprungfunktion $u = \mathbf{I}_{[0,\infty[}$



Ableitung der Sprungfunktion $u = \mathbf{I}_{[0,\infty[}$

Eine schlagartige Impulsübertragung oder das instantane Anschalten eines Stromes beschreiben wir durch die Heaviside–Sprungfunktion

$$u = \mathbf{I}_{[0,\infty[} \;:\; \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;:\; x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ 1 & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

⚠ In jedem Punkt $x \neq 0$ ist u differenzierbar, und dort gilt $u'(x) = 0$. Dennoch ist u nicht differenzierbar: Die Ableitung im Punkt $x = 0$ ist rechtsseitig Null und linksseitig „unendlich“, also $u'(0)$ nicht definiert.

Aufgabe: Es gilt $u' = \delta_0$ im Distributionensinne (aber $\partial\Lambda_u \neq \Lambda_{\partial u}$).

Lösung: Wir berechnen die Wirkung der Ableitung $\partial\Lambda_u := -\Lambda_u \circ \partial$ auf Testfunktionen $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, also $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt mit kompaktem Träger. Sei $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-r, r]$, also $\varphi(x) = 0$ für $|x| \geq r$. Dank HDI finden wir:

$$(\partial\Lambda_u)(\varphi) = -\int_{\mathbb{R}} u(x)\,\partial\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{x=0}^{r} \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0) - \varphi(r) = \varphi(0)$$

☺ Somit sind $\partial\Lambda_u = \delta_0 : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dieselbe Distribution (D5ı).

Stammfunktion der Sprungfunktion $u = \mathbf{I}_{[0,\infty[}$

D571
Ergänzung

Aufgabe: (0) Skizzieren Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x \cdot u(x)$.
(1) In welchen Punkten ist f stetig? (links/rechtsseitig) differenzierbar?
(2) Berechnen Sie $f' = u$ und $f'' = \delta_0$ im Distributionensinne.

Lösung: (1) Die Funktion f ist stetig, das heißt in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$.
In jedem Punkt $x \neq 0$ ist f differenzierbar, und dort gilt $f'(x) = u(x)$.
Die Ableitung von f im Punkt $x = 0$ ist rechtsseitig $f'(0+) = 1$ und linksseitig $f'(0-) = 0$, also ist hier die Ableitung $f'(0)$ nicht definiert.

(2) Wir berechnen die Wirkung der Ableitung $\partial\Lambda_f := -\Lambda_f \circ \partial$ auf Testfunktionen $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, also $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt mit kompaktem Träger.
Sei also $\varphi(x) = 0$ für $|x| \geq r$. Dank partieller Integration finden wir:

$$(\partial\Lambda_g)(\varphi) = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\partial\varphi(x)\,\mathrm{d}x \;\; = -\int_{x=0}^{r} x\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\Big[x\,\varphi(x)\Big]_{x=0}^{r} + \int_{x=0}^{r} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} u(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

☺ Somit sind $\partial\Lambda_f = \Lambda_u : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dieselbe Distribution (D5ı).
Physikalische Anschauung: ruckartige Beschleunigung / Stoß.
Geometrische Anschauung: Krümmung konzentriert in einer Ecke.

Ableitung der Betragsfunktion $x \mapsto |x|$

D572
Ergänzung

Aufgabe: (0) Skizzieren Sie die Betragsfunktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$.
(1) In welchen Punkten ist g stetig? (links/rechtsseitig) differenzierbar?
(2) Berechnen Sie $g' = \operatorname{sign}$ und $g'' = 2\delta_0$ im Distributionensinne.

Lösung: (1) Die Funktion g ist stetig, das heißt in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$.
In jedem Punkt $x \neq 0$ ist g differenzierbar, und dort gilt $g'(x) = \operatorname{sign}(x)$.
Die Ableitung von g im Punkt $x = 0$ ist rechtsseitig $g'(0+) = +1$ und linksseitig $g'(0-) = -1$, also ist hier die Ableitung $g'(0)$ nicht definiert.

(2) Wir berechnen die Wirkung der Ableitung $\partial\Lambda_g := -\Lambda_g \circ \partial$ auf Testfunktionen $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, also $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt mit kompaktem Träger.
Sei also $\varphi(x) = 0$ für $|x| \geq r$. Dank partieller Integration finden wir:

$$(\partial\Lambda_g)(\varphi) = -\int_{-r}^{r} |x|\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-r}^{0} x\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{r} x\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \Big[x\,\varphi(x)\Big]_{-r}^{0} - \int_{-r}^{0} \varphi(x)\,\mathrm{d}x - \Big[x\,\varphi(x)\Big]_{0}^{r} + \int_{0}^{r} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sign}(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

☺ Somit sind $\partial\Lambda_g = \Lambda_{\operatorname{sign}} : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dieselbe Distribution (D5ı).
Im Distributionensinne gilt $\operatorname{sign} = 2u - 1$ und somit $\operatorname{sign}' = 2\delta_0$.

Umwälzen der Ableitung

Lemma D5P: Umwälzen der Ableitung

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit stetiger Ableitung $g = \partial_i f$. Für jede Testfunktion $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ gilt dann:

$$\boxed{\int_\Omega \partial_i f(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x = -\int_\Omega f(x)\, \partial_i \varphi(x)\, \mathrm{d}x}$$

Beweis: Wir nutzen Fubini C1E und partielle Integration B1J:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega g(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x &\overset{\text{Null}}{\underset{\text{Forts.}}{=}} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_1 f(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Fub}}{\underset{\text{C1E}}{=}} + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \partial_1 f(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}(x_2, \ldots, x_n) \\
&\overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \partial_1 \varphi(x)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}(x_2, \ldots, x_n) \\
&\overset{\text{Fub}}{\underset{\text{C1E}}{=}} - \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \partial_1 \varphi(x)\, \mathrm{d}x \overset{\text{Null}}{\underset{\text{Forts.}}{=}} - \int_\Omega f(x)\, \partial_i \varphi(x)\, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Die rechte Seite betrifft nur f, nicht f', und gilt für alle Testfunktionen φ. Wir erheben die Gleichung nun zur Definition der schwachen Ableitung.

Schwache Ableitungen

Definition D5Q: schwache Ableitung

Seien $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R})$. Wir nennen g eine **schwache Ableitung** von f nach x_i, wenn für jede Testfunktion $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega, \mathbb{R})$ obige Gleichung gilt:

$$\boxed{\int_\Omega g(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x = -\int_\Omega f(x)\, \partial_i \varphi(x)\, \mathrm{d}x}$$

Das bedeutet $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R})$ und $\partial_i \Lambda_f = \Lambda_g$ im Distributionensinne. In diesem Falle schreiben wir kurz $g = \partial_i f$ **im schwachen Sinne** und nennen die Funktion f **schwach ableitbar** (differenzierbar) nach x_i.

Aufgabe: Es gelten einige grundsätzliche Regeln der Vorsicht:

(1) Nennen Sie Funktionen $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aus Ihrem Beispielfundus, die keine schwache Ableitung $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ erlauben.

(2) Falls eine schwache Ableitung g existiert, ist $g(x)$ dann eindeutig bestimmt in jedem Punkt $x \in \Omega$? zumindest in fast allen Punkten $x \in \Omega$? Warum hat es daher keinen Sinn, vom Funktionswert $g(x)$ zu sprechen?

☺ Die schwache Ableitung hat keinen Wert... und ist dennoch nützlich!

Schwache Ableitungen

Lösung: (1) Die Antwort ist leicht, da wir genügend Beispiele kennen: Die Heaviside–Funktion $u = \mathbf{I}_{[0,\infty[}$ ist lokal integrierbar, $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Ihre Distributionsableitung $\partial\Lambda_u = \delta_0$ ist das Dirac–Funktional. D570
Die Distribution δ_0 ist jedoch nicht regulär, wie wir bereits wissen: Keine Funktion $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ erfüllt $\Lambda_g = \delta_0$! D555

Auch die Signumfunktion $f = \operatorname{sign} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist lokal integrierbar, besitzt aber wegen $\partial\Lambda_f = 2\delta_0$ keine schwache Ableitung. D572

(2) Falls eine schwache Ableitung g existiert, so ist g nicht eindeutig, denn wir können $g(x)$ in einem beliebigen Punkt $x \in \Omega$ ändern.

Genauer: Wir dürfen die Funktion $g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega,\mathbb{R})$ auf jeder Nullmenge $N \subseteq \Omega$, $\operatorname{vol}_n(N) = 0$, beliebig ändern. Gilt $\tilde{g} = g$ auf $\Omega \smallsetminus N$, so folgt $\tilde{g} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega,\mathbb{R})$, und mit g ist auch $\tilde{g}$ eine schwache Ableitung von f.

Immerhin ist das auch schon das Schlimmste, was passieren kann: Sind $g, \tilde{g} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega,\mathbb{R})$ schwache Ableitungen zu f, so gilt $g(x) = \tilde{g}(x)$ für fast alle $x \in \Omega$, dank $\partial_i\Lambda_f = \Lambda_g = \Lambda_{\tilde{g}}$ und Vergleichssatz D5K.

Einzelne Funktionswerte $g(x)$ haben leider keine Bedeutung! D556

Schwache Ableitungen

Aufgabe: (1) Skizzieren Sie die reellen Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = x\,\mathbf{I}_{[0,\infty[}(x)$ und $f_2(x) = |x|$. Ist f_i differenzierbar? Genauer: In welchen Punkten ist die Funktion f_i differenzierbar, in welchen nicht?

(2) Sei $U_i \subseteq \mathbb{R}$ die Menge der Differenzierbarkeitsstellen von f_i. Bestimmen Sie hierauf die Ableitung $f_i' : U_i \to \mathbb{R}$. Ist sie stetig?

(3) Geben Sie schwache Ableitungen $g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, falls möglich, oder erklären Sie, warum es keine schwache Ableitung geben kann.

(4) Sind die schwachen Ableitungen eindeutig? Geben Sie Varianten an!

Lösung: (1) Die Skizzen sehen Sie auf Seite D569. Beide Funktionen f_1, f_2 sind in 0 nicht differenzierbar, überall sonst hingegen schon.

(2) Auf $U_1 = U_2 = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ sind $f_1' = \mathbf{I}_{]0,\infty[}$ und $f_2' = \operatorname{sign}$ stetig!

(3) Wir setzen $g_i(x) = f_i'(x)$ für $x \neq 0$ willkürlich fort durch $g_i(0) = 42$. Dann ist g_i eine schwache Ableitung von f_i, siehe Seite D571 / D572.

(4) Der Wert $g_i(0)$ ist willkürlich. Wir können g_i auch in jedem anderen Punkt ändern. Soll die schwache Ableitung g_i zudem stetig sein auf $U_i = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$, dann gibt es auf U_i nur die angegebene Lösung (D5J).

Darstellung kompakt getragener Distributionen

Jede reguläre Distribution $\Lambda : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ wird durch eine lokal integrierbare Funktion f dargestellt, also $\Lambda : \varphi \mapsto \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x$.
Wir wissen also recht konkret, wie eine solche Distribution aussieht.

Wir wollen auch singuläre Distributionen ähnlich konkret darstellen.
Obige Liste zeigt konkrete Beispiele. Gibt es eine allgemeine Formel?

Genau dies leisten schrittweise die folgenden drei Darstellungssätze.
Die Konstruktionen sind länglich und werden hier nicht ausgeführt.

Satz D5R: Darstellung punktuell getragener Distributionen

Zu $\alpha \in \mathbb{N}^n$ sei $c_\alpha \in \mathbb{R}$ gegeben. Die Zuordnung $\Lambda : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ mit

$$\Lambda : \varphi \mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n}^{|\alpha| \le N} c_\alpha \partial^\alpha \varphi(p)$$

ist eine Distribution mit Träger $\operatorname{supp} \Lambda = \{p\}$. Umgekehrt gilt:

Jede Distribution $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$ mit Träger $\operatorname{supp} \Lambda = \{p\}$ hat die obige Form mit eindeutigen Konstanten $c_\alpha \in \mathbb{R}$ und einem geeigneten Grad $N \in \mathbb{N}$.

Darstellung kompakt getragener Distributionen

Satz D5S: Darstellung kompakt getragener Distributionen

Zu $\alpha \in \mathbb{N}^n$ sei $f_\alpha \in C_c(\Omega)$ gegeben. Die Zuordnung $\Lambda : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ mit

$$\Lambda : \varphi \mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n}^{|\alpha| \le N} \int_\Omega f_\alpha(x)\,\partial^\alpha \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

ist eine Distribution mit kompakten Träger $\operatorname{supp} \Lambda \Subset \Omega$. Umgekehrt gilt:

Jede Distribution $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$ mit kompaktem Träger hat die obige Form mit geeigneten Funktionen $f_\alpha \in C_c(\Omega)$ und endlichem Grad $N \in \mathbb{N}$.

☺ Für jede kompakt getragene Distribution $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$ gilt also

$$\Lambda = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n}^{|\alpha| \le N} (-\partial)^\alpha f_\alpha \quad \text{mit} \quad f_\alpha \in C_c(\Omega).$$

Aufgabe: Vergleichen Sie Satz D5S mit bisherigen Darstellungen:
(1) Stellen Sie die Distribution $\delta_0 : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} : \varphi \mapsto \varphi(0)$ wie in D5S dar.
(2) Stellen Sie reguläre Distributionen Λ_f mit $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ ebenso dar!

Darstellung kompakt getragener Distributionen

Lösung: (1) Aus vorigen Aufgaben wissen wir $\int_{\mathbb{R}} |x|\, \varphi''(x)\, \mathrm{d}x = 2\varphi(0)$. Die Funktion $f(x) = |x|$ ist stetig, aber ihr Träger ist nicht kompakt. Wir wählen eine Hutfunktion $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ mit $\psi(x) = 1$ für $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ und $\psi(x) = 0$ für $|x| \geq 2\varepsilon$, also $\operatorname{supp} \psi \subseteq [-2\varepsilon, 2\varepsilon]$. Damit erreichen wir:

$$\begin{aligned}\varphi(0) = (\psi \cdot \varphi)(0) &= \int_{\mathbb{R}} \tfrac{1}{2}|x|\, (\psi \cdot \varphi)''(x)\, \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\tfrac{1}{2}|x|\, \psi''(x)}_{=:\, f_0(x)}\, \varphi(x) + \underbrace{|x|\, \psi'(x)}_{=:\, f_1(x)}\, \varphi'(x) + \underbrace{\tfrac{1}{2}|x|\, \psi(x)}_{=:\, f_2(x)}\, \varphi''(x)\, \mathrm{d}x\end{aligned}$$

Somit gilt $\delta_0 = \Lambda_{f_0} + \partial\Lambda_{f_1} + \partial^2\Lambda_{f_2}$, oder kurz $\delta_0 = f_0 + \partial f_1 + \partial^2 f_2$. Notgedrungen ragen die Funktionen f_α etwas über $\operatorname{supp} \varphi = \{0\}$ hinaus, und ihre Konstruktion ist nicht eindeutig im Gegensatz zu Satz D5R.

(2) Die Integralfunktion $F(x) = \int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t$ ist absolut stetig (B2E), und fast überall gilt $F' = f$. Dank partieller Integration (B2G) gilt auch hier:

$$\Lambda_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} F'(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}} F(x)\, \varphi'(x)\, \mathrm{d}x = (\partial\Lambda_F)(\varphi)$$

Hat Λ_f kompakten Träger, so können wir F wie in (1) abschneiden.

Darstellung beliebiger Distributionen

Satz D5T: Darstellung beliebiger Distributionen

Zu $\alpha \in \mathbb{N}^n$ sei $f_\alpha \in C(\Omega)$ gegeben, und die Familie sei lokal endlich: Jedes Kompaktum $K \Subset \Omega$ schneidet $\operatorname{supp} f_\alpha$ nur für endlich viele α.

Dann ist die Zuordnung $\Lambda : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ mit

$$\Lambda : \varphi \mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \int_\Omega f_\alpha(x)\, \partial^\alpha \varphi(x)\, \mathrm{d}x$$

eine Distribution. Die Reihe konvergiert, denn jede Testfunktion φ hat kompakten Träger, und somit ist die Summe in jedem Einzelfall endlich.

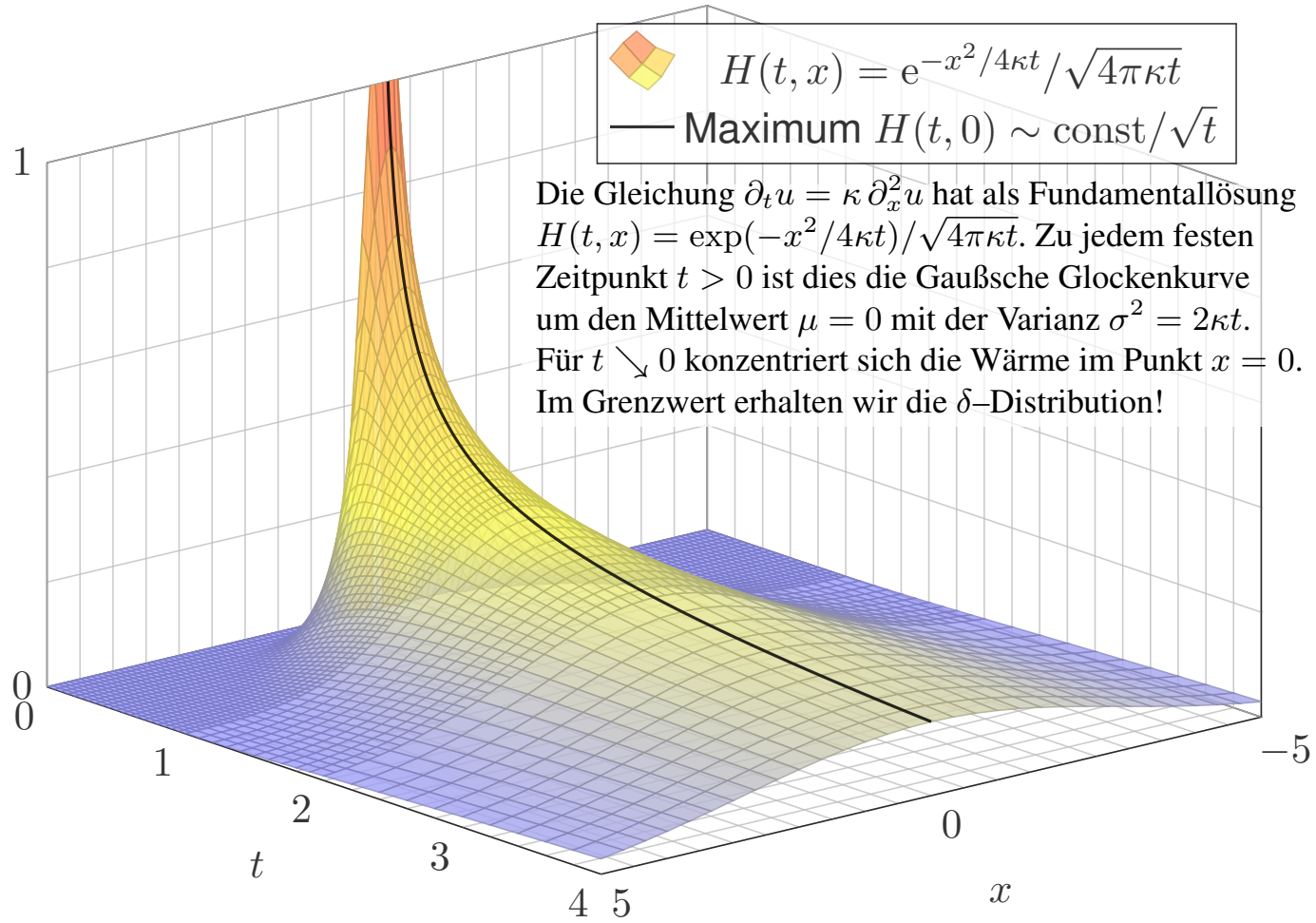
Umgekehrt gilt: Jede Distribution $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$ hat die obige Form mit einer geeigneten, lokal endlichen Familie stetiger Funktionen $f_\alpha \in C(\Omega)$.

☺ In diesem Sinne entstehen alle Distributionen bereits aus stetigen Funktionen und ihren (Distributions-)Ableitungen. Kurz und knapp:

$$\Lambda = \sum\nolimits_\alpha (-\partial)^\alpha f_\alpha \quad \text{mit } f_\alpha \in C(\Omega) \text{ lokal endlich}$$

☺ Distribution wirken so nicht mehr abstrakt, sondern ganz konkret.

Distributionen: Rückblick und Ausblick



Die Gleichung $\partial_t u = \kappa\, \partial_x^2 u$ hat als Fundamentallösung $H(t,x) = \exp(-x^2/4\kappa t)/\sqrt{4\pi\kappa t}$. Zu jedem festen Zeitpunkt $t > 0$ ist dies die Gaußsche Glockenkurve um den Mittelwert $\mu = 0$ mit der Varianz $\sigma^2 = 2\kappa t$. Für $t \searrow 0$ konzentriert sich die Wärme im Punkt $x = 0$. Im Grenzwert erhalten wir die δ–Distribution!

Distributionen: Rückblick und Ausblick

Die Entwicklung der Mathematik steht in enger Wechselwirkung mit der ihrer Anwendungsgebiete. Ein Paradebeispiel ist die Entstehung der Differential- und Integralrechnung: Sie ist Teil der wissenschaftlichen Revolution des 17. Jahrhunderts und beantwortete dringende Fragen aus Astronomie, Mechanik und Optik (Galilei, Kepler, Newton, Leibniz).

Umgekehrt hat die Analysis in den Ingenieur- und Naturwissenschaften neue Wege eröffnet und viele Anwendungen überhaupt erst ermöglicht: Ihre Methoden prägen bis heute das wissenschaftliche Denken wie kein anderes mathematisches Gebiet. Seit dem 18. Jahrhundert bis heute werden Naturgesetze meist als Differentialgleichungen beschrieben, auch in Ihrem Studium und später in Ihrem Beruf als Ingenieur:in. (Wir führen Differentialgleichungen in den Kapiteln M bis S aus.)

Seit jeher entwickelt die Analysis dabei eine erstaunliche Dynamik: Neue (physikalische) Probleme treten auf, neue (mathematische) Methoden werden entwickelt. Hierzu zählen insbesondere auch die Distributionen: Die mathematische Theorie beantwortet praktische Bedürfnisse aus der Physik und den Ingenieurwissenschaften.

Distributionen: Rückblick und Ausblick

Distributionen begegnen Ingenieur:innen meist dort, wo die klassischen Methoden an ihre Grenzen stoßen. Wenn eine bewährte Technik dort nicht mehr anwendbar ist, dann sollten wir sie ehrlicherweise auch nicht naiv einsetzen, sondern durch eine besser passende Technik ergänzen.

Dieses Problem ist bei partiellen Differentialgleichungen unvermeidlich. Von den vielen Anwendungen möchte ich die Wärmeleitungsgleichung und ihre Fundamentallösung hervorheben und exemplarisch diskutieren.

Fourier beschäftigte sich Anfang des 19. Jahrhunderts mit Fragen der Wärmeleitung und beschrieb dies als Differentialgleichung $\partial_t u = \kappa\, \Delta u$. (Wir entwickeln hierzu in den Kapitel E bis H die nötigen Integralsätze.)

Zur Berechnung konkreter Anwendungsbeispiele entwickelte Fourier seine Theorie der Fourier–Reihen, mit überwältigendem Erfolg!
Sie werden bis heute als Allzweckwerkzeug überall genutzt.

Allein schon die Grundlegung dieser Theorie war für die Analysis des 19. Jahrhunderts eine enorme Herausforderung und führte zur Klärung wichtiger Fragen: Was sind Mengen und Funktionen? Wie integriert man sie? Was bedeutet Konvergenz? (Wir führen dies in Kapitel I bis L aus.)

Distributionen: Rückblick und Ausblick

Physiker:innen und Ingenieur:innen nutzen Distributionen seit ca. 1900, um ganz naiv-konkret-anschauliche Phänomene zu formulieren, etwa eine „punktförmige Masse“ oder eine „schlagartige Impulsübertragung“. Das scheint anschaulich klar, doch wie Sie wissen, genügt das nicht: Sie sollen nicht nur fühlen, sondern zudem auch rechnen können!

Der Wärmeleitungskern $H(t,x)$ hat in $(0,0)$ eine Polstelle. Anschaulich konzentriert sich zur Zeit $t=0$ die gesamte Wärme im Punkt $x=0$. Hier herrscht „unendliche Wärmedichte“. Wie sollen wir damit rechnen? Für $t \searrow 0$ nähert sich die Wärmeverteilung der Dirac–Funktion (D553). Diese beschreibt die physikalische Situation leider überhaupt nicht, ihre naive Verwendung stiftet Verwirrung und provoziert Fehlentscheidungen.

Der Distributionenkalkül ist maßgeschneidert für solche Extremfälle. Dank der soliden Vorbereitung in diesem Kapitel können wir nun zum Abschluss den Wärmeleitungskern vollständig erklären und einfach nachrechnen! Ähnliche Anwendungen werden uns in den folgenden Kapiteln öfters begegnen. Für eine vertiefte Behandlung von partiellen Differentialgleichungen sind Distributionen ein zentrales Werkzeug.

Satz D5U: Wärmeleitungskern

(0) Sei $\kappa > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Den **Wärmeleitungskern** definieren wir durch

$$H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : H(t,x) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi\kappa t})^n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\kappa t}\right)$$

für $t > 0$ und $H(t,x) = 0$ für $t \le 0$. Außerhalb der Polstelle $(0,0)$ ist H glatt (C^∞), für $t \le 0$ konstant und für $t > 0$ analytisch (C^ω).

(1) Im Distributionensinne ist H eine **Fundamentallösung** gemäß

$$(\partial_t - \kappa\Delta)H = \delta_{(0,0)}.$$

(2) Ist für $t = 0$ die Wärmeverteilung $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vorgegeben, $u_0 \in C_b$, so erhalten wir die Lösung durch **Superposition** (Faltung, siehe D5E)

$$u : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : u(t,x) = \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} H(t, x-\xi)\, u_0(\xi)\, \mathrm{d}\xi.$$

Sie erfüllt $\partial_t u = \kappa\, \Delta u$ für $t > 0$ sowie $\lim_{t \searrow 0} u(t,x) = u_0(x)$.

Aufgabe: (0) Skizzieren Sie H; wiederholen Sie bisherige Ergebnisse.
(1) In welchen Punkten $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ist H stetig? glatt? analytisch?
(2) Sei $L = \partial_t - \kappa\Delta$. In welchen Punkten (t,x) gilt $L\,H(t,x) = 0$?
(3) Ist H auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ absolut integrierbar? wenigstens lokal integrierbar?
(4) Wann dürfen wir den Operator L zu $L^* = -\partial_t - \kappa\Delta$ umwälzen:

$$\int \big[L\,H(t,x)\big]\, \varphi(t,x)\, \mathrm{d}(t,x) = \int H(t,x)\, \big[L^*\varphi(t,x)\big]\, \mathrm{d}(t,x)?$$

(5) Wo verschwindet demnach die Distribution $(\partial_t - \kappa\Delta)\Lambda_H$?
(6) Berechnen Sie schließlich $\varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} H(t,x)\, \big[L^*\varphi(t,x)\big]\, \mathrm{d}(t,x)$.

Lösung: (0) Seite D513: Für festes $t > 0$ ist $x \mapsto H(t,x)$ die Gaußsche Glockenkurve mit Mittelwert $\mu = 0$ und Streuung $\sigma = \sqrt{2\kappa t}$. Für $t \nearrow \infty$ fließt sie auseinander, für $t \searrow 0$ konzentriert sie sich um den Nullpunkt.

(1) Für $t < 0$ und $t > 0$ ist H analytisch (C^ω), also lokal als konvergente Potenzreihe darstellbar, da Komposition analytischer Funktionen.
Auf $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \setminus \{(0,0)\}$ ist H beliebig oft differenzierbar (C^∞); dies beweist man genauso wie für die Funktion $f(t) = \mathrm{e}^{-1/t}$. B438
Im Punkt $(0,0)$ liegt eine Polstelle vor wegen $H(t,0) = (4\pi\kappa t)^{-n/2}$.

Wärmeleitungskern: analytische Eigenschaften

(2) Außerhalb der Polstelle, also auf ganz $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \smallsetminus \{(0,0)\}$, gilt $(\partial_t - \kappa\Delta)H = 0$, wie wir bereits nachgerechnet haben (D5D).

(3) Es gilt $H \geq 0$, wir können also den Absolutbetrag weglassen. Für jedes $t > 0$ gilt $\int_{\mathbb{R}^n} H(t,x)\,\mathrm{d}x = 1$: Gaußsches Integral (C2G). Sei $-\infty \leq a < 0 < b$. Wir nutzen den Satz von Fubini (C1E):

$$\int_{]a,b[\times\mathbb{R}^n} H(t,x)\,\mathrm{d}(t,x) = \int_{t=a}^{b}\int_{x\in\mathbb{R}^n} H(t,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{b} 1\,\mathrm{d}t = b$$

Somit ist H überall auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ lokal integrierbar, aber nicht global.

(4) Sei $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ eine Testfunktion: glatt mit kompaktem Träger. Auf U ist H glatt, dort können wir die Ableitung umwälzen (D5N): Die Formel gilt demnach falls $\operatorname{supp}\varphi \Subset U$, also $(0,0) \notin \operatorname{supp}\varphi$.
⚠ Sonst gilt sie nicht. Links steht 0, rechts erwarten wir $\varphi(0,0)$!

(5) Auf U finden wir die Ableitung $L\Lambda_H = \Lambda_{LH} = \Lambda_0 = 0$.
⚠ Die Ableitung $h = L\,H$ ist nur auf $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \smallsetminus \{(0,0)\}$ definiert; dort ist sie gleich Null. Das ist vergleichbar mit der Dirac–Funktion! Egal, wie wir $h(0,0)$ setzen, immer gilt $\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} h(t,x)\,\varphi(t,x)\,\mathrm{d}(t,x) = 0$, also $\Lambda_{LH} = \Lambda_h = 0$. Wir sehen jedoch gleich $\Lambda_{LH} \neq L\Lambda_H = \delta_{(0,0)}$.

Wärmeleitungskern: analytische Eigenschaften

(6) Sei $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Für den Träger gelte $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq [-T,T] \times \mathbb{R}^n$. Wir integrieren über $V = [\tau,T] \times \mathbb{R}^n$ für $\tau > 0$ und untersuchen $\tau \searrow 0$:

$$\int_{t=\tau}^{T}\int_{x\in\mathbb{R}^n} H(t,x)\,\big[\kappa\Delta\varphi(t,x)\big]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \overset{\text{(a)}}{=} \int_{t=\tau}^{T}\int_{x\in\mathbb{R}^n} \big[\kappa\Delta H(t,x)\big]\,\varphi(t,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

$$\overset{\text{(b)}}{=} \int_{t=\tau}^{r}\int_{x\in\mathbb{R}^n} \big[\partial_t H(t,x)\big]\,\varphi(t,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{[\tau,T]\times\mathbb{R}^n} H(t,x)\,\big[L^*\varphi(t,x)\big]\,\mathrm{d}(t,x) \overset{\text{(c)}}{=} -\int_{x\in\mathbb{R}^n}\int_{t=\tau}^{T} \partial_t\big[H(t,x)\,\varphi(t,x)\big]\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$$

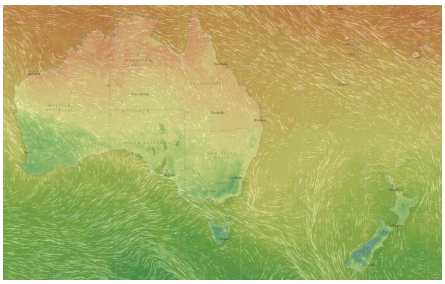
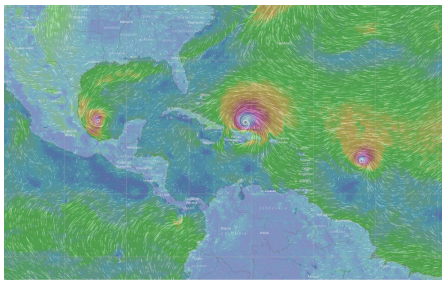
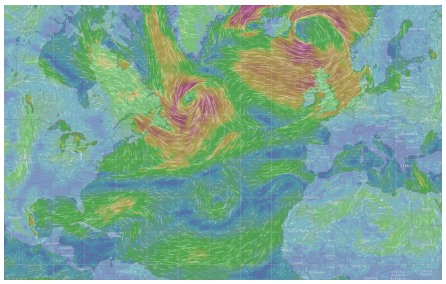
$$\overset{\text{(d)}}{=} \int_{x\in\mathbb{R}^n} H(\tau,x)\,\varphi(\tau,x)\,\mathrm{d}x \qquad \overset{\text{(e)}}{=} \int_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\mathrm{e}^{-|x|^2/4\kappa\tau}}{(\sqrt{4\pi\kappa\tau})^n}\,\varphi(\tau,x)\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{(f)}}{=} \int_{\xi\in\mathbb{R}^n} \frac{\mathrm{e}^{-|\xi|^2/2}}{(\sqrt{2\pi})^n}\,\varphi(\tau,\xi\sqrt{2\tau})\,\mathrm{d}x \qquad \overset{\text{(g)}}{\to} \int_{\xi\in\mathbb{R}^n} \frac{\mathrm{e}^{-|\xi|^2/2}}{(\sqrt{2\pi})^n}\,\varphi(0,0)\,\mathrm{d}x = \varphi(0,0)$$

(a) Zu festem t dürfen wir $\Delta = \partial_{x_1}^2 + \cdots + \partial_{x_n}^2$ umwälzen. (b) Auf V gilt $\kappa\Delta H = \partial_t H$. (c) Wir nutzen erneut den Satz von Fubini. Für $L^* = -\partial_t - \kappa\Delta$ wälzen wir $-\kappa\Delta$ um und nutzen $\partial_t[H\,\varphi] = [\partial_t H]\,\varphi + H\,[\partial_t\varphi]$ und HDI (d). (f) Wir substituieren $\xi = x/\sqrt{2\kappa\tau}$ und nutzen den Transformationssatz. (g) Wir nutzen majorisierte Konvergenz. Alles wird gut!

Kapitel E

Integralsätze in der Ebene

Wahrlich es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen,
nicht das Besitzen, sondern das Erwerben,
nicht das Da-Seyn, sondern das Hinkommen,
was den grössten Genuss gewährt.

Carl Friedrich Gauß (1777–1855)

Vollversion • michael-eisermann.de/lehre/HM3 • 26.02.2025

Inhalt dieses Kapitels E

1 Die Integralsätze von Green und Gauß
- Wegintegrale und Kurvenintegrale
- Ebene Kompakta mit stückweise glattem Rand
- Der Integralsatz von Green: anschauen und nachrechnen!
- Der Integralsatz von Gauß: anschauen und nachrechnen!

2 Anwendungsbeispiele
- Schreibweise als Differentialform
- Die Greenschen Flächenformeln
- Arbeitsintegrale in der Thermodynamik
- Flächeninhalt und Schwerpunkt

3 Verständnisfragen und Aufgaben
- Sherlock Holmes: Which way did the bicycle go?
- Zwei prominente Vektorfelder: Wirbel und Quelle
- Der Hauptsatz für Arbeitsintegrale: HDI
- Lösung des Potentialproblems

Motivation und Zielsetzung

Unser Vorbild ist der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: Für jede stetig differenzierbare Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $f = F'$ gilt

$$\text{HDI:} \qquad \int_{x=a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Das ist eine bemerkenswerte Gesetzmäßigkeit: Das Integral über das Intervall $[a, b]$ lässt sich entlang des Randes $\partial[a, b] = \{a, b\}$ bestimmen!

Der HDI vereinfacht enorm die Berechnung bestimmter Integrale, oft ermöglicht er sogar explizite Integrale in geschlossener Form. Der HDI (B1I) ist daher zentral für die eindimensionale Integration; zusammen mit Fubini (C1E) und Transformationssatz (C2B) liefert er die Grundtechniken zur Berechnung mehrdimensionaler Integrale.

Der HDI lässt sich verallgemeinern von Dimension 1 auf 2 und 3 usw. Die so entstehenden **Integralsätze** von Green, Gauß und Stokes ermöglichen die Umformung und Berechnung von Integralen.

Vorgehensweise

Wir beginnen dieses Kapitel E mit Kurvenintegralen, als Wiederholung und Vertiefung dieser wichtigen Integrationstechnik aus der HM2.

Wir erklären insbesondere die Unabhängigkeit von Parametrisierungen, sodass wir von Wegintegralen zu Kurvenintegralen übergehen können.

Anschließend werden wir in diesem Kapitel die Integralsätze von Green und Gauß für ebene Vektorfelder $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kennen und nutzen lernen.

Das Prinzip ist genial einfach, doch wie immer erfordert es Übung.

Im folgenden Kapitel F werden wir dies auf komplexe Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ anwenden. Ziel ist dabei der Residuensatz von Cauchy.

Im anschließenden dritten Kapitel G diskutieren wir die Integralsätze von Gauß und Stokes für räumliche Vektorfelder $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Das abschließende vierte Kapitel H der Reihe diskutiert physikalische Anwendungen: die Kontinuitätsgleichung in der Strömungslehre, Fouriers Wärmeleitungsgleichung, Newtons Gravitationsgesetz und Maxwells Gleichungen der Elektrodynamik.

Was sind Kurven und Flächen im $\mathbb{R}^n$?

Der Zahlengerade $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ betrachten wir als (reell) **eindimensional**, die euklidische Ebene $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ betrachten wir als **zweidimensional**, den euklidischen Raum $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ entsprechend **n–dimensional**.

Der fundamentale Begriff der **Dimension** entspringt hier der linearen Algebra, genauer gesagt der **linearen Unabhängigkeit** von Vektoren: Im $\mathbb{R}^n$ ist $e_1, e_2, \ldots, e_n$ die Standardbasis, und *jede* Basis hat Länge n. Dies setzen wir in Geometrie, Differential- und Integralrechnung fort:

Eine **Kurve** ist eine „eindimensionale“ Teilmenge $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$, eine **Fläche** ist eine „zweidimensionale“ Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^n$, usw. Anschaulich mag das klar scheinen, aber wir wollen explizit rechnen! Wie das genau funktioniert, werden wir im Folgenden ausführen.

Unser Ziel ist insbesondere, über Kurven und Flächen zu integrieren. Die hierzu benötigten Grundlagen behandeln wir zunächst für Kurven. Die hier geltenden **Integralsätze** sind Gegenstand dieses Kapitels E. In Kapitel G wenden wir uns dann Flächenintegralen im Raum zu.

📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §4–5.

Skalarprodukt, Norm, Abstand im $\mathbb{R}^n$

Das **euklidische Skalarprodukt** von zwei Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^n$ ist

$$u \bullet v = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n.$$

Übliche Schreibweisen: $u \bullet v = u \cdot v = u^\intercal v = \langle\, u \mid v \,\rangle = \langle u, v \rangle = \ldots$
Für jeden Vektor $u \in \mathbb{R}^n$ gilt somit $\langle\, u \mid u \,\rangle = u_1^2 + \cdots + u_n^2 \geq 0$.
Die **euklidische Norm** des Vektors $u \in \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$|u| = \sqrt{\langle\, u \mid u \,\rangle} = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}.$$

Übliche Schreibweisen: $|u| = |u|_2 = \|u\| = \|u\|_2 = \ldots$
Der **euklidische Abstand** zwischen zwei Punkten $u, v \in \mathbb{R}^n$ ist

$$|u - v| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}.$$

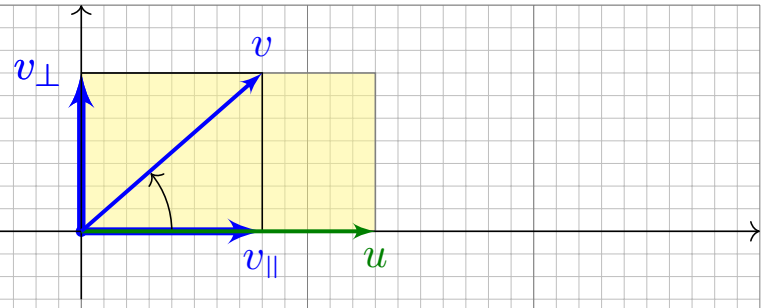
Beispiel: Der Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n : t \mapsto u + tv$ hat die Geschwindigkeit $\gamma'(t) = v$ und die Länge $\int_{t=a}^{b} |\gamma'(t)| \,\mathrm{d}t = (b - a) \cdot |v| = |\gamma(b) - \gamma(a)|$.
Alternative Schreibweisen für Vektoren $u \in \mathbb{R}^n$ und ihre Länge $|u| \in \mathbb{R}$: Vektorpfeil $\vec{u}$ und $u = |\vec{u}|$ oder Unterstrich $\underline{u}$ und $u = |\underline{u}|$, oder Fettdruck.

Skalarprodukt und Kreuzprodukt in der Ebene

Die Geometrie der Ebene ist verhältnismäßig einfach und übersichtlich. Für $u, v \in \mathbb{R}^2$ sind **Skalarprodukt** und **Kreuzprodukt** gegeben durch

$$\begin{aligned} u \bullet v &= u_1 v_1 + u_2 v_2 &&= |u| \cdot |v| \cdot \cos \sphericalangle(u, v), \\ u \times v &= u_1 v_2 - u_2 v_1 &&= |u| \cdot |v| \cdot \sin \sphericalangle(u, v). \end{aligned}$$

Geometrische Erklärung:



Für $u = (u_1, 0)$ längs der x–Achse ist die $\cos$–$\sin$–Formel klar.

Allgemein können wir jedes vorgegebene Paar von Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^2$ so drehen, dass $u = (u_1, 0)$ längs der x–Achse liegt: Beide Produkte sind invariant unter Drehungen, das heißt, es gilt $(Au) \bullet (Av) = u \bullet v$ und $(Au) \times (Av) = u \times v$ für jede orthogonale Matrix $A \in \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$.

Skalarprodukt und Kreuzprodukt in der Ebene

Die vier Fälle $\sphericalangle(u, v) \in \{0°, 90°, 180°, 270°\}$ sind besonders wichtig:

parallel:	$u \parallel v$	$\iff$	$u \bullet v = \pm\lvert u\rvert \cdot \lvert v\rvert$	$\iff$	$u \times v = 0$
senkrecht:	$u \perp v$	$\iff$	$u \bullet v = 0$	$\iff$	$u \times v = \pm\lvert u\rvert \cdot \lvert v\rvert$

Bezüglich u zerlegen wir den Vektor $v = v_\parallel + v_\perp$ in seinen tangentialen Anteil $v_\parallel$ parallel zu u und seinen normalen Anteil $v_\perp$ senkrecht zu u.

Diese orthogonale Zerlegung von v bezüglich u ist (für $u \neq 0$) eindeutig; sie ist der Anfang des berühmten Gram–Schmidt–Verfahrens, gemäß

$$v_\parallel = \frac{u \bullet v}{u \bullet u}\, u \quad \text{und} \quad v_\perp = v - v_\parallel, \quad \text{somit} \quad u \bullet v_\perp = 0.$$

Damit erhalten wir allgemein folgende geometrische Umformulierung:

$$u \bullet v = \pm\, |u| \cdot |v_\parallel| \qquad \text{(positiv / negativ parallel)}$$

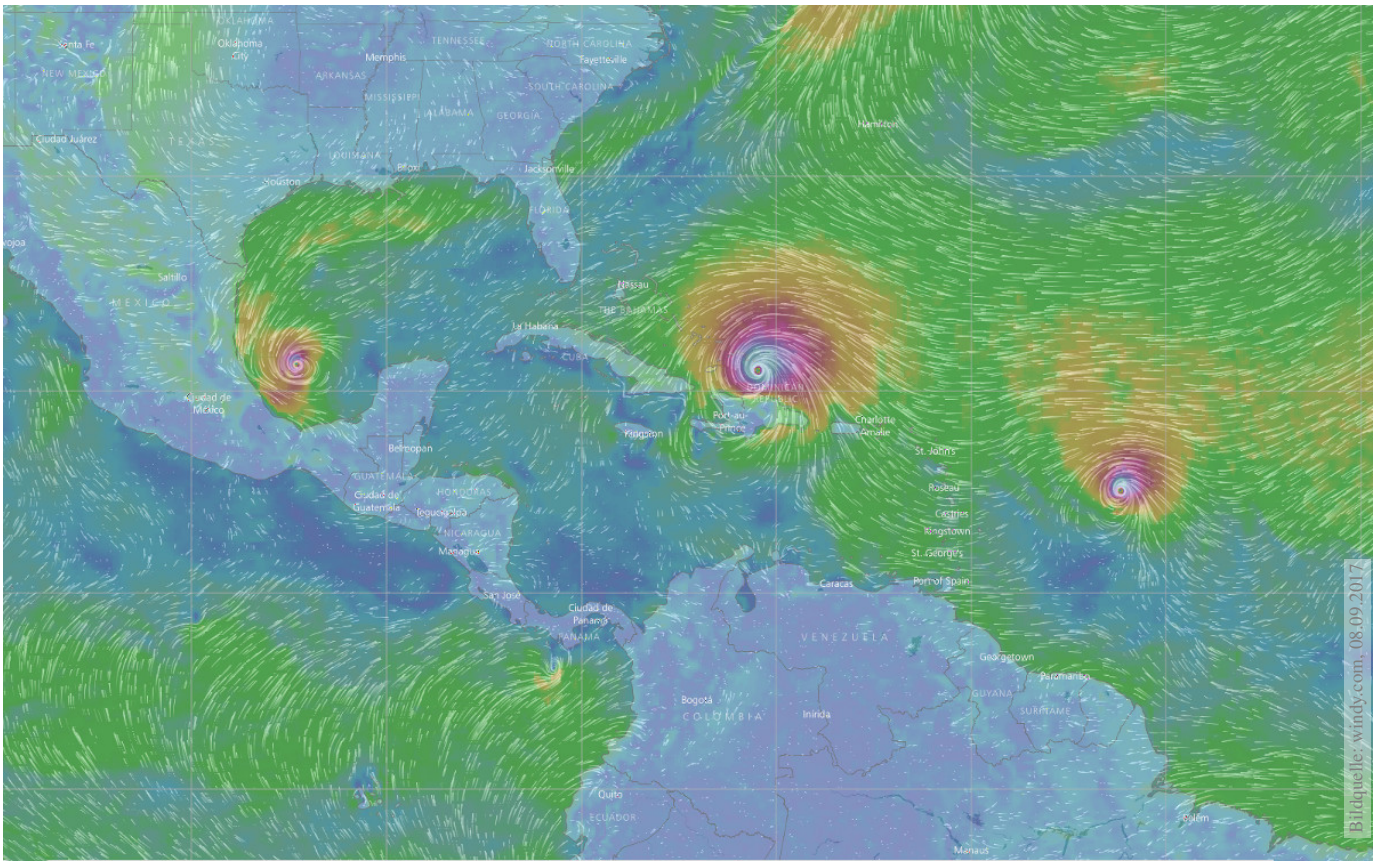
$$u \times v = \pm\, |u| \cdot |v_\perp| \qquad \text{(positiv / negativ orthogonal)}$$

☺ Das Skalarprodukt $u \bullet v$ misst von v nur den tangentialen Anteil $v_\parallel$ parallel zu u (bzw. symmetrisch hierzu den Anteil von u parallel zu v).

☺ Das Kreuzprodukt $u \times v$ misst von v nur den normalen Anteil $v_\perp$ senkrecht zu u (bzw. symmetrisch hierzu von u senkrecht zu v).

Skalarfelder und Vektorfelder

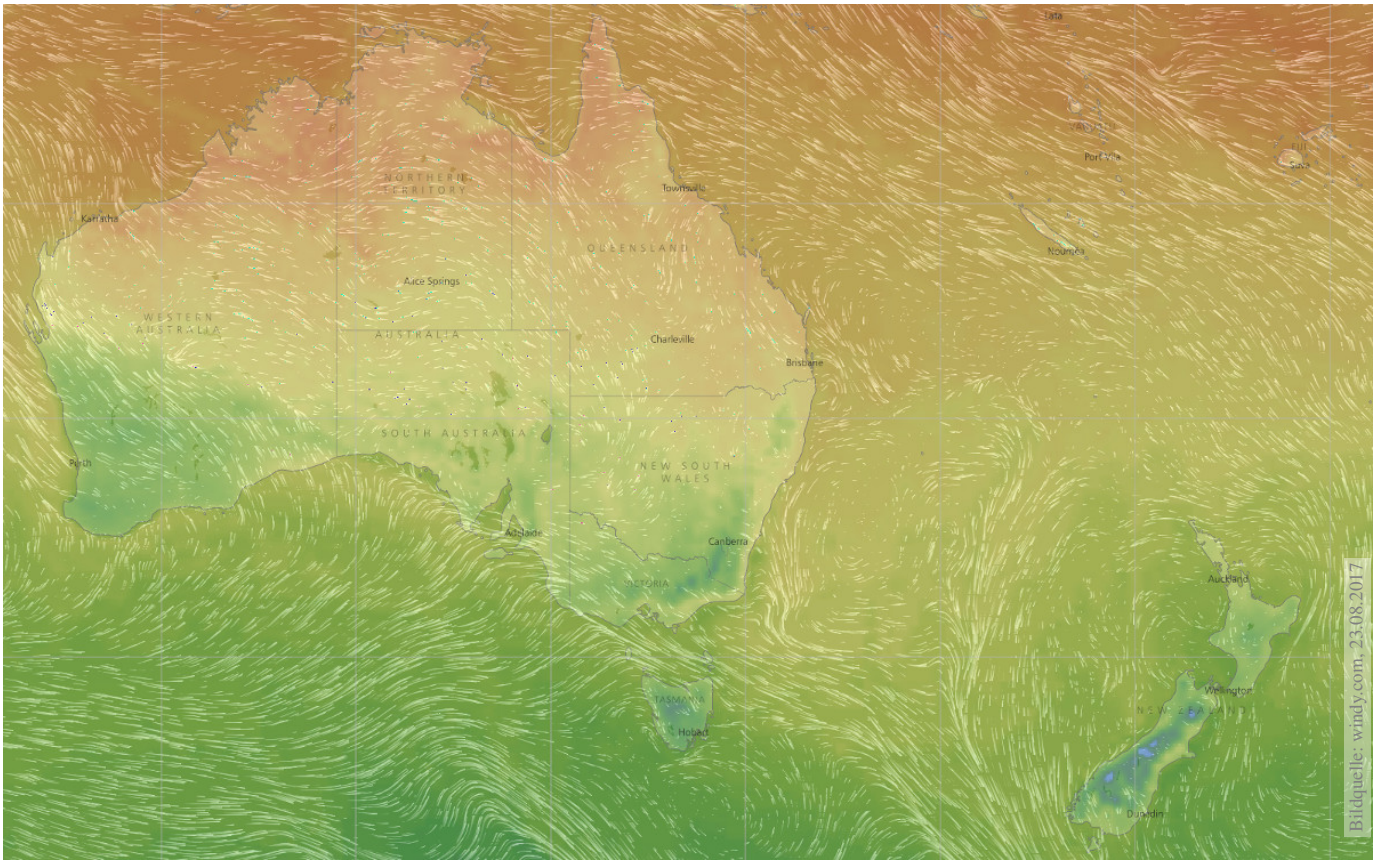
E009



Skalarfeld $g : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto g(x, y)$, z.B. Temperatur, Luftdruck.
Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (f_1(x, y), f_2(x, y))$, z.B. Wind, etc.

Skalarfelder und Vektorfelder

E010
Erläuterung



Vektorfelder treten in vielen naturwissenschaftlichen Modellen auf.
Hierbei gelten gewisse Gesetze, die wir verstehen und nutzen wollen.

Skalarfelder, Gradient, Taylor–Entwicklung

Wir betrachten zunächst ein ebenes **Skalarfeld**

$$g \,:\, \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \to \mathbb{R} \,:\, (x,y) \mapsto g(x,y).$$

Jedem Punkt $(x,y) \in \Omega$ wird eine Zahl $g(x,y) \in \mathbb{R}$ zugeordnet;
der Definitionsbereich $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ sei hierbei eine offene Teilmenge.
Unser Skalarfeld g ist dann nichts weiter als eine reelle Funktion.
Wir können die Funktion g als eine Fläche über Ω veranschaulichen:
Der Wert $z = g(x,y)$ ist dann die Höhe über dem Punkt (x,y).
Wir nehmen an, dass g stetig partiell differenzierbar ist, kurz C^1.
Die Ableitung $\partial_1 g(x,y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ ist die Steigung in x–Richtung.
Die Ableitung $\partial_2 g(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$ ist die Steigung in y–Richtung.
Dies definiert zwei neue Funktionen $\partial_1 g, \partial_2 g : \Omega \to \mathbb{R}$. Der **Gradient**

$$g' = \operatorname{grad} g = (\partial_1 g, \partial_2 g) \,:\, \Omega \to \mathbb{R}^2 \,:\, (x,y) \mapsto (\partial_1 g(x,y), \partial_2 g(x,y))$$

weist in Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion g.
Der Gradient ist der lineare Term der **Taylor–Entwicklung**

$$g(x+a) = g(x) + \sum_{i=1}^{n} \partial_i g(x) a_i + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \partial_j \partial_i g(x) a_i a_j + \ldots$$

Vektorfelder, Jacobi–Matrix, Divergenz, Rotation

Wir betrachten nun ein ebenes **Vektorfeld**

$$f \,:\, \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \to \mathbb{R}^2 \,:\, (x,y) \mapsto f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)).$$

Jedem Punkt $(x,y) \in \Omega$ wird ein Vektor $f(x,y) \in \mathbb{R}^2$ zugeordnet, mit Komponenten $f_1(x,y) \in \mathbb{R}$ und $f_2(x,y) \in \mathbb{R}$. Seine **Jacobi–Matrix** ist

$$f' = \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \partial f_1/\partial x & \partial f_1/\partial y \\ \partial f_2/\partial x & \partial f_2/\partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 \end{pmatrix}.$$

Wir definieren die **Quelldichte** oder **Divergenz** $\operatorname{div} f : \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$\operatorname{div} f := \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}.$$

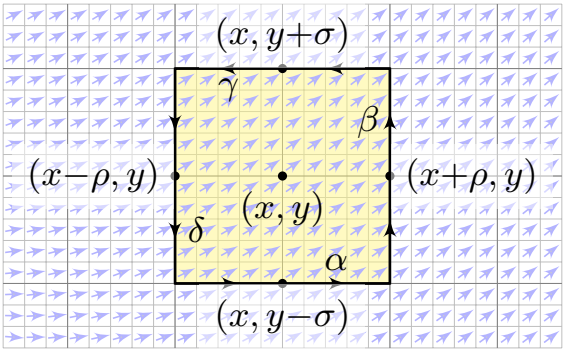
Wir definieren die **Wirbeldichte** oder **Rotation** $\operatorname{rot} f : \Omega \to \mathbb{R}$ durch

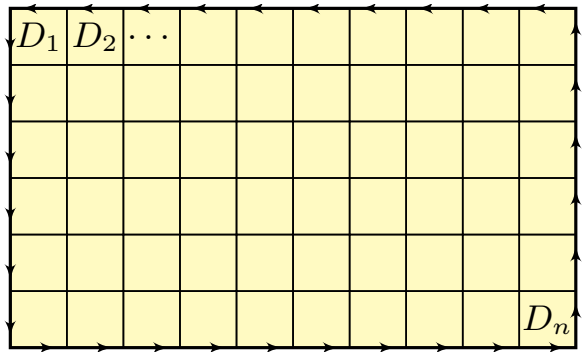
$$\operatorname{rot} f := \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}.$$

📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §5.2.
In diesem Kapitel E geht es zunächst nur um ebene Vektorfelder.
Dreidimensionale Vektorfelder behandeln wir später in Kapitel G.

Die Rotation $\operatorname{rot}(f)$ misst die Wirbeldichte.

Wir betrachten ein C^1–Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \to \mathbb{R}^2$ auf einem Rechteck $D = [x-\rho, x+\rho] \times [y-\sigma, y+\sigma] \subseteq \Omega$ mit den (kleinen) Radien $\rho, \sigma > 0$.





Aufgabe: (1) Berechnen Sie (in erster Näherung) das **Arbeitsintegral** $I_D = \int_{\partial D} f(s) \cdot \mathrm{d}s$ von f längs des Randes ∂D, als Summe der Kanten.
(2) Erklären Sie für $(\rho, \sigma) \to 0$ den Grenzwert $I_D / \operatorname{vol}_2(D) \to \operatorname{rot} f(x, y)$. Die Rotation $\operatorname{rot}(f)$ misst also die **lokale Wirbeldichte** des Feldes f.
(3) Erklären Sie durch Zerlegung und Grenzübergang: Die **Zirkulation** von f auf jedem beliebigen Rechteck D erhalten wir durch die Integrale

$$\int_{\partial D} f(s) \cdot \mathrm{d}s = \int_D \operatorname{rot} f(x, y) \, \mathrm{d}(x, y).$$

Die Rotation $\operatorname{rot}(f)$ misst die Wirbeldichte.

Lösung: (1) Wir nutzen die Taylor–Entwicklung bis zur ersten Ordnung:

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_\alpha f(s) \cdot \mathrm{d}s &\approx +f_1(x, y-\sigma) \cdot 2\rho &&\approx +\big[f_1(x, y) + \partial_2 f_1(x, y) \cdot (-\sigma)\big] \cdot 2\rho \\
\textstyle\int_\beta f(s) \cdot \mathrm{d}s &\approx +f_2(x+\rho, y) \cdot 2\sigma &&\approx +\big[f_2(x, y) + \partial_1 f_2(x, y) \cdot (+\rho)\big] \cdot 2\sigma \\
\textstyle\int_\gamma f(s) \cdot \mathrm{d}s &\approx -f_1(x, y+\sigma) \cdot 2\rho &&\approx -\big[f_1(x, y) + \partial_2 f_1(x, y) \cdot (+\sigma)\big] \cdot 2\rho \\
\textstyle\int_\delta f(s) \cdot \mathrm{d}s &\approx -f_2(x-\rho, y) \cdot 2\sigma &&\approx -\big[f_2(x, y) + \partial_1 f_2(x, y) \cdot (-\rho)\big] \cdot 2\sigma
\end{aligned}$$

Die Summe ergibt das Arbeitsintegral I_D von f entlang des Randes ∂D:
$I_D = \int_{\partial D} f(s) \cdot \mathrm{d}s \approx \big[\partial_1 f_2(x, y) - \partial_2 f_1(x, y)\big] \cdot 4\rho\sigma = \operatorname{rot} f(x, y) \cdot \operatorname{vol}_2(D)$.
(2) Für $(\rho, \sigma) \to 0$ gilt $I_D / \operatorname{vol}_2(D) \to \operatorname{rot} f(x, y)$; der Fehler in obiger Näherung ist höherer Ordnung in ρ, σ und verschwindet für $(\rho, \sigma) \to 0$.
(3) Wir zerlegen $D = D_1 \cup \cdots \cup D_n$ in Teilrechtecke und summieren: Links erhalten wir das Arbeitsintegral von f entlang ∂D; Arbeitsintegrale längs innerer Kanten sind gegenläufig und heben sich paarweise auf! Rechts erhalten wir $\sum_k \operatorname{rot} f(x_k, y_k) \operatorname{vol}_2(D_k) \to \int_D \operatorname{rot} f(x, y) \, \mathrm{d}(x, y)$.

☺ Diese erste Näherung hilft zur Anschauung und erklärt die Intuition. Die genaue Rechnung (ohne Näherung) führen wir auf Seite E141 aus.

Die Divergenz $\operatorname{div}(f)$ misst die Quelldichte.

Aufgabe: (4) Berechnen Sie (in erster Näherung) das **Flussintegral** $J_D = \int_{\partial D} f(s) \times \mathrm{d}s$ von f über den Rand ∂D, als Summe der Kanten.

(5) Erklären Sie für $(\rho, \sigma) \to 0$ den Grenzwert $J_D / \operatorname{vol}_2(D) \to \operatorname{div} f(x, y)$. Die Divergenz $\operatorname{div}(f)$ misst also die **lokale Quelldichte** des Feldes f.

(6) Erklären Sie durch Zerlegung und Grenzübergang: Die **Quellstärke** von f auf jedem beliebigen Rechteck D erhalten wir durch die Integrale

$$\int_{\partial D} f(s) \times \mathrm{d}s = \int_D \operatorname{div} f(x, y)\, \mathrm{d}(x, y).$$

☺ Die hier anschaulich gefundenen Integralsätze von Green (3) und Gauß (6) gelten nicht nur für jedes Rechteck D, sondern allgemein für jedes Kompaktum $D \subseteq \mathbb{R}^2$ mit stückweise glattem Rand, zum Beispiel Polygone, Kreise, Ellipsen, sogar mit Löchern… kurzum: nahezu immer.

⚠ Wichtig ist, dass D kompakt ist. Andernfalls existieren eventuell die Integrale über D oder ∂D nicht, oder die Bilanzgleichungen (3) und (6) sind verletzt. Eine genauere Analyse solcher Fälle folgt in Kapitel F im Rahmen des Residuensatzes für komplexe Funktionen.

Die Divergenz $\operatorname{div}(f)$ misst die Quelldichte.

Lösung: (4) Wir nutzen die Taylor–Entwicklung bis zur ersten Ordnung:

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_\alpha f(s) \times \mathrm{d}s &\approx -f_2(x, y-\sigma) \cdot 2\rho \approx -\big[f_2(x, y) + \partial_2 f_2(x, y) \cdot (-\sigma)\big] \cdot 2\rho \\
\textstyle\int_\beta f(s) \times \mathrm{d}s &\approx +f_1(x+\rho, y) \cdot 2\sigma \approx +\big[f_1(x, y) + \partial_1 f_1(x, y) \cdot (+\rho)\big] \cdot 2\sigma \\
\textstyle\int_\gamma f(s) \times \mathrm{d}s &\approx +f_2(x, y+\sigma) \cdot 2\rho \approx +\big[f_2(x, y) + \partial_2 f_2(x, y) \cdot (+\sigma)\big] \cdot 2\rho \\
\textstyle\int_\delta f(s) \times \mathrm{d}s &\approx -f_1(x-\rho, y) \cdot 2\sigma \approx -\big[f_1(x, y) + \partial_1 f_1(x, y) \cdot (-\rho)\big] \cdot 2\sigma
\end{aligned}$$

Die Summe ergibt das Flussintegral J_D von f über den Rand ∂D:

$$J_D = \textstyle\int_{\partial D} f(s) \times \mathrm{d}s \approx \big[\partial_1 f_1(x, y) + \partial_2 f_2(x, y)\big] \cdot 4\rho\sigma = \operatorname{div} f(x, y) \cdot \operatorname{vol}_2(D)$$

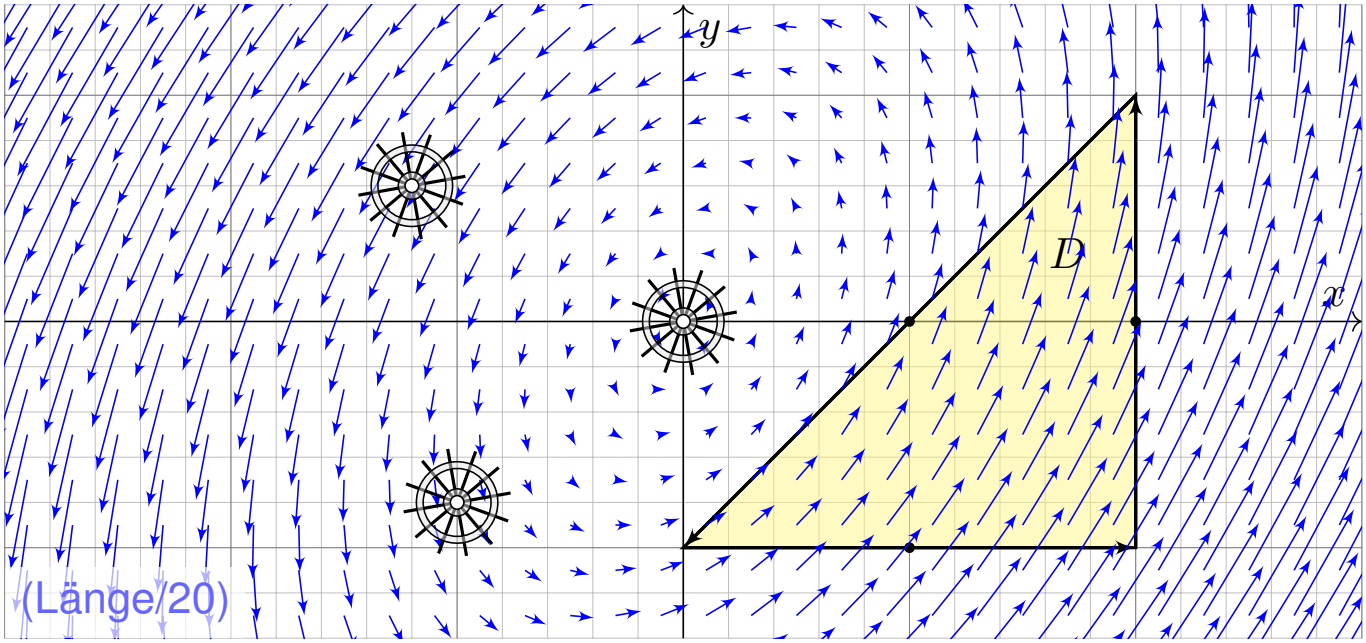
(5) Für $(\rho, \sigma) \to 0$ gilt $J_D / \operatorname{vol}_2(D) \to \operatorname{div} f(x, y)$; der Fehler in obiger Näherung ist höherer Ordnung in ρ, σ und verschwindet für $(\rho, \sigma) \to 0$.

(6) Wir zerlegen $D = D_1 \cup \cdots \cup D_n$ in Teilrechtecke und summieren: Links erhalten wir das Flussintegral von f über ∂D; Flussintegrale über innere Kanten sind gegenläufig und heben sich paarweise auf! Rechts erhalten wir $\sum_k \operatorname{div} f(x_k, y_k) \operatorname{vol}_2(D_k) \to \int_D \operatorname{div} f(x, y)\, \mathrm{d}(x, y)$.

☺ Diese erste Näherung hilft zur Anschauung und erklärt die Intuition. Die genaue Rechnung (ohne Näherung) führen wir auf Seite E145 aus.

Rotation, Wirbelstärke und Arbeitsintegral

E017
Übung



Aufgabe: (1) Zeichnen Sie das Dreieck $D = [\,(0,-1),\,(2,-1),\,(2,1)\,]$. und skizzieren Sie hierauf das Vektorfeld $f(x,y) = (x-2y, 3x-y)$.

(2) Berechnen Sie die Wirbelstärke $\int_D \operatorname{rot}(f)\,\mathrm{d}(x,y)$ auf D sowie
(3) das Arbeitsintegral $\int_{\partial D} f(s) \bullet \mathrm{d}s$ entlang des Randes ∂D.

Was schätzen Sie vorab: Vorzeichen? Größenordnung? exakte Werte?

Rotation, Wirbelstärke und Arbeitsintegral

E018
Ausführung

Vektorfelder und Arbeitsintegrale kennen Sie bereits aus der HM2. Dies wollen wir anschaulich verstehen und präzise berechnen lernen. Anschließend wollen und werden wir damit komplexere Probleme lösen.

Ich beginne hier ganz bewusst mit einem besonders simplen Beispiel. Es ist stark vereinfacht und soll zunächst nur das Prinzip erläutern: Wir können die Lösung hier gut visualisieren und direkt ausrechnen.

Anschauliche Beschreibung: Sie beobachten die Strömung einer dünnen Flüssigkeitsschicht auf einer Platte. Die Geschwindigkeit in jedem Punkt wird dann beschrieben durch das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Alternativ: Sie beobachten ein ebenes Kraftfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, etwa ein elektrisches Feld in der Ebene $\mathbb{R}^2$. Die Kraft in jedem Punkt wird dann beschrieben durch das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Wieviel Arbeit wird gewonnen bzw. verrichtet, wenn Sie ein Probeteilchen in diesem Feld bewegen entlang des Randes ∂D?

☺ Das Ergebnis hängt von der Wirbeldichte $\operatorname{rot}(f) = \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1$ ab. Wir können sie in jedem Punkt durch ein kleines Schaufelrad messen.

Rotation, Wirbelstärke und Arbeitsintegral

E019
Übung

Lösung: (2) Die Wirbeldichte $\operatorname{rot}(f)$ und die Wirbelstärke auf D sind:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(f) &= \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 = 3 - (-2) = 5 \\ \int_D \operatorname{rot}(f)\,\mathrm{d}(x,y) &= 5\,\mathrm{vol}_2(D) = 5 \cdot 2 = 10 \end{aligned}$$

(3) Die Kurve $\Gamma = \partial D$ ist polygonal und das Vektorfeld f ist linear in x, y. In diesem Spezialfall können wir das Arbeitsintegral einfach summieren:

	Schwerpunkt s_k	Vektor $f(s_k)$	Tangente t_k	Länge $\lvert\Gamma_k\rvert$	Arbeit
Γ_1	$(1,-1)$	$(3,4)$	$(1,0)$	2	6
Γ_2	$(2,0)$	$(2,6)$	$(0,1)$	2	12
Γ_3	$(1,0)$	$(1,3)$	$(-1,-1)/\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	-8

Wir erhalten so:

$$\int_{\partial D} f(s) \cdot \mathrm{d}s \overset{\text{Lin}}{=} \sum_k f(s_k) \cdot t_k \,\lvert\Gamma_k\rvert = 10$$

Die Gesamtsumme ist 10: Beim Umlauf um ∂D wird Arbeit verrichtet.
☺ Gemäß Skizze ist dies plausibel, insb. stimmen die Vorzeichen!

Rotation, Wirbelstärke und Arbeitsintegral

E020
Ausführung

☺ Die Gleichheit ist kein Zufall, sondern illustriert den Satz von Green!

$$\int_{(x,y)\in D} \operatorname{rot} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{s\in\partial D} f(s) \cdot \mathrm{d}s$$

Links steht das Flächenintegral der Wirbeldichte von f auf D.
Rechts steht das Arbeitsintegral von f entlang der Randkurve ∂D.
Integralsatz von Green: Beide Integrale ergeben denselben Wert!

☺ Die obige Summenformel ist exakt bis zu 1. Ordnung, der Fehler ist 2. Ordnung. E027 In unserem Beispiel verschwindet der Fehler vollkommen, da wir ein lineares Vektorfeld über einen polygonalen Weg integrieren.

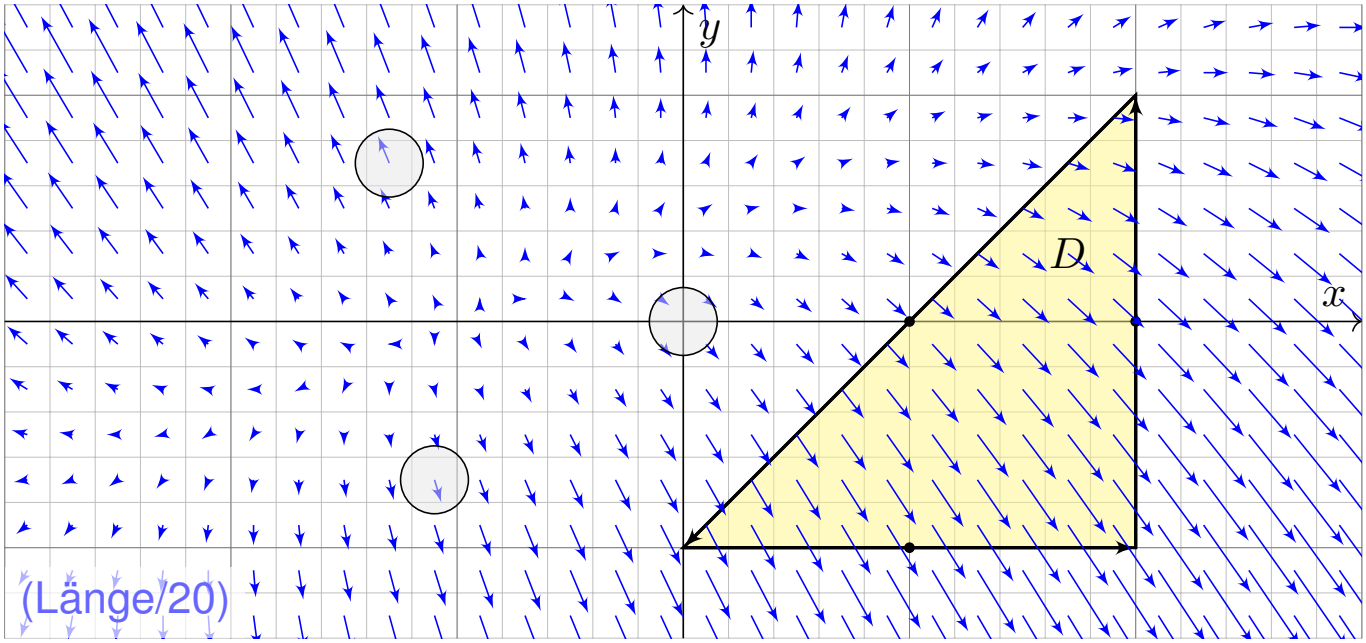
☺ Allgemein nutzen wir den Grenzübergang von Summe zu Integral:

$$\sum_k f(s_k) \cdot t_k \,\lvert\Gamma_k\rvert = \sum_k f(s_k) \cdot \Delta s_k \;\to\; \int_{s\in\Gamma} f(s) \cdot \mathrm{d}s = \int_{s\in\Gamma} f(s) \cdot t(s)\,\lvert\mathrm{d}s\rvert$$

☺ Solche Kurvenintegrale kennen Sie bereits aus Ihrer Vorlesung HM2. Diese Begriffe und Techniken werden wir nun fortsetzen und ausbauen.

Divergenz, Quellstärke und Flussintegral

E021
Übung



Aufgabe: (1) Zeichnen Sie das Dreieck $D = [\,(0,-1),\,(2,-1),\,(2,1)\,]$ und skizzieren Sie das Vektorfeld $f(x,y) = (x - y + 1, 3y - x - 1)$.

(2) Berechnen Sie die Quellstärke $\int_D \operatorname{div}(f)\,\mathrm{d}(x,y)$ auf D sowie
(3) das Flussintegral $\int_{\partial D} f(s) \times \mathrm{d}s$ entlang des Randes ∂D.

Was schätzen Sie vorab: Vorzeichen? Größenordnung? exakte Werte?

Divergenz, Quellstärke und Flussintegral

E022
Ausführung

Strömungen haben im allgemeinen Wirbel, auch Quellen und Senken. Dies wollen wir anschaulich verstehen und präzise berechnen lernen. Anschließend wollen und werden wir damit komplexere Probleme lösen.

Ich beginne auch hier bewusst mit einem besonders simplen Beispiel. Es ist stark vereinfacht und soll zunächst nur das Prinzip erläutern: Wir können die Lösung hier gut visualisieren und direkt ausrechnen.

Anschauliche Beschreibung: Sie beobachten die Strömung einer dünnen Flüssigkeitsschicht auf einer Platte. Die Geschwindigkeit in jedem Punkt wird dann beschrieben durch das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Die Platte ist porös, an manchen Stellen quillt Flüssigkeit heraus, dies entspricht Quellen mit $\operatorname{div}(f) > 0$. An anderen Stellen dringt Flüssigkeit in die Platte ein, dies entspricht Senken mit $\operatorname{div}(f) < 0$.

Wieviel Flüssigkeit entsteht insgesamt im Dreieck D?
Wieviel fließt insgesamt über den Rand ∂D?

☺ Das Ergebnis hängt von der Quelldichte $\operatorname{div}(f) = \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2$ ab.
Wir messen sie in jedem Punkt als Fluss aus einem kleinen Gefäß.

Divergenz, Quellstärke und Flussintegral

Lösung: (2) Die Quelldichte $\operatorname{div}(f)$ und die Quellstärke auf D sind:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(f) &= \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 = 1 + 3 = 4 \\ \int_D \operatorname{div}(f)\,\mathrm{d}(x,y) &= 4\,\mathrm{vol}_2(D) = 4 \cdot 2 = 8 \end{aligned}$$

(3) Die Kurve ∂D ist polygonal und das Vektorfeld f affin-linear in x, y. In diesem Spezialfall können wir das Flussintegral einfach summieren:

	Schwerpunkt s_k	Vektor $f(s_k)$	Normale n_k	Länge $\lvert\Gamma_k\rvert$	Fluss
Γ_1	$(1,-1)$	$(3,-5)$	$(0,-1)$	2	10
Γ_2	$(2,0)$	$(3,-3)$	$(1,0)$	2	6
Γ_3	$(1,0)$	$(2,-2)$	$(-1,1)/\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	-8

Wir erhalten so:

$$\int_{\partial D} f(s) \times \mathrm{d}s \overset{\text{Lin}}{=} \sum_k f(s_k) \cdot n_k \,\lvert\Gamma_k\rvert = 8$$

Die Gesamtsumme des Flusses ist 8: Aus D fließt mehr raus als rein.
☺ Gemäß Skizze ist dies plausibel, insb. stimmen die Vorzeichen!

Divergenz, Quellstärke und Flussintegral

☺ Die Gleichheit ist kein Zufall, sondern illustriert den Satz von Gauß!

$$\int_{(x,y)\in D} \operatorname{div} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{s\in\partial D} f(s) \times \mathrm{d}s$$

Links steht das Flächenintegral der Quelldichte von f auf D.
Rechts steht das Flussintegral von f über die Randkurve ∂D.
Integralsatz von Gauß: Beide Integrale ergeben denselben Wert!

☺ Die obige Summenformel ist exakt bis zu 1. Ordnung, der Fehler ist 2. Ordnung. E027 In unserem Beispiel verschwindet der Fehler, da wir ein affin-lineares Vektorfeld über einen polygonalen Weg integrieren.

☺ Allgemein nutzen wir den Grenzübergang von Summe zu Integral:

$$\sum_k f(s_k) \cdot n_k \,\lvert\Gamma_k\rvert = \sum_k f(s_k) \times \Delta s_k \;\to\; \int_{s\in\Gamma} f(s) \times \mathrm{d}s = \int_{s\in\Gamma} f(s) \cdot n(s)\,\lvert\mathrm{d}s\rvert$$

☺ Solche Kurvenintegrale kennen Sie bereits aus Ihrer Vorlesung HM2. Diese Begriffe und Techniken werden wir nun fortsetzen und ausbauen.

Kurvenintegrale und Integralsätze in der Ebene

Kurven $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ parametrisieren wir (stückweise C^1) durch $\gamma : [a,b] \to \Gamma$. Am Punkt $s = \gamma(t)$ heftet das infinitesimale Wegelement $\mathrm{d}s = \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$.

Kurvenlänge	$\int_\Gamma \lvert\mathrm{d}\Gamma\rvert$	$= \int_{s\in\Gamma} \lvert\mathrm{d}s\rvert$	$:= \int_{t=a}^b \lvert\gamma'(t)\rvert\,\mathrm{d}t$
Kurvenintegral	$\int_\Gamma g\,\lvert\mathrm{d}\Gamma\rvert$	$= \int_{s\in\Gamma} g(s)\,\lvert\mathrm{d}s\rvert$	$:= \int_{t=a}^b g(\gamma(t))\,\lvert\gamma'(t)\rvert\,\mathrm{d}t$
Arbeitsintegral	$\int_\Gamma f\bullet\mathrm{d}\Gamma$	$= \int_{s\in\Gamma} f(s)\bullet\mathrm{d}s$	$:= \int_{t=a}^b f(\gamma(t))\bullet\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$
Flussintegral	$\int_\Gamma f\times\mathrm{d}\Gamma$	$= \int_{s\in\Gamma} f(s)\times\mathrm{d}s$	$:= \int_{t=a}^b f(\gamma(t))\times\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ eine kompakte Fläche mit stückw. glatter Randkurve ∂D. Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to \mathbb{R}^2$ gilt dann

Satz von Green: $$\int_{(x,y)\in D} \operatorname{rot} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{s\in\partial D} f(s)\bullet\mathrm{d}s,$$

Satz von Gauß: $$\int_{(x,y)\in D} \operatorname{div} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{s\in\partial D} f(s)\times\mathrm{d}s.$$

Kurvenintegrale und Integralsätze in der Ebene

☺ Diese Sätze sind die zweidimensionale Fortsetzung des HDI: Der Integralsatz von Green / Gauß übersetzt zweidimensionale Integrale über eine kompakte Fläche $D \subseteq \mathbb{R}^2$ in eindimensionale Integrale entlang der Randkurve ∂D. Diese Integrationstechnik ist sehr oft nützlich!

Die Randkurve ∂D parametrisieren wir (stückweise) durch reguläre Wege $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$. Das Kurvenelement $\mathrm{d}s = \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$ stellen wir uns als ein kleines Wegstück vor und $\lvert\mathrm{d}s\rvert$ als seine Länge. Der Vektor $\mathrm{d}s$ liegt tangential an der Kurve. Das Skalarprodukt $f(s)\bullet\mathrm{d}s = f(\gamma(t))\bullet\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$ misst den tangentialen Anteil von f längs der Kurve, das Kreuzprodukt $f(s)\times\mathrm{d}s = f(\gamma(t))\times\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$ den normalen Anteil senkrecht hierzu. Wir integrieren längs γ und addieren alle Beiträge. Links steht die bequeme, parameterfreie Abkürzung für das Integral über die Kurve Γ.

Warum so kompliziert? Wir interessieren uns letztlich für die Kurve Γ, aber nur mit Wegen γ können wir rechnen: differenzieren / integrieren. Die Wahl einer Parametrisierung γ ist unentbehrliche Rechentechnik. Die Rechenwege sind verschieden, alle führen zum selben Ergebnis! Erst diese Gewissheit rechtfertigt die abkürzende Schreibweise links.

Linearisierung und Approximation

Wir wollen die Linearisierung der vorigen Aufgaben rechtfertigen.
Jedes **Geradenstück** Γ von p nach q im $\mathbb{R}^2$ können wir parametrisieren durch einen affin-linearen Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (1-t)p + tq$.
Zudem sei auch das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ **affin-linear**, das heißt

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 \end{pmatrix}.$$

Übung: In diesem Falle gelten folgende nützliche Vereinfachungen:
(1) Die Länge ist $\mathrm{vol}_1(\Gamma) = |q-p|$ und der Schwerpunkt $\overline{s} = \frac{1}{2}(p+q)$.
(2) Einheitstangente ist $t = (q-p)/|q-p|$, Normale $n = \circlearrowright t = (t_2, -t_1)$.
(3) Arbeits- und Flussintegral von f über Γ vereinfachen sich zu

$$\begin{aligned} \int_\Gamma f \cdot \mathrm{d}\Gamma &= f(\overline{s}) \cdot t \ \mathrm{vol}_1(\Gamma) &&= f(\overline{s}) \cdot (q-p), \\ \int_\Gamma f \times \mathrm{d}\Gamma &= f(\overline{s}) \cdot n \ \mathrm{vol}_1(\Gamma) &&= f(\overline{s}) \times (q-p). \end{aligned}$$

(4) Schließlich sind $\mathrm{rot}(f) = a_{21} - a_{12}$ und $\mathrm{div}(f) = a_{11} + a_{22}$ konstant.
☺ Statt Integralen benötigen wir hier also nur die Grundrechenarten!

Linearisierung und Approximation

☺ Für jedes **Geradenstück** Γ und jedes **affin-lineare Vektorfeld** f gelten die vereinfachten Formeln (3) exakt, d.h. ohne Näherungsfehler.
Durch Summation gilt die Gleichung (3) auch für **Polygonzüge** Γ.

Warum haben wir Kurvenintegrale dann nicht gleich so definiert?
Die vereinfachte Rechnung benötigt die spezielle Voraussetzung!
Nicht jede Kurve $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ ist polygonal, und nicht jedes Vektorfeld $f : \Gamma \to \mathbb{R}^2$ ist linear. Im Allgemeinen ist die exakte Rechnung nicht so einfach; hier nutzen wir gewinnbringend unsere Integrationsmethoden!

Numerik: Ist das Kurvenstück Γ klein, so weicht das Vektorfeld f auf Γ nur wenig von der Linearisierung um den Schwerpunkt $\overline{s}$ ab.
Für $f(x) \approx Ax + b$ ist Formel (3) dann eine brauchbare Näherung.
In der **Taylor–Entwicklung** treten im Allgemeinen höhere Terme auf:
Die Formel (3) ist exakt bis zu 1. Ordnung, der Fehler ist 2. Ordnung.

☺ Die Kurvensummen $\sum_k f(\overline{s}_k) \cdot t_k \ \mathrm{vol}_1(\Gamma_k)$ konvergieren bei immer feineren Unterteilungen gegen das Kurvenintegral $\int_{s\in\Gamma} f(s) \cdot t(s) \, |\mathrm{d}s|$.
Ebenso konvergiert $\sum_k f(\overline{s}_k) \cdot n_k \ \mathrm{vol}_1(\Gamma_k)$ gegen $\int_{s\in\Gamma} f(s) \cdot n(s) \, |\mathrm{d}s|$.

Grundbegriffe: Wege und Kurven

E029
Erläuterung

Ein **Weg** im Raum $\mathbb{R}^n$ ist eine stetige Abbildung

$$\gamma \,:\, [a,b] \to \mathbb{R}^n \,:\, t \mapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}.$$

Die von γ parametrisierte **Kurve** ist die Menge aller Bildpunkte,

$$\Gamma = \gamma\big([a,b]\big) = \big\{\, \gamma(t) \;\big|\; a \le t \le b \,\big\} \quad \subseteq \quad \mathbb{R}^n.$$

⚠ Dieselbe Kurve lässt sich durch mehrere Wege beschreiben! E033

📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §5.3–5.4.

Jedem Parameterwert $t \in [a,b]$ wird ein Bildpunkt $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ zugeordnet. Durchläuft t das Intervall $[a,b]$, so durchläuft $\gamma(t)$ die Kurve Γ. Stetigkeit bedeutet hierbei: Für $t \to t_0$ gilt $|\gamma(t) - \gamma(t_0)| \to 0$. Äquivalent hierzu: Jede Koordinate $\gamma_1, \dots, \gamma_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist stetig.

Physikalische Interpretation: Der Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ beschreibt die Bahn (Trajektorie) eines Teilchens in der Ebene $\mathbb{R}^2$, im Raum $\mathbb{R}^3$, oder allgemein in einem Zustandsraum $\mathbb{R}^n$. Zur Zeit $t \in [a,b]$ befindet es sich im Punkt $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$. Beispiel: Which way did the bicycle go? E309

Jeder Weg γ ist eine *Abbildung*, die so beschriebene Kurve Γ ist nur eine *Menge*. Beide Begriffe müssen wir fein säuberlich auseinanderhalten! Wir interessieren uns meist für die Kurve Γ, aber nur mit dem Weg γ können wir rechnen, zum Beispiel differenzieren und integrieren.

Differenzierbare und reguläre Wege

E030
Erläuterung

Der Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n : t \mapsto \gamma(t)$ heißt **stetig differenzierbar**, kurz C^1, wenn jede Koordinatenfunktion $\gamma_1, \dots, \gamma_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar ist.

Die Ableitung $\gamma' : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist dann der **Geschwindigkeitsvektor**

$$\gamma'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \begin{pmatrix} \gamma_1(t+h) - \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t+h) - \gamma_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix}.$$

Die euklidische Norm $|\gamma'(t)| \in \mathbb{R}$ ist die **Absolutgeschwindigkeit**.

Der Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt **doppelpunktfrei**, wenn für $s \neq t$ stets $\gamma(s) \neq \gamma(t)$ gilt. Anders gesagt, die Abbildung γ ist **injektiv**.

Der Weg γ heißt **regulär,** wenn γ injektiv ist und stetig diff'bar mit $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$. Seine Bildmenge Γ heißt dann **glatte Kurve**.

Ein **parametrisiertes Kurvenstück** (Γ, γ) ist eine glatte Kurve $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ mit einer Parametrisierung durch einen regulären Weg $\gamma : [a,b] \xrightarrow{\sim} \Gamma$.

Reguläre Wege sind die beste Wahl zur Parametrisierung von Kurven. Die Forderung ist streng, in vielen Rechnungen genügt etwas weniger: Der Weg $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt **semiregulär**, wenn er regulär auf $]a,b[$ ist. Im folgenden Beispiel E033 sind β und γ regulär, aber α nur semiregulär.

Beispiel: Funktionsgraphen

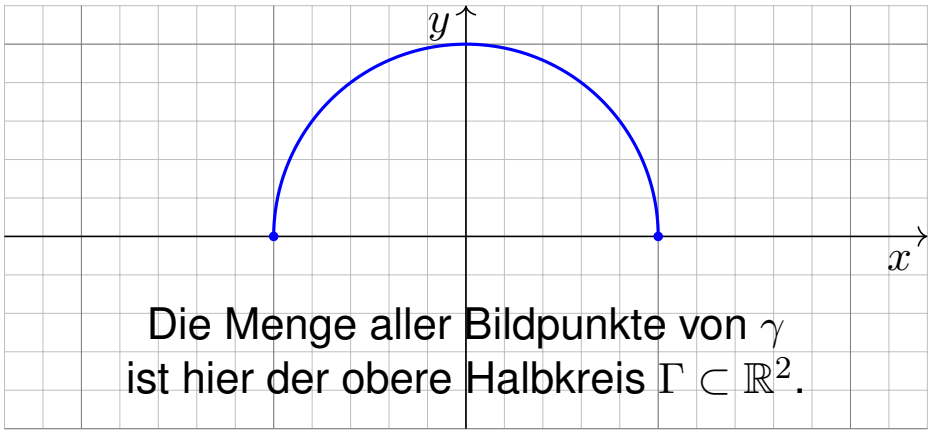
E031
Ausführung

Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definiert den zugehörigen Weg

$$\gamma \;:\; [a, b] \to \mathbb{R}^2 \;:\; t \mapsto \big(t, f(t)\big).$$

Die zugehörige Kurve $\Gamma = \big\{\, (t, f(t)) \;\big|\; t \in [a, b] \,\big\}$ ist der **Graph** von f.

Beispiel: Die stetige Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R} : t \mapsto \sqrt{1 - t^2}$
liefert den zugehörigen Weg $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \big(t, \sqrt{1 - t^2}\big)$.



⚠ Dieselbe Kurve lässt sich durch mehrere Wege beschreiben! E033
Zur Berechnung wählen wir eine möglichst geschickte Parametrisierung.

Beispiel: Funktionsgraphen

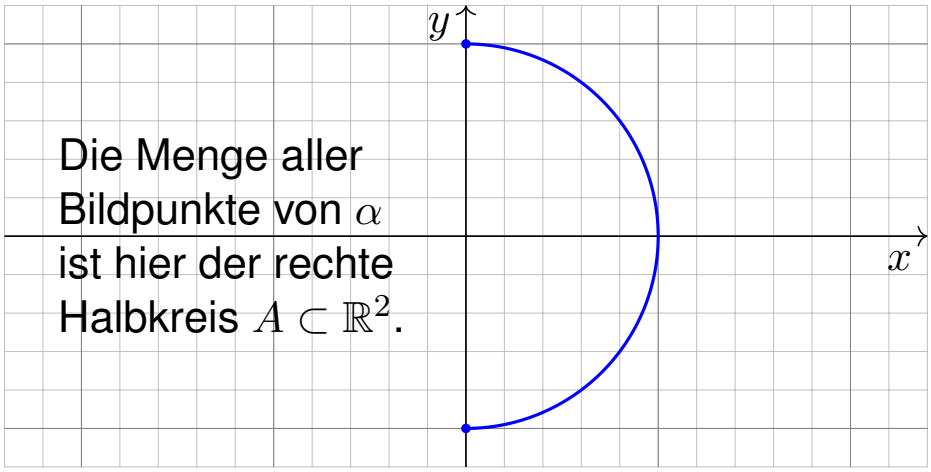
E032
Ausführung

Manchmal verwenden wir als Variable statt x besser y:

$$\alpha \;:\; [a, b] \to \mathbb{R}^2 \;:\; s \mapsto (g(s), s)$$

Die beiden Koordinaten x und y tauschen hier ihre Rollen.

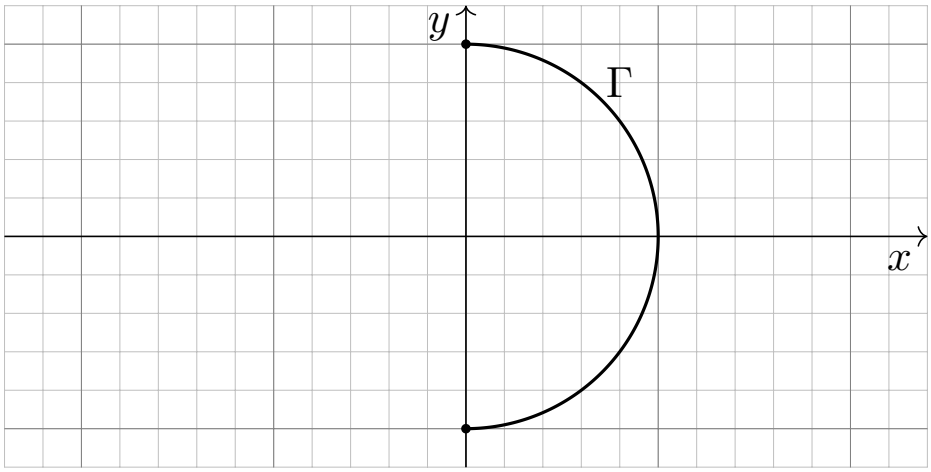
Wir zeichnen das Beispiel $\alpha : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2 : s \mapsto \big(\sqrt{1 - s^2}, s\big)$:



⚠ Dieselbe Kurve lässt sich durch mehrere Wege beschreiben! E033
Zur Berechnung wählen wir eine möglichst geschickte Parametrisierung.

Einführendes Beispiel: Länge eines Halbkreises

Wir betrachten folgenden Halbkreis Γ vom Radius 1 um den Nullpunkt:



Aufgabe: Beschreiben Sie Γ implizit als Lösungsmenge sowie explizit durch drei verschiedene Parametrisierungen. Berechnen Sie die Länge.

Lösung: (0) Implizite Beschreibung als Lösung von Un/Gleichungen:

$$\Gamma = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1,\ x \geq 0 \right\}$$

Welche Parametrisierungen sind geeignet? Welche sind geschickt?
Ist das Ergebnis unabhängig von der gewählten Parametrisierung?

Einführendes Beispiel: Länge eines Halbkreises

(1) Algebraische Parametrisierung durch Auflösen der Gleichung:

$$\alpha : [-1,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \alpha(s) = \left(\sqrt{1-s^2}, s\right), \quad \alpha'(s) = \left(\frac{-s}{\sqrt{1-s^2}}, 1\right),$$

$$\ell(\alpha) = \int_{s=-1}^{+1} \left|\alpha'(s)\right| \mathrm{d}s = \int_{s=-1}^{+1} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1-s^2}} = \Big[\arcsin(s)\Big]_{s=-1}^{+1} = \pi$$

(2) Polarkoordinaten liefern eine weitere Parametrisierung von Γ:

$$\beta : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}^2, \quad \beta(t) = (\cos t, \sin t), \quad \beta'(t) = (-\sin t, \cos t),$$

$$\ell(\beta) = \int_{t=-\pi/2}^{+\pi/2} \left|\beta'(t)\right| \mathrm{d}t = \int_{t=-\pi/2}^{+\pi/2} 1 \,\mathrm{d}t = \pi$$

(3) Rationale Parametrisierung durch Weierstraß–Substitution B137:

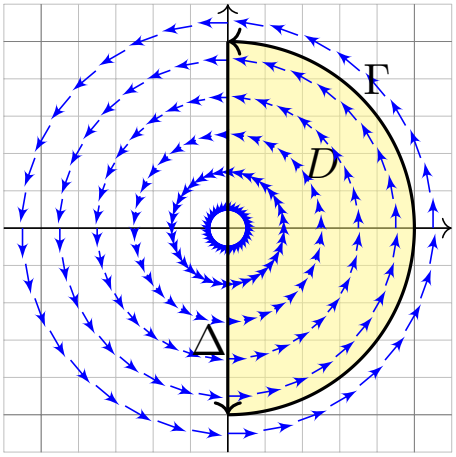
$$\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(u) = \left(\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1+u^2}\right),\ \gamma'(u) = \left(\frac{-4u}{(1+u^2)^2}, \frac{2(1-u^2)}{(1+u^2)^2}\right),$$

$$\ell(\gamma) = \int_{u=-1}^{+1} \left|\gamma'(u)\right| \mathrm{d}u = \int_{u=-1}^{+1} \frac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2} = \Big[2\arctan(u)\Big]_{u=-1}^{+1} = \pi$$

☺ Die Wahl einer Parametrisierung ist nötig zur konkreten Rechnung.
Die Rechenwege sind verschieden. Alle führen zum selben Ergebnis!

Einführendes Beispiel: Arbeitsintegral

E035
Übung



Aufgabe: Berechnen Sie das Arbeitsintegral $\int_\Gamma f \bullet \mathrm{d}\Gamma$ des Vektorfeldes $f(x,y) = (-y, x)$ längs des positiv orientierten Halbkreises Γ, des Durchmessers Δ, sowie $\int_D \operatorname{rot}(f)\,\mathrm{d}(x,y)$.

Ist das Ergebnis unabhängig von der für die Kurve Γ gewählten Parametrisierung? Kann man es ohne Rechnung direkt sehen? Was ändert sich mit der Orientierung?

Lösung: Für Γ wählen wir eine Parametrisierung und rechnen es aus:

$$\int_\Gamma f \bullet \mathrm{d}\Gamma = \int_{t=-\pi/2}^{+\pi/2} f(\beta(t)) \bullet \beta'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \pi$$

Ebenso $\int_\Delta f \bullet \mathrm{d}\Delta = 0$. Es gilt $\operatorname{rot}(f) = 2$, also $\int_D \operatorname{rot}(f)\,\mathrm{d}(x,y) = \pi$.

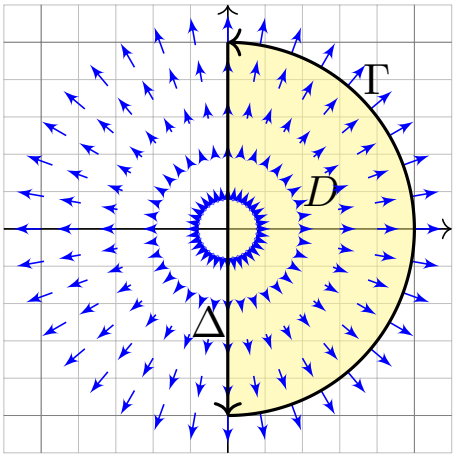
Das Vektorfeld f können wir uns als Kraftfeld vorstellen. Der Weg β beschreibt die Bewegung eines Probeteilchens. Die dabei geleistete Arbeit berechnen wir gemäß Arbeit = Kraft • Weg. Wir verwenden das Skalarprodukt, da nur der tangentiale Anteil der Kraft in Wegrichtung zählt.

🙂 Jede andere Parametrisierung der Kurve $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ führt zum selben Ergebnis! (Übung)

⚠ Umgekehrte Orientierung / Durchlaufung kehrt das Vorzeichen um! (Anschauung)

Einführendes Beispiel: Flussintegral

E036
Übung



Aufgabe: Berechnen Sie das Flussintegral $\int_\Gamma f \times \mathrm{d}\Gamma$ des Vektorfeldes $f(x,y) = (x, y)$ über den positiv orientierten Halbkreis Γ und den Durchmesser Δ, sowie $\int_D \operatorname{div}(f)\,\mathrm{d}(x,y)$.

Ist das Ergebnis unabhängig von der für die Kurve Γ gewählten Parametrisierung? Kann man es ohne Rechnung direkt sehen? Was ändert sich mit der Orientierung?

Lösung: Für Γ wählen wir eine Parametrisierung und rechnen es aus:

$$\int_\Gamma f \times \mathrm{d}\Gamma = \int_{t=-\pi/2}^{+\pi/2} f(\beta(t)) \times \beta'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \pi$$

Ebenso $\int_\Delta f \times \mathrm{d}\Delta = 0$. Es gilt $\operatorname{div}(f) = 2$, also $\int_D \operatorname{div}(f)\,\mathrm{d}(x,y) = \pi$.

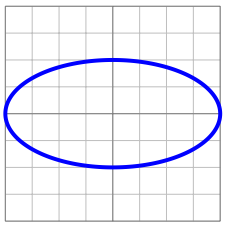
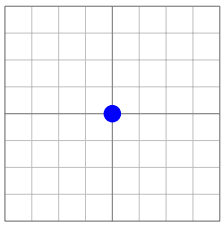
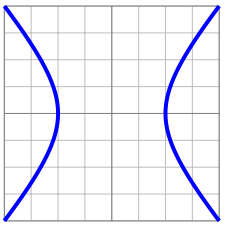
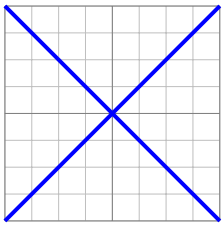
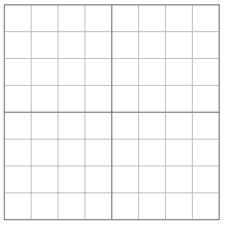
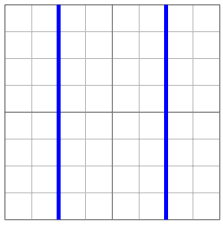
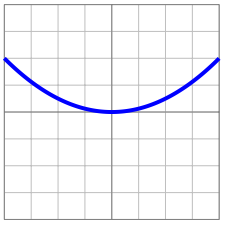
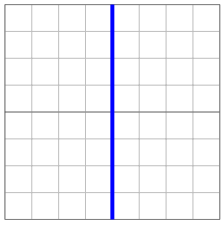
Das Vektorfeld f können wir uns als Strömungsgeschwindigkeit einer Flüssigkeit vorstellen. Der Weg β beschreibt eine Kurve. Das Integral ergibt die hierüber fließende Flüssigkeitsmenge. Wir verwenden das Kreuzprodukt, da nur der normale Anteil senkrecht zur Wegrichtung zählt.

🙂 Jede andere Parametrisierung der Kurve $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ führt zum selben Ergebnis! (Übung)

⚠ Umgekehrte Orientierung / Durchlaufung kehrt das Vorzeichen um! (Anschauung)

Reelle Quadriken in der Ebene $\mathbb{R}^2$

E037
Ausführung

Kreis / Ellipse $x^2 + 4y^2 = 1$ 	Punkt $x^2 + y^2 = 0$ 
Hyperbel $4x^2 - 3y^2 = 1$ 	schneidendes Geradenpaar $x^2 - y^2 = 0$ 
leere Menge $x^2 + y^2 = -1$ 	paralleles Geradenpaar $4x^2 = 1$ 
Parabel $x^2 = 2y$ 	Gerade $x^2 = 0$ 

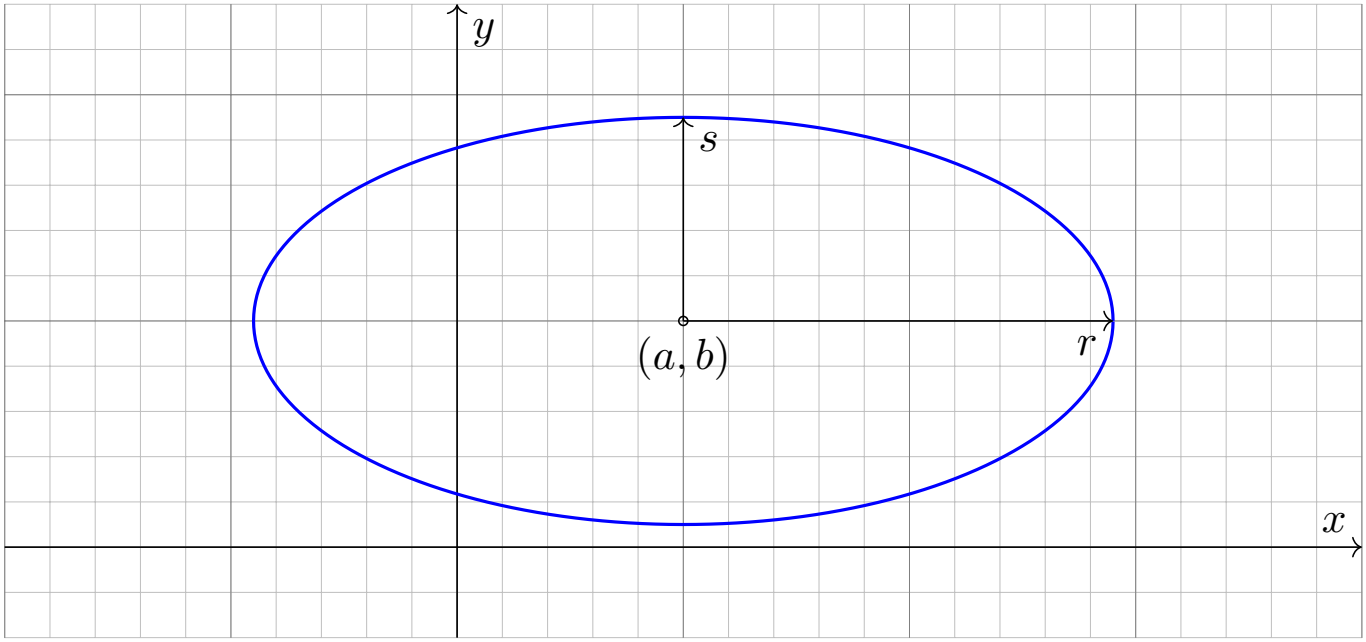
Beispiel: Kreis und Ellipse

E038
Ausführung

Beispiel: Die **Ellipse** um (a, b) mit Radien (r, s) ist die Menge

$$\Gamma = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left(\frac{x-a}{r}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{s}\right)^2 = 1 \right\}.$$

Im besonders einfachen Spezialfall $r = s$ erhalten wir einen **Kreis**.



⚠ Dieselbe Kurve $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ lässt sich durch mehrere Wege beschreiben!

Beispiel: Kreis und Ellipse

Aufgabe: Wir betrachten die oben angegebene Ellipse $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$.
Man parametrisiere sie (1) algebraisch durch Auflösung der Gleichung, (2) trigonometrisch in Polarkoordinaten, (3) rational nach Weierstraß.

Lösung: (1) Auflösen nach x (alternativ nach y) liefert zwei Zweige:

$$\alpha_\pm : [-1,+1] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \left(a + rt,\ b \pm s\sqrt{1-t^2} \right)$$

Das Bild jedes Weges $\alpha_\pm$ liegt in der Menge Γ, denn $(x,y) = \alpha_\pm(t)$ erfüllt die Gleichung!
Jede der beiden Abbildungen $\alpha_\pm$ ist injektiv; um ganz Γ zu durchlaufen brauchen wir beide!

(2) In Polarkoordinaten gelingt es in einem Stück:

$$\beta : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \left(a + r\cos t,\ b + s\sin t \right)$$

Das Bild des Weges β liegt in der Menge Γ, denn $(x,y) = \beta(t)$ erfüllt die Gleichung!
Die Abbildung β ist zudem surjektiv und fast injektiv, bis auf den Doppelpunkt $\beta(-\pi) = \beta(\pi)$.

(3) Rationale Parametrisierung durch Weierstraß–Substitution: E033

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \left(a + r\frac{1-t^2}{1+t^2},\ b + s\frac{2t}{1+t^2} \right)$$

Das Bild des Weges γ liegt in der Menge Γ, denn $(x,y) = \gamma(t)$ erfüllt die Gleichung!
Die Abbildung γ ist zudem injektiv und fast surjektiv, bis auf den fehlenden Punkt $(-1,0)$.

Beispiel: Kreis und Ellipse

Die **Kurvenlänge der Ellipse** Γ ist gegeben durch folgendes Integral:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_1(\Gamma) &= \int_{t=0}^{2\pi} \sqrt{r^2\sin(t)^2 + s^2\cos(t)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= 2r\int_{t=0}^{\pi} \sqrt{\sin(t)^2 + (s/r)^2\cos(t)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= 2r\int_{t=0}^{\pi} \sqrt{1-\varepsilon^2\cos(t)^2}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Der Wert $\varepsilon := \sqrt{1-s^2/r^2}$ heißt **Exzentrizität** der Ellipse Γ.

☺ Für $r = s$ gilt $\varepsilon = 0$ und wir erhalten die Länge der Kreislinie $2\pi r$.

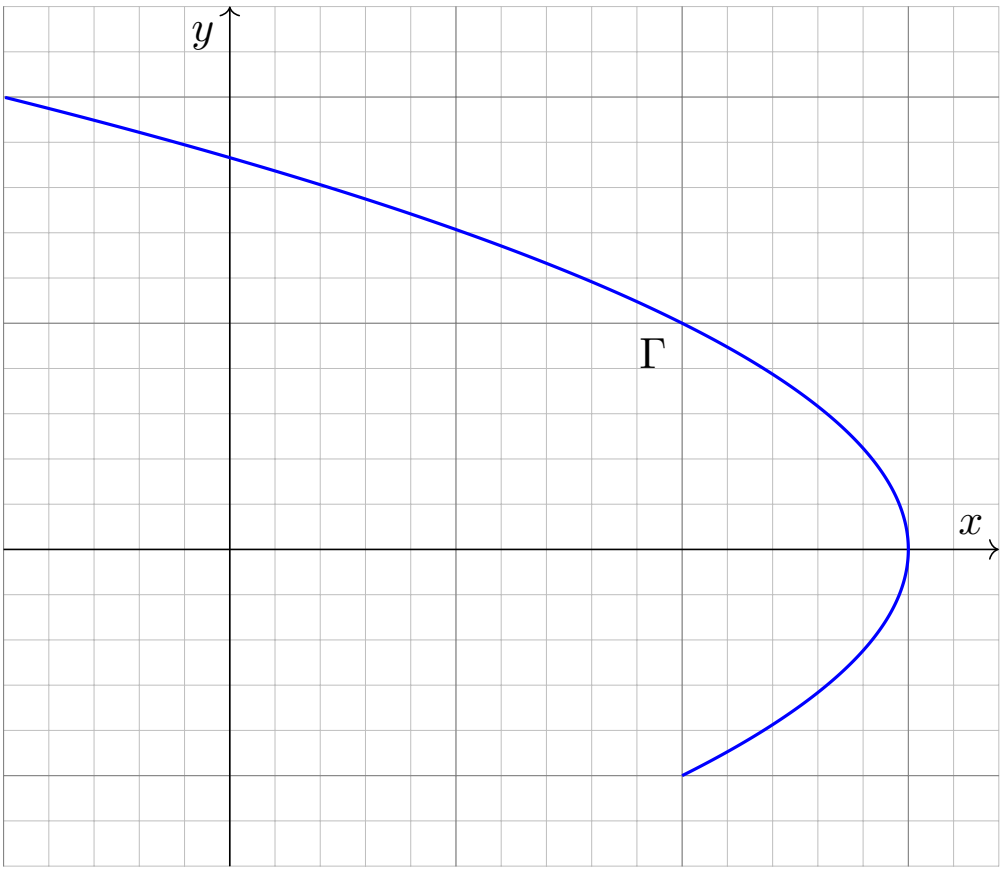
⚠ Für $r > s$ hingegen gilt $0 < \varepsilon < 1$, und das obige Integral für $\mathrm{vol}_1(\Gamma)$ lässt sich nicht geschlossen durch elementare Funktionen ausdrücken!

☺ Den Integranden können wir in eine Potenzreihe in ε entwickeln.
Hieraus erhalten wir (nach längerer Rechnung) die Reihenentwicklung

$$\mathrm{vol}_1(\Gamma) = 2\pi r\left[1 - \frac{1^2}{2^2}\varepsilon^2 - \frac{1^2 3^2}{2^2 4^2}\frac{\varepsilon^4}{3} - \frac{1^2 3^2 5^2}{2^2 4^2 6^2}\frac{\varepsilon^6}{5} - \frac{1^2 3^2 5^2 7^2}{2^2 4^2 6^2 8^2}\frac{\varepsilon^8}{7} - \dots\right].$$

Beispiel: Parabel

E041
Ausführung



Beispiel: Parabel

E042
Ausführung

Aufgabe: Beschreiben Sie die Parabel Γ implizit als Lösungsmenge sowie explizit durch (mind. zwei) verschiedene Parametrisierungen.

Lösung: Wir lesen $x = 3 - y^2$ ab. Das gezeigte Parabelstück ist also

$$\Gamma = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x + y^2 = 3,\ -1 \le y \le 2 \right\}.$$

Diese Kurve können wir bequem parametrisieren durch den Weg

$$\alpha : [-1, 2] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \big(3 - t^2, t\big).$$

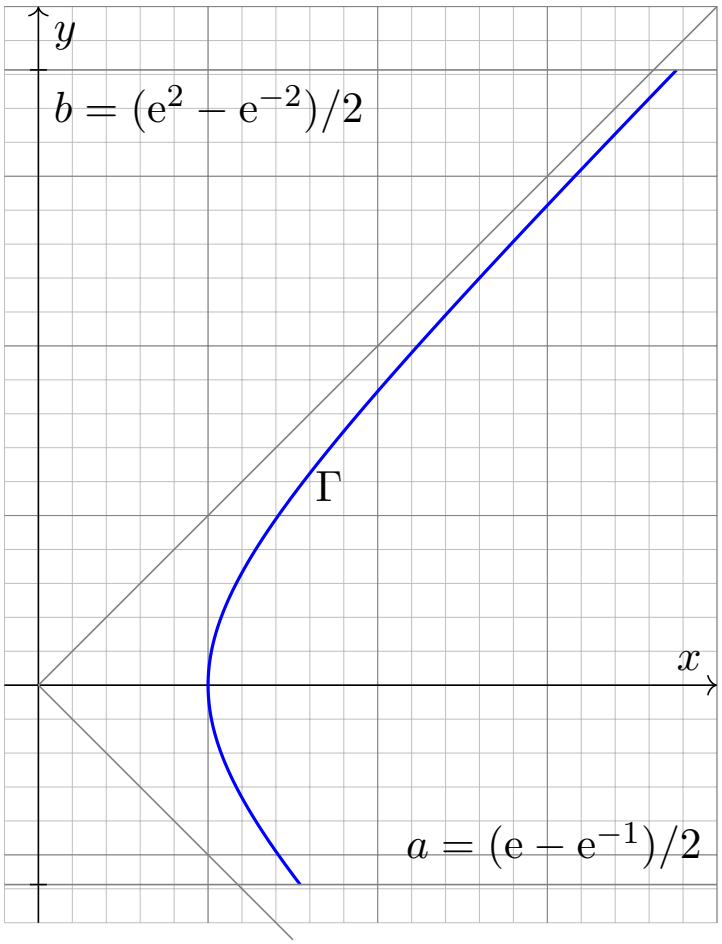
Mühsamer aber möglich ist die Parametrisierung beider Zweige:

$$\beta : [0, 1] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \big(2 + t, -\sqrt{1 - t}\big),$$
$$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \big(3 - 4t, 2\sqrt{t}\big).$$

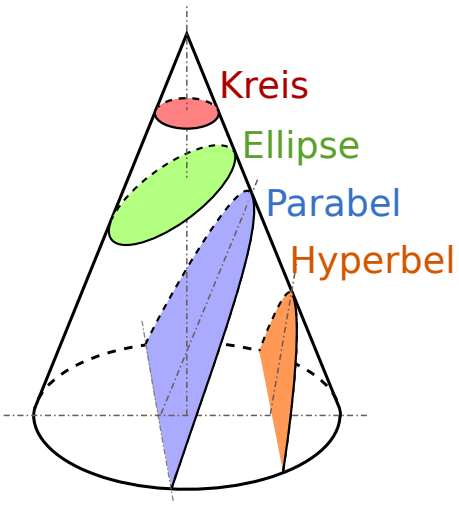
⚠ Dieselbe Kurve $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ lässt sich durch mehrere Wege beschreiben! Zur Berechnung wählen wir eine möglichst geschickte Parametrisierung.

☺ Das Ergebnis (wie Kurvenlänge und Integrale) ist davon unabhängig. Jede/r darf sich die für sie/ihn bequemste Parametrisierung aussuchen.

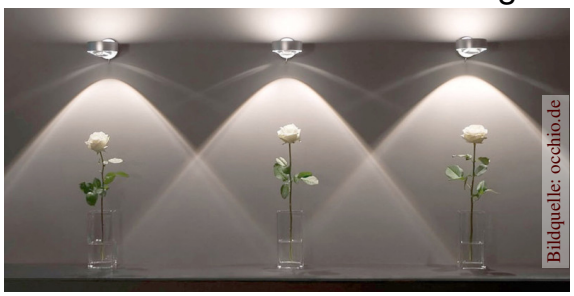
Beispiel: Hyperbel



Ebene Quadriken sind Kegelschnitte:



Besonders schön sind Lichtkegel:



Beispiel: Hyperbel

Aufgabe: Beschreiben Sie die Hyperbel Γ implizit als Lösungsmenge sowie explizit durch (mind. zwei) verschiedene Parametrisierungen.

Lösung: Wir lesen $x^2 = 1 + y^2$ ab. Das gezeigte Hyperbelstück ist also

$$\Gamma = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1,\ a \le y \le b \,\}.$$

Diese Kurve können wir bequem parametrisieren durch den Weg

$$\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2 : s \mapsto \left(\sqrt{1+s^2}, s\right).$$

In vielen Fällen sind hier Hyperbelfunktionen bequemer:

$$\beta : [-1,2] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \left(\cosh t, \sinh t\right)$$

Alternativ können wir auch hier eine rationale Parametrisierung finden:

$$\gamma : [a',b'] \to \mathbb{R}^2 : u \mapsto \left(\frac{1+u^2}{1-u^2}, \frac{2u}{1-u^2}\right)$$

Zur Berechnung wählen wir eine möglichst geschickte Parametrisierung.

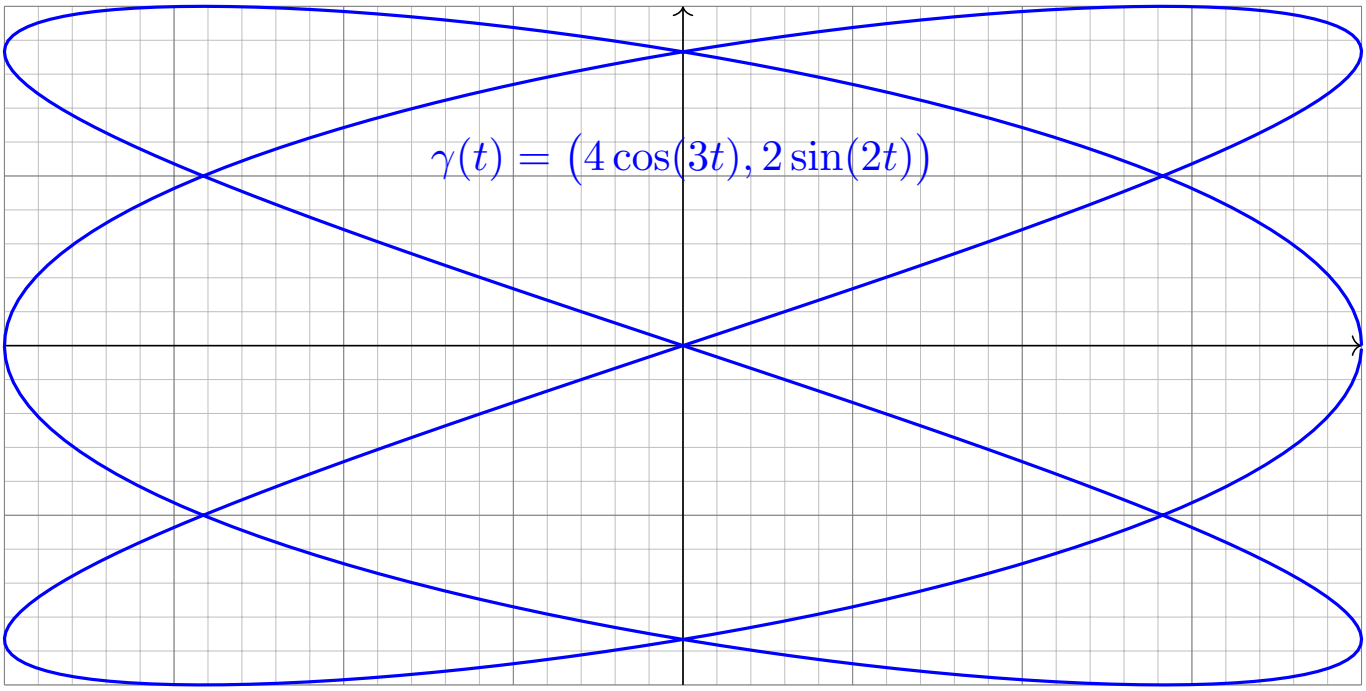
☺ Das Ergebnis (wie Kurvenlänge und Integrale) ist davon unabhängig. Jede/r darf sich die für sie/ihn bequemste Parametrisierung aussuchen.

Beispiel: Lissajous–Kurven

Lissajous–Kurven werden parametrisiert durch Wege der Form

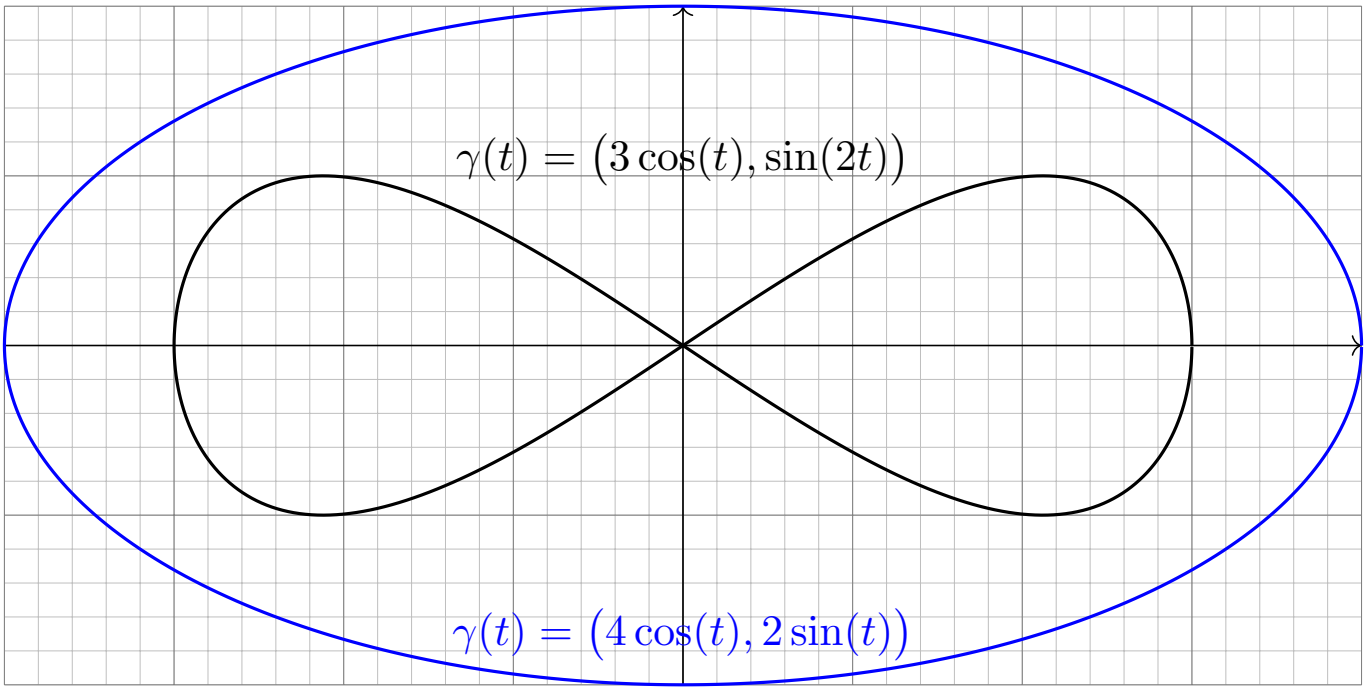
$$\gamma \,:\, [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \,:\, t \mapsto \big(a\sin(kt+\alpha), b\sin(\ell t+\beta)\big).$$

Solch ein Weg γ hat i.A. Doppelpunkte, ist also nicht injektiv.



Beispiel: Lissajous–Kurven

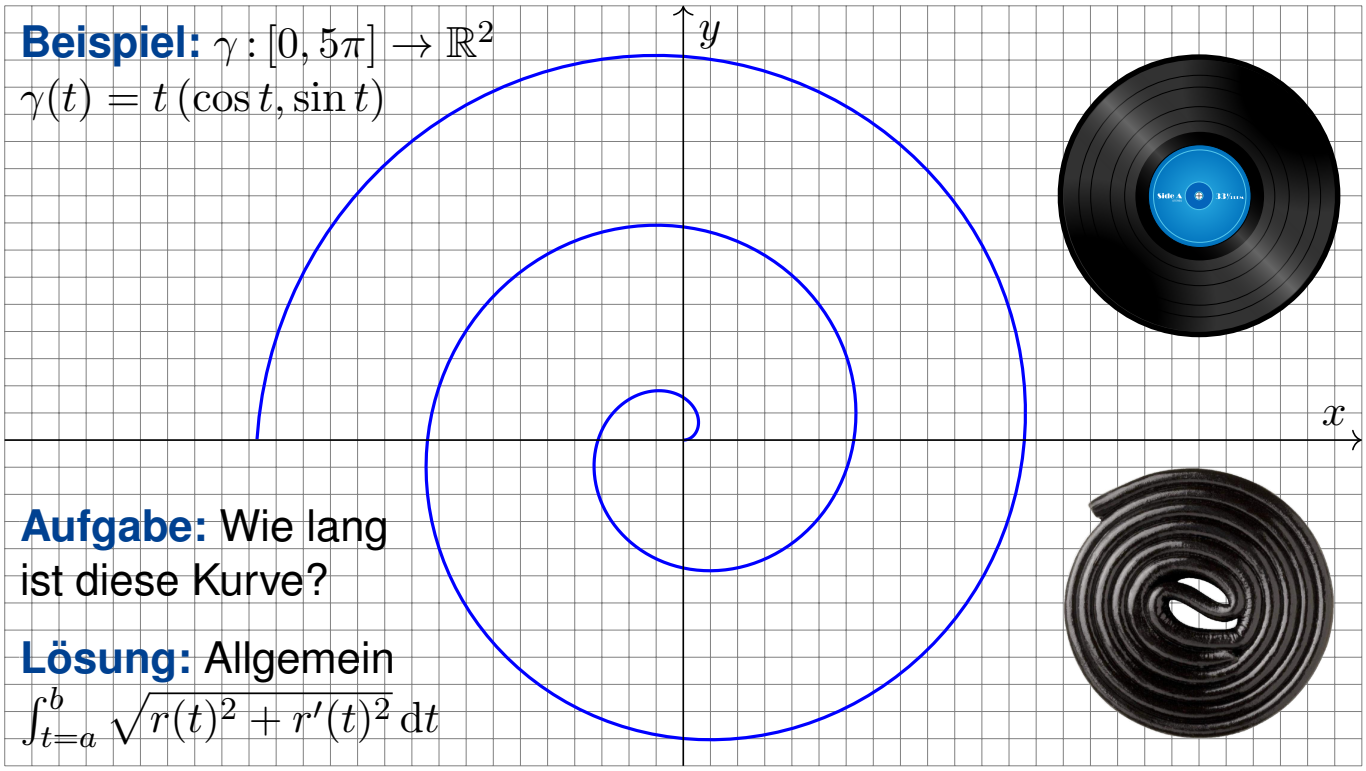
Lissajous–Kurven und ihre Verwandten sind recht häufig anzutreffen. Sie entstehen aus harmonischen Schwingungen in x– und y–Richtung. Einfachste Spezialfälle sind der gute alte Kreis und zudem die Ellipsen:



Beispiel: archimedische Spirale

E047
Ausführung

Jede stetige Radiusfunktion $r : [a, b] \to \mathbb{R}$ definiert einen spiralförmigen Weg in Polarkoordinaten durch $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto r(t)(\cos t, \sin t)$.

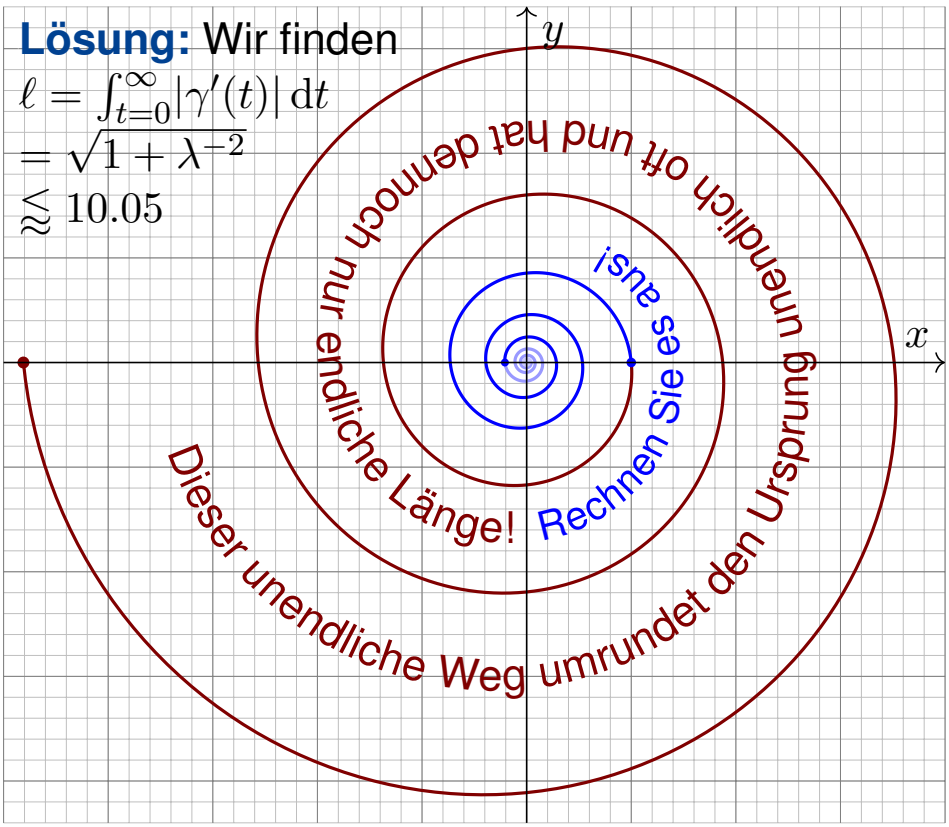


Dank B411 gilt $\int_{t=0}^{5\pi} \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[t\sqrt{1+t^2} + \operatorname{arsinh}(t)\right]_{t=0}^{5\pi} \approx 125.34$.

Beispiel: logarithmische Spirale

E048
Ausführung

Aufgabe: Zeichnen Sie $\gamma(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}(\cos t, \sin t)$ für $\lambda = 1/10$ und $|t| \leq 5\pi$. Wie lang ist der Weg von $t = 0$ bis $t \to \infty$? Warum ist das erstaunlich?



Bildquelle: wikimedia.org

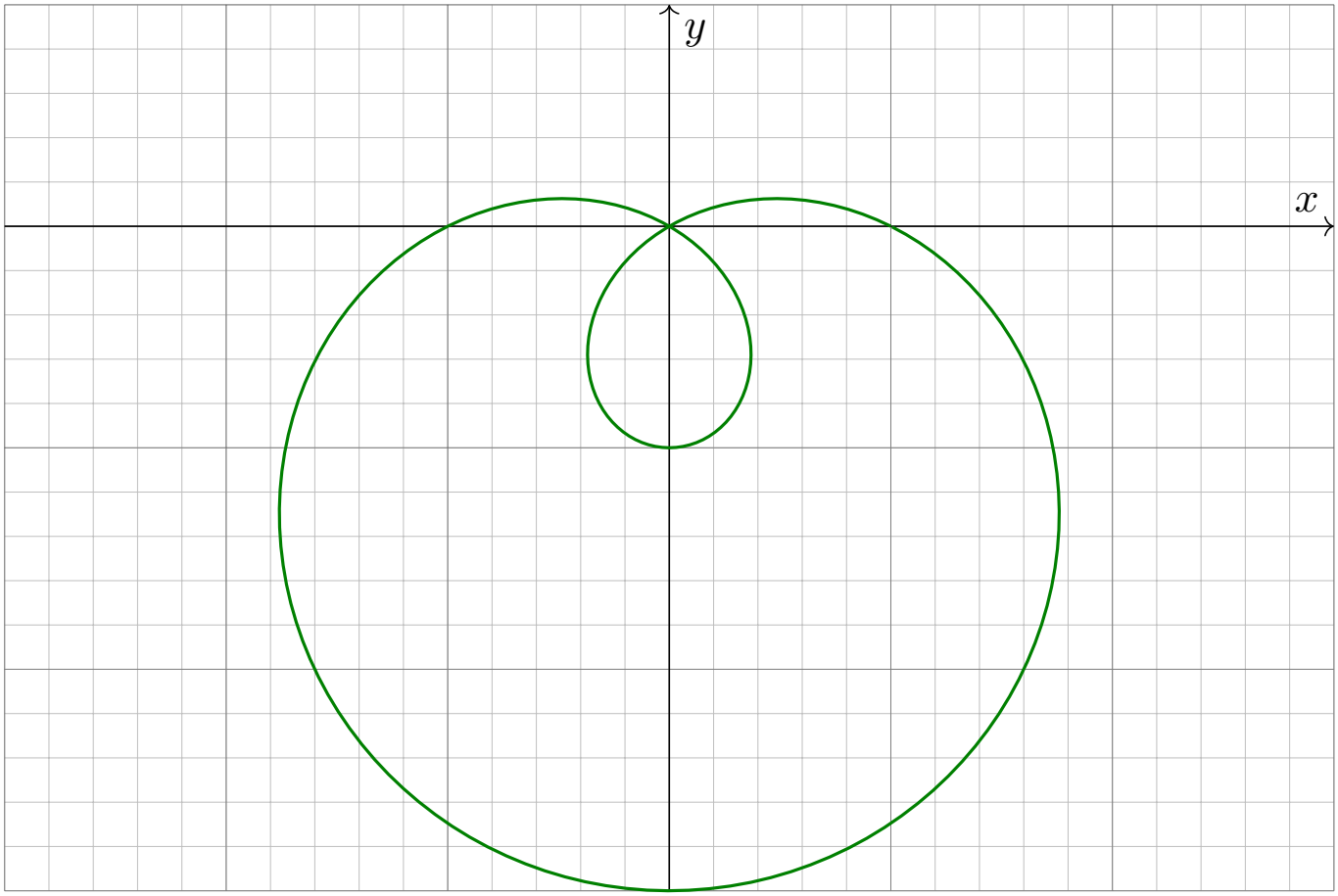
Beispiel: Herzkurve / Kardioide

Aufgabe: Zeichnen Sie $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (1 - \sin t)(\cos t, \sin t)$.

Welche Werte schätzen Sie für Länge und Flächeninhalt? Rechnung ab Seite E217...

Beispiel: Limaçon

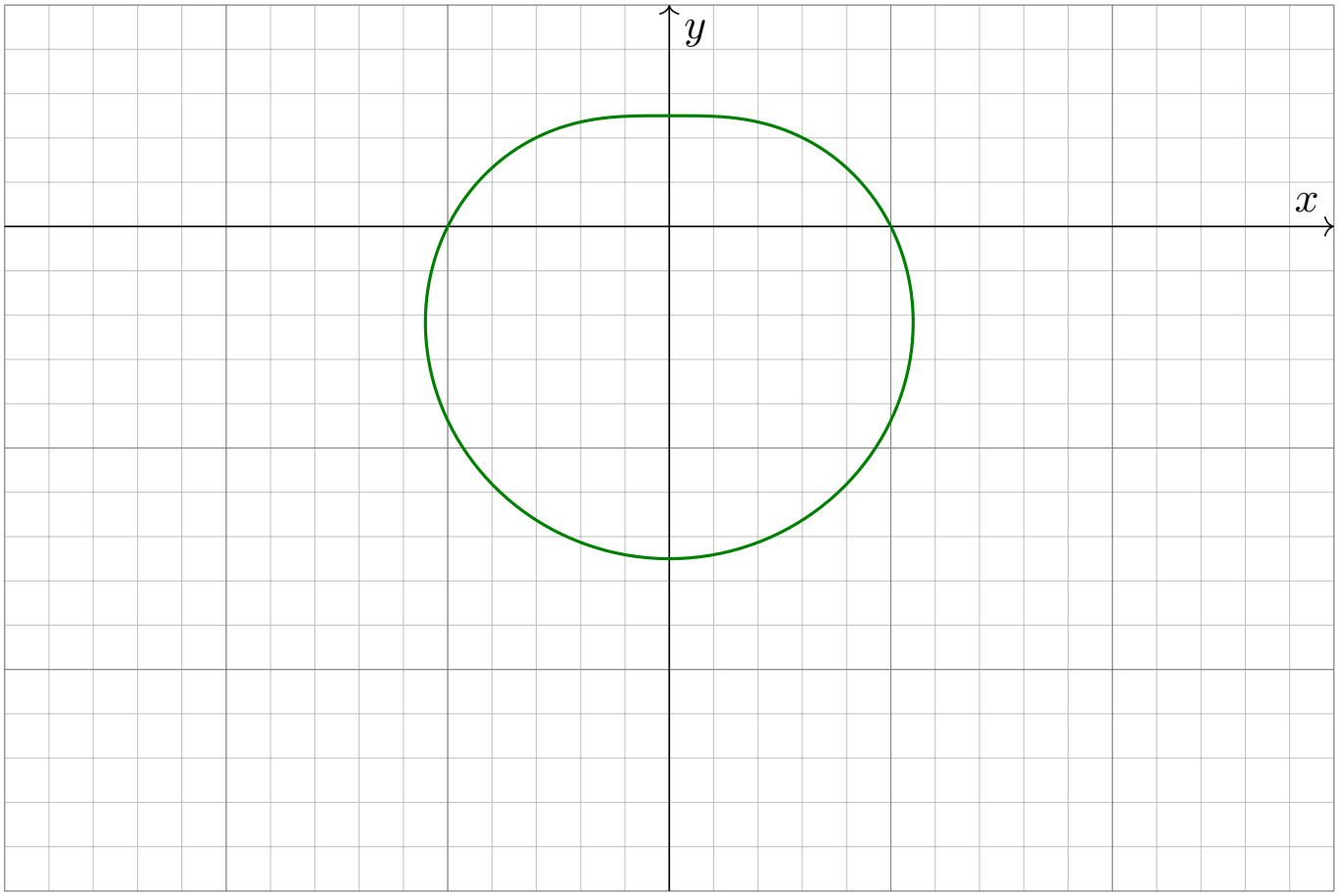
Aufgabe: Zeichnen Sie $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (1 - 2\sin t)(\cos t, \sin t)$.



Beispiel: Limaçon

E051
Ausführung

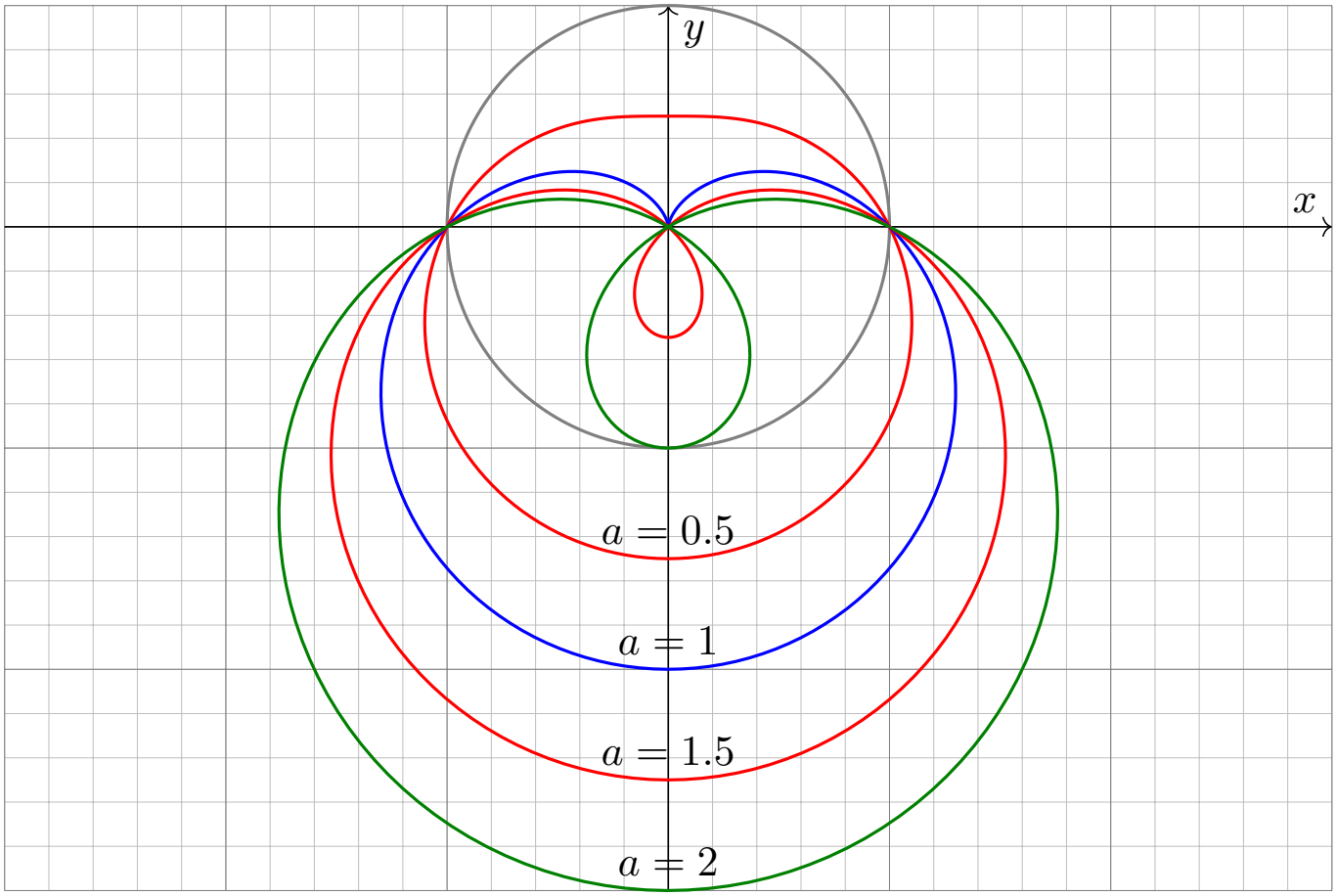
Aufgabe: Zeichnen Sie $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (1 - \frac{1}{2}\sin t)(\cos t, \sin t)$.



Beispiel: Limaçon

E052
Ausführung

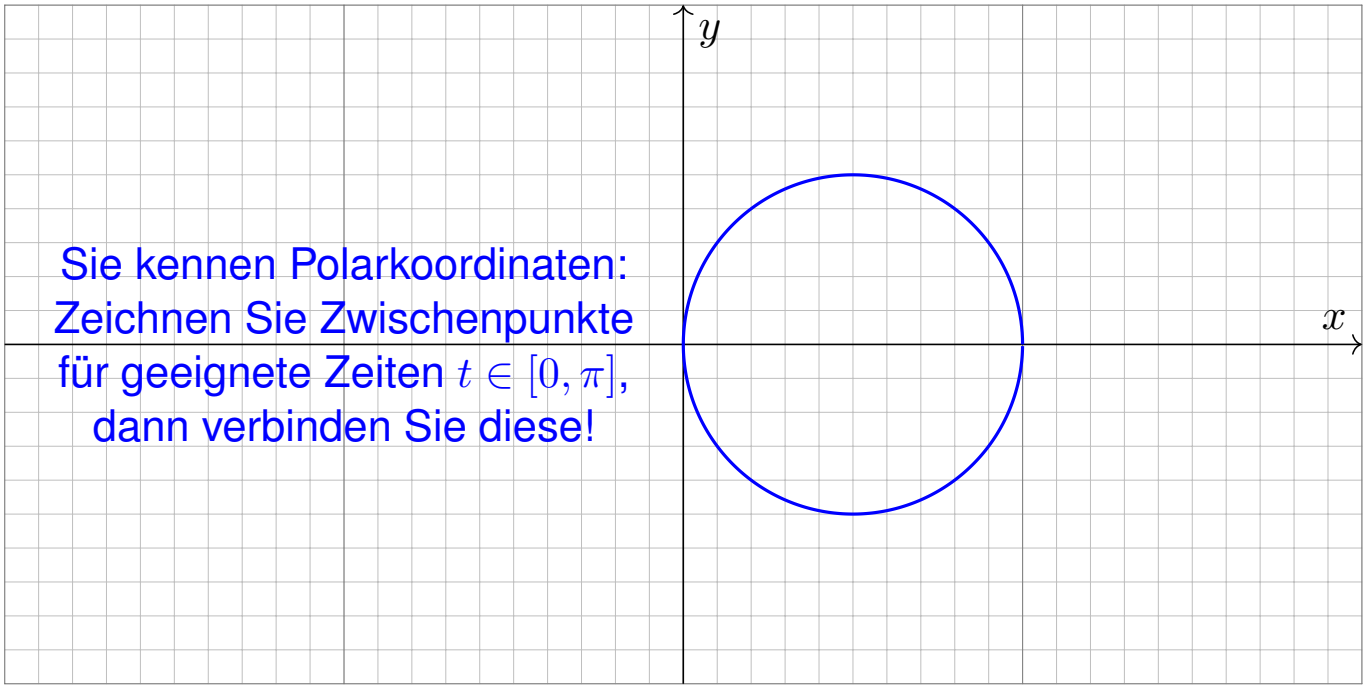
Aufgabe: Zeichnen Sie $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (1 - a\sin t)(\cos t, \sin t)$.



Beispiel: Lemniscate

E053
Ausführung

Aufgabe: Zeichnen Sie $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = \cos(t)(\cos t, \sin t)$.

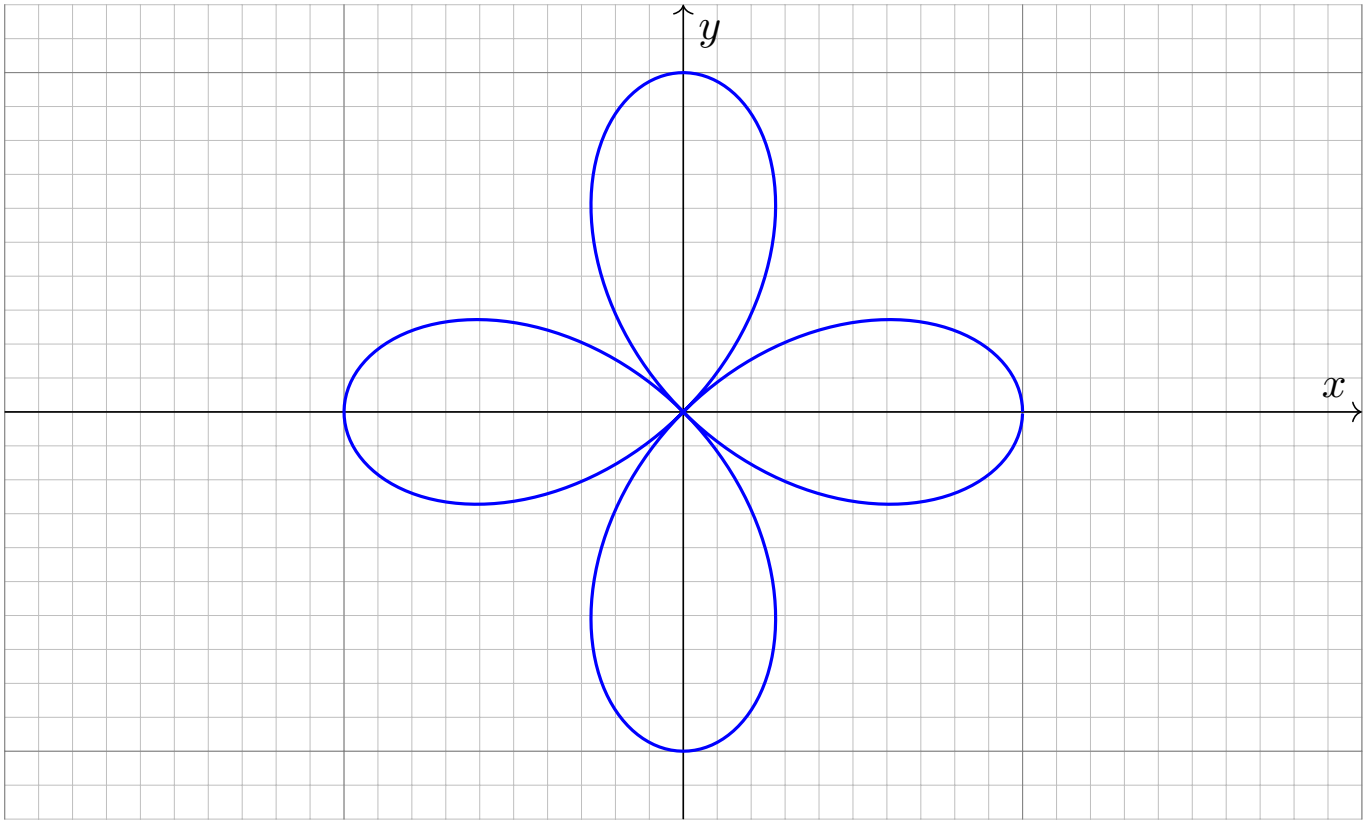


Können Sie diese überraschende Graphik auch rechnerisch erklären?
Add'theoreme: $\cos^2(t) = 1/2 + \cos(2t)/2$ und $\cos(t)\sin(t) = \sin(2t)/2$

Beispiel: Lemniscate

E054
Ausführung

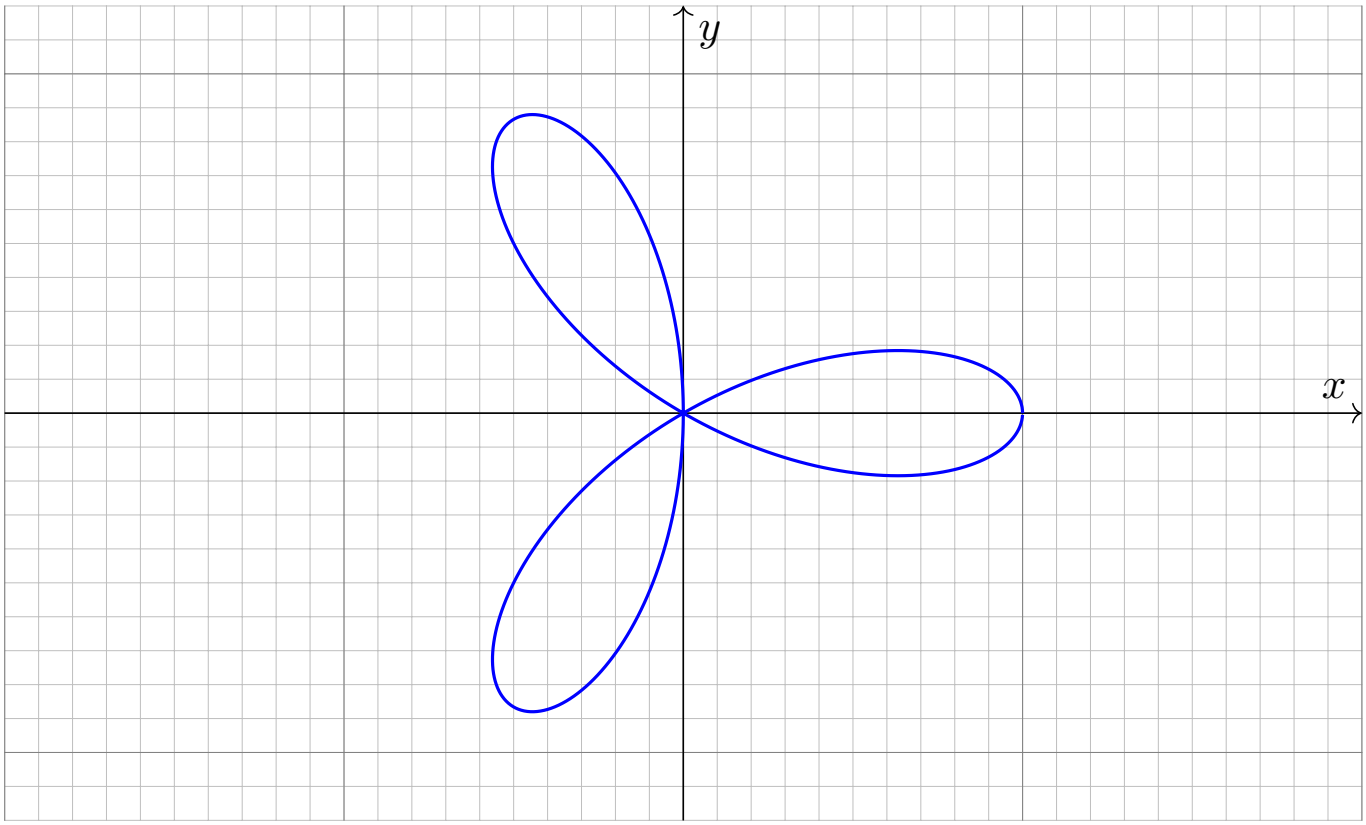
Aufgabe: Zeichnen Sie $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = \cos(2t)(\cos t, \sin t)$.



Beispiel: Lemniscate

E055
Ausführung

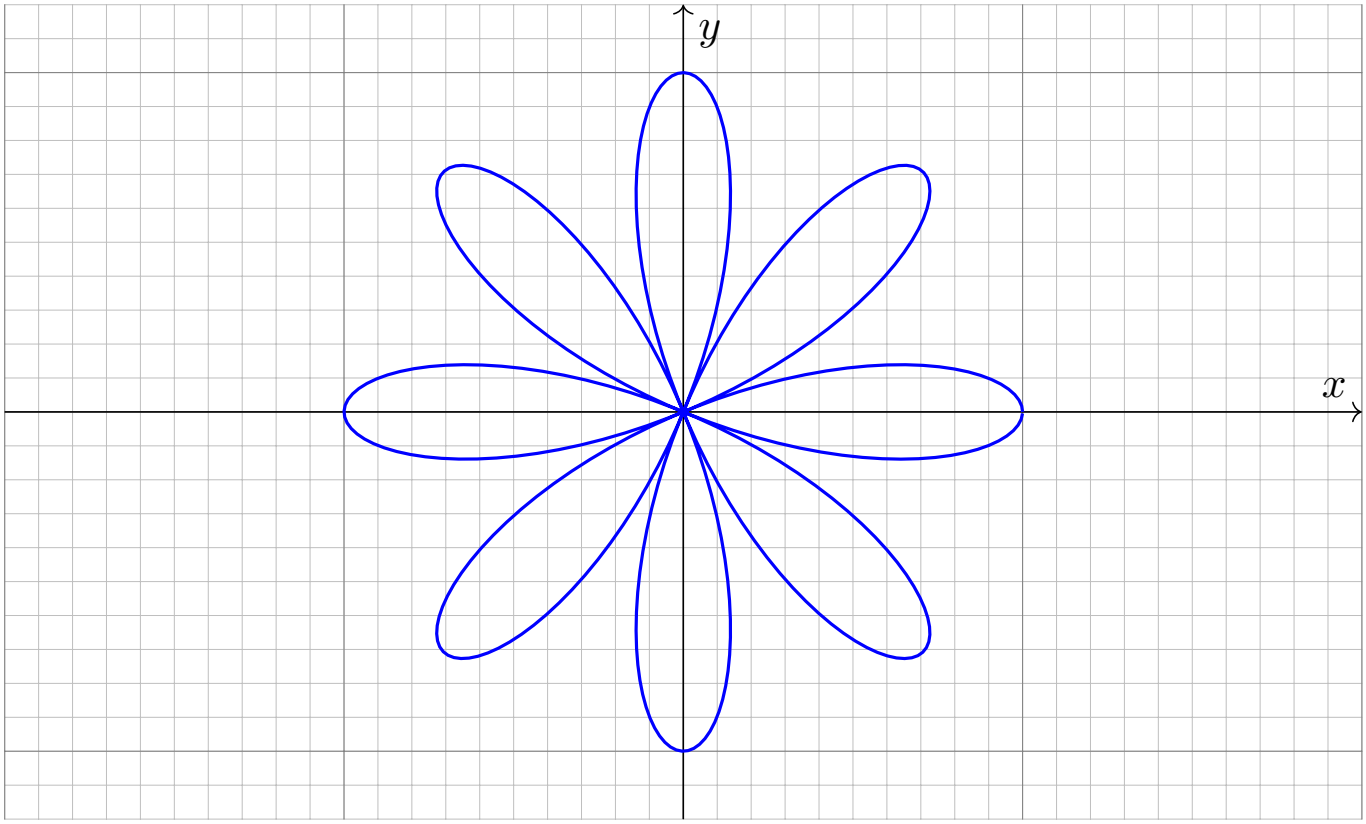
Aufgabe: Zeichnen Sie $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = \cos(3t)(\cos t, \sin t)$.



Beispiel: Lemniscate

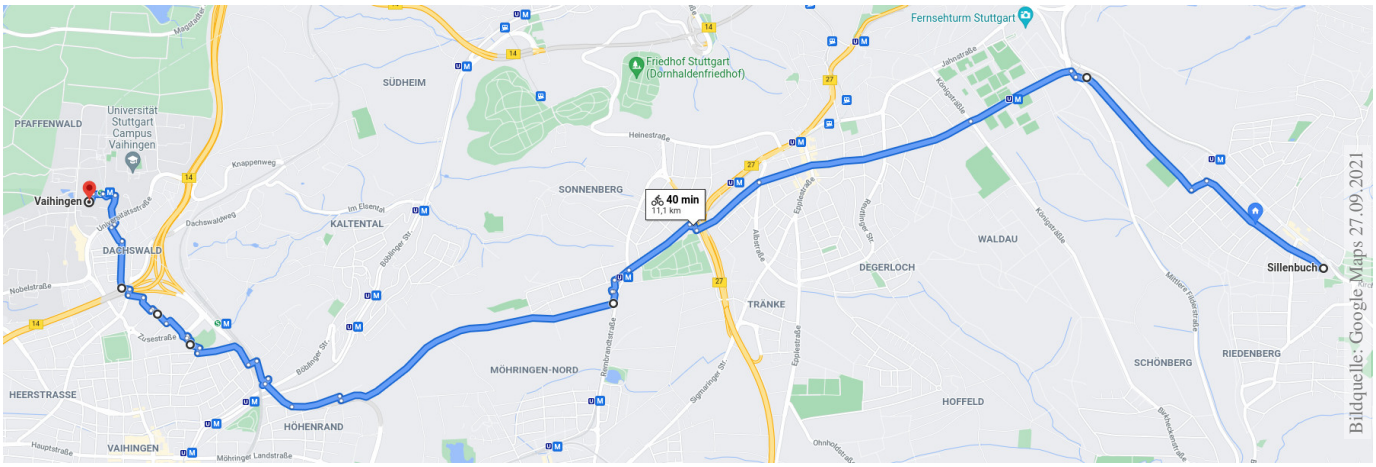
E056
Ausführung

Aufgabe: Zeichnen Sie $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = \cos(4t)(\cos t, \sin t)$.



Wie misst man die Länge eines Weges?

Rektifizieren bedeutet *gerade machen*: Anschaulich messen wir den Weg γ mit einem Faden, den wir anschließend gerade ausstrecken. Beispiele begegen uns überall, etwa in Geoinformationssystemen:

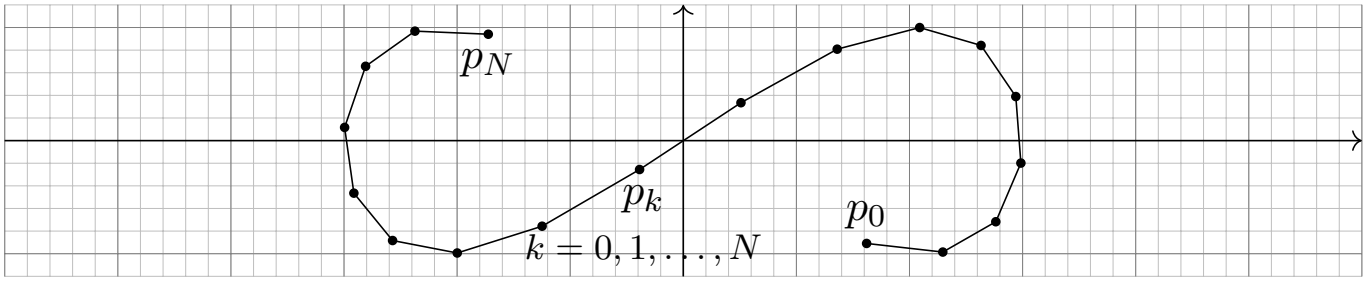


Wegintegrale spielen in Theorie und Anwendung eine wichtige Rolle. Hierzu müssen wir zuerst klären, wie man die Länge von Wegen misst.

Dies geschieht in drei Schritten: Durch Summation für polygonale Wege, durch Grenzübergang für beliebige stetige Wege, und schließlich durch Integration dank Weglängenformel E1B für stetig differenzierbare Wege.

Polygonzüge und ihre Weglänge

Gegeben seien **Zeitpunkte** $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = b$ in $\mathbb{R}$ sowie eine Folge von **Bildpunkten** $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_N$ im Raum $\mathbb{R}^n$.



Diese Daten definieren den **Polygonzug** $\gamma = \begin{bmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & t_N \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_N \end{bmatrix}$.

Dies ist der Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, der $\gamma(t_k) = p_k$ affin-linear verbindet:

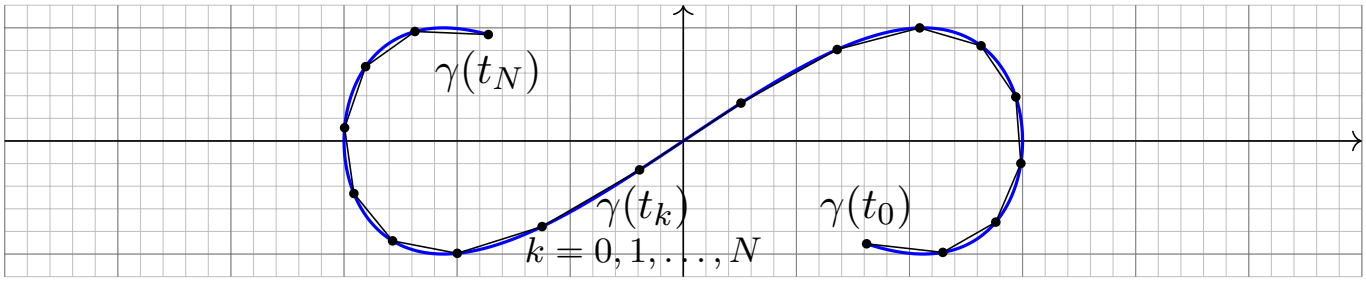
$$\gamma(t) = \frac{t_k - t}{t_k - t_{k-1}} p_{k-1} + \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} p_k \quad \text{für } t \in [t_{k-1}, t_k].$$

Seine **Weglänge** definieren wir als Summe der Schrittlängen:

$$\ell(\gamma) := \sum_{k=1}^{N} \left| p_k - p_{k-1} \right|$$

Dies ist wohldefiniert, zusätzliche Teilungspunkte ändern nichts.

Stetige Wege und ihre Weglänge



Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg. Zu $P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = b\}$ gehören die Punkte $p_0 = \gamma(t_0)$, $p_1 = \gamma(t_1)$, $p_2 = \gamma(t_2)$, $\ldots$, $p_N = \gamma(t_N)$. Die Länge des approximierenden Polygonzuges $\left[\begin{smallmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & t_N \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_N \end{smallmatrix}\right]$ ist

$$\ell(\gamma, P) := \sum_{k=1}^{N} \big|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\big|.$$

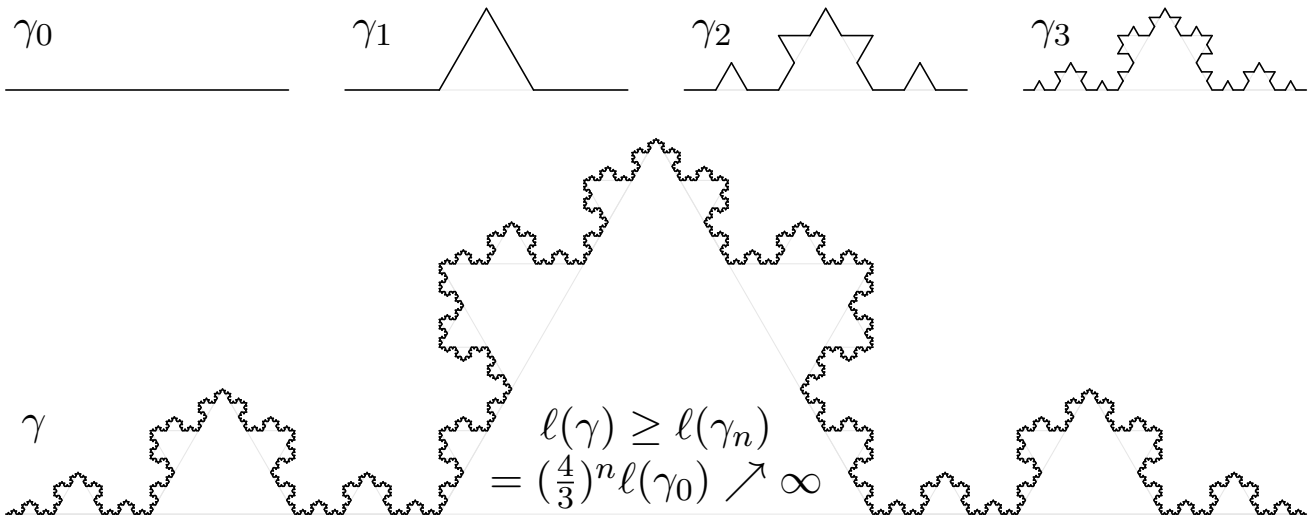
Für jede Verfeinerung $P' \supseteq P$ gilt die Ungleichung $\ell(\gamma, P') \geq \ell(\gamma, P)$. Die **Weglänge** von $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ definieren wir als den Grenzwert

$$\ell(\gamma) := \sup\big\{\, \ell(\gamma, P) \;\big|\; P \text{ Partition von } [a, b] \,\big\}.$$

Der Weg γ heißt **rektifizierbar**, wenn er endliche Länge hat, $\ell(\gamma) < \infty$.

Stetige Wege und ihre Weglänge

Ein beliebtes und erstaunliches Beispiel ist die Koch–Kurve:



Der so als Limes $\gamma_n \to \gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ entstehende Weg ist injektiv, stetig, aber nirgends differenzierbar… und dieser Weg hat unendliche Länge! Wir können dies nun nachrechnen und bestaunen: Um die Koch–Kurve abzumessen, genügt kein endlicher Faden, egal wie lang er sein möge.

☺ Technische Anwendung z.B. als fraktale Antenne, Multiresonanz.

Eigenschaften der Weglänge

Satz E1A: Eigenschaften der Weglänge

Die **Länge** eines Weges $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$\ell(\gamma) := \sup\{\, \ell(\gamma, P) \mid P \text{ Partition von } [a,b] \,\}.$$

Positivität: Für jeden Weg γ gilt $\ell(\gamma) \geq |\gamma(a) - \gamma(b)| \geq 0$.

Definitheit: Genau dann gilt $\ell(\gamma) = 0$, wenn γ konstant ist.

Additivität: Für alle $a \leq t \leq b$ gilt $\ell(\gamma|_{[a,b]}) = \ell(\gamma|_{[a,t]}) + \ell(\gamma|_{[t,b]})$.

Stetigkeit: Für jeden rektifizierbaren Weg ist die Weglängenfunktion

$$s \,:\, [a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0} \,:\, t \mapsto \ell(\gamma|_{[a,t]})$$

stetig und monoton wachsend. Ist γ injektiv, so ist s streng wachsend.

Ableitung: Ist der Weg γ stetig differenzierbar, so auch s, und es gilt

$$s'(t) = |\gamma'(t)| \quad \text{also} \quad s(t) = \textstyle\int_a^t |\gamma'(\tau)|\,\mathrm{d}\tau$$

Hieraus lässt sich die Länge $\ell(\gamma)$ bequem als Integral gewinnen (E1B).

Eigenschaften der Weglänge

Beweis: Für jeden stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ zeigen wir $s'(t) = |\gamma'(t)|$.
Sei $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b\}$. Dank HDI gilt für jedes $k = 1, \ldots, N$:

$$\big|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\big| = \left|\int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_{t_{k-1}}^{t_k} \big|\gamma'(t)\big|\,\mathrm{d}t.$$

Durch Summation über k erhalten wir:

$$\ell(\gamma, P) = \sum_{k=1}^{N} \big|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\big| \leq \sum_{k=1}^{N} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \big|\gamma'(t)\big|\,\mathrm{d}t = \int_a^b \big|\gamma'(t)\big|\,\mathrm{d}t$$

Es gilt also $\ell(\gamma) \leq \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$, somit ist der Weg γ rektifizierbar.

Wir betrachten die Weglängenfunktion $s(t) = \ell(\gamma|_{[a,t]})$. Für alle $a \leq t < t+h \leq b$ gilt

$$s(t+h) - s(t) = \ell(\gamma|_{[t,t+h]}) \geq \big|\gamma(t+h) - \gamma(t)\big|.$$

Zusammen mit obiger Abschätzung erhalten wir die doppelte Ungleichung

$$\left|\frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}\right| \leq \frac{s(t+h) - s(t)}{h} \leq \frac{1}{h}\int_{\tau=t}^{t+h} \big|\gamma'(\tau)\big|\,\mathrm{d}\tau.$$

Für $h \to 0$ geht die linke Seite gegen $|\gamma'(t)|$. Dank HDI gilt dies auch für die rechte Seite.
Somit ist s differenzierbar mit $s'(t) = |\gamma'(t)|$. Wegen $s(a) = 0$ folgt $s(t) = \int_a^t |\gamma'(\tau)|\,\mathrm{d}\tau$.
Dasselbe gilt, falls γ stückweise stetig differenzierbar oder auch nur absolut stetig ist.

Weglänge als Integral

Satz E1B: Weglängenintegral

Für jeden stückweise stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ gilt

$$\boxed{\ell(\gamma) = \int_{t=a}^{b} \big|\gamma'(t)\big| \,\mathrm{d}t.}$$

Insbesondere gilt für die Weglänge die einfache Abschätzung

$$\boxed{0 \;\le\; |\gamma(b) - \gamma(a)| \;\le\; \ell(\gamma) \;\le\; (b-a) \max_{[a,b]} |\gamma'| \;<\; \infty.}$$

Diese Integralformel ist in jedes Auto eingebaut: Das Tachometer zeigt die Momentangeschwindigkeit $|\gamma'(t)|$ zum Zeitpunkt t; integriert über das Zeitintervall $[t_0, t]$ wird hieraus die zurückgelegte Weglänge $\int_{t_0}^{t} |\gamma'(\tau)| \,\mathrm{d}\tau$.

Auch die Ungleichungen entsprechen unmittelbarer Erfahrung:
Wenn Sie drei Stunden lang höchstens 130km/h fahren, dann legen Sie höchstens die Weglänge 390km zurück, eventuell auch weniger.

Weglänge als Integral

Mutig haben wir die Weglänge für alle stetigen Wege $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *definiert*. Diese Definition ist schön und gut, doch zunächst verrät sie uns noch nicht, wie man die Länge effizient *berechnet*. Für Polygonzüge ist es leicht, für krummlinige Wege aber keineswegs. Hier helfen uns die obigen Sätze: Für *stetig differenzierbare* Wege können wir damit die Weglänge als Integral schreiben. So wird die Berechnung der Weglänge unseren allgemeinen Integrationswerkzeugen zugänglich.

Parametrisierung nach Weglänge: Jeden injektiven Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ endlicher Länge ℓ können wir nach Weglänge parametrisieren: Die Weglängenfunktion $s(t) = \ell(\gamma|_{[a,t]})$ ist dann nämlich eine stetige Bijektion $s : [a,b] \to [0,\ell]$. Der durch seine Länge parametrisierte Weg $c : [0,\ell] \to \mathbb{R}^n$ mit $c(\lambda) := \gamma(s^{-1}(\lambda))$ erfüllt dann $\ell(c|_{[0,\lambda]}) = \lambda$ für alle $\lambda \in [0,\ell]$.

Ist zudem γ stetig differenzierbar, so gilt $|c'(t)| = 1$, das heißt, der Punkt $c(t) \in \mathbb{R}^n$ bewegt sich mit konstanter Absolutgeschwindigkeit, nur die Bewegungsrichtung $c'(t)$ ist noch variabel.

Absolut stetige Wege: Im obigen Beweis haben wir den HDI in beide Richtungen angewendet. Hierzu haben wir vereinfachend angenommen, dass $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar ist; es genügt bereits stückweise stetig differenzierbar (B2C) oder auch nur absolut stetig (B2E):

Ist jede Koordinatenfunktion $\gamma_1, \dots, \gamma_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ stückweise C^1 / absolut stetig, so existieren ihre Ableitungen $\gamma_1', \dots, \gamma_n'$ in fast allen Punkten $t \in [a,b]$, sie sind absolut integrierbar, somit auch die Norm $|\gamma'|$. Damit gilt $\gamma(t) = \gamma(a) + \int_a^t \gamma'(\tau) \,\mathrm{d}\tau$ und $\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \,\mathrm{d}t < \infty$.

Ist umgekehrt γ rektifizierbar, so ist die Weglängenfunktion absolut stetig. Ist γ zudem injektiv, so können wir nach Weglänge parametrisieren und erhalten einen absolut stetigen Weg c.

Beispiel einer Umparametrisierung

Verschiedene Wege können dieselbe Kurve parametrisieren!
Wir betrachten nochmals den Halbkreis des einführenden Beispiels:

$$\Gamma = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1,\ x \geq 0 \,\}$$

Wir vergleichen unsere drei Parametrisierungen

$$\begin{aligned}
\alpha &: [-1,1] \to \mathbb{R}^2 : s \mapsto \alpha(s) = \big(\sqrt{1-s^2}, s\big),\\
\beta &: [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \beta(t) = \big(\cos t, \sin t\big),\\
\gamma &: [-1,1] \to \mathbb{R}^2 : u \mapsto \gamma(u) = \big(\tfrac{1-u^2}{1+u^2}, \tfrac{2u}{1+u^2}\big).
\end{aligned}$$

Die ersten beiden sind äquivalent vermöge der Umparametrisierungen

$$\beta(t) = \alpha(\sin t), \qquad \alpha(s) = \beta(\arcsin s).$$

Die letzten beiden sind äquivalent vermöge der Umparametrisierungen

$$\beta(t) = \gamma(\tan(t/2)), \qquad \gamma(u) = \beta(2\arctan(u)).$$

Übung: Prüfen Sie diese vier Gleichungen durch Einsetzen!

Umparametrisierung und äquivalente Wege

Eine **Umparametrisierung** ist eine stetige Bijektion $\Phi : [a,b] \to [\tilde{a}, \tilde{b}]$.
Dank Kompaktheit ist die Umkehrfunktion $\Phi^{-1} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \to [a,b]$ stetig.

Für eine **reguläre Umparametrisierung** verlangen wir zudem,
dass beide Bijektionen Φ und Φ^{-1} stetig differenzierbar sind.

📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §2.3. Genau dann ist Φ regulär, wenn Φ stetig diff'bar ist mit $\Phi'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Dank Kettenregel ist dann auch Φ^{-1} stetig diff'bar mit $(\Phi^{-1})'(\tilde{x}) = \Phi'(x)^{-1}$ für alle $x \in [a,b]$ und $\tilde{x} = \Phi(x)$.

Wege $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $\tilde{\gamma} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \to \mathbb{R}^n$ heißen **äquivalent** vermöge einer Umparametrisierung Φ, wenn $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \Phi$ gilt, also $\gamma \circ \Phi^{-1} = \tilde{\gamma}$.

Im Beispiel sind α, β, γ äquivalent und β, γ sogar regulär äquivalent.

Satz E1c: Invarianz der Länge bei Umparametrisierung

Äquivalente Wege haben dieselbe Bildmenge und dieselbe Länge.

Beweis: Jede Umparametrisierung $\Phi : [a,b] \to [\tilde{a}, \tilde{b}]$ ist strikt wachsend oder strikt fallend. Zur Partition P von $[a,b]$ gehört die Partition $\tilde{P} = \Phi(P)$ von $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ mit $\ell(\gamma, P) = \ell(\tilde{\gamma}, \tilde{P})$. Ebenso von $\tilde{P}$ zu $P = \Phi^{-1}(\tilde{P})$. Hieraus folgt $\ell(\gamma) = \sup\{\ell(\gamma, P)\} = \sup\{\ell(\tilde{\gamma}, \tilde{P})\} = \ell(\tilde{\gamma})$.

Definition der Kurvenlänge

Je zwei injektive Wege $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $\tilde{\gamma} : [\tilde{a},\tilde{b}] \to \mathbb{R}^n$ mit demselben Bild Γ sind äquivalent vermöge $\Phi = \tilde{\gamma}^{-1} \circ \gamma$.
Satz E1C garantiert die Gleichheit $\ell(\gamma) = \ell(\tilde{\gamma})$ der Weglängen.
Wir können somit die Länge $\mathrm{vol}_1(\Gamma)$ der Kurve $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ definieren:

Definition E1D: Länge einer Kurve

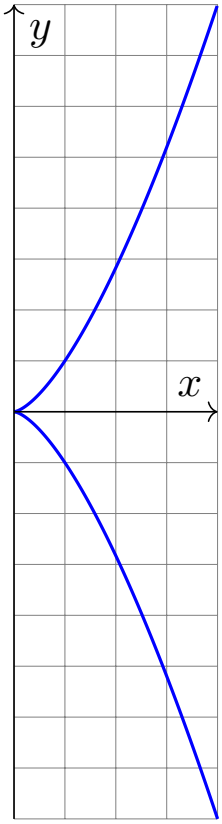
Wir definieren die **Länge der Kurve** $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ durch

$$\boxed{\mathrm{vol}_1(\Gamma) := \ell(\gamma) \quad \text{mit } \gamma : [a,b] \to \Gamma \text{ stetig und bijektiv.}}$$

Das Ergebnis ist unabhängig von unserer Wahl der Parametrisierung γ:
Die Länge $\mathrm{vol}_1(\Gamma)$ ist eine wohldefinierte Eigenschaft der Kurve $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$.

Zunächst ist $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ nur eine nackte Menge ohne jede Struktur. Für Γ hat es daher keinen Sinn nach Stetigkeit oder Differenzierbarkeit oder Länge zu fragen: Diesen Fragen müssen wir erst durch die Wahl einer Parametrisierung $\gamma : [a,b] \to \Gamma$ einen Sinn geben! Hierzu verlangen wir, dass es eine stetige und bijektive Parametrisierung $\gamma : [a,b] \to \Gamma$ gibt. Diese ist dann eindeutig bis auf Äquivalenz, und somit $\ell(\gamma)$ unabhängig von der Wahl von γ. Somit ist die Länge eine Eigenschaft der Kurve Γ und nicht bloß des zur Parametrisierung genutzten Weges γ.

Beispiel: Länge der Neilschen Parabel



Aufgabe: Man zeichne und messe die **Neilsche Parabel**

$$\Gamma = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^3 = y^2 \le 64 \right\}.$$

Lösung: Wir parametrisieren Γ, zum Beispiel durch

$$\gamma : [-2,2] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t^2, t^3).$$

Diese Abbildung ist stetig, injektiv, mit Bildmenge Γ. Also

$$\mathrm{vol}_1(\Gamma) \underset{\text{E1D}}{\overset{\text{Def}}{=}} \ell(\gamma) \underset{\text{E1B}}{\overset{\text{Satz}}{=}} \int_{-2}^{2} \left|\gamma'(t)\right| \mathrm{d}t = \int_{-2}^{2} \left|(2t, 3t^2)\right| \mathrm{d}t$$

$$= \int_{-2}^{2} \sqrt{4t^2 + 9t^4}\, \mathrm{d}t = \int_{0}^{2} \sqrt{4 + 9t^2} \cdot 2t\, \mathrm{d}t$$

$$\underset{\text{B1K}}{\overset{\text{Subs}}{=}} \int_{0}^{4} \sqrt{4 + 9u}\, \mathrm{d}u \underset{\text{B1I}}{\overset{\text{HDI}}{=}} \frac{2}{27} \Big[(4+9u)^{3/2} \Big]_0^4 = \frac{16}{27} \big(10\sqrt{10} - 1 \big).$$

☺ Jede andere Parametrisierung liefert genau dasselbe Ergebnis!
Sie muss nur bijektiv und stetig sein, fürs Integral zudem stetig diff'bar.

Länge einer Kettenlinie (Katenoide)

Aufgabe: (1) Berechnen Sie die Potenzreihen der Funktionen

$$\cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \text{und} \qquad \sinh(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

Zeigen Sie $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$ sowie $\cosh' = \sinh$ und $\sinh' = \cosh$.
(2) Skizzieren Sie die Funktion $g(x) = \cosh(x) - 1$ für $-2 \le x \le 2$.
(3) Der Graph Γ ist eine ebene Kurve. Berechnen Sie die Länge $\mathrm{vol}_1(\Gamma)$.

Lösung: (1) Wir setzen $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ ein und rechnen's aus:

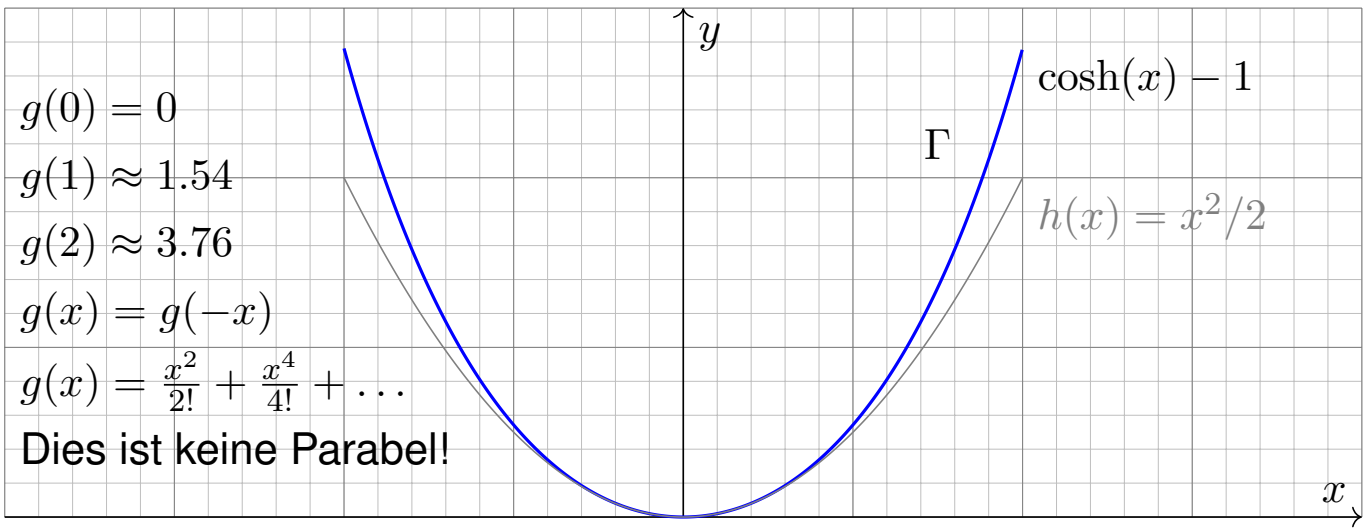
$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!}\Big) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j}}{(2j)!} \qquad = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!}\Big) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

☺ Dies sind elementare mathematische Funktionen: $\cosh$ heißt **Kettenlinie**, **Katenoide** oder **Seilkurve**: Sie entsteht, wenn man eine Kette an ihren Enden aufhängt unter Einfluss der Schwerkraft. M107
Umgekehrt ist sie die optimale Form eines selbstragenden Bogens.

Länge einer Kettenlinie (Katenoide)

(2) Skizze des Funktionsgraphen Γ zu $g(x) = \cosh(x) - 1$:



(3) Die Parametrisierung $\gamma : [-2, 2] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (t, g(t))$ ergibt

$$\mathrm{vol}_1(\Gamma) \underset{\text{E1D}}{\overset{\text{Def}}{=}} \ell(\gamma) \underset{\text{E1B}}{\overset{\text{Satz}}{=}} \int_{-2}^{2} |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_{-2}^{2} \sqrt{1 + \sinh(t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-2}^{2} \cosh(t)\,\mathrm{d}t$$

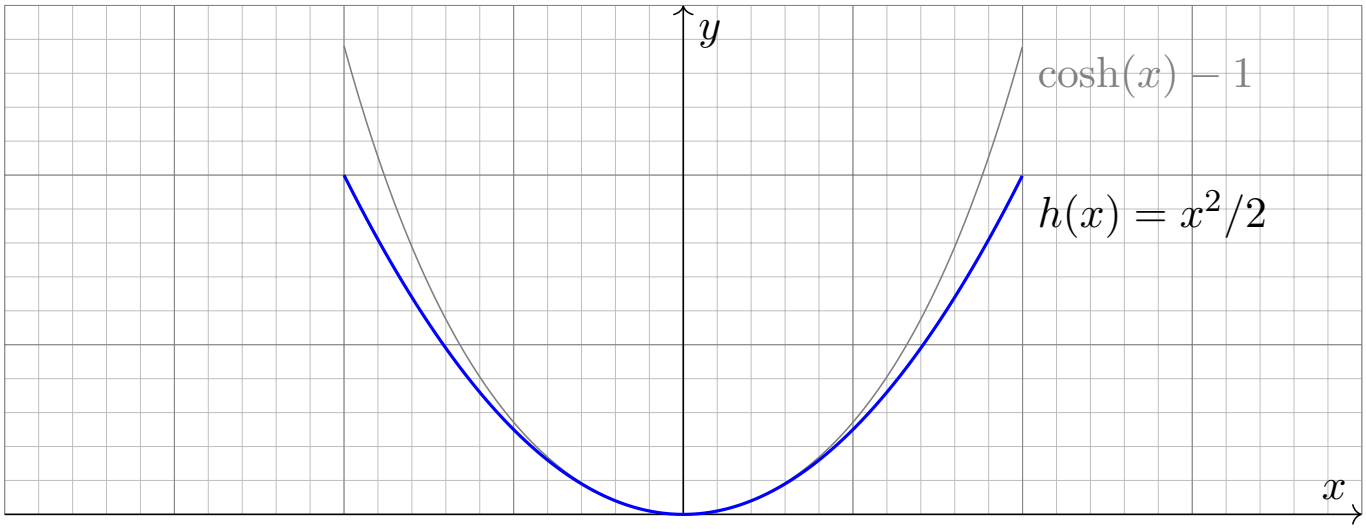
$$\underset{\text{B1I}}{\overset{\text{HDI}}{=}} \big[\sinh(t)\big]_{-2}^{2} = 2\sinh(2) \qquad \approx 7.25372$$

☺ Vergleich mit der Skizze: Dieser Wert für $\mathrm{vol}_1(\Gamma)$ ist plausibel.

Länge einer Parabel

Aufgabe: (1) Skizzieren Sie die Funktion $h(x) = x^2/2$ für $-2 \le x \le 2$.
(2) Der Graph Γ ist eine ebene Kurve. Berechnen Sie die Länge $\mathrm{vol}_1(\Gamma)$.

Lösung: (1) Skizze des Funktionsgraphen Γ zu $h(x) = x^2/2$:



☺ Das ist die gute alte Parabel, die jeder aus seiner Schulzeit kennt.
Nun wollen und können wir endlich ihre Länge berechnen.

⚠ Man beachte Ähnlichkeiten und Unterschiede zu $\cosh(x) - 1$.
Der Fehler $x^4/4! + \ldots$ macht sich für große x immer stärker bemerkbar.

Länge einer Parabel

(2) Die Parametrisierung $\gamma : [-2, 2] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (t, h(t))$ ergibt

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_1(\Gamma) &\overset{\text{Def}}{\underset{\text{E1D}}{=}} \ell(\gamma) \overset{\text{Satz}}{\underset{\text{E1B}}{=}} \int_{-2}^{2} |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_{-2}^{2} \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t && \text{(Subs } t = \sinh u\text{)} \\
&\overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \left[\frac{1}{2} t\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{arsinh}(t)\right]_{-2}^{2} && \text{(siehe B411)} \\
&= \left[\frac{1}{2} t\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln\bigl(t + \sqrt{1+t^2}\bigr)\right]_{-2}^{2} && \text{(Probe: ableiten!)} \\
&= 2\sqrt{5} + \ln\bigl(2+\sqrt{5}\bigr) \;\approx\; 5.91577 && \text{(Plausibilitätscheck!)}
\end{aligned}$$

⚠ Die Funktion $h(x) = x^2/2$ ist viel einfacher als $g(x) = \cosh(x) - 1$,
aber die Integration der Weglänge ist tatsächlich etwas schwieriger.
Unverhofft treten auch hier die Hyperbelfunktionen $\sinh$ und $\cosh$ auf,
nicht in der Aufgabenstellung, aber anschließend durch Substitution.

☺ Vergleich mit der Skizze: Dieser Wert für $\mathrm{vol}_1(\Gamma)$ ist plausibel.
Die Diagonale von $(0,0)$ nach $(2,2)$ hat die Länge $2\sqrt{2} \approx 2.82843$.
Der Parabelbogen hat die etwas größere Länge $\frac{1}{2}\,\mathrm{vol}_1(\Gamma) \approx 2.95788$.

Weglänge und Wegintegral

Definition E1E: Weglänge und Wegintegral

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein stetig diff'barer Weg mit Bildkurve $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$.

Die **Weglänge** ist (wie oben erklärt) gegeben durch

$$\boxed{\ell(\gamma) = \int_\gamma |\mathrm{d}\gamma| := \int_{t=a}^{b} |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t.}$$

Wir definieren das **Wegintegral** einer Funktion $g : \Gamma \to \mathbb{R}$ durch

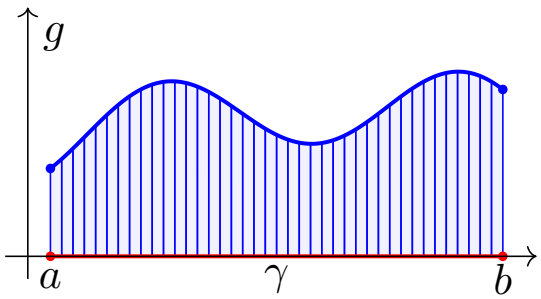
$$\boxed{\int_\gamma g\,|\mathrm{d}\gamma| := \int_{t=a}^{b} g(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t,}$$

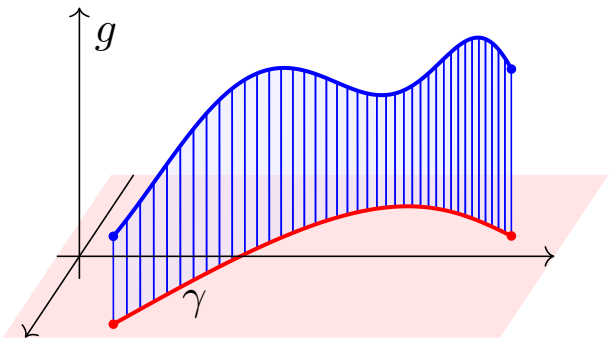
Zur Abkürzung schreiben wir hier $\mathrm{d}\gamma = \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$ und $|\mathrm{d}\gamma| = |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t$.

📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §5.3–5.4. Anschaulich stellen wir uns $g : \Gamma \to \mathbb{R}$ als Massenverteilung auf der Kurve Γ vor; das Integral ergibt die Gesamtmasse. Die Abkürzungen links dient der bequemen und übersichtlichen Schreibweise, die ausführliche Formel rechts erklärt, wie Sie es explizit ausrechnen. Das ist der Sinn dieser Definition.

Geometrisch-physikalische Interpretation

Beispiel: Sei $\gamma : [a,b] \to [a,b] : x \mapsto x$, und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.
Dann misst $\int_\gamma g\,|\mathrm{d}\gamma| = \int_{[a,b]} g(x)\,\mathrm{d}x$ die Fläche unter g über $[a,b]$.



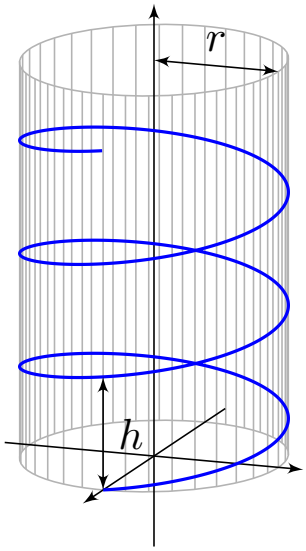


Im allgemeinen Fall $\gamma : [a,b] \to \Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ und $g : \Gamma \to \mathbb{R}$ gilt ebenso:
Das Integral $\int_\gamma g\,|\mathrm{d}\gamma|$ misst die Fläche unter g über dem Weg γ.

Man nennt $\mathrm{d}\gamma$ anschaulich ein „infinitesimales Wegelement“:
Das Integral $\int_\gamma g\,|\mathrm{d}\gamma|$ summiert die Beiträge $g\,|\mathrm{d}\gamma|$ über den Weg γ.

Vektorielles Wegelement (mit Richtung) $\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\gamma = \mathrm{d}s = \ldots$.
Skalares Wegelement (nur Länge) $|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t = |\mathrm{d}\gamma| = |\mathrm{d}s| = \ldots$.

Beispiel: Schraubenlinie



Aufgabe: Rektifizieren Sie die **Schraubenlinie**

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \gamma(t) = (r\cos(2\pi t), r\sin(2\pi t), ht).$$

Hierbei ist r der Radius und h die Ganghöhe.

Lösung: Der Geschwindigkeitsvektor ist

$$\gamma'(t) = (-2\pi r\sin(2\pi t), 2\pi r\cos(2\pi t), h).$$

Seine Norm ist die absolute Geschwindigkeit

$$\left|\gamma'(t)\right| = \sqrt{(2\pi r)^2 + h^2}.$$

Die Weglänge der Schraubenlinie (nach u Umläufen) ist demnach

$$\ell(\gamma|_{[0,u]}) = \int_{t=0}^{u} \left|\gamma'(t)\right| \mathrm{d}t = u\sqrt{(2\pi r)^2 + h^2}.$$

☺ Wir können diese Formel ohne Integration auch leicht geometrisch verstehen, indem wir einen Umlauf auf dem Zylindermantel auf das Rechteck $[0, 2\pi r] \times [0, h]$ abrollen. (Skizze!) Das Abrollen des Zylinders ist *lokal isometrisch*, bewahrt also Abstände ohne Verzerrung.

Beispiel: Schraubenlinie

Aufgabe: Ein Draht Γ folgt der obigen Schraubenlinie $\gamma : [0,3] \to \mathbb{R}^3$. Die Temperaturverteilung sei $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto 300 + x - y + 5z$. Berechnen Sie die mittlere Temperatur entlang des Drahtes.

Lösung: Wir berechnen zunächst das Wegintegral:

$$\int_{s\in\Gamma} T(s)\,\mathrm{d}s \overset{\text{Param}}{=} \int_{\gamma} T(\gamma)\,\mathrm{d}\gamma \overset{\text{Param}}{=} \int_{t=0}^{3} T(\gamma(t))\,\left|\gamma'(t)\right|\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{t=0}^{3} \Big(300 + r\cos(2\pi t) - r\sin(2\pi t) + 5ht\Big)\sqrt{(2\pi r)^2 + h^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= 3\sqrt{(2\pi r)^2 + h^2}\Big(300 + 5h\cdot\frac{3}{2}\Big)$$

Geteilt durch die Weglänge erhalten wir die mittlere Temperatur:

$$\frac{1}{\mathrm{vol}_1(\Gamma)} \int_{s\in\Gamma} T(s)\,\mathrm{d}s = 300 + 5h\cdot\frac{3}{2}$$

☺ Auch dieses Ergebnis können wir leicht überprüfen: Das hier als Beispiel betrachtete Temperaturfeld $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ist affin-linear in den Koordinaten x, y, z. Daher ist die mittlere Temperatur entlang γ gleich der Temperatur im Schwerpunkt $(0, 0, h\cdot 3/2)$ der Kurve.

Arbeitsintegral und Flussintegral

Definition E1F: Arbeitsintegral und Flussintegral

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein stetig diff'barer Weg mit Bildkurve $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$.
Das **Arbeitsintegral** eines Vektorfeldes $f : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ ist

$$\boxed{\int_\gamma f \bullet \mathrm{d}\gamma := \int_{t=a}^b f(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Speziell in der Ebene ($n = 2$) definieren wir zudem das **Flussintegral**

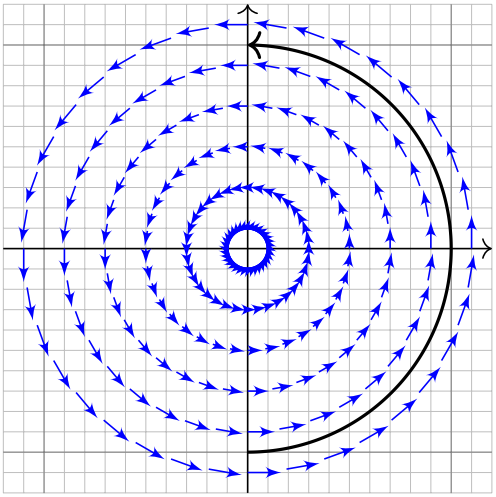
$$\boxed{\int_\gamma f \times \mathrm{d}\gamma := \int_{t=a}^b f(\gamma(t)) \times \gamma'(t)\,\mathrm{d}t.}$$

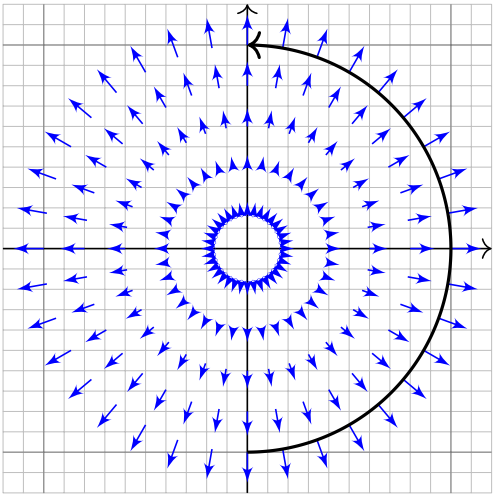
Zur Abkürzung schreiben wir $\mathrm{d}\gamma = \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$. Ist der Weg γ geschlossen, also $\gamma(a) = \gamma(b)$, so schreiben wir statt $\int_\gamma$ auch dekorativ betonend $\oint_\gamma$.

Die Abkürzungen links dient der bequemen und übersichtlichen Schreibweise, die ausführliche Formel rechts erklärt Ihnen, wie Sie es explizit ausrechnen. Das ist der Sinn dieser Definition.

Geometrisch-physikalische Interpretation

Das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ können wir uns als Kraftfeld vorstellen.
Der Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ beschreibt die Bewegung eines Teilchens.
Die dabei geleistete Arbeit berechnen wir gemäß Arbeit $=$ Kraft $\bullet$ Weg.
Das Skalarprodukt zählt nur den tangentialen Anteil in Wegrichtung.





Das Vektorfeld f können wir uns auch als Strömungsgeschwindigkeit einer Flüssigkeit vorstellen. In der Ebene ergibt das Flussintegral die über γ (von links nach rechts) fließende Flüssigkeitsmenge. Das Kreuzprodukt zählt den normalen Anteil senkrecht zur Wegrichtung.

Beispiel: Schraubenlinie

Aufgabe: Wir betrachten erneut die obige Schraubenlinie E119

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} r\cos(2\pi t) \\ r\sin(2\pi t) \\ ht \end{pmatrix}.$$

(1) Berechnen Sie längs γ das Arbeitsintegral des Wirbelfeldes

$$f : \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{x = y = 0\} \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Berechnen Sie $\operatorname{rot}(f)$. Besitzt f auf $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{x = y = 0\}$ ein Potential?

☺ Potentiale und Arbeitsintegrale sind zentrale Techniken für viele physikalisch-technische Anwendungen. Sie kennen diese Themen aus Ihrer Vorlesung HM2. Wir diskutieren das Potentialproblem ab Seite E341 und lösen es im $\mathbb{R}^2$ für Kreisscheiben, Rechtecke und sternförmige Gebiete. Den allgemeinen Fall im $\mathbb{R}^n$ behandeln wir in Kapitel H.

Beispiel: Schraubenlinie

Lösung: (1) Wir berechnen das Arbeitsintegral von f längs γ:

$$\int_\Gamma f(s) \cdot \mathrm{d}s \overset{\text{Param}}{=} \int_\gamma f(\gamma) \cdot \mathrm{d}\gamma \overset{\text{Param}}{=} \int_{t=a}^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{t=a}^b \begin{pmatrix} -\sin(2\pi t)/r \\ \cos(2\pi t)/r \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\pi r\sin(2\pi t) \\ 2\pi r\cos(2\pi t) \\ h \end{pmatrix} \mathrm{d}t$$

$$= \int_{t=a}^b 2\pi\,\mathrm{d}t \quad = \quad 2\pi(b-a)$$

☺ Dieses Arbeitsintegral zählt die Umläufe von γ um die z–Achse. Das Ergebnis ist unabhängig vom Radius r und von der Ganghöhe h.

(2) Unser f ist die dreidimensionale Version des Wirbelfeldes. E345
Die Rotation $\operatorname{rot}(f) = 0$ kennen wir bereits bzw. berechnen sie erneut.

⚠ Dennoch hat f kein Potential, denn das Arbeitsintegral längs geschlossener Kurven ist nicht Null, wie (1) für $h = 0$ zeigt.

Integration über glatte Kurven

Bisher haben wir über explizit gegebene Wege $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ integriert. Wir wissen: Je zwei reguläre Wege $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $\tilde{\gamma} : [\tilde{a},\tilde{b}] \to \mathbb{R}^n$ mit selbem Bild $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ sind regulär äquivalent vermöge $\Phi = \gamma^{-1} \circ \tilde{\gamma}$. Somit können wir das **Kurvenintegral** von $g : \Gamma \to \mathbb{R}$ definieren durch

$$\int_\Gamma g\,|\mathrm{d}\Gamma| = \int_{s\in\Gamma} g(s)\,|\mathrm{d}s| \;:=\; \int_\gamma g\,|\mathrm{d}\gamma| = \int_a^b g(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Für Arbeits- und Flussintegrale sei die Kurve Γ zusätzlich **orientiert**. Dann können wir diese Integrale für $f : \mathbb{R}^n \supseteq \Gamma \to \mathbb{R}^n$ definieren durch

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma f \bullet \mathrm{d}\Gamma &= \int_{s\in\Gamma} f \bullet \mathrm{d}s &:= \int_\gamma f \bullet \mathrm{d}\gamma &= \int_a^b f(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t)\mathrm{d}t,\\
\int_\Gamma f \times \mathrm{d}\Gamma &= \int_{s\in\Gamma} f(s) \times \mathrm{d}s &:= \int_\gamma f \times \mathrm{d}\gamma &= \int_a^b f(\gamma(t)) \times \gamma'(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

☺ Diese Integrale sind invariant unter Umparametrisierung von γ und somit wohldefiniert für die (orientierte) glatte Kurve Γ.
Links steht die bequeme, parameterfreie Abkürzung.

Invarianz unter Umparametrisierung

Aufgabe: Zur Berechnung eines Kurvenintegrals über Γ wählen wir eine Parametrisierung $\gamma : [a,b] \xrightarrow{\sim} \Gamma$, regulär aber ansonsten beliebig. Ist das Ergebnis dasselbe für *jede* Parametrisierung $\tilde{\gamma} : [\tilde{a},\tilde{b}] \xrightarrow{\sim} \Gamma$? Warum?

Lösung: Für das Integral über den Weg $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \Phi$ rechnen wir nach:

$$\int_{\tilde{\gamma}} g\,|\mathrm{d}\tilde{\gamma}| = \int_{t=\tilde{a}}^{\tilde{b}} g(\tilde{\gamma}(t))\,|\tilde{\gamma}'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_{t=\tilde{a}}^{\tilde{b}} g(\gamma(\Phi(t)))\,|\gamma'(\Phi(t))| \cdot |\Phi'(t)|\,\mathrm{d}t$$

$$\overset{\text{Subs}}{\underset{\text{B1K}}{=}} \int_{u=a}^{b} g(\gamma(u))\,|\gamma'(u)|\,\mathrm{d}u = \int_\gamma g\,|\mathrm{d}\gamma| \quad \text{Substitution } u = \Phi(t)$$

☺ Das hatten wir erhofft! Für Arbeitsintegrale gilt entsprechend:

$$\int_{\tilde{\gamma}} f \bullet \mathrm{d}\tilde{\gamma} = \int_{t=\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(\tilde{\gamma}(t)) \bullet \tilde{\gamma}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(\gamma(\Phi(t))) \bullet \gamma'(\Phi(t))\,\Phi'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\overset{\text{Subs}}{\underset{\text{B1K}}{=}} \int_{u=\Phi(\tilde{a})}^{\Phi(\tilde{b})} f(\gamma(u)) \bullet \gamma'(u)\,\mathrm{d}u = \operatorname{sign}(\Phi') \int_\gamma f \bullet \mathrm{d}\gamma$$

⚠ Das Vorzeichen $\operatorname{sign}(\Phi') = \pm 1$ gilt, je nachdem ob die Wege γ und $\tilde{\gamma}$ gleichsinnig oder gegensinnig verlaufen. Gleiches gilt für Flussintegrale.

Umkehrung von Wegen

Zu jedem Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist der **umgekehrte Weg** $\bar\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $\bar\gamma(t) := \gamma(a+b-t)$. Anschaulich ist das die Zeitumkehr: Der Weg $\bar\gamma$ verläuft vom Ziel $\bar\gamma(a) = \gamma(b)$ zurück zum Start $\bar\gamma(b) = \gamma(a)$. Mit γ ist auch $\bar\gamma$ stetig bzw. stetig diff'bar, es gilt $\bar\Gamma = \Gamma$ und $\ell(\bar\gamma) = \ell(\gamma)$.

Beispiel: Zum positiven Umlauf $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 : \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ finden wir den umgekehrten Weg $\bar\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 : \bar\gamma(t) = (\cos t, -\sin t)$.

Aufgabe: Wie verändern sich Weg-, Arbeits- und Flussintegrale?

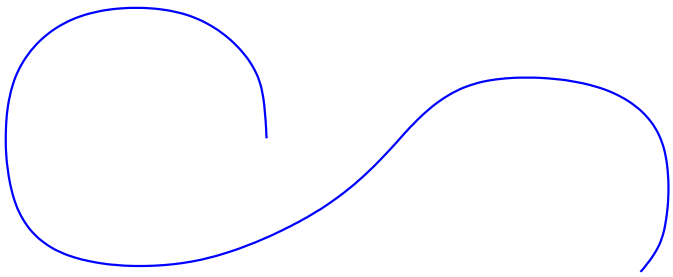
Lösung: Wegintegrale bleiben bei Wegumkehr unverändert:

$$\boxed{\int_{\bar\gamma} g\,|\mathrm{d}\bar\gamma| = \int_\gamma g\,|\mathrm{d}\gamma|.}$$

Arbeits- und Flussintegrale hingegen ändern ihr Vorzeichen:

$$\boxed{\begin{aligned} \int_{\bar\gamma} f \bullet \mathrm{d}\bar\gamma &= -\int_\gamma f \bullet \mathrm{d}\gamma, \\ \int_{\bar\gamma} f \times \mathrm{d}\bar\gamma &= -\int_\gamma f \times \mathrm{d}\gamma. \end{aligned}}$$

Nochmal zur Betonung: Weg $\neq$ Kurve



Dies ist kein Weg, sondern eine Kurve.

René Magritte (1898–1967), *La trahison des images* (Der Verrat der Bilder)

Jeder *Weg* ist eine *stetige Abbildung* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Die so beschriebene *Kurve* ist die *Menge* $\Gamma = \{\, \gamma(t) \mid a \le t \le b \,\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Beide Begriffe müssen wir fein säuberlich auseinanderhalten! Ein erster wichtiger Teil unserer Arbeit war es, diesen Unterschied zu verstehen und zu nutzen.

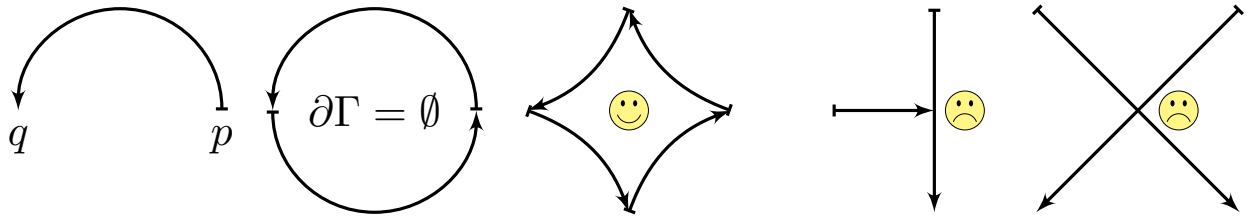
Der Grund: Für die Abbildung γ haben wir passende *Werkzeuge*. Wir fragen und beantworten: Ist die Abbildung γ stetig? Ist die Abbildung γ differenzierbar? Ist die Abbildung γ injektiv?

Hingegen ist $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nackte Menge, zunächst ohne Struktur. Für Γ hat es keinen Sinn nach Stetigkeit, Differenzierbarkeit oder Injektivität zu fragen: Dem müssen wir erst durch die Wahl einer Parametrisierung $\gamma : [a,b] \to \Gamma$ einen Sinn geben! Erst mit dem Weg γ können wir rechnen.

In der Anwendung interessieren wir uns meist nur für die Kurve Γ. Für die Berechnung von Integralen jedoch ist zusätzlich eine Parametrisierung γ notwendig. Ihre Wahl ist willkürlich, doch das Endergebnis ist glücklicherweise von der Wahl der Parametrisierung unabhängig.

Stückweise glatte Kurven

Für jede glatte Kurve $\Gamma = \gamma([a,b]) \subseteq \mathbb{R}^n$ entspricht die Wahl einer **Orientierung** einer Durchlaufungsrichtung. Gleichwertig hierzu ist die Angabe von **Startpunkt** $p = \gamma(a)$ und **Zielpunkt** $q = \gamma(b)$.
Ihr **Rand** $\partial\Gamma$ besteht dann aus $\partial_-\Gamma = \{p\}$ und $\partial_+\Gamma = \{q\}$.



Eine Teilmenge $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ nennen wir **stückweise glatte Kurve**, wenn es glatte Kurven $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ gibt, sodass $\Gamma = \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_k$ gilt.
Eine Orientierung von Γ besteht aus Orientierungen von $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$.
Zudem verlangen wir: Liegt ein $s \in \Gamma$ in mehreren Kurven Γ_k, dann nur in zweien und zwar einmal als Zielpunkt und einmal als Startpunkt.

Innere Randpunkte treten also stets doppelt auf und heben sich auf.
Die verbleibenden einzelnen Randpunkte bilden den **Rand** $\partial\Gamma$.
Im Falle $\partial\Gamma = \emptyset$ nennen wir die Kurve Γ **geschlossen**, siehe Skizze.
Für das Integral $\int_\Gamma$ schreiben wir dann auch dekorativ betonend $\oint_\Gamma$.

Integration über stückweise glatte Kurven

Definition E1G: Kurvenintegrale

Sei $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ eine **stückweise glatte Kurve**, stückweise parametrisiert durch reguläre Wege $\gamma_1 : I_1 \to \Gamma_1, \ldots, \gamma_k : I_k \to \Gamma_k$ wie oben erklärt.
Dann können wir das **Kurvenintegral** von $g : \Gamma \to \mathbb{R}$ definieren durch

$$\int_\Gamma g\,|\mathrm{d}\Gamma| := \int_{\gamma_1} g\,|\mathrm{d}\gamma_1| + \cdots + \int_{\gamma_k} g\,|\mathrm{d}\gamma_k|.$$

Für **Arbeits- und Flussintegral** sei die Kurve Γ zusätzlich **orientiert**.
Dann können wir diese Integrale für $f : \mathbb{R}^n \supseteq \Gamma \to \mathbb{R}^n$ definieren durch

$$\int_\Gamma f \bullet \mathrm{d}\Gamma := \int_{\gamma_1} f \bullet \mathrm{d}\gamma_1 + \cdots + \int_{\gamma_k} f \bullet \mathrm{d}\gamma_k,$$
$$\int_\Gamma f \times \mathrm{d}\Gamma := \int_{\gamma_1} f \times \mathrm{d}\gamma_1 + \cdots + \int_{\gamma_k} f \times \mathrm{d}\gamma_k.$$

☺ Dies ist wohldefiniert, das heißt, das Ergebnis ist unabhängig von der Wahl der Unterteilung von Γ und der Parametrisierungen $\gamma_1 \ldots, \gamma_k$.

Unterteilung von Wegen

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg.
Jeder Punkt $z \in [a,b]$ definiert eine Unterteilung des Weges γ in zwei Teilwege $\gamma_1 = \gamma|_{[a,z]}$ und $\gamma_2 = \gamma|_{[z,b]}$, kurz $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$.
Länge, Weg-, Arbeits- und Flussintegrale sind hierbei additiv:

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} g\,|\mathrm{d}\gamma| = \int_{\gamma_1} g\,|\mathrm{d}\gamma| + \int_{\gamma_2} g\,|\mathrm{d}\gamma|,$$
$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f \bullet \mathrm{d}\gamma = \int_{\gamma_1} f \bullet \mathrm{d}\gamma + \int_{\gamma_2} f \bullet \mathrm{d}\gamma,$$
$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f \times \mathrm{d}\gamma = \int_{\gamma_1} f \times \mathrm{d}\gamma + \int_{\gamma_2} f \times \mathrm{d}\gamma.$$

☺ Diese einfache Beobachtung nützt oft in konkreten Rechnungen: Je nach Bedarf können wir den Integrationsweg in Teilwege zerlegen. So wird das Gesamtproblem in mehrere kleinere Teilprobleme zerlegt.

☺ Diese Invarianz unter Verfeinerung erklärt auch, warum die oben definierten Kurvenintegrale (E1G) überhaupt wohldefiniert sind, also unabhängig von unserer (meist willkürlichen) Wahl einer Unterteilung.

Unterteilung von Kurven

Aufgabe: Vorgelegt sei eine stückweise glatte Kurve Γ mit stückweise regulärer Parametrisierung $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sowie eine zweite $\beta_1, \ldots, \beta_\ell$. Liefern beide dasselbe Ergebnis für das Kurvenintegral? Warum?

$$\int_{\alpha_1} g\,|\mathrm{d}\alpha_1| + \cdots + \int_{\alpha_k} g\,|\mathrm{d}\alpha_k| \overset{?}{=} \int_{\beta_1} g\,|\mathrm{d}\beta_1| + \cdots + \int_{\beta_\ell} g\,|\mathrm{d}\beta_\ell|$$

Lösung: Durch Einfügen von Teilungspunkten gelangen wir zu einer gemeinsamen Unterteilung $\tilde\alpha_1, \ldots, \tilde\alpha_m$ und $\tilde\beta_1, \ldots, \tilde\beta_m$. Hierbei gilt:

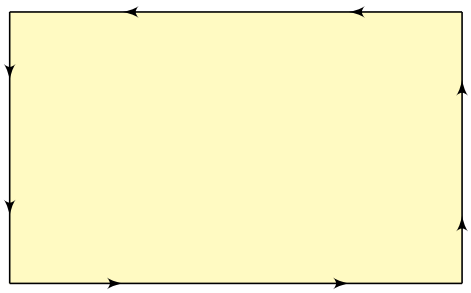
$$\int_{\alpha_1} g\,|\mathrm{d}\alpha_1| + \cdots + \int_{\alpha_k} g\,|\mathrm{d}\alpha_k| = \int_{\tilde\alpha_1} g\,|\mathrm{d}\tilde\alpha_1| + \cdots + \int_{\tilde\alpha_m} g\,|\mathrm{d}\tilde\alpha_m|$$
$$\int_{\beta_1} g\,|\mathrm{d}\beta_1| + \cdots + \int_{\beta_\ell} g\,|\mathrm{d}\beta_\ell| = \int_{\tilde\beta_1} g\,|\mathrm{d}\tilde\beta_1| + \cdots + \int_{\tilde\beta_m} g\,|\mathrm{d}\tilde\beta_m|$$

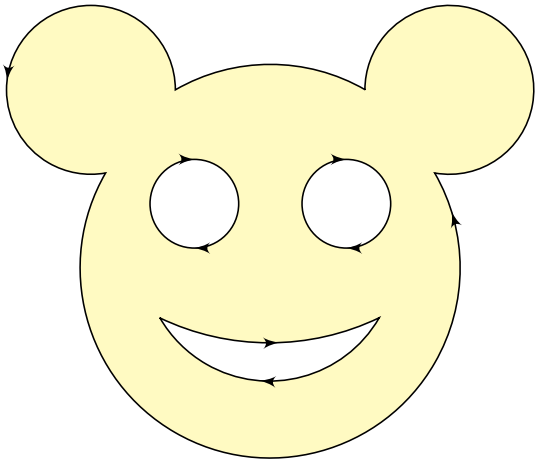
Nun sind zudem je zwei Wege $\tilde\alpha_j$ und $\tilde\beta_j$ regulär äquivalent: Dank E126 stimmen die Integrale überein, und somit auch das Gesamtergebnis.

☺ Entsprechendes gilt für Arbeits- und Flussintegrale, siehe E126.
Man beachte hierbei: Bei Orientierungsumkehr wechselt das Vorzeichen!

Ebene Kompakta mit stückweise glattem Rand

Typisches Beispiel und Modell ist
ein Rechteck $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$.





Definition E1H: Kompaktum mit stückweise glattem Rand

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt **Kompaktum mit stückweise glattem Rand**, wenn gilt:

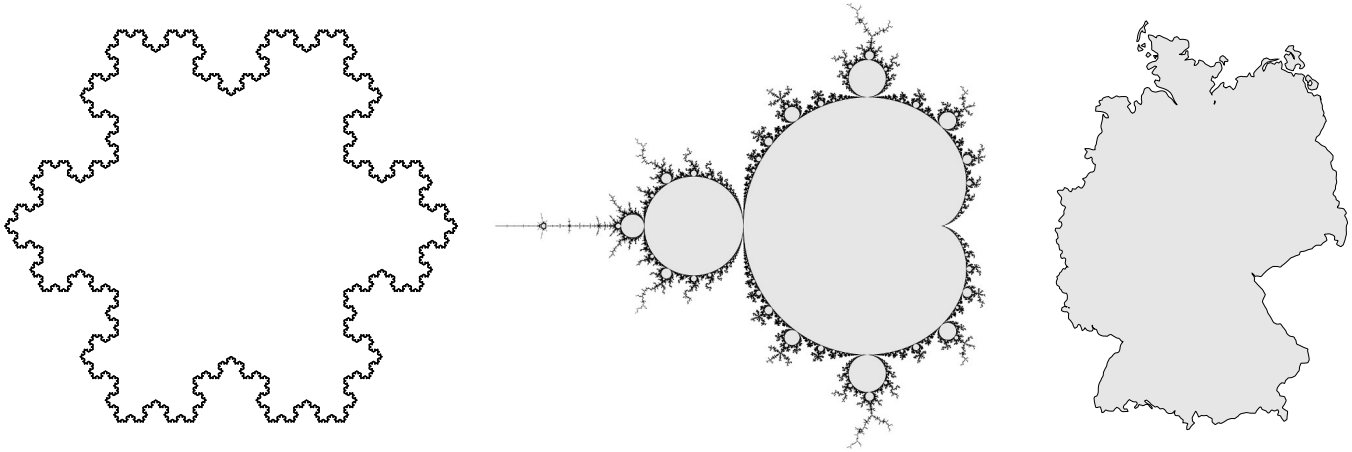
- D ist kompakt, und der Rand ∂D ist eine stückweise glatte Kurve.
- In jedem regulären Randpunkt $s \in \partial D$ liegt das Innere von D auf der einen Seite von ∂D und das Äußere auf der anderen Seite.

Der Rand ist **positiv orientiert**, wenn D stets links von ∂D liegt.

Die freundliche Stimme in der S-Bahn sagt: „on the left in the direction of travel“.

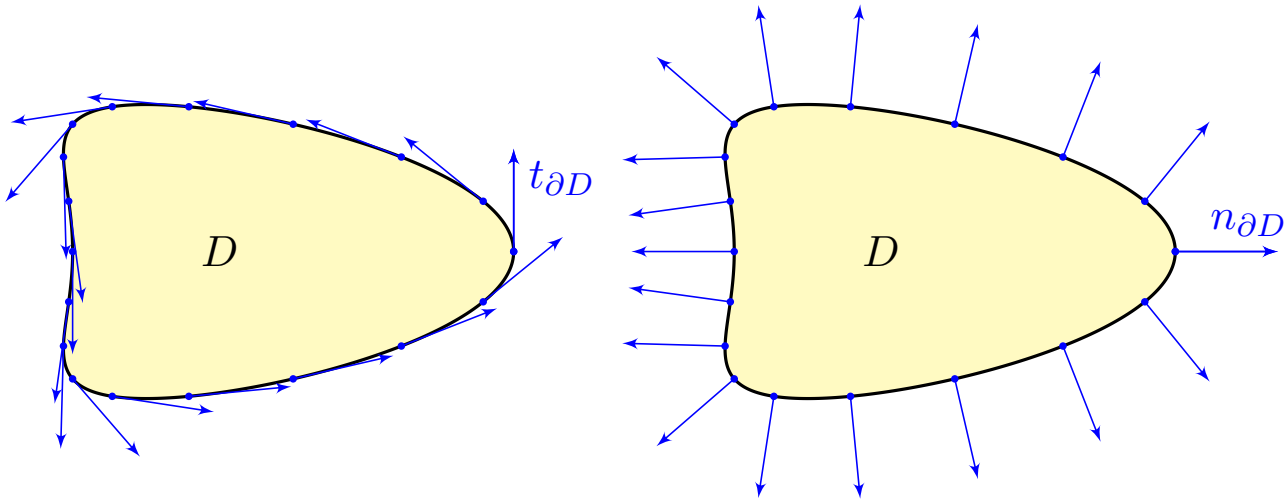
Ebene Kompakta mit stückweise glattem Rand

Erinnerung: $D \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt bedeutet beschränkt und abgeschlossen.
Halbebene $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0 \}$ und Quadrant $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0 \}$ haben zwar jeweils stückweise glatten Rand, sind aber nicht kompakt.
Es gibt auch ebene Kompakta, deren Rand nicht stückweise glatt ist:



Die Koch–Kurve und die Mandelbrot–Menge sind als Fraktale zu populärem Ruhm gelangt. Diese Objekte sind faszinierend, aber mangels Differenzierbarkeit schwierig zu behandeln; unsere Methoden reichen hierzu noch nicht. Wir konzentrieren uns daher auf Kompakta mit stückweise glattem Rand: Diese sind flexibel genug, um in Anwendungen als realistisches Modell zu dienen, aber noch einfach genug, um bequem und effizient rechnen zu können. Die Erfahrung zeigt: Als vereinfachte Näherung an eine komplexe Realität reichen sie oft aus.

Tangente und Normale



Sei $\gamma : [a, b] \to \partial D$ reguläre Parametrisierung eines Randstücks.
Ihre Orientierung sei so gewählt, dass D links von γ liegt.
Im Punkt $s = \gamma(t)$ mit $a < t < b$ definieren wir den

$$\text{Einheitstangentenvektor} \quad t_{\partial D}(s) = \frac{\mathrm{d}s}{|\mathrm{d}s|} := \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}.$$

Geometrische Charakterisierung: In $s \in \partial D$ ist der Vektor $t_{\partial D}(s)$ tangential zum Rand ∂D, hat Norm 1 und positive Umlaufrichtung.

Tangente und Normale

Zu $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist $\circlearrowright(x, y) := (y, -x)$ der um $90°$ gedrehte Vektor.
Aus dem Einheitstangentenvektor gewinnen wir so den

$$\text{Einheitsnormalenvektor} \quad n_{\partial D}(s) = \circlearrowright t_{\partial D}(s) = \frac{\circlearrowright \mathrm{d}s}{|\mathrm{d}s|} := \frac{\circlearrowright \gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}.$$

Geometrische Charakterisierung: In $s \in \partial D$ steht der Vektor $n_{\partial D}(s)$ senkrecht auf den Rand ∂D, hat Norm 1 und zeigt von D nach außen.

Tangente und -normale definieren auf dem Rand ∂D zwei Vektorfelder

$$t_{\partial D}, n_{\partial D} \;:\; \partial D \setminus \{\text{Ecken}\} \to \mathbb{R}^2.$$

Diese sind wohldefiniert, d.h. von der Parametrisierung γ unabhängig.
Das **Arbeitsintegral** und das **Flussintegral** von f über ∂D sind damit

$$\int_{s \in \partial D} f(s) \cdot \mathrm{d}s = \int_{s \in \partial D} f(s) \cdot t_{\partial D}(s)\, |\mathrm{d}s|,$$
$$\int_{s \in \partial D} f(s) \times \mathrm{d}s = \int_{s \in \partial D} f(s) \cdot n_{\partial D}(s)\, |\mathrm{d}s|.$$

Die Integralsätze von Green und Gauß

Zur Erinnerung: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ ein C^1–Vektorfeld.
Wir definieren seine **Quelldichte** oder **Divergenz** $\operatorname{div} f : \Omega \to \mathbb{R}$
sowie seine **Wirbeldichte** oder **Rotation** $\operatorname{rot} f : \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$\operatorname{div} f := \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad \operatorname{rot} f := \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}.$$

📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §5.2.
Dreidimensionale Vektorfelder behandeln wir später in Kapitel G.
Nach unseren Vorarbeiten können wir nun folgenden Satz aussprechen:

Satz E1ı: Integralsätze von Green und Gauß

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Kompaktum mit stückweise glattem Rand ∂D.
Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $f : D \to \mathbb{R}^2$ gilt dann

Satz von Green: $$\int_{(x,y)\in D} \operatorname{rot} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{s\in\partial D} f(s) \bullet \mathrm{d}s,$$

Satz von Gauß: $$\int_{(x,y)\in D} \operatorname{div} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{s\in\partial D} f(s) \times \mathrm{d}s.$$

Die Integralsätze von Green und Gauß

Diese Gleichungen nutzen alle bisher bereitgestellten Integralbegriffe:
Sie vergleichen Flächenintegrale (links) und Kurvenintegrale (rechts).
Die Gleichheit dieser beiden ist ebenso erstaunlich wie nützlich.

Wir können uns f als Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit vorstellen.
Im Punkt (x,y) beschreibt die Quelldichte $\operatorname{div} f(x,y)$, wie viel Flüssigkeit entsteht; das Flächenintegral ist somit die Quellstärke von f auf ganz D.
Das Flussintegral von f über den Rand ∂D misst, wieviel herausfließt.

☺ Beide ergeben dank Gauß denselben Wert!

Im Punkt (x,y) beschreibt $\operatorname{rot} f(x,y)$, mit welcher Winkelgeschwindigkeit eine mitschwimmende Probe rotiert. Anschaulich kann man dies durch ein kleines Schaufelrad messen. Das Flächenintegral über D ist somit die Wirbelstärke von f auf ganz D, und das Arbeitsintegral über ∂D ist die Zirkulation des Vektorfeldes f entlang des Randes ∂D.

☺ Beide ergeben dank Green denselben Wert!

Wir können diese Gleichungen nun durch Beispiele illustrieren
und durch direktes Nachrechnen sogar allgemein beweisen!

Satz von Gauß: Divergenz gleich Quelldichte

☺ Der Satz von Gauß gibt der Divergenz eine anschauliche Deutung, eine koordinatenfreie Formulierung und eine intrinsische Interpretation:

Aufgabe: Die **Divergenz** $\operatorname{div}(f)$ heißt auch **Quelldichte** von f. Warum?

Wir betrachten eine Kreisscheibe $D = \overline{B}(a, \varepsilon)$ um $a \in \mathbb{R}^2$ mit Radius $\varepsilon > 0$ und Flächeninhalt $\operatorname{vol}_2(D) = \pi\varepsilon^2$, oder zum Beispiel ein Quadrat

$$D = [a_1 - \varepsilon/2, a_1 + \varepsilon/2] \times [a_2 - \varepsilon/2, a_2 + \varepsilon/2]$$

mit Mittelpunkt $a \in \mathbb{R}^2$, Seitenlänge $\varepsilon > 0$, Flächeninhalt $\operatorname{vol}_2(D) = \varepsilon^2$.
Die **Quellstärke** des Feldes f auf D ist das Flussintegral $\int_{\partial D} f(s) \times \mathrm{d}s$.
Dies misst, wieviel f über ∂D herausfließt. Für $\varepsilon \to 0$ erhalten wir

$$\frac{1}{\operatorname{vol}_2(D)} \int_{\partial D} f(s) \times \mathrm{d}s = \frac{1}{\operatorname{vol}_2(D)} \int_D \operatorname{div} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \quad \to \quad \operatorname{div} f(a).$$

Die Divergenz $\operatorname{div}(f)$ im Punkt a misst also die **lokale Quelldichte**.
Die **globale Quellstärke** von f auf D erhalten wir durch Integration:

$$\int_D \operatorname{div} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{\partial D} f(s) \times \mathrm{d}s$$

☺ Was in dieser Gesamtbilanz entsteht, fließt über den Rand.

Satz von Green: Rotation gleich Wirbeldichte

☺ Der Satz von Green gibt der Rotation eine anschauliche Deutung, eine koordinatenfreie Formulierung und eine intrinsische Interpretation:

Aufgabe: Die **Rotation** $\operatorname{rot}(f)$ heißt auch **Wirbeldichte** von f. Warum?

Wir betrachten eine Kreisscheibe $D = \overline{B}(a, \varepsilon)$ um $a \in \mathbb{R}^2$ mit Radius $\varepsilon > 0$ und Flächeninhalt $\operatorname{vol}_2(D) = \pi\varepsilon^2$, oder zum Beispiel ein Quadrat

$$D = [a_1 - \varepsilon/2, a_1 + \varepsilon/2] \times [a_2 - \varepsilon/2, a_2 + \varepsilon/2]$$

mit Mittelpunkt $a \in \mathbb{R}^2$, Seitenlänge $\varepsilon > 0$, Flächeninhalt $\operatorname{vol}_2(D) = \varepsilon^2$.
Die **Zirkulation** des Feldes f auf D ist das Arbeitsintegral $\int_{\partial D} f(s) \bullet \mathrm{d}s$.
Dies misst, wieviel f entlang ∂D zirkuliert. Für $\varepsilon \to 0$ erhalten wir

$$\frac{1}{\operatorname{vol}_2(D)} \int_{\partial D} f(s) \bullet \mathrm{d}s = \frac{1}{\operatorname{vol}_2(D)} \int_D \operatorname{rot} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \quad \to \quad \operatorname{rot} f(a).$$

Die Rotation $\operatorname{rot}(f)$ im Punkt a misst also die **lokale Wirbeldichte**.
Die **globale Zirkulation** von f auf D erhalten wir durch Integration:

$$\int_D \operatorname{rot} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{\partial D} f(s) \bullet \mathrm{d}s$$

☺ Was in dieser Gesamtbilanz entsteht, zirkuliert entlang des Randes.

Der Integralsatz von Green

Für $D \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt mit stückweise glattem Rand ∂D besagt Green:

$$\boxed{\int_{(x,y)\in D} \operatorname{rot} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{s\in\partial D} f(s)\cdot \mathrm{d}s.}$$

Waren unsere wenigen Beispiele bisher nur Zufall? Haben wir vielleicht Ausnahmen oder nötige Voraussetzungen vergessen? Wie können wir sicher sein, dass die Gleichung wirklich immer und überall anwendbar ist? Um hierbei sicher zu gehen, sollten wir sie einmal explizit nachrechnen!

Aufgabe: Rechnen Sie die Greensche Gleichung nach...

(1) Für $f = (f_1, 0)$ horizontal und jeden Normalbereich in y–Richtung

$$D = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ g(x) \le y \le h(x) \,\}.$$

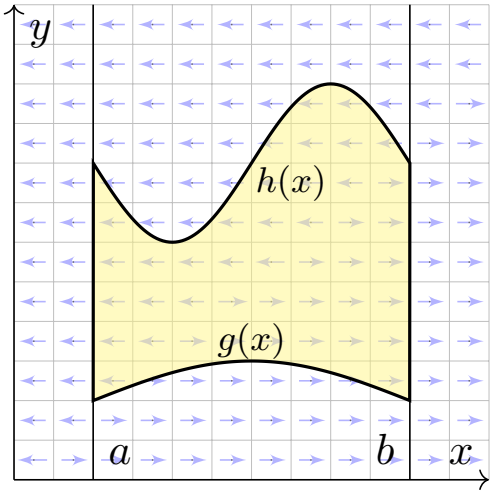
(2) Für $f = (0, f_2)$ vertikal und jeden Normalbereich in x–Richtung

$$D = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le y \le b,\ g(y) \le x \le h(y) \,\}.$$

(3) Allgemein für $f = (f_1, f_2)$ und jeden Binormalbereich $D \subseteq \mathbb{R}^2$.
Z.B. ein Rechteck, eine Kreisscheibe, jedes konvexe Kompaktum.

(4) Gilt Green für jedes Kompaktum $D \subseteq \mathbb{R}^2$, zerlegt wie in (3)?
Z.B. einen Kreisring oder eine Kreisscheibe mit mehreren Löchern.

Der Integralsatz von Green



Lösung: (1) Horizontales Vektorfeld; zum Arbeitsintegral entlang ∂D tragen hier nur unterer und oberer Rand bei.

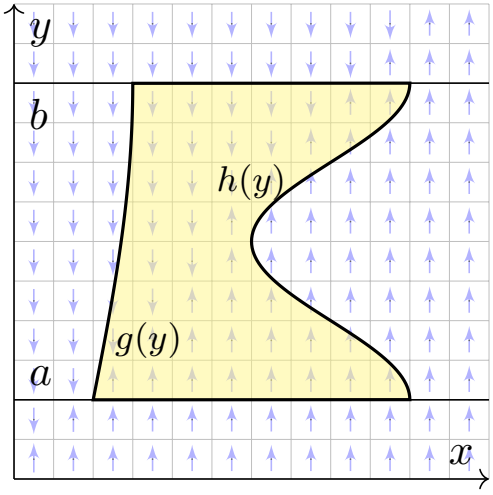
$$\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \qquad \alpha(t) = (t, g(t)), \qquad \alpha'(t) = (1, g'(t)).$$

$$\beta : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \qquad \beta(t) = (t, h(t)), \qquad \beta'(t) = (1, h'(t)).$$

Für $f = (f_1, 0) : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to \mathbb{R}^2$ folgt Green aus Fubini und dem HDI:

$$\begin{aligned}
\int_{(x,y)\in D} \operatorname{rot} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) &\overset{\text{Fub}}{\underset{\text{C1H}}{=}} \int_{x=a}^{b} \int_{y=g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \int_{x=a}^{b} f_1(x, g(x)) - f_1(x, h(x))\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Def}}{=} \int_{\alpha} f\cdot \mathrm{d}\alpha - \int_{\beta} f \cdot \mathrm{d}\beta \overset{\text{Def}}{=} \int_{\partial D} f(s)\cdot \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

Der Integralsatz von Green



(2) Ebenso für jedes vertikale Vektorfeld; zum Arbeitsintegral entlang ∂D tragen hier nur linker und rechter Rand bei.

$$\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \qquad \alpha(t) = (g(t), t), \qquad \alpha'(t) = (g'(t), 1).$$

$$\beta : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \qquad \beta(t) = (h(t), t), \qquad \beta'(t) = (h'(t), 1).$$

Für $f = (0, f_2) : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to \mathbb{R}^2$ folgt Green aus Fubini und dem HDI:

$$\int_{(x,y)\in D} \operatorname{rot} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \overset{\text{Fub}}{\underset{\text{C1H}}{=}} \int_{y=a}^{b} \int_{x=g(y)}^{h(y)} \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \int_{y=a}^{b} f_2(h(y),y) - f_2(g(y),y)\,\mathrm{d}y$$

$$\overset{\text{Def}}{=} \int_\beta f \bullet \mathrm{d}\beta - \int_\alpha f \bullet \mathrm{d}\alpha \overset{\text{Def}}{=} \int_{\partial D} f(s) \bullet \mathrm{d}s$$

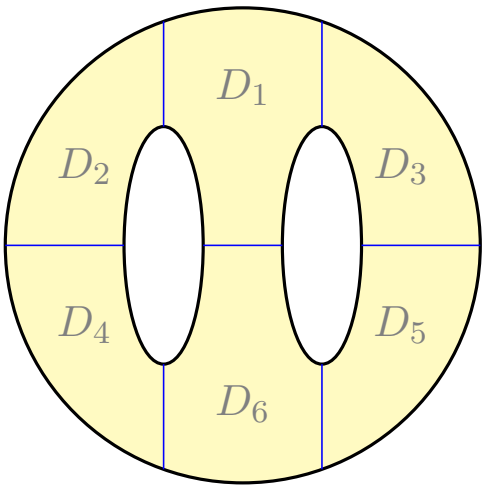
Der Integralsatz von Green

(3) Für Binormalbereiche folgt aus den Rechnungen (1) und (2):

$$\int_D \operatorname{rot}(f_1, f_2)\,\mathrm{d}(x,y) \overset{\text{Lin}}{\underset{\text{A3L}}{=}} \int_D \operatorname{rot}(f_1, 0)\,\mathrm{d}(x,y) + \int_D \operatorname{rot}(0, f_2)\,\mathrm{d}(x,y)$$

$$\overset{(1,2)}{=} \int_{\partial D} (f_1, 0) \bullet \mathrm{d}s + \int_{\partial D} (0, f_2) \bullet \mathrm{d}s \overset{\text{Lin}}{\underset{\text{A3L}}{=}} \int_{\partial D} (f_1, f_2) \bullet \mathrm{d}s$$

(4) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Kompaktum mit stückweise glattem Rand ∂D.



Wir zerlegen D in Binormalbereiche D_k:

$$\int_D \operatorname{rot}(f)\,\mathrm{d}(x,y) \overset{\text{Lin}}{\underset{\text{A4C}}{=}} \sum_k \int_{D_k} \operatorname{rot}(f)\,\mathrm{d}(x,y)$$

$$\overset{(3)}{=} \sum_k \int_{\partial D_k} f(s) \bullet \mathrm{d}s \overset{!}{=} \int_{\partial D} f(s) \bullet \mathrm{d}s$$

⚠ Arbeitsintegrale längs innerer Kanten sind gegenläufig und heben sich paarweise auf!

☺ Somit gilt der Satz von Green auch für D.

Der Integralsatz von Gauß

Für $D \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt mit stückweise glattem Rand ∂D besagt Gauß:

$$\boxed{\int_{(x,y)\in D} \operatorname{div} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{s\in\partial D} f(s) \times \mathrm{d}s.}$$

Waren unsere wenigen Beispiele bisher nur Zufall? Haben wir vielleicht Ausnahmen oder nötige Voraussetzungen vergessen? Wie können wir sicher sein, dass die Gleichung wirklich immer und überall anwendbar ist? Um hierbei sicher zu gehen, sollten wir sie einmal explizit nachrechnen!

Aufgabe: Rechnen Sie die Gaußsche Gleichung nach...

(1) Für $f = (0, f_2)$ vertikal und jeden Normalbereich in y–Richtung

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \le x \le b,\ g(x) \le y \le h(x) \right\}.$$

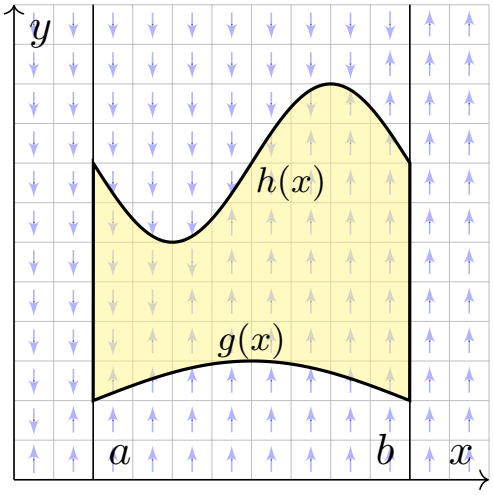
(2) Für $f = (f_1, 0)$ horizontal und jeden Normalbereich in x–Richtung

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \le y \le b,\ g(y) \le x \le h(y) \right\}.$$

(3) Allgemein für $f = (f_1, f_2)$ und jeden Binormalbereich $D \subseteq \mathbb{R}^2$.
Z.B. ein Rechteck, eine Kreisscheibe, jedes konvexe Kompaktum.

(4) Gilt Gauß für jedes Kompaktum $D \subseteq \mathbb{R}^2$, zerlegt wie in (3)?
Z.B. einen Kreisring oder eine Kreisscheibe mit mehreren Löchern.

Der Integralsatz von Gauß



Lösung: (1) Vertikales Vektorfeld; zum Flussintegral über ∂D tragen hier nur unterer und oberer Rand bei.

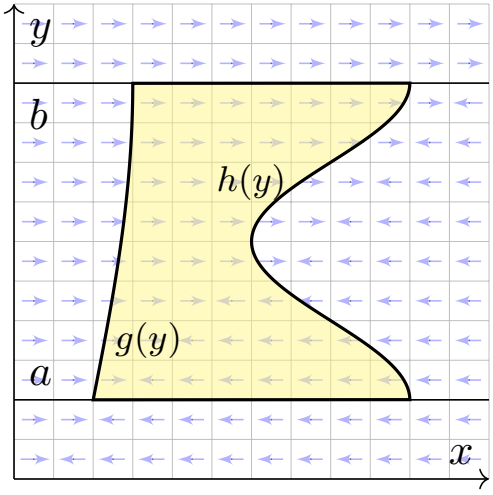
$$\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \qquad \alpha(t) = (t, g(t)), \qquad \alpha'(t) = (1, g'(t)).$$

$$\beta : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \qquad \beta(t) = (t, h(t)), \qquad \beta'(t) = (1, h'(t)).$$

Für $f = (0, f_2) : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to \mathbb{R}^2$ folgt Gauß aus Fubini und dem HDI:

$$\begin{aligned}
\int_{(x,y)\in D} \operatorname{div} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) &\overset{\text{Fub}}{\underset{\text{C1H}}{=}} \int_{x=a}^{b} \int_{y=g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \int_{x=a}^{b} f_2(x,h(x)) - f_2(x,g(x))\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Def}}{=} \int_{\alpha} f \times \mathrm{d}\alpha - \int_{\beta} f \times \mathrm{d}\beta \overset{\text{Def}}{=} \int_{\partial D} f(s) \times \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

Der Integralsatz von Gauß



(2) Ebenso für jedes horizontale Vektorfeld; zum Flussintegral von f über ∂D tragen hier nur linker und rechter Rand bei.

$$\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \qquad \alpha(t) = (g(t), t), \qquad \alpha'(t) = (g'(t), 1).$$

$$\beta : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \qquad \beta(t) = (h(t), t), \qquad \beta'(t) = (h'(t), 1).$$

Für $f = (f_1, 0) : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to \mathbb{R}^2$ folgt Gauß aus Fubini und dem HDI:

$$\int_{(x,y)\in D} \operatorname{div} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \overset{\text{Fub}}{\underset{\text{C1H}}{=}} \int_{y=a}^{b} \int_{x=g(y)}^{h(y)} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \int_{y=a}^{b} f_1(h(y),y) - f_1(g(y),y)\,\mathrm{d}y$$

$$\overset{\text{Def}}{=} \int_\beta f \times \mathrm{d}\beta - \int_\alpha f \times \mathrm{d}\alpha \overset{\text{Def}}{=} \int_{\partial D} f(s) \times \mathrm{d}s$$

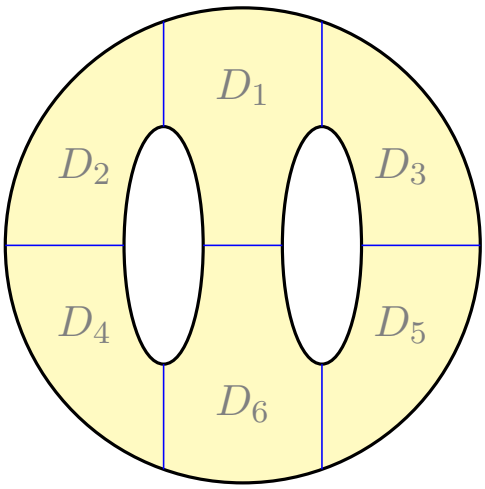
Der Integralsatz von Gauß

(3) Für Binormalbereiche folgt aus den Rechnungen (1) und (2):

$$\int_D \operatorname{div}(f_1, f_2)\,\mathrm{d}(x,y) \overset{\text{Lin}}{\underset{\text{A3L}}{=}} \int_D \operatorname{div}(f_1, 0)\,\mathrm{d}(x,y) + \int_D \operatorname{div}(0, f_2)\,\mathrm{d}(x,y)$$

$$\overset{(1,2)}{=} \int_{\partial D} (f_1, 0) \times \mathrm{d}s + \int_{\partial D} (0, f_2) \times \mathrm{d}s \overset{\text{Lin}}{\underset{\text{A3L}}{=}} \int_{\partial D} (f_1, f_2) \times \mathrm{d}s$$

(4) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Kompaktum mit stückweise glattem Rand ∂D.



Wir zerlegen D in Binormalbereiche D_k:

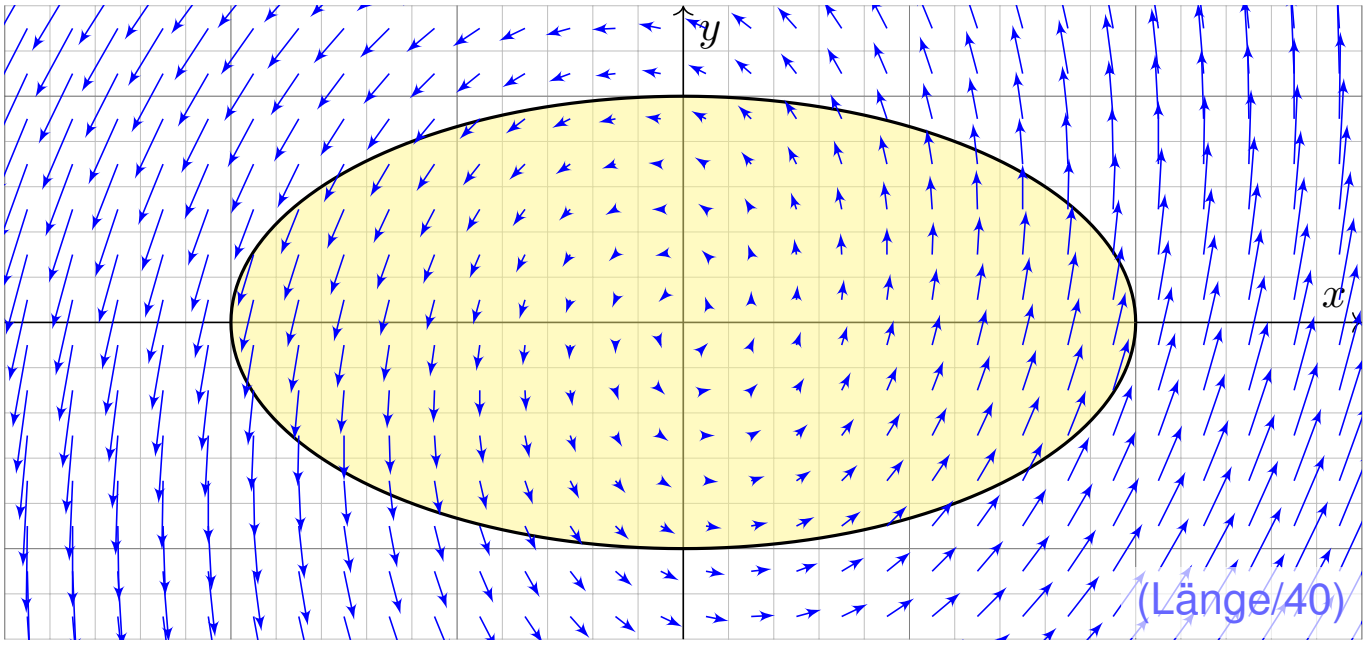
$$\int_D \operatorname{div}(f)\,\mathrm{d}(x,y) \overset{\text{Lin}}{\underset{\text{A4C}}{=}} \sum_k \int_{D_k} \operatorname{div}(f)\,\mathrm{d}(x,y)$$

$$\overset{(3)}{=} \sum_k \int_{\partial D_k} f(s) \times \mathrm{d}s \overset{!}{=} \int_{\partial D} f(s) \times \mathrm{d}s$$

⚠ Flussintegrale längs innerer Kanten sind gegenläufig und heben sich paarweise auf!

☺ Somit gilt der Satz von Gauß auch für D.

Anwendungsbeispiel zu Gauß und Green



Aufgabe: (1) Skizzieren Sie das ebene Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x, y) = (x - 3y, 5x + y)$$

sowie die Kurve $\Gamma = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 = 4 \}$. Berechnen Sie (2) das Flussintegral sowie (3) das Arbeitsintegral von f über Γ.

Anwendungsbeispiel zu Gauß und Green

Lösung: Wir wählen eine Parametrisierung für die Ellipse Γ, etwa

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \Gamma, \quad \gamma(t) = (2\cos t, \sin t), \quad \gamma'(t) = (-2\sin t, \cos t).$$

Sie berandet $D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 4 \}$ mit $\mathrm{vol}_2(D) = 2\pi$. (Transformationssatz: Streckung um den Faktor 2 in x–Richtung.)

(2) Für das Flussintegral von f über Γ nach außen erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma f \times \mathrm{d}\Gamma &\overset{\text{Param}}{=} \int_\gamma f \times \mathrm{d}\gamma \overset{\text{Param}}{=} \int_{t=0}^{2\pi} f(\gamma(t)) \times \gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Param}}{=} \int_{t=0}^{2\pi} \begin{pmatrix} 2\cos t - 3\sin t \\ 10\cos t + \sin t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_{t=0}^{2\pi} 2\cos(t)^2 + 2\sin(t)^2 + 17\sin t\cos t\,\mathrm{d}t \quad = \quad 4\pi
\end{aligned}$$

Leichter mit Gauß: Dank konstanter Divergenz $\mathrm{div}(f) = 2$ erhalten wir

$$\int_{\partial D} f(s) \times \mathrm{d}s \overset{\text{Gauß}}{\underset{\text{E11}}{=}} \int_D \mathrm{div}(f)\,\mathrm{d}(x, y) \quad = \quad 2\,\mathrm{vol}_2(D) \quad = \quad 4\pi.$$

Anwendungsbeispiel zu Gauß und Green

(3) Für das Arbeitsintegral von f längs Γ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma f \cdot \mathrm{d}\Gamma &\overset{\text{Param}}{=} \int_\gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma \overset{\text{Param}}{=} \int_{t=0}^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Param}}{=} \int_{t=0}^{2\pi} \begin{pmatrix} 2\cos t - 3\sin t \\ 10\cos t + \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_{t=0}^{2\pi} 6\sin(t)^2 + 10\cos(t)^2 - 3\sin t\cos t\,\mathrm{d}t \quad = \quad 16\pi
\end{aligned}$$

☺ Erinnerung $\int_{t=0}^{2\pi} \sin(t)^2 = \int_{t=0}^{2\pi} \cos(t)^2 = \pi$ und $\int_{t=0}^{2\pi} \sin(t)\cos(t) = 0$.

⚠ Hierbei orientieren wir die Kurve Γ positiv, das umlaufene Gebiet liegt also stets links der Kurve. Bei umgekehrter Durchlaufung wechselt das Arbeitsintegral sein Vorzeichen, statt $+16\pi$ erhielten wir also -16π.

Leichter mit Green: Dank konstanter Rotation $\operatorname{rot}(f) = 8$ erhalten wir

$$\int_{\partial D} f(s) \cdot \mathrm{d}s \overset{\text{Green}}{\underset{\text{E11}}{=}} \int_D \operatorname{rot}(f)\,\mathrm{d}(x,y) \quad = \quad 8\,\mathrm{vol}_2(D) \quad = \quad 16\pi.$$

Anwendungsbeispiel zu Gauß und Green

☺ Dank der Integralsätze können wir uns jeweils aussuchen, ob wir lieber ein Flächenintegral oder ein Kurvenintegral ausrechnen wollen. Je nach Anwendung kann das eine oder das andere vorteilhaft sein. Das ist die Stärke und der Nutzen unserer Integralsätze!

☺ Plausibilitätsprüfung: Den exakten Wert des Integrals können wir jeweils nur durch Ausrechnen gewinnen, aber das richtige Vorzeichen können wir in diesem Beispiel bereits an der obigen Skizze erkennen! Bitte nutzen Sie dies, um Rechenfehler zu erkennen und zu vermeiden.

☺ Das Ergebnis der Kurvenintegrale über die Kurve Γ ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung $\gamma : [a,b] \to \Gamma$. Das ist wesentlich: Andere Parametrisierungen $\tilde\gamma : [\tilde a, \tilde b] \to \Gamma$ sind ebenso möglich, gehen andere Rechenwege, doch enden alle schließlich beim selben Ergebnis.

⚠ Bitte beachten Sie, dass wir $\Gamma = \partial D$ stets positiv orientieren! Nur so erhalten wir das Flussintegral über Γ nach außen und passend dazu das Arbeitsintegral längs Γ in positivem Umlaufsinn, wie vereinbart. Umgekehrte Orientierung / Durchlaufung kehrt das Vorzeichen um!

Schreibweise als Differentialform

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Kompaktum mit stückweise glattem Rand ∂D.
Für alle stetig differenzierbaren Vektorfelder $f, g : D \to \mathbb{R}^2$ gilt:

Satz von Green: $$\int_{(x,y)\in D} \operatorname{rot} g(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{s\in\partial D} g(s) \bullet \mathrm{d}s,$$

Satz von Gauß: $$\int_{(x,y)\in D} \operatorname{div} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{s\in\partial D} f(s) \times \mathrm{d}s.$$

Den Rand ∂D parametrisieren wir (stückweise) durch $\gamma : [a,b] \to \partial D$.
Für $s = (x,y) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ gilt $\mathrm{d}s = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = (\gamma_1'(t)\,\mathrm{d}t, \gamma_2'(t)\,\mathrm{d}t)$.
Wir erhalten so die äquivalente Schreibweise als Differentialform:

Green: $$\int_{(x,y)\in D} \frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y}\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{(x,y)\in\partial D} g_1\,\mathrm{d}x + g_2\,\mathrm{d}y,$$

Gauß: $$\int_{(x,y)\in D} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{(x,y)\in\partial D} f_1\,\mathrm{d}y - f_2\,\mathrm{d}x.$$

☺ Beide Sätze sind äquivalent mittels $(g_1, g_2) = \circlearrowleft(f_1, f_2) = (-f_2, f_1)$.

Schreibweise als Differentialform

Die Integralsätze sind eine bemerkenswerte Gesetzmäßigkeit:
Das Flächenintegral über den gesamten Bereich D lässt sich durch das entsprechende Wegintegral entlang des Randes ∂D bestimmen!

Zur Berechnung von Integralen können wir daher beide ausspielen:
Ist das Flächenintegral einfacher, so nutzen wir ersteres.
Ist das Randintegral einfacher, so nutzen wir zweiteres.

Die Schreibweise als Differentialform ist häufig bequem und wird daher in vielen Anwendungen verwendet, wie z.B. in der Thermodynamik.
Wir nutzen hierbei die Konvention $\mathrm{d}s = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = (\gamma_1'(t)\,\mathrm{d}t, \gamma_2'(t)\,\mathrm{d}t)$.
Das ergibt sich ganz natürlich aus $s = (x,y) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$.
Die Schreiweise $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ ist daher bequem und üblich.

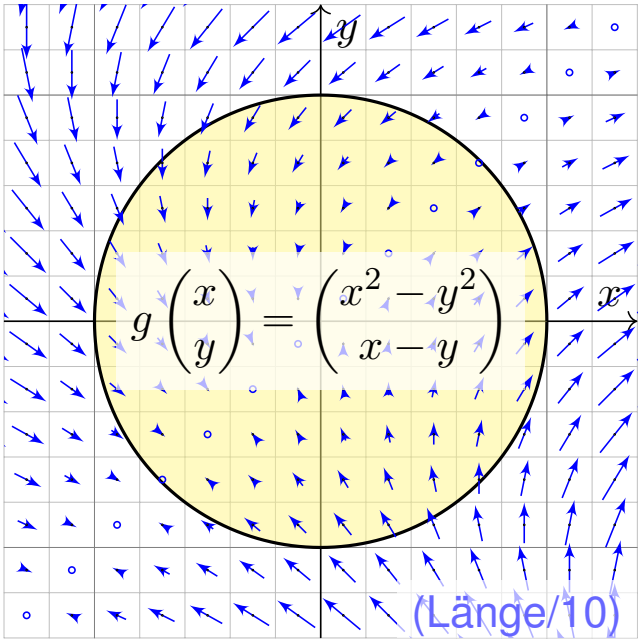
In der Ebene sind beide Sätze offensichtlich äquivalent. Die Sätze von Gauß und Stokes im Raum behandeln wir im übernächsten Kapitel G.
Im $\mathbb{R}^3$ unterscheiden sich Arbeitsintegrale über Kurven (Dimension 1) deutlich von Flussintegralen über Flächen (Wände, Codimension 1).
In der Ebene $\mathbb{R}^2$ hingegen fallen beide Sichtweisen zusammen.

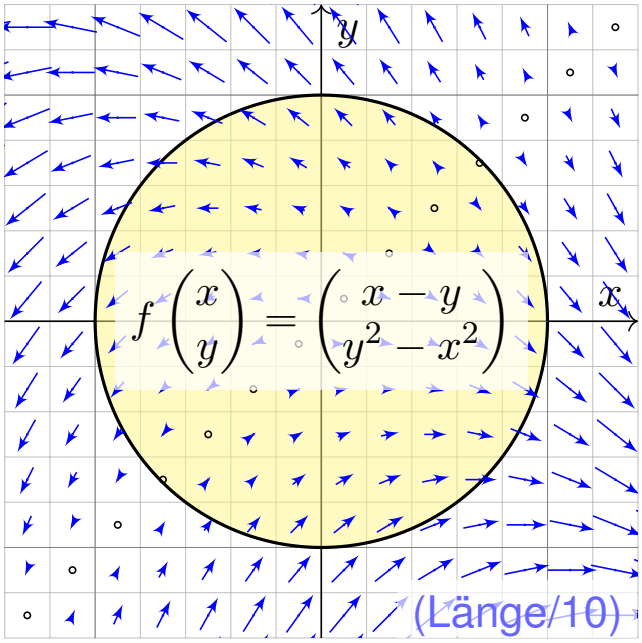
Anwendungsbeispiel zu Differentialformen

Aufgabe: Für $D = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1 \,\}$ berechne man

$$\int_{(x,y)\in\partial D} \underbrace{(x^2 - y^2)}_{= g_1 = -f_2}\, \mathrm{d}x + \underbrace{(x-y)}_{= g_2 = f_1}\, \mathrm{d}y$$

Skizze: Zwei Interpretationen, als Arbeitsintegral und als Flussintegral:





Anwendungsbeispiel zu Differentialformen

Randintegral: Wir wählen $\gamma : [-\pi, \pi] \to \partial D$ mit $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$.
Hieraus folgt $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$, also $\mathrm{d}x = -\sin t\, \mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y = \cos t\, \mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial D} (x^2 - y^2)\, \mathrm{d}x + (x-y)\, \mathrm{d}y \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(t)^2 - \sin(t)^2)\,(-\sin t) + (\cos t - \sin t)\,\cos t\, \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} -\underbrace{\cos(t)^2 \sin(t)}_{\text{ungerade}} + \underbrace{\sin(t)^3}_{\text{ungerade}} + \cos(t)^2 - \underbrace{\sin(t)\cos(t)}_{\text{ungerade}}\, \mathrm{d}t = \pi
\end{aligned}$$

Rechentrick: Ungerade Integranden liefern über $[-\pi, \pi]$ das Integral Null.
Auch $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)^2\, \mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)^2\, \mathrm{d}t = \pi$ können Sie geometrisch sehen.

Flächenintegral: Mit Green / Gauß und Polarkoordinaten erhalten wir

$$\int_{(x,y)\in\partial D} \underbrace{(x^2 - y^2)}_{= g_1 = -f_2}\, \mathrm{d}x + \underbrace{(x-y)}_{= g_2 = f_1}\, \mathrm{d}y = \int_D \underbrace{1 + 2y}_{= \operatorname{rot} g = \operatorname{div} f}\, \mathrm{d}(x,y)$$

$$= \int_{\rho=0}^{1} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (1 + 2\rho \sin\varphi)\, \rho\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}\rho = 2\pi \int_{\rho=0}^{1} \rho\, \mathrm{d}\rho = \pi$$

Flächeninhalt berechnen entlang der Randkurve

Aufgabe: (1) Berechnen Sie die Rotation der ebenen Vektorfelder

$$f(x,y) = (0,x), \qquad g(x,y) = (-y,0), \qquad h(x,y) = \frac{1}{2}(-y,x).$$

(2) Wie berechnen Sie hiermit zu einem (einfach geschlossenen) Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ den Flächeninhalt des umlaufenen Bereichs $D \subseteq \mathbb{R}^2$?

Lösung: (1) Wir finden $\operatorname{rot}(f) = 1$. (2) Dank des Satzes von Green folgt:

$$\operatorname{vol}_2(D) = \int_D \operatorname{rot}(f)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{\partial D} f(s) \bullet \mathrm{d}s = \int_{\partial D} x\,\mathrm{d}y = \int_{t=a}^{b} \gamma_1(t)\,\gamma_2'(t)\,\mathrm{d}t$$

Hier ist $s = (x,y) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ und $\mathrm{d}s = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = (\gamma_1'(t)\,\mathrm{d}t, \gamma_2'(t)\,\mathrm{d}t)$. Ebenso $\operatorname{rot}(g) = 1$ und $\operatorname{rot}(h) = 1$. Wir erhalten folgende drei Formeln:

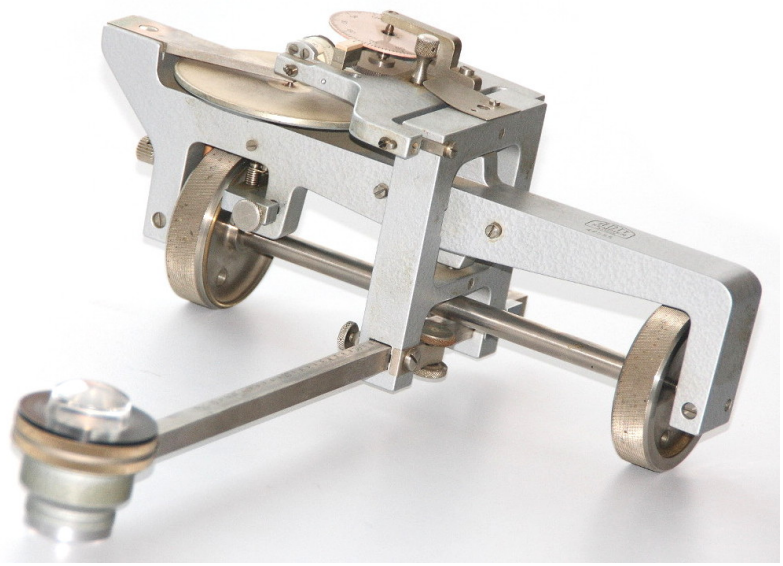
Satz E2A: Greensche Flächenformeln

Für jedes Kompaktum $D \subseteq \mathbb{R}^2$ mit stückweise glattem Rand ∂D gilt

$$\boxed{\operatorname{vol}_2(D) = \int_{\partial D} x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial D} -y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x.}$$

Flächeninhalt messen entlang der Randkurve

Greens Flächenformeln sind ein schöner und bemerkenswerter Satz: Die umlaufene Fläche lässt sich bestimmen allein aus der Randkurve!

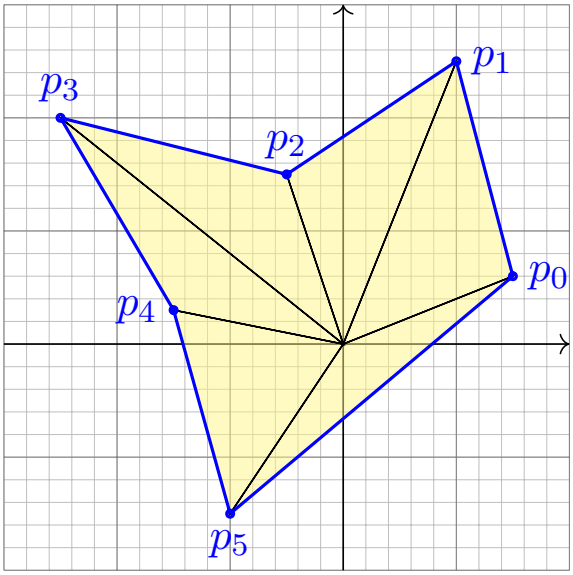


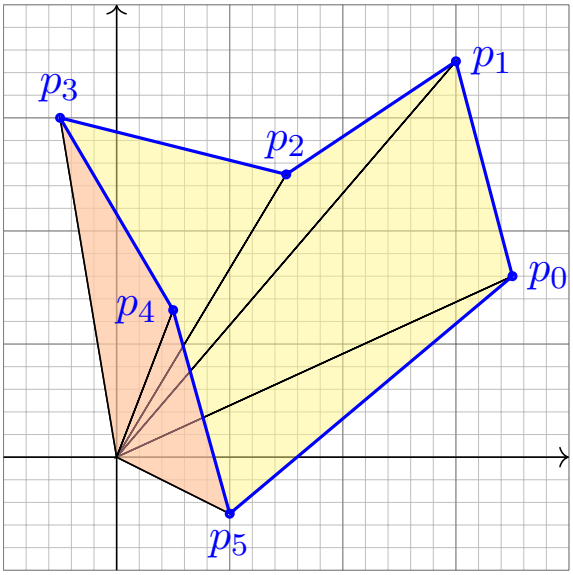
Bildquelle: wikimedia.org

Ein **Planimeter** ermittelt Flächeninhalte, z.B. auf einer Landkarte, indem man den Rand der zu messenden Fläche mit einem Fahrstift abfährt. Dabei integriert eine geeignete Mechanik präzise den Flächeninhalt! Sie können es sogar selbst bauen, siehe YouTube > lego planimeter

Algorithmus: die Flächenformel für Polygone

CAD-Programme nutzen die Greenschen Flächenformeln ebenfalls: Hierzu betrachten wir den Polygonzug $\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & n \\ p_0 & p_1 & \dots & p_n \end{bmatrix}$ mit Eckpunkten $p_1, p_2, \dots, p_n = p_0 \in \mathbb{R}^2$, einfach geschlossenen und positiv orientiert. Für den umschlossenen Flächeninhalt suchen wir einfache Formeln.





Aufgabe: Übersetzen Sie Greens Flächenintegrale in Summen. Lässt sich das Ergebnis elementar-geometrisch begründen?

Algorithmus: die Flächenformel für Polygone

Lösung: Der Flächeninhalt des umschlossenen Bereichs D ist E027:

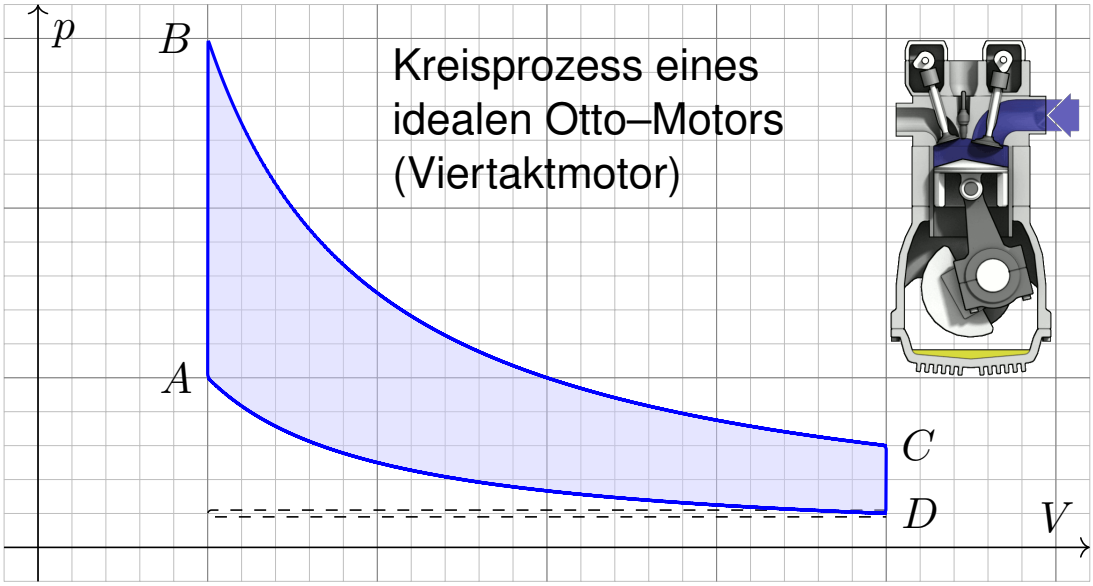
$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_2(D) &= \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x &&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} p_k \times (p_{k+1} - p_k) && (1) \\ &= \int_{\partial D} x\,\mathrm{d}y &&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1}) \cdot (y_{k+1} - y_k) && (2) \\ &= \int_{\partial D} -y\,\mathrm{d}x &&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(y_k + y_{k+1}) \cdot (x_k - x_{k+1}) && (3) \end{aligned}$$

(1) Die orientierte Fläche des Dreiecks $[0, p_k, p_{k+1}]$ ist $\frac{1}{2} p_k \times (p_{k+1} - p_k)$. Positiv orientierte Dreiecke liefern einen positiven Flächeninhalt (gelb), Negativ orientierte Dreiecke liefern einen negativen Flächeninhalt (rot).

(2) Dies erhält man durch Integration längs des Weges γ, oder direkt: Hierbei ist $\frac{1}{2}(x_k + x_{k+1}) \cdot (y_{k+1} - y_k)$ nämlich die orientierte Fläche des Trapezes mit Eckpunkten (x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1}), $(x_{k+1}, 0)$, $(x_k, 0)$.

(3) Dies ist Fall (2) mit Trapezen über der y–Achse statt der x–Achse.

Arbeitsintegrale in der Thermodynamik



Bei einer Volumenänderung $\mathrm{d}V$ wird die Arbeit $\mathrm{d}W = p\,\mathrm{d}V$ verrichtet. Beim Prozess $\gamma : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n : t \mapsto (p(t), V(t), \dots)$ also insgesamt

$$W = \int_\gamma \mathrm{d}W = \int_\gamma p\,\mathrm{d}V = \int_{t=t_0}^{t_1} p(t)\,V'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Bei einem **Kreisprozess** gilt $\gamma(t_1) = \gamma(t_0)$. Die dabei geleistete Arbeit W ist der Flächeninhalt des umlaufenen Bereichs in der V–p–Ebene.

Arbeitsintegrale in der Thermodynamik

Der Kreisprozess eines **Otto–Motors** verläuft idealisiert wie skizziert:
Verdichten: Der Kolben komprimiert Kraftstoff-Luft-Gemisch von D bis A.
Arbeitstakt: Bei A wird das Gas gezündet, der Druck steigt schlagartig bis B an, dadurch dehnt sich der Kolben bis C aus und verrichtet Arbeit.
Zwei weitere Takte: Ausstoß des Abgases, Ansaugen des Gemisches.

Der **Wirkungsgrad** des Motors ist die geleistete Arbeit dividiert durch die eingesetzte Verbrennungsenergie, also den Treibstoffverbrauch.

Den Zustand des Systems zur Zeit $t \in [t_0, t_1]$ beschreiben wir dabei durch den Druck $p(t)$, das Volumen $V(t)$ und evtl. weitere Größen.

Eine **Zustandsfunktion** hängt nur vom Zustand des Systems ab, nicht jedoch von der Historie, also dem durchlaufenen Weg: Zum Beispiel ist die Wärmeenergie eines idealen Gases gleich $U = \frac{3}{2}pV = \frac{3}{2}\nu RT$.
Hier ist $U =$ Wärmemenge, $p =$ Druck, $V =$ Volumen, $\nu =$ Stoffmenge, $R =$ universelle Gaskonstante, $T =$ absolute Temperatur. Der Faktor $3/2$ entspricht der mikroskopischen Struktur eines einatomigen Gases.

Eine **Prozessfunktion** hingegen hängt vom durchlaufenen Weg ab, wie zum Beispiel die geleistete Arbeit W in der obigen Formel.

Schreibweise als Differentialformen

Die Schreibweise des Punktes $s = (x, y) \in \Gamma$ und des infinitesimalen Kurvenelementes $\mathrm{d}s = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$ als Differentialform längs der Kurve Γ ist in Anwendungen wie der Thermodynamik bequem und nützlich.

Dies hat einen einfachen aber wichtigen Grund. Prof. Hermann Karcher (Universität Bonn) erklärte das Problem und seine Lösung sehr treffend in seiner Notiz *Differentialformen für die Thermodynamik*:

> *Die Vektoranalysis lebt davon, dass wir den Raum $\mathbb{R}^3$ nicht bloß als Vektorraum, sondern als euklidischen Raum, mit einem Skalarprodukt, betrachten und nutzen können. In der Thermodynamik gibt es jedoch kein Skalarprodukt, das eine physikalische Bedeutung hätte. Deshalb können Kurvenintegrale nicht Integranden haben, die Skalarprodukt aus einem Vektorfeld mit dem Tangentialvektor der Kurve sind. Wir müssen daher lernen, die Ableitung von Funktionen und deren Anwendung auf Tangentialvektoren von Kurven ohne ein bequemes Skalarprodukt zu beschreiben. Genau hierzu dienen Differentialformen.*

☺ Darum ist diese Notation so beliebt: Sie ist präzise und bequem.

Schwerpunkt des umlaufenen Bereichs

Aufgabe: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Kompaktum mit stückweise glattem Rand. Für seinen Schwerpunkt $s_D = (x_D, y_D)$ zeige man mit Green (E1I):

$$\boxed{\begin{aligned} x_D &= \frac{-1}{\mathrm{vol}_2(D)} \int_{\partial D} xy \,\mathrm{d}x = \frac{-1}{\mathrm{vol}_2(D)} \int_{t=a}^{b} \gamma_1(t)\,\gamma_2(t)\,\gamma_1'(t)\,\mathrm{d}t, \\ y_D &= \frac{1}{\mathrm{vol}_2(D)} \int_{\partial D} xy \,\mathrm{d}y = \frac{1}{\mathrm{vol}_2(D)} \int_{t=a}^{b} \gamma_1(t)\,\gamma_2(t)\,\gamma_2'(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}}$$

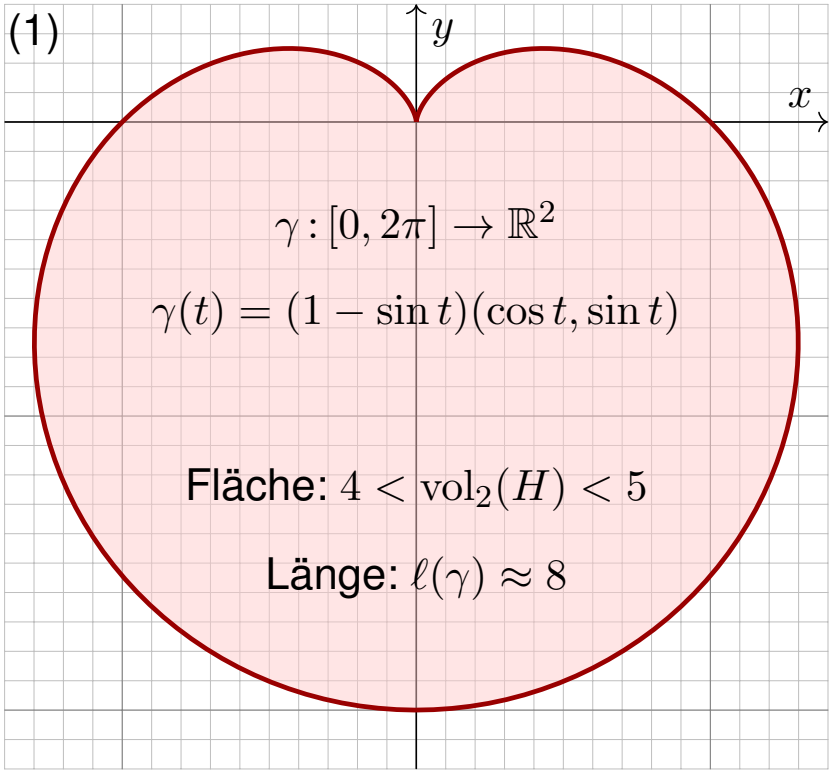
Lösung: Dank des Satzes von Green finden wir

$$\begin{aligned} -\int_{\partial D} xy \,\mathrm{d}x &= \int_{\partial D} (-xy, 0) \bullet (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) \overset{\text{Green}}{\underset{\text{E1I}}{=}} \int_D \mathrm{rot}(-xy, 0)\,\mathrm{d}(x, y) \\ &= \int_D x \,\mathrm{d}(x, y) \qquad\qquad = x_D \cdot \mathrm{vol}_2(D), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} xy \,\mathrm{d}y &= \int_{\partial D} (0, xy) \bullet (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) \overset{\text{Green}}{\underset{\text{E1I}}{=}} \int_D \mathrm{rot}(0, xy)\,\mathrm{d}(x, y) \\ &= \int_D y \,\mathrm{d}(x, y) \qquad\qquad = y_D \cdot \mathrm{vol}_2(D). \end{aligned}$$

Herzkurve / Kardioide

Aufgabe: (1) Zeichnen Sie $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (1 - \sin t)(\cos t, \sin t)$.
Welche Werte schätzen Sie hieraus für Länge und Flächeninhalt?



Heutzutage nutzt man Computer zur numerischen Approximation. Früher löste man solche Quadraturaufgaben näherungsweise so: Man zeichne die Figur, schneide sie aus und wiege sie sorgfältig. Das Gewicht ist dann der gesuchte Flächeninhalt mal Gewicht pro Einheitsfläche (üblich $80\mathrm{g}/\mathrm{m}^2$).

Herzkurve / Kardioide

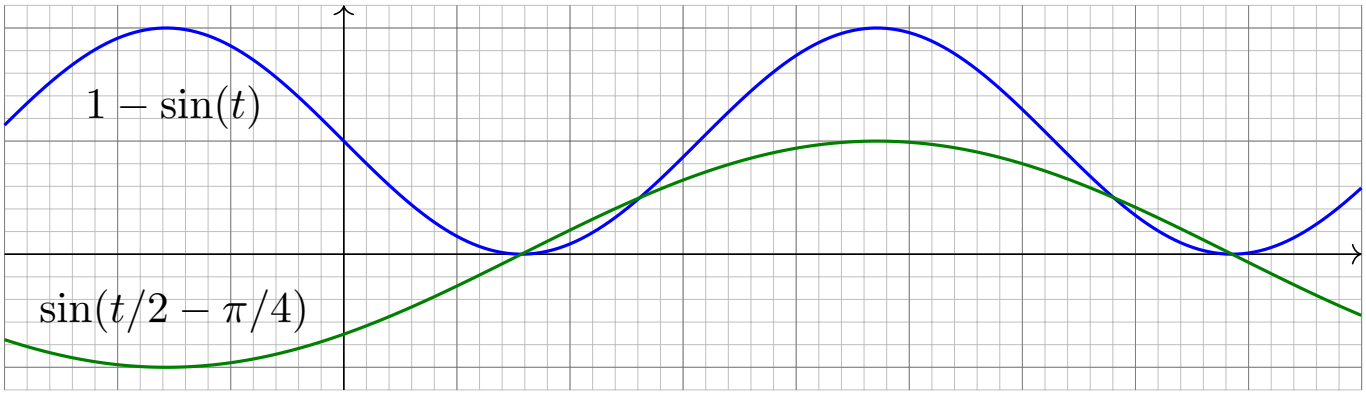
Aufgabe: (1) Zeichnen Sie $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (1 - \sin t)(\cos t, \sin t)$.

(2) Berechnen Sie die Länge der Kurve $\Gamma = \{\, \gamma(t) \mid 0 \le t \le 2\pi \,\}$.

(3) Ist der umlaufene Bereich $H \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich?

(4) Berechnen Sie den Flächeninhalt $\mathrm{vol}_2(H)$. Welche Methode ist hierzu am geschicktesten: Fubini? Transformation? Green?

Hinweis: Sie können $1 - \sin(t) = 2\sin(t/2 - \pi/4)^2$ zeigen und nutzen.



Wie findet man diese Gleichung? Die Skizze zu $1 - \sin(t)$ lässt sie erahnen. Wie prüft man sie? Sie finden $2\sin(x)\sin(y) = \cos(x - y) - \cos(x + y)$ in Ihrer Liste der trigonometrischen Additionstheoreme und erhalten so $2\sin(t/2 - \pi/4)^2 = 1 - \cos(t - \pi/2) = 1 - \sin(t)$.

Herzkurve / Kardioide

(2) Länge des Weges $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \gamma(t) = (1 - \sin t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$:

$$\gamma'(t) = -\cos(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + (1 - \sin t) \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \qquad \text{(Produktregel)}$$

$$\gamma'(t) \bullet \gamma'(t) = \cos(t)^2 + (1 - \sin(t))^2 = \cos(t)^2 + 1 - 2\sin(t) + \sin(t)^2$$

$$\big|\gamma'(t)\big| = \sqrt{2(1 - \sin(t))} = \sqrt{4\sin(t/2 - \pi/4)^2} = 2\,\big|\sin(t/2 - \pi/4)\big|$$

$$\ell(\gamma) = \int_{t=0}^{2\pi} \big|\gamma'(t)\big|\,\mathrm{d}t = 2\int_{t=0}^{2\pi} \big|\sin(t/2 - \pi/4)\big|\,\mathrm{d}t = 4\int_{u=-\pi/4}^{3\pi/4} \big|\sin(u)\big|\,\mathrm{d}u$$

$$= -4\int_{u=-\pi/4}^{0} \sin(u)\,\mathrm{d}u + 4\int_{u=0}^{3\pi/4} \sin(u)\,\mathrm{d}u \qquad \text{(Negativ- \& Positivteil)}$$

$$= 4\Big[\cos(u)\Big]_{u=-\pi/4}^{0} - 4\Big[\cos(u)\Big]_{u=0}^{3\pi/4} = 4\Big(\big[1 - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\big] - \big[-\tfrac{\sqrt{2}}{2} - 1\big]\Big) = 8$$

Zur Berechnung von $|\gamma'(t)|^2$ nutzen wir Pythagoras, oder entdecken ihn hier erneut, denn die Vektoren $(\cos t, \sin t)$ und $(-\sin(t), \cos(t))$ sind orthonormal! Diese Abkürzung nutzen wir gleich noch einmal im Integral (4). Den Flächeninhalt $\int_{u=-\pi/4}^{3\pi/4} |\sin(u)|\,\mathrm{d}u = 2$ können Sie wie oben ausrechnen oder graphisch ablesen: Skizzieren Sie $|\sin(u)|$ und schauen Sie scharf hin!

Herzkurve / Kardioide

(3) Der umlaufene Bereich H ist ein Normalbereich in y–Richtung, also $H = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ g(x) \le y \le h(x) \,\}$. Diese Darstellung ist jedoch mühsam: Sie müssten a, b sowie $g(x), h(x)$ explizit ausrechnen. Die Flächenberechnung mittels Fubini scheint daher eher umständlich. Wir versuchen es auf einem leichteren Weg mit dem Satz von Green!

(4) Für $f(x, y) = \frac{1}{2}(-y, x)$ gilt $\operatorname{rot} f = 1$. Dank Green erhalten wir:

$$\mathrm{vol}_2(H) \;=\; \int_H \operatorname{rot}(f)\,\mathrm{d}(x, y) \;=\; \int_\gamma f \bullet \mathrm{d}\gamma \;=\; \int_{t=0}^{2\pi} f(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t=0}^{2\pi} (1 - \sin t) \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \bullet \left[-\cos t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + (1 - \sin t) \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right] \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t=0}^{2\pi} (1 - \sin t)^2\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{1}{2}\int_{t=0}^{2\pi} 1 - 2\sin t + \sin(t)^2\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{1}{2}(2\pi + \pi)$$

$$= \frac{3}{2}\pi \quad \approx \quad 4.7124$$

☺ Plausibilitätsprüfung: Aus der Skizze schätzen wir $4 < \mathrm{vol}_2(H) < 5$.

Herzkurve / Kardioide

Gegeben sei eine stetige Radiusfunktion $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}_{\geq 0} : t \mapsto r(t)$, etwa $r(t) = 1 - \sin t$ wie oben für die Kardioide. Dies definiert den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \gamma(t) = r(t)(\cos t, \sin t)$ und den umlaufenen Bereich

$$A = \left\{ \rho\,\gamma(t) \;\middle|\; 0 \leq t \leq 2\pi,\ 0 \leq \rho \leq 1 \right\}.$$

Aufgabe: (5) Formulieren Sie allgemein den Flächeninhalt $\mathrm{vol}_2(A)$ mit (a) dem Satz von Green und alternativ (b) dem Transformationssatz.

Lösung: (5a) Wir nutzen $f(x, y) = \frac{1}{2}(-y, x)$ mit $\mathrm{rot}\, f = 1$ wie zuvor:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_2(A) &= \int_A \mathrm{rot}(f)\,\mathrm{d}(x, y) = \int_\gamma f \bullet \mathrm{d}\gamma = \int_{t=0}^{2\pi} f(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \int_{t=0}^{2\pi} r(t) \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \bullet \left[r'(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + r(t) \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right] \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \int_{t=0}^{2\pi} r(t)^2\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

☺ Dieses Integral haben wir in (4) für $r(t) = 1 - \sin t$ ausgerechnet.

Herzkurve / Kardioide

(5b) Wir nutzen für den Bereich $A \subseteq \mathbb{R}^2$ die Parametrisierung

$$\Phi \;:\; [0, 1] \times [0, 2\pi] =: D \to \mathbb{R}^2 \;:\; \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\, r(\varphi) \cos(\varphi) \\ \rho\, r(\varphi) \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\Phi' \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \varphi)} = \begin{pmatrix} r(\varphi) \cos(\varphi) & \rho\,[r'(\varphi) \cos(\varphi) - r(\varphi) \sin(\varphi)] \\ r(\varphi) \sin(\varphi) & \rho\,[r'(\varphi) \sin(\varphi) + r(\varphi) \cos(\varphi)] \end{pmatrix}$$

$$\det \Phi' \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} = \rho\, r(\varphi)^2 \quad \text{Funktionaldeterminante der Jacobi–Matrix}$$

Nach Konstruktion ist diese Abbildung Φ surjektiv auf A, kurz $\Phi(D) = A$. Sie ist im Wesentlichen injektiv, fürs Integral ist der Fehler unerheblich. Dank Transformationssatz C2B erhalten wir daraus den Flächeninhalt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_2(A) = \int_A 1\,\mathrm{d}(x, y) &= \int_D |\det \Phi'(\rho, \varphi)|\,\mathrm{d}(\rho, \varphi) \\
= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{1} \rho\, r(\varphi)^2\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi &= \frac{1}{2} \int_{t=0}^{2\pi} r(\varphi)^2\,\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}$$

☺ Das ist genau das Integral, das wir bereits in (5a) erhalten haben. Zu gegebener Radiusfunktion $\varphi \mapsto r(\varphi)$ rechnet man dies weiter aus.

Herzkurve / Kardioide

Alternative: Dasselbe Ergebnis erhalten wir direkt in Polarkoordinaten $\Psi : E \to \mathbb{R}^2 : (\rho, \varphi) \mapsto (\rho \cos\varphi, \rho \sin\varphi)$, aber mit dem Parameterbereich $E = \{\, (\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \rho \le r(\varphi) \,\}$: einfach nachrechnen!

Aufgabe: (6) Formulieren Sie den Schwerpunkt (x_A, y_A) des Bereichs A mit (a) dem Transformationssatz und alternativ (b) dem Satz von Green.

Lösung: (6a) Wir nutzen die Parametrisierung $\Phi : D \to A$ und erhalten:

$$x_A \operatorname{vol}_2(A) = \int_A x \,\mathrm{d}(x,y) = \int_D \underbrace{\rho\, r(\varphi) \cos(\varphi)}_{=\,x} \cdot \underbrace{\rho\, r(\varphi)^2}_{\text{Fu'det}} \,\mathrm{d}(\rho,\varphi)$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{1} \rho^2\, r(\varphi)^3 \cos(\varphi) \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{3} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r(\varphi)^3 \cos(\varphi) \,\mathrm{d}\varphi$$

$$y_A \operatorname{vol}_2(A) = \int_A y \,\mathrm{d}(x,y) = \frac{1}{3} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r(\varphi)^3 \sin(\varphi) \,\mathrm{d}\varphi$$

(6b) Die Greenschen Schwerpunktformeln E216 ergeben dasselbe, aber erst nach partieller Integration und geeigneter Vereinfachung. In diesem Falle scheint der Transformationssatz etwas direkter.

Herzkurve / Kardioide

Aufgabe: (7) Berechnen Sie den Schwerpunkt (x_H, y_H) der Herzfläche.

Lösung: (7) Es gilt $x_H = 0$, denn H ist symmetrisch bezüglich $x \mapsto -x$. Alternativ können Sie auch (6) nutzen und es ausführlich nachrechnen.

Für y_H nutzen wir unsere Vorarbeit (6) und setzen $r(\varphi) = 1 - \sin\varphi$ ein:

$$\begin{aligned}
y_H \cdot 3 \operatorname{vol}_2(H) &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} r(\varphi)^3 \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} (1 - \sin\varphi)^3 \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_{\varphi=-\pi}^{\pi} (1 - 3\sin\varphi + 3\sin^2\varphi - \sin^3\varphi) \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_{\varphi=-\pi}^{\pi} -3\sin^2\varphi - \sin^4\varphi \,\mathrm{d}\varphi \quad \text{(nur gerade Terme!)} \\
&= -3\pi - \frac{3}{4}\pi \quad = \quad -\frac{15}{4}\pi \\
y_H \qquad &= -\frac{15}{4}\pi \Big/ \frac{9}{2}\pi \quad = \quad -\frac{5}{6}
\end{aligned}$$

☺ Plausibilitätsprüfung: Das passt recht gut zu unserer Skizze.

Wir lieben Wegintegrale! (Scheinklausur 2017/18)

Häufig müssen Sie zwischen Formel und Bild übersetzen, zwischen algebraischer und geometrischer Beschreibung. So auch hier:

Aufgabe: (1) Skizzieren Sie das Bild des Weges

$$\gamma \,:\, [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^2 \,:\, t \mapsto \gamma(t) = |t| \cdot (\cos t, \sin t).$$

Schätzen Sie die Weglänge und den umschlossenen Flächeninhalt.

(2) Berechnen Sie zum Vektorfeld $f(x,y) = (-y,x)$ das Arbeitsintegral $\int_\gamma f(s) \bullet \mathrm{d}s$ entlang des Weges γ.

(3) Berechnen Sie den Flächeninhalt der vom Weg γ umschlossenen Fläche $H \subseteq \mathbb{R}^2$. Ist Ihr Ergebnis plausibel?

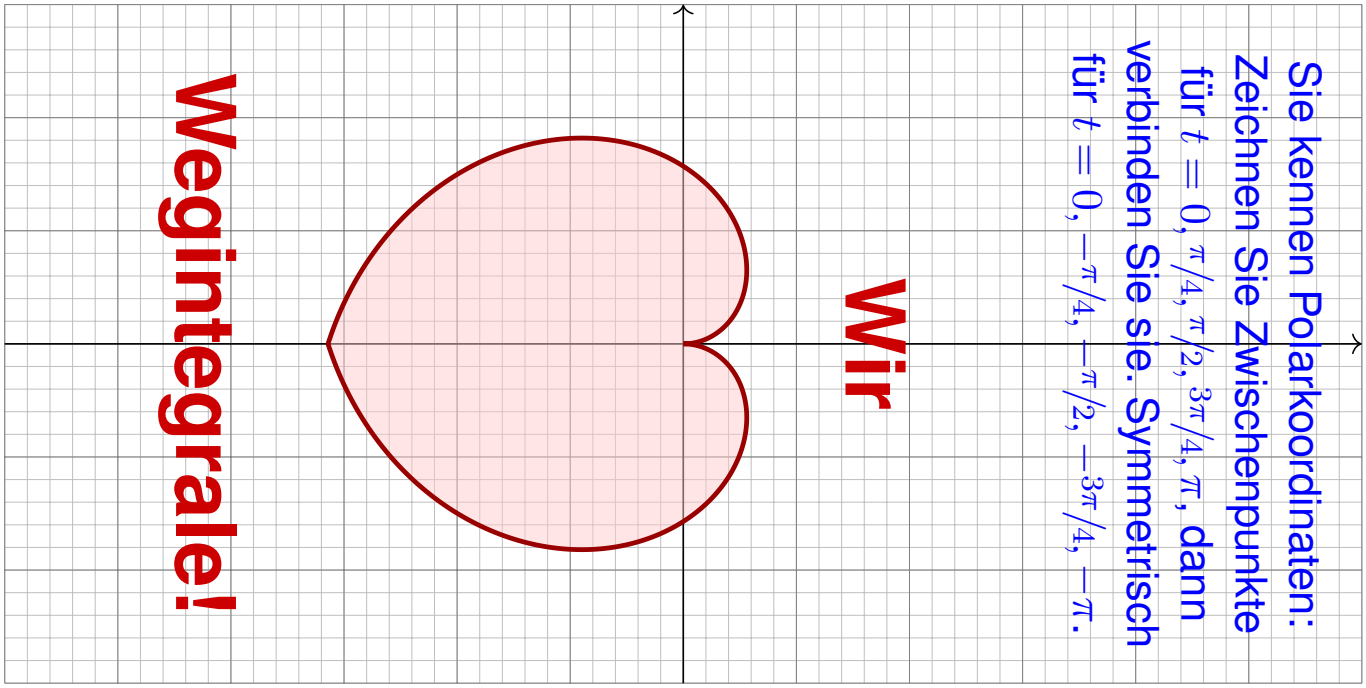
(4) Berechnen Sie schließlich das Arbeitsintegral $\int_\gamma g(s) \bullet \mathrm{d}s$ des Vektorfeldes $g(x,y) = (x^2+4y, 10x+\mathrm{e}^y)$ längs γ.

(5) Berechnen Sie die Weglänge $\ell(\gamma)$. Ist Ihr Ergebnis plausibel?
Formelsammlung: Die folgende Stammfunktion (B411) ist hilfreich.

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\Big(x+\sqrt{a^2+x^2}\Big) + \mathrm{const}$$

Wir lieben Wegintegrale! (Scheinklausur 2017/18)

Lösung: (1) Wir beginnen mit der Skizze, das hilft zur Anschauung!



Der Weg γ hat Länge $\ell(\gamma) \approx 12$. Die vom Weg γ umschlossene Fläche $H = \{\, \rho \cdot (\cos\varphi, \sin\varphi) \mid -\pi \le \varphi \le \pi,\ 0 \le \rho \le |\varphi| \,\}$ hat Flächeninhalt $\mathrm{vol}_2(H) \approx 10$. Die genauen Werte berechnen wir in (3) bzw. (5).

Wir lieben Wegintegrale! (Scheinklausur 2017/18)

(2) Wir nutzen direkt die Definition des Arbeitsintegrals:

$$\int_\gamma f(s) \bullet \mathrm{d}s = \int_{t=-\pi}^{\pi} f(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{t=-\pi}^{\pi} |t| \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \bullet \left[\operatorname{sign}(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + |t| \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right]$$

$$= \int_{t=-\pi}^{\pi} t^2\,\mathrm{d}t \quad = \quad \left[\frac{t^3}{3}\right]_{t=-\pi}^{\pi} \quad = \quad \frac{2\pi^3}{3} \quad \approx \quad 20.67$$

Die Betragsfunktion $t \mapsto |t|$ im Punkt $t \neq 0$ erfüllt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|t| = \operatorname{sign}(t) \in \{\pm 1\}$.
Wer den Betrag vermeiden will, zerlegt das Integral in $\int_{-\pi}^{\pi} = \int_{-\pi}^{0} + \int_{0}^{\pi}$.

(3) Wir nutzen den Satz von Green, hier als Flächenformel dank (2):

$$\mathrm{vol}_2(H) = \int_H 1\,\mathrm{d}(x,y)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_H \mathrm{rot}(f)\,\mathrm{d}(x,y) = \frac{1}{2}\int_\gamma f(s) \bullet \mathrm{d}s = \frac{\pi^3}{3}$$

Alternativ können Sie den Flächeninhalt $\mathrm{vol}_2(H)$ ebenso mit dem Transformationssatz in Polarkoordinaten ausrechnen. Dies wurde in der vorigen Aufgabe zur Kardioide ausgeführt.

Wir lieben Wegintegrale! (Scheinklausur 2017/18)

(4) Wir nutzen wieder den Satz von Green, diesmal umgekehrt zu (3):

$$\int_\gamma g(s) \bullet \mathrm{d}s = \int_H \mathrm{rot}(g)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_H 6\,\mathrm{d}(x,y) = 6\,\mathrm{vol}_2(H) = 2\pi^3 \approx 62$$

(5) Wir berechnen schließlich die Weglänge (mittels B411):

$$\ell(\gamma) = \int_{t=-\pi}^{\pi} \big|\gamma(t)\big|\,\mathrm{d}t = 2\int_{t=0}^{\pi} \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[t\sqrt{1+t^2} + \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right) \right]_{t=0}^{\pi}$$

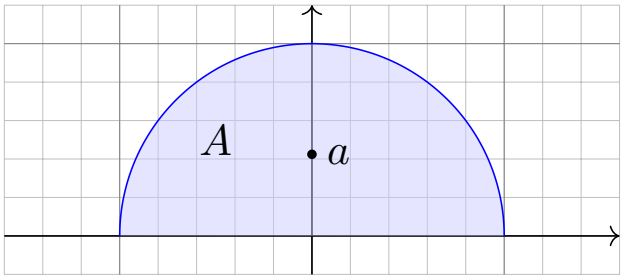
$$= \pi\sqrt{1+\pi^2} + \ln\left(\pi + \sqrt{1+\pi^2}\right)$$

$$\approx 12.2198$$

☺ Das Ergebnis ist anschaulich plausibel, es entspricht der Skizze.
Die genauen Werte hingegen kann man nicht raten, nur berechnen.

☺ Mit den geeigneten Werkzeugen gelingt Ihnen die Lösung leicht.
Ihre Integrationstechniken bieten Ihnen extrem effiziente Methoden.

Schwerpunkt einer Halbkreisscheibe



Aufgabe: Berechnen Sie den Schwerpunkt $(0, a)$ der Halbkreisscheibe

$$A = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le r^2,\ y \ge 0 \,\}.$$

(1) direkt mit Fubini und Transformationssatz sowie (2) mit Green. E216
(3) Plausibilitätscheck: Versuchen Sie zuerst, den Wert a zu schätzen!

Lösung: (1) Wir wissen $\mathrm{vol}_2(A) = \frac{\pi}{2} r^2$ und berechnen a:

$$a\,\mathrm{vol}_2(A) = \int_{(x,y)\in A} y \,\mathrm{d}(x, y) \qquad = \int_{\rho=0}^{r} \int_{\varphi=0}^{\pi} \rho \sin\varphi \cdot \rho \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\rho$$

$$= \int_{\rho=0}^{r} \rho^2 \Big[-\cos\varphi\Big]_{\varphi=0}^{\pi} \mathrm{d}\rho = 2\Big[\frac{\rho^3}{3}\Big]_{\rho=0}^{r} \qquad = \qquad \frac{2}{3} r^3$$

Der Schwerpunkt $(0, a)$ hat also Abstand $a = \frac{4}{3\pi} r$ vom Durchmesser.

Schwerpunkt einer Halbkreisscheibe

(2) Wir parametrisieren die Halbkreislinie Γ durch $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t)$ und nutzen die Greensche Schwerpunktsformel:

$$a\,\mathrm{vol}_2(A) = \int_{\partial A} xy \,\mathrm{d}y = \int_{\Gamma} xy \,\mathrm{d}y + \int_{\Delta} xy \,\mathrm{d}y = \int_{t=0}^{2\pi} \gamma_1(t)\gamma_2(t)\gamma_2'(t) \,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{t=0}^{2\pi} r\cos(t)\, r\sin(t)\, r\cos(t) \,\mathrm{d}t \qquad = r^3 \int_{t=0}^{2\pi} \sin(t)\cos(t)^2 \,\mathrm{d}t$$

$$= r^3 \Big[-\frac{1}{3}\cos(t)^3\Big]_{t=0}^{\pi} \qquad = r^3 \cdot \frac{2}{3}$$

☺ Wir erhalten auch hier den Abstand $a = \frac{4}{3\pi} r$ vom Durchmesser.

Der Rand ∂A der Halbkreisscheibe besteht aus der Halbkreislinie Γ und dem Durchmesser Δ. Der Integrationsweg über den Durchmesser trägt wegen $y = 0$ ($\mathrm{d}y = 0$) nichts bei. Daher haben wir nur über Γ integriert.

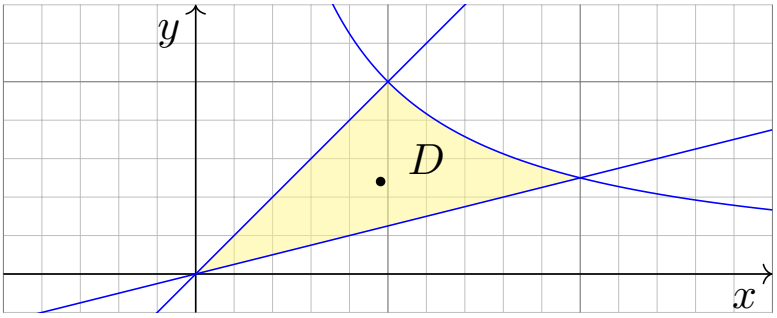
☺ Plausibilitätsprüfung: Der Wert $a = \frac{4}{3\pi} \approx 0.424$ entspricht der Skizze für einen Halbkreis vom Radius $r = 1$; anschaulich ist das plausibel.

Flächeninhalt und Schwerpunkt nach Green

E307
Ausführung

Aufgabe: (1) Skizzieren Sie den beschränkten Bereich $D \subseteq \mathbb{R}^2_{\geq 0}$, der von den Kurven $y = x$ und $y = 1/x$ und $y = x/4$ begrenzt wird.
(2) Bestimmen Sie den Flächeninhalt sowie den Schwerpunkt von D mit Hilfe der Greenschen Flächen- und Schwerpunktsformeln. E216
(3) Plausibilitätscheck: Versuchen Sie zuerst, die Werte zu schätzen!

Lösung: (1)



Das Gebiet D wird von den folgenden drei Wegen begrenzt:

$$\alpha : [0,2] \to \mathbb{R}^2, \quad \alpha(t) = (t, t/4)$$
$$\beta : [1,2] \to \mathbb{R}^2, \quad \beta(t) = (t, 1/t)$$
$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t, t)$$

Der positiv orientierte Rand ∂D wird parametrisiert durch $\alpha \cup -\beta \cup -\gamma$.

Flächeninhalt und Schwerpunkt nach Green

E308
Ausführung

(2) Flächeninhalt und Schwerpunkt von D berechnen wir nach Green:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_2(D) = \int_{\partial D} x \,\mathrm{d}y \qquad &= \int_0^2 t \cdot \frac{1}{4} \,\mathrm{d}t - \int_1^2 t \cdot \frac{-1}{t^2} \,\mathrm{d}t - \int_0^1 t \cdot 1 \,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t^2}{8}\right]_0^2 + \Big[\ln t\Big]_1^2 - \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \ln 2 \approx 0.693
\end{aligned}$$

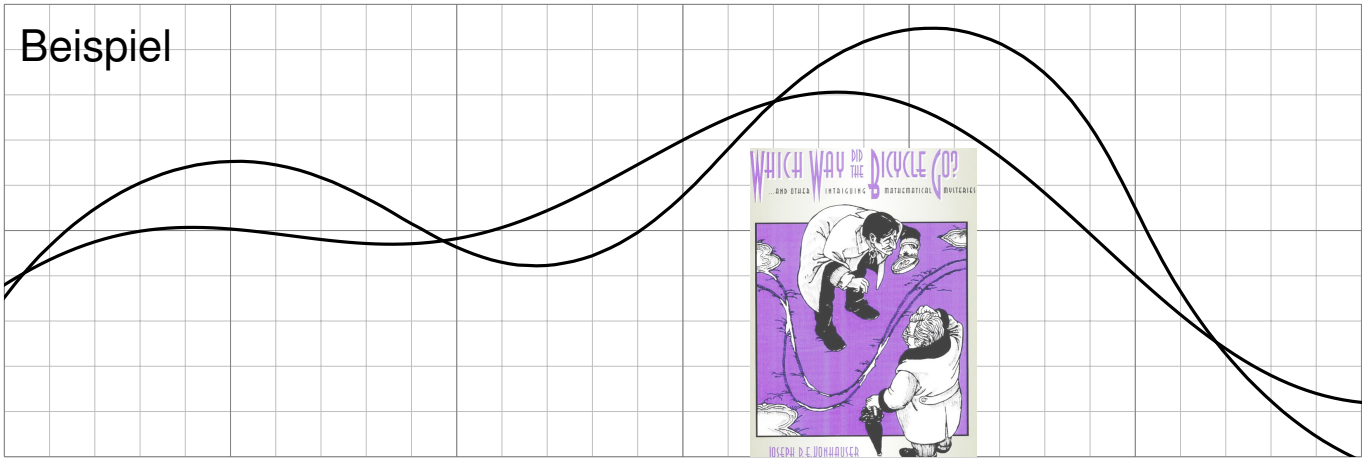
$$\begin{aligned}
x_D = \frac{-1}{\mathrm{vol}_2(D)} \int_{\partial D} xy \,\mathrm{d}x &= \frac{-1}{\ln 2}\left(\int_0^2 t\,\frac{t}{4} \,\mathrm{d}t - \int_1^2 t\frac{1}{t} \,\mathrm{d}t - \int_0^1 t^2 \,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{-1}{\ln 2}\left(\left[\frac{t^3}{12}\right]_0^2 - \Big[t\Big]_1^2 - \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1\right) = \frac{2}{3\ln 2} \approx 0.962
\end{aligned}$$

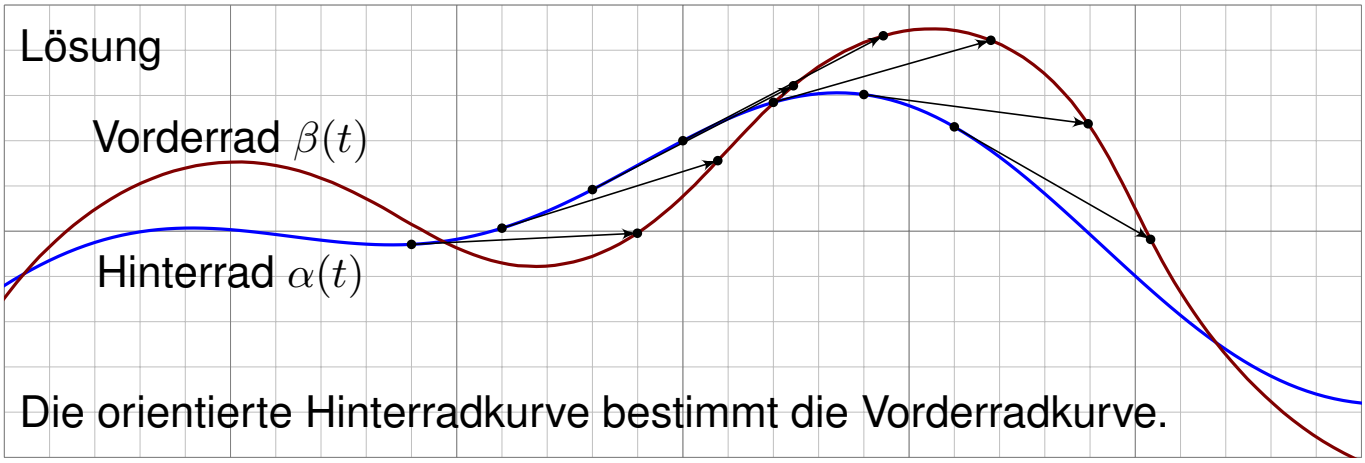
$$\begin{aligned}
y_D = \frac{1}{\mathrm{vol}_2(D)} \int_{\partial D} xy \,\mathrm{d}y &= \frac{1}{\ln 2}\left(\int_0^2 t\frac{t}{4}\frac{1}{4} \,\mathrm{d}t - \int_1^2 t\frac{1}{t}\frac{-1}{t^2} \,\mathrm{d}t - \int_0^1 t\,t \,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{\ln 2}\left(\left[\frac{t^3}{48}\right]_0^2 - \left[\frac{1}{t}\right]_1^2 - \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1\right) = \frac{1}{3\ln 2} \approx 0.481
\end{aligned}$$

☺ Plausibilitätsprüfung: Die Werte entsprechen recht gut der Skizze.

Sherlock Holmes: Which way did the bicycle go?

E309
Ausführung





Sherlock Holmes: Which way did the bicycle go?

E310
Ausführung

Das folgende geometrische Rätsel geht zurück auf eine Kurzgeschichte von Sir Arthur Conan Doyle: *The Adventure of the Priory School* (1904).

Sherlock Holmes und Dr. Watson untersuchen Spuren eines Fahrrads. „Leider wissen wir nicht einmal, in welche Richtung das Fahrrad fuhr.“ — „Elementary, my dear Watson.“ Kann der Meisterdetektiv allein aus den beiden Radkurven die Fahrtrichtung rekonstruieren? Wie geht das?

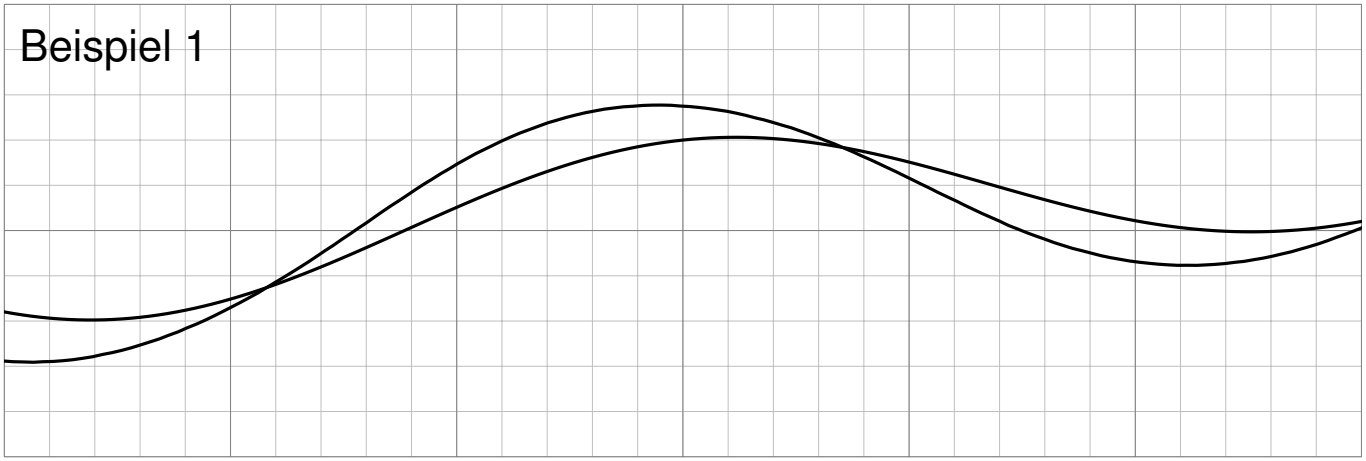
Aufgabe: (1) Angenommen die Wege $\alpha, \beta : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ beschreiben die Position des Hinter- und Vorderrads zu jedem Zeitpunkt $t \in [a, b]$. Welche Beziehung besteht dann zwischen den Wegen α und β?

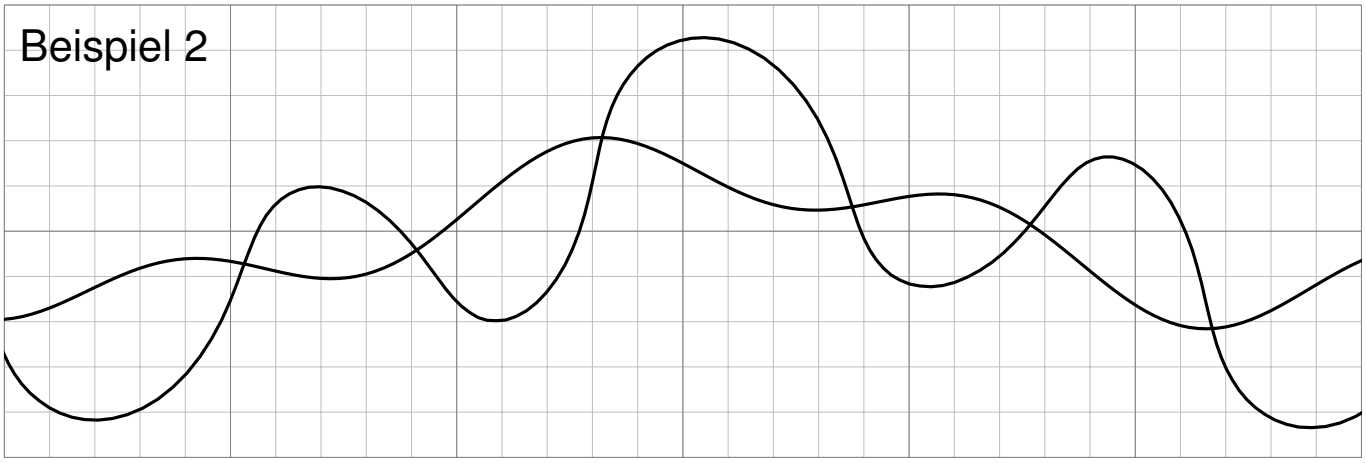
(2) Nachträglich sehen wir nicht die zeitlich parametrisierte Bewegung, sondern nur deren Spuren, also die Menge $\alpha([a, b]) \cup \beta([a, b]) \subseteq \mathbb{R}^2$. Diese enthalten viel weniger Information, wie Watson richtig bemerkt, zum Beispiel nicht die Zeit, die Geschwindigkeit, die Orientierung, etc. Kann Holmes dennoch die Fahrtrichtung rekonstruieren? Wie geht das?

(3) Implizit werden hier einige vereinfachende Annahmen gemacht. Formulieren Sie die Annahmen möglichst explizit. Ist die Lösung in den Beispielen eindeutig? Wann ist sie es nicht? Kommt das praktisch vor?

Sherlock Holmes: Which way did the bicycle go?

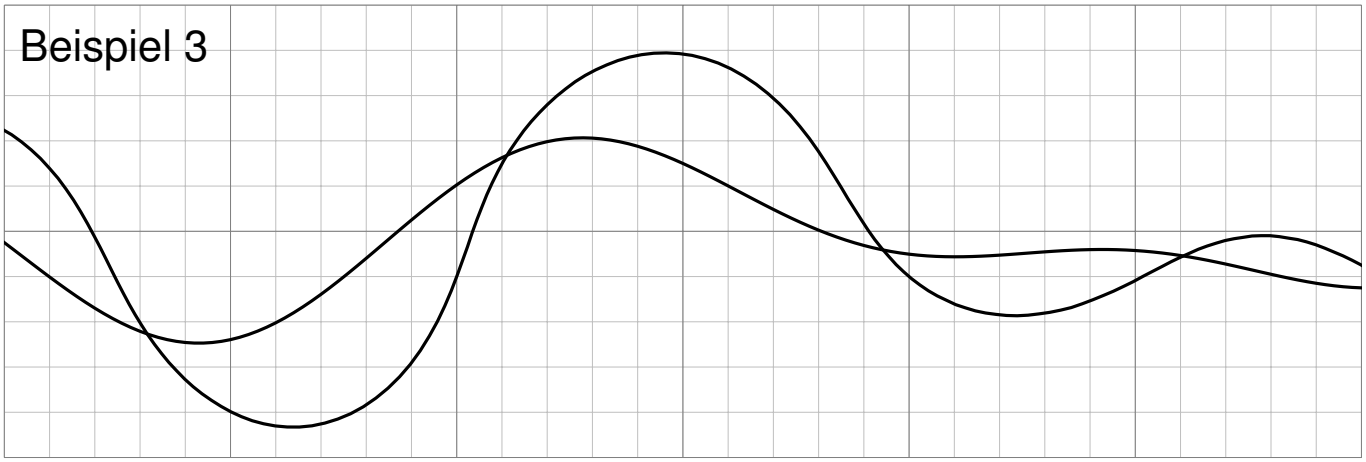
E311
Ausführung

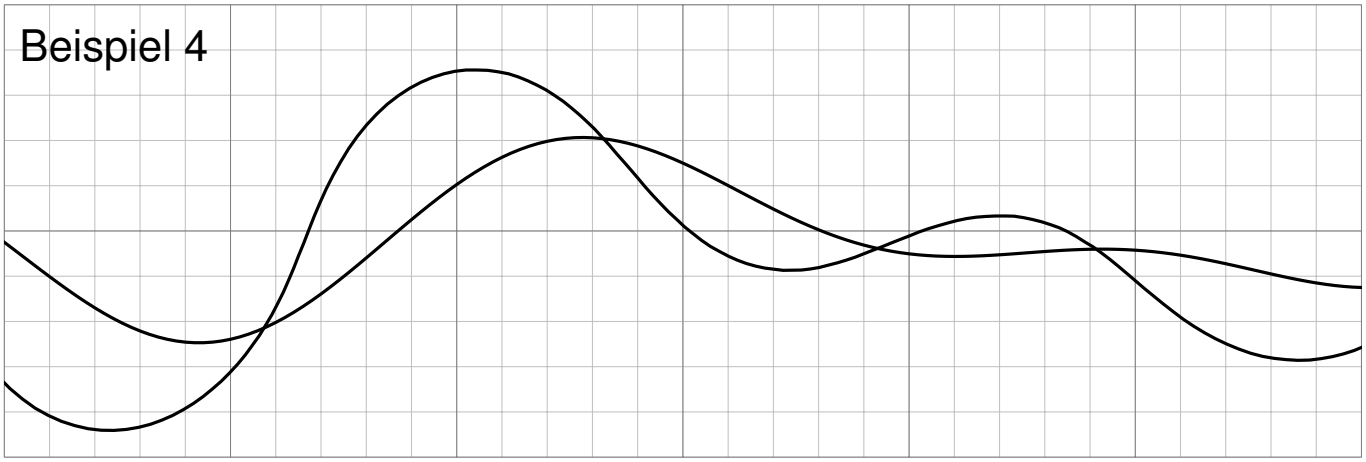




Sherlock Holmes: Which way did the bicycle go?

E312
Ausführung





Sherlock Holmes: Which way did the bicycle go?

Lösung: (1) Die Hinterradkurve α bestimmt die Vorderradkurve β gemäß „Vorderrad = Hinterrad + Radstand · Einheitstangente“:

$$\boxed{\beta(t) = \alpha(t) + L \cdot \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}}$$

(2) Auch ohne Parametrisierung lässt sich die Orientierung (meistens) allein aus den Kurven $A = \alpha([a,b])$ und $B = \beta([a,b])$ rekonstruieren.

Die entscheidende Erkenntnis ist, dass die Einheitstangente $\pm t_A(p)$ nur von der Kurve A abhängt, und nicht von ihrer Parametrisierung α.

Im Punkt $p \in A$ betrachten wir die beiden Einheitstangenten $\pm t_A(p)$: Liegt $p \pm L \cdot t_A(p)$ nicht auf B, so scheidet diese Orientierung aus.

Entsprechend für $q \in B$ mit den beiden Einheitstangenten $\pm t_B(q)$: Liegt $q \pm L \cdot t_B(q)$ nicht auf A, so scheidet diese Orientierung aus.

☺ Meist muss man nur wenige Punkte prüfen, um bereits drei der vier Möglichkeiten auszuschließen. Die Tangenten kann man graphisch ausreichend genau abtragen. (Oft fällt auf, dass das Vorderrad stärker oszilliert, aber manchmal ist das weniger offensichtlich oder hilfreich.)

Sherlock Holmes: Which way did the bicycle go?

☺ Aus der Physik des Fahrrads folgt sofort die obige Formel! Praktische Probe: Auf DIN A4 ausdrucken und mit Playmobil-Fahrrad abfahren.

(3) Wir nehmen folgendes an: Die Spuren stammen tatsächlich von einem handelsüblichen Fahrrad; wir schließen zum Beispiel aus, dass es zwei Einräder gewesen sind. Als Position $\alpha(t)$ des Hinterrades bzw. $\beta(t)$ Vorderrades notieren wir jeweils den Berührpunkt auf dem Boden.

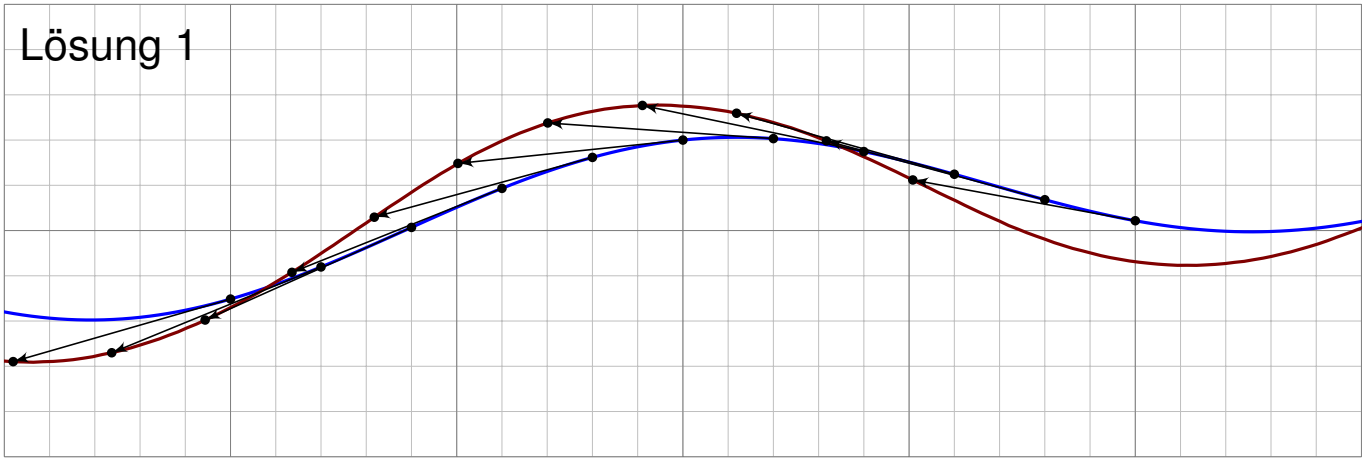
Das Fahrrad fährt nur vorwärts. Die Bewegung jedes Rades ist stets tangential zur Radrichtung, ohne Drift. Das Vorderrad ist beweglich, das Hinterrad hingegen starr, beide sind in einem festen Abstand L. Dieser Radstand ist etwa $L \approx 1.1\mathrm{m}$, in den Beispielskizzen ist $L = 1$.

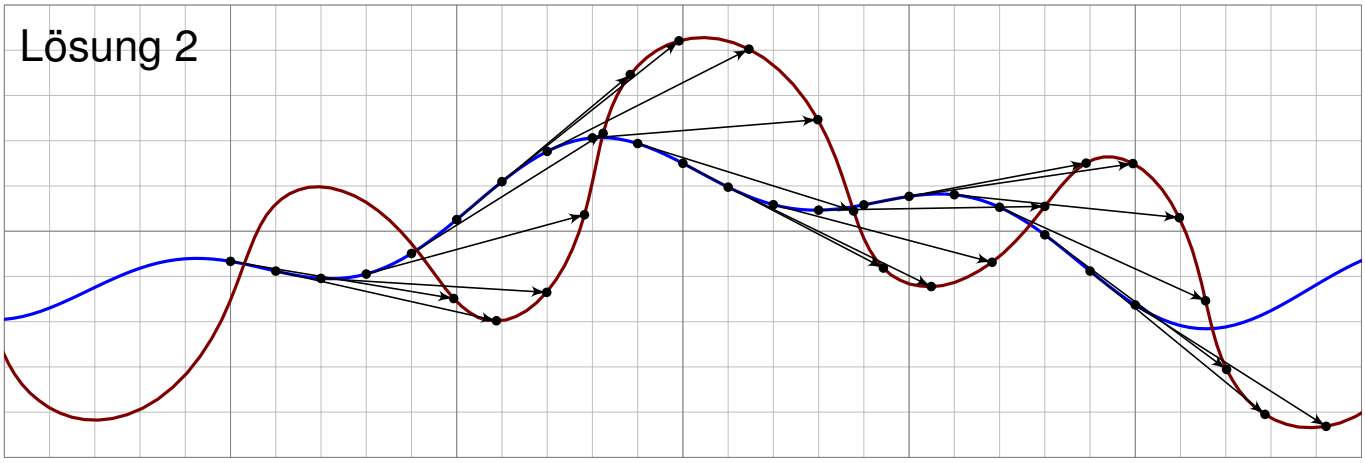
Wir nehmen hierbei $\alpha'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$ an, das Fahrrad bleibt also niemals stehen. Sonst könnte es viel kompliziertere Dinge tun! Auch Details wie Drift und ähnliches wollen wir hier vernachlässigen.

Die Rekonstruktion versagt auch manchmal, zum Beispiel für zwei übereinanderliegende Geraden oder für zwei konzentrische Kreise. Von diesen einfachen und seltenen Ausnahmen abgesehen gelingt die Rekonstruktion in allen praktischen Beispielen: einfach. genial.

Sherlock Holmes: Which way did the bicycle go?

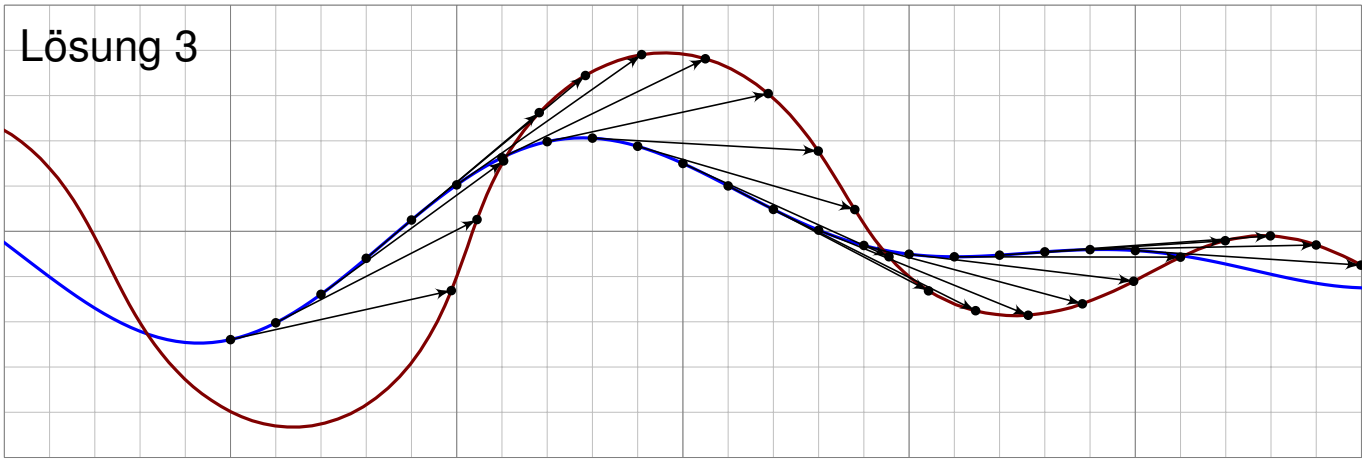
E315
Ausführung

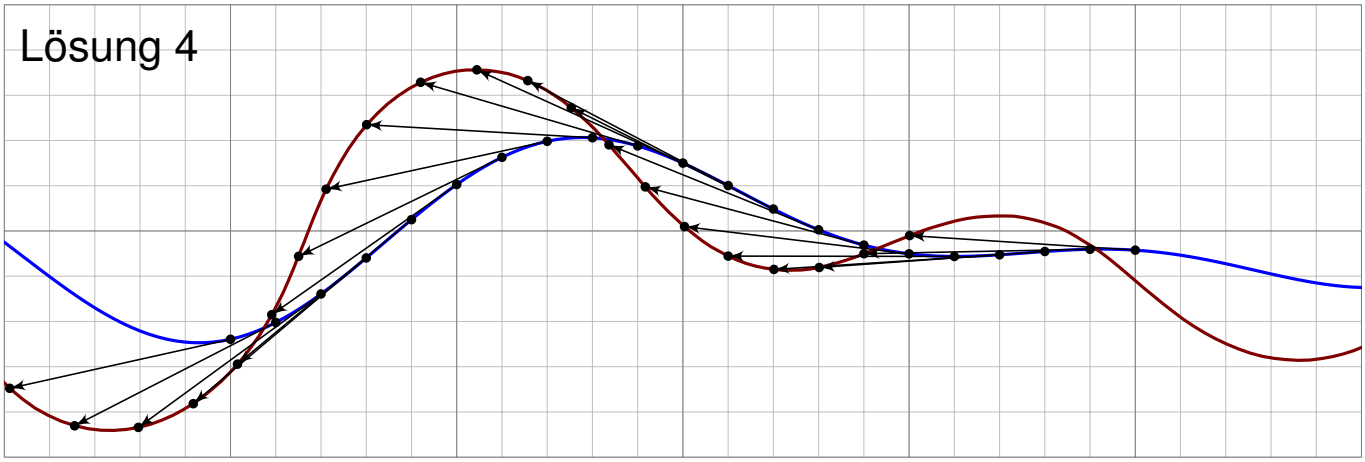




Sherlock Holmes: Which way did the bicycle go?

E316
Ausführung





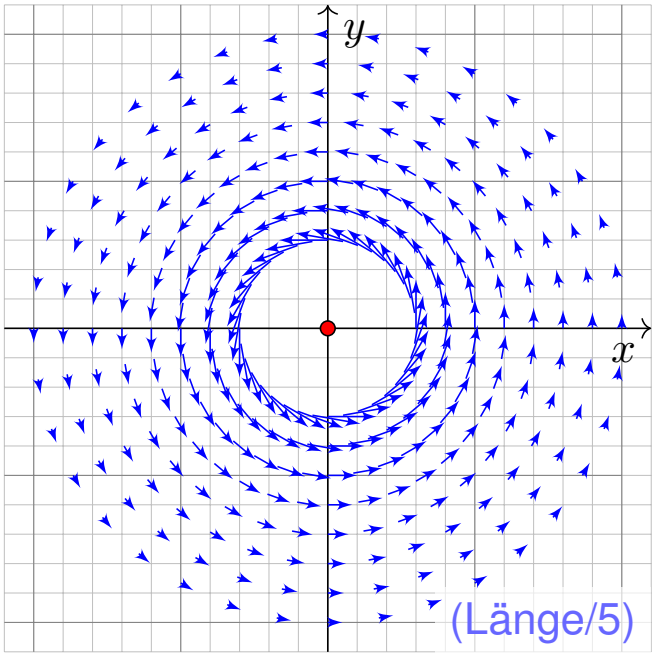
Zwei prominente Vektorfelder

Aufgabe: (1) Skizzieren Sie die Vektorfelder $f, g : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ mit

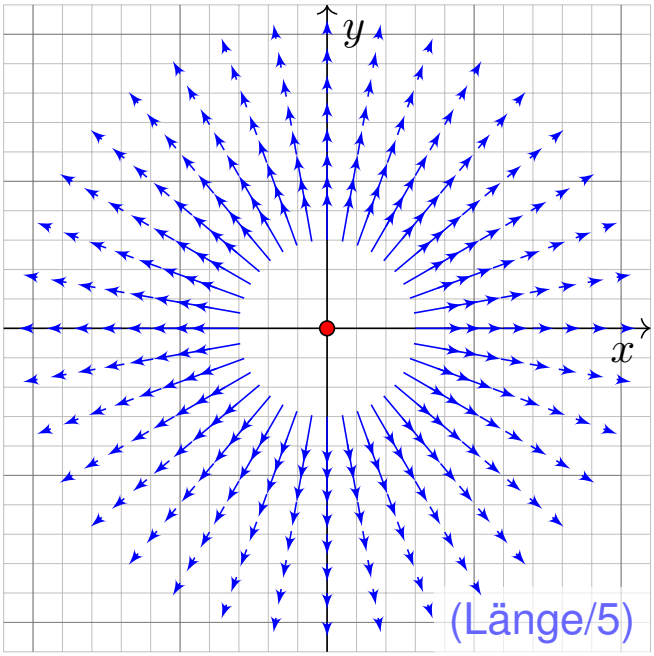
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \qquad g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Wie beschreiben Sie anschaulich Wirbelstärke und Quellstärke?

Lösung: Wirbelfeld f:



Quellenfeld g:



Zwei prominente Vektorfelder

☺ Müssten wir zwei ebene Vektorfelder als die wichtigsten wählen, dann diese: Sie erklären, was die Welt im Innersten zusammenhält.

📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §5. Das Lehrbuch zur HM2 endet mit genau diesem Vektorfeld f.

☺ Physikalisch gesehen ist f das magnetische Feld eines Stroms und g das elektrische Feld einer Ladung in 0. (Denken Sie dreidimensional an einen langen Draht auf der z–Achse.) Komplex ist g die Funktion $1/\overline{z} = 1/(x - \mathrm{i}y) = (x + \mathrm{i}y)/(x^2 + y^2)$, und $f = \mathrm{i}g$ ist um $90°$ gedreht.

Das Vektorfeld g ist radial, sein Betrag (die Länge) nimmt mit $1/r$ ab. Das Vektorfeld f ist tangential an Kreislinien, jeweils um $90°$ gedreht.

⚠ Im Nullpunkt $(x, y) = (0, 0)$ befindet sich eine interessante Polstelle! Daher sind die Vektorfelder f, g nur auf $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ definiert.

☺ Diese Felder sind sowohl divergenzfrei als auch rotationsfrei! Das entspricht den Cauchy–Riemann–Differentialgleichungen für $1/z$, die wir in Kapitel F für holomorphe Funktionen erklären und nutzen.

Zwei prominente Vektorfelder

Aufgabe: (1) Skizzieren Sie die Vektorfelder $f, g : \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$.
(2) Berechnen Sie Divergenz und Rotation dieser Vektorfelder, sowie
(3) die Arbeits- und Flussintegrale über $\gamma(t) = r(t)(\cos\varphi(t), \sin\varphi(t))$
(4) und über den Rand ∂D eines beliebigen Kompaktums $D \subseteq \mathbb{R}^2$.
Welche Werte erwarten Sie nach Anschauung der Skizzen?

Lösung: (2) Gewissenhaftes Ableiten nach der Quotientenregel ergibt:

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{-(-y)(2x)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{-x(2y)}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

$$\operatorname{rot} f = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{(x^2+y^2) - x(2x)}{(x^2+y^2)^2} - \frac{-(x^2+y^2) - (-y)(2y)}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

$$\operatorname{rot} g = \frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y} = \frac{-y(2x)}{(x^2+y^2)^2} - \frac{-x(2y)}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

$$\operatorname{div} g = \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} = \frac{(x^2+y^2) - x(2x)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{(x^2+y^2) - y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

Zwei prominente Vektorfelder

Wie kann das sein? Das Vektorfeld g hat offensichtlich eine Quelle im Nullpunkt $(0,0)$, aber überall sonst verschwindet die Divergenz $\operatorname{div}(g)$.
⚠ Im Nullpunkt $(x,y) = (0,0)$ hat das Vektorfeld g eine Polstelle!
Die Quelldichte konzentriert sich im Nullpunkt; dort sind g und $\operatorname{div}(g)$ nicht definiert, aber wir können und werden drumherum integrieren!

Der Satz von Gauß lässt sich hier nicht direkt anwenden, denn die Funktion g ist im Ursprung $(0,0) \in D$ nicht definiert (Polstelle). Zwar ist g überall sonst auf ganz $D \smallsetminus \{(0,0)\}$ definiert, aber dieser Bereich ist nicht kompakt! Eindimensional siehe B415. Als Distribution gilt wirklich $\operatorname{div}(g) = 2\pi\,\delta_{(0,0)}$. E329 In diesem allgemeineren Sinne bleibt der Satz von Gauß gültig.

Ebenso gilt: Das Vektorfeld f rotiert offensichtlich um den Nullpunkt $(x,y) = (0,0)$, aber überall sonst verschwindet die Rotation $\operatorname{rot}(f)$.
⚠ Im Nullpunkt $(x,y) = (0,0)$ hat das Vektorfeld f eine Polstelle!
Die Zirkulation konzentriert sich im Nullpunkt; dort sind f und $\operatorname{rot}(f)$ nicht definiert, aber wir können und werden drumherum integrieren!

Der Satz von Green lässt sich hier nicht direkt anwenden, denn die Funktion f ist im Ursprung $(0,0) \in D$ nicht definiert (Polstelle). Zwar ist f überall sonst auf ganz $D \smallsetminus \{(0,0)\}$ definiert, aber dieser Bereich ist nicht kompakt! Eindimensional siehe B415. Als Distribution gilt wirklich $\operatorname{rot}(f) = 2\pi\,\delta_{(0,0)}$. E329 In diesem allgemeineren Sinne bleibt der Satz von Green gültig.

Zwei prominente Vektorfelder

(3) Wir schreiben den Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ in Polarkoordinaten:

$$\gamma(t) = r(t)\begin{pmatrix}\cos\varphi(t)\\ \sin\varphi(t)\end{pmatrix}, \quad \gamma'(t) = r'(t)\begin{pmatrix}\cos\varphi(t)\\ \sin\varphi(t)\end{pmatrix} + r(t)\varphi'(t)\begin{pmatrix}-\sin\varphi(t)\\ \cos\varphi(t)\end{pmatrix}.$$

Für das Arbeits- und Flussintegral von f entlang γ finden wir sodann:

$$\begin{aligned}\int_\gamma f \bullet \mathrm{d}\gamma &= \int_{t=a}^b \begin{pmatrix}-\sin\varphi(t)\\ \cos\varphi(t)\end{pmatrix} \bullet \left[\frac{r'(t)}{r(t)}\begin{pmatrix}\cos\varphi(t)\\ \sin\varphi(t)\end{pmatrix} + \varphi'(t)\begin{pmatrix}-\sin\varphi(t)\\ \cos\varphi(t)\end{pmatrix}\right]\mathrm{d}t \\ &= \int_{t=a}^b \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(b) - \varphi(a) \qquad \text{Winkelzuwachs entlang } \gamma\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_\gamma f \times \mathrm{d}\gamma &= \int_{t=a}^b \begin{pmatrix}-\sin\varphi(t)\\ \cos\varphi(t)\end{pmatrix} \times \left[\frac{r'(t)}{r(t)}\begin{pmatrix}\cos\varphi(t)\\ \sin\varphi(t)\end{pmatrix} + \varphi'(t)\begin{pmatrix}-\sin\varphi(t)\\ \cos\varphi(t)\end{pmatrix}\right]\mathrm{d}t \\ &= \int_{t=a}^b -\frac{r'(t)}{r(t)}\,\mathrm{d}t = \Big[-\ln r(t)\Big]_{t=a}^b = \ln\frac{r(a)}{r(b)} = 0 \ \text{ falls } r(a) = r(b)\end{aligned}$$

☺ Beide Rechnungen entsprechen der Anschauung unserer Skizzen!

Zwei prominente Vektorfelder

Für das Fluss- und Arbeitsintegral von g finden wir ebenso:

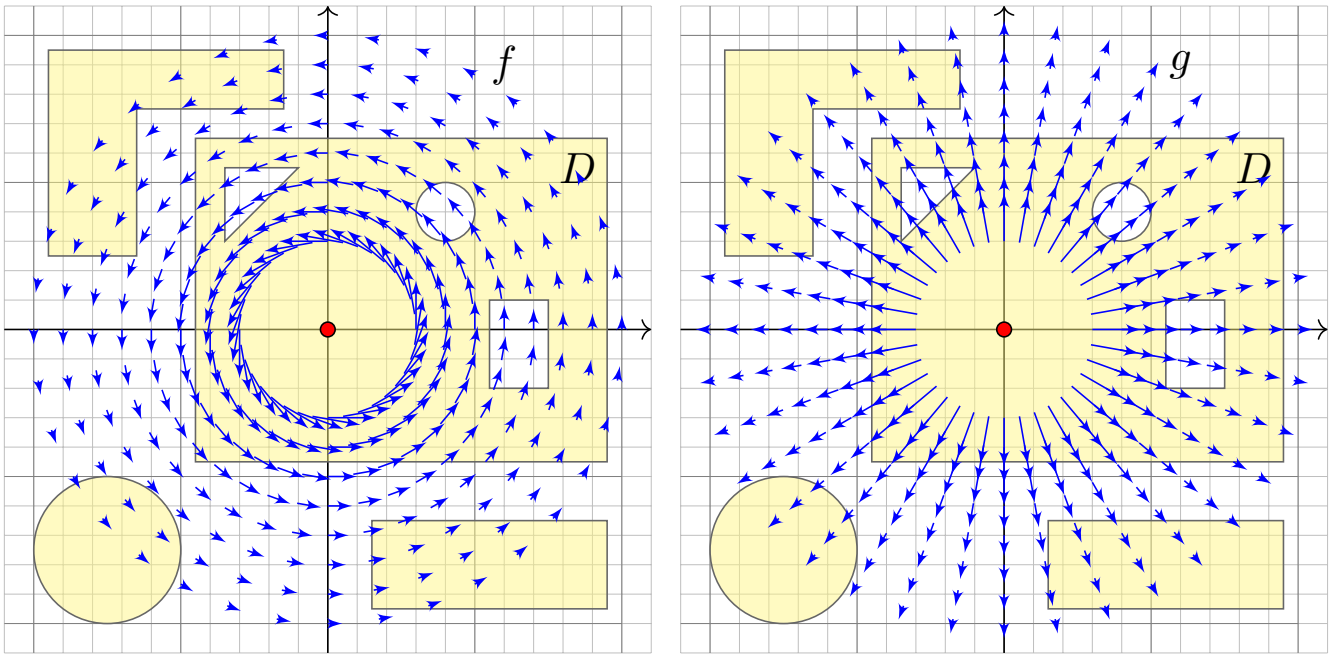
$$\begin{aligned}\int_\gamma g \times \mathrm{d}\gamma &= \int_{t=a}^b \begin{pmatrix}\cos\varphi(t)\\ \sin\varphi(t)\end{pmatrix} \times \left[\frac{r'(t)}{r(t)}\begin{pmatrix}\cos\varphi(t)\\ \sin\varphi(t)\end{pmatrix} + \varphi'(t)\begin{pmatrix}-\sin\varphi(t)\\ \cos\varphi(t)\end{pmatrix}\right]\mathrm{d}t \\ &= \int_{t=a}^b \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(b) - \varphi(a) \qquad \text{Winkelzuwachs entlang } \gamma\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_\gamma g \bullet \mathrm{d}\gamma &= \int_{t=a}^b \begin{pmatrix}\cos\varphi(t)\\ \sin\varphi(t)\end{pmatrix} \bullet \left[\frac{r'(t)}{r(t)}\begin{pmatrix}\cos\varphi(t)\\ \sin\varphi(t)\end{pmatrix} + \varphi'(t)\begin{pmatrix}-\sin\varphi(t)\\ \cos\varphi(t)\end{pmatrix}\right]\mathrm{d}t \\ &= \int_{t=a}^b \frac{r'(t)}{r(t)}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln r(t)\Big]_{t=a}^b = \ln\frac{r(b)}{r(a)} = 0 \ \text{ falls } r(a) = r(b)\end{aligned}$$

☺ Beide Rechnungen entsprechen der Anschauung unserer Skizzen!

☺ Das Arbeitsintegral $\int_\gamma f \bullet \mathrm{d}\gamma$ bzw. das Flussintegral $\int_\gamma g \times \mathrm{d}\gamma$ misst die Winkeländerung. Für jeden geschlossenen Weg γ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ zählen diese Integrale die Umläufe um den Nullpunkt, während die Integrale $\oint_\gamma f \times \mathrm{d}\gamma$ und $\oint_\gamma g \bullet \mathrm{d}\gamma$ wegen $r(a) = r(b)$ verschwinden.

Zwei prominente Vektorfelder



(4) Für $D \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt mit stückw. glattem Rand $\partial D \subseteq \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ gilt

$$\int_{\partial D} f(s) \times \mathrm{d}s = \int_{\partial D} g(s) \bullet \mathrm{d}s = 0$$ da die Kurve ∂D geschlossen ist,

$$\int_{\partial D} f(s) \bullet \mathrm{d}s = \int_{\partial D} g(s) \times \mathrm{d}s = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \notin D\text{: } \partial D \text{ umläuft } 0 \text{ nicht,} \\ 2\pi & \text{falls } 0 \in \mathring{D}\text{: } \partial D \text{ umläuft } 0 \text{ einmal.} \end{cases}$$

Zwei prominente Vektorfelder

☺ Dies ist die reelle Form des Cauchyschen Residuensatzes F4D.
Physikalisch entspricht dies magnetischen / elektrischen Feldern. H153

Die erste Gleichung folgt direkt aus unserer Rechnung (3):
Für geschlossene Kurven gilt $r(a) = r(b)$, also $\ln[r(a)/r(b)] = 0$.
Für Kreislinien sieht man dieses Ergebnis direkt in obiger Skizze.

Die zweite Gleichung ist wesentlich interessanter!
Der erste Fall folgt mit (2) dank Green / Gauß.
Unsere Rechnung (3) klärt $D = \overline{B}(0, r)$ für $r > 0$.
(Diesen Spezialfall sieht man auch direkt!)

Im allgemeinen Fall $0 \in \mathring{D}$ wählen wir $r > 0$ mit $\overline{B}(0, r) \subseteq \mathring{D}$:
Dann ist $E = D \smallsetminus B(z_0, r)$ kompakt mit Rand $\partial E = \partial D \cup \partial B(0, r)$.
Da auf E kein Pol vorliegt, gilt $\int_{\partial D} - \int_{\partial B(0,r)} = \int_{\partial E} = 0$ dank (2).
Hieraus erhalten wir schließlich $\int_{\partial D} = \int_{\partial B(0,r)} = 2\pi$ dank (3).

☺ Diese schönen und einfachen Gleichungen gelten immer, egal wie kompliziert der Bereich $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und seine Randkurve ∂D auch sind.
Alles ist schön und gut. Unseren Integralsätzen sei Dank!

Wirbel und Quelle als Strömung

E325
Ausführung

Zur Anschauung und Erinnerung: Das ebene Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \to \mathbb{R}^2$ können wir als Strömungsgeschwindigkeit einer Flüssigkeit visualisieren. Wir denken an eine dünne Schicht, zum Beispiel die Wetterkarte. E009

Dreidimensionale Felder $F : \mathbb{R}^3 \supseteq \Omega \to \mathbb{R}^3$ behandeln wir in Kapitel G. Wenn F nicht von z abhängt und auch keinen z–Anteil hat, dann gilt $F(x, y, z) = (f_1(x, y), f_2(x, y), 0)$, und f ist ein ebenes Vektorfeld. Dies dient zur Vereinfachung bei der Umströmung eines Profils.

Strömungen haben im allgemeinen Wirbel, auch Quellen und Senken. Dies wollen wir anschaulich verstehen und präzise berechnen lernen, differentiell durch Divergenz $\operatorname{div}(f)$ und Rotation $\operatorname{rot}(f)$, sowie integral als Fluss und Arbeit. Hierzu nutzen wir die Sätze von Gauß und Green.

Das Quellenfeld und das Wirbelfeld sind hierzu zentrale Beispiele! Sie dienen als Prototyp für typische Situationen; durch Überlagerung (Linearkombination) können wir hieraus weitere Modelle konstruieren.

☺ Von ebenen Strömungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gelangen wir so zu komplexen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Die physikalischen Eigenschaften der Strömung übersetzen sich direkt in mathematische Eigenschaften der Funktion f.

Wirbel und Quelle als komplexe Funktion

E326
Ausführung

Die komplexe Funktion $h : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} : z \mapsto 1/z = \overline{z}/|z|^2$ ist zentral für die Funktionentheorie. In reellen Koordinaten ausgeschrieben gilt:

$$h : z \mapsto \frac{1}{z}, \quad x + \mathrm{i}y \mapsto \frac{1}{x + \mathrm{i}y} = \frac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

Komplex-konjugiert erhalten wir genau unser Quellenfeld:

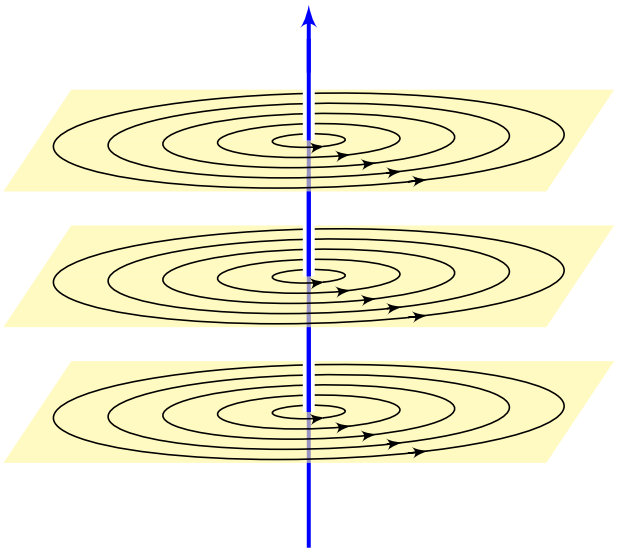
$$g : z \mapsto \frac{1}{\overline{z}}, \quad x + \mathrm{i}y \mapsto \frac{1}{x - \mathrm{i}y} = \frac{x + \mathrm{i}y}{x^2 + y^2}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit i (Drehung um $90°$) ergibt unser Wirbelfeld:

$$f : z \mapsto \frac{\mathrm{i}}{\overline{z}}, \quad x + \mathrm{i}y \mapsto \frac{\mathrm{i}}{x - \mathrm{i}y} = \frac{-y + \mathrm{i}x}{x^2 + y^2}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

☺ Komplexe Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ beschreiben ebene Strömungen und werden hierzu vielfach genutzt. Geeignete Modelle gewinnen wir durch Überlagerung (Linearkombination, Laurent–Reihen), zum Beispiel die idealisierte Umströmung von Flügelprofilen. Wo diese Idealisierung nicht ausreicht, nutzt man numerische Näherungen und Computer.

Wirbel und Quelle als elektromagnetische Felder



Die Magnetostatik untersucht zeitlich konstante elektrische Ströme und das von ihnen erzeugte, zeitlich konstante Magnetfeld $\vec{B}(x,y,z)$, z.B. Dauermagnet, Erdmagnetfeld und Kompass, etc.

Einfaches Beispiel: Der konstante Strom j sei konzentriert auf die z–Achse, die wir uns als einen unendlich dünnen Leiter vorstellen.

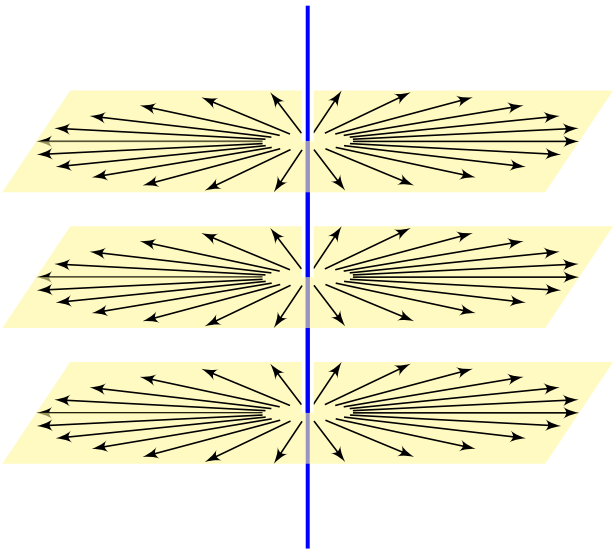
Das magnetische Feld ist dann zirkulär um die z–Achse (gemäß der Rechte-Hand-Regel) mit Stärke $|\vec{B}| = \mathrm{const}/r$ und wird singulär auf der z–Achse. Das Randintegral berechnen wir für eine Kreisscheibe S um die z–Achse.

Beispiel: Magnetisches Feld eines Stroms j entlang der z–Achse:

$$\vec{B}(x,y,z) = \frac{2j/c}{x^2+y^2}(-y,x,0) \quad \Longrightarrow \quad \oint_{\partial S} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \frac{4\pi}{c} j$$

☺ Außerhalb der z–Achse $(0,0,z)$ gilt Rotationsfreiheit, $\mathrm{rot}\,\vec{B} = 0$, und Quellenfreiheit, $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$, wie in der vorigen Aufgabe nachgerechnet. Die dekorative Schreibweise „$\oint$“ soll betonen bzw. daran erinnern, dass wir hier einen geschlossenen Weg betrachten.

Wirbel und Quelle als elektromagnetische Felder



Die Elektrostatik untersucht ruhende elektrische Ladungen und das von ihnen erzeugte, zeitlich konstante elektrische Feld $\vec{E}(x,y,z)$.

Einfaches Beispiel: Die Ladungsdichte $2q$ sei konzentriert auf die z–Achse, die wir uns als einen unendlich dünnen Leiter vorstellen.

Das elektrische Feld ist dann radial nach außen gerichtet mit Stärke $|\vec{E}| = \mathrm{const}/r$ und wird singulär auf der z–Achse. Das Flussintegral berechnen wir in der Ebene (bei festem z) für eine Kreisscheibe D vom Radius r um 0 bzw. im Raum für den Zylinder $Z = D \times [a,b]$.

Beispiel: Elektrisches Feld einer Ladungsdichte q entlang der z–Achse:

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{2q}{x^2+y^2}(x,y,0) \quad \Longrightarrow \quad \oiint_{\partial Z} \vec{E} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = 4\pi q(b-a)$$

☺ Außerhalb der z–Achse $(0,0,z)$ gilt Quellenfreiheit, $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$, und Rotationsfreiheit, $\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0$, wie in der vorigen Aufgabe nachgerechnet. Die dekorative Schreibweise „$\oiint$“ soll betonen bzw. daran erinnern, dass wir hier eine geschlossene Fläche betrachten.

Wirbel und Quelle als Distributionen

Wir untersuchen weiterhin das Wirbelfeld f und das Quellenfeld g:

$$f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \quad g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

⚠ Im Punkt $(0,0)$ liegt eine Polstelle. Wir setzen f, g hier beliebig fort, etwa $f(0,0) = g(0,0) = (0,0)$. Bei der Integration spielt *ein* einzelner Punkt keine Rolle: Das Problem liegt im Verhalten *um* den Nullpunkt!

☺ In solchen Fällen helfen uns Theorie und Kalkül der Distributionen. Sie erklären und präzisieren unsere physikalische Anschauung:

Satz E3A: Wirbel und Quelle

Im Distributionensinne gilt $\operatorname{rot}(f) = 2\pi\delta_0$ und $\operatorname{div}(g) = 2\pi\delta_0$.

Auf ganz $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ wissen wir bereits $\operatorname{rot}(f) = 0$ und $\operatorname{div}(g) = 0$. Demnach sind $\operatorname{rot}(f)$ und $\operatorname{div}(g)$ höchstens im Nullpunkt getragen, nach dem Darstellungssatz D5R also von der Form $\sum_{|\alpha|\le N} c_\alpha \delta_0^\alpha$. Die Konstanten c_α müssen wir allerdings noch ausrechnen!

☺ Die Rechnung gelingt leicht dank unserer Integralsätze!

Wirbel und Quelle als Distributionen

Aufgabe: (1) Welche der Funktionen $1/(x^2+y^2)$ und $x/(x^2+y^2)$ und $y/(x^2+y^2)$ sind absolut integrierbar auf $\bar{B}(0,r)$, also lokal integrierbar? Untersuchen Sie allgemein $h(x,y) = x^\alpha y^\beta/(x^2+y^2)^{\gamma/2}$ für $\alpha, \beta, \gamma \ge 0$.

Hinweis: Integrieren Sie für $0 < \varepsilon < r$ zunächst über den Kreisring $\bar{K}(0,\varepsilon,r) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \varepsilon \le \sqrt{x^2+y^2} \le r \right\}$. Untersuchen Sie $\varepsilon \searrow 0$.

Erinnerung: Klassisch, also für stetig differenzierbare Vektorfelder $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, gilt $\operatorname{rot}(f) = \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1$ und $\operatorname{div}(g) = \partial_1 g_1 + \partial_2 g_2$. Im vorliegenden Beispiel liegt jedoch eine Polstelle im Punkt $(0,0)$ vor! Im Distributionensinne wälzen wir die Ableitungen von f bzw. g auf die glatte Testfunktion $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ und erhalten so die Distributionen

$$\operatorname{rot}(f) \;:\; \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} -f_2\,\partial_1\varphi + f_1\,\partial_2\varphi \,\mathrm{d}(x,y),$$

$$\operatorname{div}(g) \;:\; \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} -g_1\,\partial_1\varphi - g_2\,\partial_2\varphi \,\mathrm{d}(x,y).$$

(2) Dank (1) existieren diese beiden Integrale. Berechnen Sie diese!

Arbeiten Sie zunächst auf $\bar{K} = \bar{K}(0,\varepsilon,r)$: (a) Berechnen Sie $\operatorname{rot}(\varphi f)$. (b) Nutzen Sie unsere Integralsätze! (c) Betrachten Sie dann $\varepsilon \searrow 0$.

Lösung: (1) Wir integrieren für $0 < \varepsilon < r$ zunächst über den Kreisring:

$$\int_{\bar{B}(0,r)} \big|h(x,y)\big| \mathrm{d}(x,y) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\bar{K}(0,\varepsilon,r)} \big|h(x,y)\big| \mathrm{d}(x,y)$$

Wir nutzen Polarkoordinaten $(x,y) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$, Fubini und HDI:

$$\int_{\rho=\varepsilon}^{r} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\rho^\alpha |\cos\theta|^\alpha \cdot \rho^\beta |\sin\theta|^\beta}{\rho^\gamma} \cdot \underbrace{\rho}_{\text{Fu'det}} \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\rho$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} |\cos\theta|^\alpha \, |\sin\theta|^\beta \, \mathrm{d}\theta \cdot \int_{\rho=\varepsilon}^{r} \rho^{\sigma+1} \, \mathrm{d}\rho = c \cdot \left[\frac{\rho^{\sigma+2}}{\sigma+2}\right]_{\rho=\varepsilon}^{r}$$

Wir haben $c := \int_{\theta=0}^{2\pi} |\cos\theta|^\alpha \, |\sin\theta|^\beta \, \mathrm{d}\theta > 0$ (ein Wert der Beta–Funktion).
Zur Abkürzung schreiben wir die Exponentensumme hier $\sigma := \alpha + \beta - \gamma$.
Im Sonderfall $\sigma = -2$ finden wir ebenso $c\,(\ln r - \ln \varepsilon) = c \ln(r/\varepsilon)$.
Der Grenzwert für $\varepsilon \searrow 0$ ist endlich für $\sigma > -2$, unendlich für $\sigma \le -2$.

Satz E3B: absolute Integrierbarkeit von Polstellen

Die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h(x,y) = x^\alpha y^\beta / (x^2+y^2)^{\gamma/2}$ ist genau dann lokal integrierbar, wenn die Exponentensumme $\alpha + \beta - \gamma > -2$ erfüllt.

(2a) Sei $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, das heißt $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit kompaktem Träger, $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq \bar{B}(0,r)$ für r groß. Auf $\bar{K}(0,\varepsilon,r)$ gilt:

$$\operatorname{rot}(\varphi f) = \partial_1(\varphi f_2) - \partial_2(\varphi f_1) = \underbrace{(\partial_1\varphi) f_2 - (\partial_2\varphi) f_1}_{= \operatorname{grad}(\varphi) \times f\text{, unser Integrand!}} + \varphi \underbrace{(\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1)}_{= \operatorname{rot}(f) = 0}$$

(2b) Wir wenden den Integralsatz von Green auf $\varphi f : \bar{K}(0,\varepsilon,r) \to \mathbb{R}^2$ an:

$$I(\varepsilon) := \int_{\bar{K}} -(\partial_1\varphi) f_2 + (\partial_2\varphi) f_1 \, \mathrm{d}(x,y) \overset{(2a)}{=} -\int_{\bar{K}} \operatorname{rot}(\varphi f) \, \mathrm{d}(x,y)$$

$$\underset{\text{E1I}}{\overset{\text{Green}}{=}} -\int_{\partial\bar{K}} \varphi f \bullet \mathrm{d}s = \underbrace{\int_{\partial B(0,\varepsilon)} \varphi(s) f(s) \bullet \mathrm{d}s}_{\text{innerer Rand}} - \underbrace{\int_{\partial B(0,r)} \varphi(s) f(s) \bullet \mathrm{d}s}_{= 0\text{, da hier } \varphi(s) = 0}$$

(2c) Dank Mittelwertsatz B4B existiert $s_\varepsilon \in \partial B(0,\varepsilon)$ sodass gilt:

$$I(\varepsilon) := \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \varphi(s) \underbrace{f(s) \bullet \mathrm{d}s}_{> 0 \text{ überall}} = \varphi(s_\varepsilon) \int_{\partial B(0,\varepsilon)} f(s) \bullet \mathrm{d}s = \varphi(s_\varepsilon) \cdot 2\pi$$

Für $\varepsilon \searrow 0$ gilt $s_\varepsilon \to 0$, also $I(\varepsilon) \to 2\pi\varphi(0)$. Im Distributionensinne (D5I) gilt somit $\operatorname{rot}(f) = 2\pi\delta_0$, denn $\int_{\mathbb{R}^2} -f_2(\partial_1\varphi) + f_1(\partial_2\varphi) \, \mathrm{d}(x,y) = 2\pi\varphi(0)$.

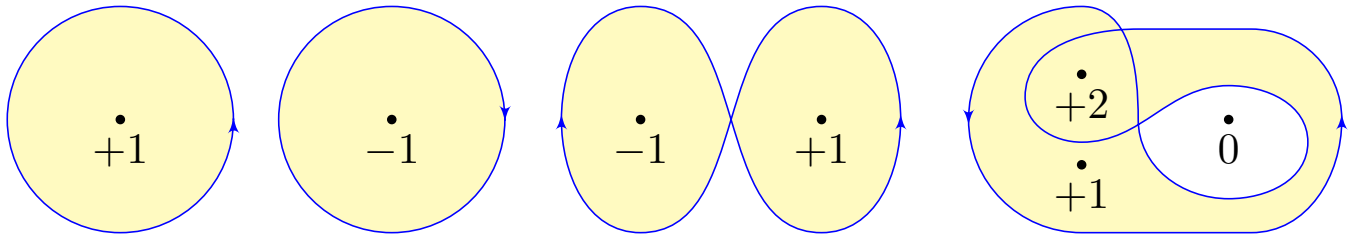
Die Umlaufzahl geschlossener Wege

Aufgabe: (Der Cauchy–Index bzw. die Umlaufzahl in der Ebene)

(1) Für jeden geschlossenen Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ ist der **Index**

$$\boxed{\operatorname{ind}_0(\gamma) := \frac{1}{2\pi} \oint_\gamma \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}}$$

eine ganze Zahl; sie zählt die Umläufe von γ um den Nullpunkt.
(Die dekorative Schreibweise „$\oint_\gamma$“ statt „$\int_\gamma$“ soll betonen bzw. daran erinnern, dass wir hier einen geschlossenen Weg γ betrachten.)



☺ Dieses prominente Beispiel ist das Arbeitsintegral des Wirbelfeldes f und das Flussintegral des Quellenfeldes g der vorigen Aufgabe. E317
Die komplexe Formulierung nutzen wir im Residuenkalkül. F409

Die Umlaufzahl geschlossener Wege

Nachrechnen: Zu $r : [a,b] \to \mathbb{R}_{>0}$ und $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ erhalten wir

$$\gamma \,:\, [a,b] \to U = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\} \,:\, t \mapsto r(t)\,\big(\cos\varphi(t), \sin\varphi(t)\big).$$

Jeder Weg $\gamma : [a,b] \to U$ lässt sich so in Polarkoordinaten darstellen.
Es gilt $\gamma(b) = \gamma(a)$ gdw $r(b) = r(a)$ und $\varphi(b) = \varphi(a) + 2\pi\ell$ mit $\ell \in \mathbb{Z}$.
Diese Zahl ℓ ist die Anzahl der Umläufe von γ um den Nullpunkt.

Sei $f(x,y) = (-y,x)/(x^2+y^2)$. Für $f(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t)$ finden wir

$$\left\langle \frac{1}{r(t)} \begin{pmatrix} -\sin\varphi(t) \\ \cos\varphi(t) \end{pmatrix} \,\middle|\, r'(t) \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) \end{pmatrix} + r(t)\,\varphi'(t) \begin{pmatrix} -\sin\varphi(t) \\ \cos\varphi(t) \end{pmatrix} \right\rangle = \varphi'(t).$$

Demnach misst der Integrand $f \bullet \mathrm{d}\gamma = \mathrm{d}\varphi$ die Winkeländerung:

$$\int_\gamma f \bullet \mathrm{d}\gamma = \int_a^b f(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(b) - \varphi(a)$$

Geteilt durch 2π erhalten wir die Zahl ℓ der Umläufe um den Ursprung.

☺ Damit sehen wir diesem Integral das Ergebnis geometrisch an.

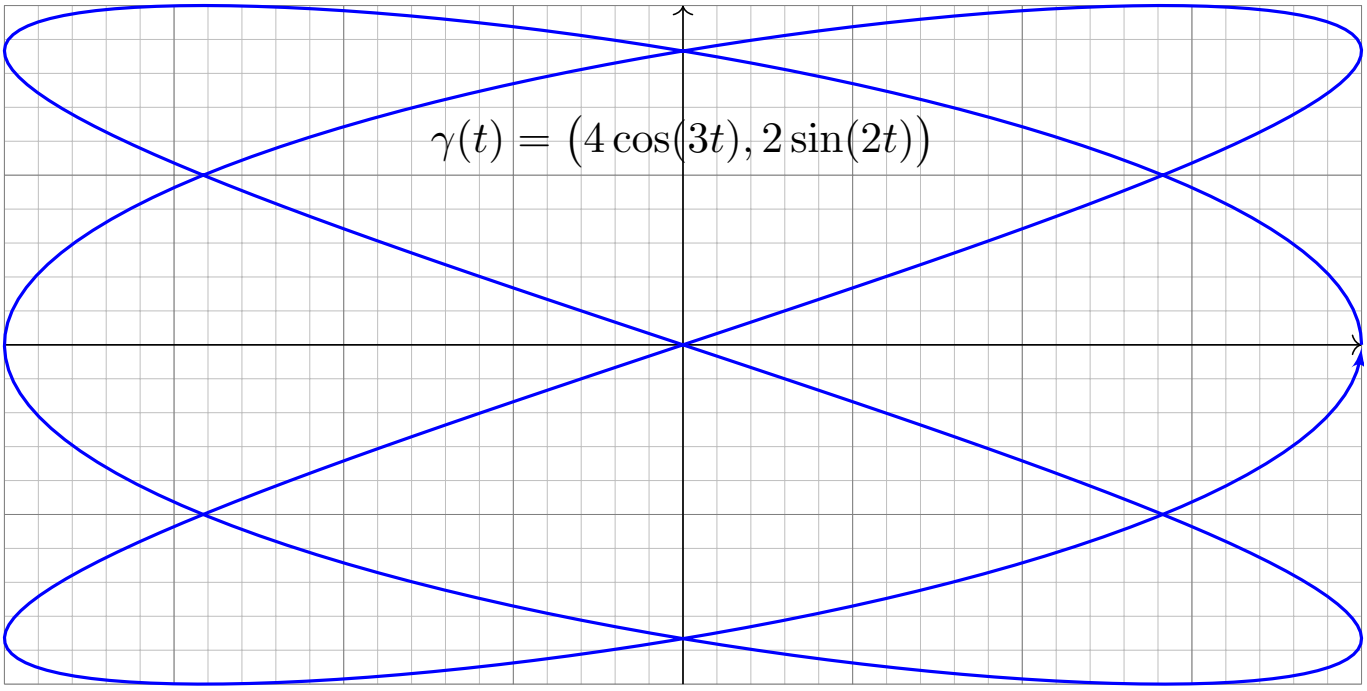
Die Umlaufzahl geschlossener Wege

E335
Ausführung

Aufgabe: (2) Bestimmen Sie zum folgenden Weg γ die Umlaufzahl

$$\operatorname{ind}_p(\gamma) := \frac{1}{2\pi} \oint_\gamma \frac{(x-a)\,\mathrm{d}y - (y-b)\,\mathrm{d}x}{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

für jeden Punkt $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, der nicht auf der Kurve liegt.



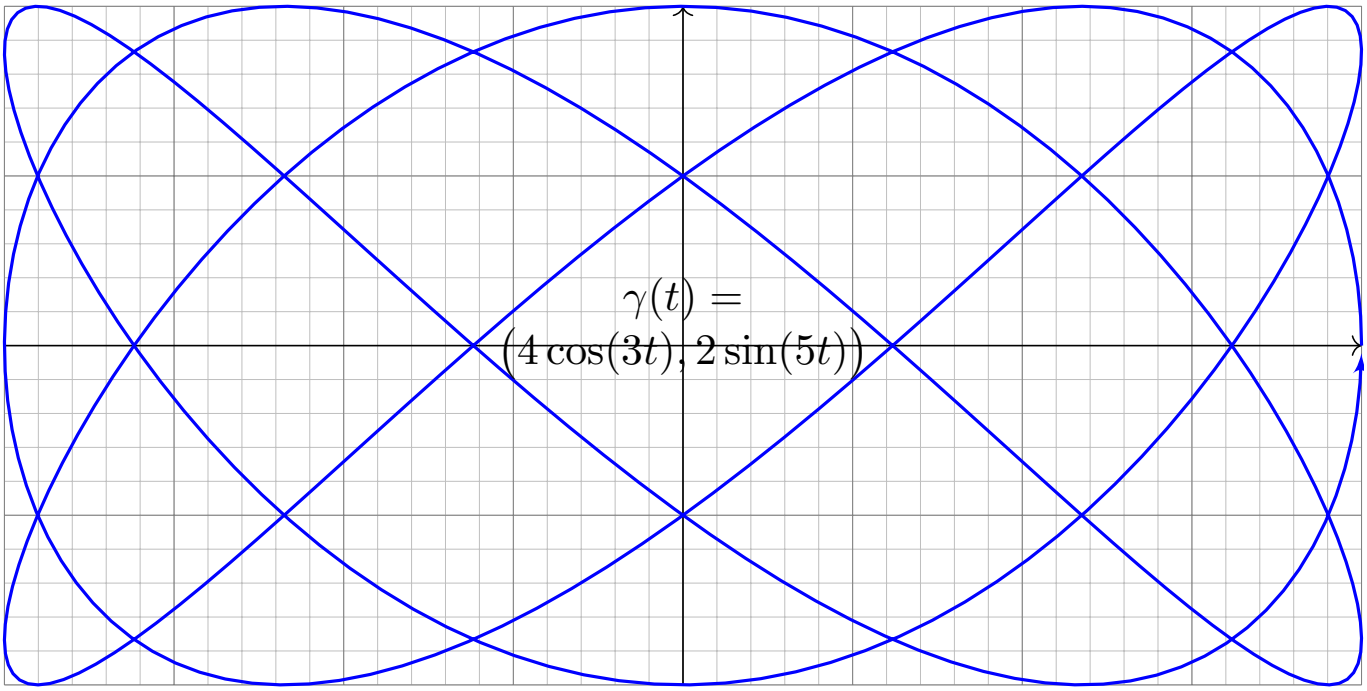
Die Umlaufzahl geschlossener Wege

E336
Ausführung

Aufgabe: (3) Bestimmen Sie zum folgenden Weg γ die Umlaufzahl

$$\operatorname{ind}_p(\gamma) := \frac{1}{2\pi} \oint_\gamma \frac{(x-a)\,\mathrm{d}y - (y-b)\,\mathrm{d}x}{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

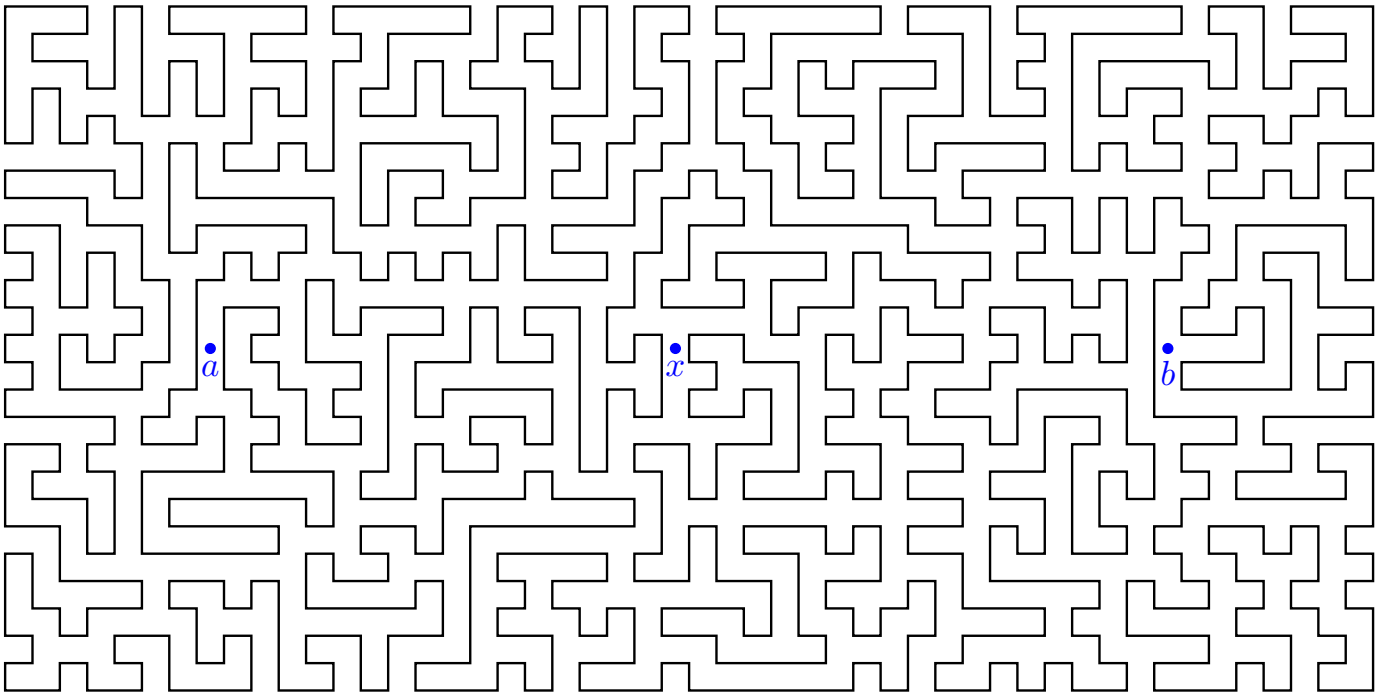
für jeden Punkt $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, der nicht auf der Kurve liegt.



Labyrinth und Jordanscher Kurvensatz

E337
Ausführung

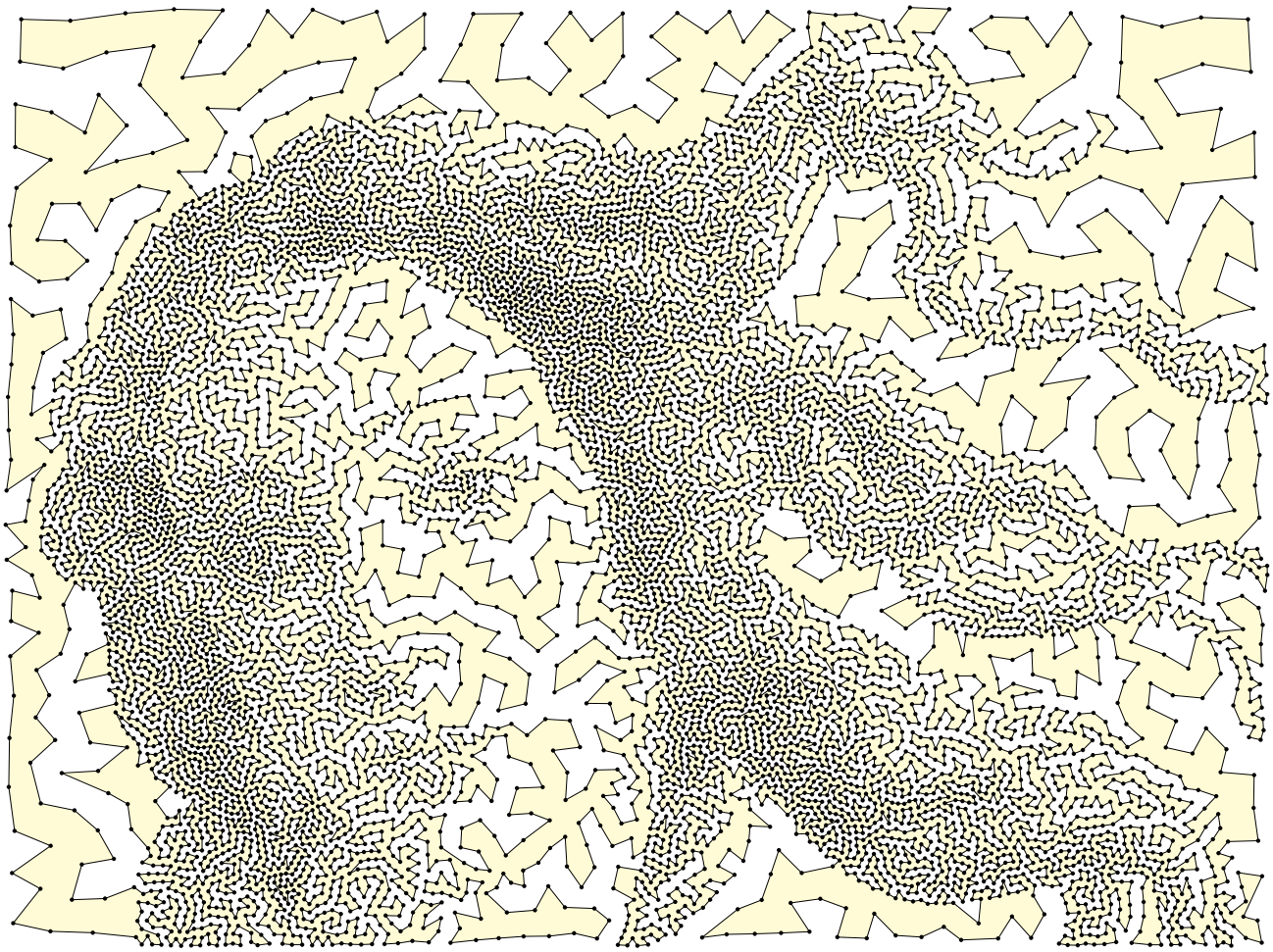
Wir betrachten die folgende einfach geschlossene Kurve $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$:



Können Sie die Punkte a mit b durch einen Weg in $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ verbinden? und a mit c? und b mit c? Wie kann man das effizient feststellen?

Labyrinth und Jordanscher Kurvensatz

E338
Ausführung



Labyrinth und Jordanscher Kurvensatz

Gegeben seien Zeitpunkte $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ in $\mathbb{R}$ sowie eine Folge von Bildpunkten $p_0, p_1, \ldots, p_n$ in der Ebene $\mathbb{R}^2$. E102

Diese Daten definieren den Polygonzug $\gamma = \left[\begin{smallmatrix} t_0 & t_1 & \cdots & t_n \\ p_0 & p_1 & \cdots & p_n \end{smallmatrix}\right] : [a, b] \to \mathbb{R}^2$.

Wir nehmen an, dass γ einfach geschlossen ist, also $\gamma(a) = \gamma(b)$ erfüllt, aber sonst keine Doppelpunkte hat. Dann gilt folgender schöne Satz:

Jordanscher Kurvensatz: Jede einfach geschlossene Kurve $\Gamma = \gamma([a, b])$ zerlegt die Ebene in zwei zusammenhängende Gebiete, $\mathbb{C} \smallsetminus \Gamma = A \sqcup B$, mit A unbeschränkt (außen) und B beschränkt (innen).

Aufgabe: (1) Zeichnen Sie möglichst komplizierte Beispiele einfach geschlossener Polygonzüge. Wählen Sie zufällig einen Punkt $q \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \Gamma$: Wie können Sie in Ihren Beispielen feststellen, ob q zum Inneren B gehört oder zum Äußeren A? Wie gelingt dies möglichst effizient?

(2) Wie kann man durch ein Integral / eine Summe feststellen, ob ein gegebener Punkt $q \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \Gamma$ zum Inneren oder zum Äußeren gehört?

Dieses Problem und seine Lösung tritt z.B. in CAD–Programmen auf. Versuchen Sie einen Algorithmus zu formulieren / zu programmieren.

Labyrinth und Jordanscher Kurvensatz

Lösung: (1) Zeichnen Sie ein paar Beispiele, es macht Spaß!
(2) Wir berechnen die Umlaufzahl des Weges γ um den Punkt q:

$$\operatorname{ind}_q(\gamma) = \operatorname{ind}_0(\gamma - q) = \sum\nolimits_{k=1}^{n} \sphericalangle(p_{k-1}, q, p_k)$$

Dies ergibt immer ein Vielfaches von 2π, dank der vorigen Aufgabe.
Da der Weg γ einfach geschlossen ist, parametrisiert er den Rand ∂B.
Dank der vorigen Aufgaben sind somit nur drei Werte möglich:

$$\operatorname{ind}_q(\gamma) = \begin{cases} \pm 2\pi & \text{falls } \gamma \text{ den Punkt } q \text{ positiv/negativ umläuft,} \\ 0 & \text{falls } \gamma \text{ den Punkt } q \text{ nicht umläuft.} \end{cases}$$

In den ersten beiden Fällen liegt q im Inneren, sonst im Äußeren.

Für die schnelle Berechnung per Computer kann man die Formel noch weiter optimieren. Das ist Grundlage aller graphischen Oberflächen (CAD, GIS, etc): Jeder Mausklick löst eine solche Berechnung aus!

Auch in Spielen werden Objekte eines 3D-Szenarios, etwa simpliziale Flächen, auf die Bildebene projiziert; zur realistischen Anzeige müssen insbesondere Überschneidungen erkannt und korrekt behandelt werden.

Potentiale und Gradientenfelder

Wiederholung: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Was versteht man unter...
(1) einem Skalarfeld F auf U? (2) einem Vektorfeld f auf U?
(3) dem Gradienten von F? (4) einem Potential zu f?
(5) Was besagt der HDI für ein Vektorfeld f mit Potential F?
(6) Was gilt demnach für Arbeitsintegrale geschlossener Wege?

(1) Ein **Skalarfeld** auf U ist eine stetige Abbildung $F : \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}$.
(2) Ein **Vektorfeld** auf U ist eine stetige Abbildung $f : \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^n$.
(3) Zu jedem stetig diff'baren Skalarfeld $F : U \to \mathbb{R}$ ist der **Gradient**

$$f : U \to \mathbb{R}^n \quad \text{gegeben durch} \quad f = F' = \operatorname{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right).$$

(4) Ein **Potential** zu $f : U \to \mathbb{R}^n$ ist ein Skalarfeld $F : U \to \mathbb{R}$ mit $F' = f$.
(5) Für jeden stückweise stetig diff'baren Weg $\gamma : [a, b] \to U$ gilt dann:

$$\int_\gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma \overset{\text{Def}}{=} \int_{t=a}^b F'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, \mathrm{d}t \overset{\text{KR}}{=} \int_{t=a}^b \frac{\mathrm{d}F(\gamma(t))}{\mathrm{d}t}\, \mathrm{d}t \overset{\text{HDI}}{=} F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

(6) Ist $f = F'$ und γ geschlossen, also $\gamma(a) = \gamma(b)$, so folgt $\oint_\gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma = 0$.

Potentiale und Gradientenfelder

(1–2) Jedem Punkt $x \in U$ aus dem Definitionsgebiet U wird eine reelle Zahl $F(x) \in \mathbb{R}$ bzw. ein Vektor $f(x) \in \mathbb{R}^n$ zugeordnet. Wir nehmen meist stillschweigend an, dass diese Zuordnungen stetig / stetig diff'bar sind.

(3–4) In Dimension $n = 1$ ist $f = F'$ **Ableitung** und F **Stammfunktion**. Potentiale sind nur bis auf additive Konstanten eindeutig bestimmt.

(5) Das Arbeitsintegral eines Gradientenfeldes $f = F'$ hängt nur vom **Start** $p = \gamma(a)$ und **Ziel** $q = \gamma(b)$ ab, ansonsten aber nicht vom Weg γ.
Physikalisch entspricht dies der Energieerhaltung: Die zur Bewegung entlang γ aufgebrachte Arbeit wird als Lageenergie gespeichert.

(6) So kann man feststellen, ob ein Vektorfeld f ein Potential hat:
Aus $\oint_\gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma \neq 0$ folgt, dass das Feld f kein Potential haben kann.

Wir nennen ein Vektorfeld f **konservativ**, wenn $\oint_\gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma = 0$ gilt.
Das bedeutet, längs geschlossener Wege wird keine Arbeit verrichtet.
Jede an einer Stelle des Weges aufgewandte Energie wird an anderer Stelle zurückgewonnen, die Gesamtenergie bleibt schließlich erhalten.

📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §5. Das Potentialproblem lösen wir in Kapitel H und nutzen dies in Kapitel M zur Lösung von exakten Differentialgleichungen.

Der Hauptsatz für Arbeitsintegrale

Unser Vorbild ist der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: Für jede stetig diff'bare Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit Ableitung $f = F'$ gilt

$$\text{HDI:} \qquad \int_{s=a}^{b} f(s)\,\mathrm{d}s = F(b) - F(a)$$

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\Gamma \subseteq U$ eine orientierte, stückweise glatte Kurve. Die Orientierung teilt die Randpunkte $s \in \partial\Gamma$ in Start- und Zielpunkte; Startpunkte zählen negativ, $n(s) = -1$, Zielpunkte positiv, $n(s) = +1$. Gegeben sei zudem eine stetig differenzierbare Funktion $F : U \to \mathbb{R}$.

Satz E3c: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Für das Arbeitsintegral jedes Gradientenfeldes $f = F' = \operatorname{grad} F$ gilt:

$$\int_{s\in\Gamma} f(s) \bullet \mathrm{d}s = \sum_{s\in\partial\Gamma} F(s)\, n(s)$$

Ist die Kurve Γ geschlossen, also $\partial\Gamma = \emptyset$, so folgt $\oint_\Gamma f(s) \bullet \mathrm{d}s = 0$.

Der Hauptsatz für Arbeitsintegrale

Dies ist ein erster wichtiger Integralsatz! In Worten: Das Arbeitsintegral jedes Gradientenfeldes $f = F'$ entlang jeder Kurve Γ ist gleich der Differenz des Potentials F in den Start- und Zielpunkten der Kurve Γ.

Aufgabe: Begründen Sie diese Integralformel E3c möglichst detailliert. Wie allgemein darf die Kurve Γ hierbei sein? glatt? stückweise?

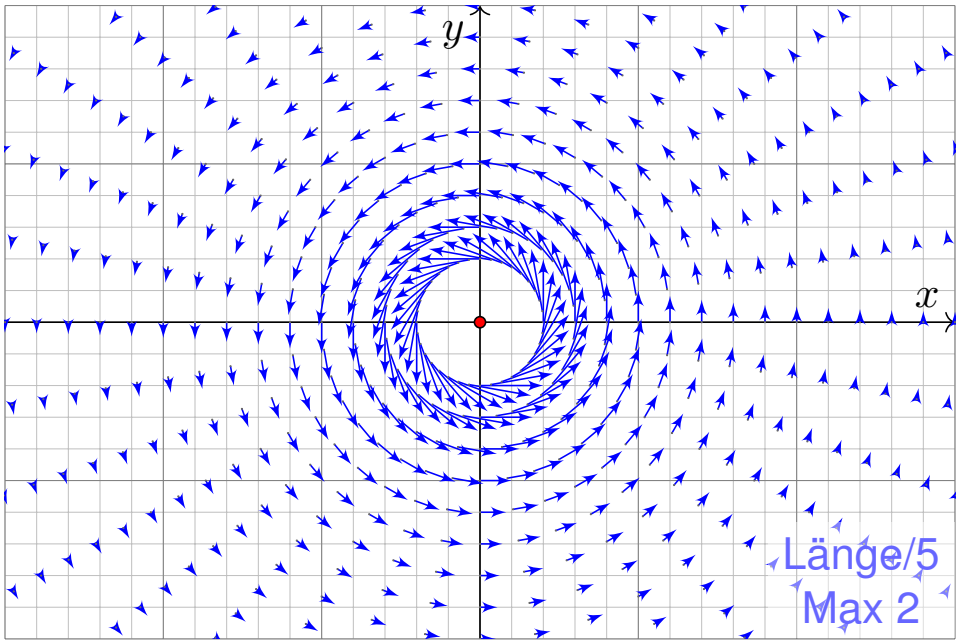
Lösung: Wir unterteilen $\Gamma = \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_k$ in endlich viele glatte Kurven und parametrisieren jede durch einen regulären Weg $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \Gamma_1$, $\ldots$, $\gamma_k : [a_k, b_k] \to \Gamma_k$. Für das gesuchte Arbeitsintegral über Γ gilt dann:

$$\int_\Gamma f \bullet \mathrm{d}\Gamma = \sum_{i=1}^{k} \int_{\gamma_i} f \bullet \mathrm{d}\gamma_i = \sum_{i=1}^{k} F(\gamma(b_i)) - F(\gamma(a_i)) = \sum_{s\in\partial\Gamma} F(s)\, n(s)$$

Hier durchläuft jeder Weg γ_i seine Kurve Γ_i gemäß der vorgegebenen Orientierung vom Startpunkt $p_i = \gamma(a_i)$ zum Zielpunkt $q_i = \gamma(b_i)$. Jeder innere Punkt s tritt dabei zweimal auf: einmal als Ziel $s = q_i$ und einmal als Start $s = p_j$. In der Summe heben sich beide Beiträge auf! In der Gesamtsumme bleibt nur der Rand von Γ, also $\sum_{s\in\partial\Gamma} F(s)\, n(s)$.

Zentrales Beispiel: das Wirbelfeld

Aufgabe: (1) Sei $a \in \mathbb{R}$. Skizzieren Sie das zirkuläre Vektorfeld $f : U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y) = (-y,x)/(x^2+y^2)^{a/2}$.



Das Vektorfeld f ist tangential zum Kreis und hat Norm $|f(x,y)| = r^{1-a}$.
Im Nullpunkt hat f für $a > 1$ eine Polstelle, stetig fortsetzbar für $a < 1$.

Zentrales Beispiel: das Wirbelfeld

(2) Berechnen Sie das Arbeitsintegral von f entlang des Weges

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad \gamma(t) = (r\cos t, r\sin t).$$

(3) Berechnen Sie $\operatorname{rot}(f)$. Für welche a ist $\operatorname{rot}(f)$ konstant? Null?

(4) Für welche a existiert zu f ein Potential $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$?

Lösung: (2) Wir berechnen das Arbeitsintegral von f entlang γ:

$$\int_\gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma = \int_{t=0}^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{2\pi} \frac{1}{r^a} \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}t$$

$$= \int_{t=0}^{2\pi} r^{2-a}\,\mathrm{d}t \qquad = 2\pi\, r^{2-a}.$$

(3) Wir finden $\operatorname{rot}(f) = \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 = (2-a)/(x^2+y^2)^{a/2}$.
Die Rotation ist konstant für $a \in \{0, 2\}$, und Null nur für $a = 2$.

(4) Das Feld f erlaubt kein Potential auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, denn $\oint_\gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma \neq 0$.
⚠ Für $a = 2$ ist das Feld f rotationsfrei, besitzt aber kein Potential!

Zentrales Beispiel: das Wirbelfeld

Aufgabe: Wir untersuchen $f(x,y) = (-y,x)/(x^2+y^2)$.
Dies ist das obige Wirbelfeld im besonders interessanten Fall $a = 2$.

(5) Ist $F = \arctan(y/x)$ ein Potential zu f? Auf welchem Gebiet?

(6) Ist $G = -\arctan(x/y)$ ein Potential zu f? Auf welchem Gebiet?

(7) Bestimmen Sie $\int_\Gamma f(s) \cdot \mathrm{d}s$ für eine beliebige Kurve Γ von p nach q, die ganz in einer Halbebene liegt, etwa in $U = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \,\}$.

(8) Bestimmen Sie $\oint_{\partial Q} f(s) \cdot \mathrm{d}s$ für $Q = [a,b] \times [c,d]$ mit $0 \notin Q$ bzw. $0 \in \mathring{Q}$.

Lösung: (5) Wir nutzen direkt die Definition und machen die Probe:

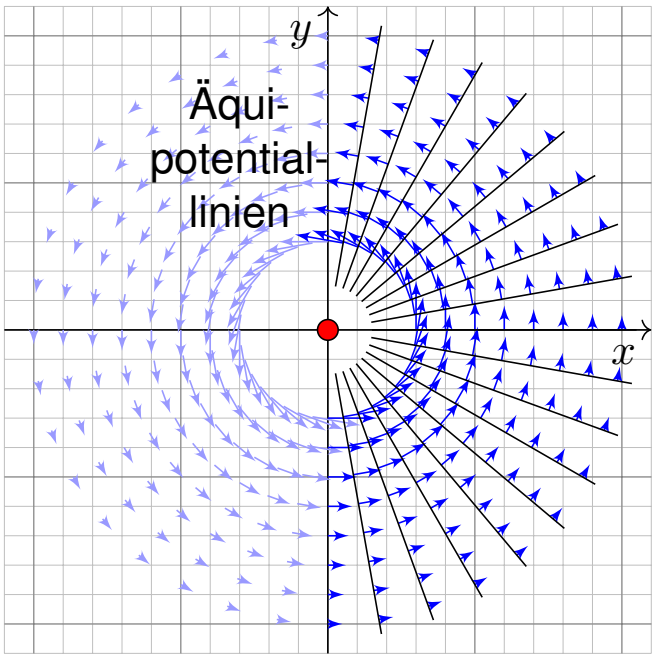
$$\partial_x \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1+(y/x)^2} \cdot \frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2+y^2}$$
$$\partial_y \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1+(y/x)^2} \cdot \frac{1}{x} \quad = \frac{+x}{x^2+y^2}$$

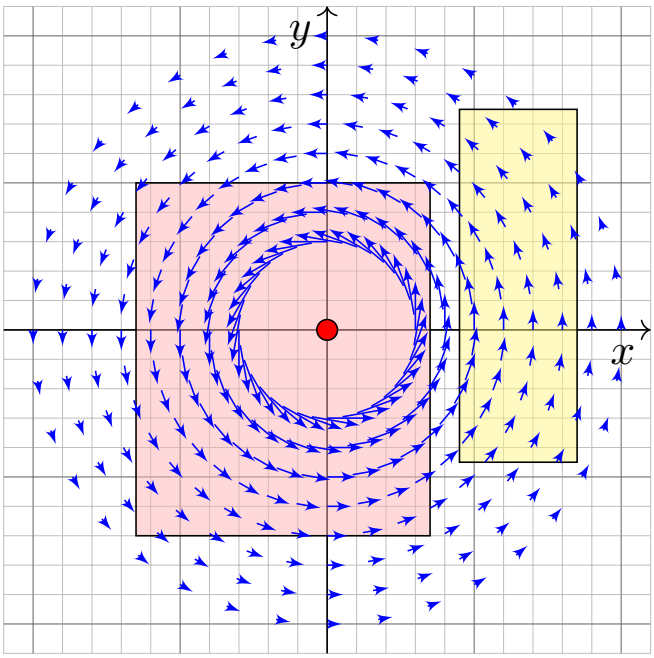
Dies ist ein Potential zu f auf der Halbebene $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ und auf $\mathbb{R}_{<0} \times \mathbb{R}$.
Auf der Geraden $x = 0$ ist F nicht definiert, auch nicht stetig fortsetzbar.

(6) Ebenso ist $-\arctan(x/y)$ ein Potential auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$ und auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{<0}$.

Zentrales Beispiel: das Wirbelfeld

(7) Das Arbeitsintegral $\int_\Gamma f(s) \cdot \mathrm{d}s = \sphericalangle(p,0,q)$ misst die Winkeländerung!





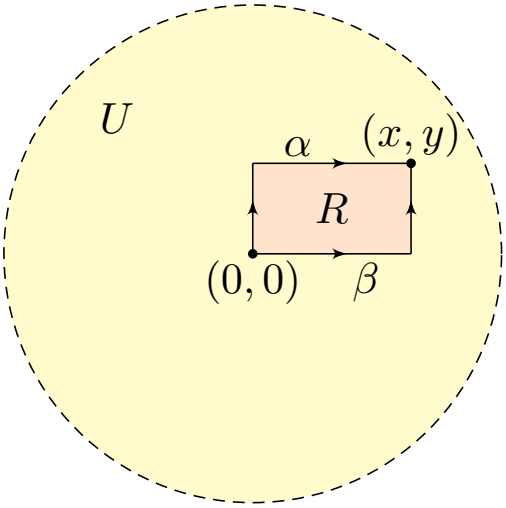
(8a) Für $0 \notin Q$ liegt Q ganz in einer Halbebene, also $\oint_{\partial Q} f(s) \cdot \mathrm{d}s = 0$.

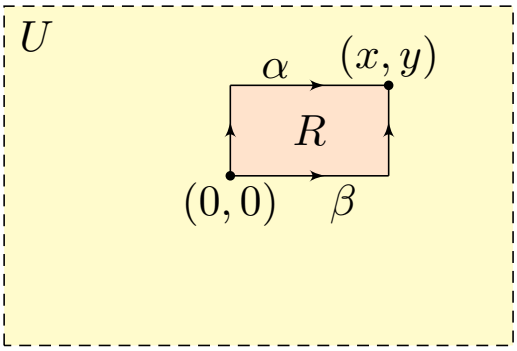
(8b) Für $0 \in \mathring{Q}$ umläuft ∂Q einmal den Ursprung, also $\oint_{\partial Q} f(s) \cdot \mathrm{d}s = 2\pi$.

☺ Das Integral $\frac{1}{2\pi} \oint_\Gamma f(s) \cdot \mathrm{d}s$ zählt die Umläufe von Γ um den Ursprung!

Lösung des zweidimensionalen Potentialproblems

Sei $U = B(z, r) \subseteq \mathbb{R}^2$ die offene Kreisscheibe um z vom Radius $r > 0$. Nach Verschieben dürfen wir $z = (0, 0)$ annehmen, also $U = B(0, r)$.





Sei $f : U \to \mathbb{R}^2$ stetig. Wir betrachten die skizzierten Wege α, β von $(0, 0)$ nach (x, y) und definieren $G, H : U \to \mathbb{R}$ durch die Hakenintegrale

$$G(x, y) := \int_\alpha f(s) \cdot \mathrm{d}s \quad \text{und} \quad H(x, y) := \int_\beta f(s) \cdot \mathrm{d}s.$$

Wir wollen untersuchen, wann G bzw. H ein Potential zu f ist.

Lösung des zweidimensionalen Potentialproblems

☺ Die folgenden Rechnungen lösen das zweidim. Potentialproblem: Wann existiert ein Potential zu f? Wie können wir eins berechnen?

Aufgabe: (1) Schreiben Sie die obigen Wegintegrale explizit aus. Berechnen Sie so die partiellen Ableitungen $\partial_x G = f_1$ und $\partial_y H = f_2$.

(2) Sind die folgenden Aussagen äquivalent? Warum?

(A) Das Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^2$ erlaubt ein Potential $F : U \to \mathbb{R}$.

(B) Es gilt $\oint_{\partial R} f(s) \cdot \mathrm{d}s = 0$ für jedes Rechteck $R = [a, b] \times [c, d] \subseteq U$.

(C) Es gilt $G = H$, also $G(x, y) = H(x, y)$ für jeden Punkt $(x, y) \in U$.

(3) Welche Implikationen gelten zur lokalen Potentialbedingung?

(A') Zu f existiert lokal ein Potential: Zu jedem $p \in U$ existiert $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und ein C^1–Potential $F : U \supseteq B(p, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ mit $F' = f|_{B(p,\varepsilon)}$.

(4) Sei zudem $f \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$. Welche Implikationen gelten für $\mathrm{rot}(f)$?

(B') Die Rotation $\mathrm{rot}(f) = \partial_x f_2 - \partial_y f_1$ verschwindet auf ganz U.

(5) Welche dieser Implikationen gelten noch, wenn U ein Rechteck ist?

(6) Welche gelten, wenn U ein beliebiges Gebiet ist, evtl. mit Löchern?

Lösung des zweidimensionalen Potentialproblems

Lösung: (1) Die beiden Wegintegrale bedeuten ausgeschrieben:

$$G(x,y) := \int_\alpha f(s)\cdot \mathrm{d}s = \int_{t=0}^{y} f_2(0,t)\,\mathrm{d}t + \int_{t=0}^{x} f_1(t,y)\,\mathrm{d}t$$
$$H(x,y) := \int_\beta f(s)\cdot \mathrm{d}s = \int_{t=0}^{x} f_1(t,0)\,\mathrm{d}t + \int_{t=0}^{y} f_2(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Dank HDI (Satz B1I) gilt $\partial_x G(x,y) = f_1(x,y)$ und $\partial_y H(x,y) = f_2(x,y)$.

⚠ Zu $\partial_y G$ und $\partial_x H$ wissen wir noch nichts. Wir können nicht unter dem Integral ableiten, solange wir nur $f \in C^0$ wissen. Für $f \in C^1$ siehe (4).

(2) Die Äquivalenzen zeigen wir durch (A) $\Rightarrow$ (B) $\Rightarrow$ (C) $\Rightarrow$ (A):
„(A) $\Rightarrow$ (B)“: Das ist der HDI für Arbeitsintegrale (Satz E3C).
„(B) $\Rightarrow$ (C)“: Für das Rechteck $R = [0,x]\times[0,y] \subseteq U$ finden wir:

$$H(x,y) - G(x,y) = \int_\beta f(s)\,\mathrm{d}s - \int_\alpha f(s)\,\mathrm{d}s = \oint_{\partial R} f(s)\,\mathrm{d}s = 0$$

„(C) $\Rightarrow$ (A)“: Dank (1) und $G = H$ gilt $\operatorname{grad} G = f$, also ist G ein Potential.

☺ Notwendig und hinreichend für die Existenz eines Potentials zu f ist demnach, dass beide Hakenintegrale G und H übereinstimmen.

Lösung des zweidimensionalen Potentialproblems

(3) Klar ist (A) $\Rightarrow$ (A'). Es gilt (A') $\Rightarrow$ (B) durch Unterteilung in genügend kleine Rechtecke und Summation, somit (A') $\Rightarrow$ (B) $\Rightarrow$ (C) $\Rightarrow$ (A').

(4) Die Implikation „(B') $\Rightarrow$ (B)“ folgt aus dem Satz von Green (E1I).
Die Umkehrung „(B) $\Rightarrow$ (B')“ folgt durch Grenzübergang. E140

☺ Die lokale Bedingung (B') ist leicht zu prüfen: Es genügt, abzuleiten! Das ist meist leichter, als die Gleichheit aller Hakenintegrale zu prüfen.

(5) Alle Argumente gelten wörtlich genauso für jedes Rechteck $U \subseteq \mathbb{R}^2$.

Satz E3D: Potentiale auf einfachen Gebieten

Unser Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^2$ sei eine Kreisscheibe oder ein Rechteck.
Ein C^1–Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^2$ erlaubt genau dann ein Potential,
wenn die Rotation $\operatorname{rot}(f) = \partial_x f_2 - \partial_y f_1$ auf ganz U verschwindet.
In diesem Fall liefern die obigen Hakenintegrale $G = H$ ein Potential.

(6) Die Integrale G, H und die Bedingung (C) haben keinen Sinn, wenn die Integrationswege α, β aus dem Definitionsgebiet von f hinauslaufen.

⚠ Die erhoffte Implikation (B') $\Rightarrow$ (A) gilt im Allgemeinen nicht, wie das Wirbelfeld E317 eindrücklich zeigt. Das ist ein weitverbreiteter Irrglauben!

Anwendungsbeispiel zum Potentialproblem

Aufgabe: Wir untersuchen das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y) = \big(axy,\, x^2 - by\,\mathrm{e}^{-y^2/2} \big).$$

(1) Für welche Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ erlaubt f ein Potential $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?
Nur für diese Fälle wird f im Folgenden noch genauer untersucht:

(2) Bestimmen Sie $F(x,y)$ durch (a) koordinatenweise Integration und (b) jedes der beiden Hakenintegrale von $(0,0)$ nach (x,y).
Ergeben beide Hakenintegrale dasselbe Ergebnis? Warum?

(3) Berechnen Sie das Arbeitsintegral von f entlang $\alpha, \beta : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\alpha(t) = \big(\cos(\pi t)^4, t - t^3\big)$ und $\beta(t) = \big(\sin(\pi t/2)^6, t^6 + t^3 - t\big)$.

Lösung: (1) Wir prüfen zunächst das notwendige Kriterium:

$$\operatorname{rot}(f) = \partial_x f_2 - \partial_y f_1 = 2x - ax \quad \overset{!}{=} \quad 0$$

Für $a \neq 2$ gilt $\operatorname{rot}(f) \neq 0$ und somit kann f kein Potential haben. (E3D)
Für $a = 2$ gilt $\operatorname{rot}(f) = 0$ und f hat (zumindest lokal) ein Potential. (E3D)
☺ Glücklicherweise ist das Gebiet $\mathbb{R}^2$ hier ein Rechteck. Dank E3D gilt:
Für $a = 2$ hat das Vektorfeld f ein Potential $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} F = f$.

Anwendungsbeispiel zum Potentialproblem

(2) Zu $f(x,y) = (axy, x^2 - by\,\mathrm{e}^{-y^2/2})$ suchen wir $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $F' = f$.
☺ Nur für $a = 2$ lohnt die Suche: Dank (1) existiert dann eine Lösung!
Wir lassen aus Neugier auch $a \neq 2$ zu und sehen dann wo's scheitert.

(2a) Koordinatenweise Integration; die erste Gleichung $\partial_x F = f_1$ liefert:

$$\begin{aligned} & \partial_x F(x,y) \overset{!}{=} axy \\ \Longrightarrow \quad & F(x,y) = \textstyle\int axy\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2}x^2 y + c(y) \end{aligned}$$

Die Integrationskonstante $c(y)$ hängt nur noch von y ab.
Die zweite Gleichung $\partial_y F = f_2$ liefert anschließend:

$$\begin{aligned} & \partial_y F(x,y) = \tfrac{a}{2}x^2 + c'(y) \overset{!}{=} x^2 - by\,\mathrm{e}^{-y^2/2} && \text{Löse nach } c(y)! \\ \Longrightarrow \quad & c'(y) = \tfrac{2-a}{2}x^2 - by\,\mathrm{e}^{-y^2/2} && \text{Erfordert } a = 2! \\ \Longrightarrow \quad & c(y) = \textstyle\int -by\,\mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y && = b\,\mathrm{e}^{-y^2/2} + \mathrm{const} \end{aligned}$$

☺ Wir erhalten für $a = 2$ das Potential $F(x,y) = x^2 y + b\,\mathrm{e}^{-y^2/2} + \mathrm{const}$.
Die Probe ist wie immer schnell und sicher: Gilt tatsächlich $\operatorname{grad} F = f$?
Wir finden $\partial_x F = 2xy = f_1$ und $\partial_y F = x^2 - by\,\mathrm{e}^{-y^2/2} = f_2$. Alles ist gut.
⚠ Für $a \neq 2$ scheitert diese Rechnung; gemäß (1) auch jede andere!

Anwendungsbeispiel zum Potentialproblem

(2b) Wir berechnen das Hakenintegral von $(0,0)$ über $(0,y)$ nach (x,y):

$$G(x,y) = \int_{t=0}^{y} f_2(0,t)\,\mathrm{d}t + \int_{t=0}^{x} f_1(t,y)\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{y} -bt\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t + \int_{t=0}^{x} aty\,\mathrm{d}t$$
$$= \Big[b\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\Big]_{t=0}^{y} + \Big[\frac{a}{2}t^2y\Big]_{t=0}^{x} \qquad = b\,\mathrm{e}^{-y^2/2} - b + \frac{a}{2}x^2y$$

Probe: $\partial_x G = axy = f_1$, aber $\partial_y G = \frac{a}{2}x^2 - by\,\mathrm{e}^{-y^2/b} \overset{!}{=} f_2$ erfordert $a = 2$!
Wir berechnen das Hakenintegral von $(0,0)$ über $(x,0)$ nach (x,y):

$$H(x,y) = \int_{t=0}^{x} f_1(t,0)\,\mathrm{d}t + \int_{t=0}^{y} f_2(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{y} x^2 - bt\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$$
$$= \Big[x^2t + b\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\Big]_{t=0}^{y} \qquad = x^2y + b\,\mathrm{e}^{-y^2/2} - b$$

Probe: $\partial_y H = x^2 - by\,\mathrm{e}^{-y^2/b} = f_2$, aber $\partial_x H = 2xy \overset{!}{=} f_1$ erfordert $a = 2$!
Die Haken umlaufen das Rechteck $R = [0,x] \times [0,y]$. Dank Green gilt:

$$H(x,y) - G(x,y) = \oint_{\partial R} f(s)\,\mathrm{d}s = \int_R \operatorname{rot} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \overset{!}{=} 0$$

☺ Nur im Falle $\operatorname{rot}(f) = 0$ gilt $G = H$ und wir erhalten ein Potential!
Dieses allgemeine Prinzip wurde in der vorigen Aufgabe ausgeführt.

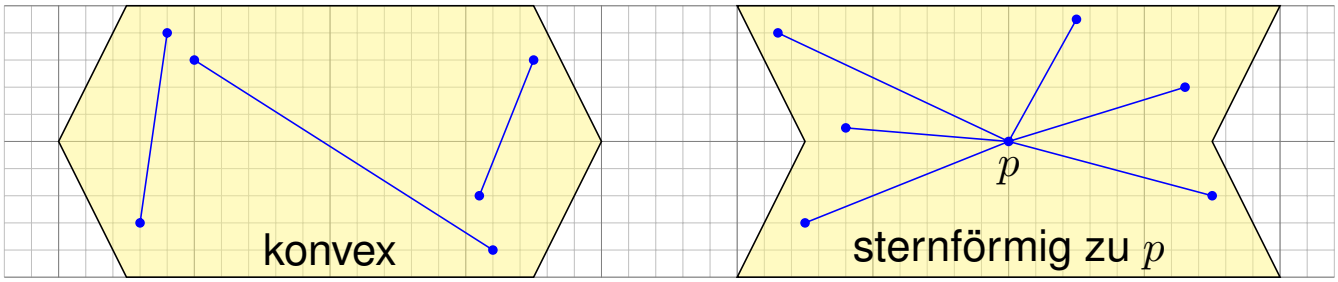
Anwendungsbeispiel zum Potentialproblem

⚠ Die Integrationswege α und β sind hier kompliziert; das war Absicht.
Die direkte Berechnung der Arbeitsintegrale $\int_\alpha f(s) \bullet \mathrm{d}s$ und $\int_\beta f(s) \bullet \mathrm{d}s$ ist zwar möglich aber mühsam – und dadurch lang und fehleranfällig.
☺ Dank unserer Vorarbeit können wir das Potential F nutzen!

(3a) Der Weg $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ läuft von $\alpha(0) = (1,0)$ nach $\alpha(1) = (1,0)$.
Dank HDI gilt $\int_\alpha f(s) \bullet \mathrm{d}s = \int_{t=0}^{1} F'(\alpha(t)) \bullet \alpha'(t)\,\mathrm{d}t = \big[F(\alpha(t))\big]_{t=0}^{1} = 0$.
☺ Hierzu genügt Existenz (1) von F, die Berechnung (2) ist entbehrlich.
Wir können direkt Green anwenden: $\int_\alpha f(s) \bullet \mathrm{d}s = \int_D \operatorname{rot}(f)\,\mathrm{d}(x,y) = 0$.

(3b) Der Weg $\beta : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ läuft von $\beta(0) = (0,0)$ nach $\beta(1) = (1,1)$.
Dank HDI gilt $\int_\beta f(s) \bullet \mathrm{d}s = F(\beta(1)) - F(\beta(0)) = b/\sqrt{\mathrm{e}}$. Wunderbar!
☺ Konservativ: Für jedes Gradientenfeld $f = F'$ ist die Berechnung von Arbeitsintegralen denkbar einfach: Das Ergebnis hängt nur von Anfangs- und Endpunkt ab und ist ansonsten unabhängig vom Integrationsweg!
☺ Arbeitsintegrale illustrieren den praktischen Nutzen von Potentialen.
Eine weitere wichtige Anwendung von Potentialen präsentiert Kapitel M bei der Lösung exakter Differentialgleichungen $f(x,y) + g(x,y)\,y' = 0$.

Konvexe und sternförmige Gebiete



Eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, wenn zu je zwei Punkten $p, q \in U$ ihre Verbindungsstrecke $[p, q] = \{\, (1-t)p + tq \mid 0 \le t \le 1 \,\}$ in U liegt. Das ist die Bildmenge des Weges $\gamma_{p,q} : [0,1] \to \mathbb{R}^n : t \mapsto (1-t)p + tq$. Das Wegintegral entlang dieses direkten, affin-linearen Weges ist:

$$\int_{[p,q]} f(s) \cdot \mathrm{d}s := \int_{\gamma_{p,q}} f(s) \cdot \mathrm{d}s = \int_{t=0}^{1} f\big((1-t)p + tq\big) \cdot (q-p)\,\mathrm{d}t$$

Wir nennen U **sternförmig** bezüglich eines festen Zentrums $p \in U$, wenn zu jedem Punkt $q \in U$ die Verbindungsstrecke $[p, q]$ in U liegt. Nach Verschieben dürfen wir $p = 0$ annehmen; das ist oft bequemer. Zu jedem Punkt $q \in U$ verläuft der Weg $\gamma_q : [0,1] \to \mathbb{R}^n : t \mapsto tq$ in U.

Potentiale auf sternförmigen Gebieten

Das **Potentialproblem:** Wir suchen ein Potential zu $f : \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^n$. (1) Die Bedingung $\operatorname{rot}(f) = 0$ ist **notwendig**, aber im Allgemeinen nicht hinreichend. (2) Auf sternförmigen Gebieten $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist sie notwendig und **hinreichend**, insbesondere auf Bällen und Quadern (Satz E3D).

Satz E3E: Potentiale auf sternförmigen Gebieten

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^n$ ein C^1–Vektorfeld.

(1) Wenn f ein Potential $F : U \to \mathbb{R}$ erlaubt, also $f = \operatorname{grad} F$, dann ist f rotationsfrei, also $\partial_j f_i = \partial_i f_j$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$.

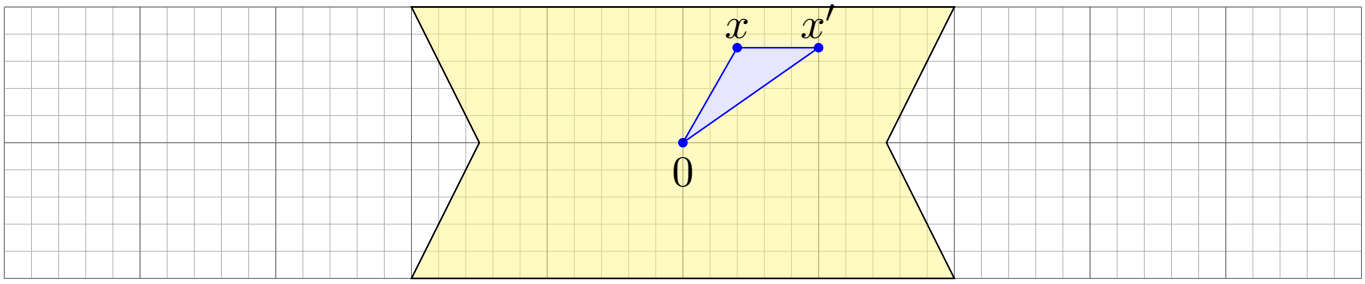
(2) Ist umgekehrt $f : U \to \mathbb{R}^n$ rotationsfrei und U sternförmig um 0, dann erhalten wir ein Potential durch folgendes Arbeitsintegral:

$$F(x) = \int_{[0,x]} f(s) \cdot \mathrm{d}s = \int_{t=0}^{1} f(tx) \cdot x\,\mathrm{d}t = \sum_{j=1}^{n} \int_{t=0}^{1} x_j f_j(tx)\,\mathrm{d}t$$

Aufgabe: Folgern Sie Aussage (1) aus dem Satz von Schwarz (D4A). Berechnen Sie (2) zuerst (a) für $n = 2$ geometrisch mit Green, dann (b) analytisch durch Ableiten unterm Integral. Warum ist das erlaubt?

Potentiale auf sternförmigen Gebieten

(1) Für $f = \operatorname{grad} F \in C^1$ gilt $F \in C^2$, also $\partial_j f_i = \partial_j \partial_i F = \partial_i \partial_j F = \partial_i f_j$.
(2a) Wir vergleichen $F(x)$ und $F(x')$ wobei $x' = x + he_i$ und $[x, x'] \subseteq U$.



Das Dreieck $\Delta = [0, x', x]$ liegt ganz in U. Dank Green (E1I) gilt:

$$\int_{[0,x']} f(s) \cdot \mathrm{d}s + \int_{[x',x]} f(s) \cdot \mathrm{d}s + \int_{[x,0]} f(s) \cdot \mathrm{d}s$$
$$= \int_{\partial\Delta} f(s) \cdot \mathrm{d}s = \int_{\Delta} \operatorname{rot}(f)\, \mathrm{d}x = 0$$

Hieraus erhalten wir die partielle Ableitung $\partial_i F = f_i$ wie erhofft:

$$\frac{F(x + he_i) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_{[x,x']} f(s) \cdot \mathrm{d}s = \frac{1}{h} \int_{t=0}^{h} f_i(x + he_i)\, \mathrm{d}t \to f_i(x)$$

Potentiale auf sternförmigen Gebieten

(2b) Wir berechnen $\partial_i F$ durch Ableiten unter dem Integral (Satz D3C):

$$\partial_i F(x) = \partial_i \int_{t=0}^{1} \left[\sum_{j=1}^{n} x_j f_j(tx) \right] \mathrm{d}t \qquad \text{Ableiten unterm Integral}$$

$$= \int_{t=0}^{1} \partial_i \left[\sum_{j=1}^{n} x_j f_j(tx) \right] \mathrm{d}t \qquad \text{Produkt- und Kettenregel}$$

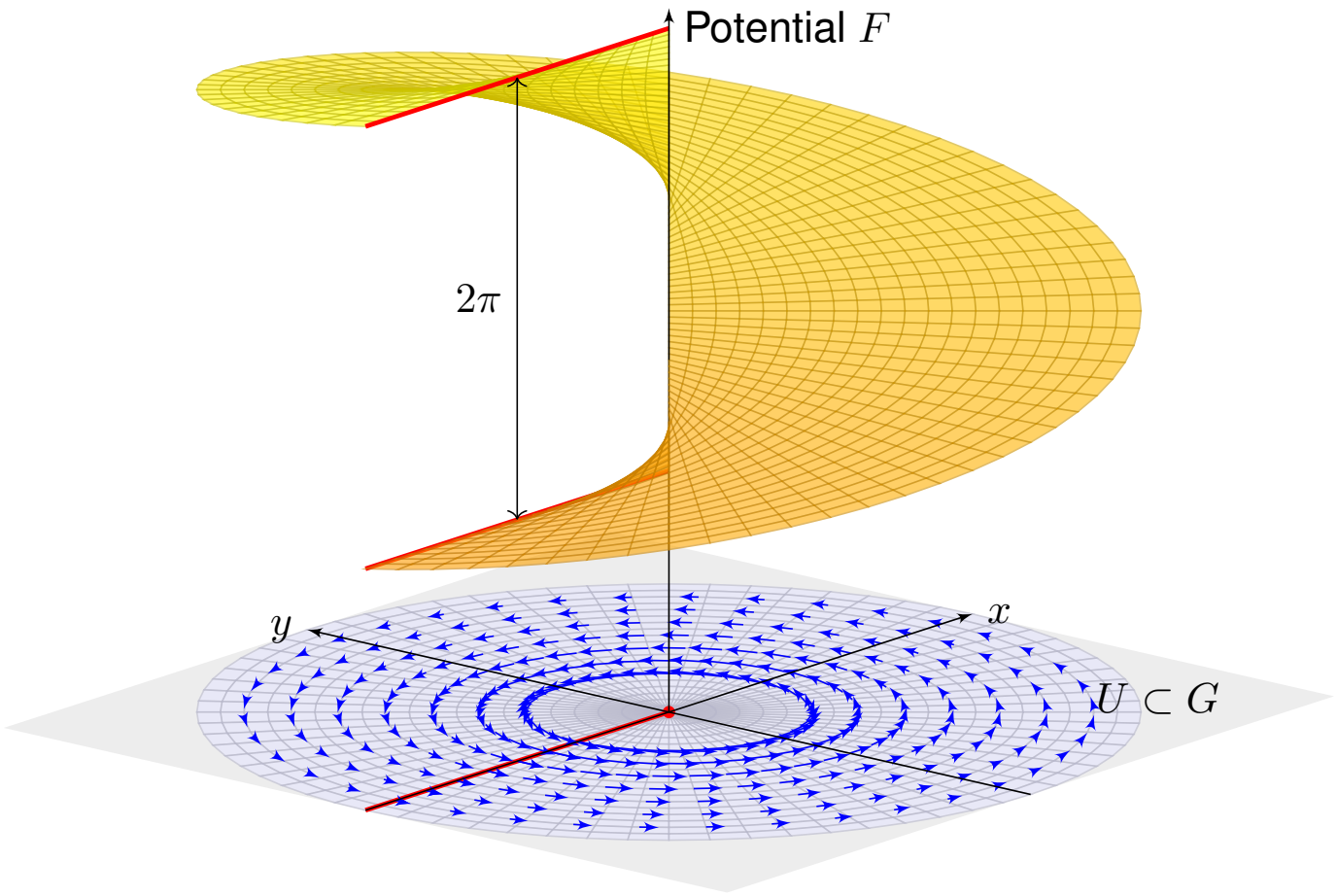
$$= \int_{t=0}^{1} f_i(tx) + \sum_{j=1}^{n} t x_j (\partial_i f_j)(tx)\, \mathrm{d}t \qquad \text{Voraussetzung } \partial_i f_j = \partial_j f_i$$

$$= \int_{t=0}^{1} f_i(tx) + \sum_{j=1}^{n} t x_j (\partial_j f_i)(tx)\, \mathrm{d}t \qquad \text{Explizite Stammfunktion!}$$

$$= \int_{t=0}^{1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Big[t f_i(tx) \Big]\, \mathrm{d}t = \Big[t f_i(tx) \Big]_{t=0}^{1} = f_i(x)$$

Der Integrand $(x, t) \mapsto x \cdot f(tx)$ ist stetig differenzierbar bezüglich x_i. Integriert wird bezüglich $t \in [0, 1]$ über ein Kompaktum. Daher können wir Satz D3C anwenden und dürfen die Ableitung unters Integral ziehen.

Ein lokales Potential für das Wirbelfeld



Ein lokales Potential für das Wirbelfeld

Aufgabe: Auf $G := \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$ betrachten wir erneut das Wirbelfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \supseteq G \to \mathbb{R}^2, \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

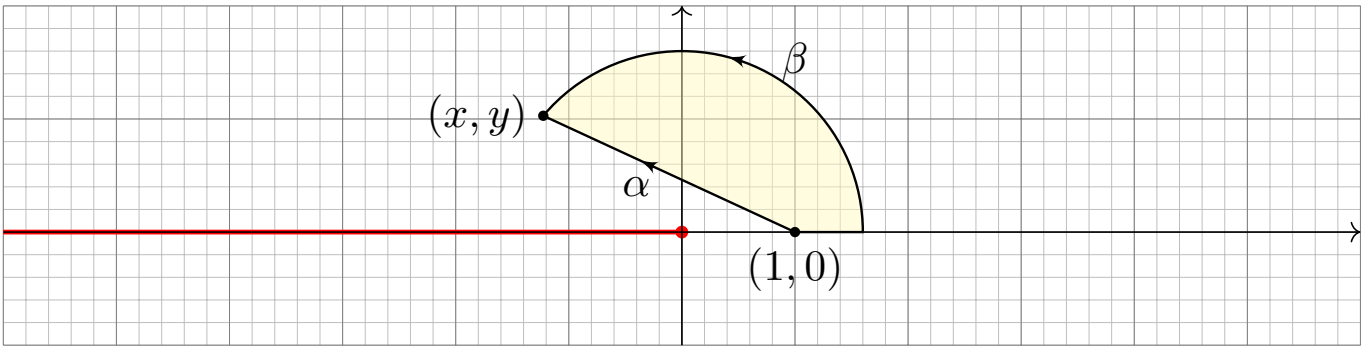
Sei $U = \mathbb{R}^2 \smallsetminus (\mathbb{R}_{\leq 0} \times \{0\})$ die Ebene ohne die negative x–Achse.
(0) Ist G offen? konvex? sternförmig? Erlaubt f ein Potential auf G?
(1) Ist U offen? konvex? sternförmig? bezüglich welcher Zentren $p \in \mathbb{R}^2$?
(2) Erlaubt $f|_U$ ein Potential auf U? (3) Wenn ja, berechnen Sie eins!
(4) Erlaubt f ein Potential auf einem größeren Gebiet V mit $U \subsetneq V \subseteq G$?

Lösung: (0) Die Menge G ist offen, nicht konvex, nicht sternförmig.
Das Feld f erlaubt kein Potential wegen $\oint f(s) \bullet \mathrm{d}s \neq 0$, siehe oben.

(1) Die Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ist offen, nicht konvex aber sternförmig:
Als Zentrum eignet sich jeder Punkt $p = (x, 0)$ mit $x \in \mathbb{R}_{>0}$. (Skizze!)
Anschaulich: Vom Punkt p aus sieht man jeden anderen Punkt $q \in U$.

(2) Wir finden $\operatorname{rot}(f) = 0$. Wir wenden Satz E3D an: Zum rotationsfreien Vektorfeld $f : G \to \mathbb{R}^2$, eingeschränkt auf das sternförmige Gebiet U, existiert ein Potential $F : U \to \mathbb{R}$, sodass $\operatorname{grad} F = f|_U$ gilt.

Ein lokales Potential für das Wirbelfeld



(3) Nach Satz E3E erhalten wir ein Potential $F : U \to \mathbb{R}$ durch

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \int_\alpha f(s) \bullet \mathrm{d}s = \int_{t=0}^{1} f\begin{pmatrix} (1-t)+tx \\ ty \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} \mathrm{d}t.$$

Um die Rechnung zu vereinfachen, nutzen wir Polarkoordinaten.
Sei $(x,y) = r(\cos\varphi, \sin\varphi) \in U$ mit $r = \sqrt{x^2+y^2} > 0$ und $\varphi \in \,]-\pi,\pi[$.
Als Integrationsweg β gehen wir von $(1,0)$ nach $(r,0)$ und dann auf dem Kreis zu (x,y). Die Wege α und β beranden ein Kompaktum D, also:

$$\int_\beta f(s) \bullet \mathrm{d}s - \int_\alpha f(s) \bullet \mathrm{d}s = \oint_{\partial D} f(s) \bullet \mathrm{d}s = \int_D \operatorname{rot} f(x,y)\, \mathrm{d}(x,y) = 0$$

Ein lokales Potential für das Wirbelfeld

Durch diese Vereinfachung erhalten wir unser Potential besonders leicht:

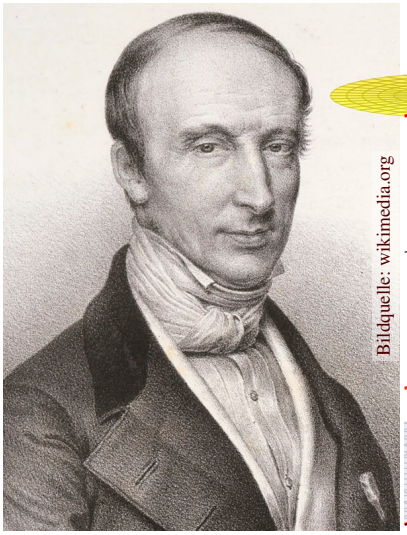
$$\begin{aligned} F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= F\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} = \int_\alpha f(s) \bullet \mathrm{d}s = \int_\beta f(s) \bullet \mathrm{d}s \\ &= \int_{\rho=1}^{r} f\begin{pmatrix} \rho \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\rho + \int_{\theta=0}^{\varphi} f\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \mathrm{d}\theta \\ &= \int_{\rho=1}^{r} 0\, \mathrm{d}\rho + \int_{\theta=0}^{\varphi} 1\, \mathrm{d}\theta = \varphi \end{aligned}$$

☺ Das Potential hat die Form einer Wendelfläche, siehe obige Skizze.
Die Äquipotentiallinien von F sind die radialen Strahlen $\mathbb{R}_{>0} \cdot (x,y)$.
Der Gradient $f = \operatorname{grad} F$ ist senkrecht hierzu, und zwar vom Betrag $1/r$.
Eine Wendeltreppe ist innen steiler als außen, proportional zu $1/r$.

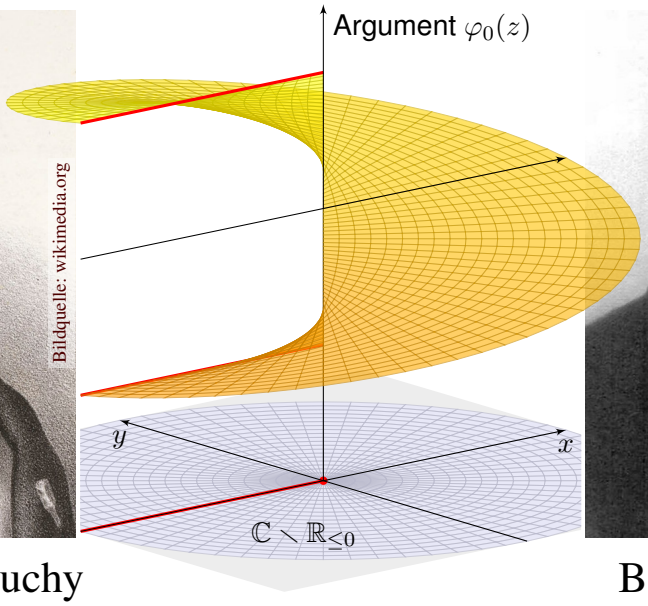
(4) Für jedes größere Gebiet $U \subsetneq V \subseteq G$ gilt $(-r,0) \in V$ für ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$; es enthält den geschlossenen Weg $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto r(\cos t, \sin t)$.
Für das Arbeitsintegral gilt dann $\oint_\gamma f(s) \bullet \mathrm{d}s = 2\pi$, wie wir bereits wissen.
Also kann f kein Potential $F : V \to \mathbb{R}$ haben! Demnach hat das oben konstruierte Potential $F : U \to R$ einen maximalen Definitionsbereich.

Kapitel F

Integralsätze für komplexe Funktionen



Augustin Louis Cauchy
(1789–1857)



Bernhard Riemann
(1826–1866)

Inhalt dieses Kapitels F

1 Crashkurs zum Residuensatz

2 Komplexe Funktionen und Potenzreihen
- Die Cauchy–Riemann–Differentialgleichungen
- Exponentialfunktion und Zweige des Logarithmus
- Laurent–Reihen, Polstellen und Residuen

3 Die Integralformel von Cauchy
- Integralsatz und Integralformel von Cauchy
- Fundamentalsatz der Algebra und Nullstellensuche
- Entwicklung in Potenzreihen und in Laurent–Reihen

4 Der Residuensatz und Anwendungen
- Das Residuum einer isolierten Singularität
- Der Residuensatz für Kompakta
- Anwendung auf reelle Integrale

5 Fazit: Residuenkalkül
- Verständnisfragen und Vertiefungen
- Anwendungsbeispiele zum Residuenkalkül

Motivation und Zielsetzung

Für $f : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \to \mathbb{R}^2$ gelten die Integralsätze E1ı von Green und Gauß:

$$\int_D \operatorname{rot}(f)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{\partial D} f \bullet \mathrm{d}s, \qquad \int_D \operatorname{div}(f)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{\partial D} f \times \mathrm{d}s$$

Diese wenden wir nun auf komplexe Funktionen $f : \mathbb{C} \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$ an. Erfreulicherweise gewinnen wir mit komplexen Integralen auch reelle:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ux)}{x}\,\mathrm{d}x &= \pi\,\operatorname{sign}(u) && \text{für alle } u \in \mathbb{R},\\
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ux)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \pi\,\mathrm{e}^{-|u|} && \text{für alle } u \in \mathbb{R},\\
\int_{t=0}^{\pi} \frac{1}{a+\cos t}\,\mathrm{d}t &= \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}} && \text{für alle } a \in \mathbb{R}_{>1}.
\end{aligned}$$

Solche Integrale sind mit reellen Methoden nur schwer zu berechnen. Mit dem Residuensatz für komplexe Funktionen gelingen sie leicht!

Diese Technik wird oft angewendet, auch im Verlauf dieser Vorlesung, insbesondere für Fourier– und Laplace–Integrale (Kapitel K und L).

Vorgehensweise

Wir betrachten die komplexe Zahlenebene $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \{\, x + \mathrm{i}y \mid x, y \in \mathbb{R} \,\}$ und hierauf komplexe Funktionen $f : \mathbb{C} \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$, die wir entlang von Wegen $\gamma : [a,b] \to \Omega$ integrieren gemäß $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$.
Ebenso übertragen wir den Begriff der Differenzierbarkeit aus dem Reellen ins Komplexe und erleben einige schöne Überraschungen!
Zur Orientierung skizziere ich zu Beginn als Crashkurs die wichtigsten Begriffe und typische Anwendungen zur Berechnung (reeller) Integrale.

Der Höhepunkt sind Cauchys Residuensatz und seine Anwendungen, die für (komplexe und reelle) Integrale neue Rechentechniken eröffnen. Auf dem Weg durch die *komplexe Ebene* gewinnen wir *reelle Integrale*!

Jacques Hadamard (1865–1963) sagte treffend: „Der kürzeste und beste Weg zwischen zwei reellen Wahrheiten führt oft durchs Imaginäre.“
(Im Original so schön: „La voie la plus courte et la meilleure entre deux vérités du domaine réel passe souvent par le domaine imaginaire.“)

📖 Meyberg–Vachenauer: *Höhere Mathematik*, Band 2. Zur Vertiefung Jänich: *Funktionentheorie* und Remmert: *Funktionentheorie*.

Anwendung auf ideale ebene Strömungen

Komplexe Funktionen gehören zum mathematischen Grundwerkzeug. In diesem Kapitel werden wir damit phantastische Integrale berechnen. Auch darüber hinaus begegnen sie Ihnen häufig und nützen überall.

Die vorsichtige Ingenieur:in fragt sich: Lohnt sich diese Investition? Ja! Ich greife vor und nenne zwei wunderschöne klassische Anwendungen.

Wir können jede holomorphe Funktion $f(x+\mathrm{i}y) = u(x,y) - \mathrm{i}v(x,y)$ als ein Vektorfeld $(u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\operatorname{div}(u,v) = \operatorname{rot}(u,v) = 0$ betrachten.

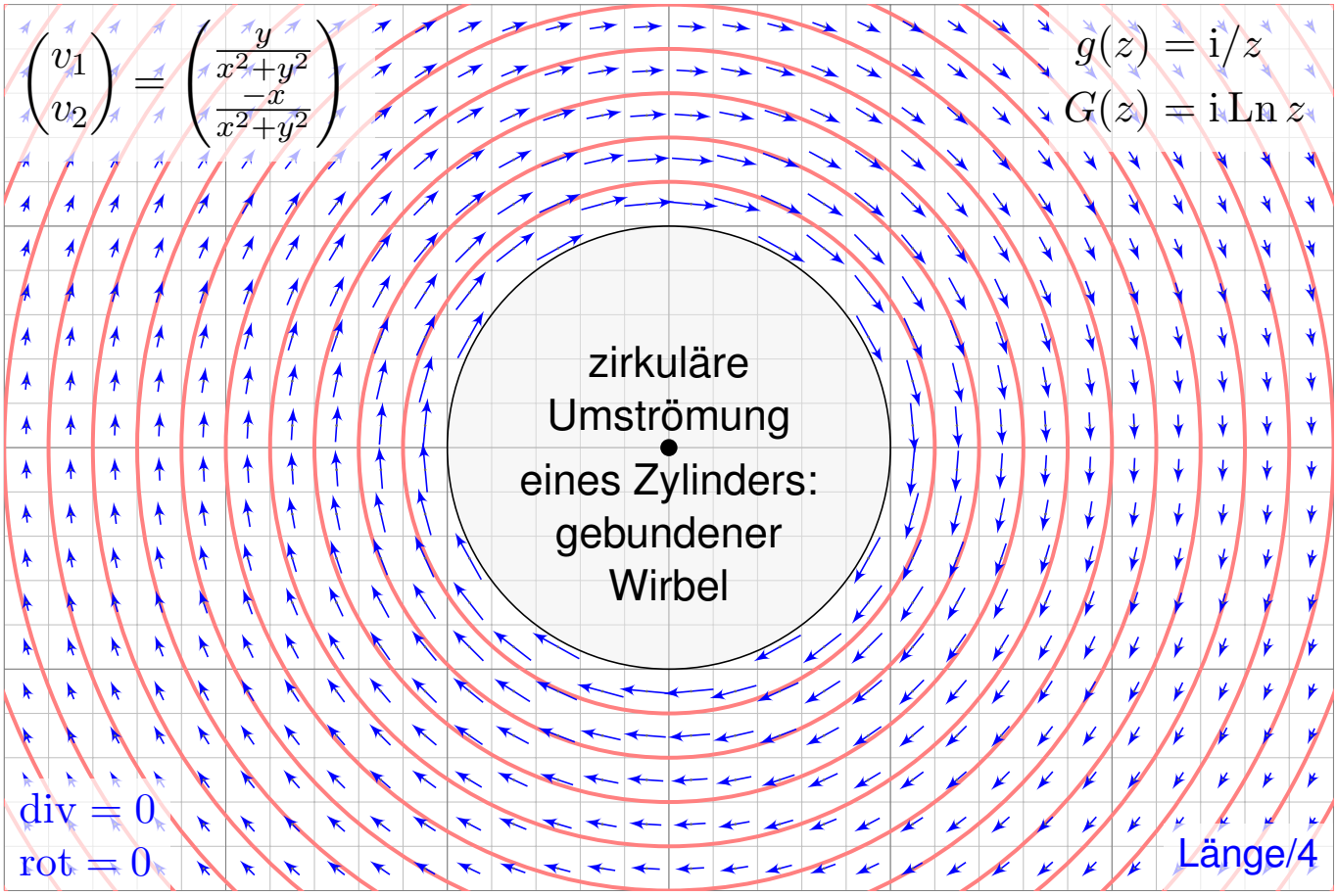
♦ Satz Q1A: holomorphe Lösungen der Maxwell–Gleichung

Jedes ebene statische E-Feld $\vec{E} : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \to \mathbb{R}^2$ ohne Quellen entspricht einer holomorphen Funktion $f = E_1 - \mathrm{i}E_2 : \mathbb{C} \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$ und umgekehrt.

♦ Satz Q1B: holomorphe Lösungen der Navier-Stokes-Gleichung

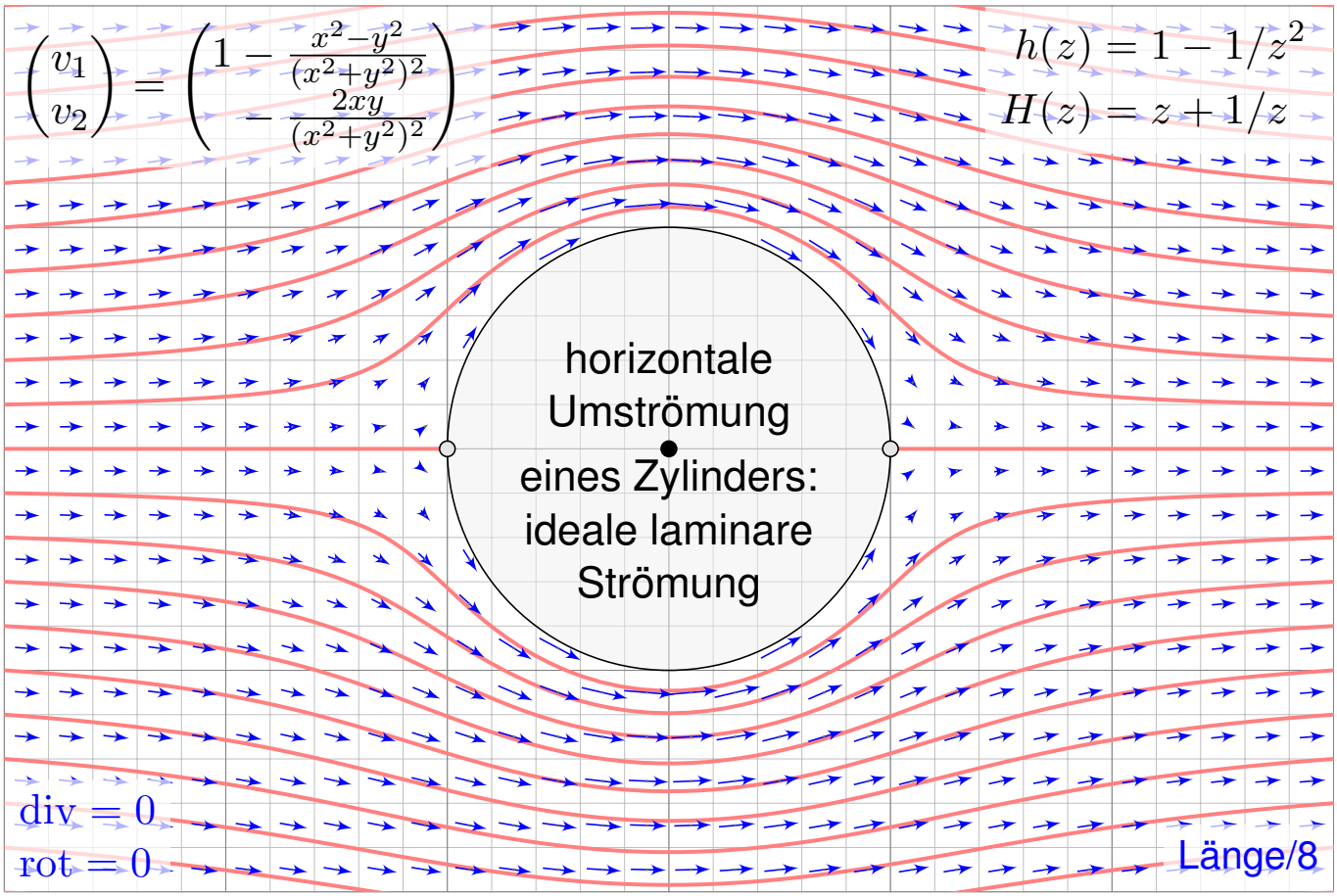
Jede ebene stationäre Strömung $v = (v_1, v_2) : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \to \mathbb{R}^2$ konstanter Dichte, ohne Wirbel, ohne Reibung und ohne äußere Kräfte entspricht einer holomorphen Funktion $f = v_1 - \mathrm{i}v_2 : \mathbb{C} \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$ und umgekehrt.

Anwendung auf ideale ebene Strömungen



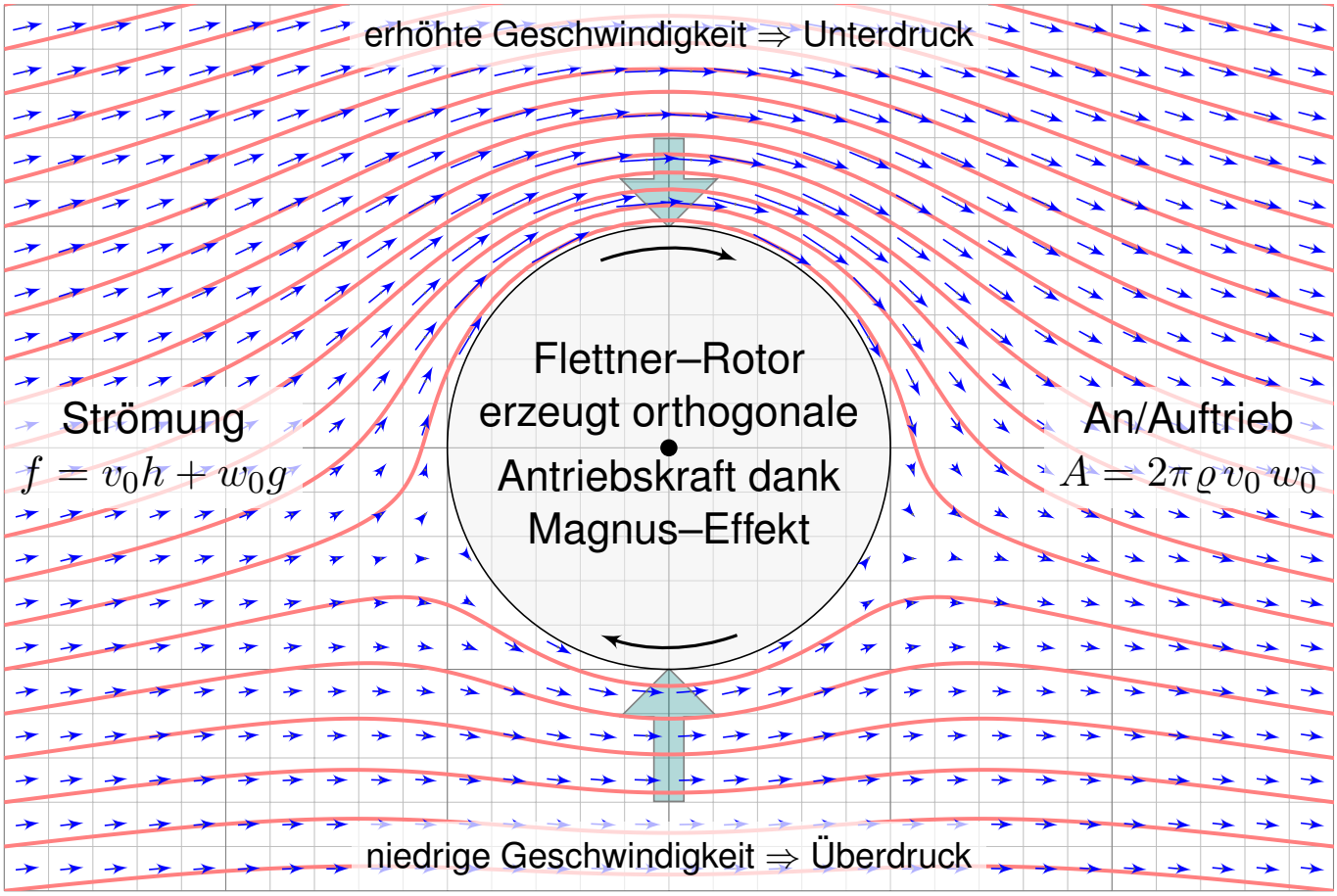
☺ Holomorphe Funktionen beschreiben Strömungen: Wirbelfeld.

Anwendung auf ideale ebene Strömungen



☺ Einfaches und intuitives Modell, exakte Lösung dank Holomorphie!

Anwendung auf ideale ebene Strömungen



☺ So berechneten Kutta und Joukowski die dynamische Auftriebskraft!

Der Körper der komplexen Zahlen

📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §1.7.

Auf der Menge $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{\, (x,y) \mid x,y \in \mathbb{R} \,\}$ definieren wir die **Addition** $+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und die komplexe **Multiplikation** $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$(x,y) + (u,v) := (\, x+u,\ y+v \,),$$
$$(x,y) \cdot (u,v) := (\, xu - yv,\ xv + yu \,).$$

Man prüft nach, dass $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein **Körper** ist. Additiv neutral ist $(0,0)$, multiplikativ neutral ist $(1,0)$, multiplikative Inversion ist gegeben durch

$$(x,y) \cdot \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right) = (1,0).$$

Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $(a,0) + (b,0) = (a+b,0)$ und $(a,0) \cdot (b,0) = (a \cdot b, 0)$. Wir können und werden daher den Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ der reellen Zahlen mittels $a \mapsto (a,0)$ identifizieren mit dem Teilkörper $\mathbb{R} \times \{0\}$ in $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. Wir schreiben kurz $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ und betrachten $\mathbb{C}$ als **Körpererweiterung**.

🙂 Geometrisch stellen wir $\mathbb{C}$ als komplexe Zahlenebene dar. Addition ist die für Vektoren übliche. Die Multiplikation ist eine Drehstreckung.

Der Körper der komplexen Zahlen

Die Gleichung $z^2 + 1 = 0$ ist in $\mathbb{R}$ nicht lösbar, in $\mathbb{C}$ hingegen schon: Die komplexe Zahl $\mathrm{i} = (0,1)$ hat die ersehnte Eigenschaft $\mathrm{i}^2 = (-1,0)$.

Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ schreibt sich eindeutig $z = (x,y) = x + \mathrm{i}y$. Wir nennen $\mathrm{Re}(z) := x$ den **Realteil** und $\mathrm{Im}(z) := y$ den **Imaginärteil**.

Die zu $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ **komplex konjugierte Zahl** ist $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$. Es gilt $\overline{w+z} = \overline{w} + \overline{z}$ und $\overline{w \cdot z} = \overline{w} \cdot \overline{z}$, sowie $z\,\overline{z} = x^2 + y^2$ und somit

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\,\overline{z}}, \quad \text{das heißt} \quad \frac{1}{x+\mathrm{i}y} = \frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + \mathrm{i}\frac{-y}{x^2+y^2}.$$

Die Länge $|z| := \sqrt{z\,\overline{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$ heißt **Betrag** oder **Norm** von z.

Das **komplexe Skalarprodukt** von $w = u + \mathrm{i}v$ und $z = x + \mathrm{i}y$ ist

$$\langle\, w \mid z \,\rangle := \overline{w}\, z = (u - \mathrm{i}v)(x + \mathrm{i}y) = (ux + vy) + \mathrm{i}(uy - vx)$$

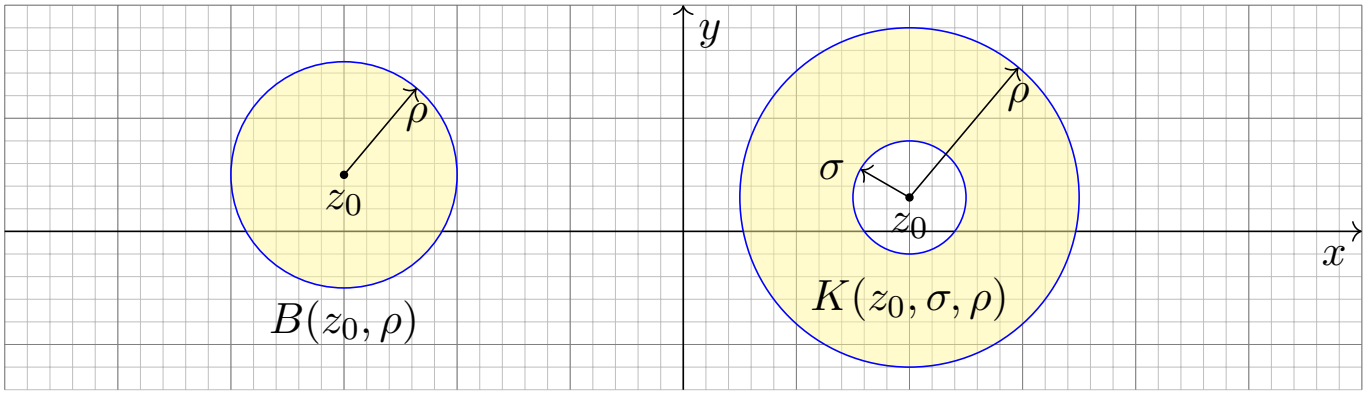
Realteil ist das reelle Skalarprodukt, Imaginärteil ist das Kreuzprodukt:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ux + vy, \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = uy - vx.$$

🙂 Algebraische Aussagen und Rechnungen in $\mathbb{C}$ entsprechen so geometrischen Aussagen und Rechnungen in der Ebene $\mathbb{R}^2$. E007

Kreisscheiben und Kreisringe

Wir identifizieren $\mathbb{C} = \{\, x + \mathrm{i}y \mid x, y \in \mathbb{R} \,\}$ mit $\mathbb{R}^2 = \{\, (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \,\}$.
Der Betrag $|x + \mathrm{i}y| = \sqrt{x^2 + y^2}$ entspricht der euklidischen Norm.
Der Abstand $|w - z|$ entspricht somit dem euklidischen Abstand.



Zu jedem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und Radien $0 \leq \sigma < \rho \leq \infty$ in $\mathbb{R}$ betrachten wir die **offene Kreisscheibe** $B(z_0, \rho) = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \rho \,\}$ sowie den **offenen Kreisring** ist $K(z_0, \sigma, \rho) = \{\, z \in \mathbb{C} \mid \sigma < |z - z_0| < \rho \,\}$.

Beispiele: Für $\rho = \infty$ ist $B(z_0, \infty) = \mathbb{C}$ die gesamte Ebene; für $\rho = 0$ ist $B(z_0, 0) = \emptyset$ leer. Ebenso für $\sigma \geq \rho$ ist $K(z_0, \sigma, \rho) = \emptyset$ leer. Für $0 = \sigma < \rho$ ist $K(z_0, 0, \rho) = B(z_0, \rho) \setminus \{z_0\}$ die Kreisscheibe ohne den Mittelpunkt z_0. Insbesondere gilt $K(z_0, 0, \infty) = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

Komplexe Funktionen

Eine Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ heißt **offen**, wenn zu jedem ihrer Punkte $z_0 \in \Omega$ ein positiver Radius $\varepsilon > 0$ existiert, sodass $B(z_0, \varepsilon) \subseteq \Omega$ gilt. Das heißt anschaulich: Um jeden Punkt $z_0 \in \Omega$ ist noch ein bisschen Platz in Ω.

Ein **Gebiet** ist eine offene und zusammenhängende Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$: Je zwei Punkte $p, q \in \Omega$ lassen sich durch einen Weg in Ω verbinden. Wichtige Beispiele für Gebiete sind offene Kreisscheiben und Kreisringe.

Eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ komplexer Zahlen $z_n \in \mathbb{C}$ **konvergiert** gegen den Grenzwert $z \in \mathbb{C}$, wenn $|z_n - z| \to 0$ für $n \to \infty$ gilt. Für $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ und $z = x + \mathrm{i}y$ ist dies gleichbedeutend mit $x_n \to x$ und $y_n \to y$.

Eine komplexe Funktion $f : \mathbb{C} \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$ ordnet jeder komplexen Zahl $z \in \Omega$ eine komplexe Zahl $f(z) \in \mathbb{C}$ zu. Wir sagen, f ist **stetig** in z, wenn für jede Folge $z_n \to z$ in Ω auch $f(z_n) \to f(z)$ in $\mathbb{C}$ gilt.

Wir zerlegen f in **Realteil** $u = \mathrm{Re}(f)$ und **Imaginärteil** $v = \mathrm{Im}(f)$.
Für die Funktionen $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ gilt $f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$.
Die Stetigkeit von f ist dann äquivalent zur Stetigkeit von u und v.

Komplexe Wegintegrale

Definition F1A: komplexes Wegintegral

Sei $f : \mathbb{C} \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$ stetig und $\gamma : [a,b] \to \Omega$ stückweise stetig differenzierbar. Das **komplexe Wegintegral** von f entlang γ ist

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_{t=a}^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Einfache Merkregel zur Schreibweise: Für $z = \gamma(t)$ gilt $\mathrm{d}z = \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$.

Der Integrand $g(t) = f(\gamma(t))\,\gamma'(t)$ ist eine stetige Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{C}$. Diese zerlegen wir gemäß $g = g_1 + \mathrm{i}g_2$ mit $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ in Realteil $g_1 = \mathrm{Re}(g)$ und Imaginärteil $g_2 = \mathrm{Im}(g)$ und definieren das Integral

$$\int_{t=a}^b g(t)\,\mathrm{d}t := \int_{t=a}^b g_1(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_{t=a}^b g_2(t)\,\mathrm{d}t$$

☺ Jedes komplexe Integral fasst also zwei reelle Integrale zusammen. Die komplexe Schreibweise ist sehr effizient, bequem und übersichtlich.

Komplexe Wegintegrale

Es lohnt, diese beiden reellen Integrale noch genauer anzuschauen... Wir integrieren $f(x,y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ längs $\gamma(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$, also:

$$f(\gamma(t))\,\gamma'(t) = (u + \mathrm{i}v)(x' + \mathrm{i}y') = (ux' - vy') + \mathrm{i}(uy' + vx')$$

Das komplexe Wegintegral fasst zwei reelle Wegintegrale zusammen, das Arbeitsintegral und das Flussintegral des Vektorfeldes $\overline{f} = (u, -v)$:

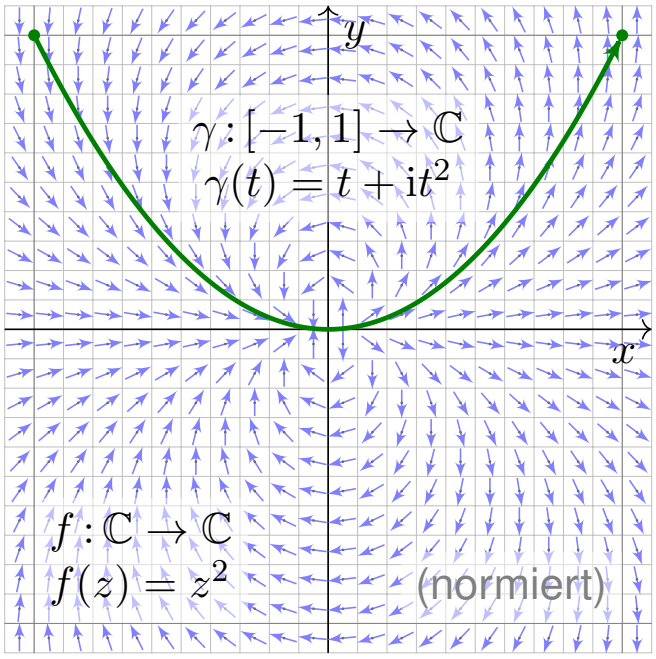
$$\mathrm{Re}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b ux' - vy'\,\mathrm{d}t = \int_\gamma (u,-v)\bullet(x',y')\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int_\gamma (u,-v)\bullet\mathrm{d}\gamma}_{\text{Arbeitsintegral!}}$$

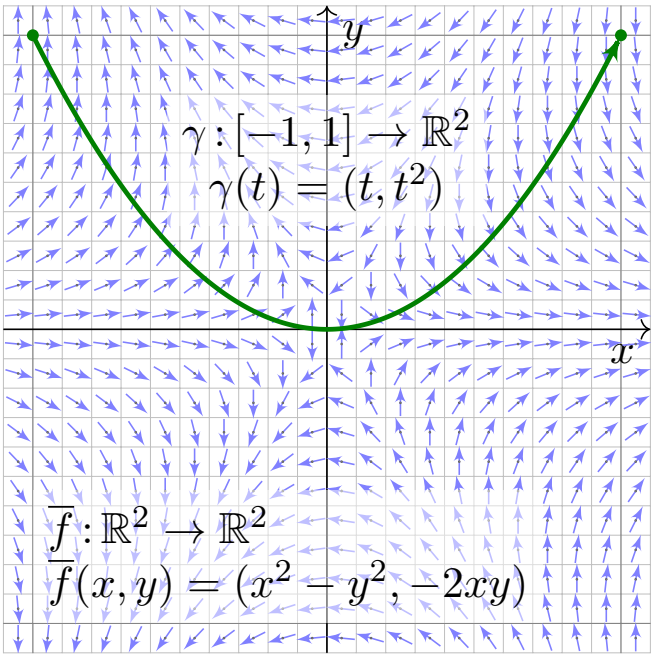
$$\mathrm{Im}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b uy' + vx'\,\mathrm{d}t = \int_\gamma (u,-v)\times(x',y')\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int_\gamma (u,-v)\times\mathrm{d}\gamma}_{\text{Flussintegral!}}$$

⚠ Man beachte das Vorzeichen: Es ist unschön, aber unvermeidlich. Es passt zum oben erklärten komplexen Skalarprodukt $\langle\, w \mid z \,\rangle = \overline{w}\,z$.

☺ Wir werden hierauf den Integralsatz von Green / Gauß anwenden und ernten den Integralsatz von Cauchy F3A für holomorphe Funktionen.

Beispiel eines komplexen Wegintegrals





Aufgabe: (1) Berechnen Sie das komplexe Wegintegral $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ von $f(z) = z^2$ längs des Weges $\gamma : [-1,1] \to \mathbb{C} : t \mapsto \gamma(t) = t + \mathrm{i}t^2$.
Ist das Ergebnis plausibel / kompatibel mit der obigen Skizze?
(2) Was erhalten Sie für andere Wege mit denselben Endpunkten?
(3) Gilt für $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ allgemein $\int_\gamma F'(z)\,\mathrm{d}z = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$?

Beispiel eines komplexen Wegintegrals

Lösung: (1) Wir integrieren $f(x+\mathrm{i}y) = (x+\mathrm{i}y)^2 = (x^2 - y^2) + \mathrm{i}(2xy)$ entlang des Weges $\gamma(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$ mit $x(t) = t$ und $y(t) = t^2$:

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-1}^{1} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \big[t^2 - 5t^4\big] + \mathrm{i}\big[4t^3 - 2t^5\big]\,\mathrm{d}t$$

$$= \Big[\frac{1}{3}t^3 - t^5 + \mathrm{i}t^4 + \frac{\mathrm{i}}{3}t^6\Big]_{t=-1}^{1} = -\frac{4}{3} \quad \text{(Vorzeichen ist plausibel!)}$$

(2) Probieren Sie andere Wege aus, Sie erhalten dasselbe! Warum?
Die Stammfunktion $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto z^3/3$ erfüllt $F'(z) = z^2$ (F2A), also

$$\int_\gamma z^2\,\mathrm{d}z = \Big[\frac{z^3}{3}\Big]_{z=\mathrm{i}-1}^{\mathrm{i}+1} = \frac{(\mathrm{i}+1)^3}{3} - \frac{(\mathrm{i}-1)^3}{3} = \frac{-2+2\mathrm{i}}{3} - \frac{2+2\mathrm{i}}{3} = -\frac{4}{3}.$$

für jeden Weg $\gamma : [-1,1] \to \mathbb{C}$ von $\gamma(-1) = \mathrm{i} - 1$ nach $\gamma(1) = \mathrm{i} + 1$.
(3) Dank Kettenregel und HDI rechnen wir dies auch hier leicht nach:

$$\int_\gamma F'(z)\,\mathrm{d}z = \int_{t=a}^{b} F'(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=a}^{b} \big[F(\gamma(t))\big]'\mathrm{d}t = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

☺ Wir nutzen die komplexe Ableitung F2A und ihre Rechenregeln F2B!

Die fundamentalen Integrale der Funktionentheorie

Aufgabe: (1) Integrieren Sie $f:\mathbb{C}\smallsetminus\{0\}\to\mathbb{C}:z\mapsto f(z)=z^k$ mit $k\in\mathbb{Z}$ entlang der Kreislinie $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{C}:t\mapsto\gamma(t)=r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ mit Radius $r>0$.

Lösung: (0) Vorbereitung: Für jede ganze Zahl $a\in\mathbb{Z}$ berechnen wir

$$\int_{t=0}^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}at}\,\mathrm{d}t \overset{\text{Def}}{\underset{\text{Lin}}{=}} \int_{t=0}^{2\pi}\cos(at)\,\mathrm{d}t+\mathrm{i}\int_{t=0}^{2\pi}\sin(at)\,\mathrm{d}t \overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \begin{cases}0 & \text{für } a\neq 0,\\ 2\pi & \text{für } a=0.\end{cases}$$

☺ In der Fourier–Theorie entspricht dies der Orthonormalität. I125

(1) Wir nutzen die Definition F1A des komplexen Wegintegrals:

$$\oint_\gamma z^k\,\mathrm{d}z \overset{\text{Def}}{=} \oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \overset{\text{Def}}{=} \int_{t=0}^{2\pi} f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{Def}}{=} \int_{t=0}^{2\pi}(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^k\cdot(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})'\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_{t=0}^{2\pi} r^k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\cdot r\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t \overset{\text{Lin}}{=} \mathrm{i}r^{k+1}\int_{t=0}^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+1)t}\,\mathrm{d}t \overset{\text{HDI}}{\underset{(0)}{=}} \begin{cases}0 & \text{für } k\neq -1,\\ 2\pi\mathrm{i} & \text{für } k=-1.\end{cases}$$

☺ Nur z^{-1} liefert einen Beitrag! Plausibel: Für jedes $k\in\mathbb{Z}\smallsetminus\{-1\}$ hat $f(z)=z^k$ die Stammfunktion $z^{k+1}/(k+1)$: Das Wegintegral hängt daher nur von Start und Ziel ab, geschlossene Wegintegrale sind daher Null!

Die fundamentalen Integrale der Funktionentheorie

Satz F1B: die fundamentalen Integrale der Funktionentheorie

Um den Punkt $z_0\in\mathbb{C}$ und mit Radius $r\in\mathbb{R}_{>0}$ betrachten wir den Weg

$$\gamma\,:\,[0,2\pi]\to\mathbb{C}\,:\,t\mapsto\gamma(t)=z_0+r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}.$$

(1) Für jede ganze Zahl $k\in\mathbb{Z}$ gilt die **Residuumsformel**:

$$\boxed{\oint_\gamma (z-z_0)^k\,\mathrm{d}z \;=\; \begin{cases}0 & \text{für } k\neq -1,\\ 2\pi\mathrm{i} & \text{für } k=-1.\end{cases}}$$

(2) Für jedes **Laurent–Polynom** $f(z)=\sum_{k=-n}^{n}a_k(z-z_0)^k$ folgt:

$$\boxed{\oint_\gamma\Big[\sum_{k=-n}^{n}a_k(z-z_0)^k\Big]\,\mathrm{d}z \;=\; 2\pi\mathrm{i}\,a_{-1}}$$

(3) Dasselbe gilt für jede konvergente **Laurent–Reihe**, also $n\to\infty$, denn wir dürfen Integral und Grenzwert vertauschen dank Satz D1A.

Die fundamentalen Integrale der Funktionentheorie

F107
Ausführung

Aufgabe: Rechnen Sie diese grundlegenden Integrale sorgsam nach!

Lösung: (1) Wir verschieben $\gamma(t) = z_0 + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ zurück zu $\delta(t) = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$:

$$\oint_\gamma (z-z_0)^k\,\mathrm{d}z \;=\; \oint_\delta z^k\,\mathrm{d}z \;=\; \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq -1, \\ 2\pi\mathrm{i} & \text{für } k = -1. \end{cases}$$

(2) Wir nutzen die Linearität des Integrals und erhalten:

$$\oint_\gamma \Big[\sum_{k=-n}^{n} a_k (z-z_0)^k\Big]\,\mathrm{d}z \;\overset{\text{Lin}}{\underset{\text{A3L}}{=}}\; \sum_{k=-n}^{n} a_k \Big[\oint_\gamma (z-z_0)^k\,\mathrm{d}z\Big] \;\overset{\text{Res}}{\underset{(1)}{=}}\; 2\pi\mathrm{i}\,\underbrace{a_{-1}}_{\text{Residuum}}$$

☺ Die Wegintegrale $\oint_\gamma (z-z_0)^k\,\mathrm{d}z$ haben wir zuvor in (1) ausgerechnet: Für $k \neq -1$ existiert eine Stammfunktion, daher $\oint_\gamma (z-z_0)^k\,\mathrm{d}z = 0$.

☺ Beim Wegintegral des Laurent–Polynoms $f(z) = \sum_{k=-n}^{n} a_k (z-z_0)^k$ um den Punkt z_0 zählt nur der Koeffizient mit Hausnummer -1.

☺ Beim Wegintegral von f um z_0 bleibt nur der Term $2\pi\mathrm{i}\,a_{-1}$ zurück. Deshalb heißt a_{-1} das **Residuum** (das 'Zurückbleibende') von f in z_0.

(3) Wir dürfen Integral und Grenzwert $n \to \infty$ vertauschen (Satz D1A).

Das fundamentale Wegintegral $\oint z^{-1}\,\mathrm{d}z$

F108
Ausführung

Aufgabe: Gegeben sei ein geschlossener Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ in komplexen Polarkoordinaten $\gamma(t) = r(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t)}$. Zeigen und erklären Sie:

$$\boxed{\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_\gamma z^{-1}\,\mathrm{d}z = \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2\pi} = \text{Umlaufzahl von } \gamma \text{ um } 0}$$

Lösung: Wir nutzen die Polarkoordinaten $\gamma(t) = r(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t)}$ und rechnen:

$$\oint_\gamma z^{-1}\,\mathrm{d}z = \int_{t=a}^{b} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{t=a}^{b} \frac{r'(t)}{r(t)} + \mathrm{i}\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[\ln r(t)\Big]_a^b + \mathrm{i}\Big[\varphi(t)\Big]_a^b$$

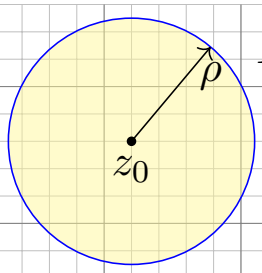
☺ Der Realteil verschwindet für geschlossene Wege, $\gamma(a) = \gamma(b)$. Der Imaginärteil zählt die Umläufe von γ um den Nullpunkt. E333

Zum Vergleich in kartesischen Koordinaten $\gamma(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \oint_\gamma z^{-1}\,\mathrm{d}z = \int_{t=a}^{b} \frac{xy' - yx'}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}t &= \int_{t=a}^{b} \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\ &= \int_{t=a}^{b} \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \mathrm{d}t \end{aligned}$$

☺ Dieses Arbeits- und Flussintegral kennen wir bereits gut! E317

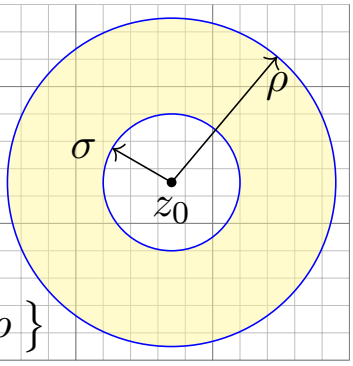
Holomorphe Funktionen und Laurent–Reihen



$$B(z_0,\rho) := \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \rho \,\}$$

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{w \to 0 \\ w \neq 0}} \frac{f(z_0 + w) - f(z_0)}{w}$$

$$K(z_0,\sigma,\rho) := \{\, z \in \mathbb{C} \mid \sigma < |z - z_0| < \rho \,\}$$



Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine komplexe Funktion $f = u + \mathrm{i}v : \mathbb{C} \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$ heißt **holomorph**, wenn sie komplex differenzierbar ist und $f' : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig.

$\Leftrightarrow$ **Cauchy–Riemann–Gleichungen** $\partial_x u = \partial_y v$ und $\partial_x v = -\partial_y u$.

$\Leftrightarrow$ Die **Strömung** $\overline{f} = (u, -v) : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \to \mathbb{R}^2$ erfüllt $\operatorname{div} \overline{f} = \operatorname{rot} \overline{f} = 0$.

$\Leftrightarrow$ Auf jeder Kreisscheibe $B(z_0,\rho) \subseteq \Omega$ gleicht f einer **Potenzreihe**.

$\Leftrightarrow$ Auf jedem Kreisring $K(z_0,\sigma,\rho) \subseteq \Omega$ gleicht f einer **Laurent–Reihe**:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit} \quad a_k = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \,\mathrm{d}z$$

Der Koeffizient $\operatorname{res}_{z_0}(f) := a_{-1}$ ist das **Residuum** von f im Punkt z_0.

Holomorphe Funktionen und Laurent–Reihen

Alle analytischen Funktionen sind holomorph. Erinnerung: f analytisch heißt, dass sich f lokal als konvergente Potenzreihen darstellen lässt.

Erstaunlicherweise gilt die Umkehrung, also holomorph $\Leftrightarrow$ analytisch! Insbesondere: einmal komplex diff'bar impliziert beliebig oft diff'bar!

Ist $f : \mathbb{C} \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph auf einer Kreisscheibe $B(z_0,\rho) \subseteq \Omega$, so lässt sie sich dort als konvergente **Potenzreihe** darstellen (Satz F3E):

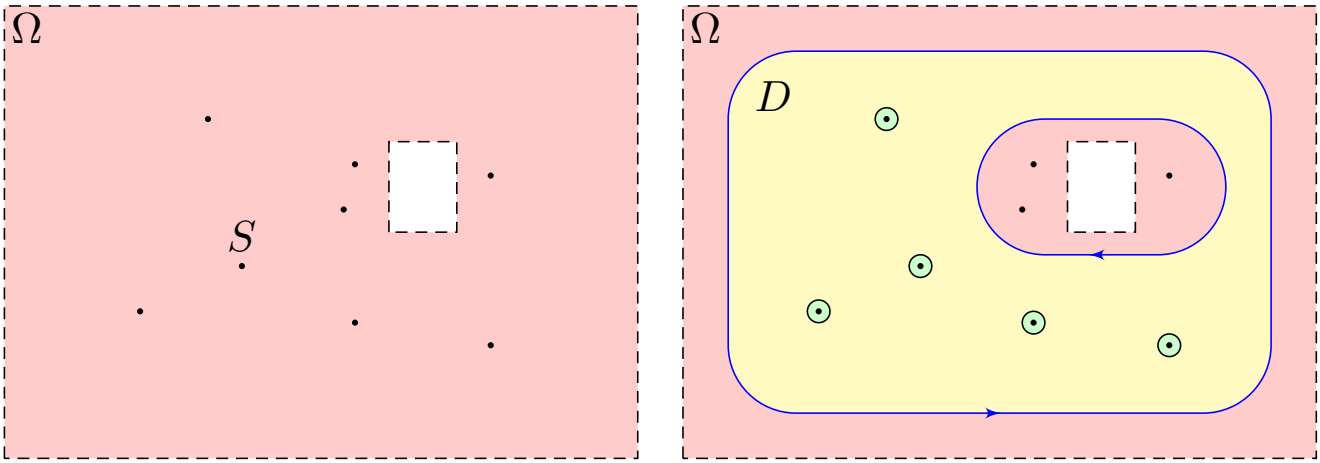
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit} \quad a_k = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \,\mathrm{d}z.$$

Wir können ebenso auch Singularitäten (insb. Polstellen) behandeln: Ist $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph auf einem Kreisring $K(z_0,\sigma,\rho) \subseteq \Omega$, so lässt sie sich dort als konvergente **Laurent–Reihe** darstellen (Satz F3F):

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (z - z_0)^{-k}$$

Dies ist die Summe einer Potenzreihe in $u = (z - z_0)$ als Nebenteil und in $v = (z - z_0)^{-1}$ als Hauptteil. Letztere kodiert die Singularität in z_0.

Der Residuensatz



♦ Satz F4D: Residuensatz für Kompakta, Cauchy 1825

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \setminus S \to \mathbb{C}$ holomorph auf Ω bis auf eine Menge S isolierter Singularitäten. Sei $D \subseteq \Omega$ kompakt mit stückweise glattem Rand, wobei $\partial D \cap S = \emptyset$. Dann gilt:

$$\boxed{\int_{\partial D} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 2\pi\mathrm{i} \sum\nolimits_{s \in \mathring{D}} \operatorname*{res}_s(f)}$$

☺ Links muss man integrieren, rechts nur Residuen summieren!

Der Residuensatz

Anschaulich können wir uns $f : \mathbb{C} \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$ als zweidimensionales elektromagnetisches Feld vorstellen. Eine Polstelle im Punkt $s \in \Omega$ entspricht einem Teilchen mit seiner Ladung $\operatorname{res}_s(f)$: das Residuum!

Für das Feld $(z - z_0)^{-k}$ haben wir oben das Wegintegral ausgerechnet: Längs der Kreislinie $\gamma(t) = z_0 + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ erhalten wir $\oint (z - z_0)^{-1}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}$. Für alle $k \neq -1$ hingegen verschwindet das Integral: $\oint (z - z_0)^k\,\mathrm{d}z = 0$.

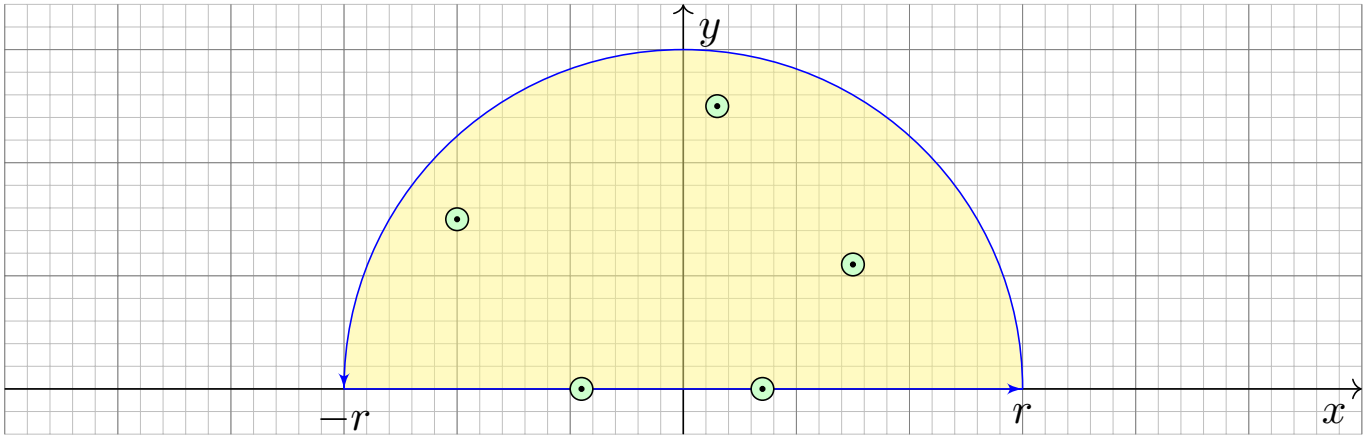
Dasselbe gilt nun für jede holomorphe Funktion / Laurent–Reihe um z_0: Das Wegintegral von f längs des Weges γ um z_0 ist $2\pi\mathrm{i}\,\operatorname{res}_{z_0}(f)$. Mit diesem Integral messen wir demnach die Ladung im Punkt z_0.

Umläuft γ mehrere Singularitäten, so addieren sich die Residuen: Jede Singularität s liefert ihren Beitrag $2\pi\mathrm{i}\,\operatorname{res}_s(f)$ zum Integral. Der Raum dazwischen ist Vakuum und liefert keinen Beitrag.

Dies ist eine wunderbare Eigenschaft holomorpher Funktionen.

Reelle Anwendung: Die Halbebene ist nicht kompakt, aber für schnell genug abklingende Funktionen können wir den Residuensatz hierauf ausdehnen. Auch einfache Polstellen auf $\mathbb{R}$ können wir zulassen:

Anwendung auf Fourier–Integrale



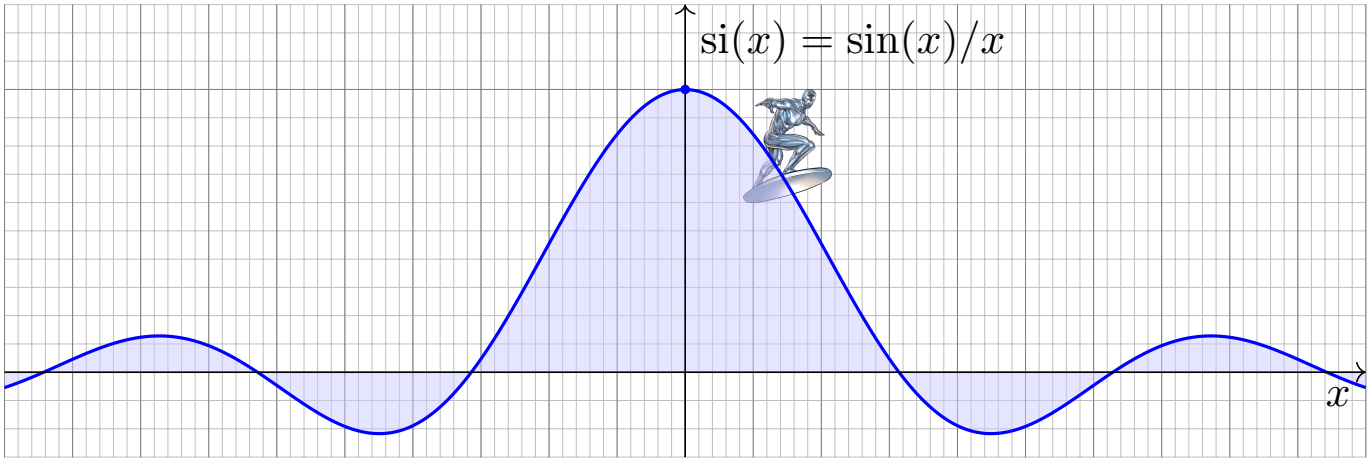
♦ Satz F4K: Fourier–Integrale rationaler Funktionen

Sei $f(z) = p(z)/q(z)$ eine rationale Funktion; reelle Polstellen $z \in \mathbb{R}$ seien höchstens einfach. Für $\deg(q) \geq \deg(p) + 2$ und $u \geq 0$ gilt dann:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}ux}\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\mathrm{Im}(s)>0} \operatorname*{res}_{z=s}\Big[f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}uz}\Big] + \pi\mathrm{i} \sum_{\mathrm{Im}(s)=0} \operatorname*{res}_{z=s}\Big[f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}uz}\Big]$$

Diese Gleichung gilt auch noch im Falle $\deg(q) \geq \deg(p) + 1$ und $u > 0$.

Anwendung auf das Dirichlet–Integral



Wir betrachten erneut die Spaltfunktion $\mathrm{si}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\mathrm{si}(x) = \begin{cases} \sin(x)/x & \text{für } x \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Ihre Integralfunktion $\mathrm{Si}(x) = \int_{t=0}^{x} \mathrm{si}(t)\,\mathrm{d}t$ ist nicht elementar. B149
Nun endlich können wir $\mathrm{si}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ über ganz $\mathbb{R}$ integrieren:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x \;\overset{?!}{=}\; \pi$$

Anwendungsbeispiel zum Residuenkalkül

Aufgabe: Berechnen Sie für $u \in \mathbb{R}$ das reelle Integral

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ux)}{x}\,\mathrm{d}x = \pi\,\mathrm{sign}(u).}$$

Lösung: Der Integrand ist der Imaginärteil der holomorphen Funktion

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}uz}}{z} = \frac{\cos(uz)}{z} + \mathrm{i}\frac{\sin(uz)}{z}.$$

Für $u > 0$ können wir daher den Residuensatz anwenden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ux}}{x}\,\mathrm{d}x \overset{\text{Res}}{\underset{\text{F4K}}{=}} \pi\mathrm{i}\operatorname*{res}_{z=0}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}uz}}{z}\right] = \pi\mathrm{i}\operatorname*{res}_{z=0}\left[z^{-1} + \frac{\mathrm{i}u}{1!}z^0 - \frac{u^2}{2!}z^1 + \dots\right] = \pi\mathrm{i}.$$

Als Real- und Imaginärteil erhalten wir die reellen Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ux)}{x}\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ux)}{x}\,\mathrm{d}x = \pi.$$

Für $u < 0$ kehrt sich das Vorzeichen um. Für $u = 0$ ist alles klar.

Organisation dieses Kapitels

☺ Dieses Integral konnten wir zuvor noch nicht ausrechnen B149, jetzt aber ganz leicht! Diese vielseitige Rechentechnik führen wir in §F4 aus.

Dieses eindimensionale reelle Integral war zunächst außerhalb unserer Reichweite. Erst durch die effiziente Behandlung als zweidimensionales komplexes Integral löst sich nun alles in Wohlgefallen auf!

☺ Der Residuensatz ist ein allgemeines und mächtiges Werkzeug. Die obigen Beispiele motivieren, welche Aspekte wir nun klären müssen, wenn wir den mathematischen Begriffen auf den Grund gehen wollen:

Der Residuensatz gilt nur für **holomorphe Funktionen** $f : \mathbb{C} \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$. Wie können wir diese Eigenschaft definieren und bequem erkennen?

Wie entwickelt man eine holomorphe Funktion auf $B(z_0, \rho)$ in eine konvergente **Potenzreihe**? auf $K(z_0, \sigma, \rho)$ in eine **Laurent–Reihe**?

Wie definieren wir das **Residuum**? Wie berechnen wir es effizient? Wie können wir schließlich den **Residuensatz** beweisen und nutzen?

☺ Dieses Kapitel entwickelt die nötigen Grundlagen (§F2–§F3) und einige wichtige Anwendungen des Residuenkalküls (§F4–§F5).

Anwendung auf reelle Integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{a}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{ab(a+b)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ux)}{x^4+4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\,\mathrm{e}^{-|u|}\,\big(\cos|u| + \sin|u|\big)$$

Aufgabe: (1) Wie erklären / begründen Sie die Konvergenz dieser Integrale? Gilt sie absolut? uneigentlich? als Cauchy–Hauptwert? B219

(2) Welche können Sie bereits mit elementaren Methoden berechnen?
☺ Die fehlenden gewinnen Sie mit den Methoden dieses Kapitels!

Lösung: Zum ersten Integranden $f(x) = 1/(x^2+a^2)$ finden Sie (dank Substitution) leicht die Stammfunktion $F(x) = \arctan(x/a)/a$. Damit gelingt das erste Integral. Das zweite und dritte sind elementar kaum zugänglich, aber ganz bequem mit dem Residuenkalkül. F429 F431 Unser Universalwerkzeug ist der Residuensatz hier für Fourier–Integrale rationaler Funktionen (F4K).

Anwendung auf reelle Integrale

$$\int_{x=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{x=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$$

$$\int_{x=0}^{\infty} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{\infty} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Aufgabe: (1) Wie erklären / begründen Sie die Konvergenz dieser Integrale? Gilt absolute Konvergenz? oder zumindest uneigentlich?

(2) Welche können Sie bereits mit elementaren Methoden berechnen?
☺ Die fehlenden gewinnen Sie mit den Methoden dieses Kapitels!

Lösung: Zum ersten Integranden $f(x) = 1/(1+x^2)$ erkennen Sie direkt die Stammfunktion $F(x) = \arctan(x)$. Damit gelingt das erste Integral leicht. Die letzten drei sind elementar kaum zugänglich, doch Sie berechnen alle erfreulich einfach mit dem Residuenkalkül. F434 F529
Die letzten beiden sind die Fresnel–Integrale, die wir bereits seit Kapitel B suchen. B424

Anwendung auf reelle Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \ldots = 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6} = 1.6449340668\ldots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \mp \ldots = -\frac{\pi^2}{12} = -0.8224670334\ldots$$

Aufgabe: (1) Wie erklären / begründen Sie die Konvergenz dieser Reihen? Gilt absolute Konvergenz? oder zumindest uneigentlich?

(2) Welche können Sie bereits mit elementaren Methoden berechnen?
☺ Die fehlenden gewinnen Sie mit den Methoden dieses Kapitels!

Lösung: Den ersten Summanden $f(k) = 1/(k^2+k) = 1/k - 1/(k+1)$ zerlegen Sie sogleich routiniert in Partialbrüche und finden so die diskrete Stammfunktion $F(x) = -1/k$, siehe B3B. Damit gelingt die erste Summe leicht als Teleskop. Die zweite und dritte sind elementar kaum zugänglich, doch Sie berechnen beide Reihen bequem mit dem Residuenkalkül, siehe Satz F5I.

Ein Hoch auf die komplexe Analysis!

☺ Diese phantastischen Rechnungen illustrieren das Eingangszitat:

La voie la plus courte et la meilleure entre deux vérités
du domaine réel passe souvent par le domaine imaginaire.
[Der kürzeste und beste Weg zwischen zwei
reellen Wahrheiten führt oft durchs Imaginäre.]
Jacques Hadamard (1865–1963)

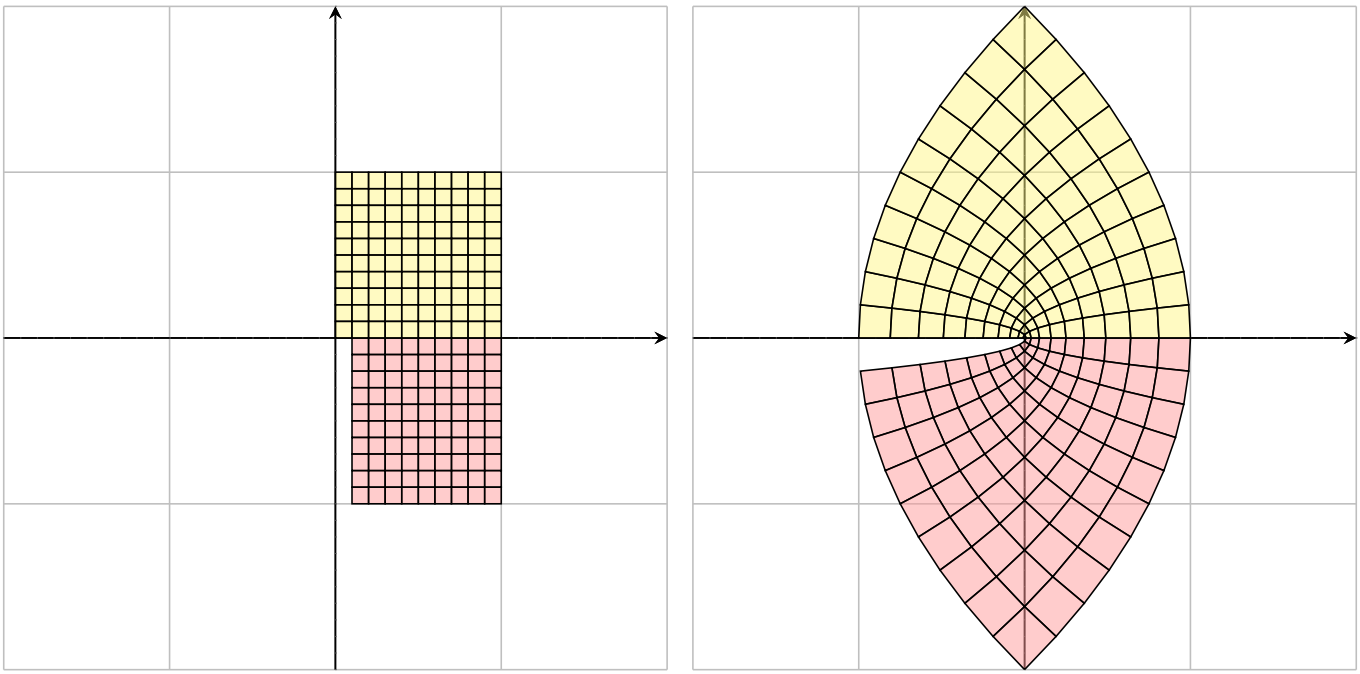
Damit beschließe ich diesen kurzen Crashkurs zum ersten Überblick. Sie erahnen nun, was Sie mit dem Residuensatz berechnen können, und dass sich das Erlernen dieses wunderbaren Kalküls lohnt.

Holomorphe Funktionen haben viel zu bieten, der Mathematiker:in ebenso wie der Physiker:in und der Ingenieur:in. Wir wollen uns nun diese effizienten Rechentechniken Schritt für Schritt erarbeiten.

Ich hoffe, wie so oft, Sie sind bis in die Haarspitzen motiviert.
Der Weg ist steil, aber das Ziel ist lohnend!

Komplexe Funktionen als Abbildungen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

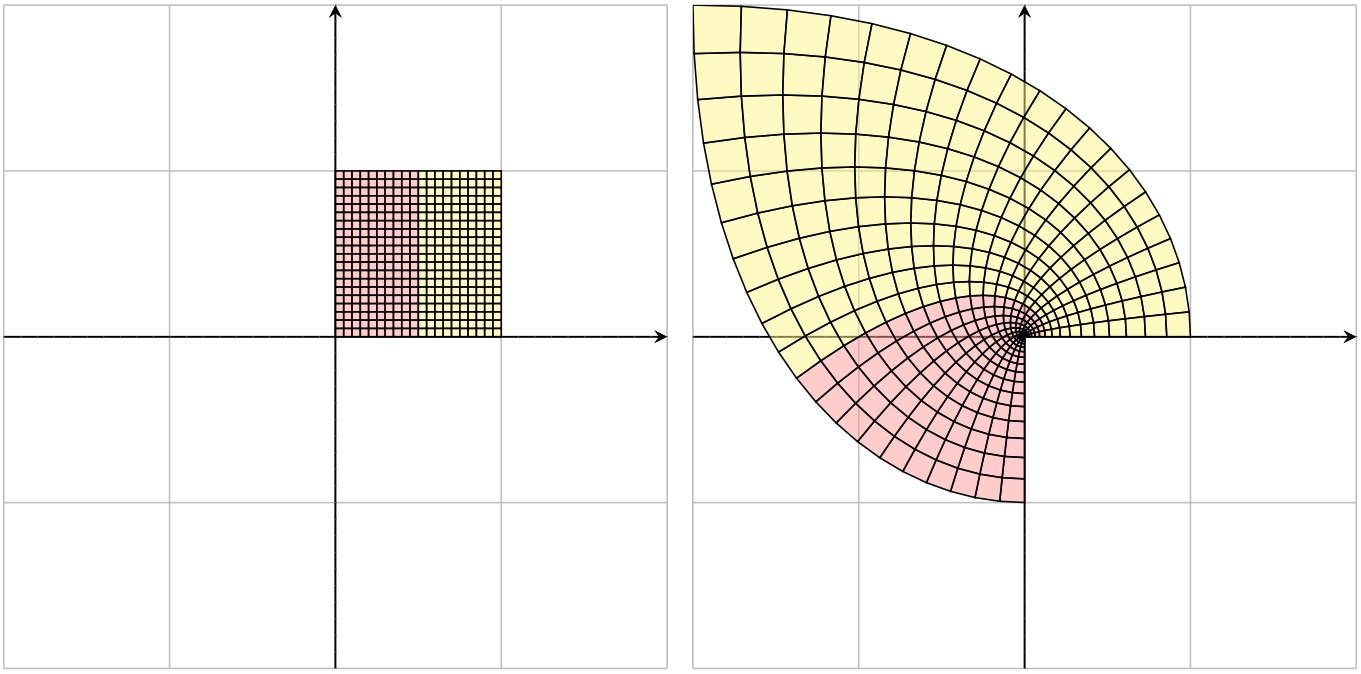
Beispiel: $f(z) = z^2$, also $f(x + \mathrm{i}y) = (x^2 - y^2) + \mathrm{i}(2xy)$



In Polardarstellung gilt $f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) = r^2\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}$. Im Ursprung sieht man die Winkelverdopplung. Außerhalb bleiben Winkel erhalten, und kleine Quadrate werden in kleine Quadrate überführt.

Komplexe Funktionen als Abbildungen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Beispiel: $f(z) = z^3$, also $f(x + \mathrm{i}y) = (x^3 - 3xy^2) + \mathrm{i}(3x^2y - y^3)$

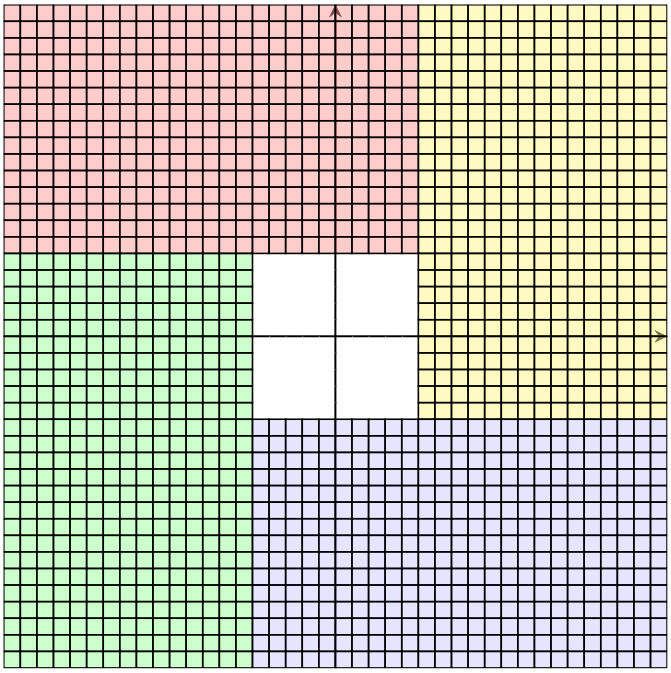


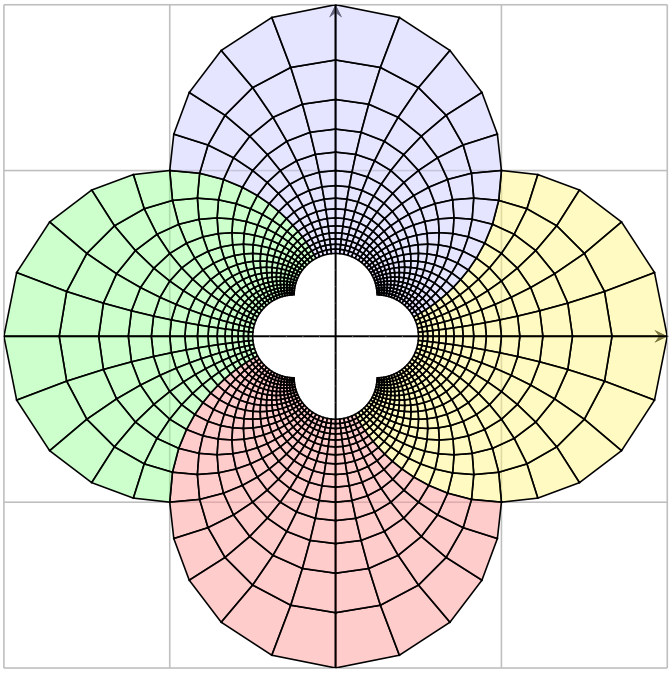
In Polardarstellung gilt $f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) = r^3\,\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\varphi}$. Im Ursprung sieht man die Winkelverdreifachung. Außerhalb bleiben Winkel erhalten, und kleine Quadrate werden in kleine Quadrate überführt.

Komplexe Funktionen als Abbildungen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

F203
Ausführung

Beispiel: $f(z) = \dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}}$, also $f(x+\mathrm{i}y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} + \mathrm{i}\dfrac{-y}{x^2+y^2}$



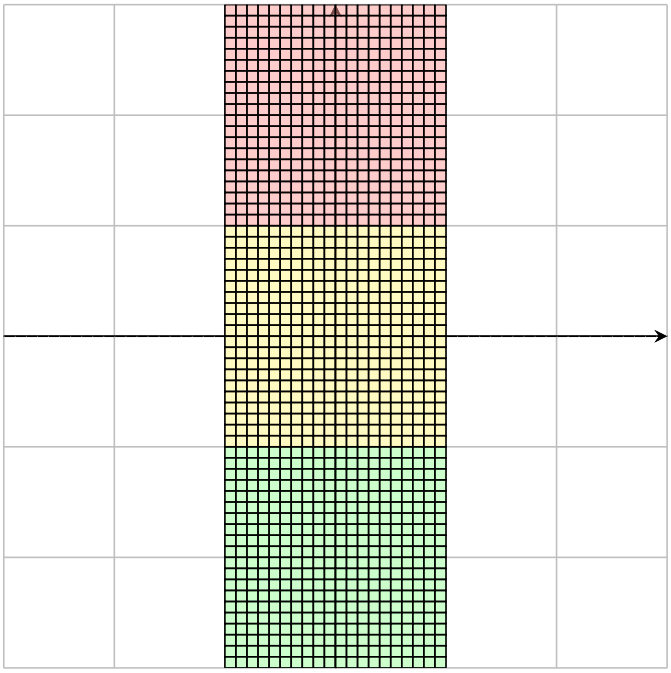


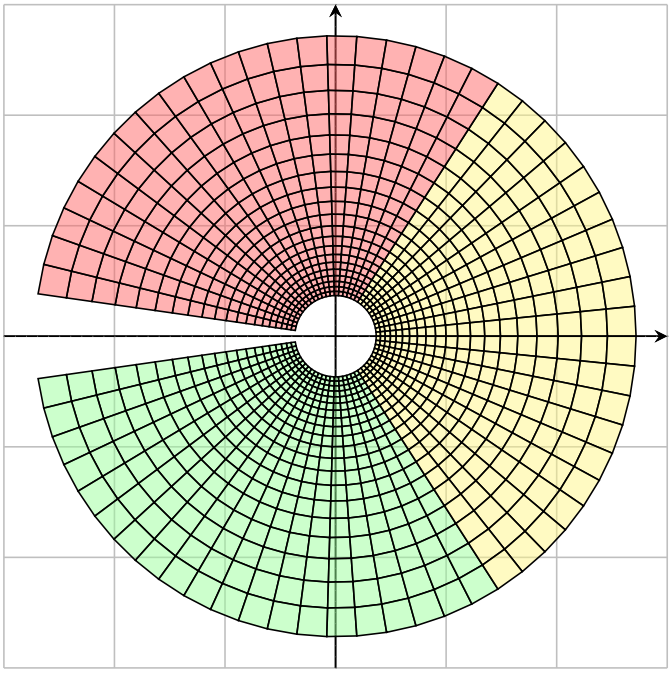
In Polardarstellung gilt $f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) = r^{-1}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$. Geometrisch entspricht diese Abbildung einer Spiegelung am Einheitskreis ($r \mapsto r^{-1}$) sowie einer an der reellen Achse ($\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$).

Komplexe Funktionen als Abbildungen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

F204
Ausführung

Beispiel: $f(z) = \exp(z)$, also $f(x+\mathrm{i}y) = \mathrm{e}^x \cos y + \mathrm{i}\,\mathrm{e}^x \sin y$





Das entspricht der Polardarstellung mit Radius e^x und Winkel y. Für jede komplexe Zahl $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existiert $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ sodass $w = \exp(z) = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$ gilt. Genau dann gilt $\exp(z) = \exp(\tilde{z})$, wenn $z - \tilde{z} = k \cdot 2\pi\mathrm{i}$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. (Satz F2K)

Definition F2A: komplexe Ableitung

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion. Wir betrachten

$$\lim_{\substack{z_n \to z \\ z_n \in \Omega \setminus \{z\}}} \frac{f(z_n) - f(z)}{z_n - z}.$$

Wir nennen f im Punkt $z \in \Omega$ **komplex differenzierbar**, wenn dieser Grenzwert existiert für jede Folge $z_n \to z$ mit $z_n \in \Omega$ und $z_n \neq z$.

Dieser Grenzwert heißt dann die **komplexe Ableitung**, geschrieben

$$f'(z) \;=\; \lim_{\substack{\zeta \to z \\ \zeta \neq z}} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \;=\; \lim_{\substack{w \to 0 \\ w \neq 0}} \frac{f(z+w) - f(z)}{w}$$

Beispiel: Für $f(z) = z^2$ gilt $f'(z) = 2z$, denn $\frac{\zeta^2 - z^2}{\zeta - z} = \zeta + z \;\to\; 2z$.

Allgemein: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f(z) = z^n$ gilt $f'(z) = nz^{n-1}$, denn

$$\frac{\zeta^n - z^n}{\zeta - z} = \sum_{k=1}^{n} \zeta^{k-1} z^{n-k} \;\to\; nz^{n-1} \quad \text{für } \zeta \to z.$$

Satz F2B: komplexe Ableitungsregeln

Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit, aber nicht umgekehrt.
Die Ableitung ist linear und erfüllt Produkt- und Kettenregel:

$$[af]'(z) = af'(z) \text{ für } a \in \mathbb{C}, \qquad [f \cdot g]'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z),$$
$$[f+g]'(z) = f'(z) + g'(z), \qquad [h \circ g]'(z) = h'(g(z)) \cdot g'(z).$$

Hierbei seien f, g im Punkt $z \in \mathbb{C}$ komplex diff'bar und h im Punkt $g(z)$.
Der Nachweis dieser Regeln verläuft wörtlich wie im reellen Fall.
Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §2.2.

Aufgabe: Für $f(z) = z^{-n}$ folgt $f'(z) = -nz^{-n-1}$ in jedem Punkt $z \neq 0$.

Lösung: Aus $z^n \cdot f(z) = 1$ folgt dank Produktregel

$$nz^{n-1} \cdot f(z) + z^n \cdot f'(z) = 0.$$

Diese Gleichung lösen wir auf zu $f'(z) = -nz^{-1} f(z) = -nz^{-n-1}$.

Definition F2C: Holomorphie

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine komplexe Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt **holomorph**, wenn sie auf ganz Ω komplex differenzierbar ist und $f' : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig.

Aufgabe: Ist jedes komplexe Polynom holomorph?

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

Lösung: Ja, f ist auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph mit der Ableitung

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^n.$$

Aufgabe: Ist jedes komplexe Laurent–Polynom holomorph?

$$f(z) = a_{-n} z^{-n} + \cdots + a_{-1} z^{-1} + a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

Lösung: Ja, f ist auf $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph mit der Ableitung

$$f'(z) = -n a_{-n} z^{-n-1} - \cdots - a_{-1} z^{-2} + a_1 + \cdots + n a_n z^n.$$

☺ Gleiches gilt für konvergente (Laurent-)Potenzreihen, also $n \to \infty$.

Korollar F2D: Eigenschaften holomorpher Funktionen

Holomorphe Funktionen $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ sind insbesondere stetig.

Linearkombination, Multiplikation und Komposition holomorpher Funktionen ergeben wieder holomorphe Funktionen. Dabei gilt:

$$[af]' = af', \qquad [f \cdot g]' = f'g + fg',$$
$$[f + g]' = f' + g', \qquad [h \circ g]' = (h' \circ g) \cdot g'.$$

☺ Soweit verhält sich die komplexe Ableitung genau wie die reelle. Insbesondere für (Laurent-)Polynome gelten dieselben Rechenregeln. Wir wollen dies gleich auch für (Laurent-)Potenzreihen festhalten.

⚠ Wir werden sodann als fundamentalen Unterschied zu $\mathbb{R}$ ausnutzen, dass wir in $\mathbb{C}$ in zwei linear unabhängige Richtungen ableiten können. Dies impliziert die Cauchy–Riemann–Differentialgleichungen und wird unsere Integralsätze in der Ebene (Green / Gauß) zum Einsatz bringen. Dadurch entfalten sich viel stärkere Gesetzmäßigkeiten als im Reellen.

Die Cauchy–Riemann–Differentialgleichungen

Sei $f : \mathbb{C} \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$ im Punkt $z \in \mathbb{C}$ **komplex differenzierbar**:

$$f'(z) = \lim_{\substack{w \to 0 \\ w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}}} \frac{f(z+w) - f(z)}{w}.$$

Dann ist f im Punkt $z \in \mathbb{C}$ insbesondere partiell differenzierbar:

$$\lim_{\substack{r \to 0 \\ r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}} \frac{f(z+r) - f(z)}{r} = \frac{\partial f}{\partial x}(z), \qquad \lim_{\substack{s \to 0 \\ s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}} \frac{f(z+\mathrm{i}s) - f(z)}{\mathrm{i}s} = \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\partial f}{\partial y}(z).$$

Beide stimmen mit $f'(z)$ überein! Für $f = u + \mathrm{i}v$ gilt also

$$f'(z) \overset{!}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(z) \overset{!}{=} \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\partial f}{\partial y}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z) - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}(z).$$

Dies sind die **Cauchy–Riemann–Differentialgleichungen**

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.}$$

☺ Dieses Kriterium ist nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend. Damit können wir leicht überprüfen, ob $f : \mathbb{C} \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph ist!

Die Cauchy–Riemann–Differentialgleichungen

Satz F2E: Cauchy–Riemann–Differentialgleichungen

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Die komplexe Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ zerlegen wir in $f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ mit $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

1. Die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ist holomorph, das heißt auf ganz Ω komplex differenzierbar mit stetiger Ableitung f'.
2. Die Funktionen $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ sind stetig partiell differenzierbar und erfüllen die Cauchy–Riemann–Differentialgleichungen.

Nachrechnen: Die Implikation „(1) $\Rightarrow$ (2)“ haben wir ausgerechnet.

Die Umkehrung „(2) $\Leftarrow$ (1)“ erhalten wir aus der Taylor–Formel:
Für $w = r + \mathrm{i}s$ gilt $f(z+w) = f(z) + \partial_x f(z)\, r + \partial_y f(z)\, s + o(|w|)$.
Dank $\partial_y f = \mathrm{i}\partial_x f$ folgt $f(z+w) = f(z) + \frac{1}{2}(\partial_x - \mathrm{i}\partial_y) f(z)\, w + o(|w|)$.
Für $w \to 0$ gilt somit $(f(z+w) - f(z))/w \to \frac{1}{2}(\partial_x - \mathrm{i}\partial_y) f(z)$.

☺ Einfach und praktisch: Die Cauchy–Riemann–Differentialgleichungen übersetzen verlustfrei komplexe in reelle Differenzierbarkeit und zurück! Wir nennen $\partial_z = \frac{1}{2}\big(\partial_x - \mathrm{i}\partial_y\big)$ die Wirtinger–Ableitung nach z, siehe F2F.

Die Cauchy–Riemann–Differentialgleichungen

Es gibt mehrere äquivalente Formulierungen der CR–Gleichungen

$$\partial_x u = \partial_y v, \quad \partial_x v = -\partial_y u.$$

Sie besagen, dass die Jacobi–Matrix eine ganz spezielle Form hat:

$$J = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

☺ Die Determinante ist $a^2 + b^2 = |f'(z)|^2 \geq 0$. Es handelt sich um eine Drehung gefolgt von einer Streckung um den Faktor $|f'(z)|$. Dies erklärt, warum im Falle $f'(z) \neq 0$ die Abbildung f die Winkel erhält und kleine Quadrate in kleine Quadrate überführt, wie in obigen Graphiken gezeigt.

Das Vektorfeld $\overline{f} = (u, -v) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ ist divergenz- und rotationsfrei:

$$\operatorname{div}(u, -v) = +\partial_x u - \partial_y v = 0,$$
$$\operatorname{rot}(u, -v) = -\partial_x v - \partial_y u = 0.$$

☺ Genau diese Eigenschaft nutzen wir im Residuensatz, siehe F3A.

Die Cauchy–Riemann–Differentialgleichungen

Aufgabe: (1) Ist die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto z^2$ holomorph?
(2) Ist $f(z) = \overline{z}$ holomorph? (3) und $\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x \cos y + \mathrm{i}\,\mathrm{e}^x \sin y$?

Lösung: (1) Wir finden $u(x, y) = (x^2 - y^2)$ und $v(x, y) = 2xy$ und somit

$$\begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \quad \text{also} \quad \begin{cases} \operatorname{div}(u, -v) = +\partial_x u - \partial_y v = 0, \\ \operatorname{rot}(u, -v) = -\partial_x v - \partial_y u = 0. \end{cases}$$

Die Funktion $f(z) = z^2$ ist holomorph. ☺ Das wussten wir schon!

(2) Wir finden $u(x, y) = x$ und $v(x, y) = -y$ und somit

$$\begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{also} \quad \begin{cases} \operatorname{div}(u, -v) = +\partial_x u - \partial_y v = 2, \\ \operatorname{rot}(u, -v) = -\partial_x v - \partial_y u = 0. \end{cases}$$

Die Funktion $f(z) = \overline{z}$ ist nicht holomorph. ☺ Erstes Gegenbeispiel!

(3) Auch $\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x \cos y + \mathrm{i}\,\mathrm{e}^x \sin y$ ist holomorph:

$$\begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \cos y & -\mathrm{e}^x \sin y \\ \mathrm{e}^x \sin y & \mathrm{e}^x \cos y \end{pmatrix} \quad \text{also} \quad \begin{cases} \operatorname{div}(u, -v) = 0, \\ \operatorname{rot}(u, -v) = 0. \end{cases}$$

☺ Das folgt auch direkt aus der Exponentialreihe $\mathrm{e}^z = \sum_{k=0}^{\infty} z^k / k!$.

Reelle und komplexe Ableitungen

Satz F2F: Wirtinger–Ableitungen

Wir definieren die **Wirtinger–Ableitungen** nach z und $\overline{z}$ durch

$$\partial_z := \tfrac{1}{2}\big(\partial_x - \mathrm{i}\partial_y\big) \quad \text{und} \quad \partial_{\overline{z}} := \tfrac{1}{2}\big(\partial_x + \mathrm{i}\partial_y\big).$$

(0) Es gilt $\partial_z\, z = 1$ und $\partial_z\, \overline{z} = 0$ sowie $\partial_{\overline{z}}\, \overline{z} = 1$ und $\partial_{\overline{z}}\, z = 0$.

(1) Ist $f : \mathbb{C} \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, so gilt

$$f' = \partial_z f \quad \text{und} \quad \partial_{\overline{z}} f = 0.$$

(2) Ist umgekehrt $f : \mathbb{C} \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$ nach x und y partiell differenzierbar, so sind die Cauchy–Riemann–Gleichungen F2E äquivalent zu $\partial_{\overline{z}} f = 0$.

Beweis: Für $f = u + \mathrm{i}v$ rechnen wir gewissenhaft nach:

$$\partial_z f = \tfrac{1}{2}\big(\partial_x - \mathrm{i}\partial_y\big)\big(u + \mathrm{i}v\big) = \tfrac{1}{2}\big(\partial_x u + \partial_y v\big) + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\big(\partial_x v - \partial_y u\big)$$
$$\partial_{\overline{z}} f = \tfrac{1}{2}\big(\partial_x + \mathrm{i}\partial_y\big)\big(u + \mathrm{i}v\big) = \tfrac{1}{2}\big(\partial_x u - \partial_y v\big) + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\big(\partial_x v + \partial_y u\big)$$

☺ Somit ist $\partial_{\overline{z}} f = 0$ äquivalent zu den Cauchy–Riemann–Gleichungen $\partial_x u = \partial_y v$, $\partial_x v = -\partial_y u$. Ist f komplex differenzierbar, so folgt $\partial_z f = f'$.

Der inhomogene Integralsatz von Cauchy

Satz F2G: inhomogener Integralsatz von Cauchy

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und darauf $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig partiell differenzierbar. Für jedes Kompaktum $D \subseteq \Omega$ mit stückweise glattem Rand gilt:

$$\int_{\partial D} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\mathrm{i} \int_D \partial_{\overline{z}} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$$

Beweis: (2) Für $f = u + \mathrm{i}v$ und $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + \mathrm{i}\,\mathrm{d}y$ rechnen wir nach:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} f(z)\,\mathrm{d}z &\overset{\text{Def}}{\underset{\text{F1A}}{=}} \int_{\partial D} (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) \;+\; \mathrm{i}(u\,\mathrm{d}y + v\,\mathrm{d}x) \\
&\overset{\text{Green}}{\underset{\text{Gauß}}{=}} \int_D \operatorname{rot}(u,-v)\,\mathrm{d}(x,y) \;+\; \mathrm{i}\int_D \operatorname{div}(u,-v)\,\mathrm{d}(x,y) \\
&\overset{\text{Def}}{\underset{\text{F2F}}{=}} 2\mathrm{i}\int_D \partial_{\overline{z}} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)
\end{aligned}$$

☺ Ist f holomorph, so gilt $\partial_{\overline{z}} f = 0$, und das Integral verschwindet! (F3A) Erfreulicherweise gilt sogar die Umkehrung, siehe den folgenden Satz.

Satz F2H: Äquivalente Kriterien für Holomorphie

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Die komplexe Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ zerlegen wir in $f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ mit $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

1. **Holomorphie:** Die Funktion f ist holomorph, das heißt auf ganz Ω komplex differenzierbar mit stetiger Ableitung f'.
2. **Komplexe Differenzierbarkeit:** Die Funktion f ist auf ganz Ω komplex differenzierbar (ohne die Stetigkeit von f' zu verlangen).
3. **Analytizität:** Die Funktion f lässt sich in jedem Punkt $z_0 \in \Omega$ in eine konvergente Potenzreihe entwickeln, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$.
4. **Glattheit:** Die Funktion f ist beliebig oft komplex differenzierbar.
5. **Cauchy–Riemann:** Die Funktionen u, v sind stetig partiell differenzierbar und erfüllen $\partial_x u = \partial_y v$ und $\partial_x v = -\partial_y u$.
6. **Looman–Menchoff:** Die Funktion f ist stetig, die Ableitungen $\partial_x f$ und $\partial_y f$ existieren und erfüllen $\partial_x f + \mathrm{i}\partial_y f = 0$, kurz $\partial_{\bar z} f = 0$.
7. **Morera:** Die Funktion f ist stetig und für jedes Rechteck $R \subseteq \Omega$ verschwindet das komplexe Wegintegral $\oint_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

☺ Zu prüfen ist, ob eine vorgelegte Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph ist. Je nach Bedarf können wir hierzu jedes dieser sieben Kriterien nutzen! Das öffnet mehrere Zugänge zu den Werkzeugen der Funktionentheorie.

Diese sieben Bedingungen scheinen zunächst sehr verschieden und unterschiedlich stark. Es ist daher überaus bemerkenswert, dass all diese Bedingungen äquivalent sind zur Holomorphie (1).

Die Eigenschaft der Holomorphie ist demnach robust und fundamental. Wir haben bereits die Äquivalenz (1) $\Leftrightarrow$ (5) nachgerechnet. (Satz F2E) Wir werden weiter unten die Äquivalenz (1) $\Leftrightarrow$ (3) zeigen. (Satz F3E) Die Implikationen (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1) sind dann klar (dank Satz F2J).

Die weiteren Kriterien nenne ich hier nur zur Illustration und Abrundung. Zum Beispiel garantieren (1) $\Leftrightarrow$ (2) und (5) $\Leftrightarrow$ (6), dass wir die Stetigkeit der Ableitungen nicht gesondert fordern bzw. nachweisen müssen (F5C). Formulierung (7) kommt ohne Ableitung nur mit Integralen aus (F5B).

📖 Ausführliche Beweise und Erläuterungen finden Sie in den meisten Einführungen zur Funktionentheorie, etwa von Jänich oder Remmert.

Von Polynomen zu Reihen

Besonders schöne und einfache Funktionen sind **Polynome**:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$$

Manchmal benötigen wir etwas allgemeiner auch **Laurent–Polynome**:

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{n} a_k z^k = a_{-n} z^{-n} + a_{1-n} z^{1-n} + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n$$

☺ Wir vollziehen mutig und umsichtig den Grenzübergang $n \to \infty$.

Besonders schöne und einfache Funktionen sind **Potenzreihen**:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

Manchmal benötigen wir etwas allgemeiner auch **Laurent–Reihen**:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k = \ldots + a_{-2} z^{-2} + a_{-1} z^{-1} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

☺ Für die Konvergenz und das Rechnen gibt es einfache Regeln.

Potenzreihen: Beispiele

Viele wichtige Funktionen lassen sich als Potenzreihen darstellen:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots \quad \text{für } |z| < 1,$$

$$\ln(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} z^k = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots \quad \text{für } |z| < 1,$$

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \ldots \quad \text{für } z \in \mathbb{C},$$

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots \quad \text{für } z \in \mathbb{C},$$

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots \quad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

Hieraus folgen die **Euler–Formel** $\exp(\mathrm{i}z) = \cos z + \mathrm{i} \sin z$ für alle $z \in \mathbb{C}$, das **Potenzgesetz** $\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z \, \mathrm{e}^w$ F222, speziell $\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i} \sin y)$, sowie die **Additionstheoreme** für $\sin$ und $\cos$ B125, und vieles mehr.

Potenzreihen: Konvergenzradius

Satz F2I: Konvergenz von Potenzreihen

Eine **Potenzreihe** ist eine (zunächst formale) Reihe der Form

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Sie ist gegeben durch ihren **Entwicklungspunkt** $z_0 \in \mathbb{C}$ und ihre **Koeffizienten** $a_k \in \mathbb{C}$ für $k \in \mathbb{N}$. Ihr **Konvergenzradius** ist

$$\rho := 1 \Big/ \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \quad \in \quad [0, \infty].$$

Die Reihe **konvergiert** absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < \rho$.
Hingegen **divergiert** die Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| > \rho$.

Für Randpunkte $|z - z_0| = \rho$ kann beides passieren; hier ist keine einfache Aussage möglich. (Antworten über das subtile Verhalten auf dem Kreisrand gibt die Theorie der Fourier–Reihen. Allgemein gehört die Konvergenz solcher Reihen zu den schwierigsten Fragen der Analysis.)
Im Falle $\rho = \infty$ ist $B(z_0, \infty) = \mathbb{C}$ die gesamte Ebene, und die Reihe konvergiert überall.
Im Falle $\rho = 0$ ist $B(z_0, 0)$ leer und die Reihe konvergiert nur im Entwicklungspunkt z_0.

Potenzreihen: Ableitung

☺ Potenzreihen verhalten sich wie Polynome (von unendlichem Grad). Auf ihrem Konvergenzgebiet können wir mit Potenzreihen gut rechnen, wie üblich addieren, multiplizieren, verknüpfen, insbesondere ableiten.

Satz F2J: Ableitung von Potenzreihen

Sei $\Omega = B(z_0, \rho)$ mit $0 < \rho \le \infty$. Jede konvergente Potenzreihe

$$f : \Omega \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{für alle } z \in \Omega,$$

ist auf Ω holomorph. Ihre Ableitung ist gegeben durch

$$f' : \Omega \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k (z - z_0)^{k-1} \quad \text{für alle } z \in \Omega.$$

Auch diese ist auf Ω holomorph, somit ist f beliebig oft differenzierbar.
Die Funktion f bestimmt die Koeffizienten vermöge $a_k = f^{(k)}(z_0)/k!$.
Unsere Potenzreihe ist somit die Taylor–Reihe der Funktion f.

Rechnen mit Potenzreihen

📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §1.14.
Nach Verschieben können wir als Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ annehmen:

$$f : B(z_0, \rho) \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{wird verschoben zu}$$

$$\tilde{f} : B(0, \rho) \to \mathbb{C}, \quad \tilde{f}(z) = f(z_0 + z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Aufgabe: Wie werden Potenzreihen addiert bzw. multipliziert?

Lösung: Addition erfolgt wie üblich bei konvergenten Reihen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) z^k$$

Multiplikation dank Umordnungssatz A2N für abs. konvergente Reihen:

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) z^k.$$

Die komplexe Exponentialfunktion

Aufgabe: Aus der Exponentialreihe folgt die **Funktionalgleichung**

$$\boxed{\exp(z + w) = \exp(z) \exp(w) \quad \text{für alle} \quad z, w \in \mathbb{C}.}$$

Nachrechnen: Dank Umordnungssatz und binomischer Formel gilt:

$$\exp(z) \exp(w) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right) \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{w^\ell}{\ell!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+\ell=n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^\ell}{\ell!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z + w)^n = \exp(z + w).$$

☺ Dies entspricht dem **Potenzgesetz**, daher die Kurzschreibweise

$$\mathrm{e}^z := \exp(z) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z \, \mathrm{e}^w.$$

☺ Zusammen mit der wichtigen **Euler–Formel** $\exp(\mathrm{i}z) = \cos z + \mathrm{i} \sin z$ erhalten wir hieraus sofort **Additionstheoreme** für $\sin$ und $\cos$. B125
(Wiederholen und beweisen Sie diese als lehrreiche Übung.)

Die komplexe Exponentialfunktion

Aufgabe: Aus der Exponentialreihe folgt die **Ableitungsregel**

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\exp(az) = a\exp(az).}$$

Nachrechnen: Dank Ableitungsregel F2J für Potenzreihen gilt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\exp(az) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{a^k z^k}{k!}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^k z^{k-1}}{(k-1)!} = a\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k z^k}{k!} = a\exp(az).\end{aligned}$$

In Kurzschreibweise erhalten wir die vertraute Formel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{e}^{az} = a\,\mathrm{e}^{az}.$$

☺ Das ist eine charakteristische Eigenschaft der Exponentialfunktion. Wir werden sie insbesondere für Differentialgleichungen ausnutzen!

Die komplexe Exponentialfunktion

Satz F2K: Bild und Kern der Exponentialfunktion

(1) Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ existiert $w = u + \mathrm{i}v \in \mathbb{C}$, sodass $z = \exp(w) = \mathrm{e}^u(\cos v + \mathrm{i}\sin v)$ gilt, also eine Polardarstellung von z.

(2) Genau dann gilt $\exp(w) = \exp(\tilde{w})$, wenn $w - \tilde{w} = k \cdot 2\pi\mathrm{i}$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

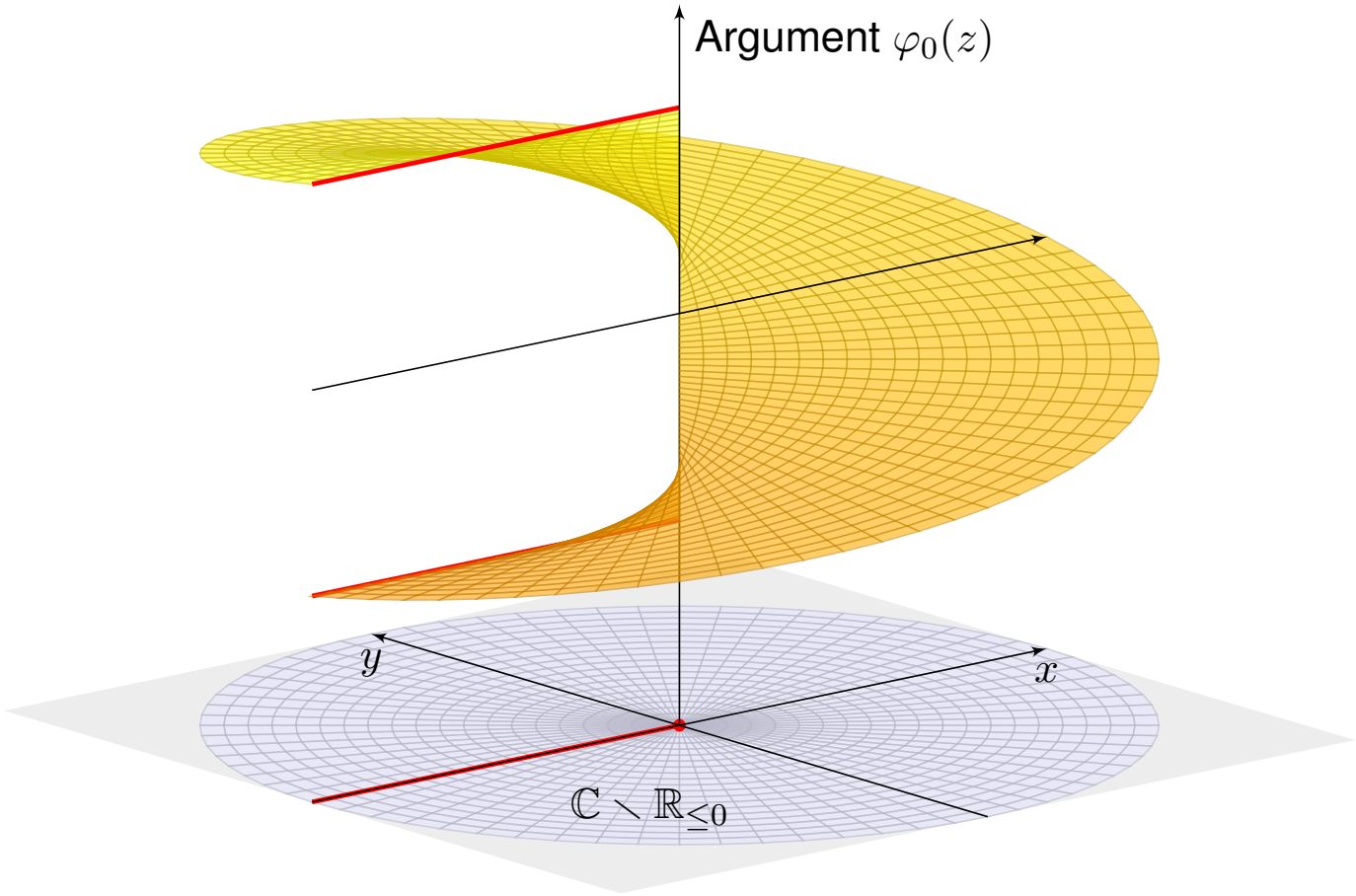
(3) Lokal um den Entwicklungspunkt 1 ist der komplexe Logarithmus

$$\ln : B(1,1) \to \mathbb{C}, \quad \ln(1+z) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}z^k$$

eine Umkehrfunktion, das heißt $\exp(\ln(1+z)) = 1 + z$ für alle $|z| < 1$.

Aussage (1) bedeutet: Die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ ist surjektiv. Wir können daher jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ in komplexen Polarkoordinaten darstellen. Aussage (2) besagt, dass $\exp$ nicht injektiv ist, und benennt den Kern $\ker(\exp) = \mathbb{Z}2\pi\mathrm{i}$. Das ist äquivalent zur vertrauten Periodizität der reellen Winkelfunktion $\cos, \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Im reellen Fall ist $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ bijektiv und erlaubt eine Umkehrfunktion $\ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$. Im komplexen Fall ist dies global auf $\mathbb{C}$ unmöglich, da $\exp$ nach (2) nicht bijektiv ist, aber es gelingt immerhin lokal mit Hilfe der in (3) angegebenen Potenzreihe: Dies rechnet man (etwas mühsam) nach durch Einsetzen der beiden Potenzreihen, oder (viel einfacher) durch Ableiten: $f(z) = \exp(\ln(1+z))/(1+z)$ erfüllt $f(0) = 1$ und $f'(z) = 0$. Berechnen Sie's zur Übung!

Zweige des komplexen Logarithmus



Zweige des komplexen Logarithmus

Die reelle Exponentialfunktion $\exp : (\mathbb{R}, 0, +) \to (\mathbb{R}_{>0}, 1, \cdot)$ ist bijektiv, ihre Umkehrfunktion ist der reelle Logarithmus $\ln : (\mathbb{R}_{>0}, 1, \cdot) \to (\mathbb{R}, 0, +)$.

Die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist surjektiv: $w = u + \mathrm{i}v \mapsto \mathrm{e}^{u+\mathrm{i}v} = \mathrm{e}^u(\cos v + \mathrm{i} \sin v)$ beschert uns Polarkoordinaten! Sie ist jedoch nicht injektiv, ganz im Gegenteil: Sie hat Periode $2\pi\mathrm{i}$ (F2K).

Zu $z \in \mathbb{C}^*$ gibt es also nicht nur einen Logarithmus $w \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{e}^w = z$, sondern unendlich viele, nämlich $\exp^{-1}(\{z\}) = \{\, w + k \cdot 2\pi\mathrm{i} \mid k \in \mathbb{Z} \,\}$.

Man könnte nun für jedes $z \in \mathbb{C}^*$ willkürlich einen Logarithmus $w \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{e}^w = z$ wählen, aber das kann global auf $\mathbb{C}^*$ nicht stetig gelingen! Zwecks Stetigkeit müssen wir das Definitionsgebiet einschränken:

Definition F2L: Zweige des komplexen Logarithmus

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}^*$ ein Gebiet, also eine offene zusammenhängende Menge.

Eine stetige Funktion $f : \mathbb{C}^* \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$ mit $\mathrm{e}^{f(z)} = z$ heißt **ein Zweig des Logarithmus** auf Ω oder auch **eine Logarithmusfunktion** auf Ω.

Eine stetige Funktion $\varphi : \mathbb{C}^* \supseteq \Omega \to \mathbb{R}$ mit $z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(z)}$ heißt **ein Zweig des Arguments** auf Ω oder auch **eine Argumentfunktion** auf Ω.

Zweige des komplexen Logarithmus

Aufgabe: (1) Wie entsprechen sich Argument und Logarithmus? (2) Sind sie auf Ω eindeutig? (3) bis auf eine additive Konstante?

Lösung: (1) Ist $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Argumentfunktion, so ist $f : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \ln|z| + \mathrm{i}\varphi(z)$ eine Logarithmusfunktion. Ist umgekehrt $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine Logarithmusfunktionen, so gilt $z = \mathrm{e}^{f(z)} = \mathrm{e}^{\operatorname{Re} f(z)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\operatorname{Im} f(z)}$ für $z \in \Omega$, also folgt $|z| = \mathrm{e}^{\operatorname{Re} f(z)}$, und $\varphi(z) = \operatorname{Im} f(z)$ ist eine Argumentfunktion.

(2) Ist $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine Logarithmusfunktion auf Ω, so auch $g = f + 2\pi\mathrm{i}k$ für jede Konstante $k \in \mathbb{Z}$, denn g ist stetig und $\mathrm{e}^{g(z)} = \mathrm{e}^{f(z)}\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k} = z$.

⚠ Da es auf Ω mehrere Logarithmusfunktionen gibt, sagen wir betont **eine** Logarithmusfunktion und bewusst nicht „die“ Logarithmusfunktion.

(3) Seien umgekehrt $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ zwei Logarithmusfunktionen auf Ω. In jedem $z \in \Omega$ folgt $\mathrm{e}^{g(z)-f(z)} = \mathrm{e}^{g(z)}\,\mathrm{e}^{-f(z)} = \mathrm{e}^{g(z)}/\,\mathrm{e}^{f(z)} = z/z = 1$. Dank Satz F2K gilt demnach $g(z) - f(z) = k(z) \cdot 2\pi\mathrm{i}$ für ein $k(z) \in \mathbb{Z}$. Mit f, g ist auch $k = (g - f)/2\pi\mathrm{i} : \Omega \to \mathbb{Z}$ stetig, also lokal konstant. Da wir Ω als zusammenhängend voraussetzen, ist k konstant.

☺ Kennen wir also auf Ω *eine* Logarithmusfunktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$, so kennen wir bereits *alle*, nämlich $f_k = f + k \cdot 2\pi\mathrm{i}$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Zweige des komplexen Logarithmus

Übung: Prüfen und erklären Sie die folgenden Konstruktionen!

Satz F2M: Zweige des komplexen Logarithmus

Die folgenden Abbildungen sind **Argumentfunktionen**:

$$\begin{aligned}
g_0 &: \mathbb{C}_{\operatorname{Re}>0} \to \mathbb{R}, & x + \mathrm{i}y &\mapsto \arctan(y/x) \\
g_{\pi/2} &: \mathbb{C}_{\operatorname{Im}>0} \to \mathbb{R}, & x + \mathrm{i}y &\mapsto +\pi/2 - \arctan(x/y) \\
g_{-\pi/2} &: \mathbb{C}_{\operatorname{Im}<0} \to \mathbb{R}, & x + \mathrm{i}y &\mapsto -\pi/2 - \arctan(x/y)
\end{aligned}$$

$$\varphi_0 : \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_0(z) = \begin{cases} g_0(z) & \text{für } \operatorname{Re}(z) > 0, \\ g_{\pi/2}(z) & \text{für } \operatorname{Im}(z) > 0, \\ g_{-\pi/2}(z) & \text{für } \operatorname{Im}(z) < 0. \end{cases}$$

Wir erhalten den sogenannten **Hauptzweig der Logarithmusfunktion** $\ln_0 : \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{C}$ mit $\ln_0(z) = \ln|z| + \mathrm{i}\varphi_0(z)$. Zu jedem Winkel $\theta \in \mathbb{R}$ existiert entsprechend genau ein **Zweig der Logarithmusfunktion** $\ln_\theta : \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_{\leq 0} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \to \mathbb{C}$ mit $\ln_\theta(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \mathrm{i}\theta$, nämlich $\ln_\theta(z) = \ln_0(z\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) + \mathrm{i}\theta$. Er bijiziert den Sektor $\mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_{\leq 0} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ auf den Streifen $\mathbb{R} \times \,]\theta - \pi, \theta + \pi[$.

Lösungen quadratischer Gleichungen

Aufgabe: Wie finden Sie Nullstellen quadratischer Polynome $p \in \mathbb{C}[z]$?

Lösung: Zu gegebenen Nullstellen $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ bilden wir das Polynom

$$p(z) = (z - z_1)(z - z_2) = az^2 + bz + c \ \in \ \mathbb{C}[z]$$

mit $a = 1$ und $b = -z_1 - z_2$ und $c = z_1 z_2$. Sind umgekehrt $a, b, c \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$ vorgelegt, so finden wir beide Nullstellen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ von p durch

$$\{z_1, z_2\} = \left\{ \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}.$$

Wir stehen daher vor der Aufgabe, zu jeder komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ eine n-te Wurzel zu konstruieren, also eine komplexe Zahl $w \in \mathbb{C}$ mit $w^n = z$. Für $n = 2$ gelingt dies leicht wie folgt: Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $y \geq 0$ setzen wir

$$z = x \pm \mathrm{i}y \quad \mapsto \quad w = \sqrt{\frac{|z| + x}{2}} \pm \mathrm{i}\sqrt{\frac{|z| - x}{2}}.$$

☺ Wir nutzen die reelle Wurzelfunktion $\sqrt{\ } : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ und erhalten eine stetige komplexe Wurzelfunktion $\sqrt{\ } : \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_{<0} \to \mathbb{C}$ mit $(\sqrt{z})^2 = z$.
⚠ Für $z \in \mathbb{R}_{<0}$ ist die Zuordnung $z \mapsto \pm\mathrm{i}\sqrt{|z|}$ zweideutig bzw. unstetig.

Reelle und komplexe Wurzeln

Aufgabe: (1) Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ist die reelle Potenzfunktion $p : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $x \mapsto x^n$ bijektiv, ihre Umkehrfunktion ist die Wurzelfunktion $y \mapsto \sqrt[n]{y}$.
(2) Die komplexe Potenzfunktion $p : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ mit $w \mapsto w^n$ ist surjektiv aber nicht injektiv: Zu $z \in \mathbb{C}^*$ existieren genau n Wurzeln w mit $w^n = z$.

Lösung: (1) Die Funktion p ist stetig, monoton dank $p'(x) = nx^{n-1} > 0$ für $x > 0$, also insbesondere injektiv. Zudem gilt $p(0) = 0$ und $p(x) \to \infty$ für $x \to \infty$. Dank des Zwischenwertsatzes ist $p : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ surjektiv.
(2) Zu jedem $z \in \mathbb{C}^*$ existiert ein Logarithmus $a \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{e}^a = z$ (F2K). Für $w = \mathrm{e}^{a/n}$ gilt demnach $w^n = (\mathrm{e}^{a/n})^n = \mathrm{e}^a = z$. Jede andere Wahl $a' = a + 2\pi\mathrm{i}k$ führt zu $w' = w\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k/n}$, wobei $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Definition F2N: Zweige der n-ten Wurzelfunktion

Eine stetige Funktion $g : \mathbb{C}^* \supseteq \Omega \to \mathbb{C}^*$ mit $g(z)^n = z$ heißt **ein Zweig der n-ten Wurzel** auf Ω oder auch **eine n-te Wurzelfunktion** auf Ω.

Jede Logarithmusfunktion $f : \mathbb{C}^* \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$ mit $\mathrm{e}^{f(z)} = z$, nach F2M etwa $f = \ln_\theta$, beschert uns eine Wurzelfunktion $g(z) = \mathrm{e}^{f(z)/n}$ mit $g(z)^n = z$. Die anderen Zweige erhalten wir durch $\mathrm{e}^{(f(z)+2\pi\mathrm{i}k)/n} = g(z)\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k/n}$.

Logarithmus und Wurzeln längs eines Weges

Aufgabe: Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}^*$ gilt $z \cdot 1/z = 1$, also scheinbar

$$1 \;=\; \sqrt{1} \;=\; \sqrt{z \cdot 1/z} \;\overset{?}{=}\; \sqrt{z} \cdot \sqrt{1/z}.$$

Was erhalten Sie für $z = 1$? Was geht schief für $z = -1$? Gilt etwa

$$1 \;=\; \sqrt{1} \;=\; \sqrt{(-1)\cdot(-1)} \;\overset{?}{=}\; \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \;=\; \mathrm{i} \cdot \mathrm{i} \;=\; -1 \quad ?$$

Beobachten Sie diese Gleichung längs des Weges $z = \gamma(t) = \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} t}$.

Lösung: Das Problem ist die Mehrdeutigkeit der komplexen Wurzeln!
Wir betrachten den Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ mit $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} t}$ von $\gamma(0) = 1$ nach $\gamma(1) = -1$. Für das Inverse gilt demnach $1/\gamma(t) = \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i} t}$. (Skizze!)
Längs des Weges ziehen wir stetig die Wurzel gemäß $\sqrt{\gamma}\,(t) = \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} t/2}$ und entsprechend $\sqrt{1/\gamma}\,(t) = \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i} t/2}$. Während des gesamten Weges gilt $\sqrt{\gamma}\,(t) \cdot \sqrt{1/\gamma}\,(t) = 1$. Am Endpunkt $t = 1$ erhalten wir die Gleichung

$$1 = \sqrt{\gamma}\,(1) \cdot \sqrt{1/\gamma}\,(1) = \mathrm{i} \cdot (-\mathrm{i}).$$

Für andere Wege erhält man alternativ $1 = (-\mathrm{i}) \cdot \mathrm{i}$. ☺ Alles wird gut.
Dies ist die Methode der analytischen Fortsetzung längs eines Weges.

Logarithmus und Wurzeln längs eines Weges

Aufgabe: (1) Jeden Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}^*$ mit Startpunkt $\gamma(a) = z_0 = \mathrm{e}^{w_0}$ können wir eindeutig hochheben zu einem Weg $\ln \gamma := \tilde{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{C}$ mit Startpunkt $\tilde{\gamma}(a) = w_0$ und $\mathrm{e}^{\tilde{\gamma}(t)} = \gamma(t)$ für alle $t \in [a,b]$, nämlich:

$$\tilde{\gamma}(t) \;:=\; w_0 + \int_{\gamma|[a,t]} \frac{\mathrm{d}z}{z} \;=\; w_0 + \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)} \mathrm{d}s.$$

Für jeden anderen Weg $\hat{\gamma}$ mit $\mathrm{e}^{\hat{\gamma}} = \gamma$ gilt $\hat{\gamma} = \tilde{\gamma} + k \cdot 2\pi\mathrm{i}$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

(2) Jeden Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}^*$ mit Startpunkt $\gamma(a) = z_0 = w_0^n$ können wir eindeutig hochheben zu einem Weg $\hat{\gamma}_n = \sqrt[n]{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{C}^*$ mit Startpunkt $\hat{\gamma}_n(a) = w_0$ und der Wurzeleigenschaft $(\hat{\gamma}_n(t))^n = \gamma(t)$ für alle $t \in [a,b]$, nämlich $\hat{\gamma}_n(t) = \mathrm{e}^{(\tilde{\gamma}(t) + 2\pi\mathrm{i}k)/n}$ für ein geeignetes $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Lösung: (1) Für $t = a$ gilt $\tilde{\gamma}(a) = w_0$. Es bleibt, $\mathrm{e}^{\tilde{\gamma}} = \gamma$ nachzuprüfen.
Die Funktion $h(t) = \gamma(t)\,\mathrm{e}^{-\tilde{\gamma}(t)}$ erfüllt $h(a) = 1$ und dank HDI zudem $h'(t) = [\gamma'(t) - \gamma(t)\tilde{\gamma}'(t)]\,\mathrm{e}^{-\tilde{\gamma}(t)} = 0$ für alle $t \in [a,b]$, also $h(t) = 1$.

Aus $\mathrm{e}^{\hat{\gamma}(t)} = \mathrm{e}^{\tilde{\gamma}(t)} = \gamma(t)$ für alle $t \in [a,b]$ folgt $\mathrm{e}^{\hat{\gamma}(t) - \tilde{\gamma}(t)} = \mathrm{e}^{\hat{\gamma}(t)} / \mathrm{e}^{\tilde{\gamma}(t)} = 1$, also $\hat{\gamma}(t) - \tilde{\gamma}(t) = k(t) \cdot 2\pi\mathrm{i}$ für ein $k(t) \in \mathbb{Z}$. Mit $\hat{\gamma}, \tilde{\gamma}$ ist auch die Differenz $k = (\hat{\gamma} - \tilde{\gamma})/2\pi\mathrm{i} : [a,b] \to \mathbb{Z}$ stetig, also konstant.

Laurent–Reihen: Definition

Motivation: Wir wollen Funktionen auch um Polstellen entwickeln. Zum Beispiel z^{-1} oder z^{-n} oder $\mathrm{e}^{1/z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k!}$ entwickelt in $z_0 = 0$.

Definition F2o: Laurent–Reihe

Eine **Laurent–Reihe** ist eine (zunächst formale) Reihe der Form

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Sie ist gegeben durch ihren **Entwicklungspunkt** $z_0 \in \mathbb{C}$ und ihre **Koeffizienten** $a_k \in \mathbb{C}$ für $k \in \mathbb{Z}$. Ihr **Hauptteil** und **Nebenteil** sind

$$f_H(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} (z - z_0)^{-k}, \qquad f_N(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Der Nebenteil ist eine Potenzreihe in $u = (z - z_0)$, der Hauptteil ist demnach eine Potenzreihe in $v = (z - z_0)^{-1}$. Für beide gelten die Rechenregeln für Potenzreihen, wie wir sie oben ausgeführt haben.

Laurent–Reihen: Singularitäten

Gilt $a_k = 0$ für alle $k < 0$, so haben wir eine **Potenzreihe** vorliegen; für die Koeffizienten gilt dann $f(z_0) = a_0$ und $f^{(k)}(z_0) = k!\, a_k$.

Treten auch negative Potenzen $(z - z_0)^k$ mit $k < 0$ auf, so können wir in die Laurent–Reihe nicht den Entwicklungspunkt z_0 einsetzen!

Man nennt z_0 eine **Singularität** und unterscheidet drei Typen:

1. Wir nennen z_0 eine **hebbare Singularität**, wenn $a_k = 0$ für $k < 0$. In diesem Fall verschwindet der Hauptteil, kurz $f_H = 0$, und der verbleibende Nebenteil $f = f_N$ ist eine Potenzreihe um z_0.

   Beispiel: $f(z) = \sin(z)/z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k}/(2k+1)!$ in $z_0 = 0$

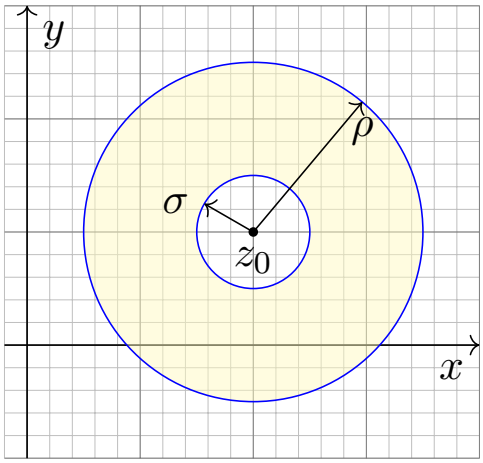
2. Wir nennen z_0 eine **Polstelle n-ter Ordnung** ($n \geq 1$), wenn $a_{-n} \neq 0$ aber $a_k = 0$ für alle Indizes $k < -n$ gilt.

   Beispiel: $f(z) = z^{-n}\,\mathrm{e}^z = \sum_{k=-n}^{\infty} z^k/(k+n)!$ in $z_0 = 0$

3. Wir nennen z_0 eine **wesentliche Singularität**, wenn $a_k \neq 0$ für unendlich viele Indizes $k < 0$ gilt.

   Beispiel: $f(z) = \mathrm{e}^{1/z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}/k!$ in $z_0 = 0$

Laurent–Reihen: Konvergenzbereich



Der Nebenteil konvergiert für $|z - z_0| < \rho$ mit

$$\rho := 1 \,/\, \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \quad \in [0, \infty].$$

Der Hauptteil konvergiert für $|z - z_0| > \sigma$ mit

$$\sigma := \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_{-k}|} \quad \in [0, \infty].$$

Die Laurent–Reihe konvergiert somit auf dem offenen Kreisring

$$K(z_0, \sigma, \rho) := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \sigma < |z - z_0| < \rho \right\},$$

wo sowohl der Hauptteil konvergiert als auch der Nebenteil.

⚠ Für $\sigma > \rho$ ist $K(z_0, \sigma, \rho)$ leer und die Reihe konvergiert nirgends! Das ist unglücklich, aber möglich. Im Folgenden benötigen wir $\sigma < \rho$.

☺ Auf ihrem Konvergenzgebiet können wir mit Laurent–Reihen wie üblich rechnen: Addition, Multiplikation, Komposition, Ableitung, ...

Laurent–Reihen: Ableitung

Satz F2P: Ableitung von Laurent–Reihen

Sei $\Omega = K(z_0, \sigma, \rho)$ mit $0 \le \sigma < \rho \le \infty$. Jede Laurent–Reihe

$$f : \Omega \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{für alle } z \in \Omega,$$

ist auf Ω holomorph. Ihre Ableitung ist gegeben durch

$$f' : \Omega \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad f'(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\, a_k (z - z_0)^{k-1} \quad \text{für alle } z \in \Omega.$$

Auch diese ist auf Ω holomorph, somit ist f beliebig oft differenzierbar. Eine Stammfunktion zu f existiert genau dann, wenn $a_{-1} = 0$, nämlich

$$F : \Omega \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad F(z) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq -1}}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (z - z_0)^{k+1} \quad \text{für alle } z \in \Omega.$$

Laurent–Reihen: Beispiele

Aufgabe: Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C} : f(z) = 1/(1-z)$ auf $B(0,1)$ in eine Potenzreihe, auf $K(0,1,\infty)$ in eine Laurent–Reihe.

Lösung: (1) Die **geometrische Reihe** ist die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \quad \text{für } |z| < 1$$

mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ und Koeffizienten $a_k = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Die Polstelle von $1/(1-z)$ in $z = 1$ begrenzt den Konvergenzkreis.
Die Reihe konvergiert daher nur für $|z| < 1$ und divergiert für $|z| \geq 1$.

(2) Die Funktion $f(z) = 1/(1-z)$ hingegen existiert auch für $|z| > 1$.
Wir können sie auf $K(0,1,\infty)$ in eine **Laurent–Reihe** entwickeln.
Statt in Potenzen von z entwickeln wir in Potenzen von $1/z$:

$$\frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z} = \frac{-1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} -z^{k-1} \quad \text{für } |z| > 1$$

Diese Laurent–Reihe konvergiert für $|z| > 1$ und divergiert für $|z| \leq 1$.

Laurent–Reihen: Beispiele

Aufgabe: Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C} : f(z) = 1/(z-a)$ auf $B(0,|a|)$ in eine Potenzreihe, auf $K(0,|a|,\infty)$ in eine Laurent–Reihe.

Lösung: (1) Auf $B(0,|a|)$ erhalten wir die Potenzreihe

$$\frac{1}{z-a} = \frac{-1}{a} \cdot \frac{1}{1-z/a} = \frac{-1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{a^k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-a^{-k-1}) z^k \quad \text{für } |z| < |a|.$$

(2) Auf $K(0,|a|,\infty)$ erhalten wir die Laurent–Reihe

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-a/z} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k-1} \quad \text{für } |z| > |a|.$$

Zusammenfassend gilt also

$$\boxed{\frac{1}{z-a} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-a^{-k-1}) z^k & \text{für } |z| < |a|, \\ \displaystyle\sum_{k=-1}^{-\infty} a^{-k-1} z^k & \text{für } |z| > |a|. \end{cases}}$$

Laurent–Reihen: Beispiele

Aufgabe: Entwickeln Sie die rationale Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 5z + 6}$$

als Laurent–Reihe auf $B(0,2)$, auf $K(0,2,3)$ sowie auf $K(0,3,\infty)$.

Lösung: Am leichtesten gelingt dies mit der Partialbruchzerlegung:

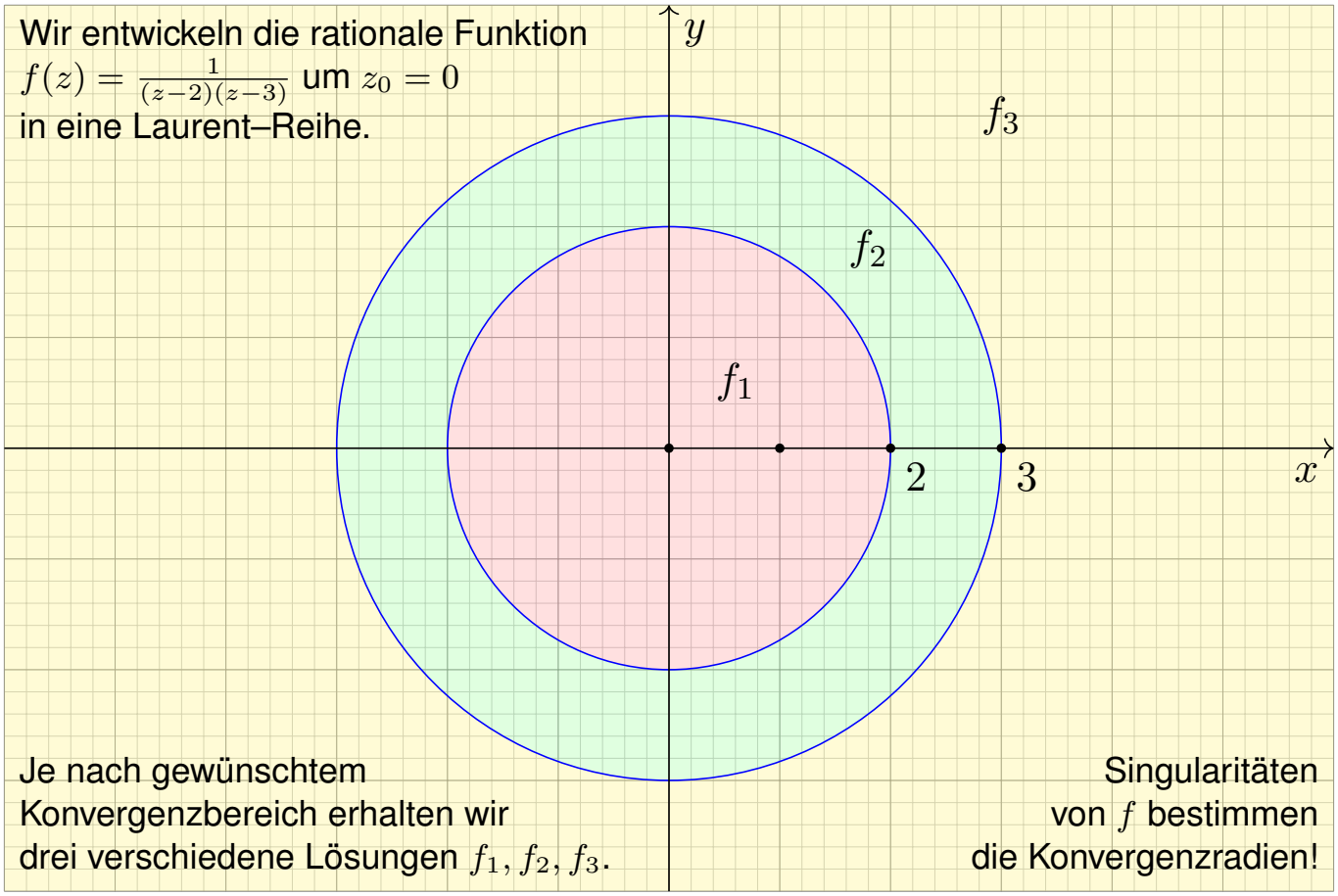
$$f(z) = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2}$$

Dank der vorigen Aufgabe erhalten wir drei gesuchten Entwicklungen:

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (2^{-k-1} - 3^{-k-1}) z^k & \text{für } |z| < 2, \\ f_2(z) = \displaystyle\sum_{k=-1}^{-\infty} (-2^{-k-1}) z^k + \sum_{k=0}^{\infty} (-3^{-k-1}) z^k & \text{für } 2 < |z| < 3, \\ f_3(z) = \displaystyle\sum_{k=-1}^{-\infty} (3^{-k-1} - 2^{-k-1}) z^k & \text{für } 3 < |z|. \end{cases}$$

Laurent–Reihen: Beispiele

Wir entwickeln die rationale Funktion $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$ um $z_0 = 0$ in eine Laurent–Reihe.



Je nach gewünschtem Konvergenzbereich erhalten wir drei verschiedene Lösungen f_1, f_2, f_3.

Singularitäten von f bestimmen die Konvergenzradien!

Satz F2Q: Koeffizienten einer Laurent–Reihe

Sei $f : K(z_0, \sigma, \rho) \to \mathbb{C}$ gegeben durch die Laurent–Reihe

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Für jeden Radius r mit $\sigma < r < \rho$ und jeden Index $\ell \in \mathbb{Z}$ gilt dann

$$a_\ell = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{\ell+1}} \, \mathrm{d}z.$$

☺ Für Potenzreihen (F2J) genügt ableiten, denn $a_k = f^{(k)}(z_0)/k!$.
Bei Laurent–Reihen extrahiert das Integral für uns die Koeffizienten.

☺ Natürlich bestimmen die Koeffizienten $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ die Funktion f.
Dank F2Q bestimmt die Funktion f alle Koeffizienten $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$.

☺ Umgekehrt können wir dies nutzen, um jede holomorphe Funktion $f : K(z_0, \sigma, \rho) \to \mathbb{C}$ in eine Laurent–Reihe zu entwickeln (Satz F3E).

Nachrechnen: Wir setzen ein und rechnen es aus (dank Satz F1B):

$$\begin{aligned}\int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{\ell+1}} \, \mathrm{d}z &= \int_{\partial B(z_0,r)} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-\ell-1} \right] \mathrm{d}z \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left[\int_{\partial B(z_0,r)} (z - z_0)^{k-\ell-1} \, \mathrm{d}z \right] = 2\pi \mathrm{i} \, a_\ell\end{aligned}$$

Wir erahnen hier bereits die Magie der komplexen Funktionen.
Alles wird klar und einfach dank unserer gründlichen Vorbereitung:

☺ Reihe und Integral vertauschen dank absoluter Konvergenz (D1A).
Die Integrale $\int_{\partial B(z_0,r)} (z - z_0)^k$ haben wir oben ausgerechnet (F1B).

☺ Beim Wegintegral von f um z_0 bleibt nur der Term $2\pi \mathrm{i} \, a_{-1}$ zurück.
Deshalb heißt a_{-1} das **Residuum** (das 'Zurückbleibende') von f in z_0.

☺ Division durch $(z - z_0)^\ell$ verschiebt alle Exponenten der Reihe,
so dass der gewünschte Koeffizient a_ℓ nun zum Residuum wird.

Laurent–Koeffizienten und Residuen

Aufgabe: Sei $a \in \mathbb{C}$ und $n, k \in \mathbb{N}$ sowie $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Berechnen Sie

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial B(0,r)} \frac{(z+a)^n}{z^{k+1}} \, \mathrm{d}z.$$

Lösung: Für $(z+a)^n$ nutzen wir den binomischen Lehrsatz. Es gilt

$$(z+a)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} z^j a^{n-j}, \quad \text{also} \quad \frac{(z+a)^n}{z^{k+1}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} z^{j-k-1} a^{n-j}.$$

Das Integral gelingt leicht dank Linearität und obiger Formeln:

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial B(0,r)} \frac{(z+a)^n}{z^{k+1}} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial B(0,r)} \left[\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} z^{j-k-1} a^{n-j} \right] \mathrm{d}z$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} \cdot \left[\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial B(0,r)} z^{j-k-1} \, \mathrm{d}z \right] = \binom{n}{k} a^{n-k}$$

☺ Wir integrieren hier ein Laurent–Polynom, die Konvergenz spielt daher zunächst noch keine Rolle. Es genügt die Linearität des Integrals.

Laurent–Koeffizienten und Residuen

Aufgabe: Sei $a \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}$ sowie $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Berechnen Sie

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial B(0,r)} \frac{\mathrm{e}^{az}}{z^{k+1}} \, \mathrm{d}z.$$

Lösung: Dank Exponentialreihe gilt

$$\mathrm{e}^{az} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^j}{j!} z^j.$$

Das Integral gelingt leicht dank obiger Formeln:

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial B(0,r)} \frac{\mathrm{e}^{az}}{z^{k+1}} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial B(0,r)} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^j}{j!} z^{j-k-1} \right] \mathrm{d}z$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^j}{j!} \cdot \left[\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial B(0,r)} z^{j-k-1} \, \mathrm{d}z \right] = \frac{a^k}{k!}$$

☺ Wir integrieren hier eine Laurent–Reihe. Sie konvergiert absolut in jedem Punkt $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Daher vertauschen Reihe und Integral. D106

Der Integralsatz von Cauchy

Satz F3A: Integralsatz von Cauchy

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und darauf $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Für jedes Kompaktum $D \subseteq \Omega$ mit stückweise glattem Rand gilt:

$$\boxed{\int_{\partial D} f(z)\,\mathrm{d}z = 0}$$

Nachrechnen: Für $f = u + \mathrm{i}v$ und $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + \mathrm{i}\,\mathrm{d}y$ rechnen wir nach:

$$\int_{\partial D} f(z)\,\mathrm{d}z \overset{\text{Def}}{\underset{\text{F1A}}{=}} \int_{\partial D} (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) \;+\; \mathrm{i}(u\,\mathrm{d}y + v\,\mathrm{d}x)$$

$$\overset{\text{Green}}{\underset{\text{Gauß}}{=}} \int_D \operatorname{rot}(u,-v)\,\mathrm{d}(x,y) \;+\; \mathrm{i}\int_D \operatorname{div}(u,-v)\,\mathrm{d}(x,y) \overset{\text{CR}}{\underset{\text{F2E}}{=}} 0$$

Das ist die Grundlage des Residuensatzes F4D: gar keine Singularitäten! Für Anwendungen der Strömungsmechanik, wie die Kutta–Formel Q1C, schwächen wir die Voraussetzungen etwas ab: Es genügt $f : D \to \mathbb{C}$ stetig und auf $\mathring{D}$ holomorph. *Beweisidee:* Wir parametrisieren ∂D durch δ. Zu $\varepsilon > 0$ finden wir ein Kompaktum $C \Subset D$ mit stückweise glattem Rand, parametrisiert durch γ mit $|\int_\gamma f - \int_\delta f| \le \varepsilon$. Dank F3A gilt $\int_\gamma f = 0$. Aus $|\int_\delta f| \le \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ folgt $\int_\delta f = 0$.

Die Integralformel von Cauchy

Satz F3B: Integralformel von Cauchy

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $D \subseteq \Omega$ kompakt mit stückweise glattem Rand. Für jeden Punkt $z_0 \in \Omega \smallsetminus \partial D$ gilt dann

$$\boxed{\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z \;=\; \begin{cases} f(z_0) & \text{für } z_0 \in \mathring{D}, \\ 0 & \text{für } z_0 \notin D. \end{cases}}$$

☺ Das ist ein bemerkenswerter Integralsatz. Die Funktionswerte $f(z)$ auf dem Rand ∂D bestimmen bereits alle Werte $f(z_0)$ im Inneren $\mathring{D}$! Einfache Anwendungsbeispiele: Für $f = 1$ erhalten wir erneut

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial D} \frac{1}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = \mathbf{I}_{\mathring{D}}(z_0) = \begin{cases} 1 & \text{für } z_0 \in \mathring{D}, \\ 0 & \text{für } z_0 \notin D. \end{cases}$$

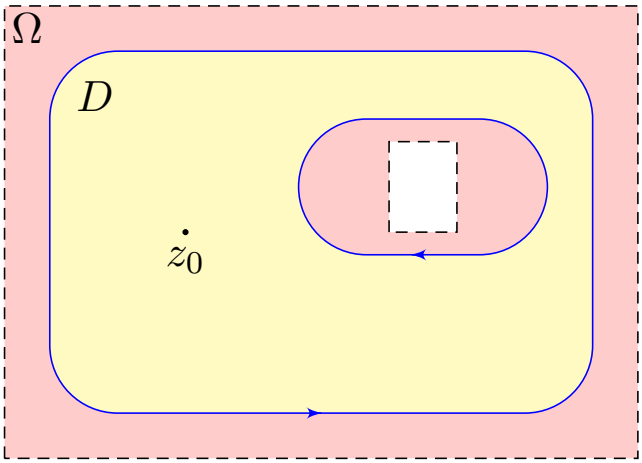
Das verallgemeinert die fundamentalen Integrale (Satz F1B) sowie die reellen Arbeits- und Flussintegrale E317. Weitere Anwendungsbeispiele:

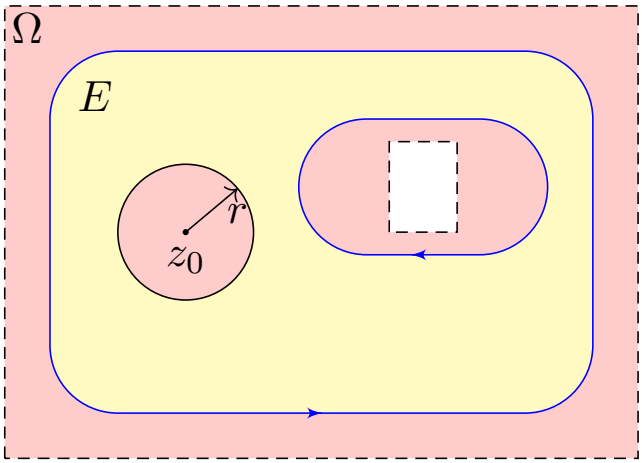
$$\int_{\partial B(0,1)} \frac{\mathrm{e}^z}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{e}^0 = 2\pi\mathrm{i}, \qquad \int_{\partial B(0,1)} \frac{1}{z\cos z}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi\mathrm{i}}{\cos(0)} = 2\pi\mathrm{i}$$

Die Integralformel von Cauchy

Beweis: Wir folgern die Integralformel F3B aus dem Integralsatz F3A. Der Integrand $h(z) = f(z)/(z - z_0)$ ist holomorph auf $\Omega \smallsetminus \{z_0\}$ (F2D).

Erster Fall: Für $z_0 \notin D$ ist h holomorph auf D, also $\int_{\partial D} h(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Das ist Cauchys Integralsatz F3A, reell also Green und Gauß!





Zweiter Fall: Für $z_0 \in \mathring{D}$ wählen wir $r > 0$ so klein, dass $\overline{B}(z_0, r) \subseteq \mathring{D}$. Die Restmenge $E = D \smallsetminus B(z_0, r)$ ist kompakt mit stückweise glattem Rand $\partial E = \partial D \cup \partial B(z_0, r)$. *Orientierung:* Die Kreislinie $\partial B(z_0, r)$ wird hier im Uhrzeigersinn (!) durchlaufen, sodass E links davon liegt.

Die Integralformel von Cauchy

Da h auf E holomorph ist, gilt dank Cauchys Integralsatz F3A:

$$0 = \int_{\partial E} h(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial D} h(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\partial B(z_0,r)} h(z)\,\mathrm{d}z$$

Das gesuchte Integral können wir durch diesen Trick ausrechnen:

$$\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = \int_{t=0}^{2\pi} \frac{f(z_0 + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \cdot r\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \mathrm{i} \int_{t=0}^{2\pi} f(z_0 + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,\mathrm{d}t \quad \xrightarrow[r \to 0]{} \quad 2\pi\mathrm{i}\,f(z_0).$$

Da die linke Seite gar nicht von r abhängt, schließen wir daraus

$$\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,f(z_0).$$

☺ Dank unserer Werkzeuge ist die Rechnung kurz und schmerzlos. Wir brauchen: komplexe Wegintegrale (F1A), holomorphe Funktionen (F2C) und hierzu äquivalent Cauchy–Riemann (F2E), sowie Integralsätze in der Ebene: Green & Gauß (E1I) und hierzu äquivalent Cauchy (F3A).

Satz F3C: Fundamentalsatz der Algebra

Zu jedem Polynom $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ vom Grad n, mit beliebigen komplexen Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, existieren genau n komplexe Nullstellen $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, sodass gilt:

$$\boxed{f(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)}$$

Das ist ein schöner und nützlicher Satz! Noch schöner und noch nützlicher wäre es, zudem noch die Lage der Nullstellen zu erfahren. Nur für sehr kleine Grade gelingt dies leicht und explizit: Für $n = 1$ führt die Nullstellensuche zur linearen Gleichung $a_0 + a_1 z = 0$, also $z = -a_0/a_1$.

Für $n = 2$ haben wir eine quadratische Gleichung $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 = 0$, die wir mit der allseits beliebten Mitternachtsformel lösen können: $z_{1,2} = (-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2})/(2a_2)$. Das ist eine nicht-triviale Konstruktion, vor allem durch das Wurzelziehen in $\mathbb{C}$. Wie geht das nochmal? F229

Für Grad $n = 3$ und $n = 4$ gibt es ähnliche Formeln (von Cardano und Ferrari) mit dritten bzw. vierten Wurzeln. Diese Formeln sind leider etwas komplizierter und werden daher selten genutzt.

Für Grad $n \geq 5$ existieren keine solchen Wurzelformeln mehr! Wir müssen uns im Allgemeinen damit begnügen, die Lage der Nullstellen näherungsweise zu bestimmen. Dies hinreichend genau und möglichst effizient zu erreichen, ist das Grundproblem bei der numerischen Nullstellensuche.

Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra dank Umlaufzahl:
Angenommen, f hat keine Nullstelle in $\mathbb{C}$, also $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dann ist der Quotient $h(z) = f'(z)/f(z)$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph.

(0) Cauchys Integralsatz F3A garantiert $\int_{\partial B(0,r)} h(z)\,\mathrm{d}z = 0$ für alle $r > 0$.

(1) Für $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ und $r \to \infty$ gilt folgender Grenzwert gleichmäßig in t:

$$h(z)z = \frac{f'(z)z}{f(z)} = \frac{n a_n z^n + (n-1) a_{n-1} z^n + \cdots + a_1 z}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \quad \underset{|z|\to\infty}{\longrightarrow} \quad n.$$

Für den Integrationsweg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ folgt dank D3C:

$$0 = \int_\gamma h(z)\,\mathrm{d}z = \int_{t=0}^{2\pi} h(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\, r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{i}\,\mathrm{d}t \quad \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \quad \int_{t=0}^{2\pi} \mathrm{i}n\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i}n$$

(2) Beides ist nur für $n = 0$ möglich. Das bedeutet: Jedes komplexe Polynom f von Grad $n \geq 1$ hat mindestens eine Nullstelle $z_n \in \mathbb{C}$.

Polynomdivision ergibt $f(z) = g(z)(z - z_n)$ mit $g \in \mathbb{C}[z]$ von Grad $n - 1$. Die vollständige Zerlegung erhalten wir durch wiederholtes Abspalten.

Nullstellensuche für Polynome

Der Fundamentalsatz der Algebra verkündet „das Vorhandensein eines Schatzes, ohne jedoch zu verraten, an welchem Ort. [...] Nicht das Existenztheorem ist das Wertvolle, sondern die im Beweise geführte Konstruktion.“ (Hermann Weyl) Die Suche der Nullstellen ist eine ungleich schwierigere Frage und für Anwendungen ungemein wichtig. Hierzu dient folgende Präzisierung:

Satz F3D: Lokalisieren der Nullstellen

Sei $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ ein Polynom mit $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ kompakt mit stückweise glattem Rand, z.B. ein Rechteck, wobei keine Nullstellen von f auf dem Rand ∂D liegen. Dann gilt:

$$\boxed{\underset{\text{mult}}{\#}\left\{ z \in \mathring{D} \;\middle|\; f(z) = 0 \right\} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} \,\mathrm{d}z}$$

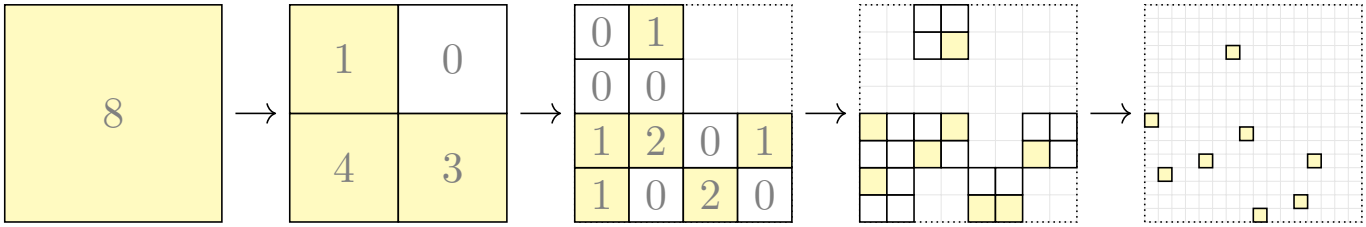
Nachrechnen: Dank F3C gilt $f(z) = a_n(z - z_1) \cdots (z - z_n)$, also

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z - z_1} + \cdots + \frac{1}{z - z_n} \quad \text{dank Produktregel.}$$

☺ Das Wegintegral zählt die Nullstellen! ▶ `youtu.be/b7FxPsqfk0Y`

Nullstellensuche für Polynome

Hieraus erhalten wir **Weyls Algorithmus zur Nullstellensuche**:



Die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sind uns gegeben, gesucht sind die Nullstellen $z_1, \ldots, z_n$. Insbesondere sieht man dem Polynom f die Anzahl seiner Nullstellen in D nicht direkt an. Das Kurvenintegral von f'/f über ∂D hingegen können wir aus den Koeffizienten berechnen, z.B. algebraisch durch euklidische Polynomdivision (Algorithmus von Sturm) oder numerisch durch geschickte Approximation des Integrals. Genau hierin liegt der algorithmische Nutzen!

Zum Beginn der Rechnung wählen wir ein Quadrat $D = [-r, r]^2$, das alle n Nullstellen enthält, etwa $r = \sum_{k=0}^{n} |a_k| / |a_n|$. Dieses Quadrat unterteilen wir in vier gleich große Teilquadrate. In jedem können wir dank obiger Formel F3D exakt die Anzahl der Wurzeln von f bestimmen. Wir behalten nur die nicht-leeren Quadrate und unterteilen diese weiter, bis alle Nullstellen hinreichend genau lokalisiert sind. Dies ist völlig analog zur reellen Intervallhalbierung.

Algorithmen dieser Art gehören zu den schnellsten Nullstellenfindern. Hat man auf diese Weise alle Nullstellen von f lokalisiert und ausreichend genau voneinander getrennt, so kann man zum Newton–Verfahren übergehen. Dieses lokale Iterationsverfahren muss in unmittelbarer Nähe einer Nullstelle gestartet werden, konvergiert dann aber sehr schnell gegen diese Nullstelle.

Satz F3E: Entwicklung als Potenzreihe

Sei $f : B(z_0, \rho) \to \mathbb{C}$ holomorph, also stetig komplex differenzierbar.
Für einen beliebigen Radius r mit $0 < r < \rho$ und $k \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$a_k := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \, \mathrm{d}z.$$

Dank Cauchys Integralsatz F3A ist das Ergebnis unabhängig von r.
Diese Koeffizienten stellen f als Potenzreihe dar, das heißt, es gilt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{für alle } z \in B(z_0, \rho).$$

Insbesondere ist f beliebig oft komplex differenzierbar, und es gilt:

$$f^{(k)}(z_0) = k!\, a_k = \frac{k!}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \, \mathrm{d}z$$

Beweis: Nach Verschieben können wir $z_0 = 0$ annehmen. F221
Zum Punkt $z \in B(0, \rho)$ wählen wir einen Radius r mit $|z| < r < \rho$.
Wir nutzen die geometrische Reihe F238: Für $|z| < r = |\zeta|$ gilt

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{1}{1 - (z/\zeta)} = \frac{1}{\zeta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\zeta^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\zeta^{k+1}}.$$

Auf $\overline{B}(0, r)$ wenden wir Cauchys Integralformel F3B an:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial B(0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial B(0,r)} f(\zeta) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\zeta^{k+1}} \right) \mathrm{d}\zeta \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial B(0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} \, \mathrm{d}\zeta \right) z^k \quad = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k. \end{aligned}$$

Summe und Integral vertauschen dank absoluter Konvergenz. D106

Satz F3F: Entwicklung als Laurent–Reihe

Sei $f : K(z_0, \sigma, \rho) \to \mathbb{C}$ holomorph, also stetig komplex differenzierbar. Für einen beliebigen Radius r mit $\sigma < r < \rho$ und $k \in \mathbb{Z}$ definieren wir

$$a_k := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \, \mathrm{d}z.$$

Dank Cauchys Integralsatz F3A ist das Ergebnis unabhängig von r. Diese Koeffizienten stellen f als Laurent–Reihe dar, das heißt, es gilt

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{für alle } z \in K(z_0, \sigma, \rho).$$

Insbesondere ist f auf $K(z_0, \sigma, \rho)$ beliebig oft komplex differenzierbar.

☺ Die Konvergenz der Reihe wird garantiert für alle $z \in K(z_0, \sigma, \rho)$.

☺ Gilt $a_k = 0$ für alle $k < 0$, so haben wir wie zuvor eine Potenzreihe. Die Funktion f lässt sich dann auf ganz $B(z_0, \rho)$ holomorph fortsetzen.

Beweis: Nach Verschieben können wir $z_0 = 0$ annehmen. F221

Zu $z \in K(0, \sigma, \rho)$ wählen wir Radien s, r mit $\sigma < s < |z| < r < \rho$.

Auf $\overline{K}(0, s, r)$ wenden wir Cauchys Integralformel F3B an:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial B(0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial B(0,s)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta$$

Das Integral über $\partial B(0, r)$ liefert wie oben die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.

Für $\partial B(0, s)$ nutzen wir die geometrische Reihe, diesmal für $|\zeta| < |z|$:

$$\frac{-1}{\zeta - z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - (\zeta/z)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta^k}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta^k}{z^{k+1}} = \sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{z^k}{\zeta^{k+1}}.$$

Das Integral über $\partial B(0, s)$ liefert dann den Hauptteil:

$$\frac{-1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial B(0,s)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial B(0,s)} f(\zeta) \left(\sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{z^k}{\zeta^{k+1}} \right) \mathrm{d}\zeta$$

$$= \sum_{k=-1}^{-\infty} \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial B(0,s)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} \, \mathrm{d}\zeta \right) z^k \quad = \sum_{k=-1}^{-\infty} a_k z^k.$$

Das Residuum einer isolierten Singularität

Definition F4A: Residuum

Sei f holomorph auf $B(z_0,\rho)\setminus\{z_0\} = K(z_0,0,\rho)$ mit $\rho>0$.
Hierauf ist f eine Laurent–Reihe $f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$.
Das **Residuum** von f im Punkt z_0 ist somit gegeben durch

$$\operatorname*{res}_{z_0}(f) \;=\; a_{-1} \;=\; \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial B(z_0,r)} f(z)\,\mathrm{d}z \quad \text{für } 0<r<\rho.$$

Beispiel: Berechnen Sie das Residuum im Punkt $z_0=0$ von...

$f(z)=az^{-1}$, $\qquad \operatorname{res}_0(f)=a$

$f(z)=az^k$ mit $k\neq -1$, $\qquad \operatorname{res}_0(f)=0$

$f(z)=\exp(a/z)=1+az^{-1}+\frac{a^2}{2!}z^{-2}+\frac{a^3}{3!}z^{-3}+\ldots,$ $\qquad \operatorname{res}_0(f)=a$

$f(z)=z^2\exp(a/z)=z^2+az+\frac{a^2}{2!}z^0+\frac{a^3}{3!}z^{-1}+\ldots,$ $\qquad \operatorname{res}_0(f)=a^3/6$

$f(z)=\exp(z)/z^3=z^{-3}+z^{-2}+\frac{1}{2!}z^{-1}+\frac{1}{3!}z^0+\ldots,$ $\qquad \operatorname{res}_0(f)=1/2$

$f(z)=\cos(z)/z^2=z^{-2}-\frac{1}{2!}z^0+\frac{1}{4!}z^2-\frac{1}{6!}z^4+\ldots,$ $\qquad \operatorname{res}_0(f)=0$

Das Residuum einer einfachen Polstelle

Satz F4B: Residuum einer einfachen Polstelle

(1) Sei f holomorph auf $B(z_0,\rho)\setminus\{z_0\} = K(z_0,0,\rho)$ mit $\rho>0$.
Zudem existiere der Grenzwert $\lim_{z\to z_0}\big[(z-z_0)f(z)\big]$ in $\mathbb{C}$.
Dann hat f in z_0 höchstens einen **einfachen Pol**, und es gilt

$$\operatorname*{res}_{z_0}(f) = \lim_{z\to z_0}\big[(z-z_0)f(z)\big].$$

(2) Sei speziell $f=p/q$ Quotient zweier holomorpher Funktionen mit einfachem Pol in z_0, d.h. $p(z_0)\neq 0$, $q(z_0)=0$, $q'(z_0)\neq 0$. Dann gilt:

$$\operatorname*{res}_{z_0}(f) \overset{(1)}{=} \lim_{z\to z_0}\big[(z-z_0)f(z)\big] \overset{(2)}{=} \lim_{z\to z_0}\frac{p(z)}{\frac{q(z)-q(z_0)}{z-z_0}} \overset{(2)}{=} \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

Beispiel: Sei $f(z)=\exp(az)/z = z^{-1}+az^0+\frac{a^2}{2!}z+\frac{a^3}{3!}z^2+\ldots$.
Für $p(z)=\exp(az)$ und $q(z)=z$ folgt $\operatorname{res}_0(f)=p(0)/q'(0)=1$.

☺ Dies vereinfacht die Berechnung von Residuen einfacher Pole.
Die letzte Formel entspricht der beliebten Regel von L'Hospital.

Das Residuum einer mehrfachen Polstelle

Satz F4C: Residuum einer mehrfachen Polstelle

Sei f holomorph auf $B(z_0, \rho) \setminus \{z_0\} = K(z_0, 0, \rho)$ mit $\rho > 0$.
Zudem existiere der Grenzwert $\lim_{z \to z_0} \big[(z - z_0)^n f(z)\big]$ in $\mathbb{C}$.
Dann hat f in z_0 höchstens einen **Pol n-ter Ordnung**, und es gilt

$$\operatorname*{res}_{z_0}(f) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(n-1)!} \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\Big)^{n-1} \Big[(z - z_0)^n f(z)\Big].$$

Für einfache Polstellen ($n = 1$) erhalten wir obige Formel:

$$\operatorname*{res}_{z_0}(f) = \lim_{z \to z_0} \big[(z - z_0) f(z)\big]$$

Für zweifache Polstellen ($n = 2$) wird einmal abgeleitet:

$$\operatorname*{res}_{z_0}(f) = \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \Big[(z - z_0)^2 f(z)\Big]$$

Beispiel: Für $f(z) = \exp(z)/z^n$ und $z_0 = 0$ gilt $\operatorname{res}_0(f) = 1/(n-1)!$.
Alternativ als Reihe: $f(z) = z^{-n} + \cdots + z^{-1}/(n-1)! + z^0/n! + \ldots$.

Das Residuum einer mehrfachen Polstelle

Das Residuum von f in z_0 ist definiert als Laurent–Koeffizient a_{-1} bzw. als Wegintegral um z_0.
In einer *wesentlichen Singularität* wie $f(z) = \exp(1/z)$ in $z_0 = 0$ ist dies der einzige Zugang.
In einer *Polstelle* können wir das Residuum auf verschiedene, meist leichtere Weisen berechnen.

Nachrechnen: Wir entwickeln f um z_0 in eine Laurent–Reihe (F3F):

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

Wenn $\lim_{z \to z_0} \big[(z - z_0)^n f(z)\big]$ existiert, dann gilt $a_k = 0$ für $k < -n$.
Multiplikation mit $(z - z_0)^n$ liefert zunächst die Potenzreihe

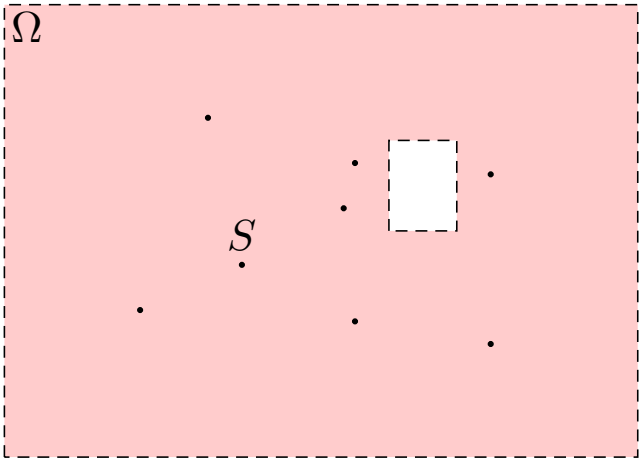
$$(z - z_0)^n f(z) = a_{-n}(z - z_0)^0 + \cdots + a_{-1}(z - z_0)^{n-1} + a_0 (z - z_0)^n + \ldots.$$

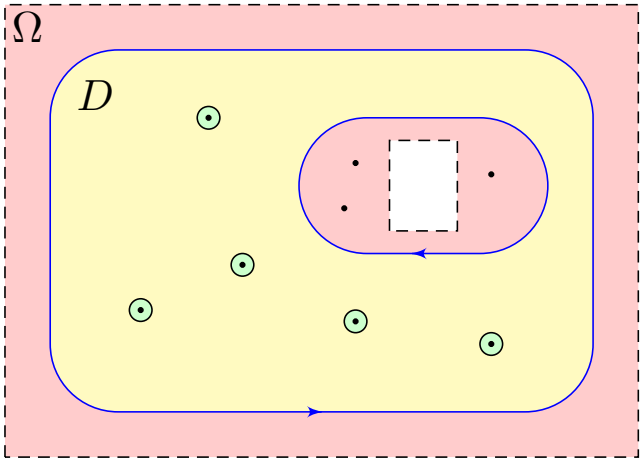
Nach $(n-1)$-maligem Ableiten bleibt nur noch die Potenzreihe

$$\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\Big)^{n-1} \Big[(z - z_0)^n f(z)\Big] = (n-1)!\, a_{-1}(z - z_0)^0 + n!\, a_0 (z - z_0)^1 + \ldots.$$

Für $z \to z_0$ erhalten wir schließlich $(n-1)!\, a_{-1}$, wie gewünscht.
☺ In Worten: Multiplikation mit $(z - z_0)^n$ löscht zunächst den Pol, anschließend verschiebt die $(n-1)$-fache Ableitung a_{-1} in Grad 0.

Der Residuensatz für Kompakta





Satz F4D: Residuensatz für Kompakta, Cauchy 1825

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \setminus S \to \mathbb{C}$ holomorph auf Ω bis auf eine Menge S isolierter Singularitäten. Sei $D \subseteq \Omega$ kompakt mit stückweise glattem Rand, wobei $\partial D \cap S = \emptyset$. Dann gilt:

$$\int_{\partial D} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 2\pi\mathrm{i} \sum\nolimits_{s \in \mathring{D}} \operatorname*{res}_s(f)$$

☺ Links muss man integrieren, rechts nur Residuen summieren!

Der Residuensatz für Kompakta

☺ Damit erreichen wir den Höhepunkt unserer Integrationstheorie komplexer Funktionen! Wir wissen nun, was holomorphe Funktionen sind und wie man sie dank Cauchy–Riemann–Gleichungen erkennt.

Wir wissen zudem, wie man mit isolierten Singularitäten umgeht und ihr Residuum ausrechnet. Die nötigen Wegintegrale und Integralsätze in der Ebene haben wir im letzten Kapitel E kennen und nutzen gelernt.

Damit halten wir alle Zutaten für den Residuensatz in Händen!

Jede holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$ erfüllt die CR–Gleichungen. Für $f = u + \mathrm{i}v$ ist dies gleichbedeutend zu $\operatorname{rot}(u, -v) = \operatorname{div}(u, -v) = 0$. Dank Integralsatz gilt $\int_{\partial D} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ für jedes Kompaktum $D \subseteq \Omega$.

Was passiert nun, wenn f isolierte Singularitäten $s \in \mathring{D}$ hat? Jede Singularität s liefert ihren Beitrag $2\pi\mathrm{i}\,\operatorname{res}_s(f)$ zum Integral! Der Raum dazwischen ist „Vakuum“ und liefert keinen Beitrag.

Anschaulich können wir uns $f : \mathbb{C} \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$ als zweidimensionales elektromagnetisches Feld vorstellen. Eine Polstelle im Punkt $s \in \Omega$ entspricht einem Teilchen mit einer gewissen Ladung $a_{-1} = \operatorname{res}_s(f)$.

Der Residuensatz für Kompakta

Nachrechnen: Seien $s_1, \ldots, s_n$ die Singularitäten im Inneren von D. Es gibt nur endlich viele, da jede isoliert liegt und D kompakt ist.

Wir wählen $r > 0$ so klein, dass die abgeschlossenen Kreisscheiben $\overline{B}(s_1, r), \ldots, \overline{B}(s_n, r)$ ganz im Inneren von D liegen und disjunkt sind.

$$\int_{\partial B(s_k,r)} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\ \mathrm{res}_{s_k}(f).$$

Die Restmenge $E = D \smallsetminus \big[B(s_1, r) \cup \cdots \cup B(s_n, r)\big]$ ist kompakt mit stückweise glattem Rand $\partial E = \partial D \cup \partial B(s_1, r) \cup \cdots \cup \partial B(s_n, r)$. Positive Orientierung bezüglich E bedeutet: Die Kreislinien $\partial B(s_k, r)$ werden im Uhrzeigersinn durchlaufen, damit E links davon liegt.

Da f auf E holomorph ist, gilt nach dem Integralsatz von Cauchy

$$0 = \int_{\partial E} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial D} f(z)\,\mathrm{d}z - \sum_{k=1}^{n} \int_{\partial B(s_k,r)} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Die Vorzeichen entsprechen der positiven Orientierung des Randes.

Der Residuensatz für Kompakta

Cauchys Residuensatz ist der Höhepunkt unserer Integrationstheorie komplexer Funktionen. Er beruht auf Cauchys Integralsatz F3A und Cauchys Integralformel F3B und enthält diese als Spezialfälle:

Korollar F4E: Spezialfälle des Residuensatzes

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion.

(1) Für jedes Kompaktum $D \subseteq \Omega$ mit stückweise glattem Rand gilt

$$\boxed{\int_{\partial D} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.}$$

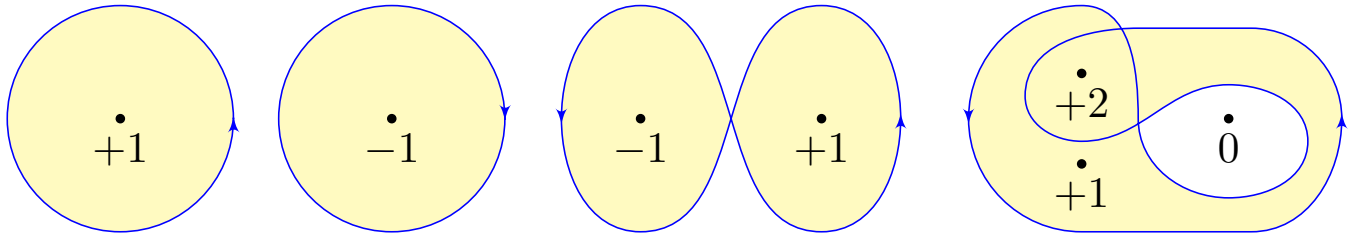
(2) Für jeden Punkt $z_0 \in \Omega \smallsetminus \partial D$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\boxed{\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}z = \begin{cases} \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0) & \text{für } z_0 \in \mathring{D}, \\ 0 & \text{für } z_0 \notin D. \end{cases}}$$

Im ersten Integral hat der Integrand $f(z)$ keine Singularität, im zweiten hat $f(z)/(z - z_0)^{k+1}$ eine Polstelle in z_0 mit Residuum $f^{(k)}(z_0)/k!$.

Cauchy–Index: Umlaufzahl geschlossener Wege

Bislang kennen wir den Residuensatz für Kompakta (F4D). Er gilt auch für beliebige geschlossene Wege (F4G). Hierzu zählen wir die Umläufe:



Lemma F4F: Cauchy–Index = Umlaufzahl in der Ebene

Für jeden geschlossenen Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ ist der **Index**

$$\boxed{\operatorname{ind}_{z_0}(\gamma) := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{1}{z - z_0}\,\mathrm{d}z}$$

eine ganze Zahl; sie zählt die Umläufe von γ um den Punkt z_0.

☺ Dieses Integral hat eine einfache geometrische Interpretation.

☺ Die reelle Formulierung kennen wir bereits als Arbeitsintegral des Wirbelfeldes bzw. als Flussintegral des Quellenfeldes. E333

Cauchy–Index: Umlaufzahl geschlossener Wege

Aufgabe: Rechnen Sie die im Lemma gemachten Aussagen nach!

Lösung: Wir rechnen in Polarkoordinaten $\gamma(t) = z_0 + r(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t)}$.
Hierzu seien $r : [a,b] \to \mathbb{R}_{>0}$ und $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stückw. stetig diff'bar.
Da der Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ geschlossen sein soll, gilt $\gamma(a) = \gamma(b)$.
Insbesondere sind die Beträge $r(a) = |\gamma(a)|$ und $r(b) = |\gamma(b)|$ gleich.
Hingegen folgt aus $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(a)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(b)}$ nur $\varphi(b) = \varphi(a) + 2\pi\ell$ mit $\ell \in \mathbb{Z}$.
Diese Zahl ℓ ist die Anzahl der Umläufe von γ um den Punkt z_0.
Einsetzen von $z = \gamma(t)$ und $\mathrm{d}z = \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$ in die Indexformel liefert:

$$\begin{aligned}
\operatorname{ind}_{z_0}(\gamma) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{t=a}^{b} \frac{1}{\gamma(t) - z_0}\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{t=a}^{b} \frac{1}{r(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t)}} \left[r'(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t)} + r(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t)}\,\mathrm{i}\varphi'(t)\right] \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{t=a}^{b} \frac{r'(t)}{r(t)} + \mathrm{i}\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \Big[\ln r(t) + \mathrm{i}\varphi(t)\Big]_{t=a}^{b} \\
&= \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{2\pi} = \ell
\end{aligned}$$

☺ Das ist die Umlaufzahl!

Satz F4G: Residuensatz für geschlossene Wege

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \smallsetminus S \to \mathbb{C}$ holomorph auf Ω bis auf eine Menge S isolierter Singularitäten. Sei $\gamma : [a, b] \to \Omega \smallsetminus S$ ein geschlossener Weg, sodass $\operatorname{ind}_z(\gamma) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \Omega$. (Das gilt insbesondere, wenn γ in Ω zusammenziehbar ist.) Dann gilt:

$$\boxed{\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 2\pi\mathrm{i} \sum\nolimits_{s\in S} \operatorname*{res}_s(f)\operatorname*{ind}_s(\gamma)}$$

Anstelle eines (oft komplizierten) Kurvenintegrals links muss man rechts nur Residuen und Umlaufzahlen bestimmen, was meist leichter ist. Die Summe ist endlich, denn γ umläuft nur endlich viele Singularitäten; für alle anderen gilt $\operatorname{ind}_s(\gamma) = 0$, sie tragen nichts zur Summe bei.

Dieser Satz verallgemeinert den vorigen Residuensatz F4D für Kompakta: Der Rand ∂K eines Kompaktums K umläuft jeden inneren Punkt genau einmal, äußere Punkte umläuft er nicht. Daher tritt im Residuensatz für Kompakta die Vielfachheit durch den Index nicht explizit auf.

Die allgemeine Formulierung für beliebige geschlossene Wege ist manchmal flexibler. Die Skizze zum Lemma F4F und die folgende Aufgabe zeigen einige einfache Beispiele.

Aufgabe: Überprüfen Sie diesen Satz für die Funktion $f(z) = (z - z_0)^k$ und den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = z_0 + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell t}$ mit Umlaufzahl $\ell \in \mathbb{Z}$.

Lösung: Wir berechnen zunächst die rechte Seite. Wir wissen bereits

$$\operatorname*{ind}_0(\gamma) = \ell \quad \text{und} \quad \operatorname*{res}_0(f) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = -1, \\ 0 & \text{für } k \neq -1. \end{cases}$$

Für das Wegintegral von f entlang γ erhalten wir laut Satz

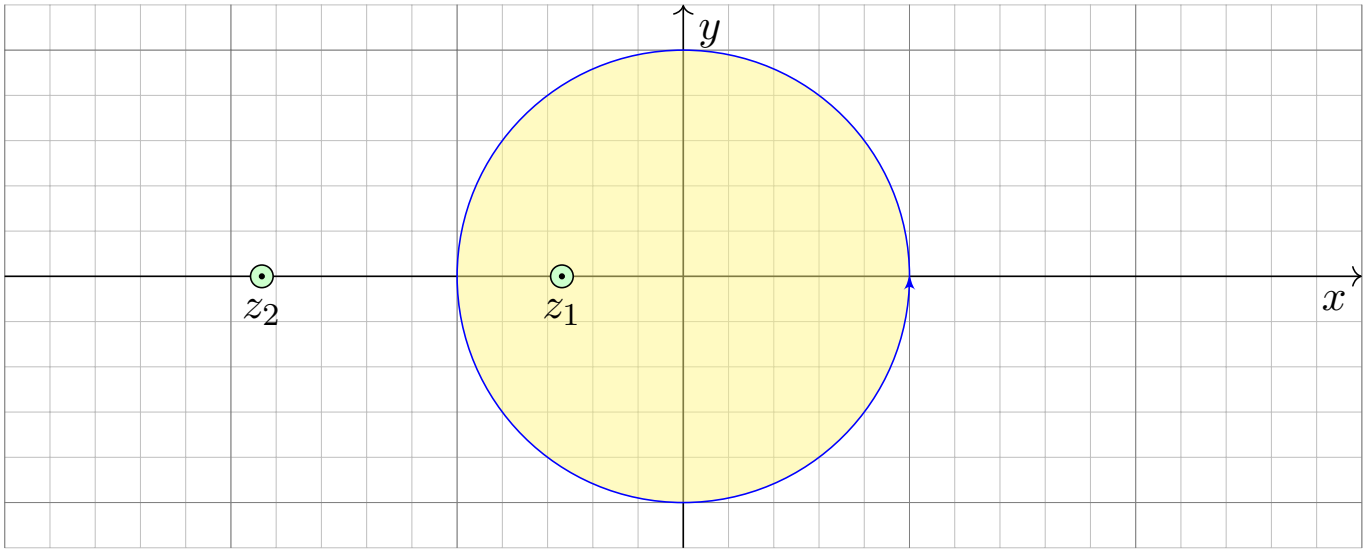
$$\int_\gamma z^k\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\operatorname*{res}_0(z^k)\operatorname*{ind}_0(\gamma) = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}\ell & \text{für } k = -1, \\ 0 & \text{für } k \neq -1. \end{cases}$$

Die Polstelle $z_0 = 0$ wird hier genau ℓ mal umlaufen.
Der Beitrag $2\pi\mathrm{i}\,\operatorname{res}_0(z^k)$ wird dementsprechend ℓ mal gezählt.
Zur Probe berechnen wir die linke Seite direkt nach Definition:

$$\int_\gamma (z - z_0)^k\,\mathrm{d}z = \int_{t=0}^{2\pi} \big(\gamma(t) - z_0\big)^k \gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{2\pi} r^k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\ell t} \cdot r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell t} \cdot \mathrm{i}\ell\,\mathrm{d}t$$

$$= \mathrm{i}\ell\, r^{k+1} \int_{t=0}^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+1)\ell t}\,\mathrm{d}t \quad = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}\ell & \text{für } k = -1, \\ 0 & \text{für } k \neq -1. \end{cases}$$

Anwendungsbeispiel: Kreisscheibe



Aufgabe: (1) Berechnen Sie für $a > 1$ das komplexe Wegintegral

$$\boxed{\int_{\partial B(0,1)} \frac{\mathrm{d}z}{z^2 + 2az + 1} = \frac{\pi \mathrm{i}}{\sqrt{a^2 - 1}}.}$$

Dabei ist $\partial B(z_0, r)$ die Kreislinie um z_0 mit Radius r. Wir parametrisieren sie mathematisch positiv durch $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} : t \mapsto \gamma(t) = z_0 + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.

Anwendungsbeispiel: Kreisscheibe

Lösung: Unser Integrand $f(z)$ hat zwei Polstellen z_1, z_2, beide **einfach**:

$$z_2 = -a - \sqrt{a^2 - 1} \quad < -1 < \quad z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1} \quad < 0$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 2az + 1} = \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)} \overset{\text{PBZ}}{=} \frac{r_1}{z - z_1} + \frac{r_2}{z - z_2}$$

$$r_1 = \operatorname*{res}_{z_1}(f) \underset{\text{F4B}}{\overset{\text{Res}}{=}} \lim_{z \to z_1} \Big[(z - z_1) f(z)\Big] = \frac{1}{z_1 - z_2} = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - 1}}$$

$$r_2 = \operatorname*{res}_{z_2}(f) \underset{\text{F4B}}{\overset{\text{Res}}{=}} \lim_{z \to z_2} \Big[(z - z_2) f(z)\Big] = \frac{1}{z_2 - z_1} = \frac{-1}{2\sqrt{a^2 - 1}}$$

Der Residuensatz beschert uns somit ein erstes schönes Integral:

$$\int_{\partial B(0,1)} \frac{\mathrm{d}z}{z^2 + 2az + 1} \underset{\text{F4D}}{\overset{\text{Res}}{=}} 2\pi\mathrm{i} \operatorname*{res}_{z_1}(f) = \frac{\pi \mathrm{i}}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

- Links muss man integrieren, rechts nur Residuen summieren!
- Zur Berechnung von Residuen haben wir effiziente Formeln. F402
- Der Residuenkalkül nützt uns auch bei der Partialbruchzerlegung!

Anwendungsbeispiel: Kreisscheibe

Aufgabe: (2) Berechnen Sie für $a > 1$ ebenso das reelle Integral

$$\boxed{\int_{t=0}^{\pi} \frac{1}{a+\cos t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.}$$

Lösung: Wir nutzen die Euler–Formel $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i}\sin t$, also

$$\cos t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2} = \frac{z+z^{-1}}{2}, \qquad \sin t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}} = \frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}}.$$

Einsetzen in den Integranden ergibt

$$\frac{1}{a+\cos t} = \left(a + \frac{z+z^{-1}}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{z^2+2az+1}{2z}\right)^{-1} = \frac{2z}{z^2+2az+1}$$

Wir integrieren längs der Kreislinie $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C} : t \mapsto \gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.
Für $z = \gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ gilt $\mathrm{d}z = \gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t$, also $\mathrm{d}t = \mathrm{d}z/(\mathrm{i}z)$, somit:

$$\int_{t=0}^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a+\cos t} = \int_{t=0}^{2\pi} \frac{2z\,\mathrm{d}t}{z^2+2az+1} = \frac{2}{\mathrm{i}} \int_{\partial B(0,1)} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+2az+1} \overset{(1)}{=} \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

☺ Das gesuchte Integral über die halbe Periode ist genau die Hälfte.

Rationale Integranden in $\cos t$ und $\sin t$

☺ Dieser Trick funktioniert für alle Integrale $\int_{t=0}^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t$:
Wir substituieren $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i}\sin t$ und $\mathrm{d}z = \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}z\,\mathrm{d}t$.

Satz F4H: rationale Integranden in $\cos t$ und $\sin t$

Sei $R(x,y) = P(x,y)/Q(x,y)$ eine rationale Funktion, mit $P, Q \in \mathbb{C}[x,y]$ und $Q(\cos t, \sin t) \neq 0$ für $t \in \mathbb{R}$. Dann ergibt die Weierstraß–Substitution

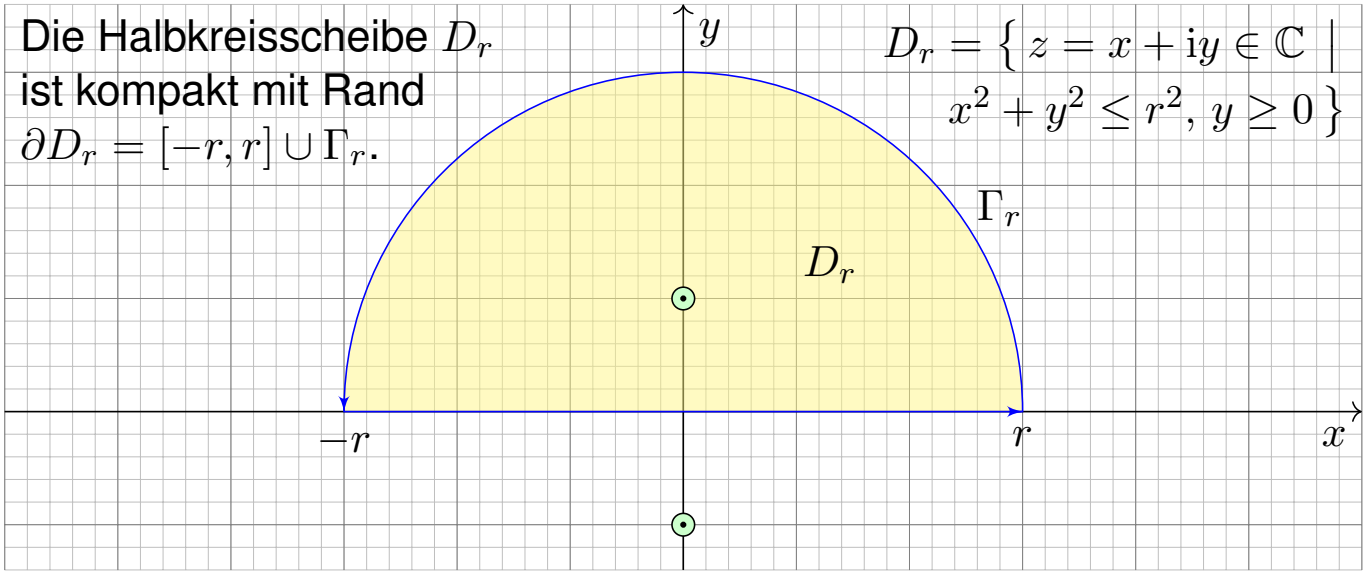
$$f(z) := \frac{1}{\mathrm{i}z} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}}\right) \in \mathbb{C}(z)$$

eine rationale Funktion in z ohne Polstellen auf $\partial B(0,1)$, und es gilt

$$\boxed{\int_{t=0}^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{Subs}}{=} \int_{\partial B(0,1)} f(z)\,\mathrm{d}z \underset{\text{F4D}}{\overset{\text{Res}}{=}} 2\pi\mathrm{i} \sum_{s\in B(0,1)} \operatorname*{res}_s(f).}$$

Diese Formel erhält man wie in der vorigen Aufgabe. Kennt man die Polstellen von f in $B(0,1)$, so kann man hieraus die Summe der Residuen ableiten. Damit lassen sich alle Integranden der Form $R(\cos t, \sin t)$ über $[0,2\pi]$ integrieren: Das Problem reduziert sich auf die Nullstellensuche des Nennerpolynoms von f (F3D). Alternativ können wir hier reell rechnen und mit Weierstraß' trigonometrischer Generalsubstitution sogar eine Stammfunktion bestimmen, siehe Satz B1O.

Anwendungsbeispiel: Halbebene



Aufgabe: Berechnen Sie für $u \in \mathbb{R}$ das reelle Integral

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ux)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \pi\,\mathrm{e}^{-|u|}.}$$

Anleitung: (1) Integrieren Sie $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}uz}/(z^2+1)$ über $[-r, r]$ und Γ_r.
(2) Für $u \ge 0$ und $r \to \infty$ verschwindet das Integral über Γ_r. Warum?

Anwendungsbeispiel: Halbebene

☺ Für $u = 0$ können wir den HDI nutzen dank $\arctan(x)' = 1/(x^2+1)$.
Für $u > 0$ hingegen gelingt uns die Berechnung erst komplex mit dem Residuensatz F4D. Für $u < 0$ erhalten wir genau dasselbe Integral.

Lösung: (1) Wir untersuchen die holomorphe Funktion

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}uz}}{z^2+1} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}uz}}{(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})}.$$

Ihre Singularitäten $\pm\mathrm{i}$ sind einfache Polstellen. Demnach gilt

$$\operatorname*{res}_{+\mathrm{i}}(f) \overset{\text{Res}}{\underset{\text{F4B}}{=}} \lim_{z\to+\mathrm{i}} \Big[(z-\mathrm{i})f(z)\Big] = \frac{\mathrm{e}^{-u}}{2\mathrm{i}}, \qquad \operatorname*{res}_{-\mathrm{i}}(f) = -\frac{\mathrm{e}^{u}}{2\mathrm{i}}.$$

Wir betrachten die obere Halbkreisscheibe D_r vom Radius $r > 1$.
Der Rand von D_r besteht aus $[-r, r]$ und dem oberen Halbkreis Γ_r.
In D_r liegt nur die Singularität $+\mathrm{i}$. Dank Residuensatz erhalten wir:

$$\int_{-r}^{r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ux}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}uz}}{z^2+1}\,\mathrm{d}z = \int_{\partial D_r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}uz}}{z^2+1}\,\mathrm{d}z \overset{\text{Res}}{\underset{\text{F4D}}{=}} 2\pi\mathrm{i}\operatorname*{res}_{\mathrm{i}}(f) = \pi\,\mathrm{e}^{-u}.$$

☺ Der Residuensatz vereinfacht unsere Rechnung entscheidend!

Anwendungsbeispiel: Halbebene

(2) Für das Integral längs Γ_r suchen wir eine geeignete Majorante:

$$\left|\int_{\Gamma_r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}uz}}{z^2+1}\,\mathrm{d}z\right| \le \int_{\Gamma_r} \left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ux}\,\mathrm{e}^{-uy}}{z^2+1}\right| |\mathrm{d}z| \overset{!}{\le} \int_{\Gamma_r} \frac{1}{r^2-1}|\mathrm{d}z| = \frac{\pi r}{r^2-1} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$$

Im Zähler gilt $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}uz}| = |\mathrm{e}^{\mathrm{i}ux}| \cdot |\mathrm{e}^{-uy}| \le 1$ dank $u, y \ge 0$. Im Nenner gilt $|z^2| = |z^2+1-1| \le |z^2+1| + |1|$, also $|z^2+1| \ge |z^2| - 1 = r^2 - 1$. Allgemein gilt die umgekehrte Dreiecksungleichung $|z-w| \ge \big||z|-|w|\big|$. Als Grenzwert für $u \ge 0$ und $r \to \infty$ erhalten wir somit das Integral

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ux}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \pi\,\mathrm{e}^{-u}.}$$

Als Real- und Imaginärteil erhalten wir die reellen Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ux)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \pi\,\mathrm{e}^{-u} \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ux)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Beide sind absolut konvergent. Das zweite verschwindet da ungerade.
☺ Für $u \le 0$ erhalten wir dank Symmetrie dasselbe Integral: $\pi\,\mathrm{e}^{-|u|}$.

Anwendungsbeispiel: Halbebene

☺ Die obige Abschätzung ist oft nützlich und verdient einen Namen:

Lemma F4I: Jordan–Lemma

Für den Halbkreis $\Gamma_r := \{\, r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \mid t \in [0,\pi] \,\}$ und $M_r := \max_{z\in\Gamma_r}|f(z)|$ gilt

$$\left|\int_{\Gamma_r} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \pi r M_r \quad \text{und} \quad \left|\int_{\Gamma_r} f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}uz}\,\mathrm{d}z\right| \le \frac{\pi}{u} M_r \quad \text{für } u > 0.$$

Dies geht gegen 0 für $r \to \infty$, falls $rM_r \to 0$ bzw. $M_r \to 0$ gilt.

Nachrechnen: Die erste Ungleichung ist klar. Die zweite folgt so:

$$\left|\int_{\Gamma_r} f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}uz}\,\mathrm{d}z\right| \le \int_{\Gamma_r} \big|f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}uz}\big|\,|\mathrm{d}z| \le \int_{t=0}^{\pi} \big|f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,\mathrm{e}^{ur(\mathrm{i}\cos t - \sin t)}\big|\,|r\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}|\,\mathrm{d}t$$

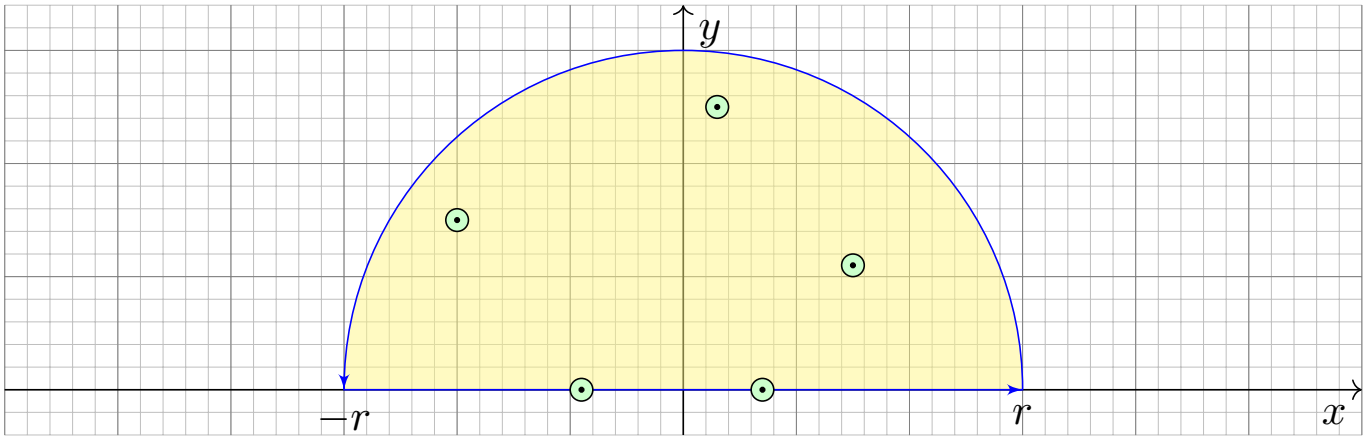
$$= r\int_{t=0}^{\pi} \big|f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\big|\,\mathrm{e}^{-ur\sin t}\,\mathrm{d}t \le rM_r \int_{t=0}^{\pi} \mathrm{e}^{-ur\sin t}\,\mathrm{d}t = 2rM_r \int_{t=0}^{\pi/2} \mathrm{e}^{-ur\sin t}\,\mathrm{d}t$$

$$\le 2rM_r \int_{t=0}^{\pi/2} \mathrm{e}^{-ur\frac{2t}{\pi}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{u} M_r \Big[-\mathrm{e}^{-ur\frac{2t}{\pi}}\Big]_{t=0}^{\pi/2} = \frac{\pi}{u} M_r (1-\mathrm{e}^{-ur}) \le \frac{\pi}{u} M_r$$

Wir nutzen die Abschätzung $\sin t \ge 2t/\pi$; machen Sie dazu eine Skizze!

Teilweises Umlaufen einer einfachen Polstelle

☺ Diese Berechnung funktioniert für alle Integrale dieser Form:



Wir betrachten eine rationale Funktion $f(z) = p(z)/q(z)$ mit Polynomen $p, q \in \mathbb{C}[z]$ und $\deg(q) \geq \deg(p) + 2$. Der Beitrag des Halbkreises Γ_r vom Radius r geht wie gesehen gegen Null. Falls Polstellen auf der reellen Achse $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ liegen, so setzen wir diese Pole als einfach voraus.

Um nicht durch diese Polstellen zu laufen, machen wir um jede wie skizziert einen halbkreisförmigen Umweg vom Radius ρ. Für $\rho \to 0$ ist der Beitrag genau das halbe Residuum, wie wir nun nachrechnen.

Teilweises Umlaufen einer einfachen Polstelle

☺ Um reellen Polstellen auszuweichen, nutzen wir folgenden Trick:

Lemma F4J: teilweises Umlaufen einer einfachen Polstelle

Ist $s \in \mathbb{C}$ eine einfache Polstelle von f, so gilt für kleine Kreisbögen $\gamma_\rho : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = s + \rho\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ vom Radius $\rho > 0$ der Grenzwert

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{\gamma_\rho} f(z)\, \mathrm{d}z = \mathrm{i}\,(\beta - \alpha)\, \operatorname*{res}_s(f).$$

Nachrechnen: Um die Polstelle s gilt $f(z) = a/(z - s) + g(z)$ mit einer holomorphen Funktion g. Für die gesuchten Integrale gilt deshalb:

$$\left| \int_{\gamma_\rho} g(z)\, \mathrm{d}z \right| \;\leq\; \ell(\gamma_\rho) \max_{z \in \overline{B}(s,r)} |g(z)| \;\leq\; \rho\,(\beta - \alpha) \cdot \mathrm{const} \;\to\; 0$$

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{a}{z - s}\, \mathrm{d}z \;=\; \int_{t=\alpha}^{\beta} \frac{a}{\rho\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\, \rho \mathrm{i}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\, \mathrm{d}t \;=\; \mathrm{i}a \int_{t=\alpha}^{\beta} \mathrm{d}t \;=\; \mathrm{i}\,(\beta - \alpha)\, a$$

Damit lassen sich auch einfache Polstellen auf dem Rand behandeln! Für mehrfache Polstellen hingegen divergiert das Integral für $\rho \to 0$!

Fourier–Integrale rationaler Funktionen

☺ Diese Berechnung funktioniert für alle Integrale von dieser Form!
Einfache Merkregel: Polstellen auf der reellen Achse zählen nur halb.

Satz F4K: Fourier–Integrale rationaler Funktionen

Sei $f(z) = p(z)/q(z)$ eine rationale Funktion; hat f Polstellen in $\mathbb{R}$, so soll jede höchstens einfach sein. Für $\deg(q) \geq \deg(p) + 2$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\mathrm{Im}(s)>0} \operatorname*{res}_s(f) + \pi\mathrm{i} \sum_{\mathrm{Im}(s)=0} \operatorname*{res}_s(f)$$

Für $\deg(q) \geq \deg(p) + 1$ und alle $u > 0$ bzw. $u < 0$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}ux}\,\mathrm{d}x = +2\pi\mathrm{i} \sum_{\mathrm{Im}(s)>0} \operatorname*{res}_{z=s}\Big[f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}uz}\Big] + \pi\mathrm{i} \sum_{\mathrm{Im}(s)=0} \operatorname*{res}_{z=s}\Big[f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}uz}\Big]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}ux}\,\mathrm{d}x = -2\pi\mathrm{i} \sum_{\mathrm{Im}(s)<0} \operatorname*{res}_{z=s}\Big[f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}uz}\Big] - \pi\mathrm{i} \sum_{\mathrm{Im}(s)=0} \operatorname*{res}_{z=s}\Big[f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}uz}\Big]$$

Fourier–Integrale rationaler Funktionen

☺ Diese Integrationstechnik ist sehr nützlich und wird oft angewendet, insbesondere für Fourier– und Laplace–Integrale (Kapitel K und L).
Wie ist das Integral auf der linken Seite der Gleichung zu verstehen?
Liegen Polstellen $s_1 < \cdots < s_n$ auf der reellen Achse, so betrachten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{r\to\infty}\left[\int_{-r}^{s_1-\frac{1}{r}} f + \int_{s_1+\frac{1}{r}}^{s_2-\frac{1}{r}} f + \cdots + \int_{s_{n-1}+\frac{1}{r}}^{s_n-\frac{1}{r}} f + \int_{s_n-\frac{1}{r}}^{r} f\right]$$

Der Integrand f ist nicht absolut integrierbar, denn in der Nähe einer n-fachen reellen Polstelle $s \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) \sim a/(x-s)^n$, und wir wissen

$$\int_{s-\frac{1}{r}}^{s+\frac{1}{r}} \left|\frac{1}{(x-s)^n}\right| \mathrm{d}x = \infty \quad \text{für alle } n \geq 1 \text{ (B208).}$$

Glücklicherweise heben sich für $n = 1$ Positivteil und Negativteil auf:

$$\int_{s-\frac{1}{r}}^{s+\frac{1}{r}} \frac{1}{x-s}\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{als Cauchy–Hauptwert.}$$

Daher konvergiert das oben angegebene Integral für $r \to \infty$.
Die Zählung der Residuen folgt nun aus dem vorigen Lemma F4J.

Anwendungsbeispiel zum Residuenkalkül

Aufgabe: Berechnen Sie für $u \in \mathbb{R}$ das reelle Integral

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ux)}{x}\,\mathrm{d}x = \pi\,\mathrm{sign}(u).}$$

(1) In welchem Sinne konvergiert dieses Integral? absolut? uneigentlich?
(2) Warum ist das Integral für alle $u > 0$ gleich? Substitution $s = ux$!

Lösung: F115 Für $u > 0$ können wir den Residuensatz anwenden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ux}}{x}\,\mathrm{d}x \overset{\text{Res}}{\underset{\text{F4K}}{=}} \pi\mathrm{i}\operatorname*{res}_{z=0}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}uz}}{z}\right] = \pi\mathrm{i}\operatorname*{res}_{z=0}\left[z^{-1} + \frac{\mathrm{i}u}{1!}z^0 - \frac{u^2}{2!}z^1 + \ldots\right] = \pi\mathrm{i}.$$

Als Real- und Imaginärteil erhalten wir die reellen Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ux)}{x}\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ux)}{x}\,\mathrm{d}x = \pi.$$

Für $u < 0$ kehrt sich das Vorzeichen um. Für $u = 0$ ist alles klar.

☺ Der Residuensatz ist ein allgemeines und mächtiges Werkzeug.

Anwendungsbeispiel zum Residuenkalkül

⚠ Die Spaltfunktion $\mathrm{si}(x) = \sin(x)/x$ ist zwar stetig und somit über jedem endlichen Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ integrierbar B149, aber sie ist nicht elementar integrierbar, d.h. ihre Stammfunktion $\mathrm{Si}(x)$ ist nicht elementar.

⚠ Die Integranden sind nicht absolut integrierbar B421, das heißt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\cos x}{x}\right| \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x = \infty$$

☺ Das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x)/x\,\mathrm{d}x$ existiert nur uneigentlich, das heißt

$$\lim_{a\to-\infty} \int_{x=a}^{0} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_{x=0}^{b} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x)/x\,\mathrm{d}x$ existiert sogar nur als Cauchy–Hauptwert:

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{-1/r} \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x = -\infty, \qquad \lim_{r\to\infty} \int_{1/r}^{r} \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x = +\infty,$$

$$\lim_{r\to\infty} \left[\int_{-r}^{-1/r} \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{1/r}^{r} \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x\right] = 0.$$

Letzteres ist klar, da der Integrand $\cos(x)/x$ eine ungerade Funktion ist.

Anwendungsbeispiel zum Residuenkalkül

Die Spaltfunktion $\mathrm{si}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $\mathrm{si}(x)=\sin(x)/x$ für $x\neq 0$ und $\mathrm{si}(0)=1$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, auch in $x=0$. Sie ist der Realteil der holomorphen Funktion $f:\mathbb{C}\smallsetminus\{0\}\to\mathbb{C}:z\mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}/z$, mit einfacher Polstelle in $z=0$.

☺ Das haben wir in der vorigen Aufgabe zur Berechnung ausgenutzt.

Zunächst scheint die Wahl der Funktion f vielleicht etwas willkürlich. Könnte man hier auch andere komplexe Fortsetzungen wählen?

Aufgabe: Die Spaltfunktion $\mathrm{si}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $\mathrm{si}(x)=\sin(x)/x$ für $x\neq 0$ und $\mathrm{si}(0)=1$ ist auf $\mathbb{R}$ der Realteil der holomorphen Funktion $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ mit

$$g(z)=\frac{\sin(z)}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^6}{7!}+\frac{z^8}{9!}-\frac{z^{10}}{11!}+\dots$$

Lässt sich hierauf der Residuensatz anwenden und folgendes nutzen?

$$(*)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\mathrm{Im}(s)>0}\operatorname*{res}_s(g)+\pi\mathrm{i}\sum_{\mathrm{Im}(s)=0}\operatorname*{res}_s(g)$$

Ist das nicht gerade unserer Residuenformel aus Satz F4K?

Anwendungsbeispiel zum Residuenkalkül

Lösung: Nein, die vermutete Formel $(*)$ gilt hier offensichtlich nicht! Nachrechnen: Links steht π, rechts steht 0, da g keine Singularitäten hat.

Woran liegt's? Zunächst sollten Sie die Voraussetzungen von Satz F4K nochmal genau lesen. Die geforderten Bedingungen sind für unsere Funktion g nicht erfüllt, also sollten wir die Formel nicht anwenden!

Was ist der eigentliche geometrische Grund? Der Residuensatz F4D gilt für Randintegrale $\oint_{\partial D} f(z)\,\mathrm{d}z$ von Kompakta D. Die Halbebene $\mathbb{C}_{\mathrm{Im}\geq 0}$ hat als Rand die reelle Achse $\mathbb{R}$, ist aber offensichtlich nicht kompakt!

Warum gilt Satz F4K trotzdem so schön und einfach? Er ist raffiniert und zur Anwendung sollten Sie seine Herleitung verstehen: Als Kompakta nutzen wir Halbkreisscheiben D_r. Die Bedingungen stellen sicher, dass das Wegintegral über den oberen Halbkreis Γ_r verschwindet für $r\to 0$. Hierzu nutzen wir das einfache, aber wirksame Jordan–Lemma F4I.

☺ Allein in diesem günstigen Falle können wir den Residuensatz für die obere Halbebene $\mathbb{C}_{\mathrm{Im}\geq 0}$ und ihren Rand $\mathbb{R}$ ohne Korrektur direkt nutzen.

⚠ Für die obige Funktion $g(z)=\sin(z)/z$ gilt dies alles leider nicht!

Anwendungsbeispiel zum Residuenkalkül

Aufgabe: Berechnen Sie für $a, b > 0$ das reelle Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,\mathrm{d}x.$$

Lösung: Der Integrand $f(z) = 1/(z^2+a^2)(z^2+b^2)$ hat Pole in $\pm a\mathrm{i}, \pm b\mathrm{i}$.

☺ Das *reelle* Integrale wird bestimmt durch die *komplexen* Polstellen!

Erster Fall: $a \neq b$, also einfache Pole. Die Residuen sind dann

$$\operatorname*{res}_{a\mathrm{i}}(f) \overset{\text{Res}}{\underset{\text{F4B}}{=}} \lim_{z\to a\mathrm{i}} \Big[(z-a\mathrm{i})f(z)\Big] = \lim_{z\to a\mathrm{i}} \frac{1}{(z+a\mathrm{i})(z^2+b^2)} = \frac{1}{2a\mathrm{i}(b^2-a^2)}$$

$$\operatorname*{res}_{b\mathrm{i}}(f) \overset{\text{Res}}{\underset{\text{F4B}}{=}} \lim_{z\to b\mathrm{i}} \Big[(z-b\mathrm{i})f(z)\Big] = \lim_{z\to b\mathrm{i}} \frac{1}{(z^2+a^2)(z+b\mathrm{i})} = \frac{1}{(a^2-b^2)2b\mathrm{i}}$$

Dank Residuensatz erhalten wir unser reelles Integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Res}}{\underset{\text{F4K}}{=}} 2\pi\mathrm{i} \sum\nolimits_{\mathrm{Im}(s)>0} \operatorname*{res}_s(f)$$

$$= \frac{2\pi\mathrm{i}}{2a\mathrm{i}(b^2-a^2)} + \frac{2\pi\mathrm{i}}{2b\mathrm{i}(a^2-b^2)} = \frac{\pi(a-b)}{ab(a^2-b^2)} = \frac{\pi}{ab(a+b)}$$

Anwendungsbeispiel zum Residuenkalkül

Im Falle $a = b$ erwarten wir dasselbe, rechnen's aber ausführlich nach:

Zweiter Fall: $a = b$, also zweifache Pole in $\pm a\mathrm{i}$. Das Residuum ist dann

$$\operatorname*{res}_{a\mathrm{i}}(f) \overset{\text{Res}}{\underset{\text{F4C}}{=}} \lim_{z\to a\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\Big[(z-a\mathrm{i})^2 f(z)\Big] = \lim_{z\to a\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{1}{(z+a\mathrm{i})^2}\right]$$

$$= \lim_{z\to a\mathrm{i}} \frac{-2}{(z+a\mathrm{i})^3} = \frac{-2}{(2a\mathrm{i})^3} = \frac{1}{4a^3\mathrm{i}}.$$

Dank Residuensatz erhalten wir unser reelles Integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Res}}{\underset{\text{F4K}}{=}} 2\pi\mathrm{i} \sum_{\mathrm{Im}(s)>0} \operatorname*{res}_s(f) = 2\pi\mathrm{i}\,\frac{1}{4a^3\mathrm{i}} = \frac{\pi}{2a^3}$$

☺ Stetigkeit! Der zweite Fall $a = b$ folgt aus dem ersten Fall $a \neq b$:
Dank Satz D3D dürfen wir den Grenzwert $\lim_{b\to a}$ unters Integral ziehen.

Zusammenfassend erhalten wir für alle $a, b > 0$ die Gleichung

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{ab(a+b)}.}$$

Anwendungsbeispiel zum Residuenkalkül

Aufgabe: (1) Berechnen Sie die Residuen der rationalen Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^4+4}.$$

Lösung: Der Nenner hat in $\pm 1 \pm \mathrm{i}$ vier einfache Nullstellen:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1-\mathrm{i})(z-1+\mathrm{i})(z+1-\mathrm{i})(z+1+\mathrm{i})}.$$

Erinnerung F230: $z^4+4=0$ heißt $z^4 = 4\,\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}+2\pi\mathrm{i}k}$ für $k=0,1,2,3,\ldots$, Wurzel $z=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{(\pi\mathrm{i}+2\pi\mathrm{i}k)/4}$, also $z \in \{\pm 1 \pm \mathrm{i}\}$. Machen Sie eine Skizze!

Für $f = p/q$ mit einfacher Polstelle s gilt $\operatorname{res}_s(p/q) = p(s)/q'(s)$:

$$\operatorname*{res}_{(+1+\mathrm{i})}(f) \overset{\text{Res}}{\underset{\text{F4B}}{=}} \lim_{z\to+1+\mathrm{i}}\left[\frac{1}{4z^3}\right] = \frac{1}{8(-1+\mathrm{i})} = -\frac{1+\mathrm{i}}{16}, \qquad \operatorname*{res}_{(+1-\mathrm{i})}(f) = -\frac{1-\mathrm{i}}{16},$$

$$\operatorname*{res}_{(-1+\mathrm{i})}(f) \overset{\text{Res}}{\underset{\text{F4B}}{=}} \lim_{z\to-1+\mathrm{i}}\left[\frac{1}{4z^3}\right] = \frac{1}{8(+1+\mathrm{i})} = +\frac{1-\mathrm{i}}{16}, \qquad \operatorname*{res}_{(-1-\mathrm{i})}(f) = +\frac{1+\mathrm{i}}{16}.$$

Diese Vorbereitung nutzen wir für die folgende Integration.

Anwendungsbeispiel zum Residuenkalkül

Aufgabe: (2) Berechnen Sie für $u \in \mathbb{R}$ das reelle Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ux)}{x^4+4}\,\mathrm{d}x.$$

Lösung: Auf den Fall $u \geq 0$ wenden wir den Residuensatz an:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ux}}{x^4+4}\,\mathrm{d}x &\overset{\text{Res}}{\underset{\text{F4K}}{=}} 2\pi\mathrm{i} \sum_{\operatorname{Im}(s)>0} \operatorname*{res}_s\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}uz}}{z^4+4}\right) \\
&\overset{(1)}{\underset{\text{F4B}}{=}} 2\pi\mathrm{i}\left[-\frac{1+\mathrm{i}}{16}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}u(1+\mathrm{i})} + \frac{1-\mathrm{i}}{16}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}u(-1+\mathrm{i})}\right] \\
&= \frac{\pi}{8}\left[(1-\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{-u+\mathrm{i}u} + (1+\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{-u-\mathrm{i}u}\right] \\
&= \frac{\pi}{4}\operatorname{Re}\left[(1-\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{-u+\mathrm{i}u}\right] = \frac{\pi}{4}\,\mathrm{e}^{-u}\left(\cos u + \sin u\right)
\end{aligned}$$

Für $u \leq 0$ ist das Integral dasselbe. Zusammengefasst erhalten wir:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ux)}{x^4+4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\,\mathrm{e}^{-|u|}\left(\cos|u| + \sin|u|\right)}$$

Satz F4L: Integrale über die reelle Halbachse

Sei $f(z) = p(z)/q(z)$ rational mit $p, q \in \mathbb{C}[z]$ und $\deg q \geq \deg p + 2$, aber ohne Polstellen in $\mathbb{R}_{\geq 0}$, gekürzt also $q(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann gelten folgende Formeln für Integrale über die reelle Halbachse:

$$\begin{aligned}
\int_{x=0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= -\sum\nolimits_{s\neq 0} \operatorname*{res}_{z=s}\Big[f(z)\ln(z)\Big] \\
\int_{x=0}^{\infty} f(x)\ln(x)\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\sum\nolimits_{s\neq 0} \operatorname*{res}_{z=s}\Big[f(z)\ln(z)^2\Big] - \pi\mathrm{i}\int_{x=0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \\
\int_{x=0}^{\infty} f(x)\,x^{\alpha}\,\mathrm{d}x &= \frac{2\pi\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}}\sum\nolimits_{s\neq 0} \operatorname*{res}_{z=s}\Big[f(z)\,z^{\alpha}\Big] \quad \text{für } 0<\alpha<1
\end{aligned}$$

Hierbei nutzen wir für jede komplexe Zahl $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ mit $0 < r < \infty$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$ ihren komplexen Logarithmus mit $\ln z := \ln r + \mathrm{i}\varphi$. Auf $\mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ entspricht dies dem Nebenzweig $\ln = \ln_{\pi}$ aus Satz F2M. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ setzen wir $z^{\alpha} := \mathrm{e}^{\alpha \ln z}$.Auf $\mathbb{R}_{>0}$ sind das die üblichen reellen Definitionen; ihre komplexen Fortsetzungen sind unstetig quer zu $\mathbb{R}_{>0}$.

Wir werden diesen Satz anschließend als Übungsaufgabe beweisen. Zuvor betrachten wir einfache Anwendungsbeispiele zur Illustration.

Aufgabe: Berechnen Sie folgende Integrale. Ist der Satz anwendbar?

$$(1)\ \int_0^{\infty}\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x,\ (2)\ \int_0^{\infty}\frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x,\ (3)\ \int_0^{\infty}\frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x,\ (4)\ \int_0^{\infty}\frac{1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$$

Lösung: (1) Das erste Integral können wir elementar berechnen:

$$\int_{x=0}^{\infty}\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \;=\; \Big[\ln(x+1)\Big]_{x=0}^{\infty} \;=\; \lim_{x\to\infty}\ln(x+1)-\ln(1) \;=\; \infty$$

⚠ Die Voraussetzungen des Satzes F4L sind hier nicht erfüllt, denn der Integrand $f(z) = 1/(z+1)$ fällt nicht schnell genug ab.

⚠ Das Residuum gibt hier sicher nicht die richtige Antwort!

$$\operatorname*{res}_{z=-1}\left[\frac{\ln(z)}{z+1}\right] \;=\; \lim_{z\to -1}\ln(z) \;=\; \pi\mathrm{i}$$

Integrale über die reelle Halbachse

(2) Auch das zweite Integral können wir noch elementar berechnen:

$$\int_{x=0}^{\infty} \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x \;=\; \left[\frac{-1}{x+1}\right]_{x=0}^{\infty} \;=\; 1 - \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+1} \;=\; 1$$

☺ Die Voraussetzungen des Satzes F4L sind hier erfüllt.
Das Residuum gibt hier tatsächlich die richtige Antwort:

$$\operatorname*{res}_{z=-1}\left[\frac{\ln(z)}{(z+1)^2}\right] \;=\; \lim_{z\to-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln(z) \;=\; \lim_{z\to-1}\frac{1}{z} \;=\; -1$$

(3) Auch das dritte Integral können wir noch elementar berechnen:

$$\int_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \;=\; \Big[\arctan(x)\Big]_{x=0}^{\infty} \;=\; \lim_{x\to\infty}\arctan(x) - 0 \;=\; \frac{\pi}{2}$$

☺ Die Voraussetzungen des Satzes F4L sind hier erfüllt. Die Residuen der beiden Polstellen $z_1 = +\mathrm{i}$ und $z_2 = -\mathrm{i}$ geben die richtige Antwort:

$$\operatorname*{res}_{z=z_k}\left[\frac{\ln(z)}{z^2+1}\right] \;=\; \lim_{z\to z_k}\frac{\ln(z)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z^2+1)} \;=\; \lim_{z\to z_k}\frac{\ln(z)}{2z} \;=\; \frac{\ln(z_k)}{2z_k}, \qquad \text{also}$$

$$\operatorname*{res}_{z=+\mathrm{i}}\left[\frac{\ln(z)}{z^2+1}\right] = \frac{\pi\mathrm{i}\cdot 1/2}{2\mathrm{i}} = \pi\,\frac{1}{4}, \qquad \operatorname*{res}_{z=-\mathrm{i}}\left[\frac{\ln(z)}{z^2+1}\right] = \frac{\pi\mathrm{i}\cdot 3/2}{-2\mathrm{i}} = -\pi\,\frac{3}{4}.$$

Integrale über die reelle Halbachse

(4) Das vierte Integral können wir nicht mehr elementar berechnen.
Wir nutzen deshalb Satz F4L. Alle Voraussetzungen sind hier erfüllt:
Es ist $z^3+1 = (z+z_1)(z-z_2)(z-z_3)$ mit den drei Nullstellen

$$z_1 = -1 = \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}, \qquad z_2 = \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}\cdot 1/3} = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}, \qquad z_3 = \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}\cdot 5/3} = \frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2},$$

$$\ln(z_1) = \pi\mathrm{i}, \qquad \ln(z_2) = \pi\mathrm{i}\,\frac{1}{3}, \qquad \ln(z_3) = \pi\mathrm{i}\,\frac{5}{3}.$$

Die Residuen der Funktion $F(z) = f(z)\ln(z)$ sind demnach

$$\operatorname*{res}_{z=z_k}\left[\frac{\ln(z)}{z^3+1}\right] \;=\; \lim_{z\to z_k}\frac{\ln(z)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z^3+1)} \;=\; \lim_{z\to z_k}\frac{\ln(z)}{3z^2} \;=\; \frac{\ln(z_k)}{3z_k^2}, \qquad \text{also}$$

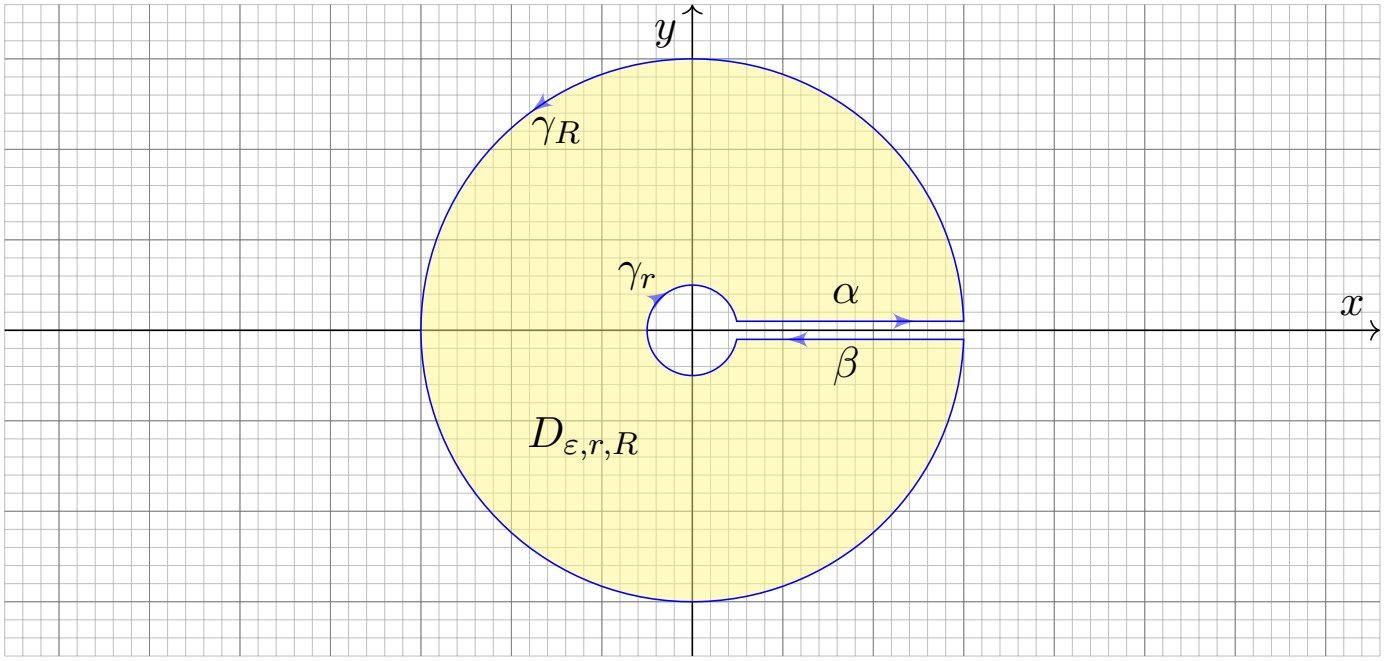
$$\operatorname*{res}_{z_1}(F) = \pi\frac{\mathrm{i}}{3}, \qquad \operatorname*{res}_{z_2}(F) = \pi\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{18}, \qquad \operatorname*{res}_{z_3}(F) = -\pi\frac{5(\sqrt{3}+\mathrm{i})}{18}$$

☺ Dank Satz F4L erhalten wir den Wert des gesuchten Integrals:

$$\boxed{\int_{x=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}}$$

Integrale über die reelle Halbachse

Aufgabe: Berechnen Sie die Integrale aus Satz F4L mit folgendem Integrationsweg und den Grenzübergängen $\varepsilon \to 0$, $r \to 0$, $R \to \infty$.



Die Wege γ_r und γ_R verlaufen auf Kreisen um 0 mit den Radien $r < R$.
Die Wege γ_+ und γ_- verlaufen im Abstand $\varepsilon > 0$ parallel zur x–Achse.
Sei $\gamma = \alpha * \gamma_R * \beta * \gamma_r$ der geschlossene Weg um das Gebiet $D_{\varepsilon,r,R}$.

Integrale über die reelle Halbachse

Lösung: (1) Wir integrieren $F(z) = f(z)\ln(z)$. Für $\varepsilon \to 0$ erhalten wir:

$$\int_\alpha f(z)\ln(z)\,\mathrm{d}z \;\to\; \int_{x=r}^{R} f(x)\ln(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\int_\beta f(z)\ln(z)\,\mathrm{d}z \;\to\; \int_{x=R}^{r} f(x)\big[\ln(x) + 2\pi\mathrm{i}\big]\,\mathrm{d}x$$

Für $r \to 0$ bzw. $R \to \infty$ finden wir:

$$\left|\int_{\gamma_r} f(z)\ln(z)\,\mathrm{d}z\right| \;\le\; \int_{t=0}^{2\pi}\left|f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,t\cdot r\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right|\mathrm{d}t \;\le\; \mathrm{const}\cdot r \;\to\; 0$$
$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\ln(z)\,\mathrm{d}z\right| \;\le\; \int_{t=0}^{2\pi}\left|f(R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,t\cdot R\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right|\mathrm{d}t \;\le\; \frac{\mathrm{const}}{R^2}\cdot R \;\to\; 0$$

Da $\mathring{D}_{\varepsilon,r,R}$ schließlich alle Singularitäten von f umfasst, erhalten wir:

$$2\pi\mathrm{i}\sum_{s\neq 0}\operatorname*{res}_{z=s}\Big[f(z)\ln(z)\Big] \;=\; \int_\gamma f(z)\ln(z)\,\mathrm{d}z \;\to\; -2\pi\mathrm{i}\int_{x=0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

☺ Das ist die erste Residuenformel des Satzes F4L.

Integrale über die reelle Halbachse

(2) Wir integrieren $F(z) = f(z)\,\ln(z)^2$. Für $\varepsilon \to 0$ erhalten wir:

$$\int_\alpha f(z)\ln(z)^2\,\mathrm{d}z \;\to\; \int_{x=r}^{R} f(x)\ln(x)^2\,\mathrm{d}x$$
$$\int_\beta f(z)\ln(z)^2\,\mathrm{d}z \;\to\; \int_{x=R}^{r} f(x)\big[\ln(x)+2\pi\mathrm{i}\big]^2\,\mathrm{d}x$$

Für $r \to 0$ bzw. $R \to \infty$ finden wir:

$$\left|\int_{\gamma_r} f(z)\ln(z)^2\,\mathrm{d}z\right| \;\le\; \int_{t=0}^{2\pi}\big|f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,t^2\cdot r\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\big|\,\mathrm{d}t \;\le\; \mathrm{const}\cdot r \;\to\; 0$$
$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\ln(z)^2\,\mathrm{d}z\right| \;\le\; \int_{t=0}^{2\pi}\big|f(R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,t^2\cdot R\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\big|\,\mathrm{d}t \;\le\; \frac{\mathrm{const}}{R^2}\cdot R \;\to\; 0$$

Da $\mathring{D}_{\varepsilon,r,R}$ schließlich alle Singularitäten von f umfasst, erhalten wir:

$$2\pi\mathrm{i}\sum_{s\neq 0}\operatorname*{res}_{z=s}\Big[f(z)\ln(z)^2\Big] = \int_\gamma f(z)\ln(z)^2\,\mathrm{d}z \to \int_{x=0}^{\infty} f(x)\big[4\pi^2-4\pi\mathrm{i}\ln(x)\big]\,\mathrm{d}x$$

☺ Das ist die zweite Residuenformel des Satzes F4L.

Integrale über die reelle Halbachse

(3) Wir integrieren $F(z) = f(z)\,z^\alpha$. Für $\varepsilon \to 0$ erhalten wir:

$$\int_\alpha f(z)\,z^\alpha\,\mathrm{d}z \;\to\; \int_{x=r}^{R} f(x)\,x^\alpha\,\mathrm{d}x$$
$$\int_\beta f(z)\,z^\alpha\,\mathrm{d}z \;\to\; \int_{x=R}^{r} f(x)\,x^\alpha\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\cdot\alpha}\,\mathrm{d}x$$

Für $r \to 0$ bzw. $R \to \infty$ finden wir:

$$\left|\int_{\gamma_r} f(z)\,z^\alpha\,\mathrm{d}z\right| \;\le\; \int_{t=0}^{2\pi}\big|f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,r^\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\alpha}\cdot r\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\big|\,\mathrm{d}t \;\le\; \mathrm{const}\cdot r^{1+\alpha} \;\to\; 0$$
$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,z^\alpha\,\mathrm{d}z\right| \;\le\; \int_{t=0}^{2\pi}\big|f(R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,R^\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\alpha}\cdot R\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\big|\,\mathrm{d}t \;\le\; \frac{\mathrm{const}}{R^2}\cdot R^{1+\alpha} \;\to\; 0$$

Da $\mathring{D}_{\varepsilon,r,R}$ schließlich alle Singularitäten von f umfasst, erhalten wir:

$$2\pi\mathrm{i}\sum_{s\neq 0}\operatorname*{res}_{z=s}\Big[f(z)\,z^\alpha\Big] \;=\; \int_\gamma f(z)\,z^\alpha\,\mathrm{d}z \;\to\; (1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha})\int_{x=0}^{\infty} f(x)\,x^\alpha\,\mathrm{d}x$$

☺ Das ist die dritte Residuenformel des Satzes F4L.

Holomorphe Funktionen und Laurent–Reihen

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Der Weg $\gamma : [a,b] \to \Omega$ sei stückweise stetig diff'bar.
Das **komplexe Wegintegral** einer stetigen Funktion $f : \mathbb{C} \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$ ist

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_{t=a}^{b} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t. \quad \text{Merkregel: } z = \gamma(t),\ \mathrm{d}z = \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

Eine komplexe Funktion $f = u + \mathrm{i}v : \mathbb{C} \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$ heißt **holomorph**, wenn sie auf ganz Ω komplex differenzierbar ist und $f' : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig.

$\Leftrightarrow$ **Cauchy–Riemann–Gleichungen** $\partial_x u = \partial_y v$ und $\partial_x v = -\partial_y u$.

$\Leftrightarrow$ Die **Strömung** $\overline{f} = (u, -v) : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \to \mathbb{R}^2$ erfüllt $\operatorname{div} \overline{f} = \operatorname{rot} \overline{f} = 0$.

$\Leftrightarrow$ Auf jeder Kreisscheibe $B(z_0, \rho) \subseteq \Omega$ gleicht f einer **Potenzreihe**:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit} \quad a_k := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}\zeta$$

$\Leftrightarrow$ Auf jedem Kreisring $K(z_0, \sigma, \rho) \subseteq \Omega$ gleicht f einer **Laurent–Reihe**:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit} \quad a_k := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}\zeta$$

Der Koeffizient $\operatorname{res}_{z_0}(f) := a_{-1}$ heißt das **Residuum** von f in z_0.

Der Residuensatz für Kompakta

Wir nutzen den Satz von Green / Gauß in der komplexen Ebene $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.
Für holomorphe Funktionen erhalten wir so den **Residuensatz** F4D:

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \setminus S \to \mathbb{C}$ holomorph auf Ω bis auf eine Menge S isolierter Singularitäten. Sei $D \subseteq \Omega$ kompakt mit stückweise glattem Rand, wobei $\partial D \cap S = \emptyset$. Dann gilt

$$\boxed{\int_{\partial D} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 2\pi\mathrm{i} \sum\nolimits_{s \in \mathring{D}} \operatorname*{res}_s(f).}$$

Das **Residuum** von $f : K(s, 0, \rho) \to \mathbb{C}$ im Punkt s ist definiert durch

$$\operatorname*{res}_s(f) := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial B(s,r)} f(z)\,\mathrm{d}z \quad \text{für } 0 < r < \rho.$$

Ist s eine **höchstens n-fache Polstelle** von f, so gilt

$$\operatorname*{res}_s(f) = \lim_{z \to s} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{n-1} \Big[(z - s)^n f(z)\Big].$$

Für $f = p/q$ mit **einfacher Polstelle** s gilt $\operatorname{res}_s(p/q) = p(s)/q'(s)$.

☺ Damit lassen sich Residuen in Polstellen meist leicht berechnen.

Residuenkalkül für reelle Integrale

(1) Sei $R(x,y) = P(x,y)/Q(x,y)$ eine rationale Funktion mit Nenner $Q(\cos t, \sin t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann ergibt die Weierstraß–Substitution

$$f(z) := \frac{1}{\mathrm{i}z} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}}\right)$$

eine rationale Funktion in z ohne Polstellen auf $\partial B(0,1)$, und es gilt

$$\boxed{\int_{t=0}^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t = \int_{\partial B(0,1)} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum\nolimits_{s\in B(0,1)} \operatorname*{res}_{s}(f).}$$

(2) Sei $f(z) = p(z)/q(z)$ eine rationale Funktion; reelle Polstellen $z \in \mathbb{R}$ seien höchstens einfach. Für $\deg(q) \geq \deg(p) + 2$ und $u \geq 0$ gilt dann:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}ux}\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\mathrm{Im}(s)>0} \operatorname*{res}_{z=s}\Big[f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}uz}\Big] + \pi\mathrm{i} \sum_{\mathrm{Im}(s)=0} \operatorname*{res}_{z=s}\Big[f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}uz}\Big]}$$

Diese Gleichung gilt auch noch im Falle $\deg(q) \geq \deg(p) + 1$ und $u > 0$.

Residuenkalkül für reelle Integrale

(3) Sei $f(z) = p(z)/q(z)$ rational mit $p, q \in \mathbb{C}[z]$ und $\deg q \geq \deg p + 2$, aber ohne Polstellen in $\mathbb{R}_{\geq 0}$, gekürzt also $q(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann gelten folgende Formeln für Integrale über die reelle Halbachse:

$$\boxed{\begin{aligned}
\int_{x=0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= -\sum\nolimits_{s\neq 0} \operatorname*{res}_{z=s}\Big[f(z)\ln(z)\Big] \\
\int_{x=0}^{\infty} f(x)\ln(x)\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\sum\nolimits_{s\neq 0} \operatorname*{res}_{z=s}\Big[f(z)\ln(z)^2\Big] - \pi\mathrm{i}\int_{x=0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \\
\int_{x=0}^{\infty} f(x)\,x^{\alpha}\,\mathrm{d}x &= \frac{2\pi\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}} \sum\nolimits_{s\neq 0} \operatorname*{res}_{z=s}\Big[f(z)\,z^{\alpha}\Big] \quad \text{für } 0<\alpha<1
\end{aligned}}$$

Hierbei nutzen wir für jede komplexe Zahl $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ mit $0 < r < \infty$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$ ihren komplexen Logarithmus mit $\ln z := \ln r + \mathrm{i}\varphi$. Auf $\mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ entspricht dies dem Nebenzweig $\ln = \ln_{\pi}$ aus Satz F2M.

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ setzen wir $z^{\alpha} := \mathrm{e}^{\alpha \ln z}$. Auf $\mathbb{R}_{>0}$ sind das die üblichen reellen Definitionen; ihre komplexen Fortsetzungen sind unstetig quer zu $\mathbb{R}_{>0}$.

Verständnisfragen: komplexe Potenzen

F505
Übung

Aufgabe: Die folgende Rechnung beweist $0 = 1$. Wo stecken Fehler?

Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt:		$\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k}$	$= 1$	(1)
Multiplikation von (1) mit e	$\Longrightarrow$	$\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k+1}$	$= \mathrm{e}$	(2)
Einsetzen von (2) in (1)	$\Longrightarrow$	$(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k+1})^{2\pi \mathrm{i} k}$	$= 1$	(3)
Potenzgesetz $(\mathrm{e}^w)^z = \mathrm{e}^{wz}$	$\Longrightarrow$	$\mathrm{e}^{-4\pi^2 k^2 + 2\pi \mathrm{i} k}$	$= 1$	(4)
Potenzgesetz $\mathrm{e}^{w+z} = \mathrm{e}^w \cdot \mathrm{e}^z$	$\Longrightarrow$	$\mathrm{e}^{-4\pi^2 k^2} \cdot \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k}$	$= 1$	(5)
Anwendung von (1)	$\Longrightarrow$	$\mathrm{e}^{-4\pi^2 k^2}$	$= 1$	(6)
Grenzwert für $k \to \infty$	$\Longrightarrow$	0	$= 1$	(7)

⚠ Das ist eine lehrreiche Übung, bitte versuchen Sie zuerst selbst, den Fehler einzugrenzen! Die Gleichungen (1) und (2) sind tatsächlich gültig, auch (3) $1^z = 1$ scheint noch in Ordnung, obschon die Bedeutung von a^z für $a, z \in \mathbb{C}$ unklar ist. Die letzte Gleichung (7) ist offensichtlich falsch, ebenso (6), (5), (4). Die Implikationen (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ (7) sind alle einwandfrei, sie starten leider bei einer falschen Aussage (4). Der einzige Fehler liegt also bei (3) $\Rightarrow$ (4). In $\mathbb{C}$ sind Logarithmen und Potenzen nicht eindeutig, daher ist extreme Vorsicht geboten! F506

Verständnisfragen: komplexe Potenzen

F506
Übung

Aufgabe: (1) Es gilt $1^z = 1$ für alle $z \in \mathbb{R}$, also wohl auch für alle $z \in \mathbb{C}$. Aus $\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}} = 1$ folgt $1 = 1^{\mathrm{i}} = (\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}})^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \cdot \mathrm{i}} = \mathrm{e}^{-2\pi} \approx 0.002 < 1$. Fehler?

(2) Für $a \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $a^0 := 1$ und rekursiv $a^{n+1} := a^n \cdot a$. Für $a \in \mathbb{C}^*$ setzen wir $a^{-n} = 1/a^n$. Welche Potenzgesetze gelten hier?

(3) Für $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und $z \in \mathbb{R}$ sei $a^z := \mathrm{e}^{z \ln a}$ Welche Regeln gelten?

(4) Für $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und $z \in \mathbb{C}$ sei $a^z := \mathrm{e}^{z \ln a}$. Welche Regeln gelten?

(5) Ist $a^z := \mathrm{e}^{z \ln a}$ eine brauchbare Definition für alle $a, z \in \mathbb{C}$?

⚠ Die Potenzgesetze lassen sich nicht naiv von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ fortsetzen! Vielleicht empfinden Sie die Redlichkeit und Sorgfalt als übertrieben, die ich für komplexe Logarithmen F225 und Wurzeln F229 aufwende. Die drastischen Beispiele sollen Sie gegen gefährliche Sorglosigkeit impfen.

(2) Für $a \in (\mathbb{C}^*, \cdot, 1)$ und $z \in \mathbb{Z}$ gelten alle üblichen Potenzgesetze:

$$1^z = 1, \quad (ab)^z = a^z b^z, \qquad a^0 = 1, \quad a^{w+z} = a^w \cdot a^z, \qquad a^1 = a, \quad (a^w)^z = a^{w \cdot z}.$$

Allgemeiner als $(\mathbb{R}^*, \cdot, 1)$ und $(\mathbb{C}^*, \cdot, 1)$ gilt dies für jede kommutative Gruppe $(G, \cdot, 1)$.
(3) Auch für $a \in (\mathbb{R}_{>0}, \cdot, 1)$ und $z \in \mathbb{R}$ gelten alle sechs Potenzgesetze. (So sind Sie's gewohnt.)
(4) Für $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und $z \in \mathbb{C}$ gelten diese Regeln bis auf die letzte! Als Gegenbeispiel siehe (1).
(5) Nein, denn für $a \in \mathbb{C}$ sind $\ln a$ und somit $\mathrm{e}^{z \ln a}$ nicht eindeutig! Als Gegenbeispiel siehe (1).

Satz F5A: Existenz von Logarithmusfunktionen

Für jedes Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{C}^*$ sind äquivalent:

1. Auf Ω existiert eine Logarithmusfunktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$.
2. Auf Ω hat $1/z$ eine Stammfunktion $g : \Omega \to \mathbb{C}$, $g'(z) = 1/z$.
3. Es gilt $\oint_\gamma 1/z \,\mathrm{d}z = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ in Ω.
   Das heißt, der Nullpunkt wird von Wegen in Ω nicht umlaufen.

Aufgabe: Beweisen Sie sorgfältig die Äquivalenzen (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3). Das ist das zentrale Beispiel für das ebene Potentialproblem. E361

Lösung: (1) $\Rightarrow$ (2): Wir zeigen $f'(z) = 1/z$ mit der Definition F2A. Sei $z_n \to z$ eine konvergente Folge in Ω. Für die Bildfolge $w_n = f(z_n)$ und $w = f(z)$ gilt dann $w_n \to w$ dank Stetigkeit von f. Hieraus folgt:

$$\frac{f(z) - f(z_n)}{z - z_n} = \frac{w - w_n}{\mathrm{e}^w - e^{w_n}} = \left[\frac{\mathrm{e}^w - \mathrm{e}^{w_n}}{w - w_n}\right]^{-1} \to \left[\mathrm{e}^w\right]^{-1} = \frac{1}{z}$$

Somit ist f für alle $z \in \Omega$ differenzierbar mit Ableitung $f'(z) = 1/z$. Da somit auch f' stetig ist, ist f holomorph gemäß Definition F2C.

(2) $\Rightarrow$ (1): Dank Produktregel gilt $\left[z\,\mathrm{e}^{-g(z)}\right]' = \left[1 - zg'(z)\right]\mathrm{e}^{-g(z)} = 0$. Demnach ist $z\,\mathrm{e}^{-g(z)} \neq 0$ konstant, also $z\,\mathrm{e}^{-g(z)} = \mathrm{e}^c$ für ein $c \in \mathbb{C}$. Somit ist $f(z) = g(z) + c$ eine Logarithmusfunktion, wie behauptet.

(2) $\Rightarrow$ (3): Sei $\gamma : [a, b] \to \Omega$ ein geschlossener Weg, also $\gamma(a) = \gamma(b)$. Dank HDI verschwindet das Wegintegral $\oint_\gamma 1/z \,\mathrm{d}z = \left[g(z)\right]_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} = 0$.

(3) $\Rightarrow$ (2): Wir fixieren einen Basispunkt $z_0 \in \Omega$. Zu jedem Punkt $z \in \Omega$ existiert ein Weg $\alpha : [0, 1] \to \Omega$ von $\alpha(0) = z_0$ nach $\alpha(1) = z$, da wir Ω als zusammenhängend voraussetzen. Wir definieren nun $g(z) := \int_\alpha 1/z \,\mathrm{d}z$. Wegen $\oint 1/z \,\mathrm{d}z = 0$ ist dies wohldefiniert, das heißt: $g(z)$ hängt nur von z ab und nicht von der willkürlichen Wahl des Integrationsweges α. Dank HDI gilt dann $g'(z) = 1/z$. (Cauchy–Riemann, analog zu H2A.)

Beispiel: Den Hauptzweig $\ln_0 : \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{C}$ des Logarithmus erhalten wir durch $\ln_0(z) = \int_{[1,z]} 1/z \,\mathrm{d}z$. Hierzu wählen wir den direkten Weg $[1, z]$ von 1 nach z; jeder andere Weg in $\mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ ergibt dasselbe. E363

Für den Zweig $\ln_\pi : \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ gilt ebenso $\ln_\pi(z) = \mathrm{i}\pi + \int_{[-1,z]} 1/z \,\mathrm{d}z$.

Komplexe Funktionen und Differenzierbarkeit

Aufgabe: (1) Ist $f(z) = 1/z$ holomorph? (2) Ist $g(z) = 1/\overline{z}$ holomorph?
(3) Für welche Konstanten $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $h : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ mit

$$h(x + \mathrm{i}y) = \frac{x}{x^2 + y^2} + a\mathrm{i}\frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{holomorph?}$$

Lösung: (1) Es gilt $f(z) = \dfrac{1}{x + \mathrm{i}y} = \dfrac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2} = \underbrace{\dfrac{x}{x^2 + y^2}}_{= u(x,\,y)} + \mathrm{i}\ \underbrace{\dfrac{-y}{x^2 + y^2}}_{= v(x,\,y)}.$

Wir prüfen die Cauchy–Riemann–Gleichungen... Diese sind erfüllt:

$$\partial_x u = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad \partial_x v = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$
$$\partial_y u = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad \partial_y v = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Alternativ & kürzer: $f(z) = 1/z$ ist eine Laurent–Reihe, also holomorph.
(2) Für $g(z) = u(x, y) - \mathrm{i}v(x, y)$ hingegen gilt Cauchy–Riemann nicht!
(3) Für $h(z) = u(x, y) - \mathrm{i}av(x, y)$ gilt Cauchy–Riemann nur bei $a = -1$!

☺ Die Cauchy–Riemann–Gleichungen F2E sind bequem und hilfreich.

Komplexe Funktionen und Differenzierbarkeit

Aufgabe: Wir untersuchen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>0} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(x + \mathrm{i}y) = x^3y^2 + \mathrm{i}x^2y^3, \qquad g(x + \mathrm{i}y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + \mathrm{i}\arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

(1) In welchen Punkten (x, y) sind f, g partiell differenzierbar?
(2) In welchen Punkten (x, y) sind f, g komplex differenzierbar?
(3) Begründen oder widerlegen Sie: g ist holomorph mit $g'(z) = 1/z$.

Lösung: (1) Die Funktionen f, g sind überall stetig partiell diff'bar:

$$\partial_x f(x, y) = 3x^2y^2 + 2\mathrm{i}xy^3, \qquad \partial_y f(x, y) = 2x^3y + 3\mathrm{i}x^2y^2,$$
$$\partial_x g(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} + \mathrm{i}\frac{-y}{x^2 + y^2}, \qquad \partial_y g(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} + \mathrm{i}\frac{x}{x^2 + y^2}.$$

(2) Für f ist Cauchy–Riemann äquivalent zu $2xy^3 = -2x^3y$, also $xy(y^2 + x^2) = 0$. Das ist nur auf den Achsen $x = 0$ und $y = 0$ erfüllt.

Die Funktion g erfüllt die Cauchy–Riemann–Gleichungen überall, ist also komplex differenzierbar, und somit holomorph auf $\mathbb{C}_{\mathrm{Re}>0}$.

(3) Diese Rechnungen zeigen: g ist holomorph mit $g'(z) = 1/z$.

☺ Wie in Satz F2M ist g der Hauptzweig des Logarithmus auf $\mathbb{C}_{\mathrm{Re}>0}$.

Holomorphe und harmonische Funktionen

F511
Übung

Zur Erinnerung: Der **Laplace–Operator** in der Ebene ist $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$. Eine C^2–Funktion $u : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \to \mathbb{R}$ heißt **harmonisch**, wenn $\Delta u = 0$ gilt.

Aufgabe: (1) Ist $f : \mathbb{C} \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, dann sind Realteil $u = \operatorname{Re} f$ und Imaginärteil $v = \operatorname{Im} f$ harmonisch. Prominente Beispiele sind:

$$\mathrm{e}^x \cos y, \quad \mathrm{e}^x \sin y, \quad \log|z|, \quad \arctan(y/x).$$

(2) Kann $h : \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>0} \to \mathbb{C}$ holomorph sein mit $h(x + \mathrm{i}y) = x^x + \mathrm{i}v(x, y)$?

Lösung: (1) Jede holomorphe Funktion f ist beliebig oft diff'bar (F3E), somit auch u, v. Wir können den Satz von Schwarz (D4A) anwenden. Dank Cauchy–Riemann–Gleichungen $\partial_x u = \partial_y v$ und $\partial_y u = -\partial_x v$ gilt

$$\begin{aligned} \Delta u &= \partial_x \partial_x u + \partial_y \partial_y u = +\partial_x \partial_y v - \partial_y \partial_x v = 0, \\ \Delta v &= \partial_x \partial_x v + \partial_y \partial_y v = -\partial_x \partial_y u + \partial_y \partial_x u = 0. \end{aligned}$$

(2) Nach (1) müsste $u(x, y) = x^x$ harmonisch sein, ist sie aber nicht:

$$\begin{aligned} \partial_x x^x &= \partial_x(\mathrm{e}^{x \ln x}) = \mathrm{e}^{x \ln x} \cdot (x/x + \ln x) = x^x(1 + \ln x), \\ \partial_x^2 x^x &= \partial_x\big(x^x(1 + \ln x)\big) = x^x\big((1 + \ln x)^2 + 1/x\big) = \Delta u. \end{aligned}$$

Daher gilt $\Delta u \neq 0$, z.B. für $x = 1$. Also kann h nicht holomorph sein!

Komplexe Funktionen und Wegintegrale

F512
Übung

Aufgabe: Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto |z|$. Berechnen Sie die Wegintegrale

(1) $\int_\alpha f(z)\,\mathrm{d}z$ auf direktem Wege α von 1 nach -1 auf der x-Achse,

(2) $\int_\beta f(z)\,\mathrm{d}z$ von 1 nach -1 aber über den oberen Halbkreis β.

(3) Kann demnach die Funktion f holomorph sein?

Lösung: (1) Für $\alpha : [-1, 1] \to \mathbb{C}$ mit $\alpha(t) = -t$ gilt $\alpha'(t) = -1$ und somit

$$\int_\alpha f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-1}^{1} |t| \cdot (-1)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 -t\,\mathrm{d}t = \Big[-t^2\Big]_0^1 = -1$$

(2) Für $\beta : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ mit $\beta(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ gilt $f(\beta(t)) = |\beta(t)| = 1$ und somit

$$\int_\beta f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^\pi 1 \cdot \beta'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[\beta(t)\Big]_0^\pi = -2$$

(3) Der Weg α umgekehrt orientiert und β parametrisieren den Rand des Halbkreises. Wäre f holomorph, dann folgte dank Residuensatz

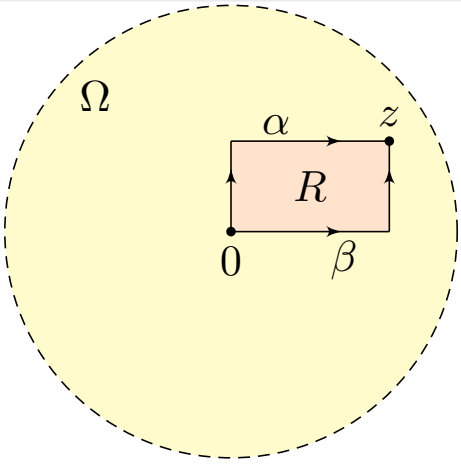
$$\int_\beta f(z)\,\mathrm{d}z - \int_\alpha f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

☺ Dieses Integralkriterium ist sogar äquivalent zur Holomorphie (F5B).

Holomorphie als Integralbedingung

Satz F5B: Integralkriterium, Morera 1886

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig. Genau dann ist f holomorph, wenn $\oint_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ gilt für jedes Rechteck $R = [a,b] \times [c,d] \subseteq \Omega$.



Erinnerung: f holomorph bedeutet stetig komplex differenzierbar (F2C). Diese Bedingung ist extrem stark: f lässt sich lokal in eine Potenzreihe entwickeln und ist somit sogar beliebig oft differenzierbar (Satz F3E). Die zweite Bedingung nutzt nur die Stetigkeit von f und eine einfache Integralbedingung. Die Äquivalenz ist daher überaus bemerkenswert!

Holomorphie als Integralbedingung

☺ Manchmal ist das Integralkriterium leichter zu handhaben als das Ableitungskriterium; dazu nützt dieser Satz. Anwendung: Angenommen, $f_1, f_2, f_3, \ldots : \Omega \to \mathbb{C}$ konvergieren lokal gleichmäßig gegen $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Sind alle f_k stetig, so auch f. Sind alle f_k holomorph, so auch f.

Aufgabe: Beweisen Sie Satz F5B anhand folgender Rechnungen:

(1) Die Implikation „$\Rightarrow$“ kennen wir bereits viel allgemeiner: Woher?

(2) Zur Umkehrung „$\Leftarrow$“ genügt es, $\Omega = B(0,r)$ zu betrachten: Warum? Hierauf definieren wir $F, G : \Omega \to \mathbb{C}$ durch die beiden Hakenintegrale:

$$F(x+\mathrm{i}y) := \int_\alpha f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{t=0}^{y} f(\mathrm{i}t)\mathrm{i}\,\mathrm{d}t + \int_{t=0}^{x} f(t+\mathrm{i}y)\,\mathrm{d}t$$

$$\overset{!}{=} \quad G(x+\mathrm{i}y) := \int_\beta f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{t=0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{t=0}^{y} f(x+\mathrm{i}t)\mathrm{i}\,\mathrm{d}t$$

(a) Berechnen Sie hiermit die partiellen Ableitungen $\partial_x F$ und $\partial_y G$.
(b) Warum gilt $F = G$? (c) Erfüllt F die Cauchy–Riemann–Gleichungen?
(d) Ist F holomorph? und damit auch die komplexe Ableitung $f = F'$?

Holomorphie als Integralbedingung

Lösung: „⇒“: Ist f holomorph, so folgt $\int_{\partial D} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ dank Cauchys Integralsatz F3A für jedes Kompaktum $D \subseteq \Omega$ mit ∂D stückweise glatt.

☺ Dies gilt insbesondere für jedes Rechteck $R = [a,b] \times [c,d] \subseteq \Omega$.

„⇐“: Für die Holomorphie genügt es, $B(z_0, r) \subseteq \Omega$ zu betrachten: Differenzierbarkeit (komplex oder reell) ist eine lokale Eigenschaft.

Nach Einschränken und Verschieben dürfen wir $\Omega = B(0,r)$ annehmen. Die Funktionen $F, G : \Omega \to \mathbb{C}$ definieren wir dann durch obige Integrale. Für $h \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ und $h \to 0$ finden wir dank HDI folgende Grenzwerte:

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_{t=x}^{x+h} f(t+\mathrm{i}y)\,\mathrm{d}t \quad \to \quad f(x+\mathrm{i}y) = f(z)$$

$$\frac{G(z+\mathrm{i}h) - G(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_{t=y}^{y+h} f(x+\mathrm{i}t)\mathrm{i}\mathrm{d}t \quad \to \quad \mathrm{i}f(x+\mathrm{i}y) = \mathrm{i}f(z)$$

☺ Somit existiert die Ableitung $\partial_x F(x+\mathrm{i}y)$ und ist gleich $f(x+\mathrm{i}y)$. Ebenso existiert die Ableitung $\partial_y G(x+\mathrm{i}y)$ und ist gleich $\mathrm{i}f(x+\mathrm{i}y)$.

Holomorphie als Integralbedingung

⚠ Für $\partial_y F(x+\mathrm{i}y)$ und $\partial_x G(x+\mathrm{i}y)$ läuft es nicht so einfach! Wir können nicht unter den Integralen ableiten, da wir über f noch nichts wissen.

☺ Wir nutzen nun unsere Voraussetzung $\oint_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ speziell für das Rechteck $R = [0,x] \times [0,y] \subseteq \Omega$, wie in der Skizze gezeigt:

$$G(x+\mathrm{i}y) - F(x+\mathrm{i}y) = \int_\beta f(z)\,\mathrm{d}z - \int_\alpha f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Dies gilt für alle Punkte $(x+\mathrm{i}y) \in \Omega$, also folgt $F = G$ auf ganz Ω. Somit existiert die Ableitung $\partial_y F(x+\mathrm{i}y)$ und ist gleich $\mathrm{i}f(x+\mathrm{i}y)$.

Damit ist $F : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig partiell differenzierbar und erfüllt die Cauchy–Riemann–Gleichungen, denn $\partial_x F = f = -\mathrm{i}(\mathrm{i}f) = -\mathrm{i}\partial_y F$. Dank Satz F2E ist demnach unsere Funktion $F : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph!

Dank Entwicklungssatz F3E können wir F in eine konvergente Potenzreihe $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ entwickeln. Somit ist F beliebig oft komplex differenzierbar, und auch die Ableitung $f = F'$ ist holomorph.

☺ Unsere sorgfältige Rechnung beweist die ersehnte Umkehrung „⇐“.

Holomorphie ist komplexe Differenzierbarkeit.

Erinnerung: Eine komplexe Funktion $f : \mathbb{C} \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$ ist **holomorph**, wenn f komplex differenzierbar ist und ihre Ableitung $f' : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig. In Definition F2C war es bequem, die Stetigkeit von f' zu fordern. Fordern ist immer bequem, doch nachweisen / überprüfen ist lästig.

☺ Die Stetigkeit von f' müssen wir nicht fordern, wir können sie folgern:

Satz F5C: komplexe Differenzierbarkeit, Goursat 1883

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in jedem Punkt $z \in \Omega$, das heißt, es existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten:

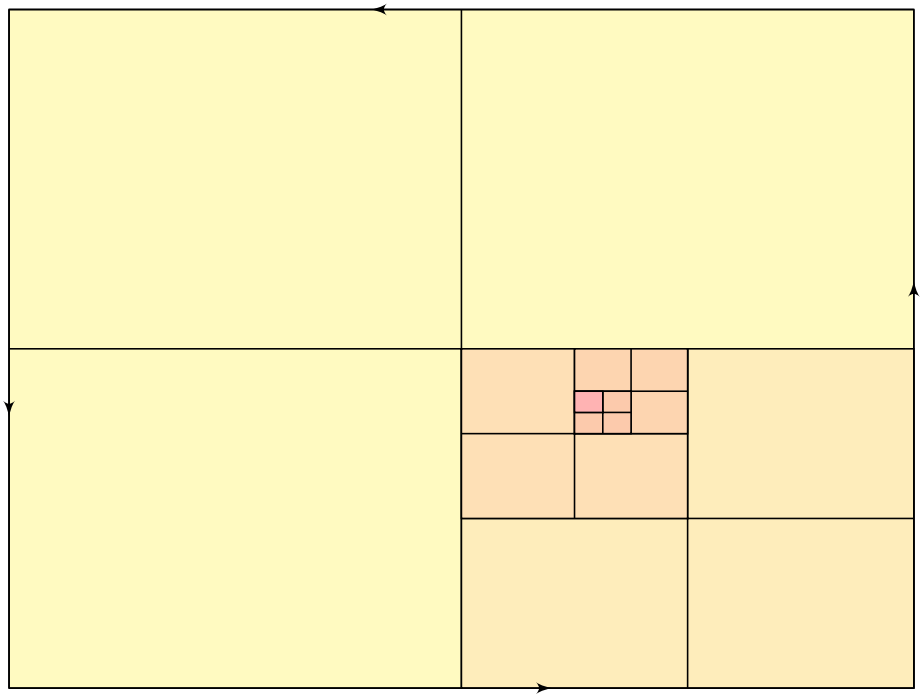
$$f'(z) = \lim_{\Omega \smallsetminus \{z\} \ni \zeta \to z} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$$

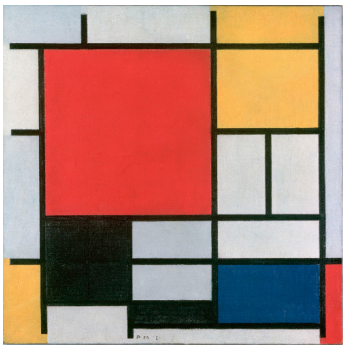
Dann ist f bereits holomorph auf ganz Ω, also sogar komplex analytisch, und somit insbesondere beliebig oft komplex differenzierbar.

☺ Dank Satz F5C müssen Sie in der Praxis weniger nachweisen!
Sie mögen einwenden, dass diese Frage eher eine Spitzfindigkeit ist, aber es ist beruhigend zu wissen und erleichtert tatsächlich Ihre Arbeit.

Holomorphie ist komplexe Differenzierbarkeit.

⚠ Aus reeller Differenzierbarkeit von f folgt nicht Stetigkeit von f', wie das Gegenbeispiel $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$ zeigt. B426





Piet Mondrian, Komposition

Für die Anwendung unserer Integralsätze (Cauchy F3A, Gauß & Green, letztlich also HDI) fehlt uns hier leider die Stetigkeit von f'. Wir haben nur sehr schwache Voraussetzungen und müssen genauer hinsehen.

Holomorphie ist komplexe Differenzierbarkeit.

☺ Der folgende Beweis ist ein Juwel an Sorgfalt und Scharfsinn.

Beweis: Komplexe Differenzierbarkeit von f impliziert Stetigkeit von f. Nach dem Integralkriterium F5B von Morera genügt es daher zu zeigen:

$$I(R) := \oint_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z \overset{!}{=} 0 \quad \text{für jedes Rechteck } R = [a,b] \times [c,d] \subseteq \Omega.$$

Wir beginnen mit einem Rechteck $R_0 \subseteq \Omega$ und zeigen nun $|I(R_0)| = 0$. Wir unterteilen R_0 in vier gleich große Teilrechtecke A, B, C, D. Es gilt $I(R_0) = I(A) + I(B) + I(C) + I(D)$. Wir wählen ein $R_1 \in \{A, B, C, D\}$ mit maximalem Betrag $|I(R_1)|$. So erhalten wir $|I(R_0)| \le 4|I(R_1)|$.

So fortfahrend erhalten wir durch Vierteilung immer kleinere Rechtecke $R_0 \supseteq R_1 \supseteq R_2 \supseteq \cdots \supseteq R_n \supseteq \ldots$ mit $|I(R_0)| \le 4^n |I(R_n)|$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Diese Intervallschachtelung konvergiert gegen einen Punkt z mit $z \in R_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, kurz $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} R_n = \{z\}$, dank Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

Nach Voraussetzung ist f in z differenzierbar. Für $\zeta \in \Omega$ gilt demnach

$$f(\zeta) \quad = \quad f(z) + f'(z)(\zeta - z) + (\zeta - z)\, g(\zeta)$$

mit einer stetigen Funktion $g : \Omega \to \mathbb{C}$ und $g(z) = 0$.

Holomorphie ist komplexe Differenzierbarkeit.

Das Polynom $\zeta \mapsto f(z) + f'(z)(\zeta - z)$ ist holomorph in ζ, demnach gilt

$$\oint_{\partial R_n} f(z) + f'(z)(\zeta - z)\,\mathrm{d}\zeta \quad = \quad 0.$$

Für unser Integral bleibt also nur noch:

$$I(R_n) := \oint_{\partial R_n} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \quad = \quad \oint_{\partial R_n} (\zeta - z)\, g(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

Seinen Absolutbetrag schätzen wir grob ab:

$$\big|I(R_n)\big| \quad \le \quad \ell(\partial R_n) \cdot \max_{\zeta \in \partial R_n} \big|\zeta - z\big| \cdot \max_{\zeta \in \partial R_n} \big|g(\zeta)\big|$$

Der Abstand von $z, \zeta \in R_n$ ist beschränkt durch $|\zeta - z| \le \ell(\partial R_n)$.
Für die Randlängen gilt $\ell(\partial R_n) = \frac{1}{2}\ell(\partial R_{n-1}) = \ldots = 2^{-n}\ell(\partial R_0)$.
Zusammenfassend erhalten wir also die Abschätzungen:

$$\big|I(R_0)\big| \le 4^n \big|I(R_n)\big| \le 4^n \ell(\partial R_n)^2 \max_{\zeta \in \partial R_n} \big|g(\zeta)\big| = \ell(\partial R_0)^2 \max_{\zeta \in \partial R_n} \big|g(\zeta)\big|$$

Für $n \to \infty$ geht der letzte Term gegen 0. Somit folgt $|I(R_0)| = 0$.

Satz F5D: Charakterisierung von Gebieten

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge und nicht leer. Dann sind äquivalent:

(1) Ω ist wegzusammenhängend: Je zwei Punkte $x, y \in \Omega$ sind verbindbar durch einen Weg $\gamma : [0,1] \to \Omega$ von $\gamma(0) = x$ nach $\gamma(1) = y$.

(2) Jede stetige Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ hat als Bild $f(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall.

(3) Jede stetige Funktion $f : \Omega \to \{0,1\}$ ist konstant.

(4) Ω ist zusammenhängend: Für jede Zerlegung $\Omega = U \sqcup V$ in zwei disjunkte offene Mengen U und V gilt entweder $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$.

Bedingung (1) ist am anschaulichsten. Hingegen scheint (4) zunächst weniger anschaulich aber in Beweisen oft die geschickteste Sichtweise.

Beweis: „(1) $\Rightarrow$ (2)“: Seien $a, b \in I$ Bildwerte, also $a = f(x)$ und $b = f(y)$ für $x, y \in \Omega$. Nach (1) existiert ein Weg $\gamma : [0,1] \to \Omega$ von $\gamma(0) = x$ nach $\gamma(1) = y$. Die Komposition $g = f \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist stetig, also ein Weg in $\mathbb{R}$ von $g(0) = a$ nach $g(1) = b$. Nach dem Zwischenwertsatz wird jeder Wert zwischen a und b angenommen. Somit ist $f(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall.

„(2) $\Rightarrow$ (3)“: Das Bild $f(\Omega) \subseteq \{0,1\}$ muss nach (2) ein Intervall sein. Also gilt entweder $f(\Omega) = \{0\}$ oder $f(\Omega) = \{1\}$, und f ist konstant.

„(3) $\Rightarrow$ (4)“: Angenommen wir haben eine offene Zerlegung $\Omega = U \sqcup V$. Wir definieren $f : \Omega \to \{0,1\}$ durch $f(z) = 0$ für $z \in U$ und $f(z) = 1$ für $z \in V$. Diese Funktion ist stetig, denn sie ist lokal konstant.
Nach (3) ist f konstant. Es bleibt somit nur $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$.

„(4) $\Rightarrow$ (1)“: Wir wählen einen Startpunkt $x \in \Omega$. Sei V die Menge aller Punkte $y \in \Omega$, die sich durch einen Weg in Ω mit x verbinden lassen. Diese Menge ist offen, denn um jeden Punkt $y \in V$ existiert eine kleine Kreisscheibe $B(y,r) \subseteq \Omega$ mit Radius $r > 0$, und alle Punkte $z \in B(y,r)$ lassen sich mit y verbinden, also auch mit x, also $B(y,r) \subseteq V$. (Skizze!)

Das Komplement $U = \Omega \smallsetminus V$ besteht aus den Punkten $y \in \Omega$, die sich nicht durch einen Weg in Ω mit x verbinden lassen. Aus demselben Grund wie eben ist auch U offen. Nach (4) gilt $U = \emptyset$, denn $x \in V \neq \emptyset$. Also $V = \Omega$, das heißt, in Ω ist jeder Punkt y mit x verbindbar.

☺ Somit sind alle vier Bedingungen (1)–(4) äquivalent.

Der Identitätssatz für holomorphe Funktionen

Holomorphe, also komplex differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{C} \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$ sind rigide: Wenn wir f in einer kleinen Umgebung $B(z_0, \varepsilon) \subseteq \Omega$ kennen, so bestimmt dies f bereits auf dem gesamten Gebiet Ω! Genauer gilt:

Satz F5E: Identitätssatz für holomorphe Funktionen

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, also offen und zusammenhängend und $\Omega \neq \emptyset$. Für je zwei holomorphe Funktionen $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ sind äquivalent:

(1) Es gilt $f = g$, also Gleichheit $f(z) = g(z)$ in allen Punkten $z \in \Omega$.

(2) Die Menge $\{ z \in \Omega \mid f(z) = g(z) \}$ hat einen Häufungspunkt $z_0 \in \Omega$.

(3) Es gilt $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ in einem Punkt $z_0 \in \Omega$ und für alle $n \in \mathbb{N}$.

⚠ Für reell differenzierbare Funktionen gilt nichts dergleichen (B438): Es gibt glatte Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, also beliebig oft reell differenzierbar, mit $f(x) = 0$ für $x \leq 0$ aber $f(x) > 0$ für alle $x > 0$. Bemerkenswert!

☺ Der Identitätssatz (1) $\Leftrightarrow$ (3) gilt auch für reell-analytische Funktionen, also Funktionen $f : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \to \mathbb{R}^m$, die sich lokal um jeden Punkt $x \in \Omega$ in eine konvergente Potenzreihe entwickeln lassen. Die Äquivalenz zu Bedingung (2) hingegen gilt nur (reell oder komplex) eindimensional.

Der Identitätssatz für holomorphe Funktionen

Beweis: „(1) $\Rightarrow$ (2)“: Jeder Punkt $z_0 \in \Omega$ ist Häufungspunkt von Ω.

„(2) $\Rightarrow$ (3)“: Mit f, g ist auch die Funktion $h = f - g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Nach (2) hat $M = \{ z \in \Omega \mid h(z) = 0 \}$ einen Häufungspunkt $z_0 \in \Omega$. Angenommen $h^{(n)}(z_0) \neq 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten das kleinste n, also $h(z) = (z - z_0)^n h_n(z)$ mit $h_n : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und $h_n(z_0) \neq 0$. Dank Stetigkeit von h_n folgt $h(z) \neq 0$ für alle $z \in B(z_0, \varepsilon) \smallsetminus \{z_0\}$. Also liegt der Punkt z_0 isoliert in M und ist kein Häufungspunkt von M. An diesem Widerspruch zerbricht unsere Annahme $h^{(n)}(z_0) \neq 0$. Also gilt $h^{(n)}(z_0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, somit $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$.

„(3) $\Rightarrow$ (1)“: Wir betrachten die Differenz $h = f - g$ und hierzu die Menge $A = \left\{ z \in \Omega \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N} : h^{(n)}(z) = 0 \right\}$. Die Menge A ist abgeschlossen, denn $h^{(n)}$ ist stetig. Sie ist auch offen, denn um jeden Punkt $z \in A \subseteq \Omega$ können wir h in eine auf $B(z, \varepsilon)$ konvergente Reihe entwickeln; diese ist die Nullreihe, also $B(z, \varepsilon) \subseteq A$. Wir erhalten so die offene Zerlegung $\Omega = A \sqcup (\Omega \smallsetminus A)$. Da Ω zusammenhängend ist und $z_0 \in A$, folgt $A = \Omega$.

Warnung: Für (2) $\Rightarrow$ (3) muss der Häufungspunkt in Ω liegen und nicht etwa auf dem Rand! Typisches Gegenbeispiel: Die Funktion $f(z) = \sin(1/z)$ ist holomorph auf $\Omega = \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ und verschwindet in $z = 1/(k\pi)$ für $k = 1, 2, 3, \ldots$ mit Häufungspunkt 0. Dennoch gilt $f \neq 0$.

Wachstum holomorpher Funktionen

Aufgabe: Sei $f : \Omega = \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion.

(1) Lässt sich f durch eine Laurent–Reihe $f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k$ darstellen? Wenn ja, wie berechnet man die hier benötigten Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$?

(2) Angenommen, f ist beschränkt auf $A = \{\, z \in \mathbb{C} \mid \rho \le |z| < \infty \,\}$. Welche der Koeffizienten a_k müssen hierzu verschwinden? Warum?

(3) Angenommen, f ist beschränkt auf $B = \{\, z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| \le \sigma \,\}$. Welche der Koeffizienten a_k müssen hierzu verschwinden? Warum?

(4) Folgern Sie damit folgenden Satz von Joseph Liouville (1809–1882):

Satz F5F: Liouville

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. Ist f beschränkt, so ist f konstant.

Allgemeiner: Gilt $|f(z)| \le M|z|^n$ für Konstanten $M \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ und alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \ge \rho$, so ist f ein Polynom vom Grad $\le n$.

(5) Sei $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom, also $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$. Angenommen, p hat keine Nullstellen, also $p(z) \ne 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Ist $f(z) = 1/p(z)$ dann holomorph? und beschränkt? also konstant? Folgern Sie hieraus erneut den Fundamentalsatz der Algebra (F3C).

Wachstum holomorpher Funktionen

Lösung: (1) Ja, genau das garantiert Cauchys Entwicklungssatz F3F. Die Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$ erhalten wir durch das komplexe Wegintegral

$$a_k = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial B(0,r)} \frac{f(z)}{z^{k+1}}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{t=0}^{2\pi} \frac{f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^{k+1}}\, r\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \frac{f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^{k}}\,\mathrm{d}t$$

mit $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ und $\mathrm{d}z = r\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t$. Dies gilt für jeden Radius $r > 0$.

(2) Angenommen, es gilt $|f(z)| \le M$ für ein $M \in \mathbb{R}$ und alle z mit $|z| \ge \rho$.

$$|a_k| = \frac{1}{2\pi}\left| \int_{t=0}^{2\pi} \frac{f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^{k}}\,\mathrm{d}t \right| \le \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \left| \frac{f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^{k}} \right| \mathrm{d}t \le \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \frac{M}{r^k}\,\mathrm{d}t \le \frac{M}{r^k}$$

Dies gilt für jeden Radius $r \ge \varrho$. Für $k \ge 1$ und $r \to \infty$ folgt damit $a_k = 0$. Umgekehrt ist klar: Gilt $a_k = 0$ für alle $k \ge 1$, so ist f beschränkt auf A.

(3) Angenommen, es gilt $|f(z)| \le M$ für ein $M \in \mathbb{R}$ und alle $0 < |z| \le \sigma$. Für $r \to 0$ schließen wir wörtlich wie in (2): Für $k \le -1$ folgt $a_k = 0$.

(4) Es gilt (3) und wegen $|f(z)| \le M|z|^n$ zudem (2) für alle $k \ge n+1$.

(5) Mit $p(z) \ne 0$ ist $f(z) = 1/p(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ definiert und holomorph nach Quotientenregel. Zudem ist f beschränkt, also konstant, $p(z) = a_0$.

☺ Jedes nicht-konstante Polynom hat demnach Nullstellen in $\mathbb{C}$.

Hebung von Singularitäten

Satz F5G: Riemannscher Hebbarkeitssatz

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $s \in \Omega$ ein Punkt. Sei $f : \Omega \setminus \{s\} \to \mathbb{C}$ holomorph und zudem beschränkt auf einer kleinen Umgebung $B(s,r) \setminus \{s\} \subseteq \Omega$. Dann erlaubt f eine holomorphe Fortsetzung $\tilde{f} : \Omega \to \mathbb{C}$ im Punkt s.

Wir können also f in den Punkt s hinein holomorph fortsetzen, somit die Lücke im Definitionsgebiet schließen und die Singularität in s beheben.

Aufgabe: Beweisen Sie diesen Satz mit den vorigen Rechnungen.

Lösung: Nach Verschieben können wir $s = 0$ annehmen.
Auf $B(0,r) \setminus \{0\}$ gilt $f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k$ dank Entwicklungssatz F3F.
Nach Voraussetzung gilt $|f(z)| \le M$ für ein $M \in \mathbb{R}$ und alle $0 < |z| < r$.

$$|a_k| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{t=0}^{2\pi} \frac{f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^k}\,\mathrm{d}t\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi}\left|\frac{f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^k}\right|\mathrm{d}t \le \frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi}\frac{M}{r^k}\,\mathrm{d}t \le \frac{M}{r^k}$$

Für $k \le -1$ und $r \to 0$ folgt $a_k = 0$. Wir haben also $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.
Diese Potenzreihe ist auf ganz $B(0,r)$ konvergent und holomorph.

Mittelwerteigenschaft

Satz F5H: Mittelwerteigenschaft und Maximumsprinzip

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. (1) Für $\overline{B}(z_0,r) \subseteq \Omega$ gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi} f(z_0 + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,\mathrm{d}t.$$

Das Integral rechts ist der Mittelwert von f auf der Kreislinie $\partial B(z_0,r)$.
(2) Nimmt $|f(z)|$ in $z_0 \in \Omega$ ein lokales Maximum an, so ist f konstant.

Aufgabe: Beweisen Sie diesen Satz mit den vorigen Rechnungen.

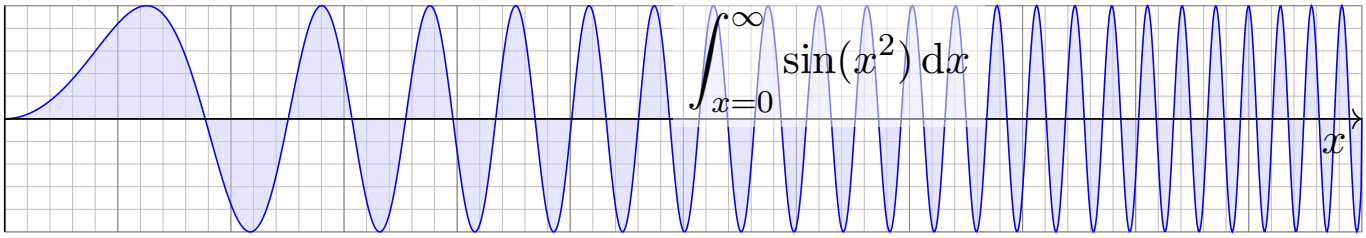
Lösung: (1) Das ist der Entwicklungssatz F3F in z_0 im Spezialfall $k = 0$.
(2) Sei $|f(z)| \le |f(z_0)| =: M$ für alle $z \in \overline{B}(z_0,r) \subseteq \Omega$ mit $r > 0$. Damit:

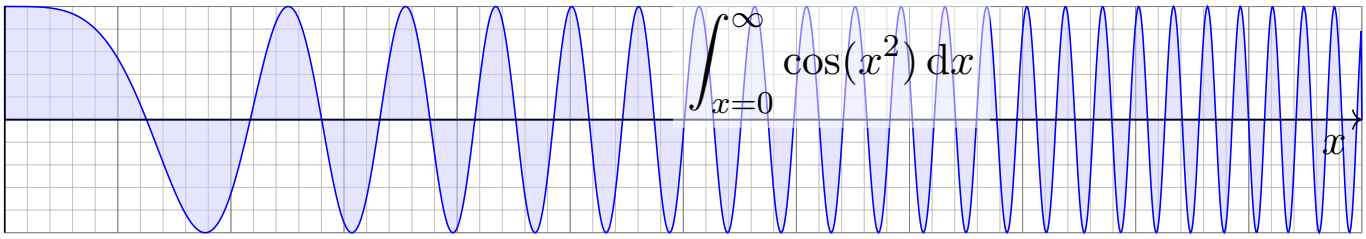
$$M = |f(z_0)| \le \frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi} |f(z_0 + \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})|\,\mathrm{d}t \le M \quad \text{für } 0 \le \rho \le r.$$

Gälte hierbei in einem Punkt die strikte Ungleichung $|f(z_0 + \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})| < M$, so auch in einer Umgebung, und das Integral fiele insgesamt $< M$ aus.
Also ist f konstant auf $\overline{B}(z_0,r)$, also dank Identitätssatz F5E auf ganz Ω.

Fresnel–Integrale

Aufgabe: Ziel der Aufgabe ist die Berechnung der **Fresnel–Integrale**:





Bislang konnten wir nur die Konvergenz sicherstellen. Immerhin! B424
Mit komplexer Integration können wir nun den Grenzwert ausrechnen:

(1) Wiederholen Sie die Berechnung des Integrals $\int_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

(2) Gilt $\int_\alpha \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z = \int_\beta \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z + \int_\gamma \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z$ für die Integrationswege $\alpha, \beta, \gamma : [0, r] \to \mathbb{C}$ mit $\alpha(t) = t(1+\mathrm{i})$, $\beta(t) = t$, $\gamma(t) = r + \mathrm{i}t$?

(3) Gilt $\int_\gamma \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z \to 0$ für $r \to \infty$? Finden Sie eine Abschätzung.

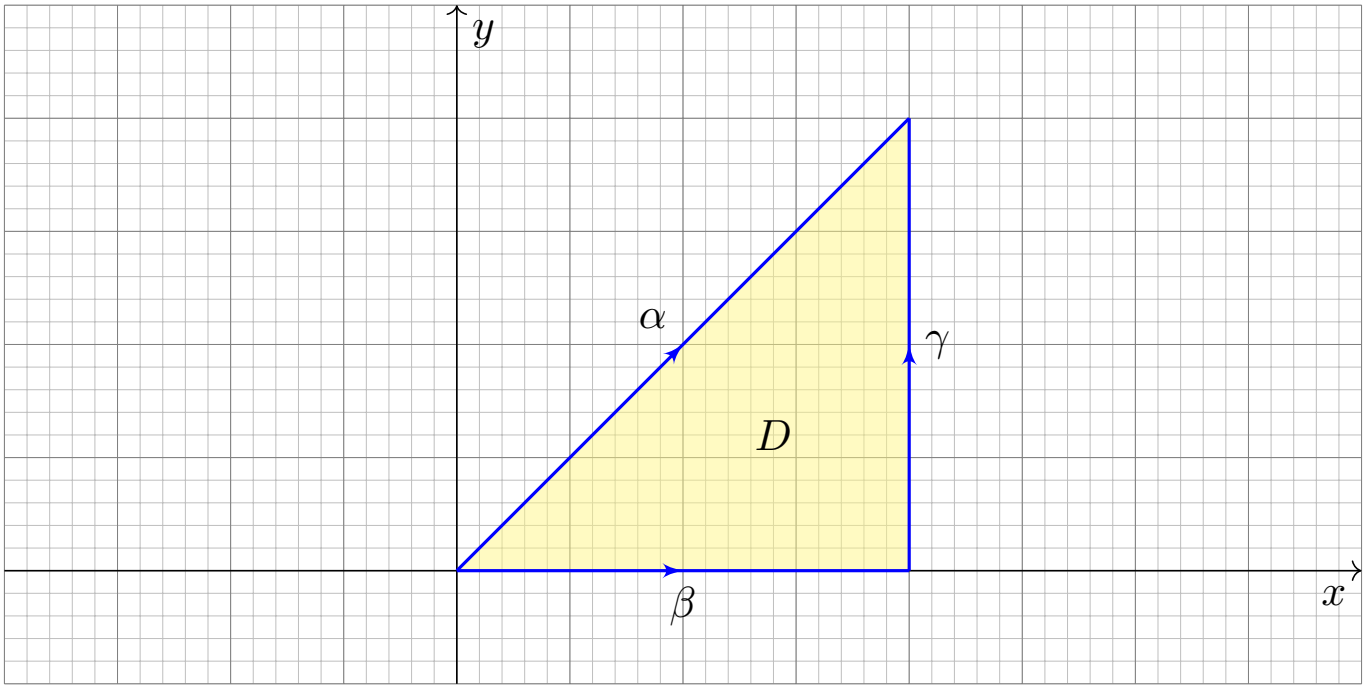
(4) Folgern Sie hieraus den Wert der beiden Fresnel–Integrale.

Fresnel–Integrale

(1) Aus Kapitel C kennen wir das Gaußsche Integral (Satz C2G):

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}, \qquad \int_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(2) Wir betrachten die angegebenen Integrationswege α, β, γ:



Fresnel–Integrale

(2) Die Wege β, γ und (umgekehrt) α umlaufen das Dreieck $D \subseteq \mathbb{C}$.
Da f auf ganz D holomorph ist, folgt $\int_{\partial D} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, ausgeschrieben:

$$\int_\alpha \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z = \int_\beta \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z + \int_\gamma \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z$$

Dies folgt aus Cauchys Integralsatz F3A, oder ebenso aus dem noch allgemeineren Residuensatz F4D, da f keine Singularitäten hat.

(3) Für $r \to \infty$ wollen wir die Konvergenz $\int_\gamma \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z \to 0$ zeigen:

$$\begin{aligned}
\left|\int_\gamma \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_{t=0}^r \mathrm{e}^{-(r+\mathrm{i}t)^2}\,\mathrm{d}t\right| \le \int_{t=0}^r \left|\mathrm{e}^{t^2-r^2-2\mathrm{i}tr}\right|\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{t=0}^r \mathrm{e}^{t^2-r^2}\,\mathrm{d}t \le \int_{t=0}^r \mathrm{e}^{tr-r^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{\mathrm{e}^{tr-r^2}}{r}\right]_{t=0}^r = \frac{1-\mathrm{e}^{-r^2}}{r} \le \frac{1}{r} \to 0
\end{aligned}$$

☺ Das Integral entlang γ fällt schließlich nicht mehr ins Gewicht.

Fresnel–Integrale

(4) Für $r \to \infty$ wissen wir $\int_\beta \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z \to \sqrt{\pi}/2$ dank (1).
Dank (3) gilt $\int_\gamma \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z \to 0$. Mit (2) folgt $\int_\alpha \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z \to \sqrt{\pi}/2$.
Ausgeschrieben bedeutet das:

$$\int_\alpha \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z = \int_{t=0}^r \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t^2}(1+\mathrm{i})\,\mathrm{d}t = \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \int_{x=0}^{\sqrt{2}\,r} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x^2}\,\mathrm{d}x$$

Wir substituieren hier $t = x/\sqrt{2}$ und $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x/\sqrt{2}$.
Für $r \to \infty$ erhalten wir folgenden Grenzwert:

$$\int_{x=0}^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^\infty \cos(x^2) - \mathrm{i}\sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1-\mathrm{i}}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Der Vergleich der Real- und Imaginärteile ergibt:

$$\boxed{\int_{x=0}^\infty \cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^\infty \sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

☺ Eine geschickte Wahl des Integrationsweges wirkt Wunder.

Anwendungsbeispiele zum Residuenkalkül

Aufgabe: (1) Die folgenden Funktionen $h_i : \mathbb{C} \setminus S \to \mathbb{C}$ sind holomorph bis auf isolierte Singularitäten. Bestimmen Sie jeweils alle Residuen:

(a) $h_1(z) = \dfrac{z^2}{z^4 - 1}$, (b) $h_2(z) = \dfrac{z}{(2z^2 + 5z + 2)^2}$,

(c) $h_3(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{\pi z}}{4z^2 - 4z + 5}$, (d) $h_4(z) = \dfrac{\cos z}{z^{k+1}}$ für $k \in \mathbb{N}$.

Das ist die Hauptarbeit dieser Aufgabe. Sie sollen Residuen verstehen und die Werkzeuge zu ihrer Berechnung möglichst effizient einsetzen. Im zweiten Teil nutzen Sie die Residuen zur Berechnung von Integralen: Sei γ_1 der positiv orientierte Rand des Rechtecks mit Ecken $\pm\frac{3}{2} \pm \frac{\mathrm{i}}{2}$ und γ_2 der Rand der Kreisscheibe $B(-1/2, 1)$. Bestimmen Sie die Integrale

$$(2) \int_{\gamma_j} h_i(z)\,\mathrm{d}z \quad \text{für } i = 1,2,3,4 \text{ und } j = 1,2,$$

$$(3) \int_{t=0}^{2\pi} \frac{1}{(4\cos t + 5)^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{und} \quad (4) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 - 1}\,\mathrm{d}x.$$

In welchem Sinne konvergiert das letzte Integral? absolut? uneigentlich?

Anwendungsbeispiele zum Residuenkalkül

Lösung: (1) Wir berechnen zunächst die Residuen mit F4B bzw. F4C.

(a) Die Funktion $h_1(z) = \dfrac{z^2}{(z-1)(z+1)(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})}$ hat einfache Pole:

$$\operatorname*{res}_{z_0} h_1 = \lim_{z \to z_0} \frac{z^2}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z^4 - 1)} = \lim_{z \to z_0} \frac{z^2}{4z^3} = \frac{1}{4z_0} \qquad \text{für } z_0 = \pm 1, \pm\mathrm{i}, \text{ also}$$

$$\operatorname*{res}_{+1} h_1 = +\frac{1}{4}, \qquad \operatorname*{res}_{-1} h_1 = -\frac{1}{4}, \qquad \operatorname*{res}_{+\mathrm{i}} h_1 = -\frac{\mathrm{i}}{4}, \qquad \operatorname*{res}_{-\mathrm{i}} h_1 = +\frac{\mathrm{i}}{4}$$

(b) Für h_2 faktorisieren wir den Nenner (dank Mitternachtsformel) gemäß

$$2z^2 + 5z + 2 = 2(z+2)(z+1/2).$$

Die Funktion $h_2(z) = \dfrac{z}{4(z+2)^2(z+1/2)^2}$ hat in $-2, -1/2$ doppelte Pole:

$$\operatorname*{res}_{-2} h_2 = \lim_{z \to -2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{z}{4(z+1/2)^2}\right] = \lim_{z \to -2} \frac{4(z+\frac{1}{2})^2 - z \cdot 8(z+1/2)}{(4(z+1/2)^2)^2} = -\frac{5}{27}$$

$$\operatorname*{res}_{-\frac{1}{2}} h_2 = \lim_{z \to -\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{z}{4(z+2)^2}\right] = \lim_{z \to -\frac{1}{2}} \frac{4(z+2)^2 - z \cdot 8(z+2)}{(4(z+2)^2)^2} = +\frac{5}{27}$$

Anwendungsbeispiele zum Residuenkalkül

(c) Wir untersuchen die Funktion

$$h_3(z) = \frac{\mathrm{e}^{\pi z}}{4z^2 - 4z + 5}.$$

Wir faktorisieren den Nenner (dank Mitternachtsformel) gemäß

$$4z^2 - 4z + 5 = 4\big[z - (1/2 + \mathrm{i})\big]\big[z - (1/2 - \mathrm{i})\big].$$

Für die einfachen Pole $1/2 \pm \mathrm{i}$ berechnen wir die Residuen vermöge

$$\operatorname*{res}_{z_0} h_3 = \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{e}^{\pi z}}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(4z^2 - 4z + 5)} = \frac{\mathrm{e}^{\pi z_0}}{8z_0 - 4} \qquad \text{für } z_0 = 1/2 \pm \mathrm{i}, \text{ alternativ}$$

$$\operatorname*{res}_{\frac{1}{2}+\mathrm{i}} h_3 = \lim_{z \to \frac{1}{2}+\mathrm{i}} \frac{\mathrm{e}^{\pi z}}{4\big[z - (1/2 - \mathrm{i})\big]} = \frac{\mathrm{e}^{\pi(\frac{1}{2}+\mathrm{i})}}{4(1/2 + \mathrm{i} - 1/2 + \mathrm{i})} = \frac{-\,\mathrm{e}^{\pi/2}}{8\mathrm{i}} = +\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\pi/2}}{8},$$

$$\operatorname*{res}_{\frac{1}{2}-\mathrm{i}} h_3 = \lim_{z \to \frac{1}{2}-\mathrm{i}} \frac{\mathrm{e}^{\pi z}}{4\big[z - (1/2 + \mathrm{i})\big]} = \frac{\mathrm{e}^{\pi(\frac{1}{2}-\mathrm{i})}}{4(1/2 - \mathrm{i} - 1/2 - \mathrm{i})} = \frac{-\,\mathrm{e}^{\pi/2}}{-8\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\pi/2}}{8}.$$

Anwendungsbeispiele zum Residuenkalkül

(d) Wir untersuchen die Funktion $h_4(z) = \cos(z)/z^{k+1}$ für $k \in \mathbb{N}$.
Die einzige Polstelle von h_4 ist $z_0 = 0$; sie hat die Ordnung $k + 1$.
Satz F4C für die Residuen mehrfacher Polstellen ergibt dann

$$\operatorname*{res}_{z=0} h_4(z) = \lim_{z \to 0} \frac{1}{k!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^k \left[z^{k+1} h_4(z)\right] = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!} & \text{falls } k = 2\ell \text{ gerade.} \end{cases}$$

☺ Die Ableitungen sind zu unserem Glück hier sehr übersichtlich.

Alternativ entwickeln wir h_4 in eine Laurent–Reihe um $z_0 = 0$:

$$h_4(z) \;=\; \frac{1}{z^{k+1}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!} z^{2\ell} \;=\; \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!} z^{2\ell-k-1}$$

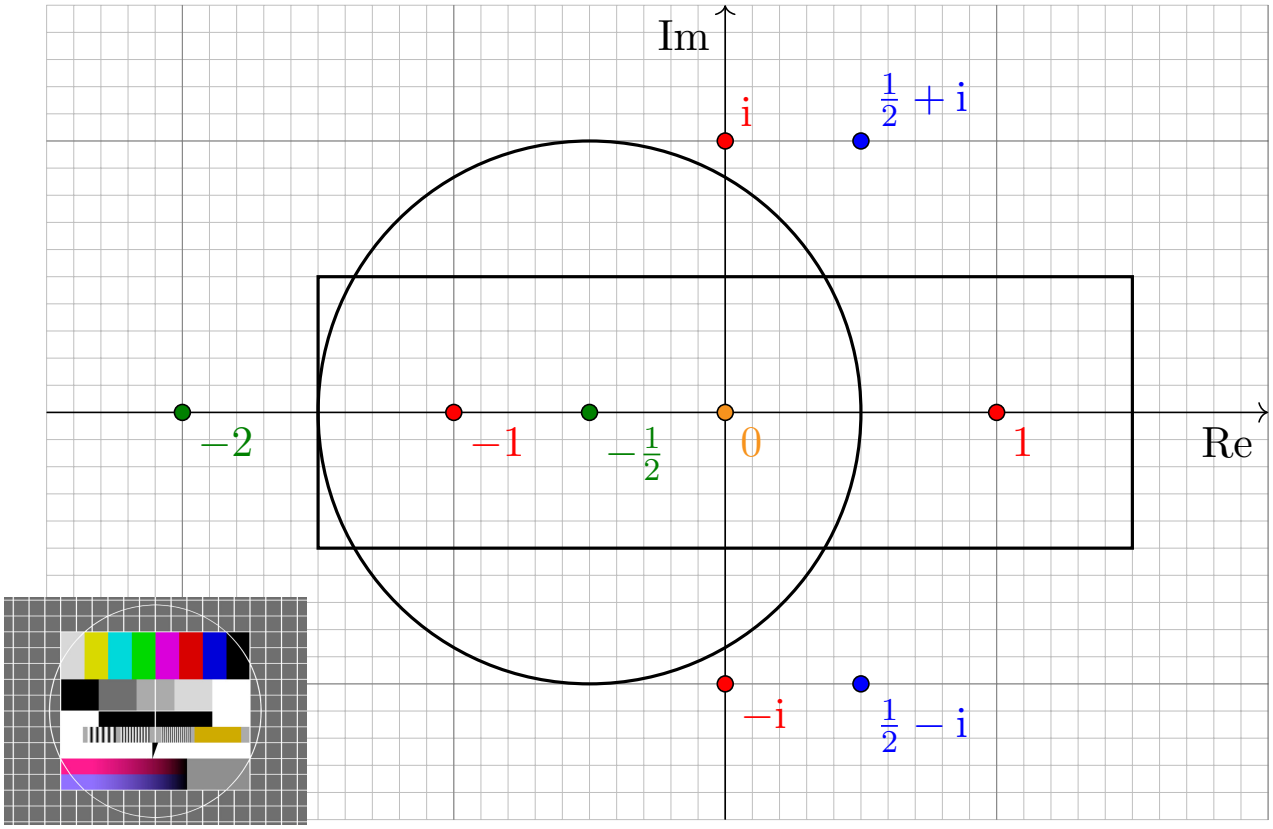
Das Residuum ist dann der Koeffizient vor z^{-1}, also

$$\operatorname*{res}_{z=0} h_4(z) = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!} & \text{falls } k = 2\ell \text{ gerade.} \end{cases}$$

☺ Die Reihenentwicklung ist zu unserem Glück hier sehr übersichtlich.

Anwendungsbeispiele zum Residuenkalkül

(2) Dank Residuensatz F4D müssen wir zur Berechnung der Integrale nur die Residuen aufsummieren, die im Rechteck bzw. im Kreis liegen.



Anwendungsbeispiele zum Residuenkalkül

Die Pole innerhalb des Rechtecks sind: 0 und $-\frac{1}{2}$ und ± 1.

Die Pole innerhalb des Kreises sind: 0 und $-\frac{1}{2}$ und -1.

Dank Residuensatz F4D erhalten wir schließlich die acht Integrale

$$\int_{\gamma_1} h_1(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left[\operatorname*{res}_{+1} h_1 + \operatorname*{res}_{-1} h_1\right] = 0,$$

$$\int_{\gamma_2} h_1(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left[\operatorname*{res}_{-1} h_1\right] = -\frac{1}{2}\pi\mathrm{i},$$

$$\int_{\gamma_1} h_2(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} h_2(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left[\operatorname*{res}_{-1/2} h_2\right] = \frac{10}{27}\pi\mathrm{i},$$

$$\int_{\gamma_1} h_3(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} h_3(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

$$\int_{\gamma_1} h_4(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} h_4(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left[\operatorname*{res}_{0} h_4\right] = \begin{cases} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!} & \text{für } k = 2\ell, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

☺ Es genügt jeweils, die Residuen aus Teil (1) zu summieren.

Anwendungsbeispiele zum Residuenkalkül

(3) Gesucht ist das reelle Integral

$$\int_{t=0}^{2\pi} \frac{1}{(4\cos t + 5)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Dies berechnen wir als komplexes Integral mit Hilfe von Satz F4H:
Der Integrand ist $R(x,y) = 1/(4x+5)^2$ mit $x = \cos t$ und $y = \sin t$.
Wir nutzen die Euler–Formel $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i}\sin t$ und substituieren

$$\cos t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}, \qquad \sin t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}} = \frac{z - z^{-1}}{2\mathrm{i}},$$

$$f(z) \;=\; \frac{1}{\mathrm{i}z} \cdot \frac{1}{(2(z+z^{-1})+5)^2} \;=\; -\mathrm{i}\frac{z}{(2z^2+5z+2)^2} \;=\; -\mathrm{i}h_2(z)$$

Hier ist $-1/2$ die einzige Polstelle in $B(0,1)$. Dank F4H erhalten wir:

$$\int_{t=0}^{2\pi} \frac{1}{(4\cos t + 5)^2}\,\mathrm{d}t \;=\; \int_{\partial B(0,1)} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 2\pi\mathrm{i}\cdot(-\mathrm{i}) \operatorname*{res}_{-1/2} h_2 \;=\; \frac{10}{27}\pi$$

☺ Links muss man integrieren, rechts nur Residuen summieren!

Anwendungsbeispiele zum Residuenkalkül

(4) Gesucht ist das reelle Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4-1}\,\mathrm{d}x.$$

Dies berechnen wir mit Hilfe des Residuensatzes F4K und Teil (1):

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4-1}\,\mathrm{d}x &= 2\pi\mathrm{i}\operatorname*{res}_{\mathrm{i}} h_1 + \pi\mathrm{i}\operatorname*{res}_{1} h_1 + \pi\mathrm{i}\operatorname*{res}_{-1} h_1 \\ &= 2\pi\mathrm{i}\left[-\frac{\mathrm{i}}{4}\right] + \pi\mathrm{i}\left[\frac{1}{4}\right] + \pi\mathrm{i}\left[-\frac{1}{4}\right] \;=\; \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

☺ Links muss man integrieren, rechts nur Residuen summieren!

⚠ Der Integrand ist weder absolut noch uneigentlich integrierbar.
Unter dem Integral verstehen wir daher den Cauchy–Hauptwert:

$$\lim_{r\to\infty}\left(\int_{-r}^{-1-1/r} \frac{x^2}{x^4-1}\,\mathrm{d}x + \int_{-1+1/r}^{1-1/r} \frac{x^2}{x^4-1}\,\mathrm{d}x + \int_{1+1/r}^{r} \frac{x^2}{x^4-1}\,\mathrm{d}x\right)$$

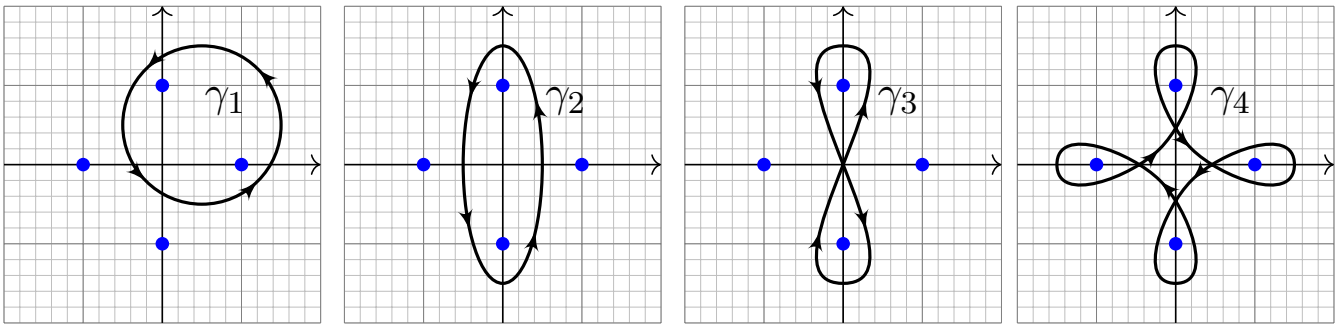
☺ Mit dieser Vorsichtsmaßnahme gelingt die Rechnung wie erhofft.

Residuen und Partialbrüche

Aufgabe: (1) Berechnen Sie das Wegintegral

$$\boxed{\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{1}{z^4-1}\,\mathrm{d}z}$$

für jeden der folgenden geschlossenen Wege $\gamma_i : [a,b] \to \mathbb{C}$.



Die markierten Punkte sind die Polstellen des Integranden. Ausführlich:

(2) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung über $\mathbb{R}$ und über $\mathbb{C}$

(3) Berechnen Sie alle Polstellen und dort jeweils das Residuum.

Welche Reihenfolge der Rechnungen (1,2,3) scheint Ihnen geschickt?

Residuen und Partialbrüche

Lösung: Seit diesem Kapitel verfügen wir über effiziente Werkzeuge zur Berechnung von Residuen, daher bietet sich die Reihenfolge (3,2,1) an.

(3) Die Nullstellen von z^4-1 sind die vierten Einheitswurzeln $\pm 1, \pm\mathrm{i}$.
Im Falle einfacher Polstellen, wie hier, können wir Satz F4B nutzen:

$$\operatorname*{res}_{z=z_0}\left[\frac{p(z)}{q(z)}\right] = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

Wir erhalten so bequem und effizient die gesuchten vier Residuen:

$$\operatorname*{res}_{(+1)}(f) = \lim_{z\to+1}\left[\frac{1}{4z^3}\right] = +\frac{1}{4}$$

$$\operatorname*{res}_{(-1)}(f) = \lim_{z\to-1}\left[\frac{1}{4z^3}\right] = -\frac{1}{4}$$

$$\operatorname*{res}_{(+\mathrm{i})}(f) = \lim_{z\to+\mathrm{i}}\left[\frac{1}{4z^3}\right] = +\frac{\mathrm{i}}{4}$$

$$\operatorname*{res}_{(-\mathrm{i})}(f) = \lim_{z\to-\mathrm{i}}\left[\frac{1}{4z^3}\right] = -\frac{\mathrm{i}}{4}$$

☺ Der Residuenkalkül gelingt uns leicht dank effizienter Werkzeuge!

Residuen und Partialbrüche

(2) Wir zerlegen den Nenner in seine Linearfaktoren über $\mathbb{C}$:

$$z^4 - 1 = (z-1)(z+1)(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})$$

Alle Faktoren sind einfach. Die Partialbruchzerlegung (kurz PBZ) der Funktion $1/(z^4-1)$ hat daher die besonders einfache Form

$$\frac{1}{z^4-1} = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z+1} + \frac{c}{z-\mathrm{i}} + \frac{d}{z+\mathrm{i}}.$$

Die Konstanten $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ sind hierbei noch zu berechnen, etwa durch Koeffizientenvergleich, oder bequem und mühelos dank Residuen:

$$\frac{1}{z^4-1} = \frac{1}{4(z-1)} - \frac{1}{4(z+1)} + \frac{\mathrm{i}}{4(z-\mathrm{i})} - \frac{\mathrm{i}}{4(z+\mathrm{i})}$$

Umgekehrt lassen sich aus der PBZ auch direkt die Residuen ablesen. Über $\mathbb{R}$ fassen wir $(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i}) = z^2+1$ zusammen und erhalten:

$$\frac{1}{z^4-1} = \frac{1}{4(z-1)} - \frac{1}{4(z+1)} - \frac{1}{2(z^2+1)}$$

☺ Der Residuenkalkül nützt uns auch bei der Partialbruchzerlegung!

Residuen und Partialbrüche

(1) Wir nutzen Residuen (3) bzw. Partialbrüche (2): Für die Wegintegrale genügt es jeweils, die Umläufe um jede Polstelle zu zählen! (Satz F4G)

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\gamma_1} \frac{1}{z^4+1}\,\mathrm{d}z = + \operatorname*{res}_{(+1)}(f) + \operatorname*{res}_{(+\mathrm{i})}(f) = \frac{1+\mathrm{i}}{4}$$

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\gamma_2} \frac{1}{z^4+1}\,\mathrm{d}z = + \operatorname*{res}_{(+\mathrm{i})}(f) + \operatorname*{res}_{(-\mathrm{i})}(f) = 0$$

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\gamma_3} \frac{1}{z^4+1}\,\mathrm{d}z = + \operatorname*{res}_{(+\mathrm{i})}(f) - \operatorname*{res}_{(-\mathrm{i})}(f) = \frac{\mathrm{i}}{2}$$

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\gamma_4} \frac{1}{z^4+1}\,\mathrm{d}z = + \operatorname*{res}_{(+1)}(f) + \operatorname*{res}_{(-\mathrm{i})}(f) + \operatorname*{res}_{(-1)}(f) + \operatorname*{res}_{(+\mathrm{i})}(f) = 0$$

☺ Der Residuenkalkül löst selbst komplizierte Integrale sehr leicht.

Für Laurent–Polynome berechnen wir Wegintegrale leicht direkt (F1B); dank Linearität gelingt es hier ebenso für eine Summe solcher Terme. Viele Rechnungen lösen Sie so bequem, sicher, routiniert: Sie müssen schließlich nur noch die Umläufe von γ zählen und dabei das Vorzeichen beachten; wie üblich läuft mathematisch positiv *gegen* den Uhrzeiger.

Residuen und Partialbrüche

Aufgabe: (1) Bestimmen Sie alle Polstellen und Residuen von

$$f(z) = \frac{nz^{n-1}}{z^n - w^n} \quad \text{für } w \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}.$$

(2) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung über $\mathbb{C}$ und über $\mathbb{R}$.
(3) Berechnen Sie das Wegintegral $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\partial B(0,r)} f(z)\,\mathrm{d}z$ für $r > |w|$.
(4) Zum Vergleich: Was gilt für $w = 0$? Ist das kohärent?

Lösung: (1) Die Lösungen von $z^n = 1$ sind die n-ten Einheitswurzeln $z_k = \zeta_n^k = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k/n}$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$. (Machen Sie sich eine Skizze!) Die Lösungen von $z^n = w^n$ sind somit $z_k = \zeta_n^k\, w$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Im Falle einfacher Polstellen, wie hier, können wir Satz F4B nutzen:

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} \left[\frac{p(z)}{q(z)}\right] = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

Wir erhalten so bequem und effizient die Residuen:

$$\operatorname*{res}_{z=z_k} \left[\frac{nz^{n-1}}{z^n - w^n}\right] = \lim_{z\to z_k} \left[\frac{nz^{n-1}}{nz^{n-1}}\right] = 1$$

Residuen und Partialbrüche

(2) Wir zerlegen den Nenner in Linearfaktoren: $z^n - w^n = \prod_{k=0}^{n-1} z - \zeta_n^k w$. Alle Faktoren sind einfach, die PBZ hat die besonders einfache Form

$$\frac{nz^{n-1}}{z^n - w^n} = \frac{c_0}{z - w} + \frac{c_1}{z - \zeta_n w} + \frac{c_2}{z - \zeta_n^2 w} + \cdots + \frac{c_{n-1}}{z - \zeta_n^{n-1} w}$$

Die Konstanten erhalten wir mühelos dank Residuen, nämlich $c_k = 1$.

$$\frac{nz^{n-1}}{z^n - w^n} = \frac{1}{z - w} + \frac{1}{z - \zeta_n w} + \frac{1}{z - \zeta_n^2 w} + \cdots + \frac{1}{z - \zeta_n^{n-1} w}$$

Umgekehrt lassen sich aus der PBZ auch direkt die Residuen ablesen. Über $\mathbb{R}$ kombinieren wir je zwei komplex Konjugierte, wobei $w \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{z - \zeta_n^k w} + \frac{1}{z - \zeta_n^{-k} w} = \frac{2z - 2\cos(2\pi k/n) w}{z^2 - 2\cos(2\pi k/n) zw + w^2} \quad \text{für } 0 < k < n/2$$

(3) Für $r > |w|$ gilt $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\partial B(0,r)} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{res}_{z_k}(f) = n$, siehe F3D.
(4) Für $w = 0$ finden wir direkt $f(z) = n/z$ und $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\partial B(0,r)} f(z)\,\mathrm{d}z = n$.
Anschaulich: Alle n Polstellen fusionieren, die Residuen addieren sich.
Stetigkeit: Dank Satz D3C dürfen wir $\lim_{w\to 0}$ unters Integral ziehen.

Residuen und Partialbrüche

Aufgabe: (1) Bestimmen Sie alle Polstellen und Residuen von

$$f_1(z) = \frac{6z^5}{z^6+1}, \quad f_2(z) = \frac{6z^5\,\mathrm{e}^z}{z^6+1}, \quad f_3(z) = \frac{1}{\sin(\pi z)}, \quad f_4(z) = \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}.$$

(2) Bestimmen Sie – soweit möglich – die Partialbruchzerlegung von f_k.
(3) Berechnen Sie das Wegintegral $\oint_{\partial B(0,4)} f_k(z)\,\mathrm{d}z$ und ganz allgemein $\oint_{\partial D} f_k(z)\,\mathrm{d}z$ für jedes Kompaktum $D \subseteq \mathbb{C}$ mit stückweise glattem Rand.

Lösung: (1a) Die Nullstellen des Nenners z^6+1 sind $z_k = \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}(2k+1)/6}$ für $k = 0, 1, \ldots, 5$, kartesisch $\pm\mathrm{i}$ und $(\pm\sqrt{3} \pm \mathrm{i})/2$. Machen Sie eine Skizze! Alle Polstellen sind einfach; dank Satz F4B gilt $\operatorname{res}_{z=z_k}[f_1(z)] = 1$.

(2a) Die Partialbruchzerlegung hat die besonders einfache Form

$$\frac{6z^5}{z^6+1} = \frac{1}{z-z_0} + \frac{1}{z-z_1} + \cdots + \frac{1}{z-z_5}.$$

(3a) Es gilt $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\partial D} f_1(z)\,\mathrm{d}z = \#\big[D \cap \{z_0, z_1, \ldots, z_5\}\big]$ wie in Satz F3D.
Für $f_2(z) = f_1(z)\,\mathrm{e}^z$ gelten die Rechnungen entsprechend angepasst.

Residuen und Partialbrüche

(1c) Die Funktion $f_3(z) = 1/\sin(\pi z)$ hat einfache Polstellen in $n \in \mathbb{Z}$.
Dank F4B gilt $\operatorname{res}_{z=n}\big[f_3(z)\big] = \lim_{z\to n\pi}[1/\sin(\pi z)'] = (-1)^n/\pi$.
(1d) Auch $f_4(z) = \cos(\pi z)/\sin(\pi z)$ hat einfache Polstellen in $n \in \mathbb{Z}$.
Dank F4B gilt $\operatorname{res}_{z=n\pi}\big[f_4(z)\big] = \lim_{z\to n\pi}[\cos(\pi z)/\sin(\pi z)'] = 1/\pi$.
(3) Hieraus folgt das Wegintegral $\oint_{\partial D} f_k(z)\,\mathrm{d}z$ wie in Satz F4D / F3D.
(2) **Wenn** sich f_3, f_4 als Reihen $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n/(z-n)$ absolut konvergent darstellen lassen, **dann** liefert der Residuenkalkül die Koeffizienten:

$$\csc(\pi z) := \frac{1}{\sin(\pi z)} \overset{?}{=} \frac{1}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{z-n} = \frac{1}{\pi z} + \frac{2z}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^2-n^2}$$

$$\cot(\pi z) := \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \overset{?}{=} \frac{1}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{z-n} = \frac{1}{\pi z} + \frac{2z}{w}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2-n^2}$$

Nun müssen wir noch umgekehrt die vermuteten Formeln nachprüfen:
☺ Für jedes $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{Z}$ sind die Reihen rechts absolut konvergent, denn für $n \to \infty$ gilt $1/(n^2-z^2) \sim 1/n^2$, und wir wissen $\sum 1/n^2 < \infty$.
☺ Die Grenzwerte dieser Reihen sind tatsächlich $\csc(\pi z)$ bzw. $\cot(\pi z)$.
Diese Rechnung erfordert etwas Sorgfalt und wird in F554 ausgeführt.

Residuen zur Berechnung von Reihen

Bisher haben wir meist holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \smallsetminus S \to \mathbb{C}$ betrachtet, die nur eine *endliche* Menge $S \subseteq \mathbb{C}$ von Singularitäten aufweisen, wie rationale Funktionen $f(z) = p(z)/q(z)$ mit Polynomen $p, q \in \mathbb{C}[z]$.

Wir nutzen nun auch holomorphe Funktionen $g : \mathbb{C} \smallsetminus S \to \mathbb{C}$ wie zum Beispiel $g(z) = f(z)\cos(\pi z)/\sin(\pi z)$ mit unendlich vielen Singularitäten, insbesondere um Reihen wie $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$ berechnen zu können.

Die Menge S heißt **diskret**, wenn jeder ihrer Punkt s in S isoliert ist.
In einer Menge $S \subseteq \mathbb{C}$ nennen wir einen Punkt $s \in S$ **isoliert**, wenn ein hinreichend kleiner Radius $\varepsilon > 0$ existiert, sodass $B(s, \varepsilon) \cap S = \{s\}$ gilt.

Andernfalls sagen wir, dass sich die Punkte der Menge S um s **häufen**.
Allgemein nennen wir $a \in \mathbb{C}$ einen **Häufungspunkt** der Menge S, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ die Menge $B(a, \varepsilon) \cap S$ unendlich viele Punkte enthält.

Jede endliche Menge $S \subseteq \mathbb{C}$ ist diskret; unendliche können diskret sein wie $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{C}$ oder auch nicht diskret wie $\{1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots, 0\}$ oder $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{C}$.

Sind $g, h : \mathbb{C} \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph mit $h \neq 0$, so ist die Nullstellenmenge $\{\, z \in \mathbb{C} \mid h(z) = 0 \,\}$ diskret dank Satz F5E (somit höchstens abzählbar), und dasselbe gilt folglich für die Singularitätenmenge von $f = g/h$.

Residuen zur Berechnung von Reihen

Aufgabe: (1) Bestimmen Sie alle Nullstellen $z \in \mathbb{C}$ der Funktionen

$$\sin, \cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \sin(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}, \quad \cos(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}.$$

Zeigen und nutzen Sie für $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ die Gleichungen

$$|\sin(z)|^2 = \sin(x)^2 + \sinh(y)^2, \qquad |\cos(z)|^2 = \cos(x)^2 + \sinh(y)^2.$$

Der Quotient $h(z) = \cos(z)/\sin(z)$ ist beschränkt durch

$$\big|h(z)\big|^2 \le \frac{\cos(x)^2 + \sinh(y)^2}{\sin(x)^2 + \sinh(y)^2} \le \frac{\cos(x)^2}{\sin(x)^2 + \sinh(y)^2} + 1$$

(2) Bestimmen Sie alle Residuen der Funktion $h(z) = \cos(z)/\sin(z)$.

Lösung: (1) Aus der reellen Analysis wissen wir $\sin(z) = 0$ für $z \in \mathbb{Z}\pi$ und $\cos(z) = 0$ für $z \in \pi/2 + \mathbb{Z}\pi$. Weitere Nullstellen $z \in \mathbb{C}$ gibt es nicht!

Die hierzu nützlichen Un/Gleichungen rechnet man geduldig nach.

(2) Die Funktion $h(z) = \cos(z)/\sin(z)$ hat einfache Polstellen in $z = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Dank F4B gilt $\operatorname{res}_{z=k\pi}\big[h(z)\big] = \lim_{z \to k\pi}[\cos(z)/\sin'(z)] = 1$.

Residuen zur Berechnung von Reihen

Aufgabe: (3) Bestimmen Sie alle Residuen der holomorphen Funktion

$$g : \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{Z} \to \mathbb{C}, \quad g(z) = \frac{\cos(\pi z)}{z^2 \sin(\pi z)}.$$

Lösung: (3) In $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \neq 0$ liegt eine einfache Polstelle vor (F4B):

$$\operatorname*{res}_{z=k}\left[\frac{\cos(\pi z)}{z^2 \sin(\pi z)}\right] = \lim_{z\to k}\left[\frac{\cos(\pi z)}{2z\sin(\pi z) + \pi z^2 \cos(\pi z)}\right] = \frac{1}{\pi k^2}$$

Im Nullpunkt $z = 0$ hingegen liegt eine dreifache Polstelle vor (F4C):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{z\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} - \frac{\pi z}{\sin(\pi z)^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\frac{z\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \frac{-2\pi}{\sin(\pi z)^2} + \frac{2\pi^2 z\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)^3} = \frac{2\pi^2 z\cos(\pi z) - 2\pi\sin(\pi z)}{\sin(\pi z)^3}$$

$$= \frac{2\pi^2 z\big[1 - \frac{1}{2!}\pi^2 z^2 + O(z^4)\big] - 2\pi\big[\pi z - \frac{1}{3!}\pi^3 z^3 + O(z^5)\big]}{\pi^3 z^3 + O(z^5)} = -\frac{2\pi}{3} + O(z^2)$$

$$\operatorname*{res}_{z=0}\left[\frac{\cos(\pi z)}{z^2\sin(\pi z)}\right] = \lim_{z\to 0}\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[\frac{z\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}\right] = -\frac{\pi}{3}$$

☺ Alles wird gut.

☺ Noch leichter gelingt's mit der geometrischen Reihe, siehe F554.

Residuen zur Berechnung von Reihen

Aufgabe: Für $n \in \mathbb{N}$ sei $Q_n \subseteq \mathbb{C}$ das Quadrat mit Ecken $(\pm 1 \pm \mathrm{i})(n + 1/2)$.
(4) Berechnen Sie $\int_{\partial Q_n} g(z)\,\mathrm{d}z$ und (5) den Grenzwert für $n \to \infty$.
(6) Folgern Sie hieraus den Grenzwert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$.

Lösung: (4) Dank Residuensatz und der vorigen Aufgabe (3) gilt:

$$\int_{\partial Q_n} g(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=-n}^{n}\operatorname*{res}_k(g) = -\frac{\pi}{3} + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi k^2}$$

(5) Für $n \geq 1$ und alle $z \in Q_n$ gilt $|\cos(\pi z)/\sin(\pi z)| \leq 2$. Für $n \to \infty$ folgt

$$\left|\int_{\partial Q_n} g(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \int_{\partial Q_n}|g(z)|\cdot|\mathrm{d}z| \leq \int_{\partial Q_n}\frac{2}{n^2}\cdot|\mathrm{d}z| \leq \frac{8(2n+1)}{n^2} \to 0.$$

(6) Für die obige Reihe erhalten wir schließlich

$$-\frac{\pi}{3} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi k^2} = 0 \qquad \text{also} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} = 1.6449340668\ldots.$$

Die Konvergenz ist leicht zu zeigen B303, nun können wir auch den Grenzwert berechnen! Dies ist ein berühmtes Problem und wurde erst 1734 von Leonhard Euler gelöst (noch vage). In Kapitel I gelingt es noch leichter mit den starken Werkzeugen der Fourier–Theorie. I321

Satz F5I: Berechnung von Reihen durch Residuen

Sei $f(z) = p(z)/q(z)$ eine rationale Funktion. Wir können und werden p/q als gekürzt annehmen, mit teilerfremden Polynomen $p, q \in \mathbb{C}[z]$. Ihre Singularitätenmenge ist demnach $S = \{\, z \in \mathbb{C} \mid q(z) = 0 \,\}$.

(1) Unter der Voraussetzung $\deg(q) \geq \deg(p) + 2$ gilt:

$$\boxed{\sum_{k \in \mathbb{Z} \smallsetminus S} f(k) = -\pi \sum_{s \in S} \operatorname*{res}_{z=s} \left[f(z) \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \right]}$$

(2) Unter der schwächeren Voraussetzung $\deg(q) \geq \deg(p) + 1$ gilt:

$$\boxed{\sum_{k \in \mathbb{Z} \smallsetminus S} (-1)^k f(k) = -\pi \sum_{s \in S} \operatorname*{res}_{z=s} \left[\frac{f(z)}{\sin(\pi z)} \right]}$$

- Links steht eine unendliche Reihe, rechts nur eine endliche Summe.
- Die Konvergenz ist leicht, nun können wir den Grenzwert berechnen!
- Die vorige Aufgabe zeigt das bemerkenswerte Beispiel $f(z) = 1/z^2$.

Aufgabe: (a) Berechnen Sie mit diesem Satz die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k / k^2$.
(b) Berechnen Sie die Reihen $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{w-n}$ und $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{w-n}$ für $w \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{Z}$.

Lösung: (a) Wir wenden die Formel (2) auf die Funktion $f(z) = 1/z^2$ an. In $z = 0$ hat $1/z^2 \sin(z)$ eine dreifache Polstelle. Statt wie zuvor Satz F4C zu nutzen, können wir auch direkt die Laurent–Reihe entwickeln:

$$\frac{1}{z^2 \sin(\pi z)} = \frac{1}{\pi z^3 (1-q)} \qquad \text{mit } q = \frac{1}{3!}\pi^2 z^2 - \frac{1}{5!}\pi^4 z^4 + O(z^6)$$

$$= \frac{1}{\pi z^3}\left[1 + q + q^2 + q^3 + \dots\right] = \frac{1}{\pi z^3}\left[1 + \frac{1}{3!}\pi^2 z^2 + O(z^4)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi} z^{-3} + \frac{\pi}{6} z^{-1} + O(z) \qquad \Longrightarrow \operatorname*{res}_{z=0}\left[\frac{1}{z^2 \sin(\pi z)}\right] = \frac{\pi}{6}$$

Dank Satz F5I (2) schließen wir:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \mp \cdots = -\frac{\pi^2}{12} = -0.8224670334\dots$$

(b) Wir wenden den Satz F5I auf die Funktion $f(z) = 1/(w-z)$ an und erhalten sofort $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{w-n} = \frac{\pi \cos(\pi w)}{\sin(\pi w)}$ sowie $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{w-n} = \frac{\pi}{\sin(\pi w)}$.

Berechnung von Reihen durch Residuen

Aufgabe: Erklären und begründen Sie den allgemeinen Satz F5I nach dem Vorbild der Spezialfälle der vorigen Aufgaben.

Lösung: Für $n \in \mathbb{N}$ sei $Q_n \subseteq \mathbb{C}$ das Quadrat mit Ecken $(\pm 1 \pm \mathrm{i})(n + {}^1\!/\!_2)$. Wir wählen n so groß, dass Q_n die Singularitätenmenge S von f enthält.

(1) Für $g(z) = f(z)\cos(\pi z)/\sin(\pi z)$ ergibt Cauchys Residuensatz F4D:

$$\int_{\partial Q_n} g(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{s \in Q_n} \operatorname*{res}_s(g)$$

Für $n \to \infty$ verschwindet das Integral, denn

$$\left|\int_{\partial Q_n} g(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \max_{z \in \partial Q_n} |f(z)| \int_{\partial Q_n} \left|\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}\right| \cdot |\mathrm{d}z| \le \frac{c}{n^2} \cdot 8(2n+1) \to 0.$$

Mit den Residuen in $k \in \mathbb{Z} \smallsetminus S$ folgt die gewünschte Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{s \in \mathbb{C}} \operatorname*{res}_s(g) &= \sum_{k \in \mathbb{Z} \smallsetminus S} \operatorname*{res}_k(g) + \sum_{s \in S} \operatorname*{res}_s(g) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z} \smallsetminus S} \frac{f(k)}{\pi} + \sum_{s \in S} \operatorname*{res}_{z=s}\left[f(z)\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}\right] \end{aligned}$$

Berechnung von Reihen durch Residuen

(2) Für $g(z) = f(z)/\sin(\pi z)$ ergibt Cauchys Residuensatz F4D:

$$\int_{\partial Q_n} g(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{s \in Q_n} \operatorname*{res}_s(g)$$

Für $n \to \infty$ verschwindet das Integral, denn nach Rechnung gilt

$$\left|\int_{\partial Q_n} g(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \max_{z \in \partial Q_n} |f(z)| \int_{\partial Q_n} \left|\frac{1}{\sin(\pi z)}\right| \cdot |\mathrm{d}z| \le \frac{\mathrm{const}}{n} \to 0.$$

(Die Schranke $\int_{\partial Q_n} |\mathrm{d}z|/|\sin(\pi z)| \le \mathrm{const}$ ist leider etwas mühsam.)

Jede Polstelle in $k \in \mathbb{Z} \smallsetminus S$ ist höchstens einfach. Dank F4B gilt:

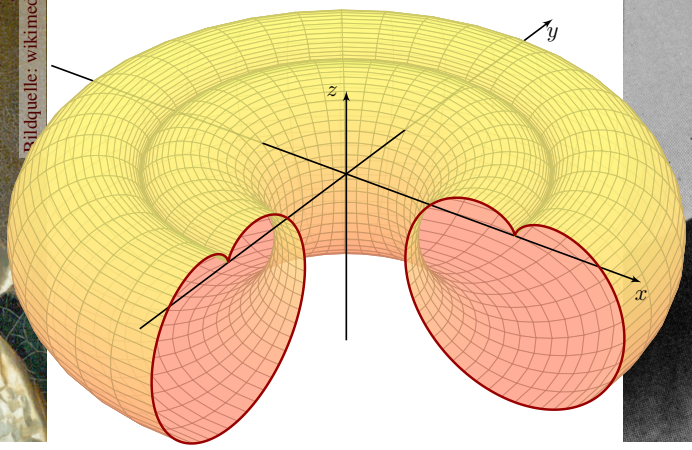
$$\operatorname*{res}_{z=k}\left[\frac{f(z)}{\sin(\pi z)}\right] = \frac{f(k)}{\pi\cos(\pi k)} = \frac{(-1)^k}{\pi} f(k)$$

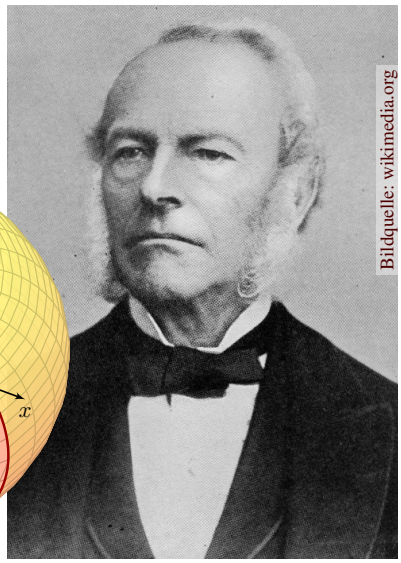
Mit den Residuen in $k \in \mathbb{Z} \smallsetminus S$ folgt die gewünschte Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{s \in \mathbb{C}} \operatorname*{res}_s(g) &= \sum_{k \in \mathbb{Z} \smallsetminus S} \operatorname*{res}_k(g) + \sum_{s \in S} \operatorname*{res}_s(g) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z} \smallsetminus S} \frac{(-1)^k}{\pi} f(k) + \sum_{s \in S} \operatorname*{res}_{z=s}\left[\frac{f(z)}{\sin(\pi z)}\right] \end{aligned}$$

Kapitel G

Integralsätze im Raum





Carl Friedrich Gauß
(1777–1855)

Sir George Stokes
(1819–1903)

Vollversion • michael-eisermann.de/lehre/HM3 • 26.02.2025

Inhalt dieses Kapitels G

1 Crashkurs zu Integralsätzen im Raum
- Flächenintegrale und Integralsätze im Raum
- Einführendes Beispiel zum Satz von Stokes
- Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß

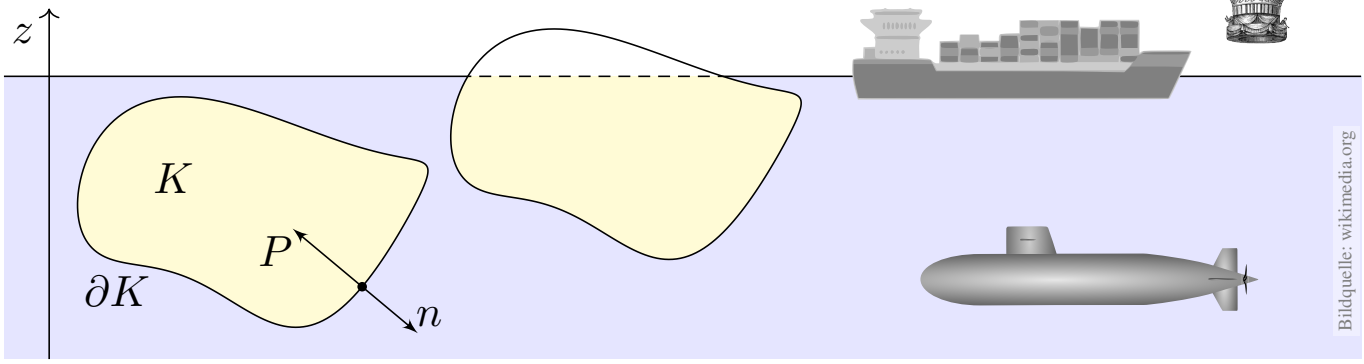
2 Flächenintegrale im Raum
- Glatte Flächenstücke und Parametrisierungen
- Kugelsegment, Kugelkappe, Torusfläche
- Rotationskörper und Guldinsche Regeln

3 Integralsätze im Raum
- Die Integralsätze von Stokes und Gauß
- Anwendung: das archimedische Prinzip
- Numerik: Triangulierung und Linearisierung

4 Fazit: Integralsätze
- Zusammenfassung und Verständnisfragen
- Weitere Aufgaben und Anwendungen
- Geometrie auf gekrümmten Flächen

Klassische Anwendung: archimedisches Prinzip

Satz des Archimedes: Die Auftriebskraft eines Körpers K gleicht dem Gewicht $g\varrho\,\mathrm{vol}_3(K)$ des verdrängten Mediums.



Es besteht eine bemerkenswerte Beziehung zwischen dem Rand ∂K (nur hier wirkt der Druck) und dem Inneren von K (nur dieses verdrängt das Fluid). Solche Gesetzmäßigkeiten begegnen Ihnen häufig in Naturwissenschaft und Technik und sind ungemein nützlich: Es handelt sich um eine typische Anwendung unserer Integralsätze. Diese wollen wir nun kennen und nutzen lernen!

Archimedes von Syrakus (287–212 v. Chr.) war ein genialer Mathematiker, Physiker, Ingenieur. Für König Hieron sollte er prüfen, ob dessen Krone aus reinem Gold bestand oder gestreckt war, ohne sie zu beschädigen! Das archimedische Prinzip soll er beim Bade entdeckt haben. In seiner Begeisterung sprang er aus dem Wasser und rannte nackt durch Syrakus (γυμνος [gymnos], ‘nackt’, siehe Gymnasium). Sein Ausruf gilt bis heute als Sinnbild für plötzliche Erkenntnis: ἑύρηκα [heurēka], ‘Ich habe es gefunden!’, frei übersetzt: ‘Verflixt, wo ist mein Handtuch?’

Erinnerung: Integralsätze in Dimension 1 und 2

Unser Vorbild ist der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: Für jede stetig differenzierbare Funktion $F\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ und $f=F'$ gilt

$$\text{HDI:}\qquad \int_{x=a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a).$$

Das ist eine bemerkenswerte Gesetzmäßigkeit: Das Integral über das Intervall $[a,b]$ lässt sich entlang des Randes $\partial[a,b]=\{a,b\}$ bestimmen!

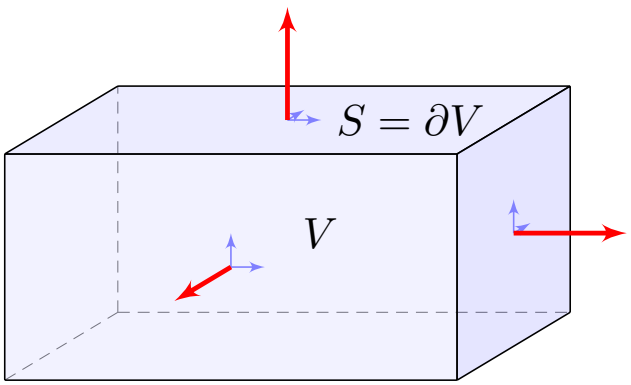
Ebenso in der Ebene $\mathbb{R}^2$ kennen wir bereits zwei solche Integralsätze; auch hier lassen sich Flächenintegrale durch Randintegrale bestimmen:

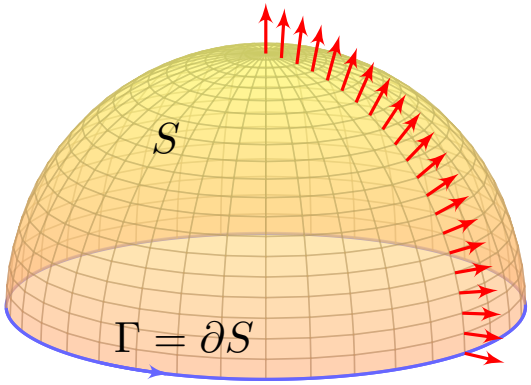
$$\text{Satz von Gauß:}\qquad \int_{(x,y)\in D} \operatorname{div} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{s\in\partial D} f(s)\times\mathrm{d}s,$$

$$\text{Satz von Green:}\qquad \int_{(x,y)\in D} \operatorname{rot} g(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{s\in\partial D} g(s)\bullet\mathrm{d}s.$$

Dasselbe gilt sinngemäß im Raum $\mathbb{R}^3$, allgemein in jeder Dimension. Hier lassen sich Volumenintegrale durch Randintegrale bestimmen. Die hierzu nötigen Flächenintegrale erklären wir in diesem Kapitel.

Integralsätze im Raum: Gauß und Stokes





Sei $V \subseteq \mathbb{R}^3$ kompakt mit stückweise glatter Randfläche $S = \partial V$.

Satz von Gauß: $$\int_{v \in V} \operatorname{div} f(v)\,\mathrm{d}V = \int_{s \in S = \partial V} f(s) \bullet \mathrm{d}S$$

Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine stückw. glatte Fläche, orientiert mit Randkurve $\Gamma = \partial S$.

Satz von Stokes: $$\int_{s \in S} \operatorname{rot} f(s) \bullet \mathrm{d}S = \int_{s \in \Gamma = \partial S} f(s) \bullet \mathrm{d}\Gamma$$

☺ Dies ist die 3dim. Fortsetzung der 2dim. Sätze von Gauß & Green.
Die Orientierungen von S und Γ sind wie in der Skizze angegeben.

Integralsätze im Raum: der Satz von Stokes

Hierbei sei $f : \mathbb{R}^3 \supseteq \Omega \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Jedem Punkt $v \in \Omega$ wird ein Vektor $f(v) \in \mathbb{R}^3$ zugeordnet. Dies können wir uns z.B. als Strömungsgeschwindigkeit einer Flüssigkeit vorstellen. Die Integralsätze haben dann folgende anschauliche Bedeutung:

Die Divergenz $\operatorname{div} f(v)$ ist die Quelldichte des Feldes f im Punkt $v \in \Omega$. Das Volumenintegral $\int_{v \in V} \operatorname{div} f(v)\,\mathrm{d}V$ misst die Quellstärke von f auf V. Rechts steht das Flussintegral von f über die Randfläche $S = \partial V$.
Die Quellbilanz im Volumen V fließt über die Randfläche ∂V.

Die Rotation $\operatorname{rot} f(s)$ ist die Wirbeldichte des Feldes f im Punkt $s \in \Omega$. Das Flächenintegral $\int_{s \in S} \operatorname{rot} f(s)\,\mathrm{d}S$ misst die Zirkulation von f auf S. Rechts steht das Arbeitsintegral von f längs der Randkurve $\Gamma = \partial S$.
Die Rotation auf der Fläche S zirkuliert längs der Randkurve ∂S.

Es ist recht leicht und sehr hilfreich, eine Anschauung zu entwickeln. Um zudem die Integralsätze wie oben präzise *formulieren* zu können, müssen wir Kurven- und Flächenintegral einführen und *verstehen*: Sie sollen schließlich nicht nur anschauen, sondern auch rechnen!

Kurven- und Flächenintegrale

Kurven $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrisieren wir (stückw. C^1) durch $\gamma : \mathbb{R} \supseteq [a,b] \to \Gamma$. Am Punkt $s = \gamma(t)$ heftet das infinitesimale Wegelement $\mathrm{d}\Gamma = \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$.

Kurven- und Arbeitsintegral über das Kurvenstück Γ sind dann:

$$\int_{s\in\Gamma} g(s)\,|\mathrm{d}\Gamma| := \int_{t=a}^{b} g\big(\gamma(t)\big)\,\big|\gamma'(t)\big|\,\mathrm{d}t \qquad \text{„1. Art“}$$

$$\int_{s\in\Gamma} f(s)\bullet\mathrm{d}\Gamma := \int_{t=a}^{b} f\big(\gamma(t)\big)\bullet\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{„2. Art“}$$

für (C^0) Skalarfelder $g : \mathbb{R}^3 \supseteq \Gamma \to \mathbb{R}$ bzw. Vektorfelder $f : \mathbb{R}^3 \supseteq \Gamma \to \mathbb{R}^3$.

Flächen $S \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrisieren wir (stückw. C^1) durch $\Phi : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to S$. Hierbei ist $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein ebenes Kompaktum mit stückweise glattem Rand. An $s = \Phi(x,y)$ heftet das inf. Flächenelement $\mathrm{d}S = (\partial_x\Phi \times \partial_y\Phi)\,\mathrm{d}(x,y)$.

Flächen- und Flussintegral über das Flächenstück S sind dann:

$$\int_{s\in S} g(s)\,|\mathrm{d}S| := \int_{(x,y)\in D} g\big(\Phi(x,y)\big)\cdot\big|\partial_x\Phi(x,y)\times\partial_y\Phi(x,y)\big|\,\mathrm{d}(x,y)$$

$$\int_{s\in S} f(s)\bullet\mathrm{d}S := \int_{(x,y)\in D} f\big(\Phi(x,y)\big)\bullet\big(\partial_x\Phi(x,y)\times\partial_y\Phi(x,y)\big)\,\mathrm{d}(x,y)$$

Kurven- und Flächenintegrale

Ist $g : \Gamma \to \mathbb{R}$ eine Massendichte (Masse pro Länge), so ist $\int_\Gamma g\,|\mathrm{d}\Gamma|$ die Gesamtmasse. Im Spezialfall $g = 1$ erhalten wir die Gesamtlänge $\ell(\Gamma)$.

Das Kurvenelement $\mathrm{d}\Gamma = \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$ interpretieren wir als kleines Wegstück. Seine Länge ist $|\mathrm{d}\Gamma|$, und der Vektor $\mathrm{d}\Gamma$ liegt im Punkt s tangential an Γ. Das Skalarprodukt $f(s)\bullet\mathrm{d}\Gamma = f(\gamma(t))\bullet\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$ ist der tangentiale Anteil von f längs der Kurve („Kraft mal Weg“). Wir integrieren alle Beiträge.

Ist $g : S \to \mathbb{R}$ eine Massendichte (Masse pro Fläche), so ist $\int_S g\,|\mathrm{d}S|$ die Gesamtmasse. Im Fall $g = 1$ erhalten wir den Flächeninhalt $\mathrm{vol}_2(S)$.

Das Flächenelement $\mathrm{d}S$ stellen wir uns als ein kleines Flächenstück vor. Sein Flächeninhalt ist $|\mathrm{d}S|$, und der zugehörige Vektor $\mathrm{d}S$ steht im Punkt s senkrecht auf der Fläche S. Im Flussintegral ist das Skalarprodukt $f(s)\bullet\mathrm{d}S$ somit der normale Anteil von f senkrecht zur Fläche S.

Wozu dient Φ? Meist interessiert uns letztlich nur die Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$, aber nur Parametrisierungen können wir differenzieren und integrieren. Die Wahl einer Parametrisierung Φ ist unentbehrliche Rechentechnik; das Ergebnis ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung!

Von Green in der Ebene zu Stokes im Raum

Aufgabe: Erklären Sie, warum/wie Green ein Spezialfall von Stokes ist.

Green: Für $S \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt mit stückw. glatter Randkurve $\Gamma = \partial S$ gilt

$$\boxed{\int_{s\in S} \operatorname{rot} f(s) \bullet \mathrm{d}S = \int_{s\in\Gamma} f(s) \bullet \mathrm{d}\Gamma.}$$

Stokes: Diese Gleichung gilt genauso für orientierte Flächen $S \subseteq \mathbb{R}^3$. Die Zerlegung $\mathrm{d}S = n(s)\,|\mathrm{d}S|$ ergibt die gleichwertige Formulierung

$$\int_{s\in S} \operatorname{rot} f(s) \bullet n(s)\,|\mathrm{d}S| = \int_{s\in\Gamma} f(s) \bullet \mathrm{d}\Gamma.$$

Erinnerung: Für jedes C^1–Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \supseteq \Omega \to \mathbb{R}^3$ definieren wir

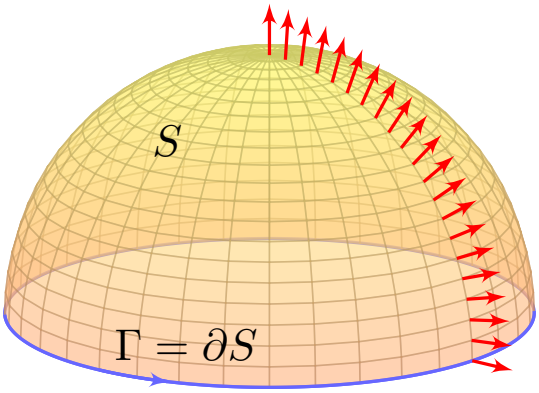
$$\operatorname{rot}(f) = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3 \\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 \end{pmatrix}.$$

Die Ebene betten wir ein als $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ und erhalten demnach $\operatorname{rot}(f_1, f_2, 0) = (0, 0, \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1)$ und das Flächenelement $(0, 0, \mathrm{d}S)$.

☺ Der Satz von Green ist der ebene Spezialfall des Satzes von Stokes.

Einführendes Beispiel zum Satz von Stokes

☺ Der Stokesche Satz überträgt den Greenschen Satz von $\mathbb{R}^2$ auf $\mathbb{R}^3$:



Aufgabe: Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ die nördliche Hemisphäre vom Radius r mit dem Äquator $\Gamma = \partial S$ als Randkurve. Berechnen Sie $\int_S \operatorname{rot}(f) \bullet \mathrm{d}S$ und $\int_\Gamma f \bullet \mathrm{d}\Gamma$ für das Vektorfeld $f(x, y, z) = (z - y, x + z, -x - y)$.

Lösung: Wir berechnen zunächst die Rotation des Vektorfeldes

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z - y \\ x + z \\ -x - y \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{rot}(f) = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Einführendes Beispiel zum Satz von Stokes

Die nördliche Hemisphäre ist $S = \{\, (x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = r^2,\ z \geq 0 \,\}$.
Diese Fläche parametrisieren wir durch Kugelkoordinaten $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$:

$$s = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \overset{\text{Param}}{=} \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} = \Phi\begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{matrix} \right\}$$

Wir berechnen die Tangentialvektoren und den Normalenvektor:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi \\ -r\sin\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2\sin^2\theta\cos\varphi \\ r^2\sin^2\theta\sin\varphi \\ r^2\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix}$$

Für die gesuchte Zirkulation von f auf der Fläche S erhalten wir somit:

$$\int_{s\in S} \operatorname{rot} f(s) \cdot \mathrm{d}S \overset{\text{Param}}{=} \int_{(\theta,\varphi)\in D} \operatorname{rot} f\big(\Phi(\theta,\varphi)\big) \cdot \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right) \mathrm{d}(\theta,\varphi)$$

$$\underset{\text{C1E}}{\overset{\text{Fub}}{=}} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} -2r^2\sin^2\theta\cos\varphi + 2r^2\sin^2\theta\sin\varphi + 2r^2\sin\theta\cos\theta \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

$$\underset{\text{B1I}}{\overset{\text{HDI}}{=}} 4\pi r^2 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \underset{\text{B1I}}{\overset{\text{HDI}}{=}} 4\pi r^2 \left[\frac{1}{2}\sin(\theta)^2\right]_{\theta=0}^{\pi/2} = 2\pi r^2$$

Einführendes Beispiel zum Satz von Stokes

Die Randkurve $\Gamma = \partial S$ ist der Äquator, $\partial S = \{\, (x,y,0) \mid x^2+y^2 = r^2 \,\}$.
Diese Kurve parametrisieren wir durch den Weg $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$s = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \overset{\text{Param}}{=} \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ 0 \end{pmatrix} = \Phi\begin{pmatrix} \pi/2 \\ t \end{pmatrix} = \gamma(t).$$

Für das gesuchte Arbeitsintegral längs Γ erhalten wir somit

$$\begin{aligned} \int_{s\in\Gamma} f(s) \cdot \mathrm{d}\Gamma &\overset{\text{Param}}{=} \int_{t=0}^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{t=0}^{2\pi} \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ -r\cos t - r\sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\ &= \int_{t=0}^{2\pi} r^2\,\mathrm{d}t = 2\pi r^2. \end{aligned}$$

☺ Die Gleichheit ist kein Zufall, sondern illustriert den Satz von Stokes:

$$\boxed{\int_{s\in S} \operatorname{rot} f(s) \cdot \mathrm{d}S = \int_{s\in\Gamma} f(s) \cdot \mathrm{d}\Gamma}$$

Der Integralsatz von Stokes

Das Ergebnis der vorigen Aufgabe ist kein Zufall, sondern illustriert einen allgemeinen Sachverhalt: den Integralsatz von Stokes im $\mathbb{R}^3$. Wir können ihn nun in voller Schönheit formulieren und nachrechnen:

Satz G1A: Integralsatz von Stokes

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Kompaktum mit stückweise glatter Randkurve ∂D.
Sei $\Phi : D \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine (zweimal) stetig differenzierbare Abbildung.
Die Einschränkung $\gamma = \Phi|_{\partial D}$ parametrisiert die Randkurve $\Phi(\partial D)$.

Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \supseteq S \to \mathbb{R}^3$ gilt dann

$$\int_{s \in D} \operatorname{rot}(f)(\Phi(s)) \bullet \mathrm{d}\Phi = \int_{s \in \partial D} f(\gamma(s)) \bullet \mathrm{d}\gamma.$$

Hierbei nutzen wir die oben vereinbarten sinnfälligen Abkürzungen:
Am Punkt $\gamma(s)$ heftet das infinitesimale Wegelement $\mathrm{d}\gamma = \gamma'(s)\,\mathrm{d}s$,
an $\Phi(s)$ heftet das inf. Flächenelement $\mathrm{d}\Phi = (\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi)\,\mathrm{d}(x, y)$.

Die Randkurve ∂D wird hierbei wie immer positiv orientiert,
sodass beim Umlauf D stets links von ∂D liegt.

Der Integralsatz von Stokes

Das ist eine bemerkenswerte Gleichheit: Links steht das Flussintegral der Rotation $\operatorname{rot}(f)$ über das parametrisierte Flächenstück $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$, rechts das Arbeitsintegral von f längs des Randweges $\gamma : \partial D \to \mathbb{R}^3$. Hierzu muss Φ nicht regulär sein, stetig differenzierbar reicht.

Ist die Parametrisierung Φ zudem regulär, also injektiv und überall $\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi \neq 0$, so ist das Bild $S = \Phi(D)$ ein glattes Flächenstück und alle regulären Parametrisierungen von S sind untereinander äquivalent durch Umparametrisierung. (Wir setzen gleiche Orientierung voraus.)

Wie wir später nachrechnen werden, ergeben dann alle regulären Parametrisierungen $\Phi : D \to S$ dasselbe Ergebnis, sowohl beim Flächenintegral über S als auch beim Randintegral über $\Gamma = \partial S$.

Dies kürzen wir ab durch die parameterunabhängigen Schreibweise

$$\int_{s \in S} \operatorname{rot} f(s) \bullet \mathrm{d}S = \int_{s \in \Gamma} f(s) \bullet \mathrm{d}\Gamma.$$

So formulieren wir es in Satz G3E, kurz und bequem. Satz G1A ist etwas allgemeiner, da wir hier noch keine Injektivität oder Regularität fordern.

Der Integralsatz von Stokes

Den Satz von Green in der Ebene $\mathbb{R}^2$ haben wir nachgerechnet. E141

Aufgabe: Der Satz von Stokes im $\mathbb{R}^3$ folgt aus dem von Green im $\mathbb{R}^2$!

Nachrechnen: Das 3dim. Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \supseteq S \to \mathbb{R}^3$ auf der Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$ ziehen wir mittels der Parametrisierung $\Phi : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ zurück zu einem 2dim. Vektorfeld $g : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to \mathbb{R}^2$. Hierzu setzen wir

$$g := \big(\langle f \circ \Phi \mid \partial_1 \Phi \rangle, \langle f \circ \Phi \mid \partial_2 \Phi \rangle \big).$$

Für die beiden Vektorfelder f und g gilt dank Kettenregel

$$\int_{s \in \partial D} \underbrace{f(\gamma(s)) \bullet \mathrm{d}\gamma}_{\text{Wegintegral im } \mathbb{R}^3} = \int_{s \in \partial D} \underbrace{g(s) \bullet \mathrm{d}s}_{\text{Wegintegral im } \mathbb{R}^2} .$$

Wir berechnen sogleich $\operatorname{rot}(g) = \langle \operatorname{rot}(f) \circ \Phi \mid \partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi \rangle$, also

$$\int_{(x,y) \in D} \underbrace{\operatorname{rot}(f)(\Phi(x,y)) \bullet \mathrm{d}\Phi}_{\text{Flächenintegral im } \mathbb{R}^3} = \int_{(x,y) \in D} \underbrace{\operatorname{rot}(g)\, \mathrm{d}(x,y)}_{\text{Flächenintegral im } \mathbb{R}^2} .$$

☺ Damit folgt der Satz von Stokes aus dem Satz von Green!

Der Integralsatz von Stokes

Zur Vereinfachung setzen wir Φ als zweimal stetig differenzierbar voraus. Wir können dann den Satz von Schwarz (D4A) nutzen: $\partial_2 \partial_1 \Phi_i = \partial_1 \partial_2 \Phi_i$. Die Umrechnung von $\operatorname{rot}(g)$ in $\operatorname{rot}(f)$ gelingt uns nun dank Kettenregel. Wir müssen dabei allerdings über alle Indizes sorgfältig buchführen:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}(g) &= \partial_1 g_2 - \partial_2 g_1 \\
&= \partial_1 \langle f \circ \Phi \mid \partial_2 \Phi \rangle - \partial_2 \langle f \circ \Phi \mid \partial_1 \Phi \rangle \\
&= \partial_1 \textstyle\sum_i f_i \circ \Phi \cdot \partial_2 \Phi_i - \partial_2 \sum_i f_i \circ \Phi \cdot \partial_1 \Phi_i \\
&= + \textstyle\sum_i \sum_j \partial_j f_i \circ \Phi \cdot \partial_1 \Phi_j \cdot \partial_2 \Phi_i + \sum_i f_i \circ \Phi \cdot \partial_1 \partial_2 \Phi_i \\
&\quad - \textstyle\sum_i \sum_j \partial_j f_i \circ \Phi \cdot \partial_2 \Phi_j \cdot \partial_1 \Phi_i - \sum_i f_i \circ \Phi \cdot \partial_2 \partial_1 \Phi_i \\
&= \textstyle\sum_i \sum_j \partial_j f_i \circ \Phi \cdot \partial_1 \Phi_j \cdot \partial_2 \Phi_i - \partial_i f_j \circ \Phi \cdot \partial_1 \Phi_j \cdot \partial_2 \Phi_i \\
&= \textstyle\sum_{i<j} (\partial_i f_j - \partial_j f_i) \circ \Phi \cdot (\partial_1 \Phi_i \cdot \partial_2 \Phi_j - \partial_1 \Phi_j \cdot \partial_2 \Phi_i) \\
&= \langle \operatorname{rot}(f) \circ \Phi \mid \partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi \rangle
\end{aligned}$$

Übung: Wer dieser Kurzschreibweise nicht traut, kann mit etwas Fleiß alle Summen sorgfältig ausschreiben und die behaupteten Gleichungen nachprüfen. Rechnen reinigt die Seele!

Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß

Aufgabe: (1) Skizzieren Sie zu gegebenem $r > 0$ den Körper

$$V = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le r^2,\ z \ge 0 \,\}$$

(2) Beschreiben Sie den Körper V explizit durch Parametrisierungen als Normalbereich in z–Richtung, in Zylinder- und in Kugelkoordinaten.

(3) Berechnen Sie den Rauminhalt $\mathrm{vol}_3(V)$ je nach Parametrisierung. Ist das Ergebnis unabhängig von der gewählten Parametrisierung?

(4) Beschreiben Sie die Randfläche $S = \partial V$ implizit / explizit wie in (2).

(5) Bestimmen Sie in jedem Randpunkt s den nach außen zeigenden Einheitsnormalenvektor $n_{\partial V}(s)$ sowie $\mathrm{d}S$ je nach Parametrisierung.

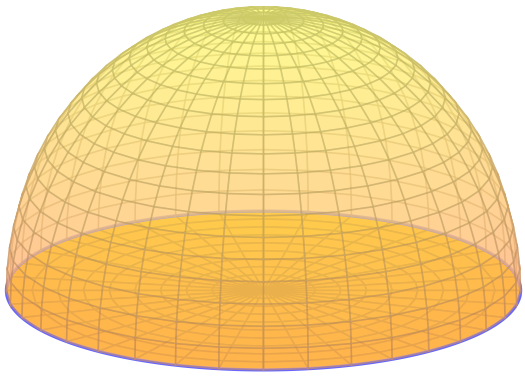
(6) Berechnen Sie den Flächeninhalt $\mathrm{vol}_2(S)$ je nach Parametrisierung. Ist das Ergebnis unabhängig von der gewählten Parametrisierung?

(7) Berechnen Sie die Divergenz des Vektorfeldes $f(x,y,z) = (x,y,z)$, das Volumenintegral $\int_V \mathrm{div}(f)\,\mathrm{d}(x,y,z)$ und das Flussintegral $\int_S f \cdot \mathrm{d}S$.

☺ Diese Aufgabe bietet Gelegenheit, die bisherigen Integrationstechniken zu wiederholen und die neuen Flächenintegrale einzuüben.

Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß

(1) Zu $r > 0$ betrachten wir die nördliche Halbkugel V:



(2) Wir können V auf verschiedene Weisen parametrisieren:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{array}{c} x^2 + y^2 + z^2 \le r^2 \\ z \ge 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{array}{c} 0 \le \rho \le r \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le z \le \sqrt{r^2 - \rho^2} \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{array}{c} 0 \le z \le r \\ 0 \le \rho \le \sqrt{r^2 - z^2} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{array} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \rho\sin\theta\sin\varphi \\ \rho\cos\theta \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{array}{c} 0 \le \rho \le r \\ 0 \le \theta \le \pi/2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{array} \right\}$$

Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß

(3a) Parametrisierung $\Phi : \mathbb{R}^3 \supseteq D \to V \subseteq \mathbb{R}^3$ als z–Normalbereich:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} 0 \le \rho \le r \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le z \le \sqrt{r^2-\rho^2} \end{array} \right\}$$

Wir berechnen Jacobi–Matrix und Funktionaldeterminante:

$$\Phi' = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,z)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \det\Phi' = \rho$$

Volumenberechnung dank Transformationssatz, Fubini und HDI:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_3(V) &= \int_V 1\,\mathrm{d}(x,y,z) \overset{\text{Trafo}}{\underset{\text{C2B}}{=}} \int_D |\det\Phi'|\,\mathrm{d}(\rho,\varphi,z) \\
&\overset{\text{Fub}}{\underset{\text{C1E}}{=}} \int_{\rho=0}^{r}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{\sqrt{r^2-\rho^2}} \rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho \overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \int_{\rho=0}^{r} 2\pi\rho\sqrt{r^2-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho \\
&\overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \left[-\frac{2\pi}{3}\left(r^2-\rho^2\right)^{3/2}\right]_{\rho=0}^{r} = \frac{2\pi}{3}r^3
\end{aligned}$$

☺ Das Ergebnis ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung!

Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß

(3b) Alternativ, Parametrisierung $\Phi : D \to V$ in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} 0 \le z \le r \\ 0 \le \rho \le \sqrt{r^2-z^2} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{array} \right\}$$

Jacobi–Matrix Φ' und Funktionaldeterminante $\det\Phi' = \rho$ wie zuvor.
Volumenberechnung dank Transformationssatz, Fubini und HDI:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_3(V) &= \int_V 1\,\mathrm{d}(x,y,z) \overset{\text{Trafo}}{\underset{\text{C2B}}{=}} \int_D |\det\Phi'|\,\mathrm{d}(\rho,\varphi,z) \\
&\overset{\text{Fub}}{\underset{\text{C1E}}{=}} \int_{z=0}^{r}\int_{\rho=0}^{\sqrt{r^2-z^2}}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z \overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \int_{z=0}^{r}\int_{\rho=0}^{\sqrt{r^2-z^2}} 2\pi\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z \\
&\overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \int_{z=0}^{r} \pi\left[\rho^2\right]_{\rho=0}^{\sqrt{r^2-z^2}}\mathrm{d}z = \int_{z=0}^{r} \pi(r^2-z^2)\,\mathrm{d}z \\
&\overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \pi\left[r^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_{z=0}^{r} = \frac{2\pi}{3}r^3
\end{aligned}$$

☺ Das Ergebnis ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung!

Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß

(3c) Zum Vergleich, Parametrisierung $\Phi : D \to V$ in Kugelkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \sin\theta \cos\varphi \\ \rho \sin\theta \sin\varphi \\ \rho \cos\theta \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} 0 \le \rho \le r \\ 0 \le \theta \le \pi/2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{array} \right\}$$

Jacobi–Matrix Φ' und Funktionaldeterminante $\det \Phi' = \rho^2 \sin\theta$:

Volumenberechnung dank Transformationssatz, Fubini und HDI:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_3(V) &= \int_V 1 \,\mathrm{d}(x,y,z) \overset{\text{Trafo}}{\underset{\text{C2B}}{=}} \int_D |\det \Phi'| \,\mathrm{d}(\rho,\theta,\varphi) \\
&\overset{\text{Fub}}{\underset{\text{C1E}}{=}} \int_{\rho=0}^{r} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\rho \overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \int_{\rho=0}^{r} \int_{\theta=0}^{\pi/2} 2\pi\rho^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\rho \\
&\overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \int_{\rho=0}^{r} 2\pi \Big[-\rho^2 \cos\theta \Big]_{\theta=0}^{\pi/2} \mathrm{d}\rho \overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \int_{\rho=0}^{r} 2\pi\rho^2 \,\mathrm{d}\rho \\
&\overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \frac{2\pi}{3} \Big[\rho^3 \Big]_{\rho=0}^{r} = \frac{2\pi}{3} r^3
\end{aligned}$$

☺ Das Ergebnis ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung!

Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß

Aufgabe: (1) Skizzieren Sie zu gegebenem $r > 0$ den Körper

$$V = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le r^2,\ z \ge 0 \}$$

(2) Beschreiben Sie den Körper V explizit durch Parametrisierungen als Normalbereich in z–Richtung, in Zylinder- und in Kugelkoordinaten.

(3) Berechnen Sie den Rauminhalt $\mathrm{vol}_3(V)$ je nach Parametrisierung. Ist das Ergebnis unabhängig von der gewählten Parametrisierung?

(4) Beschreiben Sie die Randfläche $S = \partial V$ implizit / explizit wie in (2).

(5) Bestimmen Sie in jedem Randpunkt s den nach außen zeigenden Einheitsnormalenvektor $n_{\partial V}(s)$ sowie $\mathrm{d}S$ je nach Parametrisierung.

(6) Berechnen Sie den Flächeninhalt $\mathrm{vol}_2(S)$ je nach Parametrisierung. Ist das Ergebnis unabhängig von der gewählten Parametrisierung?

(7) Berechnen Sie die Divergenz des Vektorfeldes $f(x,y,z) = (x,y,z)$, das Volumenintegral $\int_V \mathrm{div}(f) \,\mathrm{d}(x,y,z)$ und das Flussintegral $\int_S f \cdot \mathrm{d}S$.

☺ Diese Aufgabe bietet Gelegenheit, die bisherigen Integrationstechniken zu wiederholen und die neuen Flächenintegrale einzuüben.

Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß

(4) Zur Halbkugel V besteht die Randfläche $S = \partial V = A \cup B$ aus der äquatorialen Kreisscheibe A und der nördlichen Hemisphäre B.

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \; x^2 + y^2 \le r^2 \right\} \qquad = \left\{ \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \; \begin{matrix} 0 \le \rho \le r \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{matrix} \right\}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \; \begin{matrix} x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \\ z \ge 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \middle| \; \begin{matrix} 0 \le \rho \le r \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ z = \sqrt{r^2 - \rho^2} \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \middle| \; \begin{matrix} 0 \le z \le r \\ \rho = \sqrt{r^2 - z^2} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \rho\sin\theta\sin\varphi \\ \rho\cos\theta \end{pmatrix} \middle| \; \begin{matrix} \rho = r \\ 0 \le \theta \le \pi/2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{matrix} \right\}$$

☺ Im Inneren des Körpers haben wir drei Freiheitsgrade, z.B. ρ, θ, φ, auf der Randfläche entsprechend nur noch zwei, z.B. θ, φ.

Das entspricht dem Unterschied zwischen dreidimensionalen Körpern (Volumen) und zweidimensionalen Objekten (Flächen). Hinschauen!

Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß

(5a) In jedem Punkt $s \in A$ sehen wir die äußere Einheitsnormale

$n_{\partial V}(s) = (0, 0, -1)$ (senkrecht auf A, Länge 1, aus V heraus).

Wir nutzen die Parametrisierung $\Phi : D \to A$ in Polarkoordinaten:

$$s = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} \middle| \; \begin{matrix} 0 \le \rho \le r \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{matrix} \right\}.$$

Die beiden Tangentialvektoren und der Normalenvektor sind:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} -\rho\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \end{pmatrix}.$$

(6a) Hieraus erhalten wir erneut den wohlbekannten Flächeninhalt:

$$\mathrm{vol}_2(A) = \int_A |\mathrm{d}A| \overset{\text{Param}}{=} \int_D \left| \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \right| \mathrm{d}(\rho, \varphi) = \int_{\rho=0}^{r} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\rho = \pi r^2$$

☺ Die Formel für $\mathrm{d}A$ beinhaltet die 2dim. Funktionaldeterminante.
Die Norm $|\mathrm{d}\Phi| = \rho$ ist die Flächenverzerrung der Parametrisierung Φ.
Der Vektor $\mathrm{d}\Phi$ steht senkrecht auf der Fläche A, hier in V hinein.

Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß

(7a) Das Flussintegral des Vektorfeldes f über die Kreisscheibe A ist:

$$\int_{s\in A} f(s)\bullet \mathrm{d}A \overset{\text{Param}}{=} \int_D f\big(\Phi(\rho,\varphi)\big)\bullet\Big(-\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\times\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\Big)\,\mathrm{d}(\rho,\varphi)$$

$$= \int_D \begin{pmatrix}\rho\cos\varphi\\ \rho\sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}0\\0\\-\rho\end{pmatrix}\mathrm{d}(\rho,\varphi) \quad = \quad 0$$

☺ Anschauung: Das Feld f ist tangential zu A, daher $f(s)\bullet\mathrm{d}A = 0$.

(7) Das Vektorfeld $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ und seine Divergenz:

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{div}(f) = 1+1+1 = 3$$

☺ In diesem Beispiel ist $\mathrm{div}(f)$ konstant und daher das Integral besonders leicht: Die Quellstärke von f auf dem Bereich V ist

$$\int_V \mathrm{div}(f)\,\mathrm{d}(x,y,z) \;=\; \int_V 3\,\mathrm{d}(x,y,z) \;=\; 3\,\mathrm{vol}_3(V) \;=\; 2\pi r^3.$$

Wo fließt dieser Überschuss hin? Über A sicher nicht! Also über B...

Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß

(5b) In jedem Punkt $s\in B$ sehen wir die äußere Einheitsnormale

$n_{\partial V}(s) = s/|s| = s/r$ (senkrecht auf B, Länge 1, aus V heraus).

Wir nutzen obige Parametrisierung $\Phi: D\to B$ in Polarkoordinaten:

$$s = \Phi\begin{pmatrix}\rho\\\varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\rho\cos\varphi\\ \rho\sin\varphi\\ \sqrt{r^2-\rho^2}\end{pmatrix}, \quad D = \left\{\begin{pmatrix}\rho\\\varphi\end{pmatrix}\;\middle|\;\begin{matrix}0\le\rho\le r\\ 0\le\varphi\le 2\pi\end{matrix}\right\}.$$

Die beiden Tangentialvektoren und der Normalenvektor sind:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ -\rho/\sqrt{r^2-\rho^2}\end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix}-\rho\sin\varphi\\ \rho\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\times\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix}\rho^2\cos\varphi/\sqrt{r^2-\rho^2}\\ \rho^2\sin\varphi/\sqrt{r^2-\rho^2}\\ \rho\end{pmatrix} = \frac{\rho}{\sqrt{r^2-\rho^2}}\,\Phi\begin{pmatrix}\rho\\\varphi\end{pmatrix}$$

☺ Dieser Normalenvektor zeigt nach außen, aber mit variabler Länge. Die Norm $|\mathrm{d}\Phi|$ ist die Flächenverzerrung der Parametrisierung Φ.

Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß

(6b) Hieraus erhalten wir den Flächeninhalt der Hemisphäre B:

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_2(B) &= \int_B |\mathrm{d}B| \overset{\text{Param}}{=} \int_D \left|\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\times\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right| \mathrm{d}(\rho,\varphi) = \int_D \frac{r\rho}{\sqrt{r^2-\rho^2}}\,\mathrm{d}(\rho,\varphi)\\ &= \int_{\rho=0}^{r}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{r\rho}{\sqrt{r^2-\rho^2}}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho = 2\pi r\Big[-\sqrt{r^2-\rho^2}\Big]_{\rho=0}^{r} = 2\pi r^2\end{aligned}$$

(7b) Das Flussintegral des Vektorfeldes f über die Hemisphäre B ist:

$$\begin{aligned}&\int_{s\in B} f(s)\bullet\mathrm{d}B \overset{\text{Param}}{=} \int_D f\big(\Phi(\rho,\varphi)\big)\bullet\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\times\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\Big)\,\mathrm{d}(\rho,\varphi)\\ &= \int_D \begin{pmatrix}\rho\cos\varphi\\ \rho\sin\varphi\\ \sqrt{r^2-\rho^2}\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}\rho^2\cos\varphi/\sqrt{r^2-\rho^2}\\ \rho^2\sin\varphi/\sqrt{r^2-\rho^2}\\ \rho\end{pmatrix}\mathrm{d}(\rho,\varphi)\\ &= \ldots\ldots = \int_D \frac{r^2\rho}{\sqrt{r^2-\rho^2}}\,\mathrm{d}(\rho,\varphi) = 2\pi r^3 \qquad \text{(wie 6b)}\end{aligned}$$

Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß

☺ Anschauung: Das Vektorfeld f steht überall senkrecht auf B und hat dort Länge r. Hieraus folgt das Flussintegral direkt und mühelos:

$$\int_B f\bullet\mathrm{d}B = \int_{s\in B} f(s)\bullet n_{\partial V}(s)\,|\mathrm{d}B| = \int_B r\,|\mathrm{d}B| = r\cdot\mathrm{vol}_2(B) = r\cdot 2\pi r^2$$

Bilanz zur Halbkugel V und ihrer Randfläche $S=\partial V = A\cup B$:

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_3(V) &= \int_V |\mathrm{d}V| = \frac{2\pi}{3}r^3, & \int_V \mathrm{div}(f)\,\mathrm{d}V &= 2\pi r^3,\\ \mathrm{vol}_2(A) &= \int_A |\mathrm{d}A| = \pi r^2, & \int_{s\in A} f(s)\bullet\mathrm{d}A &= 0,\\ \mathrm{vol}_2(B) &= \int_A |\mathrm{d}A| = 2\pi r^2, & \int_{s\in B} f(s)\bullet\mathrm{d}B &= 2\pi r^3.\end{aligned}$$

☺ Die Gleichheit ist kein Zufall, sondern illustriert den Satz von Gauß:

$$\boxed{\int_{v\in V} \mathrm{div}\, f(v)\,\mathrm{d}V = \int_{s\in S} f(s)\bullet\mathrm{d}S}$$

Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß

☺ Wir können die Hemisphäre B auf viele Weisen parametrisieren!

(5c) Alternativ die Parametrisierung $\Phi : D \to B$ in Zylinderkoordinaten:

$$s = \Phi\begin{pmatrix} z \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{r^2 - z^2}\,\cos\varphi \\ \sqrt{r^2 - z^2}\,\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ \varphi \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \le z \le r \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{matrix} \right\}.$$

Die beiden Tangentialvektoren und der Normalenvektor sind:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \begin{pmatrix} -z/\sqrt{r^2 - z^2}\,\cos\varphi \\ -z/\sqrt{r^2 - z^2}\,\sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} -\sqrt{r^2 - z^2}\,\sin\varphi \\ \sqrt{r^2 - z^2}\,\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} -\sqrt{r^2 - z^2}\,\cos\varphi \\ -\sqrt{r^2 - z^2}\,\sin\varphi \\ -z \end{pmatrix} \quad = \quad -\Phi(z,\varphi)$$

⚠ Der Normalenvektor $\mathrm{d}\Phi$ zeigt in V hinein, Rechte-Hand-Regel.
Die Norm $|\mathrm{d}\Phi| = r$ ist die Flächenverzerrung der Parametrisierung Φ.

Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß

(6c) Hieraus erhalten wir den Flächeninhalt der Hemisphäre B:

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_2(B) &= \int_B |\mathrm{d}B| = \int_D \left| \frac{\partial\Phi}{\partial z} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \right| \mathrm{d}(z,\varphi) = \int_D r\,\mathrm{d}(z,\varphi) \\ &= \int_{z=0}^{r} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = \int_{z=0}^{r} 2\pi r\,\mathrm{d}z = 2\pi r^2 \end{aligned}$$

(7c) Das Flussintegral des Vektorfeldes f über die Hemisphäre B ist:

$$\begin{aligned} \int_{s\in B} f(s)\bullet\mathrm{d}B &\overset{\text{Param}}{=} \int_D f\big(\Phi(z,\varphi)\big)\bullet\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)\mathrm{d}(z,\varphi) \\ &= \int_D \begin{pmatrix} \sqrt{r^2 - z^2}\,\cos\varphi \\ \sqrt{r^2 - z^2}\,\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\sqrt{r^2 - z^2}\,\cos\varphi \\ -\sqrt{r^2 - z^2}\,\sin\varphi \\ -z \end{pmatrix} \mathrm{d}(z,\varphi) \\ &= \ldots\ldots = \int_D -r^2\,\mathrm{d}(z,\varphi) = -2\pi r^3 \qquad \text{(wie 6c)} \end{aligned}$$

⚠ Der Normalenvektor $\mathrm{d}\Phi$ zeigt in V hinein; Rechte-Hand-Regel.
Der Flächeninhalt $\int|\mathrm{d}\Phi|$ ist von der Orientierung unabhängig.
Das Flussintegral wechselt das Vorzeichen bei Orientierungsumkehr.

Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß

☺ Wir können die Hemisphäre B auf viele Weisen parametrisieren!

(5d) Zum Vergleich schließlich in Kugelkoordinaten $\Phi : D \to B$:

$$s = \Phi\begin{pmatrix}\theta\\ \varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta\end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix}\theta\\ \varphi\end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \le \theta \le \pi/2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{matrix} \right\}.$$

Die beiden Tangentialvektoren und der Normalenvektor sind:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi \\ -r\sin\theta\end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta\cos\varphi \\ 0\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} r^2\sin^2\theta\cos\varphi \\ r^2\sin^2\theta\sin\varphi \\ r^2\sin\theta\cos\theta\end{pmatrix} \quad = \quad r\sin\theta\cdot\Phi(\theta,\varphi)$$

☺ Der Normalenvektor $\mathrm{d}\Phi$ zeigt aus V heraus, Rechte-Hand-Regel.
Die Norm $|\mathrm{d}\Phi| = r^2\sin\theta$ ist wie immer die Flächenverzerrung.

Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß

(6d) Hieraus erhalten wir den Flächeninhalt der Hemisphäre B:

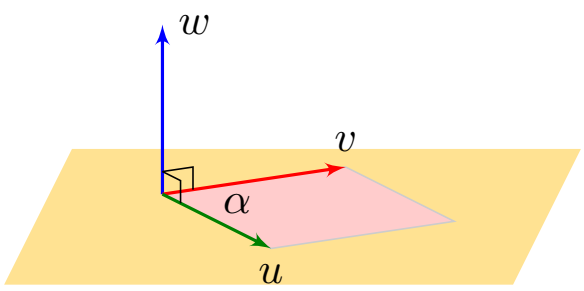
$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_2(B) &= \int_B |\mathrm{d}B| = \int_D \left|\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\times\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right| \mathrm{d}(\theta,\varphi) = \int_D r^2\sin\theta\,\mathrm{d}(\theta,\varphi) \\ &= \int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = 2\pi r^2\Big[\cos\theta\Big]_{\theta=0}^{\pi/2} = 2\pi r^2\end{aligned}$$

(7d) Das Flussintegral des Vektorfeldes f über die Hemisphäre B ist:

$$\begin{aligned}\int_{s\in B} f(s)\cdot\mathrm{d}B &\overset{\text{Param}}{=} \int_D f\big(\Phi(\theta,\varphi)\big)\cdot\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\times\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\Big)\,\mathrm{d}(\theta,\varphi) \\ &= \int_D \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} r^2\sin^2\theta\cos\varphi \\ r^2\sin^2\theta\sin\varphi \\ r^2\sin\theta\cos\theta\end{pmatrix}\,\mathrm{d}(\theta,\varphi) \\ &= \ldots\ldots = \int_D r^3\sin\theta\,\mathrm{d}(\theta,\varphi) = 2\pi r^3 \qquad \text{(wie 6d)}\end{aligned}$$

☺ Der Normalenvektor $\mathrm{d}\Phi$ zeigt aus V heraus; Rechte-Hand-Regel.
Der Flächeninhalt $\int|\mathrm{d}\Phi|$ ist von der Orientierung unabhängig.
Das Flussintegral wechselt das Vorzeichen bei Orientierungsumkehr.

Das Kreuzprodukt von Vektoren im $\mathbb{R}^3$



Erinnerung: Das **Kreuzprodukt** zweier Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^3$ ist

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $w = u \times v$ steht senkrecht auf den Vektoren u, v.
Die Orientierung von (u, v, w) entspricht der Rechte-Hand-Regel.

Die Norm $|w|$ ist der Flächeninhalt des von den Vektoren u und v aufgespannten Parallelogramms, also $|w| = |u| \cdot |v| \cdot \sin \sphericalangle(u, v)$.

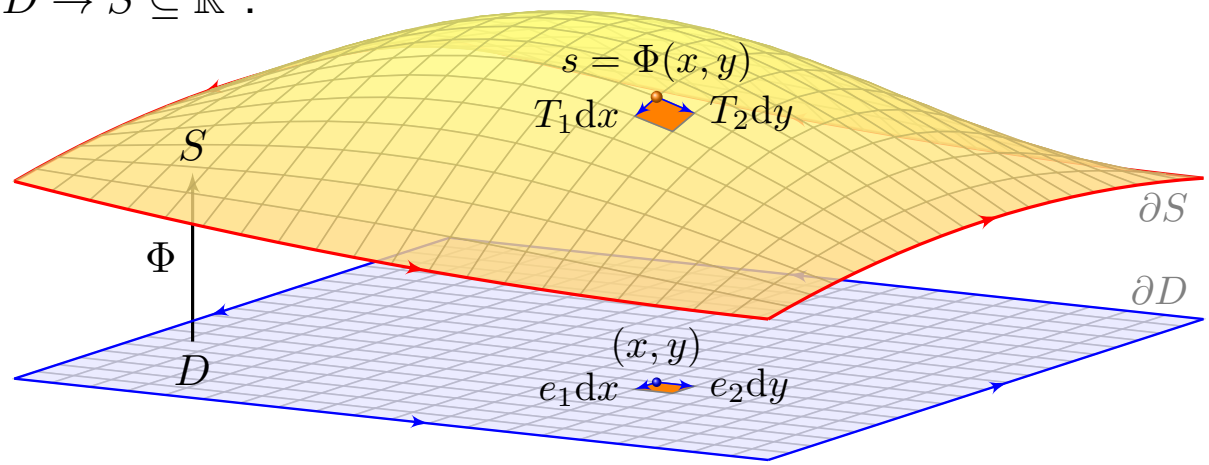
Daher gilt $w = 0$ genau dann, wenn u und v linear abhängig sind, und umgekehrt $w \neq 0$ genau dann, wenn u und v linear unabhängig sind.

Die Abbildung $(u, v) \mapsto u \times v$ ist antisymmetrisch, $v \times u = -(u \times v)$, und bilinear, also $u \times (av + bv') = a(u \times v) + b(u \times v')$, ebenso in u.

📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §3.10.

Tangentialvektoren und Flächenelemente

Ein **parametrisiertes Flächenstück** ist eine stetig diff'bare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to S \subseteq \mathbb{R}^3$.



Am Punkt $s = \Phi(x, y)$ heften die **Tangentialvektoren**

$$T_1 := \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) \quad \text{und} \quad T_2 := \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y).$$

Der zugehörige **Normalenvektor** ist das Kreuzprodukt $N = T_1 \times T_2$.
Der **Flächeninhalt** eines kleinen Flächenelements $\mathrm{d}S$ ist daher

$$\mathrm{vol}_2\, \Phi\Big([x, x + \mathrm{d}x] \times [y, y + \mathrm{d}y]\Big) \approx \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) \right| \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

Glatte Flächenstücke

Hier sei der Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt mit stückweise glattem Rand, z.B. ein Rechteck $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, eine Kreisscheibe, etc. Zur Vereinfachung werden wir D als zusammenhängend annehmen. Die Abbildung $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ sei stetig diff'bar, wo nötig sogar zweimal.

Die Flächenparametrisierung $\Phi : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to \mathbb{R}^3$ heißt **regulär**, wenn sie injektiv ist und $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) \neq 0$ in jedem Punkt $(x, y) \in D$ erfüllt. Das Bild $S = \Phi(D) \subseteq \mathbb{R}^3$ nennen wir dann ein **glattes Flächenstück**. Der Rand $\partial S := \Phi(\partial D)$ ist somit eine stückweise glatte Kurve im $\mathbb{R}^3$.

Beispiel: Jede stetig diff'bare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to \mathbb{R}$ definiert ein reguläres Flächenstück $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ mit $\Phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$. Tangentialvektoren sind $\partial_x \Phi = (1, 0, \partial_x f)$ und $\partial_y \Phi = (0, 1, \partial_y f)$, sie ergeben den Normalenvektor $\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi = (-\partial_x f, -\partial_y f, 1)$.

Beispiel: Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to \mathbb{R}^2$ injektiv und stetig diff'bar mit $\det \varphi' > 0$. Sei $\Phi : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $\Phi(x, y) = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), c)$. Die Tangentialvektoren $\partial_x \Phi = (\partial_x \varphi_1, \partial_x \varphi_2, 0)$, $\partial_y \Phi = (\partial_y \varphi_1, \partial_y \varphi_2, 0)$ ergeben den senkrechten Normalenvektor $\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi = (0, 0, \det \varphi')$.

Glatte Flächenstücke

Reguläre Parametrisierungen haben besonders gute geometrische Eigenschaften und entsprechen unserer Anschauung: Die Regularität stellt sicher, dass die Bildmenge $S = \Phi(D) \subseteq \mathbb{R}^3$ eine glatte Fläche ist.

Die Forderung $\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi \neq 0$ bedeutet, dass die Tangentialvektoren $\partial_x \Phi$ und $\partial_y \Phi$ linear unabhängig sind, also eine Tangentialebene an S aufspannen, und somit S überall eine eindeutige Normalenrichtung hat.

Diese Forderung ist streng, in vielen Rechnungen genügt weniger: Wir nennen Φ **semiregulär**, wenn Φ regulär auf dem Inneren $\mathring{D}$ ist. Wir fordern Injektivität und $\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi \neq 0$ dann nur im Inneren $\mathring{D}$, auf dem Rand ∂D benötigen und fordern wir dies dann nicht mehr.

Aufgabe: In der vorigen Aufgabe nutzen wir drei Parametrisierungen der Hemisphäre. Welche sind regulär? Welche sind semiregulär?

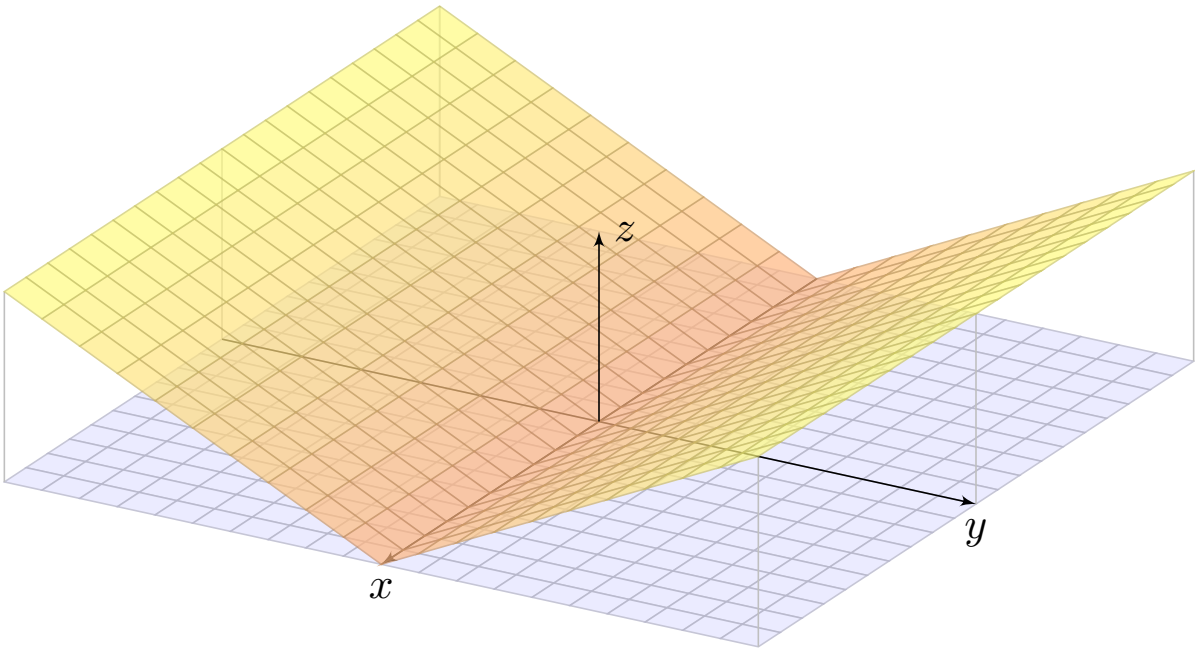
Lösung: Keine ist regulär: (5b) ist injektiv, aber auf ∂D divergiert $\partial_\rho \Phi$. Anschaulich plausibel: Die Flächenverzerrung wird hier beliebig groß. Hingegen sind (5c) und (5d) stetig diff'bar, aber auf ∂D nicht injektiv. ☺ Alle drei sind jedoch semiregulär, und das genügt zur Integration!

Differenzierbarkeit und Knicke

Aufgabe: Über dem Quadrat $D = [-1,1] \times [-1,1]$ liegt der Graph

$$S = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; |x| \le 1,\ |y| \le 1,\ z = |y| \,\}.$$

Skizzieren Sie S und geben Sie eine stetige Bijektion $\Phi : D \to S$ an. und stetig differenzierbar? Wird $S \subseteq \mathbb{R}^3$ somit zu einer glatten Fläche?



Differenzierbarkeit und Knicke

Lösung: Die Fläche S kann C^0–parametrisiert werden, etwa durch

$$\Psi : \mathbb{R}^2 \supseteq D \xrightarrow{\sim} S \subseteq \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \Psi(x,y) = (\ x,\ y,\ |y|\ ).$$

Dies ist eine Bijektion von D auf S, aber nicht differenzierbar (in $y = 0$). Die Fläche S kann ebenso C^1–parametrisiert werden, etwa durch

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \supseteq D \xrightarrow{\sim} S \subseteq \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \Phi(x,t) = (\ x,\ t|t|,\ t^2\ ).$$

Auch Φ ist eine Bijektion des Definitionsbereichs D auf die Fläche S. Sie ist offensichtlich stetig und zudem stetig differenzierbar mit

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2|t| \\ 2t \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2t \\ 2|t| \end{pmatrix}.$$

Der Tangentialvektor $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ verschwindet für $t = 0$, entlang der x–Achse.

⚠ Erstaunlich: Ein stetig differenzierbar parametrisiertes Flächenstück $\Phi : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to S$ kann also, wie hier gesehen, durchaus Knicke haben!

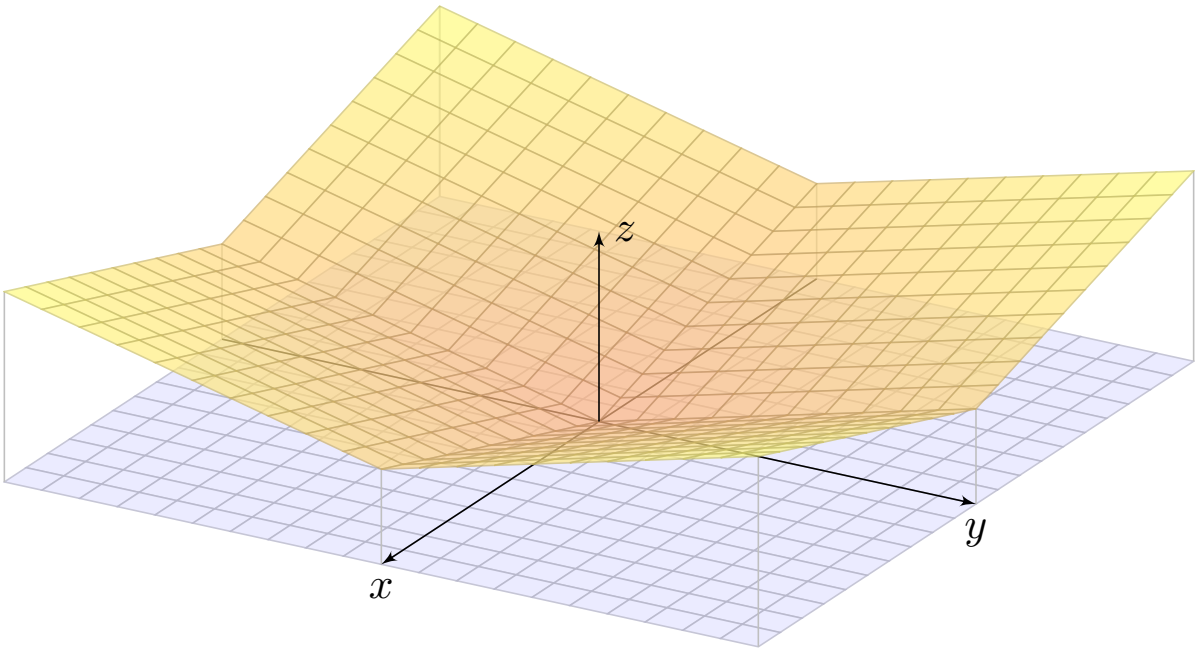
☺ Glattheit verlangt überall linear unabhängige Tangentialvektoren!

Differenzierbarkeit und Ecken

Aufgabe: Über dem Quadrat $D = [-1,1] \times [-1,1]$ liegt der Graph

$$S = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \le 1,\ |y| \le 1,\ z = |x| + |y| \,\}.$$

Skizzieren Sie S und geben Sie eine stetige Bijektion $\Phi : D \to S$ an.
und stetig differenzierbar? Wird $S \subseteq \mathbb{R}^3$ somit zu einer glatten Fläche?



Differenzierbarkeit und Ecken

Lösung: Die Fläche S kann C^0–parametrisiert werden, etwa durch

$$\Psi : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to S \subseteq \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \Psi(x,y) = (\ x,\ y,\ |x| + |y|\ ).$$

Die Fläche S kann ebenso C^1–parametrisiert werden, etwa durch

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to S \subseteq \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \Psi(s,t) = (\ s|s|,\ t|t|,\ s^2 + t^2\ ).$$

Dies ist eine Bijektion des Definitionsbereichs D auf die Fläche S.
Sie ist offensichtlich stetig und zudem stetig differenzierbar mit

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = \begin{pmatrix} 2|s| \\ 0 \\ 2s \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2|t| \\ 2t \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \begin{pmatrix} +4\,s\,|t| \\ -4\,|s|\,t \\ +4\,|s\,t| \end{pmatrix}.$$

Der Tangentialvektor $\frac{\partial \Phi}{\partial s}$ verschwindet für $s = 0$, entlang der y–Achse.
Der Tangentialvektor $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ verschwindet für $t = 0$, entlang der x–Achse.

⚠ Erstaunlich: Ein stetig differenzierbar parametrisiertes Flächenstück $\Phi : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ kann durchaus Knicke und sogar Ecken haben!

☺ Glattheit verlangt überall linear unabhängige Tangentialvektoren!

Integration über parametrisierte Flächenstücke

Weiterhin sei $\Phi : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ ein parametrisiertes Flächenstück. Für das **vektorielle** bzw. **skalare Flächenelement** schreiben wir

$$\mathrm{d}\Phi := \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} \times \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) \mathrm{d}(x,y) \quad \text{und} \quad |\mathrm{d}\Phi| = \left|\frac{\partial\Phi}{\partial x} \times \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right| \mathrm{d}(x,y).$$

Der **Flächeninhalt** des parametrisierten Flächenstücks Φ ist

$$\mathrm{vol}_2(\Phi) := \int_D |\mathrm{d}\Phi| = \int_{(x,y)\in D} \left|\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y)\right| \mathrm{d}(x,y).$$

Das **Flächenintegral** eines Skalarfeldes $g : \mathbb{R}^3 \supseteq S \to \mathbb{R}$ ist

$$\int_D g\,|\mathrm{d}\Phi| := \int_{(x,y)\in D} g\big(\Phi(x,y)\big) \left|\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y)\right| \mathrm{d}(x,y).$$

Das **Flussintegral** eines Vektorfeldes $f : \mathbb{R}^3 \supseteq S \to \mathbb{R}^3$ ist

$$\int_D f \cdot \mathrm{d}\Phi := \int_{(x,y)\in D} \left\langle f(\Phi(x,y)) \,\middle|\, \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y) \right\rangle \mathrm{d}(x,y).$$

Integration über parametrisierte Flächenstücke

Links steht die bequeme **Kurzschreibweise**, rechts steht, wie Sie dies explizit ausrechnen mit dem Flächenelement $\mathrm{d}\Phi = (\partial_x\Phi \times \partial_y\Phi)\,\mathrm{d}(x,y)$:

Das Flächenelement $\mathrm{d}\Phi = n\,|\mathrm{d}\Phi|$ steht für ein kleines Flächenstück; sein Flächeninhalt ist $|\mathrm{d}\Phi|$, der Vektor n steht senkrecht zur Fläche. So kommen wir, wie oben erklärt, von der Geometrie zum Integral.

Einfachstes Beispiel für ein **Flächenintegral** ist der Flächeninhalt $\int_D |\mathrm{d}\Phi|$: Anschaulich summiert dieses Integral alle Flächenelemente. Allgemein ist das Integral $\int_D g\,|\mathrm{d}\Phi|$ ein durch $g : S \to \mathbb{R}$ gewichteter Flächeninhalt. Wir können uns g als Massendichte vorstellen (Masse pro Fläche); das Flächenintegral über S ergibt so die Gesamtmasse auf S.

Das **Flussintegral** $\int_D f \cdot \mathrm{d}\Phi$ misst, wieviel f durch Φ fließt: Der Vektor $\mathrm{d}\Phi$ steht senkrecht zur Fläche, somit ist das Skalarprodukt $f \cdot \mathrm{d}\Phi$ der normale Anteil von f senkrecht zur Fläche. Sind f und $\mathrm{d}\Phi$ parallel, so multipliziert man die Länge $|f|$ mit $|\mathrm{d}\Phi|$. Im Allgemeinen sind f und $\mathrm{d}\Phi$ nicht parallel; es zählt dann nur der Anteil von f in Normalenrichtung: Die oben erklärte Zerlegung $\mathrm{d}\Phi = n\,|\mathrm{d}\Phi|$ ergibt $f \cdot \mathrm{d}\Phi = (f \cdot n)\,|\mathrm{d}\Phi|$.

Orientierungsumkehr einer parametrisierten Fläche

Flächenintegrale formulieren wir wie oben zunächst für parametrisierte Flächenstücke $\Phi : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to \mathbb{R}^3$. Wir wollen nun nachrechnen, dass sie invariant sind unter (orientierungstreuer) Umparametrisierung.

Beispiel: Zur Parametrisierung $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ erhalten wir die umgekehrte Parametrisierung $\bar{\Phi} : \bar{D} \to \mathbb{R}^3$ durch Vertauschung der Variablen:

$$\bar{D} = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y, x) \in D \,\}$$
$$\bar{\Phi} : \bar{D} \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \bar{\Phi}(x, y) = \Phi(y, x)$$

Beide parametrisieren dieselbe Menge $S = \Phi(D) = \bar{\Phi}(\bar{D})$, aber mit umgekehrter Orientierung: Das Kreuzprodukt wechselt sein Vorzeichen!

Flächenintegrale bleiben bei Orientierungsumkehr unverändert:

$$\boxed{\int_{\bar{D}} g \, |\mathrm{d}\bar{\Phi}| = \int_D g \, |\mathrm{d}\Phi|}$$

Flussintegrale hingegen wechseln das Vorzeichen:

$$\boxed{\int_{\bar{D}} f \cdot \mathrm{d}\bar{\Phi} = -\int_D f \cdot \mathrm{d}\Phi.}$$

Orientierungsumkehr einer parametrisierten Fläche

Als Beispiel betrachten wir Kugelkoordinaten $\Phi : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to S \subseteq \mathbb{R}^3$:

$$\Phi \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin\theta \cos\varphi \\ r \sin\theta \sin\varphi \\ r \cos\theta \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \le \theta \le \pi/2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{matrix} \right\}$$

Die beiden Tangentialvektoren und der Normalenvektor sind:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} r \cos\theta \cos\varphi \\ r \cos\theta \sin\varphi \\ -r \sin\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \sin\theta \sin\varphi \\ r \sin\theta \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 \sin^2\theta \cos\varphi \\ r^2 \sin^2\theta \sin\varphi \\ r^2 \sin\theta \cos\theta \end{pmatrix}$$

Durch Vertauschung erhalten wir $\bar{\Phi} : \mathbb{R}^2 \supseteq \bar{D} \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ mit

$$\bar{\Phi} \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin\theta \cos\varphi \\ r \sin\theta \sin\varphi \\ r \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \bar{D} = \left\{ \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi/2 \end{matrix} \right\}.$$

Die beiden Tangentialvektoren und der Normalenvektor sind nun

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -r \sin\theta \sin\varphi \\ r \sin\theta \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r \cos\theta \cos\varphi \\ r \cos\theta \sin\varphi \\ -r \sin\theta \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} r^2 \sin^2\theta \cos\varphi \\ r^2 \sin^2\theta \sin\varphi \\ r^2 \sin\theta \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Invarianz unter Umparametrisierung

Wir wollen verschiedene Parametrisierungen $\Phi : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ und $\tilde{\Phi} : \mathbb{R}^2 \supseteq \tilde{D} \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ derselben Fläche S miteinander vergleichen.

Eine **Umparametrisierung** ist eine stetige Bijektion $H : \tilde{D} \to D$.
Für eine **reguläre Umparametrisierung** verlangen wir zudem, dass sowohl H als auch $H^{-1} : D \to \tilde{D}$ stetig differenzierbar sind.

Wir nennen $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ und $\tilde{\Phi} : \tilde{D} \to \mathbb{R}^3$ **äquivalent** vermöge einer Umparametrisierung H, wenn $\tilde{\Phi} = \Phi \circ H$ gilt, also $\tilde{\Phi} \circ H^{-1} = \Phi$.

Satz G2A: Transformationssatz für Flächenintegrale

Äquivalente Flächenparametrisierungen $\tilde{\Phi} = \Phi \circ H$ haben dieselbe Bildmenge $S = \Phi(D) = \tilde{\Phi}(\tilde{D})$ und denselben Flächeninhalt. Es gilt

$$\partial_1 \tilde{\Phi} \times \partial_2 \tilde{\Phi} = (\partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi) \circ H \cdot \det H'.$$

Daher sind Flächenintegrale invariant unter Umparametrisierung:

$$\int_{\tilde{D}} g \, |\mathrm{d}\tilde{\Phi}| = \int_D g \, |\mathrm{d}\Phi|, \qquad \int_{\tilde{D}} f \bullet \mathrm{d}\tilde{\Phi} = \operatorname{sign}(\det H') \int_D f \bullet \mathrm{d}\Phi$$

Invarianz unter Umparametrisierung

Aufgabe: Rechnen Sie dies nach mit Hilfe des Transformationssatzes!

Nachrechnen der ersten Koordinate von $\partial_1 \tilde{\Phi} \times \partial_2 \tilde{\Phi}$ dank Kettenregel:

$$\begin{aligned}
(\partial_1 \tilde{\Phi} \times \partial_2 \tilde{\Phi})_1 &= \partial_1 \tilde{\Phi}_2 \cdot \partial_2 \tilde{\Phi}_3 - \partial_1 \tilde{\Phi}_3 \cdot \partial_2 \tilde{\Phi}_2 \\
&= \partial_1 (\Phi_2 \circ H) \cdot \partial_2 (\Phi_3 \circ H) - \partial_1 (\Phi_3 \circ H) \cdot \partial_2 (\Phi_2 \circ H) \\
&= +\big(\partial_1 \Phi_2 \circ H \cdot \partial_1 H_1 + \partial_2 \Phi_2 \circ H \cdot \partial_1 H_2\big) \\
&\qquad \cdot \big(\partial_1 \Phi_3 \circ H \cdot \partial_2 H_1 + \partial_2 \Phi_3 \circ H \cdot \partial_2 H_2\big) \\
&\quad - \big(\partial_1 \Phi_3 \circ H \cdot \partial_1 H_1 + \partial_2 \Phi_3 \circ H \cdot \partial_1 H_2\big) \\
&\qquad \cdot \big(\partial_1 \Phi_2 \circ H \cdot \partial_2 H_1 + \partial_2 \Phi_2 \circ H \cdot \partial_2 H_2\big) \\
&= \big(\partial_1 \Phi_2 \cdot \partial_2 \Phi_3 - \partial_1 \Phi_3 \cdot \partial_2 \Phi_2\big) \circ H \\
&\qquad \cdot \big(\partial_1 H_1 \cdot \partial_2 H_2 - \partial_2 H_1 \cdot \partial_1 H_2\big) \\
&= (\partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi)_1 \circ H \cdot \det H'
\end{aligned}$$

Gleiches gilt für die Koordinaten $(\partial_1 \tilde{\Phi} \times \partial_2 \tilde{\Phi})_2$ und $(\partial_1 \tilde{\Phi} \times \partial_2 \tilde{\Phi})_3$.
Hieraus folgt die Behauptung $\partial_1 \tilde{\Phi} \times \partial_2 \tilde{\Phi} = (\partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi) \circ H \cdot \det H'$.

Invarianz unter Umparametrisierung

Flächenintegral eines Skalarfeldes $g : \mathbb{R}^3 \supseteq S \to \mathbb{R}$ über $\tilde{\Phi} = \Phi \circ H$:

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{D}} g\,|\mathrm{d}\tilde{\Phi}| &\overset{(1)}{=} \int_{\tilde{D}} (g \circ \tilde{\Phi}) \cdot |\partial_1 \tilde{\Phi} \times \partial_2 \tilde{\Phi}|\,\mathrm{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) \\
&\overset{(2)}{=} \int_{\tilde{D}} (g \circ \Phi \circ H) \cdot (|\partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi| \circ H) \cdot |\det H'|\,\mathrm{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) \\
&\overset{(3)}{=} \int_{D} (g \circ \Phi) \cdot |\partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi|\,\mathrm{d}(x, y) \overset{(4)}{=} \int_{D} g\,|\mathrm{d}\Phi|
\end{aligned}$$

Gleichungen (1) und (4) sind die Definition des Flächenintegrals bezüglich $\tilde{\Phi}$ und Φ, (2) folgt aus der Kettenregel wie oben erklärt, und (3) ist der Transformationssatz C2B angewendet auf $H : \tilde{D} \to D$.

☺ Zur Berechnung des Integrals müssen wir eine Parametrisierung wählen, doch das Ergebnis ist von dieser willkürlich Wahl unabhängig. Jede:r darf sich die jeweils bequemste Parametrisierung aussuchen.

☺ Statt Regularität der gesamten Umparametrisierung $H : \tilde{D} \to D$ genügt es, dies im Inneren zu fordern: Dank $\mathrm{vol}_2(\partial \tilde{D}) = \mathrm{vol}_2(\partial D) = 0$ tragen die Ränder nichts zu den Flächenintegralen bei, siehe Satz C2B.

Invarianz unter Umparametrisierung

Flussintegral eines Vektorfeldes $f : \mathbb{R}^3 \supseteq S \to \mathbb{R}^3$ über $\tilde{\Phi} = \Phi \circ H$:

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{D}} f \bullet \mathrm{d}\tilde{\Phi} &\overset{(1)}{=} \int_{\tilde{D}} \left\langle f \circ \tilde{\Phi} \,\middle|\, \partial_1 \tilde{\Phi} \times \partial_2 \tilde{\Phi} \right\rangle \mathrm{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) \\
&\overset{(2)}{=} \int_{\tilde{D}} \left\langle f \circ \Phi \circ H \,\middle|\, (\partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi) \circ H \right\rangle \cdot \det H'\,\mathrm{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) \\
&\overset{(3)}{=} \mathrm{sign}(\det H') \int_{D} \left\langle f \circ \Phi \,\middle|\, \partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi \right\rangle \mathrm{d}(x, y) \\
&\overset{(4)}{=} \mathrm{sign}(\det H') \int_{D} f \bullet \mathrm{d}\Phi
\end{aligned}$$

⚠ Das hier auftretende Vorzeichen $\mathrm{sign}(\det H') = \pm 1$ gilt, je nachdem ob die Parametrisierungen Φ und $\tilde{\Phi}$ gleichsinnig oder gegensinnig sind.

☺ Das Ergebnis ist ansonsten von der Parametrisierung unabhängig. Jede:r darf sich die jeweils bequemste Parametrisierung aussuchen.

☺ Statt Regularität der gesamten Umparametrisierung $H : \tilde{D} \to D$ genügt es, dies im Inneren zu fordern: Dank $\mathrm{vol}_2(\partial \tilde{D}) = \mathrm{vol}_2(\partial D) = 0$ tragen die Ränder nichts zu den Flächenintegralen bei, siehe Satz C2B.

Kugelsegment und Kugelkappe

Aufgabe: (1) Skizzieren Sie zu $0 \leq h \leq r$ das **Kugelsegment**

$$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2 \leq r^2,\; r-h \leq z \leq r \right\}$$

(2) Beschreiben Sie den Körper V explizit durch Parametrisierungen in Zylinderkoordinaten sowie als Normalbereich in z–Richtung.

(3) Berechnen Sie den Rauminhalt $\mathrm{vol}_3(V)$ je nach Parametrisierung. Ist das Ergebnis unabhängig von der gewählten Parametrisierung?

(4) Beschreiben Sie ebenso explizit wie in (2) die **Kugelkappe**

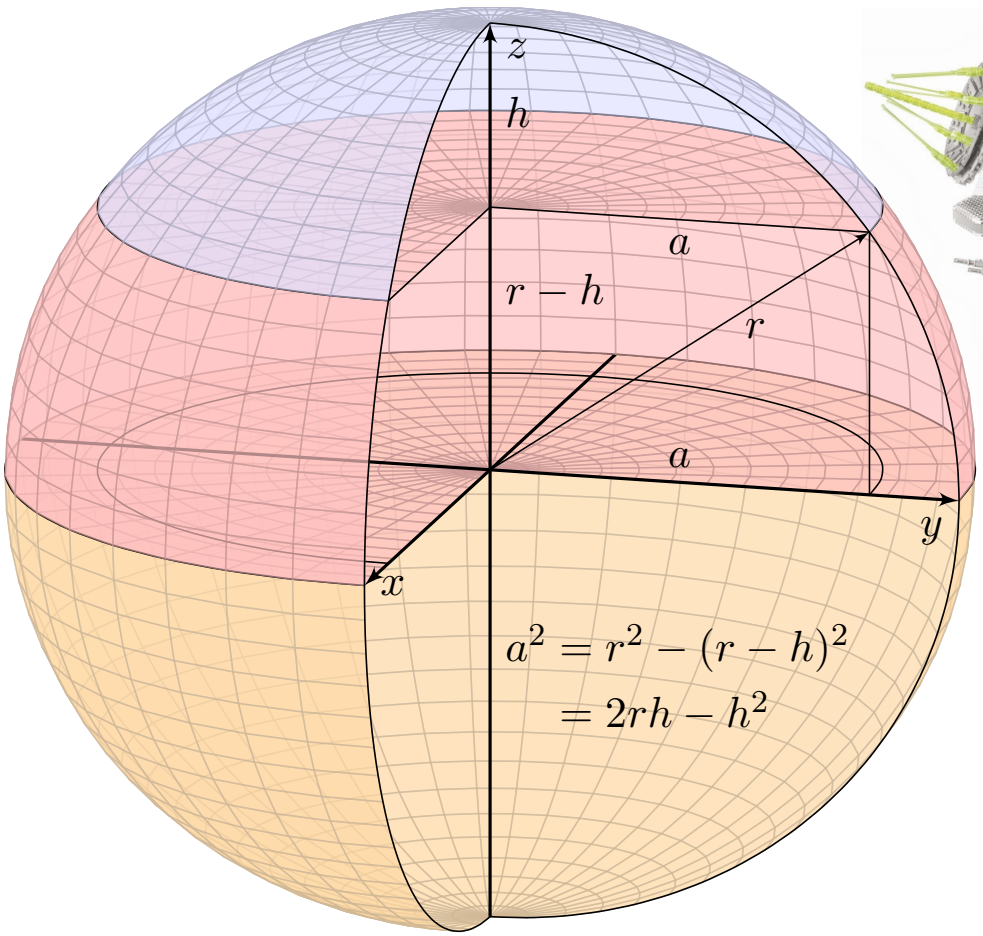
$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2 = r^2,\; r-h \leq z \leq r \right\}$$

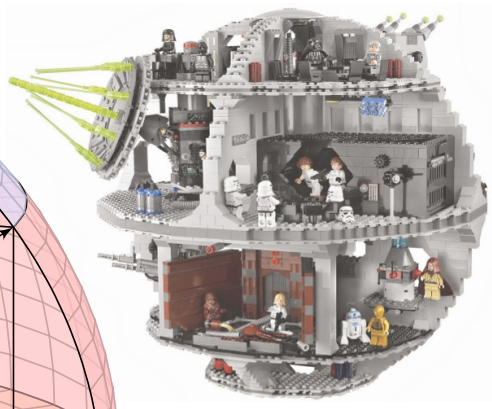
(5) Bestimmen Sie in jedem Punkt $s \in S$ den nach außen zeigenden Einheitsnormalenvektor $n(s)$ sowie $\mathrm{d}S$ je nach Parametrisierung.

(6) Berechnen Sie den Flächeninhalt $\mathrm{vol}_2(S)$ je nach Parametrisierung. Ist das Ergebnis unabhängig von der gewählten Parametrisierung?

☺ Diese Aufgaben bieten Gelegenheit, die bisherigen Volumen-Integrale zu wiederholen und die neuen Flächenintegrale einzuüben.

Kugelsegment und Kugelkappe





Volumen eines Kugelsegments

(2) Der Körper V ist implizit durch Un/Gleichungen gegeben:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2 \\ r - h \leq z \leq r \end{array} \right\}$$

Wir können ihn explizit in Zylinderkoordinaten parametrisieren:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{c} r - h \leq z \leq r \\ 0 \leq \rho \leq \sqrt{r^2 - z^2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\}$$

Wir können ihn ebenso als Normalbereich in z–Richtung beschreiben:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{c} 0 \leq \rho \leq a \\ r - h \leq z \leq \sqrt{r^2 - \rho^2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\}$$

☺ Das Ergebnis ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung: Jede andere Parametrisierungen geht evtl. einen anderen Rechenweg, endet aber beim selben Ergebnis. Wir wählen geschickte Parameter!

Volumen eines Kugelsegments

(3a) Parametrisierung $\Phi : D \to V$ in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{c} r - h \leq z \leq r \\ 0 \leq \rho \leq \sqrt{r^2 - z^2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\}$$

Jacobi–Matrix Φ' und Funktionaldeterminante $\det \Phi' = \rho$ wie zuvor.
Volumenberechnung dank Transformationssatz, Fubini und HDI:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_3(V) &= \int_V 1 \,\mathrm{d}(x,y,z) \overset{\text{Trafo}}{\underset{\text{C2B}}{=}} \int_D |\det \Phi'| \,\mathrm{d}(\rho,\varphi,z) \\
&\overset{\text{Fub}}{\underset{\text{C1E}}{=}} \int_{z=r-h}^{r} \int_{\rho=0}^{\sqrt{r^2-z^2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}z \overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \int_{z=r-h}^{r} \int_{\rho=0}^{\sqrt{r^2-z^2}} 2\pi\rho \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}z \\
&\overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \int_{z=r-h}^{r} \pi \Big[\rho^2\Big]_{\rho=0}^{\sqrt{r^2-z^2}} \,\mathrm{d}z = \int_{z=r-h}^{r} \pi(r^2 - z^2) \,\mathrm{d}z \\
&\overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \pi \left[r^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_{z=r-h}^{r} = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right)
\end{aligned}$$

☺ Ist das plausibel? Das Ergebnis stimmt zumindest für $h = 0, r, 2r$.

Volumen eines Kugelsegments

☺ Wir können den Körper V auf viele Weisen parametrisieren!

(3b) Alternativ, Parametrisierung $\Phi : D \to V$ als z–Normalbereich:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{c} 0 \le \rho \le a \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ r - h \le z \le \sqrt{r^2 - \rho^2} \end{array} \right\}$$

Jacobi–Matrix Φ' und Funktionaldeterminante $\det \Phi' = \rho$ wie zuvor.
Volumenberechnung dank Transformationssatz, Fubini und HDI:

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_3(V) &= \int_V 1 \,\mathrm{d}(\rho,\varphi,z) \overset{\text{Trafo}}{\underset{\text{C2B}}{=}} \int_D |\det \Phi'| \,\mathrm{d}(\rho,\varphi,z) \overset{\text{Fub}}{\underset{\text{C1E}}{=}} \\ \int_{\rho=0}^{a} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=r-h}^{\sqrt{r^2-\rho^2}} \rho \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\rho &= \ldots \ldots = \pi h^2 \Big(r - \frac{h}{3} \Big) \end{aligned}$$

☺ Das Ergebnis ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung!
Jede:r darf den eigenen Rechenweg wählen: sorgfältig und korrekt, und nach Möglichkeit auch geschickt und bequem.

Flächeninhalt der Kugelkappe

(4) Die Kugelkappe S ist implizit durch Un/Gleichungen gegeben:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{c} x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \\ r - h \le z \le r \end{array} \right\}$$

Wir können S explizit in Zylinderkoordinaten parametrisieren:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{c} r - h \le z \le r \\ \rho = \sqrt{r^2 - z^2} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{array} \right\}$$

Wir können S ebenso als Graph einer Funktion $f(x,y)$ beschreiben:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{c} 0 \le \rho \le a \\ z = \sqrt{r^2 - \rho^2} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{array} \right\}$$

☺ Im Inneren des Körpers haben wir drei Freiheitsgrade, z.B. z, ρ, φ, auf der Randfläche entsprechend nur noch zwei, z.B. z, φ oder ρ, φ.

Flächeninhalt der Kugelkappe

(5a) Parametrisierung $\Phi : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ in Zylinderkoordinaten:

$$s = \Phi\begin{pmatrix} z \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{r^2 - z^2}\,\cos\varphi \\ \sqrt{r^2 - z^2}\,\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ \varphi \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} r - h \le z \le r \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{matrix} \right\}.$$

Die beiden Tangentialvektoren und der Normalenvektor sind:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \begin{pmatrix} -z/\sqrt{r^2 - z^2}\,\cos\varphi \\ -z/\sqrt{r^2 - z^2}\,\sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} -\sqrt{r^2 - z^2}\,\sin\varphi \\ \sqrt{r^2 - z^2}\,\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} -\sqrt{r^2 - z^2}\,\cos\varphi \\ -\sqrt{r^2 - z^2}\,\sin\varphi \\ -z \end{pmatrix} \quad = \quad -\Phi(z,\varphi)$$

⚠ Der Normalenvektor $\mathrm{d}\Phi$ zeigt in V hinein, Rechte-Hand-Regel.
Die Norm $|\mathrm{d}\Phi| = r$ ist die Flächenverzerrung der Parametrisierung Φ.

Flächeninhalt der Kugelkappe

(6a) Hieraus erhalten wir den Flächeninhalt der Kugelkappe S:

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_2(S) &= \int_S |\mathrm{d}S| = \int_D \left| \frac{\partial\Phi}{\partial z} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \right| \mathrm{d}(z,\varphi) = \int_D r\,\mathrm{d}(z,\varphi) \\ &= \int_{z=r-h}^{r} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = \int_{z=r-h}^{r} 2\pi r\,\mathrm{d}z = 2\pi r h \end{aligned}$$

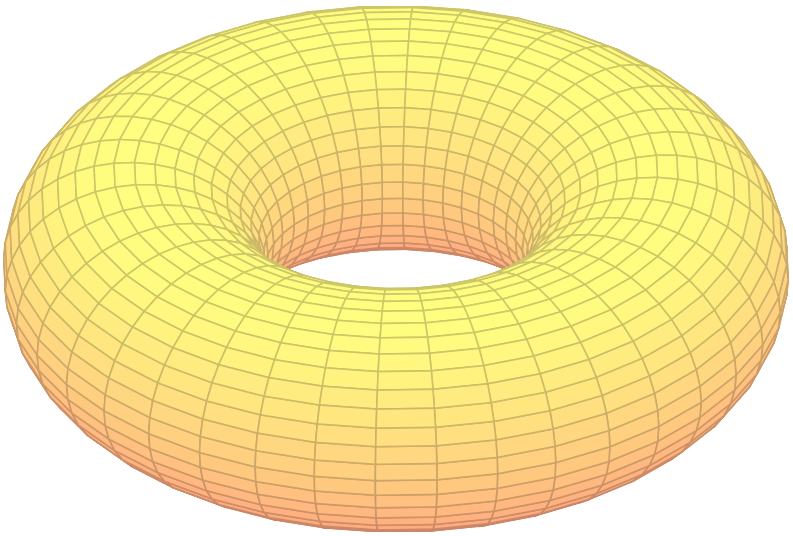
☺ Das ist eine bemerkenswert einfache Formel! Ist Sie plausibel?
Das Ergebnis stimmt zumindest für $h = 0, r, 2r$ (Hemi-/Sphäre).

☺ Das Ergebnis ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung:
Jede andere Parametrisierungen geht evtl. einen anderen Rechenweg, endet aber beim selben Ergebnis. Wir wählen geschickte Parameter!

☺ Den Spezialfall der Hemisphäre haben wir oben schon gerechnet G127. Statt über $0 \le z \le r$ integrieren wir nur über $r - h \le z \le r$.

Die alternativen Rechnungen (5b,6b) in der zweiten Parametrisierung führe ich hier nicht aus. Sie verlaufen wie oben für die Hemisphäre vorgeführt G124: Statt über $0 \le \rho \le r$ integrieren wir nur über $0 \le \rho \le a$.

Volltorus und Torusfläche



Aufgabe: Sei $0 < r < R$. Wir betrachten den Volltorus V mit

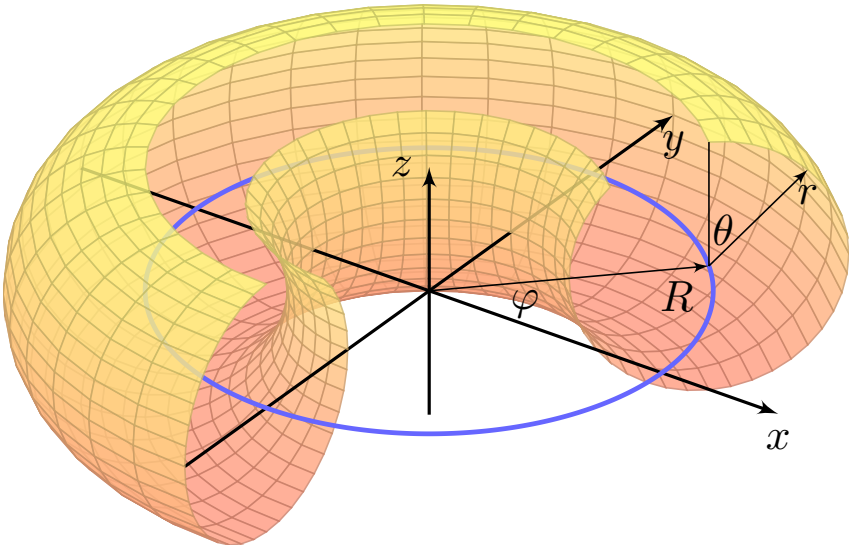
$$V = \left\{ \begin{pmatrix} (R + \rho \sin\theta)\cos\varphi \\ (R + \rho \sin\theta)\sin\varphi \\ \rho\cos\theta \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{c} 0 \le \rho \le r \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{array} \right\}.$$

(1) Parametrisieren Sie die Torusfläche $T = \partial V$ und skizzieren Sie die Teilfläche $T' \subseteq T$ für die Werte $\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{3}{2}\pi$ und $0 \le \theta \le \frac{7}{4}\pi$.

(2) Bestimmen Sie den Flächeninhalt $\mathrm{vol}_2(T)$ der Torusfläche T.

Volltorus und Torusfläche

Lösung:



Für $\rho = 0$ erhalten wir die blaue Kreislinie K vom Radius R, und der Volltorus V besteht aus allen Punkten mit Abstand höchstens r zu K.

☺ Im Sonderfall $R = 0$ und $r > 0$ erhalten wir Kugelkoordinaten.

Die Randfläche $T = \partial V$ des Volltorus erhalten wir für $\rho = r$:

$$T = \partial V = \left\{ \begin{pmatrix} (R + r \sin\theta)\cos\varphi \\ (R + r \sin\theta)\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{c} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{array} \right\}$$

Flächeninhalt der Torusfläche

☺ Im Inneren des Körpers haben wir drei Freiheitsgrade, hier ρ, θ, φ, auf der Randfläche $\{\rho = r\}$ entsprechend nur noch zwei, hier θ, φ.

(2) Parametrisierung $\Phi : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to T \subseteq \mathbb{R}^3$ in Toruskoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R + r\sin\theta)\cos\varphi \\ (R + r\sin\theta)\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} = \Phi\begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{matrix} \right\}$$

☺ Wir parametrisieren hier die gesamte Torusfläche. Wenn die Problemstellung anderes verlangt, dann passen Sie die Parameter entsprechend an, etwa $\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{3}{2}\pi$ und $0 \le \theta \le \frac{7}{4}\pi$ in obiger Skizze.

Tangentialvektoren, Normalenvektor, Flächenelement:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi \\ -r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} -(R + r\sin\theta)\sin\varphi \\ (R + r\sin\theta)\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} r(R + r\sin\theta)\sin\theta\cos\varphi \\ r(R + r\sin\theta)\sin\theta\sin\varphi \\ r(R + r\sin\theta)\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \left| \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \right| = r(R + r\sin\theta)$$

Flächeninhalt der Torusfläche

Das Flächenelement $|\mathrm{d}\Phi| = r(R + r\sin\theta)$ misst die durch Φ bewirkte Flächenverzerrung. Ihre Berechnung ist hier etwas länglich, aber leicht.

Hiermit berechnen wir den Flächeninhalt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_2(T) &\overset{\text{Def}}{=} \int_D |\mathrm{d}\Phi| \overset{\text{Def}}{=} \int_{(\theta,\varphi)\in D} \left| \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}(\theta,\varphi) \times \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}(\theta,\varphi) \right| \mathrm{d}(\theta,\varphi) \\
&\underset{\text{C1E}}{\overset{\text{Fub}}{=}} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r(R + r\sin\theta)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\
&\underset{\text{B1I}}{\overset{\text{HDI}}{=}} 2\pi \int_{\theta=0}^{2\pi} r(R + r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&\underset{\text{B1I}}{\overset{\text{HDI}}{=}} 2\pi r \cdot 2\pi R
\end{aligned}$$

☺ Dies illustriert die Guldinsche Flächenregel G2B für die Mantelfläche M eines Rotationskörpers:

$$\mathrm{vol}_2(M) = \mathrm{vol}_1(\Gamma) \cdot 2\pi\, d(\Gamma)$$

Volumen des Volltorus

Aufgabe: (3) Bestimmen Sie das Volumen $\mathrm{vol}_3(V)$ des Volltorus. Hierzu müssen Sie für V zunächst geeignete Koordinaten wählen. Hinweis und Präzisierung: Wählen Sie zunächst Toruskoordinaten.

Lösung: Parametrisierung $\Phi : \mathbb{R}^3 \supseteq D \to V \subseteq \mathbb{R}^3$ in Toruskoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R + \rho \sin\theta)\cos\varphi \\ (R + \rho \sin\theta)\sin\varphi \\ \rho\cos\theta \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \le \rho \le r \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{matrix} \right\}$$

Jacobi–Matrix Φ' und Funktionaldeterminante $\det \Phi'$:

$$\Phi' = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -(R+\rho\sin\theta)\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & (R+\rho\sin\theta)\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det \Phi' = \ldots \ldots = \rho\,(R + \rho\sin\theta) \qquad \text{(plausibel, rechtshändig)}$$

Diese Determinante misst die durch Φ bewirkte Volumenverzerrung. Rechnen Sie diese Determinante zur Übung sorgfältig aus.

Volumen des Volltorus

Volumenberechnung dank Transformationssatz, Fubini und HDI:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_3(V) &\overset{\text{Def}}{=} \int_V 1 \,\mathrm{d}(x,y,z) \underset{\text{C2B}}{\overset{\text{Trafo}}{=}} \int_D |\det \Phi'| \,\mathrm{d}(\rho,\theta,\varphi) \\
&\underset{\text{C1E}}{\overset{\text{Fub}}{=}} \int_{\rho=0}^{r} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho\,(R + \rho\sin\theta)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho \\
&\underset{\text{B1I}}{\overset{\text{HDI}}{=}} 2\pi \int_{\rho=0}^{r} \int_{\theta=0}^{2\pi} \rho\,(R + \rho\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho \\
&\underset{\text{B1I}}{\overset{\text{HDI}}{=}} 4\pi^2 \int_{\rho=0}^{r} \rho\,R\,\mathrm{d}\rho \\
&\underset{\text{B1I}}{\overset{\text{HDI}}{=}} \pi r^2 \cdot 2\pi R
\end{aligned}$$

☺ Dies illustriert die Guldinsche Volumenregel G2B für den Rauminhalt eines Rotationskörpers K:

$$\mathrm{vol}_3(K) = \mathrm{vol}_2(A) \cdot 2\pi\, d(A)$$

Volumen des Volltorus

Aufgabe: (4) Parametrisieren Sie den Volltorus in Zylinderkoordinaten. Bestimmen Sie so erneut das Volumen $\mathrm{vol}_3(V)$ des Volltorus und vergleichen Sie das Ergebnis mit der vorigen Rechnung aus (3).

Lösung: Die Parametrisierung $\Phi : \mathbb{R}^3 \supseteq D \to V \subseteq \mathbb{R}^3$ ist nun:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos\varphi \\ \rho \sin\varphi \\ z \end{pmatrix},$$

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{c} -r \le z \le r \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ R - \sqrt{r^2 - z^2} \le \rho \le R + \sqrt{r^2 - z^2} \end{array} \right\}$$

Jacobi–Matrix Φ' und Funktionaldeterminante $\det \Phi' = \rho$ wie immer.

Die Determinante misst die durch Φ bewirkte Volumenverzerrung. Ihre Berechnung ist hier besonders leicht und wohlbekannt von Polar- und Zylinderkoordinaten. Dafür ist die Integration etwas länger.

Volumen des Volltorus

Volumenberechnung dank Transformationssatz, Fubini und HDI:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_3(V) &\overset{\text{Def}}{=} \int_V 1 \,\mathrm{d}(x,y,z) \underset{\text{C2B}}{\overset{\text{Trafo}}{=}} \int_D |\det \Phi'| \,\mathrm{d}(\rho,\varphi,z) \\
&\underset{\text{C1E}}{\overset{\text{Fub}}{=}} \int_{z=-r}^{r} \int_{\rho=R-\sqrt{r^2-z^2}}^{R+\sqrt{r^2-z^2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho \;\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}z \\
&\underset{\text{B1I}}{\overset{\text{HDI}}{=}} 2\pi \int_{z=-r}^{r} \int_{\rho=R-\sqrt{r^2-z^2}}^{R+\sqrt{r^2-z^2}} \rho \;\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}z \\
&\underset{\text{B1I}}{\overset{\text{HDI}}{=}} \pi \int_{z=-r}^{r} \Big[\rho^2\Big]_{\rho=R-\sqrt{r^2-z^2}}^{R+\sqrt{r^2-z^2}} \mathrm{d}z \\
&= \pi \int_{z=-r}^{r} 4R\sqrt{r^2 - z^2} \,\mathrm{d}z \\
&\underset{\text{B1I}}{\overset{\text{HDI}}{=}} 2\pi R \cdot \pi r^2
\end{aligned}$$

☺ Dies illustriert die Guldinsche Volumenregel G2B.

Guldinsche Regeln für Rotationskörper

Die folgenden Rechenregeln sind besonders einfach und häufig nützlich. Sie sind benannt nach Paul Guldin (1577–1643), waren aber bereits in der Antike bekannt, etwa Pappos von Alexandria (um 300 n. Chr.).

Satz G2B: Guldinsche Regeln für Rotationskörper

Der Körper $R \subseteq \mathbb{R}^3$ entstehe durch Rotation einer ebenen Fläche A um eine disjunkte Achse in derselben Ebene. Für sein **Volumen** gilt dann:

$$\boxed{\mathrm{vol}_3(R) = \mathrm{vol}_2(A) \cdot 2\pi\, d(A)}$$

Hierbei ist $\mathrm{vol}_2(A)$ der Flächeninhalt der rotierten Fläche A und $d(A)$ der Abstand ihres Schwerpunktes zur Drehachse.

Die **Mantelfläche** $M = \partial R$ hat den Flächeninhalt

$$\boxed{\mathrm{vol}_2(M) = \mathrm{vol}_1(\Gamma) \cdot 2\pi\, d(\Gamma).}$$

Hierbei ist $\mathrm{vol}_1(\Gamma)$ die Länge der rotierten Randkurve $\Gamma = \partial A$ und $d(\Gamma)$ der Abstand ihres Schwerpunktes zur Drehachse.

Guldinsche Regeln für Rotationskörper

Aufgabe: Parametrisieren Sie R und M in Zylinderkoordinaten und beweisen Sie die Guldinschen Regeln durch explizites Nachrechnen.

Nachrechnen der Guldinschen Volumenformel:
Wir parametrisieren den Körper R durch $\Phi : [0, 2\pi] \times A \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \varphi \\ r \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varphi,r,z)} = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ r\cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Funktionaldeterminante ist $\det \Phi' = -r$ und das Volumen somit

$$\mathrm{vol}_3(R) = \int_{(r,z)\in A} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}(r,z) = 2\pi \int_{(r,z)\in A} r \,\mathrm{d}(r,z).$$

Der Abstand des Flächenschwerpunkts von der Drehachse ist

$$d(A) = \frac{1}{\mathrm{vol}_2(A)} \int_{(r,z)\in A} r \,\mathrm{d}(r,z).$$

Daraus erhalten wir die Guldinsche Volumenformel:

$$\boxed{\mathrm{vol}_3(R) = \mathrm{vol}_2(A) \cdot 2\pi\, d(A)}$$

Nachrechnen der Guldinschen Flächenformel:

Die Kurve $\Gamma \subseteq \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ parametrisieren wir durch einen Weg

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}, \quad \gamma(t) = (r(t), z(t))$$

Die rotierte Mantelfläche M parametrisieren wir durch

$$\Phi : D = [0, 2\pi] \times [a,b] \to \mathbb{R}^3, \qquad \Phi \begin{pmatrix} \varphi \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t)\cos\varphi \\ r(t)\sin\varphi \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

Tangentialvektoren, Normalenvektor, Flächenelement:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r(t)\sin\varphi \\ r(t)\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \begin{pmatrix} r'(t)\cos\varphi \\ r'(t)\sin\varphi \\ z'(t) \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \begin{pmatrix} r(t)z'(t)\cos\varphi \\ r(t)z'(t)\sin\varphi \\ -r(t)r'(t) \end{pmatrix}, \qquad \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right| = r(t)\sqrt{r'(t)^2 + z'(t)^2}$$

Als Flächeninhalt der Mantelfläche M erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_2(M) &= \int_D |\mathrm{d}\Phi| = \int_{(\varphi,t)\in D} r(t)\sqrt{r'(t)^2 + z'(t)^2}\,\mathrm{d}(\varphi,t) \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{t=a}^{b} r(t)\,|\mathrm{d}\gamma(t)|\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi \int_{t=a}^{b} r(t)\,|\mathrm{d}\gamma(t)| \end{aligned}$$

Der Abstand des Kurvenschwerpunkts von der Drehachse ist

$$d(\Gamma) = \frac{1}{\mathrm{vol}_1(\Gamma)} \int_{t=a}^{b} r(t)\,|\mathrm{d}\gamma(t)|.$$

Daraus erhalten wir die Guldinsche Flächenformel:

$$\boxed{\mathrm{vol}_2(M) = \mathrm{vol}_1(\Gamma) \cdot 2\pi\, d(\Gamma).}$$

☺ Besonders einfach werden die Guldinschen Regeln, wenn A und Γ symmetrisch sind, wie etwa der Kreis (G225) oder die Herzkurve (G425), bezüglich einer Achse im Abstand d parallel zur Rotationsachse.

Volltorus und Torusfläche

G237
Beispiel

Aufgabe: Bestimmen Sie mit den Guldinschen Regeln das Volumen $\mathrm{vol}_3(V)$ des Volltorus sowie den Flächeninhalt $\mathrm{vol}_2(T)$ der Torusfläche.

Lösung: (1) Mit $\mathrm{vol}_2(A) = \pi r^2$ und $d(A) = R$ gilt

$$\mathrm{vol}_3(V) = \mathrm{vol}_2(A) \cdot 2\pi\, d(A) = \pi r^2 \cdot 2\pi R = 2\pi^2 r^2 R$$

(2) Mit $\mathrm{vol}_1(\Gamma) = 2\pi r$ und $d(A) = R$ gilt

$$\mathrm{vol}_2(T) = \mathrm{vol}_1(\Gamma) \cdot 2\pi\, d(\Gamma) = 2\pi r \cdot 2\pi R = 4\pi^2 r R$$

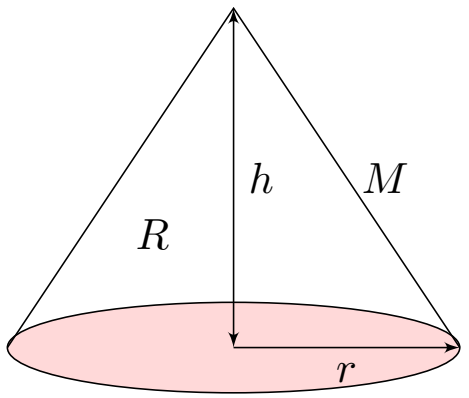
Sei Γ die Kreislinie vom Radius r um $(R, 0, 0)$ in der x–z–Ebene.
Diese rotieren wir um die z–Achse und erhalten die Torusfläche T.
Die Kurve Γ hat Länge $2\pi r$ und den Schwerpunkt $(R, 0, 0)$.
Somit hat die Torusfläche T den Flächeninhalt $\mathrm{vol}_2(T) = 4\pi^2 r R$.

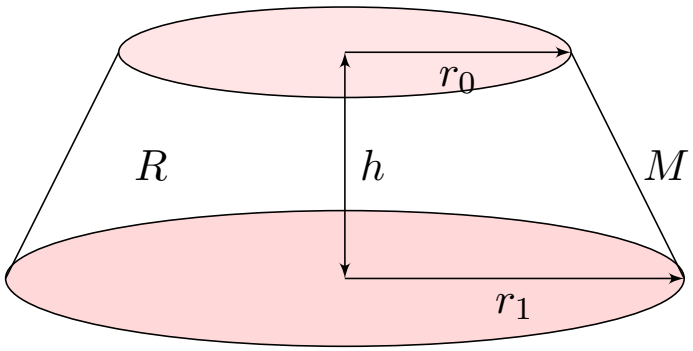
Die von Γ berandete Kreisfläche A hat den Flächeninhalt πr^2.
Ihr Schwerpunkt ist der Kreismittelpunkt, also ebenfalls $(R, 0, 0)$.
Somit hat der Volltorus V den Rauminhalt $\mathrm{vol}_3(V) = 2\pi^2 r^2 R$.

☺ So kann man sich Torusvolumen und Flächeninhalt leicht merken!

Gerader Kegel und Kegelstumpf

G238
Ausführung





Aufgabe: Bestimmen Sie das Volumen eines geraden Kegels bzw. eines Kegelstumpfes sowie den Flächeninhalt seiner Mantelfläche.

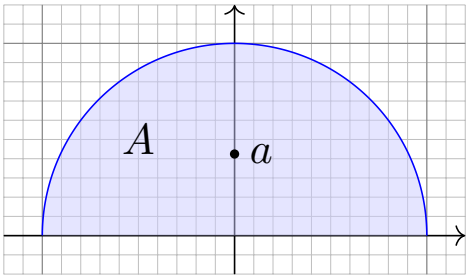
Lösung: Dank der Guldinschen Flächenformel finden wir:

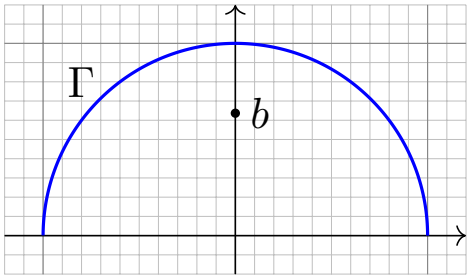
$$\mathrm{vol}_2(M) = \pi r \sqrt{h^2 + r^2} \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{vol}_2(M) = \pi(r_0 + r_1)\sqrt{h^2 + (r_1 - r_0)^2}$$

Dank der Guldinschen Volumenformel und Ergänzung finden wir:

$$\mathrm{vol}_3(R) = \frac{1}{2} h r \cdot 2\pi \frac{r}{3} = \frac{\pi}{3} h r^2 \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{vol}_3(R) = \frac{\pi}{3} h (r_1^2 + r_1 r_0 + r_0^2)$$

Vollkugel und Kugelfläche





Aufgabe: Sei $(0, a)$ der Schwerpunkt der Halbkreisfläche

$$A = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le r^2,\ y \ge 0 \,\}$$

und $(0, b)$ der Schwerpunkt der Halbkreislinie

$$\Gamma = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2,\ y \ge 0 \,\}.$$

Berechnen Sie diese (1) mit Guldin sowie (2) direkt durch Integration.

Lösung: (1) Aus $\mathrm{vol}_2(A) = \frac{\pi}{2} r^2$ und $\mathrm{vol}_1(\Gamma) = \pi r$ folgt dank Guldin:

$$\frac{\pi}{2} r^2 \cdot 2\pi\, a \overset{!}{=} \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{4}{3\pi} r \quad \text{wobei} \quad \frac{4}{3\pi} \approx 0.42441$$

$$\pi r \cdot 2\pi\, b \overset{!}{=} 4\pi r^2 \quad \Longrightarrow \quad b = \frac{2}{\pi} r \quad \text{wobei} \quad \frac{2}{\pi} \approx 0.63662$$

Vollkugel und Kugelfläche

(2) Zum Vergleich berechnen wir die beiden Schwerpunkte direkt durch Integration und nutzen Polarkoordinaten. (Für A können wir alternativ auch die Greensche Schwerpunktformel nutzen, siehe E305.)

$$\begin{aligned} a\,\mathrm{vol}_2(A) &= \int_{(x,y)\in A} y \,\mathrm{d}(x, y) \quad \overset{\text{Polar}}{\underset{\text{C2B}}{=}} \quad \int_{\rho=0}^{r} \int_{\varphi=0}^{\pi} \rho \sin\varphi \cdot \rho \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\rho \\ &= \int_{\rho=0}^{r} \rho^2 \Big[-\cos\varphi\Big]_{\varphi=0}^{\pi} \mathrm{d}\rho \quad = \quad 2\Big[\frac{\rho^3}{3}\Big]_{\rho=0}^{r} \quad = \quad \frac{2}{3} r^3 \end{aligned}$$

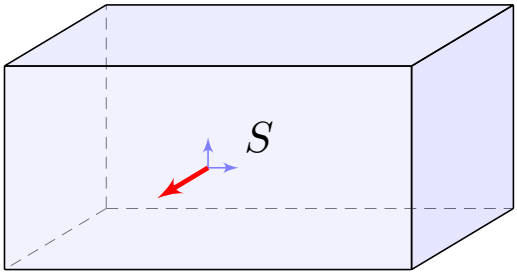
$$\begin{aligned} b\,\mathrm{vol}_1(\Gamma) &= \int_{(x,y)\in\Gamma} y \,\mathrm{d}\Gamma \quad \overset{\text{Polar}}{\underset{\text{C2B}}{=}} \quad \int_{\varphi=0}^{\pi} r \sin\varphi \cdot r \,\mathrm{d}\varphi \\ &= r^2 \Big[-\cos\varphi\Big]_{\varphi=0}^{\pi} \quad = \quad 2r^2 \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir erneut die Koordinaten $a = \frac{4}{3\pi} r$ und $b = \frac{2}{\pi} r$.

☺ Die Guldinschen Regeln können wir in beide Richtungen lesen: Sobald wir zwei der drei Größen kennen, erhalten wir daraus die dritte.

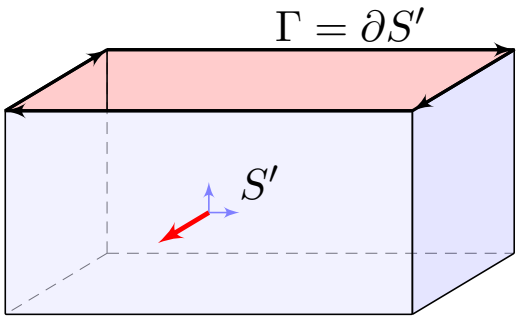
Stückweise glatte Flächen

Glatte Flächen sind schön, aber oft zu restriktiv. Typisches Beispiel und Modell ist die Oberfläche eines Quaders $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$.



Die Oberfläche eines Quaders.

Dies ist eine stückweise glatte Fläche $S = \partial Q \subseteq \mathbb{R}^3$, zusammengesetzt aus sechs regulären Flächenstücken. Sie hat keinen Rand, geschrieben $\partial S = \emptyset$, und ist orientierbar durch die nach außen zeigende Normale.



Die Quaderfläche ohne Deckel.

Diese Teilfläche $S' \subseteq S$ lässt sich zusammensetzen aus fünf regulären Flächenstücken. Sie ist orientierbar durch die nach außen zeigende Normale. Ihre Randkurve $\Gamma = \partial S'$ sind die vier Kanten des oben entstehenden Rechtecks mit der gezeigten positiven Orientierung.

Rechte-Hand-Regel: Die Orientierung der Fläche S definiert eine zugehörige positive Orientierung der Randkurve $\Gamma = \partial S$.

Stückweise glatte Flächen

Eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^3$ nennen wir **stückweise glatte Fläche**, wenn es glatte Flächenstücke $S_1, \ldots, S_k \subseteq \mathbb{R}^3$ gibt, sodass $S = S_1 \cup \cdots \cup S_k$ gilt.

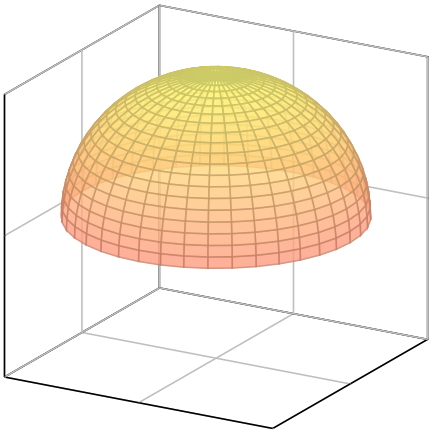
Wie im obigen Modell verlangen wir dabei geometrische Vorkehrungen:
Die Flächenstücke schneiden sich höchstens längs ihrer Randkurven.
Im Inneren jeder Kante schneiden sich höchstens zwei Flächenstücke.
Nur in Eckpunkten können mehrere Flächenstücke zusammenstoßen.

Innere Kanten treten also stets doppelt auf und heben sich auf.
Die verbleibenden einzelnen Kanten bilden den **Rand** ∂S.
Im Falle $\partial S = \emptyset$ nennen wir die Fläche S **geschlossen**.
Jede geschlossene Fläche ist kompakt und ohne Rand.

Ein **Orientierung** von S besteht aus Orientierungen der Flächenstücke $S_1, \ldots, S_k$, die wie gezeigt in gemeinsamen Kanten gegenläufig sind.

Dies definiert die Orientierung des Randes ∂S im Satz von Stokes:
Beim Zusammensetzen einer stückweise glatten Fläche heben sich innere Kanten paarweise auf, denn sie sind gegenläufig orientiert.
Es bleibt die positiv orientierte Randkurve $\Gamma = \partial S$.

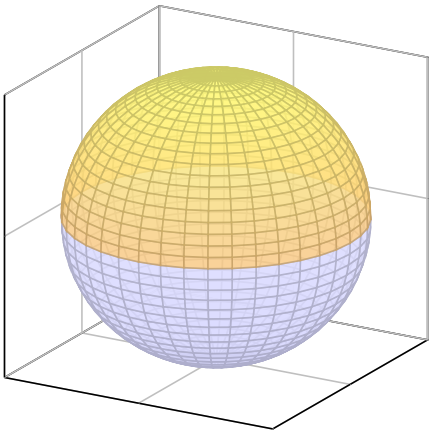
Stückweise glatte Flächen



Eine Hemisphäre.

Die Hemisphäre lässt sich als ein reguläres Flächenstück parametrisieren, zum Beispiel durch stereographische Projektion vom Südpol auf die Äquatorebene.

Die Hemisphäre ist orientierbar durch die nach außen zeigende Normale. Sie hat den Äquator als Rand, und die Rechte-Hand-Regel definiert seine Orientierung.

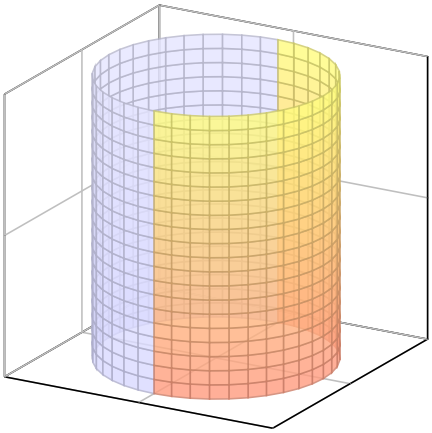


Die Oberfläche einer Kugel.

Die Sphäre S lässt sich nicht als ein einziges reguläres Flächenstück parametrisieren, aber sie lässt sich aus zwei regulären Flächenstücken zusammensetzen, z.B. aus zwei Hemisphären. Sie ist orientierbar durch die nach außen zeigende Normale. Sie hat keinen Rand, $\partial S = \emptyset$.

Dies nennen wir eine „geschlossene Fläche“:
Die Sphäre ist kompakt und ohne Rand.

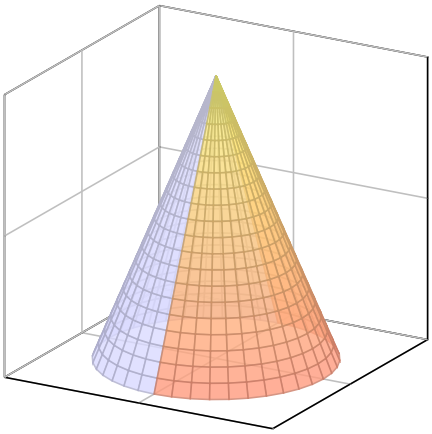
Stückweise glatte Flächen



Der Mantel eines Zylinders.

Der Zylindermantel ist ein reguläres Flächenstück, zum Beispiel parametrisiert durch einen Kreisring. Er lässt sich ebenso durch zwei Rechtecke regulär parametrisieren, wie in der Skizze angedeutet.

Der Zylindermantel ist orientierbar durch die nach außen zeigende Normale. Er hat zwei Kreislinien als Rand, und die Rechte-Hand-Regel definiert ihre Orientierungen.



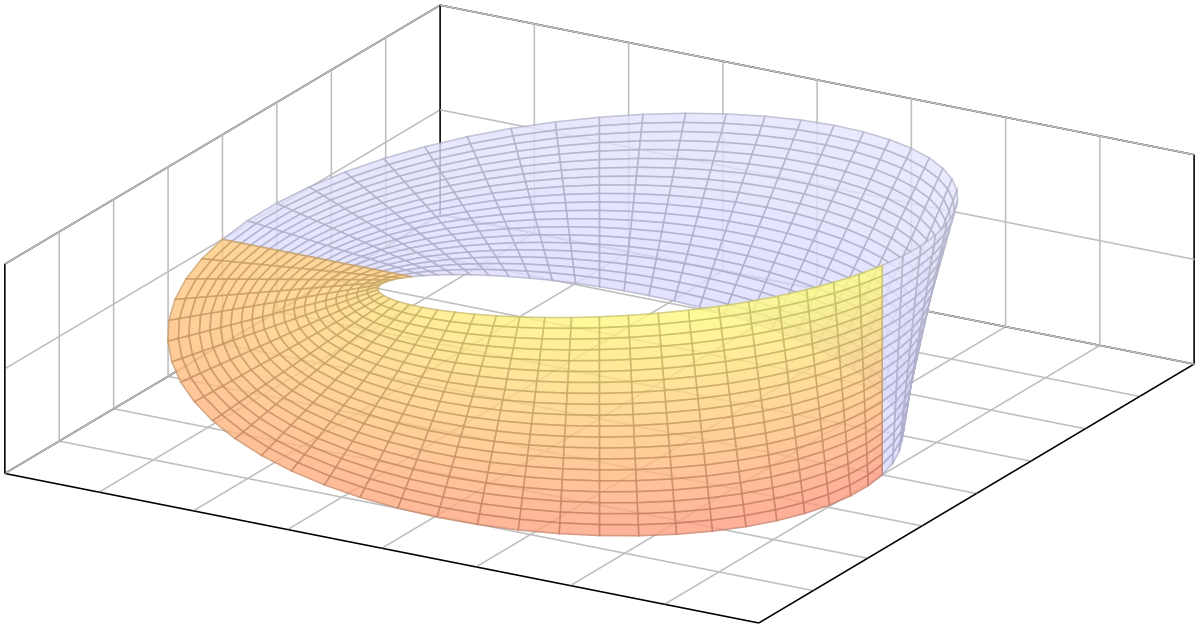
Der Mantel eines Kegels.

Der Kegelmantel lässt sich durch zwei Dreiecke regulär parametrisieren, wie in der Skizze angedeutet.

Der Kegelmantel ist orientierbar durch die nach außen zeigende Normale. Er hat eine Kreislinie als Rand, und die Rechte-Hand-Regel definiert ihre Orientierung.

Das Möbius–Band ist nicht orientierbar.

Es gibt auch nicht-orientierbare Flächen. Hier das einfachste Beispiel:



$$M = \left\{ \begin{pmatrix} (3 + r\sin\frac{\varphi}{2})\cos\varphi \\ (3 + r\sin\frac{\varphi}{2})\sin\varphi \\ r\cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ -1 \le r \le 1 \end{matrix} \right\}$$

⚠ Auf solche Flächen lässt sich der Satz von Stokes **nicht** anwenden!

Das Möbius–Band ist nicht orientierbar.

Das **Möbius–Band** ist eine simple, aber bemerkenswerte Fläche!
Sie zeigt Eigenschaften, die man zuerst für unmöglich halten würde.
Es erlaubt uns, eine bessere Vorstellung von Flächen zu entwickeln.

Die Mittelachse ($r = 0$) besteht aus einer Kreislinie, hier vom Radius 3.
Um diese windet sich das Möbius–Band in halber Drehung, also 180°.
Aus Papier hergestellt erhalten wir eine Fläche mit nur einer Seite!

Sie lässt sich aus zwei regulären Flächenstücken zusammensetzen,
je durch Rechtecke parametrisiert, etwa $0 \le \varphi \le \pi$ und $\pi \le \varphi \le 2\pi$,
doch die Orientierungen passen nicht zusammen. Das bedeutet:
Das Möbius–Band ist eine glatte Fläche, aber nicht orientierbar!

Dieses Band wurde 1858 unabhängig voneinander von dem Göttinger Mathematiker und Physiker Johann Benedict Listing und dem Leipziger Mathematiker und Astronomen August Ferdinand Möbius beschrieben.

Das Möbius–Band ist das universelle Modell einer nicht-orientierbaren Fläche: Eine beliebige Fläche S ist genau dann nicht-orientierbar, wenn sie ein Möbius–Band enthält (als eingebettete Teilfläche).

Das Möbius–Band als Antriebsriemen

G307
Ausführung

(19) **Bundesrepublik Deutschland**
Deutsches Patent- und Markenamt

(10) **DE 20 2004 005 763 U1** 2004.08.19

(12) **Gebrauchsmusterschrift**

(22) Anmeldetag: **13.04.2004**
(47) Eintragungstag: **15.07.2004**
(43) Bekanntmachung im Patentblatt: **19.08.2004**

(51) Int Cl.[7]: **F16F 1/00**

(71) Name und Wohnsitz des Inhabers:
Haitovs, Leopolds, 60385 Frankfurt, DE

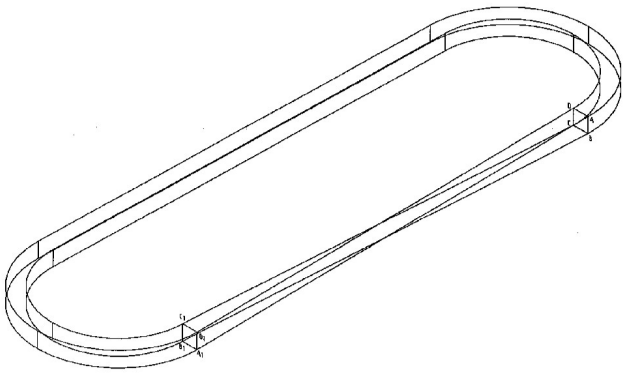
(74) Name und Wohnsitz des Vertreters:
Schweizer, P., Rechtsanw., 86150 Augsburg

Die folgenden Angaben sind den vom Anmelder eingereichten Unterlagen entnommen

(54) Bezeichnung: **Antriebsriemen**

(57) Hauptanspruch: Antriebsriemen, der als ein Ring aus einem Band gemacht ist, dessen Oberfläche für ein Zusammenwirken mit einigen Antriebsscheiben bestimmt ist, dadurch gekennzeichnet, dass der genannte Ring als Möbius-Band (einseitige Fläche) gemacht ist.

Der krasse Geheimtipp zur Konstruktion?



Das Möbius–Band, entdeckt oder erfunden?

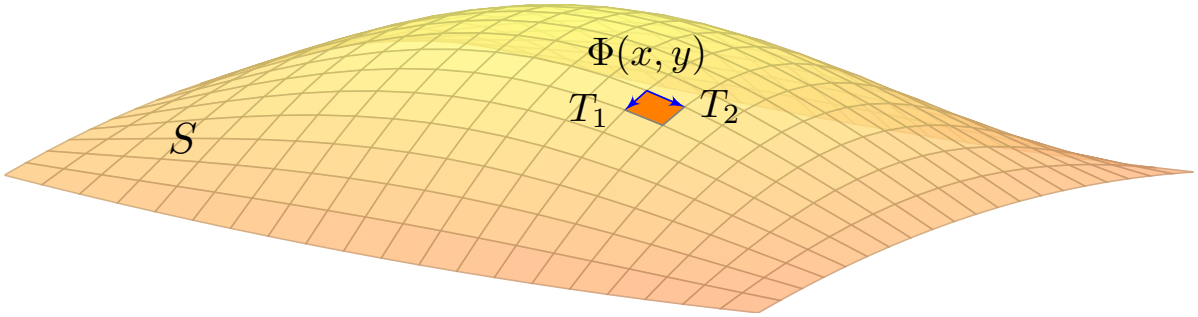
G308
Ausführung

Ist **Mathematik** eine Tätigkeit des Erfindens oder des Entdeckens? Diese uralte Debatte ist nicht nur philosophisch bedeutsam, sondern auch ökonomisch: Technische **Erfindungen** können patentiert werden, nicht aber **Entdeckungen**. Daher sind wissenschaftliche Theorien grundsätzlich nicht patentierbar. Das betrifft auch mathematische Methoden bis hin zu Algorithmen und Computerprogrammen.

Das Möbius-Band zeigt eine erstaunliche mathematische **Anwendung**: Die elfseitige Gebrauchsmusterschrift findet man beim Deutschen Patent- und Markenamt unter `register.dpma.de/DPMAregister/pat/PatSchrifteneinsicht?docId=DE202004005763U1`. Sie beginnt so:

„Beschreibung: Die Erfindung gehört zum Maschinenbau, insb. zu den Antriebsriemen. [. . .] Der Nachteil der bekannten Antriebsriemen ist eine geringe Betriebszeit durch den Verschleiß der Arbeitsflächen. [. . .] Um den genannten Nachteil zu beseitigen wäre es zweckdienlich, nicht nur eine Oberfläche des Riemens als Arbeitsoberfläche zu benutzen, sondern möglichst alle Oberflächen des Riemens. Dafür sollte man den Riemen nach Art des Möbius-Bandes verdrehen. [. . .]“

Tangentialvektoren und Normalenvektoren



Sei $\Phi : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Parametrisierung. An jedem Bildpunkt $s = \Phi(x,y)$ heften linear unabhängige Tangentialvektoren

$$T_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) \quad \text{und} \quad T_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y).$$

Der zugehörige Normalenvektor $N = T_1 \times T_2$ ist daher nicht Null. Dies definiert das **Einheitsnormalenfeld** $n : S \to \mathbb{R}^3$ durch

$$n(s) = \frac{N(x,y)}{|N(x,y)|}$$

Die Vektoren T_1, T_2, N ändern sich je nach Wahl der Parametrisierung! Die Einheitsnormale n bleibt jedoch gleich – bis auf das Vorzeichen.

Äquivalente Parametrisierungen und Orientierung

Satz G3A: Umparametrisierung, gleichsinnig vs gegensinnig

Je zwei reguläre Parametrisierungen $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ und $\tilde{\Phi} : \tilde{D} \to \mathbb{R}^3$ mit demselben Bild S sind äquivalent vermöge $H = \tilde{\Phi}^{-1} \circ \Phi$.

Ihre Orientierung ist entweder **gleichsinnig** oder **gegensinnig**, also entweder $\tilde{n}(y) = n(y)$ in jedem Punkt $y = \Phi(x) = \tilde{\Phi}(\tilde{x})$ oder aber $\tilde{n}(y) = -n(y)$ in jedem Punkt $y = \Phi(x) = \tilde{\Phi}(\tilde{x})$.

Beispiel: Die Kugelfläche (Sphäre) können wir parametrisieren durch

$$\Phi\begin{pmatrix}\theta\\ \varphi\end{pmatrix} = \tilde{\Phi}\begin{pmatrix}\varphi\\ \theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} D &= [0,\pi] \times [0,2\pi], \\ \tilde{D} &= [0,2\pi] \times [0,\pi]. \end{aligned}$$

Hier gilt $\mathrm{d}\Phi = -\mathrm{d}\tilde{\Phi}$, die Parametrisierungen sind also gegensinnig.

Definition G3B: Orientierung eines glatten Flächenstücks

Eine glattes Flächenstück $S \subseteq \mathbb{R}^3$ wird **orientiert** durch die Wahl eines der beiden möglichen Einheitsnormalenfelder $n : S \to \mathbb{R}^3$.

Definition G3C: Flächen- und Flussintegral

Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ ein glattes Flächenstück (noch ohne Parametrisierung).
Wir wählen eine (semi)reguläre Parametrisierung $\Phi : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to S$.
Das **Flächenintegral** eines Skalarfeldes $g : \mathbb{R}^3 \supseteq S \to \mathbb{R}$ ist

$$\int_S g\,|\mathrm{d}S| := \int_D g\,|\mathrm{d}\Phi| = \int_D g(\Phi(x,y)) \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right| \mathrm{d}(x,y).$$

Im Spezialfall $g = 1$ erhalten wir den **Flächeninhalt** $\mathrm{vol}_2(S)$.

Für Flussintegrale sei die Fläche S zusätzlich **orientiert**.
Das **Flussintegral** eines Vektorfeldes $f : \mathbb{R}^3 \supseteq S \to \mathbb{R}^3$ ist

$$\int_S f \bullet \mathrm{d}S := \int_D f \bullet \mathrm{d}\Phi = \int_D \left\langle f(\Phi(x,y)) \,\middle|\, \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\rangle \mathrm{d}(x,y).$$

Dies ist wohldefiniert (G2A), unabhängig von der Parametrisierung Φ.

☺ Jede:r darf sich die jeweils bequemste Parametrisierung aussuchen.

Wir vollziehen damit für Flächen dieselbe Abstraktion wie für Kurven: Zunächst ist $S \subseteq \mathbb{R}^3$ nur eine nackte Menge ohne Struktur. Für diese hat es keinen Sinn nach Differenzierbarkeit oder Flächeninhalt zu fragen: Diesen Fragen müssen wir erst durch eine Parametrisierung $\Phi : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ einen Sinn geben! Hierzu verlangen wir, dass Φ (semi)regulär ist.

In der praktischen Anwendung interessieren wir uns meist nur für die Fläche S. Für ihre Handhabung und die Berechnung von Integralen jedoch ist zusätzlich eine Parametrisierung Φ notwendig. Die Wahl von Φ ist willkürlich, doch glücklicherweise ist das Endergebnis von der Parametrisierung unabhängig: Je zwei (semi)reguläre Parametrisierungen $\Phi : D \to S$ und $\tilde{\Phi} : \tilde{D} \to S$ derselben Fläche S sind (semi)regulär äquivalent vermöge $H = \tilde{\Phi}^{-1} \circ \Phi$ Sie liefern somit dieselben Flächen- und Flussintegrale, wie oben ausführlich nachgerechnet.

Bei Flächen wie bei Kurven muss bei Integralen 2. Art die Orientierung angegeben werden. Wir benutzen hier die stillschweigende Voraussetzung, dass die Parameterbereiche D und $\tilde{D}$ wegzusammenhängend sind. Zwei Parametrisierungen $\Phi : D \to S$ und $\tilde{\Phi} : \tilde{D} \to S$ sind dann entweder überall gleichsinnig oder überall gegensinnig. (Gibt es mehrere Wegkomponenten, so kann man auf jeder Komponente eine der beiden möglichen Orientierungen wählen.)

Jede reguläre Parametrisierung von S liefert eine reguläre Parametrisierung des Randes ∂S. In der Praxis nutzen wir neben regulären Parametrisierungen häufig auch semireguläre Parametrisierungen: Diese sind allgemeiner und flexibler, und daher meist bequemer. Sie können am Rand ∂D irregulär sein, aber das Innere $\mathring{D} = D \setminus \partial D$ genügt für die Berechnung von Flächenintegralen: Wegen $\mathrm{vol}_2(\partial D) = 0$ trägt der Rand hierzu nichts bei.

Integration über stückweise glatte Flächen

Definition G3D: Flächen- und Flussintegral

Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine stückweise glatte Fläche. Wir wählen (semi)reguläre Parametrisierung $\Phi_1 : \mathbb{R}^2 \supseteq D_1 \to \mathbb{R}^3, \ldots, \Phi_k : \mathbb{R}^2 \supseteq D_k \to \mathbb{R}^3$, sodass $S = \Phi_1(D_1) \cup \cdots \cup \Phi_k(D_k)$ gilt und $\Phi_i(\mathring{D}_i) \cap \Phi_j(\mathring{D}_j) = \emptyset$ für $i \neq j$.

Das **Flächenintegral** eines Skalarfeldes $g : \mathbb{R}^3 \supseteq S \to \mathbb{R}$ ist

$$\boxed{\int_S g\,|\mathrm{d}S| := \int_{D_1} g\,|\mathrm{d}\Phi_1| + \cdots + \int_{D_k} g\,|\mathrm{d}\Phi_k|.}$$

Für Flussintegrale sei die Fläche S zusätzlich **orientiert**.
Das **Flussintegral** eines Vektorfeldes $f : \mathbb{R}^3 \supseteq S \to \mathbb{R}^3$ ist

$$\boxed{\int_S f \bullet \mathrm{d}S := \int_{D_1} f \bullet \mathrm{d}\Phi_1 + \cdots + \int_{D_k} f \bullet \mathrm{d}\Phi_k.}$$

☺ Dies ist wohldefiniert, das heißt, das Ergebnis ist unabhängig von der Wahl der Zerlegung von S und der Parametrisierungen Φ_k.

Integration über stückweise glatte Flächen

Aufgabe: Vorgelegt sei eine stückweise glatte Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$ mit stückweise (semi)regulärer Parametrisierung $\Phi_i : D_i \to \mathbb{R}^3$ für $i = 1, \ldots, k$ sowie eine zweite $\Psi_j : E_j \to \mathbb{R}^3$ für $j = 1, \ldots, \ell$.
Warum liefern beide dasselbe Ergebnis für das Flächenintegral?

$$\int_{D_1} g\,|\mathrm{d}\Phi_1| + \cdots + \int_{D_k} g\,|\mathrm{d}\Phi_k| \overset{?}{=} \int_{E_1} g\,|\mathrm{d}\Psi_1| + \cdots + \int_{E_\ell} g\,|\mathrm{d}\Psi_\ell|$$

Lösung: Auf den paarweisen Schnitten $S_{ij} = \Phi_i(\mathring{D}_i) \cap \Psi_j(\mathring{E}_j)$ erhalten wir stückweise Parametrisierungen $\Phi_{ij} : D_{ij} \to S_{ij}$ und $\Psi_{ij} : E_{ij} \to S_{ij}$. Diese sind jeweils semiregulär äquivalent. Wir haben die Zerlegungen

$$S = \bigsqcup_i \Phi_i(D_i) = \bigsqcup_{i,j} \Phi_{ij}(D_{ij}) = \bigsqcup_{j,i} \Psi_{ji}(E_{ij}) = \bigsqcup_j \Psi_j(E_j)$$

jeweils bis auf Nullmengen (vom Flächeninhalt 0). Hieraus folgt:

$$\sum_i \int_{D_i} g\,|\mathrm{d}\Phi_i| = \sum_i \sum_j \int_{D_{ij}} g\,|\mathrm{d}\Phi_{ij}| = \sum_j \sum_i \int_{E_{ij}} g\,|\mathrm{d}\Phi_{ij}| = \sum_j \int_{E_j} g\,|\mathrm{d}\Phi_j|$$

☺ Gleiches gilt für Flussintegrale: Das Ergebnis ist also wohldefiniert. Jede:r darf sich die jeweils bequemste Parametrisierung aussuchen.

Der Integralsatz von Stokes

Satz G3E: Integralsatz von Stokes

Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine stückweise glatte, orientierte Fläche. Ihre Randkurve $\Gamma = \partial S$ ist dann ebenso stückweise glatt und werde positiv orientiert. Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \supseteq S \to \mathbb{R}^3$ gilt dann

$$\boxed{\int_{s \in S} \operatorname{rot} f(s) \cdot \mathrm{d}S = \int_{s \in \Gamma} f(s) \cdot \mathrm{d}\Gamma.}$$

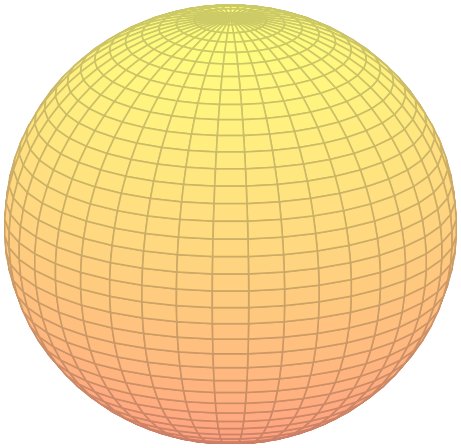
Die Zerlegung $\mathrm{d}S = n(s)\,|\mathrm{d}S|$ ergibt die gleichwertige Formulierung

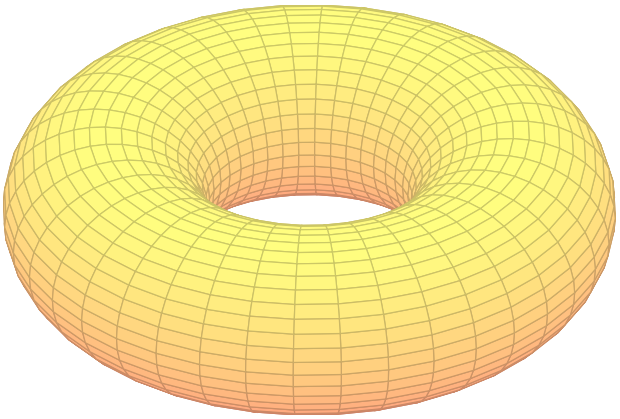
$$\int_{s \in S} \operatorname{rot} f(s) \cdot n(s)\,|\mathrm{d}S| = \int_{s \in \Gamma} f(s) \cdot \mathrm{d}\Gamma.$$

Beweis: Die Gleichung gilt für jedes reguläre Flächenstück $S \subseteq \mathbb{R}^3$ und folgt aus dem entsprechenden Satz von Green in der Ebene, siehe G1A.

Für stückweise glatte Flächen addieren sich die Flächenintegrale. Die Kurvenintegrale längs innerer Kanten heben sich paarweise auf, da sie gegenläufig orientiert sind. Bleibt der positiv orientierte Rand $\Gamma = \partial S$.

Spezialfall: geschlossene Flächen





Beispiel: Ist die Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$ geschlossen, also $\partial S = \emptyset$, so gilt

$$\int_{s \in S} \operatorname{rot} f(s) \cdot \mathrm{d}S \overset{\text{Stokes}}{\underset{\text{G3E}}{=}} \int_{s \in \partial S} f(s) \cdot \mathrm{d}s \overset{\partial S = \emptyset}{=} 0$$

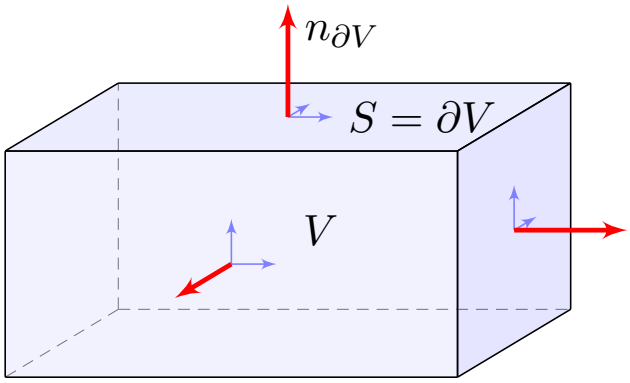
☺ Dies gilt für die Randfläche $S = \partial V$ jedes Kompaktums $V \subseteq \mathbb{R}^3$.

☺ Integralsätze können Rechnungen dramatisch vereinfachen!

Das Flussintegral links kann beliebig kompliziert sein; rechts beim Randintegral sehen wir das Ergebnis auf einen Blick! Einfaches Beispiel: Die (dreidim.) Vollkugel K hat als (zweidim.) Randfläche die Sphäre $S = \partial K$. Die (zweidim.) Sphäre S wiederum hat als (eindim.) Randkurve die leere Menge, $\partial S = \emptyset$. Ebenso für den Volltorus $V \subseteq \mathbb{R}^3$ und die Torusfläche $S = \partial V$.

Kompakta mit stückweise glattem Rand

Typisches Beispiel ist ein Quader $V = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$.



Definition G3F: Kompaktum mit stückweise glattem Rand

$V \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt **Kompaktum mit stückweise glattem Rand**, wenn gilt:

- V ist kompakt und der Rand ∂V ist eine stückweise glatte Fläche.
- In jedem regulären Punkt $s \in \partial V$ liegt das Innere von V auf der einen Seite von ∂V und das Äußere von V auf der anderen Seite.

Der Rand ∂V ist **positiv orientiert**, wenn $n_{\partial V}$ stets nach außen zeigt.

Der Integralsatz von Gauß im Raum

Satz G3G: Integralsatz von Gauß im Raum

Sei $V \subseteq \mathbb{R}^3$ kompakt mit stückweise glatter Randfläche $S = \partial V$, orientiert durch den von V nach außen weisenden Normalenvektor. Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $f : V \to \mathbb{R}^3$ gilt dann

$$\boxed{\int_{v \in V} \operatorname{div} f(v)\, \mathrm{d}V = \int_{s \in S} f(s) \cdot \mathrm{d}S.}$$

Die Zerlegung $\mathrm{d}S = n(s)\, |\mathrm{d}S|$ ergibt die gleichwertige Formulierung

$$\int_{v \in V} \operatorname{div} f(v)\, \mathrm{d}V = \int_{s \in S} f(s) \cdot n(s)\, |\mathrm{d}S|.$$

Links steht das Volumenintegral der Quelldichte $\operatorname{div}(f)$ über V.
Wie üblich bezeichnet $\mathrm{d}V = \mathrm{d}(x, y, z)$ das Volumenelement.

Rechts steht das Flussintegral von f über die Randfläche $S = \partial V$.
Das Flächenelement $\mathrm{d}S = (\partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi)\, \mathrm{d}(x, y)$ sei positiv orientiert:
Der Normalenvektor $\mathrm{d}S$ senkrecht auf ∂V zeigt stets aus V heraus.

Der Satz von Gauß für Normalbereiche

Den Satz von Gauß rechnen wir nach wie in der Ebene (Seite E145):

Aufgabe: Rechnen Sie die Gleichung des Gaußschen Satzes nach...

(1) Für $f = (0, 0, f_3)$ und jeden Normalbereich in z–Richtung

$$V = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in A,\ g(x, y) \le z \le h(x, y) \,\}.$$

Hierbei sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Kompaktum mit stückweise glattem Rand sowie $g, h : A \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen mit $g \le h$.

(2) Ebenso für $(0, f_2, 0)$ in y–Richtung und $(f_1, 0, 0)$ in x–Richtung.

(3) Für $f = (f_1, f_2, f_3)$ und jeden Trinormalbereich $V \subseteq \mathbb{R}^3$.
Z.B. ein Quader, eine Kugel, oder jedes konvexe Kompaktum.

(4) Gilt die Gleichung für jeden Bereich $V \subseteq \mathbb{R}^3$ zerlegt wie in (3)?
Z.B. eine Kugelschale oder ein Quader mit mehreren Löchern.

Lösung: Zum Flussintegral tragen nur oberer und unterer Deckel bei:

$$O = \{\, (x, y, h(x, y)) \mid (x, y) \in A \,\}, \quad n_O = (-\partial_x h, -\partial_y h, +1),$$
$$U = \{\, (x, y, g(x, y)) \mid (x, y) \in A \,\}, \quad n_U = (+\partial_x g, +\partial_y h, -1).$$

Der Satz von Gauß für Normalbereiche

(1) Für $f = (0, 0, f_3)$ folgt Gauß aus Fubini und HDI (wie auf Seite E145):

$$\begin{aligned}
\int_{v \in V} \operatorname{div} f(v)\, \mathrm{d}V &\overset{\text{Fub}}{\underset{\text{C1E}}{=}} \int_{(x,y) \in A} \int_{z=g(x,y)}^{h(x,y)} \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z)\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}(x, y) \\
&\overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \int_{(x,y) \in A} f_3(x, y, h(x, y)) - f_3(x, y, g(x, y))\, \mathrm{d}(x, y) \\
&\overset{\text{Def}}{=} \int_{s \in O} f(s) \cdot \mathrm{d}O + \int_{s \in U} f(s) \cdot \mathrm{d}U \overset{\text{Def}}{=} \int_{s \in S = \partial V} f \cdot \mathrm{d}S
\end{aligned}$$

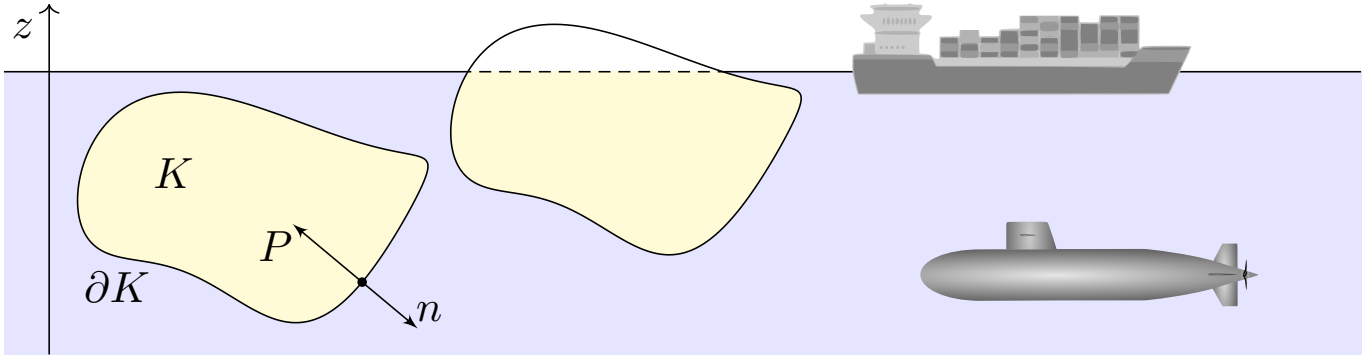
(3) Somit gilt der Satz von Gauß für jedes Vektorfeld $f = (f_1, f_2, f_3)$, wenn V ein Trinormalbereich ist, also in x– und y– und z–Richtung:

$$\begin{aligned}
\int_V \operatorname{div}(f)\, \mathrm{d}V &\overset{\text{Lin}}{\underset{\text{A3L}}{=}} \int_V \operatorname{div}(f_1, 0, 0)\, \mathrm{d}V + \int_V \operatorname{div}(0, f_2, 0)\, \mathrm{d}V + \int_V \operatorname{div}(0, 0, f_3)\, \mathrm{d}V \\
&\overset{(1,2)}{=} \int_{\partial V} (f_1, 0, 0) \cdot \mathrm{d}S + \int_{\partial V} (0, f_2, 0) \cdot \mathrm{d}S + \int_{\partial V} (0, 0, f_3) \cdot \mathrm{d}S \overset{\text{Lin}}{\underset{\text{A3L}}{=}} \int_{\partial V} f \cdot \mathrm{d}S
\end{aligned}$$

(4) Der allgemeine Fall folgt durch Zerlegung von V in Normalbereiche. Alle Volumenintegrale addieren sich, und ebenso alle Flächenintegrale. Innere Flächen heben sich paarweise auf, es bleibt nur der Rand ∂V.

Das archimedische Prinzip als Integralsatz

Aufgabe: Integrieren Sie die Auftriebskraft, die auf den Körper K wirkt.



Folgern Sie daraus den Satz des Archimedes: Die Auftriebskraft des Körpers K gleicht dem Gewicht $g\varrho\,\mathrm{vol}_3(K)$ des verdrängten Mediums.

Es besteht eine bemerkenswerte Beziehung zwischen dem Rand ∂K (nur hier wirkt der Druck) und dem Inneren von K (nur dieses verdrängt das Fluid). Wir können dies nun exakt berechnen! Zur Vereinfachung nehmen wir an, die Flüssigkeit habe konstante Dichte $\varrho > 0$. Die Schwerkraft wirkt nach unten in negativer z–Richtung, wie in der Skizze angedeutet. Der Körper liege ganz in der Flüssigkeit; ihre Oberfläche sei $z = 0$. Längs des Randes ∂K übt die Flüssigkeit einen Druck aus. Dieser nimmt linear mit der Tiefe z zu, entsprechend der darüber liegenden Wassersäule. Der Absolutbetrag des Drucks in Tiefe z ist demnach $|P| = g\varrho|z|$. Konkrete Werte sind in unserem Beispiel $\varrho_{\text{Wasser}} = 1000\mathrm{kg/m^3}$ und $g_{\text{Erde}} = 9.81\mathrm{m/s^2}$, somit $g\varrho = 9810\mathrm{N/m^3}$.

Das archimedische Prinzip als Integralsatz

Lösung: In jedem Randpunkt $s = (x, y, z) \in \partial K$ sei $n(s)$ die äußere Einheitsnormale. Hier herrscht folgender Druck (= Kraft pro Fläche):

$$\text{skalar } |P(s)| = g\,\varrho\,|z|, \qquad \text{vektoriell } P(s) = g\,\varrho\,z \cdot n(s)$$

Die Vektoren P und n sind entgegengesetzt; das Vorzeichen steckt im Faktor $z < 0$. Dadurch erfährt der Körper K die folgende Auftriebskraft:

$$F = \int_{s\in\partial K} P(s)\,|\mathrm{d}S| = g\,\varrho \int_{s\in\partial K} z\,n(s)\,|\mathrm{d}S|$$

Ihre Komponenten $F = (F_x, F_y, F_z)$ berechnen wir mit Gauß:

$$\int_{\partial K} z\,n_x\,|\mathrm{d}S| = \int_{\partial K} \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot n\,|\mathrm{d}S| \overset{\text{Gauß}}{\underset{\text{G3G}}{=}} \int_K \mathrm{div}\begin{pmatrix} z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}(x,y,z) = 0$$

$$\int_{\partial K} z\,n_y\,|\mathrm{d}S| = \int_{\partial K} \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ 0 \end{pmatrix} \cdot n\,|\mathrm{d}S| \overset{\text{Gauß}}{\underset{\text{G3G}}{=}} \int_K \mathrm{div}\begin{pmatrix} 0 \\ z \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}(x,y,z) = 0$$

$$\int_{\partial K} z\,n_z\,|\mathrm{d}S| = \int_{\partial K} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \cdot n\,|\mathrm{d}S| \overset{\text{Gauß}}{\underset{\text{G3G}}{=}} \int_K \mathrm{div}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mathrm{d}(x,y,z) = \mathrm{vol}_3(K)$$

Das archimedische Prinzip als Integralsatz

Das archimedische Prinzip gilt auch für Körper, die nur teilweise in die Flüssigkeit eintauchen: Es zählt das eingetauchte Volumen. (Warum?) Ein Schiff verdrängt Wasser, erhält dadurch Auftrieb und schwimmt!

Der hier angenommene Druckverlauf gilt bei konstanter Dichte, in einem inkompressiblen Medium. Er gilt annähernd auch in Luft (und anderen Gasen) bei nicht allzu großen Höhenunterschieden. Er gilt insbesondere für realistisch große Luftschiffe oder Ballone.

Schließlich löste Archimedes mit Hilfe der Wasserverdrängung das Problem der Dichtemessung und konnte den Goldschmied des Königs als Betrüger entlarven. Gibt es eine schönere historische Anwendung der HM3 für Materialwissenschaftler und Luft- und Raumfahrttechniker?

Damit sind wir schließlich zum Ausgangsbeispiel zurückgekehrt: dem archimedischen Prinzip, das wir nun mathematisch verstehen. Die Anordnung der Themen gleicht somit einem geschlossenen Weg. Das Wegintegral über dieses Kapitel ist aber nicht Null, denn wir haben sehr wohl wertvolle Arbeit verrichtet und neue Erkenntnisse gewonnen!

Das archimedische Prinzip als Integralsatz

Aufgabe: Wieviel Prozent eines Eisberges liegen unter Wasser? Speziell für $\varrho_{\text{Eis}} = 918\text{kg/m}^3$ und $\varrho_{\text{Wasser}} = 1025\text{kg/m}^3$? Allgemein? Wie hängt das Ergebnis von der Form des Eisberges ab?

Lösung: Sei E der Eisberg, unter Wasser liege der Teil $U \subseteq E$. Wir nehmen Gleichgewicht an, d.h. der Eisberg sinkt oder steigt nicht. Das Gewicht $\text{vol}_3(E)\,\varrho_{\text{Eis}}\,g$ gleicht dem Auftrieb $\text{vol}_3(U)\,\varrho_{\text{Wasser}}\,g$. Also

$$\frac{\text{vol}_3(U)}{\text{vol}_3(E)} = \frac{\varrho_{\text{Eis}}}{\varrho_{\text{Wasser}}} \approx 0.90$$

Mit anderen Worten, etwa 90% des Eisberges liegen unter Wasser, nur die verbleibenden 10% sind über Wasser sichtbar. Daher der sprichwörtliche Ausdruck: „Wir sehen nur die Spitze des Eisberges.“

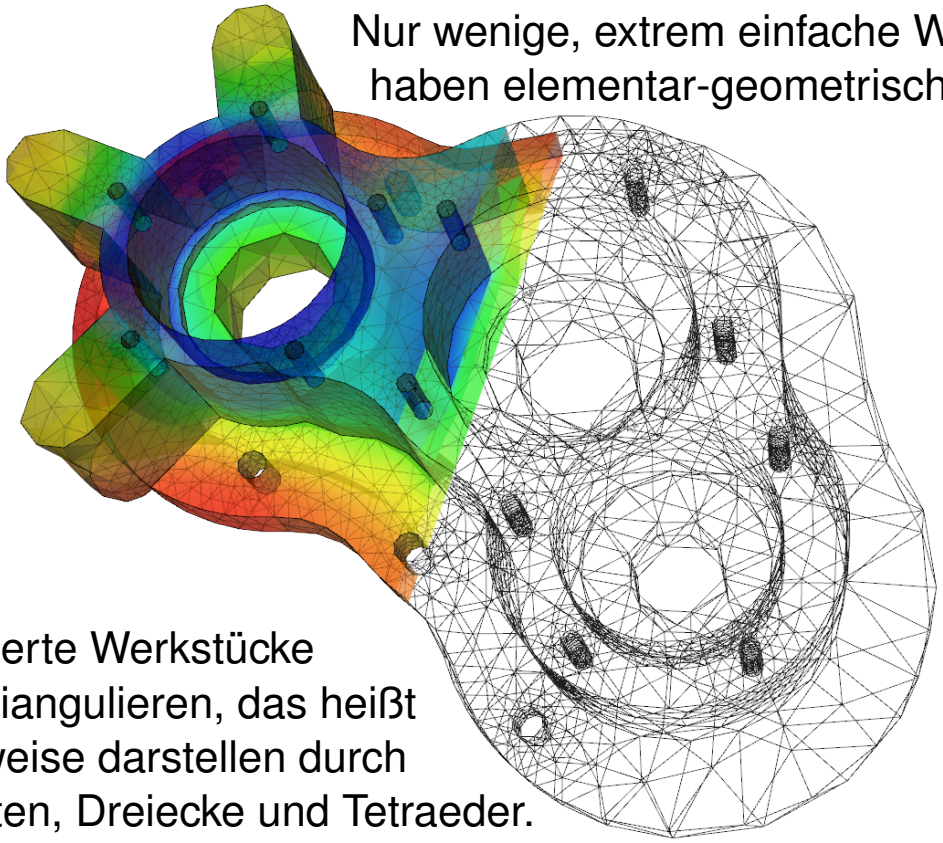
Der genaue Wert hängt nur von den Materialkonstanten ab, also der Massendichte des Eises ϱ_{Eis} und des Wassers ϱ_{Wasser}. Hingegen ist die Form des Eisberges unerheblich. Alles ist schön und einfach!

☺ Der Integralsatz von Gauß und somit auch der archimedische Satz sind auf alle Körper mit stückweise glatter Randfläche anwendbar!

Numerik: Triangulierung und Linearisierung

G325
Übung

Nur wenige, extrem einfache Werkstücke haben elementar-geometrische Formen.



☺ Komplizierte Werkstücke kann man triangulieren, das heißt näherungsweise darstellen durch Ecken, Kanten, Dreiecke und Tetraeder.

☺ Diese Darstellung ist eine sehr effiziente Datenstruktur und eignet sich besonders gut zu numerischen Berechnungen auf einem Computer.

Linearisierung und Approximation

G326
Ausführung

Das Flächenstück $S \subseteq \mathbb{R}^3$ liege ganz in einer Ebene E, wie etwa jedes Dreieck $S = [P, Q, R]$ einer Triangulierung.

Zudem sei das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ affin-linear, das heißt

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + b = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{23}x_3 + b_3 \end{pmatrix}.$$

Dann gelten folgende nützliche Vereinfachungen:

(1) Ebene Integration liefert den Flächeninhalt $\mathrm{vol}_2(S)$.

(2) Der Schwerpunkt $\overline{s}$ von S liegt in derselben Ebene E.

(3) Die Einheitsnormale $n : S \to \mathbb{R}^3$ ist konstant und senkrecht auf E.

(4) Das Flussintegral von f durch S schließlich vereinfacht sich zu

$$\int_{s \in S} f(s) \cdot n(s) \, |\mathrm{d}S| = f(\overline{s}) \cdot n \; \mathrm{vol}_2(S).$$

(5) Dank Linearität von f ist $\mathrm{div}(f) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ konstant.

☺ Statt Integralen benötigen wir hier also nur Grundrechenarten!

Linearisierung und Approximation

Aufgabe: Rechnen Sie diese vereinfachenden Formeln nach.

Lösung: (1–3) Wir können unser Koordinatensystem so wählen, dass S ganz in der x–y–Ebene liegt, also $S \subseteq \{\, (x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \,\}$.
Die Parametrisierung $\Phi : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to S \subseteq \mathbb{R}^3 : (x,y) \mapsto (x,y,0)$ ergibt

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x} \times \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Flächenintegrale über $S \subseteq \mathbb{R}^3$ sind demnach genau dasselbe wie gewöhnliche zweidimensionale Integrale über $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

(4) In unseren geschickt gewählten Koordinaten gilt schließlich:

$$\begin{aligned}
\int_{s\in S} f(s)\bullet n(s)\,|\mathrm{d}S| &\overset{\text{Def}}{=} \int_{(x,y)\in D} \Big[a_{31}x + a_{32}y + b_3\Big]\,\mathrm{d}(x,y) \\
&\overset{\text{Lin}}{=} \Big[a_{31}\overline{s}_x + a_{32}\overline{s}_y + b_3\Big]\,\mathrm{vol}_2(D) \\
&\overset{\text{Def}}{=} f(\overline{s})\bullet n\ \mathrm{vol}_2(S)
\end{aligned}$$

Linearisierung und Approximation

☺ Für jede **ebene Fläche** S und jedes **affin-lineare Vektorfeld** f gilt die vereinfachte Formel (4) exakt, ohne jeden Näherungsfehler. Die vorige Aufgabe rechnet diese erfreuliche Vereinfachung nach.

Warum haben wir Flächenintegrale dann nicht gleich so definiert? Die vereinfachte Rechnung benötigt die genannten Voraussetzung! Nicht jede Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$ ist eben. Nicht jedes Vektorfeld $f : S \to \mathbb{R}^3$ ist affin-linear; allgemein ist die exakte Rechnung daher nicht so einfach.

Ist das Flächenstück S klein genug, so weicht das Vektorfeld f auf der Fläche S nur wenig von der Linearisierung um den Schwerpunkt $\overline{s}$ ab. Für $f(x) \approx Ax + b$ ist unsere Formel (4) dann eine einfache Näherung. In der Taylor–Entwicklung treten im Allgemeinen höhere Terme auf: Die Formel (4) ist exakt bis zu 1. Ordnung, der Fehler ist 2. Ordnung.

☺ Die Flächensummen $\sum_k f(\overline{s}_k)\bullet n_k\ \mathrm{vol}_2(S_k)$ konvergieren bei immer feineren Unterteilungen gegen das Flächenintegral $\int_{s\in S} f(s)\bullet n(s)\,|\mathrm{d}S|$. Die Numerik entwickelt hierzu Methoden, wie man Näherungsfehler kontrolliert, und möglichst kostengünstig möglichst klein bekommt.

Illustration anhand einfacher Polyeder

Aufgabe: (1) Skizzieren Sie die folgenden Körper:

$$W = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \le 1,\ |y| \le 1,\ |z| \le 1 \,\}$$
$$O = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| + |y| + |z| \le 2 \,\}$$
$$K = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x|, |y|, |z| \le 1,\ |x| + |y| + |z| \le 2 \,\}$$
$$P = \{\, (x,y,z) \in [0,1]^3 \mid x + y + z \le 2 \,\}$$

(2) Bestimmen Sie den Rauminhalt $\mathrm{vol}_3(P)$ des Körpers P.

(3) Bestimmen Sie für jede Seite $S_1, \ldots, S_7$ von P den Fluss des Vektorfeldes $f(x,y,z) = (\,3x+1,\ 12y+4,\ 36z+6\,)$ durch S_k.

(4) Berechnen und vergleichen Sie $\int_P \mathrm{div}(f)\,\mathrm{d}(x,y,z)$ und $\int_{\partial P} f \bullet \mathrm{d}S$.

(5) Führen Sie alle Rechnungen ebenso für W und O und K aus.

Das ist der diskrete Charme dieser Aufgabe: Sie können dies ohne komplizierte Integrale direkt mit elementarer Geometrie lösen. Auch diesen Spezialfall sollten Sie kennen und beherrschen.

Fun fact: Der Würfel W (Hexaeder, Sechsflächner) und das Oktaeder O (Achtflächner) sind regulär, also vollkommen symmetrisch. Es gibt nur drei weitere Körper dieser Art: das Tetraeder (Vierflächner), das Dodekaeder (Zwölfflächner) und das Ikosaeder (Zwanzigflächner). Können Sie diese ebenfalls so konkret angeben, durch Koordinaten ihrer Eckpunkte? Das ist knifflig!

Illustration anhand einfacher Polyeder

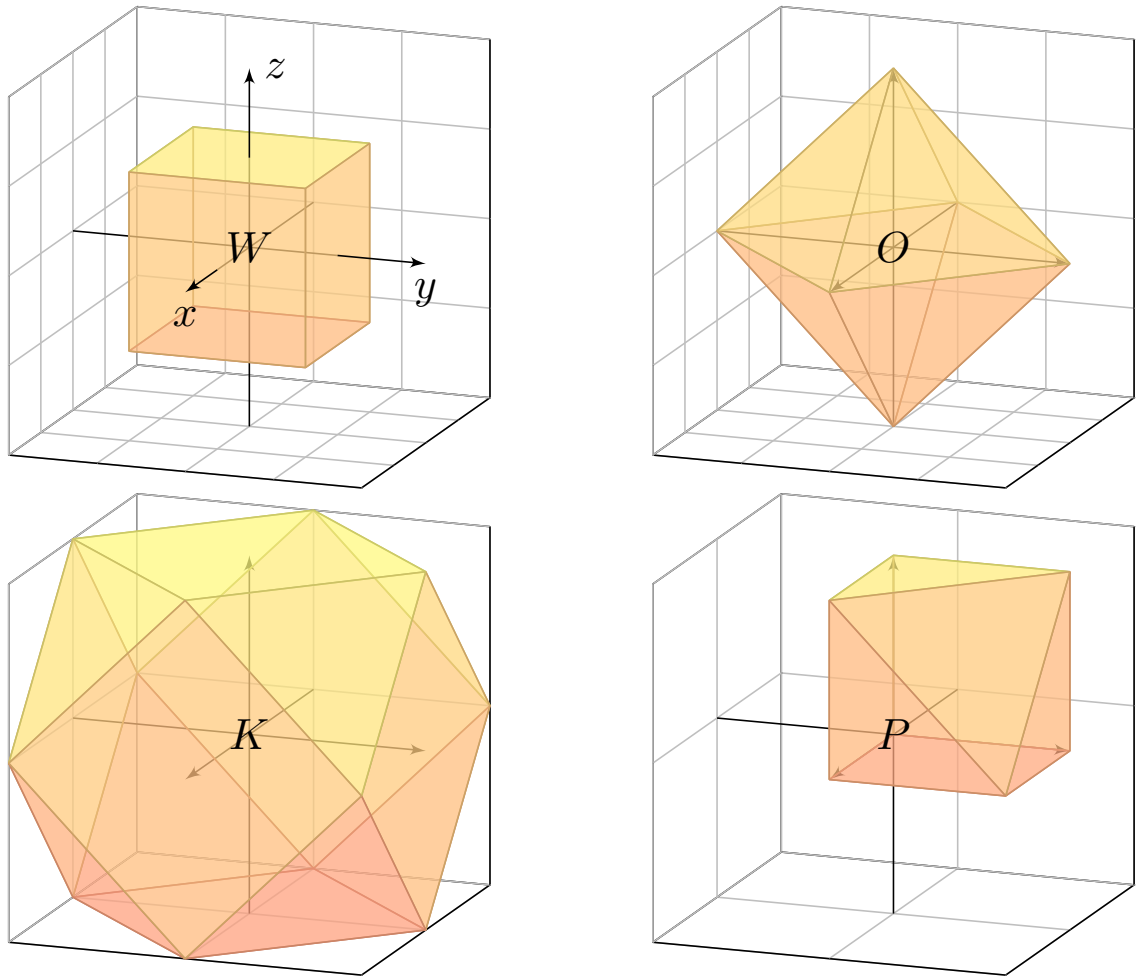


Illustration anhand einfacher Polyeder

Lösung: (1) Die obige Skizze zeigt die Polyeder W, O, K und P.

(2) Für das Polyeder P gilt $\mathrm{vol}_3(P) = 5/6$ und $\mathrm{vol}_2(\partial P) = (9+\sqrt{3})/2$.

(3) Wir bestimmen für jede Seite $S_1, \ldots, S_7$ von P den Fluss des Vektorfeldes $f(x,y,z) = (\,3x+1,\ 12y+4,\ 36z+6\,)$ durch S_k.

Flächenstück / Typ		Schwerpunkt $\overline{s}_k$	Normale n_k	Inhalt	Fluss
S_1	Quadrat	$(0, 1/2, 1/2)$	$(-1, 0, 0)$	1	-1
S_2	Quadrat	$(1/2, 0, 1/2)$	$(0, -1, 0)$	1	-4
S_3	Quadrat	$(1/2, 1/2, 0)$	$(0, 0, -1)$	1	-6
S_4	rechtw. Dreieck	$(1, 1/3, 1/3)$	$(+1, 0, 0)$	$1/2$	2
S_5	rechtw. Dreieck	$(1/3, 1, 1/3)$	$(0, +1, 0)$	$1/2$	8
S_6	rechtw. Dreieck	$(1/3, 1/3, 1)$	$(0, 0, +1)$	$1/2$	21
S_7	gleichs. Dreieck	$(2/3, 2/3, 2/3)$	$(1, 1, 1)/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/2$	$45/2$

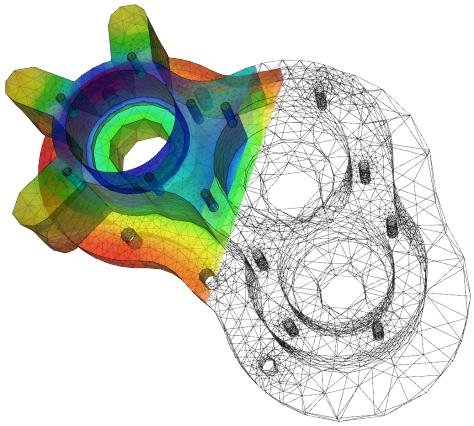
(4) Wir finden $\int_P \mathrm{div}(f)\,\mathrm{d}(x,y,z) = 51\,\mathrm{vol}_3(P) = 42.5 = \int_{\partial P} f \bullet \mathrm{d}S$.

(5) Für W, O, K verlaufen alle Rechnung genauso (etwas länglich).

Illustration anhand einfacher Polyeder

Polyeder faszinieren immer wieder: Der Würfel W und das Oktaeder O gehören zu den fünf platonischen, das Kuboktaeder K zu den dreizehn archimedischen Körpern. Unser Polyeder P ist weniger regelmäßig.

☺ Wir kommen ohne Integrale aus, weil das Vektorfeld f affin-linear ist. Ist f hingegen nicht linear, aber die Flächenstücke sind klein genug, so erhalten wir auf diese Weise wenigstens eine brauchbare **Näherung**.



☺ Auch extrem komplizierte Körper wie z.B. Maschinenteile können Sie so **triangulieren**, das heißt, Sie konstruieren sie explizit aus Ecken, Kanten, Dreiecken und Tetraedern.

☺ Diese Datenstruktur ist für Computer ideal. (Das Beispiel zeigt ein Pumpengehäuse, für das der Wärmefluss berechnet werden soll.)

Hieraus lassen sich nun Weglängen, Flächen- und Rauminhalte sowie Flussintegrale bestimmen, zumindest näherungsweise. Die Rechnung verläuft genau wie im obigen Beispiel, nur die Datenmenge ist größer.

Kurvenintegrale

Ein **Weg** ist eine stetige Abbildung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, hier meist $n \in \{2,3\}$.
Er parametrisiert die **Kurve** $\Gamma = \{\, \gamma(t) \mid a \le t \le b \,\} \subseteq \mathbb{R}^n$ als Bildmenge.

Der Weg heißt **regulär**, wenn γ injektiv ist und stetig differenzierbar mit $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$. Seine Bildmenge Γ heißt dann **glatte Kurve**.

Am Punkt $s = \gamma(t)$ heftet das infinitesimale **Wegelement** $\mathrm{d}s = \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$.
Das **Kurvenintegral** eines Skalarfeldes $g : \mathbb{R}^n \supseteq \Gamma \to \mathbb{R}$ entlang γ ist

$$\int_\Gamma g\,|\mathrm{d}\Gamma| = \int_{s\in\Gamma} g(s)\,|\mathrm{d}s| := \int_{t=a}^{b} g\big(\gamma(t)\big)\cdot\big|\gamma'(t)\big|\,\mathrm{d}t.$$

Speziell für $g = 1$ erhalten wir so die Länge $\mathrm{vol}_1(\Gamma) = \ell(\gamma)$ der Kurve Γ.
Das **Arbeitsintegral** eines Vektorfeldes $f : \mathbb{R}^n \supseteq \Gamma \to \mathbb{R}^n$ entlang γ ist

$$\int_\Gamma f \bullet \mathrm{d}\Gamma = \int_{s\in\Gamma} f(s) \bullet \mathrm{d}s := \int_{t=a}^{b} f\big(\gamma(t)\big) \bullet \gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Das Arbeitsintegral wechselt das Vorzeichen bei Orientierungsumkehr.

☺ Diese Integrale sind invariant bei (positiver) Umparametrisierung und somit wohldefiniert für jede (orientierte) stückweise glatte Kurve Γ.

Glatte Flächenstücke

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt **Kompaktum mit stückweise glattem Rand**, wenn gilt:

- D ist kompakt und der Rand ∂D ist eine stückweise glatte Kurve.
- In jedem regulären Randpunkt $s \in \partial D$ liegt das Innere von D auf der einen Seite von ∂D und das Äußere auf der anderen Seite.

Beispiele: Rechtecke, Polygone, Kreisscheiben, Kreisringe, ...

Der Rand ist **positiv orientiert**, wenn D stets links von ∂D liegt.
Die Einheitstangente $t_{\partial D} : \partial D \to \mathbb{R}^2$ zeigt in Richtung der Orientierung, die Einheitsnormale $n_{\partial D} = \circlearrowright t_{\partial D} : \partial D \to \mathbb{R}^2$ zeigt überall aus D heraus.

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ zusammenhängend kompakt mit stückweise glattem Rand.
Ein parametrisiertes **Flächenstück** ist eine C^1–Abbildung $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$.

Senkrecht auf den **Tangentenvektoren** $\partial_x\Phi(x,y)$ und $\partial_y\Phi(x,y)$ steht der **Normalenvektor** $\partial_x\Phi(x,y) \times \partial_y\Phi(x,y)$ für $(x,y) \in D$.

Die Parametrisierung Φ heißt **regulär**, wenn sie injektiv ist und zudem $\partial_x\Phi(x,y) \times \partial_y\Phi(x,y) \neq 0$ in jedem Punkt $(x,y) \in D$ erfüllt.

Das Bild $S = \Phi(D) \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt dann **glattes Flächenstück**.
Der Rand $\partial S := \Phi(\partial D)$ ist dann eine stückweise glatte Kurve.

Flächenintegrale

Flächen $S \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrisieren wir (stückweise) durch $\Phi : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to S$.
An $s = \Phi(x, y)$ heftet das inf. Flächenelement $\mathrm{d}S = (\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi)\,\mathrm{d}(x, y)$.
Das **Flächenintegral** eines Skalarfeldes $g : \mathbb{R}^3 \supseteq S \to \mathbb{R}$ entlang Φ ist

$$\int_{s \in S} g(s)\,|\mathrm{d}S| := \int_{(x,y) \in D} g\big(\Phi(x, y)\big) \cdot \big|\partial_x \Phi(x, y) \times \partial_y \Phi(x, y)\big|\,\mathrm{d}(x, y).$$

Speziell für $g = 1$ erhalten wir den Inhalt $\mathrm{vol}_2(\Phi) = \mathrm{vol}_2(S)$ der Fläche S.
Das **Flussintegral** eines Vektorfeldes $f : \mathbb{R}^3 \supseteq S \to \mathbb{R}^3$ entlang Φ ist

$$\int_{s \in S} f(s) \cdot \mathrm{d}S := \int_{(x,y) \in D} f\big(\Phi(x, y)\big) \cdot \big(\partial_x \Phi(x, y) \times \partial_y \Phi(x, y)\big)\,\mathrm{d}(x, y).$$

Der Normalenvektor $\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi$ im Punkt $\Phi(x, y)$ steht senkrecht auf S.
Für das Flussintegral zählt daher nur der Anteil von f senkrecht zu S.

Das Flussintegral wechselt das Vorzeichen bei Orientierungsumkehr.

☺ Diese Integrale sind invariant bei (positiver) Umparametrisierung, somit wohldefiniert für jede (orientierte) stückweise glatte Fläche S.

Kompakta mit stückweise glattem Rand

Hier ist $|\mathrm{d}S| = |\mathrm{d}\Phi| = |\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi|\,\mathrm{d}(x, y)$ das **skalare Flächenelement** und $\mathrm{d}S = \mathrm{d}\Phi = (\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi)\,\mathrm{d}(x, y)$ das **vektorielle Flächenelement**.

Die Zerlegung $\mathrm{d}S = n(s)\,|\mathrm{d}S|$ definiert die Einheitsnormale $n : S \to \mathbb{R}^3$.
Diese definiert für jedes Flächenstück eine der beiden Orientierungen.
Für stückweise glatte Flächen verlangen wir, dass die Orientierungen einzelner Flächenstücke am gemeinsamen Rand zusammenpassen.

☺ Zur numerischen Approximation können wir die Kurve / Fläche triangulieren und das Vektorfeld linearisieren / Taylor–entwickeln. Für Polygone E017 oder Polyeder G325 und lineare Vektorfelder ist dies exakt.

$V \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt **Kompaktum mit stückweise glattem Rand**, wenn gilt:

- V ist kompakt und der Rand ∂V ist eine stückweise glatte Fläche.
- In jedem regulären Punkt $s \in \partial V$ liegt das Innere von V auf der einen Seite von ∂V und das Äußere von V auf der anderen Seite.

Beispiele: Quader, Polyeder, Vollkugeln, Kugelschalen, Volltori, ...

Der Rand ∂V ist **positiv orientiert**, wenn $n_{\partial V}$ stets nach außen zeigt.
Die Einheitsnormale ist der Einheitsvektor in Richtung $\mathrm{d}\Phi = n_{\partial V} |\mathrm{d}\Phi|$.

Der HDI als eindimensionaler Integralsatz

Unsere Integralsätze beruhen alle auf dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI, Satz B1ı) und verallgemeinern diesen:

1dim: Jedes kompakte Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ hat als Rand $\partial[a,b] = \{a,b\}$. Der Startpunkt zählt negativ, $n(a) = -1$, der Zielpunkt positiv, $n(b) = +1$. Für jede stetig differenzierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt dann

$$\int_{s\in[a,b]} f'(s)\,\mathrm{d}s \overset{\text{HDI}}{=} \sum_{s\in\{a,b\}} f(s)\,n(s) = f(b) - f(a).$$

Allgemein: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zudem sei $\Gamma \subseteq \Omega$ eine stückweise glatte und orientierte Kurve. Für das Arbeitsintegral von $f' = \operatorname{grad} f$ entlang Γ gilt dann:

$$\int_{s\in\Gamma} f'(s) \bullet \mathrm{d}s \overset{\text{HDI}}{=} \sum_{s\in\partial\Gamma} f(s)\,n(s)$$

Die Orientierung teilt die Randpunkte $s \in \partial\Gamma$ in Start- und Zielpunkte; Startpunkte zählen negativ, $n(s) = -1$, Zielpunkte positiv, $n(s) = +1$. Ist die Kurve Γ geschlossen, also $\partial\Gamma = \emptyset$, so folgt $\oint_{s\in\Gamma} f'(s) \bullet \mathrm{d}s = 0$.

Der Integralsatz von Gauß

☺ Der Satz von Gauß in der Ebene $\mathbb{R}^2$ und im Raum $\mathbb{R}^3$ besagt: Das Volumenintegral der Divergenz $\operatorname{div}(f)$ über das Kompaktum V ist gleich dem Flussintegral von f nach außen über die Randfläche ∂V.

2dim: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt mit stückweise glatter Randkurve $\Gamma = \partial D$. Sei $n : \Gamma \to \mathbb{R}^2 : s \mapsto n(s)$ die nach außen weisende Einheitsnormale. Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to \mathbb{R}^2$ gilt dann

$$\int_{(x,y)\in D} \operatorname{div} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \overset{\text{Gauß}}{=} \int_{s\in\Gamma} f(s) \bullet n(s)\,|\mathrm{d}s| = \int_{s\in\Gamma} f(s) \times \mathrm{d}s.$$

3dim: Sei $V \subseteq \mathbb{R}^3$ kompakt mit stückweise glatter Randfläche $S = \partial V$. Sei $n : S \to \mathbb{R}^3 : s \mapsto n(s)$ die nach außen weisende Einheitsnormale. Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \supseteq V \to \mathbb{R}^3$ gilt dann

$$\int_{(x,y,z)\in V} \operatorname{div} f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) \overset{\text{Gauß}}{=} \int_{s\in S} f(s) \bullet n(s)\,|\mathrm{d}S| = \int_{s\in S} f(s) \bullet \mathrm{d}S.$$

Gleichwertige Schreibweise mit $n(s)\,|\mathrm{d}s| = \circlearrowright \mathrm{d}s$ bzw. $\mathrm{d}S = n(s)\,|\mathrm{d}S|$.

Der Integralsatz von Green und Stokes

☺ Der Satz von Green in der Ebene bzw. von Stokes im Raum:
Das Flächenintegral der Rotation $\operatorname{rot}(f)$ über die Fläche S ist gleich dem Arbeitsintegral von f entlang der Randkurve ∂S.

2dim: Sei $S \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt mit stückweise glatter Randkurve $\Gamma = \partial S$.
Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \supseteq S \to \mathbb{R}^2$ gilt dann

$$\boxed{\int_{s \in S} \operatorname{rot} f(s) \bullet \mathrm{d}S \overset{\text{Green}}{=} \int_{s \in \Gamma} f(s) \bullet \mathrm{d}s.}$$

3dim: Allgemeiner gilt dies für jede stückweise glatte, orientierte Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$ und jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \supseteq S \to \mathbb{R}^3$.

Die Zerlegung $\mathrm{d}S = n(s)\,|\mathrm{d}S|$ ergibt das gleichwertige Flächenintegral

$$\boxed{\int_{s \in S} \operatorname{rot} f(s) \bullet n(s)\,|\mathrm{d}S| \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{s \in \Gamma} f(s) \bullet \mathrm{d}s.}$$

Die stückweise glatte Randkurve $\Gamma = \partial S$ sei hierbei positiv orientiert.
Liegt die Fläche S in einer Ebene, so reduziert sich Stokes zu Green.

Zusammenfassung und Rückblick

Diese Integralsätze sind gut und schön! Geht es auch einfacher?
Nein, denn Sie sollen nicht nur fühlen, sondern auch rechnen können!

Zur präzisen Formulierung und konkreten Berechnung benötigen Sie daher alle Werkzeuge für Kurven-, Flächen- und Volumenintegrale.

Hierzu brauchen Sie solide Grundlagen und effiziente Methoden:
Definitionen & Sätze, Beispiele & Rechentricks... sowie Übung!

Nochmal die Lernziele laut Modulhandbuch:

- Die Studierenden verfügen über grundlegende Kenntnisse zur Integralrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher. [...]
- Sie sind in der Lage, die behandelten Methoden selbstständig, sicher, kritisch, korrekt und kreativ anzuwenden.
- Sie besitzen die mathematische Grundlage für das Verständnis quantitativer Modelle aus den Ingenieurwissenschaften.
- Sie können sich mit Spezialist:innen aus dem ingenieurs- und naturwissenschaftlichen Umfeld über die benutzten mathematischen Methoden verständigen.

Gauß vs Stokes – integral battle

Aufgabe: (0) Rezitieren Sie möglichst präzise unsere Integralsätze. Wie bestimmen Sie möglichst allgemein $\operatorname{div}\operatorname{rot}(g)$ und $\operatorname{rot}\operatorname{grad}(h)$?

(1) Skizzieren Sie $V = \{\, (x,y,z) \in [-4,4]^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 25 \,\}$.

(2) Schätzen und bestimmen Sie das Volumen $\operatorname{vol}_3(V)$ des Körpers V sowie den Flächeninhalt $\operatorname{vol}_2(S)$ seiner Randfläche $S = \partial V$.

(3) In welchen Punkten $s \in S$ ist die Randfläche $S = \partial V$ nicht glatt? Geben Sie überall sonst den äußeren Einheitsnormalenvektor an.

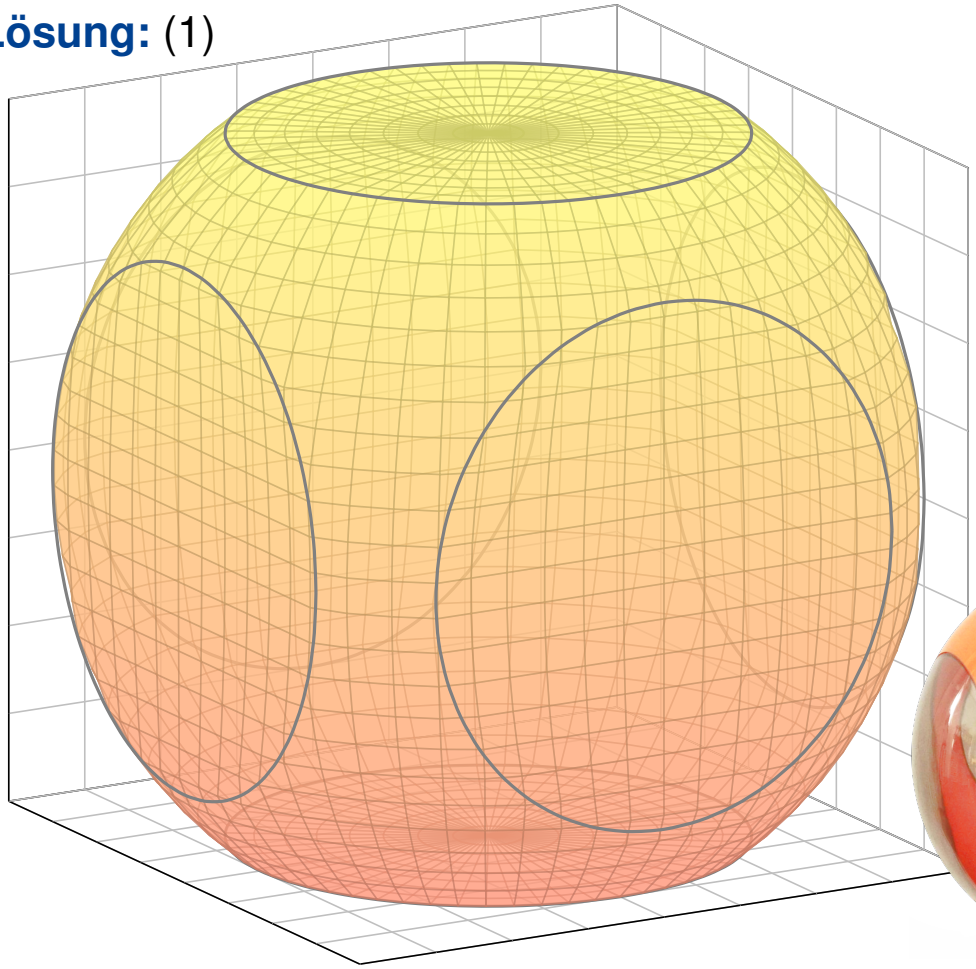
(4) Berechnen Sie zu $f(x,y,z) = (x, 2y, \mathrm{e}^{xy})$ das Flussintegral $\int_S f \cdot \mathrm{d}S$. Lässt sich der Satz von Stokes anwenden? der Satz von Gauß?

(5) Wir betrachten das Vektorfeld $g(x,y,z) = (x,y,z)/(x^2+y^4+z^6)$. Bestimmen Sie zum Vektorfeld $f = \operatorname{rot}(g)$ das Flussintegral $\int_S f \cdot \mathrm{d}S$. Lässt sich der Satz von Stokes anwenden? der Satz von Gauß?

(6) Wir betrachten $g(x,y,z) = \big(\cos(xyz), \sin(xyz), \exp(x^2+y^4+z^6)\big)$. Bestimmen Sie zum Vektorfeld $f = \operatorname{rot}(g)$ das Flussintegral $\int_S f \cdot \mathrm{d}S$. Lässt sich der Satz von Stokes anwenden? der Satz von Gauß?

Gauß vs Stokes – integral battle

Lösung: (1)



Luigi Colani (1928–2019), Kugellampe UFO

Gauß vs Stokes – integral battle

(2) Der Körper V ist eine sechsseitig abgestumpfte Vollkugel vom Radius $r = 5$; ihr fehlen sechs Kugelsegmente der Höhe $h = 1$: G217

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_3(V) &\overset{\text{G217}}{=} \frac{4}{3}\pi r^3 - 6 \cdot \pi h^2\Big(r - \frac{h}{3}\Big) &&= \frac{416}{3}\pi &&\approx 436 \\ \mathrm{vol}_2(S) &\overset{\text{G217}}{=} 4\pi r^2 - 6 \cdot 2\pi r h + 6 \cdot \pi 3^2 &&= 94\,\pi &&\approx 295 \end{aligned}$$

☺ Plausibel? $\mathrm{vol}_3([-4,4]^3) = 8^3 = 512$, $\mathrm{vol}_2(\partial[-4,4]^3) = 6 \cdot 8^2 = 384$.

(3) Die Randfläche $S = \partial V$ ist nicht glatt in den sechs Kreislinien $\Gamma_z^\pm = \{\, z = \pm 4,\ x^2 + y^2 = 9 \,\}$ und $\Gamma_y^\pm = \{\, y = \pm 4,\ x^2 + z^2 = 9 \,\}$ und $\Gamma_x^\pm = \{\, x = \pm 4,\ y^2 + z^2 = 9 \,\}$. Überall sonst ist die Fläche S glatt.

In $s \in \{\, z = \pm 4,\ x^2 + y^2 < 9 \,\}$ ist die Einheitsnormale $n(s) = (0, 0, \pm 1)$.
In $s \in \{\, y = \pm 4,\ x^2 + z^2 < 9 \,\}$ ist die Einheitsnormale $n(s) = (0, \pm 1, 0)$.
In $s \in \{\, x = \pm 4,\ y^2 + z^2 < 9 \,\}$ ist die Einheitsnormale $n(s) = (\pm 1, 0, 0)$.

In jedem anderen Punkt $s \in \partial S$ ist die Einheitsnormale $n(s) = s/5$. Hier gilt $|s|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 25$ und $-4 < x, y, z < 4$. In einer kleinen Umgebung eines solchen Punktes s sieht die Fläche S genauso aus wie die Sphäre vom Radius 5, daher ist der Einheitsnormale hier $s/|s| = s/5$.

Gauß vs Stokes – integral battle

(4) Die direkte Berechnung von $\int_S f \cdot \mathrm{d}S$ ist möglich... aber mühsam.
☺ Dank Gauß gilt $\int_S f \cdot \mathrm{d}S = \int_V \mathrm{div}(f)\,\mathrm{d}V = 3\,\mathrm{vol}_3(V) = 416\,\pi$.
⚠ Stokes ist hier nicht anwendbar, denn uns fehlt g mit $f = \mathrm{rot}(g)$.

(5) Die direkte Berechnung von $\int_S f \cdot \mathrm{d}S$ ist möglich... aber mühsam.
☺ Dank Stokes gilt $\int_S f \cdot \mathrm{d}S = \int_S \mathrm{rot}(g) \cdot \mathrm{d}S = \int_{\partial S} g \cdot \mathrm{d}s = 0$ da $\partial S = \emptyset$.
⚠ Gauß ist hier nicht anwendbar, denn f ist nicht auf ganz V definiert.

(6) Die direkte Berechnung von $\int_S f \cdot \mathrm{d}S$ ist möglich... aber mühsam.
☺ Dank Stokes gilt $\int_S f \cdot \mathrm{d}S = \int_S \mathrm{rot}(g) \cdot \mathrm{d}S = \int_{\partial S} g \cdot \mathrm{d}s = 0$ da $\partial S = \emptyset$.
☺ Auch Gauß lässt sich anwenden: $\int_S f \cdot \mathrm{d}S = \int_V \mathrm{div}(f)\,\mathrm{d}V = 0$.

☺ Diese Beispiele illustrieren erneut den Nutzen unserer Integralsätze: Manche Rechnung löst man besser mit Anschauung und Verständnis!
☺ Wer eindimensional integrieren will, der sollte den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI) kennen und nutzen!
Wer mehrdimensional integrieren will, der sollte die entsprechenden Integralsätze von Gauß, Green und Stokes kennen und nutzen!

Iglu

Aufgabe: Ein bewohnter Iglu werde beschrieben durch die Menge

$$I = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 4,\ z \ge 0 \,\}.$$

Der Wärmefluss im Iglu sei gegeben durch das Vektorfeld

$$f(x,y,z) = (x, y, 4z + x^2 + y^2 - 4).$$

(1) Wieviel Wärme entsteht im Iglu I insgesamt?

(2) Wieviel Wärme fließt durch den Boden B nach unten?

(3) Wieviel Wärme fließt durch die Kuppel K nach außen?

Iglu

Lösung: (1) Das Vektorfeld f hat konstante Quelldichte $\operatorname{div}(f) = 6$. Dies entspricht homogener Wärmeerzeugung im Inneren des Iglu. Die Gesamtmenge der im Iglu entstehenden Wärme ist demnach

$$\int_I \operatorname{div}(f)\,\mathrm{d}I \;=\; 6 \cdot \operatorname{vol}_3(I) \;=\; 6 \cdot \frac{2}{3}\pi\, 2^3 \;=\; 32\pi.$$

(2) Der Boden des Iglu ist die Kreisscheibe

$$B = \{\, (x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \le 4 \,\}.$$

Die äußere Einheitsnormale ist hier konstant $n_B = (0,0,-1)$. Also

$$\begin{aligned}
\int_B f \bullet n_B \,\mathrm{d}(x,y) &\overset{\text{Def}}{=} \int_B 4 - x^2 - y^2 \,\mathrm{d}(x,y) && \text{Flussintegral über } B \\
&\underset{\text{C2B}}{\overset{\text{Trafo}}{=}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{2} (4-\rho^2)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi && \text{Polarkoordinaten} \\
&\underset{\text{B1I}}{\overset{\text{HDI}}{=}} 2\pi \left[2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} \right]_{\rho=0}^{2} \;=\; 2\pi(8-4) \;=\; 8\pi.
\end{aligned}$$

☺ Hier ist „$B \subseteq \mathbb{R}^2$“ bereits eben, dies nutzen wir zur Parametrisierung.

Iglu

(3a) Die Kuppel des Iglu ist die obere Hemisphäre

$$K = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 4,\ z \geq 0 \,\}.$$

Wir sparen uns viel Arbeit durch den Satz von Gauß:

$$\int_I \operatorname{div}(f)\,\mathrm{d}I \overset{\text{Gauß}}{\underset{\text{G3G}}{=}} \int_{S=\partial I} f \cdot \mathrm{d}S \overset{\text{Def}}{=} \int_B f \cdot \mathrm{d}B + \int_K f \cdot \mathrm{d}K$$

Hieraus lesen wir ab: $\int_K f \cdot \mathrm{d}K = 32\pi - 8\pi = 24\pi$. (Dieser Iglu verliert demnach dreimal mehr Wärme über die Kuppel als über den Boden.)

(3b) Alternativ integrieren wir, etwa in Kugelkoordinaten $\Phi : D \to K$:

$$s = \Phi\begin{pmatrix}\theta\\ \varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix}\theta\\ \varphi\end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{matrix} \right\}.$$

Die beiden Tangentialvektoren und der Normalenvektor sind:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi \\ -r\sin\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2\sin^2\theta\cos\varphi \\ r^2\sin^2\theta\sin\varphi \\ r^2\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix}$$

☺ Der Normalenvektor $\mathrm{d}\Phi$ zeigt aus V heraus, Rechte-Hand-Regel.

Iglu

Das Flussintegral des Vektorfeldes f über die Kuppel K ist demnach:

$$\int_{s\in K} f(s) \cdot \mathrm{d}K \;=\; \int_D f\big(\Phi(\theta,\varphi)\big) \cdot \Big(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\Big)\,\mathrm{d}(\theta,\varphi)$$

$$= \int_D \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ 4r\cos\theta + r^2\sin^2\theta - 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r^2\sin^2\theta\cos\varphi \\ r^2\sin^2\theta\sin\varphi \\ r^2\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix}\,\mathrm{d}(\theta,\varphi)$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi/2} r^3\sin^3\theta + 4r^3\sin\theta\cos^2\theta + r^4\sin^3\theta\cos\theta - 4r^2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

Spätestens hier verfluchen wir unsere Wahl dieses Rechenweges…
Umso mehr preisen wir den wunderbar nützlichen Satz von Gauß!

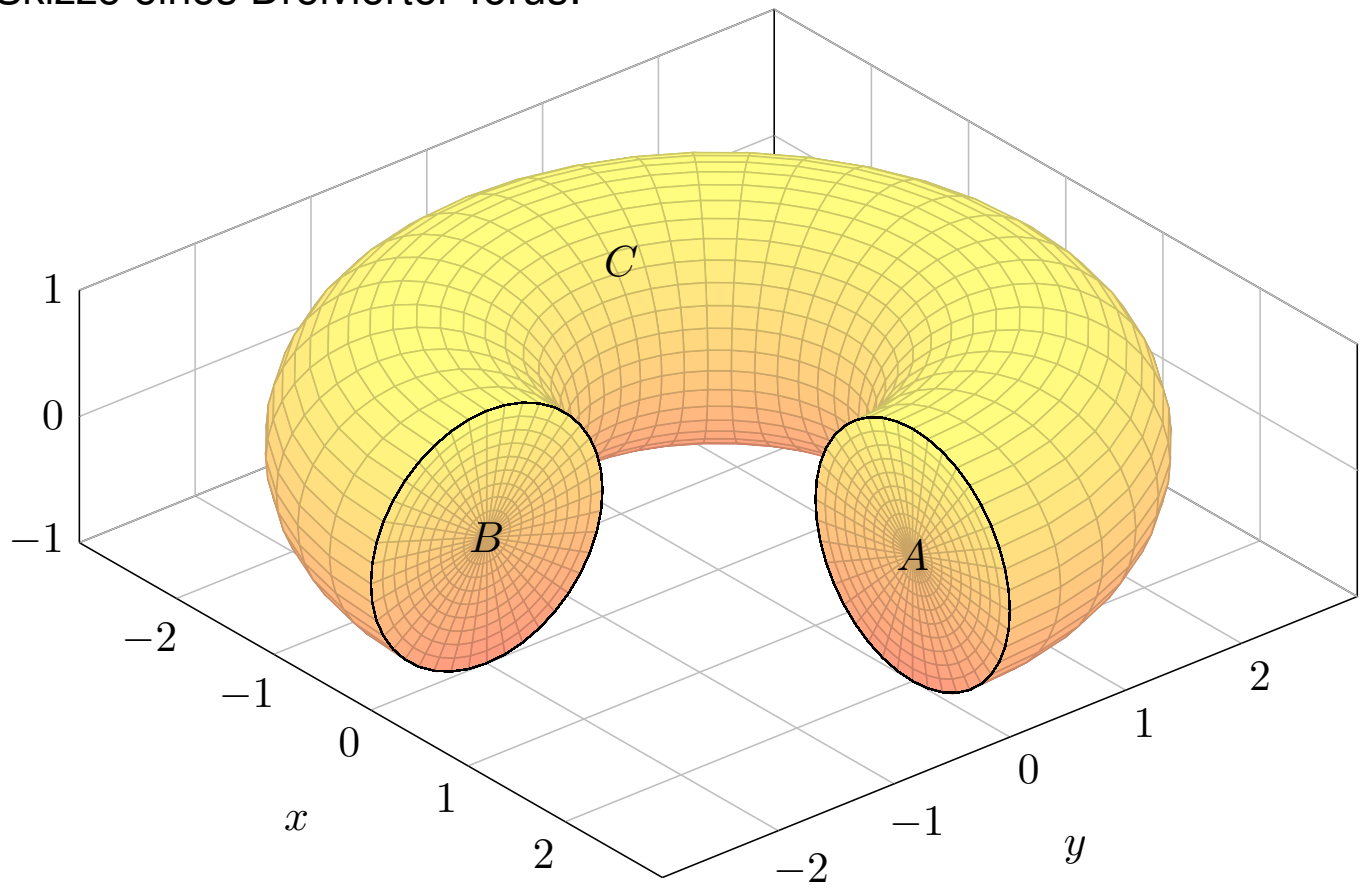
Zum Glück sind dies Standardintegrale der Form $\int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin^p\theta\cos^q\theta\,\mathrm{d}\theta$.
Geduldiges Ausrechnen / Nachschlagen ergibt (für den Radius $r = 2$):

$$\int_{s\in K} f(s) \cdot \mathrm{d}K \;=\; \ldots \;=\; \frac{\pi}{2}\,r^2(r^2+8r-8) \;=\; 24\pi$$

☺ Diese Beispiel illustriert erneut den Nutzen unserer Integralsätze.

Divergenz, Rotation und Flussintegrale

Skizze eines Dreiviertel-Torus:



Divergenz, Rotation und Flussintegrale

Aufgabe: Sei $V \subseteq \mathbb{R}^3$ der oben skizzierte Dreiviertel-Volltorus.

(1) Parametrisieren Sie den Körper V in Toruskoordinaten, sowie die Kreisscheiben A und B und die Mantelfläche C.

(2) Bestimmen Sie Volumen $\mathrm{vol}_3(V)$ und Oberflächeninhalt $\mathrm{vol}_2(\partial V)$.

(3) Berechnen Sie die Divergenz und die Rotation des Vektorfeldes

$$f(x,y,z) = \big(\, x,\ y,\ x^2 + 4(y+2)^3 \,\big).$$

(4) Berechnen Sie den Fluss von f durch $S = \partial V$ nach außen.

(5a) Berechnen Sie den Fluss von $\mathrm{rot}(f)$ durch A nach außen.

(5b) Berechnen Sie den Fluss von $\mathrm{rot}(f)$ durch B nach außen.

(5c) Folgern Sie den Fluss von $\mathrm{rot}(f)$ durch C nach außen

☺ Diese Aufgabe übt, Flächen- und Volumenintegrale möglichst effizient einzusetzen. Zur Vereinfachung nutzen wir womöglich die Integralsätze und für Rotationskörper auch die Guldinschen Regeln.

Divergenz, Rotation und Flussintegrale

(1) In Toruskoordinaten mit $R = 2$ und $r = 1$ wird V beschrieben durch

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} (R + \rho \sin\theta)\cos\varphi \\ (R + \rho \sin\theta)\sin\varphi \\ \rho\cos\theta \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \le \rho \le r \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le 3\pi/2 \end{matrix} \right\}.$$

Die Randfläche $S = \partial V$ besteht aus der Kreisscheibe A für $\varphi = 0$, der Kreisscheibe B für $\varphi = 3\pi/2$, sowie der Mantelfläche C für $\rho = r$:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} R + \rho \sin\theta \\ 0 \\ \rho\cos\theta \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \le \rho \le r \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{matrix} \right\}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -R - \rho \sin\theta \\ \rho\cos\theta \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \le \rho \le r \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{matrix} \right\}$$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} (R + r \sin\theta)\cos\varphi \\ (R + r \sin\theta)\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le 3\pi/2 \end{matrix} \right\}$$

Divergenz, Rotation und Flussintegrale

(2) Nach den Guldinschen Regeln G2B finden wir:

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_3(V) &= \frac{3}{4} \cdot \pi r^2 \cdot 2\pi R &&= 3\pi^2 \\ \mathrm{vol}_2(\partial V) &= \pi r^2 + \pi r^2 + \frac{3}{4} \cdot 2\pi r \cdot 2\pi R &&= 2\pi r^2 + 3\pi^2 r R \end{aligned}$$

(3) Wir berechnen $\mathrm{div}(f) = 2$ und $\mathrm{rot}(f) = \big(12(y+2)^2, -2x, 0\big)$.

(4) Das Flussintegral gelingt am einfachsten mit dem Satz von Gauß:

$$\int_S f \bullet \mathrm{d}S \;=\; \int_V \mathrm{div}(f)\,\mathrm{d}V \;=\; \int_V 2\,\mathrm{d}V \;=\; 2\,\mathrm{vol}_3(V) \;=\; 6\pi^2.$$

Wir könnten das Flussintegral $\int_S f \bullet \mathrm{d}S$ auch direkt ausrechnen, indem wir über A und B und C integrieren. Das ist aber mühsamer. Wer keine länglichen Rechnungen scheut, versuche dies als Übung!

☺ Leistungsstarke Theorie ermöglicht effiziente Berechnung.
Wir lassen die Integralsätze einen großen Teil der Arbeit erledigen.

(5a) Hier hilft kein Trick, wir müssen einfach die Definition nutzen und ausrechnen... Normalenvektor zu $\Phi(\rho,\theta) = (2+\rho\sin\theta, 0, \rho\cos\theta)$:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ 0 \\ -\rho\sin\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho \\ 0 \end{pmatrix}$$

Plausibilitätscheck: Dies ist die äußere Einheitsnormale $(0,-1,0)$ mal der Funktionaldeterminante ρ. Als Flussintegral erhalten wir demnach:

$$\begin{aligned} \int_A \operatorname{rot}(f)\cdot \mathrm{d}A &= \int_A 2x\,|\mathrm{d}A| = \int_{\rho=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi} 2(2+\rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho \\ &= \int_{\rho=0}^{1} 8\pi\rho\,\mathrm{d}\rho = \Big[4\pi\rho^2\Big]_{\rho=0}^{1} = 4\pi \end{aligned}$$

(5b) Hier hilft kein Trick, wir müssen einfach die Definition nutzen und ausrechnen... Normalenvektor zu $\Phi(\rho,\theta) = (0, -2-\rho\sin\theta, \rho\cos\theta)$:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho\cos\theta \\ -\rho\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Plausibilitätscheck: Dies ist die äußere Einheitsnormale $(1,0,0)$ mal der Funktionaldeterminante ρ. Als Flussintegral erhalten wir demnach:

$$\begin{aligned} \int_B \operatorname{rot}(f)\cdot \mathrm{d}B &= \int_B 12(y+2)^2\,|\mathrm{d}B| = \int_{\rho=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi} 12\rho^3\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho \\ &= \int_{\rho=0}^{1} 12\pi\rho^3\,\mathrm{d}\rho = \Big[3\pi\rho^4\Big]_{\rho=0}^{1} = 3\pi \end{aligned}$$

(5c) Mantelfläche C? Nach dem Integralsatz von Stokes gilt

$$\begin{aligned} \int_A \operatorname{rot}(f)\cdot\mathrm{d}A + \int_B \operatorname{rot}(f)\cdot\mathrm{d}B + \int_C \operatorname{rot}(f)\cdot\mathrm{d}C &\overset{\text{Def}}{=} \int_S \operatorname{rot}(f)\cdot\mathrm{d}S \\ &\underset{\text{G3E}}{\overset{\text{Stokes}}{=}} \int_{\partial S} f\cdot\mathrm{d}s \overset{\partial S=\emptyset}{=} 0 \end{aligned}$$

☺ Ohne weitere Mühe folgt $\int_C \operatorname{rot}(f)\cdot\mathrm{d}C = -7\pi$. Dies folgt ebenso aus dem Integralsatz von Gauß, denn $\operatorname{div}\operatorname{rot}(f) = 0$. Das Flussintegral $\int_C \operatorname{rot}(f)\cdot\mathrm{d}C$ kann man auch direkt ausrechnen, das ist aber mühsamer.

Divergenz und Flussintegral

Aufgabe: (1) Seien $r, h > 0$ reelle Zahlen. Skizzieren Sie den Körper $V \subseteq \mathbb{R}^3$, der begrenzt wird durch $z = 0$ und $z = h$ und $x^2 + y^2 = r^2$.

(2) Berechnen Sie zum Vektorfeld $f(x, y, z) = (x^4 y, -2x^3 y^2, z^2)$ die Divergenz und den Fluss von f durch den Rand ∂V nach außen.

Lösung: (1) Der angegebene Körper V ist ein Zylinder der Höhe h über einer Kreisscheibe D vom Radius r als Grundfläche:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} x^2 + y^2 \leq r^2 \\ 0 \leq z \leq h \end{array} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} 0 \leq \rho \leq r \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq h \end{array} \right\}$$

(2) Die Divergenz ist leicht auszurechnen:

$$\operatorname{div} f(x, y, z) = 4x^3 y - 4x^3 y + 2z = 2z$$

Wir könnten das Flussintegral $\int_{\partial V} f \bullet \mathrm{d}S$ direkt ausrechnen, indem wir die Randfläche $S = \partial V$ in Mantel, Deckel und Boden zerlegen, usw. Wer keine länglichen Rechnungen scheut, versuche dies als Übung!

Divergenz und Flussintegral

Alternativ können wir den Satz von Gauß anwenden: Die Divergenz ist hier leicht, und der Rotationskörper V ist einfach zu beschreiben! Das Volumenintegral gelingt leicht in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial V} f \bullet \mathrm{d}S &\overset{\text{Gauß}}{\underset{\text{G3G}}{=}} \int_V \operatorname{div}(f)\,\mathrm{d}V \overset{\text{Trafo}}{\underset{\text{C2B}}{=}} \int_{\rho=0}^{r} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{h} 2z \cdot \rho \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho \\
&\overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \int_{\rho=0}^{r} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \Big[z^2 \rho\Big]_{z=0}^{h} \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho = \int_{\rho=0}^{r} \int_{\varphi=0}^{2\pi} h^2 \rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho \\
&\overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \int_{\rho=0}^{r} 2\pi h^2 \rho\,\mathrm{d}\rho \overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \pi h^2 r^2
\end{aligned}$$

Ebenso leicht gelingt das Integral in kartesischen Koordinaten:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial V} f \bullet \mathrm{d}S &\overset{\text{Gauß}}{\underset{\text{G3G}}{=}} \int_V \operatorname{div}(f)\,\mathrm{d}V \overset{\text{Fub}}{\underset{\text{C1E}}{=}} \int_{(x,y)\in D} \int_{z=0}^{h} 2z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}(x,y) \\
&\overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \int_{(x,y)\in D} \Big[z^2\Big]_{z=0}^{h} \mathrm{d}(x,y) = \int_{(x,y)\in D} h^2\,\mathrm{d}(x,y) \\
&\overset{\text{Lin}}{\underset{\text{A3L}}{=}} h^2 \int_{(x,y)\in D} \mathrm{d}(x,y) = \pi h^2 r^2
\end{aligned}$$

Rotationskörper zur Herzfläche

Die folgende Aufgabe übt den sicheren Umgang mit Rotationskörpern. Sie kennen bereits den Torus (G225), wir variieren nun dieses Thema:

Aufgabe: (1) Zeichnen Sie in der x–z–Ebene die Herzkurve

$$\gamma \,:\, [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3 \,:\, t \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-\sin t) \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Wie berechnen Sie hieraus die Länge der durchlaufenen Kurve Γ und den Flächeninhalt des umlaufenen Bereichs H in der x–z–Ebene?

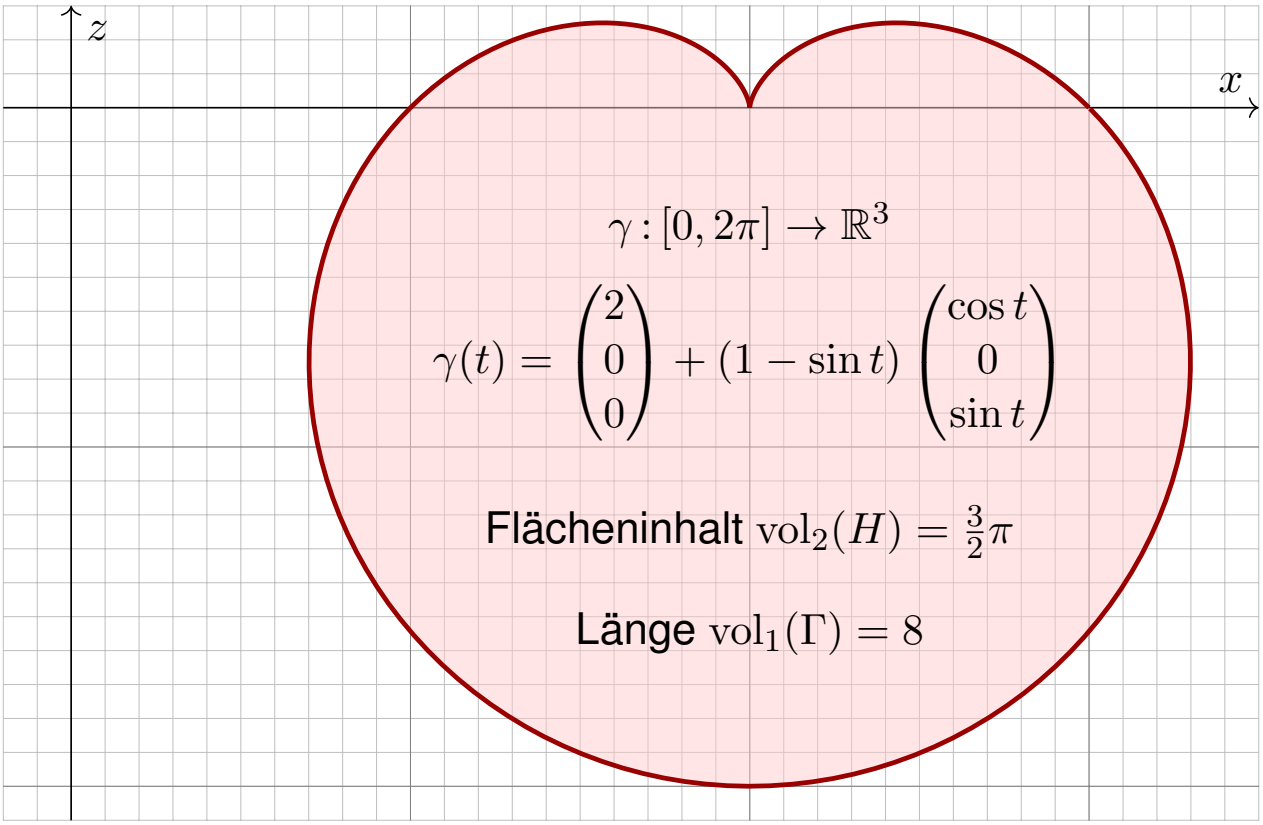
(2) Zeichnen und parametrisieren Sie den Rotationskörper R, der aus H durch Rotation um die z–Achse entsteht, sowie seine Mantelfläche M.

(3) Bestimmen Sie das Volumen $\mathrm{vol}_3(R)$ und den Flächeninhalt $\mathrm{vol}_2(M)$. Welche Rechenwege kennen Sie? Welcher scheint am effizientesten?

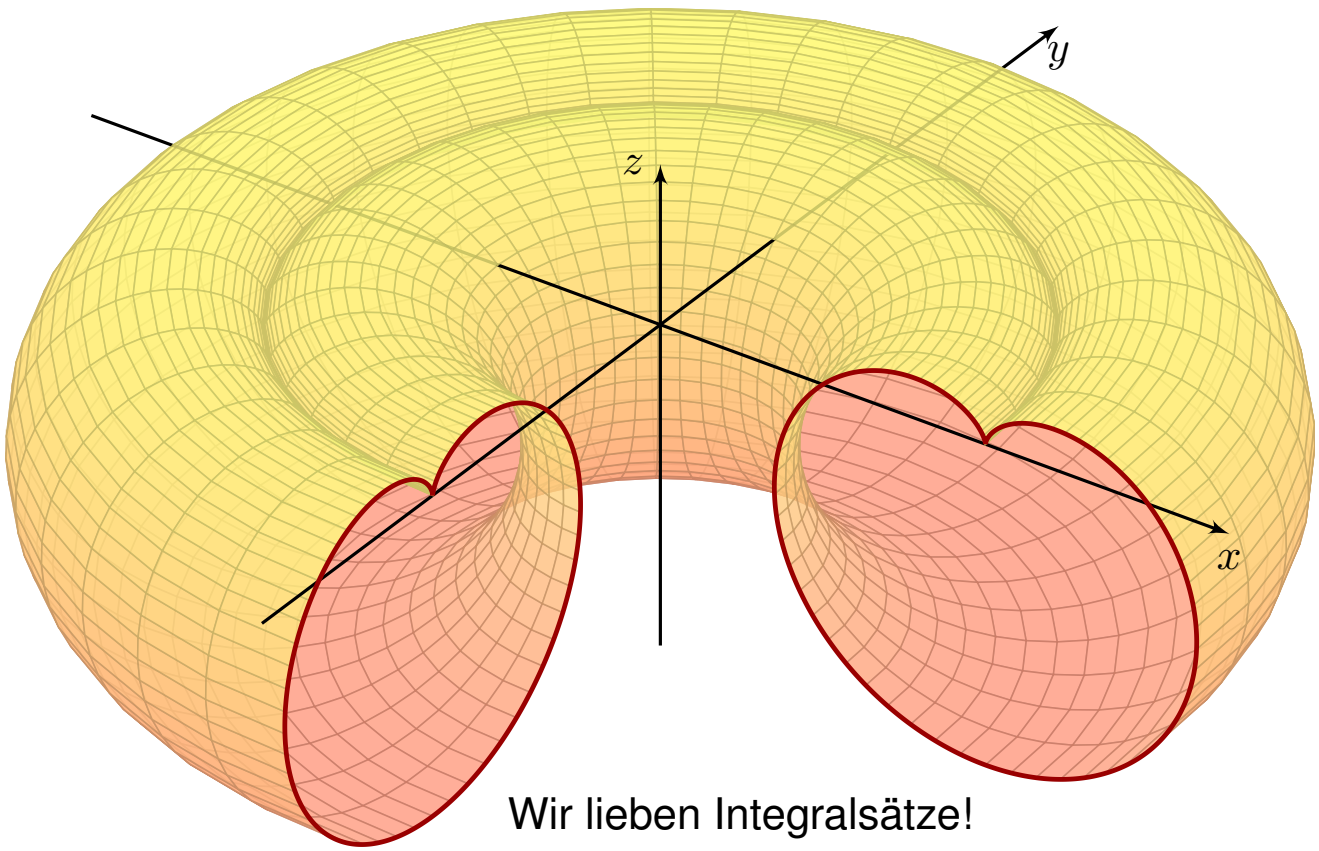
(4) Berechnen Sie zum Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \mapsto (0,0,z)$ das Flussintegral durch die Mantelfläche $M = \partial R$ nach außen: (a) direkt durch Einsetzen in die Definition und (b) per Integralsatz.

Rotationskörper zur Herzfläche

Lösung: (1) Die Herzkurve kennen wir aus Kapitel E (Seite E217).



Rotationskörper zur Herzfläche



Wir lieben Integralsätze!

Rotationskörper zur Herzfläche

(2) Dank (1) sind Zeichnung und Parametrisierungen leicht:

$$\Psi : \mathbb{R}^3 \supseteq [0, 2\pi] \times H \to R : \qquad \Psi \begin{pmatrix} \varphi \\ x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos\varphi \\ x \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Phi : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to M : \qquad \Phi \begin{pmatrix} \varphi \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \cos\varphi \\ \gamma_1(t) \sin\varphi \\ \gamma_3(t) \end{pmatrix}$$

(3) Mit (2) können wir das Volumen und den Flächeninhalt ausrechnen. Wesentlich leichter gelingt dies mit den Guldinschen Regeln (G2B):

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_3(R) &= \mathrm{vol}_2(H) \cdot 2\pi\, d(H) = \frac{3}{2}\pi \cdot 4\pi = 6\pi^2 \\ \mathrm{vol}_2(M) &= \mathrm{vol}_1(\Gamma) \cdot 2\pi\, d(\Gamma) = 8 \cdot 4\pi = 32\pi \end{aligned}$$

Warum geht das so einfach? Hier helfen geometrisches Verständnis und die passenden Sätze! Wir kennen aus Kapitel E die Länge $\mathrm{vol}_1(\Gamma) = 8$ der Herzkurve Γ und den Flächeninhalt $\mathrm{vol}_2(H) = \frac{3}{2}\pi$ der so umlaufenen Herzfläche H, siehe Seite E217. Aufgrund der Symmetrie von Γ und H müssen wir ihre Schwerpunkte nicht mühsam berechnen, sondern können aus unserer Skizze sofort ihren Abstand zur Rotationsachse ablesen: $d(\Gamma) = d(H) = 2$.

Rotationskörper zur Herzfläche

(4) Physikalische Interpretation: Das Vektorfeld $f(x,y,z) = (0,0,z)$ entspricht der Auftriebskraft (genauer dem Druck, also Kraft pro Fläche) in einem homogenen Medium konstanter Dichte, etwa Wasser oder Luft.

Wir haben also genau die Situation des archimedischen Prinzips! G321

Daher stehen wir im Folgenden vor zwei möglichen Rechnungen.
Wir verstehen beide sowohl mathematisch als auch physikalisch:

(a) Wir können direkt die Definition des Flussintegrals einsetzen;
wir erhalten dann den Fluss, hier interpretiert als Gesamtkraft.

(b) Wir können den Integralsatz von Gauß zur Umrechnung nutzen;
wir erhalten dann die Auftriebskraft des verdrängten Volumens.

Die Sichtweise (a) ist physikalisch motiviert: Der Wert interessiert uns!
Die Sichweise (b) ist leichter auszurechnen und zu verstehen: Das hilft!

☺ Leistungsstarke Theorie ermöglicht effiziente Berechnung.
Wir lassen die Integralsätze einen großen Teil der Arbeit erledigen.

Rotationskörper zur Herzfläche

(4a) Zunächst die direkte Lösung durch Einsetzen in die Definition.
Wir berechnen die Tangentialvektoren und den Normalenvektor:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial t} = \begin{pmatrix} -\gamma_1(t)\sin\varphi \\ \gamma_1(t)\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \gamma_1'(t)\cos\varphi \\ \gamma_1'(t)\sin\varphi \\ \gamma_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ -\gamma_1'(t)\gamma_1(t) \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir das Flussintegral

$$\int_M f \bullet \mathrm{d}M = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_3(t) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ -\gamma_1'(t)\gamma_1(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= -2\pi \int_{t=0}^{2\pi} \gamma_1(t)\,\gamma_1'(t)\,\gamma_3(t)\,\mathrm{d}t$$

Wir setzen nun die Parametrisierung des Randes ein:

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= 2 + \cos t + \sin t \cos t \\ \gamma_3(t) &= \qquad \sin t + \sin^2 t \end{aligned}$$

Rotationskörper zur Herzfläche

Wir erhalten einen etwas länglichen Integranden:

$$\int_{t=0}^{2\pi} \gamma_1(t)\,\gamma_1'(t)\,\gamma_3(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_{t=0}^{2\pi} \big[2+\cos t-\sin t\cos t\big]\cdot\big[-\sin t-\cos^2 t+\sin^2 t\big]\cdot\big[\sin t-\sin^2 t\big]\,\mathrm{d}t$$

Hier hilft sorgsames Ausmultiplizieren und geduldiges Integrieren...
Versuchen Sie es! Es ist vielleicht nicht spaßig, aber doch lehrreich...
Einige Integrale sind Null aus Symmetriegründen. Es bleibt schließlich:

$$\int_{t=0}^{2\pi} \gamma_1(t)\,\gamma_1'(t)\,\gamma_3(t)\,\mathrm{d}t = -3\pi$$

☺ Für das gesuchte Flussintegral erhalten wir so $\int_M f\bullet\mathrm{d}M = 6\pi^2$.

☹ Das war leider mühsam. Gibt es einen leichteren Weg? Ja!

Rotationskörper zur Herzfläche

(4b) Das Integral gelingt am einfachsten mit dem Satz von Gauß:

$$\int_M f\bullet\mathrm{d}M \;=\; \int_R \operatorname{div}(f)\,\mathrm{d}(x,y,z) \;=\; \int_R 1\,\mathrm{d}(x,y,z) \;=\; \mathrm{vol}_3(R) \;=\; 6\pi^2$$

In Worten: Das Flussintegral von f über die Randfläche $M=\partial R$ nach außen ist gleich dem Volumenintegral von $\operatorname{div} f$ über den Körper R. Wegen $\operatorname{div} f = 1$ ist Letzteres hier einfach nur das Volumen $\mathrm{vol}_3(R)$.

☺ Diese Umformung vereinfacht erheblich unsere Rechnung.

☺ Sie illustriert zudem nochmal das archimedische Prinzip.

Damit endet dieses Kapitel wie es begann, nämlich mit anschaulichen, konkreten, handfesten physikalischen Anwendungen. Die Integralsätze von Gauß und Stokes sind grundlegende Rechenregeln und Hilfsmittel. Sie werden überall in den Natur- und Ingenieurwissenschaften genutzt. Zur Illustration und zur Einübung gebe ich hierzu im nächsten Kapitel weitere physikalisch-technische Anwendungsbeispiele.

Die Gramsche Determinante

Aufgabe: Für je zwei Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\boxed{|u \times v|^2 = \det \begin{pmatrix} u \bullet u & v \bullet u \\ u \bullet v & v \bullet v \end{pmatrix}}$$

Zeigen Sie dies (1) durch geduldiges Ausrechnen sowie (2) geometrisch.

Lösung: (1) Wir rechnen in kartesischen Koordinaten:

$$u \times v = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

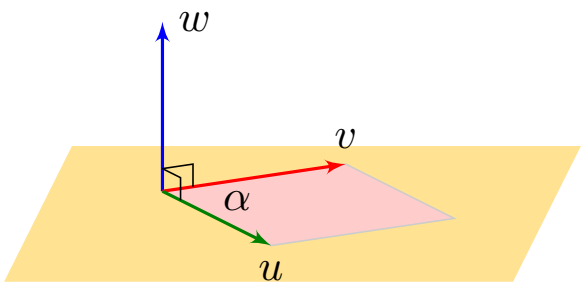
$$\begin{aligned} |u \times v|^2 = {} & + u_2^2 v_3^2 + u_3^2 v_2^2 - 2 u_2 v_2 u_3 v_3 \\ & + u_3^2 v_1^2 + u_1^2 v_3^2 - 2 u_1 v_1 u_3 v_3 \\ & + u_1^2 v_2^2 + u_2^2 v_1^2 - 2 u_1 v_1 u_2 v_2 \end{aligned}$$

$$\det \begin{pmatrix} u \bullet u & v \bullet u \\ u \bullet v & v \bullet v \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 & u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \\ u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 & v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \end{pmatrix}$$

☺ Ausmultiplizieren und vereinfachen: Beide stimmen überein!

Die Gramsche Determinante

(2) Ausrechnen ist gut, zudem wollen wir geometrisches Verständnis:



Das Kreuzprodukt $w = u \times v$ steht senkrecht auf den Vektoren u, v.

Seine Norm $|w| = |u| \cdot |v| \cdot \sin \sphericalangle(u, v)$ ist der Flächeninhalt des von u, v aufgespannten Parallelogramms.

Stehen u und v senkrecht, also $u \bullet v = 0$, so folgt $|w| = |u| \cdot |v|$, somit

$$|u \times v|^2 = \det \begin{pmatrix} u \bullet u & 0 \\ 0 & v \bullet v \end{pmatrix}.$$

Andernfalls orthogonalisieren wir v bezüglich u durch $v' = v - \lambda u$ mit $\lambda = (v \bullet u)/(u \bullet u)$. Dadurch wird die Matrix diagonal, denn $u \bullet v' = 0$; Kreuzprodukt und Determinante bleiben unverändert erhalten.

☺ Das Kreuzprodukt nützt uns nur für Flächen im $\mathbb{R}^3$. Die Gramsche Determinante hingegen nützt in jeder Dimension. Anwendung / Ausblick: So integrieren wir im $\mathbb{R}^n$ auf k–dimensionalen Untermannigfaltigkeiten.

Die erste Fundamentalform

Sei $\Phi : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ ein parametrisiertes Flächenstück.
Die **erste Fundamentalform** von Φ ist die folgende Matrix:

$$g^\Phi : D \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad g^\Phi = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \partial_x\Phi \cdot \partial_x\Phi & \partial_y\Phi \cdot \partial_x\Phi \\ \partial_x\Phi \cdot \partial_y\Phi & \partial_y\Phi \cdot \partial_y\Phi \end{pmatrix}$$

Sie gibt an, wie die Tangentialebene an (x, y) in $D \subseteq \mathbb{R}^2$ abgebildet wird auf die Tangentialebene am Punkt $s = \Phi(x, y)$ in der Bildfläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$.
Wir nennen g^Φ auch den **metrischen Tensor** der Parametrisierung Φ.
Er beschreibt vollständig die innere Geometrie der Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$.

Aufgabe: Wie liest man der ersten Fundamentalform g^Φ ab, (1) ob Φ flächentreu ist? (2) winkeltreu? (3) längentreu? Welche Beziehung gilt?

Lösung: (1) Flächentreue folgt aus der (Gramschen) Determinante:

$$\boxed{\Phi \text{ ist flächentreu} \quad \Longleftrightarrow \quad \det(g^\Phi) = 1}$$

Genauer und allgemeiner: Der Faktor $\sqrt{\det(g^\Phi)} = |\partial_x\Phi \times \partial_y\Phi|$ ist die Flächenverzerrung, wie wir in der vorigen Aufgabe ausgerechnet haben.

Die erste Fundamentalform

(2) Für Winkeltreue müssen $\partial_x\Phi$ und $\partial_y\Phi$ senkrecht stehen und gleiche Länge λ haben (sonst stehen die Diagonalen nicht mehr senkrecht):

$$\boxed{\Phi \text{ ist winkeltreu (konform)} \quad \Longleftrightarrow \quad g^\Phi = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}}$$

(3) Die Länge eines Weges $\gamma : [a, b] \to D \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ist

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\dot\gamma(t)| \, \mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{\dot x(t)^2 + \dot y(t)^2} \, \mathrm{d}t.$$

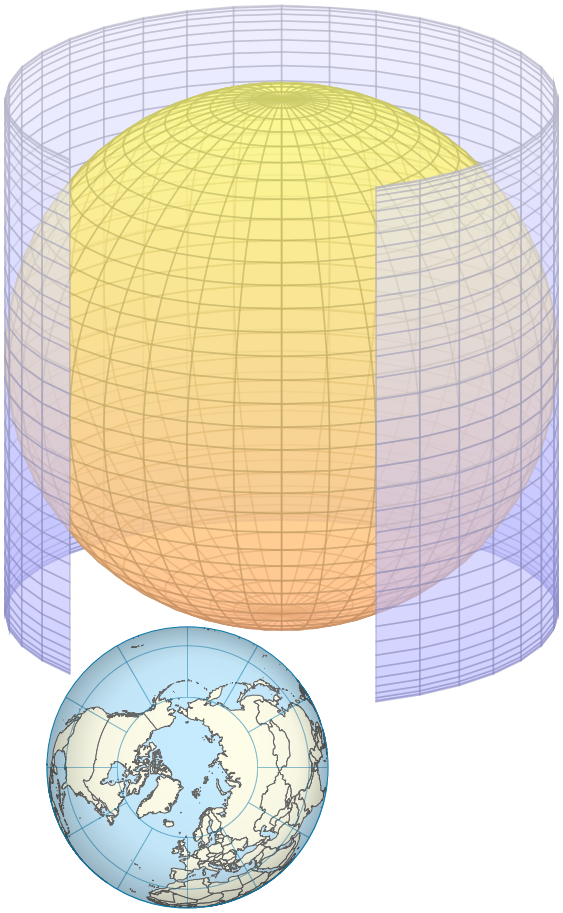
Die Länge des Weges $\Phi \circ \gamma : [a, b] \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ ist entsprechend

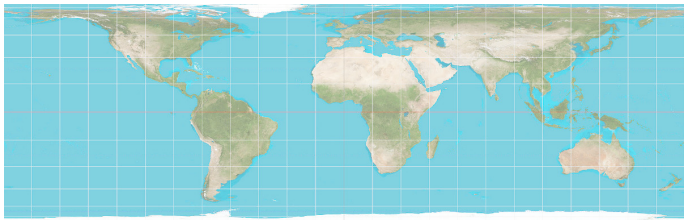
$$\ell(\Phi \circ \gamma) = \int_a^b \big|\Phi'(\gamma(t))\, \dot\gamma(t)\big| \, \mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{g_{11}\dot x(t)^2 + 2g_{12}\dot x(t)\dot y(t) + g_{22}\dot y(t)^2} \, \mathrm{d}t.$$

Gleichheit für alle Wege γ gilt nur, falls $g_{11} = g_{22} = 1$ und $g_{12} = g_{21} = 0$:

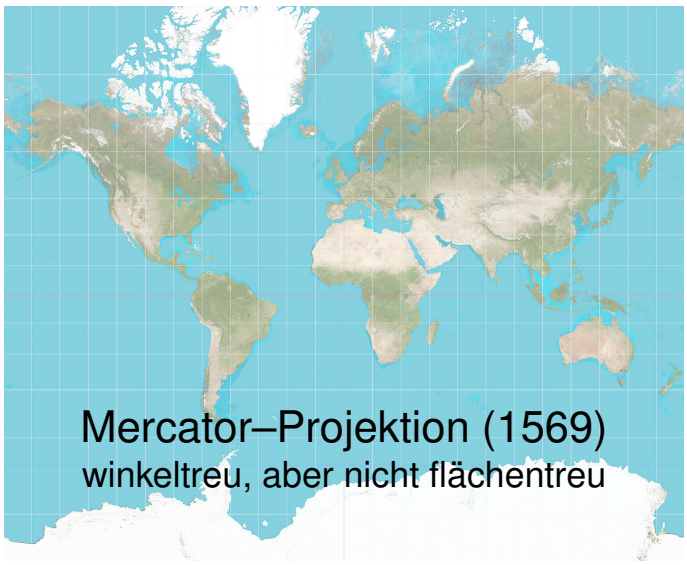
$$\boxed{\begin{aligned} \Phi \text{ ist längentreu (isometrisch)} \quad &\Longleftrightarrow \quad g^\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \quad \Phi \text{ ist winkel- und flächentreu} \end{aligned}}$$

Kartographie und Projektionen der Sphäre





Lambert–Projektion (1772)
flächentreu, aber nicht winkeltreu



Mercator–Projektion (1569)
winkeltreu, aber nicht flächentreu

Fun fact: Grönland (2.2 Mio km^2) passt 14mal in Afrika (30.3 Mio km^2).

Die Abwicklung des Zylinders ist längentreu.

Aufgabe: Wir wickeln das Rechteck $D = [0, 2\pi] \times [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$ auf den Zylinder $Z = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1,\ -1 \leq z \leq 1 \,\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

(1) Formulieren Sie explizit diese Parametrisierung $\Phi : D \to Z$.

(2) Ist Φ flächentreu? oder winkeltreu? oder gar längentreu?

Lösung: (1) Wir bestimmen Parametrisierung und Tangentialvektoren:

$$\Phi : D = [0, 2\pi] \times [-1, 1] \to Z, \quad \Phi(\varphi, z) = (\cos\varphi, \sin\varphi, z)$$
$$\partial_\varphi \Phi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \qquad \partial_z \Phi = (0, 0, 1)$$

(2) Die erste Fundamentalform beschreibt die geometrische Verzerrung:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_\varphi \Phi \cdot \partial_\varphi \Phi & \partial_z \Phi \cdot \partial_\varphi \Phi \\ \partial_\varphi \Phi \cdot \partial_z \Phi & \partial_z \Phi \cdot \partial_z \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Daher ist Φ längentreu, somit insbesondere winkel- und flächentreu.

Zum Vergleich nochmal die Flächenverzerrung übers Kreuzprodukt:

$$\partial_\varphi \Phi \times \partial_z \Phi = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0) \quad \Rightarrow \quad |\partial_\varphi \Phi \times \partial_z \Phi| = 1$$

Intrinsisch gesehen ist der Zylinder Z flach, seine Geometrie ist lokal dieselbe wie die des ebenen Rechtecks D, nicht aber seine Lage im $\mathbb{R}^3$.

Lamberts Zylinderprojektion ist flächentreu.

G439
Ergänzung

Aufgabe: (Lambert–Projektion) Wir projizieren den Zylinder Z axial auf die Einheitssphäre $S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \} \subseteq \mathbb{R}^3$.

(1) Formulieren Sie diese Abbildung $\Phi : D = [0, 2\pi] \times [-1, 1] \to S$.

(2) Ist Φ flächentreu? oder winkeltreu? oder gar längentreu?

Lösung: (1) Wir bestimmen Parametrisierung und Tangentialvektoren:

$$\begin{aligned}
\Phi(\varphi, z) &= \big(\sqrt{1 - z^2} \cos \varphi, \sqrt{1 - z^2} \sin \varphi, z\big) \\
\partial_\varphi \Phi(\varphi, z) &= \big(-\sqrt{1 - z^2} \sin \varphi, \sqrt{1 - z^2} \cos \varphi, 0\big) \\
\partial_z \Phi(\varphi, z) &= \big(-z/\sqrt{1 - z^2} \cos \varphi, -z/\sqrt{1 - z^2} \sin \varphi, 1\big)
\end{aligned}$$

(2) Die erste Fundamentalform beschreibt die geometrische Verzerrung:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_\varphi \Phi \cdot \partial_\varphi \Phi & \partial_z \Phi \cdot \partial_\varphi \Phi \\ \partial_\varphi \Phi \cdot \partial_z \Phi & \partial_z \Phi \cdot \partial_z \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - z^2 & 0 \\ 0 & 1/(1 - z^2) \end{pmatrix}$$

Daher ist Φ flächentreu, aber nicht winkeltreu (auch nicht längentreu). Intrinsisch gesehen ist der Zylinder Z flach, die Sphäre S gekrümmt. Keine Abbildung $Z \to S$ ist sowohl flächen- als auch winkeltreu.

Mercators Zylinderprojektion ist winkeltreu.

G440
Ergänzung

Aufgabe: (Mercator–Projektion) Wir projizieren den unendlichen Zylinder $Z' = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 \}$ zentral auf die Sphäre S.

(1) Formulieren Sie diese Abbildung $\Phi : D = [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \to S$.

(2) Ist Φ flächentreu? oder winkeltreu? oder gar längentreu?

Lösung: (1) Wir bestimmen Parametrisierung und Tangentialvektoren:

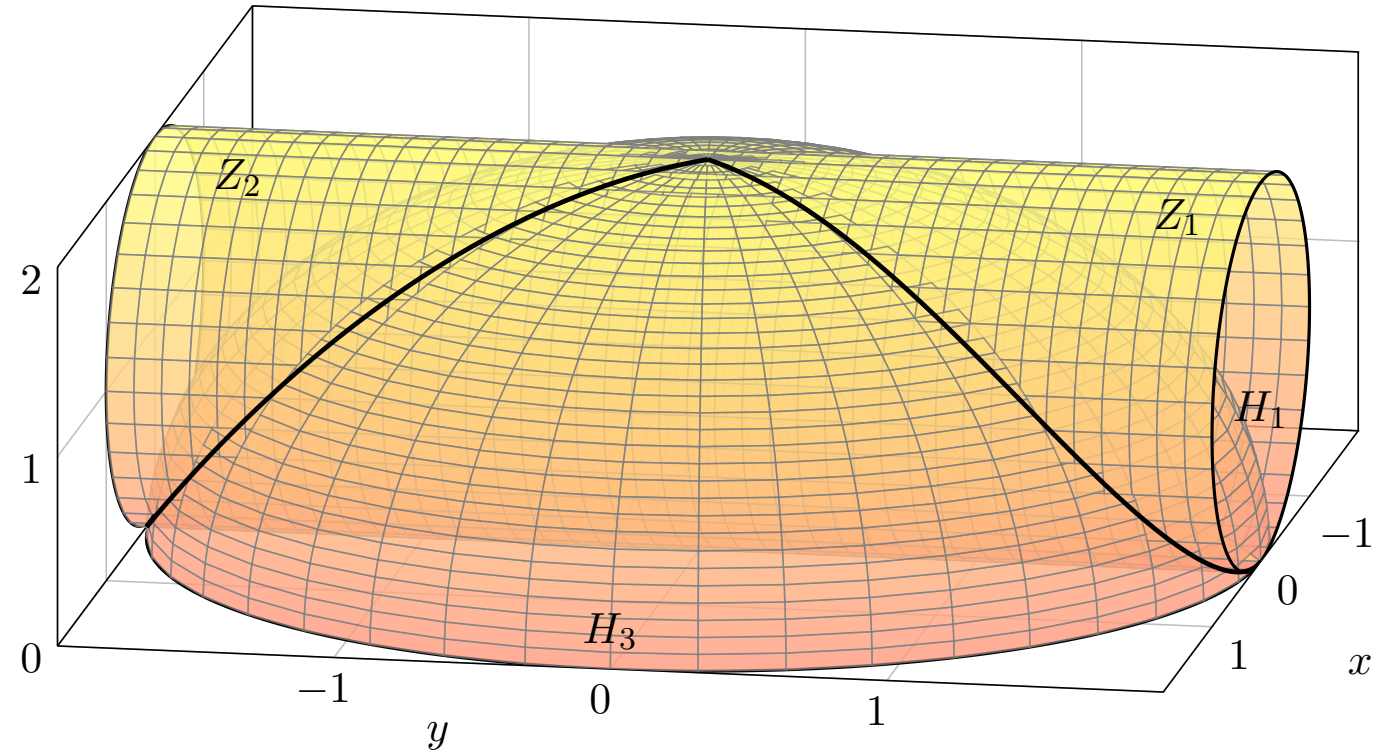
$$\begin{aligned}
\Phi(\varphi, z) &= (\cos \varphi, \sin \varphi, z)/\sqrt{1 + z^2} \\
\partial_\varphi \Phi(\varphi, z) &= (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)/\sqrt{1 + z^2} \\
\partial_z \Phi(\varphi, z) &= (-z \cos \varphi, -z \sin \varphi, 1)/(1 + z^2)^{3/2}
\end{aligned}$$

(2) Die erste Fundamentalform beschreibt die geometrische Verzerrung:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_\varphi \Phi \cdot \partial_\varphi \Phi & \partial_z \Phi \cdot \partial_\varphi \Phi \\ \partial_\varphi \Phi \cdot \partial_z \Phi & \partial_z \Phi \cdot \partial_z \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/(1 + z^2) & 0 \\ 0 & 1/(1 + z^2) \end{pmatrix}$$

Daher ist Φ winkeltreu, aber nicht flächentreu (auch nicht längentreu). Nahe des Äquators ist Φ nahezu isometrisch, also auch flächentreu. Nahe den Polen wird die Flächenverzerrung dramatisch (siehe Skizze).

Das Viviani–Fenster



Die vorigen Aufgaben üben die Schritte von Un/Gleichungen zum Bild und zur Parametrisierung. In dieser Aufgabe beginnen wir mit dem Bild. Sie ist eine Variante einer architektonisch-geometrischen Fragestellung, die Vincenzo Viviani, ein Schüler Galileos, 1692 vorschlug und löste.

Das Viviani–Fenster

Aufgabe: (1) Beschreiben Sie gemäß obiger Skizze den Zylinder Z und die Hemisphäre H in $\mathbb{R}^3$ durch geeignete Un/Gleichungen.

(2) Parametrisieren Sie die Schnittkurve $\Gamma = Z \cap H$ und berechnen Sie ihre Länge $\mathrm{vol}_1(\Gamma)$ soweit möglich (bis zu einem elliptischen Integral).

(3) Die Kurve Γ zerlegt die Fläche Z: Parametrisieren Sie jedes der drei Flächenstücke Z_1, Z_2, Z_3 und berechnen Sie den Flächeninhalt $\mathrm{vol}_2(Z_i)$. Erstes Wunder: Der Flächeninhalt $\mathrm{vol}_2(Z_3)$ ist rational, sogar ganzzahlig.

(4) Berechnen Sie ebenso H_1 (in x–z–Polarkoordinaten) und damit H_3. Zweites Wunder: Es gilt $\mathrm{vol}_2(Z_1) = \mathrm{vol}_2(H_1)$ und $\mathrm{vol}_2(Z_3) = 2\,\mathrm{vol}_2(H_3)$.

(5) Das zweite Wunder folgt geometrisch aus der Lambert–Projektion.
☺ Geometrisches Verständnis überprüft bzw. ersetzt die Rechnung.

Lösung: (1) Der vorgelegten Skizze entnehmen wir:

$$Z = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -2 \le y \le 2,\ x^2 + (z-1)^2 = 1 \right\}$$
$$H = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \ge 0 \right\}$$

(2) Wir wählen $z = 1 + \cos(t)$ und $x = \sin(t)$ auf Z. Auf H erhalten wir:

$$y^2 = 4 - x^2 - z^2 = 2 - 2\cos(t) = 4\sin(t/2)^2$$

Das Viviani–Fenster

Der Weg $\gamma\colon[0,4\pi]\to\mathbb{R}^3$ mit $\gamma(t)=\big(\sin(t),2\sin(t/2),1+\cos(t)\big)$ durchläuft $\Gamma=Z\cap H$ einmal komplett, tatsächlich beide Schleifen.

$$\begin{aligned}\gamma'(t)&=\big(\cos(t),\cos(t/2),-\sin(t)\big)\\ \big|\gamma'(t)\big|^2&=\cos(t)^2+\cos(t/2)^2+\sin(t)^2 &&=1+\cos(t/2)^2\\ \mathrm{vol}_1(\Gamma)&=\int_{t=0}^{4\pi}\sqrt{1+\cos(t/2)^2}\,\mathrm{d}t &&\approx 15.2808\end{aligned}$$

Dieses elliptische Integral können wir leider nur numerisch auswerten. Plausibilitätscheck: Schraubenlinie (kürzester Weg) $4\sqrt{\pi^2+2^2}\approx 14.897$.

(3) Wir berechnen den Flächeninhalt des rechten Flächenstücks:

$$Z_1=\big\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\;\big|\;x^2+(z-1)^2=1,\;\sqrt{4-x^2-z^2}\le y\le 2\,\big\}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_2(Z_1)&=\int_{t=0}^{2\pi}2-2\sin(t/2)\,\mathrm{d}t=\Big[2t+4\cos(t/2)\Big]_{t=0}^{2\pi}\\ &=4\pi-4-4=4\pi-8\approx 4.566\quad\text{(plausibel nach Skizze)}\end{aligned}$$

Ebenso erhalten wir für das linke und mittlere Flächenstück Z_2 und Z_3 die Flächeninhalte $\mathrm{vol}_2(Z_2)=4(\pi-2)$ und $\mathrm{vol}_2(Z_3)=16$. Rational!

Das Viviani–Fenster

(4) Wir berechnen den Flächeninhalt des rechten Flächenstücks:

$$H_1=\big\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\;\big|\;x^2+(z-1)^2\le 1,\;x^2+y^2+z^2=4\,\big\}$$

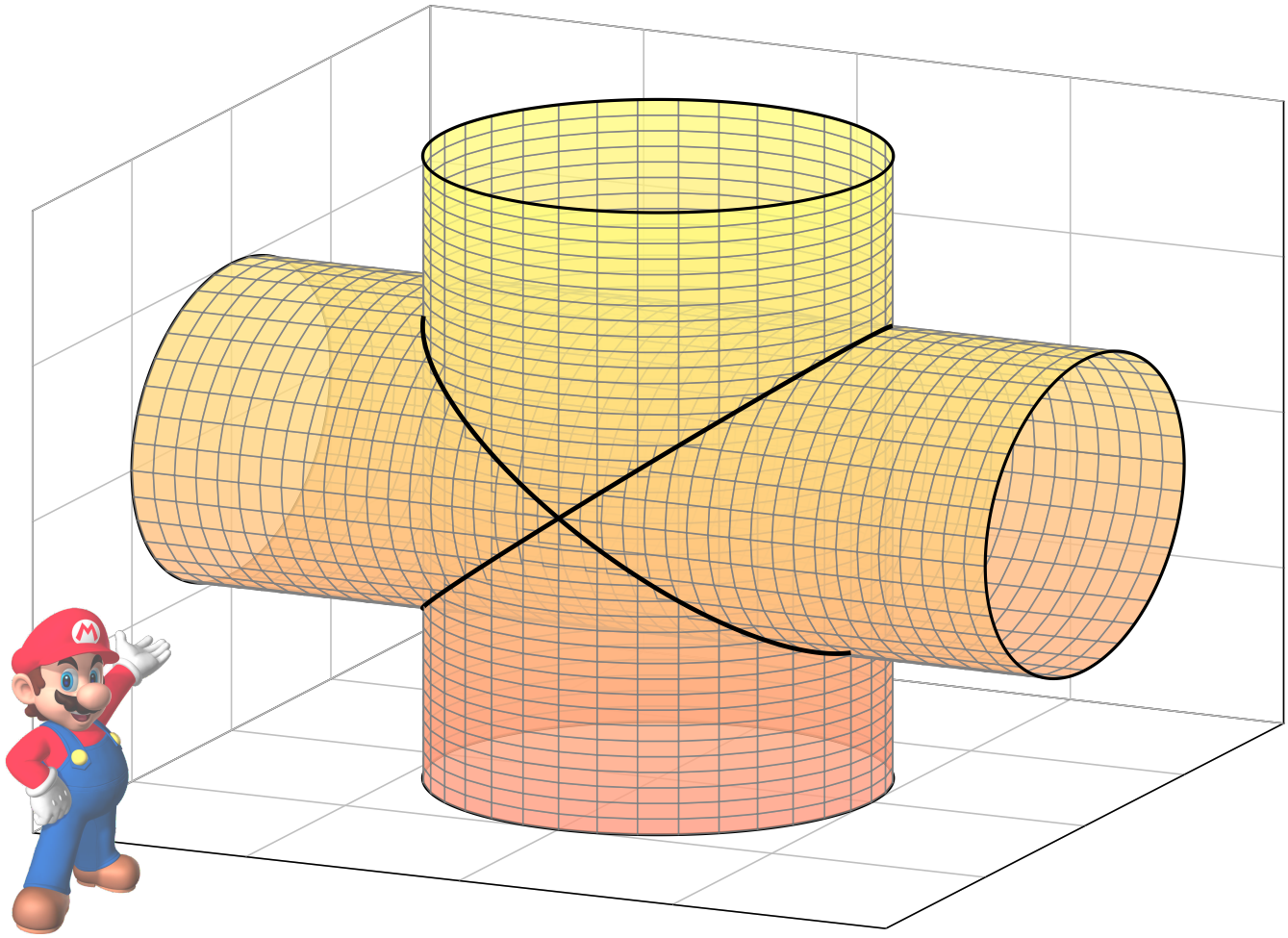
$$\Phi\begin{pmatrix}\varphi\\ \rho\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\rho\cos\varphi\\ \sqrt{4-\rho^2}\\ \rho\sin\varphi\end{pmatrix}\quad\text{auf}\quad D=\left\{\begin{pmatrix}\varphi\\ \rho\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;\begin{matrix}0\le\varphi\le\pi\\ 0\le\rho\le 2\sin\varphi\end{matrix}\right\}$$

$$\partial_\varphi\Phi\times\partial_\rho\Phi=\begin{pmatrix}-\rho\sin\varphi\\ 0\\ +\rho\cos\varphi\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ -\rho/\sqrt{4-\rho^2}\\ \sin\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\rho^2/\sqrt{4-\rho^2}\,\cos\varphi\\ \rho\\ \rho^2/\sqrt{4-\rho^2}\,\sin\varphi\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_2(H_1)&=\int_D\big|\partial_\varphi\Phi\times\partial_\rho\Phi\big|\,\mathrm{d}(\varphi,\rho)=\int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{\rho=0}^{2\sin\varphi}\frac{2\rho}{\sqrt{4-\rho^2}}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\\ &=\int_{\varphi=0}^{\pi}\Big[-2\sqrt{4-\rho^2}\Big]_{\rho=0}^{2\sin\varphi}\mathrm{d}\varphi=\int_{\varphi=0}^{\pi}4-4|\cos\varphi|\,\mathrm{d}\varphi\\ &=8\int_{\varphi=0}^{\pi/2}1-\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi=8\Big[\varphi-\sin\varphi\Big]_{\varphi=0}^{\pi/2}=4\pi-8\approx 4.566\end{aligned}$$

Aus $\mathrm{vol}_2(H)=8\pi=2\,\mathrm{vol}_2(H_1)+2\,\mathrm{vol}_2(H_3)$ folgt $\mathrm{vol}_2(H_3)=8$. Rational!

Durchdringung zweier Zylinder



Durchdringung zweier Zylinder

Aufgabe: (1) Skizzieren Sie die beiden Zylinder

$$Z_1 = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le 1,\ -2 \le z \le 2 \,\},$$
$$Z_2 = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \le 1,\ -2 \le y \le 2 \,\}.$$

(2) Berechnen Sie das Volumen der Schnittmenge $K = Z_1 \cap Z_2$.
Beschreiben Sie K hierzu möglichst explizit als Normalbereich.

(3) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Randfläche ∂K.
Parametrisieren Sie ∂K hierzu stückweise als Graph.

(4) In welchen Punkten ist die betrachtete Randfläche ∂K nicht glatt?
Geometrisch: Wo erlaubt ∂K keine eindeutige Tangentialebene?

(5) Welche Form haben die beiden Schnittkurven $\partial Z_1 \cap \partial Z_2$?
Finden Sie implizite Gleichungen bzw. explizite Parametrisierungen.

☺ Dieser Durchdringungskörper ist nicht leicht zu visualisieren.
Mit unseren Methoden gelingt die Rechnung dennoch leicht!

Das ist ein halbwegs realistisches Beispiel eines Werkstücks:
nicht ganz trivial aber noch gut mit Stift und Papier zu berechnen.

Durchdringung zweier Zylinder

Lösung: (1) Die Skizze gibt einen Überblick, was zu beachten ist.
(2) Für K müssen wir nur $x^2 + y^2 \leq 1$ und $x^2 + z^2 \leq 1$ erfüllen, also:

$$-1 \leq x \leq 1, \quad -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, \quad -\sqrt{1-x^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2}$$

Hieraus erhalten wir das Volumen ganz leicht als iteriertes Integral:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_3(K) &= \int_K 1 \,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_{x=-1}^{1} \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{z=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{x=-1}^{1} \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2\sqrt{1-x^2} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_{x=-1}^{1} 4(1-x^2) \,\mathrm{d}x \\
&= \left[4x - \frac{4}{3}x^3\right]_{x=-1}^{1} = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \qquad \text{(rational, ohne } \pi\text{)}
\end{aligned}$$

Plausibilitätscheck: Das ist größer als das Kugelvolumen $\frac{4}{3}\pi r^3 \approx 4.189$.
(3) Wir parametrisieren das obere der vier Flächenstücke als Graph:

$$\Phi : \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 1 \right\} = D \to S \subseteq \mathbb{R}^3, \quad \Phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1-x^2} \end{pmatrix}$$

Durchdringung zweier Zylinder

Zur Flächenparametrisierung Φ berechnen wir den Normalenvektor:

$$\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -x/\sqrt{1-x^2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/\sqrt{1-x^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Seine Länge (euklidische Norm) ist das Flächenelement:

$$\left|\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi\right|^2 = \frac{x^2}{1-x^2} + 0^2 + 1^2 = \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{1-x^2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

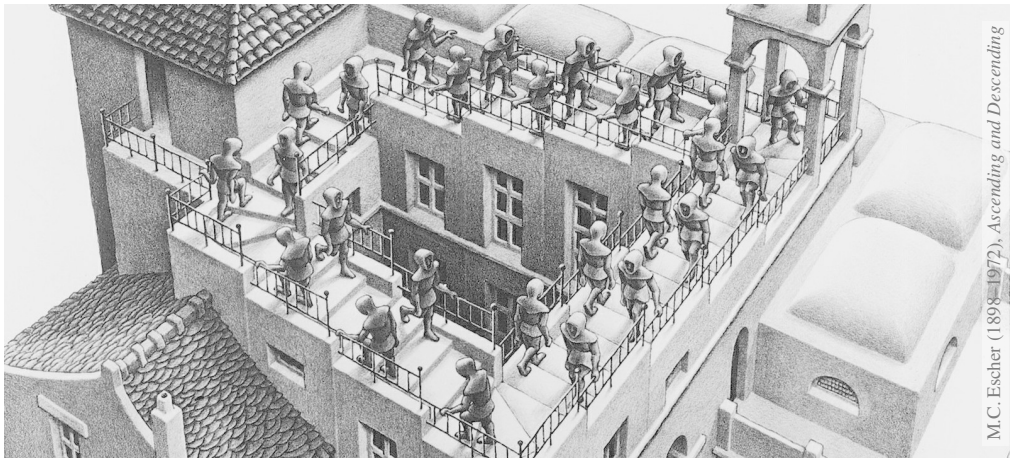
Den Flächeninhalt von S erhalten wir hieraus durch Integration:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_2(S) &= \int_D \left|\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi\right| \mathrm{d}(x,y) = \int_{x=-1}^{1} \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{x=-1}^{1} 2 \,\mathrm{d}x = 4 \qquad \text{Am Ende geht's überraschend leicht!}
\end{aligned}$$

Dank Symmetrie erhalten wir schließlich $\mathrm{vol}_2(\partial K) = 4\,\mathrm{vol}_2(S) = 16$.
Plausibilitätscheck: Das ist größer als die Kugelfläche $4\pi r^2 \approx 12.567$.

Kapitel H

Erste Anwendungen der Integralsätze



Alles sollte so einfach wie möglich gemacht werden
— aber nicht noch einfacher.

Albert Einstein (1879–1955)

Inhalt dieses Kapitels H

1 Partielle Differentialgleichungen der Physik
- Eulers Kontinuitätsgleichung
- Fouriers Wärmeleitungsgleichung
- Newtons Gravitationsgesetz
- Maxwells Elektrodynamik

2 Vektorfelder und Potentiale
- Konservative Vektorfelder
- Rotationsfreie Vektorfelder
- Einfach zusammenhängende Gebiete
- Radialsymmetrische Felder und Potentiale

3 Fazit: Erste Anwendungen der Integralsätze
- Zusammenfassung und Verständnisfragen
- Weitere Aufgaben und Anwendungen
- Notwendige und hinreichende Kriterien
- Gegenläufige Wirbelfelder, Quadrupolis

Motivation und Zielsetzung

Nahezu jedes naturwissenschaftlich-technische Gebiet nutzt Integrale und Integralsätze. Im ersten Teil dieses Kapitels wenden wir sie zur Illustration auf vier zentrale und physikalisch relevante Probleme an:

1. Eulers Kontinuitätsgleichung:
   Wie verhalten sich strömende Flüssigkeiten?
2. Fouriers Wärmeleitungsgleichung:
   Wie berechnet man den Wärmefluss in einem Körper?
3. Newtons Gravitationsgesetz:
   Wie berechnet man das Gravitationsfeld einer Masse?
4. Maxwells Elektrodynamik:
   Wie breiten sich elektromagnetische Wellen aus?

Diese Problemstellungen sind auch mathematisch von zentraler Bedeutung, denn sie führen uns zu den drei Grundtypen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Diese werden wir mit weiteren Werkzeugen in späteren Kapiteln immer besser behandeln können. Mit unseren bisherigen Techniken wollen dies jetzt vorbereiten.

Motivation und Zielsetzung

Im zweiten Teil dieses Kapitels greifen wir das Potentialproblem auf, das Sie bereits aus der HM2 kennen: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Unter welchen Bedingungen erlaubt ein Vektorfeld $f : \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^n$ ein Potential?

Wir suchen also zu f eine Stammfunktion $F : U \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} F = f$. Wenn dies möglich ist, so nennen wir f exakt (oder ein Gradientenfeld).

Nicht jedes Vektorfeld f kommt solcherart von einem Potential.
Wir fragen daher: Wie können wir feststellen, ob f exakt ist?
Und wenn ja, wie können wir ein Potential berechnen?

Die Antwort hängt, wie Sie aus der HM2 wissen, zunächst vom Vektorfeld f ab: die lokale Integrabilitätsbedingung $\operatorname{rot}(f) = 0$ ist notwendig. Überraschenderweise ist sie noch nicht hinreichend: Die Antwort hängt zudem von der globalen Gestalt des Gebiets $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ab!

Mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes können wir dieses Problem nun vollständig lösen für konvexe Gebiete $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und allgemeiner für alle einfach zusammenhängenden Gebiete. Potentiale nützen uns überall, etwa in Kapitel M zur Lösung von exakten Differentialgleichungen.

Differentialoperatoren und Integralsätze

Wir nutzen hier zur Übung die dekorative Schreibweise der Physik.
Als Abkürzung nützlich ist der **Nabla-Operator** $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$.

Gradient: $\operatorname{grad} g = \nabla g \quad = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}, \frac{\partial g}{\partial x_3} \right)$

Rotation: $\operatorname{rot} \vec{f} = \nabla \times \vec{f} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)$

Divergenz: $\operatorname{div} \vec{f} = \nabla \cdot \vec{f} \quad = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$

Laplace: $\Delta g = \nabla^2 g \quad = \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_3^2}$

Unsere **Integralsätze** schreiben wir dann in folgender Form:

HDI: $$\int_\Gamma (\nabla g) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = g(\vec{p}_{\text{Ziel}}) - g(\vec{p}_{\text{Start}})$$

Stokes: $$\iint_S (\nabla \times \vec{f}) \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}S = \oint_{\partial S} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

Gauß: $$\iiint_V \nabla \cdot \vec{f} \, \mathrm{d}V = \oiint_{\partial V} \vec{f} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}S$$

Differentialoperatoren und Integralsätze

Wer seriös arbeitet, gibt immer auch Definitions- und Wertebereich an: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Gebiet, also eine offene zusammenhängende Menge. Wir betrachten hier die Ortsvariable $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ und ein stetig diff'bares Skalarfeld $g : \Omega \to \mathbb{R}$ bzw. Vektorfeld $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3) : \Omega \to \mathbb{R}^3$. Das heißt, jedem Punkt $\vec{x} \in \Omega$ wird eine Zahl $g(\vec{x}) \in \mathbb{R}$ bzw. ein Vektor $\vec{f}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^3$ zugeordnet. Die oben definierten Ableitungen sind demnach Skalarfelder $\nabla \cdot \vec{f}$, $\Delta g : \Omega \to \mathbb{R}$ bzw. Vektorfelder $\nabla \times \vec{f}$, $\nabla g : \Omega \to \mathbb{R}^3$.

Für den HDI sei $\Gamma \subseteq \Omega$ eine stückweise glatte Kurve vom Startpunkt $\vec{p} \in \Omega$ zum Zielpunkt $\vec{q} \in \Omega$ mit vektoriellem Wegelement $\mathrm{d}\vec{s} = \vec{t} \, \mathrm{d}s$, also Einheitstangente $\vec{t} \in \mathbb{R}^3$ und skalarem Wegelement $\mathrm{d}s$. Für Stokes sei $S \subseteq \Omega$ eine stückweise glatte Fläche mit vektoriellem Flächenelement $\mathrm{d}\vec{S} = \vec{n} \, \mathrm{d}S$, also Einheitsnormale $\vec{n}$ und skalarem Flächenelement $\mathrm{d}S$. Für Gauß schließlich sei $V \subseteq \Omega$ ein Kompaktum mit stückweise glatter Randfläche ∂V und dem üblichen Volumenelement $\mathrm{d}V = \mathrm{d}(x_1, x_2, x_3)$.

Dekoration als Gedächtnisstütze: Mehrfache Integralsymbole erinnern an die Dimension, der Kringel an geschlossene Kurven bzw. Flächen. Unabhängig von der Schreibweise ist das Integral dasselbe wie zuvor.

Differentialoperatoren und Integralsätze

Wir nutzen in diesem Abschnitt §H1 diese dekorative Schreibweise, da sie insbesondere in der Physik gerne verwendet wird. In der Literatur finden Sie beide Notationen, daher sollten Sie beide problemlos lesen und verstehen — und gegebenenfalls ineinander übersetzen können.

Die eindimensionale **Differential- und Integralrechnung** führt wie gesehen direkt zur zwei- und dreidimensionalen **Vektoranalysis**. Die hier betonte Dimension 3 ist vor allem physikalisch motiviert; analoge Sätze und Rechentechniken gelten in jeder Dimension.

Integralsätze erlauben und erklären die nötigen Umrechnungen. In den vorigen Kapiteln haben wir die hierzu nötigen Kurven-, Flächen- und Volumenintegrale und hierbei geltenden Integralsätze diskutiert. In diesem Kapitel stelle ich einige klassische Anwendungen vor.

Nahezu alle Gesetzmäßigkeiten in Naturwissenschaft und Technik formuliert man üblicherweise als Integral- und Differentialgleichungen. Die in obigen Formeln zusammengefassten Rechentechniken sind daher Grundwerkzeuge für Ingenieur:innen und Naturwissenschaftler:innen.

Differentialoperatoren und Integralsätze

Unsere drei Differentialoperatoren auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ bilden folgende Sequenz:

$$\boxed{0 \longrightarrow C^\infty(\Omega,\mathbb{R}) \xrightarrow{\text{grad}} C^\infty(\Omega,\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\text{rot}} C^\infty(\Omega,\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\text{div}} C^\infty(\Omega,\mathbb{R}) \longrightarrow 0}$$

Folgende Identitäten nützen bei Potentialproblemen und Umformungen:

$\operatorname{rot}\operatorname{grad} g = 0$	d.h.	$\nabla \times (\nabla g) = 0$
$\operatorname{div}\operatorname{rot} \vec{f} = 0$	d.h.	$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{f}) = 0$
$\operatorname{div}\operatorname{grad} g = \Delta g$	d.h.	$\nabla \cdot (\nabla g) = \Delta g$
$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \vec{f} = \operatorname{grad}\operatorname{div} \vec{f} - \Delta \vec{f}$	d.h.	$\nabla \times (\nabla \times \vec{f}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{f}) - \nabla^2 \vec{f}$

Aufgabe: Rechnen Sie dies nach für zweimal stetig diff'bare Felder. Warum und wo genau benötigen Sie hier den Satz von Schwarz (D4A)?

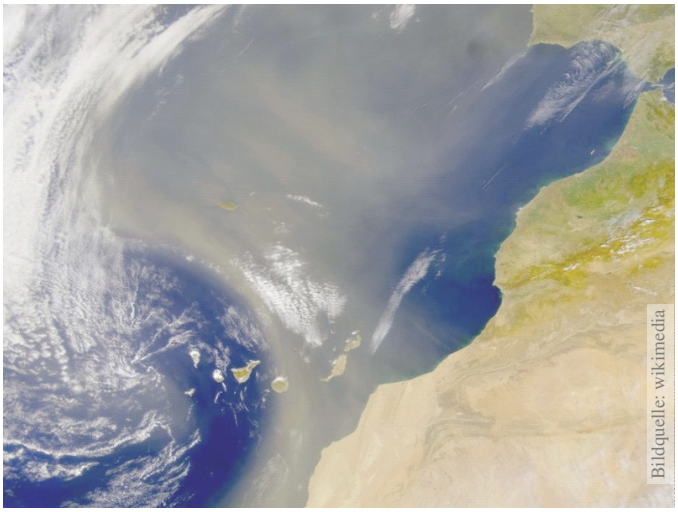
Lösung: Wir setzen die Definition ein und rechnen es sorgsam aus:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} g = (\,\partial_2\partial_3 g - \partial_3\partial_2 g,\ \partial_3\partial_1 g - \partial_1\partial_3 g,\ \partial_1\partial_2 g - \partial_2\partial_1 g\,)$$

Wenn $g : \Omega \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar ist, so können wir den Satz von Schwarz anwenden: Es gilt $\partial_i\partial_j g = \partial_j\partial_i g$, also $\operatorname{rot}\operatorname{grad} g = 0$. Die anderen Gleichungen rechnet man ebenso geduldig nach. Übung!

Die Kontinuitätsgleichung der Strömungslehre

Ziel: Wie verhalten sich Strömungen? Welche Gleichungen gelten hier?



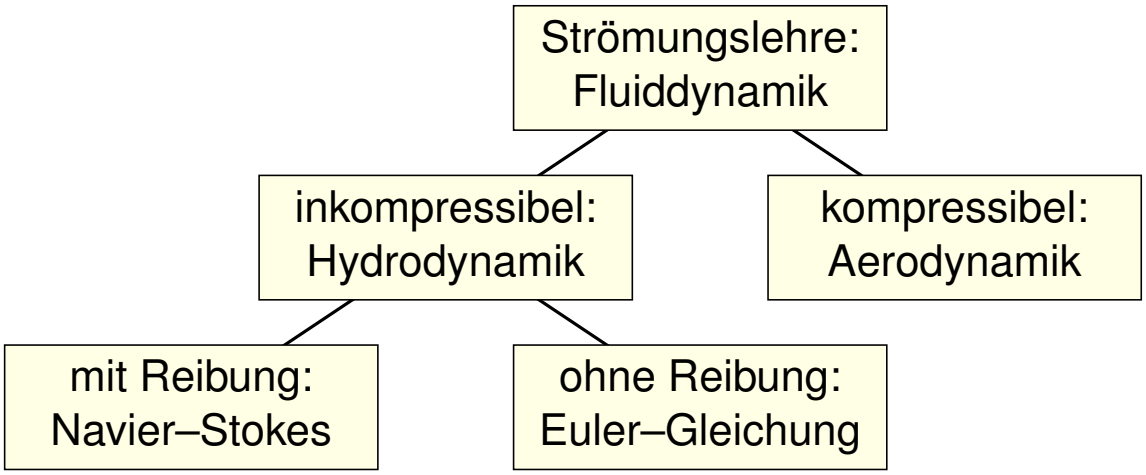
Luft- und Wasserströmung um die Kanarischen Inseln

(0) Wie beschreiben Sie eine Strömung in einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ über ein Zeitintervall $I = [t_0, t_1]$? Geschwindigkeit $\vec{v} : I \times \Omega \to \mathbb{R}^3 : (t, \vec{x}) \mapsto \vec{v}(t, \vec{x})$ und Massendichte $\varrho : I \times \Omega \to \mathbb{R} : (t, \vec{x}) \mapsto \varrho(t, \vec{x})$ und evtl. weitere Daten.

Die Massenstromdichte $\varrho\vec{v} : I \times \Omega \to \mathbb{R}^3$ beschreibt den Massenfluss. Im Strömungsbereich Ω werde Masse weder erzeugt noch vernichtet.

Die Kontinuitätsgleichung der Strömungslehre

Die Strömungsmechanik untersucht die Bewegung von fluiden Medien. Sie ist grundlegend für die Meteorologie, beim Bau von Flugzeugen, Schiffen, Autos, ... bis hin zu Verbrennungsmotoren: Alles fließt!



Ein Fluid heißt inkompressibel, wenn seine Dichte nicht vom Druck abhängt. Zum Beispiel ist dies bei Wasser eine gute Näherung für die meisten Anwendungen. Noch einfacher ist zunächst, überall konstante Dichte anzunehmen. Anders als Flüssigkeiten sind Gase leicht komprimierbar, ihre Dichte ist etwa 1000mal geringer, ihre thermische Ausdehnung größer. Für ihre Bewegung aber gelten weitgehend die gleichen Gesetze, zumindest bei nicht allzu großen Drücken und Geschwindigkeiten. Wir wenden uns hier der allgemein gültigen Kontinuitätsgleichung zu.

Die Kontinuitätsgleichung der Strömungslehre

Aufgabe: Welche Beziehung folgt aus der Massenerhaltung?

(1) Sei $K \Subset \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ kompakt, etwa ein Würfel. Formulieren Sie die Massenbilanz für K in Worten und als Volumen-/Flussintegrale.

(2) Formen Sie dies um zu einem einzigen Volumenintegral.

(3) Folgern Sie hieraus die zugehörige Differentialgleichung.

(4) Was folgt für inkompressible Strömungen, also für $\varrho = \mathrm{const}$?

Lösung: (1) Die über die Randfläche $S = \partial K$ ausströmende Masse geht der Gesamtmasse in K verloren. Als Integralgleichung formuliert:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_K \varrho \,\mathrm{d}K + \oiint_{S=\partial K} (\varrho \vec{v} \cdot \vec{n}) \,\mathrm{d}S = 0}$$

(2) Wir dürfen die Ableitung unters Integral ziehen dank Kompaktheit des Integrationsbereichs K und Stetigkeit der Ableitung $\partial\varrho/\partial t$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_K \varrho \,\mathrm{d}K \overset{\text{Kpkt}}{\underset{\text{D3C}}{=}} \iiint_K \frac{\partial \varrho}{\partial t} \,\mathrm{d}K$$

Die Kontinuitätsgleichung der Strömungslehre

Wir wollen auch das Flussintegral in diese Form bringen und dann beides zusammenfassen. Dies gelingt mit dem Satz von Gauß (G3G):

$$\oiint_{S=\partial K} (\varrho \vec{v} \cdot \vec{n}) \,\mathrm{d}S \overset{\text{Gauß}}{\underset{\text{G3G}}{=}} \iiint_K \operatorname{div}(\varrho \vec{v}) \,\mathrm{d}K$$

Dank Linearität des Integrals erhalten wir ein einziges Volumenintegral:

$$\iiint_K \left[\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \vec{v}) \right] \mathrm{d}K = 0$$

(3) Diese lokale Massenbilanz gilt für jedes Kompaktum $K \Subset \Omega$. Das gilt genau dann, wenn der (stetige!) Integrand verschwindet:

$$\boxed{\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \vec{v}) = 0}$$

Diese **Kontinuitätsgleichung** ist grundlegend für die Strömungslehre.

(4) Für inkompressible Strömungen gilt $\varrho = \mathrm{const}$ und somit $\operatorname{div} \vec{v} = 0$. Anschaulich: In jedes Volumen K fließt ebensoviel hinein wie heraus. Hierzu genügt allgemein bereits $\partial_t \varrho + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \varrho = 0$. Sehen Sie warum?

Von Integral- zu Differentialgleichungen

Wir haben oben aus einer Integralgleichung (der Massenerhaltung) eine Differentialgleichung abgeleitet (die Kontinuitätsgleichung). Dahinter steckt folgendes einfache und sehr nützliche Prinzip:

Lemma H1A: Verschwindungslemma für Skalarfelder

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Gilt $\int_K f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ für jeden (kleinen) kompakten Würfel $K \Subset \Omega$, so folgt $f = 0$.

Aufgabe: Begründen Sie dies mit Hilfe der Stetigkeit von f.

Lösung: Wir wollen $f = 0$ zeigen.
Nehmen wir im Gegenteil an, es gälte $f \neq 0$.
Das bedeutet, es existiert ein Punkt $a \in \Omega$ mit $f(a) \neq 0$.

Wir können $f(a) > 0$ annehmen; der Fall $f(a) < 0$ ist analog.

Sei also $f(a) = 2b > 0$. Da f stetig ist, existiert um a ein kleiner Würfel $K \Subset \Omega$ mit Kantenlänge $\varepsilon > 0$, sodass $f(x) \geq b$ für alle $x \in K$ gilt.
Hieraus folgt die Abschätzung $\int_K f(x)\,\mathrm{d}x \geq b\,\mathrm{vol}_n(K) = b\,\varepsilon^n > 0$.

☺ Wenn also $\int_K f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ für alle Würfel $K \Subset \Omega$ gilt, so folgt $f = 0$.

Von Integral- zu Differentialgleichungen

Dieses Prinzip gilt ebenso für Flussintegrale von Vektorfeldern:

Lemma H1B: Verschwindungslemma für Vektorfelder

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ stetig. Gilt $\int_S \vec{f}(x) \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = 0$ für jedes (kleine) achsenparallele Quadrat $S \Subset \Omega$, so folgt $\vec{f} = 0$.

Aufgabe: Begründen Sie dies mit Hilfe der Stetigkeit von $\vec{f}$.

Lösung: Wir wollen $\vec{f} = 0$ zeigen.
Nehmen wir im Gegenteil an, es gälte $\vec{f} \neq 0$.
Das heißt, es existiert ein Punkt $a \in \Omega$ mit $f_i(a) \neq 0$ für ein $i \in \{1, 2, 3\}$.

Wir können $i = 3$ annehmen; die Fälle $i = 1, 2$ sind analog.
Wir können $f_3(a) > 0$ annehmen; der Fall $f_3(a) < 0$ ist analog.
Sei also $f_3(a) = 2b > 0$. Da $\vec{f}$ und somit $f_1, f_2, f_3 : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig sind, existiert um a ein kleines Quadrat $S \Subset \Omega$ parallel zur (x_1, x_2)–Ebene mit Kantenlänge $\varepsilon > 0$, sodass hierauf $f_3(x) \geq b$ für alle $x \in S$ gilt.
Hieraus folgt die Abschätzung $\int_S \vec{f}(x) \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S \geq b\,\mathrm{vol}_2(S) = b\,\varepsilon^2 > 0$.

☺ Wenn $\int_S \vec{f}(x) \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = 0$ für alle Quadrate $S \Subset \Omega$ gilt, so folgt $\vec{f} = 0$.

Die Navier–Stokes–Gleichungen für inkompressible Fluide

Für **inkompressible Strömungen** gilt $\varrho = \mathrm{const}$ und somit $\operatorname{div} \vec{v} = 0$.
Es handelt sich um eine grundlegende **Erhaltungsgleichung**.
Diese beschreibt allerdings die Bewegung keineswegs vollständig.
Dazu werden weitere Erhaltungsgrößen wie Impuls / Energie benötigt.

Die Impulserhaltung führt zu den **Navier–Stokes–Gleichungen**:
Sei $\vec{\gamma}(t)$ die Bahn eines Teilchens der Strömung, d.h. $\dot{\vec{\gamma}}(t) = \vec{v}(t, \vec{\gamma}(t))$.
Newtons Gesetz „Kraft = Masse $\times$ Beschleunigung“ besagt hier:

$$\boxed{\varrho\, \ddot{\vec{\gamma}}(t) = \vec{F}\big(t, \vec{\gamma}(t)\big)}$$

Einsetzen und ausrechnen der linken Seite nach Kettenregel:

$$\frac{\mathrm{d}^2\gamma_i(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\dot{\gamma}_i(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_i(t, \vec{\gamma}(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial \gamma_k}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} v_k$$

Dies heißt **substantielle Ableitung** oder auch **konvektive Ableitung**.

Auf der rechten Seite setzt sich die Kraft $\vec{F}$ zusammen aus der Reibung, dem inneren Druck und äußeren Kräften, zum Beispiel der Schwerkraft.

Die Navier–Stokes–Gleichungen für inkompressible Fluide

Massenerhaltung: $$\operatorname{div} \vec{v} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0$$

Impulserhaltung: $$\underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial t}}_{\text{Änderung}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}}_{\text{Konvektion}} = \underbrace{\nu \Delta v_i}_{\text{Diffusion}} - \underbrace{\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x_i}}_{\text{interne Kraft}} + \underbrace{f_i}_{\text{extern}}$$

Diese $1 + n$ Gleichungen beschreiben die Strömungsgeschwindigkeit $\vec{v} : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ einer Flüssigkeit zur Zeit $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ am Ort $\vec{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ in der Ebene (n=2) oder im Raum (n=3), mit konstanter Massendichte $\varrho \in \mathbb{R}$ und Viskosität $\nu \in \mathbb{R}$, Druck $p : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ und äußerer Kraft $\vec{f} : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$. Sie sind zweiter Ordnung und nicht-linear in $\vec{v}$. Die Impulserhaltung ist Newtons Bewegungsgesetz: Links steht die Beschleunigung, als konvektive Ableitung. H111
Rechts stehen die Kräfte durch Reibung ν, Druck p und $\vec{f}$. Gegeben sind hierzu die äußere Kraft $\vec{f}$ sowie die Anfangsgeschwindigkeiten $\vec{v}(0, \vec{x})$ für $\vec{x} \in \Omega$. Gesucht sind die Funktionen $\vec{v}$ und p.
Im zweidimensionalen Falle ist die Lösbarkeit bewiesen, im dreidimensionalen Falle noch nicht!
Die Navier–Stokes–Gleichungen illustrieren die Schwierigkeit partieller Differentialgleichungen: Über dreidimensionale Lösungen weiß man allgemein wenig, z.B. sind Existenz und Regularität ungeklärt – trotz größter Anstrengungen. Das Clay Mathematics Institute hat dies im Jahr 2000 als eines von sieben Millenium-Problemen ausgelobt, mit einem Preisgeld von 1 Million Dollar.

Fouriers Wärmeleitungsgleichung

Ziel: Wie berechnen wir den Wärmefluss in einem Körper?

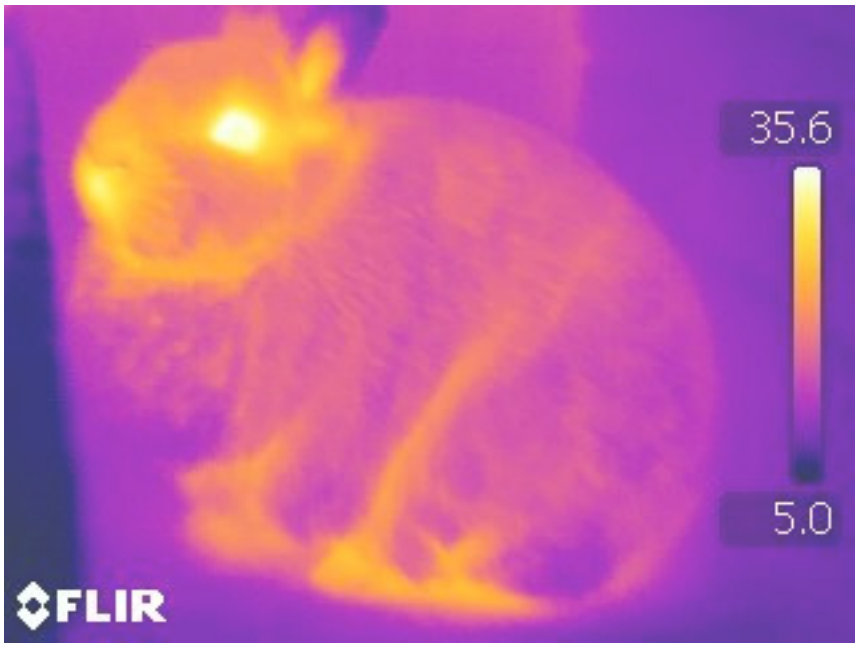


Bild- und Wärmequelle: Momo

Wärmebilanz für $K =$ Kaninchen bei $t \in$ Winter

Wir betrachten ein Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ und ein Zeitintervall $I = [t_0, t_1]$ und suchen eine Beziehung zwischen Wärmeleistungsdichte $q : I \times \Omega \to \mathbb{R}$, Wärmedichte $u : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ und Wärmefluss $\vec{f} : I \times \Omega \to \mathbb{R}^3$.

Fouriers Wärmeleitungsgleichung

Aufgabe: (1) Sei $K \Subset \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ kompakt, etwa ein Würfel. Formulieren Sie die Wärmebilanz für K in Worten und als Volumen-/Flussintegrale.

(2) Formen Sie dies um zu einem einzigen Volumenintegral.

(3) Folgern Sie hieraus die zugehörige Differentialgleichung.

(4) Vereinfachen Sie schließlich durch die Annahme $\vec{f} = -\kappa \nabla u$.

Lösung: (1) Für jedes Kompaktum $K \Subset \Omega$ gilt die Wärmebilanz:

Von den Wärmequellen in K zugeführte Energie
$=$ Zuwachs der in K enthaltenen Wärmeenergie
$+$ Wärmefluss über den Rand von K nach außen

Als Integralgleichung formuliert bedeutet dies:

$$\iiint_K q(t,x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_K u(t,x)\,\mathrm{d}x + \oiint_{S=\partial K} \vec{f}(t,x) \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S$$

Alle Funktionen seien so oft stetig differenzierbar wie in der folgenden Rechnung benötigt. Ich greife hier schon mal vor: q sei stetig, f einmal stetig diff'bar, u zweimal stetig diff'bar.

Fouriers Wärmeleitungsgleichung

(2) Mit Gauß (G3G) verwandeln wir Flussintegrale in Volumenintegrale:

$$\oiint_{S=\partial K} \vec{f}(t,x) \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S \overset{\text{Gauß}}{\underset{\text{G3G}}{=}} \iiint_K \nabla \cdot \vec{f}(t,x)\,\mathrm{d}x$$

Dürfen wir die Ableitung unters Integral ziehen? K kompakt, $\partial_t u$ stetig!

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_K u(t,x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Kpkt}}{\underset{\text{D3C}}{=}} \iiint_K \frac{\partial}{\partial t} u(t,x)\,\mathrm{d}x$$

Dank Linearität des Integrals erhalten wir ein einziges Volumenintegral:

$$\iiint_K \left[\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) + \nabla \cdot \vec{f}(t,x) - q(t,x)\right] \mathrm{d}x = 0.$$

(3) Diese lokale Wärmebilanz gilt für jedes Kompaktum $K \Subset \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$.
Das gilt genau dann, wenn der (stetige!) Integrand verschwindet (H1A):

$$\boxed{\partial_t u(t,x) + \nabla \cdot \vec{f}(t,x) = q(t,x)}$$

Diese Gleichung gilt überall dort, wo etwas entsteht (q), gespeichert wird (u) und fließt ($\vec{f}$). Die Wärmeleitungsgleichung heißt deshalb auch Diffusionsgleichung und tritt in vielfältigen Anwendungen auf. Wir werden sie am Ende des Semesters mit Fourier–Theorie lösen können. Spezialfall: Für $q = 0$ sowie $u = \varrho$ und $\vec{f} = \varrho\vec{v}$ erhalten wir erneut die Kontinuitätsgleichung.

Fouriers Wärmeleitungsgleichung

(4) Wärme fließt von warm nach kalt, genauer $\vec{f} = -\kappa\,\nabla u$. Einsetzen:

$$\partial_t u(t,x) + \nabla \cdot \big[-\kappa\,\nabla u(t,x)\big] = q(t,x)$$

Mit dem Laplace–Operator $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ schreiben wir dies kurz

$$\partial_t u - \kappa\,\Delta u = q \quad \text{mit} \quad \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2.$$

Physikalische Begründung: Wärme ist (vereinfacht) proportional zur Temperatur T, genauer $u = \varrho c T$ mit Dichte ϱ und Wärmekapazität c. Sie fließt proportional zur Temperaturdifferenz, also $\vec{f} = -\lambda\,\nabla T$ mit Wärmeleitfähigkeit λ. Demnach gilt $\vec{f} = -\kappa\,\nabla u$ mit $\kappa := \lambda/(\varrho c)$. S223
Zur Vereinfachung sei hier die Temperaturleitfähigkeit $\kappa(t,x)$ räumlich konstant und isotrop.

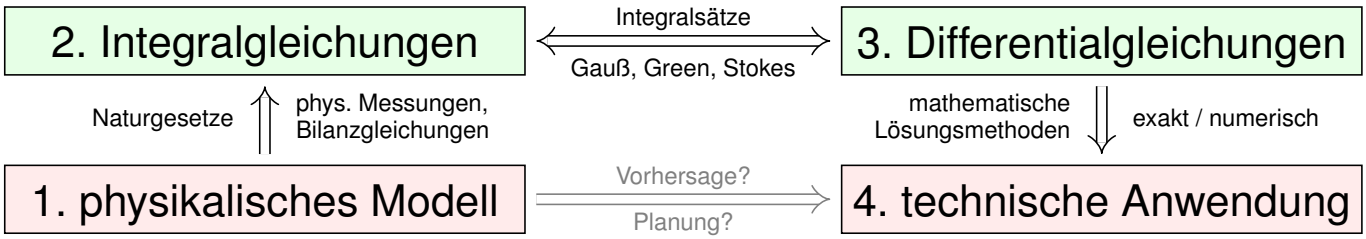
Wir erhalten so Fouriers berühmte **Wärmeleitungsgleichung** (1822):

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\,\Delta u = q \quad \text{mit} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}}$$

Dies ist eine lineare partielle Differentialgleichung in u (links) mit Inhomogenität q (rechts). Sie beschreibt, wie sich die Wärme in einem Körper ausbreitet. Joseph Fourier (1768–1830) hat sie in seiner Arbeit *Théorie analytique de la chaleur* 1822 erstmals eingehend untersucht und hierzu die nach ihm benannte Fourier–Theorie entwickelt, mit der wir uns dieses Semester beschäftigen. Gesucht ist u, gegeben sind Anfangswerte und q. Wie sehen die Lösungen aus? Im homogenen Fall ohne Quellen ($q = 0$) können wir die Fundamentallösung angeben! D516

Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

Was nützen uns solche Gleichungen? Welche Probleme lösen sie?
Typische Anwendungen verlaufen nach dem obigen Muster:

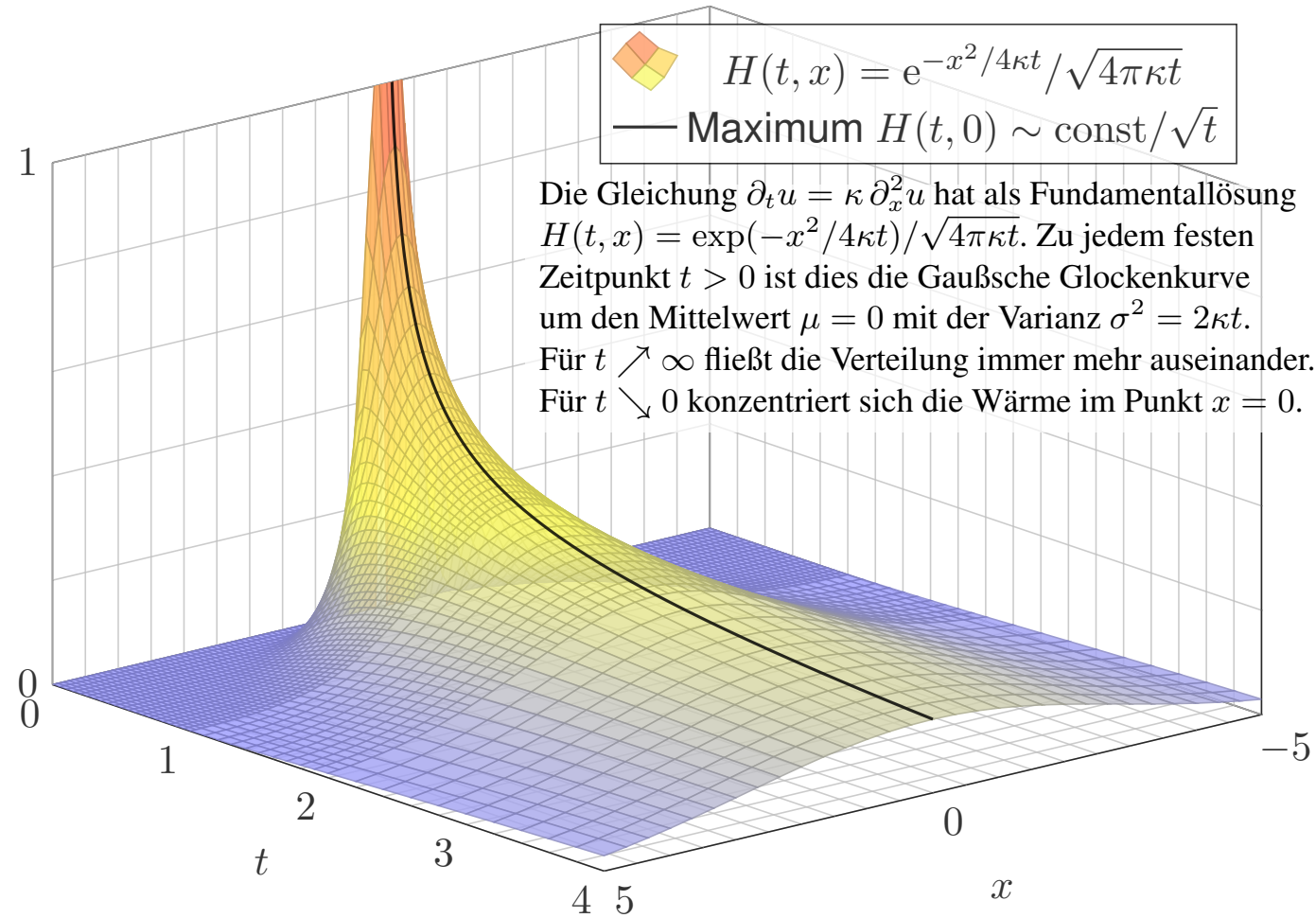


In einigen Paradebeispielen gelingt uns eine **explizite Lösung**:
☺ exakt, übersichtlich, leicht zu verstehen, zu prüfen und zu nutzen!
☹ Solche Lösungen sind leider meist auf einfache Fälle beschränkt.

In komplizierteren Fällen bleibt (nur) die **numerische Approximation**:
☹ unübersichtlich, schwerer zu verstehen, zu prüfen und zu nutzen.
☺ Näherungen sind mit Computerhilfe in vielen Fällen durchführbar!

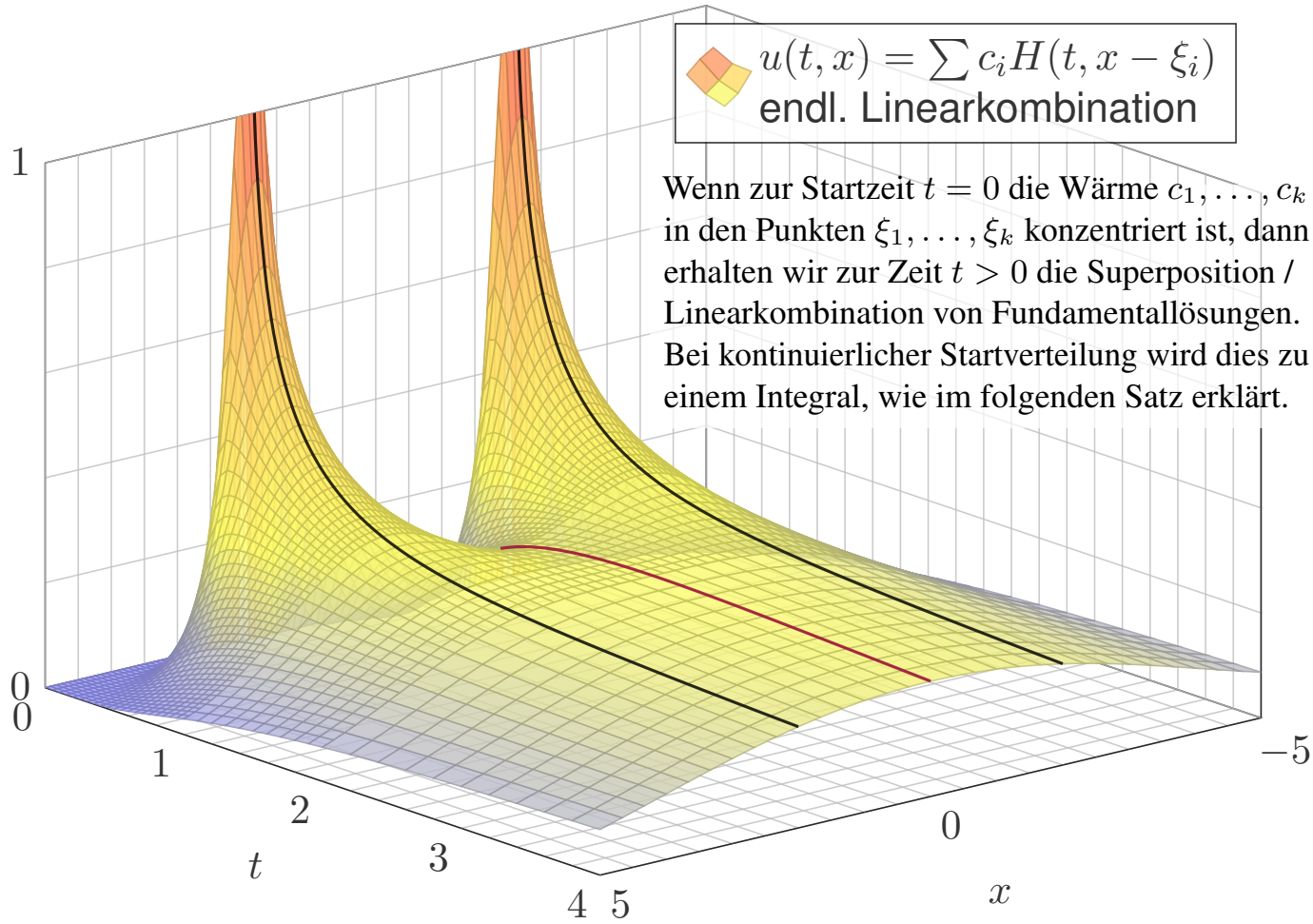
Auf beiden Wegen leisten Differentialgleichungen die Formulierung und anschließende Lösung des ursprünglichen (physikalischen) Problems. Meist geschieht dies eingebettet in einem Modellierungskreislauf. 105

Lösungen der Wärmeleitungsgleichung



Die Gleichung $\partial_t u = \kappa\, \partial_x^2 u$ hat als Fundamentallösung $H(t,x) = \exp(-x^2/4\kappa t)/\sqrt{4\pi\kappa t}$. Zu jedem festen Zeitpunkt $t > 0$ ist dies die Gaußsche Glockenkurve um den Mittelwert $\mu = 0$ mit der Varianz $\sigma^2 = 2\kappa t$. Für $t \nearrow \infty$ fließt die Verteilung immer mehr auseinander. Für $t \searrow 0$ konzentriert sich die Wärme im Punkt $x = 0$.

Lösungen der Wärmeleitungsgleichung



$u(t,x) = \sum c_i H(t, x - \xi_i)$
endl. Linearkombination

Wenn zur Startzeit $t = 0$ die Wärme $c_1, \ldots, c_k$ in den Punkten $\xi_1, \ldots, \xi_k$ konzentriert ist, dann erhalten wir zur Zeit $t > 0$ die Superposition / Linearkombination von Fundamentallösungen. Bei kontinuierlicher Startverteilung wird dies zu einem Integral, wie im folgenden Satz erklärt.

Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

♦ Satz D5D: Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

(1) Die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = \kappa\, \Delta u$ hat als Fundamentallösung eine auseinanderfließende Glockenkurve, den **Wärmeleitungskern**

$$H : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : H(t,x) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi\kappa t})^n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\kappa t}\right).$$

Die Konstanten sichern die Normierung $\int_{x\in\mathbb{R}^n} H(t,x)\,\mathrm{d}x = 1$ für $t > 0$.

(2) Für $t = 0$ sei die Wärmeverteilung $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vorgegeben, $u_0 \in C_b$. Für $t > 0$ erhalten wir die Lösung durch **Superposition** (Faltung D5E):

$$u : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : u(t,x) = \int_{\xi\in\mathbb{R}^n} H(t, x-\xi)\, u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Sie erfüllt $\partial_t u = \kappa\, \Delta u$ für $t > 0$ sowie $\lim_{t\searrow 0} u(t,x) = u_0(x)$.

(3) Aus $u(0,x) = \sin(kx)$ für $t = 0$ folgt $u(t,x) = \mathrm{e}^{-k^2\kappa t} \sin(kx)$ für $t \geq 0$. Aus $u(0,x) = \sum_k c_k \sin(kx)$ folgt $u(t,x) = \sum_k c_k\, \mathrm{e}^{-k^2\kappa t} \sin(kx)$ für $t \geq 0$. Die Wärmeleitung glättet: Hohe Frequenzen klingen extrem schnell ab.

Finite-Differenzen-Methode: Approximation

Für $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ untersuchen wir die Wärmeleitungsgleichung

$$\boxed{\begin{array}{ll} \partial_t u(t,x) = \kappa\, \partial_x^2 u(t,x) & \text{für alle } t \geq 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{Anfangswerte für } t = 0. \end{array}}$$

Aufgabe: Approximieren Sie die Differentialquotienten ∂_t sowie ∂_x und ∂_x^2 durch Differenzenquotienten zwecks numerischer Lösung. **Lösung:**

$$\partial_x u(t,x) \approx \frac{u(t, x{+}\Delta x/2) - u(t, x{-}\Delta x/2)}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned} \partial_x^2 u(t,x) &\approx \frac{\partial_x u(t, x{+}\Delta x/2) - \partial_x u(t, x{-}\Delta x/2)}{\Delta x} \\ &\approx \frac{u(t, x{-}\Delta x) - 2u(t,x) + u(t, x{+}\Delta x)}{(\Delta x)^2} \end{aligned}$$

Hier sind $\Delta x > 0$ und $\Delta t > 0$ Schrittweiten, nicht der Laplace–Operator. Die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = \kappa\, \partial_x^2 u$ besagt dann näherungsweise:

$$\boxed{u(t{+}\Delta t, x) \approx u(t,x) + \frac{\kappa\, \Delta t}{(\Delta x)^2}\Big[u(t, x{-}\Delta x) - 2u(t,x) + u(t, x{+}\Delta x)\Big]}$$

Finite-Differenzen-Methode: Diskretisierung

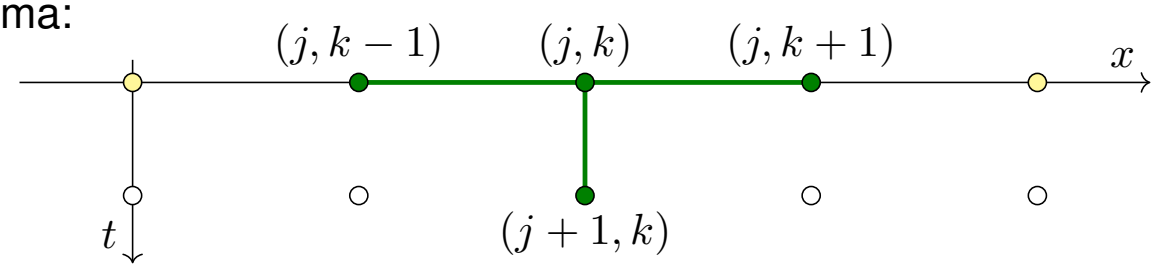
Gegeben sei für $t = 0$ die (diskretisierte) Startverteilung

$$v(0,x) = v_0(x) \quad \text{mit} \quad v_0 : \mathbb{Z}\Delta x \to \mathbb{R}.$$

Wir berechnen die (diskretisierte) Verteilung $v : \mathbb{N}\Delta t \times \mathbb{Z}\Delta x \to \mathbb{R}$ durch

$$v(t{+}\Delta t, x) := v(t,x) + \frac{\kappa\, \Delta t}{(\Delta x)^2}\Big[v(t, x{-}\Delta x) - 2v(t,x) + v(t, x{+}\Delta x)\Big]$$

Schema:



Mit dieser einfachen Methode können Sie den Wärmefluss für $t > 0$ näherungsweise bestimmen: Aus der Startverteilung v_0 zur Zeit $t = 0$ berechnen Sie die Verteilung v_1 zur Zeit $t = 1\Delta t$, daraus v_2 zur Zeit $t = 2\Delta t$ usw. Die Methode ist wenig aufwändig, außerdem direkt und explizit, das heißt, es müssen keine Gleichungssysteme gelöst werden. Sie ist leicht zu implementieren und wird häufig auf die Wärmeleitungsgleichung und ähnliche Diffusionsprobleme angewendet. In der Numerik lernen Sie noch weit bessere Verfahren, diese sind raffinierter, aber aufwändiger.

Finite-Differenzen-Methode: kreisförmiger Kupferdraht

Aufgabe: Simulieren Sie den Wärmefluss auf einem kreisförmigen Kupferdraht der Länge $L = 1$ mit $\kappa = 0.02$ und $\Delta t = 0.1$ und $\Delta x = 0.1$ Zur Zeit $t = 0$ sei die Wärmemenge 1 im Punkt $x = 0.5$ konzentriert.

(1) Programmieren Sie die Rechnung. (Tabellenkalkulation genügt; Sie finden dieses Beispiel unter `eiserm.de/lehre/HM3/Irrfahrt.ods`.)
(2) Erwarten Sie die Erhaltung der Gesamtwärmemenge? Gilt dies?
(3) Welche Verteilung erwarten Sie für große Werte von t? Gilt dies?

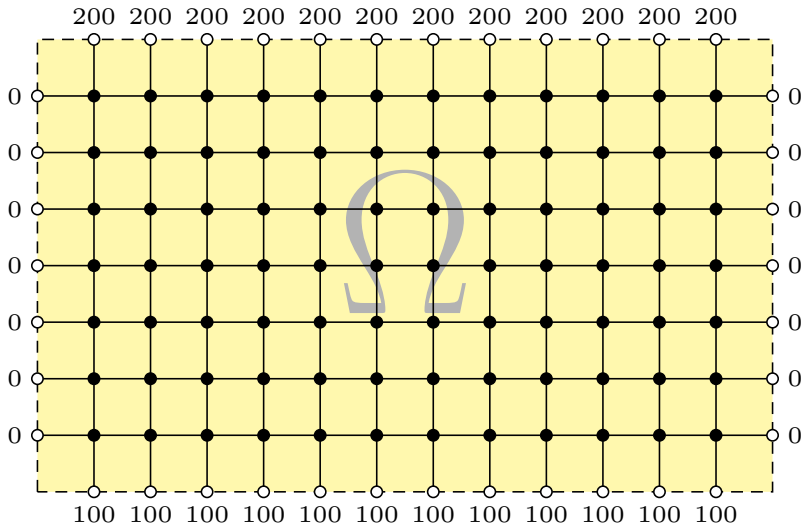
Lösung: (1) Sie finden die Tabelle auf der nächsten Seite. (2) Das ist physikalisch plausibel. Glücklicherweise erhält unser Algorithmus in jedem Schritt die Gesamtwärme! (3) Wir erwarten die Gleichverteilung: In jedem Punkt $x \in \{0.0, 0.1, \ldots, 0.9\}$ gilt $v(t, x) \to 0.1$ für $t \to \infty$.

☺ Die Rechnung lässt sich auch stochastisch interpretieren T445 als zufällige Irrfahrt (engl. *random walk*) mit Parameter $p := \kappa\, \Delta t/(\Delta x)^2$. Zur Zeit t befinden Sie sich im Punkt x mit Wkt $v(t, x)$. Im Zeitschritt Δt gehen Sie jeweils mit Wkt p einen Schritt $\pm\Delta x$ nach rechts / links, mit Wkt $1 - 2p$ bleiben Sie stehen. Die Diffusion der Wahrscheinlichkeiten folgt dann genau der obigen diskreten Gleichung. Siehe die Tabelle!

Finite-Differenzen-Methode: kreisförmiger Kupferdraht

$x=$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
t=0.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.200	0.600	0.200	0.000	0.000	0.000
0.2	0.000	0.000	0.000	0.040	0.240	0.440	0.240	0.040	0.000	0.000
0.3	0.000	0.000	0.008	0.072	0.240	0.360	0.240	0.072	0.008	0.000
0.4	0.000	0.002	0.019	0.093	0.230	0.312	0.230	0.093	0.019	0.002
0.5	0.001	0.005	0.030	0.106	0.219	0.279	0.219	0.106	0.030	0.005
0.6	0.002	0.009	0.040	0.113	0.209	0.255	0.209	0.113	0.040	0.009
0.7	0.005	0.014	0.049	0.118	0.199	0.237	0.199	0.118	0.049	0.014
0.8	0.009	0.019	0.056	0.120	0.190	0.221	0.190	0.120	0.056	0.019
0.9	0.013	0.024	0.061	0.121	0.182	0.209	0.182	0.121	0.061	0.024
1.0	0.017	0.029	0.066	0.121	0.175	0.198	0.175	0.121	0.066	0.029
1.1	0.022	0.034	0.070	0.121	0.169	0.189	0.169	0.121	0.070	0.034
1.2	0.027	0.039	0.073	0.120	0.164	0.181	0.164	0.120	0.073	0.039
1.3	0.032	0.043	0.076	0.120	0.159	0.174	0.159	0.120	0.076	0.043
1.4	0.036	0.047	0.078	0.119	0.154	0.168	0.154	0.119	0.078	0.047
1.5	0.041	0.051	0.080	0.117	0.150	0.162	0.150	0.117	0.080	0.051
1.6	0.045	0.055	0.082	0.116	0.146	0.157	0.146	0.116	0.082	0.055
1.7	0.049	0.058	0.083	0.115	0.142	0.153	0.142	0.115	0.083	0.058
1.8	0.053	0.061	0.085	0.114	0.139	0.148	0.139	0.114	0.085	0.061
1.9	0.056	0.064	0.086	0.113	0.136	0.145	0.136	0.113	0.086	0.064
2.0	0.059	0.067	0.087	0.112	0.133	0.141	0.133	0.112	0.087	0.067

Finite-Differenzen-Methode: beheizte Kupferplatte



Wir betrachten ein Bauteil $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aus wärmeleitendem Material.
An den Rändern liegen die Temperaturen $0°\mathrm{C}$, $100°\mathrm{C}$, $200°\mathrm{C}$ an.

Aufgabe: (1) Diskretisieren Sie wie oben die Wärmeleitungsgleichung

$$\boxed{\partial_t u(t,x,y) = \kappa\big[\partial_x^2 u(t,x,y) + \partial_y^2 u(t,x,y)\big], \quad u(0,x,y) = u_0(x,y).}$$

(2) Lösen Sie die Gleichung numerisch! Was ist der stationäre Zustand?
Hierzu sei $\Delta x = \Delta y$, und Δt wählen wir so, dass $\kappa\,\Delta t/(\Delta x)^2 = 1/4$ gilt.

Finite-Differenzen-Methode: beheizte Kupferplatte

Lösung: (1) Wir diskretisieren und nähern die partiellen Ableitungen:

$$\partial_x u(t,x,y) \approx \frac{u(t,x{+}\Delta x/2,y) - u(t,x{-}\Delta x/2,y)}{\Delta x}$$

$$\partial_x^2 u(t,x,y) \approx \frac{\partial_x u(t,x{+}\Delta x/2,y) - \partial_x u(t,x{-}\Delta x/2,y)}{\Delta x}$$

$$\approx \frac{u(t,x{-}\Delta x,y) - 2u(t,x,y) + u(t,x{+}\Delta x,y)}{(\Delta x)^2}$$

Diese Näherungen kennen wir bereits. H121 Ebenso verfahren wir für ∂_y^2.
Die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = \kappa[\partial_x^2 u + \partial_y^2 u]$ nähern wir durch v:

$$\boxed{\begin{aligned} v(t{+}\Delta t,x,y) &= v(t,x,y) + \Delta t\,\partial_t v(t,x,y) \\ = v(t,x,y) &+ \frac{\kappa\,\Delta t}{(\Delta x)^2}\Big[v(t,x{-}\Delta x,y) - 2v(t,x,y) + v(t,x{+}\Delta x,y)\Big] \\ &+ \frac{\kappa\,\Delta t}{(\Delta y)^2}\Big[v(t,x,y{-}\Delta y) - 2v(t,x,y) + v(t,x,y{+}\Delta y)\Big] \end{aligned}}$$

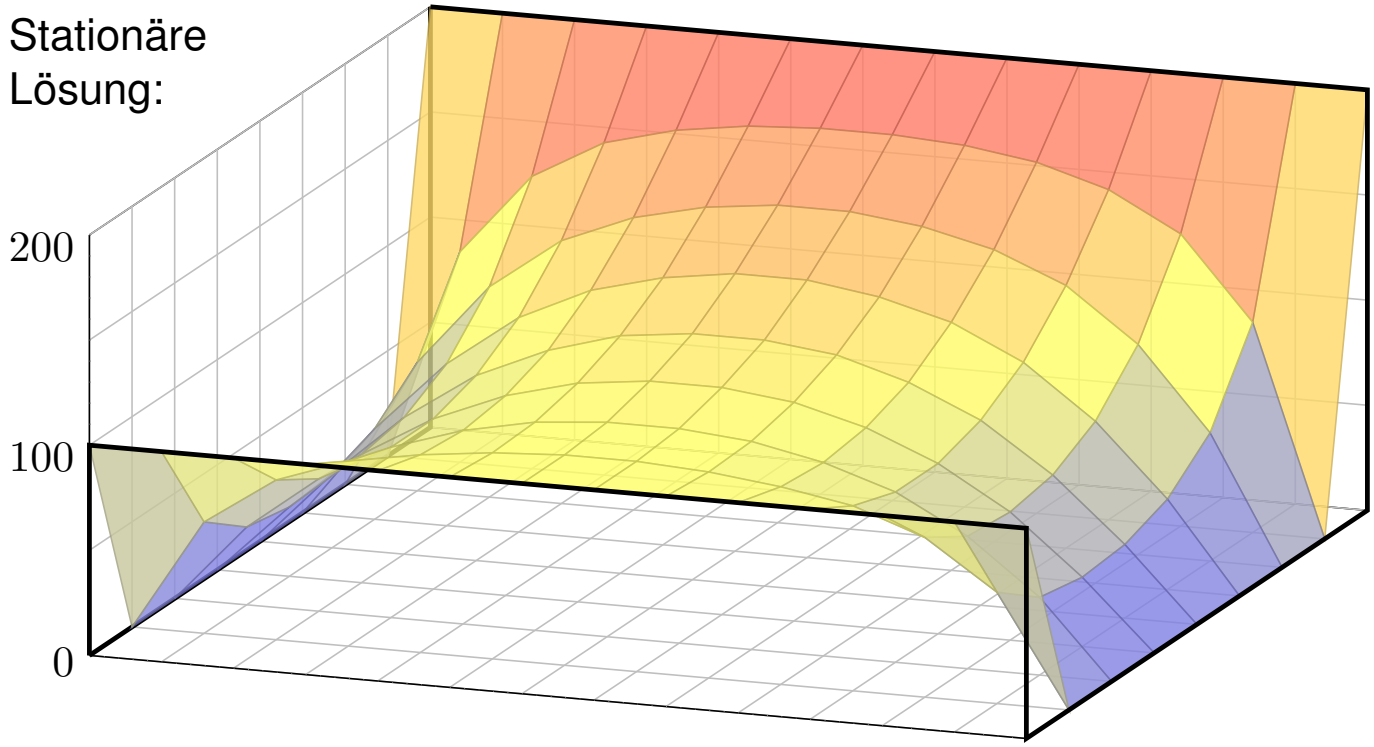
Hier sind $\Delta t, \Delta x, \Delta y > 0$ Schrittweiten, nicht der Laplace–Operator.

Finite-Differenzen-Methode: beheizte Kupferplatte

Im konkreten Beispiel arbeiten wir mit $(x, y) \in \{1, \ldots, 12\} \times \{1, \ldots, 7\}$, Zeitschritt $\Delta t = 1$ und $\kappa = 1/4$. Wir erhalten die Mittelwerteigenschaft:

$$v(t{+}1, x, y) = \frac{v(t, x{-}1, y) + v(t, x{+}1, y) + v(t, x, y{-}1) + v(t, x, y{+}1)}{4}$$

Stationäre Lösung:



Finite-Differenzen-Methode: beheizte Kupferplatte

☺ Ausgehend vom gegebenem Startzustand $v(0, x, y)$ können wir so die zeitliche Entwicklung berechnen. Nochmal zur Betonung: Die diskrete Lösung $v(t, x, y)$ ist nur eine grobe Näherung der kontinuierlichen Lösung $u(t, x, y)$. In der Numerik erfahren Sie mehr zu Fehlerschranken und noch besseren Methoden. Viele davon stehen als Softwarebibliotheken zur Verfügung.

☺ Unsere Näherung ist auf den folgenden Seiten numerisch illustriert. Die Rechnung beginnt mit einer (beliebigen!) Startverteilung zur Zeit $t = 0$ und konvergiert recht schnell gegen die (eindeutige!) stationäre Lösung: Zwischen $t = 50$ und $t = 80$ ist kaum noch ein Unterschied. Das ist für den Computer einfach und schnell zu rechnen; eine Tabellenkalkulation genügt.

☺ Die stationäre Lösung befindet sich im Gleichgewicht, erfüllt also die **Mittelwerteigenschaft**

$$\bar{v}(x, y) = \frac{\bar{v}(x{-}1, y) + \bar{v}(x{+}1, y) + \bar{v}(x, y{-}1) + \bar{v}(x, y{+}1)}{4}$$

☺ Der stationäre Zustand $\bar{v}$ lässt sich auch stochastisch interpretieren T445 als Ergebnis einer zufälligen Irrfahrt (engl. *random walk*): Auf einem Spielfeld $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$ ziehen Sie jeweils mit Wkt $p := \kappa\, \Delta t/(\Delta x)^2$, hier $p = 1/4$, nach links / rechts / oben / unten. Das Spiel endet mit den Gewinnen am Rand. Die Gewinnerwartung auf jedem Feld (x, y) ist der Wert $\bar{v}(x, y)$.

☺ Dieses einfache Beispiel illustriert das allgemeine und überall wichtige **Dirichlet–Problem**. Die Berechnung von $\bar{v}$ führt zu einem linearen Gleichungssystem mit $7 \times 12 = 84$ Unbekannten! Für diese finden wir genau 84 Gleichungen. Die Gleichgewichtslösung $\bar{v}$ ist tatsächlich eindeutig, und die iterative Berechnung als Wärmefluss liefert eine erstaunlich gute numerische Methode.

Zeitliche Entwicklung zum stationären Zustand

t=0	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	
000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	

t=1	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	
000	050	050	050	050	050	050	050	050	050	050	050	050	000
000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
000	025	025	025	025	025	025	025	025	025	025	025	025	000
	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	

Zeitliche Entwicklung zum stationären Zustand

t=2	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	
000	063	075	075	075	075	075	075	075	075	075	075	063	000
000	013	013	013	013	013	013	013	013	013	013	013	013	000
000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
000	006	006	006	006	006	006	006	006	006	006	006	006	000
000	031	038	038	038	038	038	038	038	038	038	038	031	000
	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	

t=3	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	
000	072	088	091	091	091	091	091	091	091	091	088	072	000
000	019	025	025	025	025	025	025	025	025	025	025	019	000
000	003	003	003	003	003	003	003	003	003	003	003	003	000
000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
000	002	002	002	002	002	002	002	002	002	002	002	002	000
000	009	013	013	013	013	013	013	013	013	013	013	009	000
000	036	044	045	045	045	045	045	045	045	045	044	036	000
	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	

Zeitliche Entwicklung zum stationären Zustand

t=50	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	
000	099	138	156	164	169	171	171	169	164	156	138	099	000
000	060	098	121	134	141	145	145	141	134	121	098	060	000
000	042	074	097	111	119	123	123	119	111	097	074	042	000
000	034	061	082	096	104	108	108	104	096	082	061	034	000
000	032	057	076	088	095	099	099	095	088	076	057	032	000
000	036	061	077	087	093	096	096	093	087	077	061	036	000
000	053	075	086	092	095	097	097	095	092	086	075	053	000
	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	

t=80	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	
000	100	140	158	167	172	174	174	172	167	158	140	100	000
000	061	101	125	139	147	151	151	147	139	125	101	061	000
000	044	078	102	118	127	132	132	127	118	102	078	044	000
000	036	066	088	103	113	117	117	113	103	088	066	036	000
000	034	061	081	095	103	107	107	103	095	081	061	034	000
000	038	064	082	093	099	102	102	099	093	082	064	038	000
000	054	076	088	095	098	100	100	098	095	088	076	054	000
	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	

Zeitliche Entwicklung zum stationären Zustand

Gegeben sind meist Anfangswerte $u(0,x) = u_0(x)$ für $t = 0$ und $x \in \Omega$ sowie Randwerte $u(t,x)$ für alle $t > 0$ und $x \in \partial\Omega$, kurz ARWProblem.

Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u(t,x) = \kappa\, \Delta u(t,x)$ für alle $t > 0$ und $x \in \Omega$.
Stationär $\partial_t u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ harmonisch $\Delta u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ Mittelwerteigenschaft

Wir können die stationäre Verteilung exakt bestimmen dank Trennung der Variablen und Fourier–Theorie, siehe R201 und die Graphik R408.

Anfangs- und Randwertprobleme (kurz ARWP) werden wir in Kapitel S ausführlich diskutieren und mit Fourier–Theorie lösen, siehe Satz S3D.

Die Wärmeleitung glättet: Hohe Frequenzen klingen extrem schnell ab. Lässt sich die Wärmeleitungsgleichung umkehren, also zurückrechnen? Theoretisch ja, praktisch nein. Gegeben ist statt u_0 zur Zeit $t = 0$ nun u_T zu einem Zeitpunkt $T > 0$, und gesucht ist die/eine Startverteilung u_0.

Die rückwärtslaufende Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = -\kappa\, \partial_x^2 u$ entsteht durch Zeitumkehr $t \mapsto -t$. Sie glättet nicht, sie raut auf: Winzig kleine Störungen in u_T führen zu explosionsartigen Störungen in u_0. Dieses Umkehrproblem ist daher schlecht gestellt (engl. *ill posed*), siehe R221.

Harmonische Funktionen: Mittelwerteigenschaft

Wir betrachten die **Wärmeleitungsgleichung** ohne Quellen:

$$\boxed{\partial_t u = \kappa\,\Delta u \quad \text{mit} \quad \Delta = \partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2}$$

Für **stationäre Lösungen** gilt $\partial_t u = 0$, also $\Delta u = 0$.

Definition H1C: harmonische Funktion

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine (zweimal stetig differenzierbare) Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt **harmonisch**, wenn sie die Gleichung $\Delta u = 0$ erfüllt.

Dies ist die **homogene Potentialgleichung** oder **Laplace–Gleichung**. Sie wird in vielen technisch-physikalischen Anwendungen genutzt.

Bei mangelnder Differenzierbarkeit genügt $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$; wir interpretieren die Ableitung $\Delta = \partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2$ dann im Distributionensinne. D529

Diskretisiert erhalten wir für $v : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ die **Mittelwerteigenschaft** $v(x) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n v(x + e_k) + v(x - e_k)$, für $n = 2$ ausgeschrieben:

$$v(x,y) = \frac{v(x{-}1,y) + v(x{+}1,y) + v(x,y{-}1) + v(x,y{+}1)}{4}$$

Harmonische Funktionen: Kräftegleichgewicht

Zur Illustration skizziere ich hier eine Anwendung aus der Mechanik: Wir betrachten Massenpunkte in $(x,y) \in (\mathbb{Z}h)^2$ mit Höhe $u(x,y) \in \mathbb{R}$. Jeder ist durch gleich starke Federn mit seinen Nachbarn verbunden. Bei kleinen Auslenkungen ist die Rückstellkraft jeder Feder proportional zur Differenz der beiden Höhen. In der Summe erhalten wir also:

$$\begin{aligned} m\,\partial_t^2 u(t,x,y) = &+ \kappa\Big[u(t,x{-}h,y) - 2u(t,x,y) + u(t,x{+}h,y)\Big] \\ &+ \kappa\Big[u(t,x,y{-}h) - 2u(t,x,y) + u(t,x,y{+}h)\Big] \end{aligned}$$

Es gilt: Ruhelage $=$ Kräftegleichgewicht $\approx$ Mittelwerteigenschaft! Stationäre Lösungen sind demnach harmonisch (hier diskret).

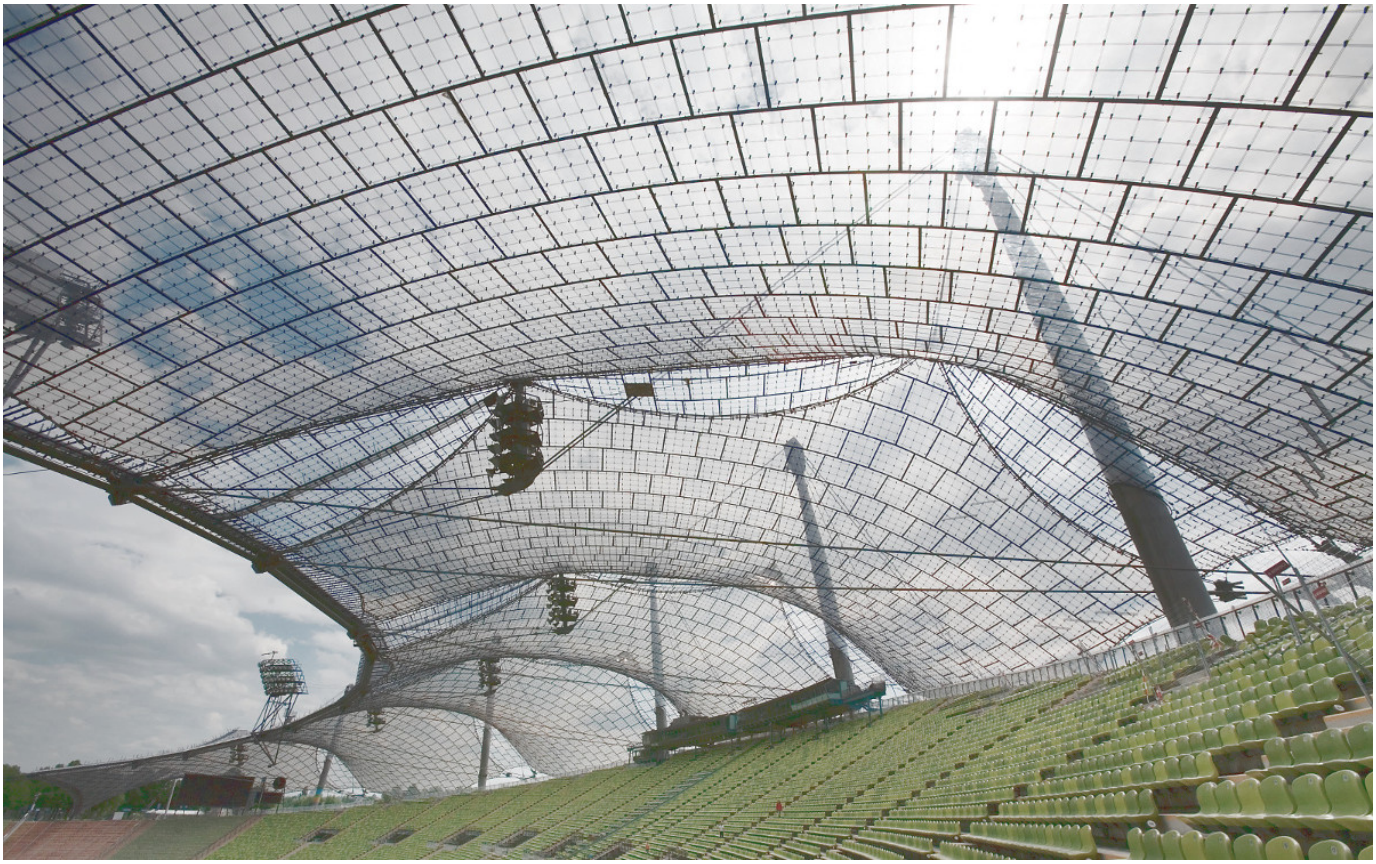
Im Grenzübergang $h \to \infty$ erhalten wir die **Wellengleichung**:

$$\boxed{\partial_t^2 u = c^2\,\Delta u \quad \text{mit} \quad \Delta = \partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2}$$

Auch hier gilt: Stationäre Lösungen sind harmonisch. Allgemeiner führt Kräftegleichgewicht zu Minimalflächen, wie im Folgenden illustriert.

Minimalflächen in der Architektur

H135
Ausführung



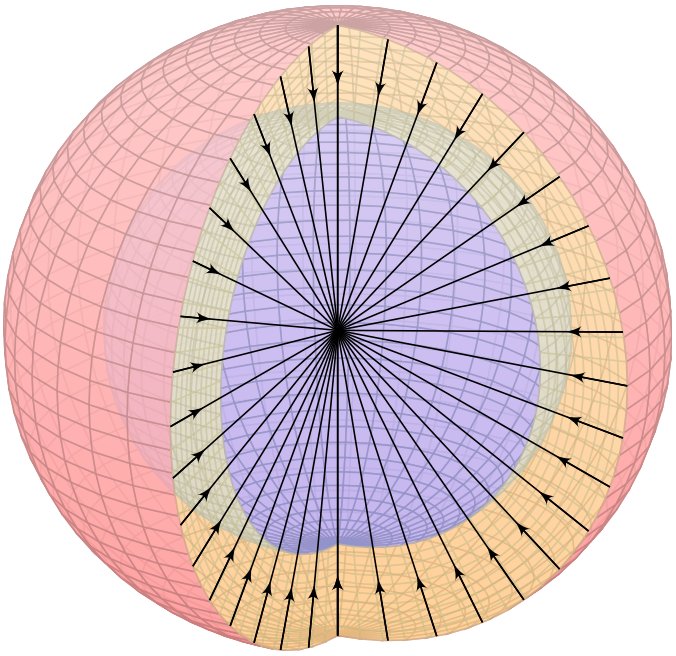
Das Zeltdach des Olympiastadions in München ist eine Minimalfläche. Es beruht auf Ideen von Frei Paul Otto (1925–2015) vom Institut für Leichte Flächentragwerke der Universität Stuttgart.

Minimalflächen in der Architektur

H136
Ausführung

Ein halbes Jahrhundert später werden solche Konstruktionen auf dem Computer berechnet: Von der Seifenblase zur Kelchstütze, nach Ideen von Frei Otto. youtu.be/_LpP6bdxFPU

Gravitationsfeld einer Punktmasse



Ziel: Wie berechnet man das Gravitationsfeld eines Planeten?

Wir betrachten das Gravitationsfeld einer Masse $m = 1$ im Punkt $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$:

$$\vec{f} : \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{y\} \to \mathbb{R}^3,$$
$$\vec{f}(\vec{x}) = m \frac{\vec{y} - \vec{x}}{|\vec{y} - \vec{x}|^3}.$$

Das Feld $\vec{f}$ ist radial auf den Punkt $\vec{y}$ gerichtet und klingt ab mit $1/r^2$.

Das bringt bemerkenswerte Eigenschaften mit sich!

Aufgabe: (1) Berechnen Sie die Divergenz des Vektorfeldes $\vec{f}$,
(2) das Flussintegral von $\vec{f}$ über die Sphäre $S = \partial B(\vec{y}, r)$ und
(3) über den Rand ∂D eines beliebigen Kompaktums D.
Wie lässt sich der Integralsatz von Gauß hier nutzen?

Gravitationsfeld einer Punktmasse

Lösung: (1) Auf ganz $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{\vec{y}\}$ finden wir $\operatorname{div} \vec{f} = 0$, denn

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{y_i - x_i}{|y - x|^3} = \frac{-1}{|y - x|^3} + \frac{3(y_i - x_i)^2}{|y - x|^5} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = 0.$$

(2) Den Fluss über die Sphäre $\partial B(\vec{y}, r)$ berechnen wir dank Symmetrie:

$$\int_{\partial B(y,r)} \vec{f} \cdot \mathrm{d}S \;=\; \int_{\partial B(y,r)} \vec{f} \cdot \vec{n}_S \, |\mathrm{d}S| \;=\; \int_{\partial B(y,r)} \frac{-1}{r^2} \, |\mathrm{d}S| \;=\; -4\pi$$

(3) Für jedes Kompaktum D mit stückweise glattem Rand ∂D folgt

$$\int_{\partial D} \vec{f} \cdot \mathrm{d}S \;=\; \left\{ \begin{matrix} 0 & \text{für } \vec{y} \notin D \\ -4\pi & \text{für } \vec{y} \in \mathring{D} \end{matrix} \right\} \;=\; -4\pi \, \mathbf{I}_{\mathring{D}}(\vec{y})$$

Nachrechnen dank Gauß: (1) Das Feld $\vec{f}(\vec{x})$ ist divergenzfrei, nur der Pol im Punkt $\vec{x} = \vec{y}$ wirkt als Quelle bzw. Senke. Das ist die räumliche Entsprechung des ebenen Residuensatzes.

(2) Dank Kugelsymmetrie gelingt die Integration mühelos, sogar ohne Parametrisierung!

(3) Im Falle $\vec{y} \notin D$ gilt $\int_{\partial D} \vec{f} \cdot \mathrm{d}S = \int_D \operatorname{div}(\vec{f}) \, \mathrm{d}\vec{x} = 0$ dank (1). Im Falle $\vec{y} \in \mathring{D}$ wählen wir eine kleine Kugel $\overline{B}(\vec{y}, r) \subseteq \mathring{D}$. Mit D ist auch $E = D \smallsetminus B(\vec{y}, r)$ kompakt mit stückweise glattem Rand $\partial E = \partial D \cup -\partial B(\vec{y}, r)$. Wegen $\vec{y} \notin E$ gilt $\int_{\partial E} \vec{f} \cdot \mathrm{d}S = \int_E \operatorname{div}(\vec{f}) \, \mathrm{d}\vec{x} = 0$ dank (1) und somit $\int_{\partial D} \vec{f} \cdot \mathrm{d}S = \int_{\partial B(\vec{y},r)} f \cdot \mathrm{d}S = -4\pi$ dank (2).

Newton–Potential und Gravitationsfeld

Das **Newton–Potential** D437 einer Masse m im Punkt $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$ ist

$$u : \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{\vec{y}\} \to \mathbb{R} : u(\vec{x}) = \frac{m}{|\vec{y} - \vec{x}|}.$$

(Gravitationskonstante und etwaige Vorzeichen lasse ich hier weg.)

Ein Planet ist keine Punktmasse: Wir betrachten eine Massendichte $\varrho : K \to \mathbb{R}$ auf einem Kompaktum $K \subseteq \mathbb{R}^3$. Außerhalb ist das Potential

$$u : \mathbb{R}^3 \smallsetminus K \to \mathbb{R} : u(\vec{x}) = \int_{\vec{y} \in K} \frac{\varrho(\vec{y})}{|\vec{y} - \vec{x}|} \, \mathrm{d}\vec{y}.$$

Das ist die kontinuierliche Superposition (Faltung) von Punktpotentialen. Gleiches gilt für das elektrische Potential einer Ladungsverteilung und ebenso in zahlreichen ähnlichen Anwendungen der Potentialtheorie.

Aufgabe: (1) Berechnen Sie jeweils das **Gravitationsfeld** $\vec{f} = \operatorname{grad} u$.
(2) Ist das Potential u auf $\mathbb{R}^3 \smallsetminus K$ harmonisch, gilt hier also $\Delta u = 0$?
(3) Warum / Dürfen Sie hier die Ableitungen unters Integral ziehen?

Newton–Potential und Gravitationsfeld

Lösung: Für eine Punktmasse rechnen wir Δu wie oben explizit aus:

$$u(\vec{x}) = \frac{m}{|\vec{y} - \vec{x}|} \quad \Rightarrow \quad \vec{f}(\vec{x}) = \operatorname{grad} u(\vec{x}) = m \, \frac{\vec{y} - \vec{x}}{|\vec{y} - \vec{x}|^3} \quad \Rightarrow \quad \Delta u = \operatorname{div} \vec{f} = 0.$$

(1) Für eine kontinuierliche Dichte $\varrho : K \to \mathbb{R}$ erhalten wir

$$u : \mathbb{R}^3 \smallsetminus K \to \mathbb{R} : u(\vec{x}) = \int_{\vec{y} \in K} \frac{\varrho(\vec{y})}{|\vec{y} - \vec{x}|} \, \mathrm{d}\vec{y}.$$

Das zugehörige Gravitationsfeld $f = \operatorname{grad} u$ ist dann (dank Satz D3c)

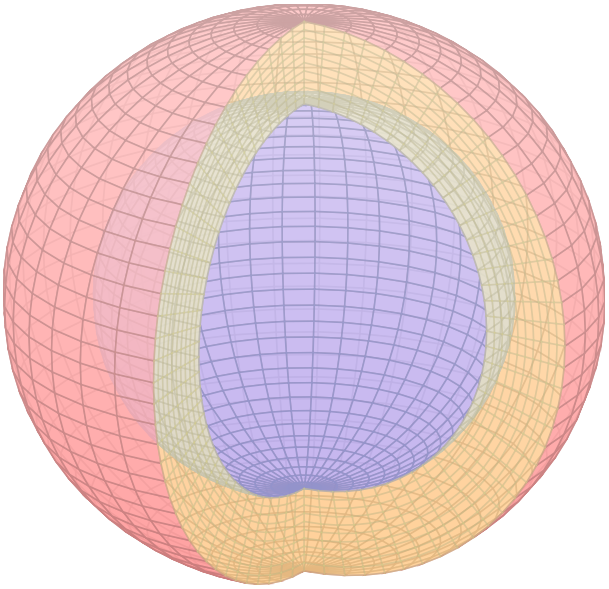
$$\vec{f}(\vec{x}) = \operatorname{grad} \int_K \frac{\varrho(\vec{y})}{|\vec{y} - \vec{x}|} \, \mathrm{d}\vec{y} \overset{\text{D3c}}{=} \int_K \operatorname{grad} \frac{\varrho(\vec{y})}{|\vec{y} - \vec{x}|} \, \mathrm{d}\vec{y} = \int_K \frac{\vec{y} - \vec{x}}{|\vec{y} - \vec{x}|^3} \, \varrho(\vec{y}) \, \mathrm{d}\vec{y}.$$

(2) Somit ist das Newton–Potential u auf $\mathbb{R}^3 \smallsetminus K$ harmonisch, denn

$$\Delta u(\vec{x}) = \Delta \int_K \frac{\varrho(\vec{y})}{|\vec{y} - \vec{x}|} \, \mathrm{d}\vec{y} \overset{\text{D3c}}{=} \int_K \Delta \frac{\varrho(\vec{y})}{|\vec{y} - \vec{x}|} \, \mathrm{d}\vec{y} = \int_K 0 \, \mathrm{d}\vec{y} = 0.$$

(3) Ableitungen und Integral vertauschen, da der Integrationsbereich K kompakt ist und der Integrand in $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \smallsetminus K$ stetig differenzierbar (D3c).

Gravitationspotential einer Kugelschale



Wir betrachten die Kugelschale
$K = \{\, \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \mid r_0 \le |\vec{y}| \le r_1 \,\}$
mit den Radien $0 \le r_0 < r_1$ und
konstanter Massendichte $\varrho \in \mathbb{R}$.

Aufgabe: (1) Berechnen Sie das Gravitationspotential $u(\vec{x})$ im Punkt $\vec{x} = (0, 0, R)$ mittels Kugelkoordinaten $\vec{y} = (r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta)$.

(2) Welches Gravitationsfeld $\vec{f} = \operatorname{grad} u$ herrscht außerhalb ($|\vec{x}| \ge r_1$)? Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Potential einer Punktmasse!

(3) Welches Gravitationsfeld $\vec{f} = \operatorname{grad} u$ herrscht innerhalb ($|\vec{x}| \le r_0$)? Wie interpretieren Sie dieses bemerkenswerte Ergebnis geometrisch?

Hinweis: Der Ansatz ist klar, die Rechnung ist aber nicht leicht. Man berechne $|\vec{y} - \vec{x}|^2 = r^2 - 2rR\cos\theta + R^2$ und substituiere $t = -\cos\theta$.

Gravitationspotential einer Kugelschale

Lösung: (1) Zu berechnen ist das Integral

$$u(\vec{x}) = \int_{\vec{y} \in K} \frac{\varrho}{|\vec{y} - \vec{x}|} \, \mathrm{d}\vec{y}.$$

Für die Integration über $\vec{y} \in K$ nutzen wir Kugelkoordinaten

$$\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) = (r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta) =: \Phi(r, \theta, \varphi).$$

Wir kennen die Funktionaldeterminante $\det \Phi' = r^2 \sin\theta$, also

$$\mathrm{d}(y_1, y_2, y_3) = r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}(r, \theta, \varphi).$$

Wegen Rotationssymmetrie hängt $u(\vec{x})$ nur vom Radius $|x|$ ab.
Es genügt daher, $u(\vec{x})$ etwa längs der z–Achse zu berechnen.
Wir fixieren deshalb den Punkt $\vec{x} = (0, 0, R)$ mit $R = |x| \in \mathbb{R}_{\ge 0}$.
Der Abstand $|\vec{y} - \vec{x}|$ ist in dieser Parametrisierung

$$\begin{aligned} |\vec{y} - \vec{x}|^2 &= r^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi + r^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + (r\cos\theta - R)^2 \\ &= r^2 \sin^2\theta + r^2 \cos^2\theta - 2rR\cos\theta + R^2 \\ &= r^2 - 2rR\cos\theta + R^2. \end{aligned}$$

Gravitationspotential einer Kugelschale

Damit berechnen wir unser Integral in Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} u(\vec{x}) &= \int_{\vec{y}\in K} \frac{\varrho}{|\vec{y}-\vec{x}|}\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{r=r_0}^{r_1}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\varrho\, r^2 \sin\theta}{\sqrt{r^2+R^2-2rR\cos\theta}}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r \\ &= \int_{r=r_0}^{r_1} 2\pi\varrho r^2 \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin\theta}{\sqrt{r^2+R^2-2rR\cos\theta}}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r \end{aligned}$$

Das innere Integral berechnen wir mit $t=-\cos\theta$ und $\mathrm{d}t=\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$ zu

$$\int_{t=-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{r^2+R^2+2rRt}}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{rR}\sqrt{r^2+R^2+2rRt}\right]_{t=-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{rR}\left[\sqrt{r^2+R^2+2rR}-\sqrt{r^2+R^2-2rR}\right]$$

$$= \frac{1}{rR}\big(|r+R|-|r-R|\big) = \begin{cases} 2/r & \text{für } r\geq R, \\ 2/R & \text{für } r\leq R. \end{cases}$$

Gravitationspotential einer Kugelschale

(2) Außerhalb der Kugelschale K gilt $R\geq r_1$ und somit

$$u(\vec{x}) = \frac{1}{R}\int_{r=r_0}^{r_1} 4\pi\varrho\, r^2\,\mathrm{d}r = \frac{M}{R}.$$

Dies ist das Potential einer punktförmigen Masse M im Ursprung. Außerhalb K herrscht das Gravitationsfeld $\vec{f}=\operatorname{grad} u = M\vec{x}/|\vec{x}|^3$.

(3) Innerhalb der Kugelschale K gilt $R\leq r_0$ und somit

$$u(\vec{x}) = \int_{r=r_0}^{r_1} 4\pi\varrho\, r\,\mathrm{d}r = \text{const}.$$

Dieses Potential hängt hier nicht weiter von $\vec{x}$ ab. Somit verschwindet das Gravitationsfeld $\vec{f}=\operatorname{grad} u = 0$ im Inneren der Kugelschale.

Geometrische Erklärung: Auf jeden inneren Punkt wirken entgegengesetzte Kräfte gegenüberliegender kleiner Flächenstücke im Abstand a bzw. b. Die Fläche wächst mit a^2 bzw. b^2, die Kraft nimmt ab mit $1/a^2$ bzw. $1/b^2$, also sind beide Kräfte gleich groß und heben sich auf.

Bemerkung: Für den verbleibenden Fall $r_0<R<r_1$ zählt nur die Masse $m=\frac{4}{3}\pi\varrho(R^3-r_0^3)$ der Kugelschale vom Radius r_0 bis zu R. H147

Gravitationsfeld eines Planeten

H145
Übung

Die Massendichte $\varrho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ erzeugt das Gravitationsfeld

$$\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad \text{mit} \qquad \vec{f}(\vec{x}) \overset{(1)}{=} \int_{\vec{y}\in\mathbb{R}^3} \frac{\vec{y}-\vec{x}}{|\vec{y}-\vec{x}|^3}\, \varrho(\vec{y})\, \mathrm{d}\vec{y}.$$

Zwecks Integrierbarkeit sei ϱ beschränkt und absolut integrierbar (H1D).

Aufgabe: Berechnen Sie den Fluss von $\vec{f}$ durch den Rand $S = \partial D$ eines Kompaktums $D \subseteq \mathbb{R}^3$ (mit Fubini und der vorigen Aufgabe).

Lösung: Der Fluss aus D ist proportional zur Gesamtmasse in D:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} \vec{f} \bullet \mathrm{d}S &\overset{(1)}{=} \int_{\vec{x}\in\partial D} \left(\int_{\vec{y}\in\mathbb{R}^3} \frac{\vec{y}-\vec{x}}{|\vec{y}-\vec{x}|^3}\, \varrho(\vec{y})\, \mathrm{d}\vec{y} \right) \bullet \mathrm{d}S \\
&\overset{(2)}{=} \int_{\vec{y}\in\mathbb{R}^3} \left(\int_{\vec{x}\in\partial D} \frac{\vec{y}-\vec{x}}{|\vec{y}-\vec{x}|^3} \bullet \mathrm{d}S \right) \varrho(\vec{y})\, \mathrm{d}\vec{y} \\
&\overset{(3)}{=} \int_{\vec{y}\in\mathbb{R}^3} (-4\pi)\, \mathbf{I}_{\mathring{D}}(\vec{y})\, \varrho(\vec{y})\, \mathrm{d}\vec{y} \quad = \quad -4\pi \int_{\vec{y}\in D} \varrho(\vec{y})\, \mathrm{d}\vec{y}
\end{aligned}$$

Hierzu muss ϱ ausreichend gutartig sein, sodass in (1) absolute Integrierbarkeit gilt. Gleichung (2) ist dann Fubini und (3) haben wir zuvor ausgerechnet. Ist zudem f stetig differenzierbar, so folgt $\operatorname{div} f = -4\pi\varrho$ nach Gauß. Der Regularitätssatz H1D präzisiert die Voraussetzungen.

Gravitationsfeld einer Vollkugel / Kugelschale

H146
Übung

Aufgabe: Berechnen Sie das Gravitationsfeld $\vec{f}$ einer Kugelschale $K = \{\, \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \mid r_0 \le |y| \le r_1 \,\}$ mit $0 \le r_0 < r_1$ und konstanter Dichte ϱ.

Erste Lösung: direkt durch Integration, mühsam aber lehrreich. H141

Zweite Lösung: Mit dem Integralsatz von Gauß geht es viel leichter.

Das Feld $\vec{f}$ ist kugelsymmetrisch, das heißt $\vec{f}(\vec{x}) = g(|\vec{x}|) \cdot \vec{x}/|\vec{x}|$.

Aus $\overline{B}(\vec{0}, r) = \{\, \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\vec{x}| \le r \,\}$ fließt $\int_{\partial B(\vec{0},r)} \vec{f} \bullet \mathrm{d}S = 4\pi r^2 g(r)$.

Dank Gauß gilt andererseits $\int_{\partial B(\vec{0},r)} \vec{f} \bullet \mathrm{d}S = -4\pi \int_{\overline{B}(\vec{0},r)} \varrho(y)\, \mathrm{d}y$.

$$\boxed{\text{Gravitationstärke:} \qquad g(r) = \frac{-1}{r^2} \int_{\overline{B}(\vec{0},r)} \varrho(\vec{y})\, \mathrm{d}\vec{y}}$$

Für $r > r_1$ gilt $g(r) = -m/r^2$: Wie eine Punktmasse im Ursprung.

Für $r < r_0$ gilt $g(r) = 0$: Hier heben sich entgegengesetzte Kräfte auf.

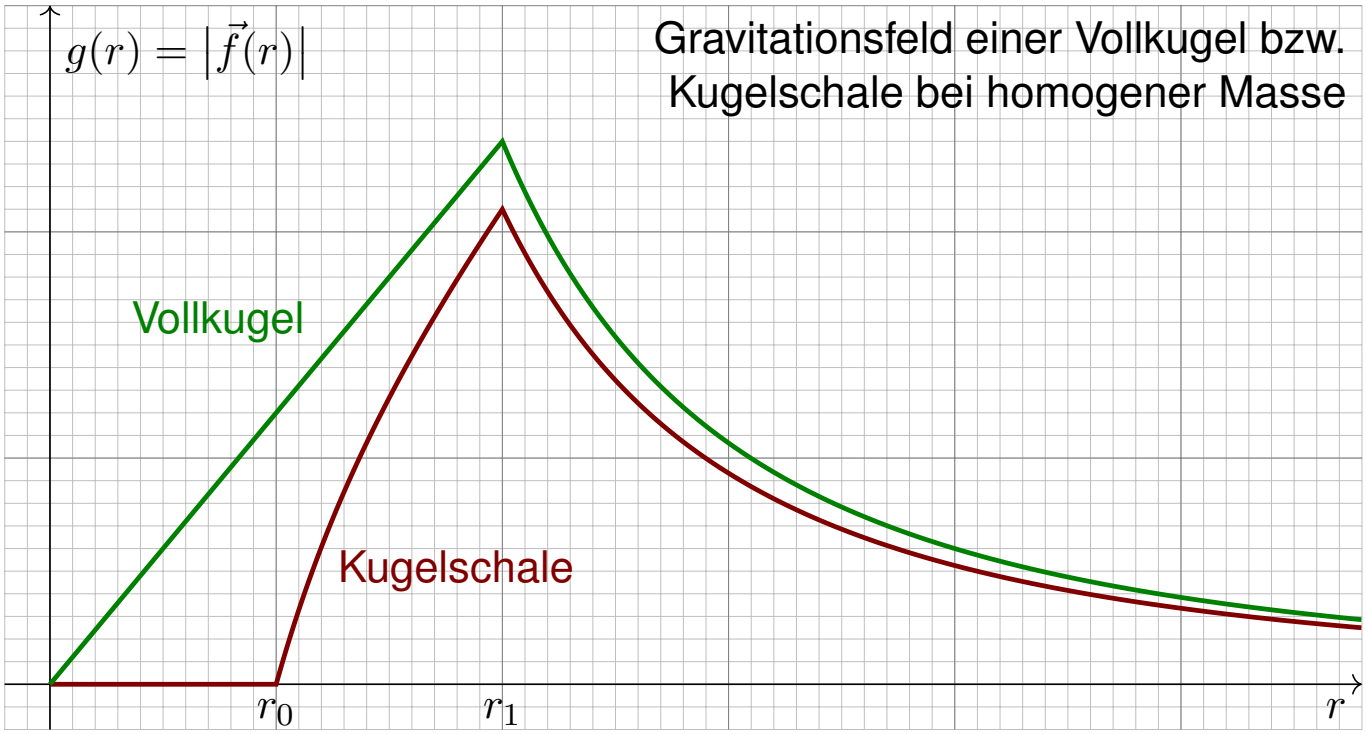
Für $r_0 \le r \le r_1$ gilt $g(r) = -\varrho\, \frac{4\pi}{3r^2}\, (r^3 - r_0^3)$: Wie Punktmasse, aufgeteilt.

Spezialfall Vollkugel: Für $0 = r_0 \le r \le r_1$ ist $g(r) = -\varrho \frac{4\pi}{3} r$ linear.

☺ Der Integralsatz von Gauß vereinfacht die Rechnung erheblich!

Gravitationsfeld einer Vollkugel / Kugelschale

H147
Übung

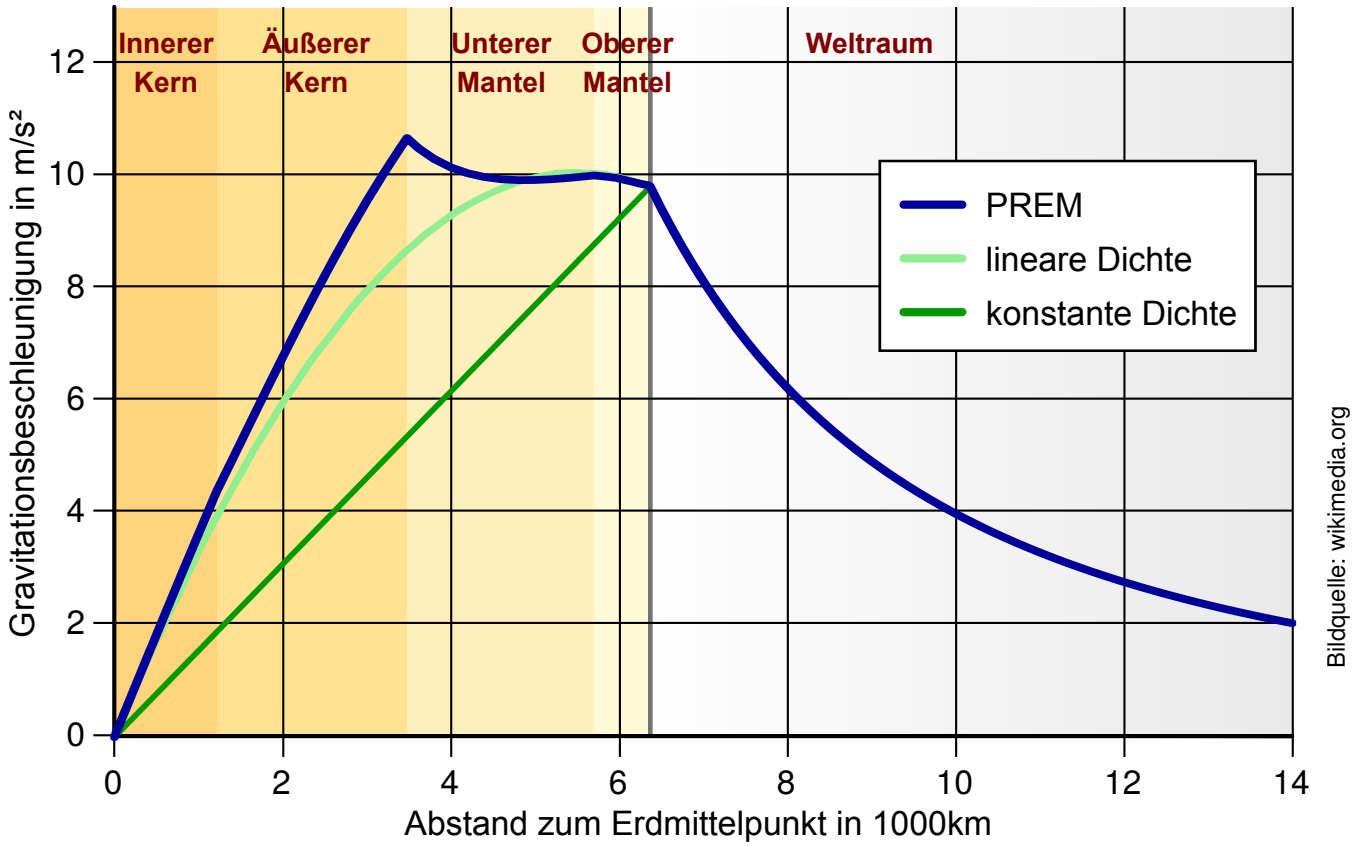


Wir sehen in diesem Beispiel sehr schön, dass f stetig ist, wie im folgenden Satz H1D erklärt, und sogar stetig diff'bar wo ϱ dies ist. Wir sehen aber auch, dass f nicht überall differenzierbar ist. Um realistische Beispiele wie dieses technisch korrekt zu behandeln, lohnt sich unsere Mühe!

Gravitationsfeld der Erde

H148
Übung

Gravitationsfeld der Erde gemäß *Preliminary Reference Earth Model*:



Gravitationsfeld einer Massendichte

Satz H1D: Regularität des Gravitationsfeldes

(1) Die Dichte $\varrho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei beschränkt und absolut integrierbar, zum Beispiel stetig mit kompaktem Träger. Dann definiert sie ein Gravitationsfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch das absolut konvergente Integral

$$\boxed{f(x) = \int_{y \in \mathbb{R}^3} \frac{y - x}{|y - x|^3} \, \varrho(y) \, \mathrm{d}y.}$$

(2) Das Vektorfeld f ist stetig und für jedes Kompaktum $D \subseteq \mathbb{R}^3$ gilt

$$\boxed{\int_{\partial D} f \bullet \mathrm{d}S = -4\pi \int_D \varrho(y) \, \mathrm{d}y.}$$

(3) Ist ϱ auf $B(x_0, r)$ stetig differenzierbar, so auch f, und dort gilt

$$\boxed{\operatorname{div} f = -4\pi\varrho.}$$

(4) Ist insbesondere $\varrho = 0$ auf $B(x_0, r)$, so gilt dort $\operatorname{div} f = 0$.

Gravitationsfeld einer Massendichte

⚠ Der Integrand hat einen Pol für $y = x$. Es ist ein Wunder, dass das Integral dennoch konvergiert und f sogar stetig bzw. stetig diff'bar ist.

☺ Die Aussage (4) ist leicht, wie oben gesehen: Liegt x außerhalb des Trägers von ϱ, so treten im Integranden keine Polstellen auf.

Regularitätsbeweise (zu Stetigkeit, Differenzierbarkeit, etc.) wie der folgende sind meist subtil. Physikalisch relevante Anwendungsbeispiele wie das Gravitationsfeld eines Planeten sind aber ein hervorragender Test, um unsere Techniken daran zu erproben. Nur für Unerschrockene!

Beweis des Satzes: (1) Die Dichte $\varrho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei beschränkt und absolut integrierbar: Es gibt Konstanten $L, M \in \mathbb{R}$, sodass $|\varrho(x)| \le L$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$ sowie $\int_{\mathbb{R}^3} |\varrho(x)| \, \mathrm{d}x \le M$. Für alle $x \in \mathbb{R}^3$ garantiert dies die absolute Integrierbarkeit, denn für jeden Radius $R > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{|y-x|<R} \frac{|\varrho(y)|}{|y-x|^2} \, \mathrm{d}y &\le \int_{r=0}^{R} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{L}{r^2} \cdot r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}r &&\le 4\pi L R &&< \infty \\
\int_{|y-x|\ge R} \frac{|\varrho(y)|}{|y-x|^2} \, \mathrm{d}y &\le \int_{|y-x|\ge R} \frac{|\varrho(y)|}{R^2} \, \mathrm{d}y \le \frac{1}{R^2} \int_{\mathbb{R}^3} |\varrho(y)| \, \mathrm{d}y &&\le M/R^2 &&< \infty
\end{aligned}$$

Damit ist das Faltungsintegral $f(x) = \int_{y \in \mathbb{R}^3} (y - x)/|y - x|^3 \cdot \varrho(y) \, \mathrm{d}y$ absolut konvergent.

(4) Gilt $\varrho = 0$ auf einem kleinen Ball $B(x_0, r)$, so können wir dort unter dem Integral ableiten: Das Vektorfeld f ist auf $B(x_0, r)$ beliebig oft differenzierbar, und es gilt $\operatorname{div} f = 0$. H139

Gravitationsfeld einer Massendichte

(2) Wir beweisen die Stetigkeit von f in $x_0 \in \mathbb{R}^3$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.
Hierzu finden wir $\delta > 0$, sodass für $|x - x_0| < \delta$ stets $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ gilt:
Wir zerlegen $\varrho = \varrho_0 + \varrho_1$ mit $\varrho_0 = \varrho \cdot \mathbf{I}_{B(x_0,\delta_0)}$, also $\varrho_1 = 0$ auf $B(x_0, \delta_0)$.
Hierzu gehört die Zerlegung $f = f_0 + f_1$ der zugehörigen Vektorfelder.
Dank (1) haben wir die Schranke $|f_0| \le 4\pi L\delta_0 + L\frac{4}{3}\pi\delta_0^3/\delta_0^2 = \varepsilon/3$ für $\delta_0 = \varepsilon/(16\pi L)$.
Das verbleibende Vektorfeld f_1 ist stetig auf $B(x_0, \delta_0)$, sogar C^∞ wie oben für (4) erklärt;
daher existiert $\delta_1 > 0$, sodass für $|x - x_0| < \delta_1$ stets $|f_1(x) - f_1(x_0)| < \varepsilon/3$ gilt.
Wir setzen $\delta := \min\{\delta_0, \delta_1\} > 0$. Für jedes $x \in \mathbb{R}^3$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt dann

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f_0(x) - f_0(x_0) + f_1(x) - f_1(x_0)| \\ &\le |f_0(x)| + |f_0(x_0)| + |f_1(x) - f_1(x_0)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 < \varepsilon. \end{aligned}$$

(3) Zur Differenzierbarkeit: Sei ϱ auf $B(x_0, r)$ stetig differenzierbar und $0 < r' < r$.
Wir können die Dichte $\varrho = \varrho_0 + \varrho_1$ so zerlegen, dass ϱ_0 stetig differenzierbar ist
mit $\varrho_0 = 0$ außerhalb $B(x_0, r)$ sowie $\varrho_0 = \varrho$ auf $B(x_0, r')$, also $\varrho_1 = 0$ auf $B(x_0, r')$.
Hierzu gehört die Zerlegung $f = f_0 + f_1$, und f_1 ist C^∞ auf $B(x_0, r')$ dank (4). Zudem gilt

$$f_0(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{y - x}{|y - x|^3} \varrho_0(y) \, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{z}{|z|^3} \varrho_0(x + z) \, \mathrm{d}z.$$

Das Gebiet $B(x_0, r)$ ist beschränkt, zudem ist $\partial\varrho_0/\partial x_i$ stetig und beschränkt:
Dank Ableitung unter dem Integral ist f_0 auf $B(x_0, r)$ stetig differenzierbar.
Demnach ist f auf $B(x_0, r')$ stetig differenzierbar, und dies gilt für alle $r' < r$.

Gravitationsfeld einer Massendichte

Satz H1E: Lösungen der Potentialgleichung

Die dreidimensionale **Laplace–Gleichung** $\Delta u = 0$ auf $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\}$
hat als sogenannte Fundamentallösung das **Newton–Potential**:

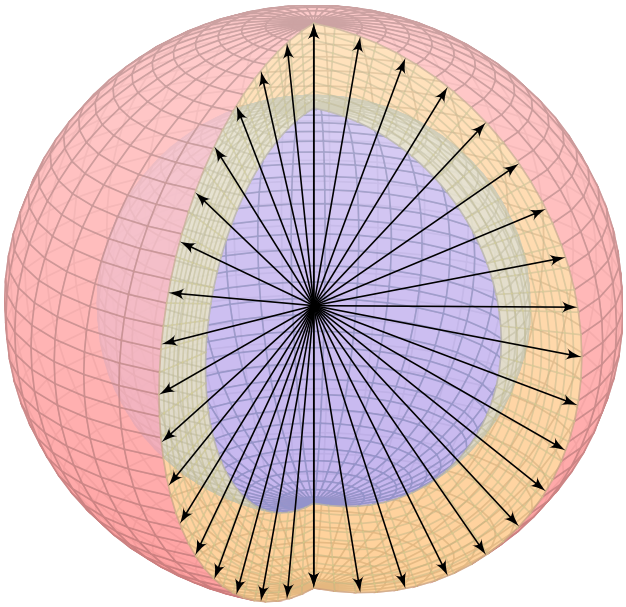
$$\boxed{N : \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{-1}{4\pi \cdot |x|}}$$

Dies entspricht der Gravitation einer Punktmasse im Ursprung;
die Konstanten wählen wir zur Normierung $\int_{\partial B(0,r)} \operatorname{grad} N \bullet \mathrm{d}S = 1$.
Die Massendichte $\varrho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei beschränkt und absolut integrierbar.
Die **Poisson–Gleichung** $\Delta u = \varrho$ wird gelöst durch **Superposition**:

$$\boxed{u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_{\mathbb{R}^3} N(x - y) \, \varrho(y) \, \mathrm{d}y}$$

Das Potential u ist dann stetig differenzierbar. Für sein Gradientenfeld
$f = \operatorname{grad} u$ und jedes Kompaktum $D \subseteq \mathbb{R}^3$ gilt $\int_{\partial D} f \bullet \mathrm{d}S = \int_D \varrho(y) \, \mathrm{d}y$.
Ist ϱ auf $B(x_0, r)$ stetig differenzierbar, so auch f, und $\Delta u = \operatorname{div} f = \varrho$.

Elektrostatik: elektrisches Feld einer Punktladung



Die Elektrostatik untersucht ruhende elektrische Ladungen und das von ihnen erzeugte, zeitlich konstante elektrische Feld $\vec{E}(x,y,z)$.

Fundamentales Beispiel: Die Ladung $q \in \mathbb{R}$ sei konzentriert auf den Nullpunkt, den wir uns als unendlich kleines, geladenes Teilchen vorstellen. Das elektrische Feld ist dann radial mit Stärke $|\vec{E}| = \mathrm{const}/r^2$ und hat einen Pol im Ursprung. Das Flussintegral berechnen wir etwa für eine Kugel $V = \overline{B}(0,r)$ vom Radius r um 0.

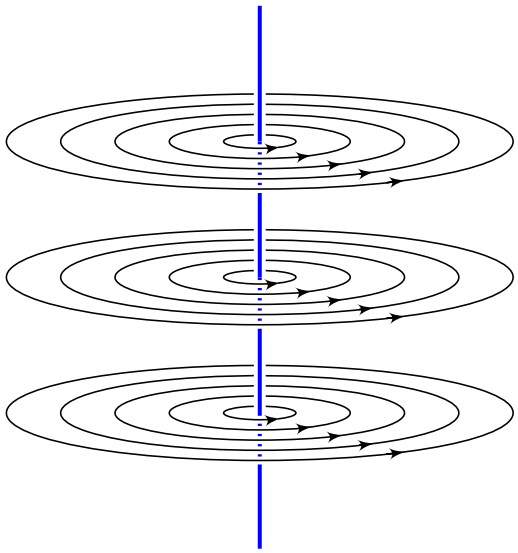
Das entspricht dem Gravitationsfeld einer Punktmasse. H137 Die Anwendungen ändern sich, die mathematischen Methoden bleiben.

Beispiel: Elektrisches Feld einer Punktladung q im Ursprung:

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{q}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}(x,y,z) \quad \Longrightarrow \quad \oiint_{\partial V} \vec{E} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = 4\pi q$$

☺ Außerhalb des Ursprungs $(0,0,0)$ gilt Quellenfreiheit, $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$, und Rotationsfreiheit, $\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0$. Erinnerung: Rechnen Sie dies erneut nach!

Magnetostatik: magnetisches Feld eines Stromes



Die Magnetostatik untersucht zeitlich konstante elektrische Ströme und das von ihnen erzeugte, zeitlich konstante Magnetfeld $\vec{B}(x,y,z)$. z.B. Dauermagnet, Erdmagnetfeld und Kompass, etc.

Einfaches Beispiel: Der konstante Strom $j \in \mathbb{R}$ sei konzentriert auf die z–Achse, die wir uns als unendlich dünnen und langen Leiter vorstellen. Das magnetische Feld ist dann zirkulär um die z–Achse (gemäß der Rechte-Hand-Regel) mit Stärke $|\vec{B}| = \mathrm{const}/r$ und wird singulär auf der z–Achse. Das Randintegral berechnen wir für eine Kreisscheibe S um die z–Achse.

Beispiel: Magnetisches Feld eines Stroms j entlang der z–Achse:

$$\vec{B}(x,y,z) = \frac{2j/c}{x^2+y^2}(-y,x,0) \quad \Longrightarrow \quad \oint_{\partial S} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \frac{4\pi}{c} j$$

☺ Außerhalb der z–Achse $(0,0,z)$ gilt Rotationsfreiheit, $\mathrm{rot}\,\vec{B} = 0$, und Quellenfreiheit, $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$. Erinnerung: Rechnen Sie dies erneut nach!

Übung: Dies sind die beiden zentralen Beispiele! Rechnen Sie nach, dass diese beiden Felder die folgenden Maxwell–Gleichungen erfüllen.

Maxwell–Gleichungen (im Vakuum) als Integralgleichungen

H155
Ergänzung

Coulomb Ladungsgesetz
$$\oiint_{\partial V} \vec{E} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = \iiint_V 4\pi\varrho\,\mathrm{d}V$$

Faraday Induktionsgesetz
$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\frac{1}{c}\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S$$

Gauß Quellenfreiheit
$$\oiint_{\partial V} \vec{B} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = 0$$

Ampère Durchflutungsgesetz
$$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \frac{1}{c}\iint_S \left(4\pi\vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S$$

Hier ist $\vec{E}$ das elektrische Feld, $\vec{B}$ das magnetische, ϱ die Ladungsdichte, $\vec{J}$ die Stromdichte. Dies sind lineare Integralgleichungen, äquivalent hierzu sind lineare Differentialgleichungen in $\vec{E}$ und $\vec{B}$ mit Quelltermen ϱ und $\vec{J}$ auf der rechten Seite. Sie besagen: (1) Die Quellen des E–Feldes sind die Ladungen ϱ. (2) Die Wirbeldichte des E–Feldes entspricht der zeitlichen Änderung des B–Feldes. (3) Das B–Feld ist quellenfrei, es gibt keine magnetischen Monopole. (4) Die Wirbeldichte des B–Feldes entspricht der Stromdichte $\vec{J}$ plus der zeitlichen Änderung des E–Feldes. Für zeitlich konstante Felder entkoppeln die Gleichungen wie oben gesehen.
📖 Zum Einstieg konsultiere man `de.wikipedia.org/wiki/Maxwell-Gleichungen`, zur Vertiefung etwa Jackson: *Klassische Elektrodynamik*, de Gruyter, 4. Auflage 2006.
▶ Up and Atom: *Maxwell's Equations – Beginner's Guide.* `youtu.be/F3QHUvr8d8I`

Maxwell–Gleichungen als Differentialgleichungen

H156
Ergänzung

Aufgabe: (1) Folgern Sie die zugehörigen Differentialgleichungen.

Lösung: Wir formen um mit Hilfe unserer Integralsätze:

$$\oiint_{\partial V} \vec{E} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S \overset{\text{Gauß}}{\underset{\text{G3G}}{=}} \iiint_V (\nabla \cdot \vec{E})\,\mathrm{d}V$$
$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \overset{\text{Stokes}}{\underset{\text{G1A}}{=}} \iint_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S$$
$$\oiint_{\partial V} \vec{B} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S \overset{\text{Gauß}}{\underset{\text{G3G}}{=}} \iiint_V (\nabla \cdot \vec{B})\,\mathrm{d}V$$
$$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \overset{\text{Stokes}}{\underset{\text{G1A}}{=}} \iint_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S$$

Für jedes kompakte Volumen V und Flächenstück S gilt demnach

$$\iiint_V \left[\nabla \cdot \vec{E} - 4\pi\varrho\right]\mathrm{d}V = 0, \qquad \iint_S \left[\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right] \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = 0,$$
$$\iiint_V \left[\nabla \cdot \vec{B}\right]\mathrm{d}V = 0, \qquad \iint_S \left[\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c}\vec{J}\right] \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = 0.$$

Dies gilt genau dann, wenn die Integranden verschwinden (H1A, H1B).

Elektrodynamik: Maxwellsche Gleichungen

Wir erhalten die Maxwell–Gleichungen als Differentialgleichungen:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\varrho, \qquad \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0,$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \qquad \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}.$$

Die integrale und die differentielle Formulierung sind äquivalent! Je nach Anwendungen ist die eine oder die andere geschickter. Das spüren Sie sehr deutlich beim Nachrechnen der beiden zentralen Beispiele: Auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ bzw. $\mathbb{R}^3 \setminus \{z\text{–Achse}\}$ ist die differentielle Form bequemer. (Warum?) Um den Nullpunkt bzw. die Achse nutzen Sie besser die integrale Form. (Warum?)

Aufgabe: (2) Folgern Sie die Ladungserhaltung (Kontinuitätsgleichung):

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

Nachrechnen: Wir nutzen Schwarz, $\operatorname{div}\operatorname{rot} = 0$, hier $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = 0$, angewendet auf die erste und vierte Gleichung (Coulomb und Ampère):

$$4\pi\frac{\partial \varrho}{\partial t} \overset{(1)}{=} \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \vec{E} \overset{\text{D4A}}{=} \nabla \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \overset{(4)}{=} \nabla \cdot \left[\nabla \times c\vec{B} - 4\pi\vec{J}\right] \overset{\text{D4A}}{=} -4\pi\nabla \cdot \vec{J}$$

Elektrodynamik: Maxwellsche Gleichungen

Aufgabe: (3) Folgern Sie die elektromagnetischen Wellengleichungen:

$$\nabla^2\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 4\pi\nabla\varrho + \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial \vec{J}}{\partial t},$$
$$\nabla^2\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -4\pi\nabla \times \vec{J}.$$

Für $\varrho = 0$ und $\vec{J} = 0$ bleiben demnach die freien Wellengleichungen:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \nabla^2\vec{E} = 0, \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \nabla^2\vec{B} = 0.$$

Nachrechnen: Wir nutzen $\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2\vec{F}$:

$$0 = \nabla \times \left[\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right] = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \vec{B}$$
$$= 4\pi\nabla\varrho - \nabla^2\vec{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$$

Ebenso erhalten wir die magnetische Wellengleichung.

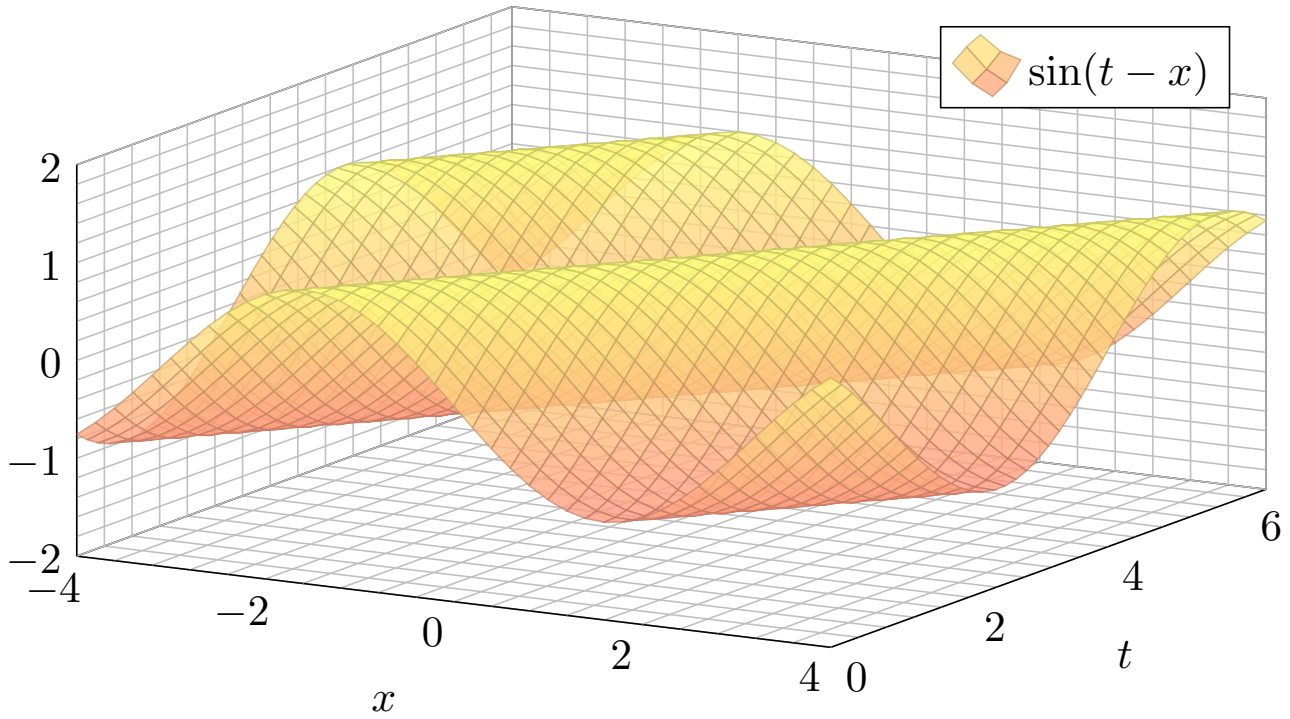
Elektrodynamik: Maxwellsche Gleichungen

H159
Ergänzung

Die Wellengleichung $(c^{-2}\partial_0^2 - \partial_1^2 - \cdots - \partial_n^2)u = 0$ wird gelöst durch Wellenfunktionen $u(t,\vec{x}) = f(c\,|\vec{\xi}|\,t - \vec{\xi}\bullet\vec{x})$ mit $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe: (4) Rechnen Sie nach, dass u tatsächlich eine Lösung ist.

Lösung: (4) Nun genügt sorgsames Ableiten mit der Kettenregel.



Elektrodynamik: Maxwellsche Gleichungen

H160
Ergänzung

Die Maxwellschen Gleichungen sind lineare partielle Differentialgleichung in $\vec{E}$ und $\vec{B}$ mit Inhomogenitäten in ϱ und $\vec{J}$ auf der rechten Seite. Die hieraus abgeleiteten Wellengleichungen beschreiben, wie sich elektromagnetische Wellen in Raum und Zeit ausbreiten, siehe Seite D533.

Viele berühmte Wissenschaftler des 19. Jahrhunderts waren an der spektakulären Erforschung des Elektromagnetismus beteiligt und haben Teile dieser Gleichungen experimentell und theoretisch untersucht. Doch erst James Clerk Maxwell (*A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*, 1865) konnte sie zu einem konsistenten Gesamtsystem von acht Gleichungen zusammenfügen; diese haben wir oben ausgeschrieben als zwei skalare und zwei vektorielle Gleichungen.

Damit brachte Maxwell die intuitiv-qualitativen Beschreibungen in die mathematisch-quantitative Form der Vektorfelder und eröffnete so theoretische wie praktische Berechnungen. Maxwells mathematische Theorie gab alle zuvor gefundenen Phänomene präzise wieder, zudem konnte sie völlig neue vorhersagen: elektromagnetische Wellen! Diese waren 1865 experimentell noch lange nicht zugänglich; dies gelang Heinrich Hertz 1886. Erst Maxwells theoretischer Durchbruch ermöglichte den technologischen Fortschritt, von dem wir bis heute profitieren!

Jede Lösung $u(t,\vec{x}) = f(c\,|\vec{\xi}|\,t - \vec{\xi}\bullet\vec{x})$ ist eine Welle, in Form der Funktion f, die sich mit Lichtgeschwindigkeit c in Richtung $\vec{\xi}$ ausbreitet. (Klassisch sollte f mindestens zweimal stetig differenzierbar sein, etwa $f = \sin$, notfalls nutzen wie die Ableitung im Distributionensinne.)

Maxwells Gleichungen haben eine besondere Symmetrie: Sie beinhalten die Invarianz der Lichtgeschwindigkeit c unabhängig vom Betrachter, auch in bewegten Bezugssystemen. Diese erstaunliche Tatsache führte direkt zu Einsteins Spezieller Relativitätstheorie (1905).

Potentiale und Gradientenfelder

Wir führen die Diskussion von Feldern und Potentialen fort (E341).
Wiederholung: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Was versteht man unter...
(1) einem Skalarfeld F auf U? (2) einem Vektorfeld f auf U?
(3) dem Gradienten von F? (4) einem Potential zu f?
(5) Was besagt der HDI für ein Vektorfeld f mit Potential F?
(6) Was gilt demnach für Arbeitsintegrale geschlossener Wege?

(1) Ein **Skalarfeld** auf U ist eine stetige Abbildung $F : \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}$.
(2) Ein **Vektorfeld** auf U ist eine stetige Abbildung $f : \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^n$.
(3) Zu jedem stetig diff'baren Skalarfeld $F : U \to \mathbb{R}$ ist der **Gradient**

$$f : U \to \mathbb{R}^n \quad \text{gegeben durch} \quad f = F' = \operatorname{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right).$$

(4) Ein **Potential** zu $f : U \to \mathbb{R}^n$ ist ein Skalarfeld $F : U \to \mathbb{R}$ mit $F' = f$.
(5) Für jeden stückweise stetig diff'baren Weg $\gamma : [a, b] \to U$ gilt dann:

$$\int_\gamma f \bullet \mathrm{d}\gamma \overset{\text{Def}}{=} \int_{t=a}^b F'(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t)\, \mathrm{d}t \overset{\text{KR}}{=} \int_{t=a}^b \frac{\mathrm{d}F(\gamma(t))}{\mathrm{d}t}\, \mathrm{d}t \overset{\text{HDI}}{=} F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

(6) Ist $f = F'$ und γ geschlossen, also $\gamma(a) = \gamma(b)$, so folgt $\oint_\gamma f \bullet \mathrm{d}\gamma = 0$.

Potentiale und Gradientenfelder

(1–2) Jedem Punkt $x \in U$ aus dem Definitionsgebiet U wird eine reelle Zahl $F(x) \in \mathbb{R}$ bzw. ein Vektor $f(x) \in \mathbb{R}^n$ zugeordnet. Wir nehmen meist stillschweigend an, dass diese Zuordnungen stetig / stetig diff'bar sind.

(3–4) In Dimension $n = 1$ ist $f = F'$ **Ableitung** und F **Stammfunktion**. Potentiale sind nur bis auf additive Konstanten eindeutig bestimmt.

(5) Das Arbeitsintegral eines Gradientenfeldes $f = F'$ hängt nur vom **Start** $p = \gamma(a)$ und **Ziel** $q = \gamma(b)$ ab, ansonsten aber nicht vom Weg γ.

Physikalisch entspricht dies der Energieerhaltung: Die zur Bewegung entlang γ aufgebrachte Arbeit wird als Lageenergie gespeichert.

(6) So kann man feststellen, ob ein Vektorfeld f ein Potential hat:
Aus $\oint_\gamma f \bullet \mathrm{d}\gamma \neq 0$ folgt, dass das Feld f kein Potential haben kann.

Wir nennen ein Vektorfeld f **konservativ**, wenn $\oint_\gamma f \bullet \mathrm{d}\gamma = 0$ gilt.
Das bedeutet, längs geschlossener Wege wird keine Arbeit verrichtet.
Jede an einer Stelle des Weges aufgewandte Energie wird an anderer Stelle zurückgewonnen, die Gesamtenergie bleibt schließlich erhalten.

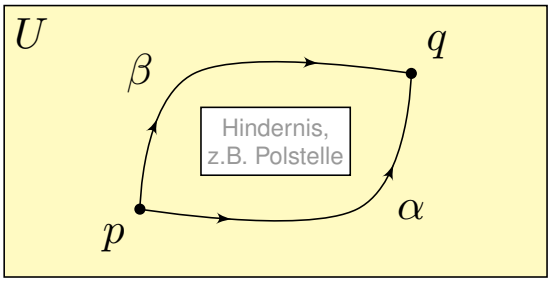
📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §5. Das Potentialproblem lösen wir in Kapitel E und hier allgemein. Wir nutzen es in Kapitel M für exakte Differentialgleichungen.

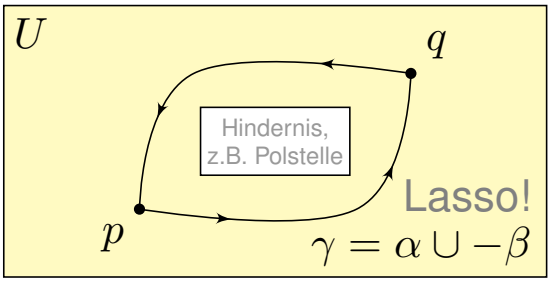
Exakte und konservative Vektorfelder

Ein Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^n$ heißt **exakt**, oder **Gradientenfeld**, wenn es ein Potential erlaubt, also ein Skalarfeld $F : U \to \mathbb{R}$ mit $F' = f$ existiert.

Das ist das Potentialproblem. Wie können wir es konkret anpacken?

Ein Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^n$ heißt **konservativ**, oder **global wirbelfrei**, wenn $\oint_\gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma = 0$ für jeden geschlossenen Weg $\gamma : [a, b] \to U$ gilt.





Konservativ: Das Arbeitsintegral hängt nur von Start p und Ziel q ab, nicht vom Integrationsweg, denn $\int_\alpha f \cdot \mathrm{d}\alpha - \int_\beta f \cdot \mathrm{d}\beta = \oint_\gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma = 0$.

Satz H2A: Hauptsatz: exakt $\Leftrightarrow$ konservativ

(1) Besitzt das Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^n$ ein Potential, so ist f konservativ.
(2) Ist umgekehrt f konservativ, so ist $F(x) = \int_{s=p}^{x} f(s) \cdot \mathrm{d}s$ ein Potential.

Exakte und konservative Vektorfelder

Nachrechnen: (1) Aus $f = F'$ folgt $\oint_\gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$.

(2) Wir können und werden U als wegzusammenhängend annehmen. Wir wählen einen Fußpunkt $p \in U$ und definieren $F : U \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) := \int_{s=p}^{x} f(s) \cdot \mathrm{d}s = \int_\alpha f \cdot \mathrm{d}\alpha = \int_{t=0}^{1} f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\, \mathrm{d}t.$$

Hier ist $\alpha : [0, 1] \to U$ von $\alpha(0) = p$ nach $\alpha(1) = x$ ein beliebiger (!) Weg.

☺ Der Wert $F(x)$ ist wohldefiniert, also unabhängig vom willkürlich gewählten Weg α, da wir unser Vektorfeld f konservativ voraussetzen.

Ist F ein Potential zu f? Gilt wirklich $\partial_i F = f_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$?
Für jeden Punkt $x \in U$ und $h > 0$ mit $[x, x + he_i] \subseteq U$ finden wir:

$$F(x + he_i) \overset{(2)}{=} F(x) + \int_{t=0}^{h} f_i(x + te_i)\, \mathrm{d}t$$

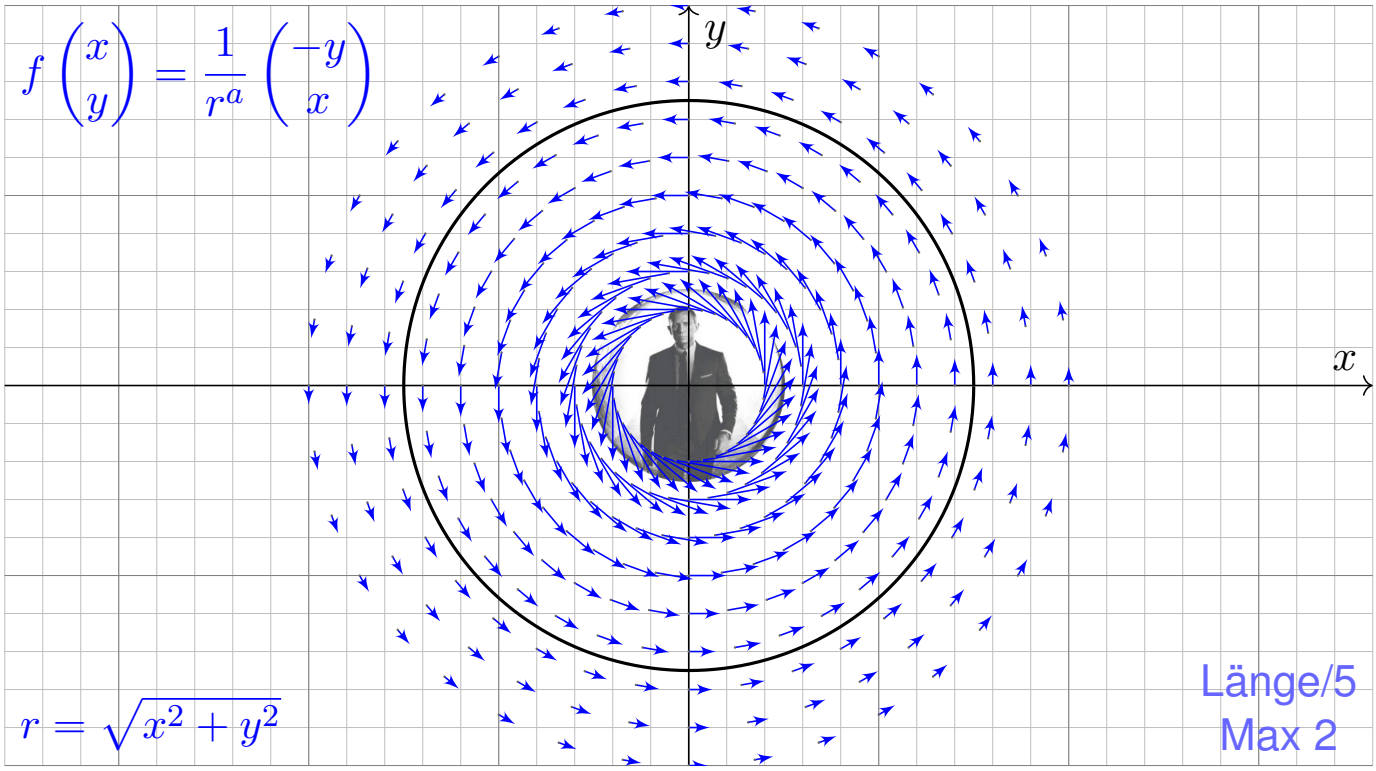
$$\partial_i F(x) \overset{\text{Def}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h} F(x + he_i) \overset{\text{HDI}}{=} f_i(x)$$

☺ Somit gilt $F' = f$ wie gewünscht, das heißt, F ist ein Potential zu f.

Zentrales Beispiel: das Wirbelfeld

Aufgabe: (1) Sei $a \in \mathbb{R}$. Skizzieren Sie das zirkuläre Vektorfeld

$$f : U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad f(x,y) = (-y,x)/(x^2+y^2)^{a/2}.$$



Zentrales Beispiel: das Wirbelfeld

Aufgabe: Wir betrachten $f(x,y) = (-y,x)/r^a$ mit $r = \sqrt{x^2+y^2}$.
(2) Berechnen Sie $|f(x,y)|$ und das Arbeitsintegral längs $\partial B(0,r)$.
(3) Berechnen Sie $\operatorname{rot}(f)$. Für welche a ist $\operatorname{rot}(f)$ konstant? Null?
(4) Für welche a existiert zu f ein Potential $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$?

Lösung: (2) Wir finden $|f(x,y)| = r^{1-a}$. Da f überall tangential ist:

$$\oint_{\partial B(0,r)} f(s) \cdot \mathrm{d}s = \oint_{\partial B(0,r)} f(s) \cdot t_{\partial B}\, |\mathrm{d}s| = \oint_{\partial B(0,r)} r^{1-a}\, |\mathrm{d}s| = 2\pi\, r^{2-a}$$

(3) Wir finden $\operatorname{rot}(f) = \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 = \ldots \ldots = (2-a)/r^a$.
Die Rotation ist konstant für $a \in \{0,2\}$, und Null nur für $a = 2$.

(4) Das Feld f erlaubt kein Potential auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, denn es gilt

$$\oint_{\partial B(0,r)} f(s) \cdot \mathrm{d}s \neq 0.$$

☺ Das Vektorfeld ist nicht konservativ, also auch kein Gradientenfeld.

⚠ Für $a = 2$ ist das Feld f rotationsfrei, besitzt dennoch kein Potential!

Zentrales Beispiel: das Wirbelfeld

Wie kann das sein? Das Vektorfeld f rotiert offensichtlich um den Nullpunkt, aber für $a = 2$ verschwindet die Rotation $\operatorname{rot}(f)$ überall.

⚠ Im Nullpunkt $(x, y) = (0, 0)$ hat das Vektorfeld f eine Polstelle! Die Zirkulation konzentriert sich im Nullpunkt; dort sind f und $\operatorname{rot}(f)$ nicht definiert, aber wir können und werden drumherum integrieren!

☺ Unsere Rechnung nutzt die Symmetrie und kommt ohne explizite Parametrisierung aus. Alternativ können wir die Kreislinie $\partial B(0, r)$ explizit parametrisieren, etwa durch den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t)$. Damit berechnen wir das Arbeitsintegral:

$$\int_{\partial B(0,r)} f(s) \cdot \mathrm{d}s = \int_\gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma = \int_{t=0}^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_{t=0}^{2\pi} \frac{1}{r^a} \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_{t=0}^{2\pi} r^{2-a}\,\mathrm{d}t = 2\pi\, r^{2-a}.$$

Für $a = 0$ gilt $\operatorname{rot}(f) = 2$ und das Arbeitsintegral ist gleich $2 \operatorname{vol}_2 B(0, r)$.
Für $a = 2$ gilt $\operatorname{rot}(f) = 0$ und das Arbeitsintegral ist unabhängig von r.
☺ Beide Phänomene erklären sich durch den Satz von Green.

Rotationsfreie Vektorfelder und Potentiale

Wiederholung: 📖 Stroppel, Höhere Mathematik 2, Satz 4.3.10.
(1) Wann heißt ein C^1–Vektorfeld $f : \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^n$ rotationsfrei?
(2) Was besagt der Satz von Schwarz (D4A) für partielle Ableitungen?
(3) Ist Rotationsfreiheit für Exaktheit notwendig? (4) hinreichend?
(5) Auf welchen Gebieten $U \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt „rotationsfrei = exakt“?

(1) Ein C^1–Vektorfeld f heißt **rotationsfrei**, wenn $\partial_j f_i = \partial_i f_j$ gilt.
Das bedeutet, die Jacobi–Matrix $(\partial_j f_i)_{i,j}$ ist symmetrisch.
In Dimension $n = 2, 3$ ist dies gleichbedeutend mit $\operatorname{rot}(f) = 0$.

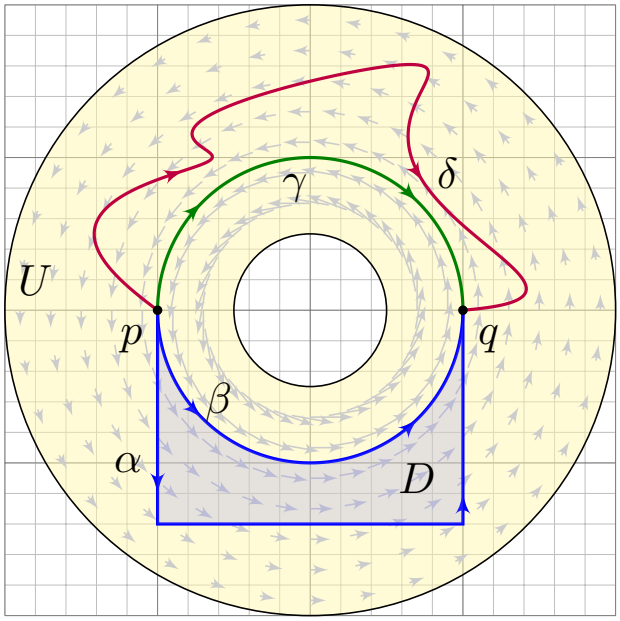
(2) Jede C^2–Funktion $F : U \to \mathbb{R}$ erfüllt $\partial_j \partial_i F = \partial_i \partial_j F$ für alle i, j.
Jedes C^1–Gradientenfeld $f = (\partial_1 F, \ldots, \partial_n F)$ ist somit rotationsfrei.

(3) Für jedes C^1–Vektorfeld f gilt: Exaktheit impliziert Rotationsfreiheit.
Existiert nämlich ein Potential F mit $\partial_i F = f_i$, so folgt $\partial_j f_i = \partial_i f_j$.

(4) Aus $\partial_j f_i \neq \partial_i f_j$ folgt, dass das Feld f kein Potential haben kann.
Aber allein aus $\partial_j f_i = \partial_i f_j$ folgt noch nicht, dass f ein Potential hat!

(5) Ist das Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^n$ einfach zusammenhängend, so erlaubt jedes rotationsfreie Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^n$ ein Potential $F : U \to \mathbb{R}$.

Homotopie von Integrationswegen



Sei $f : \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Wir integrieren entlang der Wege $\alpha, \beta : [a, b] \to U$ von p nach q.

Die Ergebnisse sind i.A. verschieden!

Hat f ein Potential F, so ist jedes Arbeitsintegral gleich $F(q) - F(p)$.

Aus $\operatorname{rot}(f) = 0$ und $\alpha \cup -\beta = \partial D$ folgt $\int_\alpha f \cdot \mathrm{d}\alpha = \int_\beta f \cdot \mathrm{d}\beta$ dank Stokes.

☺ In dieser glücklichen Situation müssen wir viel weniger rechnen!

Wege α und β heißen **homotop** in U, wenn sie sich stetig ineinander deformieren lassen — innerhalb von U und bei festen Endpunkten.

Satz H2B: Rotationsfreiheit impliziert Homotopieinvarianz.

Ist das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^n$ rotationsfrei, so liefern homotope Wege $\alpha, \beta : [a, b] \to U$ dasselbe Arbeitsintegral $\int_\alpha f \cdot \mathrm{d}\alpha = \int_\beta f \cdot \mathrm{d}\beta$.

Homotopie von Integrationswegen

Zwei Wege sind homotop, wenn sie sich stetig ineinander deformieren lassen. Um damit auch rechnen zu können, definieren wir es genauer:

Definition H2C: Homotopie mit festen Endpunkten

Eine **Homotopie** ist eine stetige Abbildung $H : [0, 1] \times [a, b] \to U$.
Für jedes $s \in [0, 1]$ definiert $H_s(t) := H(s, t)$ einen Weg $H_s : [a, b] \to U$.

Für eine **Homotopie von α nach β** verlangen wir $H_0 = \alpha$ und $H_1 = \beta$ sowie selben Start $H_s(a) = p$ und selbes Ziel $H_s(b) = q$ für alle $s \in [0, 1]$.

Somit ist H_s für $s \in [0, 1]$ eine Familie von Wegen, die $H_0 = \alpha$ stetig in $H_1 = \beta$ deformiert, innerhalb des Gebietes U, bei festen Endpunkten.

Die Homotpie H parametrisiert H ein Flächenstück mit Rand $\alpha \cup -\beta$, die anderen Kanten $[0, 1] \times \{a, b\}$ des Rechtecks sind konstante Wege. Das Flächenstück muss dabei nicht regulär oder injektiv sein.

Im obigen Beispiel sind α und β in U homotop, aber nicht β und γ. Warum? Wir sehen $\beta \not\sim \gamma$ an den unterschiedlichen Integralen! Diese Beobachtungen präzisieren wir durch Satz H2B.

Homotopieinvarianz des Arbeitsintegrals

Wir können nun die behauptete Homotopieinvarianz nachrechnen:

Beweis des Satzes H2B: Die Wege $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ seien homotop, das heißt, es existiert eine Homotopie $H : [0,1] \times [a,b] \to U$. Dies ist ein parametrisiertes Flächenstück mit parametrisiertem Rand $\partial H = \alpha \cup -\beta$. Die anderen Kanten $[0,1] \times \{a,b\}$ des Rechtecks sind konstante Wege. Wir dürfen H als stückweise C^2 annehmen. Dank Stokes (G1A) gilt dann

$$\int_\beta f \cdot \mathrm{d}\beta - \int_\alpha f \cdot \mathrm{d}\alpha = \int_H \operatorname{rot}(f) \cdot \mathrm{d}H = 0.$$

Diese Rechnung gelingt für $n = 2$ und $n = 3$ mit Stokes. In beliebiger Dimension verläuft das Argument im Prinzip genauso, wir haben aber unsere Integralsätze nur für $n \le 3$ formuliert.

Beispiel: Für Wege $\gamma : [a,b] \to U = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ messen wir den Winkelzuwachs E317 durch

$$W(\gamma) := \int_\gamma \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2 + y^2}.$$

Dieses Arbeitsintegral ist homotopieinvariant, bei festem Start und Ziel, da unser Vektorfeld rotationsfrei ist. Nicht-homotope Weg unterscheiden wir hier leicht durch ihre Integrale!

Variante: Für die Homotopie geschlossener Wege genügt $H(s,a) = H(s,b)$ für alle $s \in [0,1]$.

Homotopie von Wegen in einem Kreisring

Satz H2D: Homotopie von Wegen in einem Kreisring

Sei $U = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma^2 < x^2 + y^2 < \rho^2 \,\}$ ein Kreisring, $0 < \sigma < \rho$. Je zwei Wege $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to U$ mit gleichem Start $p = \gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ und Ziel $q = \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$ sind genau dann homotop im Kreisring U, wenn sie die gleiche Umlaufzahl haben, also $W(\gamma_0) = W(\gamma_1)$ gilt.

Beweis: „$\Rightarrow$“: Die Invarianz von $W(\gamma_s)$ haben wir eben nachgerechnet. Für die Umkehrung „$\Leftarrow$“ schreiben wir die Wege in Polarkoordinaten:

$$\gamma_0(t) = r_0(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0(t)} \quad \text{und} \quad \gamma_1(t) = r_1(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1(t)}$$

Wegen $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ können wir gleiche Startwinkel $\varphi_0(a) = \varphi_1(a)$ wählen, und $W(\gamma_0) = W(\gamma_1)$ impliziert dann gleiche Zielwinkel:

$$\varphi_0(b) = \varphi_0(a) + W(\gamma_0) \quad = \quad \varphi_1(a) + W(\gamma_1) = \varphi_1(b)$$

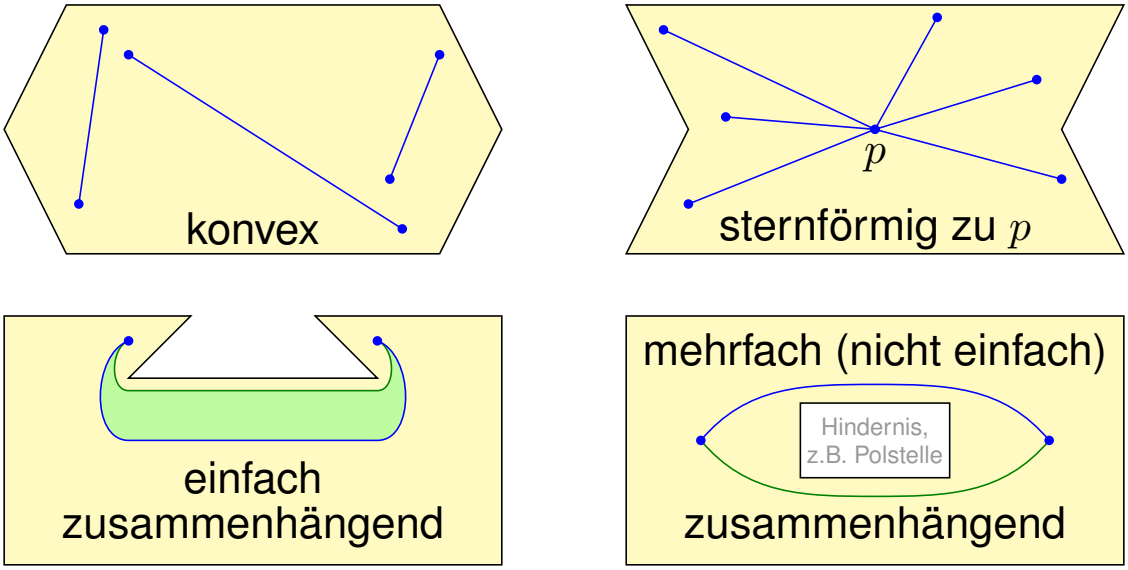
Wir erhalten eine Homotopie H von γ_0 nach γ_1 innerhalb U durch

$$H_s(t) = \big[(1-s)r_0(t) + s r_1(t)\big]\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(1-s)\varphi_0(t) + s\varphi_1(t)]}$$

Was ist hierzu zu prüfen? Dies ist eine stetig Abbildung $H : [0,1] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ mit $H_0 = \gamma_0$ und $H_1 = \gamma_1$. Ihr Bild liegt in U, denn die Radien bleiben zwischen den Grenzen σ und ρ.

Einfach zusammenhängende Gebiete

Wir verstehen Kreisringe und gehen nun zu allgemeineren Gebieten:



Will man prüfen, ob ein Vektorfeld $f : \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^n$ konservativ ist, so muss man $\oint_\gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma = 0$ nachweisen für *alle* geschlossenen Wege in U!

Ist f rotationsfrei, so genügt jeweils ein Weg in jeder Homotopieklasse. Hier spielt die Form des Gebietes U eine entscheidende Rolle!

Ganz einfach wird es, wenn alle Wege untereinander homotop sind.

Einfach zusammenhängende Gebiete

Eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, wenn zu je zwei Punkten $p, q \in U$ ihre Verbindungsstrecke $[p, q] = \{\, (1-s)p + sq \mid 0 \le s \le 1 \,\}$ in U liegt.

Wir nennen U **sternförmig** bezüglich eines festen Zentrums $p \in U$, wenn zu jedem Punkt $q \in U$ die Verbindungsstrecke $[p, q]$ in U liegt,

Wir nennen U **(weg)zusammenhängend**, wenn zu je zwei Punkten $p, q \in U$ ein Weg $\alpha : [0, 1] \to U$ von $\alpha(0) = p$ nach $\alpha(1) = q$ existiert.

Zudem heißt U **einfach zusammenhängend**, wenn zudem je zwei Wege $\alpha, \beta : [0, 1] \to U$ mit gleichem Start und Ziel homotop in U sind.

Äquivalent als Lasso: Jeder geschlossene Weg $\gamma : [0, 1] \to U$ lässt sich auf einen Punkt zusammenziehen (durch eine Homotopie in U).

Aufgabe: Zeigen Sie für jedes Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^n$ die Implikationen U konvex $\Longrightarrow U$ sternförmig $\Longrightarrow U$ einfach zusammenhängend.

Lösung: (1) Ist U konvex, so eignet sich jeder Punkt $p \in U$ als Zentrum.

(2) Sei U sternförmig zu p und $\gamma : [0, 1] \to U$ ein geschlossener Weg. Wir können $\gamma(0) = \gamma(1) = p$ annehmen, notfalls dorthin verschieben. Wir finden die Homotopie $H_s(t) = (1-s)p + s\gamma(t)$. Skizzieren Sie's!

Lösung des Potentialproblems

Satz H2E: Potentiale auf einfach zusammenhängenden Gebieten

Unser Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sei einfach zusammenhängend, z.B. konvex oder sternförmig zu p. Ein C^1–Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^n$ erlaubt genau dann ein Potential $F : U \to \mathbb{R}$, wenn f rotationsfrei ist, also $\partial_j f_i = \partial_i f_j$ erfüllt.

In diesem Fall erhalten wir ein Potential durch das Arbeitsintegral

$$F(x) = \int_{s=p}^{x} f(s) \cdot \mathrm{d}s = \int_{t=a}^{b} f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \alpha : [a,b] \to U \text{ und} \\ \alpha(a) = p,\ \alpha(b) = x. \end{cases}$$

$f : U \to \mathbb{R}^n$ ist exakt, $\exists F : U \to \mathbb{R} : F' = f$	$\xrightarrow{f \text{ stetig diff'bar}}$ $\xleftarrow[U \text{ einfach zshgd}]{}$	f ist rotationsfrei, $\partial_j f_i = \partial_i f_j$ auf U
global: HDI $\Downarrow$ $\Uparrow$ Arbeitsintegral		f stetig diff'bar $\Uparrow$ $\Downarrow$ Stokes: lokal
f ist konservativ, $\oint_\gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma = 0$ in U	$\xrightarrow{\text{immer}}$ $\xleftarrow[U \text{ einfach zshgd}]{}$	f ist lokal konservativ, $\oint_\gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma = 0$ lokal

Lösung des Potentialproblems

Gegeben sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld.
Problem: Wie prüfen Sie, ob f exakt ist? Wie finden Sie ein Potential?

☺ Notwendiges Kriterium, für $f \in C^1$, ist Rotationsfreiheit $\partial_j f_i = \partial_i f_j$.

☺ Auf jedem einfach zusammenhängenden Gebiet ist sie hinreichend!

☺ Das Arbeitsintegral $F(x) = c + \int_{s=p}^{x} f(s) \cdot \mathrm{d}s$ liefert uns ein Potential $F : \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}$. Die Eichung $F(p) = c$ legt das Potential eindeutig fest.

☺ Die Wahl des Integrationsweges α vom Fußpunkt p zum Ziel x in U ist beliebig: Je zwei sind homotop und ergeben dasselbe Integral (H2B).

☺ Zwecks leichterer Integration wählt man α möglichst geschickt, etwa $\alpha : [0,1] \to U$ mit $\alpha(t) = (1-t)p + tx$ falls U sternförmig zu p ist.

☺ Speziell für Quader kann man auch ein Hakenintegral nutzen:

$$F(x) = \int_{t=p_1}^{x_1} f_1(t, p_2, p_3)\,\mathrm{d}t + \int_{t=p_2}^{x_2} f_2(x_1, t, p_3)\,\mathrm{d}t + \int_{t=p_3}^{x_3} f_3(x_1, x_2, t)\,\mathrm{d}t$$

⚠ Nach der Rechnung die Probe nicht vergessen: Gilt $F' = f$?

Für die Rotationsfreiheit verlangen wir, dass f stetig differenzierbar ist. Alle anderen Begriffe und Implikationen gelten für stetige Vektorfelder; sie benötigen keine Ableitung, nur Integrale.

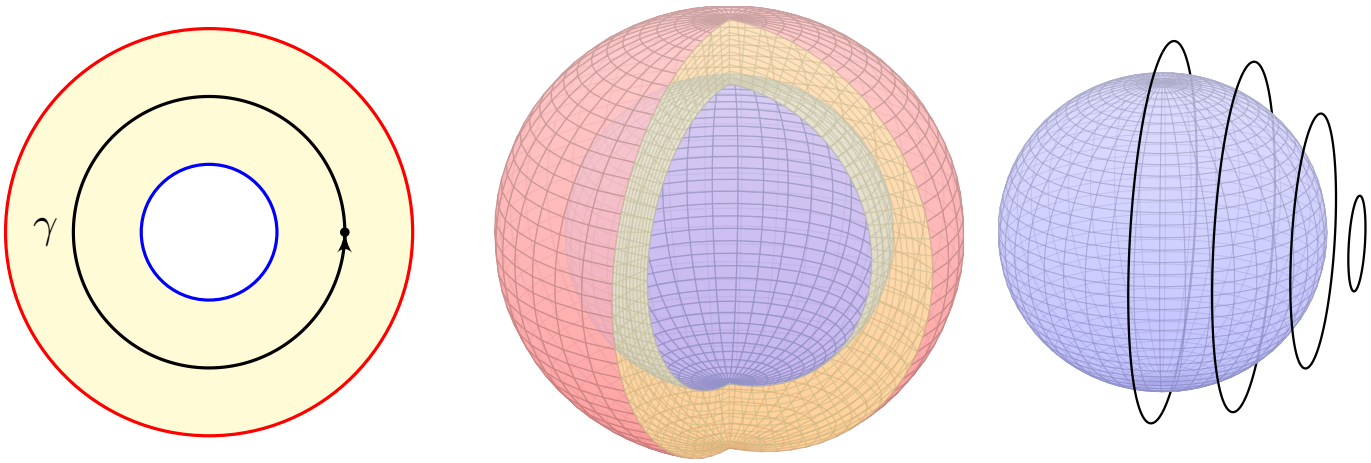
Kreisring, Kugelschale und Torus

H217
Übung

Aufgabe: Skizzieren Sie zu Radien $0 \le \sigma < \rho \le \infty$

1. den Kreisring $A = \{\, x \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma < |x| < \rho \,\}$,
2. die Kugelschale $K = \{\, x \in \mathbb{R}^3 \mid \sigma < |x| < \rho \,\}$.
3. einen Volltorus $V \subseteq \mathbb{R}^3$ und seinen Außenraum $U = \mathbb{R}^3 \smallsetminus \overline{V}$.

Sind diese Gebiete konvex? sternförmig? zshgd? einfach zshgd?
Unter welchen Voraussetzungen hat ein Vektorfeld hierauf ein Potential?



Die Kugelschale ist einfach zusammenhängend, der Kreisring nicht!
Jeder geschlossene Weg $\gamma : [0,1] \to K$ ist in K zusammenziehbar!
⚠ Einfach zusammenhängend bedeutet nicht unbedingt „ohne Löcher“.

Anwendung auf Kugelschalen

H218
Ausführung

Die Kugelschale ist nicht konvex oder sternförmig, aber einfach zshgd.
(Anschaulich ist das klar, die Konstruktion von Homotopien ist trickreich.)

Gegeben sei hierauf ein stetig differenzierbares Vektorfeld $f : K \to \mathbb{R}^3$.
Zum Feld $f : K \to \mathbb{R}^3$ suchen wir ein Potential $F : K \to \mathbb{R}$ mit $F' = f$.

Wann existiert ein Potential? Genau dann, wenn $\operatorname{rot}(f) = 0$.

Die Bedingung $\operatorname{rot}(f) = 0$ ist immer notwendig nach dem Satz von Schwarz. Die Kugelschale K ist einfach zusammenhängend, dank Satz H2E ist somit $\operatorname{rot}(f) = 0$ hier auch hinreichend!

Wie berechnen Sie ein Potential? Durch das Arbeitsintegral

$$F(x) = \int_{s=p}^{x} f(s) \cdot \mathrm{d}s = \int_\gamma f_1 \,\mathrm{d}x + f_2 \,\mathrm{d}y + f_3 \,\mathrm{d}z$$

längs eines Weges $\gamma : [a,b] \to K$ vom Fußpunkt $\gamma(a) = p$ nach $\gamma(b) = x$.

Hierbei ist der Fußpunkt $p \in K$ einmal frei wählbar und wird dann im Folgenden festgehalten. Ebenso ist der Integrationsweg γ in K frei wählbar, z.B. ein Hakenintegral in Kugelkoordinaten: Hier ist es leicht, der Parameterbereich für $(r, \theta, \varphi) \in [\sigma, \rho] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ ist ein Quader!

Nach der Rechnung die Probe nicht vergessen! Gilt $F' = f$?

Anwendung auf Kreisringe

H219
Ausführung

Der Kreisring A ist zusammenhängend, aber nicht einfach zshgd:
Der Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to A : t \mapsto (r \cos t, r \sin t)$ ist nicht zusammenziehbar.
(Anschaulich ist das klar, Beweis durch Integral über das Wirbelfeld!)

Gegeben sei hierauf ein stetig differenzierbares Vektorfeld $f : A \to \mathbb{R}^2$.
Zum Feld $f : A \to \mathbb{R}^2$ suchen wir ein Potential $F : A \to \mathbb{R}$ mit $F' = f$.

Wann existiert ein Potential? Notwendig ist wie immer $\operatorname{rot}(f) = 0$.
Hinreichend ist $\operatorname{rot}(f) = 0$ und $\oint_\gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma = 0$ für den obigen Weg γ.

Wir müssen hier also nicht alle (unendliche viele) Wege nachprüfen, sondern nur einen. Verschwindet das Arbeitsintegral längs γ, dann auch für alle anderen geschlossenen Wege: Unser Vektorfeld $f : A \to \mathbb{R}^2$ ist dann konservativ und somit exakt dank Satz H2A!

Wie berechnen Sie ein Potential? Durch das Arbeitsintegral

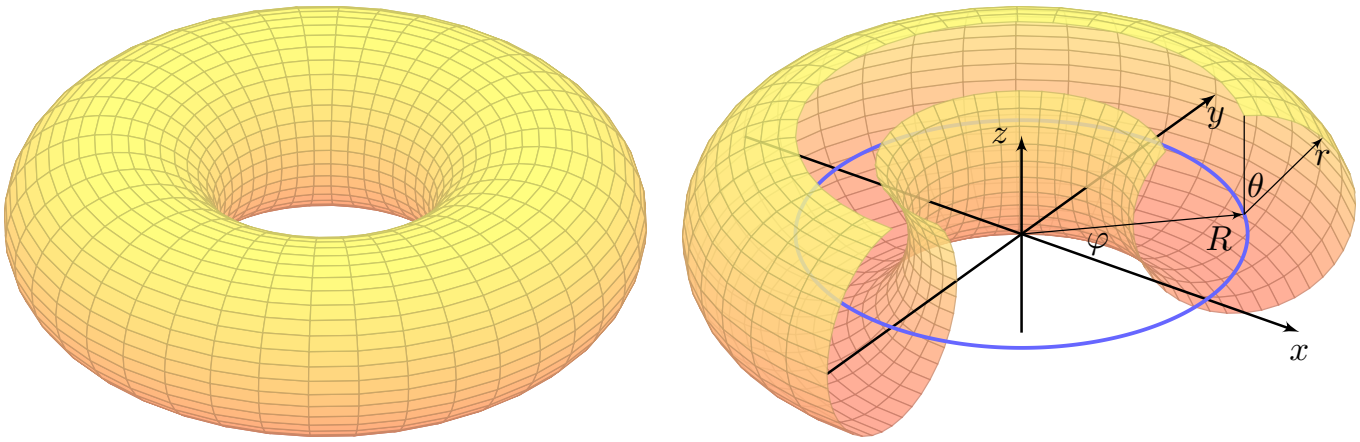
$$F(x) = \int_{s=p}^{x} f(s) \cdot \mathrm{d}s = \int_\gamma f_1 \, \mathrm{d}x + f_2 \, \mathrm{d}y$$

längs eines Weges $\gamma : [a, b] \to A$ vom Fußpunkt $\gamma(a) = p$ nach $\gamma(b) = x$.

Hierbei ist der Fußpunkt $p \in A$ einmal frei wählbar und wird dann im Folgenden festgehalten. Ebenso ist der Integrationsweg γ in A frei wählbar, z.B. ein Hakenintegral in Polarkoordinaten: Hier ist es leicht, denn der Parameterbereich für $(r, \varphi) \in [\sigma, \rho] \times [0, 2\pi]$ ist ein Rechteck!

Volltorus und Außenraum

H220
Übung



Der Volltorus $V \subseteq \mathbb{R}^3$ ist zusammenhängend, aber nicht einfach zshgd.
Seine Seele (die blaue Kreislinie) ist in V nicht zusammenziehbar.
Dasselbe gilt, dual hierzu, für den Außenraum $U = \mathbb{R}^3 \smallsetminus \overline{V}$.

Anwendung / Anschauung: Wir stellen uns den Torus V als einen stromdurchflossenen Leiter vor, etwa als eine Spule mit Wicklung um die z–Achse. Der Außenraum U ist leer, insbesondere fließt hier keinerlei Strom. Wir untersuchen die Maxwell–Gleichungen H157 im statischen Fall $\partial_t E = \partial_t B = 0$: Es gilt $\operatorname{div} B = 0$ und auf U zudem $\operatorname{rot} B = 0$, dennoch gilt $\oint_\beta B(s) \, \mathrm{d}s \neq 0$; genau dies beobachtet man bei Gleichstrommagneten. Bei Wechselstrom (dynamischer Fall) nutzt man $\operatorname{rot} E = -\partial_t B / c$ zur Induktion in einer zweiten Spule (Transformator).

Notwendige und hinreichende Kriterien

Gegeben ist ein C^1–Vektorfeld $f : \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^n$, gesucht ist ein Potential.

Aufgabe: Formulieren Sie Ihren Algorithmus zur Nutzung der Kriterien (1) „Auf U gilt $\operatorname{rot} f = 0$.“ und (2) „U ist einfach zusammenhängend.“ sowie (3) „Es gilt $\oint_\gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ in U.“

Wie können Sie im positiven Falle ein solches Potential F berechnen? Warum sind Potentiale zu f nicht eindeutig? Wie finden Sie alle?

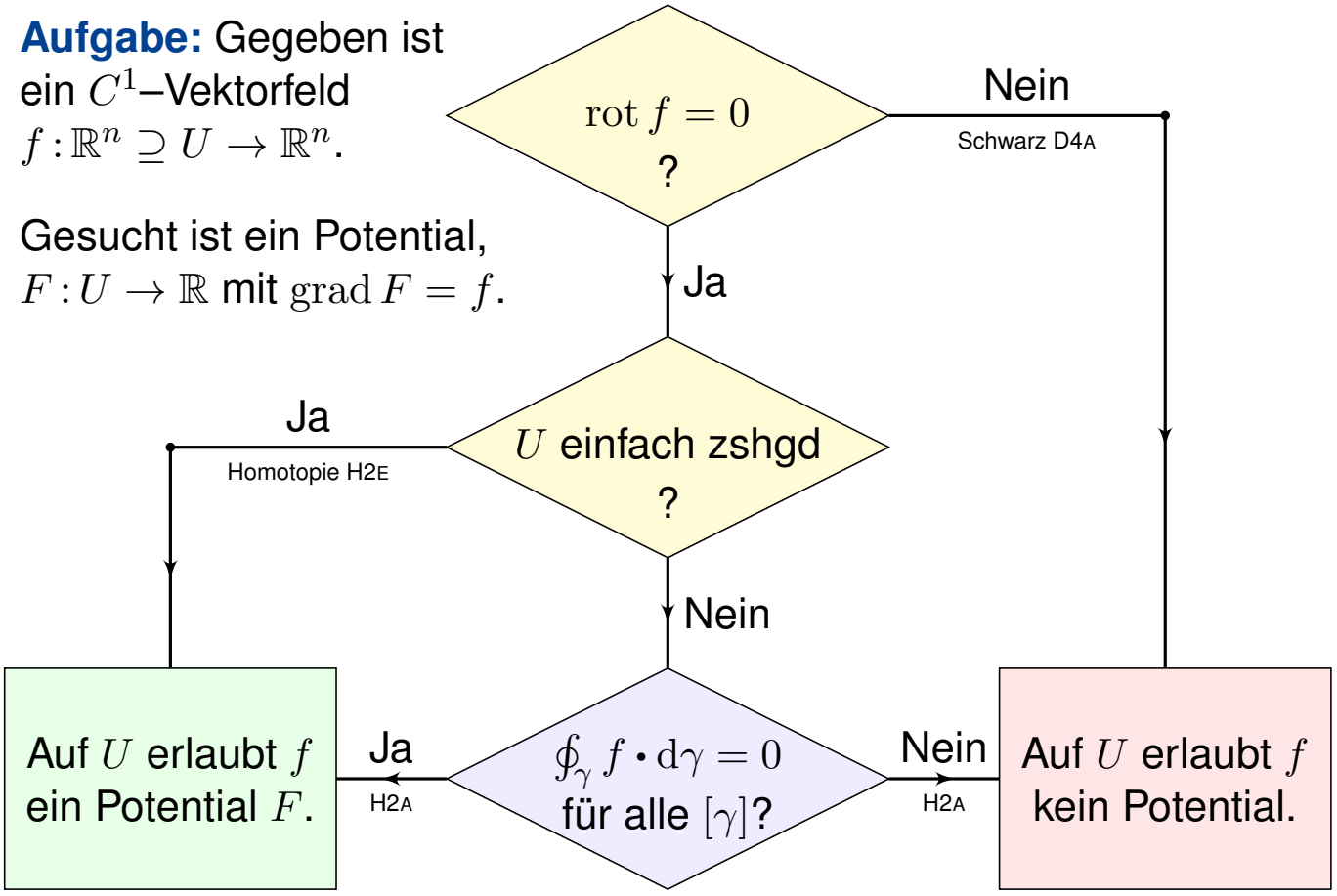
Kriterien an f und U	U einfach zusammenhängend	U nicht einfach zusammenhängend
$\operatorname{rot} f \neq 0$ $J(f)$ asymmetrisch	Auf U erlaubt f kein Potential.	Auf U erlaubt f kein Potential.
$\operatorname{rot} f = 0$ $J(f)$ symmetrisch	Auf U erlaubt f ein Potential F.	Beides ist möglich. Prüfe $\oint_\gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma = 0$.

⚠ Die vollständige Lösung des Problems erfordert mehrere Kriterien, einige notwendig, andere hinreichend. Diese Zusammenfassung hilft.

Notwendige und hinreichende Kriterien

Aufgabe: Gegeben ist ein C^1–Vektorfeld $f : \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^n$.

Gesucht ist ein Potential, $F : U \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} F = f$.



Notwendige und hinreichende Kriterien

Zur Vereinfachung nehmen wir an, die Menge U ist offen und zshgd. Hierauf ist unser Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, kurz C^1. Wir wollen klären, ob f ein Potential erlaubt, $F : U \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} F = f$.

Notwendig ist $\operatorname{rot} f = 0$: Aus $f = \operatorname{grad} F$ folgt $\operatorname{rot} f = \operatorname{rot} \operatorname{grad} F = 0$ dank Schwarz (D4A). Gilt also $\operatorname{rot} f \neq 0$, so kann f kein Potential haben.

Nach diesem ersten Hindernis kommt das zweite: Wir nehmen nun $\operatorname{rot} f = 0$ an; hinreichend ist dann U einfach zusammenhängend (H2E).

☺ Damit lassen sich viele Fälle schnell und einfach entscheiden: Notwendig ist $\operatorname{rot} f = 0$, hinreichend ist $\operatorname{rot} f = 0$ und U einfach zshgd.

☺ Gilt $\operatorname{rot} f = 0$, aber U ist nicht einfach zshgd, so prüfen wir genauer. Wir testen aus jeder Homotopieklasse $[\gamma]$ einen geschlossenen Weg γ. Gilt $\oint_\gamma f \bullet \gamma \neq 0$, so kann f kein Potential haben (H2A). Gilt $\oint_\gamma f \bullet \gamma = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ in U, so hat f ein Potential (H2A), nämlich:

$$\boxed{F(x) = \int_{s=p}^{x} f(s) \bullet \mathrm{d}s}$$

☺ Der Wert $F(x)$ ist wohldefiniert, unabhängig vom gewählten Weg.

Notwendige und hinreichende Kriterien

Wie beweisen Sie, dass f kein Potential haben kann? Ganz einfach: Sie zeigen $\operatorname{rot} f \neq 0$, oder $\oint_\gamma f \bullet \gamma \neq 0$ für einen geschlossenen Weg γ.

Wie beweisen Sie, dass f ein Potential hat? Es gibt drei Möglichkeiten:

(1) Sie legen ein Potential F explizit vor und weisen $F' = f$ nach.

(2) Es genügt, $\operatorname{rot} f = 0$ auszurechnen und nachzuweisen, dass das Gebiet U einfach zusammenhängend ist, etwa konvex oder sternförmig.

(3) Gelingt dies nicht, so müssen Sie schlimmstenfalls nachrechnen, dass hier $\oint_\gamma f \bullet \gamma = 0$ gilt für jeden geschlossenen Weg $\gamma : [0,1] \to U$. Bei $\operatorname{rot} f = 0$ genügt ein Repräsentant γ aus jeder Homotopieklasse.

Angenommen, es gilt $\oint_\gamma f \bullet \gamma = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ in U. Wie konstruieren Sie dann zu f ein Potential F? Als Arbeitsintegral:

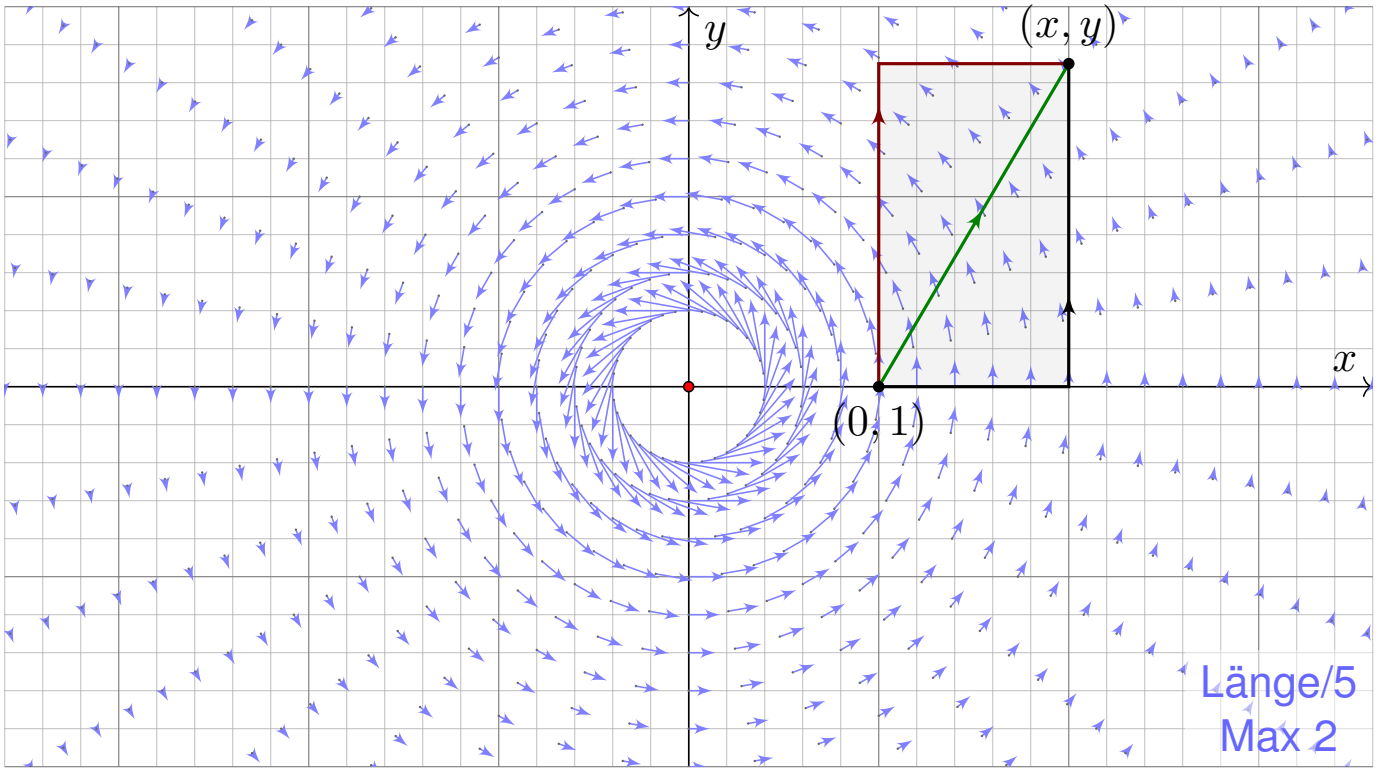
$$\boxed{F(x) = \int_{s=p}^{x} f(s) \bullet \mathrm{d}s}$$

Wie prüfen Sie, ob eine gegebene Funktion $F : U \to \mathbb{R}$ ein Potential ist?
☺ Die direkte Probe genügt: $\operatorname{grad} F$ ausrechnen und mit f vergleichen.

Zentrales Beispiel: das Wirbelfeld

Fortsetzung & Schluss: Wir betrachten das zirkuläre Vektorfeld

$$f : U = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad f(x,y) = (-y,x)/(x^2+y^2)^{a/2}.$$



Zentrales Beispiel: das Wirbelfeld

Inwiefern liegt das Problem am Definitionsgebiet $U = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$?

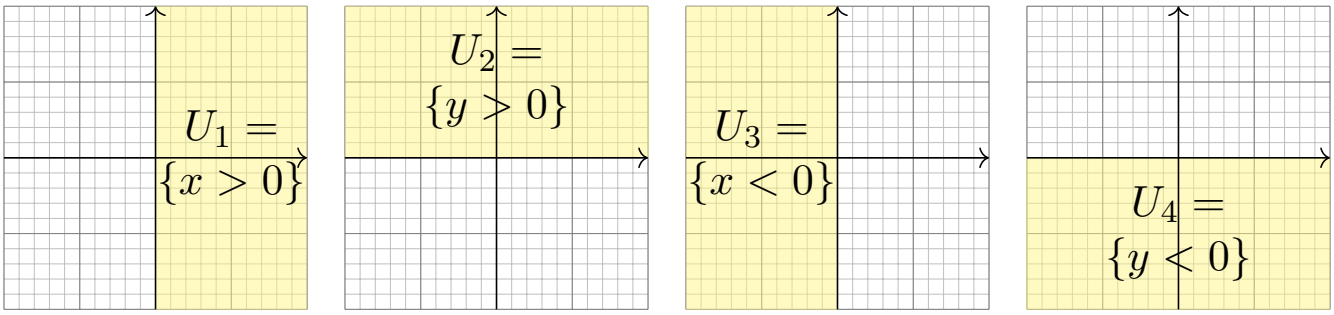
⚠ Das Gebiet U ist nicht einfach zusammenhängend. (Loch in 0)

Lässt sich Green anwenden: $\int_{\partial B(0,r)} f(s) \bullet \mathrm{d}s = \int_{\overline{B}(0,r)} \operatorname{rot}(f)\,\mathrm{d}(x,y)$?

⚠ Offenbar nicht: Im Punkt 0 ist f und somit $\operatorname{rot}(f)$ nicht definiert!

Der punktierte Integrationsbereich $\overline{B}(0,r) \smallsetminus \{0\}$ ist nicht kompakt.

Aufgabe: Statt $U = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ betrachten wir vier offene Halbebenen:



(5) Für welche a erlaubt $f_i = f|_{U_i} : U_i \to \mathbb{R}^2$ ein Potential $F_i : U_i \to \mathbb{R}$?

(6) Bestimmen Sie jeweils zu $f_i : U_i \to \mathbb{R}^2$ alle Potentiale $F_i : U_i \to \mathbb{R}$.

(7) Existieren Potentiale $F_{12} : U_1 \cup U_2 \to \mathbb{R}$? $F_{123} : U_1 \cup U_2 \cup U_3 \to \mathbb{R}$?
Warum konstruieren wir so nicht auch ein Potential $F : U \to \mathbb{R}$?

Zentrales Beispiel: das Wirbelfeld

(5) Wir finden $\operatorname{rot}(f) = (2-a)/(x^2+y^2)^{a/2}$.
Zur Exaktheit ist $\operatorname{rot}(f) = 0$ notwendig, also $a = 2$.
Das ist die notwendige lokale Bedingung, unabhängig vom Gebiet.
Zudem ist U_i konvex (H2E): Für $a = 2$ existiert ein Potential $F_i : U_i \to \mathbb{R}$.

Ist ein Potential F zu f vorgelegt, so ist die Probe leicht: Es genügt, geduldig nachzurechnen, ob $\partial_i F = f_i$ gilt. Aber wie finden wir F?

(6) Wir bestimmen ein Potential $F_1 : U_1 \to \mathbb{R}$ dank Arbeitsintegral (H2A):

$$\begin{aligned} F_1(x,y) &= \int_{s=(1,0)}^{(x,0)} f(s) \cdot \mathrm{d}s + \int_{s=(x,0)}^{(x,y)} f(s) \cdot \mathrm{d}s = 0 + \int_{t=0}^{y} f(x,t) \cdot (0,1)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{t=0}^{y} \frac{x}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{y} \frac{1}{1+(t/x)^2}\,\mathrm{d}(t/x) = \int_{u=0}^{y/x} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \Big[\arctan(u)\Big]_{u=0}^{y/x} = \arctan(y/x) \end{aligned}$$

Probe: $\partial_x \arctan(y/x) = -y/(x^2+y^2)$, $\partial_y \arctan(y/x) = x/(x^2+y^2)$.

Zentrales Beispiel: das Wirbelfeld

Ebenso finden wir $F_2(x,y) = -\arctan(x/y) + \mathrm{const}$ auf U_2 und weiter $F_3(x,y) = \arctan(y/x) + \mathrm{const}$ sowie $F_4(x,y) = -\arctan(x/y) + \mathrm{const}$.
Auf jedem dieser (konvexen!) Gebiete U_i erlaubt f ein Potential F_i.

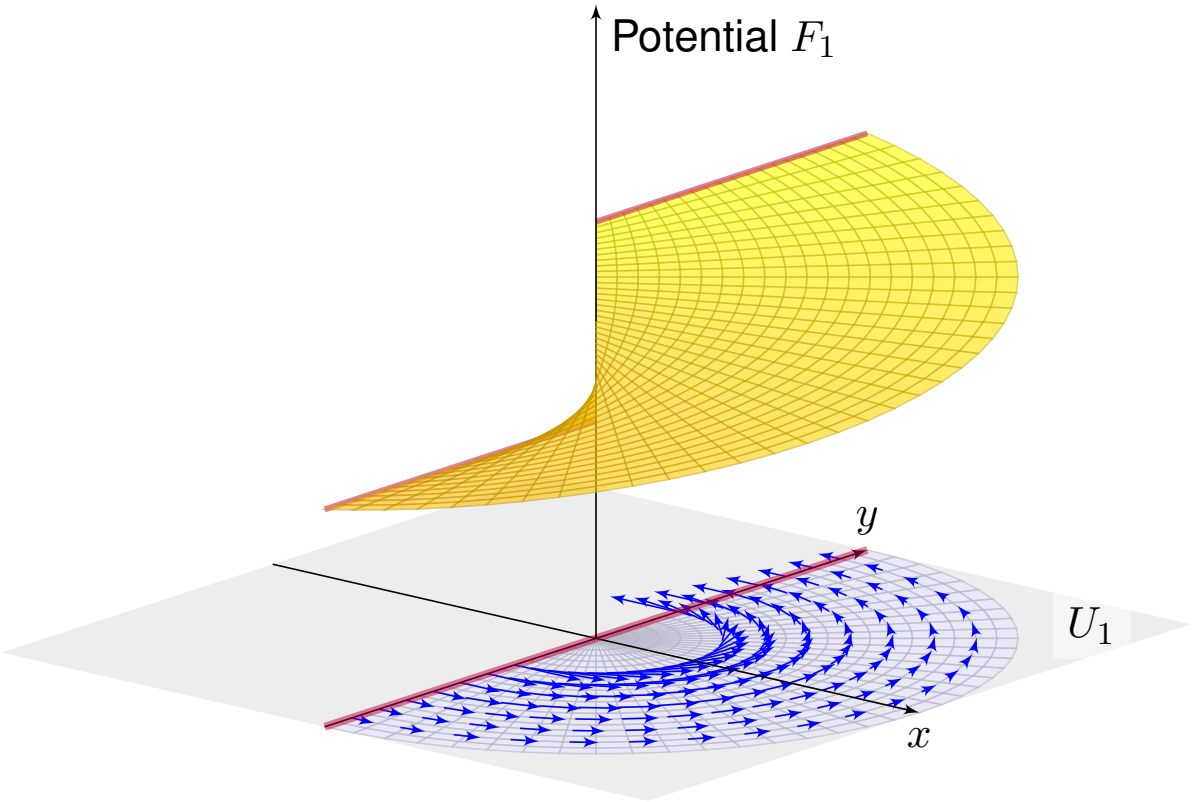
(7) Die folgenden Abbildungen skizzieren diese Potentiale $F_i : U_i \to \mathbb{R}$.
Je drei dieser Potentiale lassen sich verkleben, aber nicht alle vier!

Wir beginnen mit $F_1 = \arctan(y/x)$ und $F_2 = -\arctan(x/y) + c$.
Diese stimmen auf $U_1 \cap U_2$ überein für $c = \pi/2$: Punktprobe in $(1,1)$.
Ebenso $F_3 = \arctan(y/x) + \pi$. Wir erhalten $F : U_1 \cup U_2 \cup U_3 \to \mathbb{R}$.

Im letzten Schritt finden wir ebenso $F_4 = -\arctan(x/y) + 3\pi/2$.
Dies schließt sich nicht: Auf $U_4 \cap U_1$ bleibt die Differenz $F_4 - F_1 = 2\pi$!
Das entspricht dem Integral $\oint_{\partial B(0,r)} f(s) \cdot \mathrm{d}s = 2\pi$, wie zuvor gesehen.

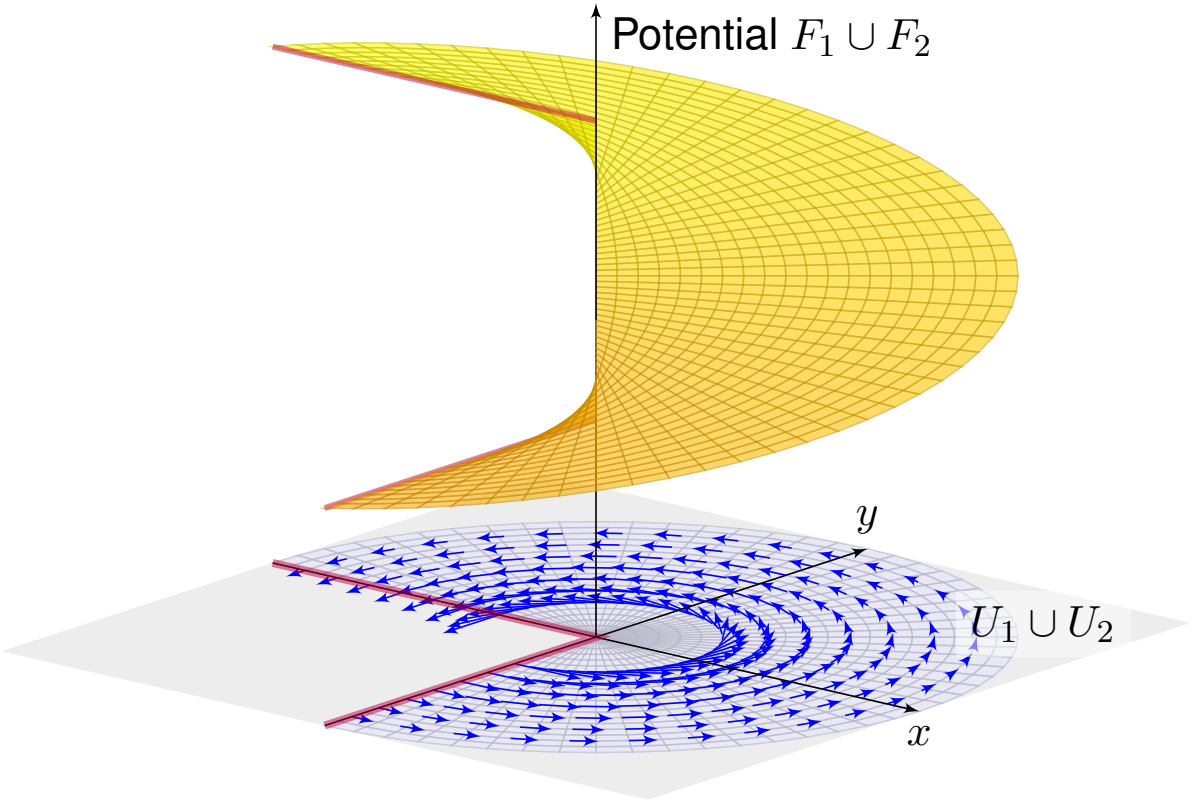
Das Bild von M.C. Escher illustriert diese bemerkenswerte Situation: Das Gravitationsfeld ist konservativ: Sie können nicht ständig bergab laufen, auch nicht ständig bergauf! Denken Sie etwa ans Wandern im Gebirge. In einer kreisförmigen Gegenstromanlage hingegen können Sie stets gegen den Strom schwimmen, so wie hier im Wirbelfeld.

Zentrales Beispiel: das Wirbelfeld



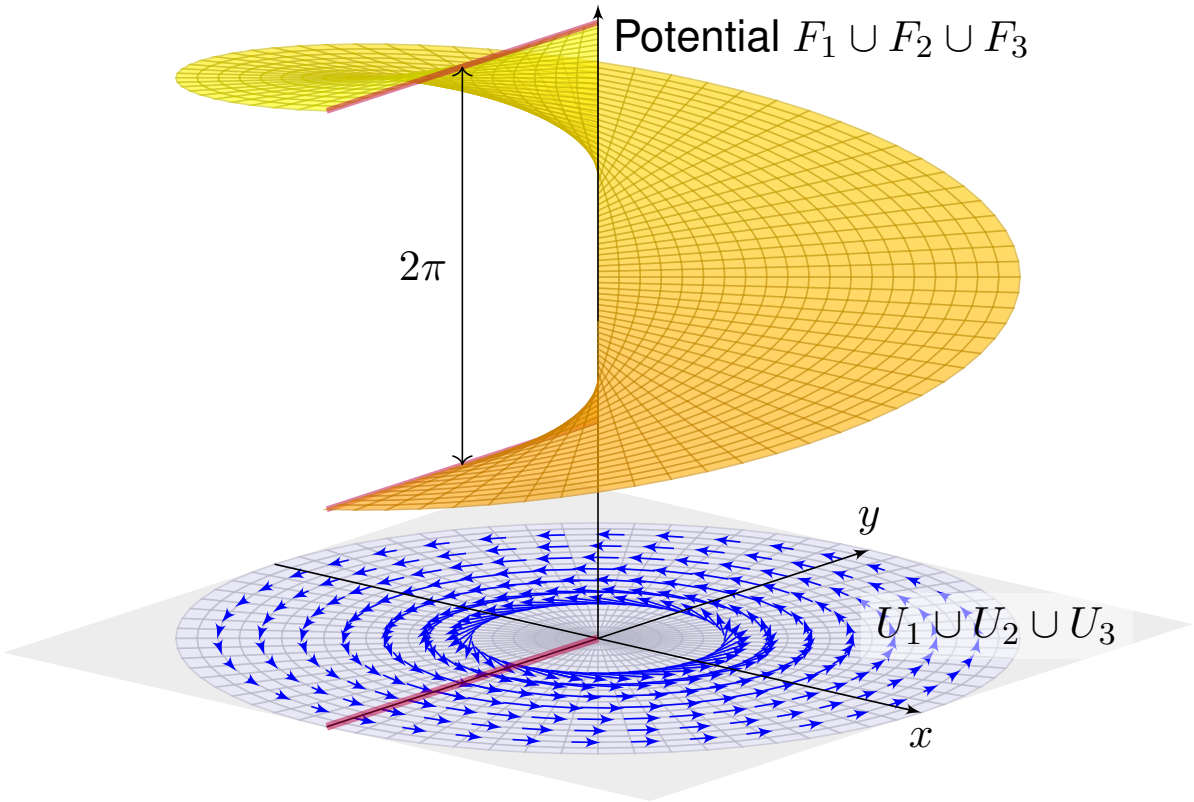
Unser Vektorfeld $f : U = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ erfüllt $\operatorname{rot}(f) = 0$ auf ganz U.
Die offene Halbebene U_1 ist konvex, hierauf hat f also ein Potential F_1.
Die obige Rechnung zeigt alle Lösungen: $F_1(x, y) = \arctan(y/x) + \text{const}$

Zentrales Beispiel: das Wirbelfeld



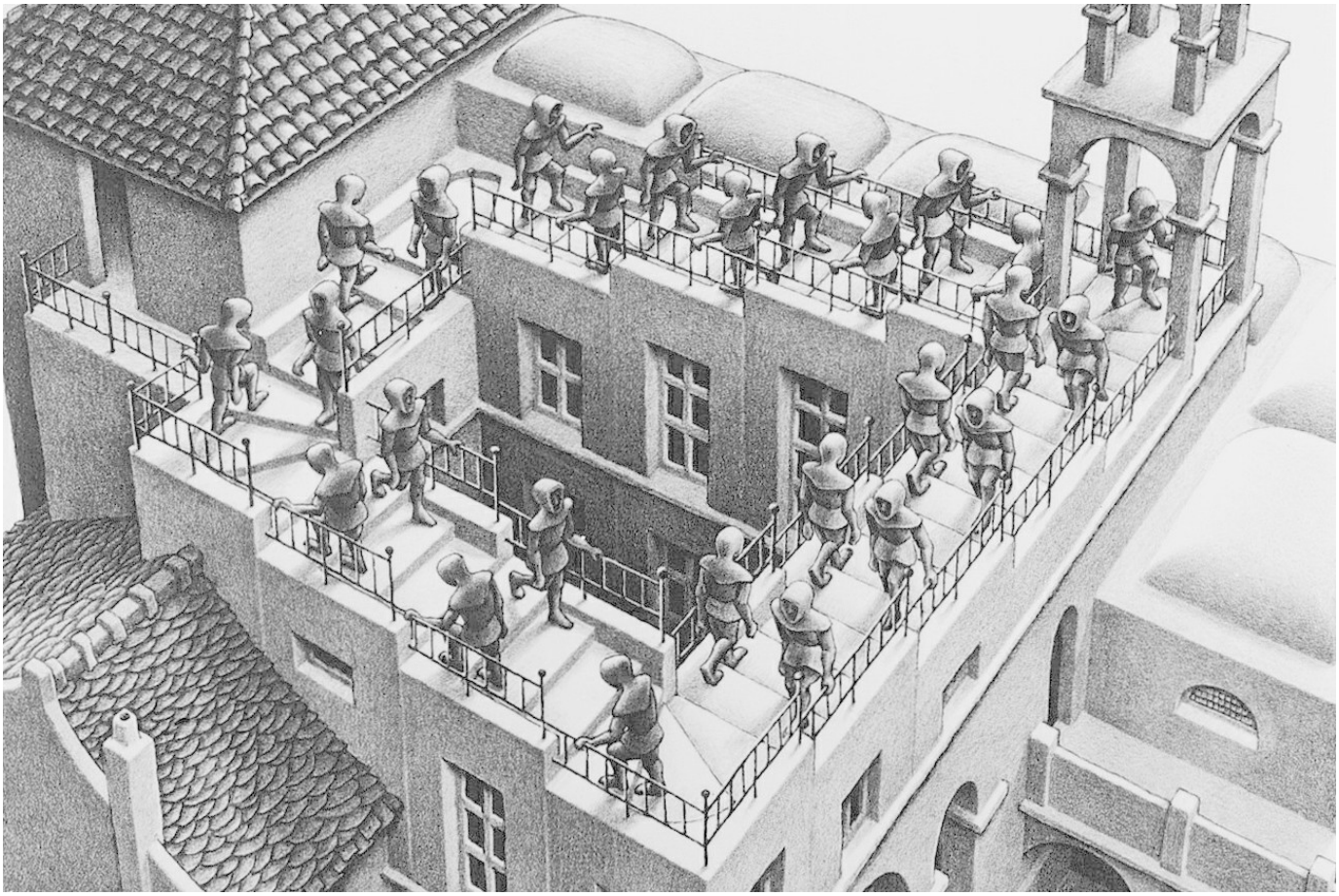
Unser Vektorfeld $f : U = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ erfüllt $\operatorname{rot}(f) = 0$ auf ganz U.
Die Vereinigung $U_1 \cup U_2$ ist sternförmig, hierauf hat f ein Potential.
Wir passen die Integrationskonstanten an und verkleben F_1 und F_2.

Zentrales Beispiel: das Wirbelfeld



Auch $U_1 \cup U_2 \cup U_3$ ist sternförmig: Wir erhalten die Ebene $\mathbb{R}^2$ minus eine Halbgerade. Auch hierauf hat f ein Potential: die Wendelfläche! Diese schließt sich nicht, daher erhalten wir kein Potential $F : U \to \mathbb{R}$.

M.C. Escher: Ascending and Descending



Rückblick: Die drei Aspekte des Integrals

1. Über jedem Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ haben wir das **unorientierte Integral**

$$\int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{für } a \le b \text{ in } \mathbb{R}.$$

2. Für das **orientierte Integral** vereinbaren wir zudem

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{für } a,b \in \mathbb{R}.$$

3. Das **unbestimmte Integral** ist eine Stammfunktion (Potential):

$$F = \int f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{bedeutet} \quad F' = f.$$

In Dimension 1 leistet der HDI die Übersetzung dieser drei Konzepte.
In Dimension ≥ 2 laufen diese drei Aspekte zunächst auseinander:

1. Volumen und mehrdimensionales Integral (unorientiert, Kapitel A–D)
2. Wegintegral und Flächenintegral (orientiert, siehe die vorigen Kapitel E–G)
3. Vektorfelder und Potentiale: Diesen Punkt haben wir in diesem Kapitel H geklärt.

Differentialformen fügen diese drei Sichtweisen wieder zu einer einheitlichen Theorie, siehe Burg–Haf–Meister–Wille, *Vektoranalysis* aus ihrer Reihe HM für Ingenieur:innen. Wir gehen hier nicht darauf ein, sondern lösen bescheiden aber konkret lediglich das Potentialproblem (3).

Zentrales Beispiel: das Newton–Potential

Wichtige Beispiele und Anwendungen von Potentialen liefert die Physik.
Das **Newton–Potential** einer Masse m im Punkt $y \in \mathbb{R}^3$ ist

$$F : \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{y\} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) = \frac{m}{|y-x|}$$

(bis auf Konstanten&Vorzeichen). Das zugehörige **Gravitationsfeld** ist

$$f : \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{y\} \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad f(x) = \operatorname{grad} F(x) = m\frac{y-x}{|y-x|^3}.$$

Für jede beschränkte **Massenverteilung** $\varrho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ haben wir

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) = \int_{y \in K} \frac{\varrho(y)}{|y-x|}\,\mathrm{d}y.$$

Das zugehörige Gravitationsfeld ist dann die **Superposition** (Faltung)

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad f(x) = \operatorname{grad} F(x) = \int_{y \in K} \frac{y-x}{|y-x|^3}\,\varrho(y)\,\mathrm{d}y.$$

Hier nutzen wir das Ableiten unter dem Integral, genauer Satz H1D.

Radialsymmetrische Felder und Potentiale

Aufgabe: Zu $x \in \mathbb{R}^n$ sei $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ die euklidische Norm.

(1) Berechnen Sie $\operatorname{grad} F$ zur Funktion $F : \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$ sowie $F(x) = 1/|x|^\alpha$ und $F(x) = G(|x|)$ mit $G : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar.

(2) Skizzieren Sie $f : \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^n : x \mapsto x/|x|$ sowie $f(x) = x/|x|^a$ und allgemein $f(x) = g(|x|) \cdot x/|x|$ mit $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ stetig.

(3) Berechnen Sie die Rotation $\partial_j f_i - \partial_i f_j$ des Vektorfeldes f.

(4) Wann hat f ein Potential? (5) Finden Sie ein Potential F zu f.

Lösung: (1) Wir schreiben alles geduldig aus und leiten ab:

$$|x| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \partial_i |x| = x_i/|x|, \quad \operatorname{grad}|x| = x/|x|$$

Dank Kettenregel folgt $\operatorname{grad} G(|x|) = G'(|x|) \cdot x/|x|$. Speziell im Beispiel:

$$F(x) = |x|^{-\alpha}, \quad \partial_i F(x) = -\alpha x_i \, |x|^{-\alpha-2}, \quad \operatorname{grad} F(x) = -\alpha x \, |x|^{-\alpha-2}$$

(2) Skizzen! Für $n = a = 2$ ist $f(x) = x/|x|^2$ das ebene Quellenfeld. E317
Der dreidimensionale Fall $n = a = 3$ entspricht einer Punktladung. H153

Radialsymmetrische Felder und Potentiale

(3) Sei g stetig differenzierbar und $i \neq j$. Aus $f_i(x) = g(|x|) \cdot x_i/|x|$ folgt

$$\partial_j f_i(x) = g'(|x|) \cdot \frac{x_j}{|x|} \cdot \frac{x_i}{|x|} - g(|x|) \cdot \frac{x_i x_j}{|x|^3} = \left[g'(|x|) - \frac{g(|x|)}{|x|} \right] \cdot \frac{x_i x_j}{|x|^2},$$

also $\partial_j f_i - \partial_i f_j = 0$. Für $f(x) = x/|x|^a$ gilt $\partial_j f_i(x) = -a x_i x_j / |x|^{a+2}$.

(4) Wie immer ist $\operatorname{rot}(f) = 0$ notwendig für die Existenz eines Potentials. Für $n \geq 3$ ist $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\}$ einfach zusammenhängend, also ist $\operatorname{rot}(f) = 0$ auch hinreichend. Auf $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ müssen wir noch genauer hinschauen: Dank $\oint_{\partial B(0,1)} f(s) \bullet \mathrm{d}s = 0$ verschwindet auch das zweite Hindernis!

(5) Zu $f(x) = g(|x|) \cdot x/|x|$ finden wir mit (1) das Potential $F(x) = G(|x|)$ mit $G(r) = \int_1^r g(\rho) \, \mathrm{d}\rho$. Das beantwortet zugleich (4) und (3). Speziell:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2-a)\,|x|^{a-2}} & \text{für } a \neq 2 \\ \ln|x| & \text{für } a = 2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{grad} F(x) = \frac{x}{|x|^a}$$

Im Beispiel $n = a = 3$ finden wir das Newton–Potential $F(x) = -1/|x|$. Unsere allgemeine Rechnung gilt in jeder Dimension, siehe Satz R1B.

Radialsymmetrische Felder und Potentiale

Aufgabe: Wir setzen die vorige Aufgabe fort.

(6) Berechnen Sie $\operatorname{div}(f)$ zu $f : \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ mit $f(x) = x/|x|^a$.
Für welche $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$ ist dieses Feld f divergenzfrei?

(7) Berechnen Sie zu f das Flussintegral über die Sphäre $r\mathbb{S}^{n-1}$.

(8) Allgemeiner sei $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ stetig und $f : \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch $f(x) = g(|x|) \cdot x/|x|$. Für welche g ist das Feld f divergenzfrei?

(9) Sei schließlich $G : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Für welche G ist die Funktion $F : \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto F(x) = G(|x|)$ harmonisch?

Lösung: (6a) Wie immer leiten wir geduldig ab und berechnen $\operatorname{div}(f)$:

$$\begin{aligned} f_i(x) &= x_i(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{-\frac{a}{2}} \\ \partial_i f_i(x) &= (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{-\frac{a}{2}} - a x_i^2 (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{-\frac{a+2}{2}} \\ \operatorname{div} f(x) &= (n-a)(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{-\frac{a}{2}} \end{aligned}$$

(6b) Dies verschwindet genau für $a = n$. In jeder Dimension n finden wir das uns vertraute Quellenfeld $f : \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^n : x \mapsto f(x) = x/|x|^n$.

Radialsymmetrische Felder und Potentiale

(7a) Im Raum $\mathbb{R}^n$ betrachten wir die Sphäre $r\mathbb{S}^{n-1}$ vom Radius $r > 0$.
In jedem Punkt $s \in r\mathbb{S}^{n-1}$ ist die Einheitsnormale $n(s) = s/|s|$.
Der Fluss des Vektorfeldes $f(x) = x/|x|^a$ ist demnach:

$$\int_{r\mathbb{S}^{n-1}} f(s) \bullet n(s) \, \mathrm{d}S = \int_{r\mathbb{S}^{n-1}} \frac{s}{|s|^a} \bullet \frac{s}{|s|} \, \mathrm{d}S = r^{1-a} \int_{r\mathbb{S}^{n-1}} \mathrm{d}S$$

$$= r^{1-a} \operatorname{vol}_{n-1}(r\mathbb{S}^{n-1}) = r^{1-a} r^{n-1} \operatorname{vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) = r^{n-a} \operatorname{vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$$

(7b) Damit beantworten wir erneut die Frage nach der Divergenzfreiheit:
Wir nehmen $\operatorname{div}(f) = 0$ an. Auf der Kugelschale $K(0, r_1, r_2)$ gilt:

$$\int_{r_2\mathbb{S}^{n-1}} f(s) \bullet n(s) \, \mathrm{d}S - \int_{r_1\mathbb{S}^{n-1}} f(s) \bullet n(s) \, \mathrm{d}S = \int_{K(0,r_1,r_2)} \operatorname{div} f(x) \, \mathrm{d}x = 0$$

Die Funktion $r \mapsto r^{n-a}$ ist demnach konstant, folglich muss $a = n$ gelten.
Umgekehrt erfüllt $f(x) = x/|x|^n$ tatsächlich $\operatorname{div}(f) = 0$, dank (6).

☺ Die Rechnung in (6) gelingt durch sorgfältiges Ableiten,
die Rechnung in (7) geometrisch durch das Flussintegral.

Radialsymmetrische Felder und Potentiale

(8a) Der Fluss des Vektorfeldes $f(x) = g(|x|) \cdot x/|x|$ über $r\mathbb{S}^{n-1}$ ist:

$$\int_{r\mathbb{S}^{n-1}} f(s) \bullet n(s)\,\mathrm{d}S = \int_{r\mathbb{S}^{n-1}} g(|s|)\,\frac{s}{|s|} \bullet \frac{s}{|s|}\,\mathrm{d}S = g(r) \int_{r\mathbb{S}^{n-1}} \mathrm{d}S$$

$$= g(r)\ \mathrm{vol}_{n-1}(r\mathbb{S}^{n-1}) \qquad = g(r)\,r^{n-1}\ \mathrm{vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$$

(8b) Wir nehmen nun $\mathrm{div}(f) = 0$ an. Auf der Kugelschale $K(0, r_1, r_2)$ gilt:

$$\int_{r_2\mathbb{S}^{n-1}} f(s) \bullet n(s)\,\mathrm{d}S - \int_{r_1\mathbb{S}^{n-1}} f(s) \bullet n(s)\,\mathrm{d}S = \int_{K(0,r_1,r_2)} \mathrm{div}\, f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Die Funktion $r \mapsto g(r)\,r^{n-1}$ ist demnach konstant, also $g(r) = c/r^{n-1}$:
Wenn $f(x) = g(|x|) \cdot x/|x|$ divergenzfrei ist, dann gilt $f(x) = c \cdot x/|x|^n$.
Umgekehrt erfüllt $f(x) = c \cdot x/|x|^n$ tatsächlich $\mathrm{div}(f) = 0$, siehe (6).

☺ Die in (6,7) gefundenen Lösungen $f(x) = c \cdot x/|x|^n$ sind demnach die einzigen radialsymmetrischen Vektorfelder mit $\mathrm{div}(f) = 0$!
Wir haben also tatsächlich alle solchen Lösungen gefunden.

☺ Dies sind genau die physikalisch beobachteten Felder.

Radialsymmetrische Felder und Potentiale

(9) Der Laplace–Operator ist $\Delta = \nabla^2 = \mathrm{div} \circ \mathrm{grad} = \partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2$.
Wir berechnen zu F zunächst den Gradienten $f = \mathrm{grad}\, F$ wie in (1):
Aus $F(x) = G(|x|)$ folgt $f(x) = g(|x|) \cdot x/|x|$ mit $g = G'$.

Dank (8) wissen wir, dass $\mathrm{div}(f) = 0$ genau für $g(r) = c/r^{n-1}$ gilt.
Im Falle $n \neq 2$ finden wir $G(r) = 1/r^{n-2}$ mit $G'(x) = (2-n)/r^{n-1}$.
Im Falle $n = 2$ finden wir $G(r) = \ln r$ mit $G'(r) = 1/r$.

Zusammenfassend halten wir folgendes Ergebnis fest:

Satz H2F: radialsymmetrische harmonische Funktionen

Sei $F : \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}$ radialsymmetrisch, also $F(x) = G(|x|)$. Genau dann ist F harmonisch, $\Delta F = 0$, wenn für geeignete $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$F(x) = a + \begin{cases} b/|x|^{n-2} & \text{für } n \neq 2, \\ b \ln|x| & \text{für } n = 2. \end{cases}$$

Sei $f : \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ radialsymmetrisch, also $f(x) = g(|x|) \cdot x/|x|$.
Genau dann ist f divergenzfrei, $\mathrm{div}\, f = 0$, wenn $f(x) = \mathrm{const} \cdot x/|x|^n$.

Physikalische Anwendungen der Integralsätze

Strömungslehre: Die Massenbilanz als Integralgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_K \varrho\,\mathrm{d}K + \oiint_{S=\partial K} (\varrho\vec{v}\cdot\vec{n})\,\mathrm{d}S = 0$$

Hieraus erhalten wir dank Gauß die **Kontinuitätsgleichung**:

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho\vec{v}) = 0, \quad \text{bei } \varrho = \mathrm{const} \text{ also } \operatorname{div}\vec{v} = 0$$

Wärmeleitung: Die Wärmebilanz als Integralgleichung:

$$\iiint_K q(t,x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_K u(t,x)\,\mathrm{d}x + \oiint_{S=\partial K} \vec{f}(t,x)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$$

Hieraus erhalten wir Fouriers berühmte **Wärmeleitungsgleichung**:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\,\Delta u = q \quad \text{mit} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

☺ Diese Differentialgleichung können wir lösen, exakt oder numerisch.

Physikalische Anwendungen der Integralsätze

Elektrodynamik: Die Maxwell–Gleichungen als Integralgleichungen:

Coulomb Ladungsgesetz $\quad \oiint_{\partial V} \vec{E}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \iiint_V 4\pi\varrho\,\mathrm{d}V$

Faraday Induktionsgesetz $\quad \oint_{\partial S} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = -\frac{1}{c}\iint_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$

Gauß Quellenfreiheit $\quad \oiint_{\partial V} \vec{B}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = 0$

Ampère Durchflutungsgesetz $\quad \oint_{\partial S} \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \frac{1}{c}\iint_S \left(4\pi\vec{J} + \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$

Dank Gauß und Stokes erhalten wir hieraus Differentialgleichungen:

$$\nabla\cdot\vec{E} = 4\pi\varrho, \qquad \nabla\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0,$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0, \qquad \nabla\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}.$$

☺ Daraus folgen insbesondere Ladungserhaltung und Wellengleichung.

Exakte und konservative Vektorfelder

Ein Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^n$ heißt **exakt**, oder **Gradientenfeld**, wenn es ein Potential erlaubt, also ein Skalarfeld $F : U \to \mathbb{R}$ mit $F' = f$ existiert.

$$f = F' = \operatorname{grad} F = \big(\partial_1 F, \dots, \partial_n F\big) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}\right).$$

☺ Für jeden stückweise stetig diff'baren Weg $\gamma : [a,b] \to U$ gilt dann:

$$\int_\gamma f \bullet \mathrm{d}\gamma = \int_{t=a}^b F'(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=a}^b \frac{\mathrm{d}F(\gamma(t))}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Ist der Weg γ geschlossen, $\gamma(a) = \gamma(b)$, so folgt demnach $\oint_\gamma f \bullet \mathrm{d}\gamma = 0$.

Ein Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^n$ heißt **konservativ**, oder **global wirbelfrei**, wenn $\oint_\gamma f \bullet \mathrm{d}\gamma = 0$ für jeden geschlossenen Weg $\gamma : [a,b] \to U$ gilt.
☺ Das garantiert: Arbeitsintegrale hängen nur von Start und Ziel ab.

Diese beiden Begriffe erweisen sich als äquivalent (Hauptsatz H2A):
(1) Besitzt das Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^n$ ein Potential, so ist f konservativ.
(2) Ist umgekehrt f konservativ, so ist $F(x) = \int_{s=p}^x f(s) \bullet \mathrm{d}s$ ein Potential.
☺ Der Wert $F(x)$ ist wohldefiniert, unabhängig vom gewählten Weg γ.

Konstruktion von Potentialen

Lösung des Potentialproblems bei einfachem Zusammenhang (H2E):

Unser Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sei einfach zusammenhängend, z.B. konvex oder sternförmig zu p. Ein C^1–Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^n$ erlaubt genau dann ein Potential $F : U \to \mathbb{R}$, wenn f rotationsfrei ist, also $\partial_j f_i = \partial_i f_j$ erfüllt.

In diesem Fall erhalten wir ein Potential durch das Arbeitsintegral

$$F(x) = \int_{s=p}^x f(s) \bullet \mathrm{d}s = \int_{t=a}^b f(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \gamma : [a,b] \to U, \\ \gamma(a) = p, \gamma(b) = x. \end{cases}$$

$f : U \to \mathbb{R}^n$ ist exakt, $\exists F : U \to \mathbb{R} : F' = f$	$\xrightarrow{f \text{ stetig diff'bar}}$ / $\xleftarrow[U \text{ einfach zshgd}]{}$	f ist rotationsfrei, $\partial_j f_i = \partial_i f_j$ auf U
global: HDI $\Downarrow$ / $\Uparrow$ Arbeitsintegral		f stetig diff'bar $\Uparrow$ / $\Downarrow$ Stokes: lokal
f ist konservativ, $\oint_\gamma f \bullet \mathrm{d}\gamma = 0$ in U	$\xrightarrow{\text{immer}}$ / $\xleftarrow[U \text{ einfach zshgd}]{}$	f ist lokal konservativ, $\oint_\gamma f \bullet \mathrm{d}\gamma = 0$ lokal

Zusammenfassung und Verständnisfragen

Aufgabe: Unter welchen Voraussetzungen gilt. . . ?

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

$$(2) \qquad \int_X \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_Y \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$(3) \qquad \int_Y f(y)\,\mathrm{d}y = \int_X f(\Phi(x))\,|\det \Phi'(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$(4) \qquad \int_\Omega \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \int_\Omega f_k(x)\,\mathrm{d}x$$

$$(5) \qquad \int_\Omega \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \int_\Omega f_k(x)\,\mathrm{d}x$$

$$(6) \qquad \int_\Omega \lim_{k\to\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(x)\,\mathrm{d}x$$

$$(7) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_Y \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

Zusammenfassung und Verständnisfragen

(1) Voraussetzungen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung B123, kurz HDI: Die Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ sei stetig differenzierbar mit Ableitung $f = F'$. (Es genügt F stetig und stückweise stetig differenzierbar B213, oder noch allgemeiner F absolut stetig B214.)

(2) Gegenbeispiele C414: Vertauschbarkeit gilt nicht immer! Voraussetzungen des Satzes von Fubini C121: $f : X \times Y \to [0,\infty]$ sei messbar oder $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ absolut integrierbar.

(3) Voraussetzungen des Transformationssatzes C209: Die Mengen $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ seien messbar, $f : Y \to [0,\infty]$ messbar oder $f : Y \to \mathbb{C}$ absolut integrierbar, $\Phi : X \to Y$ stetig differenzierbar und bijektiv (zumindest injektiv und surjektiv bis auf Ausnahmemengen vom Volumen Null).

(4) Das Integral ist linear! Die Behauptung gilt unter den üblichen Vorsichtsmaßnahmen: $f_k : \Omega \to [0,\infty]$ messbar oder $f_k : \Omega \to \mathbb{C}$ absolut integrierbar.

(5) Gegenbeispiele D101: Für Reihen, also unendliche Summen, gilt Vertauschung nicht immer! Hinreichend ist $f_k : \Omega \to [0,\infty]$ messbar oder L^1–Konvergenz $\sum_{k=0}^{\infty} \int_\Omega |f_k| \le \infty$. D106

(6) Für Grenzwerte und Integrale gilt Vertauschung nicht immer! D201 Voraussetzungen für den Satz der majorisierten Konvergenz D209: Hinreichend ist punktweise Konvergenz $f_k \to f$ (fast überall) und eine absolut integrierbare Majorante g mit $|f_k| \le g$ (fast überall) für alle k.

(7) Gegenbeispiele D409: Leider kann man nicht immer die Ableitung unter das Integral ziehen! Hinreichend ist insb. Y kompakt und $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ stetig und stetig nach x differenzierbar. Allgemein wie bei der majorisierten Konvergenz D309: Für jedes x ist $y \mapsto f(x,y)$ integrierbar über y, für fast jedes y ist $x \mapsto f(x,y)$ stetig differenzierbar nach x, und zudem existiert eine integrierbare Majorante $g(y)$, das heißt, $|(\partial f_y/\partial x_j)(x,y)| \le g(y)$ für alle x und fast alle y.

Zusammenfassung und Verständnisfragen

Aufgabe: Was ist ein Skalarfeld g? ein Vektorfeld f?
Unter welchen Voraussetzungen gilt. . . ?

$$(1) \qquad \partial_i \partial_j g = \partial_j \partial_i g$$

$$(2) \qquad \operatorname{rot} \operatorname{grad} g = 0$$

$$(3) \qquad \operatorname{div} \operatorname{rot} f = 0$$

$$(4) \qquad \int_{s \in \Gamma} \operatorname{grad} g(s) \cdot \mathrm{d}s = \sum\nolimits_{s \in \partial\Gamma} g(s)\, n(s)$$

$$(5) \qquad \int_{s \in S} \operatorname{rot} f(s) \cdot \mathrm{d}S = \int_{s \in \partial S} f(s) \cdot \mathrm{d}s$$

$$(6) \qquad \int_{v \in V} \operatorname{div} f(v)\, \mathrm{d}V = \int_{s \in \partial V} f(s) \cdot \mathrm{d}S$$

Erklären Sie Bedeutung, Definition und Funktionsweise dieser Formeln.
Welche physikalischen und mathematischen Anwendungen kennen Sie?

Zusammenfassung und Verständnisfragen

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Gebiet, also eine offene zusammenhängende Teilmenge. Hierauf betrachten wir ein Skalarfeld g, also eine stetige Abbildung $g : \Omega \to \mathbb{R}$, sowie ein Vektorfeld f, also eine stetige Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$. Sind diese zudem stetig differenzierbar, so definieren wir wie üblich die Ableitungen grad, rot, div, siehe zum Beispiel die Wiederholung zu Beginn von Kapitel H.

Aussage (1) gilt für alle zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $g : \Omega \to \mathbb{R}$: Das ist der Satz von Schwarz (D4A). Damit rechnet man die angegebenen Identitäten (2) und (3) leicht nach. H104

Die Gleichungen (4–6) sind unsere Integralsätze. Hierzu seien f und g stetig differenzierbar. (Etwas weniger genügt, zum Beispiel Lipschitz–stetig und somit fast überall differenzierbar.)

Für den HDI (4) sei $\Gamma \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ eine stückweise glatte Kurve vom Startpunkt p zum Zielpunkt q mit vektoriellem Wegelement $\mathrm{d}s$. Hierzu sei Γ orientiert; genau wie beim eindimensionalen HDI werten wir Startpunkte negativ, $n(p) = -1$, und Zielpunkte positiv, $n(q) = +1$. Allgemein kann eine solche Kurve Γ mehrere Komponenten und mehrere Randpunkte $s \in \partial\Gamma$ haben.

Für Stokes (5) sei $S \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ eine orientierte, stückweise glatte Fläche mit vektoriellem Flächenelement $\mathrm{d}S = n\,|\mathrm{d}S|$, also Einheitsnormale $n : S \to \mathbb{R}^3$ und skalarem Flächenelement $|\mathrm{d}S|$. Die Randkurve $\Gamma = \partial S$ ist dann ebenfalls stückweise glatt und wird positiv orientiert gemäß der Rechte-Hand-Regel. (Für ebene Flächen $S \subseteq \mathbb{R}^2$ entspricht der Satz von Stokes im Raum $\mathbb{R}^3$ dem Satz von Green in der Ebene $\mathbb{R}^2$, siehe Kapitel E. Beide sind äquivalent.)

Für Gauß (6) schließlich sei $V \subseteq \Omega$ ein Kompaktum mit stückweise glatter Randfläche ∂V und dem üblichen euklidischen Volumenelement $\mathrm{d}V = \mathrm{d}(x_1, x_2, x_3)$. Die Randfläche $S = \partial V$ wird orientiert durch die nach außen weisende Einheitsnormale $n : S \to \mathbb{R}^3$, so dass $\mathrm{d}S = n\,|\mathrm{d}S|$.

Zusammenfassung und Verständnisfragen

Aufgabe: Sei $A \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Gerade, D eine Kreisscheibe um 0 sowie K eine Kugel um 0. Begründen oder widerlegen Sie:

(1) Jeder stetige Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ hat endliche Länge.

(2) Jeder stetig diff'bare Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ hat endliche Länge.

(3) Für $f : \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ mit $\operatorname{div}(f) = 0$ gilt $\int_{\partial D} f(s) \times \mathrm{d}s = 0$.

(4) Für $f : \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ mit $\operatorname{rot}(f) = 0$ gilt $\int_{\partial D} f(s) \cdot \mathrm{d}s = 0$.

(5) Für $f : \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{rot}(f) = 0$ gilt $\int_{\partial D} f(s) \cdot \mathrm{d}s = 0$.

(6) Für $f : \mathbb{R}^3 \smallsetminus A \to \mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{rot}(f) = 0$ gilt $\int_{\partial D} f(s) \cdot \mathrm{d}s = 0$.

(7) Für $f : \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{div}(f) = 0$ gilt $\int_{\partial K} f(s) \cdot \mathrm{d}S = 0$.

(8) Für $f : \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ mit $f(x) = \mathrm{const} \cdot x/|x|^n$ gilt $\operatorname{div}(f) = 0$.

(9) Für $f : \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{div}(f) = 0$ gilt $f(x) = \mathrm{const} \cdot x/|x|^n$.

(0) Wikipedia zu *Konservative Kraft* (aufgerufen 11.11.2024): „Äquivalent sind: 1. Die Arbeit entlang jeder beliebigen geschlossenen Kurve innerhalb des Feldes ist gleich Null. [. . .] 4. Das Feld ist auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet definiert und [dort rotationsfrei].“

Zusammenfassung und Verständnisfragen

Aussage (1) gilt nicht. Die Kochkurve ist ein beliebtes Gegenbeispiel. E104
Aussage (2) gilt dank der Integralformel $\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \, \mathrm{d}t$ für die Weglänge. E107

Aussage (3) gilt nicht immer! Gegenbeispiel ist das Quellenfeld $f(x,y) := (x,y)/(x^2+y^2)$. E317 Hier gilt $\operatorname{div}(f) = 0$ auf ganz $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ und dennoch $\int_{\partial D} f(s) \times \mathrm{d}s = 2\pi$.

Aussage (4) gilt nicht immer! Gegenbeispiel ist das Wirbelfeld $f(x,y) := (-y,x)/(x^2+y^2)$. E317 Hier gilt $\operatorname{rot}(f) = 0$ auf ganz $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ und dennoch $\int_{\partial D} f(s) \cdot \mathrm{d}s = 2\pi$.

Aussage (5) gilt dank Stokes und der Geometrie des Raumes: Wir haben $\partial D = \partial S$ für eine Hemisphäre $S \subseteq \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\}$, also $\int_{\partial D} f(s) \cdot \mathrm{d}s = \int_{\partial S} f(s) \cdot \mathrm{d}s = \int_S \operatorname{rot}(f) \cdot \mathrm{d}S = 0$. Allgemein: Das Gebiet $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\}$ ist zwar nicht konvex oder sternförmig, aber dennoch einfach zusammenhängend! Das bedeutet, jede geschlossene Kurve Γ in $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\}$ ist zusammenziehbar, somit verschwindet längs Γ das Arbeitsintegral jedes rotationsfreien Vektorfeldes.

Aussage (6) gilt nicht immer! Gegenbeispiel ist das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters A, etwa das Wirbelfeld $f(x,y,z) = (-y,x,0)/(x^2+y^2)$ um die z–Achse A. H154 Hier gilt $\operatorname{rot}(f) = 0$ auf ganz $\mathbb{R}^3 \smallsetminus A$ und dennoch $\int_{\partial D} f(s) \cdot \mathrm{d}s = 2\pi$.

Aussage (7) gilt nicht immer! Gegenbeispiel ist das Feld einer im Ursprung konzentrierten Masse oder Ladung, also das Quellenfeld $f(x,y,z) = (x,y,z)/(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$. H137
Hier gilt $\operatorname{div}(f) = 0$ auf ganz $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\}$ und dennoch $\int_{\partial K} f(s) \cdot \mathrm{d}S = 4\pi$.

Aussage (8) rechnet man leicht nach. H237 Die Umkehrung (9) ist falsch, zum Beispiel erfüllt jedes konstante Vektorfeld f auch $\operatorname{div}(f) = 0$. Wenn wir jedoch verlangen, dass f divergenzfrei und zudem *radialsymmetrisch* ist, so folgt tatsächlich $f(x) = \mathrm{const} \cdot x/|x|^n$, siehe Satz H2F.

Zusammenfassung und Verständnisfragen

Aufgabe: Begründen Sie durch ein Ergebnis Ihrer Vorlesung oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel aus Ihrem Fundus:

(1) Jedes Vektorfeld $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ hat ein Potential.

(2) Jedes Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ hat ein Potential.

(3) Jedes Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\operatorname{rot}(f) = 0$ hat ein Potential.

(4) Jedes Vektorfeld $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $\partial_i f_j = \partial_j f_i$ hat ein Potential.

(5) Jedes Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ mit $\operatorname{rot}(f) = 0$ hat ein Potential.

(6) Jedes Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{rot}(f) = 0$ hat ein Potential.

(7) Jedes Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \smallsetminus A \to \mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{rot}(f) = 0$ hat ein Potential.

Hierbei sei $A \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Gerade, etwa die z–Achse.

(8) Jedes Feld $f : \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^n : f(x) = g(|x|) \cdot x/|x|$ hat ein Potential.

(9) Wikipedia zu *Rotation eines Vektorfeldes* (aufgerufen 11.11.2021): „Die Divergenz der Rotation eines Vektorfeldes ist gleich null. Umgekehrt ist in einfach zusammenhängenden Gebieten [im $\mathbb{R}^3$] ein Feld, dessen Divergenz gleich null ist, die Rotation eines anderen Vektorfeldes.“

Zusammenfassung und Verständnisfragen

Aussage (1) gilt immer: Dank HDI ist $F(x) = \int_{t=0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ eine Stammfunktion, also $F' = f$.

Aussage (2) gilt nicht immer: Notwendiges Kriterium ist $\operatorname{rot}(f) = 0$. Beispiel: Das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = (-y, x)$ erfüllt $\operatorname{rot}(f) = 2 \neq 0$. Demnach erlaubt f kein Potential, das heißt, es gibt keine Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} F = f$. Unnötig danach zu suchen!

Aussagen (3) und (4) gelten immer: Auf einfach zusammenhängenden Gebieten (wie $\mathbb{R}^n$) ist für C^1–Vektorfelder $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ das notwendige Kriterium $\operatorname{rot}(f) = 0$ auch hinreichend. H215

Aussage (5) gilt nicht immer. Unser zentrales Gegenbeispiel ist das Wirbelfeld. H205
Hier gilt $\operatorname{rot}(f) = 0$ auf ganz $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$, aber dennoch $\oint_{\partial B(0,r)} f(s) \cdot \mathrm{d}s = 2\pi$.

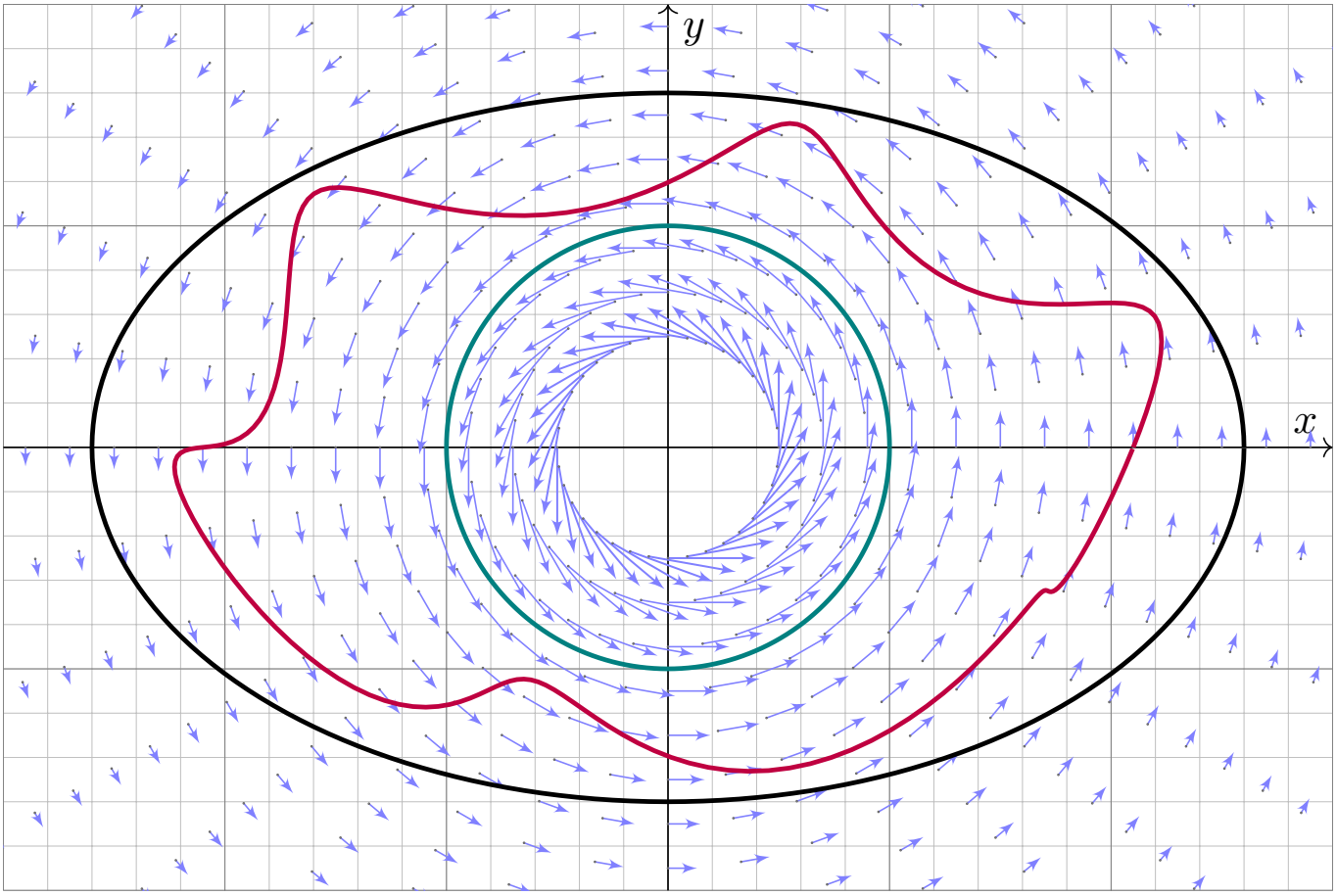
Aussage (6) gilt immer, denn im Gegensatz zur punktierten Ebene $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ ist der punktierte Raum $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\}$ einfach zusammenhängend. Hier ist $\operatorname{rot}(f) = 0$ hinreichend. H215

Aussage (7) gilt nicht immer. Gegenbeispiel ist das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters A, etwa das Wirbelfeld $f(x, y, z) = (-y, x, 0)/(x^2 + y^2)$ um die z–Achse A.
Hier gilt $\operatorname{rot}(f) = 0$ auf ganz $\mathbb{R}^3 \smallsetminus A$, aber dennoch $\oint_{\partial D} f(s) \cdot \mathrm{d}s = 2\pi$. H154

(8) Zu $f(x) = g(|x|) \cdot x/|x|$ mit g stetig finden wir explizit das Potential $F(x) = G(|x|)$ mit $G(r) = \int_1^r g(\rho)\,\mathrm{d}\rho$: Leiten Sie es geduldig ab, Sie finden $\operatorname{grad} F = f$. Somit $\operatorname{rot} f = 0$. H104

(9) Ja. H104 Nein! Prominentes Gegenbeispiel: Das Gebiet $U = \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\}$ ist einfach zshgd. H217
Das (Gravitations-)Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto x/|x|^3$ erfüllt $\operatorname{div}(f) = 0$ auf ganz U. H137
Für jede Sphäre S um 0 gilt $\int_S f \cdot \mathrm{d}S = 4\pi > 0$. H137 Somit ist $f = \operatorname{rot}(g)$ unmöglich! G316
Dank $\partial S = \emptyset$ und dem Satz von Stokes (G3E) gilt nämlich $\int_S \operatorname{rot}(g) \cdot \mathrm{d}S = \int_{\partial S} g \cdot \mathrm{d}s = 0$.

Homotopieinvarianz: zweidimensional



Homotopieinvarianz: zweidimensional

Aufgabe: Berechnen Sie mit Hilfe der Homotopieinvarianz das Integral

$$\int_{t=0}^{2\pi} \frac{ab}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t}\,\mathrm{d}t.$$

Was erhalten Sie speziell für $a = b = 1$? Was gilt allgemein für $a, b > 0$?

Lösung: Dies ist das Arbeitsintegral des rotationsfreien Vektorfeldes $f(x, y) = (-y, x)/(x^2 + y^2)$ längs der Ellipse $\alpha(t) = (a\cos t, b\sin t)$.
Der Integrationsweg α ist im Definitionsgebiet $U = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ homotop zum kreisförmigen Integrationsweg $\beta(t) = (\cos t, \sin t)$. Damit finden wir:

$$\int_{t=0}^{2\pi} \frac{ab}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_\alpha f \bullet \mathrm{d}\alpha = \int_\beta f \bullet \mathrm{d}\beta = \int_{t=0}^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t = 2\pi$$

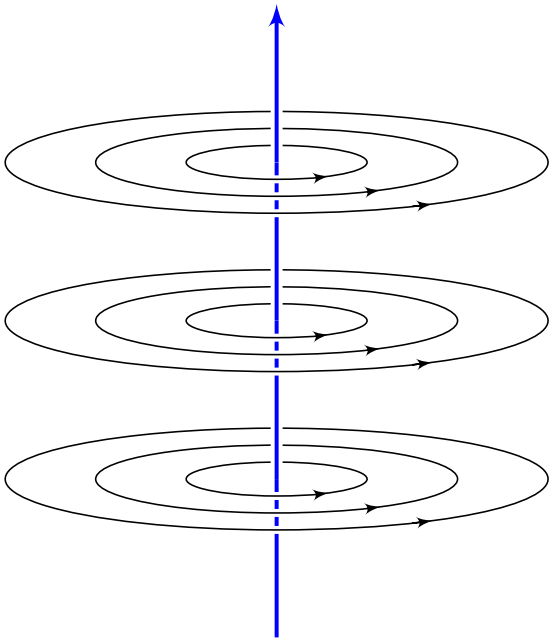
☺ Die Homotopieinvarianz vereinfacht die Rechnung erheblich!
Unter allen homotopen Wegen suchen wir uns den leichtesten aus.

☺ Geometrisches Verständnis ermöglicht & vereinfacht die Rechnung.
Das ist die Stärke und typische Anwendung der Integralsätze!

☺ Genau dieser Trick und ganz speziell dieses Beispiel liegen dem Residuenkalkül zu Grunde, dessen erstaunliche Kraft wir schätzen.

Homotopieinvarianz: dreidimensional

H315
Ausführung



Ein elektrischer Strom längs der z–Achse erzeugt das Magnetfeld

$$f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2}(-y,x,0).$$

Das Definitionsgebiet ist hier

$$U = \big(\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}\big) \times \mathbb{R}$$

Ein geschlossener Weg $\alpha : [0,1] \to U$ verlaufe dreimal rechtshändig um die z–Achse. (Machen Sie eine Skizze!)

Aufgabe: Berechnen Sie $\operatorname{rot}(f)$ und das Arbeitsintegral von f längs α. Warum ist die grobe Verlaufsskizze von α hierzu ausreichend genau?

Lösung: Es gilt $\operatorname{rot}(f) = 0$. Daher ist $\oint_\alpha f \cdot \mathrm{d}\alpha$ homotopieinvariant. Wir ersetzen α durch den hierzu homotopen Weg $\beta : [0,1] \to U$ mit $\beta(t) = (\cos(6\pi t), \sin(6\pi t))$. Es folgt $\oint_\alpha f \cdot \mathrm{d}\alpha = \oint_\beta f \cdot \mathrm{d}\beta = 6\pi$.

Anwendung des Satzes von Stokes

H316
Ausführung

Aufgabe: (1) Skizzieren Sie $L = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2y^2 + z^2 = 0 \,\}$.

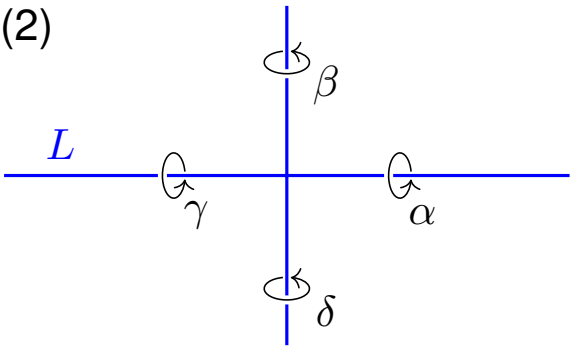
(2) Hat jedes rotationsfreie Vektorfeld $f : U = \mathbb{R}^3 \smallsetminus L \to \mathbb{R}^3$ ein Potential?

(3) Beranden $\alpha, \beta, \gamma, \delta : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit $\alpha(t), \gamma(t) = (\pm 3, \cos t, \sin t)$ und $\beta(t), \delta(t) = (\sin t, \pm 3, \cos t)$ eine orientierte Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3 \smallsetminus L$?

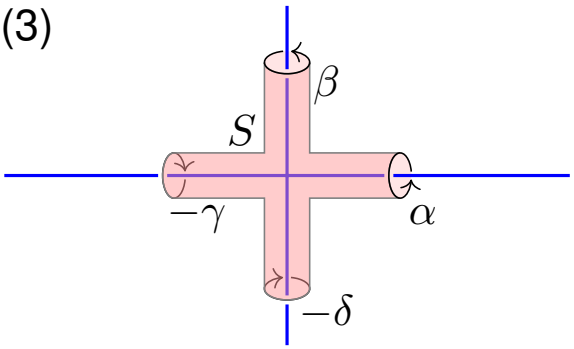
(4) Sei $f : U = \mathbb{R}^3 \smallsetminus L \to \mathbb{R}^3$ ein rotationsfreies Feld. Angenommen es gilt $\oint_\alpha f = 3$, $\oint_\beta f = 7$, $\oint_\gamma f = 6$. Was folgt für das vierte Integral $\oint_\delta f$?

Lösung: (1) Die Menge L ist die Vereinigung der x– und y–Achse.
(2) Nein. Gegenbeispiele erhalten wir wie in der vorigen Aufgabe.

(2)



(3)



(4) Wir sehen $\partial S = \alpha \cup \beta \cup (-\gamma) \cup (-\delta)$. Dank Stokes gilt demnach $\oint_\alpha f + \oint_\beta f - \oint_\gamma f - \oint_\delta f = \int_S \operatorname{rot}(f) \cdot \mathrm{d}S = 0$. Hieraus folgt $\oint_\delta f = 4$.

Potentialproblem auf $\mathbb{R}^3$

H317
Übung

Aufgabe: Gegeben sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x,y,z) = (\alpha y, x - \beta z, z - y)$.
(1) Für welche Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist dieses Vektorfeld f exakt?
(2) Falls existent, finden Sie $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $F' = f$ und $F(2,2,2) = 0$.

Lösung: (1) Als notwendiges Kriterium berechnen wir die Rotation:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}(f)_1 &= \partial_y f_3 - \partial_z f_2 &&= \beta - 1 \\
\operatorname{rot}(f)_2 &= \partial_z f_1 - \partial_x f_3 &&= 0 \\
\operatorname{rot}(f)_3 &= \partial_x f_2 - \partial_y f_1 &&= 1 - \alpha
\end{aligned}$$

Demnach ist f rotationsfrei nur für $\alpha = \beta = 1$. Das Gebiet $\mathbb{R}^3$ ist konvex, dank Satz H2E ist das Vektorfeld $f(x,y,z) = (y, x - z, z - y)$ exakt.
(2) Wir integrieren f koordinatenweise zu einem Potential $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\partial_x F(x,y,z) &= y &&\Rightarrow \quad F(x,y,z) = xy + a(y,z) \\
\partial_y F(x,y,z) &= x - z &&\Rightarrow \quad F(x,y,z) = xy - yz + b(z) \\
\partial_z F(x,y,z) &= z - y &&\Rightarrow \quad F(x,y,z) = xy - yz + \tfrac{1}{2}z^2 + c
\end{aligned}$$

Probe: Die Funktion $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $F(x,y,z) = xy - yz + \frac{1}{2}z^2 - 2$ erfüllt $F(2,2,2) = 0$ sowie $\partial_x F = y$ und $\partial_y F = x - z$ und $\partial_z F = z - y$.

Potentialproblem auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$

H318
Übung

Aufgabe: Auf $U = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y > 0, z > 0 \right\}$ betrachten wir

$$f : \mathbb{R}^3 \supseteq U \to \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = \big(\ln(y/z),\ ax/y,\ bx/z \big).$$

(1) Für welche Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ ist dieses Vektorfeld f exakt?
(2) Bestimmen Sie in diesen Fällen ein Potential F mit $F(1,1,1) = 1$.

Lösung: (1) Als notwendiges Kriterium berechnen wir die Rotation:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}(f)_1 &= \partial_y f_3 - \partial_z f_2 = \partial_y(bx/z) - \partial_z(ax/y) &&= 0, \\
\operatorname{rot}(f)_2 &= \partial_z f_1 - \partial_x f_3 = \partial_z(\ln(y/z)) - \partial_x(bx/z) &&= -1/z - b/z \overset{!}{=} 0, \\
\operatorname{rot}(f)_3 &= \partial_x f_2 - \partial_y f_1 = \partial_x(ax/y) - \partial_y(\ln(y/z)) = a/y - 1/y &&= 0.
\end{aligned}$$

Demnach ist f rotationsfrei nur für $(a,b) = (+1,-1)$. Das Gebiet U ist konvex, dank Satz H2E ist $f(x,y,z) = (\ln(y/z), +x/y, -x/z)$ exakt.
(2) Als Potential finden wir durch koordinatenweise Integration

$$F(x,y,z) = x \ln(y/z) + c.$$

Machen Sie die Probe! Um $F(1,1,1) = 1$ zu erhalten, wählen wir $c = 1$.

Potentialproblem auf Kreisring und Kreisscheibe

H319
Übung

Aufgabe: Bestimmen Sie alle Potentiale des ebenen Vektorfeldes

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{2}{x^2+y^2-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \frac{a}{x^2+y^2}\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}.$$

Lösung: Wir berechnen zunächst die Rotation... Überall gilt $\operatorname{rot}(f) = 0$. Wir sehen $\oint_{\partial B(0,r)} f(s) \cdot \mathrm{d}s = 2\pi a$. Für $a \neq 0$ existiert kein Potential!
Im Folgenden sei daher $a = 0$. Auf der Kreislinie $x^2 + y^2 = 1$ wird der erste Nenner Null. Der Definitionsbereich zerfällt somit in zwei Gebiete

$$A = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 > 1 \,\}, \quad B = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1 \,\}.$$

Das Gebiet A ist ein Kreisring (hier mit Radien 1 und ∞).
Das Integral längs Kreisen um 0 verschwindet, da f radial ist.
Auf A finden wir das Potential $F_A(x,y) = \ln(x^2+y^2-1) + c_A$. Probe!

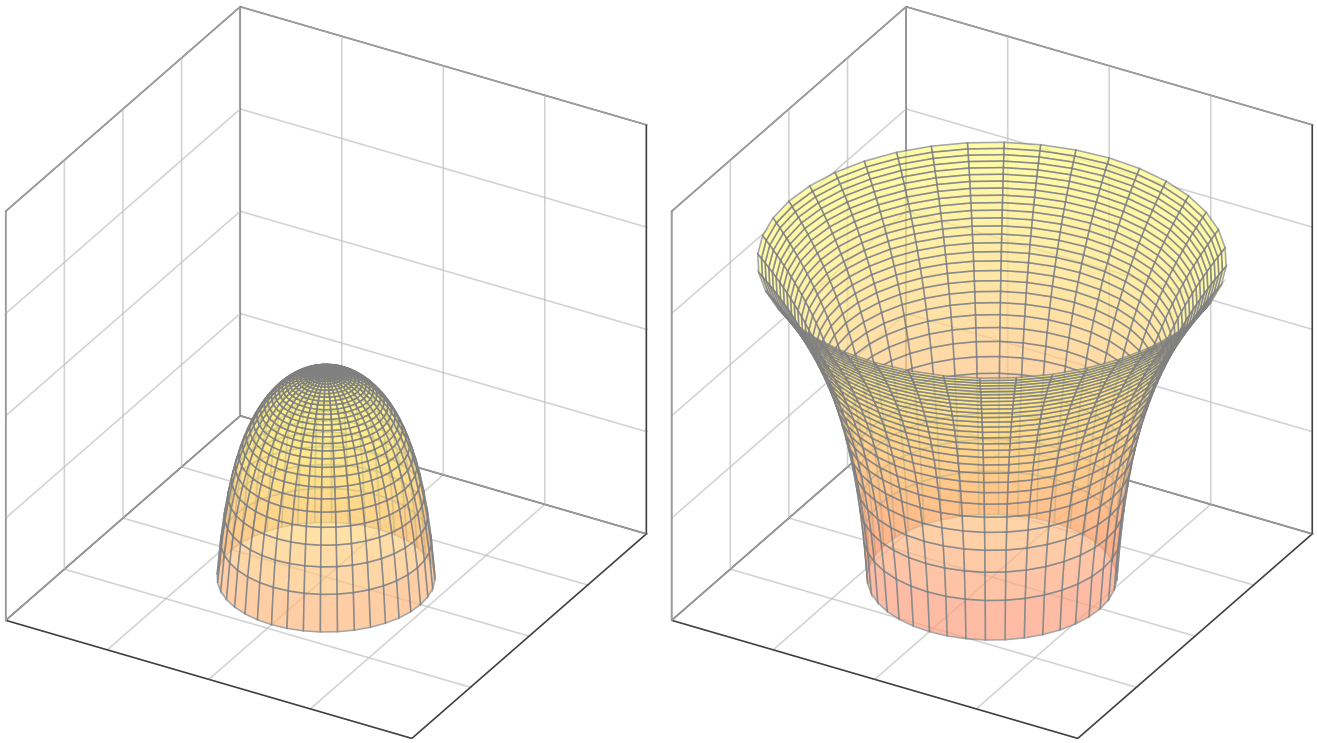
Das Gebiet B ist eine Kreisscheibe, auch hierauf hat f ein Potential.
Auf B finden wir das Potential $F_B(x,y) = \ln(1-x^2-y^2) + c_B$. Probe!

Insgesamt erhalten wir also $F(x,y) = \ln|x^2+y^2-1| + c_A\,\mathbf{I}_A + c_B\,\mathbf{I}_B$.

Potentialproblem auf Kreisring und Kreisscheibe

H320
Übung

Die beiden Zweige des Potentials $F(x,y) = \ln|x^2+y^2-1|$ auf den beiden Gebieten A und B sehen etwa wie folgt aus. Wir haben eine Singularität $F(x,y) \to -\infty$ entlang der Kreislinie $x^2+y^2 = 1$.



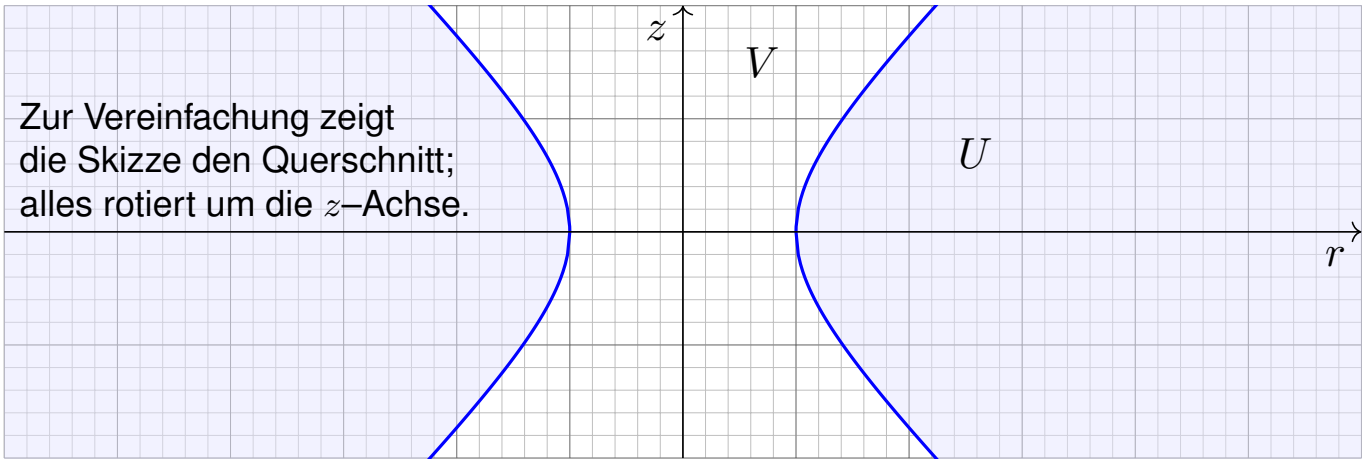
Aufgabe: (Ausführung zur Klausur vom Februar 2018)

(0) Skizzieren Sie $U = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \geq 1 + z^2 \,\}$.
(1) Hat jedes rotationsfreie Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^3$ ein Potential?

Sei $V = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1 + z^2 \,\}$ das Komplement von U.
(2) Hat jedes rotationsfreie Vektorfeld $f : V \to \mathbb{R}^3$ ein Potential?

Geben Sie explizit ein Gegenbeispiel, falls es eines gibt, andernfalls erklären Sie die Konstruktion eines Potentials.

Lösung: (0) Eine Skizze hilft wie immer enorm:



(1) Nein. Ein konkretes Gegenbeispiel ist das Wirbelfeld um die z–Achse, explizit etwa $f(x,y,z) = (-y, x, 0)/(x^2 + y^2)$.

Auf ganz U gilt $\operatorname{rot} f = 0$, aber dennoch gilt $\oint_\gamma f(s) \cdot \mathrm{d}s \neq 0$ entlang $\gamma : [0, 2\pi] \to U : t \mapsto (2\cos t, 2\sin t, 0)$. Demnach hat f kein Potential!

Die Bedingung $\operatorname{rot} f = 0$ ist zwar immer *notwendig* für ein Potential, aber *hinreichend* erst auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet.

☺ Unser Gebiet U ist nicht einfach zusammenhängend:
Die beiden Rechnungen $\operatorname{rot} f = 0$ und $\oint_\gamma f(s) \cdot \mathrm{d}s \neq 0$ beweisen, dass sich der Weg γ in U nicht zusammenziehen lässt! (Satz H2B)

(2) Ja. Die Menge V ist zwar nicht konvex, aber immerhin sternförmig zum Ursprung $(0,0,0)$ und somit einfach zusammenhängend.

Zu jedem vorgelegten Vektorfeld $f : V \to \mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{rot} f = 0$ erhalten wir ein Potential $F : V \to \mathbb{R}$ als Arbeitsintegral, am einfachsten direkt von $(0,0,0)$ nach (x,y,z), oder von $(0,0,0)$ über $(0,0,z)$ nach (x,y,z).

☺ Dank Rotationsfreiheit von f und einfachem Zusammenhang von U ist das Ergebnis $F(x,y,z)$ vom gewählten Integrationsweg unabhängig.

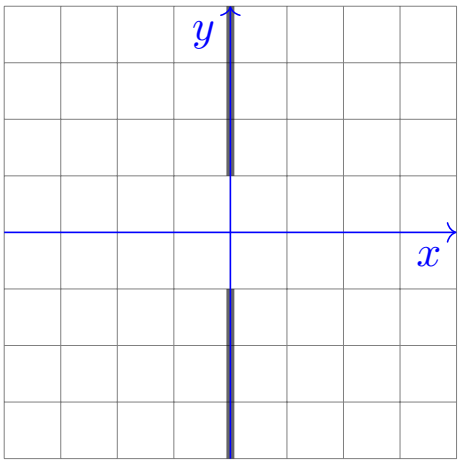
Notwendige und hinreichende Kriterien

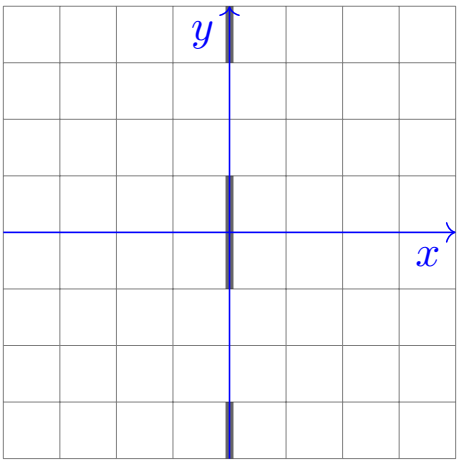
Aufgabe: (Ausführung zur Klausur vom September 2018)

(1) Im Raum $\mathbb{R}^3$ betrachten wir $E = \{\, (0,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |y| \geq 1 \,\}$, eine Ebene mit Einzelspalt, und ihr Komplement $U = \mathbb{R}^3 \smallsetminus E$. Hat jedes rotationsfreie Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^3$ ein Potential?

(2) Wir betrachten $D = \{\, (0,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |y| \leq 1 \text{ oder } |y| \geq 3 \,\}$, eine Ebene mit Doppelspalt, und ihr Komplement $V = \mathbb{R}^3 \smallsetminus D$. Hat jedes rotationsfreie Vektorfeld $f : V \to \mathbb{R}^3$ ein Potential?

Lösung: Eine Skizze hilft wie immer enorm:





Notwendige und hinreichende Kriterien

(1) Ja. Die Menge U ist zwar nicht konvex, aber immerhin sternförmig zum Ursprung $(0,0,0)$, und somit ist U einfach zusammenhängend.

Zu jedem vorgelegten Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{rot} f = 0$ erhalten wir ein Potential $F : U \to \mathbb{R}$ als Arbeitsintegral, am einfachsten direkt von $(0,0,0)$ nach (x,y,z), oder von $(0,0,0)$ über $(0,0,z)$ nach (x,y,z).

☺ Dank Rotationsfreiheit von f und einfachem Zusammenhang von U ist das Ergebnis $F(x,y,z)$ vom gewählten Integrationsweg unabhängig.

(2) Nein. Ein konkretes Gegenbeispiel ist das Wirbelfeld um die z–Achse, also explizit $f(x,y,z) = (-y,x,0)/(x^2+y^2)$.

Auf ganz V gilt $\operatorname{rot} f = 0$, aber dennoch gilt $\oint_\gamma f(s) \cdot \mathrm{d}s \neq 0$ entlang $\gamma : [0,2\pi] \to V : t \mapsto (2\cos t, 2\sin t, 0)$. Demnach hat f kein Potential!

☺ Das lässt sich physikalisch messen im **Aharanov-Bohm-Effekt**, laut *New Scientist* eines der „sieben Wunder der Quantenmechanik“.

☺ Unser Gebiet V ist also nicht einfach zusammenhängend. Die Bedingung $\operatorname{rot} f = 0$ ist zwar immer *notwendig* für ein Potential, aber *hinreichend* erst auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet.

Potentialproblem für gegenläufige Wirbelfelder

H325
Übung

Aufgabe: Auf dem Gebiet $U = \mathbb{R}^2 \setminus ([-1,1] \times \{0\})$ betrachten wir

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{(x-1)^2 + y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x-1 \end{pmatrix}, \quad g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{-1}{(x+1)^2 + y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x+1 \end{pmatrix},$$

(1) Skizzieren Sie die Felder f, g und ihre Superposition $h = f + g$.
(2) Bestimmen Sie die Rotation. (3) Besitzt f ein Potential? g? und h?
(4) Bestimmen Sie möglichst explizit ein Potential, falls existent.

Lösung: (1) Das Feld f ist das rechtsdrehende Wirbelfeld um $(1,0)$. Entsprechend ist g das linksdrehende Wirbelfeld um den Pol $(-1,0)$. Ihre Superposition $h = f + g$ ergibt sich durch punktweise Addition. (Beispiele: Wirbelschleppe eines Flugzeugs, Magnetfeld einer Spule)

(2) Wir wissen bereits $\operatorname{rot}(f) = 0$ und $\operatorname{rot}(g) = 0$ und somit $\operatorname{rot}(h) = 0$. Wir nutzen die Linearität der Ableitung: $\operatorname{rot}(f+g) = \operatorname{rot}(f) + \operatorname{rot}(g)$.

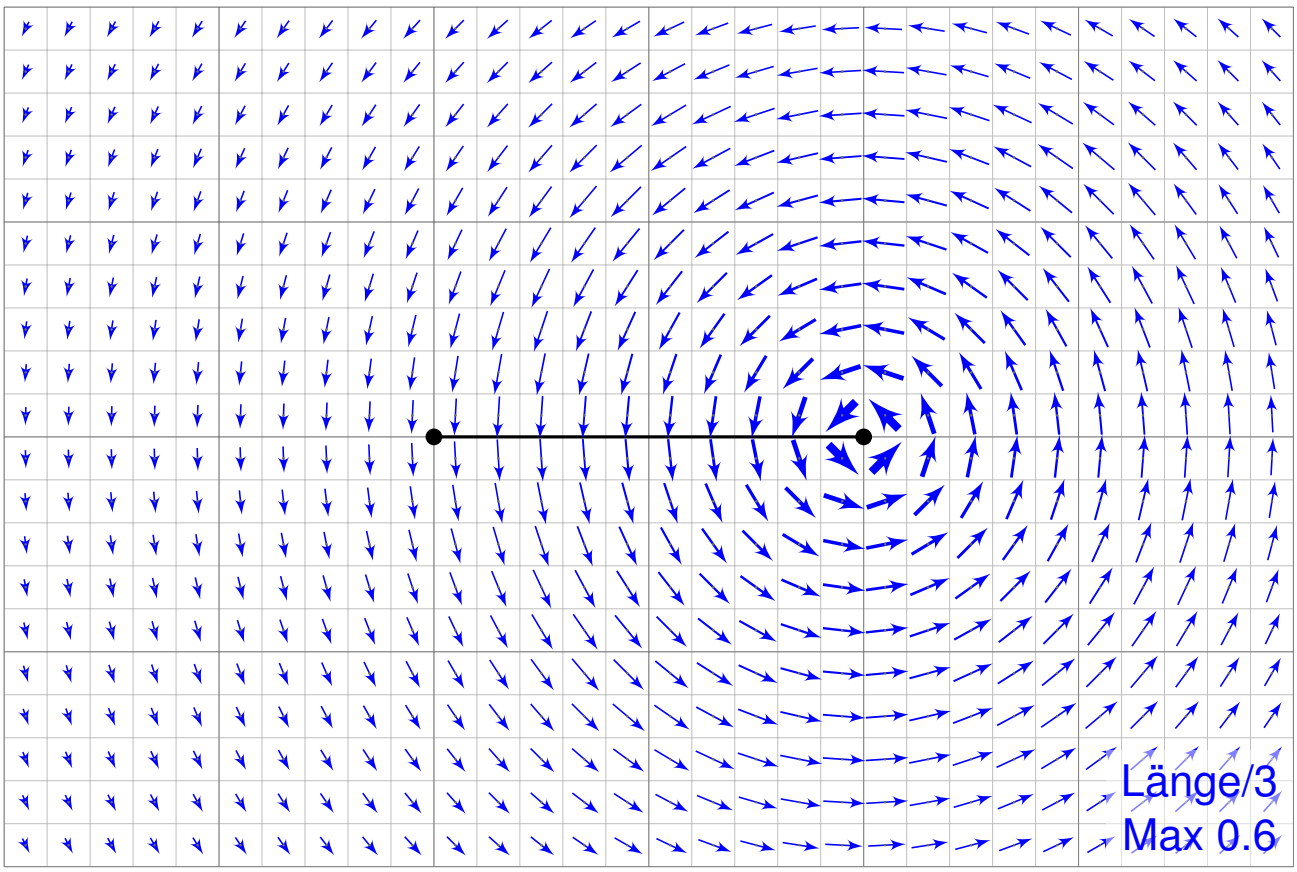
(3) Das Feld f hat auf U kein Potential, denn $\oint_{\partial B(0,2)} f(s) \cdot \mathrm{d}s = 2\pi \neq 0$. Ebenso hat g auf U kein Potential, denn $\oint_{\partial B(0,2)} g(s) \cdot \mathrm{d}s = -2\pi \neq 0$.

☺ Das Feld h hingegen hat auf unserem Gebiet U ein Potential!

Potentialproblem für gegenläufige Wirbelfelder

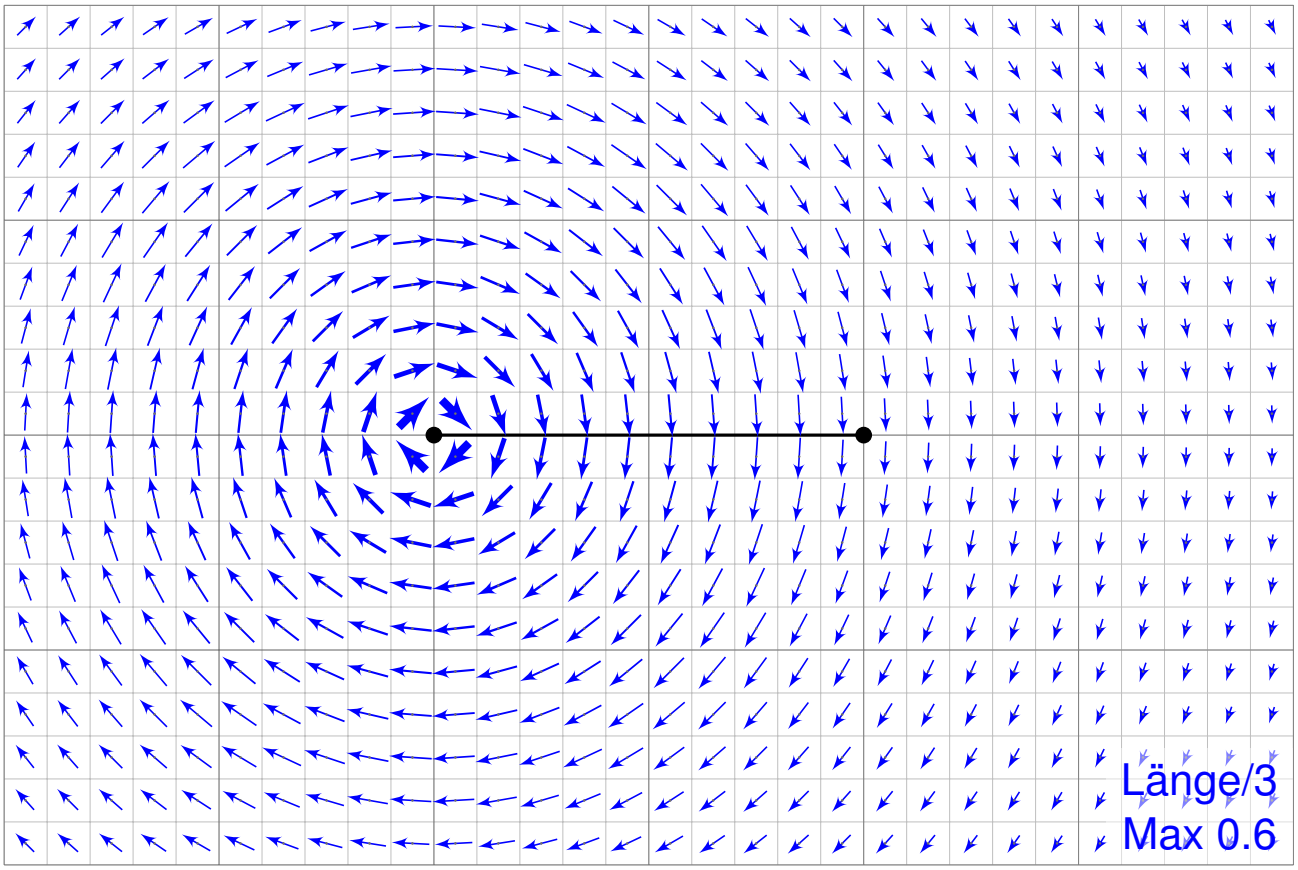
H326
Übung

Das rechtsdrehende Wirbelfeld f um den Punkt $(1,0)$.



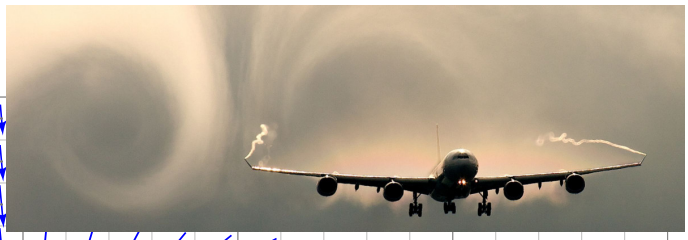
Potentialproblem für gegenläufige Wirbelfelder

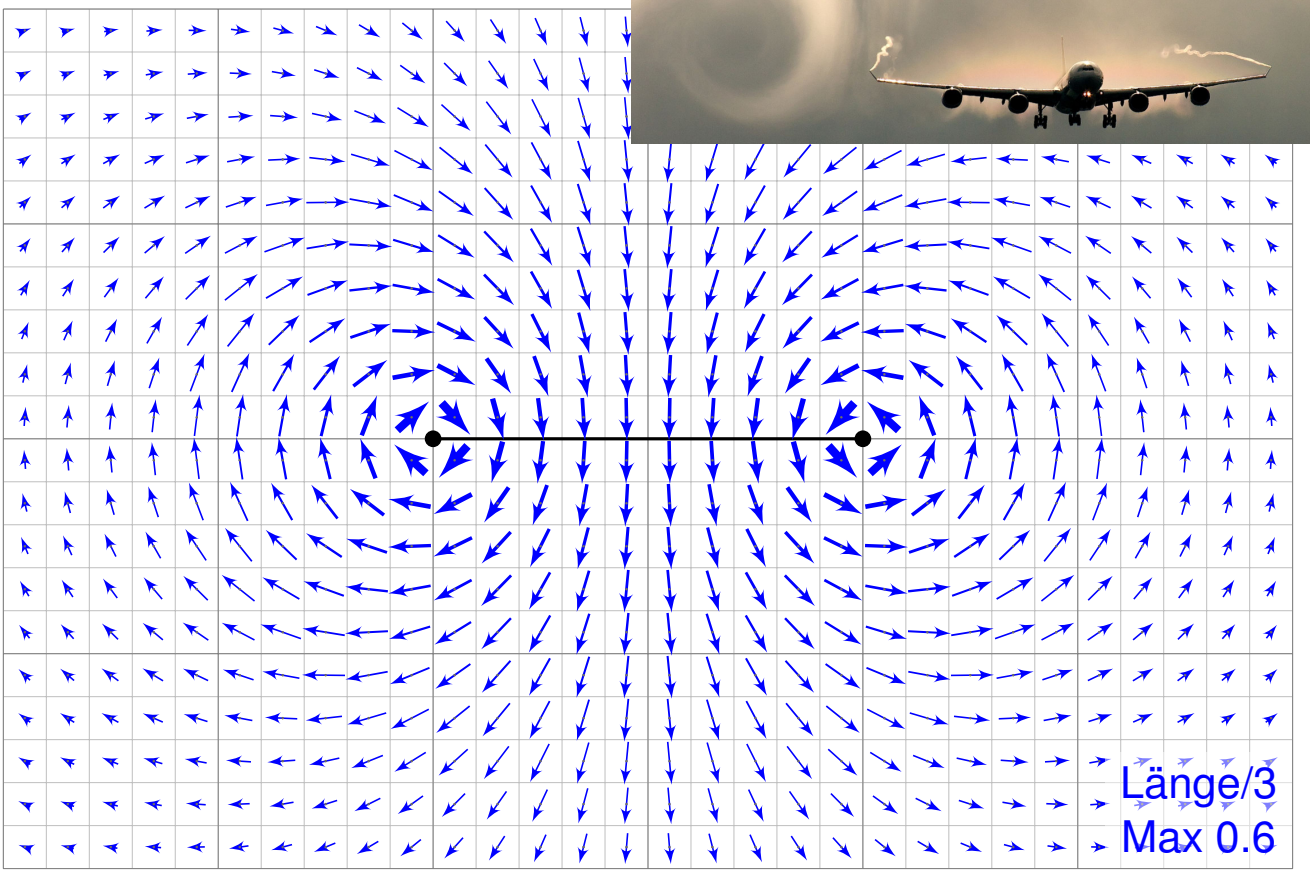
Das linksdrehende Wirbelfeld g um den Punkt $(-1, 0)$.



Potentialproblem für gegenläufige Wirbelfelder

Die Superposition $h = f + g$.





Potentialproblem für gegenläufige Wirbelfelder

H329
Übung

Wie kann man zu $h : U \to \mathbb{R}^2$ ein Potential $H : U \to \mathbb{R}$ konstruieren?
Für f und g kennen wir jeweils Potentiale F_i und G_i auf Halbebenen.
Hieraus erhalten wir jeweils Potentiale $H_i = F_i + G_i$ zu $h = f + g$:

$$U_1 = \{x > +1\} : \quad H_1(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x-1}\right) - \arctan\left(\frac{y}{x+1}\right) + \text{const}$$

$$U_2 = \{y > 0\} : \quad H_2(x,y) = \arctan\left(\frac{x+1}{y}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{y}\right) + \text{const}$$

$$U_3 = \{x < -1\} : \quad H_3(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x-1}\right) - \arctan\left(\frac{y}{x+1}\right) + \text{const}$$

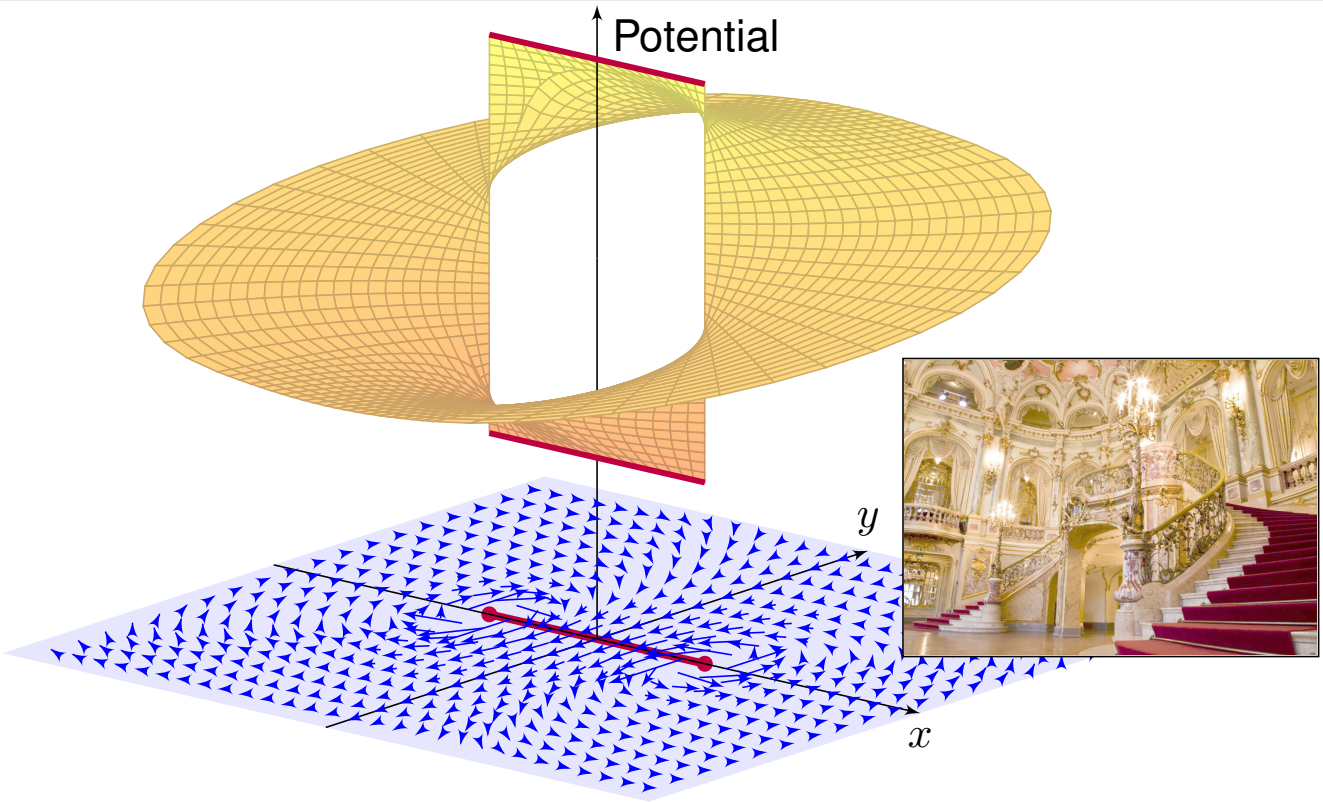
$$U_4 = \{y < 0\} : \quad H_4(x,y) = \arctan\left(\frac{x+1}{y}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{y}\right) + \text{const}$$

Wir versuchen, diese zusammenzukleben... und erleben ein Wunder:
Setzt man alle Konstanten Null, so passen H_1, H_2, H_3, H_4 zusammen!
Die Sprungstelle $[-1,1] \times \{0\}$ ist hier aus U ausgenommen.

Wir machen die Punktprobe: Es gilt $H_1(2,0) = 0$ sowie $H_2(2,y) \to 0$ für $y \searrow 0$ und $H_4(2,y) \to 0$ für $y \nearrow 0$. Ebenso gilt $H_3(-2,0) = 0$ sowie $H_2(-2,y) \to 0$ für $y \searrow 0$ und $H_4(-2,y) \to 0$ für $y \nearrow 0$. Alles wird gut!

Potentialproblem für gegenläufige Wirbelfelder

H330
Übung

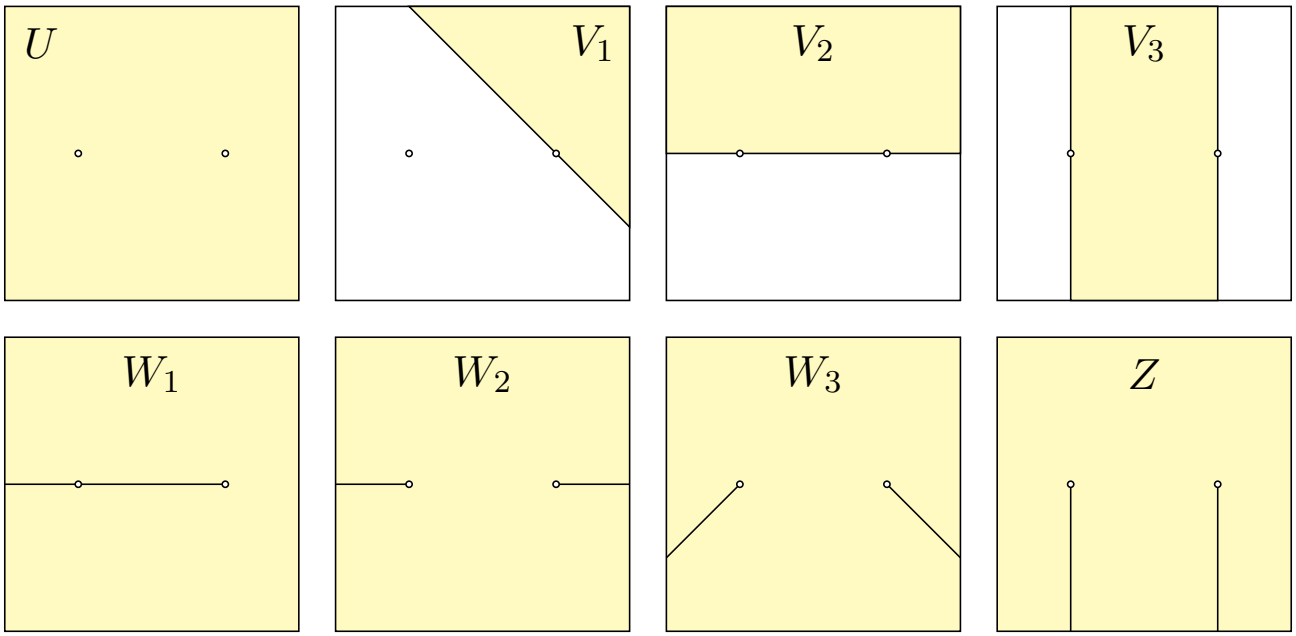


Das Wirbelfeld $f : U \to \mathbb{R}^2$ hat kein Potential auf U, ebensowenig das gegenläufige Wirbelfeld $g : U \to \mathbb{R}^2$. Erstaunlicherweise hat für $a, b \in \mathbb{R}$ ihre Superposition $h = af + bg$ genau dann ein Potential, wenn $a = b$ gilt.

Einfach zusammenhängende Gebiete

H331
Übung

Aufgabe: Welche der folgenden Gebiete in $U =]-2,2[^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\}$ sind konvex? sternförmig? einfach zusammenhängend?



Das Gebiet U ist weder konvex noch sternförmig, nicht einmal einfach zusammenhängend, wie wir aus unserem zentralen Beispiel wissen! Die Gebiete V_1, V_2, V_3 sind konvex, W_1, W_2, W_3 sind nicht konvex aber sternförmig, und Z nicht sternförmig aber einfach zusammenhängend.

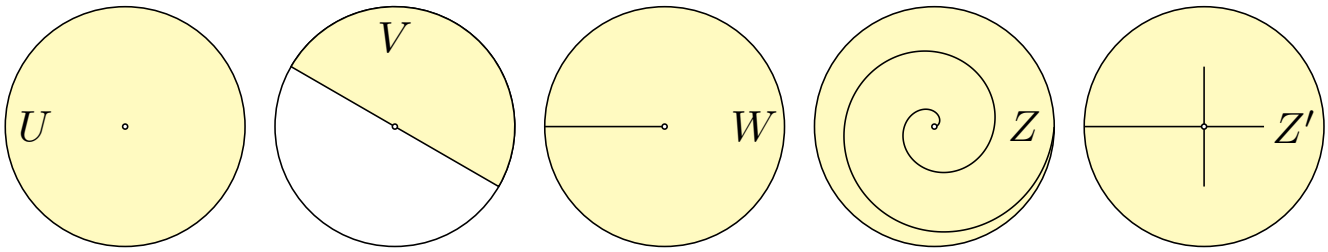
Einfach zusammenhängende Gebiete

H332
Übung

Aufgabe: Wir betrachten das Gebiet $U = B(0,2) \setminus \{(0,0)\}$.
(1) Ist U konvex? sternförmig? einfach zusammenhängend?

Finden Sie, jeweils maximal, (2) ein konvexes Gebiet $V \subseteq U$, (3) ein sternförmiges Gebiet $W \subseteq U$, sowie (4) ein einfach zusammenhängendes Gebiet $Z \subseteq U$, das nicht sternförmig ist.

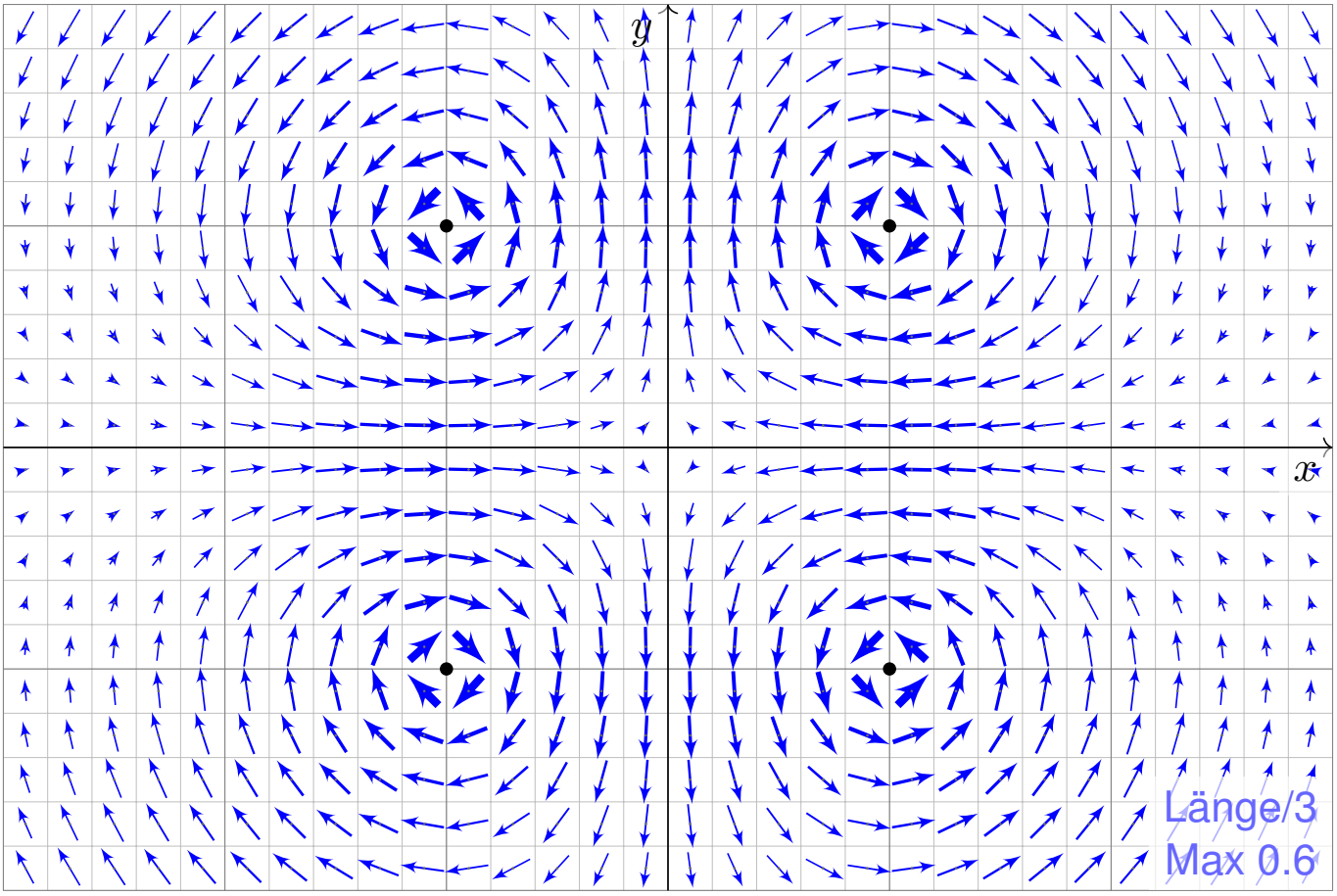
Lösung: Für $U = B(0,2) \setminus \{(0,0)\}$ betrachte man folgende Skizzen:



Das Gebiet U ist weder konvex noch sternförmig, nicht einmal einfach zusammenhängend, wie wir aus unserem zentralen Beispiel wissen! Offensichtlich ist V konvex und sogar maximal mit dieser Eigenschaft. Entsprechend ist W nicht konvex aber sternförmig bezüglich $(1,0)$, zudem maximal mit dieser Eigenschaft. Die Gebiete Z und Z' sind nicht sternförmig, aber immerhin einfach zusammenhängend. Zudem ist Z maximal mit dieser Eigenschaft, aber Z' nicht.

Quadrupolis

H333
Ausführung



Quadrupolis

H334
Ausführung

Aufgabe: Auf dem Gebiet $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1, \pm 1)\}$ untersuchen wir

$$f : \mathbb{R}^2 \supseteq U \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{(x^2-1)^2 + (y^2-1)^2} \begin{pmatrix} +2x(y^2-1) \\ -2y(x^2-1) \end{pmatrix}.$$

(1) Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie das Arbeitsintegral $\int f(s) \bullet \mathrm{d}s$
(a) für den geraden Weg α von $(0, y)$ nach (x, y), wobei $y \neq \pm 1$,
(b) für den geraden Weg β von $(x, 0)$ nach (x, y), wobei $x \neq \pm 1$.

(2) Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ das Quadrat mit den Ecken $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$, $(0,2)$. Berechnen Sie das Arbeitsintegral $\oint_{\partial Q} f(s) \bullet \mathrm{d}s$. Nutzen Sie hierzu

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} +\pi/2 - \arctan x & \text{falls } x > 0, \\ -\pi/2 - \arctan x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

(3) Berechnen Sie die Jacobi–Matrix f'. (a) Ist unser Vektorfeld f divergenzfrei? und rotationsfrei? (b) Besitzt f ein Potential auf U?
(c) Berechnen Sie das Arbeitsintegral $\oint_{\partial B((1,1),r)} f(s) \bullet \mathrm{d}s$ für $0 < r < 2$.

(4) Besitzt f ein Potential auf $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \pm 1,\ |y| \geq 1 \,\}$? Falls ja, berechnen Sie dies als Arbeitsintegral von $(0,0)$ nach (x,y).

Quadrupolis

H335
Ausführung

Die Lösung dieser Aufgabe sollen Sie *berechnen* und dann *bewundern*. Zur Unterstützung Ihrer Anschauung, als Ermutigung und zur Probe der sorgsamen Rechnung skizziere ich nachfolgend die Potentialflächen.

Die ersten beiden Graphiken zeigen die Funktionen

$$+\arctan\Big(\frac{x^2-1}{y^2-1}\Big) \qquad \text{und} \qquad -\arctan\Big(\frac{y^2-1}{x^2-1}\Big).$$

Die roten Linien markieren die Definitionslücken $y = \pm 1$ bzw. $x = \pm 1$: Unsere Lösungsfunktion kann hier nicht stetig fortgesetzt werden!

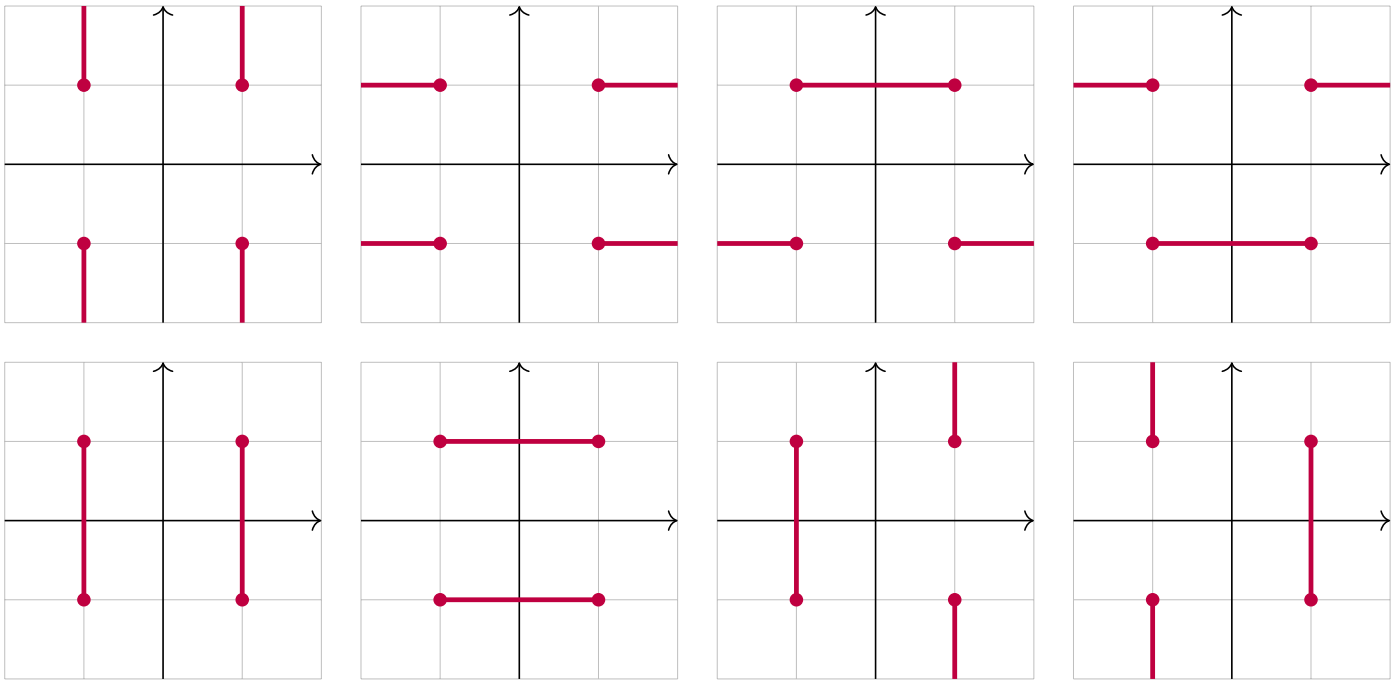
Die letzten Graphiken zeigen eine hieraus zusammengesetzte Fläche; die Verschiebungen entstehen durch geeignete additive Konstanten. Hierdurch können wir die zuvor konstruierten Flächenstücke glatt zu einem Gesamtkunstwerk verkleben. Das Ergebnis ist sensationell, erhellend und schön anzuschauen. Sie dürfen stolz darauf sein.

Die so entstehende Potentialfläche über $U = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(\pm 1, \pm 1)\}$ ist aber leider keine Funktion! Die gesuchte Potentialfunktion über V ist nur ein Teil dieser Fläche: Welcher Teil? Das hängt von der „Aufschneidung“ ab.

Quadrupolis

H336
Ausführung

Beispiele: Auf folgenden Gebieten erlaubt das Vektorfeld f ein Potential. Die letzten sechs Beispiele sind dabei nicht einfach zusammenhängend!

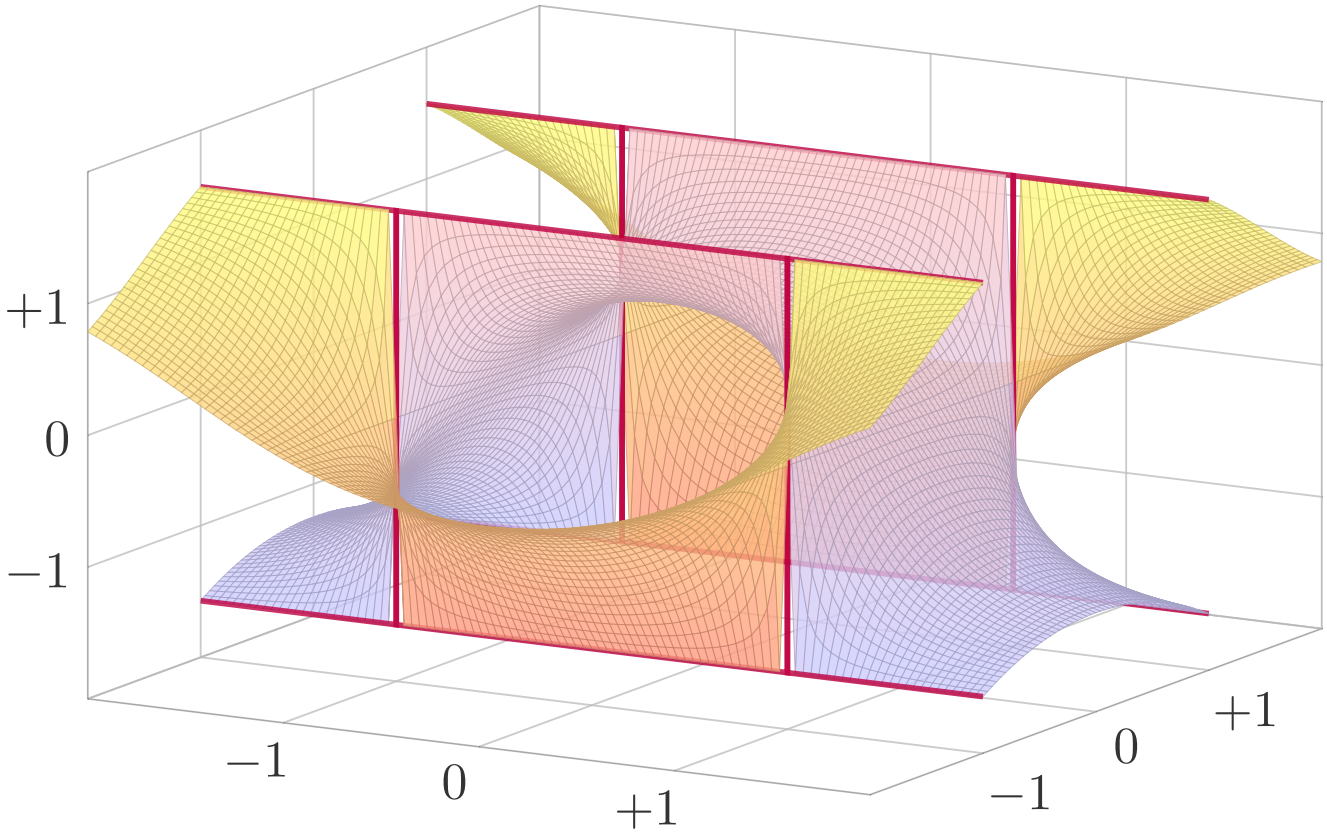


Es gibt unzählige weitere Beispiele geeigneter Gebiete $U \subseteq \mathbb{R}^2$, auf denen das Vektorfeld $f|_U$ ein Potential F_U erlaubt, mit $\operatorname{grad} F_U = f|_U$. Obacht! Es gibt ebenso unzählige Beispiele ungeeigneter Gebiete.

Quadrupolis

H337
Ausführung

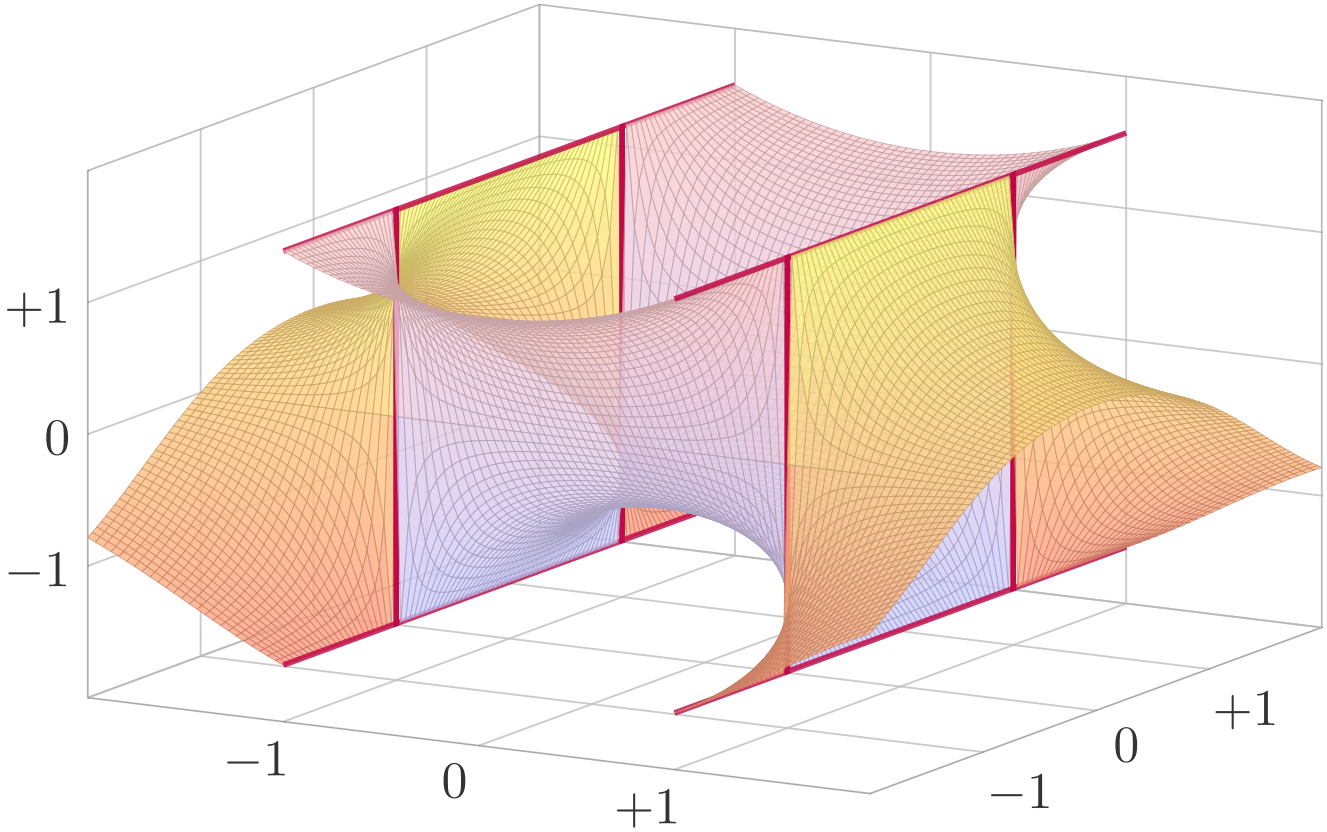
Die Funktion $\arctan\left(\frac{x^2-1}{y^2-1}\right)$ springt bei $|y|=1$ zwischen $\pm\frac{\pi}{2}$.



Quadrupolis

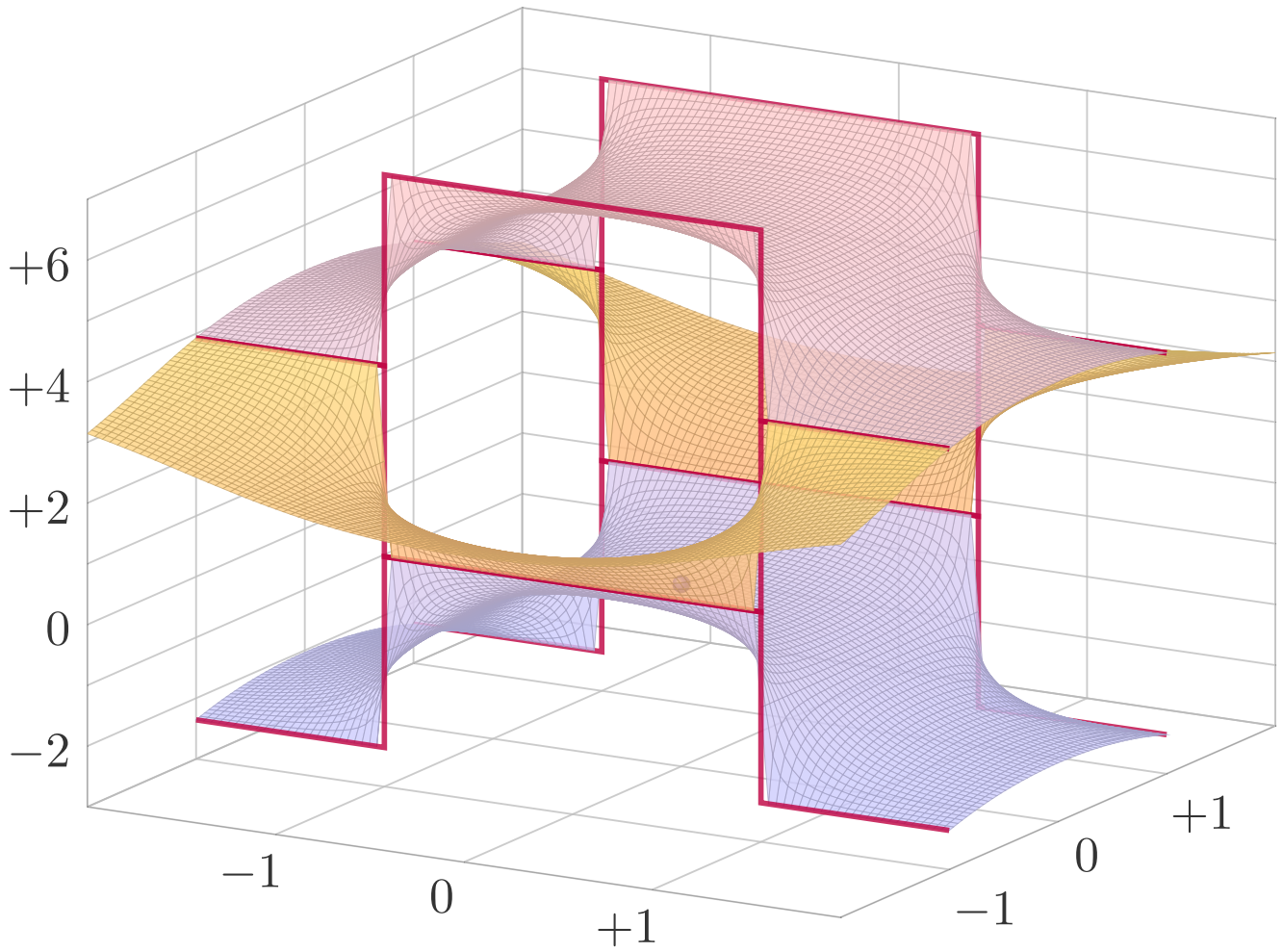
H338
Ausführung

Die Funktion $\arctan\left(\frac{y^2-1}{x^2-1}\right)$ springt bei $|x|=1$ zwischen $\mp\frac{\pi}{2}$.



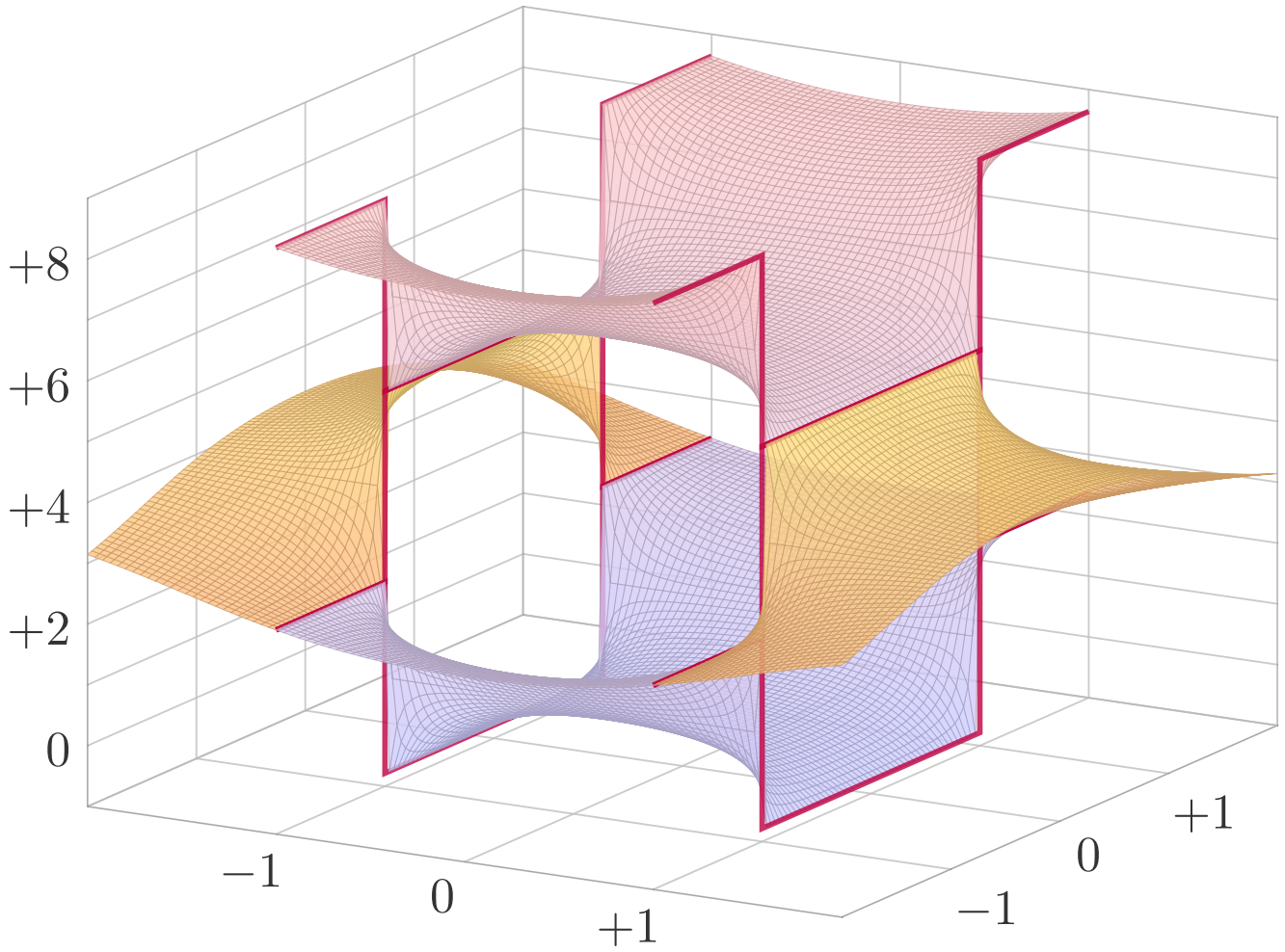
Quadrupolis

H339
Ausführung



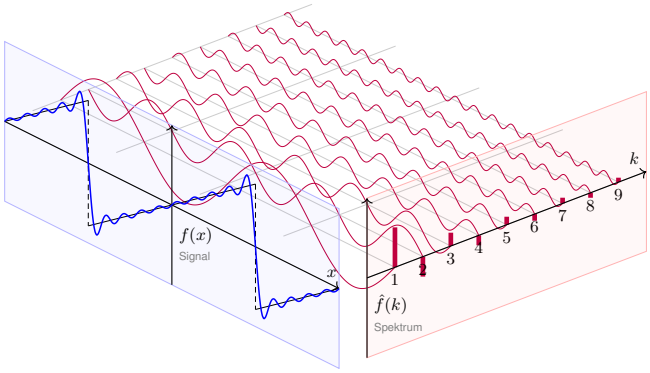
Quadrupolis

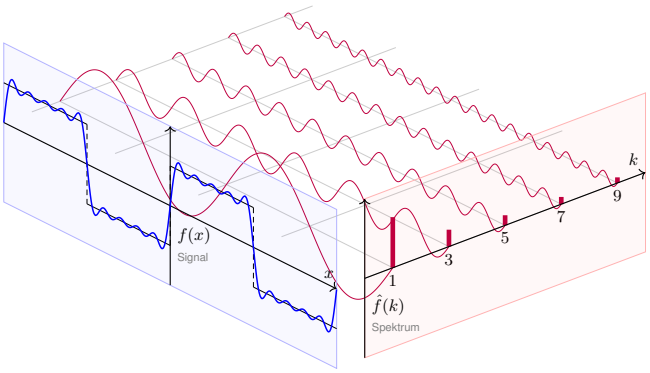
H340
Ausführung



Kapitel I

Fourier–Analyse periodischer Funktionen





L'analyse mathématique est aussi étendue que la nature elle-même [...].
Elle rapproche les phénomènes les plus divers,
et découvre les analogies secrètes qui les unissent.

Joseph Fourier (1768–1830), *Théorie analytique de la chaleur* (1822)

Inhalt dieses Kapitels I

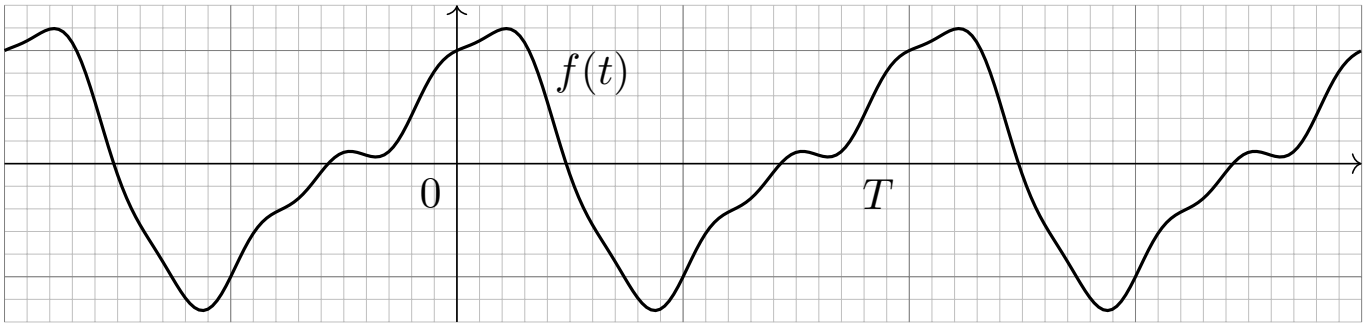
1 Die trigonometrische Orthonormalbasis
- Periodische Funktionen, erste Beispiele
- Periodische Fortsetzung, Spiegelung
- Skalarprodukt und Orthonormalbasis

2 Fourier–Analyse und das Dirichlet–Kriterium
- Fourier–Entwicklung der Sägezahnfunktion
- Das Konvergenz-Kriterium von Dirichlet
- Fourier–Entwicklung von Treppenfunktionen

3 Rechenregeln zu Integration und Glattheit
- Integrieren und Differenzieren
- Abklingen der Fourier–Koeffizienten
- Von Potenzreihen zu Fourier–Reihen

4 Fazit: Fourier–Analyse periodischer Funktionen
- Zusammenfassung und Verständnisfragen
- Weitere Aufgaben und Anwendungen

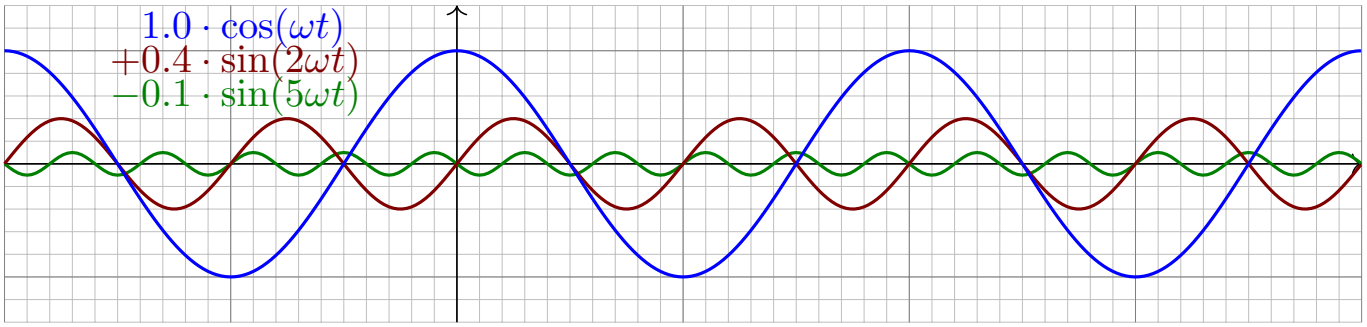
Motivation zu Fourier–Reihen



Vorgelegt sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Periode T, also Grundfrequenz $\omega = 2\pi/T$.

Ziel: Wir zerlegen das Signal f in harmonische Schwingungen gemäß

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \underbrace{a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t)}_{\text{Grundschwingung}} + \underbrace{a_2 \cos(2\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) + \ldots}_{\text{Oberschwingungen}}$$



Motivation zu Fourier–Reihen

Periodische Vorgänge sind überall: Jahreszeiten, Tag & Nacht, Puls, Schwingungen, Schall... Ihr Innenohr ermittelt eine Fourier–Analyse. Zerlegung (Analyse) in harmonische Schwingungen gelingt für praktisch alle periodischen Funktionen, egal wie kapriziös sie auch sein mögen! Diese sensationelle Entdeckung trug Fourier 1807 der Akademie vor. Dirichlet klärte 1829 grundlegende Fragen zur Konvergenz (Synthese).

Die Fourier–Analyse hat zahlreiche wichtige technische Anwendungen:

- Digitalisierung von Ton- und Bilddaten (FFT, MP3, JPEG, MPEG).
- Datenkompression, Herausfiltern relevanter Frequenzbereiche.
- Datenanalyse, Mustererkennung, z.B. Spracherkennung.
- Zerlegen von komplizierten Funktionen in einfache Basisfunktionen.
- Optimale L^2–Approximation, Lösung von Differentialgleichungen.

Wir behandeln hierzu ausführlich die mathematischen Grundlagen:

- Wie berechnet man zur Funktion f ihre Fourier–Koeffizienten?
- Konvergiert die Fourier–Reihe? Wie? Wann? Wo? Wogegen?

▶ 3Blue1Brown: *But what is a Fourier series?* `youtu.be/r6sGWTCMz2k`

Periodische Funktionen

Jede Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ können wir als **Signal** betrachten:
Jedem Zeitpunkt $t\in\mathbb{R}$ wird ein reeller Wert $f(t)\in\mathbb{R}$ zugeordnet.
Diese Zuordnung ist zunächst beliebig und muss nicht stetig sein.

Es ist nützlich, auch komplexe Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ zu untersuchen;
das kostet keinerlei Mehraufwand und vereinfacht viele Rechnungen.

Definition I1A: periodische Funktion

Eine Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ hat **Periode** $T\in\mathbb{R}_{>0}$, wenn gilt:

$$\boxed{f(t+T)=f(t)\quad \text{für alle } t\in\mathbb{R}}$$

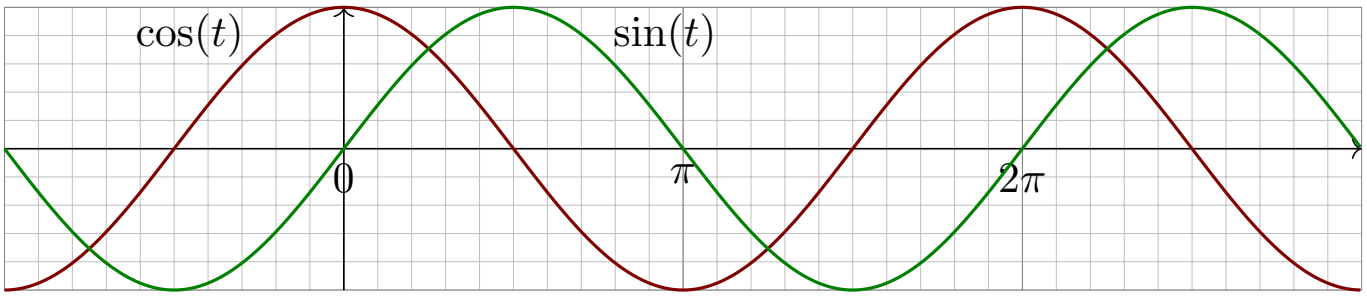
Das bedeutet, die Funktionswerte wiederholen sich im Abstand von T.
Hierzu sagen wir auch kurz, die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ ist **T–periodisch**.

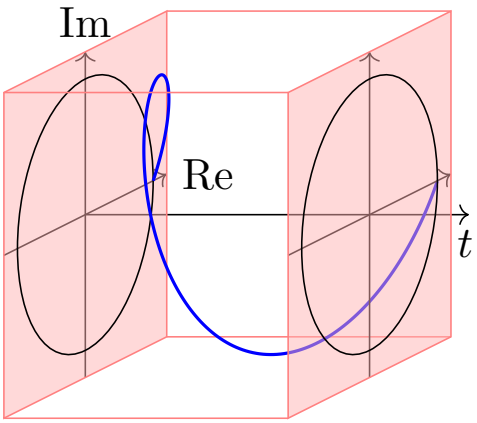
In diesem Fall gilt $f(t+nT)=f(t)$ für alle ganzen Zahlen $n\in\mathbb{Z}$.
Mit T sind somit auch alle Vielfachen $2T$, $3T$, $4T$, etc. Perioden.

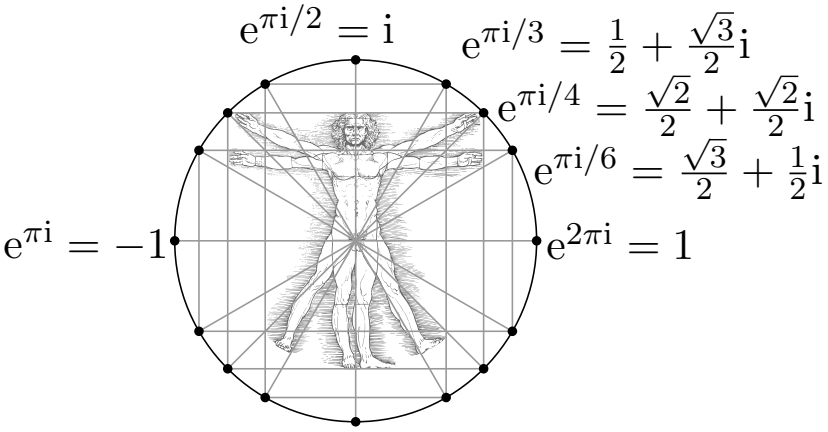
Die kleinste Periode nennt man gelegentlich auch **Minimalperiode**.
Diese zusätzliche Bedingung spielt im Folgenden meist keine Rolle.

Periodische Funktionen

Leitbeispiel: Die Funktion $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}=\cos(t)+\mathrm{i}\sin(t)$ hat Periode $T=2\pi$.





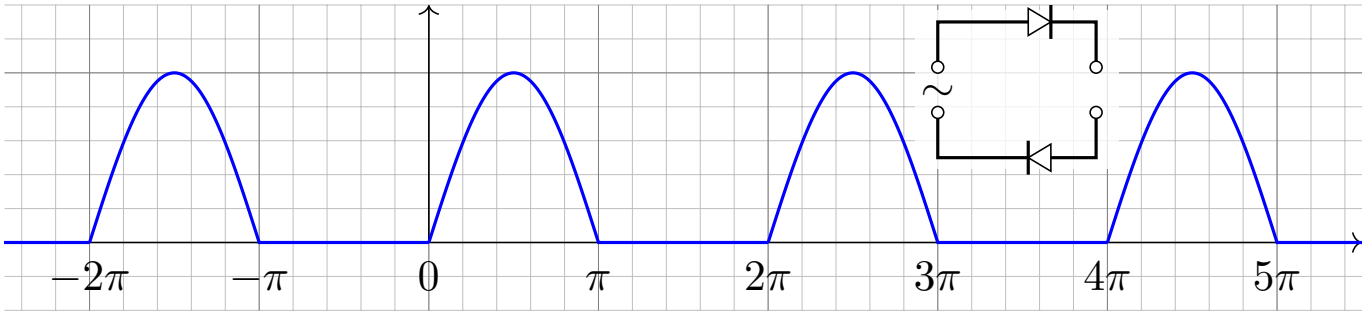


Die Funktionen $\cos(k\omega t)$ und $\sin(k\omega t)$ mit $k\in\mathbb{Z}$ haben Periode $T=2\pi/\omega$,
ebenso die komplexe Funktion $e_k(t):=\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}=\cos(k\omega t)+\mathrm{i}\sin(k\omega t)$.

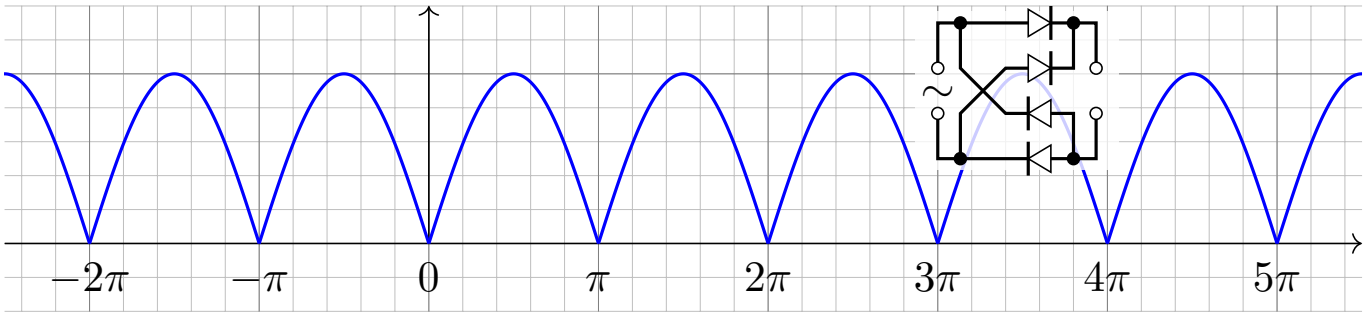
Periodische Funktionen: Beispiele

Legen wir die Spannung $\sin t$ an einen Gleichrichter, so erhalten wir...

Einweg-Gleichrichter: Spannungsverlauf $(\sin t)^+ = \max\{0, \sin t\}$. I417



Zweiweg-Gleichrichter: Spannungsverlauf $|\sin t|$ mit Periode π. I417

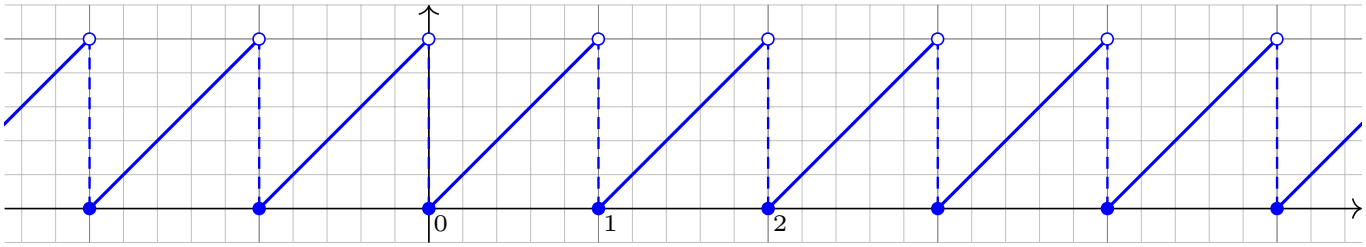


Diese Funktionen sind stetig aber nicht differenzierbar (in $t \in \pi\mathbb{Z}$).

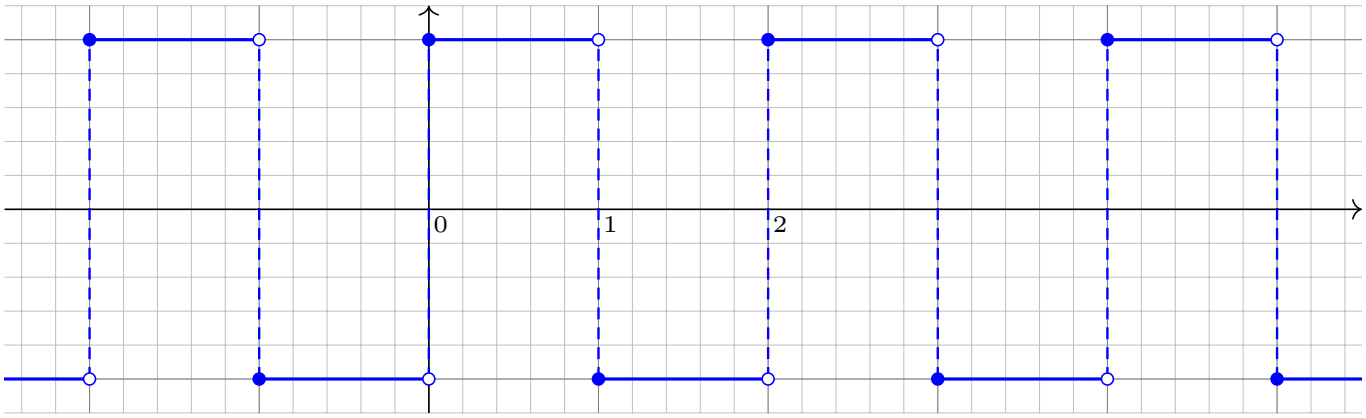
Periodische Funktionen: Beispiele

Die **Gauß–Klammer** $\lfloor x \rfloor := \max\{\, k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x \,\}$ bedeutet Abrunden.

Die **Sägezahnfunktion** $s(t) = t - \lfloor t \rfloor$ hat Periode 1 (und $2, 3, 4, \ldots$).



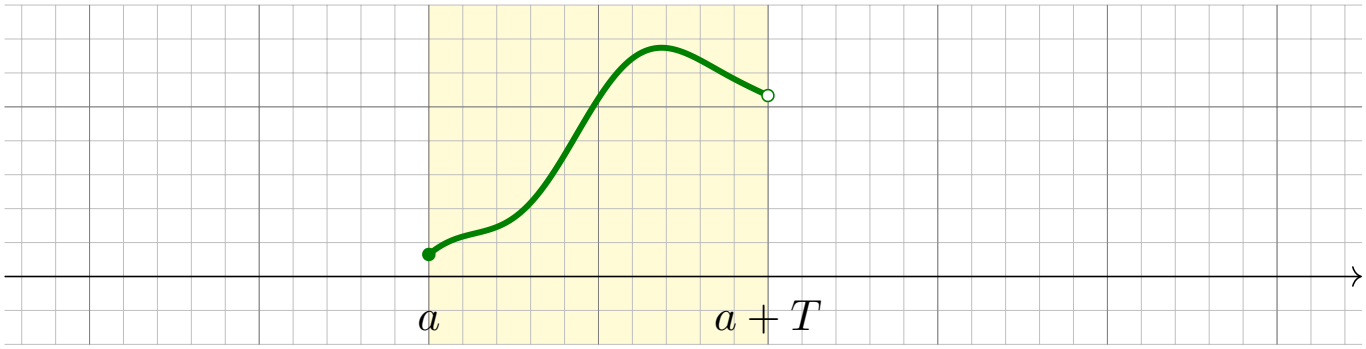
Die **Rechteckfunktion** $r(t) = (-1)^{\lfloor t \rfloor}$ hat Periode 2 (und $4, 6, 8, \ldots$).



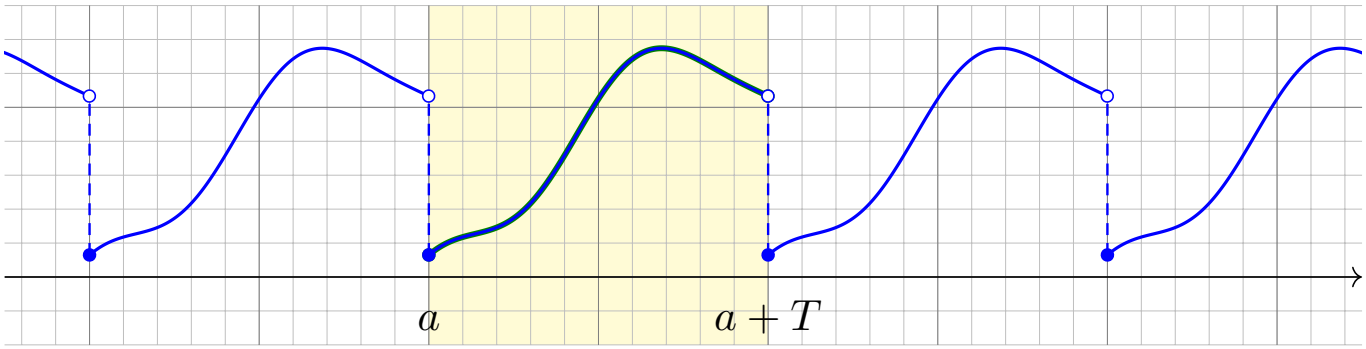
Diese Funktionen sind unstetig (in $t \in \mathbb{Z}$) aber stückweise stetig (B1E).

Periodische Fortsetzung durch Verschiebung

Aufgabe: Setzen Sie die folgende Funktion T–periodisch fort.



Lösung: Hier gilt $f(t+T) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, und so setzen wir f fort:



Periodische Fortsetzung durch Verschiebung

Jede T–periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist eindeutig durch ihre Werte auf einem beliebigen Periodenintervall $[a, a+T[$ bestimmt. Ausführlich:

Aufgabe: Gegeben sei $g : [a, a+T[\to \mathbb{C}$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $T > 0$. Dazu existiert genau eine T–periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f|_{[a,a+T[} = g$.
(1) Warum gilt hier Eindeutigkeit? (2) Wie beweist man die Existenz?

Lösung: Zur Vereinfachung können wir alles nach $a = 0$ verschieben.
(1) Eindeutigkeit: Jede reelle Zahl $t \in \mathbb{R}$ schreibt sich eindeutig als

$$t = q \cdot T + r \quad \text{mit } q \in \mathbb{Z} \text{ und } 0 \le r < T.$$

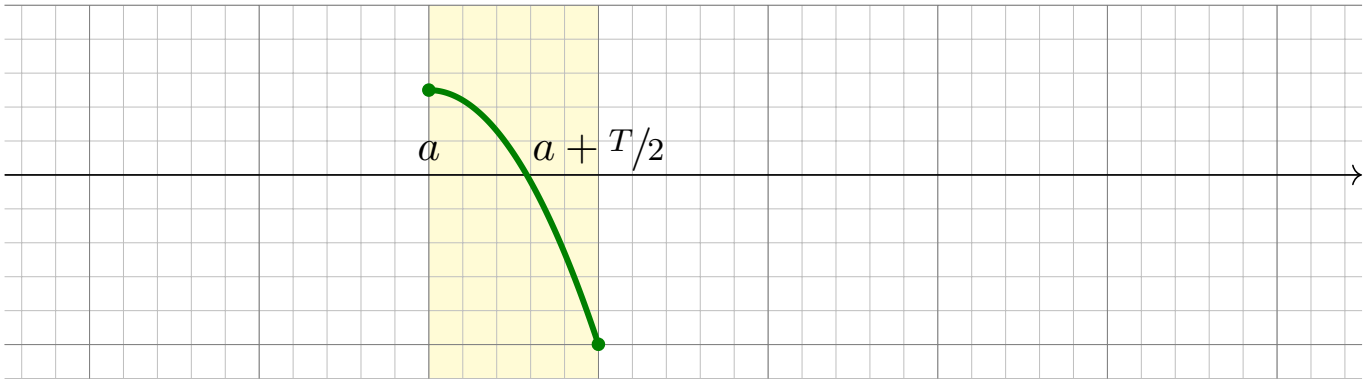
Ausführlich: Quotient $q = \lfloor t/T \rfloor \in \mathbb{Z}$ und Rest $r = t - qT \in [0, T[$.
Damit berechnet sich $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eindeutig aus $g : [0, T[\to \mathbb{C}$ gemäß

$$f(t) = f(t - qT) = f(r) = g(r).$$

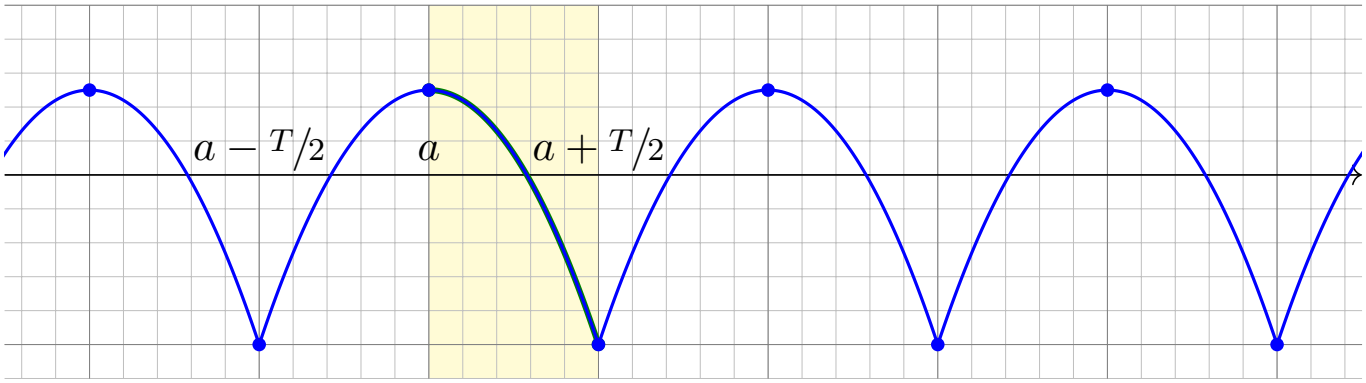
(2) Existenz: Aus den vorgegebenen Daten $g : [0, T[\to \mathbb{C} : r \mapsto g(r)$ konstruieren wir explizit die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : t \mapsto g\big(t - \lfloor t/T \rfloor \cdot T\big)$.
Diese Funktion f ist tatsächlich T–periodisch und erfüllt $f|_{[a,a+T[} = g$.

Gerade Fortsetzung durch Achsenspiegelung

Aufgabe: Setzen Sie die Funktion (bzgl. a) gerade T–periodisch fort.

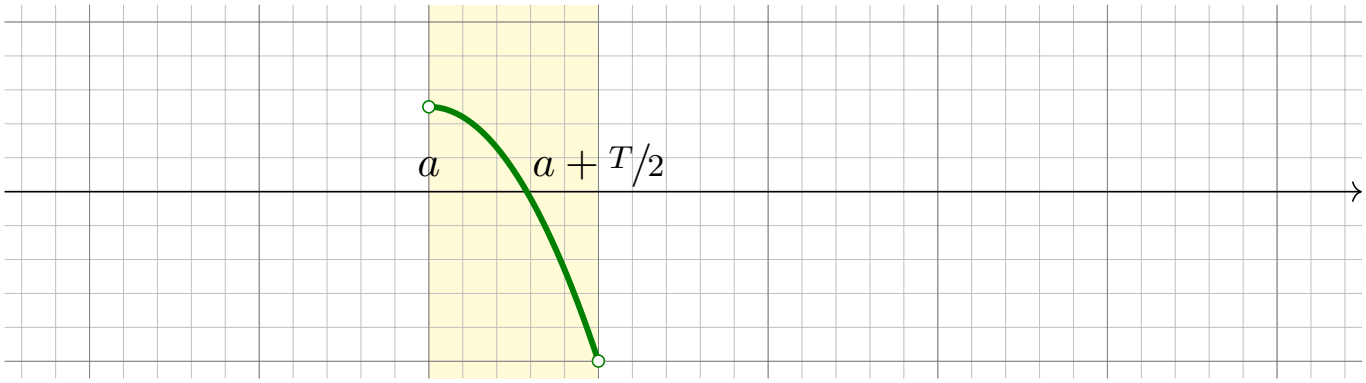


Lösung: Hier gilt $f(t+T) = f(t)$ und $f(a-t) = f(a+t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$:

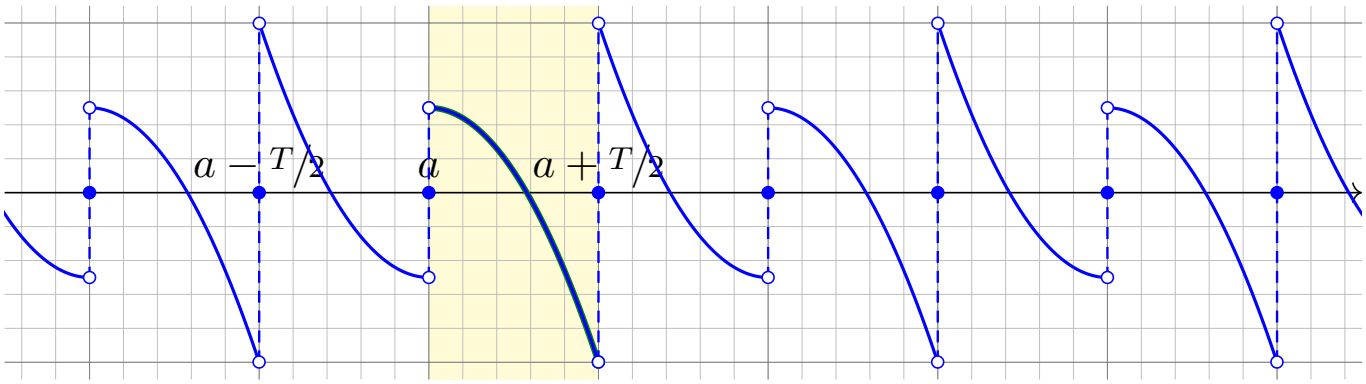


Ungerade Fortsetzung durch Punktspiegelung

Aufgabe: Setzen Sie die Funktion (bzgl. a) ungerade T–periodisch fort.

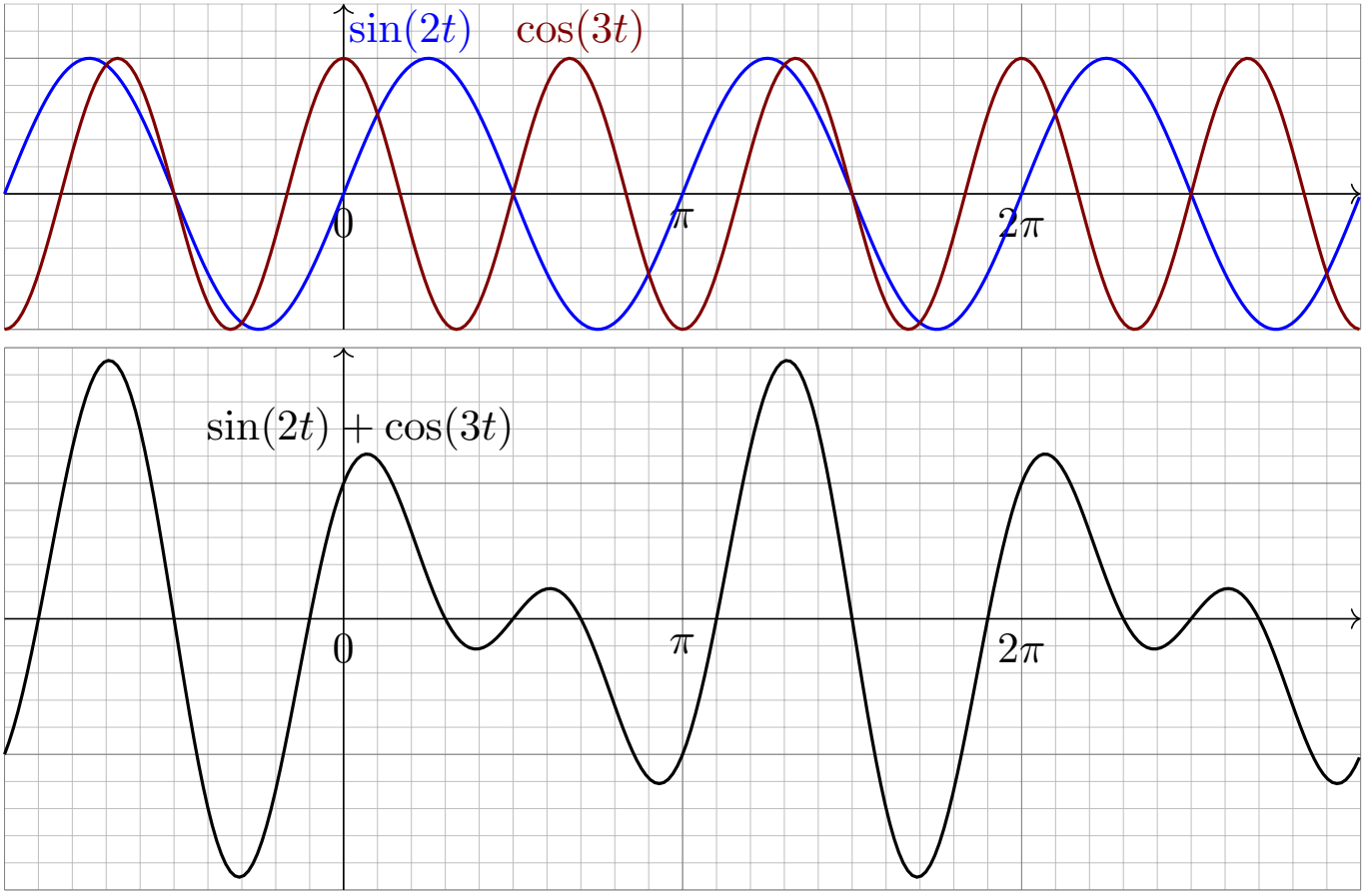


Lösung: Hier gilt $f(t+T) = f(t)$ und $f(a-t) = -f(a+t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$:



Summen T–periodischer Funktionen

Haben $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Periode T, dann auch ihre Summe $f + g$.



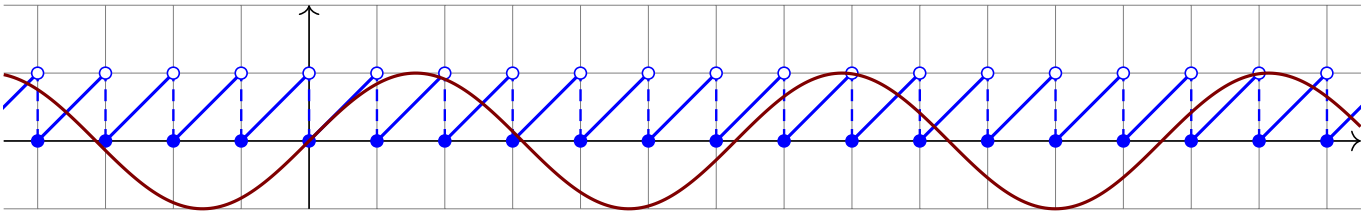
Summen periodischer Funktionen

Aufgabe: Sind $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periodisch, dann auch ihre Summe?

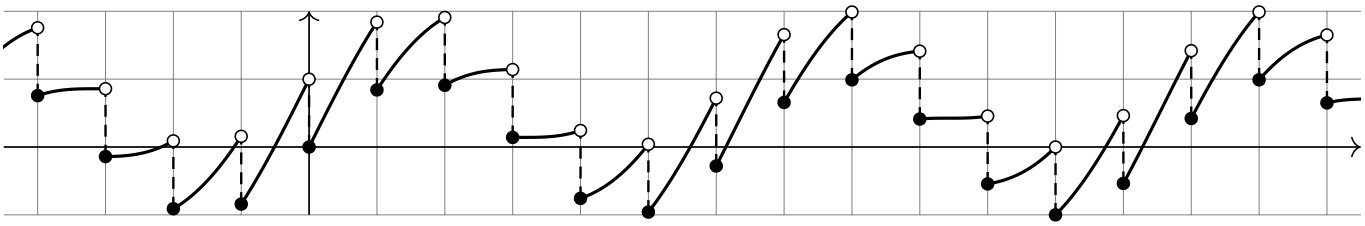
Lösung: Nein! Hierzu müssen f, g eine *gemeinsame* Periode haben.

⚠ Bei der obigen Summe haben f und g eine gemeinsame Periode. Das ist auch nötig, andernfalls ist die Summe nicht mehr periodisch!

Beispiel: Die Sägezahnfunktion $s(t) = t - \lfloor t \rfloor$ hat Periode $n = 1, 2, 3, \ldots$. Die Funktion $t \mapsto \sin(t)$ hat Perioden $2\pi n$, aber keine mit s gemeinsam:

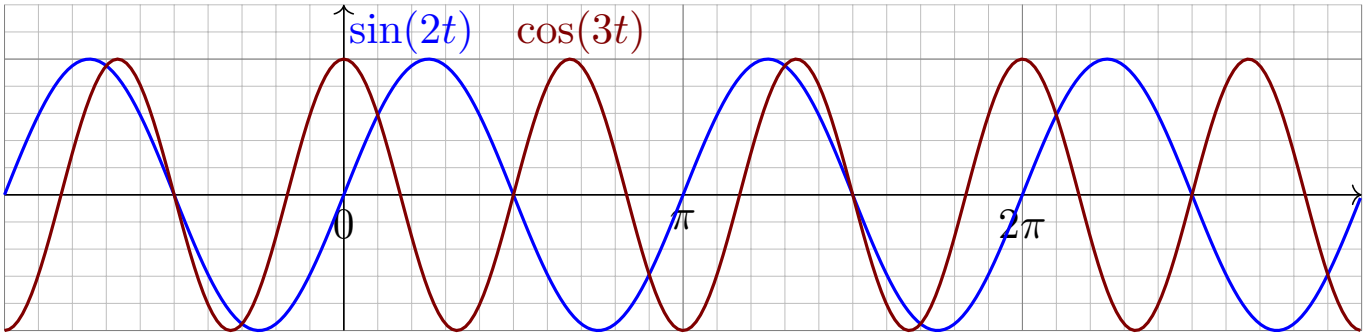


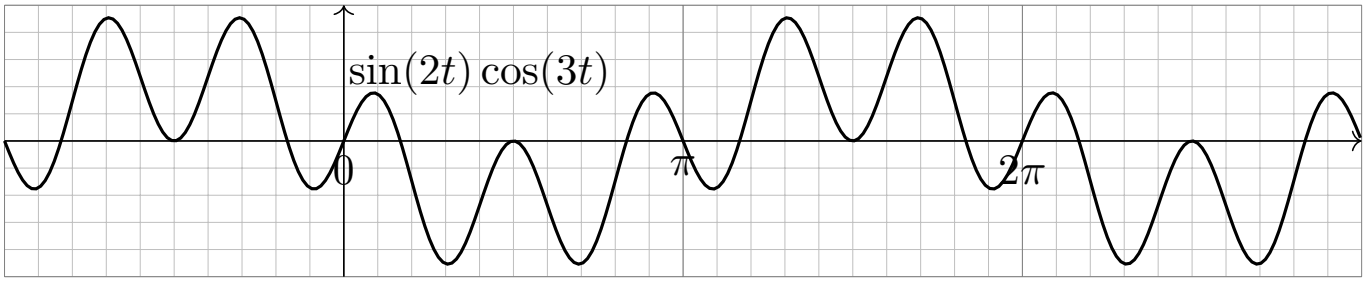
Ihre Summe ist nicht periodisch! (Sie ist nur noch „fastperiodisch“.)



Produkte T–periodischer Funktionen

Haben $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Periode T, dann auch ihr Produkt $f \cdot g$.

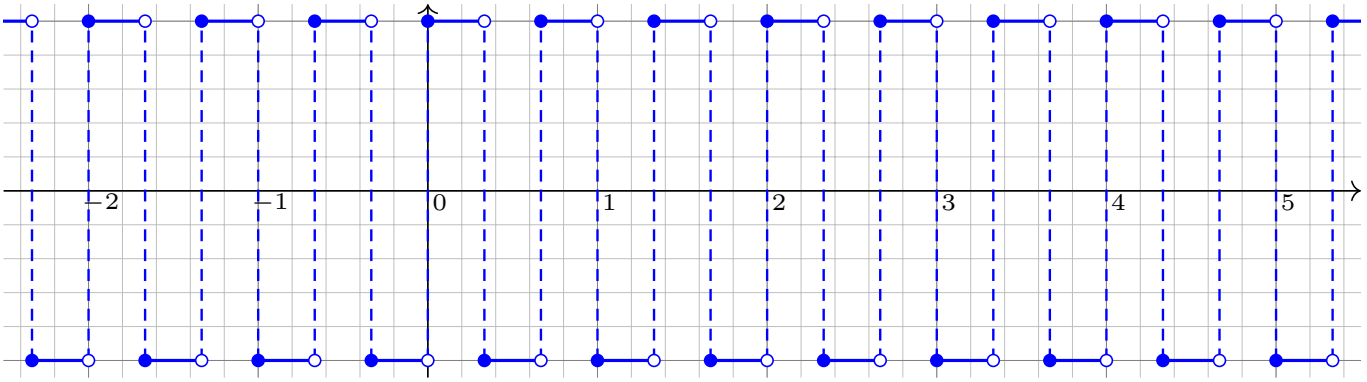




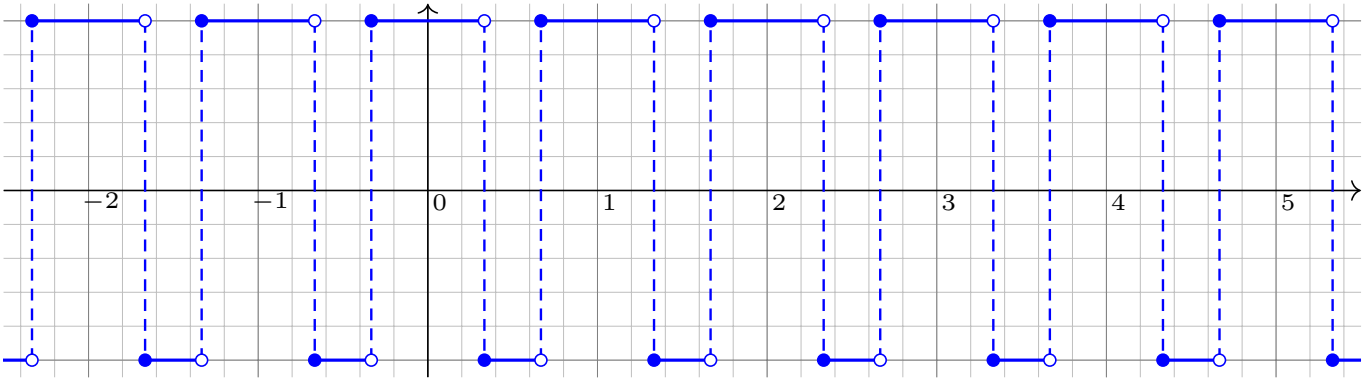
Der Funktionenraum $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) := \{\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \,\}$ ist ein $\mathbb{C}$–Vektorraum, sogar eine Algebra, bezüglich der punktweisen Verknüpfungen. Darin liegt die Menge $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{C})^{\mathbb{Z}T} := \{\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid \forall t \in \mathbb{R} : f(t+T) = f(t) \,\}$ aller T–periodischen Funktionen als Untervektorraum und Unteralgebra: Summen und Produkte T–periodischer Funktionen sind T–periodisch.

Produkte T–periodischer Funktionen

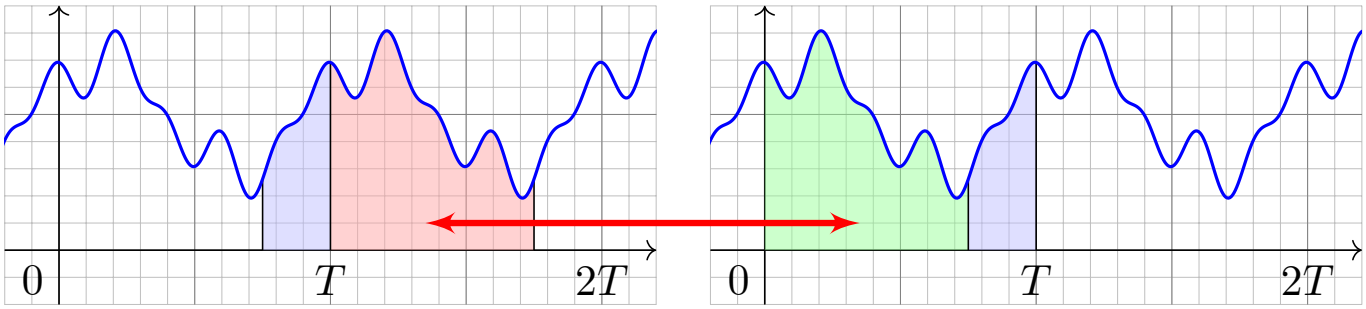
Hat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Periode T, dann auch $g(t) = f(kt)$ für $k \in \mathbb{N}$. Beispiel: Die Rechteckfunktion $r(t) = (-1)^{\lfloor t \rfloor}$ hat Periode 2, ebenso $r(3t)$:



Auch ihr Produkt $r(t)\, r(3t)$ hat Periode 2. Es hat sogar Periode 1!



Integral T–periodischer Funktionen



Lemma I1B: Integral T–periodischer Funktionen

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei T–periodisch und auf $[0, T]$ integrierbar. Zur Integration können wir ein beliebiges Periodenintervall wählen:

$$\int_{t=a}^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Nachrechnen: Wie skizziert sei $0 < a < T$, allgemein geht's genauso. Dank Periodizität gilt $\int_{t=T}^{T+a} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{0+a} f(t)\,\mathrm{d}t$, dank Additivität also

$$\int_a^{a+T} f = \int_a^T f + \int_T^{T+a} f = \int_a^T f + \int_0^a f = \int_0^a f + \int_a^T f = \int_0^T f.$$

Skalarprodukt T–periodischer Funktionen

Definition I1C: Skalarprodukt periodischer Funktionen

Für Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ definieren wir ihr **Skalarprodukt** durch

$$L^p \times L^q \to \mathbb{C} \;:\; (f, g) \mapsto \langle\, f \mid g \,\rangle := \frac{1}{b-a} \int_{t=a}^{b} \overline{f(t)}\, g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Der Integrand $\overline{f} g$ sei absolut integrierbar, etwa $f \in L^\infty$ beschränkt und $g \in L^1$ absolut integrierbar, allgemein $f \in L^p, g \in L^q$ mit $1/p + 1/q = 1$. Bei Periode $T > 0$ integrieren wir über ein Intervall mit $b - a \in \mathbb{N}_{\geq 1} \cdot T$. Das Periodenintegral ist invariant bei Verschiebung und Vervielfachung.

Symmetrie: Vertauschen bedeutet konjugieren, $\langle\, g \mid f \,\rangle = \overline{\langle\, f \mid g \,\rangle}$.

Linearität im zweiten Faktor, konjugiert im ersten: Für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt

$$\langle\, f \mid g_1 + g_2 \,\rangle = \langle\, f \mid g_1 \,\rangle + \langle\, f \mid g_2 \,\rangle, \qquad \langle\, f \mid \alpha\, g \,\rangle = \alpha \,\langle\, f \mid g \,\rangle,$$
$$\langle\, f_1 + f_2 \mid g \,\rangle = \langle\, f_1 \mid g \,\rangle + \langle\, f_2 \mid g \,\rangle, \qquad \langle\, \alpha\, f \mid g \,\rangle = \overline{\alpha} \,\langle\, f \mid g \,\rangle.$$

Positivität: Für jede stetige Funktion $f \neq 0$ gilt $\langle\, f \mid f \,\rangle > 0$. Allgemein gilt $\langle\, f \mid f \,\rangle \geq 0$, und aus $\langle\, f \mid f \,\rangle = 0$ folgt $f(t) = 0$ für fast alle $t \in [a, b]$.

Umparametrisieren auf Periode 2π

☺ Jede T–periodische Funktion können wir zu Periode 2π umparametrisieren. Letztere sind für uns besonders bequem.

Proposition I1D: Umparametrisierung auf Periode 2π

Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : t \mapsto \varphi(t)$ eine Funktion mit Periode $T > 0$ und Grundfrequenz $\omega = 2\pi/T$. Wir setzen $x = \omega t$, also $t = x/\omega$.

Dann hat die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f(x) = \varphi(t) = \varphi(x/\omega)$ Periode 2π, denn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x + 2\pi) = \varphi(t + T) = \varphi(t) = f(x)$.

Das Skalarprodukt bleibt dank Substitutionsregel B1K unverändert.

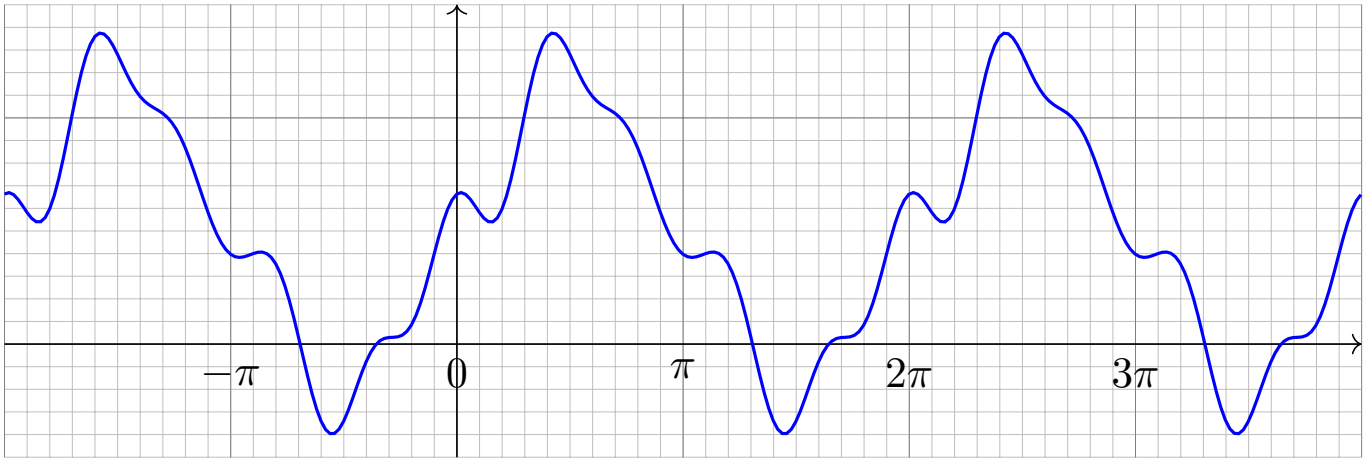
Für $t = x/\omega$ und $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x/\omega$ sowie $\varphi(t) = f(x)$ und $\psi(t) = g(x)$ gilt:

$$\langle \varphi \mid \psi \rangle_T = \frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} \overline{\varphi(t)}\, \psi(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{x=0}^{2\pi} \overline{f(x)}\, g(x)\, \mathrm{d}x = \langle f \mid g \rangle_{2\pi}$$

Wir betrachten im Folgenden meist 2π–periodische Funktionen.
Dann ist $\omega = 1$, und unsere Formeln werden kürzer und einfacher.
In konkreten Anwendungen ist die Frequenz ω meist fest vorgegeben.
Die Umrechnung gelingt jedenfalls leicht wie oben in I1D festgehalten.

Trigonometrische Polynome

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sin(x) - \frac{1}{7}\sin(3x) + \frac{2}{15}\cos(5x) + \frac{3}{100}\cos(6x)$

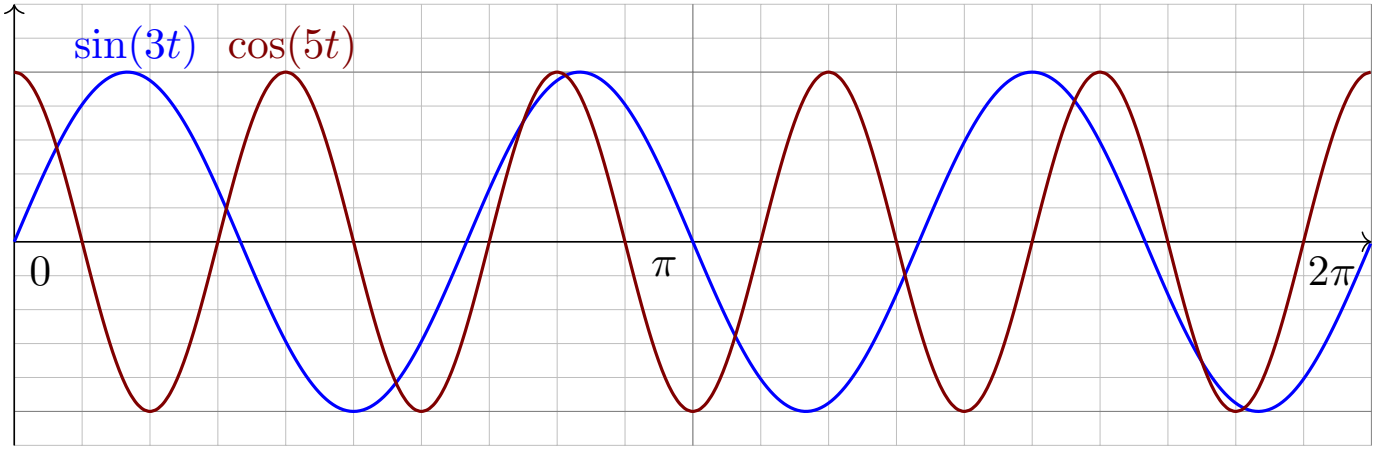


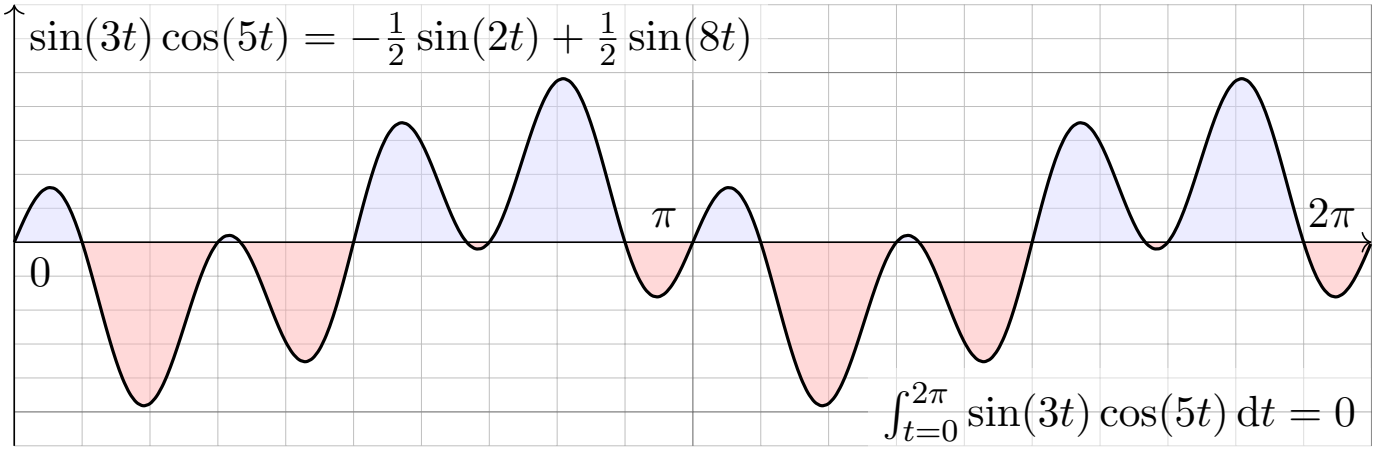
Trigonometrisches Polynom nennen wir jede endliche Summe

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}.$$

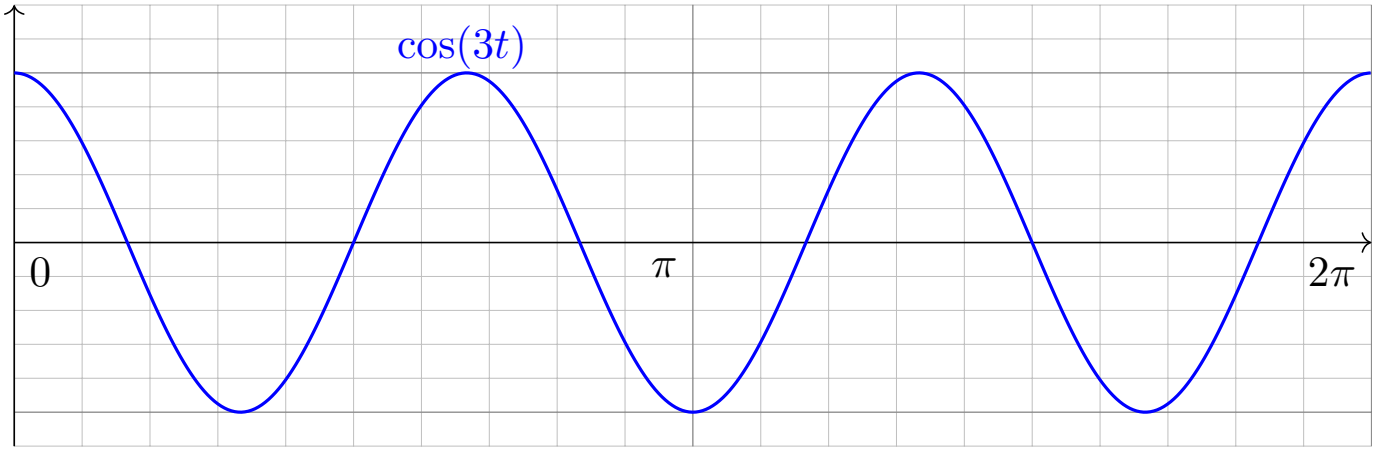
zu gegebenen Koeffizienten $a_k, b_k \in \mathbb{C}$, $b_0 = 0$ bzw. $c_{\pm k} = (a_k \mp \mathrm{i}b_k)/2$.
☺ Beide Schreibweisen sind nützlich, die komplexe ist oft bequemer.

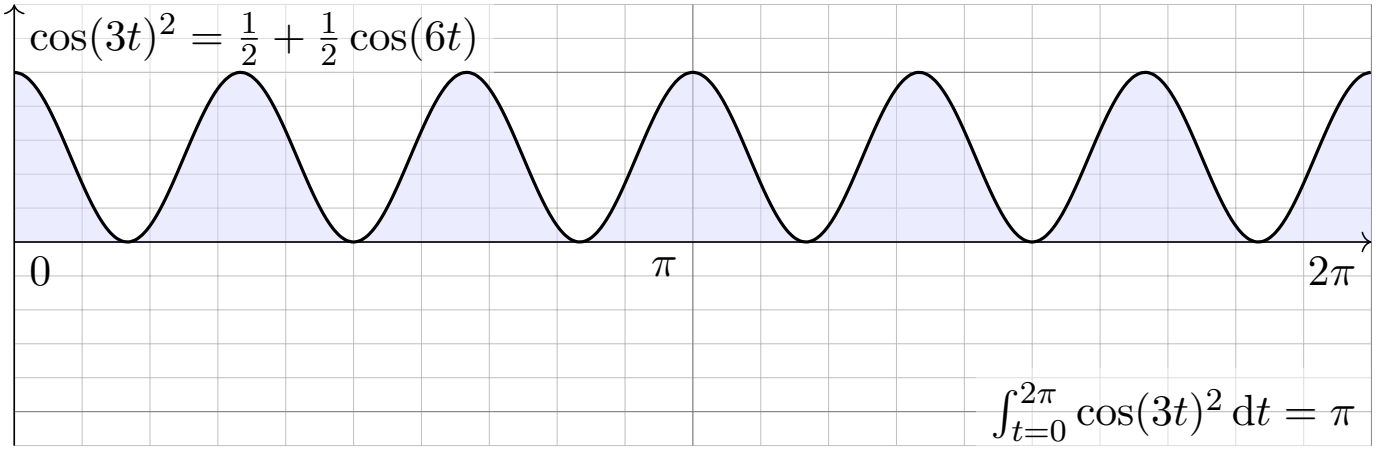
Orthogonalität trigonometrischer Funktionen





Orthogonalität trigonometrischer Funktionen





Orthogonalität trigonometrischer Funktionen

Aufgabe: Integrieren Sie für $k, \ell \in \mathbb{N}$ folgende Funktionen über $[0, T]$:

$$\cos(k\omega t)\cos(\ell\omega t), \quad \sin(k\omega t)\sin(\ell\omega t), \quad \sin(k\omega t)\cos(\ell\omega t).$$

Wir erinnern hierzu an die stets nützlichen Additionstheoreme

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha)\cos(\beta) &= \tfrac{1}{2}\big[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big],\\
\sin(\alpha)\sin(\beta) &= \tfrac{1}{2}\big[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big],\\
\sin(\alpha)\cos(\beta) &= \tfrac{1}{2}\big[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\big].
\end{aligned}$$

Leiten Sie zunächst diese Additionstheoreme aus der Euler–Formel $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha$ und dem Exponentialgesetz $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha+\mathrm{i}\beta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$ ab.

Lösung: Zur Berechnung nutzen wir folgende Grundintegrale

$$\int_{t=0}^{T} \sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z},$$

$$\int_{t=0}^{T} \cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq 0,\\ T & \text{für } n = 0. \end{cases}$$

Orthogonalität trigonometrischer Funktionen

Die Orthogonalität folgt dann durch direktes Nachrechnen.

$$\begin{aligned}
\int_{t=0}^{T} \cos(k\omega t)\cos(\ell\omega t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_{t=0}^{T} \cos((k-\ell)\omega t) + \cos((k+\ell)\omega t)\,\mathrm{d}t\\
&= \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell,\\ T/2 & \text{für } k = \ell \geq 1,\\ T & \text{für } k = \ell = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{t=0}^{T} \sin(k\omega t)\sin(\ell\omega t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_{t=0}^{T} \cos((k-\ell)\omega t) - \cos((k+\ell)\omega t)\,\mathrm{d}t\\
&= \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell,\\ T/2 & \text{für } k = \ell \geq 1,\\ 0 & \text{für } k = \ell = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\int_{t=0}^{T} \sin(k\omega t)\cos(\ell\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{t=0}^{T} \sin((k-\ell)\omega t) + \sin((k+\ell)\omega t)\,\mathrm{d}t = 0$$

☺ Das ist schön. Alles wird noch schöner und übersichtlicher für die komplexe Funktion $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} = \cos(k\omega t) + \mathrm{i}\sin(k\omega t)$, siehe nächste Aufgabe.

Die trigonometrische Orthonormalbasis

Für Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit Periode T nutzen wir das **Skalarprodukt**

$$\boxed{\langle f \mid g \rangle := \frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} \overline{f(t)}\, g(t)\, \mathrm{d}t.}$$

Sei $\omega = 2\pi/T$. Als **Basisfunktion** $e_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ definieren wir

$$\boxed{e_k(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} = \cos(k\omega t) + \mathrm{i}\sin(k\omega t).}$$

Ihre Linearkombinationen sind die **trigonometrischen Polynome**:

$$f(t) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}, \quad g(t) = \sum_{\ell=-n}^{n} \widehat{g}(\ell)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\omega t} \quad \text{mit} \quad \widehat{f}(k), \widehat{g}(\ell) \in \mathbb{C}.$$

Aufgabe: Wie bestimmt die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ihr Spektrum $\widehat{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$?
Wir nutzen Orthonormalität: Berechnen Sie hierzu die Skalarprodukte

(0) $\langle 1 \mid e_n \rangle$, (1) $\langle e_k \mid e_\ell \rangle$, (2) $\langle e_k \mid g \rangle$, (3) $\langle f \mid g \rangle$, (4) $\langle f \mid f \rangle$.

(5) Entwickeln Sie $f(t) = \sin^2 t$ und $g(t) = \cos^3 t$ in Fourier–Polynome.

(6) Berechnen Sie daraus $\frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \sin^4 t\, \mathrm{d}t$ und $\frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \cos^6 t\, \mathrm{d}t$.

Die trigonometrische Orthonormalbasis

Lösung: (0) Wir berechnen $\langle 1 \mid e_n \rangle$. Für $n = 0$ ist es besonders leicht:

$$\langle 1 \mid e_0 \rangle \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} 1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}0\omega t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} 1\, \mathrm{d}t = 1.$$

Für $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \neq 0$ nutzen wir den HDI und $\omega T = 2\pi$:

$$\langle 1 \mid e_n \rangle \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} 1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t}\, \mathrm{d}t \underset{\text{B1I}}{\overset{\text{HDI}}{=}} \frac{1}{T} \Big[\frac{1}{\mathrm{i}n\omega}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t} \Big]_{t=0}^{T} = 0.$$

(1) **Orthonormalität** — Wir berechnen die gesuchten Skalarprodukte:

$$\langle e_k \mid e_\ell \rangle \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} \overline{e_k(t)}\, e_\ell(t)\, \mathrm{d}t \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\omega t}\, \mathrm{d}t$$

$$\overset{\text{Exp}}{=} \frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\ell-k)\omega t}\, \mathrm{d}t \overset{(0)}{=} \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell, \\ 1 & \text{für } k = \ell. \end{cases}$$

☺ Die Basis $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ist orthonormal bezüglich des Skalarprodukts!
Das ist analog zur Geometrie des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$.

☺ Im Komplexen ist alles halb so schwer und doppelt so schön!

Die trigonometrische Orthonormalbasis

(2) **Fourier** — Dank Linearität und Orthonormalität erhalten wir:

$$\langle\, e_k \mid g \,\rangle \overset{\text{Def}}{=} \left\langle e_k \,\middle|\, \sum_{\ell=-n}^{n} \widehat{g}(\ell)\, e_\ell \right\rangle \overset{\text{Lin}}{=} \sum_{\ell=-n}^{n} \widehat{g}(\ell)\, \langle\, e_k \mid e_\ell \,\rangle \overset{(1)}{=} \widehat{g}(k)$$

☺ Das Skalarprodukt filtert den gewünschten Koeffizienten heraus!

(3) **Parseval** — Dank Bilinearität und Orthonormalität erhalten wir:

$$\langle\, f \mid g \,\rangle \overset{\text{Def}}{=} \left\langle \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\, e_k \,\middle|\, \sum_{\ell=-n}^{n} \widehat{g}(\ell)\, e_\ell \right\rangle \overset{\text{Lin}}{=} \sum_{k=-n}^{n} \overline{\widehat{f}(k)} \left\langle e_k \,\middle|\, \sum_{\ell=-n}^{n} \widehat{g}(\ell)\, e_\ell \right\rangle$$

$$\overset{\text{Lin}}{=} \sum_{k=-n}^{n} \sum_{\ell=-n}^{n} \overline{\widehat{f}(k)}\, \widehat{g}(\ell)\, \langle\, e_k \mid e_\ell \,\rangle \overset{(1)}{=} \sum_{k=-n}^{n} \overline{\widehat{f}(k)}\, \widehat{g}(k).$$

☺ Diese Rechnung gilt allgemein für Orthonormalbasen wie im $\mathbb{R}^n$.

(4) **Energiegleichung** — Für das Normquadrat gilt Pythagoras (I1I):

$$\langle\, f \mid f \,\rangle \overset{(3)}{=} \sum_{k=-n}^{n} \left|\widehat{f}(k)\right|^2$$

☺ Das Normquadrat ist die Summe der Koeffizientenquadrate.

Die trigonometrische Orthonormalbasis

(5) Wir entwickeln f und g dank der Euler–Formel $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i} \sin t$:

$$f(t) = \sin(t)^2 = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}\right)^2 = -\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t)$$

$$g(t) = \cos(t)^3 = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{3\mathrm{i}t} + \frac{3}{8}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \frac{3}{8}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} + \frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}t}$$

$$= \frac{3}{4}\cos(t) + \frac{1}{4}\cos(3t)$$

☺ Dank Orthonormalität (1) lesen wir die Fourier–Koeffizienten ab (2).

(6) Wir nutzen die Energiegleichung (4) und Fourier–Koeffizienten (5):

$$\frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi} \sin^4 t \,\mathrm{d}t \overset{\text{Def}}{=} \langle\, f \mid f \,\rangle \overset{(4)}{=} \sum_{k=-n}^{n} \left|\widehat{f}(k)\right|^2 \overset{(5)}{=} \frac{3}{8}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi} \cos^6 t \,\mathrm{d}t \overset{\text{Def}}{=} \langle\, g \mid g \,\rangle \overset{(4)}{=} \sum_{k=-n}^{n} \left|\widehat{g}(k)\right|^2 \overset{(5)}{=} \frac{5}{16}$$

☺ Die Energiegleichung gilt allgemein für Fourier–Reihen! (Satz J1A)

Satz I1E: trigonometrische Orthonormalbasis

Die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist ein $\mathbb{C}$–Vektorraum. Hierin ist die Teilmenge aller T–periodischen Funktionen ein Untervektorraum. Als Basisfunktion $e_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $\omega = 2\pi/T$ definieren wir

$$\boxed{e_k(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} = \cos(k\omega t) + \mathrm{i}\sin(k\omega t).}$$

Diese erzeugen den Unterraum $V = \{ \sum_{k=-n}^{n} c_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} \mid n \in \mathbb{N},\, c_k \in \mathbb{C} \}$ der trigonometrischen Polynome. Hierauf haben wir das Skalarprodukt

$$\boxed{V \times V \to \mathbb{C} \,:\, (f,g) \mapsto \langle f \mid g \rangle := \frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} \overline{f(t)}\, g(t)\, \mathrm{d}t.}$$

Damit gelten die Orthonormalitätsrelationen

$$\boxed{\langle e_k \mid e_\ell \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell\text{:} \quad \text{paarweise Orthogonalität,} \\ 1 & \text{für } k = \ell\text{:} \quad \text{Normierung auf Länge } 1. \end{cases}}$$

Korollar I1F: Fourier–Koeffizienten durch Skalarprodukt

(1) Wir betrachten ein trigonometrisches Polynom:

$$f(t) \;=\; \sum_{\ell=-n}^{n} c_\ell \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\omega t} \;=\; \frac{a_0}{2} + \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell \cos(\ell\omega t) + b_\ell \sin(\ell\omega t)$$

Die Funktion f bestimmt die Koeffizienten durch Fourier–Integrale:

$$c_k = \langle e_k \mid f \rangle = \langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} \mid f \rangle = \frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t} f(t)\, \mathrm{d}t,$$

bzw.

$$a_k = \langle 2\cos(k\omega t) \mid f \rangle \qquad = \frac{2}{T} \int_{t=0}^{T} \cos(k\omega t)\, f(t)\, \mathrm{d}t,$$

$$b_k = \langle 2\sin(k\omega t) \mid f \rangle \qquad = \frac{2}{T} \int_{t=0}^{T} \sin(k\omega t)\, f(t)\, \mathrm{d}t.$$

☺ Die Formeln für die Koeffizienten c_k sind besonders schön, da die Funktionen $\mathrm{e}_k(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}$ orthonormal sind. Hingegen sind $\cos(k\omega t)$ und $\sin(k\omega t)$ zwar orthogonal, aber mit L^2–Norm $\sqrt{2}/2$ statt Normierung 1.

Die trigonometrische Orthonormalbasis

- Dieselben Gleichungen nutzen wir allgemein für Fourier–Reihen.
- Das Fourier–Integral filtert den gewünschten Koeffizienten heraus!
- Das Skalarprodukt beschert uns Struktur, Klarheit und Übersicht.
- Die Orthonormalität der Basis $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ vereinfacht die Rechnung.

Korollar I1F: Jede Funktion bestimmt ihre Koeffizienten.

(2) Die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ seien gegeben als Fourier–Polynome

$$f(t) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} \quad \text{und} \quad g(t) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{g}(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}.$$

(2a) Aus $\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k)$ für alle $k = -n, \dots, n$ folgt offensichtlich $f = g$.
(2b) Umgekehrt folgt aus $f = g$ auch $\widehat{f} = \widehat{g}$, dank der Fourier–Integrale:

$$\widehat{f}(k) \;=\; \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t}\, f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t}\, g(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \widehat{g}(k)$$

- Koeffizientenvergeich! Dazu genügt bereits $f = g$ fast überall. (A4G)

Die trigonometrische Orthonormalbasis

Korollar I1F: Norm und Skalarprodukt

(3) Koeffizienten $\widehat{f}(k), \widehat{g}(k) \in \mathbb{C}$ definieren trigonometrische Polynome

$$f(t) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} \quad \text{und} \quad g(t) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{g}(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}.$$

Für ihre Norm und ihr Skalarprodukt gilt nach Pythagoras (I1I)

$$\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \big|f(t)\big|^2\,\mathrm{d}t = \sum_{k=-n}^{n} \big|\widehat{f}(k)\big|^2, \qquad \text{kurz} \quad \|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{\ell^2},$$

$$\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \overline{f(t)}\,g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=-n}^{n} \overline{\widehat{f}(k)}\,\widehat{g}(k), \qquad \text{kurz} \quad \langle\, f \mid g \,\rangle_{L^2} = \langle\, \widehat{f} \mid \widehat{g} \,\rangle_{\ell^2}.$$

- Diese Isometrie ist eine zentrale Eigenschaft der Fourier–Theorie. Für trigonometrische Polynome folgt dies direkt aus der Orthonormalität der Basis $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. Erfreulicherweise gilt dies nach Vervollständigung ganz allgemein für alle quadrat-integrierbaren Funktionen! (Satz J1A)

Skalarprodukt, Norm, Abstand im $\mathbb{R}^n$

Fourier–Theorie führt uns wie durch Zauberhand zu Skalarprodukten.
Wir erinnern uns dazu an grundlegende Begriffe und Rechentechniken.
📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §3.5.

Das **euklidische Skalarprodukt** von zwei Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\boxed{\langle\, u \mid v \,\rangle = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n.}$$

Übliche Schreibweisen: $\langle\, u \mid v \,\rangle = \langle u, v \rangle = u \bullet v = u \cdot v = u^\intercal v = \ldots$
Für jeden Vektor $u \in \mathbb{R}^n$ gilt somit $\langle\, u \mid u \,\rangle = u_1^2 + \cdots + u_n^2 \geq 0$.
Die **euklidische Norm** des Vektors $u \in \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$\boxed{|u| = \sqrt{\langle\, u \mid u \,\rangle} = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}.}$$

Übliche Schreibweisen: $|u| = |u|_2 = \|u\| = \|u\|_2 = \ldots$
Der **euklidische Abstand** zwischen zwei Punkten $u, v \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\boxed{|u - v| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}.}$$

Skalarprodukt und Norm komplexer Zahlen

Überall in Naturwissenschaft und Technik sind komplexe Zahlen nützlich.
Gerade in der Fourier–Theorie vereinfachen sie viele Rechnungen:
Im Komplexen ist alles halb so schwer und doppelt so schön!

Jede **komplexe Zahl** $z \in \mathbb{C}$ schreibt sich eindeutig als

$$z = x + \mathrm{i}y \quad \text{mit} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Die **Konjugation** $^{-}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$z = x + \mathrm{i}y \quad \mapsto \quad \overline{z} = x - \mathrm{i}y.$$

Für das Produkt von $\overline{z}$ und z gilt demnach

$$\overline{z} \cdot z = (x - \mathrm{i}y)(x + \mathrm{i}y) = x^2 + y^2 \geq 0.$$

Hieraus gewinnen wir die **Norm** von $z \in \mathbb{C}$ mittels

$$|z| = \sqrt{\overline{z} \cdot z} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

☺ Somit entspricht diese Norm auf $\mathbb{C}$ der euklidischen Norm auf $\mathbb{R}^2$.
📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §1.7.

Skalarprodukt, Norm, Abstand im $\mathbb{C}^n$

Das **hermitesche Skalarprodukt** von zwei Vektoren $u, v \in \mathbb{C}^n$ ist

$$\boxed{\langle\, u \mid v \,\rangle = \overline{u_1}\, v_1 + \cdots + \overline{u_n}\, v_n.}$$

Übliche Schreibweisen: $\langle\, u \mid v \,\rangle = \langle u, v \rangle = u \bullet v = u \cdot v = \overline{u}^{\mathsf{T}}\, v = \ldots$

Für jeden Vektor $u \in \mathbb{C}^n$ gilt somit $\langle\, u \mid u \,\rangle = |u_1|^2 + \cdots + |u_n|^2 \geq 0$.

Die **hermitesche Norm** des Vektors $u \in \mathbb{C}^n$ ist definiert durch

$$\boxed{|u| = \sqrt{\langle\, u \mid u \,\rangle} = \sqrt{|u_1|^2 + \cdots + |u_n|^2}.}$$

Übliche Schreibweisen: $|u| = |u|_2 = \|u\| = \|u\|_2 = \ldots$

Der **hermitesche Abstand** zwischen zwei Punkten $u, v \in \mathbb{C}^n$ ist

$$\boxed{|u - v| = \sqrt{|u_1 - v_1|^2 + \cdots + |u_n - v_n|^2}.}$$

⚠ Im komplexen Skalarprodukt muss ein Faktor konjugiert werden, damit $\langle\, u \mid u \,\rangle \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt. Ich konjugiere systematisch den ersten, andere Autoren den zweiten. In der Literatur werden beide Konventionen genutzt, sie gehen durch Vertauschen und Konjuation ineinander über.

Eigenschaften des Skalarprodukts

📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §3.6.
Soweit möglich behandeln wir den reellen und komplexen Fall parallel:
Im Folgenden steht $\mathbb{K}$ entweder für den Körper $\mathbb{R}$ oder den Körper $\mathbb{C}$.

Das Skalarprodukt auf $V = \mathbb{K}^n$ erfreut sich folgender Eigenschaften:

1. (konjugierte) **Symmetrie**: Für alle $u, v \in V$ gilt $\langle\, v \mid u \,\rangle = \overline{\langle\, u \mid v \,\rangle}$.
2. **Linearität im zweiten Faktor**: Für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

   $$\langle\, u \mid v_1 + v_2 \,\rangle = \langle\, u \mid v_1 \,\rangle + \langle\, u \mid v_2 \,\rangle, \qquad \langle\, u \mid \alpha\, v \,\rangle = \alpha\, \langle\, u \mid v \,\rangle.$$

   Dank Symmetrie folgt (konjugierte) **Linearität im ersten Faktor**:

   $$\langle\, u_1 + u_2 \mid v \,\rangle = \langle\, u_1 \mid v \,\rangle + \langle\, u_2 \mid v \,\rangle, \qquad \langle\, \alpha\, u \mid v \,\rangle = \overline{\alpha}\, \langle\, u \mid v \,\rangle.$$

   Wegen der Konjugation heißt dies auch **semilinear** oder **antilinear**.
   Beides zusammen besagt: Über $\mathbb{R}$ ist $\langle\, - \mid - \,\rangle$ **bilinear**, über $\mathbb{C}$ nur konjugiert bilinear, genannt **sesquilinear** (lat. *sesqui* ‘anderthalb’).
   Aus Symmetrie folgt $\langle\, v \mid v \,\rangle \in \mathbb{R}$, und aus Linearität $\langle\, 0 \mid 0 \,\rangle = 0$.
3. **Positivität**: Für jeden Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ gilt $\langle\, v \mid v \,\rangle > 0$.

☺ Wir benötigen nur diese drei einfachen Eigenschaften, mehr nicht.

Vektorräume mit Skalarprodukt

Definition I1G: Skalarprodukt

Ein **Skalarprodukt** auf einem $\mathbb{K}$–Vektorraum V ist eine Abbildung

$$\langle \text{-} \mid \text{-} \rangle \,:\, V \times V \to \mathbb{K} \,:\, (u, v) \mapsto \langle\, u \mid v \,\rangle,$$

die (konjugiert) symmetrisch, bilinear und positiv ist.

Ein Skalarprodukt ermöglicht uns, in V Winkel und Längen zu messen. Damit gewinnen wir auf V die üblichen geometrischen Werkzeuge:

- **Orthogonalität:** $u, v \in V$ stehen senkrecht, wenn $\langle\, u \mid v \,\rangle = 0$.
- **Norm:** Die Länge eines Vektors $v \in V$ ist $\|v\| = \sqrt{\langle\, v \mid v \,\rangle}$.
- **Cauchy–Schwarz–Ungleichung:** Es gilt $|\langle\, u \mid v \,\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
- **Winkel:** $\langle\, u \mid v \,\rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\alpha)$ mit $\alpha = \sphericalangle(u, v) \in [0, \pi]$.
- **Dreiecksungleichung:** Es gilt $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
- **Metrik:** Der Abstand zweier Vektoren u, v ist $\|u - v\|$.
- **Konvergenz** $v_n \to v$ ist definiert durch $\|v_n - v\| \to 0$.

☺ Diese Begriffe kennen Sie bereits aus dem $\mathbb{R}^n$. Erstaunlicherweise nützen Sie ebenso für Funktionen als Grundlage der Fourier–Theorie!

Die Cauchy–Schwarz–Ungleichung

📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §3.6.

Satz I1H: Cauchy–Schwarz– und Dreiecksungleichung

Sei V ein $\mathbb{K}$–Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \text{-} \mid \text{-} \rangle$.

(1) Für alle $u, v \in V$ gilt die **Cauchy–Schwarz–Ungleichung**:

$$\boxed{|\langle\, u \mid v \,\rangle|^2 \leq \langle\, u \mid u \,\rangle \langle\, v \mid v \,\rangle}$$

(2) Gleichheit gilt genau dann, wenn u, v linear abhängig sind.

(3) Für die Norm $\|u\| = \sqrt{\langle\, u \mid u \,\rangle}$ ist die Ungleichung (1) äquivalent zu:

$$\boxed{|\langle\, u \mid v \,\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|}$$

(4) Für alle $u, v \in V$ folgt hieraus die **Dreiecksungleichung**

$$\boxed{\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.}$$

(5) Für den Abstand gilt demnach $\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|$.

Die Cauchy–Schwarz–Ungleichung

Nachrechnen: (1) Für $v = 0$ ist die Ungleichung offenbar richtig.
Wir dürfen daher $v \neq 0$ annehmen, dank Positivität also $\langle\, v \mid v \,\rangle > 0$.
Wir setzen $z = au - bv$ mit $a, b \in \mathbb{C}$ und berechnen das Normquadrat:

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle\, z \mid z \,\rangle &= \big\langle\, au - bv \;\big|\; au - bv \,\big\rangle \\ &= |a|^2 \langle\, u \mid u \,\rangle - \overline{a}b \langle\, u \mid v \,\rangle - a\overline{b} \langle\, v \mid u \,\rangle + |b|^2 \langle\, v \mid v \,\rangle \end{aligned}$$

Wir wählen nun geschickte Koeffizienten $a = \langle\, v \mid v \,\rangle$ und $b = \langle\, v \mid u \,\rangle$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle\, v \mid v \,\rangle \big[\langle\, u \mid u \,\rangle \langle\, v \mid v \,\rangle - 2|\langle\, u \mid v \,\rangle|^2 + |\langle\, u \mid v \,\rangle|^2 \big] \\ &= \langle\, v \mid v \,\rangle \big[\langle\, u \mid u \,\rangle \langle\, v \mid v \,\rangle - |\langle\, u \mid v \,\rangle|^2 \big] \end{aligned}$$

Wegen $\langle\, v \mid v \,\rangle > 0$ erhalten wir die gewünschte Ungleichung:

$$\langle\, u \mid u \,\rangle \langle\, v \mid v \,\rangle - |\langle\, u \mid v \,\rangle|^2 \geq 0$$

(2) Bei Gleichheit gilt $\langle\, z \mid z \,\rangle = 0$, also $z = au + bv = 0$, somit $u = (b/a)v$.
Umgekehrt folgt aus linearer Abhängigkeit $u = \lambda v$ die Gleichheit, denn

$$\begin{aligned} |\langle\, u \mid v \,\rangle|^2 &= |\langle\, \lambda v \mid v \,\rangle|^2 &&= |\lambda|^2 \langle\, v \mid v \,\rangle^2, \\ \langle\, u \mid u \,\rangle \langle\, v \mid v \,\rangle &= \langle\, \lambda v \mid \lambda v \,\rangle \langle\, v \mid v \,\rangle &&= |\lambda|^2 \langle\, v \mid v \,\rangle^2. \end{aligned}$$

Die Cauchy–Schwarz–Ungleichung

(4) Schließlich zeigen wir die Dreiecksungleichung, die dem Abstand zugrundeliegt. Sie besagt geometrisch: Der Abstand von x nach z ist kleiner oder gleich der Länge des Umweges von x über y nach z.

Die Rechnung beruht auf der Cauchy–Schwarz–Ungleichung (1):

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle\, u + v \mid u + v \,\rangle = \langle\, u \mid u \,\rangle + \langle\, u \mid v \,\rangle + \langle\, v \mid u \,\rangle + \langle\, v \mid v \,\rangle \\ &= \|u\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle\, u \mid v \,\rangle) + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2|\langle\, u \mid v \,\rangle| + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2\,\|u\|\,\|v\| + \|v\|^2 \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt dank Monotonie der Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$.

☺ Beachten Sie, dass wir für das Skalarprodukt nur voraussetzen, dass es (konjugiert) symmetrisch, bilinear und positiv ist (I1G). Genau diese und keine weiteren Eigenschaften haben wir in der Rechnung benötigt. Das macht Skalarprodukte wunderbar flexibel und vielseitig einsetzbar.

Der Satz des Pythagoras für Skalarprodukte

Satz I1I: Pythagoras und Fourier–Koeffizienten

Sei V ein $\mathbb{K}$–Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\,\text{-}\,|\,\text{-}\,\rangle$.

(1) Sind $u_1, \ldots, u_n$ orthogonal, also $\langle\, u_k \mid u_\ell \,\rangle = 0$ für $k \neq \ell$, so gilt

$$\|u_1 + \cdots + u_n\|^2 = \|u_1\|^2 + \cdots + \|u_n\|^2.$$

(2) Sind $e_1, \ldots, e_n$ orthonormal und $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$, so gilt demnach

$$\|c_1 e_1 + \cdots + c_n e_n\|^2 = |c_1|^2 + \cdots + |c_n|^2.$$

(3) Für jede Linearkombination $f = \sum_{\ell=1}^n c_\ell u_\ell$ und $u_k \neq 0$ gilt

$$c_k = \langle\, u_k \mid f \,\rangle / \langle\, u_k \mid u_k \,\rangle.$$

☺ Der klassische Satz des Pythagoras ist der erste interessante Fall, nämlich die Ebene $V = \mathbb{R}^2$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ mit euklidischem Skalarprodukt.

Er gilt ebenso für $V = \mathbb{K}^n$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ in jeder Dimension $n \in \mathbb{N}$ und wörtlich genauso für trigonometrische Polynome wie oben in Satz I1F (auch wenn Pythagoras sicher nie an diese Allgemeinheit gedacht hat).

Der Satz des Pythagoras für Skalarprodukte

Aufgabe: Rechnen Sie diese allgemeinen Regeln nach.

Lösung: (1) Die Norm erhalten wir aus dem Skalarprodukt:

$$\left\|\sum_k u_k\right\|^2 = \left\langle \sum_k u_k \,\middle|\, \sum_\ell u_\ell \right\rangle = \sum_k \sum_\ell \langle\, u_k \mid u_\ell \,\rangle = \sum_k \|u_k\|^2$$

(2) Speziell für $u_k = c_k e_k$ mit $\|e_k\| = 1$ gilt $\|u_k\|^2 = |c_k|^2\, \|e_k\|^2 = |c_k|^2$. Hieraus folgt $\|c_1 e_1 + \cdots + c_n e_n\|^2 = |c_1|^2 + \cdots + |c_n|^2$ wie behauptet.

(3) Die Koeffizientenformel folgt dank Orthogonalität (1) gemäß

$$\langle\, u_k \mid f \,\rangle = \left\langle\, u_k \,\middle|\, \sum_\ell c_\ell u_\ell \right\rangle = \sum_\ell c_\ell \,\langle\, u_k \mid u_\ell \,\rangle = c_k \,\langle\, u_k \mid u_k \,\rangle.$$

Dank $u_k \neq 0$ wissen wir $\langle\, u_k \mid u_k \,\rangle > 0$, somit $c_k = \langle\, u_k \mid f \,\rangle / \langle\, u_k \mid u_k \,\rangle$.

☺ Das Skalarprodukt filtert den gewünschten Koeffizienten heraus!

Diese Rechenregeln sind in der Ebene $\mathbb{R}^2$ und im Raum $\mathbb{R}^3$ anschaulich vertraut, sie gelten genauso in jedem $\mathbb{K}$–Vektorraum mit Skalarprodukt.

Selbst für unendlich-dimensionale Vektorräume, etwa $V = L^2([0,T], \mathbb{C})$ für die Fourier–Theorie, erweist sich dies als ausgesprochen nützlich!

Orthonormalisierung nach Gram–Schmidt

Satz I1J: Laplace 1816, Gram 1883, Schmidt 1907

Sei V ein $\mathbb{K}$–Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle - | - \rangle$.

Sei $b_1, \dots, b_n \in V$ eine Basis des Unterraums $U_n = \langle\, b_1, \dots, b_n \,\rangle_{\mathbb{K}}$.

(1) Daraus erhalten wir rekursiv die Orthogonalbasis $u_1, \dots, u_n$ durch

$$\boxed{u_n := b_n - \sum_{k=1}^{n-1} u_k \lambda_k \quad \text{mit} \quad \lambda_k = \frac{\langle\, u_k \mid b_n \,\rangle}{\langle\, u_k \mid u_k \,\rangle}.}$$

(2) Optional können wir u_n ersetzen durch $u'_n = \mu_n u_n$ mit $\mu_n \in \mathbb{K}^\times$.

(3) Normiert zu $e_k := u_k / \|u_k\|$ erhalten wir eine Orthonormalbasis:

$$\langle\, u_k \mid u_\ell \,\rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell, \\ \|u_k\|^2 > 0 & \text{für } k = \ell, \end{cases} \quad \text{und} \quad \langle\, e_k \mid e_\ell \,\rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell, \\ 1 & \text{für } k = \ell. \end{cases}$$

☺ Das Gram–Schmidt–Verfahren ist einfach, aber wirkungsvoll.

📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §5.5.

Orthonormalisierung nach Gram–Schmidt

Aufgabe: Alles steht explizit da. Rechnen Sie es sorgsam nach!

Lösung: (1) Wir führen Induktion über n. Für $n = 1$ ist die Aussage klar.

Sei nun $n \geq 2$. Im Unterraum $U_{n-1} \leq V$ haben wir die gegebene Basis $(b_1, \dots, b_{n-1})$ bereits zur Orthogonalbasis $(u_1, \dots, u_{n-1})$ transformiert.

Im Unterraum U_n erhalten wir aus der Basis $(b_1, \dots, b_{n-1}, b_n)$ zunächst $(u_1, \dots, u_{n-1}, b_n)$ und dann $(u_1, \dots, u_{n-1}, u_n)$ mit $u_n := b_n - \sum_{k=1}^{n-1} u_k \lambda_k$.

Für alle $j = 1, \dots, n-1$ gilt $\langle\, u_j \mid u_n \,\rangle = \langle\, u_j \mid b_n \,\rangle - \langle\, u_j \mid u_j \,\rangle \lambda_j \overset{!}{=} 0$.
Dies verschwindet genau für $\lambda_j = \langle\, u_j \mid b_n \,\rangle / \langle\, u_j \mid u_j \,\rangle$. Voilà!

(2) Basiseigenschaft und Orthogonalität bleiben nach Skalierung von u_n zu $u'_n = \mu_n u_n$ mit $\mu_n \in \mathbb{K}^\times$. Das verschafft uns zusätzlichen Spielraum.

(3) Da $(u_1, \dots, u_n)$ eine Basis von U_n ist, gilt insbesondere $u_n \neq 0$.
Normierung zu $e_n := u_n / \|u_n\|$ liefert also eine Orthonormalbasis.

☺ Dieses Verfahren funktioniert genauso, wenn $b_1, \dots, b_n$ nur ein Erzeugendensystem von U_n ist, aber nicht notwendig linear unabhängig. Wenn bei der Orthonormalisierung $u_n = 0$ auftritt, so ist b_n eine Linearkombination von $b_1, \dots, b_{n-1}$ und wird ganz einfach aus der Liste gelöscht. Auf diese Weise können wir aus jedem Erzeugendensystem eine Orthonormalbasis extrahieren.

Orthogonalität von Eigenfunktionen

Die Orthogonalität von $(e_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx})_{k\in\mathbb{Z}}$ haben wir oben direkt berechnet. Diese fundamentale Eigenschaft hat einen tieferen, allgemeinen Grund:

Aufgabe: (1) Der Ableitungsoperator $\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ ist hermitesch:

$$\boxed{\left\langle \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f \,\middle|\, g \right\rangle = \left\langle f \,\middle|\, \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g \right\rangle}$$

(2) Für den Operator $\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ ist e_k Eigenfunktion zum Eigenwert k:

$$\boxed{\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}$$

(3) Demnach sind alle Eigenfunktionen e_k untereinander orthogonal.

Lösung: (1) Für $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig diff'bar und 2π–periodisch gilt:

$$\left\langle f \,\middle|\, \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g \right\rangle = \frac{1}{\mathrm{i}}\int_0^{2\pi} \overline{f}\, g' = \frac{1}{\mathrm{i}}\Big[\overline{f} g\Big]_0^{2\pi} - \frac{1}{\mathrm{i}}\int_0^{2\pi} \overline{f'}\, g = \left\langle \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f \,\middle|\, g \right\rangle$$

Aussage (2) ist klar. Damit folgt (3) wie für Matrizen bekannt. I143

Die Entwicklung nach Eigenfunktionen ist ein universelles Prinzip und nützt uns vor allem für Differentialgleichungen. Die Fourier–Theorie diagonalisiert den Ableitungsoperator $\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$: Die Entwicklung nach seinen Eigenfunktionen $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ für $k \in \mathbb{Z}$ ist die Fourier–Reihe.

Hermitesche Matrizen und Operatoren

📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §6.4.
Reelle Matrizen mit der Eigenschaft $A = A^\intercal$ nennt man *symmetrisch*.
Im Komplexen muss man *transponieren und konjugieren*. Ausführlich:

Zur Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist $A^* := \overline{A}^\intercal$ die **hermitesch-konjugierte Matrix**.
Für Spaltenvektoren $u, v \in \mathbb{C}^n$ gilt $\langle u \mid v \rangle = \overline{u}^\intercal v$, und daher

$$\langle u \mid Av \rangle = \overline{u}^\intercal A v = \overline{\overline{A}^\intercal u}^\intercal v = \langle A^* u \mid v \rangle.$$

Wir nennen die Matrix A **hermitesch**, wenn $A^* = A$ gilt,
gleichbedeutend also $\langle u \mid Av \rangle = \langle Au \mid v \rangle$ für alle $u, v \in \mathbb{C}^n$.

Beispiel: Sei $V_n = \left\{ \sum_{k=-n}^{n} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \,\middle|\, c_k \in \mathbb{C} \right\}$ der $\mathbb{C}$–Vektorraum der trigonometrischen Polynome vom Grad $\le n$ und $A = \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} : V_n \to V_n$ der Ableitungsoperator. Bezüglich der Basis $(e_{-n}, e_{1-n}, \ldots, e_{n-1}, e_n)$ von V_n entspricht A der Diagonalmatrix $\operatorname{diag}(-n, 1-n, \ldots, n-1, n)$.

Allgemein: Sei V ein $\mathbb{C}$–Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle - \mid - \rangle$.
Sei $A : V \to V$ eine $\mathbb{C}$–lineare Abbildung (auch „Operator“ genannt).
Wir nennen A **hermitesch**, wenn $\langle u \mid Av \rangle = \langle Au \mid v \rangle$ für alle $u, v \in V$.

Hermitesche Matrizen und Operatoren

Aufgabe: Jeder hermitesche Operator $A : V \to V$
hat nur reelle Eigenwerte und orthogonale Eigenräume:

(1) Für jeden Vektor $v \in V$ gilt zunächst $\langle\, v \mid Av \,\rangle \in \mathbb{R}$.

(2) Sei $v \in V$ ein Eigenvektor, $Av = \lambda v$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt $\lambda \in \mathbb{R}$.

(3) Seien $u, v \in V$ Eigenvektoren, $Au = \lambda u$ und $Av = \mu v$ mit $\lambda \neq \mu$.
Dann sind u und v orthogonal, also $\langle\, u \mid v \,\rangle = 0$.

Lösung: (1) $\langle\, v \mid Av \,\rangle = \langle\, Av \mid v \,\rangle = \overline{\langle\, v \mid Av \,\rangle}$. Wir rechnen (2) nach:

$$\lambda\langle\, v \mid v \,\rangle = \langle\, v \mid \lambda v \,\rangle = \langle\, v \mid Av \,\rangle = \langle\, Av \mid v \,\rangle = \langle\, \lambda v \mid v \,\rangle = \overline{\lambda}\langle\, v \mid v \,\rangle$$

Wegen $v \neq 0$ und Positivität gilt $\langle\, v \mid v \,\rangle > 0$, also $\lambda = \overline{\lambda}$. Ebenso (3):

$$\lambda\langle\, u \mid v \,\rangle = \langle\, \lambda u \mid v \,\rangle = \langle\, Au \mid v \,\rangle = \langle\, u \mid Av \,\rangle = \langle\, u \mid \mu v \,\rangle = \mu\langle\, u \mid v \,\rangle$$

Also $(\lambda - \mu)\langle\, u \mid v \,\rangle = 0$. Wegen $\lambda - \mu \neq 0$ folgt somit $\langle\, u \mid v \,\rangle = 0$.

Slogan: Hermitesche Operatoren verhalten sich wie reelle Zahlen.
Genauer: wie reelle Diagonalmatrizen. Wir erinnern an folgenden Satz:

Hermitesche Matrizen sind diagonalisierbar

Satz I1K: Diagonalisierung hermitescher Matrizen

Jede hermitesche Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist orthogonal diagonalisierbar:
Es gibt eine orthogonale Basis $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren.

Beweis: Induktion über $n = \dim V$: Für $n = 1$ ist alles klar. Sei $n \geq 2$.
Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert und $v \in V$ ein zugehöriger Eigenvektor.
Der hierzu orthogonale Unterraum ist $W = \{\, w \in V \mid \langle\, v \mid w \,\rangle = 0 \,\}$.
Es gilt $A(W) \subseteq W$, das heißt, für alle $w \in W$ gilt $Aw \in W$, denn

$$\langle\, v \mid Aw \,\rangle = \langle\, Av \mid w \,\rangle = \langle\, \lambda v \mid w \,\rangle = \lambda\langle\, v \mid w \,\rangle = 0.$$

Es gilt $\dim W = n - 1$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert
eine orthogonale Basis $v_1, \ldots, v_{n-1}$ von W aus Eigenvektoren.
Somit ist $v_1, \ldots, v_{n-1}, v$ eine orthogonale Basis von V.

☺ Ähnliches gilt für den Ableitungsoperator $\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ und die Entwicklung nach den Eigenfunktionen $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ in eine Fourier–Reihe. Der Vektorraum L^2 ist allerdings unendlich–dimensional, ein entscheidender Unterschied.

Fourier–Analyse

Die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ sei T–periodisch und auf $[0,T]$ abs. integrierbar. Wir entwickeln f in **Harmonische** zur Grundfrequenz $\omega = 2\pi/T$:

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} \quad \text{mit} \quad c_k := \langle\, e_k \mid f \,\rangle = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Hier ist $c_k \in \mathbb{C}$ die Amplitude (und Phase) der k-ten Schwingung $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}$. Dank **Euler–Formel** $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} = \cos(k\omega t) + \mathrm{i}\sin(k\omega t)$ ist hierzu äquivalent:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t) \qquad \text{mit Koeffizienten}$$

$$a_k := \frac{2}{T}\int_{t=0}^{T} \cos(k\omega t)\,f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; c_k + c_{-k}, \qquad c_k = \frac{a_k - \mathrm{i}b_k}{2},$$

$$b_k := \frac{2}{T}\int_{t=0}^{T} \sin(k\omega t)\,f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \mathrm{i}(c_k - c_{-k}), \qquad c_{-k} = \frac{a_k + \mathrm{i}b_k}{2}.$$

☺ Für $x = \omega t$ erhalten wir Periode 2π und Grundfrequenz 1.

Fourier–Analyse

Das T–periodische **Signal** f zerlegen wir so in sein **Spektrum** $\widehat{f}$:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{C} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \widehat{f}:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}, \quad \widehat{f}(k) = c_k := \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t$$

In Grad $\le n$ approximieren wir f durch das **Fourier–Polynom** f_n:

$$f_n(t) := \sum_{k=-n}^{n} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t)$$

Für $n\to\infty$ erhalten wir (zumindest formal) die **Fourier–Reihe**:

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t)$$

Gelesen: „Die Funktion f hat die Fourier–Koeffizienten c_k bzw. a_k, b_k."
Für trigonometrische Polynome ist die Reihe endlich, sonst unendlich!
☺ Für die Konvergenz dieser Reihe gibt es effiziente Kriterien. I216

Fourier–Analyse

Zur **Fourier–Analyse** benötigen wir nur die **absolute Integrierbarkeit**, also $\int_0^T |f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$. Wegen $|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t}| = 1$ ist dann $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t} f(t)$ über $[0,T]$ absolut integrierbar, und obiges Integral definiert $c_k \in \mathbb{C}$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$.

Das **trigonometrische Polynom** f_n dient uns als Approximation an f. Die **Fourier–Reihe** ist jedoch zunächst nur eine bequeme Schreibweise: Wir wissen noch nicht, ob und in welchem Sinne die Reihe konvergiert!

Zur **Konvergenz** benötigen wir etwas stärkere Voraussetzungen an f, etwa quadratische Integrierbarkeit $\int_0^T |f(t)|^2\,\mathrm{d}t < \infty$, siehe Kapitel J.

Selbst wenn die Fourier–Reihe in einem Punkt $t \in [0, 2\pi]$ konvergiert, muss der Grenzwert nicht der Funktionswert $f(t)$ sein. Dazu genügen stärkere Forderungen, etwa **Differenzierbarkeit** im Punkt t (Satz I2A).

Nur im Falle der Konvergenz in jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$ schreiben wir

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$$

Das nennen wir die **Fourier–Synthese**, also das Zusammensetzen der Teilschwingungen zwecks Rekonstruktion der ursprünglichen Funktion f.

Fourier–Analyse

Das Konvergenzproblem ist analog zur Taylor–Reihe von $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad \text{mit Taylor–Koeffzienten} \quad c_k = \frac{f^k(0)}{k!}$$

Das bedeutet zunächst nur: f hat die Taylor–Koeffizienten c_k (B438).
Konvergenz: Für $n \to \infty$ muss das Restglied verschwinden: $R_n(z) \to 0$.

In diesem Kapitel berechnen wir zunächst zentrale Beispiele von Fourier–Reihen: Sägezahn-, Rechteck- und Treppenfunktion etc.
Die hierbei beobachteten Eigenschaften und Rechentechniken formulieren wir parallel hierzu allgemein als Sätze / Rechenregeln.

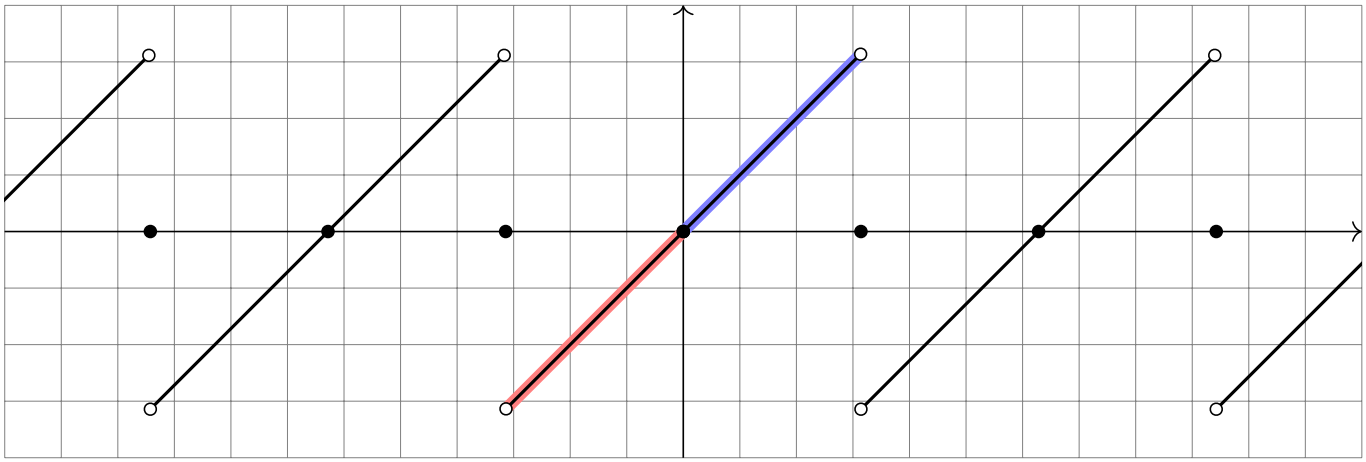
Das dient ganz konkret dazu, nützliche Tricks und Abkürzungen zu erklären und für Anwendungen bereit zu stellen. Insbesondere aber klären wir, wann, wo und wogegen die Fourier–Reihe konvergiert.

Im nächsten Kapitel übertragen wir die geometrischen Begriffe des $\mathbb{R}^n$ wie Skalarprodukt, Norm und Abstand, auf quadratisch integrierbare Funktionen und ihre Fourier–Reihen. Das ist eine überaus nützliche Betrachtungsweise und der natürliche Rahmen der Fourier–Theorie.

Fourier–Entwicklung der Sägezahnfunktion

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ungerade und 2π–periodisch mit $f(x)=x$ für $0<x<\pi$.

Aufgabe: (0) Skizzieren Sie f. (1) Berechnen Sie die Fourier–Reihe.



⚠ Wir wissen zunächst nur $f(x)=x$ für $0<x<\pi$. Da f ungerade ist, also $f(-x)=-f(x)$, folgt $f(0)=0$ und $f(x)=x$ für $-\pi<x<0$.
Dies setzen wir 2π–periodisch fort. Insbesondere folgt $f(\pm\pi)=0$.

☺ Die Funktionsskizze ist für die Rechnung hilfreich. Wer schon die Funktion nicht zeichnen kann, dem misslingt wohl auch das Integral.

Fourier–Entwicklung der Sägezahnfunktion

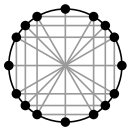
(1) Der nullte Fourier–Koeffizient c_0 ist der Mittelwert über eine Periode:

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{(siehe Skizze)}$$

Für $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ rechnen wir komplex und nutzen partielle Integration:

$$c_k \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}x\,\mathrm{d}x \overset{\text{part}}{=} \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{\mathrm{i}}{k}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}x\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{i}}{k}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{k}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}k}\pi + \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}k}\pi}{2\pi} = \frac{\mathrm{i}}{k}\cdot\frac{(-1)^k+(-1)^k}{2} = (-1)^k\,\frac{\mathrm{i}}{k}$$



Damit haben wir die Funktion f in ihre Fourier–Reihe entwickelt:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &\sim \sum_{k\neq 0}(-1)^k\frac{\mathrm{i}}{k}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2}{k}\sin(kx) \\ &= 2\left[\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \ldots\right]\end{aligned}}$$

☺ Da f ungerade ist, erhalten wir $c_{-k}=-c_k$, also eine Sinus-Reihe.

Fourier–Entwicklung der Sägezahnfunktion

Umrechnung der Koeffizienten für die Co/Sinus-Reihe:

$$a_k = c_k + c_{-k} = 0, \qquad b_k = \mathrm{i}(c_k - c_{-k}) = (-1)^{k+1}\,\frac{2}{k}.$$

Zum Vergleich nochmal direkt die Integrale für a_k, b_k mit $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(kx)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(ungerader Integrand)} \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\left[x\,\frac{\sin(kx)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(kx)}{k}\,\mathrm{d}x\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(kx)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(gerader Integrand)} \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\left[x\,\frac{-\cos(kx)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(kx)}{k}\,\mathrm{d}x\right) = (-1)^{k+1}\,\frac{2}{k} \end{aligned}$$

Zur Berechnung von a_k, b_k sind zwei Integrale nötig, für c_k nur eins.
Man spart ein wenig, doch der Rechenweg ist Geschmackssache.
Die Umrechnung zwischen a_k, b_k und c_k gelingt jedenfalls leicht.

Fourier–Entwicklung der Sägezahnfunktion

☺ Die Fourier–Koeffizienten a_k, b_k, c_k sind hier leicht zu berechnen.
Da f reell ist, gilt $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ und $c_{-k} = \overline{c_k}$. Da f ungerade, gilt $a_k = 0$.

Die folgenden Graphiken zeigen hierzu die **Fourier–Polynome** f_n.
Wir wollen verstehen, in welchem Sinne $f_n \to f$ konvergiert.

☺ Für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}$ gilt augenscheinlich $f_n(x) \to f(x)$:
In den Punkten $x = 0$ und $x = \pi$ ist dies klar, ansonsten keineswegs!

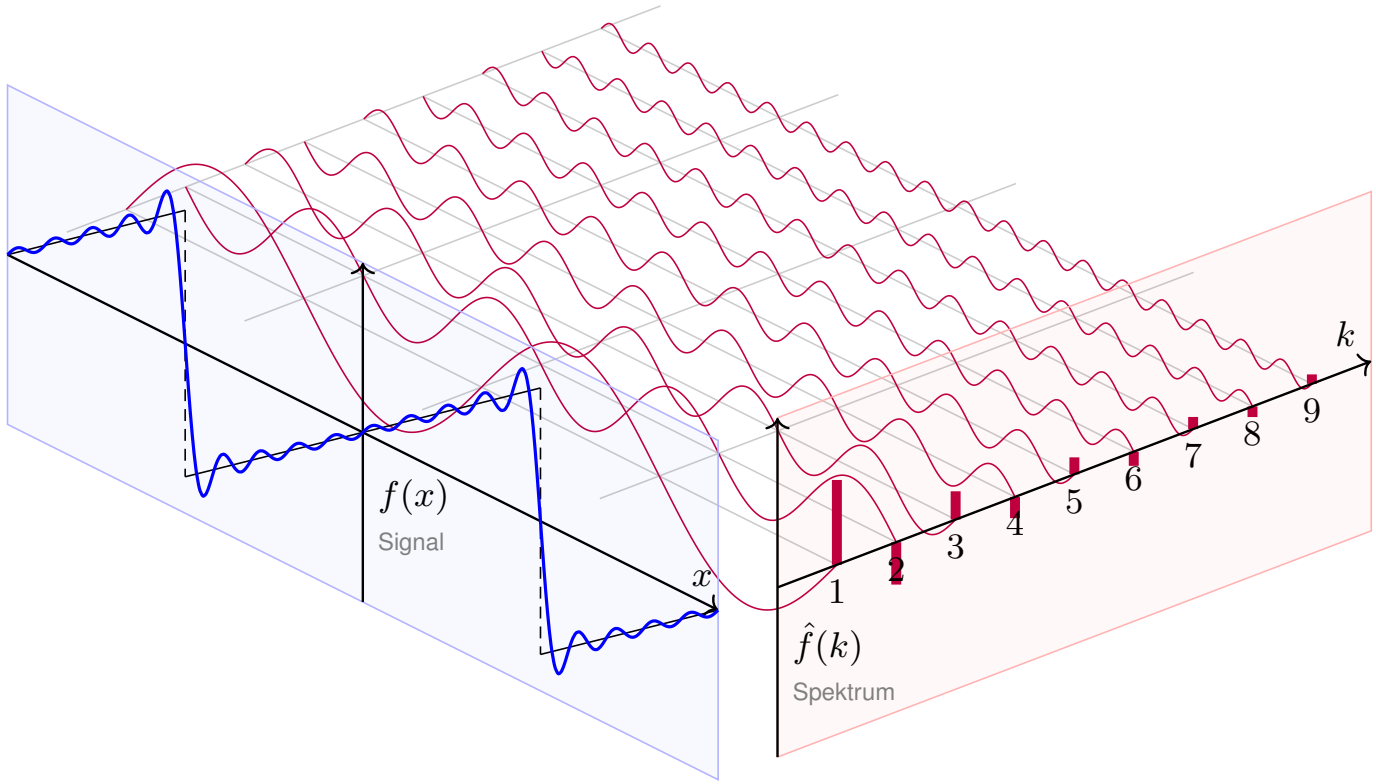
Die Koeffizienten klingen nur langsam ab ($\sim 1/k$), das heißt auch hohe Frequenzen tragen noch deutlich bei: Die Fourier–Reihe ist „rau“.

⚠ Wir sehen recht eindringlich das sogenannte **Gibbs–Phänomen**:
Die Funktionen f_n überschwingen in Sprungstellen um ca. 9%.

☹ Es gilt daher **keine gleichmäßige Konvergenz** $f_n \to f$ auf $\mathbb{R}$:
Ein kleiner ε–Schlauch um f enthält nicht alle f_n für $n \geq n_0$.

☺ Auf jedem Intervall $I = [-\pi + \delta, \pi - \delta]$ **abseits der Sprungstellen** konvergiert f_n gleichmäßig gegen f: Zu jedem $\varepsilon > 0$ liegen schließlich alle f_n im ε–Schlauch um f auf I. Auch das ist bemerkenswert!

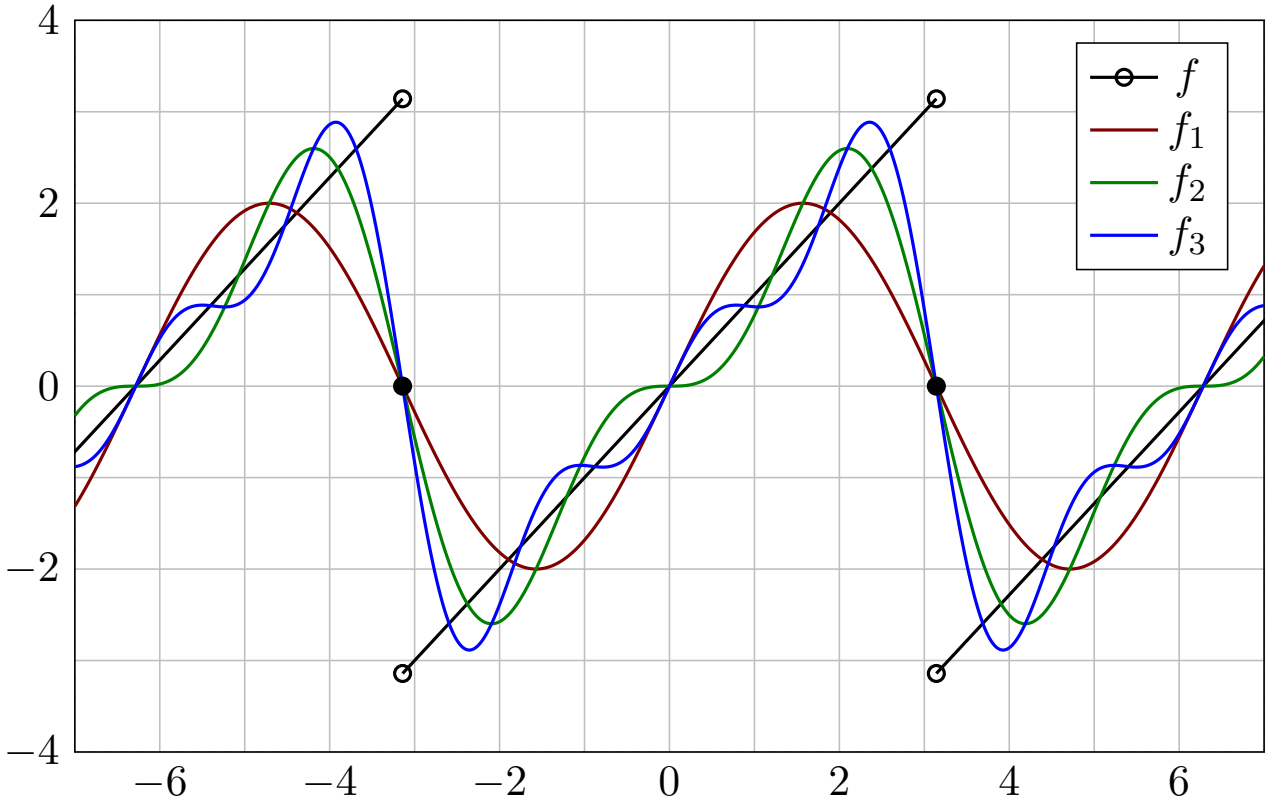
Fourier–Entwicklung der Sägezahnfunktion



$$f(x) = 2\left[\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{5}\sin 5x \mp \ldots\right]$$

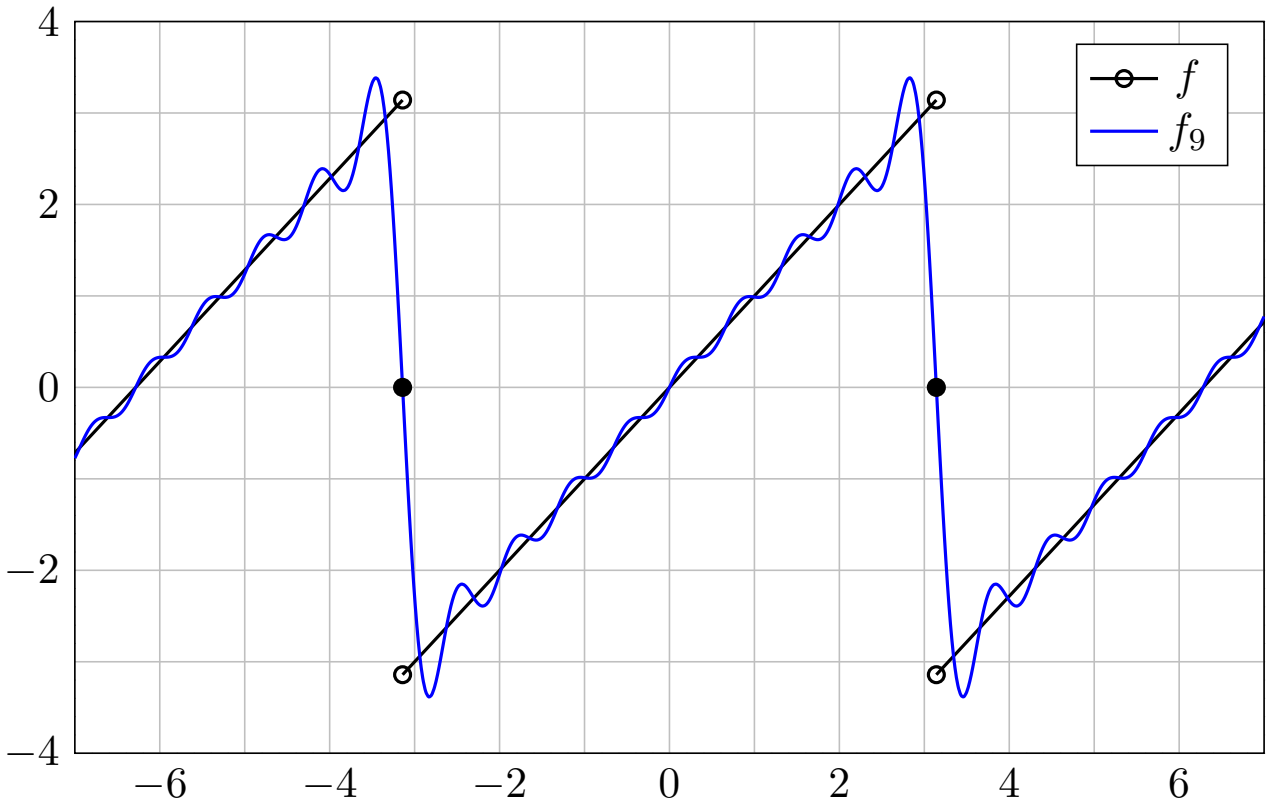
Fourier–Entwicklung der Sägezahnfunktion

Die ersten Fourier–Polynome $f_1, f_2, f_3, \ldots$ ähneln f zunächst nur grob:



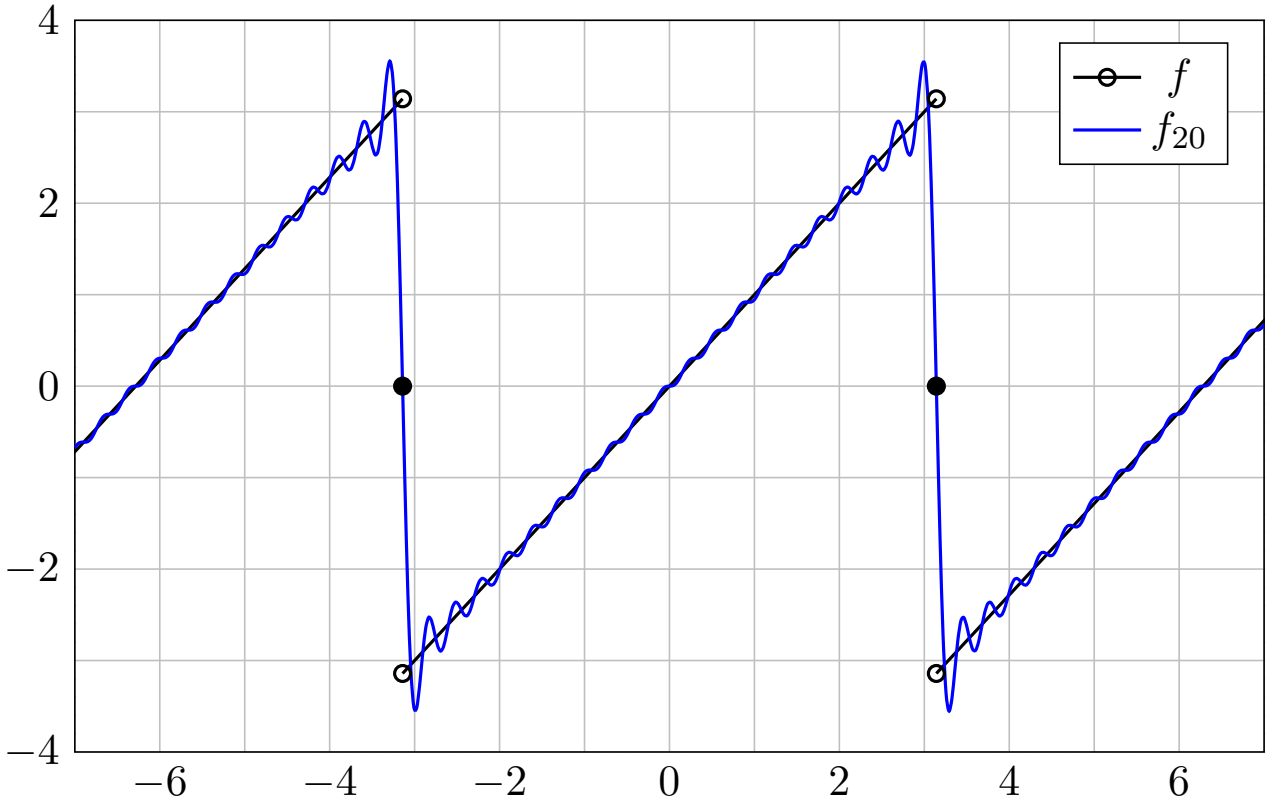
Fourier–Entwicklung der Sägezahnfunktion

Das Fourier–Polynom f_9 von Grad 9 liegt schon näher bei f:



Fourier–Entwicklung der Sägezahnfunktion

Das Überschwingen bleibt auch bei höherem Approximationsgrad:



Punktweise & gleichmäßige Konvergenz von Fourier–Reihen

Wir untersuchen die zentrale Frage: Konvergiert die Fourier–Reihe?
Wir approximieren $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ mit Periode T durch Fourier–Polynome

$$f_n(t) := \sum_{k=-n}^{n} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} \quad \text{mit} \quad c_k := \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Wir sagen, die Fourier–Reihe von f **konvergiert im Punkt** $t\in\mathbb{R}$, wenn die Zahlenfolge $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ für $n\to\infty$ konvergiert.

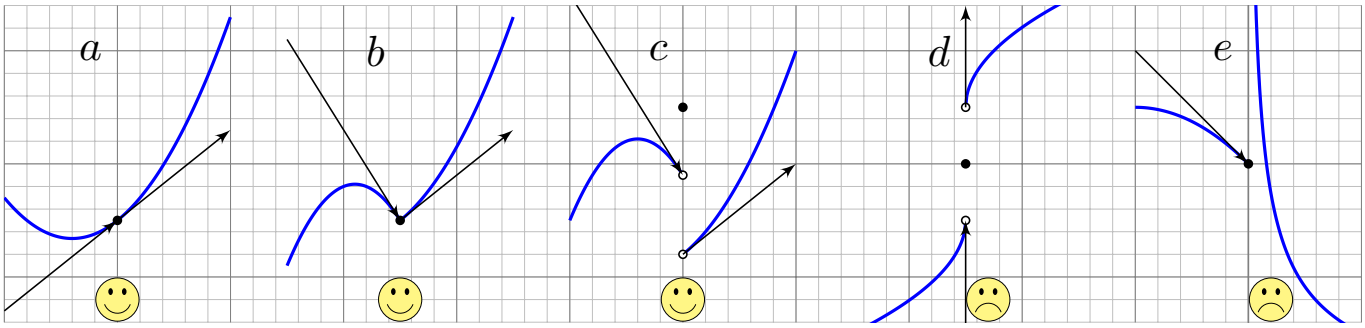
Sie **konvergiert im Punkt** t **gegen** $f(t)$, wenn $f_n(t)\to f(t)$ gilt.
In diesem Falle (und sorgsamerweise nur dann) schreiben wir

$$f(t) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} \qquad \text{oder kurz} \qquad f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}.$$

⚠ Fourier vermutete zunächst Konvergenz $f_n\to f$ für jede Funktion f.
Das ist jedoch nicht immer der Fall. Wir brauchen praktische Kriterien!

☺ Wir nutzen hierzu das Dirichlet–Kriterium: Ein wenig Regularität von f im Punkt $t\in\mathbb{R}$ garantiert die erhoffte Konvergenz $f_n(t)\to f(t)$!

Punktweise & gleichmäßige Konvergenz von Fourier–Reihen



Links-/rechtsseitiger Grenzwert und Ableitungen von f im Punkt t:

$$f(t-) := \lim_{\tau\nearrow t} f(\tau), \qquad f(t+) := \lim_{\tau\searrow t} f(\tau),$$

$$f'(t-) := \lim_{\tau\nearrow t}\frac{f(\tau)-f(t-)}{\tau-t}, \qquad f'(t+) := \lim_{\tau\searrow t}\frac{f(\tau)-f(t+)}{\tau-t}.$$

Die **Dirichlet–Bedingung** fordert, dass alle vier Grenzwerte existieren.
Wir nennen f **sprungnormiert** im Punkt t, falls $f(t) = \frac{1}{2}\big[f(t-)+f(t+)\big]$.

Zur Erinnerung: Genau dann ist f stetig in t, wenn $f(t)=f(t-)=f(t+)$ gilt.
Beispiele a,b sind stetig, c,d haben eine Sprungstelle, d ist sprungnormiert, c nicht.
Beispiele a,b,c haben beidseitige Ableitungen, d hingegen nicht (senkrechte Tangente).
Beispiel e hat rechtsseitig eine Polstelle, hier sind Ableitung und Sprungnormierung sinnlos.

Punktweise & gleichmäßige Konvergenz von Fourier–Reihen

Stetigkeit im Punkt $t \in \mathbb{R}$ ist äquivalent zu $f(t) = f(t-) = f(t+)$.
Im Falle $f(t-) \neq f(t+)$ hat f in t eine **Sprungstelle** (siehe Skizze).

Differenzierbarkeit im Punkt t impliziert Stetigkeit und ist äquivalent zu Dirichlet mit $f(t) = f(t-) = f(t+)$ und $f'(t-) = f'(t+) = f'(t)$.

Zu einer vorgelegten Funktion f stellt sich die konkrete Frage:
In welchen Punkten konvergiert die Fourier–Reihe? und wogegen?
Das Kriterium von Dirichlet gibt hierauf eine sehr praktische Antwort:

Ist f im Punkt t differenzierbar, so konvergiert die Fourier–Reihe gegen den Wert $f(t)$. Das gilt auch dann noch, wenn f in t stetig ist und beide links-/rechtsseitige Ableitungen existieren. Sogar Sprungstellen können wir so noch gut behandeln: Die Fourier–Reihe konvergiert dann gegen den Mittelwert! Um all diese Fälle präzise zu klären, muss man nur die vier geforderten (links-/rechtsseitigen) Grenzwerte von f sicherstellen.

☺ Die Dirichlet–Bedingung ist recht milde: Sie erlaubt Sprungstellen und verhindert lediglich, dass unsere Funktion f allzu wild oszilliert. Für viele praktische Fälle ist das ausreichend — und sehr bequem!

Punktweise & gleichmäßige Konvergenz von Fourier–Reihen

Satz I2A: Dirichlet–Kriterium für Fourier–Reihen, siehe J2A & J2B

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ abs. integrierbar auf $[0, T]$ und T–periodisch, $\omega = 2\pi/T$.

(1) Angenommen, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ erfüllt die Dirichlet–Bedingung im Punkt t, d.h. beide Grenzwerte $f(t\pm)$ und beide Ableitungen $f'(t\pm)$ existieren. Dann konvergiert in diesem Punkt t die Fourier–Reihe $f_n(t)$ gemäß

$$\boxed{f_n(t) = \textstyle\sum_{k=-n}^{n} c_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} \quad \to \quad \frac{1}{2}\big[f(t+) + f(t-)\big] \quad \text{für} \quad n \to \infty.}$$

⚠ Der Funktionswert $f(t)$ im Punkt t spielt dabei gar keine Rolle.
(1a) Speziell gilt $f_n(t) \to f(t)$ falls f in t zudem sprungnormiert ist.

(1b) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig differenzierbar und überall stetig bzw. sprungnormiert, dann konvergiert $f_n(t) \to f(t)$ in jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$.

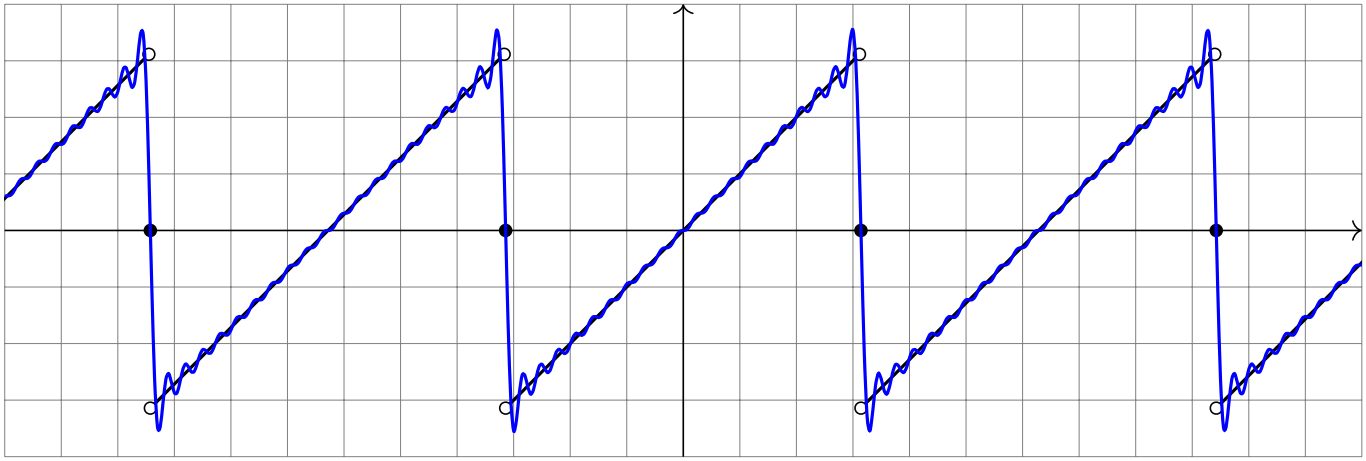
(2) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und stückweise stetig differenzierbar mit $|f'| \leq L$, so konvergiert die Fourier–Reihe $f_n \to f$ sogar gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$:

$$\boxed{\big|f_n(t) - f(t)\big| \quad \leq \quad 2L/\omega \cdot \ln(n)/n \quad \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty}$$

Punktweise Konvergenz von Fourier–Reihen

☺ Das Dirichlet–Kriterium I2A können wir auf die Sägezahnfunktion anwenden und die Konvergenz ihrer Fourier–Reihe vollständig klären!

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ungerade und 2π–periodisch mit $f(x) = x$ für $0 < x < \pi$.



Aufgabe: (2) Bestimmen Sie $f(x\pm)$ und $f'(x\pm)$ in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$.

(3) In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ konvergiert $f_n(x)$ für $n \to \infty$? Wogegen?

(4) Wogegen konvergiert $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \ldots$?

Punktweise Konvergenz von Fourier–Reihen

Lösung: (2) Auf $]-\pi, \pi[$ gilt $f(x) = x$. In jedem Punkt $x \in]-\pi, \pi[$ ist f stetig, $f(x\pm) = f(x)$, und zudem differenzierbar, $f'(x\pm) = f'(x) = 1$. Alles wiederholt sich 2π–periodisch, auf $]\pi, 3\pi[$, $]3\pi, 5\pi[$, etc.

In unserem Beispiel ist π die einzige Sprungstelle (modulo $2\pi\mathbb{Z}$):

$$f(\pi-) = \lim_{t \nearrow \pi} f(t) = \lim_{t \nearrow \pi} [t] \qquad = +\pi$$

$$f(\pi+) = \lim_{t \searrow \pi} f(t) = \lim_{t \searrow \pi} [t - 2\pi] = -\pi$$

Auch in der Sprungstelle existieren die einseitigen Ableitungen:

$$f'(\pi-) = \lim_{t \nearrow \pi} \frac{f(t) - f(\pi-)}{t - \pi} = \lim_{t \nearrow \pi} \frac{t - \pi}{t - \pi} \qquad = \lim_{t \nearrow \pi} 1 = 1$$

$$f'(\pi+) = \lim_{t \searrow \pi} \frac{f(t) - f(\pi+)}{t - \pi} = \lim_{t \searrow \pi} \frac{(t - 2\pi) - (-\pi)}{t - \pi} = \lim_{t \searrow \pi} 1 = 1$$

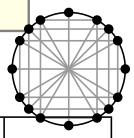
☺ Das zeigt: Unsere Funktion f erfüllt die **Dirichlet–Bedingung**! (I2A)

☺ Zudem ist f **sprungnormiert**, das heißt $f(x) = \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]$. Das gilt in $x = \pm\pi$ dank $f(\pm\pi) = 0$, aber ebenso für $-\pi < x < \pi$.

Punktweise Konvergenz von Fourier–Reihen

(3) Dank (2) können wir das Dirichlet–Kriterium (I2A) nutzen:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2}{k}\sin(kx) \overset{\text{Dirichlet}}{\underset{\text{I2A}}{=}} f(x) = \begin{cases} x & \text{für } -\pi < x < \pi, \\ 0 & \text{für } x = \pm\pi. \end{cases}$$



(4) Speziell für $x = \pi/3$ kennen wir folgende nützliche Werte:

k	0	1	2	3	4	5	...
$\cos(k\pi/3)$	1	$1/2$	$-1/2$	-1	$-1/2$	$1/2$	...
$\sin(k\pi/3)$	0	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$	0	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$	...

Damit können wir Reihe und Funktion auswerten und vergleichen:

$$\sqrt{3}\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \dots\right] \overset{(3)}{=} f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

☺ Hieraus erhalten wir den gesuchten Grenzwert der Reihe:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \dots = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = 0.6045997880\dots$$

☺ Dass diese Reihe konvergiert wissen wir dank Leibniz-Kriterium B3G. Nun können wir sogar ihren Grenzwert berechnen, exakt und explizit!

Punktweise Konvergenz von Fourier–Reihen

☺ Das praktische Dirichlet–Kriterium I2A bestätigt unsere Anschauung! Wir gewinnen explizite Grenzwerte und können damit exakt rechnen. Das ist ein mächtiges Werkzeug, wie wir schon in dieser Aufgabe sehen:

⚠ Für die letzte Rechnung (4) benötigen wir $f_n(x) \to f(x)$ für $n \to \infty$. Dies stellen wir im vorigen Teil durch das Dirichlet–Kriterium sicher (3). Hierzu müssen wir nur die geforderten Grenzwerte von f sichern (2).

Diese Vorgehensweise ist typisch und besteht aus zwei Teilen:
Zur **Fourier–Analyse** berechnen wir die Fourier–Koeffizienten (1):

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Zur **Fourier–Synthese** bestimmen wir zum betrachteten Punkt $x \in \mathbb{R}$, ob und wogegen die Fourier–Reihe $f_n(x)$ für $n \to \infty$ konvergiert (2–4).

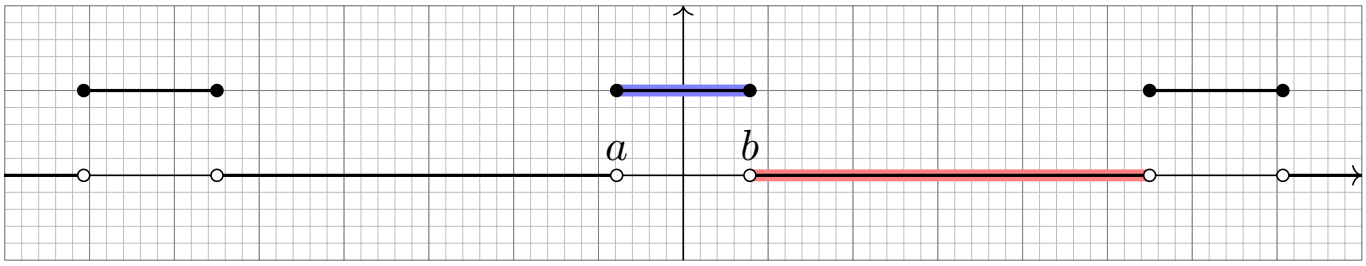
⚠ Nur im Falle der Konvergenz in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ schreiben wir:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

Fourier–Entwicklung von Treppenfunktionen

Die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei 2π–periodisch mit $f=\mathbf{I}_{[a,b]}$ auf $[a,a{+}2\pi]$.
Hierbei seien die Werte $a<b<a+2\pi$ beliebig vorgegeben.
Später wollen wir insbesondere $-a=b=\pi/4$ betrachten.

Aufgabe: (0) Skizzieren Sie f. (1) Berechnen Sie die Fourier–Reihe.



☺ Wir berechnen hier die Fourier–Reihe einer Indikatorfunktion.
Durch Linearkombination erhalten wir beliebige Treppenfunktionen!

(2) Bestimmen Sie $f(x\pm)$ und $f'(x\pm)$ für jeden Punkt $x\in\mathbb{R}$.

(3) In welchen Punkten x konvergiert $f_n(x)$ für $n\to\infty$? Wogegen?

(4) Welche Werte haben Funktion und Reihe für $x=b=-a$?

(5) Wogegen konvergiert $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\ldots$?

Fourier–Entwicklung von Treppenfunktionen

(1) Der Fourier–Koeffizient c_0 ist der Mittelwert über eine Periode:

$$c_0=\frac{1}{2\pi}\int_{x=a}^{a+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{x=a}^{b}1\,\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2\pi}\qquad\text{(siehe Skizze)}$$

Für $k\neq 0$ rechnen wir komplex und finden:

$$c_k\overset{\text{Def}}{=}\frac{1}{2\pi}\int_{x=a}^{b}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x\overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}}\frac{1}{2\pi}\left[\frac{-1}{\mathrm{i}k}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right]_a^b=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ka}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kb}}{2\pi\mathrm{i}k}$$

Die Fourier–Reihe, zunächst formal (ohne Anspruch auf Konvergenz):

$$\boxed{f(x)\sim\frac{b-a}{2\pi}+\sum_{k\neq 0}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ka}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kb}}{2\pi\mathrm{i}k}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}$$

☹ Ohne Werkzeug ist dieser Reihe kaum anzusehen, ob und wogegen sie konvergiert. ☺ Hier rettet uns das Dirichlet–Kriterium! (Satz I2A)

(2) Die Funktion f ist konstant auf $]a,b[$ und auf $]b,a+2\pi[$. Hier ist f stetig, also $f(x\pm)=f(x)$, und differenzierbar, $f'(x\pm)=f'(x)=0$.
In $x\in\{a,b\}$ hat f eine Sprungstelle, mit $f(a+)=f(b-)=1$ und $f(a-)=f(b+)=0$ sowie einseitigen Ableitungen $f'(x\pm)=0$.

Fourier–Entwicklung von Treppenfunktionen

(3) Dank (2) können wir das Dirichlet–Kriterium (I2A) nutzen:

$$\frac{b-a}{2\pi} + \sum_{k\neq 0} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ka} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kb}}{2\pi\mathrm{i}k}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \overset{\text{Dirichlet}}{\underset{\text{I2A}}{=}} \begin{cases} 1 & \text{für } a < x < b, \\ 0 & \text{für } b < x < a + 2\pi, \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = a \text{ und für } x = b. \end{cases}$$

(4) Im symmetrischen Fall $a = -b$ vereinfacht sich diese Reihe zu:

$$\frac{b}{\pi} + \sum_{k\neq 0} \frac{\sin(kb)}{k\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \frac{b}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} 2\frac{\sin(kb)}{k\pi}\cos(kx)$$

☺ Da f gerade ist, erhalten wir $c_{-k} = c_k$, also eine Cosinus–Reihe.

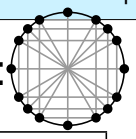
⚠ In der Sprungstelle gilt $f(\pm b) = 1$. Die Reihe ergibt hingegen:

$$\frac{b}{\pi} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kb)}{k\pi}\cos(kb) \overset{(3)}{=} \frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kb)}{k}\cos(kb) = \frac{\pi}{4} - \frac{b}{2}$$

☺ Den Wert dieser Reihe verdanken wir Dirichlet! Speziell für $b = \pi/2$ sehen wir ihn direkt, denn hier gilt $\sin(kb)\cos(kb) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Fourier–Entwicklung von Treppenfunktionen

(5) Speziell für $x = b = \pi/4$ kennen wir folgende nützliche Werte:



k	0	1	2	3	4	5	6	7	…
$\cos(k\pi/4)$	$+1$	$+\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$+\frac{\sqrt{2}}{2}$	…
$\sin(k\pi/4)$	0	$+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+1$	$+\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	…

Für ungerade $k = 2j+1$ gilt $2\sin(k\pi/4)\cos(k\pi/4) = (-1)^j$, sonst $= 0$. Wir setzen also $x = b = \pi/4$ in unsere Reihe ein und vereinfachen:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k}\sin\Big(\frac{k\pi}{4}\Big)\cos\Big(\frac{k\pi}{4}\Big) \overset{(4)}{=} \frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j+1} = \frac{\pi}{4}$$

☺ Hieraus erhalten wir den gesuchten Grenzwert der Reihe:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots = \frac{\pi}{4} = 0.7853981633\ldots$$

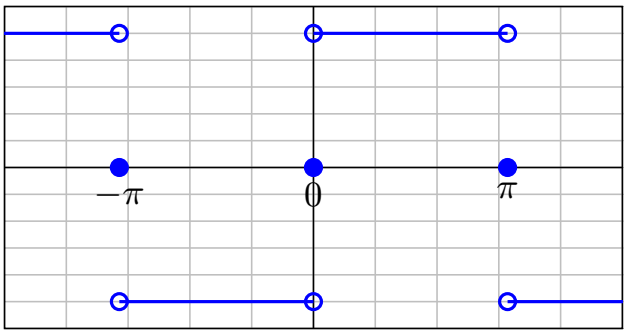
☺ Das ist die Leibniz–Reihe, die wir bereits von Seite B319 kennen. Für $x = b = \pi/3$ erhält man übrigens die Reihe der vorigen Aufgabe.

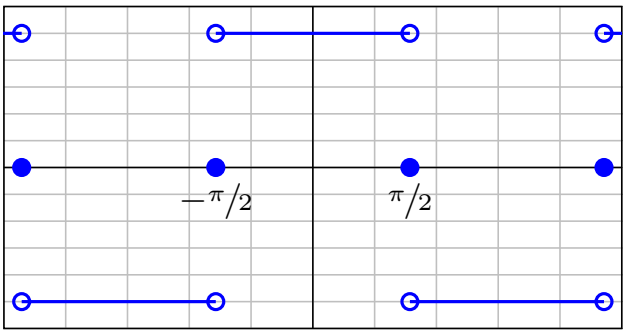
Fourier–Entwicklung der Rechteckfunktion

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ungerade und 2π–periodisch mit $f(x)=1$ für $0<x<\pi$. Hierzu sei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $g(x)=f(x+\pi/2)$ die Verschiebung um $\pi/2$.

Aufgabe: (0) Skizzieren Sie f,g. (1) Berechnen Sie die Fourier–Reihen. (2) Konvergiert die Fourier–Reihe in jedem Punkt gegen die Funktion?

Lösung: Der vorigen Aufgabe entnehmen wir bzw. rechnen direkt aus:





f ungerade $\sim$ Sinusreihe $\qquad$ g gerade $\sim$ Cosinusreihe

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left[\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\frac{1}{7}\sin 7x+\frac{1}{9}\sin 9x+\dots\right]$$

$$g(x)=\frac{4}{\pi}\left[\cos x-\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{5}\cos 5x-\frac{1}{7}\cos 7x+\frac{1}{9}\cos 9x\mp\dots\right]$$

Fourier–Entwicklung der Rechteckfunktion

(0) Skizze! (1) Wir rechnen geduldig oder nutzen die vorige Aufgabe. (2) Dank Dirichlet I2A gilt $f_n(x)\to f(x)$ und $g_n(x)\to g(x)$ in jedem Punkt $x\in\mathbb{R}$, hier sogar in den Sprungstellen da sprungnormiert.

☺ Wir erkennen hier besonders schön folgende Symmetrieregeln:

Für jede **reelle** Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gilt $a_k,b_k\in\mathbb{R}$, also $c_{-k}=\overline{c_k}$.

Ist f **gerade**, also $f(-x)=f(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$, so gilt

$$b_k=0,\quad a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\cos(kx)\,f(x)\,\mathrm{d}x,\quad c_{-k}=c_k.$$

Also $f\sim$ **Cosinusreihe**. Für reelle Funktionen heißt das $c_k\in\mathbb{R}$.

Ist f **ungerade**, also $f(-x)=-f(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$, so gilt

$$a_k=0,\quad b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\sin(kx)\,f(x)\,\mathrm{d}x,\quad c_{-k}=-c_k.$$

Also $f\sim$ **Sinusreihe**. Für reelle Funktionen heißt das $c_k\in\mathrm{i}\mathbb{R}$.

☺ Mit dieser einfachen Beobachtung lässt sich dank Symmetrie die Rechnung halbieren oder Ergebnisse auf Plausibilität prüfen.

Fourier–Entwicklung der Rechteckfunktion

Zur Illustration nochmal ausführlich die Rechnung für f:

Der nullte Fourier–Koeffizient ist der Mittelwert über eine Periode:

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{(ungerader Integrand)}$$

Berechnung der Fourier–Koeffizienten für $k \geq 1$:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{(ungerader Integrand)}$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x && \text{(gerader Integrand)} \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin(kx)\,\mathrm{d}x && = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1-\cos(k\pi)}{k}\right] && = \begin{cases} 0 & \text{für } k \text{ gerade,} \\ \frac{4}{k\pi} & \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

☺ Dank Symmetrie sparen wir hier 50% des Rechenaufwands.

Fourier–Entwicklung der Rechteckfunktion

Zum Vergleich das Integral für c_k mit $k \neq 0$:

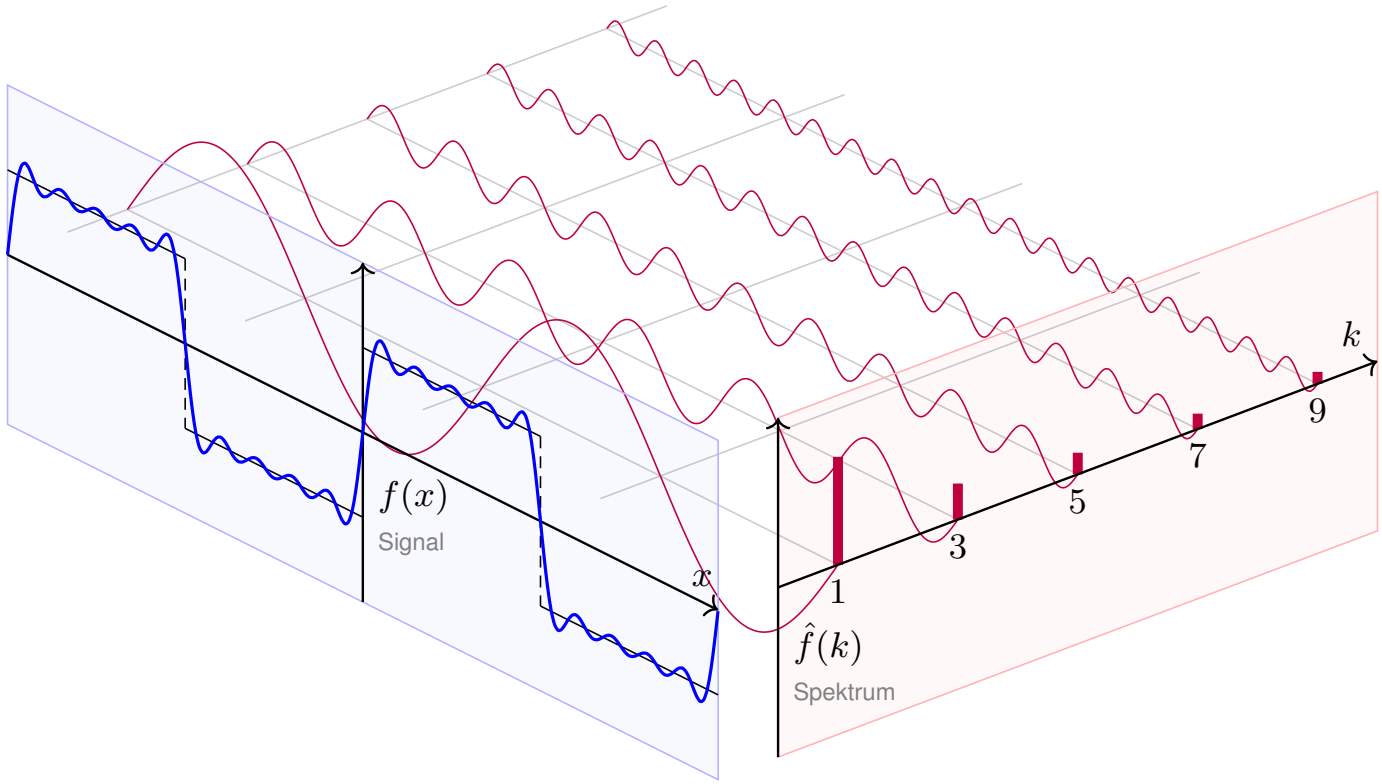
$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x - \int_{-\pi}^{0} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{1}{\mathrm{i}\pi}\int_0^{\pi} \sin(kx)\,\mathrm{d}x \quad = \quad \frac{1}{\mathrm{i}\pi}\left[\frac{-\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\mathrm{i}\pi}\left[\frac{1-\cos(k\pi)}{k}\right] \quad = \quad \begin{cases} \frac{2}{\mathrm{i}\pi k} & \text{für } k \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{für } k \text{ gerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Oder umgerechnet für die Co/Sinus-Reihe:

$$a_k = c_k + c_{-k} = 0. \qquad b_k = \mathrm{i}(c_k - c_{-k}) = \begin{cases} \frac{4}{k\pi} & \text{für } k \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{für } k \text{ gerade.} \end{cases}$$

☺ Die komplexwertige Rechnung bringt hier keine weitere Ersparnis.

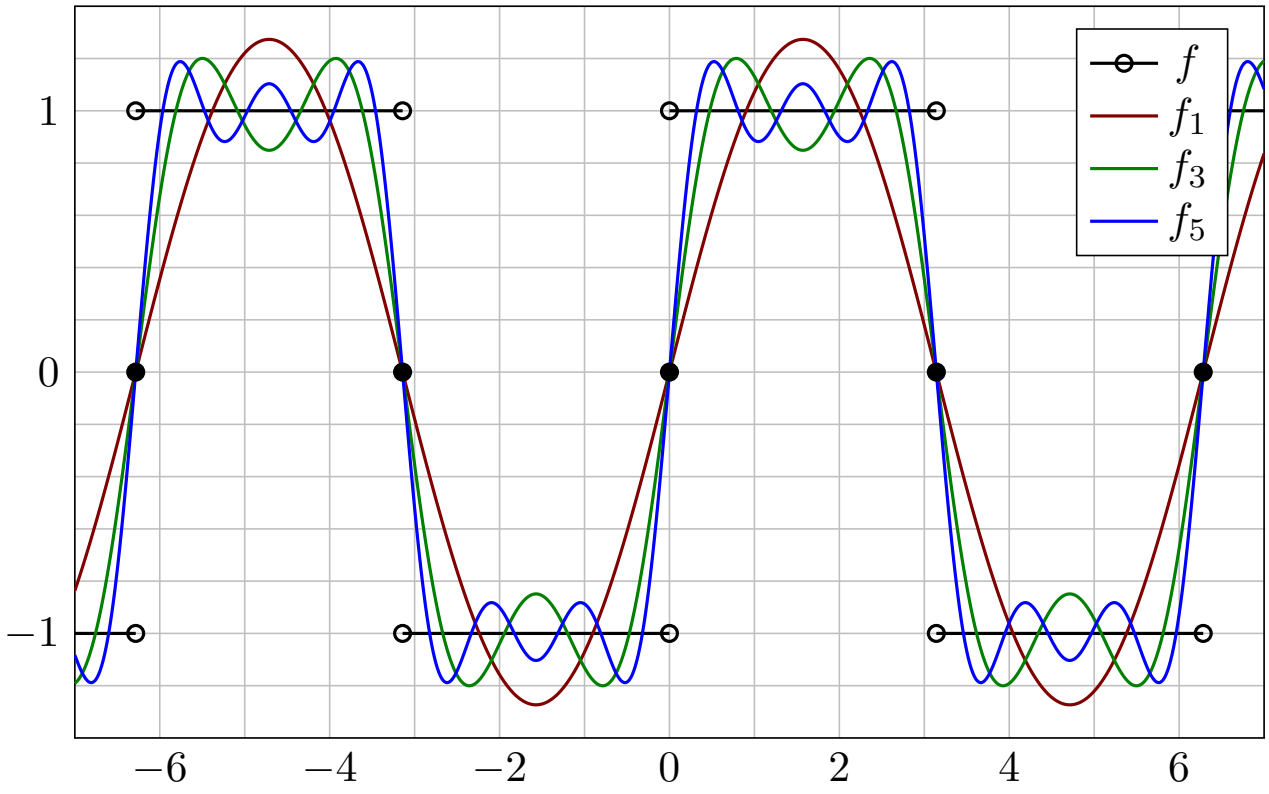
Fourier–Entwicklung der Rechteckfunktion



$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \frac{1}{9}\sin 9x + \dots\right]$$

Fourier–Entwicklung der Rechteckfunktion

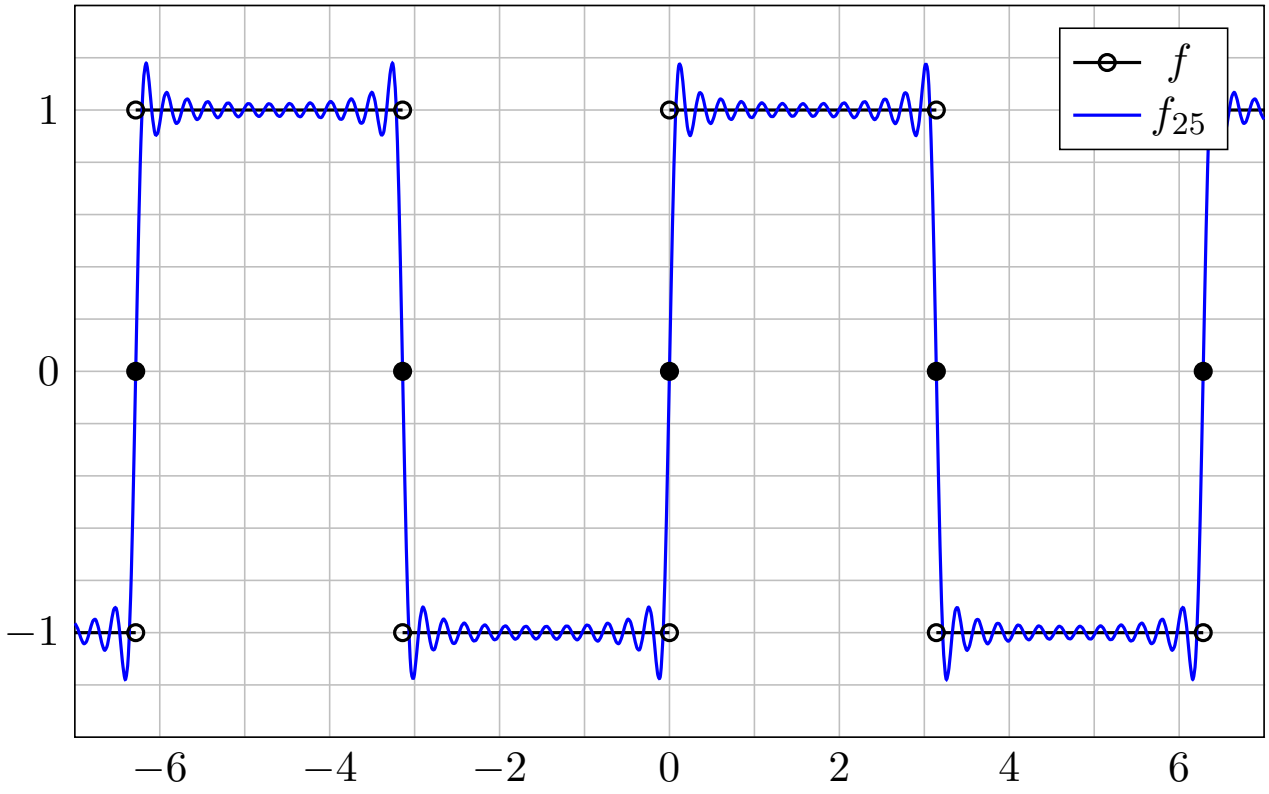
Die ersten Fourier–Polynome $f_1, f_3, f_5, \dots$ ähneln f zunächst nur grob:



Die Fourier–Polynome f_n höheren Grades liegen immer näher an f.

Fourier–Entwicklung der Rechteckfunktion

Das Überschwingen bleibt auch bei höherem Approximationsgrad:



Dieses **Gibbs–Phänomen** tritt allgemein an jeder Sprungstelle auf!

Fourier–Entwicklung der Rechteckfunktion

Was erkennen wir an diesen Fourier–Polynomen $f_1, f_2, f_3, \ldots$?
Für große n ähnelt das Fourier–Polynom f_n immer mehr der Funktion f.
Das Dirichlet–Kriterium I2A garantiert uns die **punktweise Konvergenz**!
In jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ gilt Konvergenz $f_n(x) \to f(x)$ für $n \to \infty$.

An jeder Sprungstelle passiert jedoch etwas höchst Bemerkenswertes:
Die Fourier–Polynome f_n können dem Sprung nur folgen, indem sie etwa 9% über das Ziel hinausschießen. Auch für Approximationen größerer Ordnung bleibt dieses **Gibbs–Phänomen** bestehen.

Anschaulich: Wenn wir um f einen sehr schmalen Schlauch legen, so liegt darin *keines* der Fourier–Polynome f_n. Das bedeutet, die Konvergenz $f_n \to f$ gilt hier punktweise, aber nicht gleichmäßig!
Der Abstand $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|$ wird nicht beliebig klein.

Auf jedem kompakten Intervall $[a, b]$ mit $0 < a < b < \pi$ fern der Sprungstellen ist unsere Funktion f jedoch stetig, sogar stetig differenzierbar.
Auf $[a, b]$ konvergieren die Fourier–Polynome f_n gleichmäßig gegen f.
Ein Überschwingen findet auf $[a, b]$ nicht statt, nur in den Sprungstellen!

Grundlegende Rechenregeln

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ absolut integrierbar auf $[0,T]$ und T–periodisch.
Wir entwickeln f in **Harmonische** zur Grundfrequenz $\omega = 2\pi/T$:

$$f \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{f}, \quad \widehat{f}(k) := \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}.$$

Diese **Analyse** zerlegt das Signal $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ in sein Spektrum $\widehat{f}:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$.
Die Reihe ist wie zuvor zunächst nur eine symbolische Schreibweise;
wir schreiben Gleichheit nur im Falle der (punktweisen) Konvergenz.
Für diese Fourier–Analyse gelten folgende nützliche Rechenregeln:

Linearität:	$af \circ\!\!-\!\!\bullet\, a\widehat{f}$,	$f+g \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{f}+\widehat{g}$,
Symmetrie:	$f(-t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{f}(-k)$,	$\overline{f(t)} \circ\!\!-\!\!\bullet\, \overline{\widehat{f}(-k)}$,
Verschiebung:	$f(t-a) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega a}\widehat{f}(k)$,	$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\omega t} f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{f}(k-\ell)$,
Produkte:	$f\cdot g \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{f} * \widehat{g}$,	$f * g \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{f}\cdot\widehat{g}$.

Rechenregeln: Linearität und Verschiebung

Linearität folgt unmittelbar aus der Linearität des Integrals.
Die weiteren Regeln erhalten wir jeweils durch Substitution:

$$\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t} f(-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{s=0}^{T} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega s} f(s)\,\mathrm{d}s = \widehat{f}(-k)$$

$$\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t}\overline{f(t)}\,\mathrm{d}t = \overline{\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t} = \overline{\widehat{f}(-k)}$$

$$\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t} f(t-a)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{s=-a}^{T-a} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega(s+a)} f(s)\,\mathrm{d}s = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega a}\widehat{f}(k)$$

$$\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-\ell)\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t = \widehat{f}(k-\ell)$$

☺ Meist gehen wir mit $x = \omega t$ zur Periode $T = 2\pi$ und $\omega = 1$ über.
In diesem Spezialfall sind alle Formeln etwas kürzer und einfacher.
In konkreten Anwendungen ist die Frequenz ω meist fest vorgegeben.
Die Umrechnung gelingt jedenfalls leicht wie oben in I1D festgehalten.

Rechenregeln: punktweises Produkt

Wir entwickeln periodische Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ in Fourier–Reihen

$$f(t) \sim \sum_{m=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(m)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\omega t} \quad \text{und} \quad g(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{g}(n)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t}.$$

Für $h = f \cdot g$ erhalten wir formal (ohne Anspruch auf Konvergenz):

$$h(t) \sim \sum_m \sum_n \widehat{f}(m)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\omega t} \cdot \widehat{g}(n)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t} = \sum_k \Bigg[\sum_{m+n=k} \widehat{f}(m)\widehat{g}(n) \Bigg] \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}$$

Das legt folgende einfache Produktregel nahe:

$$h = f \cdot g \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{h} = \widehat{f} * \widehat{g} \quad \text{mit} \quad \widehat{h}(k) = \sum_{m+n=k} \widehat{f}(m)\widehat{g}(n)$$

☺ Konvergenz ist sichergestellt falls $\sum |\widehat{f}(m)| < \infty$ und $\sum |\widehat{g}(n)| < \infty$.

☺ Die Fourier–Analyse übersetzt so das punktweise Produkt $h = f \cdot g$ der Signale, also $h(t) = f(t) \cdot g(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, in das Faltungsprodukt $\widehat{h} = \widehat{f} * \widehat{g}$ der Spektren; das kennen wir von Polynomen und Reihen!

Rechenregeln: Faltungsprodukt

☺ Umgekehrt gilt: Die Fourier–Analyse übersetzt das Faltungsprodukt $h = f * g$ der Signale in das punktweise Produkt $\widehat{h} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$ der Spektren.

Das Faltungsprodukt $h = f * g$ der Signale ist hierbei definiert durch

$$h(t) \;:=\; \frac{1}{T} \int_{u=0}^{T} f(u)g(t-u)\,\mathrm{d}u \;=\; \frac{1}{T} \int_{v=0}^{T} f(t-v)g(v)\,\mathrm{d}v.$$

☺ Integrierbarkeit gilt falls $\int_0^T |f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$ und $\int_0^T |g(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$.

Die Fourier–Koeffizienten berechnen wir hieraus wie folgt:

$$\begin{aligned}
\widehat{h}(k) &\overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{T^2} \int_{t=0}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t} \int_{u=0}^{T} f(u)g(t-u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Fub}}{=} \frac{1}{T^2} \int_{u=0}^{T} \int_{t=0}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega u} f(u) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega(t-u)} g(t-u)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u \\
&\overset{\text{Subs}}{=} \frac{1}{T} \int_{u=0}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega u} f(u)\,\mathrm{d}u \cdot \frac{1}{T} \int_{v=0}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega v} g(v)\,\mathrm{d}v \overset{\text{Def}}{=} \widehat{f}(k) \cdot \widehat{g}(k)
\end{aligned}$$

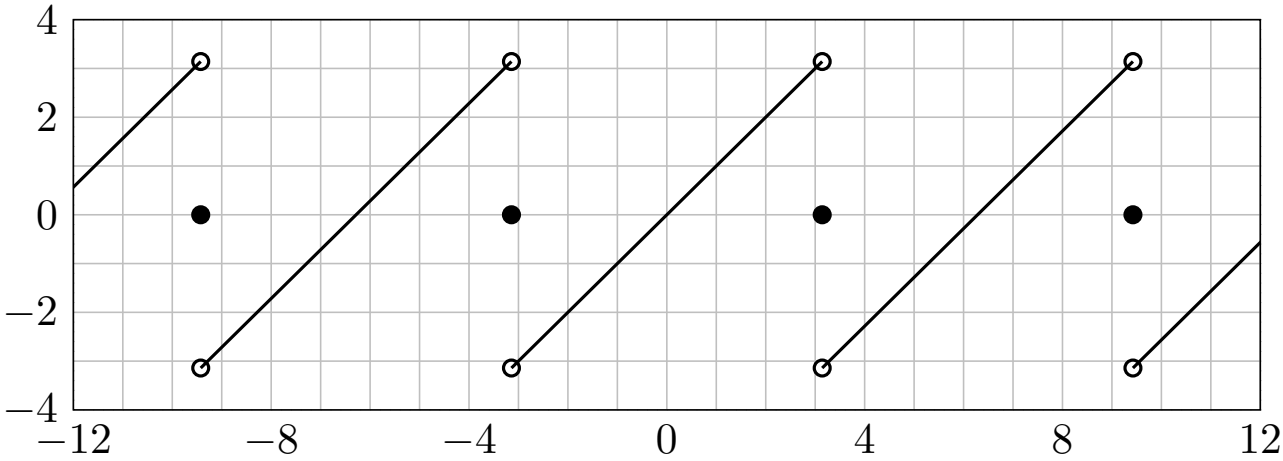
☺ Die Fourier–Analyse $f, g \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{f}, \widehat{g}$ ist demnach dank $f * g \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{f} \cdot \widehat{g}$ ein Algebra-Homomorphismus von $(L^1([0,T],\mathbb{C}), *)$ nach $(\ell^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{C}), \cdot)$.

Symmetrie und Linearität: Anwendungsbeispiel

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ungerade und 2π–periodisch mit $f(x) = x$ für $0 < x < \pi$.

Aufgabe: (1) Skizzieren Sie $f(x)$ und nennen Sie die Fourier–Reihe.

Lösung: Sie können dies nochmal berechnen oder wiedererkennen:



$$f(x) = 2\left[\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \dots\right]$$

☺ Dies ist unsere gute alte Sägezahnfunktion von Seite I205.

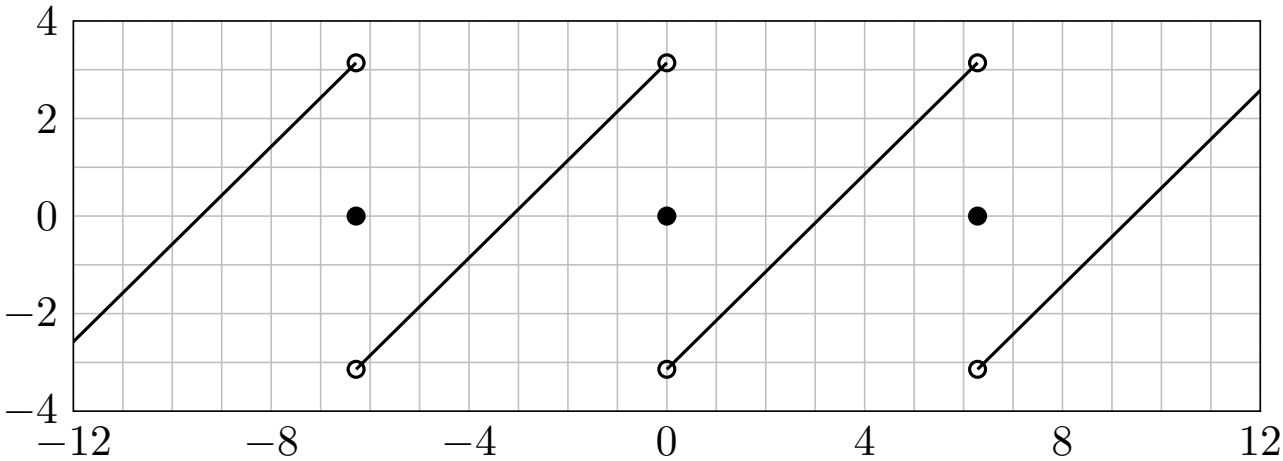
Übung zur Wiederholung: Rechnen Sie die Koeffizienten selbst aus!

Symmetrie und Linearität: Anwendungsbeispiel

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ungerade und 2π–periodisch mit $f(x) = x$ für $0 < x < \pi$.

Aufgabe: (2) Skizzieren Sie $f(x - \pi)$ und nennen Sie die Fourier–Reihe.

Lösung: Sie können dies nochmal berechnen oder wiedererkennen:



$$f(x - \pi) = 2\left[-\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x - \dots\right]$$

☺ Dies ist die um π nach rechts verschobene Sägezahnfunktion.

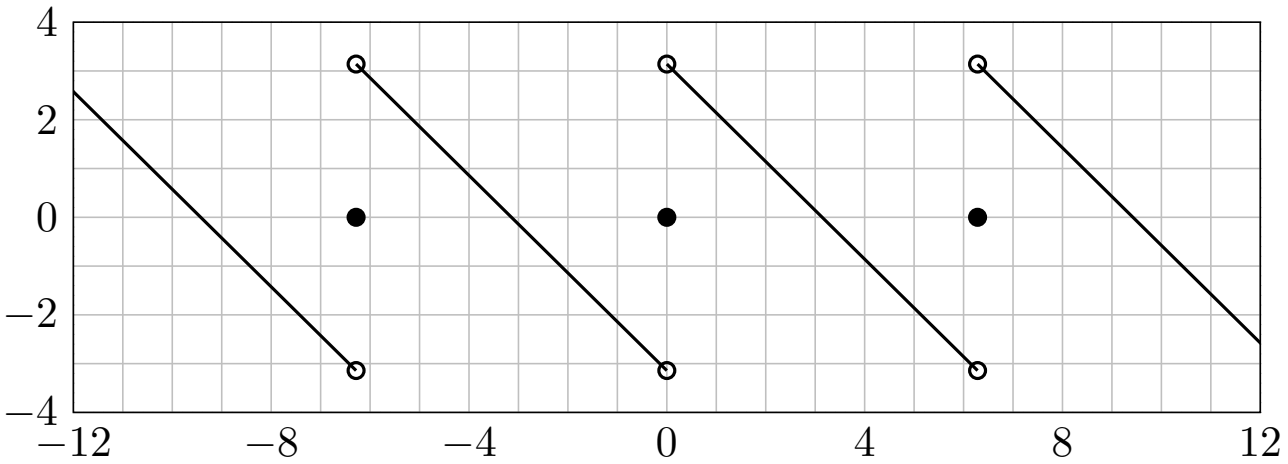
Übung: Was ergibt eine beliebige Verschiebung $f(x + a)$ um $a \in \mathbb{R}$?

Symmetrie und Linearität: Anwendungsbeispiel

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ungerade und 2π–periodisch mit $f(x) = x$ für $0 < x < \pi$.

Aufgabe: (3) Skizzieren Sie $f(\pi - x)$ und nennen Sie die Fourier–Reihe.

Lösung: Sie können dies nochmal berechnen oder wiedererkennen:



$$f(\pi - x) = 2\left[\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{4}\sin 4x + \dots\right]$$

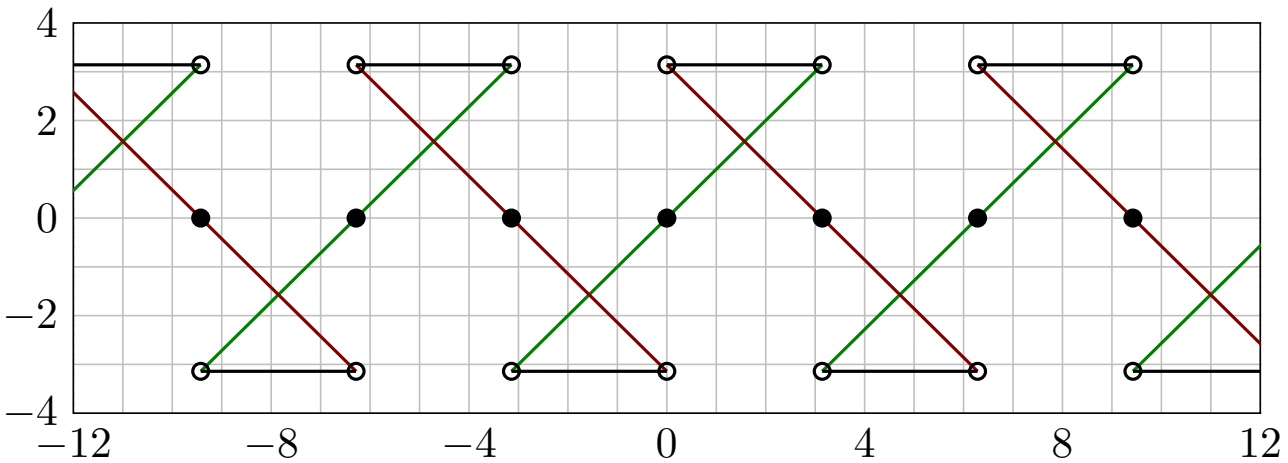
☺ Diese Spiegelung ergibt eine fallende Sägezahnfunktion.

Übung: Was ergibt eine beliebige Spiegelung $f(a - x)$ für $a \in \mathbb{R}$?

Symmetrie und Linearität: Anwendungsbeispiel

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ungerade und 2π–periodisch mit $f(x) = x$ für $0 < x < \pi$.

Aufgabe: (4) Skizzieren Sie $g(x) = f(x) + f(\pi - x)$ und nennen Sie die Fourier–Reihe. **Lösung:** Wir nutzen geschickt die Linearkombination:



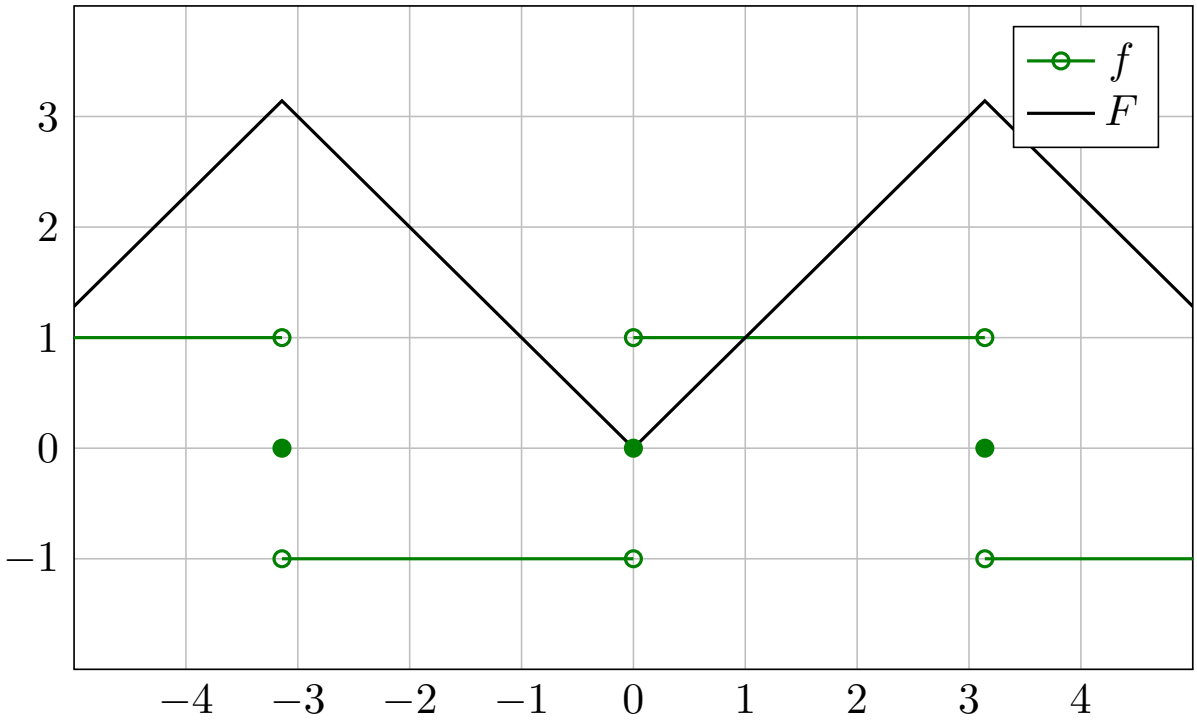
$$f(x) + f(\pi - x) = 4\left[\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \dots\right]$$

☺ Die Summe ist unsere gute alte Rechteckfunktion von Seite I225!

Übung: Was ergibt die Linearkombination $f(x) + f(a - x)$ für $a \in \mathbb{R}$?

Fourier–Entwicklung der Dreieckfunktion

Aufgabe: Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ungerade, 2π–periodisch, $f(x)=1$ für $0<x<\pi$. Die Integralfunktion $F(x)=\int_{t=0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ ist periodisch.
(0) Skizzieren Sie f und F. (1) Berechnen Sie die Fourier–Reihen.
(2) Wogegen konvergieren $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots$ und $1-\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}\pm\ldots$?



Fourier–Entwicklung der Dreieckfunktion

Lösung: Auf $[-\pi,\pi]$ finden wir $F(x)=|x|$, dann 2π–periodisch.
(1) Die Fourier–Reihe der Rechteckfunktion $f=F'$ kennen wir bereits:

$$f(x)\sim\frac{4}{\pi}\left[\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\frac{1}{7}\sin 7x+\frac{1}{9}\sin 9x+\ldots\right]$$

Aus $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ erhalten wir dank Integration (I3A) mühelos:

$$F(x)\sim C_0-\frac{4}{\pi}\left[\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\frac{1}{7^2}\cos 7x+\ldots\right]$$

Der nullte Fourier–Koeffizient C_0 ist der Mittelwert über eine Periode:

$$C_0\overset{\text{Def}}{=}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$$

Dank Dirichlet I2A haben wir Konvergenz in jedem Punkt $x\in\mathbb{R}$. Also:

$$\boxed{F(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left[\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\frac{1}{7^2}\cos 7x+\ldots\right]}$$

Fourier–Entwicklung der Dreieckfunktion

Zum Vergleich die direkte Berechnung der Fourier–Koeffizienten:

$$
\begin{aligned}
A_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(kx)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(gerader Integrand)}\\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos(kx)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(partielle Integration)}\\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[x\,\frac{\sin(kx)}{k}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(kx)}{k}\,\mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(k\pi)-1}{k^2}\right] = \begin{cases} 0 & \text{für } k \text{ gerade,}\\ -\frac{4}{\pi k^2} & \text{für } k \text{ ungerade.}\end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
B_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\sin(kx)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{(ungerader Integrand)}
$$

Daraus erhalten wir die ersehnte Co/Sinus-Reihe:

$$
\boxed{F(x) \sim \frac{\pi}{2} - \sum_{j=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2j+1)^2}\cos\big((2j+1)x\big)}
$$

Fourier–Entwicklung der Dreieckfunktion

Zum Vergleich direkt das Integral für C_k mit $k \neq 0$:

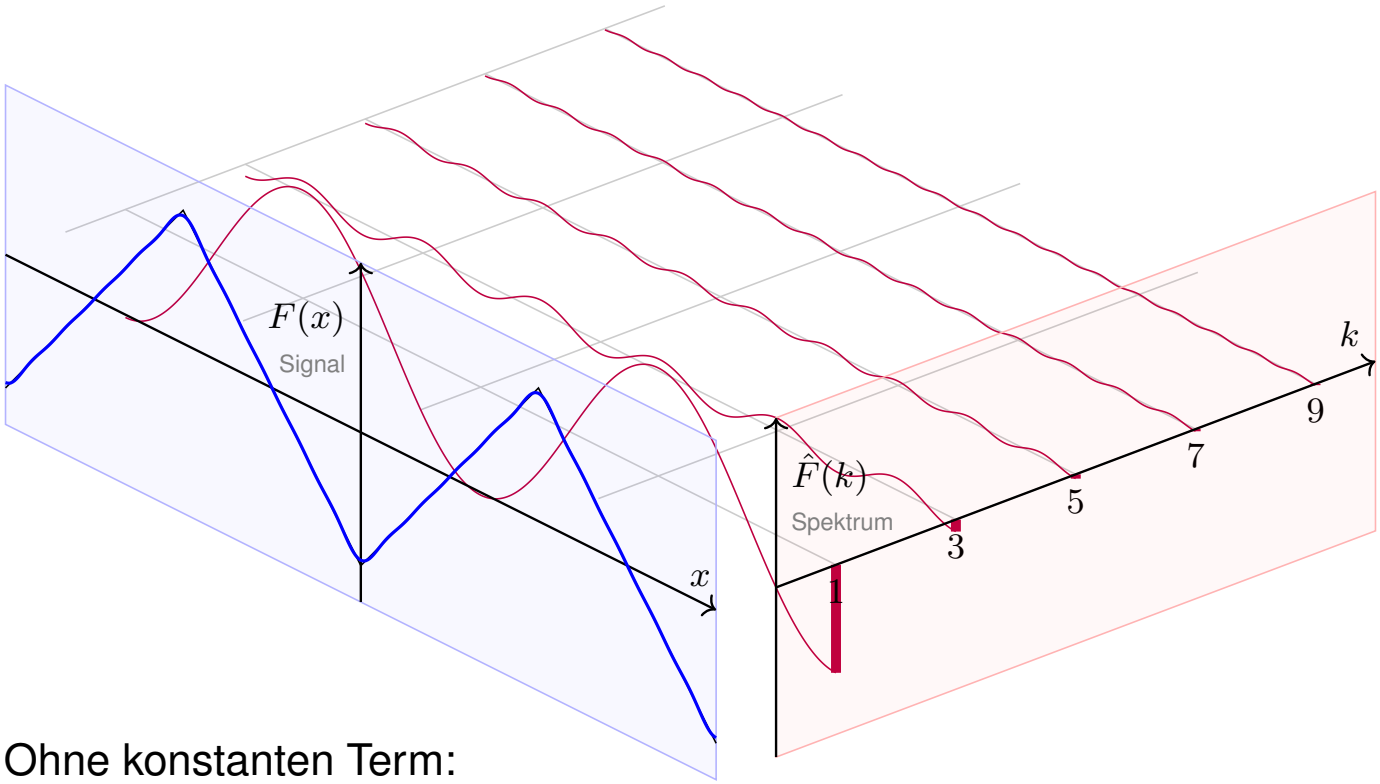
$$
\begin{aligned}
C_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,|x|\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,x\,\mathrm{d}x - \int_{-\pi}^{0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,x\,\mathrm{d}x\right]\\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,x\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,x\,\mathrm{d}x\right]\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(kx)\,x\,\mathrm{d}x = \ldots \text{ wie oben } \ldots\\
&= \begin{cases} -\frac{2}{\pi k^2} & \text{für } k \text{ ungerade,}\\ 0 & \text{für } k \text{ gerade.}\end{cases}
\end{aligned}
$$

Oder umgerechnet für die Co/Sinus-Reihe:

$$
B_k = \mathrm{i}(C_k - C_{-k}) = 0, \qquad A_k = C_k + C_{-k} = \begin{cases} -\frac{4}{\pi k^2} & \text{für } k \text{ ungerade,}\\ 0 & \text{für } k \text{ gerade.}\end{cases}
$$

☺ Die komplexwertige Rechnung bringt hier keine weitere Ersparnis.

Fourier–Entwicklung der Dreieckfunktion

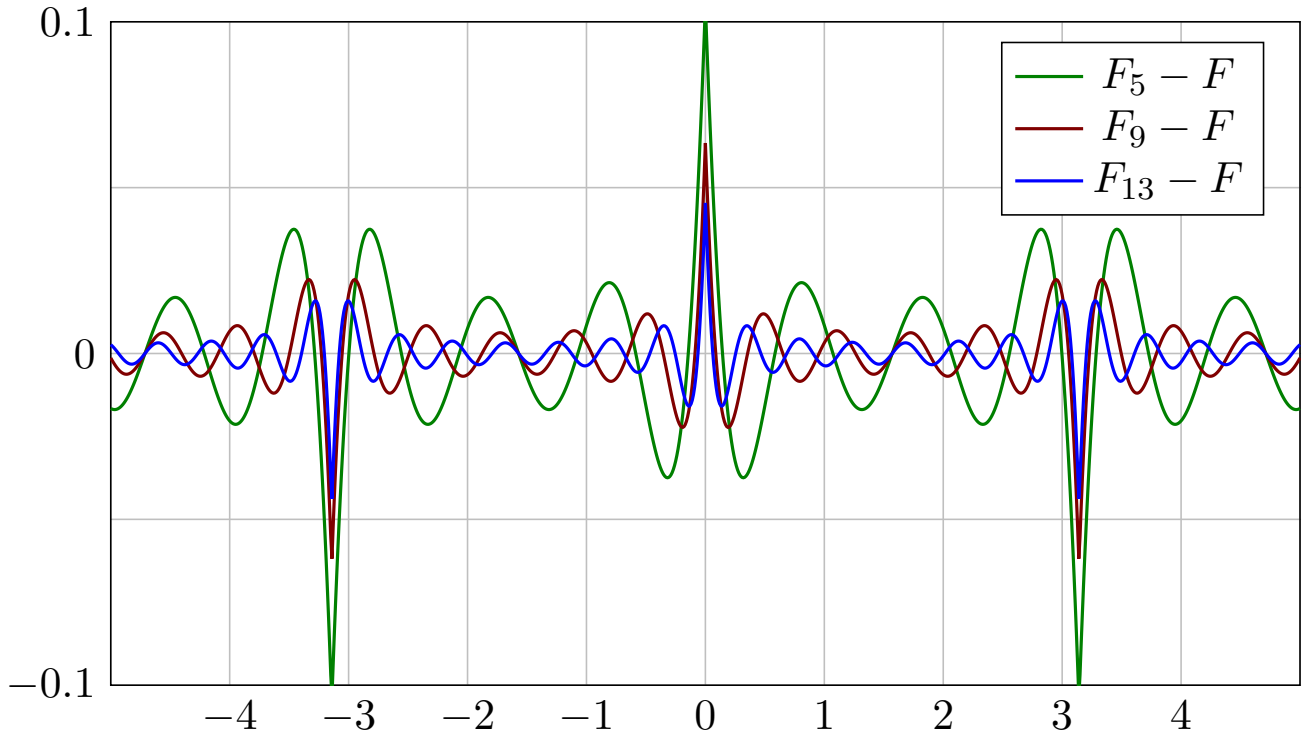


Ohne konstanten Term:

$$F(x) = -\frac{4}{\pi}\left[\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \frac{1}{7^2}\cos 7x + \frac{1}{9^2}\cos 9x + \dots\right]$$

Fourier–Entwicklung der Dreieckfunktion

Die Fourier–Polynome F_n konvergieren gleichmäßig gegen F:



Zur besseren Sichtbarkeit zeichne ich die Differenz $F_n - F$ vergrößert.
Dieser Fehler liegt in einem ε–Schlauch mit $\varepsilon \le 2\max|F'|\ln(n)/n$. (I2A)

Fourier–Entwicklung der Dreieckfunktion

Was erkennen wir an diesen Fourier–Polynomen $F_1, F_2, F_3, \ldots$?
Schon die ersten Fourier–Polynome F_n liegen recht nahe bei F.
Das **Dirichlet–Kriterium** I2A garantiert uns Konvergenz in jedem Punkt!

Noch besser: Wenn wir um F einen Schlauch der Breite $\varepsilon > 0$ legen, so liegen darin alle Fourier–Polynome F_n für ausreichend großes n: Die Fourier–Polynome F_n **konvergieren gleichmäßig** gegen F!

Dies ist kein Zufall, sondern illustriert den Satz I2A von Dirichlet: $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist stetig und stückweise stetig differenzierbar mit $|F'| \le 1$. Aus der Skizze lesen wir $|F_{13} - F| \le F_{13}(0) < 0.05$ ab. Satz I2A sagt $|F_{13} - F| \le 2 \max|F'| \ln(13)/13 < 0.4$ voraus: Diese allgemeine und einfache Fehlerschranke ist korrekt, hier um den Faktor 8 zu großzügig.

Das ist durchaus respektabel, dafür ist unsere Schranke bequem und der Beweis relativ leicht (ausgeführt ab Seite J201 im nächsten Kapitel).

Als Kontrast illustrieren die obige Sägezahn- und Rechteckfunktion das Gibbs–Phänomen in jeder Sprungstelle. Hier kann bestenfalls noch punktweise Konvergenz vorliegen, aber keine gleichmäßige.

Fourier–Entwicklung der Dreieckfunktion

(2a) Ausgewertet im Punkt $x = 0$ finden wir:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots\right] \overset{\text{Dirichlet}}{\underset{\text{I2A}}{=}} F(0) = 0$$

Hieraus folgt:

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8} = 1.2337005501\ldots$$

(2b) Ausgewertet im Punkt $x = \pi/4$ finden wir:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left[1 - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots\right] \overset{\text{Dirichlet}}{\underset{\text{I2A}}{=}} F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Hieraus folgt:

$$1 - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8\sqrt{2}} = 0.8723580249\ldots$$

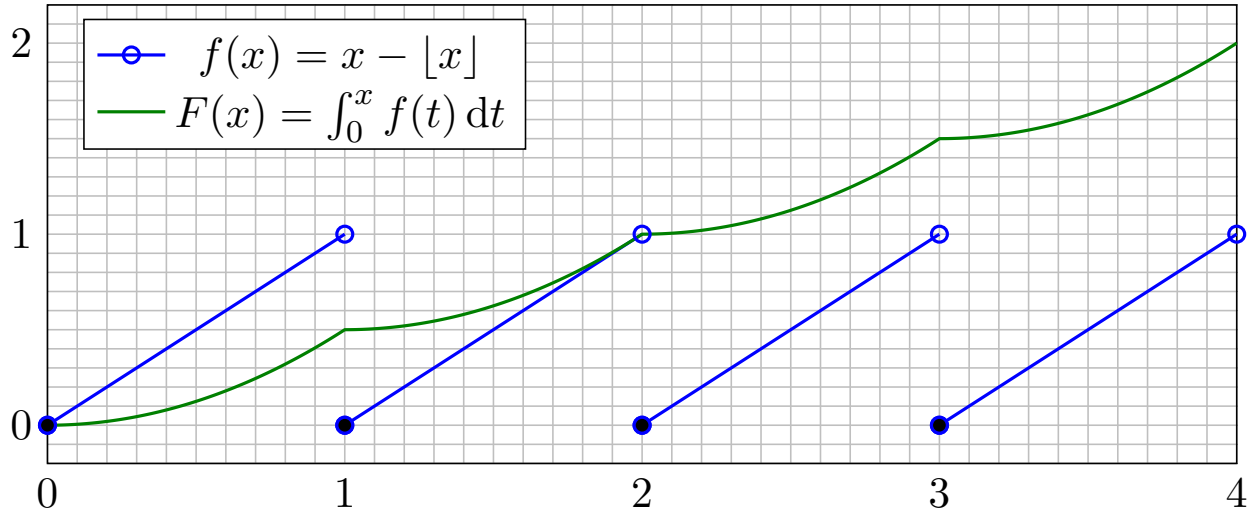
Dank passender Werkzeuge war die Rechnung schließlich leicht. Erneut gelingt uns damit die Berechnung schwieriger Reihen! Aus der Reihe $A := \sum_{j=0}^{\infty} 1/(2j+1)^2 = \pi^2/8$ folgt zudem $B := \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$, denn $B = A + B/4$. Dies löst das berühmte **Basler Problem**. I324

Termweise Integration von Fourier–Reihen

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ eine T–periodische Funktion und differenzierbar.
Dann ist die **Ableitung** f' ebenfalls T–periodisch, soweit klar.
Hingegen ist die **Integralfunktion** $F(x)=\int_{t=0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$
dann und nur dann periodisch, wenn $\int_{t=0}^{T} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ gilt:

$$F(x+T)-F(x) \;=\; \int_{t=x}^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t \;\overset{\text{IIB}}{=}\; \int_{t=0}^{T} f(x)\,\mathrm{d}x \;\overset{!}{=}\; 0$$

Ein illustratives Gegenbeispiel liefert folgende Sägezahnfunktion:



Termweise Integration von Fourier–Reihen

Satz I3A: termweise Integration von Fourier–Reihen

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ integrierbar auf $[0,T]$ und T–periodisch. Die zugehörige Integralfunktion $F(t):=C+\int_{\tau=0}^{t} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ ist genau dann periodisch, wenn $F(T)-F(0)=\int_{\tau=0}^{T} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ verschwindet. In diesem Falle gilt:

$$c_k = \int_{t=0}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t} f(t)\mathrm{d}t = \underbrace{\Big[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t}F(t)\Big]_{t=0}^{T}}_{=\,0 \text{ da } T\text{–periodisch}} + \mathrm{i}k\omega \int_{t=0}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t} F(t)\mathrm{d}t = \mathrm{i}k\omega C_k$$

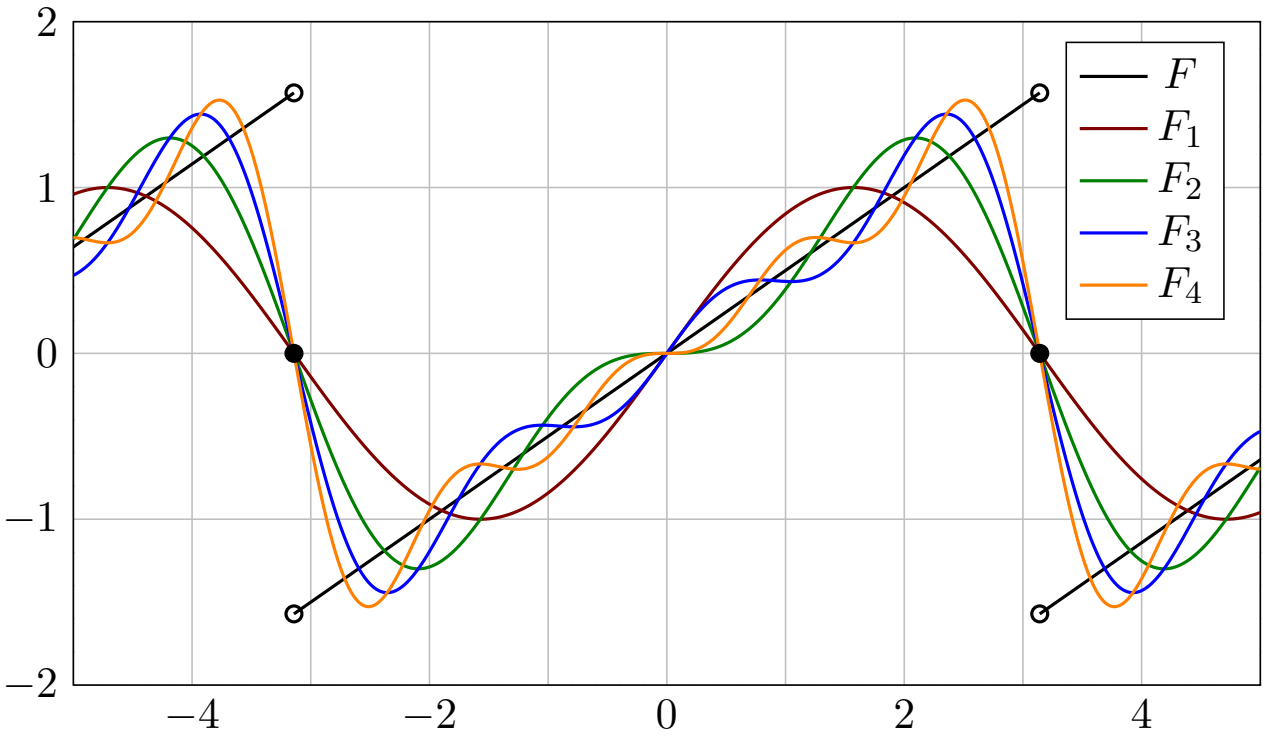
Das heißt, wir dürfen Fourier–Reihen termweise integrieren:

$$f(t) \sim c_0 + \sum_{k\neq 0} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} \;\underset{?!}{\Longrightarrow}\; F(t) \sim C_0 + \sum_{k\neq 0} \frac{c_k}{\mathrm{i}k\omega}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}$$

Integrationskonstante durch Punktprobe: $F(0)=C=C_0+\sum_{k\neq 0}\frac{c_k}{\mathrm{i}k\omega}$

☺ Wir können die Umkehrung sorgsam als Ableitungsregel für F lesen:
Hierzu sei F **absolut stetig** mit $F'=f$, also $F(t)=F(0)+\int_{u=0}^{t} f(u)\,\mathrm{d}u$.

Warnung zur Ableitung von Fourier–Reihen



Wir vergleichen die Fourier–Reihen von F und der Ableitung $f = F'$.

Aufgabe: Impliziert $F(x) \sim \sum_k C_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ immer $f(x) \sim \sum_k \mathrm{i}kC_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$?

Die Fourier–Polynome F_n sind beliebig diff'bar. Gilt ${F_n}'(0) \to F'(0)$?

Warnung zur Ableitung von Fourier–Reihen

Lösung: Dank Dirichlet–Kriterium I2A wissen wir für $-\pi < x < \pi$:

$$F(x) = \frac{x}{2} \quad = \quad \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \ldots$$

Die naive Ableitungsregel gilt hier keineswegs:

$$f(x) = {}^1\!/\!_2 \quad \not\sim \quad \cos x - \cos 2x + \cos 3x - \cos 4x + \ldots$$

☹ In $x = 0$ gilt ${F_n}'(0) = 1$ für n ungerade und ${F_n}'(0) = 0$ für n gerade.
Siehe Graphik! Die Zahlenfolge $0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$ konvergiert nicht!

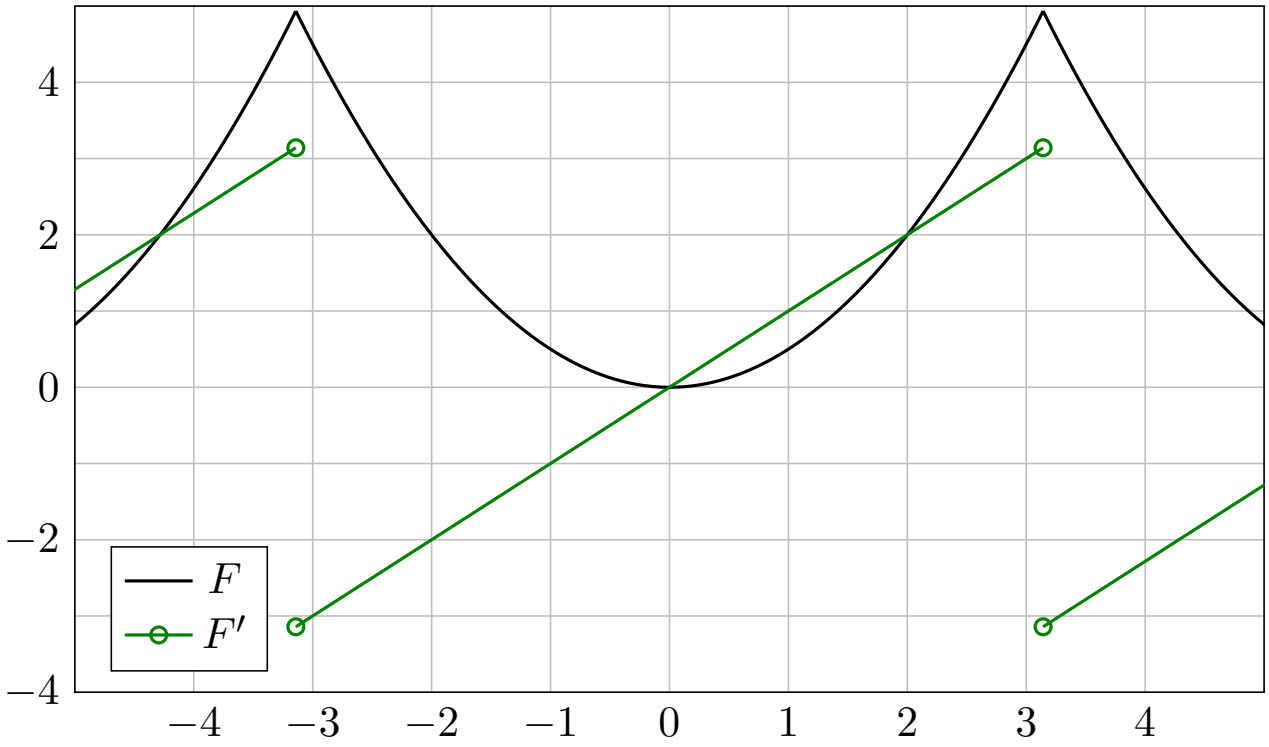
☹ Die Ableitungen ${F_n}'(0)$ konvergieren nicht gegen $F'(0) = 1/2$!
Sie erkennen das Problem sehr deutlich an den obigen Graphen.

⚠ Hier gilt nicht $F(t) = F(0) + \int_{u=0}^{t} f(u) \, \mathrm{d}u$ wie im Satz I3A verlangt.
Bitte lesen Sie Sätze sorgsam und gründlich, wie immer, so auch hier.
Nur wer sein Werkzeug beherrscht, rechnet korrekt und effizient.

☺ Satz I3A garantiert: Integrieren ist besser als Differenzieren!
Für die Ableitungsregel gemäß Satz I3A muss F absolut stetig sein.
Zum Beispiel genügt: F stetig und stückweise stetig differenzierbar.

Fourier–Entwicklung der Parabelfunktion

Aufgabe: Sei $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ von Periode 2π mit $F(x)=x^2/2$ für $|x|\le\pi$.
(0) Skizzieren Sie F und F'. (1) Berechnen Sie die Fourier–Reihen.
(2) Wogegen konvergieren $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}\pm\ldots$ und $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots$?



Fourier–Entwicklung der Parabelfunktion

Lösung: Die Fourier–Reihe von F kann man direkt berechnen...
oder bequemer und schneller aus $F(x)=\int_{t=0}^{x}F'(t)\,\mathrm{d}t$ ablesen.
(1) Die Ableitung $f=F'$ ist 2π–periodisch mit $f(x)=x$ für $-\pi<x<\pi$.
Das ist unsere Sägezahnfunktion I205. Für diese wissen wir bereits:

$$f(x)\sim 2\left[\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{4}\sin 4x+\ldots\right]$$

Aus $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ erhalten wir dank Integrationsregel I3A mühelos:

$$F(x)\sim C_0-2\left[\cos x-\frac{1}{2^2}\cos 2x+\frac{1}{3^2}\cos 3x-\frac{1}{4^2}\cos 4x+\ldots\right]$$

Der nullte Fourier–Koeffizient C_0 ist der Mittelwert über eine Periode:

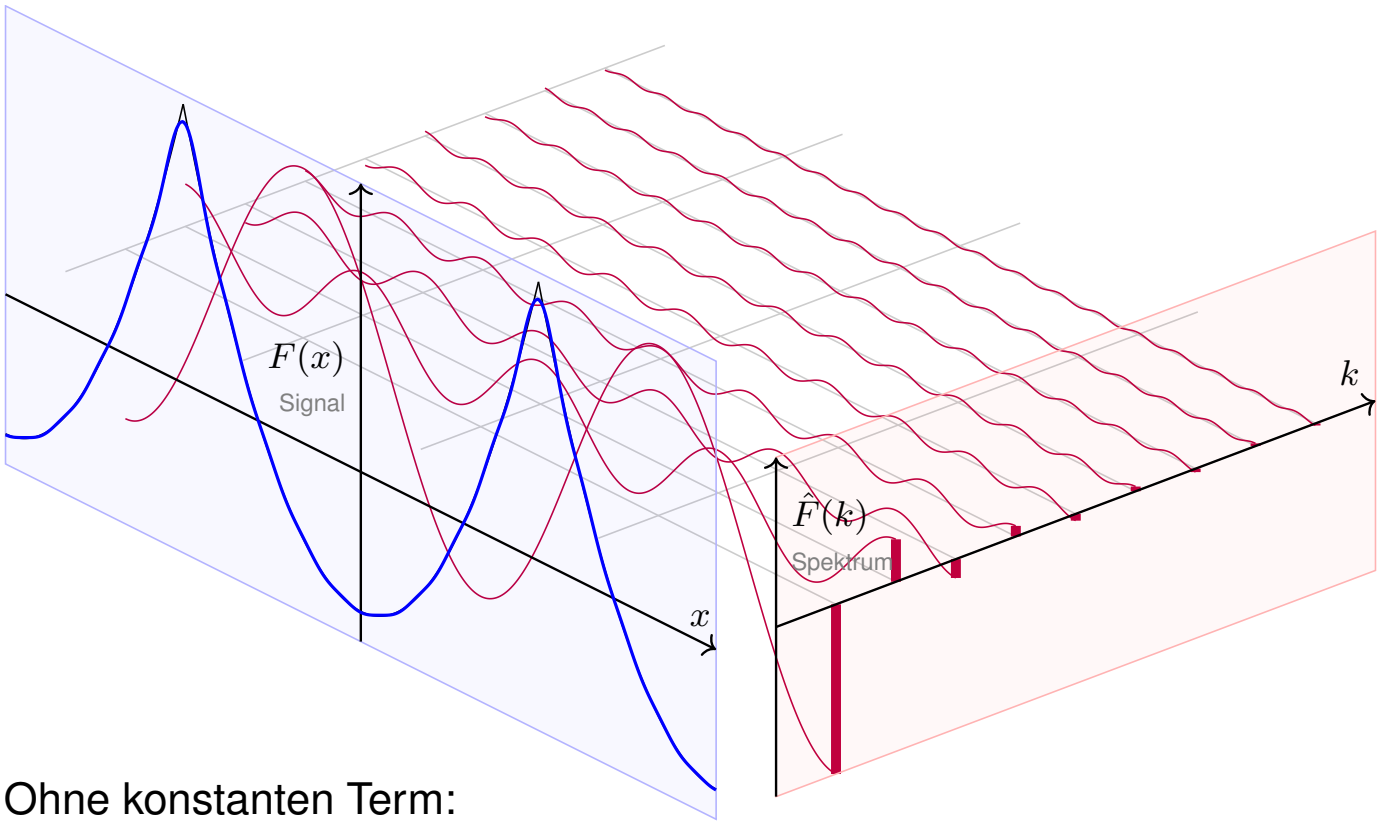
$$C_0\overset{\text{Def}}{=}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{12\pi}\Big[x^3\Big]_{-\pi}^{\pi}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Dank Dirichlet I2A haben wir Konvergenz in jedem Punkt $x\in\mathbb{R}$. Also:

$$\boxed{F(x)=\frac{\pi^2}{6}-2\left[\cos x-\frac{1}{2^2}\cos 2x+\frac{1}{3^2}\cos 3x-\frac{1}{4^2}\cos 4x\pm\ldots\right]}$$

Fourier–Entwicklung der Parabelfunktion

I323
Beispiel



Ohne konstanten Term:

$$F(x) = -2\left[\cos x - \frac{1}{2^2}\cos 2x + \frac{1}{3^2}\cos 3x - \frac{1}{4^2}\cos 4x + \frac{1}{5^2}\cos 5x \mp \dots\right]$$

Fourier–Entwicklung der Parabelfunktion

I324
Beispiel

(2a) Ausgewertet im Punkt $x = 0$ finden wir:

$$\frac{\pi^2}{6} - 2\left[1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \pm \dots\right] \overset{\text{Dirichlet}}{\underset{\text{I2A}}{=}} F(0) = 0$$

Hieraus erhalten wir den Grenzwert der folgenden Reihe:

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \pm \dots = \frac{\pi^2}{12} = 0.8224670334\dots$$

(2b) Ausgewertet im Punkt $x = \pi$ finden wir:

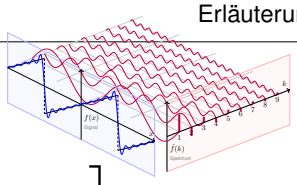
$$\frac{\pi^2}{6} + 2\left[1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\right] \overset{\text{Dirichlet}}{\underset{\text{I2A}}{=}} F(\pi) = \frac{\pi^2}{2}$$

Hieraus erhalten wir die Lösung des berühmten **Basler Problems**:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} = \underline{1.6449}340668\dots$$

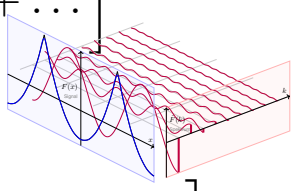
In der HM2 konnten Sie schon zeigen, dass diese Reihe konvergiert. (Wiederholung: Wie? B3A) Nun können wir endlich ihren Grenzwert berechnen! Dieses berühmte Problem wurde 1644 von Pietro Mengoli gestellt und 90 Jahre später 1735 von Leonhard Euler gelöst (zunächst noch vage). Dank starker Fourier–Theorie fällt uns das Ergebnis in den Schoß! `youtu.be/d-o3eB9sfls`

Abklingen der Fourier–Koeffizienten



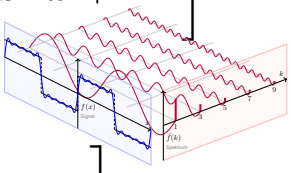
Für unsere Sägezahnfunktion I205 finden wir:

$$f(x) = 2\left[\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \dots\right]$$



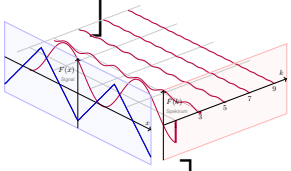
Für die Parabelfunktion $F(x) = \int_{t=0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ folgt I321:

$$F(x) = \frac{\pi^2}{6} - 2\left[\cos x - \frac{1}{2^2}\cos 2x + \frac{1}{3^2}\cos 3x - \frac{1}{4^2}\cos 4x + \dots\right]$$



Für unsere Rechteckfunktion I225 finden wir:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \dots\right]$$



Für die Dreieckfunktion $F(x) = \int_{t=0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ folgt I309:

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \frac{1}{7^2}\cos 7x + \dots\right]$$

☺ Glattheit entspricht schnellem Abklingen der Fourier–Koeffizienten!

Abklingen der Fourier–Koeffizienten

☺ Glattheit impliziert schnelles Abklingen der Fourier–Koeffizienten:

Satz I3B: Riemann–Lebesgue–Lemma

Ist $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ absolut integrierbar, so sind die Fourier–Koeffizienten $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{x=0}^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} f(x)\,\mathrm{d}x$ eine Nullfolge, das heißt $|c_k| \to 0$ für $|k| \to \infty$. Demnach ist $F(x) = C + \int_{t=0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ absolut stetig und erfüllt $|kC_k| \to 0$. Entsteht F aus f durch d-fache Integration, so gilt sogar $|k^d C_k| \to 0$.

☺ Umgekehrt garantiert schnelles Abklingen auch Glattheit (s.a. J3C):

Satz I3C: Abklingen und gleichmäßige Konvergenz

Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ eine beliebige Folge komplexer Zahlen $c_k \in \mathbb{C}$. Im Falle $\sum_k |c_k| < \infty$ gilt gleichmäßige Konvergenz gegen die stetige Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : x \mapsto f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \quad \text{und} \quad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{x=0}^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Gilt sogar $\sum_k |k^d c_k| < \infty$, so ist f mindestens d-mal stetig diff'bar. Letzteres ist zum Beispiel erfüllt, wenn $|c_k| \le c/|k|^{d+\alpha}$ mit $\alpha > 1$ gilt.

Abklingen der Fourier–Koeffizienten

☺ Slogan und Merkregel: Integrieren glättet, Differenzieren raut auf.
Das schlägt sich unmittelbar in den Fourier–Koeffizienten nieder.
Wir kennen hierfür bereits einige eindrückliche Beispiele:

Aufgabe: Prüfen und interpretieren Sie diese Kriterien zum Abklingen (Satz I3B und Satz I3C) an unseren vier bisherigen Beispielen.

Lösung: Die Beispiele liegen wunderbar explizit vor uns:

(1) Die Sägezahnfunktion f ist unstetig, mit Sprungstellen in $\pi + 2\pi\mathbb{Z}$.
Ihre Fourier–Koeffizienten erfüllen $|c_k| = 1/|k| \to 0$, aber $\sum_k |c_k| = \infty$.

(2) Ihre Integralfunktion F ist stetig, und hier gilt $\sum |C_k| < \infty$.
Hingegen ist F nicht stetig diff'bar, und es gilt $\sum |kC_k| = \infty$.

Treppenfunktionen I221 liefern weitere Beispiele:

(3) Die Rechteckfunktion g ist nicht stetig, mit Sprungstellen in $\pi\mathbb{Z}$.
Ihre Fourier–Koeffizienten erfüllen $|c_k| \le 1/|k| \to 0$, aber $\sum_k |c_k| = \infty$.

(4) Die Dreieckfunktion G ist stetig, und hier gilt $\sum |C_k| < \infty$.
Hingegen ist G nicht stetig diff'bar, und es gilt $\sum |kC_k| = \infty$.

Abklingen der Fourier–Koeffizienten

Beweisidee des Riemann–Lebesgue–Lemmas I3B:
Das Abklingen $|c_k| \to 0$ gilt für jede Treppenfunktion. I221
Per Approximation gilt es dann für jede integrierbare Funktion.

Die Folgerung für d-fache Integrale $F^{(d)} = f$ ist dann klar dank I3A:
Aus $f(x) \sim \sum c_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ folgt $F(x) \sim \sum (\mathrm{i}k)^{-d} c_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$, also $c_k = (\mathrm{i}k)^d C_k$.

⚠ Die Umkehrung gilt nicht! Für $b_k = 1/\ln k$ gilt $|b_k| \to 0$, die Reihe $f(x) = \sum_{k=2}^{\infty} b_k \sin(kx)$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ (Dirichlet B3I).
Aber diese Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ ist nicht absolut integrierbar!
Das Problem ist, dass die Koeffizienten b_k zu langsam abklingen.

Beweisidee zur gleichmäßigen Konvergenz in Satz I3C:
Der gleichmäßige Limes stetiger Funktionen ist eine stetige Funktion.
Genau dies wenden wir hier auf die Reihe $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ an.
Gilt sogar $\sum_k |k^d c_k| < \infty$, so wenden wir dies auf die d-te Ableitung an.

⚠ Punktweise oder gar gleichmäßige Konvergenz sind etwas besonderes: Es gibt stetige Funktionen f, deren Fourier–Reihe $f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ in unendlich vielen Punkten $x \in \mathbb{R}$ divergiert!

Von Potenzreihen zu trigonometrischen Reihen

Aufgabe: (1) Entwickeln Sie $\exp(w)$ und $\ln(1+z)$ in Potenzreihen.
(2) Berechnen Sie geometrisch möglichst explizit die reellen Funktionen

$$f(x) = \operatorname{Im}\ln(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}) \quad \text{und} \quad g(x) = \operatorname{Re}\ln(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}).$$

(3) Entwicklen Sie f und g in trigonometrischen Reihen.
(4) Wogegen konvergieren $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$ und $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$?

Lösung: (1) Für Exponential- und Logarithmusfunktion wissen wir

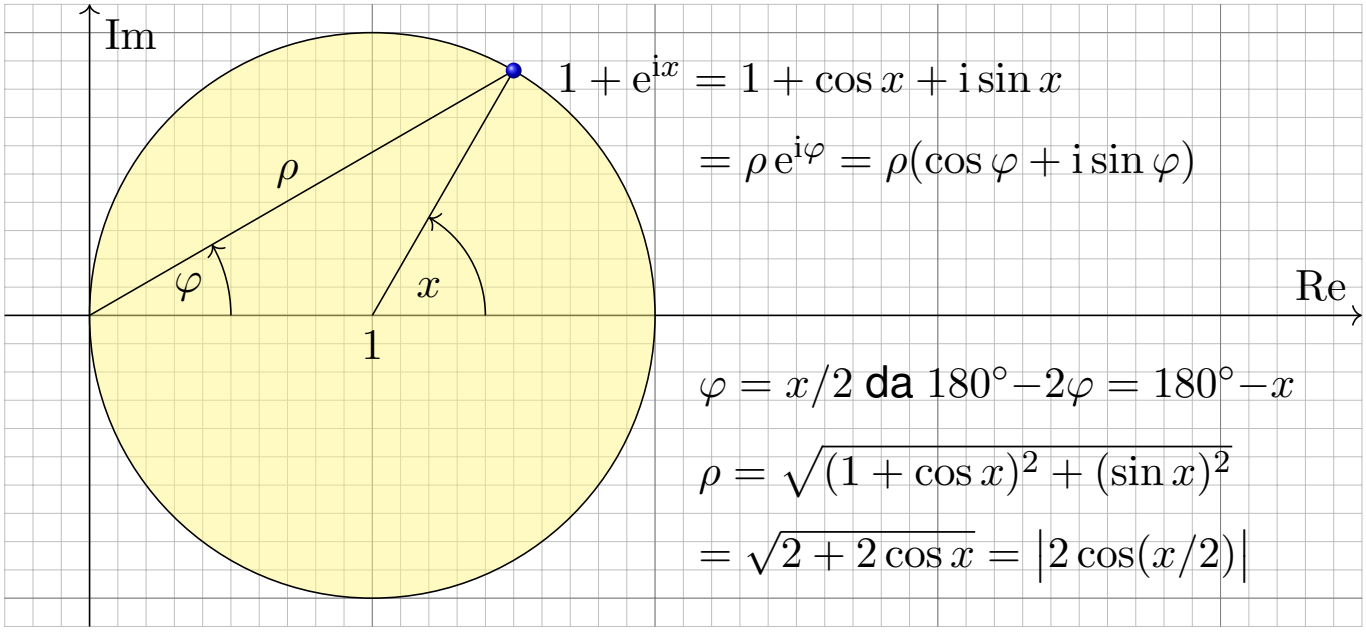
$$\exp(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} \quad \text{und} \quad \ln(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^k}{k},$$

mit Konvergenzradien ∞ bzw. 1. Es gilt $\exp\ln(1+z) = 1+z$, also

$$1+z = \exp(w) \;\Leftrightarrow\; w = \ln(1+z) \quad \text{für} \quad |z| < 1,\ -\pi/2 < \operatorname{Im} w < \pi/2.$$

Dies gilt auch noch auf dem Rand für $|z| = 1$ mit $z \neq 1$. (Satz B3F)
☺ Zum Hauptzweig des komplexen Logarithmus siehe F225.

Von Potenzreihen zu trigonometrischen Reihen



(2) Aus der Skizze lesen wir die komplexen Polarkoordinaten ab:

$$\begin{aligned}
\ln(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}) &= \ln\big(\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\big) = \ln\rho + \mathrm{i}\varphi && \text{mit } -\pi/2 < \varphi < \pi/2 \\
f(x) = \operatorname{Im}\ln\big(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\big) &= \varphi = x/2 && \text{für } -\pi < x < \pi \\
g(x) = \operatorname{Re}\ln\big(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\big) &= \ln\rho \qquad = \ln\big|2\cos(x/2)\big|
\end{aligned}$$

Von Potenzreihen zu trigonometrischen Reihen

(3) Die Potenzreihe für $\ln(1+z)$ liefert:

$$\ln(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

$$f(x) = \operatorname{Im}\ln\bigl(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\bigr) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx)$$

$$g(x) = \operatorname{Re}\ln\bigl(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\bigr) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\cos(kx)$$

Die Grenzwerte dieser Reihen haben wir eben ausgerechnet:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin(kx)}{k} = \frac{x}{2} \quad \text{für } -\pi < x < \pi$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\cos(kx)}{k} = \ln\bigl|2\cos(x/2)\bigr|$$

☺ Diese Sinus–Reihe ist unsere gute alte Sägezahnfunktion I205.

Von Potenzreihen zu trigonometrischen Reihen

(4) Damit haben wir f und g in trigonometrische Reihen entwickelt:

$$\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \ldots = \begin{cases} x/2 & \text{für } -\pi < x < \pi, \\ 0 & \text{für } x = \pm\pi. \end{cases}$$

$$\cos x - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} - \frac{\cos 4x}{4} + \ldots = \begin{cases} \ln\bigl|2\cos(x/2)\bigr|, \\ -\infty \text{ für } x = \pm\pi. \end{cases}$$

Im Punkt $x = \pi/2$ wird die erste zu folgender Leibniz–Reihe B319:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

Im Punkt $x = 0$ wird die zweite zu folgender Leibniz–Reihe B319:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2$$

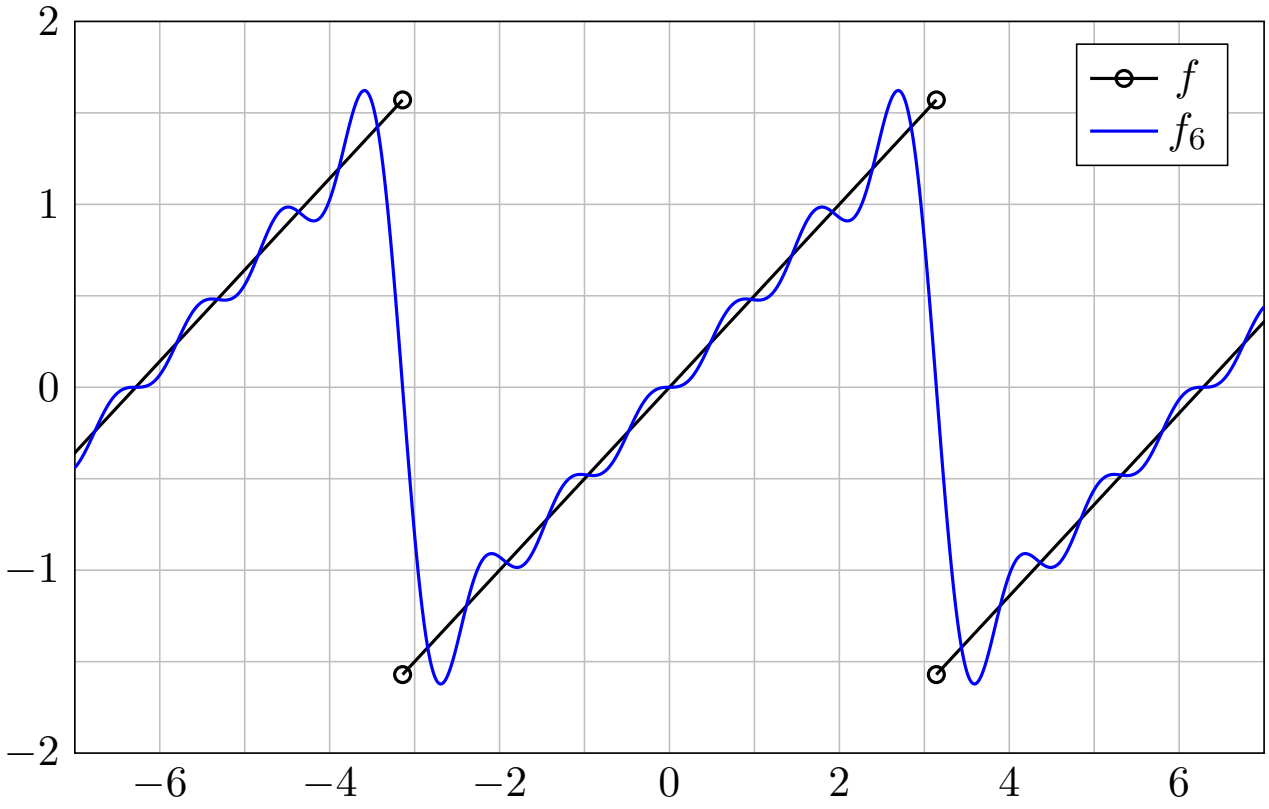
In der Polstelle $x = \pi$ finden wir die harmonische Reihe B302

$$-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \cdots = -\infty.$$

Hier divergiert also die trigonometrische Reihe, auch das ist möglich.

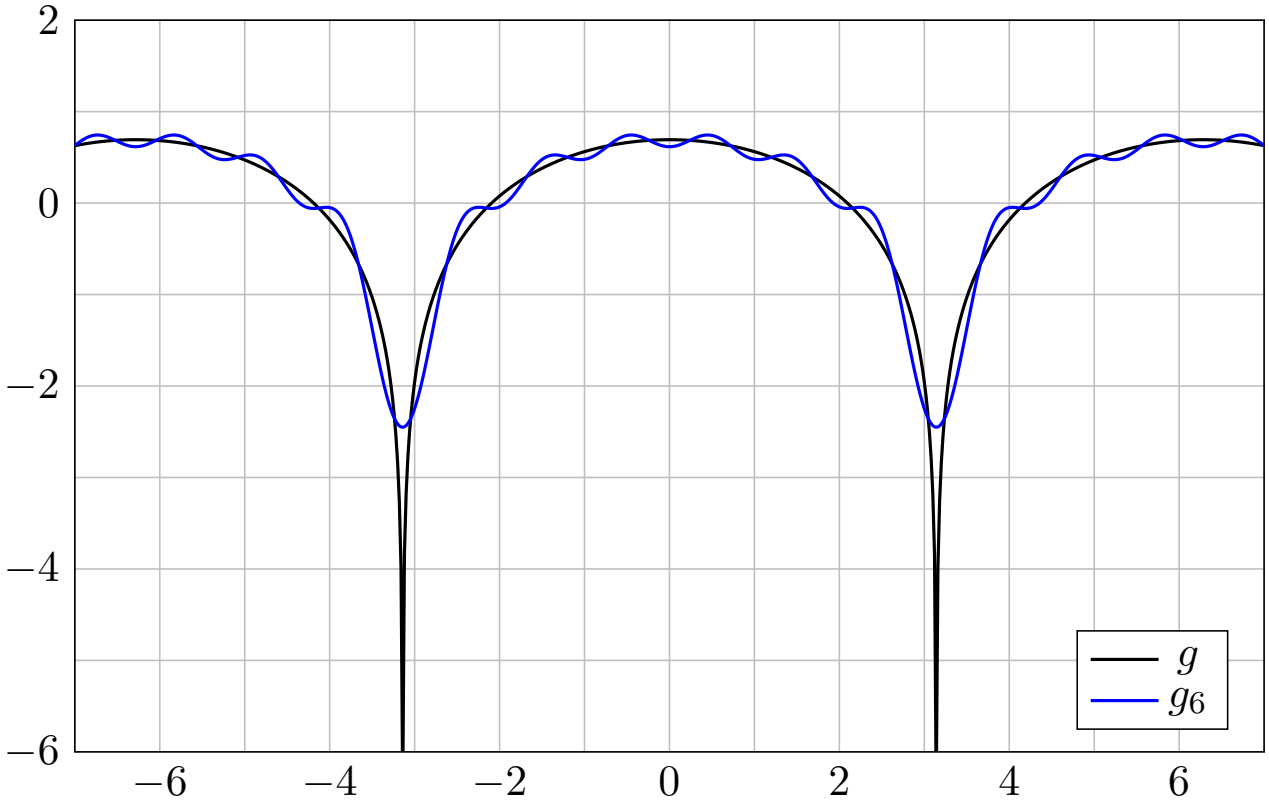
Von Potenzreihen zu trigonometrischen Reihen

Die Funktion f ist 2π–periodisch mit $f(x) = x/2$ für $-\pi < x < \pi$.
Sie hat Sprungstellen in $x = \pm\pi$. Das kennen und verstehen wir.



Von Potenzreihen zu trigonometrischen Reihen

Auch die Funktion $g(x) = \ln\left|2\cos(x/2)\right|$ ist 2π–periodisch.
Sie hat Polstellen in $x = \pm\pi$ und ist dennoch integrierbar!



Eindeutige Darstellung als trigonometrische Reihe

☺ Jede Laurent–Reihe $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k z^k$ definiert für $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ mit $x \in \mathbb{R}$ die trigonometrische Reihe $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ mit Koeffizienten $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$.

? Das wirft die Frage auf: Können wir sicher sein, dass dies zugleich die Fourier–Koeffizienten sind? Hierauf antwortet der folgende Satz:

Satz I3D: Eindeutigkeitssatz, de la Vallée-Poussin 1912

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei 2π–periodisch und auf $[0, 2\pi]$ integrierbar mit

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \widehat{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}, \quad \text{also} \quad \widehat{f}(k) := \frac{1}{2\pi} \int_{x=0}^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Gegeben sei eine beliebige Folge $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ komplexer Zahlen $c_k \in \mathbb{C}$ mit

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, \quad \text{also} \quad f_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} c_k \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \to f(x) \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Dies gelte für alle $x \in \mathbb{R}$ mit höchstens abzählbar vielen Ausnahmen. Dann folgt $c_k = \widehat{f}(k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$: Die Reihendarstellung ist eindeutig!

Eindeutige Darstellung als trigonometrische Reihe

Aufgabe: Beweisen Sie den Satz im Spezialfall $\sum |c_k| < \infty$. **Lösung:**

$$2\pi \widehat{f}(k) \overset{\text{Def}}{=} \int_{x=0}^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \left[\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c_\ell \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell x} \right] \mathrm{d}x \overset{\text{Lin}}{=} \int_{x=0}^{2\pi} \left[\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c_\ell \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\ell-k)x} \right] \mathrm{d}x$$

$$\overset{(1)}{=} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \left[\int_{x=0}^{2\pi} c_\ell \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\ell-k)x}\,\mathrm{d}x \right] \overset{\text{Lin}}{=} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c_\ell \left[\int_{x=0}^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\ell-k)x}\,\mathrm{d}x \right] \overset{(2)}{=} 2\pi c_k$$

Dank absoluter Konvergenz $\sum |c_k| < \infty$ nutzen wir (1) Vertauschung von Reihe und Integral D106 und anschließend (2) Orthonormalität I125.

☺ Es genügt die wesentlich schwächere Voraussetzung des Satzes; wir fordern nur $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ für alle bis auf abzählbar viele $x \in \mathbb{R}$. Das ist sehr praktisch. Der Beweis wird dadurch leider extrem schwierig.

⚠ Erstaunlicherweise kann man nicht „abzählbare Ausnahmemenge“ durch „Nullmenge“ ersetzen: Menshov konstruierte 1916 eine Reihe $S(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ mit $c_0 = 1$, die fast überall gegen $f = 0$ konvergiert, bis auf eine Nullmenge. Dennoch sind nicht alle Koeffizienten c_k null!

Von Potenzreihen zu Fourier–Reihen

Aufgabe: (1) Für $0 \le r \le 1$ zeige man wie in der vorigen Aufgabe:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\, r^k\, \frac{\sin(kx)}{k} = \arcsin\left(\frac{r\sin(x)}{\sqrt{1+2r\cos(x)+r^2}}\right)$$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\, r^k\, \frac{\cos(kx)}{k} = \ln\sqrt{1+2r\cos(x)+r^2}$$

(2) Wie glatt sind f und g? Wie schnell klingen ihre Koeffizienten ab?

Lösung: (1) Aus obiger Skizze lesen wir die Polarkoordinaten ab:

$$\begin{aligned}
\ln(1+r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}) = \ln\bigl(\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\bigr) &= \ln\rho + \mathrm{i}\varphi \\
g(x) = \operatorname{Re}\ln\bigl(1+r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\bigr) &= \ln\rho \qquad = \ln\sqrt{1+2r\cos(x)+r^2} \\
f(x) = \operatorname{Im}\ln\bigl(1+r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\bigr) &= \varphi \qquad = \arcsin(r/\rho\cdot\sin x)
\end{aligned}$$

☺ Das scheint kompliziert, aber geometrisch gesehen wird es leicht.
Im Randfall $r = 1$ erhalten wir die Formeln der vorigen Aufgabe.

Von Potenzreihen zu Fourier–Reihen

(2) Im Randfall $r = 1$ kennen wir die Funktionen f und g:
Die Sägezahnfunktion f ist unstetig, mit einer Sprungstelle in $\pm\pi$.
Auch die Funktion g ist unstetig, mit einer Polstelle in $\pm\pi$.

Die Koeffizienten $|c_k| = 1/k$ klingen in diesem Falle nur langsam ab.
Insbesondere sind sie nicht absolut summierbar: $\sum_k |c_k| = \infty$.

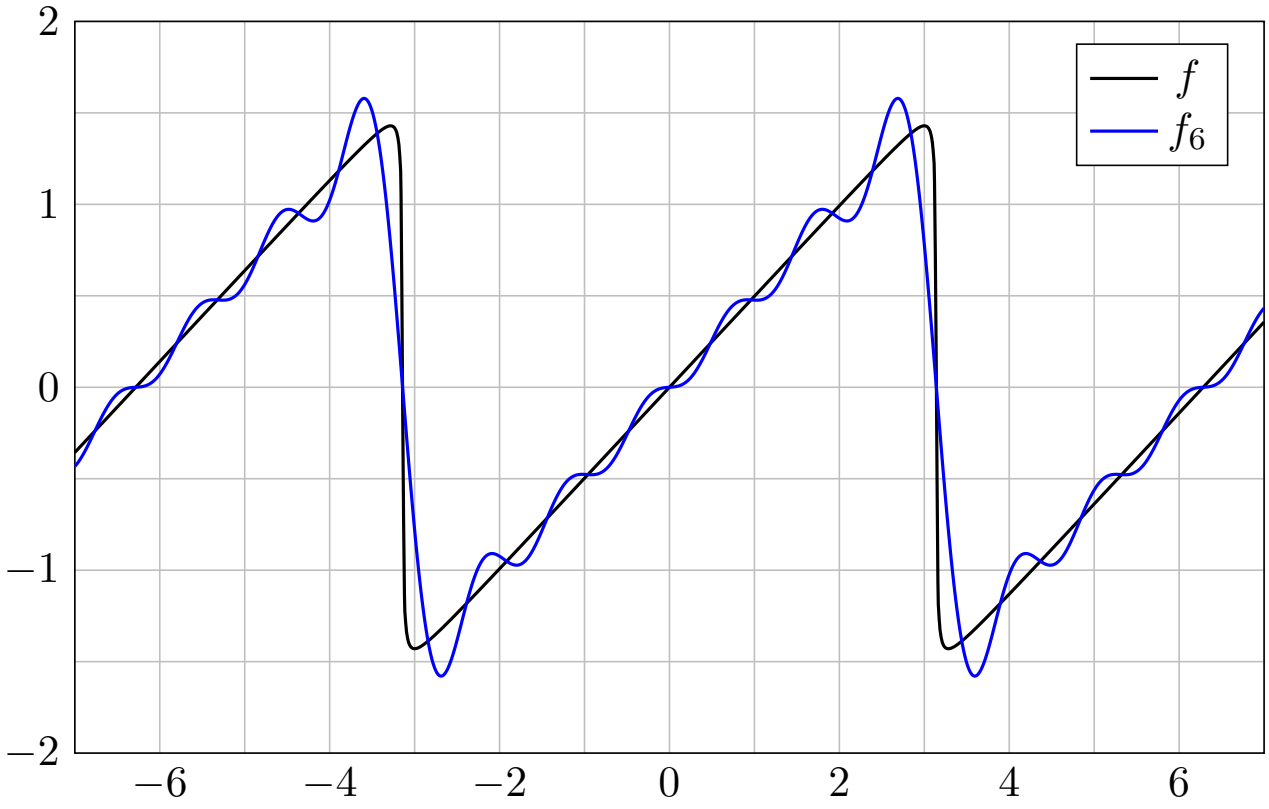
Im Falle $0 \le r < 1$ sind wir im Inneren des Konvergenzkreises:
Hier sind die Funktionen f und g stetig und beliebig oft differenzierbar, sogar analytisch, d.h. in eine konvergente Potenzreihe entwickelbar.

Ihre Koeffizienten $|c_k| = r^k/k$ klingen exponentiell ab!
Insbesondere gilt $\sum_k |k^d c_k| < \infty$ für jedes $d \in \mathbb{N}$.

☺ Dieses konkrete Beispiel illustriert die oben formulierten Sätze:
Glattheit impliziert schnelles Abklingen der Fourier–Koeffizienten (I3B),
und umgekehrt garantiert schnelles Abklingen auch Glattheit (I3C).

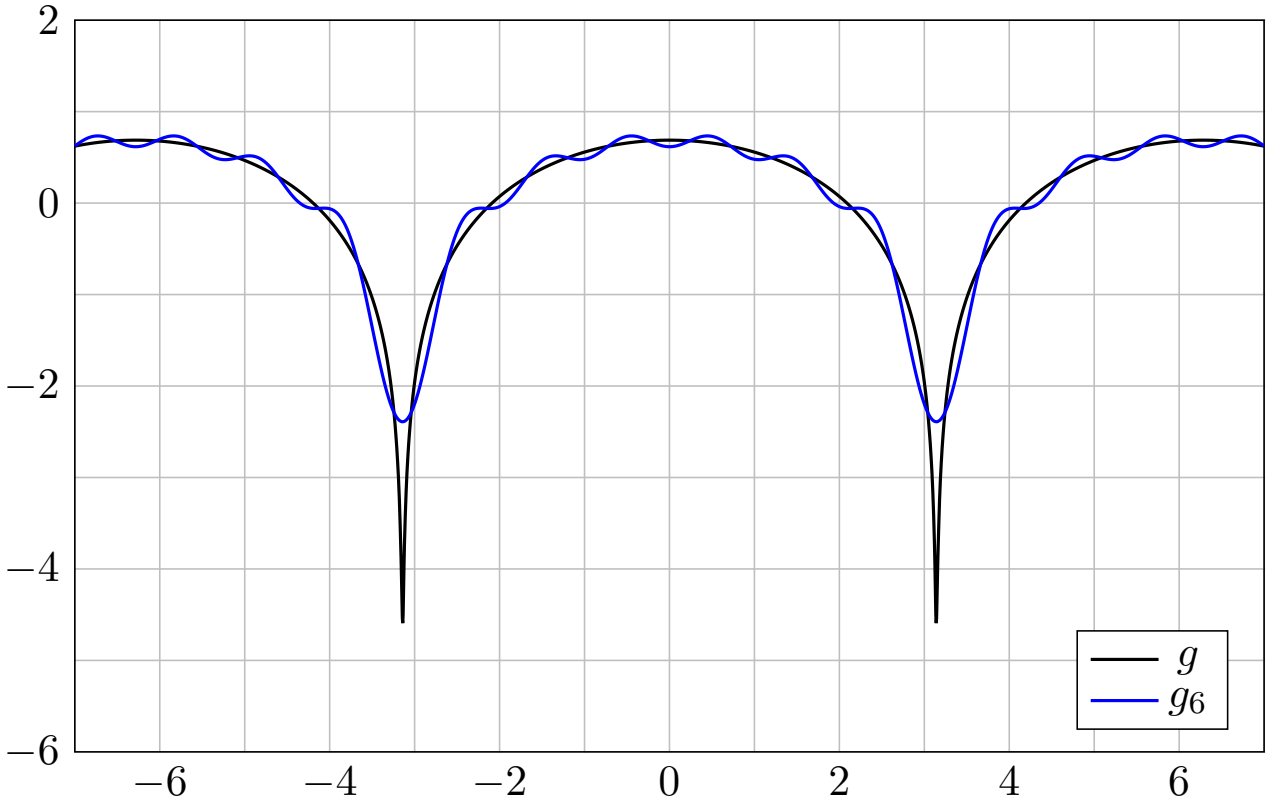
Von Potenzreihen zu Fourier–Reihen

Die Funktion $f(x) = \arcsin\left(r\sin(x)/\sqrt{1+2r\cos(x)+r^2}\right)$ für $r = 0.99$.
Für $r < 1$ ist f glatt. Für $r \to 1$ erhalten wir die Sägezahnfunktion.



Von Potenzreihen zu Fourier–Reihen

Die Funktion $g(x) = \ln\sqrt{1+2r\cos(x)+r^2}$ für $r = 0.99$.
Für $r < 1$ ist g glatt. Für $r \to 1$ erhalten wir Pole wie oben gesehen.



Skalarprodukt periodischer Funktionen

Für Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ definieren wir ihr **Skalarprodukt** durch

$$L^p \times L^q \to \mathbb{C} \;:\; (f, g) \mapsto \langle\, f \mid g \,\rangle := \frac{1}{b-a} \int_{t=a}^{b} \overline{f(t)}\, g(t)\, \mathrm{d}t.$$

Der Integrand $\overline{f} g$ sei absolut integrierbar, etwa $f \in L^\infty$ beschränkt und $g \in L^1$ absolut integrierbar, allgemein $f \in L^p, g \in L^q$ mit $1/p + 1/q = 1$.
Bei Periode T wählen wir ein beliebiges Intervall der Länge $b - a = T$.
Dieses Periodenintegral ist invariant bei Verschieben oder Vervielfachen.
Sei $\omega = 2\pi/T$. Als **Basisfunktion** $e_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ definieren wir

$$e_k(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} = \cos(k\omega t) + \mathrm{i}\sin(k\omega t).$$

Für diese Funktionen gelten die **Orthonormalitätsrelationen**

$$\langle\, e_k \mid e_\ell \,\rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell\text{:} \quad \text{paarweise Orthogonalität,} \\ 1 & \text{für } k = \ell\text{:} \quad \text{Normierung auf Länge } 1. \end{cases}$$

Ähnliche, etwas kompliziertere Formeln gelten für $\cos(k\omega t)$ und $\sin(k\omega t)$.
☺ Meist gehen wir mit $x = \omega t$ zur Periode $T = 2\pi$ und $\omega = 1$ über.

Trigonometrische Polynome

Trigonometrisches Polynom nennt man jede $\mathbb{C}$–Linearkombination

$$f(t) \;=\; \sum_{k=-n}^{n} c_k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} \;=\; \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t).$$

☺ Die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist ein $\mathbb{C}$–Vektorraum. Hierin ist die Teilmenge aller T–periodischen Funktionen ein Untervektorraum.
Die Basisfunktion e_k spannen den Unterraum der trigon. Polynome auf.
Jede solche Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ bestimmt ihre Koeffizienten gemäß

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t}\, f(t)\, \mathrm{d}t &&= \langle\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} \mid f \,\rangle \quad \text{bzw.} \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_{t=0}^{T} \cos(k\omega t)\, f(t)\, \mathrm{d}t &&= 2\langle\, \cos(k\omega t) \mid f \,\rangle, \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_{t=0}^{T} \sin(k\omega t)\, f(t)\, \mathrm{d}t &&= 2\langle\, \sin(k\omega t) \mid f \,\rangle. \end{aligned}$$

☺ Formeln für c_k sind meist einfacher und übersichtlicher als für a_k, b_k.

Fourier–Koeffizienten und Fourier–Reihe

Allgemein: Ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ periodisch und über $[0,T]$ integrierbar, dann definieren wir durch obige Formeln die **Fourier–Koeffizienten** von f. Diese Koeffizienten von f fassen wir zur **Fourier–Reihe** zusammen:

$$f(t) \;\sim\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} \;=\; \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t).$$

⚠ Diese Reihe ist zunächst nur eine symbolische Schreibweise!
Gelesen: „Die Funktion f hat die Fourier–Koeffizienten c_k bzw. a_k, b_k."
Aufgrund der **Euler–Formel** $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} = \cos(k\omega t) + \mathrm{i}\sin(k\omega t)$ gilt dabei

$$a_k = c_k + c_{-k}, \qquad b_k = \mathrm{i}(c_k - c_{-k}),$$
$$c_k = \frac{a_k - \mathrm{i}b_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + \mathrm{i}b_k}{2}.$$

Ist f **reell**, also $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, so gilt $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, also $c_{-k} = \overline{c_k}$.
Ist f **gerade**, so liefert f eine **Cosinusreihe**, $b_k = 0$, $c_{-k} = c_k$.
Ist f **ungerade**, so liefert f eine **Sinusreihe**, $a_k = 0$, $c_{-k} = -c_k$.

Konvergenz-Kriterium von Dirichlet

Zur Funktion f ist $f_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}$ ihr n-tes **Fourier–Polynom**.
Wir sagen, die Fourier–Reihe von f **konvergiert im Punkt** $t\in\mathbb{R}$, wenn die Zahlenfolge $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ für $n\to\infty$ konvergiert. Beispiel: Ist f im Punkt t differenzierbar, so folgt $f_n(t)\to f(t)$. Allgemeiner gilt Satz I2A:

(1) Angenommen, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ erfüllt die Dirichlet–Bedingung im Punkt t, d.h. beide Grenzwerte $f(t\pm)$ und beide Ableitungen $f'(t\pm)$ existieren. Dann konvergiert in diesem Punkt t die Fourier–Reihe $f_n(t)$ gemäß

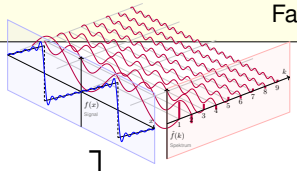
$$f_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} \;\to\; \frac{1}{2}\Big[f(t+) + f(t-)\Big] \quad \text{für} \quad n\to\infty.$$

(2) Ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ stetig und stückweise stetig differenzierbar mit $|f'|\le L$, so konvergiert die Fourier–Reihe $f_n\to f$ sogar gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$:

$$\big|f_n(t) - f(t)\big| \;\le\; 2L/\omega\cdot\ln(n)/n \;\to 0 \quad \text{für} \quad n\to\infty$$

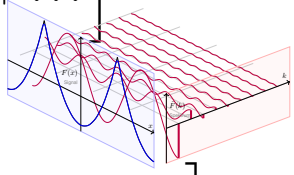
(3) Ist f mindestens d-mal stetig differenzierbar, so ist die gleichmäßige Konvergenz entsprechend schneller gemäß $|f_n - f| \le \mathrm{const}\cdot\ln(n)/n^d$.

Vier wichtige Beispiele



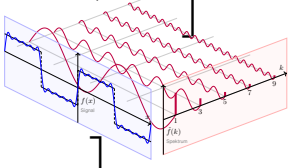
Für unsere Sägezahnfunktion I205 finden wir:

$$f(x) = 2\left[\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \ldots\right]$$



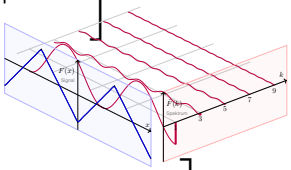
Für die Parabelfunktion $F(x) = \int_{t=0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ folgt I321:

$$F(x) = \frac{\pi^2}{6} - 2\left[\cos x - \frac{1}{2^2}\cos 2x + \frac{1}{3^2}\cos 3x - \frac{1}{4^2}\cos 4x + \ldots\right]$$



Für unsere Rechteckfunktion I225 finden wir:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \ldots\right]$$



Für die Dreieckfunktion $F(x) = \int_{t=0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ folgt I309:

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \frac{1}{7^2}\cos 7x + \ldots\right]$$

☺ Es gilt Konvergenz in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$: Wir schreiben „$=$“ statt „$\sim$“.
☺ Wir sehen explizit, wie schnell die Fourier–Koeffizienten abklingen.

Integrieren und Differenzieren

⚠ Fourier–Reihen können wir **nicht immer termweise ableiten**! I319
☺ Hingegen können wir sie **immer termweise integrieren**: I318

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periodisch und integrierbar, und $F(t) := C + \int_{u=0}^{t} f(u)\,\mathrm{d}u$.
Genau dann ist F periodisch, wenn $\int_{u=0}^{T} f(u)\,\mathrm{d}u = 0$. In diesem Fall gilt:

$$f(t) \sim c_0 + \sum_{k\neq 0} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} \quad \underset{?!}{\overset{\Longrightarrow}{\Longleftarrow}} \quad F(t) \sim C_0 + \sum_{k\neq 0} \frac{c_k}{\mathrm{i}k\omega}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}$$

☺ Wir können die Umkehrung sorgsam als Ableitungsregel für F lesen:
Hierzu sei F **absolut stetig** mit $F' = f$, also $F(t) = F(0) + \int_{u=0}^{t} f(u)\,\mathrm{d}u$.
Zum Beispiel genügt: F stetig und stückweise stetig differenzierbar.

Glattheit entspricht schnellem **Abklingen** der Fourier–Koeffizienten:
Für jede integrierbare Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ gilt $|c_k| \to 0$ für $|k| \to \infty$.
Ist f mindestens d-mal stetig differenzierbar, so gilt sogar $|k^d c_k| \to 0$.

Umgekehrt: Gilt $\sum |c_k| < \infty$, zum Beispiel $|c_k| \leq c/|k|^\alpha$ für $\alpha > 1$,
so konvergiert $\sum c_k e_k$ gleichmäßig gegen eine stetige Funktion f.
Gilt sogar $\sum |k^d c_k| < \infty$, so ist f mindestens d-mal stetig diff'bar.

Signal und Spektrum

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ absolut integrierbar auf $[0,T]$ und T–periodisch.
Wir entwickeln f in **Harmonische** zur Grundfrequenz $\omega = 2\pi/T$:

$$f \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{f}, \quad \widehat{f}(k) := \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}.$$

Diese **Analyse** zerlegt das Signal $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ in sein Spektrum $\widehat{f}:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$.
Die Reihe ist wie zuvor zunächst nur eine symbolische Schreibweise;
wir schreiben Gleichheit nur im Falle der (punktweisen) Konvergenz.
Für diese Fourier–Analyse gelten folgende nützliche Rechenregeln:

Linearität:	$af \circ\!\!-\!\!\bullet\, a\widehat{f}$,	$f+g \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{f}+\widehat{g}$,
Symmetrie:	$f(-t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{f}(-k)$,	$\overline{f(t)} \circ\!\!-\!\!\bullet\, \overline{\widehat{f}(-k)}$,
Verschiebung:	$f(t-a) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega a}\widehat{f}(k)$,	$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\omega t} f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{f}(k-\ell)$,
Produkte:	$f\cdot g \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{f}*\widehat{g}$,	$f*g \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{f}\cdot\widehat{g}$.

Punktweises Produkt und Faltungsprodukt

☺ Diese nützlichen Eigenschaften vereinfachen unsere Rechnungen.
Linearität, Symmetrie und Verschiebung rechnet man leicht nach.

Die Fourier–Analyse übersetzt das punktweise Produkt $h = f\cdot g$
der Signale in das Faltungsprodukt $\widehat{h} = \widehat{f}*\widehat{g}$ der Spektren:

$$h = f\cdot g \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{h} = \widehat{f}*\widehat{g} \quad \text{mit} \quad \widehat{h}(k) = \sum_{m+n=k} \widehat{f}(m)\,\widehat{g}(n)$$

Konvergenz und Summierbarkeit sind garantiert falls $\widehat{f},\widehat{g}\in\ell^1(\mathbb{Z},\mathbb{C})$:
Aus $\sum|\widehat{f}(m)|<\infty$ und $\sum|\widehat{g}(n)|<\infty$ folgt dann $\sum|\widehat{h}(k)|<\infty$.

Umgekehrt gilt: Die Fourier–Analyse übersetzt das Faltungsprodukt
$h = f*g$ der Signale in das punktweise Produkt $\widehat{h} = \widehat{f}\cdot\widehat{g}$ der Spektren:

$$h = f*g \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{h} = \widehat{f}\cdot\widehat{g} \quad \text{mit} \quad h(t) = \frac{1}{T}\int_{u=0}^{T} f(u)\,g(t-u)\,\mathrm{d}u.$$

Konvergenz und Integrierbarkeit sind garantiert falls $f,g\in L^1([0,T],\mathbb{C})$:
Aus $\int_{u=0}^{T}|f(u)|\,\mathrm{d}u<\infty$ und $\int_{v=0}^{T}|g(v)|\,\mathrm{d}v<\infty$ folgt $\int_{t=0}^{T}|h(t)|\,\mathrm{d}t<\infty$.

Fourier–Entwicklung der Exponentialfunktion

Aufgabe: (typische Klausuraufgabe, so zum Beispiel September 2012)
Die Funktion $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei 2π–periodisch mit $g(x)=\mathrm{e}^x$ für $0\le x<2\pi$.

(1) Skizzieren Sie die Funktion g auf dem Intervall $[-4\pi,4\pi]$.

(2) Bestimmen Sie die Grenzwerte $g(x\pm)$ und Ableitungen $g'(x\pm)$.

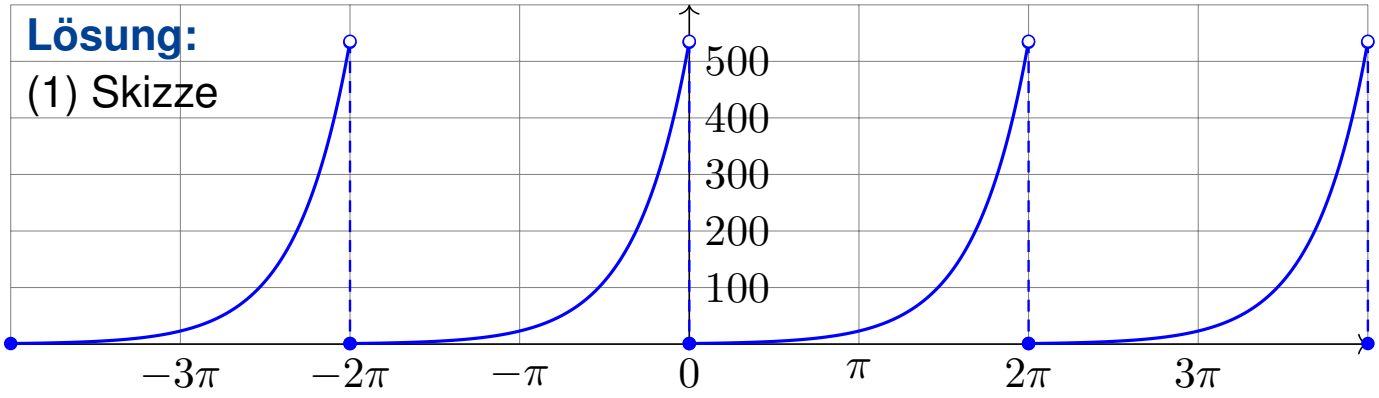
(3) Bestimmen Sie zu g die Fourier–Reihe $g(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$.

(4) Warum und wogegen konvergiert die Reihe in jedem Punkt $x\in\mathbb{R}$?

(5) Bestimmen Sie so den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^2+1}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{17}+\frac{1}{26}+\frac{1}{37}+\dots.$$

Lösung:
(1) Skizze



Fourier–Entwicklung der Exponentialfunktion

(2) Für $0<x<2\pi$ gilt $g(x\pm)=\mathrm{e}^x$ und $g'(x\pm)=\mathrm{e}^x$. Am Rand gilt $g(0+)=1$ und $g'(0+)=1$ sowie $g(2\pi-)=\mathrm{e}^{2\pi}$ und $g'(2\pi-)=\mathrm{e}^{2\pi}$.
☺ Alles setzt sich 2π–periodisch fort, also $g(0-)=g'(0-)=\mathrm{e}^{2\pi}$.

(3a) Die Integration gelingt hier am einfachsten komplex:

$$\int_{x=0}^{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\int_{x=0}^{2\pi}\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i}k)x}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i}k)x}}{1-\mathrm{i}k}\right]_{x=0}^{2\pi}=\frac{\mathrm{e}^{2\pi}-1}{1-\mathrm{i}k}$$

Damit erhalten wir die komplexen Fourier–Koeffizienten:

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{x=0}^{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}g(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{2\pi}-1}{2\pi(1-\mathrm{i}k)},\qquad g(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{2\pi}-1}{2\pi(1-\mathrm{i}k)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

(3b) Zum Vergleich die Koeffizienten der Co/Sinus-Reihe:

$$c_k=\frac{\mathrm{e}^{2\pi}-1}{2\pi(1-\mathrm{i}k)}=\frac{(\mathrm{e}^{2\pi}-1)(1+\mathrm{i}k)}{2\pi(1+k^2)}=\frac{\mathrm{e}^{2\pi}-1}{2\pi(1+k^2)}-\mathrm{i}\,\frac{k(1-\mathrm{e}^{2\pi})}{2\pi(1+k^2)},$$

$$a_k=c_k+c_{-k}=\frac{\mathrm{e}^{2\pi}-1}{\pi(k^2+1)},\qquad b_k=\mathrm{i}(c_k-c_{-k})=\frac{k(1-\mathrm{e}^{2\pi})}{\pi(k^2+1)}.$$

⚠ Für $g'(x)=g(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ gilt die Ableitungsregel I3A nicht!

Fourier–Entwicklung der Exponentialfunktion

(3c) Zum Vergleich rechnen wir reell. Partielle Integration liefert:

$$\int_{x=0}^{2\pi} \cos(kx)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \Big[\cos(kx)\,\mathrm{e}^x\Big]_0^{2\pi} + k\int_{x=0}^{2\pi} \sin(kx)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$
$$\int_{x=0}^{2\pi} \sin(kx)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \Big[\sin(kx)\,\mathrm{e}^x\Big]_0^{2\pi} - k\int_{x=0}^{2\pi} \cos(kx)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

Das sieht zirkulär aus, aber ersteht wie Phönix aus der Asche:

$$\int_{x=0}^{2\pi} \cos(kx)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (\mathrm{e}^{2\pi}-1) - k^2\int_{x=0}^{2\pi} \cos(kx)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$
$$\int_{x=0}^{2\pi} \sin(kx)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = k(1-\mathrm{e}^{2\pi}) - k^2\int_{x=0}^{2\pi} \sin(kx)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

Das können wir nun nach den gesuchten Integralen auflösen:

$$\int_{x=0}^{2\pi} \cos(kx)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{2\pi}-1}{1+k^2}, \qquad \text{also } a_k = \frac{\mathrm{e}^{2\pi}-1}{\pi(k^2+1)},$$
$$\int_{x=0}^{2\pi} \sin(kx)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \frac{k(1-\mathrm{e}^{2\pi})}{1+k^2}, \qquad \text{also } b_k = \frac{k(1-\mathrm{e}^{2\pi})}{\pi(k^2+1)}.$$

Beide Rechenwege sind ähnlich lang, die Wahl ist Geschmackssache.

Fourier–Entwicklung der Exponentialfunktion

(4) Dirichlet (Satz I2A) garantiert Konvergenz in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx) \overset{(2)}{=} \frac{g(x+)+g(x-)}{2}$$

(5) Speziell in der Sprungstelle $x = 0$ finden wir:

$$\frac{\mathrm{e}^{2\pi}-1}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{2\pi}-1}{\pi(k^2+1)} \overset{(4)}{=} \frac{1+\mathrm{e}^{2\pi}}{2}$$
$$\Longrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{2\pi}-1}{\pi(k^2+1)} = \frac{\mathrm{e}^{2\pi}-1}{2\pi} + \frac{\mathrm{e}^{2\pi}+1}{2}$$

Auflösen nach der Reihe und vereinfachen liefert schließlich:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+1} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}\,\frac{\mathrm{e}^{\pi}+\mathrm{e}^{-\pi}}{\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}} = \frac{1+\pi\coth(\pi)}{2} = 2.07667\ldots$$

☺ Dank unseres Integrationswerkzeugs sind die Rechnungen leicht.
Mit Fourier–Analyse gelingt uns die Berechnung schwieriger Reihen!
Das bequeme Dirichlet–Kriterium garantiert die punktweise Konvergenz.

Fourier–Entwicklung von $\cosh$ und $\sinh$

Aufgabe: Die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien 2π–periodisch und sprungnormiert und auf dem Intervall $]-\pi, \pi[$ gegeben durch

$$f(x) = \cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad g(x) = \sinh(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

(1) Skizzieren Sie f und g auf dem Intervall $[-4\pi, 4\pi]$.

(2) Entwickeln Sie f und g in ihre (reellen) Fourier–Reihen.

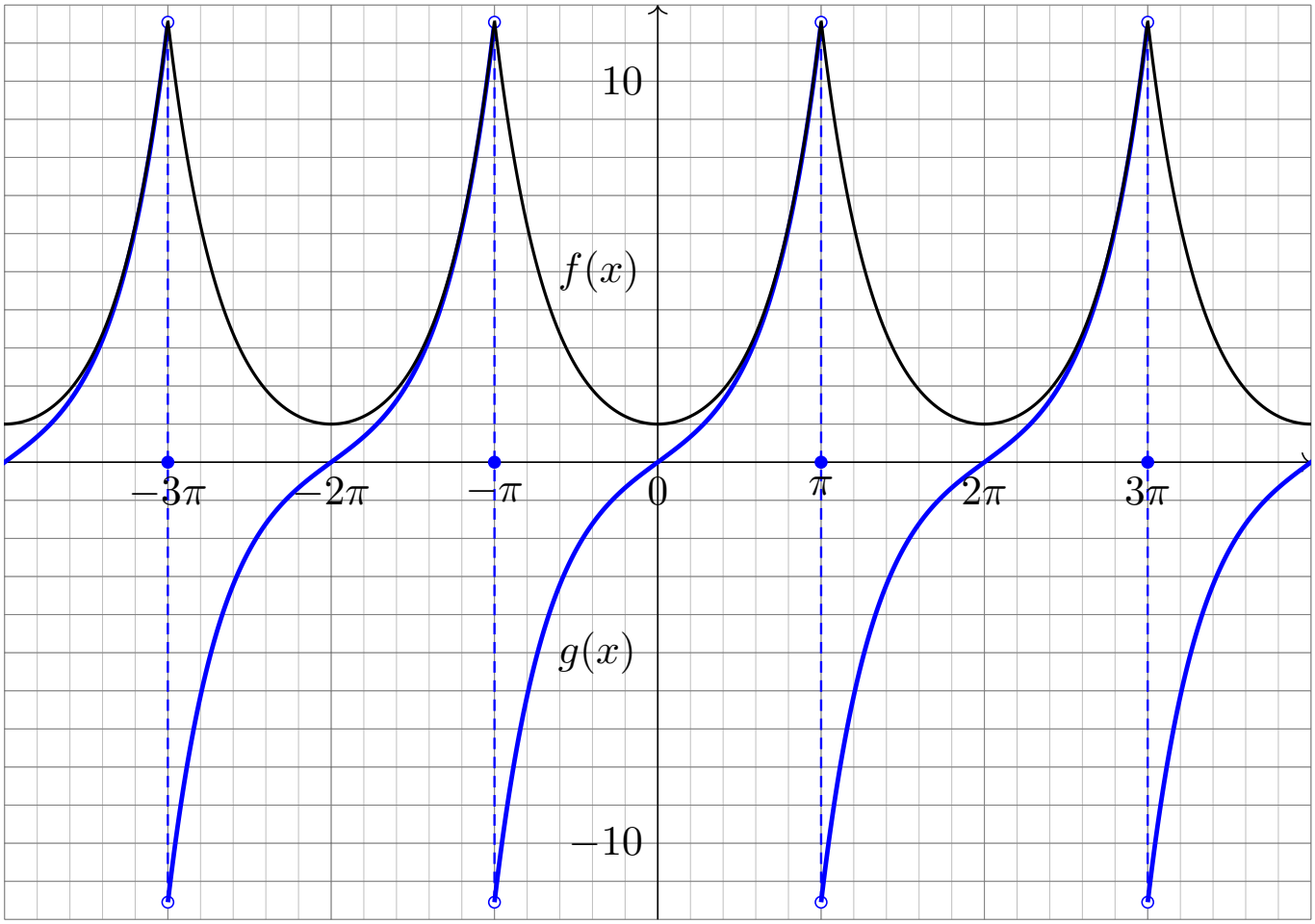
(3) In welchen Punkten konvergieren die Fourier–Reihen? Wogegen?

(4) Werten Sie die Fourier–Reihen in geeigneten Punkten $x \in [-\pi, \pi]$ aus und bestimmen Sie so explizit den Grenzwert der Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2} \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+1)}{1+(2k+1)^2}\,.$$

(5) Bestimmen Sie die Ableitungen f', g' und ihre Fourier–Reihen.
In welchem Fall gilt die Ableitungsregel I3A? in welchem nicht?
Das Ergebnis ist erstaunlich. Erklären Sie es möglichst genau!

Fourier–Entwicklung von $\cosh$ und $\sinh$



Fourier–Entwicklung von $\cosh$ und $\sinh$

(2) Wir berechnen die Fourier–Reihen von e^x und e^{-x} auf $]-\pi,\pi[$:

$$u_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x \quad = \frac{\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i}k)\pi} - \mathrm{e}^{-(1-\mathrm{i}k)\pi}}{2\pi(1-\mathrm{i}k)} = (-1)^k\frac{\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}}{2\pi(1-\mathrm{i}k)}$$

$$v_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i}k)\pi} - \mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i}k)\pi}}{2\pi(1+\mathrm{i}k)} = (-1)^k\frac{\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}}{2\pi(1+\mathrm{i}k)}$$

Symmetrie nutzen! Hieraus folgen die Fourier–Reihen von f und g:

$$\frac{u_k \pm v_k}{2} = (-1)^k\frac{\sinh(\pi)}{2\pi}\Big[\frac{1+\mathrm{i}k}{1+k^2} \pm \frac{1-\mathrm{i}k}{1+k^2}\Big]$$

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k\sinh(\pi)}{\pi(1+k^2)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2\sinh(\pi)}{\pi(1+k^2)}\cos(kx)$$

$$g(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k\mathrm{i}k\sinh(\pi)}{\pi(1+k^2)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2k\sinh(\pi)}{\pi(1+k^2)}\sin(kx)$$

(3) Dank Dirichlet–Kriterium I2A konvergieren die Fourier–Reihen $f_n \to f$ und $g_n \to g$ in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$, erstere sogar gleichmäßig. In den Sprungstellen $x \in \pi(2\mathbb{Z}+1)$ gilt $g_n(x) \to \frac{1}{2}\big[g(x+)+g(x-)\big] = 0$.

Fourier–Entwicklung von $\cosh$ und $\sinh$

(4) Wir werten $f(x)$ in $x=0$ aus und $g(x)$ in $x=\pi/2$:

$$1 = f(0) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2\sinh(\pi)}{\pi(1+k^2)}$$

$$\Longrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(1+k^2)} = \frac{\pi}{2\sinh(\pi)} - \frac{1}{2} = -0.36398\ldots$$

$$\sinh(\pi/2) = g(\pi/2) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{2(2j+1)\sinh(\pi)}{\pi(1+(2j+1)^2)}$$

$$\Longrightarrow \qquad \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j(2j+1)}{1+(2j+1)^2} = \frac{\pi\sinh(\pi/2)}{2\sinh(\pi)} = 0.31301\ldots$$

(5) Außerhalb der Sprungstellen $\pi(2\mathbb{Z}+1)$ gilt $f' = g$ und $g' = f$. Die Funktion f ist absolut stetig, das heißt $f(t) = f(0) + \int_{u=0}^{t} f'(u)\,\mathrm{d}u$, also können wir die Fourier–Reihe formal ableiten gemäß Satz I3A. Hingegen ist g nicht absolut stetig, denn $g(t) \neq g(0) + \int_{u=0}^{t} g'(u)\,\mathrm{d}u$, und Satz I3A ist hier nicht anwendbar. Wir können beides direkt nachprüfen!

Entwicklung der Parabel in eine Sinus-/Cosinusreihe

Beim Lösen partieller Differentialgleichungen S236 mit Anfangs- und Randwerten (ARWP) begegnen uns Probleme von folgender Art:

Aufgabe: (1) Entwickeln Sie die gegebene Funktion $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x(\pi - x)$ in (a) eine Cosinusreihe und (b) eine Sinusreihe:

$$g(x) \overset{!}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx), \qquad g(x) \overset{!}{=} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

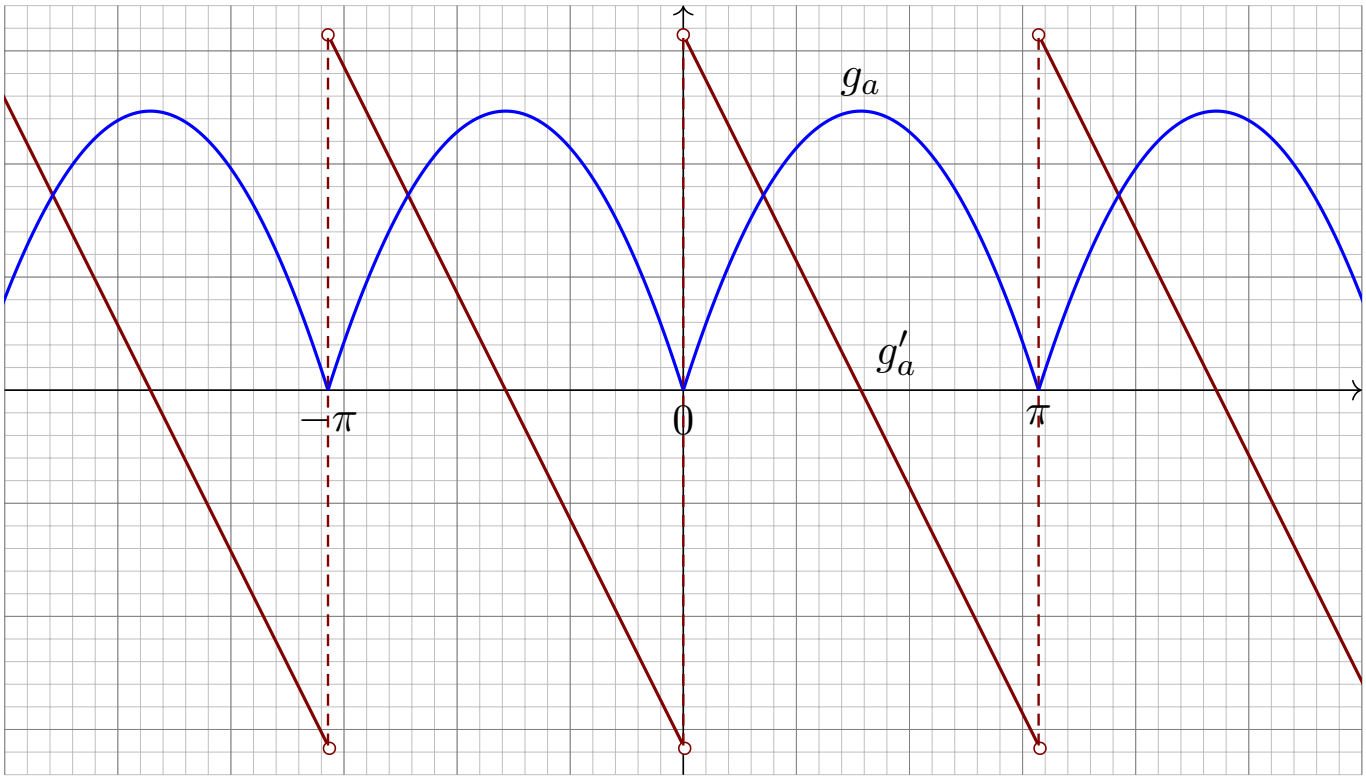
(c) Welche Fourier–Reihe hat die 2π–periodische Fortsetzung $g_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g_c(x) = x(\pi - x)$ für $0 \le x \le \pi$ und $g_c(x) = 0$ für $-\pi \le x \le 0$?

(2) In welchen Punkten $x \in [0, \pi]$ konvergieren diese Reihen? Wogegen? Konvergieren diese Reihen gleichmäßig auf $[0, \pi]$ gegen die Funktion g?

(3) Punktprobe: Bestimmen Sie durch geeignete Auswertung die Reihen $\sum_{j=1}^{\infty} {}^{1}/_{j^2} = {}^{\pi^2}/_{6}$, $\quad \sum_{j=1}^{\infty} {}^{(-1)^j}/_{j^2} = -{}^{\pi^2}/_{12}$, $\quad \sum_{j=0}^{\infty} {}^{(-1)^j}/_{(2j+1)^3} = {}^{\pi^3}/_{32}$.

Wie ist in (1) die Entwicklung in verschiedene Fourier–Reihen möglich? Man beachte, dass die Funktion g zunächst nur auf $[0, \pi]$ gegeben ist. Je nach Aufgabe kann g daher verschieden auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden!

Entwicklung der Parabel in eine Sinus-/Cosinusreihe



Die gerade 2π–periodische Fortsetzung $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$. Aufgrund der Spiegelsymmetrie von g ist g_a hier zudem π–periodisch. Die Ableitung $g_a' : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi \to \mathbb{R}$ ist ungerade. Wir kennen sie bereits!

Entwicklung der Parabel in eine Sinus-/Cosinusreihe

Lösung: (1a) Zwecks Cosinusreihe setzen wir g gerade fort zu g_a:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\, g_a(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(kx)\, g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \begin{cases} \pi^2/3 & \text{für } k=0\text{, also} \qquad a_0 = \pi^2/3, \\ -4/k^2 & \text{für } k \geq 2 \text{ gerade,} \qquad a_{2j} = -1/j^2, \\ 0 & \text{für } k \geq 1 \text{ ungerade,} \quad a_{2j+1} = 0 \quad \text{(Symmetrie!)} \end{cases}$$

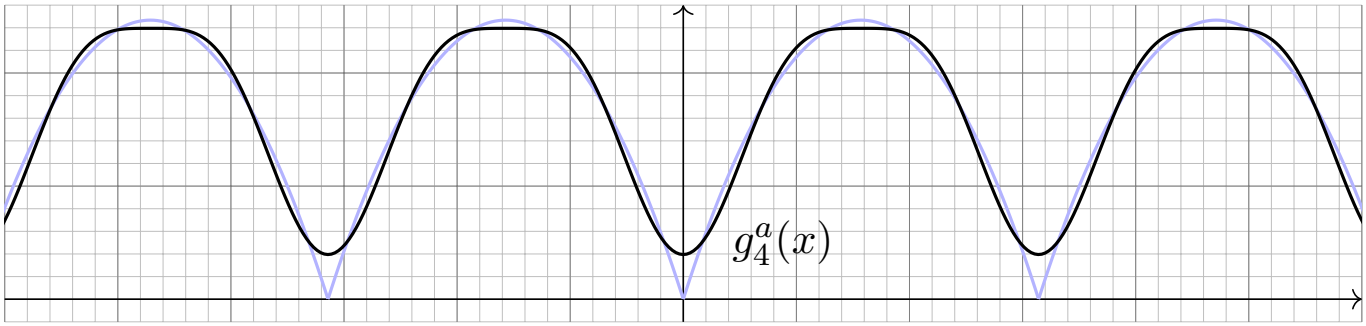
Das kann man direkt ausrechnen durch zweimalige partielle Integration. Alternativ integrieren wir gemäß I3A die Sägezahnfunktion g_a' I307:

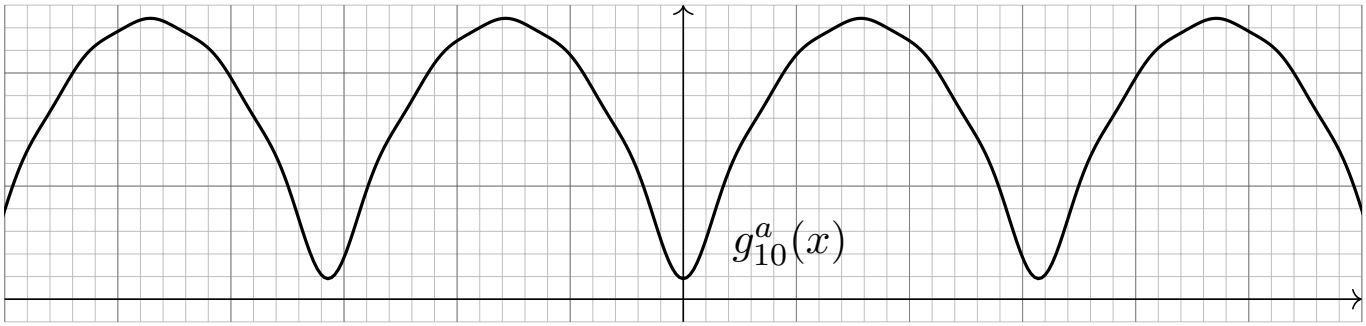
$$g_a'(x) \sim \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{j}\sin(2jx) \iff g_a(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{-1}{j^2}\cos(2jx)$$

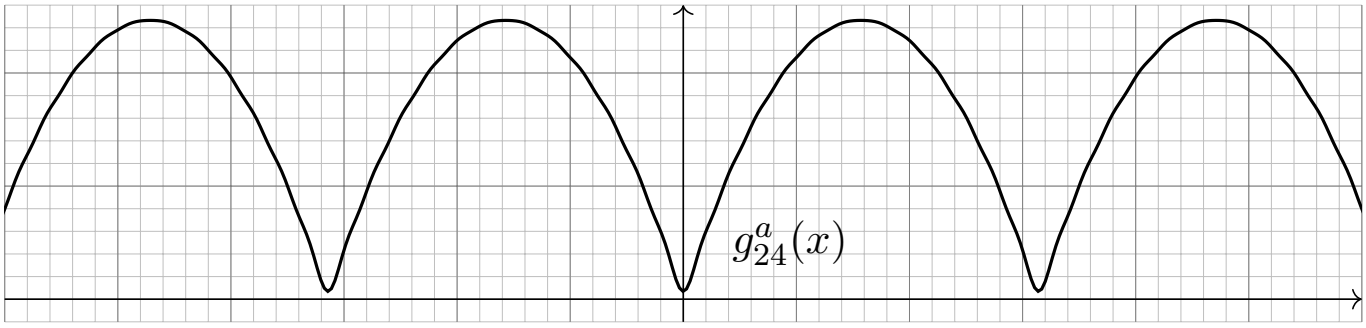
(2a) Dank Dirichlet–Kriterium I2A konvergiert diese Fourier–Reihe in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ gegen $g_a(x)$, sogar gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$. Dies gilt somit insbesondere auf dem ursprünglichen Intervall $[0, \pi]$.

(3a) Die Auswertung im Punkt $x = 0$ ergibt $g(0) = 0 = \pi^2/6 - \sum_{j=1}^{\infty} 1/j^2$, also $\sum_{j=1}^{\infty} 1/j^2 = \pi^2/6$. In $x = \pi/2$ finden wir $\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j/j^2 = -\pi^2/12$.

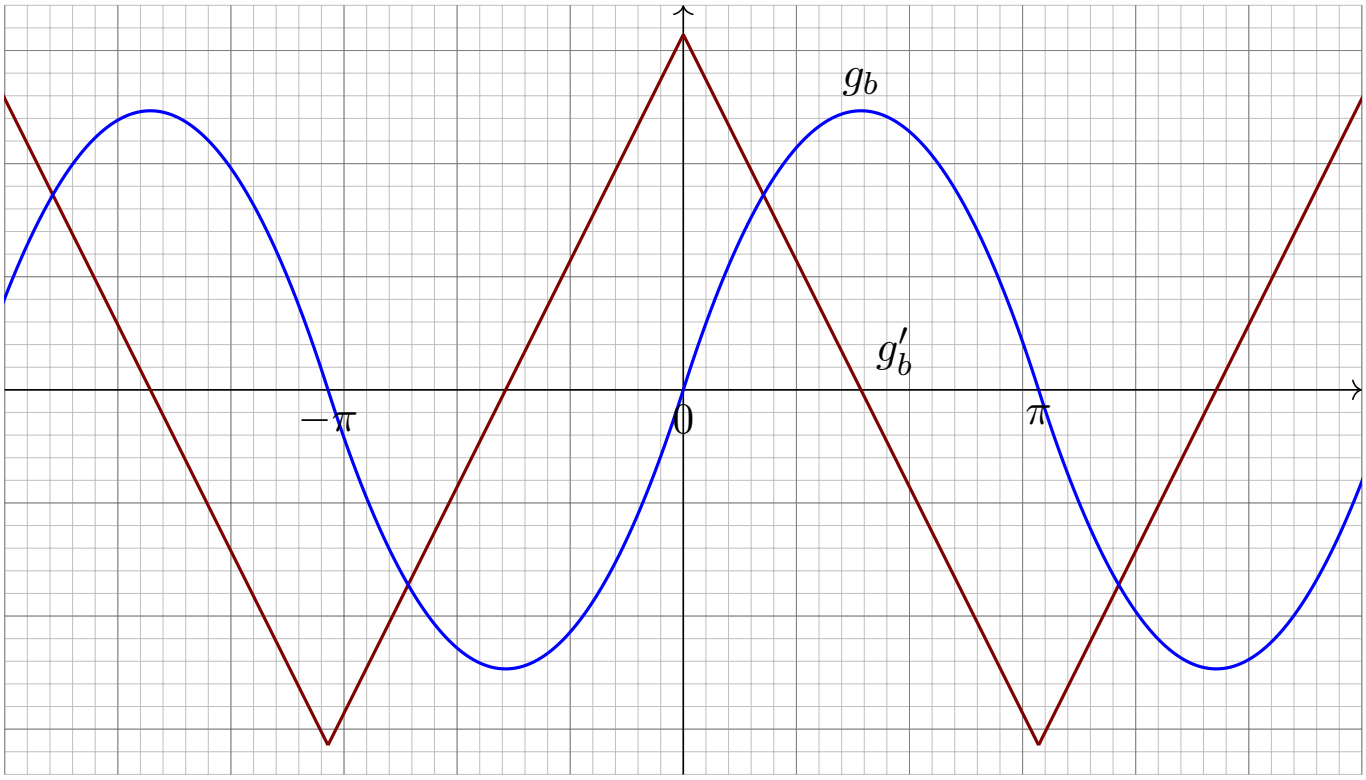
Entwicklung der Parabel in eine Sinus-/Cosinusreihe







Entwicklung der Parabel in eine Sinus-/Cosinusreihe



Die ungerade 2π–periodische Fortsetzung $g_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$.
Die Ableitung $g_b' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist folglich gerade. Wir kennen sie bereits!
Achtung: Nur auf den ersten Blick ähnelt g_b der Sinusfunktion.

Entwicklung der Parabel in eine Sinus-/Cosinusreihe

(1b) Zwecks Sinusreihe setzen wir g ungerade fort zu g_b:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\, g_b(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(kx)\, g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \begin{cases} \dfrac{8}{\pi k^2} & \text{für } k \geq 1 \text{ ungerade,} \quad b_{2j+1} = \dfrac{8}{\pi(2j+1)^3}, \\ 0 & \text{für } k \geq 0 \text{ gerade,} \quad b_{2j} = 0 \quad \text{(Symmetrie!)} \end{cases}$$

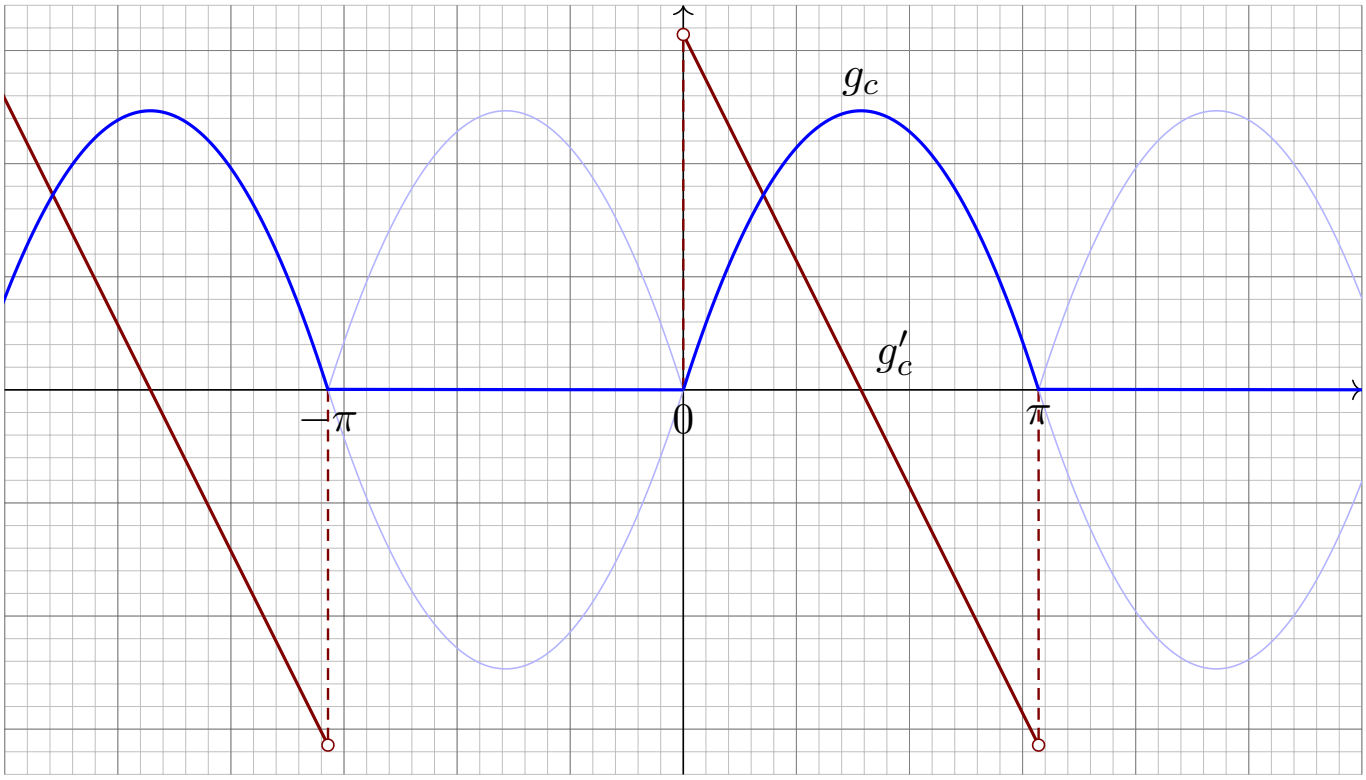
Das kann man direkt ausrechnen durch zweimalige partielle Integration.
Alternativ integrieren wir gemäß I3A die Dreieckfunktion g_b' I309:

$$g_b'(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\cos\big((2j+1)x\big)}{(2j+1)^2} \quad \Longleftrightarrow \quad g_b(x) = c_0 + \frac{8}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sin\big((2j+1)x\big)}{(2j+1)^3}$$

(2b) Dank Dirichlet–Kriterium I2A konvergiert diese Fourier–Reihe in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ gegen $g_b(x)$, sogar gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$.
Dies gilt somit insbesondere auf dem ursprünglichen Intervall $[0, \pi]$.

(3b) Auswertung in $x = \frac{\pi}{2}$ ergibt $g(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4} = \frac{8}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j/(2j+1)^3$.
Diese Punktprobe beschert uns $\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j/(2j+1)^3 = \pi^3/32$.

Entwicklung der Parabel in eine Sinus-/Cosinusreihe



Eine weitere 2π–periodische Fortsetzung $g_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$. Wir nutzen unsere Vorarbeit und betrachten $g_c = (g_a + g_b)/2$ als eine Überlagerung: Die beiden Summanden g_a und g_b kennen wir bereits!

Entwicklung der Parabel in eine Sinus-/Cosinusreihe

(1c) Wir betrachten $g_c = \frac{1}{2}\big(g_a + g_b\big)$. Aus (1a) und (1b) folgt sofort:

$$g_c(x) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{-1}{2j^2} \cos\big(2jx\big) + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2j+1)^3} \sin\big((2j+1)x\big)$$

Diese Fourier–Reihe kann man wie immer durch Integration ausrechnen. Nach unserer Vorarbeit ist es viel leichter, die Linearität auszunutzen!

(2c) Dank Dirichlet–Kriterium I2A konvergiert diese Fourier–Reihe in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ gegen $g_c(x)$, sogar gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$.

(3c) Die Auswertung im Punkt $x = 0$ ergibt $g(0) = 0 = \frac{\pi^2}{12} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2j^2}$. Diese Punktprobe beschert uns erneut die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} 1/j^2 = \pi^2/6$. Auch im Punkt $x = \frac{\pi}{2}$ gelingt uns die Punktprobe ebenso wie zuvor:

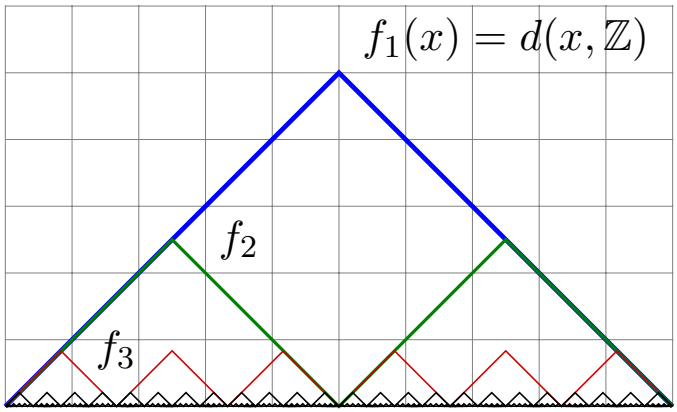
$$g\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j^2} + \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)^3} = \frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^2}{24} + \frac{\pi^2}{8}$$

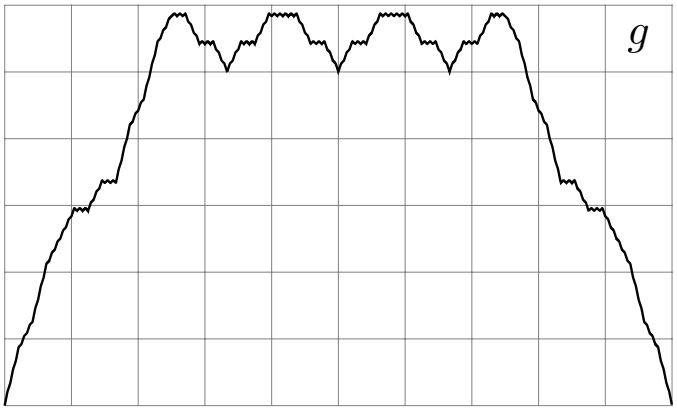
☺ Punktproben bescheren uns neue Reihen oder zeigen Rechenfehler, zum Beispiel eine vergessene oder falsch berechnete Konstante c_0.

☺ Zur Kontrolle hilft auch die graphische Darstellung der ersten Terme.

Takagi: stetig aber nirgends differenzierbar

Aufgabe: (0) Wiederholen Sie die Konstruktion der Takagi–Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{dist}(x, \frac{1}{n!}\mathbb{Z})$ und ihre Eigenschaften (Satz B4A).





(1) Wie / Lässt sich diese Funktion g in eine Fourier–Reihe entwickeln?
(2) Konvergiert die Fourier–Reihe überall gegen g? sogar gleichmäßig?
(3) Berechnen Sie explizit die ersten sechs Fourier–Koeffizienten!

Lösung: (0) Wir beginnen mit der Dreieckfunktion $f_1(x) = \operatorname{dist}(x, \mathbb{Z})$. Dies ist der Abstand von $x \in \mathbb{R}$ zur nächsten ganzen Zahl $a \in \mathbb{Z}$. Hieraus gewinnen wir $f_n(x) = \operatorname{dist}(x, \frac{1}{n!}\mathbb{Z})$ für $n = 2, 3, 4, 5$ sowie die Summen $g_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ und schließlich die Reihe $g = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Takagi: stetig aber nirgends differenzierbar

♦ Satz B4A: Takagi 1901

Die so definierte **Takagi–Funktion** $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{dist}(x, \frac{1}{n!}\mathbb{Z})$ hat eine Reihe überaus bemerkenswerter Eigenschaften:

1. Die Funktion g ist stetig, aber in keinem Punkt differenzierbar.
2. Die Funktion g ist auf keinem Intervall $[a, b]$ mit $a < b$ monoton.
3. Sie nimmt in jedem Punkt $x \in \mathbb{Q}$ ein striktes lokales Minimum an.

Die Funktion g ist demnach extrem rau. Können wir sie dennoch in eine Fourier–Reihe entwickeln? Wie bestimmen wir $g(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}$? Die Funktion g hat die Periode $T = 1$, also die Grundfrequenz $\omega = 2\pi$. Zudem ist die Funktion g stetig, ihre Fourier–Koeffizienten sind demnach

$$c_k = \int_{t=0}^{1} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} k t} g(t) \, \mathrm{d}t.$$

Also, ja, das gelingt im Prinzip, ... aber welche Werte c_k erhalten wir? Konvergiert die Fourier–Reihe überall gegen g? sogar gleichmäßig?

Takagi: stetig aber nirgends differenzierbar

(1) Wir wollen die Rechnung vereinfachen und gehen geschickt vor. Die Dreieckfunktion $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ kennen wir bereits von Seite I309: Auf $[-\pi,\pi]$ gilt $F(x)=|x|$, dann 2π–periodisch. Wir finden:

$$\boxed{F(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left[\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\frac{1}{7^2}\cos 7x+\dots\right]}$$

Unsere Funktion $f_1(t)=F(2\pi t)/2\pi$ ist entsprechend skaliert:

$$f_1(t)=\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{k\text{ ungerade}}\frac{\cos\bigl[k2\pi t\bigr]}{k^2}=\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\cos\bigl[(2j+1)2\pi t\bigr]}{(2j+1)^2}$$

Punktprobe: Für $t=0$ erhalten wir $f(0)=0$, also $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.
Für $f_n(t)=\operatorname{dist}(t,\frac{1}{n!}\mathbb{Z})$ gilt $f_n(t)=f_1(n!t)/n!$. So erhalten wir:

$$f_n(t)=\frac{1}{4n!}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\cos\bigl[(2j+1)\,n!\,2\pi t\bigr]}{(2j+1)^2\,n!}$$

☺ Wir müssen hier nicht erneut integrieren, wiederverwenden genügt.

Takagi: stetig aber nirgends differenzierbar

(2) So finden wir die Reihendarstellung unserer Takagi–Funktion:

$$g(t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n!}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\cos\bigl[(2j+1)\,n!\,2\pi t\bigr]}{(2j+1)^2\,n!}$$

Die Konvergenz gilt hierbei absolut, sie ist sogar gleichmäßig auf $\mathbb{R}$.
Wir dürfen daher die beiden Reihen vertauschen und erhalten:

$$g(t)=\frac{\mathrm{e}-1}{4}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\bigl[(2j+1)\,n!\,2\pi t\bigr]}{(2j+1)^2\,n!}\overset{!}{=}\frac{a_0}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cos(2\pi kt)$$

(3) Jede ganze Zahl $k\in\mathbb{N}_{\geq 1}$ schreibt sich auf höchstens zwei Weisen als $k=n!(2j+1)$. Die Koeffizienten a_k können wir daraus leicht ablesen:

$$a_0=\frac{\mathrm{e}-1}{2},\quad a_1=-\frac{2}{\pi^2 1^2},\quad a_2=-\frac{2}{\pi^2 1^2 2!}=-\frac{1}{\pi^2},$$
$$a_3=-\frac{2}{\pi^2 3^2},\quad a_4=0,$$
$$a_5=-\frac{2}{\pi^2 5^2},\quad a_6=-\frac{2}{\pi^2}\left[\frac{1}{3^2 2!}+\frac{1}{1^2 3!}\right]=-\frac{4}{9\pi^2},\quad\dots$$

Takagi: stetig aber nirgends differenzierbar

☹ Die Rechnung (1–2) ist zunächst leicht und elegant, aber die explizite Berechnung der Koeffizienten (3) ist für meinen Geschmack unschön.

☺ Wir wollen dieses Beispiel modifizieren und weiter vereinfachen.

Auch die folgende Funktion h ist in keinem Punkt differenzierbar und auf keinem Intervall monoton, genauso wie g in Satz B4A.

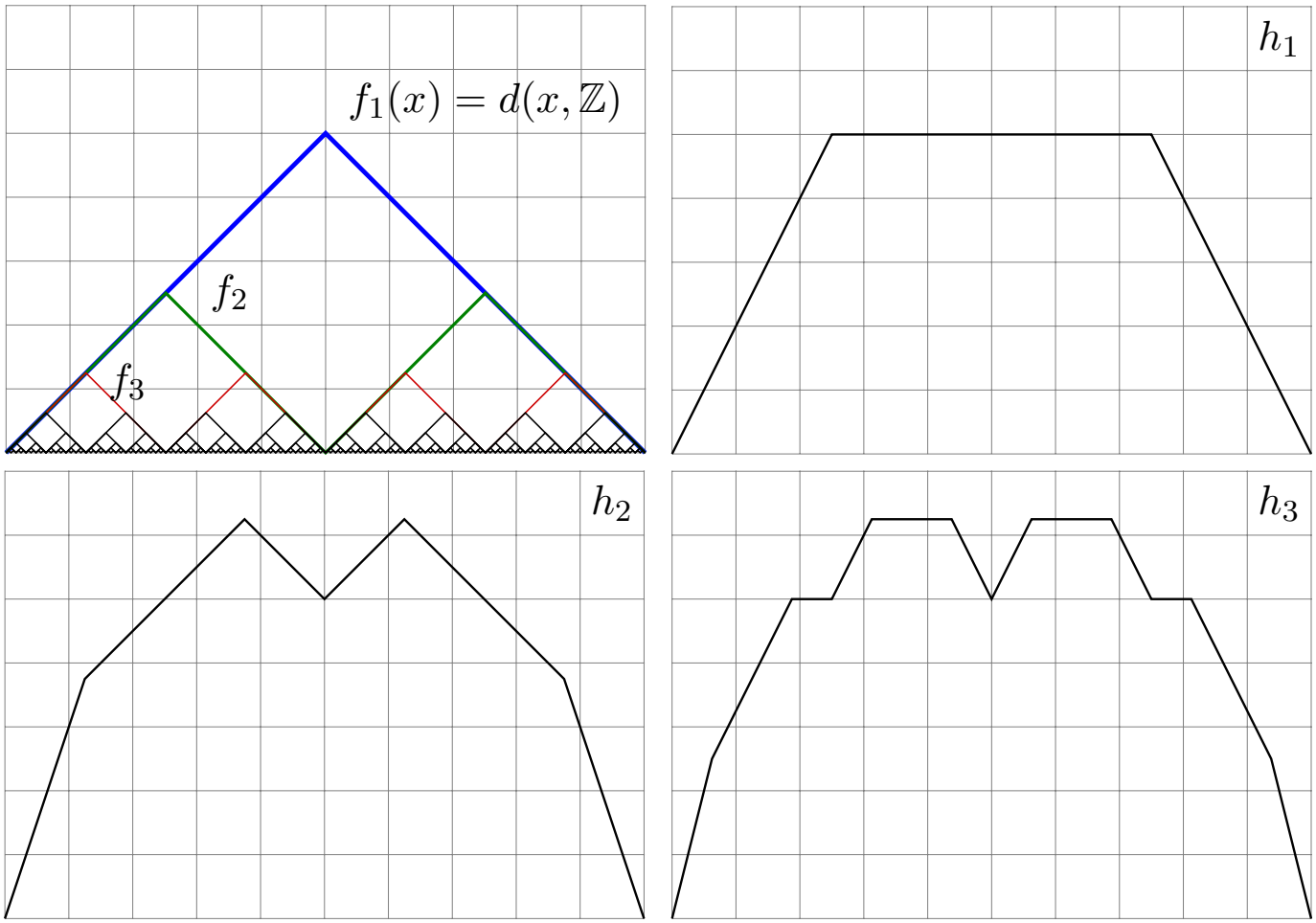
Aufgabe: (4) Skizzieren Sie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{dist}(x, 2^{-n}\mathbb{Z})$.
(5) Entwickeln Sie h möglichst explizit in eine Fourier–Reihe.

Lösung: (4) Wir gehen wie oben vor: Wir skizzieren zunächst die Funktionen $f_n(x) = \operatorname{dist}(x, 2^{-n}\mathbb{Z})$ für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ und ihre Summen $h_n = f_0 + f_1 + \cdots + f_n$. Im Grenzwert erhalten wir $h_n \nearrow h = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$.

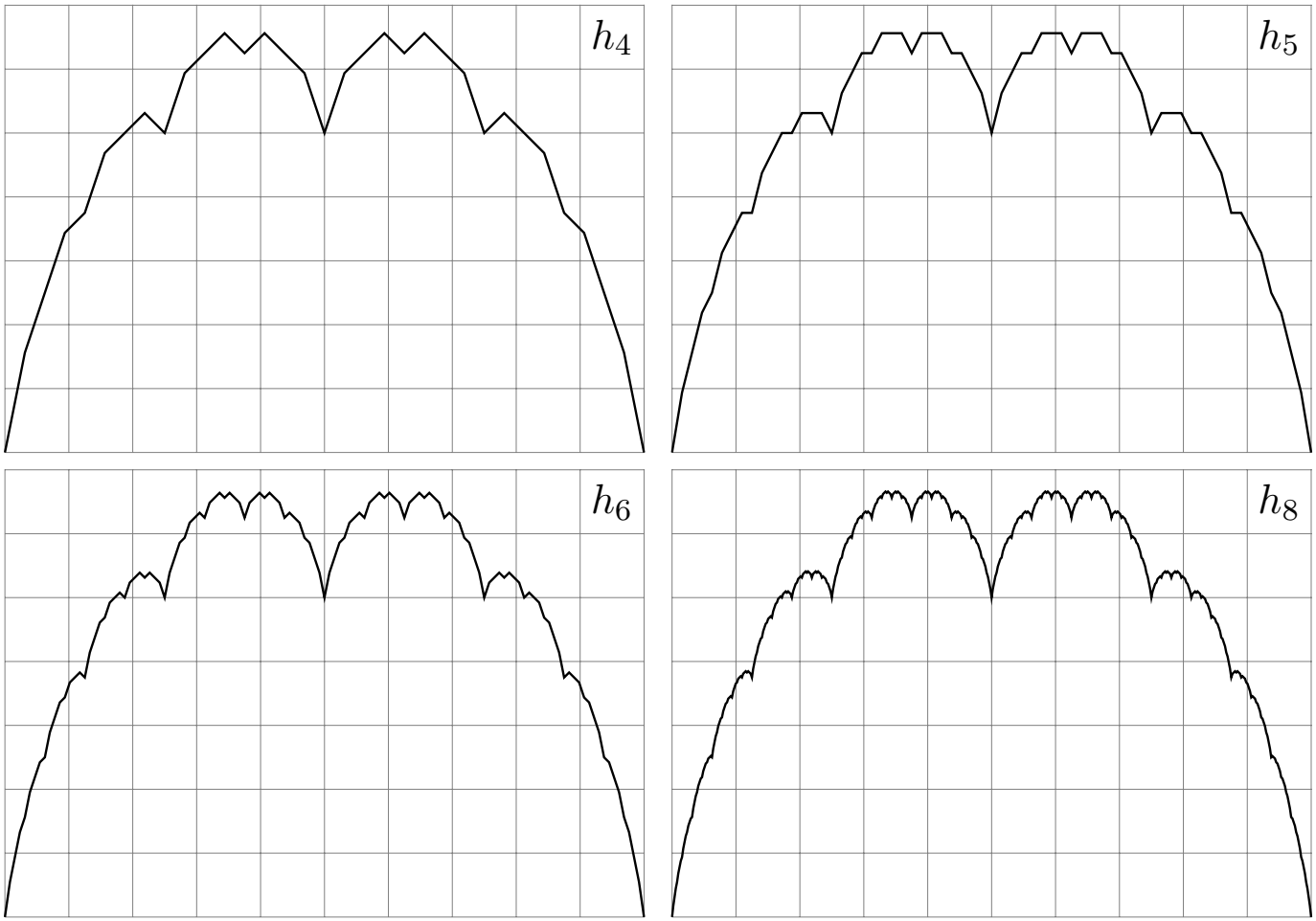
☺ Die so definierte Funktion h heißt auch **Blancmange–Kurve**, da sie an die gleichnamige Süßspeise in Puddingform erinnert.

Es ist überaus bemerkenswert, dass wir auch eine extrem raue Funktion wie diese bequem und direkt in ihre Fourier–Reihe entwickeln können.

Takagi: stetig aber nirgends differenzierbar



Takagi: stetig aber nirgends differenzierbar



Takagi: stetig aber nirgends differenzierbar

(5) Wie zuvor in (1–2) finden wir die Reihendarstellung dieser Funktion:

$$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\cos\big[(2j+1)\,2^n\,2\pi t\big]}{(2j+1)^2\,2^n}$$

Die Konvergenz gilt hierbei absolut, sie ist sogar gleichmäßig auf $\mathbb{R}$. Wir dürfen daher die beiden Reihen vertauschen und erhalten:

$$h(t) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\big[(2j+1)\,2^n\,2\pi t\big]}{(2j+1)^2\,2^n} \overset{!}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(2\pi k t)$$

Jede ganze Zahl $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ schreibt sich eindeutig als $k = 2^n(2j+1)$ mit $n, j \in \mathbb{N}$. Die Koeffizienten a_k können wir daraus leicht ablesen: Für $k = 0$ gilt $a_0 = 1/2$, und für $k = 2^n(2j+1)$ mit $n, j \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_k = -\frac{2}{\pi^2\,2^n\,(2j+1)^2}.$$

☺ Für das Abklingverhalten $a_k \to 0$ gilt demnach $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{2^n(2j+1)^2} \leq \frac{1}{k}$. Das passt zu einer stetigen, aber nirgends differenzierbaren Funktion.

Kapitel J

Die Fourier–Isometrie

L'étude approfondie de la nature est la source
la plus féconde des découvertes mathématiques.

Joseph Fourier (1768–1830), *Théorie analytique de la chaleur* (1822)

Inhalt dieses Kapitels J

1 Parseval–Gleichung und Fourier–Isometrie
- Die Energiegleichung und erste Anwendungsbeispiele
- Die Fourier–Isometrie zwischen Funktion und Spektrum
- Isoperimetrische Optimierung durch Fourier–Reihen

2 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz
- Punktweise Konvergenz nach Dirichlet
- Gleichmäßige Approximation nach Fejér
- Wann gilt punktweise Konvergenz fast überall?

3 Konvergenz im quadratischen Mittel
- Bestapproximation durch Orthogonalprojektion
- Konvergenz im quadratischen Mittel
- Vergleich der drei Konvergenzbegriffe

4 Fazit: Fourier–Analyse und Synthese
- Zusammenfassung
- Verständnisfragen

Motivation und Zielsetzung

Fourier–Analyse zerlegt das Signal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ins Spektrum $\widehat{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$:

$$f \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{f}, \quad \widehat{f}(k) := \frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}.$$

Hierzu sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolut integrierbar auf $[0, T]$ und T–periodisch.
Der Fourier–Koeffizient $\widehat{f}(k)$ ist die Amplitude der Schwingung $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}$.
Somit ist $\widehat{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ das Spektrum zur Grundfrequenz $\omega = 2\pi/T$.

Fourier–Synthese: Zu gegebenem Spektrum $\widehat{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ betrachten wir die zugehörigen Teilschwingungen $\widehat{f}(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}$ und rekonstruieren hieraus durch Überlagerung die Funktion $f(x) = \sum_k \widehat{f}(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}$, falls konvergent.
Konvergiert die Reihe? In welchem Sinne? Mit welchem Grenzwert?

Bislang nutzen wir **punktweise und gleichmäßige Konvergenz** (I2A).
In diesem Kapitel geht es um **Konvergenz im quadratischen Mittel**.
Für typische Anwendungen sind diese drei die zentralen Techniken.
Wir nutzen zwei zentrale Sätze: Dirichlet I2A und Fischer–Riesz J1A.

Motivation und Zielsetzung

Im vorigen Kapitel haben wir einzelne Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ untersucht.
In diesem Kapitel betrachten wir den Vektorraum aller Funktionen.
Diese mutige Sichtweise verschafft uns einen besseren Überblick:
Wir nutzen unser Wissen über Lineare Algebra und Skalarprodukte.

Die T–periodischen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ bilden einen Vektorraum,
ebenso bilden die Koeffizientenfolgen $\widehat{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ einen Vektorraum:
Addition und Skalarmultiplikation sind jeweils punktweise erklärt,
dies nutzen und schätzen wir bereits als praktische Rechenregeln.

Die Fourier–Analyse ist eine lineare Abbildung $\mathscr{F} : f \mapsto \widehat{f}$.
Die Fourier–Synthese ist eine lineare Abbildung $\mathscr{F}^{-1} : \widehat{f} \mapsto f$.
Auf welchen Funktionenräumen sollten wir diese nun betrachten?
Die Isometrie $L^2 \leftrightarrow \ell^2$ ist überraschend einfach und überaus nützlich!

Kurzum: Wir transformieren hier nicht nur einzelne Funktionen,
sondern untersuchen, wie sich die Fourier–Analyse $\mathscr{F} : L^2 \to \ell^2$ und
die Fourier–Synthese $\mathscr{F}^{-1} : \ell^2 \to L^2$ als lineare Abbildungen verhalten.
Eine anschauliche Anwendung ist die isoperimetrische Ungleichung J1B.

Satz von Parseval: die Energiegleichung

Wir führen die Untersuchungen des vorangegangenen Kapitels I fort.
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolut integrierbar auf $[0, T]$ und T–periodisch.
Die **Fourier–Analyse** zerlegt das Signal f in sein Spektrum $\widehat{f}$:

$$f \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{f}, \quad \widehat{f}(k) := \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}.$$

Für die punktweise bzw. gleichmäßige Konvergenz dieser Reihe haben wir das praktische Dirichlet–Kriterium I2A, das wir in §J2 beweisen.
In §J3 führen wir diese Fourier–Analyse weiter aus und beweisen:
Dabei gilt die **Parseval–Gleichung**, auch **Energiegleichung** genannt:

$$\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{\ell^2} \quad \text{also} \quad \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2$$

Genau dann ist die Funktion f quadrat-integrierbar, $\int_0^T |f(t)|^2\,\mathrm{d}t < \infty$,
wenn die Koeffizientenfolge $\widehat{f}$ quadrat-summierbar ist, $\sum_k |\widehat{f}(k)|^2 < \infty$.

Satz von Parseval: die Energiegleichung

☺ Die komplexe Schreibweise ist meist kürzer und übersichtlicher.
Für reelle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nutzen wir auch die Co/Sinus-Reihe:

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$$

Dank der einfachen Umrechnung $c_{\pm k} = \frac{1}{2}(a_k \mp \mathrm{i}b_k)$ erhalten wir:

$$\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2$$

Nachrechnen: Es gilt $|c_0|^2 = \frac{1}{4}a_0^2$ und $|c_{\pm k}|^2 = \frac{1}{4}(a_k^2 + b_k^2)$ für $k \neq 0$;
jeder Summand tritt jeweils einmal für $+k$ und einmal für $-k$ auf.

☺ Wie so oft ist die komplexe Gleichung eleganter und leichter.
Ich gebe beide Formeln an, damit Sie sie leicht zur Hand haben.

Physikalisch bedeutet die Parseval–Gleichung eine Energieerhaltung:
Die Gesamtenergie des Signals f (als Integral auf der linken Seite) ist
die Summe der Energien aller Teilschwingungen $\widehat{f}(k)\,e_k$ (rechte Seite).

Satz von Parseval: die Energiegleichung

Analogie: In der Physik ist $\frac{m}{2}|v|^2$ die kinetische Energie einer Masse m mit Geschwindigkeit $v = (v_1, v_2, v_2) \in \mathbb{R}^3$, also $v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$. Da unsere Basis (e_1, e_2, e_3) orthonormal ist, gilt $|v|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^3$: Die Gesamtenergie ist daher die Summe der Teilenergien!

Für trigonometrische Polynome, also endliche Summen statt Reihen, folgt die Parseval–Gleichung direkt aus dem Satz des Pythagoras: I121 Die Gesamtlänge (aka Norm) des Vektors f zum Quadrat (linke Seite) ist gleich der Quadratsumme seiner Koordinaten $\widehat{f}(k)$ (rechte Seite).

Der Raum L^2 entsteht als Abschluss der trigonometrischen Polynome: Die Funktionen $e_k(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ bilden eine Hilbert–Basis (J3E), also ein vollständiges Orthonormalsystem für den Raum $L^2([0,T],\mathbb{C})$ mit dem Skalarprodukt $\langle\, f \mid g \,\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \overline{f(t)}\, g(t)\,\mathrm{d}t$, wie oben erklärt.

Alternativ führt folgende Sichtweise und Rechnung ebenfalls zum Ziel: Wie in den folgenden Beispielen gilt Parseval für Rechteckfunktionen. Per Linearkombination gilt Parseval dann für alle Treppenfunktionen. Per Grenzübergang gilt Parseval für alle integrierbaren Funktionen!

Satz von Parseval: die Energiegleichung

Wir können uns f zum Beispiel als ein akustisches Signal vorstellen. Die Fourier–Analyse $f \mapsto \widehat{f}$ zerlegt das Signal f in sein Spektrum $\widehat{f}$. Die Fourier–Synthese $\widehat{f} \mapsto f$ rekonstruiert aus dem Spektrum das ursprüngliche Signal. Dabei geht keinerlei Information verloren!

Anwendung: Aus dem Spektrum können wir Frequenzen leicht ausfiltern, abschwächen oder verstärken. Die Fußball-Weltmeisterschaft 2010 etwa war geprägt vom Brummen der Vuvuzela. Ihre Grundfrequenz liegt bei ca. 230Hz, dazu kommen noch Obertöne. Diese Frequenzen lassen sich gezielt herausfiltern durch (digitale) Fourier–Analyse–Synthese.

Der klare Vorteil: Man kann die störenden Frequenzen gezielt dämpfen; das Getröte ist trotz Filter zwar noch zu hören, doch spürbar gemindert. So kann die Fernsehzuschauer:in den Stadionjubel wieder genießen.

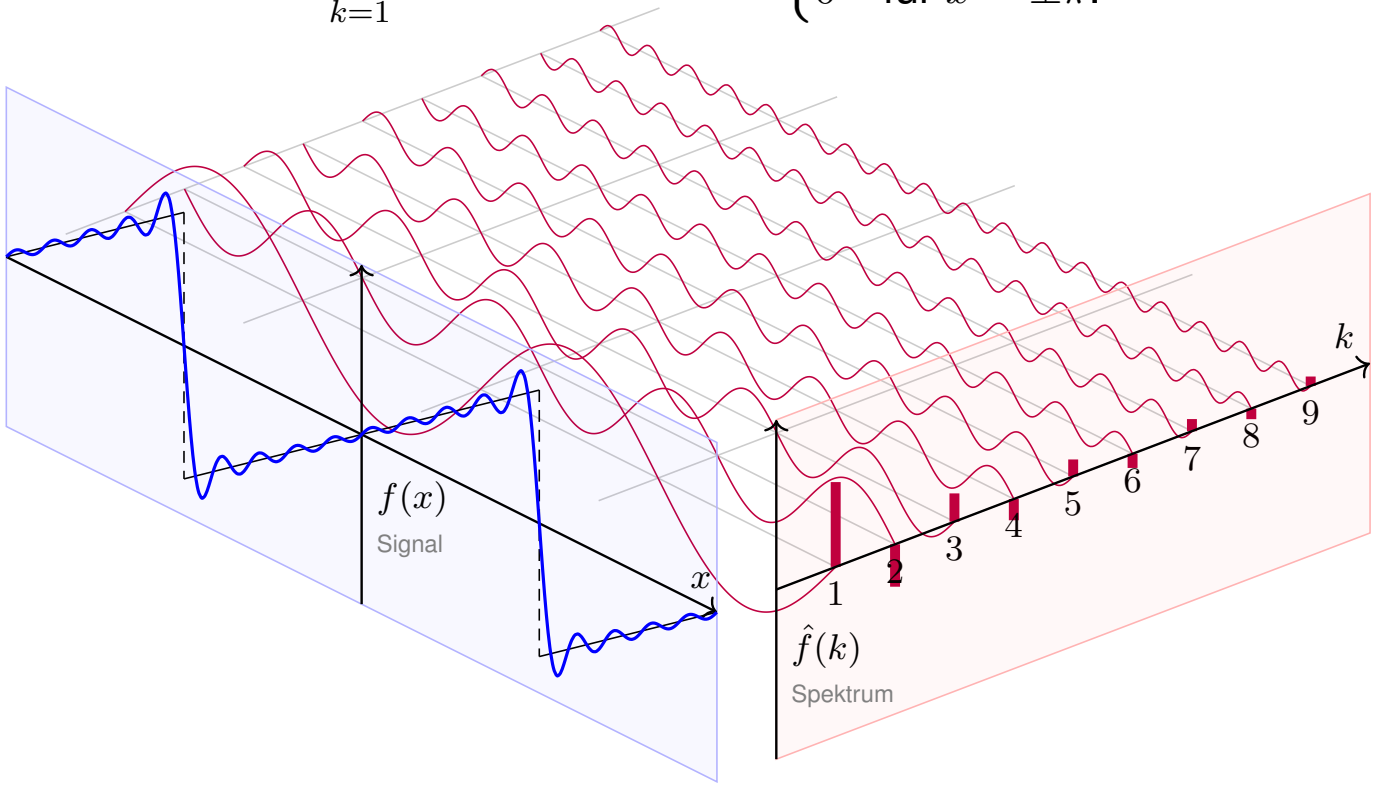
Wieviel Energie geht dem Signal hierdurch verloren? Genau die Energie der herausgefilterten Frequenzen. Ein Jubel für die Energiegleichung!

Energiegleichung der Sägezahnfunktion

J105
Beispiel

Aufgabe: Berechnen Sie beide Seiten der Energiegleichung für

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \sin(kx) = \begin{cases} x & \text{für } -\pi < x < \pi, \\ 0 & \text{für } x = \pm\pi. \end{cases}$$



Energiegleichung der Sägezahnfunktion

J106
Beispiel

Lösung: Wir berechnen beide Seiten der Energiegleichung

$$\frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t \quad \overset{!}{=} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2.$$

Das Integral ergibt:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

Die Reihe ergibt:

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Dies entspricht der bemerkenswerten Gleichung I321

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

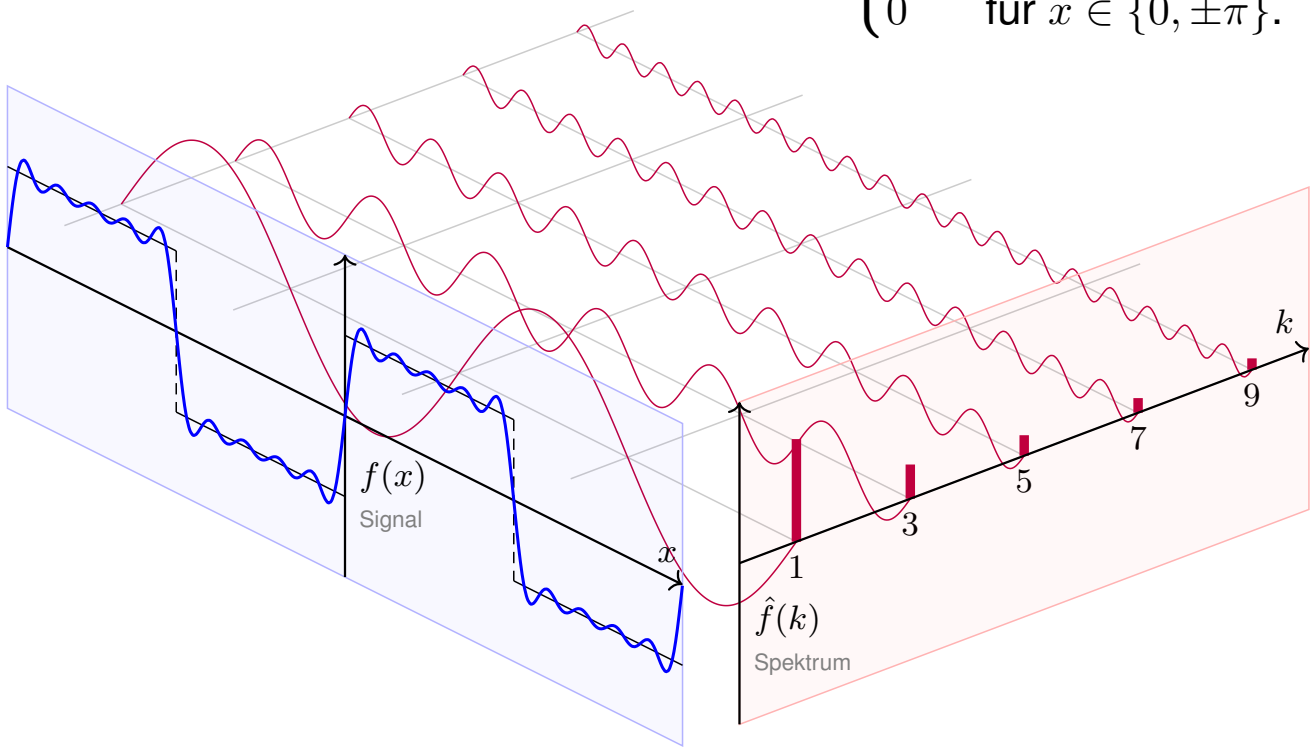
☺ Diese Reihe haben wir im vorigen Kapitel ausgerechnet.

Energiegleichung der Rechteckfunktion

J107
Beispiel

Aufgabe: Berechnen Sie beide Seiten der Energiegleichung für

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots\right] = \begin{cases} +1 & \text{für } 0 < x < \pi, \\ -1 & \text{für } -\pi < x < 0, \\ 0 & \text{für } x \in \{0, \pm\pi\}. \end{cases}$$



Energiegleichung der Rechteckfunktion

J108
Beispiel

Lösung: Wir berechnen beide Seiten der Energiegleichung

$$\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t \quad \overset{!}{=} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2.$$

Das Integral ergibt:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \,\mathrm{d}x = 1$$

Die Reihe ergibt:

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{8}{\pi^2(2j+1)^2}$$

Dies entspricht der bemerkenswerten Gleichung I309

$$\boxed{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.}$$

Diesen Wert können Sie alternativ auch aus $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$ ableiten. Sehen Sie wie?
Hinweis: Sie können die ungeraden und die geraden Terme getrennt summieren und erhalten $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \sum_{j=0}^{\infty} 1/(2j+1)^2 + \sum_{j=1}^{\infty} 1/(2j)^2$, die letzte Reihe ist gleich $\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$.

Die Fourier–Isometrie

Die **quadrat-integrierbaren** Funktionen bilden den $\mathbb{C}$–Vektorraum

$$L^2 = L^2([0,T],\mathbb{C}) := \left\{ f:[0,T]\to\mathbb{C} \;\middle|\; \int_{t=0}^{T} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t < \infty \right\}.$$

Hierauf haben wir als **Skalarprodukt** und **Norm** die Integrale

$$\langle f \mid g \rangle_{L^2} := \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \overline{f(t)}\,g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{und} \quad \|f\|_{L^2}^2 := \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t.$$

Die **quadrat-summierbaren** Folgen bilden den $\mathbb{C}$–Vektorraum

$$\ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}) := \left\{ \widehat{f}:\mathbb{Z}\to\mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 < \infty \right\}.$$

Hierauf haben wir als **Skalarprodukt** und **Norm** die Summen

$$\langle \widehat{f} \mid \widehat{g} \rangle_{\ell^2} := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}(k)}\,\widehat{g}(k) \quad \text{und} \quad \|\widehat{f}\|_{\ell^2}^2 := \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2.$$

Das Produkt ist absolut integrierbar/summierbar dank Cauchy–Schwarz.
☺ Beide Vektorräume L^2 und ℓ^2 scheinen zunächst sehr verschieden.
Die Fourier–Isometrie enthüllt jedoch das Gegenteil: Sie sind isomorph!

Die Fourier–Isometrie

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ abs. integrierbar auf $[0,T]$ und T–periodisch, $\omega = 2\pi/T$.
Die **Fourier–Analyse** zerlegt das Signal f in sein Spektrum $\widehat{f}$:

$$f \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{f}, \quad \widehat{f}(k) := \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}.$$

Es gilt die **Parseval–Gleichung**, auch **Energiegleichung** genannt:

$$\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{\ell^2} \quad \text{also} \quad \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2$$

Dank dieser Gleichung gilt $f \in L^2$ genau dann, wenn $\widehat{f} \in \ell^2$ gilt.
Für $f, g \in L^2$ gilt die **Parseval–Gleichung** zudem für Skalarprodukte:

$$\langle f \mid g \rangle_{L^2} = \langle \widehat{f} \mid \widehat{g} \rangle_{\ell^2} \quad \text{also} \quad \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \overline{f(t)}\,g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}(k)}\,\widehat{g}(k)$$

☺ Diese Beziehungen fassen wir in folgendem Satz zusammen:
Fourier–Analyse und –Synthese sind zueinander inverse Isometrien.

Die Fourier–Isometrie

Satz J1A: Fourier–Isometrie, Fischer–Riesz 1907

Jeder Funktion $f \in L^2$ ordnen wir ihre Fourier–Koeffizienten $\widehat{f} \in \ell^2$ zu:

$$\mathscr{F} \,:\, L^2([0,T],\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}) \,:\, f \mapsto \widehat{f} \text{ mit } \widehat{f}(k) = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Umgekehrt definiert jede Koeffizientenfolge $\widehat{f} \in \ell^2$ eine Funktion $f \in L^2$:

$$\mathscr{F}^{-1} \,:\, \ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}) \to L^2([0,T],\mathbb{C}) \,:\, \widehat{f} \mapsto f \text{ mit } f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}$$

Diese Abbildungen sind $\mathbb{C}$–linear und zueinander inverse Isometrien. Norm und Skalarprodukt bleiben erhalten dank Parseval–Gleichung:

$$\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{\ell^2} \qquad \text{also} \qquad \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2,$$

$$\langle\, f \mid g \,\rangle_{L^2} = \langle\, \widehat{f} \mid \widehat{g} \,\rangle_{\ell^2} \quad \text{also} \quad \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \overline{f(t)}\, g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}(k)}\, \widehat{g}(k).$$

Die Fourier–Isometrie

Diese Fourier–Isometrie ist der Höhepunkt unserer kurzen Einführung zu Fourier–Reihen. Sie perfektioniert die ersehnte Analyse / Synthese:

$$(\mathscr{F}, \mathscr{F}^{-1}) \,:\, L^2([0,T],\mathbb{C}) \;\cong\; \ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}) \,:\, f \leftrightarrow \widehat{f}$$

Diese Beziehung ist höchst erstaunlich und ungemein praktisch:
Aus dem Signal f gewinnen wir das Spektrum $\widehat{f}$ und umgekehrt.

Aus $f \in L^2 \subseteq L^1$ folgt $\widehat{f} \in \ell^2 \subseteq \ell^\infty$ dank Energiegleichung. Umgekehrt: Für $\widehat{f} \in \ell^2 \supseteq \ell^1$ konvergieren die Polynome $f_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}$ in $L^2 \supseteq L^\infty$ gegen eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dank Vollständigkeit von L^2.

Aus der Energiegleichung folgt die allgemeine Parseval–Gleichung.
Damit das Integral einen Sinn hat, muss fg absolut integrierbar sein.
Damit die Reihe einen Sinn hat, muss $\widehat{f}\,\widehat{g}$ absolut summierbar sein.
Beides wird garantiert durch die Cauchy–Schwarz–Ungleichung:

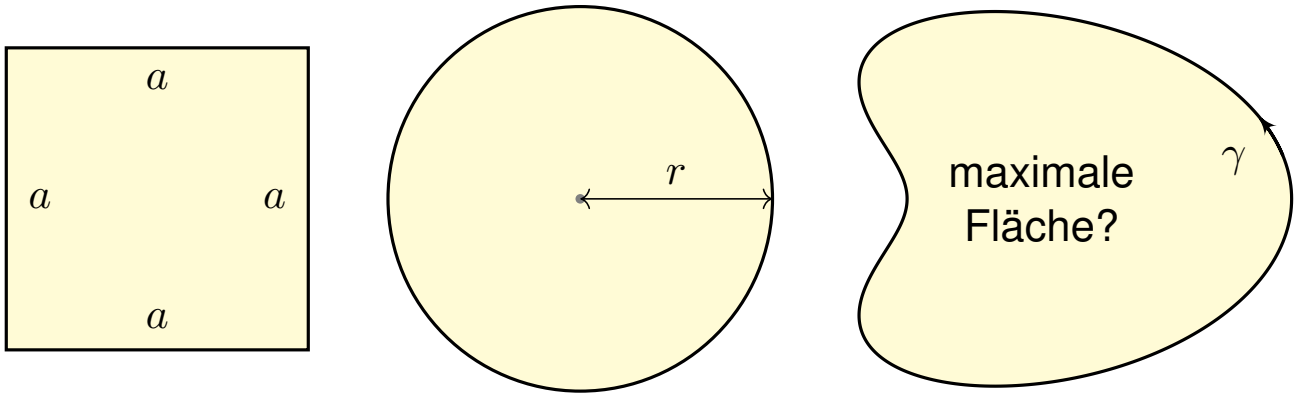
$$\|f \cdot g\|_{L^1} \le \|f\|_{L^2} \cdot \|g\|_{L^2}, \quad \|\widehat{f} \cdot \widehat{g}\|_{\ell^1} \le \|\widehat{f}\|_{\ell^2} \cdot \|\widehat{g}\|_{\ell^2}$$

Ungleichungen und Konvergenzbegriffe werden nachfolgend ausgeführt.
Doch zuerst präsentiere ich eine elegante geometrische Anwendung.

Optimierung: das isoperimetrische Problem

J113
Beispiel

Wieviel Fläche F können Sie mit einem Zaun der Länge L umgrenzen?



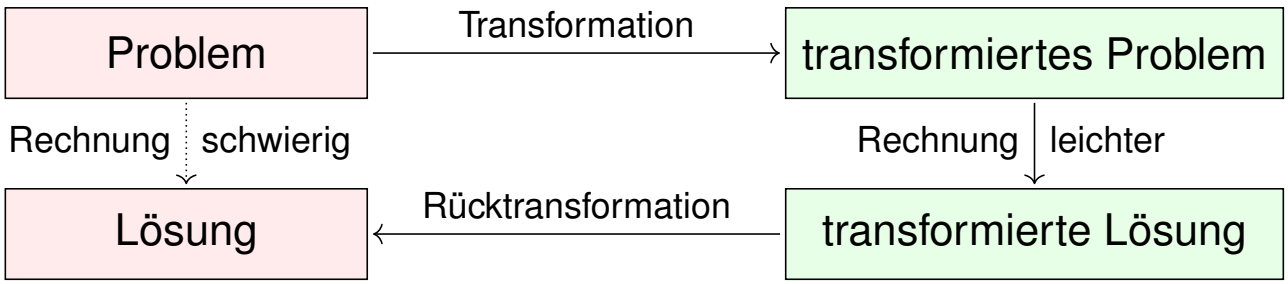
Aufgabe: (0) Wie verhalten sich L, F und F/L^2 bei Streckung um λ?
(1) Welche Fläche $F_\square$ erreichen Sie mit einem Quadrat von Umfang L?
(2) Welche Fläche $F_\bigcirc$ erreichen Sie mit einem Kreis von Umfang L?
(3) Geht noch mehr? Wie sehen optimale Kurven aus?

Lösung: (0) L wächst linear, F quadratisch, F/L^2 bleibt konstant.
(1) Seitenlänge $a = L/4$, Fläche $F_\square = a^2 = L^2/16$. Das ist schon gut.
(2) Radius $r = L/2\pi$, Fläche $F_\bigcirc = \pi r^2 = L^2/4\pi$. Das ist noch besser!

Isoperimetrische Optimierung durch Fourier–Reihen

J114
Beispiel

Wie beschreiben wir einen geschlossenen Weg $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$?
Sei γ' absolut integrierbar mit $\gamma(t) = \gamma(0) + \int_0^t \gamma'(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ und $\gamma(L) = \gamma(0)$.
Wir parametrisieren nach Weglänge, mit konstanter Geschwindigkeit $|\gamma'(t)| = 1$ für alle t. Nach Skalierung können wir $L = 2\pi$ annehmen.
Beispiel: Der Kreis $\gamma(t) = c_0 + c_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ mit $c_0, c_1 \in \mathbb{C}$ und $|c_1| = 1$.
Die umschlossene Fläche ist $F = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im} \int_{t=0}^{2\pi} \overline{\gamma}\,\gamma'\,\mathrm{d}t = \pi$.



Aufgabe: Untersuchen Sie die Fourier–Entwicklung $\gamma(t) = \sum_k c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$:
(1) Entwickeln Sie γ' und berechnen Sie $\sum_k k^2 |c_k|^2$ dank Parseval.
(2) Berechnen Sie die von γ umschlossene Fläche F mit Green.
(3) Gilt immer $F \le \pi$? (4) Für welche Kurven gilt Gleichheit?

Isoperimetrische Optimierung durch Fourier–Reihen

J115
Beispiel

(1) Wir entwickeln $\gamma, \gamma' : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ in ihre Fourier–Reihen

$$\gamma(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} \quad \text{und} \quad \gamma'(t) \sim \sum_{k\neq 0} \mathrm{i}k \, c_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}.$$

Wir lesen diese Beziehung von rechts nach links als Integration (I3A). Dank Energiegleichung und Parametrisierung nach Weglänge folgt:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 |c_k|^2 \overset{(E)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \underbrace{|\gamma'(t)|^2}_{=\,1} \, \mathrm{d}t = 1$$

(2) Die umschlossene Fläche berechnen wir mit Green und Parseval:

$$F \overset{(G)}{=} \frac{1}{2} \int_{t=0}^{2\pi} \gamma_1 \gamma_2' - \gamma_2 \gamma_1' \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_{t=0}^{2\pi} \mathrm{Im}\Big[(\gamma_1 - \mathrm{i}\gamma_2)(\gamma_1' + \mathrm{i}\gamma_2')\Big] \, \mathrm{d}t$$

$$= \pi \, \mathrm{Im}\left[\frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \overline{\gamma} \, \gamma' \, \mathrm{d}t\right] \overset{(P)}{=} \pi \, \mathrm{Im}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{c_k} \cdot \mathrm{i}kc_k\right] = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} k \, |c_k|^2$$

Gleichung (G) ist die Greensche Formel E209 für den Flächeninhalt.

Isoperimetrische Optimierung durch Fourier–Reihen

J116
Beispiel

(3) Wir vergleichen unsere Fläche F mit der Kreisfläche π:

$$|F| \overset{(2)}{=} \left|\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} k \, |c_k|^2\right| \leq \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k| \cdot |c_k|^2 \quad \text{und} \quad \pi \overset{(1)}{=} \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 \cdot |c_k|^2$$

Die erste Reihe ist termweise kleiner-gleich der zweiten:

$$|F| - \pi \leq \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{(|k| - k^2)}_{\leq\, 0} |c_k|^2 \leq 0.$$

Also gilt $|F| \leq \pi$: Die Kreisfläche kann nicht übertroffen werden!

(4) Gleichheit gilt nur, wenn $c_k = 0$ für alle $k \notin \{-1, 0, 1\}$. Also

$$\gamma(t) = c_{-1} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} + c_0 + c_1 \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \quad \text{mit} \quad |c_1|^2 + |c_{-1}|^2 \overset{(1)}{=} 1.$$

Aus $F = +\pi$ folgt $|c_1|^2 - |c_{-1}|^2 \overset{(2)}{=} +1$, also $|c_1| = 1$ und $|c_{-1}| = 0$.
Aus $F = -\pi$ folgt $|c_1|^2 - |c_{-1}|^2 \overset{(2)}{=} -1$, also $|c_1| = 0$ und $|c_{-1}| = 1$.

☺ Das heißt, nur Kreise $\gamma(t) = c_0 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha \pm t)}$ maximieren die Fläche!
Alle anderen Kurven umschließen strikt kleineren Flächeninhalt.

Lösung des isoperimetrischen Problems

Das isoperimetrische Problem ist eine klassische Optimierungsaufgabe:
Wieviel Fläche F können Sie mit einem Zaun der Länge L umgrenzen?
Die Lösung mit Fourier–Reihen grenzt an Zauberei! Was passiert hier?

Nach ersten Beispielen wollen wir *alle* Möglichkeiten erkunden.
Wir wollen alle periodischen Funktionen $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ untersuchen
und zu gegebenem Umfang L die größtmögliche Fläche F finden.

Der Raum aller Funktionen ist allerdings sehr unübersichtlich.
Die Fourier–Isometrie übersetzt dies in ein Problem über Reihen.
Dieses ist wesentlich übersichtlicher und kann leicht gelöst werden.

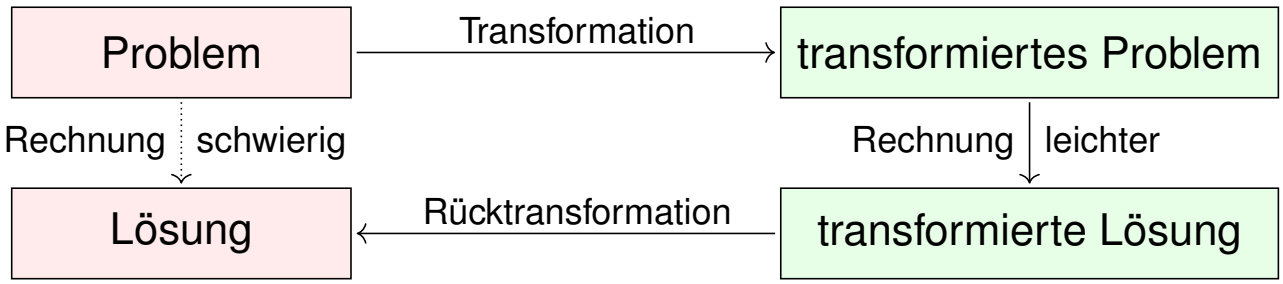
Dabei haben wir die Fourier–Isometrie voll ausgenutzt:
Die Übersetzung bewahrt alle wesentlichen Informationen!

Dieses schöne Ergebnis bildet eine würdige Illustration:
Transformation zur Vereinfachung ist durchaus typisch.

☺ Darum geht es in Mathematik und Wissenschaft allgemein:
Zusammenhänge verstehen und geeignete Werkzeuge entwickeln,
um damit konkrete Probleme zu lösen, effizient, sicher, korrekt.

Die isoperimetrische Ungleichung

Wieviel Fläche F können Sie mit einem Zaun der Länge L umgrenzen?
☺ Fourier transformiert ein schwieriges Problem in ein leichtes!



☺ Wir haben so den Beweis von Hurwitz (1902) nachgerechnet:

Satz J1B: isoperimetrische Ungleichung

Sei $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ ein geschlossener Weg, also $\gamma(0) = \gamma(L)$.
Zudem sei γ stückweise stetig differenzierbar und habe Länge L.

Für den umschlossenen Flächeninhalt F gilt immer $F \leq F_{\bigcirc} = L^2/4\pi$.
Gleichheit gilt nur, wenn γ einen Kreis vom Umfang L beschreibt.

Das ist anschaulich plausibel und nun auch nachvollziehbar bewiesen!

Die isoperimetrische Ungleichung

Ein klassisches Optimierungsproblem:
Der Legende nach wurde Karthago gegründet durch die phönizische Königin Elissa, römisch Dido genannt. Der lokale Herrscher versprach ihr dazu so viel Land, wie sie mit einer Kuhhaut umspannen könne. Diese schnitt Dido in dünne Streifen der Gesamtlänge ℓ und maß die Grenze des zukünftigen Karthago ab, das auf einer Seite durch die gerade Mittelmeerküste begrenzt wird.

Aufgabe: (1) Welche Kurve wählt Dido, um die Fläche zu maximieren?
(2) Und wenn zwei Küstenpunkte der Stadtgrenze vorgegeben sind?
☺ Intuition ist gut, aber vage. Schlüssige Argumente sind besser.

(1) Wir betrachten die Fläche, die von einer Geraden G und einem Weg γ der Länge ℓ begrenzt wird. Durch Spiegelung an G erweitern wir γ zu einem geschlossenen Weg. Dabei verdoppeln sich die Länge und der umschlossene Flächeninhalt. Nach der isoperimetrischen Ungleichung folgt $2F \leq (2\ell)^2/(4\pi)$, also $F \leq \ell^2/(2\pi)$. Nur für einen Halbkreis erhalten wir Gleichheit.

(2) Wir fixieren zwei Punkte A und B mit Abstand $< \ell$ auf der Geraden G und verlangen, dass γ von A nach B läuft. Sei Γ der Kreisbogen der Länge ℓ von A nach B. Wir vergleichen den von γ und Γ umschlossenen Flächeninhalt, jeweils ergänzt durch den fehlenden Kreisbogen jenseits G. Die isoperimetrische Ungleichung besagt, dass der Flächeninhalt genau für $\gamma = \Gamma$ maximal ist.

Die isoperimetrische Ungleichung

Wer Freude am Knobeln hat, mag vielleicht folgende Varianten untersuchen: Sie verfügen über einen Zaun der Länge L, entweder starr (ein Geradensegment) oder flexibel (eine stückweise stetig differenzierbare Kurve). In einem großen rechteckigen Garten möchten Sie einen Bereich für Ihre Kaninchen einzäunen. Welche Fläche ist hier höchstens möglich? Welche Zaunkurve maximiert die Fläche? Was gilt für einen kreisförmigen Garten? Was gilt für ein parabelförmig auslaufendes Ende des Gartens? Machen Sie sich Skizzen und argumentieren Sie umsichtig!

Zum Ausklang nenne ich noch ein einfaches, aber erhellendes Zahlenbeispiel. Es ist eine schöne, leichte Aufgabe, doch sie erfordert geometrischen Sachverstand und quantitativen Vergleich. Mit den nützlichen Werkzeugen Ihrer Vorlesung zur HM3 gelingt Ihnen die Lösung nun leicht:

Aufgabe: (nach einer Klausuraufgabe vom Februar 2012)
(1) Können Sie mit $12\mathrm{m}$ Zaun eine Fläche von $12\mathrm{m}^2$ umschließen?
(2) Können Sie mit $13\mathrm{m}$ Zaun eine Fläche von $13\mathrm{m}^2$ umschließen?

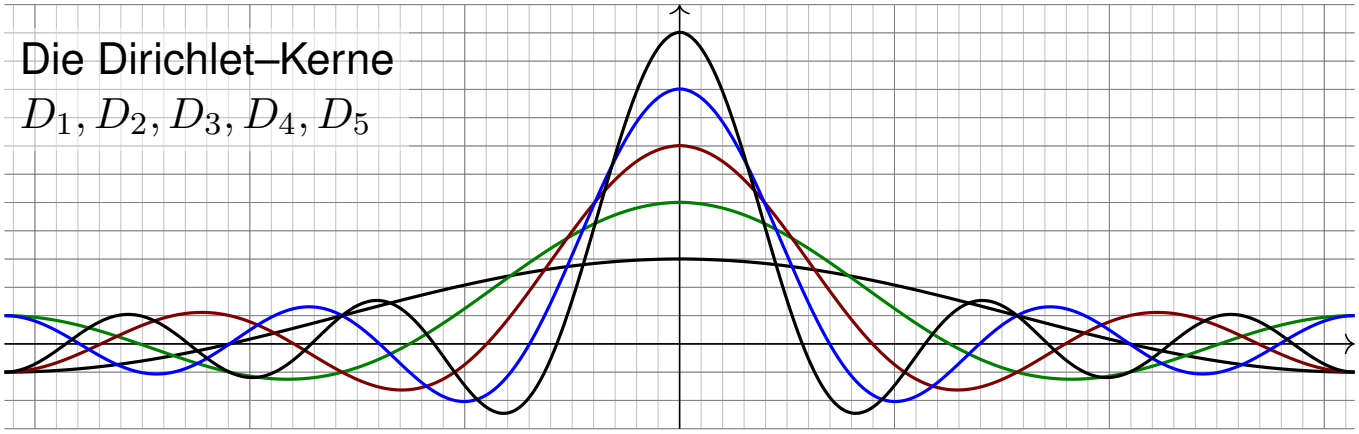
Lösung: Wir wissen, dass der Kreis den Flächeninhalt F maximiert:

$$F \leq F_{\bigcirc} = L^2/4\pi, \quad \text{und Gleichheit gilt nur für den Kreis (J1B).}$$

(1) Für $L = 12$ finden wir $F_{\bigcirc} = L^2/4\pi < 12$. (Es gilt $12 < 4\pi < 13$.)
(2) Für $L = 13$ erreicht der Kreis die Fläche $F_{\bigcirc} = L^2/4\pi > 13$.

Beweis des Dirichlet–Kriteriums

Der Satz von Dirichlet I2A ist der Grundstein der Fourier–Reihen.
Wir rechnen ihn nun geduldig nach. Nur für Unerschrockene!



Aufgabe: (1) Rechnen Sie die Formel für den **Dirichlet–Kern** nach:

$$D_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \;=\; 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) \;=\; \frac{\sin\big((n+1/2)x\big)}{\sin(x/2)}$$

(2) Für das n-te Fourier–Polynom von f folgt die **Faltungsformel**:

$$f_n(x) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(x-t)\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\, D_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Beweis des Dirichlet–Kriteriums

Lösung: (1) Wir nutzen die geometrische Reihe für $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$:

$$(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x/2} - \mathrm{e}^{+\mathrm{i}x/2}) \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \;=\; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1/2)x} - \mathrm{e}^{+\mathrm{i}(n+1/2)x}$$

$$D_n(x) \;=\; \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1/2)x} - \mathrm{e}^{+\mathrm{i}(n+1/2)x}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x/2} - \mathrm{e}^{+\mathrm{i}x/2}} \;=\; \frac{\sin\big((n+1/2)x\big)}{\sin(x/2)}$$

(2) Das n-te Fourier–Polynom von f ist definiert durch

$$f_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} c_k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \quad \text{mit den Koeffizienten} \quad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Wir setzen ein und fassen dank Linearität zusammen:

$$2\pi f_n(x) \overset{\text{Def}}{=} \sum_{k=-n}^{n} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} f(t)\,\mathrm{d}t\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \overset{\text{Lin}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-t)}\right] \mathrm{d}t$$

$$\overset{\text{Def}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(x-t)\,\mathrm{d}t \qquad \overset{\text{Subs}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-s)\, D_n(s)\,\mathrm{d}s$$

Beweis des Dirichlet–Kriteriums

Satz J2A: Konvergenz in einem vorgegebenen Punkt

Angenommen, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ erfüllt die Dirichlet–Bedingung im Punkt x, d.h. beide Grenzwerte $f(x\pm)$ und beide Ableitungen $f'(x\pm)$ existieren.

Dann konvergiert im Punkt x die Fourier–Reihe $f_n(x)$ gemäß

$$\boxed{f_n(x) = \sum\nolimits_{k=-n}^{n} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \;\to\; \frac{1}{2}\Big[f(x+)+f(x-)\Big] \quad \text{für } n\to\infty.}$$

Beweis: Dank unserer obigen Vorbereitungen (1) und (2) wissen wir:

$$f_n(x) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,D_n(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)}{\sin(t/2)}\sin\big((n+\tfrac{1}{2})t\big)\,\mathrm{d}t$$

Die Konvergenz für $n\to\infty$ beweisen wir durch folgende Grenzwerte:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x+t)\,D_n(t)\,\mathrm{d}t \quad &\to \quad \frac{1}{2}f(x-),\\
\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+t)\,D_n(t)\,\mathrm{d}t \quad &\to \quad \frac{1}{2}f(x+).
\end{aligned}$$

Beweis des Dirichlet–Kriteriums

Wir zeigen den rechten Grenzwert. Hierzu nutzen wir die Funktion

$$g\,:\,[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}\,:\,t\mapsto\begin{cases}\frac{f(x+t)-f(x+)}{\sin(t/2)} & \text{für } 0<t\le\pi,\\ 0 & \text{für } -\pi\le t\le 0.\end{cases}$$

Für $t\searrow 0$ gilt $g(t)\to 2f'(x+)$. Demnach ist mit f auch g integrierbar.
Für $D_n(t)=1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)$ gilt $\int_{-\pi}^{0}D_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}D_n(t)\,\mathrm{d}t=\pi$.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{\pi} f(x+t)\,D_n(t)\,\mathrm{d}t \;-\; \frac{1}{2}f(x+)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{\pi}\big[f(x+t)-f(x+)\big]D_n(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{\pi}\frac{f(x+t)-f(x+)}{\sin(t/2)}\sin\big((n+\tfrac{1}{2})t\big)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin\big((n+\tfrac{1}{2})t\big)\,\mathrm{d}t \quad\to 0 \quad \text{für } n\to\infty
\end{aligned}$$

Der letzte Grenzwert ist das Riemann–Lebesgue–Lemma I3B.

Beweis des Dirichlet–Kriteriums

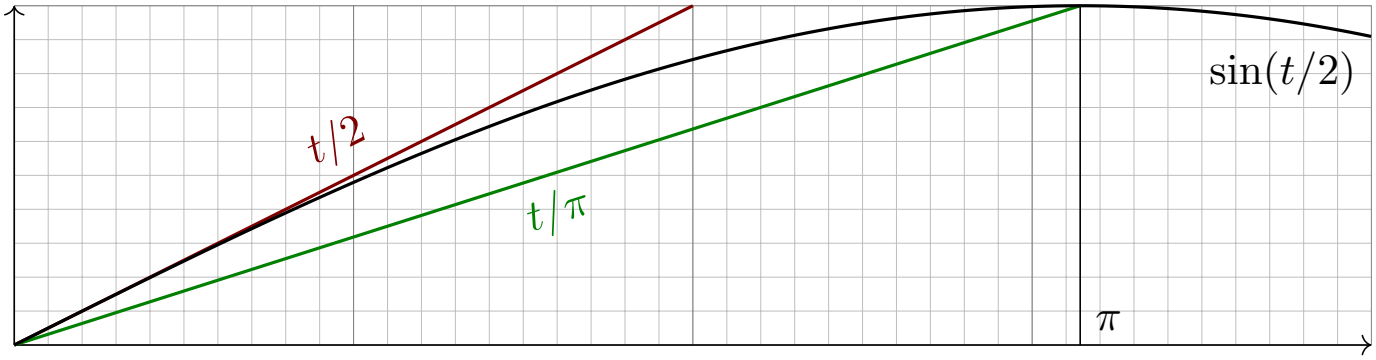
Aufgabe: (3) Zeigen Sie für $0 \le t \le s \le \pi$ die Ungleichungen

$$\frac{t}{\pi} \le \sin\left(\frac{t}{2}\right) \le \frac{t}{2} \quad \text{und} \quad \frac{t}{\sin(t/2)} \le \frac{s}{\sin(s/2)}$$

(4) Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ absolut stetig mit $f(0) = 0$ und $|f'| \le L$.
Zeigen Sie für $f(t)$ und $g(t) = f(t)/\sin(t/2)$ die Schranken

$$|f(t)| \le Lt, \qquad |g(t)| \le L\pi, \qquad |g'(t)| \le \frac{4L}{t}.$$

Lösung: (3) Kurvendiskussion: $\sin(t/2)$ ist konkav auf $[0, \pi]$.



Beweis des Dirichlet–Kriteriums

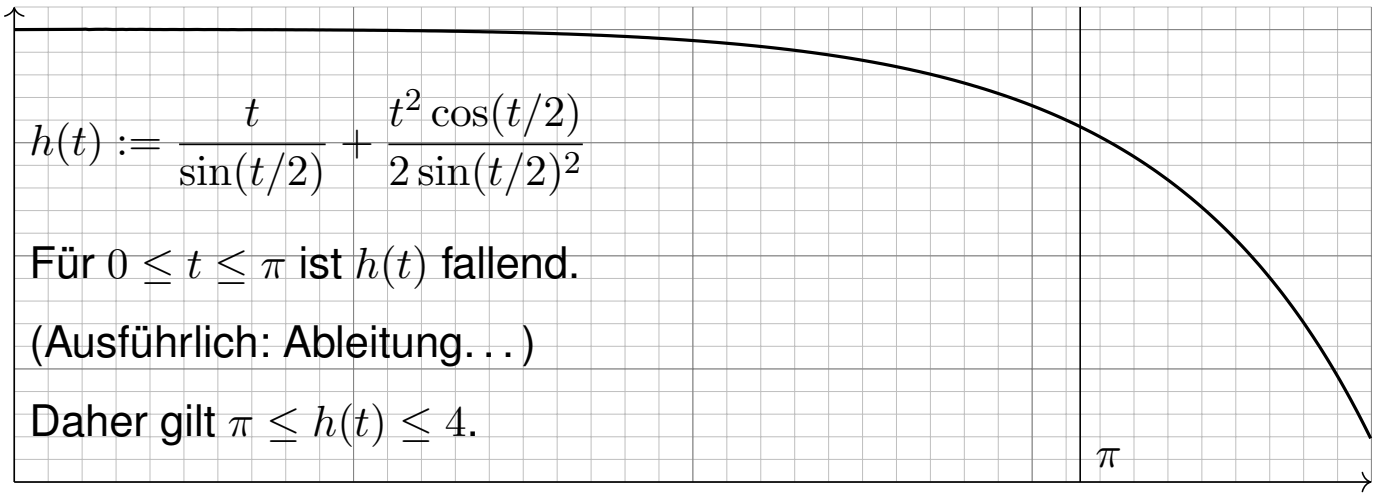
(4) Mit $f(0) = 0$ und $|f'| \le L$ gilt

$$|f(t)| = \left|\int_{\tau=0}^{t} f'(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right| \le \int_{\tau=0}^{t} \left|f'(\tau)\right|\,\mathrm{d}\tau \le \int_{\tau=0}^{t} L\,\mathrm{d}\tau = Lt,$$

$$|g(t)| = \left|\frac{f(t)}{\sin(t/2)}\right| = \frac{|f(t)|}{|\sin(t/2)|} \le \frac{Lt}{\sin(t/2)} \le \frac{Ls}{\sin(s/2)} \le L\pi,$$

$$|g'(t)| = \left|\frac{f'(t)}{\sin(t/2)} - \frac{f(t)\cos(t/2)/2}{\sin(t/2)^2}\right| \le \frac{L}{\sin(t/2)} + \frac{Lt\cos(t/2)}{2\sin(t/2)^2} \le \frac{4L}{t}.$$

Die letzte Ungleichung erhalten wir durch eine Kurvendiskussion:



$$h(t) := \frac{t}{\sin(t/2)} + \frac{t^2\cos(t/2)}{2\sin(t/2)^2}$$

Für $0 \le t \le \pi$ ist $h(t)$ fallend.

(Ausführlich: Ableitung. . .)

Daher gilt $\pi \le h(t) \le 4$.

Beweis des Dirichlet–Kriteriums

Satz J2B: gleichmäßige Konvergenz mit Fehlerschranke

Die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ sei periodisch und absolut stetig mit $|f'|\le L$. Dann konvergieren die Fourier–Polynome f_n gleichmäßig gegen f: Für alle $x\in\mathbb{R}$ und $n\ge 7$ gilt die explizite Fehlerschranke

$$\boxed{\big|f_n(x)-f(x)\big| \quad\le\quad 2L\cdot\ln(n)/n \quad\to 0 \quad \text{für} \quad n\to\infty}$$

Beweis: Nach Verschiebung dürfen wir $x=0$ und $f(x)=0$ annehmen. Dank unserer obigen Vorbereitungen (1) und (2) wissen wir:

$$f_n(0) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(t)}{\sin(t/2)}\sin\big((n+\tfrac12)t\big)\,\mathrm{d}t$$

Wir zerlegen dies in $\int_{-\pi}^{-\varepsilon}+\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{\pi}$ für $\varepsilon=\pi/(2n+1)$. Dank (4) gilt:

$$\int_0^{\varepsilon}\left|\frac{f(t)}{\sin(t/2)}\right|\sin\big((n+\tfrac12)t\big)\,\mathrm{d}t \;\le\; \frac{L\,\varepsilon}{\sin(\varepsilon/2)}\int_0^{\varepsilon}\sin\big((n+\tfrac12)t\big)\,\mathrm{d}t$$

$$=\;\frac{L\,\varepsilon}{\sin(\varepsilon/2)}\cdot\left[-\frac{\cos\big((n+\frac12)t\big)}{n+\frac12}\right]_0^{\varepsilon} \;=\; \frac{L}{2n+1}\cdot\frac{2\pi/(2n+1)}{\sin(\pi/(4n+2))}$$

Beweis des Dirichlet–Kriteriums

Für $\int_{-\varepsilon}^{0}$ gilt dieselbe Schranke. Für $\int_{\varepsilon}^{\pi}$ nutzen wir partielle Integration:

$$\int_{\varepsilon}^{\pi} f(t)D_n(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{f(t)}{\sin(t/2)}\sin\big((n+\tfrac12)t\big)\,\mathrm{d}t$$

$$=\;\left[-\frac{f(t)}{\sin(t/2)}\frac{\cos\big((n+\frac12)t\big)}{n+\frac12}\right]_{\varepsilon}^{\pi}+\int_{\varepsilon}^{\pi}\left[\frac{f(t)}{\sin(t/2)}\right]'\frac{\cos\big((n+\frac12)t\big)}{n+\frac12}\,\mathrm{d}t$$

Für $\varepsilon=\pi/(2n+1)$ verschwindet die Auswertung $[\ldots]_{\varepsilon}^{\pi}$. Mit (4) bleibt:

$$\left|\int_{\varepsilon}^{\pi} f(t)D_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \;\le\; \int_{\varepsilon}^{\pi}\left|\left[\frac{f(t)}{\sin(t/2)}\right]'\right|\cdot\frac{1}{n+\frac12}\,\mathrm{d}t$$

$$\le\;\frac{2}{2n+1}\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{4L}{t}\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{8L}{2n+1}\Big[\ln\pi-\ln\varepsilon\Big] \;=\; \frac{8L}{2n+1}\ln(2n+1)$$

Für $\int_{-\pi}^{-\varepsilon}$ gilt dieselbe Schranke. Für den Gesamtfehler erhalten wir:

$$\big|f_n(x)-f(x)\big|\le\frac{L}{2n+1}\left[\frac{2/(2n+1)}{\sin(\pi/(4n+2))}+\frac{8}{\pi}\ln(2n+1)\right]\le 2L\cdot\frac{\ln n}{n}$$

Die letzte Ungleichung gilt für $n\ge 7$, erneut dank Kurvendiskussion.

Gleichmäßige Approximation nach Fejér

☺ Die Fourier–Polynome f_n zu f sind die L^2–Bestapproximation. J310

☺ Das Dirichlet–Kriterium J2A / I2A sichert punktweise Konvergenz.

☺ Ist f absolut stetig mit $|f'| \le L$, so gilt gleichmäßige Konvergenz auf ganz $\mathbb{R}$ gemäß $|f_n - f| \le 2L \cdot \ln(n)/n \to 0$ für $n \to \infty$, siehe J2B / I2A.

☹ Ohne Differenzierbarkeit geht's nicht: Es gibt stetige Funktionen f, deren Fourier–Reihe $f_n(x)$ in allen Punkten $x \in \mathbb{Q}$ divergiert. J218

Geniale Lösung: Lipót Fejér nutzte statt f_n das arithmetische Mittel

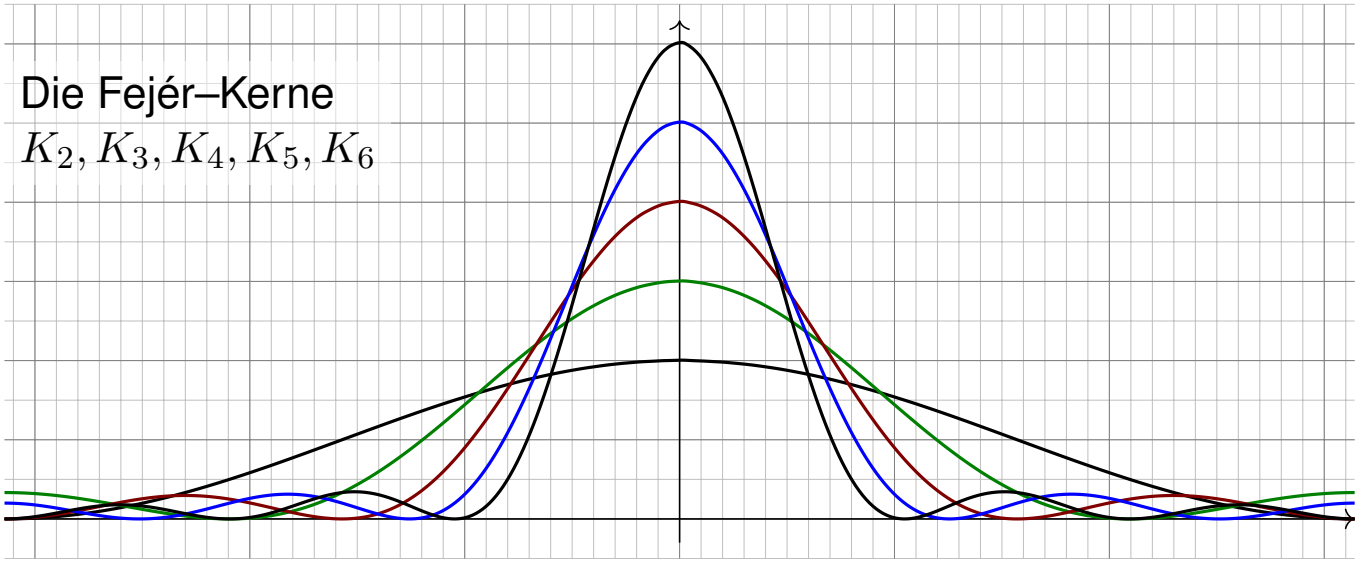
$$f_n^* := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_n = \sum_{k=-n}^{n} \frac{n-|k|}{n}\, c_k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}.$$

☺ Diese Gewichtung dämpft Oszillationen und konvergiert immer:

Satz J2C: Gleichmäßige Approximation, Fejér 1911

Vorgelegt sei eine beliebige stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ von Periode T. Die Fejér–Polynome f_n^* konvergieren gleichmäßig gegen f, das heißt: Der maximale Abstand wird beliebig klein, $\max|f_n^* - f| \to 0$ für $n \to \infty$.

Gleichmäßige Approximation nach Fejér



Aufgabe: (1) Berechnen Sie **Dirichlet–Kern** und **Fejér–Kern**:

$$D_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \quad \text{und} \quad K_n(x) := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x)$$

(2) Für das n-te Fejér–Polynom von f folgt die **Faltungsformel**:

$$f_n^*(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, K_n(x-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\, K_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Gleichmäßige Approximation nach Fejér

Lösung: (1) Wir kennen bereits die Dirichlet–Kerne J201:

$$D_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1/2)x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1/2)x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x/2}} = \frac{\sin\big((n+1/2)x\big)}{\sin(x/2)}$$

Aufsummieren führt uns glücklich zu einer Teleskopsumme:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+1/2)x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k+1/2)x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x/2}} \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x/2}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x/2}} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+1)x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k+1)x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x/2})^2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} - 2 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}}{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x/2})^2} = \frac{\sin(nx/2)^2}{\sin(x/2)^2} = \frac{1-\cos(nx)}{1-\cos(x)}\end{aligned}$$

☺ Beide Kerne sind normiert: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$.
Anders als der Dirichlet–Kern D_n erfüllt der Fejér–Kern zudem $K_n \geq 0$.

Gleichmäßige Approximation nach Fejér

(2) Das n-te Fourier–Polynom von f ist definiert durch

$$f_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \quad \text{mit den Koeffizienten} \quad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Wir setzen ein und fassen dank Linearität zusammen J201:

$$f_n(x) \overset{\text{Lin}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,D_n(x-t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{Subs}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-s)\,D_n(s)\,\mathrm{d}s$$

Das n-te Fejér–Polynom von f ist das arithmetische Mittel:

$$\begin{aligned}f_n^*(x) &\overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_k(x) \overset{\text{Lin}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x-t)\right]\mathrm{d}t \\ &\overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,K_n(x-t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{Subs}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-s)\,K_n(s)\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

☺ Diese Integraldarstellung nutzen wir nun zur Fehlerabschätzung.

Gleichmäßige Approximation nach Fejér

Beweis des Approximationssatzes von Fejér:
Der Fejér–Kern erfüllt $K_n \geq 0$ und $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Zudem gilt:

$$0 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi} K_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{t=\delta}^{\pi} \frac{\sin(nt/2)^2}{n\sin(t/2)^2}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{\pi}\int_{t=\delta}^{\pi} \frac{1}{n(t/\pi)^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{n}\int_{t=\delta}^{\pi} \frac{\pi}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\Big[-\frac{\pi}{t}\Big]_{t=\delta}^{\pi} = \frac{1}{n}\Big[\frac{\pi}{\delta}-1\Big] < \frac{\pi}{n\delta} \quad \searrow 0 \quad \text{für } n\to\infty$$

Das bedeutet, die Gesamtmasse 1 konzentriert sich um 0.

Wir müssen nur noch das Verhalten für $|t| < \delta$ kontrollieren.
Hierzu genügt uns die vorausgesetzte Stetigkeit der Funktion f.

Dank Kompaktheit des Periodenintervalls $[-\pi,\pi]$ ist die Funktion f sogar gleichmäßig stetig: Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert ein $\delta \in \,]0,\pi[$ so, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ und $|t| < \delta$ die Schranke $|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon/2$ gilt.

Damit erhalten wir mühelos folgende Schranke:

$$0 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\delta} \big|f(x-t)-f(x)\big|\,K_n(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\delta} \frac{\varepsilon}{2}\,K_n(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Gleichmäßige Approximation nach Fejér

Nach diesen länglichen, aber elementaren Vorbereitungen können wir nun den Approximationsfehler der Fejér–Polynome f_n^* abschätzen:

$$\begin{aligned}
\big|f_n^*(x) - f(x)\big| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big[f(x-t)-f(x)\big]\,K_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big|f(x-t)-f(x)\big|\,K_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\delta}\frac{\varepsilon}{2}\,K_n(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi} 2\max|f|\,K_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2\pi\max|f|}{n\delta} \quad < \quad \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \geq \frac{4\pi}{\varepsilon\delta}\max|f|
\end{aligned}$$

Ausführlich gesagt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ die gleichmäßige Fehlerschranke $|f_n^* - f| \leq \varepsilon$ gilt.

Das beweist die Aussage des Satzes: Die Fejér–Polynome f_n^* konvergieren gleichmäßig gegen die vorgegebene Funktion f.

☺ Die Konvergenz kann sehr langsam sein, aber sie gilt immer!
Je glatter die Funktion f, desto schneller die Konvergenz.

Gleichmäßige Approximation nach Fejér

Ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ absolut stetig mit $|f'|\le L$, so wissen wir I216:

$$\big|f_n(x)-f(x)\big| \quad < \quad 2L\cdot\ln(n)/n \quad \to 0 \quad \text{für} \quad n\to\infty$$

Aufgabe: Die Fejér–Polynome konvergieren ebenso schnell:

$$\big|f_n^*(x)-f(x)\big| \quad < \quad 4L\cdot\ln(n)/n \quad \to 0 \quad \text{für} \quad n\to\infty$$

Lösung: Wir führen die Rechnung des vorigen Beweises fort:

$$\begin{aligned}
\big|f_n^*(x)-f(x)\big| \;&\le\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big|f(x-t)-f(x)\big|\,K_n(t)\,\mathrm{d}t\\
\le\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}L|t|\,K_n(t)\,\mathrm{d}t \;&\le\; \frac{L}{\pi}\int_0^{\pi}t\,\frac{\sin(nt/2)^2}{n\sin(t/2)^2}\,\mathrm{d}t\\
\le\; \frac{L}{\pi}\int_0^{\delta}t\cdot 4n\,\mathrm{d}t+\frac{L}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\frac{t}{n(t/\pi)^2}\,\mathrm{d}t \;&=\; \frac{Ln}{\pi}2\delta^2+\frac{L\pi}{n}(\ln\pi-\ln\delta)\\
=\; \frac{L}{n}\Big[\frac{\pi}{2}+\pi(\ln 2+\ln n)\Big] \;&<\; 4L\frac{\ln n}{n} \quad \text{(Skizze!)}
\end{aligned}$$

In der letzten Zeile setzen wir $\delta=\pi/2n$ und verlangen $n\ge 80$.
(Die Konstante 4 lässt sich noch verbessern, das ist aber mühsam.)

Gleichmäßige Approximation nach Fejér

☺ Fejérs Trick lässt sich allgemein zur Summation anwenden:
Für schwach divergente Reihen wird damit Konvergenz erzwungen!

Für $a_k\in\mathbb{C}$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}a_k$ gegen s, kurz $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=s$, wenn die Folge der Partialsummen $s_n=\sum_{k=0}^{n}a_k$ gegen s konvergiert.

Dann konvergieren auch die Mittelwerte $s_n^*=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}s_k$ gegen s, etwas langsamer, aber Konvergenz und Grenzwert sind dieselben.

Umgekehrt kann aber s_n^* konvergieren, selbst wenn s_n divergiert:

Aufgabe: Wir betrachten $a_k=(-1)^k(k+1)^c$. Für welche $c\in\mathbb{R}$ konvergiert die Folge s_n? und s_n^*. Was passiert speziell für $c=0$?

Lösung: Für $c=0$ divergiert die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}=(1,0,1,0,1,0,\dots)$.
Hingegen konvergiert die Folge $(s_n^*)_{n\in\mathbb{N}}=(\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{2}{4},\frac{3}{5},\frac{3}{6},\dots)\to\frac{1}{2}$.
Die Folge s_n konvergiert für $c<0$ dank Leibniz (Satz B3G) und divergiert für $c\ge 0$ dank Cauchy. Die Folge s_n^* konvergiert für $c\le 0$ wie gesehen.

Aufgabe: Für jede stetige Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ garantiert Fejérs Satz:
Falls die Fourier–Reihe $f_n(x)$ im Punkt x konvergiert, dann gegen $f(x)$.

Lösung: Aus $f_n(x)\to s$ folgt $f(x)=\lim f_n^*(x)=\lim f_n(x)=s$.

Wann gilt punktweise Konvergenz fast überall?

In unseren (noch sehr bescheidenen) Beispielen sind wir von einer (harmlosen) Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ ausgegangen und haben eine (harmlose) Fourier–Reihe $f \sim \sum c_k e_k$ erhalten. Wenn wir diese Reihe nun in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ auswerten, so erhalten wir $f(x) = \sum c_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ für fast jedes $x \in \mathbb{R}$. Das ist eine wichtige und nützliche Eigenschaft!

☺ Dies gilt insbesondere für jede stückweise stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion f dank des Dirichlet–Kriteriums I2A.

⚠ Die Konvergenz einer Fourier–Reihe müssen wir jeweils prüfen. Punktweise Konvergenz ist keineswegs selbstverständlich:

Satz J2D: Kolmogorov 1923

Es gibt integrierbare Funktionen $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, d.h. $\int_{x=0}^{2\pi} |f(x)| \, \mathrm{d}x < \infty$, deren Fourier–Reihe $\sum_k c_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ divergiert.

Diese Frage war lange offen, und Kolmogorovs Antwort kam als Schock. Dieser Satz dient uns hier nur als Warnung vor naiven Trugschlüssen. Solche Beispiele sind eher exotisch, wie uns folgender Satz versichert.

Wann gilt punktweise Konvergenz fast überall?

Punktweise Konvergenz ist keineswegs selbstverständlich, aber…
☺ Ein klein wenig mehr als Integrierbarkeit genügt fast überall:

Satz J2E: Carleson 1966, Hunt 1968

Gilt $\int_{x=0}^{2\pi} |f(x)|^p \, \mathrm{d}x < \infty$ für ein $p > 1$, so konvergiert die Fourier–Reihe fast überall gegen f, d.h. in allen $x \in \mathbb{R} \smallsetminus N$ außer einer Nullmenge N.

☺ Dies gilt insbesondere für jede stetige Funktion. Die Konvergenz in einem vorgegebenen Punkt $x \in \mathbb{R}$ garantiert das Dirichlet–Kriterium I2A.

⚠ Konvergenz in *allen* Punkten hingegen wäre zu viel verlangt:

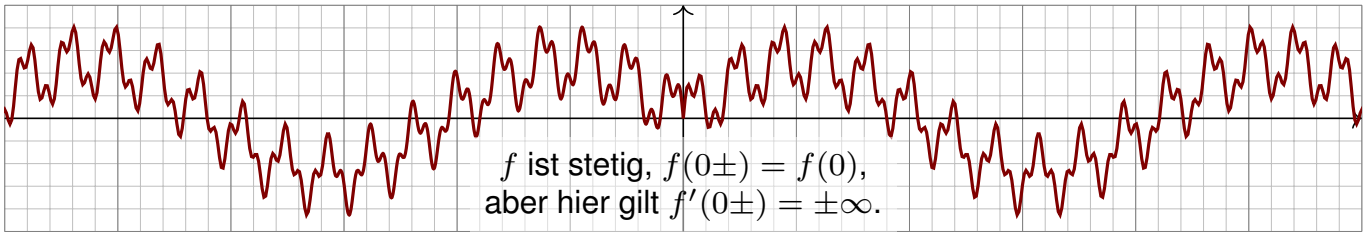
Satz J2F: Kahane & Katznelson 1966

Zu jeder Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}$ existiert eine stetige Funktion, deren Fourier–Reihe in allen Punkten $x \in N$ divergiert.

Diese Sätze sind extrem schwierig zu beweisen und dienen hier nur zur Illustration — und als Warnung vor allzu naiven Trugschlüssen. Das folgende schön-konkrete Beispiel illustriert die Problematik.

Fejérs Gegenbeispiel: divergente Fourier–Reihe

Gibt es stetige periodische Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deren Fourier–Reihe nicht konvergiert? Können wir solche Beispiele konkret angeben? Ja!



Satz J2G: Fejér 1911

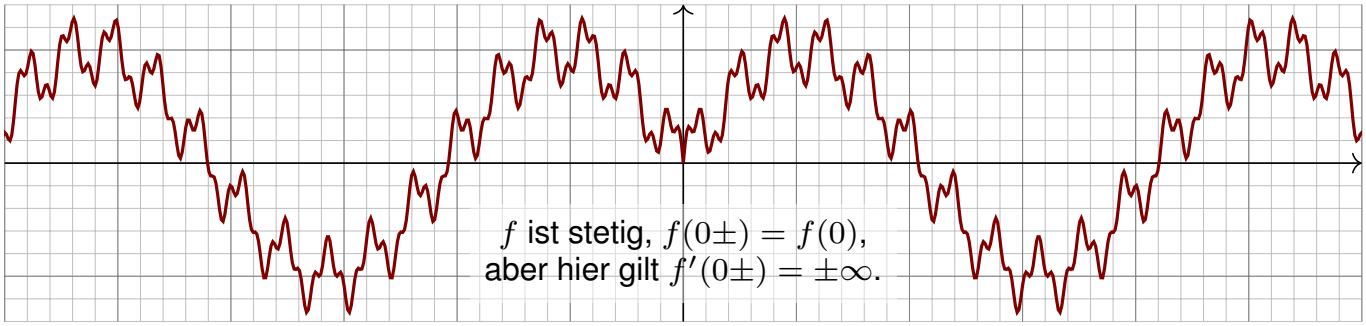
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gerade, 2π–periodisch und für $0 \le x \le \pi$ gegeben durch

$$f(x) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \sin\Big(\big(i^{(2^i)} + 1/2\big) \cdot x\Big) \quad \sim \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx).$$

Die Funktion f ist stetig, aber in $x = 0$ divergiert ihre Fourier–Reihe.

Das Dirichlet–Kriterium I2A gibt hinreichende Kriterien zur Konvergenz. Dies ist hier jedoch nicht erfüllt, denn $f'(0+) = +\infty$ und $f'(0-) = -\infty$. Tatsächlich divergiert $f_n(0)$ für $n \to \infty$, wie wir nun nachrechnen.

Fejérs Gegenbeispiel: divergente Fourier–Reihe



Satz J2H: Fejér 1911

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gerade, 2π–periodisch und für $0 \le x \le \pi$ gegeben durch

$$f(x) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \sin\Big(\big(i^{(i^2)} + 1/2\big) \cdot x\Big) \quad \sim \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx).$$

Die Funktion f ist stetig, aber in $x = 0$ divergiert ihre Fourier–Reihe.

- ☺ In fast jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ gilt Konvergenz $f_n(x) \to f(x)$ (J2E).
- ☺ Die Fejér–Polynome f_n^* konvergieren gleichmäßig gegen f (J2C).

Die Divergenz ist entsprechend subtil; wir rechnen sie jetzt nach.

Fejérs Gegenbeispiel: divergente Fourier–Reihe

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gerade, 2π–periodisch und für $0\le x\le\pi$ gegeben durch

$$f(x) := \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \sin(\omega_i x) \quad \overset{?}{\sim} \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx).$$

mit Frequenzen $\omega_i \in \mathbb{N} + 1/2$, Amplituden $\mu_i \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ und $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i < \infty$. Dies garantiert gleichmäßige Konvergenz, und f ist stetig (I3C).

Aufgabe: (1) Für $k,\ell\in\mathbb{N}$ finden wir das Integral

$$\lambda_{k,\ell} := \int_{x=0}^{\pi} \cos(kx)\sin\big((\ell+1/2)x\big)\,\mathrm{d}x \quad = \quad \frac{\ell+1/2}{(\ell+1/2)^2-k^2}.$$

(2) Für die Fourier–Koeffizienten folgt $a_k = \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i\omega_i/(\omega_i^2-k^2)$.

(3) Für $\sigma_{n,\ell} := \sum_{k=0}^{n}\lambda_{k,\ell}$ gilt $\sigma_{n,\ell}\ge 0$ und $\sigma_{n,n}\ge\frac{1}{2}\ln(n+1/2)$.

(4) Für $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ und $n=\ell_i=\omega_i-1/2$ gilt $s_n\ge\frac{1}{2}\mu_i\ln\omega_i$.

(5) Wir können μ_i und ω_i so wählen, dass die Folge s_n divergiert.

☺ Die Funktion f ist stetig, aber in $x=0$ divergiert ihre Fourier–Reihe!

Fejérs Gegenbeispiel: divergente Fourier–Reihe

Lösung: (1) Wir nutzen die trigonometrischen Additionstheoreme:

$$\begin{aligned}
&\int_{x=0}^{\pi} \cos(kx)\sin\big((\ell+1/2)x\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_{x=0}^{\pi} \sin\big((\ell+k+1/2)x\big) + \sin\big((\ell-k+1/2)x\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos\big((\ell+k+1/2)x\big)}{\ell+k+1/2} + \frac{-\cos\big((\ell-k+1/2)x\big)}{\ell-k+1/2}\right]_{x=0}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\ell+k+1/2} + \frac{1}{\ell-k+1/2}\right] \quad = \quad \frac{\ell+1/2}{(\ell+1/2)^2-k^2}
\end{aligned}$$

(2) Da die Funktion f gerade ist, finden wir $b_k=0$ und

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{\pi}\int_{x=0}^{\pi}\cos(kx)f(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad \frac{2}{\pi}\int_{x=0}^{\pi}\cos(kx)\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i\sin(\omega_i x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i\int_{x=0}^{\pi}\cos(kx)\sin(\omega_i x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i\,\frac{\omega_i}{\omega_i^2-k^2}
\end{aligned}$$

Fejérs Gegenbeispiel: divergente Fourier–Reihe

(3) Für $k \le \ell$ gilt $\lambda_{k,\ell} \ge 0$, für $n \le \ell$ also $\sigma_{n,\ell} \ge 0$. Für $n \ge \ell$ finden wir:

$$\begin{aligned}
2\sigma_{n,\ell} &= 2\sum_{k=0}^{n} \frac{\ell + 1/2}{(\ell + 1/2)^2 - k^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\ell + k + 1/2} + \frac{1}{\ell - k + 1/2} \\
&= \sum_{j=\ell}^{\ell+n} \frac{1}{j + 1/2} + \sum_{j=\ell-n}^{\ell} \frac{1}{j + 1/2} = \frac{1}{\ell + 1/2} + \sum_{j=\ell-n}^{\ell+n} \frac{1}{j + 1/2} \\
&= \frac{1}{\ell + 1/2} + \sum_{j=n-\ell}^{n+\ell} \frac{1}{j + 1/2} \ge 0
\end{aligned}$$

Durch Vergleich von Summe und Integral finden wir genauer:

$$2\sigma_{n,\ell} \ge \int_{t=n-\ell+1/2}^{n+\ell+3/2} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln\left(\frac{n + \ell + 3/2}{n - \ell + 1/2}\right)$$

Speziell für $n = \ell$ finden wir damit die behauptete untere Schranke:

$$2\sigma_{n,n} \ge \ln(4n + 3) \ge \ln(n + 1/2)$$

Fejérs Gegenbeispiel: divergente Fourier–Reihe

(4) Für die n-te Partialsumme finden wir somit:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \overset{(2)}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \frac{\omega_i}{\omega_i^2 - k^2} \overset{\text{Lin}}{=} \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_i}{\omega_i^2 - k^2} \overset{(3)}{=} \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \sigma_{n,\ell_i}$$

Für alle Terme gilt $\mu_i \sigma_{n,\ell_i} \ge 0$. Speziell für $n = \ell_i = \omega_i - 1/2$ folgt:

$$s_n = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \sigma_{n,\ell_i} \ge \frac{2}{\pi} \mu_i \sigma_{n,n} \ge \frac{2}{\pi} \mu_i \cdot \frac{1}{2} \ln \omega_i = \frac{\mu_i \ln \omega_i}{\pi}$$

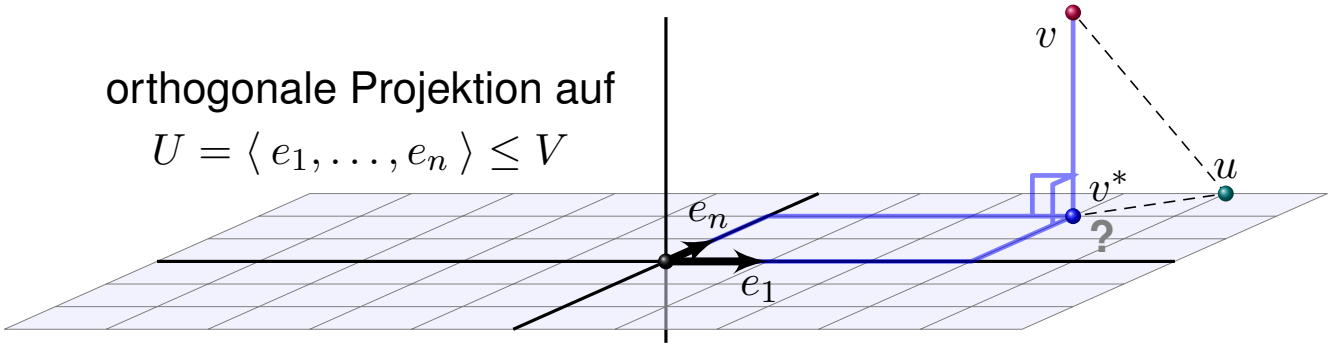
(5) Wir wählen nun die Frequenzen $\omega_i \in \mathbb{N} + 1/2$ und die Amplituden $\mu_i \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ so, dass $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i < \infty$ gilt, aber $\mu_i \ln \omega_i \to \infty$. Beispiele:

$$\mu_i = \frac{1}{2^i}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1, \qquad \omega_i = i^{(2^i)} + \tfrac{1}{2}, \quad \ln \omega_i \ge 2^i \ln i$$

$$\mu_i = \frac{1}{i^2}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \omega_i = i^{(i^2)} + \tfrac{1}{2}, \quad \ln \omega_i \ge i^2 \ln i$$

☺ Die Funktion f ist stetig, aber in $x = 0$ divergiert ihre Fourier–Reihe!

Bestapproximation durch Orthogonalprojektion



Approximation: Zu $v \in V$ suchen wir den / einen Vektor $v^* \in U$, der v am nächsten liegt. Existenz? eindeutig? effektiv? effizient?

Hierzu sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\,\text{-}\,|\,\text{-}\,\rangle$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Darin sei $U \leq V$ ein endlich-dim. Untervektorraum, $\dim U = n < \infty$.

Lösung: Wir erzeugen U durch eine Basis, orthonormalisieren diese zu $e_1, \ldots, e_n$ (I1J) und berechnen die Orthogonalprojektion von v auf U.

Schon der Fall $V = \mathbb{R}^2$ und $n = 1$ (oder $V = \mathbb{R}^3$ und $n = 1, 2$) ist interessant und Ihnen vielleicht noch aus der Schule vertraut. Die obige Skizze und die folgenden Argumente gelten aber ganz allgemein: Der Raum V darf beliebig groß sein, zum Beispiel ein Funktionenraum; lediglich der Unterraum U soll zur Vereinfachung endlich-dimensional bleiben, zum Beispiel der Unterraum U aller trigonometrischen Polynome vom Grad $\leq k$, mit $n = \dim U = 1 + 2k$.

Bestapproximation durch Orthogonalprojektion

Übung: Wie berechnen Sie im Raum $\mathbb{R}^3$ den euklidischen Abstand des Punktes p zu einer Geraden $G = \langle\, u_1 \,\rangle^!$? zu einer Ebenen $E = \langle\, u_1, u_2 \,\rangle^!$. Welche Rechentechniken und Beweisargumente kennen Sie hierzu?

Beispiel: Vorgelegt ist eine Funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, etwa $f(x) = x^2$. Zu $n \in \mathbb{N}$ gesucht ist die/eine Bestapproximation $f_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$, die den mittleren quadratischen Fehler $\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f(x)|^2 \, \mathrm{d}x$ minimiert.

Aufgabe: Wie bestimmen Sie die Parameter $c_k \in \mathbb{C}$ möglichst effizient?

Lösung: Als Fourier–Koeffizienten, also $c_k = \langle\, e_k \mid f \,\rangle$! Dass dies eine optimale Lösung ist, sogar die einzige, verdanken wir folgendem Satz.

Den Approximationsfehler, also die verbleibende Differenz $f_n - f$, können wir auf viele verschiedene Weisen messen und bewerten, etwa durch das Supremum $\sup|f_n - f|$ oder $\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f(x)|^p \, \mathrm{d}x$. Diese Normen sind in Analysis, Numerik und Optimierung wichtig, erfordern jedoch sehr aufwändig maßgeschneiderte Methoden. Nur für $p = 2$ haben wir eine so schöne und einfache Antwort!

Bestapproximation durch Orthogonalprojektion

Satz J3A: Gauß 1795, Bessel 1818

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ mit einem Skalarprodukt $\langle - | - \rangle$.

Sei $U \leq V$ ein Unterraum mit einer Orthonormalbasis $e_1, \dots, e_n$ oder allgemein einer Orthogonalbasis mit $\langle e_k \mid e_k \rangle > 0$ für alle $k = 1, \dots, n$.

(1) **Orthogonalprojektion**: Zu jedem $v \in V$ existiert genau ein Vektor $v^* = \sum_{k=1}^n e_k v_k \in U$ mit $(v - v^*) \perp U$. Dieser ist explizit gegeben durch

$$v_k = \langle e_k \mid v \rangle / \langle e_k \mid e_k \rangle, \quad \text{seine } \textbf{Fourier–Koeffizienten}.$$

(2) **Bestapproximation**: Für alle Konkurrenten $u \in U \smallsetminus \{v^*\}$ gilt

$$\|v - u\|^2 \;=\; \|v - v^*\|^2 + \|v^* - u\|^2 \;>\; \|v - v^*\|^2.$$

(3) **Bessel–Gleichung**: Dank $v = v^* + (v - v^*)$ und Pythagoras I1ı gilt

$$\|v\|^2 \;=\; \|v^*\|^2 \;+\; \|v - v^*\|^2 \;\text{(Approximationsfehler)}$$

(4) **Bessel–Ungleichung**: Es folgt $\|v^*\|^2 = \sum_{k=1}^n \|e_k\|^2 |v_k|^2 \leq \|v\|^2$.

Bestapproximation durch Orthogonalprojektion

Beweis: (1) Genau dann gilt $(v - v^*) \perp U$, wenn für $k = 1, \dots, n$ gilt:

$$0 \overset{!}{=} \langle e_k \mid v - v^* \rangle \overset{\text{Lin}}{=} \langle e_k \mid v \rangle - \textstyle\sum_j \langle e_k \mid e_j \rangle v_j \overset{\text{ONB}}{=} \langle e_k \mid v \rangle - \langle e_k \mid e_k \rangle v_k$$

Es gibt genau eine Lösung: $v^* = \sum_{k=1}^n e_k v_k$ mit $v_k = \langle e_k \mid v \rangle / \langle e_k \mid e_k \rangle$.

(2) Für jeden Konkurrenten $u \in U$ gilt $u = v^* + \sum_k e_k \mu_k$ mit $\mu \in \mathbb{K}^n$, also

$$\|v - u\|^2 \overset{\text{Def}}{=} \left\|(v - v^*) - \textstyle\sum_k e_k \mu_k\right\|^2 \overset{\text{I1ı}}{=} \|v - v^*\|^2 + \textstyle\sum_k \|e_k\|^2 |\mu_k|^2$$

(3) Dies folgt aus der orthogonalen Zerlegung $v = v^* + (v - v^*)$. □

☺ Approximation interessiert uns in jedem $\mathbb{K}$–Vektorraum V mit Norm. Speziell für ein Skalarprodukt genügt hierzu die Orthogonalprojektion! Dazu formuliere ich den Satz umsichtig mit minimalen Voraussetzungen:

Für die Aussagen (1–3) genügt eine hermitesche Form $\langle - | - \rangle$. Dank der vorausgesetzten Orthonormalbasis $e_1, \dots, e_n$ ist sie positiv definit auf U. Für (1) genügt uns $\langle e_k \mid e_k \rangle \neq 0$, erst für (2) benötigen wir $\langle e_k \mid e_k \rangle > 0$. Für die Ungleichung (4) genügt, dass $\langle - | - \rangle$ auf V positiv semidefinit ist.

Quadrat-summierbare Folgen

Für jede Folge $\widehat{f}:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ definieren wir die **Quadrat-Norm**

$$\|\widehat{f}\|_{\ell^2}^2 := \sum_{k\in\mathbb{Z}}\big|\widehat{f}(k)\big|^2 \quad \text{also} \quad \|\widehat{f}\|_{\ell^2} := \Big[\sum_{k\in\mathbb{Z}}\big|\widehat{f}(k)\big|^2\Big]^{1/2}.$$

Die **quadrat-summierbaren** Folgen bilden den $\mathbb{C}$–Vektorraum

$$\ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z}) = \ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}) := \Big\{\,\widehat{f}:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}\;\Big|\;\|\widehat{f}\|_{\ell^2}<\infty\,\Big\}.$$

Auf ℓ^2 haben wir $\cdot:\ell^2\times\ell^2\to\ell^1$ und somit das **Skalarprodukt**

$$\langle\,\text{-}\,|\,\text{-}\,\rangle\;:\;\ell^2\times\ell^2\to\mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \langle\,\widehat{f}\mid\widehat{g}\,\rangle := \sum_{k\in\mathbb{Z}}\overline{\widehat{f}(k)}\,\widehat{g}(k).$$

Dies ist absolut summierbar dank **Cauchy–Schwarz–Ungleichung**:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\big|\widehat{f}(k)\cdot\widehat{g}(k)\big| \le \|\widehat{f}\|_{\ell^2}\cdot\|\widehat{g}\|_{\ell^2}$$

☺ Für endliche Summen kennen wir das vom Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.
Für unendliche Reihen folgt die Ungleichung durch Grenzübergang.

Vergleich mit p–summierbaren Folgen

Für $1\le p\le\infty$ und $\widehat{f}:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ definieren wir die **ℓ^p–Norm**

$$\|\widehat{f}\|_{\ell^p} := \Big[\sum_{k\in\mathbb{Z}}\big|\widehat{f}(k)\big|^p\Big]^{1/p} \quad \text{wobei} \quad \|\widehat{f}\|_{\ell^\infty} := \sup_{k\in\mathbb{Z}}\big|\widehat{f}(k)\big|.$$

Die **ℓ^p–summierbaren Folgen** bilden den $\mathbb{C}$–Vektorraum

$$\ell^p = \ell^p(\mathbb{Z}) = \ell^p(\mathbb{Z},\mathbb{C}) := \Big\{\,\widehat{f}:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}\;\Big|\;\|\widehat{f}\|_{\ell^p}<\infty\,\Big\}.$$

Demnach bedeutet ℓ^1 absolut summierbar und ℓ^∞ beschränkt.
Für $1<p<q<\infty$ gelten dabei die Inklusionen $\ell^1\subsetneq\ell^p\subsetneq\ell^q\subsetneq\ell^\infty$.

Dank **Minkowski–Ungleichung** C4L ist ℓ^p ein Vektorraum und normiert.
Für $p,q\in[1,\infty]$ mit $1/p+1/q=1$ gilt die **Hölder–Ungleichung** C4L:

$$\|\widehat{f}\cdot\widehat{g}\|_{\ell^1} \le \|\widehat{f}\|_{\ell^p}\cdot\|\widehat{g}\|_{\ell^q}$$

Im Spezialfall $p=q=2$ ist dies die Cauchy–Schwarz–Ungleichung.
Das Produkt $\cdot:\ell^p\times\ell^q\to\ell^1$ stiftet somit die **bilineare Paarung**

$$\langle\,\text{-}\,|\,\text{-}\,\rangle\;:\;\ell^p\times\ell^q\to\mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \langle\,\widehat{f}\mid\widehat{g}\,\rangle := \sum_{k\in\mathbb{Z}}\overline{\widehat{f}(k)}\,\widehat{g}(k).$$

Quadrat-integrierbare Funktionen

Für $f : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$ messbar definieren wir die **Quadrat-Norm**

$$\|f\|_{L^2}^2 := \int_{x\in\Omega} \big|f(x)\big|^2 \,\mathrm{d}x \quad \text{also} \quad \|f\|_{L^2} := \Big[\int_{x\in\Omega} \big|f(x)\big|^2 \,\mathrm{d}x \Big]^{1/2}.$$

Die **quadrat-integrierbaren** Funktionen bilden den $\mathbb{C}$–Vektorraum

$$L^2 = L^2(\Omega) = L^2(\Omega,\mathbb{C}) := \Big\{ f : \Omega \to \mathbb{C} \;\Big|\; \|f\|_{L^2} < \infty \Big\}.$$

Auf L^2 haben wir $\cdot : L^2 \times L^2 \to L^1$ und somit das **Skalarprodukt**

$$\langle \text{-} | \text{-} \rangle : L^2 \times L^2 \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \langle\, f \mid g \,\rangle := \int_{x\in\Omega} \overline{f(x)}\, g(x) \,\mathrm{d}x.$$

Dies ist absolut integrierbar dank **Cauchy–Schwarz–Ungleichung**:

$$\int_{x\in\Omega} \big|f(x)\cdot g(x)\big| \,\mathrm{d}x \le \|f\|_{L^2} \cdot \|g\|_{L^2}$$

☺ Für Treppenfunktionen $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ ist dies eine endliche Summe.
Für $f, g \in L^2(\Omega,\mathbb{C})$ folgt die Ungleichung daraus durch Grenzübergang.

Vergleich mit p–integrierbaren Funktionen

Für $1 \le p \le \infty$ und $f : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$ definieren wir die **L^p–Norm**

$$\|f\|_{L^p} := \Big[\int_{x\in\Omega} \big|f(x)\big|^p \,\mathrm{d}x \Big]^{1/p} \quad \text{wobei} \quad \|f\|_{L^\infty} := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} \big|f(x)\big|.$$

Die **L^p–integrierbaren Funktionen** bilden den $\mathbb{C}$–Vektorraum

$$L^p = L^p(\Omega) = L^p(\Omega,\mathbb{C}) := \Big\{ f : \Omega \to \mathbb{C} \;\Big|\; \|f\|_{L^p} < \infty \Big\}.$$

Demnach bedeutet L^1 absolut integrierbar und L^∞ essentiell beschränkt.
Gleichheit $f = g$ in $L^p(\Omega,\mathbb{C})$ bedeutet $f(x) = g(x)$ für fast alle $x \in \Omega$.
Für $\emptyset < \mathrm{vol}(\Omega) < \infty$ und $1 < p < q < \infty$ folgt $L^1 \supsetneq L^p \supsetneq L^q \supsetneq L^\infty$.

Dank **Minkowski–Ungleichung** C4L ist L^p ein Vektorraum und normiert.
Für $p, q \in [1,\infty]$ mit $1/p + 1/q = 1$ gilt die **Hölder–Ungleichung** C4L:

$$\|f\cdot g\|_{L^1} \le \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$$

Im Spezialfall $p = q = 2$ ist dies die Cauchy–Schwarz–Ungleichung.
Das Produkt $\cdot : L^p \times L^q \to L^1$ stiftet somit die **bilineare Paarung**

$$\langle \text{-} | \text{-} \rangle : L^p \times L^q \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \langle\, f \mid g \,\rangle := \int_{x\in\Omega} \overline{f(x)}\, g(x) \,\mathrm{d}x.$$

Der mittlere quadratische Fehler

Wir wenden Bessels Approximationssatz auf Fourier–Polynome an. Für quadrat-integrierbare $f, g : [0, T] \to \mathbb{C}$ ist das **Skalarprodukt**

$$\langle f \mid g \rangle_{L^2} := \frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} \overline{f(t)}\, g(t)\, \mathrm{d}t.$$

Die zugehörige **Norm** ist definiert durch $\|f\|_{L^2} = \sqrt{\langle f \mid f \rangle}$, also

$$\|f\|_{L^2} := \left[\frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} \big|f(t)\big|^2 \,\mathrm{d}t \right]^{1/2}.$$

Der **mittlere quadratische Abstand** zwischen f, g ist definiert durch

$$\|f - g\|_{L^2} := \left[\frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} \big|f(t) - g(t)\big|^2 \,\mathrm{d}t \right]^{1/2}.$$

Der punktweise Abstand $|f(t) - g(t)|^2$ wird hier über $[0, T]$ integriert. Das Quadrat gewichtet dabei große Abweichungen stärker als kleine. Der Faktor $1/T$ normiert und vereinfacht zudem die Fourier–Formeln. Die abschließende Wurzel sorgt dafür, dass die Norm homogen ist, also tatsächlich $\|\alpha \cdot f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ erfüllt.

Bestapproximation durch Fourier–Polynome

Satz J3B: Bestapproximation durch Fourier–Polynome

Sei $f : [0, T] \to \mathbb{C}$ quadrat-integrierbar, das heißt $\int_0^T |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t < \infty$.

(1) Sei $f_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}$ eine Approximation durch ein beliebiges trigonometrisches Polynom vom Grad n mit Koeffizienten $c_k \in \mathbb{C}$.

Bessel–Ungleichung: Der mittlere quadratische Fehler $\|f - f_n\|$ wird genau dann minimal, wenn f_n das Fourier–Polynom zu f ist, also

$$c_k = \langle e_k \mid f \rangle = \frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t} f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Der mittlere quadratische Fehler ist dann $\|f - f_n\|^2 = \|f\|^2 - \|f_n\|^2$.

(2) Für $n \to \infty$ gilt Konvergenz $\|f - f_n\| \searrow 0$ im quadratischen Mittel. Für die Normen folgt $\|f_n\| \nearrow \|f\|$ und somit die Energiegleichung:

$$\frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} |f_n(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \quad \nearrow \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t$$

Bestapproximation durch Fourier–Polynome

Aufgabe: Zeigen Sie dies für jede stetige Funktion f durch Vergleich von quadratischer Bestapproximation f_n und Fejér–Approximation f_n^*.

☺ Zusammen sind diese Approximationssätze extrem wirkungsvoll.

Lösung: Teil (1) ist die Anwendung von Bessels Approximationssatz J3A auf den Vektorraum $L^2([0,T],\mathbb{C})$ und trigonometrische Polynome.

(2) Für die Fejér–Approximation f_n^* gilt $\max|f_n^* - f| \to 0$ dank J2C. Die quadratische Bestapproximation sind die Fourier–Polynome f_n, daher gilt $\|f_n - f\|_{L^2} \le \|f_n^* - f\|_{L^2}$. Ausgeschrieben bedeutet das:

$$\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} |f_n(t) - f(t)|^2 \le \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} |f_n^*(t) - f(t)|^2 \le \big(\max|f_n^* - f|\big)^2 \to 0$$

Monotonie $\|f_{n+1} - f\|_{L^2} \le \|f_n - f\|_{L^2}$ ist klar, somit gilt $\|f_n - f\|_{L^2} \searrow 0$. Dank Aussage (1) folgt die monotone Konvergenz $\|f_n\|_{L^2} \nearrow \|f\|_{L^2}$.

☺ Die Fejér–Approximation J2C stellt sicher, dass trigonometrische Polynome dicht liegen im Raum $C([0,2\pi],\mathbb{C})$ der stetigen Funktionen.

Bestapproximation durch Fourier–Polynome

Die Konvergenz $\|f_n\|_{L^2}^2 \nearrow \|f\|_{L^2}^2$ bedeutet ausgeschrieben:

$$A_n := \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} |f_n(t)|^2 \,\mathrm{d}t \quad \nearrow \quad \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t =: A$$

Offensichtlich gilt für die Koeffizientensummen entsprechendes:

$$B_n := \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \quad \nearrow \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 =: B$$

Die Energiegleichung $A_n = B_n$ gilt für jedes trigonometrische Polynom dank Pythagoras I125. Damit folgt die Energiegleichung $A = B$ für f.

☺ Damit ist die Energiegleichung (2) für stetige Funktionen bewiesen. Das war das Ziel dieser Aufgabe (als leichtere, teilweise Lösung).

☺ Hieraus folgt der Satz J3B allgemein durch Vervollständigung: Die stetigen Funktionen liegen dicht in $L^2([0,T],\mathbb{C})$ bezüglich L^2–Norm.

☺ Der folgende Satz fasst dieses Ergebnis zusammen und erweitert zudem die Energiegleichung zur Parseval–Gleichung für Skalarprodukte.

Energiegleichung und Satz von Parseval

Satz J3C: Energiegleichung und Satz von Parseval

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolut integrierbar auf $[0, T]$ und T–periodisch.
Wir zerlegen f in **Harmonische** zur Grundfrequenz $\omega = 2\pi/T$:

$$f \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{f}, \quad \widehat{f}(k) := \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}.$$

Es gilt die **Parseval–Gleichung**, auch **Energiegleichung** genannt:

$$\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{\ell^2} \quad \text{also} \quad \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2$$

Dank dieser Gleichung gilt $f \in L^2$ genau dann, wenn $\widehat{f} \in \ell^2$ gilt.
Für $f, g \in L^2$ gilt die **Parseval–Gleichung** zudem für Skalarprodukte:

$$\langle f \mid g \rangle = \langle \widehat{f} \mid \widehat{g} \rangle \quad \text{also} \quad \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \overline{f(t)}\, g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}(k)}\, \widehat{g}(k)$$

Energiegleichung und Satz von Parseval

Aufgabe: Rechnen Sie die Parseval–Gleichung mit Fubini nach im Spezialfall $f \in L^1$ und $\widehat{g} \in \ell^1$, somit $g(t) = \sum_k \widehat{g}(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} \in L^\infty$.

Lösung: Wir setzen ein und rechnen's geduldig aus:

$$\langle f \mid g \rangle_{L^2} \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \overline{f(t)}\, g(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \overline{f(t)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{g}(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$\overset{\text{Lin}}{=} \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t} f(t)}\, \widehat{g}(k)\,\mathrm{d}t \overset{\text{Fub}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \overline{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t} f(t)}\,\mathrm{d}t\right] \widehat{g}(k)$$

$$\overset{\text{Def}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}(k)}\, \widehat{g}(k) \overset{\text{Def}}{=} \langle \widehat{f} \mid \widehat{g} \rangle_{\ell^2}$$

☺ Speziell für $f = g$ erhalten wir die Energiegleichung $\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{\ell^2}$.
Für $f \in L^1$ und $\widehat{f} \in \ell^1$ ist damit die Energiegleichung erneut bewiesen.

Für $f \in L^2$ folgt sie durch Grenzübergang, wie in Satz J3B ausgeführt.
Für $f, g \in L^2$ folgt $\widehat{f}, \widehat{g} \in \ell^2$, und obige Gleichungen bestehen weiter.

Für Skalarprodukte erhalten wir dies durch Polarisieren der Norm.

Hausdorff–Young–Ungleichung

☺ Wir kennen die folgenden Beziehungen, die eine bemerkenswerte Dualität zwischen L^p–Funktionen und ℓ^q–Folgen illustrieren:

(1a) Für $f \in L^1$ wissen wir $\widehat{f} \in \ell^\infty$, genauer $\widehat{f}(k) \le \|f\|_{L^1}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Dank Riemann–Lebesgue gilt zudem Abklingen $|\widehat{f}(k)| \to 0$ für $|k| \to \infty$.

(1b) Zu $\widehat{f} \in \ell^1$ konvergiert $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e_k$ in L^∞, sogar gleichmäßig. Insbesondere gilt dann $\|f\|_{L^\infty} \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)| \cdot \|e_k\|_{L^\infty} = \|\widehat{f}\|_{\ell^1}$.

(2) Der zentrale Fall: Für $f \in L^2$ gilt $\widehat{f} \in \ell^2$ und die Fourier–Isometrie

$$\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{\ell^2} \quad \text{also} \quad \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2.$$

Diese Fälle behandeln die wichtigen Extreme $(p,q) = (1,\infty)$ und den symmetrischen Fall $(p,q) = (2,2)$. Sie werden durch folgenden Satz von Young und Hausdorff zusammengefasst und verallgemeinert.

Hausdorff–Young–Ungleichung

Satz J3D: Young 1913, Hausdorff 1923

Wir fixieren p, q mit $1 \le p \le 2 \le q \le \infty$ und $1/p + 1/q = 1$, zum Beispiel $(p,q) = (1,\infty)$ oder $p = q = 2$ wie oben.

(1) Aus $f \in L^p$ folgt $\widehat{f} \in \ell^q$, genauer gilt die Ungleichung

$$\|\widehat{f}\|_{\ell^q} \le \|f\|_{L^p} \quad \text{also} \quad \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^q\right)^{1/q} \le \left(\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} |f(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{1/p}.$$

(2) Umgekehrt: Für $c \in \ell^p$ konvergiert die Folge $f_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k$ gegen eine Funktion f in L^q. Für diese gilt $\widehat{f} = c$, genauer gilt die Ungleichung

$$\|f\|_{L^q} \le \|\widehat{f}\|_{\ell^p} \quad \text{also} \quad \left(\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} |f(t)|^q \,\mathrm{d}t\right)^{1/q} \le \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^p\right)^{1/p}.$$

⚠ Die Aussagen werden falsch, wenn wir p und q vertauschen.
In beiden Teilen geht das Argument von $1 \le p \le 2$ nach $2 \le q \le \infty$.
Ich nenne diesen Satz hier nur zur Illustration — und ohne Beweis.

Punktweise Konvergenz vs quadratisches Mittel

Wollen wir eine Fourier–Reihe in einem einzelnen Punkt auswerten, so müssen wir uns die Frage der punktweisen Konvergenz stellen! Das Dirichlet–Kriterium I2A liefert uns hierzu ein bequemes und doch starkes Werkzeug. Es erlaubt insbesondere die Berechnung von einigen Reihengrenzwerten, die sonst nur schwer zu bekommen sind.

Wir kennen zudem die gleichmäßige Konvergenz $f_n \to f$ auf X: Hier liegt Konvergenz in allen Punkten $x \in X$ vor und zudem eine gleichmäßige Fehlerschranke $\sup|f_n - f| \to 0$. Das ist die stärkste und wirksamste Forderung, für manche Anwendungen jedoch leider zu stark.

Fourier–Reihen nutzen das Skalarprodukt periodischer Funktionen. Es liegt daher nahe, die Güte der Approximation von f durch f_n mit der zugehörigen Norm des mittleren quadratischen Abstands zu messen:

$$\|f_n - f\|^2_{L^2([0,T],\mathbb{C})} = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} |f_n(t) - f(t)|^2 \,\mathrm{d}t$$

Für die Konvergenz von Fourier–Reihen ist dieser Abstandsbegriff der natürlichste: Bezüglich der L^2–Norm sind alle Formeln am einfachsten.

Punktweise Konvergenz vs quadratisches Mittel

Wir fassen die Beziehungen dieser drei Konvergenzarten zusammen. Seien $f_0, f_1, f_2, \ldots, f : \Omega \to \mathbb{C}$ Funktionen auf einer Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$.

	Gleichmäßige Konvergenz: $\sup_{x\in\Omega}\lvert f_n(x) - f(x)\rvert \to 0$	
$\operatorname{vol}\Omega < \infty \Downarrow$ $\not\Uparrow$		$\not\Uparrow$ $\Downarrow$ immer
Konvergenz im quadratischen Mittel: $\int_{x\in\Omega}\lvert f_n(x) \to f(x)\rvert^2 \,\mathrm{d}x \to 0$	$\not\Longrightarrow$ $\not\Longleftarrow$	Punktweise Konvergenz: $f_n(x) \to f(x)$ in jedem Punkt $x \in \Omega$

☺ Die Implikation „gleichmäßig $\Rightarrow L^p$“ folgt sofort aus der Ungleichung

$$\int_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)|^p \,\mathrm{d}x \le \operatorname{vol}(\Omega) \cdot (\sup_{x\in\Omega}|f_n(x) - f(x)|)^p \to 0.$$

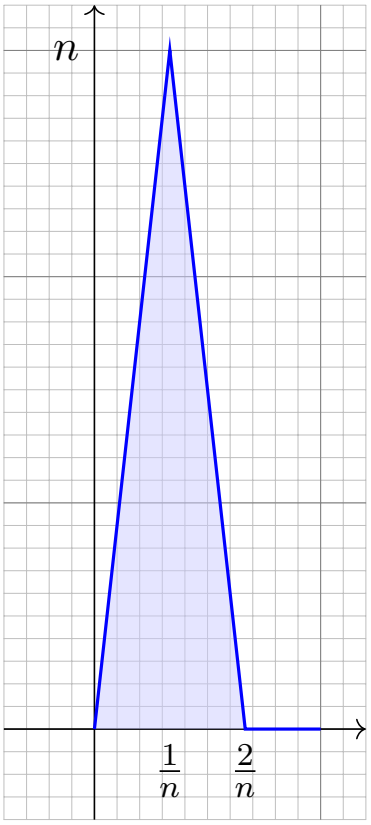
☺ Die Implikation „gleichmäßig $\Rightarrow$ punktweise“ ist klar: Für $x \in \Omega$ gilt

$$|f_n(x) - f(x)| \le \sup_{x\in\Omega}|f_n(x) - f(x)| \to 0.$$

⚠ Die Umkehrungen gelten nicht, siehe Gegenbeispiele. J319 J320

Punktweise Konvergenz $\not\Rightarrow$ quadratisches Mittel

⚠ Aus punktweiser Konvergenz $f_n \to f$, also $f_n(x) \to f(x)$ für alle x, folgt nicht die Konvergenz im quadratischen Mittel!



Gegenbeispiel „wachsende Zacken“:
Für $n \geq 2$ sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

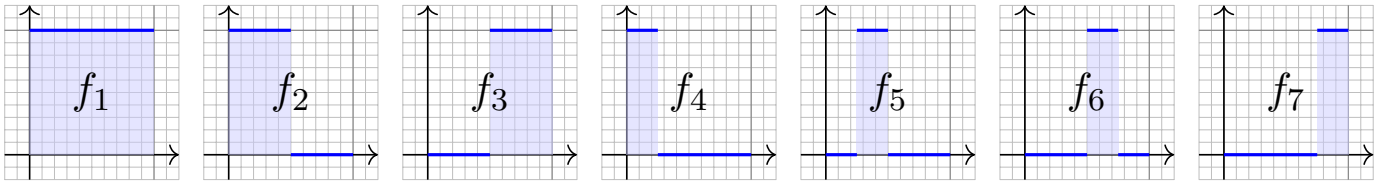
$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 2n - n^2 x & \text{für } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}, \\ 0 & \text{für } \frac{2}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Für jeden Punkt $x \in [0,1]$ gilt $f_n(x) \to 0$.
Hingegen gilt $\int_0^1 |f_n(x)| \, \mathrm{d}x = 1$ sowie
$\int_0^1 |f_n(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \frac{2}{3} n \to \infty$ für $n \to \infty$.

Es gilt $f_n(x) \to 0$ in jedem Punkt $x \in [0,1]$, aber $\max|f_n - 0| \to \infty$ im maximalen Abstand (L^∞) sowie $\|f_n - 0\|_{L^1} = 1$ im mittleren Abstand (L^1) und $\|f_n - 0\|_{L^2} \to \infty$ im quadratischen Mittel (L^2).

Quadratisches Mittel $\not\Rightarrow$ punktweise Konvergenz

⚠ Aus Konvergenz im quadratischen Mittel $\|f - f_n\|_{L^2} \to 0$ folgt nicht gleichmäßige Konvergenz, ja nicht einmal punktweise $f_n(x) \to f(x)$:
Es kann sein, dass die Folge $f_n(x)$ in keinem Punkt x konvergiert!



Gegenbeispiel „wandernde Blöcke“: Wir zerlegen das Intervall $I_1 = [0,1]$ in zwei Hälften $I_2 = [0,1/2]$ und $I_3 = [1/2,1]$, und diese wiederum in $I_4 = [0,1/4]$ und $I_5 = [1/4,1/2]$ sowie $I_6 = [1/2,3/4]$ und $I_7 = [3/4,1]$, usw. Hierzu betrachten wir die Folge der Indikatorfunktionen

$$f_n \,:\, [0,1] \to \mathbb{R} \,:\, f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in I_n, \\ 0 & \text{für } x \notin I_n. \end{cases}$$

Die Quadrat-Norm $\|f_n\|_{L^2} = \mathrm{vol}_1 \, I_n$ (Länge von I_n) konvergiert gegen 0.
Jedoch konvergiert $f_n(x)$ für $n \to \infty$ in keinem Punkt x: Die Folge $f_n(x)$ besteht nämlich aus vielen Nullen und immer mal wieder einer 1.

Vollständigkeit der trigonometrischen Basis

☺ Die trigonometrischen Funktionen $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ sind vollständig: Sie lassen sich durch keine hierzu orthogonale Funktion f erweitern!

Satz J3E: Vollständigkeit der trigonometrischen Basis

Sei $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ integrierbar auf $[0, T]$ und T–periodisch. (1) Gilt

$$\int_{t=0}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$, so folgt $f(t) = 0$ für fast alle $t \in \mathbb{R}$. (2) Gilt

$$\int_{t=0}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t} h(t)\,\mathrm{d}t$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$, so folgt $g(t) = h(t)$ für fast alle $t \in \mathbb{R}$.

☺ Nochmal anders gesagt: Die Fourier–Analyse $f \mapsto \widehat{f}$ ist injektiv. Haben zwei Funktionen g, h dasselbe Spektrum $\widehat{g} = \widehat{h}$, so folgt $g = h$. (Das heißt: Gleichheit gilt überall bis auf eine Menge vom Maß Null.)

Vollständigkeit der trigonometrischen Basis

Aufgabe: Zeigen Sie diesen Satz im Spezialfall stetiger Funktionen $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit dem Approximationssatz von Fejér (Satz J2C).

Lösung: (1) Die Voraussetzung bedeutet $\widehat{f}(k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.
Für die Fourier–Polynome gilt demnach $f_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Für die Fejér–Polynome gilt dann ebenso $f_n^* = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Der Approximationssatz von Fejér garantiert uns dann

$$\max|f| = \max|f - f_n^*| \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Das bedeutet $\max|f| = 0$, also $f(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ wie behauptet.
☺ Jede stetige Funktion $f \neq 0$ hat demnach ein Spektrum $\widehat{f} \neq 0$, das heißt, es können nicht alle Fourier–Koeffizienten verschwinden.

(2) Aussage (1) angewendet auf $f = g - h$ liefert $f = 0$, also $g = h$.
☺ Haben stetige Funktionen dasselbe Spektrum, so sind sie gleich. Umgekehrt bedeutet das, für stetige Funktionen $g \neq h$ gilt $\widehat{g} \neq \widehat{h}$.
☺ Hieraus folgt der Satz für alle integrierbaren Funktionen durch Vervollständigung: Die stetigen Funktionen liegen dicht in $L^1([0, T], \mathbb{C})$.

Konvergenz im quadratischen Mittel

Satz J3F: Vollständigkeit

(1) Wir haben folgende lineare Abbildung $L^2([0,T],\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})$:
Gilt $\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,\mathrm{d}t < \infty$, so bilden die Fourier–Koeffizienten

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t$$

eine Zahlenfolge $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ mit $\sum_k |c_k|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,\mathrm{d}t < \infty$.

(2) Wir haben folgende lineare Abbildungen $\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}) \to L^2([0,T],\mathbb{C})$:
Gilt $\sum_k |c_k|^2 < \infty$, so konvergiert die trigonometrische Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} \quad \text{im quadratischen Mittel}$$

gegen eine Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ mit $\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \sum_k |c_k|^2 < \infty$.

Absolute und gleichmäßige Konvergenz

Satz J3G: Vollständigkeit

(1) Wir haben folgende lineare Abbildung $L^1([0,T],\mathbb{C}) \to \ell^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{C})$:
Gilt $\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|\,\mathrm{d}t \le M < \infty$, so bilden die Fourier–Koeffizienten

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t$$

eine Zahlenfolge $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ mit der gleichmäßigen Schranke $|c_k| \le M$.

(2) Wir haben folgende lineare Abbildungen $\ell^1(\mathbb{Z},\mathbb{C}) \to L^\infty([0,T],\mathbb{C})$:
Gilt $\sum_k |c_k| \le M < \infty$, so konvergiert die trigonometrische Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} \quad \text{gleichmäßig}$$

gegen eine stetige Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ mit $|f| \le M$.

Satz von Parseval: Energiegleichung

Es gilt die **Parseval–Gleichung**, auch **Energiegleichung** genannt:

$$\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{\ell^2} \quad \text{also} \quad \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2$$

Ist dieser Wert endlich, so ist die Funktion f quadrat-integrierbar, kurz $f \in L^2$, und die Koeffizientenfolge $\widehat{f}$ ist quadrat-summierbar, kurz $\widehat{f} \in \ell^2$.
Alternativ nutzen wir die Co/Sinus-Reihe mit $c_{\pm k} = \frac{1}{2}(a_k \mp \mathrm{i} b_k)$:

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$$

$$\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2.$$

Für $f, g \in L^2$ gilt die **Parseval–Gleichung** zudem für Skalarprodukte:

$$\langle f \mid g \rangle = \langle \widehat{f} \mid \widehat{g} \rangle \quad \text{also} \quad \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \overline{f(t)}\, g(t) \,\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}(k)}\, \widehat{g}(k)$$

Die Fourier–Isometrie

Die **quadrat-integrierbaren** Funktionen bilden den $\mathbb{C}$–Vektorraum

$$L^2 = L^2([0,T],\mathbb{C}) := \left\{ f : [0,T] \to \mathbb{C} \;\middle|\; \int_{t=0}^{T} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t < \infty \right\}.$$

Hierauf haben wir als **Skalarprodukt** und **Norm** die Integrale

$$\langle f \mid g \rangle_{L^2} := \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \overline{f(t)}\, g(t) \,\mathrm{d}t \quad \text{und} \quad \|f\|_{L^2}^2 := \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t.$$

Die **quadrat-summierbaren** Folgen bilden den $\mathbb{C}$–Vektorraum

$$\ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}) := \left\{ \widehat{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 < \infty \right\}.$$

Hierauf haben wir als **Skalarprodukt** und **Norm** die Summen

$$\langle \widehat{f} \mid \widehat{g} \rangle_{\ell^2} := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}(k)}\, \widehat{g}(k) \quad \text{und} \quad \|\widehat{f}\|_{\ell^2}^2 := \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2.$$

Das Produkt ist absolut integrierbar/summierbar dank Cauchy–Schwarz.
☺ Beide Vektorräume L^2 und ℓ^2 scheinen zunächst sehr verschieden.
Die Fourier–Isometrie enthüllt jedoch das Gegenteil: Sie sind isomorph!

Die Fourier–Isometrie

Die **Fourier–Isometrie** J1A ist folgende Analyse / Synthese:

$$\boxed{(\mathscr{F}, \mathscr{F}^{-1}) \,:\, L^2([0,T],\mathbb{C}) \;\cong\; \ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}) \,:\, f \leftrightarrow \widehat{f}}$$

Jeder Funktion $f \in L^2$ ordnen wir ihre Fourier–Koeffizienten $\widehat{f} \in \ell^2$ zu:

$$\mathscr{F} \,:\, L^2 \to \ell^2 \,:\, f \mapsto \widehat{f} \quad \text{mit} \quad \widehat{f}(k) = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Umgekehrt definiert jede Koeffizientenfolge $\widehat{f} \in \ell^2$ eine Funktion $f \in L^2$:

$$\mathscr{F}^{-1} \,:\, \ell^2 \to L^2 \,:\, \widehat{f} \mapsto f \quad \text{mit} \quad f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}$$

Diese Abbildungen sind $\mathbb{C}$–linear und zueinander inverse Isometrien zwischen dem Funktionenraum $L^2([0,T],\mathbb{C})$ und Folgenraum $\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})$.

☺ Funktionen $f \in L^2$ und Folgen $\widehat{f} \in \ell^2$ entsprechen sich verlustfrei. Norm und Skalarprodukt bleiben erhalten dank Parseval–Gleichung.

☺ Eine Anwendung ist die **isoperimetrische Ungleichung** J1B: Allein der Kreis maximiert den umschlossenen Flächeninhalt F.

Die Fourier–Isometrie

Die Fourier–Isometrie nutzt wesentlich die Begriffe der linearen Algebra: Vektorräume mit Skalarprodukt I1G, Cauchy–Schwarz–Ungleichung I1H, Satz des Pythagoras I1I, Orthonormalisierung I1J. Zentrales Beispiel:

Die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist ein $\mathbb{C}$–Vektorraum. Hierin ist die Teilmenge der T–periodischen Funktionen ein Untervektorraum.

Die Funktionen $e_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} = \cos(k\omega t) + \mathrm{i}\sin(k\omega t)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ spannen den Unterraum $V = \{\, \sum_{k=-n}^{n} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} \mid n \in \mathbb{N},\, c_k \in \mathbb{C} \,\}$ aller trigonometrischen Polynome auf und sind hierin eine Orthonormalbasis.

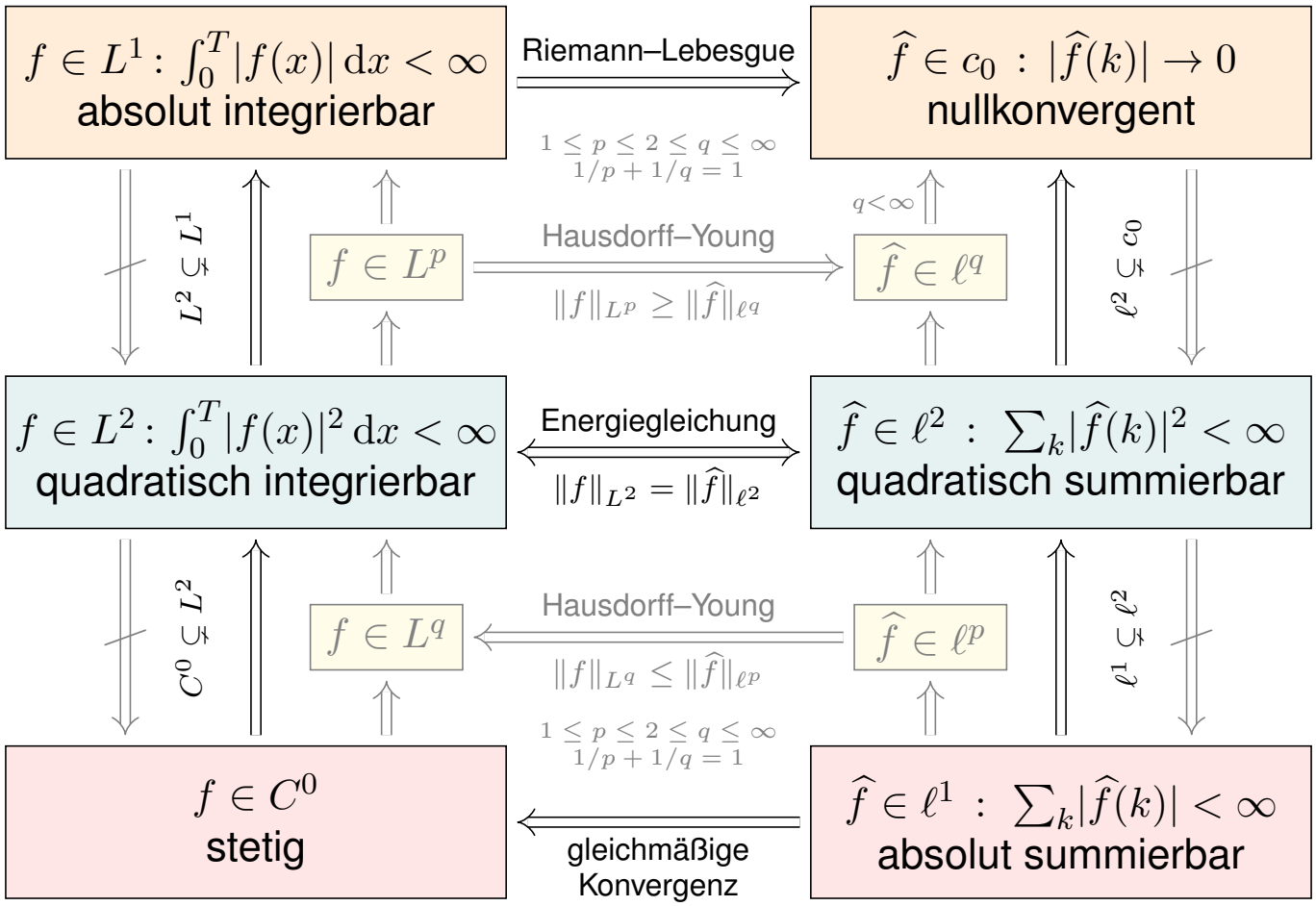
Die Vervollständigung dieses Raumes V bezüglich der L^2–Norm ist der Raum $L^2 = L^2([0,T],\mathbb{C})$ aller quadrat–integrierbaren Funktionen.

Auch die Menge aller Folgen $\widehat{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ ist ein $\mathbb{C}$–Vektorraum.
Die Folgen $\delta_k : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ mit $\delta_k(k) = 1$ und $\delta_k(\ell) = 0$ für $\ell \neq k$ spannen den Unterraum $W = \{\, \sum_{k=-n}^{n} c_k \delta_k \mid n \in \mathbb{N},\, c_k \in \mathbb{C} \,\}$ aller Folgen mit endlichem Träger auf und sind hierin eine Orthonormalbasis.

Die Vervollständigung dieses Raumes W bezüglich der ℓ^2–Norm ist der Raum $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ aller quadrat–summierbaren Folgen.

☺ Die Fourier–Isometrie $f \leftrightarrow \widehat{f}$ liefert $V \cong W$, vervollständigt $L^2 \cong \ell^2$.

Fourier–Analyse: Glattheit und Abklingen



Fourier–Analyse: Glattheit und Abklingen

Von oben nach unten werden die Bedingungen strikt stärker.
Die Implikationen gehen daher immer nur von unten nach oben.
Die Umkehrungen gelten nicht, wie geeignete Gegenbeispiele zeigen.

In der oberen Hälfte gehen Implikationen von links nach rechts:
Schwache Bedingungen an f garantieren schwache Folgerungen für $\widehat{f}$.

In der unteren Hälfte gehen Implikationen von rechts nach links:
Erst starke Bedingungen an $\widehat{f}$ garantieren starke Folgerungen für f.

In der Mitte steht der symmetrische Fall $p = q = 2$: Die Energiegleichung $\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{\ell^2}$ garantiert die nützliche Äquivalenz $f \in L^2 \iff \widehat{f} \in \ell^2$.
Die L^2–Theorie ist daher zentral: die schönste, beste und einfachste.

Ergänzend nenne ich zudem die Hausdorff–Young–Ungleichungen:
Sie interpolieren zwischen $(p, q) = (1, \infty)$ und dem zentralen Fall $(p, q) = (2, 2)$ durch $1 \le p \le 2 \le q \le \infty$ mit $1/p + 1/q = \infty$.

Dasselbe Diagramm gilt für $g \in C^n$ und die n-fache Ableitung $f = g^{(n)}$, allgemein für $g \in AC^n$, also $g \in C^{n-1}$ und $g^{(n-1)} \in AC$ absolut stetig.

Fourier–Analyse: Integrieren und Differenzieren

$\int_0^T |g^{(n)}(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$
absolut integrierbar

$\xRightarrow{\text{Riemann–Lebesgue}}$

$|k^n \widehat{g}(k)| \to 0$
nullkonvergent

$1 \le p \le 2 \le q \le \infty$
$1/p + 1/q = 1$

$\Downarrow$ $L^2 \subsetneq L^1$ $\Uparrow$

$g^{(n)} \in L^p$ $\xRightarrow{\text{Hausdorff–Young}}$ $k^n \widehat{g} \in \ell^q$

$\|f\|_{L^p} \ge \|\widehat{f}\|_{\ell^q}$

$q<\infty$ $\Uparrow$ $\Uparrow$ $\ell^2 \subsetneq c_0$ $\Downarrow$

$\int_0^T |g^{(n)}(x)|^2\,\mathrm{d}x < \infty$
quadratisch integrierbar

$\xLeftrightarrow{\text{Energiegleichung}}$

$\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{\ell^2}$

$\sum_k |k^n \widehat{g}(k)|^2 < \infty$
quadratisch summierbar

$\Downarrow$ $C^0 \subsetneq L^2$ $\Uparrow$

$g^{(n)} \in L^q$ $\xLeftarrow{\text{Hausdorff–Young}}$ $k^n \widehat{g} \in \ell^p$

$\|f\|_{L^q} \le \|\widehat{f}\|_{\ell^p}$

$1 \le p \le 2 \le q \le \infty$
$1/p + 1/q = 1$

$\ell^1 \subsetneq \ell^2$ $\Downarrow$

$g \in C^n$, also $g^{(n)} \in C^0$,
n-mal stetig diff'bar

$\xLeftarrow{\text{gleichmäßige Konvergenz}}$

$\sum_k |k^n \widehat{g}(k)| < \infty$
absolut summierbar

Punktweise Konvergenz vs quadratisches Mittel

Wir fassen die Beziehungen dieser drei Konvergenzarten zusammen.
Seien $f_0, f_1, f_2, \ldots, f : \Omega \to \mathbb{C}$ Funktionen auf einer Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$.

Gleichmäßige Konvergenz:
$\sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)| \to 0$

$\mathrm{vol}\,\Omega < \infty$ $\Downarrow$ $\not\Uparrow$ $\qquad$ $\not\Uparrow$ $\Downarrow$ immer

Konvergenz im quadratischen Mittel:
$\int_{x\in\Omega} |f_n(x) \to f(x)|^2\,\mathrm{d}x \to 0$

$\not\Rightarrow$
$\not\Leftarrow$

Punktweise Konvergenz:
$f_n(x) \to f(x)$
in jedem Punkt $x \in \Omega$

☺ Die Implikation „gleichmäßig $\Rightarrow L^p$“ folgt sofort aus der Ungleichung

$$\int_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)|^p\,\mathrm{d}x \le \mathrm{vol}(\Omega) \cdot (\sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)|)^p \to 0.$$

☺ Die Implikation „gleichmäßig $\Rightarrow$ punktweise“ ist klar: Für $x \in \Omega$ gilt

$$|f_n(x) - f(x)| \le \sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)| \to 0.$$

⚠ Die Umkehrungen gelten nicht, siehe Gegenbeispiele. J319 J320

Verständnisfragen zur Wiederholung

Aufgabe: Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze Begründung (ein Ergebnis der Vorlesung oder ein Gegenbeispiel).

(1) Was bedeutet punktweise Konvergenz der Fourier–Reihe von f? Was sagt das Dirichlet–Kriterium über Konvergenz und Grenzwert?

(2) Angenommen f ist nicht nur stetig, sondern stückw. stetig diff'bar. Konvergiert die Fourier–Reihe gleichmäßig gegen f? Wie schnell?

(3) Was besagt Pythagoras für Norm und Skalarprodukt? Allgemein: Was besagt die Parseval–Gleichung für Norm und Skalarprodukt?

(4) Wie definieren Sie die Räume L^p und ℓ^p für $1 \leq p \leq \infty$? Erklären Sie insb. die wichtigsten Fälle L^1, L^2, L^∞ und ℓ^1, ℓ^2, ℓ^∞.

(5) In welchem Sinne ist das Fourier–Polynom f_n vom Grad n die beste Approximation an die Funktion f in $L^2([0,T],\mathbb{C})$? In welchem Sinne konvergieren die Funktionen f_n gegen f?

(6) Nennen Sie eine Folge $\widehat{f}:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ in ℓ^2 aber nicht in ℓ^1. Gilt umgekehrt $\ell^1 \subseteq \ell^2$? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Verständnisfragen zur Wiederholung

(1) Nennen Sie eine Funktion $f:[0,1]\to\mathbb{C}$ in L^1 aber nicht in L^2. Gilt umgekehrt $L^2 \subseteq L^1$? (Beweis oder Gegenbeispiel)

(2) Wie definieren Sie die Fourier–Abbildungen (Analyse / Synthese)

$$\mathscr{F} : L^1 \to \ell^\infty \quad \text{und} \quad \mathscr{F}^{-1} : \ell^1 \to L^\infty?$$

Wie definieren Sie als symmetrische Fassung die Fourier–Isometrie

$$\mathscr{F} : L^2 \to \ell^2 \quad \text{und} \quad \mathscr{F}^{-1} : \ell^2 \to L^2?$$

(3) Wie ändert sich das Spektrum $\widehat{f}$, wenn Sie f in einem Punkt $t \in \mathbb{R}$ abändern? in endlich vielen Punkten? auf einer Menge vom Maß Null?

(4) Was bedeutet: Aus dem Signal f gewinnen Sie das Spektrum $\widehat{f}$ und umgekehrt rekonstruieren Sie aus dem Spektrum $\widehat{f}$ das Signal f?

(5) Wie lösen Fourier–Reihen das isoperimetrische Problem? Inwiefern transformieren sie ein schwieriges Problem in ein leichtes?

(6) Welchen Flächeninhalt können Sie mit einem Zaun der Länge L höchstens umgrenzen? Welche Kurven maximieren die Fläche?

Verständnisfragen zur Energiegleichung

Aufgabe: Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periodisch und absolut integrierbar.

(0) Wiederholen Sie möglichst präzise den Satz von Parseval (J3C).

(1) Seien f, g stetig. (a) Gilt $\widehat{f} = 0 \;\Rightarrow\; f = 0$ und (b) $\widehat{f} = \widehat{g} \;\Rightarrow\; f = g$?

(2) Dieselbe Fragen für f, g stückweise stetig und (3) sprungnormiert.

(4) Allgemein: (a) Folgt aus $\widehat{f} = 0$ stets $f = 0$, zumindest fast überall?
(b) Folgt aus $\widehat{f} = \widehat{g}$ stets $f = g$, zumindest fast überall?

Lösung: (1a) Ja: Dank Parseval gilt $\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2 = 0$.
Aus dem Integral $\int_0^T |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = 0$ und der Stetigkeit von f folgt $f = 0$.
Ausführlich siehe Satz J3E und den anschließenden Beweis.

(1b) Ja, dies folgt aus (1a) angewendet auf die Differenz $f - g$.

(2) Nein: Wie zuvor gilt $\int_0^T |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = 0$, allerdings dürfen wir nun f an endlich vielen Stellen ändern. Dann gilt weiterhin $\widehat{f} = 0$ aber $f \neq 0$.

(3) Ja, die Sprungnormierung stellt die Eindeutigkeit wieder her.

(4) Ja, aus $\int_0^T |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = 0$ folgt $f(x) = 0$ für fast alle $x \in \mathbb{R}$, das heißt alle x außerhalb einer vernachlässigbaren Menge $N \subseteq \mathbb{R}$, $\mathrm{vol}_1(N) = 0$.

Verständnisfragen zur Energiegleichung

Aufgabe: (1) Ist $\sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx)$ Fourier–Reihe einer int'baren Funktion?

(2) Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx)/\sqrt{k}$ stetig?

(3) Vorgelegt sei die trigonometrische Reihe $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-a} \sin(kx)$.
Für welche $a \in \mathbb{R}$ konvergiert f in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$? Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist f zudem quadrat-integrierbar? stetig? stetig differenzierbar?

(4) Dieselben Fragen für $f(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \sin(kx)/(k^a \ln(k)^b)$
oder $f(x) = \sum_{k=3}^{\infty} \sin(kx)/(k^a \ln(k)^b \ln(\ln k)^c)$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Lösung: (1) Nein nach Riemann–Lebesgue I3B, denn $b_k = 1 \not\to 0$.

(2) Nein, denn $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k = \infty$. Ausführlicher gilt folgendes:

(3) Diese trig. Reihe konvergiert für $a > 0$ in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$:
In $x = 0, \pi/2, \pi, \ldots$ folgt dies aus dem Leibniz–Kriterium (Satz B3G),
und allgemein für $x \in \mathbb{R}$ aus Dirichlets Verallgemeinerung (Satz B3I).

Für $f \in L^2$ ist $a > 1/2$ notwendig und hinreichend dank Parseval (J3C).
Für $f \in C^0$ ist $a > 1/2$ notwendig und $a > 1$ hinreichend (Satz I3C).
Für $f \in C^1$ ist $a > 3/2$ notwendig und $a > 2$ hinreichend (Satz I3C).

(4) Analog zu (3); zur Konvergenz dieser Reihen siehe B303.

Verständnisfragen zu Glattheit und Abklingen

Aufgabe: Vorgegeben sei ein Exponent $a \in \mathbb{R}$. (1) Ist $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-a}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ die Fourier–Reihe einer stetigen 2π–periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$? (2) Falls ja, wie oft ist f stetig differenzierbar? mindestens? höchstens?

Lösung: Wir nutzen die obigen Kriterien zu Konvergenz und Stetigkeit. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |k^{-a}|$ divergiert für $a \le 1$ und konvergiert für $a > 1$.

(1a) Für $a > 1$ gilt $\sum_{k=1}^{\infty} |k^{-a}| < \infty$, somit konvergieren die Funktionen $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k^{-a}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ gleichmäßig gegen $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-a}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$. Alle Funktionen f_n sind stetig, also auch die Grenzfunktion f.

Die Antwort lautet hier also: Ja, $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-a}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ ist stetig.

(1b) Für $a \le 1$ gilt $\sum_{k=1}^{\infty} |k^{-a}| = \infty$. Angenommen es gäbe eine stetige und 2π–periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} k^{-a}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$.

Dank $f \in C^0([0, 2\pi], \mathbb{C}) \subseteq L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ folgt dann $\int_{x=0}^{2\pi} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$ und dank Energiegleichung $\sum_{k=1}^{\infty} |k^{-a}|^2 < \infty$, also $2a > 1$.

Für $a \le 1/2$ ist die Antwort also: Nein, f kann nicht stetig sein.
Für $1/2 < a \le 1$ lassen unsere Kriterien keinen Schluss zu.

Verständnisfragen zu Glattheit und Abklingen

(2) Wir nehmen $a > 1$ an und untersuchen $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-a}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$. Durch Ableiten und Integrieren erhalten wir dank (1) sofort:

(2a) Aus $a > n + 1$ folgt $f \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$:
Für $a > n + 1$ ist f mindestens n-mal stetig differenzierbar.

(2b) Aus $f \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ folgt $a > n + \frac{1}{2}$:
Für $a \le n + 1/2$ ist f höchstens $(n - 1)$-mal stetig differenzierbar.

Zusammenfassend bleiben damit zwei Möglichkeiten:

- $a \in \,]n + 1, n + \frac{3}{2}] \implies f \in C^n \setminus C^{n+1}$, das heißt:
  f ist n-mal stetig differenzierbar, aber nicht $(n + 1)$-mal.
- $a \in \,]n + \frac{3}{2}, n + 2] \implies f \in C^n \setminus C^{n+2}$, das heißt:
  f ist n-mal stetig differenzierbar, höchstens aber $(n + 1)$-mal.

☺ Unsere bequemen Kriterien liefern uns recht präzise Aussagen: einfacher Plausibilitätscheck und schnelle Vorabinformation.

☹ Es bleibt eine (kleine) Lücke. Falls dies wirklich nötig sein sollte, so müssen wir hierzu die gegebene Funktion f genauer untersuchen.

Verständnisfragen zu Glattheit und Abklingen

Aufgabe: Für C^∞–glatte Funktionen klingen die Fourier–Koeffizienten extrem schnell ab; hierzu gilt erfreulicherweise auch die Umkehrung:
(1) Ist $\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ die Fourier–Reihe einer glatten Funktion?
(2) Ist $\sum_{k=0}^\infty 2^{-k}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ die Fourier–Reihe einer glatten Funktion?
(3) Was gilt für $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ mit $|c_k| \le q^k$ und $0 < q < 1$?

Lösung: Ja, in beiden Fällen ist die so dargestellte Funktion glatt:

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^k = \exp(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}) = f(x)$$

$$\sum_{k=0}^\infty 2^{-k}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \sum_{k=0}^\infty \Big(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{2}\Big)^k = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}/2} = g(x)$$

Die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sind 2π–periodisch und C^∞–glatt.
(3) Dasselbe gilt allgemein: Die Laurent–Reihe $h(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k z^k$ konvergiert auf dem Kreisring $U = K(0, q^{-1}, q) \subseteq \mathbb{C}$. Die so definierte Funktion $h : \mathbb{C} \supseteq U \to \mathbb{C}$ ist C^∞–glatt, sogar analytisch / holomorph. Somit ist insbesondere auch $\mathbb{R} \to \mathbb{C} : x \mapsto h(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ glatt.

Verständnisfragen zu Glattheit und Abklingen

☺ Schnelles Abklingen der Fourier–Koeffizienten entspricht Glattheit der Funktion. Sie kennen hierzu das L^2–Kriterium $\sum |c_k|^2 < \infty$ sowie das C^n–Kriterium $\sum |c_k| k^n < \infty$, wie oben erklärt und illustriert.

☺ In unserem vorliegenden Beispiel klingen die Koeffizienten extrem schnell ab, so dass das C^n–Kriterium für *jedes* $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist:
Die so dargestellte Funktion f ist also tatsächlich C^∞–glatt.

☺ Besser noch können Sie die Reihe sogar explizit ausrechnen:
Sie erkennen hier die Exponentialreihe bzw. die geometrische Reihe!

Gleiches gilt für jede Potenzreihe im Inneren ihres Konvergenzkreises, allgemein jede Laurent–Reihe im Inneren ihres Konvergenzkreisrings. Auch hier lohnt sich Ihre Investition in mathematische Allgemeinbildung.

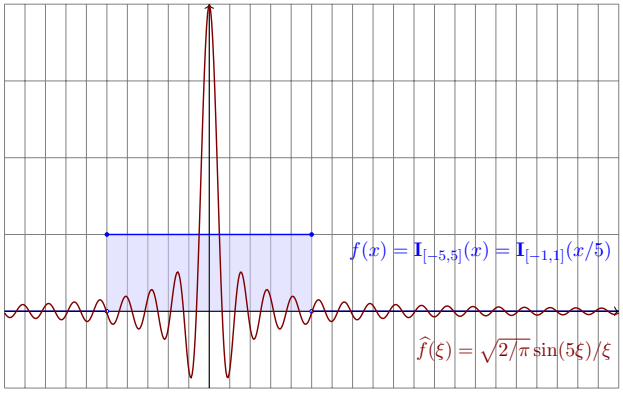
☺ Glattheit der Funktion f und Abklingen der Fourier–Koeffizienten $\widehat{f}$ können Sie leicht prüfen, selbst in vielen schwierigen Situationen, in denen Sie f nicht genau kennen oder analysieren können.

☺ Unsere bequemen Kriterien liefern uns recht präzise Aussagen: einfacher Plausibilitätscheck und schnelle Vorabinformation.

Kapitel K

Fourier–Transformation

Joseph Fourier
(1768–1830)



INSTITUT FOURIER

Vollversion • michael-eisermann.de/lehre/HM3 • 26.02.2025

Inhalt dieses Kapitels K

K002

1 Erste Beispiele, Eigenschaften, Rechenregeln
- Von der Fourier–Reihe zum Fourier–Integral
- Einfache Beispiele und erste Eigenschaften
- Der Umkehrsatz für Fourier–Transformierte

2 Analytische Eigenschaften
- Rechenregeln der Fourier–Transformation
- Ableitung und Multiplikation
- Faltung und Produkt

3 Metrische Eigenschaften
- Energiegleichung und Fourier–Isometrie
- Die Unschärferelation für Fourier–Paare
- Bedeutung in der Quantenmechanik

4 Fazit: Fourier–Transformation
- Zusammenfassung
- Verständnisfragen
- Weitere Aufgaben

Motivation: von Fourier–Reihe zu Fourier–Integral

Die Funktion $f : [-T/2, T/2] \to \mathbb{C}$ zerlegen wir in ihre **Fourier–Reihe**:

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}xk\cdot 2\pi/T} \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{1}{T} \int_{x=-T/2}^{T/2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xk\cdot 2\pi/T} f(x) \, \mathrm{d}x$$

Sei $\Delta\xi = 2\pi/T = \omega$. Wir betrachten $\xi = k\Delta\xi$ als **diskrete Variable**:

$$g(\xi) = \int_{x=-T/2}^{T/2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} f(x) \, \mathrm{d}x \quad \text{und} \quad f(x) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}\Delta\xi} g(\xi) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} \Delta\xi$$

Für nicht-periodische Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ betrachten wir $T \to \infty$.
Dann gilt $\Delta\xi \to 0$, und somit wird ξ eine **kontinuierliche Variable**.
Heuristisch wird so aus der Fourier–Reihe das **Fourier–Integral**:

$$g(\xi) = \int_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} \, f(x) \, \mathrm{d}x \quad \text{und} \quad f(x) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} g(\xi) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} \, \mathrm{d}\xi$$

Diese Formel mit 2π vor dem letzten Integral ist die Konvention der Physik, siehe Laplace L406.
Ich verwende in diesem Kapitel die symmetrische, in der Mathematik übliche Normierung $\sqrt{2\pi}$.

Motivation: von Fourier–Reihe zu Fourier–Integral

Das erklärt Anschauung und Heuristik, Definitionen und Sätze folgen.
Die Fourier–Analyse hat zahlreiche wichtige technische Anwendungen:

- Digitalisierung und Datenkompression (FFT, MP3, JPEG, MPEG).
- Datenanalyse, Mustererkennung, z.B. Spracherkennung.

Sie ist zudem ein universelles Werkzeug der Mathematik:

- Zerlegen von komplizierten Funktionen in einfache Basisfunktionen.
- Optimale L^2–Approximation, Lösung von Differentialgleichungen.

3B1B: *But what is the Fourier transform?* `youtu.be/spUNpyF58BY`
D. Gabor, Nobelpreis 1971 für Holographie! `youtu.be/EmKQsSDlaa4`

Fourier–Integrale können wir oft ausrechnen dank Integralsätzen wie dem Residuensatz. Hier zahlt sich unsere solide Vorbereitung aus!

In der Literatur gibt es mindestens drei Konventionen für den Faktor 2π vor dem Integral oder im Exponenten. Beim sorgfältigen Vergleich muss man jeweils nachschauen, welche Normierung zugrunde liegt.
Wir beginnen daher, wie es sich gehört, mit einer präzisen Definition.

Fourier–Transformation

Definition K1A: Fourier–Transformation

Die **Fourier–Transformierte** einer Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ ist

$$\boxed{\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C},\quad \widehat{f}(\xi):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Wir nennen f **Fourier–transformierbar**, falls diese Integrale existieren. Für $f\in L^1$, also $\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,\mathrm{d}x<\infty$, ist der Integrand absolut integrierbar. Allgemein nutzen wir Cauchy–Hauptwert B219 und Residuenkalkül F4K.

Die so definierte Zuordnung $\mathscr{F}:f\mapsto\widehat{f}$ heißt **Fourier–Transformation**.

Die **inverse Fourier–Transformation** $\mathscr{F}^{-1}:\widehat{f}\mapsto f$ ist definiert durch

$$\boxed{f:\mathbb{R}\to\mathbb{C},\quad f(x):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi.}$$

Auch hierzu fordern bzw. sichern wir die Transformierbarkeit von $\widehat{f}$.

Dies kürzen wir ab als **Transformationspaar** $f\circ\!\!-\!\!\bullet\,\widehat{f}$ bzw. $\widehat{f}\bullet\!\!-\!\!\circ\,f$.

Fourier–Transformation

Periodische Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ stellen wir als **Fourier–Reihe** dar, also eine **diskrete Überlagerung** von harmonischen Schwingungen. Hier hingegen stellen wir f dar als ein **Fourier–Integral**, also eine **kontinuierliche Überlagerung** harmonischer Schwingungen $\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}$. Somit ist $\widehat{f}$ die **Dichtefunktion** der in f enthaltenen Harmonischen.

In der Signalverarbeitung zerlegt die Fourier–Transformation das **Signal** f in sein **Spektrum** $\widehat{f}$. Man nennt dann x meist die **Zeitvariable** und $f(x)$ die Funktion im **Zeitbereich**. Als Gegenstück hierzu heißt ξ die **Frequenzvariable** und die Transformierte $\widehat{f}(\xi)$ **Spektralfunktion**.

In (quanten-)physikalischen Anwendungen betrachtet man x als **Ort** und ξ als **Impuls**. Dies sind **konjugierte Variablen** in der klassischen, hamiltonschen Mechanik (s. P2F). In der Quantenmechanik übersetzt dann die Fourier–Transformation zwischen Orts- und Impulsdarstellung.

Hin- und Rücktransformation sind konjugiert gemäß $\mathscr{F}^{-1}(\overline{f})=\overline{\mathscr{F}(f)}$.

⚠ Verschiedene Autoren verwenden hier verschiedene Konventionen. Der obige Faktor $1/\sqrt{2\pi}$ führt zu einer symmetrischen Umkehrformel.

Fourier–Transformation und Cauchy–Hauptwert

Wir setzen stillschweigend voraus, dass $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ auf jedem endlichen Intervall $[-r,r]$ integrierbar ist. Bei Polstellen, etwa $f(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}ux}/(x-s)$ in $x=s$, betrachten wir das uneigentliche Integral $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-r}^{s-\varepsilon}+\int_{s+\varepsilon}^{r}$.
Als Integral über $\mathbb{R}$ vereinbaren wir hier den **Cauchy–Hauptwert**

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Dieses Integral existiert, wenn f auf ganz $\mathbb{R}$ absolut integrierbar ist, also $\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,\mathrm{d}x<\infty$ erfüllt, aber auch noch in weiteren Fällen.
Als Beispiel betrachten wir unten die **Spaltfunktion** $\mathrm{si}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit

$$\mathrm{si}(x)=\begin{cases}\sin(x)/x & \text{für } x\neq 0,\\ 1 & \text{für } x=0.\end{cases}$$

Diese ist über $\mathbb{R}$ nicht absolut integrierbar, $\int_{\mathbb{R}}|\mathrm{si}(x)|\,\mathrm{d}x=\infty$. B421
Glücklicherweise existiert noch der obige Cauchy–Hauptwert K107
analog zur Summierbarkeit der Leibniz–Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}/k$. B322

Linearität der Fourier–Transformation

☺ Aus der Linearität des Integrals folgt unmittelbar:

Satz K1B: Linearität

Die Fourier–Transformation ist linear:

$$\boxed{\mathscr{F}\big[a\,f+b\,g\big]=a\,\mathscr{F}(f)+b\,\mathscr{F}(g)}$$

für alle $\mathscr{F}$–transformierbaren Funktionen $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ und $a,b\in\mathbb{C}$.

$$\boxed{f\circ\!\!-\!\!\bullet\,\widehat{f},\quad g\circ\!\!-\!\!\bullet\,\widehat{g}\quad\Longrightarrow\quad af+bg\circ\!\!-\!\!\bullet\,a\widehat{f}+b\widehat{g}}$$

Nachrechnen: Dank Linearität des Integrals gilt:

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(af+bg)(\xi)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\big[a\,f(x)+b\,g(x)\big]\,\mathrm{d}x\\&=\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{b}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}g(x)\,\mathrm{d}x\\&=a\,\widehat{f}(\xi)+b\,\widehat{g}(\xi)\end{aligned}$$

Beispiel: Rechteckfunktion ○—● Spaltfunktion

Aufgabe: Wir betrachten ein reelles Intervall $[a,b] = [c-r, c+r]$.
(1) Fourier–transformieren Sie die Rechteckfunktion $f(x) = \mathbf{I}_{[a,b]}(x)$.
(2) Berechnen Sie aus der Transformierten $\widehat{f}$ die Rücktransformierte.

Lösung: (1) Im Punkt $\xi = 0$ ist die Rechnung besonders leicht:

$$\widehat{f}(0) \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=a}^{b} 1\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, r$$

Für $\xi \neq 0$ rechnen wir geduldig und finden die **Spaltfunktion** B149 :

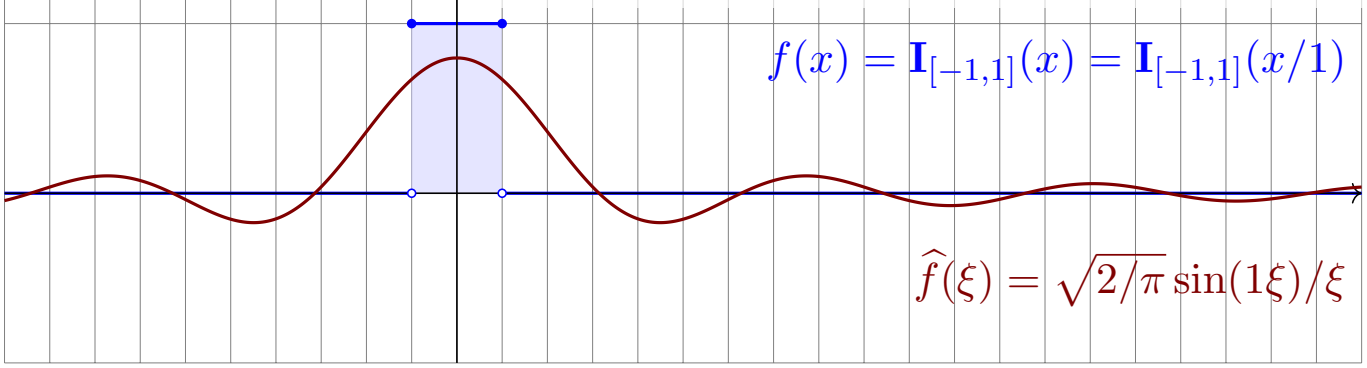
$$\widehat{f}(\xi) \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=a}^{b} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x \underset{\text{B1I}}{\overset{\text{HDI}}{=}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}}{-\mathrm{i}\xi}\right]_{x=a}^{b}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi c}}{\xi}\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi r} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi r}}{2\mathrm{i}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \underbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi c}}_{\text{Verschiebung}}\, \underbrace{\sin(\xi r)/\xi}_{\text{Spaltfunktion}}$$

☺ Insbesondere ist $\widehat{f}$ stetig, auch im Punkt $\xi = 0$: Entwickeln Sie hierzu $\sin(\xi r)$ als Potenzreihe um $\xi = 0$, nutzen die Regel von L'Hospital oder direkt die Ableitung $\sin(\xi r)/\xi = (\sin(\xi r) - \sin(0r))/(\xi - 0) \to r\cos(0)$.

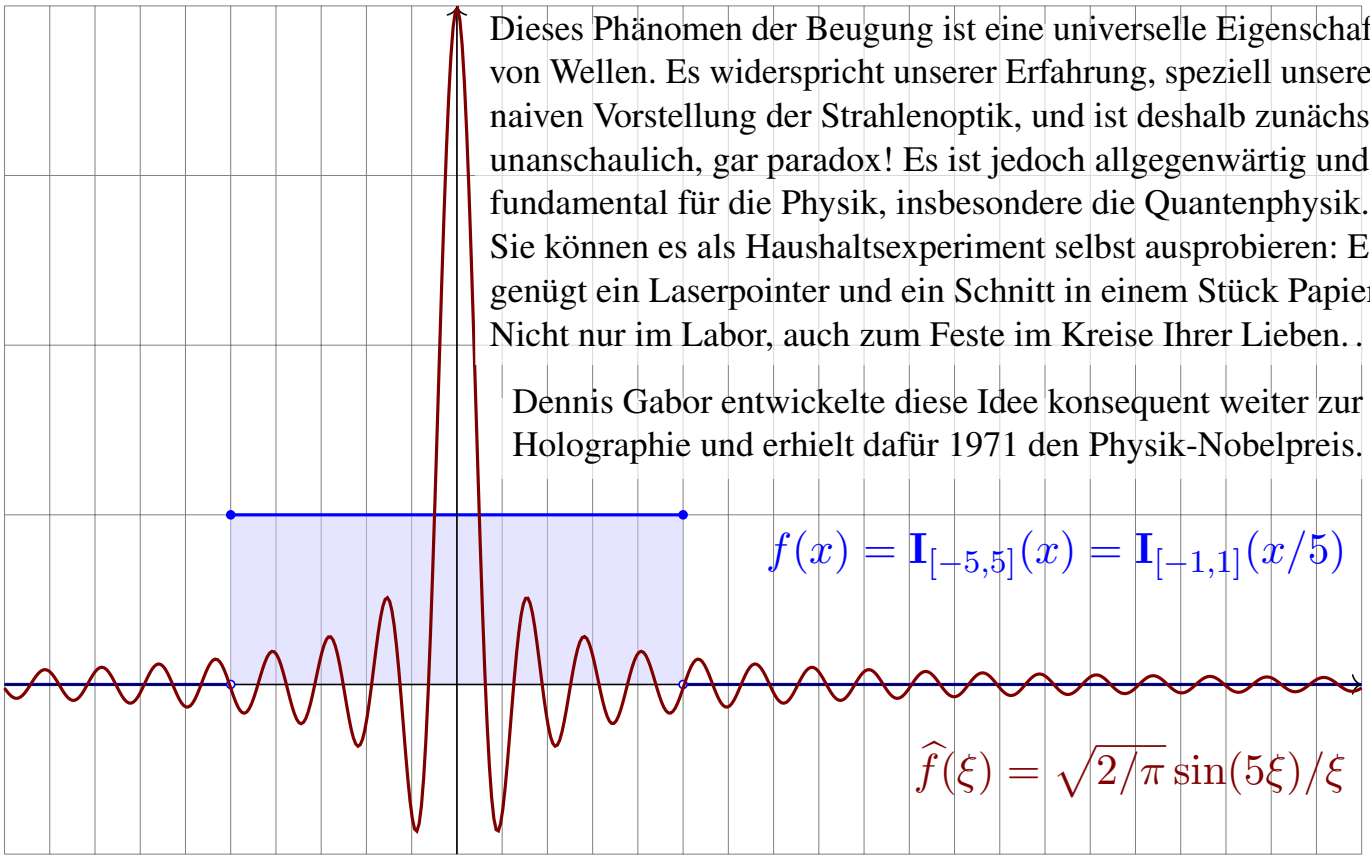
Beispiel: Rechteckfunktion ○—● Spaltfunktion

Diese Fourier–Transformierte ist unser erstes Beispiel, und aus mathematischer Sicht können wir hieran bereits sehr viel lernen. Auch physikalisch gesehen spielt sie eine recht wichtige Rolle: Die Beugung (von Schall, Licht, Quanten, allgemein Wellen) an einem Einzelspalt erzeugt genau dieses Interferenzmuster (in der Messung meist als Betragsquadrat). Je schmaler der Spalt, desto breiter das Beugungsbild! Diese Entdeckung ist theoretisch und praktisch wichtig: So können Sie mikroskopisch kleine Längen messen, oder umgekehrt die Wellenlänge des Lichts bestimmen. Die medizinische Bildgebung (CT/MRT) nutzt diese Techniken, numerisch optimiert und freundlich verpackt, d.h. wegversteckt.



☺ Wir sehen hier die **Unschärferelation**: Ist f schmal, so ist $\widehat{f}$ breit. Beugung am Einzelspalt erzeugt dieses Interferenzmuster (quadriert).

Beispiel: Rechteckfunktion ○—● Spaltfunktion



Dieses Phänomen der Beugung ist eine universelle Eigenschaft von Wellen. Es widerspricht unserer Erfahrung, speziell unserer naiven Vorstellung der Strahlenoptik, und ist deshalb zunächst unanschaulich, gar paradox! Es ist jedoch allgegenwärtig und fundamental für die Physik, insbesondere die Quantenphysik. Sie können es als Haushaltsexperiment selbst ausprobieren: Es genügt ein Laserpointer und ein Schnitt in einem Stück Papier. Nicht nur im Labor, auch zum Feste im Kreise Ihrer Lieben…

Dennis Gabor entwickelte diese Idee konsequent weiter zur Holographie und erhielt dafür 1971 den Physik-Nobelpreis.

☺ Wir sehen hier die **Unschärferelation**: Ist $\widehat{f}$ schmal, so ist f breit.
Anwendung: So können Sie mikroskopisch kleine Strukturen messen.

Beispiel: Rechteckfunktion ○—● Spaltfunktion

(2) Die Fourier–Transformierte von $f = \mathbf{I}_{[a,b]}$ ist

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi a} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi b}}{\mathrm{i}\xi}.$$

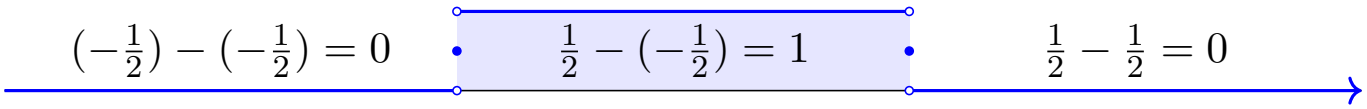
Erinnerung an Seite F425: Mit dem Residuenkalkül bestimmen wir

$$\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi u}}{\xi}\,\mathrm{d}\xi \overset{\text{Res}}{\underset{\text{F4K}}{=}} \operatorname{sign}(u)\,\operatorname*{res}_{z=0}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}uz}}{z}\right) = \operatorname{sign}(u).$$

Zu $\widehat{f}$ berechnen wir damit die **inverse Fourier–Transformation**:

$$\mathscr{F}^{-1}(\widehat{f})(x) \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi a} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi b}}{\mathrm{i}\xi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi$$

$$\overset{\text{Lin}}{=} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi(x-a)}}{\xi}\,\mathrm{d}\xi - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi(x-b)}}{\xi}\,\mathrm{d}\xi \overset{\text{Res}}{=} \begin{cases} 0 & \text{für } x \notin [a,b], \\ 1 & \text{für } x \in \,]a,b[, \\ \frac{1}{2} & \text{für } x \in \{a,b\}. \end{cases}$$



☺ Wir erhalten die ursprüngliche Funktion f, aber sprungnormiert!

Fourier–Transformation der Exponentialverteilung

K111
Beispiel

Aufgabe: Sei $a > 0$. Berechnen Sie folgende Fourier–Transformation:

$$\left.\begin{array}{ll} 0 & \text{für } x < 0 \\ \mathrm{e}^{-ax} & \text{für } x > 0 \\ 1/2 & \text{für } x = 0 \end{array}\right\} = f(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a + \mathrm{i}\xi}$$

Lösung: Wir setzen die Definition ein und rechnen es aus:

$$\sqrt{2\pi}\,\widehat{f}(\xi) \overset{\text{Def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Def}}{=} \int_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{Exp}}{=} \int_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(a+\mathrm{i}\xi)x}\,\mathrm{d}x \underset{\text{B1I}}{\overset{\text{HDI}}{=}} \left[-\frac{\mathrm{e}^{-(a+\mathrm{i}\xi)x}}{a + \mathrm{i}\xi}\right]_{x=0}^{\infty} = \frac{1}{a + \mathrm{i}\xi}$$

Fourier–Transformation der Exponentialverteilung

K112
Beispiel

Aufgabe: Berechnen Sie die Rücktransformation.

Lösung: Wir nutzen den Residuenkalkül, hier erneut Satz F4K:

$$f(x) \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}}{a + \mathrm{i}\xi}\,\mathrm{d}\xi$$

$$\overset{\text{Lin}}{=} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}}{\xi - \mathrm{i}a}\,\mathrm{d}\xi \underset{\text{F4K}}{\overset{\text{Res}}{=}} \begin{cases} \mathrm{e}^{-ax} & \text{für } x > 0 \quad (\text{Residuum in } \xi = \mathrm{i}a), \\ 0 & \text{für } x < 0 \quad (\text{keine Sing. in } \mathbb{C}_{\mathrm{Im} \le 0}). \end{cases}$$

Den Fall $x = 0$ müssen wir separat weiterrechnen:

$$f(0) \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi - \mathrm{i}a}\,\mathrm{d}\xi \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi + \mathrm{i}a}{\xi^2 + a^2}\,\mathrm{d}\xi \ \text{(gerader Anteil)}$$

$$\overset{\text{Lin}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{\xi^2 + a^2}\,\mathrm{d}\xi \underset{\text{B1I}}{\overset{\text{HDI}}{=}} \frac{1}{2\pi} \Big[\arctan(x/a)\Big]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2}$$

☺ Wir erhalten genau die Exponentialverteilung der vorigen Aufgabe! Insbesondere gilt: In $x = 0$ ist die Rücktransformierte sprungnormiert. Zur Bequemlichkeit haben wir deshalb auch f gleich so eingerichtet.

Fourier–Transformation der Cauchy–Verteilung

K113
Beispiel

Aufgabe: Sei $a > 0$. Fourier–transformieren Sie $g(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$.

Lösung: Direkt ausrechnen... oder besser gleich Linearität nutzen:

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{e}^{-ax} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \\ 1/2 & \text{für } x = 0 \end{array}\right\} = f(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a + \mathrm{i}\xi}$$

$$\Longrightarrow \quad g(x) = f(x) + f(-x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \begin{aligned} \widehat{g} &= \widehat{f}(\xi) + \widehat{f}(-\xi) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a + \mathrm{i}\xi} + \frac{1}{a - \mathrm{i}\xi} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a}{a^2 + \xi^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + \xi^2} \end{aligned}$$

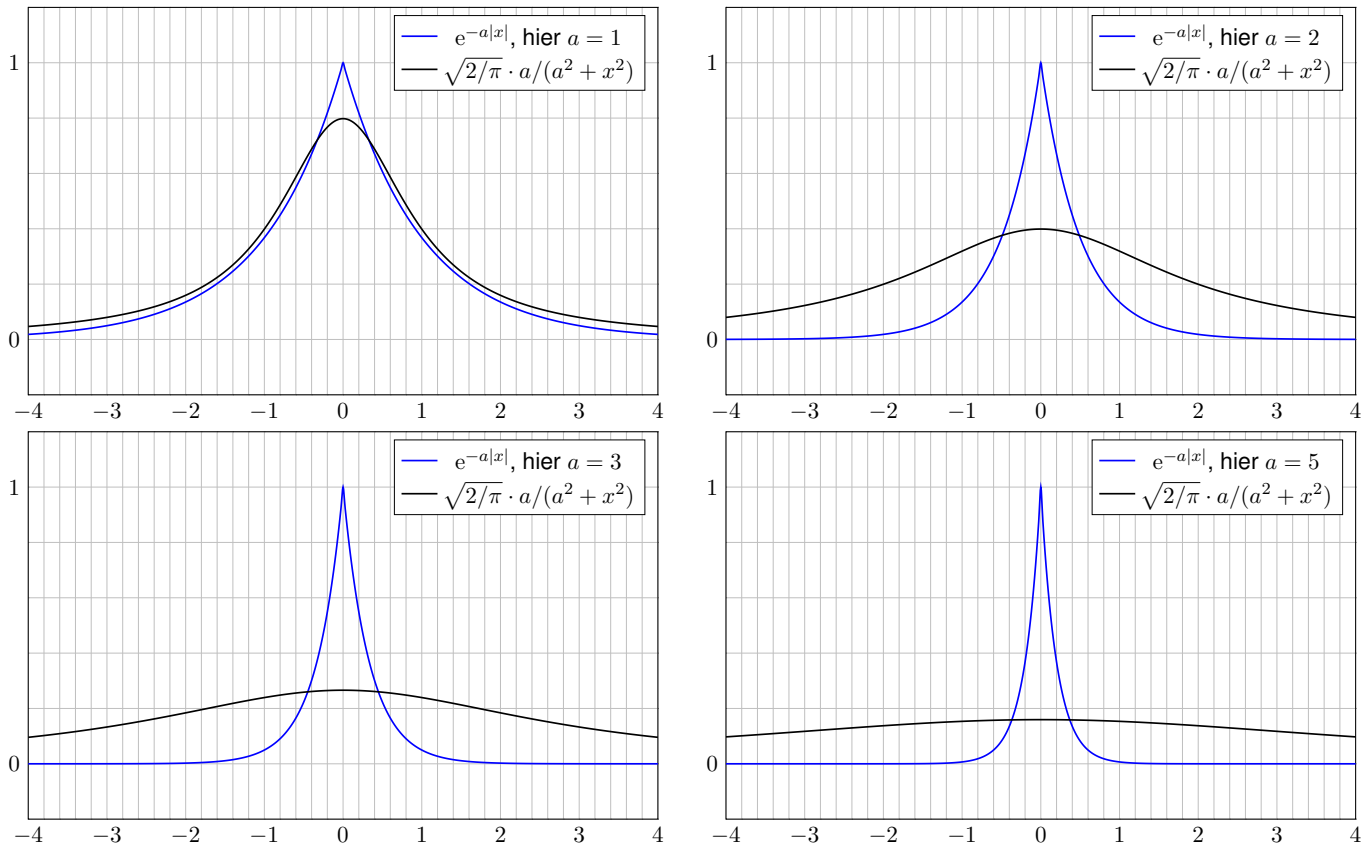
☺ Die Rücktransformation gelingt ebenso: Wir haben oben bereits $\mathscr{F}^{-1}(\widehat{f}) = f$ ausgerechnet. Daraus folgt $\mathscr{F}^{-1}(\widehat{g}) = g$ dank Linearität.

☺ Dies folgt ebenso aus jedem der beiden folgenden Umkehrsätze, da die Funktion f und ihre Transformierte $\widehat{f}$ alle Bedingungen erfüllen.

Fourier–Transformation der Cauchy–Verteilung

K114
Beispiel

☺ Wir sehen erneut die **Unschärferelation**: Ist f schmal, so ist $\widehat{f}$ breit.



Eigenschaften der Fourier–Transformierten

☺ Unsere Beispiele illustrieren folgende allgemeine Regel:

Satz K1C: Eigenschaften der Fourier–Transformierten

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolut integrierbar, also $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| \, \mathrm{d}x < \infty$, dann gilt:

(1) Die Fourier–Transformierte $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist stetig und beschränkt:

$$\boxed{\left|\widehat{f}(\xi)\right| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left|f(x)\right| \mathrm{d}x \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}}$$

(2) Sie verschwindet im Unendlichen (Riemann–Lebesgue–Lemma):

$$\boxed{\left|\widehat{f}(\xi)\right| \to 0 \quad \text{für} \quad |\xi| \to \infty}$$

(3) Zudem gilt die Plancherel–Gleichung (Energiegleichung):

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \left|f(x)\right|^2 \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi}$$

Eigenschaften der Fourier–Transformierten

Die Fourier–Transformierte haben wir oben sehr allgemein definiert: Für das Integral fordern wir nur die Existenz des Cauchy–Hauptwerts. Das hat den Vorteil, auf möglichst viele Funktionen anwendbar zu sein; genau das nutzen wir bereits in unseren ersten Beispielrechnungen.

Gute Eigenschaften hat die $\mathscr{F}$–Transformation aber erst für absolut integrierbare Funktionen, $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, also solche mit $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| \, \mathrm{d}x < \infty$. Das ist eine Einschränkung, garantiert uns aber starke Folgerungen. Meist werden wir uns also auf diesen besonders gutartigen Fall stützen.

Im Satz ist die absolute Integrierbarkeit von f wesentlich, andernfalls kann die Transformierte $\widehat{f}$ auch unstetig sein, wie in obigen Beispielen: Die Spaltfunktion $\widehat{f}(\xi) = \sqrt{2/\pi}\, \sin(\xi)/\xi$ ist nicht absolut integrierbar, $\widehat{f} \in L^2 \smallsetminus L^1$, und tatsächlich ist die (Rück)Transformierte nicht stetig.

(3) Die Plancherel–Gleichung erweitert die Fourier–Isometrie J1A. Sie besagt: Genau dann ist f quadrat-integrierbar, wenn $\widehat{f}$ dies ist, und die Integrale über $|f|^2$ und $|\widehat{f}|^2$ sind gleich (Energiegleichung). Wir zeigen dies etwas später gegen Ende des Kapitels (Satz K3A).

Beweis der Stetigkeit der Transformierten

K117
Ausführung

(1) Sei f absolut integrierbar. Die Beschränktheit von $\widehat{f}$ ist dann klar:

$$\left|\widehat{f}(\xi)\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\right|}_{\le 1}\cdot\left|f(x)\right|\,\mathrm{d}x$$

Zur gleichmäßigen Stetigkeit von $\widehat{f}(\xi)$ betrachten wir

$$\begin{aligned}\left|\widehat{f}(\xi+\eta) - \widehat{f}(\xi)\right| &= \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\xi+\eta)x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\right] f(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\right|}_{=1}\cdot\underbrace{\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta x} - 1\right|\cdot\left|f(x)\right|}_{=:\, g_\eta(x)}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

In jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ gilt $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta x} \to 1$ für $\eta \to 0$, demnach also $g_\eta(x) \to 0$. Zudem ist $g_\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt durch die integrierbare Funktion $2|f|$. Dank majorisierter Konvergenz D209 vertauschen Integral und Limes:

$$\lim_{\eta\to 0}\int_{\mathbb{R}} g_\eta(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \lim_{\eta\to 0} g_\eta(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} 0\,\mathrm{d}x = 0$$

Somit gilt $\left|\widehat{f}(\xi+\eta) - \widehat{f}(\xi)\right| \to 0$, also $\widehat{f}(\xi+\eta) \to \widehat{f}(\xi)$ für $\eta \to 0$.

Beweis des Riemann–Lebesgue–Lemmas

K118
Ausführung

(2) Die Transformierte von $f(x) = \mathbf{I}_{[a,b]}(x)$ verschwindet im Unendlichen:

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x=a}^{b} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi b} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi a}}{\xi} \to 0 \quad \text{für } |\xi| \to \infty$$

Dank Linearität gilt dies somit für alle Treppenfunktionen. Jede absolut integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ können wir durch Treppenfunktionen approximieren: Zu $\varepsilon > 0$ existiert eine Treppenfunktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit

$$\left\|f - g\right\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}} \left|f(x) - g(x)\right|\,\mathrm{d}x \le \varepsilon.$$

Damit liegen auch die Transformierten $\widehat{f}$ und $\widehat{g}$ nahe beeinander:

$$\left|\widehat{f}(\xi) - \widehat{g}(\xi)\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\left[f(x) - g(x)\right]\,\mathrm{d}x\right| \le \int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x \le \varepsilon$$

Aus $|\widehat{f}(\xi)| \le |\widehat{g}(\xi)| + \varepsilon$ und $|\widehat{g}(\xi)| \to 0$ erhalten wir

$$\limsup_{|\xi|\to\infty}\left|\widehat{f}(\xi)\right| \le \limsup_{|\xi|\to\infty}\left|\widehat{g}(\xi)\right| + \varepsilon = \varepsilon.$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgern wir $\limsup_{|\xi|\to\infty}|\widehat{f}(\xi)| = 0$.

Der Umkehrsatz im Spezialfall $L^1 \circ\!\!-\!\!\bullet L^1$

Satz K1D: Umkehrsatz im Spezialfall $L^1 \circ\!\!-\!\!\bullet L^1$

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolut integrierbar mit Fourier–Transformierter

$$\boxed{\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\, f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Dann ist die Funktion $\widehat{f}$ stetig. Ist umgekehrt auch $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolut integrierbar und f stetig, so gilt in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ die Umkehrformel

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi.}$$

⚠ Der Satz fordert die strenge Voraussetzung, dass $f, \widehat{f} \in L^1 \cap C^0$ gilt, also beide Funktionen sowohl stetig als auch absolut integrierbar sind. Als Gegenleistung garantiert er die Umkehrformel in *jedem* Punkt!

☺ Die Cauchy–Verteilung K113 erfüllt Voraussetzung und Folgerung.
☹ Für die Spaltfunktion K107 gilt nur $f \in L^1 \setminus C^0$ und $\widehat{f} \in C^0 \setminus L^1$.

Der Umkehrsatz im Spezialfall $L^1 \circ\!\!-\!\!\bullet L^1$

Wir sprechen von **Fourier–Analyse** und **Fourier–Synthese**:

- Die Analyse $\mathscr{F} : f \mapsto \widehat{f}$ zerlegt das Signal f in sein Spektrum $\widehat{f}$.
- Die Synthese $\mathscr{F}^{-1} : \widehat{f} \mapsto f$ integriert das Spektrum $\widehat{f}$ zum Signal f.

Dies ist analog zu Fourier–Reihen, dort mit diskretem Spektrum.
Für die Ausdehnung $\mathscr{F}, \mathscr{F}^{-1} : L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ siehe Seite K301.

Beispiel: Die Umkehrformel für Glockenkurven können wir explizit nachrechnen K128. Hier sind f und $\widehat{f}$ stetig und absolut integrierbar.

Beweisidee: Der Satz gilt für Glockenkurven K128, also auch für ihre Linearkombination K106. Jede absolut integrierbare Funktion lässt sich so approximieren. Durch Grenzübergang gilt er dann für alle $f, \widehat{f} \in L^1$.

Bemerkung: Dieser Umkehrsatz ist ein wichtiger erster Schritt. In vielen Anwendungen jedoch ist f nicht stetig oder $\widehat{f}$ nicht absolut integrierbar. Wir möchten daher ein Kriterium, das auch Sprungstellen behandelt. Der nächste Satz liefert diese praktische und bequeme Erweiterung. Wir finden wieder die Sprungnormierung wie bei Fourier–Reihen.

Der Umkehrsatz für sprungnormierte Funktionen

Satz K1E: Umkehrformel für sprungnormierte Funktionen

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolut integrierbar mit Fourier–Transformierter

$$\boxed{\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Zudem sei f stückweise stetig differenzierbar und sprungnormiert,

$$f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Dann gilt für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}$ die Umkehrformel

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi.}$$

Für solche Funktionen ist die Transformation $f \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{f}$ also umkehrbar.

☺ Einfachster Fall: Ist f stetig in x, so ist $f(x) = f(x\pm)$ sprungnormiert.

Der Umkehrsatz für sprungnormierte Funktionen

☺ Dies haben wir in unseren Beispielen beobachtet, etwa K107:
Die Umkehrformel gilt für Indikatorfunktionen $f = \mathbf{I}_{[a,b]}$ mit $a < b$ in $\mathbb{R}$:
Hier können wir beide $\mathscr{F}$–Transformationen explizit nachrechnen!

☺ Dank Linearität gilt der Satz somit für alle Treppenfunktionen.

Beweis: Eine Rechnung für den allgemeinen Fall finden Sie bei Meyberg–Vachenauer, *Höhere Mathematik 2*, §11.6, Satz 6.3.

Wir werden den Satz hier durch weitere Rechenbeispiele illustrieren. Das ersetzt nicht den Beweis, trainiert aber unsere Rechentechniken.

Bemerkung: Der Satz entspricht dem Dirichlet–Kriterium I2A für Fourier–Reihen: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periodisch, stückweise stetig diff'bar und sprungnormiert, so gilt für die Fourier–Koeffizienten $\widehat{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$:

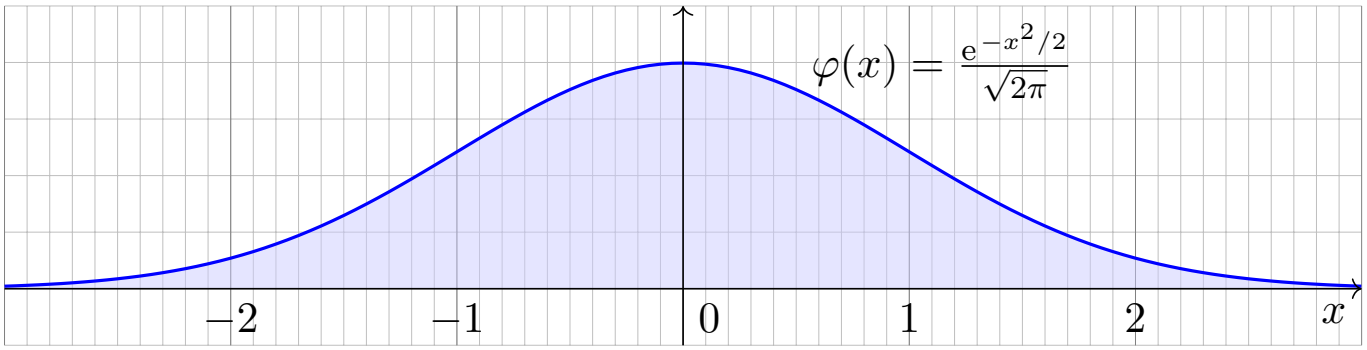
$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \widehat{f}(k) = \frac{1}{T} \int_{t=-T/2}^{T/2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Wir schreiben „$f(t) = \ldots$“ und nicht bloß „$f(t) \sim \ldots$“, denn die Reihe konvergiert in jedem Punkt t und hat als Grenzwert tatsächlich $f(t)$.

Die Standard-Normalverteilung

Wir erinnern an die Dichte der **Standard-Normalverteilung**

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$$



- Wahrscheinlichkeitsdichte: $\varphi \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$
- Hier gilt Schwerpunkt = Mittelwert = $\int_{\mathbb{R}} x\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$,
- Trägheitsmoment = Varianz = $\int_{\mathbb{R}} (x-\mu)^2 \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Sie spielt in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine zentrale Rolle.
Auch für die Fourier–Transformation ist sie ein zentrales Beispiel.

Wiederholung: das Gaußsche Integral

Wiederholung: Berechnen Sie das Gaußsche Integral C230

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}.$$

Lösung: Wir nutzen Fubini und Transformation in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t\right)^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y\right) \\
\overset{\text{Lin}}{=} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2}\cdot\left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x &\overset{\text{Lin}}{=} \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2}\cdot\mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
\overset{\text{Exp}}{=} \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &\overset{\text{Fub}}{=} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}\,\mathrm{d}(x,y) \\
\overset{\text{Polar}}{=} \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}\times[0,2\pi]} \mathrm{e}^{-\rho^2/2}\,\rho\,\mathrm{d}(\rho,\varphi) &\overset{\text{Fub}}{=} \int_{\rho=0}^{\infty}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \mathrm{e}^{-\rho^2/2}\,\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho \\
\overset{\text{Lin}}{=} 2\pi\int_{\rho=0}^{\infty} \rho\,\mathrm{e}^{-\rho^2/2}\,\mathrm{d}\rho &\overset{\text{HDI}}{=} 2\pi\left[-\mathrm{e}^{-\rho^2/2}\right]_{\rho=0}^{\infty} = 2\pi
\end{aligned}$$

Fourier–Transformation der Normalverteilung

Satz K1F: Fouriertransformierte der Standard-Normalverteilung

Für die Normalverteilung gilt $\varphi \circ\!\!-\!\!\bullet\, \varphi$, also $\mathrm{e}^{-x^2/2} \circ\!\!-\!\!\bullet\, \mathrm{e}^{-\xi^2/2}$.

☺ Die Fourier–Transformierte der Standard-Normalverteilung φ ist... sie selbst, also $\widehat{\varphi} = \varphi$! Auch die Rücktransformation von $\widehat{\varphi}$ ergibt φ. Dies gelingt mit Cauchy–Integralsatz K128 oder Ableitung D415.

Aufgabe: (1) Berechnen Sie den Wert $\widehat{\varphi}(0) = 1/\sqrt{2\pi}$ sowie
(2) $\widehat{\varphi}'(\xi) = -\xi\,\widehat{\varphi}(\xi)$ durch Ableitung unter dem Integral.
(3) Berechnen Sie hieraus die Funktion $\widehat{\varphi}(\xi) = \mathrm{e}^{-\xi^2/2}/\sqrt{2\pi}$.

Lösung: (1) Die Fourier–Transformierte ist definiert durch

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x.$$

Den Wert für $\xi = 0$ kennen wir dank des Gaußschen Integrals:

$$\widehat{\varphi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Fourier–Transformation der Normalverteilung

(2) Wir berechnen $\widehat{\varphi}'$ durch Differenzieren unter dem Integral:

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}'(\xi) &= \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} \int_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial\xi}\Big[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\Big]\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} (-\mathrm{i}x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \qquad (\ldots \text{ partielle Integration}\ldots) \\
&= \frac{1}{2\pi} \underbrace{\Big[\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\Big]_{x\to-\infty}^{\infty}}_{=\,0} - \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} \xi\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = -\xi\,\widehat{\varphi}(\xi)
\end{aligned}$$

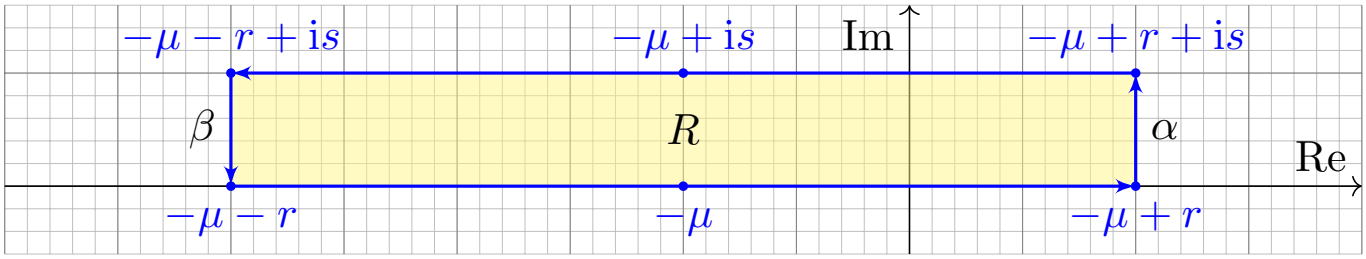
(3) Demnach genügt $\widehat{\varphi}$ der Differentialgleichung $\widehat{\varphi}'(\xi) = -\xi\,\widehat{\varphi}(\xi)$.
Wir trennen die Variablen gemäß $\widehat{\varphi}'(\xi)/\widehat{\varphi}(\xi) = -\xi$
und integrieren zu $\ln\widehat{\varphi}(\xi) - \ln\widehat{\varphi}(0) = -\xi^2/2$.
Wir erhalten so die Lösung $\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\varphi}(0)\,\mathrm{e}^{-\xi^2/2}$.
Mit $\widehat{\varphi}(0) = 1/\sqrt{2\pi}$ folgt $\widehat{\varphi}(\xi) = (1/\sqrt{2\pi})\,\mathrm{e}^{-\xi^2/2}$.

☺ Diese Rechnung gelingt dank unserer Integrationswerkzeuge!
Mit Satz K2A wird diese Rechnung ein eleganter Vierzeiler. K207
Wir rechnen es nochmal alternativ mit dem Cauchy–Integralsatz.

Fourier–Transformation der Normalverteilung

K127
Ausführung

Aufgabe: Vergleichen Sie $\int_{-r}^{r} \mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}x$ mit $\int_{-r}^{r} \mathrm{e}^{-(x-\mu+\mathrm{i}s)^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}x$ dank des Cauchy–Integralsatzes und zeigen Sie Gleichheit für $r \to \infty$.



Lösung: Dies sind Wegintegrale der holomorphen Funktion $\mathrm{e}^{-z^2/2\sigma^2}$:

$$
\begin{aligned}
0 = \int_{\partial R} \mathrm{e}^{-z^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}z &= \int_{x=-r}^{r} \mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}x - \int_{x=-r}^{r} \mathrm{e}^{-(x-\mu+\mathrm{i}s)^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{\alpha} \mathrm{e}^{-z^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}z + \int_{\beta} \mathrm{e}^{-z^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}z \\
&\to \int_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}x - \int_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(x-\mu+\mathrm{i}s)^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

☺ Die Wegintegrale längs α und β verschwinden für $r \to \infty$, denn $\left|\int_\alpha \mathrm{e}^{-z^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}z\right| \le \int_\alpha \left|\mathrm{e}^{-z^2/2\sigma^2}\right| \cdot |\mathrm{d}\alpha| \le s\,\mathrm{e}^{-\operatorname{Re}(\mathrm{i}s-\mu+r)^2/2\sigma^2} \to 0$.

Fourier–Transformation der Normalverteilung

K128
Ausführung

Aufgabe: Fourier–transformieren Sie die Normalverteilung

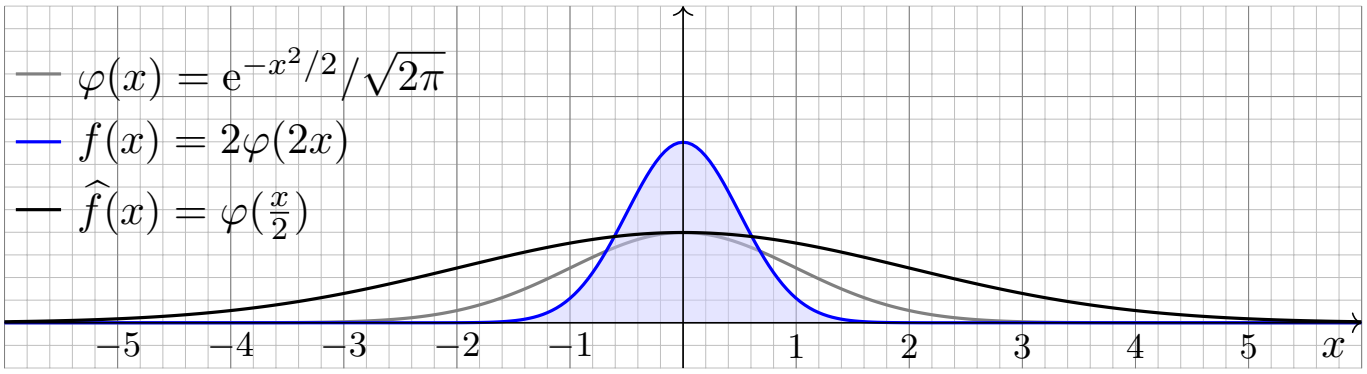
$$
\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \widehat{f}(\xi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\xi}\,\varphi(\sigma\xi).}
$$

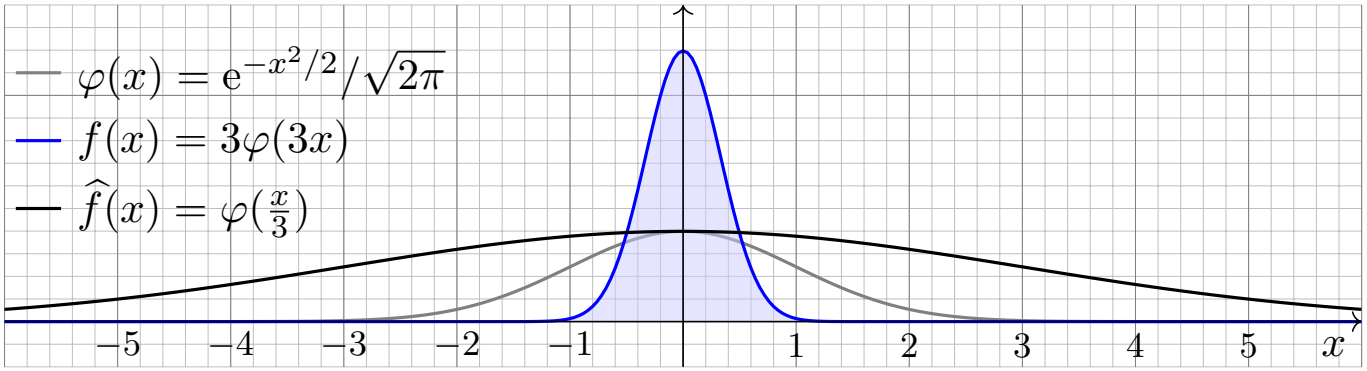
Lösung: Wir setzen die Definition ein und rechnen es aus:

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &\overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{qE}}{=} \frac{1}{2\pi\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\mathrm{e}^{-(x-\mu+\mathrm{i}\sigma^2\xi)^2/2\sigma^2}}_{\text{quadratische Ergänzung}}\,\underbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\xi-\sigma^2\xi^2/2}}_{\text{Rest ohne } x}\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Lin}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\xi-\sigma^2\xi^2/2} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(x-\mu+\mathrm{i}\sigma^2\xi)^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Res}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\xi-\sigma^2\xi^2/2} \quad = \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\xi}\,\varphi(\sigma\xi)
\end{aligned}
$$

☺ Die Rücktransformierte $\mathscr{F}^{-1}(\widehat{f}) = f$ berechnen Sie ebenso leicht.

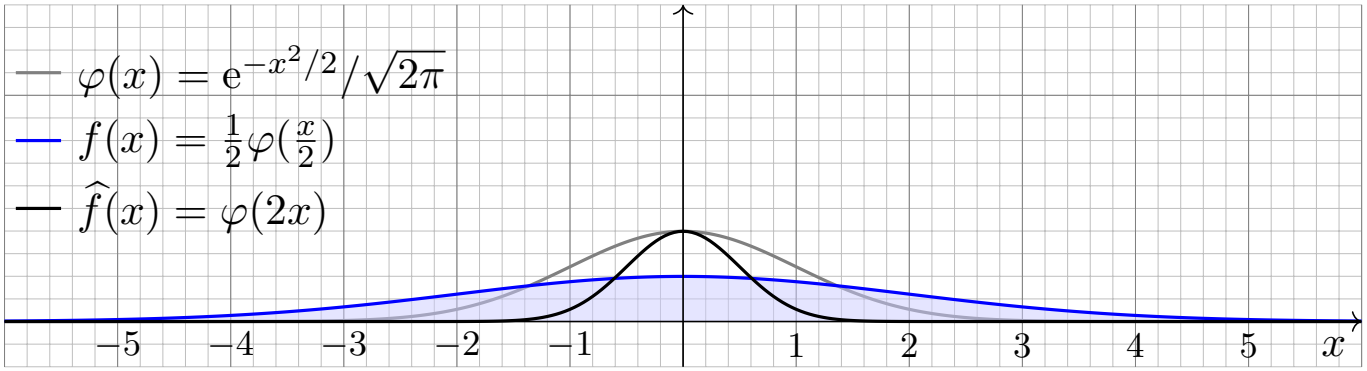
Fourier–Transformation der Normalverteilung

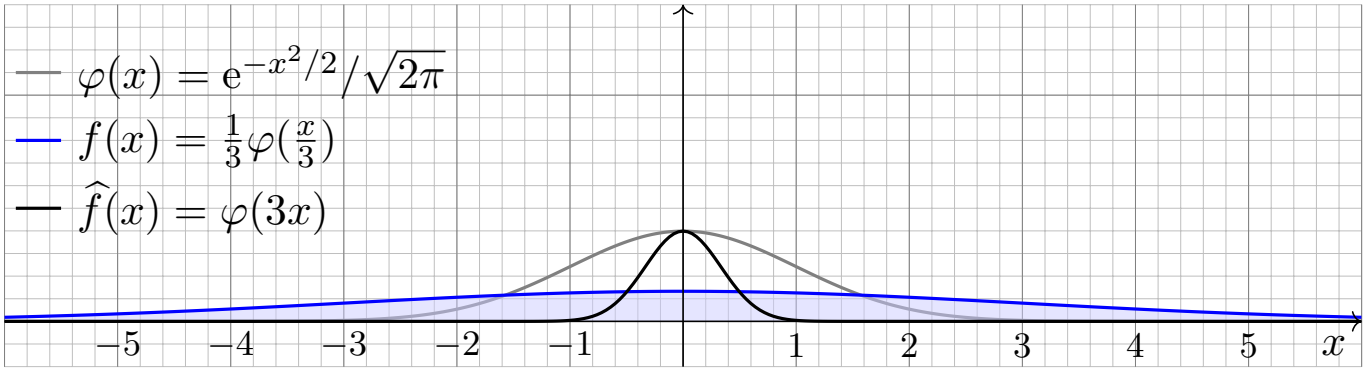




- Der Flächeninhalt $\int_{\mathbb{R}} a\varphi(ax)\,\mathrm{d}x = 1$ bleibt unverändert.
- Wir sehen die Unschärferelation: Ist f schmal, so ist $\widehat{f}$ breit.

Fourier–Transformation der Normalverteilung





- Der Flächeninhalt $\int_{\mathbb{R}} a\varphi(ax)\,\mathrm{d}x = 1$ bleibt unverändert.
- Wir sehen die Unschärferelation: Ist f breit, so ist $\widehat{f}$ schmal.

Grundlegende Rechenregeln

Für die Transformation $f(x) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x$ gilt:

$$af(x) \circ\!\!-\!\!\bullet\ a\widehat{f}(\xi), \qquad f(x)+g(x) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \widehat{f}(\xi)+\widehat{g}(\xi),$$

$$f(-x) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \widehat{f}(-\xi), \qquad \overline{f(x)} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \overline{\widehat{f}(-\xi)},$$

$$f(ax) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{|a|}\widehat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right), \qquad \frac{1}{|a|} f\left(\frac{x}{a}\right) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \widehat{f}(a\xi),$$

$$f(x-a) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi a}\widehat{f}(\xi), \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} f(x) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \widehat{f}(\xi-a),$$

$$\partial_x f(x) \overset{\text{⚠}}{\underset{\text{K2A}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}}\ \mathrm{i}\xi\,\widehat{f}(\xi), \qquad x\,f(x) \overset{\text{⚠}}{\underset{\text{K2A}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}}\ \mathrm{i}\partial_\xi\,\widehat{f}(\xi),$$

$$(f*g)(x) \overset{\text{⚠}}{\underset{\text{K2B}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}}\ \sqrt{2\pi}\cdot\widehat{f}(\xi)\cdot\widehat{g}(\xi), \qquad f(x)\cdot g(x) \overset{\text{⚠}}{\underset{\text{K2B}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\widehat{f}*\widehat{g})(\xi).$$

⚠ Die letzten vier erfordern L^1–Voraussetzungen, siehe K2A und K2B.

☺ Glattheit der Funktion f entspricht schnellem Abklingen von $\widehat{f}$.

☺ Schnelles Abklingen der Funktion f entspricht Glattheit von $\widehat{f}$.

Streckung und Verschiebung: Nachrechnen

Konjugation:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\overline{f(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\overline{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Streckung: Substitution mit $y = ax$ für $a \neq 0$ liefert

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi y/a} f(y)\frac{\mathrm{d}y}{|a|}.$$

Ortsverschiebung: Substitution mit $y = x - a$ liefert

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x-a)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi(y+a)} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Phasenverschiebung: Multiplikation mit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}$ liefert

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\xi-a)x} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Streckung und Verschiebung: Anwendungsbeispiel

Aufgabe: Wir wissen bereits

$$f(x) = \mathbf{I}_{[-1,1]}(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \widehat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin(\xi)}{\xi}.$$

Was erhalten Sie bei Streckung um $a > 0$ und Verschiebung um $c \in \mathbb{R}$?

Lösung: Bei Streckung um $a > 0$ gilt

$$f(x/a) = \mathbf{I}_{[-a,a]}(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad a\,\widehat{f}(a\,\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin(a\xi)}{\xi}.$$

Bei Verschiebung um $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbf{I}_{[-a,a]}(x-c) = \mathbf{I}_{[c-a,c+a]}(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}c\xi}\,\frac{\sin(a\xi)}{\xi}.$$

☺ Dies können Sie wie oben auch direkt nachrechnen: Wiederholung!
Wir sehen erneut die **Unschärferelation**: Ist f schmal, so ist $\widehat{f}$ breit.
Die Ortsverschiebung in x entspricht der Phasenverschiebung in ξ.

Streckung und Verschiebung: Anwendungsbeispiel

Aufgabe: Wir wissen bereits

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\xi^2/2}.$$

Was erhalten Sie bei Streckung um $\sigma > 0$ und Verschiebung um $\mu \in \mathbb{R}$?

Lösung: Bei Streckung um $\sigma > 0$ gilt

$$\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \varphi(\sigma\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\sigma^2\xi^2/2}.$$

Bei Verschiebung um $\mu \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\xi}\varphi(\sigma\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\xi-\sigma^2\xi^2/2}.$$

☺ Dies können Sie wie oben auch direkt nachrechnen: Wiederholung!
Wir sehen erneut die **Unschärferelation**: Ist f schmal, so ist $\widehat{f}$ breit.
Die Ortsverschiebung in x entspricht der Phasenverschiebung in ξ.

Ableitung und Multiplikation

Satz K2A: Ableitung und Multiplikation

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolut integrierbar mit $\mathscr{F}$–Transformierter $f \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{f}$.

(1) Ist f absolut stetig und $\partial_x f$ über $\mathbb{R}$ absolut integrierbar, so gilt

$$\boxed{\partial_x f(x) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \mathrm{i}\xi\, \widehat{f}(\xi).}$$

(2) Ist $x\, f(x)$ über $\mathbb{R}$ absolut integrierbar, so ist $\widehat{f}$ stetig diff'bar und

$$\boxed{x\, f(x) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \mathrm{i}\partial_\xi\, \widehat{f}(\xi).}$$

Die $\mathscr{F}$–Transformation $f \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{f}$ verwandelt die Ableitung ∂_x in die Multiplikation mit $\mathrm{i}\xi$, und Multiplikation mit x in die Ableitung $\mathrm{i}\partial_\xi$. Diese Formeln können wir mehrfach anwenden auf $\partial_x^n f(x)$ und $x^n f(x)$.

☺ Glattheit der Funktion f entspricht schnellem Abklingen von $\widehat{f}$: Ist $\partial_x^n f(x)$ stetig und absolut integrierbar, so folgt $\xi^n \widehat{f}(\xi) \to 0$.

☺ Schnelles Abklingen der Funktion f entspricht Glattheit von $\widehat{f}$. Ist $x^n f(x)$ absolut integrierbar, so ist $\widehat{f}(\xi)$ n-mal stetig differenzierbar.

Ableitung und Multiplikation

Nachrechnen: (1) Für $f' = \partial_x f$ erhalten wir dank partieller Integration

$$\widehat{f'}(\xi) \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f'(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{Das schreit nach partieller Integration!}$$

$$\underset{L^1}{\overset{\text{B2G}}{=}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\Big[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\Big]_{-\infty}^{\infty}}_{f(x)\,\to\,0 \text{ für } x\,\to\,\pm\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-\mathrm{i}\xi)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Def}}{=} \mathrm{i}\xi\, \widehat{f}(\xi).$$

Für $s, t \geq x$ gilt $|f(s) - f(t)| = |\int_s^t f'(u)\,\mathrm{d}u| \leq \int_s^t |f'(u)|\,\mathrm{d}u \leq \int_x^\infty |f'(u)|\,\mathrm{d}u$. Für $x \to \infty$ geht Letzteres gegen 0, somit erfüllt $f(x)$ die Cauchy–Bedingung und besitzt einen Grenzwert. Ebenso für $x \to -\infty$. Beide Grenzwerte sind Null, andernfalls wäre f nicht absolut integrierbar.

(2) Dank $\int_{\mathbb{R}} |x f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$ dürfen wir ∂_ξ unters Integral ziehen:

$$\widehat{x f(x)}(\xi) \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\, x\, f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Diff}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{i}\partial_\xi\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\, f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\underset{L^1}{\overset{\text{D3E}}{=}} \mathrm{i}\partial_\xi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Def}}{=} \mathrm{i}\partial_\xi\, \widehat{f}(\xi)$$

☺ Alles gelingt dank unserer starken Werkzeuge. ⚠ Die technischen Vorkehrungen sind wirklich nötig, sonst verwickelt sich die Rechnung in verheerende Widersprüche. K409

Ableitung und Multiplikation: Normalverteilung

Beispiel: Wir betrachten erneut die Standard-Normalverteilung:

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$$

Die oben durchgeführten Rechnungen für $\widehat{\varphi} = \varphi$ waren lehrreich, aber eher mühsam. Die folgende Aufgabe macht es uns wesentlich leichter:

Aufgabe: Rechnen Sie folgende Schritte nach und begründen Sie:

(1) Die Funktion φ erfüllt die Differentialgleichung $\partial_x\,\varphi(x) + x\,\varphi(x) = 0$.

(2) Die $\mathscr{F}$–Transformierte erfüllt somit ebenfalls $\xi\,\widehat{\varphi}(\xi) + \partial_\xi\,\widehat{\varphi}(\xi) = 0$.

(3) Wir trennen die Variablen gemäß $\widehat{\varphi}'(\xi)/\widehat{\varphi}(\xi) = -\xi$, integrieren zu $\ln\widehat{\varphi}(\xi) - \ln\widehat{\varphi}(0) = -\xi^2/2$ und erhalten die Lösung $\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\varphi}(0)\,\mathrm{e}^{-\xi^2/2}$.

(4) Mit dem Anfangswert $\widehat{\varphi}(0) = 1/\sqrt{2\pi}$ folgt $\widehat{\varphi}(\xi) = (1/\sqrt{2\pi})\,\mathrm{e}^{-\xi^2/2}$.

Lösung: Die ausführliche Aufgabenstellung enthält bereits die Antwort: Wir überprüfen (1) durch Ableiten, damit folgt (2) mühelos aus Satz K2A.
(3) Diese Differentialgleichung haben wir bereits auf Seite K126 gelöst.
(4) Den Wert $\widehat{\varphi}(0) = 1/\sqrt{2\pi}$ haben wir oben auf Seite K124 berechnet.

Ableitung und Multiplikation: Normalverteilung

Aufgabe: Zu $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$ kennen wir bereits $\widehat{f}(\xi) = \mathrm{e}^{-\xi^2/2}$.
(5) Fourier–transformieren Sie $g(x) = x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$ und $h(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$.

Bemerkung: Wir können die Fourier–Integrale direkt ausrechnen...
☹ Das ist allerdings mühsam. Versuchen Sie es einmal als Übung!
☺ Es ist viel leichter, scharf hinzusehen und geschickt zu rechnen:

Lösung: (5a) Wir nutzen die Multiplikationsregel aus Satz K2A:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \mathrm{e}^{-x^2/2} &&\circ\!\!-\!\!\bullet\quad \widehat{f}(\xi) &&= \mathrm{e}^{-\xi^2/2}\\
g(x) &= x\,f(x) &&\circ\!\!-\!\!\bullet\quad \mathrm{i}\partial_\xi\,\widehat{f}(\xi) &&= -\mathrm{i}\xi\,\mathrm{e}^{-\xi^2/2}\\
h(x) &= x^2\,f(x) &&\circ\!\!-\!\!\bullet\quad (\mathrm{i}\partial_\xi)^2\,\widehat{f}(\xi) &&= (1-\xi^2)\,\mathrm{e}^{-\xi^2/2}
\end{aligned}$$

(5b) Alternativ nutzen wir die Ableitungsregel aus Satz K2A:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \mathrm{e}^{-x^2/2} &&\circ\!\!-\!\!\bullet\quad \widehat{f}(\xi) &&= \mathrm{e}^{-\xi^2/2}\\
g(x) &= -\partial_x\,f(x) &&\circ\!\!-\!\!\bullet\quad -\mathrm{i}\xi\,\widehat{f}(\xi) &&= -\mathrm{i}\xi\,\mathrm{e}^{-\xi^2/2}\\
h(x) &= \partial_x^2\,f(x) + f(x) &&\circ\!\!-\!\!\bullet\quad (\mathrm{i}\xi)^2\,\widehat{f}(\xi) + \widehat{f}(\xi) &&= (1-\xi^2)\,\mathrm{e}^{-\xi^2/2}
\end{aligned}$$

Übung: Sind die L^1–Voraussetzungen von Satz K2A hier erfüllt?

Faltung und Produkt

Satz K2B: Faltung und Produkt

(0)Sind $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolut integrierbar, so auch ihre **Faltung**

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\, g(t)\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, g(x-s)\, \mathrm{d}s.$$

(1) Unter Fourier–Transformation wird sie zum punktweisen **Produkt**:

$$(f * g)(x) \circ\!\!-\!\!\bullet \sqrt{2\pi} \cdot \widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{g}(\xi)$$

(2) Umgekehrt wird das punktweise Produkt zur Faltung:

$$f(x) \cdot g(x) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\widehat{f} * \widehat{g})(\xi)$$

⚠ Den Faktor $\sqrt{2\pi}$ empfinde ich hier als störend, aber er folgt aus unserer in Definition K1A festgelegten Normierung. Andere Konventionen sind hier bequemer, dafür andernorts lästiger.

Aufgabe: Rechnen Sie diese beiden Transformationsregeln nach!

Faltung und Produkt

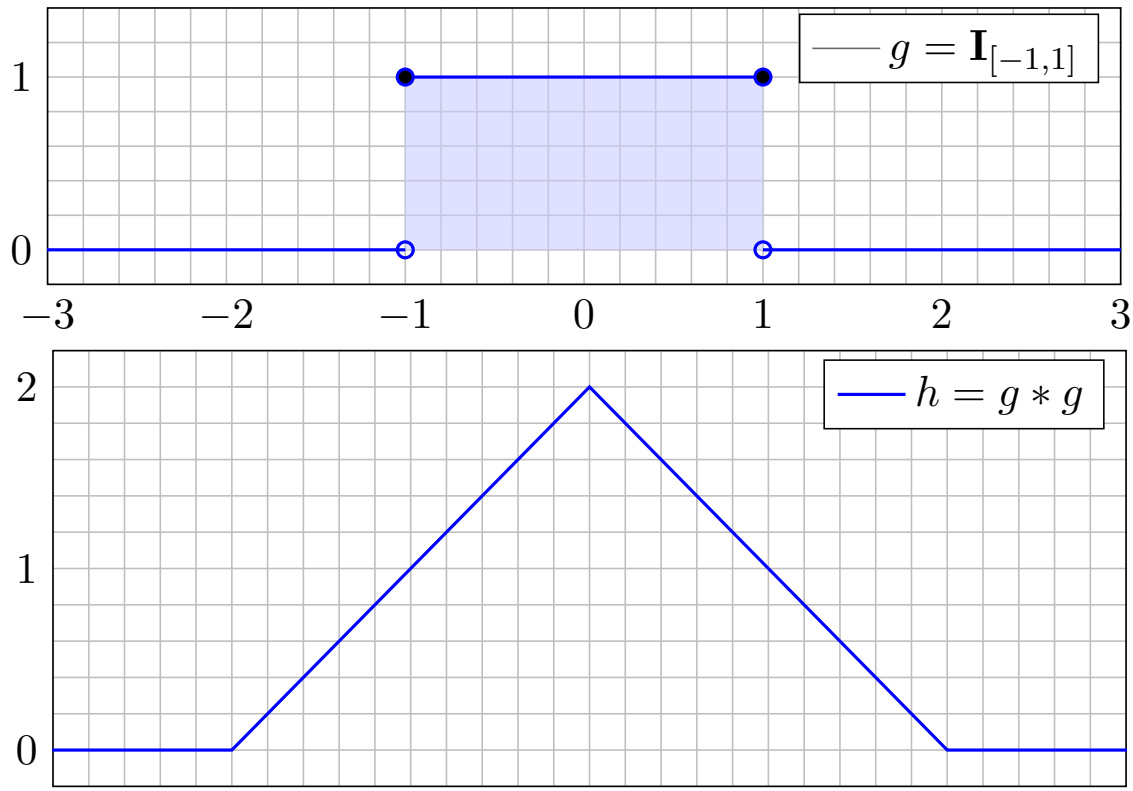
Nachrechnen: (1) Dank Fubini und Substitution $x = s + t$ gilt:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{g}(\xi) &\overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{s\in\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi s} f(s)\, \mathrm{d}s \cdot \int_{t\in\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi t} g(t)\, \mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Lin}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{t\in\mathbb{R}} \int_{s\in\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi(s+t)} f(s)\, g(t)\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Subs}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{t\in\mathbb{R}} \int_{x\in\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x-t)\, g(t)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Fub}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{x\in\mathbb{R}} \int_{t\in\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x-t)\, g(t)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Lin}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{x\in\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} \cdot \left[\int_{t\in\mathbb{R}} f(x-t)\, g(t)\, \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{x\in\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} \cdot (f * g)(x)\, \mathrm{d}x \qquad \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{f * g}(\xi)
\end{aligned}$$

(2) Die umgekehrte Formel zeigen Sie wörtlich genauso: Übung!
Zur Faltung setzen wir nun $\widehat{f}$ und $\widehat{g}$ als absolut integrierbar voraus.

Faltung von Rechteck zu Dreieck

K211
Beispiel



☺ Faltung glättet! Hier ist g unstetig, hingegen $h = g * g$ stetig, $g * g * g$ sogar stetig differenzierbar, etc. Dies entspricht dem schnellen Abklingen der $\mathscr{F}$–Transformierten: $\widehat{g}$ geht gegen Null wie $1/\xi$, hingegen $\widehat{h} = \widehat{g}^2$ wie $1/\xi^2$, dann $\widehat{g}^3$ sogar wie $1/\xi^3$, etc.

Faltung von Rechteck zu Dreieck

K212
Beispiel

Aufgabe: Zu $g = \mathbf{I}_{[-a,a]}$ bestimme man $h = g * g$ und $\widehat{h}$ sowie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\xi a)^2}{\xi^2}\,\mathrm{d}\xi.$$

Lösung: Hier ist $g = \mathbf{I}_{[-a,a]}$ die Rechteckfunktion mit Breite $2a$.
Die Faltung $h = g * g$ ist dann die Dreieckfunktion mit Breite $4a$:

$$(g * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{I}_{[-a,a]}(x-t) \cdot \mathbf{I}_{[-a,a]}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-a}^{a} \mathbf{I}_{[x-a,x+a]}(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \mathrm{vol}_1\big([x-a, x+a] \cap [-a,a]\big) = \begin{cases} 2a - |x| & \text{für } |x| \le 2a, \\ 0 & \text{für } |x| \ge 2a. \end{cases}$$

Die $\mathscr{F}$–Transformierte der Faltung $h = g * g$ ist das Produkt

$$\widehat{h}(\xi) = \sqrt{2\pi}\,\widehat{g}(\xi)^2 = \sqrt{2\pi}\,\frac{2}{\pi}\,\frac{\sin(\xi a)^2}{\xi^2} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin(\xi a)^2}{\xi^2}.$$

Dank Umkehrformel K1E von $\widehat{h}$ zu h im Punkt $x = 0$ gilt

$$2a = h(0) \quad \overset{!}{=} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\xi a)^2}{\xi^2}\,\mathrm{d}\xi.$$

Energiegleichung und Fourier–Isometrie

Die quadrat-integrierbaren Funktionen bilden den Vektorraum

$$L^2 = L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}) := \left\{\, f:\mathbb{R}\to\mathbb{C} \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x < \infty \,\right\}.$$

Auf diesem definieren wir Skalarprodukt und Norm durch

$$\langle\, f \mid g \,\rangle_{L^2} := \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)}\, g(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \|f\|_{L^2}^2 := \langle\, f \mid f \,\rangle = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

Satz K3A: Plancherel 1910

Für die Fourier–Transformation $\mathscr{F}: f \mapsto \widehat{f}$ gilt allgemein $\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2}$.
Speziell für quadrat-integrierbare Funktionen erhalten wir die Isometrie

$$\boxed{\mathscr{F}: L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}) \to L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}), \quad \langle\, f \mid g \,\rangle = \langle\, \widehat{f} \mid \widehat{g} \,\rangle, \quad \|f\| = \|\widehat{f}\|.}$$

☺ Physikalisch bedeutet dies Energieerhaltung: Das Energieintegral $\int |f(x)|^2$ des Signals ist gleich dem Integral $\int |\widehat{f}(\xi)|^2$ der Energiedichte.

☺ Für Fourier–Reihen gilt entsprechend die Parseval–Gleichung J110

$$\boxed{\mathscr{F}: L^2([0,2\pi],\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}), \quad \langle\, f \mid g \,\rangle = \langle\, \widehat{f} \mid \widehat{g} \,\rangle, \quad \|f\| = \|\widehat{f}\|.}$$

Energiegleichung und Fourier–Isometrie

Aufgabe: Beweisen Sie den Satz für $f \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{f}$, $g \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{g}$ mit $f, \widehat{g} \in L^1$.

Nachrechnen: Seien f und $\widehat{g}$ absolut integrierbar. Fubini ergibt dann:

$$\begin{aligned}
\langle\, f \mid g \,\rangle &\overset{\text{Def}}{=} \int_{x\in\mathbb{R}} \overline{f(x)}\, g(x)\,\mathrm{d}x &&\overset{\text{Def}}{=} \int_{x\in\mathbb{R}} \overline{f(x)} \left[\int_{y\in\mathbb{R}} \widehat{g}(y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Lin}}{=} \int_{x\in\mathbb{R}} \int_{y\in\mathbb{R}} \overline{f(x)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\,\widehat{g}(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &&\overset{\text{Fub}}{=} \int_{y\in\mathbb{R}} \int_{x\in\mathbb{R}} \overline{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\, f(x)}\,\widehat{g}(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&\overset{\text{Lin}}{=} \int_{y\in\mathbb{R}} \left[\int_{x\in\mathbb{R}} \overline{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\, f(x)}\,\mathrm{d}x\right]\widehat{g}(y)\,\mathrm{d}y &&\overset{\text{Def}}{=} \int_{y\in\mathbb{R}} \overline{\widehat{f}(y)}\,\widehat{g}(y)\,\mathrm{d}y \overset{\text{Def}}{=} \langle\, \widehat{f} \mid \widehat{g} \,\rangle
\end{aligned}$$

Speziell für $f = g$ erhalten wir die Energiegleichung $\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2}$.
Demnach ist $\widehat{f}$ genau dann quadrat-integrierbar, wenn f dies ist.
Für alle Funktionen $f, \widehat{g} \in L^1 \cap L^2$ ist damit der Satz bewiesen.

Im allgemeinen Fall $f \in L^2$ wählen wir eine approximierende Funktionenfolge $f_n \in L^1 \cap L^2$ mit $\|f - f_n\|_{L^2} \to 0$ und definieren $\mathscr{F}(f) := \lim \mathscr{F}(f_n)$. Dank Energiegleichung für alle f_n liegt das Ergebnis f wieder in L^2 und ist von der Wahl der Approximation $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig. So setzen wir die Fourier–Transformation fort von $\mathscr{F}: L^2 \cap L^1 \to L^2 \cap L^\infty$ zu $\mathscr{F}: L^2 \to L^2$. Diese Fortsetzung ist eine Isometrie, das heißt, die Energiegleichung bleibt dabei erhalten.

Anwendung des Satzes von Plancherel

K303
Beispiel

Aufgabe: Wenden Sie Plancherel (K3A) an auf die Spaltfunktion

$$f(x) = \mathbf{I}_{[-a,a]} \circ\!\!-\!\!\bullet \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin(\xi a)}{\xi} \quad \text{und berechnen Sie} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\xi a)^2}{\xi^2}\,\mathrm{d}\xi.$$

Lösung: Die linke Seite der Plancherel–Gleichung ist

$$\|f\|_{L^2}^2 \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{-a}^{a} 1\,\mathrm{d}x \;=\; 2a.$$

Die rechte Seite der Plancherel–Gleichung ist

$$\|\widehat{f}\|_{L^2}^2 \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi \;=\; \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\xi a)^2}{\xi^2}\,\mathrm{d}\xi.$$

Die Gleichung $\|f\|_{L^2}^2 = \|\widehat{f}\|_{L^2}^2$ liefert das gesuchte Integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\xi a)^2}{\xi^2}\,\mathrm{d}\xi \;=\; a\pi$$

☺ Dasselbe Ergebnis erhalten wir aus der Hutfunktion. K413

Anwendung des Satzes von Plancherel

K304
Beispiel

Aufgabe: Bestimmen Sie mit Plancherel (K3A) den Wert des Integrals

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{ab}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,\mathrm{d}x \quad \text{für} \quad a, b > 0.$$

Lösung: Wir erkennen und nutzen die Fourier–Transformierte

$$f_a(x) = \mathrm{e}^{-a|x|} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{\xi^2+a^2} = \widehat{f}_a(\xi).$$

Plancherel transformiert ein schweres Integral in ein leichtes:

$$\begin{aligned}
I &\overset{\text{Def}}{=} \frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{R}} \overline{\widehat{f_a}(\xi)}\cdot\widehat{f_b}(\xi)\,\mathrm{d}\xi \;\overset{\text{K3A}}{=}\; \frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{R}} \overline{f_a(x)}\cdot f_b(x)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Def}}{=} \frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(a+b)|x|}\,\mathrm{d}x \;\overset{\text{Sym}}{=}\; \pi\int_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(a+b)x}\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{HDI}}{=} \pi\left[\frac{-1}{a+b}\,\mathrm{e}^{-(a+b)x}\right]_{x=0}^{\infty} \;=\; \frac{\pi}{a+b}
\end{aligned}$$

☺ Dasselbe Ergebnis erhalten wir mit dem Residuensatz. F429

Die Unschärferelation für Fourier–Paare

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ quadrat-integrierbar, also $\|g\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 \,\mathrm{d}x < \infty$.
Division $f = g/\|g\|_{L^2}$ durch die Norm normiert unsere Funktion zu

$$\int_{\mathbb{R}} \big|f(x)\big|^2 \,\mathrm{d}x = 1.$$

Wir interpretieren $|f(x)|^2$ als Wahrscheinlichkeitsdichte auf $\mathbb{R}$ (Kapitel V).
Die Varianz ist die mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert μ:

$$\mu := \int_{\mathbb{R}} x\,|f(x)|^2 \,\mathrm{d}x, \qquad \mathbf{V}(f) := \int_{\mathbb{R}} (x-\mu)^2\,|f(x)|^2 \,\mathrm{d}x$$

Dank Plancherel gilt $\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi = 1$, also ist auch $|\widehat{f}(x)|^2$ eine WDichte.

$$\widehat{\mu} := \int_{\mathbb{R}} \xi\,|\widehat{f}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}x, \qquad \mathbf{V}(\widehat{f}) := \int_{\mathbb{R}} (\xi-\widehat{\mu})^2\,|\widehat{f}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi$$

Nach Verschiebung dürfen wir $\mu = 0$ und $\hat{\mu} = 0$ annehmen. K201
Die Varianz ist ein bewährtes Maß für die Breite der WVerteilung.
Diese wollen wir untersuchen und die Unschschärferelation verstehen.

Die Unschärferelation für Fourier–Paare

Aufgabe: Führen Sie dies für die Glockenkurve $g(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2}$ aus.
Berechnen Sie die Varianzen $\mathbf{V}(f)$ und $\mathbf{V}(\widehat{f})$ sowie $\mathbf{V}(f) \cdot \mathbf{V}(\widehat{f})$.

Lösung: Wir normieren g und transformieren:

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{\sigma\sqrt{\pi}}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \sqrt{\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2\xi^2}{2}} := \widehat{f}(\xi).$$

Das Absolutquadrat definiert jeweils eine Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$|f(x)|^2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}, \qquad |\widehat{f}(\xi)|^2 = \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{e}^{-\sigma^2\xi^2},$$

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = 1, \qquad \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi = 1,$$

$$\int_{\mathbb{R}} x\,|f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = 0, \qquad \int_{\mathbb{R}} \xi\,|\widehat{f}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi = 0,$$

$$\int_{\mathbb{R}} x^2\,|f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \frac{\sigma^2}{2}, \qquad \int_{\mathbb{R}} \xi^2\,|\widehat{f}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\sigma^2}.$$

☺ Für die Varianzen gilt somit $\mathbf{V}(f) \cdot \mathbf{V}(\widehat{f}) = 1/4$.

Die Unschärferelation für Fourier–Paare

In unseren Beispielen sehen wir explizit die Unschärferelation:
Ist die Funktion f schmal, so ist ihre Transformierte $\widehat{f}$ breit.
Dies gilt immer und lässt sich sogar quantitativ präzisieren:

Satz K3B: Unschärferelation

Für jede quadrat-integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gilt

$$\boxed{\mathbf{V}(f) \cdot \mathbf{V}(\widehat{f}) \;\geq\; \frac{1}{4}.}$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn f und somit $\widehat{f}$ eine Glockenkurve ist.

In der Quantenmechanik ist $|f(x)|^2$ die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Aufenthaltsort eines Teilchens, und dual hierzu ist $|\widehat{f}(\xi)|^2$ die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Impuls. Die obige Ungleichung ist (bis auf Konstanten) Heisenbergs Unschärferelation. Sie besagt: Ist der Ort scharf bestimmt, so ist der Impuls unscharf, und umgekehrt. Diese Unschärferelation rührt nicht von unvollkommenen Messinstrumenten her, sondern ist prinzipieller Natur. Sie wurde 1927 von Werner Heisenberg in der von ihm (und anderen) entwickelten Quantenmechanik formuliert. Wir erkennen sie hier als eine grundsätzliche Eigenschaft der Fourier–Transformation.

Die Unschärferelation für Fourier–Paare

Nachrechnen: Aus $\widehat{f'}(\xi) = \mathrm{i}\xi\widehat{f}(\xi)$ und Plancherel–Gleichung folgt:

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\xi\widehat{f}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{f'}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}} \left|f'(x)\right|^2 \mathrm{d}x.$$

Hierzu sei f absolut stetig und f' absolut integrierbar. K205
Aus der Cauchy–Schwarz–Ungleichung I134 erhalten wir:

$$\mathbf{V}(f) \cdot \mathbf{V}(\widehat{f}) = \int_{\mathbb{R}} \left|xf(x)\right|^2 \mathrm{d}x \cdot \int_{\mathbb{R}} \left|f'(x)\right|^2 \mathrm{d}x \geq \left|\int_{\mathbb{R}} x\overline{f(x)} \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x\right|^2 \geq \frac{1}{4}$$

Für das letzte Integral nutzen wir partielle Integration:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\overline{f(x)}\, f'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[x\overline{f(x)}f(x)\Big]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}f(x) + x\overline{f'(x)}f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow \quad 2\,\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}} x\overline{f(x)}\, f'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = -1$$

Hierzu sei $|xf(x)|^2 \to 0$ für $|x| \to \infty$. Mit beiden zusätzlichen Annahmen gilt die Unschärferelation. Diese Funktionen liegen dicht in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
Per Grenzübergang gilt die Ungleichung daher für alle $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Die Unschärferelation in der Quantenmechanik

Die Quantenmechanik war und ist eine bahnbrechende Entdeckung. Rasant hat sie im Laufe des 20. Jahrhunderts die Physik revolutioniert. Ihre Anwendungen reichen vom Laser bis zur Kernspinresonanz, vom Transistor bis zum Computer, von Atomuhr bis Atombombe. Sie prägt bis heute unsere technikbasierte Gesellschaft.

Für technisch gebildete Menschen gehören daher die Grundideen der Quantenmechanik zur Allgemeinbildung. Zur Illustration füge ich deshalb ein paar Bemerkungen zur physikalischen Sichtweise an. Wer in der Chemie oder der Physik der Quantenmechanik begegnet, darf sich freuen, dies hier als grob vereinfachte Skizze wiederzufinden.

Im Rahmen Ihrer Ausbildung möchte ich erneut betonen: Erfolgreiche Entwicklung / Anwendung ist engstens verwoben mit der erfolgreichen Entwicklung / Anwendung passender mathematischer Werkzeuge. Das hat sich in allen Bereichen als Erfahrungstatsache erhärtet, und genau deshalb lernen und nutzen Sie Höhere Mathematik.

Die Unschärferelation in der Quantenmechanik

Wir betrachten den Vektorraum $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ aller quadrat-integrierbaren Funktionen $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, also $\int_{\mathbb{R}}|\psi(x)|^2\,\mathrm{d}x<\infty$, mit Skalarprodukt

$$\langle\,\varphi\mid\psi\,\rangle=\int_{\mathbb{R}}\overline{\varphi(x)}\,\psi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Wie zuvor normieren wir ψ durch die Bedingung $\int_{\mathbb{R}}|\psi(x)|^2\,\mathrm{d}x=1$ und interpretieren die Funktion $|\psi(x)|^2$ als Wahrscheinlichkeitsdichte. Der **Ortsoperator** ist die Multiplikation mit x. Bezüglich ψ gilt dann

$$\langle\,x\,\rangle:=\langle\,\psi\mid x\psi\,\rangle=\int_{\mathbb{R}}x\,|\psi(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

Dies ist der Erwartungswert der WVerteilung $|\psi|^2$, ihr Schwerpunkt. Der **Impulsoperator** ist $p=-\mathrm{i}\hbar\partial_x$. Dank Fourier–Isometrie K3A gilt

$$\langle\,p\,\rangle:=\langle\,\psi\mid p\psi\,\rangle\overset{\mathscr{F}}{=}\langle\,\widehat{\psi}\mid\hbar\xi\widehat{\psi}\,\rangle=\int_{\mathbb{R}}\hbar\xi\,|\widehat{\psi}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi.$$

Dies ist der Erwartungswert des Impulses bzgl. der WVerteilung $|\widehat{\psi}|^2$. Im Experiment sind die gemessenen **Observablen** x und p zufällig!

Die Unschärferelation in der Quantenmechanik

K311
Ergänzung

Ort x und Impuls p wirken als **Operatoren** auf Funktionen $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.
Beide Operatoren sind **hermitesch** bezüglich des Skalarprodukts: I141

$$\langle \varphi \mid x\psi \rangle = \langle x\varphi \mid \psi \rangle, \quad \langle \varphi \mid p\psi \rangle = \langle p\varphi \mid \psi \rangle.$$

Sie haben reelle Eigenwerte und orthogonale Eigenfunktionen. I142
Ortsoperator x und Impulsoperator p kommutieren jedoch nicht, denn

$$x\,p\,\psi = -\mathrm{i}\hbar\, x\,\partial_x\,\psi \quad \text{aber} \quad p\,x\,\psi = -\mathrm{i}\hbar\,\partial_x(x\psi) = -\mathrm{i}\hbar\,\psi - \mathrm{i}\hbar\, x\,\partial_x\psi.$$

Wir schreiben dies kurz als **Kommutator** $[x,p] := xp - px = \mathrm{i}\hbar$.

Wir müssen voraussetzen, dass sowohl ψ als auch $x\psi$ und $\partial_x\psi$ in $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ liegen. Um dies zu iterieren nutzen wir den Schwartz–Raum $\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \subseteq L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}) \cap C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$: Er besteht aus allen beliebig diff'baren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $\sup|x^m \partial^n f| < \infty$ für alle $m,n \in \mathbb{N}$. Zum Beispiel erfüllen Glockenkurven $f(x) = \exp(-(x-\mu)^2/2\sigma^2)$ diese Bedingung, ebenso jede glatte Funktion mit kompaktem Träger. Die Schwartz–Funktionen liegen dicht in $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Damit sind $x,p : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ Operatoren auf $\mathscr{S}$. Gleiches gilt für die Transformation $\mathscr{F} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$. Für Schwarz–Funktionen sind alle Bedingungen erfüllt und alle Rechenregeln besonders einfach. Zum Beispiel sind Wellenfunktionen $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}$ Eigenfunktionen von p, denn $p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x} = \hbar\omega\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}$. Diese liegen leider nicht in L^2, wir denken daher an $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\exp(-x^2/2\sigma^2)$ für sehr großes σ. Solche Dämpfung wird stillschweigend verwendet, damit die nötigen Integrale konvergieren.

Die Unschärferelation in der Quantenmechanik

K312
Ergänzung

Seien A und B zwei hermitesche Operatoren, etwa $A = x$ und $B = p$.

$$\langle A^2 \rangle := \langle \psi \mid A^2\psi \rangle = \langle A\psi \mid A\psi \rangle, \quad \langle B^2 \rangle := \langle \psi \mid B^2\psi \rangle = \langle B\psi \mid B\psi \rangle.$$

Die Cauchy–Schwarz–Ungleichung liefert dann

$$\langle A\psi \mid A\psi \rangle \langle B\psi \mid B\psi \rangle \geq \big|\langle A\psi \mid B\psi \rangle\big|^2 = \big|\langle \psi \mid A\,B\,\psi \rangle\big|^2 = \big|\langle AB \rangle\big|^2.$$

Wir zerlegen $AB = \frac{1}{2}\{A,B\} + \frac{1}{2}[A,B]$ in die Summanden

$$\{A,B\} = AB + BA \quad \text{und} \quad [A,B] = AB - BA.$$

Der Antikommutator $\{A,B\}$ ist hermitesch, also $\langle \{A,B\} \rangle$ reell,
der Kommutator $[A,B]$ ist antihermitesch, also $\langle [A,B] \rangle$ imaginär.

$$\big|\langle AB \rangle\big| \;=\; \Big|\frac{1}{2}\langle \{A,B\} \rangle + \frac{1}{2}\langle [A,B] \rangle\Big| \;\geq\; \frac{1}{2}\big|\langle [A,B] \rangle\big|$$

Zusammengefasst erhalten wir die allgemeine Unschärferelation:

$$\boxed{\langle A^2 \rangle \langle B^2 \rangle \;\geq\; \frac{1}{4}\big|\langle [A,B] \rangle\big|^2}$$

Speziell für x und p wissen wir $[x,p] = \mathrm{i}\hbar$, also $\langle x^2 \rangle \langle p^2 \rangle \geq \hbar^2/4 > 0$.
Das Produkt der beiden Streuungen ist demnach mindestens $\hbar/2$.

Fourier–Transformation

Die **Fourier–Transformierte** von $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ ist definiert durch

$$\boxed{\widehat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{für } \xi\in\mathbb{R}.}$$

Wir fordern hierzu, dass f auf jedem Intervall $[-r,r]$ integrierbar ist.
Unter dem Integral über $\mathbb{R}$ verstehen wir hier den **Cauchy–Hauptwert**

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Die Zuordnung $\mathscr{F}: f\mapsto \widehat{f}$ heißt **Fourier–Transformation**.
Die **inverse Fourier–Transformation** $\mathscr{F}^{-1}: \widehat{f}\mapsto f$ ist

$$\boxed{f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi \quad \text{für } x\in\mathbb{R}.}$$

Dies kürzen wir ab als **Fourier–Transformationspaar** $f \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{f}$.
Die Fourier–Transformation ist linear, kurz $a\,f + b\,g \circ\!\!-\!\!\bullet\, a\,\widehat{f} + b\,\widehat{g}$.

Eigenschaften der Transformierten

Beispiele:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{e}^{-x^2/2} &\circ\!\!-\!\!\bullet\, \mathrm{e}^{-\xi^2/2} \\ \mathrm{e}^{-a|x|} &\circ\!\!-\!\!\bullet\, \sqrt{2/\pi}\; a/(a^2+\xi^2) \\ \mathbf{I}_{[-r,r]}(x) &\circ\!\!-\!\!\bullet\, \sqrt{2/\pi}\; \sin(\xi r)/\xi \end{aligned}}$$

Ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ absolut integrierbar, also $\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,\mathrm{d}x<\infty$, dann gilt:
Die Fourier–Transformierte $\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ ist stetig und beschränkt:

$$\boxed{|\widehat{f}(\xi)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,\mathrm{d}x \quad \text{für alle } \xi\in\mathbb{R}}$$

Sie verschwindet im Unendlichen (Riemann–Lebesgue–Lemma):

$$\boxed{|\widehat{f}(\xi)| \to 0 \quad \text{für} \quad |\xi|\to\infty}$$

Zudem gilt die Plancherel–Gleichung (Energiegleichung):

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi}$$

Grundlegende Rechenregeln

K403
Fazit

Für die Transformation $f(x) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x$ gilt:

$$af(x) \circ\!\!-\!\!\bullet\, a\widehat{f}(\xi), \qquad f(x)+g(x) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{f}(\xi)+\widehat{g}(\xi),$$

$$f(-x) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{f}(-\xi), \qquad \overline{f(x)} \circ\!\!-\!\!\bullet\, \overline{\widehat{f}(-\xi)},$$

$$f(ax) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{|a|}\widehat{f}\Big(\frac{\xi}{a}\Big), \qquad \frac{1}{|a|} f\Big(\frac{x}{a}\Big) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{f}(a\xi),$$

$$f(x-a) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi a}\widehat{f}(\xi), \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} f(x) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{f}(\xi-a),$$

$$\partial_x f(x) \overset{\text{⚠}}{\underset{\text{K2A}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}}\, \mathrm{i}\xi\, \widehat{f}(\xi), \qquad x\, f(x) \overset{\text{⚠}}{\underset{\text{K2A}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}}\, \mathrm{i}\partial_\xi\, \widehat{f}(\xi),$$

$$(f*g)(x) \overset{\text{⚠}}{\underset{\text{K2B}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}}\, \sqrt{2\pi}\cdot\widehat{f}(\xi)\cdot\widehat{g}(\xi), \qquad f(x)\cdot g(x) \overset{\text{⚠}}{\underset{\text{K2B}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\widehat{f}*\widehat{g})(\xi).$$

⚠ Die letzten vier erfordern L^1–Voraussetzungen, siehe K2A und K2B.

☺ Glattheit der Funktion f entspricht schnellem Abklingen von $\widehat{f}$.

☺ Schnelles Abklingen der Funktion f entspricht Glattheit von $\widehat{f}$.

Umkehrsätze und Isometrie

K404
Fazit

Sind $f, \widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolut integrierbar und stetig, so gilt punktweise

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi = f(x) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Die linke Gleichung gilt, ebenso punktweise, wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolut integrierbar ist und stückweise stetig differenzierbar und sprungnormiert.

Die quadrat-integrierbaren Funktionen bilden den $\mathbb{C}$–Vektorraum

$$L^2 = L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}) := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t < \infty \right\}.$$

Die Fourier–Transformation definiert eine Isometrie $\mathscr{F} : L^2 \to L^2$, also

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi \quad \text{und} \quad \langle\, f \mid g \,\rangle = \langle\, \widehat{f} \mid \widehat{g} \,\rangle \quad \text{für } f, g \in L^2.$$

Unschärfe ist anschaulich: Ist f schmal, so ist $\widehat{f}$ breit, und umgekehrt.
Quantitativ: Für alle $f \in L^2$ gilt die Unschärferelation $\mathbf{V}(f)\cdot\mathbf{V}(\widehat{f}) \geq \frac{1}{4}$.
Optimalfall: Gleichheit gilt genau dann, wenn f eine Glockenkurve ist.

Verständnisfragen

Aufgabe: Die Transformationen $\mathscr{F}$ und $\mathscr{F}^{-1}$ sind zueinander invers; kleine Unebenheiten sind leider unvermeidbar, die sollten Sie kennen:

(1) Integrale: Nennen Sie absolut integrierbare Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit Fourier–Transformierter $\widehat{f}$, deren Rücktransformation nicht in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ gegen den ursprünglichen Funktionswert $f(x)$ konvergiert.

Unter welchen Voraussetzungen gilt's in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$?

(2) Reihen: Nennen Sie 2π–periodische und absolut integrierbare Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, deren Fourier–Reihe $f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ nicht in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ gegen den Funktionswert $f(x)$ konvergiert.

Unter welchen Voraussetzungen gilt's in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$?

Lösung: Rechteckfunktionen $\mathbf{I}_{[a,b]}$ sind unvermeidliche Kandidaten: Hin- und Rücktransformation liefert die sprungnormierte Funktion.

Allgemein können wir jede Funktion f in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ beliebig abändern, Integral und Fourier–Transformierte ändern sich dadurch nicht, aber die Konvergenz in diesem Punkt gegen $f(x)$ geht verloren. (Das gilt allgemeiner für alle $x \in N$ in einer Nullmenge, $\mathrm{vol}_1(N) = 0$.)

Verständnisfragen

Aufgabe: Wie verhalten sich die Transformationen $\mathscr{F}$ und $\mathscr{F}^{-1}$...

1. bei Linearkombinationen von Funktionen?
2. bei Streckung und Verschiebung?
3. bei Ableitung von Funktionen?
4. bei Produkten von Funktionen?

Welche Voraussetzungen werden jeweils benötigt?

5. Ist für jede reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auch $\widehat{f}$ reell? Welche zusätzliche Symmetrie garantiert dies?
6. Ist für jede Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Transformierte $\widehat{f}$ stetig? Welche zusätzliche Voraussetzung garantiert dies?
7. Was besagt das Riemann–Lebesgue–Lemma?
8. Was besagt der Satz von Plancherel? im Vergleich zu Parseval?
9. Was besagt die Unschärferelation? Qualitativ? Quantitativ?

Lösung: Lesen Sie das obige Fazit... und noch einmal das Kapitel! Dort finden Sie die allgemeinen Regeln und zahlreiche Beispiele.

Verständnisfragen

K407
Erläuterung

Aufgabe: (1) Was genau besagt die Cauchy–Schwarz–Ungleichung? Wann genau gilt Gleichheit? Können Sie Ihre Antworten beweisen?

(2) Die Unschärferelation K3B beruht im Wesentlichen auf der Cauchy–Schwarz–Ungleichung. Wann genau gilt hier Gleichheit?

Lösung: (1) Wir erinnern an Satz I1H: In jedem $\mathbb{K}$–Vektorraum V mit Skalarprodukt $\langle - | - \rangle$ gilt $|\langle u \mid v \rangle|^2 \le \langle u \mid u \rangle \langle v \mid v \rangle$ für alle $u, v \in V$. Gleichheit gilt genau dann, wenn u, v über $\mathbb{K}$ linear abhängig sind.

(2) Die Unschärferelation $\mathbf{V}(f) \cdot \mathbf{V}(\widehat{f}) \ge \frac{1}{4}$ beruht auf der CSU (K3B):

$$\mathbf{V}(f) \cdot \mathbf{V}(\widehat{f}) = \int_{\mathbb{R}} \big|x f(x)\big|^2 \,\mathrm{d}x \cdot \int_{\mathbb{R}} \big|\xi \widehat{f}(\xi)\big|^2 \,\mathrm{d}\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \big|x f(x)\big|^2 \,\mathrm{d}x \cdot \int_{\mathbb{R}} \big|f'(x)\big|^2 \,\mathrm{d}x \ge \Big|\int_{\mathbb{R}} x\overline{f(x)} \cdot f'(x) \,\mathrm{d}x\Big|^2 = \ldots \ge \frac{1}{4}$$

Bei Gleichheit müssen $x\overline{f(x)}$ und $f'(x)$ linear abhängig sein, also $f'(x) = \lambda\, x f(x)$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ gelten. Wir integrieren $f'(x)/f(x) = \lambda\, x$ zu $\ln f(x) = c + \lambda x^2/2$ und erhalten $f(x) = C\,\mathrm{e}^{\lambda x^2/2}$. Dies ist quadratintegrierbar für $\lambda < 0$. Gleichheit gilt daher nur für Glockenkurven! K306

Verständnisfragen: komplexe Potenzen

K408
Übung

Aufgabe: Die folgende Rechnung beweist $0 = 1$. Wo stecken Fehler?

Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt:		$\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k}$	$= 1$	(1)
Multiplikation von (1) mit e	$\Longrightarrow$	$\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k + 1}$	$= \mathrm{e}$	(2)
Einsetzen von (2) in (1)	$\Longrightarrow$	$(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k + 1})^{2\pi \mathrm{i} k}$	$= 1$	(3)
Potenzgesetz $(\mathrm{e}^w)^z = \mathrm{e}^{wz}$	$\Longrightarrow$	$\mathrm{e}^{-4\pi^2 k^2 + 2\pi \mathrm{i} k}$	$= 1$	(4)
Potenzgesetz $\mathrm{e}^{w+z} = \mathrm{e}^w \cdot \mathrm{e}^z$	$\Longrightarrow$	$\mathrm{e}^{-4\pi^2 k^2} \cdot \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k}$	$= 1$	(5)
Anwendung von (1)	$\Longrightarrow$	$\mathrm{e}^{-4\pi^2 k^2}$	$= 1$	(6)
Grenzwert für $k \to \infty$	$\Longrightarrow$	0	$= 1$	(7)

⚠ Das ist eine lehrreiche Übung, bitte versuchen Sie zuerst selbst, den Fehler einzugrenzen! Die Gleichungen (1) und (2) sind tatsächlich gültig, auch (3) $1^z = 1$ scheint noch in Ordnung, obschon die Bedeutung von a^z für $a, z \in \mathbb{C}$ unklar ist. Die letzte Gleichung (7) ist offensichtlich falsch, ebenso (6), (5), (4). Die Implikationen (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ (7) sind alle einwandfrei, sie starten leider bei einer falschen Aussage (4). Der einzige Fehler liegt also bei (3) $\Rightarrow$ (4). In $\mathbb{C}$ sind Logarithmen und Potenzen nicht eindeutig, daher ist extreme Vorsicht geboten! F506

Anwendung der grundlegenden Rechenregeln

K409
Übung

Aufgabe: Stimmen die folgenden Rechnungen? Wo stecken Fehler?

$$(1)\quad \left.\begin{matrix} \mathrm{e}^{-ax} & \text{für } x>0 \\ 0 & \text{für } x<0 \end{matrix}\right\} = f(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{a+\mathrm{i}\xi}$$

$$\Longrightarrow \quad -af(x) = f'(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathrm{i}\xi\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\mathrm{i}\xi}{a+\mathrm{i}\xi}$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \textit{Whaaa?} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\mathrm{i}\xi/a}{a+\mathrm{i}\xi}$$

$$(2)\quad \mathrm{e}^{-a|x|} = g(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \widehat{g}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{a^2+\xi^2}$$

$$\Longrightarrow \quad a^2\,\mathrm{e}^{-a|x|} = g''(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad (\mathrm{i}\xi)^2\widehat{g}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{-a\xi^2}{a^2+\xi^2}$$

$$\Longrightarrow \quad g(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \textit{Whaaa?} \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{-\xi^2/a}{a^2+\xi^2}$$

⚠ Unsere Ableitungsregel K2A verlangt absolute Stetigkeit, diese ist links jedoch nicht erfüllt. Umgekehrt verlangt die Multiplikationsregel absolute Integrierbarkeit, diese ist rechts verletzt. Tatsächlich führen die obigen, allzu naiven Rechnungen zu dramatisch falschen Ergebnissen!

Anwendung der grundlegenden Rechenregeln

K410
Übung

Aufgabe: Fourier–transformieren Sie die Funktionen

$$\mathrm{e}^{-|x|}, \quad x\,\mathrm{e}^{-|x|}, \quad -\operatorname{sign}(x)\,\mathrm{e}^{-|x|}.$$

Bemerkung: Sie können die Fourier–Integrale direkt ausrechnen...
☹ Das ist allerdings mühsam. Versuchen Sie es einmal als Übung!
☺ Es ist viel leichter, scharf hinzusehen und geschickt zu rechnen:

Lösung: Die erste kennen wir bereits, die anderen folgern wir:
Zur Anwendung von Satz K2A sind hier alle Voraussetzungen erfüllt.

$$\mathrm{e}^{-|x|} = f(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \widehat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{1+\xi^2}$$

$$x\,\mathrm{e}^{-|x|} = xf(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathrm{i}\partial_\xi\,\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{-2\mathrm{i}\xi}{(1+\xi^2)^2}$$

$$-\operatorname{sign}(x)\,\mathrm{e}^{-|x|} = \partial_x f(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathrm{i}\xi\,\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\mathrm{i}\xi}{1+\xi^2}$$

☺ Allgemein für $g(x) = p(x)\,f(x)$ finden wir ebenso $\widehat{g}(\xi) = p(\mathrm{i}\partial_\xi)\,\widehat{f}(\xi)$, wobei $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ ein beliebiges Polynom ist.

Anwendung zu Multiplikation und Ableitung

K411
Übung

Aufgabe: Fourier–transformieren Sie die Funktionen $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x$ und $h(x) = x^2$ für $|x| \le a$, fortgesetzt durch Null für $|x| > a$.

Bemerkung: Wir können die Fourier–Integrale mühsam ausrechnen...
☺ Es ist viel effizienter, scharf hinzusehen und geschickt zu rechnen:
Wie / Können Sie hier die Multiplikations/Ableitungsregel anwenden?

Lösung: Wir können Satz K2A(2) auf $f = \mathbf{I}_{[-a,a]}$ anwenden:

$$f(x) = \mathbf{I}_{[-a,a]}(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \widehat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin(a\xi)}{\xi} = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} c_k \xi^k,$$

$$g(x) = x\,f(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathrm{i}\partial_\xi\,\widehat{f}(\xi) = \mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a\xi\cos(a\xi) - \sin(a\xi)}{\xi^2}$$

$$h(x) = x^2 f(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad -\partial_\xi^2\,\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{(a^2\xi^2 - 2)\sin(a\xi) + 2a\xi\cos(a\xi)}{\xi^3}$$

☺ Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist das Produkt $x^m f(x)$ über $\mathbb{R}$ absolut integrierbar. Die rechte Seite $\widehat{f}$ ist beliebig oft differenzierbar, gar analytisch, genauer: darstellbar als eine auf $\mathbb{R}$ konvergente Potenzreihe. Versuchen Sie es! Sie finden $c_{2n} = (-1)^n \sqrt{2/\pi}\, a^{2n+1}/(2n+1)!$ und $c_{2n+1} = 0$ für $n \in \mathbb{N}$.

Anwendung des Satzes von Plancherel

K412
Übung

Aufgabe: Bestimmen Sie mit Plancherel (K3A) den Wert des Integrals

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\sin(x)}{x + x^3}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Lösung: Wir erkennen und nutzen die Fourier–Transformierten

$$f(x) = \mathbf{I}_{[-1,1]}(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin(\xi)}{\xi} = \widehat{f}(\xi),$$

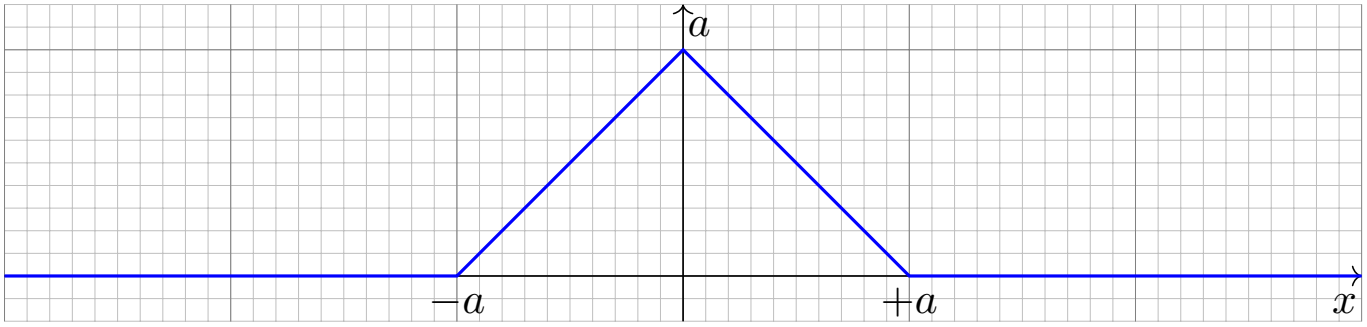
$$g(x) = \mathrm{e}^{-|x|} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{1+\xi^2} = \widehat{g}(\xi).$$

Plancherel transformiert ein schweres Integral in ein leichtes:

$$\begin{aligned}
I &\overset{\text{Def}}{=} \frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{R}} \overline{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}\,\widehat{f}(\xi)} \cdot \widehat{g}(\xi)\,\mathrm{d}\xi \overset{\text{K3A}}{=} \frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{R}} \overline{f(x-1)} \cdot g(x)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Def}}{=} \frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{[0,2]}(x) \cdot \mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x \overset{\text{Def}}{=} \frac{\pi}{2}\int_{x=0}^{2} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{HDI}}{=} \frac{\pi}{2}\Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_{x=0}^{2} = \frac{\pi}{2}\Big[1 - \mathrm{e}^{-2}\Big] = 1.35821\ldots
\end{aligned}$$

Fourier–Transformation der Hutfunktion

Aufgabe: Fourier–transformieren Sie die folgende Hutfunktion H_a:



(1) Nutzen Sie die Ableitung H_a' und deren $\mathscr{F}$–Transformierte.
(2) Alternativ hilft die Faltung $H_a = g * g$ mit $g = \mathbf{I}_{[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]}$. K211
(3) Alternativ setzen Sie die Definition ein und rechnen es geduldig aus.
Plausibilitätscheck: Gilt $H_{2a}(x) = H_a(x+a) + 2H_a(x) + H_a(x-a)$?
Durch Rücktransformation bestimmen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(\xi a)^2/\xi^2 \,\mathrm{d}\xi$. K211

Der direkte Ansatz (3) liegt am nächsten, führt aber zu einer etwas mühsamen Integration.
Als Training sollten Sie dies einmal durchrechnen: Das ist eine sehr lehrreiche Übung.
Wenn einem nichts besseres einfällt, dann ist dies auch die einzig gangbare Methode.
Meist ist es günstiger wie in (1) oder (2), neue Funktionen auf alte zurückzuführen.
Das geht oft schneller. Genau hierfür haben wir die Rechenregeln entwickelt!

Fourier–Transformation der Hutfunktion

Lösung: (1) Außer in den Punkten $\{-a, 0, a\}$ ist H_a differenzierbar:

$$H_a'(x) = \mathbf{I}_{[-a,0]}(x) - \mathbf{I}_{[0,a]}(x)$$

$$\widehat{H_a'}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\mathrm{i}}{\xi} \Big[(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}a\xi}) - (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\xi} - 1) \Big]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\mathrm{i}}{\xi} \Big[2 - 2\cos(a\xi) \Big] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{4\mathrm{i}}{\xi} \sin\left(\frac{a\xi}{2}\right)^2$$

Dank Ableitungsregel $\partial_x H_a(x) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \mathrm{i}\xi\, \widehat{H_a}(\xi)$ erhalten wir:

$$\widehat{H_a}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2}{\xi^2} \sin\left(\frac{a\xi}{2}\right)^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos(a\xi)}{\xi^2}$$

☺ Dasselbe Ergebnis erhalten wir durch Faltung K211 oder direkt.
Plausibilität: Es gilt $H_{2a}(x) = H_a(x+a) + 2H_a(x) + H_a(x-a)$ und

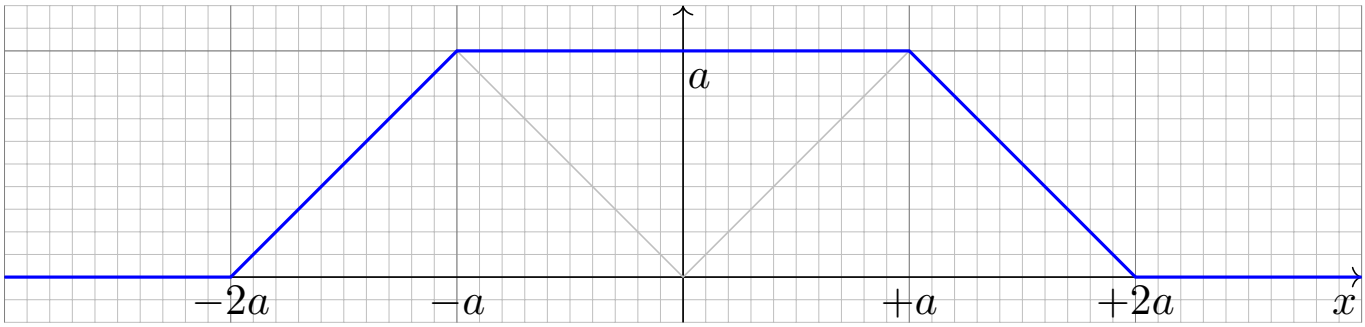
$$\widehat{H_{2a}}(\xi) = \widehat{H_a}(\xi) \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\xi} + 2 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\xi}\right) \quad \text{nach Verschiebungsregel}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2}{\xi^2} \sin\left(\frac{a\xi}{2}\right)^2 \big(2 + 2\cos(a\xi)\big) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2}{\xi^2} \sin(a\xi)^2$$

Fourier–Transformation der Trapezfunktion

K415
Übung

Aufgabe: Fourier–transformieren Sie die Trapezfunktion T_a:



(1) Nutzen Sie die Ableitung T_a' und deren $\mathscr{F}$–Transformierte.
(2) Alternativ hilft die Summe $T_a(x) = H_a(x+a) + H_a(x) + H_a(x-a)$.
(3) Alternativ setzen Sie die Definition ein und rechnen es geduldig aus.

Der direkte Ansatz (3) liegt am nächsten, führt aber zu einer etwas mühsamen Integration.
Als Training sollten Sie dies einmal durchrechnen: Das ist eine sehr lehrreiche Übung.
Wenn einem nichts besseres einfällt, dann ist dies auch die einzig gangbare Methode.
Meist ist es günstiger wie in (1) oder (2), neue Funktionen auf alte zurückzuführen.
Das geht oft schneller. Genau hierfür haben wir die Rechenregeln entwickelt!

☺ Es ist effizienter, scharf hinzusehen und geschickt zu rechnen!
Je mehr Werkzeuge Sie beherrschen und nutzen können, desto besser.

Fourier–Transformation der Trapezfunktion

K416
Übung

Lösung: (1) Außer in den Punkten $\{\pm 2a, \pm a\}$ ist T_a differenzierbar:

$$\begin{aligned} T_a'(x) &= \mathbf{I}_{[-2a,-a]}(x) - \mathbf{I}_{[a,2a]}(x) \\ \widehat{T_a'}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\mathrm{i}}{\xi}\Big[(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\xi} - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}a\xi}) - (\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}a\xi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\xi})\Big] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\mathrm{i}}{\xi}\Big[2\cos(a\xi) - 2\cos(2a\xi)\Big] \end{aligned}$$

Dank Ableitungsregel $\partial_x T_a(x) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \mathrm{i}\xi\,\widehat{T_a}(\xi)$ erhalten wir:

$$\widehat{T_a}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{\xi^2}\Big[\cos(a\xi) - \cos(2a\xi)\Big]$$

(2) Aus der Summe $T_a(x) = H_a(x+a) + H_a(x) + H_a(x-a)$ folgt

$$\widehat{T_a}(\xi) = \widehat{H_a}(\xi)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\xi} + 1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\xi}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{2}{\xi^2}\sin\left(\frac{a\xi}{2}\right)^2\big(1 + 2\cos(a\xi)\big)$$

☺ Beide Lösungen aus (1) und (2) sehen zunächst verschieden aus.
Beide Funktionen sind aber tatsächlich gleich dank Additionstheorem.

Faltung von Normalverteilungen

K417
Übung

Die Normalverteilung $\varphi = \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ ist gegeben durch

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Aufgabe: Für die Faltung von Normalverteilungen gilt:

$$\boxed{\mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2) * \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2) = \mathrm{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)}$$

Zeigen Sie dies (1) durch Fourier–Transformation und (2) direkt.

Lösung: (1) Wir kennen die Fourier–Transformierten K128 K201:

$$f = \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2) \quad \overset{\Rightarrow}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \quad \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu_1\xi - \sigma_1^2\xi^2/2}$$

$$g = \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2) \quad \overset{\Rightarrow}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \quad \widehat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu_2\xi - \sigma_2^2\xi^2/2}$$

$$h = \mathrm{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2) \quad \overset{\Leftarrow}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \quad \widehat{h}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mu_1+\mu_2)\xi - (\sigma_1^2+\sigma_2^2)\xi^2/2}$$

Wir nutzen hierzu dankend die Faltung K2B und die Umkehrung K1D.

Faltung von Normalverteilungen

K418
Übung

(2) Wir rechnen alles direkt aus. Zur Vereinfachung sei $\mu_1 = \mu_2 = 0$.

$$h(x) = \int_{u=-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{u=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x-u)^2}{2\sigma_2^2}}\,\mathrm{d}u$$

Zum Vergleich fügen wir den erhofften Faktor ein:

$$h(x) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \cdot \frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sigma_1\sigma_2\sqrt{2\pi}} \int_{u=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} - \frac{u^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x-u)^2}{2\sigma_2^2}}\,\mathrm{d}u$$

Dies vereinfachen wir weiter mit $\sigma^2 := \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$ und $\mu := \frac{\sigma_1^2 x}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$:

$$h(x) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{u=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}u}_{=1}$$

Zu dieser Rechnung benötigen Sie vor allem Mut und Geduld.

3Blue1Brown betont und nutzt die Rotationssymmetrie: *A pretty reason why Gaussian + Gaussian = Gaussian.* `youtu.be/d_qvLDhkg00`.

Transformation von Differentialgleichungen

Wir untersuchen die homogene **Wärmeleitungsgleichung** S101

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,x) &= \kappa\, \partial_x^2\, u(t,x) && \text{für } t>0 \text{ und } x\in\mathbb{R}, \\ u(0,x) &= u_0(x) && \text{für } t=0 \text{ und } x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Aufgabe: Lösen Sie dies durch Fourier–Transformation bezüglich x.

Hierzu gibt es Voraussetzungen: Satz K2A erfordert, dass u zweimal stetig nach x differenzierbar ist und $\partial_x^2 u$ absolut integrierbar. Das ist am Ende noch zu überprüfen, siehe hierzu Satz D5D.

Lösung: Die $\mathscr{F}$–Transformierte $\widehat{u}(t,\xi)$ erfüllt $\partial_t \widehat{u}(t,\xi) = -\kappa\,\xi^2\,\widehat{u}(t,\xi)$.
Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung in t mit Parameter ξ.
Wir trennen die Variablen gemäß $[\partial_t \widehat{u}(t,\xi)]/\widehat{u}(t,\xi) = -\kappa\xi^2$
und integrieren von 0 bis t zu $\ln \widehat{u}(t,\xi) - \ln \widehat{u}(0,\xi) = -\kappa\xi^2 t$.
Wir erhalten so die Lösung $\widehat{u}(t,\xi) = \mathrm{e}^{-\kappa\xi^2 t}\,\widehat{u}_0(\xi)$ für alle $t\geq 0$.
Rücktransformation $\mathrm{e}^{-\kappa\xi^2 t} \bullet\!\!-\!\!\circ\, \mathrm{e}^{-x^2/4\kappa t}/\sqrt{2\kappa t}$ und Faltung ergibt:

$$u(t,x) = \int_{y\in\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-(x-y)^2/4\kappa t}}{\sqrt{4\pi\kappa t}}\, u_0(y)\,\mathrm{d}y \quad \text{für } t>0.$$

Transformation von Differentialgleichungen

☺ Das Ergebnis entspricht unserer in Satz D5D präsentierten Lösung:
Die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = \kappa\,\partial_x^2 u$ hat als Fundamentallösung eine auseinanderfließende Glockenkurve, den **Wärmeleitungskern**

$$H\,:\,\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,:\,H(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4\kappa t}\right).$$

Die Konstanten sichern die Normierung $\int_{\mathbb{R}} H(t,x)\,\mathrm{d}x = 1$. (Gauß C2G)
Für $t=0$ sei die Wärmeverteilung $u_0:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vorgegeben, mit $u_0\in C_b$.
Für $t>0$ erhalten wir die Lösung durch **Superposition** (Faltung D5E):

$$u(t,x) = \int_{y\in\mathbb{R}} u_0(x-y)\,H(t,y)\,\mathrm{d}y = \int_{z\in\mathbb{R}} u_0(z)\,H(t,x-z)\,\mathrm{d}z.$$

☺ Stehen die Formeln schon da, so genügt geduldiges Nachrechnen:
Machen Sie die Probe und zeigen Sie $\partial_t u = \kappa\,\partial_x^2 u$ durch Ableiten. D517

☺ Die Fourier–Transformation bietet eine elegant-effiziente Herleitung.
Anschließend sammeln und prüfen wir die Voraussetzungen (D5D, D5U).

Transformation von Differentialgleichungen

Aufgabe: Finden Sie eine quadrat-integrierbare Funktion

$$\boxed{u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad u(x) - u''(x) = \mathrm{e}^{-|x|}.}$$

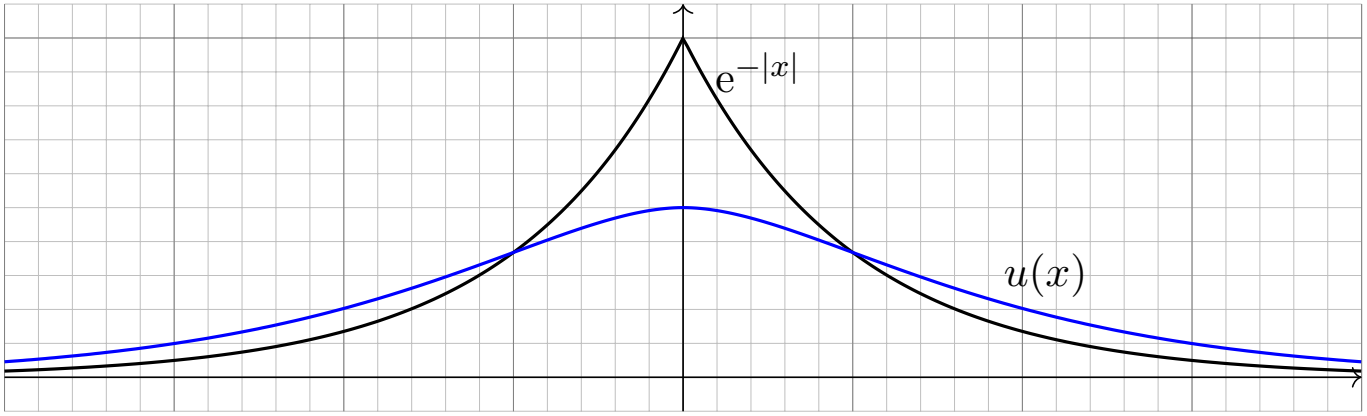
Lösen Sie diese Gleichung durch Fourier–Transformation:

(1) Zu welcher Gleichung für $\widehat{u}$ wird diese DG transformiert?

(2) Lösen Sie nach $\widehat{u}$ auf und berechnen die Rücktransformierte u.

(3) Probe: Erfüllt die gefundene Funktion u die Gleichung?

(4) Ist die gefundene Funktion u die einzige Lösung?



Transformation von Differentialgleichungen

Lösung: (1) Wir fourier–transformieren die Summanden:

$$u(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \widehat{u}(\xi)$$

$$u''(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad (\mathrm{i}\xi)^2\,\widehat{u}(\xi)$$

$$f(x) = \mathrm{e}^{-|x|} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \widehat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{1+\xi^2}$$

Die transformierte Gleichung für $\widehat{u}$ lautet also

$$\widehat{u}(\xi) + \xi^2\,\widehat{u}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{1+\xi^2}$$

Diese können wir leicht nach $\widehat{u}$ auflösen:

$$\widehat{u}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{1+\xi^2}\cdot\frac{1}{1+\xi^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\widehat{f}(\xi)\cdot\widehat{f}(\xi)$$

☺ Integraltransformationen (hier Fourier, später Laplace) machen aus Differentialgleichungen einfache algebraische Gleichungen. Wunderbar! Diese können wir leicht lösen. Dann bleibt noch die Rücktransformation.

(2) Dank Faltungsformel finden wir $u = \frac{1}{2} f * f$. Für $x \geq 0$ gilt:

$$(f * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-|t|}\,\mathrm{e}^{-|x-t|}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-|t|-x+t}\,\mathrm{d}t + \int_{x}^{\infty} \mathrm{e}^{-|t|+x-t}\,\mathrm{d}t$$
$$= \mathrm{e}^{-x} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-|t|+t}\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{x} \int_{x}^{\infty} \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$$

Für die letzten beiden Integrale gilt:

$$\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-|t|+t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} \mathrm{e}^{0}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + x$$
$$\int_{x}^{\infty} \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{2}\Big[\mathrm{e}^{-2t}\Big]_{x}^{\infty} = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2\,x}$$

Für $x \geq 0$ erhalten wir somit folgendes Ergebnis:

$$u(x) = \frac{1}{2}\Big[\mathrm{e}^{-x}\Big(\frac{1}{2} + x\Big) + \mathrm{e}^{x}\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x}\Big] = \frac{1}{2}(1+x)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Da die Funktion $u = \frac{1}{2} f * f$ gerade ist, folgt schließlich

$$u(x) = \frac{1}{2}\big(1 + |x|\big)\,\mathrm{e}^{-|x|}.$$

(3) Wir machen die Probe. Für $x \geq 0$ gilt

$$u(x) = \frac{1}{2}(1+x)\,\mathrm{e}^{-x}, \quad u'(x) = \frac{-1}{2}x\,\mathrm{e}^{-x}, \quad u''(x) = \frac{-1}{2}(1-x)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Hier gilt $u(x) - u''(x) = \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-|x|}$. Für $x \leq 0$ gilt

$$u(x) = \frac{1}{2}(1-x)\,\mathrm{e}^{x}, \quad u'(x) = \frac{-1}{2}x\,\mathrm{e}^{x}, \quad u''(x) = \frac{-1}{2}(1+x)\,\mathrm{e}^{x}.$$

Hier gilt $u(x) - u''(x) = \mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{-|x|}$. Somit ist u quadrat-integrierbar, zweimal stetig differenzierbar und erfüllt die Differentialgleichung.

(4) Die homogene Gleichung $u - u'' = 0$ hat die allgemeine Lösung

$$u_h(x) = \alpha\,\mathrm{e}^{x} + \beta\,\mathrm{e}^{-x} \quad \text{mit} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Allgemeine Lösung der Gleichung $u(x) - u''(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$ ist demnach

$$u(x) + u_h(x) = \frac{1}{2}\big(1 + |x|\big)\,\mathrm{e}^{-|x|} + \alpha\,\mathrm{e}^{x} + \beta\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Quadrat-integrierbar ist diese Funktion nur für $\alpha = \beta = 0$.

☺ Die Laplace–Transformation (Kapitel L) geht hier weiter!

Kapitel L

Laplace–Transformation

Die Laplace–Transformation verwandelt Anfangswertprobleme für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten in algebraische Gleichungen. Sie erfreut sich besonders bei Physikern und Ingenieuren einer großen Beliebtheit.

Harro Heuser (1927–2011)

I am, and will ever be, a white-socks, pocket protector, nerdy engineer, born under the second law of thermodynamics, steeped in steam tables, in love with free-body diagrams, transformed by Laplace and propelled by compressible flow.

Neil Armstrong (1930–2012)

Vollversion • michael-eisermann.de/lehre/HM3 • 26.02.2025

Inhalt dieses Kapitels L

1 Die Laplace–Transformation
- Definition der Laplace–Transformation
- Linearität und Ableitungsregel
- Streckung, Dämpfung, Verschiebung

2 Anwendung auf Differentialgleichungen
- Tabelle einfacher Laplace–Transformierter
- Lösung von Differentialgleichungen
- Partialbruchzerlegung und Residuen

3 Weitere Eigenschaften und Anwendungen
- Rücktransformation und Injektivität
- Faltung und Integralregel
- Greensche Fundamentallösung

4 Fazit: Laplace–Transformation
- Vergleich von Laplace und Fourier
- Anwendung in der Systemtheorie
- Aufgaben zu Differentialgleichungen

Motivation und Zielsetzung

Die Laplace–Transformierte von $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ ist die Funktion

$$\boxed{F(s) := \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{für} \quad s \in \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>\sigma}.}$$

Laplace–Transformation kann lineare Differentialgleichungen lösen:

Differentialgleichung für y, linear, konst. Koeffizienten, mit Anfangswerten in 0	$\xrightarrow[\text{Transformation}]{\mathscr{L} : y \mapsto Y}$	algebraische Gleichung für Y als Hilfsgleichung inklusive Anfangswerten
Lösung $\Downarrow$ $\Uparrow$ Probe	Integrale der $\mathscr{L}$–Tabelle	Probe $\Uparrow$ $\Downarrow$ Lösung
Lösung der DG in y **— analytisch —**	$\xleftarrow[\mathscr{L}^{-1}]{\text{Rücktransformation}}$	Lösung der HG in Y **— algebraisch —**

☺ Die Methode der Laplace–Transformation ist dann effizient, wenn Sie jeden der drei Schritte effizient ausführen können.

☺ Ausführliche $\mathscr{L}$–Tabellen finden Sie in Lehrbüchern, Formelsammlungen und Computer-Algebra-Systemen.

Vorgehensweise

Differentialgleichungen lassen sich mittels Integraltransformationen in algebraische Gleichungen verwandeln und so manchmal lösen.

Zu dieser formalen „Übersetzung“ dient die Laplace–Transformation. Ihr Vorteil ist eine Reihe einfacher Rechenregeln (die „Grammatik“) mit umfangreichen Tabellen von $\mathscr{L}$–Integralen (sozusagen die „Vokabeln“). Diese Formalisierung erübrigt praktisch jede Integralberechnung, zumindest in gutartigen Fällen und mit hinreichender Erfahrung.

Theorie und Anwendung der $\mathscr{L}$–Transformation sind ein weites Feld. Sie wird in der Regelungstechnik und Kybernetik ausgiebig genutzt. Ich will daher eine erste Idee dieser vielseitigen Methode vermitteln, sodass Sie sich ein Bild machen und informiert entscheiden können. Hierzu werde ich die nötigen Grundlagen erklären, damit Sie sogleich Anwendungen auf Differentialgleichungen verstehen und nutzen können.

📖 Wenn Sie dieses Thema vertiefen möchten, empfehlen sich die Klassiker von Gustav Doetsch: *Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace–Transformation*, 3. Auflage 1976, und *Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace–Transformation*, 5. Auflage 1985.

Erste Beispiele zur Laplace–Transformation

Aufgabe: Laplace–transformieren Sie $f(t) = \mathrm{e}^{at}$ mit $a = \sigma + \mathrm{i}\omega \in \mathbb{C}$.

Lösung: Wir setzen die Definition ein und rechnen es einfach aus:

$$F(s) \overset{\text{Def}}{=} \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{Def}}{=} \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{(a-s)t}\,\mathrm{d}t \underset{\text{B1I}}{\overset{\text{HDI}}{=}} \left[\frac{\mathrm{e}^{(a-s)t}}{a-s}\right]_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{s-a}$$

Das Integral existiert nur für $\mathrm{Re}(s) > \sigma$. Wir erhalten folgende Tabelle:

$f(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(s)$	für $\mathrm{Re}(s) > \sigma$
1	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{1}{s}$	für $\mathrm{Re}(s) > 0$
e^{at}	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{1}{s-a}$	für $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(a)$
$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{1}{s-\mathrm{i}\omega} = \dfrac{s+\mathrm{i}\omega}{s^2+\omega^2}$	für $\mathrm{Re}(s) > 0$
$\cos(\omega t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$ (Realteil)	für $\mathrm{Re}(s) > 0$
$\sin(\omega t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ (Imaginärteil)	für $\mathrm{Re}(s) > 0$

Erste Beispiele zur Laplace–Transformation

Aufgabe: Laplace–transformieren Sie $f(t) = t^n$ für $n \geq 0$ mit Hilfe der Gamma–Funktion B313. Was erhalten Sie für $n \in \mathbb{N}$? Für $n = 1/2$?

Lösung: Für $\mathrm{Re}(s) > 0$ setzen wir die Definition ein und rechnen's aus:

$$\begin{aligned} f(t) = t^n \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s) &= \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\, t^n\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{s^n}\int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\,(st)^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s^{n+1}}\int_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\,x^n\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{s^{n+1}}\,\Gamma(n+1) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Aus $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ folgt $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$ und somit $\mathscr{L}(\sqrt{t}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,s^{-3/2}$.

Wir substituieren $x = st$, also $\mathrm{d}x = s\,\mathrm{d}t$ bzw. $\mathrm{d}t = s^{-1}\,\mathrm{d}x$. Die Werte $\Gamma(n+1) = n!$ haben wir bereits berechnet, durch wiederholte partielle Integration B316 und durch Ableiten unterm Integral D417. Einen alternativen Rechenweg ohne Gamma–Funktion nutzen wir auf Seite L113. Aus dem Gaußschen Integral C232 folgt $\Gamma(\frac{1}{2})$ und rekursiv die halbzahligen Werte $\Gamma(\frac{3}{2})$ usw. Die Gamma–Funktion ist eine der Grundfunktionen der Analysis und tritt in erstaunlich vielen verschiedenen Rechnungen auf. Es hilft daher, wenn Sie sie erkennen und nutzen lernen.

📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, Bemerkung 3.7.13.

Konvergenz des Laplace–Integrals

⚠ Manche Funktionen lassen sich nicht $\mathscr{L}$–transformieren!
Das ist zwar bedauerlich, aber leider nicht zu ändern.

Aufgabe: (1) Lässt sich $f(t) = 1/t$ laplace–transformieren?
(2) Lässt sich $g(t) = \exp(t^2)$ laplace–transformieren?

Lösung: Wir setzen die Definition ein und rechnen es aus:

$$F(s) = \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-st}}{t}\,\mathrm{d}t \quad = +\infty$$

$$G(s) = \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{t^2-st}\,\mathrm{d}t = +\infty$$

☹ Diese Integrale konvergieren für keinen Parameterwert $s \in \mathbb{R}$!
(1) Die Polstelle von $f(t) = 1/t$ in $t = 0$ verhindert die Konvergenz.
(2) Die Funktion $g(t) = \exp(t^2)$ wächst für $t \to \infty$ super-exponentiell.

☺ Die Laplace–Transformation gelingt nur für gutartige Funktionen.
Glücklicherweise sind diese ausreichend für viele Anwendungen.

Konvergenz des Laplace–Integrals

Wir setzen im Folgenden voraus, dass die zu transformierende Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ höchstens exponentiell wächst. Ausführlich bedeutet das:

$$\boxed{\big|f(t)\big| \leq c\,\mathrm{e}^{\sigma t} \quad \text{für alle } t \geq 0 \text{ und geeignete Konstanten } c, \sigma \in \mathbb{R}.}$$

Aufgabe: (1) Das Laplace–Integral konvergiert für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > \sigma$.
(2) Zudem gilt $|F(s)| \leq c/(\mathrm{Re}(s) - \sigma)$, also $F(s) \to 0$ für $\mathrm{Re}(s) \to +\infty$.

Lösung: (1) Wir wenden das Majorantenkriterium an auf die Funktion

$$\big|f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\big| \quad = \quad \big|f(t)\big|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(s)\,t} \quad \leq \quad c\,\mathrm{e}^{(\sigma-\mathrm{Re}(s))\,t}.$$

Die Funktion $\mathrm{e}^{-\lambda t}$ mit $\lambda = \mathrm{Re}(s) - \sigma$ ist über $[0, \infty[$ integrierbar:

$$\int_{t=0}^{\infty} \big|f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\big|\,\mathrm{d}t \quad \leq \quad \int_{t=0}^{\infty} c\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \quad = \quad \frac{c}{\lambda} \quad < \quad \infty.$$

(2) Hieraus folgt sofort die Betragsabschätzung $|F(s)| \leq c/(\mathrm{Re}(s) - \sigma)$.
Insbesondere folgt hieraus das Abklingen $F(s) \to 0$ für $\mathrm{Re}(s) \to +\infty$.

Definition der Laplace–Transformation

Definition L1A: Laplace–Transformation

Das **Laplace–Integral** von $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ zum Parameter $s \in \mathbb{C}$ ist

$$\boxed{F(s) := \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{r\to\infty} \int_{t=0}^{r} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Die (Laplace–) **Konvergenzabszisse** von f ist der kritische Wert

$$\boxed{\sigma := \inf\{\, s \in \mathbb{R} \mid \text{Das obige Laplace–Integral konvergiert} \,\}.}$$

Das schnelle Abklingen des Faktors e^{-st} erzwingt die Konvergenz: Das Integral konvergiert für $\mathrm{Re}(s) > \sigma$ und divergiert für $\mathrm{Re}(s) < \sigma$.

Die Funktion $F : \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>\sigma} \to \mathbb{C}$ heißt **Laplace–Transformierte** von f. Schreibweise $F = \mathscr{L}(f)$, kurz $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(s)$ oder $F(s) \bullet\!\!-\!\!\circ\, f(t)$.

Satz L1B: Holomorphie der Laplace–Transformierten

Die Funktion F ist holomorph mit $\partial_s^n F(s) \bullet\!\!-\!\!\circ\, (-t)^n f(t)$ für $n \in \mathbb{N}$.

Definition der Laplace–Transformation

Zur Integration setzen wir stillschweigend voraus, dass f auf jedem endlichen Intervall $[0, r]$ integrierbar ist, also $\int_0^r |f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$ erfüllt. Für jeden Parameter $s \in \mathbb{R}$ gilt dann ebenfalls $\int_0^r |\mathrm{e}^{-st} f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$. Wir erhalten also ein wohldefiniertes Parameterintegral $\int_0^r \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Das Laplace–Integral existiert, wenn der obige Grenzwert für $r \to \infty$ existiert, geschrieben $F(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{r\to\infty} \int_0^r \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$. Dies gilt, wenn f höchstens exponentiell wächst, wie oben erklärt.

Der Faktor e^{-st} dämpft den Integranden $f(t)$ exponentiell und erzwingt die Integrierbarkeit für ausreichend großes $\mathrm{Re}(s) > \sigma$. Bei $\sigma = -\infty$ haben wir Konvergenz für alle $s \in \mathbb{C}$, bei $\sigma = +\infty$ für kein $s \in \mathbb{C}$.

Zur Holomorphie prüfen wir geduldig nach, dass wir dank majorisierter Integrierbarkeit die Ableitung nach s unter das Integral ziehen dürfen.

☺ Dank Satz L1B ist F beliebig oft differenzierbar, sogar analytisch: $F : \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>\sigma} \to \mathbb{C}$ lässt sich (lokal) in eine Potenzreihe entwickeln (F3E).

☺ Oft lässt sich die Funktion F holomorph auf die gesamte Ebene $\mathbb{C}$ fortsetzen mit Ausnahme einiger Polstellen, wie in obigen Beispielen.

Die Laplace–Transformierte ist holomorph.

Aufgabe: Wir wollen die Ableitung ∂_s unter das Integral ziehen:

$$F(s) = \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \quad F'(s) = \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\,(-t) f(t)\,\mathrm{d}t$$

Warum dürfen wir das hier? Finden Sie eine geeignete Majorante!

☺ Zur Erinnerung und als Vorbild: Die entsprechende Aufgabe für die Gamma–Funktion haben wir auf Seite D417 gelöst.

Wir setzen weiterhin voraus, dass f höchstens exponentiell wächst, das heißt $|f(t)| \le c\,\mathrm{e}^{\sigma t}$ für alle $t \ge 0$ und geeignete Konstanten $c, \sigma \in \mathbb{R}$.

Lösung: Wir nutzen die Ableitung von Parameterintegralen (D3E). Zunächst ist der Integrand $f(t)\,\mathrm{e}^{-st}$ stetig differenzierbar nach s. Zudem ist die Ableitung $-t\,f(t)\,\mathrm{e}^{-st}$ majorisiert integrierbar: Für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) \ge \sigma_0 > \sigma$ gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left|-t\,f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\right| &= |t| \cdot \left|f(t)\right| \cdot \left|\mathrm{e}^{-st}\right| \le c\,t\,\mathrm{e}^{\sigma t}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(s)t} \\ &\le c\,t\,\mathrm{e}^{\sigma t - \mathrm{Re}(s)t} \qquad \le c\,t\,\mathrm{e}^{(\sigma-\sigma_0)t} \qquad =: h(t). \end{aligned}$$

Die Laplace–Transformierte ist holomorph.

Die Majorante $h(t) = c\,t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$ mit $\lambda = \sigma_0 - \sigma > 0$ ist unabhängig von s. Sie ist zudem über $[0, \infty[$ integrierbar: Dank partieller Integration gilt

$$\int_{t=0}^{r} t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \Big[-t\,\lambda^{-1}\,\mathrm{e}^{-\lambda t} - \lambda^{-1}\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\Big]_{t=0}^{r} \to \lambda^{-2} \quad \text{für } r \to \infty.$$

Demnach ist die Ableitung $-t\,f(t)\,\mathrm{e}^{-st}$ majorisiert integrierbar.

☺ Alle Voraussetzungen zur Ableitung von Parameterintegralen (D3E) sind also erfüllt, und wir dürfen die Ableitung ∂_s unters Integral ziehen.

☺ Somit ist die Funktion $F : \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>\sigma} \to \mathbb{C}$ holomorph (F2C), denn F ist auf ganz $\mathbb{C}_{\mathrm{Re}>\sigma}$ komplex differenzierbar und die Ableitung F' ist stetig.

☺ Genau dies haben wir in obigen Beispielen bereits beobachtet! Unsere Rechnung zeigt, dass dies kein Zufall ist, sondern immer gilt.

☺ Hier zahlt sich unsere solide Vorbereitung aus: Wir können unsere Werkzeuge für holomorphe Funktionen gewinnbringend einsetzen, insbesondere den Residuensatz zur Laplace–Umkehrformel L3A.

Linearität der Laplace–Transformation

Wir suchen weitere hilfreiche Eigenschaften der $\mathscr{L}$–Transformation

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(s) = \mathscr{L}(f)(s) = \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Satz L1c: Linearität

Die Laplace–Transformation ist linear:

$$\boxed{\mathscr{L}\big[a\,f + b\,g\big] = a\,\mathscr{L}(f) + b\,\mathscr{L}(g)}$$

für alle $\mathscr{L}$–transformierbaren Funktionen $f, g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ und $a, b \in \mathbb{C}$.

$$\boxed{f \circ\!\!-\!\!\bullet\, F, \quad g \circ\!\!-\!\!\bullet\, G \quad \Longrightarrow \quad a\,f + b\,g \circ\!\!-\!\!\bullet\, a\,F + b\,G}$$

Die Schreibweise $f \circ\!\!-\!\!\bullet\, F$ bedeutet, dass f transformierbar ist mit $\mathscr{L}$–Transformierter F, und $g \circ\!\!-\!\!\bullet\, G$ bedeutet, dass g transformierbar ist mit $\mathscr{L}$–Transformierter G. Genauer ist $F(s)$ definiert für $\mathrm{Re}(s) > \sigma_f$ und $G(s)$ für $\mathrm{Re}(s) > \sigma_g$. Dann ist ihre Summe $F + G$ zumindest definiert für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > \sigma = \max(\sigma_f, \sigma_g)$, und in diesem Bereich gilt Linearität. Meist unterdrückt man die explizite Nennung des Definitionsbereichs. In den Beispielen haben F und G häufig Polstellen in $\mathbb{C}$ und erinnern uns daran, dass sie nur für große s definiert sind.

Linearität der Laplace–Transformation

Aufgabe: Berechnen Sie geschickt die $\mathscr{L}$–Transformierten von

$$\cosh(at), \quad \sinh(at), \quad \cos(\omega t), \quad \sin(\omega t).$$

Lösung: $\mathscr{L}$–Integrale ausrechnen... oder gleich Linearität nutzen:

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(s) \qquad \text{für } s > \sigma$$

$$\mathrm{e}^{at} \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{s-a} \qquad \text{für } s > \mathrm{Re}(a)$$

$$\cosh(at) = \frac{1}{2}\Big[\mathrm{e}^{at} + \mathrm{e}^{-at}\Big] \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\Big] = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

$$\sinh(at) = \frac{1}{2}\Big[\mathrm{e}^{at} - \mathrm{e}^{-at}\Big] \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\Big] = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\Big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\Big] \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{s-\mathrm{i}\omega} + \frac{1}{s+\mathrm{i}\omega}\Big] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\Big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\Big] \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{2\mathrm{i}}\Big[\frac{1}{s-\mathrm{i}\omega} - \frac{1}{s+\mathrm{i}\omega}\Big] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Ableitungsregel der Laplace–Transformation

Aufgabe: Berechnen Sie $\mathscr{L}(f')$, $\mathscr{L}(f'')$, $\mathscr{L}(f''')$ usw. aus $\mathscr{L}(f)$.

Lösung: (1) Wir nutzen die Definition und partielle Integration:

$$\begin{aligned} f'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \mathscr{L}(f')(s) &\overset{\text{Def}}{=} \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} f'(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{partielle Integration!} \\ &\overset{\text{B1J}}{\underset{L^1}{=}} \Big[\mathrm{e}^{-st} f(t)\Big]_{t=0}^{\infty} - \int_{t=0}^{\infty} -s\,\mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= s\,\mathscr{L}(f)(s) - f(0) \end{aligned}$$

Hierzu sei f absolut stetig und für $s > \sigma$ gelte $\mathrm{e}^{-st} f(t) \to 0$ für $t \to \infty$.

(2) Für die zweite Ableitung $f'' = (f')'$ wenden wir dies erneut an:

$$\begin{aligned} f''(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \mathscr{L}\big(f''\big)(s) &\overset{(1)}{=} s\,\mathscr{L}\big(f'\big)(s) - f'(0) \\ &\overset{(1)}{=} s\big[s\,\mathscr{L}\big(f\big)(s) - f(0)\big] - f'(0) \\ &= s^2\mathscr{L}\big(f\big)(s) - s\,f(0) - f'(0) \end{aligned}$$

☺ Alle weiteren Ableitungen folgen nun ebenso per Induktion...

Ableitungsregel der Laplace–Transformation

Satz L1D: Ableitungsregel der Laplace–Transformation

Sind $f, f', f'', \ldots, f^{(n)} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ stetig und $\mathscr{L}$–transformierbar, so gilt

$$\begin{aligned} f(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\, F(s) \\ f'(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\, s\,F(s) - f(0) \\ f''(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\, s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \\ f'''(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\, s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0) \\ f^{(4)}(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\, s^4F(s) - s^3f(0) - s^2f'(0) - sf''(0) - f'''(0) \\ &\ldots \\ f^{(n)}(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\, s^nF(s) - s^{n-1}\,f(0) - s^{n-2}\,f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0) \end{aligned}$$

☺ Die erste Gleichung haben wir oben durch partielle Integration direkt nachgewiesen. Alle weiteren Gleichungen ergeben sich per Induktion durch Anwendung dieser Formel.

☺ Ableitungen nach t werden zu polynomiellen Ausdrücken in s. Hierin liegt der ungemein praktische Nutzen der $\mathscr{L}$–Transformation für das Lösen von Differentialgleichungen.

Ableitungsregel der Laplace–Transformation

Aufgabe: Berechnen Sie dank Ableitungsregel die $\mathscr{L}$–Transformierte

$$t^n \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Lösung: Wir haben bereits $1 \circ\!\!-\!\!\bullet 1/s$ berechnet. L101
Für $f(t) = t^n$ gilt $f^{(n)}(t) = n!$, dank Linearität also

$$f^{(n)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet n!/s.$$

Andererseits liefert die Ableitungsregel für $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$ hier

$$f^{(n)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet s^n F(s) \quad \text{da} \quad f(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0.$$

Wir erhalten $n!/s = s^n F(s)$, also $F(s) = n!/s^{n+1}$, wie behauptet.

☺ Wir können das Laplace–Integral auch direkt ausrechnen wie auf Seite L102. Dies führt zu wiederholter partieller Integration für die Gamma–Funktion wie auf Seite B316 erklärt.

☺ Wir haben stattdessen unsere Rechnung gleich so formuliert, dass wir die Ableitungsregel geschickt ausnutzen können. Damit wird der Rechenweg wesentlich kürzer und leichter!

☺ Auch hier führt Differenzieren der Funktion f auf einfache algebraische Operationen der Bildfunktion $F = \mathscr{L}(f)$. Dies ist die Eigenart und der Nutzen der Laplace–Transformation.

Streckung, Dämpfung, Verschiebung

Wir betrachten $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$. Für die **Ableitung von F** gilt: L107

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} F(s) = \int_{t=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st}(-t) f(t)\,\mathrm{d}t = \mathscr{L}\Big[-t f(t)\Big]$$

Dämpfung: Für alle Exponenten $a \in \mathbb{C}$ gilt

$$\mathscr{L}\Big[\mathrm{e}^{at} f(t)\Big] = \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{e}^{at} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(s-a)t} f(t)\,\mathrm{d}t = F(s-a).$$

Streckung: Substitution mit $\tau = at$ und $a > 0$ liefert

$$\mathscr{L}\Big[f(at)\Big] = \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} f(at)\,\mathrm{d}t = \int_{\tau=0}^{\infty} \frac{1}{a}\,\mathrm{e}^{-s\tau/a} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{a} F\Big(\frac{s}{a}\Big).$$

Verschiebung: Substitution mit $\tau = t - a$ und $a \geq 0$ liefert

$$\mathscr{L}\Big[f(t-a)\Big] = \int_{t=a}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t-a)\,\mathrm{d}t = \int_{\tau=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-s\tau - as} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{e}^{-as} F(s).$$

⚠ Hierbei gelte $f(t) = 0$ für alle $t \leq 0$, also $f(t-a) = 0$ für alle $t \leq a$.
Die Heaviside–Sprungfunktion $u = \mathbf{I}_{[0,\infty[}$ bedeutet Anschalten bei $t = 0$.
Für unsere Funktion schreiben wir $f(t)u(t)$, verschoben $f(t-a)u(t-a)$.

Streckung, Dämpfung, Verschiebung

Satz L1E: Transformationsregeln

Sei $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die **Multiplikationsregel**:

$$\boxed{t^n f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet (-1)^n F^{(n)}(s)}$$

Für alle $a \in \mathbb{C}$ gilt die **Dämpfungsregel**:

$$\boxed{\mathrm{e}^{at} f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s-a)}$$

Für alle $a \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt die **Streckungsregel**:

$$\boxed{f(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)}$$

Sei $f(t) = 0$ für $t \leq 0$. Für alle $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt die **Verschiebungsregel**:

$$\boxed{f(t-a) \circ\!\!-\!\!\bullet \mathrm{e}^{-as} F(s)}$$

Dies schreibt man zur Betonung $f(t-a)\,\mathbf{I}_{[0,\infty[}(t-a) \circ\!\!-\!\!\bullet \mathrm{e}^{-as} F(s)$.

Einfache Anwendungsbeispiele

Aufgabe: Berechnen Sie geschickt die $\mathscr{L}$–Transformierten von

$$t^n\,\mathrm{e}^{at}, \quad \sin(\omega t)\,\mathrm{e}^{at}, \quad \cos(\omega t)\,\mathrm{e}^{at}.$$

Lösung: Mit Dämpfungsregel:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left(t^n\,\mathrm{e}^{at}\right)(s) &= \mathscr{L}(t^n)(s-a) &&= \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \\
\mathscr{L}\left(\sin(\omega t)\,\mathrm{e}^{at}\right)(s) &= \mathscr{L}(\sin \omega t)(s-a) &&= \frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2} \\
\mathscr{L}\left(\cos(\omega t)\,\mathrm{e}^{at}\right)(s) &= \mathscr{L}(\cos \omega t)(s-a) &&= \frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}
\end{aligned}$$

Die erste Formel gewinnen wir auch mit Multiplikationsregel:

$$\mathscr{L}\left(t^n\,\mathrm{e}^{at}\right)(s) = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n} \frac{1}{s-a} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

☺ Die $\mathscr{L}$–Transformation gehorcht einfachen Regeln. Zusammen mit einer Tabelle grundlegender $\mathscr{L}$–Integrale erübrigt sich häufig jede Integralberechnung — zumindest mit hinreichender Erfahrung.

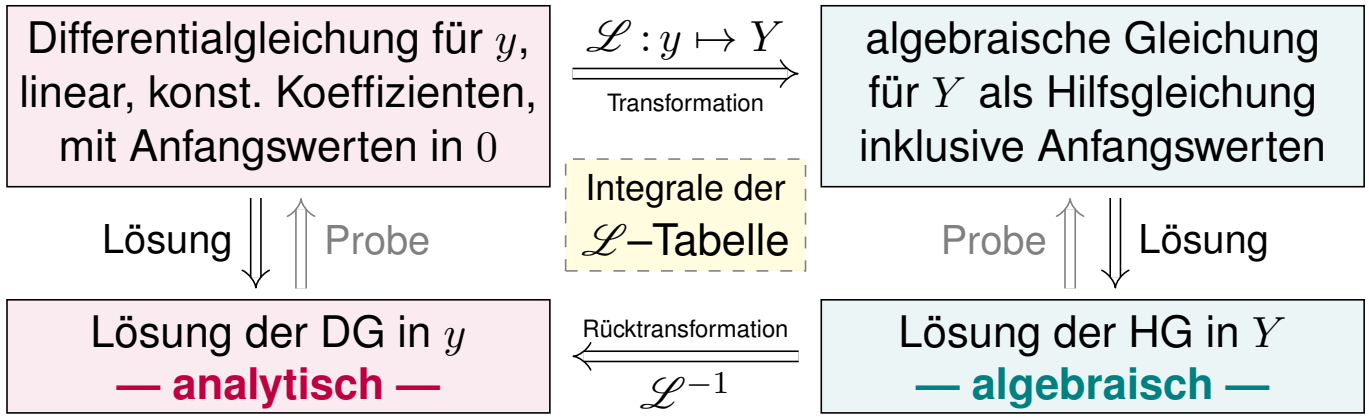
Unsere kleine $\mathscr{L}$–Tabelle: Vokabeln und Grammatik

$f(t)_{\,t\geq 0}$	$F(s)_{\,\mathrm{Re}(s)>\sigma}$
1	$\frac{1}{s}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$t^n\,\mathrm{e}^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$

$f(t)_{\,t\geq 0}$	$F(s)=\int_{t=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t$
$af(t)+bg(t)$	$aF(s)+bG(s)$
$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$
$t^nf(t)$	$(-1)^nF^{(n)}(s)$
$\mathrm{e}^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$f(at),\ a>0$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
$f(t-a)u(t-a)$	$\mathrm{e}^{-as}F(s)$

Lösung von Differentialgleichungen

Laplace–Transformation kann lineare Differentialgleichungen lösen:



☺ Die Laplace–Transformation verwandelt etwas kompliziertes in etwas einfaches, nämlich Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen.

Die Lösung der Hilfsgleichung ist oft einfach und beruht hauptsächlich auf Bruchrechnung: Partialbruchzerlegung der berechneten Funktionen.

☺ Die Methode der Laplace–Transformation ist dann effizient, wenn Sie jeden der drei Schritte effizient ausführen können.

☺ Ausführliche $\mathscr{L}$–Tabellen finden Sie in Lehrbüchern, Formelsammlungen und Computer-Algebra-Systemen.

Lösung von Differentialgleichungen

Aufgabe: Lösen Sie durch $\mathscr{L}$–Transformation die Differentialgleichung

$$\boxed{y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 2\,\mathrm{e}^{-t} \quad \text{mit} \quad y(0) = -1,\ y'(0) = 1.}$$

Lösung: (1) Wir laplace–transformieren dank $\mathscr{L}$–Tabelle:

$$\begin{aligned}
y(t) &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad Y(s) && = Y(s) \\
y'(t) &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad s\,Y(s) - y(0) && = s\,Y(s) + 1 \\
y''(t) &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad s^2\,Y(s) - s\,y(0) - y'(0) && = s^2\,Y(s) + s - 1 \\
\mathrm{e}^{-t} &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 1/(s+1)
\end{aligned}$$

Dank Linearität transformieren wir die DG zur **Hilfsgleichung**

$$\underbrace{(s^2 + 2s + 1)}_{\text{char. Polynom}}\ Y(s) + \underbrace{s + 1}_{\text{Anfangsdaten}} = \underbrace{\frac{2}{s+1}}_{\text{rechte Seite}}\ .$$

Die Anfangswerte werden schon im ersten Schritt in die $\mathscr{L}$–Transformation eingearbeitet und somit nur die spezielle Lösung des AWP angesteuert. Die allgemeine Lösung der Gleichung $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 2\,\mathrm{e}^{-t}$ wird hier nicht benötigt (und auch nicht nebenbei gefunden). In diesem Beispiel liegt Resonanz vor; die $\mathscr{L}$–Transformation verarbeitet das automatisch.

Lösung von Differentialgleichungen

(2) **Auflösung** der Hilfsgleichung nach Y und Partialbruchzerlegung:

$$Y(s) = \frac{\frac{2}{s+1} - (s+1)}{s^2 + 2s + 1} = \frac{2 - (s+1)^2}{(s+1)^3} \overset{\text{PBZ}}{=} \frac{2}{(s+1)^3} - \frac{1}{s+1}$$

(3) **Rücktransformation** von Y zu y dank $\mathscr{L}$–Tabelle:

$$Y(s) = \frac{2}{(s+1)^3} - \frac{1}{s+1} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad t^2\,\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t} = y(t)$$

(4) Wir machen die **Probe**: Lösen ist schwer, prüfen ist leicht!

$$\left.\begin{aligned}
y(t) &= (\ \ t^2 \qquad\quad -1)\,\mathrm{e}^{-t} \\
y'(t) &= (-t^2 \quad +2t \quad +1)\,\mathrm{e}^{-t} \\
y''(t) &= (\ \ t^2 \quad -4t \quad +1)\,\mathrm{e}^{-t}
\end{aligned}\right\} \implies y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 2\,\mathrm{e}^{-t}$$

☺ Die Funktion y erfüllt die Differentialgleichung mit Anfangsdaten!

Die Methode der Laplace–Transformation ist effizient, wenn Sie jeden der drei Schritte (1–3) schnell und sicher ausführen können. Hierzu nützen Tabellen, vor allem aber *viel Erfahrung*! Daher zahlt sich die $\mathscr{L}$–Methode vor allem bei längerem Gebrauch aus; bei nur gelegentlicher Anwendung zeigt sie sich dem Amateur eher abweisend. Das müssen Sie selbst ausprobieren. Diese Differentialgleichung lösen wir später erneut mit anderen Methoden, siehe Seite N517.

Partialbruchzerlegung und Residuen

Sei $q(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_n s^n \in \mathbb{C}[s]$ ein Polynom vom Grad n. Wir zerlegen q in Linearfaktoren: Dank Fundamentalsatz der Algebra (F3C) existieren n komplexe Nullstellen $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, sodass gilt:

$$\boxed{q(s) = a_n(s - z_1)(s - z_2)\cdots(s - z_n) = a_n \prod_{k=1}^{n}(s - z_k)}$$

Wir betrachten eine rationale Funktion p/q mit Zählerpolynom $p \in \mathbb{C}[s]$. Nach Polynomdivision können und werden wir $\deg p < \deg q$ annehmen.

Einfacher Fall: Angenommen q hat nur einfache Nullstellen, d.h. $z_i \neq z_j$ für $i \neq j$. Dann hat die Partialbruchzerlegung von p/q folgende Form:

$$\boxed{\frac{p(s)}{q(s)} = \frac{c_1}{s - z_1} + \frac{c_2}{s - z_2} + \ldots + \frac{c_n}{s - z_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{s - z_k}}$$

Wir wollen die Koeffizienten $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ bestimmen. Die primitive Methode besteht darin, die Summe auf den gemeinsamen Nenner $q(s)$ zu bringen und dann den Zähler mit $p(s)$ zu vergleichen. Das führt auf ein lineares Gleichungssystem... Noch effizienter geht es wie folgt.

Partialbruchzerlegung und Residuen

Multiplikation mit dem k-ten Linearfaktor $(s - z_k)$ ergibt:

$$\frac{p(s)(s - z_k)}{q(s)} = c_k + \sum_{j \neq k} c_j \frac{s - z_k}{s - z_j}$$

Für $s \to z_k$ geht die rechte Seite gegen c_k. Für die linke Seite gilt:

$$\frac{p(s)(s - z_k)}{q(s)} = \frac{p(s)}{\frac{q(s) - q(z_k)}{s - z_k}} \to \frac{p(z_k)}{q'(z_k)}$$

Für die Koeffizienten $c_1, c_2, \ldots, c_n$ erhalten wir so die praktische Formel

$$\boxed{c_k = \frac{p(z_k)}{q'(z_k)}.}$$

Ausgeschrieben erhalten wir die ersehnte Partialbruchzerlegung:

$$\frac{p(s)}{q(s)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{p(z_k)}{q'(z_k)} \frac{1}{s - z_k}, \quad \text{speziell} \quad \frac{1}{q(s)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q'(z_k)} \frac{1}{s - z_k}$$

☺ Wir nutzen diesen Trick für Residuen einfacher Polstellen (F4B)

Partialbruchzerlegung und Residuen

Allgemeiner Fall: Wir sammeln mehrfache Faktoren von q gemäß

$$q(s) = a_n(s-z_1)^{n_1}(s-z_2)^{n_2}\cdots(s-z_\ell)^{n_\ell}$$

mit Nullstellen $z_i \neq z_j$ für $i \neq j$ und Vielfachheiten $n_1, n_2, \ldots, n_\ell \geq 1$.
(Für den Gesamtgrad gilt weiterhin $\deg(q) = n = n_1 + n_2 + \ldots + n_\ell$.)
Dann hat die Partialbruchzerlegung von p/q die allgemeine Form:

$$\boxed{\frac{p(s)}{q(s)} = \sum_{k=1}^{\ell}\sum_{\nu=1}^{n_k}\frac{c_{k,\nu}}{(s-z_k)^\nu}}$$

☺ Für jedes $k = 1, \ldots, \ell$ ist die Summe $H_k(s) = \sum_{\nu=1}^{n_k} c_{k,\nu}(s-z_k)^{-\nu}$ der **Hauptteil** der Laurent–Reihe von p/q im Entwicklungspunkt z_k, und entsprechend ist $N_k(s) = \sum_{j\neq k} H_j(s)$ dann ihr **Nebenteil** (F2o).

(Für die reelle Zerlegung fasst man komplex konjugierte zusammen.)

Wir wollen wie zuvor die Koeffizienten $c_{k,\nu} \in \mathbb{C}$ bestimmen. Auch hier ist die primitive Methode des Koeffizientenvergleichs immer möglich, doch das lineare Gleichungssystem ist bei höherem Grad meist umständlich. Das folgende Verfahren ist etwas raffinierter und meist effizienter.

Partialbruchzerlegung und Residuen

Multiplikation mit dem k-ten Faktor $(s-z_k)^{n_k}$ ergibt:

$$\begin{aligned}\frac{p(s)(s-z_k)^{n_k}}{q(s)} &= c_{k,1}(s-z_k)^{n_k-1} + c_{k,2}(s-z_k)^{n_k-2} + \ldots + c_{k,n_k} \\ &\quad + N_k(s)(s-z_k)^{n_k}\end{aligned}$$

Der Nenner $r_k(s) = q(s)/(s-z_k)^{n_k}$ entsteht aus $q(s)$ durch Kürzung.
Die Koeffizienten $c_{k,1}, c_{k,2}, \ldots, c_{k,n_k}$ erhalten wir wieder durch Ableiten:

$$\boxed{c_{k,\nu} = \lim_{s\to z_k}\frac{1}{(n_k-\nu)!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right)^{n_k-\nu}\left[\frac{p(s)}{q(s)/(s-z_k)^{n_k}}\right].}$$

☺ Speziell für eine einfache Polstelle ($n_k = 1$) gilt wie zuvor:

$$c_k = c_{k,1} = \frac{q(z_k)}{r_k(z_k)} = \frac{p(z_k)}{q'(z_k)}$$

☺ Wir nutzen diesen Trick für Residuen mehrfacher Polstellen (F4c):

$$\operatorname*{res}_{z_0}(f) = \lim_{z\to z_0}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{n-1}\Big[(z-z_0)^n f(z)\Big].$$

☺ Der Residuensatz ist allgemeiner; über rationale Funktionen hinaus gilt er sogar für alle holomorphen Funktionen mit isolierten Polstellen.

Umkehrformel zur Laplace–Transformation

Satz L3A: Umkehrformel zur Laplace–Transformation

Zu $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ betrachten wir die Laplace–Transformierte:

$$f \circ\!\!-\!\!\bullet\, F \quad \text{mit} \quad F(s) = \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{Re}(s) > \sigma$$

Aus $F : \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>\sigma} \to \mathbb{C}$ lässt sich f rekonstruieren, denn es gilt:

$$F \bullet\!\!-\!\!\circ\, f \quad \text{mit} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{(s+\mathrm{i}x)t}\, F(s+\mathrm{i}x)\,\mathrm{d}x$$

für $\mathrm{Re}(s) > \sigma$ und fast alle $t \geq 0$, und immer wo f stetig diff'bar ist. Insbesondere ist $\mathscr{L}$ injektiv, das heißt, aus $\mathscr{L}(f) = \mathscr{L}(g)$ folgt $f = g$. (Wir identifizieren Funktionen, die nur auf einer Nullmenge differieren.)

Residuen: Hat F in $\mathbb{C}$ nur isolierte Singularitäten und klingt ab, so gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{(s+\mathrm{i}x)t}\, F(s+\mathrm{i}x)\,\mathrm{d}x = \sum_{z_0 \in \mathbb{C}} \operatorname*{res}_{z=z_0} \left[\mathrm{e}^{zt} F(z)\right].$$

Umkehrformel zur Laplace–Transformation

☺ Die Umkehrformel zeigt, dass die Rücktransformation prinzipiell immer möglich ist. Zur praktischen Berechnung ist es meist am effizientesten, die $\mathscr{L}$–Tabelle rückwärts zu lesen.

Das Fourier–Integral dieser Umkehrformel ist recht raffiniert und bedarf einiger Erläuterungen. (Eine Diskussion findet sich in Doetschs Einführung §24, §27.) Die Umkehrformel gilt in allen Punkten $t \geq 0$, in denen f stetig diff'bar ist. Sie gilt auch in Sprungstellen, in denen f links- und rechtsseitige Ableitungen besitzt, wenn wir gemäß $f(t) = \frac{1}{2}\left[f(t+) + f(t-)\right]$ sprungnormieren.

Ganz ohne Voraussetzungen gilt sie natürlich nicht: Wir können f auf einer Nullmenge abändern, ohne die Integrale zu verändern. Zur Vereinfachung betrachten wir Funktionen als gleich, wenn sie sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden; dann gilt die Umkehrformel für fast alle $t \geq 0$.

Die Laplace–Transformierte $F : \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>\sigma} \to \mathbb{C}$ ist holomorph. Eventuelle Singularitäten der Fortsetzung $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ können daher nur für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) \leq \sigma$ vorliegen. Das Integral

$$f(t) = \frac{\mathrm{e}^{st}}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\, F(s+\mathrm{i}x)\,\mathrm{d}x = \sum_{z_0 \in \mathbb{C}} \operatorname*{res}_{z=z_0} \left[\mathrm{e}^{zt} F(z)\right]$$

können wir bereits als Fourier–Rücktransformation behandeln. Dank Residuensatz sind wir sogar in der glücklichen Lage, einfache Integrale dieser Bauart explizit ausrechnen zu können.

Wir nehmen an, dass F auf ganz $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden kann bis auf isolierte Singularitäten. Als Integrationsweg wählen wir dann das Segment von $s - \mathrm{i}r$ nach $s + \mathrm{i}r$ gefolgt von dem linken Halbkreis von $s + \mathrm{i}r$ zurück nach $s - \mathrm{i}r$. Wenn das Wegintegral von F über solche Halbkreise für $r \to \infty$ verschwindet, dann gilt die genannte Residuenformel.

Beispiel zur Umkehrformel

Aufgabe: Mittels Umkehrformel bestimme man die Urbildfunktion f zu

$$F(s) = \frac{1}{s-a} \quad \text{für} \quad \mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(a),\ a \in \mathbb{C}.$$

Lösung: Laut $\mathscr{L}$–Umkehrformel berechnen wir das Integral

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{(s+\mathrm{i}x)t}\, F(s+\mathrm{i}x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{(s+\mathrm{i}x)t}}{s-a+\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x.$$

Wir wenden den Residuensatz an. Einzige Polstelle ist $z_0 = \mathrm{i}(s-a)$:

$$\begin{aligned}\int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{(s+\mathrm{i}x)t}}{s-a+\mathrm{i}x} &= 2\pi\mathrm{i} \operatorname*{res}_{z=z_0}\Big[\frac{\mathrm{e}^{(s+\mathrm{i}z)t}}{s-a+\mathrm{i}z}\Big] \\ &= 2\pi\mathrm{i} \lim_{z\to z_0}\Big[(z-z_0)\frac{\mathrm{e}^{(s+\mathrm{i}z)t}}{\mathrm{i}(z-z_0)}\Big] = 2\pi\,\mathrm{e}^{at}.\end{aligned}$$

Wir erhalten also $f(t) = \mathrm{e}^{at}$. Die Probe ist leicht: $\mathscr{L}(f) = F$.

☺ Es lebe der Residuensatz! Noch einfacher geht's mit $\mathscr{L}$–Tabelle! Diese erübrigt häufig die explizite und mühsame Integralberechnung.

Beispiel zur Umkehrformel

Aufgabe: Bestimmen Sie die Urbildfunktion f zu

$$F(s) = \frac{1}{1+s^3} \quad \text{für} \quad s > -1.$$

Lösung: (1) Wir wenden direkt den Residuensatz an:

$$f(t) = \sum_{z_0\in\mathbb{C}} \operatorname*{res}_{z=z_0}\big[\mathrm{e}^{zt}F(z)\big]$$

Die Polstellen $z_1 = -1$ und $z_{2,3} = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi/3} = \frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ sind einfach.
Die Residuen rechnen wir geduldig aus:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{3} \frac{\mathrm{e}^{z_k t}}{3z_k^2} = \frac{1}{3}\Big[\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{t/2}\cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}t\Big) + \sqrt{3}\,\mathrm{e}^{t/2}\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}t\Big)\Big]$$

(2) Alternativ in Partialbrüche zerlegen und $\mathscr{L}$–Tabelle nachschlagen:

$$\frac{1}{1+s^3} = \frac{1}{3}\Big[\frac{1}{s+1} - \frac{(1-\mathrm{i}\sqrt{3})/2}{s-(1-\mathrm{i}\sqrt{3})/2} - \frac{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})/2}{s-(1+\mathrm{i}\sqrt{3})/2}\Big] \bullet\!\!-\!\!\circ\ f(t)$$

Faltung und Integralregel

Die Rücktransformation führt gelegentlich zu folgendem Problem:
$F(s)$ und $G(s)$ finden wir in der Tabelle, nicht aber $H(s) = F(s)\,G(s)$.
Die Anwendbarkeit der $\mathscr{L}$–Tabelle erweitern wir dann durch Faltung:

Satz L3B: Faltungsregel der Laplace–Transformation

Zu den Funktionen $f, g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ definieren wir ihre Faltung durch

$$(f * g)(t) := \int_{u=0}^{t} f(u)\, g(t-u)\,\mathrm{d}u = \int_{v=0}^{t} f(t-v)\, g(v)\,\mathrm{d}v.$$

Die $\mathscr{L}$–Transformation überführt die Faltung ins punktweise Produkt:

$$(f * g)(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad (F \cdot G)(s)$$

Speziell für $g(t) = 1 \circ\!\!-\!\!\bullet 1/s = G(s)$ erhalten wir die Integralregel:

$$\int_{u=0}^{t} f(u)\,\mathrm{d}u \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s)/s$$

Faltung und Integralregel

Aufgabe: Rechnen Sie die Faltungsregel nach!

Nachrechnen: Zur Vereinfachung setzen wir f, g fort zu $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f(t) = g(t) = 0$ für $t < 0$. Dank Fubini und Substitution $v = t - u$ gilt:

$$\begin{aligned}
(f * g)(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad H(s) &= \int_{t\in\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-st} \cdot (f * g)(t)\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Def}}{=} \int_{t\in\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-st} \cdot \left[\int_{u\in\mathbb{R}} f(u)\, g(t-u)\,\mathrm{d}u\right] \mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Lin}}{=} \int_{t\in\mathbb{R}} \int_{u\in\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-st} f(u)\, g(t-u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Fub}}{=} \int_{u\in\mathbb{R}} \int_{t\in\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-st} f(u)\, g(t-u)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u \\
&\overset{\text{Subs}}{=} \int_{u\in\mathbb{R}} \int_{v\in\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-s(u+v)} f(u)\, g(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u \\
&\overset{\text{Lin}}{=} \int_{u\in\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-su} f(u)\,\mathrm{d}u \cdot \int_{v\in\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-sv} g(v)\,\mathrm{d}v \\
&\overset{\text{Def}}{=} F(s) \cdot G(s)
\end{aligned}$$

Beispiel zu Faltung und Integralregel

Aufgabe: Nutzen Sie das Faltungsintegral zur Rücktransformation von

$$H(s) = \frac{s}{(s^2+\omega^2)^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad h(t) = ?$$

Lösung: Wir zerlegen H in ein Produkt bekannter Funktionen:

$$H(s) = \frac{s}{(s^2+\omega^2)^2} = \frac{s}{s^2+\omega^2} \cdot \frac{1}{s^2+\omega^2}$$

Die beiden Faktoren können wir leicht rücktransformieren:

$$F(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \cos(\omega t) \quad = f(t)$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2+\omega^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \frac{1}{\omega}\sin(\omega t) = g(t)$$

$$H(s) = (F \cdot G)(s) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad (f * g)(t) = h(t)$$

☺ Die $\mathscr{L}$–Tabelle erleichtert uns den Großteil der Arbeit.

Beispiel zu Faltung und Integralregel

Es bleibt schließlich nur noch, die Faltung $h = f * g$ zu berechnen:

$$h(t) = (f*g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \frac{1}{\omega}\int_0^t \cos(\omega t - \omega\tau)\, \sin(\omega\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

Dank Additionstheorem $2\cos(\alpha)\sin(\beta) = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$ folgt:

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\omega}\int_0^t \sin(\omega t) - \sin(\omega t - 2\omega\tau)\, \mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{2\omega}\, t\sin(\omega t) - \frac{1}{4\omega^2}\Big[\cos(\omega t - 2\omega\tau)\Big]_{\tau=0}^{t} \\ &= \frac{1}{2\omega}\, t\sin(\omega t) \end{aligned}$$

Wir machen die Probe! Hier hilft die letzte Regel unserer $\mathscr{L}$–Tabelle:

$$t\sin(\omega t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right] = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$$

☺ Das ist Satz L1B. Wer's sofort sieht, kann's auch so berechnen.

Lineare Differentialgleichungen

Zu lösen sei eine lineare Differentialgleichung mit Anfangswerten:

$$\boxed{\begin{aligned} &y^{(n)}(t) + a_{n-1}\, y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1\, y'(t) + a_0\, y(t) = b(t), \\ &y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0', \quad \ldots \quad , y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}. \end{aligned}}$$

Gegeben sind hierzu konstante Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$.
Die rechte Seite $b : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ sei stetig und $\mathscr{L} : b(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, B(s)$.
Das **charakteristische Polynom** unserer Gleichung ist

$$q(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0.$$

Die Differentialgleichung schreiben wir damit kurz $q(\partial_t)\, y(t) = b(t)$.
Laplace transformiert dies mit AW zu folgender **Hilfsgleichung**:

$$q(s)\, Y(s) = B(s) + \begin{cases} + y_0 & (s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} + \ldots + a_2 s + a_1) \\ + y_0' & (s^{n-2} + a_{n-1} s^{n-3} + \ldots + a_2) \\ + \ldots & \\ + y_0^{(n-2)} & (s \qquad + a_{n-1}) \\ + y_0^{(n-1)} & \end{cases}$$

Greensche Fundamentallösung

Aufgabe: Lösen Sie den homogenen Fall ($b = 0$) und zwar speziell:

$$\boxed{\begin{aligned} &u^{(n)}(t) + a_{n-1}\, u^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1\, u'(t) + a_0\, u(t) = 0, \\ &u(0) = u'(0) = \ldots = u^{(n-2)}(0) = 0 \quad \text{und} \quad u^{(n-1)}(0) = 1. \end{aligned}}$$

Lösung: Laplace transformiert dies zu $q(s)\, U(s) = 1$, also $U(s) = 1/q(s)$.
Zur Rücktransformation $U(s) \bullet\!\!-\!\!\circ\, u(t)$ zerlegen wir $1/q(s)$ wie oben:

$$u(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q'(z_k)}\, \mathrm{e}^{z_k t} \quad \text{im einfachen Fall bzw. allgemein:}$$

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\ell} \left[c_{k,1} + c_{k,2}\, \frac{t}{1!} + c_{k,3}\, \frac{t^2}{2!} + \ldots + c_{k,n_k}\, \frac{t^{n_k - 1}}{(n_k - 1)!} \right] \mathrm{e}^{z_k t}$$

Die Koeffizienten $c_{k,\nu}$ der Partialbruchzerlegung finden wir wie L205.
Diese Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt die **Greensche Fundamentallösung** unserer homogenen linearen Differentialgleichung $q(\partial_t)\, u(t) = 0$.
Wir nutzen sie in Kapitel N zur Greenschen Lösungsformel N2F.

Homogene lineare Differentialgleichungen

Wir lösen nun die homogene Gleichung mit beliebigen Anfangswerten:

$$\begin{aligned} &y^{(n)}(t) + a_{n-1}\, y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1\, y'(t) + a_0\, y(t) = 0, \\ &y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0, \quad \ldots \quad , y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Diese könnten wir wie zuvor $\mathscr{L}$–transformieren und in Partialbrüche zerlegen. Es geht aber noch einfacher: Dank der Fundamentallösung $u(t)$ können wir die gesuchte Lösung nämlich sofort hinschreiben:

$$\begin{aligned} y(t) = \quad & y_0 \quad \left[u^{(n-1)}(t) + a_{n-1}u^{(n-2)}(t) + \ldots + a_2u'(t) \ + a_1u(t)\right] \\ & + y'_0 \quad \left[u^{(n-2)}(t) + a_{n-1}u^{(n-3)}(t) + \ldots + a_2u(t)\right] \\ & + \ldots \\ & + y_0^{(n-2)} \left[u'(t) \qquad + a_{n-1}u(t)\right] \\ & + y_0^{(n-1)}\, u(t) \end{aligned}$$

Aufgabe: Machen Sie die Probe! Lösen $u, u', \ldots, u^{(n-1)}$ die DG? Ist jede Zeile eine Lösung der DG? Mit welchen Anfangswerten?

Inhomogene lineare Differentialgleichungen

Wir nutzen weiter unsere Fundamentallösung $u(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, U(s) = 1/q(s)$.
Aufgabe: Lösen Sie schließlich die inhomogene Differentialgleichung

$$\begin{aligned} &y^{(n)}(t) + a_{n-1}\, y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1\, y'(t) + a_0\, y(t) = b(t), \\ &y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-2)}(0) = y^{(n-1)}(0) = 0 \end{aligned}$$

mit verschwindenden Anfangswerten. **Lösung:** Laplace transformiert zu

$$q(s)\, Y(s) = B(s), \quad \text{also} \quad Y(s) = \frac{1}{q(s)}\, B(s) = U(s)\, B(s).$$

Dank Faltungssatz L3B erhalten wir die Rücktransformation:

$$Y(s) \bullet\!\!-\!\!\circ\, y(t) = (u * b)(t) = \int_{\tau=0}^{t} u(t-\tau)\, b(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

☺ Dies ist die Greensche Lösungsformel N2F. Kapitel N diskutiert Differentialgleichungen genauer und gibt zahlreiche Rechenbeispiele.

☺ Steht die Lösungsformel erst einmal da, so können wir sie auch ohne $\mathscr{L}$–Transformation direkt anwenden: Wir müssen uns lediglich die Fundamentallösung $u(t)$ beschaffen. Rechnen Sie's nach! N247

Die Laplace–Transformation

Die **Laplace–Transformierte** von $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(s) := \mathscr{L}\big(f\big)(s) = \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Die **Konvergenzabszisse** ist $\sigma := \inf\{\, s \in \mathbb{R} \mid F(s) \text{ konvergiert} \,\}$.
Das Integral konvergiert für alle $s > \sigma$ und divergiert für alle $s < \sigma$.
Es definiert eine holomorphe Funktion $F : \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>\sigma} \to \mathbb{C}$. Umgekehrt gilt

$$F(s) \bullet\!\!-\!\!\circ\, f(t) = \mathscr{L}^{-1}(F)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{(s+\mathrm{i}x)t}\, F(s+\mathrm{i}x)\,\mathrm{d}x$$

für jedes $s > \sigma$ und fast alle $t \geq 0$, und immer wo f stetig diff'bar ist.
Insbesondere ist $\mathscr{L}$ injektiv, das heißt, aus $\mathscr{L}(f) = \mathscr{L}(g)$ folgt $f = g$.
(Wir identifizieren Funktionen, die nur auf einer Nullmenge differieren.)

Residuen: Hat F in $\mathbb{C}$ nur isolierte Singularitäten und klingt ab, so gilt

$$\mathscr{L}^{-1}(F)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{(s+\mathrm{i}x)t}\, F(s+\mathrm{i}x)\,\mathrm{d}x = \sum_{z_0 \in \mathbb{C}} \operatorname*{res}_{z=z_0} \big[\mathrm{e}^{zt} F(z)\big].$$

Unsere kleine $\mathscr{L}$–Tabelle: Vokabeln und Grammatik

$f(t)_{\,t\geq 0}$	$F(s)_{\,\mathrm{Re}(s)>\sigma}$
1	$\frac{1}{s}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$t^n\,\mathrm{e}^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$

$f(t)_{\,t\geq 0}$	$F(s) = \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$
$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$\mathrm{e}^{at} f(t)$	$F(s-a)$
$f(at),\ a > 0$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
$f(t-a)u(t-a)$	$\mathrm{e}^{-as} F(s)$

Anwendung auf Differentialgleichungen

Laplace–Transformation kann lineare Differentialgleichungen lösen:

Differentialgleichung für y, linear, konst. Koeffizienten, mit Anfangswerten in 0	$\xRightarrow[\text{Transformation}]{\mathscr{L}: y \mapsto Y}$	algebraische Gleichung für Y als Hilfsgleichung inklusive Anfangswerten
Lösung $\Downarrow$ $\Uparrow$ Probe	Integrale der $\mathscr{L}$–Tabelle	Probe $\Uparrow$ $\Downarrow$ Lösung
Lösung der DG in y **— analytisch —**	$\xLeftarrow[\mathscr{L}^{-1}]{\text{Rücktransformation}}$	Lösung der HG in Y **— algebraisch —**

Anstatt das Anfangswertproblem im Original direkt zu lösen, machen wir den gezeigten Umweg über den Bildraum; das ist manchmal leichter.

☺ Die Methode der Laplace–Transformation ist dann effizient, wenn Sie jeden der drei Schritte effizient ausführen können.

☺ Ausführliche $\mathscr{L}$–Tabellen finden Sie in Lehrbüchern, Formelsammlungen und Computer-Algebra-Systemen.

☺ Zudem nutzen wir die obigen Rechenregeln für $\mathscr{L}$ und $\mathscr{L}^{-1}$, sowie Basisalgorithmen wie Partialbruchzerlegung (PBZ), etc.

Zusammenfassung und Verständnisfragen

Aufgabe: Begründen Sie durch ein Ergebnis Ihrer Vorlesung oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel aus Ihrem Fundus:

(1) Jede Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ ist $\mathscr{L}$–transformierbar.
(2) Welche Bedingungen garantieren $\mathscr{L}$–Transformierbarkeit?
(3) Ist jede $\mathscr{L}$–Transformierte $F : \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>\sigma} \to \mathbb{C}$ holomorph? Warum?
(4) Lässt sich jede $\mathscr{L}$–Transformierte F holomorph auf $\mathbb{C}$ fortsetzen?
(5) Ist die Transformation $f \circ\!\!-\!\!\bullet\, F = \mathscr{L}(f)$ linear? Ist sie injektiv?
(6) Lässt sich F zu f rücktransformieren? Wie? Inwiefern eindeutig?
(7) Ist jede rationale Funktion $F = P/Q$ eine $\mathscr{L}$–Transformierte? Wie?

Lösung: (1) Nein, einfache Gegenbeispiele sind $f(t) = 1/t$ und $f(t) = \exp(t^2)$. L103
(2) Wir fordern, dass f auf jedem endlichen Intervall $[0, r]$ integrierbar ist und höchstens exponentiell wächst gemäß $|f(t)| \leq c\,\mathrm{e}^{\sigma t}$ für alle $t \geq 0$ und Konstanten $c, \sigma \in \mathbb{R}$. L104
(3) Ja, wir ziehen die Ableitung unters Integral (L1B) dank majorisierter Integrierbarkeit (D3E).
(4) Nein, schon für $1 \circ\!\!-\!\!\bullet\, 1/s$ müssen wir mit Polstellen rechnen. (Es gibt noch schlimmeres.)
(5) Ja, die Transformation $f \circ\!\!-\!\!\bullet\, F = \mathscr{L}(f)$ ist linear (L1C). Sie ist im Wesentlichen injektiv:
(6) Die Umkehrformel $F \mapsto f = \mathscr{L}^{-1}(F)$ bestimmt f zumindest fast überall (Satz L3A): Wir können f auf jeder Menge vom Maß 0 beliebig abändern, ohne das Integral $F(s)$ zu beeinflussen. Eindeutigkeit gilt, wenn f stückweise stetig differenzierbar ist und zudem sprungnormiert.
(7) Nein, für $s \to \infty$ muss $F(s) \to 0$ gelten! L104 Für $\deg P < \deg Q$ gelingt's mit PBZ.

Laplace–Integrale und Potenzreihen

Aufgabe: (Erinnerung an die HM2) Wir betrachten die Potenzreihe

$$F(z) = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} f(k)\, z^k \quad \text{mit } z \in \mathbb{C} \text{ und Koeffizienten } f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}.$$

Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert sie? Was passiert für $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$? für $z = \mathrm{e}^{-s}$?

Lösung: Die Reihe konvergiert für $|z| < \rho$ und divergiert für $|z| > \rho$, wobei $\rho = 1/\limsup \sqrt[k]{|f(k)|}$ der Konvergenzradius dieser Reihe ist. Für $x \in \mathbb{R}$ durchläuft $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ den Kreis; wir erhalten eine Fourier–Reihe! In komplexen Polarkoordinaten schreiben wir $z = \mathrm{e}^{-s}$ und erhalten

$$F(s) = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} f(k)\, \mathrm{e}^{-sk} \quad \text{mit} \quad s \in \mathbb{C}.$$

Diese Reihe konvergiert für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > -\ln \rho$ und divergiert für $\mathrm{Re}(s) < -\ln \rho$: Der Konvergenzradius wird zur Konvergenzabszisse.

Die Laplace–Transformation ersetzt diese Summe durch das Integral

$$F(s) = \int_{t=0}^{\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-st}\, \mathrm{d}t \quad \text{mit} \quad s \in \mathbb{C}.$$

☺ Daher verhalten sich Laplace–Integrale und Potenzreihen ähnlich, insbesondere bei Konvergenzverhalten und Holomorphie. (Satz L1B)

Vergleich von Laplace und Fourier

Aufgabe: Für $f \circ\!\!-\!\!\bullet F$ ist $\widehat{f}(\omega) = F(\mathrm{i}\omega)/\sqrt{2\pi}$ die $\mathscr{F}$–Transformierte.

Lösung: Wir setzen $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ für $t < 0$ trivial fort durch $f(t) = 0$. Die Laplace–Transformierte von f ist die Funktion $F : \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>\sigma} \to \mathbb{C}$ mit

$$F(s) = \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\, \mathrm{d}t = \int_{t=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Das ist nur für solche $s \in \mathbb{C}$ definiert, für die das Integral konvergiert. Ist f absolut integrierbar, so konvergiert das Integral für alle $\mathrm{Re}(s) \geq 0$. Für imaginäres $s = \mathrm{i}\omega$ mit $\omega \in \mathbb{R}$ erhalten wir so das Fourier–Integral

$$F(\mathrm{i}\omega) = \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} f(t)\, \mathrm{d}t = \int_{t=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Das entspricht (bis auf Normierung) der Fourier–Transformierten

$$\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad \widehat{f}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} f(t)\, \mathrm{d}t.$$

☺ Laplace beinhaltet Fourier demnach als Spezialfall.

Vergleich von Laplace und Fourier

Aufgabe: Erklären Sie mit Fourier–Theorie die Laplace–Umkehrformel.

Lösung: Physikalische Interpretation: Für $s, \omega \in \mathbb{R}$ ist das Integral

$$F(s + \mathrm{i}\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \cdot \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$$

die Spektralfunktion der gedämpften Zeitfunktion $g(t) = \mathrm{e}^{-st} f(t)$.
Diese Sicht erklärt die Rücktransformation durch die Umkehrformel:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{(s+\mathrm{i}\omega)t}\, F(s + \mathrm{i}\omega)\,\mathrm{d}\omega$$

Das ist genau die Umkehrformel der Fourier–Transformation!
Die Integrale konvergieren für $\mathrm{Re}(s) > \sigma$, und dann gilt Satz K1E:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{(s+\mathrm{i}\omega)t}\, F(s + \mathrm{i}\omega)\,\mathrm{d}\omega = \frac{\mathrm{e}^{st}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\, \widehat{g}(\omega)\,\mathrm{d}\omega = \mathrm{e}^{st} g(t) = f(t)$$

Hier gelten die üblichen Vorsichtsmaßnahmen der Fourier–Theorie:
Die Gleichheit gilt für fast alle $t \geq 0$, und immer wo f stetig diff'bar ist.

Vergleich von Laplace und Fourier

Aufgabe: Lässt sich jede Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ fourier–transformieren? und laplace–transformieren? Warum ist Letzteres allgemeiner?

Lösung: Zur Konvergenz des Fourier–Integrals setzen wir f als absolut integrierbar voraus. Für den Cauchy–Hauptwert genügt etwas weniger, doch für gute, robuste Eigenschaften benötigen wir $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$.

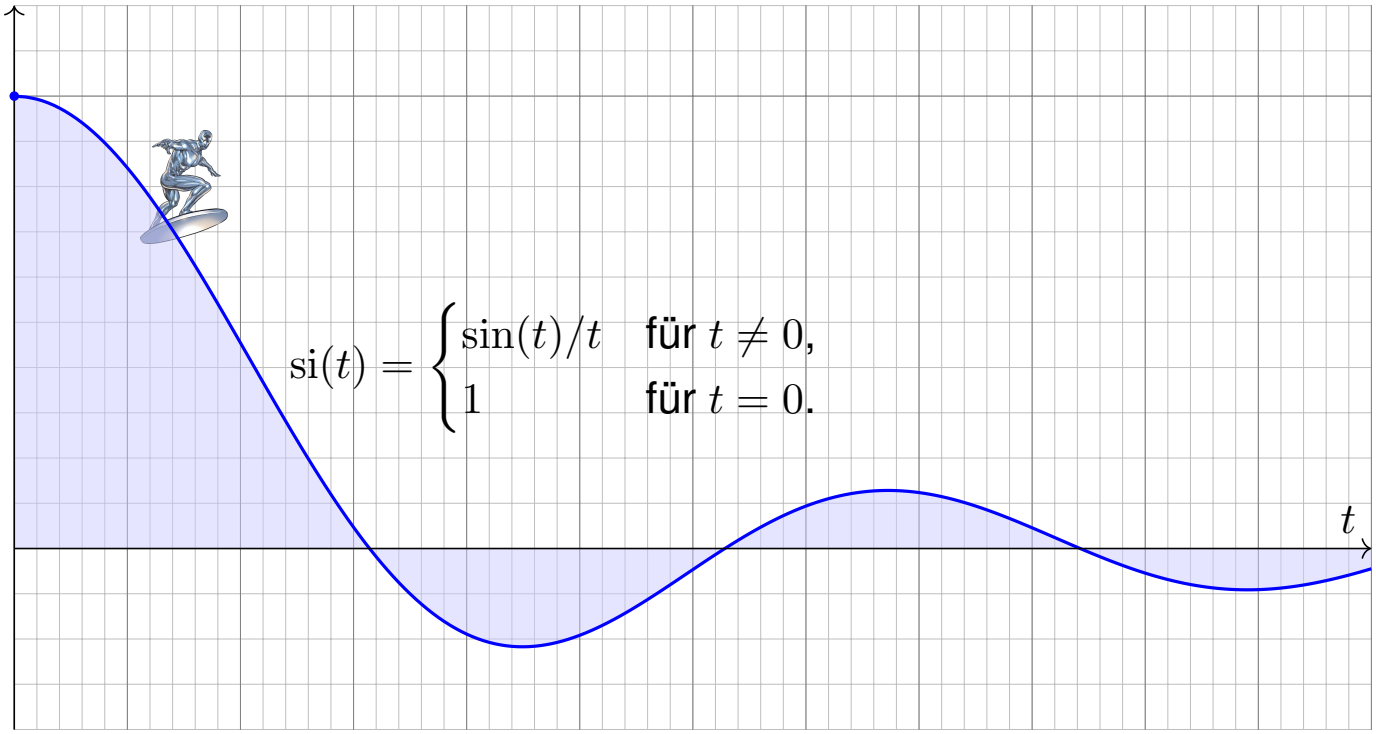
Dies trifft jedoch für viele einfache und geläufige Funktionen gar nicht zu: $f(t) = 1$, $f(t) = \sin(t)$ oder Polynome $f(t) = \sum a_k t^k$ erfüllen dies nicht! Diese Funktionen sind daher zunächst nicht Fourier–transformierbar.

☺ Beim Laplace–Integral ist die Lage von Anfang an spürbar besser: Für hinreichend großes s klingt der Integrand $\mathrm{e}^{-st} f(t)$ schnell genug ab. Genauer: Für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > \sigma$ konvergiert das Laplace–Integral. Wir setzen hierzu voraus, dass $f(t)$ höchstens exponentiell wächst.

So ist die Laplace–Transformierte $F(s)$ nicht nur für reelle Parameter $s \in \mathbb{R}_{>\sigma}$ definiert, sondern für alle komplexen Parameter $s \in \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>\sigma}$. Die Funktion $F : \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>\sigma} \to \mathbb{C}$ ist sogar holomorph! (Satz L1B)

☺ Damit stehen uns die mächtigen Werkzeuge holomorpher Funktionen zur Verfügung, insbesondere Laurent–Reihen und der Residuensatz.

Die Laplace–Transformierte der Spaltfunktion



Die Spaltfunktion si und das Dirichlet–Integral $\int_{t=0}^{\infty} \mathrm{si}(t)\,\mathrm{d}t$ begegnen uns häufig in der Physik, der Signalverarbeitung oder der Fourier–Analyse. Wir sind mutig und wollen zu si die Laplace–Transformierte berechnen.

Die Laplace–Transformierte der Spaltfunktion

Wir untersuchen erneut die **Spaltfunktion** $\mathrm{si} : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} : t \mapsto \sin(t)/t$, wie immer stetig fortgesetzt durch $\mathrm{si}(0) = 1$. Die Funktion ist elementar, nicht jedoch ihre Stammfunktion, der **Integralsinus** $\mathrm{Si}(t) = \int_{\tau=0}^{t} \mathrm{si}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$.

Daher konnten wir das Dirichlet–Integral $\int_{t=0}^{\infty} \mathrm{si}(t)\,\mathrm{d}t$ mit elementaren Integrationsmethoden (aus der HM2) zunächst nicht ausrechnen. B149
Dies gelang uns trickreich erst später mit dem **Residuensatz**. F115 F425

Solch knifflige Integrale treten in Natur- und Ingenieurwissenschaften häufig auf. Sie sind daher ein guter Test für unsere Rechenmethoden. Erfreulicherweise stellt sich heraus, dass wir dieses schwierige Integral ganz wunderbar mit der Laplace–Transformation berechnen können!

$$f(t) = \frac{\sin(t)}{t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s) = \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\,\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

Der Dämpfungsfaktor e^{-st} hat hier zwei nützliche Eigenschaften: Erstens garantiert er absolute Konvergenz für $s > 0$, so wie erwartet. Zweitens beschert uns die partielle Ableitung ∂_s den hilfreichen Faktor t. Für $s > 0$ können wir die Integration damit entscheidend vereinfachen.

Die Laplace–Transformierte der Spaltfunktion

Aufgabe: Berechnen Sie für $s \in \mathbb{R}_{>0}$ die Laplace–Transformierte

$$F(s) = \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} \, \frac{\sin(t)}{t} \, \mathrm{d}t.$$

Anleitung: (1) Zeigen Sie $|F(s)| \leq 1/s$. Für $s \nearrow \infty$ folgt also $F(s) \to 0$.
(2) Berechnen Sie die Ableitung $F'(s)$ und damit $F(s)$ für alle $s \in \mathbb{R}_{>0}$. (Nehmen Sie dazu vorläufig an, *dass* Sie die Ableitung unter das Integral ziehen dürfen, und zeigen Sie anschließend, *warum*.)
(3) Angenommen, F ist stetig in $s = 0$, also $F(s) \to F(0)$ für $s \searrow 0$. Folgern Sie unter dieser Annahme den Wert des Integrals

$$F(0) = \int_{t=0}^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} \, \mathrm{d}t.$$

Lösung: (1) Für $s \in \mathbb{R}_{>0}$ nutzen wir die üblichen Abschätzungen:

$$\big|F(s)\big| \;\leq\; \int_{t=0}^{\infty} \left| \mathrm{e}^{-st} \, \frac{\sin(t)}{t} \right| \mathrm{d}t \;\leq\; \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} \, \mathrm{d}t \;=\; \left[\frac{-1}{s} \, \mathrm{e}^{-st} \right]_{t=0}^{\infty} \;=\; \frac{1}{s}$$

Die Laplace–Transformierte der Spaltfunktion

(2) In jedem Punkt $s \in \mathbb{R}_{>0}$ finden wir die Ableitung wie folgt:

$$\begin{aligned}
F'(s) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} \, \frac{\sin(t)}{t} \, \mathrm{d}t && \text{Wir ziehen die Ableitung…} \\
&= \int_{t=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} \left[\mathrm{e}^{-st} \, \frac{\sin(t)}{t} \right] \mathrm{d}t && \text{unter das Integral } \boxed{\text{L414}}\text{…} \\
&= \int_{t=0}^{\infty} -\mathrm{e}^{-st} \sin(t) \, \mathrm{d}t && \text{und vereinfachen!} \\
&= \frac{-1}{s^2 + 1} && \text{dank } \mathscr{L}\text{–Tabelle}
\end{aligned}$$

Daraus folgt $F(s) = c - \arctan(s)$ mit einer Integrationskonstanten $c \in \mathbb{R}$. Für $s \nearrow \infty$ wissen wir aus (1) bereits $F(s) \to 0$. Daraus folgt $c = \pi/2$.
(3) Wir nehmen an, dass F in 0 stetig ist, also $F(s) \nearrow F(0)$ für $s \searrow 0$. Damit erhalten wir $F(0) = \lim_{s \searrow 0} F(s) = \pi/2 - \arctan(0) = \pi/2$.

⚠ Die Stetigkeit von F ist keineswegs selbstverständlich und auch nicht leicht zu beweisen. Zur Vereinfachung haben wir sie in (3) vorausgesetzt.

Die Laplace–Transformierte der Spaltfunktion

Satz L4A: Laplace–Transformation der Spaltfunktion

Die Laplace–Transformation der Spaltfunktion ist

$$\boxed{f(t) = \frac{\sin t}{t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s) = \frac{\pi}{2} - \arctan(s).}$$

Ausführlich bedeutet das: Für jedes $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt die Gleichung

$$F(s) := \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} \frac{\sin(t)}{t} \,\mathrm{d}t \;=\; \frac{\pi}{2} - \arctan(s).$$

☺ Plausibilitätscheck: Die Regel $tf(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F'(s)$ ist hier erfüllt. L201
Nochmal gelingt der Trick nicht: $\sin(t)/t^2$ ist nicht $\mathscr{L}$–transformierbar.

Aufgabe: Gehen Sie die bisherige Rechnung (1–3) kritisch durch:
(4) Warum dürfen wir in (2) die Ableitung unter das Integral ziehen?
(5) Warum gilt in (3) Stetigkeit in $s = 0$, also $F(s) \to F(0)$ für $s \searrow 0$?
(a) Majorisierte Konvergenz? (b) Ausrechnen? (c) Dirichlet–Kriterium?

⚠ Diese Sorgfalt ist nötig, wird aber meist missachtet, siehe D423.

Die Laplace–Transformierte der Spaltfunktion

Lösung: Für alle $s \in \mathbb{R}_{>0}$ haben wir die Gleichung in der vorigen Aufgabe (1–2) nachgrechnet; das gelingt sogar erstaunlich leicht.
(4) Die entscheidende Umformung ist folgende Ableitung:

$$F'(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} \frac{\sin(t)}{t} \,\mathrm{d}t \quad \overset{?}{=} \quad \int_{t=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} \left[\mathrm{e}^{-st} \frac{\sin(t)}{t} \right] \mathrm{d}t$$

☺ Das ist eine Variante des beliebten Feynman–Tricks, siehe D423.

⚠ Diese Umformung gilt nicht immer, wir müssen genau hinschauen!

☺ Zur Ableitung unter dem Integral nutzen wir bequem den Satz D3E.
Für alle $s \geq s_0 > 0$ finden wir eine integrierbare Majorante:

$$\left| \frac{\partial}{\partial s} g(s,t) \right| = \left| \mathrm{e}^{-st} \sin(t) \right| \leq \mathrm{e}^{-st} \leq \mathrm{e}^{-s_0 t} =: h(t)$$

$$\int_{t=0}^{\infty} h(t) \,\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{s_0} \mathrm{e}^{-s_0 t} \right]_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{s_0} < \infty$$

☺ Leistungsstarke Theorie ermöglicht effiziente Berechnung:
Dank Satz D3E dürfen wir die Ableitung ∂_s unter das Integral ziehen.

Die Laplace–Transformierte der Spaltfunktion

(5a) Zur Stetigkeit von F in $s = 0$ benötigen wir folgenden Grenzwert:

$$\lim_{s\searrow 0} \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\,\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t \quad \overset{?}{=} \quad \int_{t=0}^{\infty} \lim_{s\searrow 0} \mathrm{e}^{-st}\,\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

☺ Zur Stetigkeit von Parameterintegralen kennen wir Satz D3D:
Unser Integrand $g(s,t) = \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{si}(t)$ ist stetig in s (und auch in t), ...
☹ aber leider um den Punkt $s = 0$ nicht majorisiert integrierbar über t:
Die kleinste Majorante $h(t) = |\mathrm{si}(t)| = |\sin(t)/t|$ ist nicht integrierbar!

⚠ Der beliebte und bequeme Satz D3D lässt sich hier nicht anwenden.
Es gelingt nicht alles auf Anhieb, auch das ist lehrreich und heilsam.
Das bedeutet noch nicht, dass F unstetig ist. Die Frage bleibt offen.

(5b) Einerseits haben wir für $s \searrow 0$ den Grenzwert $F(s) \nearrow \pi/2$,
denn die Funktion $s \mapsto \pi/2 - \arctan(s)$ ist stetig, auch in $s = 0$.
Andererseits kennen wir das Integral $F(0) = \pi/2$ dank F425.

☺ Diese explizite Rechnung zeigt die Stetigkeit von F im Punkt $s = 0$.
Geht das auch direkt, ohne Residuenkalkül? Ja, das geht auch direkt...

Stetigkeit der Laplace–Transformierten in $s = 0$

(5c) Für $f(t) = \sin(t)/t$ müssen wir etwas tiefer in die Trickkiste greifen:

Satz L4B: Stetigkeit $F(s) \to F(0)$ für $s \searrow 0$

Sei $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ absolut integrierbar über $[0, r]$ für jedes $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.
Für $r \to \infty$ existiere der Grenzwert $\int_{t=0}^{r} f(t)\,\mathrm{d}t \to \int_{t=0}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t =: F(0)$.
Dank Dirichlet–Kriterium B3J konvergiert auch $\int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t =: F(s)$
für alle $s > 0$, und im Grenzwert für $s \searrow 0$ gilt $F(s) \to F(0)$.

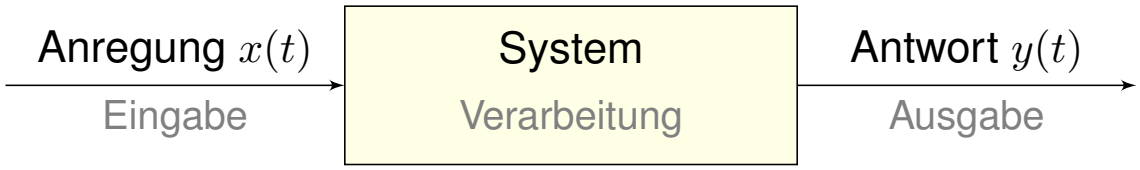
Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Für alle $s, r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt:

$$\begin{aligned} \big|F(0) - F(s)\big| &\overset{\text{Lin}}{=} \left| \int_{t=0}^{r} (1-\mathrm{e}^{-st}) f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{t=r}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{t=r}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \\ &\leq (1-\mathrm{e}^{-sr}) \int_{t=0}^{r} |f(t)|\,\mathrm{d}t + \left| \int_{t=r}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \right| + \left| \int_{t=r}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \end{aligned}$$

Wir wählen $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ so groß, dass die letzten beiden Summanden $\leq \varepsilon/3$ ausfallen. Dann wählen wir $\delta > 0$ so klein, dass für alle $s \in [0, \delta]$ auch der erste Summand $\leq \varepsilon/3$ ausfällt. Somit gilt $|F(0) - F(s)| \leq \varepsilon$. □

Anwendung in der Systemtheorie

Ziel der **Systemtheorie** ist es, komplexe (meist technische) Systeme zu beschreiben, zu analysieren, zu steuern und zu optimieren, etwa in der Kybernetik, Regelungstechnik, Signalverarbeitung, Kommunikation uvm.



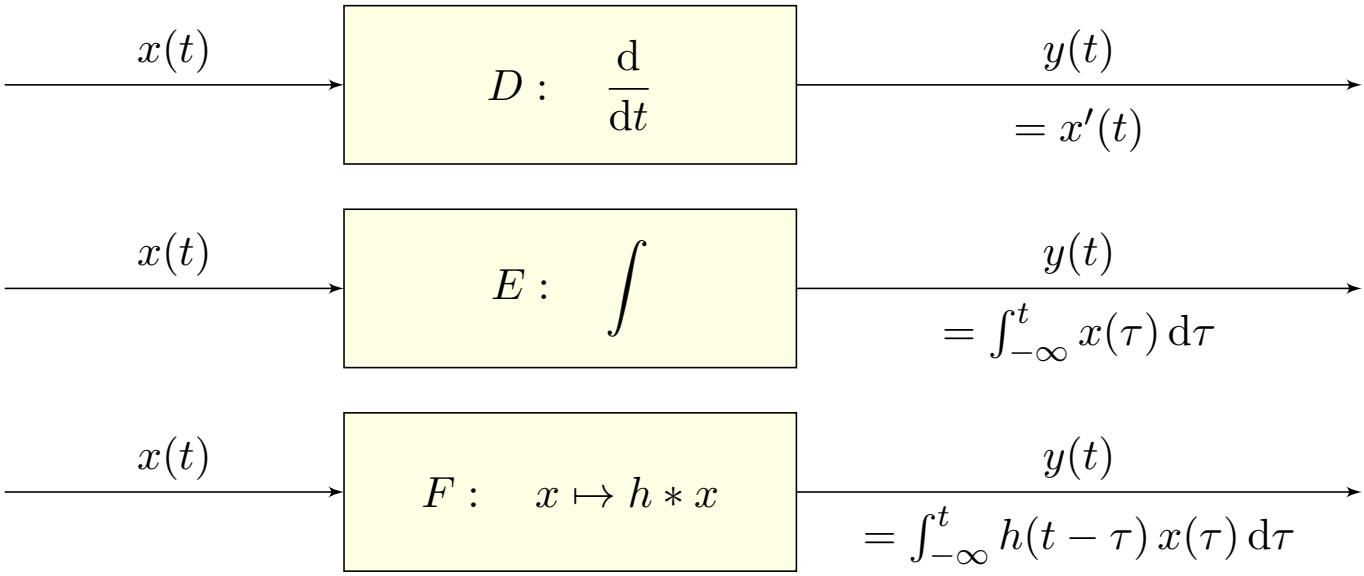
Typische Beispiele sind mechanische Systeme oder elektrische Schaltkreise (aus Widerständen, Kapazitäten, Induktivitäten, etc), allgemein auch chemische, biologische, ... gar soziale Systeme.

Auf jedes Eingangssignal $x(t)$ antwortet das System mit einem bestimmten Ausgangssignal $y(t)$. Das System entspricht somit einer Zuordnung Eingabe $\mapsto$ Ausgabe oder Anregung $\mapsto$ Antwort.

Wir betrachten hierzu reelle oder komplexe Funktionen $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ und schreiben kurz $x(t) \mapsto y(t)$. Den Parameter $t \in \mathbb{R}$ betrachten wir als Zeit. Zum Eingang x möchten wir den Ausgang y berechnen, oder umgekehrt zum gewünschten Ergebnis y die hierzu nötige Aktion x bestimmen.

Anwendung in der Systemtheorie

Einfache Beispiele:



Vereinbarung: Im ersten Falle sei x differenzierbar, im zweiten über $\mathbb{R}_{\leq t}$ absolut integrierbar, im dritten auch h. Es handelt sich um die Faltung $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\,x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$, wenn wir $h(t) = 0$ für $t < 0$ voraussetzen. Mit $h(t) = 1$ für $t \geq 0$ erhalten wir aus dem dritten den zweiten Fall.

Anwendung in der Systemtheorie

Wichtige Eigenschaften für ein solches System $x(t) \mapsto y(t)$ sind:

Linearität: Aus $x_k(t) \mapsto y_k(t)$ folgt $\sum_k c_k x_k(t) \mapsto \sum_k c_k y_k(t)$.

Zeitinvarianz: Aus $x(t) \mapsto y(t)$ folgt $x(t-t_0) \mapsto y(t-t_0)$.

Kausalität: Aus $x(t) = 0$ für $t < t_0$ folgt $y(t) = 0$ für $t < t_0$.

Stabilität: Es gilt $\|y\|_{L^1([0,t])} \le K(t) \cdot \|x\|_{L^1([0,t])}$ mit $K : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$.

Definition L4c: LTI–System

Erfüllt das vorliegende System $x(t) \mapsto y(t)$ Linearität und Zeitinvarianz, so nennen wir es kurz ein LZI–System, geläufiger jedoch auf englisch **linear time invariant system**, kurz ein **LTI–System**.

☺ LTI–Systeme gelten als relativ einfach und leicht zu lösen – im Gegensatz zu nicht-linearen und zeitabhängigen Systemen!

Aufgabe: Welche dieser Eigenschaften haben die vorigen Beispiele?

Lösung: (1) Linear, zeitinvariant, kausal, nicht stabil für $x(t) = \sin(\omega t)$.
(2,3) Linear und zeitinvariant sind klar, kausal dank $h(t) = 0$ für $t < 0$, stabil gdw $K(t) = \|h\|_{L^1([0,t])} = \int_0^t |h(\tau)| \, \mathrm{d}\tau < \infty$ für alle $t \ge 0$.

Anwendung in der Systemtheorie

Aufgrund der Kausalität betrachten wir meist nur Funktionen der Form $x, y, h : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{C}$ und setzen diese für $t < 0$ trivial fort durch $t \mapsto 0$.
Das System beschreiben wir dann durch das Faltungsprodukt

$$x(t) \mapsto y(t) = (h * x)(t) := \int_{\tau=0}^{t} h(t-\tau)\, x(\tau) \, \mathrm{d}\tau.$$

Laplace transformiert die Faltung zum punktweisen Produkt: L305

$$X(s) \mapsto Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$

Fourier transformiert dies ebenso, wobei wir $\hat{x}(\omega) = X(\mathrm{i}\omega)$ betrachten:

$$X(\mathrm{i}\omega) \mapsto Y(\mathrm{i}\omega) = H(\mathrm{i}\omega) \cdot X(\mathrm{i}\omega)$$

Bezeichnungen: Wir nennen $h(t)$ die **Impulsantwort** des Systems, $H(s)$ die **Übertragungsfunktion** und $H(\mathrm{i}\omega)$ die **Frequenzantwort**.

☺ Mit diesen mathematischen Werkzeugen kann man nun technische oder allgemeine Systeme beschreiben, analysieren, steuern, optimieren. Mehr hierzu lernen Sie zum Beispiel in der Regelungstechnik. L429 N241

Was ist ein Dirac–Impuls?

Wir betrachten einen kurzen Impuls der Länge $\varepsilon > 0$ und Stärke $1/\varepsilon$:

$$\delta_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \mathbf{I}_{[0,\varepsilon[}(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{für } 0 \le t < \varepsilon, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Breite ε und Höhe $1/\varepsilon$ sind so eingerichtet, dass der Impuls immer dieselbe Gesamtstärke $\int_{\mathbb{R}} \delta_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t = 1$ hat. Für $\varepsilon \to 0$ erhalten wir so eine beliebig kurze, schlagartige Übertragung des Einheitsimpulses. Bei einem mechanischen System denken wir an einen Hammerschlag.

Aufgabe: Konvergiert δ_ε punktweise? Gegen welche Funktion f? Erfüllt auch die Grenzfunktion noch die Bedingung $\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$?

Lösung: Für $\varepsilon \to 0$ konvergiert δ_ε punktweise gegen die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}} \quad \text{mit} \quad f(t) = \begin{cases} \infty & \text{für } t = 0, \\ 0 & \text{für } t \neq 0. \end{cases}$$

⚠ Es gilt $\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$: „Die Masse verschwindet nach Unendlich.“ Anschaulich will man sowohl $\delta_\varepsilon \to \delta_0$ als auch $\int_{\mathbb{R}} \delta_0(t)\,\mathrm{d}t = 1$ verwenden. Hierzu sind *punktweise Konvergenz* und *Dirac–Funktion* f ungeeignet! Die korrekte Behandlung gelingt erst durch **Distributionen** (Kapitel D).

Was ist die Impulsantwort?

Wir betrachten wie zuvor ein System $x(t) \mapsto y(t)$ von der Form

$$\boxed{x(t) \mapsto y(t) = (h * x)(t) := \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\,x(\tau)\,\mathrm{d}\tau.}$$

Zur Vereinfachung denken wir an eine stetige Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Aufgabe: Berechnen Sie zur Anregung $\delta_\varepsilon(t)$ die Antwort $h_\varepsilon(t)$ und bestimmen Sie den (punktweisen) Grenzwert für $\varepsilon \to 0$.

Lösung: Wir setzen die Definition ein und rechnen es geduldig aus:

$$\delta_\varepsilon(t) \quad \mapsto \quad h_\varepsilon(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\,\delta_\varepsilon(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau=0}^{\varepsilon} h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \to h(t)$$

HDI (B1I): Der Grenzübergang für $\varepsilon \to 0$ gelingt leicht dank Stetigkeit. Allgemein nutzen wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung (B4B).

Allgemein könnte die Funktion h zum Beispiel Sprungstellen haben, dann gilt der genannte Grenzwert nicht mehr ohne Weiteres. Für jede (lokal) integrierbare Funktion h gilt der Grenzwert jedoch für fast alle t.

Impulsantwort und Superposition

Für $\varepsilon \to 0$ interpretieren wir $\delta_\varepsilon \to \delta_0$ als beliebig kurzen Einheitsimpuls.
Die Antwort des Systems ist $h_\varepsilon(t) \to h(t)$, wie oben ausgerechnet.
Daher nennt man $h(t)$ auch die **Impulsantwort** des Systems.

☺ Allein aus $h(t)$ können wir das Systemverhalten rekonstruieren!

Aufgabe: Gegeben sei ein LTI–System mit Impulsantwort $h_\varepsilon(t) \to h(t)$.
Welche Antwort $y(t)$ gibt das System auf eine Treppenfunktion $x(t)$?

Lösung: Jede Treppenfunktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist Summe kleiner Impulse.
Für die Unterteilung $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ mit $\varepsilon_k = t_{k+1} - t_k$ gelte:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{\varepsilon_k}(t - t_k)\, x(t_k)\, \varepsilon_k$$

Auf diese Anregung $x(t)$ antwortet unser LTI–System demnach mit:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} h_{\varepsilon_k}(t - t_k)\, x(t_k)\, \varepsilon_k$$

☺ Wir nutzen hierzu nur die Linearität und die Zeitinvarianz!
Das genügt, um die Antwort auf Treppenfunktionen zu bestimmen.

Impulsantwort und Faltung

Aufgabe: Wie folgt mit L^1–Stabilität die allgemeine Systemantwort?

Lösung: Jede integrierbare Funktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ kann in der L^1–Norm approximiert werden durch geeignete Treppenfunktionen $x_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.
Das heißt $x = x_n + f_n$ mit Fehlerschranke $\|f_n\|_{L^1([0,t])} \to 0$ für $n \to \infty$.
Auf die Anregung $x(t)$ antwortet unser LTI–System $y = y_n + f_n^*$,
mit Fehlerschranke $\|f_n^*\|_{L^1([0,t)]} \le K(t) \cdot \|f_n\|_{L^1([0,t])} \to 0$.
Die Antwort $x_n \mapsto y_n$ haben wir oben ausgerechnet dank Linearität und Zeitinvarianz. Für $n \to \infty$ gilt $x_n \to x$ und $y_n \to y$, also schließlich

$$y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(t - \tau)\, x(\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

☺ Allein aus der Impulsantwort $h(t)$ folgt dank Linearität, Zeitinvarianz und L^1_{loc}–Stabilität die allgemeine Systemantwort durch die Faltung

$$\boxed{x(t) \mapsto y(t) = (h * x)(t) := \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(t - \tau)\, x(\tau)\, \mathrm{d}\tau.}$$

Das erlaubt eine bequeme Beschreibung aller stabilen LTI–Systeme:
Es genügt nach einem Hammerschlag dem Echo h zu lauschen.

Lösung von Differentialgleichungen

Aufgabe: Lösen Sie durch $\mathscr{L}$–Transformation die Differentialgleichung

$$\boxed{u'''(t) - u(t) = 1 \quad \text{mit} \quad u(0) = 0,\ u'(0) = u''(0) = 1.}$$

(1) Laplace–transformieren Sie diese Gleichung mittels $\mathscr{L} : u \mapsto U$.
(2) Lösen Sie die so erhaltene Hilfsgleichung nach U auf.
(3) Bestimmen Sie die Rücktransformation $\mathscr{L}^{-1} : U \mapsto u$.
(4) Machen Sie die Probe: Erfüllt u die Differentialgleichung?

Lösung: (1) Wir laplace–transformieren dank $\mathscr{L}$–Tabelle:

$$\begin{aligned}
u(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ U(s) && = U(s) \\
u'(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ s\,U(s) - u(0) && = s\,U(s) \\
u''(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ s^2\,U(s) - s\,u(0) - u'(0) && = s^2\,U(s) - 1 \\
u'''(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ s^3\,U(s) - s^2\,u(0) - su'(0) - u''(0) && = s^3\,U(s) - s - 1 \\
1 &\circ\!\!-\!\!\bullet\ s^{-1}
\end{aligned}$$

Dank Linearität transformieren wir die DG zur **Hilfsgleichung**

$$s^3 U(s) - s - 1 - U(s) = s^{-1}.$$

Lösung von Differentialgleichungen

(2) **Auflösung** der Hilfsgleichung nach U:

$$\underbrace{(s^3 - 1)}_{\text{char. Polynom}}\ U(s) = \underbrace{s + 1}_{\text{Anfangsdaten}} + \underbrace{s^{-1}}_{\text{rechte Seite}}$$

$$\Longrightarrow \qquad U(s) = \frac{s + 1 + s^{-1}}{s^3 - 1} = \frac{s^2 + s + 1}{s(s-1)(s^2 + s + 1)} = \frac{1}{s(s-1)}$$

(3) **Rücktransformation** von U zu u dank $\mathscr{L}$–Tabelle:

$$U(s) = \frac{1}{s(s-1)} \overset{\text{PBZ}}{=} \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \mathrm{e}^t - 1 = u(t)$$

(4) Machen Sie die **Probe**! Lösen ist schwer, prüfen ist leicht.
Die Funktion u erfüllt die Differentialgleichung mit Anfangsdaten!

☺ Die Laplace–Transformation verwandelt etwas kompliziertes in etwas einfaches.
Die Transformation entnimmt man am besten einer der umfangreichen $\mathscr{L}$–Tabellen.

⚠ Zur Rücktransformation nutzen wir die Partialbruchzerlegung. Das ist Routinearbeit.
Die Anfangswerte werden schon im ersten Schritt in die $\mathscr{L}$–Transformation eingearbeitet.

Vergleichen Sie diesen Rechenweg mit den Methoden aus Kapitel N. Alle Wege führen zum selben Ergebnis, aber man muss die jeweils gewählte Methode einüben, um sie zu beherrschen.

Lösung von Differentialgleichungen

Aufgabe: Lösen Sie durch $\mathscr{L}$–Transformation die Differentialgleichung

$$\boxed{u''(t) + 2u'(t) + 10u(t) = 2\cos(t) + 9\sin(t) \quad \text{mit} \quad u(0) = 0,\ u'(0) = 4.}$$

(1) Laplace–transformieren Sie diese Gleichung mittels $\mathscr{L} : u \mapsto U$.
(2) Lösen Sie die so erhaltene Hilfsgleichung nach U auf.
(3) Bestimmen Sie die Rücktransformation $\mathscr{L}^{-1} : U \mapsto u$.
(4) Machen Sie die Probe: Erfüllt u die Differentialgleichung?

Lösung: (1) Wir laplace–transformieren dank $\mathscr{L}$–Tabelle:

$$\begin{aligned}
u(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ U(s) && = U(s) \\
u'(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ s\,U(s) - u(0) && = s\,U(s) \\
u''(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ s^2\,U(s) - s\,u(0) - u'(0) && = s^2\,U(s) - 4 \\
\cos(\omega t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{s}{s^2+\omega^2} && \sin(\omega t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{\omega}{s^2+\omega^2}
\end{aligned}$$

Dank Linearität transformieren wir die DG zur **Hilfsgleichung**

$$s^2U(s) - 4 + 2s\,U(s) + 10\,U(s) \quad = \quad \frac{2s}{s^2+1} + \frac{9}{s^2+1}.$$

Lösung von Differentialgleichungen

(2) **Auflösung** der Hilfsgleichung nach U und Partialbruchzerlegung:

$$\underbrace{(s^2+2s+10)}_{\text{char. Polynom}}\,U(s) \quad = \quad \underbrace{4}_{\text{Anfangsdaten}} \quad + \underbrace{\frac{2s+9}{s^2+1}}_{\text{rechte Seite}}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \qquad U(s) \quad &= \quad \frac{4}{s^2+2s+10} + \frac{2s+9}{(s^2+1)(s^2+2s+10)} \\
&\overset{\text{PBZ}}{=} \quad \frac{4}{s^2+2s+10} + \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+2s+10}
\end{aligned}$$

(3) **Rücktransformation** von U zu u dank $\mathscr{L}$–Tabelle:

$$U(s) = \frac{3}{(s+1)^2+3^2} + \frac{1}{s^2+1} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \mathrm{e}^{-t}\sin(3t) + \sin(t) = u(t)$$

(4) Wir machen die **Probe**: Lösen ist schwer, prüfen ist leicht!

$$\begin{aligned}
u(t) &= +\,\mathrm{e}^{-t}\sin(3t) && +\sin(t) \\
u'(t) &= -\,\mathrm{e}^{-t}\sin(3t) && +3\,\mathrm{e}^{-t}\cos(3t) + \cos(t) \\
u''(t) &= -\,8\,\mathrm{e}^{-t}\sin(3t) && -6\,\mathrm{e}^{-t}\cos(3t) - \sin(t)
\end{aligned}$$

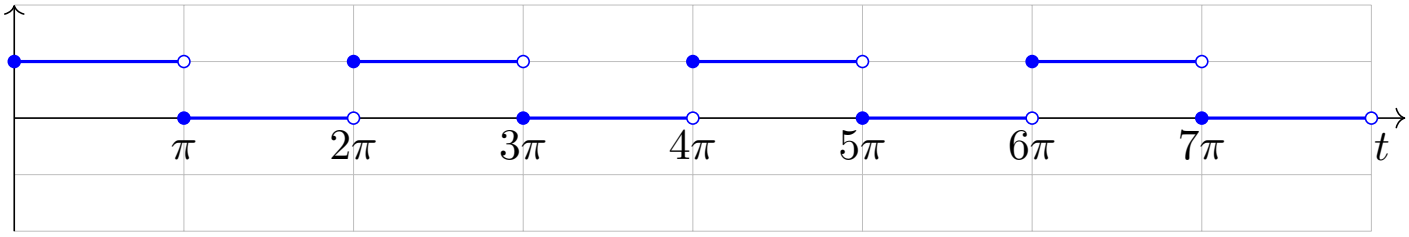
☺ Die Funktion u erfüllt die Differentialgleichung mit Anfangsdaten!

Erzwungene Schwingung durch Impulsanregung

Aufgabe: Zu lösen sei die Gleichung der erzwungenen Schwingung

$$\boxed{y''(t) + y(t) = f(t) \;\text{ mit }\; y(0) = 0,\; y'(0) = 0.}$$

Die anregende Kraft $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ sei die 2π–periodische Impulsfunktion gegeben durch $f(t) = 1$ für $0 \leq t < \pi$ und $f(t) = 0$ für $\pi \leq t < 2\pi$.



(1) Berechnen Sie die Greensche Fundamentallösung dieser Gleichung, also $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ mit $u''(t) + u(t) = 0$ sowie $u(0) = 0$ und $u'(0) = 1$.

(2) Lösen Sie die inhomogene Gleichung durch die Faltung $y = u * f$. Erklären Sie an diesem Beispiel das Phänomen der Resonanz.

(3) Skizzieren Sie die Anregung f und die Antwort y. Probe!
Wo liegen Schwierigkeiten? Ist Ihre Lösung dennoch sinnvoll?

Erzwungene Schwingung durch Impulsanregung

Lösung: (1) Wir laplace–transformieren dank $\mathscr{L}$–Tabelle:

$$\begin{aligned}
u(t) &\;\circ\!\!-\!\!\bullet\; U(s) && = U(s) \\
u'(t) &\;\circ\!\!-\!\!\bullet\; s\,U(s) - u(0) && = s\,U(s) \\
u''(t) &\;\circ\!\!-\!\!\bullet\; s^2\,U(s) - s\,u(0) - u'(0) && = s^2\,U(s) - 1
\end{aligned}$$

Die Hilfsgleichung $(s^2 + 1)\,U(s) = 1$ lösen wir auf zu $U(s) = 1/(s^2 + 1)$.
Die Rücktransformation ergibt $u(t) = \sin(t)$. Machen Sie die Probe!
☺ Wer die Lösung sofort sieht oder wiedererkennt, kann hier abkürzen.

(2) Wir laplace–transformieren dank $\mathscr{L}$–Tabelle:

$$\begin{aligned}
y(t) &\;\circ\!\!-\!\!\bullet\; Y(s) && = Y(s) \\
y'(t) &\;\circ\!\!-\!\!\bullet\; s\,Y(s) - u(0) && = s\,Y(s) \\
y''(t) &\;\circ\!\!-\!\!\bullet\; s^2\,Y(s) - s\,y(0) - y'(0) && = s^2\,Y(s)
\end{aligned}$$

Die Hilfsgleichung $(s^2 + 1)\,Y(s) = F(s)$ ergibt $Y(s) = U(s)\,F(s)$.
Die Transformation $f \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; F$ müssen wir nicht explizit berechnen:
☺ Als Rücktransformation erhalten wir die Faltung $y = u * f$.

Erzwungene Schwingung durch Impulsanregung

Dank Faltungssatz erhalten wir so die gesuchte Lösung:

$$y(t) = \int_{\tau=0}^{t} \sin(t-\tau) f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Dies rechnen wir schließlich geduldig aus. Für $t \in [2k\pi, (2k+1)\pi]$ gilt:

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{\ell=0}^{k-1} \int_{\tau=2\ell\pi}^{(2\ell+1)\pi} \sin(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_{\tau=2k\pi}^{t} \sin(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \sum_{\ell=0}^{k-1} \Big[\cos(t-\tau)\Big]_{\tau=2\ell\pi}^{(2\ell+1)\pi} + \Big[\cos(t-\tau)\Big]_{\tau=2k\pi}^{t} = 1-(2k+1)\cos(t) \end{aligned}$$

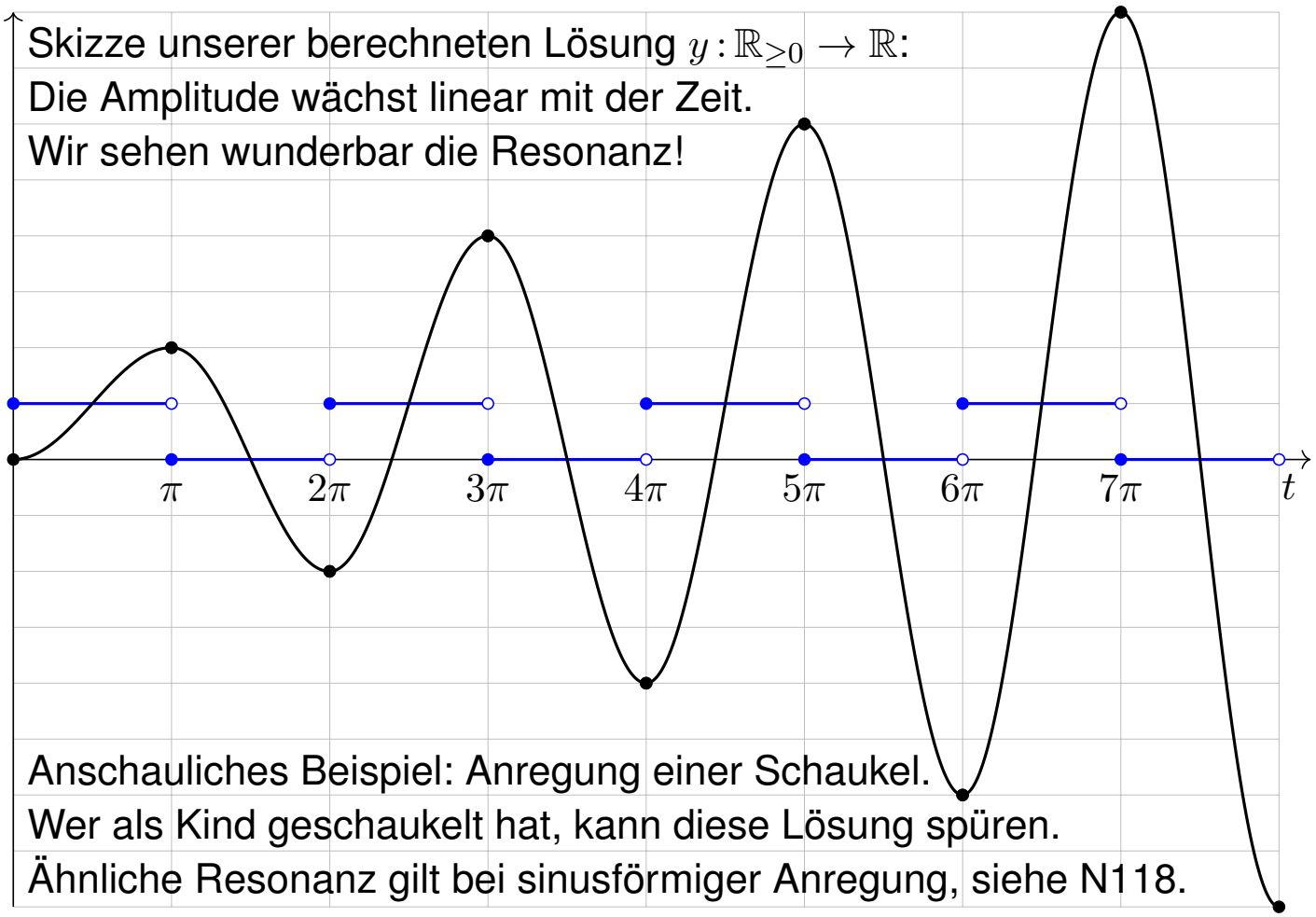
Für $t \in [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$ finden wir ebenso $y(t) = -(2k+2)\cos(t)$.

(3) Probe: Auf jedem dieser Intervalle gilt $y'' + y = 1$ bzw. $y'' + y = 0$.

⚠ Die hier vorgegebene rechte Seite f ist nur stückweise stetig.
Die Lösung y ist daher nicht C^2, sondern nur C^1 und stückweise C^2.

☺ Die Differentialgleichung gilt für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ bis auf abzählbar viele Ausnahmestellen, hier $t \in \{\pi, 2\pi, 3\pi, \dots\}$. Das muss uns genügen.

Erzwungene Schwingung durch Impulsanregung



Kapitel M

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Vincent van Gogh (1853–1890), *La nuit étoilée*, wikimedia.org

Inhalt dieses Kapitels M

1 Erste Beispiele von Differentialgleichungen
- Einfache Beispiele aus der Mechanik
- Separierbare Differentialgleichungen
- Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

2 Exakte Differentialgleichungen
- Exaktheit und Potential von $f(x,y) + g(x,y)\,y' = 0$
- Lösung durch einen integrierenden Faktor
- Lineare Differentialgleichungen

3 Fazit: Existenz, Eindeutigkeit, Lösungsmethoden
- Zusammenfassung und Verständnisfragen
- Methodenvergleich: Viele Wege führen zum Ziel.
- Gut &schlecht gestellte Anfangswertprobleme

4 Weitere Aufgaben und Anwendungsbeispiele
- Umformung und Lösung durch Substitution
- Exakte Differentialgleichungen und Potentiale
- Qualitative Analyse, Runden und Eingrenzen

Wie löst man Differentialgleichungen?

Beispiele gewöhnlicher Differentialgleichungen (kurz DG, engl. ODE):

1. Erster Ordnung: $y'(x) = y(x)$
2. Zweiter Ordnung: $y''(x) + 4y(x) = 0$
3. Dritter Ordnung: $y'''(x)\,y'(x) - y''(x)^2 + (1 + x^2)\,y(x)^2 = 0$

Gesucht ist jeweils eine Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, deren Ableitungen die geforderte Gleichung für alle $x \in I$ erfüllen.
Wie sehen mögliche Lösungen in diesen Beispielen aus?

1. $y(x) = 0$, oder $y(x) = \mathrm{e}^x$, allgemein $y(x) = a\,\mathrm{e}^x$ mit $a \in \mathbb{R}$. Probe!
2. $\sin(2x)$, $\cos(2x)$, allgemein $y(x) = a\sin(2x) + b\cos(2x)$. Probe!
3. Eine mögliche Lösung ist $y(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$. Machen Sie die Probe!

☺ Lösungen sind oft schwer zu finden, aber leicht zu überprüfen.

Jede ernsthafte Rechnung schließt deshalb mit einer Probe durch Einsetzen und Nachrechnen, wenigstens mit Plausibilitätsprüfung!

Wir behandeln die Grundfragen gewöhnlicher Differentialgleichungen:
Wie viele Lösungen gibt es? Wie findet man eine? womöglich gar alle?

Wozu dienen Differentialgleichungen?

Differentialgleichungen sind die Sprache der Naturgesetze.

- Oft ist der unabhängige Parameter $x \in \mathbb{R}$ die Zeit.
- Die abhängige Größe $y(x) \in \mathbb{R}^n$ ist der Zustand zur Zeit x.
- Die Gleichung $y'(x) = f(x, y(x))$ ist das Bewegungsgesetz für y.
- Die Anfangsdaten $y(x_0) = y_0$ sind der Startpunkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Viele Modelle in Naturwissenschaft und Technik haben diese Form!
Was benötigen Sie zur Lösung von Differentialgleichungen?

- Leistungsstarke Lösungstheorie als verlässliche Grundlage
- Erprobte Rezepte für spezielle Klassen von Gleichungen
- Wie immer Übung und Erfahrung, Geschick und Ausdauer

Trotz allgemeiner Lösungstheorie und -methoden hat jede DG ihre Eigenarten: Wir müssen genau hinschauen und sorgfältig arbeiten!

Zur Sorgfalt gehört, die gefundenen / benachbarte / alle Lösungen zu prüfen, zu skizzieren, zu diskutieren und alle Sonderfälle zu beachten.

📖 Zur Vertiefung und für zahlreiche Anwendungsbeispiele siehe
H. Heuser: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Vieweg, 6. Aufl. 2009

Gewöhnliche und partielle DG

M005
Ausführung

Eine **Differentialgleichung** ist eine Gleichung für eine Funktion $y(x)$, in der auch ihre Ableitungen $y', y'', \ldots$ auftreten. Wir unterscheiden:

$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	gewöhnliche Differentialgleichung in $x, y, y', y'' \ldots$
$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$	System gewöhnlicher DG in $x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n', \ldots$
$y : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$	partielle Differentialgleichung in $x_1, \ldots, x_m, y, \partial_i y, \ldots$
$y : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$	System partieller DG in $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n, \partial_i y_j, \ldots$

Dies wird häufig genutzt und ist eine mathematische Grundtechnik aller Naturwissenschaftler:innen und Ingenieur:innen. Prominente Beispiele:

- Dynamik, Newton $\ddot{q} = f(q)$, Hamilton $\dot{q}_i = \partial H / \partial p_i$, $\dot{p}_i = -\partial H / \partial q_i$.
- Strömung, Cauchy–Riemann $\partial_x u = \partial_y v, \partial_x v = -\partial_y u$. Navier–Stokes.
- Wärmeleitung, Wellen-, Potential-, Maxwell–Gleichungen, uvm.

Zu partiellen Differentialgleichungen kommen wir später ab Kapitel Q.

Es gibt darüber hinaus auch stochastische Differentialgleichungen, in die Zufallsvariablen als Parameter eingehen. Dies wird zum Beispiel in der Finanzmathematik zur Modellierung von Börsenkursen genutzt.

Implizite Differentialgleichungen

M006
Ausführung

Gegeben sei eine stetige Funktion $F : \mathbb{R}^{n+2} \supseteq G \to \mathbb{R}$. Dies definiert die zugehörige **implizite Differentialgleichung n-ter Ordnung**:

$$\boxed{F\big(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}\big) = 0}$$

Sie heißt algebraisch, analytisch, etc., falls die Funktion F dies ist. Eine **Lösung** dieser Differentialgleichung auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ist eine n-mal diff'bare Funktion $y : I \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x \in I$ gilt:

$$\big(x,\ y(x),\ y'(x), \ldots,\ y^{(n-1)}(x),\ y^{(n)}(x)\big) \in G,$$
$$F\big(x,\ y(x),\ y'(x), \ldots,\ y^{(n-1)}(x),\ y^{(n)}(x)\big) = 0.$$

Sind zudem noch **Anfangsdaten** gegeben, also ein Startpunkt

$$\big(x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n\big) \in G,$$

so soll die Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ durch diesen Punkt laufen, das heißt

$$x_0 \in I,\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},\ y^{(n)}(x_0) = y_n.$$

Diese Problemstellung heißt implizites **Anfangswertproblem** (AWP). Kann man die DG nach $y^{(n)}$ auflösen, so erhält man eine **explizite DG**.

Explizite Differentialgleichungen

M007
Ausführung

Gegeben sei eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^{n+1} \supseteq G \to \mathbb{R}$. Dies definiert die zugehörige **explizite Differentialgleichung n-ter Ordnung**

$$\boxed{y^{(n)} = f\big(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\big)}$$

Sie heißt algebraisch, analytisch, etc., falls die Funktion f dies ist. Eine **Lösung** dieser Differentialgleichung auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ist eine n-mal diff'bare Funktion $y : I \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x \in I$ gilt:

$$\begin{aligned} &\big(x,\ y(x),\ y'(x), \ldots,\ y^{(n-1)}(x)\big) \in G, \\ &y^{(n)}(x) = f\big(x,\ y(x),\ y'(x), \ldots,\ y^{(n-1)}(x)\big). \end{aligned}$$

Sind zudem noch **Anfangsdaten** gegeben, also ein Startpunkt

$$\big(x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}\big) \in G,$$

so soll die Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ durch diesen Punkt laufen, das heißt

$$x_0 \in I,\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Diese Problemstellung heißt explizites **Anfangswertproblem** (AWP).

Differentialgleichungen erster Ordnung

M008
Ausführung

Gegeben sei eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^2 \supseteq G \to \mathbb{R}$. Dies definiert die zugehörige **explizite Differentialgleichung erster Ordnung**:

$$\boxed{y' = f(x, y).}$$

Gesucht sind alle diff'baren Funktionen $y : I \to \mathbb{R}$ auf einem (maximalen) Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, die obige Gleichung erfüllen, d.h. für alle $x \in I$ gilt

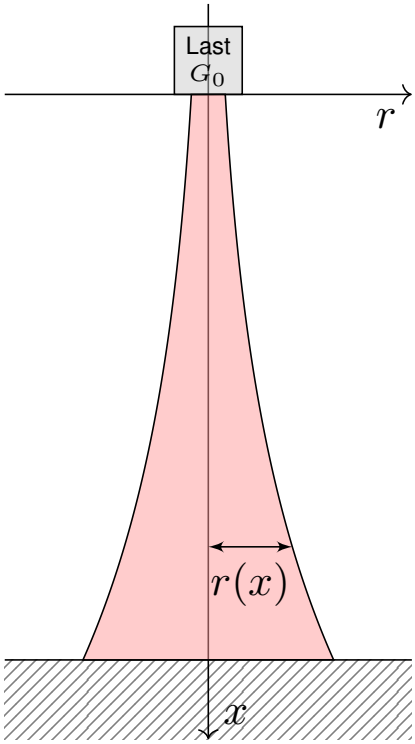
$$(x, y(x)) \in G \quad \text{und} \quad y'(x) = f(x, y(x)).$$

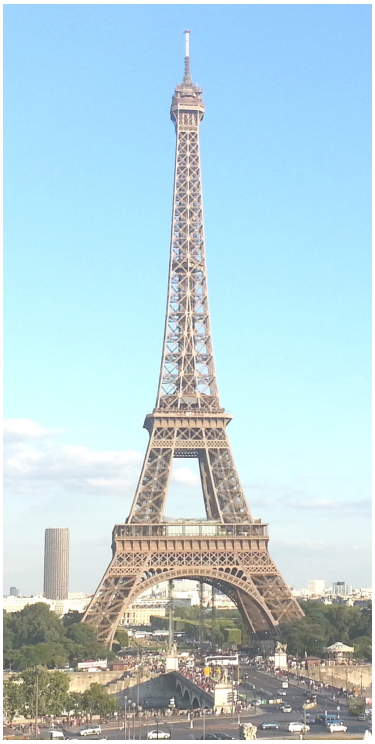
Die erste Forderung besagt, dass der Graph von y in G liegt, kurz $y \subseteq G$. Die zweite: In jedem Punkt $(x, y) \in G$ schreibt $f(x, y)$ die Steigung vor. Anders gesagt, die Lösung $x \mapsto (x, y(x))$ verläuft ganz im Gebiet G und erfüllt dort die Bedingung $y' = f(x, y)$. Äquivalente Schreibweisen:

$$\begin{aligned} &y' = f(x, y), \quad y'(x) = f(x, y(x)), \quad \dot{y} = f(t, y), \quad \dot{y}(t) = f(t, y(t)), \\ &u' = f(x, u), \quad u'(x) = f(x, u(x)), \quad \dot{x} = f(t, x), \quad \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad \ldots \end{aligned}$$

⚠ Der Kontext gibt an, was der unabhängige Parameter ist (x, t, ...) und was die hiervon abhängige, gesuchte Funktion ist (y, u, ...).

Ein hoher Turm braucht eine breite Basis.





Der Eiffelturm in Paris am Abend des 14.08.2013, Höhe 324m

Der Burj Khalifa in Dubai, Höhe 830m, Bildquelle: wikimedia

Aufgabe: Konstruieren Sie eine Säule aus einem Material konstanter Dichte ϱ, so dass der Druck (Last pro Fläche) überall konstant p ist.

Zahlenbeispiel: Beton $\varrho = 3\mathrm{g/cm}^3$, Last $G_0 = 4600\mathrm{kN}$, Radius $r_0 = 1\mathrm{m}$, Höhe $300\mathrm{m}$.
Unser Modell ist zwar extrem vereinfacht, aber es illustriert doch recht gut das Prinzip.

Ein hoher Turm braucht eine breite Basis.

Lösung: In Höhe x haben wir den Radius $r(x) > 0$ gemäß Skizze.
Die Fläche ist $A(x) = \pi r(x)^2$, das Volumen $V(x) = \int_{h=0}^{x} \pi r(h)^2 \,\mathrm{d}h$,
das Gewicht $G(x) = g\varrho V(x)$, der Druck $G(x)/A(x) = p$. Insgesamt:

$$g\varrho \cdot \int_{h=0}^{x} \pi r(h)^2 \,\mathrm{d}h \quad \overset{!}{=} \quad p \cdot \pi r(x)^2$$

Ableiten dieser Integralgleichung ergibt unsere Differentialgleichung:

$$g\varrho\, \pi r(x)^2 \quad = \quad 2p\, \pi r(x)\, r'(x).$$

Diese ist elementar lösbar. Wir trennen die Variablen und integrieren:

$$\frac{r'(x)}{r(x)} = \frac{g\varrho}{2p} =: c \quad \Rightarrow \quad \int_{h=0}^{x} \frac{r'(h)}{r(h)} \,\mathrm{d}h = \int_{h=0}^{x} c \,\mathrm{d}h \quad \Rightarrow \quad \ln r(x) - \ln r_0 = cx$$

Wir erhalten somit $r(x) = r_0\, \mathrm{e}^{cx}$. Der Radius wächst exponentiell!

Dank passender mathematischer Werkzeuge gelingt uns die Rechnung erfreulich leicht.
Im Zahlenbeispiel gilt $p \approx 1500\mathrm{kN/m}^2$ und $r(x) = 1\mathrm{m} \cdot \mathrm{e}^{x \cdot 0.01/\mathrm{m}}$, also $r(300\mathrm{m}) \approx 20\mathrm{m}$.
Probe / Plausibilität: Die Druckfestigkeit liegt je nach Beton zwischen 10 und $100\mathrm{N/mm}^2$.
Unsere Rechnung illustriert das Grundprinzip. Anwendungen berechnet man noch viel genauer!

Theorie und Anwendung: Modellierungskreislauf

☺ Abstraktion ist die Kunst, Wichtiges von Unwichtigem zu trennen. Differentialgleichungen nutzen wir zur Formulierung der Naturgesetze, sie sind die universelle Sprache der Naturwissenschaft und der Technik: Damit können wir Probleme formulieren, strukturieren, verstehen, lösen.

1. Grundlegendes Verständnis der vorliegenden Situation:
Um Anwendungen in der Physik, Mechanik, Thermodynamik, Strömungslehre, etc. zu verstehen, benötigen Sie zunächst die erforderlichen Grundkenntnisse der betroffenen Anwendungsgebiete: Naturgesetze, grundlegende Modelle, geeignete Vereinfachungen, etc.

☺ Erst so können Sie die Situation quantitativ und präzise erfassen.

2. Mathematische Modellierung der vorliegenden Situation:
Durch geeignete Vereinfachung, Formalisierung und Abstraktion erhalten Sie ein mathematisches Modell. Dieses besteht aus den relevanten Größen und den zwischen ihnen gelten Beziehungen, meist geeignete Gleichungen, sehr häufig Differentialgleichungen.

☺ Hierzu nutzen Sie die Techniken Ihrer HM und weitere nach Bedarf.

Theorie und Anwendung: Modellierungskreislauf

3. Lösung durch geeignete mathematische Werkzeuge: Dazu lernen Sie hier die grundlegenden Rechentechniken. Das ist ein weites Gebiet! Je nach Ihren Anwendungen vertiefen Sie die nötigen Techniken zur numerischen Näherung, zu partiellen Differentialgleichungen, etc.

☺ Lösungen sind oft schwer zu finden, aber leicht zu überprüfen. Zur Sorgfalt gehört, die gefundenen / benachbarte / alle Lösungen zu prüfen, zu diskutieren und umsichtig alle Sonderfälle zu beachten.

4. Anpassung und Überprüfung anhand gegebener Daten:
Ist eine mathematische Lösung oder numerische Näherung gelungen, so passen Sie schließlich die noch freien Parameter des Modells an die gegebenen Daten an und überprüfen soweit möglich die Vorhersagen des Modells durch Experimente, Messungen, Alternativmodelle, etc.

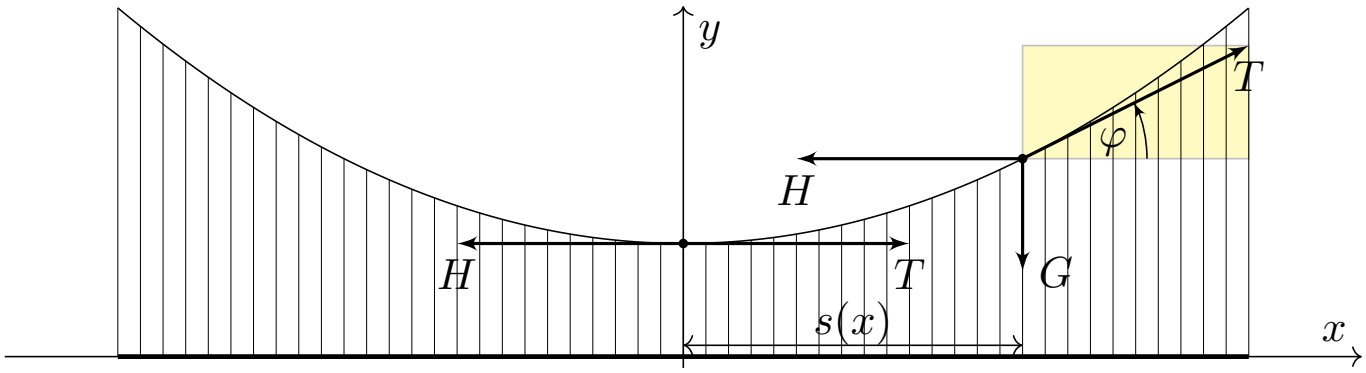
⚠ Falls nötig muss erneut ab (1) ein besseres Modell erstellt werden.

Diese Vorlesung konzentriert sich auf Lösungsmethoden (Schritt 3). Aus Ihren Vorlesungen kennen Sie bereits einige Anwendungen (1,2,4), viele weitere werden noch folgen. Nutzen Sie diese Querverbindungen!

Beispiel aus der Mechanik: Hängebrücke

Golden Gate Bridge, San Francisco

Aufgabe: Eine Hängebrücke trägt eine schwere Fahrbahn der Dichte ϱ mit leichten Kabeln. Bestimmen Sie deren Verlauf als Funktionsgraph. Wir vernachlässigen das Gewicht der Kabel gegenüber der Fahrbahn.



Beispiel aus der Mechanik: Hängebrücke

Lösung: Wir suchen die Funktion $y(x)$. Wie in der Skizze haben wir die Steigung $y'(x) = \tan\varphi(x)$ und die Fahrbahnlänge $s(x) = x - x_0$. In jedem Punkt $(x, y(x))$ des Kabels herrscht **Kräftegleichgewicht**:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -g\varrho\, s(x) \end{pmatrix}}_{\text{Gewichtskraft, vertikal}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -H \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{horizontal}} + \underbrace{\begin{pmatrix} T\cos\varphi(x) \\ T\sin\varphi(x) \end{pmatrix}}_{\text{tangential}} = 0$$

Aus $H = T\cos\varphi(x)$ und $g\varrho\, s(x) = T\sin\varphi(x)$ folgt

$$y'(x) \;=\; \tan\varphi(x) \;=\; \frac{\sin\varphi(x)}{\cos\varphi(x)} \;=\; \frac{g\varrho}{H}\, s(x) \;=\; 2a(x - x_0).$$

☺ Als Lösungen dieser DG $y'(x) = 2a(x - x_0)$ finden wir die Parabeln

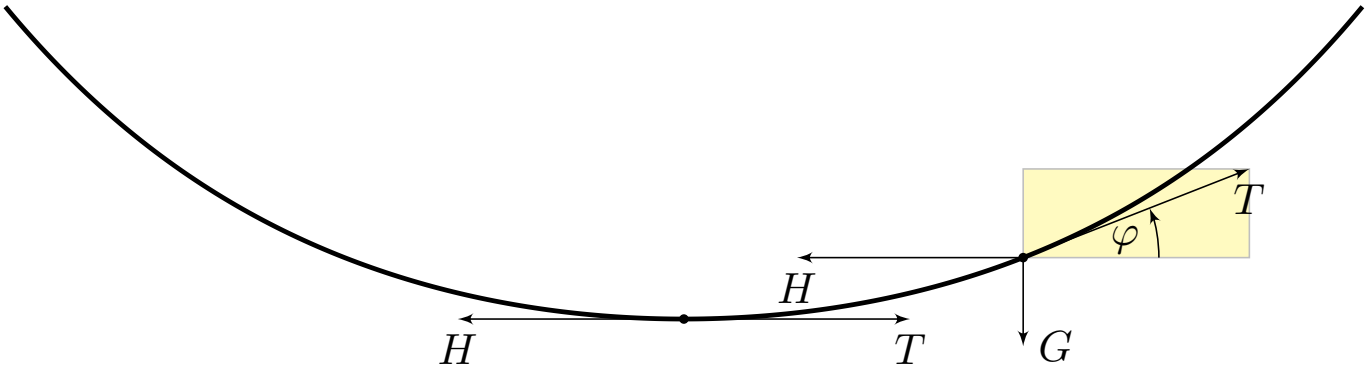
$$y(x) = a(x - x_0)^2 + y_0.$$

Wir brauchen effiziente Methoden zur systematischen Lösung! Machen Sie die Probe! Dies ist tatsächlich die allgemeine Lösung. Die Parameter a, x_0, y_0 passen wir den gegebenen Daten an. Genauere Statik: alle Teile, diskretisieren, lineares Gleichungssystem. Dynamik: Schwingungen, Wind, Erdbeben, etc. Stochastische Last: Wölbung für leer, mittlere und maximale Last.

Beispiel aus der Mechanik: Kettenlinie

Indiana Jones and the Temple of Doom

Aufgabe: Eine homogene Kette der Dichte ϱ hängt frei und ruhig an ihren Enden. Bestimmen Sie ihren Verlauf als Funktionsgraph.



Beispiel aus der Mechanik: Kettenlinie

Lösung: Wir suchen die Funktion $y(x)$. Wie in der Skizze haben wir die Steigung $y'(x) = \tan\varphi(x)$ und Kettenlänge $s(x) = \int_{t=x_0}^{x} \sqrt{1+y'(t)^2}\,\mathrm{d}t$. In jedem Punkt $(x, y(x))$ der Kette herrscht **Kräftegleichgewicht**:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -g\varrho\, s(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -H \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T\cos\varphi(x) \\ T\sin\varphi(x) \end{pmatrix} = 0$$

Aus $H = T\cos\varphi(x)$ und $g\varrho\, s(x) = T\sin\varphi(x)$ folgt

$$y'(x) \;=\; \tan\varphi(x) \;=\; \frac{g\varrho}{H}\, s(x) \;=\; a^{-1}\int_{t=x_0}^{x} \sqrt{1+y'(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Ableiten dieser Integralgleichung ergibt die Differentialgleichung

$$y''(x) = a^{-1}\sqrt{1+y'(x)^2} \quad \text{bzw.} \quad z'(x) = a^{-1}\sqrt{1+z(x)^2}.$$

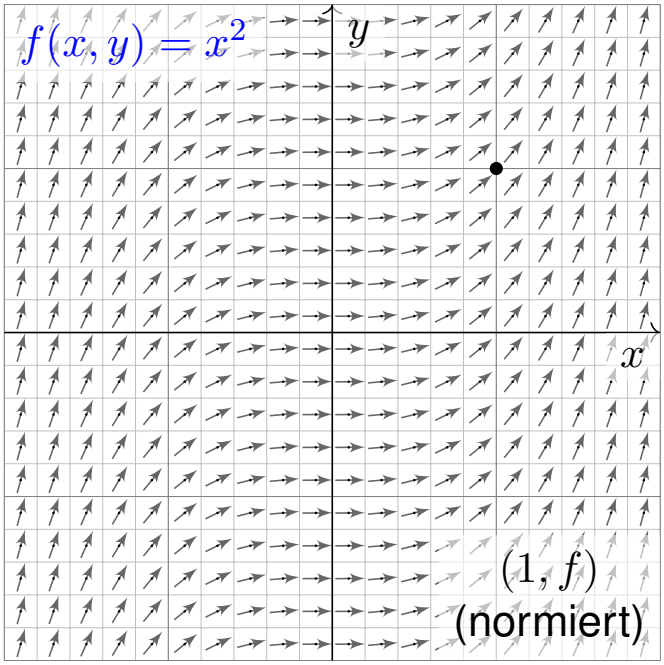
☺ Als Lösungen dieser DG finden wir die Hyperbelfunktionen:

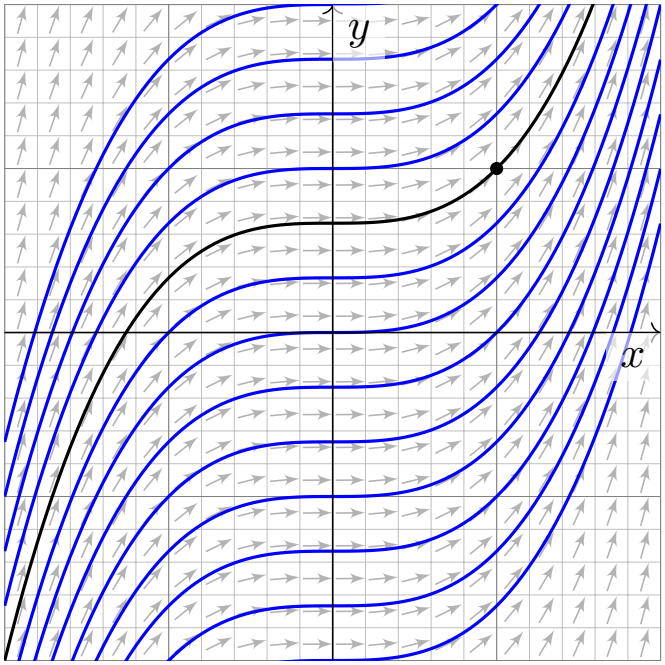
$$z(x) = \sinh\Big(\frac{x-x_0}{a}\Big) \quad \text{also} \quad y(x) = a\cosh\Big(\frac{x-x_0}{a}\Big) + y_0$$

Wir brauchen effiziente Methoden zur systematischen Lösung! Machen Sie die Probe! Dies ist tatsächlich die allgemeine Lösung. Die Parameter a, x_0, y_0 passen wir den gegebenen Daten an. Für unsere Stift-und-Papier-Rechnung vereinfachen wir stark, gerade das schult unsere Intuition!

Ein erstes Beispiel: Richtungsfeld und Lösungsschar

Aufgabe: Welche Funktionen $y : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}$ erfüllen $y'(x) = x^2$? zudem $y(1) = 1$? Skizze? Was ist jeweils das maximale Definitionsintervall I?





Wir skizzieren das Richtungsfeld zu $f(x,y) = x^2$ auf dem Gebiet $G = \mathbb{R}^2$: Lösungskurven $x \mapsto (x, y(x))$ sind tangential zum Vektorfeld $(1, f(x,y))$. Sie erkennen so den qualitativen Verlauf der Lösungen $y(x) = x^3/3 + c$.

Separation der Variablen und Integration

☺ Geometrisch ist dies ein Strömungsfeld: Lassen wir ein Teilchen in diesem Strom schwimmen, so ist seine Trajektorie eine Lösungskurve!

Lösung: Die Variablen sind getrennt. Wir können direkt integrieren:

$$\begin{aligned} & y'(x) = x^2 \\ \Longrightarrow \quad & \int y'(x)\,\mathrm{d}x = \int x^2\,\mathrm{d}x + \mathrm{const} \\ \Longrightarrow \quad & y(x) = x^3/3 + c \quad \text{Probe!} \end{aligned}$$

Die Probe ist leicht: Ableiten genügt... Es gilt tatsächlich $y'(x) = x^2$. Unsere Rechnung beweist, dass wir alle Lösungen gefunden haben! Die Integrationskonstante $c \in \mathbb{R}$ können wir hierbei frei wählen.

☺ Das AWP $y'(x) = x^2$ mit $y(1) = 1$ wird einzig gelöst durch

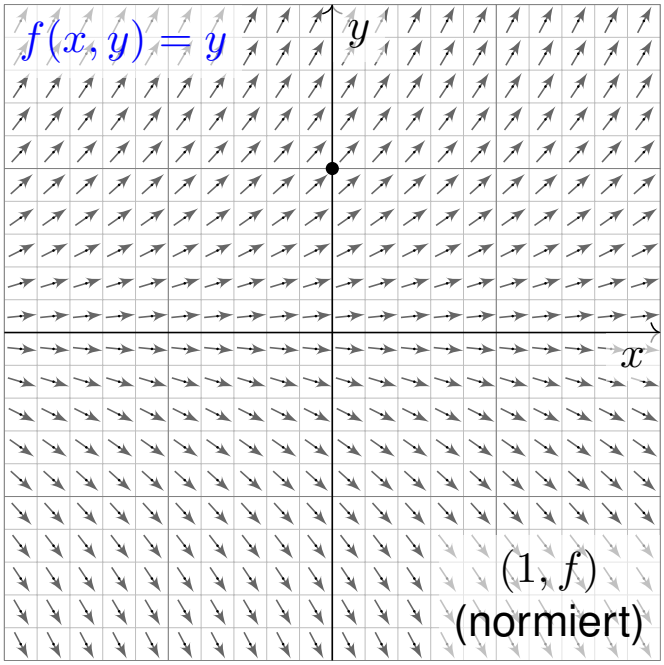
$$y \,:\, \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,:\, x \mapsto y(x) = (x^3 + 2)/3.$$

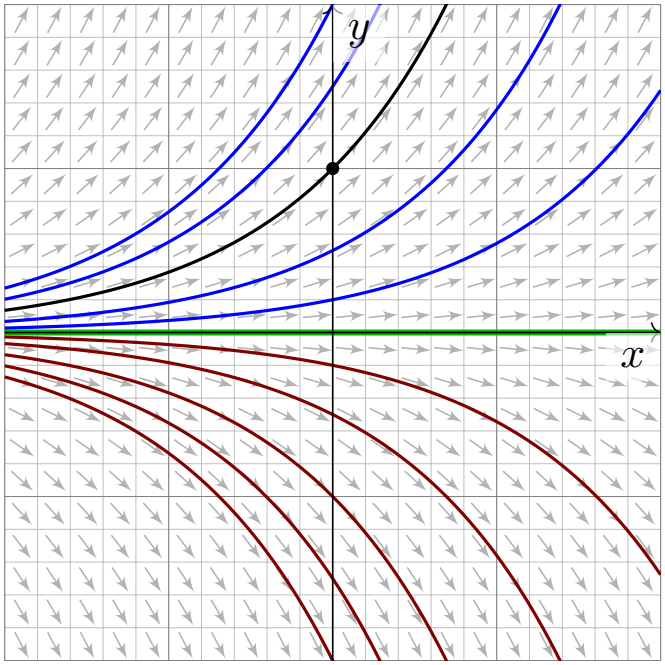
Ist ein beliebiger Anfangswert $y(x_0) = y_0$ vorgegeben, so ist die einzige Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y(x) = (x^3 - x_0^3)/3 + y_0$. Machen Sie die Probe! Jede andere Lösung ist Einschränkung $y|_J$ auf ein Intervall, $1 \in J \subseteq \mathbb{R}$.

Die Wachstumsgleichung: Richtungsfeld und Lösungsschar

M111
Beispiel

Aufgabe: Welche Funktionen $y : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}$ erfüllen $y'(x) = y(x)$? und $y(0) = 1$? Skizze? Was ist jeweils das maximale Definitionsintervall I?





Wir skizzieren das Richtungsfeld zu $f(x, y) = y$ auf dem Gebiet $G = \mathbb{R}^2$: Lösungskurven $x \mapsto (x, y(x))$ sind tangential zum Vektorfeld $(1, f(x, y))$. Sie erkennen so den qualitativen Verlauf der Lösungen $y(x) = c \cdot \mathrm{e}^x$.

Separation der Variablen und Integration

M112
Beispiel

☺ Anders als die ersten drei Aufgaben aus der Mechanik sind diese Aufgaben kontextfrei: Zu lösen ist eine gegebene Gleichung, so einfach.

Lösung: Eine Lösung ist $y(x) = 0$. Für $y > 0$ integrieren wir:

$$y'(x) = y(x)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{y'(x)}{y(x)} = 1 \qquad \Longrightarrow \quad \int \frac{y'(x)}{y(x)}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x + \mathrm{const}$$

$$\Longrightarrow \quad \ln y(x) = x + \mathrm{const} \qquad \Longrightarrow \quad y(x) = c \cdot \mathrm{e}^x \quad \text{Probe!}$$

Die Probe ist leicht: Ableiten genügt... Es gilt tatsächlich $y'(x) = y(x)$. Die Integrationskonstante $c = \mathrm{e}^{\mathrm{const}} > 0$ können wir hierbei frei wählen. Ebenso verfahren wir im Falle $y < 0$ und erhalten $y(x) = c \cdot \mathrm{e}^x$ mit $c < 0$. Unsere Rechnung beweist, dass wir alle Lösungen gefunden haben!

☺ Das AWP $y'(x) = y(x)$ mit $y(0) = 1$ wird einzig gelöst durch

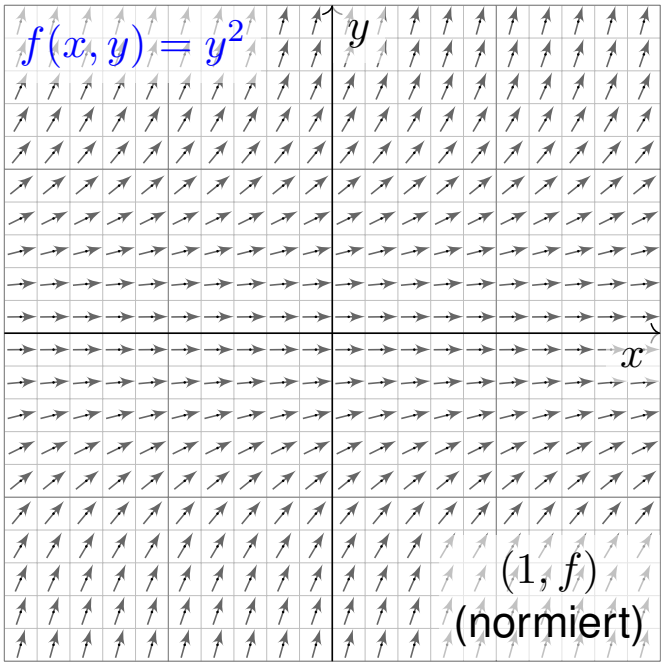
$$y \;:\; \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;:\; x \mapsto y(x) = \mathrm{e}^x.$$

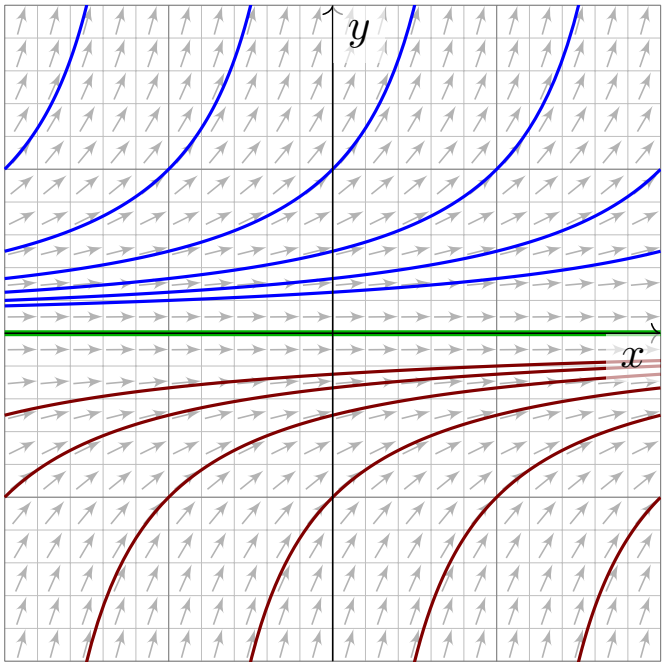
☺ Ist ein beliebiger Anfangswert $y(x_0) = y_0$ vorgegeben, so ist die einzige Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y(x) = y_0\,\mathrm{e}^{x - x_0}$. Machen Sie die Probe! Jede andere Lösung ist Einschränkung $y|_J$ auf ein Intervall, $0 \in J \subseteq \mathbb{R}$.

Die Explosionsgleichung: Richtungsfeld und Lösungsschar

M113
Beispiel

Aufgabe: Welche Funktionen $y : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}$ erfüllen $y'(x) = y(x)^2$?
Skizze? Finden Sie zu jeder Lösung das maximale Definitionsintervall I.





Wir skizzieren das Richtungsfeld zu $f(x,y) = y^2$ auf dem Gebiet $G = \mathbb{R}^2$:
Lösungskurven $x \mapsto (x, y(x))$ sind tangential zum Vektorfeld $(1, f(x,y))$.
Sie erkennen so den qualitativen Verlauf der Lösungen $y(x) = 1/(c - x)$.

Separation der Variablen und Integration

M114
Beispiel

Lösung: Eine Lösung ist $y(x) = 0$. Für $y \neq 0$ integrieren wir:

$$y'(x) = y(x)^2$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{y'(x)}{y(x)^2} = 1 \qquad \Longrightarrow \quad \int \frac{y'(x)}{y(x)^2}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x + \mathrm{const}$$

$$\Longrightarrow \quad -y(x)^{-1} = x + \mathrm{const} \qquad \Longrightarrow \quad y(x) = \frac{1}{c - x} \qquad \text{Probe!}$$

⚠ Polstelle: Jede Lösung „explodiert“. Die beiden Zweige haben zwar dieselbe Formel, aber sonst nichts miteinander zu tun! Wenn dies Ihr physikalisches System beschreibt, dann geht es bei der Polstelle kaputt!

☺ Zu jeder Konstanten $c \in \mathbb{R}$ erhalten wir hier zwei Lösungen:

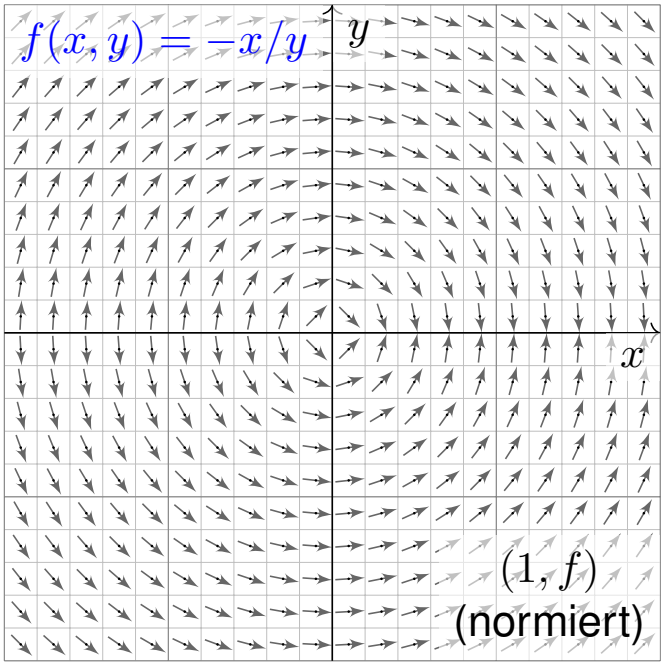
$$y_c^+ \;:\;]-\infty, c[\to \mathbb{R}_{>0} \;:\; x \mapsto y_c^+(x) = 1/(c - x),$$
$$y_c^- \;:\;]c, +\infty[\to \mathbb{R}_{<0} \;:\; x \mapsto y_c^-(x) = 1/(c - x).$$

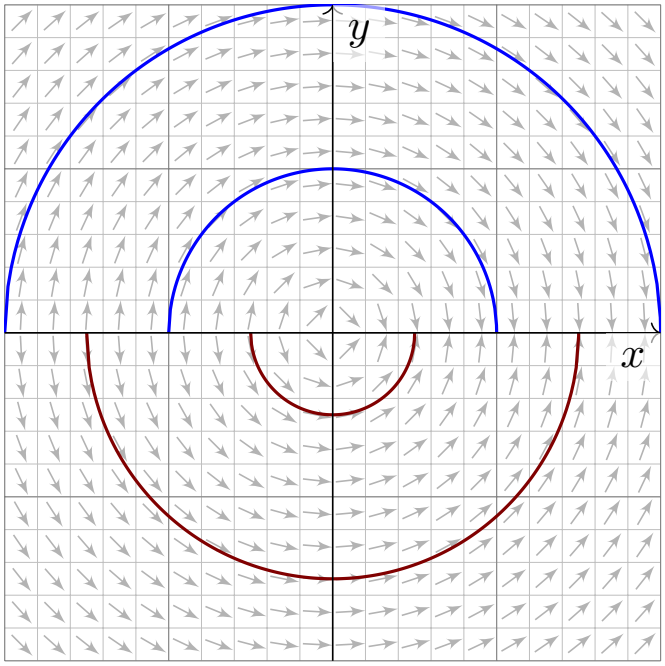
☺ Durch jeden Startpunkt (x_0, y_0) läuft genau eine maximale Lösung, nämlich die Funktion $y : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R} : x \mapsto y(x) = y_0/(1 - (x - x_0)y_0)$ auf dem Definitionsintervall $I = \{\, x \in \mathbb{R} \mid (x - x_0)y_0 < 1 \,\}$. Probe!

Die Kreisgleichung: Richtungsfeld und Lösungsschar

M115
Beispiel

Aufgabe: Welche Funktionen $y : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}$ erfüllen $y'(x) = -x/y(x)$? Skizze? Finden Sie zu jeder Lösung das maximale Definitionsintervall I.





Wir skizzieren hier das Richtungsfeld zu $f(x,y) = -x/y$ auf $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Lösungskurven $x \mapsto (x, y(x))$ sind tangential zum Vektorfeld $(1, f(x,y))$. Sie erkennen den qualitativen Verlauf der Lösungen $y(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$.

Separation der Variablen und Integration

M116
Beispiel

Lösung: Wir trennen die Variablen und integrieren:

$$y'(x) = -x/y(x)$$

$$\Longrightarrow \quad y(x)\,y'(x) = -x \qquad \Longrightarrow \quad \int y(x)\,y'(x)\,\mathrm{d}x = \int -x\,\mathrm{d}x + c$$

$$\Longrightarrow \quad y(x)^2/2 = -x^2/2 + c \qquad \Longrightarrow \quad y(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

Für $c \le 0$ gibt es keine Lösungen; wir wählen daher $c = r^2/2$, $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Zu jedem Radius $r > 0$ beschreibt die Lösung $y_r^+(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ den oberen Halbkreis und entsprechend $y_r^-(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$ den unteren. Die Probe ist leicht: Ableiten genügt. Es gilt tatsächlich $y'(x) = -x/y(x)$. Unsere Rechnung beweist, dass wir alle Lösungen gefunden haben!

☺ Durch jeden Startpunkt $(x_0, y_0 \neq 0)$ läuft genau eine max. Lösung,

$$y \,:\,]-r, r[\, \to \mathbb{R} \,:\, x \mapsto y(x) = \operatorname{sign}(y_0)\sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{mit} \quad r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}.$$

Bemerkenswert: Sie existiert nur auf dem endlichen Intervall $I =]-r, r[$. Hier explodiert nicht $y(x)$, sondern nur die Steigung $y'(x)$ für $x \to \pm r$.

Separierbare Differentialgleichungen

Aufgabe: Alle bisherigen Beispiele nutzen als Lösungsmethode die **Trennung der Variablen**. Formulieren Sie diese als allgemeine Regel.

Lösung: Eine **separierbare Differentialgleichung** ist von der Form

$$\boxed{y' = g(x)\,h(y) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0.}$$

Lösungsmethode: Wir trennen die Variablen gemäß $y'/h(y) = g(x)$, wobei wir $h(y) \neq 0$ annehmen müssen, und integrieren anschließend:

$$\int_{t=x_0}^{x} \frac{y'(t)}{h(y(t))}\,\mathrm{d}t \quad \overset{!}{=} \quad \int_{t=x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t \quad =: G(x)$$

Auf der linken Seite substituieren wir $u = y(t)$ und $\mathrm{d}u = y'(t)\,\mathrm{d}t$:

$$\int_{t=x_0}^{x} \frac{y'(t)}{h(y(t))}\,\mathrm{d}t \quad = \quad \int_{u=y_0}^{y} \frac{1}{h(u)}\,\mathrm{d}u \quad =: H(y)$$

Somit gilt $H(y(x)) \overset{!}{=} G(x)$, und Auflösen ergibt $y(x) = H^{-1}(G(x))$.

☺ Diese Methode fassen wir allgemein im folgenden Satz zusammen.

Separation der Variablen und Integration

Satz M1A: Lösung separierbarer Differentialgleichungen

Zu lösen sei die separierbare Differentialgleichung

$$\boxed{y' = g(x)\,h(y) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0.}$$

Gegeben sind hierzu stetige Funktionen $g : I \to \mathbb{R}$ und $h : J \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ auf Intervallen $I, J \subseteq \mathbb{R}$ sowie die Anfangswerte $x_0 \in I$ und $y_0 \in J$. Wir definieren Stammfunktionen $G : I \to \mathbb{R}$ und $H : J \to \mathbb{R}$ durch

$$G(x) := \int_{t=x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{und} \qquad H(y) := \int_{u=y_0}^{y} \frac{1}{h(u)}\,\mathrm{d}u.$$

Die Funktion H ist streng monoton, also bijektiv auf ihr Bild $H(J) \subseteq \mathbb{R}$. Sei $I_0 \subseteq I$ ein hinreichend kleines Intervall um $x_0 \in I_0$ mit $G(I_0) \subseteq H(J)$. Unser AWP erlaubt genau eine Lösung $y : \mathbb{R} \supseteq I_0 \to J \subseteq \mathbb{R}$, nämlich

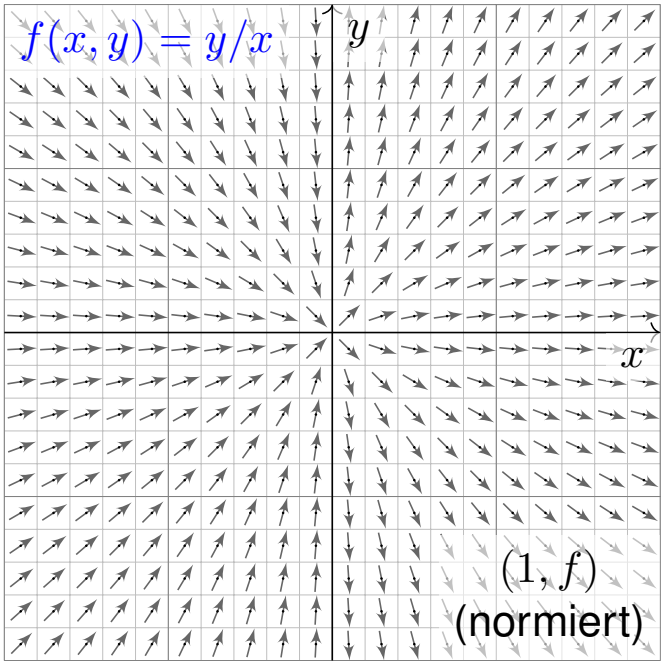
$$\boxed{y(x) = H^{-1}(G(x)).}$$

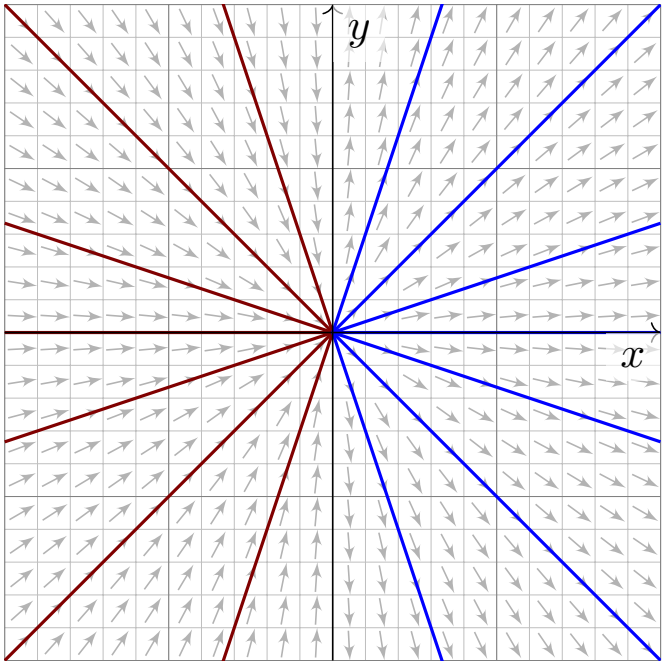
☺ Lösungsformel ☺ Eindeutigkeit ☺ Stetig abhängig von (x_0, y_0)

Die Geradengleichung: Richtungsfeld und Lösungsschar

M119
Beispiel

Aufgabe: Welche Funktionen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfüllen $x\,y'(x) = y(x)$?
Wie viele Lösungen laufen durch einen gegebenen Startpunkt (x_0, y_0)?





Die **implizite DG** $x\,y' = y$ ist definiert in allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Auf $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ ist sie äquivalent zur **expliziten DG** $y' = y/x$.

Separation der Variablen und Integration

M120
Beispiel

Lösung: Wir nehmen zunächst $x, y > 0$ an und trennen die Variablen:

$$x\,y'(x) = y(x)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{1}{x} \qquad \Longrightarrow \quad \int \frac{y'(x)}{y(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \mathrm{const}$$

$$\Longrightarrow \quad \ln y(x) = \ln x + \mathrm{const} \qquad \Longrightarrow \quad y(x) = a \cdot x$$

Unsere Rechnung beweist, dass wir tatsächlich alle Lösungen $y(x) > 0$ für $x > 0$ gefunden haben. Für $x < 0$ oder $y < 0$ verfahren wir ebenso.
Die explizite DG $y'(x) = y(x)/x$ wird gelöst durch die Halbgeraden

$$y_a^+ \;:\; \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} \;:\; x \mapsto a \cdot x, \quad a \in \mathbb{R},$$
$$y_b^- \;:\; \mathbb{R}_{<0} \to \mathbb{R} \;:\; x \mapsto b \cdot x, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Die implizite DG $x\,y'(x) = y(x)$ wird gelöst durch die Geraden

$$y_c \;:\; \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;:\; x \mapsto c \cdot x, \quad c \in \mathbb{R}.$$

☺ Durch jeden Startpunkt $(x_0 \neq 0, y_0)$ läuft genau eine Lösung y_c.
⚠ Durch den Startpunkt $(0, 0)$ laufen unendlich viele Lösungen!
⚠ Durch jeden Startpunkt $(0, y_0 \neq 0)$ läuft gar keine Lösung!

Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Problem? Bevor wir rechnen, präzisieren wir das Ziel! Probe? Liegt eine vermeintliche Lösung vor, so sind genau diese Eigenschaften zu prüfen!

Definition M1B: explizite DG und Anfangswertproblem

Eine **explizite Differentialgleichung erster Ordnung** hat die Form

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \text{kurz} \quad y' = f(x, y).$$

Gegeben ist als **rechte Seite** eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^2 \supseteq G \to \mathbb{R}$. Eine **Lösung** dieser Differentialgleichung auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ist eine (stetig) differenzierbare Funktion $y : I \to \mathbb{R}$, die für alle $x \in I$ die Bedingungen $(x, y(x)) \in G$ und $y'(x) = f(x, y(x))$ erfüllt.

Sind zudem **Anfangsdaten** $(x_0, y_0) \in G$ gegeben, so soll die Lösung y durch diesen Punkt laufen, das heißt $x_0 \in I$ und $y(x_0) = y_0$ erfüllen. Ein solches Anfangswertproblem heißt **gut gestellt**, wenn genau eine Lösung y existiert und stetig von den Anfangsdaten (x_0, y_0) abhängt.

Beispiel: Separierbare DG sind gut gestellt dank unseres Satzes M1A.

Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Existieren Lösungen? Überblick verschafft uns der grundlegende Satz:

Satz M1C: Cauchy Existenz- und Eindeutigkeitssatz, kurz ∃&E

Sei $f : \mathbb{R}^2 \supseteq G \to \mathbb{R}$ stetig. Zu lösen sei die Differentialgleichung

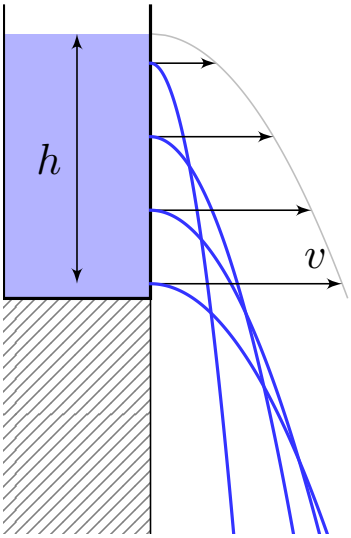
$$y' = f(x, y) \quad \text{mit Anfangswert} \quad y(x_0) = y_0.$$

(1) Zu jedem Startpunkt $(x_0, y_0) \in \mathring{G}$ existieren Lösungen $y : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}$. Jede kann beidseitig bis zum Rand ∂G (oder ∞) fortgesetzt werden.

(2) Ist $f(x, y)$ stetig diff'bar nach y, so ist die Lösung durch $(x_0, y_0) \in \mathring{G}$ eindeutig bestimmt. Lokal hängt sie stetig differenzierbar von (x_0, y_0) ab.

Wir werden diesen grundlegenden Satz in Kapitel O weiter ausführen und dort auch beweisen. Existenz bedeutet nach M1B: Es gibt ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ um x_0 und eine Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ mit $y(x_0) = y_0$ sowie $(x, y(x)) \in G$ und $y'(x) = f(x, y(x))$ für alle $x \in I$. Jede solche Lösung kann beidseitig fortgesetzt werden bis sie den Rand von G erreicht oder nach ∞ entkommt. Lässt sie sich nicht weiter fortsetzen, so heißt sie maximale Lösung. Folgendes Beispiel zeigt, dass es zu (x_0, y_0) auch mehrere Lösungen geben kann. Das Problem ist dann schlecht gestellt. Eindeutigkeit bedeutet: Sind $u : I \to \mathbb{R}$ und $v : J \to \mathbb{R}$ Lösungen mit $u(x_0) = v(x_0) = y_0$, so gilt $u = v$ auf dem gemeinsamen Intervall $I \cap J$. Sind u, v maximal, so gilt zudem $I = J$.

Warnendes Beispiel: Torricellis Eimer als Wasseruhr



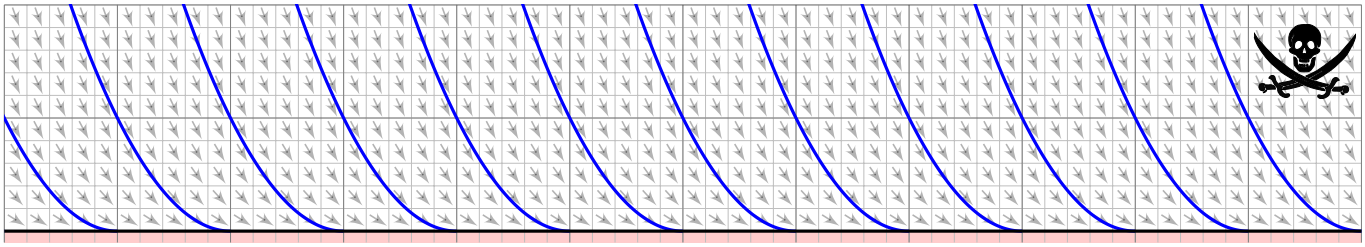
Torricellis Gesetz: Wasser fließt aus einem Zylinder mit der Geschwindigkeit $v = \sqrt{2\,g\,h}$. Hierbei ist h die Pegelhöhe, $g = 9.81\mathrm{m/s}^2$ die Erdbeschleunigung, also v die Geschwindigkeit eines Wassertropfens im freien Fall aus Höhe h.

Energiegleichung in der Strömungslehre!
`en.wikipedia.org/wiki/Torricelli's_law` und `/Water_clock`: Wie funktioniert eine Wasseruhr?
Zeit $t \in \mathbb{R}$, Wasserhöhe $y(t) \geq 0$ über der Öffnung.

Der Pegel y erfüllt **Torricellis Differentialgleichung** $y'(t) = -a\sqrt{y(t)}$.
Die Konstante $a > 0$ hängt von der Größe (und Form) der Öffnung ab.
In folgender Rechnung nehmen wir zur Vereinfachung $a = 2$ an.

Aufgabe: Welche Funktionen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ erfüllen $y'(t) = -2\sqrt{y(t)}$?
Hier ist $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $f(t, y) = -2\sqrt{y}$. Was sagt der ∃&E-Satz?
Welche Anfangswertprobleme $y(t_0) = y_0$ sind hier gut gestellt?
Physik will Determinismus; Mathematik bietet Existenz & Eindeutigkeit!

Warnendes Beispiel: Torricellis Eimer als Wasseruhr



Lösung: Die Nullfunktion $y(t) = 0$ ist eine Lösung. Sei also $y > 0$.
Separation $y'(t) \,/\, 2\sqrt{y(t)} = -1$ und Integration zu $\sqrt{y(t)} = c - t \geq 0$.
Wir finden die Lösung $y_c(t) = (c - t)^2$ für $t \leq c$. Für $t > c$ gilt das nicht:
☺ Der Eimer bleibt leer und füllt sich nicht wieder! Maximale Lösung:

$$y_c \,:\, \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \,:\, t \mapsto y_c(t) = \begin{cases} (c-t)^2 & \text{für } t \leq c, \\ 0 & \text{für } t \geq c. \end{cases}$$

☺ Jedes AWP $y(t_0) = y_0 > 0$ hat genau eine maximale Lösung!

⚠ Jedes AWP $y(t_0) = 0$ hat unendlich viele Lösungen (y_c mit $c \leq t_0$).

Letzteres ist schlecht gestellt. Anschaulich: Ist der Eimer einmal leer, so erkennen wir nicht mehr, wann er auslief! Mathematische Warnung: Für $y > 0$ ist $f(t, y) = -2\sqrt{y}$ stetig nach y diff'bar, für $y = 0$ aber nicht!

Exakte Differentialgleichungen: erstes Beispiel

Zwecks Illustration beginne ich mit einem sehr einfachen Beispiel.

Aufgabe: Wir betrachten erneut $y'(x) = -x/y(x)$, umgeschrieben zu

$$\boxed{2x + 2y(x) \cdot y'(x) = 0.}$$

Dieser Typ von Differentialgleichung hat die allgemeine Form

$$\begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = 0 \qquad \text{hier mit} \qquad \begin{cases} f(x,y) = 2x, \\ g(x,y) = 2y. \end{cases}$$

(1) Wie liegen die Lösungen $x \mapsto (x, y(x))$ zum Vektorfeld (f, g)?

(2) Finden und skizzieren Sie ein Potential $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zu (f, g).

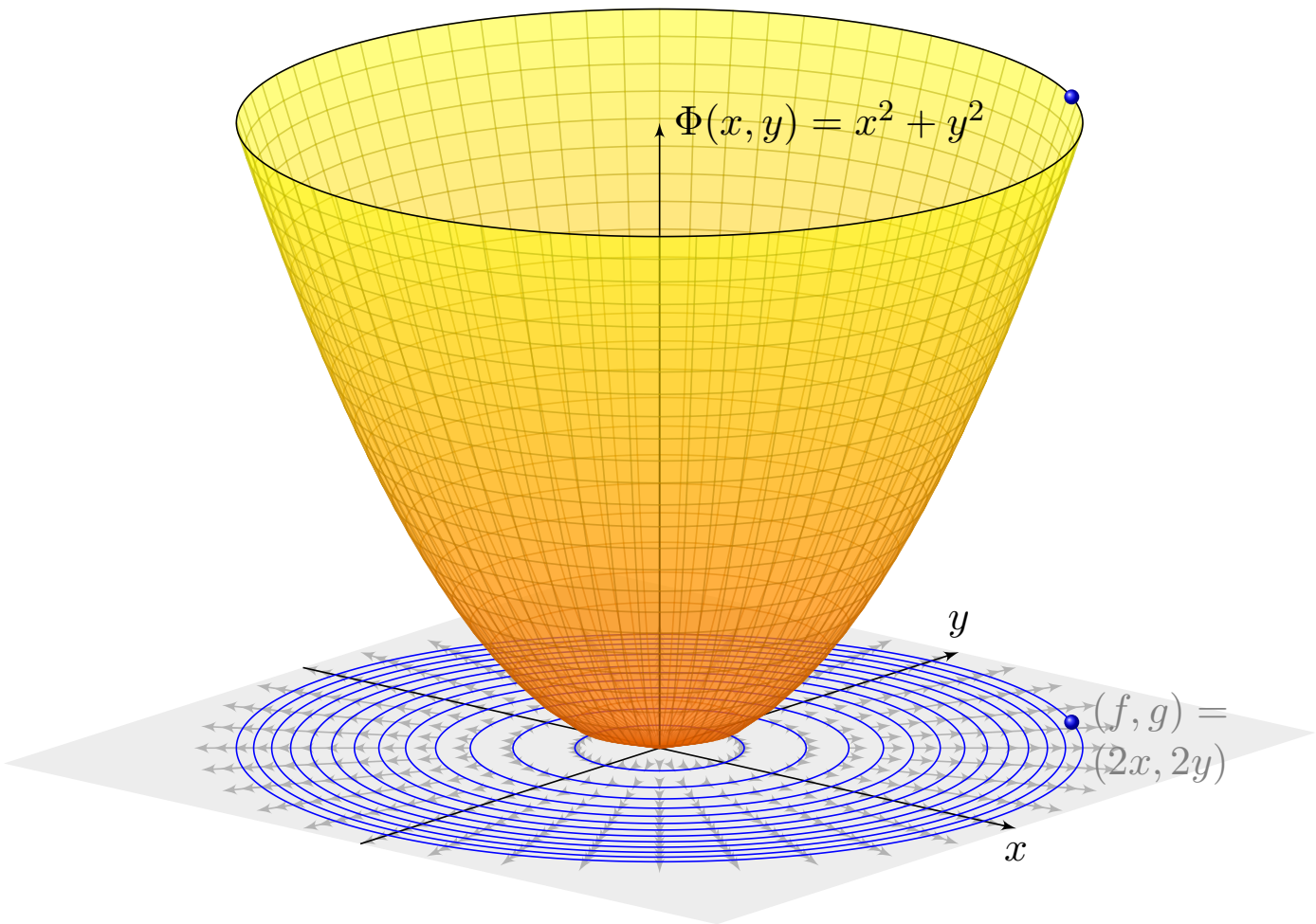
(3) Gewinnen Sie aus den Niveaulinien von Φ die Lösungen der DG.

(4) Finden Sie die maximalen Lösungen mit $y(3) = 4$ bzw. $y(1) = -1$.

Lösung: (1) Jede Lösung verläuft senkrecht zum Vektorfeld (f, g).

(2) Notwendiges Kriterium: Gilt $\operatorname{rot}(f, g) = 0$, also $\partial_y f = \partial_x g$? Ja!
Zudem ist $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend, also existiert ein Potential.
Wir finden $\Phi(x, y) = x^2 + y^2$ $(+\,\mathrm{const})$. Probe: $\operatorname{grad} \Phi = (2x, 2y)$.

Exakte Differentialgleichungen: erstes Beispiel



Exakte Differentialgleichungen: erstes Beispiel

(3) Die Niveaulinien des Potentials Φ sind Kreise um den Nullpunkt. Diese stehen senkrecht zum radialen Gradientenfeld $\operatorname{grad}\Phi = (f, g)$. Die allgemeinen Lösungen $y(x)$ der DG sind somit Halbkreise: Zu jedem Radius $r > 0$ hat die DG demnach die beiden Lösungen

$$y_r^{\pm} \,:\,]-r, r[\, \to \mathbb{R} \,:\, x \mapsto \pm\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Probe: Erfüllt diese Funktion tatsächlich $2x + 2y(x) \cdot y'(x) = 0$? Ja! Der folgende Satz versichert uns, dass wir so alle Lösungen finden. Das Definitionsintervall von $y_r^{\pm}$ haben wir jeweils maximal gewählt.

(4a) Auflösen von $\Phi(x, y(x)) = x^2 + y(x)^2 \overset{!}{=} \Phi(3, 4) = 25$ ergibt

$$y(x) = +\sqrt{25 - x^2} \quad \text{für } -5 < x < 5.$$

(4b) Auflösen von $\Phi(x, y(x)) = x^2 + y(x)^2 \overset{!}{=} \Phi(1, -1) = 2$ ergibt

$$y(x) = -\sqrt{2 - x^2} \quad \text{für } -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}.$$

Die Konstante und das Vorzeichen werden jeweils so bestimmt, dass die Lösung durch den vorgegebenen Punkt $y(3) = 4$ bzw. $y(1) = -1$ läuft.

Exakte Differentialgleichungen: erstes Beispiel

☺ Das Potential Φ und die Lösungen $x \mapsto (x, y(x))$ sind anschaulich: Analytische Lösung und geometrische Interpretation ergänzen sich!

Wir nutzen hierzu die geometrischen Eigenschaften des Gradienten: Der Gradient $\operatorname{grad}\Phi = (f, g)$ zeigt in Richtung des steilsten Anstiegs. In jedem Punkt steht er senkrecht zur Niveaulinie (Äquipotentialkurve).

📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §4.9.

☺ Die Differentialgleichung $f(x, y) + g(x, y)\, y' = 0$ bedeutet: Jede Lösung $x \mapsto (x, y(x))$ verläuft senkrecht zum Vektorfeld (f, g). Der Satz M2A garantiert, dass die Lösungen genau die Niveaulinien von Φ sind, also keine Lösungen hinzukommen oder verloren gehen.

☺ Potential und Lösungen können wir meist gut berechnen! Hier nutzen wir unsere Integralsätze und Techniken aus Kapitel H: Notwendig ist zunächst die Rotationsfreiheit $\operatorname{rot}(f, g) = 0$. Auf einfach zusammenhängenden (z.B. konvexen) Gebieten ist dies hinreichend.

☺ Sind die Voraussetzungen zur Existenz eines Potentials gesichert, so können wir (f, g) zu einem Potential integrieren und die DG lösen!

Exakte Differentialgleichungen: die Idee

Die Trennung der Variablen ist nützlich, aber leider nicht immer möglich. Hier hilft das allgemeinere Lösungsverfahren für **exakte DG** weiter: Angenommen $y : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y(x)$, erfüllt eine Gleichung

$$\Phi(x, y(x)) = \text{const}$$

für eine Funktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \supseteq G \to \mathbb{R}$. Für die Ableitung nach x gilt dann

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi(x, y(x)) = 0.$$

Sind $\Phi(x, y)$ und $y(x)$ stetig differenzierbar, so gilt dank Kettenregel

$$\partial_x\Phi(x, y(x)) \cdot 1 + \partial_y\Phi(x, y(x)) \cdot y'(x) = 0.$$

Eine Differentialgleichung dieser Form heißt **exakt** mit Potential Φ. Lösungen $x \mapsto (x, y(x))$ sind dann **Äquipotentialkurven** von Φ (M2A).

☺ In Anwendungen verläuft die Rechnung typischerweise umgekehrt: Die Differentialgleichung ist gegeben, wir prüfen Exaktheit, bestimmen ein Potential Φ und lösen schließlich die Gleichung $\Phi(x, y) = c$ nach y. Meist wird ein Anfangswert (x_0, y_0) vorgeben und somit $c = \Phi(x_0, y_0)$.

Exakte Differentialgleichungen: die Methode

Satz M2A: Lösung exakter Differentialgleichung

Jedes stetige Vektorfeld $(f, g) : \mathbb{R}^2 \supseteq G \to \mathbb{R}^2$, G offen, definiert eine DG

$$\boxed{f(x, y) + g(x, y)\, y' = 0.}$$

Diese DG heißt **exakt**, wenn ein Potential Φ zu (f, g) existiert, also eine C^1–Funktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \supseteq G \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad}\Phi = (f, g)$, d.h. $\partial_x\Phi = f$, $\partial_y\Phi = g$. Die Lösungen der DG sind dann die Äquipotentialkurven von Φ:

(1) Eine differenzierbare Funktion $y : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}$ ist genau dann Lösung der Differentialgleichung, wenn $\Phi(x, y(x)) = \text{const}$ für alle $x \in I$ gilt.

(2) Zu jedem Punkt $(x_0, y_0) \in G$ mit $g(x_0, y_0) \neq 0$ existiert ein offenes Intervall I um x_0 und genau eine Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ mit $y(x_0) = y_0$.

☺ Implizite Lösung ☺ Eindeutigkeit ☺ Stetig abhängig von (x_0, y_0)
☺ Explizit: Wir können $\Phi(x, y(x)) = c := \Phi(x_0, y_0)$ nach $y(x)$ auflösen, zumindest lokal falls $g(x_0, y_0) \neq 0$ dank Satz über implizite Funktionen. Wie leicht die explizite Auflösung gelingt, hängt vom Einzelfall ab.

Exakte Differentialgleichungen: die Methode

Aufgabe: Rechnen Sie die Äquivalenz (1) nach, also „$\Rightarrow$“ und „$\Leftarrow$“.

Lösung: (1a) Die Implikation „$\Leftarrow$“ besagt, dass jede Äquipotentialkurve y mit $\Phi(x, y(x)) = \mathrm{const}$ die DG löst. Dank Kettenregel gilt wie gesehen:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi(x, y(x)) &= \partial_x\Phi(x, y(x)) \cdot 1 + \partial_y\Phi(x, y(x)) \cdot y'(x) \\ &= f(x, y(x)) + g(x, y(x))\, y'(x) \end{aligned}$$

(1b) Die Implikation „$\Rightarrow$“ besagt, dass jede Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ der DG eine Äquipotentialkurve von Φ ist. Für $a, b \in I$ gilt nämlich dank HDI:

$$\begin{aligned} \Phi(b, y(b)) - \Phi(a, y(a)) &= \int_{x=a}^{b} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\Phi(x, y(x))\Big]\,\mathrm{d}x \\ = \int_{x=a}^{b} f(x, y(x)) + g(x, y(x))\, y'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{x=a}^{b} 0\,\mathrm{d}x = 0. \end{aligned}$$

☺ Demnach sind die Lösungskurven $x \mapsto y(x)$ genau die Niveaulinien! Dank (2) ist das Niveau tatsächlich eine *Linie* (und kein *Plateau* o.ä.): Wir erhalten die eindeutige Lösung y durch Auflösen von $\Phi(x, y) = c$.

Wie löst man exakte Differentialgleichungen?

Seien $f, g : \mathbb{R}^2 \supseteq G \to \mathbb{R}$ stetig. Die Differentialgleichung

$$f(x, y) + g(x, y)\, y' = 0$$

ist genau dann exakt, wenn das zugehörige Vektorfeld

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \supseteq G \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$$

exakt ist, also ein Potential $\Phi : G \to \mathbb{R}$ besitzt. Zur Erinnerung (H2E):

(f, g) ist exakt, d.h. $\exists\Phi : \partial_x\Phi = f, \partial_y\Phi = g$	$\xRightarrow{(f,g)\text{ stetig diff'bar}}$ $\xLeftarrow[G\text{ einfach zshgd}]{}$	f ist rotationsfrei, d.h. $\partial_x g = \partial_y f$

☺ Ein Potential $\Phi(x, y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (f, g) \bullet \mathrm{d}\gamma$ konstruieren wir durch das Arbeitsintegral: wegunabhängig da $\mathrm{rot}(f, g) = 0$ und G einfach zshgd. Zur praktischen Berechnung eignet sich koordinatenweise Integration.

☺ Bei der Anwendung auf DG muss G notfalls eingeschränkt werden, z.B. ein kleines Rechteck um (x_0, y_0), damit G einfach zshgd wird (E3D).

Was ist ein integrierender Faktor?

Unser Ziel und Slogan: Was noch nicht exakt ist, wird exakt gemacht!
Sei $(f,g):\mathbb{R}^2 \supseteq G \to \mathbb{R}^2$ stetig. Zu lösen sei die Differentialgleichung

$$\boxed{f(x,y) + g(x,y)\,y' = 0.}$$

☺ Mit einem Potential Φ zu (f,g) können wir diese DG lösen, wie zuvor.
Wenn nicht? Multiplikation mit $\lambda \neq 0$ ergibt die äquivalente Gleichung

$$\boxed{\lambda(x,y)\,f(x,y) + \lambda(x,y)\,g(x,y)\,y' = 0.}$$

Diese beiden Differentialgleichungen haben genau dieselben Lösungen!
Anschaulich: Die Richtung von (f,g) bleibt, nur die Länge wird skaliert.
Falls (f,g) selbst schon ein Potential hat, dann genügt der Faktor $\lambda = 1$.
Andernfalls wollen wir (f,g) umformen, um eine exakte DG zu erhalten:

Definition M2B: integrierender Faktor

Eine Funktion $\lambda : G \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ heißt **integrierender Faktor** zu (f,g), wenn das skalierte Vektorfeld $(\lambda f, \lambda g) : G \to \mathbb{R}^2$ ein Potential hat.

Integrierender Faktor: ein einfaches Beispiel

Aufgabe: Wir betrachten das Vektorfeld $(f,g):\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2y^3 + y \\ x^3y^2 - x \end{pmatrix}.$$

Existiert ein Potential? Ist $\lambda(x,y) = (xy)^{-1}$ ein integrierender Faktor?

Lösung: (1) Wir prüfen als erstes die Rotation:

$$\operatorname{rot}(f,g) = \partial_x g - \partial_y f = (3x^2y^2 - 1) - (3x^2y^2 + 1) = -2 \neq 0$$

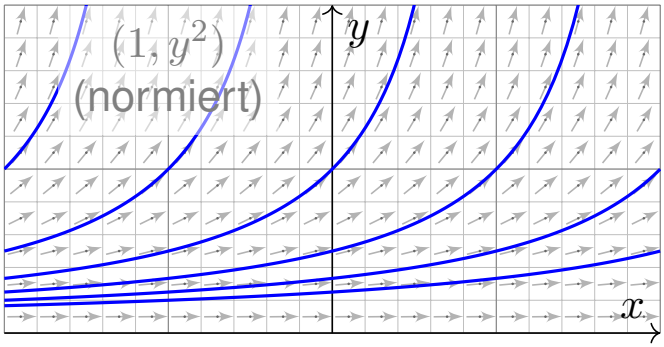
Das Vektorfeld (f,g) erlaubt demnach kein Potential.
(2) Multiplikation mit $\lambda(x,y) = (xy)^{-1}$ skaliert unser Vektorfeld zu

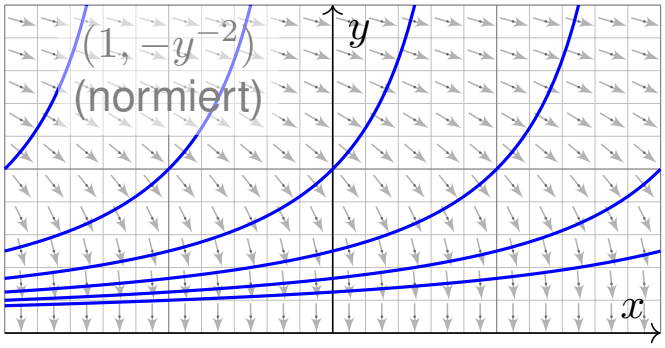
$$\begin{pmatrix} \lambda f \\ \lambda g \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x\,y^2 + 1/x \\ x^2y - 1/y \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{rot}(\lambda f, \lambda g) = 2xy - 2xy = 0.$$

⚠ Hierzu müssen wir das Gebiet $\mathbb{R}^2$ auf $x, y \neq 0$ einschränken!
Auf diesem ist $\lambda(x,y) = (xy)^{-1}$ ein integrierender Faktor für (f,g).
Als Potential finden wir $\Phi(x,y) = x^2y^2/2 + \ln|x| - \ln|y|$ für $x, y \neq 0$.

Exakt verallgemeinert separierbar.

Beispiel: Wir können $y' = y^2$ umschreiben zu $1 - y'/y^2 = 0$.
Wir gelangen so von einer separierbaren zu einer exakten DG!





Aufgabe: Auf einem Rechteck $G = I \times J \subseteq \mathbb{R}^2$ betrachten wir die DG

$$(1) \qquad y' = g(x)\,h(y) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0.$$

Diese können wir äquivalent umwandeln zu

$$(2) \qquad g(x)\,h(y) - y' = 0 \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0.$$

Ist diese DG exakt? Ist $\lambda(x, y) = 1/h(y)$ ein integrierender Faktor?
Lösen Sie so (2). Vergleichen Sie mit der Separationsmethode für (1).

Exakt verallgemeinert separierbar.

Lösung: Das Vektorfeld $(\,g(x)h(y),\ -1\,)$ ist i.A. nicht exakt, denn

$$\partial_y\big[g(x)h(y)\big] = g(x)h'(y) \quad \neq \quad \partial_x\big[-1\big] = 0.$$

Durch Multiplikation mit $\lambda(x, y) = 1/h(y)$ erhalten wir eine exakte DG:

$$g(x) + \frac{-1}{h(y)}\,y' = 0, \quad \text{denn} \quad \partial_y\Big[g(x)\Big] = \partial_x\left[\frac{-1}{h(y)}\right] = 0.$$

Als Potential findet wir $\Phi(x, y) = G(x) - H(y)$ mit

$$G(x) := \int_{t=x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{und} \qquad H(y) := \int_{u=y_0}^{y} \frac{1}{h(u)}\,\mathrm{d}u.$$

☺ Auflösen von $G(x) - H(y) = 0$ liefert $y(x) = H^{-1}(G(x))$ wie zuvor.
In diesem Spezialfall erhalten wir erneut die Separationsmethode M1A.

☺ Jede separierbare DG lässt sich so in eine exakte DG umformen.
Wie zuvor müssen wir hierzu $h(y) \neq 0$ für alle $y \in J$ voraussetzen.

☺ Umgekehrt ist nicht jede exakte DG auch separierbar. M215 M316
Exakte DG erweitern daher wesentlich unseren Werkzeugkasten!

Wie berechnet man einen integrierenden Faktor?

Bedingung für einen integrierenden Faktor zum Vektorfeld (f, g):

$$\boxed{\partial_y \big[\lambda(x,y)\, f(x,y)\big] = \partial_x \big[\lambda(x,y)\, g(x,y)\big]}$$

☹ Dies ist eine partielle Differentialgleichung für $\lambda(x, y)$:

$$(\partial_y \lambda)\, f + \lambda\, (\partial_y f) = (\partial_x \lambda)\, g + \lambda\, (\partial_x g)$$

Leider gibt es keine allgemeine Methode zur Lösung dieser Gleichung.

☺ In wichtigen Spezialfällen gibt es jedoch integrierende Faktoren, die nur von einer Variablen abhängen, also nur von x oder nur von y.

Aufgabe: Lösen Sie diese Gleichung für $\lambda = \lambda(x)$, also $\partial_y \lambda = 0$.

Lösung: Die obige Gleichung vereinfacht sich für $\lambda(x)$ zu:

$$\lambda(x)\, \partial_y f(x,y) = \lambda'(x)\, g(x,y) + \lambda(x)\, \partial_x g(x,y)$$

Wir lösen nach λ auf und erhalten folgende gewöhnliche DG:

$$\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = \frac{\partial_y f(x,y) - \partial_x g(x,y)}{g(x,y)} = -\frac{\operatorname{rot}(f,g)}{g}(x,y)$$

☺ Dies ist lösbar, wenn auch die rechte Seite nur von x abhängt!

Integrierende Faktoren in nur einer Variablen

Satz M2c: integrierende Faktoren in nur einer Variablen

Für jeden nur von x abhängigen integrierenden Faktor $\lambda = \lambda(x)$ gilt:

$$\boxed{\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = \frac{\partial_y f(x,y) - \partial_x g(x,y)}{g(x,y)}, \quad \text{kurz:} \quad \frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = -\frac{\operatorname{rot}(f,g)}{g}(x,y)}$$

Für jeden nur von y abhängigen integrierenden Faktor $\lambda = \lambda(y)$ gilt:

$$\boxed{\frac{\lambda'(y)}{\lambda(y)} = \frac{\partial_x g(x,y) - \partial_y f(x,y)}{f(x,y)}, \quad \text{kurz:} \quad \frac{\lambda'(y)}{\lambda(y)} = +\frac{\operatorname{rot}(f,g)}{f}(x,y)}$$

Dies ist lösbar, wenn auch die rechte Seite nur von x bzw. y abhängt.

Ob eine dieser Lösungen möglich ist, muss man ausprobieren. Die Vorgehensweise ist wie folgt: Auf einem einfach-zusammenhängenden Gebiet G ist das Vektorfeld (f, g) genau dann exakt, wenn $\operatorname{rot}(f, g) = 0$ gilt. Diese sehr einfache Bedingung wird man deshalb als erstes prüfen. Ist $\operatorname{rot}(f, g) \neq 0$, so kann man hoffen, dass die Rotation wie oben formuliert ein Vielfaches von g oder von f ist. Dann greifen obige Kriterien: Wir können einen integrierenden Faktor λ berechnen, das Vektorfeld durch λ korrigieren und schließlich zu einem Potential integrieren.

Beispielrechnung für einen integrierenden Faktor

Aufgabe: Lösen Sie für $x > 0$ die Differentialgleichung

$$\boxed{\left[1 - x^2 y(x)\right] + \left[x^2 y(x) - x^3\right] y'(x) = 0.}$$

(1) Ist sie separierbar? (2) exakt? (3) Existiert ein integrierender Faktor?
(4) Finden Sie ein Potential und (5) damit alle Lösungskurven $x \mapsto y(x)$.

Lösung: (1) Separierbar? $f(x,y) = \frac{x^2y-1}{x^2y-x^3} \overset{?}{=} g(x)\,h(y)$: Nein! Beweis?

Es gilt $f(1,3)f(2,4) = \frac{2}{2} \cdot \frac{15}{8} = \frac{15}{8}$, aber $f(1,4)f(2,3) = \frac{3}{3} \cdot \frac{11}{4} = \frac{11}{4}$. M316

(2) Exakt? Hier ist $f(x,y) = 1 - x^2 y$ und $g(x,y) = x^2 y - x^3$, also

$$\operatorname{rot}(f,g) = \partial_x g - \partial_y f = (2xy - 3x^2) + x^2 = 2xy - 2x^2 \neq 0$$

Die DG ist demnach leider nicht exakt. Glücklicherweise gilt jedoch

$$-\frac{\operatorname{rot}(f,g)}{g} = -\frac{2xy - 2x^2}{x^2y - x^3} = -\frac{2x(y-x)}{x^2(y-x)} = -\frac{2}{x}.$$

(3) Daher gibt es einen nur von x abhängigen integrierenden Faktor:

$$\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = -\frac{2}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|\lambda(x)| = -2\ln|x| + \text{const} \quad \Rightarrow \quad \lambda(x) = c\,x^{-2}$$

Beispielrechnung für einen integrierenden Faktor

Die Konstante c ist für den Multiplikator unerheblich. Wir setzen $c = 1$.
(4) Wir berechnen ein Potential zum reskalierten Vektorfeld

$$\begin{pmatrix} \lambda f \\ \lambda g \end{pmatrix} : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^{-2} - y \\ y - x \end{pmatrix}.$$

Nun gilt $\operatorname{rot}(\lambda f, \lambda g) = 0$. Probe! Wir integrieren koordinatenweise:

$$\begin{aligned} \partial_x \Phi(x,y) &\overset{!}{=} x^{-2} - y \quad &\Longrightarrow \quad \Phi(x,y) &= \textstyle\int x^{-2} - y \,\mathrm{d}x \\ &&&= -x^{-1} - xy + c(y). \\ \partial_y \Phi(x,y) = -x + c'(y) &\overset{!}{=} y - x \quad &\Longrightarrow \quad c(y) &= \textstyle\int y \,\mathrm{d}y \\ &&&= y^2/2 + \text{const} \end{aligned}$$

Wir finden so das Potential $\Phi(x,y) = y^2/2 - xy - 1/x$. Probe!

(5) Die Lösungskurven $x \mapsto y(x)$ der DG sind die Niveaulinien von Φ:

$$y(x)^2/2 - x\,y(x) - 1/x = c.$$

Auflösen nach y ergibt $y(x) = x \pm \sqrt{x^2 + 2/x + 2c}$. Die Probe ist leicht!

Lineare Differentialgleichung: homogen

Zu lösen sei die **homogene lineare Differentialgleichung**

$$\boxed{y'(x) = a(x)\,y(x).}$$

Hierbei ist $a : I \to \mathbb{R}$ stetig auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ sowie $x_0 \in I$.

Aufgabe: Bestimmen Sie die Menge L aller Lösungen $y : I \to \mathbb{R}$.
Ist L ein reeller Untervektorraum in $C(I, \mathbb{R})$? Welcher Dimension?

Lösung: Die Nullfunktion $y = 0$ löst $y'(x) = a(x)\,y(x)$.
Wir nehmen $y(x) \neq 0$ an, sodass wir durch $y(x)$ dividieren können:
Separation $y'(x)/y(x) = a(x)$ und Integration zu $\ln|y(x)| = A(x) + C$
liefert $|y(x)| = \mathrm{e}^{A(x)+C}$ also $y(x) = \pm\,\mathrm{e}^{C}\,\mathrm{e}^{A(x)}$ mit der Stammfunktion

$$A \,:\, I \to \mathbb{R} \,:\, x \mapsto A(x) := \int_{t=x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t$$

Wir erhalten somit alle Lösungen $y_c(x) = c\,\mathrm{e}^{A(x)}$ mit $c \in \mathbb{R}$. Probe!

☺ Diese Lösungsformel gilt für $c > 0$ und $c < 0$ ebenso wie für $c = 0$.

Lineare Differentialgleichung: homogen

Ist unsere Lösungsmenge $L = \{\, y_c = c\,\mathrm{e}^{A} \mid c \in \mathbb{R} \,\}$ bereits vollständig?
Wir nutzen den Eindeutigkeitssatz M1C oder rechnen es direkt nach:

Angenommen, irgendeine Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ erfüllt $y'(x) = a(x)\,y(x)$.
Wir betrachten den Quotienten $q(x) = y(x)/y_1(x)$ und leiten ab:

$$q'(x) = \frac{y'(x)y_1(x) - y(x)y_1'(x)}{y_1(x)^2} = \frac{a(x)y(x)\cdot y_1(x) - y(x)\cdot a(x)y_1(x)}{y_1(x)^2} = 0$$

Auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ folgt aus $q' = 0$, dass die Funktion q konstant ist.
Demnach gilt $y = c\,y_1 = y_c$. Wir kennen also tatsächlich *alle* Lösungen!

☺ Alle Lösungen sind Vielfache der Fundamentallösung $\mathrm{e}^{A(x)}$.
Anders gesagt, die Lösungsmenge $\{\, y_c : I \to \mathbb{R} : x \mapsto c\,\mathrm{e}^{A(x)} \mid c \in \mathbb{R} \,\}$
ist hier ein reeller Vektorraum der Dimension 1 mit Basis $y_1(x) = \mathrm{e}^{A(x)}$.

☺ Die lineare Struktur ist später für DG n-ter Ordnung sehr nützlich:
In diesem Fall ist die Lösungsmenge ein Vektorraum der Dimension n.
Die Konstruktion einer Basis, also eines „Fundamentalsystems“ von Lösungen der DG, gestaltet die Rechnung besonders übersichtlich.

Lineare Differentialgleichung: homogen

Da lineare Differentialgleichungen häufig vorkommen, halten wir fest:

Satz M2D: Lösungsformel für homogene lineare DG

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $a : I \to \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}$. Zu lösen ist

$$\boxed{y'(x) = a(x)\, y(x) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0.}$$

Es existiert genau eine Lösung $y : I \to \mathbb{R}$, und diese ist gegeben durch

$$\boxed{y(x) = \mathrm{e}^{A(x)}\, y_0 \quad \text{mit} \quad A(x) = \int_{t=x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t.}$$

☺ Lösungsformel ☺ Eindeutigkeit ☺ Stetig abhängig von (x_0, y_0)

☺ Die Lösungsmenge $L_0 = \{\, \mathrm{e}^A\, y_0 \mid y_0 \in \mathbb{R} \,\}$ ist ein 1-dim. Vektorraum!
Das heißt: Linearkombinationen von Lösungen sind wieder Lösungen.
Die Zuordnung $\mathbb{R} \to L_0 : y_0 \mapsto \mathrm{e}^A\, y_0$ ist ein Vektorraumisomorphismus.

☺ Die gesamte Lösungsmenge wird damit besonders übersichtlich und wesentlich einfacher zu beschreiben als bei nicht-linearen Problemen!

Lineare Differentialgleichung: homogen

Aufgabe: Welche der folgenden DG sind (homogen) linear?

$$y' = y, \quad y' = y/x, \quad y' = -xy, \quad y' = xy, \quad y' = x, \quad y' = x^2, \quad y' = y^2.$$

Für lineare finde man alle Lösungen und die spezielle durch (x_0, y_0).
Ist auch für die nicht-linearen die Lösungsmenge ein Vektorraum?

Lösung: Unter den bisher diskutierten DG sind folgende linear:

Lineare DG	$\Rightarrow$	allgemeine Lösung,	AWP zu (x_0, y_0)
$y' = y$	$\Rightarrow$	$y(x) = c \cdot \mathrm{e}^x$,	$y(x) = y_0 \cdot \mathrm{e}^{(x - x_0)}$
$y' = y/x$	$\Rightarrow$	$y(x) = c \cdot x$,	$y(x) = y_0 \cdot x/x_0$
$y' = -xy$	$\Rightarrow$	$y(x) = c \cdot \mathrm{e}^{-x^2/2}$,	$y(x) = y_0 \cdot \mathrm{e}^{(x_0^2 - x^2)/2}$
$y' = xy$	$\Rightarrow$	$y(x) = c \cdot \mathrm{e}^{x^2/2}$,	$y(x) = y_0 \cdot \mathrm{e}^{(x^2 - x_0^2)/2}$

Hingegen sind die DG $y' = x$ oder $y' = x^2$ oder $y' = y^2$ nicht linear.
Wir kennen hierzu die Lösungsmengen: sie bilden keinen Vektorraum!

Lineare Differentialgleichung: inhomogen

Aufgabe: Lösen Sie die **inhomogene lineare Differentialgleichung**

$$\boxed{y'(x) = a(x)\,y(x) + b(x) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0.}$$

Lösung: (0) Direkt integrierbar? Nur für $a = 0$. Im Folgenden sei $a \neq 0$. (1) Separierbar? Nur für $b = ka$ mit $k \in \mathbb{R}$. (2) Exakt? Leider auch nicht:

$$\underbrace{-a(x)\,y - b(x)}_{f(x,\,y)} + \underbrace{1}_{g(x,\,y)}\,y' = 0 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{rot}(f,g) = \partial_x g - \partial_y f = a \neq 0$$

(3) Integrierender Faktor? Löse $\lambda'(x)/\lambda(x) = -\operatorname{rot}(f,g)/g = -a(x)$! Integration ergibt $A(x) = \int_{t=x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t$ und $\lambda(x) = \mathrm{e}^{-A(x)} > 0$. Also:

$$-\big[\mathrm{e}^{-A(x)} a(x)\,y(x) + \mathrm{e}^{-A(x)}\,b(x)\big] + \big[\mathrm{e}^{-A(x)}\big]y'(x) = 0$$

Diese DG ist exakt. (Probe!) Hierzu finden wir das Potential

$$\Phi(x,y) = \mathrm{e}^{-A(x)}\,y - \int_{t=x_0}^{x} \mathrm{e}^{-A(t)}\,b(t)\,\mathrm{d}t. \qquad \text{(Probe!)}$$

Auflösen der Gleichung $\Phi(x,y) = \Phi(x_0,y_0) = y_0$ nach y liefert

$$y(x) = \mathrm{e}^{A(x)} \int_{t=x_0}^{x} \mathrm{e}^{-A(t)}\,b(t)\,\mathrm{d}t \;+\; \mathrm{e}^{A(x)}\,y_0. \qquad \text{(Probe!)}$$

Lineare Differentialgleichung: inhomogen

Satz M2E: Lösungsformel für lineare DG 1. Ordnung

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetig, sowie $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}$. Die homogene DG $y'(x) = a(x)\,y(x)$ mit $y(x_0) = y_0$ wird gelöst durch $y_1(x) = \mathrm{e}^{A(x)}\,y_0$ mit $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t$. Zur inhomogenen Gleichung

$$\boxed{y'(x) = a(x)\,y(x) + b(x) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0}$$

existiert genau eine Lösung $y : I \to \mathbb{R}$, und diese ist gegeben durch

$$\boxed{y(x) \;=\; \mathrm{e}^{A(x)} \int_{t=x_0}^{x} \mathrm{e}^{-A(t)}\,b(t)\,\mathrm{d}t \;+\; \mathrm{e}^{A(x)}\,y_0.}$$

☺ Lösungsformel ☺ Eindeutigkeit ☺ Stetig abhängig von (x_0, y_0)

☺ Für $a = 0$ ist's der HDI. ☺ Für $b = 0$ entfällt der inhomogene Term.

☺ Die Lösungsmenge $L_b = \{\, y_b + \mathrm{e}^{A}\,y_0 \mid y_0 \in \mathbb{R} \,\}$ ist ein affiner Raum. „Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen“.

☺ Diese Lösungsformel gilt allgemein für lineare DGSysteme (O3D).

Lineare Differentialgleichung: erstes Beispiel

Aufgabe: Lösen Sie für $x > 0$ die Differentialgleichung

$$\boxed{y' = y/x + x^3 \quad \text{mit} \quad y(1) = y_0.}$$

Lösung: Diese DG ist linear mit $a(x) = 1/x$ und $b(x) = x^3$.

$$A(x) = \int_{t=1}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=1}^{x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln t\Big]_{t=1}^{x} = \ln x.$$

Der integrierende Faktor ist $\mathrm{e}^{-A(x)} = 1/x$. Damit finden wir:

$$\int_{t=1}^{x} \mathrm{e}^{-A(t)}\, b(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=1}^{x} t^{-1} \cdot t^3\,\mathrm{d}t = \int_{t=1}^{x} t^2\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{t^3}{3}\Big]_{t=1}^{x} = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}$$

Als Lösung unserer Differentialgleichung gewinnen wir schließlich:

$$y(x) = \mathrm{e}^{A(x)} \int_{t=x_0}^{x} \mathrm{e}^{-A(t)}\, b(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{A(x)}\, y_0 = \underbrace{\frac{x^4 - x}{3}}_{\text{partikuläre Lösung}} + \underbrace{x\, y_0}_{\text{homogene Lösung}}$$

☺ Die Probe ist leicht! Sorgfältig einsetzen und ableiten...
Vergleichen Sie dies mit der obigen homogenen DG $y' = y/x$.

Lineare Differentialgleichung: zweites Beispiel

Aufgabe: Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\boxed{y' = -xy + x^3 \quad \text{mit} \quad y(0) = y_0.}$$

Lösung: Diese DG ist linear mit $a(x) = -x$ und $b(x) = x^3$.

$$A(x) = \int_{t=0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{x} -t\,\mathrm{d}t = \Big[-\frac{t^2}{2}\Big]_{t=0}^{x} = -\frac{x^2}{2}$$

Der integrierende Faktor ist $\mathrm{e}^{-A(x)} = \mathrm{e}^{x^2/2}$. Damit finden wir:

$$\int_{t=0}^{x} \mathrm{e}^{-A(t)}\, b(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{x} \mathrm{e}^{t^2/2}\, t^3\,\mathrm{d}t \qquad \text{Subs} \begin{cases} u = t^2/2, \\ \mathrm{d}u = t\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

$$\overset{\text{Subs}}{=} \int_{u=0}^{x^2/2} \mathrm{e}^{u} \cdot 2u\,\mathrm{d}u \overset{\text{part}}{=} \Big[\mathrm{e}^{u}\,(2u - 2)\Big]_{u=0}^{x^2/2} = \mathrm{e}^{x^2/2}(x^2 - 2) + 2$$

Als Lösung unserer Differentialgleichung gewinnen wir schließlich:

$$y(x) = \mathrm{e}^{A(x)} \int_{t=x_0}^{x} \mathrm{e}^{-A(t)}\, b(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{A(x)}\, y_0 = \underbrace{x^2 - 2 + 2\,\mathrm{e}^{-x^2/2}}_{\text{partikuläre Lösung}} + \underbrace{\mathrm{e}^{-x^2/2} y_0}_{\text{homogene Lösung}}$$

☺ Die Probe ist leicht! Sorgfältig einsetzen und ableiten...

Elementar lösbare Differentialgleichungen

Sei $f : \mathbb{R}^2 \supseteq G \to \mathbb{R}$ stetig. Zu lösen sei die **Differentialgleichung**

$$\boxed{y'(x) = f(x, y(x)) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0.}$$

Qualitativer Überblick dank **Existenz- und Eindeutigkeitssatz** M1C:
(1) Im Inneren $\mathring{G}$ existieren Lösungen und laufen bis zum Rand ∂G.
(2) Ist f stetig diff'bar nach y, so ist die Lösung durch $(x_0, y_0) \in \mathring{G}$ eindeutig bestimmt und hängt stetig von diesen Anfangswerten ab.

Elementar lösen können wir vor allem **exakte Differentialgleichungen**:

- $f(x, y) + g(x, y)\, y' = 0$ ist exakt, wenn $(f, g) = \operatorname{grad} \Phi$. M206

Wichtige **Spezialfälle** hiervon sind:

- $y' = f(x)$ durch Integration dank HDI. B123
- $y' = g(x)\, h(y)$ durch Trennung der Variablen. M118
- $y' = a(x)\, y + b(x)$ lineare DG, explizite Lösungsformel. M222

Durch **Substitution** hierauf zurückführbar sind:

- $y' = f(ax + by + c)$ mit Substitution $v = ax + by + c$. M409
- $y' = f(y/x)$ Ähnlichkeits-DG, mit Substitution $v = y/x$. M411
- $y' = a(x)\, y + b(x)\, y^n$ Bernoulli–DG, mit Substitution $v = y^{1-n}$. M413

Existenz, Eindeutigkeit, Lösungsmethoden

Kapitel M präsentiert die wichtigsten Lösungsmethoden für gewöhnliche eindimensionale Differentialgleichungen sowie Anwendungsbeispiele.

Zahlreiche Aufgaben üben, illustrieren und vertiefen diese Techniken. Das ist für Differentialgleichungen unentbehrlich: Üben, üben, üben!

Eine Lösung zu finden ist schwer, sie zu überprüfen ist meist leicht. Deshalb sollen Sie am Ende jeder Rechnung die Probe machen!

Trotz allgemeiner Lösungstheorie und -methoden hat jede DG ihre Eigenarten: Man muss genau hinschauen und sorgfältig arbeiten!

Insbesondere ist zu klären und bei jeder Rechnung zu beachten, auf welchem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^2$ die DG definiert und Lösungen gesucht sind.

Bei allen Umformungen ist sicherzustellen oder nachträglich zu prüfen, dass keine fiktiven Lösungen hinzukommen oder echte verloren gehen.

Zur Sorgfalt gehört, die gefundenen / benachbarte / alle Lösungen zu prüfen, zu skizzieren, zu diskutieren und alle Sonderfälle zu beachten.

📖 Zur Vertiefung und für zahlreiche Anwendungsbeispiele siehe H. Heuser: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Vieweg, 6. Aufl. 2009

Zusammenfassung und Verständnisfragen

Aufgabe: Begründen Sie durch ein Ergebnis Ihrer Vorlesung oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel aus Ihrem Fundus:

(1) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig. Zu jedem Startpunkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ existiert ein Intervall $[x_0, x_1]$ mit $x_1 > x_0$ und eine Funktion $y : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ mit $y(x_0) = y_0$ und $y'(x) = f(x, y(x))$ für alle $x \in [x_0, x_1]$.

(2) Sei $f : [x_0, x_1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $y_0 \in \mathbb{R}$. Dann existiert eine Lösung $y : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ mit $y(x_0) = y_0$ und $y'(x) = f(x, y(x))$ für alle $x \in [x_0, x_1]$.

(3) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig. Für je zwei Funktionen $y, \tilde{y} : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ mit $y(x_0) = \tilde{y}(x_0) = y_0$ sowie $y'(x) = f(x, y(x))$ und $\tilde{y}'(x) = f(x, \tilde{y}(x))$ für alle $x \in [x_0, x_1]$ gilt Gleichheit $y(x) = \tilde{y}(x)$ für alle $x \in [x_0, x_1]$.

(4) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig und nach y stetig differenzierbar. Für je zwei Lösungen wie in (3) gilt Gleichheit $y(x) = \tilde{y}(x)$ für alle $x \in [x_0, x_1]$.

(5) Ist jede separierbare DG exakt? bis auf integrierenden Faktor?

(6) Ist jede lineare DG exakt? bis auf einen integrierenden Faktor?

(7) Ist jede exakte DG separierbar? Ist jede exakte DG linear? Nennen Sie eine exakte DG, die weder separierbar noch linear ist.

Zusammenfassung und Verständnisfragen

Lösung: (1) Ja, das ist die Existenzaussage des ∃&E-Satzes M1C.

(2) Nein, wir können das Lösungsintervall $[x_0, x_1]$ nicht vorschreiben: Die Lösung y startet in $y(x_0) = y_0$, kann aber noch vor Erreichen von x_1 an den Rand gelangen M115 oder nach Unendlich entkommen M113.

(3) Nein, die Stetigkeit der rechten Seite f allein reicht hierzu nicht. Ein anschauliches Gegenbeispiel ist Torricellis Wasseruhr $y' = \sqrt{|y|}$ M123; ganz ähnlich ist $y' = \sqrt[3]{y(x)^2}$ M325 und allgemein $y' = |y|^\alpha$ O233.

(4) Ja, das ist die Eindeutigkeitsaussage des ∃&E-Satzes M1C.

(5) Die separierbare DG $y' = g(x)h(y)$ schreiben wir $g(x)h(y) - y' = 0$. In dieser Form ist sie exakt nur für $g(x) = 0$ oder $h'(y) = 0$. Sie wird exakt durch Multiplikation mit dem integrierenden Faktor $1/h(y)$. M211

(6) Die lineare DG $y' = a(x)y + b(x)$ schreiben wir $a(x)y + b(x) - y' = 0$. In dieser Form ist sie exakt nur für $a(x) = 0$. Sie wird exakt durch Multiplikation mit dem integrierenden Faktor $\mathrm{e}^{-A(x)}$ mit $A' = a$. M221

(7) Nicht jede exakte DG ist separierbar, ebenso ist nicht jede linear. Beispiele sind leicht zu konstruieren: $x + y^2 + 2xyy' = 0$ für $x, y > 0$ ist exakt, aber $y' = {}^1\!/\!_2(y/x + 1/y)$ ist weder linear noch separierbar. M316

Separierbare Differentialgleichungen

Satz M1A erklärt die Lösung **separierbarer Differentialgleichungen**:

$$\boxed{y' = g(x)\,h(y) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0}$$

Gegeben sind hierzu stetige Funktionen $g : I \to \mathbb{R}$ und $h : J \to \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ auf Intervallen $I, J \subseteq \mathbb{R}$ sowie Anfangswerte $x_0 \in I$ und $y_0 \in J$.
Wir definieren Stammfunktionen $G : I \to \mathbb{R}$ und $H : J \to \mathbb{R}$ durch

$$G(x) := \int_{t=x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{und} \qquad H(y) := \int_{u=y_0}^{y} \frac{1}{h(u)}\,\mathrm{d}u.$$

Die Funktion H ist streng monoton, also bijektiv auf ihr Bild $H(J) \subseteq \mathbb{R}$.
Sei $I_0 \subseteq I$ ein hinreichend kleines Intervall um $x_0 \in I_0$ mit $G(I_0) \subseteq H(J)$.
Das AWP erlaubt genau eine Lösung $y : \mathbb{R} \supseteq I_0 \to J \subseteq \mathbb{R}$, nämlich

$$\boxed{y(x) = H^{-1}(G(x)).}$$

☺ Lösungsformel ☺ Eindeutigkeit ☺ Stetig abhängig von (x_0, y_0)
☺ Die Probe ist leicht! Einsetzen und sorgfältig nachrechnen...

Lineare Differentialgleichungen

Satz M2E erklärt die Lösungsformel für **lineare DG erster Ordnung**:

$$\boxed{y'(x) = a(x)\,y(x) + b(x) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0}$$

Hierzu sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}$.
Die homogene DG $y'(x) = a(x)y(x)$ mit $y(x_0) = y_0$ wird gelöst durch $y_1(x) = \mathrm{e}^{A(x)}\,y_0$ mit $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t$. Zur inhomogenen Gleichung existiert genau eine Lösung $y : I \to \mathbb{R}$, und diese ist gegeben durch

$$\boxed{y(x) \;=\; \mathrm{e}^{A(x)} \int_{t=x_0}^{x} \mathrm{e}^{-A(t)}\,b(t)\,\mathrm{d}t \;+\; \mathrm{e}^{A(x)}\,y_0.}$$

☺ Lösungsformel ☺ Eindeutigkeit ☺ Stetig abhängig von (x_0, y_0)
☺ Für $a = 0$ ist's der HDI. ☺ Für $b = 0$ entfällt der inhomogene Term.
☺ Die Lösungsmenge $\{\, y_b + \mathrm{e}^{A}\,y_0 \mid y_0 \in \mathbb{R} \,\}$ ist ein affiner Raum.
„Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen".
☺ Diese Lösungsformel gilt allgemein für lineare DGSysteme (O3D).
☺ Die Probe ist leicht! Einsetzen und sorgfältig nachrechnen...

Exakte Differentialgleichungen

Jedes stetige Vektorfeld $(f,g):\mathbb{R}^2 \supseteq G \to \mathbb{R}^2$, G offen, definiert eine DG

$$\boxed{f(x,y) + g(x,y)\,y' = 0.}$$

Diese DG heißt **exakt**, wenn ein Potential Φ zu (f,g) existiert, also eine C^1–Funktion $\Phi:\mathbb{R}^2 \supseteq G \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad}\Phi = (f,g)$, d.h. $\partial_x\Phi = f$, $\partial_y\Phi = g$.

Satz M2A erklärt die Lösungskurven exakter Differentialgleichung:
Die Lösungen $x \mapsto (x, y(x))$ der DG sind Äquipotentialkurven von Φ.

(1) Eine differenzierbare Funktion $y:\mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}$ ist genau dann Lösung der Differentialgleichung, wenn $\Phi(x,y(x)) = \mathrm{const}$ für alle $x \in I$ gilt.

(2) Zu jedem Punkt $(x_0,y_0) \in G$ mit $g(x_0,y_0) \neq 0$ existiert ein offenes Intervall I um x_0 und eine eindeutige Lösung $y: I \to \mathbb{R}$ mit $y(x_0) = y_0$.

☺ Implizite Lösung ☺ Eindeutigkeit ☺ Stetig abhängig von (x_0,y_0)

☺ Explizit: Wir können $\Phi(x,y(x)) = c := \Phi(x_0,y_0)$ nach $y(x)$ auflösen, zumindest lokal falls $g(x_0,y_0) \neq 0$ dank Satz über implizite Funktionen. Wie leicht die explizite Auflösung gelingt, hängt vom Einzelfall ab.

Integrierende Faktoren

Eine Funktion $\lambda: G \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ heißt **integrierender Faktor** zu (f,g), wenn das skalierte Vektorfeld $(\lambda f, \lambda g): G \to \mathbb{R}^2$ ein Potential hat.
Beispiele: Separierbar $\lambda(y) = 1/h(y)$ M211, linear $\lambda(x) = \mathrm{e}^{-A(x)}$ M221.

Satz M2C erklärt integrierende Faktoren in nur einer Variablen:
Für jeden nur von x abhängigen integrierenden Faktor $\lambda = \lambda(x)$ gilt:

$$\boxed{\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = \frac{\partial_y f(x,y) - \partial_x g(x,y)}{g(x,y)}, \quad \text{kurz:} \quad \frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = -\frac{\operatorname{rot}(f,g)}{g}(x,y)}$$

Für jeden nur von y abhängigen integrierenden Faktor $\lambda = \lambda(y)$ gilt:

$$\boxed{\frac{\lambda'(y)}{\lambda(y)} = \frac{\partial_x g(x,y) - \partial_y f(x,y)}{f(x,y)}, \quad \text{kurz:} \quad \frac{\lambda'(y)}{\lambda(y)} = +\frac{\operatorname{rot}(f,g)}{f}(x,y)}$$

Dies ist lösbar, wenn auch die rechte Seite nur von x bzw. y abhängt.
Ob eine dieser Lösungen möglich ist, muss man jeweils ausprobieren.

☺ Vorgehensweise: Man prüft zunächst $\operatorname{rot}(f,g) = 0$. Falls möglich, berechnet man ein Potential Φ zu (f,g), notfalls nur lokal um (x_0,y_0). Andernfalls versucht man einen der beiden obigen Korrekturfaktoren λ.

Methodenvergleich: Viele Wege führen zum Ziel.

Aufgabe: Wir untersuchen erneut (nach M119) die Differentialgleichung

$$\boxed{y(x) - x \cdot y'(x) = 0.}$$

Diese DG ist besonders einfach, an ihr testen wir all unsere Methoden.

(1) Ist diese Differentialgleichung separierbar? Ist sie exakt?

(2) Wird die DG exakt durch den Faktor $\lambda(x,y) = (xy)^{-1}$?
Finden und skizzieren Sie ein Potential für $x > 0$ und $y > 0$.

(3) Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung.
Finden Sie die maximale Lösung zum Anfangswert $y(1) = \pi$.

(4) Welche Anfangswertprobleme (x_0, y_0) sind hier gut gestellt?
Hängt die Lösung stetig von den Anfangwerten (x_0, y_0) ab?

(5) Ist die DG $y' = y/x$ linear? Was ergibt die Lösungsformel?
Gibt es einen int. Faktor, der nur von x abhängt? nur von y?

(6) Wird die DG exakt durch den Faktor $\lambda(x,y) = 1/(x^2+y^2)$?
Finden und skizzieren Sie ein Potential! Auf welchem Gebiet geht das?

Methodenvergleich: Viele Wege führen zum Ziel.

Lösung: (1) Diese DG ist separierbar. Wir können sie durch Trennung der Variablen integrieren, siehe M119. Sie ist jedoch nicht exakt:

$$\underbrace{(+y)}_{f(x,y)} + \underbrace{(-x)}_{g(x,y)}\, y'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{rot}(f,g) = \partial_x g - \partial_y f = -2 \neq 0$$

(2) Die äquivalente DG $1/x - y'/y = 0$ ist exakt!
Wir finden das Potential $\Phi(x,y) = \ln x - \ln y = \ln(x/y)$ für $x, y > 0$.
Lösungskurven $\ln(x/y) = \text{const}$, also $y(x) = cx$ für $x, c > 0$. Probe!

(3) Die explizite DG $y'(x) = y(x)/x$ wird gelöst durch die Halbgeraden $y_c^+ : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c \cdot x$, sowie $y_c^- : \mathbb{R}_{<0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c \cdot x$ mit $c \in \mathbb{R}$.
Die implizite DG $x\, y'(x) = y(x)$ wird gelöst durch die Geraden $y_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y(x) = c \cdot x$. Durch $(1, \pi)$ läuft die Lösung $y(x) = \pi x$.

(4) Durch jeden Startpunkt $(x_0 \neq 0, y_0)$ läuft genau eine Lösung y_c, nämlich die mit $c = y_0/x_0$, und diese hängt stetig von (x_0, y_0) ab.
Durch den Startpunkt $(0,0)$ laufen unendlich viele Lösungen!
Durch den Startpunkt $(0, y_0 \neq 0)$ läuft gar keine Lösung!

Methodenvergleich: Viele Wege führen zum Ziel.

(5) Die DG $y' = y/x$ ist linear mit $a(x) = 1/x$ und $b(x) = 0$. Lösung:

$$y(x) = y(1)\,\mathrm{e}^{A(x)} \quad \text{mit} \quad A(x) = \int_{t=1}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t = \ln x \quad \text{also} \quad y(x) = cx.$$

Dies entspricht den Lösungen aus (2), fortgesetzt wie in (3).
Der int. Faktor $\mathrm{e}^{-A(x)} = 1/x$ führt zur exakten DG $y/x^2 - y'/x = 0$.
Der int. Faktor $1/y$ führt zur exakten DG $1/x - y'/y = 0$ wie in (2).

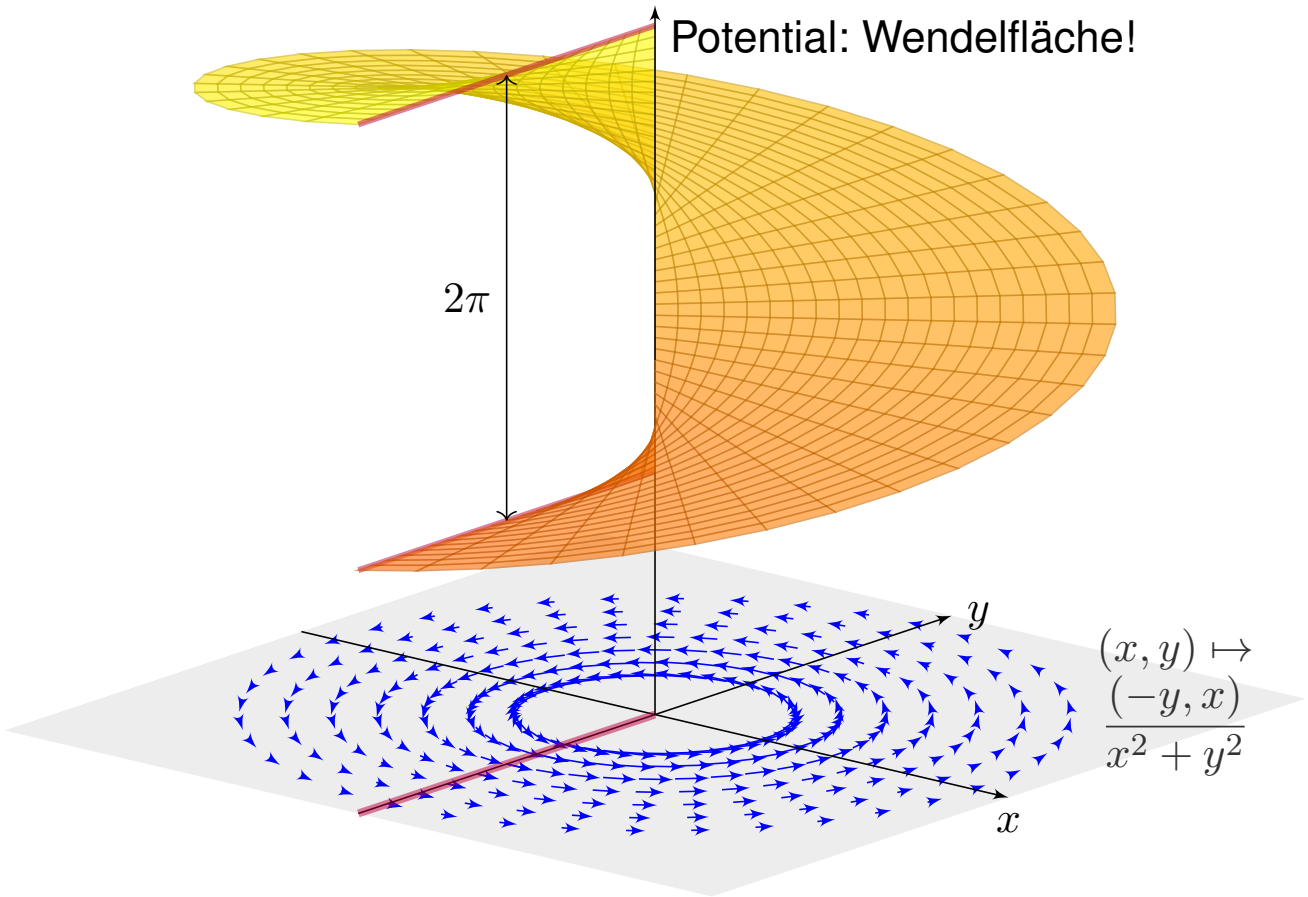
(6) Wir dividieren durch $x^2 + y^2$ und erhalten das Wirbelfeld:

$$\underbrace{\frac{-y}{x^2+y^2}}_{f(x,y)} + \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{g(x,y)}\, y'(x) = 0$$

Auf der punktierten Ebene $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sind beide DG äquivalent.
Die zweite erfüllt nun zudem die notwendige Bedingung $\mathrm{rot}(f, g) = 0$.

⚠ Das Gebiet G ist nun nicht mehr einfach zusammenhängend!
Potentiale sind Teile einer Wendelfläche: Diese schließt sich nicht!
Äquipotentialkurven sind Halbgeraden, wie in obigen Lösungen.

Methodenvergleich: Viele Wege führen zum Ziel.



Separation der Variablen: wann und wie?

Wie können wir bequem feststellen, ob $y' = f(x, y)$ separierbar ist?
Wie können wir andernfalls nachweisen, dass dies unmöglich ist?

Satz M3A: Kriterium für Separierbarkeit

Gegeben sei $f : \mathbb{R}^2 \supseteq I \times J \to \mathbb{R}$ stetig. Äquivalent sind:

(0) Die Funktion f lässt sich als Produkt $f(x, y) = g(x)\, h(y)$ separieren mit stetigen Faktoren $g : I \to \mathbb{R}$ und $h : J \to \mathbb{R}$.

(1) Für je zwei Punkte $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in I \times J$ ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} f(x_0, y_0) & f(x_0, y_1) \\ f(x_1, y_0) & f(x_1, y_1) \end{pmatrix}$$

singulär, ausgeschrieben $f(x_0, y_0) f(x_1, y_1) = f(x_1, y_0) f(x_0, y_1)$.

(2) Für jeden Punkt $(x_0, y_0) \in I \times J$ mit $f(x_0, y_0) \neq 0$ gilt

$$f(x, y) = \frac{f(x, y_0) \cdot f(x_0, y)}{f(x_0, y_0)} = g(x)\, h(y)$$

etwa mit $g : I \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x, y_0)$ und $h : J \to \mathbb{R} : y \mapsto f(x_0, y)/f(x_0, y_0)$.

Separation der Variablen: wann und wie?

Nachrechnen: „(0) $\Rightarrow$ (1)“: Angenommen es gilt $f(x, y) = g(x)\, h(y)$. Die Zeilenvektoren $g(x_0) \cdot (h(y_0), h(y_1))$ und $g(x_1) \cdot (h(y_0), h(y_1))$ sind dann linear abhängig, also $\det A = 0$. Gleiches gilt für Spaltenvektoren.

„(1) $\Rightarrow$ (2)“: Aus $f(x_0, y_0) f(x, y) = f(x, y_0) f(x_0, y)$ für alle $(x, y) \in I \times J$ folgt die Aussage (2), indem wir durch $f(x_0, y_0) \neq 0$ dividieren.

„(2) $\Rightarrow$ (0)“: Im Falle $f = 0$ genügen $g = 0$ und $h = 1$. Andernfalls gibt es einen Punkt $(x_0, y_0) \in I \times J$ mit $f(x_0, y_0) \neq 0$, sodass wir (2) anwenden können. Nach Konstruktion sind $g : I \to \mathbb{R}$ und $h : J \to \mathbb{R}$ stetig.

Die Äquivalenz (0) $\Leftrightarrow$ (1) $\Leftrightarrow$ (2) löst die eingangs gestellten Fragen:

☺ Wenn Sie $f(x, y)$ separieren wollen, dann zeigt (2) explizit wie: So konstruieren Sie bequem die gewünschten Faktoren g und h.

☺ Wenn dies nicht möglich sein sollte, dann zeigt (1) das Hindernis: Es genügt ein einziges Gegenbeispiel bestehend aus zwei Punkten $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in I \times J$ mit $f(x_0, y_0) f(x_1, y_1) \neq f(x_1, y_0) f(x_0, y_1)$.

Dann wissen Sie sicher, dass $y' = f(x, y)$ nicht separiert werden kann, und verschwenden keine kostbare Zeit mit langer, erfolgloser Suche.

Lineare Differentialgleichungen: wann und wie?

Wie können wir bequem feststellen, ob $y' = f(x,y)$ linear ist?
Wie können wir andernfalls nachweisen, dass dies unmöglich ist?

Satz M3B: Kriterium für Linearität

Gegeben sei $f : \mathbb{R}^2 \supseteq I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Äquivalent sind:

(0) Die Zuordnung $(x,y) \mapsto f(x,y)$ ist affin-linear in y, das heißt: Für alle $(x,y) \in I \times \mathbb{R}$ gilt $f(x,y) = a(x)\,y + b(x)$, wobei $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetig sind.

(1) Für jeden Punkt $(x,y) \in I \times \mathbb{R}$ gilt $f(x,y) = f(x,1)\,y + f(x,0)(1-y)$.

(2) Für $a, b : I \to \mathbb{R}$ mit $a(x) = f(x,1) - f(x,0)$ und $b(x) = f(x,0)$ gilt $f(x,y) = a(x)\,y + b(x)$ in jedem Punkt $(x,y) \in I \times \mathbb{R}$.

☺ Wenn Sie $f(x,y)$ linear schreiben wollen, dann zeigt (2) explizit wie: So konstruieren Sie bequem die gewünschten Funktionen a und b.

☺ Wenn dies nicht möglich sein sollte, dann zeigt (1) das Hindernis: Es genügt ein Gegenbeispiel mit $f(x,y) \neq f(x,1)\,y + f(x,0)(1-y)$.

Dann wissen Sie sicher, dass $y' = f(x,y)$ nicht linear sein kann, und verschwenden keine weitere Zeit mit erfolgloser Suche.

Linear oder separierbar, beides oder keines?

Aufgabe: Welche der folgenden Differentialgleichungen $y' = f_i(x,y)$ sind linear? separierbar? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

$$f_1(x,y) = \frac{x^2y^2 + 2x^2 + xy^3 + 2xy - 3y^2 - 6}{y^2 + 2}, \quad f_2(x,y) = \frac{x^2y - 1}{x^2y - x^3}$$

Lösung: (1) Ist f_1 affin-linear in y, also $f_1(x,y) = a(x)\,y + b(x)$, dann mit $f_1(x,0) = x^2 - 3 = b(x)$ und $f_1(x,1) = x + x^2 - 3$, also $a(x) = x$. Tatsächlich können wir den angegebenen Bruch wesentlich kürzen:

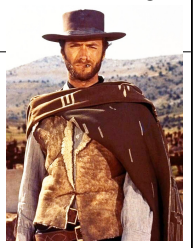
$$f_1(x,y) = \frac{(x^2 + xy - 3)(y^2 + 2)}{y^2 + 2} = \underbrace{x}_{a(x)}\,y + \underbrace{x^2 - 3}_{b(x)}$$

Ist f_1 separierbar? Nach einigen Proben sehen wir: Nein! Gegenbeispiel $f_1(0,0)f_1(1,1) = (-3)\cdot(-1) = 3$ und $f_1(1,0)f_1(0,1) = (-2)\cdot(-3) = 6$.

(2) Wäre $(x,y) \mapsto f_2(x,y)$ affin-linear in y, dann speziell auch für $x = 2$, also $y \mapsto (4y-1)/(4y-8)$. Dies hat jedoch eine Polstelle in $y = 2$!

Ist f_2 separierbar? Nach einigen Proben sehen wir: Nein! Gegenbeispiel: Es gilt $f_2(1,2)f_2(-1,3) = \frac{1}{1}\cdot\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, aber $f_2(-1,2)f_2(1,3) = \frac{2}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

Showdown: eine Handvoll Differentialgleichungen



Aufgabe: Mit welchen unserer Methoden können Sie folgende Differentialgleichungen lösen? Lösen Sie jede DG mit einem (jedem) der möglichen Verfahren. Machen Sie die Probe!

Gleichung \ Verfahren	Separation (M1A, M3A)	exakte DG (M2A, M2C)	lineare DG (M2E, M3B)
(1) $yy' + 2\sin(x) = 0$	✓	✓	–
(2) $y' = x + y$	–	–	✓
(3) $y' = y^2 \sin(x)$	✓	–	–
(4) $4 - \frac{y^2}{x^2} + 2\frac{y}{x}y' = 0$	–	✓	–
(5) $y' = \frac{y}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$	✓	–	✓

Showdown: eine Handvoll Differentialgleichungen

(1) Die Differentialgleichung $y\,y' + 2\sin(x) = 0$ ist nicht linear (M3B), aber exakt (M2A): Es gilt Rotationsfreiheit $\partial_x y = 0 = \partial_y \sin(x)$, und das (implizit gegebene) Definitionsgebiet $\mathbb{R}^2$ ist einfach zusammenhängend.

Zum Vektorfeld (f, g) mit $f(x, y) = 2\sin(x)$ und $g(x, y) = y$ finden wir das Potential $\Phi(x, y) = y^2/2 - 2\cos(x)$. Auflösen von $\Phi(x, y(x)) = c$ ergibt die Lösungen $y(x) = \pm\sqrt{4\cos(x) + c}$, wobei $c > -4$.

Diese DG kann ebenso durch Separation (M1A) gelöst werden:

$$\begin{aligned} & y(x)\,y'(x) = -2\sin(x) \\ \Longrightarrow\quad & \int y(x)y'(x)\,\mathrm{d}x = \int -2\sin(x)\,\mathrm{d}x \\ \Longrightarrow\quad & y(x)^2/2 = 2\cos(x) + \mathrm{const} \\ \Longrightarrow\quad & y(x) = \pm\sqrt{4\cos(x) + c} \end{aligned}$$

Probe: $y'(x) = \mp 2\sin(x)/\sqrt{4\cos(x) + c}$ erfüllt $y(x)\,y'(x) + 2\sin(x) = 0$.

(2) Die zweite Differentialgleichung $y' = x + y$ ist nicht exakt (M2A), denn $\partial_x(1) = 0 \neq -1 = \partial_y(-x - y)$, und auch nicht separierbar (M3A). Sie ist offensichtlich linear (M2E), und zwar mit $a(x) = 1$ und $b(x) = x$.

Showdown: eine Handvoll Differentialgleichungen

Integrierender Faktor ist hier $A(x) = \int_{t=x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=x_0}^{x} 1\,\mathrm{d}t = x - x_0$:

$$y(x) = \mathrm{e}^{A(x)} \int_{t=x_0}^{x} \mathrm{e}^{-A(t)}\, b(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{A(x)} y_0 = \mathrm{e}^{x-x_0} \int_{t=x_0}^{x} \mathrm{e}^{x_0-t}\, t\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{x-x_0} y_0$$

$$= \mathrm{e}^{x-x_0} \Big[-(\mathrm{e}^{x_0-t})(1+t) \Big]_{t=x_0}^{x} + \mathrm{e}^{x-x_0} y_0 = -(1+x) + \mathrm{e}^{x-x_0}(1 + x_0 + y_0)$$

Probe: $y'(x) = -1 + \mathrm{e}^{x-x_0}(1 + x_0 + y_0)$ erfüllt $y'(x) = x + y$.

(3) Die DG $y' = y^2 \sin(x)$ ist nicht exakt (M2A) und nicht linear (M3B), aber separierbar. Eine offensichtliche Lösung ist $y = 0$. Für $y \neq 0$ gilt:

$$y'(x) = y(x)^2 \sin(x) \quad \Longrightarrow \quad \frac{y'(x)}{y(x)^2} = \sin(x)$$

$$\Longrightarrow \quad \int \frac{y'(x)}{y(x)^2}\,\mathrm{d}x = \int \sin(x)\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{y(x)} = -\cos(x) + \mathrm{const}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{y(x)} = \cos(x) + c \quad \Longrightarrow \quad y(x) = \frac{1}{\cos(x) + c}$$

Probe: $y'(x) = \sin(x)/(\cos(x) + c)^2$ erfüllt $y'(x) = y(x)^2 \sin(x)$.

Showdown: eine Handvoll Differentialgleichungen

(4) Die Differentialgleichung $4 - y^2/x^2 + 2yy'/x = 0$ ist weder linear (M3B), noch separierbar (M3A), aber exakt (M2A): Wir finden das Potential $\Phi(x, y) = 4x + y^2/x$. Auflösen von $4x + y(x)^2/x = c$ ergibt $y(x) = \pm\sqrt{cx - 4x^2}$. Probe: $y'(x) = \pm(c - 8x)/2\sqrt{cx - 4x^2}$ erfüllt die DG.

(5) Die DG $y' = y/\sqrt{x} + 1/\sqrt{x}$ ist nicht exakt (M2A), aber linear (M2E) und separierbar (M1A): Eine Lösung ist $y = -1$. Für $y \neq -1$ finden wir:

$$y'(x) = \frac{y(x) + 1}{\sqrt{x}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{y'(x)}{y(x) + 1} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\Longrightarrow \quad \int \frac{y'(x)}{y(x) + 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \ln\big|y(x) + 1\big| = 2\sqrt{x} + \mathrm{const}$$

$$\Longrightarrow \quad \big|y(x) + 1\big| = \mathrm{e}^{2\sqrt{x} + \mathrm{const}} \quad \Longrightarrow \quad y(x) = c\,\mathrm{e}^{2\sqrt{x}} - 1$$

Der Faktor $c = \pm\,\mathrm{e}^{\mathrm{const}}$ kann Werte in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ annehmen; im Fall $c = 0$ finden wir erneut $y(x) = -1$. Probe: $y'(x) = c\,\mathrm{e}^{2\sqrt{x}}/\sqrt{x}$ erfüllt die DG.

Die Lösungsformel M2E für lineare DG liefert dasselbe Ergebnis; diese Rechnung führe ich hier nicht aus, sondern empfehle sie als Übung.

Rationale DG mit nicht-analytischen Lösungen

M321
Ausführung

Aufgabe: Wir suchen alle Funktionen $y : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}$ mit

$$\boxed{x^3\, y'(x) = 2\, y(x) \quad \text{für alle} \quad x \in I.}$$

(1) Klassifizieren Sie diese Differentialgleichung nach unserem Katalog: Ordnung, implizit / explizit, algebraisch, linear, separierbar, exakt, ...

Finden Sie Lösungen $y : \mathbb{R}_{<0} \to \mathbb{R}$ mit $y(-1) = a/\mathrm{e}$ und $y : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $y(1) = b/\mathrm{e}$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$. Sind diese Lösungen eindeutig? Skizze!

(2) Lassen sich diese lokalen Lösungen zu einer globalen Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen? Welcher Wert $y(0)$ muss zur Stetigkeit gewählt werden? Ist y dann differenzierbar? sogar stetig differenzierbar?

(3) Zu welchen Anfangswerten $y(x_0) = y_0$ existieren globale Lösungen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$? Sind diese eindeutig? Genauer: Durch welche Punkte $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ läuft genau eine Lösung / unendliche viele / gar keine?

(4) Sind die Lösungen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar? Sind sie analytisch? Finden Sie alle analytischen Lösungen!

📖 Siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, Beispiel 2.6.12, sowie B438. Obige Differentialgleichung M119 ist ähnlich, aber weniger dramatisch.

Rationale DG mit nicht-analytischen Lösungen

M322
Ausführung

Lösung: (1) Diese DG ist von erster Ordnung, implizit, algebraisch, d.h. von der Form $F(x, y, y') = 0$ mit einem Polynom F in x, y, y'.
Die explizite Gleichung $y'(x) = 2x^{-3}y(x)$ für $x \neq 0$ ist linear in y.
Die Gleichung kann für $x \neq 0$ und $y \neq 0$ separiert werden:

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{2}{x^3} \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{y'(x)}{y(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow \quad \ln y(x) = -1/x^2 + c \quad \Longrightarrow \quad y(x) = C\,\mathrm{e}^{-1/x^2}$$

Lokale Lösungen sind $y : \mathbb{R}_{<0} \to \mathbb{R} : x \mapsto a\,\mathrm{e}^{-1/x^2}$ mit $y(-1) = a/\mathrm{e}$ und $y : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} : x \mapsto b\,\mathrm{e}^{-1/x^2}$ mit $y(1) = b/\mathrm{e}$. Beide sind jeweils eindeutig.

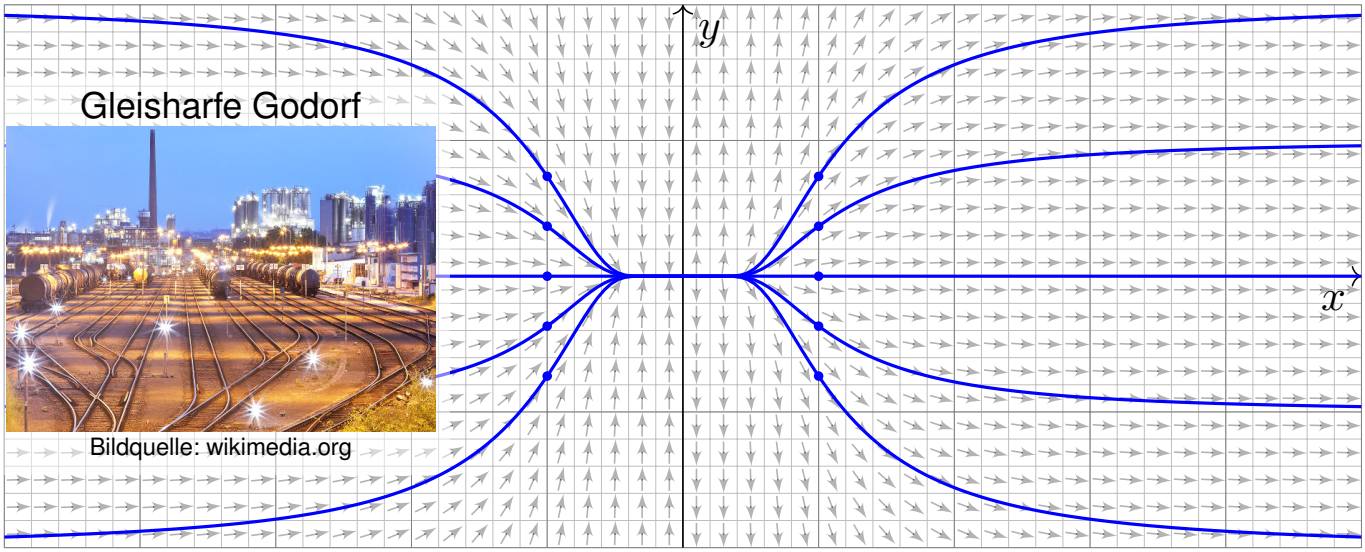
(2) Für $x \nearrow 0$ gilt $a\,\mathrm{e}^{-1/x^2} \to 0$. Für $x \searrow 0$ gilt $b\,\mathrm{e}^{-1/x^2} \to 0$. Wir setzen:

$$y_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y(x) = \begin{cases} a\,\mathrm{e}^{-1/x^2} & \text{für } x < 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ b\,\mathrm{e}^{-1/x^2} & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Diese Funktion ist stetig und sogar stetig differenzierbar (siehe unten).
☺ Damit sind alle Lösungen unserer Differentialgleichung gefunden!

Rationale DG mit nicht-analytischen Lösungen

Skizze der Lösungen $y_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für verschiedene Werte $a, b \in \mathbb{R}$:



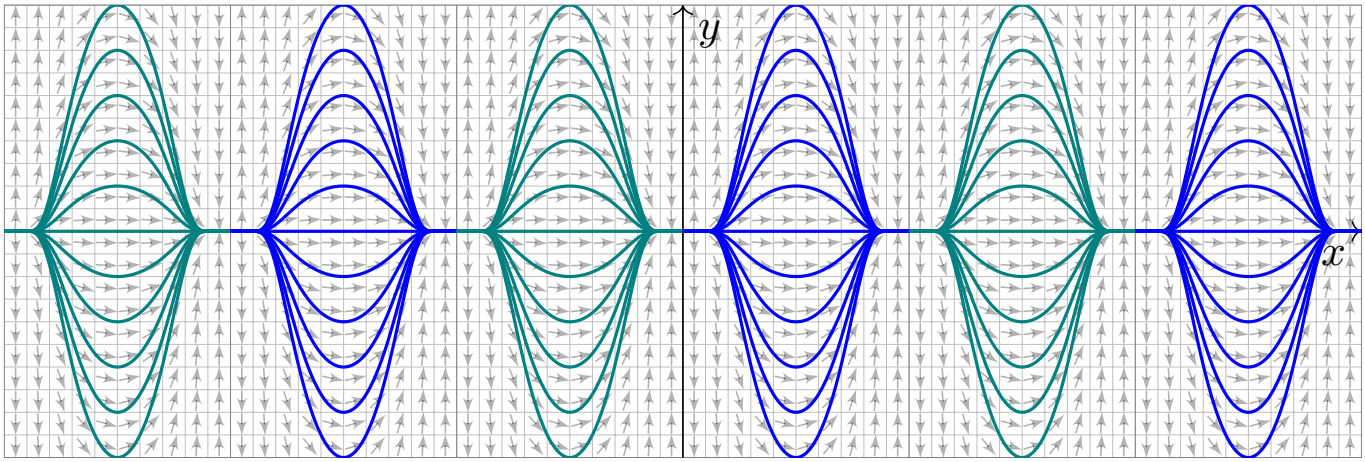
(3) Durch Punkte (x_0, y_0) mit $x_0 = 0$ und $y_0 \neq 0$ geht keine Lösung.
Durch jeden anderen Punkt verlaufen unendlich viele Lösungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$!

Zu $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x^3\, y'(x) = 2\, y(x)$ ist kein Anfangswertproblem $y(x_0) = y_0$ gut gestellt.
Die Einschränkung von y auf $\mathbb{R}_{<0}$ ist die eindeutige Lösung des AWP $y(-1) = a/\mathrm{e}$ auf $\mathbb{R}_{<0}$.
Die Einschränkung von y auf $\mathbb{R}_{>0}$ ist die eindeutige Lösung des AWP $y(+1) = b/\mathrm{e}$ auf $\mathbb{R}_{>0}$.
Erst die Wahl *beider* Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ legt die globale Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eindeutig fest.
Die Funktion y ist auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ analytisch, an der Klebestelle 0 noch glatt, aber nicht analytisch.

Rationale DG mit nicht-analytischen Lösungen

(4) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$ für $x > 0$ und $f(x) = 0$ für $x \leq 0$ ist beliebig oft diff'bar und in jedem Punkt $x \neq 0$ analytisch. B438

Jede Lösung $y_{a,b}(x) = a f(-x) + b f(x)$ ist beliebig oft differenzierbar.
Sie ist analytisch nur für $a = b = 0$, also die Nullfunktion $y_{0,0} = 0$.



☺ Ebenso lösen wir $\sin(x)^3\, y'(x) = 2\cos(x)\, y(x)$ zu $y(x) = a\, \mathrm{e}^{-1/\sin(x)^2}$.
Das erinnert an kosmologische Modelle vom Big Bang zum Big Crunch:
Dazwischen ist die Entwicklung deterministisch, darüber hinaus wird alle Information vollständig gelöscht (als vage, aber eindrückliche Analogie).

Gut & schlecht gestellte Anfangswertprobleme

Aufgabe: Finden Sie alle maximalen Lösungen

$$\begin{array}{llll} (1) & y : I \to \mathbb{R}_{>0} & \text{mit} & y'(x) = \sqrt[3]{y(x)^2}, \\ (2) & y : I \to \mathbb{R}_{\geq 0} & \text{mit} & y'(x) = \sqrt[3]{y(x)^2}, \\ (3) & y : I \to \mathbb{R} & \text{mit} & y'(x) = \sqrt[3]{y(x)^2}. \end{array}$$

(a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld und mögliche Lösungskurven.

(b) Qualitative Lösung: Welche AWP $y(x_0) = y_0$ sind gut gestellt?

(c) Quantitative Lösung: Berechnen Sie alle maximalen Lösungen.

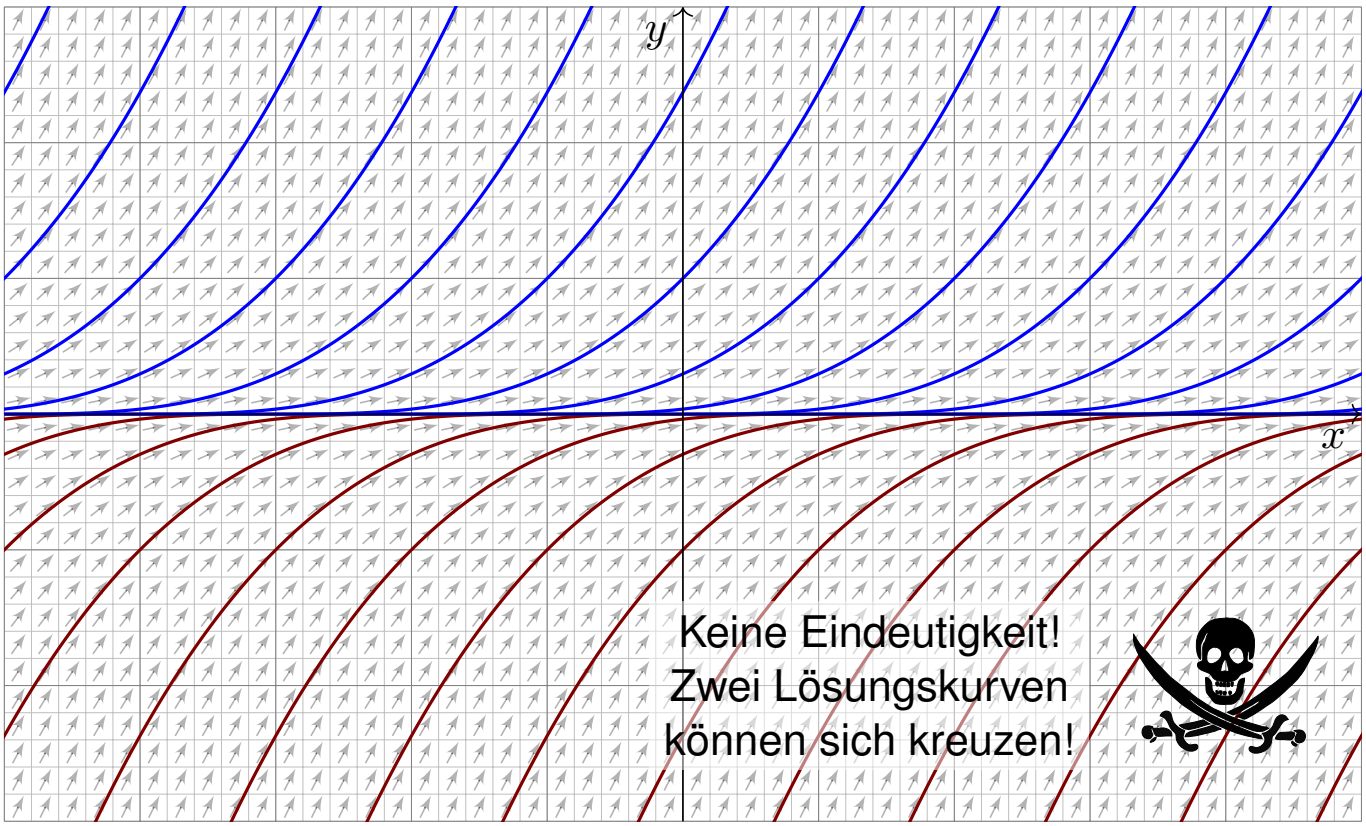
Lösung: (1c) Für $y > 0$ ist unsere DG äquivalent zu $y' = y^{2/3}$.
Separation $y^{-3/2}\, y' = 1$ und Integration zu $3y^{1/3} = x - b$.
Auflösen liefert $y(x) = (x-b)^3/27$ für $x > b$. Probe!
(1b) Zu jedem $b \in \mathbb{R}$ erhalten wir somit die maximale Lösung

$$y_b :]b, \infty[\to \mathbb{R}_{>0}, \quad y_b(x) = (x-b)^3/27.$$

Durch jeden Startpunkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$ läuft genau eine Lösung.
☺ Hier ist demnach jedes AWP $y(x_0) = y_0 > 0$ gut gestellt.

Gut & schlecht gestellte Anfangswertprobleme

(1a) Eine Skizze der gefundenen Lösungen schafft wie immer Überblick:



Gut & schlecht gestellte Anfangswertprobleme

(2c) Für $y \geq 0$ ist zudem die konstante Funktion $y(x) = 0$ eine Lösung.
Für $y > 0$ kennen wir die Lösungen $y_b(x) = (x-b)^3/27$ für $x > b$.
Jede lässt sich eindeutig fortsetzen zur maximalen Lösung

$$y_b \,:\, \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \,:\, x \mapsto y_b(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq b, \\ (x-b)^3/27 & \text{für } x \geq b. \end{cases}$$

(2b) Durch jeden Startpunkt (x_0, y_0) mit $y_0 > 0$ läuft genau eine Lösung.
Durch jeden Punkt $(x_0, 0)$ hingegen laufen unendlich viele Lösungen!

⚠ Jedes AWP $y(x_0) = y_0 > 0$ ist gut gestellt, aber $y(x_0) = 0$ schlecht.

Ohne Vorsichtsmaßnahmen sind Lösungen nicht immer eindeutig,
d.h. zum selben Anfangswert kann es verschiedene Lösungen geben.
Wir haben dieses Problem bereits für die Wasseruhr M123 diskutiert.
Die Gleisharfe M321 illustriert ebenso das Mehrdeutigkeitsproblem.
Der vorligende Fall ist ähnlich. Aber es kommt noch schlimmer...

Gut & schlecht gestellte Anfangswertprobleme

(3c) Für $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die konstante Funktion $y(x) = 0$ eine Lösung.
Für $y > 0$ kennen wir die Lösung $y(x) = (x-b)^3/27$ für $x > b$.
Für $y < 0$ finden wir ebenso $y(x) = (x-a)^3/27$ für $x < a$. Probe!
Für alle $a \leq b$ in $\mathbb{R}$ setzen wir diese zusammen zur maximalen Lösung

$$y_{a,b} \,:\, \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,:\, x \mapsto y_{a,b}(x) = \begin{cases} (x-a)^3/27 & \text{für } x \leq a, \\ 0 & \text{für } a \leq x \leq b, \\ (x-b)^3/27 & \text{für } x \geq b. \end{cases}$$

Hierbei lassen wir auch die Sonderfälle $a = -\infty$ und $b = +\infty$ zu.
(3b) Hier ist kein Anfangswertproblem $y'(x_0) = y_0$ gut gestellt.

⚠ Durch jeden Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ laufen unendlich viele Lösungen.

∃&E: Die rechte Seite ist nach y stetig diff'bar mit $\partial_y(y^{2/3}) = \frac{2}{3}y^{-1/3}$.
Dies gilt nur für $y \neq 0$. Auf der x–Achse gilt dieses Kriterium nicht mehr!
In solch kritischen Punkten ist Vorsicht und besondere Sorgfalt geboten.

Gut & schlecht gestellte Anfangswertprobleme

Aufgabe: Wir lösen die implizite Differentialgleichung $(y')^2 + y^2 = 1$ für $y' > 0$ bzw. $y' \geq 0$ auf zu den expliziten Differentialgleichungen

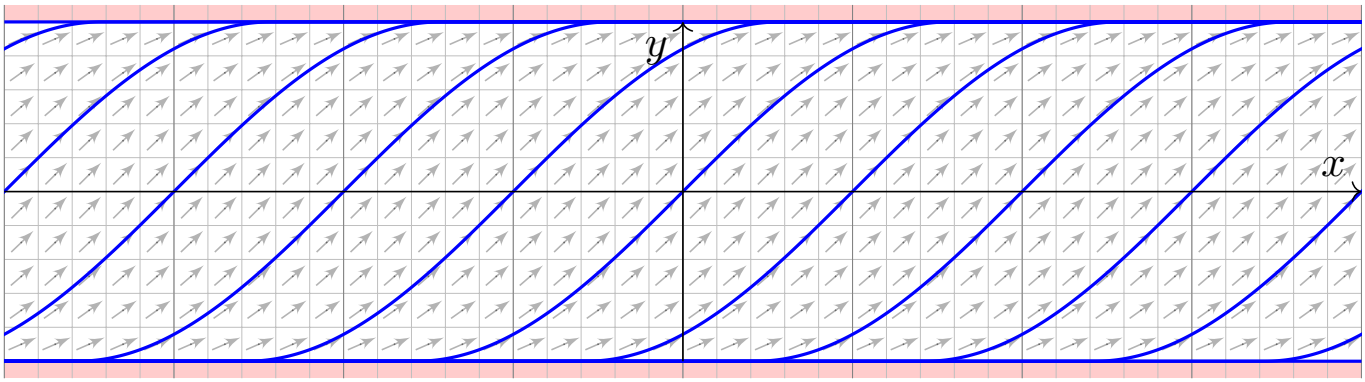
$$\begin{array}{llll} (1) & y'(x) = \sqrt{1 - y(x)^2} & \text{für} & -1 < y < 1, \\ (2) & y'(x) = \sqrt{1 - y(x)^2} & \text{für} & -1 \leq y \leq 1. \end{array}$$

(a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld und mögliche Lösungskurven.

(b) Qualitative Lösung: Welche AWP $y(x_0) = y_0$ sind gut gestellt?

(c) Quantitative Lösung: Berechnen Sie alle maximalen Lösungen.

Lösung: (a) Richtungsfeld und Lösungsskizzen auf $G = \mathbb{R} \times [-1, +1]$:



Gut & schlecht gestellte Anfangswertprobleme

(b) Zum Überblick suchen wir zunächst die **qualitative Lösung**:
Die rechte Seite $f(x, y) = \sqrt{1 - y^2}$ ist stetig auf ganz $G = \mathbb{R} \times [-1, 1]$.
Der ∃&E-Satz garantiert hier zumindest die **Existenz** von Lösungen.
Das heißt: Zu jedem Anfangswert (x_0, y_0) mit $x_0 \in \mathbb{R}$ und $-1 \leq y_0 \leq 1$ existiert **mindestens** eine Lösung; diese läuft beidseitig bis zum Rand.

Wir untersuchen genauer die Ableitung $\partial_y f(x, y) = -y/\sqrt{1 - y^2}$.
Die Funktion f ist stetig diff'bar auf dem Inneren $G^\circ = \mathbb{R} \times]-1, 1[$.
Der Satz garantiert hier **Existenz und Eindeutigkeit** von Lösungen.
Das heißt: Zu jedem Anfangswert (x_0, y_0) mit $x_0 \in \mathbb{R}$ und $-1 < y_0 < 1$ existiert **genau eine** Lösung; diese läuft beidseitig bis zum Rand.

☺ Diesen ersten Überblick verschaffen wir uns ganz ohne Rechnung!
Manchmal ist das auch schon alles, was wir wollen... oder können.

⚠ Die mangelnde Ableitung $\partial_y f$ auf dem Rand $y = \pm 1$ mahnt uns zu Vorsicht: Möglicherweise geht die Eindeutigkeit hier verloren.

⚠ Auf dem Rand macht der ∃&E-Satz keine Aussage mehr.
Wir lösen die Gleichung und schauen genauer hin...

Gut & schlecht gestellte Anfangswertprobleme

(c) Nun berechnen wir explizit die **quantitative Lösung**:

(1c) Für $-1 < y < 1$ gilt $\sqrt{1-y^2} \neq 0$, und wir können dividieren: Separation $y'/\sqrt{1-y^2} = 1$ und Integration zu $\arcsin(y) = x - c$ liefert $y(x) = \sin(x-c)$ unter der Bedingung $x \in \,]c - \pi/2, c + \pi/2[$.

(2c) Für jedes $c \in \mathbb{R}$ erhalten wir so die maximale Lösung

$$y_c : \mathbb{R} \to [-1,1] : x \mapsto y_c(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x \leq c - \pi/2, \\ \sin(x-c) & \text{für } c - \pi/2 \leq x \leq c + \pi/2, \\ +1 & \text{für } x \geq c + \pi/2. \end{cases}$$

Auch die konstanten Funktionen $y(x) = \pm 1$ sind Lösungen ($c = \mp\infty$).

☺ Zu jedem AWP (x_0, y_0) mit $|y_0| < 1$ existiert genau eine Lösung y_c. Für genau eine Verschiebung $c \in \mathbb{R}$ läuft y_c durch den Punkt (x_0, y_0).

⚠ Zum AWP (x_0, y_0) mit $y_0 = +1$ existieren unendlich viele Lösungen. Nämlich die konstante Lösung $y = +1$ sowie alle y_c mit $c \leq x_0 - \pi/2$.

⚠ Zum AWP (x_0, y_0) mit $y_0 = -1$ existieren unendlich viele Lösungen. Nämlich die konstante Lösung $y = -1$ sowie alle y_c mit $c \geq x_0 + \pi/2$.

Gut & schlecht gestellte Anfangswertprobleme

Zur Illustration habe ich hier vornehmlich Beispiele vorgestellt, die sich möglichst leicht und in geschlossener Form lösen lassen.

Für viele Differentialgleichungen ist keine geschlossene Lösung möglich! Zum Beispiel hat $y'(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$ mit $y(0) = 0$ die eindeutige Lösung

$$y(x) = \int_{t=0}^{x} \mathrm{e}^{-t^2/2} \, \mathrm{d}t.$$

Für dieses Integral gibt es nachweislich keine elementare Formel. B145
In solchen Fällen greifen wir auf numerische Methoden zurück. B147
Damit lässt sich nahezu jede praktische Frage ebenso gut handhaben.

Bevor man jedoch solcherart numerische Approximation unternimmt, muss man sicherstellen, dass die DG gut gestellt ist, also das Problem überhaupt eine eindeutige Lösung hat, die man approximieren könnte.

Die Sorgfalt gebietet daher, das Problem zunächst qualitativ zu lösen, also Existenz, Eindeutigkeit und Stabilität der Lösung sicherzustellen, und den Verlauf der Lösung möglichst präzise einzugrenzen. M445
Erst dann darf man sich getrost numerischen Näherungen zuwenden.

Exponentielles Wachstum: Medikamente und Drogen

Ab Zeitpunkt $t = 0\,\mathrm{min}$ wird per Infusion ein Medikament verabreicht. Der Durchfluss ist auf $b = 6\,\mathrm{mg/min}$ eingestellt. Der Körper baut in jeder Minute 5% des im Blut vorhandenen Medikaments ab ($a = 0.05/\mathrm{min}$).

Aufgabe: (1) Beschreiben Sie die Medikamentenmenge $y(t)$ im Blut durch eine Differentialgleichung. Probe: Gelten in dieser Gleichung die richtigen physikalischen Einheiten? (2) Skizzieren Sie das Vektorfeld. (3) Lösen Sie diese Differentialgleichung. Ist die Lösung eindeutig? (4) Wie verhält sich $y(t)$ für $t \to \infty$? Ist dies plausibel?

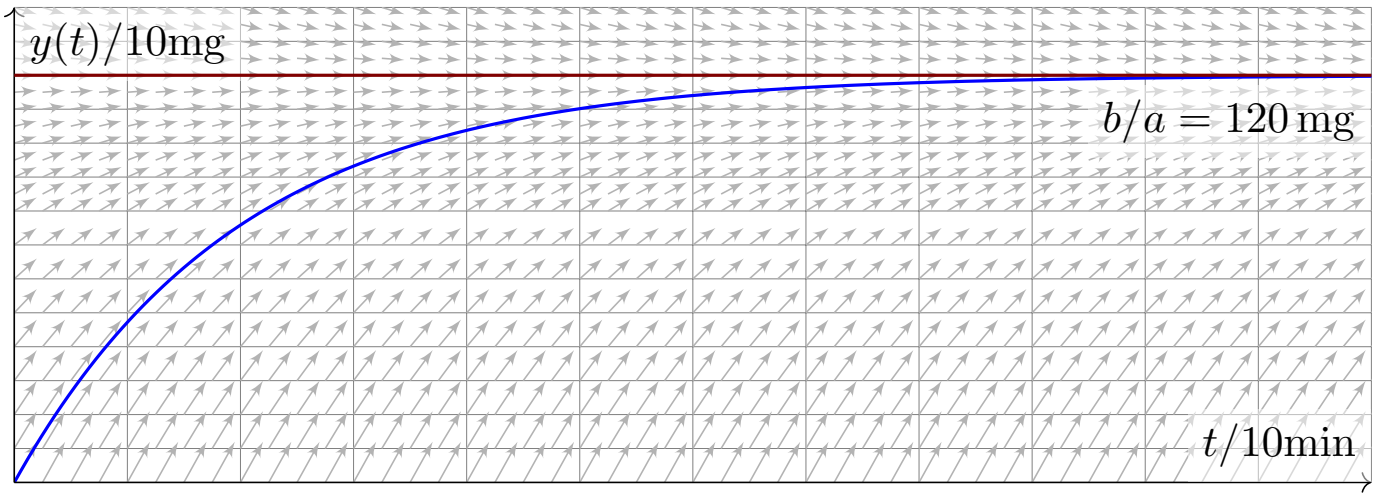
☺ Das ist ein besonders einfaches Modell, aber sehr häufig verwendet. Es gilt ebenso beim Konsum einer Droge, etwa Alkohol, die über einen längeren Zeitraum konstant zugeführt und zugleich abgebaut wird.

Im Gegensatz zu den vorigen Aufgaben ist hier die Differentialgleichung in der Aufgabenstellung noch nicht gegeben, sondern muss als erstes gefunden und anschließend gelöst werden. Diese Art Problemstellung ist wesentlich realistischer, daher interessanter, aber meist auch spürbar schwieriger; wir illustrieren dies nur an besonders einfachen Fällen.

📖 H. Heuser: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Vieweg 2009

Exponentielles Wachstum: Medikamente und Drogen

Lösung: (1) Wir messen die Zeit t in Minuten. Für die Medikamentenmenge $y(t) \in \mathbb{R}$ finden wir die Gleichung $y'(t) = b - a\,y(t)$ mit $y(0) = 0$. Diese DG ist linear und inhomogen, allgemeine Lösung siehe M221.



(3) Wir lösen die DG hier durch die Substitution $u(t) = b/a - y(t)$ und finden $u'(t) = -y'(t) = a\,y(t) - b = -a\,u(t)$ mit $u(0) = b/a$. Die Lösung $u(t) = (b/a)\,\mathrm{e}^{-at}$ und $y(t) = (b/a)(1 - \mathrm{e}^{-at})$ ist dann direkt klar.

(4) Für $t \to \infty$ gilt $y(t) \to b/a$. ☺ Wir sehen dies leicht auch direkt: Im Gleichgewicht wird gleich viel zugeführt ($+b$) wie abgebaut ($-a \cdot b/a$).

Exponentielles Wachstum: heißer Kaffee

Ein Kaffee wird bei $100°\mathrm{C}$ gebrüht. Die Raumtemperatur beträgt $20°\mathrm{C}$. Abkühlung reduziert die Temperaturdifferenz um 7% pro Minute.

Aufgabe: (1) Beschreiben Sie die Temperatur $y(t)$ des Kaffees durch eine Differentialgleichung. Probe: Gelten in dieser Gleichung die richtigen physikalischen Einheiten? (2) Skizzieren Sie das Vektorfeld.
(3) Lösen Sie diese Differentialgleichung. Ist die Lösung eindeutig?
(4) Wie verhält sich $y(t)$ für $t \to \infty$? Ist dies physikalisch plausibel?
(5) Wann hat der Kaffee $60°\mathrm{C}$ erreicht? ☺ Das ist die Halbwertszeit.
(6) Sie sind in Eile und haben nur $5\mathrm{min}$ Wartezeit zur Verfügung. Ist es besser, die Milch am Anfang oder am Ende zuzugeben? (konkretes Zahlenbeispiel: 75% Kaffee, 25% Milch zu $8°\mathrm{C}$).

☺ Das ist eine klassische Aufgabe, mit unserem Werkzeug sollte sie leicht fallen. Es gelten dieselben Bemerkungen wie zur vorigen Aufgabe. In Frage (6) stecken zahlreiche implizite Annahmen, wie die Form der Tasse und die Art des Wärmeaustauschs; erklären Sie diese explizit! Die konkreten Zahlen sind etwas willkürlich, dafür aber einfach genug. Je nach Situation werden Sie deutlich andere Konstanten messen.

Exponentielles Wachstum: heißer Kaffee

Lösung: (1) Wir starten bei $y_0 = 100°\mathrm{C}$ und nähern uns $y_\infty = 20°\mathrm{C}$ gemäß der Gleichung $y'(t) = -\lambda\big[y(x) - y_\infty\big]$ mit $\lambda = 0.07/\mathrm{min}$.
(3) Die Lösung $y(t) = y_\infty + (y_0 - y_\infty)\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$ ist leicht zu sehen.
(4) Für $t \to \infty$ gilt $y(t) \searrow y_\infty$, wie anschaulich zu erwarten war.
(5) Bei $60°\mathrm{C}$ wurde die Hälfte der Temperaturdifferenz abgebaut: $y(T) \overset{!}{=} 60°$ bedeutet $1/2 = \mathrm{e}^{-\lambda T}$, also $-\ln 2 = -\lambda T$ und somit

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0.693}{0.07/\mathrm{min}} \approx 9.9\,\mathrm{min}, \qquad \text{Merkregel: } \frac{70\%}{\text{Zerfallsrate}}$$

(6a) Erst die Milch zugeben, dann den Milchkaffee abkühlen lassen:

$$y(0\,\mathrm{min}) = 0.75 \cdot 100°\mathrm{C} + 0.25 \cdot 8°\mathrm{C} = 77.0°\mathrm{C}$$
$$y(5\,\mathrm{min}) = 20°\mathrm{C} + 57°\mathrm{C} \cdot \mathrm{e}^{-0.35} \qquad \approx 60.2°\mathrm{C}$$

(6b) Erst den Kaffee abkühlen lassen, dann die Milch zugeben:

$$y(5\,\mathrm{min}) = 20°\mathrm{C} + 80°\mathrm{C} \cdot \mathrm{e}^{-0.35} \qquad \approx 76.4°\mathrm{C}$$
$$\text{Mischung} = 0.75 \cdot 76.4°\mathrm{C} + 0.25 \cdot 8°\mathrm{C} \approx 59.3°\mathrm{C}$$

☺ Wenn Sie Ihren Milchkaffee weniger heiß wollen, dann geben Sie die Milch erst am Ende hinzu. Der Unterschied ist allerdings kaum spürbar.

Die logistische Differentialgleichung

Wir untersuchen die Größe $y(x) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ einer Population (z.B. Bakterien, Pflanzen, Tiere, ...) im Verlauf der Zeit $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Das einfachste Modell ist eine Wachstumsrate $y'(x)$ proportional zur Populationsgröße $y(x)$:

$$\boxed{y'(x) = \lambda\, y(x), \quad y(0) = y_0}$$

Die Lösung $y(x) = y_0\, \mathrm{e}^{\lambda x}$ ist exponentielles Wachstum. Für $\lambda > 0$ und $y_0 > 0$ wächst $y(x)$ unbeschränkt. Realistischer ist folgendes Modell: Wegen beschränkter Ressourcen gibt es eine maximale Größe K der Population. Ihr Wachstum wird gebremst durch den Faktor $1 - y(x)/K$:

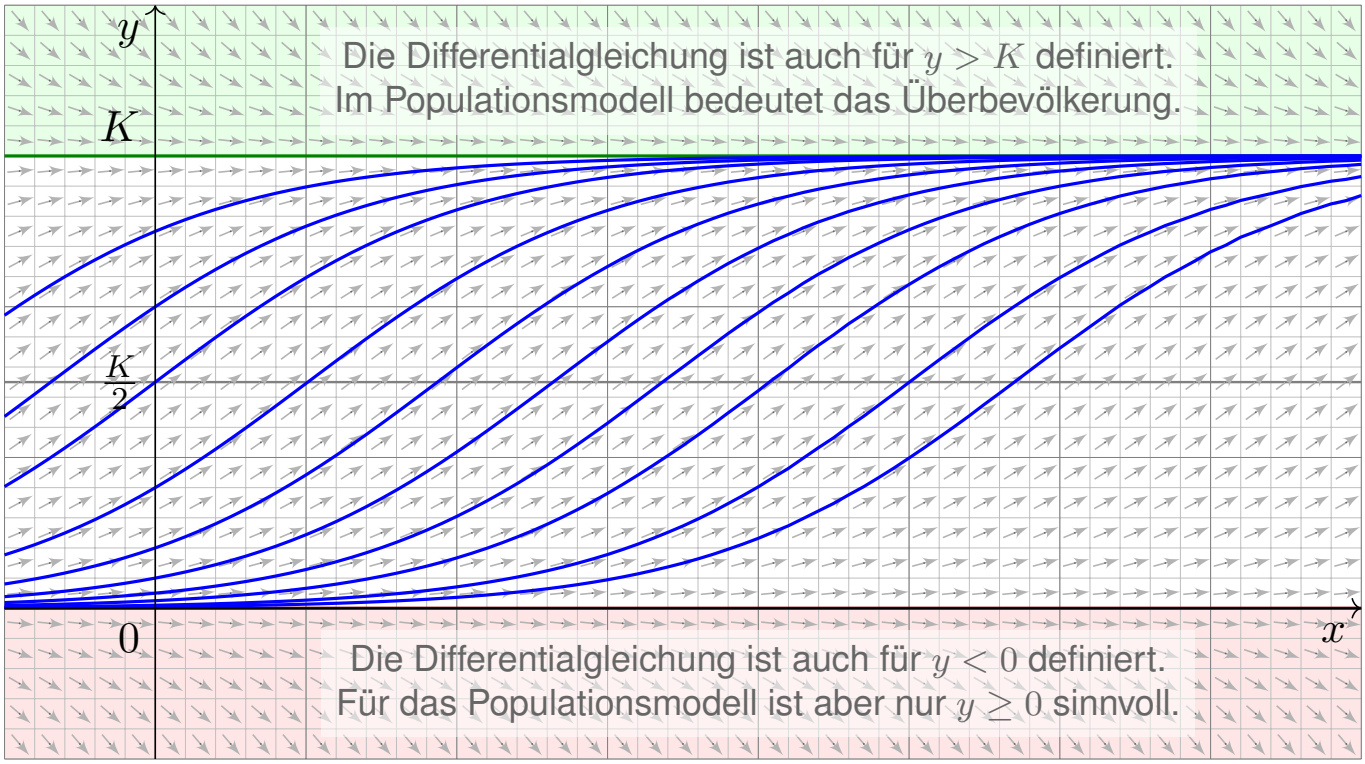
$$\boxed{y'(x) = \lambda\, y(x)(1 - y(x)/K), \quad y(0) = y_0}$$

Dies ist die **logistische Differentialgleichung**. Sie ist ein einfaches nicht-lineares Modellbeispiel und Spezialfall der Bernoulli–Gleichung.

Aufgabe: (1) Skizzieren Sie das zugehörige Vektorfeld. (2) Bestimmen Sie alle Fixpunkte (= konstante Lösungen). (3) Bei Start in $y(0) \in \,]0, K[$, bleibt jede Lösung beschränkt? (4) Existiert eine Lösung für alle $x \geq 0$, also $y : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$? Ist sie eindeutig? (5) Wie verhält sie sich für kleine y? (6) für $x \to \infty$? (7) Berechnen Sie die Lösung $y(x)$ schließlich explizit.

Die logistische Differentialgleichung

Lösung: (1) Skizze des Vektorfeldes und einiger Lösungskurven:



(2) Fixpunkte von $y' = \lambda y(1 - y/K)$ sind Nullstellen der rechten Seite, also $y = 0$ (keine Population) und $y = K$ (maximale Populationsgröße).

Die logistische Differentialgleichung

(3) Dank (2) haben wir die konstanten Lösungen $u(x) = 0$ und $v(x) = K$. Jede Lösung $y : [0, x_1[\to \mathbb{R}$ mit $y(0) \in]0, K[$ ist somit im Intervall $]0, K[$ gefangen: Dank Eindeutigkeitssatz M1C kann sie u und v nicht kreuzen.

(4) Da eine Lösung $y : [0, x_1[\to]0, K[$ keine Polstellen hat, lässt sie sich für alle $x \geq 0$ fortsetzen (M1C) zu genau einer Lösung $y : \mathbb{R}_{\geq 0} \to [0, K]$.

(5) Für $y/K \approx 0$ gilt $y' \approx \lambda y$: Kleine Populationen wachsen demnach zunächst exponentiell; die Maximalgröße K hat noch kaum Einfluss. Nahe der Maximalgröße $y \approx K$ gilt $y' \approx 0$, das Wachstum stagniert.

Aus $y' = \lambda y - (\lambda/K)y^2$ folgt $y'' = \lambda y' - 2(\lambda/K)yy'$. Für $0 < y < K$ haben wir $y' > 0$, also $y'' > 0$ für $0 < y < K/2$ und $y'' < 0$ für $K/2 < y < K$. Bis zur Hälfte der Maximalgröße haben wir demnach beschleunigtes Wachstum ($y'' > 0$), oberhalb der Hälfte gebremstes Wachstum ($y'' < 0$).

(6) Für $0 < y < K$ gilt $y' > 0$, wir erwarten daher $y(x) \nearrow K$ für $x \to \infty$.

Dank Bolzano–Weierstraß konvergiert $y(x)$ für $x \to \infty$. Sei $c = \lim_{x\to\infty} y(x)$ der Grenzwert. Aus $y'(x) = \lambda y(x)(1 - y(x)/K)$ folgt $\lim_{x\to\infty} y'(x) = \lambda c(1 - c/K)$. Dieser Wert muss Null sein, andernfalls wäre $y'(x) \geq m > 0$ für $x \geq x_0$, und $y(x) \geq m(x - x_0)$ würde die Schranke K überschreiten. Also gilt $\lambda c(1 - c/K) = 0$, das heißt $c = 0$ oder $c = K$. Für $0 < y_0 < K$ haben wir also tatsächlich Konvergenz $y(x) \nearrow K$ für $x \to \infty$.

Die logistische Differentialgleichung

☺ Die vorhergehenden Überlegungen klären das qualitative Verhalten.

(7) Wir lösen die logistische Gleichung $y'(x) = \lambda\, y(x) - (\lambda/K)\, y(x)^2$ schließlich explizit. Sie ist vom Bernoulli–Typ M413: Wir substituieren deshalb $v(x) = y(x)^{-1}$ und erhalten eine lineare DG für $v(x)$:

$$v'(x) = -y(x)^{-2}\, y'(x) = -\lambda\, y(x)^{-1} + \lambda/K = \lambda/K - \lambda\, v(x)$$

Diese wird gelöst durch $v(x) = 1/K - c\, \mathrm{e}^{-\lambda x}$, analog zu M401, also:

$$y(x) = \frac{1}{v(x)} = \frac{1}{1/K - c\, \mathrm{e}^{-\lambda x}}$$

Der Anfangswert $y(0) = y_0$ bestimmt $c = 1/K - 1/y_0$. Wir erhalten:

$$\boxed{y(x) = \frac{K}{1 + (K/y_0 - 1)\, \mathrm{e}^{-\lambda x}}}$$

☺ Die Lösung gelingt leicht — jedoch erst mit passenden Methoden.
☺ Machen Sie die Probe durch Einsetzen in die Differentialgleichung!
☺ Geduldige Kurvendiskussion bestätigt alle Vorhersagen aus (2–6).
☺ Diese Gleichung tritt auch beim Massenwirkungsgesetz auf. O153
Dort lösen wir sie alternativ durch Separation und Partialbruchzerlegung.

Substitution: linearer Term

M409
Beispiel

In günstigen Fällen lässt sich $y' = f(x, y)$ vereinfachen und lösen durch eine geschickte Substitution $y(x) = \varphi(v(x))$ und $y'(x) = \varphi'(v(x))\, v'(x)$.

Beispiel: Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ Konstanten. Zu lösen sei die DG

$$\boxed{y' = f(ax + by + c).}$$

Für $v(x) = ax + by(x) + c$ gilt $v'(x) = a + by'(x) = a + bf(v(x))$, also

$$\boxed{v' = a + bf(v).}$$

☺ Diese DG in v ist separierbar und kann so gelöst werden. M118

Aufgabe: Bestimmen Sie alle Lösungen von $y' = (x + y - 1)^2$. Maximales Definitionsintervall? Sind alle AWP $y(x_0) = y_0$ gut gestellt?

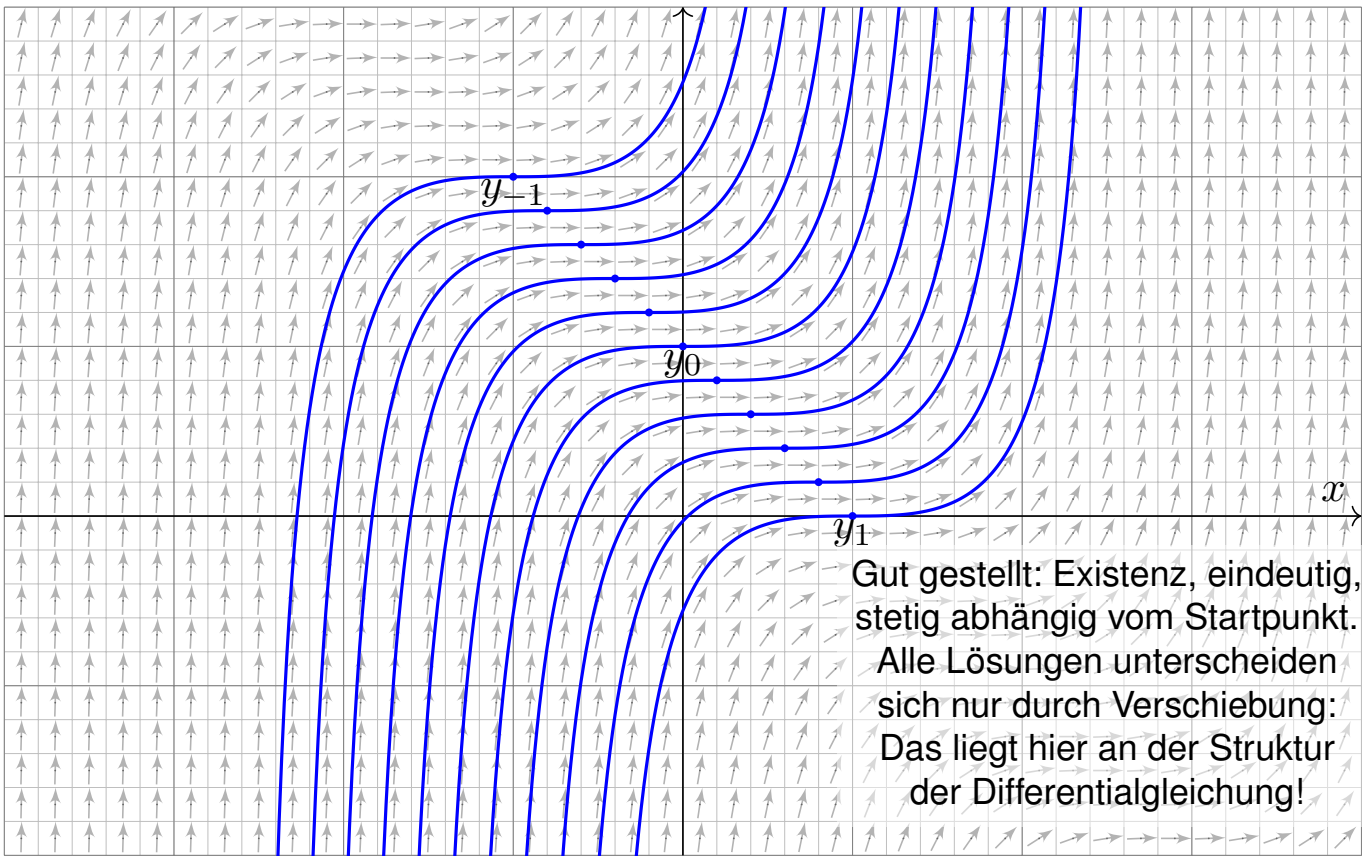
Lösung: Die Substitution $v = x + y - 1$ führt zu $v' = 1 + v^2$. Separation $v'/(1 + v^2) = 1$ und Integration zu $\arctan(v) = x - c$ liefert $v = \tan(x - c)$ unter der Bedingung $x \in \,]c - \pi/2, c + \pi/2[$. Rücksubstitution ergibt $y(x) = 1 - x + \tan(x - c)$. Probe!

☺ Damit sind alle Lösungen y gefunden. Durch jeden Punkt (x_0, y_0) geht genau eine Lösung: In diesem Beispiel sind alle AWP gut gestellt!

Skizze der gefundenen Lösungen

M410
Beispiel

Lösungen $y_c : \,]c - \pi/2, c + \pi/2[\, \to \mathbb{R}$ mit $y_c(x) = 1 - x + \tan(x - c)$.



Substitution: Ähnlichkeits-Differentialgleichung

M411
Beispiel

Eine **Ähnlichkeits-Differentialgleichung** ist von der Form

$$\boxed{y' = f(y/x).}$$

Hierbei muss $x \neq 0$ gelten. Für $y = xv$ gilt $y' = v + xv' = f(v)$, also

$$\boxed{v' = \frac{f(v) - v}{x}.}$$

☺ Diese DG in v ist separierbar und kann so gelöst werden. M118
Hierbei wird durch $f(v) - v$ dividiert, also muss dies $\neq 0$ sein.

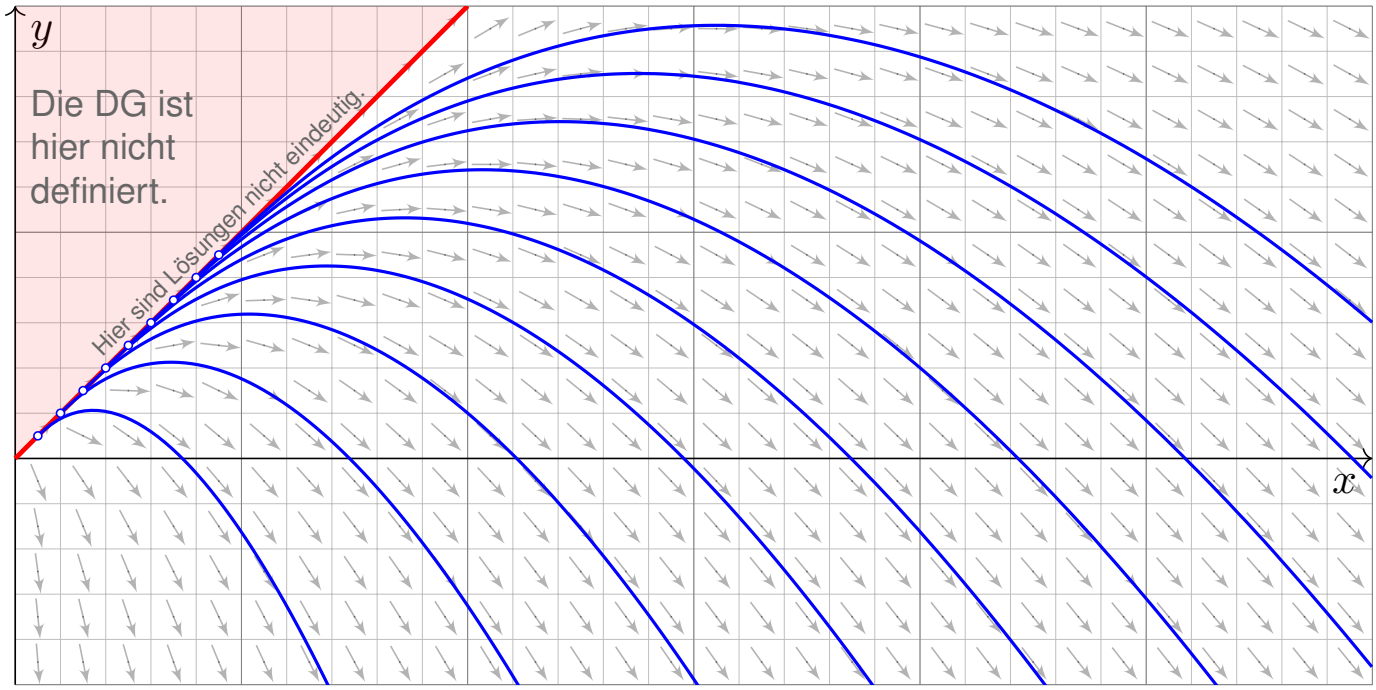
Aufgabe: Lösen Sie $y' = y/x - \sqrt{1 - y/x}$ für $x > 0$ und $y < x$.
Was ist zu jeder Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ das maximale Definitionsintervall?
Erhalten wir zusätzliche Lösungen, wenn wir auch $y \leq x$ zulassen?

Lösung: Die Substitution $v = y/x$ führt zu $v' = -\sqrt{1 - v}/x$. Ausführlich:
Wir haben hier $f(v) = v - \sqrt{1 - v}$ und nutzen die obige Vorbereitung.
Separation $-v'/\sqrt{1 - v} = 1/x$ und Integration zu $2\sqrt{1 - v} = \ln x - \ln c$
liefert $v = 1 - \ln(x/c)^2/4$ unter der Bedingung $x > c > 0$.
Rücksubstitution ergibt $y(x) = x(1 - \ln(x/c)^2/4)$. Probe!

Skizze der gefundenen Lösungen

M412
Beispiel

Lösungen $y_c :]c, \infty[\to \mathbb{R}$ mit $y_c(x) = x(1 - \ln(x/c)^2/4)$ und $c \in \mathbb{R}_{>0}$.



⚠ Unsere Rechnung nutzt $x > 0$ und $y < x$: Hier gilt $v = y/x < 1$, und wir können durch $\sqrt{1 - v}$ dividieren. Durch jeden Anfangswert (x_0, y_0) mit $y_0 < x_0$ läuft genau eine Lösung. Im Sonderfall $v = 1$ ist auch $y(x) = x$ eine Lösung, wie man durch Einsetzen in die DG sieht. Durch jeden Anfangswert (x_0, y_0) mit $0 < x_0 = y_0$ laufen unendlich viele Lösungen!

Substitution: Bernoulli–Differentialgleichung

M413
Beispiel

Seien $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetig, $n \neq 1$. Zu lösen sei die **Bernoulli–Gleichung**

$$\boxed{y'(x) = a(x)\,y(x) + b(x)\,y(x)^n.}$$

Im Falle $y \neq 0$ ist diese DG äquivalent zu $y'y^{-n} = a(x)y^{1-n} + b(x)$.
Für $v = y^{1-n}$ gilt $v' = (1-n)\,y'y^{-n}$. Wir erhalten so die lineare DG

$$\boxed{\frac{1}{1-n}v'(x) = a(x)\,v(x) + b(x).}$$

Aufgabe: Lösen Sie $y' = y/x - y^2$ für $x > 0$ mit $y(1) = 1$.

Lösung: Die Substitution $y = 1/v$ führt zu $v' = -v/x + 1$.
Diese DG in v ist linear mit $a(x) = -1/x$ und $b(x) = 1$. Wir finden $A(x) = -\ln x$. Der integrierende Faktor ist hier $\mathrm{e}^{-A(x)} = x$, also

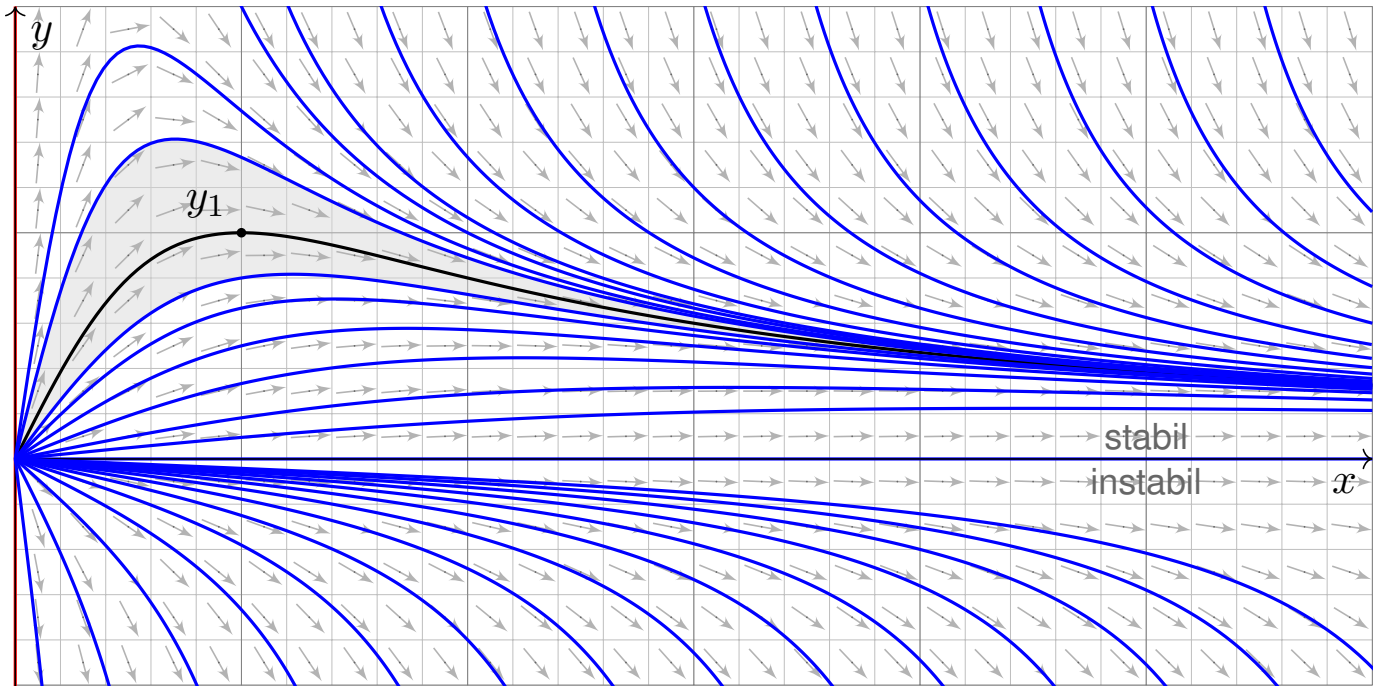
$$v(x) = \mathrm{e}^{A(x)} \int \mathrm{e}^{-A(x)}\, b(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{x}\int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2+c}{2x}.$$

Rücksubstitution ergibt $y(x) = 2x/(x^2+c)$. Die Probe ist leicht!
Der Anfangswert $y(1) = 1$ bestimmt die Konstante $c = 1$.

Skizze der gefundenen Lösungen

M414
Beispiel

Lösungen $y_c : \mathbb{R}_{>0} \setminus \{\sqrt{-c}\} \to \mathbb{R}$ mit $y_c(x) = 2x/(x^2+c)$ und $c \in \mathbb{R}$.



☺ Wir können die Differentialgleichung $y' = y/x - y^2$ auch vereinfachen und qualitativ lösen:
Für kleine $x > 0$ ähnelt unsere DG $y' = y/x - y^2$ der Geradengleichung $y' = y/x$. M119
Für große $x \to \infty$ ähnelt unsere DG $y' = y/x - y^2$ eher der Gleichung $y' = -y^2$. M113
Das Ab- und Aufrunden einer Differentialgleichung ist oft eine hilfreiche Technik. M445

Nochmal Trennung der Variablen

Aufgabe: Bestimmen Sie alle Lösungen $y : I \to \mathbb{R}$ der DG

$$\boxed{y' = \tfrac{3}{2}\, x^2\, y^3 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1.}$$

Maximales Definitionsintervall? Sind alle AWP $y(x_0) = y_0$ gut gestellt?

Lösung: Für $y > 0$ separieren wir $-2y'/y^3 = -3x^2$ und integrieren:

$$\int -2\frac{y'(x)}{y^3(x)}\,\mathrm{d}x = \int -3x^2\,\mathrm{d}x + \mathrm{const}$$

$$\Longrightarrow \qquad y(x)^{-2} = c^3 - x^3 \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}$$

Auflösen nach y ergibt die Lösungen

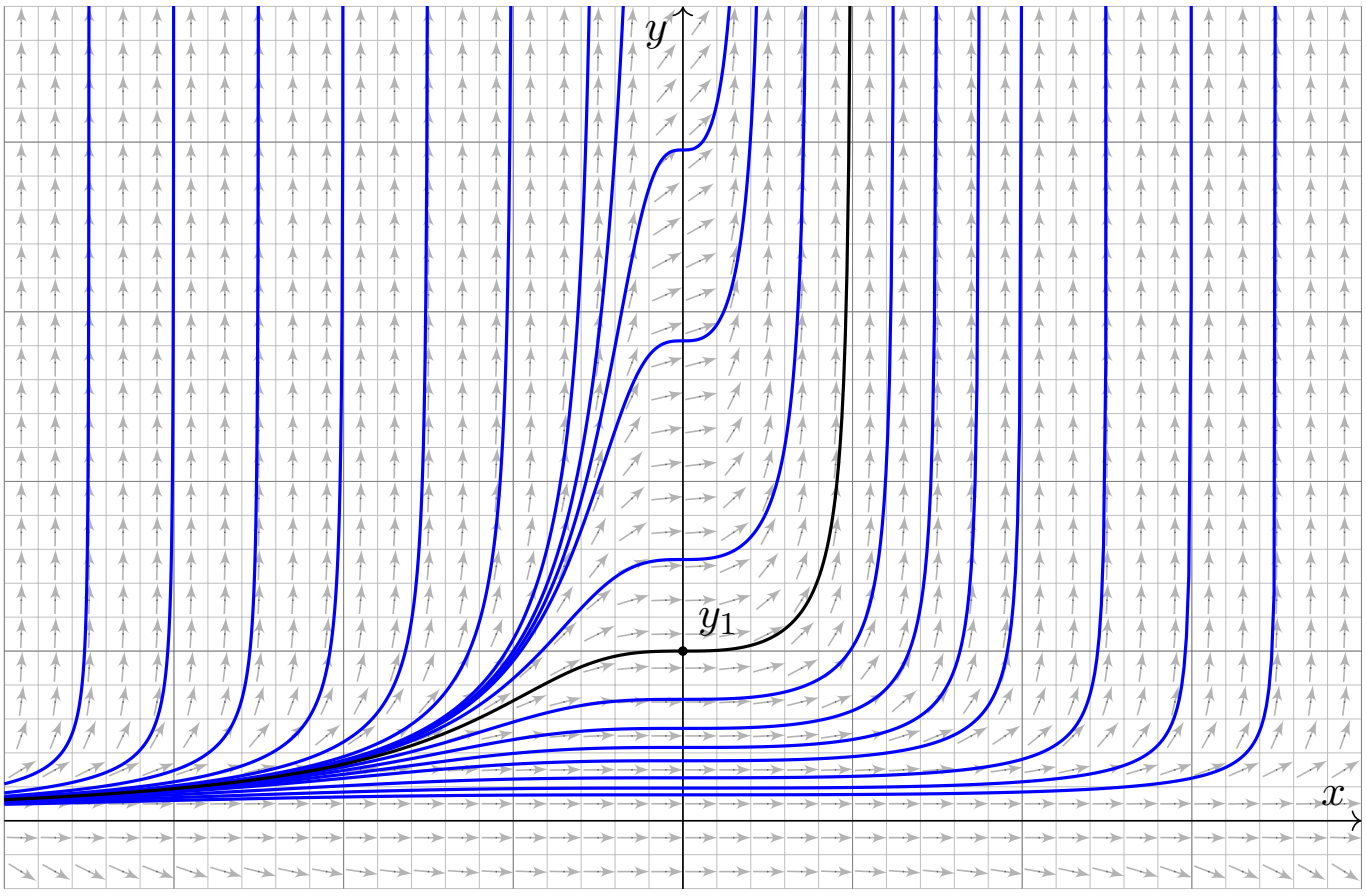
$$y_c :]-\infty, c[\to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad y_c(x) = \frac{1}{\sqrt{c^3 - x^3}}.$$

Die Lösung y_c existiert nur für $x < c$; bei $x = c$ liegt eine Polstelle vor!
Probe! Der Anfangswert $y(0) = 1$ bestimmt den Parameter $c = 1$.

⚠ Weitere Lösungen sind 0 und $-y_c$. Durch jeden Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ geht genau eine Lösung: In diesem Beispiel sind alle AWP gut gestellt!

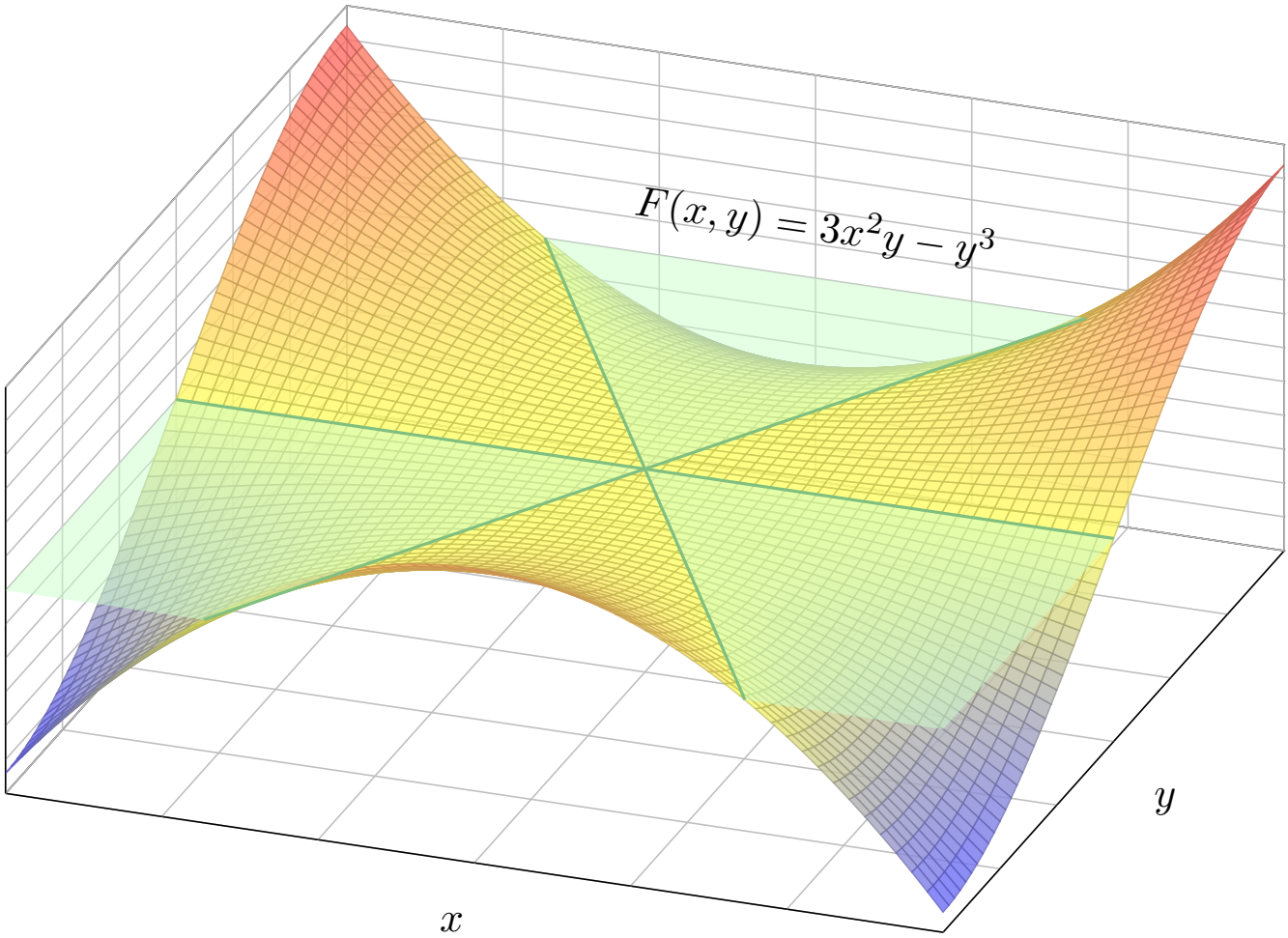
Skizze der gefundenen Lösungen

Lösungen $y_c :]-\infty, c[\to \mathbb{R}$ mit $y_c(x) = 1/\sqrt{c^3 - x^3}$ und $c \in \mathbb{R}$.



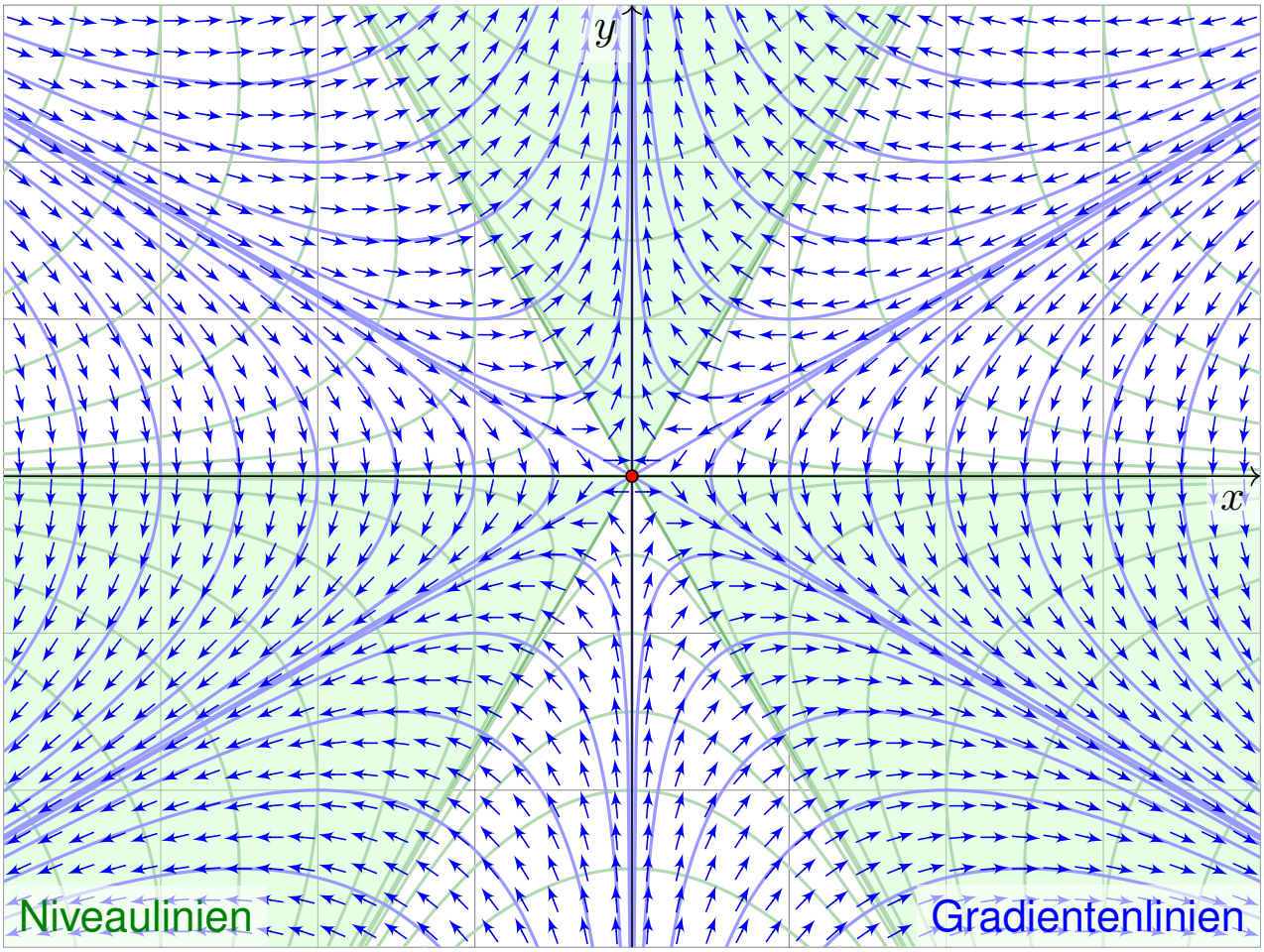
Der Ritt auf dem Affensattel: die Fläche

M417
Ausführung



Der Ritt auf dem Affensattel: das Gradientenfeld

M418
Ausführung



Der Ritt auf dem Affensattel: die Gradientenlinien

M419
Ausführung

Der Graph der Polynomfunktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 3x^2y - y^3$ ist der berühmte **Affensattel**. Die zweite Skizze zeigt das (normierte negative) Gradientenfeld $G = -\operatorname{grad} F/|\operatorname{grad} F|$. Demnach weist $G(x, y)$ in jedem Punkt $(x, y) \neq (0, 0)$ in Richtung des steilsten Abstiegs auf der Fläche.

Übung: Wir untersuchen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto ax^2y - y^3$ mit $a \in \mathbb{R}$.

(1) Berechnen Sie zu F das Gradientenfeld $\operatorname{grad} F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

(2) Finden Sie eine (möglichst einfache) Differentialgleichung für die Niveaulinien, also Kurven $x \mapsto y(x)$, die stets auf gleicher Höhe bleiben.

Ist diese Differentialgleichung exakt? Mit welchem Potential?

(3) Finden Sie eine (möglichst einfache) Differentialgleichung für die Gradientenlinien, also Kurven $x \mapsto y(x)$, die stets dem steilsten Abstieg folgen. Interpretieren Sie dies geometrisch und physikalisch-dynamisch.

Ist diese Differentialgleichung exakt? Mit welchem Potential?

(4) Für welche (zweimal diff'baren) Funktionen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist neben der Niveaugleichung (2) auch die Gradientengleichung (3) eine exakte DG? Wie hängt das zusammen mit harmonischen / holomorphen Funktionen?

Der Ritt auf dem Affensattel: die Rechnung

M420
Ausführung

Übung: Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$. Zu lösen ist die implizite Differentialgleichung

$$\boxed{3y^2 - ax^2 + 2axy \cdot y' = 0 \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0.}$$

Die vorige Aufgabe erklärt die geometrisch-physikalische Anschauung. Das kann Ihnen helfen! Der wichtige Spezialfall $a = 3$ entspricht einer Potentialströmung. Wir untersuchen hier $a > 0$. Diese *Gleichung* ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert. Unsere *Rechnung* zwingt uns zu Fallunterscheidungen, wir müssen dann geeignet einschränken und konzentrieren uns daher auf $x > 0$ und $y > 0$. Die anderen Fälle sind analog, für die Sonderfälle $x = 0$ oder $y = 0$ müssen wir genauer hinsehen.

(1) Formulieren Sie diese DG in expliziter Form. Für welche Startpunkte (x_0, y_0) garantiert der ∃&E-Satz eine eindeutige Lösung? (Und sonst?)

(2) Lösen die Geraden $y_\pm(x) = \pm cx$ mit $c := 1/\sqrt{2 + 3/a}$ unsere DG? Begründen oder widerlegen Sie folgende Schranke: Aus $|y(x_0)| < cx_0$ für *ein* $x_0 \in I$ folgt $|y(x)| < cx$ für *alle* $x \in I$, also $y_- < y < y_+$ auf I. Was bedeutet das geometrisch-physikalisch in den obigen Graphiken?

(3) Lösen Sie die Differentialgleichung mit einer unserer Methoden:
(a) durch einen integrierenden Faktor (ausgehend von der implizten DG),
(b) als Ähnlichkeitsdifferentialgleichung (durch Substitution $u = y/x$),
(c) als Bernoulli–DG (durch Substitution $v = y^{1-n}$ mit geeignetem n).

Exakte Differentialgleichungen und Potentiale

Aufgabe: Lösen Sie die Differentialgleichung

$$1 - 2xy^2 + 2(1-x^2)y\,y' = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1.$$

Ist sie exakt? Was ist die maximale Lösung? Inwiefern ist diese stabil? Was bewirkt eine kleine Störung des Anfangswerts $y(0) = 1 \pm \varepsilon$?

Lösung: Diese DG ist exakt: $\mathrm{rot} = 0$. (Wäre sie noch nicht exakt, so suchen wir zuerst einen integrierenden Faktor.) Sie ist Ableitung von

$$x + (1-x^2)y^2 = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Machen Sie die Probe! (Sie wissen bereits, wie man solche Potentiale ausrechnet; so gelingt es auch hier. Übung!) Auflösen nach y ergibt:

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{c-x}{1-x^2}} \qquad \text{für} \quad -1 < x < \min\{1, c\}$$

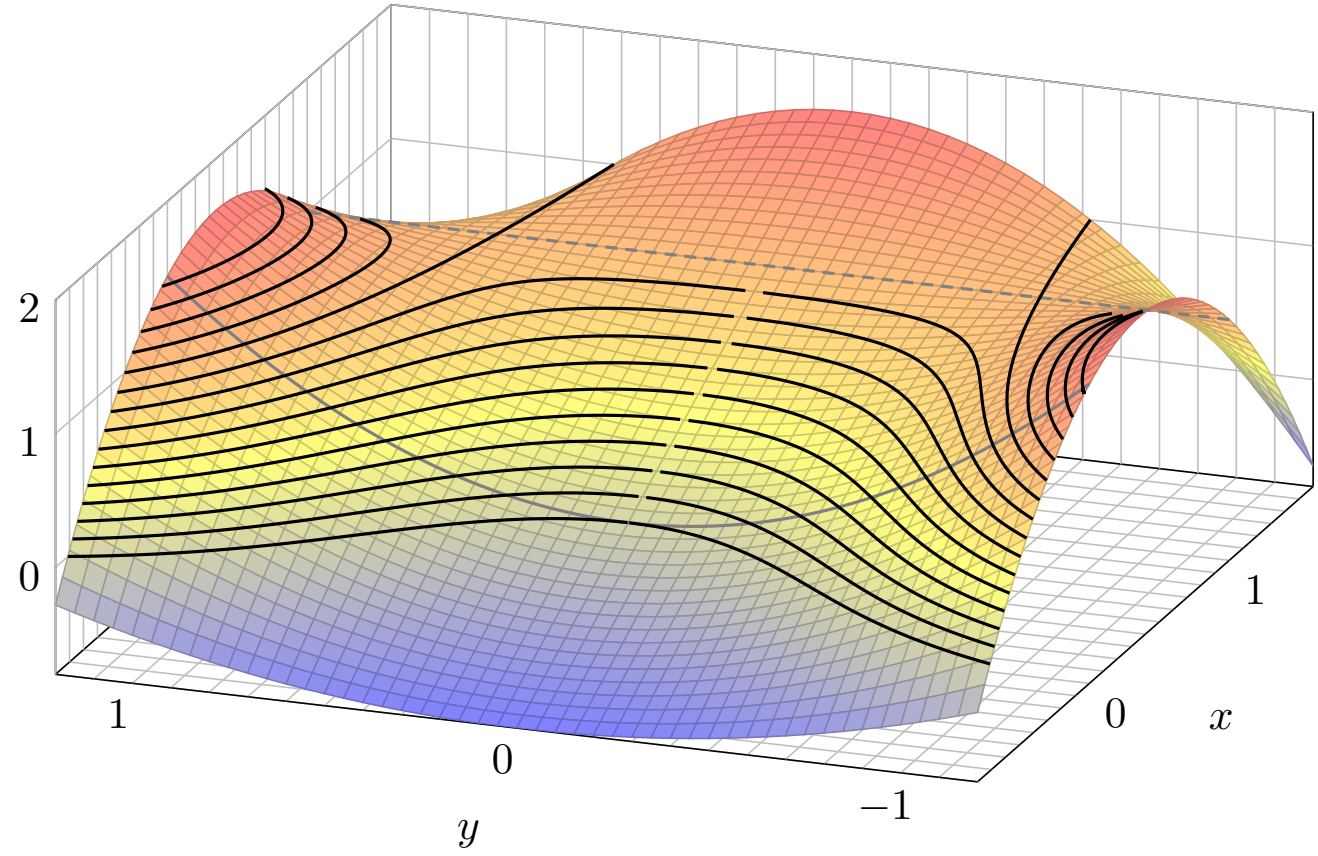
Das AWP $y(0) = 1$ wird gelöst für $c = 1$. Die maximale Lösung ist hier

$$y :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad y(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}.$$

Machen Sie die Probe durch Einsetzen in unsere Differentialgleichung!

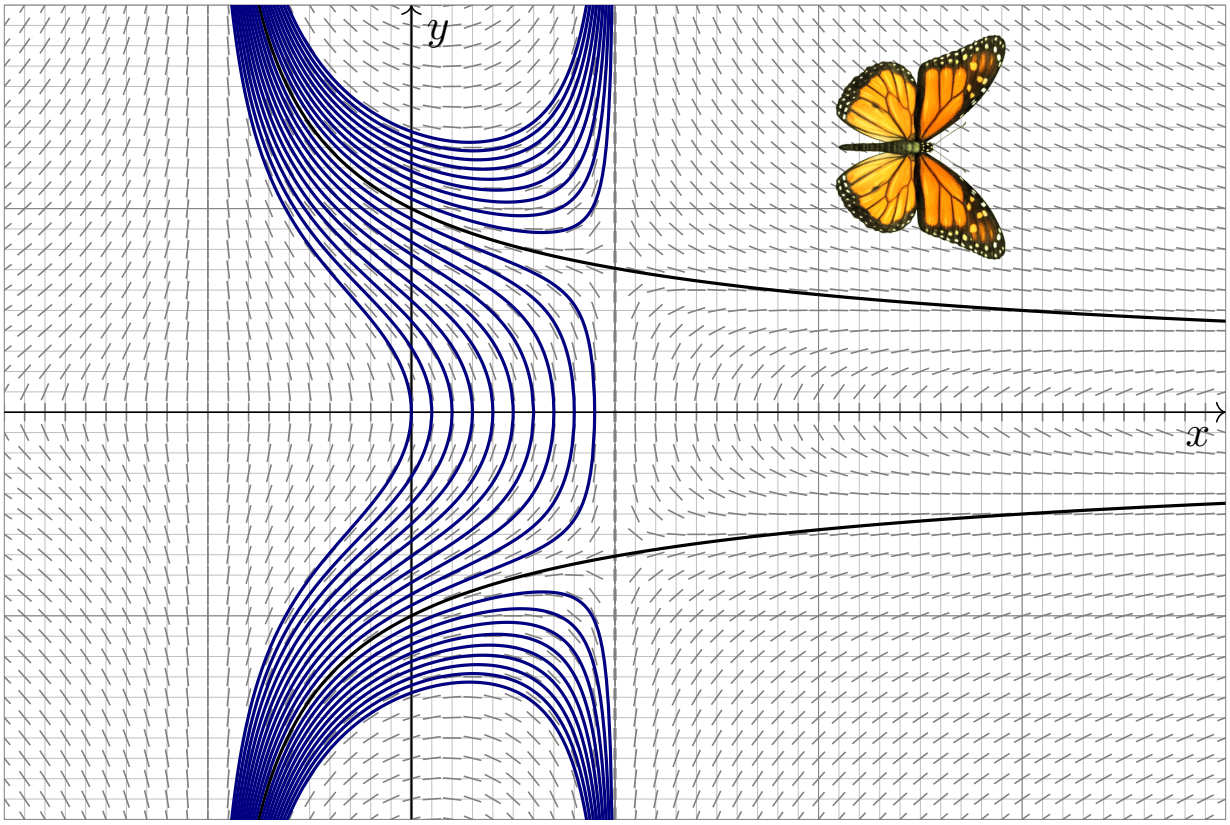
Exakte Differentialgleichungen und Potentiale

Das Potential $\Phi(x,y) = x + (1-x^2)y^2$ lässt sich veranschaulichen: Die Lösungen $y(x)$ der DG sind die Niveaulinien des Potentials Φ.



Exakte Differentialgleichungen und Potentiale

Lösungen $y(x) = \pm\sqrt{(c-x)/(1-x^2)}$ zu Anfangswerten $y(0) = y_0$:



Exakte Differentialgleichungen und Potentiale

Anfangsdaten sind oft zufälligen kleinen Schwankungen unterworfen, etwa durch kleine äußere Störungen oder ungenaue Messdaten.

Wir sehen hier eine Illustration des berüchtigten Schmetterlingseffekts. Der Verlauf der Lösung hängt empfindlich vom Startwert $y_0 = y(0)$ ab:

- Zu $|y_0| > 1$ existiert die Lösung nur für $-1 < x < 1$ und läuft dann in die Polstelle bei $x = \pm 1$.
- Zu $0 < |y_0| < 1$ existiert die Lösung nur für $-1 < x \leq \sqrt{|y_0|}$, danach wird der Radikand negativ.

Nur für $y_0 = \pm 1$ existiert die Lösung $y(x) = \pm 1/\sqrt{1+x}$ für alle $x > -1$.

Was sagt das über die Stabilität von Lösungen unter kleinen Störungen? Lösungen durch benachbarte Punkte haben nur endliche Lebenszeit: Entweder sie explodieren bei $x = 1$ oder sie kollabieren schon zuvor.

⚠ Wenn diese DG ein physikalisches System beschreibt, etwa ein kritisches Bauteil eines Flugzeugs, dann haben Sie Grund zur Sorge! Daher fordern wir Stetigkeit / Stabilität für gut gestellte Probleme (M1B).

Exakte Differentialgleichungen und Potentiale

Aufgabe: Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\boxed{x\sin(y)\,y' = x + \cos(y) \quad \text{mit} \quad y(1) = y_0 \in [0,\pi].}$$

Ist sie exakt? Was ist die maximale Lösung? Inwiefern ist diese stabil? Was bewirkt eine kleine Störung des Anfangswerts $y(1) = \frac{2}{3}\pi \pm \varepsilon$?

Lösung: Wir prüfen diese DG auf Exaktheit:

$$\underbrace{\big[x + \cos(y)\big]}_{f(x,y)} + \underbrace{\big[-x\sin(y)\big]}_{g(x,y)}\, y' = 0$$

Hierzu muss die Rotation $\operatorname{rot}(f,g) = \partial_x g - \partial_y f$ verschwinden:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -\sin y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\sin y.$$

☺ Wir haben Glück, diese DG ist exakt: $\operatorname{rot}(f,g) = 0$. (Wäre sie noch nicht exakt, so müssten wir zuerst einen integrierenden Faktor suchen.)

☺ Das Gebiet $\mathbb{R}^2$ ist einfach-zusammenhängend. Also hat unser Vektorfeld $(f,g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein Potential $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Es bleibt uns nun, eins zu berechnen... Diese Fragestellung können Sie bereits lösen!

Exakte Differentialgleichungen und Potentiale

Integration: Wegen $\partial_x \Phi(x,y) \overset{!}{=} f(x,y) = x + \cos y$ versuchen wir

$$\Phi(x,y) = \int x + \cos y \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}x^2 + x\cos y + c(y).$$

Die Integrationskonstante $c(y)$ hängt nur von y ab. Weiterhin:

$$\partial_y \Phi(x,y) = -x\sin y + c'(y) \quad \overset{!}{=} \quad g(x,y) = -x\sin y$$

Aus $c'(y) = 0$ folgt $c(y) = \text{const}$. So finden wir das Potential

$$\Phi(x,y) = \tfrac{1}{2}x^2 + x\cos y \quad (+\text{const}). \qquad \text{(Probe!)}$$

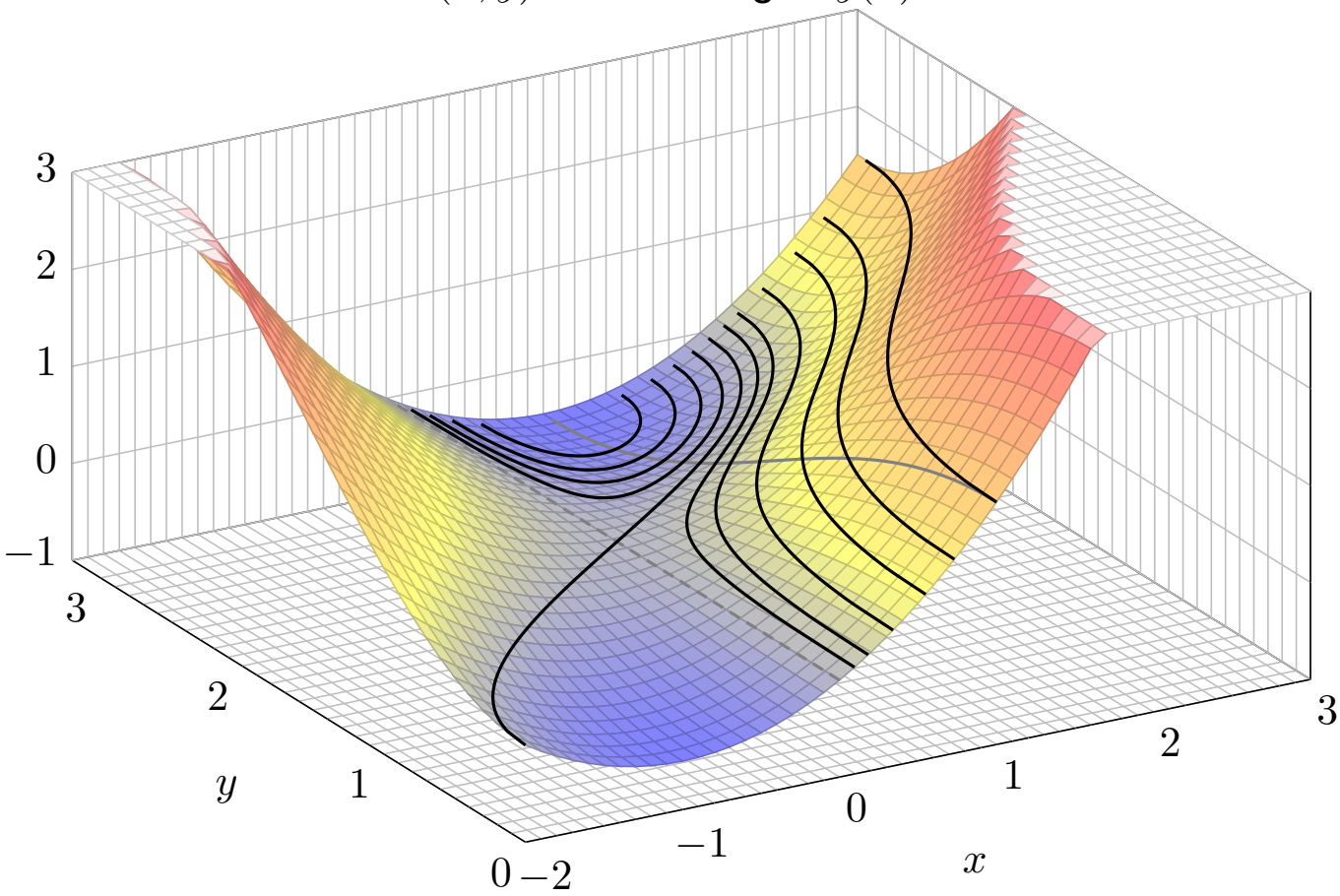
Auflösen von $\Phi(x,y) = c$ nach y ergibt $\cos y = c/x - x/2$, also

$$y(x) = \arccos\left(\frac{c}{x} - \frac{x}{2}\right). \qquad \text{(Probe!)}$$

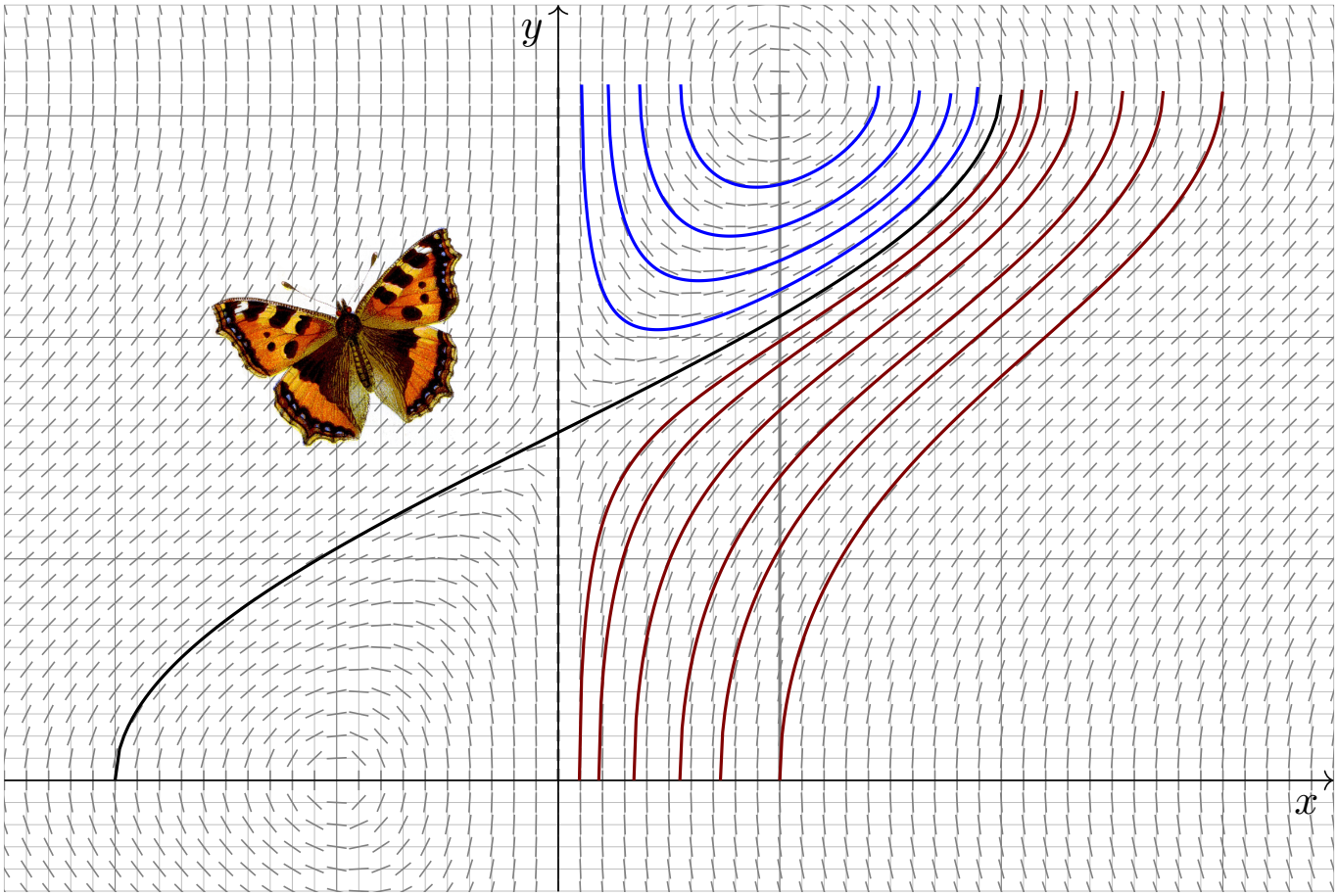
Der Anfangswert $y(1) = y_0 \in [0,\pi]$ bestimmt $c = \frac{1}{2} + \cos(y_0) \in [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.
Für $c = 0$ existiert die Lösung $y(x) = \arccos(-x/2)$ für $x \in [-2,+2]$.
Für $-\frac{1}{2} \le c < 0$ existiert die Lösung nur für $x \in [1 \mp \sqrt{2c+1}] \subseteq [0,2]$.
Für $0 < c \le \frac{3}{2}$ existiert die Lösung für $x \in [\sqrt{2c+1} \mp 1]$. (Skizze!)

Exakte Differentialgleichungen und Potentiale

Skizze des Potentials $\Phi(x, y)$. Die Lösungen $y(x)$ sind die Niveaulinien!



Exakte Differentialgleichungen und Potentiale



Exakte Differentialgleichungen und Potentiale

Aufgabe: Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\boxed{\big[y - \cos(x)\big]\, y\, y' = -\sin(x)\, y^2 \quad \text{mit} \quad y(0) = 3.}$$

Ist sie exakt? Existiert ein integrierender Faktor? maximale Lösung?
Für welche Startwerte $y(0) = y_0$ existieren Lösungen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Lösung: Wir prüfen diese DG auf Exaktheit:

$$\underbrace{\big[\sin(x)\, y^2\big]}_{f(x,\,y)} + \underbrace{\big[y - \cos(x)\big]\, y}_{g(x,\,y)}\; y' = 0$$

Existiert ein Potential $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad}\Phi = (f, g)$? Leider nein:

$$\partial_x g(x,y) = \sin(x)\, y, \quad \partial_y f(x,y) = 2\sin(x)\, y, \quad \operatorname{rot}(f,g) = -\sin(x)\, y \neq 0.$$

Wir suchen einen integrierenden Faktor $\lambda(x)$:

$$\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} \overset{!}{=} -\frac{\operatorname{rot}(f,g)}{g} = \frac{\sin(x)\, y}{y - \cos(x)} \quad \Longrightarrow \quad \text{nicht lösbar}$$

☹ Die linke Seite hängt nur von x ab, die rechte auch noch von y.

Exakte Differentialgleichungen und Potentiale

Wir suchen einen integrierenden Faktor $\lambda(y)$:

$$\frac{\lambda'(y)}{\lambda(y)} \overset{!}{=} \frac{\operatorname{rot}(f,g)}{f} = \frac{-1}{y} \quad \Longrightarrow \quad \ln\lambda(y) = c - \ln y \quad \Longrightarrow \quad \lambda(y) = \frac{C}{y}$$

Dank dieses Faktors $\lambda(y)$ erhalten wir die exakte Differentialgleichung

$$\boxed{\big[2\sin(x)\, y\big] + 2\big[y - \cos(x)\big]\, y' = 0.}$$

Wir berechnen ein Potential Φ durch koordinatenweise Integration:

$$\begin{aligned}
\partial_x \Phi(x,y) &= 2y\sin(x) &&\Longrightarrow \quad \Phi(x,y) = c(y) - 2y\cos(x) \\
\partial_y \Phi(x,y) &= 2y - 2\cos(x) &&\Longrightarrow \quad \Phi(x,y) = y^2 - 2y\cos(x) \quad (+\text{const})
\end{aligned}$$

Lösungskurven erfüllen $y^2 - 2y\cos(x) = \Phi(x_0, y_0) = c$, also

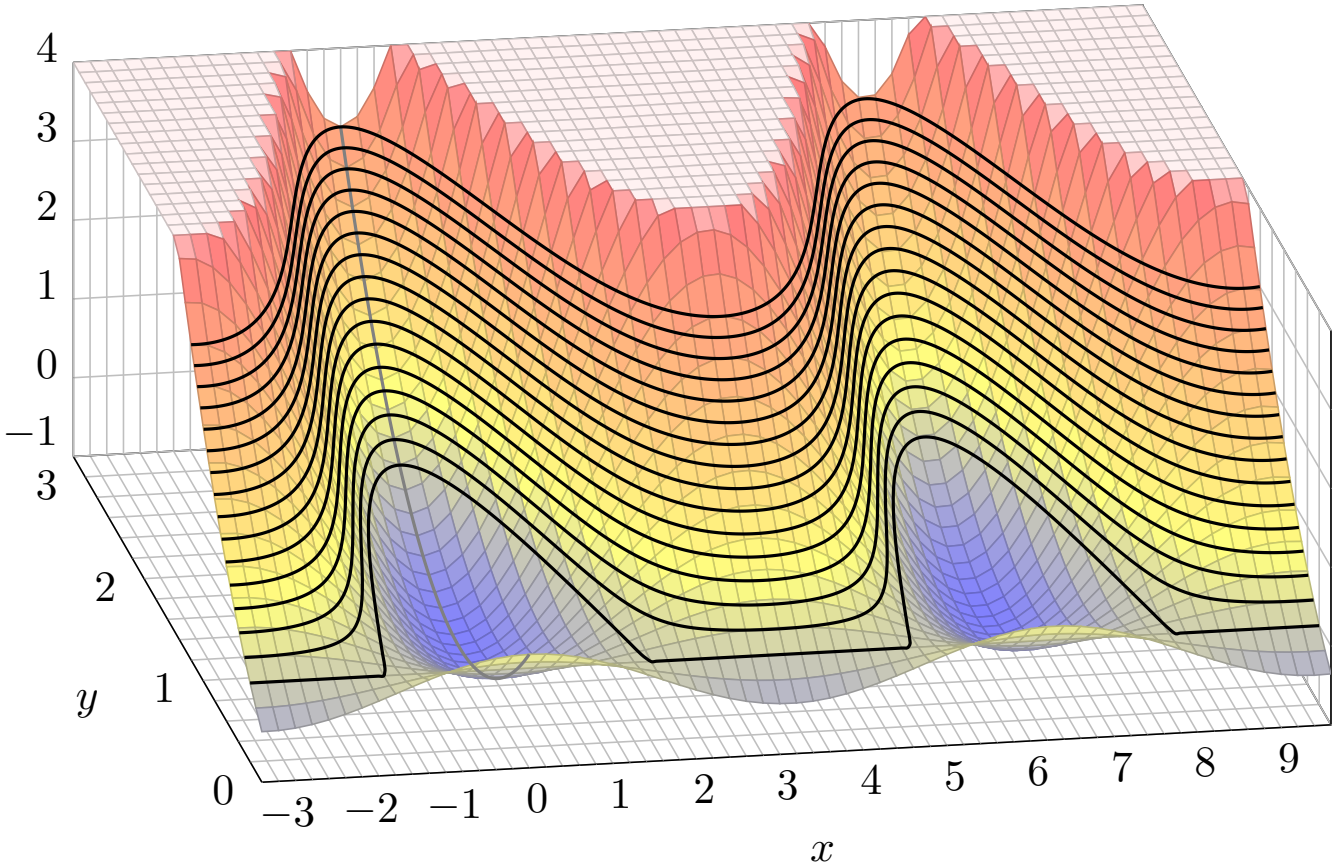
$$y(x) = \cos(x) \pm \sqrt{\cos(x)^2 + c}.$$

Der AW $y(0) = 3$ bestimmt den Parameter $c = 3$. Machen Sie die Probe!

☺ Diese und die vorige Aufgabe sind eng verwandt; sehen Sie wie?

Exakte Differentialgleichungen und Potentiale

M431
Ausführung

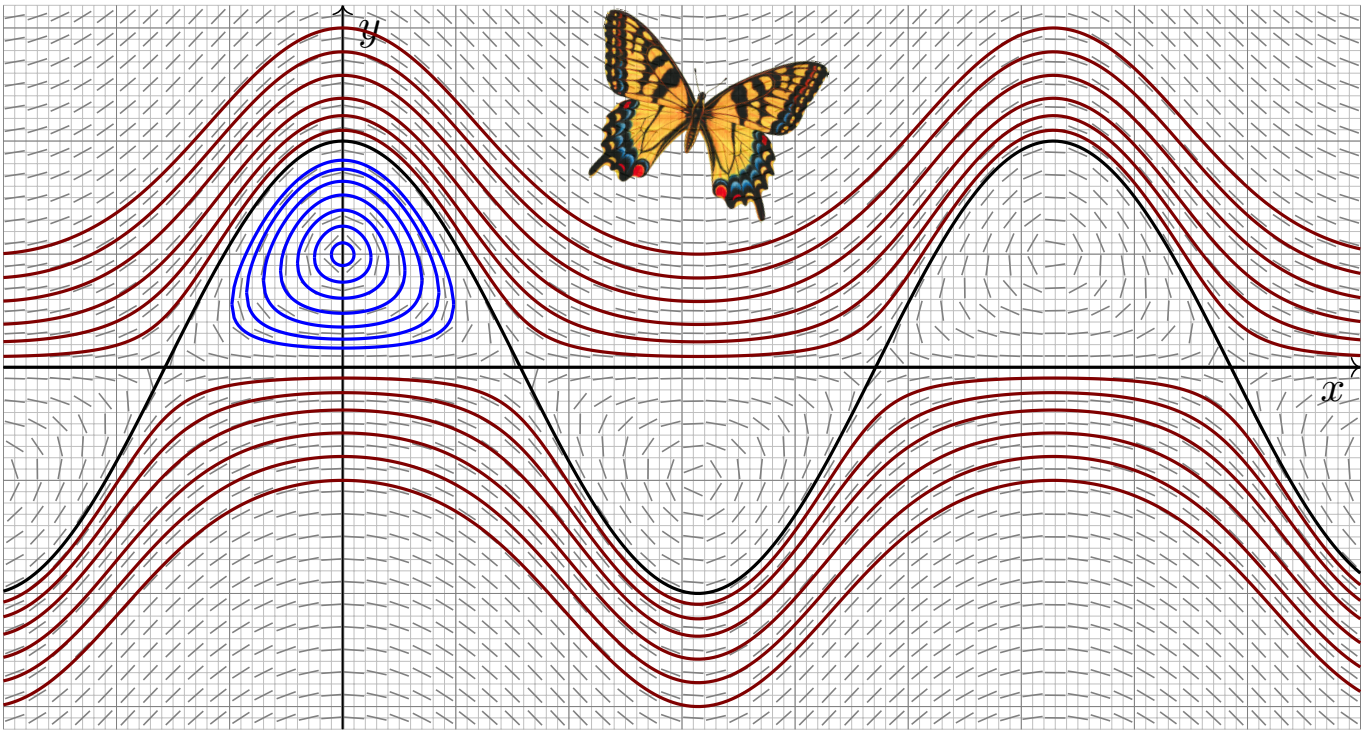


⚠ Auf dem kritischen Niveau $\Phi = 0$ kreuzen sich zwei Lösungskurven: Dort gilt Eindeutigkeit nicht, der ∃&E-Satz lässt sich nicht anwenden!

Exakte Differentialgleichungen und Potentiale

M432
Ausführung

Lösungen $y(x) = \cos(x) \pm \sqrt{\cos(x)^2 + c}$ zu Anfangswerten $y(0) = y_0$:



☺ Zu $y(0) = y_0 \geq 2$ existiert genau eine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ebenso zu $y_0 \leq 0$, aber für $0 < y_0 < 2$ bleibt die Lösung im Potentialtopf gefangen!

Lösung durch Variation der Konstanten

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, hierauf $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}$.
Zu lösen sei eine **lineare Differentialgleichung**, zunächst homogen

$$\boxed{y'(x) = a(x)\,y(x) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0.}$$

Die Lösung ist eindeutig (Satz M2D), und wir kennen sie explizit:

$$y(x) = \mathrm{e}^{A(x)}\,y_0 \quad \text{mit} \quad A(x) = \int_{t=x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t.$$

Zu lösen sei nun allgemeiner die **inhomogene Differentialgleichung**

$$\boxed{y'(x) = a(x)\,y(x) + b(x) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0.}$$

Das inhomogene Problem ist schwieriger: Wie finden wir eine Lösung? Gibt es ein allgemeines Verfahren? eine übersichtliche Lösungsformel? Wir haben dies oben mit einem integrierenden Faktor über eine exakte Differentialgleichung gelöst (Satz M2E). Lineare Differentialgleichungen treten häufig auf und sind daher recht wichtig. Zur Übung lösen wir die inhomogene Gleichung mit einer zweiten, nützlichen Rechenmethode.

Lösung durch Variation der Konstanten

Die Idee der **Variation der Konstanten** geht auf Lagrange zurück: Wenn $y_0(x) = \mathrm{e}^{A(x)}c_0$ mit konstantem $c_0 \in \mathbb{R}$ die homogene DG löst, dann löst vielleicht der Ansatz $y(x) = \mathrm{e}^{A(x)}c(x)$ die inhomogene DG.
☺ Das ist zunächst nur ein Ansatz, aber einen Versuch ist es wert!

Aufgabe: Setzen Sie $y(x) = \mathrm{e}^{A(x)}c(x)$ ein und bestimmen Sie $c(x)$. Können Sie so die Existenz / Eindeutigkeit einer Lösung garantieren?

Lösung: Wir leiten den Ansatz ab; gemäß Produktregel erhalten wir

$$y'(x) = \left[\mathrm{e}^{A(x)}c(x)\right]' = a(x)\,\mathrm{e}^{A(x)}c(x) + \mathrm{e}^{A(x)}c'(x).$$

Einsetzen in unsere Gleichung $y'(x) = a(x)\,y(x) + b(x)$ ergibt

$$a(x)\,\mathrm{e}^{A(x)}c(x) + \mathrm{e}^{A(x)}c'(x) \overset{!}{=} a(x)\,\mathrm{e}^{A(x)}c(x) + b(x).$$

Vergleich beider Seiten liefert $\mathrm{e}^{A(x)}c'(t) = b(t)$, also $c'(t) = \mathrm{e}^{-A(x)}b(t)$.
☺ Wir erleben ein nützliches Wunder: Diese Differentialgleichung für die gesuchte Funktion c können wir direkt durch Integration lösen:

$$c(x) = \int_{t=x_0}^{x} \mathrm{e}^{-A(t)}\,b(t)\,\mathrm{d}t \;+\; c(x_0)$$

Lösung durch Variation der Konstanten

Damit finden wir zu unserer inhomogenen Gleichung die Lösung

$$y(x) = \mathrm{e}^{A(x)} c(x) = \mathrm{e}^{A(x)} \left[\int_{t=x_0}^{x} \mathrm{e}^{-A(t)}\, b(t)\,\mathrm{d}t \;+\; c(x_0) \right]$$

Zunächst können wir hierbei die Integrationskonstante $c(x_0)$ frei wählen. Wir passen sie schließlich den gegebenen Anfangsdaten $y(x_0) = y_0$ an: Für $x = x_0$ gilt $A(x_0) = 0$ und $y(x_0) = c(x_0)$; wir setzen also $c(x_0) = y_0$. Zusammenfassend erhalten wir erneut die Lösungsformel aus Satz M2E:

Die homogene DG $y'(x) = a(x)\,y(x)$ mit $y(x_0) = y_0$ wird gelöst durch $y_1(x) = \mathrm{e}^{A(x)}\, y_0$ mit $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t$. Zur inhomogenen Gleichung

$$\boxed{y'(x) = a(x)\,y(x) + b(x) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0}$$

finden wir durch Variation der Konstanten die Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ mit

$$\boxed{y(x) = \mathrm{e}^{A(x)} \left[\int_{t=x_0}^{x} \mathrm{e}^{-A(t)}\, b(t)\,\mathrm{d}t \;+\; y_0 \right].}$$

Lösung durch Variation der Konstanten

☺ Diese Rechenmethode heißt „Variation der Konstanten“; das klingt widersinnig (Oxymoron), beschreibt aber sehr treffend unser Vorgehen.

☺ Sie zeigt die Existenz einer Lösung dank expliziter Lösungsformel. Die Ansatzmethode garantiert leider nicht die Eindeutigkeit der Lösung: Denkbar wären auch andere Ansätze und evtl. noch weitere Lösungen.

☺ Cauchys ∃&E-Satz M1C sichert hier die Eindeutigkeit — und auch die Existenz, dank expliziter Lösungsformel wissen wir noch mehr.

☺ Der Rechenweg mit einem integrierenden Faktor über eine exakte Differentialgleichung liefert dieselbe Lösungsformel und somit auch die Existenz; zudem liefert er die Eindeutigkeit als Dreingabe gratis mit.

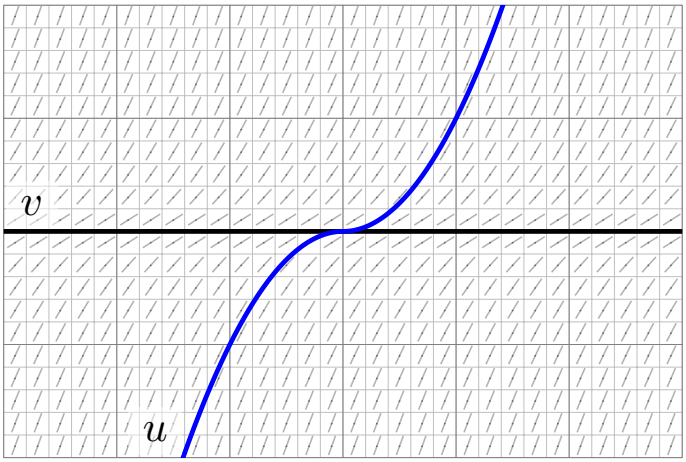
Übung: Schreiben Sie beide Rechenwege selbständig auf (d.h. ohne Vorlage). Beide sind nahezu gleich, nur die Sichtweise ist verschieden.

☺ Exakte Differentialgleichungen stehen in höherer Dimension nicht mehr zur Verfügung, wohl aber die Variation der Konstanten. N311 O311

Das Ergebnis ist bemerkenswert: Dieser Kunstgriff gelingt immer!

Können Lösungskurven kreuzen?

Als Ingenieur:in wollen bzw. müssen Sie oft DGleichungen lösen!
Bevor Sie vermeintlichen Lösungen (mit dem Computer) nachjagen, stehen Sie vor dem Grundproblem: Wie viele Lösungen gibt es?
Wenn Sie dies ignorieren, dann stellen Sie sich die falschen Fragen!
Und der Computer wird Ihnen numerische Halluzinationen vorgaukeln.



Kreuzung = mehrdeutig!

Aufgabe: Wir untersuchen Funktionen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $y'(x) = 2 \cdot \sqrt{|y(x)|}$.
Können sich Lösungen u, v kreuzen, von $u(-1) < v(-1)$ zu $u(1) > v(1)$?

Lösung: Erschreckend, aber ja! Zum Beispiel $v(x) = 0$ und $u(x) = x\,|x|$.

Können Lösungskurven kreuzen?

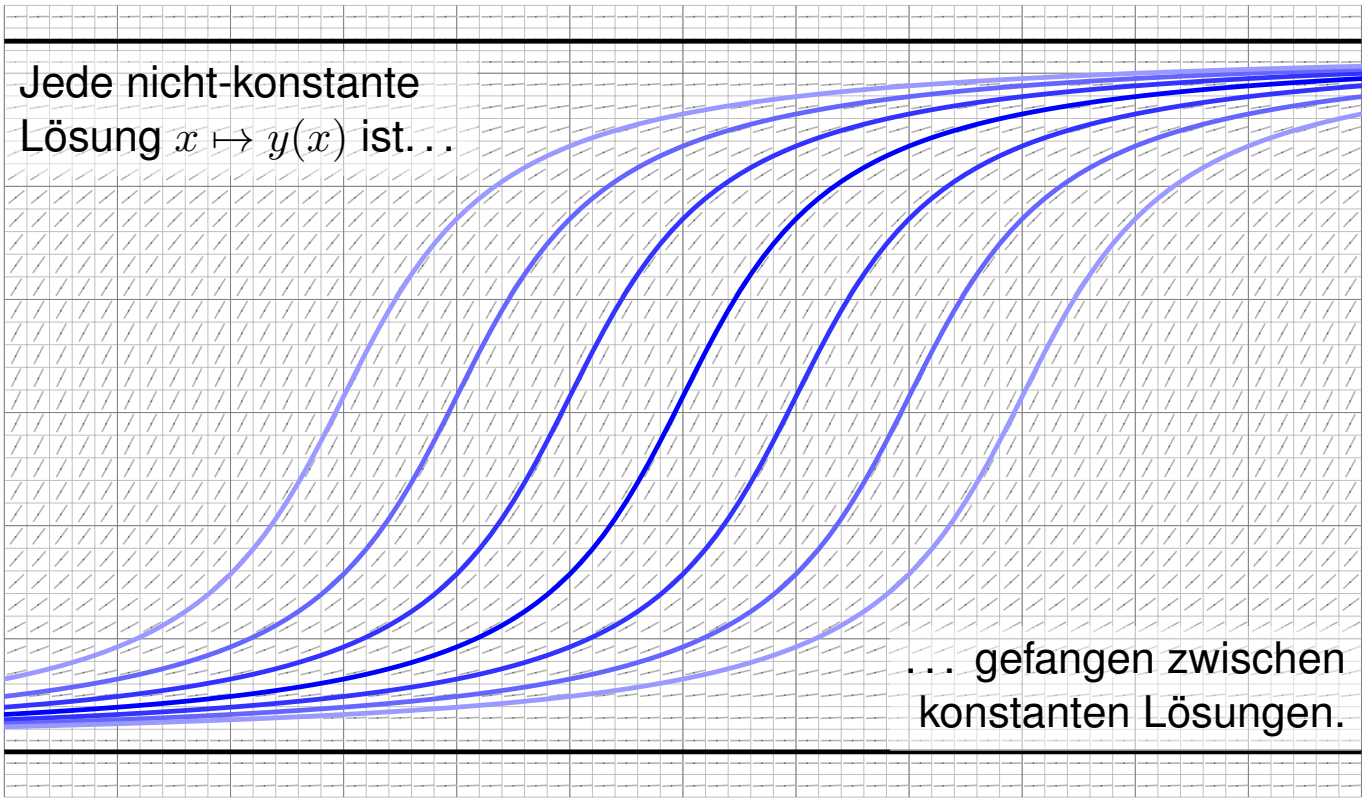
Zusatz: Führen Sie dies sorgsam aus. Zu jeder Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt es Werte $a \le b$ in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, so dass $y(x) = 0$ für $a \le x \le b$ gilt, sowie $y(x) = -(a-x)^2$ für $x \le a$ und $y(x) = (x-b)^2$ für $x \ge b$.
(1) Warum sind dies tatsächlich Lösungen? Machen Sie die Probe!
(2) Warum sind dies alle Lösungen? Nutzen Sie den ∃&E–Satz M1C!

☺ Meist wollen Sie nicht nur die Existenz, sondern auch und vor allem die Eindeutigkeit. Genau dazu nutzen Sie den ∃&E–Satz. Daraus folgt insbesondere, dass Überkreuzungen unmöglich sind. Hier jedoch ist der Satz nicht anwendbar! Unser Gegenbeispiel schafft wohltuend Klarheit.

Fun fact: Im Februar 2025, anlässlich unserer Klausur, habe ich ChatGPT diese Aufgabe gestellt. Hierzu plauderte es fröhlich: „1. Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen. Da die rechte Seite der Differentialgleichung $f(y) = 2\sqrt{|y|}$ nicht lipschitz–stetig ist bei $y = 0$ (sie hat dort eine Singularität), kann der klassische Satz von Picard–Lindelöf nicht direkt auf globale Eindeutigkeit angewendet werden.“ Alle Achtung! „Dies bedeutet, dass es potenziell mehrere Lösungen für dieselbe Anfangsbedingung geben könnte.“ Kluge Worte, hier ist Vorsicht geboten! Nach einigen Rechnugen behauptet es jedoch frech: „4. Fazit. Da die Lösungen durch ihre Startwerte eindeutig bestimmt sind und keine zwei Lösungen mit $u(-1) < v(-1)$ zu $u(1) > v(1)$ übergehen können, können sich zwei Lösungen nicht kreuzen.“ Das ist nun offensichtlich falsch!

Warum ist die Eindeutigkeit so wichtig und nützlich?

Aufgabe: (1) Ist jede Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $y' = 1 - \cos(y)$ beschränkt?
(0) Wie viele Lösungen y existieren zu jedem Startwert $y(x_0) = y_0$?



Warum ist die Eindeutigkeit so wichtig und nützlich?

Lösung: (0) Die rechte Seite $f(y) = 1 - \cos(y)$ unserer Gleichung $y' = f(y)$ ist stetig differenzierbar nach y, also greift der ∃&E–Satz M1C.

(1) Wir haben die konstanten Lösungen $u_k(x) = 2\pi k$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$. Jede andere Lösung y startet zwischen zwei konstanten Lösungen u_k und u_{k+1}, kann diese *nicht* kreuzen, bleibt also dazwischen beschränkt!

☺ Diese Differentialgleichung sieht schlimm aus, und das soll sie auch! Mit dem ∃&E–Satz gelingt dennoch alles schnell, leicht und effizient.

☺ Bonus: Als glücklicher Zufall lässt sich diese DG sogar explizit lösen, durch $y(x) = -2\operatorname{arccot}(x - \cot(y(0)/2))$. Finden ist schwer, Probe leicht!

Fun fact: Im Februar 2025, anlässlich unserer Klausur, habe ich ChatGPT diese Aufgabe gestellt. „Die rechte Seite der Differentialgleichung ist gegeben durch $f(y) = 1 - \cos(y)$. Daraus folgt $0 \le y'(x) \le 2$. Das bedeutet, dass die Funktion $y(x)$ monoton wachsend ist. Zudem ist das Wachstum durch $y'(x) \le 2$ nach oben beschränkt.“ So weit, so gut, doch dann halluziniert es: „Beispiel für eine unbeschränkte Lösung: Betrachten wir die Anfangsbedingung $y(0) = 0$. Dann haben wir $y'(0) = 1 - \cos(0) = 0$. Da $y'(x) \ge 0$, beginnt $y(x)$ zunächst mit einer horizontalen Tangente, wächst aber durch $y'(x) > 0$ für alle $y \ne 2\pi k$. Durch numerische oder qualitative Betrachtung kann man zeigen, dass $y(x)$ für große x gegen ∞ divergiert.“ Schade, das ist nun offensichtlich Unsinn. Hier kann sich die KI in den nächsten Jahren noch stark verbessern.

Qualitative Analyse dank ∃&E-Satz

⚠ Häufig lassen sich selbst einfache Differentialgleichungen nicht elementar lösen, also durch keine geschlossene Formel. Wir nutzen dann qualitative Garantien und anschließend numerische Näherungen.

Aufgabe: Vorgelegt sei eine explizite Differentialgleichung

$$\boxed{y'(x) = f(x, y(x))}$$

mit stetiger rechter Seite $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Begründen Sie durch ein Ergebnis der Vorlesung oder widerlegen Sie durch ein passendes Gegenbeispiel:

(1) Ist die rechte Seite f elementar / linear / algebraisch / analytisch, so gilt dasselbe für jede Lösung $y : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung.

(2) Welche Form von Schranke für y folgt aus $|f(x, y)| \le M \in \mathbb{R}$?

(3) Läuft durch jeden Startpunkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ eine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

(4) Welche zusätzlichen Bedingungen wären hier zu fordern / prüfen?

(5) Können sich verschiedene Lösungen $u \ne v : [a, b] \to \mathbb{R}$ schneiden? Gibt es gar kreuzende Lösungen u, v mit $u(a) < v(a)$ aber $u(b) > v(b)$?

(6) Welche zusätzlichen Bedingungen wären hier zu fordern / prüfen?

Qualitative Analyse dank ∃&E-Satz

Lösung: (1) Die DG $y' = y$ ist linear / algebraisch, die Lösung $y(x) = \mathrm{e}^x$ aber nicht. Die rechte Seite von $y'(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$ ist elementar, die Lösung $y(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$ aber nicht. ☺ Ist f jedoch analytisch, also lokal in eine konvergente Potenzreihe entwickelbar, so auch jede Lösung y.

(2) Für $x_1 < x_2$ in I gilt $y(x_1) - y(x_2) = \int_{x_1}^{x_2} y'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\,\mathrm{d}x$, somit die Schranke $|y(x_1) - y(x_2)| \le \int_{x_1}^{x_2} |f(x, y)|\,\mathrm{d}x \le M \cdot |x_1 - x_2|$.

(3) Nein, Lösungen können explodieren / in Polstellen laufen. M113 M409

(4) Für $|f(x, y)| \le M$ oder allgemeiner $|f(x, y)| \le a(x)|y| + b(x)$ M455 haben Lösungen $y : I \to \mathbb{R}$ mit $y'(x) = f(x, y(x))$ niemals Polstellen.
☺ Dank Existenzsatz M1C läuft durch jeden Startpunkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mindestens eine maximale Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Eventuell auch mehrere:

(5) Ja, ein Gegenbeispiel ist die Wasseruhr $y'(x) = -a\sqrt{y(x)}$. M123
Wir kennen weitere drastische Beispiele: M321 M325 M329 M411 M429 M437

(6) Die Stetigkeit der rechten Seite f genügt nicht, um die Eindeutigkeit von Lösungen zu gegebenen Anfangswerten $y(x_0) = y_0$ zu garantieren.
☺ Der Eindeutigkeitssatz M1C verlangt noch stetige Differenzierbarkeit von $f(x, y)$ nach y; dann ist jedes Anfangswertproblem eindeutig lösbar!

Qualitative Analyse dank ∃&E-Satz

Aufgabe: Skizzieren Sie das ebene Vektorfeld zur Differentialgleichung

$$y' = f(x,y) := \sin(y)\,\sqrt[3]{\cos(x)^2/(1+x+y)}.$$

Explizite Lösungen sind hier wohl kaum zu erwarten. Was tun Sie dann?

(1) Lässt sich der ∃&E-Satz hier anwenden? Warum und wie genau?

(2) Können sich verschiedene Lösungen $u \neq v : I \to \mathbb{R}$ schneiden?

(3) Ist die konstante Nullfunktion $\tilde{y}(x) = 0$ eine Lösung dieser DG?
Wie viele Nullstellen hat demnach jede andere Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

(4) Für welche Startpunkte $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ist jede Lösung konstant?

(5) Für welche Startpunkte $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ist jede Lösung beschränkt?

(6) Durch welche Startpunkte $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ läuft eine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

(7) Welches Verhalten haben Lösungen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $x \to \infty$?

Lösung: (1) Ja, der ∃&E-Satz M1C lässt sich hier anwenden. Genauer: Die rechte Seite $f(x,y)$ ist stetig und zudem in y stetig differenzierbar. (Zwar nicht in x, aber das wird von Satz M1C auch nicht gefordert.)

Qualitative Analyse dank ∃&E-Satz

(2) Nein, verschiedene Lösungen können sich nicht schneiden!

Angenommen, für zwei Punkte $a < b$ in I gälte $u(a) < v(a)$ aber $u(b) \geq v(b)$.
Dank Zwischenwertsatz gilt Gleichheit $u(t) = v(t)$ für mindestens ein $t \in \,]a,b]$.
Dank Eindeutigkeit (1) wäre dann aber $u = v$, im Widerspruch zu $u(a) < v(a)$.

(3) Ja! Einsetzen ergibt sofort: Die Nullfunktion ist eine Lösung.
Dank (2) haben andere Lösungen demnach keine Nullstellen!

(4) Die rechte Seite verschwindet genau für $y = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.
Jede konstante Funktion $y(x) = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ löst $y' = f(x,y)$.

(5) Jede Lösung $y : [x_0, x_1[\, \to \mathbb{R}$ erfüllt $y_0 = y(x_0) \in [(k-1)\pi, k\pi] =: J$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Dank (2,4) bleibt $y(x)$ für alle x im Intervall J gefangen.

(6) Der ∃&E-Satz M1C garantiert die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ für ein (kleines) Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Dank (5) ist die Lösung y beschränkt, sie kann also insbesondere keine Polstellen entwickeln. Dank M1C lässt sie sich in beide Richtungen fortsetzen zu $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(7) Durch jeden Startpunkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ verläuft genau eine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diese ist beschränkt, denn sie verläuft ganz in $[(k-1)\pi, k\pi]$.

Ab- und Aufrunden einer Differentialgleichung

Wir betrachten ein Anfangswertproblem, wie üblich von der Form

$$\boxed{y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0.}$$

☹ Oft können (oder wollen) wir Lösungen y nicht explizit ausrechnen.
☺ Wir wollen (oder müssen) dann y wenigstens geschickt eingrenzen.

Aufgabe: (1) Lösen Sie für $x \geq 0$ das AWP $u'(x) = u(x)^2$, $u(0) = 1$:
(a) Finden Sie eine maximale Lösung $u : [0, x_1[\to \mathbb{R}$. Ist u eindeutig?
(b) Was ist hier die Intervallgrenze x_1? Was passiert für $x \nearrow x_1$?
(2) Lösen Sie für $x \geq 0$ ebenso das AWP $v'(x) = 1 + v(x)^2$, $v(0) = 1$.
(3) Untersuchen Sie qualitativ das AWP $y'(x) = x^2 + y(x)^2$, $y(0) = 1$.
Hinweis: Können Sie (3) ebenso leicht explizit lösen wie (1) und (2)?
Wie helfen (1,2) zur Eingrenzung von (3)? Formulieren Sie eine Regel!

Riccati–Gleichungen $y'(x) = a(x) + b(x)y(x) + c(x)y(x)^2$ bilden eine umfangreiche Klasse; sie enthält lineare $y'(x) = a(x) + b(x)y(x)$ und Bernoulli–DG $y'(x) = b(x)y(x) + c(x)y(x)^2$. Eine geschlossene Lösung durch elementare Funktionen ist im Allgemeinen nicht möglich. In solchen Fällen hilft die allgemeine Technik der Eingrenzung: einfach und effizient!

Ab- und Aufrunden einer Differentialgleichung

Lösung: (1a) Wir lösen $u'(x) = u(x)^2$. Die triviale Lösung ist $u = 0$.
Für $u(x) > 0$ trennen wir die Variablen und integrieren:

$$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \int \frac{u'(x)}{u(x)^2}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x + \mathrm{const}$$

$$\Longrightarrow \quad -u(x)^{-1} = x + \mathrm{const} \quad \Longrightarrow \qquad u(x) = \frac{1}{c - x}$$

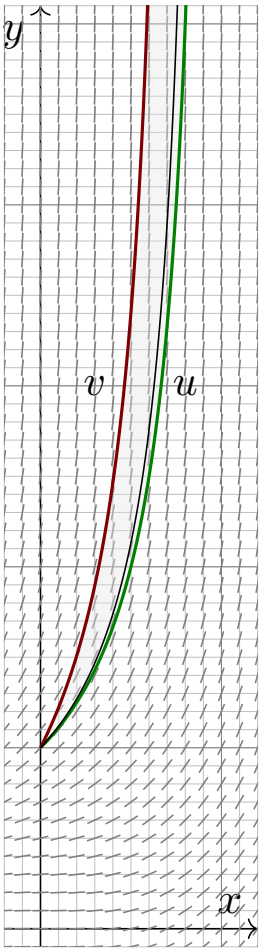
Hierbei ist $c \in \mathbb{R}_{>0}$ eine Konstante und $u(0) = 1/c$. Durch den Startwert $u(0) = 1$ verläuft somit als einzige Lösung $u : [0, 1[\to \mathbb{R} : x \mapsto 1/(1 - x)$.
(1b) Die Lösung explodiert in endlicher Zeit: Für $x \nearrow 1$ gilt $u(x) \nearrow \infty$.
Das maximale Definitionsintervall ist $[0, 1[$ wegen der Polstelle in 1.
(2a) Auch für $v'(x) = 1 + v(x)^2$ trennen wir die Variablen und integrieren:

$$\frac{v'(x)}{1 + v(x)^2} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \int \frac{v'(x)}{1 + v(x)^2}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x + \mathrm{const}$$

$$\Longrightarrow \quad \arctan(v(x)) = x + \mathrm{const} \quad \Longrightarrow \qquad v(x) = \tan(x + c)$$

Durch $v(0) = 1$ geht $v : [0, \frac{\pi}{4}[\to \mathbb{R} : x \mapsto \tan(x + \frac{\pi}{4})$ als einzige Lösung.
(2b) Diese Lösung explodiert noch schneller: Für $x \nearrow \frac{\pi}{4}$ gilt $v(x) \nearrow \infty$.

Ab- und Aufrunden einer Differentialgleichung



(3) Das Problem $y'(x) = x^2 + y(x)^2$ mit Start in $y(0) = 1$ können wir leider nicht so einfach und explizit lösen.

Satz M1C garantiert zunächst Existenz und Eindeutigkeit: Es gibt genau eine maximale Lösung $y : [0, x_1[\to \mathbb{R}$. M122

Satz M4C erlaubt den Vergleich der (noch unbekannten) Lösung y mit Unterlösungen u und Oberlösungen v:

☺ Wir erhalten ohne numerische Mühe die Eingrenzung

$$\frac{1}{1-x} \le y(x) \le \tan\Big(x + \frac{\pi}{4}\Big).$$

Wir finden Polstellen in $0.785 \approx \pi/4 \le x_1 \le 1$: Die Lösung y lebt also mindestens bis 0.785, jedoch höchstens bis 1.

Auch die Lösung y explodiert: Für $x \nearrow x_1$ gilt $y(x) \nearrow \infty$.

☺ In vielen Fällen genügt diese grobe Information. Andernfalls unternehmen wir eine numerische Näherung.

Der Ansatz $w(x) = 1/(1 + ax)$ liefert bessere Oberlösungen für $a \ge 17/16$. Die obige Skizze zeigt, wie erstaunlich genau diese Eingrenzung bereits ist.

Ab- und Aufrunden einer Differentialgleichung

Die hier benutzte **Rundungsregel** ist ebenso einfach wie genial: Wir können $y'(x) = f(x, y(x))$ mit $y(x_0) = y_0$ wie folgt eingrenzen.

1. Wir runden f und y_0 geschickt ab zu $f^\downarrow \le f$ und $y_0^\downarrow \le y_0$ und lösen das leichtere Problem $u(x) = f^\downarrow(x, u(x))$ mit $u(x_0) = y_0^\downarrow$.
2. Wir runden f und y_0 geschickt auf zu $f^\uparrow \ge f$ und $y_0^\uparrow \ge y_0$ und lösen das leichtere Problem $v(x) = f^\uparrow(x, v(x))$ mit $v(x_0) = y_0^\uparrow$.

Der folgende Satz M4C erfüllt unsere Hoffnung, denn es gilt $u \le y \le v$. Satz M4D erklärt alles nötige für die strikten Ungleichungen $u < y < v$.

Hier sind Geschick und Kreativität gefordert: Die gewählten Rundungen $f^\downarrow \le f \le f^\uparrow$ sollen möglichst nahe bei f liegen, aber leichter lösbar sein.

Aufgabe: (4) Der Ansatz $w(x) = \frac{1}{1+ax}$ liefert bessere Oberlösungen.

Lösung: (4) Wir finden $w'(x) = aw(x)^2$. Wir wünschen $w(x) \ge y(x)$. Hierzu genügt $w'(x) \ge x^2 + w(x)^2$, eingesetzt also $(a-1)w(x)^2 \ge x^2$. Wir nutzen $w(x) \ge u(x) = 1/(1-x)$, wollen also $(a-1)/(1-x)^2 \ge x^2$. Es genügt $(a-1) \ge 1/16 \ge x^2(1-x)^2$, wir finden so $a = 17/16$. Probe: Es gilt $w'(x) = aw(x)^2 \ge x^2 + w(x)^2$, dank M4C also $w \ge y$.

Eingrenzung durch Unter/Oberlösungen

Wir betrachten ein Anfangswertproblem, wie üblich von der Form

$$\boxed{y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0.}$$

Satz M4c: Eingrenzung durch Unter/Oberlösungen

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \supseteq I \times K \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y)$ sei stetig und in y stetig differenzierbar; $I = [x_0, x_1]$ und K seien kompakte Intervalle. Seien $y, u, v : I \to K$ differenzierbar, sodass für alle $x \in I$ gilt:

(a) y ist eine **Lösung** des AWP: $y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0$

(b) u ist eine **Unterlösung**: $u'(x) \le f(x, u(x)), \quad u(x_0) \le y_0$

(c) v ist eine **Oberlösung**: $v'(x) \ge f(x, v(x)), \quad v(x_0) \ge y_0$

Dann gilt: $\boxed{u(x) \le y(x) \le v(x) \quad \text{für alle } x \in I}$

Allein aus (a,b) folgt bereits $u \le y$, und mit $u(x_0) < y_0$ sogar $u < y$.
Allein aus (a,c) folgt bereits $y \le v$, und mit $v(x_0) > y_0$ sogar $v > y$.

☺ Der Satz ist bequem und intuitiv plausibel. Der Beweis ist trickreich.

Eingrenzung durch Unter/Oberlösungen

Beweis: (1) Wir zeigen zunächst: Aus (b,c) und $u \ge v$ folgt $u = v$.

Die Ableitung $\partial f / \partial y$ ist stetig und $I \times K \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt, also gilt eine Schranke $\partial f / \partial y \le M < \infty$. Für jedes $x \in I$ folgt dank $u \ge v$ in K und Mittelwertsatz $f(x, u) - f(x, v) = (\partial f / \partial y)(x, \zeta) \cdot (u - v) \le M \cdot (u - v)$. Die Hilfsfunktion $\varphi(x) = [u(x) - v(x)]\, \mathrm{e}^{-M(x - x_0)} \ge 0$ ist differenzierbar:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \big[u'(x) - v'(x)\big]\, \mathrm{e}^{-M(x-x_0)} - M\, \big[u(x) - v(x)\big]\, \mathrm{e}^{-M(x-x_0)} \\ &\le \Big(\big[f(x, u(x)) - f(x, v(x))\big] - M\, \big[u(x) - v(x)\big]\Big)\, \mathrm{e}^{-M(x-x_0)} \le 0 \end{aligned}$$

Es gilt $u(x_0) = v(x_0)$, also $\varphi(x_0) = 0$, sowie $\varphi' \le 0$, also $\varphi = 0$.

(2) Mit (1) folgern wir die Eingrenzung $u \le y \le v$. Zunächst $u \le v$:

Angenommen, die Ungleichung $u \le v$ gälte nicht auf ganz $I = [x_0, x_1]$. Dann gäbe es ein Intervall $[a, b] \subseteq I$ mit $u(a) = v(a)$ und $u > v$ auf $]a, b]$. Mit (1) folgt aus $u \ge v$ auf $[a, b]$ aber $u = v$ auf $[a, b]$, ein Widerspruch! Also gilt $u \le v$ auf ganz $[x_0, x_1]$. Hieraus folgt schließlich der Satz M4c: Statt (u, v) vergleichen wir nun (u, y) und (y, v) und erhalten $u \le y \le v$.

Eingrenzung durch Unter/Oberlösungen

Satz M4C beinhaltet insbesondere die Eindeutigkeit der Lösung y. M122
Ohne stetige Ableitung $\partial f/\partial y$ gelten diese Aussagen nicht mehr! M325
Setzen wir f nur als stetig voraus, so gilt immerhin noch folgendes:

Satz M4D: Eingrenzung durch Unter/Oberlösungen

Sei $f : \mathbb{R}^2 \supseteq G \to \mathbb{R}$ stetig, $I = [x_0, x_1] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $y, u, v : I \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit Graph in G, sodass für alle $x \in I$ gilt:

(a) y ist eine **Lösung** des AWP: $\quad y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0$

(b) u ist eine **strikte Unterlösung**: $\quad u'(x) < f(x, u(x)), \quad u(x_0) \le y_0$

(c) v ist eine **strikte Oberlösung**: $\quad v'(x) > f(x, v(x)), \quad v(x_0) \ge y_0$

Dann gilt: $\boxed{u(x) < y(x) < v(x) \quad \text{für alle } x \in \,]x_0, x_1]}$

Allein aus (a,b) folgt bereits $u < y$. Allein aus (a,c) folgt bereits $y < v$.

In Satz M4C ist die Bedingung an f streng, aber die Ungleichungen schwach (in Voraussetzung und Schlussfolgerung). In Satz M4D ist die Bedingung an f schwach, aber alle Ungleichungen sind strikt. Das AWP kann hier mehrere Lösungen y haben, doch alle liegen zwischen u und v! Für die qualitative Beschreibung von Lösungen sind diese Abschätzungen ungemein nützlich.

Eingrenzung durch Unter/Oberlösungen

Lemma M4E: Du musst steigen oder sinken...

Sei $g : \mathbb{R} \supseteq [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $g(a) = g(b) = 0$ differenzierbar in a bzw. b.

$$\begin{array}{ccccc} g'(a) > 0 & \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} & g > 0 \text{ auf }]a, a+\varepsilon[, & g'(b) < 0 & \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} & g > 0 \text{ auf }]b-\varepsilon, b[, \\ \Downarrow & & \Downarrow & \Downarrow & & \Downarrow \\ g'(a) \ge 0 & \underset{\not\Rightarrow}{\Longleftarrow} & g \ge 0 \text{ auf } [a, a+\varepsilon[, & g'(b) \le 0 & \underset{\not\Rightarrow}{\Longleftarrow} & g \ge 0 \text{ auf }]b-\varepsilon, b]. \end{array}$$

Übung: Rechnen Sie diese Implikationen nach: Nutzen Sie direkt den Differenzenquotienten! Die Umkehrungen gelten nicht: Gegenbeispiele!

Beweis des Satzes: Aus $u(x_0) < y(x_0)$ folgt $u < y$ auf $[x_0, x_0 + \varepsilon[$.
Bei $u(x_0) = y(x_0)$ nutzen wir das Lemma für $g = y - u : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$.
Es gilt $g(x_0) = 0$ und $g'(x_0) > 0$, also $g > 0$ auf $]x_0, x_0 + \varepsilon[$, d.h. $u < y$.

Wir zeigen $u < y$ auf ganz $]x_0, x_1]$. Angenommen, dies gälte nicht. Dann sei $\xi := \inf\{\, x \in [x_0 + \varepsilon, x_1] \mid u(x) \ge y(x) \,\}$. Damit gilt $u < y$ auf $]x_0, \xi[$ und $u(\xi) = y(\xi)$. Das Lemma zeigt $u'(\xi) \ge y'(\xi)$. Nach (a,b) gilt aber $u'(\xi) < f(\xi, u(\xi)) = f(\xi, y(\xi)) = y'(\xi)$, ein Widerspruch! Wir schließen, dass $u < y$ auf $]x_0, x_1]$ gelten muss. Ebenso folgt die Ungleichung $y < v$.

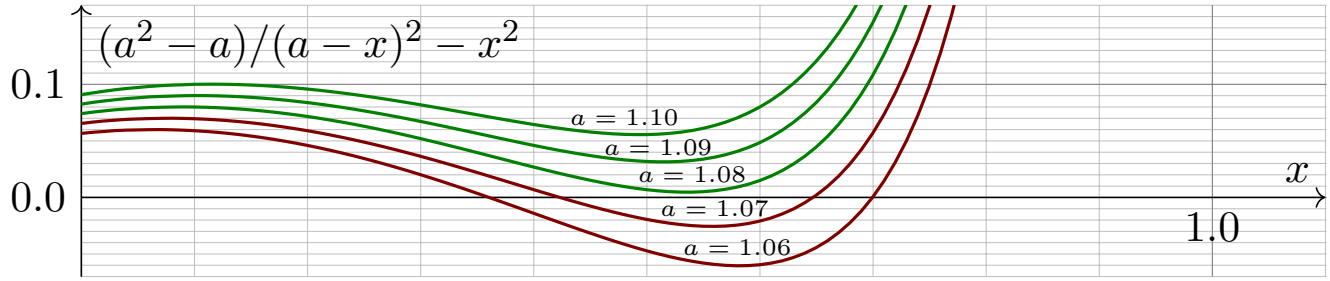
Abschätzung und Eingrenzung von Lösungen

Wir untersuchen das AWP $y(0) = 1$ und $y'(x) = y(x)^2 - x^2$ für $x \geq 0$.

Aufgabe: (1) Gibt es eine eindeutige maximale Lösung $y : [0, x_1[\to \mathbb{R}$? Existiert sie zumindest für $0 \leq x < 1$? Explodiert sie in endlicher Zeit?
(2) Vergleichen Sie mit dem AWP $v(0) = 1$ und $v'(x) = v(x)^2$ für $x \geq 0$.
(3) Gilt $y(x) \geq u(x) := a/(a - x)$? Probieren Sie $a = 1.07$ und $a = 1.08$.

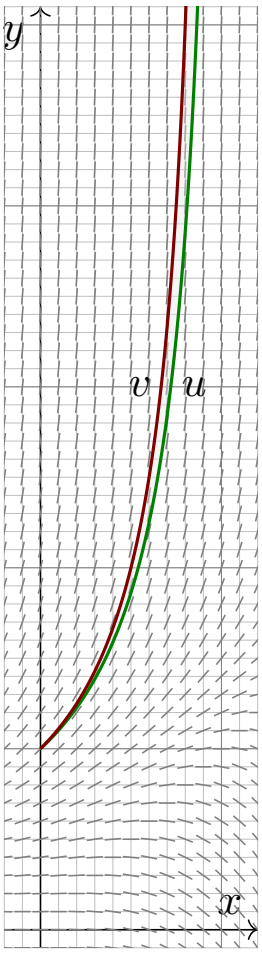
Lösung: (1) Ja, dank ∃&E-Satz M1C. (2) Es gilt $f^{\uparrow}(x, y) := y^2 \geq f(x, y)$. Die Oberlösung $v(x) = 1/(1 - x)$ zeigt $y(x) \leq v(x)$ dank Satz M4C. Die Lösung y existiert demnach mindestens auf dem Intervall $[0, 1[$.

(3) Für $u(x) = a/(a - x)$ gilt $u(0) = 1$ und $u'(x) = a/(a - x)^2$. Wir wollen $u'(x) \leq u(x)^2 - x^2$, also $(a^2 - a)/(a - x)^2 - x^2 \geq 0$. Dies gilt für $a \geq 1.08$:



Somit ist $u(x) = 1.08/(1.08 - x)$ eine Unterlösung. Dank Satz M4C gilt $y(x) \geq u(x)$. Die Lösung y explodiert in endlicher Zeit, bei $x_1 \in [1, 1.08]$.

Abschätzung und Eingrenzung von Lösungen



Das AWP $y'(x) = y(x)^2 - x^2$, $y(0) = 1$ können wir nicht elementar lösen, d.h. explizit als geschlossene Formel.

Satz M1C garantiert zunächst Existenz und Eindeutigkeit: Es gibt genau eine maximale Lösung $y : [0, x_1[\to \mathbb{R}$. M122

Das ist schön und gut. Wie berechnen wir genaueres?

Satz M4C erlaubt den Vergleich der (noch unbekannten) Lösung y mit Unterlösungen u und Oberlösungen v:

☺ Wir erhalten ohne numerische Mühe die Eingrenzung

$$\frac{1.08}{1.08 - x} \leq y(x) \leq \frac{1}{1 - x}.$$

Satz M4D garantiert die strikten Ungleichungen für $x > 0$.

Wir finden Polstellen in $1 \leq x_1 \leq 1.08$: Unsere Lösung y lebt also mindestens bis 1, jedoch höchstens bis 1.08.

☺ In vielen Fällen genügt diese grobe Information. Andernfalls unternehmen wir eine numerische Näherung.

Beschränkung und Fortsetzbarkeit von Lösungen

Aufgabe: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig, aber nicht notwendig differenzierbar. Wir untersuchen das AWP $y(x_0) = y_0$ und $y'(x) = f(x, y(x))$ für $x \geq x_0$ und wollen das Wachstum bequem abschätzen: Es gelte $|y_0| \leq c$ und eine in $|y|$ lineare Schranke $|f(x, y)| \leq a(x)|y| + b(x)$ mit $a, b \geq 0$ stetig.

(1) Lösen Sie zunächst $u'(x) = a(x)u(x) + b(x)$ mit $u(x_0) = c$, speziell (2) für $a, b \geq 0$ konstant. Sind die Lösungen u eindeutig? (3) Existieren sie für alle Zeit $x \geq x_0$? Oder enden sie vorzeitig in einer Polstelle? (4) Welche Schranken folgen für y? (5) Sind die Lösungen y eindeutig? (6) Existieren sie für alle Zeit $x \geq x_0$? Oder enden sie evtl. vorzeitig?

Lösung: (1) Wir runden auf: Zur linearen DG $u'(x) = a(x)u(x) + b(x)$ mit $u(x_0) = c$ ist die Lösungen eindeutig und explizit bekannt (M2E):

$$u(x) = \mathrm{e}^{A(x)} \left[\int_{t=x_0}^{x} \mathrm{e}^{-A(t)}\, b(t)\, \mathrm{d}t + c \right] \geq 0 \quad \text{mit} \quad A(x) = \int_{t=x_0}^{x} a(t)\, \mathrm{d}t$$

(2) Speziell für a, b konstant gilt $A(x) = a(x - x_0)$ und somit

$$u(x) = \mathrm{e}^{a(x-x_0)} \left[\int_{t=x_0}^{x} \mathrm{e}^{-a(t-x_0)}\, b\, \mathrm{d}t + c \right] = \mathrm{e}^{a(x-x_0)}(c + b/a) - b/a.$$

Im Sonderfall $a = 0$ erhalten wir noch einfacher $u(x) = b(x - x_0) + c$.

Beschränkung und Fortsetzbarkeit von Lösungen

(3) Die Lösung u existiert für alle Zeit $x \geq x_0$: Sie hat keine Polstellen!

(4) Wir zeigen $y(x) \leq u(x)$ für alle $x \geq x_0$. Für $x \geq x_0$ mit $y(x) \leq 0$ ist dies klar, denn $u(x) \geq 0$. Für $x \geq x_0$ mit $y(x) \geq 0$ nutzen wir Satz M4C:

Es gilt $y'(x) = f(x, y(x)) \leq a(x)y(x) + b(x)$. Es folgt $y(x) \leq u(x)$, denn y ist eine Unterlösung zu u. Genauer sei $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots$ mit $y|_{[x_0,x_1]} \geq 0$ und $y|_{]x_1,x_2[} < 0$ und $y|_{[x_2,x_3]} \geq 0$ etc. Auf $[x_0, x_1]$ nutzen wir $y(x_0) \leq c = u(x_0)$. Auf $[x_2, x_3]$ nutzen wir $y(x_2) = 0 \leq u(x_2)$, usw.

Hieraus folgt $y(x) \leq u(x)$ für alle $x \geq x_0$. Wörtlich dieselbe Rechnung für $-y$ und $-f$ statt y und f zeigt $-y \leq u$. Somit gilt insgesamt $|y| \leq u$.

(5) Nein, Lösungen sind im Allgemeinen nicht eindeutig! M123 M325
Wir verlangen hier nur, dass f stetig ist; um den Eindeutigkeitssatz M1C anwenden zu können, müsste f zudem in y stetig differenzierbar sein.

(6) Jede Lösung y lässt sich für alle Zeit fortsetzen zu $y : [x_0, \infty[\to \mathbb{R}$.
☺ Die Ungleichung $|y| \leq u$ liefert eine bequeme explizite Schranke und garantiert insbesondere, dass y keine Polstellen entwickelt.

Fluchtgeschwindigkeit und Flugbahn eines Geschosses

Aufgabe: (1) Formulieren Sie die radiale Flugbewegung $r : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ einer Punktmasse m im Schwerefeld eines Planeten mit Masse M.

(2) Multiplizieren Sie mit $m\dot{r}(t)$, integrieren Sie zur Energiegleichung.

(3) Was ist die Fluchtgeschwindigkeit v_F? Im Spezialfall der Erde?

(4) Wie verläuft in diesem Grenzfall die Flugbahn $r(t)$?

Lösung: (1) Die Bewegungsgleichung ist nach Newton

$$\boxed{\ddot{r}(t) = -\gamma M / r(t)^2, \quad r(0) = R > 0, \quad \dot{r}(0) = v_0 > 0.}$$

Wie üblich ist hier $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \mathrm{Nm}^2/\mathrm{kg}^2$ die Gravitationskonstante.

Newtons Bewegungsgesetz (in seiner allgemeinen Form) ist Grundlage der Himmelsmechanik. Im Allgemeinen benötigt man für solche DG numerische Methoden. In unserem Spezialfall (4) jedoch können wir sie exakt lösen! Das ist bemerkenswert, und diese Technik sollten Sie kennen.

☺ Das Zweikörperproblem lässt sich exakt lösen: Kepler um 1600 emprisch, Newton 1687 mathematisch, Bahnen sind Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln. Es ist oft eine nützliche Näherung.

⚠ Für drei und mehr Körper lässt sich die Lösung nicht mehr elementar formulieren, die Differentialgleichung kann im Allgemeinen nur noch numerisch gelöst werden. O125

Fluchtgeschwindigkeit und Flugbahn eines Geschosses

(2) Wir multiplizieren die DG mit $m\dot{r}(t)$ und erhalten

$$m\,\dot{r}(t)\,\ddot{r}(t) + \frac{\gamma m M\,\dot{r}(t)}{r(t)^2} = 0.$$

Durch Integration von 0 bis t erhalten wir die äquivalente Gleichung

$$\boxed{\frac{1}{2} m\,\dot{r}(t)^2 - \frac{\gamma m M}{r(t)} \quad = \quad \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{\gamma m M}{R} =: E.}$$

☺ Die Summe aus kinetischer und potentieller Energie ist konstant! Das Bewegungsgesetz impliziert Energieerhaltung (und umgekehrt).

(3) Wir suchen die Geschwindigkeit v_0 zur Flucht $r(t) \to \infty$ für $t \to \infty$. Notwendig hierzu ist nach obiger Energieformel $E \geq 0$, also

$$\boxed{v_0 \geq v_F := \sqrt{2\gamma M / R}}$$

Beispiel Erde: $M = 5.97 \cdot 10^{24}\mathrm{kg}$, $R = 6.36 \cdot 10^6 \mathrm{m}$, $v_F = 11.2 \mathrm{km/s}$.

☺ Dies ist die berühmte Fluchtgeschwindigkeit von der Erdoberfläche. Zum Vergleich: $11\,200 \mathrm{m/s}$ ist etwa 33-fache Schallgeschwindigkeit.

Fluchtgeschwindigkeit und Flugbahn eines Geschosses

(4) Im Grenzfall $E = 0$ vereinfacht sich unsere Differentialgleichung zu

$$\boxed{\dot{r}(t) = \sqrt{2\gamma M}\, r(t)^{-1/2}, \quad r(0) = R.}$$

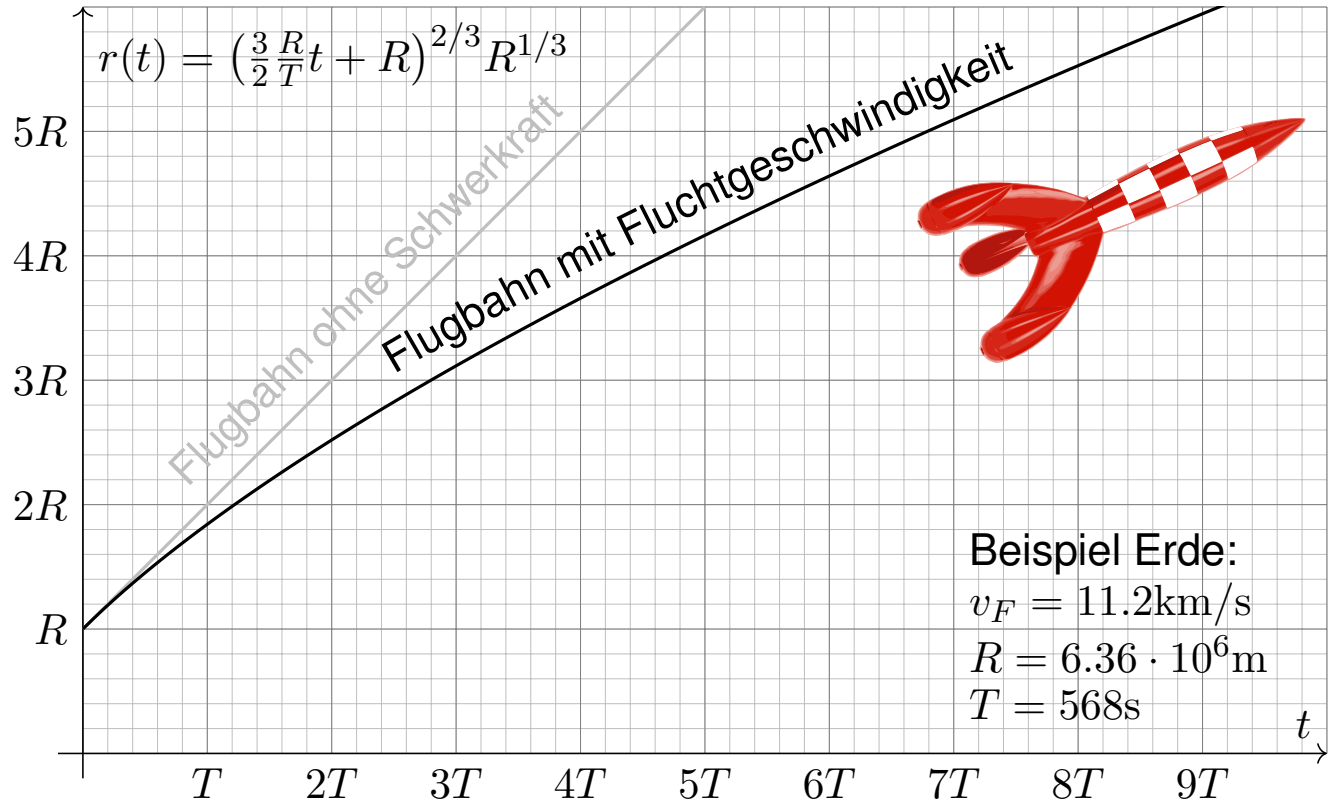
Diese DG lösen wir durch Trennung der Variablen und Integration:

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad & \int_{\tau=0}^{t} \dot{r}(\tau)\, r(\tau)^{1/2}\, \mathrm{d}\tau = \int_{\tau=0}^{t} \sqrt{2\gamma M}\, \mathrm{d}\tau \\
\Longrightarrow \quad & \left[\frac{2}{3} r(\tau)^{3/2}\right]_{\tau=0}^{t} = \sqrt{2\gamma M} \cdot t \\
\Longrightarrow \quad & r(t)^{3/2} - R^{3/2} = \frac{3}{2}\sqrt{2\gamma M} \cdot t \\
\Longrightarrow \quad & r(t) = \left(\frac{3 v_F}{2} \cdot t + R\right)^{2/3} R^{1/3}
\end{aligned}$$

☺ Diese Funktion löst die ursprüngliche Bewegungsgleichung mit den AW $r(0) = R$ und $\dot{r}(0) = v_F$ sowie $r(t) \to \infty$ und $\dot{r}(0) \to 0$ für $t \to \infty$. Die Geschwindigkeit v_F genügt also tatsächlich, um dem Schwerefeld der Masse M zu entfliehen! Somit ist v_F die Fluchtgeschwindigkeit.

Fluchtgeschwindigkeit und Flugbahn eines Geschosses

Skizze der gefundenen Lösung (in natürlichen Einheiten):



Die Raketengrundgleichung nach Ziolkowsky

Aufgabe: (1) Eine Rakete mit Masse $m(t)$ und Geschwindigkeit $v(t)$ wird angetrieben durch konstanten Massenausstoß $\mu = -\dot{m} = \ldots \mathrm{kg/s}$ mit Geschwindigkeit $v_b = 3500\mathrm{m/s}$. Die Rakete bestehe anfangs zu 99% aus Brennstoff. Was ist die Endgeschwindigkeit (ohne weitere Kräfte)?

Lösung: (1) Die Impulserhaltung ergibt folgende Bilanz:

$$0 = \mathrm{d}p = \underbrace{\mathrm{d}(mv)}_{\text{Rakete}} - \underbrace{(\mathrm{d}m)(v - v_b)}_{\text{ausgestoßene Masse}} = \underbrace{m \cdot \mathrm{d}v + \mathrm{d}m \cdot v_b}_{\text{Bilanz im Schwerpunktsystem}}$$

Division durch $\mathrm{d}t$, Trennung der Variablen, Integration bis Brennschluss:

$$\Longrightarrow \qquad \dot{v}(t) = -v_b \frac{\dot{m}(t)}{m(t)}$$

$$\Longrightarrow \qquad \int_{t=t_0}^{t_1} \dot{v}(t)\,\mathrm{d}t = -v_b \int_{t=t_0}^{t_1} \frac{\dot{m}(t)}{m(t)}\,\mathrm{d}t$$

$$\Longrightarrow \qquad v(t_1) - v(t_0) = -v_b \Big[\ln m(t)\Big]_{t=t_0}^{t_1} = v_b \ln \frac{m(t_0)}{m(t_1)}$$

Zahlenbeispiel $\qquad = 3.5\mathrm{km/s} \cdot \ln(100) \approx 16.1\mathrm{km/s}$

Die Raketengrundgleichung nach Ziolkowsky

Aufgabe: (2) Bei welcher Brenndauer kann man so der Erde entfliehen? (Senkrechter Start, keine Luftreibung, keine Zentrifugalkraft etc.)

Lösung: Von (1) subtrahieren wir die Erdbeschleunigung $g \lessapprox 9.81\mathrm{m/s^2}$:

$$\Longrightarrow \qquad \dot{v}(t) = -v_b \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} - g$$

$$\Longrightarrow \quad v(t_1) - v(t_0) = v_b \ln \frac{m(t_0)}{m(t_1)} - g(t_1 - t_0)$$

Bei vertikalem Start im Schwerefeld der Erde addiert sich der freie Fall. Zur Vereinfachung nehmen wir geringe Flughöhe an, somit konstantes g. (In Wirklichkeit nimmt die Erdbeschleunigung $g(r/R)^{-2}$ deutlich ab; leider ist die genauere Gleichung auch mühsamer zu integrieren. . .) Ich begnüge mich hier mit einer groben **Überschlagsrechnung**. Hinreichend kurze Brenndauer $T = t_1 - t_0$ zur Flucht:

$$gT < 16.1\mathrm{km/s} - 11.2\mathrm{km/s} \approx 4900\mathrm{m/s}$$

$$\Longrightarrow \qquad T < 500\mathrm{s}$$

Vision, Berechnung, Realisierung

M463
Übung

Konstantin Ziolkowski (1857–1935) arbeitete als Mathematiklehrer, seine wissenschaftlichen Studien veröffentlichte er als Amateur. Aufgrund seiner Berechnungen erkannte er, dass damals mögliche Feststoffraketen zum Erreichen des Weltraums zu schwach wären, und schlug zum Antrieb Flüssigtreibstoff vor (Wasserstoff, Sauerstoff, Kohlenwasserstoffe). Er veröffentlichte 1903 die Raketengrundgleichung und leitete daraus das Prinzip der Mehrstufenrakete ab.

Zahlenbeispiel für eine zweistufige Rakete: erste Stufe voll $50\mathrm{t}$, leer $5\mathrm{t}$, zweite Stufe voll $10\mathrm{t}$, leer $1\mathrm{t}$, Nutzlast $1\mathrm{t}$, Startgeschwindigkeit $v(t_0) = 0$, Endgeschwindigkeit $v_{\text{End}} = v(t_1)$:

$$\frac{v_{\text{End}}}{v_b} = \ln \frac{50+10+1}{5+10+1} + \ln \frac{10+1}{1+1} \approx 1.34 + 1.70 = 3.03$$

Zum Vergleich eine einstufige Rakete mit gleicher Treibstoff- und Strukturmasse:

$$\frac{v_{\text{End}}}{v_b} = \ln \frac{50+10+1}{5+1+1} \approx 2.16$$

Bei sonst gleichen Daten erreicht die einstufige Rakete also eine geringere Endgeschwindigkeit. Das ist anschaulich plausibel, da mehr (überflüssige) Strukturmasse beschleunigt werden muss. Die Raketengrundgleichung und die abgeleitete Rechnung präzisieren dieses Phänomen.

Die Raketengrundgleichung folgt aus Impulserhaltung und einer einfachen Differentialgleichung. Sie ist grundlegend für Trägerraketen, da hier die Treibstoffmasse groß ist, und die Gesamtmasse während des Fluges stark abnimmt. Hingegen ist für Orbiter wie den Mars- oder Venus-Express (Seite W221) der Verlust der Treibstoffmasse vernachlässigbar im Vergleich zur Gesamtmasse.

Vision, Berechnung, Realisierung

M464
Übung

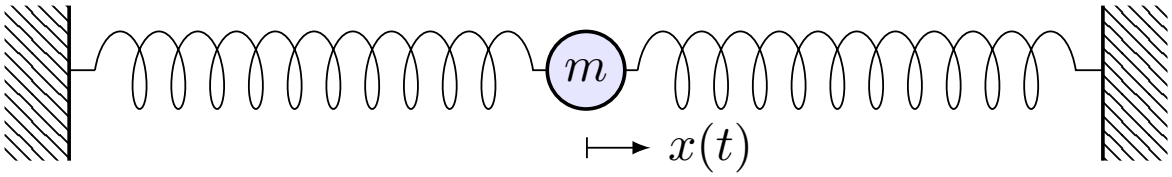
An der Geschichte der Raumfahrt sehen wir exemplarisch eine einhundertjährige Entwicklung von futuristischer Vision über die mathematische Theorie bis hin zur technischen Realisierung. Ich betone nochmals: Ohne Vision keine Theorie, ohne Theorie keine erfolgreiche Anwendung.

Jules Vernes (1828–1905) war ein französischer Schriftsteller und ein Begründer der Science-Fiction-Literatur. Die Abenteuer seiner Helden thematisieren den rasanten Fortschritt und neue technische Möglichkeiten seiner Epoche und nehmen viele zukünftige Entwicklungen vorweg: *Cinq semaines en ballon* (Fünf Wochen im Ballon, 1863), *De la Terre à la Lune* (Von der Erde zum Mond, 1865), *Autour de la Lune* (Reise um den Mond, 1869), *Vingt mille lieues sous les mers* (Zwanzigtausend Meilen unter dem Meer, 1869). Sein größter Erfolg war der Roman *Le Tour du monde en 80 jours* (In 80 Tagen um die Welt, 1872), der bis heute populär ist.

Konstantin Ziolkowski (1857–1935) war ein russischer Mathematiker und Physiker, Amateur und Wegbereiter der Raumfahrt. Er vollzog den Schritt von *Fiction* zu *Science*: Angeregt durch Jules Vernes Erzählungen, schrieb Ziolkowski selbst Geschichten über interplanetare Raumfahrt. Dazu untersuchte er zunehmend die physikalisch-technischen Probleme von Raumflügen, lang bevor sie realisiert werden konnten. Er befasste sich mit Fragen des Betriebs von Raumstationen, der industriellen Nutzung des Weltraums, und schlug den Weltraumlift vor, um Objekte möglichst günstig direkt in den geostationären Orbit zu befördern. Er hat jedoch nie eine Rakete gebaut und schien bei vielen seiner Theorien nicht davon auszugehen, dass sie jemals umgesetzt würden. Sein technischer Weitblick wurde erst spät gegen Ende seines Lebens erkannt und inspirierte nachfolgende Wissenschaftler wie Hermann Oberth (1894–1989) und Wernher von Braun (1912–1977). Den Beginn der Raumfahrt (Sputnik 1957, Juri Gagarin 1961) erlebte er nicht.

Kapitel N

Differentialgleichungen höherer Ordnung



Une loi (physique), pour nous, [...] est une relation constante entre le phénomène d'aujourd'hui et celui de demain; en un mot, c'est une équation différentielle.

Henri Poincaré (1854–1912), *La valeur de la science* (1905)

Inhalt dieses Kapitels N

1 Harmonische Schwingungen
- Freie harmonische Schwingung
- Erzwungene harmonische Schwingung

2 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten
- Charakteristisches Polynom und Fundamentalsystem
- Lösungsansatz für spezielle rechte Seiten $r(x)\,\mathrm{e}^{\mu x}$
- Greensche Lösungsformel für beliebige rechte Seiten

3 Lineare Differentialgleichungen mit stetigen Koeffizienten
- Fundamentalmatrix und Variation der Konstanten
- Lösung durch Potenzreihenansatz

4 Die Euler–Lagrange–Differentialgleichung
- Optimierung durch Variationsrechnung
- Lösung des Brachistochrone-Problems

5 Fazit: Differentialgleichungen höherer Ordnung
- Zusammenfassung und Verständnisfragen
- Weitere Aufgaben und Methodenvergleich

Einleitung und Überblick

Im vorigen Kapitel haben wir Differentialgleichungen $y'(x) = f(x, y(x))$ erster Ordnung in einer Dimension kennen und geschickt lösen gelernt. Unsere Techniken wollen wir nun auf DG **höherer Ordnung** erweitern:

$$y^{(n)}(x) = f\big(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\big)$$

Wichtig und noch gut lösbar sind **lineare Differentialgleichungen**:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x)\, y'(x) + a_0(x)\, y(x) = b(x)$$

Im Falle $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ haben wir **konstante Koeffizienten**.
Für lineare DG sind zwei strukturelle Aspekte grundlegend (Satz N3A):

- Die Lösungsmenge einer linearen Differentialgleichung $L\,y = b$ ist immer ein **Vektorraum** ($b = 0$) bzw. ein **affiner Raum** ($b \neq 0$).
- Dieser Raum hat immer **Dimension n:** Dies folgt aus Existenz und Eindeutigkeit der Lösung zu gegebenen Anfangsdaten (N3A).

Das strukturiert und vereinfacht das Problem, alle Lösungen zu finden! Die lineare Struktur war schon für lineare DG erster Ordnung sichtbar, doch erst hier für lineare DG höherer Ordnung spielt die Lineare Algebra eine zentrale Rolle und entfaltet ihre ordnende Kraft in voller Schönheit.

Einleitung und Überblick

Im nächsten Kapitel werden wir allgemeiner mehrdimensionale, gekoppelte Differentialgleichungssysteme untersuchen und lösen.

Jede (lineare) Differentialgleichung n-ter Ordnung ist äquivalent zu einem (linearen) n–dimensionalen DGSystem erster Ordnung. Somit können wir alle Techniken des nächsten Kapitels anwenden!

Theoretisch ist damit bereits alles geklärt. Da aber DG höherer Ordnung in der Praxis häufig auftreten, wollen wir hier schon die grundlegenden Rechentechniken möglichst anwendungsfreundlich ausarbeiten.

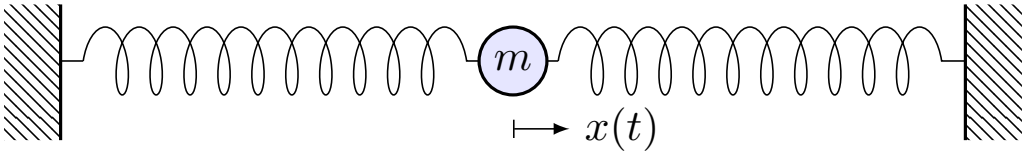
Für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten gelingt uns dies vollständig. Dieses Kapitel präsentiert hierzu eine Handvoll erfolgreicher Ansätze und illustriert diese durch zahlreiche Beispiele.

Wann wie welcher Ansatz zum Ziel führt, erklärt Ihnen die Theorie! Um die unzähligen Beispiele und alle möglichen Komplikationen zu verstehen, sollten Sie daher unbedingt die Grundlagen beherrschen.

📖 Für Vertiefung und zahlreiche schöne Anwendungsbeispiele siehe H. Heuser: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Vieweg, 6. Aufl. 2009

Beispiel: mechanische Schwingung

Schwingung einer Masse an einer Feder:



Zeit $t \in \mathbb{R}$, Auslenkung $x(t)$ aus Ruhelage, Rückstellkraft $F_1 = -k\,x$, zusätzlich noch Reibung / viskoser Strömungswiderstand $F_2 = -c\,\dot{x}$.

Newtons Bewegungsgesetz $m\,\ddot{x} = F_1 + F_2$, also $m\,\ddot{x} + c\,\dot{x} + k\,x = 0$.
Dies führt zu einer **linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung**

$$\boxed{\ddot{x}(t) + 2\delta\,\dot{x}(t) + \omega_0^2\,x(t) = 0}$$

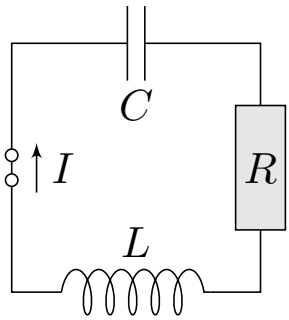
mit konstanten Koeffizienten $\delta = c/2m \geq 0$ und $\omega_0^2 = k/m$, $\omega_0 \geq 0$.
Bei äußerer Anregung durch eine Kraft $F(t) = m\,f(t)$ gilt:

$$\boxed{\ddot{x}(t) + 2\delta\,\dot{x}(t) + \omega_0^2\,x(t) = f(t)}$$

Allgemein suchen wir alle möglichen Lösungen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto x(t)$, speziell die Lösung x zu vorgegebenen Anfangswerten $x(t_0)$ und $\dot{x}(t_0)$.

Beispiel: elektrischer Schwingkreis

Diese Differentialgleichung begegnet uns in sehr vielen Situationen.
Sie ist daher grundlegend wichtig in Naturwissenschaft und Technik.



Elektrischer Schwingkreis (RLC), Radioempfänger:

Beziehungen zwischen Strom I und Spannung U:

- Ohmscher Widerstand: $U_R = R\,I$,
- Selbstinduktivität der Spule: $U_L = L\,\dot{I}$,
- Kapazität des Kondensators: $I = C\,\dot{U}_C$.

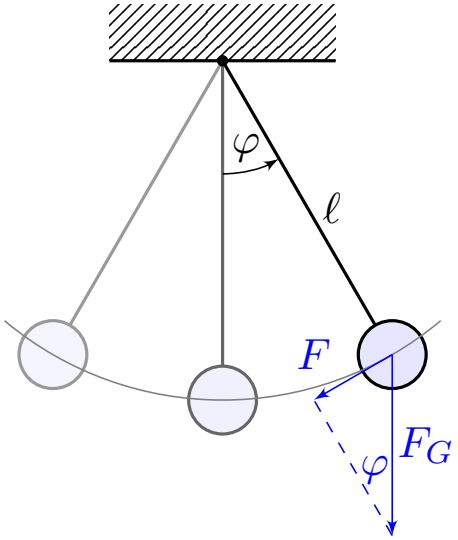
In Reihe summieren sich diese Spannungen zu $U_L + U_R + U_C = \text{const}$.
Die Ableitung ergibt $\dot{U}_L + \dot{U}_R + \dot{U}_C = 0$, also $L\,\ddot{I} + R\,\dot{I} + \frac{1}{C} I = 0$.
Dies führt zur selben **Differentialgleichung zweiter Ordnung**

$$\boxed{\ddot{x}(t) + 2\delta\,\dot{x}(t) + \omega_0^2\,x(t) = 0}$$

mit $x(t) = I(t)$ sowie $\delta = \frac{R}{2L}$ und $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$. Bei äußerer Anregung gilt:

$$\boxed{\ddot{x}(t) + 2\delta\,\dot{x}(t) + \omega_0^2\,x(t) = f(t)}$$

Beispiel: das mathematische Pendel



Die Rückstellkraft ist hier nicht-linear:

$$F(t) = -m \cdot g \cdot \sin\varphi(t)$$

$m =$ Masse des Pendelkörpers
$g = 9.81\mathrm{m/s}^2$ Erdbeschleunigung
$F_G = mg$ Gravitationskraft zur Masse m
$\ell =$ Länge des Pendelstabes
$\varphi(t) =$ Winkelauslenkung
$\ell\,\varphi(t) =$ Auslenkung

Newtons Bewegungsgesetz $F(t) = m\,\ell\,\ddot{\varphi}(t)$ führt zu

$$\boxed{\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{\ell}\,\sin\varphi(t).}$$

Anders als vorige ist dies eine **nicht-lineare Differentialgleichung**.
Gegeben sind die anfängliche Position $\varphi(0)$ und Geschwindigkeit $\dot{\varphi}(0)$.
Fragen: Wie sieht die Trajektorie aus? Wie lang dauert eine Periode?

Beispiel: Pendel bei kleinen Amplituden

⚠ Wir vereinfachen etwas: punktförmige Masse des Pendelkörpers, vernachlässigbare Masse des Stabes, reibungsfreie Aufhängung, etc.

Für kleine Auslenkungen gilt $\sin(\varphi) \approx \varphi$. (Faustregel für $|\varphi| < 5°$)
Dies führt uns zur **linearisierten Differentialgleichung**:

$$\boxed{\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{\ell}\,\varphi(t)}$$

Diese Differentialgleichung ist viel einfacher, denn sie ist linear in φ:

$$\ddot{\varphi}(t) = -\omega^2\varphi(t) \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Dies ist die Bewegungsgleichung eines **harmonischen Oszillators**:

$$\varphi(t) = \varphi_0\cos(\omega t + \alpha), \quad \ddot{\varphi}(t) = -\varphi_0\,\omega^2\cos(\omega t + \alpha).$$

Für kleine Auslenkungen ist demnach die Periodendauer $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$.
Die Anfangsdaten bestimmen die Auslenkung φ_0 und die Phase α.

⚠ Für große Auslenkungen brauchen wir eine genauere Rechnung!
Die Lösung ist schwieriger und wird im nächsten Kapitel diskutiert. O133

Freie harmonische Schwingung

Aufgabe: Finden Sie alle Lösungen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$\boxed{\ddot{u}(t) + 2\delta\, \dot{u}(t) + \omega_0^2\, u(t) = 0.}$$

Wir nennen dies die Gleichung des **harmonischen Oszillators** mit **Dämpfung** $\delta \geq 0$ und **ungedämpfter Eigenfrequenz** $\omega_0 > 0$.

Dies ist eine lineare DG zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. In diesem einfachen aber wichtigen Spezialfall zeigen sich bereits die allgemeinen Techniken dieses Kapitels, die wir anschließend ausführen.

Lösung: Der Exponentialansatz $u(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ führt zur char. Gleichung

$$\underbrace{\left(\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2\right)}_{\text{charakteristisches Polynom}} \mathrm{e}^{\lambda t} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda = \underbrace{-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}_{\text{Eigenwerte des Systems}} \in \mathbb{C}.$$

Je nach Diskriminante beobachten wir verschiedene Reaktionen:
$\delta < \omega_0$: **schwache Dämpfung**, zwei komplex-konjugierte Nullstellen
$\delta > \omega_0$: **starke Dämpfung**, zwei reelle Nullstellen $\lambda_1 < -\delta < \lambda_2 < 0$
$\delta = \omega_0$: **kritische Dämpfung**, doppelte reelle Nullstelle $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$

Freie harmonische Schwingung

Physikalische Anwendungen fordern meist **reelle Lösungen** $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Oft vereinfachen sich Rechnungen und die Formulierung von Sätzen, wenn wir allgemeiner auch **komplexe Lösungen** $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zulassen und anschließend in reelle Lösungen umrechnen, falls gewünscht.

Die Bewegung $u(t)$ wird durch die Startwerte $u(0)$ und $\dot{u}(0)$ festgelegt. Die Anfangswerte sind beliebig, wir haben daher **zwei Freiheitsgrade**.

Als Lösungsraum erwarten wir einen **Vektorraum der Dimension** 2: Diese mathematische Aussage formulieren wir später als Satz N3A. Im nächsten Kapitel werden wir sie verallgemeinern und beweisen.

Das **charakteristische Polynom** dieser DG ist $p(x) = x^2 + 2\delta\, x + \omega_0^2$. Die Lösungsformel beschert uns die Nullstellen: $\lambda_{1/2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ und so **linear unabhängige Lösungen** $u_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}$ und $u_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$. Hierbei unterscheiden wir den komplexen Fall $\delta < \omega_0$ und den reellen Fall $\delta > \omega_0$; anschließend lösen wir auch den kritischen Fall $\delta = \omega$.

Wir diskutieren zunächst die homogenen Gleichung: rechte Seite $f = 0$, anschließend eine harmonische Anregung der Form $f(t) = \cos(\omega_1 t)$.

Schwache Dämpfung: $\delta < \omega_0$

Im Fall $0 \le \delta < \omega_0$ gibt es **zwei komplex-konjugierte Nullstellen**

$$\lambda_{1/2} = -\delta \pm \mathrm{i}\,\omega \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad 0 < \omega \le \omega_0.$$

Die komplexen Lösungen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ der Differentialgleichung sind

$$\boxed{u(t) = c_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + c_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t} \quad \text{mit} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.}$$

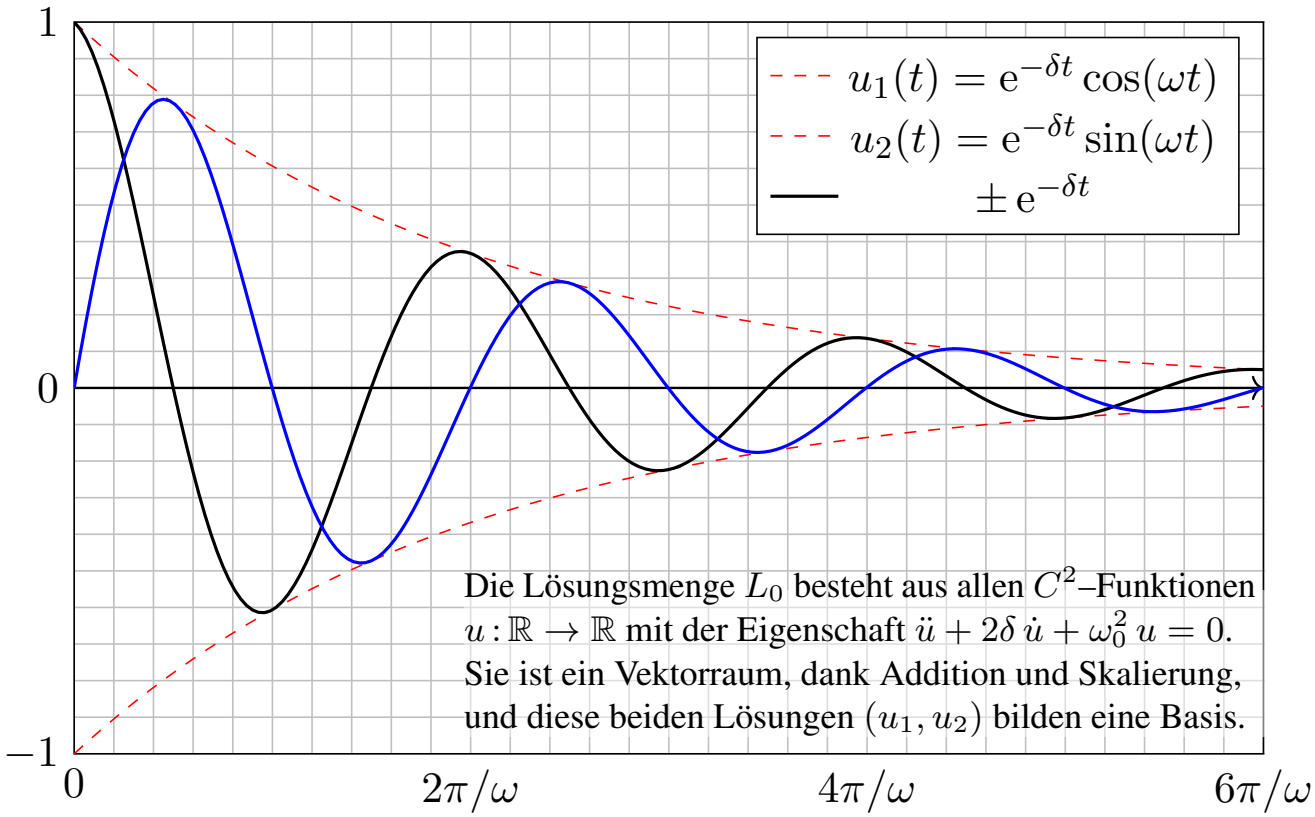
☺ Diese Lösungen bilden einen zweidimensionalen $\mathbb{C}$–Vektorraum. Der Körper $\mathbb{C}$ vereinfacht die Rechnung. Physikalische Anwendungen fordern jedoch reelle Lösungen. Dazu rechnen wir die **komplexe Basis** $u_{1/2} = \mathrm{e}^{-\delta t \pm \mathrm{i}\omega t} = v_1 \pm \mathrm{i} v_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ um in die **reelle Basis** $v_{1/2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $v_1 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) = \mathrm{e}^{-\delta t}\cos(\omega t)$ und $v_2 = \frac{1}{2\mathrm{i}}(u_1 - u_2) = \mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\omega t)$. Die reellen Lösungen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung sind demnach

$$\boxed{u(t) = \mathrm{e}^{-\delta t}\left[\alpha_1 \cos(\omega t) + \alpha_2 \sin(\omega t)\right] \quad \text{mit} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.}$$

☺ Diese Lösungen bilden einen zweidimensionalen $\mathbb{R}$–Vektorraum.
☺ Für $\delta = 0$ haben wir die **ungedämpfte Schwingung** mit $\omega = \omega_0$,

Schwache Dämpfung: $\delta < \omega_0$

Die Masse wird durch die Federkraft zur Ruhelage zurückgezogen, aufgrund ihrer Trägheit schwingt die Masse jedoch darüber hinaus.



Starke Dämpfung: $\delta > \omega_0$

Im Fall $\delta > \omega_0$ gibt es **zwei reelle Nullstellen** $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, nämlich

$$\lambda_1 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \;<\; -\delta \;<\; \lambda_2 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \;<\; 0.$$

Hierzu gehören die Lösungen $\mathrm{e}^{\lambda_1 t}$ und $\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$ als Eigenfunktionen.
Die allgemeine Lösung erhalten wir durch Linearkombination:

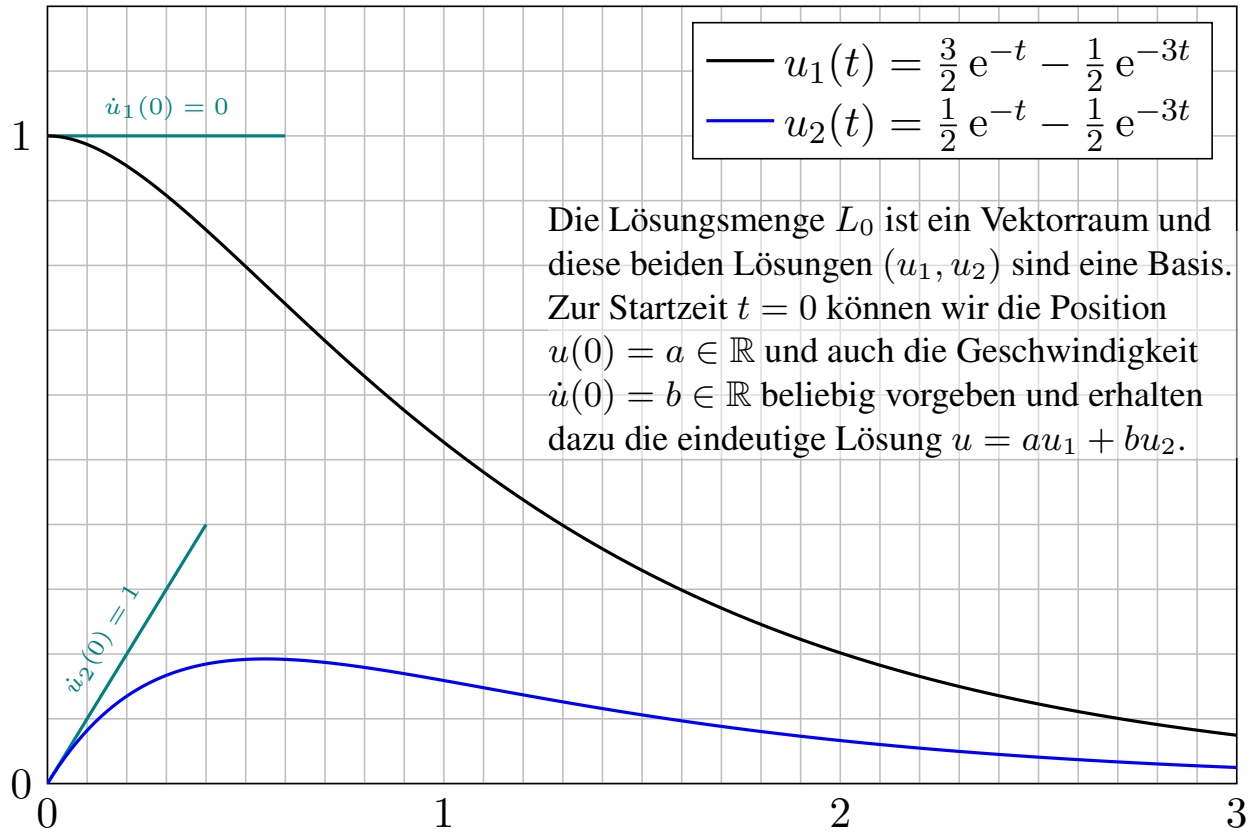
$$\boxed{u(t) = c_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + c_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}}$$

☺ Diese Lösungen bilden einen zweidimensionalen $\mathbb{K}$–Vektorraum:
Für reelle Lösungen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dürfen wir die Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ frei wählen, für komplexe Lösungen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ entsprechend $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

Zahlenbeispiel: Die Differentialgleichung $\ddot{u}(t) + 4\,\dot{u}(t) + 3\,u(t) = 0$ führt zur Gleichung $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$, also $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = -1$.
Die DG hat als reelle Lösungen $u(t) = c_1\,\mathrm{e}^{-3t} + c_2\,\mathrm{e}^{-t}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Anfangswerte $u(0) = 1$ und $\dot{u}(0) = 0$ führen zu $u(t) = \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-3t}$.
Anfangswerte $u(0) = 0$ und $\dot{u}(0) = 1$ führen zu $u(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-3t}$.

Starke Dämpfung: $\delta > \omega_0$

Dies nennt man auch den **Kriechfall:** Es gibt keine Schwingung, das System kriecht nach einer Auslenkung zur Ruhelage zurück.



Kritische Dämpfung: $\delta = \omega_0$

Im Fall $\delta = \omega_0$ gibt es eine **doppelte reelle Nullstelle** $\lambda = -\delta$.
Wir finden die Lösung $\mathrm{e}^{\lambda t}$ und zusätzlich $t\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ als Hauptfunktionen.
Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist in diesem Fall:

$$\boxed{u(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}(c_1 + c_2 t)}$$

☺ Diese Lösungen bilden einen zweidimensionalen Vektorraum:
Für reelle Lösungen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dürfen wir die Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ frei wählen, für komplexe Lösungen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ entsprechend $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

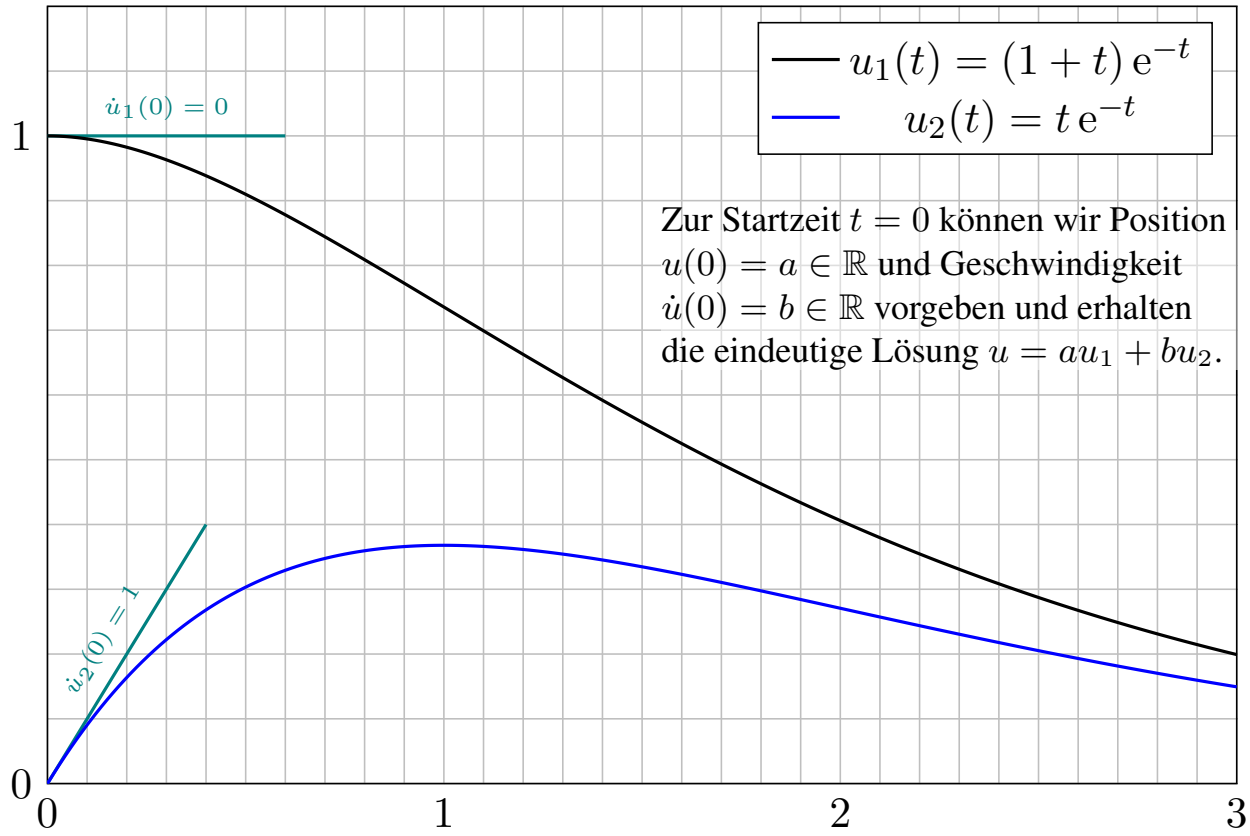
Nachrechnen: Zu lösen ist hier $\ddot{u}(t) - 2\lambda\,\dot{u}(t) + \lambda^2\,u(t) = 0$.
Linearfaktorzerlegung $(\partial_t - \lambda)(\partial_t - \lambda)\,u(t) = 0$. Einsetzen:

$$\begin{aligned}
(\partial_t - \lambda)(\partial_t - \lambda)\left[\mathrm{e}^{\lambda t}\right] &= (\partial_t - \lambda)\left[\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda t} - \lambda\,\mathrm{e}^{\lambda t}\right] \\
&= (\partial_t - \lambda)\left[0\right] && = 0 \\
(\partial_t - \lambda)(\partial_t - \lambda)\left[t\,\mathrm{e}^{\lambda t}\right] &= (\partial_t - \lambda)\left[\mathrm{e}^{\lambda t} + \lambda t\,\mathrm{e}^{\lambda t} - \lambda t\,\mathrm{e}^{\lambda t}\right] \\
&= (\partial_t - \lambda)\left[\mathrm{e}^{\lambda t}\right] && = 0
\end{aligned}$$

☺ Damit sind zwei linear unabhängige Lösungen gefunden.

Kritische Dämpfung: $\delta = \omega_0$

Dies nennt man den **aperiodischen Grenzfall**: Er liegt genau auf der Grenze zwischen gedämpfter Schwingung und Kriechfall.



Erzwungene harmonische Schwingung

Aufgabe: Bei Anregung durch $f(t) = a\cos(\omega_1 t)$ ist als DG zu lösen

$$\boxed{\ddot{u}(t) + 2\delta\,\dot{u}(t) + \omega_0^2\,u(t) = a\cos(\omega_1 t).}$$

Gesucht ist eine reelle Lösung der Form $u(t) = A\cos(\omega t - \varphi)$, also Frequenz $\omega \in \mathbb{R}$, Amplitude $A \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und Phase $\varphi \in \mathbb{R}$.

Lösung: Dies ist der Realteil der komplexen Differentialgleichung

$$\ddot{z}(t) + 2\delta\,\dot{z}(t) + \omega_0^2\,z(t) = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_1 t}.$$

Der Exponentialansatz $z(t) = c\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ führt uns zur Gleichung

$$\left[-\omega^2 + 2\delta\,\mathrm{i}\omega + \omega_0^2\right] c\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \overset{!}{=} a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_1 t}.$$

Damit finden wir $\omega = \omega_1$ und $c = a/(\omega_0^2 - \omega_1^2 + 2\delta\,\mathrm{i}\omega_1) = A\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$.

☺ Das System reagiert mit derselben Frequenz wie die Anregung!
In der Polardarstellung $c = A\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$ erhalten wir $z(t) = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1 t - \varphi)}$ mit

$$A = \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2}}, \qquad \varphi = \arctan\frac{2\delta\omega_1}{\omega_0^2 - \omega_1^2} + \begin{cases} 0 & \text{für } \omega_1 < \omega_0, \\ \pi & \text{für } \omega_1 > \omega_0. \end{cases}$$

☺ Damit haben wir die reelle Lösung $u(t) = A\cos(\omega t - \varphi)$ gefunden.

Erzwungene harmonische Schwingung

⚠ Im Sonderfall $\delta = 0$ und $\omega_1 = \omega_0$ schlägt unser Ansatz $c\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ fehl!

$$\ddot{z}(t) + \omega_0^2\,z(t) = \left[\omega_0^2 - \omega^2\right] c\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \neq a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}$$

Zur Gleichheit muss $\omega = \omega_0$ gelten, aber dann verschwindet $[\omega_0^2 - \omega^2]$.
In obiger Formel für c ist das genau die Polstelle! Modifizierter Ansatz:

$$z(t) = c\,t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \quad \dot{z}(t) = c\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + c\,t\mathrm{i}\omega\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \quad \ddot{z}(t) = 2c\mathrm{i}\omega\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - c\,t\,\omega^2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

$$\Longrightarrow \quad \ddot{z}(t) + \omega_0^2\,z(t) = \left[2\mathrm{i}\omega + t\,(\omega_0^2 - \omega^2)\right] c\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \overset{!}{=} a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}$$

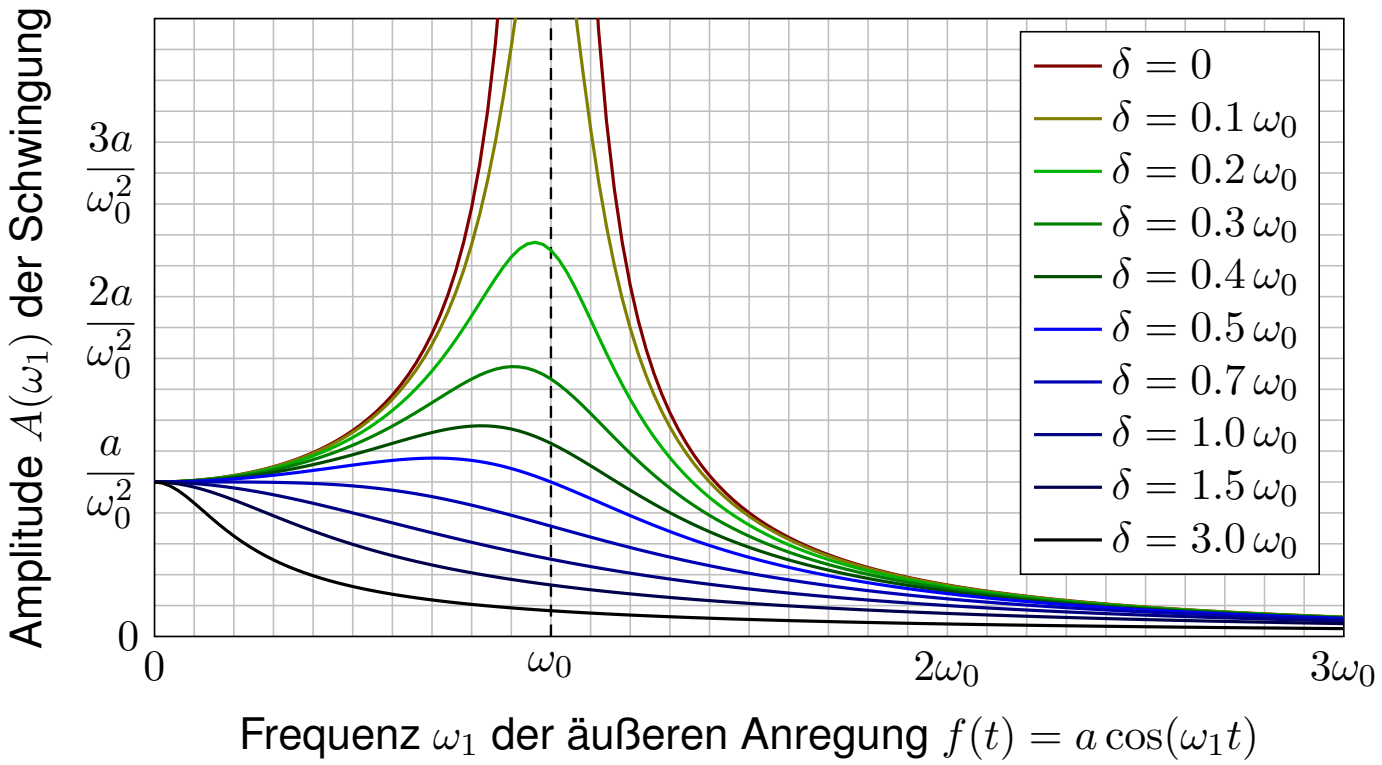
Durch Vergleich finden wir die Werte $\omega = \omega_0$ und $c = a/(2\mathrm{i}\omega_0)$. Also:

$$z(t) = \frac{at\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}}{2\mathrm{i}\omega_0} = \frac{at\cos(\omega_0 t) + \mathrm{i}at\sin(\omega_0 t)}{2\mathrm{i}\omega_0} = \frac{at}{2\omega_0}\sin(\omega_0 t) - \mathrm{i}\frac{at}{2\omega_0}\cos(\omega_0 t)$$

Der Realteil $u(t) = (a/2\omega_0)\,t\sin(\omega_0 t)$ löst $\ddot{u}(t) + \omega_0^2\,u(t) = a\cos(\omega_0 t)$.

⚠ Das System reagiert mit derselben Frequenz ω wie die Anregung, aber die Amplitude wächst unbeschränkt: Wir nennen dies **Resonanz**.
Anschaulich: Jedes Kind lernt dieses Phänomen beim Schaukeln. L429
Die Anregungsfrequenz trifft genau eine Eigenfrequenz des Systems!

Amplitude und Resonanz



Die Amplitude ist maximal für $\omega_1^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2$ bzw. $\omega_1 = 0$ falls $2\delta^2 > \omega_0^2$.
Die **Resonanz** ist dabei umso stärker, je kleiner die Dämpfung δ ist.
Für $\delta \approx 0$ und $\omega_1 \approx \omega_0$ kommt es zur **Resonanzkatastrophe**.

Amplitude und Resonanz

Erzwungene Schwingungen sind ein weit verbreitetes Phänomen:

- Mechanik: Schaukel, Brücke bei gleichmäßigen Schritten / Wind, Vibrationen von Fahrzeugteilen bei bestimmten Drehzahlen,
- Akustik: Tonerzeugung in Musikinstrumenten, Resonanzkörper, Mitschwingen einer nicht gespielten Saite oder einer Stimmgabel,
- Elektrotechnik: elektrischer Schwingkreis, Radioempfang, WLAN,
- Hydromechanik: Tideresonanz der Ozeane und großen Meere.

Auch die (Hochschul-)Didaktik zeigt Resonanzphänomene: Jede Lernende folgt ihrem eigenen kognitiven Bewegungsgesetz (Rückstellkraft, Trägheit, Vergessen), wird von außen durch die Lehrende angeregt auf einer vorgegebenen Frequenz (als erzwungene Bewegung, extrinsich). Trifft die anregende Frequenz in etwa eine Eigenfrequenz (intrinsisches Interesse), so kommt es zur Resonanz: Das ist die ideale Lern- und Lehrsituation! Anregung mit zu niedriger oder zu hoher Frequenz hingegen zeigt kaum Wirkung. Auch das kennen Sie aus eigener Erfahrung.

Bei hunderten Teilnehmer:innen sind die individuellen Eigenfrequenzen meist sehr breit gestreut. Egal auf welcher Frequenz ich sende, nur bei einen kleinen Teil bringt es eine Saite zum Klingen. Dieses Phänomen ist mir schmerzhaft bewusst, aber unter den gegebenen Bedingungen wohl unvermeidlich. Das erklärt auch die Bedeutung, sich aufeinander einzustellen. Ich versuche, auf verschiedenen Frequenzen zu senden, und lausche den Reaktionen. Das eigentlich Erstaunliche ist nicht, wie oft die Übertragung misslingt, sondern dass sie manchmal tatsächlich funktioniert.

Zusammenfassung: freie harmonische Schwingung

Satz N1A: freie harmonische Schwingung

Gegeben seien reelle Konstanten $\delta, \omega_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ sowie $\omega_1, a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

(1) Die **homogene lineare Differentialgleichung**

$$\boxed{\ddot{u}(t) + 2\delta\,\dot{u}(t) + \omega_0^2\,u(t) = 0}$$

hat einen zweidim. **linearen Lösungsraum**; die allgemeine Lösung ist

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) \quad \text{mit freien Konstanten } c_1, c_2 \in \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

$$= \begin{cases} \mathrm{e}^{-\delta t}\left[c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)\right] & \text{für } \delta < \omega_0 \text{ und } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \\ \mathrm{e}^{-\delta t}\left[c_1\,\mathrm{e}^{-\lambda t} + c_2\,\mathrm{e}^{\lambda t}\right] & \text{für } \delta > \omega_0 \text{ und } \lambda = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \\ \mathrm{e}^{-\delta t}\left[c_1 + c_2 t\right] & \text{für } \delta = \omega_0 \text{ (kritische Dämpfung).} \end{cases}$$

Diese Lösungen sind reell, also eine Basis über $\mathbb{R}$, ebenso über $\mathbb{C}$.

Anfangswerte $u(t_0)$ und $\dot{u}(t_0)$ können beliebig vorgegeben werden: Sie legen die freien Konstanten c_1, c_2 eindeutig fest (und umgekehrt).

Zusammenfassung: erzwungene harmonische Schwingung

Satz N1A: erzwungene harmonische Schwingung

(2) Die **inhomogene lineare Differentialgleichung**

$$\boxed{\ddot{u}(t) + 2\delta\,\dot{u}(t) + \omega_0^2\,u(t) = a\cos(\omega_1 t)}$$

hat einen zweidim. **affinen Lösungsraum**; die allgemeine Lösung ist

$$u(t) = u_0(t) + c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) \quad \text{mit freien Konstanten } c_1, c_2 \in \mathbb{K} \text{ und}$$

$$u_0(t) = \begin{cases} A\cos(\omega_1 t - \varphi) & \text{für } \delta > 0 \text{ oder } \omega_1 \neq \omega_0 \text{ (generisch N113),} \\ & \text{Amplitude } A = a/\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2}, \\ & \text{Phase } \varphi = \arctan\left[2\delta\omega_1/(\omega_0^2 - \omega_1^2)\right](+\pi), \\ \dfrac{a}{2\omega_1}\,t\sin(\omega_1 t) & \text{für } \delta = 0 \text{ und } \omega_1 = \omega_0 \text{ (Resonanz N114).} \end{cases}$$

„Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen“

Anfangswerte $u(t_0)$ und $\dot{u}(t_0)$ können beliebig vorgegeben werden: Sie legen die freien Konstanten c_1, c_2 eindeutig fest (und umgekehrt).

Freie und erzwungene harmonische Schwingung

Typische Beispiele: Bei **schwacher Dämpfung** $0 < \delta < \omega_0$ gilt

$$u(t) = \underbrace{A\cos(\omega_1 t - \varphi)}_{\text{periodische Lösung}} + \underbrace{\mathrm{e}^{-\delta t}\left[c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t)\right]}_{\text{Einschwingvorgang} \to 0 \text{ für } t \to \infty} .$$

Nach Einschwingzeit sehen wir nur noch die periodische Lösung u_0: Das System reagiert mit der erzwungenen Frequenz ω_1 der Anregung, mit konstanter Amplitude A und Phasenverschiebung φ wie berechnet.

Für $\omega_1 \to 0$ gilt $A \to a/\omega_0^2$: Niedrige Frequenzen werden gedämpft.
Für $\omega_1 \to \infty$ gilt $A \to 0$: Hohe Frequenzen werden verschluckt.
Der Sonderfall $\delta = 0$ und $\omega_1 = \omega_0$ führt zur **Resonanz(katastrophe)**:

$$u(t) = \underbrace{\frac{a}{2\omega_0}\, t\sin(\omega_0 t)}_{\text{wächst unbeschränkt}} + \underbrace{c_1\cos(\omega_0 t) + c_2\sin(\omega_0 t)}_{\text{periodisch, insbesondere beschränkt}}$$

Manchmal ist genau dies erwünscht, etwa beim Radioempfang.
How I broke a wine glass with my voice. `youtu.be/0c27GxSD_bI`
Mit unseren Techniken lösen Sie alle Fälle vollständig und explizit.

Freie und erzwungene harmonische Schwingung

Die allgemeine Lösung / Schwingung $u : I \to \mathbb{R}$ ist die **Überlagerung** einer inhomogenen Lösung / **erzwungenen Schwingung** u_0 und einer homogenen Lösung / **freien Schwingung** $c_1 u_1 + c_2 u_2$.

Die Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ergeben sich aus Anfangsdaten $u(t_0), \dot{u}(t_0)$. Bei Dämpfung $\delta > 0$ klingen $u_1(t) \to 0$ und $u_2(t) \to 0$ exponentiell ab. Der Einfluss der Startwerte ist nach gewisser **Einschwingzeit** kaum noch spürbar, es bleibt schließlich nur die **periodische Lösung** u_0.

Im dämpfungsfreien Fall $\delta = 0$ klingen die freien Schwingungen $u_1(t) = \cos(\omega_0 t)$ und $u_2(t) = \sin(\omega_0 t)$ nicht ab. Zudem führt eine äußere Anregung mit Frequenz $\omega_1 = \omega_0$ zur **Resonanzkatastrophe**: Die Amplitude der Schwingung wächst (theoretisch) unbegrenzt. L429

Für **praktische Zwecke** gilt dies bereits für $\delta \approx 0$: Die Schwingungen u_1, u_2 klingen sehr langsam ab, bei realistischer Beobachtungsdauer sind Dämpfungsverluste kaum wahrnehmbar. Bei Anregung mit $\omega_1 \approx \omega_0$ kommt es zu sehr starker Resonanz, die Amplitude der erzwungenen Schwingung wächst schließlich über die Belastbarkeit des Materials.

Lineare DG mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten eine **lineare DG mit konstanten Koeffizienten**:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}\, y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1\, y'(x) + a_0\, y(x) = b(x)$$

Hier sind $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ konstant und $b : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{K}$ stetig.
Den wichtigen Spezialfall $n = 2$ haben wir bereits eingangs ausgeführt.

Wir lösen zunächst die **homogene Differentialgleichung** mit $b = 0$.

Exponentialansatz: $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$, $y' = \lambda y$, $y'' = \lambda^2 y, \ldots, y^{(n)} = \lambda^n y$.
Einsetzen in die DG ergibt $\left(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0\right) \mathrm{e}^{\lambda x} \overset{!}{=} 0$.

Genau dann erfüllt $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : x \mapsto y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ die homogene DG, wenn $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle des **charakteristischen Polynoms** ist:

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Wir zerlegen $p \in \mathbb{C}[x]$ in Linearfaktoren: $p(x) = (x - \lambda_1)^{k_1} \cdots (x - \lambda_\ell)^{k_\ell}$
mit Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell \in \mathbb{C}$ und ihren Vielfachheiten $k_1, \ldots, k_\ell \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.
Diese Nullstellen seien paarweise verschieden, also $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$.
Fundamentalsatz F3C: Über $\mathbb{C}$ ist die Zerlegung immer möglich!

Lineare DG: Fundamentallösungen

Satz N2A: komplexe und reelle Fundamentallösungen

Zu lösen sei $p(\partial)\, y = 0$ mit $p(x) = (x - \lambda_1)^{k_1} \cdots (x - \lambda_\ell)^{k_\ell} \in \mathbb{C}[x]$.
(1) Hierzu haben wir n linear unabhängige **Fundamentallösungen**

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^{\lambda_1 x},\ x\,\mathrm{e}^{\lambda_1 x},\ x^2\,\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \ldots,\ x^{k_1-1}\,\mathrm{e}^{\lambda_1 x},\ \ldots \\ &\mathrm{e}^{\lambda_\ell x},\ x\,\mathrm{e}^{\lambda_\ell x},\ x^2\,\mathrm{e}^{\lambda_\ell x}, \ldots,\ x^{k_\ell-1}\,\mathrm{e}^{\lambda_\ell x}. \end{aligned}$$

(2) Ist $p \in \mathbb{R}[x]$ reell und $\lambda = \sigma + \mathrm{i}\omega$ mit $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$ und $\omega \neq 0$ eine k-fache Nullstelle, so gilt dies auch für die komplex-konjugierte Zahl $\overline{\lambda} = \sigma - \mathrm{i}\omega$.
Durch Basiswechsel N107 erhalten wir n **reelle Fundamentallösungen**:

$$\left.\begin{matrix} \mathrm{e}^{\lambda x}, \ldots,\ x^{k-1}\,\mathrm{e}^{\lambda x} \\ \mathrm{e}^{\overline{\lambda} x}, \ldots,\ x^{k-1}\,\mathrm{e}^{\overline{\lambda} x} \end{matrix}\right\} \underset{\text{Basiswechsel}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{matrix} \mathrm{e}^{\sigma x}\cos(\omega x), \ldots,\ x^{k-1}\,\mathrm{e}^{\sigma x}\cos(\omega x) \\ \mathrm{e}^{\sigma x}\sin(\omega x), \ldots,\ x^{k-1}\,\mathrm{e}^{\sigma x}\sin(\omega x) \end{matrix}\right.$$

(3) Diese n Lösungen $y_1, \ldots, y_n : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ sind $\mathbb{K}$–linear unabhängig.

(4) Jede Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ der homogenen DG $p(\partial)\, y = 0$ hat die Form $y = c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n$ mit $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$. Kurz: Lösungsraum $L_0 \cong \mathbb{K}^n$.

Anwendungsbeispiel: einfache Nullstellen

N203
Übung

Aufgabe: Lösen Sie (a) allgemein und (b) das Anfangswertproblem

$$\boxed{y'' + 3y' + 2y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.}$$

Lösung: (a) Das char. Polynom unserer Gleichung $p(\partial)\, y = 0$ ist

$$p(x) = x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2).$$

Nullstellen: -1, -2. Als Fundamentallösungen der DG erhalten wir

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{-x}, \quad y_2(x) = \mathrm{e}^{-2x}.$$

Diese sind linear unabhängig. Die allgemeine reelle Lösung ist also

$$y(x) = \alpha_1\, \mathrm{e}^{-x} + \alpha_2\, \mathrm{e}^{-2x} \quad \text{mit} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Die Anfangsdaten bestimmen eindeutig die freien Konstanten:

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= \alpha_1 + \alpha_2 &&= 1 \\ y'(0) &= -\alpha_1 - 2\alpha_2 &&= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = -1 \end{cases}$$

Die gesuchte Lösung des AWP ist also $y(x) = 2\,\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}$. Probe!
Das entspricht einem harmonischen Oszillator mit starker Dämpfung.

Anwendungsbeispiel: doppelte Nullstelle

N204
Übung

Aufgabe: Lösen Sie (a) allgemein und (b) das Anfangswertproblem

$$\boxed{y'' + 2y' + y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.}$$

Lösung: (a) Das char. Polynom unserer Gleichung $p(\partial)\, y = 0$ ist

$$p(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2.$$

Doppelte Nullstelle -1. Als Fundamentallösungen der DG erhalten wir

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{-x}, \quad y_2(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Probe: $y_2'(x) = (1-x)\,\mathrm{e}^{-x}$, $y_2''(x) = (x-2)\,\mathrm{e}^{-x}$, $y_2'' + 2y_2' + y_2 = 0$.
Diese sind linear unabhängig. Die allgemeine reelle Lösung ist also

$$y(x) = \mathrm{e}^{-x}(\alpha_1 + \alpha_2 x) \quad \text{mit} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Die Anfangsdaten bestimmen eindeutig die freien Konstanten:

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= \alpha_1 &&= 1 \\ y'(0) &= -\alpha_1 + \alpha_2 &&= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

Die gesuchte Lösung des AWP ist also $y(x) = \mathrm{e}^{-x}(1+x)$. Probe!
Das entspricht einem harmonischen Oszillator mit kritischer Dämpfung.

Anwendungsbeispiel 3. Ordnung

N205
Übung

Aufgabe: Lösen Sie (a) allgemein und (b) das Anfangswertproblem

$$u''' - 7u' + 6u = 0 \quad \text{mit} \quad u(0) = 3,\ u'(0) = 5,\ u''(0) = 8.$$

(c) Berechnen Sie das Fundamentalsystem $u_1, u_2, u_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1' & u_2' & u_3' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung: (a) Das char. Polynom unserer Gleichung $p(\partial)\, y = 0$ ist

$$p(x) = x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x-2)(x+3).$$

Die Nullstellen des char. Polynoms p sind hier $1, 2, -3$. Die Probe ist wie immer leicht!
In Übungs- oder Klausuraufgaben wird man eine Nullstelle λ raten und dann den Linearfaktor $(x - \lambda)$ durch Polynomdivision abspalten, bis man auf ein Polynom vom Grad ≤ 2 kommt.
Diese künstliche Situation ist hoffnungslos unrealistisch aber leider üblich. Wenn Ihnen ein freilaufendes Polynom in der Natur begegnet, werden Sie seine Nullstellen nicht raten können.
Es bleibt oft nur ihre näherungsweise Bestimmung durch geeignete numerische Methoden.

Als Fundamentallösungen der DG erhalten wir somit $\mathrm{e}^x,\ \mathrm{e}^{2x},\ \mathrm{e}^{-3x}$.

Die allgemeine Lösung ist $\alpha_1\, \mathrm{e}^x + \alpha_2\, \mathrm{e}^{2x} + \alpha_3\, \mathrm{e}^{-3x}$ mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.

Anwendungsbeispiel 3. Ordnung

N206
Übung

(c) Unsere drei Fundamentallösungen $y_1(x) = \mathrm{e}^x,\ y_2(x) = \mathrm{e}^{2x}$, $y_3(x) = \mathrm{e}^{-3x}$ fassen wir zur **Fundamentalmatrix** zusammen:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{2x} & \mathrm{e}^{-3x} \\ \mathrm{e}^x & 2\,\mathrm{e}^{2x} & -3\,\mathrm{e}^{-3x} \\ \mathrm{e}^x & 4\,\mathrm{e}^{2x} & 9\,\mathrm{e}^{-3x} \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist stets **invertierbar**, speziell für $x = 0$ finden wir:

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Y(0)^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 30 & -5 & -5 \\ -12 & 8 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Basiswechsel von der alten Basis y_1, y_2, y_3 zur neuen Basis u_1, u_2, u_3:

$$Y(x)Y(0)^{-1} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1' & u_2' & u_3' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{cases} u_1 = +\frac{30}{20} y_1 - \frac{12}{20} y_2 + \frac{2}{20} y_3 \\ u_2 = -\frac{5}{20} y_1 + \frac{8}{20} y_2 - \frac{3}{20} y_3 \\ u_3 = -\frac{5}{20} y_1 + \frac{4}{20} y_2 + \frac{1}{20} y_3 \end{cases}$$

(b) Die gesuchte Lösung des AWP ist $u(x) = 3u_1 + 5u_2 + 8u_3$. Probe!

Anwendungsbeispiel: komplex vs reell

N207
Übung

Aufgabe: Lösen Sie (a) allgemein und (b) das Anfangswertproblem

$$\boxed{y'' + 2y' + 5y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 3}$$

Lösung: (a) Das charakteristische Polynom ist $p(x) = x^2 + 2x + 5$.
Die Nullstellen $\lambda_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2\mathrm{i}$ sind komplex-konjugiert.
Komplexes Fundamentalsystem: $\mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})x},\ \mathrm{e}^{(-1-2\mathrm{i})x}$
Komplexe Lösungen: $z(x) = c_1\,\mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})x} + c_2\,\mathrm{e}^{(-1-2\mathrm{i})x}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$
Reelles Fundamentalsystem: $\mathrm{e}^{-x}\cos(2x),\ \mathrm{e}^{-x}\sin(2x)$
Reelle Lösungen: $y(x) = \alpha_1\,\mathrm{e}^{-x}\cos(2x) + \alpha_2\,\mathrm{e}^{-x}\sin(2x)$ mit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

(b) Die Anfangsdaten bestimmen eindeutig die freien Konstanten:

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= \alpha_1 &&= 1 \\ y'(0) &= -\alpha_1 + 2\alpha_2 &&= 3 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 2 \end{cases}$$

Probe! Die Lösung des Anfangswertproblems ist demnach

$$y(x) = \mathrm{e}^{-x}\big(\cos(2x) + 2\sin(2x)\big).$$

☺ Über die komplexe Lösung kommt man zur selben Lösung.

Anwendungsbeispiel: komplex vs reell

N208
Übung

Aufgabe: Finden Sie ein reelles Fundamentalsystem der Gleichung

$$\boxed{y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0.}$$

Lösung: Das char. Polynom unserer Gleichung $p(\partial)\,y = 0$ ist

$$p(x) = x^4 + 8x^2 + 16 = (x^2+4)^2 = (x-2\mathrm{i})^2(x+2\mathrm{i})^2.$$

Doppelte Nullstellen $2\mathrm{i}$, $-2\mathrm{i}$. Ein komplexes Fundamentalsystem ist

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}, \quad \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}, \quad x\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}, \quad x\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}.$$

Probe! Hieraus gewinnen wir das reelle Fundamentalsystem

$$\cos(2x), \quad \sin(2x), \quad x\cos(2x), \quad x\sin(2x).$$

Basiswechsel! Jede reelle Lösung hat demnach die Form

$$y(x) = \cos(2x)(\alpha_1 + \alpha_2 x) + \sin(2x)(\alpha_3 + \alpha_4\,x)$$

mit eindeutig bestimmten Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$.

☺ Wie immer gilt: **Anfangswerte** $y(x_0), y'(x_0), y''(x_0), y'''(x_0) \in \mathbb{R}$ zu einem Startzeitpunkt x_0 können beliebig vorgegeben werden; sie legen die freien Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ eindeutig fest.

Lineare Differentialoperatoren

N209
Ausführung

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $\mathbb{K}^I$ die Menge aller Funktionen $f, g : I \to \mathbb{K}$.
Ihre Summe $f + g : I \to \mathbb{K}$ ist $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ für jedes $x \in I$.
Die Skalierung $\alpha f : I \to \mathbb{K}$ mit $\alpha \in \mathbb{K}$ ist $(\alpha f)(x) := \alpha f(x)$ für alle $x \in I$.
Dies definiert den **$\mathbb{K}$–Vektorraum** $(\mathbb{K}^I, +, \cdot)$ aller Funktionen $I \to \mathbb{K}$.

Sei $C^n = C^n(I, \mathbb{K})$ die Teilmenge aller n-mal stetig differenzierbaren Funktionen $f : I \to \mathbb{K}$. Dies ist ein **Untervektorraum** von $(\mathbb{K}^I, +, \cdot)$.
Die Ableitung $\partial : C^n \to C^{n-1} : f \mapsto f'$ ist eine **$\mathbb{K}$–lineare Abbildung**, das heißt $\partial(\alpha f + \beta g) = \alpha(\partial f) + \beta(\partial g)$ für alle $f, g \in C^n$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.
Gleiches gilt auch für die k-fache Ableitung $\partial^k : C^n \to C^{n-k} : f \mapsto f^{(k)}$.
Hierbei ist $\partial^0 = \mathrm{id} : f \mapsto f$ die identische Abbildung („nullmal ableiten“).

Auch das **Produkt** $f \cdot g$ zweier Funktionen definieren wir punktweise.
Damit wird $(\mathbb{K}^I, +, \cdot)$ zu einem Ring, ebenso die Teilmenge $C^n(I, \mathbb{K})$.
Zu $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in C^0(I, \mathbb{K})$ betrachten wir den **Differentialoperator**

$$L = a_0\partial^0 + a_1\partial^1 + \ldots + a_{n-1}\partial^{n-1} + \partial^n : C^n \to C^0 \quad \text{mit}$$
$$f \mapsto Lf = a_0 f + a_1 f' + \ldots + a_{n-1} f^{(n-1)} + f^{(n)}.$$

Dies ist eine $\mathbb{K}$–lineare Abbildung, d.h. $L(\alpha f + \beta g) = \alpha(Lf) + \beta(Lg)$.

Lineare Differentialoperatoren

N210
Ausführung

Jede lineare DG hat die Form $L\,y = b$. Gegeben ist hierzu $L : C^n \to C^0$ und die rechte Seite $b \in C^0$; gesucht sind alle Lösungen $y \in C^n$.

Die homogene Gleichung $L\,y = 0$ zu lösen bedeutet, den **Kern** von L zu bestimmen. Dank Existenz- und Eindeutigkeitssatz N3A ist $L : C^n \to C^0$ surjektiv, und es gilt $\dim_{\mathbb{K}} \ker L = n$. Wir suchen eine **Basis** für $\ker L$.

Sei V ein $\mathbb{K}$–Vektorraum. Wir nennen $v_1, \ldots, v_\ell \in V$ **linear abhängig** über $\mathbb{K}$, wenn es $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell \in \mathbb{K}$ gibt, sodass $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_\ell v_\ell = 0$ gilt, wobei mindestens einer der Koeffizienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ungleich 0 ist.

Hingegen heißt die Familie $v_1, \ldots, v_\ell \in V$ **linear unabhängig**, wenn $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_\ell v_\ell = 0$ nur für $\alpha_1 = \ldots = \alpha_\ell = 0$ möglich ist.
Dies ist äquivalent zur Bedingung des **Koeffizientenvergleichs**:
Aus $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_\ell v_\ell = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_\ell v_\ell$ folgt $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_\ell = \beta_\ell$.

Beispiel: Zu $a < b$ in $\mathbb{R}$ betrachten wir den Vektorraum $C^0([a, b], \mathbb{K})$.
Hierin sind die Monomfunktionen $1, x, x^2, \ldots, x^n$ linear unabhängig:
Es gilt $\alpha_0 1 + \alpha_1 x^1 + \ldots + \alpha_n x^n = 0$ nur für $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.
Aus $\alpha_0 1 + \alpha_1 x^1 + \ldots + \alpha_n x^n = \beta_0 1 + \beta_1 x^1 + \ldots + \beta_n x^n$ folgt somit die Gleichheit aller Koeffizienten, also $\alpha_0 = \beta_0, \alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_n = \beta_n$.

Satz N2B: lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren

Sei V ein $\mathbb{K}$–Vektorraum, sei $L : V \to V$ eine lineare Abbildung mit Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$, also $Lv_k = \lambda_k v_k$ und $v_k \neq 0$.

Sind die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ paarweise verschieden, also $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$, dann sind die Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ linear unabhängig.

Für die Eigenräume $E_i = \ker(L - \lambda_i)$ erhalten wir $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n < V$.

Beweis: Wir führen Induktion über die Länge n der Familie $v_1, \ldots, v_n$. Induktionsanfang $n = 1$: Wegen $v_1 \neq 0$ folgt aus $\alpha_1 v_1 = 0$ sofort $\alpha_1 = 0$. Induktionsschritt: Gilt $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$, so betrachten wir

$$\begin{aligned} 0 &= Lv - \lambda_n v \\ &= \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_n)v_1 + \ldots + \alpha_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)v_{n-1} + \alpha_n(\lambda_n - \lambda_n)v_n. \end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung sind $v_1, \ldots, v_{n-1}$ linear unabhängig. Hieraus folgt $\alpha_j(\lambda_j - \lambda_n) = 0$ für alle $j = 1, \ldots, n-1$. Wegen $\lambda_j \neq \lambda_n$ folgt $\alpha_j = 0$. Nun bleibt $v = \alpha_n v_n = 0$: Wegen $v_n \neq 0$ folgt auch $\alpha_n = 0$.

☺ Für die Arbeit mit Differentialgleichungen beschert uns dieser Satz ein besonders praktisches Kriterium für die lineare Unabhängigkeit!

Beispiele: Wir betrachten ein Intervall $I = [a, b]$ mit $a < b$ und hierzu den Vektorraum $C^\infty(I, \mathbb{K})$ aller beliebig oft diff'baren Funktionen.

1. Die Exponentialfunktionen $\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n x}$ sind linear unabhängig: Sie sind Eigenvektoren des Differentialoperators ∂ zu $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
2. Ebenso sind die Monome $1, x, x^2, \ldots, x^n$ linear unabhängig: Sie sind Eigenvektoren des Diff'operators $x\partial$ zu $0, 1, 2, \ldots, n$.
3. Auch die Funktionen $\mathrm{e}^{\lambda x}, x\,\mathrm{e}^{\lambda x}, \ldots, x^n\,\mathrm{e}^{\lambda x}$ sind linear unabhängig: Sie sind Eigenvektoren des Diff'operators $x(\partial - \lambda)$ zu $0, 1, \ldots, n$.

Allgemeiner: Hauptvektoren P119 zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig. Der Beweis ist analog und nur etwas länger.

☺ Zu Verständnis und Lösung von Differentialgleichungen arbeiten Analysis und Lineare Algebra wunderbar zusammen. Hier lohnt sich erneut Ihre Investition in die mathematischen Grundlagen der HM1&2!

Konstante Koeffizienten

Einsetzen von ∂ in das Polynom $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in \mathbb{C}[x]$ gibt

$$L = p(\partial) = a_0\partial^0 + a_1\partial^1 + \ldots + a_{n-1}\partial^{n-1} + \partial^n : C^n \to C^0 \quad \text{mit}$$
$$f \mapsto Lf = p(\partial)\, f = a_0 f + a_1 f' + \ldots + a_{n-1} f^{(n-1)} + f^{(n)}.$$

Jede lineare DG mit konstanten Koeffizienten hat somit die Form

$$\boxed{p(\partial)\, y = b}$$

mit rechter Seite $b : I \to \mathbb{K}$, und speziell $b = 0$ im homogenen Fall.
Gesucht sind alle Lösungen $y : I \to \mathbb{K}$ dieser linearen Gleichung.

Die homogene Differentialgleichung $p(\partial)\, y = 0$ zu lösen bedeutet, den Kern der linearen Abbildung $p(\partial) : C^n \to \mathbb{C}^0$ zu bestimmen.

Das kennen Sie gut für lineare Abbildungen $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ und nutzen effiziente Rechentechniken: Wir können Gleichungen durch Matrizen darstellen und durch den Gauß–Algorithmus lösen. Auch für Differentialgleichungen nutzen wir geschickt die lineare Struktur. Allerdings ist der Raum C^n nicht endlich-dimensional und Matrizen stehen deshalb leider nicht zur Verfügung. Doch dank des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes N3A für Differentialgleichungen gilt immer $\dim \ker p(\partial) = n$. Zudem ist die Abbildung $p(\partial) : C^n \to C^0$ surjektiv, d.h. zu jeder rechten Seite b existiert mindestens eine Lösung, und damit ein affiner Lösungsraum der Dimension n.

Konstante Koeffizienten

Lemma N2C: Komposition linearer Differentialoperatoren

Seien $p(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ und $q(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$ Polynome in $\mathbb{K}[x]$.
Dann gilt $p(\partial) \circ q(\partial) = (p \cdot q)(\partial)$; Komposition entspricht Multiplikation.

Nachrechnen: Für jede Funktion $f \in C^{m+n}(I, \mathbb{K})$ gilt

$$p(\partial)\, q(\partial)\, f = \textstyle\sum_j a_j \partial^j \left[\sum_k b_k f^{(k)}\right] = \sum_j \sum_k a_j b_k f^{(j+k)} = (p \cdot q)(\partial) f.$$

☺ Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten verhalten sich wie Polynome! Dies können und werden wir bei Rechnungen nutzen.

⚠ Diese Rechnung nutzt aus, dass die Koeffizienten konstant sind! Andernfalls ist die Komposition von Operatoren nicht mehr kommutativ:

Beispiel: Wir betrachten $p = \partial : f(x) \mapsto f'(x)$ und $q = x : f \mapsto x \cdot f(x)$.

$$\left.\begin{aligned} (p \circ q) f(x) &= \partial(x f(x)) = f(x) + x f'(x) \\ (q \circ p) f(x) &= x(\partial f(x)) = x f'(x) \end{aligned}\right\} \quad \Longrightarrow \quad p \circ q - q \circ p = 1$$

In der Quantenmechanik ist p der Impulsoperator und q der Ortsoperator. Sie kommutieren nicht! Das ist die Ursache der Unschärferelation. K309

Lösungen bei mehrfachen Nullstellen

Satz N2D: Eigenwerte und Lösungen

Sei λ eine k-fache Nullstelle des Polynoms $p \in \mathbb{C}[x]$, also

$$p(x) = p_1(x)\,(x-\lambda)^k \quad \text{mit einem Polynom } p_1 \in \mathbb{C}[x].$$

Dann erlaubt $p(\partial)\,y = 0$ die k linear unabhängigen Lösungen

$$\boxed{\mathrm{e}^{\lambda x},\ x\,\mathrm{e}^{\lambda x},\ x^2\,\mathrm{e}^{\lambda x}, \ldots,\ x^{k-1}\,\mathrm{e}^{\lambda x}.}$$

Nachrechnen: Für jede Funktion $y(x) = q(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}$ gilt:

$$(\partial-\lambda)\left[q(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}\right] = q'(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x} + q(x)\,\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda x} - \lambda\,q(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x} = q'(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}$$

Bei k-facher Anwendung erhalten wir $(\partial-\lambda)^k\left[q(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}\right] = q^{(k)}(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}$.
Dies verschwindet genau dann, wenn q ein Polynom vom Grad $< k$ ist.

Vorschau: Wir erkennen hier zudem die Hauptvektorkette (siehe P1C)

$$0 \xleftarrow{\partial-\lambda} \mathrm{e}^{\lambda x} \xleftarrow{\partial-\lambda} x\,\mathrm{e}^{\lambda x} \xleftarrow{\partial-\lambda} \frac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^{\lambda x} \xleftarrow{\partial-\lambda} \frac{x^3}{3!}\,\mathrm{e}^{\lambda x} \xleftarrow{\partial-\lambda} \ldots \xleftarrow{\partial-\lambda} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\,\mathrm{e}^{\lambda x}$$

☺ Die Linearfaktorzerlegung von p ergibt so n unabhängige Lösungen!

Lösungen bei mehrfachen Nullstellen

Aufgabe: Lösen Sie (a) allgemein und (b) das Anfangswertproblem

$$\boxed{y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 2.}$$

Lösung: (a) Char. Polynom $p(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x+2)^3$.
Fundamentallösungen: $\mathrm{e}^{-2x},\ x\,\mathrm{e}^{-2x},\ x^2\,\mathrm{e}^{-2x}$. Allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned}
y(x) &= \left[c_0 + c_1 x + c_2 x^2\right]\mathrm{e}^{-2x}\\
y'(x) &= \left[c_1 - 2c_0 + (2c_2 - 2c_1)x - 2c_2 x^2\right]\mathrm{e}^{-2x}\\
y''(x) &= \left[(2c_2 - 4c_1 + 4c_0) + (\ldots)x + (\ldots)x^2\right]\mathrm{e}^{-2x}
\end{aligned}$$

(b) Die Anfangsdaten bestimmen eindeutig die freien Konstanten:

$$\left.\begin{aligned}
y(0) &= c_0 &&= 1\\
y'(0) &= c_1 - 2c_0 &&= 2\\
y''(0) &= 2c_2 - 4c_1 + 4c_0 &&= 2
\end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} c_0 &= 1\\ c_1 &= 4\\ c_2 &= 7 \end{aligned}\right.$$

☺ Die Lösung unseres AWP ist also $y(x) = (7x^2 + 4x + 1)\,\mathrm{e}^{-2x}$. Probe!

Lösungsansatz für spezielle rechte Seiten

Satz N2E: Lösungsansatz für spezielle rechte Seiten

(1) Seien $p, r \in \mathbb{C}[x]$ Polynome. Zu lösen sei die Differentialgleichung

$$\boxed{p(\partial)\, y(x) = r(x)\, \mathrm{e}^{\mu x}.}$$

Ist μ eine k-fache Nullstelle von p, so existiert eine Lösung der Form

$$\boxed{y_b(x) = q(x)\, x^k\, \mathrm{e}^{\mu x}}$$

mit einem eindeutigen Polynom $q \in \mathbb{C}[x]$ vom Grad $\deg q = \deg r$.
Hier ist $k = 0$ erlaubt; bei $k > 0$ spricht man von k-facher **Resonanz**.

(2) Speziell $p(\partial)\, y(x) = \mathrm{e}^{\mu x}$ wird gelöst durch $y_b(x) = \mathrm{e}^{\mu x}\, x^k / p^{(k)}(\mu)$.

- Sie finden q geduldig durch Einsetzen und Koeffizientenvergleich.
- Der Ansatz funktioniert ebenso für $r(x) = r(x)\, \mathrm{e}^{0x}$ mit $\mu = 0$ sowie

$$\begin{aligned} r(x)\, \mathrm{e}^{\sigma x} \cos(\omega x) &= r(x) \cdot \tfrac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{i}\omega)x} + \mathrm{e}^{(\sigma-\mathrm{i}\omega)x}\right], \\ r(x)\, \mathrm{e}^{\sigma x} \sin(\omega x) &= r(x) \cdot \tfrac{1}{2\mathrm{i}}\left[\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{i}\omega)x} - \mathrm{e}^{(\sigma-\mathrm{i}\omega)x}\right]. \end{aligned}$$

Lösungsansatz für spezielle rechte Seiten

Vorbereitung: Wir wollen Differentialoperatoren geschickt nutzen.
Dank Produktregel $\partial(f \cdot g) = (\partial f) \cdot g + f \cdot (\partial g)$ finden wir:

$$\begin{aligned} \partial \left[\mathrm{e}^{\mu x}\, q(x)\right] &= \mathrm{e}^{\mu x} \left[(\partial + \mu)\, q(x)\right] \\ \partial^k \left[\mathrm{e}^{\mu x}\, q(x)\right] &= \mathrm{e}^{\mu x} \left[(\partial + \mu)^k\, q(x)\right] \end{aligned}$$

Für jedes Polynom $p \in \mathbb{C}[x]$ gilt somit

$$\boxed{p(\partial) \left[\mathrm{e}^{\mu x}\, q(x)\right] = \mathrm{e}^{\mu x} \left[p(\partial + \mu)\, q(x)\right]}$$

Kurz $\mathrm{e}^{-\mu x}\, p(\partial)\, \mathrm{e}^{\mu x} = p(\partial + \mu)$. Als Beispiele haben wir insbesondere:

$$\begin{aligned} (\partial - \lambda) \left[\mathrm{e}^{\mu x}\, q(x)\right] &= \mathrm{e}^{\mu x} \left[(\partial - \lambda + \mu)\, q(x)\right] \\ (\partial - \lambda)^k \left[\mathrm{e}^{\mu x}\, q(x)\right] &= \mathrm{e}^{\mu x} \left[(\partial - \lambda + \mu)^k\, q(x)\right] \end{aligned}$$

Die Vertauschungsregel vereinfacht die Rechnungen sowohl in folgenden Beispielen als auch im anschließenden Beweis. Dieser Rechentrick ist eine nützliche Abkürzung aber keine Pflicht: Sie können die Ableitung $p(\partial)$ immer auch direkt ausrechnen; zur Vorbereitung können Sie einmal beides ausprobieren und dann entscheiden, welcher Rechenweg für Sie einfacher ist.

Lösungsansatz für spezielle rechte Seiten

Beweis des Satzes: Der Satz erklärt ein Lösungsrezept: „Wenn die Aufgabe soundso gegeben ist, dann sieht die Lösung soundso aus.“

Wir zeigen, dass der genannte Ansatz tatsächlich immer gelingt. Hierzu betrachten wir die Menge aller Polynome vom Grad $< n$:

$$\mathbb{C}[x]_{<n} = \left\{ a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} \;\middle|\; a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C} \right\}.$$

Dies ist ein $\mathbb{C}$–Vektorraum der Dimension n. Die k-fache Ableitung $\partial^k : \mathbb{C}[x]_{<n} \to \mathbb{C}[x]_{<n-k}$ ist surjektiv. Ihr Kern ist der Unterraum $\mathbb{C}[x]_{<k}$.

Für $\lambda \neq 0$ gilt $(\partial - \lambda) : \mathbb{C}[x]_{<n} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[x]_{<n}$: Dieser Operator erhält den Grad, hat also trivialen Kern, ist somit injektiv, dank Dimensionsformel auch surjektiv und somit ein Vektorraumisomorphismus. Alternative und noch konkretere Sichtweise: Bezüglich der Monombasis $x^0, x^1, \ldots, x^{n-1}$ schreibt sich $\partial - \lambda$ als obere Dreiecksmatrix mit Determinante $(-\lambda)^n$.

Nach Voraussetzung gilt $p(x) = \tilde{p}(x)\,(x-\mu)^k$ mit $\tilde{p}(\mu) \neq 0$, also

$$p(\partial)\left[\mathrm{e}^{\mu x}\, x^k\, q(x)\right] = \mathrm{e}^{\mu x}\, p(\partial + \mu)\left[x^k\, q(x)\right] = \mathrm{e}^{\mu x}\, \tilde{p}(\partial + \mu)\, \partial^k \left[x^k\, q(x)\right].$$

Zunächst senkt ∂^k den Grad um k, sodann erhält $\tilde{p}(\partial + \mu)$ den Grad.

Lösungsansatz für spezielle rechte Seiten

Zusammenfassend erhalten wir also die Vektorraumisomorphismen

$$\begin{array}{rcccc} \partial^k & : & x^k\,\mathbb{C}[x]_{<n} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C}[x]_{<n}, \\ p(\partial) & : & \mathrm{e}^{\mu x}\, x^k\,\mathbb{C}[x]_{<n} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{e}^{\mu x}\,\mathbb{C}[x]_{<n}. \end{array}$$

Für unsere Differentialgleichung bedeutet das ausführlich folgendes: Zu jedem Polynom $r(x) = r_0 + r_1 x + \ldots + r_{n-1} x^{n-1} \in \mathbb{C}[x]_{<n}$ existiert genau ein Polynom $q(x) = q_0 + q_1 x + \ldots q_{n-1} x^{n-1} \in \mathbb{C}[x]_{<n}$, das unsere Differentialgleichung $p(\partial)\left[\mathrm{e}^{\mu x} x^k q(x)\right] = \mathrm{e}^{\mu x} r(x)$ löst. Das war zu zeigen.

☺ Die praktische Berechnung gelingt durch Koeffizientenvergleich: Die lineare Abbildung $q \mapsto r$ können wir leicht ausrechnen, für ihre Umkehrung $r \mapsto q$ nutzen wir die Methoden der linearen Algebra.

Dies gelingt besonders leicht im wichtigen Spezialfall $p(\partial)\, y(x) = \mathrm{e}^{\mu x}$:

$$p(\partial)\left[\mathrm{e}^{\mu x}\, x^k\right] = \mathrm{e}^{\mu x}\, \tilde{p}(\partial + \mu)\, \partial^k x^k = \mathrm{e}^{\mu x}\, \tilde{p}(\partial + \mu)\, k! = \mathrm{e}^{\mu x}\, \tilde{p}(\mu)\, k!$$

$$p^{(k)}(x) = \textstyle\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \partial^j \tilde{p}(x) \cdot \partial^{k-j} (x-\mu)^k \quad \Rightarrow \quad p^{(k)}(\mu) = \tilde{p}(\mu)\, k!$$

☺ Somit wird $p(\partial)\, y(x) = \mathrm{e}^{\mu x}$ gelöst durch $y_b(x) = \mathrm{e}^{\mu x}\, x^k / p^{(k)}(\mu)$.

Spezielle rechte Seite mit einfacher Resonanz

Aufgabe: Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$\boxed{y''(x) - y'(x) - 2y(x) = x\,\mathrm{e}^{2x}.}$$

Lösung: Char. Polynom $p(x) = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$.
Fundamentalsystem der homogenen Gleichung: e^{-x}, e^{2x}.
Wir lösen $p(\partial)\,y(x) = x\,\mathrm{e}^{\mu x}$ für $\mu = 2$. (spezielle rechte Seite)
Hier ist $\mu = 2$ eine einfache Nullstelle von p. (Vielfachheit $k = 1$)
Gemäß Satz N2E gelingt $y_b(x) = q(x)\,\mathrm{e}^{2x}$ mit $q(x) = c_1 x + c_2 x^2$.
Einsetzen in die DG und geduldiges Ausrechnen liefert:

$$\begin{aligned} p(\partial)\,y_b(x) &= (\partial+1)(\partial-2)\left[q(x)\,\mathrm{e}^{2x}\right] = \mathrm{e}^{2x}\,(\partial+3)\partial\,q(x) \\ &= \mathrm{e}^{2x}\left[q''(x) + 3q'(x)\right] = \mathrm{e}^{2x}(2c_2 + 3c_1 + 6c_2 x) \quad \overset{!}{=} \quad x\,\mathrm{e}^{2x} \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich: $c_2 = 1/6$ und $c_1 = -1/9$. Allgemeine Lösung:

$$y(x) = \alpha_1\,\mathrm{e}^{-x} + \left(\tfrac{1}{6}x^2 - \tfrac{1}{9}x + \alpha_2\right)\mathrm{e}^{2x}$$

Machen Sie die Probe: in DG einsetzen und geduldig ausrechnen!

Spezielle rechte Seite mit einfacher Resonanz

Zu lösen ist hier $p(\partial)\,y(x) = x\,\mathrm{e}^{\mu x}$ mit einfacher Nullstelle μ.
Dank Satz N2E wissen wir, wie eine Lösung zu finden ist:
Wir setzen $(c_1 + c_2 x)\,x\,\mathrm{e}^{2x}$ ein und vergleichen die Koeffizienten.
Sie benötigen nur den richtigen Ansatz N2E und sorgsames Rechnen.

☺ Der obige Satz N2E garantiert, dass unser Ansatz gelingt.
Die Rechnung mag länglich sein, aber jeder Schritt ist einfach...
und am Ende geht alles auf. Das ist der Nutzen dieses Satzes!
Für spezielle rechte Seiten $r(x)\,\mathrm{e}^{\mu x}$ ist damit das Problem gelöst.

⚠ Die schöne simple Lösungsformel (2) greift hier leider nicht!
Speziell $p(\partial)\,y(x) = \mathrm{e}^{\mu x}$ wird gelöst durch $y_b(x) = \mathrm{e}^{\mu x}\,x^k/p^{(k)}(\mu)$.
Für $p(\partial)\,y(x) = x\,\mathrm{e}^{\mu x}$ müssen wir den ausführlichen Weg gehen.
Der Ansatz (1) gelingt immer, speziell für (2) kann abgekürzt werden.

Wie immer gilt auch hier: Die **Anfangswerte** $y(x_0), y'(x_0) \in \mathbb{R}$ zu einem Startzeitpunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ können beliebig vorgegeben werden; sie legen die freien Konstanten $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ eindeutig fest (und auch umgekehrt).
Ihre Berechnung gelingt durch ein lineares Gleichungssystem.

Spezielle rechte Seite mit doppelter Resonanz

Aufgabe: Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$\boxed{y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 10\,\mathrm{e}^{-2x}.}$$

Lösung: Char. Polynom $p(x) = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$.
Fundamentalsystem der homogenen Gleichung: e^{-2x}, $x\,\mathrm{e}^{-2x}$.
Wir lösen $p(\partial)\,y(x) = 10\,\mathrm{e}^{\mu x}$ für $\mu = -2$. (spezielle rechte Seite)
Hier ist $\mu = -2$ eine doppelte Nullstelle von p. (Vielfachheit $k = 2$)
Gemäß Satz N2E gelingt der Ansatz $y_b(x) = c\,x^2\,\mathrm{e}^{-2x}$. Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} p(\partial)\,y_b(x) &= (\partial+2)^2\Big[c\,x^2\,\mathrm{e}^{-2x}\Big] \\ &= \mathrm{e}^{-2x}\cdot\partial^2\big(c\,x^2\big) = \mathrm{e}^{-2x}\cdot 2c \quad \overset{!}{=} \quad 10\,\mathrm{e}^{-2x}. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich: $c = 5$. Die allgemeine Lösung ist demnach

$$y(x) = (5\,x^2 + \alpha_1\,x + \alpha_2)\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

Machen Sie die Probe: in DG einsetzen und geduldig ausrechnen!
Anfangswerte $y(x_0)$ und $y'(x_0)$ können beliebig vorgegeben werden:
Sie legen die freien Konstanten α_1, α_2 eindeutig fest (und umgekehrt).

Spezielle rechte Seite mit doppelter Resonanz

Wir haben hier $c\,x^2\,\mathrm{e}^{-2x}$ angesetzt und Koeffizienten verglichen.

Der obige Satz N2E nennt für diesen Fall eine Lösungsformel:
Speziell $p(\partial)\,y(x) = \mathrm{e}^{\mu x}$ wird gelöst durch $y_b(x) = \mathrm{e}^{\mu x}\,x^k/p^{(k)}(\mu)$.
Wir können den gesuchten Koeffizienten c also auch direkt durch die Formel $c = 10/p''(-2)$ berechnen; die Wahl ist Geschmackssache.
Wir führen diese alternative Rechnung als lehrreiche Übung aus:

$$\begin{aligned} p(x) &= x^2 + 4x + 4, & p(-2) &= 0, \\ p'(x) &= 2x + 4, & p'(-2) &= 0, \\ p''(x) &= 2, & p'(-2) &= 2. \end{aligned}$$

Wir erhalten $c = 10/p''(-2) = 5$, also $y_b(x) = 5\,x^2\,\mathrm{e}^{-2x}$ wie zuvor.

☺ Beide Ergebnisse stimmen überein. Die Wahl des Rechenweges ist Geschmackssache, beide sind hier in etwa gleich lang: Das liegt an der besonders einfachen Form des charakteristischen Polynoms $p(x)$.

⚠ Im Allgemeinen ist die Lösungsformel $y_b(x) = \mathrm{e}^{\mu x}\,x^k/p^{(k)}(\mu)$ kürzer und leichter. Die vorige Aufgabe illustriert dies recht gut.

Spezielle rechte Seite mit & ohne Resonanz

Aufgabe: Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$\boxed{y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = b(x)}$$

mit rechten Seiten $b(x) = 0,\ 24\,\mathrm{e}^{2x},\ 24\,x\,\mathrm{e}^{2x},\ \mathrm{e}^{-2x},\ \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}x},\ \cos(x)$.

Lösung: (a) Das char. Polynom unserer Gleichung $p(\partial)\,y = 0$ ist

$$p(x) = x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2).$$

Nullstellen -1, -2. Fundamentallösungen unserer DG sind $\mathrm{e}^{-x},\ \mathrm{e}^{-2x}$.
Die allgemeine Lösung ist demnach $y(x) = \alpha_1\,\mathrm{e}^{-x} + \alpha_2\,\mathrm{e}^{-2x}$.

(b) Wir lösen $p(\partial)\,y(x) = 24\,\mathrm{e}^{\mu x}$ für $\mu = 2$. (spezielle rechte Seite)
Dies ist keine Nullstelle von p (Vielfachheit $k = 0$), genauer $p(2) = 12$.
Gemäß Satz N2E gelingt der Ansatz $y_b(x) = c\,\mathrm{e}^{2x}$. Einsetzen in die DG:

$$y_b''(x) + 3y_b'(x) + 2y_b(x) = p(2)\,c\,\mathrm{e}^{2x} \quad \overset{!}{=} \quad 24\,\mathrm{e}^{2x}$$

Koeffizientenvergleich: $c = 2$. Die allgemeine Lösung ist demnach

$$y(x) = 2\,\mathrm{e}^{2x} + \alpha_1\,\mathrm{e}^{-x} + \alpha_2\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

Spezielle rechte Seite mit & ohne Resonanz

(c) Wir lösen $p(\partial)\,y(x) = 24\,x\,\mathrm{e}^{\mu x}$ für $\mu = 2$. (spezielle rechte Seite)
Dies ist keine Nullstelle von p. Gemäß Satz N2E gelingt der Ansatz

$$\begin{aligned}
y_b(x) &= (c_0 + c_1 x)\,\mathrm{e}^{2x} \\
y_b'(x) &= (2c_0 + c_1 + 2c_1 x)\,\mathrm{e}^{2x} \\
y_b''(x) &= (4c_0 + 4c_1 + 4c_1 x)\,\mathrm{e}^{2x}
\end{aligned}$$

$$y_b''(x) + 3y_b'(x) + 2y_b(x) = \big[(12c_0 + 7c_1) + 12c_1 x\big]\,\mathrm{e}^{2x} \quad \overset{!}{=} \quad 24\,x\,\mathrm{e}^{2x}$$

Koeffizientenvergleich: $c_1 = 2$ und $c_0 = -\frac{7}{6}$.
Unser Partikulärlösung ist also $y_b(x) = \big(2x - \frac{7}{6}\big)\,\mathrm{e}^{2x}$.
Machen Sie die Probe! Die allgemeine Lösung ist demnach

$$y(x) = \big(2x - \tfrac{7}{6}\big)\,\mathrm{e}^{2x} + \alpha_1\,\mathrm{e}^{-x} + \alpha_2\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

Anfangswerte $y(x_0)$ und $y'(x_0)$ können beliebig vorgegeben werden:
Sie legen die freien Konstanten α_1, α_2 eindeutig fest (und umgekehrt).

Spezielle rechte Seite mit & ohne Resonanz

(d) Wir lösen $p(\partial)\, y(x) = \mathrm{e}^{\mu x}$ für $\mu = -2$. (spezielle rechte Seite)
Einfache Nullstelle (Vielfachheit $k = 1$): $p(-2) = 0,\ p'(-2) = -1$.
Partikulärlösung: $y_b(x) = \mathrm{e}^{-2x}\, x/(-1)$. Allgemeine Lösung:

$$y(x) = \alpha_1\, \mathrm{e}^{-x} + \big(\alpha_2 - x\big)\, \mathrm{e}^{-2x}.$$

☺ Machen Sie die Probe! Ebenso findet man y_b durch den Ansatz $y_b(x) = c\, x\, \mathrm{e}^{-2x}$, Einsetzen in die DG und Koeffizientenvergleich.
Wir führen dies als lehrreiche Übung aus, analog zu Teil (c):

$$\begin{aligned}
y_b(x) &= c\, x\, \mathrm{e}^{-2x} \\
y_b'(x) &= c(1 - 2x)\, \mathrm{e}^{-2x} \\
y_b''(x) &= c(-4 + 4x)\, \mathrm{e}^{-2x} \\
y_b''(x) + 3y_b'(x) + 2y_b(x) &= -c\, \mathrm{e}^{-2x} \quad \overset{!}{=} \quad \mathrm{e}^{-2x}
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich: $c = -1$. Partikulärlösung: $y_b(x) = -x\, \mathrm{e}^{-2x}$.
☺ Die obige Lösungsformel kürzt diese Rechnung beträchtlich ab.

Spezielle rechte Seite mit & ohne Resonanz

(e) Wir lösen $p(\partial)\, y(x) = \mathrm{e}^{\mu x}$ für $\mu = \mathrm{i}$. (spezielle rechte Seite)
Dies ist keine Nullstelle von p, genauer $p(\mathrm{i}) = 1 + 3\mathrm{i}$.
Partikulärlösung: $y_b(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}/(1 + 3\mathrm{i})$. Allgemeine Lösung:

$$y(x) = \tfrac{1-3\mathrm{i}}{10}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \alpha_1\, \mathrm{e}^{-x} + \alpha_2\, \mathrm{e}^{-2x}.$$

Entsprechend hat $p(\partial)\, y(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$ die Partikulärlösung $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}/(1 - 3\mathrm{i})$.

(f) Wir lösen $p(\partial)\, u(x) = \cos(x)$ und $p(\partial)\, v(x) = \sin(x)$.
Dies ist Real- und Imaginärteil der Gleichung $p(\partial)\, y(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$.
Lösungen erhalten wir aus Real-/Imaginärteil der komplexen Lösung

$$\begin{aligned}
y_b(x) &= \tfrac{1-3\mathrm{i}}{10}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \tfrac{1}{10} \cdot (1 - 3\mathrm{i}) \cdot \big(\cos x + \mathrm{i} \sin x\big) \\
&= \underbrace{\tfrac{1}{10}\, \big(\cos x + 3 \sin x\big)}_{u_b} + \mathrm{i}\, \underbrace{\tfrac{1}{10}\, \big(-3 \cos x + \sin x\big)}_{v_b}
\end{aligned}$$

Die allgemeinen reellen Lösungen sind demnach:

$$\begin{aligned}
u(x) &= \tfrac{1}{10}\, \big(\cos x + 3 \sin x\big) + \alpha_1\, \mathrm{e}^{-x} + \alpha_2\, \mathrm{e}^{-2x} \\
v(x) &= \tfrac{1}{10}\, \big(-3 \cos x + \sin x\big) + \alpha_1\, \mathrm{e}^{-x} + \alpha_2\, \mathrm{e}^{-2x}
\end{aligned}$$

Spezielle rechte Seite mit & ohne Resonanz

Aufgabe: Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$\boxed{y^{(5)}(x) + y^{(4)}(x) + 2y'''(x) + 2y''(x) + y'(x) + y(x) = b(x)}$$

mit rechten Seiten $b(x) = 0,\ \mathrm{e}^{x},\ \mathrm{e}^{-x},\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}x},\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x},\ \cos(x),\ \cos(2x)$.

Lösung: (a) Das char. Polynom unserer Gleichung $p(\partial)\,y = 0$ ist

$$\begin{aligned} p(x) &= x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1 &&= (x+1)(x^4 + 2x^2 + 1) \\ &= (x+1)(x^2+1)^2 &&= (x+1)(x-\mathrm{i})^2(x+\mathrm{i})^2 \end{aligned}$$

Nullstellen: -1, i, i, $-\mathrm{i}$, $-\mathrm{i}$ (ausprobieren und faktorisieren)

Komplexe Fundamentallösungen: e^{-x}, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, $x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$, $x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$
Allgemein komplex: $y(x) = c_1\,\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}(c_2 + c_3 x) + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}(c_4 + c_5 x)$

Reelle Fundamentallösungen: e^{-x}, $\cos(x)$, $x\cos(x)$, $\sin(x)$, $x\sin(x)$
Allgemein reell: $y(x) = \alpha_1\,\mathrm{e}^{-x} + \cos(x)(\alpha_2 + \alpha_3 x) + \sin(x)(\alpha_4 + \alpha_5 x)$

☺ **Anfangswerte** $y(x_0), \ldots, y^{(4)}(x_0) \in \mathbb{R}$ können beliebig vorgegeben werden und legen die freien Konstanten $\alpha_1, \ldots, \alpha_5 \in \mathbb{R}$ eindeutig fest.

Spezielle rechte Seite mit & ohne Resonanz

(b) Wir lösen $p(\partial)\,y(x) = \mathrm{e}^{\mu x}$ für $\mu = 1$. (spezielle rechte Seite)

Dies ist keine Nullstelle von p (Vielfachheit $k = 0$), genauer $p(1) = 8$.

Partikulärlösung: $y_b(x) = \mathrm{e}^{x}/8$. (Probe!) Allgemeine Lösung:

$$y(x) = \tfrac{1}{8}\,\mathrm{e}^{x} + \alpha_1\,\mathrm{e}^{-x} + \cos(x)\big(\alpha_2 + \alpha_3 x\big) + \sin(x)\big(\alpha_4 + \alpha_5 x\big)$$

☺ Machen Sie die Probe! Ebenso findet man y_b durch den Ansatz $y_b(x) = c\,\mathrm{e}^{x}$, Einsetzen $p(\partial)\,\mathrm{e}^{x} = 8\,\mathrm{e}^{x}$, Koeffizientenvergleich $c = 1/8$.

(c) Wir lösen $p(\partial)\,y(x) = \mathrm{e}^{\mu x}$ für $\mu = -1$. (spezielle rechte Seite)

Einfache Nullstelle von p (Vielfachheit $k = 1$): $p(-1) = 0,\ p'(-1) = 4$.

Partikulärlösung: $y_b(x) = \mathrm{e}^{-x}\,x/4$. (Probe!) Allgemeine Lösung:

$$y(x) = \mathrm{e}^{-x}\big(\alpha_1 + \tfrac{x}{4}\big) + \cos(x)\big(\alpha_2 + \alpha_3 x\big) + \sin(x)\big(\alpha_4 + \alpha_5 x\big)$$

☺ Machen Sie die Probe! Ebenso findet man y_b durch den Ansatz $y_b(x) = c\,x\,\mathrm{e}^{-x}$, Einsetzen in die DG und Koeffizientenvergleich. Übung!

Spezielle rechte Seite mit & ohne Resonanz

N231
Übung

(d) Wir lösen $p(\partial)\,y(x) = \mathrm{e}^{\mu x}$ für $\mu = \mathrm{i}$. (spezielle rechte Seite)
Dies ist eine doppelte Nullstelle von p (Vielfachheit $k = 2$), genauer:

$$\begin{aligned} p(x) &= x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1, & p(\mathrm{i}) &= 0, \\ p'(x) &= 5x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1, & p'(\mathrm{i}) &= 0, \\ p''(x) &= 20x^3 + 12x^2 + 12x + 4, & p''(\mathrm{i}) &= -8 - 8\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Partikulärlösung: $y_b(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,x^2/(-8-8\mathrm{i})$. (Probe!) Allgemeine Lösung:

$$y(x) = c_1\,\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\big(c_2 + c_3 x - \tfrac{1-\mathrm{i}}{16}x^2\big) + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\big(c_4 + c_5 x\big)$$

(e) Wir lösen $p(\partial)\,y(x) = \mathrm{e}^{\mu x}$ für $\mu = -\mathrm{i}$ analog zu (d):
Wir berechnen hierzu $p(-\mathrm{i}) = 0,\ p'(-\mathrm{i}) = 0,\ p''(-\mathrm{i}) = -8 + 8\mathrm{i}$.
Partikulärlösung: $y_b(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\,x^2/(-8+8\mathrm{i})$. Allgemeine Lösung:

$$y(x) = c_1\,\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\big(c_2 + c_3 x\big) + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\big(c_4 + c_5 x - \tfrac{1+\mathrm{i}}{16}x^2\big)$$

☺ Machen Sie die Probe! Ebenso findet man y_b jeweils durch den Ansatz $y_b(x) = c\,x^2\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}x}$, Einsetzen und Koeffizientenvergleich. Übung!
☺ Gleichungen (c-d) und ihre Lösungen sind komplex-konjugiert.

Spezielle rechte Seite mit & ohne Resonanz

N232
Übung

(f) Wir lösen $p(\partial)\,u(x) = \cos(x)$ und $p(\partial)\,v(x) = \sin(x)$.
Dies ist Real- und Imaginärteil der Gleichung $p(\partial)\,y(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$.
Lösungen erhalten wir aus Real-/Imaginärteil der komplexen Lösung

$$\begin{aligned} y_b(x) &= \tfrac{\mathrm{i}-1}{16}\,x^2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \tfrac{1}{16}\,x^2 \cdot (\mathrm{i}-1) \cdot \big(\cos x + \mathrm{i}\sin x\big) \\ &= \underbrace{-\tfrac{1}{16}\,x^2\,\big(\cos x + \sin x\big)}_{u_b} + \mathrm{i}\ \underbrace{\tfrac{1}{16}\,x^2\,\big(\cos x - \sin x\big)}_{v_b} \end{aligned}$$

Die allgemeinen reellen Lösungen sind demnach:

$$\begin{aligned} u(x) &= \alpha_1\,\mathrm{e}^{-x} + \cos(x)\big(\alpha_2 + \alpha_3 x - \tfrac{1}{16}x^2\big) + \sin(x)\big(\alpha_4 + \alpha_5 x - \tfrac{1}{16}x^2\big) \\ v(x) &= \alpha_1\,\mathrm{e}^{-x} + \cos(x)\big(\alpha_2 + \alpha_3 x + \tfrac{1}{16}x^2\big) + \sin(x)\big(\alpha_4 + \alpha_5 x - \tfrac{1}{16}x^2\big) \end{aligned}$$

☺ Machen Sie die Probe! Ebenso findet man y_b durch den Ansatz $y_b(x) = (a\cos x + b\sin x)\,x^2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, Einsetzen und Koeffizientenvergleich.

(g) Wir lösen $p(\partial)\,y(x) = \mathrm{e}^{\mu x}$ für $\mu = 2\mathrm{i}$. Hier finden wir $p(2\mathrm{i}) = 9 + 18\mathrm{i}$.
Partikulärlösung: $y_b(x) = \mathrm{e}^{x}/(9+18\mathrm{i}) = (\cos x + \mathrm{i}\sin x) \cdot (1-2\mathrm{i})/45$.
Real-/Imaginärteil lösen $p(\partial)\,u(x) = \cos(2x)$ und $p(\partial)\,v(x) = \sin(2x)$.

Spezielle rechte Seite mit & ohne Resonanz

Aufgabe: Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichungen

(a) $y'''(x) + 3\,y''(x) - 4\,y(x) = 0,$

(b) $y'''(x) + 3\,y''(x) - 4\,y(x) = 8\,x^2\,\mathrm{e}^{-x},$

(c) $y'''(x) + 3\,y''(x) - 4\,y(x) = 108\,x^2\,\mathrm{e}^{-2x}.$

Lösung: (a) Das char. Polynom unserer Gleichung $p(\partial)\,y = 0$ ist

$$p(x) = x^3 + 3x^2 - 4 = (x-1)(x^2+4x+4) = (x-1)(x+2)^2.$$

Fundamentalsystem der homogenen Gleichung: $\mathrm{e}^{x},\ \mathrm{e}^{-2x},\ x\,\mathrm{e}^{-2x}$.
Die allgemeine Lösung ist $y(x) = \alpha_1\,\mathrm{e}^{x} + \big(\alpha_2 + \alpha_3 x\big)\,\mathrm{e}^{-2x}$.
Anfangswerte $y(x_0), y'(x_0), y''(x_0)$ können beliebig vorgegeben werden: Sie legen die freien Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ eindeutig fest.

(b) Wir lösen $p(\partial)\,y(x) = 8\,x^2\,\mathrm{e}^{-x}$. (spezielle rechte Seite)
Hier ist $\mu = -1$ keine Nullstelle von p (Vielfachheit $k = 0$).
Gemäß Satz N2E gelingt der Ansatz $y_b(x) = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2)\,\mathrm{e}^{-x}$.

Spezielle rechte Seite mit & ohne Resonanz

Einsetzen in die Differentialgleichung und geduldig ausrechnen:

$$\begin{aligned} p(\partial)\,y_b(x) &= p(\partial)\,\big[q(x)\,\mathrm{e}^{-x}\big] = \mathrm{e}^{-x}\,p(\partial-1)\,q(x) = \ldots \\ &= \mathrm{e}^{-x}\big[q'''(x) - 3q'(x) - 2q(x)\big] \quad \overset{!}{=} \quad 8\,x^2\,\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

Wir erhalten hieraus die Gleichung

$$-3\big(c_1 + 2c_2 x\big) - 2\big(c_0 + c_1 x + c_2 x^2\big) \quad \overset{!}{=} \quad 8x^2.$$

Koeffizientenvergleich:

$$\left.\begin{aligned} -2c_2 &= 8 \\ -6c_2 - 2c_1 &= 0 \\ -3c_1 - 2c_0 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} c_2 &= -4 \\ c_1 &= 12 \\ c_0 &= -18 \end{aligned}\right.$$

Wir erhalten so die Partikulärlösung $y_b(x) = \big(-4x^2 + 12x - 18\big)\,\mathrm{e}^{-x}$.
Die allgemeine Lösung unserer Differentialgleichung ist schließlich

$$y(x) = \big(-18 + 12x - 4x^2\big)\,\mathrm{e}^{-x} + \alpha_1\,\mathrm{e}^{x} + \big(\alpha_2 + \alpha_3 x\big)\,\mathrm{e}^{-2x}$$

Machen Sie die Probe: in DG einsetzen und geduldig ausrechnen!

Spezielle rechte Seite mit & ohne Resonanz

(c) Wir lösen $p(\partial)\, y(x) = 108\, x^2\, \mathrm{e}^{-2x}$. (spezielle rechte Seite)
Hier ist $\mu = -2$ eine doppelte Nullstelle von p. (Vielfachheit $k = 2$)
Gemäß Satz N2E gelingt der Ansatz $y_b(x) = (c_0 x^2 + c_1 x^3 + c_2 x^4)\, \mathrm{e}^{-2x}$.
Einsetzen in die Differentialgleichung und geduldig ausrechnen:

$$\begin{aligned} p(\partial)\, y_b(x) &= p(\partial) \left[q(x)\, \mathrm{e}^{-2x} \right] = \mathrm{e}^{-2x}\, p(\partial - 2)\, q(x) \\ &= \mathrm{e}^{-2x}\, (\partial - 3)\partial^2\, q(x) = \mathrm{e}^{-2x} \left[q'''(x) - 3q''(x) \right] \\ &= \mathrm{e}^{-2x} \left[6c_1 + 24c_2 x - 6c_0 - 18c_1 x - 36c_2 x^2 \right] \quad \overset{!}{=} \quad 108\, x^2\, \mathrm{e}^{-2x} \end{aligned}$$

Wir erhalten hieraus die Gleichung

$$(6c_1 - 6c_0) + (24c_2 - 18c_1)x - 36c_2 x^2 \quad \overset{!}{=} \quad 108x^2.$$

Koeffizientenvergleich:

$$\left.\begin{aligned} -36c_2 &= 108 \\ 24c_2 - 18c_1 &= 0 \\ 6c_1 - 6c_0 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_2 = -3 \\ c_1 = -4 \\ c_0 = -4 \end{cases}$$

Spezielle rechte Seite mit & ohne Resonanz

Wir erhalten so die Partikulärlösung $y_b(x) = \left(-3x^4 - 4x^3 - 4x^2\right) \mathrm{e}^{-2x}$.
Die allgemeine Lösung unserer Differentialgleichung ist schließlich

$$y(x) = \alpha_1\, \mathrm{e}^{x} + \left(\alpha_2 + \alpha_3 x - 4x^2 - 4x^3 - 3x^4\right) \mathrm{e}^{-2x}$$

Machen Sie die Probe: in DG einsetzen und geduldig ausrechnen!
Anfangswerte $y(x_0), y'(x_0), y''(x_0)$ können beliebig vorgegeben werden: Sie legen die freien Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ eindeutig fest.

☺ Für spezielle rechte Seiten wissen wir, welcher Ansatz gelingt:
Die inhomogene lineare Differentialgleichung $p(\partial)\, y(x) = r(x)\, \mathrm{e}^{\mu x}$
wird gelöst durch den Ansatz $y_b(x) = q(x)\, x^k\, \mathrm{e}^{\mu x}$ mit $\deg q = \deg r$.
Es genügt Einsetzen, Koeffizientenvergleich und geduldiges Rechnen!

☺ Speziell $p(\partial)\, y(x) = \mathrm{e}^{\mu x}$ wird gelöst durch $y_b(x) = \mathrm{e}^{\mu x}\, x^k / p^{(k)}(\mu)$.
Für (b–c) genügt dieser Spezialfall nicht, und wir müssen tatsächlich ein Gleichungssystem lösen; es ist triangulär und daher leicht.

Trigonometrische rechte Seite ohne Resonanz

Aufgabe: Finden Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$\boxed{y''(x) + 2\,y'(x) + y(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}\cos(2x).}$$

Lösung: Char. Polynom $p(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$.
Fundamentalsystem der homogenen Gleichung: e^{-x}, $x\,\mathrm{e}^{-x}$.

Die rechte Seite ist der Realteil von $b(x) = x\,\mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})x}$.
Wir betrachten daher die komplexe Differentialgleichung

$$z''(x) + 2\,z'(x) + z(x) = x\,\mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})x}$$

Hier ist $\mu = -1 + 2\mathrm{i}$ keine Nullstelle von p. (Vielfachheit $k = 0$)
Ansatz für eine Partikulärlösung der komplexen Gleichung:

$$z_b(x) = q(x)\,\mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})x} \quad \text{mit} \quad q(x) = c_0 + c_1 x$$

Einsetzen in die DG und geduldig ausrechnen:

$$\begin{aligned} p(\partial)\,z_b(x) &= (\partial+1)^2\Big[q(x)\,\mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})x}\Big] = \mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})x}\,(\partial+2\mathrm{i})^2\,q(x) \\ &= \mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})x}\big[q''(x) + 4\mathrm{i}q'(x) - 4q(x)\big] \overset{!}{=} x\,\mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})x} \end{aligned}$$

Trigonometrische rechte Seite ohne Resonanz

Wir erhalten hieraus die Gleichung

$$4\mathrm{i}c_1 - 4(c_0 + c_1 x) = x.$$

Koeffizientenvergleich:

$$\left.\begin{aligned} -4\,c_1 &= 1 \\ -4\,c_0 + 4\mathrm{i}\,c_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} c_1 &= -1/4 \\ c_0 &= -\mathrm{i}/4 \end{aligned}\right.$$

Komplexe Partikulärlösung für die rechte Seite $b(x) = x\,\mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})x}$:

$$z_b(x) = -\tfrac{1}{4}(x+\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})x}$$

Reelle Partikulärlösung für die rechte Seite $\mathrm{Re}\,b(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}\cos(2x)$:

$$y_b(x) = \mathrm{Re}\big[z_b(x)\big] = \tfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-x}\big(\sin(2x) - x\cos(2x)\big)$$

Die allgemeine reelle Lösung ist schließlich:

$$y(x) = \tfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-x}\big(\sin(2x) - x\cos(2x)\big) + \mathrm{e}^{-x}\big(\alpha_1 + \alpha_2 x\big)$$

Machen Sie die Probe: in DG einsetzen und geduldig ausrechnen!

Trigonometrische rechte Seite mit Resonanz

Aufgabe: Finden Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$\boxed{y''(x) + y(x) = x^2 \sin x + \cos x.}$$

Lösung: Char. Polynom $p(x) = x^2 + 1 = (x - \mathrm{i})(x + \mathrm{i})$.
Komplexes Fundamentalsystem der homogenen Gleichung: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$.
Reelles Fundamentalsystem der homogenen Gleichung: $\cos x$, $\sin x$.

Die rechte Seite ist der Realteil von $b(x) = (1 - \mathrm{i}x^2)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$.
Wir betrachten daher die komplexe Differentialgleichung

$$z''(x) + z(x) = (1 - \mathrm{i}x^2)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}.$$

Hier ist $\mu = \mathrm{i}$ eine einfache Nullstelle von p. (Vielfachheit $k = 1$)
Ansatz für eine Partikulärlösung der komplexen Gleichung:

$$z_b(x) = q(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \quad \text{mit} \quad q(x) = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

Trigonometrische rechte Seite mit Resonanz

Einsetzen in die DG und Koeffizientenvergleich liefert (wie immer) ein Gleichungssystem. So berechnet man die komplexe Partikulärlösung:

$$z_b(x) = \left(-\frac{1}{6}x^3 - \frac{\mathrm{i}}{4}x^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{\mathrm{i}}{2}\right)x\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$$

Ihr Realteil ist die gesuchte reelle Partikulärlösung:

$$y_b(x) = \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x}{4}\right)\cos x + \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}\right)\sin x$$

Probe! Die allgemeine reelle Lösung ist schließlich:

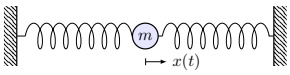
$$y(x) = \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x}{4} + \alpha_1\right)\cos x + \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \alpha_2\right)\sin x$$

Die Konstanten α_1, α_2 ergeben sich aus eventuellen Anfangsdaten.

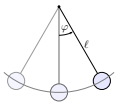
☺ Der entscheidende Schritt ist, den richtigen Ansatz zu wählen. Genau dies leistet unser Satz N2E! Die Lösung gelingt garantiert und ist somit nur eine Frage des geduldigen Ausrechnens. Alles wird gut.

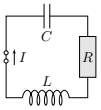
Anwendung: Frequenzanalyse in der Regelungstechnik

Wir betrachten die Differentialgleichung $p(\partial)\,u(t) = a(t)$, zum Beispiel



$$\boxed{\ddot{u}(t) + 2\delta\,\dot{u}(t) + \omega_0^2\,u(t) = a(t)}$$





Jede harmonische Anregung a erzwingt eine harmonische Reaktion u:

$$u(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \quad \overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad a(t) = p(\mathrm{i}\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

$$a(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \quad \overset{(2)}{\Longrightarrow} \quad u(t) = p(\mathrm{i}\omega)^{-1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \text{homogene Lösung}$$

Die Rechnung (1) ist leicht. Für die Umkehrung (2) betrachten wir zur Vereinfachung nur den Fall ohne Resonanz, also $p(\mathrm{i}\omega) \neq 0$. (Satz N2E)

Dank Linearität des Operators $p(\partial)$ überlagern sich diese Lösungen:

Anregung	System	Reaktion
$a(t) = \sum_\omega a_\omega\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$	$p(\partial)\,u(t) = a(t)$	$u(t) = \sum_\omega \frac{a_\omega}{p(\mathrm{i}\omega)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$

Wir können zu u noch homogene Lösungen addieren; diese lasse ich hier weg und denke an das Langzeitverhalten bei Dämpfung $\delta > 0$. N119

Anwendung: Frequenzanalyse in der Regelungstechnik

☺ Die Transformation in den Frequenzbereich vereinfacht das Problem! Durch Fourier–Entwicklung können wir so diese Differentialgleichung für jede rechte Seite lösen und für jede Frequenz leicht verstehen.

Anders gesagt: Für den Differentialoperator $p(\partial)$ ist $\mathrm{e}^{\lambda t}$ Eigenfunktion zum Eigenwert $p(\lambda)$. Die Fourier–Zerlegung $u(t) = \sum_\omega u_\omega\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ führt zu $a(t) = p(\partial)\,u(t) = \sum_\omega p(\mathrm{i}\omega)\,u_\omega\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, dank Diagonalisierung von $p(\partial)$.

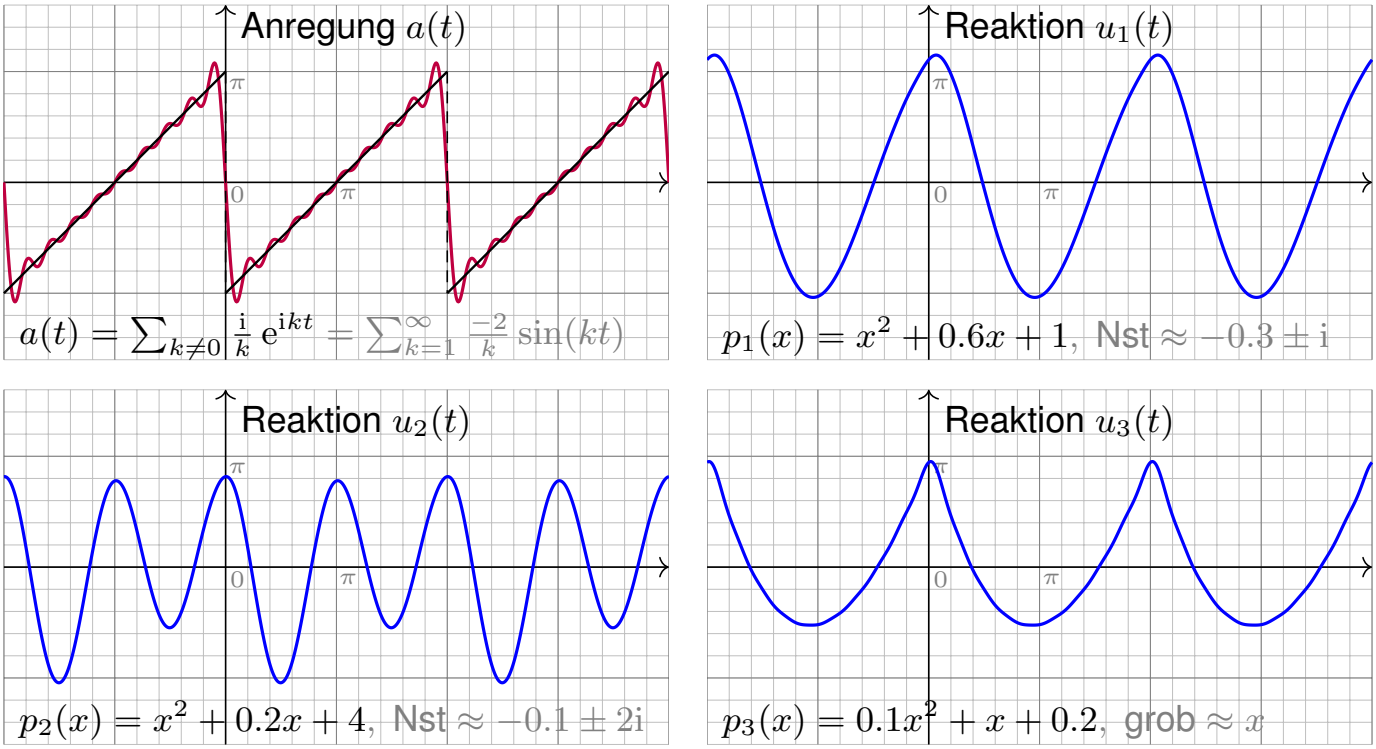
Umgekehrt lösen wir so die Differentialgleichung $p(\partial)\,u(t) = a(t)$:
Die Anregung $a(t) = \sum_\omega a_\omega\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ führt dank dieser Diagonalisierung zur Reaktion $u(t) = p(\partial)^{-1}a(t) = \sum_\omega p(\mathrm{i}\omega)^{-1}a_\omega\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} +$ homogene Lösung.

Dies gelingt für endliche Summen, also trigonometrische Polynome, ebenso wie für unendliche, also Fourier–Reihen und Fourier–Integrale. Hier zahlt sich aus, dass wir die Fourier–Analyse bereits beherrschen!

Der hier wirkende Verstärkungsfaktor $\omega \mapsto 1/p(\mathrm{i}\omega)$ ist frequenzabhängig! Dies nennt man den **Frequenzgang** oder die **Übertragungsfunktion** des Systems. Durch Wahl des Systems und seiner Parameter können wir aus dem Spektrum des Signals gezielt Frequenzen ausfiltern.

Anwendung: Frequenzanalyse in der Regelungstechnik

Aufgabe: Wir untersuchen ein System mit charakteristischem Polynom $p(x) = x^2 + 0.6x + 1$ oder $x^2 + 0.2x + 4$ oder $0.1x^2 + x + 0.2$ oder ....
Welche Antwort $u(t)$ entsteht bei sägezahnförmiger Anregung $a(t)$? I205



Anwendung: Frequenzanalyse in der Regelungstechnik

Diese Graphiken illustrieren die oben erklärte Frequenzanalyse und Filterwirkung. Auf den ersten Blick ist das Ergebnis überraschend: Die Reaktion $u(t)$ hat wenig mit der Anregung $a(t)$ gemeinsam!

☺ In der Frequenzanalyse hingegen wird das Bild klar und einfach. Die anregende Funktion $a(t)$ enthält alle Frequenzen $k = 1, 2, 3, \ldots$. Die Verstärkung $p(\mathrm{i}k)$ hängt nur vom charakteristischen Polynom p ab!

Für $p_1(x) = x^2 + 0.6x + 1$ haben wir die beiden Nullstellen $\approx -0.3 \pm \mathrm{i}$. Demnach ist $p(\mathrm{i})$ sehr klein und $p(\mathrm{i})^{-1}$ sehr groß: Die Grundfrequenz wird extrem verstärkt, die anderen Frequenzen deutlich weniger.

Für $p_2(x) = x^2 + 0.2x + 4$ haben wir die beiden Nullstellen $\approx -0.1 \pm 2\mathrm{i}$. Demnach ist $p(2\mathrm{i})$ sehr klein und $p(2\mathrm{i})^{-1}$ sehr groß: Daher wird diese erste Oberschwingung extrem verstärkt, die anderen deutlich weniger.

Für $p_3(x) = 0.1x^2 + x + 0.2$ erinnert die Graphik an die Parabelfunktion. Das ist kein Zufall! Wir haben grob $p_3(x) \approx x$, das entspricht $\partial u = a$, also der Integration der Sägezahnfunktion a zur Parabelfunktion u! I321

☺ Die Anschauung stimmt. Sie können dies nun auch quantitativ lösen!

Greensche Lösungsformel für beliebige rechte Seiten

Zu lösen sei $p(\partial)\,y = b$ mit $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{K}[x]$:

$$\boxed{y^{(n)}(x) + a_{n-1}\,y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1\,y'(x) + a_0\,y(x) = b(x).}$$

Die Funktion $b\colon \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{K}$ sei stetig auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.
Sie heißt **Inhomogenität** oder **Störterm** oder kurz **rechte Seite**.
Für spezielle rechte Seiten wie in N2E können wir die DG leicht lösen.

Satz N2F: Greensche Fundamentallösung und Lösungsformel

Die homogene Gleichung $p(\partial)\,u = 0$ hat genau eine Lösung $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ mit den **Anfangswerten** $u(0) = \cdots = u^{(n-2)}(0) = 0$ und $u^{(n-1)}(0) = 1$.

Wir nennen u die **Greensche Fundamentallösung**. Hieraus erhalten wir eine Lösung der inhomogenen Gleichung $p(\partial)\,y = b$ durch **Faltung**:

$$\boxed{y(x) = \int_{t=x_0}^{x} u(x-t)\,b(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Genauer ist y die einzige Lösung der inhomogenen Gleichung $p(\partial)\,y = b$ mit Anfangswerten $y(x_0) = y'(x_0) = \cdots = y^{(n-2)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0) = 0$.

Greensche Lösungsformel für beliebige rechte Seiten

Aufgabe: Zu lösen sei, für $-\pi/2 < x < \pi/2$, die Differentialgleichung

$$\boxed{y''(x) + y(x) = \frac{1}{\cos x} \quad \text{mit} \quad y(0) = y'(0) = 0.}$$

Lösung: Allgemeine homogene Lösung ist $u(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$.
Die Anfangswerte $u(0) = 0$ und $u'(0) = 1$ erfüllt nur $u(x) = \sin x$.
Wir falten diese **Fundamentallösung** u mit der **rechten Seite** b:

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_{t=0}^{x} \sin(x-t)\frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{x} \big(\sin x \cos t - \cos x \sin t\big)\frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{t=0}^{x} \sin x - \cos x \cdot \frac{\sin t}{\cos t}\,\mathrm{d}t = \Big[t \sin x + \cos x \cdot \ln \cos t\Big]_{t=0}^{x} \\ &= x \sin x + \cos x \cdot \ln \cos x \end{aligned}$$

☺ Die Probe ist wie immer leicht und lohnend! Geduldig ausrechnen:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sin x + x \cos x - \sin x \cdot \ln \cos x - \sin x \\ y''(x) &= \cos x - x \sin x - \cos x \cdot \ln \cos x + \sin(x)^2/\cos x \end{aligned}$$

Einsetzen: $y''(x) + y(x) = \cos x + \sin(x)^2/\cos x = 1/\cos x$. Alles passt!

Greensche Lösungsformel für beliebige rechte Seiten

Aufgabe: Beweisen Sie Greens Lösungsformel (a) durch Nachrechnen oder alternativ (b) durch Laplace–Transformation (wie auf Seite L309).

Lösung: (a) Für die Ableitung nutzen wir die Leibniz–Regel D303:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{t=x_0}^{h(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t = h'(x)\,f\big(x,h(x)\big) + \int_{t=x_0}^{h(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Angewendet auf $h(x)=x$ und $f(x,t)=u(x-t)\,b(t)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \underbrace{u(0)}_{=0}\,b(x) + \int_{t=x_0}^{x} u'(x-t)\,b(t)\,\mathrm{d}t,\\
y''(x) &= \underbrace{u'(0)}_{=0}\,b(x) + \int_{t=x_0}^{x} u''(x-t)\,b(t)\,\mathrm{d}t,\\
&\vdots\\
y^{(n-1)}(x) &= \underbrace{u^{(n-2)}(0)}_{=0}\,b(x) + \int_{t=x_0}^{x} u^{(n-1)}(x-t)\,b(t)\,\mathrm{d}t,\\
y^{(n)}(x) &= \underbrace{u^{(n-1)}(0)}_{=1}\,b(x) + \int_{t=x_0}^{x} u^{(n)}(x-t)\,b(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Greensche Lösungsformel für beliebige rechte Seiten

Einsetzen dieser Ableitungen in unsere Differentialgleichung ergibt

$$\begin{aligned}
&y^{(n)}(x) + a_{n-1}\,y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1\,y'(x) + a_0\,y(x)\\
&= b(x) + \int_{t=x_0}^{x} \underbrace{\big[u^{(n)} + a_{n-1}\,u^{(n-1)} + \ldots + a_1\,u' + a_0\,u\big]}_{=\,0,\text{ da } u \text{ eine Lösung der homogenen DG ist}}(x-t)\,b(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Somit ist y eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}\,y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1\,y'(x) + a_0\,y(x) = b(x).$$

Die Anfangswerte $y(x_0) = y'(x_0) = \cdots = y^{(n-2)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0) = 0$ ergeben sich aus der obigen Zwischenrechnung für die Ableitungen.

Anschauliche Erklärung wie sie in der Physik beliebt ist: Für alle $x<0$ sei das System in Ruhelage $u(x)=0$. Zum Zeitpunkt $x=0$ gilt $u(0)=u'(0)=\cdots=u^{(n-2)}(0)=0$, und es wird abrupt beschleunigt durch $u^{(n-1)}(0)=1$. Man stellt sich dies als „Hammerschlag“ vor. Das System vollführt als sogenannte **Impulsantwort** die Bewegung $u(x)$ für $x\ge 0$. L421 Entsprechend verschoben ist $u(x-t)\,b(t)$ ein Hammerschlag zum Zeitpunkt t mit Stärke $b(t)$. Das Integral über t ist die Summe dieser Beiträge: Wir nutzen Superposition dank Linearität. Gilt $b(x)=0$ für $x\le x_0$, so ist $y(x)=\int_{\mathbb{R}} u(x-t)\,b(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=x_0}^{x} u(x-t)\,b(t)\,\mathrm{d}t$. L429

Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Eine **lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung** ist von der Form

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x)\, y'(x) + a_0(x)\, y(x) = b(x).$$

Hierbei sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und wie üblich $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Die stetigen Funktionen $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} : I \to \mathbb{K}$ heißen **Koeffizienten**.
Die stetige Funktion $b : I \to \mathbb{K}$ heißt **Störterm** oder kurz **rechte Seite**.
Links wirkt der **lineare Differentialoperator** $L : C^n(I, \mathbb{K}) \to C^0(I, \mathbb{K})$,

$$L = a_0\partial^0 + a_1\partial^1 + \cdots + a_{n-1}\partial^{n-1} + \partial^n,$$
$$y \mapsto a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_{n-1} y^{(n-1)} + y^{(n)}.$$

Wir suchen alle Funktionen $y : I \to \mathbb{K}$, die die Gleichung $L\,y = b$ erfüllen.
Linearität bedeutet $L(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 L(y_1) + c_2 L(y_2)$ für $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$.

In anderen Worten: Aus Lösungen y_1 zu b_1 und y_2 zu b_2 ergibt die Linearkombination $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ eine Lösung zu $b = c_1 b_1 + c_2 b_2$.

Zu $Ly = b$ gehört die **homogene lineare Differentialgleichung** $Ly = 0$.
Als Lösungsmenge suchen wir also den Kern der linearen Abbildung L.

Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Bisher untersuchen wir lineare Differentialgleichungen mit **konstanten Koeffizienten**. Hier können wir alle Lösungen explizit angeben, uns genügen Exponentialansatz N2D und Greensche Lösungsformel N2F.
☺ Die Anwendungen sind wie gesehen bereits sehr reichhaltig!

Wir wollen nun auch **nicht-konstante Koeffizienten** betrachten, da solche Gleichungen ebenso natürlich in Anwendungen auftreten.
☺ Für Ordnung $n = 1$ kennen wir bereits eine Lösungsformel. M221

Als mögliche Lösungen betrachten wir hier alle Funktionen $y : I \to \mathbb{K}$, die n-mal stetig differenzierbar sind, kurz $y \in C^n(I, \mathbb{K})$, denn hierauf sind die Differentialoperatoren $\partial, \ldots, \partial^n$ und $L = \sum_{k=0}^{n} a_k \partial^k$ definiert.

⚠ Lösungen der Gleichung $L\,y = b$ wirklich **explizit** auszurechnen, kann mühsam und beliebig schwierig sein, mitunter gar unmöglich. Daher nutzen wir dankbar zunächst allgemeine Strukturaussagen!

☺ Einen guten Überblick verschafft uns der folgende wichtige Satz: Alles ist linear und wir haben n Freiheitsgrade; Anfangswerte können beliebig vorgegeben werden und legen die Lösung eindeutig fest.

Affin/Lineare Struktur des Lösungsraumes

Satz N3A: Struktursatz für lineare Differentialgleichungen

Zu $Ly = b$ suchen wir die Lösungsmenge $L_b = \{\, y \in C^n(I, \mathbb{K}) \mid Ly = b \,\}$.

(0) **Globale Existenz und Eindeutigkeit**: Zu jedem Anfangsdatum $(x_0, v_0, \ldots, v_{n-1}) \in I \times \mathbb{K}^n$ existiert genau eine Lösung $y \in L_b$ mit $y(x_0) = v_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = v_{n-1}$. Das heißt, in jedem Punkt $x_0 \in I$ ist die Auswertung $\Psi : L_b \to \mathbb{K}^n : y \mapsto \big(y(x_0), y'(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0)\big)$ bijektiv.

(1) $L_0 = \{\, y \mid L\,y = 0 \,\}$ ist ein **Vektorraum** der Dimension n über $\mathbb{K}$. Wir finden ein **Fundamentalsystem** $y_1, \ldots, y_n \in L_0$, also eine Basis von L_0 bestehend aus n linear unabhängigen Lösungen, und erhalten:

$$L_0 = \left\{\, c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n \;\middle|\; c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K} \,\right\} \quad \cong \quad \mathbb{K}^n$$

(2) $L_b = \{\, y \mid L\,y = b \,\}$ ist ein **affiner Raum** der Dimension n über $\mathbb{K}$. Für jede **Partikulärlösung** $y_b \in L_b$ gilt $L_b = y_b + L_0$, ausgeschrieben:

$$L_b = y_b + L_0 = \left\{\, y_b + c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n \;\middle|\; c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K} \,\right\}$$

„Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen“

Affin/Lineare Struktur des Lösungsraumes

Sie kennen diese Strukturaussagen bereits aus der linearen Algebra!
📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §4.6.

☺ Zu Verständnis und Lösung von Differentialgleichungen arbeiten Analysis und Lineare Algebra wunderbar zusammen. Hier lohnt sich erneut Ihre Investition in die mathematischen Grundlagen der HM1&2!

☺ Die Menge $C^n(I, \mathbb{K})$ aller n-mal stetig diff'baren Funktionen ist ein $\mathbb{K}$–Vektorraum. Allerdings ist er unendlich-dimensional; daher greifen die wunderbar erfolgreichen Methoden der Matrizenrechnung wie etwa der Gauß–Algorithmus hier nicht. Wir benötigen nun verstärkt Analysis!

Glücklicherweise sind unsere Lösungsräume endlich-dimensional:

$$\begin{aligned} L_0 &= \left\{\, y \in C^n(I, \mathbb{K}) \;\middle|\; L\,y = 0 \,\right\}, \quad \text{linear}, \quad \dim_{\mathbb{K}} L_0 = n, \\ L_b &= \left\{\, y \in C^n(I, \mathbb{K}) \;\middle|\; L\,y = b \,\right\}, \quad \text{affin}, \quad \dim_{\mathbb{K}} L_b = n. \end{aligned}$$

☺ Strukturaussage und ∃&E-Satz sagen uns zu jeder linearen DG n-ter Ordnung genau, wie groß der Lösungsraum ist: Er hat immer Dimension n! Bei jeder konkreten Berechnung wissen wir daher, wie viele Lösungen wir suchen müssen und wann wir alle gefunden haben!

Eulersche Differentialgleichung: Ansatzmethode

N305
Übung

Aufgabe: (1) Zu lösen sei zunächst die homogene Differentialgleichung

$$y''(x) + \frac{1}{x}\,y'(x) - \frac{4}{x^2}\,y(x) = 0 \quad \text{für} \quad y : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}.$$

(1a) Welche Struktur hat die Lösungsmenge? („Form“ und „Größe“)
(1b) Gibt es Lösungen der Form $y(x) = x^k$? (geschickter Ansatz)
(1c) Bestimmen Sie die Lösung y zum AWP $y(1) = 0$ und $y'(1) = 1$.

Lösung: (1a) Die Lösungsmenge ist ein Vektorraum der Dimension 2.

(1b) Ableiten von $y(x) = x^k$ und Einsetzen in die DG ergibt

$$k(k-1)x^{k-2} + kx^{k-2} - 4x^{k-2} = 0.$$

Also $(k^2 - 4)x^{k-2} = 0$. Lösungen $k = \pm 2$, also $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^{-2}$.
Diese sind linear unabhängig, also eine Basis, aka Fundamentalsystem.
Einfacher Test dank Wronski: $Y(x) = \begin{pmatrix} x^2 & x^{-2} \\ 2x & -2x^{-3} \end{pmatrix}$, z.B. $Y(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Die allgemeine Lösung ist demnach $y(x) = c_1 x^2 + c_2 x^{-2}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(1c) Anfangswerte: $y(1) = c_1 + c_2 \overset{!}{=} 0$ und $y'(1) = 2c_1 - 2c_2 \overset{!}{=} 1$.
Die gesuchte Lösung des AWP ist $y(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^{-2}$. Probe!

Eulersche Differentialgleichung: Ansatzmethode

N306
Übung

Aufgabe: (2) Zu lösen sei nun die inhomogene Differentialgleichung

$$y''(x) + \frac{1}{x}\,y'(x) - \frac{4}{x^2}\,y(x) = x \quad \text{für} \quad y : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}.$$

(2a) Welche Struktur hat die Lösungsmenge? („Form“ und „Größe“)
(2b) Gibt es Lösungen der Form $y(x) = c\,x^k$? (geschickter Ansatz)
(2c) Bestimmen Sie die Lösung y zum AWP $y(1) = 1$ und $y'(1) = 1$?

Lösung: (2a) Die Lösungsmenge ist ein affiner Raum der Dimension 2.

(2b) Ableiten von $y_b(x) = c\,x^k$ und Einsetzen in die DG ergibt

$$ck(k-1)x^{k-2} + ckx^{k-2} - 4cx^{k-2} = x.$$

Also $c(k^2 - 4) = x^{3-k}$. Die linke Seite hängt nicht von x ab.
Lösung: $k = 3$ und $c = \frac{1}{5}$, also $y_b(x) = \frac{1}{5}x^3$. Die Probe ist leicht!
Ein Fundamentalsystem der homogenen DG kennen wir bereits!

Die allgemeine Lösung ist $y(x) = \frac{1}{5}x^3 + c_1 x^2 + c_2 x^{-2}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(2c) Anfangswerte: $y(1) = \frac{1}{5} + c_1 + c_2 \overset{!}{=} 1$ und $y'(1) = \frac{3}{5} + 2c_1 - 2c_2 \overset{!}{=} 1$.
Die gesuchte Lösung ist schließlich $y(x) = \frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{10}x^{-2}$. Probe!

Eulersche Differentialgleichung: Substitution

Aufgabe: (3) Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\boxed{y''(x) + \frac{1}{x}\,y'(x) - \frac{4}{x^2}\,y(x) = x \quad \text{für} \quad y : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}}$$

durch Substitution: $x = \mathrm{e}^t$, $t = \ln x$ und $u(t) = y(\mathrm{e}^t)$, $y(x) = u(\ln x)$.

Lösung: (3) Wir rechnen sorgsam die Ableitungen aus:

$$y(x) = u(\ln x), \qquad y'(x) = \dot{u}(\ln x)\,\frac{1}{x}, \qquad y''(x) = \ddot{u}(\ln x)\,\frac{1}{x^2} - \dot{u}(\ln x)\,\frac{1}{x^2}$$

$$u(t) = y(\mathrm{e}^t) \qquad \dot{u}(t) = y'(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{e}^t \qquad \ddot{u}(t) = y''(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{e}^{2t} + y'(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{e}^t$$

Unsere Differentialgleichung können wir äquivalent umschreiben:

$$y''(x) + \frac{1}{x}\,y'(x) - \frac{4}{x^2}\,y(x) = x \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\ddot{u}(t)\,\mathrm{e}^{-2t} - \dot{u}(t)\,\mathrm{e}^{-2t} + \dot{u}(t)\,\mathrm{e}^{-2t} - 4u(t)\,\mathrm{e}^{-2t} = \mathrm{e}^t$$

Wir erhalten eine lineare DG mit konstanten Koeffizienten:

$$\boxed{\ddot{u}(t) - 4u(t) = \mathrm{e}^{3t}}$$

☺ Wir haben Glück und unser Substitutionsansatz zahlt sich aus!

Eulersche Differentialgleichung: Substitution

☺ Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beherrschen wir gut! Ihre Lösungen finden wir nach Schema:

Charakteristisches Polynom $p(x) = x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$.

Nullstellen 2, -2. Fundamentalsystem: $u_1(t) = \mathrm{e}^{2t}$, $u_2(t) = \mathrm{e}^{-2t}$.

Wir lösen $p(\partial)\,u(t) = \mathrm{e}^{\mu t}$ für $\mu = 3$. (spezielle rechte Seite)

Dies ist keine Nullstelle von p (Vielfachheit $k = 0$), genauer $p(3) = 5$.

Partikulärlösung: $u_b(t) = \mathrm{e}^{3t}/5$. Die allgemeine Lösung ist demnach:

$$u(t) = \frac{1}{5}\,\mathrm{e}^{3t} + c_1\,\mathrm{e}^{2t} + c_2\,\mathrm{e}^{-2t}.$$

Rücksubstitution von $u(t)$ zu $y(x)$ ergibt schließlich:

$$y(x) = \frac{1}{5}x^3 + c_1 x^2 + c_2 x^{-2}$$

☺ Dies entspricht der Lösung der vorigen Aufgabe (2).

Dieses Beispiel zeigt erneut, dass eine geschickte Substitution manchmal eine komplizierte DG in eine einfache verwandeln kann, hier bei einer linearen DG etwa variable in konstante Koeffizienten.

Fundamentalsystem und Fundamentalmatrix

Aus Lösungen $y_1, \dots, y_n : I \to \mathbb{K}$ bilden wir die **Fundamentalmatrix**:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

Man nennt $Y(x)$ auch die **Wronski–Matrix** der Funktionen $y_1, \dots, y_n$, und $\det Y(x)$ ihre **Wronski–Determinante**. Diese sind oft nützlich:

Korollar N3B: Unabhängigkeitskriterium

Folgende Aussagen sind untereinander äquivalent:

(a) Die Funktionen $y_1, \dots, y_n : I \to \mathbb{K}^n$ sind linear unabhängig.
(b) Die Spaltenvektoren von Y sind linear unabhängig für jedes $x \in I$.
(c) Die Spaltenvektoren von Y sind linear unabhängig für ein $x \in I$.
(d) Die Determinante erfüllt $\det Y(x) \neq 0$ für ein und damit alle $x \in I$.

☺ Dieses Kriterium ist einfach und übersichtlich. In kleiner Dimension $n = 2, 3$ kann man die Determinante tatsächlich bequem ausrechnen.

Fundamentalsystem und Fundamentalmatrix

Seien $y_1, \dots, y_n : I \to \mathbb{K}$ linear unabhängige Lösungen von $L\,y = 0$. In diesem Fall ist $y_1, \dots, y_n$ eine **Basis des Lösungsraumes** L_0; man nennt dies auch ein **Fundamentalsystem** der homogenen DG.

Dann hat jede Lösung $y \in L_0$ der homogenen Gleichung $L\,y = 0$ die Form $y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$ mit eindeutigen Konstanten $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$.

Sind **Anfangswerte** $(y(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)) \in \mathbb{K}^n$ vorgegeben, so bestimmen wir $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{K}^n$ durch folgendes Gleichungssystem:

$$Y \cdot c = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

In jedem Punkt $x_0 \in I$ ist die Fundamentalmatrix $Y(x_0)$ invertierbar, somit stiftet $c = Y(x_0)^{-1} \cdot y(x_0)$ die gesuchte Linearkombination.

☺ Wir gehen von $C^n(I, \mathbb{K})$ zum Teilraum $L_0 = \{\, y \mid L\,y = 0 \,\}$ über. Hier in endlicher Dimension greifen unsere bewährten Methoden: Basiswahl, Matrizen, Gauß–Algorithmus, Determinante, Inversion, etc.

Lösung durch Variation der Konstanten

Zu lösen sei eine **inhomogene lineare Differentialgleichung**

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x)\, y'(x) + a_0(x)\, y(x) = b(x).$$

Zur homogenen Gleichung $L\,y = 0$ sei bereits ein Fundamentalsystem $y_1, \ldots, y_n : I \to \mathbb{K}$ gefunden. Ihre allgemeine Lösung ist dann

$$y = c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n \quad \text{mit} \quad c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}.$$

Ansatz für eine Partikulärlösung durch **Variation der Konstanten**:

$$y(x) = c_1(x)\, y_1(x) + \ldots + c_n(x)\, y_n(x) \quad \text{mit} \quad c_1, \ldots, c_n : I \to \mathbb{K}$$

Diese bestimmen wir durch folgendes lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ \vdots \\ c_{n-1}'(x) \\ c_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

Lösung durch Variation der Konstanten

Die Fundamentalmatrix $Y(x)$ ist für jedes $x \in I$ invertierbar.
Dies garantiert eine eindeutige Lösung $c_1'(x), \ldots, c_n'(x)$ gemäß

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ \vdots \\ c_{n-1}'(x) \\ c_n'(x) \end{pmatrix} = Y(x)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

Integration liefert dann die gesuchten Funktionen $c_1(x), \ldots, c_n(x)$.

Satz N3C: Variation der Konstanten

Diese Konstruktion der Koeffizientenfunktionen $c_1, \ldots, c_n : I \to \mathbb{K}$ ergibt eine Partikulärlösung $y(x) = c_1(x)\, y_1(x) + \ldots + c_n(x)\, y_n(x)$ mit $L\,y = b$.

☺ Jede inhomogene Differentialgleichung lässt sich so lösen!
Probe: Einsetzen und geduldiges Ausrechnen ergibt $L\,y = b$.

Dies entspricht der Lösung linearer Differentialgleichungen $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$ erster Ordnung, wie wir sie aus dem vorigen Kapitel kennen, siehe Seite M433, alternativ Seite M221. Der Unterschied ist, dass nicht im Körper $\mathbb{K}$ invertiert wird, sondern im Matrizenring $\mathbb{K}^{n\times n}$. Matrixwertige Differentialgleichungen führen wir in Kapitel O aus, siehe Seite O311

Beweis zur Variation der Konstanten

Aufgabe: Rechnen Sie nach, dass die angegebene Lösungsformel der „Variation der Konstanten“ aus Satz N3C tatsächlich immer zum Erfolg führt, also eine Partikulärlösung $y : I \to \mathbb{K}$ der Gleichung $L\,y = b$ liefert.

Lösung: Wir rechnen zunächst die Ableitungen von y geduldig aus.

$$\begin{aligned}
y &= c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n \\
y' &= c_1 y_1' + \ldots + c_n y_n' && + \underbrace{c_1' y_1 + \ldots + c_n' y_n}_{=\,0} \\
y'' &= c_1 y_1'' + \ldots + c_n y_n'' && + \underbrace{c_1' y_1' + \ldots + c_n' y_n'}_{=\,0} \\
&\vdots \\
y^{(n-1)} &= c_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + c_n y_n^{(n-1)} && + \underbrace{c_1' y_1^{(n-2)} + \ldots + c_n' y_n^{(n-2)}}_{=\,0} \\
y^{(n)} &= c_1 y_1^{(n)} + \ldots + c_n y_n^{(n)} && + \underbrace{c_1' y_1^{(n-1)} + \ldots + c_n' y_n^{(n-1)}}_{=\,b}
\end{aligned}$$

☺ Die Konstruktion von $c_1, \ldots, c_n$ vereinfacht die Rechnung!

Beweis zur Variation der Konstanten

Damit erfüllt y die inhomogene Differentialgleichung $L\,y = b$:

$$\begin{aligned}
L\,y &= \qquad y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0\, y \\
&= b + c_1' \underbrace{\left[y_1^{(n)} + a_{n-1} y_1^{(n-1)} + \ldots + a_1 y_1' + a_0\, y_1\right]}_{=\,0} \\
&\quad + \ldots \\
&\quad + c_n' \underbrace{\left[y_n^{(n)} + a_{n-1} y_n^{(n-1)} + \ldots + a_1 y_1' + a_0\, y_n\right]}_{=\,0}
\end{aligned}$$

☺ Dies zeigt, dass der Ansatz immer gelingt! Für eine konkrete Aufgabe mag die explizite Rechnung mühsam sein, aber wir wissen immerhin, dass eine Lösung existiert und wie wir sie finden können. Oft ist allein das schon eine sehr wertvolle Information!

☺ Meist wird man versuchen, die Rechnung weiter zu vereinfachen. Dies kennen wir von konstanten Koeffizienten und speziellen rechten Seiten: Hier führen sowohl die allgemeine Greensche Methode N2F als auch die noch allgemeinere Variation N3C der Konstanten zum Ziel, doch der Exponentialansatz N2E kürzt die Rechnungen erheblich ab!

Beispiel zur Variation der Konstanten

Aufgabe: Zu lösen sei, für $-\pi/2 < x < \pi/2$, die Differentialgleichung

$$\boxed{y''(x) + y(x) = \frac{1}{\cos x} \quad \text{mit} \quad y(0) = \alpha_1,\ y'(0) = \alpha_2.}$$

Allgemeine rechte Seite: Nutzen Sie die Variation der Konstanten!

Lösung: Die zugehörige homogene Gleichung ist $y''(x) + y(x) = 0$. Fundamentalsystem: $y_1(x) = \cos x$, $y_2(x) = \sin x$. Fundamentalmatrix:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}, \quad Y^{-1} = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

Probe! Dies ist eine Rotationsmatrix mit $\det Y = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
Die Inversion gelingt mit Cramerscher Regel: $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$.

Ansatz für eine Partikulärlösung durch **Variation der Konstanten**:

$$y_b(x) = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x \quad \text{mit} \quad c_1, c_2 :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$$

Die Koeffizientenfunktionen c_1, c_2 bestimmen wir gemäß obigem Satz:

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = Y^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos & -\sin \\ \sin & \cos \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1/\cos \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin/\cos \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel zur Variation der Konstanten

Integration von c_1', c_2' zu c_1, c_2 liefert die gesuchten Funktionen:

$$c_1(x) = \int_{t=0}^{x} \frac{-\sin t}{\cos t}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln\cos t\Big]_{t=0}^{x} = \ln\cos x$$

$$c_2(x) = \int_{t=0}^{x} 1\,\mathrm{d}t \qquad = \Big[x\Big]_{t=0}^{x} \qquad = x$$

Als Partikulärlösung erhalten wir so $y_b(x) = (\ln\cos x)\cos x + x\sin x$.
Machen Sie die Probe! N246 Die allgemeine Lösung ist demnach

$$y(x) = (\ln\cos x + \alpha_1)\cos x + (x + \alpha_2)\sin x.$$

Die Konstanten entsprechen Anfangswerten $y(0) = \alpha_1$ und $y'(0) = \alpha_2$.

☺ Wie immer gilt auch hier: **Anfangswerte** $y(x_0), y'(x_0) \in \mathbb{R}$ zu einem Zeitpunkt $x_0 \in I$ können beliebig vorgegeben werden; sie bestimmen eindeutig die Lösung, also die Konstanten $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, und umgekehrt.

☺ Wir haben hier eine DG mit konstanten Koeffizienten. Für diesen Spezialfall können wir die Greensche Lösungsformel nutzen. N246
Die Variation der Konstanten funktioniert ebenso, zudem sogar ganz allgemein auch für Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten!

Anwendungsbeispiel zum Potenzreihenansatz

Aufgabe: Bestimmen Sie alle Potenzreihen $u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ mit

$$\boxed{u'(x) - u(x) = 0.}$$

Lösung: Einsetzen von $u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ in die DG ergibt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

Dies fassen wir als eine einzige Potenzreihe zusammen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \big[(k+1)a_{k+1} - a_k\big] x^k = 0$$

Koeffizientenvergleich ergibt $(k+1)a_{k+1} - a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Wir erhalten rekursiv $a_{k+1} = a_k/(k+1)$, also $a_k = a_0/k!$.

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_0}{k!} x^k = a_0 \exp(x)$$

☺ Das war zu erwarten. Wenn wir die Exponentialfunktion nicht schon kennten, wir müssten sie spätestens für diese DG als Lösung erfinden!

Anwendungsbeispiel zum Potenzreihenansatz

Aufgabe: Bestimmen Sie alle Potenzreihen $v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ mit

$$\boxed{v''(x) + v(x) = 0.}$$

Lösung: Einsetzen von $v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ in die DG ergibt:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

Dies fassen wir als eine einzige Potenzreihe zusammen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \big[(k+2)(k+1)a_{k+2} + a_k\big] x^k = 0$$

Wir erhalten rekursiv $a_{k+2} = -a_k/(k+2)(k+1)$, für gerade Indizes $a_{2j} = (-1)^j a_0/(2j)!$ und für ungerade $a_{2j+1} = (-1)^j a_1/(2j+1)!$

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 \cos(x) + a_1 \sin(x)$$

☺ Auch das war zu erwarten. Hier schließt sich der Kreis, den wir zu Beginn des Kapitels mit der Schwingungsgleichung eröffneten.

Anwendungsbeispiel zum Potenzreihenansatz

Viele wichtige Funktionen lassen sich als **Potenzreihen** darstellen:

$$\begin{aligned}
\exp(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} &&= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\
\sin(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} &&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\
\cos(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} &&= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\
\sinh(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} &&= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \\
\cosh(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} &&= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots
\end{aligned}$$

Jede dieser fünf Reihen hat unendlichen Konvergenzradius, sie konvergiert daher für jeden Parameter $x \in \mathbb{R}$, sogar $x \in \mathbb{C}$.

Anwendungsbeispiel zum Potenzreihenansatz

Ihre Ableitungen lesen wir direkt aus den Potenzreihen ab:

$$\exp' = \exp, \quad \sin' = \cos, \quad \cos' = -\sin, \quad \sinh' = \cosh, \quad \cosh' = \sinh$$

Diese Funktionen sind in der Mathematik allgegenwärtig, wir finden sie insbesondere als Lösungen grundlegender Differentialgleichungen:

$$y' = y, \qquad y'' = -y, \qquad y'' = y$$

Vor allem die einfachste Gleichung $y' = y$ ist omnipräsent, denn sie beschreibt in Natur und Technik viele wichtige Wachstumsprozesse. Kein Polynom kann diese Gleichung lösen. (Warum?) Daher ist die Erweiterung von rationalen zu transzendenten Funktionen wie $\exp$, $\sin$, $\cos$, etc. unumgänglich. Bemerkenswerterweise benötigen wir für lineare Differentialgleichungen mit *konstanten* Koeffizienten keine weiteren Funktionen: Der Exponentialansatz $x^k \, \mathrm{e}^{\mu x}$ gelingt immer!

Bei *nicht-konstanten* Koeffizienten hingegen werden neue Funktionen als Lösungen von Differentialgleichungen benötigt bzw. konstruiert. Die Bessel–Funktionen sind hierfür ein prominentes Beispiel. . .

Die Besselsche Differentialgleichung

Für viele Differentialgleichungen existiert keine elementare Lösung.
In diesem Fall kann uns der Potenzreihenansatz meist weiterhelfen:

Aufgabe: (1) Bestimmen Sie die Potenzreihe $J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ mit

$$x^2 J_0''(x) + x J_0'(x) + x^2 J_0(x) = 0 \quad \text{und} \quad J_0(0) = 1,\ J_0'(0) = 0.$$

(2) Berechnen Sie aus den Koeffizienten den Konvergenzradius.
(3) Skizzieren Sie die so dargestellte Funktion J_0.

Bessel–Funktionen J_α treten in der Physik auf. Sie sind Lösungen der Differentialgleichung $x^2 J_\alpha'' + x J_\alpha' + (x^2 - \alpha^2) J_\alpha = 0$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$. Es gibt keine elementare Lösung in exp, sin, cos, ..., daher der Potenzreihenansatz. Als typisches Beispiel lösen wir hier den Spezialfall $\alpha = 0$.

Die numerische Lösung von Differentialgleichungen ist für die Praxis ein überaus wichtiges Gebiet. Stellvertretend skizzieren wir hier nur den besonders eleganten Potenzreihenansatz: Diese Darstellung nutzen wir für viele Funktionen; sie ist für praktische wie theoretische Belange beinahe ebenso gut wie eine Darstellung durch elementare Funktionen $\exp, \sin, \cos, \ldots$.

Für die numerische Berechnung auf dem Computer wählen wir ein Intervall $[a, b]$ und eine Fehlerschranke $\varepsilon > 0$. Hierzu bestimmen wir n so, dass der Rest $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k$ beschränkt wird durch $|R_n(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in [a, b]$. Wir können dann $J_\alpha(x)$ durch das Polynom $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ annähern, und für alle $x \in [a, b]$ bleibt der Fehler kleiner als ε.

Die Besselsche Differentialgleichung

Lösung: (1) Einsetzen von $J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ in die DG ergibt:

$$x^2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} + x \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} + x^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

Dies fassen wir als eine einzige Potenzreihe zusammen:

$$a_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} \left[k^2 a_k + a_{k-2} \right] x^k = 0$$

Wir erhalten $a_k = -a_{k-2}/k^2$ für alle $k \geq 2$. Aus $a_0 = 1$ und $a_1 = 0$ folgt

$$a_{2j} = \frac{(-1)^j}{4^j (j!)^2} \quad \text{und} \quad a_{2j+1} = 0 \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}.$$

Wenn es also eine Lösung in Form einer Potenzreihe gibt, dann diese!

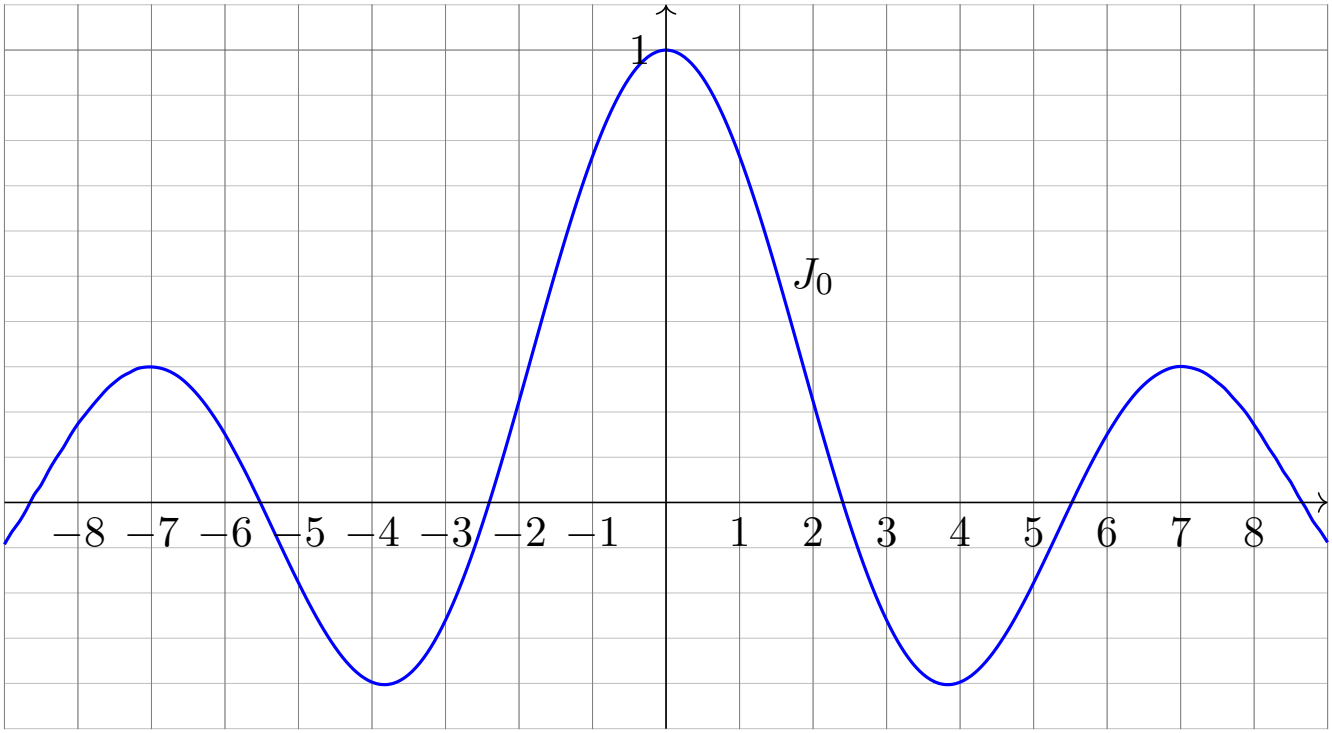
(2) Sie konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$, definiert also eine Funktion $J_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Dank Eindeutigkeitssatz N3A ist diese Funktion J_0 die einzige Lösung.

☺ Die Differentialgleichung gebiert eine neue fundamentale Funktion!

Die Besselsche Differentialgleichung

(3) Wir skizzieren schließlich den Graphen der Bessel–Funktion

$$J_0(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{4^j (j!)^2}\, x^{2j} = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + \dots$$



Die Besselsche Differentialgleichung

Die Lösungen J_α der **Bessel–Differentialgleichung**

$$x^2 J''_\alpha(x) + x J'_\alpha(x) + (x^2 - \alpha^2) J_\alpha(x) = 0$$

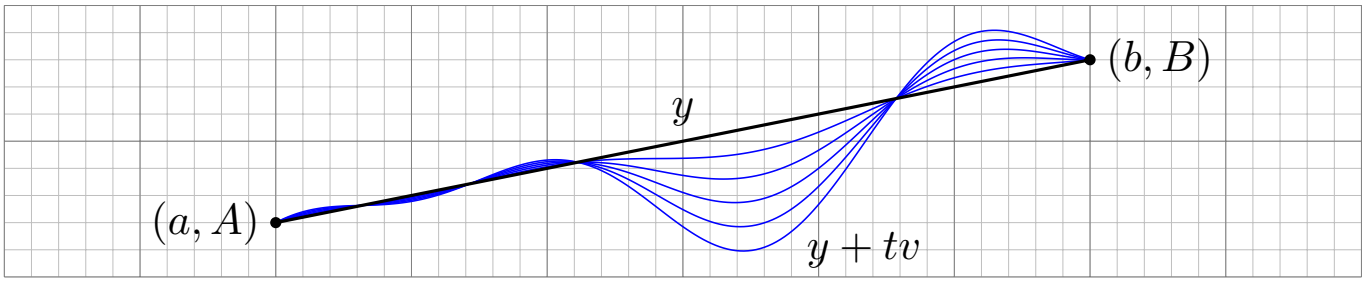
heißen **Bessel–Funktionen** zum Parameter $\alpha \in \mathbb{C}$. (Wir haben oben den Fall $\alpha = 0$ ausgeführt.) Sie begegnen uns bei der Lichtbeugung an kreisförmigen Öffnungen, der Ausbreitung von Wasserwellen in kreisförmigen Behältern, der Untersuchung von Eigenschwingungen einer kreisförmigen Membran, der Wärmeleitung in Stäben, etc.

📖 H. Heuser: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, §28, sowie `de.wikipedia.org/wiki/Besselsche_Differentialgleichung`.

Man zählt sie zu den **speziellen Funktionen**. Damit bezeichnet man allgemein all solche Funktionen, die in Mathematik und Physik häufig auftreten und daher eine grundlegende Rolle spielen, dabei aber über die elementaren Funktionen $\exp, \sin, \cos, \dots$ hinausgehen.

📖 M. Abramowitz, I.A. Stegun: *Handbook of mathematical functions*, online frei erhältlich etwa unter `numerical.recipes/aands/`

Optimierung durch Variationsrechnung



Welche Funktion $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ verbindet (a, A) und (b, B) mit minimaler Länge $L = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}\,\mathrm{d}x$? oder Wirkung $S = \frac{1}{2}\int_a^b 1 + y'(x)^2\,\mathrm{d}x$?
Zu minimieren ist hier das **Wirkungsfunktional** $S : C^2([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$:

$$y \mapsto S(y) := \int_{x=a}^{b} F\big(x, y(x), y'(x)\big)\,\mathrm{d}x \quad \text{mit} \quad F(x, q, p) = \begin{cases} 1 + p^2 \\ \sqrt{1 + p^2} \end{cases}$$

Die folgende Rechnung zeigt, wie wir minimierende Kurven finden.
Angenommen, die Funktion $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist minimal bezüglich S, das heißt, es gilt $S(y) \le S(z)$ für alle Konkurrenten $z : [a, b] \to \mathbb{R}$.
Sei $v : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine kleine Variation mit $v(a) = v(b) = 0$ und

$$\varphi(t) := S(y + tv) = \int_{x=a}^{b} F\big(\,x,\, y(x) + tv(x),\, y'(x) + tv'(x)\,\big)\,\mathrm{d}x.$$

Optimierung durch Variationsrechnung

Die Funktion $t \mapsto \varphi(t)$ hat in $t = 0$ ein Minimum, also gilt $\varphi'(0) = 0$.

$$\varphi'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{x=a}^{b} F\big(x, y + tv, y' + tv'\big)\mathrm{d}x = \int_{x=a}^{b} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F\big(x, y + tv, y' + tv'\big)\mathrm{d}x$$
$$= \int_{x=a}^{b} \frac{\partial F}{\partial q}\big(x, y + tv, y' + tv'\big) \cdot v + \frac{\partial F}{\partial p}\big(x, y + tv, y' + tv'\big) \cdot v'\,\mathrm{d}x$$

Den zweiten Summanden vereinfachen wir durch partielle Integration:

$$\int_{x=a}^{b} \frac{\partial F}{\partial p} \cdot v'\,\mathrm{d}x = \underbrace{\left[\frac{\partial F}{\partial p} \cdot v\right]_{x=a}^{b}}_{=\,0} - \int_{x=a}^{b} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial p}\right] \cdot v\,\mathrm{d}x$$

Somit gilt schließlich:

$$\varphi'(0) = \int_{x=a}^{b} \left[\frac{\partial F}{\partial q}(x, y, y') - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial p}(x, y, y')\right] \cdot v(x)\,\mathrm{d}x \quad \overset{!}{=} \quad 0$$

☺ Anschaulich: Dies ist die Ableitung von S im Punkt y in Richtung v.
Sie verschwindet für alle Variationen $v : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $v(a) = v(b) = 0$.
Folglich verschwindet die Funktion $u(x)$ in eckigen Klammern: $[\ldots] = 0$.

Optimierung durch Variationsrechnung

Gegeben sei ein **Wirkungsfunktional** $S : C^2 = C^2([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ durch

$$y \mapsto S(y) := \int_{x=a}^{b} F\big(x, y(x), y'(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

als Integral einer C^2–Funktion $F : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,q,p) \mapsto F(x,q,p)$.

Satz N4B: Euler–Lagrange–Differentialgleichung

Ist $y \in C^2$ **extremal**, also minimal $S(y) \le S(z)$ für alle $z \in C^2$ oder maximal $S(y) \ge S(z)$ für alle $z \in C^2$, dann erfüllt y die Gleichung

$$\boxed{\left[\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial p}\right]\big(x, y(x), y'(x)\big) = 0.}$$

Ausgeschrieben bedeutet das: Für alle $x \in [a,b]$ gilt die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial q}\big(x, y(x), y'(x)\big) = \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial p}(\cdots) + \frac{\partial^2 F}{\partial q\,\partial p}(\cdots)\,y'(x) + \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}(\cdots)\,y''(x).$$

☺ Mit dieser Differentialgleichung können wir $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ berechnen!

Optimierung durch Variationsrechnung

Übung: (1) Anwendung auf Verbindungswege geringster Wirkung:

$$F(x,q,p) = \frac{1+p^2}{2}, \qquad \frac{\partial F}{\partial q} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial p} = p$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial q\,\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} = 1.$$

Die Euler–Lagrange–Gleichung reduziert sich damit zu $y''(x) = 0$, also $y(x) = c_0 + c_1 x$. Minimierende Verbindungswege sind Geraden!

⚠ Dass umgekehrt die gefundenen Lösungen tatsächlich minimal sind, muss man jeweils durch genauere Analyse absichern, etwa $\varphi''(0) > 0$.

Übung: (2) Anwendung auf Verbindungswege kürzester Länge:

$$F(x,q,p) = \sqrt{1+p^2}, \qquad \frac{\partial F}{\partial q} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial p} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}},$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial q\,\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} = \frac{1}{(1+p^2)^{3/2}}.$$

Auch hier reduziert sich die Euler–Lagrange–Gleichung zu $y''(x) = 0$.

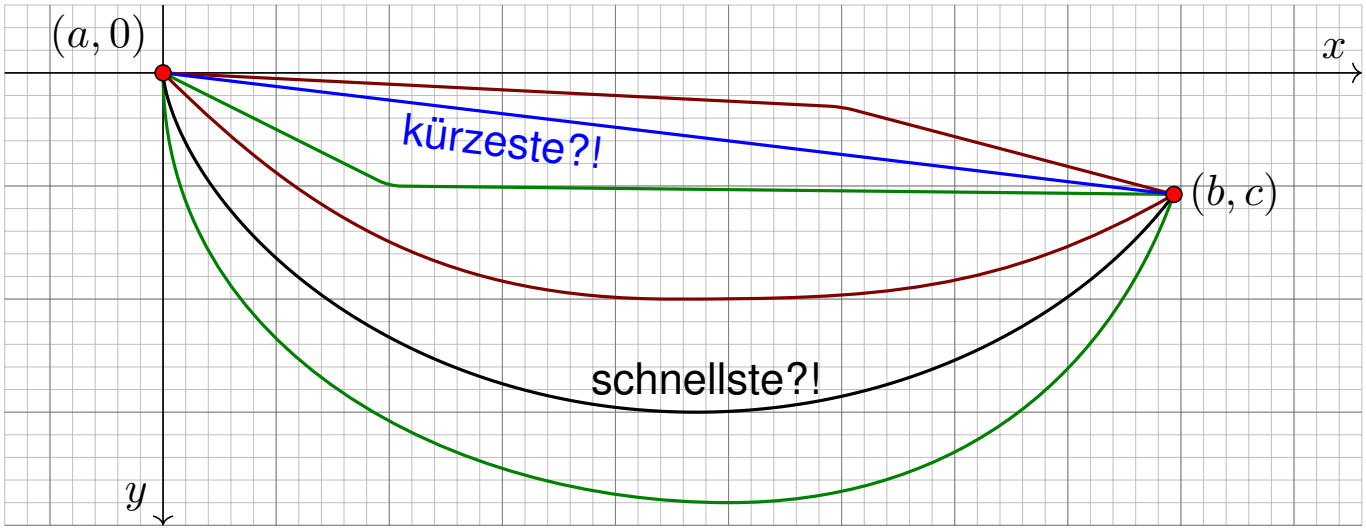
☺ Geraden waren hier zu erwarten, nun können wir es nachrechnen!

Die Brachistochrone

Eine Skaterampe (im Bild eine Halfpipe in Rotterdam) wird meist aus einfachen geometrischen Formen zusammengesetzt. Welche Kurve optimiert die Geschwindigkeit, wird also am schnellsten durchlaufen? Das ist das berühmte Problem der **Brachistochrone**, also der Kurve kürzester Laufzeit. Seine Untersuchung führt zur Variationsrechnung.

Die Brachistochrone

Ein Massepunkt ruht in $(a, 0)$ und bewegt sich dann allein durch seine Schwerkraft reibungsfrei auf der Kurve $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ nach (b, c).



Problem der Brachistochrone: Welche Kurve y hat kürzeste Laufzeit?

Aufgabe: (1) Finden / begründen Sie $1 + y'(x)^2 + 2y(x)y''(x) = 0$.

(2) Lösen Sie diese Differentialgleichung durch die **Zykloide**

$$\gamma \,:\, [0, \pi] \to \mathbb{R}^2 \,:\, t \mapsto (x(\theta), y(\theta)) = r(\theta - \sin\theta, 1 - \cos\theta)$$

Die Brachistochrone

Lösung: (1) Wir berechnen die Laufzeit $T(y)$ längs $y : [a,b] \to \mathbb{R}$:

Energieerhaltung: $\frac{1}{2}mv^2 = mgy \quad \Rightarrow \quad$ Geschwindigkeit: $v = \sqrt{2gy}$

Wegstück: $\mathrm{d}s = \sqrt{1 + y'(x)^2}\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad$ Zeitverbrauch: $\mathrm{d}t = \mathrm{d}s/v$

Die Laufzeit von $(a,0)$ nach (b,c) längs $(x, y(x))$ ist demnach:

$$T(y) = \int_{x=a}^{b} \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2g\,y(x)}}\,\mathrm{d}x$$

Zu minimieren ist hier also das Funktional $T : C^2([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$y \mapsto T(y) := \int_a^b F\big(x, y(x), y'(x)\big)\,\mathrm{d}x \quad \text{mit} \quad F(x,q,p) = \sqrt{\frac{1+p^2}{2gq}}$$

Wir finden Kandidaten $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ dank Euler–Lagrange:

$$\frac{\partial F}{\partial q}\big(x, y(x), y'(x)\big) - \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial p}(\cdots) - \frac{\partial^2 F}{\partial q\,\partial p}(\cdots)\,y'(x) - \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}(\cdots)\,y''(x) = 0$$

Die Brachistochrone

Die nötigen Ableitungen berechnen wir sorgsam und geduldig:

$$F(x,q,p) = \left[\frac{1+p^2}{2gq}\right]^{1/2}, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = -\frac{1+p^2}{4gq^2}\left[\vdots\right]^{-1/2}, \quad \frac{\partial F}{\partial p} = \frac{p}{2gq}\left[\vdots\right]^{-1/2},$$

Die zweiten Ableitungen sind dann $\partial^2 F/\partial x\,\partial p = 0$ sowie

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q\,\partial p} = -\frac{p}{2gq^2}\left[\vdots\right]^{-1/2} + \frac{p}{2gq}\,\frac{1+p^2}{4gq^2}\left[\vdots\right]^{-3/2} = -\frac{p}{4gq^2}\left[\vdots\right]^{-1/2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} = +\frac{1}{2gq}\left[\vdots\right]^{-1/2} - \frac{p}{2gq}\,\frac{p}{2gq}\left[\vdots\right]^{-3/2} = +\frac{1}{2gq(1+p^2)}\left[\vdots\right]^{-1/2}$$

Die Euler–Lagrange–Gleichung vereinfachen sich damit wie folgt:

$$\frac{\partial F}{\partial q}\big(x, y(x), y'(x)\big) - \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial p}(\cdots) - \frac{\partial^2 F}{\partial q\,\partial p}(\cdots)\,y'(x) - \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}(\cdots)\,y''(x) = 0$$

$$\Longrightarrow \qquad -\frac{1+y'(x)^2}{4g\,y(x)^2} + \frac{y'(x)^2}{4g\,y(x)^2} - \frac{1}{2g\,y(x)(1+y'(x)^2)}\,y''(x) = 0$$

$$\Longrightarrow \qquad 1 + y'(x)^2 + 2y(x)y''(x) = 0$$

Uff! Alles wird gut.

Die Brachistochrone

(2) Die Kurve $x(\theta) = r \cdot (\theta - \sin\theta)$ und $y(\theta) = r \cdot (1 - \cos\theta)$ mit $r \in \mathbb{R}_{>0}$ löst unsere Differentialgleichung $1 + (y')^2 + 2yy'' = 0$. Nachrechnen:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = r \cdot (1 - \cos\theta), \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = r \sin\theta, \qquad y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta} = \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta}$$

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{\sin(\theta)^2}{(1 - \cos\theta)^2} = \frac{1 - 2\cos\theta + \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2}{(1 - \cos\theta)^2} = \frac{2}{1 - \cos\theta}$$

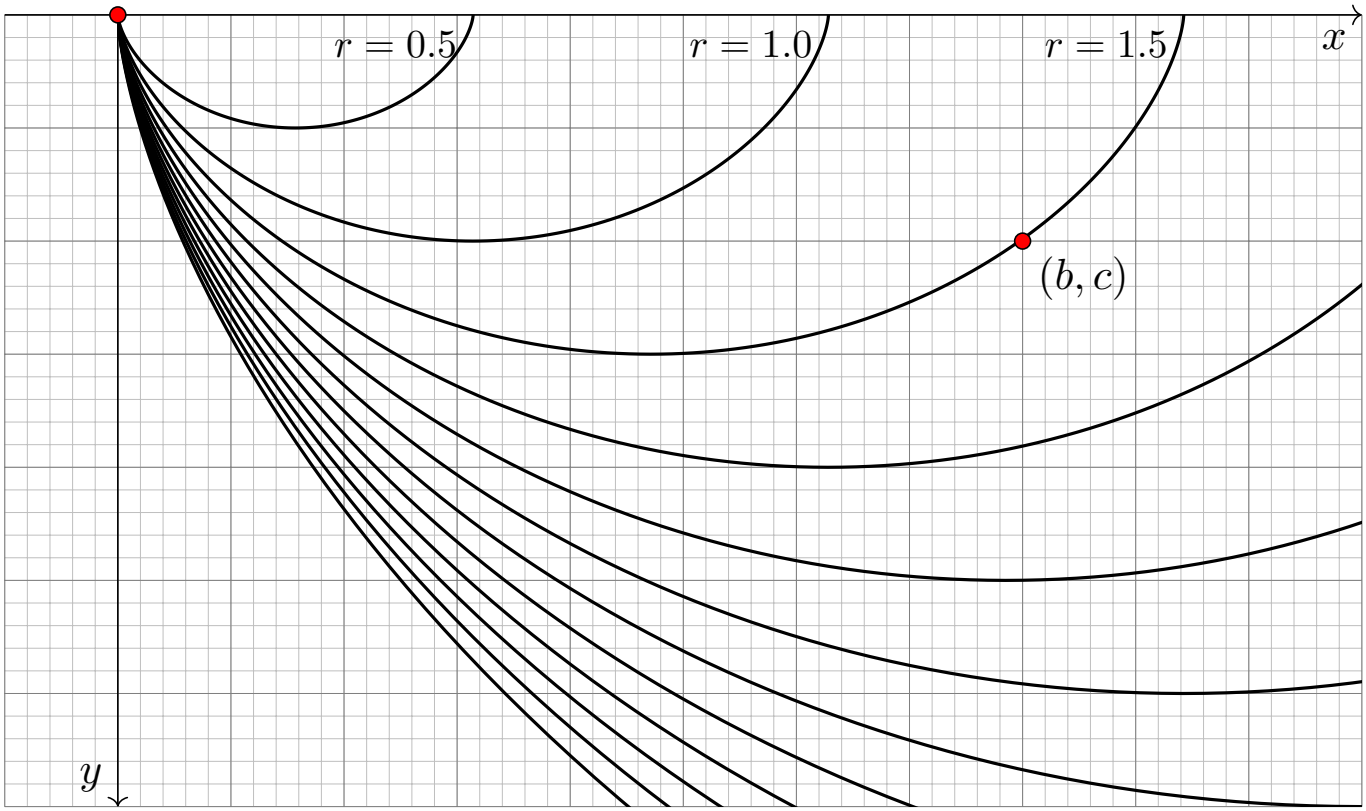
$$y'' = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y'/\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta} = \frac{\cos\theta \cdot (1 - \cos\theta) - \sin\theta \cdot \sin\theta}{r \cdot (1 - \cos\theta)^3} = \frac{-1}{r \cdot (1 - \cos\theta)^2}$$

$$2yy'' = 2r \cdot (1 - \cos\theta) \cdot \frac{-1}{r \cdot (1 - \cos\theta)^2} = \frac{-2}{1 - \cos\theta}$$

☺ Wir haben Glück, die Lösung ist schön und einfach: Die gesuchte Kurve ist eine Zykloide! Das war nicht zu erwarten. Sie beginnt im Ursprung $(x(0), y(0)) = (0, 0)$; die freie Konstante r wählen wir so, dass die Zykloide durch den vorgegebenen Endpunkt $(x(\Theta), y(\Theta)) = (b, c)$ geht.

Bemerkungen: Die Kurve ist unabhängig von der Masse m und der Erdbeschleunigung g. Die Tangente im Startpunkt ist senkrecht. Bei starkem Gefälle $c/b \geq 2/\pi$ ist (b, c) der tiefste Punkt, bei schwachem Gefälle $c/b < 2/\pi$ liegt der Tiefpunkt strikt zwischen $(a, 0)$ und (b, c)! Bei Gefälle 0 liegen $(a, 0)$ und $(b, 0)$ auf derselben Höhe, und die Kurve ist symmetrisch.

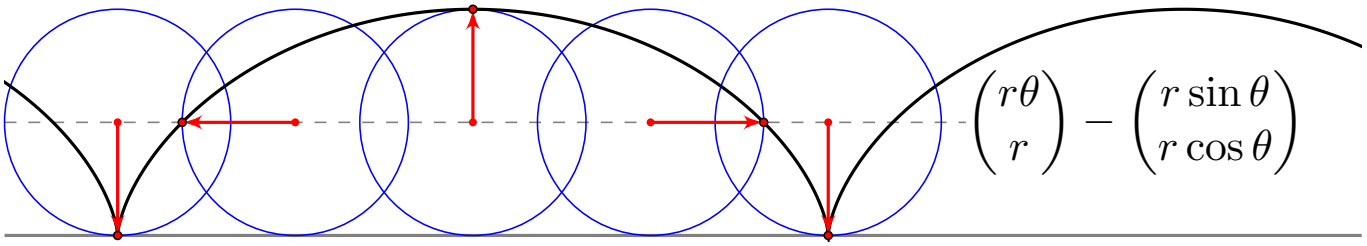
Die Brachistochrone



Die freie Konstante $r \in \mathbb{R}_{>0}$ können wir eindeutig so wählen, dass die Zykloide durch den vorgegebenen Endpunkt $(x(\Theta), y(\Theta)) = (b, c)$ läuft.

Die Brachistochrone

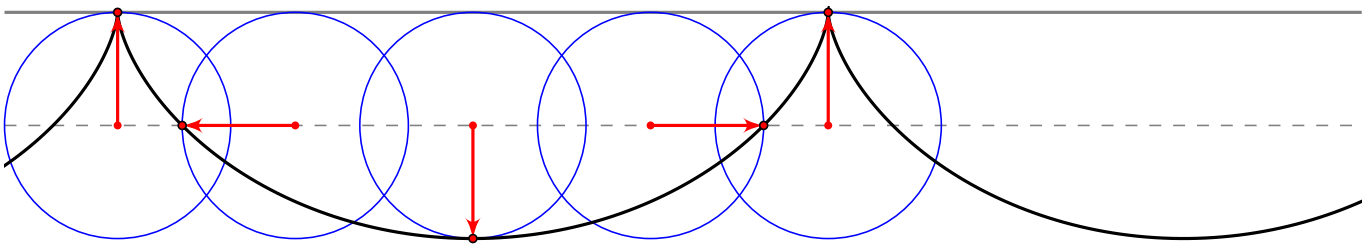
Geometrische Konstruktion der **Zykloide** durch Abrollen eines Kreises:



Die Zykloide ist die **Radkurve**, die ein Kreispunkt beim Abrollen eines Kreises auf einer Leitkurve beschreibt, hier auf einer horiz. Geraden.

Mit dieser Beschreibung finden wir sofort die Koordinaten $(x(\theta), y(\theta))$ in Abhängigkeit vom zurückgelegten Drehwinkel $\theta \in \mathbb{R}$, wie angegeben.

Zykloiden haben bemerkenswerte Eigenschaften; uns begegnen sie hier als Brachistrochrone: Diese ist eine nach oben geöffnete Zykloide.



Die Brachistochrone

Aufgabe: Berechnen Sie die minimale Laufzeit entlang der Zykloide.

Lösung: Wir nutzen die oben entwickelten Formeln:

$$T(y) = \int_{x=a}^{b} \sqrt{\frac{1+y'(x)^2}{2g\,y(x)}}\,\mathrm{d}x \quad \text{mit} \quad \begin{cases} x(\theta) = r(\theta - \sin\theta) \\ y(\theta) = r(1-\cos\theta) \end{cases}$$

$$= \int_{\theta=0}^{\Theta} \sqrt{\frac{2/(1-\cos\theta)}{2g\,r(1-\cos\theta)}}\; r(1-\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

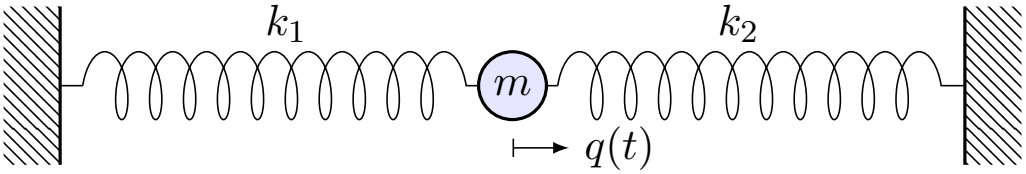
$$= \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{\theta=0}^{\Theta} 1\,\mathrm{d}\theta = \sqrt{\frac{r}{g}}\,\Theta$$

☺ Unser zunächst willkürlicher Parameter θ ist proportional zur Zeit. Das ist ein bemerkenswerter und nützlicher Nebeneffekt.

☺ Das Geradensegment ist zwar die geometrisch kürzeste Verbindung aber nicht die schnellste! Sie können die Laufzeiten auch für andere Kurven explizit berechnen und vergleichen: Die Zykloide schlägt sie alle!

Im Internet finden Sie zahlreiche Illustrationen und Experimente dazu. Sie können dies mit etwas Geschick selbst bauen und ausprobieren.

Lagrange–Funktion in der klassischen Mechanik



Ein Teilchen habe die Masse m, Position $q(t)$ und Geschwindigkeit $\dot{q}(t)$, die kinetische Energie $T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2$ und die potentielle Energie $V = \frac{1}{2}kq^2$.

Dies definiert folgende **Lagrange–Funktion** und ihr **Wirkungsintegral**:

$$L := T - V, \qquad S(q) := \int_{t=a}^{b} L(t,q,\dot{q})\,\mathrm{d}t = \int_{t=a}^{b} \frac{1}{2}m\dot{q}(t)^2 - \frac{1}{2}kq(t)^2\,\mathrm{d}t$$

Aufgabe: Finden Sie die Kurven $q : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}$ minimaler Wirkung. Entspricht dies der Bewegung nach der Newtonschen Mechanik?

Lösung: Die Euler–Lagrange–Gleichung N4B ergibt:

$$\frac{\partial L}{\partial q} \overset{!}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \qquad \text{hier mit} \qquad \frac{\partial L}{\partial q} = -kq \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[m\dot{q}\Big] = m\ddot{q}.$$

Wir erhalten somit $-kq = m\ddot{q}$, also „Kraft = Masse · Beschleunigung“.
☺ Die Lösungen sind harmonische Schwingungen $A\cos(\omega t + \varphi)$.

Lagrange–Funktion in der klassischen Mechanik

☺ Lagranges Formulierung ist Grundlage der **analytischen Mechanik**: Die Dynamik des Systems $q(t)$ wird durch eine einzige skalare Funktion $L(t,q,\dot{q})$ beschrieben; hieraus gewinnen wir dank Variationsrechnung die Bewegungsgleichung durch die Euler–Lagrange–Gleichung N4B .

☺ Hierzu formulierte Hamilton das **Prinzip der kleinsten Wirkung**: Unter allen denkbaren Trajektorien ist die physikalisch beobachtete Bahn des Teilchens extremal: Sie minimiert das Wirkungsintegral! „Die Natur wählt unter allen möglichen Wegen den sparsamsten.“ Diese Betrachtungsweise vereinheitlicht viele physikalische Probleme und vereinfacht ihre Analyse: Lagrange– bzw. Hamilton–Formalismus.

☺ In unserem besonders schönen Spezialfall finden wir $m\ddot{q} + kq = 0$. Das ist die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators! N105 Damit schließt sich wunderbar der Kreis: Wir haben dieses Kapitel mit dem harmonischen Oszillator begonnen und beschließen es auch damit. Auf diesem Weg haben wir Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung lösen gelernt. Ich hoffe, diese Anregung findet Ihre Resonanz.

Satz N4C: Invarianzsatz, Emmy Noether 1918

Angenommen, die Lagrange–Funktion $L(t, q, \dot{q})$ hängt nicht von t ab, es gelte also $\partial L/\partial t = 0$. Dann ist die Energie bzw. Hamilton–Funktion

$$\boxed{H(q, \dot{q}) = \dot{q}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L(q, \dot{q})}$$

eine Invariante der Bewegung: Es gilt also $\dot{H} = \mathrm{d}H(q(t), \dot{q}(t))/\mathrm{d}t = 0$ entlang jeder Trajektorie / Lösung $t \mapsto q(t)$ des dynamischen Systems.

Aufgabe: (1) Beweisen Sie den Satz durch explizites Ausrechnen.
(2) Finden Sie H für den harmonischen Oszillator $L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$.
(3) Wenden Sie Noethers Satz auf das Brachistochrone–Problem an: Die Aufstellung der Differentialgleichung gelingt damit viel leichter!

Lösung: (1) Wir leiten ab und nutzen die Euler–Lagrange–Gleichung:

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \ddot{q}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \dot{q}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q}\,\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\ddot{q} = \dot{q}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q}\right] \overset{\text{EuLa}}{\underset{\text{N4B}}{=}} 0$$

(2) Für $L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$ ist $H = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2$ die Gesamtenergie!

(3) Für die Lagrange–Funktion $L(q, \dot{q}) = \sqrt{(1+\dot{q}^2)/(2gq)}$ finden wir:

$$\begin{aligned} H = \dot{q}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L(q, \dot{q}) &= \dot{q}\,\frac{\dot{q}}{2gq}\left[\frac{1+\dot{q}^2}{2gq}\right]^{-1/2} - \left[\frac{1+\dot{q}^2}{2gq}\right]^{1/2} \\ &= -\frac{1}{2gq}\left[\frac{1+\dot{q}^2}{2gq}\right]^{-1/2} + \frac{1+\dot{q}^2}{2gq}\left[\frac{1+\dot{q}^2}{2gq}\right]^{-1/2} - \left[\frac{1+\dot{q}^2}{2gq}\right]^{1/2} \\ &= \frac{1}{2gq}\sqrt{\frac{2gq}{1+\dot{q}^2}} = \frac{1}{\sqrt{2gq(1+\dot{q}^2)}} \overset{!}{=} \mathrm{const} \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Erhaltungsgröße $q\,(1+\dot{q}^2) = \mathrm{const}$, also wie oben

$$1 + \dot{q}(t)^2 + 2q(t)\ddot{q}(t) = 0.$$

☺ Diese Rechnung ist viel kürzer und leichter als unsere erste. N406
Zudem erhalten wir gratis ein Integral / eine Invariante der Bewegung!

☺ In beide Gleichungen können wir die Zykloide einsetzen und so das Problem der Brachistochrone lösen; dies haben wir oben ausgeführt.

Lineare DG n-ter Ordnung

N501
Fazit

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b : I \to \mathbb{K}$ stetig, $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
Dies definiert eine **lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung**

$$\boxed{y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)\, y'(x) + a_0(x)\, y(x) = b(x).}$$

Die stetigen Funktionen $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} : I \to \mathbb{K}$ heißen **Koeffizienten**.
Die stetige Funktion $b : I \to \mathbb{K}$ heißt **Störterm** oder kurz **rechte Seite**.
Links wirkt der **lineare Differentialoperator** $L : C^n(I, \mathbb{K}) \to C^0(I, \mathbb{K})$,

$$L = a_0 \partial^0 + a_1 \partial^1 + \cdots + a_{n-1} \partial^{n-1} + \partial^n,$$
$$y \mapsto a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_{n-1} y^{(n-1)} + y^{(n)}.$$

Wir suchen alle Funktionen $y : I \to \mathbb{K}$, die die Gleichung $L\,y = b$ erfüllen.
Linearität bedeutet $L(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 L(y_1) + c_2 L(y_2)$ für $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$.

In anderen Worten: Aus Lösungen y_1 zu b_1 und y_2 zu b_2 ergibt die Linearkombination $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ eine Lösung zu $b = c_1 b_1 + c_2 b_2$.

Zu $Ly = b$ gehört die **homogene lineare Differentialgleichung** $Ly = 0$.
Als Lösungsmenge suchen wir also den Kern der linearen Abbildung L.

Lineare DG n-ter Ordnung

N502
Fazit

Qualitativer Überblick dank **Existenz- und Eindeutigkeitssatz** N3A
(Fortsetzung von M1C, konstruktiv M2E, später O1B, konstruktiv O2A):

Zu jedem Anfangsdatum $(x_0, v_0, \ldots, v_{n-1}) \in I \times \mathbb{K}^n$ existiert genau eine Lösung $y : I \to \mathbb{K}$ mit $L\,y = b$ und $y(x_0) = v_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = v_{n-1}$.

Die Lösungsmenge $L_0 = \{\, y : I \to \mathbb{K} \mid L\,y = 0 \,\}$ ist ein $\mathbb{K}$–Vektorraum der Dimension n: Wir wählen ein Fundamentalsystem $y_1, \ldots, y_n \in L_0$ von n linear unabhängigen Lösungen und erhalten:

$$\boxed{L_0 = \left\{\, c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n \;\middle|\; c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K} \,\right\} \quad \cong \quad \mathbb{K}^n}$$

Die Lösungsmenge $L_b = \{\, y : I \to \mathbb{K} \mid L\,y = b \,\}$ ist ein affiner Raum.
Für jede Partikulärlösung $y_b \in L_b$ gilt $L_b = y_b + L_0$, ausgeschrieben:

$$\boxed{L_b = y_b + L_0 = \left\{\, y_b + c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n \;\middle|\; c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}^n \,\right\}}$$

„Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen“

Sind Anfangswerte $y(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0)$ vorgegeben, so kann man hieraus $c_1, \ldots, c_n$ eindeutig bestimmen (lineares Gleichungssystem).

Lineare DG n-ter Ordnung

Besonders leicht sind **lineare DG mit konstanten Koeffizienten**:

$$\boxed{y^{(n)}(x) + a_{n-1}\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1\, y'(x) + a_0\, y(x) = 0}$$

Kurzschreibweise $p(\partial)\, y = 0$ mit dem **charakteristischen Polynom**

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Jede k-fache Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}$ liefert k linear unabhängige Lösungen

$$\boxed{\mathrm{e}^{\lambda x},\ x\,\mathrm{e}^{\lambda x},\ x^2\,\mathrm{e}^{\lambda x}, \ldots,\ x^{k-1}\,\mathrm{e}^{\lambda x}.}$$

Ist $p \in \mathbb{R}[x]$ reell und $\lambda = \sigma + \mathrm{i}\omega$ mit $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$ und $\omega \neq 0$ eine k-fache Nullstelle, so gilt dies auch für die komplex-konjugierte Zahl $\overline{\lambda} = \sigma - \mathrm{i}\omega$. Durch Linearkombination erhalten wir die zugehörigen reellen Lösungen; sie entsprechen Real- und Imaginärteil der komplexen Lösungen:

$$\boxed{\left.\begin{matrix} \mathrm{e}^{\lambda x}, \ldots,\ x^{k-1}\,\mathrm{e}^{\lambda x} \\ \mathrm{e}^{\overline{\lambda} x}, \ldots,\ x^{k-1}\,\mathrm{e}^{\overline{\lambda} x} \end{matrix}\right\} \underset{\text{Basiswechsel}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{matrix} \mathrm{e}^{\sigma x}\cos(\omega x), \ldots,\ x^{k-1}\,\mathrm{e}^{\sigma x}\cos(\omega x) \\ \mathrm{e}^{\sigma x}\sin(\omega x), \ldots,\ x^{k-1}\,\mathrm{e}^{\sigma x}\sin(\omega x) \end{matrix}\right.}$$

Lineare DG n-ter Ordnung

Zu lösen sei schließlich eine **inhomogene lineare DG** $p(\partial)\, y(x) = b(x)$:

$$\boxed{y^{(n)}(x) + a_{n-1}\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1\, y'(x) + a_0\, y(x) = b(x)}$$

Eine Lösung y_b gewinnen wir durch **Variation der Konstanten** (N3C) oder Faltung von b mit der **Greenschen Fundamentallösung** u (N2F), für die $p(\partial)\, u = 0$ und $u(0) = \cdots = u^{(n-2)}(0) = 0$, $u^{(n-1)}(0) = 1$ gilt:

$$\boxed{y_b(x) = \int_{t=x_0}^{x} u(x-t)\, b(t)\, \mathrm{d}t}$$

Für **spezielle rechte Seiten** lohnt sich folgender Ansatz (N2E):
Zu lösen sei $p(\partial)\, y(x) = r(x)\, \mathrm{e}^{\mu x}$ mit Polynomen $p, r \in \mathbb{C}[x]$.
Ist μ eine k-fache Nullstelle von p, so existiert eine Lösung

$$\boxed{y_b(x) = q(x)\, x^k\, \mathrm{e}^{\mu x}}$$

mit einem eindeutigen Polynom $q \in \mathbb{C}[x]$ vom Grad $\deg q = \deg r$.
Speziell $p(\partial)\, y(x) = \mathrm{e}^{\mu x}$ wird gelöst durch $y_b(x) = \mathrm{e}^{\mu x}\, x^k / p^{(k)}(\mu)$.

Differentialgleichung in Potenzreihen

N505
Fazit

Für manche Differentialgleichungen reichen elementare Funktionen nicht aus; es werden neue Funktionen als Lösungen benötigt bzw. konstruiert. Bessel–Funktionen sind ein prominentes Beispiel. N321

Zu lösen sei eine analytische Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$\boxed{y^{(n)} = f\big(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\big)}$$

mit gegebenen Anfangsdaten $y(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$ und einer Potenzreihe

$$f(x, u_0, u_1, \dots, u_{n-1}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}} c_\alpha u_0^{\alpha_0}\, u_1^{\alpha_1} \cdots u_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\, x^{\alpha_n}.$$

Diese DG wird von genau einer Potenzreihe $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ erfüllt: Aus den vorgegebenen Anfangsdaten $a_0, \dots, a_{n-1}$ berechnen sich rekursiv alle weiteren Koeffizienten $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$ der Reihe.

☺ Hat diese Potenzreihe einen Konvergenzradius $\rho > 0$, dann löst die so definierte Funktion $y :]-\rho, \rho[\to \mathbb{R}$ die gegebene Differentialgleichung.

☺ Dieses Verfahren ist manchmal mühsam, aber immer konstruktiv!

Euler–Lagrange–Differentialgleichung

N506
Fazit

Gegeben sei ein **Wirkungsfunktional** $S : C^2([a,b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ durch

$$y \mapsto S(y) := \int_{x=a}^{b} F\big(x, y(x), y'(x)\big)\, \mathrm{d}x$$

mit einer C^2–Funktion $F : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, q, p) \mapsto F(x, q, p)$.

Dann gilt die **Euler–Lagrange–Differentialgleichung** (Satz N4B): Ist $y \in C^2$ **extremal**, also minimal $S(y) \le S(z)$ für alle $z \in C^2$ oder maximal $S(y) \ge S(z)$ für alle $z \in C^2$, dann erfüllt y die Gleichung

$$\boxed{\left[\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial p}\right]\big(x, y(x), y'(x)\big) = 0.}$$

Ausgeschrieben bedeutet das: Für alle $x \in [a,b]$ gilt die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial q}\big(x, y(x), y'(x)\big) = \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial p}(\cdots) + \frac{\partial^2 F}{\partial q\, \partial p}(\cdots)\, y'(x) + \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}(\cdots)\, y''(x).$$

☺ Mit dieser Differentialgleichung können wir $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ berechnen! Dies ist die Grundlage der Optimierung durch Variationsrechnung. N401

Verständnisfragen

N507
Fazit

Versuchen Sie, folgende Fragen frei aber genau zu beantworten, etwa so, wie Sie dies einer Kommiliton:in / Kolleg:in erklären wollen.

(1) Was ist ein linearer Differentialoperator $L : C^n(I, \mathbb{K}) \to C^0(I, \mathbb{K})$?

(2) Ist diese Abbildung L injektiv? Welche Dimension hat ihr Kern?

(3) Welche Struktur hat die Lösungsmenge der Gleichung $L\,y = 0$?

(4) Was versteht man unter einem Fundamentalsystem?

(5) Ist diese Abbildung $L : C^n(I, \mathbb{K}) \to C^0(I, \mathbb{K})$ surjektiv?

(6) Wie bestimmt man zu $b \in C^0$ ein Urbild $y \in C^n$ mit $L\,y = b$?

(7) Welche Struktur hat die Lösungsmenge der Gleichung $L\,y = b$?

Lösung: (1) Dies ist eine Zuordnung $L : y \mapsto a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_{n-1} y^{(n-1)} + y^{(n)}$ mit Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in C^0(I, \mathbb{K})$, eventuell konstant. (Zur Vereinfachung $a_n = 1$.) (2) Die Abbildung $L : C^n(I, \mathbb{K}) \to C^0(I, \mathbb{K})$ ist linear. Sie ist für $n \geq 1$ nicht injektiv, genauer: (3) Die Lösungsmenge $\ker L = \{\, y \in C^n \mid L\,y = 0 \,\}$ ist ein $\mathbb{K}$–Vektorraum der Dimension n. (4) Ein Fundamentalsystem ist eine Basis $y_1, \ldots, y_n \in \ker L$. (5) Die Abbildung L ist surjektiv: (6) Partikulärlösungen y_b mit $L\,y_b = b$ finden wir durch die Greensche Lösungsformel N245 oder Variation der Konstanten N311 oder geeigneten Ansatz für spezielle rechte Seiten N217. (7) Die Lösungsmenge der Gleichung $L\,y = b$ ist ein affiner Raum der Dimension n, explizit ausgeschrieben $\{\, y : I \to \mathbb{K} \mid L\,y = b \,\} = \left\{\, y_b + c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n \;\middle|\; c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K} \,\right\}$.

Verständnisfragen

N508
Fazit

(1) Was ist eine lineare Differentialgleichung $L\,y = 0$ mit konstanten Koeffizienten? Was ist ihr charakteristisches Polynom?

(2) Wie bestimmt man hierzu ein Fundamentalsystem?

(3) Wie bestimmt man zu $b \in C^0$ ein Urbild $y \in C^n$ mit $L\,y = b$?

(4) Was versteht man unter einer speziellen rechten Seite b? Wie bestimmt man hierzu ein Urbild $y \in C^n$ mit $L\,y = b$?

(5) Was versteht man in diesem Zusammenhang unter Resonanz?

(6) Was ist die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators? Wie löst man sie? Was passiert bei harmonischer Anregung? Was versteht man unter dem Begriff Resonanzkatastrophe?

Lösung: (1) Hier gilt $L : y \mapsto a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_{n-1} y^{(n-1)} + y^{(n)}$ mit konstanten Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$. Wir schreiben hierfür kurz $L = p(\partial)$ mit $\partial = \mathrm{d}/\mathrm{d}x$ und dem charakteristischen Polynom $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n \in \mathbb{K}[x]$. (2) Der Exponentialansatz N2D liefert hier stets n unabhängige Lösungen $y_1, \ldots, y_n \in \ker L$. (3) Neben Greenscher Lösungsformel N245 und Variation der Konstanten N311 lohnt sich meist (4) der passende Ansatz für spezielle rechte Seiten $r(x)\,\mathrm{e}^{\mu x}$, $\mathrm{e}^{\sigma x}\cos(\tau x)$, $\mathrm{e}^{\sigma x}\sin(\tau x)$. N217 (5) Bei $p(\partial)\,y = r(x)\,\mathrm{e}^{\mu x}$ liegt (k-fache) Resonanz vor, falls die Anregung μ eine (k-fache) Nullstelle des char. Polynoms p trifft. (6) Siehe die Ausführung am Anfang des Kapites N.

Beispiel einer Klausuraufgabe (2013)

Aufgabe: Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen für reelle Funktionen $u, v, w, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die vier Gleichungen sind untereinander eng verwandt, das können und sollen Sie zur Lösung ausnutzen.

(1) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$u''(x) - 4u'(x) + 4u(x) = 0.$$

(2) Bestimmen Sie eine Partikulärlösung der inhomogenen Gleichung

$$v''(x) - 4v'(x) + 4v(x) = \mathrm{e}^{2x}.$$

(3) Bestimmen Sie eine Partikulärlösung der inhomogenen Gleichung

$$w''(x) - 4w'(x) + 4w(x) = \cos(x).$$

(4) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 2\,\mathrm{e}^{2x} + 25\cos(x).$$

(5) Lösen Sie schließlich das Anfangswertproblem $y(0) = 5$, $y'(0) = 1$.

Beispiel einer Klausuraufgabe (2013)

Lösung: Im folgenden Telegrammstil sollten Sie alle Rechnungen eigenhändig nachprüfen und Zwischenrechnungen ergänzen.

(1) Charakteristisches Polynom $p(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$.
Fundamentallösungen: $u_1(x) = \mathrm{e}^{2x}$ und $u_2(x) = x\,\mathrm{e}^{2x}$. Probe!
Allgemeine Lösung: $u(x) = (c_1 + c_2 x)\,\mathrm{e}^{2x}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(2) Für die rechte Seite $\mathrm{e}^{\mu x}$ mit $\mu = 2$ liegt (doppelte) Resonanz vor:
$p(\mu) = p'(\mu) = 0$, $p''(\mu) = 2$. Partikulärlösung ist also $v(x) = \mathrm{e}^{2x} x^2/2$.

(3) Für die rechte Seite $\cos x = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})$ liegt keine Resonanz vor.
Wir lösen $p(\partial)\, z(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$. Es gilt $p(\mu) = 3 - 4\mathrm{i}$. Partikulärlösung:

$$z(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{3 - 4\mathrm{i}} = \frac{3 + 4\mathrm{i}}{25}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \left[\frac{3}{25}\cos x - \frac{4}{25}\sin x\right] + \mathrm{i}\left[\frac{4}{25}\cos x + \frac{3}{25}\sin x\right]$$

Der Realteil $w(x) = \frac{3}{25}\cos x - \frac{4}{25}\sin x$ löst demnach $p(\partial)\, w(x) = \cos(x)$.

Beispiel einer Klausuraufgabe (2013)

Wann wie welcher Ansatz zum Ziel führt, erklärt Ihnen die Theorie! Um alle möglichen Komplikationen und die unzähligen Beispiele zu verstehen, sollten Sie daher unbedingt die Grundlagen beherrschen.

Alternativen: (2b) Wir machen den Ansatz $v(x) = cx^2\,\mathrm{e}^{2x}$: Ableiten $v'(x) = c(2x + 2x^2)\,\mathrm{e}^{2x}$ und $v''(x) = c(2 + 8x + 4x^2)\,\mathrm{e}^{2x}$ ergibt $v''(x) - 4v'(x) + 4v(x) = 2c\,\mathrm{e}^{2x}$. Koeffizientenvergleich mit e^{2x}: Unser Ansatz löst die DG für $c = 1/2$, also $v(x) = \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{2x}$. Probe!

(3b) Wir machen den Ansatz $w(x) = a\cos x + b\sin x$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Ableiten $w'(x) = -a\sin x + b\cos x$ und $w''(x) = -a\cos x - b\sin x$ ergibt $w''(x) - 4w'(x) + 4w(x) = (3a - 4b)\cos x + (4a + 3b)\sin x$. Koeffizientenvergleich $3a - 4b = 1$ und $4a + 3b = 0$ ergibt $a = 3/25$ und $b = -4/25$. Wir erhalten $w(x) = \frac{3}{25}\cos(x) - \frac{4}{25}\sin(x)$. Probe!

(3c) Ebenso gelingt der komplexe Ansatz $z(x) = c\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ mit $c \in \mathbb{C}$: Ableiten $z'(x) = c\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ und $z''(x) = -c\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ ergibt in die DG eingesetzt $z''(x) - 4z'(x) + 4z(x) = c(3 - 4\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$. Koeffizientenvergleich mit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$: Für die Konstante c finden wir somit $c = (3 - 4\mathrm{i})^{-1} = (3 + 4\mathrm{i})/25$. Die reelle Lösung findet man wie oben als Realteil $w(x) = \operatorname{Re} z(x)$.

Beispiel einer Klausuraufgabe (2013)

(4) Die allgemeine Lösung erhalten wir nun als Linearkombination:

$$y(x) = u(x) + 2v(x) + 25w(x) = (c_1 + c_2x + x^2)\,\mathrm{e}^{2x} + 3\cos(x) - 4\sin(x)$$

Dank Linearität erfüllt dies $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 2\,\mathrm{e}^{2x} + 25\cos(x)$.

(5) Wir lösen schließlich das AWP $y(0) = 5$, $y'(0) = 1$. Ableiten:

$$y'(x) = (c_2 + 2x)\,\mathrm{e}^{2x} + 2(c_1 + c_2x + x^2)\,\mathrm{e}^{2x} - 3\sin(x) - 4\cos(x)$$

Einsetzen führt zu $y(0) = c_1 + 3 \overset{!}{=} 5$ und $y'(0) = 2c_1 + c_2 - 4 \overset{!}{=} 1$. Die gesuchten Konstanten sind demnach $c_1 = 2$ und $c_2 = 1$. Lösung:

$$y(x) = (2 + x + x^2)\,\mathrm{e}^{2x} + 3\cos(x) - 4\sin(x)$$

Machen Sie wie immer die Probe: Lösen ist schwer, prüfen ist leicht!

- ☺ Die Rechnung ist lang, jeder Schritt ist leicht. No pain, no gain!
- ☺ Zu jedem Schritt ist klar, was zu tun ist. Der Theorie sei Dank!
- ☺ Die abschließende Probe ist leicht und sicher. Alles wird gut!

Vergleich verschiedener Lösungsmethoden

Aufgabe: Lösen Sie die beiden Differentialgleichungen

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = \mathrm{e}^{\pm t} \quad \text{mit} \quad y(0) = y'(0) = 0$$

auf je drei verschienden Wegen: (1) allgemein und dann das AWP, (2) mit Greenscher Lösungsformel, (3) mit Laplace–Transformation.

Vergleich: Welcher Rechenweg scheint Ihnen am geschicktesten?

Lösung: (1) Charakteristisches Polynom $p(s) = s^2 + 2s + 1 = (s+1)^2$. Doppelte Nullstelle -1. Fundamentallösungen: e^{-t}, $t\,\mathrm{e}^{-t}$.

(a) Wir lösen $p(\partial)\,y(t) = \mathrm{e}^{\mu t}$ für $\mu = 1$: keine Nullstelle, $p(1) = 4$.
Partikulär: $y_b(t) = \mathrm{e}^t/4$. Allgemein: $y(t) = \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^t + (c_1 + c_2 t)\,\mathrm{e}^{-t}$.
Die Lösung des AWP ist $y(t) = \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^t + (-\frac{1}{4} - \frac{1}{2}t)\,\mathrm{e}^{-t}$. Probe!

(b) Wir lösen $p(\partial)\,y(t) = \mathrm{e}^{\mu t}$ für $\mu = -1$: doppelte Nullst., $p''(-1) = 2$.
Partikulär: $y_b(t) = \mathrm{e}^{-t}t^2/2$. Allgemein: $y(t) = (c_1 + c_2 t + \frac{1}{2}t^2)\,\mathrm{e}^{-t}$.
Die Lösung des AWP ist $y(t) = \frac{1}{2}t^2\,\mathrm{e}^{-t}$. Probe!

Vergleich verschiedener Lösungsmethoden

Lösung: (2) Allgemeine Lösungen der homogenen DG: $(c_1 + c_2 t)\,\mathrm{e}^{-t}$.
Greensche Fundamentallösung: $u(t) = t\,\mathrm{e}^{-t}$ mit $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$.

(a) Die Faltung von u mit der rechten Seite $b(t) = \mathrm{e}^t$ ergibt:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{\tau=0}^{t} u(t-\tau)\,b(\tau)\,\mathrm{d}\tau &&= \int_{\tau=0}^{t} (t-\tau)\,\mathrm{e}^{\tau-t}\,\mathrm{e}^{\tau}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \mathrm{e}^{-t}\left[\frac{2t+1-2\tau}{4}\,\mathrm{e}^{2\tau}\right]_{\tau=0}^{t} &&= \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^t - \frac{1+4t}{4}\,\mathrm{e}^{-t} \end{aligned}$$

(b) Die Faltung von u mit der rechten Seite $b(t) = \mathrm{e}^{-t}$ ergibt:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{\tau=0}^{t} u(t-\tau)\,b(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{\tau=0}^{t} (t-\tau)\,\mathrm{e}^{\tau-t}\,\mathrm{e}^{-\tau}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \mathrm{e}^{-t}\left[t\tau - \frac{1}{2}\tau^2\right]_{\tau=0}^{t} &&= \frac{1}{2}t^2\,\mathrm{e}^{-t} \end{aligned}$$

☺ Die Greensche Lösungsformel führt immer zum Ziel. Das ist gut. Hier geht es noch geschickter: Für spezielle rechte Seiten gelingt der richtige Exponentialansatz leichter und schneller. Das ist sein Zweck!

Vergleich verschiedener Lösungsmethoden

Lösung: (3) Wir laplace–transformieren dank $\mathscr{L}$–Tabelle:

$$\begin{aligned}
y(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; Y(s) && = Y(s)\\
y'(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; s\,Y(s) - y(0) && = s\,Y(s)\\
y''(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; s^2\,Y(s) - s\,y(0) - y'(0) && = s^2\,Y(s)\\
\mathrm{e}^{\mu t} &\circ\!\!-\!\!\bullet\; 1/(s-\mu)
\end{aligned}$$

(a) Dank Linearität transformieren wir die DG zur Hilfsgleichung

$$\underbrace{(s^2+2s+1)}_{\text{charakteristisches Polynom}}\;\; Y(s) = \underbrace{\frac{1}{s-\mu}}_{\text{rechte Seite}}\,.$$

Vor $Y(s)$ steht als Faktor immer das charakteristische Polynom, hier $p(s) = s^2 + 2s + 1$. Das gilt allgemein: $p(\partial)\,y(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; p(s)\,Y(s) + \ldots$, im Allgemeinen steuern Anfangswerte weitere Terme bei; zur Vereinfachung wurde hier das AWP $y(0) = y'(0) = 0$ vorgegeben.

Die Anfangswerte werden schon im ersten Schritt in die $\mathscr{L}$–Transformation eingearbeitet und somit nur die spezielle Lösung des AWP angesteuert. Die allgemeine Lösung der Gleichung $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = \mathrm{e}^{\mu t}$ wird hier nicht benötigt (und auch nicht nebenbei gefunden).

Im Fall $\mu = -1$ liegt Resonanz vor; die $\mathscr{L}$–Transformation verarbeitet das automatisch.

Vergleich verschiedener Lösungsmethoden

(b) Auflösung der Hilfsgleichung nach Y und Partialbruchzerlegung:

$$Y(s) = \frac{1}{(s-\mu)(s+1)^2} = \begin{cases} \frac{1}{4(s-1)} - \frac{1}{2(s+1)} - \frac{1}{4(s+1)^2} & \text{für } \mu = +1,\\ \frac{1}{(s+1)^3} & \text{für } \mu = -1. \end{cases}$$

(c) Rücktransformation von Y zu y dank $\mathscr{L}$–Tabelle:

$$Y(s) = \frac{1}{(s-\mu)(s+1)^2} \bullet\!\!-\!\!\circ\; y(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{t} - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{4}t\,\mathrm{e}^{-t} & \text{für } \mu = +1,\\ \frac{1}{2}t^2\,\mathrm{e}^{-t} & \text{für } \mu = -1. \end{cases}$$

Machen Sie wie immer die Probe: Lösen ist schwer, prüfen ist leicht!

☺ Die allgemeine Lösung (1) betont die lineare / affine Struktur.
Dies gibt uns einen guten Überblick des Raumes *aller* Lösungen.

☺ Aus (1) erhalten wir insb. die Greensche Fundamentallösung.
Die Greensche Lösungsformel (2) funktioniert für *alle* rechten Seiten.

☺ Die Laplace–Transformation (3) behandelt alle Fälle einheitlich.
Eventuelle Resonanz zeigt sich in der Partialbruchzerlegung (3b,c).

Die Methode der Laplace–Transformation ist dann effizient, wenn man jeden der drei Schritte (a–c) schnell und sicher ausführen kann. Hierzu nützen Tabellen, vor allem aber *viel Erfahrung*!

Vergleich verschiedener Lösungsmethoden

Aufgabe: Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\boxed{u'''(t) - u(t) = 1 \quad \text{mit} \quad u(0) = 0,\ u'(0) = u''(0) = 1}$$

(1) allgemein und dann das AWP, (2) mit Laplace–Transformation.
Vergleich: Welcher Rechenweg scheint Ihnen am geschicktesten?

Lösung: (1) Das char. Polynom der Gleichung $p(\partial)\,u = 0$ ist

$$p(s) = s^3 - 1 = (s-1)(s^2+s+1) = (s-1)(s-\omega)(s-\overline{\omega})$$
$$\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3} = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}, \quad \overline{\omega} = -\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3} = \mathrm{e}^{4\pi\mathrm{i}/3}$$

Nullstellen: $1,\ \omega,\ \overline{\omega}$. Fundamentallösungen: $\mathrm{e}^t,\ \mathrm{e}^{\omega t},\ \mathrm{e}^{\overline{\omega} t}$.

(a) Wir lösen $p(\partial)\,u(t) = \mathrm{e}^{\mu t}$ für $\mu = 0$: keine Nullstelle, $p(0) = -1$.
Partikulärlösung: $u_b(t) = \mathrm{e}^{0t}/(-1) = -1$. Probe: klar!
Die allgemeine Lösung der DG $u'''(t) - u(t) = 1$ ist demnach:

$$u(t) = c_1\,\mathrm{e}^t + c_2\,\mathrm{e}^{\omega t} + c_3\,\mathrm{e}^{\overline{\omega} t} - 1$$

Vergleich verschiedener Lösungsmethoden

(b) Die Anfangsdaten bestimmen eindeutig die freien Konstanten:

$$\left.\begin{aligned} u(0) &= c_1 + c_2 + \phantom{\overline{\omega}}c_3 - 1 &&\overset{!}{=} 0 \\ u'(0) &= c_1 + \omega c_2 + \overline{\omega} c_3 &&\overset{!}{=} 1 \\ u''(0) &= c_1 + \overline{\omega} c_2 + \omega c_3 &&\overset{!}{=} 1 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_2 &= 0 \\ c_3 &= 0 \end{aligned}\right.$$

Probe! Die gesuchte Lösung des AWP ist also

$$u(t) = \mathrm{e}^t - 1.$$

Wir machen die Probe: Lösen ist schwer, prüfen ist leicht!

$$\begin{aligned} u(t) &= \mathrm{e}^t - 1, & u'(t) &= u''(t) = u'''(t) = \mathrm{e}^t \\ u'''(t) - u(t) &= 1, & u(0) &= 0,\ u'(0) = u''(0) = 1 \end{aligned}$$

☺ Die Funktion u erfüllt die Differentialgleichung mit Anfangsdaten!

Dieses Lösungsschema hat nur zwei rechenintensive Schritte: Wir müssen (a) die Nullstellen des charakteristischen Polynoms finden und (b) die freien Koeffizienten durch ein lineares Gleichungssystem bestimmen. Das ist mitunter mühsam aber letztlich Routinearbeit.
Für Gleichungen kleiner Ordnung $n = 2, 3, 4, \ldots$ gelingt es jedenfalls leicht.

Vergleich verschiedener Lösungsmethoden

Lösung: (2) Wir laplace–transformieren dank $\mathscr{L}$–Tabelle:

$$
\begin{aligned}
u(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; U(s) && = U(s)\\
u'(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; s\,U(s) - u(0) && = s\,U(s)\\
u''(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; s^2\,U(s) - s\,u(0) - u'(0) && = s^2\,U(s) - 1\\
u'''(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; s^3\,U(s) - s^2\,u(0) - su'(0) - u''(0) && = s^3\,U(s) - s - 1\\
1 &\circ\!\!-\!\!\bullet\; s^{-1}
\end{aligned}
$$

(a) Dank Linearität transformieren wir die DG zur Hilfsgleichung

$$
\begin{aligned}
s^3U(s) - s - 1 - U(s) &= s^{-1}\\
\underbrace{(s^3-1)}_{\text{char. Polynom}}\,U(s) \quad - \underbrace{(s+1)}_{\text{Anfangsdaten}} &= \underbrace{s^{-1}}_{\text{rechte Seite}}
\end{aligned}
$$

Vor $U(s)$ steht als Faktor immer das charakteristische Polynom, hier also $p(s) = s^3 - 1$, denn $p(\partial)\,y(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; p(s)\,Y(s) + \ldots$. Die Anfangswerte steuern die weiteren Terme bei.

Die Anfangswerte werden schon im ersten Schritt in die $\mathscr{L}$–Transformation eingearbeitet und somit nur die spezielle Lösung des AWP angesteuert. Die allgemeine Lösung der Gleichung $u'''(t) - u(t) = 1$ wird hier nicht benötigt (und auch nicht nebenbei gefunden).

Vergleich verschiedener Lösungsmethoden

(b) Auflösung der Hilfsgleichung nach U:

$$
\begin{aligned}
(s^3-1)U(s) &= s + 1 + s^{-1}\\
U(s) &= \frac{s+1+s^{-1}}{s^3-1} = \frac{s^2+s+1}{s(s-1)(s^2+s+1)} = \frac{1}{s(s-1)}
\end{aligned}
$$

(c) Rücktransformation von U zu u dank $\mathscr{L}$–Tabelle:

$$
U(s) = \frac{1}{s(s-1)} \overset{\text{PBZ}}{=} \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \mathrm{e}^t - 1 = u(t)
$$

☺ Wir machen die Probe wie in (1). Lösen ist schwer, prüfen ist leicht!

Die Transformation entnimmt man am besten einer der umfangreichen $\mathscr{L}$–Tabellen.
Dies ist besonders einfach für spezielle rechte Seiten wie $t^n\,\mathrm{e}^{at} \circ\!\!-\!\!\bullet\; n!/(s-a)^{n+1}$ etc.

Zur Rücktransformation nutzen wir die Partialbruchzerlegung. Das ist Routinearbeit.
Damit bringen wir unsere Hilfslösung $U(s)$ in eine möglichst einfache Form, deren Bestandteile wir in der $\mathscr{L}$–Tabelle finden und so bequem zur gesuchten Lösung $u(t)$ zurücktransformieren.

Die Methode der Laplace–Transformation ist dann effizient, wenn man jeden der drei Schritte (a–c) schnell und sicher ausführen kann. Hierzu nützen Tabellen, vor allem aber *viel Erfahrung*!

Vergleich verschiedener Lösungsmethoden

Aufgabe: Lösen Sie die Differentialgleichung

$$u''(t) + 2u'(t) + 10u(t) = 2\cos(t) + 9\sin(t) \quad \text{mit} \quad u(0) = 0,\ u'(0) = 4.$$

(1) allgemein und dann das AWP, (2) mit Laplace–Transformation.
Vergleich: Welcher Rechenweg scheint Ihnen am geschicktesten?

Lösung: (1) Das char. Polynom der Gleichung $p(\partial)\,u = 0$ ist

$$p(s) = s^2 + 2s + 10 = (s + 1 + 3\mathrm{i})(s + 1 - 3\mathrm{i})$$

Komplexe Fundamentallösungen: $\mathrm{e}^{(-1-3\mathrm{i})t}$, $\mathrm{e}^{(-1+3\mathrm{i})t}$.
Reelle Fundamentallösungen: $\mathrm{e}^{-t}\cos(3t)$, $\mathrm{e}^{-t}\sin(3t)$.

(a) Wir lösen $p(\partial)\,z(t) = (2 - 9\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. Es gilt $p(\mathrm{i}) = 9 + 2\mathrm{i}$, also

$$z(t) = \frac{2 - 9\mathrm{i}}{9 + 2\mathrm{i}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = -\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \sin(t) - \mathrm{i}\cos(t).$$

Der Realteil $\sin(t)$ löst unsere Differentialgleichung. Allgemein:

$$\begin{aligned} u(t) &= \sin(t) + c_1\,\mathrm{e}^{(-1-3\mathrm{i})t} + c_2\,\mathrm{e}^{(-1+3\mathrm{i})t} \\ &= \sin(t) + \alpha_1\,\mathrm{e}^{-t}\cos(3t) + \alpha_2\,\mathrm{e}^{-t}\sin(3t) \end{aligned}$$

Vergleich verschiedener Lösungsmethoden

(b) Die Anfangsdaten bestimmen eindeutig die freien Konstanten:

$$\left.\begin{aligned} u(0) &= \alpha_1 && \overset{!}{=} 0 \\ u'(0) &= 1 - \alpha_1 + 3\alpha_2 && \overset{!}{=} 4 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} \alpha_1 &= 0 \\ \alpha_2 &= 1 \end{aligned}\right.$$

Probe! Die gesuchte Lösung des AWP ist also

$$u(t) = \sin(t) + \mathrm{e}^{-t}\sin(3t).$$

Wir machen die Probe: Lösen ist schwer, prüfen ist leicht!

$$\begin{aligned} u(t) &= +\sin(t) + \mathrm{e}^{-t}\sin(3t) \\ u'(t) &= +\cos(t) - \mathrm{e}^{-t}\sin(3t) + 3\,\mathrm{e}^{-t}\cos(3t) \\ u''(t) &= -\sin(t) - 8\,\mathrm{e}^{-t}\sin(3t) - 6\,\mathrm{e}^{-t}\cos(3t) \end{aligned}$$

☺ Die Funktion u erfüllt die Differentialgleichung mit Anfangsdaten!

Bei diesem Lösungsweg müssen wir (a) die Nullstellen des charakteristischen Polynoms finden und (b) die freien Koeffizienten durch ein lineares Gleichungssystem bestimmen. Das ist mitunter mühsam aber letztlich Routinearbeit. Für Gleichungen kleiner Ordnung gelingt es leicht.

Vergleich verschiedener Lösungsmethoden

Lösung: (2) Wir laplace–transformieren dank $\mathscr{L}$–Tabelle:

$$
\begin{aligned}
u(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; U(s) && = U(s) \\
u'(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; s\,U(s) - u(0) && = s\,U(s) \\
u''(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; s^2\,U(s) - s\,u(0) - u'(0) && = s^2\,U(s) - 4 \\
\cos(\omega t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{s}{s^2+\omega^2} && \sin(\omega t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{\omega}{s^2+\omega^2}
\end{aligned}
$$

(a) Dank Linearität transformieren wir die DG zur Hilfsgleichung:

$$
\begin{aligned}
s^2U(s) - 4 + 2s\,U(s) + 10\,U(s) &= \frac{2s}{s^2+1} + \frac{9}{s^2+1} \\
\underbrace{(s^2+2s+10)\;U(s)}_{\text{char. Polynom}} \;-\; \underbrace{4}_{\text{Anfangsdaten}} &= \underbrace{\frac{2s+9}{s^2+1}}_{\text{rechte Seite}}
\end{aligned}
$$

Vor $U(s)$ steht als Faktor immer das charakteristische Polynom, hier also $p(s) = s^3 - 1$, denn $p(\partial)\,y(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; p(s)\,Y(s) + \ldots$. Die Anfangswerte steuern die weiteren Terme bei.

Vergleich verschiedener Lösungsmethoden

(b) Auflösung der Hilfsgleichung nach U und Partialbruchzerlegung:

$$
\begin{aligned}
(s^2+2s+10)U(s) &= 4 + \frac{2s+9}{s^2+1} \\
U(s) &= \frac{4}{s^2+2s+10} + \frac{2s+9}{(s^2+1)(s^2+2s+10)} \\
&\overset{\text{PBZ}}{=} \frac{4}{s^2+2s+10} + \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+2s+10}
\end{aligned}
$$

(c) Rücktransformation von U zu u dank $\mathscr{L}$–Tabelle:

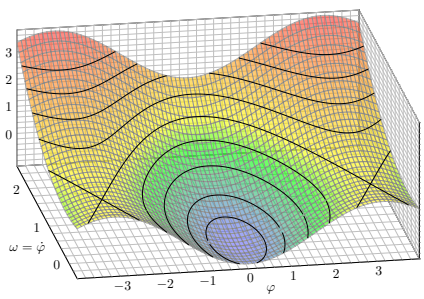
$$
U(s) = \frac{3}{(s+1)^2+3^2} + \frac{1}{s^2+1} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \mathrm{e}^{-t}\sin(3t) + \sin(t) = u(t)
$$

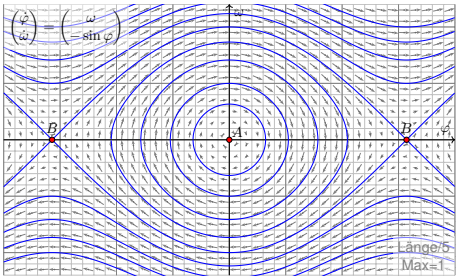
☺ Wir machen die Probe wie in (1). Lösen ist schwer, prüfen ist leicht!

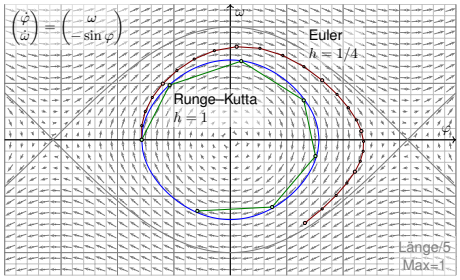
Die Transformation entnimmt man am besten einer der umfangreichen $\mathscr{L}$–Tabellen.
Dies ist einfach für spezielle rechte Seiten wie $\mathrm{e}^{-at}\sin(\omega t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; \omega/((s+a)^2+\omega^2)$.
Zur Rücktransformation nutzen wir die Partialbruchzerlegung. Das ist Routinearbeit.

Kapitel O

Dynamische Systeme







Nicht das Existenztheorem ist das Wertvolle,
sondern die im Beweise geführte Konstruktion.

Hermann Weyl (1885–1955)

Inhalt dieses Kapitels O

1 Dynamische Systeme
- Der harmonische Oszillator als dynamisches System
- Gekoppelte Oszillatoren und Eigenfrequenzen
- Mathematisches Pendel und Energiefläche
- Das Näherungsverfahren von Runge–Kutta

2 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen
- Lokale Lösungen: Satz von Picard–Lindelöf
- Fortsetzungen und maximale Lösungskurven
- Sensible Abhängigkeit von den Anfangsdaten
- Aufgaben zu Existenz und Eindeutigkeit und Stabilität

3 Der Hauptsatz für lineare dynamische Systeme
- Affin/Lineare Struktur des Lösungsraumes
- Variation der Konstanten zur Partikulärlösung
- Matrizenkalkül und Exponentialfunktion
- Fundamentallösung homogener DGSysteme

Einleitung und Überblick

Differentialgleichungen sind die Sprache der Naturgesetze.

- Oft ist der unabhängige Parameter $t \in \mathbb{R}$ die Zeit.
- Die abhängige Größe $x(t)$ ist der Zustand zur Zeit t.
- Die Gleichung $x'(t) = f(t, x(t))$ ist das Bewegungsgesetz.
- Die Anfangsdaten $x(t_0) = x_0$ sind gegeben durch (t_0, x_0).

Viele Modelle in Naturwissenschaft und Technik haben diese Form!

Wir nennen dies ein **deterministisches dynamisches System**:
Der zukünftige Verlauf hängt nur vom Anfangszustand (t_0, x_0) ab.

Solche Modelle werden zur Erklärung und Vorhersage angewendet, von der Mechanik über Klimamodelle bis zur Astronomie.

Bei **zeitdiskreten Systemen** verläuft die Zeit $t \in \mathbb{Z}\Delta t$ in Schritten, bei **zeitkontinuierlichen Systemen** ist die Zeit $t \in \mathbb{R}$ kontinuierlich.

Die wichtigste Technik hierzu sind Differentialgleichungen. Wichtige Fragestellungen sind die (exakte oder numerische) Berechnung von Lösungen sowie ihr Langzeitverhalten (Periodizität, Stabilität, Chaos).

Einleitung und Überblick

Differentialgleichungen sind ein Universalwerkzeug zur quantitativen Beschreibung von allen Systemen, die vom gegenwärtigen Zustand ausgehend einer kontinuierlichen zeitlichen Entwicklung unterliegen.

> *Une loi (physique), pour nous, [...] est une relation constante*
> *entre le phénomène d'aujourd'hui et celui de demain;*
> *en un mot, c'est une équation différentielle.*
>
> Henri Poincaré (1854–1912), *La valeur de la science*

Das gilt für naturwissenschaftlich-technische Anwendungen ebenso wie praktisch überall sonst. Trotz drastischer Vereinfachung des Modells sind Differentialgleichungen daher ähnlich komplex wie diese realen Phänomene: Sie sind naturgegeben schwierig, aber auch faszinierend.

📖 Zur Vertiefung und für zahlreiche Anwendungsbeispiele siehe
H. Heuser: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Vieweg, 6. Aufl. 2009

📖 Die Numerik bietet umfangreiche Werkzeuge, siehe etwa
P. Deuflhard, F. Bornemann: *Numerische Mathematik*, Band 2: Gewöhnliche Differentialgleichungen, De Gruyter, 3. Aufl. 2008

Einleitung und Überblick

In den vorigen Kapiteln haben wir **Differentialgleichungen** der Form $y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ untersucht, in Kapitel M zunächst für $n = 1$ von der speziellen Form $y' = f(t, y)$, in Kapitel N allgemeiner für $n \geq 1$:

Gegeben ist die stetige Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n \supseteq G \to \mathbb{K}$, gesucht sind alle Funktionen $y : I \to \mathbb{K}$ auf einem (je maximalen) Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, die der Gleichung $y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$ für alle $t \in I$ genügen.

In vielen Anwendungen geht es statt einer Größe $y(t) \in \mathbb{K}$ um mehrere Größen $y_1(t), \dots, y_n(t) \in \mathbb{K}$, deren Entwicklung und Wechselwirkung durch **gekoppelte Differentialgleichungen** beschrieben wird:

$$\boxed{\begin{aligned} y_1'(t) &= f_1\big(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\big), \\ y_2'(t) &= f_2\big(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\big), \\ &\vdots \\ y_n'(t) &= f_n\big(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\big). \end{aligned}}$$

Mit $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ und $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ bündeln wir dies kurz und übersichtlich zu der vektorwertigen Differentialgleichung $y' = f(t, y)$.

Einleitung und Überblick

Jedes **Differentialgleichungssystem** bündeln wir damit prägnant zu

$$\boxed{y'(t) = f(t, y(t)).}$$

Gegeben ist die stetige Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n \supseteq G \to \mathbb{K}^n$ als rechte Seite. Gesucht sind alle differenzierbaren Funktionen $y : I \to \mathbb{K}^n$ auf einem (je maximalen) Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, die die Bedingung $(t, y(t)) \in G$ und die ersehnte Gleichung $y'(t) = f(t, y(t))$ für alle $t \in I$ erfüllen.

Dieses Leitmotiv der beiden vorigen Kapitel wird hier fortgeführt und mehrdimensional verallgemeinert. Die zugehörige Theorie erlaubt uns, solcherart Phänomene zu beschreiben, zu verstehen, zu berechnen:

- Gibt es immer eine Lösung? mehrere? Existenz und Eindeutigkeit?
- Wie finden wir eine Lösung? gar alle? effiziente Lösungsmethoden?

Wir benötigen wie immer zwei sich ergänzende Lösungsmethoden:

- Leistungsstarke Lösungstheorie als Grundlage
- Erprobte Rezepte für spezielle Gleichungen

Für manche f können wir die DG exakt lösen, sonst nur numerisch.

Einleitung und Überblick

Ein **lineares Differentialgleichungssystem** ist von folgender Form:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= a_{11}(t)\,y_1(t) + a_{12}(t)\,y_2(t) + \cdots + a_{1n}(t)\,y_n(t) + b_1(t) \\ y_2'(t) &= a_{21}(t)\,y_1(t) + a_{22}(t)\,y_2(t) + \cdots + a_{2n}(t)\,y_n(t) + b_2(t) \\ &\vdots \\ y_n'(t) &= a_{n1}(t)\,y_1(t) + a_{n2}(t)\,y_2(t) + \cdots + a_{nn}(t)\,y_n(t) + b_n(t) \end{aligned}$$

Solche Gleichungssysteme bündeln wir prägnant zu einer Gleichung:

$$\boxed{y'(t) = A(t)\,y(t) + b(t)}$$

Hier heißt A Koeffizientenmatrix und b rechte Seite des DGSystems.

Bei linearen DGSystemen sind zwei strukturelle Aspekte grundlegend:

- Die Lösungsmenge einer linearen Differentialgleichungsystems ist immer ein **Vektorraum** (für $b = 0$) bzw. ein **affiner Raum** (für $b \neq 0$).
- Dieser Raum hat immer **Dimension n:** Dies folgt aus Existenz und Eindeutigkeit der Lösung zu gegebenen Anfangsdaten. (Satz O3B)

Dies strukturiert und vereinfacht das Problem, alle Lösungen zu finden!

Einleitung und Überblick

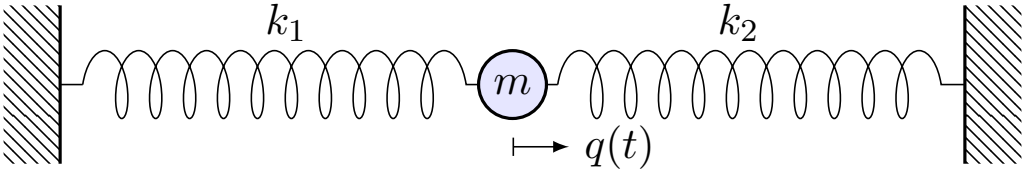
Die Berechnung einer **Basis des Lösungsraumes** ist nicht leicht, aber wir können explizite Lösungsformeln angeben und für wichtige Beispiele ausrechnen. Hierzu benötigen wir geeignete Techniken aus der Analysis, insbesondere die allgegenwärtige Integration.

Lineare Differentialgleichungssysteme mit **konstanten Koeffizienten** sind leicht; ihre Lösung gelingt uns vollständig mit linearer Algebra: Wir lösen den Exponentialansatz direkt mit Hilfe von Eigenvektoren im diagonalisierbaren Fall oder falls nötig mit den Hauptvektoren einer Jordan–Basis; die Integration tritt dabei in den Hintergrund.

Dieses und das nächste Kapitel handeln deshalb im Wesentlichen von **Matrizenrechnung** in ihrer vollen Schönheit. Wir mobilisieren nahezu alle Begriffe und Techniken: Vektorraum, Basis, Dimension, lineare Abbildung, Kern und Bild, Darstellung durch Matrizen, zugehörige Rechenmethoden, Determinante, charakteristisches Polynom, Eigenvektoren und Diagonalform, Hauptvektoren und Jordan–Form.

Hier lohnt sich erneut Ihre Investition in mathematische Grundlagen!

Der harmonische Oszillator als dynamisches System



Aufgabe: Formulieren und lösen Sie den harmonischen Oszillator
(1) als eine eindimensionale Differentialgleichung zweiter Ordnung,
(2) als ein zweidim. Differentialgleichungssystem erster Ordnung.

Lösung: (1) Zeit $t \in \mathbb{R}$, Position $q(t) \in \mathbb{R}$, Geschwindigkeit $\dot{q}(t) \in \mathbb{R}$, Beschleunigung $\ddot{q}(t) \in \mathbb{R}$, Kraft pro Masse $-\omega_0^2\, q(t) - 2\delta\, \dot{q}(t)$, also:

$$\boxed{\ddot{q}(t) + 2\delta\, \dot{q}(t) + \omega_0^2\, q(t) = 0}$$

Allg. Lösung $q(t) = \mathrm{e}^{-\delta t}\big[c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)\big]$ mit $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$.
Die Anfangsdaten $(q(t_0), \dot{q}(t_0))$ bestimmen die Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
(2) Zustand $(x_1(t), x_2(t)) = (q(t), \dot{q}(t))$, Zustandsraum $\mathbb{R}^2$, DGSystem:

$$\boxed{\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 = & & x_2 \\ \dot{x}_2 = & -\omega_0^2 x_1 & -2\delta x_2 \end{Bmatrix} \iff \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}$$

Der harmonische Oszillator als dynamisches System

☺ Allgemeiner Trick: Reduktion von höherer auf erste Ordnung! O151

☺ DGSystem erster Ordnung = Vektorfeld auf dem Zustandsraum!

Der harmonische Oszillator dient uns weiterhin als zentrales Modell: Es ist besonders einfach und anschaulich, lässt sich leicht lösen und zeigt im Prinzip bereits alle wesentlichen Phänomene! N105

Wir schreiben seine Differentialgleichung zweiter Ordnung hier neu als System erster Ordnung: Das ist ein Vektorfeld auf dem Zustandsraum!

Jedes solche Richtungsfeld ist geometrisch besonders anschaulich als ein „Fluss“, dies uns nützt in der Analysis ebenso wie in der Numerik.

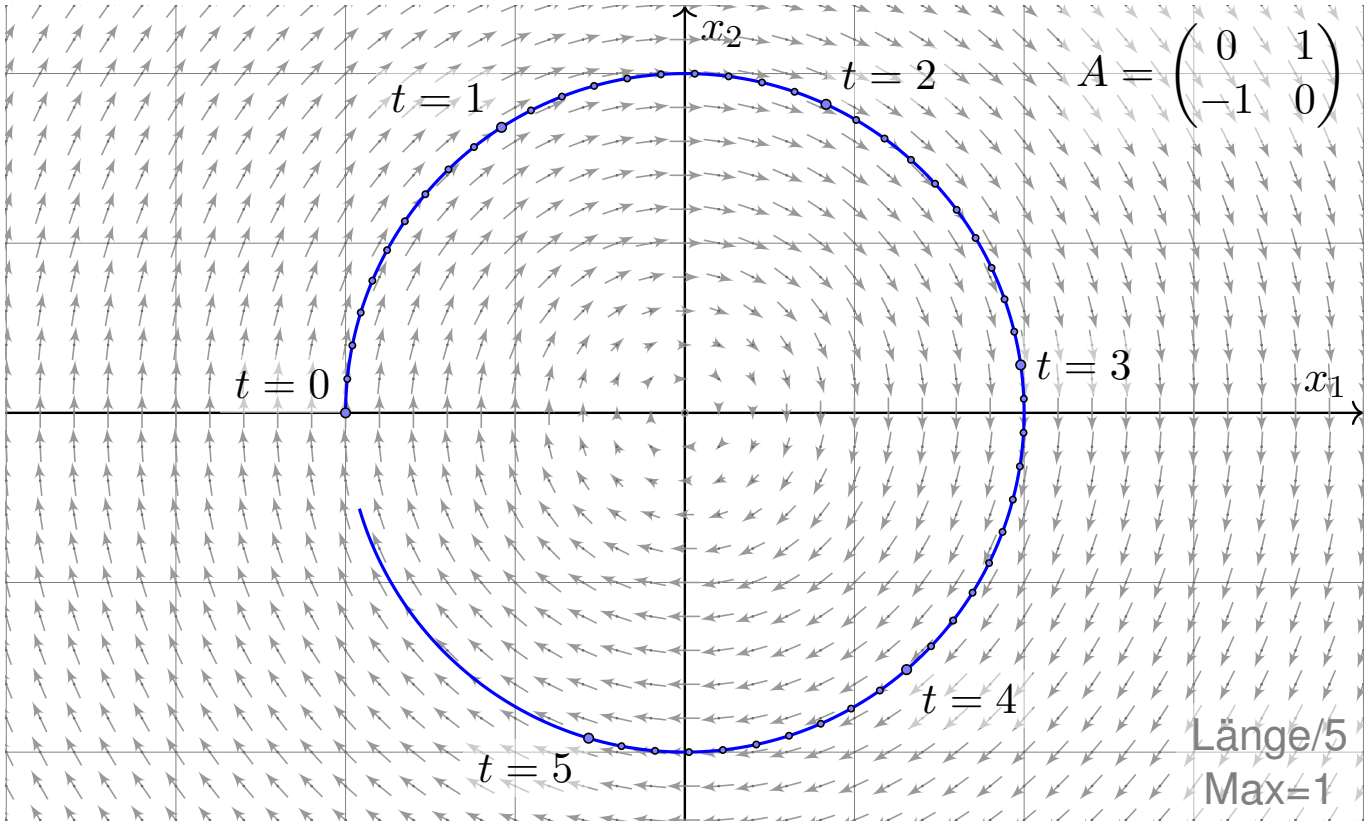
Lösungskurven des DGSystems sind die Trajektorien: Die nächsten beiden Graphiken zeigen den nicht bzw. schwach gedämpften Fall. Hierzu kennen wir die exakten Lösungen aus Kapitel N! N117

Die dritte Graphik zeigt mehrere numerische Näherungen durch das Euler–Verfahren: Solche Näherungen sind nützlich, wenn wir keine exakte Lösung kennen oder mühsam beschaffen wollen, und nötig, wenn gar keine Lösungsformel in geschlossener Form existiert.

Der harmonische Oszillator im Zustandsraum $\mathbb{R}^2$

O103
Beispiel

Harmonischer Oszillator, keine Dämpfung $\delta = 0$, zum Beispiel $\omega_0 = 1$:

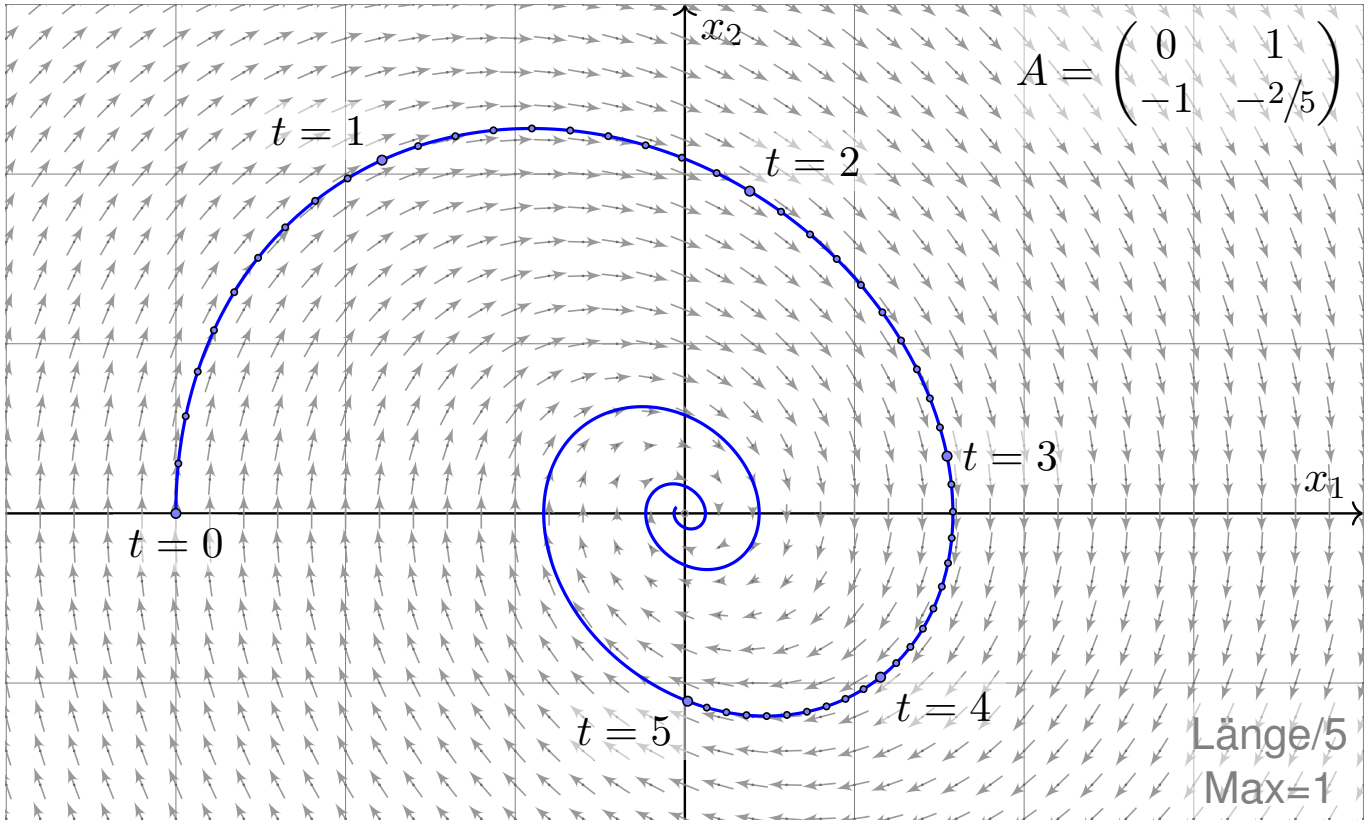


Kein Energieverlust, daher sogar Rückkehr in den Anfangszustand.

Der harmonische Oszillator im Zustandsraum $\mathbb{R}^2$

O104
Beispiel

Schwache Dämpfung $0 < \delta < \omega_0$, zum Beispiel $\delta = 1/5$ und $\omega_0 = 1$:

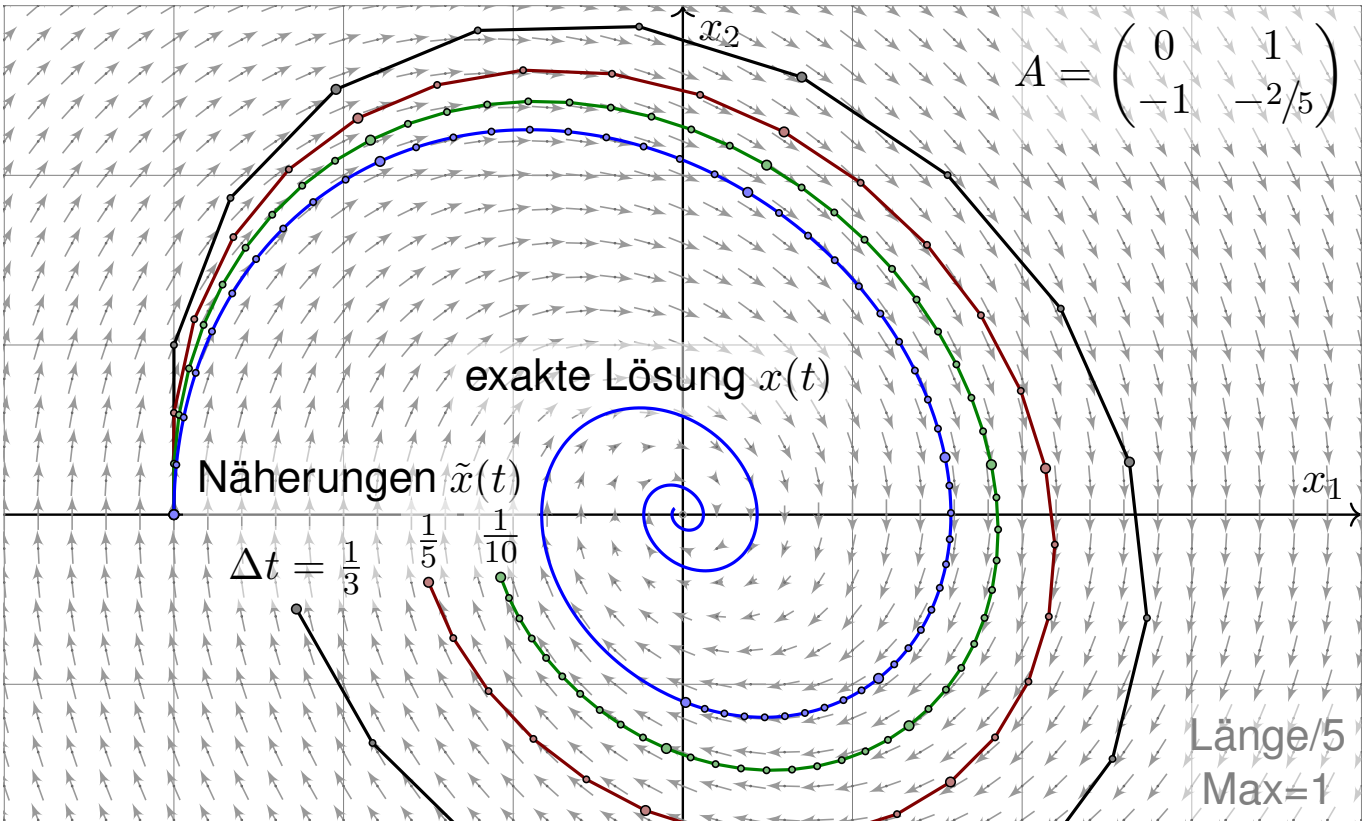


Echter Energieverlust, daher keine Rückkehr in den Anfangszustand.

Numerische Näherung durch das Euler–Verfahren

O105
Beispiel

Approximation durch das Euler–Verfahren mit Schrittweite $\Delta t = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$:



Wir erkennen graphisch den Rechenaufwand und Approximationsfehler.

Numerische Näherung durch das Euler–Verfahren

O106
Ausführung

Zu lösen sei ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung:

$$\boxed{\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = x_0}$$

☺ Dies ist im Wesentlichen ein Vektorfeld f auf dem Zustandsraum!
Gesucht ist eine Lösungskurve $x(t)$, die die obige Gleichung erfüllt.
Das **Euler–Verfahren** verschafft uns eine numerische Näherung $\tilde{x}$:

Wir wählen Zeitschritte $0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ mit $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$.
Am einfachsten äquidistant $t_i = t_0 + i\Delta t$ mit fester Schrittweite $\Delta t > 0$.
Die Ableitung $\dot{x}$ approximieren wir durch den **Differenzenquotienten**:

$$\frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \quad \approx \quad \dot{x}(t_i) \quad \overset{!}{=} \quad f(t, x(t_i))$$

Damit berechnen wir Näherungswerte $\tilde{x}(t_1), \tilde{x}(t_2), \tilde{x}(t_3), \dots$ rekursiv:

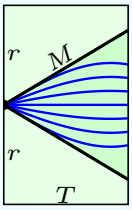
$$\boxed{\tilde{x}(t_{i+1}) = \tilde{x}(t_i) + f(t_i, \tilde{x}(t_i)) \cdot (t_{i+1} - t_i) \quad \text{für } i = 0, 1, 2, 3, \dots}$$

Unter geeigneten Bedingungen existiert genau eine Lösung $x(t)$ und die Euler–Approximation $\tilde{x}(t)$ kommt für kleine Schrittweiten beliebig nahe.

⚠ Zur Anwendung müssen wir zudem den Fehler $|\tilde{x} - x|$ kontrollieren!

Numerische Näherung durch das Euler–Verfahren

Geometrische Voraussetzungen für das Euler–Verfahren:



Sei $I = [t_0, t_0 + T] \subseteq \mathbb{R}$ ein Zeitintervall der Länge $T > 0$.
Sei $K = \bar{B}(x_0, r) \subseteq \mathbb{K}^n$ der Ball um x_0 mit Radius $r > 0$.
Sei $f : I \times K \to \mathbb{K}^n$ stetig, somit beschränkt, also $|f| \leq M$.
Hierbei gelte $T \cdot M \leq r$, notfalls verkleinern wir T und I.
Dies garantiert, dass Lösungen nicht vorzeitig aus K rauslaufen.

Gesucht ist $x : I \to K$ diff'bar mit $x(t_0) = x_0$ und $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$.
Das heißt: In jedem Punkt $(t, x(t))$ ist die Tangente $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$.

Euler–Approximation: Wir wählen eine Partition des Zeitintervalls

$$P = \{t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t_0 + T\}.$$

Wie oben illustriert definieren wir hierzu den **Euler–Polygonzug**

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_N \\ \tilde{x}_0 & \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \dots & \tilde{x}_N \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \frac{\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i}{t_{i+1} - t_i} = f(t_i, \tilde{x}_i)$$

☺ Praktisch: Aus $\tilde{x}_0 = x_0$ berechnet man schrittweise $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_N$.
Im Punkt $(t_i, \tilde{x}_i)$ wird die Kurve in Richtung $f(t_i, \tilde{x}_i)$ weitergeschickt.

Numerische Näherung durch das Euler–Verfahren

Satz O1A: Existenz von Lösungen, Peano 1890

Zu lösen sei die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ mit $x(t_0) = x_0$.
Unter den oben erklärten geometrischen Voraussetzungen gilt:

Es existieren Partitionen $P_1, P_2, P_3, \dots \subseteq I$, deren Euler–Polygonzüge $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \dots : I \to K$ gegen eine Lösung $x : I \to K$ konvergieren.

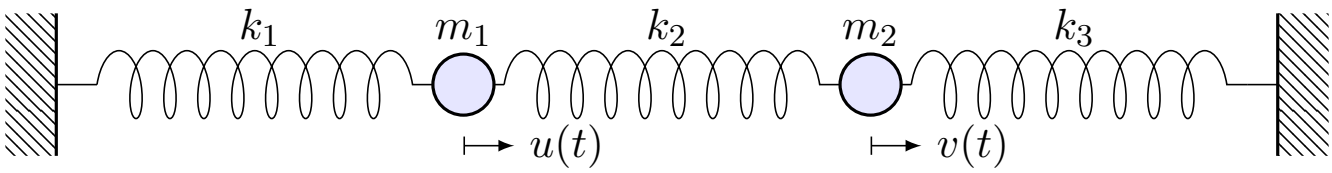
☺ Dies garantiert Existenz von Lösungen, ☹ aber keine Eindeutigkeit:
Es kann durchaus mehrere Lösungen geben, siehe Kapitel M. M123 M325
Für spezielle f können wir die DG exakt lösen, sonst nur numerisch.

☺ Die Rechnung ist für $\Delta t = T/N$ sehr leicht zu implementieren.
Präzision verlangt großes N, damit wächst der Rechenaufwand.

☹ Praktisches Problem: Der Satz ist nicht konstruktiv! Gegeben $\varepsilon > 0$, wie wählt man eine Partition P, um eine ε–Approximation zu erhalten?

☺ Die Numerik untersucht und optimiert solche Verfahren, siehe O141.
Ziel: gute Fehlerschranken und hohe Präzision bei geringem Aufwand.
Die **Numerik der gewöhnlichen Differentialgleichungen** ist ein hoch entwickeltes Gebiet und stellt umfangreiche Werkzeuge zur Verfügung.

Gekoppelte Oszillatoren als dynamisches System



Zwei Massen $m_1, m_2 > 0$ sind durch Federn $k_1, k_2, k_3 > 0$ verbunden.

Aufgabe: Formulieren Sie das hier skizzierte dynamische System
(0) als Bewegungsgleichung sowie (1) als DGSystem erster Ordnung.
(2) Welche Struktur hat die Lösungsmenge? (a) „Form“ und (b) „Größe“?

Lösung: (0) Auslenkungen $u(t), v(t)$ aus der Ruhelage. Kräftebilanz:

$$\begin{aligned} F_1(t) &= -k_1\, u(t) - k_2\big[u(t) - v(t)\big] \\ F_2(t) &= -k_3\, v(t) - k_2\big[v(t) - u(t)\big] \end{aligned}$$

Bewegungsgesetz: $m_1\ddot{u}(t) = F_1(t)$ und $m_2\ddot{v}(t) = F_2(t)$. Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} \ddot{u}(t) &= -\tfrac{k_1+k_2}{m_1}\, u(t) + \tfrac{k_2}{m_1}\, v(t) \\ \ddot{v}(t) &= +\tfrac{k_2}{m_2}\, u(t) - \tfrac{k_2+k_3}{m_2}\, v(t) \end{aligned}$$

☺ Zur Vereinfachung betrachten wir keine Reibung oder äußere Kräfte.

Gekoppelte Oszillatoren als dynamisches System

(1) Wir haben ein (homogenes, lineares) DGSystem zweiter Ordnung:

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) = a\, u(t) + b\, v(t) \\ \ddot{v}(t) = c\, u(t) + d\, v(t) \end{cases}$$

Neue Variablen $x_1 = u$, $x_2 = v$, $x_3 = \dot{u}$, $x_4 = \dot{v}$ reduzieren dies zu einem (ebenso homogenen, linearen) DGSystem erster Ordnung:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \text{kurz} \quad \dot{x} = A\, x$$

Das DGSystem (1) ist einfacher als (0), da erster Ordnung. Unser System $\dot{x} = Ax$ ist homogen linear mit Systemmatrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Hier sind die Koeffizienten konstant, das heißt, sie hängen nicht von der Zeit t ab. Für solche homogen-linearen DGSysteme mit konstanten Koeffizienten entwickeln wir mit Hilfe der Linearen Algebra exakte und zudem effiziente Lösungsmethoden: Wie in der folgenden Aufgabe nutzen wir dazu Eigenvektoren und alle zugehörigen Techniken. Der grundlegende Existenz- und Eindeutigkeitssatz O3B erklärt ganz allgemein die Struktur:

(2) Die Lösungsmenge ist (a) ein $\mathbb{R}$–Vektorraum (b) der Dimension 4.
☺ Hier zahlen sich Matrizenrechnung und Lineare Algebra erneut aus.

Gekoppelte Oszillatoren: Symmetrie und Ansatz

Aufgabe: (3) Lösen Sie den symmetrischen Fall $m_1 = m_2$, $k_1 = k_3$, als konkretes Beispiel $m_1 = m_2 = 1$ und $k_1 = k_3 = 1$ sowie $k_2 = 1$.

(4) Welche Bewegung folgt aus $u(0) = 2$, $v(0) = 0$, $\dot{u}(0) = \dot{v}(0) = 0$? Sind alle Lösungen unseres dynamischen Systems periodisch?

Lösung: Einstweilen nutzen wir unsere physikalische Anschauung!

(3a) Der Ansatz $u = v$ entkoppelt zu $\ddot{u} = -\frac{k_1}{m_1}u$, $\ddot{v} = -\frac{k_1}{m_1}v$.
Lösungen: $u_1(t) = \cos(\omega_1 t)$ und $u_2(t) = \sin(\omega_1 t)$ mit $\omega_1^2 = \frac{k_1}{m_1}$.

(3b) Der Ansatz $u = -v$ entkoppelt zu $\ddot{u} = -\frac{k_1+2k_2}{m_1}u$, $\ddot{v} = -\frac{k_1+2k_2}{m_1}v$.
Lösungen: $u_3(t) = \cos(\omega_2 t)$ und $u_4(t) = \sin(\omega_2 t)$ mit $\omega_2^2 = \frac{k_1+2k_2}{m_1}$.

Sind wir schon fertig? Ja! Jede Lösung ist eine Linearkombination

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} u_2(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} u_3(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} u_4(t) \\ v_4(t) \end{pmatrix}.$$

☺ Als **Anfangswerte** zur Zeit t_0 können Position und Geschwindigkeit $u(t_0), v(t_0), \dot{u}(t_0), \dot{v}(t_0) \in \mathbb{R}$ beliebig vorgegeben werden: Sie legen die freien Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ eindeutig fest (und umgekehrt).

Gekoppelte Oszillatoren: Symmetrie und Ansatz

☺ Unser DGSystem ist sehr einfach: Die Gleichungen sind linear! Linearkombinationen von Lösungen sind daher wieder Lösungen. Mit anderen Worten: Der Lösungsraum ist ein **Vektorraum** über $\mathbb{R}$.

☺ Unser **geschickter Ansatz** entkoppelt das Gleichungssystem: Eindimensionale Differentialgleichungen können wir bereits lösen!

Die einfache Rechnung bestätigt und präzisiert unsere physikalische Anschauung: Die Probe ist nun leicht: Einsetzen und Ausrechnen!

☺ Wir haben vier Lösungen gefunden. Diese sind **linear unabhängig**. Der Lösungsraum hat also Dimension ≥ 4. Gibt es noch mehr?

⚠ Wir wünschen uns ein einfaches Kriterium für Dimension $= 4$. Dann wüssten wir sicher: Wir haben alle Lösungen gefunden!

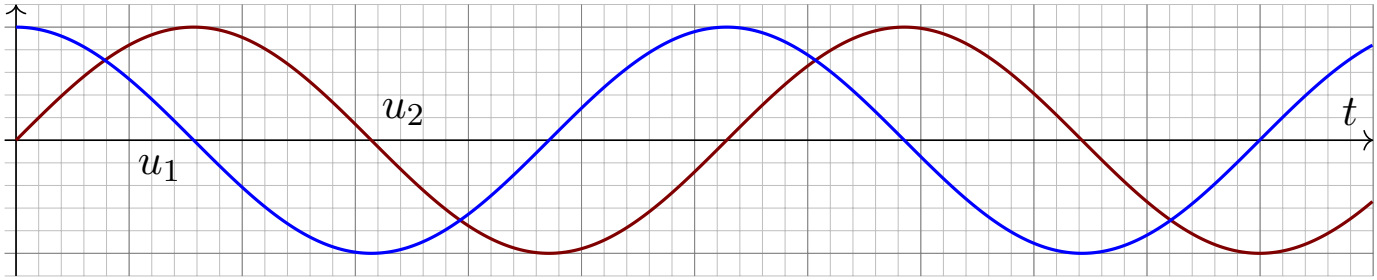
Physikalisch ist das plausibel: Jede Masse hat zur Zeit t_0 eine Position und eine Geschwindigkeit. Diese Daten sollten den weiteren Verlauf eindeutig festlegen. Wir hätten demnach genau 4 Freiheitsgrade.

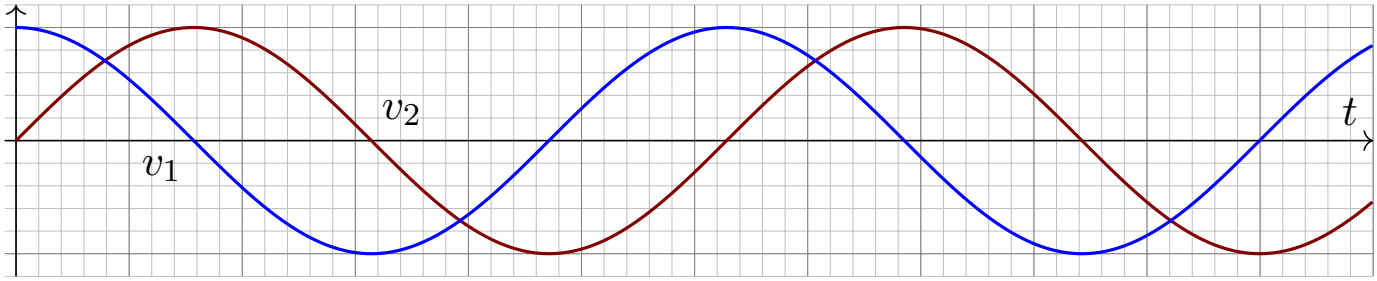
☺ Diese Heuristik lässt sich mathematisch formulieren und beweisen: Es gilt der grundlegende **Existenz- und Eindeutigkeitssatz O3B**!

Gekoppelte Oszillatoren: gleichsinnige Eigenschwingungen

O113
Ergänzung

Illustration für den Fall $m_1 = m_2 = 1$ und $k_1 = k_2 = k_3 = 1$.
Gleichsinnige Eigenschwingungen zur Frequenz $\omega_1 = 1$:



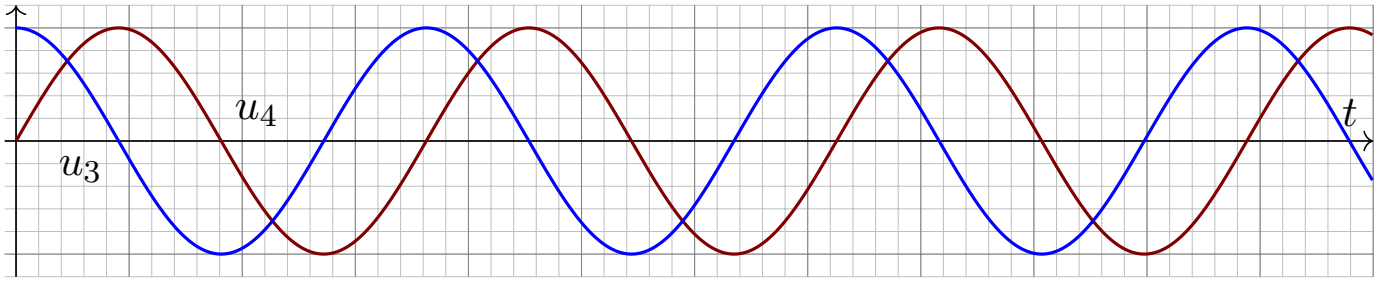


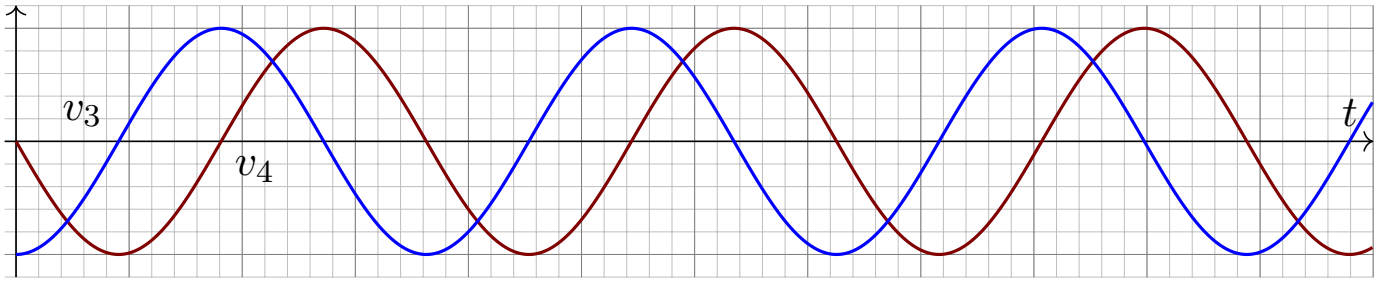
☺ Die Eigenschwingungen unseres Systems sind besonders leicht zu berechnen. Zudem erweisen sie sich als einfach und übersichtlich: Harmonische Schwingung: Jede dieser vier Lösungen ist periodisch.

Gekoppelte Oszillatoren: gegensinnige Eigenschwingungen

O114
Ergänzung

Illustration für den Fall $m_1 = m_2 = 1$ und $k_1 = k_2 = k_3 = 1$.
Gegensinnige Eigenschwingungen zur Frequenz $\omega_2 = \sqrt{3}$:



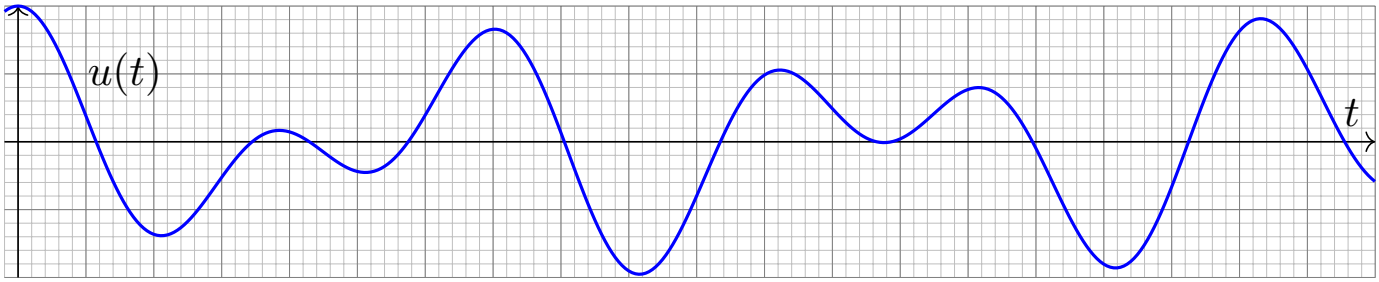


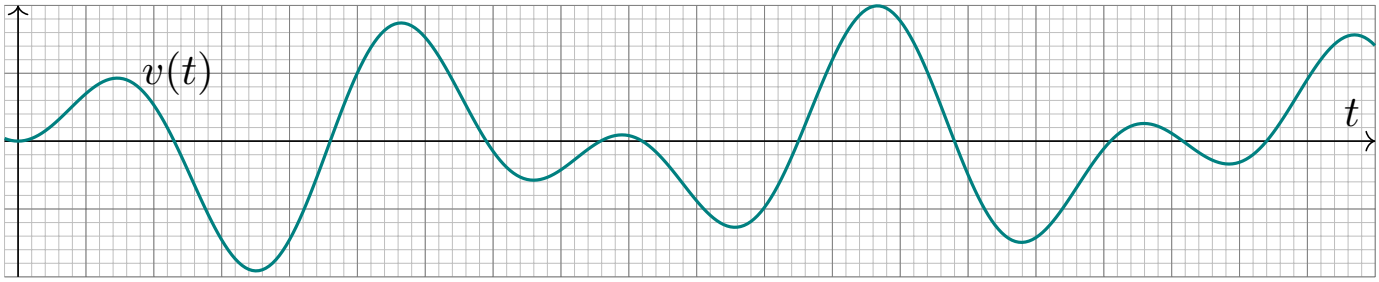
☺ Die Frequenz der gegensinnigen Schwingung ist deutlich größer als die der gleichsinnigen Schwingung. Das ist anschaulich plausibel; probieren Sie es mal aus! Nun können wir es sogar präzise ausrechnen.

Überlagerung von Eigenschwingungen

(4) Welche Linearkombination von Eigenschwingungen löst das AWP?

$$u(t) = \cos(t) + \cos(\sqrt{3}t), \quad u(0) = 2, \quad \dot{u}(0) = 0$$
$$v(t) = \cos(t) - \cos(\sqrt{3}t), \quad v(0) = 0, \quad \dot{v}(0) = 0$$



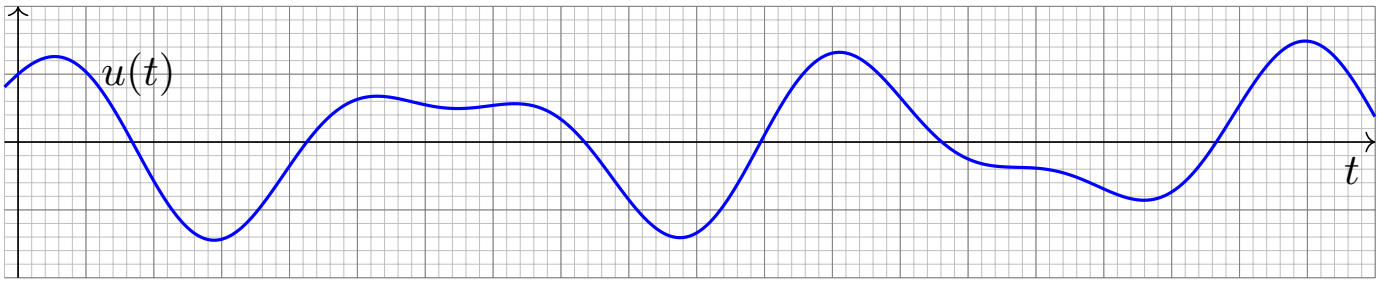


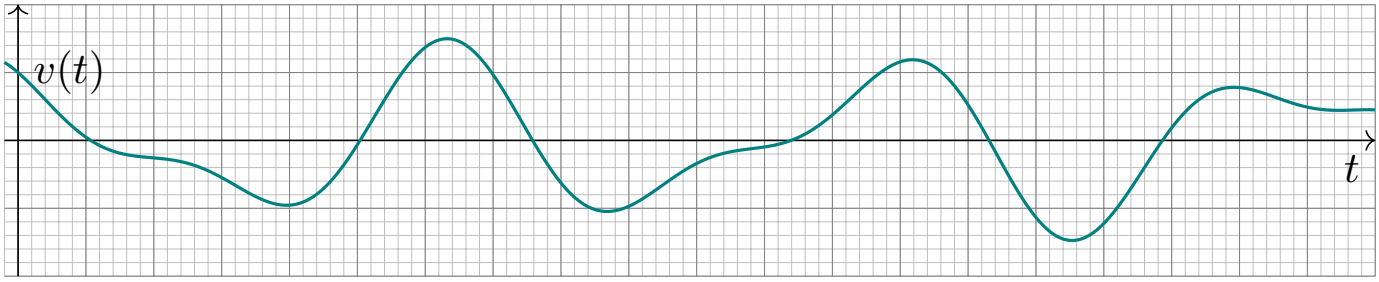
⚠ Diese Bewegung ist nicht periodisch! Sie scheint zuerst kompliziert, ist aber nur die Überlagerung von zwei harmonischen Schwingungen.

Überlagerung von Eigenschwingungen

Zur Illustration eine weitere Linearkombination von Eigenschwingungen:

$$u(t) = \cos(t) + \tfrac{1}{2}\sin(\sqrt{3}t)$$
$$v(t) = \cos(t) - \tfrac{1}{2}\sin(\sqrt{3}t)$$





☺ Die Anfangswerte $u(0)$, $\dot{u}(0)$ sowie $v(0)$, $\dot{v}(0)$ können beliebig vorgegeben werden; sie legen den weiteren Verlauf eindeutig fest.

Schwache Kopplung führt zu Schwebungen.

Partnerschaukel, Schloss Freudenberg in Wiesbaden

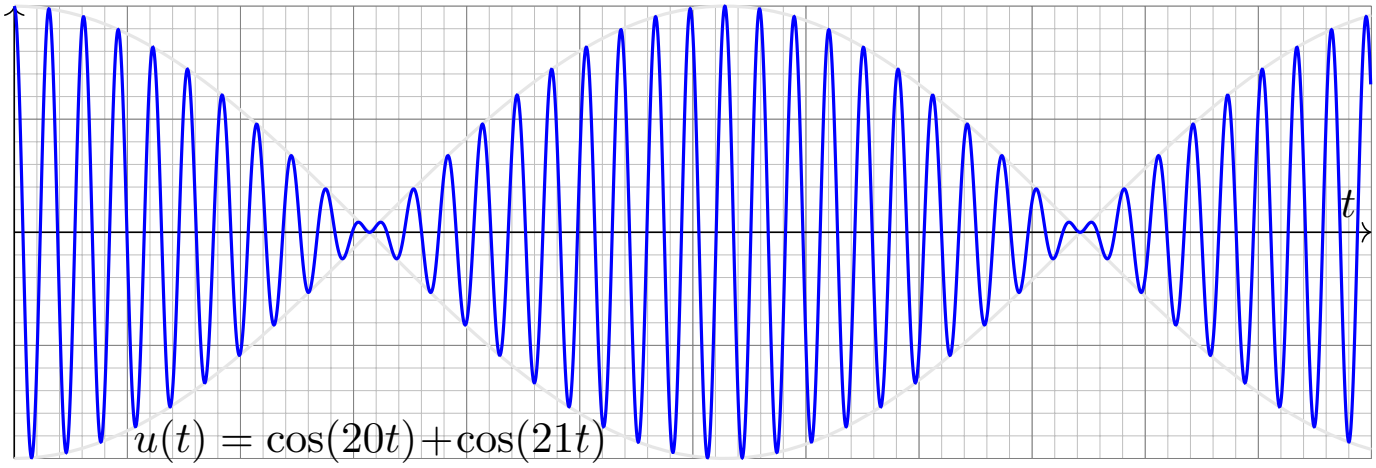
Aufgabe: Was geschieht bei schwacher Kopplung, für $0 < k_2 \ll k_1 = k_3$?

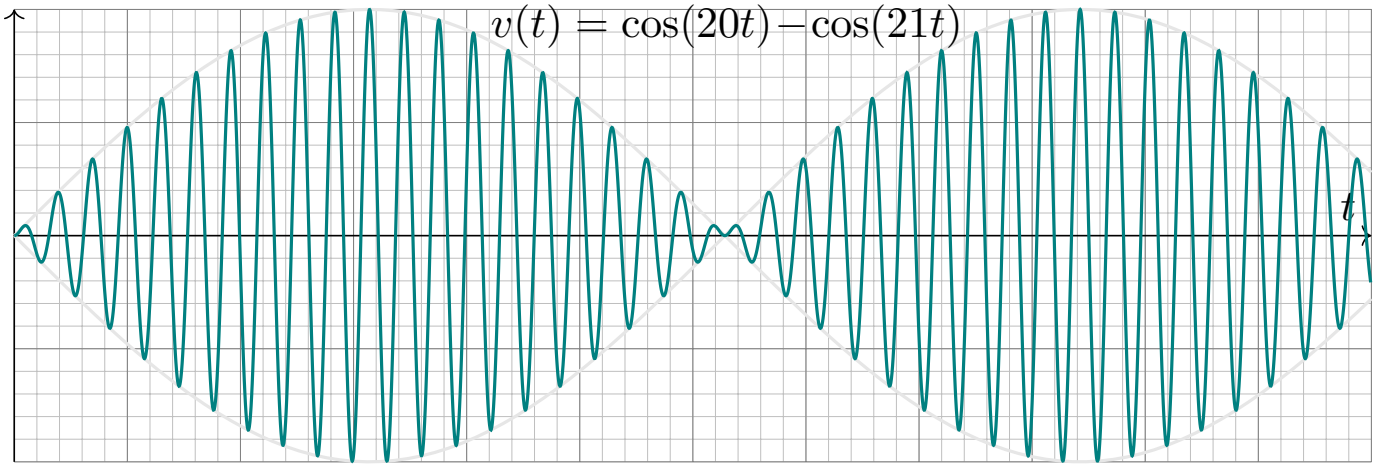
(5) Als Zahlenbeispiel sei $m_1 = m_2 = 1$, $k_1 = k_3 = 400$, $k_2 = 20.5$.

Lösung: (5) Die Eigenfrequenzen $\omega_1 = 20$ und $\omega_2 = 21$ liegen nahe. Das Anfangswertproblem $u(0) = 2$, $v(0) = 0$ und $\dot{u}(0) = \dot{v}(0) = 0$ wird gelöst durch $u(t) = \cos(20t) + \cos(21t)$ und $v(t) = \cos(20t) - \cos(21t)$. Die folgenden Graphiken illustrieren den zeitlichen Verlauf für $t \in [0, 12]$.

Wir beobachten eine *Schwebung*: In der Überlagerung $u(t)$ bzw. $v(t)$ nimmt die Amplitude der Summe mit langer Periode zu und ab, additive Phasen und subtraktive Phasen wechseln sich ab.

Schwache Kopplung führt zu Schwebungen.





Schwache Kopplung führt zu Schwebungen.

Anschaulich geschieht hier folgendes: Wir können den linken Oszillator auslenken und dann loslassen. Er schwingt daraufhin nahezu frei, doch nach und nach überträgt sich (fast) seine gesamte Energie auf den rechten Oszillator, anschließend geschieht dasselbe umgekehrt.

Aufgabe: Erklären Sie das hier gezeigte, bemerkenswerte Phänomen der Schwebungen mit Hilfe der trigonometrischen **Additionstheoreme**.

Lösung: Aus der Euler–Gleichung $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha$ und der Homomorphie $\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z\,\mathrm{e}^w$ erhalten wir (nach kurzer Rechnung):

$$\begin{aligned}
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\,\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\,\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\\
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\,\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\\
\sin\alpha - \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\,\cos\frac{\alpha+\beta}{2}
\end{aligned}$$

Schwache Kopplung führt zu Schwebungen.

In unserem Zahlenbeispiel erhalten wir:

$$\begin{aligned}
u(t) = \cos(20t) + \cos(21t) &= 2\cos(0.5t)\cdot\cos(20.5t)\\
v(t) = \cos(20t) - \cos(21t) &= -2\sin(0.5t)\cdot\sin(20.5t)
\end{aligned}$$

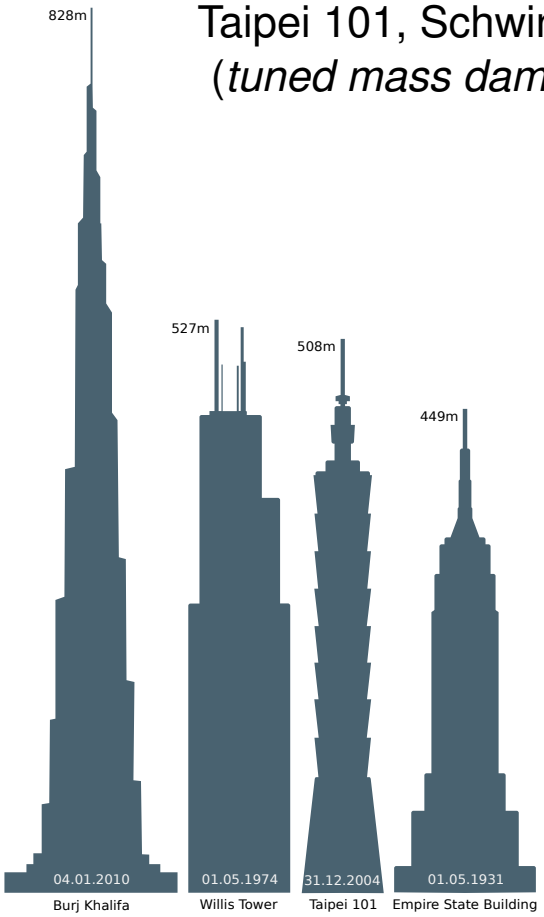
Wir interpretieren daher die Überlagerung $u(t) = A(t)\cos(20.5t)$ als eine Grundschwingung der mittleren Frequenz $\bar\omega = \frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2) = 20.5$ mit der variablen Amplitude $A(t) = 2\cos(0.5t)$; diese hat die deutlich niedrigere Frequenz $\delta = \frac{1}{2}|\omega_1-\omega_2| = 0.5$, sodass $\omega_{1/2} = \bar\omega \mp \delta$ gilt.

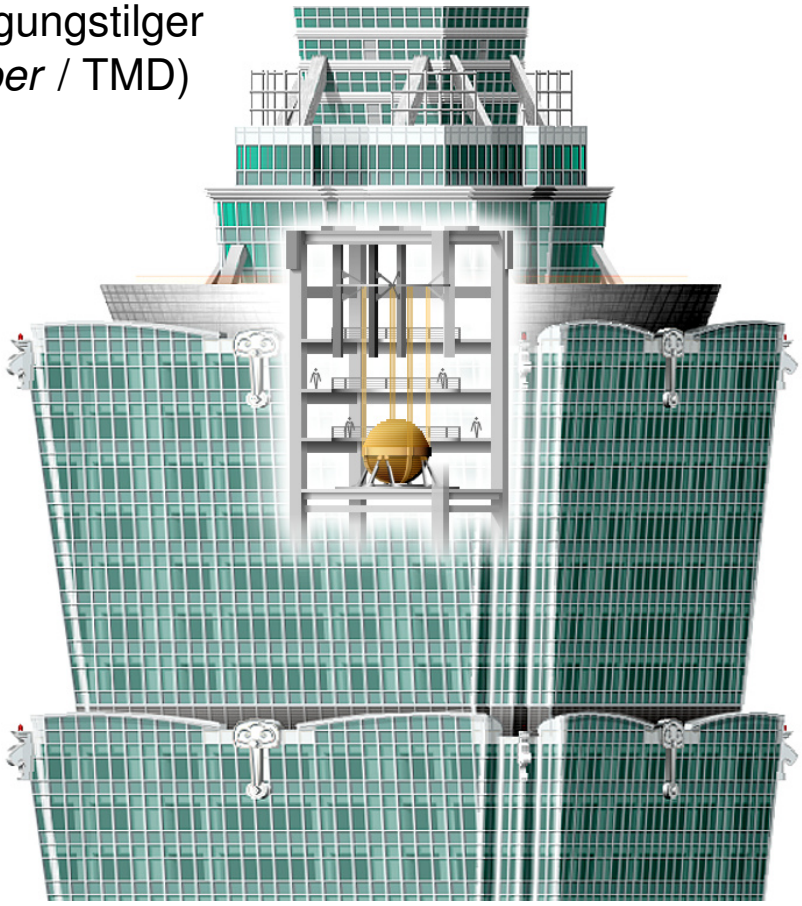
Diese Rechnung ist in der obigen Graphik schön anschaulich illustriert durch die Trägerschwingung $\cos(20.5t)$ und die Einhüllende $\pm 2\cos(0.5t)$. Das Phänomen der Schwebung entsteht immer, wenn sich zwei ähnlich große Schwingungen mit nahezu gleichen Frequenzen überlagern.

In der Akustik sind solche Schwebungen deutlich zu hören: Der Ton ist moduliert, seine Lautstärke schwankt mit der Schwebungsfrequenz, was mitunter als unangenehme Dissonanz empfunden wird. Das ist keine akustische Täuschung, sondern ein reales physikalisches Phänomen.

Anwendung in Wolkenkratzern: Schwingungstilger

Taipei 101, Schwingungstilger
(*tuned mass damper* / TMD)





Anwendung in Wolkenkratzern: Schwingungstilger

Gebäude werden zu Schwingungen angeregt, extern durch Wind oder Erdbeben, intern durch Menschen oder Maschinen. Dagegen helfen **Schwingungstilger**, justiert auf die Eigenfrequenz des Gebäudes. Berlins Fernsehturm hat in seiner Spitze ein 1.5-Tonnen-Tilgerpendel. Londons Millennium Bridge, 2000 eröffnet und *wobbly bridge* genannt, wurde nachträglich mit 52 kleinen *tuned mass dampers* ausgestattet.

Das Taipei Financial Center in Taiwan hielt ab 2004 den Rekord des höchsten Gebäudes der Welt, bis es 2009 vom Burj Khalifa überholt wurde. Zwischen dem 88. und 92. Stockwerk befindet sich eine 660 Tonnen schwere Stahlkugel als Pendel mit ölhydraulischer Dämpfung. Dies ist öffentlich zugänglich und eine beliebte Touristen-Attraktion.

Das Gebäude überträgt Schwingungsenergie auf diesen Oszillator, der sie absorbiert und dann durch Dämpfung in Wärme umwandelt. Die maximale Beschleunigung bei Stürmen wird so etwa halbiert! (Taiwan ist sowohl aktive Erdbebenregion als auch Taifungebiet.) Ein Video sagt mehr als tausend Worte: `youtu.be/f1U4SAgy60c`.

Anwendung im Schiffsbau: Frahmscher Schlingertank

Wasserwellen regen ein Schiff zu Schwingungen an:

1. Das Schiff „rollt“ um seine Längsachse,
   kippt also nach links (Backbord) und rechts (Steuerbord).
2. Das Schiff „stampft“ um seine Querachse,
   neigt sich also nach vorne (zum Bug) und hinten (zum Heck).

Wenn die anregende Frequenz des Seegangs unglücklich nah an der Eigenfrequenz des Schiffes liegt, so kommt es zur Resonanz. Um eine Katastrophe zu verhindern, möchte man vorsorgen und die auftretenden Resonanzen so weit wie möglich abschwächen.

Für die Rollbewegung um die Längsachse gelingt dies recht effizient mit zwei raffiniert gekoppelten Schwingungen. Hierzu entwickelte der deutsche Schiffsbauer Hermann Frahm (1867–1939) um 1900 den sogenannten Frahmschen **Schlingertank**. Dieser besteht aus zwei Wassertanks an den Längsseiten des Schiffes, die möglichst hoch liegen und über Rohre kommunizieren. Hierin füllt man Wasser, bis die Eigenfrequenz des Tanks der des Schiffes entspricht.

Anwendung im Schiffsbau: Frahmscher Schlingertank

Seitlich auftreffende Wellen regen das Schiff zum Rollen an. Im Resonanzfall erzwingt dies eine Schwingung des Schiffes mit der Phasenverschiebung um $\pi/2$ gegenüber der Anregung. Das rollende Schiff lässt nun seinerseits das Ballastwasser im Tank periodisch hin- und herströmen, ebenso mit einer Phasenverschiebung um $\pi/2$.

Die äußere Anregung und die innere Schwingung des Tanks sind daher gegenphasig. Die so wirkenden entgegengesetzten Drehmomente heben sich weitgehend auf, was die Rollbewegung deutlich verringert.

Die Grundidee ist genial-einfach und in unserem mathematischen Modell gut nachzuverfolgen. Die technische Ausführung erfordert die geeignete Kalibrierung der Parameter und ist eine eigene Kunst.

Das gesamte System ist in Wirklichkeit nicht-linear: Die Frequenz des Schiffes und des Ballastwasser hängen von der Amplitude ab, dadurch wird ihr Zusammenspiel recht kompliziert. Das Prinzip ist jedoch gleich.

Newtons Himmelsmechanik: die Bewegungsgleichung

Aufgabe: Formulieren Sie die Bewegungsgleichungen von n Körpern mit Masse $m_k > 0$, Position $u_k(t) \in \mathbb{R}^3$ und Geschwindigkeit $v_k(t) \in \mathbb{R}^3$.

Lösung: Newtons Gravitationsgesetz ergibt die Differentialgleichungen

$$\boxed{\dot{u}_k = v_k, \quad \dot{v}_k = f_k(u) := \sum\nolimits_{j \neq k} \gamma\, m_j \, \frac{u_j - u_k}{|u_j - u_k|^3}.}$$

Vorgegeben sind die Anfangssdaten $u_k(0)$ und $v_k(0)$ zur Zeit $t = 0$.
Als Lösung gesucht ist die Bewegung $(u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n) : [0, T[\to \mathbb{R}^{6n}$.

Erlaubt ein so komplexes System immer genau eine Lösung? Ja, das ist der zentrale ∃&E-Satz! Kollision oder Expulsion nach ∞ sind möglich: Eventuell existiert die Lösung nur für eine kurze Zeit $T > 0$. Für manche Startwerte sind Lösungen periodisch, oder beinahe: Zu unserem Glück!

- ☺ Den Fall $n = 2$ lösen Kegelschnitte: Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln.
- ☹ Für $n \geq 3$ lässt sich dieses DGSystem i.A. nicht geschlossen lösen!
- ☺ Euler–Verfahren: diskrete Zeitschritte $0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \ldots$,

$$\begin{aligned} u_k(t_{i+1}) &\approx u_k(t_i) + v_k(t_i) \cdot (t_{i+1} - t_i), \\ v_k(t_{i+1}) &\approx v_k(t_i) + f_k(u) \cdot (t_{i+1} - t_i). \end{aligned}$$

Newtons Himmelsmechanik: der historische Triumph

Das Verständnis der **Himmelsmechanik** markiert den Übergang vom Mittelalter zur Neuzeit.

Die Beobachtung des Nachthimmels und seiner Sterne fasziniert uns Menschen seit Alters her. Neben den zahlreichen „Fixsternen“ (weit entfernte Sterne) erkennen wir einige „Wandelsterne“ (Planeten unseres Sonnensystems). Ihre Bewegung lässt Regeln erahnen, doch für Wandelsterne scheinen diese zunächst kompliziert und verwirrend. Sie quantitativ zu erfassen und gründlich zu verstehen, ist einer der großen Triumphe menschlicher Neugier und systematischer Forschung!

Von der Erde besehen scheinen sich alle Sterne um uns zu drehen, doch die exakte Bewegung der Planeten erweist sich als schrecklich kompliziert. Kopernikus' heliozentrisches Modell (1543) ist einfacher, daher nützlicher: Die Bahnen der Planeten um die Sonne erweisen sich recht genau als Ellipsen. Diese Koordinatentransformation hat enorme Wirkung und schreibt Weltgeschichte!

Aus Tycho Brahes präzisen **Beobachtungsdaten** leitete Johannes Kepler drei Gesetze ab, die die Ellipsenbewegung der Planeten um die Sonne gut *beschreiben*. Eine *Erklärung* der Bewegungen durch einheitliche physikalische Prinzipien gelang erst Isaac Newton 1686 mit seinen Principia!

Die moderne Naturwissenschaft beginnt mit Newtons Formulierung der drei Bewegungsgesetze, des universellen Gravitationsgesetzes und seiner Lösung des Zwei-Körper-Problems. Mit einer Handvoll physikalischer Prinzipien und den passenden mathematischen Werkzeugen konnte er die Keplerschen Regeln *erklären*, ja *herleiten*. Newtons revolutionäre Idee: Überall im Universum gelten dieselben Gesetze! Newtons Mechanik erklärt die Schwerkraft hier auf Erden ebenso wie außerirdische Phänomene: den Umlauf der Planeten um die Sonne und des Mondes um die Erde, sogar die Gezeiten unserer Meere, ebenso die Coriolis–Kraft und das Foucaultsche Pendel.

Newtons Himmelsmechanik: die Herausforderung

O127
Ausführung

Allein schon das obige Differentialgleichungssystem zu formulieren, ist eine Meisterleistung der Mathematik und Physik der Neuzeit. Wir nennen dies **Himmelsmechanik** und sind völlig zu Recht stolz auf sie: Mathematische Sprache und Werkzeuge erleuchten die gesamte Entwicklung und ebnen den Weg von Beobachtung über Erklärung und Berechnung bis zur Raumfahrt.

Auch nach über 300 Jahren sind Newtons Gleichungen immer noch nützlich wie am ersten Tag! Daten ändern sich, Methoden bleiben bestehen. Solide mathematische Arbeit hat eine extrem lange Wirksamkeit. Daher lohnt es sich auch für Sie heute, in mathematische Grundlagen zu investieren und diese wirksamen Werkzeuge zu erlernen, anzuwenden und fortzuführen.

Die drei Fälle $n = 1$ und $n = 2$ sowie $n \geq 3$ sind sehr verschieden! Für einen einzigen Körper ($n = 1$) enthalten Newtons Gleichungen $\dot{u}_1 = v_1$ und $\dot{v}_1 = 0$ keine gravitative Wechselwirkung. Ihre Lösung ist eine **geradlinige Bewegung**, nämlich $u_1(t) = u_1(0) + v_1 t$.

Ein Zwei-Körper-System ($n = 2$) wie Sonne-Erde oder Erde-Mond ist bereits ausgesprochen interessant. Newton konnte seine Gleichungen hier gut lösen, sie ergeben Ellipsenbahnen und erklären die Keplerschen Gesetze. Allgemeiner sind auch Parabeln und Hyperbeln als Lösungen möglich, je nach Anfangsdaten $u_1(0), v_1(0), u_2(0), v_2(0)$. In allen Fällen gelingt die Lösung hier noch in geschlossener Form. Man nennt ein solches System **vollständig integrabel**. P270

Newton betrachtete anschließend das Drei-Körper-System Sonne-Erde-Mond. Dies entzog sich jedoch hartnäckig einer Lösung und wurde zum berühmtesten offenen Problem der Mathematik. Das **Drei-Körper-Problem** gilt bis heute als eines der schwierigsten Probleme, die zahlreichen Anstrengungen zu seiner Lösung erfordern und erzeugen immer wieder wichtige neue Methoden.

Newtons Himmelsmechanik: mögliche Lösungsmethoden

O128
Ausführung

Für künstliche Satelliten wird das **zirkuläre restringierte Drei-Körper-Problem** (CR3BP) sehr ausgiebig untersucht: Zwei massereiche Körper umrunden sich kreisförmig, während der dritte Körper nahezu masselos ist. Hier findet man die berühmten fünf Lagrange–Punkte. P257

Nur wenige und sehr spezielle Sonderfälle des n–Körper-Problems sind geschlossen lösbar. Auch diese haben ihren eigenen Reiz: Seit 1994 wurden zahlreiche **Choreographien** entdeckt, in denen n Körper symmetrisch angeordnet werden und dann periodische Bahnen durchlaufen. Für generische Anfangsdaten hingegen ist die Bewegung **chaotisch** und kann nur numerisch annähernd berechnet werden. *Solving the Three Body Problem*, `youtu.be/et7XvBenEo8`.

Zum Kontrast untersuchen und vergleichen wir zwei klassische Anwendungen der Mechanik: Einerseits gekoppelte **lineare Systeme** wie harmonische Oszillatoren O101 P101, andererseits Planetenbewegung und ähnliche **nicht-lineare Systeme**. Nicht-lineare Systeme sind schwierig und verhalten sich oft chaotisch. Lineare Systeme sind besonders gutartig und einfach zu lösen. Daher sollten Sie Linearität erkennen und wertschätzen, verstehen und nutzen lernen!

Auch nicht-lineare Systeme lassen sich mitunter gut lösen, wie einfache Beispiele zeigen. Dies sind aber Ausnahmen und seltene Glücksfälle. Typischerweise sind nicht-lineare Systeme nicht geschlossen lösbar. Es bleibt dann nur die **numerische Approximation** mit Hilfe geeigneter Näherungsverfahren, z.B. das Euler–Verfahren oder besser gleich das Runge–Kutta–Verfahren. Mehr hierzu erfahren Sie in der Numerik. Aufbauend auf den mathematischen Grundlagen können Sie die Numerik von Differentialgleichungen nutzen und wo nötig vertiefen.

Allgemeine Grundlagen und konkrete Anwendungen ergänzen sich wunderbar.

Differentialgleichungssysteme erster Ordnung

Jedes **Differentialgleichungssystem erster Ordnung** hat die Form

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= f_1\big(t, y_1(t), \dots, y_n(t)\big), \\ &\vdots \\ y_n'(t) &= f_n\big(t, y_1(t), \dots, y_n(t)\big). \end{aligned}$$

Dies ist ein System von n gekoppelten Differentialgleichungen:
Die Änderungsrate $y_k'(t)$ ist eine Funktion f_k von t und $y_1(t), \dots, y_n(t)$.
Mit $y = (y_1, \dots, y_n)$ und $f = (f_1, \dots, f_n)$ bündeln wir dies kürzer und übersichtlicher als eine **vektorwertige Differentialgleichung**:

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

Gegeben ist die stetige Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n \supseteq G \to \mathbb{K}^n$ als rechte Seite.
Als Lösung gesucht sind alle diff'baren Funktionen $y : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{K}^n$ auf einem (maximalen) Intervall I mit $(t, y(t)) \in G$ und $y'(t) = f(t, y(t))$ für alle $t \in I$. Meist ist zudem ein Anfangswert $(t_0, y_0) \in G$ vorgegeben.
Der folgende Satz garantiert Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung.

Differentialgleichungssysteme erster Ordnung

Beide hier gezeigten **Schreibweisen** sind nützlich und üblich:
Die erste ist explizit ausführlich, die zweite ist bequem komprimiert.

Ich verzichte meist auf Pfeile und sonstige Dekoration für Vektoren.
Der Kontext gibt jeweils an, mit welchen Objekten (Skalaren, Vektoren, Matrizen, ...) und mit welcher Dimension wir es genau zu tun haben.
Ohnehin sollte man dies eingangs klarstellen bzw. in Erinnerung rufen.

Die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n \supseteq G \to \mathbb{K}^n$ erklärt die Differentialgleichung.
Sie ist im Allgemeinen nicht auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ definiert, sondern nur auf einer geeigneten (offenen) Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ gegeben.

Beispiel: Die Differentialgleichung der Planetenbewegung ist bei einer Kollision $u_j = u_k$ nicht mehr definiert. Das Definitionsgebiet ist also

$$G = \big\{\, (t, u_1, v_1, \dots, u_n, v_n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{6n} \;\big|\; u_j \neq u_k \text{ für } j \neq k \,\big\}.$$

Hierauf ist unsere Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{6n} \supseteq G \to \mathbb{R}^{6n}$ definiert durch

$$\dot{u}_k = v_k, \quad \dot{v}_k = \sum_{j \neq k} \gamma\, m_j \, \frac{u_j - u_k}{|u_j - u_k|^3}.$$

Differentialgleichungssysteme erster Ordnung

Satz O1B: Cauchy Existenz- und Eindeutigkeitssatz, kurz ∃&E

Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n \supseteq G \to \mathbb{K}^n$ stetig. Zu lösen sei die Differentialgleichung

$$\boxed{y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{mit Anfangswert} \quad y(t_0) = y_0.}$$

(1) Zu jedem Startpunkt $(t_0, y_0) \in \mathring{G}$ existieren Lösungen $y : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{K}^n$. Jede kann beidseitig bis zum Rand ∂G (oder ∞) fortgesetzt werden.

(2) Ist $f(t, y)$ stetig diff'bar nach y, so ist die Lösung durch $(t_0, y_0) \in \mathring{G}$ eindeutig bestimmt. Sie hängt stetig differenzierbar von (t_0, y_0) ab.

☺ Wir kennen dieses Ergebnis aus Dimension $n = 1$. (Satz M1C)
Die mehrdimensionale Verallgemeinerung O1B gilt wörtlich genauso.

Planetenbewegung: Zu gegebenen Startwerten $y(0) \in \mathbb{R}^{6n}$ existiert eine eindeutige Lösung $y : [0, T[\to \mathbb{R}^{6n}$, zumindest eine gewisse Zeit $T > 0$.

Entweder gilt $T = \infty$, d.h. die Lösung existiert für alle Zeit $t \geq 0$, oder aber sie verlässt den Definitionsbereich G, d.h. sie läuft in eine Polstelle, $u_j(T) = u_k(T)$, oder entkommt nach unendlich, $|u_k(t)| \to \infty$ für $t \to T$.

Differentialgleichungssysteme erster Ordnung

Die **Existenz** einer Lösung $y : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{K}^n$ bedeutet: Es gibt ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $t_0 \in I$ und eine differenzierbare Funktion $y : I \to \mathbb{K}^n$ mit $y(t_0) = y_0$ sowie $(t, y(t)) \in G$ und $y'(t) = f(t, y(t))$ für alle $t \in I$.

Meist suchen wir **maximale Lösungen** $y : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{K}^n$, also solche, die sich auf kein größeres Intervall $I^* \supsetneq I$ fortsetzen lassen.

⚠ Im Allgemeinen existieren Lösungen $y : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{K}^n$ nicht auf ganz $\mathbb{R}$, sondern nur auf einem (evtl. endlichen) Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Die Lösung lässt sich im Inneren G° des Definitionsbereichs zwar immer fortsetzen, aber manche Lösungen verlassen G, d.h. sie enden auf dem Rand ∂G oder entkommen nach ∞. Man denke an obige Planetenbewegung!

⚠ Beispiele zeigen, dass es zum gegebenen Startwert (t_0, y_0) auch mehrere Lösungen geben kann: Siehe Wasseruhr M123 oder M325.
Das Problem ist dann **schlecht gestellt**. Dies gilt es zu vermeiden!

Eindeutigkeit bedeutet: Sind $u : I \to \mathbb{K}^n$ und $v : J \to \mathbb{K}^n$ Lösungen mit $u'(t) = f(t, u(t))$ für alle $t \in I$ und $v'(t) = f(t, v(t))$ für alle $t \in J$ sowie $u(t_0) = v(t_0) = y_0$, so gilt $u = v$ auf dem gemeinsamen Intervall $I \cap J$. Sind beide Lösungen u, v maximal, so gilt zudem $I = J$.

Das mathematische Pendel

Welche Schwingungsdauer hat eine Schaukel bei $90°$ Auslenkung?

⚠ Als eindrücklicher Kontrast vergleichen wir hier noch einmal detailliert ein nicht-lineares DGSystem mit seiner Linearisierung.

Schiffschaukel *Santa Maria*, www.rasti-land.de

Aufgabe: (1) Erstellen Sie die Bewegungsgleichung $\ddot{\varphi}(t) = \ldots$.

(2) Nähern und lösen Sie diese für kleine Amplituden ($|\varphi| < 5°$).

(3) Formulieren und beweisen Sie die Energieerhaltung für $E = \ldots$.

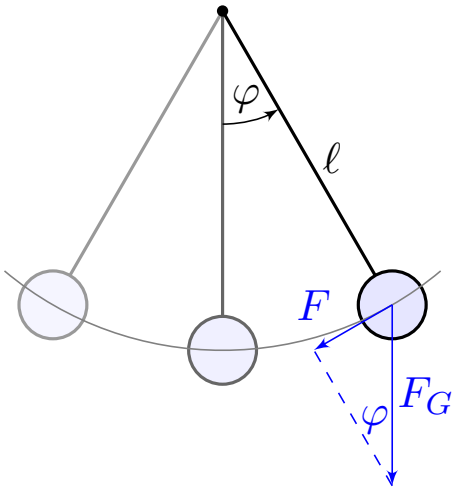
(4) Schreiben Sie die Bewegungsgleichung als DGSystem $\dot{x} = \ldots$

(5) Skizzieren Sie das Vektorfeld f und Lösungskurven für $\ell = 9.81m$.

(6) Wenden Sie das Euler–Verfahren an auf die Anfangsdaten $\varphi(0) = -\pi/2$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$ mit Schrittweite $\Delta t = 0.1$.

Können Sie der so berechneten Näherung vertrauen?
Wie lange dauert ein Umlauf ungefähr?

Das mathematische Pendel



Die Rückstellkraft ist hier nicht-linear:

$$F(t) = -m \cdot g \cdot \sin\varphi(t)$$

$m =$ Masse des Pendelkörpers
$g = 9.81\mathrm{m/s}^2$ Erdbeschleunigung
$F_G = mg$ Gravitationskraft zur Masse m
$\ell =$ Länge des Pendelstabes
$\varphi(t) =$ Winkelauslenkung
$\ell\,\varphi(t) =$ Auslenkung

(1) Newtons Gesetz $F(t) = m\,\ell\,\ddot{\varphi}(t)$ führt zur Differentialgleichung

$$\boxed{\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{\ell}\,\sin\varphi(t).}$$

⚠ Wir vereinfachen hier: punktförmige Masse des Pendelkörpers, vernachlässigbare Masse des Stabes, reibungsfreie Aufhängung, etc.

☺ Für kleine Auslenkungen gilt $\sin(\varphi) \approx \varphi$. (Faustregel für $|\varphi| < 5°$)

Das mathematische Pendel

(2) Dies führt uns zur **linearisierten Differentialgleichung**:

$$\boxed{\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{\ell}\,\varphi(t)}$$

Dies ist ein harmonischer Oszillator: $\ddot{\varphi}(t) = -\omega^2\varphi(t)$ mit $\omega = \sqrt{g/\ell}$.
Lösung $\varphi(t) = c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t)$, Periodendauer $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$.
Beispiel Schiffsschaukel: Für $\ell = 9.81m$ finden wir $T = 2\pi\mathrm{s} \approx 6.28\mathrm{s}$.

☺ Die Schwingungsdauer ist unabhängig von der Pendelmasse m!
Bei kleinen Schwingungen ist sie auch unabhängig von der Amplitude.

⚠ Für große Auslenkungen brauchen wir eine genauere Rechnung!

(3) Kinetische Energie $\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2$, potentielle Energie $mg\ell(1-\cos\varphi)$.
Die **Gesamtenergie** $E = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2 + mg\ell(1-\cos\varphi)$ bleibt erhalten:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = m\ell^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + mg\ell\dot{\varphi}\sin\varphi = m\ell^2\dot{\varphi}\Big[-\frac{g}{\ell}\,\sin\varphi(t)\Big] + mg\ell\dot{\varphi}\sin\varphi = 0$$

Zum Vergleich der harmonische Oszillator: $E = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mg\ell\varphi^2$

Das mathematische Pendel

(4) Zustand $(x_1, x_2) = (\varphi(t), \dot{\varphi}(t)) \in \mathbb{R}^2$. Der Zustandsraum ist hier $\mathbb{R}^2$.
Das Bewegungsgesetz darauf lautet: $\dot{x}_1 = x_2$ und $\dot{x}_2 = -g/\ell\sin(x_1)$.

(5) Für $\ell = 9.81\mathrm{m}$ erhalten wir $(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = f(x_1, x_2) = (x_2, -\sin(x_1))$.
Dieses Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist in folgenden Graphiken dargestellt.

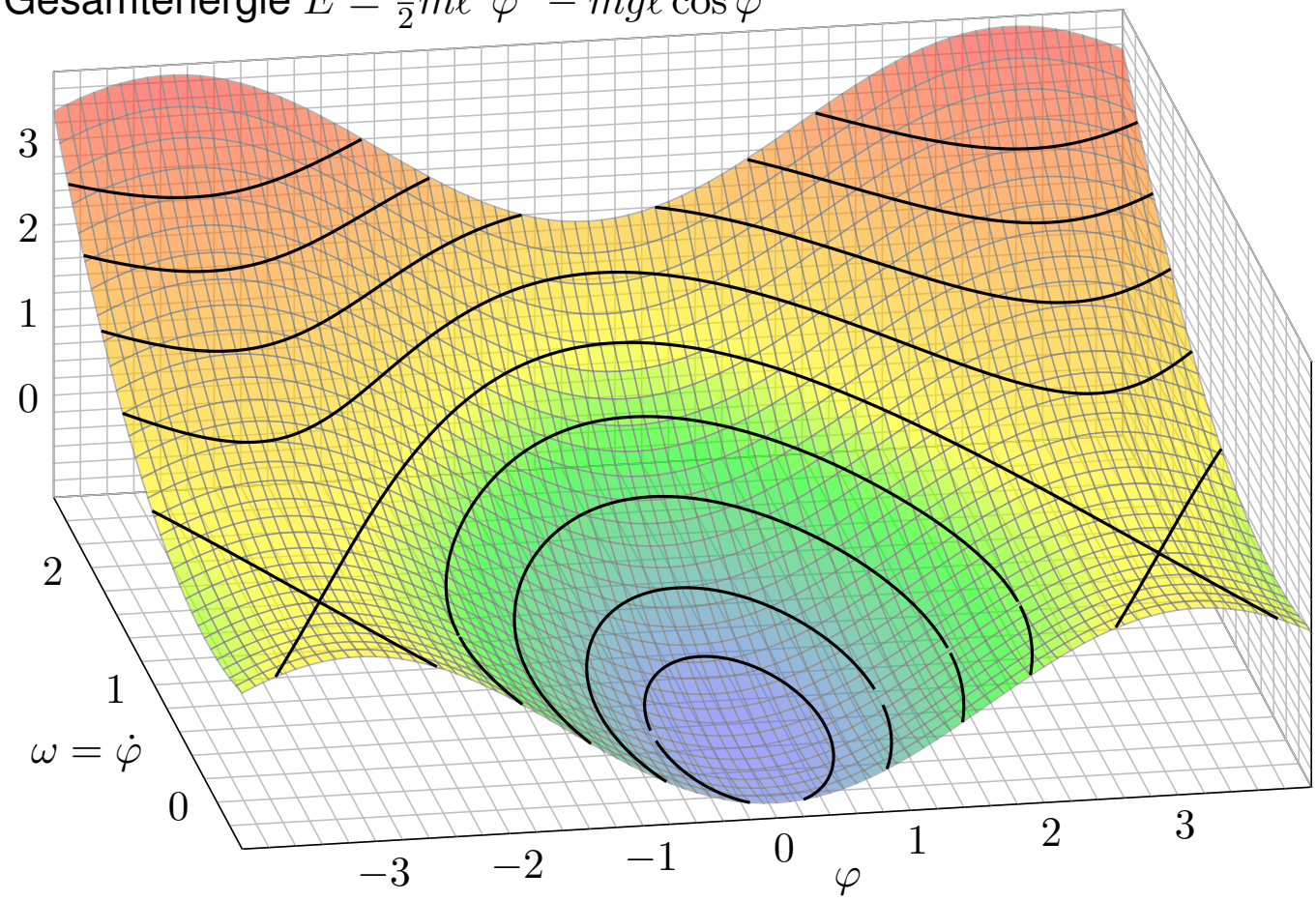
☺ Dank Energieerhaltung können wir sofort die Lösungskurven als Äquipotentiallinien $E = \mathrm{const}$ einzeichnen! Leider sieht man diesen Kurven ihre zeitliche Parametrisierung oder Periodendauer nicht an.

(6) Zeitlich parametrisierte Lösungen $[0, T] \to \mathbb{R}^2$ berechnen wir näherungsweise durch das Euler–Verfahren und lesen die Zeit ab:
Ein Viertelumlauf benötigt $\approx 1.85\mathrm{s}$, eine ganze Periode also $\approx 7.4\mathrm{s}$.
Das ist etwa 18% länger als die Periode des linearisierten Modells.

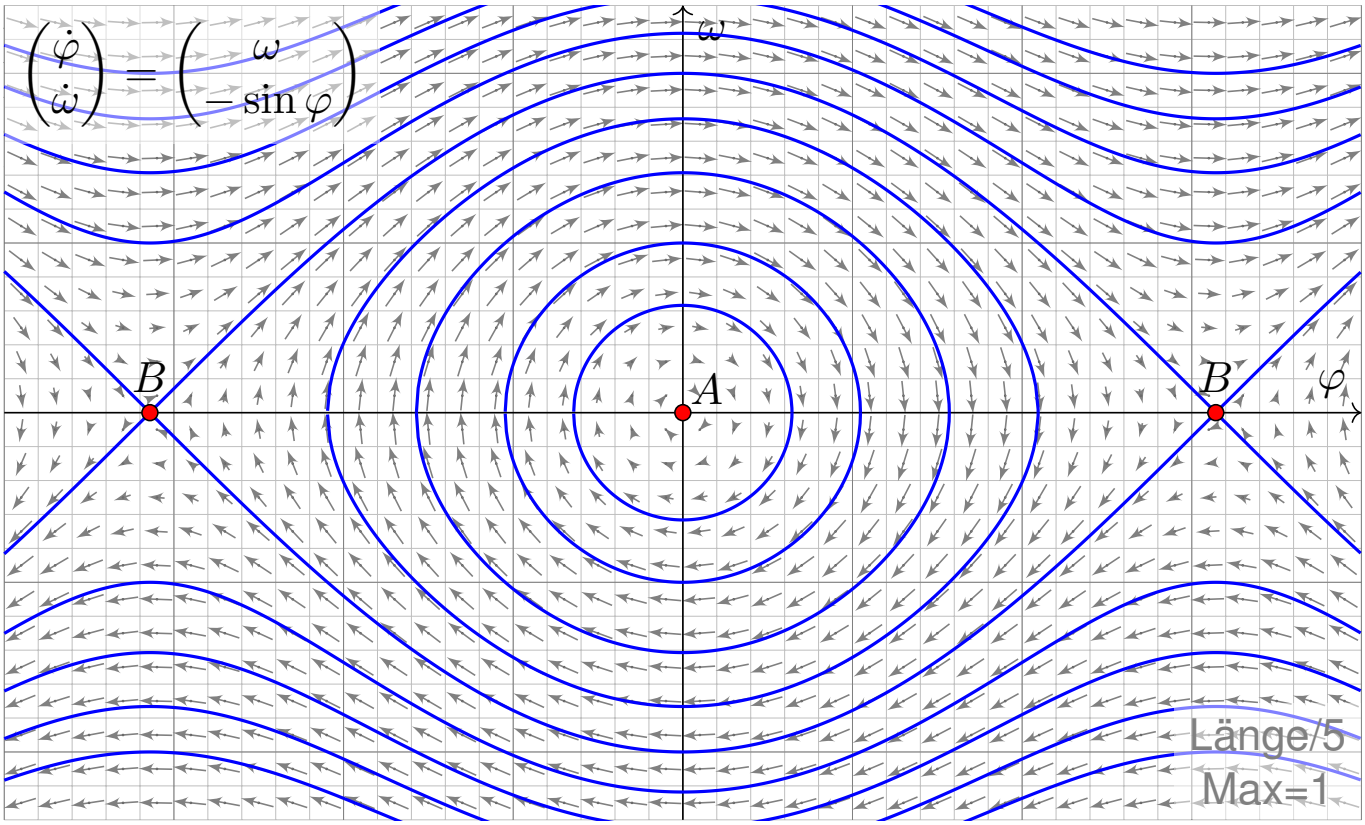
⚠ Die Näherung akkumuliert Approximationsfehler und entfernt sich von der Energieniveaulinie. Für kleine Zeiten scheint die Abweichung gerade noch akzeptabel. Für eine ernsthafte Rechnung müssen wir die Schrittweite verkleinern oder das gesamte Verfahren verbessern: Fehlerschranken, Effizienz und Präzision erfordern harte Arbeit!

Das mathematische Pendel: Energiefläche

Gesamtenergie $E = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2 - mg\ell\cos\varphi$

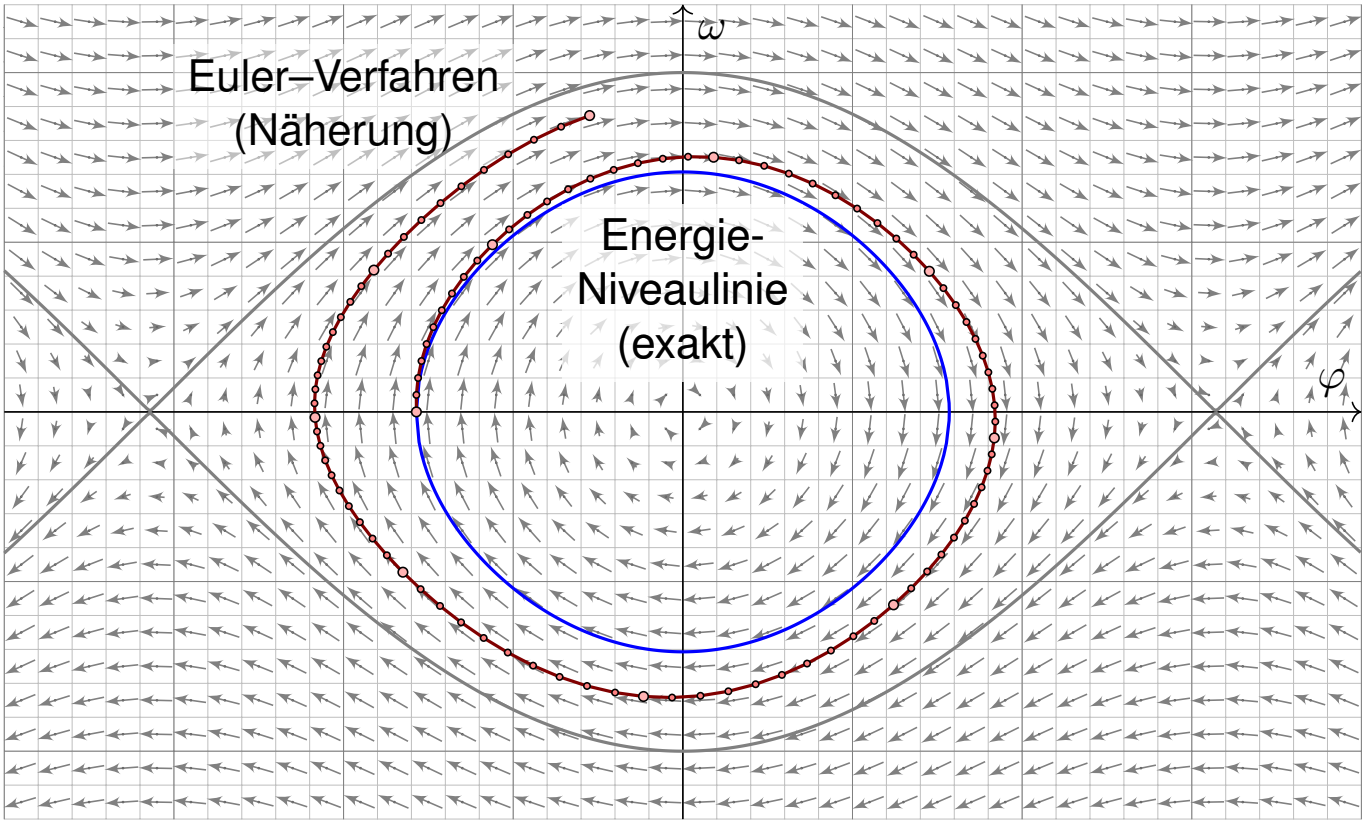


Das mathematische Pendel: Lösungskurven



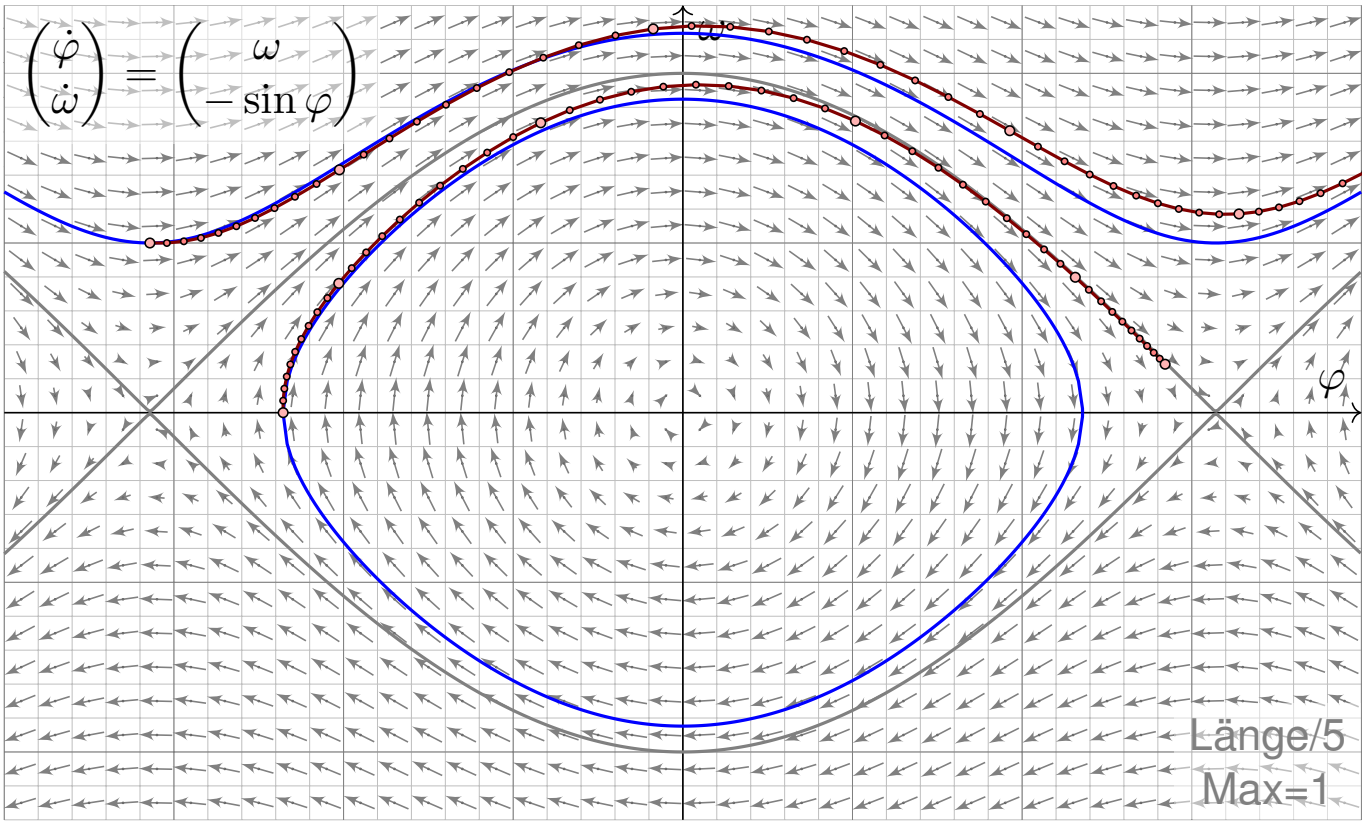
Wir erkennen harmonische Oszillation um das untere Gleichgewicht A. Der obere Scheitelpunkt B hingegen ist ein instabiles Gleichgewicht.

Das mathematische Pendel: Trajektorien



Die Periode dauert etwa $4 \cdot 1.85\mathrm{s} = 7.4\mathrm{s}$: Länger als im linearen Modell!
Das ist physikalisch plausibel: Kraft und Beschleunigung sind geringer.

Das mathematische Pendel: Trajektorien



Wir erkennen deutlich die Abweichungen der Euler–Approximation.
Wie erreichen wir möglichst hohe Präzision bei geringem Aufwand?

Näherungsverfahren: von Euler zu Runge–Kutta

Das Euler–Verfahren wird hier zu didaktischen Zwecken vorgestellt: Es ist besonders einfach. Leider ist es wenig präzise, wie bereits obige Experimente zeigen, und für ernsthafte Anwendungen nicht geeignet!

Auf zwei Weisen können wir die Präzision der Näherung verbessern:

- Wir können kleinere Schritte wählen und so feiner diskretisieren. Das erhöht den Rechenaufwand, der Computer läuft langsamer.
- Wir können ein Verfahren höherer Konvergenzordnung wählen. Das erhöht den Theorieaufwand, der Computer rechnet schneller.

Die numerische Approximation von Differentialgleichungen ist in naturwissenschaftlich-technischen Anwendungen allgegenwärtig. Es gibt hierzu zahlreiche Verfahren, ständig werden weitere entwickelt, auf spezielle Anwendungen angepasst, untersucht und verbessert.

Das bekannteste ist vermutlich das klassische Runge–Kutta–Verfahren (der Ordnung 4, kurz „RK4“). Es ist in der Praxis sehr weit verbreitet und erfreut sich großer Beliebtheit, denn es ist ebenso einfach zu implementieren wie das Euler–Verfahren, aber wesentlich präziser!

Näherungsverfahren: von Euler zu Runge–Kutta

Bildquelle: wikimedia.org

Carl Runge (1856–1927)

Bildquelle: wikimedia.org

Wilhelm Kutta (1867–1944)

Entwickelt hat dieses Verfahren 1895 Carl Runge. Er war 1904–1925 in Göttingen Deutschlands erster Professor für angewandte Mathematik. Weiterentwickelt hat es 1901 Wilhem Kutta, 1912–1935 Professor für Mathematik in Stuttgart. Vor hundert Jahren hätten Sie Ihre Mathematik vermutlich bei ihm gehört. Viele Studierende erinnerten sich später, so heißt es, mit großer Bewunderung an seine einzigartigen Vorlesungen.

Näherungsverfahren: von Euler zu Runge–Kutta

Numerisch zu lösen ist $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$. Gegeben ist zur Zeit t der Zustand $x = x(t)$. Gesucht ist nach Zeitschritt h der Zustand $x(t+h)$.

Zur Erinnerung das **Euler–Verfahren** (Ordnung 1):

$$x(t+h) \approx x(t) + hk_1 \quad \text{mit Zuwachs} \quad k_1 = f(t, x)$$

Hier das **Runge–Kutta–Verfahren** (der Ordnung 4, kurz „RK4“):

$$x(t+h) \approx x(t) + h\,\frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} k_1 = f(t, x), \\ k_2 = f(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}k_1), \\ k_3 = f(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}k_2), \\ k_4 = f(t + h, x + hk_3). \end{cases}$$

Diese raffinierte Rechnung verringert den Approximationsfehler. Die Numerik erklärt wie genau das geht. Zunächst ist k_1 der Zuwachs gemäß des Tangentenvektors zur Zeit t im Punkt x wie bei Eulers Verfahren, dann ist k_2 der Zuwachs zur Mitte des Zeitschritts im Punkt $x + h/2 \cdot k_1$, sodann k_3 der Zuwachs zur Mitte des Zeitschritts aber im Punkt $x + h/2 \cdot k_2$, schließlich ist k_4 der Zuwachs am Ende des Zeitschritts im Punkt $x + hk_3$. Die vier Zuwächse werden gemittelt, wobei die beiden mittleren doppelt zählen. Wenn $f(t, x)$ nur von t und nicht von x abhängt, dann ist dies die numerische Integration gemäß Simpson, auch Keplers Fassregel genannt.

Näherungsverfahren: von Euler zu Runge–Kutta

Die nachfolgenden Graphiken vergleichen Euler und Runge–Kutta.
Das Euler–Verfahren, aka RK1, ist **erster Ordnung**, kurz $O(h)$:

$$\text{GlobalerFehler(Euler)} \le C_{\mathrm{E}}(f) \cdot h$$

Die Konstante hängt von der Funktion f und dem Zeitintervall ab.
Der Fehler $O(h)$ sinkt für $h \to 0$ linear mit der Schrittweite:
Halbe Schrittweite bringt doppelte Genauigkeit.

Das Runge–Kutta–Verfahren ist **vierter Ordnung**, kurz $O(h^4)$:

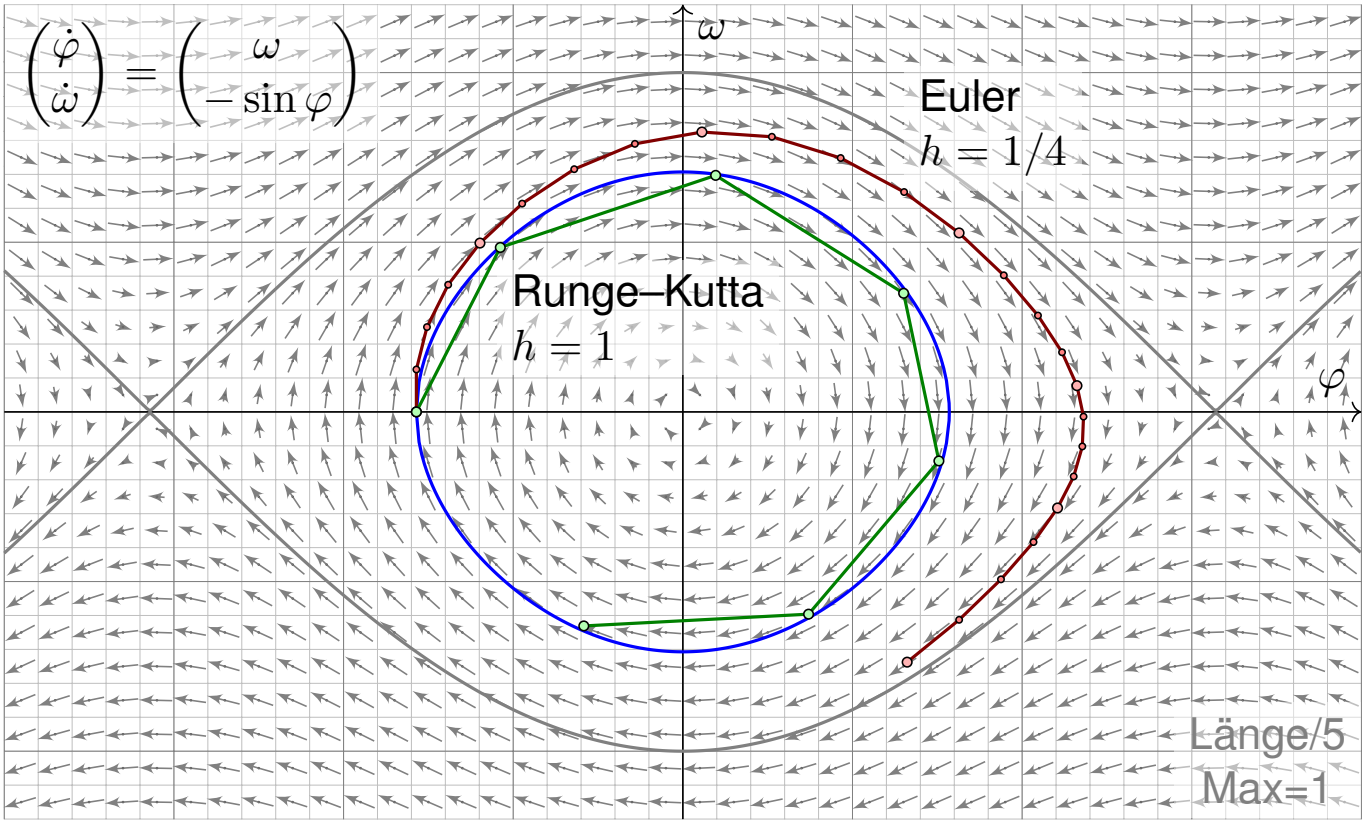
$$\text{GlobalerFehler(RK4)} \le C_{\mathrm{RK}}(f) \cdot h^4$$

Im Vergleich zu $O(h)$ sinkt der Fehler $O(h^4)$ wesentlich schneller:
Halbe Schrittweite bringt sechzehnfache Genauigkeit! Das ist eine dramatische Verbesserung. Die folgenden Graphiken illustrieren dies.

Das Runge–Kutta–Verfahren benötigt vier Auswertungen der Funktion f für jeden Schritt h. Zur Fairness gebe ich dem Euler–Verfahren seine gerechte Schrittweite $h/4$. Dennoch ist Runge–Kutta weit überlegen!

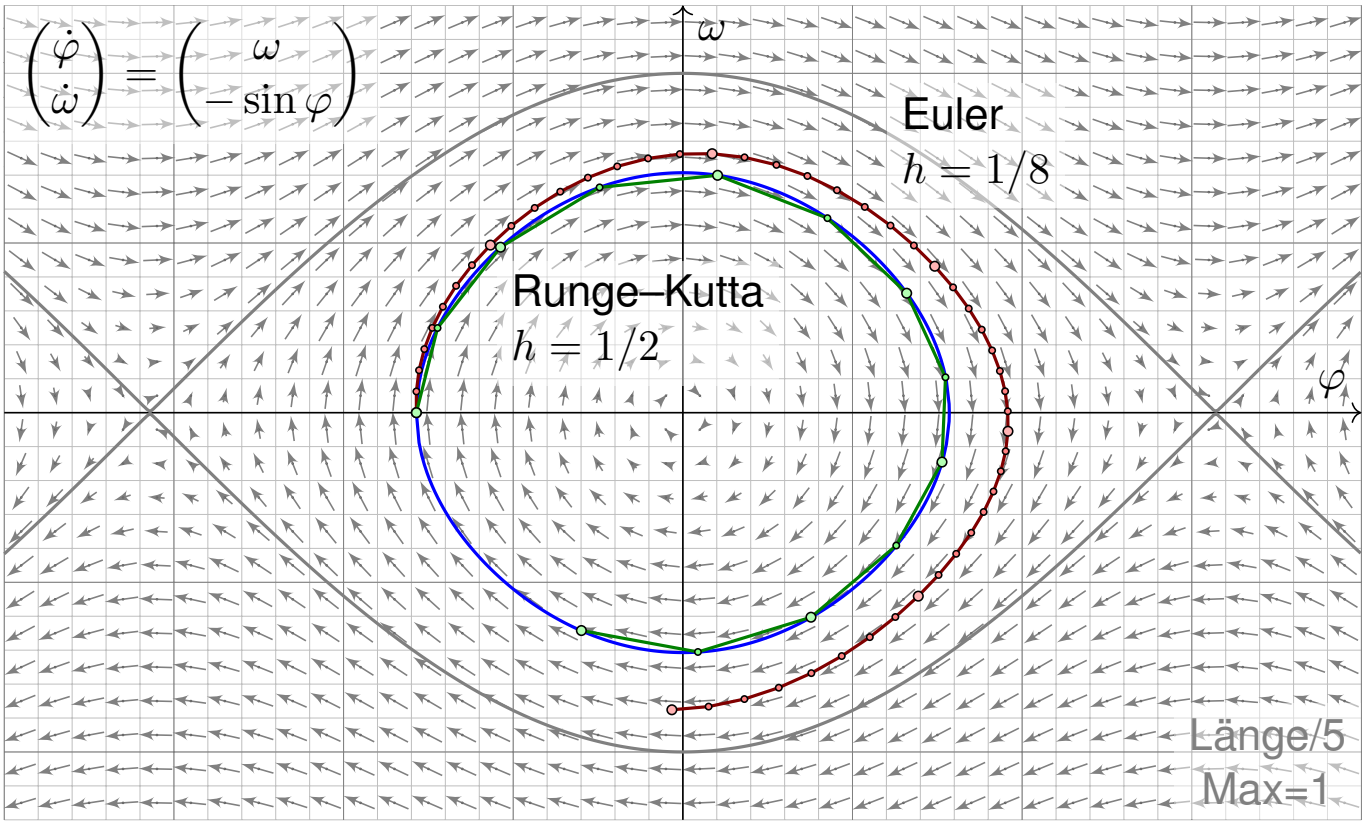
Why Runge-Kutta is so much better than Euler's method. `youtu.be/dShtlMl69kY`

Näherungsverfahren: von Euler zu Runge–Kutta



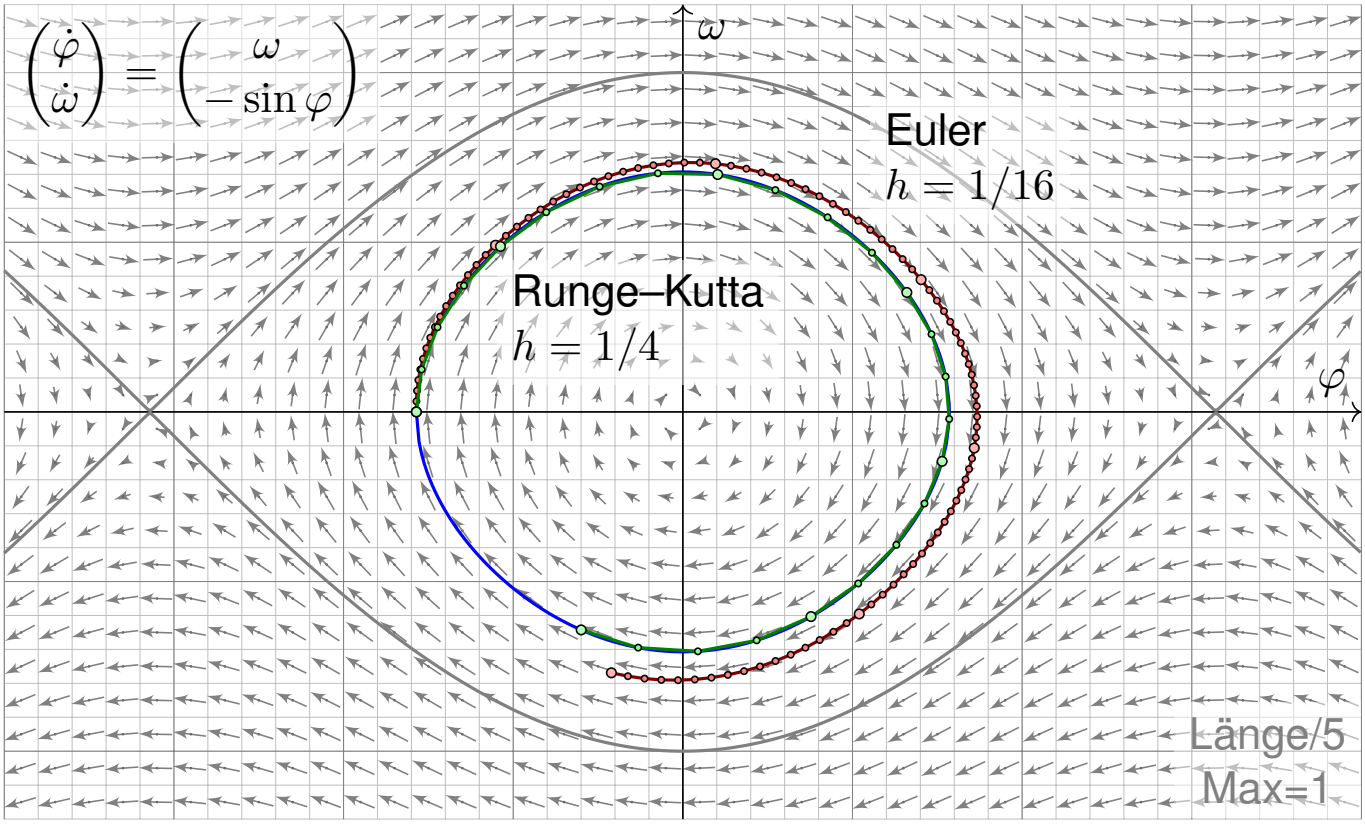
Das Euler–Verfahren (rot) entfernt sich schnell von der exakten Lösung (blau). Das Runge–Kutta–Verfahren (grün) ist bereits recht präzise!

Näherungsverfahren: von Euler zu Runge–Kutta



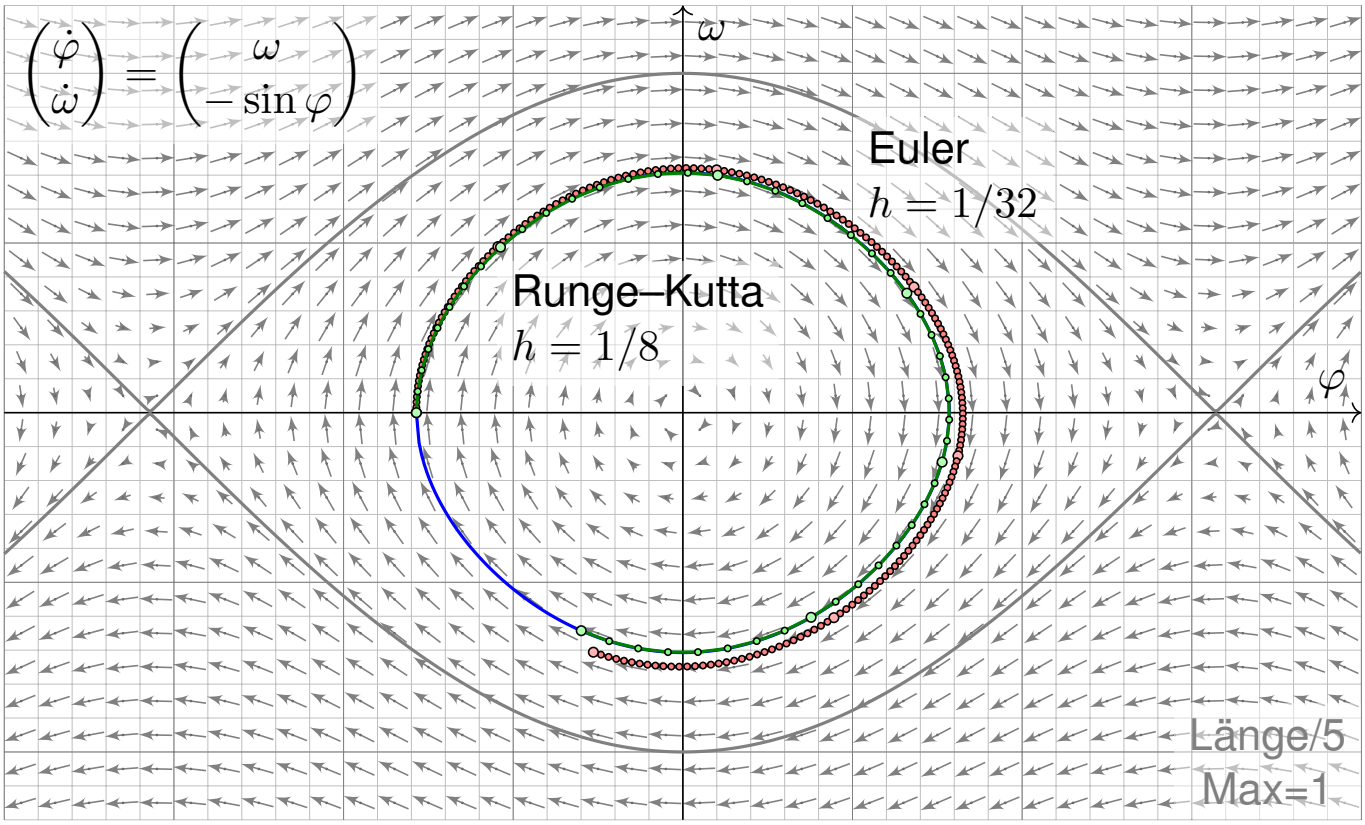
Halbierung der Schrittweite: Das Euler–Verfahren (rot) wird besser. Das Runge–Kutta–Verfahren (grün) scheint weitgehend exakt (blau).

Näherungsverfahren: von Euler zu Runge–Kutta



Halbe Schrittweite: Das Euler–Verfahren (rot) halbiert seinen Fehler.
Das Runge–Kutta–Verfahren (grün) scheint weitgehend exakt (blau).

Näherungsverfahren: von Euler zu Runge–Kutta



Halbe Schrittweite: Das Euler–Verfahren (rot) halbiert seinen Fehler.
Das Runge–Kutta–Verfahren (grün) scheint weitgehend exakt (blau).

Reduktion eines DGSystems auf erste Ordnung

☺ Differentialgleichungen erster Ordnung sind universell: Wir können jede DG n-ter Ordnung auf ein DGSystem erster Ordnung reduzieren! Beispiel: Wir nutzen dies zur Formulierung der Planetenbewegung. O125

Reduktion: Vorgelegt sei eine **Differentialgleichung n-ter Ordnung**:

(1) $$y^{(n)} = f\big(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}\big)$$

Diese können wir umformulieren in ein **DGSystem erster Ordnung**:

(2) $$\begin{cases} y_0' &= y_1 \\ y_1' &= y_2 \\ \vdots & \\ y_{n-2}' &= y_{n-1} \\ y_{n-1}' &= f(t, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \end{cases}$$

Übung: Rechnen Sie diesen genial-einfachen Trick sorgsam nach:
Löst $y : I \to \mathbb{K}$ die DG (1), so löst $(y, y', \dots, y^{(n-1)})$ das DGSystem (2).
Löst $(y_0, \dots, y_{n-1}) : I \to \mathbb{K}^n$ das DGSystem (2), so löst y_0 die DG (1).

DGSysteme: entkoppelte Gleichungen

☺ Es genügt daher, **DGSysteme erster Ordnung** zu untersuchen!

Diese Formulierung ist einfacher und erlaubt starke Werkzeuge:

☺ In jeder Dimension n gilt **Existenz & Eindeutigkeit & Stabilität**.

☺ Der einfachste Fall sind **entkoppelte Gleichungen**:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= f_1(t, y_1(t)) \\ y_2'(t) &= f_2(t, y_2(t)) \\ &\vdots \\ y_n'(t) &= f_n(t, y_n(t)) \end{aligned}$$

Hierzu lösen wir n eindimensionale Differentialgleichungen.
Das können wir schon recht gut, wie zuvor in Kapitel M erklärt.

Beispiel: Wir nutzen dies unten beim Massenwirkungsgesetz. O153

⚠ Im Allgemeinen sind die gegebenen Gleichungen aber gekoppelt.
Für dieses Problem benötigen wir daher passende Rechenmethoden.
Hierzu nutzen wir die Werkzeuge der Analysis und der linearen Algebra!

Reduktion eines linearen DGSystems auf erste Ordnung

O151
Ausführung

Zu lösen sei eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung:

(1) $$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = b(t)$$

Diese ist äquivalent zu einem linearen DGSystem erster Ordnung:

(2) $$\begin{cases} y_0' &= y_1 \\ \vdots & \\ y_{n-2}' &= y_{n-1} \\ y_{n-1}' &= -a_0(t)\, y_0 \quad -a_1(t)\, y_1 \quad \dots \quad -a_{n-1}(t)\, y_{n-1} \quad +b(t) \end{cases}$$

Das entspricht $y'(t) = A(t)\, y(t) + B(t)$ mit zugehöriger Systemmatrix

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \dots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Beispiel: Wir nutzen dies oben für die gekoppelten Oszillatoren. O109
Hierbei nennen wir $A(t)$ die **Begleitmatrix** des Polynoms aus (1).

Lineare DGSysteme: entkoppelte Gleichungen

O152
Ausführung

☺ Besonders wichtig und gut zu lösen sind lineare DGSysteme $y'(t) = A\, y(t) + b(t)$ mit **konstanter Koeffizientenmatrix** $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Diese behandeln wir ausführlich in diesem und im nächsten Kapitel.

☺ Der einfachste Fall sind auch hier **entkoppelte Gleichungen**:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= \lambda_1\, y_1(t) \\ y_2'(t) &= \lambda_2\, y_2(t) \\ &\vdots \\ y_n'(t) &= \lambda_n\, y_n(t) \end{aligned}$$

Die Lösungen $y_k(t) = c_k\, \mathrm{e}^{\lambda_k t}$ können wir sofort ausschreiben!

☺ Oft lassen sich komplexe Lösungen $\mathrm{e}^{(\sigma \pm \mathrm{i}\omega)t}$ leichter berechnen und dann in reelle Lösungen $\mathrm{e}^{\sigma t}\cos(\omega t)$ und $\mathrm{e}^{\sigma t}\sin(\omega t)$ umrechnen.

Beispiel: Wir nutzen dies oben für die gekoppelten Oszillatoren. O109

⚠ Im Allgemeinen sind die gegebenen Gleichungen aber gekoppelt. Für dieses Problem benötigen wir daher passende Rechenmethoden. Hierzu nutzen wir die Werkzeuge der Analysis und der linearen Algebra!

Massenwirkungsgesetz: entkoppeln!

Chemische Substanzen A und B reagieren zu C, kurz: $A + B \overset{k}{\rightsquigarrow} C$.
Wir beobachten ihre Konzentrationen $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ zur Zeit $t \geq 0$.
Für $t = 0$ sind Anfangswerte $a(0) = a_0$, $b(0) = b_0$, $c(0) = 0$ gegeben.
Nach dem Massenwirkungsgesetz ist die Reaktionsrate $k\,a\,b$, also:

$$\begin{aligned} a'(t) &= -k\,a(t)\,b(t) \\ b'(t) &= -k\,a(t)\,b(t) \\ c'(t) &= +k\,a(t)\,b(t) \end{aligned}$$

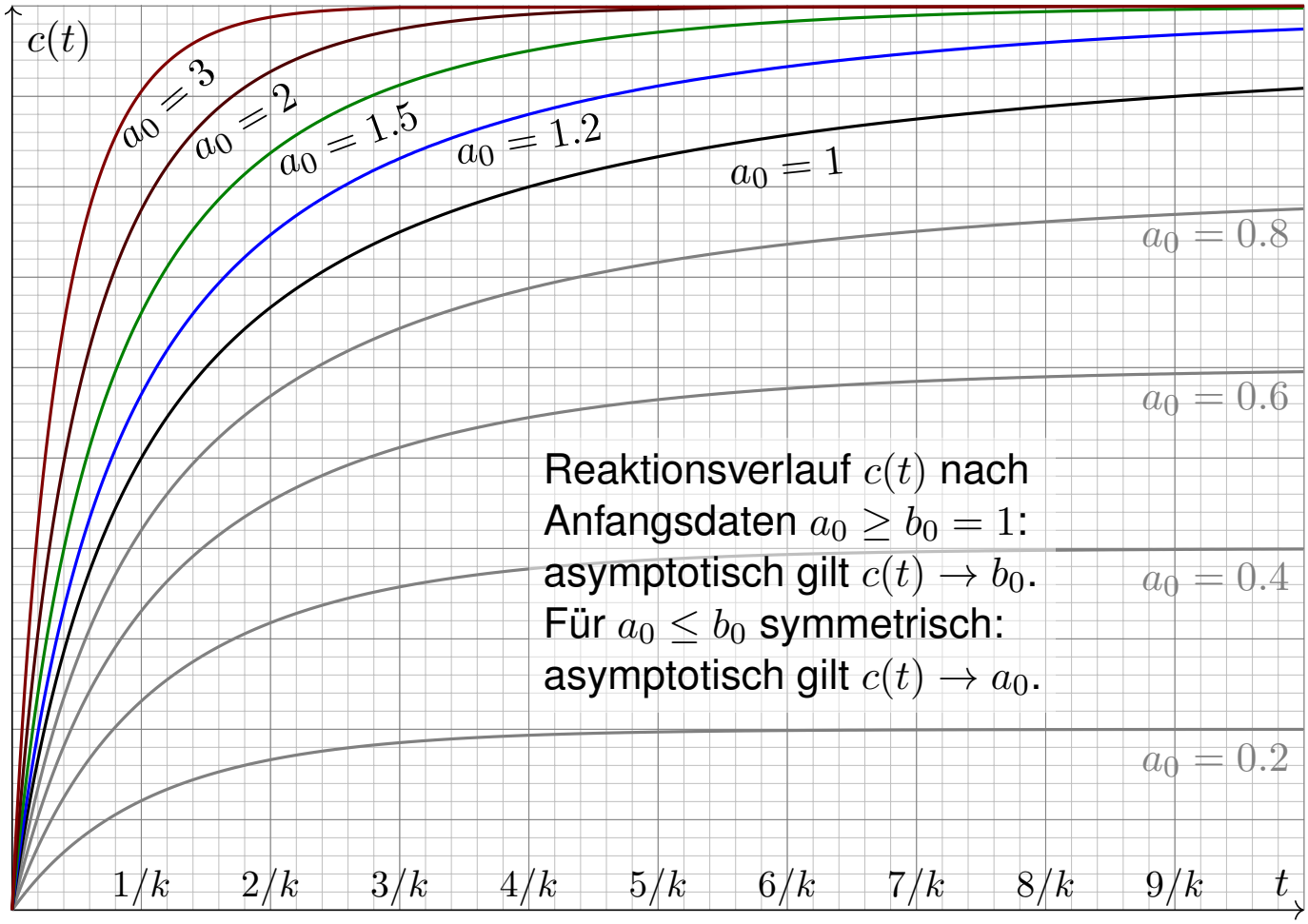
Aufgabe: Gesucht ist die Lösungskurve $y : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^3$, $y(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix}$.

⚠ Dies ist ein nicht-lineares DGSystem! Gibt es Lösungen? mehrere oder nur genau eine? Wie findet man alle Lösungen?

Lösung: Glücklicherweise lässt sich dieses DGSystem explizit lösen. Entkoppeln, Trennung der Variablen und Partialbruchzerlegung ergibt:

$$a(t) = a_0 - c(t), \quad b(t) = b_0 - c(t), \quad c(t) = \frac{a_0 b_0 (\mathrm{e}^{a_0 k t} - \mathrm{e}^{b_0 k t})}{a_0\,\mathrm{e}^{a_0 k t} - b_0\,\mathrm{e}^{b_0 k t}}$$

Massenwirkungsgesetz: entkoppeln!



Massenwirkungsgesetz: entkoppeln!

Lösung: Wir bemerken und nutzen $[a+c]' = 0$ und $[b+c]' = 0$.
Demnach sind $a(t) + c(t) = a_0$ und $b(t) + c(t) = b_0$ Konstanten.
Einsetzen entkoppelt das DGSystem zu $c' = k(a_0 - c)(b_0 - c)$.
Dies entspricht der logistischen Differentialgleichung. M405

Trennung der Variablen und Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned} kt &= \int_{\tau=0}^{t} \frac{c'(\tau)}{[a_0 - c(\tau)][b_0 - c(\tau)]}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{\tau=0}^{t} \frac{1}{a_0 - b_0}\left[\frac{c'(\tau)}{b_0 - c(\tau)} - \frac{c'(\tau)}{a_0 - c(\tau)}\right]\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{a_0 - b_0}\Big[\ln\big(a_0 - c(\tau)\big) - \ln\big(b_0 - c(\tau)\big)\Big]_{\tau=0}^{t} \\ &= \frac{1}{a_0 - b_0}\ln\left[\frac{a_0 - c(t)}{b_0 - c(t)} \Big/ \frac{a_0 - c(0)}{b_0 - c(0)}\right] \end{aligned}$$

Der Anfangswert $c(0) = 0$ vereinfacht dies zu

$$(a_0 - b_0)kt = \ln\left[\frac{a_0 - c(t)}{b_0 - c(t)} \Big/ \frac{a_0}{b_0}\right].$$

Massenwirkungsgesetz: entkoppeln!

Beidseitige Anwendung der Exponentialfunktion liefert:

$$\frac{a_0}{b_0}\,\mathrm{e}^{(a_0 - b_0)kt} = \frac{a_0 - c(t)}{b_0 - c(t)}$$

Wir lösen nach $c(t)$ auf und erhalten schließlich:

$$c(t) = \frac{a_0 b_0(\mathrm{e}^{a_0 kt} - \mathrm{e}^{b_0 kt})}{a_0\,\mathrm{e}^{a_0 kt} - b_0\,\mathrm{e}^{b_0 kt}}$$

Hieraus ergeben sich $a(t) = a_0 - c(t)$ und $b(t) = b_0 - c(t)$.
☺ Damit haben wir unsere Differentialgleichung explizit gelöst!

Für $t \to \infty$ sehen wir den (asymptotischen) Endzustand der Reaktion:

- Für $a_0 > b_0$ gilt $c(t) \to b_0$, also $a(t) \to a_0 - b_0$ und $b(t) \to 0$.
- Für $a_0 < b_0$ gilt $c(t) \to a_0$, also $a(t) \to 0$ und $b(t) \to b_0 - a_0$.
- Der Sonderfall $a_0 = b_0$ liefert analog $c(t) = a_0^2 kt/(akt + 1)$.

☺ Plausibilitätsprüfung: Die Reaktion verläuft gemäß unserer obigen Formel bis schließlich eine der beiden Substanzen verbraucht ist.

Lösung des AWP durch iterierte Integration

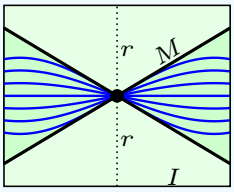
Zum ∃&E-Satz O1B erklären wir eine allgemeine Lösungsmethode, um 1890 entwickelt von Picard und Lindelöf, für das Anfangswertproblem

$$\boxed{y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0.}$$

Der folgende Satz garantiert (1) die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung und zudem (2) ein Konstruktionsverfahren zur Approximation dieser Lösung mit (3) expliziter Fehlerschranke. Was will man mehr?

Geometrische Voraussetzungen für die Picard–Lindelöf–Iteration:

Sei $I = [t_0 - a, t_0 + b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall um t_0 mit $a, b \le T$.
Sei $K = \bar{B}(y_0, r) \subseteq \mathbb{K}^n$ der Ball um y_0 mit Radius $r > 0$.
Sei $f : I \times K \to \mathbb{K}^n$ stetig, somit beschränkt, also $|f| \le M$.
Hierbei gelte $T \cdot M \le r$, notfalls verkleinern wir T und I.



Zudem erfülle f für alle $t \in I$ und $u, v \in K$ die **Lipschitz–Bedingung**

$$\boxed{|f(t, u) - f(t, v)| \le L\,|u - v|.}$$

Ist etwa $f(t, y)$ stetig differenzierbar nach y, so genügt $|\partial f / \partial y| \le L$.

Lösung des AWP durch iterierte Integration

Satz O2A: Picard–Lindelöf–Iteration

Unter den oben erklärten geometrischen Voraussetzungen gilt:

(1) Das Anfangswertproblem hat genau eine Lösung $y : I \to K$.

(2) Die Lösung y ist die Grenzfunktion der Picard–Lindelöf–Iteration

$$u_0 = y_0, \quad u_{n+1}(t) = y_0 + \int_{\tau=t_0}^{t} f(\tau, u_n(\tau))\,\mathrm{d}\tau \quad \text{für } n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

(3) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t \in I$ gilt die gleichmäßige Fehlerschranke

$$\big|y(t) - u_n(t)\big| \;\le\; \max_I \big|u_1 - u_0\big|\,\mathrm{e}^{LT} \cdot \frac{(LT)^n}{n!} \;\to\; 0.$$

(4) Die Lösung y hängt stetig vom Anfangswert y_0 ab: Ist $\tilde{y} : \tilde{I} \to K$ eine Lösung zum Startwert $\tilde{y}(t_0) = \tilde{y}_0$ auf einem Intervall $\tilde{I}$ mit $t_0 \in \tilde{I}$, so laufen die Lösungen y und $\tilde{y}$ höchstens exponentiell auseinander:

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \;\le\; |y_0 - \tilde{y}_0| \cdot \mathrm{e}^{L|t - t_0|} \quad \text{für alle } t \in I \cap \tilde{I}$$

Lösung des AWP durch iterierte Integration

Aufgabe: Lösen Sie durch Picard–Lindelöf–Iteration das AWP

$$\boxed{y'(t) = y(t), \quad y(0) = 1.}$$

Lösung: Sukzessive Approximation gemäß Picard–Lindelöf:

$$\begin{aligned}
u_0(t) &= 1 \\
u_1(t) &= 1 + \textstyle\int_{\tau=0}^{t} u_0(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 1 + t \\
u_2(t) &= 1 + \textstyle\int_{\tau=0}^{t} u_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 1 + t + \tfrac{1}{2}t^2 \\
u_3(t) &= 1 + \textstyle\int_{\tau=0}^{t} u_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 1 + t + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{3!}t^3 \\
u_4(t) &= 1 + \textstyle\int_{\tau=0}^{t} u_3(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 1 + t + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{3!}t^3 + \tfrac{1}{4!}t^4
\end{aligned}$$

Per Induktion und Grenzübergang $n \to \infty$ finden wir die Lösung:

$$u_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \quad \to \quad y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = \exp(t)$$

☺ Probe! Dieselbe Lösung finden wir alternativ durch Separation M1A.

Lösung des AWP durch iterierte Integration

Aufgabe: Lösen Sie durch Picard–Lindelöf–Iteration das AWP

$$\boxed{y'(t) = -t\,y(t), \quad y(0) = 1.}$$

Lösung: Sukzessive Approximation gemäß Picard–Lindelöf:

$$\begin{aligned}
u_0(t) &= 1 \\
u_1(t) &= 1 - \textstyle\int_{\tau=0}^{t} \tau\, u_0(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 1 - \tfrac{1}{2}t^2 \\
u_2(t) &= 1 - \textstyle\int_{\tau=0}^{t} \tau\, u_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 1 - \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{8}t^4 \\
u_3(t) &= 1 - \textstyle\int_{\tau=0}^{t} \tau\, u_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 1 - \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{8}t^4 - \tfrac{1}{48}t^6 \\
u_4(t) &= 1 - \textstyle\int_{\tau=0}^{t} \tau\, u_3(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 1 - \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{8}t^4 - \tfrac{1}{48}t^6 + \tfrac{1}{384}t^8
\end{aligned}$$

Per Induktion und Grenzübergang $n \to \infty$ finden wir die Lösung:

$$u_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k t^{2k}}{2^k k!} \quad \to \quad y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{2^k k!} = \exp(-t^2/2)$$

☺ Probe! Dieselbe Lösung finden wir alternativ durch Separation M1A.

Lösung des AWP durch iterierte Integration

Aufgabe: (A) Sei $y : I \to K$ stetig. Unsere **Differentialgleichung**

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{für alle } t \in I \text{ und } y(t_0) = y_0$$

ist äquivalent zu folgender (für uns vorteilhaften) **Integralgleichung**:

$$y(t) = y_0 + \int_{\tau=t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))\,\mathrm{d}\tau \quad \text{für alle } t \in I$$

Somit sind Lösungen $y : I \to K$ genau die **Fixpunkte** der Abbildung

$$\boxed{\Psi : C(I,K) \to C(I,\mathbb{K}^n), \quad (\Psi u)(t) = y_0 + \int_{\tau=t_0}^{t} f(\tau, u(\tau))\,\mathrm{d}\tau.}$$

(B) Tatsächlich gilt $\Psi : C(I,K) \to C(I,K)$: Wir können Ψ also **iterieren**!

(C) Für je zwei Funktionen $u, v \in C(I,K)$ gilt die **Fehlerschranke**

$$\big|\Psi^n u(t) - \Psi^n v(t)\big| \;\le\; \max_{[t_0,t]} \big|u - v\big| \cdot \frac{L^n |t - t_0|^n}{n!} \;\le\; \max_{I} \big|u - v\big| \cdot \frac{(LT)^n}{n!}.$$

Für $n \to \infty$ gilt $(LT)^n/n! \to 0$. Demnach ist Ψ^n schließlich **kontraktiv**:
Zu $0 < \alpha < 1$ existiert $n \in \mathbb{N}$ sodass $\big|\Psi^n u - \Psi^n v\big|_I \le \alpha \big|u - v\big|_I$ gilt.

Lösung des AWP durch iterierte Integration

Lösung: (A) Dank HDI (B1I). Die Integralgleichung besagt $y = \Psi y$.

(B) Für $u \in C(I,K)$ zeigen wir $\Psi u \in C(I,K)$ durch Nachrechnen:

$$\begin{aligned}
\big|\Psi u(t) - y_0\big| &= \left|\int_{t_0}^{t} f(\tau, u(\tau))\,\mathrm{d}\tau\right| \le \left|\int_{t_0}^{t} \big|f(\tau, u(\tau))\big|\,\mathrm{d}\tau\right| \le \left|\int_{t_0}^{t} M\,\mathrm{d}\tau\right| \\
&= |t - t_0| M \qquad\qquad \le TM \qquad\qquad \le r
\end{aligned}$$

(C) Für $n = 0$ ist die Aussage trivial. Für $n \ge 1$ folgt sie induktiv:

$$\begin{aligned}
\big|\Psi^n u(t) - \Psi^n v(t)\big| &= \left|\int_{t_0}^{t} f(\tau, \Psi^{n-1}u(\tau)) - f(\tau, \Psi^{n-1}v(\tau))\,\mathrm{d}\tau\right| \\
&\le \left|\int_{t_0}^{t} L\,\big|\Psi^{n-1}u(\tau) - \Psi^{n-1}v(\tau)\big|\,\mathrm{d}\tau\right| \\
&\le \left|\int_{t_0}^{t} \max_{[t_0,t]}\big|u - v\big| \cdot \frac{L^n |\tau - t_0|^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}\tau\right| \\
&= \max_{[t_0,t]}\big|u - v\big| \cdot \frac{L^n |t - t_0|^n}{n!} \quad \le \quad \max_{I}\big|u - v\big| \cdot \frac{(LT)^n}{n!}
\end{aligned}$$

Lösung des AWP durch iterierte Integration

Diese Rechnungen beweisen den Satz O2A von Picard–Lindelöf:

Der Raum $C(I,K)$ ist vollständig bezüglich der Supremumsnorm.
Daher können wir auf Ψ den **Fixpunktsatz von Banach** anwenden:

(1) Die Abbildung $\Psi : C(I,K) \to C(I,K)$ hat genau einen Fixpunkt y.
☺ Dank (A) hat unser AWP somit genau eine Lösung $y : I \to K$.

(2) Wir erhalten die Lösung y durch sukzessive Approximation.
☺ Für jede Funktion $u_0 \in C(I,K)$ konvergiert $u_n = \Psi^n u_0$ gegen y.

Für den Fixpunkt $v_0 = y$ liefert die Iteration $v_n = \Psi^n v_0 = y$.
Dank der Fehlerschranke (D) erhalten wir also:

$$\big|y(t) - u_n(t)\big| \;\le\; \max_{[t_0,t]}\big|y-u\big| \cdot \frac{L^n|t-t_0|^n}{n!} \;\le\; \max_{I}\big|y-u\big| \cdot \frac{(LT)^n}{n!}.$$

☺ Die Konvergenz $u_n \to y$ der Approximationen u_n gegen die Lösung y ist demnach mindestens so schnell wie die Konvergenz $(LT)^n/n! \to 0$.

☺ Die in (3) angegebene Verschärfung nutzt nur die Schritte u_0, u_1:
Auf der rechten Seite stehen also nur bereits bekannte Daten.

Lösung des AWP durch iterierte Integration

(3) Wir formulieren die Fehlerschranke nur mit u_0 und u_1:

$$\big|u_n(t) - u_{n+1}(t)\big| = \big|\Psi^n u_0(t) - \Psi^n u_1(t)\big| \le \max_{[t_0,t]}\big|u_0 - u_1\big| \cdot \frac{L^n|t-t_0|^n}{n!}$$

$$\big|u_n(t) - u_{n+p}(t)\big| \le |u_n(t) - u_{n+1}(t)| + \cdots + |u_{n+p-1}(t) - u_{n+p}(t)|$$

$$\le \sum_{k=n}^{\infty} \max_{[t_0,t]}\big|u_0 - u_1\big| \cdot \frac{L^k|t-t_0|^k}{k!} \;\le\; \max_{[t_0,t]}\big|u_1 - u_0\big|\,\mathrm{e}^{L|t-t_0|} \cdot \frac{L^n|t-t_0|^n}{n!}$$

Für $p \to \infty$ erhalten wir die gewünschte Ungleichung für $|u_n(t) - y(t)|$.

(4) Ist $\tilde y : \tilde I \to K$ eine Lösung zum Startwert $\tilde y(t_0) = \tilde y_0$, so gilt dank (A) $\tilde y(t) = \tilde y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \tilde y(\tau))\,\mathrm{d}\tau$. Wir beginnen die Picard–Lindelöf–Iteration mit der Funktion $u_0 = \tilde y$ und erhalten im ersten Schritt die Verschiebung

$$u_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \tilde y(\tau))\,\mathrm{d}\tau = y_0 - \tilde y_0 + u_0(t), \quad \text{dank (3) also}$$

$$\big|y(t) - \tilde y(t)\big| \le \big|y_0 - \tilde y_0\big| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^k|t-t_0|^k}{k!} = |y_0 - \tilde y_0|\,\mathrm{e}^{L|t-t_0|}.$$

Diese nützliche Fehlerschranke untersuchen wir im Folgenden genauer.

Fortsetzungen und maximale Lösungen

Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n \supseteq G \to \mathbb{K}^n$ stetig. Zu lösen sei die Differentialgleichung

$$\boxed{y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{mit Anfangswert} \quad y(t_0) = y_0.}$$

Euler–Polygonzüge und der Peano–Existenzsatz O1A zeigen allgemein die Existenz von lokalen Lösungen. Wir verlangen meist zusätzlich, dass die partielle Ableitung $\partial_y f$ von f nach y existiert und stetig ist. Die Picard–Lindelöf–Iteration O2A löst dann das AWP in einer kleinen Umgebung $(t_0, y_0) \in I \times K \subseteq G$ mit $I = [t_0 - a, t_0 + b]$ und $K = \bar{B}(y_0, r)$.

Satz O2B: Fortsetzungen und maximale Lösungen

Aus der lokalen folgt die globale Lösbarkeit im Inneren G°:

(1) Sei $y : [a, b[\to \mathbb{K}^n$ eine Lösung mit $y'(t) = f(t, y(t))$ für alle $t \in [a, b[$. Verläuft y ganz in einer kompakten Menge $A \Subset G$, so lässt sich y auf das Intervall $[a, b]$ eindeutig fortsetzen zu einer Lösung $y : [a, b] \to \mathbb{K}^n$.

(2) Sind $u : [a, b] \to \mathbb{K}^n$ und $v : [b, c] \to \mathbb{K}^n$ Lösungen mit $u(b) = v(b)$, so lassen sie sich zusammensetzen zu einer Lösung $y : [a, c] \to \mathbb{K}^n$.

Jede Lösung kann so bis zum Rand ∂G (oder ∞) fortgesetzt werden.

Fortsetzungen und maximale Lösungen

Aufgabe: (1) Warum existiert für $t \nearrow b$ ein Grenzwert $y(t) \to w$? Warum ist auch die Fortsetzung $y : [a, b] \to \mathbb{K}^n$ eine Lösung der DG?

(2) Wie ist $y : [a, c] \to \mathbb{K}^n$ definiert? Warum ist y eine Lösung der DG?

(3) Peano O1A und Picard–Lindelöf O2A lösen das AWP zunächst lokal. Wie folgt hieraus die globale Formulierung des ∃&E-Satzes O1B?

Lösung: (1) Die Funktion $f : G \to \mathbb{K}^n$ ist stetig. Auf jedem Kompaktum $A \Subset G$ ist sie beschränkt, also $|f|_A \le M < \infty$. Für $t_1, t_2 \in [a, b[$ folgt:

$$\big|y(t_1) - y(t_2)\big| = \left|\int_{t=t_1}^{t_2} y'(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_{t=t_1}^{t_2} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t\right| \le M\,\big|t_1 - t_2\big|$$

Für $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow b$ ist $(y(t_n))_{n\in N}$ eine Cauchy–Folge, somit konvergent. Wir können also $y : [a, b[\to \mathbb{K}^n$ auf genau eine Weise stetig fortsetzen zu $y : [a, b] \to \mathbb{K}^n$. Unser AWP ist äquivalent zur Integralgleichung

$$y(t) = y_0 + \int_{\tau=t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))\,\mathrm{d}t.$$

Sie gilt für alle $t \in [a, b[$ und per Grenzübergang $t \nearrow b$ auch für $t = b$. Somit ist $y : [a, b] \to \mathbb{K}^n$ auch in b differenzierbar mit $y'(b) = f(b, y(b))$.

Fortsetzungen und maximale Lösungen

(2) Aus Lösungen $u : [a, b] \to \mathbb{K}^n$ und $v : [b, c] \to \mathbb{K}^n$ mit $u(b) = v(b)$ setzen wir die Lösung $y : [a, c] \to \mathbb{K}^n$ zusammen durch Verkleben:

$$y(t) := \begin{cases} u(t) & \text{für } t \in [a, b], \\ v(t) & \text{für } t \in [b, c]. \end{cases}$$

Wegen $u(b) = v(b)$ ist dies wohldefiniert. Wir müssen noch nachweisen, dass y differenzierbar ist und $y'(t) = f(t, y(t))$ für alle $t \in [a, c]$ erfüllt. Dies gilt für $t \in [a, b[$, denn $u : [a, b] \to \mathbb{K}^n$ löst die Differentialgleichung. Dies gilt für $t \in]b, c]$, denn $v : [b, c] \to \mathbb{K}^n$ löst die Differentialgleichung. Die Ableitung in $t = b$ ist linksseitig $y'(b-) = u'(b) = f(b, u(b))$ und rechtsseitig $y'(b+) = v'(b) = f(b, v(b))$. Hurra, beide sind gleich!

(3) Wir lösen $y'(t) = f(t, y(t))$ mit $y(t_0) = y_0$. Bei Start in $(t_0, y_0) \in G^\circ$ existiert eine lokale Lösung $y : [t_0, t_1[\to \mathbb{K}^n$ mit $t_1 > t_0$ dank O1A / O2A.

Im günstigsten Falle $t_1 = \infty$ existiert diese Lösung für alle Zeit $t \geq t_0$. Andernfalls können wir y maximal fortsetzen mit Hilfe von (1) und (2), mögliche Hindernisse sind nur Polstellen oder der Rand ∂G. Genauer:

Fortsetzungen und maximale Lösungen

Sei $\Gamma = \{ (t, y(t)) \mid t \in [t_0, t_1[\} \subseteq G$ der Graph unserer Lösung y. Wir betrachten seinen Abschluss $A = \overline{\Gamma}$ im Inneren $G^\circ \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$.

Kompakter Fall: Ist A kompakt, so können wir y dank (1) eindeutig fortsetzen zu einer Lösung $y : [t_0, t_1] \to \mathbb{K}^n$. Wegen $(t_1, y(t_1)) \in A \subseteq G^\circ$ erlaubt das AWP zu $(t_1, y(t_1))$ eine Lösung $y : [t_1, t_2[\to \mathbb{K}^n$ mit $t_2 > t_1$. Dank (2) können wir diese Lösung ankleben. Wir erreichen schließlich:

Nicht-kompakter Fall: Die folgenden drei Fälle sind möglich:

1. $t_1 = \infty$: Unsere Lösung $y : [t_0, t_1[\to \mathbb{K}^n$ existiert für alle Zeit $t \geq t_0$.
2. $\limsup_{t \nearrow t_1} |y(t)| = \infty$: Unsere Lösung y entkommt nach Unendlich.
3. $\liminf_{t \nearrow t_1} \operatorname{dist}(y(t), \partial G) = 0$: Unsere Lösung y läuft zum Rand ∂G.

In diesen Fällen ist eine Fortsetzung zu $y : [t_0, t_1] \to \mathbb{K}^n$ in G° unmöglich. Also ist unsere Lösung $y : [t_0, t_1[\to \mathbb{K}^n$ maximal nach rechts (für $t \geq t_0$). Entsprechend existiert eine maximale Fortsetzung nach links (für $t \leq t_0$).

☺ Jede gegebene Lösung der Differentialgleichung $y'(t) = f(t, y(t))$ kann beidseitig bis zum Rand ∂G (oder ∞) fortgesetzt werden.

☺ Aus lokaler Eindeutigkeit folgt zudem die globale Eindeutigkeit.

Allgemeine Lösung einer Differentialgleichung

Wir betrachten wie zuvor ein Anfangswertproblem der Form

$$\boxed{y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(\tau) = \eta.}$$

Wir untersuchen nun genauer die Abhängigkeit vom Startpunkt (τ, η).

Hierzu sei $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ offen und $f : \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n \supseteq G \to \mathbb{K}^n : (t, y) \mapsto f(t, y)$ stetig, zudem nach y stetig differenzierbar. Dank ∃&E-Satz O1B existiert ein maximales Definitionsintervall $I = I(\tau, \eta) \subseteq \mathbb{R}$ und eine eindeutige Lösung $y : I \to \mathbb{K}^n : t \mapsto y(t)$. Um die Abhängigkeit von den Startwerten (τ, η) explizit zu notieren, schreiben wir nun genauer $Y(t; \tau, \eta) := y(t)$.

Wir erhalten zusammenfassend die **allgemeine Lösung** $Y : B \to \mathbb{K}^n$:

$$\boxed{\begin{aligned} &B = \{\, (t; \tau, \eta) \in \mathbb{R} \times G \mid t \in I(\tau, \eta) \,\} \\ &Y \;:\; \mathbb{R} \times G \supseteq B \to \mathbb{K}^n \;:\; (t; \tau, \eta) \mapsto Y(t; \tau, \eta) \\ &\partial_t Y(t; \tau, \eta) = f(t, Y(t; \tau, \eta)), \quad Y(\tau; \tau, \eta) = \eta \end{aligned}}$$

Diese Bezeichnung ist leider etwas schwerfällig; sie ist aber notwendig, wenn wir alle Lösungen zugleich betrachten wollen. Insbesondere wollen wir $Y(t; \tau, \eta)$ auch nach τ und η ableiten.

Allgemeine Lösung einer Differentialgleichung

Aufgabe: Finden Sie die allgemeine Lösung der Gleichung $y' = f(x, y)$:

(1) Für $f(x, y) = x^2$ auf dem Definitionsgebiet $G = \mathbb{R}^2$. M109

(2) Für $f(x, y) = y$ auf dem Definitionsgebiet $G = \mathbb{R}^2$. M111

(3) Für $f(x, y) = y^2$ auf dem Definitionsgebiet $G = \mathbb{R}^2$. M113

(4) Für $y' = f(x, y) = -x/y$ auf $G = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \,\}$. M115

Lösung: (1) Die allgemeine Lösung zum AWP $y(\xi) = \eta$ und $y' = x^2$ ist $Y(x; \xi, \eta) = (x^3 - \xi^3)/3 + \eta$ auf ganz $B = \mathbb{R} \times G$. Machen Sie die Probe!

(2) Die allgemeine Lösung zum AWP $y(\xi) = \eta$ und $y' = y$ ist $Y(x; \xi, \eta) = \eta\, \mathrm{e}^{x-\xi}$ auf ganz $B = \mathbb{R} \times G$. Machen Sie die Probe!

(3) Die allgemeine Lösung zum AWP $y(\xi) = \eta$ und $y' = y^2$ ist $Y(x; \xi, \eta) = \eta/(1 - (x - \xi)\eta)$ auf $B = \{\, (x; \xi, \eta) \in \mathbb{R} \times G \mid (x - \xi)\eta < 1 \,\}$.

(4) Die allgemeine Lösung zum AWP $y(\xi) = \eta$ und $y' = -x/y$ ist $Y(x; \xi, \eta) = \sqrt{\eta^2 + \xi^2 - x^2}$ auf $B = \{\, (x; \xi, \eta) \in \mathbb{R} \times G \mid x^2 < \eta^2 + \xi^2 \,\}$.

☺ Immer ist B offen und hierauf Y stetig differenzierbar in $(x; \xi, \eta)$. Das ist kein Zufall, sondern die Aussage des folgenden Satzes.

Glatte Abhängigkeit von den Anfangsdaten

Satz O2C: glatte Abhängigkeit von den Anfangsdaten

Sei $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ offen, $f : G \to \mathbb{K}^n$ stetig und nach y stetig diff'bar.

(1) Die allgemeine Lösung $Y : \mathbb{R} \times G \supseteq B \to \mathbb{K}^n : (t; \tau, \eta) \mapsto Y(t; \tau, \eta)$ zu $y' = f(t, y)$, $y(\tau) = \eta$ ist stetig in $(t; \tau, \eta)$, und $B \subseteq \mathbb{R} \times G$ ist offen.

(2) Zudem ist Y nicht nur nach t, sondern auch nach den Startwerten τ und η stetig partiell differenzierbar.

(3) Die Ableitungen $W = \partial_\eta Y : B \to \mathbb{K}^{n \times n}$ und $z = \partial_\tau Y : B \to \mathbb{K}^n$ erfüllen die homogenen linearen Differentialgleichungen (§O3)

$$\begin{aligned} \partial_t W(t; \tau, \eta) &= \partial_y f(t, Y(t; \tau, \eta))\, W(t; \tau, \eta), \quad & W(\tau; \tau, \eta) &= 1_{n \times n}, \\ \partial_t z(t; \tau, \eta) &= \partial_y f(t, Y(t; \tau, \eta))\, z(t; \tau, \eta), \quad & z(\tau; \tau, \eta) &= -f(\tau, \eta). \end{aligned}$$

Zu festen Startwerten $(\tau, \eta) \in G$ finden wir die Fundamentallösung $W(-; \tau, \eta) : I(\tau, \eta) \to \mathbb{K}^{n \times n}$ wie in Satz O3I, kommutativ Satz O3J. Insbesondere gilt $z(t; \tau, \eta) = -W(t; \tau, \eta)\, f(\tau, \eta)$ für alle $t \in I(\tau, \eta)$.

Glatte Abhängigkeit von den Anfangsdaten

Aufgabe: Schreiben Sie die definierende Differentialgleichung für Y als Integralgleichung. Nutzen Sie (1) und (2), rechnen Sie damit (3) aus!

Lösung: Wir integrieren $\partial_t Y(t; \tau, \eta) = f(t, Y(t; \tau, \eta))$ ab $Y(\tau; \tau, \eta) = \eta$:

$$Y(\tilde\tau; \tau, \eta) = Y(\tau; \tau, \eta) + \int_{t=\tau}^{\tilde\tau} \partial_t Y(t; \tau, \eta)\, \mathrm{d}t = \eta + \int_{t=\tau}^{\tilde\tau} f(t, Y(t; \tau, \eta))\, \mathrm{d}t$$

Wir setzen (1) und (2) voraus. Dank Leibniz–Regel D3B folgt dann (3):

$$\begin{aligned} \partial_\eta Y(\tilde\tau; \tau, \eta) &= \quad 1_{n \times n} + \int_{t=\tau}^{\tilde\tau} \partial_y f(t, Y(t; \tau, \eta))\, \partial_\eta Y(t; \tau, \eta)\, \mathrm{d}t \\ \partial_\tau Y(\tilde\tau; \tau, \eta) &= -f(\tau, \eta) + \int_{t=\tau}^{\tilde\tau} \partial_y f(t, Y(t; \tau, \eta))\, \partial_\tau Y(t; \tau, \eta)\, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen $W = \partial_\eta Y$ und $z = \partial_\tau Y$ erfüllen demnach folgende lineare Differentialgleichungen mit speziellen Anfangswerten:

$$\begin{aligned} \partial_t W(t; \tau, \eta) &= \partial_y f(t, Y(t; \tau, \eta))\, W(t; \tau, \eta), \quad & W(\tau; \tau, \eta) &= 1_{n \times n} \\ \partial_t z(t; \tau, \eta) &= \partial_y f(t, Y(t; \tau, \eta))\, z(t; \tau, \eta), \quad & z(\tau; \tau, \eta) &= -f(\tau, \eta) \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $z(t; \tau, \eta) = -W(t; \tau, \eta)\, f(\tau, \eta)$ für alle $t \in I(\tau, \eta)$.

Sensible Abhängigkeit von den Anfangsdaten

„Kann der Flügelschlag eines Schmetterlings in Stuttgart einen Tornado in Texas auslösen?“

Der berüchtigte **Schmetterlingseffekt** besagt: Kleine Abweichungen der Anfangsdaten können im weiteren Verlauf zu großen Abweichungen führen.

☺ Sie pflanzen sich jedoch höchstens exponentiell fort:

Satz O2D: Auseinanderdriften und Eindeutigkeit

Für je zwei Lösungen $y, \tilde{y} : I \to \mathbb{K}^n$ mit $y' = f(t, y)$ und $\tilde{y} = f(t, \tilde{y})$ gilt

$$\boxed{\big|y(t) - \tilde{y}(t)\big| \;\le\; \big|y(t_0) - \tilde{y}(t_0)\big| \cdot \mathrm{e}^{L|t-t_0|} \quad \text{für alle } t, t_0 \in I.}$$

Hier sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n \supseteq G \to \mathbb{K}^n$ stetig und erfülle die Lipschitz–Bedingung $|f(t, y(t)) - f(t, \tilde{y}(t))| \le L\,|y(t) - \tilde{y}(t)|$ für $t \in I$. Hierzu genügt $|\partial f / \partial y| \le L$ auf jeder Strecke $[(t, y(t)), (t, \tilde{y}(t))]$ für $t \in I$.

⚠ Die exponentielle Ungleichung ist optimal, wie $y'(t) = L\,y(t)$ zeigt: Die Lösungen $y_0\,\mathrm{e}^{L(t-t_0)}$ und $\tilde{y}_0\,\mathrm{e}^{L(t-t_0)}$ laufen exponentiell auseinander.

Sensible Abhängigkeit von den Anfangsdaten

Beweis: Die Funktion y erfüllt $y'(t) = f(t, y(t))$ für alle $t \in I$. Also

$$y(t) \overset{\text{HDI}}{=} y(t_0) + \int_{t_0}^{t} y'(\tau)\,\mathrm{d}\tau \overset{\text{DG}}{=} y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))\,\mathrm{d}\tau.$$

Gleiches gilt für $\tilde{y}$. Wir untersuchen $\varphi(t) := |y(t) - \tilde{y}(t)|$. Für $t \ge t_0$ gilt:

$$\begin{aligned}
0 \le \varphi(t) &= \left| y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))\,\mathrm{d}\tau - \tilde{y}(t_0) - \int_{t_0}^{t} f(\tau, \tilde{y}(\tau))\,\mathrm{d}\tau \right| \\
&\le \big|y(t_0) - \tilde{y}(t_0)\big| + \left| \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau)) - f(\tau, \tilde{y}(\tau))\,\mathrm{d}\tau \right| \\
&\le \big|y(t_0) - \tilde{y}(t_0)\big| + \int_{t_0}^{t} \big|f(\tau, y(\tau)) - f(\tau, \tilde{y}(\tau))\big|\,\mathrm{d}\tau \\
&\le \big|y(t_0) - \tilde{y}(t_0)\big| + \int_{t_0}^{t} L\,\big|y(\tau) - \tilde{y}(\tau)\big|\,\mathrm{d}\tau \\
&= \big|y(t_0) - \tilde{y}(t_0)\big| + L \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

Der Satz folgt dann aus dem folgenden Lemma von Gronwall.

Sensible Abhängigkeit von den Anfangsdaten

Die obige Abschätzung führt uns von Differentialgleichungen zu Ungleichungen. Erste wichtige Beispiele kennen Sie bereits gut: $y' \geq 0$ heißt wachsend, $y' \leq 0$ fallend, $y'' \geq 0$ konvex, $y'' \leq 0$ konkav.

Wir benötigen nun für $\varphi'(t) \leq L\,\varphi(t)$ folgendes grundlegende Lemma:

Lemma O2E: Gronwall 1918

Sei $\varphi : [t_0, t_0 + b] \to \mathbb{R}$ stetig. Aus der impliziten Ungleichung

$$0 \leq \varphi(t) \leq C + L \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_0 + b]$$

mit Konstanten $C, L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ folgt die explizite Ungleichung

$$0 \leq \varphi(t) \leq C\,\mathrm{e}^{L(t-t_0)} \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_0 + b].$$

Im Grenzfall $C = 0$ gilt dann $\varphi(t) = 0$ für alle $t \in [t_0, t_0 + b]$.

☺ Die erste Ungleichung ist *implizit*, da die Funktion φ links und rechts vorkommt. Die zweite Ungleichung liefert eine *explizite* Schranke für φ.

Sensible Abhängigkeit von den Anfangsdaten

Beweis: Zu $0 \leq C < D$ betrachten wir folgende Vergleichsfunktion:

$$\psi(t) = D\,\mathrm{e}^{L(t-t_0)}$$

Sie erfüllt die Gleichung $\psi(t) = D + L \int_{t_0}^{t} \psi(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ für alle $t \geq t_0$.
Es gilt $0 \leq \varphi(t) < \psi(t)$ für $t = t_0$, und wir zeigen dies nun für alle $t > t_0$.
Andernfalls gäbe es einen ersten Zeitpunkt $t_1 > t_0$ mit $\varphi(t_1) = \psi(t_1)$.
Andererseits gilt $\varphi(t) < \psi(t)$ für $t_0 \leq t < t_1$ und somit:

$$\varphi(t_1) \;\leq\; C + L \int_{t_0}^{t_1} \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau \;<\; D + L \int_{t_0}^{t_1} \psi(\tau)\,\mathrm{d}\tau \;=\; \psi(t_1)$$

Demnach ist $\varphi(t_1) = \psi(t_1)$ nicht möglich. Also gilt $\varphi(t) < \psi(t)$ für alle $t \in [t_0, t_0 + b]$. Insbesondere gilt demnach die schwache Ungleichung:

$$0 \leq \varphi(t) \leq D\,\mathrm{e}^{L(t-t_0)} \qquad \text{für alle } t \in [t_0, t_0 + b]$$

Diese Ungleichung bleibt beim Grenzübergang $D \searrow C$ bestehen:

$$0 \leq \varphi(t) \leq C\,\mathrm{e}^{L(t-t_0)} \qquad \text{für alle } t \in [t_0, t_0 + b]$$

Damit ist die Ungleichung von Gronwalls Lemma O2E bewiesen.

Fehlerschranke für Näherungslösungen

In praktischen Anwendungen stehen wir vor folgendem Problem:

Anfangsdaten sind oft zufälligen kleinen Schwankungen unterworfen, etwa durch kleine äußere Störungen oder durch ungenaue Messdaten.

Statt der exakten Daten (t_0, y_0) kennen wir oft nur eine Näherung $(\tilde{t}_0, \tilde{y}_0)$ sowie (hoffentlich gute) Fehlerschranken $|t_0 - \tilde{t}_0| \le \delta$ und $|y_0 - \tilde{y}_0| \le \eta$.

Auch das Vektorfeld f unserer Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ ist oft nicht exakt bekannt, etwa aufgrund ungenauer von Daten. Wir arbeiten daher mit einer Näherung $\tilde{f}$ sowie einer Fehlerschranke $|f - \tilde{f}| \le \varepsilon$.

Manchmal ist die rechte Seite f auch schlicht zu kompliziert und wir wollen sie durch eine Vereinfachung $\tilde{f}$ ersetzen, also „runden“. M448

Statt der richtigen Gleichung $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$ lösen wir die benachbarte (etwas falsche) Gleichung $\tilde{y}'(t) = \tilde{f}(t, \tilde{y}(t))$, $\tilde{y}(\tilde{t}_0) = \tilde{y}_0$.

Unsere berechnete (etwas falsche) Näherungslösung $\tilde{y}$ weicht von der richtigen (aber uns unbekannten) Lösung y ab. Es ist daher wichtig, den möglichen Fehler zu kontrollieren. Dies leistet die folgende Schranke!

Fehlerschranke für Näherungslösungen

Satz O2F: Fehlerschranke für Näherungslösungen

Wir vergleichen eine exakte Lösung y mit einer Näherungslösung $\tilde{y}$:

$$\begin{aligned} &y : I \to \mathbb{K}^n, \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t) = f(t, y(t)) \text{ für alle } t \in I, \\ &\tilde{y} : I \to \mathbb{K}^n, \quad \tilde{y}(\tilde{t}_0) = \tilde{y}_0, \quad |\tilde{y}'(t) - f(t, \tilde{y}(t))| \le \varepsilon(t). \end{aligned}$$

Unter folgenden Voraussetzungen gilt für alle $t \in I$ die Fehlerschranke

$$\boxed{\big|y(t) - \tilde{y}(t)\big| \le \big[|y_0 - \tilde{y}_0| + M\,|t_0 - \tilde{t}_0|\big]\,\mathrm{e}^{L|t-t_0|} + \varepsilon(t)\,\frac{\mathrm{e}^{L|t-t_0|}-1}{L} :}$$

Die hierzu nötigen Daten ε, L, M bestimmen wir nach folgenden Regeln:

(1) Sei $I = [t_0 - a, t_0 + b]$. Sei $f : I \times \mathbb{K}^n \supseteq G \to \mathbb{K}^n$ stetig und erfülle die Lipschitz–Bedingung $|f(t, y(t)) - f(t, \tilde{y}(t))| \le L\,|y(t) - \tilde{y}(t)|$ für $t \in I$. Hierzu genügt $|\partial f / \partial y| \le L$ auf jeder Strecke $[(t, y(t)), (t, \tilde{y}(t))]$ für $t \in I$.

(2) Die Schranke $\varepsilon : I \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ sei monoton fallend links, auf $[t_0 - a, t_0]$, und monoton wachsend rechts, auf $[t_0, t_0 + b]$; etwa eine Konstante.

(3) Es gelte $|\tilde{y}(t_0) - \tilde{y}(\tilde{t}_0)| \le M\,|t_0 - \tilde{t}_0|$; etwa $|\tilde{y}'| \le M = \max|f| + \varepsilon$.

Bedeutung der Fehlerschranke

Die umfassende Fehlerschranke O2F garantiert eine allgemeine und quantitative Stetigkeitsaussage. Ich betone zwei wichtige Spezialfälle:

Aufgabe: Was besagt O2F für (1) $\varepsilon = 0$ und (2) $(t_0, y_0) = (\tilde{t}_0, \tilde{y}_0)$?

Erster Spezialfall: Im Falle $\varepsilon = 0$ ist neben y auch $\tilde{y}$ eine exakte Lösung, allerdings statt (t_0, y_0) mit anderen Startwerten $(\tilde{t}_0, \tilde{y}_0)$.
Die Lösungen y und $\tilde{y}$ laufen höchstens exponentiell auseinander:

$$\big|y(t) - \tilde{y}(t)\big| \le \Big[|y_0 - \tilde{y}_0| + M|t_0 - \tilde{t}_0|\Big]\, \mathrm{e}^{L|t-t_0|}$$

☺ Das zeigt insbesondere stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten: Wenn die Startwerte (t_0, y_0) und $(\tilde{t}_0, \tilde{y}_0)$ sich nur wenig unterscheiden, so unterscheiden sich auch die zugehörigen Lösungen y und $\tilde{y}$ wenig.

☺ Bei gleichen Startzeitpunkten $t_0 = \tilde{t}_0$ ist dies der obige Satz O2D. Im Allgemeinen Fall gilt $|\tilde{y}(t_0) - \tilde{y}(\tilde{t}_0)| \le M|t_0 - \tilde{t}_0|$, so dass umgekehrt auch Satz O2D zur obigen, etwas allgemeineren Ungleichung führt.

☺ Aus $(t_0, y_0) = (\tilde{t}_0, \tilde{y}_0)$ folgt die wichtige Eindeutigkeitsaussage, wie wir sie von Cauchy O1B und Picard–Lindelöf O2A bereits kennen.

Bedeutung der Fehlerschranke

Zweiter Spezialfall: Bei gleichen Startwerten $(t_0, y_0) = (\tilde{t}_0, \tilde{y}_0)$ gilt:

$$\big|y(t) - \tilde{y}(t)\big| \le \varepsilon(t)\, \tfrac{\mathrm{e}^{L|t-t_0|}-1}{L}$$

☺ Hier erfüllt $\tilde{y}$ die Differentialgleichung $y'(t) = f(t, y(t)$ nicht exakt, sondern näherungsweise gemäß $|\tilde{y}'(t) - f(t, \tilde{y}(t))| \le \varepsilon(t)$ für alle $t \in I$. Glücklicherweise entfernt sich $\tilde{y}$ auch hier höchstens exponentiell von y.

☺ Für exakte Lösungen, $\varepsilon = 0$, folgt erneut die Eindeutigkeitsaussage, wie wir sie von Cauchy O1B und Picard–Lindelöf O2A bereits kennen.

☺ Auch diese Ungleichung zeigt eine stetige Abhängigkeit: Wenn wir $y(t_0) = y_0$ festhalten und die rechte Seite von $y'(t) = f(t, y(t))$ wenig ändern zu $\tilde{f}$ mit $|f - \tilde{f}| \le \varepsilon$, so ändert sich auch die Lösung $\tilde{y}$ nur wenig.

☺ Dies können wir zum „Runden“ der rechten Seite f nutzen. M448

Allgemeiner Fall: Die umfassende Fehlerschranke aus Satz O2F ist die Summe von zwei anschaulich leicht verständlichen Beiträgen: der Fehler der Anfangsdaten $(\tilde{t}_0, \tilde{y}_0)$ und der Fehler der rechten Seite $\tilde{f}$.

☺ Die Abschätzungen ε, L, M liefern unsere explizite Fehlerschranke!

Anwendung der Fehlerschranke

Aufgabe: (1) Finden Sie alle Funktionen $y : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit

$$\boxed{y'(t) = y(t)^2, \quad y(0) = 0.25.}$$

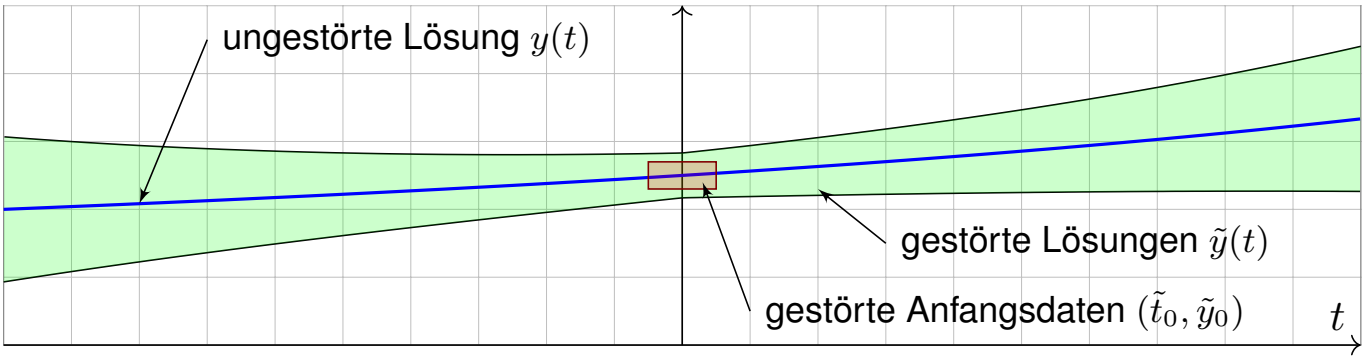
(2) Wie verlaufen Lösungen $\tilde{y} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ der gestörten Gleichung?

(a)	$\tilde{y}'(t) = \tilde{y}(t)^2 + 0.01 \sin(t^2 + 9000\, y(t))$,	$\tilde{y}(0.05) = 0.27$
(b)	$\tilde{y}'(t) = \tilde{y}(t)^2 - 0.08\, \tilde{y}(t)^3$,	$\tilde{y}(0.04) = 0.23$
(c)	$\tilde{y}'(t) = \tilde{y}(t)^2 + \tilde{g}(t, \tilde{y}(t))$,	$\tilde{y}(\tilde{t}_0) = \tilde{y}_0$

mit $|\tilde{g}| \le \varepsilon = 0.01$ sowie $|t_0 - \tilde{t}_0| \le \delta = 0.05$ und $|y_0 - \tilde{y}_0| \le \eta = 0.02$.
Nutzen Sie die Schranke O2F mit möglichst guten Konstanten M, L.

Lösung: (1) Separation, Lösung $y(t) = 1/(4 - t)$, Probe! Eindeutigkeit!
(2) Wir prüfen bzw. schaffen die geometrischen Voraussetzungen:
Wir haben das Intervall $I = [-1, 1]$ um $t_0 = 0$ vom Radius $T = 1$.
Wir wählen $K = \bar{B}(y_0, r) = [0, 0.5]$ um $y_0 = 0.25$ mit Radius $r = 0.25$.
Hierauf ist $f : I \times K \to \mathbb{R}$ beschränkt durch $|f| \le M := 0.25$.
Dank $\partial f / \partial y = 2y$ ist f Lipschitz mit $L = \max_{I \times K} |\partial f / \partial y| = 1$.

Anwendung der Fehlerschranke



(a/b/c) Für Lösungen $\tilde{y} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ gilt dank O2F die Fehlerschranke

$$\begin{aligned} \big|y(t) - \tilde{y}(t)\big| &\le \Big[|y_0 - \tilde{y}_0| + (M + \varepsilon)|t_0 - \tilde{t}_0|\Big]\, \mathrm{e}^{L|t - t_0|} + \frac{\varepsilon}{L}\Big[\mathrm{e}^{L|t - t_0|} - 1\Big] \\ &\le \big[0.02 + 0.26 \cdot 0.05\big]\, \mathrm{e}^{|t|} + 0.01\big[\mathrm{e}^{|t|} - 1\big] = 0.043\, \mathrm{e}^{|t|} - 0.01. \end{aligned}$$

Die Graphik zeigt die ungestörte Lösung y und den möglichen Verlauf gestörter Lösungen $\tilde{y}$. Probe: $\tilde{y}$ verläuft tatsächlich ganz in $K = [0, 0.5]$.

☺ Meist können wir den Verlauf gestörter Lösungen $\tilde{y}(t)$ nicht genau bestimmen, aber wir können ihn immerhin recht präzise eingrenzen!

Beweis der Fehlerschranke

Aufgabe: Beweisen Sie die Fehlerschranke O2F analog zu Satz O2D.

Lösung: Wir betrachten die Differenz $\varphi(t) := |y(t) - \tilde{y}(t)|$. Es gilt:

$$0 \le \varphi(t) = \left| y(t_0) + \int_{t_0}^{t} y'(\tau)\,\mathrm{d}\tau - \tilde{y}(\tilde{t}_0) + \tilde{y}(\tilde{t}_0) - \tilde{y}(t_0) - \int_{t_0}^{t} \tilde{y}'(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right|$$

$$\le \underbrace{\left|y_0 - \tilde{y}_0\right| + M\left|t_0 - \tilde{t}_0\right|}_{=:\,C} + \left| \int_{t_0}^{t} y'(\tau) - \tilde{y}'(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right|$$

Wir nehmen nun $t \ge t_0$ an. Für das letzte Integral finden wir:

$$\left| \int_{t_0}^{t} y'(\tau) - \tilde{y}'(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right| = \left| \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau)) - f(\tau, \tilde{y}(\tau)) + f(\tau, \tilde{y}(\tau)) - \tilde{y}'(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right|$$

$$\le \int_{t_0}^{t} \left| f(\tau, y(\tau)) - f(\tau, \tilde{y}(\tau)) \right| + \left| f(\tau, \tilde{y}(\tau)) - \tilde{y}'(\tau) \right| \mathrm{d}\tau$$

$$\le \int_{t_0}^{t} L\left|y(\tau) - \tilde{y}(\tau)\right| + \varepsilon(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{t_0}^{t} L\,\varphi(\tau) + \varepsilon(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Wir erhalten so die Ungleichung $0 \le \varphi(t) \le C + \int_{t_0}^{t} L\varphi(\tau) + \varepsilon(\tau)\,\mathrm{d}\tau$.

Beweis der Fehlerschranke

Trick: Zu $0 \le C < D$ betrachten wir folgende Vergleichsfunktion:

$$\psi(t) = D\,\mathrm{e}^{L|t-t_0|} + \varepsilon(t)\,\frac{\mathrm{e}^{L|t-t_0|}-1}{L}$$

Sie erfüllt die Ungleichung $\psi(t) \ge D + \int_{t_0}^{t} L\psi(\tau) + \varepsilon(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ für alle $t \ge t_0$.
Es gilt $0 \le \varphi(t) < \psi(t)$ für $t = t_0$, und wir zeigen dies nun für alle $t > t_0$.
Andernfalls gäbe es einen ersten Zeitpunkt $t_1 > t_0$ mit $\varphi(t_1) = \psi(t_1)$.
Andererseits gilt $\varphi(t) < \psi(t)$ für $t_0 \le t < t_1$ und somit:

$$\varphi(t_1) \;\le\; C + \int_{t_0}^{t_1} L\varphi(\tau) + \varepsilon(\tau)\,\mathrm{d}\tau \;<\; D + \int_{t_0}^{t_1} L\psi(\tau) + \varepsilon(\tau)\,\mathrm{d}\tau \;\le\; \psi(t_1)$$

Demnach ist $\varphi(t_1) = \psi(t_1)$ nicht möglich. Also gilt $\varphi(t) < \psi(t)$ für alle $t \in [t_0, t_0 + b]$. Insbesondere gilt demnach die schwache Ungleichung:

$$0 \le \varphi(t) \le D\,\mathrm{e}^{L|t-t_0|} + \varepsilon(t)\,\frac{\mathrm{e}^{L|t-t_0|}-1}{L} \qquad \text{für alle } t \in [t_0, t_0 + b]$$

Diese Ungleichung bleibt beim Grenzübergang $D \searrow C$ bestehen:

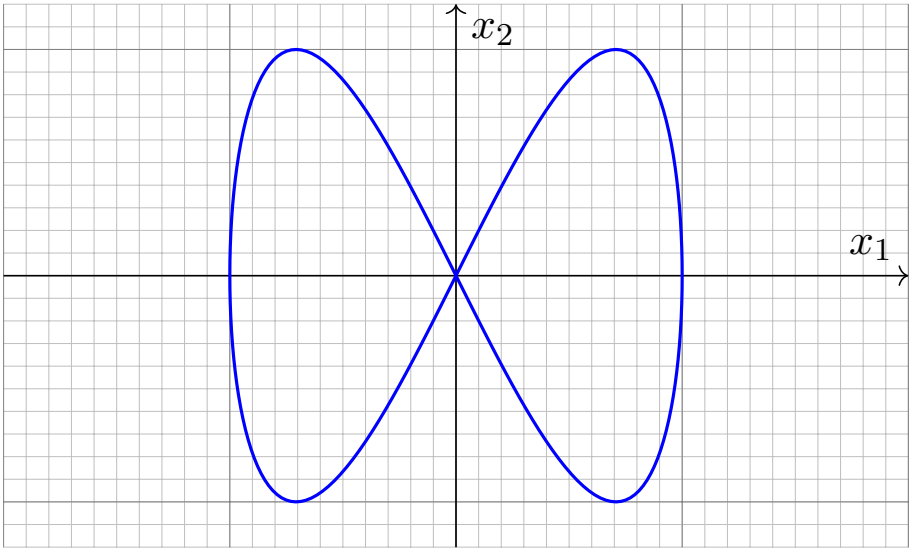
$$0 \le \varphi(t) \le C\,\mathrm{e}^{L|t-t_0|} + \varepsilon(t)\,\frac{\mathrm{e}^{L|t-t_0|}-1}{L} \qquad \text{für alle } t \in [t_0, t_0 + b]$$

Ebenso für $t \in [t_0 - a, t_0]$. Damit ist die Ungleichung O2F bewiesen.

Verständnisfragen zu Existenz und Eindeutigkeit

O229
Ausführung

Aufgabe: (1) Skizzieren Sie $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\sin(t), \sin(2t))$. Kann dies Lösung eines dynamischen Systems $\dot{x} = f(x)$ mit $f \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ sein?



(2) Können sich bei einem automomen dynamischen System $\dot{x} = f(x)$ zwei Lösungen u, v kreuzen mit $u(t_1) = v(t_2)$ und $\dot{u}(t_1) \neq \dot{v}(t_2)$?

(3) Können sich bei einem System $\dot{x} = f(x)$ mit $f \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ zwei verschiedene Lösungen kreuzen mit $u(t_1) = v(t_2)$ und $\dot{u}(t_1) = \dot{v}(t_2)$?

Verständnisfragen zu Existenz und Eindeutigkeit

O230
Ausführung

Lösung: (1) Für $t = 0$ gilt $u(0) = (0, 0)$ und $\dot{u}(0) = (1, 2)$. Für $t = \pi$ gilt ebenfalls $u(\pi) = (0, 0)$ aber $\dot{u}(\pi) = (-1, 2)$. Demnach müsste sowohl $f(0, 0) = (1, 2)$ als auch $f(0, 0) = (-1, 2)$ gelten, ein Widerspruch!

(2) Nein, das ist unmöglich! Teil (1) zeigt ein Beispiel, nun allgemein: Jede Lösung $u : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}^2$ erfüllt $\dot{u}(t) = f(u(t))$ für alle $t \in I$, auch die Lösung $v : \mathbb{R} \supseteq J \to \mathbb{R}^2$ erfüllt $\dot{v}(t) = f(v(t))$ für alle $t \in J$. Aus $u(t_1) = v(t_2)$ folgt zwingend $\dot{u}(t_1) = f(u(t_1)) = f(v(t_2)) = \dot{v}(t_2)$.

☺ Der Eindeutigkeitssatz vereinfacht die Geometrie von Lösungen.

(3) Ja, solche Beispiele kennen wir von der Wasseruhr M123 oder M325.

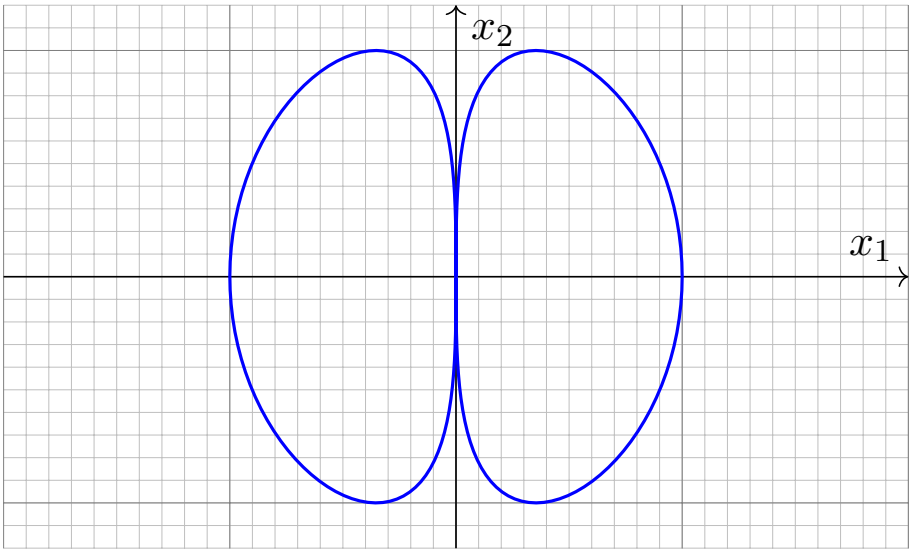
Das Vektorfeld $f(x_1, x_2) = (1, 3\sqrt[3]{x_2^2})$ definiert das System $\dot{x} = f(x)$. Dieses Vektorfeld ist stetig aber nicht stetig differenzierbar.

Unendlich viele Lösungen laufen durch den Startpunkt $x(0) = (0, 0)$, zum Beispiel $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $u(t) = (t, 0)$ und $v(t) = (t, t^3)$.

☹ Ohne Eindeutigkeit wird das Problem komplizierter.

Verständnisfragen zu Existenz und Eindeutigkeit

Aufgabe: (4) Skizzieren Sie $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\sin(t)^3, \sin(2t))$. Kann dies Lösung eines dynamischen Systems $\dot{x} = f(x)$ mit $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ sein?



(5) Wir betrachten ein System $\dot{x} = f(x)$ mit $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Erfüllt eine Lösung u zudem $u(\tau) = u(0)$ für ein $\tau > 0$, ist sie dann τ–periodisch?

Verständnisfragen zu Existenz und Eindeutigkeit

Lösung: (4) Für $\tau \in \{0, \pi\}$ gilt $u(\tau) = (0, 0)$ und $\dot{u}(\tau) = f(0, 0) = (0, 2)$. Laut Aufgabenstellung wird hier f stetig differenzierbar vorausgesetzt. Wir können daher den Eindeutigkeitssatz O1B nutzen:

Bei gleichen Startwerten muss der weitere Verlauf identisch sein; im vorliegenden Fall bedeutet das $u(t) = u(\pi + t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Die vorgelegte Funktion u ist aber nicht π–periodisch!

⚠ Ist f nur stetig (und nicht zudem stetig differenzierbar), dann ist eine solche exotische Lösung durchaus möglich.

(5) Ja. Teil (4) zeigt ein Gegenbeispiel, allgemein gilt folgendes:

Sei $u : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}^n$ eine maximale Lösung mit $0, \tau \in I$ und $\tau > 0$. Wir verschieben u: Hierzu sei $J = I - \tau$ und $v : J \to \mathbb{R}^n : t \mapsto u(t + \tau)$. Die beiden Funktionen u und v sind Lösungen des autonomen Systems $\dot{x} = f(x)$ mit $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ zum selben Startpunkt $u(0) = v(0)$. Dank Eindeutigkeitssatz O1B sind sie gleich, also $u(t) = v(t) = u(t + \tau)$. Insbesondere lässt sich u periodisch fortsetzen, also gilt $I = \mathbb{R}$.

Beispielfamilie zu Existenz und Eindeutigkeit

Aufgabe: Sei $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$. Finden Sie alle maximalen Lösungen

$$\begin{array}{llll} (1) & y : I \to \mathbb{R}_{>0} & \text{mit} & y'(t) = y(t)^\alpha, \\ (2) & y : I \to \mathbb{R}_{\geq 0} & \text{mit} & y'(t) = y(t)^\alpha, \\ (3) & y : I \to \mathbb{R} & \text{mit} & y'(t) = |y(t)|^\alpha. \end{array}$$

(a) Ist die rechte Seite (stetig) differenzierbar? Ist sie (lokal) Lipschitz?

(b) Zu welchen Anfangswerten $y(t_0) = y_0$ ist die Lösung eindeutig?

(c) Quantitative Lösung: Berechnen Sie alle maximalen Lösungen.

(d) Diskutieren und zeichnen Sie insbesondere die Fälle $\alpha = 1/2, 1, 2$.

Der Fall $\alpha = 0$ ist trivial. Bei $\alpha < 0$ hätten wir eine Polstelle in $y = 0$.
Zur Vereinfachung nehmen wir im Folgenden kurzerhand $\alpha > 0$ an.
Wir lassen auch gebrochene Exponenten zu, zum Beispiel $y^{1/2} = \sqrt{y}$.
Bei (3) müssen wir den Absolutbetrag nehmen, denn $\sqrt{-1}$ ist nicht reel.
Wir setzen $|y|^\alpha := \exp(\alpha \ln|y|)$ für $y \neq 0$ dabei stetig fort durch $0^\alpha := 0$.
Aus Kapitel M kennen wir bereits die illustrativen Beispiele $y' = y$ M111 und $y' = y^2$ M113 sowie $y' = -2\sqrt{|y|}$ M123 und $y' = \sqrt[3]{y^2}$ M325.

Beispielfamilie zu Existenz und Eindeutigkeit

Lösung: (1a) Die rechte Seite $f(t, y) = y^\alpha$ ist stetig differenzierbar mit $\partial f / \partial y = \alpha y^{\alpha-1}$; sie erfüllt demnach lokal eine Lipschitz–Bedingung.
(1b) Wir können den ∃&E-Satz M1C anwenden, sogar Separation M1A.
Zum Anfangswert $y(t_0) = y_0 > 0$ ist die Lösung $y : I \to \mathbb{R}_{>0}$ eindeutig.
Zwei verschiedene (maximale) Lösungen können sich nicht schneiden.
(1c) Wir lösen diese Gleichung durch Separation: $y^{-\alpha}(t)\, y'(t) = 1$.

$$\alpha = 1: \quad \ln y(t) = t - c \quad \Rightarrow \quad y(t) = \mathrm{e}^{t-c} = C\,\mathrm{e}^t,\ C > 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\alpha > 1: \quad \frac{y(t)^{1-\alpha}}{1-\alpha} = t - c \quad \Rightarrow \quad y(t) = \big[(\alpha-1)(c-t)\big]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad t < c$$

$$\alpha < 1: \quad \frac{y(t)^{1-\alpha}}{1-\alpha} = t - c \quad \Rightarrow \quad y(t) = \big[(1-\alpha)(t-c)\big]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad t > c$$

⚠ Nur für $\alpha = 1$ existiert die Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ für alle Zeit $t \in \mathbb{R}$.
Für $\alpha > 1$ läuft jede Lösung in eine Polstelle: Für $t \nearrow c$ gilt $y(t) \nearrow \infty$.
Für $0 < \alpha < 1$ läuft jede Lösung y gegen Null: Für $t \searrow c$ gilt $y(t) \searrow 0$.
Für $\alpha \neq 1$ ist deshalb das Lösungsintervall rechts / links beschränkt.
☺ Dank (1b) sind dies die einzigen Lösungen; das vereinfacht enorm.

Beispielfamilie zu Existenz und Eindeutigkeit

(2a) Für $\alpha \geq 1$ ist $f(t,y) = y^\alpha$ stetig differenzierbar mit $\partial f/\partial y = \alpha y^{\alpha-1}$.
Demnach erfüllt f in diesem Falle lokal eine Lipschitz–Bedingung.

(2b) Für $\alpha \geq 1$ können wir den ∃&E-Satz anwenden dank (2a):
Zum Anfangswert $y(t_0) = y_0 \geq 0$ ist die Lösung $y : I \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eindeutig.

(2c) Für $y \geq 0$ ist zudem die konstante Funktion $y(t) = 0$ eine Lösung.
Für $\alpha \geq 1$ sind Null und die Funktionen aus (1c) die einzigen Lösungen.

Für $0 < \alpha < 1$ lässt sich jede Lösung aus (1c) maximal fortsetzen zu

$$y_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad y_c(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq c, \\ \big[(1-\alpha)(t-c)\big]^{\frac{1}{1-\alpha}} & \text{für } t \geq c. \end{cases}$$

Durch jeden Startpunkt (t_0, y_0) mit $y_0 > 0$ läuft genau eine Lösung.
Durch jeden Punkt $(t_0, 0)$ hingegen laufen unendlich viele Lösungen!

⚠ Jedes AWP $y(t_0) = y_0 > 0$ ist gut gestellt, aber $y(t_0) = 0$ schlecht.

⚠ Den ∃&E-Satz können wir für $0 < \alpha < 1$ nicht anwenden:
Die rechte Seite $f(t,y) = y^\alpha$ ist differenzierbar mit $\partial f/\partial y = \alpha y^{\alpha-1}$,
doch die Ableitung hat in $y = 0$ eine Polstelle: f ist nicht Lipschitz!

Beispielfamilie zu Existenz und Eindeutigkeit

(3c) Wir finden weitere Lösungen $y : I \to \mathbb{R}$ mit $y'(t) = |y(t)|^\alpha$:

$$\begin{aligned}
\alpha = 1: \quad & y_0(t) = 0, && t \in \mathbb{R} \\
& y_c^-(t) = -\,\mathrm{e}^{c-t}, && t \in \mathbb{R} \\
& y_c^+(t) = +\,\mathrm{e}^{t-c}, && t \in \mathbb{R} \\
\alpha > 1: \quad & y_c^-(t) = -\big[(\alpha-1)(t-c)\big]^{\frac{1}{1-\alpha}}, && t > c \\
& y_c^+(t) = +\big[(\alpha-1)(c-t)\big]^{\frac{1}{1-\alpha}}, && t < c
\end{aligned}$$

$$\alpha < 1: \quad y_{b,c}(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } b \leq t \leq c, \\ -\big[(1-\alpha)(b-t)\big]^{\frac{1}{1-\alpha}} & \text{für } t \leq b, \\ +\big[(1-\alpha)(t-c)\big]^{\frac{1}{1-\alpha}} & \text{für } t \geq c. \end{cases}$$

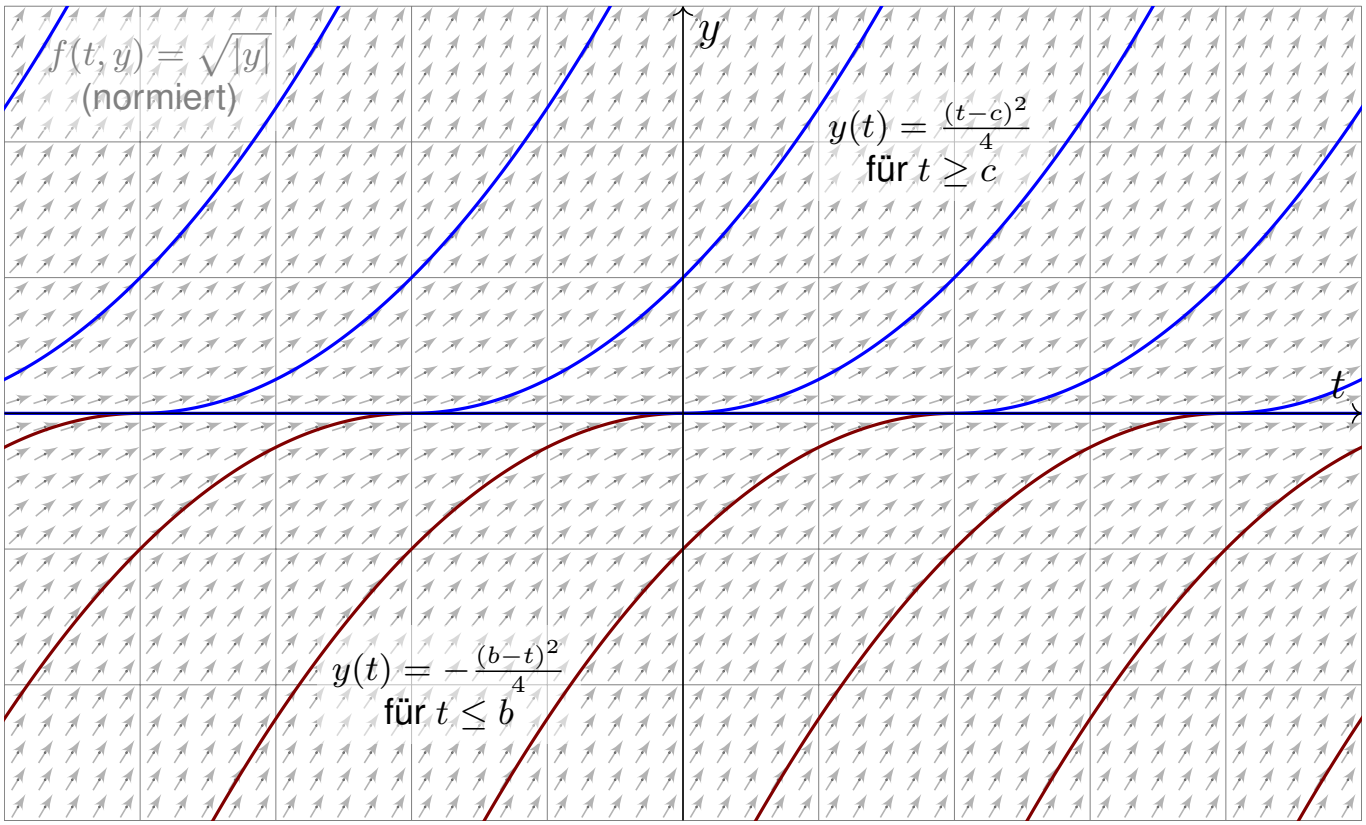
(3b) Für $\alpha \geq 1$ bleiben die drei Lösungszweige > 0, $= 0$, < 0 getrennt.
Eindeutigkeit: Durch jeden Startpunkt (t_0, y_0) läuft genau eine Lösung.

Für $0 < \alpha < 1$ fügen sich die Lösungszweige differenzierbar zusammen.
(Hierbei lassen wir auch die Sonderfälle $b = -\infty$ und $c = +\infty$ zu.)
Durch jeden Startpunkt (t_0, y_0) laufen unendlich viele Lösungen!

(3a) Für $0 < \alpha < 1$ ist $f(t,y) = |y|^\alpha$ um $y = 0$ nicht Lipschitz!

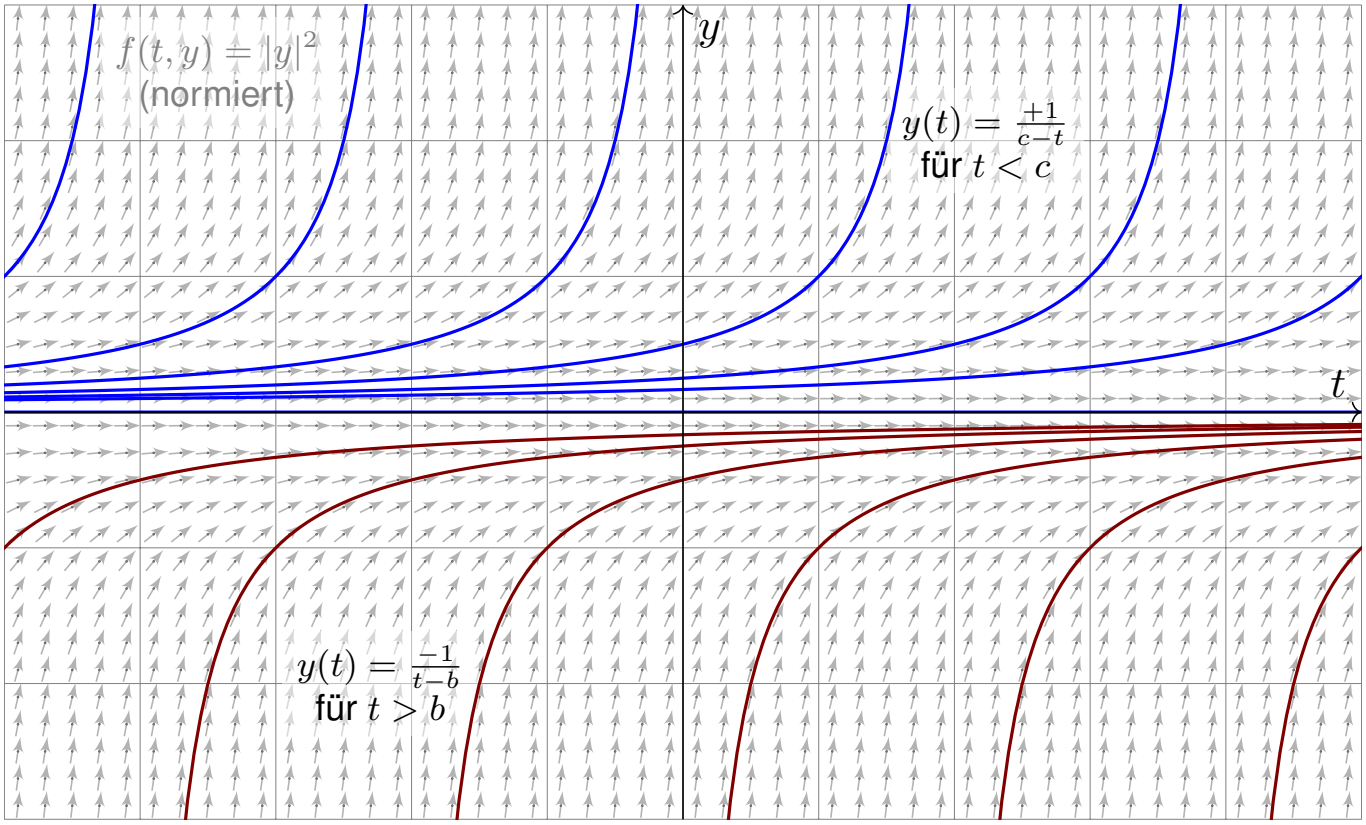
Beispielfamilie zu Existenz und Eindeutigkeit

⚠ Auf $y'(t) = \sqrt{|y(t)|}$ können wir den ∃&E-Satz nicht anwenden.
⚠ Durch jeden Startpunkt (t_0, y_0) verlaufen unendlich viele Lösungen!



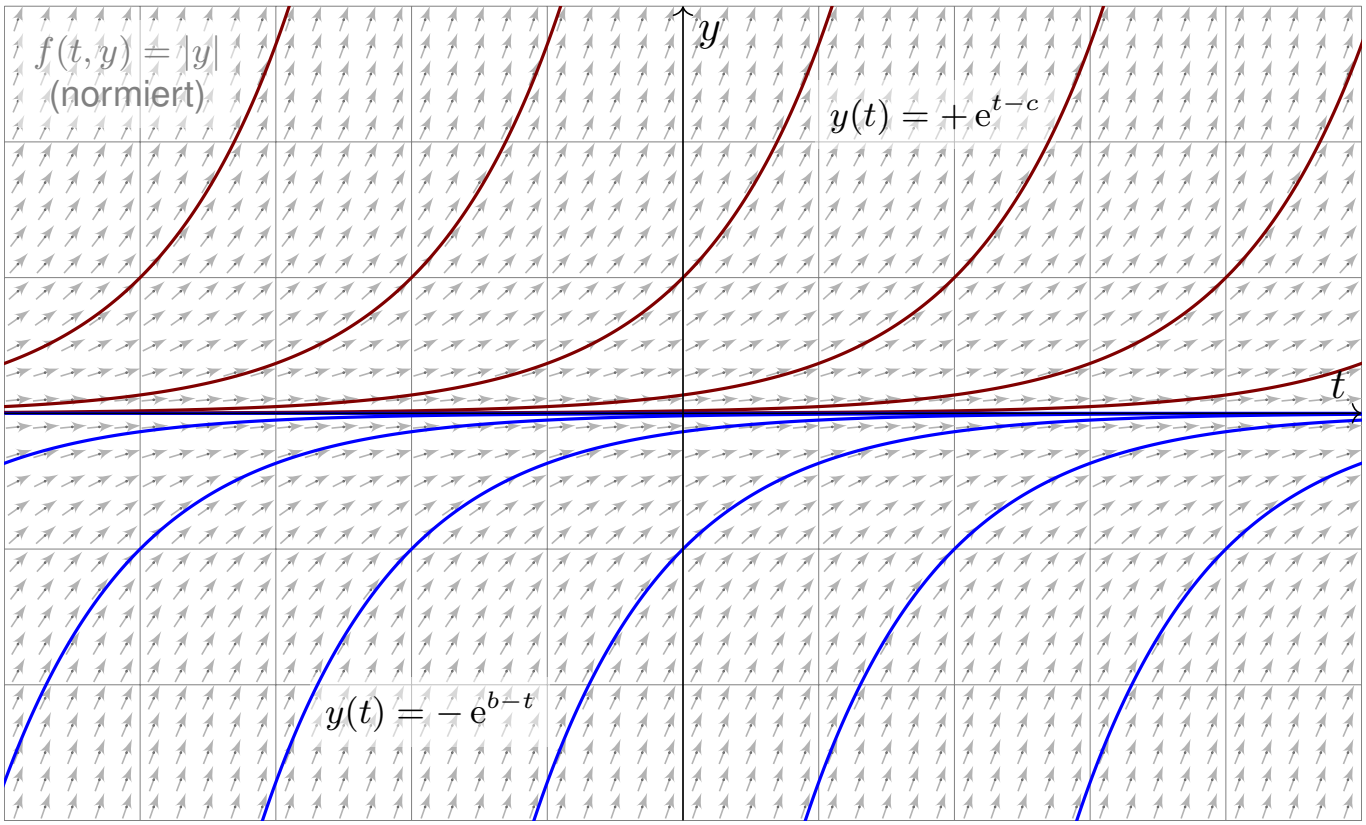
Beispielfamilie zu Existenz und Eindeutigkeit

☺ Auf $y'(t) = |y(t)|^2$ hingegen können wir den ∃&E-Satz anwenden:
Die rechte Seite $f(t,y) = |y|^2$ ist differenzierbar, also lokal Lipschitz.



Beispielfamilie zu Existenz und Eindeutigkeit

☺ Auch auf $y'(t) = |y(t)|$ können wir den ∃&E-Satz anwenden:
Zwar ist $f(t,y) = |y|$ nicht differenzierbar, aber Lipschitz mit $L = 1$.



Beispielfamilie zu Existenz und Eindeutigkeit

☺ Der Existenz-und-Eindeutigkeits-Satz von Cauchy O1B oder genauer Picard–Lindelöf O2A ist ein grundlegendes und mächtiges Werkzeug.

☺ Die Lipschitz–Bedingung prüfen wir am bequemsten durch ableiten:

Ist $f(t,y)$ stetig diff'bar nach y, so genügt f lokal auf $[a,b] \times \bar{B}(y_0,r)$ der Lipschitz–Bedingung $|f(t,u) - f(t,v)| \le L|u-v|$ mit $L = \max|\partial f/\partial y|$.
Dies gilt für $f(t,y) = |y|^\alpha$ mit $\alpha > 1$: Hier greift der Eindeutigkeitssatz!

Für $0 < \alpha < 1$ hingegen ist $|y|^\alpha$ in $y = 0$ nicht diff'bar und nicht Lipschitz.
Wir können den Eindeutigkeitssatz hier also nicht anwenden. Tatsächlich finden wir durch jeden Startpunkt (t_0, y_0) unendlich viele Lösungen!

Im kritischen Fall $\alpha = 1$ haben wir die Differentialgleichung $y' = |y|$.
Die rechte Seite $f(t,y) = |y|$ ist in $y = 0$ nicht differenzierbar. (Skizze!)
Dennoch erfüllt sie eine Lipschitz–Bedingung, sogar global mit $L = 1$,
denn es gilt $\big||u| - |v|\big| \le |u-v|$ für alle $u, v \in \mathbb{R}$. (Dreiecksungleichung)

☺ Beispiele wie dieses zeigen, dass die Lipschitz–Bedingung in y etwas allgemeiner ist als die (sehr bequeme) Differenzierbarkeit in y.

Anwendung zu Existenz und Eindeutigkeit

Aufgabe: (1a) Skizzieren Sie das Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

(1b) Finden Sie (durch Anschauung und Probe) eine Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ des Systems $\dot{x}(t) = f(x(t))$ zum Startwert $x(0) = (r_0 \cos t_0, r_0 \sin t_0)$.

(1c) Gibt es weitere Lösungen oder haben Sie damit alle gefunden?

(2a) Skizzieren Sie das Vektorfeld

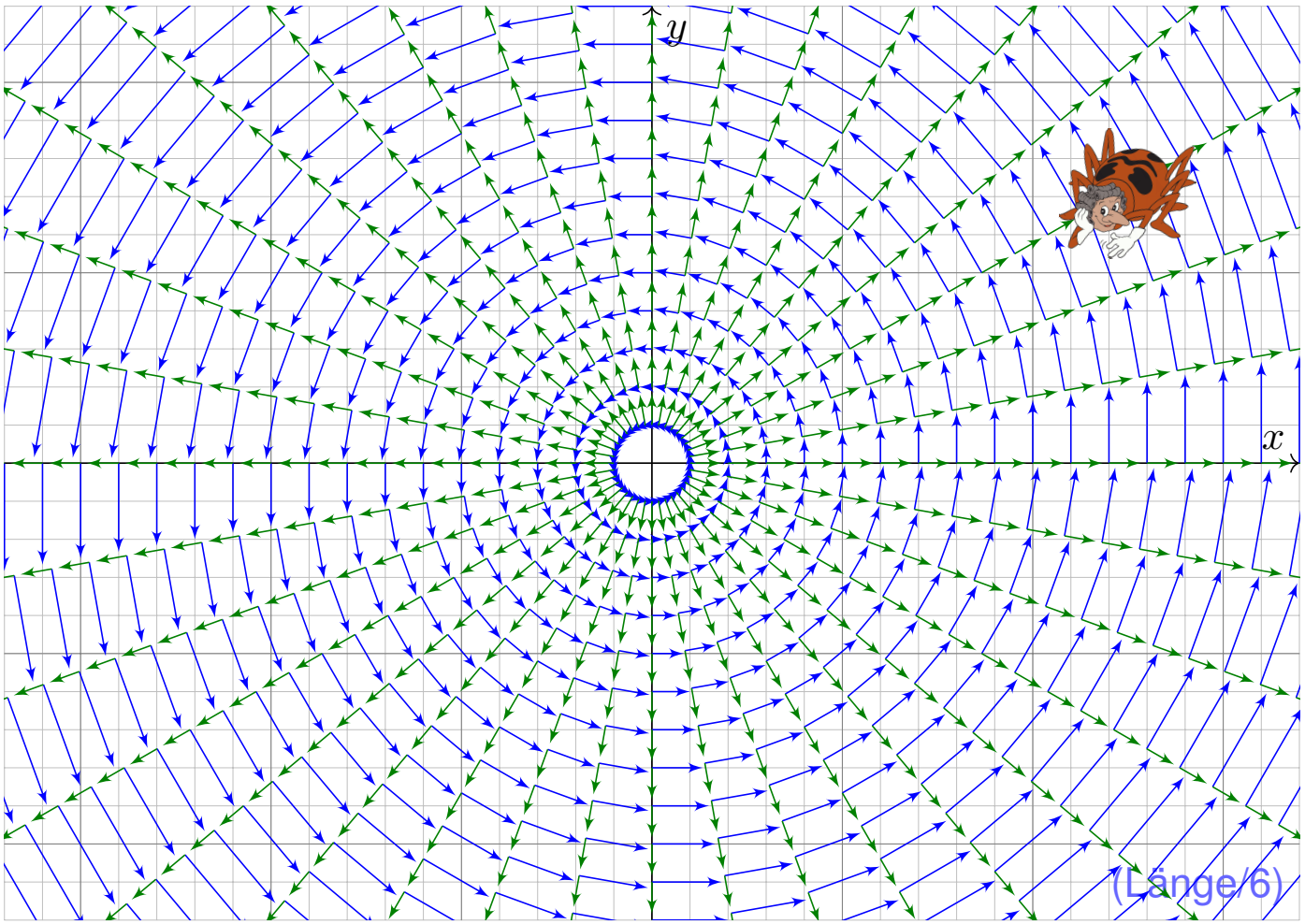
$$g : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

(2b) Finden Sie (durch Anschauung und Probe) eine Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ des Systems $\dot{x}(t) = g(x(t))$ zum Startwert $x(0) = (r_0 \cos t_0, r_0 \sin t_0)$.

(2c) Gibt es weitere Lösungen oder haben Sie damit alle gefunden?

☺ In günstigen Fällen finden wir leicht explizite Lösungen. Für $f \in C^1$ garantiert der Eindeutigkeitssatz, dass wir keine Lösungen übersehen.

Anwendung zu Existenz und Eindeutigkeit



Anwendung zu Existenz und Eindeutigkeit

Aufgabe: (3a) Skizzieren Sie soweit möglich das gestörte Vektorfeld

$$\tilde{f} \,:\, \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \,:\, x \mapsto f(x) + \sqrt[3]{(|x|-2)^2} \cdot g(x)$$

(3b) Nennen Sie eine periodische Lösung von $\dot{x}(t) = \tilde{f}(x(t))$.

(3c) Finden Sie eine Lösung mit $x(0) = (1,0)$ und $x(4\pi) = (3,0)$.
Hinweis: Nutzen Sie den Ansatz $x(t) = (r(t)+2) \cdot (\cos t, \sin t)$
Ist die Lösung eindeutig? Lässt sie sich für alle Zeit $t \in \mathbb{R}$ fortsetzen?
Bleibt sie für immer beschränkt oder entkommt sie nach Unendlich?

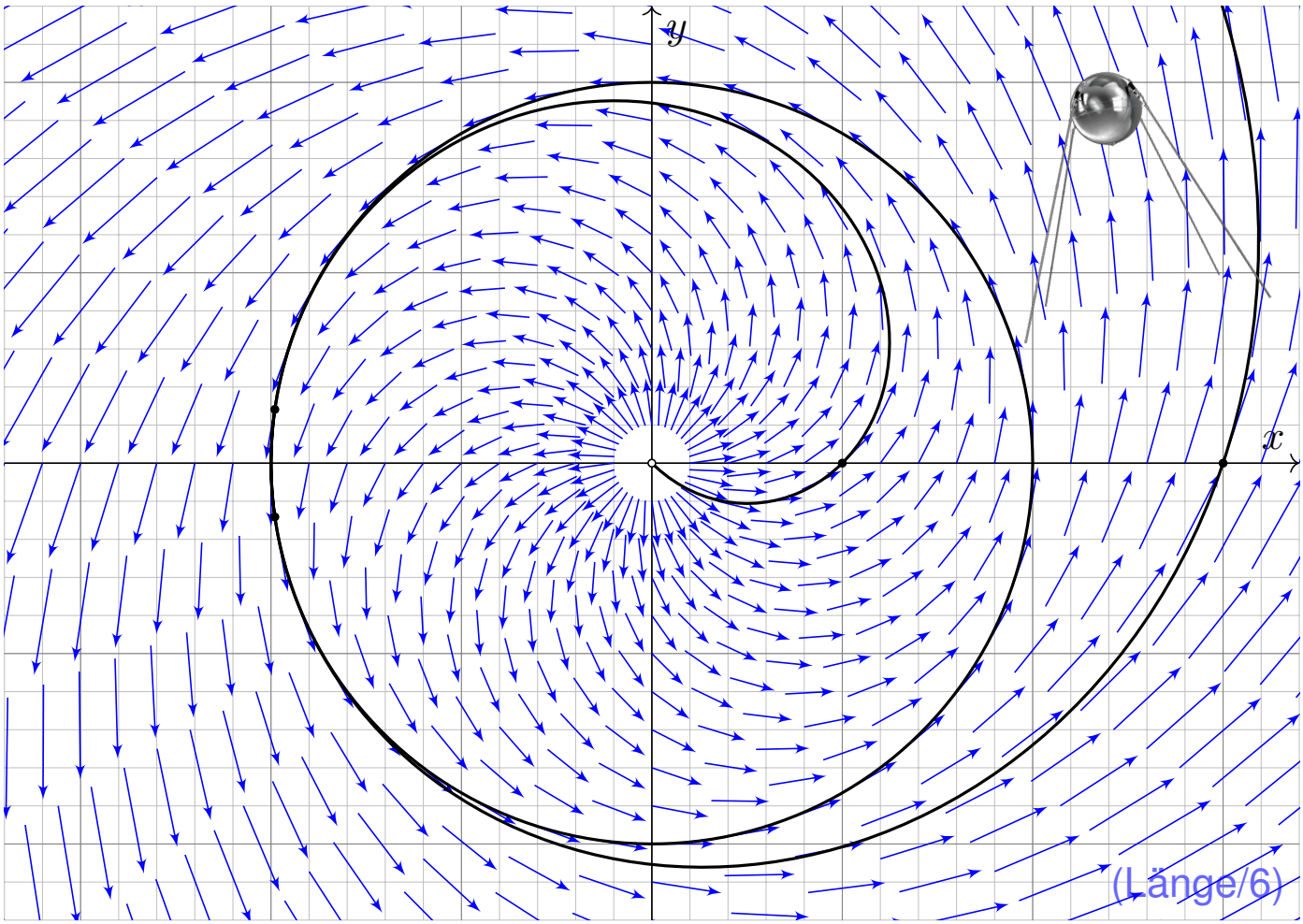
Lösung: (3a) Diese Linearkombination ist graphisch sehr anschaulich!

(3b) Die Skizze suggeriert $x(t) = (2\cos t, 2\sin t)$. Die Probe zeigt's!

(3c) Wir finden die Lösung $r(t) = (\frac{t-3}{3})^3$ für $3 - 3\sqrt[3]{2} < t \le 3$,
$r(t) = 0$ für $3 \le t \le 4\pi - 3$ und $r(t) = (\frac{t-4\pi+3}{3})^3$ für $t \ge 4\pi - 3$,
also $r(t) \to \infty$ für $t \to \infty$. Machen Sie die Probe!

⚠ Differentialgleichungen können auch unerwartete Lösungen haben, etwa so wie hier „exotische“ Lösungen neben den „offensichtlichen“. Diese Gefahrenquelle müssen Sie kennen und beherrschen, besser: soweit möglich ausschließen. Genau hierzu hilft Ihnen der ∃&E-Satz!

Anwendung zu Existenz und Eindeutigkeit



Anwendung zu Existenz und Eindeutigkeit

Aufgabe: (4a) Skizzieren Sie soweit möglich das gestörte Vektorfeld

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \tilde{f}(x) = f(x) + (|x|^2 - 4)\, h(x_1, x_2) \quad \text{mit} \quad h \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$$

(4b) Nennen Sie eine periodische Lösung von $\dot{x}(t) = \tilde{f}(x(t))$.

(4c) Existiert eine Lösung u zum Startwert $u(0) = (1, 0)$?
Ist sie eindeutig? Lässt sie sich für alle Zeit $t \in \mathbb{R}$ fortsetzen?
Bleibt sie beschränkt oder kann sie nach Unendlich entkommen?

☺ Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz hilft Ihnen auch / gerade dann, wenn Sie (noch) keine explizite Lösung ausrechnen können oder wollen.

☺ Sie können dann immerhin noch qualitative Vorhersagen machen, hier etwa eine Stabilitätsgarantie. Solche Überlegungen sind ein erster wichtiger Schritt *vor* der numerischen Näherung, oder dienen *danach* als Probe / Plausibilitätscheck für die berechneten Näherungslösungen.

☺ Die theoretischen Grundlagen leiten die konkreten Rechnungen und sichern praktische Anwendungen. Ihr mathematisches Handwerkszeug hilft Ihnen, lernen Sie möglichst früh, es zu beherrschen und zu nutzen!

Anwendung zu Existenz und Eindeutigkeit

Lösung: (4a) Solche Vektorfelder ähneln sehr der vorigen Skizze, doch schmiegen sie sich wesentlich glatter an den Kreis $\partial B(0, 2)$.
Spezialfall: Ist das Vektorfeld h rotationssymmetrisch, so auch $\tilde{f}$.

(4b) Zum Vektorfeld f ist $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (2\cos t, 2\sin t)$ eine Lösung.
Sie bleibt für die Störung $\tilde{f}$ erhalten, da sich auf $\partial B(0, 2)$ nichts ändert.

(4c) Ja: Unser Vektorfeld $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist stetig differenzierbar.
Dank ∃&E-Satz existiert zu jedem Startwert $u(0) \in \mathbb{R}^2$
eine eindeutige maximale Lösung $u : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}^2$.

Bei Start in der Kreisscheibe $B(0, 2)$, also $|u(0)| < 2$, kann die Lösung u die Kreisscheibe nicht verlassen: Hierzu müsste sie die obige Lösung x kreuzen, und das ist nach dem Eindeutigkeitssatz nicht möglich!

Insbesondere kann die Lösung u nicht nach Unendlich entkommen.
(In der vorigen Aufgabe geschah überraschenderweise genau dies!)
Die Lösung u lässt sich daher für alle Zeit $t \in \mathbb{R}$ fortsetzen;
die maximale Lösung ist von der Form $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

Anwendung zu Existenz und Eindeutigkeit

Aufgabe: (5a) Skizzieren Sie das Vektorfeld

$$f \,:\, \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \,:\, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (-x_2, x_1, 0).$$

(5b) Finden Sie (durch Anschauung und Probe) eine Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ des Systems $\dot{x}(t) = f(x(t))$ zum Startwert $x(0) = (r_0 \cos t_0, r_0 \sin t_0, z_0)$.

(5c) Gibt es weitere Lösungen oder haben Sie damit alle gefunden?

(6) Wir untersuchen zu $h \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ das gestörte Vektorfeld

$$\tilde{f}(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3) + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4)\, h(x_1, x_2, x_3).$$

(6a) Nennen Sie periodische Lösungen von $\dot{x}(t) = \tilde{f}(x(t))$.

(6b) Existiert eine Lösung $u : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}^3$ mit $u(0) = (1, 0, 0)$?
Ist sie eindeutig? Lässt sie sich für alle Zeit $t \in \mathbb{R}$ fortsetzen?
Bleibt sie beschränkt oder entkommt sie nach Unendlich?

☺ Diese Beispiele entsprechen den vorigen – in Farbe und 3D.

Anwendung zu Existenz und Eindeutigkeit

Lösung: (5a) Das Vektorfeld f ist in jeder x_1–x_2–Ebene wie zuvor.

(5b) Eine Lösung ist $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto (r_0 \cos(t - t_0), r_0 \sin(t - t_0), z_0)$.
Probe: Sie erfüllt $\dot{x}(t) = f(x(t))$ und $x(0) = (r_0 \cos t_0, r_0 \sin t_0, z_0)$.

(5c) Dank ∃&E-Satz ist diese Lösung eindeutig: Wir haben sie alle!

(6a) Das Vektorfeld bleibt unverändert auf der Sphäre vom Radius 2:
Für $r_0^2 + z_0^2 = 4$ erhalten wir erneut genau die Lösungen aus (5b).

(6b) Ja: Unser Vektorfeld $\tilde{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist stetig differenzierbar.
Dank ∃&E-Satz existiert zu jedem Startwert $u(0) \in \mathbb{R}^3$
eine eindeutige maximale Lösung $u : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}^3$.

Bei Start in der Kugel $\overline{B}(0, 2)$, also $r_0^2 + z_0^2 \le 4$, kann die Lösung u die Kugel nicht verlassen: Hierzu müsste sie eine der obigen Lösungen x kreuzen, und das ist nach dem Eindeutigkeitssatz nicht möglich!

Insbesondere kann die Lösung u nicht nach Unendlich entkommen.
Die Lösung u lässt sich daher für alle Zeit $t \in \mathbb{R}$ fortsetzen;
die maximale Lösung ist von der Form $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.

Lineare Differentialgleichungssysteme

Jedes **lineare Differentialgleichungssystem** hat die Form

$$\begin{cases} y_1'(t) = a_{11}(t)\,y_1(t) + \ldots + a_{1n}(t)\,y_n(t) + b_1(t), \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ y_n'(t) = a_{n1}(t)\,y_1(t) + \ldots + a_{nn}(t)\,y_n(t) + b_n(t). \end{cases}$$

Wir bündeln dies prägnant zu einer vektorwertigen Gleichung:

$$\boxed{y'(t) = A(t)\,y(t) + b(t)}$$

Gegeben sind hierzu stetige Funktionen $A : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ und $b : I \to \mathbb{K}^n$, dabei ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder allgemeiner $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Hier heißt A **Koeffizientenmatrix** und b **rechte Seite** oder **Störterm**. Gesucht sind alle Funktionen $y : I \to \mathbb{K}^n$, die $y' = Ay + b$ erfüllen.

Die zugehörige **homogene Gleichung** erhalten wir für $b = 0$:

$$\boxed{y'(t) = A(t)\,y(t)}$$

☺ Sie lernen nun, lineare DGSysteme explizit und effizient zu lösen!

Affin/Lineare Struktur des Lösungsraumes

Beispiel: Unser einführendes Beispiel ist das homogene DGSystem

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2+k_3}{m_2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

Hier ist die Koeffizientenmatrix A konstant und der Störterm $b = 0$.

Lemma O3A: Linearkombination von Lösungen

Seien $y_1, y_2 : I \to \mathbb{K}^n$ Lösungen zu $y_1' = A\,y_1 + b_1$ und $y_2' = A\,y_2 + b_2$. Ihre **Linearkombination** $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$ ist dann eine Lösung der Gleichung $y' = A\,y + b$ mit rechter Seite $b = c_1 b_1 + c_2 b_2$.

(1) Im homogenen Fall ist $L_0 = \{\, y \mid y' = Ay \,\}$ ein **Vektorraum** über $\mathbb{K}$: Jede Linearkombination von Lösungen ist selbst wieder eine Lösung.

(2) Im inhomogenen Fall ist $L_b = \{\, y \mid y' = Ay + b \,\}$ ein **affiner Raum**: Für jede beliebige („partikuläre“) Lösung $y_b \in L_b$ gilt $L_b = y_b + L_0$.

📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §4.6.

Affin/Lineare Struktur des Lösungsraumes

☺ Wie jeder Vektorraum enthält L_0 den Nullpunkt, der affine Raum L_b hingegen ist um y_b verschoben. Diesen allgemeinen Sachverhalt kennen Sie aus der linearen Algebra von linearen Gleichungssystemen in $\mathbb{K}^n$!

Nachrechnen: (1) Die Menge L_0 ist ein Untervektorraum von $C^1(I, \mathbb{K}^n)$: Es gilt $0 \in L_0$ und aus $y_1, y_2 \in L_0$, $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$ folgt $c_1 y_1 + c_2 y_2 \in L_0$.

(2) Die Menge L_b ist ein affiner Unterraum: Lösen $y, y_b \in C^1(I, \mathbb{K}^n)$ das inhomogene DGSystem, dann löst $y_h = y - y_b$ das homogene. Das bedeutet $y = y_b + y_h$ mit $y_h \in L_0$, kurz $L_b \subseteq y_b + L_0$. Umgekehrt: Für jede homogene Lösung $y_h \in L_0$ gilt $y_b + y_h \in L_b$, kurz $L_b \supseteq y_b + L_0$.

⚠ Für $y' = A\,y$ haben wir immer die triviale Lösung 0. Denkbar wäre aber, dass dies die einzige Lösung ist, also $L_0 = \{0\}$. Für $y' = A\,y + b$ wäre sogar zu befürchten, dass es gar keine Lösung gibt, also $L_b = \emptyset$.

☺ Hier rettet uns der ∃&E-Satz O1B mit der globalen Schranke O2D, oder konkret ausgeführt die Konstruktion O3I und die Methode O3D. Die Dimension ist immer n: Bei jeder konkreten Rechnung wissen wir, wie viele Lösungen wir suchen, und wann wir alle gefunden haben!

Affin/Lineare Struktur des Lösungsraumes

Satz O3B: Struktursatz für lineare Differentialgleichungssysteme

Wie zuvor sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $A : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ und $b : I \to \mathbb{K}^n$ stetig. Wir betrachten die Lösungsmenge $L_b = \{\, y \in C^1(I, \mathbb{K}^n) \mid y' = A\,y + b \,\}$.

(0) **Globale Existenz und Eindeutigkeit**: Zu jedem Zeitpunkt $t_0 \in I$ und Anfangsdatum $y_0 \in \mathbb{K}^n$ existiert genau eine Lösung $y \in L_b$ mit $y(t_0) = y_0$. Die Auswertung $\Psi : L_b \to \mathbb{K}^n : y \mapsto y(t_0)$ ist also bijektiv.

(1) $L_0 = \{\, y \mid y' = A\,y \,\}$ ist ein **Vektorraum** der Dimension n über $\mathbb{K}$. Wir finden ein **Fundamentalsystem** $y_1, \dots, y_n \in L_0$, also eine Basis von L_0 bestehend aus n linear unabhängigen Lösungen, und erhalten:

$$L_0 = \left\{\, c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n \;\middle|\; c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K} \,\right\} \quad \cong \quad \mathbb{K}^n$$

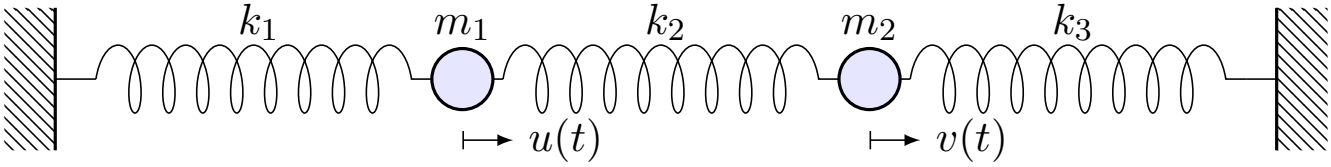
(2) $L_b = \{\, y \mid y' = A\,y + b \,\}$ ist ein **affiner Raum** der Dimension n. Für jede **Partikulärlösung** $y_b \in L_b$ gilt $L_b = y_b + L_0$, ausgeschrieben:

$$L_b = y_b + L_0 = \left\{\, y_b + c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n \;\middle|\; c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K} \,\right\}$$

„Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen“

Anwendungsbeispiel: gekoppelte Oszillatoren

Aufgabe: Formulieren und lösen Sie folgendes dynamische System:



(1) Formulieren Sie das Differentialgleichungssystem erster Ordnung.
(2) Welche Struktur hat der Lösungsraum? („Form“ und „Größe“)
(3) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem reeller Lösungen.
(4) Wie erhalten Sie hieraus eine allgemeine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$?
(5) Wie lösen Sie das Anfangswertproblem $y(t_0) = y_0$ für $y_0 \in \mathbb{R}^n$?

Lösung: (1) Für die Variablen $y_1 = u$, $y_2 = v$, $y_3 = u'$, $y_4 = v'$
ist die Bewegungsgleichung ein **DGSystem erster Ordnung**: O109

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{m} & \frac{k_2}{m} & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m} & -\frac{k_2+k_1}{m} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \quad \text{kurz} \quad y' = A\,y$$

Anwendungsbeispiel: gekoppelte Oszillatoren

(2) Die Menge aller Lösungen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ ist ein **$\mathbb{R}$–Vektorraum**.
Dank des ∃&E-Satzes hat dieser Vektorraum die **Dimension** 4.

(3) Durch Entkopplung finden wir Lösungen $y_1, y_2, y_3, y_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$.
Diese bündeln wir übersichtlich zur **Fundamentalmatrix**

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t) & \sin(\omega_1 t) & +\cos(\omega_2 t) & +\sin(\omega_2 t) \\ \cos(\omega_1 t) & \sin(\omega_1 t) & -\cos(\omega_2 t) & -\sin(\omega_2 t) \\ -\omega_1 \sin(\omega_1 t) & \omega_1 \cos(\omega_1 t) & -\omega_2 \sin(\omega_2 t) & +\omega_2 \cos(\omega_2 t) \\ -\omega_1 \sin(\omega_1 t) & \omega_1 \cos(\omega_1 t) & +\omega_2 \sin(\omega_2 t) & -\omega_2 \cos(\omega_2 t) \end{pmatrix}.$$

Die Frequenzen sind hierbei $\omega_1^2 = k_1/m$ und $\omega_2^2 = (k_1 + 2k_2)/m$.
Lineare Unabhängigkeit testen wir in einem beliebigen Punkt:

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \omega_1 & 0 & \omega_2 \\ 0 & \omega_1 & 0 & -\omega_2 \end{pmatrix}, \qquad \det Y(0) = -4\omega_1\omega_2 \neq 0$$

Anwendungsbeispiel: gekoppelte Oszillatoren

☺ Unsere vier Lösungen $y_1, y_2, y_3, y_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ sind linear unabhängig. Da der Lösungsraum die Dimension 4 hat, haben wir also eine **Basis**! Man nennt dies auch ein **Fundamentalsystem** des homogenen DGS. Wie aus der linearen Algebra bekannt bedeutet Basis folgendes:

(4) Jede Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ unserer homogenen Gleichung $y' = A\,y$ ist eine **Linearkombination** $y(t) = c_1 y_1(t) + \cdots + c_4 y_4(t)$ mit $c \in \mathbb{R}^4$, zusammengefasst $y(t) = Y(t)\,c$ mit obiger Fundamentalmatrix $Y(t)$.

(5) Ist ein **Anfangswert** $y(t_0) = y_0$ vorgegeben durch $y_0 \in \mathbb{R}^4$, so gilt

$$Y(t_0)\,c \overset{!}{=} y_0 \quad \Longrightarrow \quad c = Y(t_0)^{-1}\,y_0$$

☺ Die Matrix $Y(t)$ ist invertierbar zu jedem Zeitpunkt $t_0 \in \mathbb{R}$. Das AWP $y(t_0) = y_0$ wird demnach gelöst durch $y(t) = Y(t)\,Y(t_0)^{-1}\,y_0$.

Theoretisch ist damit alles klar. In unserem Beispiel fanden wir das Fundamentalsystem durch die Methode des scharfen Hinsehens. Wir werden hierzu im Folgenden allgemeine Methoden erklären und im nächsten Kapitel zu einer effizienten Konstruktion ausbauen.

Fundamentalsystem und Fundamentalmatrix

Lösungen $y_1, \dots, y_n : I \to \mathbb{K}^n$ bündeln wir zur **Fundamentalmatrix**:

$$\begin{aligned} &Y : I \to \mathbb{K}^{n\times n}, \\ &Y(t) = \big(y_1(t), \dots, y_n(t)\big) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) & y_{21}(t) & \dots & y_{n1}(t) \\ y_{12}(t) & y_{22}(t) & \dots & y_{n2}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{1n}(t) & y_{2n}(t) & \dots & y_{nn}(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Man nennt $Y(t)$ auch die **Wronski–Matrix** der Funktionen $y_1, \dots, y_n$ und $\det Y(t)$ ihre **Wronski–Determinante**. Diese sind oft nützlich:

Korollar O3C: Unabhängigkeitskriterium dank O3B/O3M

Die folgenden vier Aussagen sind untereinander äquivalent:
(a) Die Funktionen $y_1, \dots, y_n : I \to \mathbb{K}^n$ sind linear unabhängig über $\mathbb{K}$.
(b) Die Vektoren $y_1(t), \dots, y_n(t)$ sind linear unabhängig für jedes $t \in I$.
(c) Die Vektoren $y_1(t), \dots, y_n(t)$ sind linear unabhängig für ein $t \in I$.
(d) Die Determinante erfüllt $\det Y(t) \neq 0$ für ein und damit alle $t \in I$.

☺ Dieses Kriterium ist einfach und übersichtlich. In kleiner Dimension kann man die Determinante tatsächlich noch bequem ausrechnen.

Anwendungsbeispiel zur Entkopplung

Aufgabe: Lösen Sie das homogene Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_1(t) + y_2(t), & y_1(0) = 2, \\ y_2'(t) = y_1(t) - y_2(t), & y_2(0) = 0. \end{cases}$$

(0) Welche Struktur hat der allgemeine Lösungsraum? (Form & Größe)
(1) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem reeller Lösungen.
(2) Formulieren Sie die allgemeine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.
(3) Lösen Sie speziell das Anfangswertproblem.

Lösung: (1) Wir nutzen weiterhin die Methode des scharfen Hinsehens: Der Ansatz $y_1 = y_2$ entkoppelt zu $y_1' = y_2' = 0$. Wir erhalten eine Lösung

$$u(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Ansatz $y_1 = -y_2$ entkoppelt zu $y_1' = -2y_1$. Wir erhalten eine Lösung

$$v(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} \\ -\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}.$$

☺ Dieser Trick ist so gut, dass wir ihn im nächsten Kapitel P zu einer Methode ausbauen, indem wir systematisch Eigenvektoren nutzen. P114

Anwendungsbeispiel zur Entkopplung

Sind beide Lösungen linear unabhängig? Wir betrachten die Matrix

$$Y(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) & v_1(t) \\ u_2(t) & v_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e}^{-2t} \\ 1 & -\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}, \quad \det Y(t) = -2\,\mathrm{e}^{-2t} \neq 0.$$

(2) Damit haben wir eine **Fundamentalmatrix** gefunden. Diese erfüllt

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -2\,\mathrm{e}^{-2t} \\ 0 & 2\,\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} Y(t) \quad \text{mit} \quad Y(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Jede Lösung y hat die Form $y = c_1 u + c_2 v = Yc$. (3) Anfangswert:

$$y(0) = Y(0)\,c \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; c = Y(0)^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die gesuchte **Lösung des Anfangswertproblems** ist demnach:

$$y(t) = u(t) + v(t) = \begin{pmatrix} 1 + \mathrm{e}^{-2t} \\ 1 - \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}$$

Probe: $y(0) = (2, 0)$, $y_1' = -2\,\mathrm{e}^{-2t} = -y_1 + y_2$, $y_2' = 2\,\mathrm{e}^{-2t} = y_1 - y_2$.

Lösung durch Variation der Konstanten

Zu lösen sei nun ein **inhomogenes Differentialgleichungssystem**

$$\boxed{y'(t) = A(t)\,y(t) + b(t).}$$

Einfacher ist das zugehörige homogene DGSystem $y'(t) = A(t)\,y(t)$.
Hierzu sei eine Fundamentalmatrix $Y : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ bereits gefunden,

$$Y'(t) = A(t)\,Y(t) \quad \text{mit} \quad \det Y(t) \neq 0 \quad \text{für alle} \quad t \in I.$$

Das bedeutet, die Spalten $y_1, \ldots, y_n$ sind linear unabhängige Lösungen.
Jede Lösung $y : I \to \mathbb{K}^n$, $y' = A\,y$, ist **eindeutige Linearkombination**

$$y(t) = c_1\,y_1(t) + \cdots + c_n\,y_n(t) = Y(t)\,c \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{K}^n.$$

Ansatz für eine Partikulärlösung durch **Variation der Konstanten**:

$$y_b(t) = c_1(t)\,y_1(t) + \cdots + c_n(t)\,y_n(t) = Y(t)\,c(t) \quad \text{mit} \quad c : I \to \mathbb{K}^n.$$

Das ist zunächst nur ein Ansatz, aber einen Versuch ist es wert!
Das erfreuliche ist: Dieser Ansatz lohnt sich tatsächlich immer.

Aufgabe: Bestimmen Sie die Funktionen $c_1, \ldots, c_n$ möglichst explizit.

Lösung durch Variation der Konstanten

Lösung: Ableiten von $y_b(t) = Y(t)\,c(t)$ nach der Produktregel:

$$y_b' = \big[Yc\big]' = Y'c + Yc' = AYc + Yc'$$

Einsetzen in unser DGSystem $y' = A\,y + b$ ergibt die Gleichung

$$AYc + Yc' \overset{!}{=} AYc + b.$$

Wir erhalten $Yc' = b$, umgeformt $c' = Y^{-1}b$, und integriert:

$$c(t) = \int_{\tau=t_0}^{t} Y(\tau)^{-1}\,b(\tau)\,\mathrm{d}\tau \;+\; c(t_0)$$

☺ Die **Partikulärlösung** $y_b = Yc$ löst unsere Gleichung $y' = A\,y + b$.

Den eindimensionalen Fall haben wir ab Seite M433 ausgeführt. Alternativ gelingt die Rechnung mit einem integrierendem Faktor, siehe Seite M221; exakte Differentialgleichungen stehen uns in höherer Dimension nicht mehr zur Verfügung. Für höhere Ableitungen siehe Seite N311.

Die „Variation der Konstanten“ klingt widersinnig, beschreibt aber treffend unser Vorgehen: Wir betrachten die Koeffizienten $c_1, \ldots, c_n$ nicht als Konstanten, sondern als Funktionen von t. Wir rechnen es aus, und das Ergebnis ist bemerkenswert: Dieser Kunstgriff gelingt immer!

☺ Damit lösen Sie jede inhomogene Gleichung, die allgemeine Lösungsformel gilt immer. Sie sollten diesen Lösungsweg in mehreren Übungsbeispielen schrittweise nachvollziehen: Bei der Lösung von $Yc' = b$ und anschließender Integration sind evtl. Abkürzungen möglich.

Partikulärlösung inhomogener DGSysteme

Satz O3D: Variation der Konstanten

Seien $A : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ und $b : I \to \mathbb{K}^n$ stetig, $Y = (y_1, \dots, y_n) : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Fundamentalmatrix der homogenen Gleichung $Y'(t) = A(t)\,Y(t)$.

Zu lösen sei das inhomogene Differentialgleichungssystem

$$\boxed{y'(t) = A(t)\,y(t) + b(t) \quad \text{mit} \quad y(t_0) = y_0.}$$

Zu jedem Anfangswert $y_0 \in \mathbb{K}^n$ existiert genau eine Lösung, nämlich

$$\boxed{y(t) \;=\; Y(t)\int_{\tau=t_0}^{t} Y(\tau)^{-1}\,b(\tau)\,\mathrm{d}\tau \;+\; Y(t)Y(t_0)^{-1}y_0.}$$

Beweis: Kennt man erst einmal diese Formel, so genügt ableiten!

In der Praxis nutzt man direkt den Ansatz zur Variation der Konstanten.
Die allgemeine Lösung ist $y = y_b + c_1y_1 + \cdots + c_ny_n$ mit $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$.

☺ Explizite Formel ☺ Eindeutigkeit ☺ Stetig abhängig von (t_0, y_0)
☺ Für $A = 0$ ist's der HDI. ☺ Für $b = 0$ entfällt der inhomogene Term.

Anwendungsbeispiel zur Variation der Konstanten

Aufgabe: Lösen Sie das inhomogene Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_1(t) + y_2(t) + t, & y_1(0) = 2, \\ y_2'(t) = y_1(t) - y_2(t) + t, & y_2(0) = 0. \end{cases}$$

Lösung: (0) In Matrixschreibweise gilt $y'(t) = A\,y(t) + b(t)$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}.$$

Eine **Fundamentalmatrix** des homogenen Systems kennen wir O309:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e}^{-2t} \\ 1 & -\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}, \qquad \det Y(t) = -2\,\mathrm{e}^{-2t} \neq 0$$

Zur Inversion (kleiner) Matrizen ist die Cramersche Regel nützlich:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Wir erhalten:

$$Y(t)^{-1} = -\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-2t} & -\mathrm{e}^{-2t} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{e}^{2t} & -\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}$$

Anwendungsbeispiel zur Variation der Konstanten

(1) Wir berechnen die **Partikulärlösung** $y_b(t) = Y(t)\,c(t)$ gemäß O3D:

$$c(t) = \int_{\tau=0}^{t} Y(\tau)^{-1}\,b(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{\tau=0}^{t} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{e}^{2\tau} & -\mathrm{e}^{2\tau} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tau \\ \tau \end{pmatrix}\mathrm{d}\tau$$

$$= \int_{\tau=0}^{t} \begin{pmatrix} \tau \\ 0 \end{pmatrix}\mathrm{d}\tau = \left[\begin{pmatrix} \tau^2/2 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{\tau=0}^{t} = \begin{pmatrix} t^2/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die ersehnte Partikulärlösung ist demnach:

$$y_b(t) = Y(t)\,c(t) = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e}^{-2t} \\ 1 & -\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t^2/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}$$

(2) Die **allgemeine Lösung** unserer inhomogenen DG ist gemäß O3B:

$$y(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \end{pmatrix} + \alpha_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} \\ -\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}$$

(3) Die Lösung unseres **Anfangswertproblems** $y(0) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ ist also:

$$y(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1+\mathrm{e}^{-2t} \\ 1-\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}$$

Verständnisfragen zum Struktursatz

Aufgabe: Wir betrachten folgende DGSysteme und Lösungsmengen. Welche DGSysteme sind linear? in/homogen? Welche Lösungsmengen sind affin/lineare Unterräume? Was ist gegebenenfalls die Dimension?

$$A = \left\{ \begin{array}{l|l} y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2 & y_1' = y_2 - y_1 \\ \text{differenzierbar} & y_2' = y_1 - y_2 \end{array} \right\}$$

Dieses DGSystem ist linear und zudem homogen. Wir können also direkt unseren Struktursatz O3B anwenden: Die Lösungsmenge A ist ein Unterraum der Dimension 2. Explizite Rechnung auf Seite O309.

$$B = \left\{ \begin{array}{l|l} y:[0,1]\to\mathbb{R}^2 & y_1' = y_2 - y_1 + 1 \\ \text{differenzierbar} & y_2' = y_1 - y_2 + 1 \end{array} \right\}$$

Dieses DGSystem ist linear, nun jedoch inhomogen. Wir können direkt unseren Struktursatz O3B anwenden: Die Lösungsmenge B ist ein affiner Unterraum der Dimension 2, explizite Rechnung auf Seite O314.

$$C = \left\{ \begin{array}{l|l} y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2 & y_1' = y_1 + y_2 \\ \text{zweimal diff'bar} & y_2'' = y_2 \end{array} \right\}$$

Dieses DGSystem ist homogen linear. Wir können den Struktursatz O3B anwenden, dazu reduzieren wir zu $y_2' = y_3$ und $y_3' = y_2$, siehe O149. Die Lösungsmenge C ist ein Untervektorraum der Dimension 3.

$$D = \left\{ \begin{array}{l|l} y:[0,1]\to\mathbb{R}^2 & y_1' = y_1 + y_2 \\ \text{differenzierbar} & y_2' = y_2^2 \end{array} \right\}$$

Dieses DGSystem ist nicht linear. Daher greift unser Struktursatz O3B hier nicht! Die Lösungsmenge können Sie explizit ausrechnen, siehe M113 für y_2 und M222 für y_1. Die Menge D ist kein Untervektorraum!

$$E = \left\{ \begin{array}{l|l} y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2 & y_1' = y_1 + y_2 \\ \text{differenzierbar} & y_2' = y_2^2 \end{array} \right\}$$

Dieses DGSystem ist nicht linear. Daher greift unser Struktursatz O3B hier nicht! Die Lösungsmenge E ist wider Erwarten ein Untervektorraum, der Dimension 1: Wir finden $y_2 = 0$, siehe M113, also $y_1(t) = c\,\mathrm{e}^t$.

⚠ Schauen Sie hin, denken Sie scharf nach, es gibt Überraschungen!

Matrizenkalkül: Schreibweise

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, wir denken dabei insbesondere an den Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ der **reellen Zahlen** oder den Körper $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ der **komplexen Zahlen**.
Eine **Matrix** A der Größe $m \times n$ über $\mathbb{K}$ ist eine Abbildung

$$A : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \to \mathbb{K} : (i, j) \mapsto a(i, j) = a_{i,j} = a_{ij}.$$

Die Menge aller $m \times n$–Matrizen bezeichnen wir deshalb mit $\mathbb{K}^{m \times n}$.
Wir schreiben die Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ bequem als rechteckiges Schema

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mit m Zeilen und n Spalten, kurz $A = (a_{ij})_{j=1,\dots,n}^{i=1,\dots,m}$ oder $A = (a_{ij})_{ij}$.
In dieser Schreibweise ist $v \in \mathbb{K}^{m \times 1}$ ein **Spaltenvektor** mit m Zeilen.
Entsprechend ist $w \in \mathbb{K}^{1 \times n}$ ein **Zeilenvektor** mit n Spalten.
Jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ können wir auffassen als Familie $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ von Zeilenvektoren $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{K}^{1 \times n}$, ebenso als Familie $A = (v_1, \dots, v_n)$ von Spaltenvektoren $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^{m \times 1}$.

Matrizenkalkül: Schreibweise

Zu $A = (a_{ij})_{ij}$ definieren wir die **transponierte Matrix** $A^\intercal = (a_{ij})_{ji}$.
Dies definiert die Bijektion $\mathbb{K}^{m \times n} \to \mathbb{K}^{n \times m} : A \mapsto A^\intercal$ mit $(A^\intercal)^\intercal = A$.
Genau dann gilt $A^\intercal = A$, wenn die Matrix A **symmetrisch** ist,
also quadratisch ist ($m = n$) und $a_{ij} = a_{ji}$ für alle $i, j = 1, \dots, n$ erfüllt.

Ebenso definieren wir die **komplex-konjugierte Matrix** $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})_{ij}$.
Dies definiert die Bijektion $\mathbb{K}^{m \times n} \to \mathbb{K}^{m \times n} : A \mapsto \overline{A}$ mit $\overline{\overline{A}} = A$.
Genau dann gilt $\overline{A} = A$, wenn A reell ist, also $a_{ij} \in \mathbb{R}$ für alle i, j gilt.

Die **Einheitsmatrix** $E = 1_{n \times n}$ der Größe $n \times n$ ist gegeben durch

$$1_{n \times n} = (e_{ij})_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Sie hat als Spalten die **Spalten-Einheitsvektoren** $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{K}^{n \times 1}$,
und als Zeilen die **Zeilen-Einheitsvektoren** $e_1^\intercal, \dots, e_n^\intercal \in \mathbb{K}^{1 \times n}$.

Matrizenkalkül: Rechenoperationen

Matrizen passender Größe können wir addieren und multiplizieren:

$$+ \,:\, \mathbb{K}^{m\times n} \times \mathbb{K}^{m\times n} \to \mathbb{K}^{m\times n} \,:\, (A,B) \mapsto C = A + B, \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$
$$* \,:\, \mathbb{K}^{p\times q} \times \mathbb{K}^{q\times r} \to \mathbb{K}^{p\times r} \,:\, (A,B) \mapsto C = AB, \quad c_{ik} = \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}.$$

Die **Addition** definiert eine abelsche Gruppe $(\mathbb{K}^{m\times n}, +)$.
Die **Multiplikation** $*$ ist assoziativ und distributiv über die Addition.

Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ ist die Einheitsmatrix $1_{m\times m}$ links-neutral, also $1_{m\times m} * A = A$, und $1_{n\times n}$ ist rechts-neutral, also $A * 1_{n\times n} = A$.

Konjugation erhält die Multiplikation, das heißt es gilt $\overline{A * B} = \overline{A} * \overline{B}$.
Transposition hingegen kehrt die Reihenfolge um, $(A * B)^\intercal = B^\intercal * A^\intercal$.

Zudem haben wir die **Multiplikation mit Skalaren**:

$$\cdot \,:\, \mathbb{K} \times \mathbb{K}^{m\times n} \to \mathbb{K}^{m\times n} \,:\, (\lambda, A) \mapsto B = \lambda A, \quad b_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$ und $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$ sowie und $1A = A$ und $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$ und $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

Matrizen gleicher Größe bilden demnach einen Vektorraum $(\mathbb{K}^{m\times n}, +, \cdot)$.
Quadratische Matrizen bilden einen Ring $(\mathbb{K}^{n\times n}, +, *)$ bzw. $\mathbb{K}$–Algebra.

Matrizenkalkül: Gleichungssysteme

Wir identifizieren den Vektorraum $\mathbb{K}^n$ mit $\mathbb{K}^{n\times 1}$ (Spaltenvektoren).
Hierauf operieren Matrizen $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ durch Multiplikation von links:

$$* \,:\, \mathbb{K}^{m\times n} \times \mathbb{K}^{n} \to \mathbb{K}^{m} \,:\, (A, v) \mapsto Av.$$

Das dient zur bequemen Darstellung linearer Gleichungssysteme

$$A\,x = y.$$

Ein effizientes Lösungsverfahren bietet der **Gauß–Algorithmus**.

Quadratische Matrizen (mit $m = n$) bilden einen Ring $(\mathbb{K}^{n\times n}, +, \cdot)$.

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt **invertierbar**, wenn es eine Matrix $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gibt, sodass $AB = BA = E$. In diesem Fall ist B eindeutig und wird die zu A **inverse Matrix** genannt, geschrieben $B = A^{-1}$.

Das Gleichungssystem $A\,x = y$ wird dann gelöst durch $x = A^{-1}\,y$.

Die invertierbaren Matrizen im Ring $\mathbb{K}^{n\times n}$ bilden demnach eine Gruppe, genannt die **allgemeine lineare Gruppe** der $n \times n$–Matrizen über $\mathbb{K}$, geschrieben $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ oder $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, englisch **general linear group**.

Matrizenkalkül: lineare Abbildungen

Matrizen dienen insbesondere zur Darstellung linearer Abbildungen.

Eine Abbildung $f : V \to W$ zwischen $\mathbb{K}$–Vektorräumen heißt **linear**, wenn $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$ gilt für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und $u, v \in V$.

Beispiel: Für $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ist die Abbildung $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ mit $v \mapsto Av$ linear.
Wir können umgekehrt jede lineare Abbildung so als Matrix darstellen:

Jede lineare Abbildung $f : V \to W$ ist bereits eindeutig festgelegt durch die Bilder der Elemente einer Basis von V.
Genauer: Sei $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und $\mathscr{C} = (w_1, \ldots, w_m)$ eine Basis von W. Dann existieren Konstanten $a_{ij} \in \mathbb{K}$ sodass

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \quad \text{für alle } j = 1, \ldots, n.$$

Hierbei sind die a_{ij} eindeutig bestimmt durch f sowie $\mathscr{B}$ und $\mathscr{C}$.
So ordnen wir der linearen Abbildung f ihre Matrix A zu:

$$f \quad \mapsto \quad {}_{\mathscr{C}}(f)_{\mathscr{B}} := A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{K}^{m \times n}$$

Matrizenkalkül: lineare Abbildungen

Abbildungen $f, g : V \to W$ addieren wir durch

$$(f + g)(v) = f(v) + g(v) \quad \text{für alle } v \in V.$$

Abbildungen $f : U \to V$ und $g : V \to W$ komponieren wir durch

$$(g \circ f)(u) = g(f(u)) \quad \text{für alle } u \in U.$$

Skalarmultiplikation von $f : U \to V$ mit $\lambda \in \mathbb{K}$ definieren wir durch

$$(\lambda \cdot f)(u) = \lambda \cdot f(u) \quad \text{für alle } u \in U.$$

Sind f, g linear, dann auch Summe, Komposition, Skalarmultiplikation.

Diese Rechenoperationen für lineare Abbildungen übersetzen sich direkt in die entsprechenden Rechenoperationen für Matrizen:

$$\begin{aligned} {}_{\mathscr{C}}(\lambda \cdot f)_{\mathscr{B}} &= \lambda \cdot {}_{\mathscr{C}}(f)_{\mathscr{B}} \\ {}_{\mathscr{C}}(f + g)_{\mathscr{B}} &= {}_{\mathscr{C}}(f)_{\mathscr{B}} + {}_{\mathscr{C}}(g)_{\mathscr{B}} \\ {}_{\mathscr{D}}(g \circ f)_{\mathscr{B}} &= {}_{\mathscr{D}}(g)_{\mathscr{C}} * {}_{\mathscr{C}}(f)_{\mathscr{B}} \end{aligned}$$

Damit können wir den Matrizenkalkül für lineare Abbildungen nutzen!

Matrizenkalkül: Kern und Bild

Dank Übersetzung der linearen Abbildung $f : V \to W$ in eine Matrix löst der Gauß–Algorithmus die folgenden grundlegenden Probleme:

1. Bestimmung des Kerns $\operatorname{Kern}(f) = \{\, v \in V \mid f(v) = 0 \,\}$.
2. Bestimmung des Bildes $\operatorname{Bild}(f) = \{\, f(v) \mid v \in V \,\}$.

Beides sind jeweils Untervektorräume und ihre Berechnung gelingt durch explizite Angabe einer Basis. Insbesondere lässt sich so der **Rang** $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Bild}(f)$ und der **Defekt** $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Kern}(f)$ ausrechnen.

Für jede lineare Abbildungen $f : V \to W$ gilt die **Dimensionsformel**

$$\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Kern}(f) + \dim_K \operatorname{Bild}(f) = \dim_{\mathbb{K}} V.$$

☺ Kennt man zwei dieser Dimensionen, so auch die dritte.
Das reduziert bei vielen Rechnungen den Aufwand erheblich.

(1) Es gibt $f : V \to W$ lineare und surjektiv gdw $\dim V \geq \dim W$.
(2) Es gibt $f : V \to W$ lineare und injektiv gdw $\dim V \leq \dim W$.
(3) Es gibt $f : V \to W$ lineare und bijektiv gdw $\dim V = \dim W$.
(4) Für $\dim V = \dim W < \infty$ gilt f injektiv gdw f surjektiv.

Matrizenkalkül: Determinante

Satz O3E: Definition und Eigenschaften der Determinante

In jeder Dimension $n \in \mathbb{N}$ existiert genau eine multilineare, alternierende, normierte Abbildung $\det = \det^n_{\mathbb{K}} : \mathbb{K}^{n \times n} \to \mathbb{K}$. Diese Abbildung nennen wir die **Determinante**. Sie erfreut sich folgender Eigenschaften:

1. Es gilt $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1),1} \cdot a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$. (Leibniz)
2. Die Determinante ist transpositionsinvariant: $\det(A^\intercal) = \det(A)$.
3. Die Determinante ist multiplikativ: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
4. Genau dann ist $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$ gilt.
5. Genauer gilt $A\tilde{A} = \tilde{A}A = \det(A)E$, also $A^{-1} = \det(A)^{-1}\tilde{A}$. (Cramer)

Zu $A = (a_1, \ldots, a_n)$ definieren wir die **adjunkte Matrix** $A' = \operatorname{adj}(A)$ durch die Cofaktoren $a'_{ij} := \det(a_1, \ldots, a_{i-1}, e_j, a_{i+1}, \ldots, a_n)$.

☺ Explizite polynomielle Formel. ☺ Sofort praktisch für kleine n.
☹ Naive Anwendung der Leibniz–Formel ist für große n aufwändig ($n!$).
☺ Eine effiziente Berechnung gelingt mit dem Gauß–Algorithmus (n^3).

Matrizenkalkül: Eigenwerte und Eigenvektoren

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Matrix, $v \in \mathbb{K}^n$ ein Vektor, $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Skalar.
Wir nennen v einen **Eigenvektor** von A zum **Eigenwert** λ, wenn

$$Av = \lambda v \quad \text{und} \quad v \neq 0.$$

Die Menge $V_\lambda = \{\, v \in \mathbb{K}^n \mid Av = \lambda v \,\}$ heißt **Eigenraum** zu λ.
Genau dann ist $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von A, wenn $\dim V_\lambda > 0$ gilt,
d.h. $(A - \lambda E)v = 0$ hat nicht-triviale Lösungen, also $\det(A - \lambda E) = 0$.

Das **charakteristische Polynom** von A ist $p_A(\lambda) := \det(A - \lambda E)$.
Somit sind die Nullstellen von p_A gerade die Eigenwerte von A.
Für ihre algebraische Vielfachheit k_λ gilt stets $1 \leq \dim V_\lambda \leq k_\lambda$.

Hierbei ist $\dim V_\lambda < k_\lambda$ durchaus möglich: Der **Jordan–Block**

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

hat den Eigenwert λ mit algebraischer Vielfachheit $k_\lambda = n$,
aber der Eigenraum $V_\lambda = \mathbb{K}e_1$ hat nur Dimension $\dim V_\lambda = 1$.

Matrizenkalkül: ähnliche Matrizen

Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißen **konjugiert** oder **ähnlich** wenn es eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gibt, sodass $B = T^{-1}AT$ gilt.
(Die Bedingung $B = T^{-1}AT$ ist äquivalent zu $A = TBT^{-1}$.)

Beispiel: Wir können jede lineare Abbildung $f : V \to V$ bezüglich verschiedener Basen $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ von V darstellen. Die zugehörigen Matrizen $A = {}_{\mathscr{A}}(f)_{\mathscr{A}}$ und $B = {}_{\mathscr{B}}(f)_{\mathscr{B}}$ sind i.A. verschieden, aber immer ähnlich: Es gilt $B = T^{-1}AT$ mit der Basiswechselmatrix $T = {}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}_V)_{\mathscr{A}}$.

Ist v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, dann ist $T^{-1}v$ ein Eigenvektor von B zum selben Eigenwert, und umgekehrt.
Insbesondere haben A und B dieselben Eigenwerte.

Allgemeiner sind sogar ihre charakteristischen Polynome gleich:

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda E) &= \det(T^{-1}AT - \lambda E) \\ &= \det\big[T^{-1}(A - \lambda E)T\big] \\ &= \det(T^{-1})\det(A - \lambda E)\det(T) = \det(A - \lambda E), \end{aligned}$$

insbesondere auch Determinante $\det A = \det B$ und Spur $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$.

Matrizenkalkül: Diagonalisierbarkeit

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt über $\mathbb{K}$ **diagonalisierbar**, wenn es eine Basis $v_1, \dots, v_n$ des $\mathbb{K}^n$ aus Eigenvektoren von A gibt, also $Av_j = \lambda_j v_j$.
Die Basiswechselmatrix $T = (v_1, \dots, v_n)$ ist invertierbar, und es gilt

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Gilt umgekehrt $T^{-1}AT = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, so ist $v_1 = Te_1, \dots, v_n = Te_n$ eine Basis des $\mathbb{K}^n$ aus Eigenvektoren, und zwar gilt $Av_j = \lambda_j v_j$.

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.
Das vereinfacht konkrete Rechnungen und allgemeine Überlegungen.

Genau dann ist $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ über $\mathbb{K}$ diagonalisierbar, wenn gilt:

1. Das charakteristische Polynom p_A zerfällt über $\mathbb{K}$ in Linearfaktoren, das heißt $p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{k_m}$ mit Nullstellen $\lambda_i \in \mathbb{K}$ der Vielfachheiten $k_i \geq 1$ für $i = 1, \dots, m$ sowie $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$.
2. Für jeden Eigenwert erreicht die geometrische die algebraische Vielfachheit, das heißt $\dim \ker(A - \lambda_i E) = k_i$ für alle $i = 1, \dots, m$.

Matrizenkalkül: Trigonalisierbarkeit

Nicht alle Matrizen sind diagonalisierbar, etwa Jordan–Blöcke. O325
Wir betrachten daher auch folgende schwächere Bedingung:

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt über $\mathbb{K}$ **trigonalisierbar**,
wenn es eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gibt, sodass

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich gilt dann $p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n)$, das heißt,
das charakteristische Polynom zerfällt in Linearfaktoren über $\mathbb{K}$.

Hierzu gilt die Umkehrung: Genau dann ist A über $\mathbb{K}$ trigonalisierbar,
wenn das charakteristische Polynom über $\mathbb{K}$ in Linearfaktoren zerfällt.

Speziell über dem Körper $\mathbb{C}$ gilt dies immer: Nach dem Fundamentalsatz der Algebra (F3c) zerfällt jedes Polynom über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren.

Besser noch: Ist A trigonalisierbar, so ist A sogar **jordanisierbar**!
📖 Zur Vertiefung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §Z.4.

Polynome und Potenzreihen von Matrizen

Gegeben sei ein (reelles oder komplexes) Polynom

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j x^j = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k \in \mathbb{K}[x].$$

Darin können wir jede Matrix $X \in \mathbb{K}^{n\times n}$ einsetzen:

$$f(X) = \sum_{j=0}^{k} a_j X^j = a_0 E + a_1 X + \cdots + a_k X^k \in \mathbb{K}^{n\times n}.$$

Das gilt allgemeiner für jede Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots.$$

Auch hier können wir jede Matrix $X \in \mathbb{K}^{n\times n}$ einsetzen:

$$f(X) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j X^j = a_0 E + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots.$$

Einzige Voraussetzung ist – wie immer – die Konvergenz!

Die euklidische Norm für Vektoren und Matrizen

Für Vektoren $v \in \mathbb{K}^n$ nutzen wir die **euklidische Norm**:

$$|v| = \sqrt{|v_1|^2 + \cdots + |v_n|^2}$$

Für Matrizen $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ definieren wir genauso die **Matrixnorm**

$$|A| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

Dies ist tatsächlich eine Norm auf dem Vektorraum $\mathbb{K}^{m\times n}$, das heißt:

1. Es gilt $|A| \geq 0$ für alle $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, und $|A| = 0$ nur für $A = 0$.
2. Es gilt $|\lambda A| = |\lambda| \cdot |A|$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$.
3. Es gilt $|A + B| \leq |A| + |B|$ für alle $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$.

Die Norm $|A - B|$ misst den Abstand der Matrizen A und B.
Aus (3) folgt $|A - B| \geq \big||A| - |B|\big|$. (Übung: Zeigen Sie dies.)

Konvergenz von Matrizen $A_k \to A$ ist definiert durch $|A_k - A| \to 0$.
Dies ist gleichbedeutend mit komponentenweise Konvergenz.

Eigenschaften der Matrixnorm

Die Matrixnorm ist verträglich mit der Vektornorm:

4 Es gilt $|A \cdot v| \leq |A| \cdot |v|$ für alle $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und $v \in \mathbb{K}^n$.

Allgemeiner ist die Matrixnorm submultiplikativ:

5 Es gilt $|A \cdot B| \leq |A| \cdot |B|$ für alle $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{K}^{n \times p}$.

Bei Potenzen gilt insbesondere $|A^k| \leq |A|^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Nachrechnen: Dank CSU gilt $|u \cdot v| \leq |u| \cdot |v|$ für $u, v \in \mathbb{K}^n$.
Seien $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{K}^{1 \times n}$ die Zeilen der Matrix A. Dann gilt:

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \cdot v = \begin{pmatrix} a_1 \cdot v \\ \vdots \\ a_m \cdot v \end{pmatrix}$$

Hieraus folgt die erste Ungleichung:

$$|Av|^2 = |a_1 \cdot v|^2 + \cdots + |a_m \cdot v|^2 \leq |a_1|^2 |v|^2 + \cdots + |a_m|^2 |v|^2 = |A|^2 \cdot |v|^2$$

Die Ungleichung $|A \cdot B| \leq |A| \cdot |B|$ folgt ebenso, spaltenweise über B.

Inversion durch geometrische Reihe

Satz O3F: Einsetzen einer Matrix in eine Potenzreihe

Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$.
Für jede Matrix $X \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit Norm $|X| < \rho$ konvergiert die Reihe $f(X) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$ absolut in $\mathbb{K}^{n \times n}$ und damit komponentenweise, denn sie wird majorisiert durch $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k X^k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot |X|^k < \infty$.

Beispiel: Wir betrachten die geometrische Reihe. Für $|x| < 1$ gilt

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} x^j = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = (1-x)^{-1},$$

denn $(1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-1}) = 1 - x^k \to 1$ für $k \to \infty$.
Gleiches gilt auch für jede Matrix $X \in \mathbb{K}^{n \times n}$: Für $|X| < 1$ gilt

$$f(X) = \sum_{j=0}^{\infty} X^j = 1 + X + X^2 + X^3 + \cdots = (1-X)^{-1}.$$

☺ Allgemein und explizit. ☺ Beweis einfach durch Nachrechnen!
☺ Endliche Summen können zur Approximation genutzt werden.
☺ Leichtere Spezialfälle löst man besser per Gauß–Algorithmus.

Lineare DGSysteme mit konstanten Koeffizienten

O333
Ausführung

Jedes lineare DGSystem mit **konstanten Koeffizienten** hat die Form

$$\begin{cases} y_1'(t) = a_{11}\, y_1(t) + \cdots + a_{1n}\, y_n(t) + b_1(t) \\ \qquad\vdots \\ y_n'(t) = a_{n1}\, y_1(t) + \cdots + a_{nn}\, y_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

Wir bündeln dies prägnant zu einer vektorwertigen Gleichung:

$$\boxed{y'(t) = A\, y(t) + b(t)}$$

Hierbei ist $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Matrix und $b : I \to \mathbb{K}^n$ eine stetige Abbildung.
Die **Koeffizientenmatrix** A ist hier konstant, d.h. unabhängig von t.
Der **Störterm** $b(t)$ hingegen darf weiterhin von t abhängen.

Die zugehörige **homogene Gleichung** erhalten wir für $b = 0$:

$$\boxed{y'(t) = A\, y(t).}$$

☺ Diese geschickte Schreibweise spart Arbeit und betont die Struktur:
Sie verschafft uns Übersicht und macht den Blick frei fürs Wesentliche.

Die Exponentialfunktion für Matrizen

O334
Ausführung

Erinnerung: Sei $a \in \mathbb{C}$. Wir suchen eine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ der eindimensionalen Differentialgleichung $y'(t) = a\, y(t)$ mit $y(0) = 1$.
Hierzu gibt es genau eine Lösung, nämlich die Funktion $y(t) = \mathrm{e}^{at}$.
Wir nutzen hierzu dankend die gute alte Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

Allgemeiner: Sei nun $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix (zuvor $n = 1$, jetzt $n \geq 2$).
Wir suchen $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $Y'(t) = A\, Y(t)$ und $Y(0) = E$.
Als Lösung vermuten wir auch hier die Funktion $Y(t) = \mathrm{e}^{tA}$.
Wir bräuchten hierzu die Exponentialfunktion für Matrizen

$$\exp : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}, \qquad \exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3!} + \ldots$$

☺ Das sieht verwegen aus, aber es funktioniert ganz wunderbar!
Der folgende Satz garantiert, dass diese Exponentialreihe tatsächlich für jede Matrix konvergiert und alle ersehnten Eigenschaften hat.

Satz O3G: Exponentialfunktion für Matrizen

Für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ konvergiert die Exponentialreihe

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = E + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{4!}A^4 + \dots.$$

Dies definiert die Matrix-Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}^{n\times n}$.

1. Die Nullmatrix wird auf die Einheitsmatrix $\exp(0) = E$ abgebildet.
2. Aus $AB = BA$ folgt $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$.
3. Insbesondere gilt $\exp(A)\exp(-A) = \exp(A - A) = \exp(0) = E$. Somit ist die Matrix $\exp(A)$ invertierbar mit $\exp(-A) = \exp(A)^{-1}$.
4. Die Zuordnung $t \mapsto \exp(tA)$ definiert eine differenzierbare Kurve $Y : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n\,\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $0 \mapsto E$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(tA) = A\,\exp(tA)$.

Übung: Rechnen Sie dies nach wie für die reelle Exponentialfunktion.

Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §1.14, sowie Seite F222ff.

Satz O3G: Exponentialfunktion für Matrizen

Die Exponentialfunktion verträgt sich zudem mit Matrix-Operationen:

5. komplexe Konjugation $\exp(\overline{A}) = \overline{\exp(A)}$
6. Transposition $\exp(A^\intercal) = \exp(A)^\intercal$
7. Konjugation $\exp(PAP^{-1}) = P\exp(A)P^{-1}$
8. Determinante $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A))$
9. Euler–Grenzwert $(E + \frac{1}{n}A)^n \to \exp(A)$ für $n \to \infty$

Für (5) nutzen wir $\overline{A}^k = \overline{A^k}$, für (6) entsprechend $(A^\intercal)^k = (A^k)^\intercal$, und für (7) schließlich $(PAP^{-1})^k = PAP^{-1}\cdots PAP^{-1} = PA^kP^{-1}$. Formel (8) ist klar für Dreiecksmatrizen:

$$\det\exp\begin{pmatrix} a_{11} & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{a_{11}} & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{a_{nn}} \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{a_{11}}\cdots\mathrm{e}^{a_{nn}} = \mathrm{e}^{a_{11}+\dots+a_{nn}}$$

Für den allgemeinen Fall nutzen wir unser Wissen aus der linearen Algebra: Jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist trigonalisierbar, das heißt, es existiert $P \in \mathrm{GL}_n\,\mathbb{C}$ sodass PAP^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist. Determinante und Spur bleiben dank (7) bei Konjugation unverändert:

$$\det(\exp(A)) = \det(\exp(PAP^{-1})) = \exp(\mathrm{tr}(PAP^{-1})) = \exp(\mathrm{tr}(A))$$

Beispiel: Diagonalmatrizen

Aufgabe: Berechnen Sie die Exponentialfunktion $\exp(A)$ einer Diagonalmatrix $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ sowie $\exp(tA)$ für $t \in \mathbb{R}$.

Lösung: (0) Die Potenzen der Matrix A sind leicht zu berechnen:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

(1) Hieraus berechnen wir ebenso leicht die Exponentialreihe:

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathrm{e}^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

(2) Mit dem Zeitparameter $t \in \mathbb{R}$ im Exponenten erhalten wir:

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathrm{e}^{t\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Beispiel: eine kleine Dreiecksmatrix

Aufgabe: Berechnen Sie $\exp(A)$ einer 2×2–Dreiecksmatrix.

Lösung: (0) Wir betrachten eine obere 2×2–Dreiecksmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}, \; A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & (a+b)c \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}, \; A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & (a^2+ab+b^2)c \\ 0 & b^3 \end{pmatrix}, \ldots$$

(1) Wir nehmen zunächst $a \neq b$ an. Per Induktion finden wir dann

$$A^k = \begin{pmatrix} a^k & \frac{a^k - b^k}{a-b} c \\ 0 & b^k \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \exp \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^a & \frac{\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^b}{a-b} c \\ 0 & \mathrm{e}^b \end{pmatrix}.$$

(2) Resonanz: Für $b \to a$ gilt $\frac{\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^b}{a-b} \to \mathrm{e}^a$. Für $a = b$ finden wir tatsächlich:

$$A^k = \begin{pmatrix} a^k & k a^{k-1} c \\ 0 & a^k \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \exp \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^a & c\,\mathrm{e}^a \\ 0 & \mathrm{e}^a \end{pmatrix}.$$

Für große Matrizen ist diese Rechnung ebenso möglich, aber mühsam. In Kapitel P werden wir hierfür Eigen- und Hauptvektoren nutzen. Diese Werkzeuge erweisen sich auch hier als sehr effizient.

Beispiel: ein nilpotenter Jordan–Block

Aufgabe: Berechnen Sie $\exp(tN)$ einer nilpotenten Jordan–Matrix

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

Lösung: (1) Es gilt $N^4 = 0$. Die Exponentialreihe bricht hier ab:

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{N^0}{0!} + \frac{N^1}{1!} + \frac{N^2}{2!} + \frac{N^3}{3!} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Mit dem Zeitparameter $t \in \mathbb{R}$ im Exponenten erhalten wir:

$$\exp(tN) = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel: ein allgemeiner Jordan–Block

Aufgabe: Berechnen Sie $\exp(tB)$ einer beliebigen Jordan–Matrix

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}.$$

Lösung: (1) Dank $B = \lambda I + N$ und $IN = NI$ erhalten wir

$$\exp(B) = \exp(\lambda I + N) = \exp(\lambda I)\exp(N) = \mathrm{e}^{\lambda} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Mit dem Zeitparameter $t \in \mathbb{R}$ im Exponenten erhalten wir:

$$\exp(tB) = \mathrm{e}^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Anwendung auf Differentialgleichungen

Korollar O3H: Lösung durch Exponentialfunktion

Zu gegebenen Matrizen $A, Y_0 \in \mathbb{K}^{n\times n}$ hat die Differentialgleichung

$$\boxed{Y'(t) = A\,Y(t) \quad \text{mit} \quad Y(t_0) = Y_0}$$

genau eine Lösung $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^{n\times n}$, nämlich $Y(t) = \exp\big[(t-t_0)A\big]Y_0$.
Ebenso hat zu jedem $y_0 \in \mathbb{K}^n$ die vektorwertige Differentialgleichung

$$\boxed{y'(t) = A\,y(t) \quad \text{mit} \quad y(t_0) = y_0}$$

genau eine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$, nämlich $y(t) = \exp\big[(t-t_0)A\big]y_0$.
Somit hat die Differentialgleichung $y' = A\,y$ als Lösungsmenge $L_0 = \{\, \mathrm{e}^{(t-t_0)A}\,y_0 \mid y_0 \in \mathbb{K}^n \,\}$ einen $\mathbb{K}$–Vektorraum der Dimension n.

- ☺ Für einfache Matrizen können wir $\exp(tA)$ explizit berechnen (s.o.).
- ☹ Für komplizierte Matrizen A ist leider auch $\exp(tA)$ kompliziert.
- ☺ Vereinfachung mit linearer Algebra durch Eigen-/Hauptvektoren!

Beispiel: ein Jordan–Block

Aufgabe: Lösen Sie folgende gekoppelte Differentialgleichungen:

$$\left\{\begin{array}{l} y_1' = \lambda y_1 + y_2 \\ y_2' = \lambda y_2 + y_3 \\ y_3' = \lambda y_3 + y_4 \\ y_4' = \lambda y_4 \end{array}\right\} \iff \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

Lösung: Die Exponentialfunktion liefert eine Fundamentalmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \exp(tA) = \mathrm{e}^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zur Probe rechnet man die vier Fundamentallösungen direkt nach:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t\,\mathrm{e}^{\lambda t} \\ \mathrm{e}^{\lambda t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2}\,\mathrm{e}^{\lambda t} \\ t\,\mathrm{e}^{\lambda t} \\ \mathrm{e}^{\lambda t} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{t^3}{3!}\,\mathrm{e}^{\lambda t} \\ \frac{t^2}{2}\,\mathrm{e}^{\lambda t} \\ t\,\mathrm{e}^{\lambda t} \\ \mathrm{e}^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

- ☺ Das AWP $y' = A\,y$ mit $y(0) = y_0$ wird gelöst durch $y(t) = \exp(tA)\,y_0$.

Beispiel: euklidische Drehmatrix

Aufgabe: Lösen Sie das DGSystem $y_1' = -y_2$ und $y_2' = y_1$.

Lösung: Wir lösen das Differentialgleichungssystem $y' = A\,y$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots$$

Hieraus berechnen wir mühelos die Matrix-Exponentialfunktion:

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \ldots & -t + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^5}{5!} + \ldots \\ t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \ldots & 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Kurzum:

$$\boxed{Y(t) = \exp\begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}}$$

Die Probe ist leicht: Für die Ableitung gilt wie gewünscht

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Y(t) = \begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix} = A\,Y(t).$$

☺ Das AWP $y' = A\,y$ mit $y(0) = y_0$ wird gelöst durch $y(t) = \exp(tA)\,y_0$.

Beispiel: hyperbolische Drehmatrix

Aufgabe: Lösen Sie das DGSystem $y_1' = y_2$ und $y_2' = y_1$.

Lösung: Wir lösen das Differentialgleichungssystem $y' = A\,y$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots$$

Hieraus berechnen wir mühelos die Matrix-Exponentialfunktion:

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \ldots & t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \ldots \\ t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \ldots & 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$$

Kurzum:

$$\boxed{Y(t) = \exp\begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t & -\sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}}$$

Die Probe ist leicht: Für die Ableitung gilt wie gewünscht

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Y(t) = \begin{pmatrix} \sinh t & \cosh t \\ \cosh t & \sinh t \end{pmatrix} = A\,Y(t).$$

☺ Das AWP $y' = A\,y$ mit $y(0) = y_0$ wird gelöst durch $y(t) = \exp(tA)\,y_0$.

Exponentialfunktion und Euler–Verfahren

☺ Wir erkennen einen schönen Zusammenhang zwischen der Matrix-Exponentialfunktion und der Näherung durch das Euler–Verfahren!

Aufgabe: (1) Berechnen Sie die Lösung $x : [0, 6] \to \mathbb{R}^2$ des AWP

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2, & x_1(0) = 1, \\ \dot{x}_2 = x_1, & x_2(0) = 0. \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die Matrix-Exponentalfunktion $x(t) = \exp(tA)x_0$.

(b) Vergleichen Sie dies mit der numerischen Näherung durch das Euler–Verfahren mit Polygonzügen zu Schrittweiten $\Delta t = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$.

(2) Untersuchen Sie ebenso die Lösung $x : [-2, 2] \to \mathbb{R}^2$ des AWP

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(-2) = \sinh(-2), \\ \dot{x}_2 = x_1, & x_2(-2) = \cosh(-2). \end{cases}$$

(3) Zu lösen sei $\dot{x}(t) = A\,x(t)$ mit konstanter Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Konvergieren die Euler–Näherungen zum Anfangswert $x(t_0) = x_0$ gegen die exakte Lösung $x : [t_0, t_0 + T] \to \mathbb{K}^n$ mit $x(t) = \exp\big[(t - t_0)A\big]\,x_0$?

Exponentialfunktion und Euler–Verfahren

Lösung: (a) Die Exponentialfunktion haben wir oben berechnet:

$$X(t) = \exp\begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \quad x(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$X(t) = \exp\begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t & -\sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \quad x(t) = \begin{pmatrix} \sinh t \\ \cosh t \end{pmatrix}$$

(b) Die Graphiken zeigen die Polygonzüge des Euler–Verfahrens.

(3) Wir betrachten die Schrittweite $\Delta t = T/N$, also $t_k = t_0 + kT/N$.

Die Euler–Approximation $\tilde{x} : [t_0, t_0 + T] \to \mathbb{K}^n$ interpoliert die Werte

$$\tilde{x}(t_{k+1}) = \tilde{x}(t_k) + A\,\tilde{x}(t_k) \cdot (t_{k+1} - t_k) = \big(1 + \tfrac{T}{N}A\big)\,\tilde{x}(t_k).$$

Rekursiv erhalten wir $\tilde{x}(t_k) = \big(1 + \frac{T}{N}A\big)^k x_0$ für alle $k = 0, 1, 2, \ldots, N$.

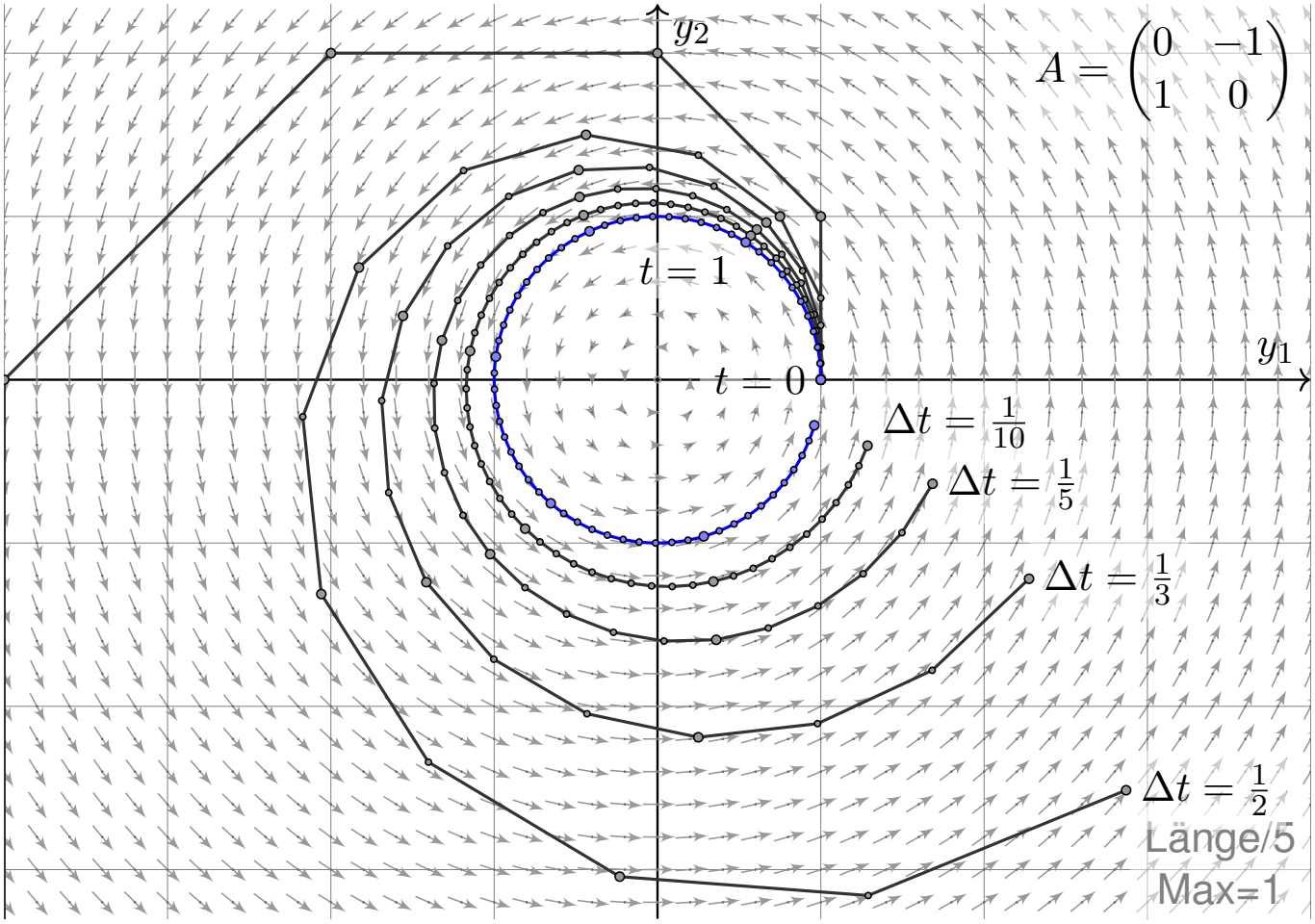
Für $N \to \infty$ kennen wir den Grenzwert $\big(1 + \frac{T}{N}A\big)^N \to \exp(TA)$. Also:

$$\tilde{x}(t_0 + T) = \big(1 + \tfrac{T}{N}A\big)^N x_0 \quad \to \quad \exp(TA)\,x_0 = x(t_0 + T)$$

Gleiches gilt für $t \in [t_0, t_0 + T]$, die Rechnung ist nur etwas mühsamer.

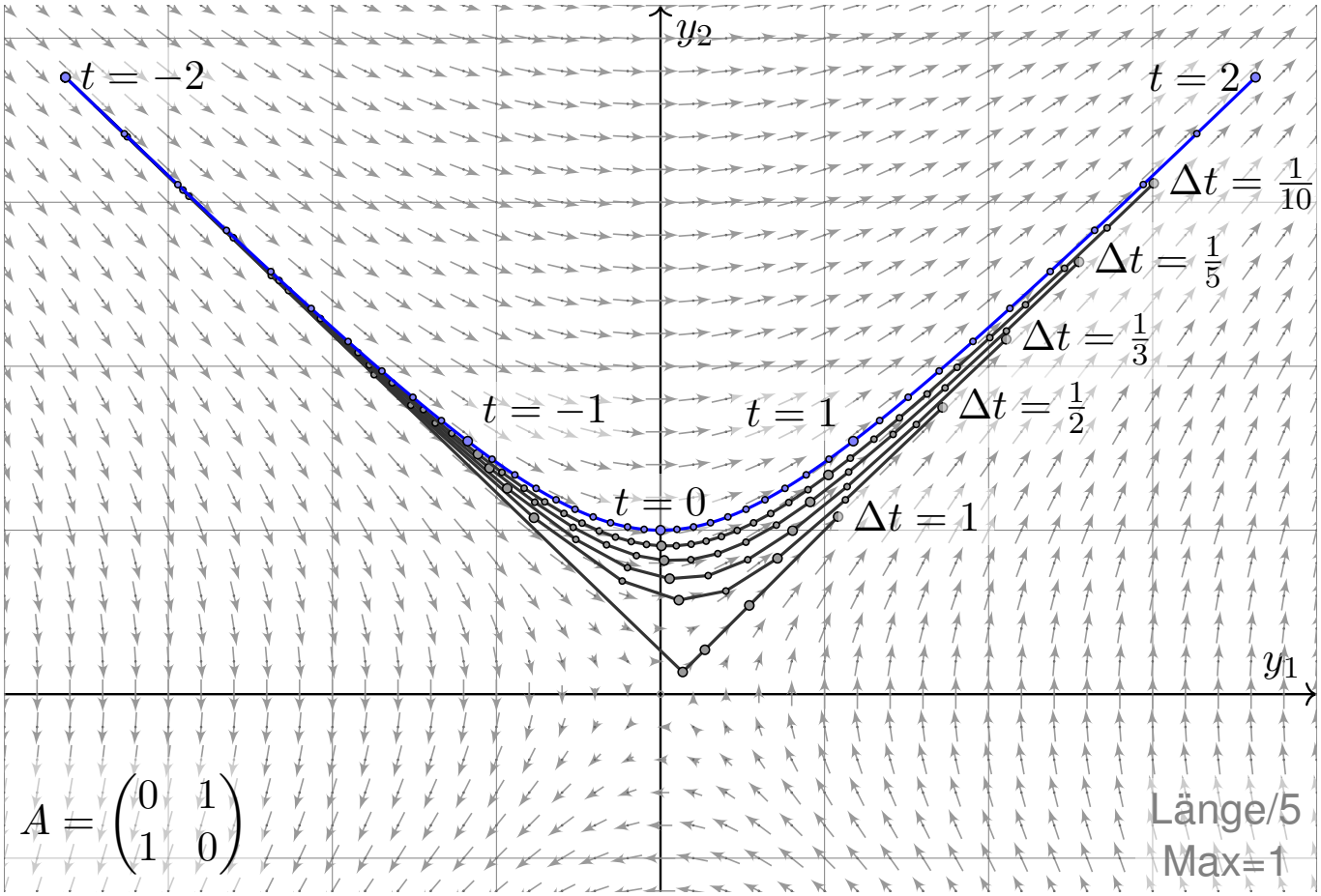
Exponentialfunktion und Euler–Verfahren

O347
Ausführung



Exponentialfunktion und Euler–Verfahren

O348
Ausführung



Vektorwertige und matrixwertige Gleichungen

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $A : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ eine stetige Funktion.
Wir interessieren uns für **vektorwertige Differentialgleichungen**

$$\boxed{y'(t) = A(t)\,y(t).}$$

Gesucht sind Lösungen $y : I \to \mathbb{K}^n$. Diese bilden einen Vektorraum.
Ebenso nützlich sind **matrixwertige Differentialgleichungen**

$$\boxed{Y'(t) = A(t)\,Y(t)}$$

Gesucht sind matrixwertige Lösungen $Y : I \to \mathbb{K}^{n\times n} : t \mapsto Y(t)$.
Auch diese bilden einen Vektorraum. Spalten sind Lösungsvektoren.
Entscheidender Vorteil: Matrizen kann man zudem auch multiplizieren!

Auch hier stellen sich die für Differentialgleichungen üblichen Fragen: Gibt es immer eine Lösung? Wenn ja, wie findet man eine? gar alle? Ist die Lösung durch einen gegebenen Anfangswert eindeutig bestimmt? Die folgende Lösungsformel löst all diese Fragen! Wir werden anschließend lernen, sie zu nutzen und in wichtigen Spezialfällen zu vereinfachen.

Fundamentallösung homogener DGSysteme

Die Picard–Lindelöf–Iteration O2A beschert uns folgende Lösung:

Satz O3I: Fundamentallösung homogener DGSysteme

Sei $A : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ stetig. Die **matrixwertige Differentialgleichung**

$$\boxed{W'(t) = A(t)\,W(t) \quad \text{mit Anfangswert} \quad W(t_0) = E}$$

erlaubt die **Fundamentallösung** $W : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ gegeben durch

$$\boxed{W(t) = E + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t_k=t_0}^{t} A(t_k) \cdots \int_{t_2=t_0}^{t_3} A(t_2) \int_{t_1=t_0}^{t_2} A(t_1)\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2 \cdots \mathrm{d}t_k.}$$

Für jedes $t \in I$ ist die Reihe absolut konvergent und $W(t)$ invertierbar.

- ☺ Allgemein und explizit. ☺ Beweis durch termweises Ableiten!
- ☺ Endliche Summen können zur Approximation genutzt werden.
- ☺ Diese Lösungsformel dient als Vorlage für alle Spezialfälle.

Fundamentallösung linearer DGSysteme

Aufgabe: Rechnen Sie nach, dass W tatsächlich eine Lösung ist.

Lösung: Die Fundamentallösung ist gegeben als Reihe

$$W(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t).$$

Die Summanden sind $A_0(t) = E$ und für $k = 1, 2, 3, \ldots$ rekursiv

$$A_k(t) = \int_{\tau=t_0}^{t} A(\tau) A_{k-1}(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Dank HDI gilt $A_k'(t) = A(t)A_{k-1}(t)$. Durch termweises Ableiten folgt

$$W'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A(t)\,A_{k-1}(t) = A(t)\sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) = A(t)\,W(t).$$

Also erfüllt $W(t)$ die Differentialgleichung mit Anfangswert $W(t_0) = E$.

☺ Dies garantiert die Existenz einer Lösung... samt Lösungsformel!

Fundamentallösung linearer DGSysteme

Ergibt die Reihe $W(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t)$ und obige Rechnung einen Sinn?
Zur Begründung und Erläuterung: Warum konvergiert diese Reihe?

Das Integral über Matrizen in $\mathbb{K}^{n\times n}$ geschieht komponentenweise.
Dank Stetigkeit von A existiert jedes dieser Integrale, und A_k ist stetig.

Auch die Konvergenz der Reihe ist komponentenweise zu verstehen.
Zu t existiert $M \in \mathbb{R}$ mit $|A(t)| \le M$ für alle t zwischen t_0 und t.
Für die iterierten Integrale folgt induktiv $|A_k(t)| \le M^k |t - t_0|^k / k!$.

Die Reihe $W(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t)$ konvergiert absolut, majorisiert durch

$$\sum_{k=0}^{\infty} |A_k(t)| \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k |t - t_0|^k}{k!} = \mathrm{e}^{M|t-t_0|} < \infty.$$

Die so definierte Funktion $W : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $W(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t)$ ist stetig diff'bar, und wir dürfen termweise ableiten: $W'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k'(t)$

☺ Damit ist die obige Rechnung gerechtfertig und Satz O3I bewiesen.

Ein einfaches Beispiel

Aufgabe: Lösen Sie $W'(t) = A(t)\,W(t)$ mit $W(0) = E$ und

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Wir setzen $A_0(t) = E$ und für $k = 1, 2, 3, \ldots$ rekursiv

$$A_k(t) = \int_{\tau=0}^{t} A(\tau) A_{k-1}(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Die ersten Schritte sind:

$$A_1(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau = \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau = \begin{pmatrix} t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

$$A_2(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau & \frac{1}{2}\tau^2 \\ 0 & \tau \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau = \int_0^t \begin{pmatrix} \tau & \frac{3}{2}\tau^2 \\ 0 & \tau \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{2}t^3 \\ 0 & \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix}$$

$$A_3(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\tau^2 & \frac{1}{2}\tau^3 \\ 0 & \frac{1}{2}\tau^2 \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau = \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\tau^2 & \tau^3 \\ 0 & \frac{1}{2}\tau^2 \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau = \begin{pmatrix} \frac{1}{3!}t^3 & \frac{1}{4}t^4 \\ 0 & \frac{1}{3!}t^3 \end{pmatrix}$$

Ein einfaches Beispiel

Wir rechnen munter so weiter… und finden per Induktion

$$A_k(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^k}{k!} & \frac{t^{k+1}}{2(k-1)!} \\ 0 & \frac{t^k}{k!} \end{pmatrix}.$$

Als Fundamentallösung erhalten wir schließlich die Reihe

$$W(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & \frac{t^2}{2}\,\mathrm{e}^t \\ 0 & \mathrm{e}^t \end{pmatrix}.$$

Wie nach jeder Rechnung empfiehlt sich auch hier die Probe:
Zur Startzeit $t = 0$ gilt $W(0) = E$ sowie allgemein

$$W'(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & t\,\mathrm{e}^t + \frac{t^2}{2}\,\mathrm{e}^t \\ 0 & \mathrm{e}^t \end{pmatrix},$$

$$A(t)\,W(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & \frac{t^2}{2}\,\mathrm{e}^t \\ 0 & \mathrm{e}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & t\,\mathrm{e}^t + \frac{t^2}{2}\,\mathrm{e}^t \\ 0 & \mathrm{e}^t \end{pmatrix}.$$

Ein weniger einfaches Beispiel

Aufgabe: Lösen Sie $W'(t) = A(t)\,W(t)$ mit $W(0) = E$ und

$$A(t) = \begin{pmatrix} a & ct \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Lösung: Wir setzen $A_0(t) = E$ und für $k = 1, 2, 3, \ldots$ rekursiv

$$A_k(t) = \int_{\tau=0}^{t} A(\tau) A_{k-1}(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Die ersten Schritte sind:

$$A_1(t) = \int_{\tau=0}^{t} \begin{pmatrix} a & c\tau \\ 0 & b \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau = \begin{pmatrix} at & \frac{c}{2!}t^2 \\ 0 & bt \end{pmatrix}$$

$$A_2(t) = \int_{\tau=0}^{t} \begin{pmatrix} a^2\tau & \frac{a+2b}{2!}c\tau^2 \\ 0 & b^2\tau \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{2!}t^2 & \frac{a+2b}{3!}ct^3 \\ 0 & \frac{b^2}{2!}t^2 \end{pmatrix}$$

$$A_3(t) = \int_{\tau=0}^{t} \begin{pmatrix} \frac{a^3}{2!}\tau^2 & \frac{a^2+2ab+3b^2}{3!}c\tau^3 \\ 0 & \frac{b^3}{2!}\tau^2 \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau = \begin{pmatrix} \frac{a^3}{3!}t^3 & \frac{a^2+2ab+3b^2}{4!}ct^4 \\ 0 & \frac{b^3}{3!}t^3 \end{pmatrix}$$

Ein weniger einfaches Beispiel

Wir rechnen munter so weiter… und finden (für $a \neq b$) per Induktion

$$A_k(t) = \begin{pmatrix} \frac{a^k}{k!}t^k & \frac{c\,c_k}{(k+1)!}t^{k+1} \\ 0 & \frac{b^k}{k!}t^k \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{(a-b)^2} + (k+1)\frac{b^k}{b-a}.$$

Als Fundamentallösung erhalten wir schließlich die Reihe

$$W(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{at} & c\,f(t) \\ 0 & \mathrm{e}^{bt} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad f(t) = \frac{\mathrm{e}^{at} - \mathrm{e}^{bt}}{(b-a)^2} + \frac{t\,\mathrm{e}^{bt}}{b-a}$$

Wie nach jeder Rechnung empfiehlt sich auch hier die Probe:

$$f'(t) = \frac{a\,\mathrm{e}^{at} - b\,\mathrm{e}^{bt}}{(b-a)^2} + \frac{\mathrm{e}^{bt} + bt\,\mathrm{e}^{bt}}{b-a} = \cdots = a\,f(t) + t\,\mathrm{e}^{bt}$$

$$W'(t) = \begin{pmatrix} a\,\mathrm{e}^{at} & c\,f'(t) \\ 0 & b\,\mathrm{e}^{bt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & ct \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{at} & c\,f(t) \\ 0 & \mathrm{e}^{bt} \end{pmatrix} = A(t)\,W(t).$$

Im Sonderfall $a = b$ erhalten wir $c_k = \frac{k(k+1)}{2}a^k$ und $f(t) = \frac{t^2}{2}\,\mathrm{e}^{at}$.

Kommutierende Matrizen

Im Allgemeinen brauchen wir die iterierten Integrale aus Satz O3I. Speziell für kommutierende Matrizen können wir dies mit Hilfe der Exponentialfunktion vereinfachen zu einem einzigen Integral:

Satz O3J: DGSystem mit kommutierenden Matrizen

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $A : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ stetig. Zu lösen sei

$$\boxed{Y'(t) = A(t)\,Y(t) \quad \text{mit} \quad Y(t_0) = E.}$$

Gilt $A(s)A(t) = A(t)A(s)$ für alle $s, t \in I$, so ist die Fundamentallösung

$$\boxed{Y(t) = \exp\left(\int_{\tau=t_0}^{t} A(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right).}$$

☺ Speziell für jede konstante Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ erhalten wir erneut

$$Y(t) = \exp\big[(t-t_0)A\big].$$

⚠ Ohne Kommutativität gibt es Gegenbeispiele wie unten illustriert.

Kommutierende Matrizen

Aufgabe: Rechnen Sie nach, dass Y tatsächlich eine Lösung ist.

Lösung: Für $B(t) = \int_{\tau=t_0}^{t} A(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ gilt $A(t)B(t) = B(t)A(t)$, denn

$$\begin{aligned} A(t)B(t) &\overset{\text{Def}}{=} A(t)\left[\int_{\tau=t_0}^{t} A(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] \overset{\text{Lin}}{=} \int_{\tau=t_0}^{t} A(t)A(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &\overset{\text{Kom}}{=} \int_{\tau=t_0}^{t} A(\tau)A(t)\,\mathrm{d}\tau \overset{\text{Lin}}{=} \left[\int_{\tau=t_0}^{t} A(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]A(t) \overset{\text{Def}}{=} B(t)A(t). \end{aligned}$$

Aus $B'(t) = A(t)$ berechnen wie die Ableitung von $Y(t) = \exp B(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Y &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[E + B + \frac{1}{2!}BB + \frac{1}{3!}BBB + \dots\right] \\ &= A + \frac{1}{2!}\Big(AB + BA\Big) + \frac{1}{3!}\Big(ABB + BAB + BBA\Big) + \dots \\ &= A + \frac{2}{2!}AB + \frac{3}{3!}AB^2 + \dots = A\Big(E + B + \frac{1}{2!}B^2 + \dots\Big) = AY. \end{aligned}$$

Somit gilt $Y'(t) = A(t)\,Y(t)$ und $Y(t_0) = E$ wie gewünscht.

Kommutierende Matrizen

Aufgabe: Lösen Sie $Y'(t) = A(t)\,Y(t)$ mit $Y(0) = E$ und

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Die Matrizen $A(s), A(t)$ kommutieren für alle $s, t \in \mathbb{R}$:

$$A(s)A(t) = \begin{pmatrix} 1 & s+t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A(t)A(s)$$

Wir finden

$$\int_{\tau=0}^{t} A(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{\tau=0}^{t} \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau = \begin{pmatrix} t & t^2/2 \\ 0 & t \end{pmatrix}.$$

Die Exponentialfunktion solcher Matrizen kennen wir schon:

$$\exp \begin{pmatrix} t & t^2/2 \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & \frac{t^2}{2}\,\mathrm{e}^t \\ 0 & \mathrm{e}^t \end{pmatrix}$$

Probe! Dies haben wir auch durch iterierte Integrale erhalten O353.

☺ Dank Vereinfachung kommen wir hier mit nur einem Integral aus!

Kommutierende Matrizen

Aufgabe: Lässt sich die Lösungsformel aus Satz O3J anwenden auf

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & -1 \end{pmatrix}?$$

Lösung: Diese Matrizen kommutieren nicht untereinander:

$$A(s)A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t-s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A(t)A(s) = \begin{pmatrix} 1 & s-t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Formel des Satzes liefert folgendes O338:

$$B(t) = \int_{\tau=0}^{t} A(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \begin{pmatrix} t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & -t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{B(t)} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & (\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t})\,\frac{t}{4} \\ 0 & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$$

Das ist leider keine Lösung zu $Y' = A\,Y$: Machen Sie die Probe!

Die richtige Lösung haben wir oben bereits berechnet O355:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & f(t) \\ 0 & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad f(t) = (\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t} - 2t\,\mathrm{e}^{-t})/4$$

⚠ Die Kommutativität $A(s)A(t) = A(t)A(s)$ ist wesentlich für die Gültigkeit des Satzes; ohne Kommutativität gibt es Gegenbeispiele.

Invertierbarkeit der Fundamentallösung

Satz O3K: Invertierbarkeit der Fundamentallösung

Wie zuvor sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in I$, und $A : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ stetig.

Dann existieren Lösungen $W, V : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ der Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} W'(t) &= A(t)\,W(t), \qquad & W(t_0) &= E, \\ V'(t) &= -V(t)\,A(t), \qquad & V(t_0) &= E. \end{aligned}$$

Diese erfüllen die Gleichung $V(t)\,W(t) = E$ für alle $t \in I$.

Das heißt, jede Matrix $W(t)$ ist invertierbar und $W(t)^{-1} = V(t)$.

Nachrechnen: Wir setzen $F(t) := V(t)\,W(t)$. Nach Produktregel gilt

$$F'(t) = \big[-V(t)\,A(t)\big]\,W(t) + V(t)\,\big[A(t)\,W(t)\big] = 0.$$

Aus $F(t_0) = E$ und $F' = 0$ folgt $F(t) = E$ für alle $t \in I$.

☺ Anders gesagt: Die Fundamentallösung W zu $W'(t) = A(t)\,W(t)$ ist zu jedem Zeitpunkt $t \in I$ invertierbar, und die Inverse $V(t) = W(t)^{-1}$ erfüllt ihrerseits die Differentialgleichung $V'(t) = -V(t)\,A(t)$.

Invertierbarkeit der Fundamentallösung

Wir müssen noch die Existenz von W und V sicherstellen.

Mit Satz O3I konstruieren wir explizit eine Lösung W zu

$$W'(t) = A(t)\,W(t) \quad \text{mit Anfangswert} \quad W(t_0) = E.$$

Ebenso können wir eine Lösung V konstruieren zu

$$V'(t) = -V(t)\,A(t) \quad \text{mit Anfangswert} \quad V(t_0) = E.$$

Die Koeffizientenmatrix steht hier allerdings auf der rechten Seite!
Die Fundamentallösung müsste entsprechend umformuliert werden…

Ich greife lieber zu einem Trick: Wir konstruieren $U : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ zu $U'(t) = -A(t)^\intercal\,U(t)$ mit $U(t_0) = E$ und erhalten $V(t) := U(t)^\intercal$, denn die Transposition kehrt die Produktreihenfolge um.

☺ Ein Lob der Matrizenrechnung: Sie vereinfacht unsere Rechnungen! Lineare Differentialgleichungssysteme $y'(t) = A(t)\,y(t)$ sind zwar nur ein Spezialfall des allgemeinen Problems $y'(t) = f(t, y(t))$, doch sie sind häufig und wichtig. Daher lohnt sich ihre eingehende Untersuchung.

Definition O3L: Wronski–Determinante

Die Determinante $w(t) = \det W(t)$ heißt **Wronski–Determinante**.

Unser einfaches Beispiel O353:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{tr} A(t) = 2,$$

$$W(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & \frac{t^2}{2}\,\mathrm{e}^t \\ 0 & \mathrm{e}^t \end{pmatrix}, \quad \det W(t) = \mathrm{e}^{2t}.$$

Unser weniger einfaches Beispiel O355:

$$A(t) = \begin{pmatrix} a & ct \\ 0 & b \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{tr} A(t) = a + b,$$

$$W(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{at} & c\,f(t) \\ 0 & \mathrm{e}^{bt} \end{pmatrix}, \quad \det W(t) = \mathrm{e}^{(a+b)t}.$$

☺ Wir sehen hier einen sehr einfachen und nützlichen Zusammenhang zwischen $\operatorname{tr} A(t)$ und $\det W(t)$: Dies ist die berühmte Liouville–Formel!

Satz O3M: Liouville–Formel

(1) Aus $W'(t) = A(t)\,W(t)$ und $w(t) = \det W(t)$ folgt

$$\boxed{\begin{aligned} &w'(t) = \big[\operatorname{tr} A(t)\big]\,w(t) \qquad \text{und daraus} \\ &w(t) = w(t_0) \cdot \exp\left[\int_{\tau=t_0}^{t} \operatorname{tr} A(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]. \end{aligned}}$$

Insbesondere folgt aus $w(t_0) \neq 0$ bereits $w(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.

(2) Ist $\operatorname{tr} A(t) = a$ konstant, so folgt $\det W(t) = \det W(t_0) \cdot \mathrm{e}^{a(t-t_0)}$.

(3) Für spurlose Matrizen, also $\operatorname{tr} A(t) = 0$, ist $t \mapsto \det W(t)$ konstant.

Nachrechnen: (1) Für $w = \det(w_1, \dots, w_n)$ folgt die Ableitung gemäß Produktregel:

$$\begin{aligned} w' &= \det(w_1', \dots, w_n) + \dots + \det(w_1, \dots, w_n') \\ &= \det(Aw_1, \dots, w_n) + \dots + \det(w_1, \dots, Aw_n) = (\operatorname{tr} A)\,w \end{aligned}$$

Als Funktion von $w_1, \dots, w_n$ ist die letzte Zeile multilinear und alternierend in $w_1, \dots, w_n$. Dank Eindeutigkeit der Determinante ist dies also gleich $c \cdot \det(w_1, \dots, w_n)$; die Konstante $c = \operatorname{tr} A$ finden wir durch Einsetzen der Einheitsmatrix $(w_1, \dots, w_n) = (e_1, \dots, e_n)$.

Orthogonale und antisymmetrische Matrizen

Aufgabe: (1) Schreiben Sie das DGSystem $y_1' = -y_2$ und $y_2' = y_1$ als Matrixgleichung $Y'(t) = A\,Y(t)$. Lösen Sie das AWP mit $Y(0) = E$. Welche besonderen Eigenschaften haben die Matrizen A und $Y(t)$?

(2) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ reelle Matrizen. Wann heißt A symmetrisch? antisymmetrisch? Wann heißt B orthogonal, geschrieben $B \in \mathrm{O}_n\,\mathbb{R}$?

(3) Sei A antisymmetrisch. Wie sieht die Lösung zu $Y'(t) = A\,Y(t)$ mit $Y(0) = E$ aus? Ist die Matrix $Y(t)$ zu jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ orthogonal?

(4) Was bedeutet diese Orthogonalitätseigenschaft geometrisch? Was folgt speziell für die Spur $\operatorname{tr} A$ und die Determinante $\det Y(t)$?

(5) Was gilt komplex für antihermitesche und unitäre Matrizen?

Lösung: (1) Wir lösen die Matrix-Differentialgleichung $Y' = A\,Y$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung erhalten wir durch die Matrix-Exponentialfunktion: O343

$$Y(t) = \exp\begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Orthogonale und antisymmetrische Matrizen

☺ Diese DG tritt häufig auf, wir kennen sie bereits gut von der ebenen Kreisbewegung sowie dem harmonischen Oszillator ohne Reibung. O101

Die Systemmatrix A ist hier antisymmetrisch, erfüllt also $A^\intercal = -A$. Zu jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ ist $Y(t)$ eine Drehmatrix, also orthogonal! Diesen Zusammenhang wollen wir nun allgemein nachrechnen.

(2) Zur Erinnerung: Die Matrix A ist **symmetrisch**, falls $A^\intercal = A$, und **antisymmetrisch**, falls $A^\intercal = -A$. Diese Bedingung ist leicht zu prüfen: Man sieht dies jeweils leicht durch Spiegelung an der Hauptdiagonalen!

Die Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt **orthogonal**, wenn ihre Spaltenvektoren eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ bilden, also $B^\intercal B = E$ gilt. Das ist äquivalent für Zeilenvektoren, also $BB^\intercal = E$. Beides bedeutet $B^{-1} = B^\intercal$.

(3) Ist die Systemmatrix A antisymmetrisch, so ist die Lösung $Y(t) = \mathrm{e}^{At}$ orthogonal, da $Y(t)^\intercal = \exp(A^\intercal t) = \exp(-At) = \exp(At)^{-1} = Y(t)^{-1}$.

(4) Die Lösung $Y(t) = \mathrm{e}^{At}$ ist demnach eine Drehung. Aus $A^\intercal = -A$ folgt $\operatorname{tr} A = 0$ und dank Liouville $\det Y(t) = \det Y(0) = 1$. (Für $B \in \mathrm{O}_n\,\mathbb{R}$ gilt allgemein $\det B = \pm 1$; der Fall -1 tritt für $Y(t) = \mathrm{e}^{At}$ nicht auf.)

(5) Gleiches gilt komplex für antihermitesche und unitäre Matrizen.

Unitäre und antihermitesche Matrizen

Zur Erinnerung: Die Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist **hermitesch**, falls $A^\intercal = \overline{A}$, und **antihermitesch**, falls $A^\intercal = -\overline{A}$. Diese Bedingung ist schnell zu prüfen: Man sieht dies jeweils leicht durch Spiegelung an der Hauptdiagonalen!

Die Matrix $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt **unitär**, wenn ihre Spaltenvektoren eine Orthonormalbasis des $\mathbb{C}^n$ bilden, also $\overline{B}^\intercal B = E$ gilt. Das ist äquivalent für Zeilenvektoren, also $B\overline{B}^\intercal = E$. Beides bedeutet $B^{-1} = \overline{B}^\intercal$.

Satz O3N: antisymmetrische / antihermitesche Systemmatrizen

Zu lösen sei $W'(t) = A(t)\,W(t)$ mit $W(t_0) = E$ und $A : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ stetig.

(1) Ist die Systemmatrix $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ antisymmetrisch für alle $t \in I$, so ist die Lösungsmatrix $W(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal für alle $t \in I$.

Insbesondere gilt $\operatorname{tr} A(t) = 0$ und $\det W(t) = 1$ für alle $t \in I$.

(2) Ist die Systemmatrix $A(t) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ antihermitesch für alle $t \in I$, so ist die Lösungsmatrix $W(t) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitär für alle $t \in I$.

Insbesondere gilt $\operatorname{tr} A(t) \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ und $\det W(t) \in \mathbb{S}^1$ für alle $t \in I$.

Aufgabe: Rechnen Sie diese Aussagen sorgfältig nach!

Unitäre und antihermitesche Matrizen

Lösung: Wir rechnen den unitären Fall; der orthogonale Fall ist analog. (Letzteres ist genau der Spezialfall, in dem alle Matrizen reell sind.)

(2) Wir zeigen $\overline{W(t)}^\intercal W(t) = E$ für alle $t \in I$. Wegen $W(t_0) = E$ gilt dies zum Startzeitpunkt $t_0 \in I$. Anschließend betrachten wir die Ableitung:

$$\begin{aligned}\big[\overline{W}^\intercal W\big]' &= \overline{W'}^\intercal W + \overline{W}^\intercal W' &&= \overline{A\,W}^\intercal W + \overline{W}^\intercal A\,W \\ &= \overline{W}^\intercal\,\overline{A}^\intercal W + \overline{W}^\intercal A\,W = \overline{W}^\intercal\Big(\overline{A}^\intercal + A\Big)W &&= 0\end{aligned}$$

Auf dem Intervall I ist die Funktion $t \mapsto \overline{W(t)}^\intercal W(t)$ konstant, also $= E$.

Wegen $A(t)^\intercal = -\overline{A}(t)$ sind alle Diagonaleinträge rein imaginär, somit auch ihre Summe $\operatorname{tr} A(t) \in \mathrm{i}\mathbb{R}$. Dank Liouville gilt $\det Y(t) \in \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbb{R}} = \mathbb{S}^1$.

☺ Letzteres wissen wir aus der Linearen Algebra: Aus $E = \overline{B}^\intercal B$ folgt $1 = \det E = \det(\overline{B}^\intercal B) = \det(\overline{B}^\intercal)\det(B) = |\det(B)|^2$, also $B \in \mathbb{S}^1$.

☺ Orthogonale und unitäre Matrizen sind sehr nützlich, insbesondere leicht invertierbar. Jede solche zusätzliche Information ist wertvoll zur Lösung von DGsystemen, sei es zur Probe oder zur Berechnung:
Im $\mathbb{R}^2$ folgt aus einer Lösungsspalte $y_1(t)$ die zweite $y_2(t) = \circlearrowleft y_1(t)$.
Im $\mathbb{R}^3$ folgt aus zwei Spalten $y_1(t), y_2(t)$ die dritte $y_3(t) = y_1(t) \times y_2(t)$.

Satz O3O: Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Wie zuvor sei $A : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ stetig und $W : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ die Fundamentallösung zu $W'(t) = A(t)\,W(t)$ mit $W(t_0) = E$.

(1) Zur Startmatrix $Y_0 \in \mathbb{K}^{n\times n}$ lösen wir die Matrix-Differentialgleichung

$$\boxed{Y'(t) = A(t)\,Y(t) \quad \text{mit} \quad Y(t_0) = Y_0.}$$

Diese hat genau eine Lösung $Y : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$, nämlich $Y(t) = W(t)\,Y_0$.

Somit hat die Differentialgleichung $Y' = A\,Y$ als Lösungsmenge $L_0 = \{\, W\,Y_0 \mid Y_0 \in \mathbb{K}^{n\times n} \,\}$ einen $\mathbb{K}$–Vektorraum der Dimension n^2.

(2) Zum Startvektor $y_0 \in \mathbb{K}^n$ lösen wir die Vektor-Differentialgleichung

$$\boxed{y'(t) = A(t)\,y(t) \quad \text{mit} \quad y(t_0) = y_0.}$$

Diese hat genau eine Lösung $y : I \to \mathbb{K}^n$, nämlich $y(t) = W(t)\,y_0$.

Somit hat die Differentialgleichung $y' = A\,y$ als Lösungsmenge $L_0 = \{\, W y_0 \mid y_0 \in \mathbb{K}^n \,\}$ einen $\mathbb{K}$–Vektorraum der Dimension n.

Zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen können wir an den allgemeinen Satz appellieren (O1B / O2A). In der speziellen Situation eines linearen DGSystems (O3B / O3I) kennen wir zudem die explizite Fundamentalmatrix $W(t)$ und können damit alles direkt nachrechnen...

Existenz: Für $Y(t) = W(t)\,Y_0$ gilt der Startwert $Y(t_0) = Y_0$ sowie

$$Y'(t) = W'(t)\,Y_0 = A(t)\,W(t)\,Y_0 = A(t)\,Y(t).$$

Eindeutigkeit: Angenommen $Y'(t) = A(t)\,Y(t)$ und $Y(t_0) = Y_0$.

Für $t \in I$ setzen wir $F(t) := W(t)^{-1}\,Y(t)$. Nach Produktregel gilt

$$F'(t) = \big[-W(t)^{-1}\,A(t)\big]\,Y(t) + W(t)^{-1}\,\big[A(t)\,Y(t)\big] = 0$$

Aus $F(t_0) = Y_0$ und $F' = 0$ folgt $F(t) = Y_0$ für alle $t \in I$. Also

$$W(t)^{-1}\,Y(t) = Y_0 \quad \Rightarrow \quad Y(t) = W(t)\,Y_0$$

☺ Somit hat jede Lösung des AWP die im Satz genannte Form.
Die Aussage für $y = W y_0$ rechnet man wörtlich genauso nach.

Dimension des Lösungsraumes

☺ Die Dimension sehen wir direkt so: Jeder Startwert $y_0 \in \mathbb{K}^n$ legt die Lösung y eindeutig fest, also haben wir genau n Freiheitsgrade.

Ausführlich: Wir erhalten zueinander inverse, lineare Abbildungen

$$\begin{aligned} \Phi &: \mathbb{K}^n \to L_0 \;:\; y_0 \mapsto W\,y_0, \\ \Psi &: L_0 \to \mathbb{K}^n \;:\; y \mapsto y(t_0). \end{aligned}$$

Für jeden Startvektor $y_0 \in \mathbb{K}^n$ gilt dabei

$$y_0 \overset{\Phi}{\mapsto} W y_0 \overset{\Psi}{\mapsto} W(t_0)\,y_0 = y_0 \quad \text{dank} \quad W(t_0) = E.$$

Für jede Lösung $y \in L_0$ gilt umgekehrt

$$y \overset{\Psi}{\mapsto} y(0) \overset{\Phi}{\mapsto} W\,y(0) = y \quad \text{dank Eindeutigkeit der Lösung.}$$

Dies zeigt $L_0 \cong \mathbb{K}^n$, insbesondere $\dim_{\mathbb{K}}(L_0) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$.

Der Satz O3O liefert explizite Formeln und garantiert die Eindeutigkeit der Lösung. Wir folgern hieraus insbesondere die Dimension des Lösungsraumes. Für einfache $A(t)$ können wir zudem $W(t)$ explizit berechnen. Damit ist jedes homogene lineare DGSystem im Prinzip gelöst.

☺ Die nötigen Rechnungen vereinfachen wir im nächsten Kapitel.

Zwischenbilanz zu linearen DGSystemen

Mit unseren Werkzeugen können wir die beiden Grundprobleme lösen:

Ein **homogenes lineares DGSystem** erster Ordnung ist von der Form

$$\boxed{y'(t) = A(t)\,y(t).}$$

Gegeben ist hierzu eine stetige **Koeffizientenmatrix** $A : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$.
Iterierte Integrale O3I liefern die Fundamentallösung $W : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$.
Jede vektorwertige Lösung $y : I \to \mathbb{K}^n$ hat die Form $y(t) = W(t)\,y_0$.
Die Lösungsmenge $L_0 = \{\, W y_0 \mid y_0 \in \mathbb{K}^n \,\}$ ist ein n–dim. Vektorraum.

Ein **inhomogenes lineares DGSystem** ist von der Form

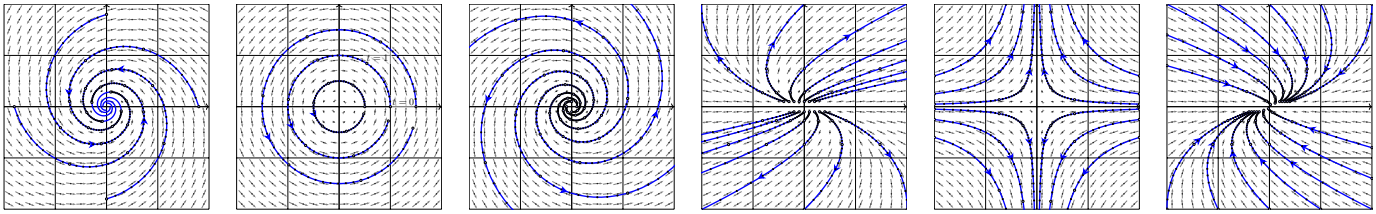
$$\boxed{y'(t) = A(t)\,y(t) + b(t).}$$

Gegeben ist hier neben $A : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ ein stetiger **Störterm** $b : I \to \mathbb{K}^n$.
Variation der Konstanten (O3D) liefert eine Partikulärlösung $y_b : I \to \mathbb{K}^n$.
Somit hat die Differentialgleichung $y' = A\,y + b$ als Lösungsmenge
$L_b = \{\, y_b + W y_0 \mid y_0 \in \mathbb{K}^n \,\}$ einen affinen Raum der Dimension n.

☺ Die nötigen Rechnungen vereinfachen wir im nächsten Kapitel.

Kapitel P

Autonome Systeme, Gleichgewicht und Stabilität



Wie ist es möglich, daß die Mathematik, letztlich doch ein Produkt menschlichen Denkens unabhängig von der Erfahrung, den wirklichen Gegebenheiten so wunderbar entspricht?

Albert Einstein (1879–1955), *Geometrie und Erfahrung* (1921)

Vollversion • michael-eisermann.de/lehre/HM3 • 26.02.2025

Inhalt dieses Kapitels P

1 Lineare DGSysteme mit konstanten Koeffizienten
- Gekoppelte Oszillatoren und stehende Wellen
- Lösungen mittels Eigenvektoren und Eigenfunktionen
- Lösungen mittels Hauptvektoren und Hauptfunktionen
- Von komplexen zu reellen Lösungen

2 Gleichgewichtslagen und In/Stabilität von Fixpunkten
- Linearisierung um Fixpunkte und In/Stabilität
- Räuber-Beute-Modell nach Lotka–Volterra
- Stabilitätsanalyse nach Lyapunov
- Hamiltonsche Dynamik und Stabilität

3 Fazit: Differentialgleichungssysteme
- Zusammenfassung und Verständnisfragen
- Reduktion der Ordnung und Methodenvergleich
- Beispiele zur Dynamik um Fixpunkte und In/Stabilität
- Invariante Mengen dank Tangentialbedingung

Lineare DGSysteme mit konstanten Koeffizienten

Differentialgleichungen sind die Sprache der Naturgesetze.
Im vorigen Kapitel O haben wir dazu Differentialgleichungssysteme der Form $x'(t) = f(t, x(t))$ mit Anfangsdaten $x(t_0) = x_0$ untersucht: Gibt es immer eine Lösungsfunktion x? nur eine? oder mehrere?

Der **Existenz- und Eindeutigkeitssatz** O1B antwortet umfassend: Es genügt, dass f stetig differenzierbar ist. Hoch lebe die Analysis! Nachdem Existenz- und Eindeutigkeit geklärt sind, wenden wir uns der praktischen Berechnung zu: Wie finden wir eine Lösung? gar alle?

Für **lineare Differentialgleichungssysteme** $x'(t) = A(t)\,x(t) + b(t)$ haben wir eine vollständige Lösungstheorie. Der Struktursatz O3B sagt: Die Lösungsmenge ist ein **linearer / affiner Raum** der Dimension n. Im homogenen Fall $b = 0$ suchen wir also eine **Basis** der Länge n.

Für **konstante Koeffizienten** $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist die Lösung besonders einfach: Es genügt, eine Basis des Raums $\mathbb{K}^n$ aus **Eigenvektoren** der Matrix A zu finden. Falls dies nicht gelingt, so führen allgemeiner **Hauptvektoren** stets zum Ziel. Hoch lebe die Lineare Algebra!

Langzeitverhalten und Stabilität von Lösungen

Anfangsdaten sind oft zufälligen kleinen Schwankungen unterworfen, etwa durch äußere **Störungen** oder ungenaue **Messdaten**. Hierzu untersucht die **Stabilitätstheorie** die Auswirkung von Störungen auf dynamische Systeme, insbesondere um Gleichgewichtszustände.

Zur Vereinfachung betrachten wir **autonome Systeme** $x'(t) = f(x(t))$; hier hängt also die rechte Seite $f(x)$ nicht explizit von der Zeit t ab. Ein **Fixpunkt** x_0 (Ruhelage) zeichnet sich durch $f(x_0) = 0$ aus: Bei Start in $x(t_0) = x_0$ verharrt das System in dieser Ruhelage.

Die Ruhelage x_0 ist **instabil**, wenn eine zufällige kleine Störung im weiteren zeitlichen Verlauf immer größer wird und von x_0 wegführt. Sie ist (asymptotisch) **stabil**, wenn kleine Störungen beschränkt bleiben (bzw. abklingen und das System langfristig in die Ruhelage zurückkehrt).

Kleine Auslenkungen $x(t) = x_0 + u(t)$ aus der Ruhelage befolgen in erster Näherung $u(t) = A\,u'(t)$ mit Jacobi–Matrix $A = f'(x_0) \in \mathbb{K}^{n\times n}$, ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten! Genau hierdurch erhalten lineare DGSysteme ihre zentrale Bedeutung.

Lineare DGSysteme von besonders einfacher Form

Aufgabe: Wie lösen Sie (geschickt) die folgenden linearen DGSysteme?
(1) Die Koeffizienten sind konstant und bilden eine **Diagonalmatrix**:

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \\ y_4'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix}$$

(2) Die Koeffizienten sind konstant und bilden einen **Jordan–Block**:

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \\ y_4'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix}$$

(3) Die Koeffizienten sind konstant und bilden eine **beliebige Matrix**:

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \\ y_4'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix}$$

Lineare DGSysteme von besonders einfacher Form

Lösung: (1) Dieses DGSystem entkoppelt zu n eindimensionalen DG $y_k'(t) = \lambda_k\, y_k(t)$. Die Lösungen sind $y_k(t) = c_k\, \mathrm{e}^{\lambda_k t}$ mit $c_k \in \mathbb{K}$ beliebig, also $y(t) = \sum_{k=1}^n c_k u_k(t)$ mit den **Eigenfunktionen** $u_k(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} e_k$. (P1B)

(2) Dieses DGSystem ist zwar nicht entkoppelt wie (1), doch wir können es ebenso rekursiv lösen: Die letzte Gleichung ergibt $y_4(t) = c_4\, \mathrm{e}^{\lambda t}$ für $y_4' = \lambda y_4$. Damit finden wir $y_3(t) = (c_4 t + c_3)\, \mathrm{e}^{\lambda t}$ für $y_3' = \lambda y_3 + y_4$, dann $y_2(t) = (c_4 t^2/2 + c_3 t + c_2)\, \mathrm{e}^{\lambda t}$ für $y_2' = \lambda y_2 + y_3$, und damit schließlich $y_1(t) = (c_4 t^3/3! + c_3 t^2/2 + c_2 t + c_1)\, \mathrm{e}^{\lambda t}$ für $y_1' = \lambda y_1 + y_2$. Insgesamt also $y(t) = \sum_{k=1}^n c_k u_k(t)$ mit $u_k(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}[e_k + t\, e_{k-1} + \ldots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e_1]$. Diese Lösungen $u_1, u_2, u_3, \ldots$ nennen wir **Hauptfunktionen**. (P1E)

(3) Für jede Lösung gilt $y(t) = \mathrm{e}^{A(t-t_0)} y_0$ mit $y(t_0) = y_0 \in \mathbb{K}^n$. (O3H)
Die Matrix-Exponentialfunktion (O3G) ist jedoch mühsam zu berechnen.

Effizienter: Mit Eigenvektoren P1A und Hauptvektoren P1C führen wir das allgemeine Problem (3) zurück auf die einfachen Fälle (1) und (2).

Das ist unser Ziel in §P1: Jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ lässt sich aufbauen aus Jordan–Blöcken (2) mittels einer Basis aus Hauptvektorketten (P1D).

Lineare DGSysteme von besonders einfacher Form

P007
Beispiel

Aufgabe: Wie lösen Sie die folgenden linearen DGSysteme?

(4) Die Koeffizienten bilden eine **Diagonalmatrix**:

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \\ y_4'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ b_3(t) \\ b_4(t) \end{pmatrix}$$

(5) Die Koeffizienten bilden eine **obere Dreiecksmatrix**:

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \\ y_4'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) & a_{14}(t) \\ 0 & a_{22}(t) & a_{23}(t) & a_{24}(t) \\ 0 & 0 & a_{33}(t) & a_{34}(t) \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ b_3(t) \\ b_4(t) \end{pmatrix}$$

(6) Die Koeffizienten bilden eine **beliebige Matrix**:

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \\ y_4'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) & a_{14}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) & a_{24}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) & a_{34}(t) \\ a_{41}(t) & a_{42}(t) & a_{43}(t) & a_{44}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ b_3(t) \\ b_4(t) \end{pmatrix}$$

Lineare DGSysteme von besonders einfacher Form

P008
Beispiel

Lösung: (4) Dieses DGSystem $y'(t) = A(t)\,y(t) + b(t)$ entkoppelt zu n eindimensionalen Differentialgleichungen $y_k'(t) = a_{kk}(t)\,y_k(t) + b_k(t)$. Diese können wir bereits lösen, etwa dank der Lösungsformel M2E.

(5) Dieses DGSystem ist zwar nicht entkoppelt wie (4), doch wir können es rekursiv lösen: Die letzte Gleichung $y_4'(t) = a_{44}(t)\,y_4(t) + b_4(t)$ lösen wir dank M2E. Genauso können wir nun $y_3'(t) = a_{33}(t)\,y_3(t) + \ldots$ lösen, dann $y_2'(t) = a_{22}(t)\,y_2(t) + \ldots$ und schließlich $y_1'(t) = a_{11}(t)\,y_1(t) + \ldots$.

(6) Die allgemeine Konstruktion O3I liefert eine Fundamentallösung für das homogene DGSystem $Y'(t) = A(t)\,Y(t)$. Variation der Konstanten O3D löst dann das inhomogene DGSystem $Y'(t) = A(t)\,Y(t) + B(t)$.

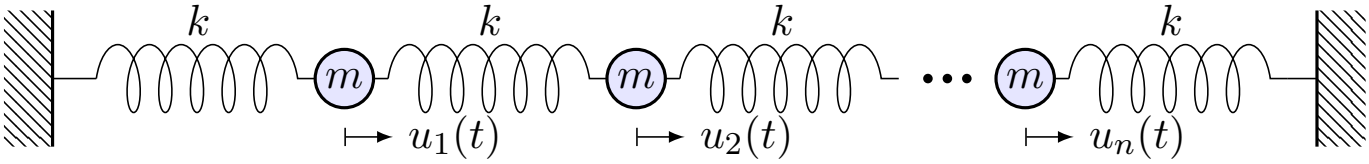
Das Problem ist also konstruktiv lösbar. Die Lösung ist eindeutig. (O3O) Die in O3I benötigten Rechnungen sind jedoch meist sehr aufwändig. Für kommutierende Matrizen O3J haben wir $Y(t) = \exp(\int_{\tau=t_0}^{t} A(\tau)\,\mathrm{d}\tau)$.

Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten (3) sind der einfachste Fall. Die Integration tritt hierbei in den Hintergrund, die Lösung gelingt uns allein dank linearer Algebra wie in (1) und (2).

Gekoppelte Oszillatoren und stehende Wellen

Wir untersuchen die Ausbreitung einer Welle, zum Beispiel einer Druck- oder Schallwelle, zunächst als diskretes, endlich-dimensionales Modell: mit Federn verbundene Massenpunkte. In diesem schönen Beispiel können wir alles explizit berechnen und anschaulich interpretieren. Zudem können wir unsere Methoden der linearen Algebra und Analysis erproben und schärfen. Anschließend extrahieren wir die zentrale Idee: Eigenvektoren und Eigenfunktionen (P1A).

Aufgabe: Formulieren und lösen Sie folgendes dynamische System:



Linear sind n Massen $m > 0$ durch $n+1$ Federn $k > 0$ verbunden.

(1) Formulieren Sie das Differentialgleichungssystem erster Ordnung.

(2) Welche Struktur hat der Lösungsraum? („Form“ und „Größe“)

(3) Finden Sie alle Lösungen zum Produktansatz $u_j(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha j}$.
Auch später bei PDE nützt diese Trennung der Variablen (R113).

(4) Gewinnen Sie hieraus eine reelle Basis des Lösungsraumes.
Wie können Sie garantieren, wirklich eine Basis gefunden zu haben?

Gekoppelte Oszillatoren und stehende Wellen

Lösung: (1) Auslenkung $u_j(t) \in \mathbb{R}$ aus der Ruhelage,
lineare Rückstellkraft $F_j = k(u_{j+1} - u_j) + k(u_{j-1} - u_j)$,
Newtons Bewegungsgesetz $F_j = m\ddot{u}_j$. Mit $c^2 := k/m$ gilt

$$\boxed{\ddot{u}_j(t) = c^2\big[u_{j-1}(t) - 2u_j(t) + u_{j+1}(t)\big] \quad \text{mit} \quad u_0(t) = u_{n+1}(t) = 0.}$$

Dies gilt für jeden der Massenpunkte $j = 1, \dots, n$ im Inneren der Kette.
Randbedingungen: Die beiden Enden $u_0 = u_{n+1} = 0$ sind hierbei fixiert.
Anfangswerte: Position $u_j(0)$ und Geschwindigkeit $\dot{u}_j(0)$ für $j = 1, \dots, n$.

Diese **Bewegungsgleichung** ist zweiter Ordnung in n Unbekannten.
Wir reduzieren sie äquivalent zu erster Ordnung in $2n$ Unbekannten:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \ddot{u}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & E_n \\ c^2 B_n & 0_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{pmatrix}$$

Mit $y = (u, \dot{u})$ ist dies eine homogene lineare Differentialgleichung
$\dot{y}(t) = A\,y(t)$ mit der angegebenen Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$.
Hier ist 0_n die $(n \times n)$–Nullmatrix und E_n die $(n \times n)$–Einheitsmatrix.

Gekoppelte Oszillatoren und stehende Wellen

Die **Bandmatrix** $B = B_n$ kodiert hierbei die geometrische Anordnung:

$$B_n := \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad A := \begin{pmatrix} 0 & E \\ c^2 B & 0 \end{pmatrix}$$

(2) Wir suchen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2n}$ mit $\dot y(t) = A\, y(t)$. Struktursatz O3B:
Die Lösungsmenge ist ein $\mathbb{R}$–Vektorraum der Dimension $2n$.

☺ Dank Existenz und Eindeutigkeit gehört zu jedem Startzustand $y(0) = (u(0), \dot u(0)) \in \mathbb{R}^{2n}$ genau eine Lösungsfunktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2n}$.

Diese wichtige Information strukturiert und erleichtert unsere Rechnung: Wir müssen jetzt nur noch $2n$ linear unabhängige Lösungen finden! Unser Produktansatz liefert uns $2n$ unabhängige Lösungen; jede davon ist eine *stehende Welle*. Wo bleiben die erwarteten *wandernden Wellen*? Die Antwort ist ebenso einfach wie verblüffend: Je nach Startzustand $y(0)$ erhalten wir eine Linearkombination stehender Wellen, ihre Summe ist eine wandernde Welle! Basiswechsel: Stehende Wellen und wandernde Wellen sind zwei mögliche Basen des Lösungsraums.

Gekoppelte Oszillatoren und stehende Wellen

(3) Wir machen den Produktansatz $u_j(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha j}$. Einsetzen ergibt:

$$-\omega^2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha j} = c^2\big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(j-1)} - 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha j} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(j+1)}\big], \quad \text{also}$$

$$\omega^2 = -c^2(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} - 2 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}) = -c^2(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha/2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2})^2 = 4c^2\sin(\alpha/2)^2$$

Zu jedem $\alpha \in \mathbb{R}$ erhalten wir $\omega = \pm 2c\sin(\alpha/2)$. Linearkombination der vier komplexen Lösungen $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\alpha j}$ liefert uns vier reelle Lösungen

$$u_j(t) = \begin{cases} \sin(\alpha j)\cos(\omega t), & \cos(\alpha j)\cos(\omega t), \\ \sin(\alpha j)\sin(\omega t), & \cos(\alpha j)\sin(\omega t). \end{cases}$$

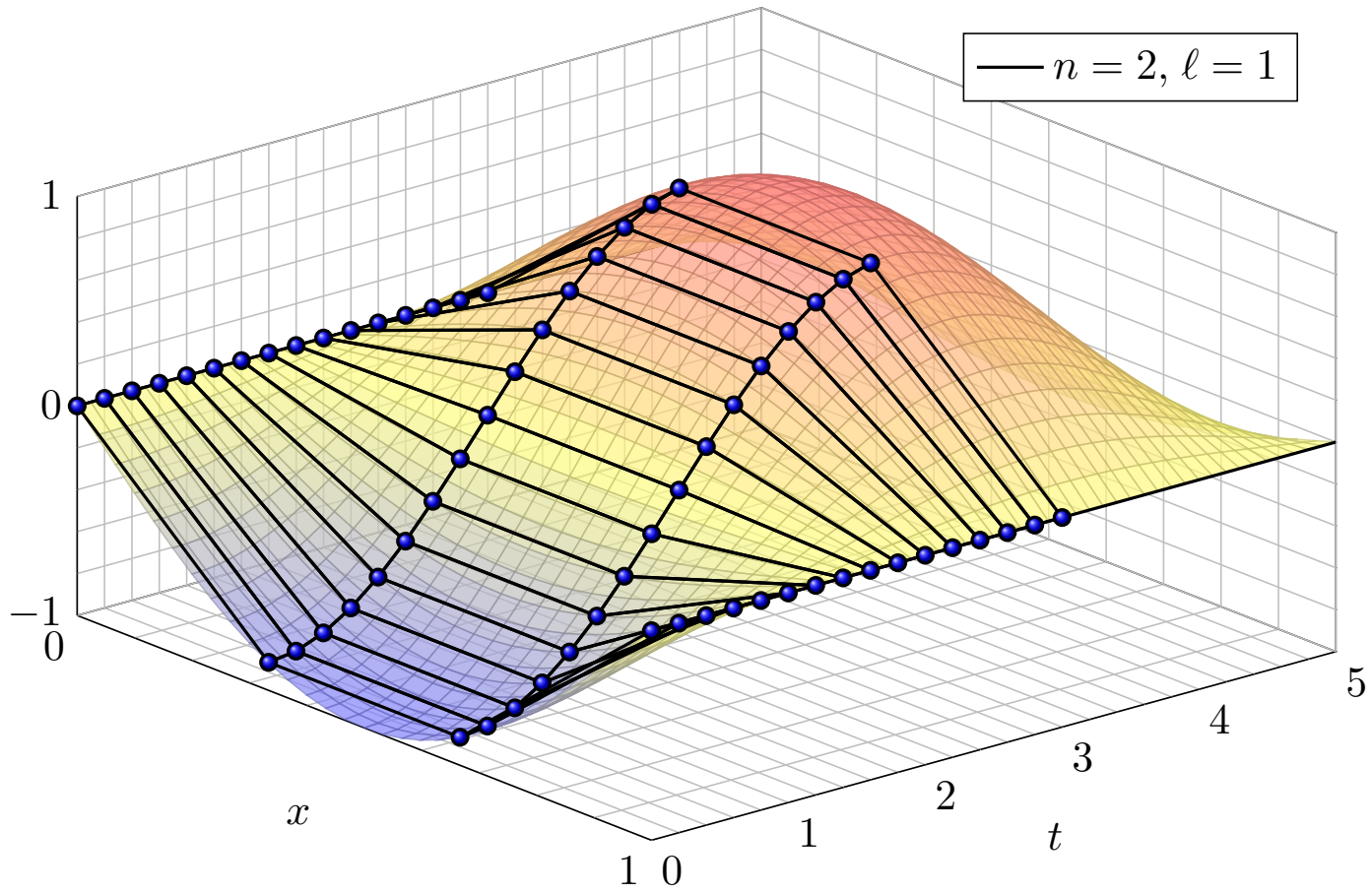
Randbedingungen $u_0 = u_{n+1} = 0$: Die Lösungen links erfüllen $u_0(t) = 0$, und $u_{n+1}(t) = 0$ für $\alpha = \ell\pi/(n+1)$ und $\ell = 1, \ldots, n$. **Eigenfunktionen**:

$$\left.\begin{aligned} u_{\ell,j}(t) &= \sin(\alpha_\ell\, j)\cos(\omega_\ell\, t) \\ v_{\ell,j}(t) &= \sin(\alpha_\ell\, j)\sin(\omega_\ell\, t) \end{aligned}\right\} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \alpha_\ell = \ell\pi/(n+1), \\ \omega_\ell = 2c\sin(\alpha_\ell/2). \end{cases}$$

(4) Diese $2n$ Lösungen sind linear unabhängig, also eine **Basis**!

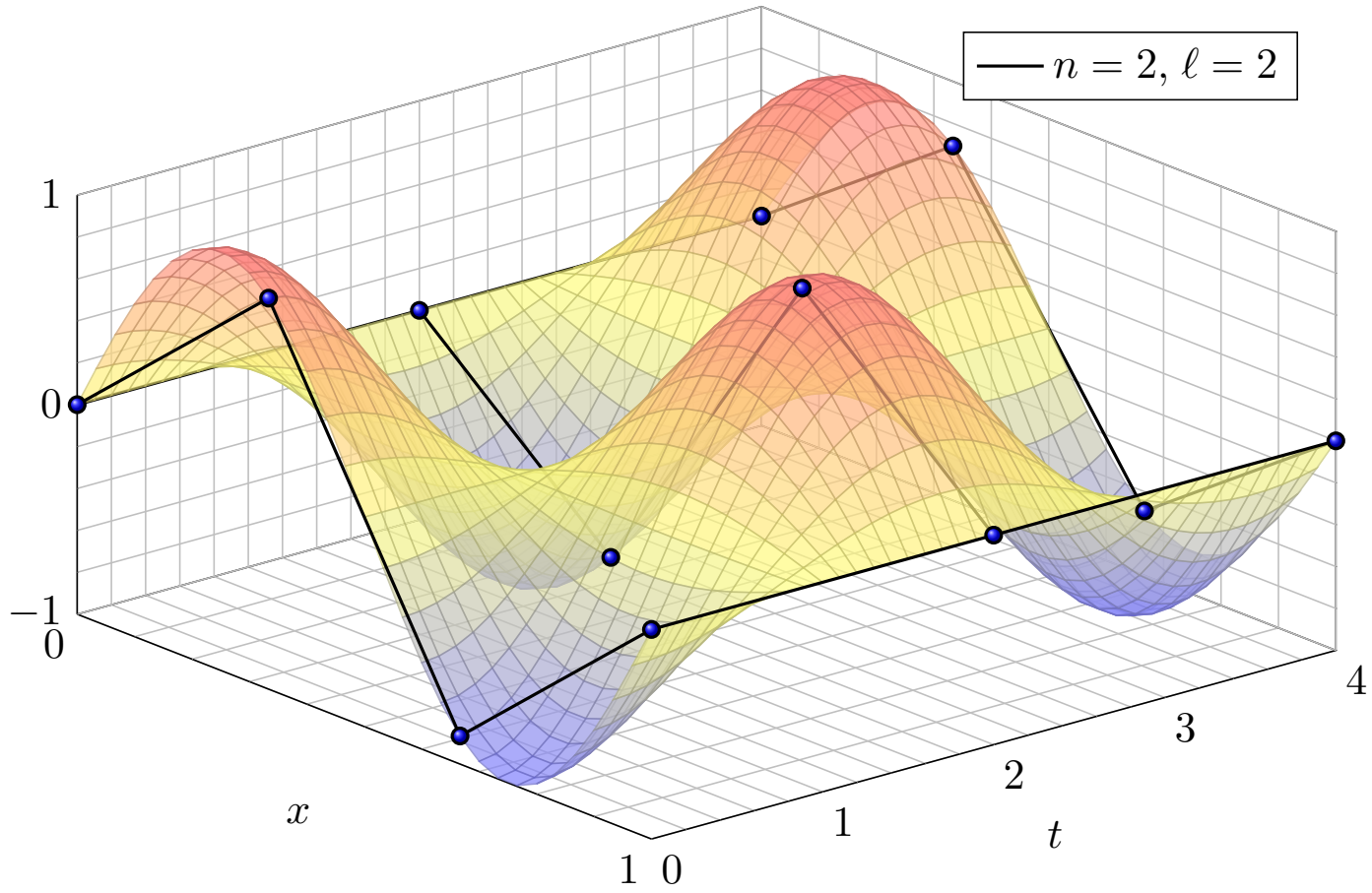
Wir haben je zwei unabhängige Eigenfunktionen gefunden, $\partial_t^2 u_\ell = -\omega_\ell^2 u_\ell$ und $\partial_t^2 v_\ell = -\omega_\ell^2 v_\ell$. Das hilft: Die Eigenwerte $\omega_1^2 < \cdots < \omega_n^2$ sind verschieden. Dank Satz N2B sind die zugehörigen Eigenfunktionen linear unabhängig. Die zugehörigen Eigenräume bilden eine direkte Summe.

Eigenfunktionen: Grundschwingung ($\ell = 1$)



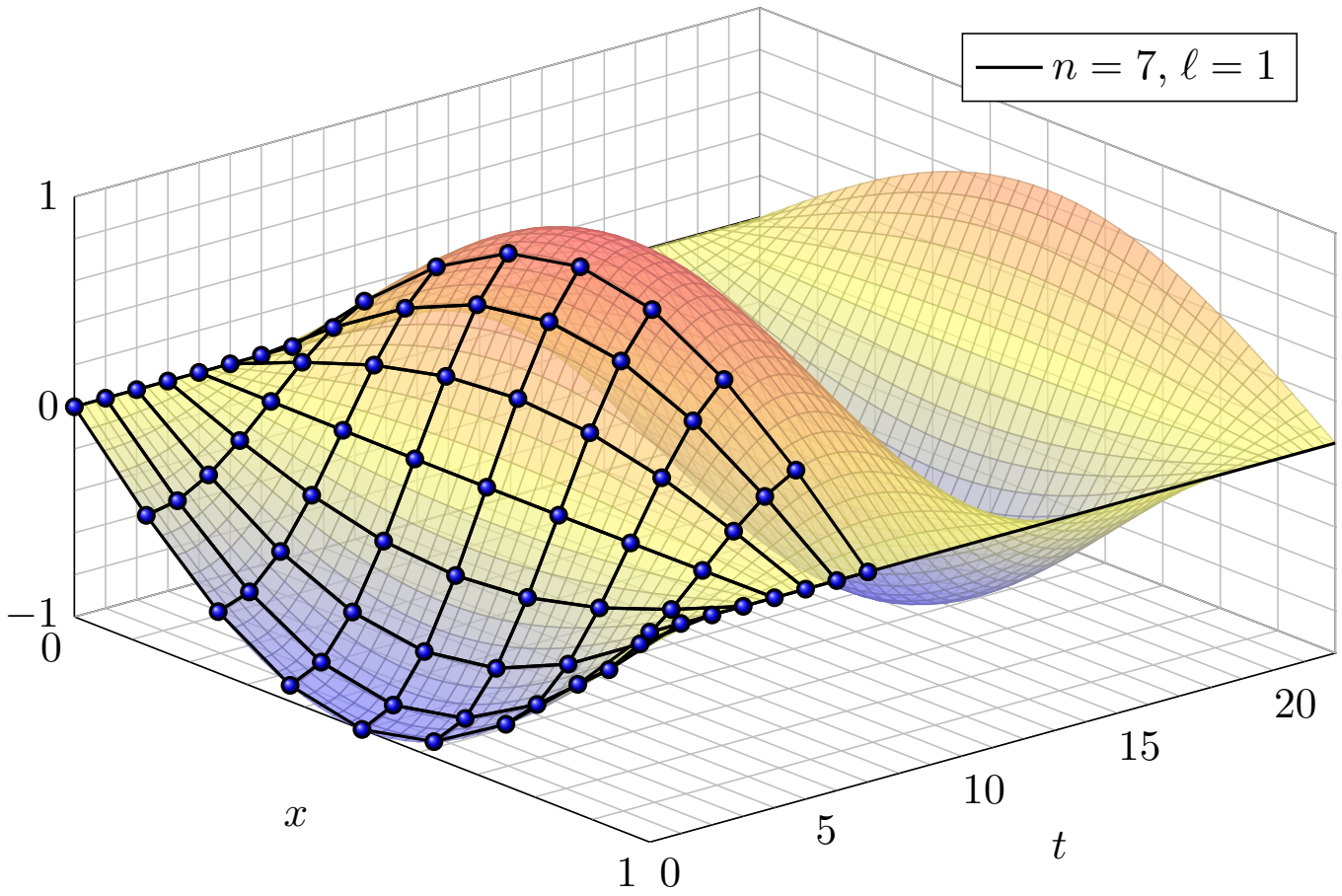
Das ist eine stehende Welle, mit Randbedingungen $u_0(t) = u_{n+1}(t) = 0$.

Eigenfunktionen: Oberschwingung ($\ell = 2$)



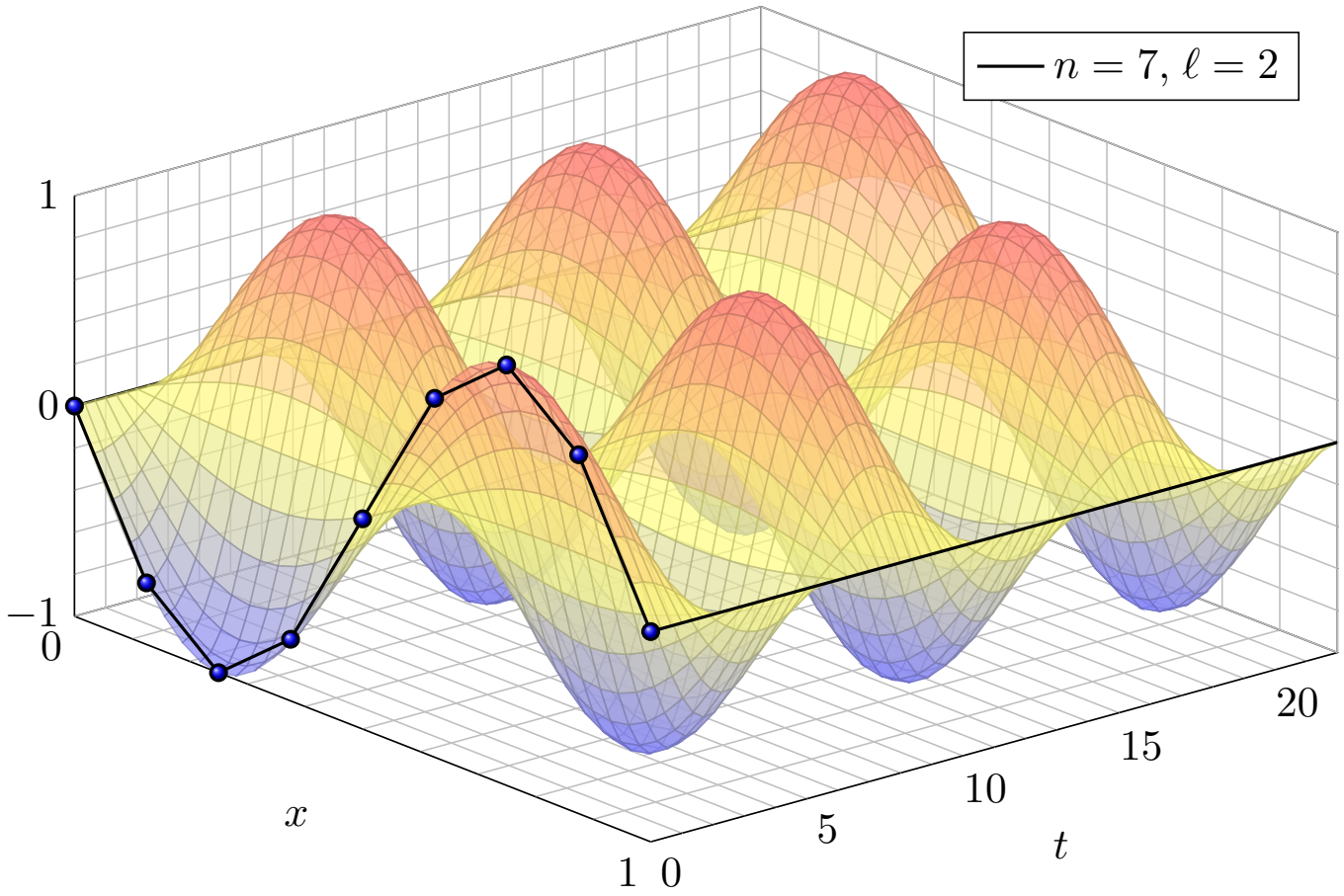
Auch dies ist eine stehende Welle; die Frequenz $\omega_2 > \omega_1$ wird größer.

Eigenfunktionen: Grundschwingung ($\ell = 1$)



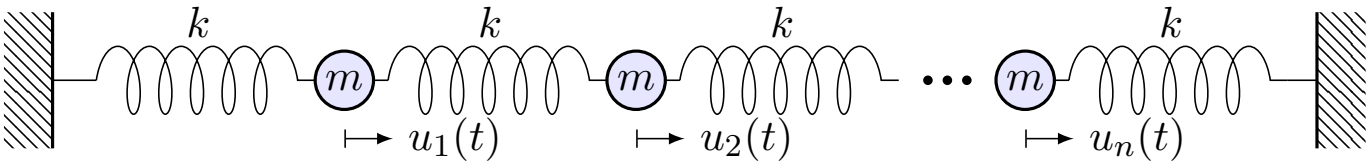
Dieses Phänomen kennt jedes Kind vom Seilspringen. Probieren Sie es!

Eigenfunktionen: erste Oberschwingung ($\ell = 2$)



☺ Von der Intuition zur Präzision: Nun können Sie alles ausrechnen!

Eigenfunktionen und Eigenvektoren



Lemma P1A: Lösung eines DGSystems durch Eigenfunktionen

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Zu lösen sei das DGSystem

$$\boxed{y'(t) = A\,y(t) \quad \text{für} \quad y:\mathbb{R}\to\mathbb{K}^n.}$$

Eine **Eigenfunktion** zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$ ist eine Lösung der Form

$$\boxed{y:\mathbb{R}\to\mathbb{K}^n \quad \text{mit} \quad y(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\,v}$$

und $v \in \mathbb{K}^n \smallsetminus \{0\}$. Wir vergleichen $y'(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{\lambda t}\,v$ und $A\,y(t) = A\,\mathrm{e}^{\lambda t}\,v$. Somit ist $y'(t) = A\,y(t)$ äquivalent zur **Eigenvektorgleichung** $Av = \lambda v$.

☺ Hier zahlen sich erneut Ihre Kenntnisse der linearen Algebra aus: Eigenwerte und -vektoren von Matrizen beherrschen Sie seit der HM1. Mit dieser Technik lösen Sie nun auch Differentialgleichungssysteme!

Algorithmus zur Berechnung von Eigenvektoren

Aufgabe: Sei V ein Vektorraum über dem Grundkörper $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

(1) Was ist ein Eigenvektor & -wert einer $\mathbb{K}$–linearen Abb. $f: V \to V$?

(2) Finden Sie alle EV / EW der Ableitung $\partial = \mathrm{d}/\mathrm{d}x : V_i \to V_i$ auf
$V_1 = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K}) = \{\, f:\mathbb{R}\to\mathbb{K} \mid f \text{ ist beliebig oft differenzierbar} \,\}$,
$V_2 = \{\, a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mid n\in\mathbb{N},\ a_0,a_1,\dots,a_n \in \mathbb{K} \,\} \subseteq C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K})$,
$V_3 = \{\, a_1x^{-1} + \cdots + a_nx^{-n} \mid n\in\mathbb{N},\ a_1,\dots,a_n \in \mathbb{K} \,\} \subseteq C^\infty(\mathbb{R}_{>0},\mathbb{K})$.
Gibt es lineare Abbildungen ohne Eigenwert? mit unendlich vielen?

Gibt es solche extremen Fälle auch für lineare Abbildung $f: V \to V$ auf einem endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$–Vektorraum? oder $\mathbb{R}$–Vektorraum?

(3) Erklären Sie den Zusammenhang lineare Abbildung – Matrix sowie Eigenvektor / Eigenwert – Determinante – charakteristisches Polynom.

Lösung: (1) Ein **Eigenvektor** der $\mathbb{K}$–linearen Abbildung $f: V \to V$ ist ein Vektor $v \in V \smallsetminus \{0\}$ mit der Eigenschaft $f(v) = \lambda v$ für ein $\lambda \in \mathbb{K}$. Wir nennen dann λ einen **Eigenwert** von f, und v einen Eigenvektor zum Eigenwert λ. (Der Vektor $v \neq 0$ bestimmt den Skalar λ eindeutig.)

Algorithmus zur Berechnung von Eigenvektoren

(2) Beispiele: (a) $V_1 = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ ist ein $\mathbb{K}$–Vektorraum. Die Ableitung $\partial : V_1 \to V_1$ ist eine $\mathbb{K}$–lineare Abbildung. Für jede Zahl $\lambda \in \mathbb{K}$ ist die Exponentialfunktion $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$ ein Eigenvektor von ∂ zum Eigenwert λ, denn $\partial\, \mathrm{e}^{\lambda t} = \lambda\, \mathrm{e}^{\lambda t}$. Vielfache sind die einzigen Lösungen (Satz M2D).

(b) Auch auf der Polynomalgebra $\mathbb{K}[x] = \{\, a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \,\}$ ist die Ableitung $\partial : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]$ eine $\mathbb{K}$–lineare Abbildung. Eigenvektoren sind hier die konstanten Funktionen $c \in \mathbb{K} \smallsetminus \{0\}$, denn es gilt $\partial\, c = 0 = 0 \cdot c$. Für jedes Polynom $P \in \mathbb{K}[x]$ vom Grad $n \geq 1$ hat die Ableitung ∂P den Grad $n - 1$, ist also sicher kein Vielfaches von P, also kein Eigenvektor.

(c) Auch auf der Algebra $V_3 = \{\, a_1 x^{-1} + \cdots + a_n x^{-n} \,\}$ ist die Ableitung $\partial : V_3 \to V_3$ eine $\mathbb{K}$–lineare Abbildung. Diese hat keine Eigenvektoren!

Das sind lehrreiche und mahnende Beispiele: Es gibt also durchaus lineare Abbildungen ohne Eigenwert (c) oder mit unendlich vielen (a).

Solche Komplikationen sind ausgeschlossen für jede lineare Abbildung $f : V \to V$ auf einem endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$–Vektorraum oder einem ungerade-dimensionalen $\mathbb{R}$–Vektorraum, wie folgende Rechnung zeigt.

Algorithmus zur Berechnung von Eigenvektoren

(3) Ist V endlich-dimensional, so können wir eine Basis $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ wählen. Jede lineare Abbildung $f : V \to V$ können wir dann durch ihre Matrix $A = {}_{\mathscr{B}}(f)_{\mathscr{B}} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ darstellen. Für $v = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$ gilt $f(v) = \lambda v$ genau dann, wenn $Au = \lambda u$ gilt. Damit wird das Problem berechenbar! Für Matrizen können wir die **Determinante** nutzen:

$$\begin{aligned}
& \exists v \in V,\ v \neq 0 : && f(v) = \lambda v \\
\iff\ & \exists u \in \mathbb{K}^n,\ u \neq 0 : && Au = \lambda u \\
\iff\ & \exists u \in \mathbb{K}^n,\ u \neq 0 : && (A - \lambda E)u = 0 \\
\iff\ & \exists u \in \mathbb{K}^n,\ u \neq 0 : && u \in \ker(A - \lambda E) \\
\iff\ & && \ker(A - \lambda E) \neq \{0\} \\
\iff\ & && \det(A - \lambda E) = 0
\end{aligned}$$

Für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist $p_A(x) := \det(A - xE) \in \mathbb{K}[x]$ ein Polynom vom Grad n über $\mathbb{K}$. Wir nennen es das **charakteristische Polynom**. Unsere Rechnung zeigt: Die Nullstellen des Polynoms p_A sind genau die Eigenwerte von A. Damit können wir EW und EV berechnen!

📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §6.

Eigenfunktionen und Eigenvektoren

Satz P1B: Lösung eines DGSystems durch Eigenfunktionen

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Zu lösen sei das DGSystem

$$\boxed{y'(t) = A\,y(t) \quad \text{für} \quad y:\mathbb{R}\to\mathbb{K}^n.}$$

Der $\mathbb{K}$–Vektorraum aller Lösungen $y:\mathbb{R}\to\mathbb{K}^n$ hat Dimension n. (O3B)
Eigenvektoren $v_1,\dots,v_\ell \in \mathbb{K}^n$ mit $Av_k = \lambda_k v_k$ liefern Eigenfunktionen

$$\boxed{y_1,\dots,y_\ell:\mathbb{R}\to\mathbb{K}^n \quad \text{mit} \quad y_k(t) = \mathrm{e}^{\lambda_k t}\,v_k.}$$

Genau dann sind die Eigenfunktionen $y_1,\dots,y_\ell$ **linear unabhängig**, wenn die Eigenvektoren $v_1,\dots,v_\ell \in \mathbb{K}^n$ linear unabhängig sind. (O3B)

Genau dann bilden $y_1,\dots,y_n$ eine **Basis** des Lösungsraums der DG, wenn die Vektoren $v_1,\dots,v_n$ eine Basis des Vektorraums $\mathbb{K}^n$ bilden.

Letzteres nennen wir ein **Fundamentalsystem** aus Eigenfunktionen.

⚠ Eigenvektoren von A entsprechen Eigenfunktionen von $y' = A\,y$. Dies sind jedoch verschiedene Objekte: Bitte sauber unterscheiden!

Anwendungsbeispiel zu Eigenfunktionen

Aufgabe: Lösen Sie das Differentialgleichungssystem mit AWP

$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_1(t) + y_2(t), & y_1(0) = 1, \\ y_2'(t) = y_1(t) - y_2(t), & y_2(0) = 2. \end{cases}$$

(1) Welche Struktur hat der allgemeine Lösungsraum? (Form & Größe)

(2) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem aus Eigenfunktionen.

(3) Wie erhalten Sie hieraus eine allgemeine Lösung $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$?
Stabilität: Wie verhalten sich die Lösungen für $t\to\infty$?

(4) Lösen Sie damit speziell das Anfangswertproblem!

Lösung: (1) Dies ist eine homogene lineare Differentialgleichung:

$$y'(t) = A\,y(t) \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Lösungen $y:\mathbb{R}\to\mathbb{K}^2$ bilden einen $\mathbb{K}$–Vektorraum der Dimension 2.

☺ Die Lösungen haben wir zuvor bereits durch scharfes Hinsehen gefunden (O309). Mit den Werkzeugen der linearen Algebra können wir diesen Trick jetzt endlich zu einer systematischen Methode ausbauen!

Anwendungsbeispiel zu Eigenfunktionen

(2) Wir berechnen das **charakteristische Polynom** von A:

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \det(A - xE) &&= \det\begin{pmatrix} -1-x & 1 \\ 1 & -1-x \end{pmatrix} \\ &= (-1-x)^2 - 1 &&= x^2 + 2x \quad = \quad x(x+2) \end{aligned}$$

Die **Eigenwerte** sind demnach $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = -2$.
Wir suchen **Eigenvektoren**. Zu $\lambda_1 = 0$ lösen wir $(A - \lambda_1 E)v_1 = 0$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} v_1 = 0, \quad \text{eine Lösung } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zu $\lambda_2 = -2$ lösen wir entsprechend $(A - \lambda_2 E)v_2 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v_2 = 0, \quad \text{eine Lösung } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten das **Fundamentalsystem** bzw. die **Fundamentalmatrix**:

$$y_1(t) = \mathrm{e}^{0t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y_2(t) = \mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e}^{-2t} \\ 1 & -\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}$$

Beide Lösungen sind linear unabhängig, denn $\det Y(t) = -2\,\mathrm{e}^{-2t} \neq 0$.

Anwendungsbeispiel zu Eigenfunktionen

(3) **Allgemeine Lösung** unseres DGSystems $y'(t) = A\,y(t)$:

$$y(t) = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\,\mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e}^{-2t} \\ 1 & -\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = Y(t)\,c$$

(4) **Spezielle Lösung** zu den gegebenen Anfangsdaten:

$$y(0) = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Zu lösen ist hierzu das LGS $Y(0)\,c = y(0)$, also $c = Y(0)^{-1}y(0)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Die gesuchte **Lösung des Anfangswertproblems** ist demnach:

$$y(t) = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 - \mathrm{e}^{-2t} \\ 3 + \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}$$

Probe! $y(0) = (1, 2)$, $y_1' = -2\,\mathrm{e}^{-2x} = -y_1 + y_2$, $y_2' = 2\,\mathrm{e}^{-2x} = y_1 - y_2$.

Von Eigenvektoren zu Hauptvektoren

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist **diagonalisierbar** über $\mathbb{K}$, wenn es eine Basis $\mathscr{B} = (v_1, \dots, v_n)$ des $\mathbb{K}^n$ aus Eigenvektoren gibt, also $Av_k = \lambda_k v_k$. (P1B)

Beispiel: Jede symmetrische / hermitesche Matrix ist diagonalisierbar!

Bezüglich dieser Basis hat die Abbildung $v \mapsto Av$ Diagonalgestalt:

$$ {}_{\mathscr{B}}(A)_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) $$

Nicht jede Matrix ist diagonalisierbar! Typisch ist der **Jordan–Block**:

$$ B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}, \quad B - \lambda E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} $$

Es gibt nicht genug Eigenvektoren: $\ker(B - \lambda) = \mathbb{K}e_1$ ist eindimensional.
Stattdessen haben wir $Be_k = \lambda e_k + e_{k-1}$, also eine **Hauptvektorkette**:

$$ 0 \xleftarrow{B-\lambda} e_1 \xleftarrow{B-\lambda} e_2 \xleftarrow{B-\lambda} \dots \xleftarrow{B-\lambda} e_n $$

Von Eigenvektoren zu Hauptvektoren

☺ Für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hat das charakteristische Polynom genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$, also $p_A(x) = \det(A - xE) = (\lambda_1 - x) \cdots (\lambda_n - x)$.

☺ Sind zudem alle $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ verschieden, so ist A diagonalisierbar.

⚠ Bei mehrfachen Nullstellen müssen wir genauer hinschauen! P127

☺ Satz I1K: Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch bzw. $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch sind alle EW reell, für jeden erreicht die geometrische Vielfachheit die algebraische, EV zu verschiedenen EW stehen senkrecht aufeinander, somit gibt es eine Orthonormalbasis des $\mathbb{K}^n$ aus Eigenvektoren von A.

☹ Jordan–Block: $p_B(x) = (\lambda - x)^n$ hat die n-fache Nullstelle λ.
Der zugehörige Kern $\ker(B - \lambda E) = \mathbb{C}e_1$ hat aber nur Dimension 1:
Die geometrische Vielfachheit (1) ist kleiner als die algebraische (n).
Deshalb existiert keine Basis des $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren von B!

Anders gesagt: Für die Matrix B existieren nicht genug Eigenvektoren, um eine Basis zu bilden. Mit der Verallgemeinerung zu Hauptvektoren können wir dieses Problem allgemein lösen. Die Matrix kommt zwar nicht in Diagonalform, wird aber immerhin so einfach wie möglich.

Von Eigenvektoren zu Hauptvektoren

Definition P1C: Hauptvektoren

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Skalar. Eine **Hauptvektorkette**

$$0 \xleftarrow{A-\lambda} v_1 \xleftarrow{A-\lambda} v_2 \xleftarrow{A-\lambda} \dots \xleftarrow{A-\lambda} v_\ell$$

besteht aus Vektoren $0 \neq v_1, \dots, v_\ell \in \mathbb{C}^n$ mit $(A-\lambda)v_k = v_{k-1}$.

Die Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_\ell$ sind linear unabhängig. Wie Eigenvektoren sind auch Hauptvektoren zu verschiedenen Eigenwerten unabhängig.

Satz P1D: Jordan–Basis einer Matrix

(1) Zu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ existiert eine Basis $\mathscr{B}$ des $\mathbb{C}^n$ aus Hauptvektorketten.

(2) Bezüglich dieser Basis $\mathscr{B}$ besteht $v \mapsto Av$ aus Jordan–Blöcken:

$$_{\mathscr{B}}(A)_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_m \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad B_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Von Eigenvektoren zu Hauptvektoren

Wir nennen v_k einen **Hauptvektor k-ter Stufe**. Das bedeutet:

$$(A-\lambda E)^k v_k = 0 \quad \text{aber} \quad v_1 = (A-\lambda E)^{k-1} v_k \neq 0$$

Die Eigenvektoren v_1 von A sind genau die **Hauptvektoren 1. Stufe**:

$$(A-\lambda E)^1 v_1 = 0 \quad \text{aber} \quad v_1 = (A-\lambda E)^0 v_1 \neq 0$$

Ein Vektor v_2 mit $(A-\lambda E)v_2 = v_1$ ist dann **Hauptvektor 2. Stufe**.
Ein Vektor v_3 mit $(A-\lambda E)v_3 = v_2$ ist dann **Hauptvektor 3. Stufe**, usw.
Daher heißen Hauptvektoren auch **verallgemeinerte Eigenvektoren**.

Jeder k-fache Eigenwert λ erlaubt mindestens einen und höchstens k linear unabhängige Eigenvektoren; alle Möglichkeiten können auftreten.
Hingegen existieren zu λ immer k linear unabhängige Hauptvektoren!
Genauer besagt Satz P1D: Es gibt eine Basis aus Hauptvektorketten.

📖 Zur Vertiefung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §Z.4. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, etwa $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, und $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix über $\mathbb{K}$. Dann gelten folgende Implikationen: Das char. Polynom hat n verschiedene Nullstellen in $\mathbb{K} \Rightarrow$ Die Matrix ist über $\mathbb{K}$ diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ Es existiert eine Basis des $\mathbb{K}^n$ aus Eigenvektoren $\Rightarrow$ Das char. Polynom hat n Nullstellen in $\mathbb{K} \Leftrightarrow$ Die Matrix ist über $\mathbb{K}$ trigonalisierbar $\Leftrightarrow$ Die Matrix ist über $\mathbb{K}$ jordanisierbar $\Leftrightarrow$ Es existiert eine Jordan–Basis des $\mathbb{K}^n$ aus Hauptvektorketten von A. Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt Letzteres immer.

Algorithmus zur Berechnung von Hauptvektoren

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine reelle / komplexe $n\times n$–Matrix. Das charakteristische Polynom $p_A(x) = \det(A - xE) \in \mathbb{C}[x]$ zerfällt über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren:

$$p_A(x) = \pm(x-\lambda_1)^{n_1} \cdots (x-\lambda_\ell)^{n_\ell}$$

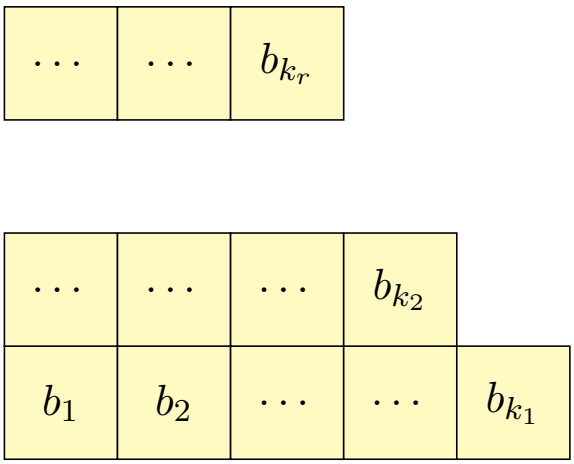
mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell \in \mathbb{C}$ und $n_1, \ldots, n_\ell \in \mathbb{N}_{\geq 1}$; hierbei gelte $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$. Daher existiert zu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Basis des $\mathbb{C}^n$ aus Hauptvektorketten.

Ebenso: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reelle Matrix, und das charakteristische Polynom $p_A(x) = \det(A - xE) \in \mathbb{R}[x]$ zerfalle in Linearfaktoren über $\mathbb{R}$. Dann existiert zu $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ aus Hauptvektorketten. (Meist müssen wir hierzu jedoch von $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{C}$ übergehen.)

Wir berechnen im Folgenden Hauptvektoren zu jedem Eigenwert $\lambda = \lambda_k$. Zusammen liefern diese die gewünschte Basis aus Hauptvektorketten. Dieser Algorithmus beweist somit die Richtigkeit des obigen Satzes P1D. (Den Nachweis der Richtigkeit aller Schritte führen wir hier nicht.)

Das Verfahren besteht aus zwei Schritten: Im ersten Schritt finden wir stufenweise eine Basis aus Hauptvektoren der Stufe $s = 1, 2, \ldots, r$. Im zweiten Schritt ordnen wir diese Hauptvektoren dann zu Ketten.

Algorithmus zur Berechnung von Hauptvektoren



Hauptvektoren r. Stufe

Hauptvektoren 2. Stufe

Eigenvektoren (1. Stufe)

1. Schritt: Wir finden stufenweise eine Basis aus Hauptvektoren.

Bestimme eine Basis $b_1, \ldots, b_{k_1}$ des Kerns $V_1 = \ker(A - \lambda E)$.
Im Falle $k_1 = n_1$ haben wir eine Basis aus Eigenvektoren. Andernfalls:

Ergänze zu einer Basis $b_1, \ldots, b_{k_2}$ des Kerns $V_2 = \ker(A - \lambda E)^2 \supseteq V_1$.
Im Falle $k_2 = n_1$ haben wir eine Basis aus Hauptvektoren. Andernfalls:

Ergänze zu einer Basis $b_1, \ldots, b_{k_r}$ des Kerns $V_r = \ker(A - \lambda E)^r \supseteq V_{r-1}$.
Schließlich gilt $k_r = n_1$ und wir haben eine Basis aus Hauptvektoren.

Algorithmus zur Berechnung von Hauptvektoren

v_1^r	$\cdots$	$v_{m_r}^r$		
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$(A-\lambda E)$	
v_1^2	$\cdots$	$\cdots$	$v_{m_1}^2$	
v_1^1	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$v_{m_1}^1$

Hauptvektoren r. Stufe

Hauptvektoren 2. Stufe

Eigenvektoren (1. Stufe)

2. Schritt: Wir ordnen unsere Hauptvektoren zu Ketten.

Wir bilden eine Basis sodass $(A-\lambda E)v_i^s = v_i^{s-1}$ in jeder Stufe $s \geq 2$.

Ausführlich gehen wir nach obigem Schema von oben nach unten vor: Die oberste Stufe $v_1^r, \ldots, v_{m_r}^r$ wurde im 1. Schritt bereits berechnet. Ist $v_1^{s+1}, \ldots, v_{m_{s+1}}^{s+1}$ in Stufe $s+1$ bereits berechnet, so erhalten wir $v_i^s := (A-\lambda E)v_i^{s+1}$ und ergänzen zur Basis $v_1^s, \ldots, v_{m_s}^s$ der Stufe s.

Algorithmus zur Berechnung von Hauptvektoren

Die Abbildung $(A-\lambda E)$ bildet die Stufe $s+1$ injektiv in die Stufe s ab. Insbesondere ist demnach die Stufe $s+1$ niemals breiter als die Stufe s.

Im 2. Schritt sind die $v_1^{s+1}, \ldots, v_{m_{s+1}}^{s+1}$ in Stufe $s+1$ linear unabhängig, und somit auch die zugehörigen Bilder $v_i^s := (A-\lambda E)v_i^{s+1}$ in Stufe s.

Es genügt, diese Vektoren in die bestehende Basis einzutauschen gemäß dem Basisaustauschlemma von Steinitz. Anders gesagt:

Wir wählen einen Hauptvektor höchster Stufe und bilden seine Kette. Wir ergänzen durch linear unabhängige Ketten bis eine **Basis des Hauptraumes** $H_\lambda = \ker(A-\lambda E)^r$ aus Hauptvektorketten gefunden ist.

Diese Konstruktion führen wir für jeden Hauptraum $H_{\lambda_k} = \ker(A-\lambda_k)^{n_k}$ aus und erhalten so die ersehnte **Jordan–Basis** zu unserer Matrix A.

☺ Der Begriff und die Berechnung von Hauptvektoren mag zunächst kompliziert erscheinen, er ist aber kaum komplizierter als der Begriff und die Berechnung von Eigenvektoren. Hier lohnt sich erneut Ihre langfristige Investition in die mathematischen Grundlagen der HM1&2!

📖 Für Ausführungen und Beispiele siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §Z.4.

Hauptfunktionen und Hauptvektoren

Satz P1E: Lösung eines DGSystems durch Hauptfunktionen

Vorgelegt sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zu lösen sei das DGSystem $y'(t) = A\,y(t)$.
Hierzu sei $0 \xleftarrow{A-\lambda} v_1 \xleftarrow{A-\lambda} v_2 \xleftarrow{A-\lambda} \dots \xleftarrow{A-\lambda} v_\ell$ eine **Hauptvektorkette**.

(1) Wir definieren die zugehörigen **Hauptfunktionen** $y_1, \dots, y_\ell$ durch

$$y_k(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\left[v_k + t\,v_{k-1} + \frac{t^2}{2}v_{k-2} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}v_1\right].$$

Die Hauptvektoren $v_1, \dots, v_\ell \in \mathbb{C}^n$ sind linear unabhängig, daher auch die zugehörigen Hauptfunktionen $y_1, \dots, y_\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, denn $y_k(0) = v_k$.

(2) Wie die Hauptvektoren bilden auch die Hauptfunktionen eine Kette:

$$0 \xleftarrow{A-\lambda} y_1 \xleftarrow{A-\lambda} y_2 \xleftarrow{A-\lambda} \dots \xleftarrow{A-\lambda} y_\ell \quad \text{also} \quad Ay_k = \lambda y_k + y_{k-1},$$
$$0 \xleftarrow{\partial-\lambda} y_1 \xleftarrow{\partial-\lambda} y_2 \xleftarrow{\partial-\lambda} \dots \xleftarrow{\partial-\lambda} y_\ell \quad \text{also} \quad y_k' = \lambda y_k + y_{k-1}.$$

Insbesondere lösen $y_1, \dots, y_\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ unser DGSystem $y'(t) = A\,y(t)$.

Hauptfunktionen und Hauptvektoren

☺ Ist A diagonalisierbar, so können wir unsere Differentialgleichungen vollständig entkoppeln (P1B): Wir finden eine Basis $(v_1, \dots, v_n)$ des $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren, $Av_k = \lambda_k v_k$. Diese liefert uns sofort eine Basis aus Eigenfunktionen $y_1, \dots, y_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ mit $y_k(t) = \mathrm{e}^{\lambda_k t} v_k$. (Satz P1B)

☺ Ist A nicht diagonalisierbar, so doch immerhin noch jordanisierbar: Es existiert eine Basis des Raumes $\mathbb{C}^n$ aus Hauptvektoren, und diese liefern eine Basis des Lösungsraumes L_0 aus Hauptfunktionen.

☺ Damit ist das zunächst schwierige analytische Problem, ein DGSystem $y'(t) = A\,y(t)$ zu lösen, zurückgeführt auf das einfachere algebraische Problem, Hauptvektoren der Matrix A zu berechnen. Das ist zwar mitunter mühsam, aber letztlich Routinearbeit. Es kann insbesondere von Computer-Algebra-Systemen ausgeführt werden.

☺ Wir erkennen hieran Stabilität und Langzeitverhalten der Lösungen:
Für $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ gilt exponentielles Abklingen, $|y_k(t)| \to 0$ für $t \to \infty$.
Für $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ gilt exponentielles Wachstum, $|y_k(t)| \to \infty$ für $t \to \infty$.
Für $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ ist y_1 beschränkt, aber $y_2, \dots, y_\ell$ wachsen polynomiell.

Anwendungsbeispiel zu Hauptfunktionen

Aufgabe: Finden Sie ein Fundamentalsystem aus Hauptfunktionen zu

(1) $y' = A\,y$ mit $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ und (2) $y' = B\,y$ mit $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Wie verhalten sich die Lösungen für $t \to \infty$ und $\lambda < 0$? $\lambda > 0$? $\lambda = 0$?

Lösung: (1) Die Matrix A hat den doppelten Eigenwert λ.
Eigenvektoren bestimmen wir durch $(A - \lambda)v = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v = 0, \quad \text{mögliche Lösungen } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten das Fundamentalsystem bzw. die Fundamentalmatrix:

$$y_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad Y(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

☺ Jede andere Basis (v_1, v_2) des $\mathbb{C}^2$ wäre hier ebenso möglich.
Sie führt zum Fundamentalsystem $y_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} v_1$, $y_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} v_2$.

⚠ Eigenvektoren von A entsprechen Eigenfunktionen von $y' = A\,y$, aber es sind verschiedene Objekte: Bitte sauber unterscheiden!

Anwendungsbeispiel zu Hauptfunktionen

(2) Auch die Matrix B hat den doppelten Eigenwert λ. Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_1 = 0, \quad \text{eine Lösung ist } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir suchen daher noch einen Hauptvektor v_2 über v_1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_2 = v_1, \quad \text{eine Lösung ist } v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten das Fundamentalsystem bzw. die Fundamentalmatrix:

$$y_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad Y(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda t} & t\,\mathrm{e}^{\lambda t} \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

☺ Andere Wahlen sind möglich: Jeder Vektor $v_1 = (a, 0)$ mit $a \neq 0$ ist Eigenvektor, und jeder Vektor $v_2 = (b, a)$ liegt darüber als Hauptvektor.

$$y_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix},\ y_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\begin{pmatrix} at + b \\ a \end{pmatrix} \Longrightarrow Y(t) = \begin{pmatrix} a\,\mathrm{e}^{\lambda t} & (at + b)\,\mathrm{e}^{\lambda t} \\ 0 & a\,\mathrm{e}^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

⚠ Hauptvektoren von A entsprechen Hauptfunktionen von $y' = A\,y$, aber es sind verschiedene Objekte: Bitte sauber unterscheiden!

Von komplexen zu reellen Lösungen

Zur Vereinfachung haben wir bisher alles komplex betrachtet.
Vorteil: Jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hat n Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.

Für eine reelle Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ werden wir im Allgemeinen nicht n reelle Eigenwerte finden: Wir brauchen auch komplexe Eigenwerte!

Für reelle DGSysteme wollen wir aber meist nur reelle Lösungen!
Den genial-einfachen Zusammenhang können wir leicht klären:

Lemma P1F: Konjugation von Lösungen

Gegeben sei die Systemmatrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zu lösen sei das DGSystem

$$\boxed{y'(t) = A\,y(t).}$$

Ist $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ Lösung von $y' = A\,y$, so ist $\overline{y}$ Lösung von $\overline{y}' = \overline{A}\,\overline{y}$.
Genau dann ist unsere Matrix reell, also $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, wenn $\overline{A} = A$ gilt.

In diesem Fall ist mit $y' = A\,y$ automatisch auch $\overline{y}' = A\,\overline{y}$ eine Lösung.

Somit sind $\operatorname{Re} y = \frac{1}{2}(y + \overline{y})$ und $\operatorname{Im} y = \frac{1}{2\mathrm{i}}(y - \overline{y})$ reelle Lösungen.
Umgekehrt gilt $\{y, \overline{y}\} = \{\operatorname{Re} y \pm \mathrm{i} \operatorname{Im} y\}$. Dies ist ein Basiswechsel!

Von komplexen zu reellen Lösungen

Satz P1G: reelle Lösungen

Gegeben sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zu lösen sei das DGSystem $y'(t) = A\,y(t)$.

Sei $0 \xleftarrow{A-\lambda} v_1 \xleftarrow{A-\lambda} \dots \xleftarrow{A-\lambda} v_\ell$ eine Hauptvektorkette zu $\lambda = \sigma + \mathrm{i}\omega$.

Dann ist $0 \xleftarrow{A-\overline{\lambda}} \overline{v_1} \dots \xleftarrow{A-\overline{\lambda}} \overline{v_\ell}$ eine Hauptvektorkette zu $\overline{\lambda} = \sigma - \mathrm{i}\omega$.

Dank Basiswechsel P1F hat das DGSystem 2ℓ **reelle Lösungen**

$$\boxed{\begin{aligned}
\operatorname{Re} y_k(t) &= \mathrm{e}^{\sigma t} \operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \left[v_k + t\,v_{k-1} + \frac{t^2}{2} v_{k-2} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} v_1 \right] \right), \\
\operatorname{Im} y_k(t) &= \mathrm{e}^{\sigma t} \operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \left[v_k + t\,v_{k-1} + \frac{t^2}{2} v_{k-2} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} v_1 \right] \right).
\end{aligned}}$$

Im Falle $\omega \neq 0$ sind diese 2ℓ Lösungen linear unabhängig. (Im Falle $\omega = 0$ erhalten wir nur eine Kette von ℓ linear unabhängigen Lösungen.)

☺ Wir erkennen hieran Stabilität und Langzeitverhalten der Lösungen, wie oben erklärt, je nach Vorzeichen $\sigma > 0$ oder $\sigma < 0$ oder $\sigma = 0$.

Anwendungsbeispiel: komplex und reell

Aufgabe: Zu lösen sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} y_1' = -2y_1 + 1y_2, & y_1(0) = 1, \\ y_2' = -1y_1 - 2y_2, & y_2(0) = 2. \end{cases}$$

(1) Finden Sie ein komplexes Fundamentalsystem und (2) ein reelles.

(3) Stabilität: Wie verhalten sich die Lösungen für $t \to \infty$?

(4) Lösen Sie schließlich das AWP.

Lösung: In Matrix-Schreibweise gilt $y' = A\,y$ mit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Das charakteristische Polynom der Matrix A ist:

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (-2-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 5$$

Die Nullstellen sind $\lambda_{1/2} = -2 \pm \sqrt{4-5} = -2 \pm \mathrm{i}$. Eigenvektoren?

Zu $\lambda_1 = -2 + \mathrm{i}$: $\begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 1 \\ -1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} v_1 = 0$, eine Lösung $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$

Zu $\lambda_2 = -2 - \mathrm{i}$: $\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix} v_2 = 0$, eine Lösung $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}$

Anwendungsbeispiel: komplex und reell

(1) Komplexes Fundamentalsystem des DGSystems:

$$u_1(t) = \mathrm{e}^{(-2+\mathrm{i})t} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} \cos t + \mathrm{i} \sin t \\ -\sin t + \mathrm{i} \cos t \end{pmatrix}, \quad u_2(t) = \mathrm{e}^{(-2-\mathrm{i})t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

(2) Basiswechsel zu einem reellen Fundamentalsystem:

$$y_1(t) = \operatorname{Re} u_1(t) = \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \quad y_2(t) = \operatorname{Im} u_1(t) = \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

(3) Die allgemeine reelle Lösung klingt exponentiell ab:

$$y(t) = Y(t)\,c = \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

(4) Spezielle Lösung zu den gegebenen Anfangsdaten:

$$y(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad y(t) = \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} \cos t + 2\sin t \\ 2\cos t - \sin t \end{pmatrix}.$$

☺ Dies löst das Anfangsgwertproblem. Machen Sie die Probe!

Anwendungsbeispiel: gekoppelte Schwingungen

Aufgabe: Zu lösen sei folgende Bewegungsgleichung:

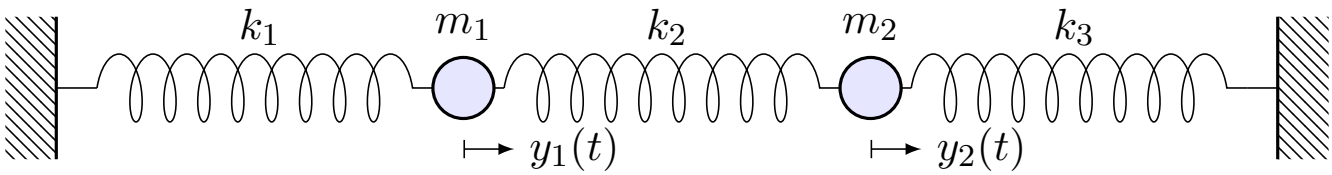
$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2+k_3}{m_2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

(1) Finden Sie ein komplexes Fundamentalsystem und (2) ein reelles.

(3) Stabilität: Wie verhalten sich die Lösungen für $t \to \infty$?

(4) Lösen Sie schließlich das AWP $y(0) = (2, 0, 0, 0)$.

Lösung: Wir erkennen das Modell von zwei gekoppelten Oszillatoren:



Dieses System können wir nach obigem Schema lösen: char. Polynom, Eigenwerte, Eigenvektoren, ... Diese Daten müssen wir nicht mühsam neu berechnen, denn hier kennen wir die Lösung bereits! O109 P101

Anwendungsbeispiel: gekoppelte Schwingungen

(1) Wir kennen ein Fundamentalsystem komplexer Eigenfunktionen:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_1 t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \mathrm{i}\omega_1 \\ \mathrm{i}\omega_1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\mathrm{i}\omega_1 \\ -\mathrm{i}\omega_1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_2 t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \mathrm{i}\omega_2 \\ -\mathrm{i}\omega_2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_2 t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\mathrm{i}\omega_2 \\ \mathrm{i}\omega_2 \end{pmatrix}$$

Die Frequenzen sind hierbei $\omega_1^2 = k_1/m$ und $\omega_2^2 = (k_1 + 2k_2)/m$.
Diese Lösung beschert uns nebenbei die Eigenvektoren der Matrix A.
Eigenwerte $\pm\mathrm{i}\omega_1$ und $\pm\mathrm{i}\omega_2$, char. Polynom $p_A(x) = (x^2 + \omega_1^2)(x^2 + \omega_2^2)$.

(2) Wir erhalten ein Fundamentalsystem reeller Eigenfunktionen:

$$\begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t) \\ \cos(\omega_1 t) \\ -\omega_1 \sin(\omega_1 t) \\ -\omega_1 \sin(\omega_1 t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin(\omega_1 t) \\ \sin(\omega_1 t) \\ \omega_1 \cos(\omega_1 t) \\ \omega_1 \cos(\omega_1 t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\omega_2 t) \\ -\cos(\omega_2 t) \\ -\omega_2 \sin(\omega_2 t) \\ \omega_2 \sin(\omega_2 t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin(\omega_2 t) \\ -\sin(\omega_2 t) \\ \omega_2 \cos(\omega_2 t) \\ -\omega_2 \cos(\omega_2 t) \end{pmatrix}$$

(3) Für $t \to \infty$ bleibt jede Lösung $y = c_1 y_1 + \cdots + c_4 y_4$ beschränkt.

(4) Das AWP $y(0) = (2, 0, 0, 0)$ wird gelöst durch $y(t) = y_1(t) + y_3(t)$.

Eigen-/Hauptfunktionen und Stabilität

Aufgabe: (Klausur September 2013) Wir untersuchen das lineare Differentialgleichungssystem $y'(t) = A\,y(t)$ mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad v_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \mp\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Berechnen Sie die Vektoren Av_1, Av_2, Av_3, Av_4 und schreiben Sie jeden als Linearkombination bezüglich der Basis $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$.

(2) Schreiben Sie die Abbildung A als Matrix $B = {}_{\mathscr{B}}(A)_{\mathscr{B}}$ und lesen Sie das char. Polynom $p_A(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)(x-\lambda_4)$ ab.

(3) Bestimmen Sie zu $y'(t) = A\,y(t)$ ein reelles Fundamentalsystem $y_1, y_2, y_3, y_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ mit Anfangswerten $y_1(0) = (1,0,0,0) = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$ und $y_2(0) = (0,0,1,0) = \frac{\mathrm{i}}{2}(v_1 - v_2)$ sowie $y_3(0) = v_3$ und $y_4(0) = v_4$.

(4) Stabilität: Wenn Sie zufällig (stetig verteilt) einen Startvektor $y(0) \in \mathbb{R}^4$ nahe Null wählen und die zugehörige Lösung von $y'(t) = A\,y(t)$ verfolgen, wie verhält sich $|y(t)|$ für $t \to \infty$?

Eigen-/Hauptfunktionen und Stabilität

⚠ Es ist für diesen Aufgabentyp nicht sinnvoll, blind und stur nach Schema loszurechnen: char. Polynom, Eigenwerte, Eigenvektoren, ... Dieser lange Weg ist nötig, wenn Sie außer der Matrix nichts wissen. Diese Daten müssen Sie jedoch nicht mühsam neu berechnen, wenn alle wesentlichen Daten bereits vorliegen! Hierzu dienen (1) und (2).

☺ Es ist hier (wie fast immer im Leben) geschickter und effizienter, die bereits vorliegende Information zu verstehen und auszunutzen.

Zu (3): Hier können und sollen Sie unsere Lösungsformeln anwenden.
Zu (4): Der Startpunkt $y(0) = 0$ ist ein Fixpunkt dieses dynamischen Systems, der weitere Verlauf ist offensichtlich $y(t) = 0$ für alle $t \geq 0$.

Anfangsdaten sind oft zufälligen kleinen Schwankungen unterworfen, etwa durch kleine äußere Störungen oder ungenaue Messdaten.
Wir betrachten daher einen zufälligen Startwert $y(0)$ nahe Null.
Entscheidend ist das Langzeitverhalten von $|y(t)|$ für $t \to \infty$:

- Gilt Abklingen $|y(t)| \to 0$? sogar exponentiell?
- Gilt Beschränktheit gemäß $0 < c_0 \leq |y(t)| \leq c_1 < \infty$?
- Gilt Wachstum $|y_k(t)| \to \infty$? nur polynomiell? gar exponentiell?

Eigen-/Hauptfunktionen und Stabilität

Lösung: (1) Die vorgeschlagene Rechnung ergibt folgendes:

$$Av_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} \mathrm{i}v_1 \\ +0v_2 \\ +0v_3 \\ +0v_4 \end{cases}, \qquad Av_2 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 0v_1 \\ -\mathrm{i}v_2 \\ +0v_3 \\ +0v_4 \end{cases},$$

$$Av_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 0v_1 \\ +0v_2 \\ +0v_3 \\ +0v_4 \end{cases}, \qquad Av_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 0v_1 \\ +0v_2 \\ +1v_3 \\ +0v_4 \end{cases}.$$

☺ Diese einfache Rechnung beschert uns wertvolle Informationen:

- Der Vektor v_1 ist ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $+\mathrm{i}$.
- Der Vektor v_2 ist ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $-\mathrm{i}$.
- Der Vektor v_3 ist ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 0,
- darüber liegt v_4 als ein Hauptvektor zweiter Stufe.

Diese Vektoren sind linear unabhängig: Sie bilden eine Basis des $\mathbb{C}^4$.

Eigen-/Hauptfunktionen und Stabilität

⚠ Der Hauptvektor 2. Stufe zeigt, dass A nicht diagonalisierbar ist!

☺ Das Ergebnis aus (1) wird besonders übersichtlich gebündelt, wenn wir A bezüglich unserer Basis $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ schreiben...

(2) Bezüglich der Basis $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ finden wir die **Jordan–Form**:

$$B = {}_{\mathscr{B}}(A)_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrizen $A \sim B$ sind **konjugiert**. Hieraus folgt das char. Polynom

$$p_A(x) = p_B(x) = (x - \mathrm{i})(x + \mathrm{i})(x - 0)^2 = x^4 + x^2.$$

⚠ Alternativ könnte man $p_A(x) = \det(A - xE)$ entwickeln, faktorisieren, Eigen/Hauptvektoren finden.... Das ist länglich und viel mühsamer.

☺ Hier gilt wie allgemein immer: Es ist geschickter und effizienter, die bereits vorliegende Information zu verstehen und auszunutzen.

Eigen-/Hauptfunktionen und Stabilität

☺ Unsere Vorarbeit (2) setzen wir in unsere Lösungsformeln P1E ein: Aus Eigen-/Hauptvektoren gewinnen wir Eigen-/Hauptfunktionen!

(3) Zwei komplex-konjugierte Lösungen $\mathbb{R} \to \mathbb{C}^4$ sind $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} v_1$ und $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} v_2$. Die gegebenen reellen AWP führen zu reellen Lösungen:

$$y_1(0) \overset{!}{=} \frac{1}{2}(v_1 + v_2) \quad \Longrightarrow \quad y_1(t) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} v_1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} v_2\right] = \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$y_2(0) \overset{!}{=} \frac{\mathrm{i}}{2}(v_1 - v_2) \quad \Longrightarrow \quad y_2(t) = \frac{\mathrm{i}}{2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} v_1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} v_2\right] = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 0 \\ +\cos t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eigen- & Hauptvektor zum Eigenwert 0 liefern direkt reelle Lösungen:

$$y_3(t) = \mathrm{e}^{0t} v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad y_4(t) = \mathrm{e}^{0t}(v_4 + t v_3) = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1 \\ 1+t \\ 1+t \end{pmatrix}.$$

Eigen-/Hauptfunktionen und Stabilität

☺ Jede Funktion $y_1, y_2, y_3, y_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ löst die Gleichung $y' = A\,y$: Setzen Sie alles ein und machen Sie die Probe; sie erfüllen zudem die gewünschten **Anfangsbedingungen**. $y_1(0) = (1,0,0,0) = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$ und $y_2(0) = (0,0,1,0) = \frac{\mathrm{i}}{2}(v_1 - v_2)$ sowie $y_3(0) = v_3$ und $y_4(0) = v_4$.

(4) Zur Stabilität untersuchen wir das **Langzeitverhalten** für $t \to \infty$. Die Lösungen y_1, y_2, y_3 sind beschränkt, hingegen gilt $|y_4(t)| \to \infty$.

Für jede Lösung $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + c_3 y_3(t) + c_4 y_4(t)$ mit $c_4 \neq 0$ gilt somit $|y(t)| \to \infty$ für $t \to \infty$. Der Fixpunkt 0 ist demnach instabil.

Bei zufälliger Wahl des Startwerts $y(0)$ sind mit Wahrscheinlichkeit 1 alle Koeffizienten c_1, c_2, c_3, c_4 ungleich Null, also gilt $|y(t)| \to \infty$.

Der Startpunkt $y(0) = 0$ ist ein **Fixpunkt** dieses dynamischen Systems. Er ist jedoch nicht stabil, denn eine zufällige Störung wird im Verlauf immer größer und führt von 0 weg. (Eine stetige Verteilung entspricht einer Wahrscheinlichkeitsdichte $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\int_{\mathbb{R}^4} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$.)

Im vorliegenden Beispiel ist das Wachstum $|y_4(t)| \to \infty$ für $t \to \infty$ nicht exponentiell, sondern nur linear, also vergleichweise langsam.

Eigen-/Hauptfunktionen und Stabilität

Aufgabe: (Klausur Februar 2013) Wir untersuchen das lineare Differentialgleichungssystem $y'(t) = A\,y(t)$ mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

(1) Berechnen Sie $u = Av$ und Au sowie Aw. Bestimmen Sie hieraus eine Basis $\mathscr{B}$ des $\mathbb{C}^4$ bestehend aus Hauptvektorketten von A.

(2) Schreiben Sie die Abbildung A als Matrix $B = {}_{\mathscr{B}}(A)_{\mathscr{B}}$ und lesen Sie das char. Polynom $p_A(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)(x-\lambda_4)$ ab.

(3) Bestimmen Sie zu $y'(t) = A\,y(t)$ ein reelles Fundamentalsystem $y_1, y_2, y_3, y_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ mit Anfangswerten $u, v, e_1, e_4 \in \mathbb{R}^4$.

(4) Stabilität: Wenn Sie zufällig (stetig verteilt) einen Startvektor $y(0) \in \mathbb{R}^4$ nahe Null wählen und die zugehörige Lösung von $y'(t) = A\,y(t)$ verfolgen, wie verhält sich $|y(t)|$ für $t \to \infty$?

⚠ Es gelten alle Tipps und Warnungen der vorigen Aufgabe.

Eigen-/Hauptfunktionen und Stabilität

Lösung: (1) Die vorgeschlagene Rechnung beschert uns folgendes:

$$Av = u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Au = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Aw = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathrm{i}w, \quad A\overline{w} = -\mathrm{i}\overline{w}.$$

Somit ist u ein EV zum EW 0, und hierüber v ein Hauptvektor 2. Stufe. Zudem ist w ein EV zum EW i. Da A reell ist, gilt $A\overline{w} = \overline{Aw} = \overline{\mathrm{i}w} = -\mathrm{i}\overline{w}$. Somit ist $\overline{w}$ ein EV zum EV $-\mathrm{i}$. Das beschert uns die Basis $u, v, w, \overline{w}$.

(2) Bezüglich der Basis $\mathscr{B} = (u, v, w, \overline{w})$ finden wir die **Jordan–Form**:

$$B = {}_{\mathscr{B}}(A)_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Wir lesen die Eigenwerte $0, 0, \mathrm{i}, -\mathrm{i}$ ab. Das char. Polynom ist

$$p_A(x) = p_B(x) = (x-0)(x-0)(x-\mathrm{i})(x+\mathrm{i}) = x^4 + x^2.$$

Alternativ kann man $\det(A - xE)$ direkt entwickeln. Versuchen Sie es!

Eigen-/Hauptfunktionen und Stabilität

☺ Unsere Vorarbeit (2) setzen wir in unsere **Lösungsformeln** ein:
(3) Eigen-&Hauptvektor zum Eigenwert 0 liefern reelle Lösungen:

$$y_1(t) = \mathrm{e}^{0t} u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad y_2(t) = \mathrm{e}^{0t}(v + tu) = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1 \\ 1+t \\ -1-t \end{pmatrix}.$$

Zwei komplex-konjugierte Lösungen $\mathbb{R} \to \mathbb{C}^4$ sind $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} w$ und $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\overline{w}$.
Hieraus erhalten wir zwei reelle Lösungen als Real-/Imaginärteil:

$$y_3(t) = \operatorname{Re}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} w\right] = \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} w + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\overline{w}\right] = \begin{pmatrix} +\cos t \\ 0 \\ 0 \\ -\sin t \end{pmatrix},$$

$$y_4(t) = \operatorname{Im}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} w\right] = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} w - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\overline{w}\right] = \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \\ 0 \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Eigen-/Hauptfunktionen und Stabilität

☺ Jede Funktion $y_1, y_2, y_3, y_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ löst die Gleichung $y' = A\,y$:
Setzen Sie ein und machen Sie die Probe; sie erfüllen die gewünschten **Anfangsbedingungen**: $y_1(0) = u$, $y_2(0) = v$, $y_3(0) = e_1$, $y_4(0) = e_4$.

(4) Zur Stabilität untersuchen wir das **Langzeitverhalten** für $t \to \infty$.
Die Lösungen y_1, y_3, y_4 sind beschränkt, hingegen gilt $|y_2(t)| \to \infty$.
Für jede Lösung $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + c_3 y_3(t) + c_4 y_4(t)$ mit $c_2 \neq 0$ gilt somit $|y(t)| \to \infty$ für $t \to \infty$. Der Fixpunkt 0 ist demnach instabil.
Bei zufälliger Wahl des Startwerts $y(0)$ sind mit Wahrscheinlichkeit 1 alle Koeffizienten c_1, c_2, c_3, c_4 ungleich Null, also gilt $|y(t)| \to \infty$.

Der Startpunkt $y(0) = 0$ ist ein **Fixpunkt** dieses dynamischen Systems.
Er ist jedoch nicht stabil, denn eine zufällige Störung wird im Verlauf immer größer und führt von 0 weg. (Eine stetige Verteilung entspricht einer Wahrscheinlichkeitsdichte $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\int_{\mathbb{R}^4} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$.)
Im vorliegenden Beispiel ist das Wachstum $|y_2(t)| \to \infty$ für $t \to \infty$ nicht exponentiell, sondern nur linear, also vergleichweise langsam.

Hauptvektoren sind deine Freunde!

Aufgabe: Wir lösen das Differentialgleichungssystem $y'(t) = A\,y(t)$,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(0) Welche Beziehung gilt zwischen Eigenwerten, $\operatorname{tr}(A)$ und $\det(A)$?
(1) Das char. Polynom ist hier $p_A(x) = (\lambda - x)^5$. Bestimmen Sie λ.
(2) Ist u Hauptvektor? Welcher Stufe? Lösen Sie $y' = A\,y$ mit $y(0) = u$.
(3) Ist v Hauptvektor? Welcher Stufe? Lösen Sie $y' = A\,y$ mit $y(0) = v$.
(4) Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^5$ aus Hauptvektorketten und damit ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $y' = A\,y$.

Lösung: (0) Allgemein gilt $\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$ und $\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$. Das ist offensichtlich für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonal oder in Jordan–Form, und jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ lässt sich in diese Form konjugieren (P1D).

(1) Hier ist λ fünffacher Eigenwert: Es gilt $5\lambda = \operatorname{tr}(A) = 10$, also $\lambda = 2$.

Hauptvektoren sind deine Freunde!

(2) Es gilt

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen zunächst die **Stufe des Hauptvektors** u:

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =: u_4 \xmapsto{A-2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} =: u_3 \xmapsto{A-2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =: u_2 \xmapsto{A-2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} =: u_1 \xmapsto{A-2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hieraus erhalten wir die spezielle Lösung von $y' = A\,y$ mit $y(0) = u$:

$$y(t) \overset{\text{P1E}}{=} \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} & +2t & & -t^3/3! \\ 1 & -t & & \\ & -2t & +t^2/2 & \\ & & +t^2/2 & -t^3/3! \\ & -t & +t^2/2 & \end{pmatrix}$$

Hauptvektoren sind deine Freunde!

(3) Wir bestimmen ebenso die **Stufe des Hauptvektors** v:

$$\underset{=:\,v_5}{\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}} \xmapsto{A-2} \underset{=:\,v_4}{\begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\\-3\\-2\end{pmatrix}} \xmapsto{A-2} \underset{=:\,v_3}{\begin{pmatrix}-2\\2\\4\\2\\2\end{pmatrix}} \xmapsto{A-2} \underset{=:\,v_2}{\begin{pmatrix}0\\0\\-2\\-2\\-2\end{pmatrix}} \xmapsto{A-2} \underset{=:\,v_1}{\begin{pmatrix}2\\0\\0\\2\\0\end{pmatrix}} \xmapsto{A-2} \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Hieraus erhalten wir die spezielle Lösung von $y' = A\,y$ mit $y(0) = v$:

$$y(t) \overset{\text{P1E}}{=} \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} -1 & -t & -2t^2/2 & & +2t^4/4! \\ 2 & -2t & +2t^2/2 & & \\ 3 & -2t & +4t^2/2 & -2t^3/3! & \\ 4 & -3t & +2t^2/2 & -2t^3/3! & +2t^4/4! \\ 5 & -2t & +2t^2/2 & -2t^3/3! & \end{pmatrix}$$

(4) **Basis des Lösungsraums**: Die oben gefundene Hauptvektorkette $0 \xleftarrow{A-\lambda} v_1 \ldots \xleftarrow{A-\lambda} v_5$ liefert die Hauptfunktionen $y_1, \ldots, y_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^5$:

$$y_k(t) \overset{\text{P1E}}{=} \mathrm{e}^{\lambda t} \left[v_k + t\,v_{k-1} + \frac{t^2}{2} v_{k-2} + \ldots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} v_1 \right]$$

Hauptvektoren sind deine Freunde!

Aufgabe: (Wir untersuchen weiterhin die Daten der vorigen Aufgabe.)

(5) Stabilität: Wie verhalten sich hier typische Lösungen für $t \to \infty$?

(6) Welche Dimension hat der Hauptraum 4. Stufe $U = \ker(A - \lambda E)^4$?

(7) Wählen Sie zufällig (stetig verteilt) einen Vektor $w \in \mathbb{R}^5$ und berechnen Sie seine Stufe... Mit welcher Wkt. ist er fünfter Stufe?

Lösung: (5) Für $t \to \infty$ gilt $|y(t)| \to \infty$, typischerweise $\sim \mathrm{e}^{2t}\, t^4/4!$.

(6) Zu $(A - 2E)^4\, v_5 \neq 0$ gehört die Hauptvektorkette der Länge 5:

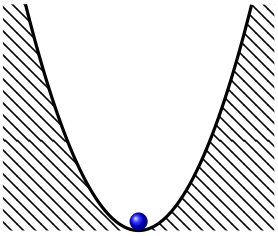
$$0 \xleftarrow{A-2} v_1 \xleftarrow{A-2} v_2 \xleftarrow{A-2} v_3 \xleftarrow{A-2} v_4 \xleftarrow{A-2} v_5.$$

Der Unterraum $U = \mathbb{R}v_1 + \mathbb{R}v_2 + \mathbb{R}v_3 + \mathbb{R}v_4$ hat also Dimension 4.

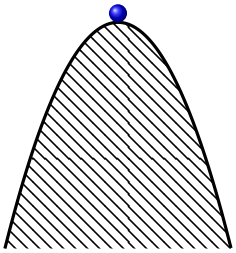
(7) Mit 100% Wahrscheinlichkeit ist w ein Hauptvektor 5. Stufe!

Fast jeder Vektor $v \in \mathbb{R}^5$ ist hier von 5. Stufe: Alle Hauptvektoren der Stufe 4, 3, 2, 1 und der Nullvektor liegen in der Hyperebene U. Wenn wir also zufällig (stetig verteilt) einen Vektor $w \in \mathbb{R}^5$ wählen, dann liegt w mit Wahrscheinlichkeit 0 im Unterraum U.

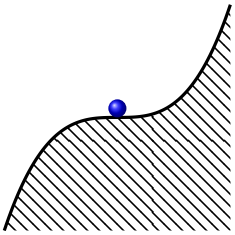
Gleichgewichtslagen und In/Stabilität von Fixpunkten



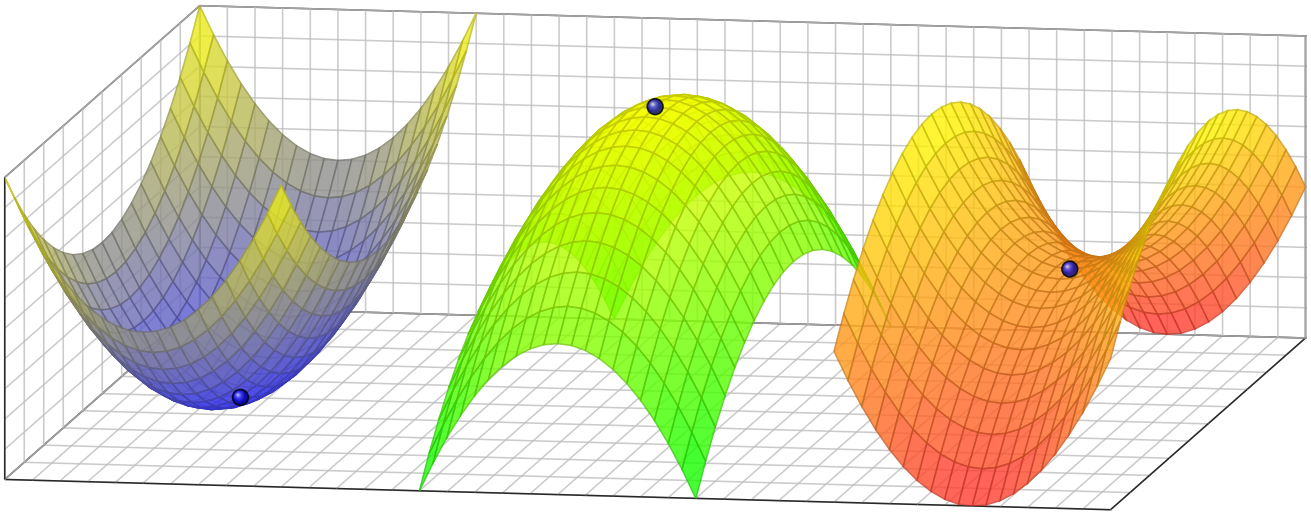
Der Fixpunkt ist stabil / attraktiv.



Der Fixpunkt ist instabil / repulsiv.



kritischer Fixpunkt (höhere Ordnung)



Gleichgewichtslagen und In/Stabilität von Fixpunkten

Anfangsdaten sind oft zufälligen kleinen Schwankungen unterworfen, etwa durch kleine äußere Störungen oder ungenaue Messdaten.

Wir wollen das Langzeitverhalten in der Nähe von Fixpunkten verstehen. Hier gilt $\dot{x}(t) = f(x(t))$, für $x(t) = x_0 + u(t) \approx x_0$ also $\dot{u}(t) \approx f'(x_0)\, u(t)$.

- Gilt Abklingen $|u(t)| \to 0$? sogar exponentiell?
- Gilt Beschränktheit gemäß $0 < c_0 \leq |u(t)| \leq c_1 < \infty$?
- Gilt Wachstum $|u(t)| \to \infty$? nur polynomiell? gar exponentiell?

⚠ Instabile Fixpunkte sind meist Opfer des **Schmetterlingseffekts**: Sie zeigen eine extrem sensible Abhängigkeit von den Anfangsdaten; typischerweise können kleine Störungen exponentiell anwachsen! Beispiele wie $\dot{x}(t) = a\, x(t)$ zeigen, dass dies tatsächlich vorkommt.

⚠ Technische Anwendungen erfordern meist stabile Gleichgewichte! Die **Stabilitätstheorie** untersucht die Auswirkung kleiner Störungen, die als Abweichung von Gleichgewichtszuständen auftreten, etwa in der Regelungstechnik (P2D) oder der Technischen Mechanik (P2H).

Eindimensionale Dynamik um einen Fixpunkt

Aufgabe: (1) Wir untersuchen $\dot{x}(t) = a\,x(t)$ mit $x(0) = x_0$ und $a \in \mathbb{R}$. Welches asymptotische Verhalten haben die Lösungen für $t \to \infty$?

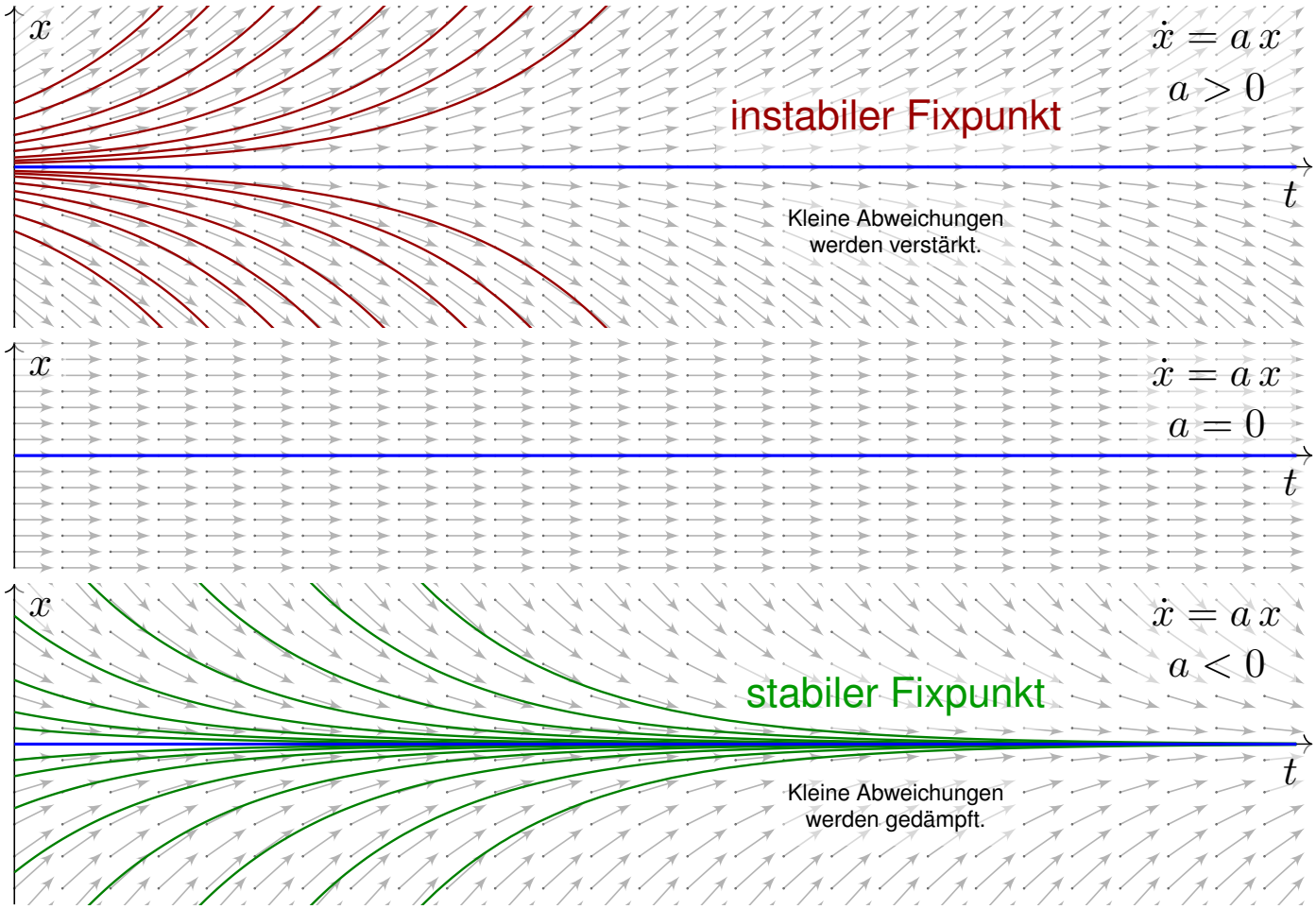
(2) Welches Verhalten erwarten Sie für eine nicht-lineare Gleichung $\dot{x}(t) = f(x(t))$ mit $x(0) = x_0$ und $f(x_0) = 0$? Ist x_0 ein Fixpunkt? Welche Rolle spielt die Ableitung $f'(x_0)$ für die Stabilität?

Lösung: (1) Dieses AWP hat als eindeutige Lösung $x(t) = x_0\,\mathrm{e}^{at}$. Die Dynamik eindimensionaler linearer Systeme ist sehr einfach:

- $a > 0$ streckt; Störungen werden exponentiell verstärkt. Der einzige Fixpunkt 0 ist **instabil**.
- $a < 0$ staucht: Störungen werden exponentiell gedämpft. Der einzige Fixpunkt 0 ist **stabil**.
- Im Falle $a = 0$ ist jeder Startpunkt x_0 ein Fixpunkt.

(2) Nicht-lineare Systeme sind wesentlich komplizierter! In der Nähe eines Fixpunktes können wir jedoch linearisieren und annähernd eine **lineare Dynamik** erwarten. Diese Idee wird im Folgenden ausgeführt.

Eindimensionale Dynamik um einen Fixpunkt



Dynamik und Linearisierung um einen Fixpunkt

Wir betrachten ein **autonomes Differentialgleichungssystem**:

$$\boxed{\dot{x}(t) = f(x(t))}$$

Hierbei sei $f : \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Die rechte Seite $f(x)$ hängt nicht explizit von der Zeit t ab, daher **autonom**. Zu jedem Startpunkt $x_0 \in \mathring{G}$ existiert eine eindeutige Lösung $x : [0, T[\to \mathring{G}$ für $T > 0$ mit $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(t) = f(x(t))$ für $t \in [0, T[$. Für das maximale T gilt entweder $T = \infty$ oder $f(t) \to \partial G \cup \{\infty\}$ für $t \nearrow T < \infty$.

Aufgabe: Was geschieht bei Start nahe einer Gleichgewichtslage?

Lösung: Jeder Startpunkt x_0 mit $f(x_0) = 0$ ist ein **Fixpunkt**.

Für kleine Auslenkungen $x(t) = x_0 + u(t)$ können wir **linearisieren**:

$$\dot{u}(t) = \dot{x}(t) = f(x(t)) = f(x_0 + u(t)) \approx f(x_0) + f'(x_0)\, u(t) = A\, u(t)$$

Sei $x : [0, T[\to \mathring{G}$ die Lösung zum Startpunkt $x(0) = x_0$ mit $\dot{x}(t) = f(x(t))$ für alle $t \in [0, T[$.
Ruhelage: Genau dann herrscht Konstanz $x(t) = x_0$ für alle $t \in [0, T[$, wenn $f(x_0) = 0$ gilt.
Die **Jacobi–Matrix** $A = f'(x_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ von f beschreibt das Verhalten um den Fixpunkt x_0:
Wir erhalten als Näherung die lineare Differentialgleichung $\dot{u}(t) = A\, u(t)$. Hierdurch erhalten lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten ihre zentrale Bedeutung!

Dynamik und Linearisierung um einen Fixpunkt

☺ Kleine Auslenkungen aus der Ruhelage x_0 folgen näherungsweise dem linearen DGSystem mit konstanter Systemmatrix $A = f'(x_0)$:

$$\boxed{\text{nicht-linear } \dot{x}(t) = f(x(t)) \quad \rightsquigarrow \quad \text{linear } \dot{u}(t) = A\, u(t)}$$

☺ Linearisierung vereinfacht die ursprüngliche Gleichung enorm!
Jede Lösung dieser Approximation ist von der Form $u(t) = \mathrm{e}^{tA}\, u_0$.
Zum Eigenwert $\lambda = \sigma + \mathrm{i}\omega$ gehören Eigen- und Hauptfunktionen

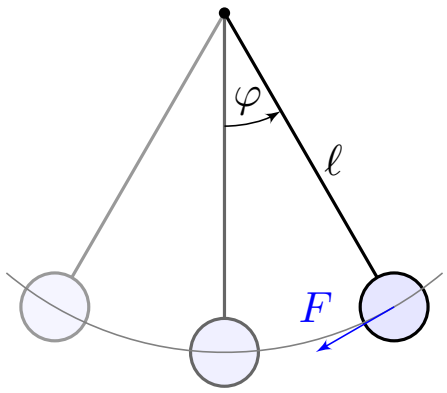
$$u(t) = \mathrm{e}^{\sigma t}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \Big[v_k + t\, v_{k-1} + \tfrac{t^2}{2} v_{k-2} + \ldots + \tfrac{t^{k-1}}{(k-1)!} v_1 \Big],$$

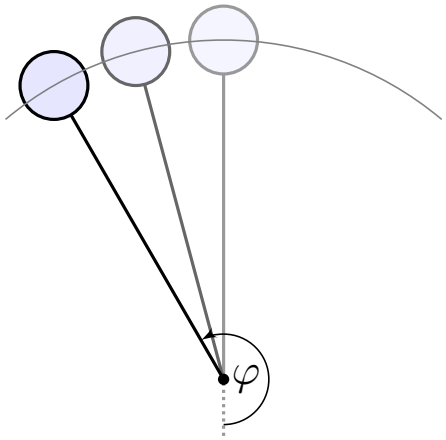
siehe P1E und P1G. Damit erkennen wir die **Stabilität** des Fixpunktes:

- $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ staucht; kleine Störungen werden exponentiell gedämpft. Der Fixpunkt ist **stabil**, wenn $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ für *alle* Eigenwerte gilt.
- $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ streckt; kleine Störungen werden exponentiell verstärkt. Der Fixpunkt ist **instabil**, wenn $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ für *einen* Eigenwert gilt.

Der Grenzfall $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ bedarf genauerer Analyse (höhere Ordnung).

Linearisierung um Fixpunkte und In/Stabilität





Dynamisches System:

$$\begin{pmatrix}\dot\varphi\\ \dot\omega\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\omega\\ -(g/\ell)\sin\varphi - 2\delta\omega\end{pmatrix}$$

Linearisierung um $(0,0)$:

$$\begin{pmatrix}\dot u\\ \dot v\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}0 & 1\\ -(g/\ell) & -2\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$$

Der Fixpunkt $(0,0)$ ist stabil.

Dynamisches System:

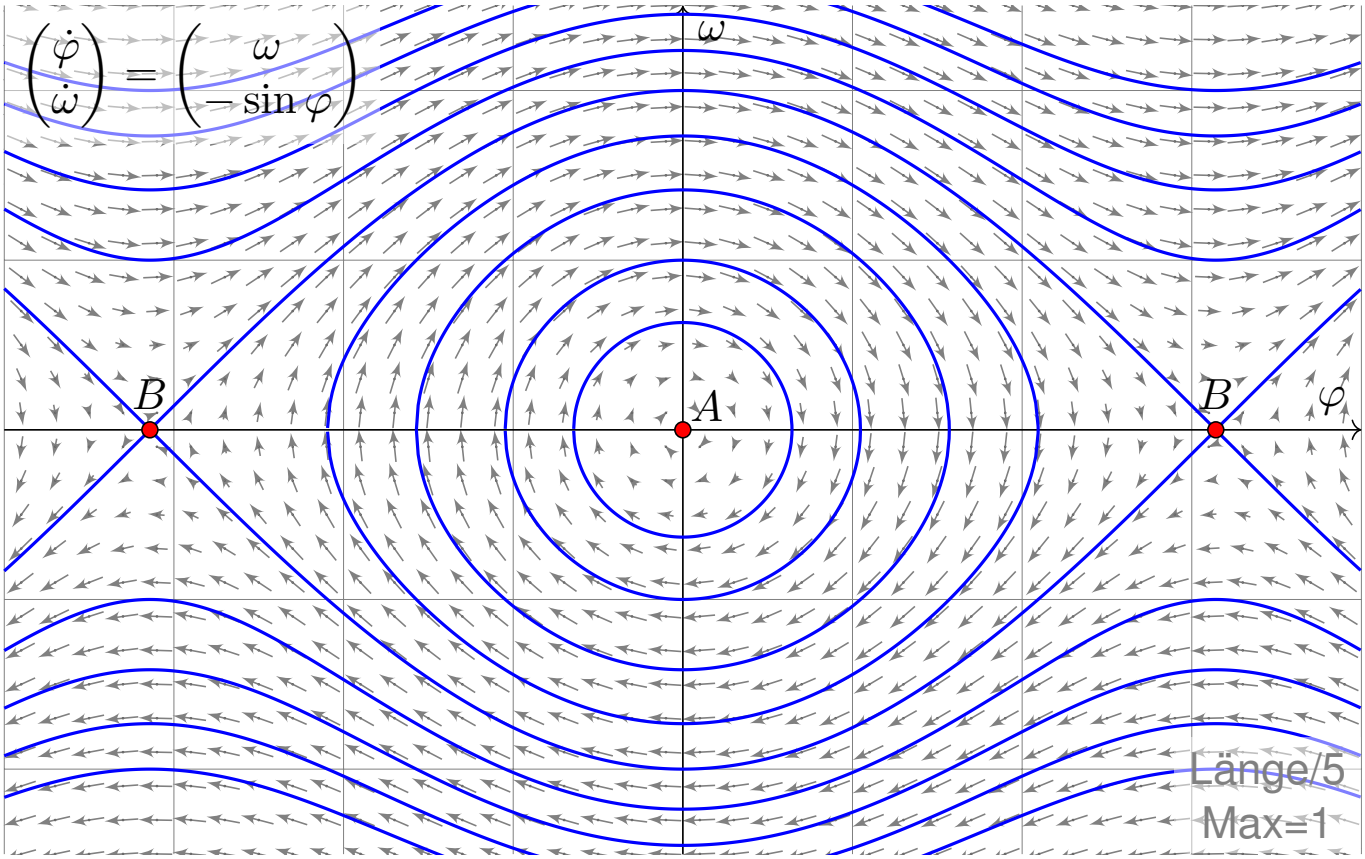
$$\begin{pmatrix}\dot\varphi\\ \dot\omega\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\omega\\ -(g/\ell)\sin\varphi - 2\delta\omega\end{pmatrix}$$

Linearisierung um $(\pi,0)$:

$$\begin{pmatrix}\dot u\\ \dot v\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}0 & 1\\ +(g/\ell) & -2\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$$

Der Fixpunkt $(\pi,0)$ ist instabil.

Linearisierung um Fixpunkte und In/Stabilität



Wir erkennen harmonische Oszillation um das untere Gleichgewicht A.
Der obere Scheitelpunkt B hingegen ist ein instabiles Gleichgewicht.

Zweidimensionale Dynamik um einen Fixpunkt

Wir untersuchen das DGSystem $\dot{u}(t) = A\,u(t)$ zur Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:
Polynom $\det(A - tE) = t^2 - 2at + d$, Eigenwerte $\lambda_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - d}$.
Spur $\operatorname{tr}(A) = 2a$, Determinante $\det(A) = d$, Diskriminante $\Delta = a^2 - d$.

Aufgabe: Skizzieren Sie die Dynamik je nach Lage der Eigenwerte (14 Fälle)und untersuchen Sie das Verhalten von $|u(t)|$ für $t \to \infty$.

- Gilt Abklingen $|u(t)| \to 0$? sogar exponentiell?
- Gilt Beschränktheit gemäß $0 < c_0 \le |u(t)| \le c_1 < \infty$?
- Gilt Wachstum $|u(t)| \to \infty$? nur polynomiell? gar exponentiell?

Lösung: Wir unterscheiden zunächst reelle und komplexe Eigenwerte:

$a^2 < d$: komplex-konjugiert $\lambda_{1,2} = a \pm \mathrm{i}b$, $\qquad A \sim \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

$a^2 > d$: zwei reelle Eigenwerte $\lambda_1 < \lambda_2$, $\qquad A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$a^2 = d$: ein doppelter Eigenwert λ, $\qquad A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ oder $A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Zweidimensionale Dynamik um einen Fixpunkt

☺ Damit haben wir alle möglichen Fälle vollständig gelöst!
Dank Eigen- und Hauptfunktionen wird alles klar und einfach.

Erinnerung O326: Hier bedeutet $A \sim B$, dass A und B konjugiert sind, also $B = T^{-1}AT$ für eine geeignete Basiswechselmatrix $T \in \mathrm{GL}_2\,\mathbb{R}$.

Dies beschreibt den Übergang zu unserer neuen Basis aus Eigen- bzw. Hauptvektoren, in der sich das Problem wesentlich einfacher darstellt.

☺ Wir finden drei Klassen, je nach Vorzeichen der Diskriminante

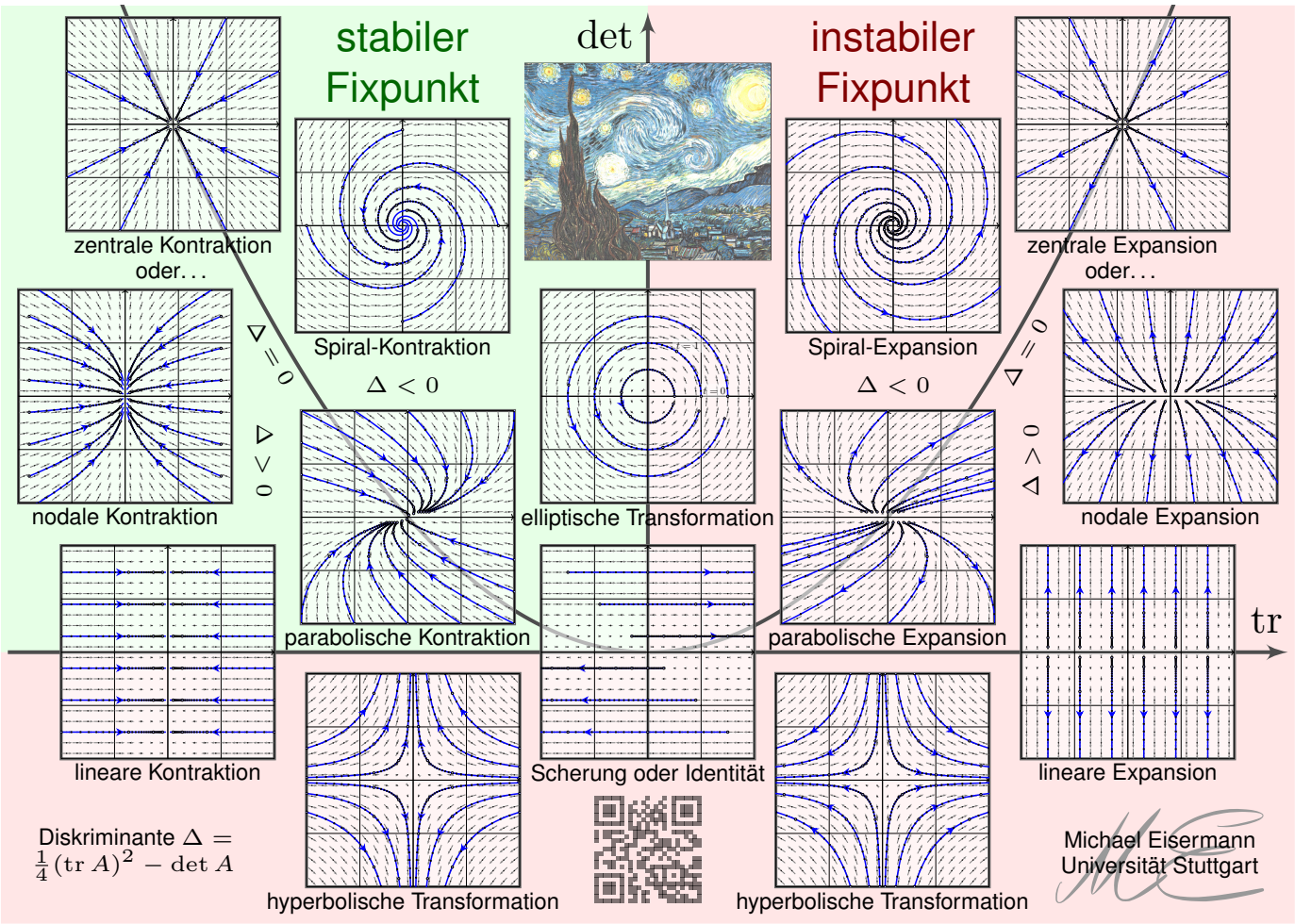
$$\boxed{\Delta = \tfrac{1}{4}(\operatorname{tr} A)^2 - \det A.}$$

Das Vorzeichen der Diskriminante unterscheidet, wie oben gesehen, zwischen reellen Eigenwerten und (echt) komplexen Eigenwerten.

Der Fixpunkt ist stabil, wenn $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ für beide Eigenwerte gilt.
Das bedeutet: Kleine Störungen werden exponentiell gedämpft.

Das gilt hier genau dann, wenn $\operatorname{tr}(A) < 0$ und $\det(A) > 0$ gilt.
Die stabile Region ist grün gefärbt, die instabile Region rot.

Zweidimensionale Dynamik um einen Fixpunkt



Zweidimensionale Dynamik um einen Fixpunkt

Diese schöne Graphik gibt einen guten Überblick: Sie klassifiziert die (linearisierte) Dynamik um einen Fixpunkt in der Ebene $\mathbb{R}^2$.

Im obigen Beispiel des mathematischen Pendels haben wir bereits zwei Fälle gesehen, einen stabilen und einen instabilen Fixpunkt.

Die folgenden Folien diskutieren alle gezeigten Einzelfälle im Detail, wir zoomen also auf einzelne Punkte dieses Gesamtkunstwerks.

⚠ Wir betrachten hier als einfaches Modell die linearisierte Gleichung. Nicht-lineare dynamische Systeme sind meist wesentlich komplizierter!

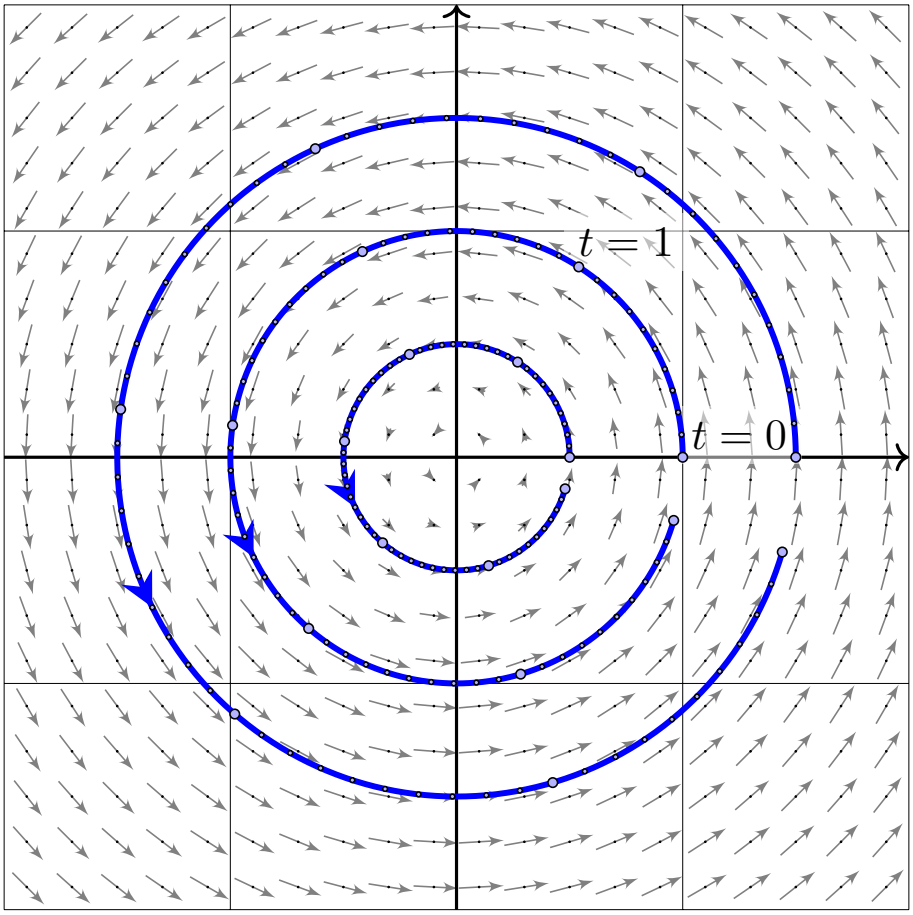
Dennoch gibt uns das linearisierte Modell sehr nützliche Auskunft, denn im Kleinen verhält sich das nicht-lineare Modell ganz ähnlich:

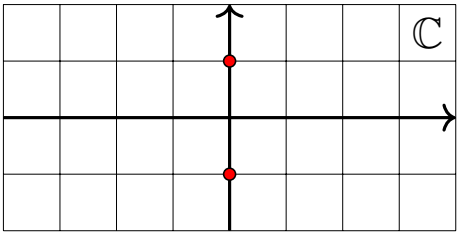
☺ Für die Stabilität des Fixpunktes x_0 genügt die Matrix $A = f'(x_0)$, falls alle Eigenwerte negativen Realteil haben (Satz von Lyapunov).

☺ In diesem Falle sieht die lokale Dynamik von $\dot{x} = f(x)$ topologisch aus wie im linearisierten Modell $\dot{u} = Au$ (Satz von Hartman–Grobman).

☺ Dieser Linearisierungssatz gilt ganz allgemein in jeder Dimension n um jeden *hyperbolischen* Fixpunkt (ohne Eigenwerte mit Realteil Null).

Wirbelpunkt: elliptische Transformation





Komplexe Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}b$$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

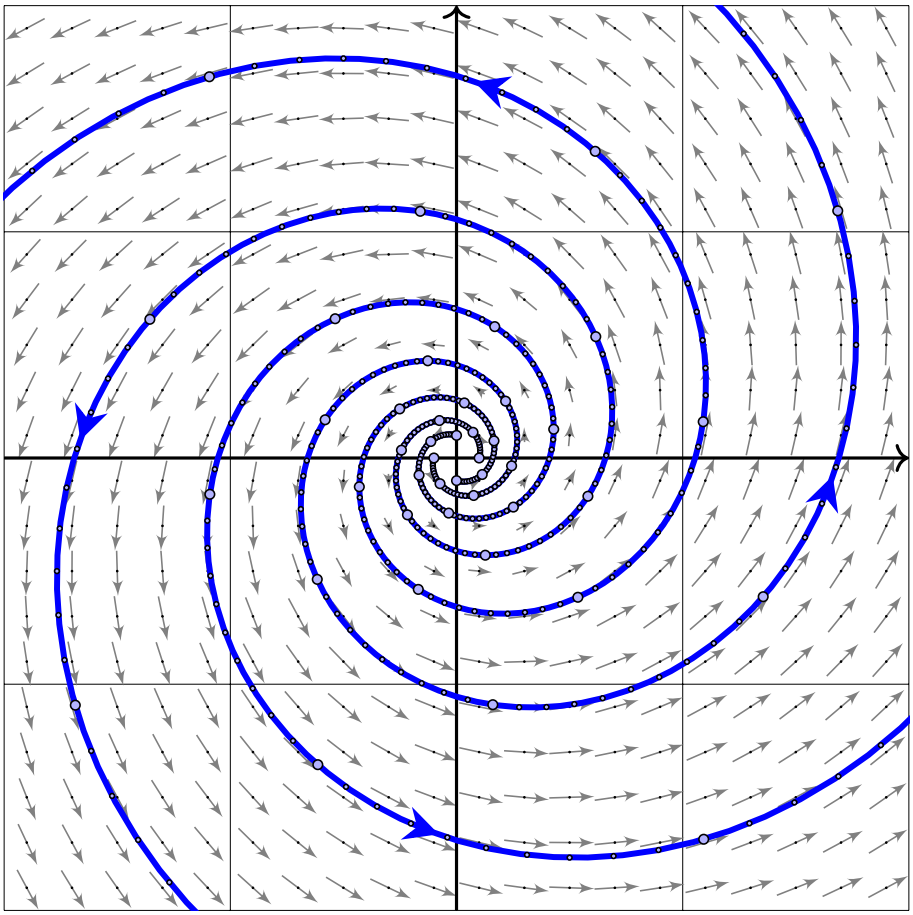
Konkretes Beispiel

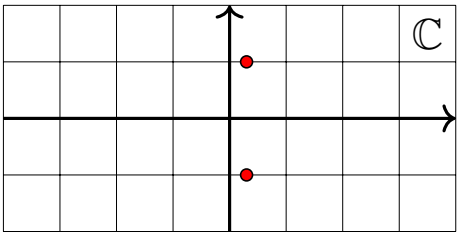
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$\mathrm{e}^{tA} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Instabiler Strudel: Spiral-Expansion





Komplexe Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = a \pm \mathrm{i}b, \quad a > 0$$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

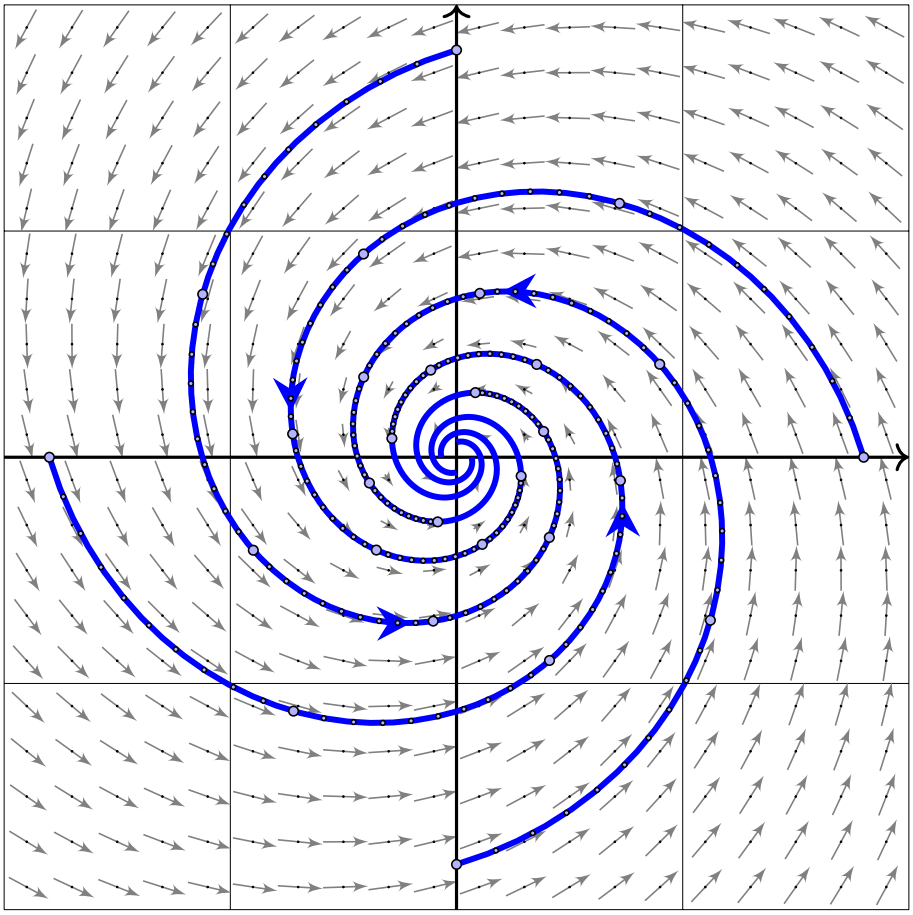
Konkretes Beispiel

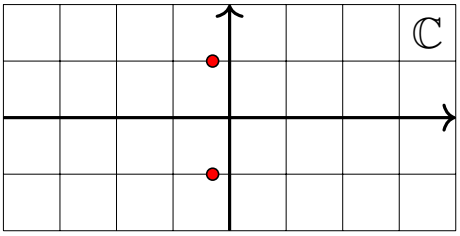
$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & -1 \\ 1 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$\mathrm{e}^{0.3t} \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Stabiler Strudel: Spiral-Kontraktion





Komplexe Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = a \pm \mathrm{i}b, \quad a < 0$$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Konkretes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} -0.3 & -1 \\ 1 & -0.3 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$\mathrm{e}^{-0.3t} \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Stabilität und Eigenwerte

☺ Die ersten drei Fälle komplex-konjugierter Eigenwerte zeigen bereits den Einfluss auf das Langzeitverhalten und die Stabilität der Lösungen:

- $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ staucht; kleine Störungen werden exponentiell gedämpft. Der Fixpunkt 0 ist **stabil**, wenn $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ für alle Eigenwerte gilt.
- $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ streckt; kleine Störungen werden exponentiell verstärkt. Der Fixpunkt 0 ist **instabil**, wenn $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ für einen Eigenwert gilt.

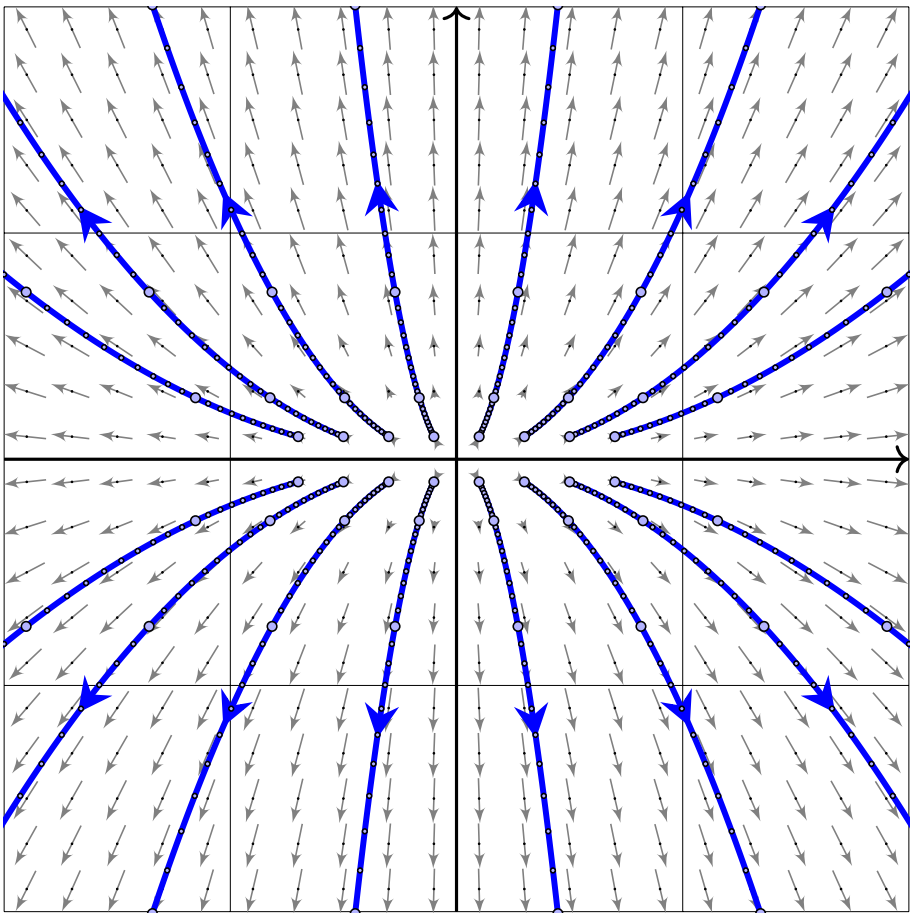
☺ Wir diskutieren die verbleibenden Fälle reeller Eigenwerte $\lambda_1 \leq \lambda_2$:

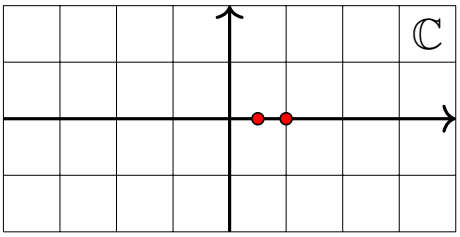
Im Falle $\lambda_1 < \lambda_2$ unterscheiden wir fünf Fälle je nach Lage zu 0:
Die Matrix A ist hierbei wegen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ immer diagonalisierbar.

Im Falle $\lambda_1 = \lambda_2$ unterscheiden wir drei Fälle je nach Lage zu 0:
Im einfachsten Falle ist $A \sim \mathrm{diag}(\lambda, \lambda)$ diagonalisierbar (drei Fälle); andernfalls nutzen wir Hauptvektoren zur Jordan–Form (drei Fälle).

☺ Dank unserer gründlichen Vorarbeit zu Eigen- und Hauptvektoren können wir alle 14 Fälle vollständig lösen und übersichtlich darstellen. Ebenso gelingt die Klassifikation linearer Dynamik in jeder Dimension!

Instabiler Knoten: nodale Expansion





Zwei reelle Eigenwerte

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2$$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

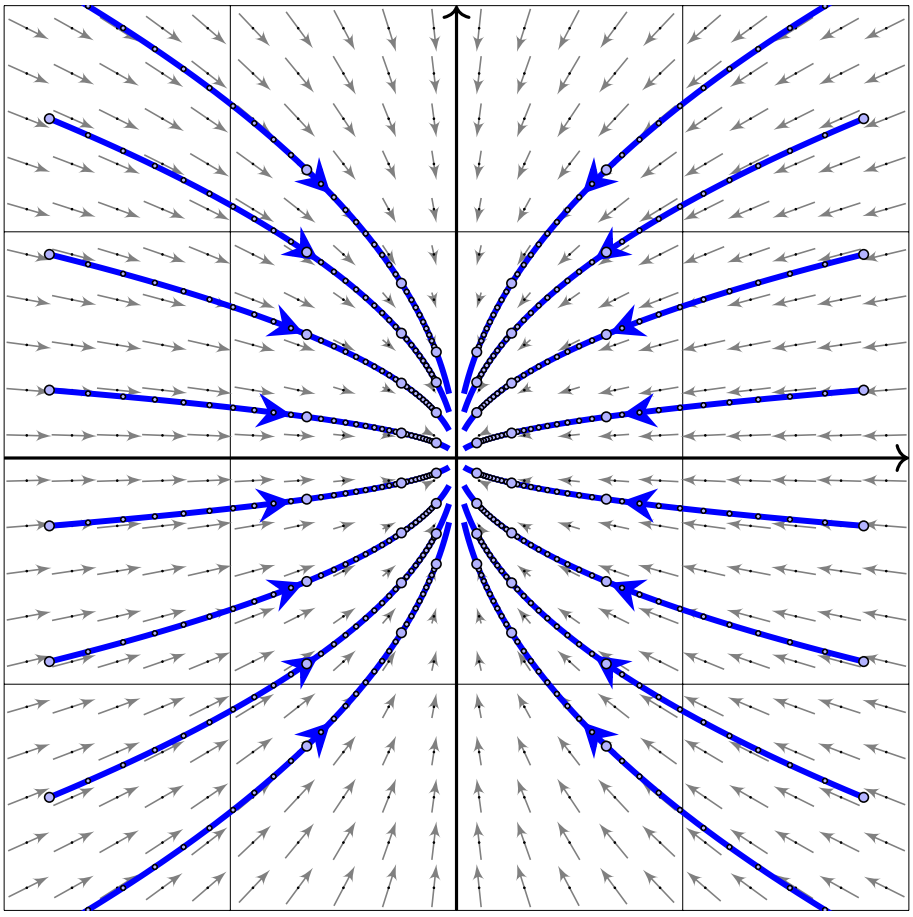
Konkretes Beispiel

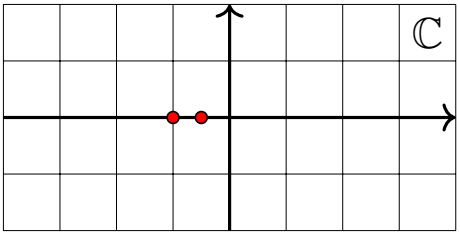
$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$\mathrm{e}^{tA} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{t/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{t} \end{bmatrix}$$

Stabiler Knoten: nodale Kontraktion





Zwei reelle Eigenwerte

$$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

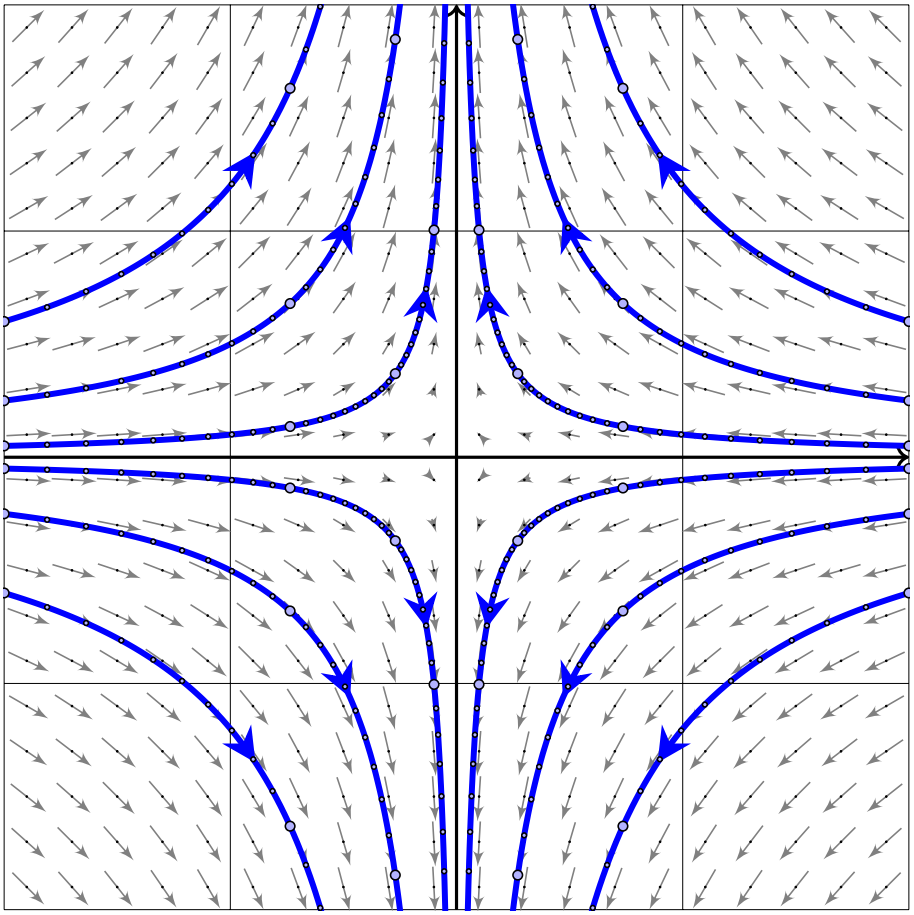
Konkretes Beispiel

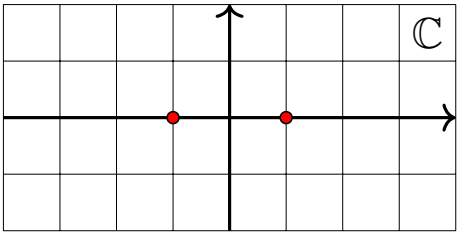
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$\mathrm{e}^{tA} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-t/2} \end{bmatrix}$$

Sattelpunkt: hyperbolische Transformation





Zwei reelle Eigenwerte

$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Konkretes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$\mathrm{e}^{tA} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{t} \end{bmatrix}$$

Eigenwerte und Eigenvektoren

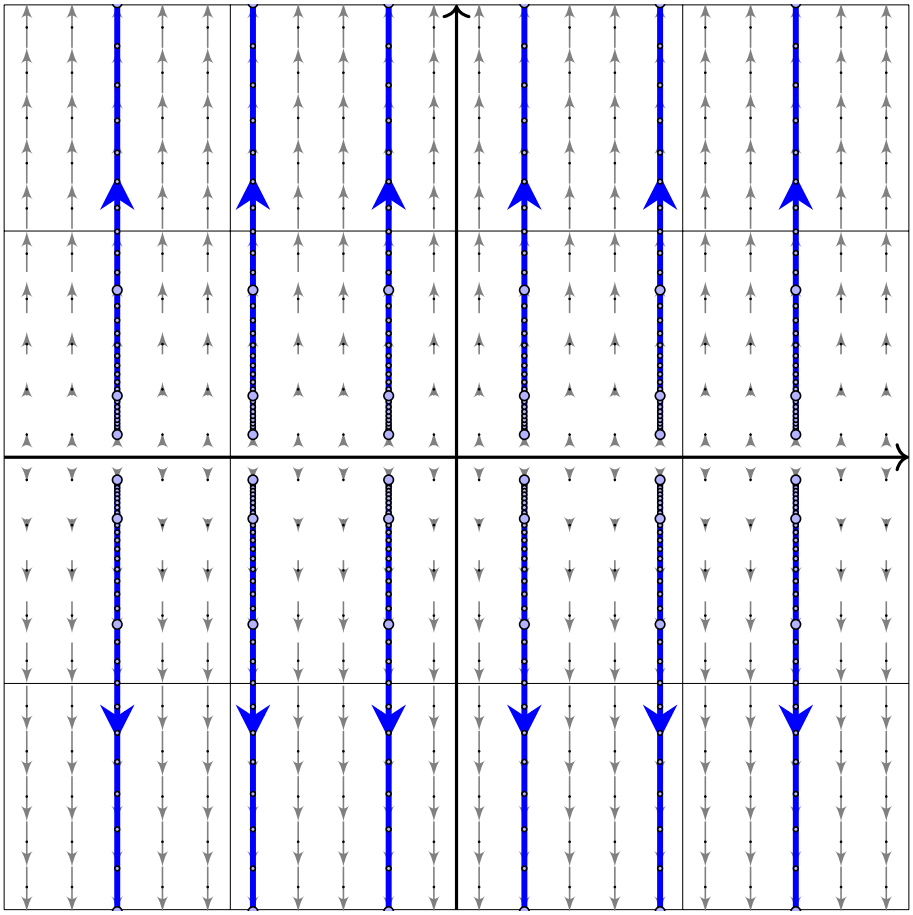
☺ Die hier illustrierten Beispiele zeigen die typische ebene Dynamik um den Fixpunkt $(0,0)^\intercal$ im elliptischen und im hyperbolischen Fall: Die Eigenwerte geben Auskunft über Dynamik und Stabilität!

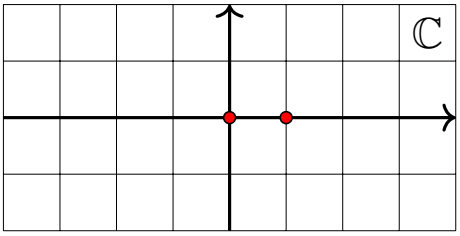
- Sind beide Eigenwerte positiv, so erhalten wir eine Expansion, typischerweise zwei Eigenräume / Achsen: langsam und schnell.
- Sind beide Eigenwerte negativ, so erhalten wir eine Kontraktion, typischerweise zwei Eigenräume / Achsen: langsam und schnell.
- Ist einer negativ und einer positiv, so erhalten wir eine stabile und eine instabile Richtung, wie im hyperbolischen Fall gezeigt.

☺ Die nächsten Folien zeigen schließlich alle Rand- und Sonderfälle. Zur Vereinfachung transformieren wir die beiden Eigen/Hauptvektoren der Systemmatrix A auf $(1,0)^\intercal$ und $(0,1)^\intercal$; das ist übersichtlicher.

⚠ Im Allgemeinen liegen diese beiden Achsen beliebig in der Ebene; sie sind typischerweise verdreht und stehen nicht senkrecht zueinander. Nach Koordinatenwechsel entsteht das hier gezeigte, einfache Bild. Die Aufgabe auf Seite P229 zeigt ein realistisches Beispiel.

Lineare Expansion





Zwei reelle Eigenwerte

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2$$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

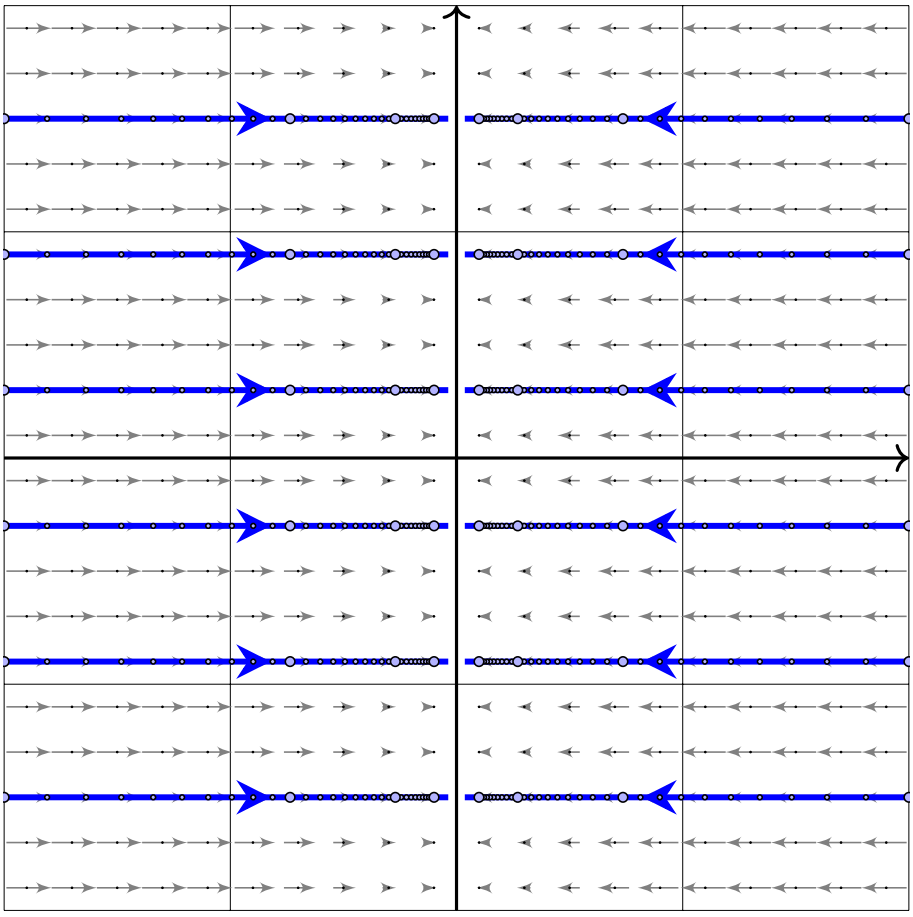
Konkretes Beispiel

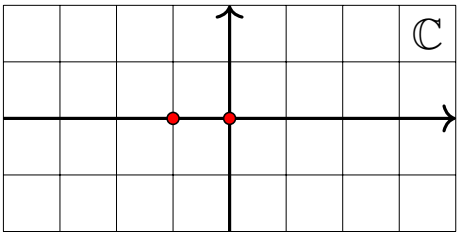
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$\mathrm{e}^{tA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^t \end{bmatrix}$$

Lineare Kontraktion





Zwei reelle Eigenwerte

$$\lambda_1 < \lambda_2 = 0$$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

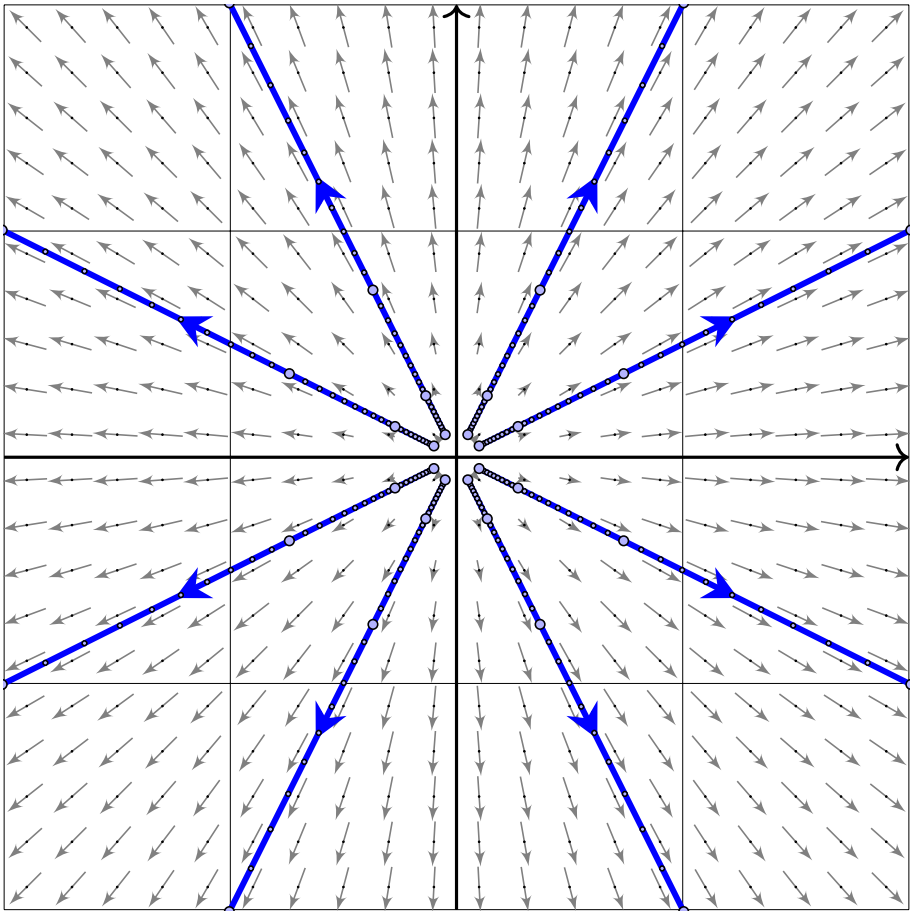
Konkretes Beispiel

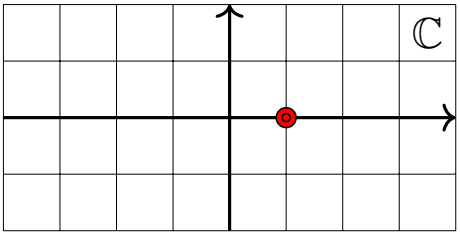
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$\mathrm{e}^{tA} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zentrale Expansion





Doppelter Eigenwert

$$\lambda > 0$$

Diagonalisierbarer Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

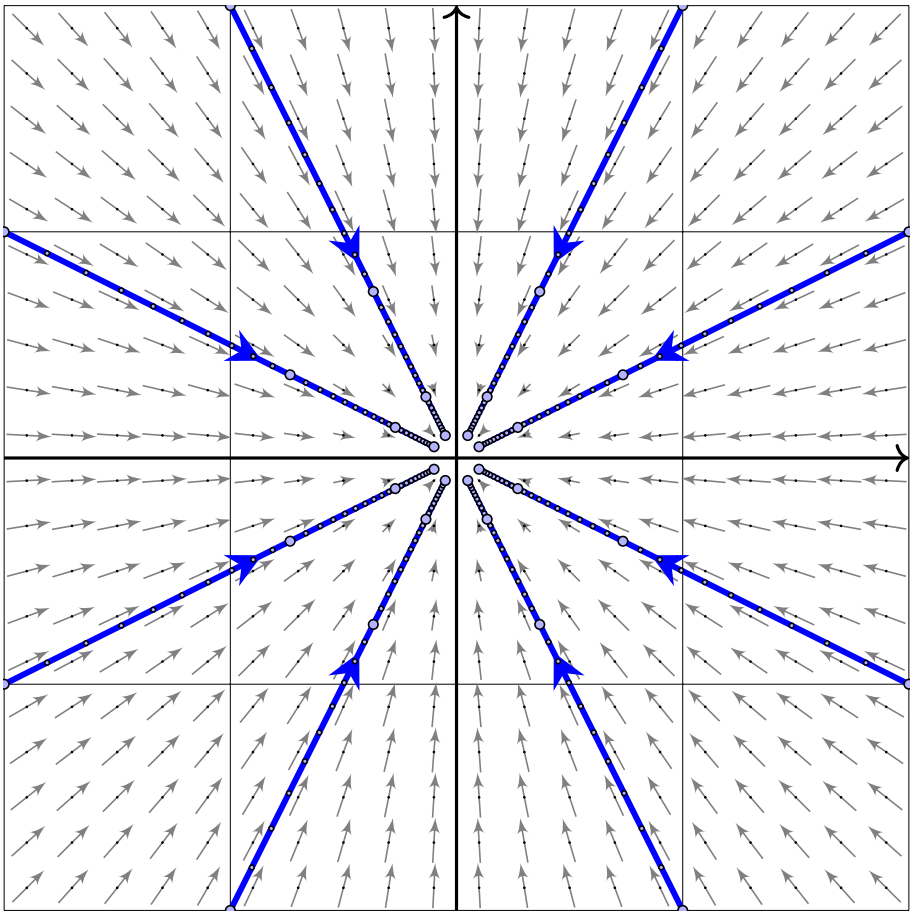
Konkretes Beispiel

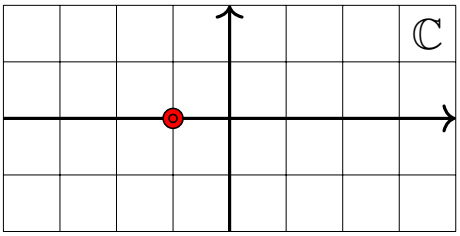
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$\mathrm{e}^{tA} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{t} \end{bmatrix}$$

Zentrale Kontraktion





Doppelter Eigenwert

$$\lambda < 0$$

Diagonalisierbarer Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

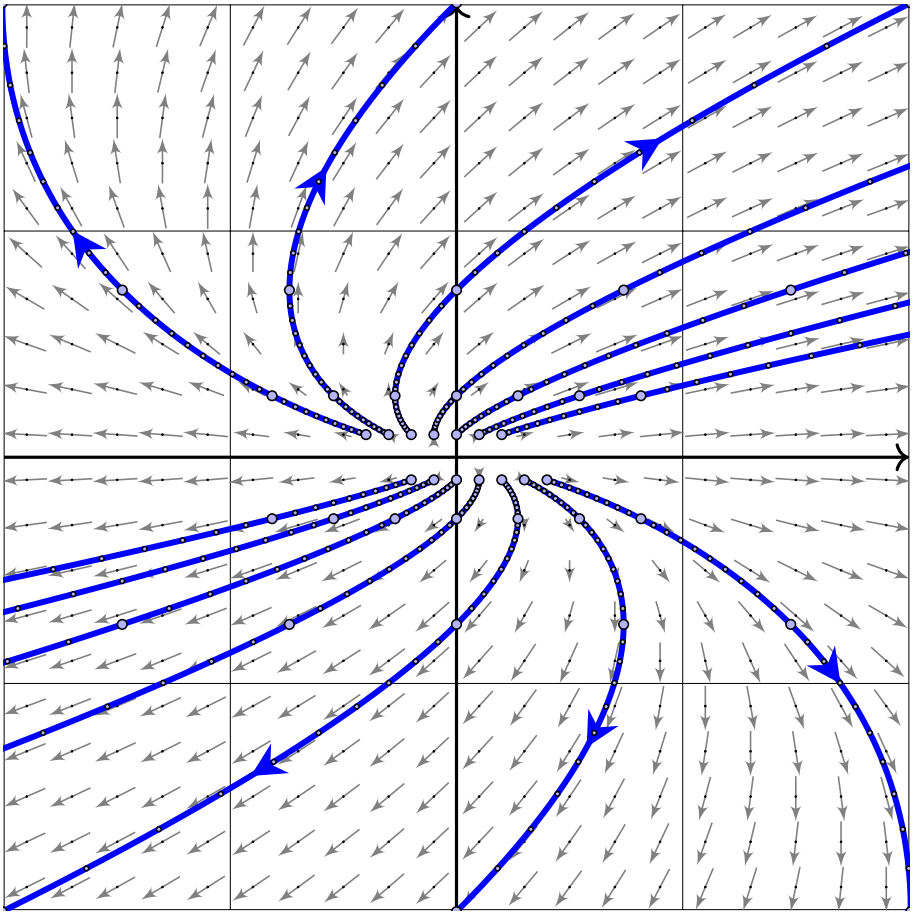
Konkretes Beispiel

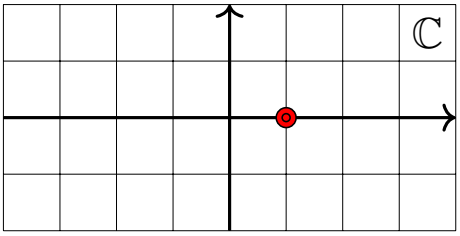
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$\mathrm{e}^{tA} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix}$$

Instabiler Knoten: parabolische Expansion





Doppelter Eigenwert

$$\lambda > 0$$

Nicht-diagonalisierbar

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

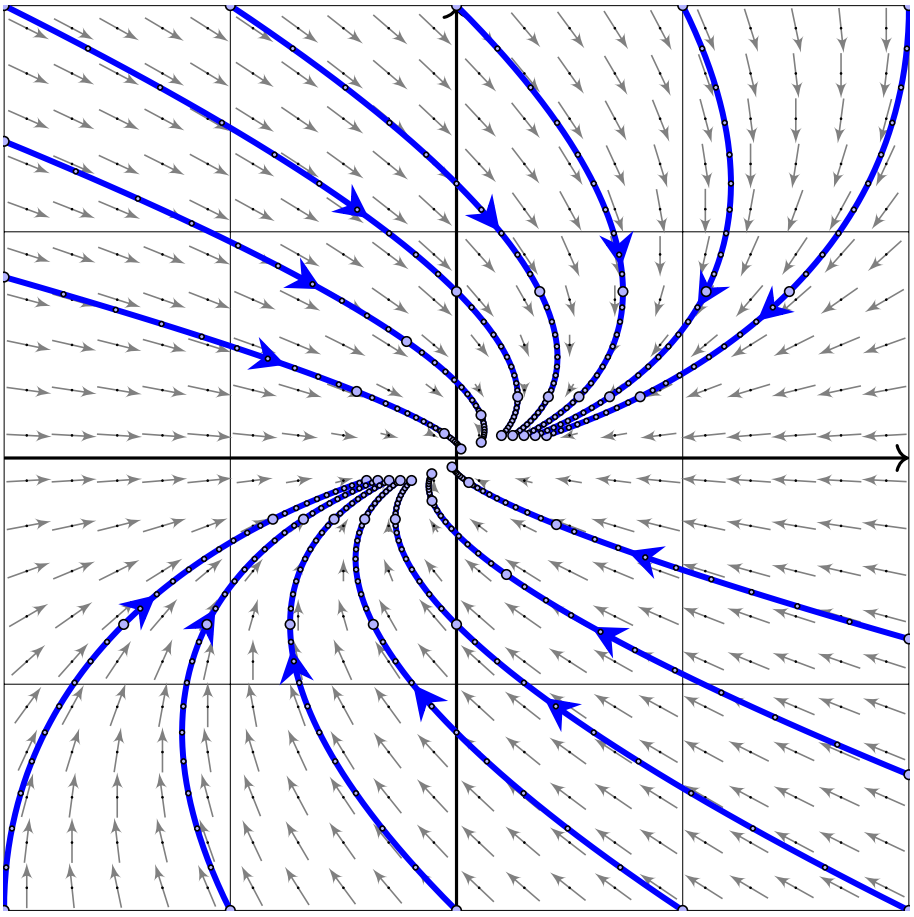
Konkretes Beispiel

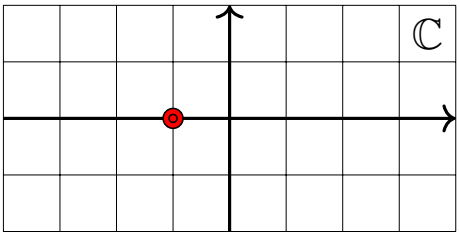
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$\mathrm{e}^{tA} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{t} & t\,\mathrm{e}^{t} \\ 0 & \mathrm{e}^{t} \end{bmatrix}$$

Stabiler Knoten: parabolische Kontraktion





Doppelter Eigenwert

$$\lambda < 0$$

Nicht-diagonalisierbar

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

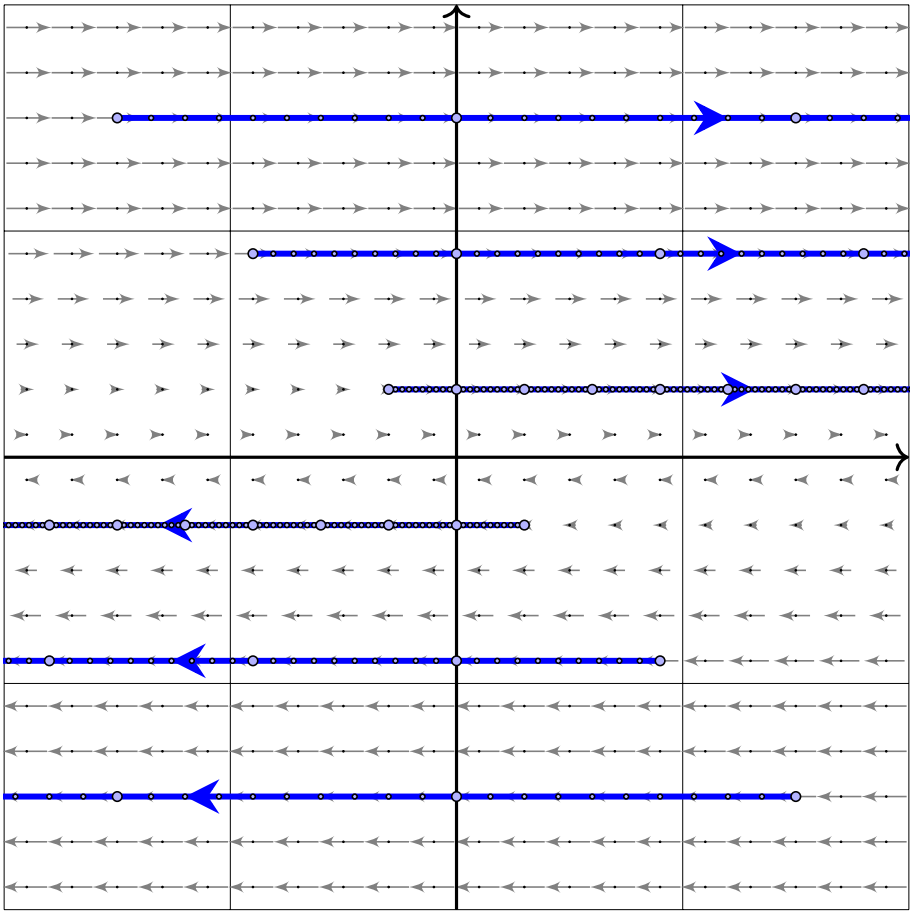
Konkretes Beispiel

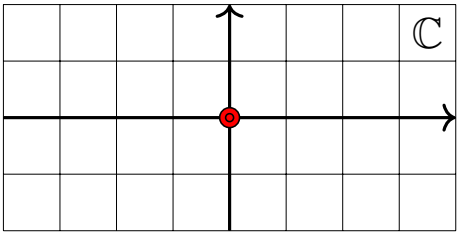
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$\mathrm{e}^{tA} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} & t\,\mathrm{e}^{-t} \\ 0 & \mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix}$$

Scherung





Doppelter Eigenwert

$$\lambda = 0$$

Nicht-diagonalisierbar

$$A \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Konkretes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$\mathrm{e}^{tA} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Diagonalisierbar oder nicht diagonalisierbar?

Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit doppeltem Eigenwert λ gilt $\lambda \in \mathbb{R}$ sowie

$$\text{entweder} \quad A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Im ersten Fall existiert eine Basis des $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von A. Die Matrix A wird hierdurch diagonalisiert. Es gilt dann:

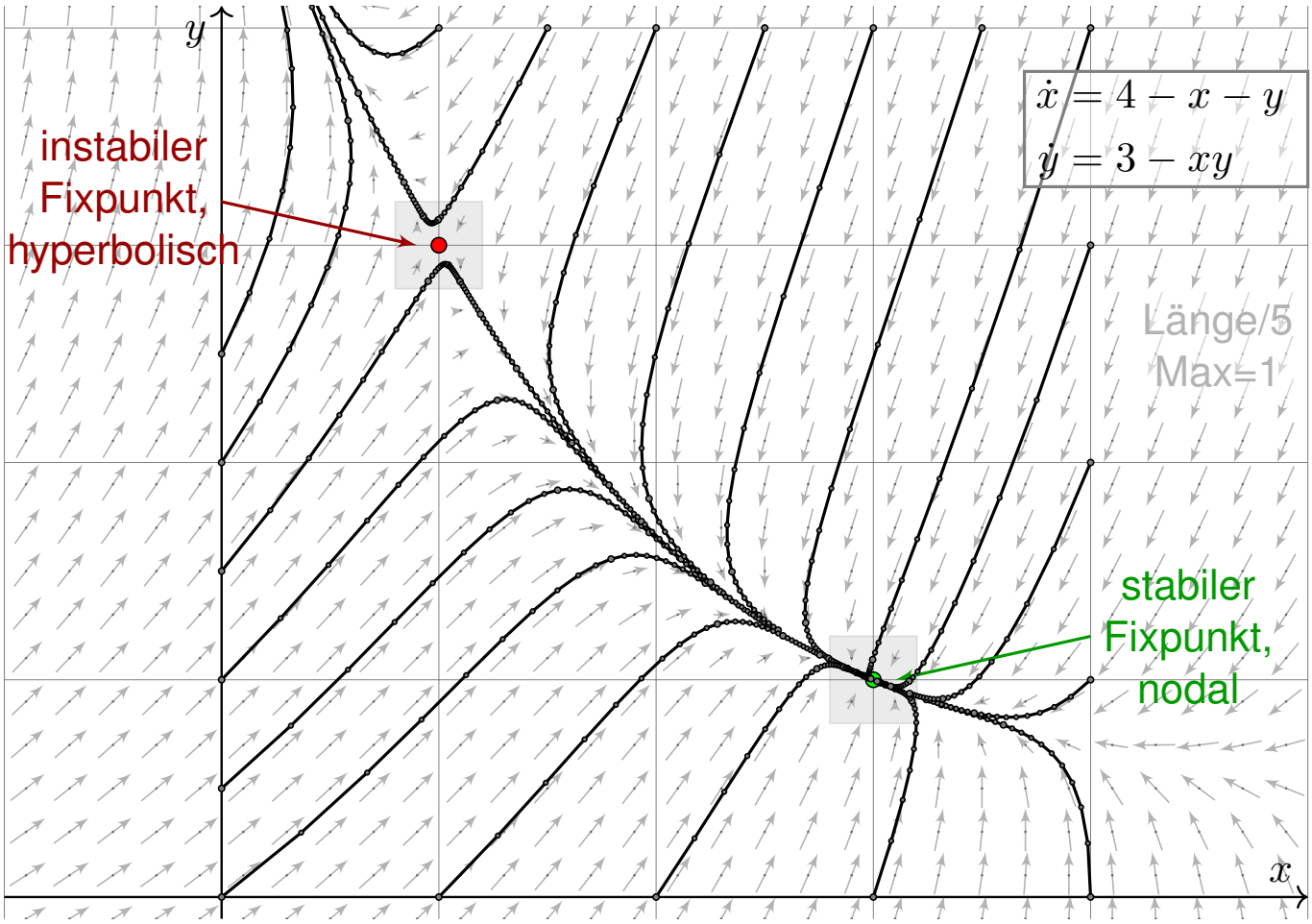
$$\mathrm{e}^{tA} \sim \mathrm{e}^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Andernfalls existiert eine Hauptvektorkette der Länge 2. Diese nutzen wir als Basis des $\mathbb{R}^2$ und erhalten obigen Jordan–Block. Es gilt dann:

$$\mathrm{e}^{tA} \sim \mathrm{e}^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

☺ Nach demselben Schema können wir n–dimensionale autonome Systeme analysieren: Fixpunkte, Linearisierung, Eigenwerte, Stabilität. Unsere gründliche Vorarbeit zu Eigen- und Hauptvektoren zahlt sich aus!

Ein nicht-lineares DGSystem: quadratisches Vektorfeld



Ein nicht-lineares DGSystem: quadratisches Vektorfeld

Aufgabe: Wir untersuchen folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\begin{cases} \dot{x} = 4 - x - y \\ \dot{y} = 3 - xy \end{cases}$$

(0) Skizzieren Sie das zugehörige Vektorfeld und einige Flusslinien.

(1a) Finden Sie alle Fixpunkte. Es gibt genau zwei: $(1, 3)$ und $(3, 1)$.
(1b) Linearisieren Sie um jeden Fixpunkt: Welche Dynamik gilt hier?
Leichtere Teilfrage: Ist der betrachtete Fixpunkt stabil oder instabil?
Was bedeuten die zugehörigen Eigenvektoren und die Eigenwerte?

(2) Erklären Sie (qualitativ anhand Ihrer Skizze) für jeden Startpunkt $(x(0), y(0)) \in \mathbb{R}^2$ das Verhalten der Lösung $(x(t), y(t))$ für $t \to \infty$.
(2a) Gibt es zu jedem Startwert eine Lösung? Ist sie eindeutig?
(2b) Für welche Startwerte konvergiert die Lösung gegen $(3, 1)$?
(2c) Für welche Startwerte konvergiert die Lösung gegen $(1, 3)$?
(2d) Für welche Startwerte divergiert die Lösung? gegen ∞?
Ist dieses Verhalten stabil? Wird das Ziel in endlicher Zeit erreicht?

Ein nicht-lineares DGSystem: quadratisches Vektorfeld

Lösung: (1a) Fixpunkte sind die Nullstellen des Vektorfeldes:

$$\dot{x} = 4 - x - y \overset{!}{=} 0$$
$$\dot{y} = 3 - xy \quad \overset{!}{=} 0$$

Die erste Gleichung bedeutet $y = 4 - x$, einsetzen in die zweite ergibt:

$$3 - 4x + x^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \{1, 3\}$$

☺ Die beiden einzigen Fixpunkte sind daher $(1, 3)$ und $(3, 1)$. Probe!

(1b) Wir berechnen die Jacobi–Matrix in jedem der beiden Fixpunkte:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - x - y \\ 3 - xy \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad f'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -y & -x \end{pmatrix}$$

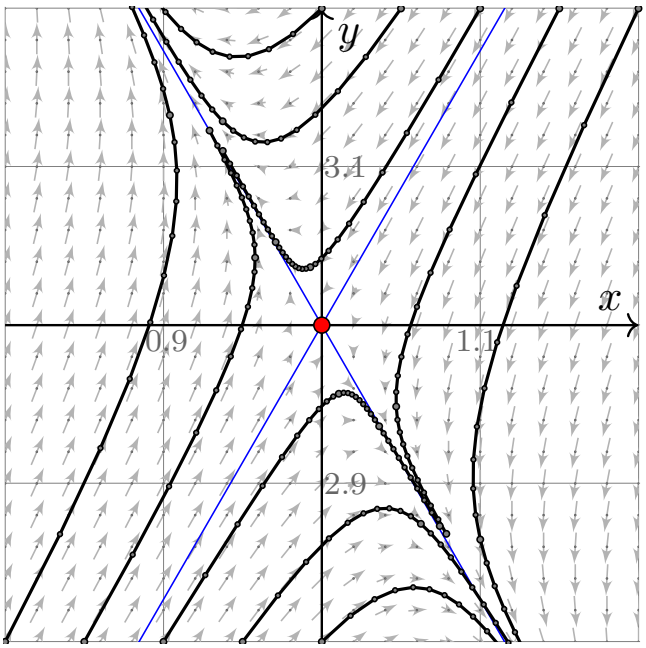
$$f'\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \det = -2 < 0, \ \mathrm{tr} = -2: \\ \text{instabil! genauer: hyperbolisch} \end{cases}$$

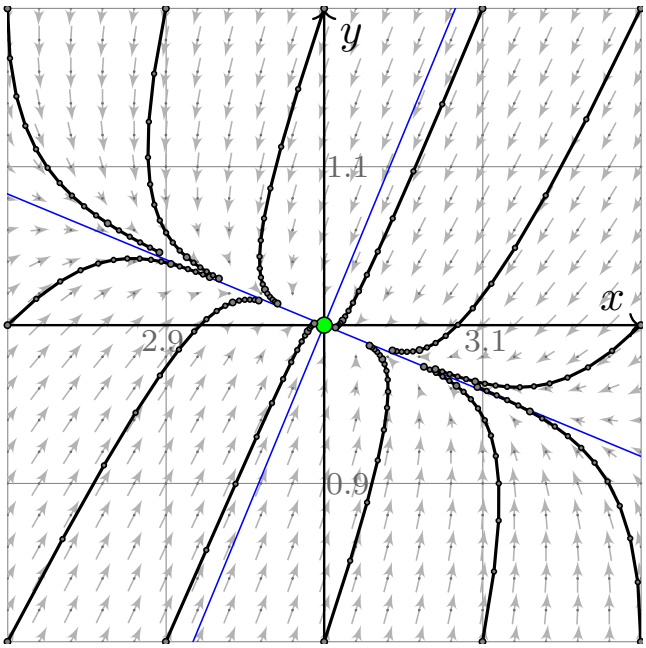
$$f'\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \det = +2 > 0, \ \mathrm{tr} = -4 < 0: \\ \text{stabil! genauer: nodale Kontraktion} \end{cases}$$

☺ Vergleich mit der obigen Skizze: Das entspricht der Anschauung!

Ein nicht-lineares DGSystem: Zoom auf Fixpunkte

Die Vergrößerung um die Fixpunkte zeigt annähernd lineares Verhalten:





Die beiden Eigenvektoren entsprechen den Hauptachsen der Dynamik:

$$v = \begin{pmatrix} \pm 1/\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda = \mp\sqrt{3} - 1 \qquad v = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{2} - 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda = \mp\sqrt{2} - 2$$

☺ Rechts ist die Jacobi–Matrix symmetrisch, die EV daher orthogonal.

Räuber-Beute-Modell nach Lotka–Volterra

Räuber-Beute-Modell: $\begin{cases} \dot{x}_1 = \quad \alpha_1 x_1 - \beta_1 x_1 x_2 & =: f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = -\alpha_2 x_2 + \beta_2 x_1 x_2 & =: f_2(x_1, x_2) \end{cases}$

Größe	Bedeutung	Beispiel
$t \geq 0$	Zeit	Jahre
$x_1(t) \geq 0$	Anzahl der Beutetiere	Hasen/Mio
$x_2(t) \geq 0$	Anzahl der Raubtiere	Luchse/Tsd
$\alpha_1 > 0$	Reproduktionsrate der Beute (ohne Räuber)	0.8/Jahr
$\beta_1 > 0$	Sterberate der Beute pro Räuber	0.4/Jahr
$\alpha_2 > 0$	Sterberate der Räuber (ohne Beute)	0.6/Jahr
$\beta_2 > 0$	Reproduktionsrate der Räuber pro Beute	0.2/Jahr

Dieses DGSystem beschreibt die Entwicklung großer Räube-Beute-Populationen. Beispiel: Fangaufzeichnungen der Hudson Bay Company zeigten über 90 Jahre einen 9jährigen Zyklus. Formuliert und untersucht wurde dieses Modell 1925 von Alfred Lotka und unabhängig 1926 von Vito Volterra, seither ist es das Paradebeispiel einer Populationsdynamik in der Biologie. Die quadratischen Terme entsprechen dem Massenwirkungsgesetz chemischer Reaktionen. Epidemien folgen einer ähnlichen Dynamik, man untersucht und nutzt dies für Maßnahmen. Mechanische Systeme mit nicht-linearen Rückkopplungen gehorchen ähnlichen Gleichungen.

Räuber-Beute-Modell nach Lotka–Volterra

Räuber-Beute-Modell: $\begin{cases} \dot{x}_1 = \quad 0.8\, x_1 - 0.4\, x_1 x_2 & =: f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = -0.6\, x_2 + 0.2\, x_1 x_2 & =: f_2(x_1, x_2) \end{cases}$

Aufgabe: (1) Skizzieren Sie den Zustandsraum und das Vektorfeld. Existiert zu jedem Startwert $x(0) \in \mathbb{R}^2$ eine Lösung $t \mapsto x(t)$? eindeutig?

(2) Was folgt aus $x_2(0) = 0$? aus $x_1(0) = 0$? Wo liegen Fixpunkte? Skizzieren Sie Lösungen zu $x_1(0) = 3$ und $x_2(0) = 2.0, 1.8, \ldots, 0.0$.

(3) Ist das System linear? Wie / Können Sie Lösungen berechnen?

(4) Linearisieren & lösen Sie für kleine Störungen des Gleichgewichts. Wie lange dauert eine Periode? Wie verlässlich ist das lineare Modell?

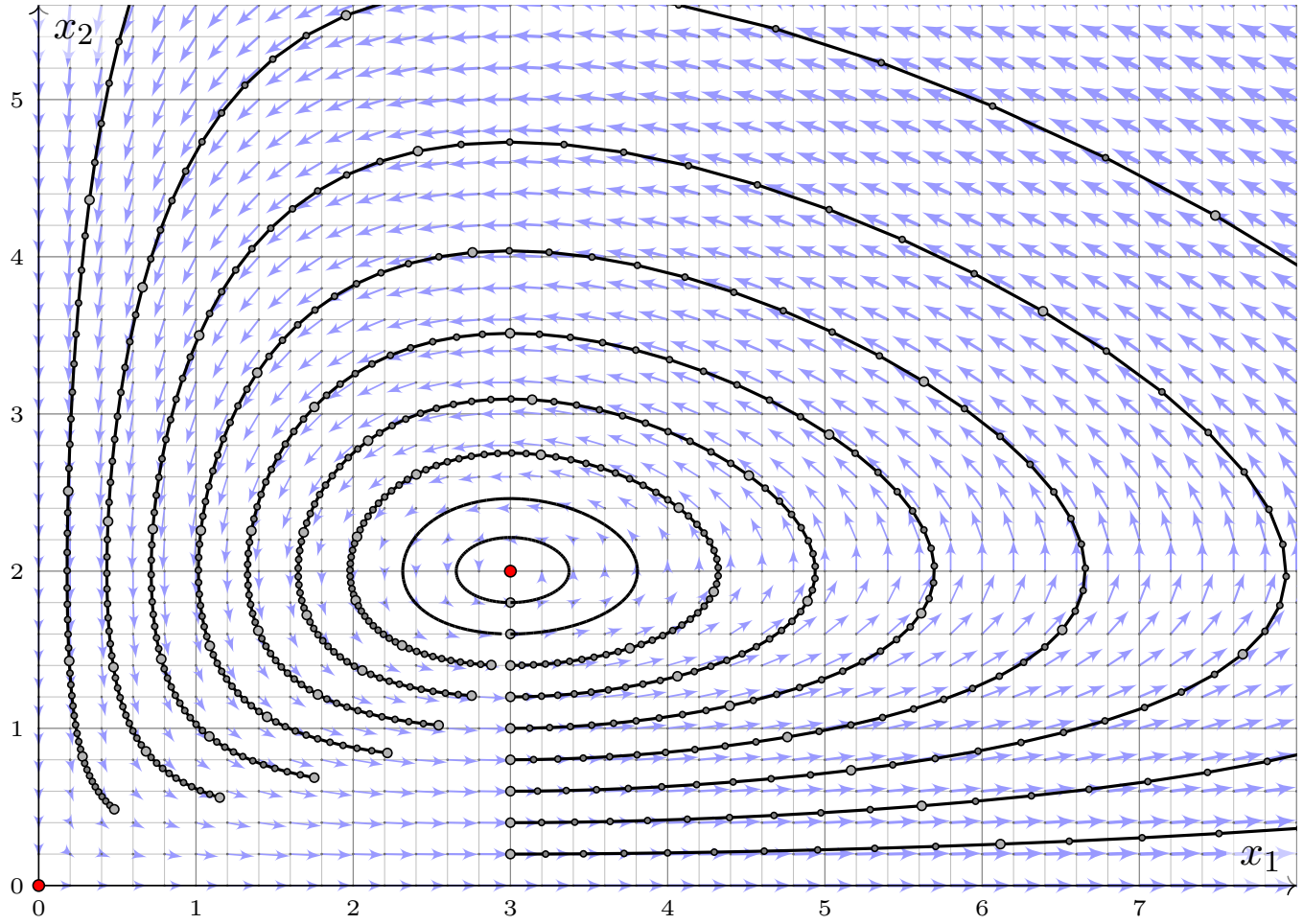
(5) Das Potential $\Phi := \beta_2 x_1 - \alpha_2 \ln x_1 + \beta_1 x_2 - \alpha_1 \ln x_2$ erfüllt $\dot{\Phi} = 0$.

(6) Erste Lotka–Volterra–Regel, Periodizität der Lösungen:
Beide Populationensgrößen entwickeln sich periodisch.

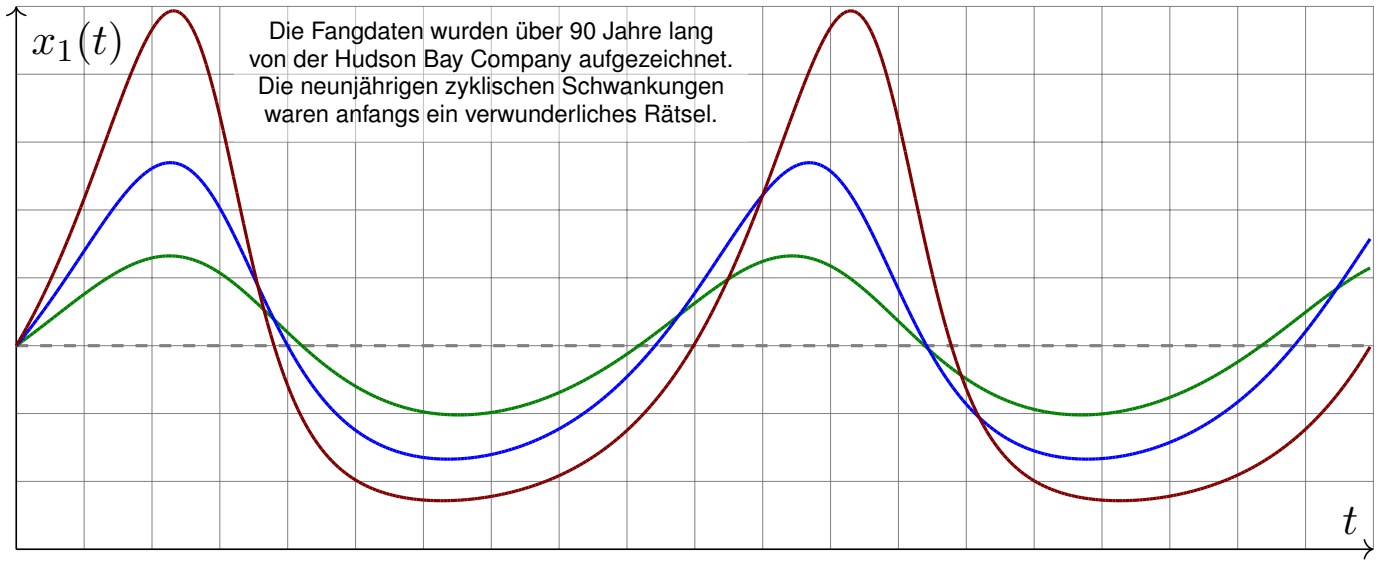
(7) Zweite Lotka–Volterra–Regel, Konstanz der Mittelwerte:
Die zeitlichen Mittelwerte sind $\overline{x_1} = \alpha_2/\beta_2$ *und* $\overline{x_2} = \alpha_1/\beta_1$.

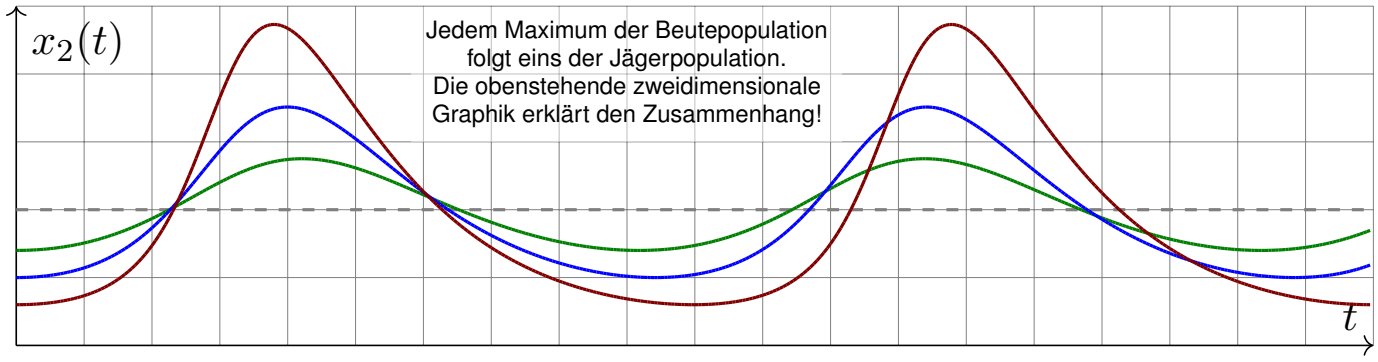
(8) Angenommen, der Mensch hält die Beutetiere für Schädlinge. Im Zustand $(3, 1)$ werden sie gejagt und auf $(1, 1)$ reduziert. Erfolg?

Räuber-Beute-Modell nach Lotka–Volterra



Räuber-Beute-Modell nach Lotka–Volterra





Räuber-Beute-Modell: Linearisierung

Lösung: (1) Wir nutzen den ∃&E-Satz: f ist stetig differenzierbar.

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1 x_1 - \beta_1 x_1 x_2\\ -\alpha_2 x_2 + \beta_2 x_1 x_2\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; f'\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1 - \beta_1 x_2 & -\beta_1 x_1\\ \beta_2 x_2 & -\alpha_2 + \beta_2 x_1\end{pmatrix}$$

☺ Zu jedem $x(0) \in \mathbb{R}^2$ existiert genau eine Lösung mit $\dot{x}(t) = f(x(t))$.

(2) Aus $x_2(0) = 0$ folgt $x_2(t) = 0$ und $x_1(t) = \mathrm{e}^{\alpha_1 t} x_1(0)$ für alle $t \geq 0$.
Aus $x_1(0) = 0$ folgt $x_1(t) = 0$ und $x_2(t) = \mathrm{e}^{-\alpha_2 t} x_2(0)$ für alle $t \geq 0$.
Die Fixpunkte $\dot{x} = f(x) \overset{!}{=} 0$ sind $(0,0)$ und $(\alpha_2/\beta_2, \alpha_1/\beta_1) = (3,2)$.

(3) Dieses System ist nicht linear! Lösungen können wir (hier wie meist) nur numerisch berechnen. Wie skizziert, Runge–Kutta sei Dank!

(4) Wir linearisieren um $x_0 = (\alpha_2/\beta_2, \alpha_1/\beta_1)$. Für $x(t) = x_0 + u(t)$ gilt:

$$\dot{u} = \dot{x} = f(x) = f(x_0 + u) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,u = A\,u$$

☺ Die Jacobi–Matrix beschreibt das Verhalten um den Fixpunkt:

$$A = f'(x_0) = f'\begin{pmatrix}\alpha_2/\beta_2\\ \alpha_1/\beta_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -\alpha_2\beta_1/\beta_2\\ \alpha_1\beta_2/\beta_1 & 0\end{pmatrix}$$

Räuber-Beute-Modell: Linearisierung

Nicht-linear ist schwierig, doch **lineare Systeme** lösen wir leicht:

$$p_A(x) = \det(A - xE) = \det\begin{pmatrix}-x & -\alpha_2\beta_1/\beta_2\\ \alpha_1\beta_2/\beta_1 & -x\end{pmatrix} = x^2 + \alpha_1\alpha_2$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = +\mathrm{i}\sqrt{\alpha_1\alpha_2} = +\mathrm{i}\omega, \quad \lambda_2 = -\mathrm{i}\sqrt{\alpha_1\alpha_2} = -\mathrm{i}\omega$

Eigenvektoren: $v_1 = \begin{pmatrix}\sqrt{\alpha_2\beta_1/\beta_2}\\ -\mathrm{i}\sqrt{\alpha_1\beta_2/\beta_1}\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}\sqrt{\alpha_2\beta_1/\beta_2}\\ +\mathrm{i}\sqrt{\alpha_1\beta_2/\beta_1}\end{pmatrix}$

Eigenfunktionen: $u_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t} v_1, \qquad u_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2 t} v_2$

Für unser reelles System verlangen wir **reelle Lösungen**:

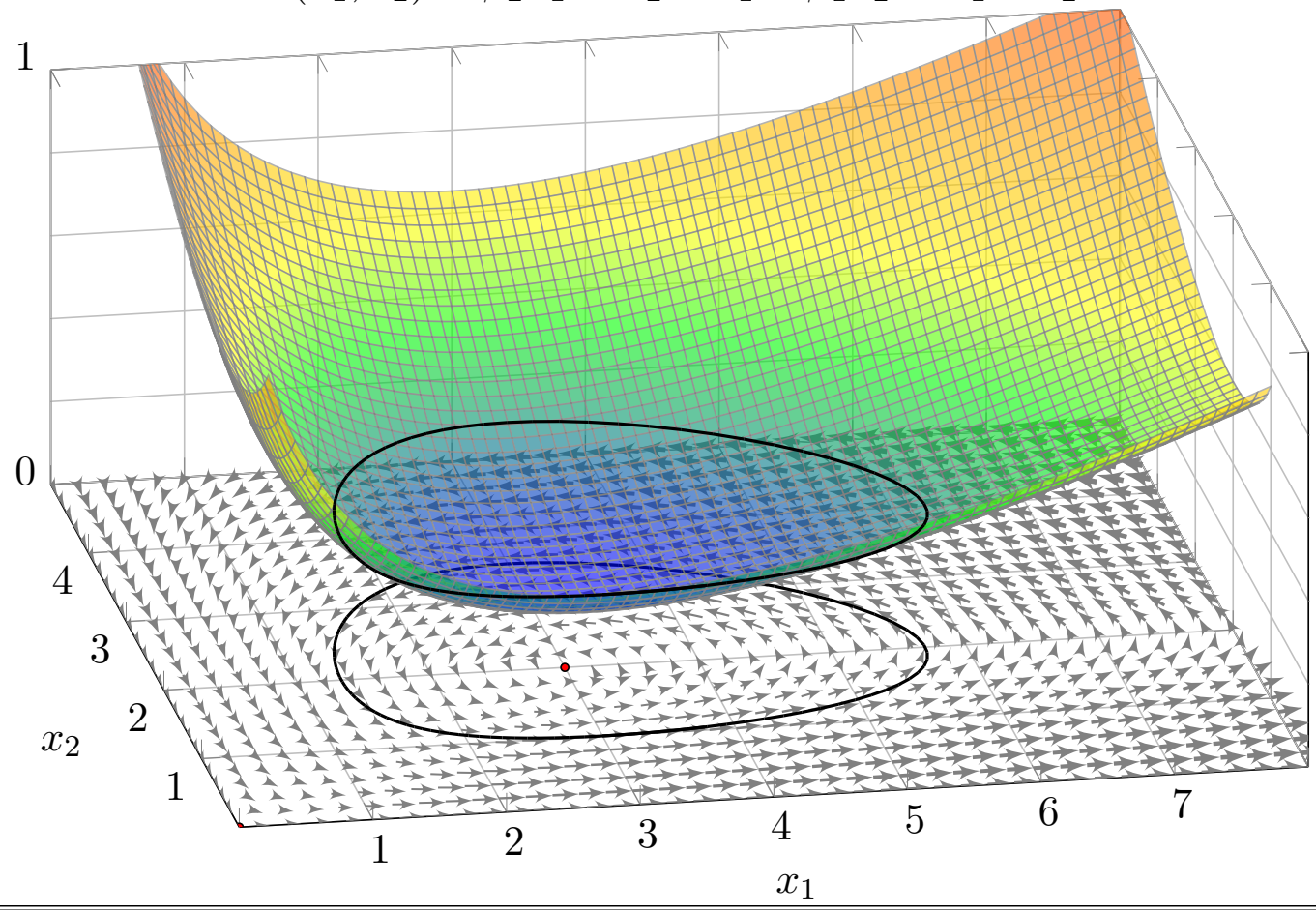
$$\operatorname{Re} u_1(t) = \begin{pmatrix}\cos(\omega t)\sqrt{\alpha_2\beta_1/\beta_2}\\ \sin(\omega t)\sqrt{\alpha_1\beta_2/\beta_1}\end{pmatrix}, \quad \operatorname{Im} u_1(t) = \begin{pmatrix}\sin(\omega t)\sqrt{\alpha_2\beta_1/\beta_2}\\ -\cos(\omega t)\sqrt{\alpha_1\beta_2/\beta_1}\end{pmatrix}$$

Die Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{\alpha_1\alpha_2}$ bedeutet Periodendauer $T = 2\pi/\omega$.
Im Beispiel ist $\alpha_1 = 0.8$ und $\alpha_2 = 0.6$, also $\omega \approx 0.69$ und $T \approx 9.07$.

☺ Plausibel: Für kleine Störungen deckt sich das mit obigen Skizzen.
Große Störungen und Langzeitverhalten erfordern weitere Argumente!

Räuber-Beute-Modell: Potentialfläche

Das Potential $\Phi(x_1, x_2) = \beta_2 x_1 - \alpha_2 \ln x_1 + \beta_1 x_2 - \alpha_1 \ln x_2$ erfüllt $\dot{\Phi} = 0$.



Räuber-Beute-Modell: Periodizität

(5) Für das Potential $\Phi(x_1, x_2) := \beta_2 x_1 - \alpha_2 \ln x_1 + \beta_1 x_2 - \alpha_1 \ln x_2$ gilt

$$\begin{aligned}\dot{\Phi} &= \beta_2 \dot{x}_1 - \alpha_2 \dot{x}_1 / x_1 + \beta_1 \dot{x}_2 - \alpha_1 \dot{x}_2 / x_2 \\ &= (\beta_2 - \alpha_2/x_1)(\alpha_1 x_1 - \beta_1 x_1 x_2) + (\beta_1 - \alpha_1/x_2)(-\alpha_2 x_2 + \beta_2 x_1 x_2) = 0.\end{aligned}$$

(6) Jede Lösung in $\mathbb{R}^2_{>0}$ schließt sich deshalb nach endlicher Zeit $T > 0$:

(7) Die zeitlichen Mittelwerte der Populationsgrößen sind

$$\overline{x_1} := \frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} x_1(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{und} \qquad \overline{x_2} := \frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} x_2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Aus den beiden Differentialgleichungen folgt:

$$\beta_2 \overline{x_1} - \alpha_2 = \frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} \beta_2 x_1(t) - \alpha_2 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} \frac{\dot{x}_2(t)}{x_2(t)} \,\mathrm{d}t = \left[\frac{\ln x_2(t)}{T}\right]_{t=0}^{T} = 0$$

$$\alpha_1 - \beta_1 \overline{x_2} = \frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} \alpha_1 - \beta_1 x_2(t) \,\mathrm{d}t = \frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} \frac{\dot{x}_1(t)}{x_1(t)} \,\mathrm{d}t = \left[\frac{\ln x_1(t)}{T}\right]_{t=0}^{T} = 0$$

Das bedeutet $\overline{x_1} = \alpha_2/\beta_2$ und $\overline{x_2} = \alpha_1/\beta_1$. Erstaunlich: Der Mittelwert $\overline{x_1}$ der Beutepopulation hängt nicht von deren Reproduktionsrate ab!

Potentiale: Lösungen als Niveaulinien

Das Potential und seine Niveaulinien $\Phi(x,y) = \mathrm{const}$ sind der Schlüssel zur exakten Lösung des Räuber-Beute-Modells, wie zuvor schon des hamonischen Oszillators O101 und des mathematischen Pendels O133. Dasselbe nutzen wir seit Kapitel M für exakte Differentialgleichungen.

Wir wollen daher unsere guten Erfahrungen mit dieser Methode zusammenfassen und zu einem allgemeingültigen Satz bündeln.

Zu lösen sei das **autonome Differentialgleichungssystem**

$$\boxed{\begin{pmatrix}\dot x(t)\\ \dot y(t)\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}}$$

Hierbei sei $f\colon \mathbb{R}^2 \supseteq G \to \mathbb{R}^2$ ein stetiges Vektorfeld in der Ebene. Wir haben zudem ein Potential $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \supseteq G \to \mathbb{R}$, das entlang jeder Lösung zeitlich konstant ist, das heißt, die Ableitung verschwindet:

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\cdot\dot x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\cdot\dot y = \operatorname{grad}\Phi\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\bullet f\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

☺ Geometrisch: Genau dann ist $\Phi\colon G \to \mathbb{R}$ ein Potential, wenn das Vektorfeld f und das Gradientenfeld $\operatorname{grad}\Phi$ überall senkrecht stehen.

Potentiale: Lösungen als Niveaulinien

Beispiel: Zu $f\binom{x}{y} = \binom{\alpha_1 x - \beta_1 xy}{-\alpha_2 y + \beta_2 xy}$ nutze $g\binom{x}{y} = \circlearrowleft f\binom{x}{y} = \binom{\alpha_2 y - \beta_2 xy}{\alpha_1 x - \beta_1 xy}$. Es gilt $f \bullet g = 0$ aber leider $\operatorname{rot}(g) \neq 0$. Der integrierende Faktor $-1/xy$ liefert $\tilde g\binom{x}{y} = \binom{\beta_2 - \alpha_2/x}{\beta_1 - \alpha_1/y}$ mit $\operatorname{rot}(\tilde g) = 0$, also $\tilde g = \operatorname{grad}\Phi$. Damit finden wir leicht das ersehnte Potential $\Phi\binom{x}{y} = \beta_2 x - \alpha_2 \ln x + \beta_1 y - \alpha_1 \ln y$.

☺ Jede Lösung $[t_0, t_1] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (x(t), y(t))$ hat konstantes Potential und ist somit gefangen auf ihrer **Niveaulinie** $\{\,(x,y) \mid \Phi(x,y) = \mathrm{const}\,\}$.

Die oben genannten Beispiele illustrieren dies sehr eindrücklich: Ein solches Potential ist hilfreich und liefert uns die Lösungskurven als Niveaulinien (zunächst implizit und zeitlich nicht parametrisiert).

Man nennt dies auch ein **erstes Integral** der Differentialgleichung. Diese traditionelle Bezeichnung stammt aus Zeiten als man versuchte, alle Differentialgleichungen durch solcherart Integration explizit zu lösen.

⚠ Damit wir wirklich eine Niveau*linie* erhalten (und kein Plateau oder schlimmeres), fordern wir $\operatorname{grad}\Phi(x,y) \neq 0$. Damit die Lösung nirgends stehen bleibt, fordern wir $|f(x,y)| \geq M > 0$. Diese beiden bilden die geometrischen Voraussetzungen des folgenden Periodizitätssatzes.

Periodizitätssatz: gefangen im Potentialtopf

In Anwendungen verhalten sich viele dynamische Systeme periodisch: harmonischer Oszillator, mathematisches Pendel, Lotka–Volterra, etc. Der folgende Satz erklärt dies ganz allgemein für zweidimensionale Systeme mit Potential: Kompakte Niveaulinien sind geschlossen!

Satz P2A: Periodizitätssatz zweidimensionaler Dynamik

Sei $f : \mathbb{R}^2 \supseteq G \to \mathbb{R}^2$ ein stetiges Vektorfeld und $\Phi : G \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zu $a \le b$ sei $K = \{\, (x,y) \in G \mid a \le \Phi(x,y) \le b \,\}$ kompakt und liege ganz im Inneren $\mathring{G}$ des Definitionsbereichs G.

In jedem $(x,y) \in K$ sei $(f(x,y), \operatorname{grad}\Phi(x,y))$ eine Orthogonalbasis, also $f(x,y) \neq 0$ und $\operatorname{grad}\Phi(x,y) \neq 0$ und $f(x,y) \cdot \operatorname{grad}\Phi(x,y) = 0$.

Dann sind Niveaulinien von $\Phi : K \to \mathbb{R}$ geschlossene Lösungskurven: Jeder Startwert $(x(0), y(0)) \in K$ führt zu einer eindeutigen periodischen Lösung $(x,y) : \mathbb{R} \to G$ mit $(\dot x, \dot y) = f(x,y)$. Es gibt eine kleinste Periode $T > 0$, sodass $(x(t+T), y(t+T)) = (x(t), y(t))$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

☺ Die Voraussetzungen sind geometrisch anschaulich und in unseren Anwendungen leicht zu prüfen. Wir erhalten periodische Lösungen!

Periodizitätssatz: gefangen im Potentialtopf

Beweis: Zu $c \in [a,b]$ ist die Niveaulinie $C = \{\, (x,y) \in G \mid \Phi(x,y) = c \,\}$ eine glatte Kurve in $\mathbb{R}^2$ (dank des Satzes über implizite Funktionen).

Nach Konstruktion ist C abgeschlossen, wegen $C \subseteq K$ also kompakt. Jede kompakte Kurve ist eine Kreislinie oder Vereinigung von endlich vielen disjunkten Kreislinien (dank der Klassfikation der Kurven).

Für $(x,y) \in K$ gilt $f(x,y) \neq 0$. Die Absolutgeschwindigkeit $|f| : K \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ ist stetig. Dank Kompaktheit nimmt sie ihr Minimum an. Demnach ist die Mindestgeschwindigkeit positiv, $M := \min |f(x,y)| = |f(x_m, y_m)| > 0$.

Jede der Kurven C hat endliche Länge $\ell(C)$. Bei Mindestgeschwindigkeit $M > 0$ wird sie also in endlicher Zeit $T \le \ell(C)/M < \infty$ durchlaufen.

Jeder Startwert $(x(0), y(0)) \in K$ mit $\Phi(x(0), y(0)) = c$ führt schließlich zu einer periodischen Lösung: Jede Lösung $t \mapsto (x(t), y(t))$ verbleibt in C und läuft nicht aus G hinaus; sie setzt sich unendlich fort für alle $t \in \mathbb{R}$.

Die Lösung $\mathbb{R} \to G : t \mapsto (x(t), y(t))$ durchläuft ewig die Kreislinie C. Nach der Zeit $T > 0$ kehrt sie zwingend zurück in den Ausgangszustand $(x(T), y(T)) = (x(0), y(0))$. Dank des Eindeutigkeitssatzes O1B folgt hieraus die Periodizität $(x(t+T), y(t+T)) = (x(t), y(t))$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Lie–Ableitung und erste Integrale

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Dieses Vektorfeld definiert die **autonome Differentialgleichung** $\dot{x}(t) = f(x(t))$.

Zu jedem vorgegebenen Startwert $x(0) = x_0 \in G$ existiert genau eine maximale Lösung $x : \mathbb{R} \supseteq I \to G$ mit $\dot{x}(t) = f(x(t))$ für alle $t \in I$ (O1B).

Sei $E : G \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zum Gradienten ∇E bilden wir das Produkt $\dot{E} := \nabla E \bullet f : G \to \mathbb{R} : x \mapsto \partial_1 E(x) \cdot f_1(x) + \cdots + \partial_n E(x) \cdot f_n(x)$. Dies ist die **Lie–Ableitung** von E in Richtung des Vektorfeldes f.

Aufgabe: (1) Auf ganz G gelte (a) $\nabla E \bullet f = 0$ oder (b) ≥ 0 oder (c) ≤ 0. Wie verhält sich $t \mapsto E(x(t))$ entlang einer Lösung $x : I \to G$?

(2) Eine Funktion $E : G \to \mathbb{R}$ mit $\nabla E \bullet f = 0$ heißt **erstes Integral**. Wie nutzen Sie dies, um den Verlauf von Lösungen zu bestimmen? Geben Sie möglichst viele Beispiele! exakte Differentialgleichungen!

(3) Es gelte $\nabla E \bullet f \leq 0$ auf ganz G. Zum Startwert $E_0 = E(x_0)$ sei die Menge $K = \{\, x \in G \mid E(x) \leq E_0 \,\}$ kompakt. Bleibt die Lösung $t \mapsto x(t)$ in der Teilmenge $K \subseteq G$ gefangen? Existiert die Lösung für alle $t \geq 0$?

(4) Welche drei Formen können Lösungskurven $\{\, x(t) \mid t \in \mathbb{R} \,\}$ haben?

Lie–Ableitung und erste Integrale

Lösung: (1) Die Zeitableitung von $t \mapsto E(x(t))$ ergibt dank Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E(x(t)) = \sum\nolimits_{k=1}^{n} \frac{\partial E}{\partial x_k}(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t}(t) = (\nabla E \bullet f)(x(t)).$$

Folglich ist $t \mapsto E(x(t))$ also (a) konstant, (b) wachsend, (c) fallend.

☺ Wir denken uns $\dot{x} = f(x)$ als mechanisches System, E als eine verallgemeinerte Energiefunktion und $\dot{E} \leq 0$ als Dissipation (Verlust).

(2) Zum Startwert $E_0 = E(x_0)$ verläuft die Lösung $t \mapsto x(t)$ ganz in der Teilmenge $K = \{\, x \in G \mid E(x) = E_0 \,\}$. ☺ Ohne sie explizit zu kennen, können wir Lösungskurven eingrenzen, manchmal implizit bestimmen!

(3) Ja! Zum Beweis sei $[0, T[\to G : t \mapsto x(t)$ eine Lösung mit $0 < T < \infty$. Wegen $E(x_0) \in K$ und $\nabla E \bullet f \leq 0$ verläuft diese Lösung ganz in K. Wegen $|\dot{x}(t)| = |f(x(t))| \leq M := \max_K |f|$ gilt $|x(s) - x(t)| \leq M|s - t|$. Dank dieser Cauchy–Bedingung konvergiert $x(t) \to x_T \in K$ für $t \nearrow T$. Dank des ∃&E-Satzes O1B können wir die Lösung weiter fortsetzen.

(4) Entweder ist $t \mapsto x(t)$ konstant, nämlich für $f(x_0) = 0$, oder injektiv oder periodisch. Die Kurve $\{\, x(t) \mid t \in \mathbb{R} \,\}$ ist demnach ein Punkt $\{x_0\}$, eine eingebettete unendliche Kurve $\mathbb{R} \hookrightarrow G$ oder kreisförmig $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow G$.

Stabilität von Fixpunkten

Wir untersuchen damit Fixpunkte und kleine Störungen noch genauer:

Definition P2B: Fixpunkte und Stabilität

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar.
Wir betrachten das Anfangswertproblem $\dot{x}(t) = f(x(t))$, $x(0) = x_0$.

(0) Wir nennen $x_0 \in G$ einen **Fixpunkt**, wenn er $f(x_0) = 0$ erfüllt.
Äquivalent hierzu: Die zugehörige Lösung $t \mapsto x(t)$ ist konstant.

(1) Der Fixpunkt x_0 heißt **Lyapunov–stabil**, wenn zu jedem Radius $\varepsilon > 0$ mit $\bar{B}(x_0, \varepsilon) \subseteq G$ ein (eventuell kleinerer) Radius $\delta > 0$ existiert, sodass für jeden Startpunkt $\tilde{x}_0 \in B(x_0, \delta)$ die zugehörige Lösung $t \mapsto \tilde{x}(t)$ für alle $t \in [0, \infty[$ existiert und ganz in $B(x_0, \varepsilon)$ verläuft.

(2) Der Fixpunkt x_0 heißt **asymptotisch stabil**, wenn (1) gilt und zudem ein $\delta > 0$ existiert, sodass für jeden Startpunkt $\tilde{x}_0 \in B(x_0, \delta)$ die zugehörige Lösung $t \mapsto \tilde{x}(t)$ für $t \to \infty$ gegen x_0 konvergiert.

(3) Der Fixpunkt x_0 heißt **exponentiell stabil**, wenn (2) gilt mit Schranke $|\tilde{x}(t) - x_0| \le \alpha \cdot |\tilde{x}_0 - x_0| \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t}$ für Konstanten $\alpha, \lambda > 0$ und alle $t \ge 0$.

Stabilität von Fixpunkten

Übung: Formulieren Sie zur Wiederholung den un/gedämpften harmonischen Oszillator O101, das un/gedämpfte mathematische Pendel O133, Lotka–Volterra P233, usw... als dynamisches System $\dot{x} = f(x)$.
Wo sind die Fixpunkte? Welche sind stabil? asymptotisch? exponentiell?
Formulieren Sie die Gesamtenergie E und zeigen Sie $\dot{E} = 0$ bzw. $\dot{E} \le 0$.

Aufgabe: Zu $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ betrachten wir das lineare System $\dot{x}(t) = A\,x(t)$.
Wo sind die Fixpunkte? Welche sind stabil? asymptotisch? exponentiell?

Sei 0 asymptotisch stabil. Dann ist $\langle\, u \mid v \,\rangle_A := \int_{t=0}^{\infty} \langle\, \mathrm{e}^{tA} u \mid \mathrm{e}^{tA} v \,\rangle \,\mathrm{d}t$ ein Skalarprodukt, und für die „Energie“ $E(x) = \langle\, x \mid x \,\rangle_A$ gilt $\dot{E}(x) = -|x|^2$.

Lösung: Ein Fixpunkt ist 0; weitere gibt's nur für $Ax = 0$, also $x \in \ker A$.
Genau dann ist 0 asymptotisch stabil, gar exponentiell, wenn $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$, und instabil, wenn $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$ für ein $k \in \{1, \dots, n\}$.
Im verbleibenden kritischen Fall gilt $\operatorname{Re}(\lambda_k) \le 0$ für alle k und $\operatorname{Re}(\lambda_k) = 0$ für ein k. Er kann instabil oder stabil sein, aber nicht asymptotisch stabil.

Das Integral konvergiert, erfüllt alle Anforderungen (I1G), und es gilt
$\dot{E}(x) = 2\langle\, x \mid Ax \,\rangle_A = \int_{t=0}^{\infty} 2\langle\, x(t) \mid \dot{x}(t) \,\rangle \,\mathrm{d}t = \big[|x(t)|^2\big]_{t=0}^{\infty} = -|x|^2$.

Die Methode von Lyapunov

Nicht-lineare dynamische Systeme $\dot{x}(t) = f(x(t))$ können wir meist nicht explizit lösen. Lyapunovs Methode liefert dennoch Schlussfolgerungen über Lösungsverlauf und Stabilität. Sei x_0 ein Fixpunkt, also $f(x_0) = 0$.

Satz P2C: Lyapunov–Kriterium für In/Stabilität

Sei $E : \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und **positiv definit** um x_0: Es gelte $E(x_0) = 0$ und $E(x) > 0$ für $x \neq x_0$. (Lyapunov–Funktion)

(1) Sei E **schwach dissipativ** um x_0: Für $|x - x_0| \leq \varepsilon$ gelte $\dot{E}(x) \leq 0$. Dann ist der Fixpunkt x_0 stabil.

(2) Sei E **strikt dissipativ** um x_0: Für $0 < |x - x_0| \leq \varepsilon$ gelte $\dot{E}(x) < 0$. Dann ist der Fixpunkt x_0 asymptotisch stabil.

(3) Für $|x - x_0| \leq \varepsilon$ gelte $\dot{E} \leq -\alpha E$ und $E(x) \geq c|x - x_0|^\beta$ mit $\alpha, \beta, c > 0$. Dann ist der Fixpunkt x_0 exponentiell stabil.

(4) Für $0 < |x - x_0| \leq \varepsilon$ gelte $\dot{E}(x) > 0$. Dann ist der Fixpunkt x_0 instabil.

Aufgabe: Erklären Sie diese Aussagen möglichst anschaulich anhand von Skizzen und versuchen Sie sie anschließend zu beweisen!

Die Methode von Lyapunov

(1) Sei $\varepsilon > 0$. Wir können ε so klein wählen, dass $\bar{B}(x_0, \varepsilon) \subseteq G$ gilt. Die Sphäre $\partial B(x_0, \varepsilon)$ ist kompakt. Die stetige Funktion E nimmt hierauf ihr Minimum an, also gilt $m := \min\{\, E(x) \mid x \in \partial B(x_0, \varepsilon) \,\} > 0$. Zu $E(x_0) = 0$ wählen wir $\delta > 0$ so, dass $E(x) < m$ für alle $x \in B(x_0, \delta)$. Zum Startpunkt $\tilde{x}_0 \in B(x_0, \delta)$ gilt $E(\tilde{x}(t)) \leq E(\tilde{x}(0)) < m$ für alle $t \geq 0$. Somit kann die Lösung $t \mapsto \tilde{x}(t)$ die Sphäre $\partial B(x_0, \varepsilon)$ nicht erreichen, und demnach den vorgegebenen Ball $B(x_0, \varepsilon)$ um x_0 niemals verlassen.

(2) Zum Startpunkt $\tilde{x}_0 \in B(x_0, \delta)$ bleibt die Lösung $t \mapsto x(t)$ in $B(x_0, \varepsilon)$. Zudem ist $t \mapsto E(x(t)) \in [0, m]$ monoton fallend, konvergiert also für $t \to \infty$ gegen einen Grenzwert $e \geq 0$. Wir haben $e = 0$ zu zeigen. Angenommen $e > 0$. Es existiert $\rho > 0$ sodass $E(x) < e$ für $x \in B(x_0, \rho)$. Die Lösung $t \mapsto \tilde{x}(t)$ verläuft also vollständig im kompakten Kreisring $K = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid \rho \leq |x - x_0| \leq \varepsilon \,\}$. Die stetige Funktion $\dot{E} = \nabla E \cdot f < 0$ nimmt hierauf ihr Maximum an, also gilt $a := \max\{\, \dot{E}(x) \mid x \in K \,\} < 0$. Es folgt $E(\tilde{x}(t)) = E(\tilde{x}(0)) + \int_0^t \dot{E}(\tilde{x}(\tau))\,\mathrm{d}\tau \leq E(\tilde{x}(0)) + at \searrow -\infty$. Das ist wegen $E \geq 0$ unmöglich. Also gilt $e = 0$, und somit $x(t) \to x_0$.

Aussagen (3) und (4) beweist man ähnlich; ich führe dies hier nicht aus.

Lyapunovs indirekte Methode: das Eigenwertkriterium

Wir betrachten das autonome System $\dot{x} = f(x)$ um einen Fixpunkt x_0. Nach Verschieben können wir ohne Einschränkung $x_0 = 0$ annehmen. Für kleine Auslenkungen um den Fixpunkt 0 linearisieren wir gemäß

$$\boxed{\dot{x} = A\,x + g(x).}$$

Die Jacobi–Matrix $A = f'(0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist der **lineare Hauptteil**.
Der **Störterm** g sei stetig und erfülle $|g(x)|/|x| \to 0$ für $x \to 0$.
Das **ungestörte System** $\dot{u} = A\,u$ ist linear: Satz P1G gibt uns explizit alle Lösungen mit Hilfe der Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, damit Stabilität.

Satz P2D: Eigenwertkriterium für In/Stabilität

Für das gestörte System $\dot{x} = A\,x + g(x)$ gilt wie für das ungestörte:

(1) Gilt $\mathrm{Re}(\lambda_k) < 0$ für *alle* Eigenwerte, so ist der Fixpunkt exp. **stabil**.

(2) Gilt $\mathrm{Re}(\lambda_k) > 0$ für *einen* Eigenwert, so ist der Fixpunkt **instabil**.

⚠ Den verbleibenden kritischen Fall muss man gesondert untersuchen: Hier gilt weder (1) noch (2), also $\sigma_A := \max\{\, \mathrm{Re}(\lambda_k) \mid k = 1, \dots, n \,\} = 0$.

Lyapunovs indirekte Methode: das Eigenwertkriterium

Zum Beweis konstruieren wir eine Lyapunov–Funktion gemäß Satz P2C.

Beweis: (1) Wie oben P248 nutzen wir zu $u, v \in \mathbb{R}^n$ das Skalarprodukt $\langle\, u \mid v \,\rangle_A := \int_{t=0}^{\infty} \langle\, \mathrm{e}^{tA}u \mid \mathrm{e}^{tA}v \,\rangle\, \mathrm{d}t$. Für die Energie $E(x) = \langle\, x \mid x \,\rangle_A$ gilt:

$$\begin{aligned}\dot{E}(x) &\overset{\text{Def}}{=} 2\langle\, x \mid Ax + g(x) \,\rangle_A \overset{\text{Lin}}{=} 2\langle\, x \mid Ax \,\rangle + 2\langle\, x \mid g(x) \,\rangle_A \\ &\overset{\text{P248}}{=} -|x|^2 + 2\langle\, x \mid g(x) \,\rangle_A \overset{\text{CSU}}{\le} -|x|^2 + 2\cdot|x|_A \cdot |g(x)|_A\end{aligned}$$

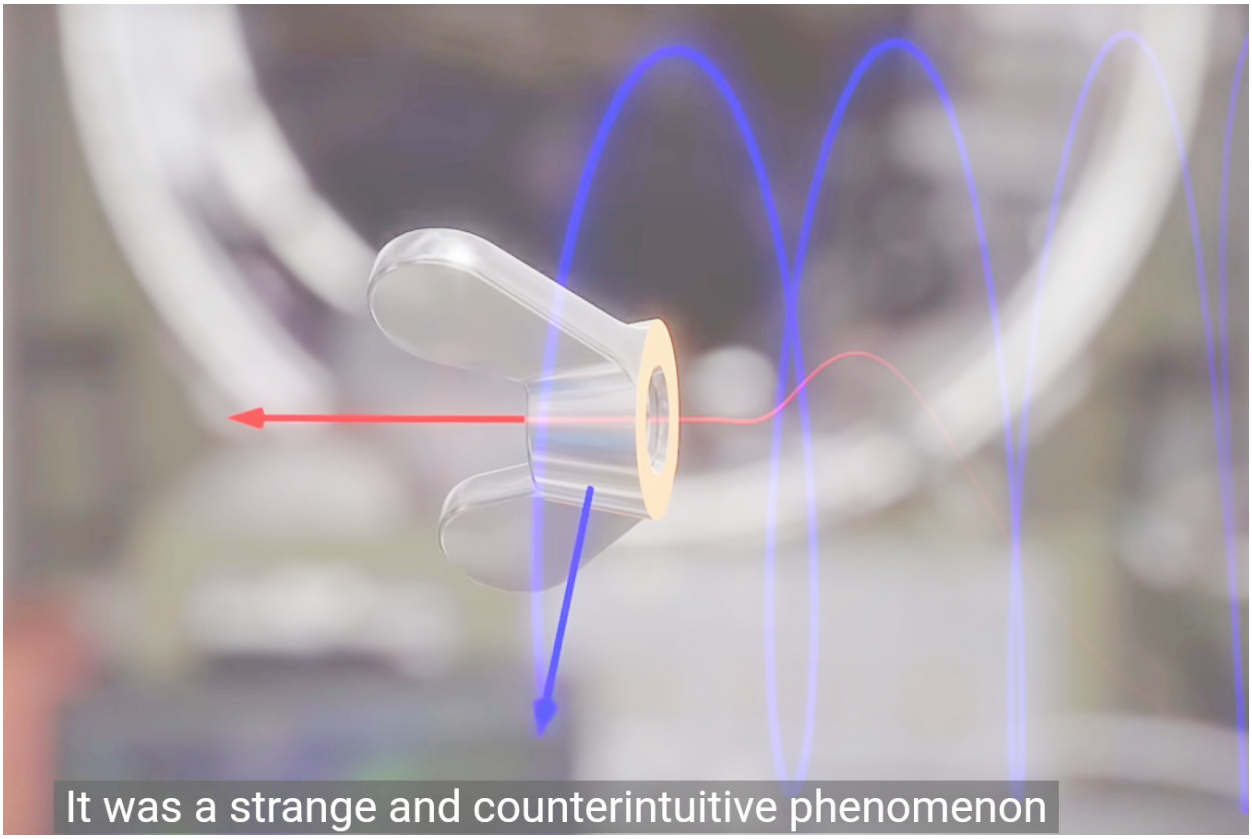
Auf dem $\mathbb{R}^n$ sind je zwei Normen wie $|\text{-}|$ und $|\text{-}|_A$ äquivalent, das heißt, es gibt Konstanten $0 < a < b$ sodass $a|x| \le |x|_A \le b|x|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Wir wählen $\varepsilon > 0$ so klein, dass $B(0,\varepsilon) \subseteq G$ gilt, dank $|g(x)|/|x| \to 0$ zudem $|g(x)| \le (1/4b^2)|x|$ für alle $x \in B(0,\varepsilon)$. Wir erhalten:

$$\dot{E}(x) \;\le\; -|x|^2 + 2b^2\cdot|x|\cdot|g(x)| \;\le\; -\frac{1}{2}|x|^2 \;\le\; -\frac{1}{2a^2}E(x)$$

Dank Lyapunov–Kriterium P2C(2) ist der Fixpunkt asymptotisch stabil; dank der Verschärfung P2C(3) ist er sogar exponentiell stabil.

Das Instabilitätskriterium (2) beweist man ähnlich; ich verweise auf
📖 W. Walter: *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Springer, §29–30

Der torkelnde Tennisschläger / *intermediate axis theorem*



The bizarre behavior of rotating bodies
Veritasium, `youtu.be/1VPfZ_XzisU`

Der torkelnde Tennisschläger / *intermediate axis theorem*

Wir betrachten einen rotierenden Körper (in körperfesten Koordinaten). Die Drehbewegung wird beschrieben durch die **Euler–Gleichungen**:

$$\boxed{\Theta\dot{\omega} = (\Theta\omega) \times \omega + M}$$

Zu jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ ist $\omega(t) \in \mathbb{R}^3$ die Winkelgeschwindigkeit und $M(t) \in \mathbb{R}^3$ das angewendete Drehmoment; wir setzen hier $M(t) = 0$. Hierbei ist $L = \Theta\omega$ der Drehimpuls, wir haben also $\dot{L} = L \times \omega + M$. Das Trägheitsmoment $\Theta \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ diagonalisieren wir in **Hauptachsen**:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3 \end{pmatrix}$$

(symmetrisch $\Longrightarrow$ orthogonal diagonalisierbar) Koordinatenweise ausgeschrieben erhalten wir unser nicht-lineares DGSystem erster Ordnung:

$$\begin{pmatrix} \theta_1\dot{\omega}_1 \\ \theta_2\dot{\omega}_2 \\ \theta_3\dot{\omega}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1\omega_1 \\ \theta_2\omega_2 \\ \theta_3\omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\theta_2 - \theta_3)\omega_2\omega_3 + M_1 \\ (\theta_3 - \theta_1)\omega_3\omega_1 + M_2 \\ (\theta_1 - \theta_2)\omega_1\omega_2 + M_3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe: Sei $0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3$. Bestimmen Sie Fixpunkte und Stabilität.

Der torkelnde Tennisschläger / *intermediate axis theorem*

Lösung: (1) Es gibt genau die Fixpunkte $(\omega_1, 0, 0)$, $(0, \omega_2, 0)$, $(0, 0, \omega_3)$.
(2) Wir linearisieren, dazu berechnen wir zunächst die Jacobi–Matrix:

$$\begin{pmatrix}\dot\omega_1\\ \dot\omega_2\\ \dot\omega_3\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}\alpha_1\omega_2\omega_3\\ \alpha_2\omega_3\omega_1\\ \alpha_3\omega_1\omega_2\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad f'\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \alpha_1\omega_3 & \alpha_1\omega_2\\ \alpha_2\omega_3 & 0 & \alpha_2\omega_1\\ \alpha_3\omega_2 & \alpha_3\omega_1 & 0\end{pmatrix}$$

Linearisiert um den Fixpunkt $(0, \omega_2, 0)$ erhalten wir $\dot u = Au$:

$$A = f'\begin{pmatrix}0\\ \omega_2\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & \alpha_1\omega_2\\ 0 & 0 & 0\\ \alpha_3\omega_2 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{aligned}\det(A-\lambda E) &= -\lambda\big(\lambda^2 - \alpha_1\alpha_3\omega_2^2\big)\\ &= -\lambda\big(\lambda^2 - \omega_2^2(\theta_3-\theta_2)(\theta_2-\theta_1)/\theta_1\theta_3\big)\end{aligned}$$

Eigenwerte sind 0 und $\pm\omega_2\sqrt{(\theta_3-\theta_2)(\theta_2-\theta_1)/\theta_1\theta_3}$. Daraus folgt:

Satz P2E: torkelnder Tennisschläger / *intermediate axis theorem*

Wir untersuchen die kräftefreie Bewegung eines starren Körpers mit Trägheitsmomenten $0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3$ bezüglich seiner Hauptachsen.

Die Rotation um die mittlere Achse ist instabil: Jede kleine Störung wird exponentiell verstärkt mit $\mathrm{e}^{\lambda t}$ und $\lambda = |\omega_2|\sqrt{(\theta_3-\theta_2)(\theta_2-\theta_1)/\theta_1\theta_3}$.

Der torkelnde Tennisschläger / *intermediate axis theorem*

Um $(\omega_1, 0, 0)$ linearisiert finden wir $0, \pm\mathrm{i}\omega_1\sqrt{(\theta_2-\theta_1)(\theta_3-\theta_1)/\theta_2\theta_3} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.
Um $(0, 0, \omega_3)$ linearisiert finden wir $0, \pm\mathrm{i}\omega_3\sqrt{(\theta_3-\theta_1)(\theta_3-\theta_2)/\theta_1\theta_2} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.

⚠ Das Eigenwertkriterium P2D können wir hier leider nicht anwenden! Die In/Stabilität lässt sich allein aus diesen Daten noch nicht schließen; dazu sind genauere Untersuchungen nötig, dank Lyapunov–Funktionen:

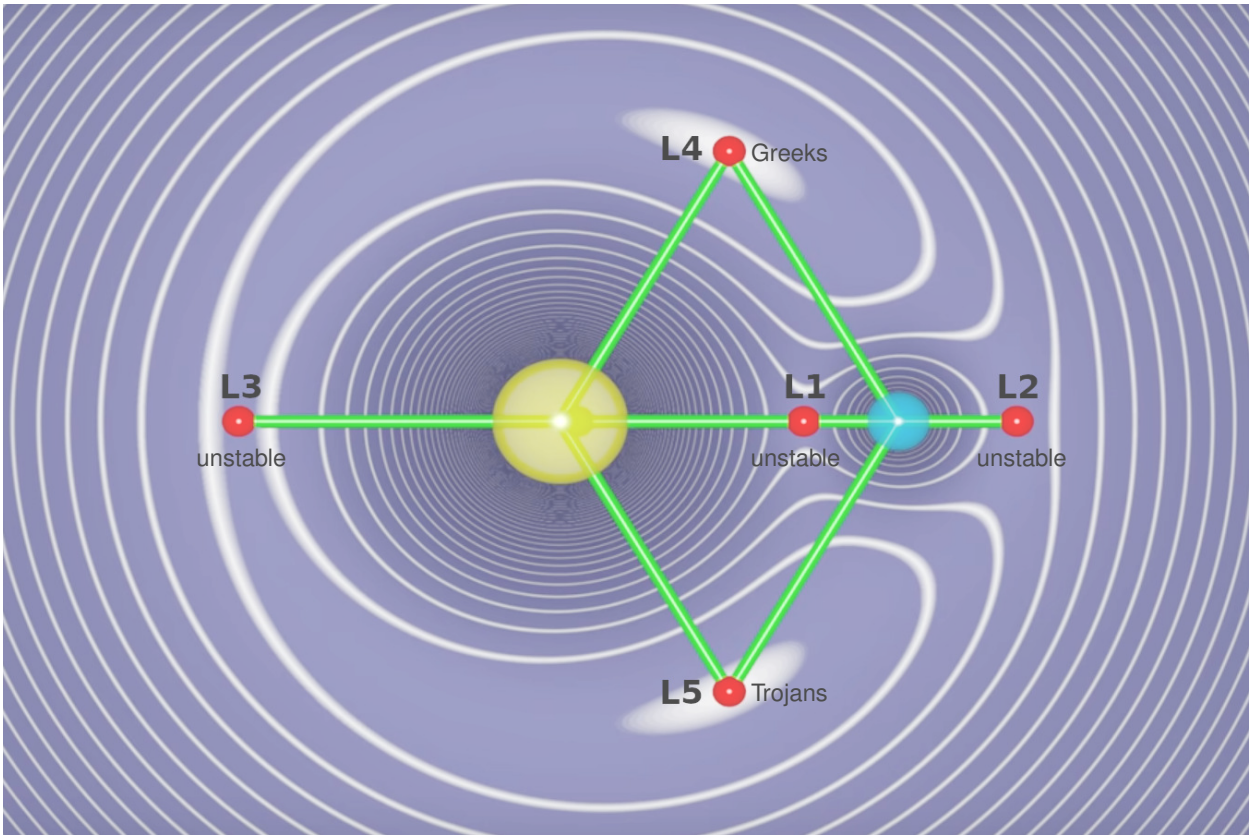
$$V_1 = (\theta_2-\theta_1)\theta_2\omega_2^2 + (\theta_3-\theta_1)\theta_3\omega_3^2 \ge 0,\ V_1 = 0 \Leftrightarrow \omega_2 = \omega_3 = 0,\ \dot V_1 = 0$$
$$V_3 = (\theta_3-\theta_1)\theta_1\omega_1^2 + (\theta_3-\theta_2)\theta_2\omega_2^2 \ge 0,\ V_3 = 0 \Leftrightarrow \omega_1 = \omega_2 = 0,\ \dot V_3 = 0$$

☺ Diese Invarianten zeigen, dass die Rotation um die erste bzw. dritte Achse stabil ist. Letzteres gilt nur bei Energieerhaltung, wie eingangs vereinfachend angenommen. Bei Dissipation gilt $\dot V_1 \ge 0$ und $\dot V_3 \le 0$.

⚠ Die Rotation um die kleine Achse wird dann ebenfalls instabil.
Die NASA erfuhr dies 1958 schmerzlich mit Explorer 1, ihrem ersten künstlichen Erdsatelliten, siehe `en.wikipedia.org/wiki/Explorer_1`.

📖 Colley: *The tumbling box.* Amer. Math. Monthly 94 (1987) 62–68.
Marsden, Ratiu: *Mechanics and Symmetry.* Springer 1999, §15.9.

Die Lagrange–Punkte eines Zwei-Körper-Systems



What makes Lagrange points special locations in space?
Scott Manley, `youtu.be/7PHvDj4TDfM`

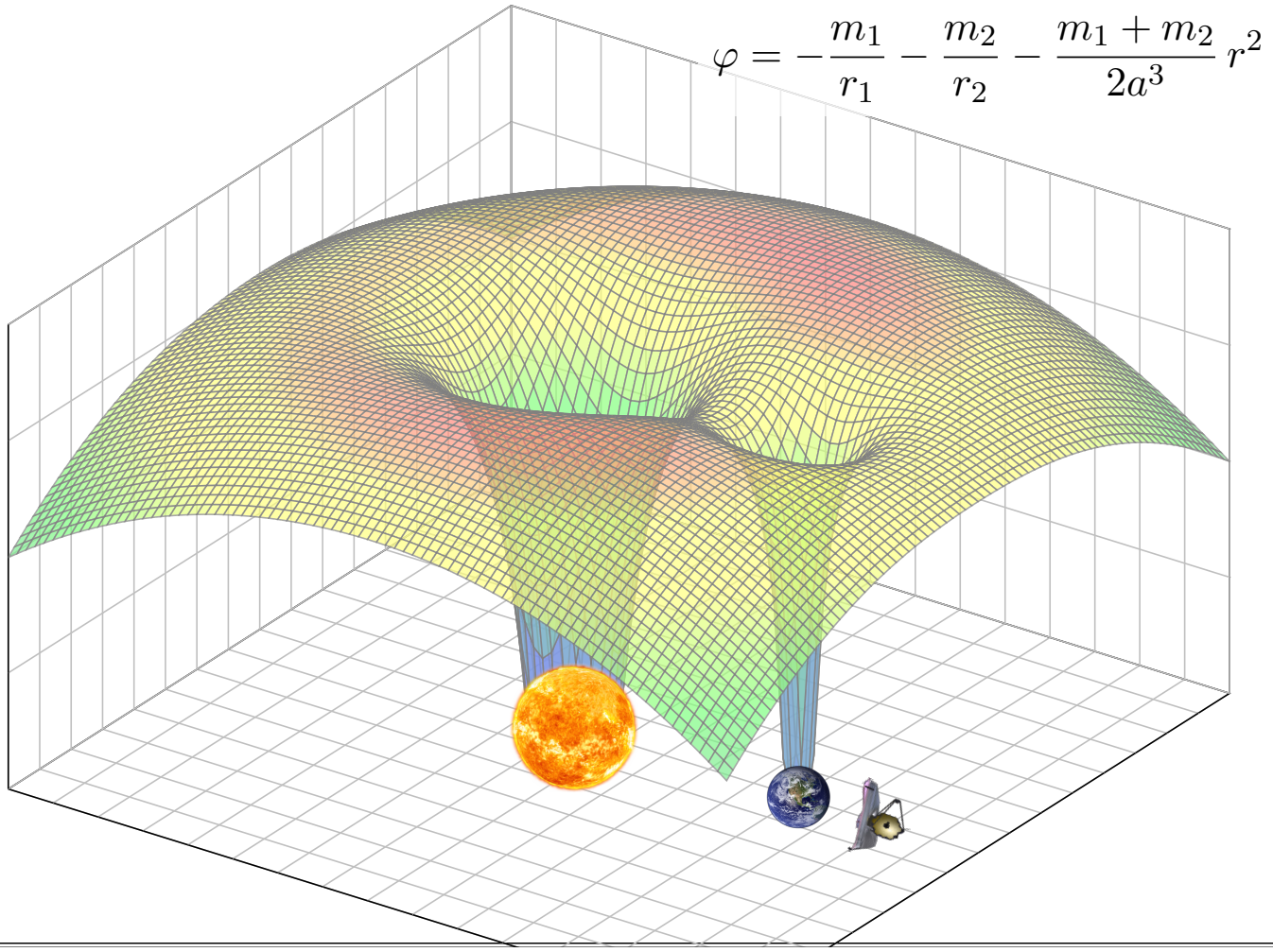
Die Lagrange–Punkte eines Zwei-Körper-Systems

Newtons N–Körper-Problem spezialisieren wir zu $N = 2$ Körpern, etwa Sonne-Erde oder Erde-Mond; sie umkreisen sich ellipsenförmig. In jedem solchen System gibt es genau fünf **Lagrange–Punkte** oder **Librationspunkte**, in denen sich alle wirkenden Kräfte ausgleichen. Hier kann ein dritter, leichter Körper antriebslos geparkt werden.

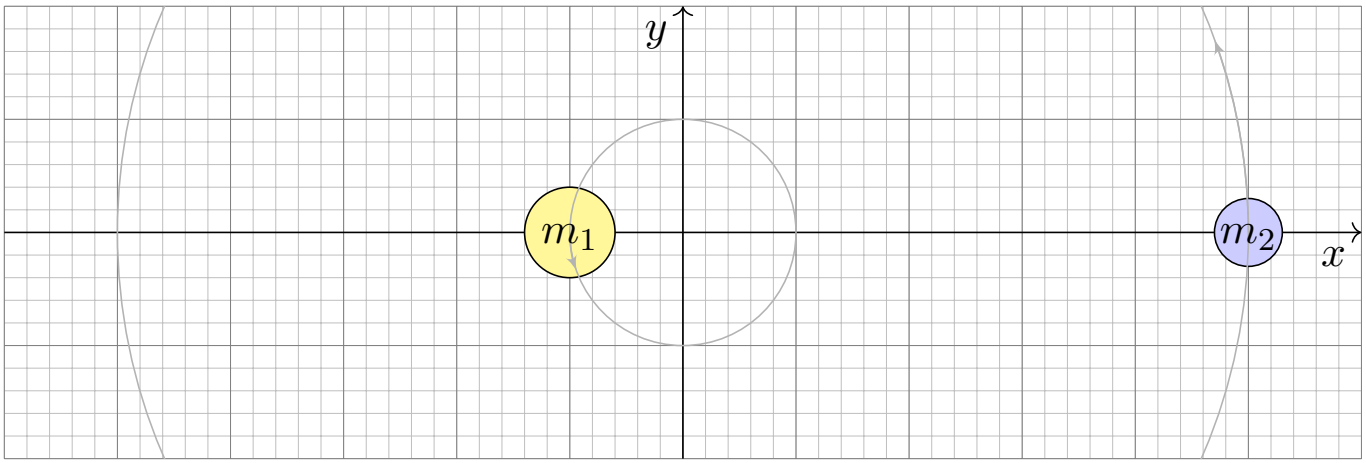
Die Punkte $L_{1/2/3}$ sind in Radialrichtung instabil, also insgesamt instabil. Natürliche Objekte sammeln sich hier nicht, sondern werden langfristig ausgefegt; Dauerparken erfordert eine (leichte) **aktive Bahnkorrektur**. Der L_2-Punkt ist ideal für Weltraumteleskope, etwa WMAP (2001–2010), Planck und Herschel (2009–2013), aktuell James-Webb (seit 2022).

Die Punkte $L_{4/5}$ hingegen sind Lyapunov–stabil: Kleine Abweichungen bleiben beschränkt und vollführen kleine Oszillationen um den Fixpunkt. Hier können sich natürliche Objekte dauerhaft ansammeln, ganz ohne aktive Bahnkorrektur. Insbesondere auf den Umlaufbahnen der großen Planeten sammeln sich die **Griechen** um L_4 und die **Trojaner** um L_5. Wir untersuchen nun dieses restringierte Drei-Körper-Problem (CR3BP).

Die Lagrange–Punkte eines Zwei-Körper-Systems



Die Lagrange–Punkte eines Zwei-Körper-Systems



Wir betrachten zwei Massen $m_1 \geq m_2 > 0$ mit Abstand $a > 0$. Durch diese legen wir die x–Achse mit Ursprung im Schwerpunkt, genauer $x_1 < 0 < x_2$ mit $x_1 m_1 + x_2 m_2 = 0$ und $a = x_2 - x_1 = x_2(m_1 + m_2)/m_1$. Kreisförmige Bewegung entspricht der Winkelgeschwindigkeit ω mit Zentripetalkraft gleich Schwerkraft, also $\omega^2 x_2 m_2 = \gamma m_1 m_2 / a^2$, somit

$$\boxed{\omega^2 = \gamma \frac{m_1 + m_2}{a^3}.}$$

Das entspricht **Keplers drittem Gesetz:** Das Quadrat der Umlaufzeit ist proportional zum Kubus der großen Halbachse der Bahnellipse.

Die Lagrange–Punkte eines Zwei-Körper-Systems

Wir betrachten ein Testteilchen mit sehr kleiner Masse $m \ll m_2 \leq m_1$. Im rotierenden Koordinatensystem wirkt effektiv das **Roche–Potential**:

$$V(x,y,z) = -\gamma \frac{m_1}{r_1} - \gamma \frac{m_2}{r_2} - \frac{1}{2}\omega^2 r^2$$

mit den Abständen $r^2 = x^2 + y^2$ und $r_i^2 = (x - x_i)^2 + y^2 + z^2$. Auf das Testteilchen wirkt dadurch die Kraft $-m\nabla V$, als Summe der Schwerkraft zu m_1 und zu m_2 sowie der (fiktiven) Zentrifugalkraft weg von der Achse.

☺ Mit der Gleichung $\nabla V = 0$ finden wir alle **Gleichgewichtslagen**!
In der Dynamik wirkt zudem die Corioliskraft $2m\vec{v} \times \vec{\omega}$, ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\partial_x V(x,y,z) + 2\dot{y}\omega \\ \ddot{y} &= -\partial_y V(x,y,z) - 2\dot{x}\omega \\ \ddot{z} &= -\partial_z V(x,y,z) \end{aligned}$$

Die **Gesamtenergie** des Zustands entspricht der Jacobi–Invariante

$$H(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}) = V(x,y,z) + \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Die Lagrange–Punkte eines Zwei-Körper-Systems

Übung: (1a) Bestimmen Sie die Lagrange–Punkte L_1, L_2, L_3 auf der x–Achse in Abhängigkeit vom Massenverhältnis $\mu = m_2/(m_1 + m_2)$.

(1b) Setzen Sie die Zahlen für Sonne-Erde und für Erde-Mond ein. Vergleichen Sie dies mit der Position des James-Webb–Teleskops.

(2) Genau dann gilt $\nabla V(p) = 0$, wenn $p \in \{L_1, L_2, L_3, L_4, L_5\}$:
(2a) Jeder der fünf Lagrange–Punkte ist ein Gleichgewicht.
(2b) Jedes Gleichgewicht ist einer der fünf Lagrange–Punkte.

(3) Die Jacobi–Invariante H ist konstant entlang jeder Trajektorie, denn dank Kettenregel gilt $\dot{H} = \partial_x V \cdot \dot{x} + \partial_y V \cdot \dot{y} + \partial_z V \cdot \dot{z} + \ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} + \ddot{z}\dot{z} = 0$.

Lösung: Anschaulich erhalten wir die Situation der obigen Skizzen: Auf der x–Achse liegen die Lagrange–Punkte L_1, L_2, L_3 als Sattel; sie sind instabil bei Störung in x–Richtung, also insgesamt instabil. Die Maxima liegen in den Ecken L_4 und L_5 der beiden gleichseitigen Dreiecke in der x–y–Ebene; die Corioliskraft macht sie Lyapunov–stabil.

📖 Eine schöne Ausführung und Lösung finden Sie bei Neil Cornish: *Lagrange Points*, `map.gsfc.nasa.gov/ContentMedia/lagrange.pdf`.

Die Lagrange–Punkte eines Zwei-Körper-Systems

Die fünf Lagrange–Punkte sind die Gleichgewichte. Ihre In/Stabilität erfordert eine genauere Analyse der Dynamik inklusive Corioliskraft. Beim ersten Blick auf das Potential V scheinen L_4 und L_5 instabil, erst die Corioliskraft stabilisiert sie. Eine detaillierte Darstellung finden Sie in:

📖 Meyer, Offin: *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem.* Springer 2017. Ich fasse hier §4.5 zusammen:

☺ Die Punkte L_1, L_2, L_3 sind instabil dank Eigenwertkriterium P2D. Für diese Schlussfolgerung genügt also bereits die Linearisierung.

☺ Für die Stabilität der Punkte L_4 und L_5 ist das Massenverhältnis $\mu = m_2/(m_1 + m_2)$ entscheidend. Der kritische Wert ist nach Routh $\mu_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{69}/9) \approx 0.03852$. Für $\mu_1 < \mu \le 1/2$ gibt es Eigenwerte mit positiven Realteil; gemäß P2D sind die Librationspunkte somit instabil. Für $0 < \mu \le \mu_1$ sind alle Eigenwerte imaginär. Bedeutet das Stabilität?

⚠ Zur Stabilität von L_4 und L_5 genügt die Linearisierung noch nicht. Erst eine genauere Untersuchung zeigt die Stabilität von L_4 und L_5 mit Methoden der KAM–Theorie (nach Kolmogorov, Arnold, Moser).

Die Lagrange–Punkte eines Zwei-Körper-Systems

☺ Mit aktiver Bahnkorrektur können Satelliten um L_1, L_2, L_3 kreisen, aktuell zum Beispiel das James-Webb Space Telescope (JWST) um L_2.

☺ Die Jacobi–Invariante zeigt insbesondere, dass jede energetisch günstigste Flugbahn von der Erde zum Mond über den L_1–Punkt führt.

☺ In einem binären Sternsystem kann über den L_1–Sattelpunkt Masse leicht vom kleineren zum größeren Stern fließen (*accreting binaries*).

☺ Die Bahn eines Probeteilchens kann überraschend kompliziert sein, kaulquappenförmig (*tadpole orbit*) oder hufeisenförmig (*horseshoe orbit*) um L_4 und L_5, siehe `de.wikipedia.org/wiki/Hufeisenumlaufbahn`. Spektakuläres Beispiel sind die Saturnmonde Janus und Epimetheus.

☺ Die Erde hat neben dem Mond einen zweiten Begleiter als Minimond: Der Asteroid 3753 hat einen Durchmesser von etwa $5\mathrm{km}$. Er umkreist nicht die Erde, sondern den vorauseilenden Lagrange–Punkt L_4 des Sonne-Erde-Systems auf einer hufeisenförmigen Bahn. *Math rocks!*

📖 Wiegert, Innanen, Mikkola: *An asteroidal companion to the Earth.* Nature 387 (1997) 685–686, siehe `www.nature.com/articles/42662`

Hamiltonsche Dynamik: Energie als Antrieb

Jedes stetige Vektorfeld $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \supseteq \Omega \to \mathbb{R}^m$ definiert ein DGSystem

$$\boxed{\dot{x}(t) = f(t, x(t)).}$$

In physikalischen Anwendungen ist das Feld f oft von spezieller Form: Der Zustand $x = (q, p)$ besteht aus den Ortskoordinaten $q = (q_1, \ldots, q_n)$ und den Impulskoordinaten $p = (p_1, \ldots, p_n)$; somit ist $m = 2n$ gerade.

Definition P2F: hamiltonsches dynamisches System

Vorgegeben sei eine beliebige C^2–Funktion $H : \Omega \to \mathbb{R}$, genannt **Hamilton–Funktion**. Diese definiert das **hamiltonsche Vektorfeld** $f : \Omega \to \mathbb{R}^{2n}$ mit $f_k = \partial H / \partial p_k$ und $f_{n+k} = -\partial H / \partial q_k$ für $k = 1, \ldots, n$.

Wir erhalten so das **hamiltonsche dynamische System** (Ω, H) mit

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{q}_k(t) &= \frac{\partial H}{\partial p_k}(t, q(t), p(t)), \\ \dot{p}_k(t) &= -\frac{\partial H}{\partial q_k}(t, q(t), p(t)). \end{aligned}}$$

Hamiltonsche Dynamik: Energie als Antrieb

☺ Dies vereinfacht dramatisch: Statt eines Vektorfeldes $f : \Omega \to \mathbb{R}^{2n}$ betrachten wir nur noch eine skalare Funktion $H : \Omega \to \mathbb{R}$ und setzen

$$\boxed{f = J \cdot \nabla H \quad \text{mit} \quad J = \begin{pmatrix} 0_n & E_n \\ -E_n & 0_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}.}$$

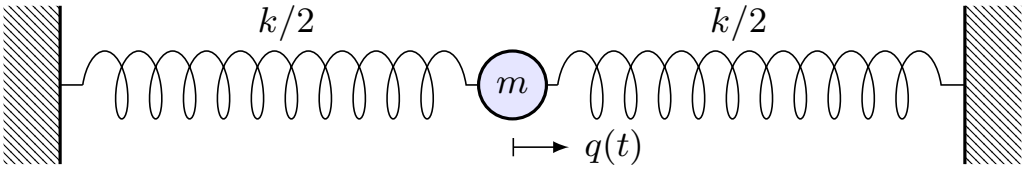
☺ Genau dann ist f hamiltonsch, wenn $-J \cdot f$ ein Potential H erlaubt. Das Potentialproblem für $(\Omega, -J \cdot f)$ haben wir in §H2 vollständig gelöst. Geometrisch: In jeder (q_k, p_k)–Ebene wirkt $\pm J$ als eine Vierteldrehung.

Somit ist (Ω, H) ein dynamisches System von der ganz speziellen Form $(\dot{q}, \dot{p}) = J \cdot \nabla H(t, q, p)$. Es lebt immer auf einem **Phasenraum** gerader Dimension $m = 2n$, und wir nennen n die **Anzahl der Freiheitsgrade**.

Jede Lösungskurve $t \mapsto (t, q(t), p(t))$ bezüglich H folgt dem zugehörigen hamiltonschen Vektorfeld $f = J \cdot \nabla H$ und wird **Trajektorie** genannt. Dank Cauchy O1B / Picard–Lindelöf O2A gilt Existenz und Eindeutigkeit.

Autonome Systeme sind zeitunabhängig: Hier gilt $\dot{x} = f(x)$ bzw. $(\dot{q}, \dot{p}) = J \cdot \nabla H(q, p)$, wobei f und H nicht von der Zeit t abhängen.

Hamiltonsche Dynamik: harmonischer Oszillator



Beispiel: Für den (reibungsfreien) harmonischen Oszillator betrachten wir den Zustandsraum $\Omega = \mathbb{R}^2$ und hierauf die Hamilton–Funktion

$$\boxed{H(q,p) = \frac{k}{2}q^2 + \frac{1}{2m}p^2.}$$

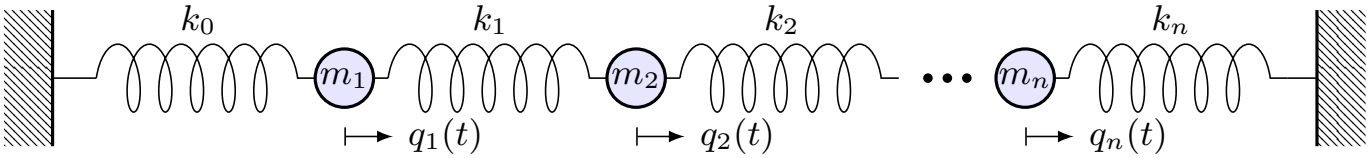
☺ Die Gesamtenergie $H(q,p)$ ist die Summe der potentiellen Energie $V(q) = \frac{k}{2}q^2$ und der kinetischen Energie $T(p) = \frac{1}{2m}p^2$ im Zustand (q,p).

☺ Die zugehörigen hamiltonschen Bewegungsgleichungen P2F lauten

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p/m, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -kq.$$

Das ist sehr vertraut: Die erste Gleichung $p = m\dot{q}$ erklärt den Impuls p als Masse m mal Geschwindigkeit $\dot{q}$. Die zweite Gleichung $m\ddot{q} = -kq$ besagt Masse m mal Beschleunigung $\ddot{q}$ ist gleich Federkraft $-kq$. O101

Hamiltonsche Dynamik: gekoppelte Oszillatoren



Beispiel: Für n linear gekoppelte Oszillatoren P101 betrachten wir

$$\boxed{H(q,p) = \sum_{i=0}^{n} \frac{k_i}{2}(q_{i+1} - q_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2m_i}p_i^2.}$$

Wie zuvor vereinbaren wir Dirichlet–Randbedingungen $q_0 = q_{n+1} = 0$. Hamiltons Bewegungsgleichungen P2F ergeben erneut Vertrautes:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = p_i/m_i, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -k_i(q_{i+1} - q_i) - k_{i-1}(q_{i-1} - q_i)$$

☺ Vorteile: einfache Funktion H, symmetrische Struktur in (q,p). Dynamik und Stabilität lassen sich geometrisch untersuchen (P2H).

☺ Der Fluss im Phasenraum entspricht einem inkompressiblen Fluid und ermöglicht eine statistische Formulierung in der Thermodynamik.

☺ Leichter Übergang von klassischer zur Quantenmechanik. R125

Hamiltonsche Dynamik: die Poisson–Klammer

Aufgabe: Wie verändert sich eine skalare C^1–Funktion $E:\Omega\to\mathbb{R}$ entlang der Trajektorie $t\mapsto(t,q(t),p(t))$ durch den Punkt $(\bar t,\bar q,\bar p)$?

Lösung: Wir wenden die Kettenregel auf $t\mapsto E(t,q(t),p(t))$ an:

$$\begin{aligned}\dot E(\bar t,\bar q,\bar p) &\overset{\text{Def}}{=} \frac{\mathrm{d}E(t,q(t),p(t))}{\mathrm{d}t}(\bar t) \quad \text{mit} \quad \dot q_k=\frac{\partial H}{\partial p_k},\ \dot p_k=-\frac{\partial H}{\partial q_k}\\ &\overset{\text{KR}}{=} \frac{\partial E}{\partial t}(\bar t,\bar q,\bar p)+\sum_{k=1}^n\frac{\partial E}{\partial q_k}(\bar t,\bar q,\bar p)\cdot\dot q_k(\bar t)+\sum_{k=1}^n\frac{\partial E}{\partial p_k}(\bar t,\bar q,\bar p)\cdot\dot p_k(\bar t)\\ &= \frac{\partial E}{\partial t}+\{E,H\} \quad \text{mit} \quad \{E,F\}:=\sum_{k=1}^n\frac{\partial E}{\partial q_k}\frac{\partial F}{\partial p_k}-\frac{\partial E}{\partial p_k}\frac{\partial F}{\partial q_k}\end{aligned}$$

Beispiel: Speziell für $E=H$ gilt $\{H,H\}=0$. Daraus folgt $\dot H=\partial_t H$:

Satz P2G: Energieerhaltung in hamiltonscher Dynamik

Gegeben sei eine autonome Hamilton–Funktion H, das heißt $\partial_t H=0$. Dann gilt $\dot H=0$, das heißt H ist konstant entlang jeder Trajektorie.

Entspricht physikalischer Erfahrung: Die Gesamtenergie bleibt erhalten!

Hamiltonsche Dynamik: die Poisson–Klammer

Übung: Für C^1–Funktionen $E,F,G,\ldots:\Omega\to\mathbb{R}$ auf dem Phasenraum definieren wir die **Poisson–Klammer** $\{E,F\}$ wie oben motiviert durch

$$\boxed{\{E,F\}:=\sum_{k=1}^n\frac{\partial E}{\partial q_k}\frac{\partial F}{\partial p_k}-\frac{\partial E}{\partial p_k}\frac{\partial F}{\partial q_k}.}$$

Dann gelten die folgenden nützlichen Rechenregeln:
(1) Antisymmetrie: $\{F,E\}=-\{E,F\}$, somit $\{E,E\}=0$
(2) Bilinearität: $\{aE+bF,G\}=a\{E,G\}+b\{F,G\}$ für $a,b\in\mathbb{R}$
(3) Leibniz–Produktregel: $\{E\cdot F,G\}=E\cdot\{F,G\}+\{E,G\}\cdot F$
(4) Jacobi–Identität: $\{E,\{F,G\}\}+\{F,\{G,E\}\}+\{G,\{E,F\}\}=0$
(5) Für alle $i,j\in\{1,\ldots,n\}$ gilt $\{q_i,q_j\}=0$, $\{p_i,p_j\}=0$, $\{q_i,p_j\}=\delta_{ij}$.
(6) Sei H autonom. Dann gilt $\dot E=\{E,H\}$. Gilt $\{E,H\}=0$, so ist E eine **Erhaltungsgröße**. Gilt dies für E,F, so auch für $aE+bF$, $E\cdot F$, $\{E,F\}$.

Das System (Ω,H) heißt **vollständig integrabel** (nach Liouville), falls es n unabhängige Erhaltungsgrößen $H=E_1,\ldots,E_n:\Omega\to\mathbb{R}$ erlaubt, die $\{E_i,E_j\}=0$ für alle i,j erfüllen. Diese Bewegungsinvarianten legen alle Trajektorien eindeutig fest, wie etwa beim Pendel O133 illustriert.

Hamiltonsche Dynamik: Fixpunkte und Stabilität

Sei $H(q,p) = V(q) + T(p)$ die Summe der Lageenergie $V(q)$ und der Bewegungsenergie $T(p)$. Hierbei sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine positiv definite quadratische Form, etwa $T(p) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2m_i} p_i^2$ mit Massen $m_i > 0$.

Satz P2H: Fixpunkte und Stabilität und kleine Schwingungen

(0) Genau dann ist $(\bar{q}, 0) \in \Omega$ ein Fixpunkt, wenn $\nabla V(\bar{q}) = 0$ gilt.
(1) Ist $\bar{q}$ ein striktes lokales Minimum von V, so ist $(\bar{q}, 0)$ stabil.
(2) Nach affiner Transformation der Koordinaten gilt dann

$$H(q,p) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} p_i^2 + \frac{1}{2} \omega_i^2 q_i^2 + \text{(höhere Terme)}$$

„In erster Näherung ist alles eine harmonische Schwingung.“ (Horst Kilp)

Beweis: (0) Die Bewegungsgleichungen besagen $\dot{p}_k(t) = \partial H / \partial q_k = 0$, also $p_k(t) = \bar{p}_k = 0$, und $\dot{q}_k(t) = \partial H / \partial p_k = p_k / m_k = 0$, also $q_k(t) = \bar{q}_k$.

(1) Dank P2G können wir das Lyapunov–Kriterium P2C anwenden: $E(q,p) = H(q,p) - V(\bar{q})$ ist positiv definit um $(\bar{q}, 0)$ und erfüllt $\dot{E} = 0$.

Hamiltonsche Dynamik: kleine Schwingungen

(2) Nach Verschieben der Koordinaten um $\bar{q}$ dürfen wir $\bar{q} = 0$ annehmen. Das Potential V sei zweimal stetig differenzierbar, dank Taylor also

$$V(q) = V_0 + \textstyle\sum_{i=1}^n V_i q_i + \sum_{i,j=1}^n V_{ij} q_i q_j + \varepsilon(q).$$

Das Energiegrundniveau V_0 können wir vereinfachend auf Null setzen. Da V in 0 ein lokales Minimum hat, gilt hier $(V_1, \ldots, V_n) = \nabla V(0) = 0$. Die Hesse–Matrix $(V_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist symmetrisch und positiv semidefinit. Der Fehler $\varepsilon(q)$ liegt in $o(|q|^2)$, erfüllt also $\varepsilon(q)/|q|^2 \to 0$ für $|q| \to 0$.

Insgesamt erhalten wir also um den Zustand $(0,0)$ die Näherung

$$H(q,p) = \textstyle\sum_{i,j=1}^n T_{ij} p_i p_j + \sum_{i,j=1}^n V_{ij} q_i q_j + \text{(höhere Terme)}$$

Wir können beide Matrizen (T_{ij}) und (V_{ij}) simultan diagonalisieren: Dank Gram–Schmidt existiert eine Basis $(e_1, \ldots, e_n)$ mit $e_i^\intercal T e_j = \frac{1}{2}\delta_{ij}$. Eine Drehung diagonalisiert nun die Matrix (V_{ij}) zu $\frac{1}{2}\operatorname{diag}(\omega_1^2, \ldots, \omega_n^2)$.

In diesen Koordinaten gilt $H(q,p) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} p_i^2 + \frac{1}{2}\omega_i^2 q_i^2 + \text{höhere Terme}$. Die Bewegungsgleichungen sind $\dot{q}_i = p_i$ und $\dot{p}_i = -\omega_i^2 q_i$ (annähernd). Daraus folgt $q_i(t) = q_i^* \sin(\omega_i t + \varphi_i)$ und $p_i(t) = q_i^* \omega_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)$.

Differentialgleichungssysteme und Cauchys ∃&E-Satz

Differentialgleichungssysteme können wir auf 1. Ordnung reduzieren:

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1\big(t, y_1(t), \dots, y_n(t)\big), \\ \qquad\vdots \\ y_n'(t) = f_n\big(t, y_1(t), \dots, y_n(t)\big). \end{cases}$$

Mit $y = (y_1, \dots, y_n)$ und $f = (f_1, \dots, f_n)$ bündeln wir dies prägnant und übersichtlich als eine **vektorwertige Differentialgleichung**:

$$\boxed{y'(t) = f(t, y(t))}$$

Gegeben ist hierzu die stetige Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n \supseteq G \to \mathbb{K}^n$. Gesucht sind alle Funktionen $y : I \to \mathbb{K}^n$ auf einem (maximalen) Intervall I, die $(t, y(t)) \in G$ und die Gleichung $y'(t) = f(t, y(t))$ für alle $t \in I$ erfüllen.

Qualitativer Überblick dank **Existenz- und Eindeutigkeitssatz** O1B:

(1) Zu jedem Startpunkt (t_0, y_0) im Inneren $\mathring{G}$ existieren Lösungen; jede kann beidseitig bis zum Rand von G (oder ∞) fortgesetzt werden.

(2) Ist $f(t, y)$ stetig diff'bar nach y, so ist die Lösung durch $(t_0, y_0) \in \mathring{G}$ eindeutig bestimmt und hängt stetig von diesen Anfangswerten ab.

Struktursatz für lineare Differentialgleichungssysteme

Ein **homogenes lineares DGSystem** erster Ordnung ist von der Form

$$\boxed{y'(t) = A(t)\, y(t).}$$

Gegeben ist hierzu eine stetige **Koeffizientenmatrix** $A : I \to \mathbb{K}^{n \times n}$.
Die Lösungsmenge $L_0 = \{\, y : I \to \mathbb{K}^n \mid y' = Ay \,\}$ ist ein $\mathbb{K}$–Vektorraum der Dimension n: Wir wählen ein **Fundamentalsystem** $y_1, \dots, y_n \in L_0$ von n linear unabhängigen Lösungen. Bezüglich dieser Basis gilt dann:

$$\boxed{L_0 = \Big\{\, c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \;\Big|\; c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K} \,\Big\} \quad \cong \quad \mathbb{K}^n}$$

Ein (inhomogenes) **lineares DGSystem** ist von der Form

$$\boxed{y'(t) = A(t)\, y(t) + b(t).}$$

Gegeben ist hier neben $A : I \to \mathbb{K}^{n \times n}$ ein stetiger **Störterm** $b : I \to \mathbb{K}^n$.
Eine partikuläre Lösung y_b liefert die **Variation der Konstanten** (O3D).
Die Lösungsmenge $L_b = \{\, y : I \to \mathbb{K}^n \mid y' = Ay + b \,\}$ ist ein affiner Raum:

$$\boxed{L_b = y_b + L_0 = \Big\{\, y_b + c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \;\Big|\; c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K} \,\Big\}}$$

„Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen."

Fundamentalsysteme für homogene lineare DGSysteme

Sei $A : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ stetig. Die **matrixwertige Differentialgleichung**

$$\boxed{W'(t) = A(t)\,W(t) \quad \text{mit} \quad W(t_0) = E}$$

erlaubt die **Fundamentallösung** $W : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ gegeben durch

$$\boxed{W(t) = E + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t_k=t_0}^{t} A(t_k) \cdots \int_{t_2=t_0}^{t_3} A(t_2) \int_{t_1=t_0}^{t_2} A(t_1)\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2 \cdots \mathrm{d}t_k.}$$

Für jedes $t \in I$ ist die Reihe absolut konvergent und $W(t)$ invertierbar. Zu jedem $y_0 \in \mathbb{K}^n$ hat daher die **vektorwertige Differentialgleichung**

$$\boxed{y'(t) = A(t)\,y(t) \quad \text{mit} \quad y(t_0) = y_0}$$

genau eine Lösung $y : I \to \mathbb{K}^n$, nämlich $y(t) = W(t)\,y_0$. Somit hat die Differentialgleichung $y' = A\,y$ als Lösungsmenge den $\mathbb{K}$–Vektorraum

$$\boxed{L_0 = \{\, W y_0 \mid y_0 \in \mathbb{K}^n \,\}.}$$

☺ Diese allgemeine Lösungsformel ist einfach und übersichtlich.

Fundamentalsysteme für homogene lineare DGSysteme

Lösungen $y_1, \ldots, y_n : I \to \mathbb{K}^n$ bündeln wir zur **Fundamentalmatrix**:

$$Y : I \to \mathbb{K}^{n\times n},$$
$$Y(t) = \big(y_1(t), \ldots, y_n(t)\big) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) & y_{21}(t) & \ldots & y_{n1}(t) \\ y_{12}(t) & y_{22}(t) & \ldots & y_{n2}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{1n}(t) & y_{2n}(t) & \ldots & y_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

Die folgenden vier Aussagen sind untereinander äquivalent:
(a) Die Funktionen $y_1, \ldots, y_n : I \to \mathbb{K}^n$ sind linear unabhängig über $\mathbb{K}$.
(b) Die Vektoren $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ sind linear unabhängig für jedes $t \in I$.
(c) Die Vektoren $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ sind linear unabhängig für ein $t \in I$.
(d) Die Determinante erfüllt $\det Y(t) \neq 0$ für ein und damit alle $t \in I$.

Man nennt $Y(t)$ auch die **Wronski–Matrix** der Funktionen $y_1, \ldots, y_n$.
Die **Wronski–Determinante** $w(t) = \det Y(t)$ entwickelt sich gemäß

$$\boxed{w(t) = w(t_0) \cdot \exp\left[\int_{\tau=t_0}^{t} \operatorname{tr} A(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right].}$$

Unsere **Fundamentallösung** W ist der Spezialfall mit $W(t_0) = E$;
Umrechnung via $Y(t) = W(t)Y(t_0)$ bzw. $W(t) = Y(t)Y(t_0)^{-1}$.

Partikulärlösung für inhomogene lineare DGSysteme

Seien $A : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ und $b : I \to \mathbb{K}^n$ stetig, $Y = (y_1, \dots, y_n) : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Fundamentalmatrix der homogenen Gleichung $Y'(t) = A(t)\,Y(t)$.

Zu lösen sei das inhomogene Differentialgleichungssystem

$$\boxed{y'(t) = A(t)\,y(t) + b(t) \quad \text{mit} \quad y(t_0) = y_0.}$$

Eine Lösung y_b erhalten wir durch **Variation der Konstanten**. O311
Zu jedem Anfangswert $y_0 \in \mathbb{K}^n$ existiert genau eine Lösung, nämlich

$$\boxed{y(t) \;=\; Y(t) \int_{\tau=t_0}^{t} Y(\tau)^{-1}\, b(\tau)\,\mathrm{d}\tau \;+\; Y(t)Y(t_0)^{-1}y_0.}$$

Somit hat die Differentialgleichung $y' = A\,y + b$ als Lösungsmenge

$$\boxed{L_b = y_b + L_0 = \{\, y_b + W\,y_0 \mid y_0 \in \mathbb{K}^n \,\}.}$$

Dies ist ein affiner Raum der Dimension n und präzisiert die Merkregel:
„Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen.“

Lösung durch Eigenvektoren und Eigenfunktionen

Häufig trifft man **lineare DGSysteme mit konstanten Koeffizienten**, z.B. durch Linearisierung autonomer DGSysteme um Fixpunkte (§P2).

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Zu lösen sei das DGSystem

$$\boxed{y'(t) = A\,y(t) \quad \text{für} \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n.}$$

Zu jedem Startvektor $y(t_0) = y_0$ existiert genau eine Lösung, nämlich

$$\boxed{y : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n \quad \text{mit} \quad y(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}\,y_0.}$$

Die Berechnung dieser Matrix-Exponentialfunktion ist leider schwierig.

☺ Eigen- & Hauptvektoren können dies dramatisch vereinfachen:
Eigenvektoren $v_1, \dots, v_\ell \in \mathbb{K}^n$ mit $Av_k = \lambda_k v_k$ liefern **Eigenfunktionen**

$$\boxed{y_1, \dots, y_\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n \quad \text{mit} \quad y_k(t) = \mathrm{e}^{\lambda_k t}\,v_k.}$$

Genau dann sind die Eigenfunktionen $y_1, \dots, y_\ell$ **linear unabhängig**, wenn die Eigenvektoren $v_1, \dots, v_\ell \in \mathbb{K}^n$ linear unabhängig sind.

Genau dann sind $y_1, \dots, y_n$ eine **Basis** des Lösungsraumes der DG, wenn die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ eine Basis des Raumes $\mathbb{K}^n$ sind.

Lösung durch Hauptvektorketten und Hauptfunktionen

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Matrix und $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Skalar. Eine **Hauptvektorkette**

$$0 \xleftarrow{A-\lambda} v_1 \xleftarrow{A-\lambda} v_2 \xleftarrow{A-\lambda} \dots \xleftarrow{A-\lambda} v_\ell$$

besteht aus Vektoren $0 \neq v_1, \dots, v_\ell \in \mathbb{K}^n$ mit $(A-\lambda)v_k = v_{k-1}$.
Diese löst das DGSystem durch **Hauptfunktionen** $y_1, \dots, y_\ell$ mit

$$\boxed{y_k(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\left[v_k + t\,v_{k-1} + \frac{t^2}{2}v_{k-2} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}v_1\right]}$$

☺ Ist A **diagonalisierbar**, so können wir die Differentialgleichungen vollständig entkoppeln (P1B): Wir finden eine Basis $(v_1, \dots, v_n)$ des $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren, $Av_k = \lambda_k v_k$. Diese liefert uns sofort eine Basis aus Eigenfunktionen $y_1, \dots, y_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ mit $y_k(t) = \mathrm{e}^{\lambda_k t} v_k$.

Dies vereinfacht die Berechnung der obigen Matrix-Exponentialfunktion.

☺ Ist A **nicht diagonalisierbar**, so doch immerhin noch jordanisierbar: Es existiert eine Basis des Raumes $\mathbb{C}^n$ aus Hauptvektoren, und diese liefern eine Basis des Lösungsraumes L_0 aus Hauptfunktionen.

Von komplexen zu reellen Lösungen

☺ Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ existiert eine Basis aus Hauptvektorketten. Das obige Verfahren führt also stets zu einer Basis des Lösungsraums.

Ist die Matrix reell, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so fordert man meist reelle Lösungen.
Sei $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{C}^n$ eine Hauptvektorkette zum Eigenwert $\lambda = \sigma + \mathrm{i}\omega$.
Dann ist $\overline{v_1}, \dots, \overline{v_k}$ eine Hauptvektorkette zum Eigenwert $\overline{\lambda} = \sigma - \mathrm{i}\omega$.
Dank Basiswechsel hat das DGSystem folgende **reelle Lösungen**

$$\boxed{\begin{aligned}
\operatorname{Re} y_k(t) &= \mathrm{e}^{\sigma t}\operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\left[v_k + t\,v_{k-1} + \frac{t^2}{2}v_{k-2} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}v_1\right]\right),\\
\operatorname{Im} y_k(t) &= \mathrm{e}^{\sigma t}\operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\left[v_k + t\,v_{k-1} + \frac{t^2}{2}v_{k-2} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}v_1\right]\right).
\end{aligned}}$$

Wir erkennen hieran insbesondere das **asymptotische Verhalten**:
Für $\sigma < 0$ gilt exponentielles Abklingen, $|y_k(t)| \to 0$ für $t \to \infty$.
Für $\sigma > 0$ gilt exponentielles Wachstum, $|y_k(t)| \to \infty$ für $t \to \infty$.
Für $\sigma = 0$ ist y_1 beschränkt, aber $y_2, \dots, y_\ell$ wachsen polynomiell.

☺ Das Eigenwert-Kriterium gilt allgemein für Linearisierungen (P2D).

Verständnisfragen zu Eigen- & Hauptfunktionen

Aufgabe: (0) Welche Funktionen gehören zur Menge $V = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$? Ist sie ein $\mathbb{C}$–Vektorraum? Ist die Abbildung $\partial : V \to V : f \mapsto f'$ linear?
(1) Finden Sie zu jedem Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ alle Eigenfunktionen von ∂.
(2) Finden Sie zu jedem Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ alle Hauptfunktionen von ∂.
(3) Welche Dimension hat V: endlich? unendlich? gar überabzählbar?
(4) Erlaubt der Raum V eine Basis aus Eigen-/Hauptfunktionen zu ∂?

Lösung: (0) Die Menge $V = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ der beliebig oft differenzierbaren Funktionen ist ein Vektorraum, genauer gesagt ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^\mathbb{R} = \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$: Linearkombinationen glatter Funktionen sind glatt. Die Ableitung $\partial : V \to V : f \mapsto f'$ ist hierauf eine lineare Abbildung.

(1) Die Eigenwertgleichung $\partial f = \lambda f$ ist die lineare Differentialgleichung $(\partial - \lambda) f = 0$ und wird gelöst von $f(x) = c\,\mathrm{e}^{\lambda x}$ mit $c \in \mathbb{C}$. Eindeutigkeit: Der Eigenraum $E_\lambda = \ker(\partial - \lambda)$ ist eindimensional, erzeugt von $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$.

(2) Wir kennen den Hauptraum n-ter Stufe $H_\lambda^n = \ker(\partial - \lambda)^n$: Er besteht aus allen Funktionen $f(x) = (\sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k/k!)\,\mathrm{e}^{\lambda x}$ mit $c_0, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{C}$. Er ist demnach n–dimensional, mit Basis $(\mathrm{e}^{\lambda x} x^{k-1}/(k-1)!)_{k=1}^{n-1}$.

Verständnisfragen zu Eigen- & Hauptfunktionen

(3) Der Vektorraum $V = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ ist unendlich-dimensional: Er enthält alle Polynome $\sum_{k=0}^n c_k x^k$ beliebigen Grades $n \in \mathbb{N}$. Die Monome $1, x, x^2, x^3, \dots$ sind linear unabhängig, also $\dim V = \infty$.

Noch extremer: Die Familie der Eigenfunktionen $(e_\lambda : x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x})_{\lambda \in \mathbb{R}}$ ist überabzählbar und linear unabhängig. Also ist die Dimension von V nicht nur abzählbar unendlich, sondern sogar überabzählbar unendlich.

☺ All diese Eigen- und Hauptfunktionen $\mathrm{e}^{\lambda x} x^{k-1}/(k-1)!$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}$ sind überaus nützlich zur Lösung linearer Differentialgleichungen. Sie bieten uns ein großes Repertoire, das viele Anwendungen abdeckt.

(4) Sie bilden jedoch keine Basis von $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Zum Beleg suchen wir Funktionen $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$, die sich nicht als Linearkombination von Eigen- und Hauptfunktionen $\mathrm{e}^{\lambda x} x^{k-1}/(k-1)!$ darstellen lassen.

Jede Hauptfunktion $\mathrm{e}^{\lambda x} x^{k-1}/(k-1)!$ ist analytisch, also darstellbar als Potenzreihe, und auf ganz $\mathbb{R}$ konvergent. Gleiches gilt daher für jede Linearkombination. Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ glatt mit kompaktem Träger (B438) gilt dies nicht, demnach ist f so nicht als Linearkombination darstellbar!

Verständnisfragen zu Eigen- & Hauptfunktionen

Aufgabe: Wir betrachten die Ableitung $\partial : f \mapsto f'$ als lineare Abbildung auf endlich-dimensionalen $\mathbb{K}$–Untervektorräumen von $V = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$:

$$V_1 = \left\{ \sum_{k=-n}^{n} c_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \;\middle|\; c_k \in \mathbb{C} \right\} \qquad \text{über } \mathbb{K} = \mathbb{C}$$

$$V_2 = \left\{ \sum_{k=-n}^{n} c_k \, \mathrm{e}^{kx} \;\middle|\; c_k \in \mathbb{K} \right\} \qquad \text{über } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

$$V_3 = \mathbb{K}[x]_{<n} = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \;\middle|\; a_k \in \mathbb{K} \right\} \qquad \text{über } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

$$V_4 = \mathrm{e}^{\lambda x} \, \mathbb{K}[x]_{<n} = \left\{ \mathrm{e}^{\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \;\middle|\; a_k \in \mathbb{K} \right\} \qquad \text{über } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

Finden Sie eine Basis von V_i aus Eigenvektoren bzw. Hauptvektorketten. Berechnen Sie das char. Polynom der linearen Abbildung $\partial : V_i \to V_i$.

Lösung: (1) Die Funktionen $e_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $e_k(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ sind C^∞–glatt und 2π–periodisch. Sie spannen den Raum T der trigonometrischen Polynome auf, und bilden hierin eine Orthonormalbasis (Kapitel I).

Sie sind Eigenfunktionen des Ableitungsoperators, denn $\partial e_k = \mathrm{i}k e_k$. Deshalb sind Fourier–Reihen für Differentialgleichungen so nützlich!

Die lineare Abbildung $\partial : V_1 \to V_1$ wird durch diese Basis diagonalisiert. Das char. Polynom ist demnach $\det(\partial - x \, \mathrm{id}) = \prod_{k=-n}^{n} (x - \mathrm{i}k) \in \mathbb{C}[x]$.

Verständnisfragen zu Eigen- & Hauptfunktionen

(2) Auch die reellen Funktionen $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_k(x) = \mathrm{e}^{kx}$ sind Eigenfunktionen des Ableitungsoperators, denn $\partial f_k = k e_k$. Insbesondere sind sie linear unabhängig, und somit ist $(f_k)_{k=-n}^{n}$ eine Basis des Vektorraums V_2 bestehend aus Eigenfunktionen von ∂.

Die lineare Abbildung $\partial : V_2 \to V_2$ wird durch diese Basis diagonalisiert. Das char. Polynom ist demnach $\det(\partial - x \, \mathrm{id}) = \prod_{k=-n}^{n} (x - k) \in \mathbb{R}[x]$.

(3) Hier ist $(x^k/k!)_{k=0}^{n-1}$ eine Hauptvektorkette und eine Basis von V_3. Das char. Polynom ist demnach $\det(\partial - x \, \mathrm{id}) = x^n \in \mathbb{R}[x]$. Für $\dim V_3 = n \geq 2$ ist ∂ auf V_3 nicht diagonalisierbar!

(4) Hier ist $(\mathrm{e}^{\lambda x} \, x^k/k!)_{k=0}^{n-1}$ eine Hauptvektorkette und eine Basis von V_4. Das char. Polynom ist demnach $\det(\partial - x \, \mathrm{id}) = (x - \lambda)^n \in \mathbb{C}[x]$. Für $\dim V_4 = n \geq 2$ ist ∂ auf V_4 nicht diagonalisierbar!

☺ Der Ableitungsoperator ∂ ist für Differentialgleichungen und ihre Anwendungen extrem wichtig. Als lineare Abbildung ist er ebenso kompliziert wie interessant und illustriert nahezu alle Möglichkeiten. Die Lineare Algebra verschafft uns hierzu Klarheit und Übersicht.

Verständnisfragen: Vektorräume

Wir wollen lineare Differentialgleichungssysteme $\dot{u}(t) = A\,u(t)$ lösen. Dieses grundlegende Problem tritt in Anwendungen nahezu überall auf, meist als einfaches Teilproblem eines komplexeren Zusammenhangs. Zur Lösung mobilisieren wir den gesamten Apparat der linearen Algebra. Bitte wiederholen Sie hierzu noch einmal alle wichtigen Begriffe:

Was ist ein Körper $(\mathbb{K}, +, \cdot)$? Erklären Sie Beispiele: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$?
Was ist ein $\mathbb{K}$–Vektorraum $(V, +, \cdot)$? Beispiele? $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[x]$, $C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?
Was ist eine Basis? Geben Sie mehrere Beispiele für $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}[x]$.
Was ist die Dimension eines $\mathbb{K}$–Vektorraums? Beispiele? $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[x]$?
Was ist ein Untervektorraum $U \subseteq V$? Beispiele? $\mathbb{R}[x] \subseteq C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Was ist eine $\mathbb{K}$–lineare Abbildung $f : V \to W$? Beispiele? $\partial = \mathrm{d}/\mathrm{d}x$?
Wann / womit / wie kann man $f : V \to W$ durch eine Matrix darstellen?
Beispiele: Stellen Sie $\partial = \mathrm{d}/\mathrm{d}x : \mathbb{R}[x]_{<n} \to \mathbb{R}[x]_{<n}$ als eine Matrix dar,
und allgemein $\partial : Q_n \to Q_n$ auf $Q_n = \{\, x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{x^k}{k!}\, \mathrm{e}^{\lambda x} \mid c_k \in \mathbb{C} \,\}$
sowie $\partial : T_n \to T_n$ auf $T_n = \{\, x \mapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \mid c_k \in \mathbb{C} \,\} \subseteq C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$
Warum ist die Antwort noch nicht eindeutig? Was benötigen Sie hierzu?

Verständnisfragen: Matrizenrechnung

Matrizenrechnung: Was ist $\mathbb{K}^{m\times n}$? Erklären Sie Addition $+$ und Multiplikation $\cdot$ von Matrizen. Ist $(\mathbb{K}^{2\times 2}, \cdot)$ kommutativ? nullteilerfrei?

Welche Probleme löst der Gauß–Algorithmus und wie funktioniert er?

Jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ definiert eine $\mathbb{K}$–lineare Abbildung $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ durch $v \mapsto Av$. Wie berechnen Sie ihren Kern? ihr Bild? Sind dies jeweils Untervektorräume? Welche nützliche Beziehung gilt zwischen $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Kern}(A)$ und $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Bild}(A)$? Wann ist A surjektiv? und injektiv?

Was ist die Determinante? Welche charakteristischen Eigenschaften definieren sie? Wie kann man sie berechnen? Wie geht es effizient?

Was bedeutet $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ ist invertierbar? Warum gilt dabei $m = n$?
Was gilt für den Kern von A? für das Bild? für die Determinante?
Welche Implikationen / Äquivalenzen gelten für diese Kriterien?

Einfaches Beispiel: Untersuchen Sie Kern, Bild, Determinante und Invertierbarkeit der Telefonmatrix T und der Vandermonde–Matrix V:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

Verständnisfragen: Eigenvektoren

Was ist ein Eigenvektor / Eigenwert einer $\mathbb{K}$–linearen Abb. $f : V \to V$?
Beispiel: Finden Sie alle EV / EW der Ableitung $\partial = \mathrm{d}/\mathrm{d}x : V_i \to V_i$ auf

$$V_1 = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \left\{\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ ist beliebig oft differenzierbar} \,\right\},$$
$$V_2 = \left\{\, a_0 + a_1 x^1 + \cdots + a_n x^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \,\right\} \subseteq C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}),$$
$$V_3 = \left\{\, a_1 x^{-1} + \cdots + a_n x^{-n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \,\right\} \subseteq C^\infty(\mathbb{R}_{>0},\mathbb{R}).$$

Gibt es lineare Abbildungen ohne Eigenwert? mit unendlich vielen?
Gibt es solche Fälle auch für lineare Abbildung $f : V \to V$ auf einem endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$–Vektorraum? oder $\mathbb{R}$–Vektorraum?

Erklären Sie den Zusammenhang lineare Abbildungen – Matrizen sowie Eigenvektor / Eigenwert – Determinante – charakteristisches Polynom.

Fußballproblem: Kann man den Kreis $\mathbb{S}^1 = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \,\}$ so drehen, dass kein einziger Punkt fix bleibt? Geht das auch mit der zweidimensionalen Sphäre $\mathbb{S}^2 = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \,\}$?
Was sagt Ihre Anschauung? Formulieren und begründen Sie es präzise!
Hier helfen Drehmatrizen $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und das charakteristische Polynom!

Verständnisfragen: Hauptvektoren

Was versteht man unter einer Hauptvektorkette für $f : V \to V$?
Sind die Vektoren einer solchen Kette linear unabhängig?
Was versteht man unter einer Jordan–Basis von V zu f?

Finden Sie für $\partial : \mathbb{R}[x]_{\leq 7} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 7}$ eine Basis aus Hauptvektorketten.
Stellen Sie ∂ als Matrix in dieser Basis dar. Gilt diese Form allgemein?
Wie liest man hieraus das char. Polynom und alle Eigenwerte ab?

Gibt es reelle Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, die keine reellen Eigenwerte haben?
die reelle Eigenwerte haben aber dennoch nicht diagonalisierbar sind?

Gibt es reelle Matrizen $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, die keine reellen Eigenwerte haben?
die reelle Eigenwerte haben aber dennoch nicht diagonalisierbar sind?

Wenn $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ verschiedene reelle bzw. konjugiert-komplexe EW hat, ist A dann diagonalisierbar über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$? Gilt hierzu die Umkehrung?

Wichtiger Spezialfall: Was gilt für jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$?
Gibt es eine Basis aus Eigenvektoren? sogar eine Orthonormalbasis?

Wie lösen Sie eine Differentialgleichung $\dot{u}(t) = A\,u(t)$ mit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ durch Eigen-&Hauptvektoren? Wann genügen nur Eigenvektoren?

Reduktion der Ordnung und Methodenvergleich

Wir vergleichen unsere Methoden zu den beiden Grundproblemen

$$\boxed{p(\partial)\, y(t) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{u}(t) = A\, u(t).}$$

Beides sind lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Im ersten Fall ist $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eindimensional aber der Differentialoperator $p(\partial)$ von Ordnung n. Hierzu liefert Kapitel N explizit alle Lösungen (N2D). Im zweiten Fall ist $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ mehrdimensional, wird aber nur einmal abgeleitet. Hierzu erklärt Kapitel P die allgemeine Lösungstheorie (P1E). Beide Probleme erweisen sich als äquivalent, und wir wollen sehen wie.

Aufgabe: Gegeben sei $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$.

(1) Reduzieren Sie die DG $p(\partial)\, y(t) = 0$ auf ein System $\dot{u}(t) = A\, u(t)$.

(2) Bestimmen Sie das char. Polynom dieser Systemmatrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

(3) Bestimmen Sie die Eigenräume. (4) Wann ist A diagonalisierbar?

(5) Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{C}^n$ aus Hauptvektorketten von A.

Wie entsprechen Hauptlösungen von $p(\partial)\, y(t) = 0$ den Hauptfunktionen des DGSystems $\dot{u}(t) = A\, u(t)$ und den Hauptvektoren der Matrix A?

Reduktion der Ordnung und Methodenvergleich

Lösung: (1) Wir setzen $u := (\, u_0 = y,\ u_1 = y',\ \ldots,\ u_{n-1} = y^{n-1}\,)$.
Damit ist $p(\partial)\, y(t) = 0$ äquivalent zu $\dot{u}(t) = A\, u(t)$ mit der Systemmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

☺ Dies erlaubt die **Reduktion** von Ordnung n auf Ordnung 1. O151

(2) Für das charakteristische Polynom der Matrix A betrachten wir

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & \ldots & \lambda + a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

☺ Wir entwickeln die letzte Zeile und erhalten $\det(\lambda E - A) = p(\lambda)$.
Man nennt die Matrix A auch die **Begleitmatrix** zum Polynom p.
Das charakteristische Polynom von A ist das vorgegebene p.

Reduktion der Ordnung und Methodenvergleich

(3) Wir betrachten die **Eigenvektorgleichung** für $v \in \mathbb{C}^n$ und $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$A \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_{n-1} \\ -a_0 v_0 - \dots - a_{n-1} v_{n-1} \end{pmatrix} \overset{!}{=} \lambda \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$$

Diese Gleichungen sind erfüllt genau für $v_k = \lambda^k v_0$ und $p(\lambda)\, v_0 = 0$.
☺ Zum Eigenwert λ gehört also der Eigenvektor $(1, \lambda, \dots, \lambda^{n-1})^\intercal$.

(4) Hier hat jeder Eigenwert λ geometrische Vielfachheit 1: Genau dann ist A diagonalisierbar, wenn p verschiedene Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ hat; genauer gilt $V^{-1} A V = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ mit der **Vandermonde–Matrix**

$$V = V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1^0 & \dots & \lambda_n^0 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Andernfalls ist die Matrix A nicht diagonalisierbar: Zu jedem Eigenwert der Vielfachheit $\ell \geq 1$ gehört eine einzige Hauptvektorkette der Länge ℓ und somit ein Jordan–Block der Größe $\ell \times \ell$. Auch das kommt also vor.

Reduktion der Ordnung und Methodenvergleich

(5) Sei λ eine Nullstelle der Vielfachheit $\ell \geq 1$. Hierzu hat $p(\partial)\, y(t) = 0$ die Hauptlösungen $y_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$, $\quad y_2(t) = t\, \mathrm{e}^{\lambda t}$, $\quad \dots$, $\quad y_\ell(t) = \frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!}\, \mathrm{e}^{\lambda t}$.
Diesen Lösungen von $p(\partial)\, y(t) = 0$ entsprechen bei $\dot{u}(t) = A\, u(t)$ wie erklärt die Hauptfunktionen $u_1, u_2, \dots, u_\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, ausgeschrieben:

$$u_1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)} \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_2' \\ \vdots \\ y_2^{(n-1)} \end{pmatrix}, \; \dots, \; u_\ell = \begin{pmatrix} y_\ell \\ y_\ell' \\ \vdots \\ y_\ell^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

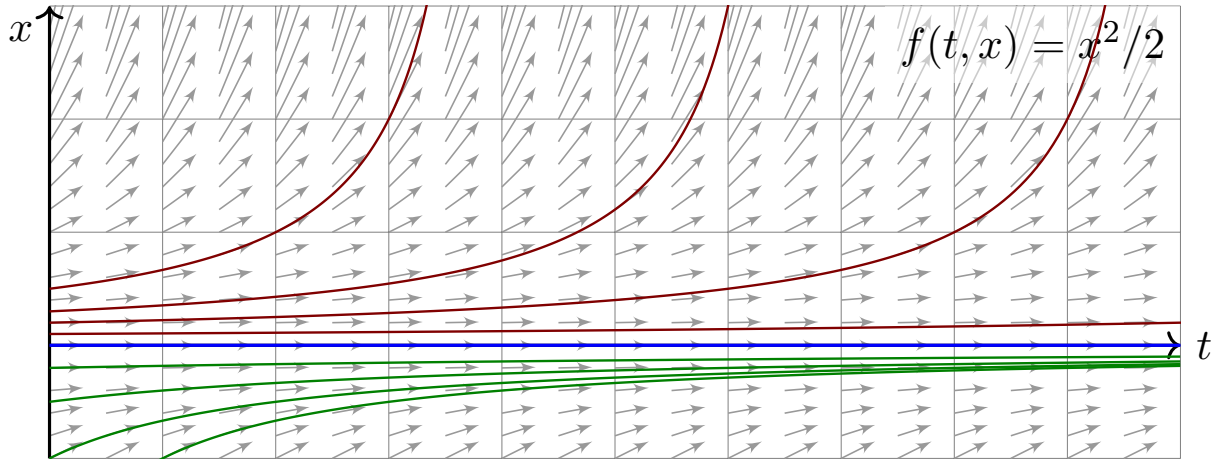
Ausgewertet in $t = 0$ erhalten wir die Hauptvektoren $v_1, v_2, \dots, v_\ell \in \mathbb{C}^n$:

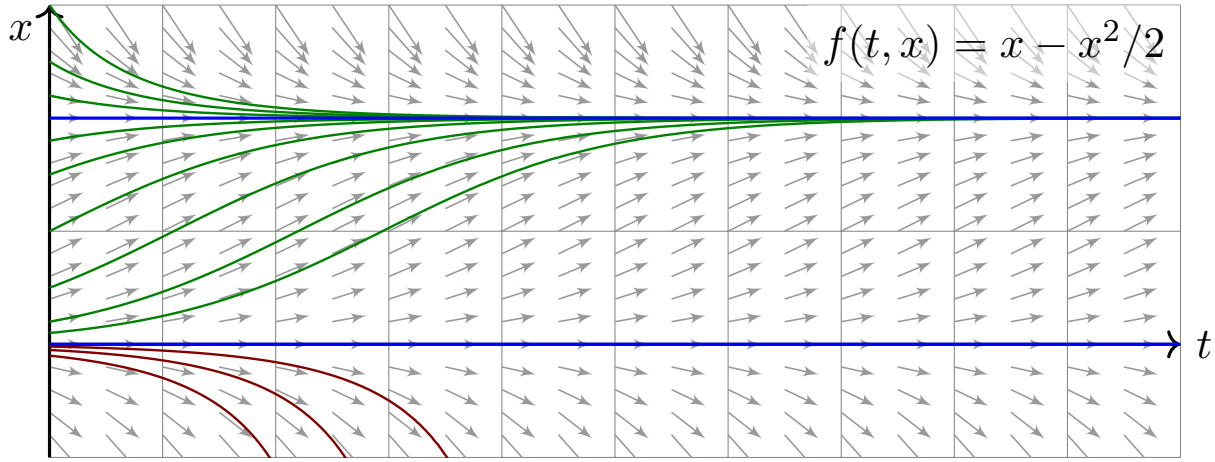
$$v_1 = \begin{pmatrix} \lambda^0 \\ \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda^{(n-1)} \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1\lambda^0 \\ \vdots \\ (n-1)\lambda^{(n-2)} \end{pmatrix}, \; \dots, \; v_\ell = \begin{pmatrix} \binom{0}{\ell-1}\lambda^{(1-\ell)} \\ \binom{1}{\ell-1}\lambda^{(2-\ell)} \\ \vdots \\ \binom{n-1}{\ell-1}\lambda^{(n-\ell)} \end{pmatrix}$$

☺ Für Eigenvektoren & -funktionen ist das schön, leicht und erhellend.
Für Hauptvektoren & -funktionen geht alles genauso, ist aber mühsamer.

Eindimensionale Dynamik: Fixpunkte & Stabilität

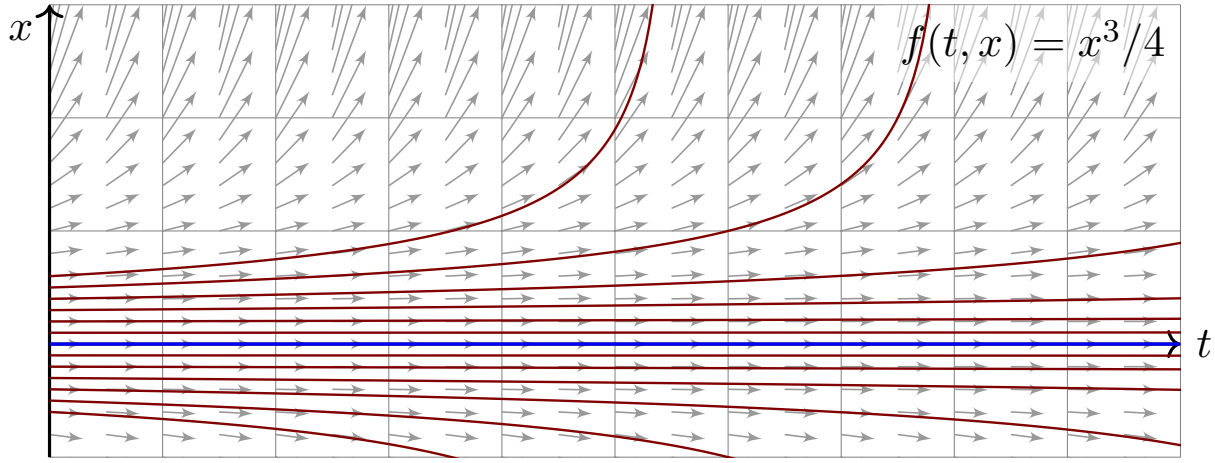
P321
Ausführung

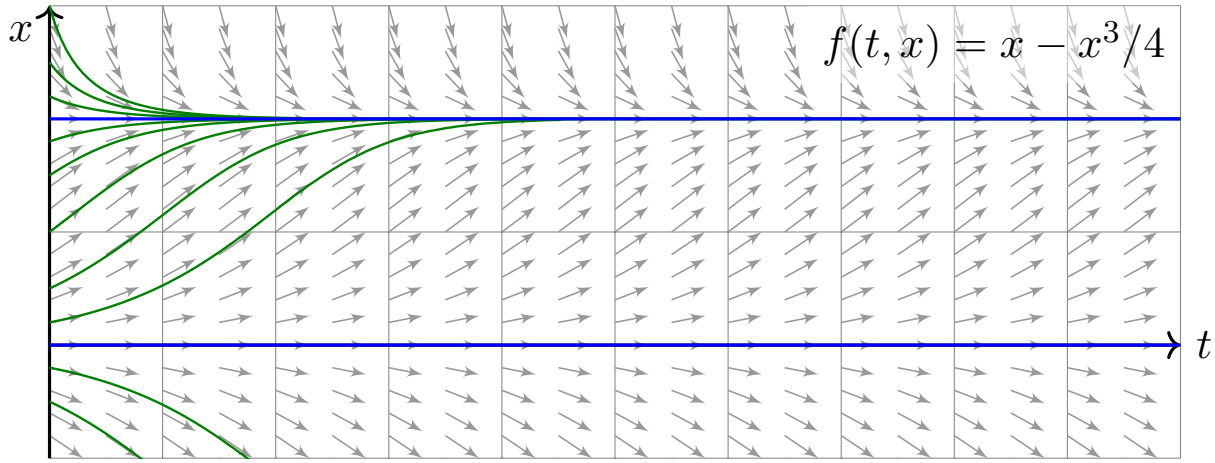




Eindimensionale Dynamik: Fixpunkte & Stabilität

P322
Ausführung





Eindimensionale Dynamik: Fixpunkte & Stabilität

Aufgabe: Zu $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ untersuchen wir die nicht-lineare Gleichung

$$\boxed{\dot{x} = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 \quad \text{für} \quad x : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}.}$$

Diese Differentialgleichung ist recht einfach aber lehrreich: Sie illustriert das Wechselspiel zwischen Linearisierung und höheren Ordnungen.

(1) Finden Sie alle Fixpunkte, jeweils in Abhängigkeit von α, β, γ.
(2) Wie lautet die Linearisierung um 0? Lösungen? Stabilität?
(3) Diskutieren Sie die Stabilität der nicht-linearen Gleichung.
(3a) Nutzen Sie möglichst effizient die Stabilitätskriterien.
(3b) Wo nötig / möglich lösen Sie die Gleichung explizit.
(3c) Skizzieren Sie die Lösungen, notfalls numerisch.

Lösung: (1) Ein Fixpunkt ist $x = 0$, für $\alpha \neq 0 = \beta = \gamma$ der einzige, für $\beta \neq 0 = \gamma$ auch $-\alpha/\beta$, für $\gamma \neq 0$ auch $(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma})/(2\gamma)$.

(2) Die Linearisierung um $x = 0$ lautet $\dot{x} = \alpha x$. Lösung $x(t) = x_0\, \mathrm{e}^{\alpha t}$. Für $\alpha < 0$ asymptotisch stabil, für $\alpha > 0$ instabil. Im kritischen Fall $\alpha = 0$ sind alle Lösungen konstant, der FP also stabil aber nicht asymptotisch.

Eindimensionale Dynamik: Fixpunkte & Stabilität

(3a) Für $\alpha < 0$ ist der Fixpunkt $x = 0$ stabil, für $\alpha > 0$ instabil.

Im kritischen Fall $\alpha = 0$ müssen wir die zweite Ordnung betrachten:

- Für $\beta > 0$ ist der FP linksseitig stabil aber rechtsseitig instabil.
- Für $\beta < 0$ ist der FP rechtsseitig stabil aber linksseitig instabil.

Also ist für $\alpha = 0$ und $\beta \neq 0$ der Fixpunkt $x = 0$ nicht stabil!

Im kritischen Fall $\alpha = \beta = 0$ müssen wir die dritte Ordnung betrachten: Für $\gamma < 0$ ist der Fixpunkt beidseitig stabil, für $\gamma > 0$ beidseitig instabil.

(3b) Lösung von $\dot{x} = \beta x^2$ bzw. $\dot{x} = \alpha x + \beta x^2$, Bernoulli–Gleichung M413:

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 \beta t}, \qquad x(t) = \frac{x_0\, \mathrm{e}^{\alpha t}}{1 - x_0 \beta (\mathrm{e}^{\alpha t} - 1)/\alpha}$$

Lösung von $\dot{x} = \gamma x^3$ bzw. $\dot{x} = \alpha x + \gamma x^3$, Bernoulli–Gleichung M413:

$$x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{1 - 2x_0^2 \gamma t}}, \qquad x(t) = \frac{x_0\, \mathrm{e}^{\alpha t}}{\sqrt{1 - x_0^2 \gamma (\mathrm{e}^{2\alpha t} - 1)/\alpha}}$$

☺ Probe! Quantitativ (3b) ist es mühsam, qualitativ (3a) ist es leicht.

Zweidimensionale Dynamik: Fixpunkte & Stabilität

Aufgabe: (1) Zu lösen sei das lineare DGSystem $\dot{u}(t) = A\,u(t)$ mit

$$\text{(a)} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \text{(b)} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ist der Fixpunkt $(0,0)$ stabil? oder instabil? von welchem Typ?
Gibt es außer dem Ursprung $(0,0)$ noch weitere Fixpunkte?

(2) Untersuchen ebenso Sie die folgenden nicht-linearen Systeme:

$$\text{(a)} \quad \dot{x} = 2x + y, \qquad \dot{y} = 3x + 3y^2 \quad \text{um } (0,0)$$
$$\text{(b)} \quad \dot{x} = -2x - 5y, \quad \dot{y} = x + 3x^2 \quad \text{um } (0,0)$$

(3) Untersuchen Sie die Stabilität mit Hilfe einer Lyapunov–Funktion:

$$\text{(a)} \quad \dot{x} = -x^3 - y, \quad \dot{y} = x - y^3, \quad V(x,y) = \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}y^2$$
$$\text{(b)} \quad \dot{x} = x^5 - 3y, \quad \dot{y} = 2x + y^3, \quad V(x,y) = 2x^2 + 3y^2$$

(4) Seien $a, b > 0$. Untersuchen Sie die Stabilität von $\dot{x} = \alpha x^3 - by$, $\dot{y} = ax + \beta y^3$ mit Hilfe der Lyapunov–Funktion $V(x,y) = ax^2 + by^2$.

Zweidimensionale Dynamik: Fixpunkte & Stabilität

Lösung: Dank Katalog: (1a) $\det A = -3$: instabil! genauer: Sattelpunkt.
(1b) $\det A = 5$, $\operatorname{tr} A = -2$, $\Delta A = -4$: stabil! genauer: stabiler Strudel.

☺ Determinante, Spur und Diskriminante genügen hierzu bereits!
Übung: Führen Sie die Rechnung aus bis zu Eigen-/Hauptfunktionen.

(2) Wir linearisieren $(\dot{x}, \dot{y}) = f(x,y)$ um den angegeben Fixpunkt.
Als Jacobi–Matrix erhalten wir jeweils ein Beispiel aus (1).

☺ Die Linearisierung vereinfacht das Problem ganz wesentlich:
Ein Lob an die effizienten Methoden der Linearen Algebra!

(3a) $\dot{V} = x\dot{x} + y\dot{y} = -x^4 - xy + xy - y^4 < 0 \Rightarrow$ asymp. stabil dank P2C
(3b) $\dot{V} = 4x\dot{x} + 6y\dot{y} = 4x^6 - 12xy + 12yx + 6y^4 > 0 \Rightarrow$ instabil dank P2C

☹ Linearisierung und Eigenwertkriterium P2D genügen hier nicht.
☺ Eine geeignete Lyapunov–Funktion löst das Problem elegant.

(4) Es gilt $\dot{V} = ax\dot{x} + by\dot{y} = \alpha a x^4 + \beta b y^4$. Für $\alpha, \beta \le 0$ ist der Fixpunkt $(0,0)$ stabil, für $\alpha, \beta < 0$ sogar asymptotisch stabil, für $\alpha, \beta > 0$ instabil.

Übung: Denken Sie sich selbst weitere Beispiele dieser Art aus!
Falls Ihnen nichts einfällt, untersuchen Sie zufällige DGSysteme.

Klassifikation zweidimensionaler linearer Dynamik

☺ Diese Übersicht und Klassifikation der zweidimensionalen Dynamik um einen Fixpunkt beruht auf unserem Verständnis der linearen Algebra: Wie bei jeder Klassifikation stellen sich zwei Fragen: Ist unsere Liste vollständig, haben wir also wirklich alle möglichen Fälle gefunden? Ist unsere Liste redundanzfrei, kommt also jeder Fall in unserer Liste höchstens einmal vor?

Satz P3A: Klassifikation von 2×2–Matrizen bis auf Konjugation

Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ können wir durch Basiswechsel konjugieren zu genau einer der folgenden Modellmatrizen:

$$M_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \le \mu \text{ in } \mathbb{R},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R} \text{ und } b > 0.$$

Dies sind die **Normalformen** oder **kanonischen Repräsentanten**: Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ enthält die Menge $\{\, T^{-1}AT \mid T \in \mathrm{GL}_2\,\mathbb{R} \,\}$ aller hierzu äquivalenten Matrizen genau eines der obigen Modelle.

Klassifikation zweidimensionaler linearer Dynamik

Aufgabe: Formulieren Sie den Beweis allgemein als Algorithmus: Eingabe $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, Ausgabe $T \in \mathrm{GL}_2\,\mathbb{R}$ mit $T^{-1}AT = M_i$ wie gefordert.

☺ Die Klassifikation P3A und den Algorithmus führen Sie in jedem Anwendungsbeispiel durch. Das können Sie genauso programmieren!

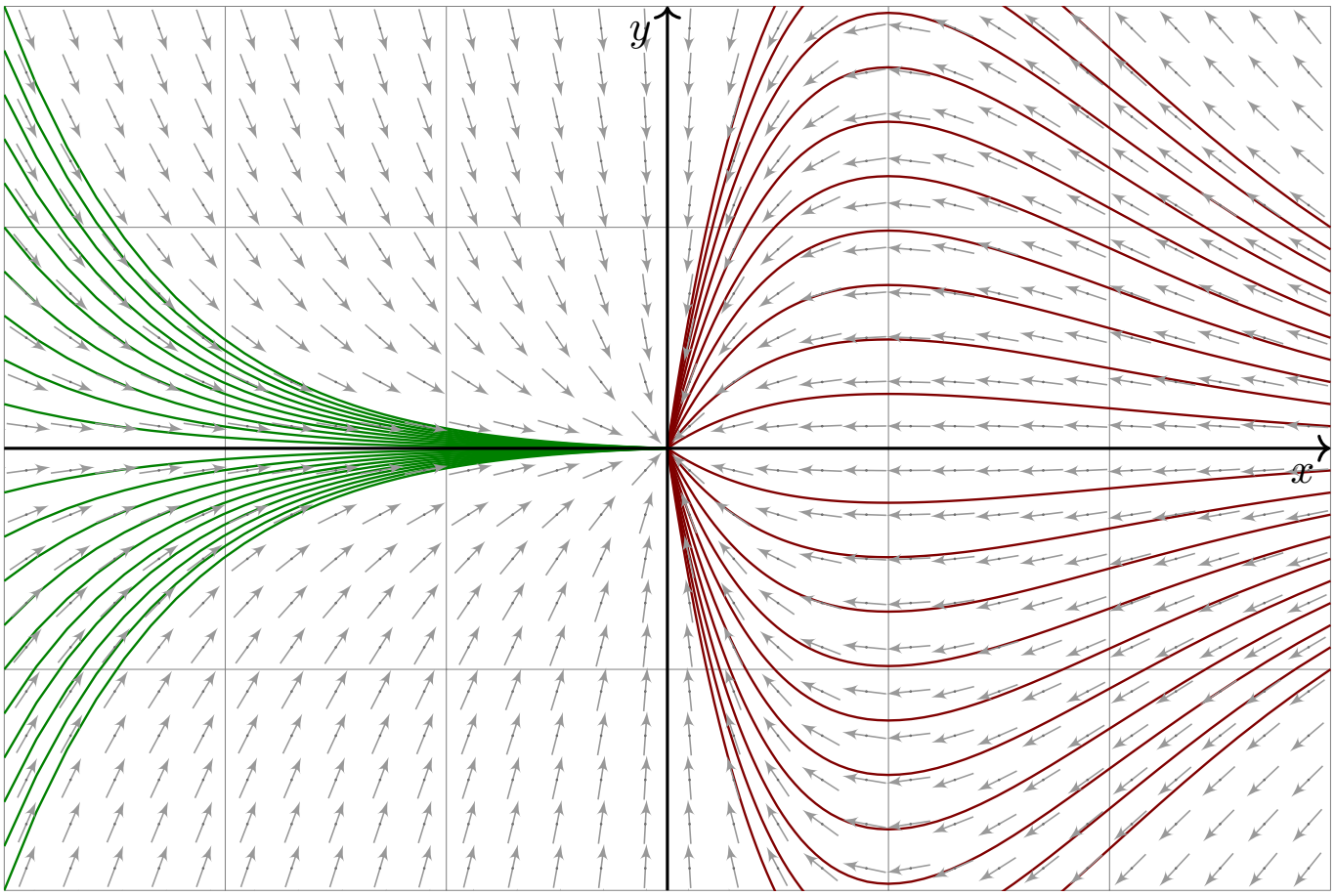
Lösung: (0) Berechne das char. Polynom $p_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$ und die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Unterscheide drei Fälle je nach Lage in $\mathbb{C}$:

(1) Zu $\lambda_1 < \lambda_2$ in $\mathbb{R}$ berechne Eigenvektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$. Dank N2B sind sie linear unabhängig. Die Matrix $T = (v_1, v_2)$ erfüllt $T^{-1}AT = \left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{smallmatrix}\right)$.

(2) Im Falle $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda \in \mathbb{R}$ ist $\dim_{\mathbb{R}} \ker(A - \lambda) \in \{1, 2\}$ möglich. Bei $\dim = 2$ wähle zwei linear unabhängige Eigenvektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ wie in (1). Bei $\dim = 1$ berechne eine Hauptvektorkette $0 \leftarrow\!\shortmid v_1 \leftarrow\!\shortmid v_2$. Die Matrix $T = (v_1, v_2)$ erfüllt $T^{-1}AT = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$.

(3) Im Falle $\lambda_{1/2} = a \pm \mathrm{i}b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $b > 0$ berechne Eigenvektoren $u_1 \in \mathbb{C}^2$ und $u_2 = \overline{u_1}$. Dank N2B sind sie $\mathbb{C}$–linear unabhängig. Realteil $v_1 = \operatorname{Re} u_1 = (u_1 + u_2)/2$ und Imaginärteil $v_2 = \operatorname{Im} u_1 = (u_1 - u_2)/2\mathrm{i}$ bilden eine Basis $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ mit $Av_1 = av_1 + bv_2$ und $Av_2 = av_2 + bv_1$. Die Matrix $T = (v_1, v_2)$ erfüllt $T^{-1}AT = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$.

Zweidimensionale Dynamik: Fixpunkte & Stabilität



Zweidimensionale Dynamik: Fixpunkte & Stabilität

Aufgabe: Wir untersuchen das nicht-lineare Differentialgleichungssytem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x, \\ \dot{y} &= -y + xy. \end{aligned}$$

(1) Schreiben Sie dies als $(\dot{x}, \dot{y}) = f(x, y)$ mit Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Finden Sie alle Fixpunkte dieses Systems, also Nullstellen von f.

(2) Skizzieren Sie das Vektorfeld f auf dem Rechteck $[-3, 3] \times [-2, 2]$.

(3) Linearisieren Sie um den Fixpunkt $(0, 0)$: Was ist die Jacobi–Matrix? Welchen Typ hat der Fixpunkt (laut unserem Katalog)? Ist er in/stabil?

(4) Ist $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 + \ln(1 + y^2)$ eine Lyapunov–Funktion? Ausführlich gefragt: Wo gilt $E = 0$? Wo gilt $E > 0$? Gilt hier $\dot{E} < 0$? Was folgt damit für das asymptotische Verhalten der Lösungen?

(5) Lösen Sie explizit das nicht-lineare Differentialgleichungssytem. Wie verhalten sich die Lösungen $(x(t), y(t))$ für $t \to \infty$?

Lösung: (1) Das Vektorfeld ist hier $f(x, y) = (-x, -y + xy)$. Für jeden Fixpunkt gilt $f(x, y) = 0$. Einzige Lösung ist $(0, 0)$.

Zweidimensionale Dynamik: Fixpunkte & Stabilität

(3) Die Linearisierung von f um den Fixpunkt $(0,0)$ ist offensichtlich:

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}}_{=\,f'(0,0)\,=:\,A}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix}0\\xy\end{pmatrix}}_{=:\,g(x,y)}$$

Die Lösung $t \mapsto \mathrm{e}^{At}$ der linearen Gleichung ist eine zentrale Kontraktion. Der Fixpunkt $(0,0)$ ist stabil, zumindest lokal unter kleinen Störungen.

(4) Es gilt $E(0,0) = 0$. Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ gilt $E(x,y) > 0$ sowie

$$\begin{aligned}
\dot{E}(x,y) &= \partial_x E(x,y)\cdot\dot{x} + \partial_y E(x,y)\cdot\dot{y} &&= 2x\cdot\dot{x} + \frac{2y}{1+y^2}\cdot\dot{y}\\
&= -2x^2 + \frac{2y^2(x-1)}{1+y^2} &&= \frac{-2x^2(1+y^2)+2y^2(x-1)}{1+y^2}\\
&= -\frac{2x^2+y^2+x^2y^2+(1-x)^2y^2}{1+y^2} &&< 0
\end{aligned}$$

Somit ist E eine Lyapunov–Funktion (P2C) und zudem strikt dissipativ. Der Fixpunkt $(0,0)$ ist asymptotischh stabil, wie bereits erwartet dank der obigen Linearisierung (3), zumindest lokal unter kleinen Störungen.

Zweidimensionale Dynamik: Fixpunkte & Stabilität

Genauer: Jede Menge $K(c) := \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid E(x,y) \le c\,\}$ ist kompakt. Zu jedem Startwert $(x(0),y(0)) \in \mathbb{R}^2$ mit $E(x(0),y(0)) \le c$ verbleibt die Lösung $(x(t),y(t))$ daher in $K(c)$ und existiert daher für alle Zeit $t \ge 0$.

Entlang jeder Lösung $(x(t),y(t))$ gilt $\dot{E} < 0$, also fällt $t \mapsto E(x(t),y(t))$ streng monoton und konvergiert für $t \to \infty$: Wir vermuten gegen Null! Dank Konvergenz $E \searrow e$ gilt $\dot{E} \to 0$. Dies ist nur für $(x,y) \to 0$ möglich!

(5) Wir lösen $\dot{x} = -x$ durch $x(t) = x_0\,\mathrm{e}^{-t}$ und dann $\dot{y} = (x-1)y$ als lineare Differentialgleichung (M2D) durch $y(t) = y_0 \exp[x_0(1-\mathrm{e}^{-t}) - t]$.

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_0\,\mathrm{e}^{-t}\\ y_0\exp[x_0(1-\mathrm{e}^{-t})-t]\end{pmatrix}$$

☺ Zu jedem Startwert $(x(0),y(0)) \in \mathbb{R}^2$ gilt tatsächlich Konvergenz $(x(t),y(t)) \to (0,0)$ für $t \to \infty$, wie in (4) bereits qualitativ gefunden.

☺ Die explizite Lösung beschert uns (wie immer) wesentlich genauere Aussagen über den Lösungsverlauf und die Konvergenzgeschwindigkeit.

⚠ Obwohl alle Lösungen gegen den Fixpunkt $(0,0)$ konvergieren, können sie zuvor noch beliebig große Umwege machen!

Populationsdynamik: Rehe und Wölfe

Aufgabe: Wir untersuchen das nicht-lineare Differentialgleichungssytem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (3 - x - y)\,x, \\ \dot{y} &= (1 - y + x)\,y. \end{aligned}$$

(1) Schreiben Sie dies als $(\dot{x}, \dot{y}) = f(x, y)$ mit Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Finden Sie alle Fixpunkte dieses Systems, also Nullstellen von f.

(2) Linearisieren Sie um jeden Fixpunkt p: Was ist die Jacobi–Matrix? Welchen Typ hat der Fixpunkt (laut unserem Katalog)? Ist er in/stabil?

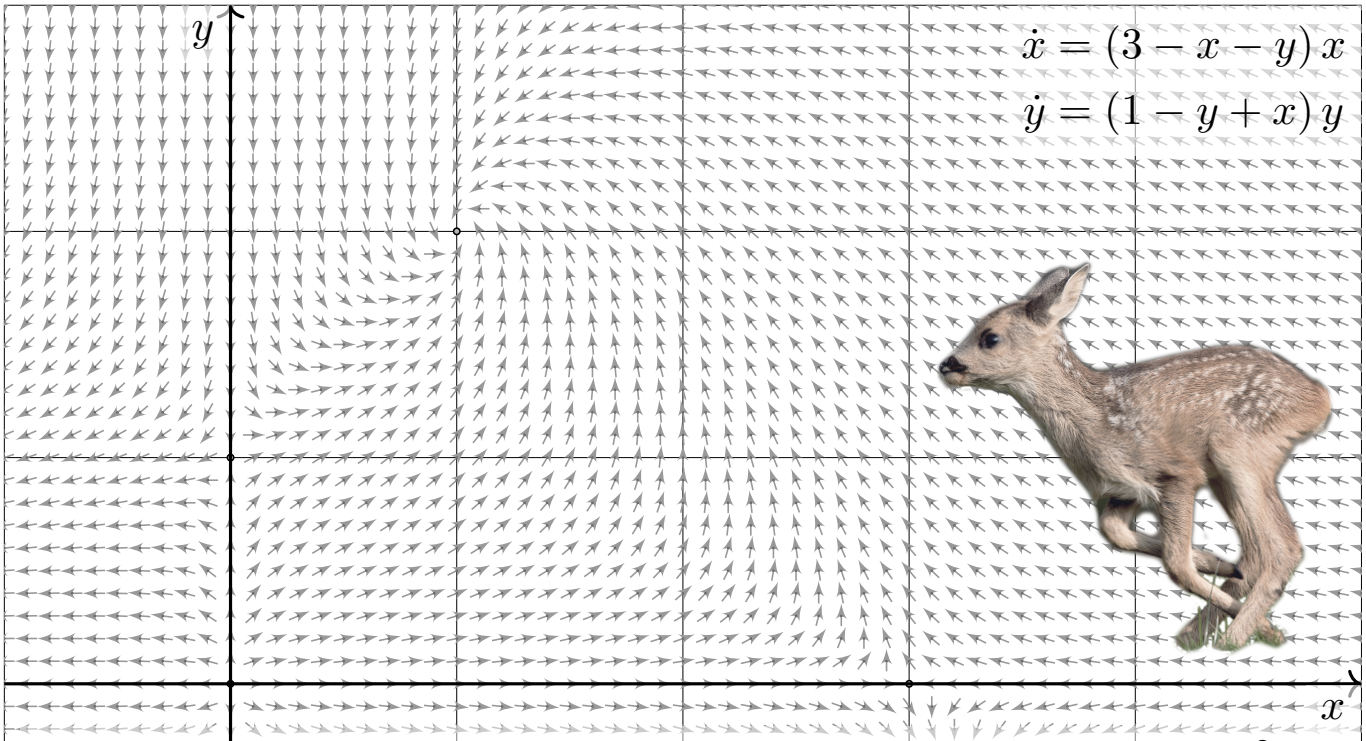
(3) Genauere Untersuchung: Finden Sie alle reellen Lösungen des linearisierten Differentialgleichungssystems um den Fixpunkt $p \in \mathbb{R}^2_{>0}$.

(4) Was bedeuten in den Fixpunkten die Eigenvektoren? Erklären Sie dies anschaulich-geometrisch in folgender Skizze des Vektorfeldes.

(5) Wie verhalten sich Lösungen $(x(t), y(t))$ mit Anfangspunkt $(x(0), y(0)) \in \mathbb{R}^2_{>0}$ für $t \to \infty$? Formulieren Sie eine qualitative Vermutung und begründen Sie diese anschaulich!

(6) Interpretation: Welche Lösungskurven passen zu der Geschichte „Rehe allein auf der Insel“ und anschließend „Die Ankunft der Wölfe“?

Populationsdynamik: Rehe und Wölfe



Wir skizzieren das Richtungsfeld auf dem Definitionsgebiet $\mathbb{R}^2$:
Sie erkennen Fixpunkte und den qualitativen Verlauf der Lösungen.
Versuchen Sie, einige Lösungskurven freihand einzuzeichnen!

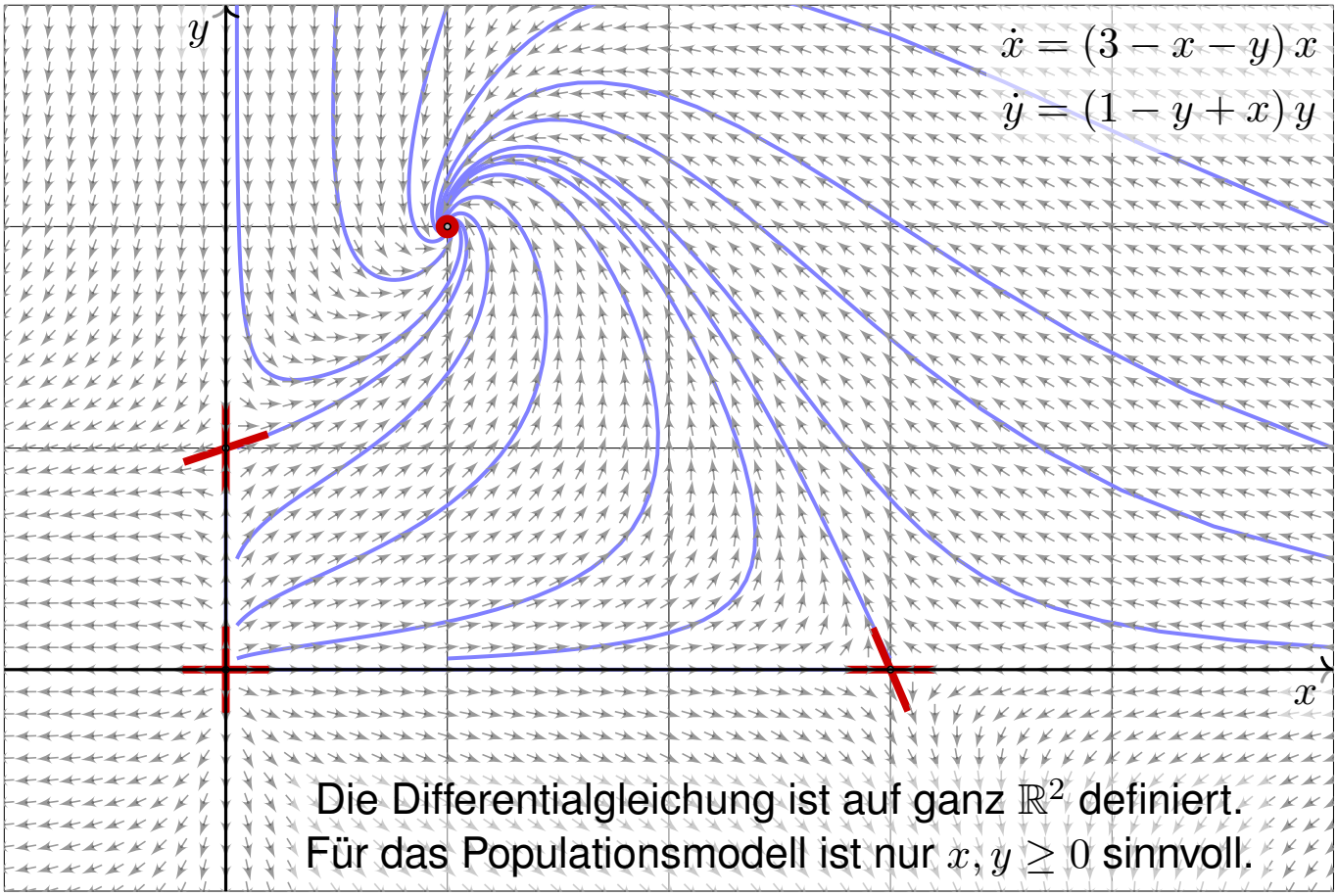
Populationsdynamik: Rehe und Wölfe

Interpretation / Motivation: Auf einer Insel vermehren sich Rehe. Zunächst wächst die noch kleine Rehpopulation proportional zur Populationsgröße $x(t)$, im Beispiel $\dot{x}(t) \approx 3x(t)$. Bei wachsender Population machen sich die begrenzten Ressourcen bemerkbar: Realistischer ist die logistische Gleichung $\dot{x} = (3-x)x$, siehe M405. Fixpunkte sind hier $x = 0$ (keine Rehe) und $x = 3$ (Gleichgewicht).

Eines Tages schwimmt ein Rudel Wölfe zur Insel. Die Rehpopulation $x(t)$ bietet der Wolfspopulation $y(t)$ reichlich Nahrung: Für die Wölfe gilt $\dot{y} = (1-y)y + xy$. Für die Rehe hingegen gilt jetzt $\dot{x} = (3-x)x - xy$. Die Entwicklung dieser beiden Populationen ist damit ein gekoppeltes nicht-lineares Differentialgleichungssystem. Voilà, unsere Aufgabe!

Die obige Skizze zeigt das Vektorfeld (auf Einheitslänge normiert). Sie erkennen hier graphisch die vier Fixpunkte, die Sie in Frage (1) explizit ausrechnen. Sie sehen auch den Typ jedes Fixpunkts (2). Quantitativ und ausführlich berechnen Sie dies für den besonders interessanten Fixpunkt (3), die anderen behandeln Sie analog (4). Damit können Sie das Verhalten der Lösungen beschreiben und erklären (5).

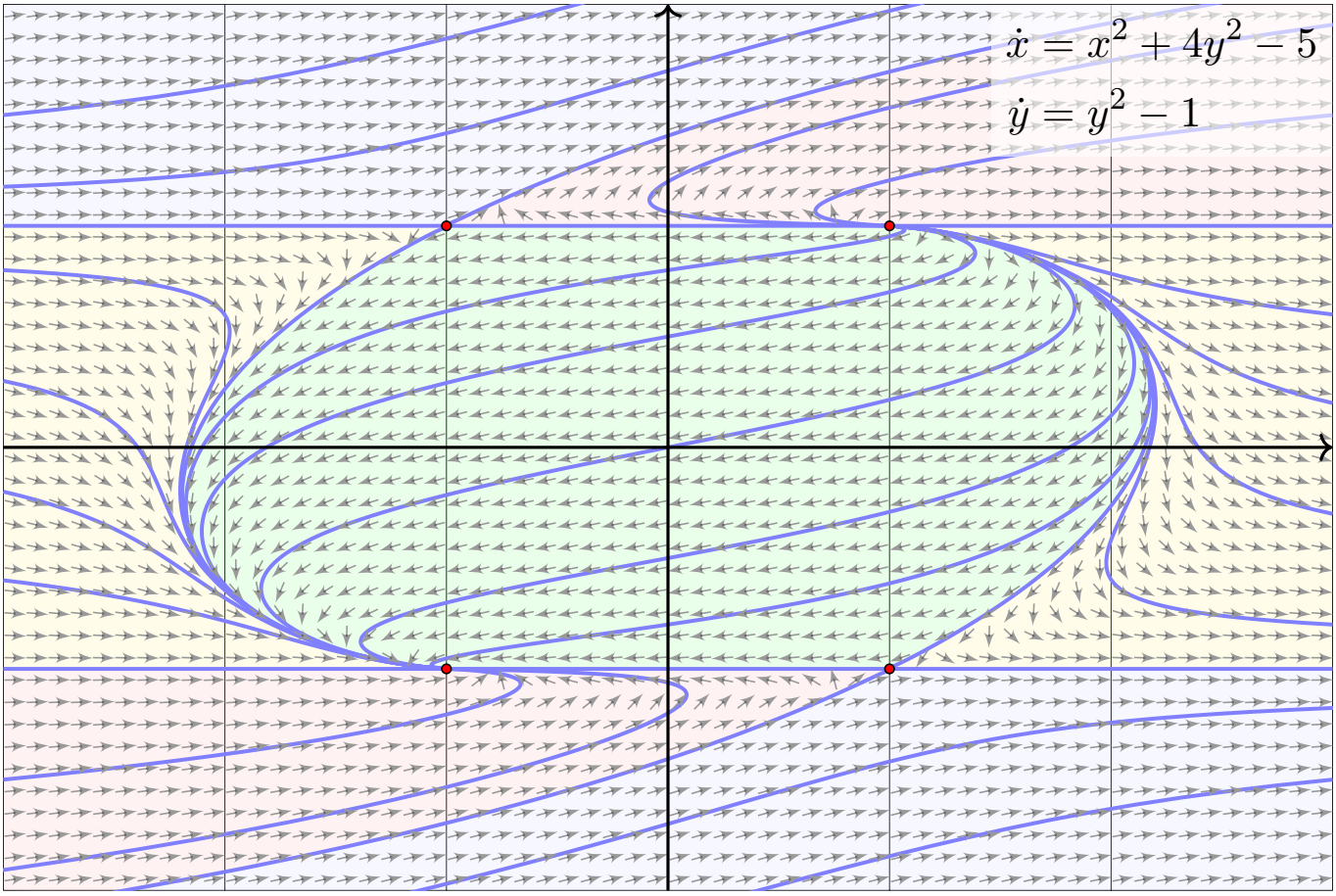
Populationsdynamik: Rehe und Wölfe



Die Differentialgleichung ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert.
Für das Populationsmodell ist nur $x, y \geq 0$ sinnvoll.

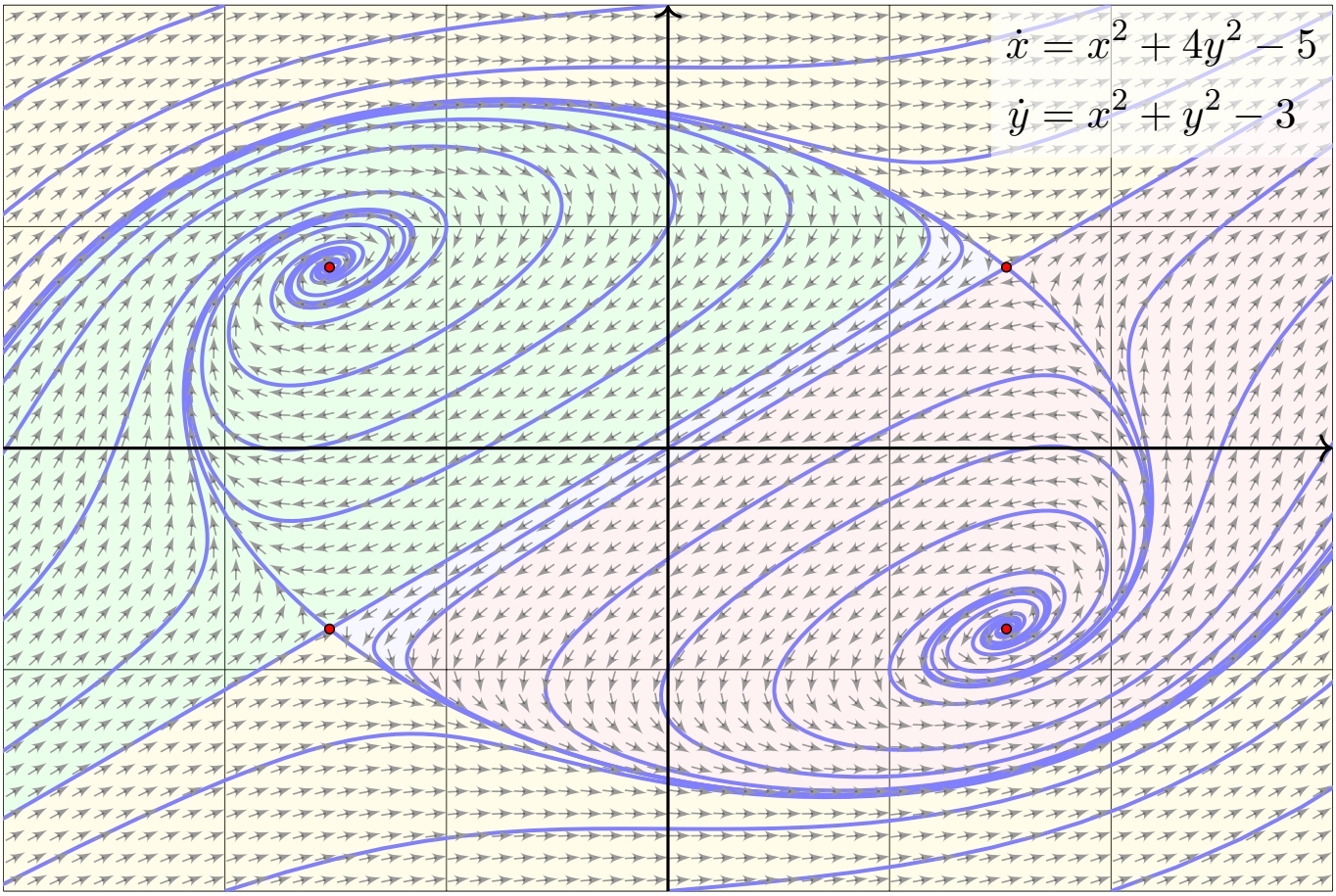
Dynamik eines quadratischen Vektorfeldes in der Ebene

P337
Beispiel



Dynamik eines quadratischen Vektorfeldes in der Ebene

P338
Beispiel



Dynamik polynomialer Vektorfelder in der Ebene

$$\begin{aligned} \dot{x} = P(x,y) &= p_{00} + p_{10}x + p_{01}y + p_{20}x^2 + p_{11}xy + p_{02}y^2 + \dots \\ \dot{y} = Q(x,y) &= q_{00} + q_{10}x + q_{01}y + q_{20}x^2 + q_{11}xy + q_{02}y^2 + \dots \end{aligned}$$

Wir betrachten die Differentialgleichung $(\dot{x}, \dot{y}) = (P, Q)$ in der Ebene $\mathbb{R}^2$. Die Funktionen $P, Q \in \mathbb{R}[x, y]$ seien Polynome in x, y vom Grad $\leq n$.

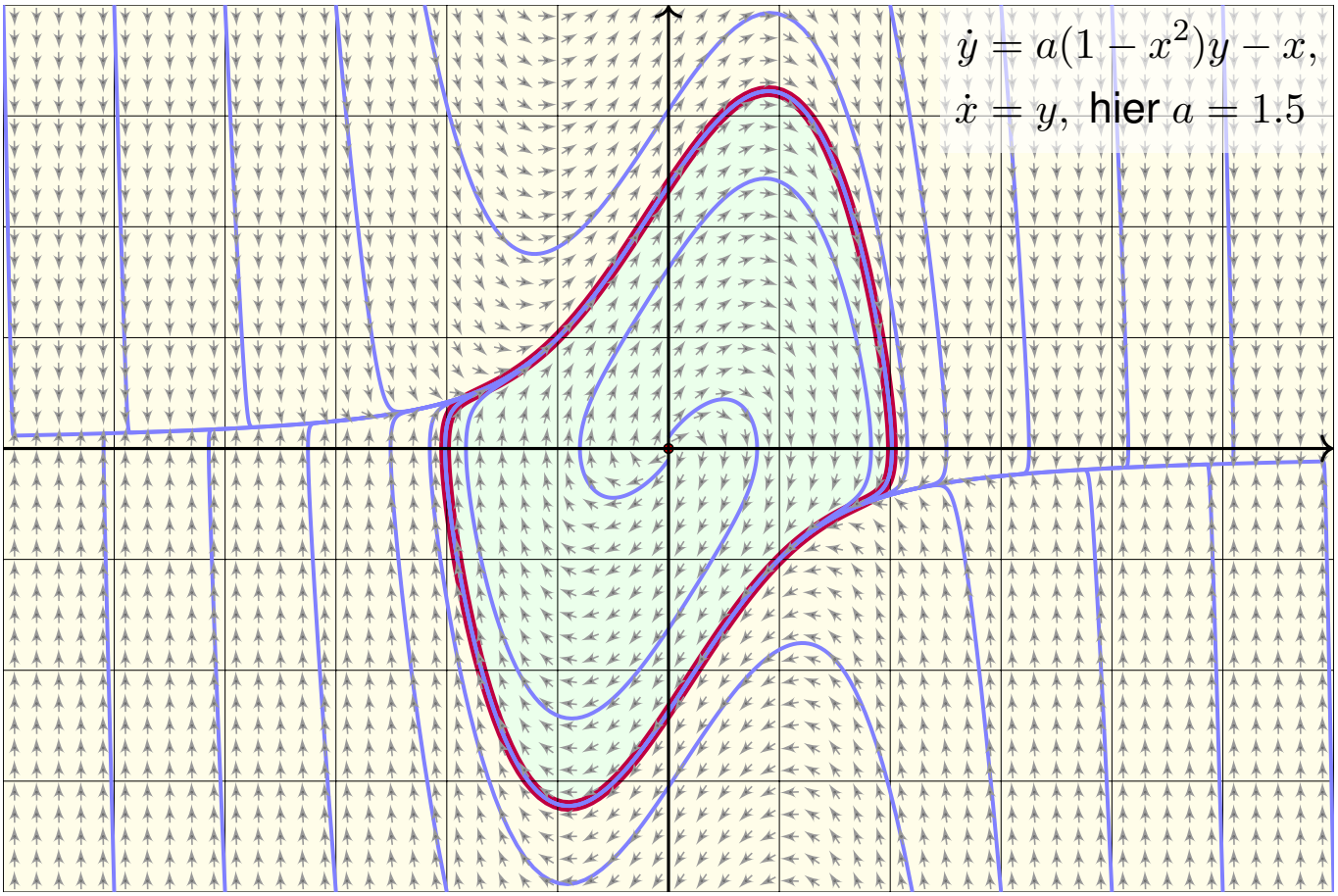
Für Grad $n = 1$ haben wir ein **affin-lineares Vektorfeld**. Hierzu gibt es typischerweise genau einen Fixpunkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, und um diesen ist die Dynamik exakt linear. Dies konnten wir oben vollständig lösen!

Für Grad $n = 2$ haben wir ein **quadratisches Vektorfeld**. Hierzu gibt es typischerweise vier Fixpunkte; zur Berechnung nutzen wir Quadriken. Folgende Beispiele zeigen **polynomiale Vektorfelder** vom Grad $n = 3$.

Die globale Dynamik in der Ebene ist verblüffend vielfältig. Hilberts 16. Problem fragt nach einer Klassifikation oder zumindest einer groben Zählung, `en.wikipedia.org/wiki/Hilbert's_sixteenth_problem`.

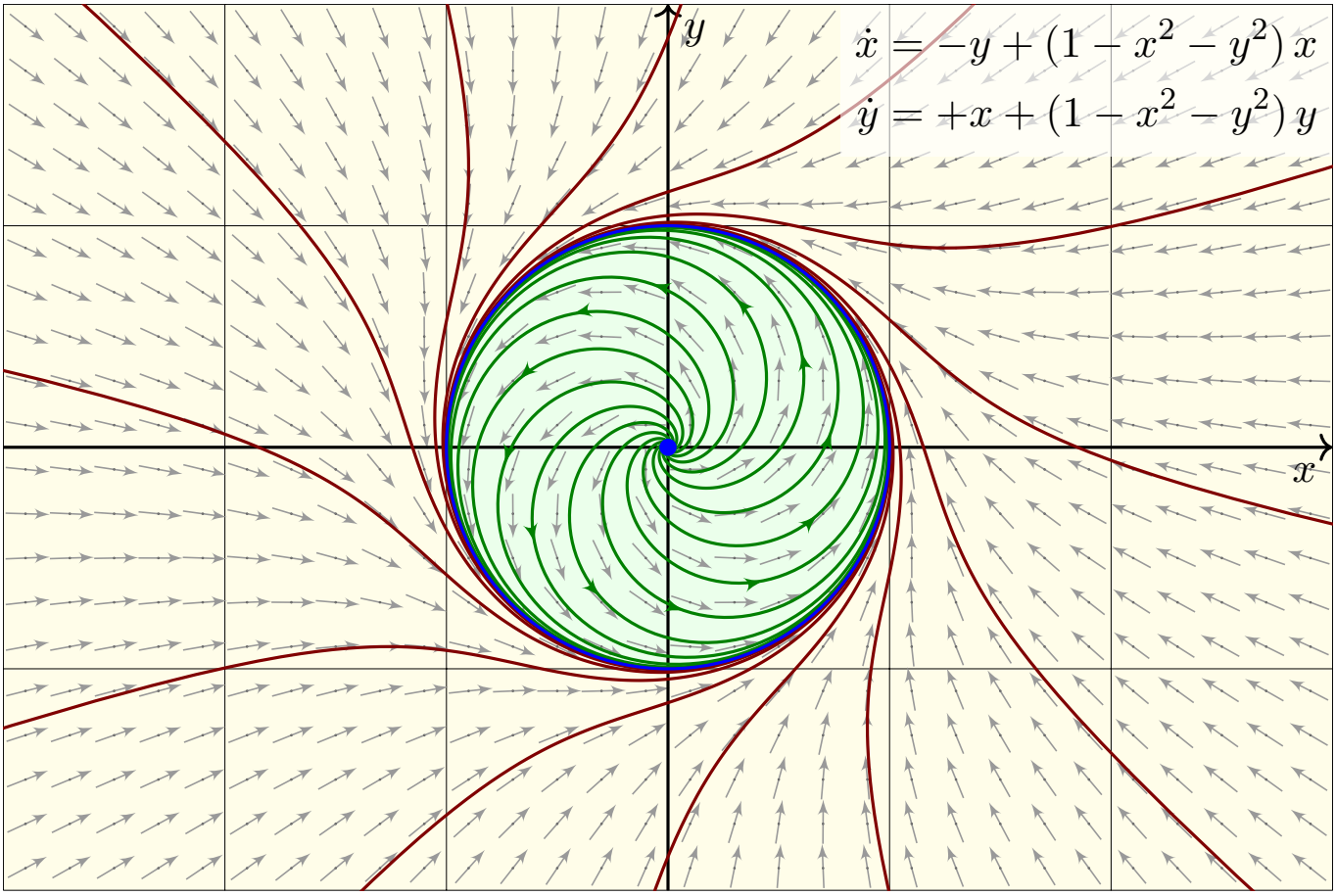
In drei Dimensionen sind zudem **chaotisches Verhalten** und **seltsame Attraktoren** möglich, `de.wikipedia.org/wiki/Lorenz-Attraktor`.

Der Van-der-Pol-Oszillator und sein Grenzzyklus / Attraktor



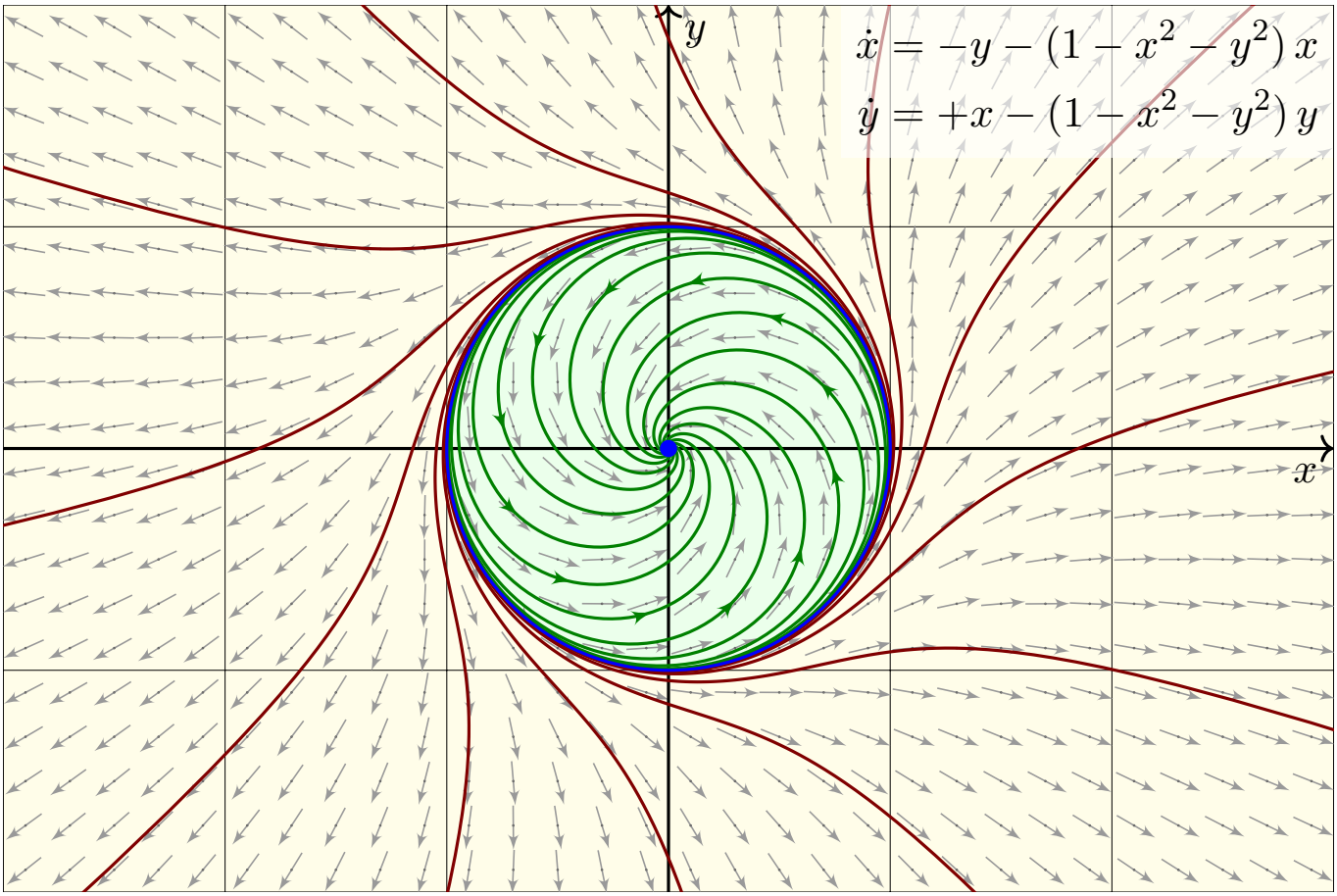
Kreisförmiger Attraktor und Stabilität

P341
Ergänzung



Kreisförmiger Attraktor und Instabilität

P342
Ergänzung



Kreisförmiger Attraktor und In/Stabilität

Aufgabe: Wir untersuchen das autonome dynamische System

$$\begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-y\\ x\end{pmatrix} + \alpha\,(1-x^2-y^2)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

(1) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist das System linear? Was sind dann Lösungen?

(2) Bestimmen Sie alle Fixpunkte und diskutieren Sie ihre Stabilität:
Wie lautet die Linearisierung? die Eigenwerte? das Stabilitätskriterium?

(3) Bestimmen Sie alle Lösungen durch explizite Lösungsformeln.
Nutzen Sie Polarkoordinaten $\big(x(t), y(t)\big) = r(t)\big(\cos\varphi(t), \sin\varphi(t)\big)$.

Lösung: (1) Das System ist linear genau für $\alpha = 0$. Lösungen von $(\dot x, \dot y) = (-y, x)$ sind $r_0(\cos(t-t_0), \sin(t-t_0))$ für $r_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $t_0 \in \mathbb{R}$.
(Für $\alpha \neq 0$ kommt eine radiale Bewegung hinzu, wie in (3) berechnet.)

(2) Der einzige Fixpunkt ist $(0,0)$. Die Linearisierung um $(0,0)$ ist

$$\begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha x - y\\ x + \alpha y\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix}\alpha & -1\\ 1 & \alpha\end{pmatrix}.$$

Charakteristisches Polynom $p(\lambda) = (\alpha-\lambda)^2 + 1$, Eigenwerte $\lambda = \alpha \pm \mathrm{i}$.

Kreisförmiger Attraktor und In/Stabilität

☺ Aus diesen Daten können wir bequem die Stabilität ablesen:
Für $\alpha > 0$ ist der Fixpunkt $(0,0)$ instabil. (Erste Skizze oben: $\alpha = 1$)
Für $\alpha < 0$ ist er asymptotisch stabil. (Zweite Skizze oben: $\alpha = -1$)

(3) Die beiden Gleichungen entkoppeln zu $\dot\varphi = 1$ und $\dot r = \alpha\, r(1-r^2)$.
Konstante Lösungen $r = 0$ (Fixpunkt) und $r = 1$ (Kreis, siehe Skizze).
Bernoulli–Gleichung $\dot r = \alpha\, r - \alpha\, r^3$ M413 dank Substitution $v = r^{-2}$:

$$r(t) = \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + (1-r_0^2)\,\mathrm{e}^{-2\alpha t}}}, \qquad r(0) = r_0$$

$$\alpha > 0: \quad \begin{cases} 0 < r_0 < 1: & r(t) \nearrow 1 \quad \text{für } t \nearrow \infty \\ r_0 > 1: & r(t) \searrow 1 \quad \text{für } t \nearrow \infty \end{cases}$$

$$\alpha < 0: \quad \begin{cases} 0 < r_0 < 1: & r(t) \searrow 0 \quad \text{für } t \nearrow \infty \\ r_0 > 1: & r(t) \nearrow \infty \quad \text{für } t \nearrow \alpha^{-1} \ln \sqrt{(r_0^2-1)/r_0^2} \end{cases}$$

☺ Die obigen Skizzen zeigen die typischen Fälle $\alpha = +1$ und $\alpha = -1$.
Für $\alpha > 0$ ist der Fixpunkt $(0,0)$ instabil, aber der Kreis ein Attraktor.
Für $\alpha < 0$ ist der Fixpunkt $(0,0)$ asympt. stabil, aber der Kreis repulsiv.
Das bestätigt und präzisiert die qualitative Stabilitätsanalyse aus (2).

Invariante Mengen und die Tangentialbedingung

Wir untersuchen ein autonomes dynamisches System $\dot{x} = f(x)$.
Hierzu sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und hierauf $f : \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}^n$ stetig.
Eine Teilmenge $K \subseteq G$ heißt **(positiv) invariant** bezüglich f,
wenn jede Lösung $x : [0, T[\to G$ mit $x(0) \in K$ ganz in K verläuft.
(Dies betrifft die positive Zeitrichtung. Für **negativ invariant** muss
jede Lösung $x :]-T, 0] \to G$ mit $x(0) \in K$ ganz in K verlaufen.)

Lemma P3B: maximale Lösungen in invariantem Kompaktum

Sei $K \Subset G$ kompakt und (positiv) invariant bezüglich f. Jede maximale Lösung mit Startwert $x(0) \in K$ existiert für alle $t \geq 0$ und verbleibt in K.

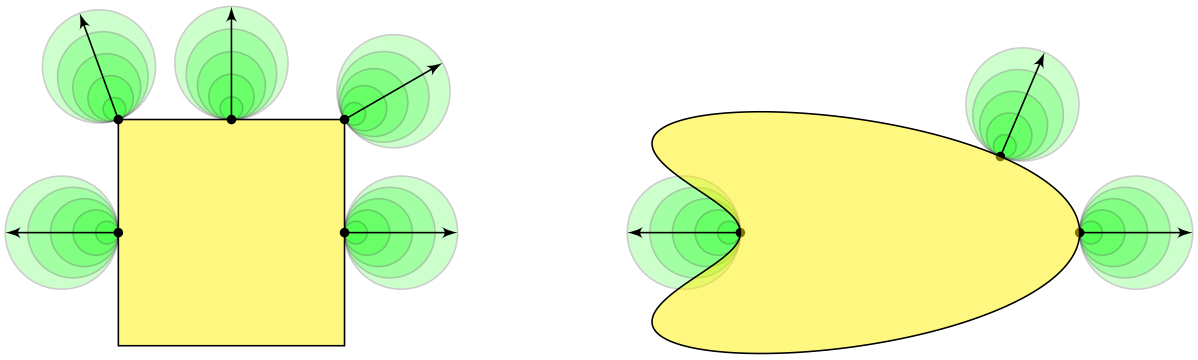
Aufgabe: Beweisen Sie dies! Benötigen Sie die Kompaktheit von K?

Lösung: Sei $x : [0, T[\to G : t \mapsto x(t)$ eine Lösung mit $0 < T < \infty$.
Aus der Startbedingung $x(0) \in K$ folgt $x(t) \in K$ für alle $t \in [0, T[$.
Wegen $|\dot{x}(t)| = |f(x(t))| \leq M := \max_K |f|$ gilt $|x(s) - x(t)| \leq M|s - t|$.
Dank dieser Cauchy–Bedingung konvergiert $x(t) \to x_T \in K$ für $t \nearrow T$.
Dank des ∃&E-Satzes O1B können wir die Lösung weiter fortsetzen.

⚠ Ohne Kompaktheit gilt dies nicht, wie $\dot{x} = x^2$ auf $\mathbb{R}$ zeigt (M113).

Invariante Mengen und die Tangentialbedingung

Wie prüfen wir möglichst effizient, ob eine Menge $K \subseteq G$ invariant ist?
Notwendig ist recht offensichtlich folgende geometrische Eigenschaft:



Tangentialbedingung: Das Vektorfeld f zeigt nirgends aus K heraus:
Für jede von $x \in \partial K$ nach außen weisende Einheitsnormale $n \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\boxed{f(x) \cdot n \leq 0.}$$

Ist der Rand ∂K im Punkt $x \in \partial K$ glatt, so bestimmt dies n eindeutig.
Allgemein fordern wir $|n| = 1$ und $K \cap B(x + \varepsilon n, \varepsilon) = \emptyset$ für ein $\varepsilon > 0$.

☺ Damit decken wir bequem alle Fälle ab, insbesondere alle Kompakta mit stückweise glattem Rand wie Quadrate und Würfel und ähnliches.

Invariante Mengen und die Tangentialbedingung

☺ Für C^1–Vektorfelder ist die Tangentialbedingung auch hinreichend:

Satz P3c: invariante Mengen dank Tangentialbedingung

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, $K \subseteq G$, und (K, f) erfülle obige Tangentialbedingung.

Dann ist (K, f) positiv invariant: Jede Lösung $x : [0, T[\to G$ des Systems $\dot{x} = f(x)$ mit Startwert $x(0) \in K$ verbleibt ganz in K.

Ist K zudem kompakt, so gilt: Jede maximale Lösung zu $\dot{x} = f(x)$ mit Startwert $x(0) \in K$ existiert für alle Zeit $t \geq 0$ und verbleibt ganz in K.

Aufgabe: (1) Untersuchen Sie wie oben das autonome System

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} + \alpha\,(1 - x^2 - y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$. Welche der Bälle $K = \overline{B}(0, r)$ sind invariant?
(2) Untersuchen Sie das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : f(x, y) = (1, \sqrt[3]{y(x)^2})$. Sind die Halbebenen $H_\pm = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \pm y \geq 0 \,\}$ invariant? Erfüllt $(H_\pm, f)$ die Tangentialbedingung? Lässt sich Satz P3c anwenden?

Invariante Mengen und die Tangentialbedingung

Lösung: (1) Obige Skizzen zeigen: Für $\alpha = 0$ ist jeder Ball invariant; für $\alpha > 0$ nur $r = 0$ und $r \geq 1$; für $\alpha < 0$ nur $0 \leq r \leq 1$. Dank Satz P3c können Sie es bequem nachrechnen: Alle Voraussetzungen sind erfüllt!

Im Sonderfall $r = 0$ enthält die Menge $K = \{(0, 0)\}$ nur den Nullpunkt; dieser ist für jeden Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Fixpunkt, somit ist K invariant.

Für $r > 0$ kennen wir die Randpunkte und die äußere Einheitsnormale:

$$(x, y) \in \partial K \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 = r^2 \quad \Longrightarrow \quad n = (x, y)/r$$

☺ Die Tangentialbedingung wird damit besonders einfach:

$$f(x, y) \cdot n = \alpha(1 - x^2 + y^2)(x^2 + y^2)/r = \alpha(1 - r^2)r \overset{!}{\leq} 0$$

(2) Das ist unser warnendes Beispiel $y'(x) = \sqrt[3]{y(x)^2}$ von Seite M325. Die obere Halbebene H_+ ist tatsächlich invariant, die untere Halbebene H_- jedoch nicht, wie die Lösung $t \mapsto (t, t^3/27)$ zeigt. Dennoch erfüllen beide Halbebenen $H_\pm$ die Tangentialbedingung, denn $f(x, 0) = (1, 0)$.

⚠ Der schöne und bequeme Satz P3c lässt sich nicht anwenden, da das hier betrachtete Vektorfeld f nicht stetig differenzierbar ist.

Zweidimensionale Dynamik und invariante Mengen

Aufgabe: Zu $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ untersuchen wir das lineare System

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Speziell sei A eine unserer Modellmatrizen aus der Klassifikation P211.
(1) Für welche Matrizen A ist die Kreisscheibe $D = \overline{B}(0,r)$ invariant?
(2) Für welche Matrizen A ist das Quadrat $Q = [-r,r]^2$ invariant?
(3) Skizzieren Sie das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ des Systems (P329)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x, \\ \dot{y} &= -y + xy. \end{aligned}$$

(4) Welche Rechtecke $K = [-a,a] \times [-b,b]$ sind unter f invariant?
(5) Skizzieren Sie das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ des Systems (P333)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (3 - x - y)\, x, \\ \dot{y} &= (1 - y + x)\, y. \end{aligned}$$

(6) Welche Rechtecke $K = [0,a] \times [0,b]$ sind unter g invariant?

Zweidimensionale Dynamik und invariante Mengen

☺ Invariante Teilmengen $K \Subset G$ des Systems $\dot{x} = f(x)$ erlauben uns, mögliche Lösungen geschickt einzugrenzen: Einmal in K, immer in K.

☺ Diese Sichtweise ist zwar etwas vergröbert, aber gerade deshalb oft nützlich, insbesondere wenn Sie Stabilitätsgarantien erarbeiten wollen.

☺ Dieser Ansatz gelingt selbst in schwierigen Situationen, wenn Sie den genauen Verlauf nicht bestimmen können (oder nicht wollen).

☺ Für einzelne Startpunkte können Sie die Trajektorien als numerische Näherungen berechnen (lassen). Das schützt Sie aber noch nicht vor eventuell bösartigen Ausreißern, hier helfen invariante Teilmengen!

Beispiele aus der Physik: Bleibt die Energie $E : G \to \mathbb{R}$ erhalten, also $\dot{E} = 0$, so ist jede Niveaumenge $E_{=c} = \{\, x \in G \mid E(x) = c \,\}$ invariant.

Nimmt die Energie ab, also $\dot{E} \le 0$, so ist noch jede Subniveaumenge $E_{\le c} = \{\, x \in G \mid E(x) \le c \,\}$ invariant: Trajektorien bleiben gefangen!

In dieser einfachen Aufgabe sollen Sie zunächst graphisch-anschaulich Kandidaten für invariante Mengen erkennen und dann rechnerisch-exakt mit der Tangentialbedingung und Satz P3C nachprüfen. Das hilft!

Zweidimensionale Dynamik und invariante Mengen

(1) Im Sonderfall $r = 0$ ist $D = \{(0,0)\}$ invariant: Fixpunkt! Sei nun $r > 0$. Die graphische Darstellung unserer 14 Modellfälle zeigt uns die Antwort:

- Unter $A = \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ ist D invariant nur für $a \leq 0$, sonst nicht:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a(x^2 + y^2) \overset{!}{\leq} 0$$

- Unter $A = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{smallmatrix}\right)$ ist D invariant nur für $\lambda, \mu \leq 0$, sonst nicht:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda x^2 + \mu y^2 \overset{!}{\leq} 0$$

- Unter $A = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$ ist D invariant nur für $\lambda \leq -\frac{1}{2}$, sonst nicht:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \lambda(x^2 + y^2) + xy \\ &= \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}(x - y)^2 \overset{!}{\leq} 0 \end{aligned}$$

Allgemein muss die Systemmatrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ negativ semidefinit sein.

Zweidimensionale Dynamik und invariante Mengen

(2) Im Sonderfall $r = 0$ ist $Q = \{(0,0)\}$ invariant: Fixpunkt! Sei nun $r > 0$. Die graphische Darstellung unserer 14 Modellfälle zeigt uns die Antwort: Wir diskutieren hier zunächst nur die rechte Quadratseite $\{r\} \times [-r, r]$; die anderen drei Seiten führen zu ähnlichen Gleichungen. (Übung)

- Unter $A = \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ ist Q invariant nur für $a \leq -|b|$, sonst nicht:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ y \end{pmatrix} = ra - by \overset{!}{\leq} 0$$

- Unter $A = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{smallmatrix}\right)$ ist Q invariant nur für $\lambda, \mu \leq 0$, sonst nicht:

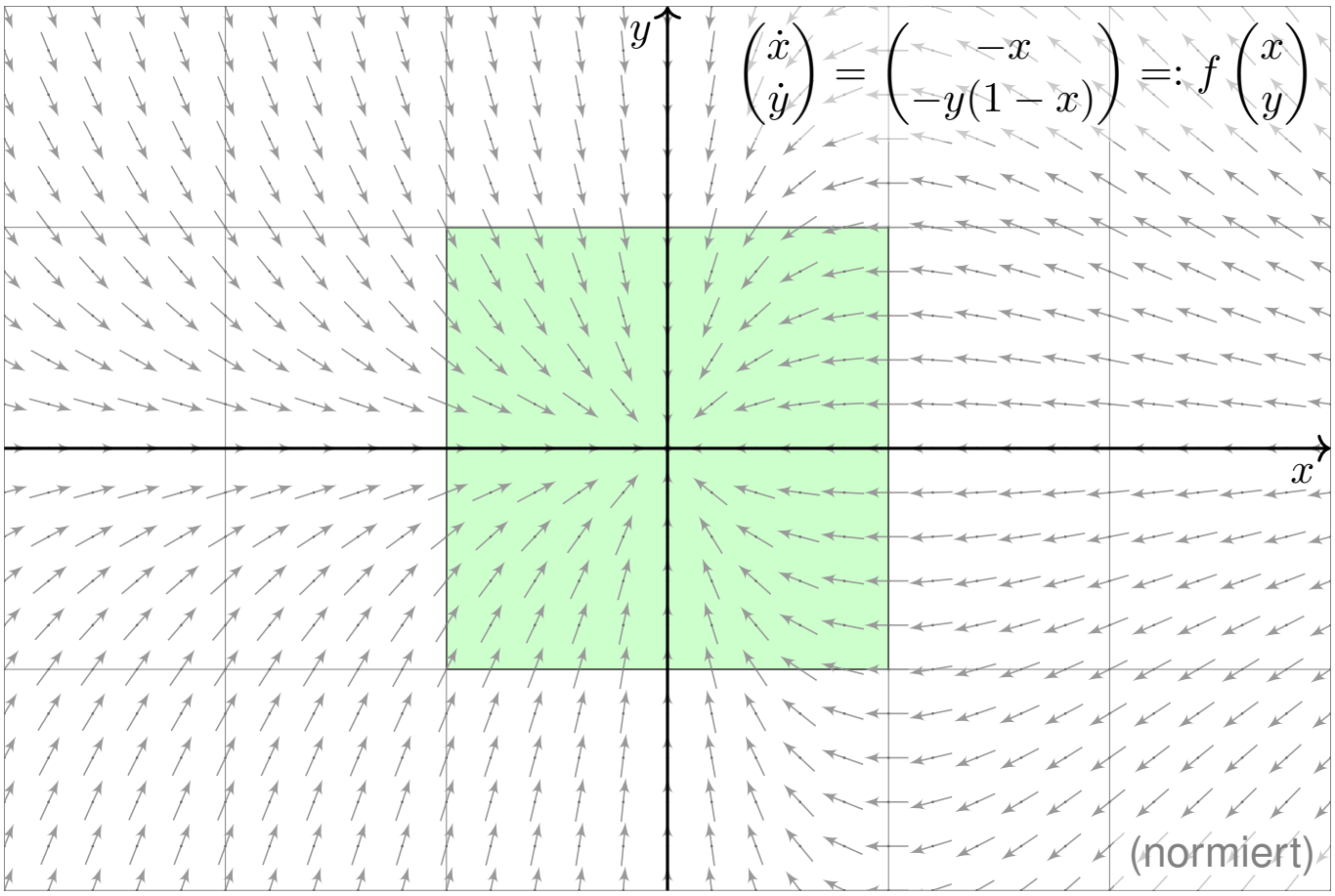
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ y \end{pmatrix} = \lambda r \overset{!}{\leq} 0$$

- Unter $A = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$ ist Q invariant nur für $\lambda \leq -1$, sonst nicht:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ y \end{pmatrix} = \lambda r + y \overset{!}{\leq} 0$$

Wie zu erwarten war, erhalten wir in (1) quadratische Ungleichungen und in (2) lineare Ungleichungen. Übung: Schreiben Sie die Lösung aus.

Zweidimensionale Dynamik und invariante Mengen



Zweidimensionale Dynamik und invariante Mengen

(4) Das degenerierte Rechteck $\{(0,0)\}$ ist invariant: unser Fixpunkt!
Ebenso ist jedes Intervall $[-a,a] \times \{0\}$ und $\{0\} \times [-b,b]$ invariant:
In diesem Sonderfall ist die Dynamik lediglich eindimensional.

Wir betrachten nun echte Rechtecke $K = [-a,a] \times [-b,b]$ mit $a, b > 0$.
Unsere Skizze zeigt bereits, dass nicht alle Rechtecke invariant sind:
Für $a > 1$ und $b > 0$ zeigt $f(a,b)$ nach oben und somit nach außen.

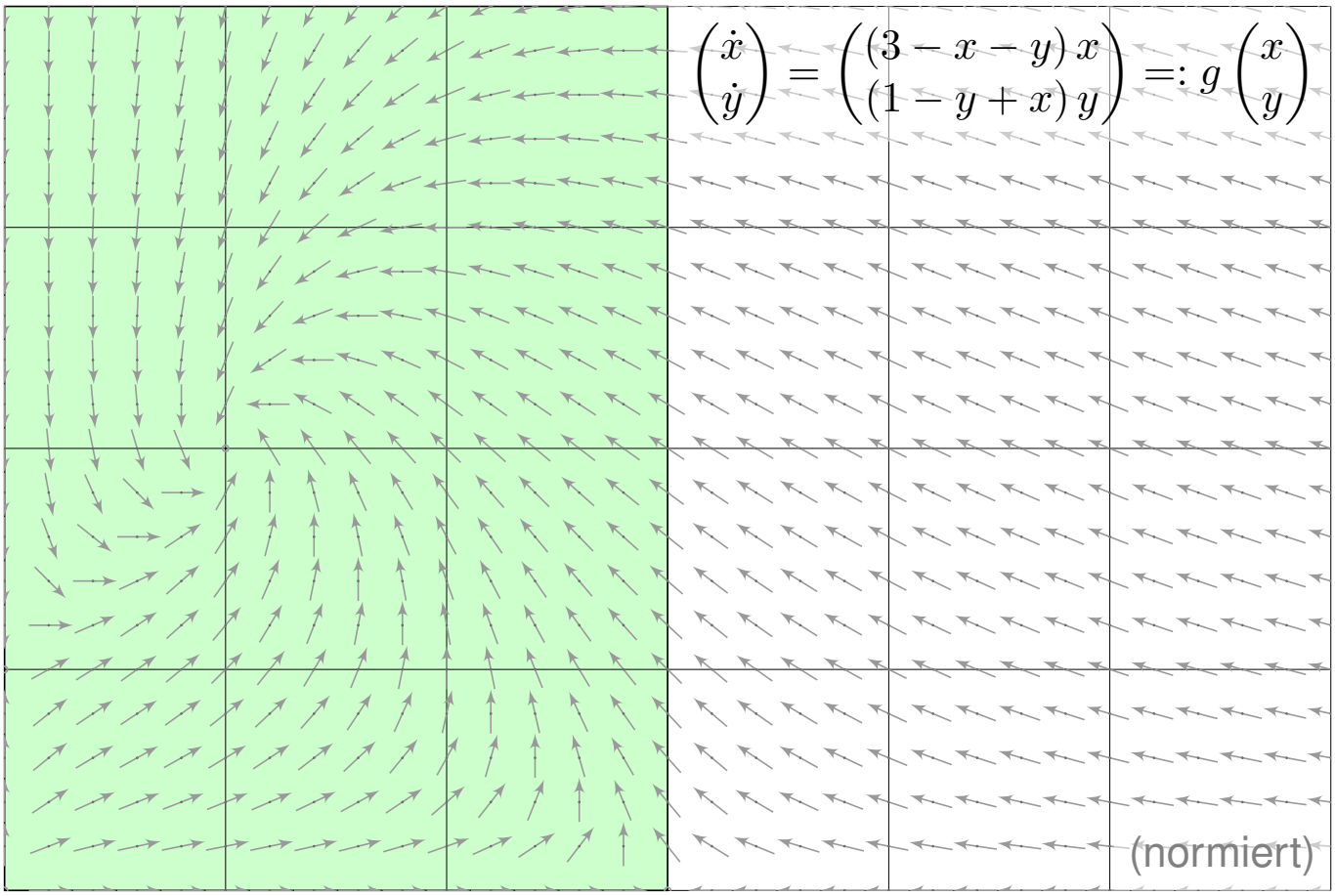
Als Kandidaten bleiben $K = [-a,a] \times [-b,b]$ mit $0 < a \leq 1$ und $b > 0$.
Wir prüfen auf jeder der vier Rechteckseiten die Tangentialbedingung:

- Es gilt $f_1(-1,y) = \quad +1 \geq 0$: Hier zeigt f nach innen.
- Es gilt $f_2(x,-1) = 1 - x \geq 0$: Hier zeigt f nach innen.
- Es gilt $f_1(+1,y) = \quad -1 \leq 0$: Hier zeigt f nach innen.
- Es gilt $f_2(x,+1) = x - 1 \leq 0$: Hier zeigt f nach innen.

Also zeigt f nirgends nach außen, und (K,f) ist tatsächlich invariant!
Ein solches Rechteck $K = [-1,1] \times [-1,1]$ ist in der Skizze grün gefärbt.

☺ Die Tangentialbedingung ist geometrisch wunderbar anschaulich und mit einer Parametrisierung des Randes bequem nachzurechnen.

Zweidimensionale Dynamik und invariante Mengen



Zweidimensionale Dynamik und invariante Mengen

(6) Zunächst die Sonderfälle: $K = [0,a] \times \{0\}$ ist invariant für $a = 0$ und für $a \geq 3$, und $K = \{0\} \times [0,b]$ ist invariant für $b = 0$ und für $b \geq 1$.

Wir betrachten nun echte Rechtecke $K = [0,a] \times [0,b]$ mit $a, b > 0$. Unsere Skizze zeigt bereits, dass nicht alle Rechtecke invariant sind! Zunächst muss $a \geq 3$ gelten, sonst zeigt $f(a,0)$ nach rechts (außen). Zudem muss $b \geq 1 + a$ gelten, sonst zeigt $f(a,b)$ nach oben (außen).

Als Kandidaten bleiben somit $K = [0,a] \times [0,b]$ mit $a \geq 3$ und $b \geq 1 + a$. Wir prüfen auf jeder der vier Rechteckseiten die Tangentialbedingung:

- Für $(0,y)$ gilt $g_1(0,y) = 0 \geq 0$: Hier zeigt g nach innen.
- Für $(x,0)$ gilt $g_2(x,0) = 0 \geq 0$: Hier zeigt g nach innen.
- Für (a,y) gilt $g_1(a,y) = (3-a-y)\,a \leq 0$: Hier zeigt g nach innen.
- Für (x,b) gilt $g_2(x,b) = (1-b+x)\,b \leq 0$ wegen $0 \leq x \leq a \leq b-1$.

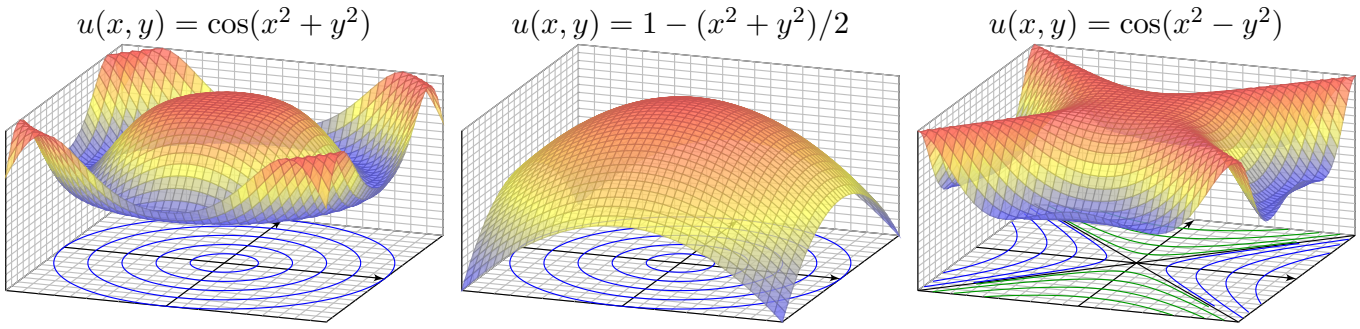
Also zeigt g nirgends nach außen, und (K,g) ist tatsächlich invariant! Das kleinste Rechteck $K = [0,3] \times [0,4]$ ist in der Skizze grün gefärbt.

☺ Die Tangentialbedingung ist geometrisch wunderbar anschaulich.

📖 W. Walter: *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Springer, §10

Kapitel Q

Partielle Differentialgleichungen (PDE)



Differential equations represent the most powerful tool humanity has ever created for making sense of the material world.

Steven H. Strogatz (1959–)

Inhalt dieses Kapitels Q

1 Erste Beispiele partieller Differentialgleichungen
- Partielle Ableitungen und der Satz von Schwarz
- Cauchy–Riemann und Maxwell–Gleichungen
- Konvektion-Diffusion und Navier–Stokes–Gleichungen
- Ideale ebene Strömungen und holomorphe Funktionen

2 Lineare PDE erster Ordnung
- Lineare Differentialoperatoren
- Lösung entlang charakteristischer Kurven
- Die Charakteristikmethode und warnende Gegenbeispiele
- Transportgleichung mit konstanten Koeffizienten

3 Fazit: PDE erster Ordnung
- Zusammenfassung und Verständnisfragen
- Aufgaben zur Charakteristikmethode
- Lösung durch Potenzreihenansatz
- Methodenvergleich: Viele Wege führen zum Ziel.

Einleitung und Überblick

Bei **gewöhnlichen Differentialgleichungen** (ODE) oder DGSystemen betrachten wir Funktionen $u(x)$ in einer einzigen reellen Variablen x, also

$$u : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}^m : x \mapsto u(x).$$

Gesucht sind die Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung

$$F(x, u, u', u'', u''', \dots, u^{(k)}) = 0$$

in der Funktion u und ihren Ableitungen $u', u'', u''', \dots, u^{(k)} = \partial^k u$.

Bei **partiellen Differentialgleichungen** (PDE) betrachten wir allgemein Funktionen $u(x_1, \dots, x_n)$ in mehreren Variablen $x_1, \dots, x_n$, $n \geq 1$, also

$$u : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \to \mathbb{R}^m : (x_1, \dots, x_n) \mapsto u(x_1, \dots, x_n).$$

Gesucht sind die Lösungen einer partiellen Differentialgleichung

$$F(x_1, \dots, x_n, u, \partial_1 u, \dots, \partial_n u, \dots, \partial^\nu u, \dots) = 0$$

in der Funktion u und ihren partiellen Ableitungen $\partial^\nu u = \partial_1^{\nu_1} \cdots \partial_n^{\nu_n} u$.

Die **Ordnung** k einer (partiellen) Differentialgleichung ist die höchste Ordnung $|\nu| = \nu_1 + \cdots + \nu_n$ aller auftretenden (partiellen) Ableitungen.

Einleitung und Überblick

Die Wichtigkeit der (gewöhnlichen und partiellen) Differentialgleichungen besteht darin, dass sich nahezu alle Naturphänomene so beschreiben lassen. Wir illustrieren dies an drei zentralen klassischen Beispielen: Wärmeleitungsgleichung, Potentialgleichung und Wellengleichung.

Wichtige Anwendungen, die Sie zum Teil schon kennengelernt haben, finden sie in Elektrodynamik (Maxwell–Gleichungen), Thermodynamik (Bilanzgleichungen), klassischer Mechanik (Hamilton–Gleichungen), Quantenmechanik (Schrödinger–Gleichung), Strömungsmechanik (Navier–Stokes–Gleichungen), usw. . . . Die Liste ist schier endlos.

Die Lösung partieller Differentialgleichungen mobilisiert alle bisher erarbeiteten Techniken der Höheren Mathematik: mehrdimensionale Differential- und Integralrechnung, Integralsätze, Fourier–Theorie, gewöhnliche Differentialgleichungen, etc. Differentialgleichungen sind ein riesiges Gebiet, zu dem ich hier nur einen winzigen Einblick gebe.

Die mathematische und oft numerische Bearbeitung praxisrelevanter Probleme führt schnell zu Fragestellungen der aktuellen Forschung und sprengt daher bei weitem den Rahmen dieser Vorlesung.

Erinnerung: Richtungsableitungen

📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §4.3.

Eindimensional: Sei $I =]a, b[\subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir nennen f im Punkt $x \in I$ differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =: f'(x)$$

existiert. In diesem Fall heißt $f'(x)$ die Ableitung von f im Punkt x.

Mehrdimensional: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Ableitung von f im Punkt $x \in \Omega$ in Richtung $v \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+hv) - f(x)}{h} =: \partial_v f(x).$$

Dies ist die Ableitung der partiellen Funktion $h \mapsto f(x+hv)$ in $h = 0$. Häufig nutzen wir die Ableitung ∂_k in Richtung $v = e_k$, wobei $e_1, \dots, e_n$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$ ist, also $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

🙂 Die Offenheit von Ω garantiert, dass wir um jedem Punkt $x \in \Omega$ etwas Platz haben: Es gibt einen kleinen Ball $B(x, \varepsilon) \subseteq \Omega$ vom Radius $\varepsilon > 0$. Andernfalls ließe sich die Ableitung erst gar nicht wie oben erklären.

Erinnerung: partielle Ableitungen

Die k-te **partielle Ableitung** $\partial_k f$ von f im Punkt $x \in \Omega$ ist demnach

$$\partial_k f(x_1, \dots, x_n) := \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + t, x_{k+1}, \dots, x_n)\right]_{t=0}$$
$$:= \lim_{h \to 0} \frac{f(\dots, x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1}, \dots) - f(\dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots)}{h}$$

Wenn diese Ableitungen für alle $x \in \Omega$ und alle $k = 1, \dots, n$ existieren, so nennen wir f **partiell differenzierbar**. Dies definiert $\partial_k f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Sind alle $\partial_k f$ stetig, so heißt f **stetig partiell differenzierbar**, kurz C^1.

Sind alle $\partial_k f$ stetig partiell differenzierbar, so heißt f **zweimal stetig partiell differenzierbar**, kurz C^2. Hier gilt der Satz von Schwarz D4A:

♦ Satz D4A: Satz von Schwarz

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Ist $f : \Omega \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, so gilt

$$\partial_j \partial_k f = \partial_k \partial_j f \quad \text{für alle } j, k \in \{1, \dots, n\}.$$

Induktiv definieren wir die k-mal stetig differenzierbaren Funktionen C^k für alle $k \in \mathbb{N}$ und schließlich die **glatten Funktionen** $C^\infty = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k$.

Erinnerung: ein warnendes Gegenbeispiel

Vertauschbarkeit gilt nicht immer! Ein warnendes Gegenbeispiel D403:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Die Funktion f ist stetig und differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$, auch im Punkt $(0,0)$. Die Ableitungen $\partial_x f, \partial_y f$ sind stetig und partiell differenzierbar, aber:

$$\begin{aligned}
(\partial_y f)(x,y) &= \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}, & (\partial_y f)(0,0) &= 0, \\
(\partial_y f)(x,0) &= \frac{+x^5}{x^4} = +x, & (\partial_x \partial_y f)(0,0) &= +1, \\
(\partial_x f)(x,y) &= \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}, & (\partial_x f)(0,0) &= 0, \\
(\partial_x f)(0,y) &= \frac{-y^5}{y^4} = -y, & (\partial_y \partial_x f)(0,0) &= -1.
\end{aligned}$$

Für partielle Differentialgleichungen möchten wir dieses lästige Problem beheben bzw. umgehen. Die korrekte Behandlung gelingt wunderbar mit der Theorie der Distributionen (siehe Kapitel D).

Erinnerung: gebräuchliche Schreibweisen

Zur Illustration nenne ich für $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} : (t,x,y,z) \mapsto u(t,x,y,z)$ die Nummerierung $(t,x,y,z) = (x_0,x_1,x_2,x_3)$ mit partiellen Ableitungen

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} = \partial_t u = \partial_0 u, \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \partial_x u = \partial_1 u, \quad \text{etc.}$$

Für die Ortsableitung $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ gilt $\nabla u = \operatorname{grad} u = (\partial_1 u, \partial_2 u, \partial_3 u)$. Für zweifache partielle Ableitungen (Vertauschbarkeit vorausgesetzt):

$$u_{xt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x} u = \partial_t \partial_x u = \partial_0 \partial_1 u = \partial_0^1 \partial_1^1 \partial_2^0 \partial_3^0 u = \partial^{(1,1,0,0)} u, \quad \text{etc.}$$

Beispiel: Die Wellengleichung lässt sich wie folgt schreiben:

$$c^{-2} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}, \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$\partial_t^2 u = c^2 \Delta u \qquad \text{mit} \quad \Delta = \nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2,$$

$$\Box u = 0 \qquad \text{mit} \quad \Box = c^{-2}\partial_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2.$$

Die Schreibweise soll jeweils klar und eindeutig sein. Sie ist wie jede Konvention eine Frage von Tradition, Bequemlichkeit und Geschmack.

Beispiel: die Cauchy–Riemann–Gleichungen

Die **Cauchy–Riemann–Gleichungen** für $(u,v):\mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \to \mathbb{R}^2$ lauten

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.}$$

$\iff$ Das Vektorfeld $(u,-v)$ erfüllt $\operatorname{div}(u,-v) = 0$ und $\operatorname{rot}(u,-v) = 0$.

$\iff$ Die komplexe Funktion $f = u + \mathrm{i}v : \mathbb{C} \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$ ist **holomorph**.

$\iff$ Lokal ist f eine komplexe **Potenzreihe**, $f(z) = \sum a_k (z - z_0)^k$.

$\implies$ Beide Funktionen u, v sind **harmonisch**, also $\Delta u = \Delta v = 0$.

Diese spezielle PDE ist extrem wichtig. Cauchys Integralsatz entfaltet hier nämlich ein Wunder: Für holomorphe Funktionen gelten besonders starke Gesetzmäßigkeiten. Diese sind Thema der Funktionentheorie, also der komplexen Analysis. Insbesondere ist jede holomorphe Funktion lokal eine komplexe Potenzreihe und umgekehrt. Damit ist diese PDE vollständig gelöst! Hier zahlt sich Ihre Investition in solide mathematische Grundlagen überreichlich aus.

Holomorphe Funktionen sind in Mathematik und Physik überall anzutreffen und als Werkzeuge unentbehrlich. Klassische Anwendungen sind ebene Elektrostatik (Q1A) und Strömungen (Q1B). Aus obigen Gleichungen folgt insbesondere, dass u und v harmonisch sind, also $\Delta u = \Delta v = 0$. Versuchen Sie dies durch Ableiten nachzurechnen, als leichte Übung und Wiederholung. F511 Zur Schreibweise und Verwendung der Differentialoperatoren ∇ und $\Delta = \nabla^2$ siehe Seite H101.

Systeme partieller Differentialgleichungen

Ein **System partieller Differentialgleichungen** entsteht aus mehreren Funktionen $u_1, \dots, u_m : \Omega \to \mathbb{R}$. Diese können wir zusammenfassen zu

$$u : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \to \mathbb{R}^m, \quad u = (u_1, \dots, u_m).$$

Das System der partiellen Differentialgleichungen schreibt sich dann

$$\begin{cases} F_1(u_1, \dots, u_m, \dots, \partial^\nu u_i, \dots) = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ F_\ell(u_1, \dots, u_m, \dots, \partial^\nu u_i, \dots) = 0 \end{cases}$$

Zur Illustration nenne ich drei berühmte Gleichungssysteme, die seit dem 19. Jahrhundert ausgiebig untersucht und vielfältig genutzt werden: Die **Cauchy–Riemann–Gleichungen** sind vollständig verstanden, die **Maxwell–Gleichungen** auch weitgehend, aber viel schwieriger, die **Navier–Stokes–Gleichungen** noch nicht. Letztere sind nicht-linear. Als lineares Pendant untersuchen wir in diesem Kapitel ausführlich die **Konvektions-Diffusions-Gleichung** und lösen wichtige Spezialfälle.

Beispiel: die Maxwell–Gleichungen

Q107

Die **Maxwell–Gleichungen** H157 für Felder $\vec{E}, \vec{B} : \mathbb{R}^4 \supseteq \Omega \to \mathbb{R}^3$ lauten

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\varrho, \qquad \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0,$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \qquad \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}.$$

Aufgabe: (1) Was besagen die statischen Maxwell–Gleichungen? in quellenfreien Bereichen? Was sind die Lösungen im ebenen Fall? (2) Skizzieren Sie das $\vec{E}$–Feld gegenpoliger Punktladungen (Dipolfeld).

Lösung: (1) Wir erhalten $\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \vec{B} = 0$ und $\nabla \times \vec{E} = \nabla \times \vec{B} = 0$.

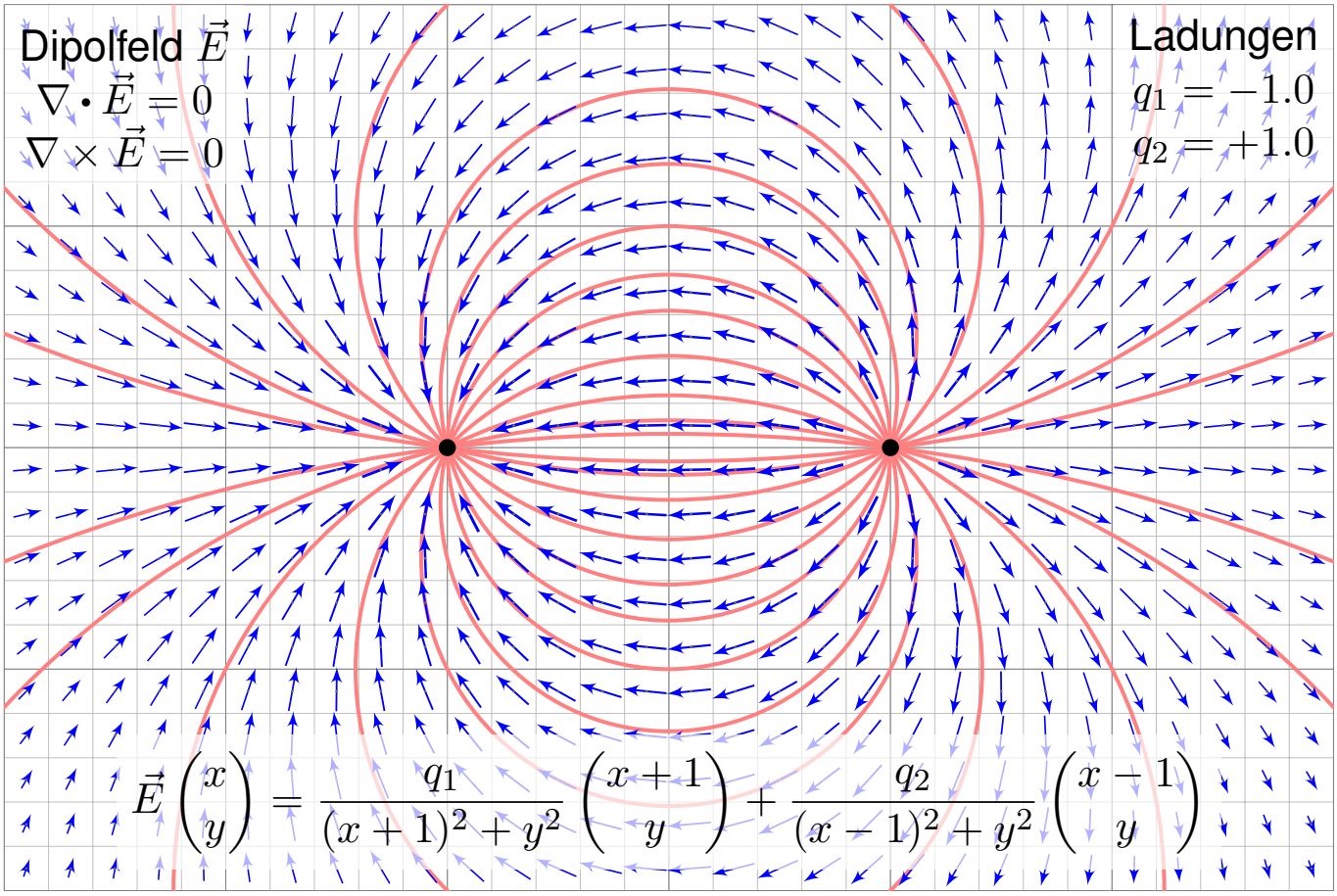
Satz Q1A: holomorphe Lösungen der Maxwell–Gleichung

Jedes ebene statische E-Feld $\vec{E} : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \to \mathbb{R}^2$ ohne Quellen entspricht einer holomorphen Funktion $f = E_1 - \mathrm{i}E_2 : \mathbb{C} \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$ und umgekehrt.

☺ Lösungen sind holomorphe Funktionen, also komplexe Potenzreihen. Damit können wir Lösungen bequem finden und explizit ausschreiben. Umgekehrt können wir uns Residuen als Ladungen vorstellen (F4D).

Anwendung: ebene Elektrostatik

Q108



Rechnung E317. Für das Magnetfeld addieren wir zwei Wirbelfelder. H328

Die Konvektions-Diffusions-Gleichung

Q109

Bilanzgleichung der Strömungslehre zu Konvektion und Diffusion:

$$\underbrace{\partial_t u(t,x)}_{\text{Änderungsrate}} + \underbrace{\nabla\big[\vec{v}\,u(t,x)\big]}_{\text{Konvektion: Zu/Abfluss}} = \underbrace{\nabla\big[\kappa\,\nabla u(t,x)\big]}_{\text{Diffusion: } \operatorname{div}\operatorname{grad}} + \underbrace{q(t,x)}_{\text{Quellen}} + \underbrace{c\,u(t,x)}_{\text{Wachstum/Zerfall}}$$

Diese partielle Differentialgleichung ist linear zweiter Ordnung. Sie beschreibt den Transport in einer vorgegebenen Strömung $\vec{v}(t,x)$, z.B. von Algen im Meer oder eines radioaktiven Markers im Blutkreislauf. Dieselben Gleichungen gelten für die Konvektion und Diffusion von Wärme. Gesucht ist die Stoffkonzentration $u : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ (Wärmedichte), also die Werte $u(t,x)$ zur Zeit $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ am Ort $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Zur Ortsableitung schreiben wir wie üblich $\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_n)$. H101 Gegeben sind Anfangswerte $u(0,x) = u_0(x)$ für $t = 0$ und alle $x \in \Omega$, sowie die Strömungsgeschwindigkeit $\vec{v} : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ (Konvektion), der Diffusionskoeffizient $\kappa : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ (Temperaturleitfähigkeit), zudem die Quellen und Senken $q : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ (Wärmeleistungsdichte) und die Wachstumsrate $c : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ (Vermehrung, Abbau, Zerfall).

Für räumlich **konstante Koeffizienten** gilt $\nabla\vec{v} = 0$ und $\nabla\kappa \bullet \nabla u = 0$:

$$\partial_t u(t,x) + \vec{v}\,\nabla u(t,x) = \kappa\,\Delta u(t,x) + q(t,x) + c\,u(t,x)$$

Links steht die **substantielle Ableitung** H111 entlang der Strömung:

$$\partial_t u(t,x) + \textstyle\sum_{j=1}^n v_j \partial_j u(t,x) = \kappa \sum_{j=1}^n \partial_j^2 u(t,x) + c\,u(t,x) + q(t,x)$$

Die Konvektions-Diffusions-Gleichung

Q110
Erläuterung

Erster wichtiger Spezialfall: Ohne Diffusion gilt $\kappa = 0$. Das vereinfacht! Wir erhalten die **Transportgleichung** oder **Konvektionsgleichung**:

$$\partial_t u(t,x) + \nabla\big[\vec{v}(t,x)\,u(t,x)\big] = c(t,x)\,u(t,x) + q(t,x)$$

☺ Dies ist eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung. Mit konstanten Koeffizienten lösen wir sie in Satz Q2E, allgemeiner Q3A.

☺ Solche einfach gebauten Gleichungen können wir bereits lösen! Hierzu nutzen wir die raffinierte und vielseitige Charakteristikmethode.

Zweiter Spezialfall: Ohne Konvektion und Wachstum gilt $v = c = 0$. Wir erhalten die **Wärmeleitungsgleichung** oder **Diffusionsgleichung**:

$$\partial_t u(t,x) = \nabla\big[\kappa(t,x)\,\nabla u(t,x)\big] + q(t,x)$$

☺ Dies ist eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung. Mit konstanten Koeffizienten, $\kappa = \text{const}$, lösen wir sie in Kapitel S.

☺ Die Lösung der Wärmeleitungsgleichung gelingt uns dank guter mathematischer Grundlegung, sie mobilisiert alle bisherigen Techniken.

Die Konvektions-Diffusions-Gleichung

Q111
Erläuterung

Dritter Spezialfall: Im **stationären Zustand** gilt $\partial_t u = 0$ und $c = 0$.
Alle Größen hängen nicht von der Zeit t ab, sondern nur vom Ort x.

$$\boxed{\nabla\big[\vec{v}(x)\,u(x)\big] = \nabla\big[\kappa(x)\,\nabla u(x)\big] + q(x)}$$

Für $v = 0$ und $\kappa = 1$ erhalten wir die **Potentialgleichung** $0 = \Delta u + q$.

☺ Konvektion und Diffusion begegnen Ihnen in vielen Anwendungen. In glücklichen Fällen können Sie die Gleichung allein mit Stift und Papier lösen, explizit und exakt. Meist jedoch ist dies unmöglich und Sie nutzen Computer zur numerischen Approximation. Hierzu benötigen Sie ein solides Grundverständnis: Existiert eine Lösung? Ist sie eindeutig? Wie verhält sie sich typischerweise? Wie lässt sie sich berechnen?

☺ In typischen Anwendungen ist $u(t,x)$ die Wärmedichte oder eine Stoffkonzentration. Im Allgemeinen hängen die Koeffizienten v, κ, q höchstens von der Zeit t und dem Ort x ab. In genaueren Modellen hängen sie zudem von der Wärmedichte bzw. Konzentration u ab.

⚠ Die Gleichung ist dann nicht-linear und wesentlich komplizierter.

Die Konvektions-Diffusions-Gleichung

Q112
Erläuterung

Aufgabe: Eine wichtige Anwendung ist die Strömung von Flüssigkeiten.

(1) Setzen Sie als transportierte Größe die Masse ein, also $u = \varrho$, und vereinfachen Sie durch die plausiblen Annahmen $\kappa = 0$, $c = 0$, $q = 0$.

(2) Untersuchen Sie als transportierte Größe die Impulsdichte $\vec{u} = \vec{v}\varrho$. Welche Differentialgleichung erhalten Sie nach Vereinfachung?

Lösung: (1) Wir erhalten die Kontinuitätsgleichung $\partial_t \varrho + \nabla(\vec{v}\varrho) = 0$.

(2) Wir setzen die Komponente $u = \varrho v_i$ in die Konv-Diff-Gleichung ein:

$$\begin{aligned}
\partial_t u + \textstyle\sum_{j=1}^n \partial_j\big[v_j\,u\big] &= \textstyle\sum_{j=1}^n \partial_j\big[\kappa\,\partial_j u\big] + q_i \\
\partial_t\big[v_i\varrho\big] + \textstyle\sum_{j=1}^n \partial_j\big[v_j\varrho v_i\big] &= \kappa\,\Delta(\varrho v_i) + q_i \\
\varrho\,\partial_t v_i + \underbrace{v_i\,\partial_t\varrho + v_i\textstyle\sum_{j=1}^n \partial_j\big[v_j\varrho\big]}_{=\,0 \text{ dank Kontinuitätsgleichung (1)}} + \textstyle\sum_{j=1}^n \varrho v_j \partial_j v_i &= \kappa\,\Delta(\varrho v_i) + q_i
\end{aligned}$$

☺ Wir erhalten hierdurch genau die i-te Navier–Stokes–Gleichung: Diese sind nichts anderes als die Bilanzgleichungen für den Impuls!

Die Kraft $q_i = \varrho f_i - \partial_i p$ setzt sich zusammen aus der externen Kraft ϱf_i und der internen Kraft $-\partial_i p$, die durch das Druckgefälle erzeugt wird.

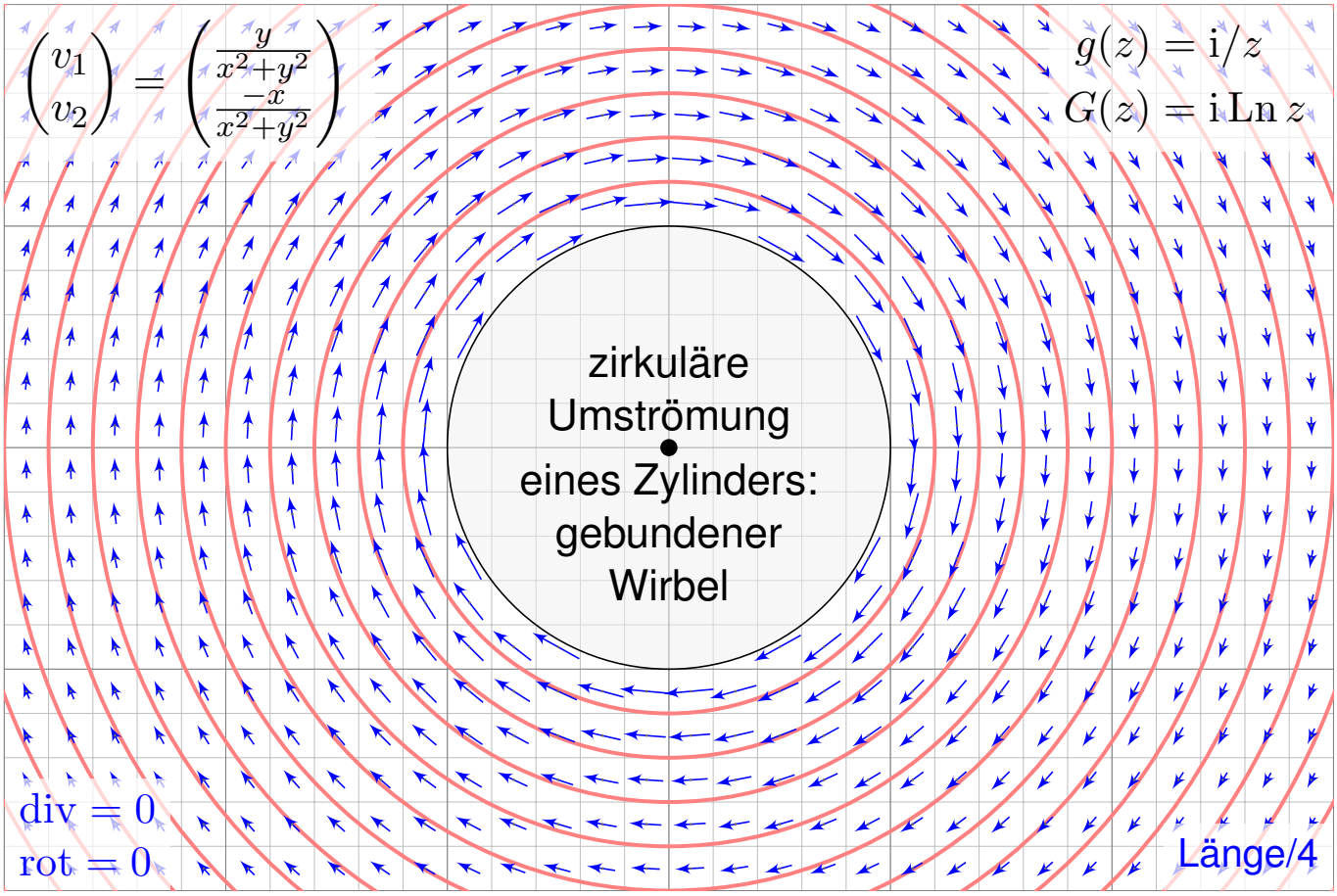
Beispiel: die Navier–Stokes–Gleichung

Massenerhaltung: $$\operatorname{div}\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0$$

Impulserhaltung: $$\underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial t}}_{\text{Änderung}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}}_{\text{Konvektion}} = \underbrace{\nu \Delta v_i}_{\text{Diffusion}} - \underbrace{\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x_i}}_{\text{interne Kraft}} + \underbrace{f_i}_{\text{extern}}$$

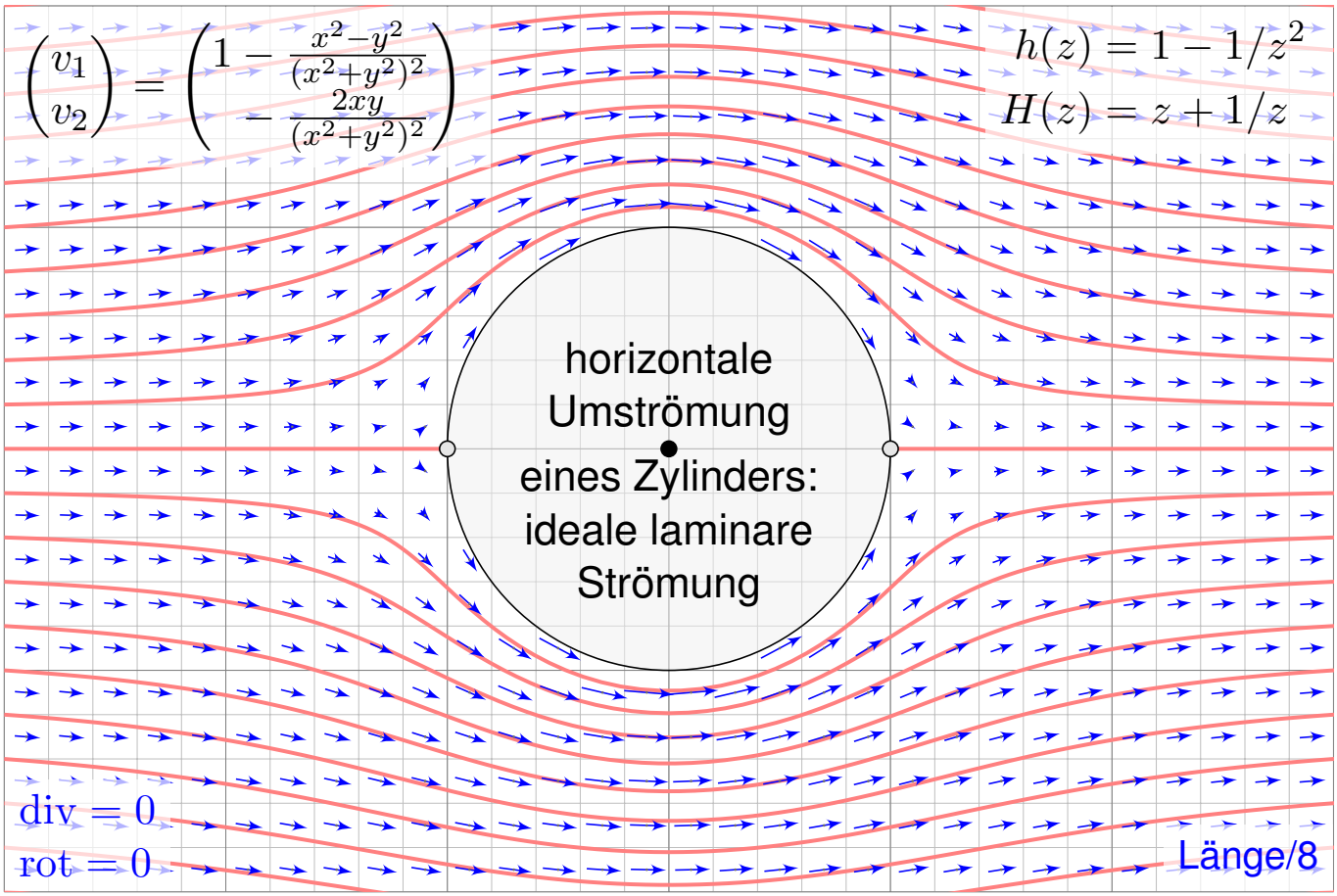
Diese $1+n$ Gleichungen beschreiben die Strömungsgeschwindigkeit $\vec{v}: I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ einer Flüssigkeit zur Zeit $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ am Ort $\vec{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ in der Ebene (n=2) oder im Raum (n=3), mit konstanter Massendichte $\varrho \in \mathbb{R}$ und Viskosität $\nu \in \mathbb{R}$, Druck $p: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ und äußerer Kraft $\vec{f}: I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$. Sie sind zweiter Ordnung und nicht-linear in $\vec{v}$. Die Impulserhaltung ist Newtons Bewegungsgesetz: Links steht die Beschleunigung, als konvektive Ableitung. H111 Rechts stehen die Kräfte durch Reibung ν, Druck p und $\vec{f}$. Gegeben sind hierzu die äußere Kraft $\vec{f}$ sowie die Anfangsgeschwindigkeiten $\vec{v}(0,\vec{x})$ für $\vec{x} \in \Omega$. Gesucht sind die Funktionen $\vec{v}$ und p. Im zweidimensionalen Falle ist die Lösbarkeit bewiesen, im dreidimensionalen Falle noch nicht! Die Navier–Stokes–Gleichungen illustrieren die Schwierigkeit partieller Differentialgleichungen: Über dreidimensionale Lösungen weiß man allgemein wenig, z.B. sind Existenz und Regularität ungeklärt – trotz größter Anstrengungen. Das Clay Mathematics Institute hat dies im Jahr 2000 als eines von sieben Millenium-Problemen ausgelobt, mit einem Preisgeld von 1 Million Dollar.

Anwendung auf ideale ebene Strömungen



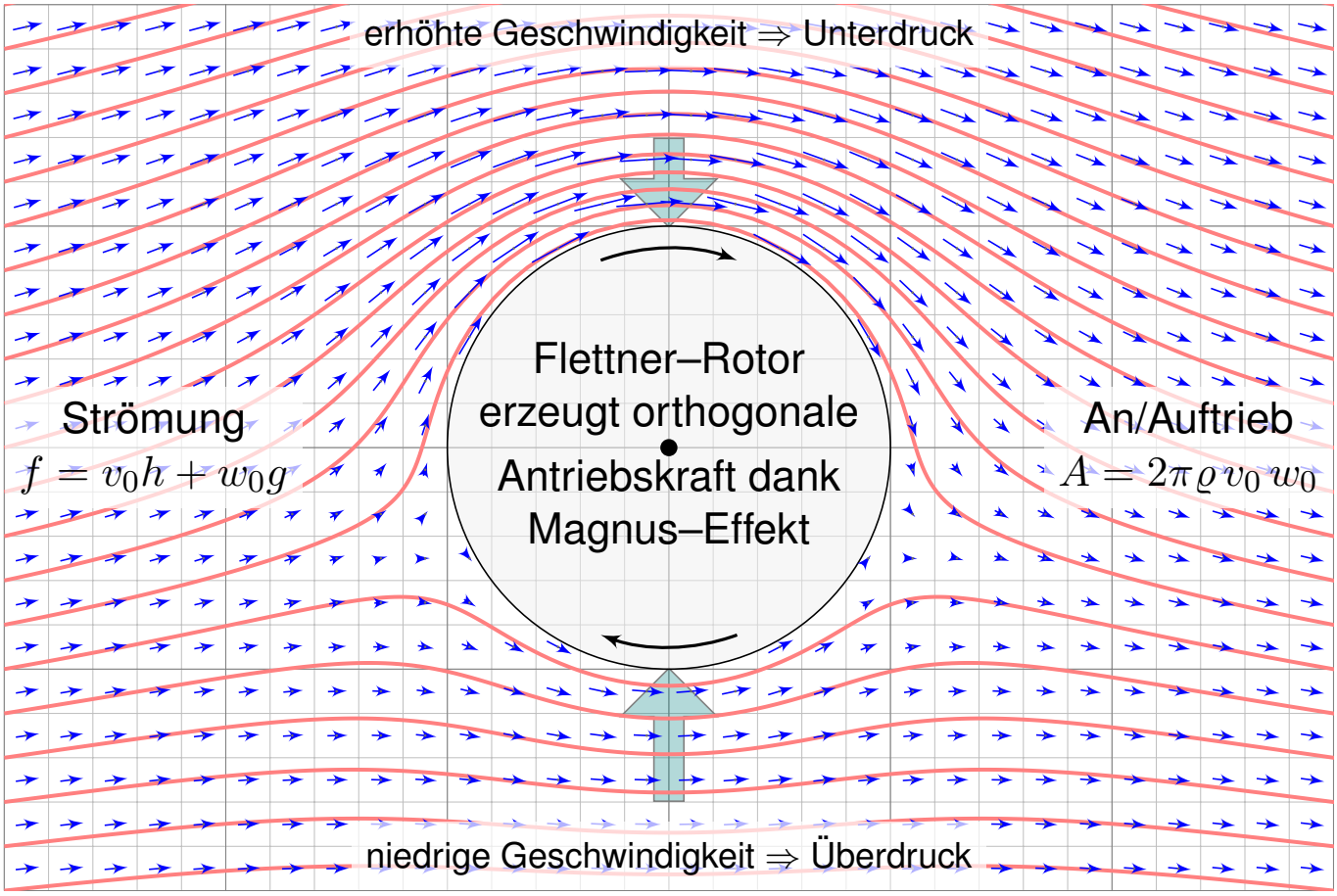
☺ Holomorphe Funktionen beschreiben Strömungen: Wirbelfeld.

Anwendung auf ideale ebene Strömungen



☺ Einfaches und intuitives Modell, exakte Lösung dank Holomorphie!

Anwendung auf ideale ebene Strömungen



Veritasium: `youtu.be/23f1jvGUWJs`, `/t-3jnOIJg4k`, `/2OSrvzNW9FE`

Ideale ebene Strömungen und holomorphe Funktionen

Q117
Ausführung

☺ Auch Navier–Stokes betrachten wir vereinfachend in der Ebene: Wir erhalten schöne Graphiken und präzise Formeln! So berechneten M.W. Kutta 1902 und N.J. Joukowski 1904 die dynamische Auftriebskraft.

Aufgabe: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet: offen und wegzusammenhängend.

(1) Hierauf sei $v = (v_1, v_2) : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \Omega \to \mathbb{R}^2$ das Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit konstanter Dichte ϱ. Formulieren Sie dies als PDE.

(2) Folgern Sie für $\omega = \operatorname{rot}(v) = \partial_x v_2 - \partial_y v_1$ die Wirbeltransportgleichung. Nehmen Sie hierzu die äußere Kraft f als wirbelfrei an, also $\operatorname{rot}(f) = 0$.

(3) Nehmen Sie als Idealisierung an, unser Strömungsfeld v sei zudem stationär sowie ohne Rotation, ohne Reibung und ohne äußere Kräfte. Welche Lösungen hat die PDE? Wie berechnen Sie hierbei den Druck?

(4) Finden Sie alle Lösungen v auf der gesamten Ebene $\Omega = \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$.

(5) Finden Sie alle Lösungen v auf $\Omega = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < r_1^2 \,\}$.

(6) Finden Sie alle Lösungen auf $\Omega = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid r_0^2 < x^2 + y^2 < r_1^2 \,\}$.

(7) Sei $D \subseteq \Omega$ kompakt mit stückweise glattem Rand ∂D. Bestimmt die Strömung $v|_{\partial D}$ am Rand die Strömung v im Inneren? (8) im Äußeren?

Ideale ebene Strömungen und holomorphe Funktionen

Q118
Ausführung

Lösung: (1) Die Massenerhaltung $\operatorname{div}(\varrho v) + \partial_t \varrho = 0$ ergibt $\operatorname{div}(v) = 0$. Aus Impulserhaltung folgern wir die Navier–Stokes–Gleichungen H111:

Massenerhaltung:	$\operatorname{div}(v) = \partial_x v_1 + \partial_y v_2 \;=\; 0$
Impulserhaltung:	$\partial_t v + (v_1 \partial_x + v_2 \partial_y) v \;=\; \nu \Delta v - \operatorname{grad} p/\varrho + f$

(2) Die Rotation der Impulsgleichungen ergibt nach kurzer Rechnung:

$$\partial_t \omega + (v_1 \partial_x + v_2 \partial_y)\omega = \nu \Delta \omega$$

☺ Wir erkennen hierin die Konvektions-Diffusions-Gleichung für ω! Für $\nu = 0$ sind die Wirbel längs der Flusslinien konstant, „eingefroren“.

⚠ Dreidimensional kommt rechts noch $(\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{v}$ als Summand hinzu. Die Helmholtz'schen Wirbelsätze erklären das Verhalten von Wirbeln.

(3) Die Annahmen bedeuten $\partial_t v = 0$, $\omega = 0$, $\nu = 0$, $f = 0$. Somit bleibt:

Massenerhaltung:	$\partial_x v_1 + \partial_y v_2 \;=\; 0$
Rotationsfreiheit:	$\partial_x v_2 - \partial_y v_1 \;=\; 0$
Impulserhaltung:	$(v_1 \partial_x + v_2 \partial_y) v \;=\; -\operatorname{grad} p/\varrho$

Satz Q1B: holomorphe Lösung der Navier–Stokes–Gleichungen

Jede ebene stationäre Strömung $v = (v_1, v_2) : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \to \mathbb{R}^2$ konstanter Dichte, ohne Wirbel, ohne Reibung und ohne äußere Kräfte entspricht einer holomorphen Funktion $f = v_1 - \mathrm{i}v_2 : \mathbb{C} \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$ und umgekehrt.

Der Druck p berechnet sich hieraus durch $p + (\varrho/2)\big(v_1^2 + v_2^2\big) = \mathrm{const}$.

Nachrechnen: Wir setzen die Rotationsfreiheit $\partial_x v_2 = \partial_y v_1$ ein:

$$\begin{aligned} v_1\,\partial_x v_1 + v_2\,\partial_y v_1 &= v_1\,\partial_x v_1 + v_2\,\partial_x v_2 &&= \frac{1}{2}\,\partial_x\big(v_1^2 + v_2^2\big) \\ v_1\,\partial_x v_2 + v_2\,\partial_y v_2 &= v_1\,\partial_y v_1 + v_2\,\partial_y v_2 &&= \frac{1}{2}\,\partial_y\big(v_1^2 + v_2^2\big) \end{aligned}$$

Damit vereinfacht sich die Impulserhaltung zu:

$$\operatorname{grad} p = -\frac{\varrho}{2}\operatorname{grad}\big(v_1^2 + v_2^2\big) \quad \text{also} \quad p = \mathrm{const} - \frac{\varrho}{2}\big(v_1^2 + v_2^2\big)$$

☺ Der **hydrostatische Druck** p ist das Skalarpotential des inneren Kraftfeldes. Der Term $\frac{\varrho}{2}v^2$ ist der **dynamische Druck** oder **Staudruck**. Ihre Summe ist konstant: Energiegleichung und **Gesetz von Bernoulli**.

☺ Damit können wir Lösungen finden und lokal explizit ausschreiben: Jede Lösung ist eine holomorphe Funktion, also lokal eine Potenzreihe

$$\boxed{f(z) = v_1(x,y) - \mathrm{i}v_2(x,y) = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \text{mit} \quad a_k \in \mathbb{C}}$$

mit Konvergenzradius $\rho = 1 \,/\, \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \in [0,\infty]$ (Hadamard).

(4) Der Radius $\rho = \infty$ entspricht der Bedingung $\sqrt[k]{|a_k|} \to 0$.

(5) Lösungen sind alle Potenzreihen mit $\rho \geq r_1$ dank Satz F3E.

(6) Lösungen sind alle konvergenten Laurent–Reihen dank Satz F3F.

(7) Die Antwort lautet überraschenderweise: Ja! Dies verdanken wir der Integralformel von Cauchy $f(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z$ für $z_0 \in \mathring{D}$ (Satz F3B).

(8) Angenommen $\Omega \supseteq \mathbb{C} \smallsetminus \mathring{D}$, und der Nullpunkt liegt im Inneren, $0 \in \mathring{D}$. Wir können Inneres und Äußeres Vertauschen durch die holomorphe Abbildung $z \mapsto 1/z$. Wir fordern zudem, dass $f(z) \to a$ für $|z| \to \infty$ gilt. Dann können wir $g(z) = f(1/z)$ durch $g(0) = a$ stetig fortsetzen, und g ist damit holomorph (F5G). Wir nutzen (7) und transformieren zurück.

Anwendung: dynamischer Auftrieb eines Tragflügels

Satz Q1C: dynamischer Auftrieb nach Kutta–Joukowski–Blasius

Sei $K \Subset \mathbb{C}$ kompakt mit stückweise glattem Rand ∂K. Das Komplement $\Omega = \mathbb{C} \smallsetminus K$ ist offen mit Abschluss $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial K$. Die Strömung $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ sei stetig, am Rand ∂K tangential, und $f = \overline{v}$ auf Ω holomorph (Q1B).

(1) Der Druck p berechnet sich daraus durch die **Bernoulli–Gleichung**:

$$\boxed{p + \frac{\varrho}{2}\left(v_1^2 + v_2^2\right) = \text{const}}$$

(2) Für den dynamischen Auftrieb folgt daraus die **Formel von Blasius**:

$$\boxed{\overline{F} \;=\; F_1 - \mathrm{i}F_2 \;=\; \mathrm{i}\frac{\varrho}{2}\oint_C f(z)^2\,\mathrm{d}z}$$

(3) Für $f(z) = v_0 + w_0 z^{-1} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^{-k}$ folgt die **Formel von Kutta**:

$$\boxed{\overline{F} \;=\; -2\pi\varrho\, v_0\, w_0 \;=\; \mathrm{i}\varrho v_0 \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z}$$

Anwendung: dynamischer Auftrieb eines Tragflügels

Beweis: (2) Gegeben ist das Geschwindigkeitsfeld $z \mapsto v(z) = \overline{f(z)}$. Gesucht ist die auf den Körper K wirkende Auftriebskraft $F = F_1 + \mathrm{i}F_2$.

Wir durchlaufen die Randkurve $C = \partial K$ im positiven Sinne. An jedem Kurvenelement $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + \mathrm{i}\,\mathrm{d}y$ erzeugt der Druck p die Kraft $\mathrm{d}F = \mathrm{i}\,p\,\mathrm{d}z$; sie steht senkrecht zu $\mathrm{d}z$, und zwar um $+90°$ gedreht, daher der Faktor i.

Wir nutzen die Bernoulli–Gleichung (1) $p = \text{const} - v\overline{v} \cdot \varrho/2$ und erhalten:

$$F \;=\; \oint_C \mathrm{i}\,p\,\mathrm{d}z \;=\; -\mathrm{i}\,\frac{\varrho}{2}\oint_C v\overline{v}\,\mathrm{d}z$$

Entlang der Randkurve $C = \partial K$ ist die Strömung v überall tangential, also parallel zu $\mathrm{d}z$. Daher ist das Produkt $\overline{v}\,\mathrm{d}z = v\,\mathrm{d}\overline{z}$ reell. Daraus folgt:

$$F \;=\; -\mathrm{i}\,\frac{\varrho}{2}\oint_C v^2\,\mathrm{d}\overline{z} \;=\; -\mathrm{i}\,\overline{\frac{\varrho}{2}\oint_C f(z)^2\,\mathrm{d}z}$$

Nach Konjugation erhalten wir somit die ersehnte Formel von Blasius:

$$\overline{F} \;=\; F_1 - \mathrm{i}F_2 \;=\; \mathrm{i}\,\frac{\varrho}{2}\oint_C f(z)^2\,\mathrm{d}z$$

Anwendung: dynamischer Auftrieb eines Tragflügels

(3) Fliegerisch interessant sind Strömungen mit $f(z) \to v_0$ für $|z| \to \infty$. Für $K \Subset B(0,r)$ und $|z| \geq r$ gilt $f(z) = v_0 + w_0 z^{-1} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^{-k}$ (F3F). Wir finden $f(z)^2 = v_0^2 + 2v_0 w_0 z^{-1} + \sum_{k=2}^{\infty} b_k z^{-k}$ und die Auftriebsformel

$$\overline{F} \;=\; \mathrm{i}\,\frac{\varrho}{2}\oint_C f(z)^2\,\mathrm{d}z \;\overset{\text{Res}}{\underset{\text{F3A}}{=}}\; \mathrm{i}\,\frac{\varrho}{2}\oint_{B(0,r)} f(z)^2\,\mathrm{d}z \;\overset{\text{Res}}{\underset{\text{F1B}}{=}}\; -2\pi\,\varrho\,v_0\,w_0.$$

Der dynamische Auftrieb ist das Produkt aus Dichte ϱ, Geschwindigkeit v_0 und Zirkulation w_0. Ihre Richtung ist senkrecht zur Anströmung: Verläuft die Strömung von links nach rechts und die Zirkulation ist negativ (im Uhrzeigersinn), dann zeigt die Kraft nach oben: plausibel, Auftrieb! Unsere obige Illustration zeigt $f(z) = v_0(1 - 1/z^2) + w_0\mathrm{i}/z$ mit Auftrieb $\overline{F} = -2\pi\mathrm{i}\varrho\,v_0\,w_0$.

Die Formel (3) wurde 1902 von Wilhelm Kutta (1867–1944) an der Technischen Hochschule München entwickelt; von 1912 bis 1935 war er Professor für Mathematik in Stuttgart. Mit diesem bahnbrechenden Ergebnis konnten erstmals auftriebserzeugende Flügelprofile entwickelt werden! Kuttas Zirkulationsformel hilft auch näherungsweise noch, wenn keine ideale Strömung vorliegt.

Die Formel heißt auch Kutta–Joukowski–Theorem, nach Kutta und dem russischen Physiker und Aerodynamiker Nikolai Joukowski (1847–1921), der dieses Ergebnis unabhängig entdeckte und 1906 veröffentlichte. Er gründete 1904 nahe Moskau das erste aerodynamische Institut Europas. Berühmt ist das von ihm entwickelte Joukowski–Flügelprofil (1910), das aus einer kreisförmigen Lösung (wie oben illustriert) durch eine Kutta–Joukowski–Transformation gewonnen wird.

Anwendung: dynamischer Auftrieb eines Tragflügels

Ihre grundlegende Formel haben Kutta und Joukowski aus den Strömungsgleichungen abgeleitet, durch Einschränkung auf zwei Dimensionen und dank der Werkzeuge holomorpher Funktionen. Heinrich Blasius (1883–1970) hat 1911 diesen Ansatz weiter verallgemeinert und vereinfacht.

Die *abstrakten* mathematischen Grundlagen der Funktionentheorie zahlen sich hier *konkret* aus, auch in einem völlig anderen und neuen Gebiet wie der Aerodynamik! Ich betone es nochmals: Abstrakt bedeutet nicht fern der Anwendung, sondern abstrakt bedeutet vielseitig anwendbar.

Die historische Bedeutung des Kutta–Joukowski–Verfahrens liegt darin, dass damit erstmals die Strömungsgleichung für einfache Tragflächen gelöst und so der dynamische Auftrieb errechnet werden konnte. Das ist auch heute noch didaktisch hilfreich, denn zum Verständnis sind einfache, exakte Lösungen nützlich, bevor man zu komplizierten, numerischen Näherungen übergeht.

Unsere Berechnung beruht auf Vereinfachungen: Die z–Richtung kann vernachlässigt werden, die Strömung ist zweidimensional in x-y–Richtung, stationär, inkompressibel, reibungslos und wirbelfrei. Unsere Rechnung wird dadurch sehr elegant. Sie ergibt einen realistischen Auftrieb, aber keinen Widerstand! Ohne Reibung ist dies das berühmt-berüchtigte D'Alembert–Paradox.

Im Allgemeinen sind die Navier–Stokes–Strömungsgleichungen extrem kompliziert zu lösen, ebenso die daraus resultierenden Kräfte. Von Anfang an entwickelte man daher neben der Theorie eine umfangreiche Empirie, Experimente und Messungen im Feldversuch, später im Windkanal. Heute nutzt man als dritten Zugang, sozusagen als goldenen Mittelweg, numerische Verfahren zur Simulation auf Hochleistungsrechnern. Damit lassen sich beliebige dreidimensionale Profile untersuchen, zudem ist man nicht mehr auf vereinfachte Strömungsgleichungen eingeschränkt.

Ableitungen als Differentialoperatoren

Am einfachsten sind wie immer **lineare Differentialgleichungen**.
Es lohnt sich, die vorhandene Struktur zu erkennen und zu nutzen!
Bei unseren Rechnungen wollen wir Funktionen ableiten sowie addieren und multiplizieren. Hier vereinen sich Analysis und Lineare Algebra:

Der Wertebereich ist wie üblich $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, der Körper der reellen Zahlen oder der Körper der komplexen Zahlen. Beide Fälle sind zunächst sehr ähnlich, daher wollen wir beide auch möglichst parallel behandeln.

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\mathbb{K}^\Omega$ die Menge aller Funktionen $f, g : \Omega \to \mathbb{K}$.
Summe $f + g$ und Produkt αf mit $\alpha \in \mathbb{K}$ definieren wir punktweise:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{und} \quad (\alpha f)(x) = \alpha\, f(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega.$$

Hiermit wird $(\mathbb{K}^\Omega, +, \cdot)$ zu einem $\mathbb{K}$–Vektorraum. Hierin ist die Teilmenge $C^k(\Omega) = C^k(\Omega, \mathbb{K}) \subseteq \mathbb{K}^\Omega$ aller k-mal stetig diff'baren Funktionen ein Untervektorraum. Auch das Produkt $f \cdot g$ definieren wir punktweise:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega.$$

Damit wird $(\mathbb{K}^\Omega, +, \cdot)$ zu einer $\mathbb{K}$–Algebra, darin ebenso $C^k(\Omega, \mathbb{K})$.

Ableitungen als Differentialoperatoren

Satz Q2A: Ableitung von Summen und Produkten

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Die Menge $C^k(\Omega, \mathbb{K})$ aller k-mal stetig differenzierbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{K}$ ist ein **$\mathbb{K}$–Vektorraum**.

Jede partielle Ableitung $\partial_1, \ldots, \partial_n : C^k(\Omega, \mathbb{K}) \to C^{k-1}(\Omega, \mathbb{K})$ ist eine **$\mathbb{K}$–lineare Abbildung**, das heißt, für alle $f, g \in C^k$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt

$$\boxed{\partial_k(\alpha f + \beta g) = \alpha(\partial_k f) + \beta(\partial_k g)}$$

Mit der punktweisen Multiplikation wird $C^k(\Omega, \mathbb{K})$ zu einer **$\mathbb{K}$–Algebra**.
Für die Ableitung von Produkten gilt wie üblich die **Leibniz–Regel**:

$$\boxed{\partial_k(f \cdot g) = (\partial_k f) \cdot g + f \cdot (\partial_k g)}$$

☺ Sie kennen diese Rechenregeln vom eindimensionalen Fall ($n = 1$).
Nachrechnen: Sie übertragen sich auf partielle Ableitungen ($n \geq 1$).

☺ Auf den differenzierbaren Funktionen $f \in C^k(\Omega, \mathbb{K})$ wirken nun Differentialoperatoren wie z.B. der Laplace–Operator $\Delta = \partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2$.

Lineare partielle Differentialgleichungen

Definition Q2B: linearer Differentialoperator

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Zu $\nu \in \mathbb{N}^n$ betrachten wir die **ν-fache Ableitung**

$$\boxed{\partial^\nu := \partial_1^{\nu_1} \cdots \partial_n^{\nu_n} : C^k(\Omega, \mathbb{K}) \to C^{k-|\nu|}(\Omega, \mathbb{K}).}$$

Dank Schwarz (D4A) dürfen wir hier umordnen: $\partial^\mu \partial^\nu = \partial^\nu \partial^\mu = \partial^{\mu+\nu}$.

Ein **linearer Differentialoperator** $L : C^k \to C^0$ ist von der Form

$$\boxed{L = \sum\nolimits_{|\nu| \le k} a_\nu(x)\, \partial^\nu, \quad \text{also} \quad (Lf)(x) = \sum\nolimits_{|\nu| \le k} a_\nu(x)\, \partial^\nu f(x).}$$

Jede **lineare Differentialgleichung** (PDE) hat die Form $Lu = b$.
Gegeben ist L und $b : \Omega \to \mathbb{K}$; gesucht sind Lösungen $u : \Omega \to \mathbb{K}$.

☺ Die homogene Gleichung $Lu = 0$ fragt nach dem Kern von L.
Die Menge aller Lösungen $u : \Omega \to \mathbb{K}$ von $Lu = 0$ ist ein $\mathbb{K}$–Vektorraum.

Die Menge aller Lösungen $u : \Omega \to \mathbb{K}$ von $Lu = b$ ist ein affiner Raum:
„Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen.“

Lineare partielle Differentialgleichungen

Unter den partiellen Differentialgleichungen (PDE) sind die linearen der wichtigste Spezialfall. Hierfür brauchen wir passendes Vokabular.

Bei ∂^ν ist $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n$ ein **Multiindex** mit $\nu_1, \dots, \nu_n \in \mathbb{N}$.
Die **Ordnung** $|\nu| = \nu_1 + \cdots + \nu_n$ besagt, wie oft abgeleitet wird.

Der Differentialoperator L ist eine **Linearkombination** dieser ∂^ν.
Dies ist eine **lineare Abbildung**, d.h. $L(\alpha f + \beta g) = \alpha(Lf) + \beta(Lg)$.

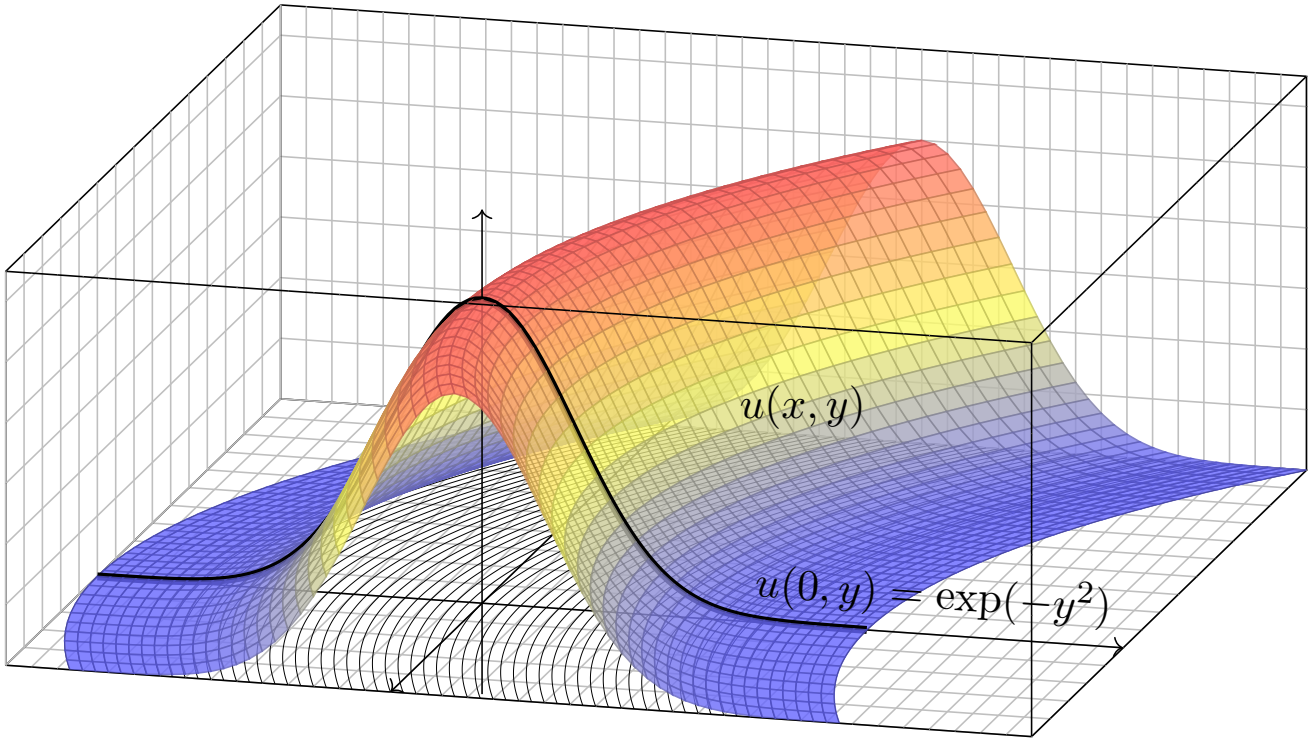
Die **Koeffizienten** $a_\nu : \Omega \to \mathbb{K}$ sind hierbei stetige Funktionen;
bei **konstanten Koeffizienten** sind die a_ν auf ganz Ω konstant.

Die **Ordnung** von L ist $\le k$, wenn $a_\nu = 0$ für alle ν mit $|\nu| > k$ gilt.
Die Ordnung ist $= k$, wenn zudem $a_\nu \ne 0$ für ein ν mit $|\nu| = k$ gilt.

☺ Erfahrung und Intuition gewöhnlicher Differentialgleichungen helfen!
⚠ Anders als bei gewöhnlichen Differentialgleichungen (Struktursatz O3B) sind die Lösungsräume partieller Differentialgleichungen jedoch meist unendlichdimensional, wie schon die obigen Beispiele zeigen.
Auch Anfangs- bzw. Randbedingungen sind meistens komplizierter.
Wir müssen je nach Problemstellung individuell darauf eingehen.

Lineare PDE erster Ordnung

Grundidee: Konstruiere die Funktion $u(x,y)$ entlang ihrer Höhenlinien!



☺ Charakteristische Kurven sind genial einfach und einfach genial.
Die Methode erfordert Verständnis und Übung. Schauen Sie genau hin!

Lineare PDE erster Ordnung

Zu lösen sei eine **quasilineare PDE erster Ordnung**:

$$a(x,y,u)\,\partial_x u(x,y) + b(x,y,u)\,\partial_y u(x,y) = f(x,y,u)$$

$$1\,\partial_x u(x,y) + x\,\partial_y u(x,y) = 0$$

mit Anfangswerten $u(0,y) = \exp(-y^2)$ für alle $y \in \mathbb{R}$

Unser Beispiel zeigt den Spezialfall einer **homogenen linearen PDE**.
Das Definitionsgebiet von $u : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \to \mathbb{R}$ ist dabei implizit ganz $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe: Zur Vereinfachung auf eine Dimension untersuchen wir Wege

$$\gamma \,:\, \mathbb{R} \supseteq I \to \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \,:\, s \mapsto (x,y) = (X(s), Y(s)).$$

Diese setzen wir stillschweigend als stetig differenzierbar voraus.

(1) Leiten Sie die Höhe $U(s) = u(X(s), Y(s))$ ab nach Wegparameter s.
Wählen Sie γ so, dass die Wegableitung genau unserer PDE entspricht.

(2) Konstruieren Sie u entlang dieser **charakteristischen Kurven**.
Was ist der Unterschied zwischen x, y, u und X, Y, U? Was ist gleich?

Lineare PDE erster Ordnung

Lösung: (1) Dank der **Kettenregel** gilt: $X' \, \partial_x u + Y' \, \partial_y u = U'$

Koeffizientenvergleich mit unserer PDE: $a \, \partial_x u + b \, \partial_y u = f$

(2) Zum Startpunkt $(0, y_0)$ gehören **charakteristische Gleichungen**:

$$\begin{aligned} X(0) &= x_0 = 0, & X'(s) &= a\big(X(s), Y(s), U(s)\big) = 1, \\ Y(0) &= y_0 \in \mathbb{R}, & Y'(s) &= b\big(X(s), Y(s), U(s)\big) = X(s), \\ U(0) &= u(x_0, y_0) = \exp(-y_0^2), & U'(s) &= f\big(X(s), Y(s), U(s)\big) = 0. \end{aligned}$$

☺ Gewöhnliche Differentialgleichungen verstehen wir bereits gut!
Wir können dies für X, Y, U lösen und dann in x, y, u umrechnen:

$$\left.\begin{aligned} x &\overset{!}{=} X(s) = x_0 + s \\ y &\overset{!}{=} Y(s) = y_0 + s^2/2 \\ u(x,y) &\overset{!}{=} U(s) = \exp(-y_0^2) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{aligned} s &= x \\ y_0 &= y - x^2/2 \\ u(x,y) &= \exp\big[-(y - x^2/2)^2\big] \end{aligned}\right.$$

☺ Skizze: Der Graph zeigt diese Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto u(x,y)$.
☺ Probe: Diese Funktion u erfüllt unsere PDE und die Anfangswerte!
☺ Die Rechnung zeigt zudem die Eindeutigkeit der Lösung u. Warum?

Lineare PDE erster Ordnung

☺ Die **chakteristischen Kurven** transportieren die Anfangswerte.
Aus der zur Lösung vorgelegten PDE $a \, \partial_x u + b \, \partial_y u = f$ lesen wir direkt die charakteristischen Gleichungen $X' = a$, $Y' = b$, $U' = f$ als AWP ab und bestimmen hierzu die charakteristischen Kurven wie zuvor gelernt.

☺ Wir nutzen diese Charakteristiken geschickt, um u zu berechnen.
Im Allgemeinen Fall ist $U' = f$ die Höhenänderung längs des Weges.
Im einfachsten Fall $f = 0$ ist jede Charakteristik γ eine Höhenlinie von u.

☺ **Notation:** Warum schreiben wir erst x, y, u und dann X, Y, U?
Zunächst sind $(x,y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ freie Variablen (etwa Ort, Zeit, etc.), davon hängt die gesuchte Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto u(x,y)$ ab.

Entlang des Weges γ parameterisieren wir Ort $(x,y) = (X(s), Y(s))$ und Höhe $U(s) = u(X(s), Y(s))$ allein durch den Wegparameter $s \in I \subseteq \mathbb{R}$.
Dies sind also Funktionen von s, und das wollen wir präzise notieren.

☺ Die Bezeichnung X, Y, U ist einfach, klar und narrensicher. Üblich sind ebenso ξ, η, υ (griechisch) oder $\hat{x}, \hat{y}, \hat{u}$ (lästig) oder schlicht x, y, u (doppeldeutig). Das ist eine Frage von Bequemlichkeit und Geschmack.

Quasilineare PDE und Charakteristiken

Definition Q2c: lineare, semilineare und quasilineare PDE

Eine **PDE erster Ordnung** für $u : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \to \mathbb{R}$ ist eine Gleichung

$$F\big(x, y, u(x,y), \partial_x u(x,y), \partial_y u(x,y)\big) = 0 \quad \text{für alle } (x,y) \in \Omega.$$

Gegeben ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $F : \Omega \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig, gesucht ist $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Wir nennen $u : \Omega \to \mathbb{R}$ eine **(klassische) Lösung**, wenn u nach x und y differenzierbar ist und in jedem Punkt $(x,y) \in \Omega$ des Definitionsgebiets die geforderte Gleichung $F(x, y, u(x,y), \partial_x u(x,y), \partial_y u(x,y)) = 0$ erfüllt.

Wichtige Spezialfälle sind **quasilineare / semilineare / lineare PDE**

$$\begin{aligned}
&a(x,y,u)\,\partial_x u(x,y) + b(x,y,u)\,\partial_y u(x,y) = f(x,y,u)\\
&a(x,y)\quad \partial_x u(x,y) + b(x,y)\quad \partial_y u(x,y) = f(x,y,u)\\
&a(x,y)\quad \partial_x u(x,y) + b(x,y)\quad \partial_y u(x,y) = c(x,y)\,u(x,y) + d(x,y)
\end{aligned}$$

Gegeben sind die stetigen Koeffizientenfunktionen $a, b, f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bzw. $a, b, c, d : \Omega \to \mathbb{R}$, gesucht sind Lösungen $u : \Omega \to \mathbb{R}$ wie erklärt. Lineare PDE sind **homogen** ($d = 0$) oder **inhomogen** ($d \neq 0$).

Quasilineare PDE und Charakteristiken

Aufgabe: Sind folgende PDE linear? semi? quasi? weder noch?

Die PDE	$\partial_x u + \partial_y u = u$	ist... linear homogen.
Die PDE	$y\,\partial_x u + \sin(x)\,\partial_y u = \cos(x+y)$	ist... linear inhomogen.
Die PDE	$\partial_x u + x\,\partial_y u = \cos(y)\cos(u)$	ist... semilinear.
Die PDE	$\partial_x u + u\,\partial_y u = \cos(y)\cos(u)$	ist... quasilinear.
Die PDE	$x\,\partial_x u + u^2\,\partial_y u = \mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u}$	ist... quasilinear.
Die PDE	$\partial_x u + (\partial_y u)^2 = 0$	ist... nicht quasilinear.

Charakteristiken sind maßgeschneidert für quasilineare Gleichungen. Im semilinearen oder linearen Fall wird alles noch etwas einfacher.

📖 G.B. Folland: *Partial differential equations*, Princeton UP 1995.

Der allgemeine Fall $F(x, y, u, \partial_x u, \partial_y u) = 0$ ist deutlich schwieriger und wird hier nicht behandelt. Siehe §3.2 des umfassenden Lehrbuchs von

📖 L.C. Evans: *Partial Differential Equations*, 2nd edition, AMS 2010.

Es kommt vor, dass klassische Lösungen nicht genügen, dann helfen allgemeiner schwache Lösungen und Distributionen, siehe Kapitel D.

Quasilineare PDE und Charakteristiken

Zu lösen sei eine **quasilineare PDE erster Ordnung**

$$a(x,y,u)\,\partial_x u + b(x,y,u)\,\partial_y u = f(x,y,u) \quad \text{für alle } (x,y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2,$$
$$\text{mit Anfangswerten} \quad u(x,y) = u_0(x,y) \quad \text{für alle } (x,y) \in A \subseteq \Omega.$$

Gegeben sind hierzu das Definitionsgebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ und die stetigen Koeffizientenfunktionen $a, b, f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gesucht ist $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Auf einer Teilmenge $A \subseteq \Omega$ gibt $u_0 : A \to \mathbb{R}$ die Anfangswerte vor.

Eine **charakteristische Kurve** der PDE zum Startpunkt $(x_0, y_0) \in A$ ist ein C^1–Weg $\gamma : \mathbb{R} \supseteq I \to \Omega \times \mathbb{R}$ mit $s \mapsto (X(s), Y(s), U(s))$ und

$$\begin{aligned} X(0) &= x_0, & X' &= a(X,Y,U), \\ Y(0) &= y_0, & Y' &= b(X,Y,U), \\ U(0) &= u_0(x_0,y_0), & U' &= f(X,Y,U). \end{aligned}$$

Solche gewöhnlichen DGSysteme können wir bereits lösen (O1B/O2A): Sind a, b, f stetig diff'bar, so hat das AWP genau eine maximale Lösung.

☺ Der Startwert wird entlang der Charakteristik transportiert (Q2D): Jede Lösung u der PDE erfüllt $u(X(s), Y(s)) = U(s)$ für alle $s \in I$.

Quasilineare PDE und Charakteristiken

☺ So können wir **quasilineare PDE** zurückführen auf ODE.
Wir nutzen diese Charakteristiken geschickt, um u zu berechnen.
Im Allgemeinen Fall ist $U' = f$ die Höhenänderung längs des Weges.
Im einfachsten Fall $f = 0$ ist jede Charakteristik γ eine Höhenlinie von u.

☺ Für **semilineare PDE** vereinfachen sich die char. Gleichungen zu

$$X' = a(X,Y), \quad Y' = b(X,Y).$$

Hier haben wir die **Grundkurve** $s \mapsto (X(s), Y(s))$ in der x–y–Ebene, und ihr DGSystem ist von der Höhe $U(s) = u(X(s), Y(s))$ entkoppelt. Die Höhe folgt ihrer eigenen Gleichung $U'(s) = f(X(s), Y(s), U(s))$.

☺ Für **lineare PDE** vereinfacht sich die letzte Gleichung noch weiter zu

$$U' = c(X,Y)\,U + d(X,Y).$$

Zu gegebener Grundkurve $s \mapsto (X(s), Y(s))$ ist die **Höhenfunktion** $U(s)$ leicht zu berechnen: Sie folgt einer linearen Differentialgleichung (M2E). Zu ihrer Lösung nutzen wir die explizite Integralformel, siehe Satz Q2E.

Erstes Beispiel: überbestimmt?

Q213

Aufgabe: Finden Sie alle C^1–Funktionen $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$y\,\partial_x u(x,y) - x\,\partial_y u(x,y) = 0 \quad \text{und (1)} \quad u(x,0) = \cos(x^2),$$
$$\text{(2)} \quad u(x,0) = 1 - x^2/2,$$
$$\text{(3)} \quad u(x,0) = \sin(x).$$

Lösung: Zum Startpunkt $(x_0, 0)$ gehört die charakteristische Gleichung

$$X(0) = x_0, \qquad X'(s) = \quad Y(s),$$
$$Y(0) = 0, \qquad Y'(s) = -X(s).$$

☺ Entlang dieser Kurve ist $U(s) = u(X(s), Y(s))$ konstant, da $U' = 0$.
Zu lösen ist nur noch ein lineares DGSystem, in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

☺ Eigenwerte, Eigenvektoren, Eigenfunktionen, reelle Lösungen...
Die Lösung ist der Kreis $X(s) = x_0 \cos(s)$, $Y(s) = -x_0 \sin(s)$. Probe!

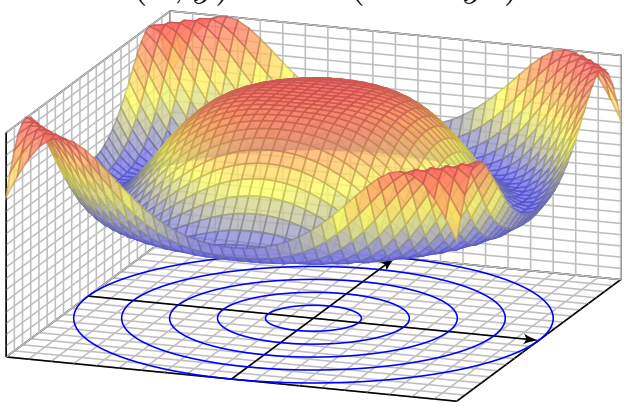
Erstes Beispiel: überbestimmt?

Q214

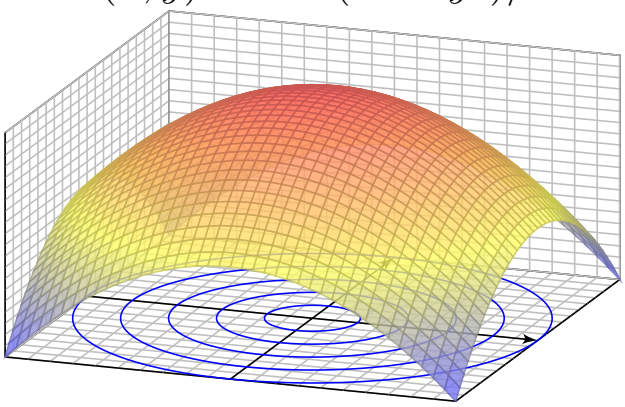
Entlang jeder Charakteristik ist die gesuchte Lösung $u(x,y)$ konstant:
Die allgemeine Lösung ist $u(x,y) = f(x^2 + y^2)$. Machen Sie die Probe!
Zusammen mit den Anfangswerten konstruieren wir hieraus die Lösung.

(1) Die gegebenen Anfangswerte $u(x,0) = \cos(x^2)$ auf der x–Achse werden entlang der Kreise $x^2 + y^2 = \text{const}$ überallhin transportiert:

$u(x,y) = \cos(x^2 + y^2)$



$u(x,y) = 1 - (x^2 + y^2)/2$



(2) Ebenso für die gegebenen Anfangswerte $u(x,0) = 1 - x^2/2$.

(3) Die Anfangswerte $u(x,0) = \sin(x)$ erlauben keine Lösung!
Diese Aufgabe ist **überbestimmt**. Wir wünschen / fordern, dass auf jeder charakteristischen Kurve **genau ein Anfangswert** gegeben ist.

Die Charakteristikmethode in Worten

☺ Die Grundidee der Charakteristiken ist geometrisch anschaulich: Konstruiere die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \to \mathbb{R}$ entlang ihrer Höhenlinien!

Wir kennen die gesuchte Funktion u noch nicht, sondern nur die PDE. Glücklicherweise können wir daraus bereits die Höhenlinien berechnen! Voraussetzung: Die PDE ist erster Ordnung und quasilinear (Q2C).

Hierzu lesen wir aus der PDE die charakteristischen Gleichungen ab, als System gewöhnlicher Differentialgleichungen mit Anfangswerten. Das können wir bereits gut lösen – dank unserer soliden Vorbereitung.

Der Idealfall sieht so aus: Die Charakteristiken überdecken das Gebiet Ω als „parallele“ Kurvenschar, ohne Lücken und ohne Überschneidungen, und auf jeder Charakteristik wird genau ein Anfangswert vorgegeben.

Aus den Charakteristiken können wir die Funktion u rekonstruieren: Annahme: Über jeden Punkt $(x, y) \in \Omega$ läuft genau eine Charakteristik. Ihre Höhe bestimmt dann den Funktionswert $u(x, y)$ in diesem Punkt.

⚠ Abschließend sollten wir überprüfen, ob u differenzierbar ist und tatsächlich die Differentialgleichung mit allen Anfangswerten erfüllt.

Die Charakteristikmethode in Worten

Charakteristiken lösen quasilineare Differentialgleichungen (Q2D). Zwei **geometrische Hindernisse** können dabei auftreten:

Die PDE kann **unterbestimmt** sein: Läuft über einen Punkt $(x, y) \in \Omega$ gar keine Charakteristik, so ist der Funktionswert $u(x, y)$ unbestimmt.

⚠ In diesem Falle kann die PDE mehr als eine Lösung zulassen.

Die PDE kann **überbestimmt** sein: Laufen über einen Punkt $(x, y) \in \Omega$ mehrere Charakteristiken mit verschiedenen Höhen, so widersprechen sich diese Forderungen, und kein Wert $u(x, y)$ kann sie alle erfüllen.

⚠ In diesem Falle lässt die PDE überhaupt keine Lösung zu.

Kurzum: Bei Überbestimmtheit gibt es zu viele Charakteristiken, so dass widersprüchliche Forderungen entstehen und keine Lösung möglich ist.

Bei Unterbestimmtheit hingegen gibt es zu wenige Charakteristiken, so dass nicht alle Funktionswerte $u(x, y)$ eindeutig festgelegt sind.

☺ Die PDE heißt **gut gestellt**, wenn sie genau eine Lösung zulässt, und diese Lösung zudem stetig von den Anfangsdaten abhängt.

Zweites Beispiel: unterbestimmt?

Q217

Aufgabe: Finden Sie alle C^1–Funktionen $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$y\,\partial_x u(x,y) + x\,\partial_y u(x,y) = 0 \quad \text{und (1)} \quad u(x,0) = \cos(x^2),$$
$$\text{(2)} \quad u(0,y) = \cos(y^2),$$
$$\text{(3)} \quad \text{beides.}$$

Lösung: Zum Startpunkt $(x_0, 0)$ gehört die charakteristische Gleichung

$$X(0) = x_0, \qquad X'(s) = Y(s),$$
$$Y(0) = 0, \qquad Y'(s) = X(s).$$

☺ Entlang dieser Kurve ist $U(s) = u(X(s), Y(s))$ konstant, da $U' = 0$.
Zu lösen ist nur noch ein lineares DGSystem, in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

☺ Eigenwerte, Eigenvektoren, Eigenfunktionen, reelle Lösungen...
Die Lösung ist die Hyperbel $X(s) = x_0 \cosh(s)$, $Y(s) = x_0 \sinh(s)$.

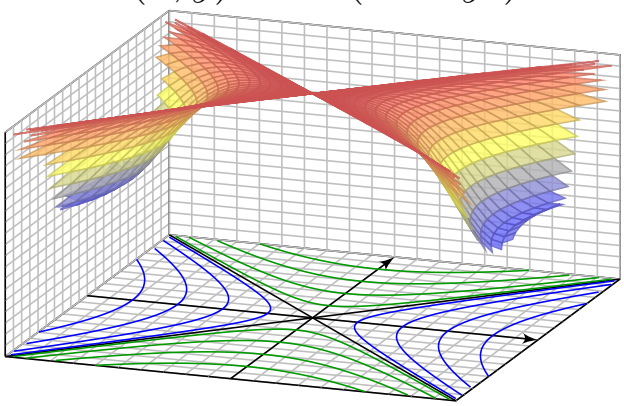
Zweites Beispiel: unterbestimmt?

Q218

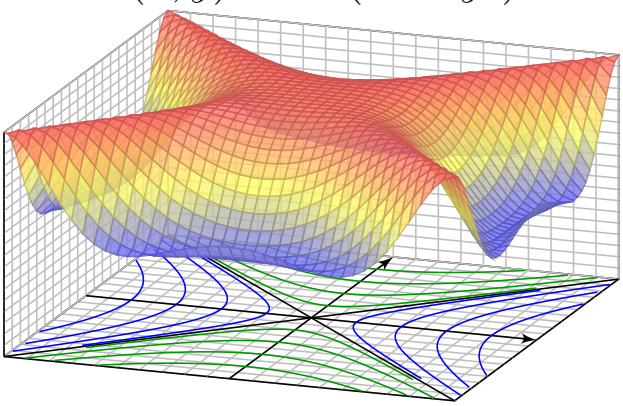
Entlang jeder Charakteristik ist die gesuchte Lösung $u(x,y)$ konstant:
Die allgemeine Lösung ist $u(x,y) = g(x^2 - y^2)$ auf jedem Viertel. Probe!
Zusammen mit den Anfangswerten konstruieren wir hieraus die Lösung:

(1) Die gegebenen Anfangswerte $u(x,0) = \cos(x^2)$ auf der x–Achse werden entlang der Hyperbeln $x^2 - y^2 = \text{const}$ transportiert: überallhin?

$u(x,y) = \cos(x^2 - y^2)$



$u(x,y) = \cos(x^2 - y^2)$



Diese Aufgabenstellung (1) ist noch **unterbestimmt**. Ebenso (2).
Erst beide Daten zusammen (3) bestimmen $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eindeutig.
Zwecks Existenz und Eindeutigkeit der Lösung fordern wir, dass auf jeder charakteristischen Kurve **genau ein Anfangswert** gegeben ist.

Drittes Beispiel: gut gestellt?

Q219
Erläuterung

Aufgabe: Finden Sie alle C^1–Funktionen $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\boxed{\partial_t u(t,x) + 2\,\partial_x u(t,x) = 0 \quad \text{und} \quad u(0,x) = g(x) = -x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}.}$$

Lösung: Zum Startpunkt $(0, x_0)$ gehört die charakteristische Gleichung

$$\begin{aligned} T(0) &= 0, & T'(s) &= 1, \\ X(0) &= x_0, & X'(s) &= 2, \\ U(0) &= g(x_0), & U'(s) &= 0. \end{aligned}$$

Wir finden $t \overset{!}{=} T(s) = s$. Fortan nutzen wir daher t als Wegparameter. Weiterhin finden wir $x \overset{!}{=} X(t) = x_0 + 2t$, nach x_0 aufgelöst $x_0 = x - 2t$. Entlang dieser Kurve ist $U(t) = u(t, x_0 + 2t)$ konstant, denn $\dot{U} = 0$. Also:

$$u(t,x) \overset{!}{=} U(t) = U(0) = g(x_0) = g(x - 2t).$$

- Probe: Diese Funktion u erfüllt unsere PDE und die Anfangswerte!
- Die Rechnung zeigt zudem die Eindeutigkeit der Lösung u. Warum?
- Dies ist ein einfaches Beispiel der Transportgleichung, siehe Q229.

Viertes Beispiel: gut gestellt?

Q220
Erläuterung

Aufgabe: Finden Sie alle C^1–Funktionen $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\boxed{\partial_t u(t,x) + x\,\partial_x u(t,x) = 0 \quad \text{und} \quad u(0,x) = g(x) = -\sin(x).}$$

Lösung: Zum Startpunkt $(0, x_0)$ gehört die charakteristische Gleichung

$$\begin{aligned} T(0) &= 0, & T'(s) &= 1, \\ X(0) &= x_0, & X'(s) &= X(s), \\ U(0) &= g(x_0), & U'(s) &= 0. \end{aligned}$$

Wir finden $t \overset{!}{=} T(s) = s$. Fortan nutzen wir daher t als Wegparameter. Weiterhin finden wir $x \overset{!}{=} X(t) = x_0\,\mathrm{e}^t$, nach x_0 aufgelöst $x_0 = x\,\mathrm{e}^{-t}$. Entlang dieser Kurve ist $U(t) = u(t, x_0\,\mathrm{e}^t)$ konstant, denn $\dot{U} = 0$. Also:

$$u(t,x) \overset{!}{=} U(t) = U(0) = g(x_0) = g(x\,\mathrm{e}^{-t})$$

- Probe: Diese Funktion u erfüllt unsere PDE und die Anfangswerte!
- Die Rechnung zeigt zudem die Eindeutigkeit der Lösung u. Warum?
- Für eine Variante mit rechter Seite und Graphik siehe Q233.

Die Charakteristikmethode

Allgemein für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ verläuft das Verfahren wörtlich genauso.
Gegeben seien stetige Funktionen $a_1, \ldots, a_n, f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Gesucht sind alle stetig diff'baren Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$\boxed{\begin{aligned} \textstyle\sum_{k=1}^n a_k(x,u)\,\partial_k u(x) &= f(x,u) && \text{für alle } x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \\ u(x) &= u_0(x) && \text{für alle } x \in A \subseteq \Omega. \end{aligned}}$$

Das AWP kann **unterbestimmt** sein und mehrere Lösungen zulassen, oder **überbestimmt** und keine Lösung zulassen. Es heißt **gut gestellt**, wenn genau eine Lösung existiert und zudem stetig von u_0 abhängt.

Eine **charakteristische Kurve** der PDE zum Startpunkt $x_0 \in A$ ist ein C^1–Weg $\gamma : \mathbb{R} \supseteq I \to \Omega \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ mit $t \mapsto (X(s), U(s))$ und

$$\boxed{\begin{aligned} X' &= a(X,U), & X(0) &= x_0, \\ U' &= f(X,U), & U(0) &= u_0(x_0). \end{aligned}}$$

Sind die Funktionen a, f sogar stetig differenzierbar, so können wir den Existenz- und Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche DGSysteme nutzen: Zu jedem Startpunkt $x_0 \in A$ gehört genau eine Charakteristik. (O1B)

Die Charakteristikmethode

Annahme (A): Die Koeffizientenfunktionen $a_1, \ldots, a_n, f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetig und bezüglich der letzten Variable u sogar stetig differenzierbar.

Annahme (B): Die Charakteristiken der PDE überdecken ganz Ω; zu jedem Punkt $x \in \Omega$ existiert (mindestens) eine Charakteristik $s \mapsto (X(s), U(s))$ mit Startpunkt $X(0) \in A$ und $X(s) = x$ für ein s.

Satz Q2D: Lösung entlang charakteristischer Kurven

Unter den Annahmen (A) und (B) gilt für $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ die Äquivalenz:

$$\boxed{\text{Die Funktion } u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ löst die PDE.}}$$

$$\text{(A)}\Big\Downarrow \qquad\qquad \Big\Uparrow\text{(B)}$$

$$\boxed{\text{Es gilt } u(X(s)) = U(s) \text{ längs jeder Charakteristik.}}$$

Insbesondere existiert dank (A&B) höchstens eine Lösung $u : \Omega \to \mathbb{R}$.

☺ So können Sie jede Lösung u finden. Abschließend bleibt zu prüfen, ob die gefundene Funktion u tatsächlich stetig differenzierbar (C^1) ist.

Beweis der Charakteristikmethode

Nachrechnen: (A) Sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Lösung unserer PDE.
Sei $s \mapsto (X(s), U(s))$ eine Charakteristik. Wir zeigen $u(X(s)) = U(s)$.
Für die Differenz $\delta(s) = U(s) - u(X(s))$ gilt $\delta(0) = 0$ und folgende ODE:

$$\begin{aligned}
\delta' &= U' - \textstyle\sum_{k=1}^n X_k' \, \partial_k u(X) \\
&= f(X, U) - \textstyle\sum_{k=1}^n a_k(X, U) \, \partial_k u(X) \\
&= f\big(X, u(X) + \delta\big) - \textstyle\sum_{k=1}^n a_k\big(X, u(X) + \delta\big) \, \partial_k u(X)
\end{aligned}$$

Da u die PDE löst, ist die Nullfunktion $\tilde{\delta}(s) = 0$ eine Lösung dieser ODE.
Dank Annahme (A) können wir den Eindeutigkeitssatz M1C anwenden:
Diese ODE kann nur eine einzige Lösung haben! Das bedeutet $\delta = 0$.
Somit gilt $u(X(s)) = U(s)$ entlang jeder Charakteristik, wie behauptet.

☺ Das ist die schwierigste und wichtigste Hälfte des Satzes.
Die Startwerte werden entlang von Charakteristiken transportiert:
Lösungen der PDE erfüllen $u(X(s)) = U(s)$ längs jeder Charakteristik.

☺ Mit Charakteristiken können wir Werte einer Lösung u bestimmen!
Das gilt insbesondere, wenn wir genügend Charakteristiken haben (B).

Beweis der Charakteristikmethode

Nachrechnen: (B) Sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.
Sei $s \mapsto (X(s), U(s))$ eine beliebige Charakteristik der PDE.
Wir setzen $U(s) - u(X(s)) = 0$ voraus. Die Ableitung ergibt:

$$\begin{aligned}
0 &= U' - \textstyle\sum_{k=1}^n X_k' \, \partial_k u(X) \\
&= f(X, U) - \textstyle\sum_{k=1}^n a_k(X, U) \, \partial_k u(X) \\
&= f\big(X, u(X)\big) - \textstyle\sum_{k=1}^n a_k\big(X, u(X)\big) \, \partial_k u(X)
\end{aligned}$$

In jedem Punkt $x = X(s)$ erfüllt u demnach die PDE.
Dank Annahme (B) gilt die PDE in jedem Punkt $x \in \Omega$.

☺ Damit können wir aus Charakteristiken eine Lösung u konstruieren.
Dies gilt insbesondere dann, wenn zu jedem Punkt $x \in \Omega$ *genau* eine Charakteristik $s \mapsto (X(s), U(s))$ existiert mit $X(s) = x$ für *genau* ein s.

⚠ Bei Überbestimmtheit gibt es zu viele Charakteristiken, so dass widersprüchliche Forderungen entstehen und keine Lösung möglich ist.
Bei Unterbestimmtheit hingegen gibt es zu wenige Charakteristiken.
Die vorangehenden Beispiele illustrieren Über- und Unterbestimmtheit.

Warnende Gegenbeispiele

Die oben erklärten Voraussetzungen (A) und (B) sind etwas technisch, aber leider unverzichtbar. Dies sehen wir an konkreten Gegenbeispielen:

Die obige Aufgabe zu Hyperbeln (Q217) illustriert Unterbestimmtheit; hier ist (B) verletzt, und somit ist Satz Q2D(B) nicht anwendbar.

Im folgenden Beispiel ist (A) verletzt und daher Q2D(A) nicht anwendbar.

Aufgabe: (1) Zu lösen ist für $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die PDE

$$\boxed{\partial_x u(x,y) = \sqrt[3]{u(x,y)^2}, \qquad u(0,y) = 0.}$$

(a) Finden Sie mindestens zwei verschiedene Lösungen u und $\tilde{u}$.

(b) Stellen Sie die charakteristischen Gleichungen auf und finden Sie zu jedem Startwert mindestens zwei verschiedene Charakteristiken.

(2) Finden Sie alle Lösungen $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ der PDE

$$\boxed{\partial_x u(x,y) = \sqrt[3]{u(x,y)^2}, \qquad u(3,y) = 1.}$$

Hier ist (A) zwar verletzt, aber dennoch sind Charakteristiken eindeutig.

Warnende Gegenbeispiele

Lösung: In x–Richtung ist dies die gewöhnliche DG $u'(x) = \sqrt[3]{u(x)^2}$. Diese kennen wir von der ausführlichen Untersuchung auf Seite M325.

(1a) Zwei mögliche Lösungen sind $u(x,y) = 0$ und $\tilde{u}(x,y) = x^3/27$.

(1b) Zum Startpunkt $(0, y_0)$ gehört die charakteristische Gleichung

$$\begin{aligned} X(0) &= 0, & X'(s) &= 1, \\ Y(0) &= y_0, & Y'(s) &= 0, \\ U(0) &= 0, & U'(s) &= \sqrt[3]{U(s)^2}. \end{aligned}$$

Zwei mögliche Lösungen sind die charakteristischen Kurven

$$\begin{aligned} \gamma &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : s \mapsto (X(s), Y(s), U(s)) = (s, y, 0) \quad \text{und} \\ \tilde{\gamma} &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : s \mapsto (\tilde{X}(s), \tilde{Y}(s), \tilde{U}(s)) = (s, y, s^3/27). \end{aligned}$$

⚠ Dies zeigt, dass sich der Satz Q2D hier nicht anwenden lässt!

(2) Die Charakteristiken $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{\geq 0} : s \mapsto (s, y, U(s))$ sind hier eindeutig, nämlich $U(s) = s^3/27$ für $s \geq 0$ und $U(s) = 0$ für $s \leq 0$.

Diese PDE hat demnach genau eine Lösung $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, nämlich $u(x,y) = x^3/27$ für $x \geq 0$ und $u(x,y) = 0$ für $x \leq 0$.

Kritisches Beispiel: Wasseruhr

Aufgabe: (1) Finden Sie alle Lösungen $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ der PDE

$$\boxed{\partial_x u(x,y) = -2y\sqrt{u(x,y)}, \qquad u(0,y) = y^2.}$$

(2) Finden Sie zwei verschiedene Lösungen $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ der PDE

$$\boxed{\partial_x u(x,y) = -2y\sqrt{u(x,y)}, \qquad u(1,y) = 0.}$$

Warum versagt die Charakteristikmethode? Was sollte Sie warnen?

Wir erinnern an Torricellis Gesetz (Seite M123): Wasser fließt aus einem Zylinder mit der Geschwindigkeit $v = \sqrt{2\,g\,h}$ gemäß Energieerhaltung. Sei $x \in \mathbb{R}$ die Zeit und $u \geq 0$ die Wasserhöhe über der Öffnung. Dann gilt Torricellis Differentialgleichung $\partial_x u = -y\sqrt{u(x)}$. Hier ist $y > 0$ eine Konstante; dieser Parameter hängt von Form und Größe der Öffnung ab.

Lösung: (1) Zum Startpunkt $(0, y_0)$ gehört die char. Gleichung

$$\begin{aligned} X(0) &= 0, & X'(s) &= 1, \\ Y(0) &= y_0, & Y'(s) &= 0, \\ U(0) &= y_0^2, & U'(s) &= -2Y(s)\sqrt{U(s)}. \end{aligned}$$

Kritisches Beispiel: Wasseruhr

Eindeutige Lösung M123 ist die Charakteristik $s \mapsto (s, y_0, U(s))$ mit

$$U(s) = \begin{cases} (y_0 - sy_0)^2 & \text{für } s \leq 1, \\ 0 & \text{für } s \geq 1. \end{cases}$$

Für jede Lösung $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ muss demnach gelten:

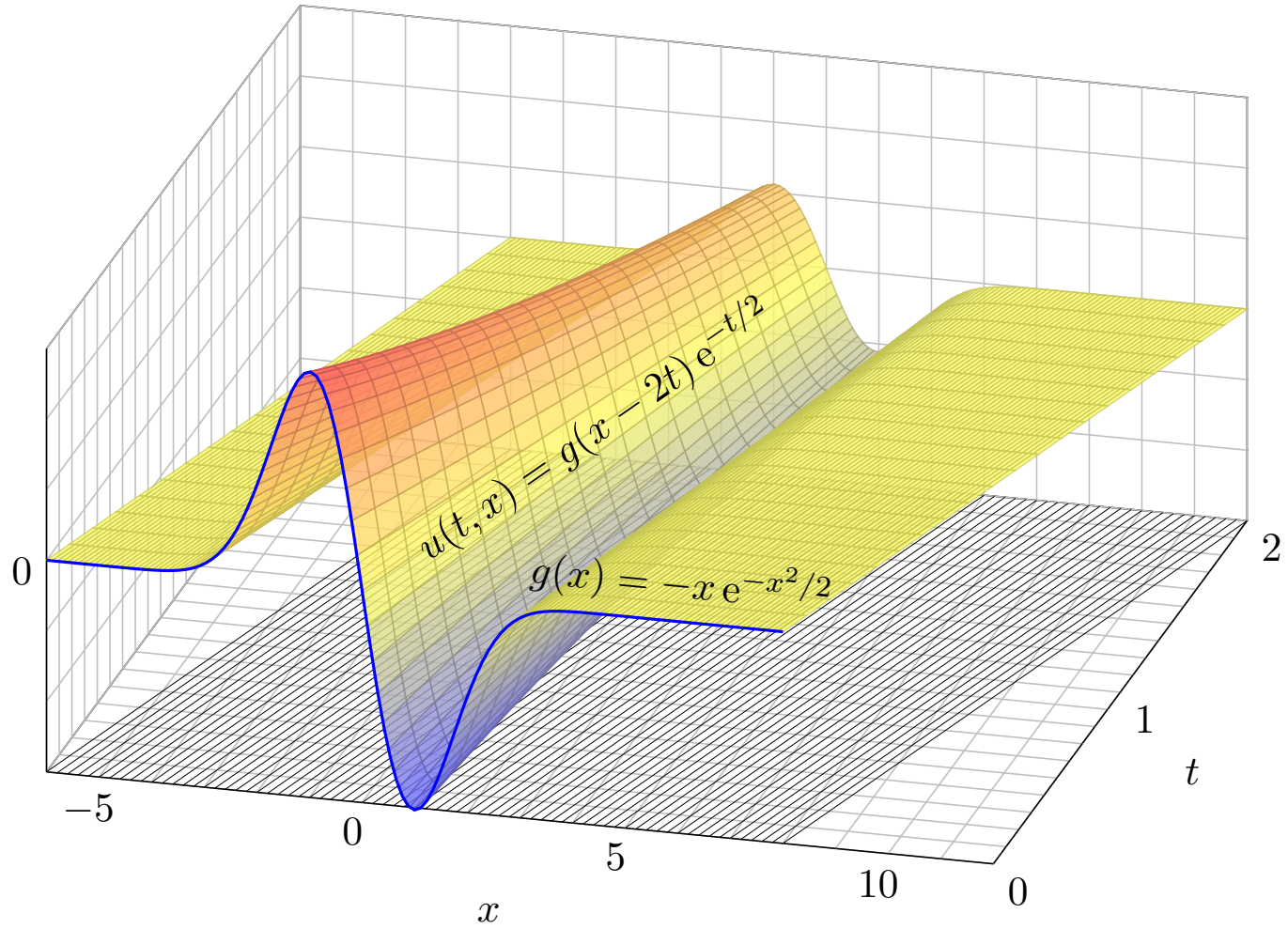
$$u(x,y) = \begin{cases} (y - xy)^2 & \text{für } x \leq 1, \\ 0 & \text{für } x \geq 1. \end{cases}$$

Probe: Für alle $x \leq 1$ gilt $\partial_x u(x,y) = -2y(y - xy) = -2y\sqrt{u(x,y)}$.
Für $x \geq 1$ gilt $\partial_x(x,y) = 0 = -2y\sqrt{u(x,y)}$. Für $x = 0$ gilt $u(0,y) = y^2$.
☺ Somit ist u eine Lösung. Unsere Rechnung zeigt: Es ist die einzige!

(2) Die Nullfunktion ist eine Lösung, ebenso die Funktion u aus (1).
⚠ Die Charakteristiken sind hier nicht eindeutig! Physikalischer Grund: Ist der Eimer einmal leer, so erkennen wir nicht mehr, wann er auslief! Mathematisches Warnsignal: Die rechte Seite $-2y\sqrt{u}$ ist nicht stetig nach u differenzierbar, denn die Ableitung $\partial_u[2y\sqrt{u}] = y/\sqrt{u}$ hat in $u = 0$ eine Polstelle. Somit können wir unseren Satz Q2D hier nicht anwenden!

Die Transportgleichung: Illustration

Q229



Die Transportgleichung: Problemstellung

Q230

Wir betrachten lineare PDE erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Nach Division durch einen der Koeffizienten erhalten wir folgende Form:

Aufgabe: Zu lösen sei die folgende **Transportgleichung**:

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,x) + b\,\partial_x u(t,x) + c\,u(t,x) &= f(t,x) \quad &&\text{für } t>0 \text{ und } x\in\mathbb{R}, \\ \text{mit Anfangswerten} \quad u(0,x) &= g(x) \quad &&\text{für } t=0 \text{ und } x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Gegeben sind die konstanten Koeffizienten $a=1, b, c\in\mathbb{R}$ sowie stetige Funktionen $f:\mathbb{R}_{\geq 0}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ und $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, gesucht ist $u:\mathbb{R}_{\geq 0}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Existiert eine Lösung u? Ist sie eindeutig? Wie berechnen Sie sie?

Anschaulich und in Worten bedeutet die Transportgleichung folgendes:

Die Anfangsdaten $g(x_0)$ werden mit **Geschwindigkeit** b transportiert: Die Kurven $t\mapsto(t, x_0+bt)$ sind die charakteristischen Kurven der PDE.

Im Falle $c\neq 0$ kommt noch **exponentielle Dämpfung** mit e^{-ct} hinzu. Beides ist in der Beispielgraphik für $b=2$ und $c=1/2$ gut zu erkennen.

Für $f\neq 0$ addiert sich auf der rechten Seite der **Quellterm** $f(t,x)$ längs des Transportweges $\tau\mapsto(\tau, x_0+b\tau)$, integriert von $\tau=0$ nach $\tau=t$.

Die Transportgleichung: Rechnung

Lösung: Zum Startpunkt $(0, x_0)$ gehört die charakteristische Gleichung

$$\begin{aligned} T(0) &= 0, & T'(s) &= 1, \\ X(0) &= x_0, & X'(s) &= b, \\ U(0) &= g(x_0), & U'(s) &= f(T(s), X(s)) - c\,U(s). \end{aligned}$$

Wir finden $t \overset{!}{=} T(s) = s$. Fortan nutzen wir daher t als Wegparameter.
Weiterhin finden wir $x \overset{!}{=} X(t) = x_0 + bt$, nach x_0 aufgelöst $x_0 = x - bt$.
Die Gleichung für U lautet $\dot{U}(t) = f(t, x_0 + bt) - c\,U(t)$. Sie ist linear!
Zur Lösung kennen und nutzen wir die Integralformel (Satz M2E):

$$\begin{aligned} u(t,x) \overset{!}{=} U(t) &= g(x_0)\,\mathrm{e}^{-ct} + \int_{\tau=0}^{t} f\big(\tau, x_0 + b\tau\big)\,\mathrm{e}^{c(\tau-t)}\,\mathrm{d}\tau \\ &= g(x - bt)\,\mathrm{e}^{-ct} + \int_{\tau=0}^{t} f\big(\tau, x - bt + b\tau\big)\,\mathrm{e}^{c(\tau-t)}\,\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

☺ Probe: Diese Funktion u erfüllt unsere PDE und die Anfangswerte!
☺ Dieses DGSystem ist besonders einfach, da nahezu entkoppelt.
Allgemein $\partial_t u(t,x) + b(t)\,\partial_x u(t,x) + c(t,x)\,u(t,x) = f(t,x)$, siehe Q3A.

Die Transportgleichung: Zusammenfassung

Satz Q2E: Integralformel für lineare PDE erster Ordnung

Zu lösen sei die folgende **Transportgleichung**:

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,x) + b\,\partial_x u(t,x) + c\,u(t,x) &= f(t,x) \quad \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}, \\ \text{mit Anfangswerten} \quad u(0,x) &= g(x) \quad \text{für } t = 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Gegeben sind die konstanten Koeffizienten $a = 1, b, c \in \mathbb{R}$ sowie stetige Funktionen $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gesucht ist $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Dieses Problem hat genau eine Lösung $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nämlich

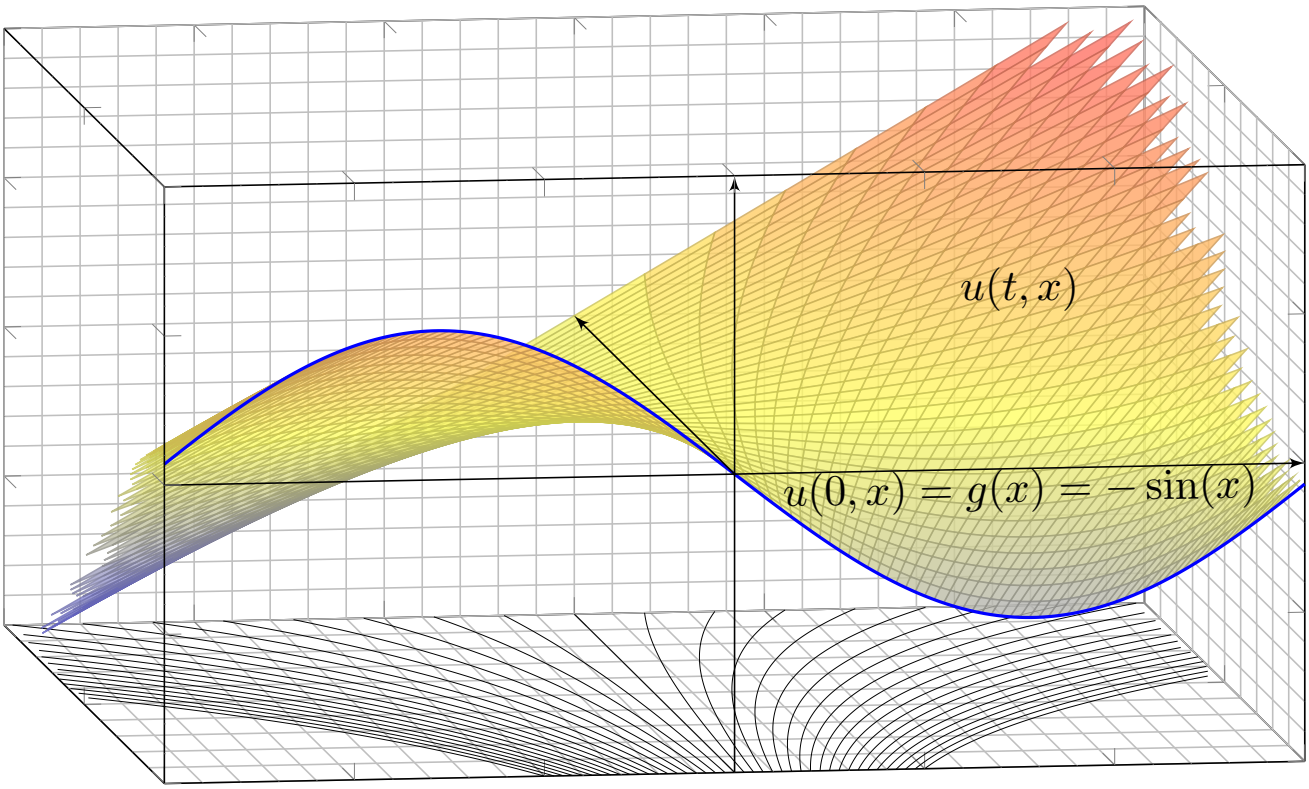
$$u(t,x) = g(x - bt)\,\mathrm{e}^{-ct} + \int_{\tau=0}^{t} f\big(\tau, x - bt + b\tau\big)\,\mathrm{e}^{c(\tau-t)}\,\mathrm{d}\tau$$

☺ Liegt die vermutete Formel erst einmal vor, so ist die Probe leicht.
☺ Das ist ein seltener Glücksfall: Zu dieser Problemklasse haben wir mühelos eine allgemein gültige und explizite Integralformel gefunden.
⚠ Die meisten PDE lassen sich nicht einfach mit Integralformeln lösen.

Zweidimensionales Anwendungsbeispiel

Aufgabe: Finden Sie alle stetig differenzierbaren Funktionen $u(t,x)$ mit

$$\partial_t u + x\,\partial_x u = x \quad \text{und} \quad u(0,x) = g(x) = -\sin(x).$$



Zweidimensionales Anwendungsbeispiel

Lösung: Zum Startpunkt $(0,x_0)$ gehört die charakteristische Gleichung

$$\begin{aligned} T(0) &= 0, & T'(s) &= 1,\\ X(0) &= x_0, & X'(s) &= X(s),\\ U(0) &= g(x_0), & U'(s) &= X(s). \end{aligned}$$

Wir finden $t \overset{!}{=} T(s) = s$. Fortan nutzen wir daher t als Wegparameter. Weiterhin gilt $x \overset{!}{=} X(t) = x_0\,\mathrm{e}^t$, nach x_0 aufgelöst $x_0 = x\,\mathrm{e}^{-t}$. Damit:

$$\begin{aligned} u(t,x) \overset{!}{=} U(t) \overset{\text{HDI}}{=} U(0) + \int_{s=0}^{t} U'(s)\,\mathrm{d}s &\overset{\text{Vor}}{=} g(x_0) + \int_{s=0}^{t} x_0\,\mathrm{e}^s\,\mathrm{d}s\\ &= g(x_0) + x_0(\mathrm{e}^t - 1)\\ &= g(x\,\mathrm{e}^{-t}) + x\,(1 - \mathrm{e}^{-t}) \end{aligned}$$

☺ Machen Sie die Probe durch Einsetzen in die Aufgabenstellung! Diese Funktion erfüllt tatsächlich $\partial_t u + x\,\partial_x u = x$ und $u(0,x) = g(x)$.

☺ Dieses DGSystem ist besonders einfach, da nahezu entkoppelt. Jeden der drei Schritte können wir direkt durch ein Integral lösen (Q3A).

Dreidimensionales Anwendungsbeispiel

Aufgabe: Finden Sie alle stetig diff'baren Funktionen $u(t,x,y)$ mit

$$\boxed{\partial_t u + (x-y)\partial_x u + (x+y)\partial_y u = 0 \quad \text{und} \quad u(0,x,y) = xy.}$$

Lösung: Zum Startpunkt $(0, x_0, y_0)$ gehört die char. Gleichung

$$\begin{aligned} T(0) &= 0, & T'(s) &= 1, \\ X(0) &= x_0, & X'(s) &= X(s) - Y(s), \\ Y(0) &= y_0, & Y'(s) &= X(s) + Y(s), \\ U(0) &= x_0 y_0, & U'(s) &= 0. \end{aligned}$$

Wir finden $t \overset{!}{=} T(s) = s$. Fortan nutzen wir daher t als Wegparameter. In X, Y ist dies ein lineares DGSystem mit konstanten Koeffizienten. Wir lösen es wie geübt durch Eigenvektoren und Eigenfunktionen...

$$\begin{aligned} x &\overset{!}{=} X(t) = \mathrm{e}^t(x_0 \cos t - y_0 \sin t) \\ y &\overset{!}{=} Y(t) = \mathrm{e}^t(x_0 \sin t + y_0 \cos t) \end{aligned}$$

☺ Machen Sie die Probe! Wegen $\dot{U}(t) = 0$ ist die Höhe $U(t)$ konstant: Die gefundenen Charakteristiken $t \mapsto (t, X(t), Y(t))$ sind Niveaulinien.

Dreidimensionales Anwendungsbeispiel

Die Lösung unserer PDE ist hierdurch implizit gegeben:

$$u(t, X(t), Y(t)) \overset{!}{=} U(t) = U(0) = x_0 y_0$$

☺ Laufen wir von $(0, x_0, y_0)$ nach (t, x, y), so kennen wir dort den Wert $u(t,x,y) = x_0 y_0$. Wir fragen umgekehrt: Welcher Startpunkt $(0, x_0, y_0)$ führt zum Ziel (t, x, y)? Wir lösen die Formel für (x, y) nach (x_0, y_0):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{+t} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Wir setzen dies ein und erhalten schließlich die explizite Lösung:

$$\boxed{\begin{aligned} u(t,x,y) = x_0 y_0 &= \mathrm{e}^{-t}(x \cos t + y \sin t) \cdot \mathrm{e}^{-t}(-x \sin t + y \cos t) \\ &= \mathrm{e}^{-2t}\big[(y^2 - x^2)\cos t \sin t + xy(\cos^2 t - \sin^2 t)\big] \end{aligned}}$$

☺ Machen Sie die Probe durch Einsetzen in die Aufgabenstellung! Diese Funktion erfüllt die PDE mit den gegebenen Anfangsdaten.

☺ Die Rechnung zeigt zudem die Eindeutigkeit der Lösung u. Warum?

Cauchy–Riemann und Maxwell–Gleichungen

Q301
Fazit

Die **Cauchy–Riemann–Gleichungen** für $u, v : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \to \mathbb{R}$ lauten

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

$\iff$ Das Vektorfeld $(u, -v)$ erfüllt $\operatorname{div}(u, -v) = 0$ und $\operatorname{rot}(u, -v) = 0$.
$\iff$ Die komplexe Funktion $f = u + \mathrm{i}v : \mathbb{C} \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$ ist **holomorph**.
$\iff$ Lokal ist f eine komplexe **Potenzreihe**, $f(z) = \sum a_k (z - z_0)^k$.
$\implies$ Beide Funktionen u, v sind **harmonisch**, also $\Delta u = \Delta v = 0$.

Die **Maxwell–Gleichungen** für die Felder $\vec{E}, \vec{B} : \mathbb{R}^4 \supseteq \Omega \to \mathbb{R}^3$ lauten

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\varrho, \qquad \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0,$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \qquad \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}.$$

Jede ebene stationäre Lösung $\vec{E} : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \to \mathbb{R}^2$ ohne Quellen entspricht einer holomorphen Funktion $f = E_1 - \mathrm{i}E_2 : \mathbb{C} \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$ und umgekehrt.

Konvektion-Diffusion und Navier–Stokes

Q302
Fazit

Allgemeine **Bilanzgleichung** / Transportgleichung der Strömungslehre:

$$\underbrace{\partial_t u(t,x)}_{\text{Änderungsrate}} + \underbrace{\nabla\big[\vec{v}\, u(t,x)\big]}_{\text{Zu/Abfluss: Konvektion}} = \underbrace{\nabla\big[\kappa\, \nabla u(t,x)\big]}_{\text{Diffusion: } \operatorname{div}\operatorname{grad}} + \underbrace{c\, u(t,x)}_{\text{Wachstum/Zerfall}} + \underbrace{q(t,x)}_{\text{Quellen}}$$

Angewendet auf die Impulsdichte $\vec{u} = \vec{v}\varrho$ erhalten wir daraus die **Navier–Stokes–Gleichungen** für inkompressible Fluide:

Massenerhaltung: $$\operatorname{div}\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0$$

Impulserhaltung: $$\underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial t}}_{\text{Änderung}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}}_{\text{Konvektion}} = \underbrace{\nu \Delta v_i}_{\text{Diffusion}} - \underbrace{\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x_i}}_{\text{interne Kraft}} + \underbrace{f_i}_{\text{extern}}$$

Jede ebene stationäre Strömung $v = (v_1, v_2) : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \to \mathbb{R}^2$ konstanter Dichte ohne Wirbel, ohne Reibung und ohne äußere Kräfte entspricht einer holomorphen Funktion $f = v_1 - \mathrm{i}v_2 : \mathbb{C} \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$ und umgekehrt. Der Druck p berechnet sich hieraus durch $p + (\varrho/2)\big(v_1^2 + v_2^2\big) = \mathrm{const}$.

Die Charakteristikmethode

Zu lösen sei eine **quasi-lineare PDE erster Ordnung**

$$\begin{aligned} a(x,y,u)\,\partial_x u + b(x,y,u)\,\partial_y u &= f(x,y,u) && \text{für alle } (x,y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2, \\ \text{mit Anfangswerten} \quad u(x,y) &= u_0(x,y) && \text{für alle } (x,y) \in A \subseteq \Omega. \end{aligned}$$

Gegeben sind hierzu das Definitionsgebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ und die stetigen Koeffizientenfunktionen $a, b, f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gesucht ist $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Auf einer Teilmenge $A \subseteq \Omega$ gibt $u_0 : A \to \mathbb{R}$ die Anfangswerte vor.

Eine **charakteristische Kurve** der PDE zum Startpunkt $(x_0, y_0) \in A$ ist ein C^1–Weg $\gamma : \mathbb{R} \supseteq I \to \Omega \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $s \mapsto (X(s), Y(s), U(s))$ und

$$\begin{aligned} X(0) &= x_0, & X' &= a(X,Y,U), \\ Y(0) &= y_0, & Y' &= b(X,Y,U), \\ U(0) &= u_0(x_0,y_0), & U' &= f(X,Y,U). \end{aligned}$$

☺ Solche gewöhnlichen DGSysteme können wir bereits gut lösen! Sind a, b, f stetig diff'bar, so hat das AWP genau eine maximale Lösung.

☺ Der Startwert wird entlang der Charakteristik transportiert (Q2D): Jede Lösung u der PDE erfüllt $u(X(s), Y(s)) = U(s)$ für alle $s \in I$.

Die Transportgleichung

Wir betrachten lineare PDE erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Nach Division durch einen der Koeffizienten erhalten wir folgende Form:

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,x) + b\,\partial_x u(t,x) + c\,u(t,x) &= f(t,x) && \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}, \\ \text{mit Anfangswerten} \quad u(0,x) &= g(x) && \text{für } t = 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Gegeben sind die konstanten Koeffizienten $a = 1, b, c \in \mathbb{R}$ sowie stetige Funktionen $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gesucht ist $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dieses Problem hat genau eine Lösung $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nämlich

$$u(t,x) = g(x - bt)\,\mathrm{e}^{-ct} + \int_{\tau=0}^{t} f\big(\tau, x - bt + b\tau\big)\,\mathrm{e}^{c(\tau - t)}\,\mathrm{d}\tau$$

☺ Machen Sie die Probe: einsetzen und sorgfältig nachrechnen!

☺ Das ist ein seltener Glücksfall: Zu dieser Problemklasse haben wir mühelos eine allgemein gültige und explizite Integralformel gefunden.

☺ Allgemeiner gelingt diese Rechnung ebenso für Gleichungen $\partial_t u(t,x) + b(t)\,\partial_x u(t,x) + c(t,x)\,u(t,x) = f(t,x)$, siehe Satz Q3A.

⚠ Die meisten PDE lassen sich nicht einfach mit Integralformeln lösen.

Charakteristiken (Klausur Februar 2018)

Q305
Übung

Aufgabe: Finden Sie alle Funktionen $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,x) + 2t\,\partial_x u(t,x) &= -u(t,x) && \text{für alle } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) &= \cos(x) && \text{für } t = 0 \text{ und alle } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

☺ Dies ist ein Spezialfall der allgemeinen Transportgleichung Q3A.

Lösung: Zum Startpunkt $(0, x_0)$ gehört die charakteristische Gleichung

$$\begin{aligned} T'(s) &= 1, & T(0) &= 0, \\ X'(s) &= 2T(s), & X(0) &= x_0, \\ U'(s) &= -U(s), & U(0) &= \cos(x_0). \end{aligned}$$

Wir finden $t \overset{!}{=} T(s) = s$ und $x \overset{!}{=} X(s) = x_0 + s^2$ sowie schließlich $u(t,x) \overset{!}{=} U(s) = \mathrm{e}^{-s}\cos(x_0)$. Wir lösen dies nach (t,x) auf und erhalten:

$$u(t,x) = \mathrm{e}^{-t}\cos(x - t^2)$$

☺ Startwerte werden längs Charakteristiken transportiert.
Machen Sie die Probe: u erfüllt PDE und Anfangswerte!

Charakteristiken (Klausur September 2018)

Q306
Übung

Aufgabe: Finden Sie alle Funktionen $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,x) + \cos(t)\,\partial_x u(t,x) &= \tfrac{3}{2}\sqrt{t} && \text{für alle } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) &= \mathrm{e}^{x} && \text{für } t = 0 \text{ und alle } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

☺ Dies ist ein Spezialfall der allgemeinen Transportgleichung Q3A.

Lösung: Zum Startpunkt $(0, x_0)$ gehört die charakteristische Gleichung

$$\begin{aligned} T'(s) &= 1, & T(0) &= 0, \\ X'(s) &= \cos\big[T(s)\big], & X(0) &= x_0, \\ U'(s) &= \tfrac{3}{2}\,T(s)^{1/2}, & U(0) &= \mathrm{e}^{x_0}. \end{aligned}$$

Wir finden $t \overset{!}{=} T(s) = s$ und $x \overset{!}{=} X(s) = x_0 + \sin(s)$ sowie schließlich $u(t,x) \overset{!}{=} U(s) = s^{3/2} + \mathrm{e}^{x_0}$. Wir lösen dies nach (t,x) auf und erhalten:

$$u(t,x) = t^{3/2} + \mathrm{e}^{x - \sin(t)}$$

☺ Startwerte werden längs Charakteristiken transportiert.
Machen Sie die Probe: u erfüllt PDE und Anfangswerte!

Charakteristiken (Klausur Februar 2016)

Q307
Übung

Wir untersuchen für $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die partielle Differentialgleichung

$$(3x - 4y)\partial_x u(x,y) + (2y - x)\partial_y u(x,y) = u(x,y) \quad \text{mit} \quad u(x,0) = \sin(x).$$

Aufgabe: Formulieren Sie das Gleichungssystem der charakteristischen Kurven $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$, sodass $u(x(t), y(t)) = z(t)$ gilt.

Lösung: Diese PDE ist von erster Ordnung und linear (Q2c).
Wir nutzen die zugehörige Charakteristikmethode Q211:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ \sin(x_0) \end{pmatrix}$$

☺ Dieses gewöhnliche Differentialgleichungssystem ist linear mit konstanten Koeffizienten, wir schreiben es daher gleich in Matrixform. Wir können dies wie gesehen lösen, durch Eigen- & Hauptfunktionen, und damit die gesuchte Funktion $(x,y) \mapsto u(x,y)$ explizit bestimmen.

Charakteristiken mobilisieren alle Methoden.

Q308
Übung

Wir untersuchen für $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die partielle Differentialgleichung

$$(3x - 4y + 2u)\partial_x u(x,y) + (2y - x - 3u)\partial_y u(x,y) = u(x,y)^2 \quad \text{mit} \quad u(x,0) = \cos(x).$$

Aufgabe: Formulieren Sie das Gleichungssystem der charakteristischen Kurven $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$, sodass $u(x(t), y(t)) = z(t)$ gilt.

Lösung: (1) Diese PDE ist von erster Ordnung und quasilinear (Q2c).
Wir nutzen die zugehörige Charakteristikmethode Q211:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x(t) - 4y(t) + 2z(t) \\ -x(t) + 2y(t) - 3z(t) \\ z(t)^2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ \cos(x_0) \end{pmatrix}$$

⚠ Dieses gewöhnliche Differentialgleichungssystem ist nicht linear.

☺ Dennoch können wir es lösen, zunächst leicht für z und für x, y dann inhomogen durch Variation der Konstanten. Zumindest im Prinzip finden wir damit schließlich die gesuchte Funktion $(x,y) \mapsto u(x,y)$.

Potentialproblem als PDE

Aufgabe: Wir betrachten das ebene Gebiet $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Zu lösen sei das folgende System aus zwei partiellen Differentialgleichungen:

$$\boxed{\partial_x u = f_1,\ \partial_y u = f_2.}$$

Gegeben sind $f_1, f_2 \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, gesucht sind Lösungen $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$.

(1) Ist diese PDE linear? Welche Lösungen hat die homogene PDE? Welche Struktur hat der Lösungsraum der inhomogenen PDE?

(2) Lässt sich jede so gegebene Problemstellung $f = (f_1, f_2)$ lösen? Welche Bedingungen sind notwendig? Welche sind hinreichend?

(3) Falls dies überhaupt möglich ist: Wie lösen Sie diese PDE?

☺ Das ist eine typische Problemstellung, die Sie bereits gut kennen. Sie ist häufig und wichtig genug, um sie noch einmal zu wiederholen.

Wir erkennen hier typische Hindernisse bei der Lösung von PDE: Wir benötigen sowohl lokale Kriterien (an f) als auch globale (an Ω).

Potentialproblem als PDE

Lösung: (1) Ja, diese PDE ist linear in u und von erster Ordnung.

Die homogene PDE $\partial_x u = \partial_y u = 0$ bedeutet $\operatorname{grad} u = 0$, also ist u lokal konstant dank HDI. Da unser Gebiet Ω wegzusammenhängend ist, sind $u = \text{const}$ tatsächlich die einzigen Lösungen der homogenen PDE.

Ist u eine partikuläre Lösung der (inhomogenen) PDE $\operatorname{grad} u = f$, so ist die gesamte Lösungsmenge der (affine) Raum $\{\, u + c \mid c \in \mathbb{R} \,\}$.

Warum? Zur Erinnerung: Ist v eine weitere Lösung zu $\operatorname{grad} v = f$, so gilt $\operatorname{grad}(v - u) = 0$ dank Linearität, also $v - u = c$ mit $c \in \mathbb{R}$.

☺ Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung ist ein affiner Raum: „Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen“

Es ist dabei egal ob Differentialgleichung, gewöhnlich oder partiell, allein die lineare Struktur der vorliegenden Gleichung garantiert uns bereits die Struktur des Lösungsraumes. Das vereinfacht und verschafft Überlick.

Wir erkennen in unserem Beispiel das Potentialproblem $\operatorname{grad} u = f$. „Ein Potential ist nur bis auf eine additive Konstante bestimmt.“ In einfachster Form kennen Sie dies schon lange vom HDI.

Potentialproblem als PDE

(2) Nein, nicht jede Problemstellung $f = (f_1, f_2)$ lässt sich lösen!

(2a) Wenn eine Lösung $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ mit $\operatorname{grad} u = f$ existiert, so gilt dank Schwarz $\partial_x f_2 = \partial_x \partial_y u = \partial_y \partial_x u = \partial_y f_1$, also $\operatorname{rot}(f_1, f_2) = 0$.

Diese Bedingung ist notwendig, aber noch nicht hinreichend! Gegenbeispiel ist das Wirbelfeld $(f_1, f_2) = (-y, x)/(x^2 + y^2)$.

(2b) Für den geschlossenen Weg $\gamma : [0, 1] \to \Omega$ mit $\gamma(t) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}$ gilt dank HDI zudem $0 = u(\gamma(1)) - u(\gamma(0)) = \oint_\gamma \operatorname{grad}(u) \cdot \mathrm{d}\gamma = \oint_\gamma (f_1, f_2) \cdot \mathrm{d}\gamma$.

$$\boxed{\operatorname{rot}(f_1, f_2) = 0 \quad \text{und} \quad \oint_\gamma (f_1, f_2) \cdot \mathrm{d}\gamma = 0}$$

Beide Bedingungen sind notwendig, und zusammen auch hinreichend: Wir zeigen abschließend (3), dass dies tatsächlich zur Lösung reicht.

☺ Die Lösbarkeit ist leicht zu prüfen, aber man muss wissen wie: Wir benötigen sowohl lokale Kriterien (an f) als auch globale (an Ω). Im vorliegenden Fall ist das glücklicherweise einfach und übersichtlich.

Potentialproblem als PDE

(3) Zunächst müssen die obigen Bedingungen erfüllt sein. Dann gelingt die Lösung durch das Arbeitsintegral entlang von Wegen $\alpha : [0, 1] \to \Omega$:

$$\boxed{u : \Omega \to \mathbb{R}, \quad u(x, y) = \int_{\alpha(0)=(1,0)}^{\alpha(1)=(x,y)} (f_1, f_2) \cdot \mathrm{d}\alpha}$$

Ist $\tilde{\alpha} : [0, 1] \to \Omega$ ein weiterer Weg von $\tilde{\alpha}(0) = (1, 0)$ nach $\tilde{\alpha}(1) = (x, y)$, so müssen wir Wohldefiniertheit sicherstellen, also $\int_{\tilde{\alpha}} f \cdot \mathrm{d}\tilde{\alpha} = \int_\alpha f \cdot \mathrm{d}\alpha$.

Die Bedingung $\operatorname{rot}(f) = 0$ sichert dies für homotope Wege. (Satz H2B)
Die Verknüpfung $\beta = \tilde{\alpha} * \bar{\alpha}$ ist ein geschlossener Weg von $(1, 0)$ längs $\tilde{\alpha}$ nach (x, y) und längs $\bar{\alpha}$ zurück nach $(1, 0)$. Also ist β in Ω homotop zum Weg $\gamma_k(t) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k t}$ mit Umlaufzahl $k \in \mathbb{Z}$. (Satz H2D) Wir erhalten somit:

$$\int_{\tilde{\alpha}} f \cdot \mathrm{d}\tilde{\alpha} - \int_\alpha f \cdot \mathrm{d}\alpha \;=\; \oint_\beta f \cdot \mathrm{d}\beta \overset{(2a)}{=} \oint_{\gamma_k} f \cdot \mathrm{d}\gamma_k \;=\; k \oint_\gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma \overset{(2b)}{=} 0$$

☺ Das Ergebnis $u(x, y)$ ist unabhängig vom gewählten Integrationsweg. Dank Satz H2A löst die so konstruierte Funktion u das Potentialproblem. Unsere Bedingungen (2a) und (2b) sind also tatsächlich hinreichend.

Komplexe Stammfunktion als PDE

Aufgabe: Sei $S \subseteq \mathbb{R}^2$ eine diskrete Menge. Wir betrachten $\Omega = \mathbb{R}^2 \smallsetminus S$. Zu lösen sei folgendes System aus vier partiellen Differentialgleichungen:

$$\begin{pmatrix} \partial_x F_1 & \partial_y F_1 \\ \partial_x F_2 & \partial_y F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & -f_2 \\ f_2 & f_1 \end{pmatrix}.$$

Gegeben sind $f_1, f_2 \in C^0(\Omega, \mathbb{R})$, gesucht sind $F_1, F_2 \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$. Links steht die Jacobi–Matrix $J(F) := \partial(F_1, F_2)/\partial(x, y)$.

(1) Ist diese PDE linear? Welche Lösungen hat die homogene PDE? Welche Struktur hat der Lösungsraum der inhomogenen PDE?

(2) Lässt sich jede so gegebene Problemstellung $f = (f_1, f_2)$ lösen? Welche Bedingungen sind notwendig? Welche sind hinreichend?

(3) Falls dies überhaupt möglich ist: Wie lösen Sie diese PDE?

☺ Wir erkennen hier typische Hindernisse bei der Lösung von PDE: Wir benötigen sowohl lokale Kriterien (an f) als auch globale (an Ω).

Komplexe Stammfunktion als PDE

Lösung: (1) Ja, diese PDE ist linear in $F = (F_1, F_2)$ und erster Ordnung.

Die homogene PDE $J(F) = 0$ bedeutet $\operatorname{grad} F_1 = \operatorname{grad} F_2 = 0$, also sind F_1, F_2 lokal konstant dank HDI. Unser Gebiet $\Omega = \mathbb{R}^2 \smallsetminus S$ ist immer noch wegzusammenhängend: Wir können den Punkten $s \in S$ ausweichen.

Somit sind $F = \mathrm{const}$ tatsächlich die einzigen Lösungen von $J(F) = 0$.

Ist F eine Lösung der (inhomogenen) PDE $J(F) = \left(\begin{smallmatrix} f_1 & -f_2 \\ f_2 & f_1 \end{smallmatrix}\right)$, so ist die Lösungsmenge der (affine) Raum $\{\, F + c \mid c \in \mathbb{R}^2 \,\}$.

Warum? Zur Erinnerung: Ist G eine weitere Lösung zu $J(G) = \left(\begin{smallmatrix} f_1 & -f_2 \\ f_2 & f_1 \end{smallmatrix}\right)$, so gilt $J(G - F) = 0$ dank Linearität, also $G - F = c$ mit $c \in \mathbb{R}^2$.

☺ Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung ist ein affiner Raum: „Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen“

Wir erkennen bei genauem Hinsehen das komplexe Potentialproblem: Zu lösen ist $\partial F/\partial z = f$ für $F = F_1 + \mathrm{i}F_2, f = f_1 + \mathrm{i}f_2 : \Omega = \mathbb{C} \smallsetminus S \to \mathbb{C}$. „Eine Stammfunktion ist nur bis auf eine additive Konstante bestimmt.“

Komplexe Stammfunktion als PDE

(2) Nicht jede Problemstellung $f = (f_1, f_2) \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^2)$ lässt sich lösen!

(2a) Wenn eine Lösung $F = (F_1, F_2) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ existiert, so erfüllt sie die Cauchy–Riemann–Gleichungen $\partial_x F_1 = \partial_y F_2$ und $\partial_x F_2 = -\partial_y F_1$.

Somit ist die Funktion $F = F_1 + \mathrm{i}F_2 : \Omega = \mathbb{C} \smallsetminus S \to \mathbb{C}$ holomorph, also auch ihre Ableitung $F' = f = f_1 + \mathrm{i}f_2 : \Omega = \mathbb{C} \smallsetminus S \to \mathbb{C}$.

Die Holomorphie von f ist notwendig, aber noch nicht hinreichend! Gegenbeispiel ist die Funktion $f : \mathbb{C} \smallsetminus \{s\} \to \mathbb{C} : z \mapsto f(z) = 1/(z - s)$. Das ist das zentrale Problem des komplexen Logarithmus. F225

(2b) Für den geschlossenen Weg $\gamma : [0, 1] \to \Omega$ mit $\gamma(t) = s + r\,\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}$ gilt dank HDI zudem $0 = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = \oint_\gamma F'(z)\,\mathrm{d}z = \oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$.

$$\partial_x f_1 = \partial_y f_2, \quad \partial_x f_2 = -\partial_y f_1 \quad \text{und} \quad \oint_{\partial B(s,r)} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

☺ Notwendig ist also, dass die Funktion $f : \Omega = \mathbb{C} \smallsetminus S \to \mathbb{C}$ holomorph ist, und das Residuum $\operatorname{res}_s(f)$ in jeder Singularität $s \in S$ verschwindet!

Komplexe Stammfunktion als PDE

Beide Bedingungen sind notwendig, und zusammen auch hinreichend: Wir zeigen abschließend, dass dies tatsächlich zur Lösung reicht.

(3) Zunächst müssen die obigen Bedingungen erfüllt sein. Dann gelingt die Lösung durch das Arbeitsintegral entlang von Wegen $\alpha : [0, 1] \to \Omega$:

$$F \,:\, \Omega = \mathbb{C} \smallsetminus S \to \mathbb{C} \,:\, w \mapsto F(w) = \int_{\alpha(0)=w_0}^{\alpha(1)=w} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Hierzu fixieren wir einen Startpunkt $w_0 \in \Omega$. Da unser Gebiet $\Omega = \mathbb{C} \smallsetminus S$ wegzusammenhängend ist, gibt es zu jedem beliebigen Zielpunkt $w \in \Omega$ Wege $\alpha : [0, 1] \to \Omega$ von w_0 nach w. Dank unserer Integralbedingungen an f ist das obige Wegintegral unabhängig vom gewählten Weg α.

☺ Die so konstruierte Funktion $F : \Omega \to \mathbb{C}$ löst die Gleichung $F' = f$.

Obwohl wir von der Lösung anfangs nur $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ verlangt haben, bekommen wir wesentlich mehr geschenkt: Die Lösung ist holomorph!

Das ist zugleich auch eine starke Bedingung: f muss holomorph sein. Zur Integration zu F müssen zudem alle Residuen von f verschwinden.

Zu viele Charakteristiken verderben die PDE.

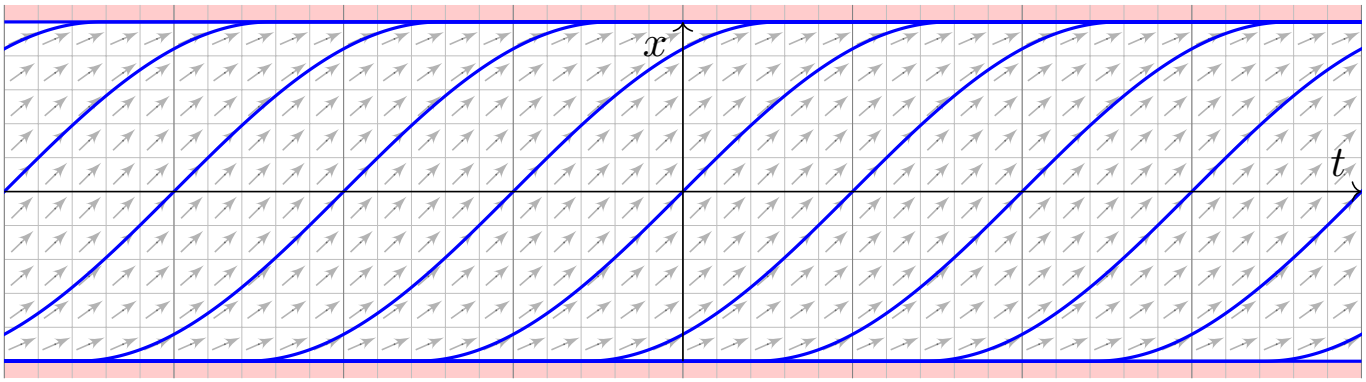
Aufgabe: Finden Sie alle C^1–Lösungen $u : \mathbb{R} \times [-1,1] \to \mathbb{R}$ der PDE

$$\partial_t u(t,x) + \sqrt{1-x^2}\,\partial_x u(t,x) = 0 \quad \text{für alle } (t,x) \in \mathbb{R} \times [-1,1].$$

(1a) Sind konstante Funktionen Lösungen? (1b) Gibt es noch weitere? Wie / Lässt sich die Charakteristikmethode (Satz Q2D) hier anwenden?

(2) Finden Sie alle Lösungen $u \in C^0(\mathbb{R} \times [-1,1]) \cap C^1(\mathbb{R} \times]-1,1[)$, die auf $\mathbb{R} \times]-1,1[$ die PDE erfüllen. Können Sie $u(t,0)$ beliebig vorgeben?

Lösung: (1a) Jede konstante Funktion $u(t,x) = \text{const}$ löst unsere PDE. (1b) Jede charakteristische Kurve $t \mapsto (t, x(t))$ erfüllt $\dot{x}(t) = \sqrt{1-x(t)^2}$. Wir suchen alle (maximalen) Lösungskurven $x : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}$, siehe M329.



Zu viele Charakteristiken verderben die PDE.

Trennung der Variablen und genaue Diskussion wie auf Seite M329: Lösungen sind neben $x_{-\infty}(t) = +1$ und $x_{+\infty}(t) = -1$ die Funktionen

$$x_c \,:\, \mathbb{R} \to [-1,1] \,:\, t \mapsto x_c(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } t \le c - \pi/2, \\ \sin(t-c) & \text{für } c - \pi/2 \le t \le c + \pi/2, \\ +1 & \text{für } t \ge c + \pi/2. \end{cases}$$

Jeder Punkt $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times [-1,1]$ liegt auf (mindestens) einer dieser Charakteristiken $\gamma_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times [-1,1] : t \mapsto (t, x_c(t))$ für geeignetes $c \in \bar{\mathbb{R}}$.

Wir sehen eine Besonderheit: Je zwei Charakteristiken treffen sich! Folgerung: Erfüllt $u : \mathbb{R} \times [-1,1] \to \mathbb{R}$ die obige PDE, so ist u konstant.

☹ (Zu viele) Charakteristiken erzwingen (zu viele) Einschränkungen.

(2) Hier gilt hingegen: Jeder Punkt $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times]-1,+1[$ liegt auf genau einer Charakteristik $\gamma_c^* :]c - \pi/2, c + \pi/2[\to \mathbb{R} \times]-1,+1[: t \mapsto (t, x_c(t))$.

Zu $u(t,0) = g(t)$ können wir jede C^1–Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vorgeben und erhalten die Lösung $u(t,x) = g(t - \arcsin(x))$. Machen Sie die Probe!

☺ Charakteristiken erzwingen hier das rechte Maß an Bedingungen.

Zu viele Charakteristiken verderben die PDE.

Q319
Übung

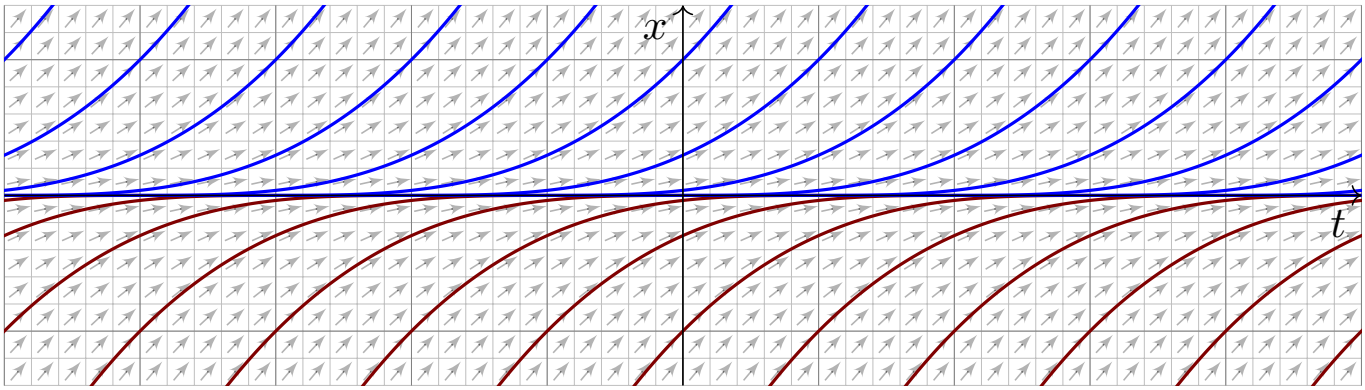
Aufgabe: Finden Sie alle C^1–Lösungen $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ der Gleichung

$$\boxed{\partial_t u(t,x) + \sqrt[3]{x^2}\,\partial_x u(t,x) = 0 \quad \text{für alle } (t,x) \in \mathbb{R}^2.}$$

(1a) Sind konstante Funktionen Lösungen? (1b) Gibt es noch weitere? Wie / Lässt sich die Charakteristikmethode (Satz Q2D) hier anwenden?

(2) Finden Sie alle Lösungen $u \in C^0(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*)$, die obige PDE für $(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ erfüllen. Können Sie $u(t,0)$ beliebig vorgeben?

Lösung: (1a) Jede konstante Funktion $u(t,x) = \mathrm{const}$ löst unsere PDE.
(1b) Jede charakteristische Kurve $t \mapsto (t, x(t))$ erfüllt $\dot{x}(t) = \sqrt[3]{x(t)^2}$.



Zu viele Charakteristiken verderben die PDE.

Q320
Übung

Trennung der Variablen und genaue Diskussion wie auf Seite M325:
Lösungen sind neben $x(t) = 0$ auch $x_c(t) = (x-c)^3/27$, allgemein

$$x_{a,b} \;:\; \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;:\; t \mapsto x_{a,b}(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } a \le t \le b, \\ (t-a)^3/27 & \text{für } t \le a, \\ (t-b)^3/27 & \text{für } t \ge b, \end{cases}$$

mit Parametern $-\infty \le a \le b \le \infty$. Jeder Punkt $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ liegt auf unendlich vielen dieser Charakteristiken $\gamma_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, x_{a,b}(t))$.
Jede Charakteristik $\gamma_{a,b}$ schneidet die Charakteristik $\gamma_{-\infty,\infty} : t \mapsto (t, 0)$.
Folgerung: Erfüllt $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ unsere PDE auf ganz $\mathbb{R}^2$, so ist u konstant.

☹ (Zu viele) Charakteristiken erzwingen (zu viele) Einschränkungen.

(2) Hier gilt hingegen: Jeder Punkt $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ mit $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ liegt auf genau einer Charakteristik $\gamma_c^* : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t+c, t^3/27)$.

Zu $u(t,0) = g(t)$ können wir jede C^1–Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vorgeben und erhalten die Lösung $u(t,x) = g(t - 3\sqrt[3]{x})$. Machen Sie die Probe!

☺ Charakteristiken erzwingen hier das rechte Maß an Bedingungen.

Zu wenige Charakteristiken erreichen nicht jeden Punkt.

Aufgabe: Zu lösen sei die folgende PDE mit Anfangswerten:

$$\begin{aligned} &\partial_t u(t,x) + x^2 \partial_x u(t,x) = 0 && \text{für } t \in \mathbb{R} \text{ und } x \in \mathbb{R}, \\ &u(0,x) = g(x) = \mathrm{e}^{-x^2} && \text{für } t = 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(1) Lösen Sie diese Gleichung auf dem maximalen Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$:
(a) Bestimmen Sie zunächst alle Charakteristiken dieser PDE.
(b) Welche Punkte $(t,x) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ werden so erreicht, welche nicht?
(c) Berechnen Sie hierauf die eindeutige C^1–Lösung $u : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \to \mathbb{R}$.
(d) Warum tritt das Problem bei der Transportgleichung Q2E nicht auf?

(2) Wird $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eindeutig bestimmt durch folgende Anfangswerte?
(a) $u(t,+1) = \mathrm{e}^{-t^2}$ für alle $t \in \mathbb{R}$
(b) $u(t,-1) = \mathrm{e}^{-t^2}$ für alle $t \in \mathbb{R}$
(c) $u(t,\pm 1) = \mathrm{e}^{-t^2}$ für alle $t \in \mathbb{R}$
(d) $u(t,+t) = \mathrm{e}^{-t^2}$ für alle $t \in \mathbb{R}$
(e) $u(t,-t) = \mathrm{e}^{-t^2}$ für alle $t \in \mathbb{R}$
(f) $u(mx,x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und eine Konstante $m \in \mathbb{R}$

Zu wenige Charakteristiken erreichen nicht jeden Punkt.

Lösung: (1a) Wir lesen die charakteristische Gleichung ab:

$$\begin{aligned} T(0) &= 0, & T'(s) &= 1, \\ X(0) &= x_0, & X'(s) &= X(s)^2, \\ U(0) &= g(x_0), & U'(s) &= 0. \end{aligned}$$

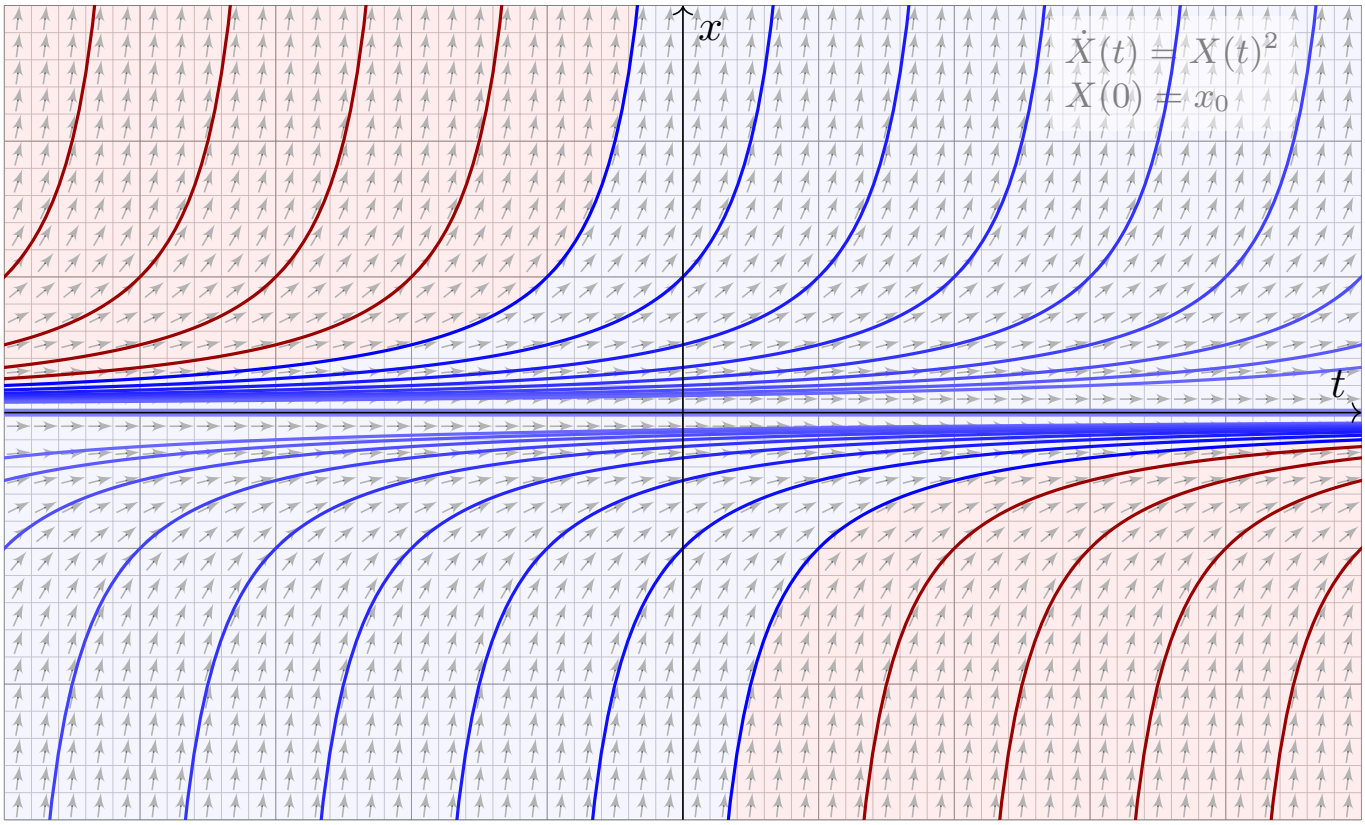
Wir finden $t \overset{!}{=} T(s) = s$. Fortan nutzen wir daher t als Wegparameter.
Wir lösen $X(0) = x_0$ und $\dot{X}(t) = X(t)^2$. Für $x_0 = 0$ finden wir $X(t) = 0$.
Für $x_0 \neq 0$ nutzen wir wie üblich die Separation der Variablen: M113

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) = X(t)^2 \quad &\Longrightarrow \quad X(t)^{-2}\dot{X}(t) = 1 \\ \Longrightarrow \quad \int_{s=0}^{t} X(s)^{-2}\dot{X}(s)\,\mathrm{d}s = \int_{s=0}^{t} 1\,\mathrm{d}s \quad &\Longrightarrow \quad \Big[-X(s)^{-1}\Big]_{s=0}^{t} = \Big[s\Big]_{s=0}^{t} \\ \Longrightarrow \quad X(0)^{-1} - X(t)^{-1} = t \quad &\Longrightarrow \quad X(t) = \frac{x_0}{1 - t x_0} \end{aligned}$$

Die Lösung ist $x = x_0/(1 - t x_0)$, nach x_0 aufgelöst $x_0 = x/(1 + tx)$.
☺ Die folgende Graphik zeigt die charakteristischen Kurven der PDE.

Zu wenige Charakteristiken erreichen nicht jeden Punkt.

Q323
Übung



Die Charakteristiken (blau) decken nur einen Teil aller Punkte $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ ab; hier wird der Funktionswert $u(t, x)$ durch die Anfangswerte bestimmt. ⚠ Im rot gefärbten Bereich hingegen ist der Wert $u(t, x)$ unbestimmt.

Zu wenige Charakteristiken erreichen nicht jeden Punkt.

Q324
Übung

(1b) Erreicht werden die Punkte $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ mit $t = 0$ oder ($t > 0$ und $x > -1/t$) oder ($t < 0$ und $x < -1/t$), kurz $\Omega = \{\, (t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid tx > -1 \,\}$.

(1c) Wir finden die Lösung $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $u(t, x) = \exp(-x^2/(1 + tx)^2)$. Probe: Diese Funktion u erfüllt unsere PDE und die Anfangswerte!

(1d) Bei der Transportgleichung mit konstanten Koeffizienten (Satz Q2E) überdecken die Charakteristiken als Geradenschar die gesamte Ebene.

(2a/b) Nein, die Charakteristiken erreichen nur $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ mit $x \gtrless 0$.

(2c) Ja, die Charakteristiken erreichen alle Punkte $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ mit $x \neq 0$; die Werte $u(t, 0) = 0$ erhalten wir daraus durch stetige Fortsetzung.

(2d) Nein, manche der Charakteristiken $x = x_0/(1 - tx_0)$ werden von der Geraden (t, t) nicht geschnitten, die PDE ist daher unterbestimmt, und die Lösung u ist nicht eindeutig. Andere dieser Kurven werden hingegen zweimal geschnitten, dort ist die PDE also überbestimmt.

(2e) Ja, jede der Charakteristiken $x = x_0/(1 - tx_0)$ wird von der Geraden $(t, -t)$ genau einmal geschnitten. Somit wird die Lösung u eindeutig durch die Anfangswerte auf der Geraden $(t, -t)$ bestimmt.

(2f) Ja für $m < 0$, wie in (2e). Nein für $m \geq 0$, wie in (2d).

Zu wenige oder zu viele Charakteristiken?

Q325
Ausführung

Aufgabe: Sei $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$. Zu lösen sei folgende PDE mit Anfangswerten:

$$\begin{aligned} &\partial_t u(t,x) + |x|^\alpha \, \partial_x u(t,x) = 0 && \text{für alle } (t,x) \in \Omega, \\ &u(0,x) = g(x) = \mathrm{e}^{-x^2} && \text{für alle } (0,x) \in \Omega, \end{aligned}$$

(1) auf der gesamten Ebene $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, also für alle $(t,x) \in \mathbb{R}^2$.
(2) auf der abgeschlossenen Halbebene $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$, kurz $x \geq 0$,
(3) auf der offenen Halbebene $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$, also kurz für $x > 0$,

(a) Finden Sie zunächst alle Charakteristiken dieser PDE.
(b) Eindeutigkeit: Gibt es höchstens eine Lösung $u : \Omega \to \mathbb{R}$?
(c) Existenz: Gibt es mindestens eine Lösung $u : \Omega \to \mathbb{R}$?
(d) Berechnung: Gelten Existenz (a) und Eindeutigkeit (b),
so finden Sie eine explizite Formel für *die* Lösung $u : \Omega \to \mathbb{R}$!

Diskutieren und zeichnen Sie insbesondere die Fälle $\alpha = 2/3, 1, 2$.

Aus Kapitel M kennen wir bereits die illustrativen Beispiele $\dot{x} = x$ M111 und $\dot{x} = x^2$ M113 sowie $\dot{x} = -2\sqrt{|x|}$ M123 und $\dot{x} = \sqrt[3]{x^2}$ M325. Vergleich und Zusammenfassung $\dot{x} = |x|^\alpha$ O233, dort finden Sie auch Graphiken.

Zu wenige oder zu viele Charakteristiken?

Q326
Ausführung

Lösung: (1a) Wir lesen die charakteristische Gleichung ab:

$$\begin{aligned} T(0) &= 0, & T'(s) &= 1, \\ X(0) &= x_0, & X'(s) &= |X(s)|^\alpha, \\ U(0) &= g(x_0), & U'(s) &= 0. \end{aligned}$$

Wir finden $t \overset{!}{=} T(s) = s$. Fortan nutzen wir daher t als Wegparameter. Wir lösen $\dot{X}(t) = |X(t)|^\alpha$ durch Fallunterscheidung $X(t) \gtreqless 0$ und Separation der Variablen. Der Fall $\alpha = 1$ ist am einfachsten:

$$X(t) = \begin{cases} x_0 \, \mathrm{e}^{+t} & \text{für } x_0 \geq 0, \\ x_0 \, \mathrm{e}^{-t} & \text{für } x_0 \leq 0. \end{cases}$$

Zu jedem $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ können wir $x = x_0 \, \mathrm{e}^{\pm t}$ nach $x_0 = x \, \mathrm{e}^{\mp t}$ auflösen:

$$u(t,x) = \begin{cases} g(x \, \mathrm{e}^{-t}) & \text{für } x \geq 0, \\ g(x \, \mathrm{e}^{+t}) & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

☺ Dies zeigt im einfachsten Falle $\alpha = 1$ sofort die Eindeutigkeit (b) und die Existenz (c) der Lösung u durch ihre explizite Berechnung (d).

Zu wenige oder zu viele Charakteristiken?

Q327
Ausführung

Den Fall $\alpha \neq 1$ lösen wir ebenso durch Separation. Für $X(t) > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
& \dot{X}(t) = X(t)^\alpha && \Longrightarrow \quad X(t)^{-\alpha}\dot{X}(t) = 1 \\
\Longrightarrow \quad & \int_{s=0}^{t} X(t)^{-\alpha}\dot{X}(t)\,\mathrm{d}s = \int_{s=0}^{t} 1\,\mathrm{d}s && \Longrightarrow \quad \Big[\frac{X(s)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big]_{s=0}^{t} = \Big[s\Big]_{s=0}^{t} \\
\Longrightarrow \quad & \frac{X(t)^{1-\alpha} - x_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} = t && \Longrightarrow \quad X(t) = \big[x_0^{\bar\alpha} + \bar\alpha t\big]^{1/\bar\alpha}
\end{aligned}$$

Zur Abkürzung setzen wir hier $\bar\alpha := 1 - \alpha$. Für $X(t) < 0$ lösen wir $\dot{X}(t) = (-X(t))^\alpha$ und erhalten ebenso $X(t) = -[(-x_0)^{\bar\alpha} - \bar\alpha t]^{1/\bar\alpha}$.

Im Falle $\alpha > 1$ erhalten wir demnach $X(t) = x_0[1 \pm |x_0|^{\alpha-1}\bar\alpha t]^{1/\bar\alpha}$.
Zu $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ können wir dies nach $x_0 = x[1 \mp |x|^{\alpha-1}\bar\alpha t]^{1/\bar\alpha}$ auflösen.

Die Lösungskurven haben Polstellen: Wir erreichen nur die Punkte $\Omega = \{\, (t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \mp |x|^{\alpha-1}\bar\alpha t > 0 \,\}$. Auf Ω ist u eindeutig bestimmt; außerhalb dieses Gebiets Ω sind die Funktionswerte $u(t,x)$ unbestimmt. Siehe Q321 für den Fall $\alpha = 2$ und $\Omega = \{\, (t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid tx > -1 \,\}$.

⚠ Für $\alpha > 1$ gilt zwar die Existenz (c), aber nicht die Eindeutigkeit (b).

Charakteristiken kommen überall hin, oder nicht?

Q328
Ausführung

Im verbleibenden Falle $0 < \alpha < 1$ finden wir die Charakteristiken:

$$X_{a,b}(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } a \le t \le b, \\ -\big[\bar\alpha(a-t)\big]^{1/\bar\alpha} & \text{für } t \le a, \\ +\big[\bar\alpha(t-b)\big]^{1/\bar\alpha} & \text{für } t \ge b, \end{cases}$$

mit Parametern $-\infty \le a \le b \le \infty$. Jeder Punkt $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ liegt auf unendlich vielen dieser Charakteristiken $\gamma_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, X_{a,b}(t))$.
Jede Charakteristik $\gamma_{a,b}$ schneidet die Charakteristik $\gamma_{-\infty,\infty} : t \mapsto (t, 0)$.
Folgerung: Erfüllt $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ unsere PDE auf ganz $\mathbb{R}^2$, so ist u konstant.
Siehe Q319 für eine Ausführung und Skizze des Falls $\alpha = 2/3$.

⚠ Für $0 < \alpha < 1$ ist jede Lösung u konstant. Zwar gilt die Eindeutigkeit (b), aber nicht die Existenz (c) einer Lösung zu den Anfangsdaten g.

(2) Auf $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\ge 0}$ gilt sinngemäß dasselbe in jedem der Fälle $\alpha \gtreqless 1$.

(3) Auf $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$ gilt Existenz und Eindeutigkeit für $0 < \alpha \le 1$.

☺ Das ist der Idealfall: Die Charakteristiken überdecken das Gebiet Ω als „parallele“ Kurvenschar, ohne Lücken und ohne Überschneidungen, und auf jeder Charakteristik wird genau ein Anfangswert vorgegeben.

Allgemeine Transportgleichung: Problemstellung

Q329
Ausführung

Die vorangehenden Beispiele zeigen exotische Transportgleichungen mit nicht-eindeutigen oder nicht-ausreichenden Transportwegen.

Aufgabe: Wiederholen Sie die Lösung der **Transportgleichung**:

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,x) + b\,\partial_x u(t,x) + c\,u(t,x) &= f(t,x) \quad \text{für } t>0 \text{ und } x\in\mathbb{R}, \\ u(0,x) &= g(x) \quad \text{für } t=0 \text{ und } x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Was bedeuten die Daten b, c, f, g anschaulich / physikalisch?
Lösen Sie möglichst ebenso explizit folgende Verallgemeinerung:

$$\partial_t u(t,x) + b(t,x)\,\partial_x u(t,x) + c(t,x)\,u(t,x) = f(t,x)$$

Gegeben sind stetige Koeffizientenfunktionen $b, c, f : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und Anfangsdaten $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gesucht sind alle Lösungen $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Existiert eine Lösung u? Ist sie eindeutig? Wie berechnen Sie sie?

(1) Lösen Sie den Fall $b(t,x) = b_0(t)$, in dem b nur von t abhängt.
(2) Lässt sich der lineare Fall $b(t,x) = b_0(t) + b_1(t)x$ ebenso lösen?
(3) Welche Probleme bereitet die Lösung der allgemeinen Gleichung?

Allgemeine Transportgleichung: Rechnung

Q330
Ausführung

Lösung: (1) Wir lesen die charakteristische Gleichung ab:

$$\begin{aligned} T(0) &= 0, & T'(s) &= 1, \\ X(0) &= x_0, & X'(s) &= b_0(s), \\ U(0) &= g(x_0), & U'(s) &= f(T(s), X(s)) - c(T(s), X(s))\,U(s). \end{aligned}$$

Wir finden $t \overset{!}{=} T(s) = s$. Fortan nutzen wir daher t als Wegparameter.
Wir haben die Integralfunktion $B_0(t) = \int_{\tau=0}^{t} b_0(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ dank Stetigkeit.
Die Lösung ist $x \overset{!}{=} X(t) = x_0 + B_0(t)$, nach x_0 aufgelöst $x_0 = x - B_0(t)$.

(2) Etwas allgemeiner: Für $b(t,x) = b_0(t) + b_1(t)x$ finden wir

$$x \overset{!}{=} X(t) = \mathrm{e}^{B_1(t)} x_0 + \mathrm{e}^{B_1(t)} \int_{\tau=0}^{t} \mathrm{e}^{-B_1(\tau)} b_0(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

$$x_0 = \mathrm{e}^{-B_1(t)} x - \int_{\tau=0}^{t} \mathrm{e}^{-B_1(\tau)} b_0(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

☺ Das ist der Idealfall: Die Charakteristiken überdecken das Gebiet Ω als „parallele“ Kurvenschar, ohne Lücken und ohne Überschneidungen, und auf jeder Charakteristik wird genau ein Anfangswert vorgegeben.

Allgemeine Transportgleichung: Diskussion

⚠ Im allgemeinen Fall (3) treten zwei Hindernisse auf: Charakteristiken können sich schneiden oder manche Punkte $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ nicht erreichen. Die vorangehenden Aufgaben illustrieren die möglichen Komplikationen.

☺ Wir gehen vom Idealfall aus, wie für $b(t,x) = b_0(t) + b_1(t)x$ gezeigt. Für $U(t) = u(t, X(t))$ erhalten wir die lineare Differentialgleichung

$$U(0) = g(x_0), \quad \dot{U}(t) = \varphi(t) - \gamma(t)U(t)$$

mit den Koeffizientenfunktionen $\varphi(t) = f(t, X(t))$ und $\gamma(t) = c(t, X(t))$. Wir setzen $C(t) = \int_{\tau=0}^{t} \gamma(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ und nutzen die Integralformel M2E:

$$u(t,x) \overset{!}{=} U(t) = \mathrm{e}^{-C(t)} g(x_0) + \mathrm{e}^{-C(t)} \int_{\tau=0}^{t} \mathrm{e}^{C(\tau)} \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

☺ Jede Lösung u erfüllt $u(t, X(t)) = U(t)$. Damit ist $u(t,x)$ bestimmt! Zu jedem Punkt (t,x) können wir wie oben erklärt den Startpunkt x_0 bestimmen und damit den Weg $t \mapsto (t, X(t))$ von $(0, x_0)$ nach (t,x).

☺ Das ist ein seltener Glücksfall: Zu dieser Problemklasse haben wir direkt eine allgemein gültige und explizite Integralformel gefunden.

⚠ Die meisten PDE lassen sich nicht einfach mit Integralformeln lösen.

Allgemeine Transportgleichung: Lösung

Satz Q3A: Integralformel für lineare PDE erster Ordnung

Zu lösen sei die allgemeine **Transportgleichung**:

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,x) + b(t,x)\,\partial_x u(t,x) + c(t,x)\,u(t,x) &= f(t,x), \\ u(0,x) &= g(x). \end{aligned}$$

Gegeben sind stetige Koeffizientenfunktionen $b, c, f : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und Anfangsdaten $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gesucht sind alle Lösungen $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

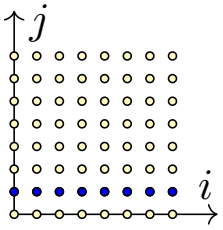
Im allgemeinen Fall können Hindernisse auftreten, wir betrachten daher $b(t,x) = b_0(t) + b_1(t)x$. Dieses Problem hat genau eine Lösung, nämlich

$$u(t,x) = \mathrm{e}^{-C(t)} g(x_0) + \mathrm{e}^{-C(t)} \int_{\tau=0}^{t} \mathrm{e}^{C(\tau)} f\big(\tau, X(\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau$$

Aus der Funktion $B_1(t) = \int_{\tau=0}^{t} b_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ erhalten wir die Charakteristik $X(t) = \mathrm{e}^{B_1(t)} x_0 + \mathrm{e}^{B_1(t)} \int_{\tau=0}^{t} \mathrm{e}^{-B_1(\tau)} b_0(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ mit passendem Startpunkt $x_0 = \mathrm{e}^{-B_1(t)} x - \int_{\tau=0}^{t} \mathrm{e}^{-B_1(\tau)} b_0(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ sowie $C(t) = \int_{\tau=0}^{t} c(\tau, X(\tau))\,\mathrm{d}\tau$.

Lösung durch Potenzreihen

Q333
Ergänzung



Aufgabe: Mit dem Ansatz $u(t,x) = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} a_{ij}\, t^i x^j$ löse man

$$\boxed{\partial_t u(t,x) + x\,\partial_x u(t,x) = 0, \quad u(0,x) = x.}$$

Lösung: Einsetzen in die geforderten Gleichungen ergibt:

$$(1)\quad \sum i\, a_{ij}\, t^{i-1} x^j + \sum j\, a_{ij}\, t^i x^j \overset{!}{=} 0, \qquad (2)\quad \sum a_{0j}\, x^j \overset{!}{=} x$$

(2) Koeffizientenvergleich ergibt $a_{01} = 1$ und $a_{0j} = 0$ für $j \neq 1$.

(1) Es gilt $(i+1)a_{i+1,j} + j a_{ij} = 0$, also rekursiv $a_{i+1,j} = -\frac{j}{i+1} a_{ij}$:

$$j = 1: \quad a_{0,1} \overset{(2)}{=} 1, \quad a_{1,1} = -\frac{1}{1!}, \quad a_{2,1} = +\frac{1}{2!}, \quad a_{3,1} = -\frac{1}{3!}, \quad \ldots$$

$$j \neq 1: \quad a_{0,j} \overset{(2)}{=} 0, \quad a_{1,j} = 0, \quad a_{2,j} = 0, \quad a_{3,j} = 0, \quad \ldots$$

Diese Koeffizienten bestimmen eine Lösung. Wir erhalten so:

$$\boxed{u(t,x) \;=\; \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} t^i x^1 \;=\; x\,\mathrm{e}^{-t}}$$

☺ Die Reihe genügt meist. Hier erkennen wir zudem die $\exp$–Funktion. Schön. Machen Sie die Probe! Es gilt $\partial_t u + x\,\partial_x u = 0$ und $u(0,x) = x$.

Lösung durch Potenzreihen

Q334
Ergänzung

Dieses Beispiel dient hier zur Illustration; diese spezielle PDE ist linear und kann mit der Charakteristikmethode ebenso leicht gelöst werden.

Auch der Separationsansatz $u(t,x) = v(t) \cdot w(x)$ führt hier zum Erfolg. Sehen Sie, wie das hier gelingt? Versuchen Sie es als Übung!

☹ Nicht jede PDE besitzt eine Lösung. Selbst wenn sie eine Lösung besitzt, so doch meist nicht elementar, d.h. in geschlossener Form.

In solchen Fällen hilft recht häufig der Potenzreihenansatz.

☺ Jede PDE mit analytischen Koeffizienten kann lokal gelöst werden.

Der Potenzreihenansatz hat den Vorteil, dass er allgemein anwendbar ist und dank Satz Q3B immer eine konvergente Reihe als Lösung liefert.

☺ Die Methode eignet sich auch zur numerischen Approximation.

Da die Rechnungen jedoch aufwändig werden können, wählt man den Potenzreihenansatz nur mit Bedacht. Notfalls kann man so immerhin qualitative Aussagen gewinnen und Approximationen berechnen.

Lösung durch Potenzreihen

Satz Q3B: Cauchy 1842, Kowalewskaja 1875

Zu lösen sei wie zuvor ein **Cauchy–Problem** der Form

$$\partial_t u = F(t, x, u, \partial_x u), \quad u(t_0, x) = f(x).$$

Gegeben sind Intervalle $t_0 \in I \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in \Omega \subseteq \mathbb{R}$ sowie Funktionen $F : I \times \Omega \times \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$ und $f : \Omega \to \mathbb{K}$. Beide Funktionen seien analytisch.

Dann existiert lokal genau eine analytische Lösung $u : I_0 \times \Omega_0 \to \mathbb{K}$ auf (eventuell kleineren) Intervallen $t_0 \in I_0 \subseteq I$ und $x_0 \in \Omega_0 \subseteq \Omega$.

Konstruktion: Wir entwickeln um den Nullpunkt $(t_0, x_0) = (0, 0)$:
Hier gilt $F(t, x, u, v) = \sum_{i,j,k \in \mathbb{N}} b_{ijk\ell}\, t^i x^j u^k v^\ell$ und $f(x) = \sum_{j \in \mathbb{N}} c_j\, x^j$.
Für u wählen wir den Potenzreihenansatz $u(t, x) = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} a_{ij}\, t^i x^j$.
Einsetzen ergibt rekursive Gleichungen für die Koeffizienten a_{ij}.
Diese sind eindeutig lösbar. Der Satz garantiert Konvergenzradius > 0.
(Letzteres ist die eigentliche Aussage; wir rechnen dies hier nicht nach.)

Lösung durch Potenzreihen

☺ Analytische Cauchy–Probleme sind gut gestellt, das heißt, es gibt genau eine Lösung, zumindest lokal um den Entwicklungspunkt (t_0, x_0).

Diese Lösung ist analytisch, d.h. lokal eine konvergente Potenzreihe: Die Koeffizienten lassen sich rekursiv berechnen, wie oben skizziert. Zudem gilt eine allgemeine Majorante und damit lokale Konvergenz.

⚠ Hadamards Beispiel (Seite R217) zeigt, dass die Lösungen einer PDE im Allgemeinen nicht stetig von den Anfangsdaten abhängen!

☺ Die rechte Seite F und die Funktion f müssen analytisch sein. Das ist in vielen Anwendungen eine harmlose Voraussetzung.

⚠ Differenzierbarkeit reicht nicht! Die erstaunliche Entdeckung von Lewy (1956) und Mizohata (1962): Es gibt glatte, nicht-analytische Funktionen $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, sodass $\partial_t u(t, x) + \mathrm{i}t\partial_x u(t, x) = g(t, x)$ keine Lösung hat, nicht einmal lokal auf einem beliebig kleinen Gebiet!

☺ Die Koeffizienten sind hier nicht-konstante Polynome; für konstante Koeffizienten rettet uns der Satz R1A von Ehrenpreis–Malgrange.

Methodenvergleich: Viele Wege führen zum Ziel.

Q337
Ergänzung

Aufgabe: Finden Sie alle C^1–Funktionen $u : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$\boxed{\partial_t u(t,x) + x^2\, \partial_x u(t,x) = 0 \quad \text{und} \quad u(0,x) = x.}$$

Nutzen und vergleichen Sie die beiden bisherigen Techniken:
(1) die Charakteristikmethode und (2) den Potenzreihenansatz.

Auf welchem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ gelingt Ihnen diese Berechnung?
Wie können Sie sicher sein, alle Lösungen gefunden zu haben?

Lösung: (1) Die Charakteristiken haben wir oben ausgeführt (Q321):
Die charakteristische Kurve durch $(0, x_0)$ ist $t \mapsto \big(\, t,\ x_0/(1 - tx_0)\,\big)$.
Erreicht werden nur die Punkte in $\Omega = \{\, (t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid tx > -1 \,\}$.

Als eine mögliche Lösung finden wir so:

$$\boxed{u \,:\, \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \to \mathbb{R} \,:\, (t,x) \mapsto u(t,x) = \frac{x}{1+tx}}$$

☺ Gehen Sie die Rechnung erneut durch und machen Sie die Probe!
☺ Der Transport entlang von Charakteristiken beweist die Eindeutigkeit auf Ω dank Satz Q2D; darüber hinaus reichen die Anfangswerte nicht.

Methodenvergleich: Viele Wege führen zum Ziel.

Q338
Ergänzung

Was ergibt der Potenzreihenansatz? Kommen wir damit weiter?

(2) Einsetzen von $u(t,x) = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} a_{ij}\, t^i x^j$ in die PDE ergibt:

$$\sum i\, a_{ij}\, t^{i-1} x^j + \sum j\, a_{ij}\, t^i x^{j+1} \overset{!}{=} 0, \qquad \sum a_{0j}\, x^j \overset{!}{=} x$$

Koeffizientenvergleich ergibt $a_{01} = 1$ und $a_{0j} = 0$ für $j \neq 1$.
Es gilt $(i+1)a_{i+1,j+1} + j a_{ij} = 0$, also rekursiv $a_{i+1,j+1} = -\frac{j}{i+1} a_{ij}$:

$$\begin{array}{llllll} j = 1: & a_{0,1} = +1, & a_{1,2} = -1, & a_{2,1} = +1, & a_{3,1} = -1, & \dots \\ j \neq 1: & a_{0,j} = 0, & a_{1,j+1} = 0, & a_{2,j+2} = 0, & a_{3,j+3} = 0, & \dots \end{array}$$

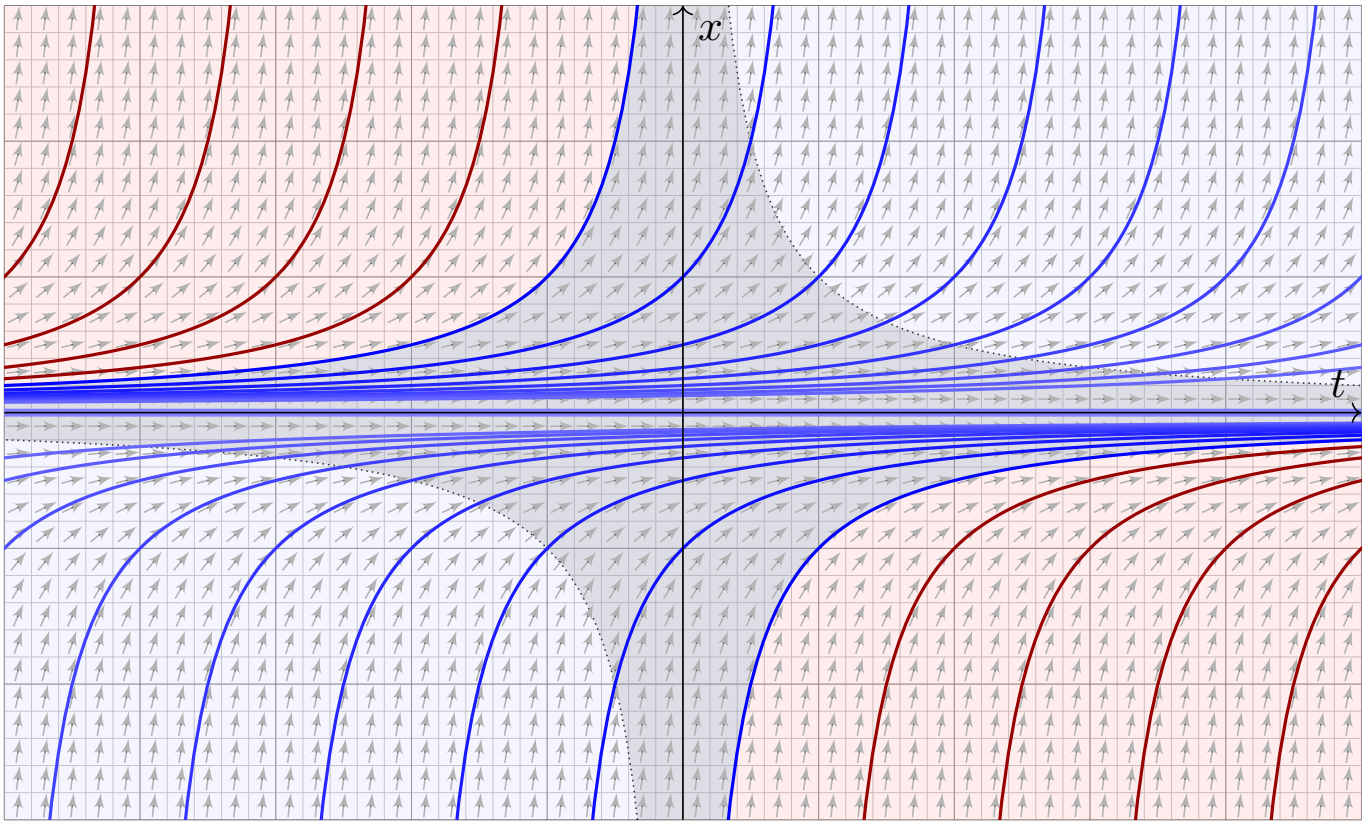
Diese Koeffizienten bestimmen eine Lösung. Wir erhalten so:

$$\boxed{u(t,x) \;=\; \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i t^i x^{i+1} \;=\; \frac{x}{1+tx}}$$

☺ Die Reihe genügt meist! Hier erkennen wir die geometrische Reihe.
⚠ Sie konvergiert nur auf $\Omega' = \{\, (t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid |tx| < 1 \,\}$. Dieser Bereich ist kleiner als zuvor $\Omega = \{\, (t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid tx > -1 \,\}$ mit Charakteristiken.

Methodenvergleich: Viele Wege führen zum Ziel.

Q339
Ergänzung



Die Charakteristiken (blau) decken nur einen Teil aller Punkte $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ ab; hier wird der Funktionswert $u(t, x)$ durch die Anfangswerte bestimmt.
⚠ Im rot gefärbten Bereich hingegen ist der Wert $u(t, x)$ unbestimmt.

Methodenvergleich: Viele Wege führen zum Ziel.

Q340
Ergänzung

⚠ Unsere Potenzreihe konvergiert nur im grau unterlegten Gebiet Ω'.

Wir arbeiten hier mit einer Potenzreihe $u(t, x) = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} a_{ij}\, t^i x^j$ in zwei reellen Variablen $t, x \in \mathbb{R}$ um den Entwicklungspunkt $(t_0, x_0) = (0, 0)$. Ihr Konvergenzgebiet Ω' wird von den Hyperbeln $x = \pm 1/t$ begrenzt. Im Gegensatz dazu erwarten wir für Potenzreihen $f(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k z^k$ in einer komplexen Variablen $z \in \mathbb{C}$ die üblichen Konvergenzkreise.

☺ Auf dem gemeinsamen Definitionsbereich $\Omega' \subseteq \Omega$ stimmen beide Lösungen überein, so wie es sein muss: Aus (1) wissen wir bereits, dank Satz Q2D, dass die Lösung auf Ω eindeutig ist! Insbesondere hat somit der (willkürlich gewählte) Rechenweg keinen Einfluss auf das Ergebnis.

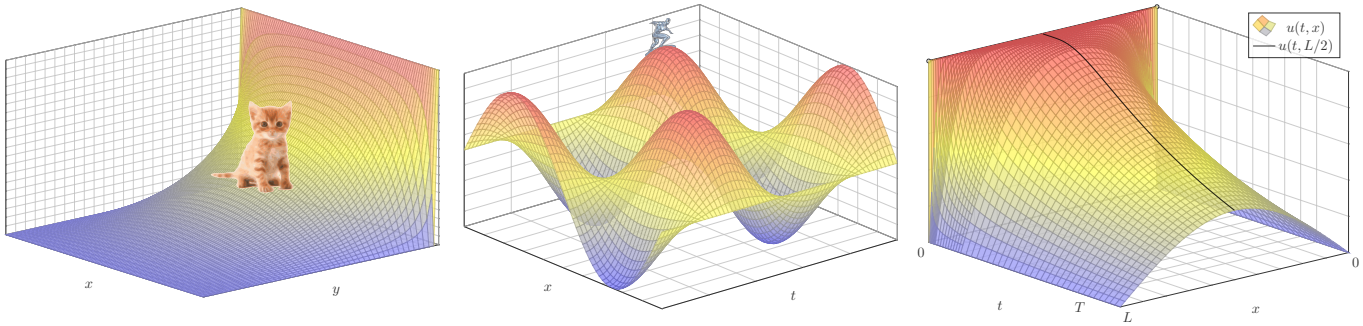
Unsere Wahl des Rechenweges und der zugehörigen Darstellung der Lösung beeinflusst lediglich das Definitionsgebiet, zuvor Ω, hier $\Omega' \subsetneq \Omega$,

☺ Die Charakteristikmethode betont die geometrische Sichtweise: Sie zeigt das maximale Definitionsgebiet und hierauf Eindeutigkeit.

☺ Der Potenzreihenansatz betont hingegen die analytische Sichtweise: Er entwickelt die Lösung, soweit möglich, als konvergente Potenzreihe.

Kapitel R

Lineare PDE zweiter Ordnung



Im Unterschied zu den gewöhnlichen Differentialgleichungen besitzen die partiellen Differentialgleichungen keine einheitliche Theorie. Einige Gleichungen haben ihre eigenen Theorien, für andere gibt es überhaupt keine Theorie.

Vladimir I. Arnold (1937–2010)

Inhalt dieses Kapitels R

1 Lineare PDE zweiter Ordnung
- Lösung durch Fourier–Transformation
- Klassifikation linearer PDE zweiter Ordnung
- Trennung der Variablen durch Produktansatz

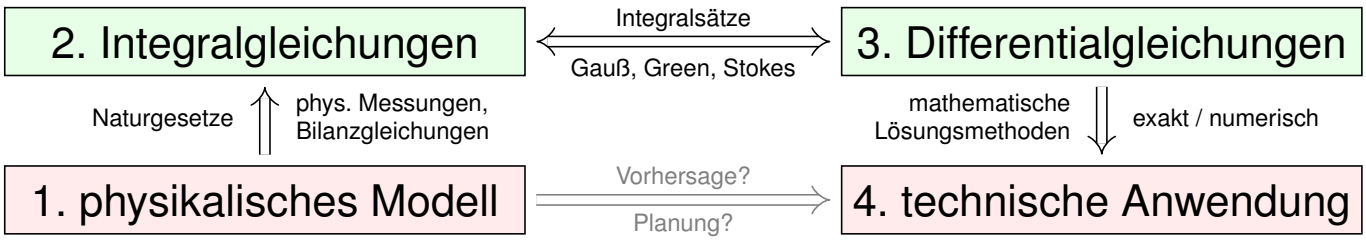
2 Anwendung auf die Potentialgleichung
- Laplace–Gleichung auf einem Rechteck
- Eindeutigkeit und Minimum-Maximum-Prinzip
- Gut gestellt? Hadamards warnendes Gegenbeispiel

3 Anwendung auf die Wellengleichung
- Die harmonisch schwingende Saite
- Wellengleichung und die gezupfte Saite
- Die Energiemethode beweist die Eindeutigkeit.

4 Fazit: PDE zweiter Ordnung
- Zusammenfassung und Verständnisfragen
- Aufgaben zur Separationsmethode

Motivation zu Differentialgleichungen

Differentialgleichungen sind die Sprache der Naturgesetze.
Typische Anwendungen verlaufen daher nach dem vertrauten Muster:



Wir untersuchen ein physikalisches Phänomen, das uns am Herzen liegt und das wir nutzen wollen. Grundlegende physikalische Gesetze sind Erhaltungsgrößen in Form von Integralgleichungen. Diese formen wir um zu Differentialgleichungen, in der Hoffnung, sie leichter lösen zu können.

Wichtige Anwendungen, die Sie zum Teil schon kennengelernt haben, finden sie in Elektrodynamik (Maxwell–Gleichungen), Thermodynamik (Bilanzgleichungen), klassischer Mechanik (Hamilton–Gleichungen), Quantenmechanik (Schrödinger–Gleichung), Strömungsmechanik (Navier–Stokes–Gleichungen), usw. . . . Die Liste ist schier endlos.

Motivation zu Differentialgleichungen

Wir haben zunächst **gewöhnliche Differentialgleichungen** (ODE) untersucht und gelöst. Theorie und Lösungsmethoden sind hier noch übersichtlich und weitgehend vollständig. Das ist die unentbehrliche Grundlage und beschert uns bereits phantastische Anwendungen.

In der Praxis treten häufig **partielle Differentialgleichungen** (PDE) auf. Erfahrungsgemäß sind die allermeisten höchstens **zweiter Ordnung**. Wir diskutieren etwas genauer die drei zentralen, klassischen Beispiele: Potentialgleichung, Wellengleichung und Wärmeleitungsgleichung.

Bei jeder partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung fragen wir: Ist sie linear? Ist sie elliptisch? oder hyperbolisch? oder parabolisch? Dies deckt nur die einfachsten Möglichkeiten ab, es gibt viele weitere, aber es verhilft uns zu einer ersten Übersicht und Orientierung:

☺ Wenn die Gleichung elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch ist, dann verhält sie sich ähnlich wie die entsprechende **Modellgleichung**, also Potential-, Wellen- oder Wärmeleitungsgleichung. Zu Verständnis und Lösung der Gleichung sind solche Analogien oft sehr nützlich.

Lösung durch Fourier–Transformation

Wir untersuchen die homogene **Wärmeleitungsgleichung** S101

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,x) &= \kappa\, \partial_x^2\, u(t,x) && \text{für } t>0 \text{ und } x\in\mathbb{R}, \\ u(0,x) &= u_0(x) && \text{für } t=0 \text{ und } x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Aufgabe: Lösen Sie dies durch Fourier–Transformation bezüglich x.

Hierzu gibt es Voraussetzungen: Satz K2A erfordert, dass u zweimal stetig nach x differenzierbar ist und $\partial_x^2 u$ absolut integrierbar. Das ist am Ende noch zu überprüfen, siehe hierzu Satz D5D.

Lösung: Die $\mathscr{F}$–Transformierte $\widehat{u}(t,\xi)$ erfüllt $\partial_t \widehat{u}(t,\xi) = -\kappa\,\xi^2\,\widehat{u}(t,\xi)$.
Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung in t mit Parameter ξ.
Wir trennen die Variablen gemäß $[\partial_t \widehat{u}(t,\xi)]/\widehat{u}(t,\xi) = -\kappa\xi^2$
und integrieren von 0 bis t zu $\ln \widehat{u}(t,\xi) - \ln \widehat{u}(0,\xi) = -\kappa\xi^2 t$.
Wir erhalten so die Lösung $\widehat{u}(t,\xi) = \mathrm{e}^{-\kappa\xi^2 t}\,\widehat{u}_0(\xi)$ für alle $t\geq 0$.
Rücktransformation $\mathrm{e}^{-\kappa\xi^2 t} \bullet\!\!-\!\!\circ\, \mathrm{e}^{-x^2/4\kappa t}/\sqrt{2\kappa t}$ und Faltung ergibt:

$$u(t,x) = \int_{y\in\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-(x-y)^2/4\kappa t}}{\sqrt{4\pi\kappa t}}\, u_0(y)\,\mathrm{d}y \quad \text{für } t>0.$$

Lösung durch Fourier–Transformation

☺ Das Ergebnis entspricht unserer in Satz D5D präsentierten Lösung:
Die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = \kappa\,\partial_x^2 u$ hat als Fundamentallösung eine auseinanderfließende Glockenkurve, den **Wärmeleitungskern**

$$H \,:\, \mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R} \,:\, H(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4\kappa t}\right).$$

Die Konstanten sichern die Normierung $\int_{\mathbb{R}} H(t,x)\,\mathrm{d}x = 1$. (Gauß C2G)
Für $t=0$ sei die Wärmeverteilung $u_0:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vorgegeben, mit $u_0\in C_b$.
Für $t>0$ erhalten wir die Lösung durch **Superposition** (Faltung D5E):

$$u(t,x) = \int_{y\in\mathbb{R}} u_0(x-y)\,H(t,y)\,\mathrm{d}y = \int_{z\in\mathbb{R}} u_0(z)\,H(t,x-z)\,\mathrm{d}z.$$

☺ Stehen die Formeln schon da, so genügt geduldiges Nachrechnen:
Machen Sie die Probe und zeigen Sie $\partial_t u = \kappa\,\partial_x^2 u$ durch Ableiten. D517

☺ Die Fourier–Transformation bietet eine elegant-effiziente Herleitung.
Anschließend sammeln und prüfen wir die Voraussetzungen (D5D, D5U).

Lösung durch Fourier–Transformation

Die Methode der Fourier–Transformation funktioniert ganz allgemein!
Die Idee ist klar: Zu lösen sei die lineare partielle Differentialgleichung

$$\boxed{P(\partial)\, u(x) = g(x)}$$

mit einem Polynom $P(x) = \sum a_\nu x^\nu$. Nach Fourier–Transformation gilt

$$P(\mathrm{i}\xi)\, \widehat{u}(\xi) = \widehat{g}(\xi).$$

Auflösen zu $\widehat{u}(\xi) = \widehat{g}(\xi)/P(\mathrm{i}\xi)$ und Rücktransformation liefert u.

Die Transformation $g(x) \mapsto \widehat{g}(\xi)$ und $P(\partial) \mapsto P(\mathrm{i}\xi)$ kennen wir bereits, so dass wir $\widehat{u}(\xi) = \widehat{g}(\xi)/P(\mathrm{i}\xi)$ setzen können. Zunächst ist jedoch nicht klar, ob die Rücktransformation $\widehat{u} \mapsto u$ überhaupt immer möglich ist – insb. wenn $\widehat{g}$ nicht absolut integrierbar ist oder $1/P(\mathrm{i}\xi)$ Polstellen hat!

☺ Dies garantiert der grundlegende Satz von Ehrenpreis–Malgrange: Jede lineare PDE mit konstanten Koeff. kann gobal gelöst werden!

⚠ Für nicht-konstante Koeffizienten gilt die Lösbarkeit nicht allgemein, wie das obige Gegenbeispiel von Lewy–Mizohata Q336 eindrücklich zeigt.

Lösung durch Fourier–Transformation

Satz R1A: Ehrenpreis 1954, Malgrange 1955

Sei $P(x) = \sum_{|\nu| \le k} a_\nu x^\nu$ ein Polynom mit Koeffizienten $a_\nu \in \mathbb{C}$.
Zu lösen sei für $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ die lineare partielle Differentialgleichung

$$\boxed{P(\partial)\, u(x) = g(x).}$$

Zu jeder rechten Seite $g \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ existiert eine Lösung $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$.

Genauer gilt: Zu P existiert eine Fundamentallösung F mit $P(\partial)\, F = \delta$.
Für jede rechte Seite g liefert F dann eine Lösung u durch Faltung:

$$\boxed{u(x) = \int_{y \in \mathbb{R}^n} F(x-y)\, g(y)\, \mathrm{d}y = \int_{z \in \mathbb{R}^n} F(z)\, g(x-z)\, \mathrm{d}z.}$$

☺ Für diese Problemklasse ist die Existenz von Lösungen garantiert.
Im Einzelfall bleibt „nur“ noch die Fundamentallösung F auszurechnen.

☺ Im Falle $n = 1$ haben wir eine gewöhnliche DG der Ordnung k, linear mit konstanten Koeffizienten und rechter Seite g. (Satz N2F)

Die drei wichtigsten PDE zweiter Ordnung

Potentialgleichung für $u : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \to \mathbb{R} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto u(x_1, \dots, x_n)$:

$$\boxed{\Delta u = \varrho \quad \text{mit} \quad \Delta = \partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2}$$

Die Gleichung $\Delta u = 0$ heißt **homogene Potentialgleichung** oder **Laplace–Gleichung**; ihre Lösungen heißen harmonische Funktionen. Die Gleichung $\Delta u = \varrho$ heißt **inhomogene Potentialgleichung** oder **Poisson–Gleichung**. Sie beschreibt das Gravitationspotential u zur Massenverteilung ϱ, ebenso das elektrische Potential u zur Ladungsdichte ϱ, und vieles mehr.

Wellengleichung für $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \to \mathbb{R}$ oder $u : \Omega \to \mathbb{C}$:

$$\boxed{\partial_t^2 u - c^2 \Delta u = \varrho \quad \text{mit} \quad \Delta = \partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2}$$

Diese Gleichung beschreibt die Ausbreitung von Schallwellen in Röhren (Dim. $n = 1$), flache Oberflächenwellen in Wasser (Dim. 2) oder Lichtwellen im Raum (Dim. 3); hierbei ist $c > 0$ die Ausbreitungsgeschwindigkeit. Im stationären Fall $\partial_t u = 0$ erhalten wir die Potentialgleichung!

Wärmeleitungsgleichung für $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \to \mathbb{R}$ oder $u : \Omega \to \mathbb{C}$:

$$\boxed{\partial_t u - \kappa \, \Delta u = q \quad \text{mit} \quad \Delta = \partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2}$$

Sie beschreibt die Wärmeausbreitung in einem homogenen Körper mit Temperaturleitfähigkeit $\kappa > 0$, Wärmeenergiedichte u und Wärmeleistungsdichte q. Sie heißt auch Diffusionsgleichung. Im stationären Fall $\partial_t u = 0$ erhalten wir erneut die Potentialgleichung!

Lösungen der Potentialgleichung

Satz R1B: Lösungen der Potentialgleichung

(1) Die n–dimensionale **Laplace–Gleichung** $\Delta u = 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ hat als **Fundamentallösung** das n–dimensionale Newton–Potential

$$N(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}|x| & \text{für } n = 1, \qquad \dfrac{1}{2\pi} \ln|x| & \text{für } n = 2, \\[2ex] \dfrac{-1}{4\pi|x|} & \text{für } n = 3, \qquad \dfrac{|x|^{2-n}}{(2-n)n\tau_n} & \text{für } n \neq 2. \end{cases}$$

(2) Die **Potentialgleichung** $\Delta u = \varrho$ wird gelöst durch **Superposition**:

$$u \,:\, \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \,:\, x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} N(x-y)\, \varrho(y) \, \mathrm{d}y$$

Übung: Die Funktion N erfüllt $\Delta N = 0$ und die Normierung $\int_{\partial B(0,r)} \nabla N \, \mathrm{d}S = 1$ (Satz H1E). Allgemein ist $\tau_n = \mathrm{vol}_n(\mathbb{D}^n)$ das n-dim. Volumen der Einheitskugel. C425 Bis auf Vorzeichen und Konstante ist N das Gravitationspotential einer Punktmasse im Ursprung. Die Verschiebung $N(x-y)$ ist demnach das Potential um y, und $u(x)$ ihre Superposition. Wenn ϱ vernünftig ist, zum Beispiel stetig differenzierbar mit kompaktem Träger, so folgt hieraus $\Delta u = \varrho$ (Satz H1E).

Lösungen der Wellengleichung

Satz R1C: Lösungen der Wellengleichung

(1) Die n–dimensionale homogene **Wellengleichung** $\partial_t^2 u - c^2 \Delta u = 0$ hat zu jeder Richtung $\xi \in \mathbb{R}^n$ die separierte **Fundamentallösung**

$$\Psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : (t, x) \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \xi | x \rangle}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}|\xi| ct}$$

(2) Die allgemeine Lösung erhalten wir hieraus als **Superposition**

$$u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : (t, x) \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \xi | x \rangle}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}|\xi| ct}\, a(\xi)\, \mathrm{d}\xi.$$

Wir erhalten $u(0, x) = u_0(x)$ durch die **Fourier–Transformierte** $a = \widehat{u_0}$.

Übung: Rechnen Sie nach, dass die Funktion Ψ tatsächlich $(\partial_t^2 - c^2 \Delta)\Psi = 0$ erfüllt. Die Funktion Ψ beschreibt eine Welle mit Wellenvektor $\xi \in \mathbb{R}^n$. Eine allgemeinere Form ist $u(t, x) = f(\langle \xi \mid x \rangle - |\xi| ct)$. Der obige Produktansatz erlaubt die Trennung der Variablen. Superposition von endlich vielen Wellen bereitet keine Schwierigkeit. Damit aber das Integral konvergiert, sollte a absolut integrierbar sein. Ist auch der Anfangswert u_0 absolut integrierbar, so können wir $a = \widehat{u_0}$ definieren und erhalten $u(t, x)$ mit $u(0, x) = u_0$. Einfach wunderbar!

Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

♦ Satz D5D: Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

(1) Die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = \kappa\, \Delta u$ hat als Fundamentallösung eine auseinanderfließende Glockenkurve, den **Wärmeleitungskern**

$$H : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : H(t, x) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi\kappa t})^n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\kappa t}\right).$$

Die Konstanten sichern die Normierung $\int_{x \in \mathbb{R}^n} H(t, x)\, \mathrm{d}x = 1$ für $t > 0$.

(2) Für $t = 0$ sei die Wärmeverteilung $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vorgegeben, $u_0 \in C_b$. Für $t > 0$ erhalten wir die Lösung durch **Superposition** (Faltung D5E):

$$u : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : u(t, x) = \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} H(t, x - \xi)\, u_0(\xi)\, \mathrm{d}\xi.$$

Sie erfüllt $\partial_t u = \kappa\, \Delta u$ für $t > 0$ sowie $\lim_{t \searrow 0} u(t, x) = u_0(x)$.

Übung: Rechnen Sie nach, dass tatsächlich $(\partial_t - \kappa\, \Delta) H = 0$ und $\int_{\mathbb{R}^n} H(t, x)\, \mathrm{d}x = 1$ gilt. Für festes $t > 0$ ist $H(t, x - \xi)$ eine Glockenkurve mit Mittelwert ξ und Streuung $\sigma = \sqrt{2\kappa t}$. Ableiten von u ergibt $(\partial_t - \kappa\, \Delta)\, u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\xi)\, (\partial_t - \kappa\, \Delta) H(t, x - \xi)\, \mathrm{d}\xi = 0$. D517

Klassifikation linearer PDE zweiter Ordnung

Wir erinnern an ebene Quadriken im Hauptachsensystem: E037

$$x^2 + y^2 = 1, \qquad \left(\frac{x - x_0}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{r_2}\right)^2 = 1, \qquad \text{Ellipse;}$$

$$x^2 - y^2 = 1, \qquad \left(\frac{x - x_0}{r_1}\right)^2 - \left(\frac{y - y_0}{r_2}\right)^2 = 1, \qquad \text{Hyperbel;}$$

$$x^2 - y \;\; = 0, \qquad \left(\frac{x - x_0}{r_1}\right)^2 - \left(\frac{y - y_0}{r_2}\right) \;\; = 0, \qquad \text{Parabel.}$$

In Dimension 2 betrachten wir allgemein das quadratische Polynom

$$\boxed{P(x, y) \;=\; a_{11}\, x^2 + 2a_{12}\, x\, y + a_{22}\, y^2 \;+\; b_1\, x + b_2\, y \;+\; c.}$$

Zu $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$ mit $a_{12} = a_{21}$ betrachten wir $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$.
Wir nennen das Polynom $P(x, y)$ **elliptisch**, wenn $\det A > 0$; **hyperbolisch**, wenn $\det A < 0$; **parabolisch**, wenn $\det A = 0$.

📖 Zur Klassifikation der Quadriken siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, Kapitel 7.
Wir beschreiben den quadratischen Anteil durch eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Jede symmetrische Matrix lässt sich orthogonal diagonalisieren, damit können wir P in Normalform bringen. Entscheidend ist hierfür das Vorzeichen der Eigenwerte!

Klassifikation linearer PDE zweiter Ordnung

In Dimension 2 betrachten wir den linearen Differentialoperator

$$\boxed{L \;=\; P(\partial_x, \partial_y) \;=\; a_{11}\partial_x^2 + 2a_{12}\partial_x\partial_y + a_{22}\partial_y^2 \;+\; b_1\partial_x + b_2\partial_y \;+\; c.}$$

Der quadratische Teil hat die Determinante $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$.
Wir nennen den Differentialoperator L **elliptisch**, wenn $\det A > 0$; **hyperbolisch**, wenn $\det A < 0$; **parabolisch**, wenn $\det A = 0$.

In Dimension n betrachten wir allgemein den Differentialoperator

$$\boxed{L \;=\; P(\partial_1, \ldots, \partial_n) \;=\; \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\partial_j\partial_k + \sum_{j=1}^{n} b_j\partial_j + c.}$$

Wir nennen $\pm L$ **elliptisch**, wenn alle Eigenwerte von A positiv sind; **hyperbolisch**, wenn ein Eigenwert negativ ist, alle anderen positiv; **parabolisch**, wenn ein Eigenwert null ist, aber alle anderen positiv.

Dazu passen spezialisierte Techniken. Hängen die Koeffizienten $a_{jk}, b_j, c : \Omega \to \mathbb{R}$ zudem vom Ort $x \in \Omega$ ab, so muss die Bedingung in jedem Punkt $x \in \Omega$ erfüllt sein. Andernfalls ist L ein Differentialoperator gemischten Typs, in manchen Regionen elliptisch, hyperbolisch, parabolisch.

Klassifikation linearer PDE zweiter Ordnung

Die drei **Modellgleichungen** haben keine gemischten Terme:

(1) $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = \varrho,$ räumlich $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_z^2 u = \varrho,$

(2) $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = \varrho,$ räumlich $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u - \partial_y^2 u - \partial_z^2 u = \varrho,$

(3) $\partial_t u - \partial_x^2 u = q,$ räumlich $\partial_t u - \partial_x^2 u - \partial_y^2 u - \partial_z^2 u = q.$

Die Wellengleichung hat die Ausbreitungsgeschwindigkeit $c > 0$, die Wärmeleitungsgleichung die Temperaturleitfähigkeit $\kappa > 0$. Nach Skalierung können wir $c = 1$ bzw. $\kappa = 1$ annehmen. Auf der rechten Seite dieser Gleichungen steht als Inhomogenität jeweils der Quellterm ϱ bzw. q. Im Spezialfall $\varrho = 0$ bzw. $q = 0$ haben wir eine homogene lineare Gleichung zweiter Ordnung.

Die **Potentialgleichung** (1) ist elliptisch.

Die **Wellengleichung** (2) ist hyperbolisch.

Die **Wärmeleitungsgleichung** (3) ist parabolisch.

Unsere Modellgleichungen haben keine gemischten Terme $\partial_x \partial_y$ etc. Deshalb können wir sie gut durch **Separation der Variablen** behandeln, wie wir anschließend ausführen. Dieses Verfahren ist extrem vielseitig und erfolgreich. Eine allgemeine (elliptische, hyperbolische, parabolische) Differentialgleichung zweiter Ordnung können wir durch geeignete Koordinatentransformation diagonalisieren, also auf eine unserer Modellgleichungen zurückführen und somit lösen.

Klassifikation linearer PDE zweiter Ordnung

In der Praxis treten sehr häufig partielle Differentialgleichungen auf. Erfahrungsgemäß sind die allermeisten höchstens **zweiter Ordnung**.

Bei jeder partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung fragen wir: Ist sie linear? Ist sie elliptisch? oder hyperbolisch? oder parabolisch? Dies deckt nur die einfachsten Möglichkeiten ab, es gibt viele weitere, aber es verhilft uns zu einer ersten Übersicht und Orientierung.

☺ Wenn die Gleichung elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch ist, dann verhält sie sich ähnlich wie die entsprechende **Modellgleichung**, also Potential-, Wellen- oder Wärmeleitungsgleichung. Zu Verständnis und Lösung der Gleichung sind solche Analogien oft sehr nützlich.

☺ Konkret wird man versuchen, durch eine geeignete Substitution die Gleichung in Normalform zu bringen, **ohne gemischte Terme**.

Zur Reduktion auf Normalform konstruiert man geeignete Koordinaten: Im einfachsten Fall mit Hauptachsentransformationen (wie in der HM1). Im allgemeinen Fall nutzt man ein geeignetes Koordinatensystem längs charakteristischer Kurven, siehe Meyberg–Vachenauer, §12.3.

Trennung der Variablen durch Produktansatz

Zu lösen sei eine **separierbare Differentialgleichung** der Form

$$\boxed{P(\partial_x)\, u(x,y) = Q(\partial_y)\, u(x,y).}$$

Hier wirkt der Differentialoperator $P(\partial_x)$ nur auf x, und $Q(\partial_y)$ nur auf y. Als Lösungen gesucht sind Funktionen $u : X \times Y \to \mathbb{K} : (x,y) \mapsto u(x,y)$. In diesem Falle eignet sich der **Produktansatz** $u(x,y) = v(x) \cdot w(y)$:

$$\begin{aligned} \big[P(\partial_x)\, v(x)\big]\, w(y) &= v(x)\, \big[Q(\partial_y)\, w(y)\big] \\ \iff \quad \frac{P(\partial_x)\, v(x)}{v(x)} &= \frac{Q(\partial_y)\, w(y)}{w(y)} = \lambda \end{aligned}$$

Die triviale Lösung ist $u = 0$; andernfalls dividieren wir durch $v(x)w(y)$. Die linke Seite hängt nur von x ab, die rechte nur von y. Da wir x und y unabhängig verändern können, sind beide Seiten konstant, gleich $\lambda \in \mathbb{K}$. Zu jeder **Separationskonstanten** λ gehören zwei Eigenwertprobleme:

$$\boxed{P(\partial_x)\, v(x) = \lambda\, v(x) \quad \text{und} \quad Q(\partial_y)\, w(y) = \lambda\, w(y)}$$

Lösung sind **Eigenfunktionen** $u(x,y) = v(x)w(y)$ und Superpositionen. Gleiches gilt für $u(x_1,\ldots,x_n) = u_1(x_1)\cdots u_n(x_n)$ in mehreren Variablen.

Trennung der Variablen durch Produktansatz

Da diese Methode oft gebraucht wird, formulieren wir sie hier genauer. Gegeben sind Intervalle $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ und hierauf die Differentialoperatoren

$$\begin{aligned} P(x,\partial_x) &= \textstyle\sum_{j=0}^m a_j(x)\, \partial_x^j \;:\; C^m(X,\mathbb{K}) \to C^0(X,\mathbb{K}), \\ Q(y,\partial_y) &= \textstyle\sum_{k=0}^n b_k(y)\, \partial_y^k \;:\; C^n(Y,\mathbb{K}) \to C^0(Y,\mathbb{K}), \end{aligned}$$

mit stetigen Koeffizientenfunktionen $a_j : X \to \mathbb{K}$ und $b_k : Y \to \mathbb{K}$.

Satz R1D: Trennung der Variablen durch Produktansatz

Sei $u : X \times Y \to \mathbb{K} : u(x,y) = v(x) \cdot w(y)$ Produkt von $0 \neq v \in C^m(X,\mathbb{K})$ und $0 \neq w \in C^n(Y,\mathbb{K})$. Dann sind folgende zwei Aussagen äquivalent:

(1) Die Funktion u löst die partielle Differentialgleichung

$$\boxed{P(x,\partial_x)\, u(x,y) = Q(y,\partial_y)\, u(x,y).}$$

(2) Für einen gemeinsamen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$ gelten die Gleichungen

$$\boxed{P(x,\partial_x)\, v(x) = \lambda\, v(x) \quad \text{und} \quad Q(y,\partial_y)\, w(y) = \lambda\, w(y).}$$

Trennung der Variablen durch Produktansatz

Aufgabe: Begründen Sie sorgfältig die Äquivalenz „(1) $\Leftrightarrow$ (2)“!

Den Produktansatz $u(x,y) = v(x)\,w(y)$ haben wir oben bereits erklärt. Dabei haben wir $u \neq 0$ angenommen und sogar so getan als gälte $u(x,y) \neq 0$ in *jedem* Punkt (x,y). Im Allgemeinen werden die Funktionen $v : X \to \mathbb{K}$ und $w : Y \to \mathbb{K}$ jedoch Nullstellen haben, und somit auch u. Diese Feinheit müssen wir klären; diese Präzisierung ist Ziel des Satzes R1D und dieser Übung.

Lösung: Zunächst „(2) $\Rightarrow$ (1)“: In jedem Punkt $(x,y) \in X \times Y$ gilt

$$P\,u(x,y) = P\big[v(x)\cdot w(y)\big] = \big[P\,v(x)\big]w(y) = \lambda\,v(x)\cdot w(y),$$
$$Q\,u(x,y) = Q\big[v(x)\cdot w(y)\big] = v(x)\big[Q\,w(y)\big] = v(x)\cdot\lambda\,w(y),$$

also $P\,u = Q\,u$. Wir zeigen nun die Umkehrung „(1) $\Rightarrow$ (2)“: Wir nehmen $u, v \neq 0$ an, also $v(x_0) \neq 0$ und $w(y_0) \neq 0$ für je einen Punkt $x_0 \in X$ und $y_0 \in Y$. Beides zusammen ist äquivalent zu $u \neq 0$, denn $u(x_0,y_0) \neq 0$. In jedem Punkt $(x,y) \in X \times Y$ gilt $P\,u(x,y) = Q\,u(x,y)$, also

$$\big[P\,v(x)\big]w(y) = v(x)\big[Q\,w(y)\big], \qquad \frac{P\,v(x_0)}{v(x_0)} = \frac{Q\,w(y_0)}{w(y_0)} =: \lambda,$$

$$\frac{P\,v(x_0)}{v(x_0)}\,w(y) = Q\,w(y), \qquad P\,v(x) = v(x)\,\frac{Q\,w(y_0)}{w(y_0)}.$$

Trennung der Variablen durch Produktansatz

Aufgabe: Wie funktioniert der Produktansatz für folgende PDE?
(A) $P(x,\partial_x)u(x,y,z) = Q(y,z,\partial_y,\partial_z)u(x,y,z)$
(B) $P(x,\partial_x)u(x,y,z) + Q(y,\partial_y)u(x,y,z) + R(z,\partial_z)u(x,y,z) = \lambda u(x,y,z)$

Lösung: (a) Für $u(x,y,z) = v(x)\cdot w(y,z)$ mit $u \neq 0$ ist (A) äquivalent zu $P(x,\partial_x)\,v(x) = \lambda\,v(x)$ und $Q(y,z,\partial_y,\partial_z)\,w(y,z) = \lambda\,w(y,z)$ mit einer gemeinsamen Konstante $\lambda \in \mathbb{K}$. Dies beweist man wörtlich wie oben.

(b) Für $u(x,y,z) = u_1(x)\cdot u_2(y)\cdot u_3(z)$ mit $u \neq 0$ ist (B) äquivalent zu den Gleichungen $P(x,\partial_x)\,u_1(x) = \lambda_1 u_1(x)$ und $Q(y,\partial_y)\,u_2(y) = \lambda_2 u_2(y)$ und $R(z,\partial_z)\,u_3(z) = \lambda_3 u_3(z)$ mit $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in \mathbb{K}$ und $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = \lambda$. Die Implikation „$\Leftarrow$“ ist klar. Wir zeigen „$\Rightarrow$“: In jedem Punkt (x,y,z) gilt $(Pu_1)u_2u_3 + u_1(Qu_2)u_3 + u_1u_2(Ru_3) = \lambda u_1u_2u_3$, also insbesondere

$$\frac{P\,u_1(x_0)}{u_1(x_0)} + \frac{Q\,u_2(y_0)}{u_2(y_0)} + \frac{R\,u_3(z_0)}{u_3(z_0)} = \lambda,$$
$$P\,u_1(x) + \frac{Q\,u_2(y_0)}{u_2(y_0)}\,u_1(x) + \frac{R\,u_3(z_0)}{u_3(z_0)}\,u_1(x) = \lambda\,u_1(x),$$
$$\frac{P\,u_1(x_0)}{u_1(x_0)}\,u_2(y) + Q\,u_2(y) + \frac{R\,u_3(z_0)}{u_3(z_0)}\,u_2(y) = \lambda\,u_2(y),$$
$$\frac{P\,u_1(x_0)}{u_1(x_0)}\,u_3(z) + \frac{Q\,u_2(y_0)}{u_2(y_0)}\,u_3(z) + R\,u_3(z) = \lambda\,u_3(z).$$

Produktansatz zur Wellengleichung

Aufgabe: Wir suchen Lösungen $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Wellengleichung

$$\boxed{\partial_t^2 u(t,x) = c^2 \partial_x^2 u(t,x).}$$

(1) Finden Sie alle Lösungen in Produktform $u(t,x) = v(t)w(x)$.

Lösung: Der Produktansatz $u(t,x) = v(t)w(x)$ separiert zu

$$v''(t) = \lambda v(t), \quad c^2 w''(x) = \lambda w(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

1. Fall: Für $\lambda = 0$ finden wir $v''(t) = 0$ und $w''(x) = 0$, also

$$v(t) = a_1 + a_2 t, \quad w(x) = b_1 + b_2 x.$$

2. Fall: Für $\lambda = \alpha^2 > 0$ finden wir die Eigenfunktionen

$$v(t) = a_1 \, \mathrm{e}^{\alpha t} + a_2 \, \mathrm{e}^{-\alpha t}, \quad w(x) = b_1 \, \mathrm{e}^{x\alpha/c} + b_2 \, \mathrm{e}^{-x\alpha/c}.$$

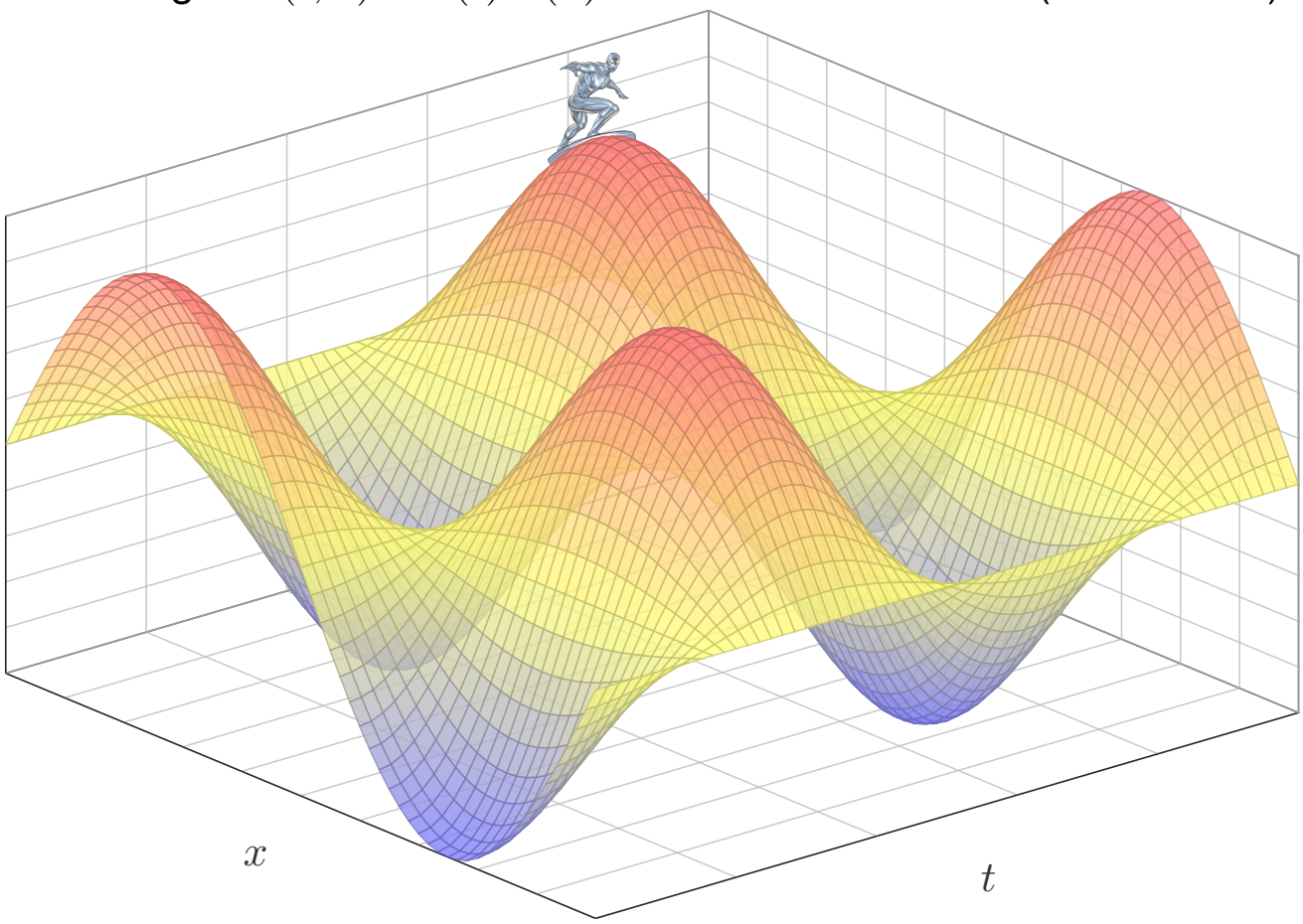
3. Fall: Für $\lambda = -\omega^2 < 0$ finden wir dasselbe komplex, also reell

$$v(t) = a_1 \cos(\omega t) + a_2 \sin(\omega t), \quad w(x) = b_1 \cos\big(x\omega/c\big) + b_2 \sin\big(x\omega/c\big)$$

☺ Machen Sie die Probe! Nur die letzten Lösungen sind beschränkt.

Produktansatz zur Wellengleichung

Die Lösungen $u(t,x) = v(t)\, w(x)$ sind stehende Wellen (siehe P101):



Lösung der Wellengleichung: Randbedingung

Aufgabe: Wir suchen Lösungen $u : \mathbb{R} \times [0, L] \to \mathbb{R}$ der Wellengleichung

$\partial_t^2 u(t,x) = c^2 \partial_x^2 u(t,x)$	für alle $t \in \mathbb{R}$ und $0 < x < L$,
$u(t,0) = u(t,L) = 0$	Randwerte für $x \in \{0, L\}$ und $t \in \mathbb{R}$.

(2) Finden Sie alle Lösungen in Produktform $u(t,x) = v(t)w(x)$.

Lösung: (2) Dank (1) kennen wir alle möglichen Lösungspaare (v, w):

$$\begin{aligned}
v(t) &= a_1 + a_2 t, & w(x) &= b_1 + b_2 x;\\
v(t) &= a_1 \,\mathrm{e}^{\alpha t} + a_2 \,\mathrm{e}^{-\alpha t}, & w(x) &= b_1 \,\mathrm{e}^{x\alpha/c} + b_2 \,\mathrm{e}^{-x\alpha/c};\\
v(t) &= a_1 \cos(\omega t) + a_2 \sin(\omega t), & w(x) &= b_1 \cos\big(x\omega/c\big) + b_2 \sin\big(x\omega/c\big).
\end{aligned}$$

Diese lösen die freie Wellengleichung. Die zusätzliche Randbedingung $w(0) = w(L) = 0$ erfüllt nur $\sin(n\pi x/L)$ für $n \in \mathbb{N}$, also $\omega = n\pi c/L$ und

$$u_n(t,x) = \big[a_n \cos(n\pi ct/L) + b_n \sin(n\pi ct/L)\big] \sin(n\pi x/L)$$

☺ Für jede natürliche Zahl $n = 1, 2, 3, \ldots$ erhalten wir als Lösung eine stehende Wellen mit Wellenlänge $2L/n$ und Periode $2L/nc$.

Lösung der Wellengleichung: Anfangsdaten

Aufgabe: Wir suchen Lösungen $u : \mathbb{R} \times [0, L] \to \mathbb{R}$ der Wellengleichung

$\partial_t^2 u(t,x) = c^2 \partial_x^2 u(t,x)$	für alle $t \in \mathbb{R}$ und $0 < x < L$,
$u(t,0) = u(t,L) = 0$	Randwerte für $x \in \{0, L\}$ und $t \in \mathbb{R}$,
$u(0,x) = g(x)$	Anfangsposition für $t = 0$ und $0 \le x \le L$,
$\partial_t u(0,x) = h(x)$	Anfangsgeschwindigkeit für $t = 0$.

(3) Lösen Sie dieses ARWP. Dazu liegen g und h als Sinus–Reihen vor, $g(x) = \sum_n A_n \sin(n\pi x/L)$ und $h(x) = \sum_n B_n \sin(n\pi x/L)$ mit $A_n, B_n \in \mathbb{R}$.

Lösung: (3) Dank (2) kennen wir die Lösung mit Randbedingung:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \big[a_n \cos(n\pi ct/L) + b_n \sin(n\pi ct/L)\big] \sin(n\pi x/L)$$

Die Koeffizienten a_n, b_n entnehmen wir den Anfangsbedingungen:

$$a_n = A_n, \qquad b_n = B_n \frac{L}{n\pi c}$$

☺ Dank Fourier–Theorie können wir alle (physikalisch relevanten) Anfangsdaten g und h durch solche Sinus–Reihen darstellen! I417

Beispiel zum Produktansatz

Aufgabe: Finden Sie beschränkte Lösungen $u : [0, \infty[\times [0, \pi] \to \mathbb{R}$ mit

$\partial_x^2 u + \partial_t^2 u - 2\partial_t u + u = 0$	für alle $t > 0$ und $0 < x < \pi$,
$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$	Randwerte für $x \in \{0, \pi\}$ und $t \geq 0$,
$u(0, x) = f(x)$	Anfangswerte für $t = 0$ und $0 < x < \pi$.

Ist diese PDE linear? Von welcher Ordnung? Von welchem Typ?

Lösung: Wir nutzen den Produktansatz $u(t, x) = v(t)w(x)$. Einsetzen:

$$v(t)w''(x) + v''(t)w(x) - 2v'(t)w(x) + v(t)w(x) = 0$$

Die triviale Lösung ist $u = 0$. Andernfalls dividieren wir durch $u = vw$:

$$\frac{w''(x)}{w(x)} \quad = \quad -\frac{v''(t)}{v(t)} + \frac{2v'(t)}{v(t)} - 1 \quad = \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Wir betrachten zunächst das erste Eigenwertproblem $w''(x) = \lambda w(x)$:

Für $\lambda = 0$ finden wir $w(x) = c + dx$.

Für $\lambda = \alpha^2 > 0$ finden wir $w(x) = c\,\mathrm{e}^{\alpha x} + d\,\mathrm{e}^{-\alpha x}$.

Für $\lambda = -\omega^2 < 0$ finden wir $w(x) = c\sin(\omega x) + d\cos(\omega x)$.

Beispiel zum Produktansatz

Wir berücksichtigen nun die Randbedingungen $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$.

Für unseren Produktansatz $v(t)w(x)$ bedeutet das $w(0) = w(\pi) = 0$.

Nicht-triviale Lösungen existieren nur für $\lambda = -n^2 < 0$, nämlich

$$w_n(x) = \sin(nx) \quad \text{mit} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Damit folgt $v'' - 2v' + (1 - n^2)v = 0$, mit der allgemeinen Lösung

$$v_n(t) = a_n\,\mathrm{e}^{(1-n)t} + b_n\,\mathrm{e}^{(1+n)t}.$$

Wir finden so zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Lösung in Produktform:

$$\boxed{u_n(t, x) \;=\; v_n(x)w_n(t) \;=\; \Big[a_n\,\mathrm{e}^{(1-n)t} + b_n\,\mathrm{e}^{(1+n)t}\Big]\sin(nx)}$$

Beschränkt nur für $b_n = 0$. Allgemeine Lösung durch Superposition:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\mathrm{e}^{(1-n)t}\sin(nx) \qquad \text{Fourier–Reihe in } x!$$

$$u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \overset{!}{=} f(x) \qquad \text{Fourier–Analyse von } f!$$

☺ Die Konstanten a_n passen wir den gegebenen Anfangsdaten f an.

Beispiel zum Produktansatz

Aufgabe: Finden Sie beschränkte Lösungen $u : [0, \infty[\times [0, \pi] \to \mathbb{R}$ mit

$\partial_x^2 u + \partial_t^2 u - 2\partial_t u + u = 0$	für alle $t > 0$ und $0 < x < \pi$,
$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$	Randwerte für $x \in \{0, \pi\}$ und $t \geq 0$,
$u(0, x) = f(x) := 1$	Anfangswerte für $t = 0$ und $0 < x < \pi$.

Dies ist eine PDE mit Anfangsrandwertproblem, kurz ARWP.

Lösung: Wir kennen bereits die allgemeine Lösung:

$$u(t, x) = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} a_n \, \mathrm{e}^{(1-n)t} \sin(nx)$$

Fourier–Entwicklung der Rechteckfunktion: I225

$$f(x) = 1 \overset{!}{=} \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \quad \text{also} \quad a_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ gerade} \\ 4/(n\pi) & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Die gesuchte Lösungsfunktion u ist demnach die Superposition

$$\boxed{u(t, x) = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-2kt} \, \frac{\sin\big((2k+1)x\big)}{(2k+1)\pi}.}$$

Beispiel zum Produktansatz

Aufgabe: Finden Sie beschränkte Lösungen $u : [0, \infty[\times [0, \pi] \to \mathbb{R}$ mit

$\partial_x^2 u + \partial_t^2 u - 2\partial_t u + u = 0$	für alle $t > 0$ und $0 < x < \pi$,
$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$	Randwerte für $x \in \{0, \pi\}$ und $t \geq 0$,
$u(0, x) = f(x) := x$	Anfangswerte für $t = 0$ und $0 < x < \pi$.

Dies ist eine PDE mit Anfangsrandwertproblem, kurz ARWP.

Lösung: Wir kennen bereits die allgemeine Lösung:

$$u(t, x) = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} a_n \, \mathrm{e}^{(1-n)t} \sin(nx)$$

Fourier–Entwicklung der Sägezahnfunktion: I205

$$f(x) = x \overset{!}{=} \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \quad \text{also} \quad a_n = (-1)^{n+1} \, \frac{2}{n}$$

Die gesuchte Lösungsfunktion u ist demnach die Superposition

$$\boxed{u(t, x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \, \mathrm{e}^{(1-n)t} \, \frac{\sin(nx)}{n}.}$$

Beispiel: die Schrödinger–Gleichung

Die **Schrödinger–Gleichung** für $\Psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{C}$ zum Potential $V : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathrm{i}\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}\right) + V\Psi}$$

Gegeben ist V, gesucht ist Ψ. Diese PDE schreiben wir meist kürzer

$$\underbrace{\mathrm{i}\hbar\partial_t \Psi = H\Psi}_{\text{Schrödinger–Gleichung}} \quad \text{mit} \quad \underbrace{H = \tfrac{\hbar^2}{2m}\Delta + V}_{\text{Hamilton–Operator}} \quad \text{und} \quad \underbrace{\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2}_{\text{Laplace–Operator}}.$$

Dies ist eine homogene lineare PDE zweiter Ordnung, genauer eine Diffusionsgleichung Q109, für $V = 0$ eine Wärmeleitungsgleichung mit $\kappa = \hbar/(2\mathrm{i}m)$. Erwin Schrödinger (1887–1961) hat sie 1926 aufgestellt und damit das Spektrum des Wasserstoffatoms berechnet (Nobelpreis 1933). Sie beschreibt den Zustand Ψ eines Teilchens mit Masse m in einem Potential $V : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$. Hier ist $\hbar = h/2\pi$ die Plancksche Konstante, $p^2/2m = (\hbar^2/2m)\,\Delta$ die kinetische Energie und V die potentielle. Analog zur *klassischen Mechanik* spricht man daher von *Quantenmechanik*. Beide beschreiben die Bewegung massebehafteter Teilchen unter der Wirkung von Kräften, jedoch werden klassische Begriffe wie „Ort“ und „Bahn“ eines Teilchens nun ersetzt durch die quantenmechanischen Begriffe, die die physikalischen Beobachtungen besser erklären. Die Erweiterung zur *Quantenfeldtheorie* behandelt zudem Erzeugung und Vernichtung von Elementarteilchen, insbesondere die Emission / Absorption von Licht in Form von Photonen.

Beispiel: die Schrödinger–Gleichung

Physikalische Interpretation und Verwendung dieser Gleichung:
Wir betrachten den Vektorraum $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ aller quadrat-integrierbaren Funktionen $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$, also $\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x)|^2 \,\mathrm{d}x < \infty$, mit dem Skalarprodukt

$$\langle\, - \,|\, - \,\rangle \;:\; L^2 \times L^2 \to \mathbb{C} \;:\; \langle\, \varphi \mid \psi \,\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\varphi(x)}\, \psi(x)\, \mathrm{d}x.$$

Meist dividieren wir durch die Norm $\|\psi\|_{L^2} = \langle\, \psi \mid \psi \,\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x)|^2 \,\mathrm{d}x$; hierdurch können wir die Normierung $\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x)|^2 \,\mathrm{d}x = 1$ sicherstellen.

Die Quantenmechanik beruht auf folgenden Prinzipien:

1. Der Zustand eines Teilchens wird durch eine Funktion $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ beschrieben; $|\psi|^2$ ist die Dichte der Aufenthaltswahrscheinlichkeit.
2. Die Entwicklung des zeitabhängigen Zustandes $\Psi : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ wird durch die Schrödinger–Gleichung $\mathrm{i}\hbar\partial_t \Psi = H\Psi$ bestimmt.
3. Observablen entsprechen hermiteschen Operatoren $A, B, C, \ldots$. Der Mittelwert der Observablen A im Zustand ψ ist $\langle\, \psi \mid A\,\psi \,\rangle$.
4. Wird bei einer Messung zur Observablen A der Wert a gefunden, so wird ψ auf den Eigenraum zum Eigenwert a projiziert (Kollaps).

Beispiel: stationäre Lösungen

Angenommen das Potential V ist zeitlich konstant, unabhängig von t:

$$\boxed{\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = H\Psi \quad \text{mit} \quad H = \frac{\hbar}{2m}\Delta + V(x,y,z).}$$

Dann wirkt links der Operator ∂_t nur auf t und rechts H nur auf x, y, z. Wir trennen t von den Ortsvariablen x, y, z durch den Produktansatz

$$\Psi(t,x,y,z) = \varphi(t)\,\psi(x,y,z).$$

Für die stationäre Lösung $\psi(x,y,z)$ suchen wir Eigenfunktionen

$$H\psi = E\psi \quad \text{mit Eigenwert } E \in \mathbb{R} \text{ (Energie).}$$

Anschließend $\mathrm{i}\hbar\partial_t\varphi = E\varphi$, also $\varphi(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ mit $E = \hbar\omega$. Wir erhalten

$$\boxed{\Psi(t,x,y,z) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\psi(x,y,z) \quad \text{mit Energie } E = \hbar\omega.}$$

In der Schrödinger–Gleichung $\mathrm{i}\hbar\partial_t\Psi = H\Psi$ tritt die Energie zunächst nicht als Skalar auf, sondern als Hamilton–Operator H, der auf den Zustand Ψ angewendet wird. Die Trennung der Variablen entspricht der Zerlegung in Eigenfunktionen des Operators H. Die Lösung besagt dann, dass die zeitliche Veränderung des Zustands allein durch seine Energie E bestimmt ist.

Beispiel: harmonischer Oszillator

Als konkrete Illustration zur Schrödinger–Gleichung nenne ich den **harmonischen Oszillator** in einem parabelförmigen Potentialtopf:

$$V(x,y,z) = \frac{\hbar}{2mr_0^4}\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

Die Eigenwertgleichung $H\psi = E\psi$ erlaubt unendlich viele Lösungen. Hierbei sind die möglichen Energieniveaus **quantisiert**, das heißt die Eigenwerte $3\hbar/2mr_0^2 = E_0 < E_1 < E_2 < E_3 < \ldots$ sind diskret.

☺ Der Grundzustand ψ_0 mit $H\psi_0 = E_0\psi_0$ ist eine Glockenkurve:

$$\psi_0(x,y,z) = \frac{1}{(r_0\sqrt{\pi})^3}\exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{2r_0^2}\right)$$

Übung: Dies ist tatsächlich eine Lösung. Machen Sie die Probe!

Dies nur zur Illustration: Wir können hier explizit rechnen! Wer etwas mehr wissen möchte: `de.wikipedia.org/wiki/Harmonischer_Oszillator_(Quantenmechanik)`. Dort wird auch skizziert, wie man alle weiteren Lösungen mit der „Leitermethode“ konstruieren kann. Das Wasserstoffatom entspricht dem elektrischen Potential $V = \mathrm{const}/r$. Die Eigenfunktionen der Schrödinger–Gleichung sind dann die berühmten „Orbitale“ aus dem Chemieunterricht.

Die Katze auf dem heißen Blechdach

Aufgabe: Eine quadratische Kupferplatte mit Kantenlänge $1\mathrm{m}$ wird an drei Seiten konstant auf $0°\mathrm{C}$ gekühlt, an der vierten Seite konstant auf $100°\mathrm{C}$ geheizt. Wir suchen die stationäre Temperaturverteilung u.

(1) Formulieren und (2) lösen Sie die Differentialgleichung für u!

Die Rechnung konstruiert eine Lösung. Gibt es (auf anderen Wegen) weitere Lösungen? Oder führen alle Wege zum selben Ziel? Existenz und Eindeutigkeit der Lösung sind für jede Anwendung grundlegend!

Lösung: (1) auf dem Rechteck $R = [0,a] \times [0,b]$ suchen wir $u : R \to \mathbb{R}$.
Die allgemeine Wärmeleitungsgleichung lautet $\partial_t u = \kappa\, \Delta u + q$.
Im Bereich R gebe es keine Quellen oder Senken, also $q = 0$.
Im stationären Zustand gilt $\partial_t u = 0$, also haben wir $\Delta u = 0$:

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0 \quad \text{auf dem Rechteck } R = [0,a] \times [0,b] \subseteq \mathbb{R}^2$$
$$\text{mit } u(x,0) = u(0,y) = u(a,y) = 0 \text{ und } u(x,b) = 100.$$

☺ Wir lassen die Abmessungen a und b noch unbestimmt und setzen erst am Ende $a = b = 1$ ein. Das macht die Zusammenhänge klarer.

Die Katze auf dem heißen Blechdach

Wie wird sich die Temperatur auf dem Blech verteilen? Das erklärt den Titel der Aufgabe: Die Katze probiert aus, wo ihr die Temperatur am besten gefällt, Sie können es ausrechnen! So heißt auch ein Theaterstück von Tennessee Williams von 1955, erfolgreich verfilmt 1958.

(2) Wir suchen zunächst alle Lösungen der PDE $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$ in Produktform $u(x,y) = v(x) \cdot w(y)$. Unsere PDE wird damit zu:

$$v''(x)w(y) + v(x)w''(y) = 0$$

Trennung der Variablen ergibt

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = -\frac{w''(y)}{w(y)} = \lambda$$

mit einer noch unbekannten Separationskonstanten $\lambda \in \mathbb{R}$. Die drei Randbedingungen $u(x,0) = u(0,y) = u(a,y) = 0$ werden erfüllt durch

$$w(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad v(a) = 0.$$

☺ Statt einer PDE in zwei Variablen x, y erhalten wir zwei ODE, getrennt in je einer Variablen x bzw. y. Das ist wesentlich einfacher!

Die Katze auf dem heißen Blechdach

(A) Wir lösen $v''(x) - \lambda v(x) = 0$ mit Randbedingung $v(0) = v(a) = 0$,
(B) anschließend $w''(y) + \lambda w(y) = 0$ mit Randbedingung $w(0) = 0$.

(A1) Für $\lambda = 0$ gilt $v''(x) = 0$, also $v(x) = \alpha x + \beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Die Randbedingungen liefern $\alpha = \beta = 0$, also die triviale Lösung.

(A2) Für $\lambda = \omega^2 > 0$ gilt $v''(x) - \omega^2 v(x) = 0$. Die allgemeine Lösung ist $v(x) = \alpha\,\mathrm{e}^{\omega x} + \beta\,\mathrm{e}^{-\omega x}$. Die Randbedingungen liefern erneut $\alpha = \beta = 0$.

(A3) Für $\lambda = -\omega^2 < 0$ gilt $v''(x) + \omega^2 v(x) = 0$. Die allgemeine Lösung ist $v(x) = \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)$. Die Randbedingung $v(0) = 0$ liefert $\alpha = 0$, und $v(a) = 0$ liefert $\beta\sin(\omega a) = 0$. Also $\beta = 0$ oder $\omega a = n\pi$ mit $n \in \mathbb{N}$.

☺ Die Lösungen für den Faktor v sind also

$$v_n(x) = \sin(\tfrac{n\pi}{a}x) \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}_{\geq 1}.$$

Zu jeder Lösung v_n bestimmen wir nun einen passenden Cofaktor w_n.
Die beiden sind gekoppelt durch ihren gemeinsamen Eigenwert!

Die Katze auf dem heißen Blechdach

(B) Die Differentialgleichung mit $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{a^2}$ besitzt die Lösungen

$$w_n(y) = a_n \exp(\tfrac{n\pi}{a}y) + b_n \exp(-\tfrac{n\pi}{a}y).$$

Die Randbedingung $w_n(0) = 0$ impliziert $b_n = -a_n$, also

$$w_n(y) = a_n\big[\exp(\tfrac{n\pi}{a}y) - \exp(-\tfrac{n\pi}{a}y)\big] = 2a_n \sinh(\tfrac{n\pi}{a}y).$$

Alle Lösungen in Produktform $u(x,y) = v(x)w(y)$, die bereits die drei Randbedingungen $u(x,0) = u(0,y) = u(a,y) = 0$ erfüllen, sind demnach

$$u_n(x,y) = v_n(x)w_n(y) = a_n \sin(\tfrac{n\pi}{a}x)\sinh(\tfrac{n\pi}{a}y).$$

Die obige Konstante $2a_n$ haben wir hierbei zu a_n zusammengefasst.

☺ Durch Superposition erhalten wir die allgemeine Lösung:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\tfrac{n\pi}{a}x)\sinh(\tfrac{n\pi}{a}y)$$

Die Katze auf dem heißen Blechdach

Für die letzte Randbedingung $u(x,b) = 100$ machen wir den Ansatz

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\tfrac{n\pi}{a}x)\sinh(\tfrac{n\pi}{a}y).$$

Speziell für $y = b$ wird diese Reihe zu

$$u(x,b) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sinh(\tfrac{n\pi b}{a})\sin(\tfrac{n\pi}{a}x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\tfrac{n\pi}{a}x).$$

Die Koeffizienten c_n erhalten wir durch Fourier–Entwicklung:

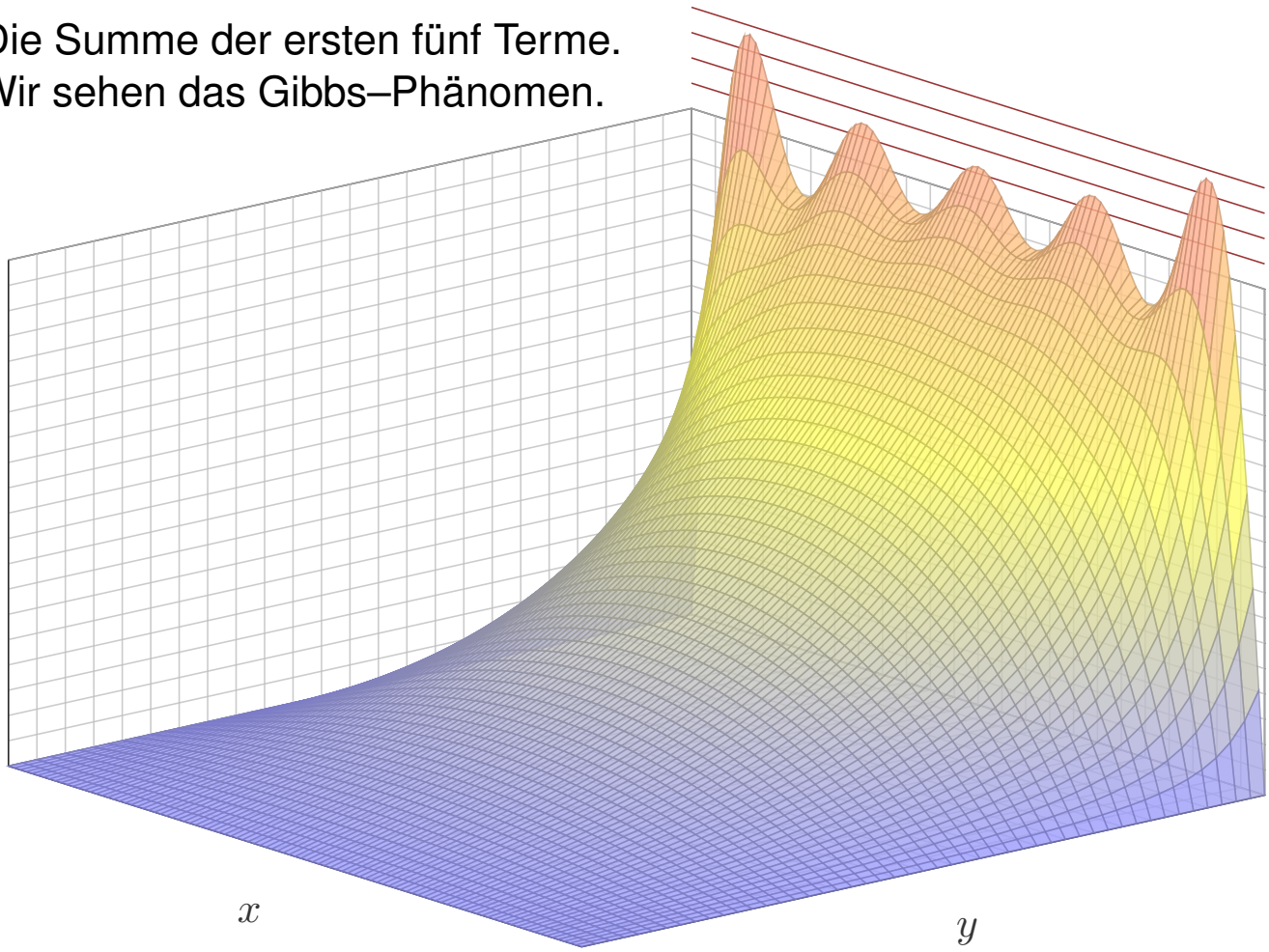
$$a_n \sinh(\tfrac{n\pi b}{a}) = c_n = \frac{2}{a}\int_{x=0}^{a} 100\sin(\tfrac{n\pi}{a}x)\,\mathrm{d}x = \frac{200}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]$$

☺ Für die Abmessungen $a = b = 1$ finden wir schließlich:

$$\boxed{u(x,y) = \frac{400}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin((2n+1)\pi x)\sinh((2n+1)\pi y)}{(2n+1)\sinh((2n+1)\pi)}}$$

Die Katze auf dem heißen Blechdach

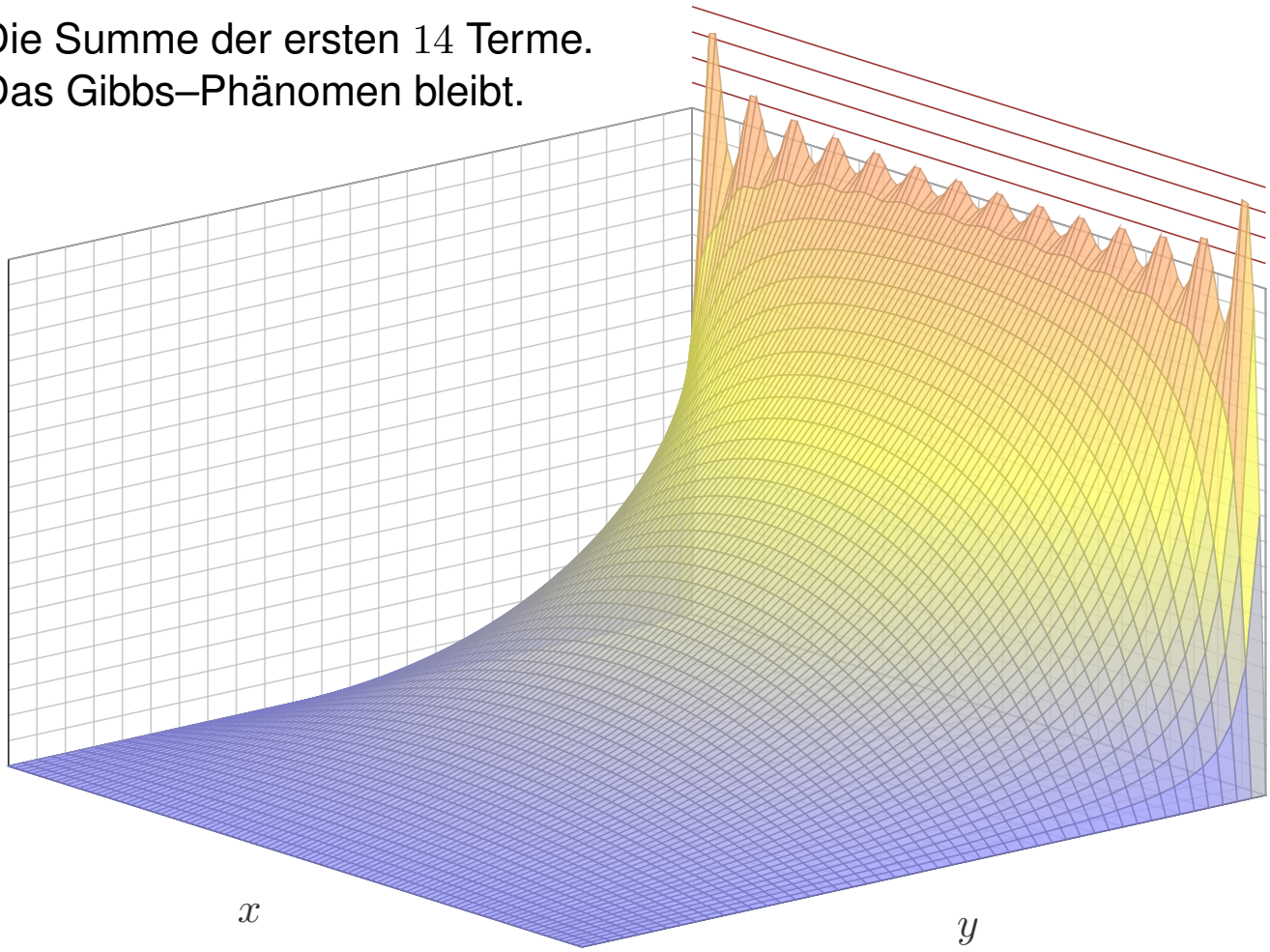
Die Summe der ersten fünf Terme.
Wir sehen das Gibbs–Phänomen.



Die Katze auf dem heißen Blechdach

R207
Übung

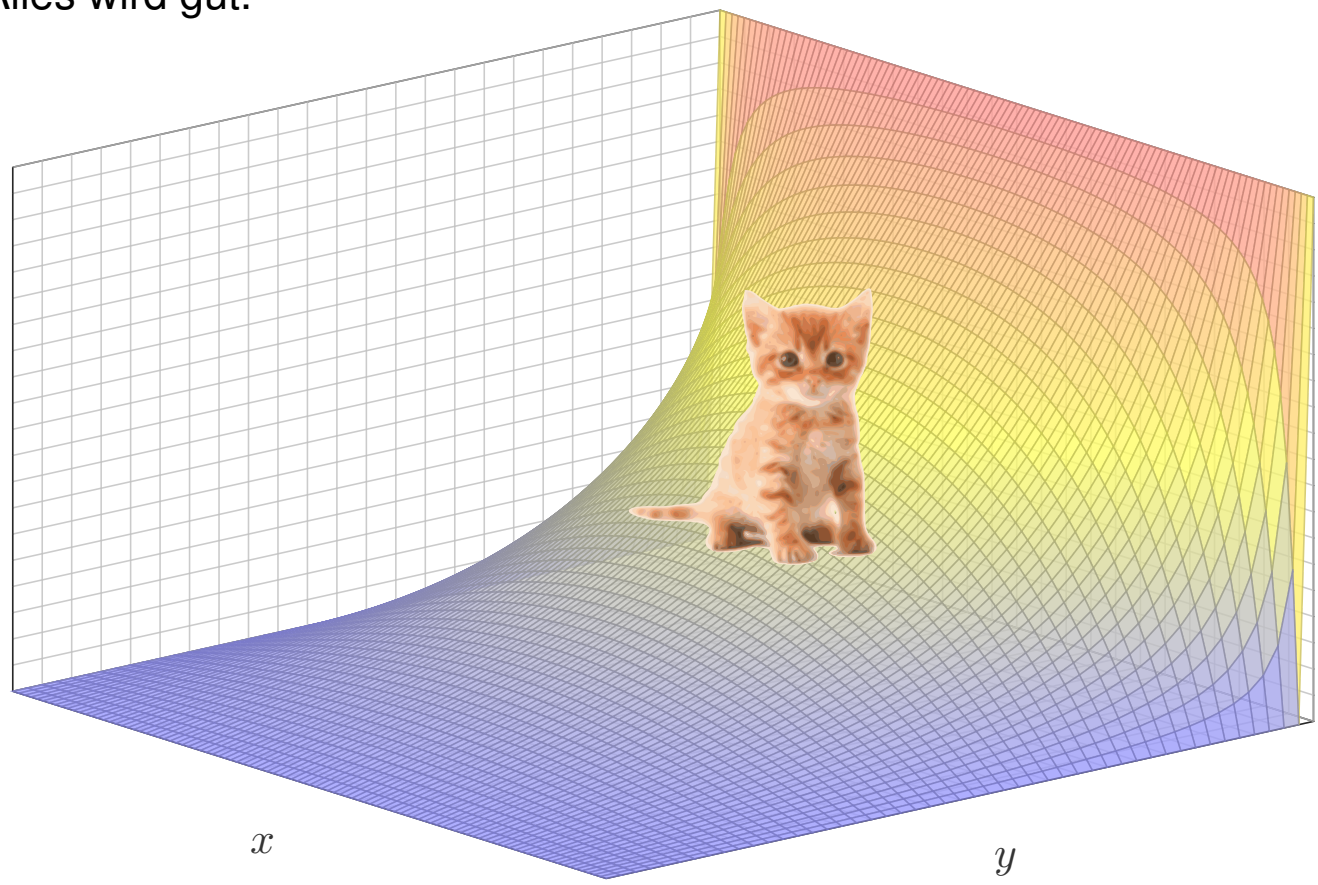
Die Summe der ersten 14 Terme.
Das Gibbs–Phänomen bleibt.



Die Katze auf dem heißen Blechdach

R208
Übung

Der Grenzwert der Reihe.
Alles wird gut.



Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Lösungen suchen wir bisher mit dem Produktansatz $u(x,y) = v(x)\,w(y)$. Das ist zunächst nur geraten, mit etwas Anschauung und Erfahrung. Wir haben Glück und finden die Eigenfunktionen $u_n(x,y) = v_n(x)\,w_n(y)$, genug um mit $u(x,y) = \sum_n a_n\,v_n(x)\,w_n(y)$ alle Bedingungen zu erfüllen.

Unsere Konstruktion von $u(x,y)$ zeigt somit die **Existenz** einer Lösung. Wir können daran explizit nachprüfen, dass u alle Forderungen erfüllt. Dies zeigt jedoch noch keineswegs die **Eindeutigkeit**: Es könnte noch weitere Lösungen der PDE geben, die aber unserem Ansatz entgehen.

Mehrdeutigkeiten müssen wir erkennen und nötigenfalls auch beheben: Sind noch mehrere Lösungen möglich, so stellen wir geeignete weitere Bedingungen, um die physikalisch sinnvollen Lösungen herauszuheben. Dieses Vorgehen beruht auf der Überzeugung, dass die physikalische Lösung bereits durch die Randdaten festgelegt ist. Daher sollte unser mathematisches Modell genau diese als eindeutige Lösung haben.

Mathematisch bedeutet die Eindeutigkeit: Je zwei Lösungen sind gleich. Dies wollen wir nun sorgfältig als Satz formulieren und dann beweisen.

Wie lautet die Problemstellung?

Um über Eindeutigkeit zu sprechen, müssen wir zunächst erklären, wie die Problemstellung aussieht und was wir als Lösungen zulassen.

Definition R2A: Dirichlet–Problem der Potentialgleichung

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit Abschluss $\overline{\Omega}$ und Rand $\partial\Omega = \overline{\Omega} \smallsetminus \Omega$. Hierauf seien $q : \Omega \to \mathbb{R}$ und $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Das **Dirichlet–Problem** zu den Daten (Ω, q, g) lautet:

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= q(x) \quad \text{für jeden inneren Punkt } x \in \Omega, \\ u(x) &= g(x) \quad \text{für jeden Randpunkt } x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Gesucht sind Lösungen $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, stetig auf $\overline{\Omega}$ und zweimal stetig differenzierbar im Inneren Ω, die diese Gleichungen erfüllen.

In manchen Anwendungen ist die Randfunktion g unstetig, wie oben: Auf dem Rechteck $\overline{\Omega} = [a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$ fordern wir daher schwächer nur L^2–Konvergenz, also $\int_{x=a}^{b} |u(x,y) - u(x,c)|^2 \,\mathrm{d}x \to 0$ für $y \searrow c$, und entsprechend für jede der vier Seiten des Rechtecks.

Eindeutigkeit gilt nicht immer.

Aufgabe: Sei $\overline{\Omega} = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \mathbb{B}^2 = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1 \,\}$ die Ebene $\mathbb{R}^2$ ohne die Einheitskreisscheibe $\mathbb{B}^2$. Wir betrachten den Fall ohne Quellen. Auf dem Rand $\partial\Omega = \mathbb{S}^1$ sei $g(x,y) = x$. Das Dirichlet–Problem lautet:

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0 \quad \text{für jeden inneren Punkt } (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) &= x \quad \text{für jeden Randpunkt } (x,y) \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Seien $u, v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $u(x,y) = x$ und $v(x,y) = x/(x^2+y^2)$. Zeigen Sie, dass beide Funktionen das Dirichlet–Problem lösen. Folgern Sie damit, dass es sogar unendlich viele Lösungen gibt.

Lösung: Die Kandidaten u, v liegen explizit vor. Die Randbedingung $u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} = g$ ist klar. Es genügt also, $\Delta u = \Delta v = 0$ nachzurechnen. Das ist trivial für u und eine leichte Übung für v: Versuchen Sie es! Damit ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ auch $w_t = (1-t)u + tv$ eine Lösung.

⚠ Dieses Beispiel zeigt eindrücklich, dass die Randwerte $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ die gesuchte harmonische Lösung $u : \Omega \to \mathbb{R}$ nicht eindeutig festlegen. Das Problem ist hier leicht zu ahnen: Das Gebiet Ω ist unbeschränkt. Der folgende Satz garantiert: Ist $\overline{\Omega}$ kompakt, so ist die Lösung eindeutig!

Kompaktheit garantiert Eindeutigkeit.

Satz R2B: Eindeutigkeitssatz für die Potentialgleichung

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, also der Abschluss $\overline{\Omega}$ kompakt.

(0) Löst $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ die homogene Potentialgleichung

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0 \quad \text{für jeden inneren Punkt } x \in \Omega, \\ u(x) &= 0 \quad \text{für jeden Randpunkt } x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

dann gilt $u(x) = 0$ für alle $x \in \overline{\Omega}$.

(1) Lösen $\tilde{u}, \check{u} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ die inhomogene Potentialgleichung

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= q(x) \quad \text{für jeden inneren Punkt } x \in \Omega, \\ u(x) &= g(x) \quad \text{für jeden Randpunkt } x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

dann gilt $\tilde{u}(x) = \check{u}(x)$ für alle $x \in \overline{\Omega}$.

Wie üblich folgt (1) aus (0) dank Linearität: Angenommen $\tilde{u}, \check{u}$ erfüllen (1). Die Differenz $u = \tilde{u} - \check{u}$ erfüllt dann (0). Also gilt $u = 0$ und somit $\tilde{u} = \check{u}$.

Wir müssen daher nur Aussage (0) zeigen. Wir geben zwei Beweise.

Beweis der Eindeutigkeit mit dem Minimum-Maximum-Prinzip:
Harmonische Funktionen nehmen ihre Extrema auf dem Rand an:

Satz R2c: Maximumsprinzip für harmonische Funktionen

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, also der Abschluss $\overline{\Omega}$ kompakt.
Sei $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ stetig. Da $\overline{\Omega}$ und $\partial\Omega$ kompakt sind, nimmt u hierauf jeweils ein Minimum und ein Maximum an. Wegen $\overline{\Omega} \supseteq \partial\Omega$ gilt dann allgemein:

$$\min_{\overline{\Omega}} u \le \min_{\partial\Omega} u \qquad \text{und} \qquad \max_{\overline{\Omega}} u \ge \max_{\partial\Omega} u$$

Zudem sei u harmonisch auf dem Inneren Ω, also $u \in C^2$ und $\Delta u = 0$.
(1) Dann nimmt u sein Minimum und Maximum auf dem Rand $\partial\Omega$ an:

$$\boxed{\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u \qquad \text{und} \qquad \max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u}$$

Seien $u, v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ stetig und auf dem Inneren Ω harmonisch.
(2) Monotonie: Aus $u \le v$ auf dem Rand $\partial\Omega$ folgt $u \le v$ auf ganz $\overline{\Omega}$.
(3) Eindeutigkeit: Aus $u = v$ auf dem Rand $\partial\Omega$ folgt $u = v$ auf ganz $\overline{\Omega}$.

Aufgabe: Beweisen Sie das Prinzip (1) in folgenden Verschärfungen:
(a) Auf Ω gelte $\Delta u > 0$. Dann folgt $\max u = \max u|_{\partial\Omega} > u|_{\Omega}$.
(b) Auf Ω gelte $\Delta u \ge 0$. Dann folgt $\max u = \max u|_{\partial\Omega} \ge u|_{\Omega}$.
(c) Auf Ω gelte $\Delta u < 0$. Dann folgt $\min u = \min u|_{\partial\Omega} < u|_{\Omega}$.
(d) Auf Ω gelte $\Delta u \le 0$. Dann folgt $\min u = \min u|_{\partial\Omega} \le u|_{\Omega}$.

Lösung: Durch Übergang von u zu $-u$ gilt (a) $\Leftrightarrow$ (c) und (b) $\Leftrightarrow$ (d).
Es genügt daher, die ersten beiden Aussagen (a) und (b) zu beweisen:
(a) Angenommen, u wäre maximal in einem inneren Punkt $x_0 \in \Omega$.
Dann gilt $\partial_i u(x_0) = 0$ und $\partial_i^2 u(x_0) \le 0$ in jede Richtung $i = 1, \ldots, n$,
also $\Delta u(x_0) \le 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung $\Delta u > 0$.
(b) Wir betrachten $v := u + \varepsilon |x|^2$ mit $\varepsilon > 0$ und $|x|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$.
Damit gilt $\Delta v = \Delta u + 2n\varepsilon > 0$, dank (a) also $\max v = \max_{\partial\Omega} v$.
Wir haben $u \le v \le \max v = \max_{\partial\Omega} v \le \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon \max_{\partial\Omega} |x|^2$.
Damit gilt $u \le \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon \max_{\partial\Omega} |x|^2$ für alle $\varepsilon > 0$.
Für $\varepsilon \searrow 0$ folgt $u \le \max_{\partial\Omega} u$, was zu zeigen war.

Minimum-Maximum-Prinzip harmonischer Funktionen

Aufgabe: Beweisen Sie die Monotonie (2) in folgenden Verschärfungen:

(e) In jedem Punkt im Inneren Ω gelte $\Delta u \geq \Delta v$.
Aus $u \leq v$ auf dem Rand $\partial\Omega$ folgt $u \leq v$ auf ganz Ω.

(f) In jedem Punkt im Inneren Ω gelte $\Delta u \geq \Delta v$.
Aus $u < v$ auf dem Rand $\partial\Omega$ folgt $u < v$ auf ganz Ω.

(g) In jedem Punkt im Inneren Ω gelte $\Delta u > \Delta v$.
Aus $u \leq v$ auf dem Rand $\partial\Omega$ folgt $u < v$ im Inneren Ω.

Lösung: (e) Für die Differenz $w = u - v$ gilt $\Delta w \geq 0$.
Dank (b) folgt $w \leq \max w = \max_{\partial\Omega} w \leq 0$, also $u \leq v$.

(f) Für $w = u - v$ gilt $\Delta w \geq 0$ in jedem Punkt von Ω.
Dank (b) folgt $w \leq \max w = \max_{\partial\Omega} w < 0$, also $u < v$.

(g) Für $w = u - v$ gilt $\Delta w > 0$ in jedem Punkt von Ω.
Dank (a) folgt $w|_\Omega < \max_{\partial\Omega} w \leq 0$, auf Ω also $w < 0$ und $u < v$.

☺ Dies können wir zur Eingrenzung durch Ober/Unterlösungen nutzen. Solche Ungleichungen und Einschachtelungen kennen wir bereits aus den Sätzen M4C und M4D für gewöhnliche Differentialgleichungen.

Die Energiemethode beweist die Eindeutigkeit.

Beweis der Eindeutigkeit mit der Energiemethode:
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\overline{\Omega}$ kompakt mit stückweise glattem Rand, etwa ein Rechteck ($n = 2$) oder ein Quader ($n = 3$). Vorgelegt sei eine Funktion $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ mit $\Delta u = 0$ und $u|_{\partial\Omega} = 0$. Wir wollen $u = 0$ auf Ω zeigen.
Als mathematische Hilfsgröße untersuchen wir hierzu die **Energie**

$$\boxed{E(u) := \int_{x\in\Omega} \big[\nabla u(x)\big]^2 \,\mathrm{d}x \;\geq\; 0.}$$

Wir formen E in ein Randintegral um und folgern $u = 0$:

$$E(u) \overset{\text{Def}}{=} \int_{x\in\Omega} \big[\nabla u(x)\big]^2 \,\mathrm{d}x \;=\; \int_{x\in\Omega} \nabla \cdot \big[u(x)\nabla u(x)\big] - u(x)\underbrace{\Delta u(x)}_{=\,0} \,\mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{Gauß}}{=} \int_{s\in\partial\Omega} \underbrace{u(x)}_{=\,0} \nabla u(x) \cdot \mathrm{d}S \;=\; 0 \quad \text{(Flussintegral, hier für } n = 3\text{)}$$

Aus $E(u) = 0$ folgt $\nabla u = 0$ auf Ω, also ist u auf dem Gebiet Ω konstant.
Dank Stetigkeit von u und Randwerten $u|_{\partial\Omega} = 0$ folgt $u = 0$ auf ganz $\overline{\Omega}$.
Der entscheidende Punkt ist die Anwendbarkeit des Satzes von Gauß.
Hierzu müssen die Funktion u und der Rand $\partial\Omega$ hinreichend glatt sein.

Hadamards warnendes Gegenbeispiel

⚠ Hadamards Beispiel zeigt, dass die Lösungen einer PDE im Allgemeinen nicht stetig von den Anfangsdaten abhängen!

Aufgabe: (1) Sei $n \in \mathbb{N}$. Lösen Sie für $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, \pi] \to \mathbb{R}$ die PDE

$\partial_t^2 u(t,x) + \partial_x^2 u(t,x) = 0$	für alle $t > 0$ und $0 < x < \pi$,
$u(t,0) = u(t,\pi) = 0$	Randbedingungen für $t \geq 0$,
$u(0,x) = g(x) := 0$	Anfangswerte für $0 < x < \pi$,
$\partial_t u(0,x) = h(x) := n \sin(nx)$	Anfangswerte für $0 < x < \pi$.

(2) Bestimmen Sie für jeden Parameter $n = 0, 1, 2, \ldots$ die Lösung $u_n : \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, \pi] \to \mathbb{R}$ zu den Randwerten $h_n(x) = n\,\mathrm{e}^{-n/2} \sin(nx)$.

(3) Konvergieren die Randwerte $h_n : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ für $n \to \infty$? Konvergieren die zugehörigen Lösungen $u_n : \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, \pi] \to \mathbb{R}$?

Lösung: (1) Der Produktansatz $u(t,x) = v(t)\,w(x)$ entkoppelt (dank Satz R1D) unsere PDE zu zwei Eigenwertgleichungen

$$v''(t) = -\lambda v(t) \qquad \text{und} \qquad w''(x) = \lambda w(x) \qquad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Hadamards warnendes Gegenbeispiel

Wir bestimmen zunächst die Ortsfunktion $x \mapsto w(x)$:

$$\begin{aligned}
\lambda = 0 \quad &\Longrightarrow \quad w(x) = a + bx \\
\lambda = \alpha^2 > 0 \quad &\Longrightarrow \quad w(x) = a\,\mathrm{e}^{\alpha x} + b\,\mathrm{e}^{-\alpha x} \\
\lambda = -\omega^2 < 0 \quad &\Longrightarrow \quad w(x) = a \sin(\omega x) + b \cos(\omega x)
\end{aligned}$$

Die Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ können hierbei frei gewählt werden.
Die Randbedingung $w(0) = w(\pi) = 0$ erfüllen nur Vielfache der Lösung $w(x) = a \sin(\omega x)$ mit $\omega = n \in \mathbb{N}$, also $\lambda = -n^2$.
Die Gleichung $v''(t) = n^2 v(t)$ wird gelöst durch $v(t) = a\,\mathrm{e}^{nt} + b\,\mathrm{e}^{-nt}$.
Wir erhalten so die Eigenfunktion $u(t,x) = (a\,\mathrm{e}^{nt} + b\,\mathrm{e}^{-nt}) \sin(nx)$.
Der Anfangswert $u(0,x) = 0$ erfordert $a = -b$, und $\partial_t u(0,x) = n \sin(nx)$ erfordert $a = 1/2$. Damit finden wir schließlich die erhoffte Lösung:

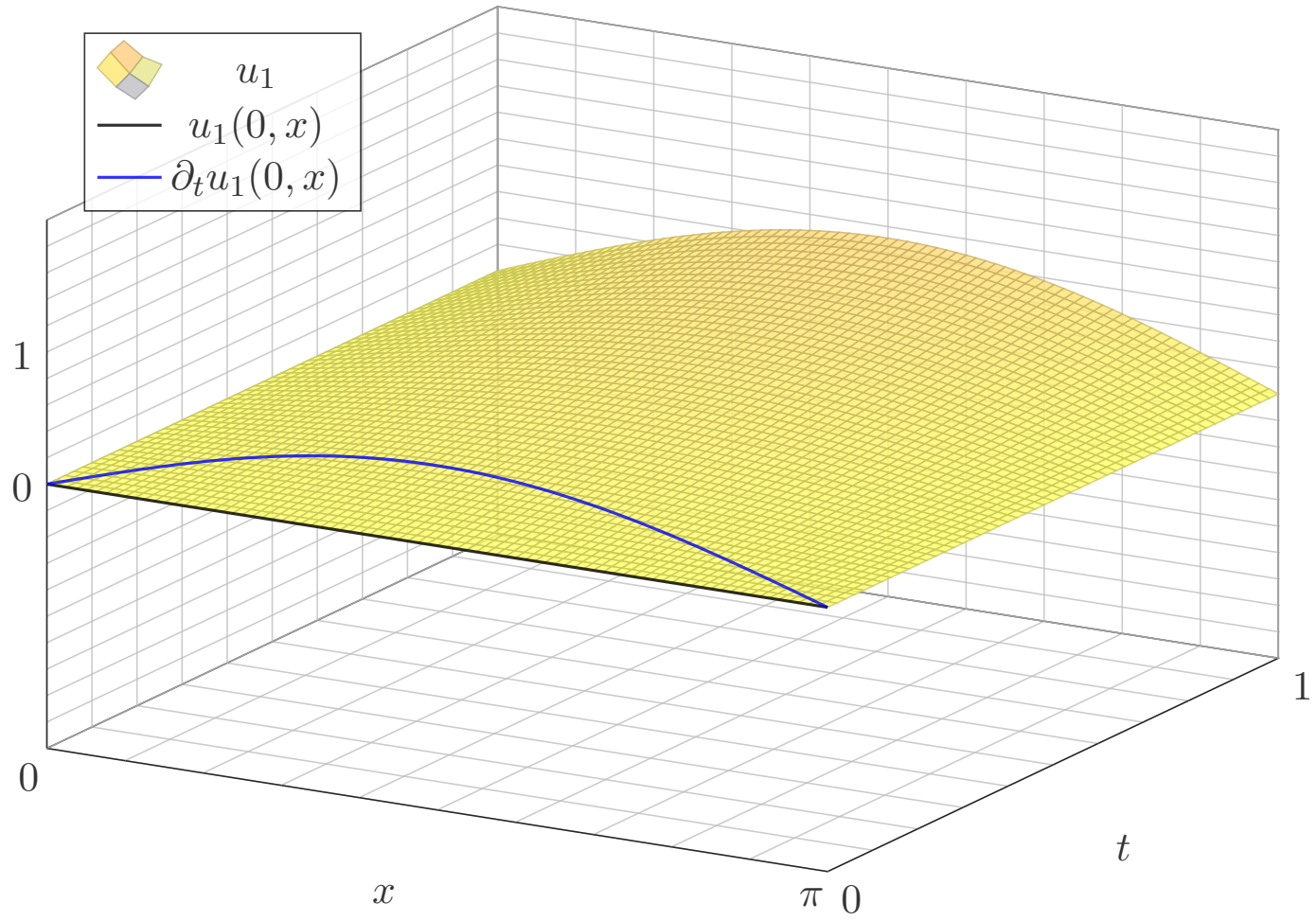
$$\boxed{u(t,x) = \sinh(nt) \sin(nx)}$$

(2) Dank Linearität finden wir $u_n(t,x) = \mathrm{e}^{-n/2} \sinh(nt) \sin(nx)$

(3) Für $n \to \infty$ konvergieren die Anfangsdaten $h_n \to 0$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion, nicht aber die zugehörigen Lösungen: $u_n \not\to 0$!

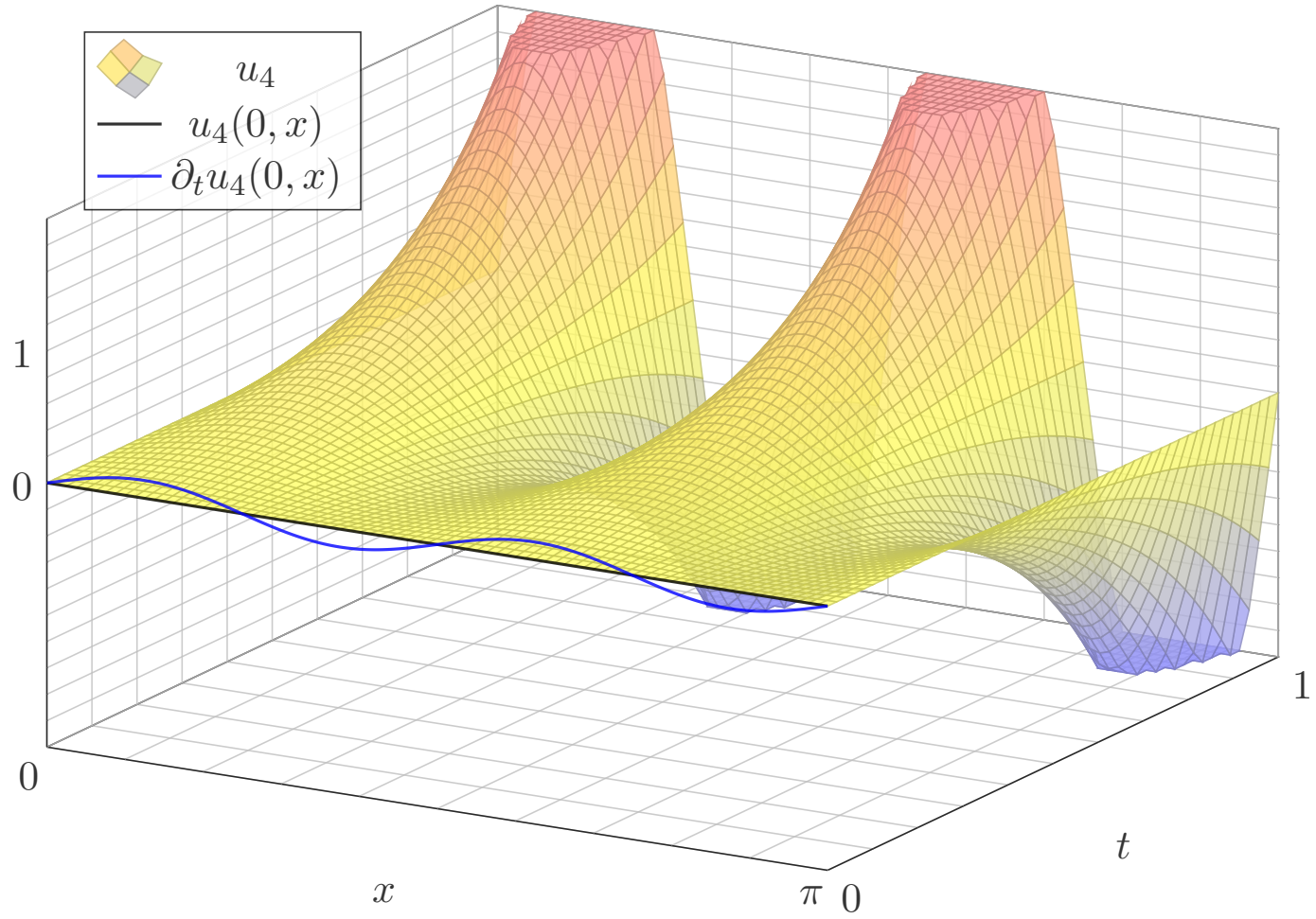
Hadamards warnendes Gegenbeispiel

R219
Ausführung



Hadamards warnendes Gegenbeispiel

R220
Ausführung



Wärmeleitung, vorwärts und rückwärts

Aufgabe: Wir suchen Lösungen $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Wärmeleitung:

$$\begin{array}{ll} \partial_t u(t,x) = \kappa \partial_x^2 u(t,x) & \text{für alle } t \in \mathbb{R} \text{ und } x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = \sum_n c_n \sin(nx) & \text{Anfangswerte für } t = 0. \end{array}$$

(1) Finden Sie alle Lösungen in Produktform $u(t,x) = v(t)w(x)$.
(2) Was folgt daraus für Anfangswerte $u(0,x) = \sum_n c_n \sin(nx)$?

Lösung: (1) Der Produktansatz $u(t,x) = v(t)w(x)$ separiert zu

$$v'(t) = \lambda v(t), \quad \kappa w''(x) = \lambda w(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Wir nutzen die Anfangsdaten $w(x) = \sin(nx)$ und $v(0) = 1$.
Daraus lesen wir $\lambda = -n^2\kappa$ ab und erhalten $v(t) = \mathrm{e}^{-n^2\kappa t}$.

(2) Linearkombination / Superposition ergibt die Lösung

$$u(t,x) = \sum_n c_n \, \mathrm{e}^{-n^2\kappa t} \sin(nx)$$

Für $t > 0$ gilt: Hohe Frequenzen klingen extrem schnell ab.
Für $t < 0$ gilt: Hohe Frequenzen werden extrem verstärkt.

Wärmeleitung, vorwärts und rückwärts

(3) Was bedeutet das für die Stabilität der Wärmeleitungsgleichung?
(a) Wenn sie vorwärts läuft? (b) Wenn wir sie rückwärts betrachten?
Ist das Problem demnach gut gestellt im Sinne von Hadamard?

Lösung: (3) Eine partielle Differentialgleichung (PDE), hier als Anfangs- und Randwertproblem (ARWP), heißt **gut gestellt**, wenn genau eine Lösung existiert und diese stetig von den gegebenen Daten abhängt.

Für die Wärmeleitungsgleichung sind Existenz und Eindeutigkeit nicht offensichtlich, wir werden beides im nächsten Kapitel noch diskutieren. Die Abhängigkeit von den Anfangsdaten können wir sofort ablesen:

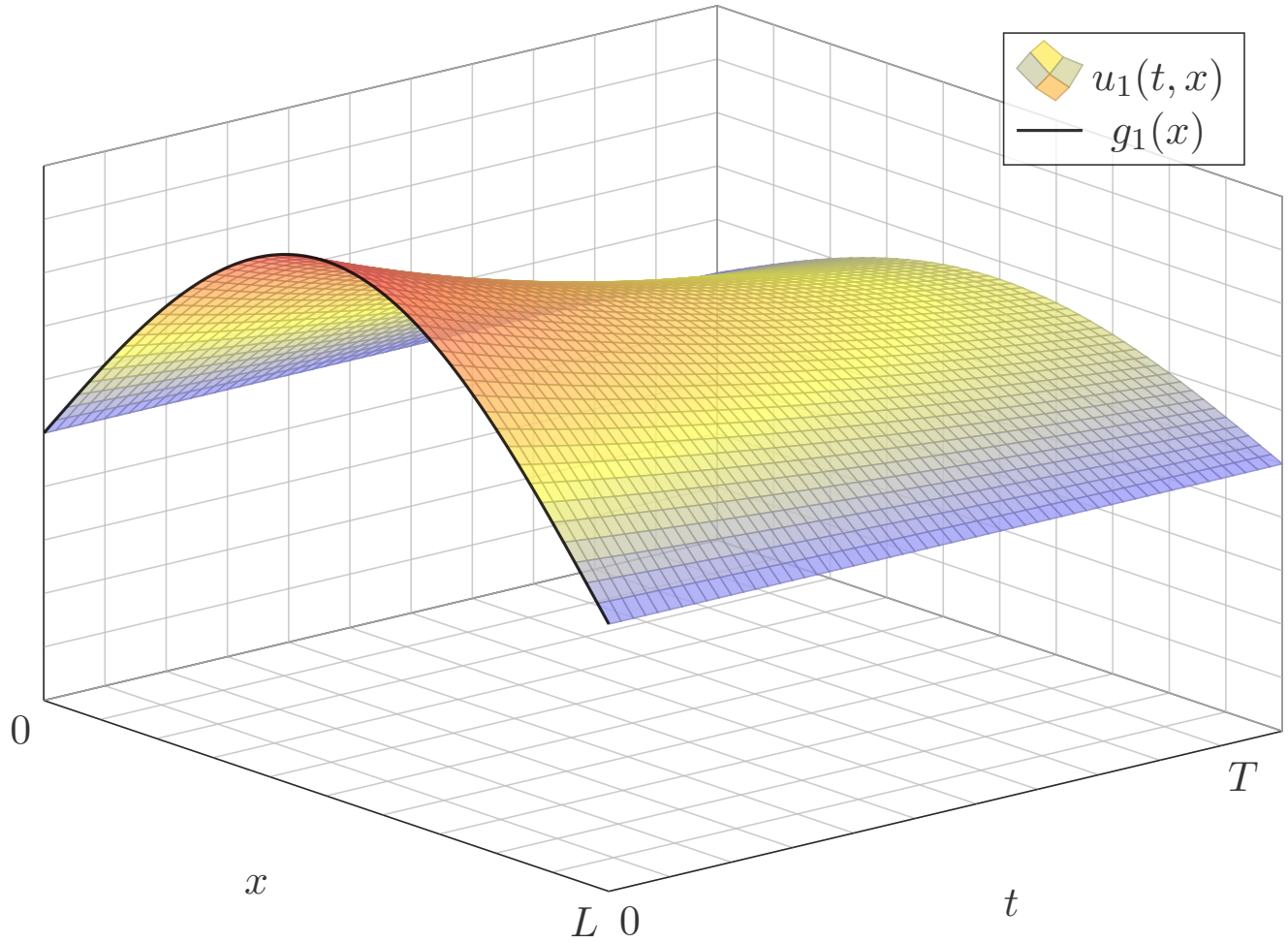
☺ Für die (übliche, vorwärtslaufende) Wärmeleitung hängt die Lösung $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig von den Anfangsdaten $u(0,-) = u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ab: Ist u_0 klein, so auch u (in einer geeigten Norm als Präzisierung).

☹ Für die rückwärtslaufende Wärmeleitung gilt dies offensichtlich nicht: Die Anfangsdaten $u(0,x) = n^{-1}\sin(nx)$ sind beliebig klein für $n \to \infty$, doch die Lösung $u(t,x) = n^{-1}\,\mathrm{e}^{-n^2\kappa t}\sin(nx)$ wird für $t < 0$ beliebig groß.

⚠ Für manche Anfangsdaten existiert die Lösung nur für $t \geq 0$.

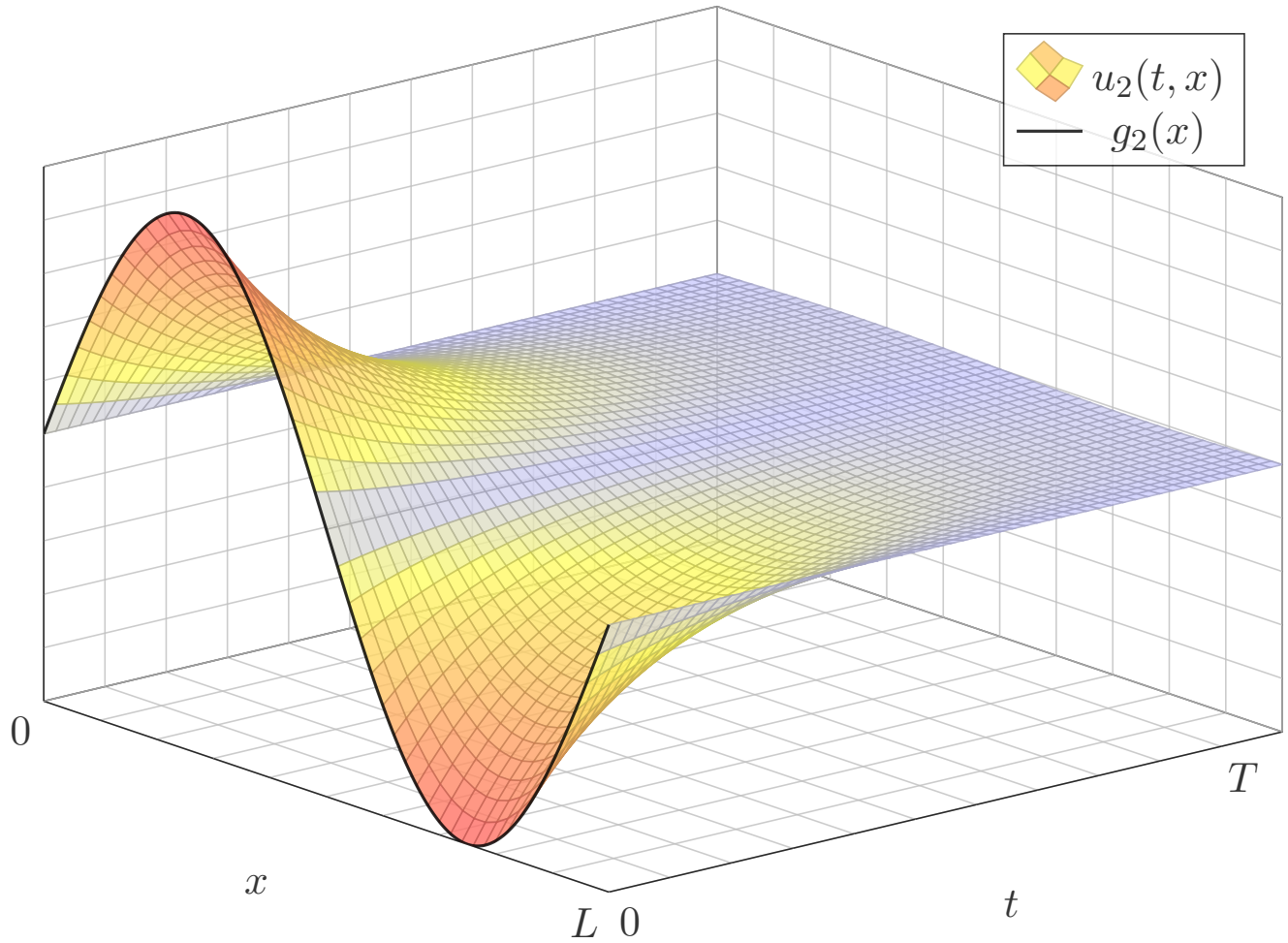
Wärmeleitung, vorwärts und rückwärts

R223
Übung



Wärmeleitung, vorwärts und rückwärts

R224
Übung



Wellengleichung und die harmonisch schwingende Saite

Wie schwingt die Saite eines Musikinstruments (Geige, Klavier, Gitarre)? Nach d'Alembert 1747 beschrieb Euler 1748 die Problemstellung so:

Eine Saite wird gespannt und in eine von der geradlinigen wenig abweichende, sonst aber beliebige Lage gebracht, und nachher sich selbst überlassen. Man bestimme die vollständige schwingende Bewegung der Saite.

Aufgabe: (0) Beschreiben Sie die Lage $u(t,x)$ einer gezupften Saite für alle $x \in [0,L]$ und $t \geq 0$ durch eine PDE mit Rand- und Anfangswerten.

(1) Lösen Sie zunächst den **Separationsansatz** $u(t,x) = v(t)\,w(x)$.

(2) Skizzieren Sie $u_n(t,x) = \cos(n\pi ct/L)\sin(n\pi x/L)$ für $n = 1,2,3,\ldots$. Erfüllt diese Funktion die PDE und alle Rand- und Anfangswerte?

Lösung: (0) Wir suchen $u : \mathbb{R} \times [0,L] \to \mathbb{R} : (t,x) \mapsto u(t,x)$. Dazu gilt:

$\partial_t^2 u(t,x) = c^2 \partial_x^2 u(t,x)$	für alle $t \in \mathbb{R}$ und $0 < x < L$,
$u(t,0) = u(t,L) = 0$	Randwerte für $x \in \{0,L\}$ und $t \geq 0$,
$u(0,x) = g(x)$	Anfangsposition für $t = 0$ und $0 \leq x \leq L$,
$\partial_t u(0,x) = 0$	Anfangsgeschwindigkeit für $t = 0$.

Wellengleichung und die harmonisch schwingende Saite

(1) Der Produktansatz $u(t,x) = v(t)w(x)$ separiert zu: R117

$$v''(t) = \lambda v(t), \quad c^2 w''(x) = \lambda w(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Die Lösungspaare hängen von der Separationskonstanten $\lambda \in \mathbb{R}$ ab:

$$\begin{aligned}
\lambda = 0: \quad & v(t) = a_1 + a_2 t, \\
& w(x) = b_1 + b_2 x \\
\lambda = \alpha^2 > 0: \quad & v(t) = a_1\,\mathrm{e}^{\alpha t} + a_2\,\mathrm{e}^{-\alpha t}, \\
& w(x) = b_1\,\mathrm{e}^{x\alpha/c} + b_2\,\mathrm{e}^{-x\alpha/c}. \\
\lambda = -\omega^2 < 0: \quad & v(t) = a_1 \cos(\omega t) + a_2 \sin(\omega t), \\
& w(x) = b_1 \cos\big(x\omega/c\big) + b_2 \sin\big(x\omega/c\big)
\end{aligned}$$

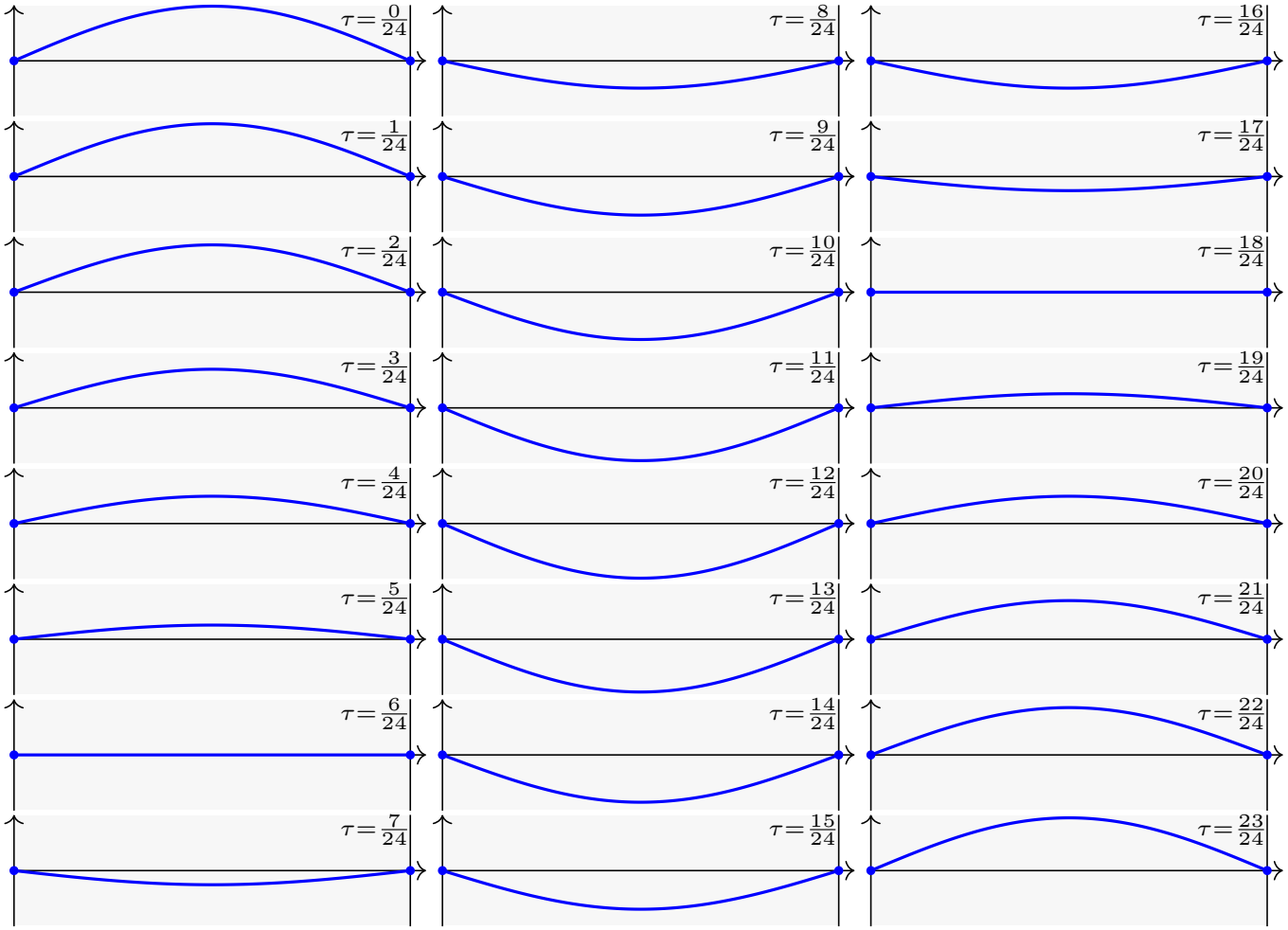
Diese lösen die *freie* Wellengleichung. Die geforderte Randbedingung $w(0) = w(L) = 0$ erfüllt nur $\sin(n\pi x/L)$ für $n \in \mathbb{N}$, also $\omega = n\pi c/L$ und

$$u_n(t,x) = \big[a_n \cos(n\pi ct/L) + b_n \sin(n\pi ct/L)\big] \sin(n\pi x/L)$$

Da wir zudem $\partial_t u(0,x) = 0$ für alle $x \in [0,L]$ fordern, folgt $b_n = 0$.

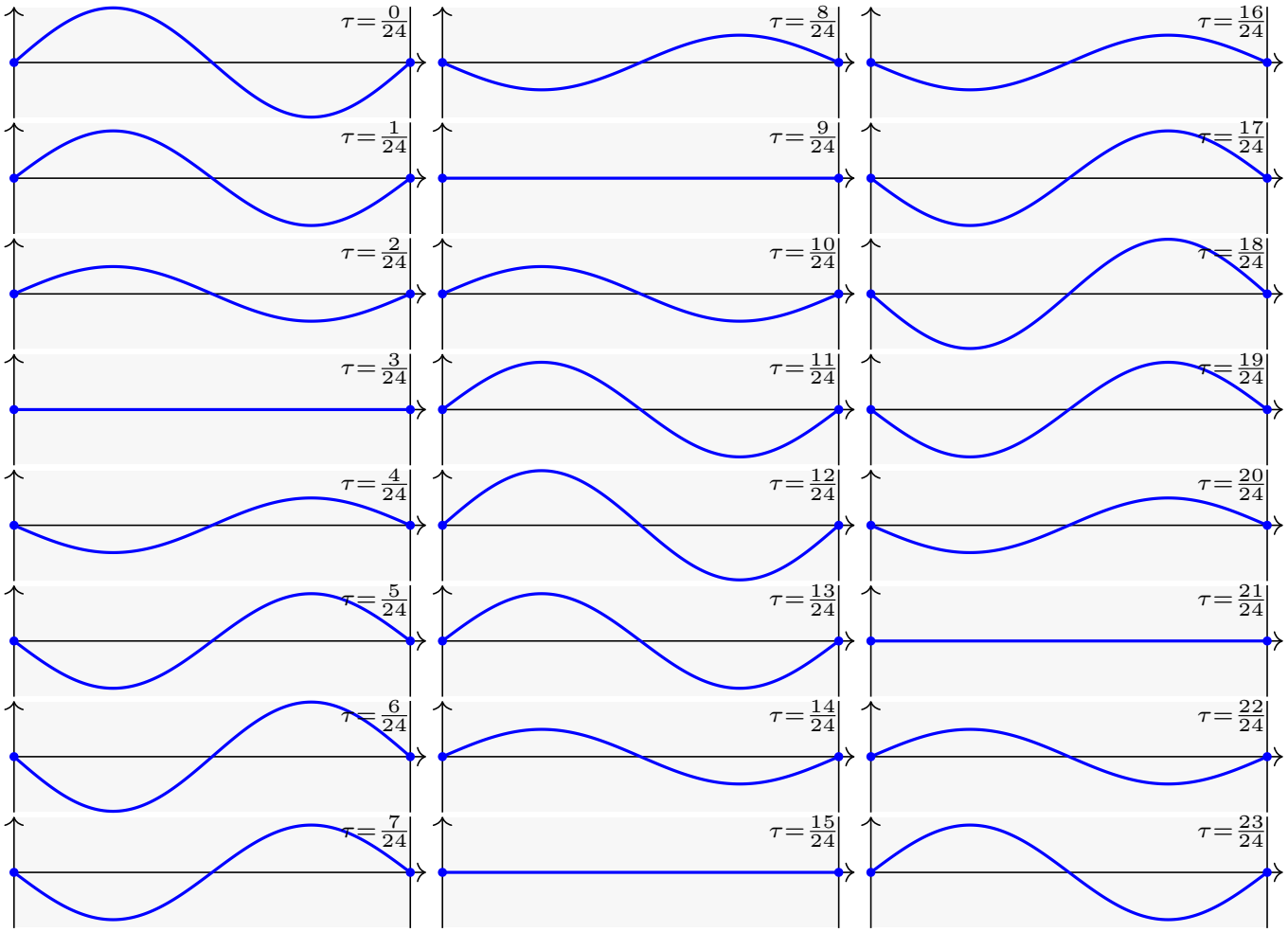
Die harmonisch schwingende Saite: Eigenfunktion

R303
Ausführung



Die harmonisch schwingende Saite: Eigenfunktion

R304
Ausführung



Wellengleichung und die gezupfte Saite

Die vorige Aufgabe löst unser Problem, falls zum Startzeitpunkt $t = 0$ die Schwingung mit $u(0, x) = \sin(n\pi x/L)$ und $\partial_t u(0, x) = 0$ beginnt.

D'Alembert–Ansatz: (3) Die Funktion $u(t, x) = f(x \mp ct)$ beschreibt eine Welle der Form f, die mit Geschwindigkeit c nach rechts / links läuft.

(4) Lösen Sie mit diesem Ansatz das allgemeine ARWP wie oben in (0).

(5) Erklären Sie, wie die Faktorisierung $\partial_t^2 - c\partial_x^2 = (\partial_t + c\partial_x)(\partial_t - c\partial_x)$ die Wellengleichung aus (0) in zwei einfache Transportprobleme zerlegt.

Lösung: (3) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar (stetig genügt, wenn wir Ableitungen im Distributionensinne verstehen, siehe D533).

Für $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (t, x) \mapsto u(t, x) = f(x - ct)$ gilt $\partial_x^2 u(t, x) = f''(x - ct)$ und $\partial_t^2 u(t, x) = c^2 f''(x - ct) = c^2 \partial_x^2 u(t, x)$. Die PDE ist also erfüllt!

(4) Wir setzen die gegebene Funktion $g : [0, L] \to \mathbb{R}$ mit $g(0) = g(L) = 0$ ungerade und $2L$–periodisch fort zu $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und erhalten:

$$\boxed{u(t, x) = \frac{1}{2}\Big[g(x - ct) + g(x + ct)\Big]}$$

☺ D'Alemberts geniale Lösung überlagert zwei gegenläufige Wellen.

Wellengleichung und die gezupfte Saite

Daniel Bernoulli hingegen war weiterhin überzeugt, dass die Bewegung aus harmonischen Grund- und Oberschwingungen bestehen müssen. Er war unzufrieden mit d'Alemberts Lösung und schrieb 1753:

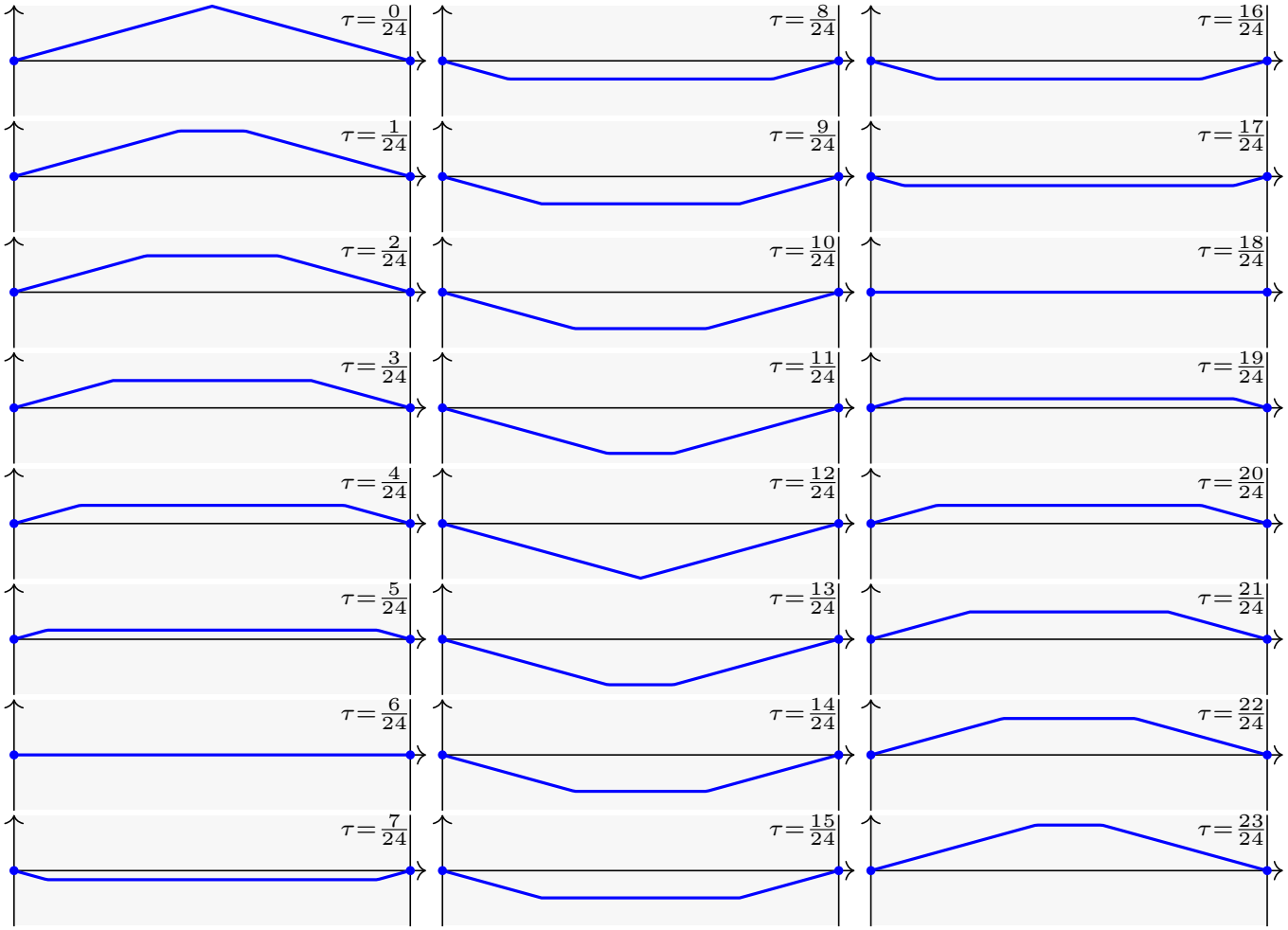
Ich folgere daraus, dass alle schwingenden Körper eine Unmenge von Tönen von sich geben [...], aber diese Vielfalt der Schwingungen bei der Saite verschweigen die Herren d'Alembert und Euler. [...] In der Tat stimmen alle Musiker darin überein, dass eine gezupfte Saite außer ihrem Grundton zugleich auch noch andere, sehr viel hellere Töne von sich gibt. Dies ist der Beweis dafür, dass sich in einer und derselben Saite eine Überlagerung mehrerer Arten taylorscher [harmonischer] Schwingungen zugleich einstellen kann.

Wer hat denn nun Recht? D'Alembert (1747) und Euler (1748) mit ihrer Summe gegenläufiger Wellen oder Taylor (1713) und Bernoulli (1753) mit der Überlagerung vieler stehender harmonischer Schwingungen?

Diese Kontroverse dauerte über fünfzig Jahre. Die revolutionäre Lösung lieferte Fourier (1807): Beide haben Recht! Jede (physikalisch relevante) Anfangsposition kann als Reihe harmonischer Terme dargestellt werden. Fouriers Theorie erklärte auch, wie die Koeffizienten zu bestimmen sind.

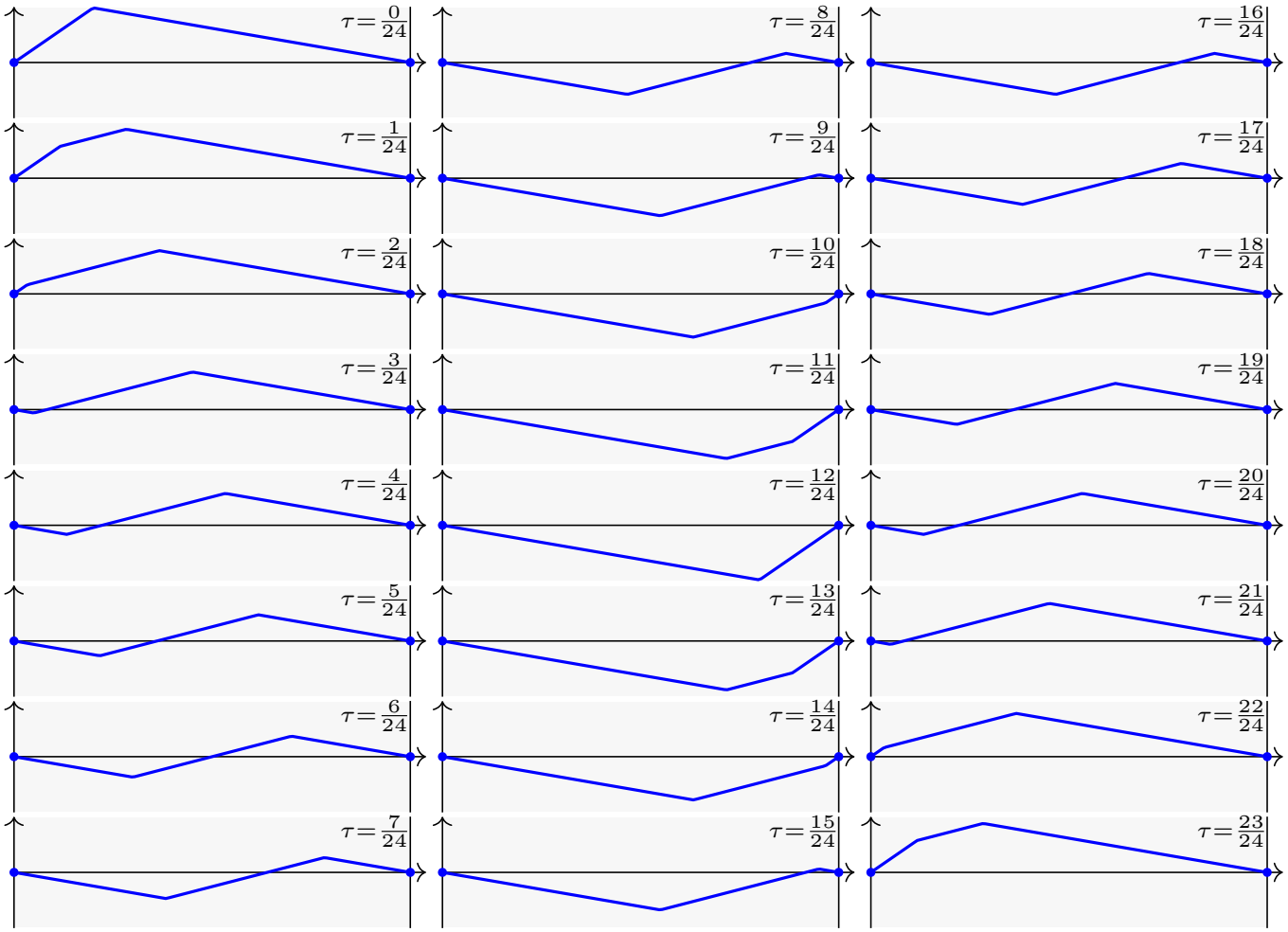
Die gezupfte Saite: gegenläufige Wellen

R307
Ausführung

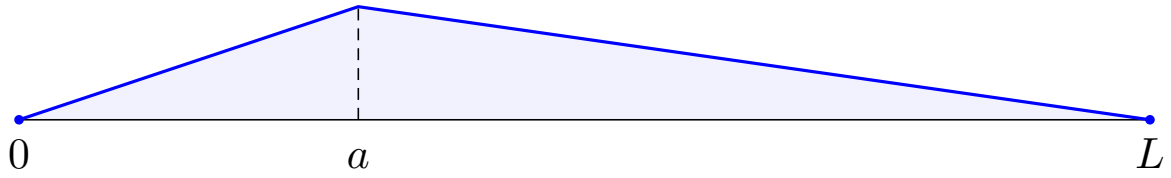


Die gezupfte Saite: gegenläufige Wellen

R308
Ausführung



Wellengleichung & Fourier: O'zupft is!



Aufgabe: (6) Zu $0 < a < L$ betrachten wir die Anfangsposition

$$g : [0, L] \to \mathbb{R} : x \mapsto g(x) = \begin{cases} x/a & \text{für } 0 \le x \le a, \\ (L-x)/(L-a) & \text{für } a \le x \le L. \end{cases}$$

Überlagern Sie die Eigenfunktionen aus (1–2)

$$u_n(t, x) = \cos(n\pi ct/L) \sin(n\pi x/L)$$

für $n = 1, 2, 3, \ldots$ durch „unendliche Linearkombination" zu einer Reihe

$$u(t, x) = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(t, x)$$

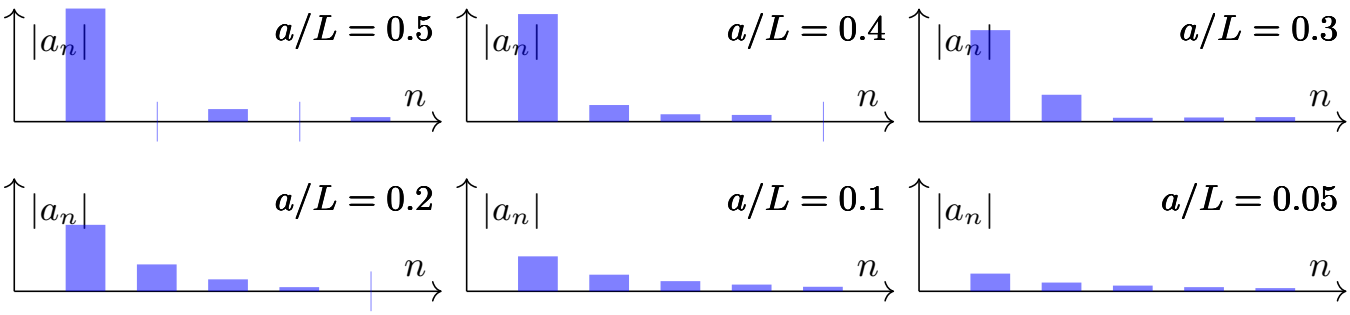
mit Anfangswerten $u(0, x) = g(x)$ und $\partial_t u(0, x) = 0$ für alle $x \in [0, L]$.
Wie bestimmen Sie effizient und sicher die Koeffizienten $a_1, a_2, a_3, \ldots$?
(7) Zeichnen Sie die ersten Partialsummen dieser Reihenentwicklung.

Wellengleichung & Fourier: O'zupft is!

Lösung: (6) Es gilt bereits $\partial_t u_n(0, x) = 0$, folglich auch $\partial_t u(0, x) = 0$.
Für $u(0, x) = g(x)$ bestimmen wir a_n durch Fourier–Analyse und finden

$$u(t, x) = \frac{2L^2}{\pi^2 a(L-a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi a/L)}{n^2} \sin(n\pi x/L) \cos(n\pi ct/L).$$

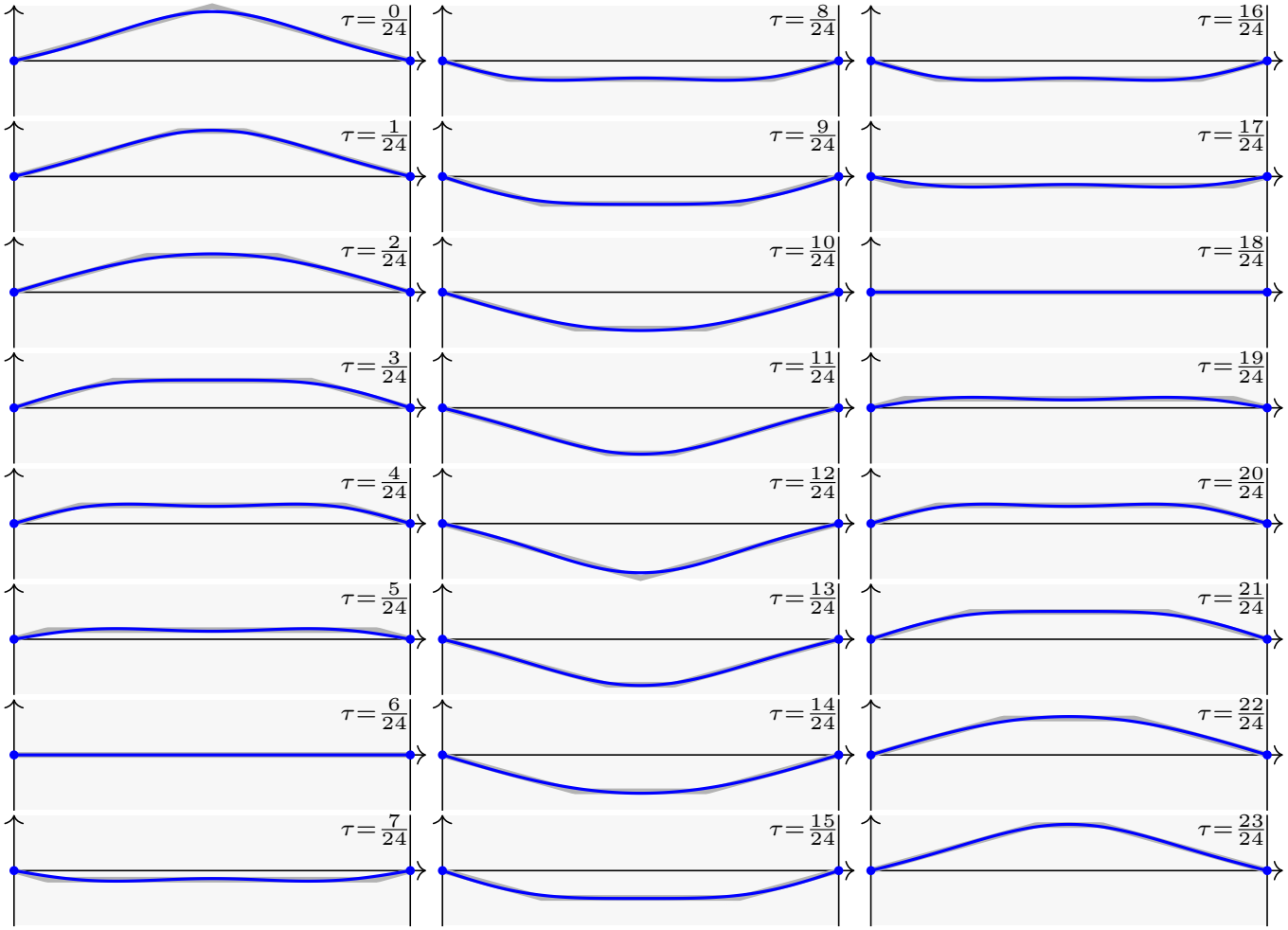
Die n-te Schwingung hat die Amplitude $\sin(n\pi a/L)/n^2$, hängt also von der Stelle $a \in [0, L]$ ab, an der gezupft wird. Etwa bei $a = 0.2L$ sind erste und zweite Oberschwingung recht stark, was einen vollen Klang bewirkt.



(7) Die folgenden Graphiken zeigen die Summe der ersten drei Terme.
☺ Die Näherung ist schnell recht gut. Fourier–Theorie wirkt auch hier!

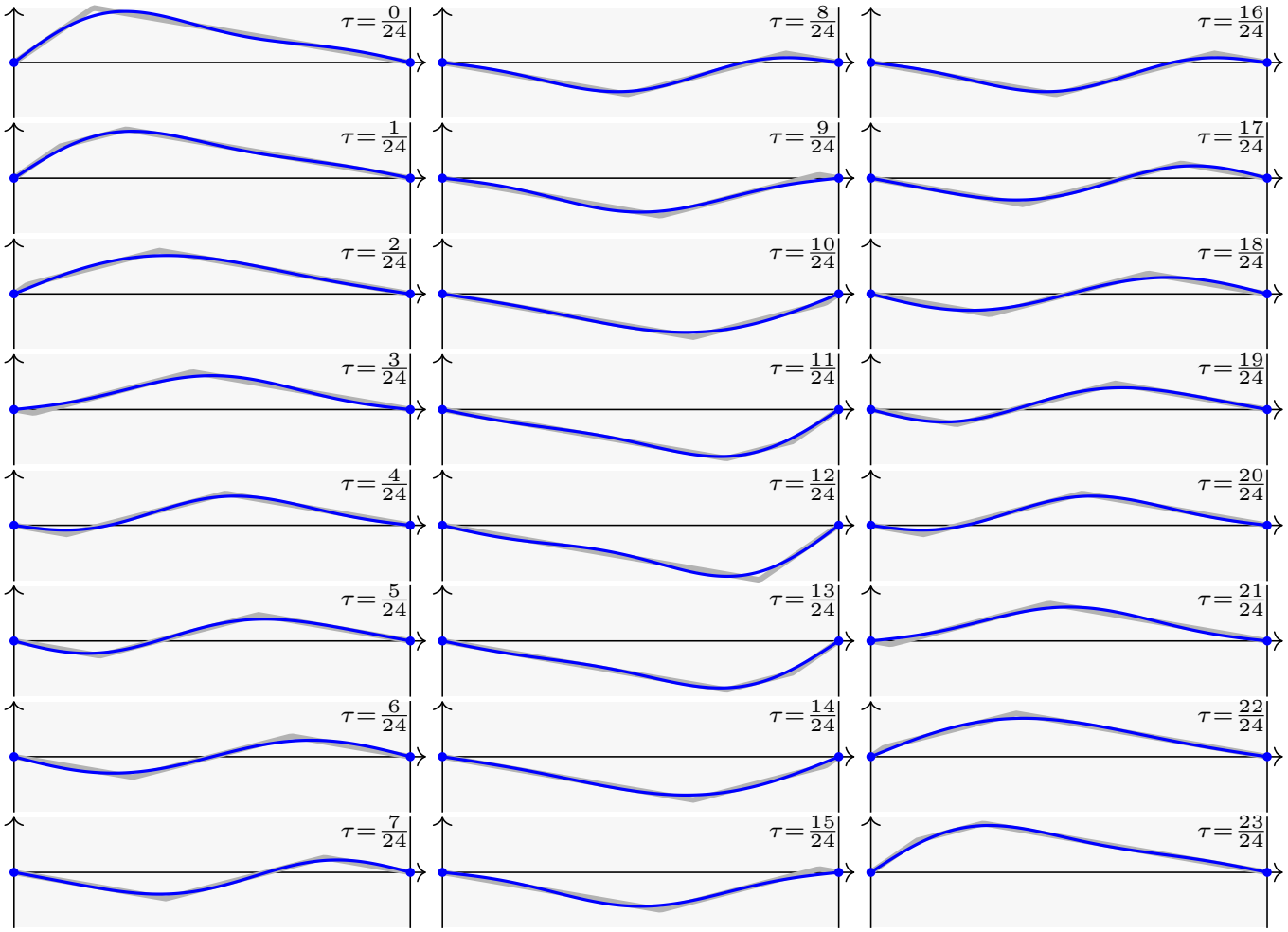
Wellengleichung & Fourier: O'zupft is!

R311
Übung



Wellengleichung & Fourier: O'zupft is!

R312
Übung



Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Lösungen suchen wir zuerst mit dem Produktansatz $u(t,x) = v(t)\,w(x)$. Das ist zunächst nur geraten, mit etwas Anschauung und Erfahrung. Wir haben Glück und finden die Eigenfunktionen $u_n(t,x) = v_n(t)\,w_n(x)$, genug um mit $u(t,x) = \sum_n a_n\,v_n(t)\,w_n(x)$ alle Bedingungen zu erfüllen.

Unsere Konstruktion von $u(t,x)$ zeigt somit die **Existenz** einer Lösung. Dies zeigt jedoch noch keineswegs die **Eindeutigkeit**: Es könnte noch weitere Lösungen der PDE geben, die aber unserem Ansatz entgehen. D'Alemberts Ansatz liefert eine weitere Lösung. Sind beide gleich?

Wir wünschen uns sehnlichst die Eindeutigkeit der gesuchten Lösung. Mehrdeutigkeiten müssen wir erkennen und nötigenfalls auch beheben: Sind noch mehrere Lösungen möglich, so stellen wir geeignete weitere Bedingungen, um die physikalisch sinnvollen Lösungen herauszuheben.

Dieses Vorgehen beruht auf der Überzeugung, dass die physikalische Entwicklung **deterministisch** ist. Ein brauchbares mathematisches Modell soll die zukünftige Entwicklung vorhersagen und muss daher eine **eindeutige Lösung** haben, nämlich die physikalisch beobachtete.

Eindeutigkeit der Lösung

Satz R3A: Eindeutigkeitssatz für die Wellengleichung

(0) Löst $u\colon [0,T[\,\times [a,b] \to \mathbb{R}$ in C^2 die homogene Wellengleichung

$$\begin{array}{ll}
\partial_t^2 u(t,x) - c^2\,\partial_x^2 u(t,x) = 0 & \text{für } 0 \le t < T \text{ und } a \le x \le b, \\
\begin{cases} u(t,a) = u(t,b) = 0 \\ \partial_x u(t,a) = \partial_x u(t,b) = 0 \end{cases} & \begin{array}{l}\text{Dirichlet–Randbedingungen für } t \ge 0 \text{ oder} \\ \text{Neumann–Randbedingungen für } t \ge 0,\end{array} \\
u(0,x) = 0,\ \partial_t u(0,x) = 0 & \text{Anfangswerte für } t = 0 \text{ und } a \le x \le b,
\end{array}$$

dann gilt $u(t,x) = 0$ für alle $(t,x) \in [0,T[\,\times [a,b]$.

(1) Lösen $\tilde{u}, \check{u}\colon [0,T[\,\times [a,b] \to \mathbb{R}$ in C^2 die inhomogene Wellengleichung

$$\begin{array}{l}
\partial_t^2 u(t,x) - c^2\,\partial_x^2 u(t,x) = f(t,x), \\
\begin{cases} u(t,a) = \ell(t),\ u(t,b) = r(t) \text{ oder} \\ \partial_x u(t,a) = \ell(t),\ \partial_x u(t,b) = r(t), \end{cases} \\
u(0,x) = g(x),\ \partial_t u(0,x) = h(x)
\end{array}$$

dann gilt $\tilde{u}(t,x) = \check{u}(t,x)$ für alle $(t,x) \in [0,T[\,\times [a,b]$.

Die Energiemethode beweist die Eindeutigkeit.

Aufgabe: Beweisen Sie die Eindeutigkeit mit der Energiemethode!
Als mathematische Hilfsgröße untersuchen wir hierzu die **Energie**

$$E : [0,T[\to \mathbb{R} : t \mapsto \frac{1}{2}\int_{x=a}^{b} \big[\partial_t u(t,x)\big]^2 + \big[c\,\partial_x u(t,x)\big]^2 \,\mathrm{d}x \;\geq\; 0.$$

(0) Berechnen Sie $\dot{E} = 0$, folgern Sie $E = 0$ und schließlich $u = 0$.
(1) Folgern Sie die allgemeine Aussage (1) aus der speziellen (0).

Lösung: (0) Zur Abkürzung schreiben wir $\partial_x u = u_x$ und $\partial_t u = u_t$ usw.
Dank $u \in C^2$ nutzen wir $u_{xt} = u_{tx}$ nach dem Satz D4A von Schwarz.

$$\dot{E}(t) \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{2}\partial_t \int_{x=a}^{b} u_t^2 - c^2 u_x^2 \,\mathrm{d}x \underset{\text{D3A}}{\overset{\text{Satz}}{=}} \int_{x=a}^{b} u_t\, u_{tt} + c^2\, u_x\, u_{xt} \,\mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{part}}{=} \int_{x=a}^{b} u_t \underbrace{\big(u_{tt} - c^2\, u_{xx}\big)}_{=\,0 \text{ Wellengleichung}} \,\mathrm{d}x + \underbrace{\big[c\, u_x\, u_t\big]_{x=a}^{b}}_{=\,0 \text{ Randbedingung}} \;=\; 0$$

Aus $u(0,x) = 0$ für $x \in [a,b]$ folgt $E(0) = 0$, somit $E(t) = 0$ für alle $t \geq 0$.
Das bedeutet $\partial_t u(t,x) = \partial_x u(t,x) = 0$ für alle $(t,x) \in [0,T[\times [a,b]$.
Zusammen mit $u(0,x) = 0$ folgt daraus $u(t,x) = 0$ für alle (t,x).

Die Energiemethode beweist die Eindeutigkeit.

(1) Gegeben seien Lösungen $\tilde{u}, \check{u} : [0,T[\times [a,b] \to \mathbb{R}$ zu den Daten (1).
Die Differenz $u = \tilde{u} - \check{u}$ erfüllt alle Gleichungen aus (0), also $u = 0$.
Daraus folgt $\tilde{u} = \check{u}$. Es kann also höchstens eine Lösung geben!

☺ Wir nutzen geschickt die lineare Struktur der Problemstellung!

☺ Die Energiemethode ist für PDE ungemein nützlich und vielseitig.

☺ Der Eindeutigkeitssatz gilt allgemein für alle stetigen Lösungen u, wenn wir Ableitungen im Distributionensinne verstehen, siehe D533.

☺ In unserem Beispiel erhalten wir (vereinfacht für $L = \pi$):

$$\frac{1}{2}\Big[g(x-ct) + g(x+ct)\Big] = \frac{2}{a(\pi - a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{n^2} \sin(nx)\cos(nct)$$

Links steht die Lösung nach d'Alembert und Euler als Summe gegenläufiger Wellen. Rechts steht die Lösung nach Bernoulli und Fourier als unendliche Reihe harmonischer Schwingungen. Dank Eindeutigkeitssatz R3A kann es jedoch nur eine Lösung geben, also sind beide gleich.

Potenzreihen und Fourier–Transformation

☹ Nicht jede PDE besitzt eine Lösung; selbst wenn sie eine besitzt, so doch meist nicht elementar, das heißt in geschlossener Form.

☺ In solchen Fällen hilft meist nur der **Potenzreihenansatz** Q333: Existenz- und Eindeutigkeitssatz Q3B von Cauchy–Kowalewskaja

☺ **Fourier–Transformation** löst $P(\partial)\,u(x) = g(x)$ für jedes Polynom $P(x) = \sum a_\nu x^\nu$. Die Transformation ergibt nämlich $P(\mathrm{i}\xi)\,\widehat{u}(\xi) = \widehat{g}(\xi)$, Auflösen zu $\widehat{u}(\xi) = \widehat{g}(\xi)/P(\mathrm{i}\xi)$ und Rücktransformation liefert dann u: Dies garantiert der Existenzsatz R1A von Ehrenpreis–Malgrange.

In der Praxis treten sehr häufig partielle Differentialgleichungen auf. Erfahrungsgemäß sind die allermeisten höchstens **zweiter Ordnung**.

☺ Lineare PDE *erster* Ordnung lösen wir entlang **Charakteristiken**. Die wichtigsten linearen PDE *zweiter* Ordnung sind folgende Modelle: Die Poisson–Gleichung $\Delta u = \varrho$, die Wellengleichung $\partial_t^2 u - c^2 \Delta u = \varrho$ und die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u - \kappa\,\Delta u = q$ mit $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$.

Nach diesen drei Modellgleichungen klassifiziert man lineare PDE zweiter Ordnung in **elliptisch**, **hyperbolisch** und **parabolisch** R110.

Trennung der Variablen durch Produktansatz

Zu lösen sei eine **separierbare Differentialgleichung** der Form

$$\boxed{P(x,\partial_x)\,u(x,y) = Q(y,\partial_y)\,u(x,y).}$$

Gegeben sind Intervalle $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ und hierauf die Differentialoperatoren $P(x,\partial_x) = \sum_{j=0}^m a_j(x)\partial_x^j$ und $Q(y,\partial_y) = \sum_{k=0}^n b_k(y)\partial_y^k$ mit a_j, b_k stetig. Das bedeutet anschaulich: P operiert nur auf x und Q operiert nur auf y.

Als Lösungen gesucht sind Funktionen $u : X \times Y \to \mathbb{K} : (x,y) \mapsto u(x,y)$. In diesem Falle eignet sich der **Produktansatz** gemäß Satz R1D:

Sei $u : X \times Y \to \mathbb{K} : u(x,y) = v(x) \cdot w(y)$ Produkt von $0 \neq v \in C^m(X,\mathbb{K})$ und $0 \neq w \in C^n(Y,\mathbb{K})$. Dann ist die obige PDE äquivalent zu den beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen / Eigenwertgleichungen

$$\boxed{P(x,\partial_x)\,v(x) = \lambda\,v(x) \quad \text{und} \quad Q(y,\partial_y)\,w(y) = \lambda\,w(y)}$$

mit einem gemeinsamen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$ als **Separationskonstante**. Lösung sind Eigenfunktionen $u(x,y) = v(x)w(y)$ und Superpositionen. Gleiches gilt für $u(x_1,\ldots,x_n) = u_1(x_1)\cdots u_n(x_n)$ in mehreren Variablen.

Kompaktheit garantiert Eindeutigkeit.

Die Konstruktion einer Lösung oder erfolgreiche Probe eines Kandidaten zeigt die **Existenz** einer Lösung, aber noch nicht die **Eindeutigkeit**: Es könnte weitere Lösungen geben, die unserem Ansatz entgehen.

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, also der Abschluss $\overline{\Omega}$ kompakt.

(0) Löst $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ die homogene Poisson–Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0 \quad \text{für jeden inneren Punkt } x \in \Omega, \\ u(x) &= 0 \quad \text{für jeden Randpunkt } x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

dann gilt $u(x) = 0$ für alle $x \in \overline{\Omega}$.

(1) Lösen $\tilde{u}, \check{u} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ die inhomogene Poisson–Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= q(x) \quad \text{für jeden inneren Punkt } x \in \Omega, \\ u(x) &= g(x) \quad \text{für jeden Randpunkt } x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

dann gilt $\tilde{u}(x) = \check{u}(x)$ für alle $x \in \overline{\Omega}$.

Wie üblich folgt (1) aus (0) dank Linearität: Angenommen $\tilde{u}, \check{u}$ erfüllen (1). Die Differenz $u = \tilde{u} - \check{u}$ erfüllt dann (0). Also gilt $u = 0$ und somit $\tilde{u} = \check{u}$.

Minimum-Maximum-Prinzip harmonischer Funktionen

Beweise für die Eindeutigkeit liefern die **Energiemethode** und das folgende **Minimum-Maximum-Prinzip** für harmonische Funktionen.

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, also der Abschluss $\overline{\Omega}$ kompakt. Sei $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ stetig. Da $\overline{\Omega}$ und $\partial\Omega$ kompakt sind, nimmt u hierauf jeweils ein Minimum und ein Maximum an. Wegen $\overline{\Omega} \supseteq \partial\Omega$ gilt dann allgemein:

$$\min_{\overline{\Omega}} u \le \min_{\partial\Omega} u \qquad \text{und} \qquad \max_{\overline{\Omega}} u \ge \max_{\partial\Omega} u$$

Zudem sei u harmonisch auf dem Inneren Ω, also $u \in C^2$ und $\Delta u = 0$.

(1) Dann nimmt u sein Minimum und Maximum auf dem Rand $\partial\Omega$ an:

$$\boxed{\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u \qquad \text{und} \qquad \max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u}$$

Seien $u, v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ stetig und auf dem Inneren Ω harmonisch. Dann gilt:

(2) Monotonie: Aus $u \le v$ auf dem Rand $\partial\Omega$ folgt $u \le v$ auf ganz $\overline{\Omega}$.

(3) Eindeutigkeit: Aus $u = v$ auf dem Rand $\partial\Omega$ folgt $u = v$ auf ganz $\overline{\Omega}$.

☺ Dies können wir zur Eingrenzung durch Ober/Unterlösungen nutzen. Das Minimum-Maximum-Prinzip gilt ebenso diskret für endliche Graphen (Satz T4B) und beweist neben Eindeutigkeit auch Existenz der Lösung!

Separation (Klausur Februar 2016)

R405
Übung

Wir untersuchen für $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die partielle Differentialgleichung

$$\boxed{\partial_x^2 u(x,y) + 6\,\partial_x u(x,y) = \partial_y^2 u(x,y).}$$

Gesucht sind Lösungen in Produktform $u(x,y) = v(x)\,w(y) \neq 0$.

Aufgabe: (1) Formulieren Sie die Gleichungen für $v(x)$ und $w(x)$.
(2) Finden Sie alle Lösungen der Form $u(x,y) = v(x) \cdot \cos(3y)$.

Lösung: (1) Wir folgen dem Separationsansatz:

$$\frac{v''(x) + 6v'(x)}{v(x)} = \frac{w''(y)}{w(y)} = \lambda \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} v''(x) + 6v'(x) = \lambda\, v(x) \\ w''(y) = \lambda\, w(y) \end{cases}$$

☺ Zu jedem $\lambda \in \mathbb{R}$ können wir diese beiden ODE lösen. Speziell:
(2) Aus $w(y) = \cos(3y)$ folgt $w''(y) = -9w(y)$, also $\lambda = -9$.
Wir lösen die zugehörige Gleichung $v''(x) + 6v'(x) + 9v(x) = 0$.
Wir finden $u(x,y) = (c_1 + c_2 x)\,\mathrm{e}^{-3x} \cdot \cos(3y)$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Probe!

Separation (Klausur September 2016)

R406
Übung

Wir untersuchen für $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die partielle Differentialgleichung

$$\boxed{\partial_x^2 u(x,y) + 10\,\partial_x u(x,y) = \partial_y^2 u(x,y).}$$

Gesucht sind Lösungen in Produktform $u(x,y) = v(x)\,w(y) \neq 0$.

Aufgabe: (1) Formulieren Sie die Gleichungen für $v(x)$ und $w(x)$.
(2) Finden Sie alle Lösungen der Form $u(x,y) = v(x) \cdot \cos(4y)$.

Lösung: (1) Wir folgen dem Separationsansatz:

$$\frac{v''(x) + 10v'(x)}{v(x)} = \frac{w''(y)}{w(y)} = \lambda \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} v''(x) + 10v'(x) = \lambda\, v(x) \\ w''(y) = \lambda\, w(y) \end{cases}$$

☺ Zu jedem $\lambda \in \mathbb{R}$ können wir diese beiden ODE lösen. Speziell:
(2) Aus $w(y) = \cos(4y)$ folgt $w''(y) = -16w(y)$, also $\lambda = -16$.
Wir lösen die zugehörige Gleichung $v''(x) + 10v'(x) + 16v(x) = 0$.
Wir finden $u(x,y) = \left(c_1\,\mathrm{e}^{-8x} + c_2\,\mathrm{e}^{-2x}\right) \cdot \cos(4y)$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Probe!

Existenz, Eindeutigkeit, Superposition

Aufgabe: Eine quadratische Kupferplatte mit Kantenlänge $1\mathrm{m}$ wird an zwei gegenüberliegenden Seiten konstant auf $100°\mathrm{C}$ bzw. $200°\mathrm{C}$ geheizt, an den beiden anderen konstant auf $0°\mathrm{C}$ gekühlt. (1) Formulieren und (2) lösen Sie die PDE für die stationäre Temperaturverteilung u!
(3) Wie viele Lösungen u existieren? Wie können Sie sicher sein?

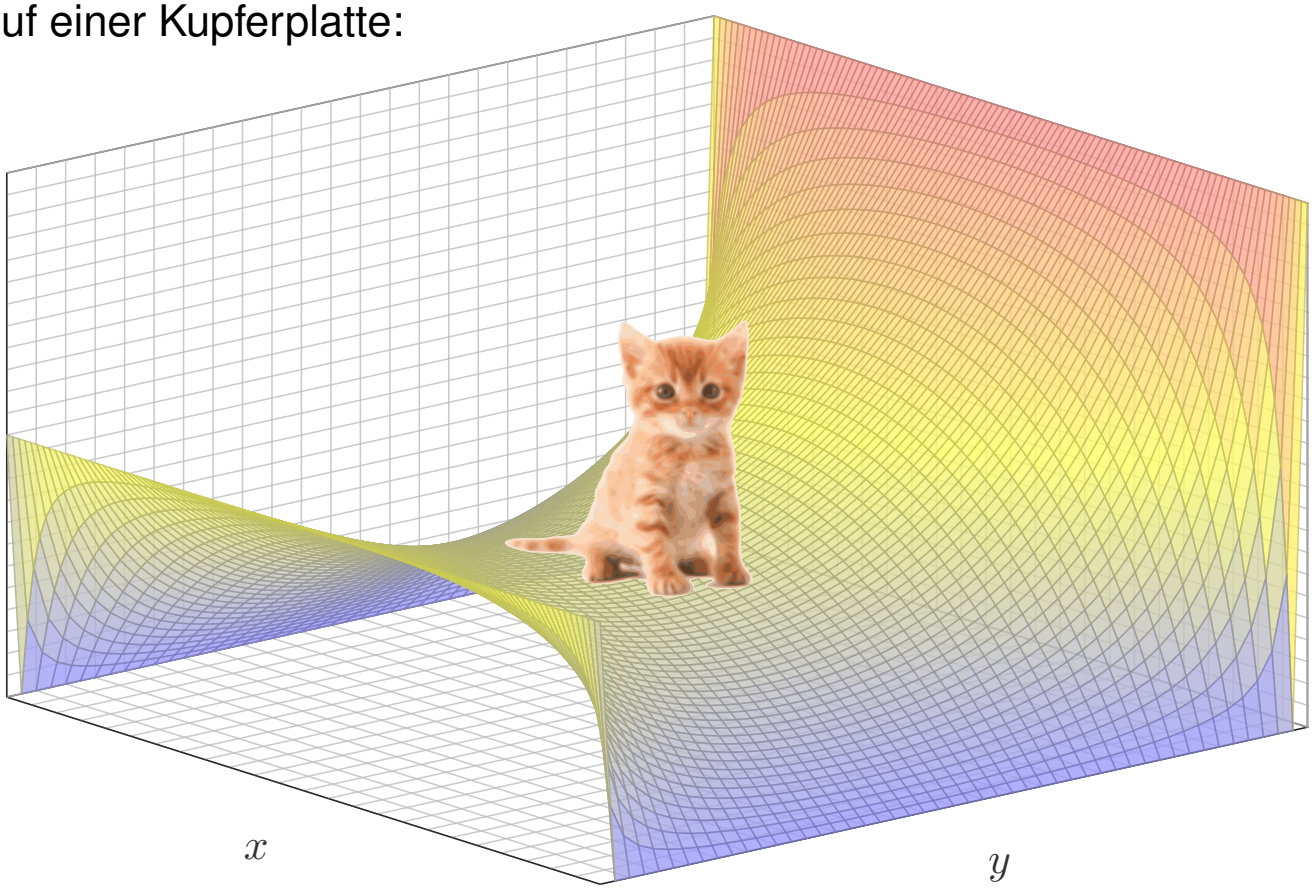
Lösung: (1) auf dem Quadrat $Q = [0,1] \times [0,1]$ suchen wir $u : Q \to \mathbb{R}$.
Die allgemeine Wärmeleitungsgleichung lautet $\partial_t u = \kappa\, \Delta u + q$.
Im Bereich Q gebe es keine Quellen oder Senken, also $q = 0$.
Im stationären Zustand gilt $\partial_t u = 0$, also haben wir $\Delta u = 0$:

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0 \quad \text{auf dem Quadrat } Q = [0,1] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$$
$$\text{mit } u(0,y) = u(1,y) = 0,\ u(x,0) = 100,\ u(x,1) = 200.$$

(2) Wir haben den grundlegenden Fall auf Seite R201 bereits eindeutig gelöst durch $v : Q \to \mathbb{R}$. Bitte wiederholen Sie sorgfältig alle Argumente!
Aus der dortigen ergibt sich unsere hiesige Lösung durch Superposition, nämlich als die Linearkombination $u(x,y) = 2v(x,y) + v(x,1-y)$.

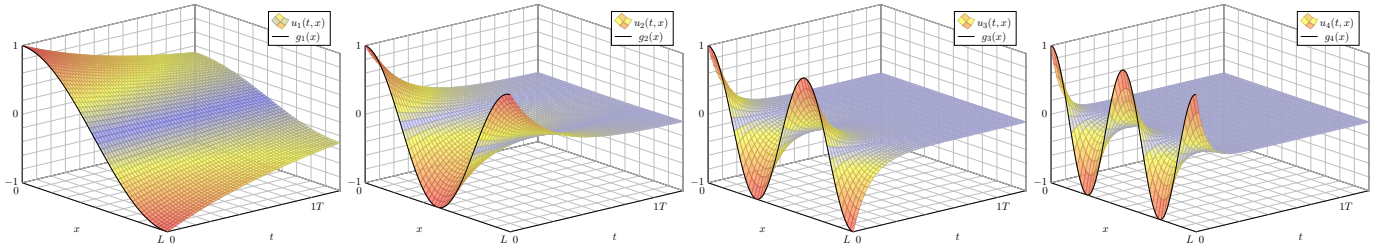
Existenz, Eindeutigkeit, Superposition

Stationäre Wärmeverteilung
auf einer Kupferplatte:



Kapitel S

Die Wärmeleitungsgleichung



Et ignem regunt numeri. [Selbst das Feuer beherrschen die Zahlen.]

Joseph Fourier (1768–1830), *Théorie analytique de la chaleur* (1822)

[Les méthodes] C'est dans les travaux d'application qu'on doit les étudier; c'est là qu'on juge leurs capacités et qu'on apprend la manière de les utiliser.

Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)

Inhalt dieses Kapitels S

1 Die Wärmeleitungsgleichung und ihre freien Lösungen
- Von der Wärmebilanz zur Differentialgleichung
- Wärmeleitungskern und Superposition
- Lösung durch Fourier–Transformation

2 Die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung als ARWP
- Wie schnell kühlt ein Stab über seine Enden ab?
- Was passiert bei gleichmäßigem Aufheizen?
- Was passiert bei Isolierung an den Rändern?

3 Existenz und Eindeutigkeit und Näherung des ARWP
- Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen
- Energie und Minimum-Maximum-Prinzip
- Approximation durch finite Differenzen

4 Die dreidimensionale Wärmeleitungsgleichung als ARWP
- Wie schnell kühlt eine Kugel über ihren Rand ab?
- Anwendungsbeispiele aus Küche, Keller, Krimi
- Fazit: Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

Motivation und Zielsetzung

Die **Wärmeleitungsgleichung** oder **Diffusionsgleichung** im $\mathbb{R}^3$ lautet:

$$\partial_t u(t,x,y,z) - \kappa\,\Delta u(t,x,y,z) = q(t,x,y,z) \quad \text{mit} \quad \Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$$

Typischerweise ist u die Wärmedichte und q die Wärmeleistungsdichte, jeweils abhängig von der Zeit $t \geq 0$ und dem Ort $(x,y,z) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$.
Die Konstante $\kappa > 0$ ist die Temperaturleitfähigkeit des Materials.

Diese Gleichung tritt in vielen Anwendungen und den verschiedensten Kontexten auf, nicht zuletzt löst Google zur Bewertung von Webseiten eine diskrete Version der Wärmeleitung auf dem Linkgraphen. T453

Sie ist eine partielle Differentialgleichung, linear zweiter Ordnung, und das archetypische Beispiel einer **parabolischen** Differentialgleichung.

☺ Die Wärmeleitungsgleichung folgt aus der Energieerhaltung, dem Gaußschen Integralsatz und Fouriers Gesetz der Wärmeleitung.
Zur Wiederholung wollen wir mit dieser Herleitung beginnen.

☺ Die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung können wir explizit angeben. Sie wird Wärmeleitungskern genannt und beschreibt allgemein, explizit und quantitativ die freie Wärmeausbreitung im $\mathbb{R}^n$.

Motivation und Zielsetzung

Zur Vereinfachung betrachten wir zunächst den **eindimensionalen Fall**:

$$\partial_t u(t,x) - \kappa\,\partial_x^2 u(t,x) = q(t,x)$$

Für $q = 0$ erhalten wir die **homogene Wärmeleitungsgleichung**:

$$\partial_t u(t,x) - \kappa\,\partial_x^2 u(t,x) = 0$$

Die zeitliche Ableitung ist proportional zur zweiten räumlichen Ableitung.
Diese entspricht der räumlichen Krümmung von u (konkav / konvex):
Genau dann gilt $\partial_t u(t,x) = 0$, wenn $\partial_x^2 u(t,x) = 0$. In diesem Falle ist $x \mapsto u(t,x)$ eine Gerade; überall fließt genauso viel Wärme ab wie zu.

Das Lösungsverfahren verläuft nach einem bewährten Schema:
Durch den Produktansatz $u(t,x) = v(t)w(x)$ trennen wir die Variablen.
Für räumlich begrenzte Wärmeverteilungen müssen wir zusätzlich Randbedingungen berücksichtigen, etwa $u(t,0) = u(t,L) = 0$.

Zur Lösung der vorgegebenen Anfangswerte $u(0,x)$ nutzen wir unsere Kenntnisse und Vorarbeit zu Fourier–Reihen. Hierzu hat Fourier seine Theorie ursprünglich entwickelt. Alles fügt sich wunderbar zusammen!

Fouriers Wärmeleitungsgleichung

Ziel: Wie berechnen wir den Wärmefluss in einem Körper?

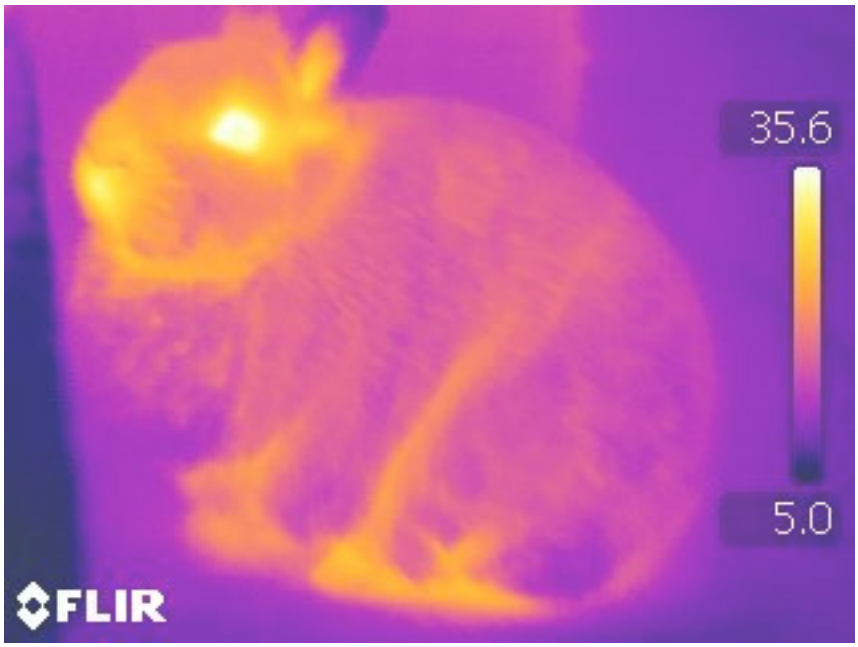


Bild- und Wärmequelle: Momo

Wärmebilanz für $K =$ Kaninchen bei $t \in$ Winter

Wir betrachten ein Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ und ein Zeitintervall $I = [t_0, t_1]$ und suchen eine Beziehung zwischen Wärmeleistungsdichte $q : I \times \Omega \to \mathbb{R}$, Wärmedichte $u : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ und Wärmefluss $\vec{f} : I \times \Omega \to \mathbb{R}^3$.

Fouriers Wärmeleitungsgleichung

Aufgabe: (1) Sei $K \Subset \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ kompakt, etwa ein Würfel. Formulieren Sie die Wärmebilanz für K in Worten und als Volumen-/Flussintegrale.

(2) Formen Sie dies um zu einem einzigen Volumenintegral.

(3) Folgern Sie hieraus die zugehörige Differentialgleichung.

(4) Vereinfachen Sie schließlich durch die Annahme $\vec{f} = -\kappa \nabla u$.

Lösung: (1) Für jedes Kompaktum $K \Subset \Omega$ gilt die Wärmebilanz:

Von den Wärmequellen in K zugeführte Energie
$=$ Zuwachs der in K enthaltenen Wärmeenergie
$+$ Wärmefluss über den Rand von K nach außen

Als Integralgleichung formuliert bedeutet dies:

$$\iiint_K q(t,x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_K u(t,x)\,\mathrm{d}x + \oiint_{S=\partial K} \vec{f}(t,x) \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S$$

Alle Funktionen seien so oft stetig differenzierbar wie in der folgenden Rechnung benötigt. Ich greife hier schon mal vor: q sei stetig, f einmal stetig diff'bar, u zweimal stetig diff'bar.

Fouriers Wärmeleitungsgleichung

(2) Mit Gauß (G3G) verwandeln wir Flussintegrale in Volumenintegrale:

$$\oiint_{S=\partial K} \vec{f}(t,x) \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S \overset{\text{Gauß}}{\underset{\text{G3G}}{=}} \iiint_K \nabla \cdot \vec{f}(t,x)\,\mathrm{d}x$$

Dürfen wir die Ableitung unters Integral ziehen? K kompakt, $\partial_t u$ stetig!

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_K u(t,x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Kpkt}}{\underset{\text{D3C}}{=}} \iiint_K \frac{\partial}{\partial t} u(t,x)\,\mathrm{d}x$$

Dank Linearität des Integrals erhalten wir ein einziges Volumenintegral:

$$\iiint_K \left[\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) + \nabla \cdot \vec{f}(t,x) - q(t,x)\right] \mathrm{d}x = 0.$$

(3) Diese lokale Wärmebilanz gilt für jedes Kompaktum $K \Subset \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$.
Das gilt genau dann, wenn der (stetige!) Integrand verschwindet (H1A):

$$\boxed{\partial_t u(t,x) + \nabla \cdot \vec{f}(t,x) = q(t,x)}$$

Diese Gleichung gilt überall dort, wo etwas entsteht (q), gespeichert wird (u) und fließt ($\vec{f}$). Die Wärmeleitungsgleichung heißt deshalb auch Diffusionsgleichung und tritt in vielfältigen Anwendungen auf. Wir werden sie am Ende des Semesters mit Fourier–Theorie lösen können. Spezialfall: Für $q = 0$ sowie $u = \varrho$ und $\vec{f} = \varrho\vec{v}$ erhalten wir erneut die Kontinuitätsgleichung.

Fouriers Wärmeleitungsgleichung

(4) Wärme fließt von warm nach kalt, genauer $\vec{f} = -\kappa\,\nabla u$. Einsetzen:

$$\partial_t u(t,x) + \nabla \cdot \big[-\kappa\,\nabla u(t,x)\big] = q(t,x)$$

Mit dem Laplace–Operator $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ schreiben wir dies kurz

$$\partial_t u - \kappa\,\Delta u = q \quad \text{mit} \quad \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2.$$

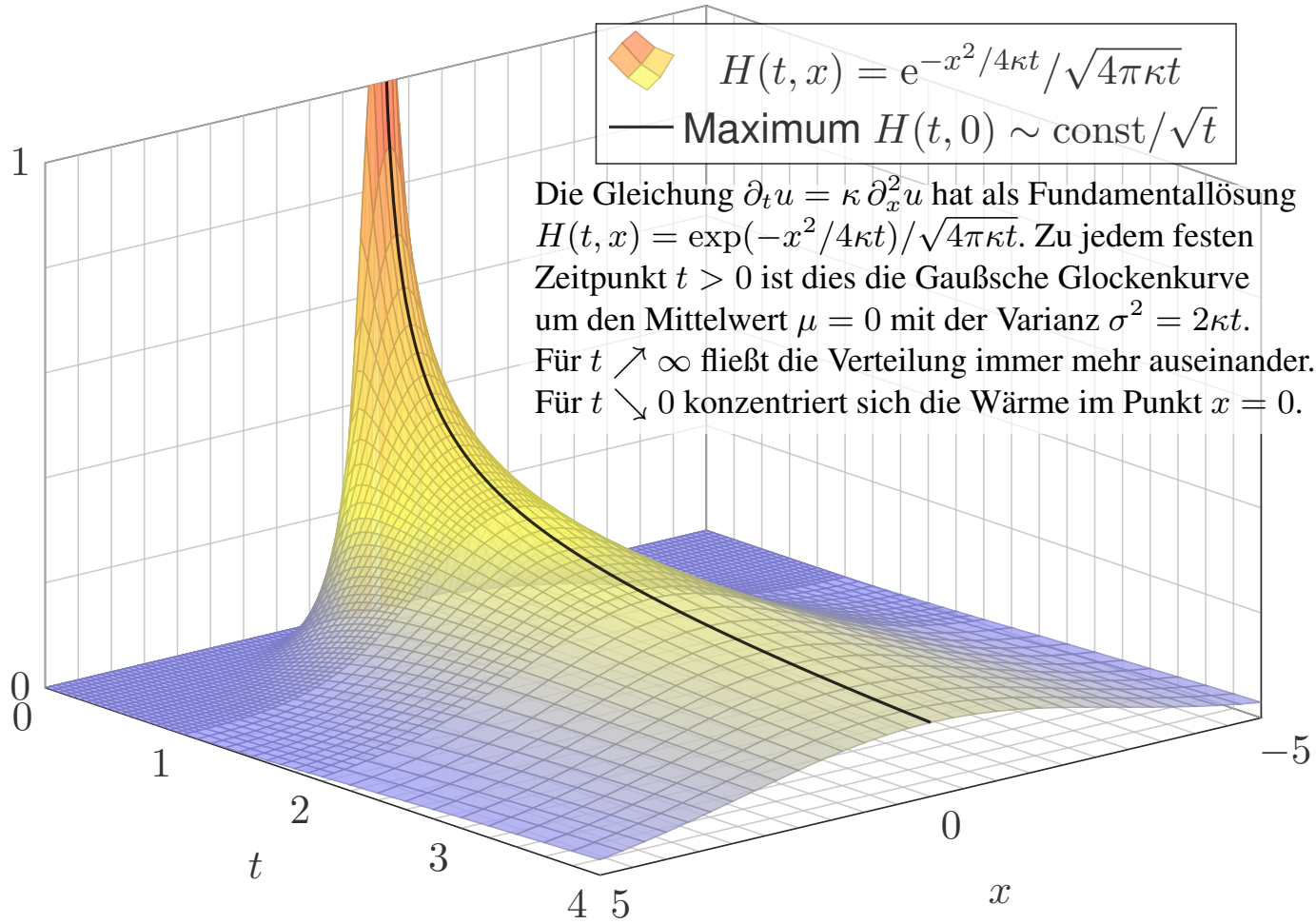
Physikalische Begründung: Wärme ist (vereinfacht) proportional zur Temperatur T, genauer $u = \varrho c T$ mit Dichte ϱ und Wärmekapazität c. Sie fließt proportional zur Temperaturdifferenz, also $\vec{f} = -\lambda\,\nabla T$ mit Wärmeleitfähigkeit λ. Demnach gilt $\vec{f} = -\kappa\,\nabla u$ mit $\kappa := \lambda/(\varrho c)$. S223
Zur Vereinfachung sei hier die Temperaturleitfähigkeit $\kappa(t,x)$ räumlich konstant und isotrop.

Wir erhalten so Fouriers berühmte **Wärmeleitungsgleichung** (1822):

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\,\Delta u = q \quad \text{mit} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}}$$

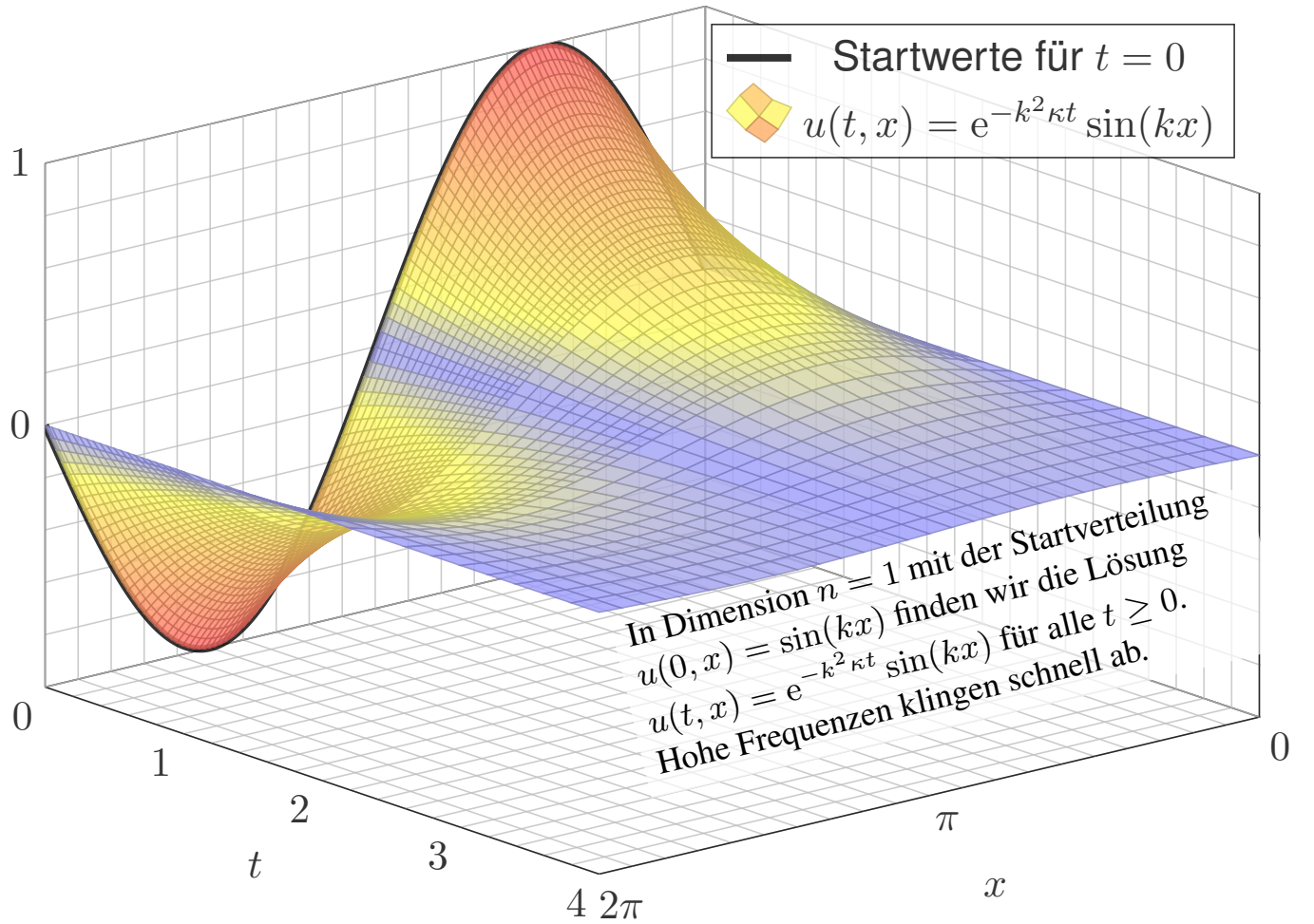
Dies ist eine lineare partielle Differentialgleichung in u (links) mit Inhomogenität q (rechts). Sie beschreibt, wie sich die Wärme in einem Körper ausbreitet. Joseph Fourier (1768–1830) hat sie in seiner Arbeit *Théorie analytique de la chaleur* 1822 erstmals eingehend untersucht und hierzu die nach ihm benannte Fourier–Theorie entwickelt, mit der wir uns dieses Semester beschäftigen. Gesucht ist u, gegeben sind Anfangswerte und q. Wie sehen die Lösungen aus? Im homogenen Fall ohne Quellen ($q = 0$) können wir die Fundamentallösung angeben! D516

Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung



Die Gleichung $\partial_t u = \kappa\, \partial_x^2 u$ hat als Fundamentallösung $H(t,x) = \exp(-x^2/4\kappa t)/\sqrt{4\pi\kappa t}$. Zu jedem festen Zeitpunkt $t > 0$ ist dies die Gaußsche Glockenkurve um den Mittelwert $\mu = 0$ mit der Varianz $\sigma^2 = 2\kappa t$. Für $t \nearrow \infty$ fließt die Verteilung immer mehr auseinander. Für $t \searrow 0$ konzentriert sich die Wärme im Punkt $x = 0$.

Eigenlösungen der Wärmeleitungsgleichung



In Dimension $n = 1$ mit der Startverteilung $u(0,x) = \sin(kx)$ finden wir die Lösung $u(t,x) = \mathrm{e}^{-k^2\kappa t}\sin(kx)$ für alle $t \geq 0$.
Hohe Frequenzen klingen schnell ab.

Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Satz S1A: Lösung des Cauchy–Problems, ∃&E

Zu lösen sei die homogene Wärmeleitungsgleichung (als AWP)

$$\begin{aligned} &\partial_t u(t,x) - \kappa\,\Delta u(t,x) = 0 && \text{für alle } t>0 \text{ und } x\in\mathbb{R}^n,\\ &u(0,x) = u_0(x) && \text{Anfangswerte für } x\in\mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Gegeben sei $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig mit Schranke $|u_0(x)| \le a\,\mathrm{e}^{b|x|^\alpha}$, $\alpha < 2$.

Existenz: Dann wird unser Problem gelöst durch das Integral

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} H(t, x-\xi)\, u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi \quad \text{für } t>0.$$

Zu jedem $T>0$ gilt eine Schranke $|u(t,x)| \le A\,\mathrm{e}^{B|x|^2}$ auf $[0,T]\times\mathbb{R}^n$.

Eindeutigkeit: Unsere Lösung u ist die einzige mit dieser Schranke.

Ausführlich bedeutet das: Sind $\tilde u, \check u : [0,T]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zwei Lösungen mit Abstand beschränkt durch $|\tilde u(t,x) - \check u(t,x)| \le A\,\mathrm{e}^{Bx^2}$, so gilt $\tilde u = \check u$.

Warnendes Beispiel: Tychonovs exotische Lösung

Satz S1B: exotische Lösung, Tychonov 1935

Sei $\alpha > 1$. Wir kennen (von Seite B438) die C^∞–glatte Funktion

$$g \,:\, \mathbb{R}\to\mathbb{R} \,:\, t \mapsto g(t) := \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/t^\alpha} & \text{für } t>0,\\ 0 & \text{für } t\le 0. \end{cases}$$

Zu $\kappa > 0$ konstruieren wir daraus

$$u \,:\, \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,:\, (t,x) \mapsto u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(t)}{\kappa^n} \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Diese Reihe konvergiert in jedem Punkt $(t,x)\in\mathbb{R}^2$. Die so definierte Funktion u ist C^∞–glatt, und wir dürfen termweise ableiten. Daher gilt

$$\begin{aligned} &\partial_t u(t,x) - \kappa\,\partial_x^2 u(t,x) = 0 && \text{für alle } t>0 \text{ und } x\in\mathbb{R},\\ &u(0,x) = 0 && \text{Anfangswerte für } x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

⚠ Die Nullfunktion erfüllt ebenso dieses AWP, aber dennoch gilt $u \ne 0$. Eindeutigkeit S1A greift nicht, denn $u(t,x)$ wächst schneller als $A\,\mathrm{e}^{Bx^2}$.

Lösung durch Fourier–Transformation

Zu lösen sei die **inhomogene Wärmeleitungsgleichung** (als AWP)

$$\begin{array}{ll} \partial_t u(t,x) - \kappa\,\partial_x^2 u(t,x) = f(t,x) & \text{für alle } t>0 \text{ und } x\in\mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{Anfangswerte für } x\in\mathbb{R}. \end{array}$$

Gegeben sind $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$, gesucht ist $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$. Randwerte sind hier nicht vorgegeben, wir arbeiten unbegrenzt auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe: Lösen Sie dies durch Fourier–Transformation bezüglich x. Welche Rechenregeln nutzen / welche Voraussetzungen benötigen Sie?

☺ Unser Ziel ist zunächst, eine Lösung $u(t,x)$ in Form einer expliziten Integralformel zu finden. Ist dies gelungen, so können wir den gewählten Rechenweg präzisieren oder die Formel eigenständig untersuchen.

⚠ Die hier verwendeten Sätze und Rechenregeln benötigen gewisse Voraussetzungen. Gehen Sie in einem ersten Durchgang davon aus, dass alle Voraussetzungen erfüllt sind. Diese sind schließlich in einem zweiten Durchgang nachzuprüfen. Genaueres erklärt der folgende Satz.

Lösung durch Fourier–Transformation

Lösung: (1) Wir transformieren und nutzen den Ableitungssatz K2A:

$$u(t,x) \circ\!\!-\!\!\bullet\, U(t,\xi), \qquad u_0(x) \circ\!\!-\!\!\bullet\, U_0(\xi), \qquad f(t,x) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(t,\xi)$$

$$\partial_t u(t,x) = \kappa\,\partial_x^2 u(t,x) + f(t,x) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \underbrace{\partial_t U(t,\xi)}_{y'(t)} = \underbrace{-\kappa\,\xi^2}_{a}\,\underbrace{U(t,\xi)}_{y(t)} + \underbrace{F(t,\xi)}_{b(t)}$$

(2) Diese lineare Differentialgleichung in t mit Parameter ξ löst M2E:

$$U(t,\xi) = \mathrm{e}^{-\kappa\xi^2 t}\,U_0(\xi) + \int_{\tau=0}^{t} \mathrm{e}^{-\kappa\xi^2(t-\tau)} F(\tau,\xi)\,\mathrm{d}\tau$$

(3) Wir kennen die (Rück)Transformation der Glockenkurve aus K1F:

$$\mathrm{e}^{-\kappa\xi^2 t} \bullet\!\!-\!\!\circ\, \mathrm{e}^{-x^2/4\kappa t}/\sqrt{2\kappa t} \;=\; H(t,x)\sqrt{2\pi}$$

(4) Das Produkt (rück)transformiert zur Faltung gemäß Satz K2B:

$$\widehat{f}(\xi)\cdot\widehat{g}(\xi) \bullet\!\!-\!\!\circ\, (f*g)(x)/\sqrt{2\pi}$$

(5) Wir erhalten so schließlich die ersehnte Lösung dank Fubini C1E:

$$\boxed{u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} H(t,x-\xi)\,u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} H(t-\tau,x-\xi) f(\tau,\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau}$$

Inhomogene Wärmeleitungsgleichung

Die eindimensionale inhomogene Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u(t,x) - \kappa\,\partial_x^2 u(t,x) = f(t,x)$ mit rechter Seite $f(t,x)$ und Anfangswert $u(0,x) = 0$ wird gelöst durch das Integral

$$u(t,x) = \int_{\tau=0}^{t} \int_{\xi\in\mathbb{R}} H(t-\tau, x-\xi)\, f(\tau,\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau.$$

Anschaulich ist $H(t-\tau, x-\xi)$ eine Fundamentallösung, die verschoben in (τ,ξ) startet. Wenn man diese Formel erst einmal vermutet, dann kann man sie auch direkt nachprüfen:

$$\frac{1}{t-t_0}\int_{\tau=t_0}^{t} \int_{\mathbb{R}} H(t-\tau, x-\xi)\, f(\tau,\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau \quad\to\quad f(t,x) \quad \text{für } t_0 \nearrow t.$$

Dieser Grenzwert ist anschaulich plausibel. Die genaue Rechnung benötigt als Voraussetzung, dass f nicht nur beschränkt und stetig, sondern sogar Hölder–stetig ist: Auf jedem Kompaktum in $\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}$ gilt die lokale Schranke $|f(t,x) - f(t',x')| \le C\big[|t-t'|^{\alpha/2} + |x-x'|^{\alpha}\big]$ für geeignete Konstanten $C,\delta,\alpha > 0$ und alle Punkte mit Abstand $|t-t'| < \delta$ und $|x-x'| < \delta$. Hinreichend aber wesentlich stärker: f ist Lipschitz–stetig oder sogar stetig differenzierbar.

Anschließend bleibt die Ableitung unter dem Integral gemäß der Leibniz–Regel D3B:

$$\partial_t u(t,x) = f(t,x) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \partial_t H(t-\tau, x-\xi)\, f(\tau,\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau$$

$$\partial_x^2 u(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \partial_x^2 H(t-\tau, x-\xi)\, f(\tau,\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau$$

Die Differenz ist $\partial_t u(t,x) - \kappa\,\partial_x^2 u(t,x) = f(t,x)$, denn $\partial_t H(t,x) - \kappa\,\partial_x^2 H(t,x) = 0$.

Inhomogene Wärmeleitungsgleichung

Satz S1C: Lösung der inhomogenen Wärmeleitung, ∃&E

Zu lösen sei die inhomogene Wärmeleitungsgleichung (als AWP)

$$\boxed{\begin{array}{ll} \partial_t u(t,x) - \kappa\,\Delta u(t,x) = f(t,x) & \text{für alle } t>0 \text{ und } x\in\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{Anfangswerte für } x\in\mathbb{R}^n. \end{array}}$$

Gegeben sei $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig mit Schranke $|u_0(x)| \le a\,\mathrm{e}^{b|x|^\alpha}$, $\alpha < 2$ sowie $f : \mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ beschränkt und stetig differenzierbar, $f \in C_b^1$.

Existenz: Dann wird unser Problem gelöst durch das Integral

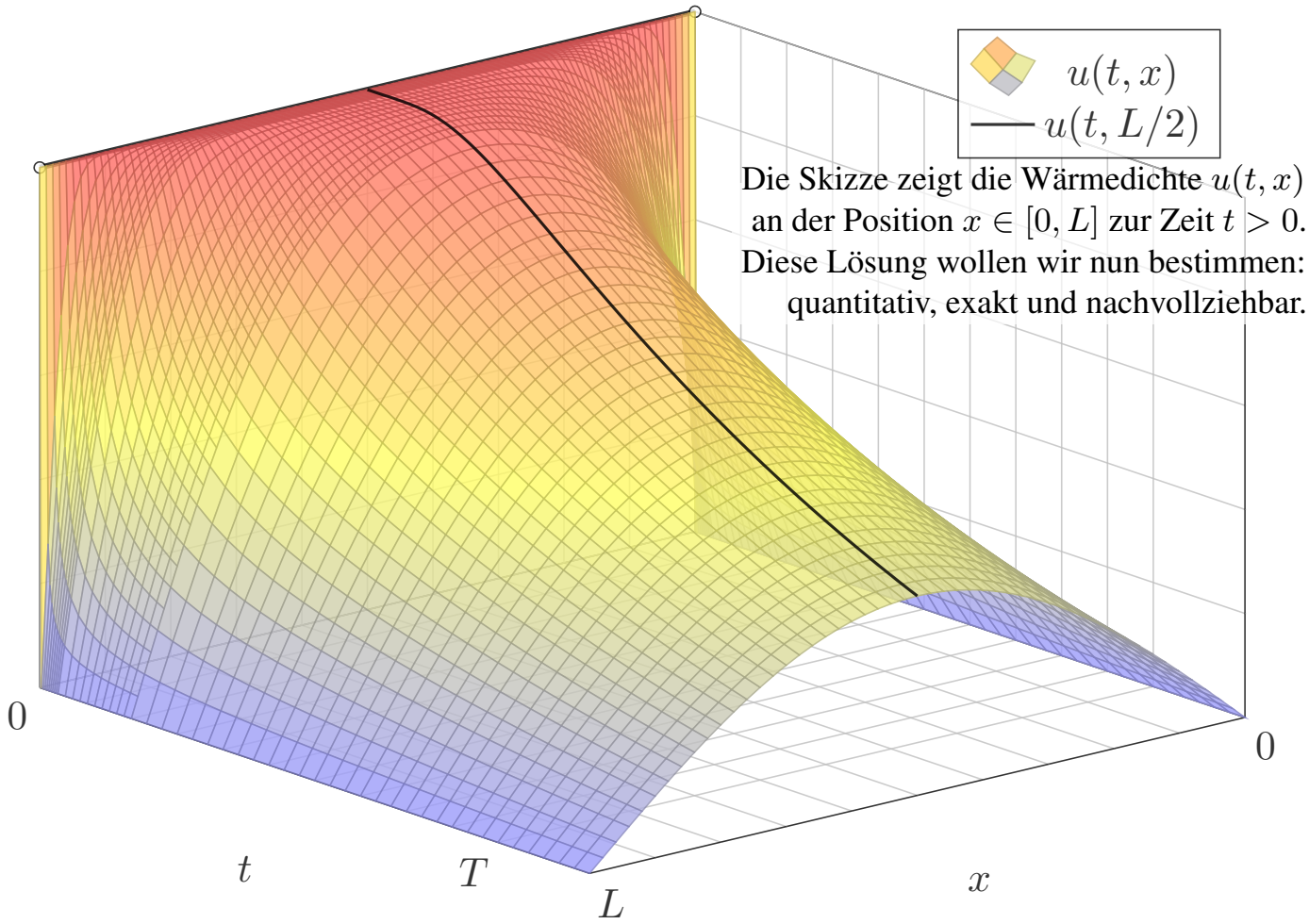
$$\boxed{u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} H(t, x-\xi)\, u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} H(t-\tau, x-\xi) f(\tau,\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau.}$$

Zu jedem $T > 0$ gilt eine Schranke $|u(t,x)| \le A\,\mathrm{e}^{B|x|^2}$ auf $[0,T]\times\mathbb{R}^n$.

Eindeutigkeit: Unsere Lösung u ist die einzige mit dieser Schranke.

⚠ Ohne diese Schranke gibt es exotische Gegenbeispiele wie S1B.

Wie schnell kühlt ein Stab über seine Enden ab?



Die Skizze zeigt die Wärmedichte $u(t,x)$ an der Position $x \in [0,L]$ zur Zeit $t > 0$. Diese Lösung wollen wir nun bestimmen: quantitativ, exakt und nachvollziehbar.

Die homogene Wärmeleitungsgleichung

Aufgabe: Lösen Sie die homogene Wärmeleitungsgleichung (ARWP)

$\partial_t u(t,x) - \kappa\, \partial_x^2 u(t,x) = 0$	für alle $t > 0$ und $0 < x < L$,
$u(t,0) = u(t,L) = 0$	Randbedingungen für $t \geq 0$,
$u(0,x) = g(x)$	Anfangswerte für $0 < x < L$.

Dies ist ein Anfangsrandwertproblem (ARWP). Gesucht sind Funktionen $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0,L] \to \mathbb{R}$, die obige Gleichungen erfüllen. Dazu sei u stetig auf $\mathbb{R}_{\geq 0} \times [0,L]$, eventuell bis auf die Ecken $(0,0)$ und $(0,L)$, und differenzierbar auf $\mathbb{R}_{>0} \times]0,L[$, einmal nach t und zweimal nach r. Der Anfangswert $u(0,x) = g(x)$ gibt die Wärmedichte zur Zeit $t = 0$ in jedem Punkt x vor. Der Randwert $u(t,0) = u(t,L) = 0$ bedeutet, dass wir an den Stabrändern die Wärmedichte u konstant auf Null halten, etwa durch Kontakt mit einem großen Reservoir konstanter Temperatur.

Lösung: (0) Wir separieren die Variablen durch den Produktansatz

$$u(t,x) = v(t)\, w(x).$$

Damit entkoppeln wir unsere PDE in zwei ODE / Eigenprobleme:

$$v'(t)\, w(x) = \kappa\, v(t)\, w''(x) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\kappa}\, \frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Trennung der Variablen durch Produktansatz

Die linke Seite der Gleichung hängt nur von t ab, die rechte nur von x. Da wir t und x unabhängig variieren können, sind beide Seiten konstant, also gleich einer gemeinsamen Konstanten $\lambda \in \mathbb{R}$, siehe Satz R1D.

Aus unserer *partiellen* Differentialgleichung (PDE)

$$\boxed{\partial_t u(t,x) = \kappa\, \partial_x^2 u(t,x)}$$

erhalten wir so zwei *gewöhnliche* Differentialgleichungen (ODE):

$$\boxed{v'(t) = \kappa\lambda\, v(t) \quad \text{und} \quad w''(x) = \lambda\, w(x)}$$

mit einer noch unbekannten Separationskonstanten $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Teilproblem: $w''(x) = \lambda\, w(x)$ mit Randbedingung $w(0) = w(L) = 0$

2. Teilproblem: $v'(t) = \kappa\lambda\, v(t)$ mit derselben Kopplungskonstanten λ

☺ Diese Eigenwertprobleme sind gewöhnliche Differentialgleichungen, zudem linear mit konstanten Koeffizienten, also leicht zu lösen!

☺ Beide Teilprobleme sind über die Separationskonstante λ gekoppelt. Wir lösen beide getrennt und führen sie anschließend zusammen...

Bestimmung der Ortsfunktion $w(x)$

(1) Wir lösen zunächst das erste Teilproblem: $w''(x) - \lambda\, w(x) = 0$

1. Fall: $\lambda = 0$, also $w''(x) = 0$. Allgemeine Lösung:

$$w(x) = a + bx \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Einsetzen in die vorgegebenen Randbedingungen:

$$w(0) = a \overset{!}{=} 0 \quad \text{und} \quad w(L) = a + bL \overset{!}{=} 0$$

☹ Hieraus folgt $a = b = 0$. Es gibt nur die triviale Lösung!

2. Fall: $\lambda = \alpha^2 > 0$, also $w''(x) - \alpha^2 w(x) = 0$. Allgemeine Lösung:

$$w(x) = a\,\mathrm{e}^{\alpha x} + b\,\mathrm{e}^{-\alpha x} \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Einsetzen in die vorgegebenen Randbedingungen:

$$w(0) = a + b \overset{!}{=} 0 \quad \text{und} \quad w(L) = a\,\mathrm{e}^{\alpha L} + b\,\mathrm{e}^{-\alpha L} \overset{!}{=} 0$$

☹ Hieraus folgt $a = b = 0$. Es gibt nur die triviale Lösung!

Bestimmung der Ortsfunktion $w(x)$

3. Fall: $\lambda = -\omega^2 < 0$, also $w''(x) + \omega^2 w(x) = 0$. Allgemeine Lösung:

$$w(x) = a\sin(\omega x) + b\cos(\omega x) \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}$$

Einsetzen in die vorgegebenen Randbedingungen:

$$w(0) = b \overset{!}{=} 0 \quad \text{und} \quad w(L) = a\sin(\omega L) \overset{!}{=} 0$$

☹ Für $a = 0$ erhalten wir erneut die triviale Lösung.

☺ Für $a \neq 0$ benötigen wir $\sin(\omega L) = 0$, also $\omega L = n\pi$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Damit haben wir das erste Teilproblem vollständig gelöst:

$$w''(x) = \lambda\, w(x) \quad \text{mit} \quad w(0) = w(L) = 0$$

Als einzige nicht-triviale Lösungen erhalten wir

$$\boxed{w_n(x) = a_n \sin(n\pi x/L) \qquad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots.}$$

Diese Lösung gehört zur Separationskonstanten $\lambda_n = -(n\pi/L)^2$.

Bestimmung der Zeitfunktion $v(t)$

(1) **Erstes Eigenproblem:** $w''(x) = \lambda\, w(x)$ mit $w(0) = w(L) = 0$

Lösungen: $w_n(x) = \sin(n\pi x/L)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda = \lambda_n = -(n\pi/L)^2$

(2) **Zweites Eigenproblem:** $v'(t) = \kappa\lambda\, v(t)$ mit $\lambda = \lambda_n = -(n\pi/L)^2$

Lösung: $v_n(t) = \mathrm{e}^{-(n\pi/L)^2\kappa t} = \mathrm{e}^{-n^2 t/T}$ mit Abklingzeit $T = L^2/\kappa\pi^2$

(3) Zusammengesetzte Eigenfunktionen:

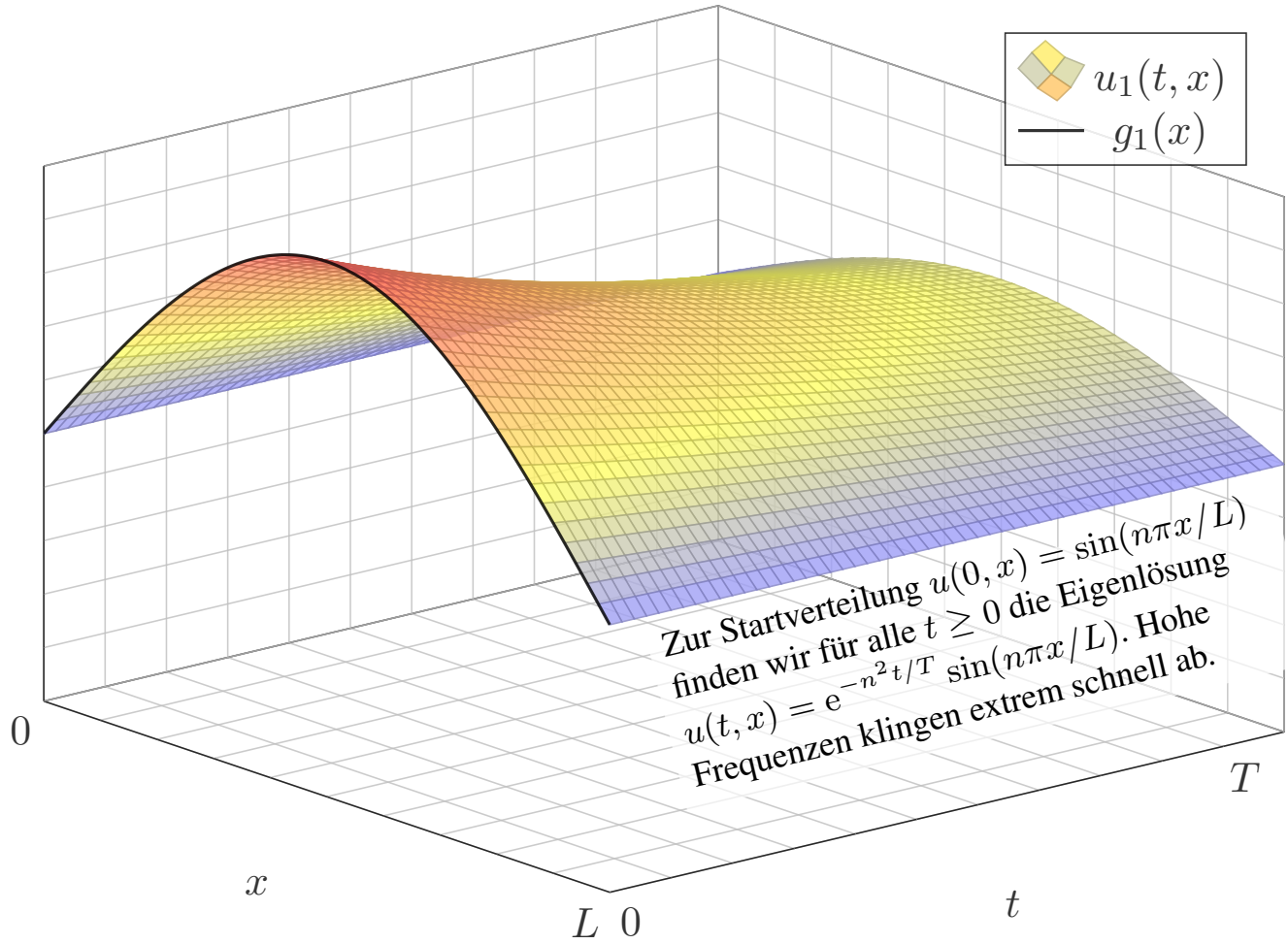
$$\boxed{u_n(t,x) \;=\; v_n(t)\, w_n(x) \;=\; \mathrm{e}^{-n^2 t/T} \sin(n\pi x/L)}$$

So finden wir zu unseren RWP alle Lösungen in Produktform.
Zudem gilt das Superpositionsprinzip für lineare Gleichungen:
Jede Linearkombination dieser Lösungen ist ebenfalls eine Lösung.
Wir können sogar zu Reihen übergehen, Konvergenz vorausgesetzt!

$$\boxed{u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(t,x)}$$

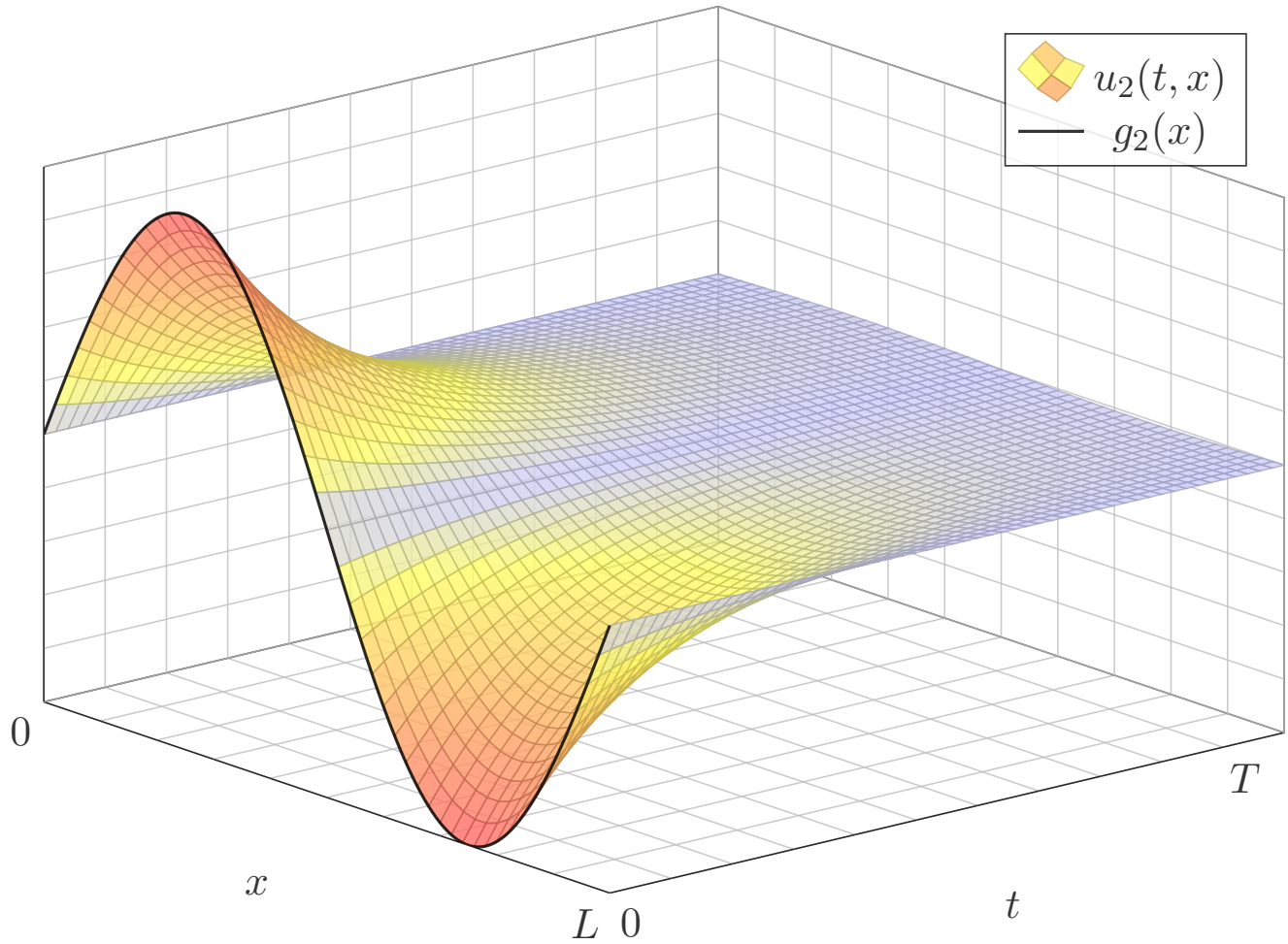
☺ Die Probe ist leicht: Es gilt $\partial_t u = \kappa\, \partial_x^2 u$ sowie $u(t,0) = u(t,L) = 0$.

Produktansatz: Eigenlösung $u_1(t,x)$

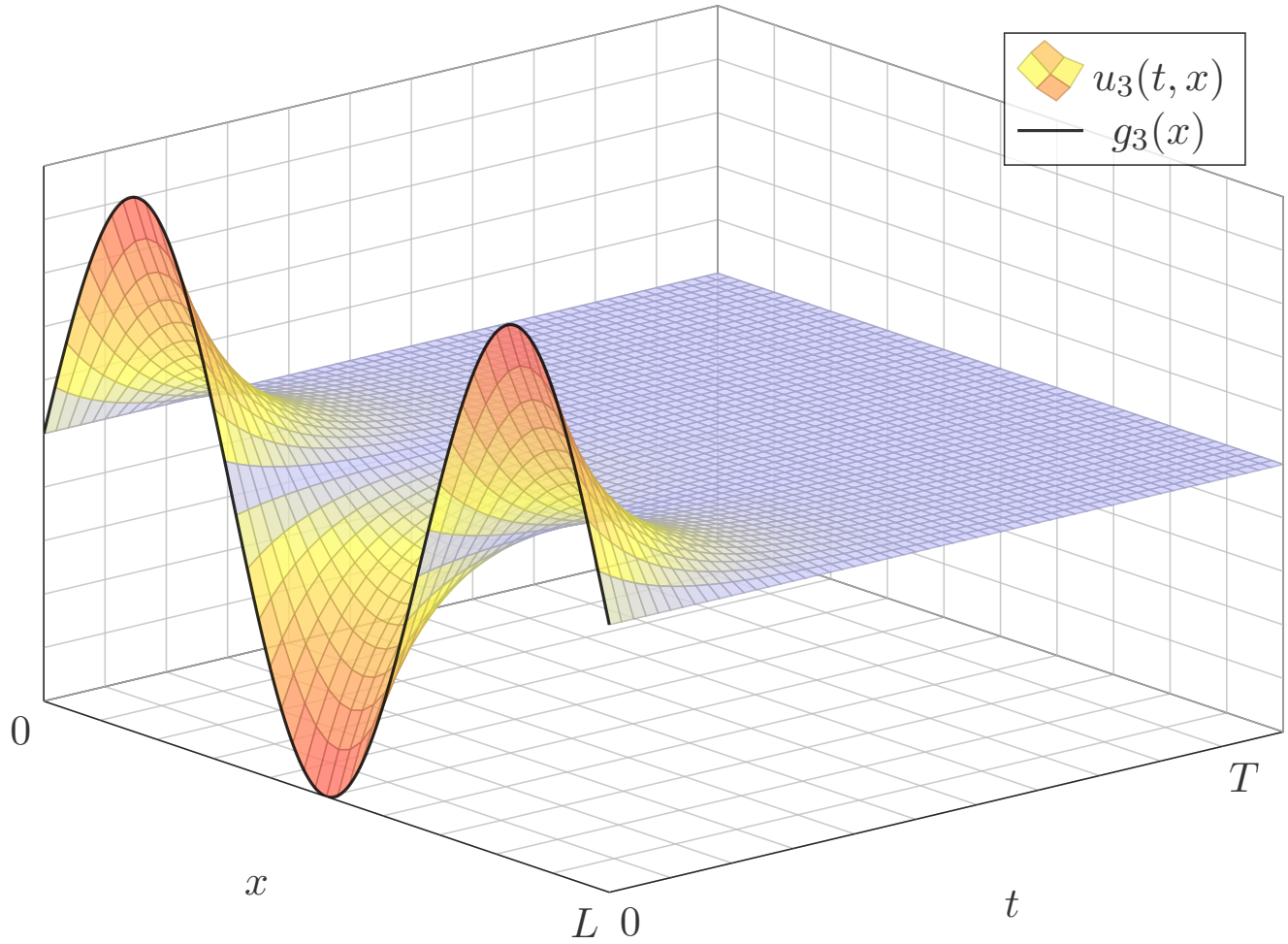


Zur Startverteilung $u(0,x) = \sin(n\pi x/\mathrm{L})$ finden wir für alle $\mathrm{t} \geq 0$ die Eigenlösung $u(\mathrm{t},x) = \mathrm{e}^{-n^2\mathrm{t}/T}\,\sin(n\pi x/L)$. Hohe Frequenzen klingen extrem schnell ab.

Produktansatz: Eigenlösung $u_2(t,x)$



Produktansatz: Eigenlösung $u_3(t,x)$



Lösung der Anfangsbedingungen

(4) Die allgemeine Lösung erhalten wir durch Superposition:

$$\boxed{u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, \mathrm{e}^{-n^2 t/T} \sin(n\pi x/L)}$$

Einsetzen der Startzeit $t = 0$ liefert die vorgegebenen Anfangswerte:

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\bigl(n\pi x/L\bigr) \overset{!}{=} g(x) \quad \text{für } 0 < x < L$$

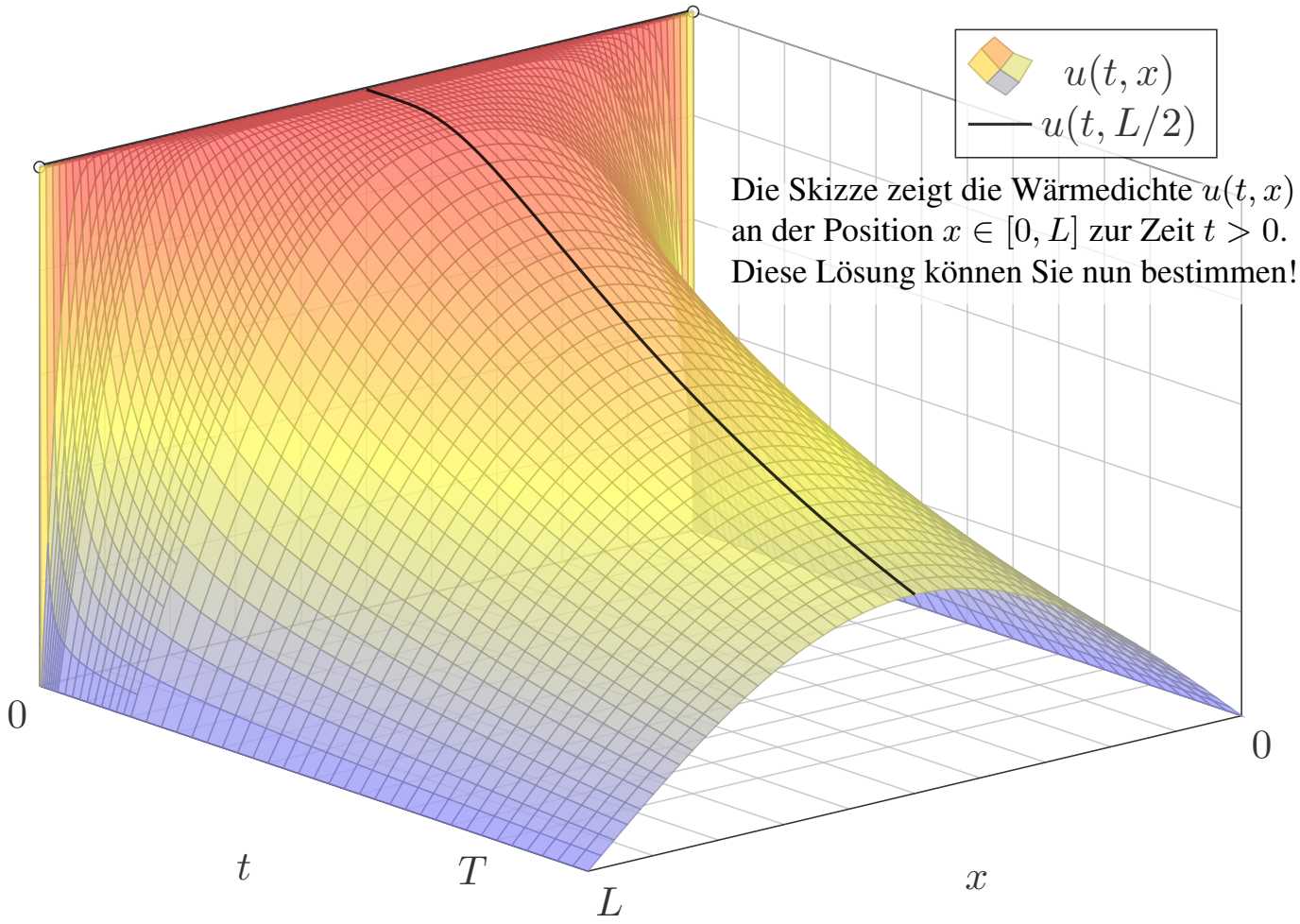
Hier sind $a_1, a_2, a_3, \ldots$ die Koeffizienten der Fourier–Sinusreihe von g.
Wir betrachten daher die ungerade Fortsetzung $\tilde{g}$ von g auf $[-L, L]$:

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{für } 0 < x < L, \\ -g(-x) & \text{für } -L < x < 0. \end{cases}$$

Anschließend berechnen wir die Fourier–Reihe für $\tilde{g} : [-L, L] \to \mathbb{R}$.
Die Koeffizienten a_n erhalten wir aus den Anfangsdaten g dank Fourier:

$$\boxed{a_n = \frac{2}{L} \int_{x=0}^{L} g(x) \, \sin\bigl(n\pi x/L\bigr) \, \mathrm{d}x}$$

Beispiel: Kühlung an den Rändern



Die Skizze zeigt die Wärmedichte $u(t,x)$ an der Position $x \in [0,L]$ zur Zeit $t > 0$. Diese Lösung können Sie nun bestimmen!

Beispiel: Kühlung an den Rändern

Aufgabe: Lösen Sie die homogene Wärmeleitungsgleichung (ARWP)

$\partial_t u(t,x) - \kappa\, \partial_x^2 u(t,x) = 0$	für alle $t > 0$ und $0 < x < L$,
$u(t,0) = u(t,L) = 0$	Randbedingungen für $t \geq 0$,
$u(0,x) = 1$	Anfangswerte für $0 < x < L$.

Lösung: Wir kennen bereits die allgemeine Lösung:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, \mathrm{e}^{-n^2 t/T} \sin(n\pi x/L)$$

Für $t = 0$ nutzen wir die Fourier–Entwicklung der Rechteckfunktion: I225

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x/L) \overset{!}{=} 1 \quad \text{mit} \quad a_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ gerade,} \\ 4/(n\pi) & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Die gesuchte Lösungsfunktion ist demnach

$$\boxed{u(t,x) = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(2k+1)^2 t/T} \, \frac{\sin\big((2k+1)\pi x/L\big)}{(2k+1)\pi}.}$$

Beispiel: Kühlung an den Rändern

Wie können wir mit der so gefundenen Lösung rechnen?
Ganz konkret: Wie wurden diese schönen Graphiken erstellt?

Die Reihe beschreibt die exakte Lösung und Approximationen

$$u(t,x) \approx 4\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-(2k+1)^2 t/T}\,\frac{\sin\big((2k+1)\pi x/L\big)}{(2k+1)\pi}$$

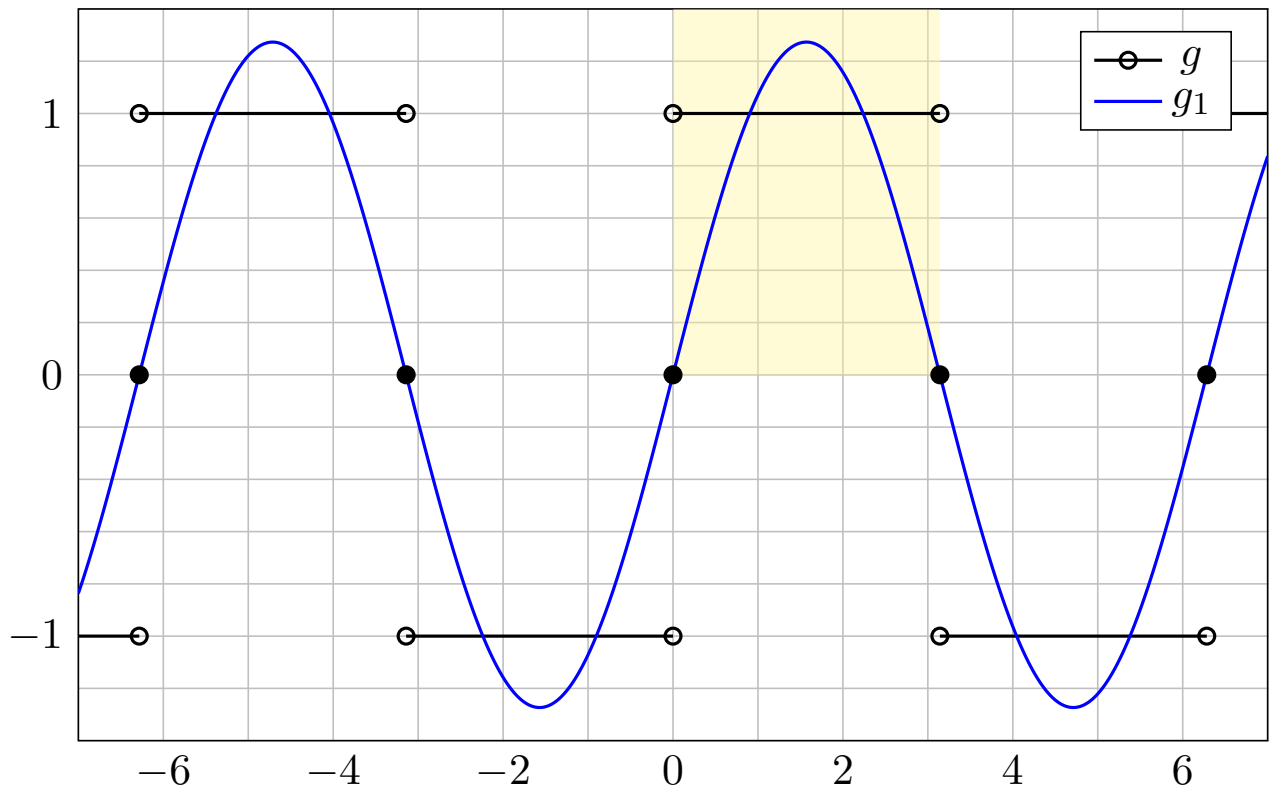
für $n = 1, 2, 3, \ldots$. Diese werden immer besser, sogar exakt für $n \to \infty$. Für die obige Graphik habe ich die Reihe bis $n = 30$ aufsummiert (und zudem nahe $t = 0$ geglättet; die folgenden Graphiken erklären warum.)

Eine wichtige und nützliche Eigenschaft der Wärmeleitung ist ihre Glättungseigenschaft: Eine „raue“ Funktion $g(x) = u(0,x)$ hat starke hohe Frequenzen. Diese klingen jedoch bei der Wärmeleitung für $t > 0$ besonders schnell ab. Zu $t = 0$ dürfen die Anfangsdaten beliebig rau sein, sogar unstetig, doch zu jedem Zeitpunkt $t > 0$ ist die Lösung glatt.

In obigem Beispiel sehen wir dies drastisch: $x \mapsto u(0,x)$ ist unstetig im Rand $x \in \{0, L\}$, doch für $t > 0$ ist $u(t,x)$ stetig, glatt, sogar analytisch!

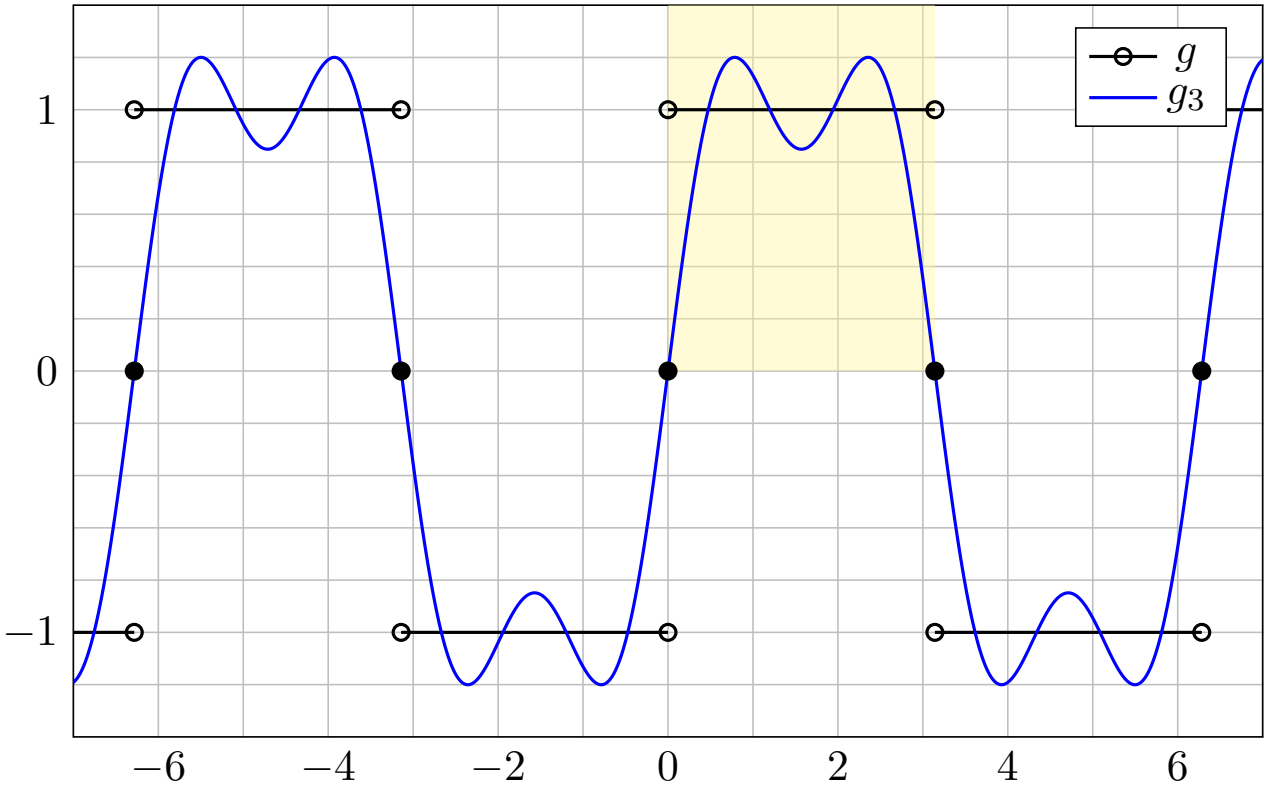
Fourier–Entwicklung von u_0 = Rechteckfunktion

$$g(x) \sim \frac{4}{\pi}\left[\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \frac{\sin(7x)}{7} + \frac{\sin(9x)}{9} + \ldots\right]$$



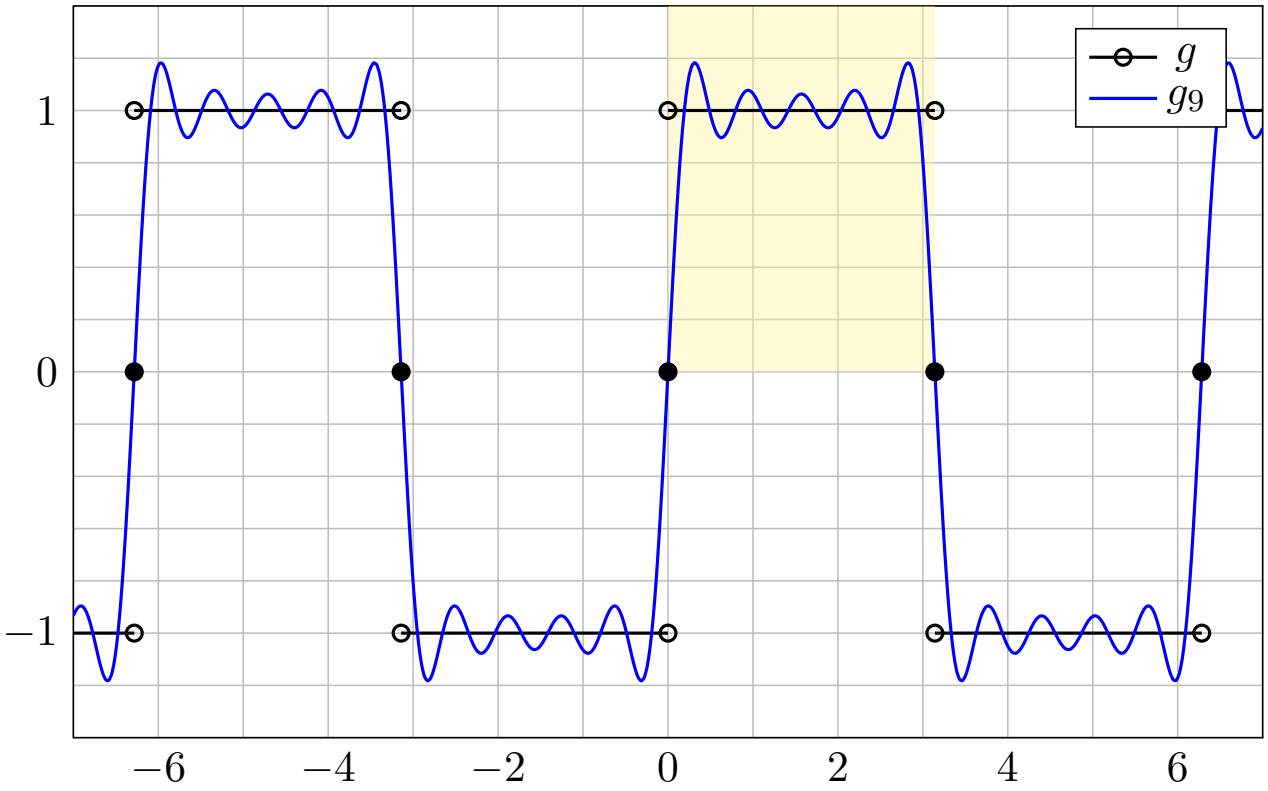
Fourier–Entwicklung von u_0 = Rechteckfunktion

$$g(x) \sim \frac{4}{\pi}\left[\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \frac{\sin(7x)}{7} + \frac{\sin(9x)}{9} + \dots\right]$$

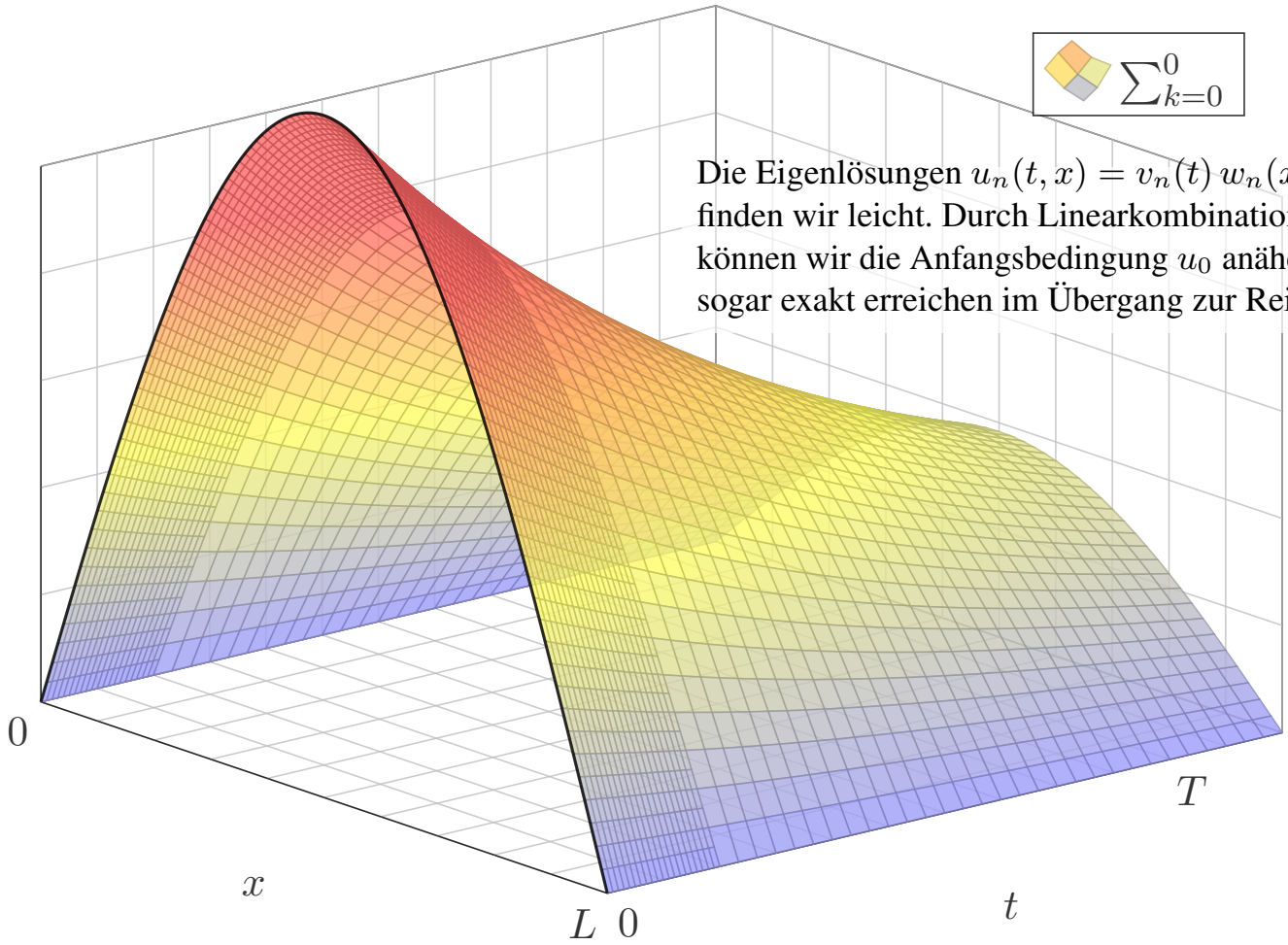


Fourier–Entwicklung von u_0 = Rechteckfunktion

$$g(x) \sim \frac{4}{\pi}\left[\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \frac{\sin(7x)}{7} + \frac{\sin(9x)}{9} + \dots\right]$$

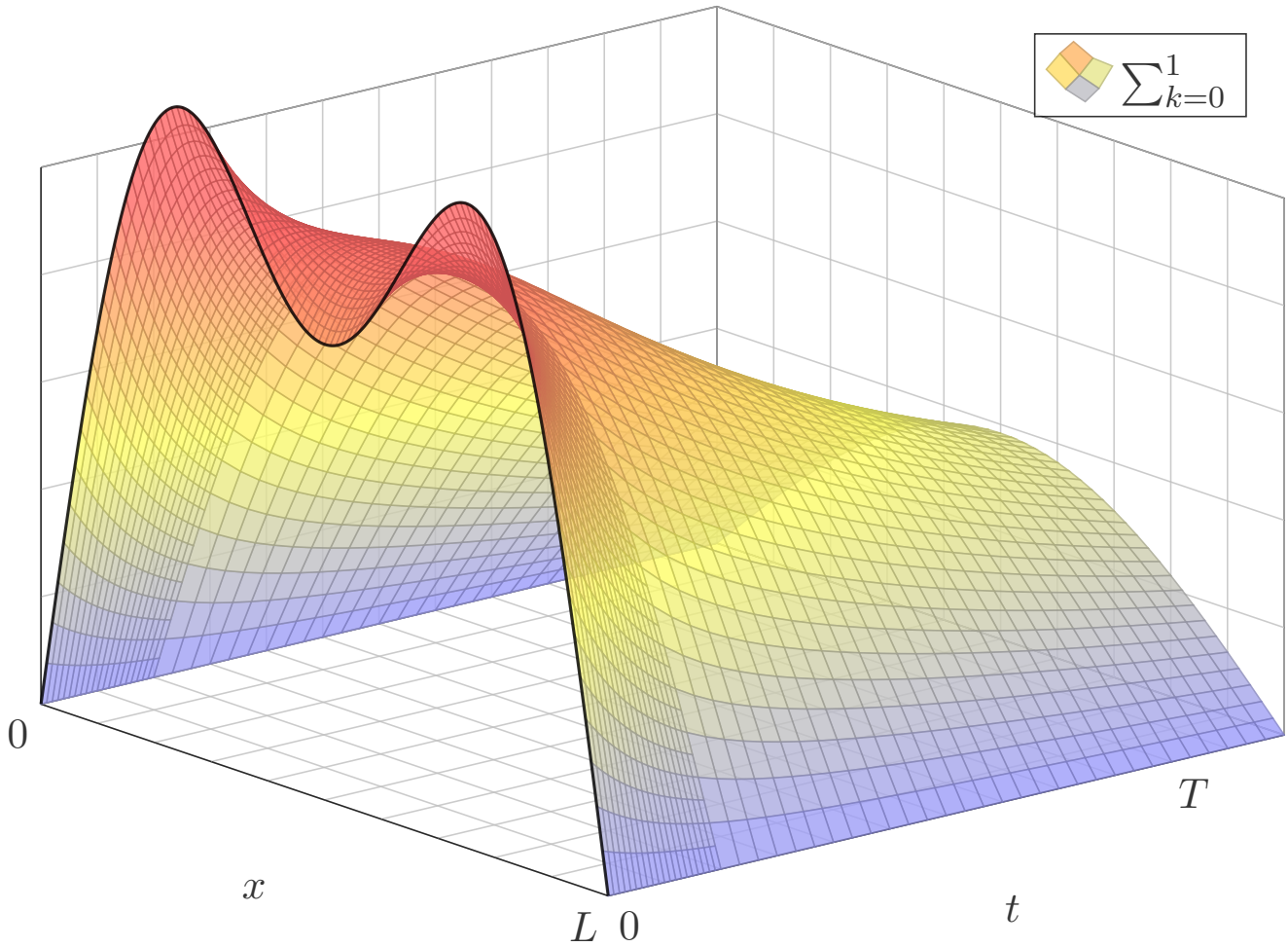


Fourier–Entwicklung von u_0 und Wärmeleitung

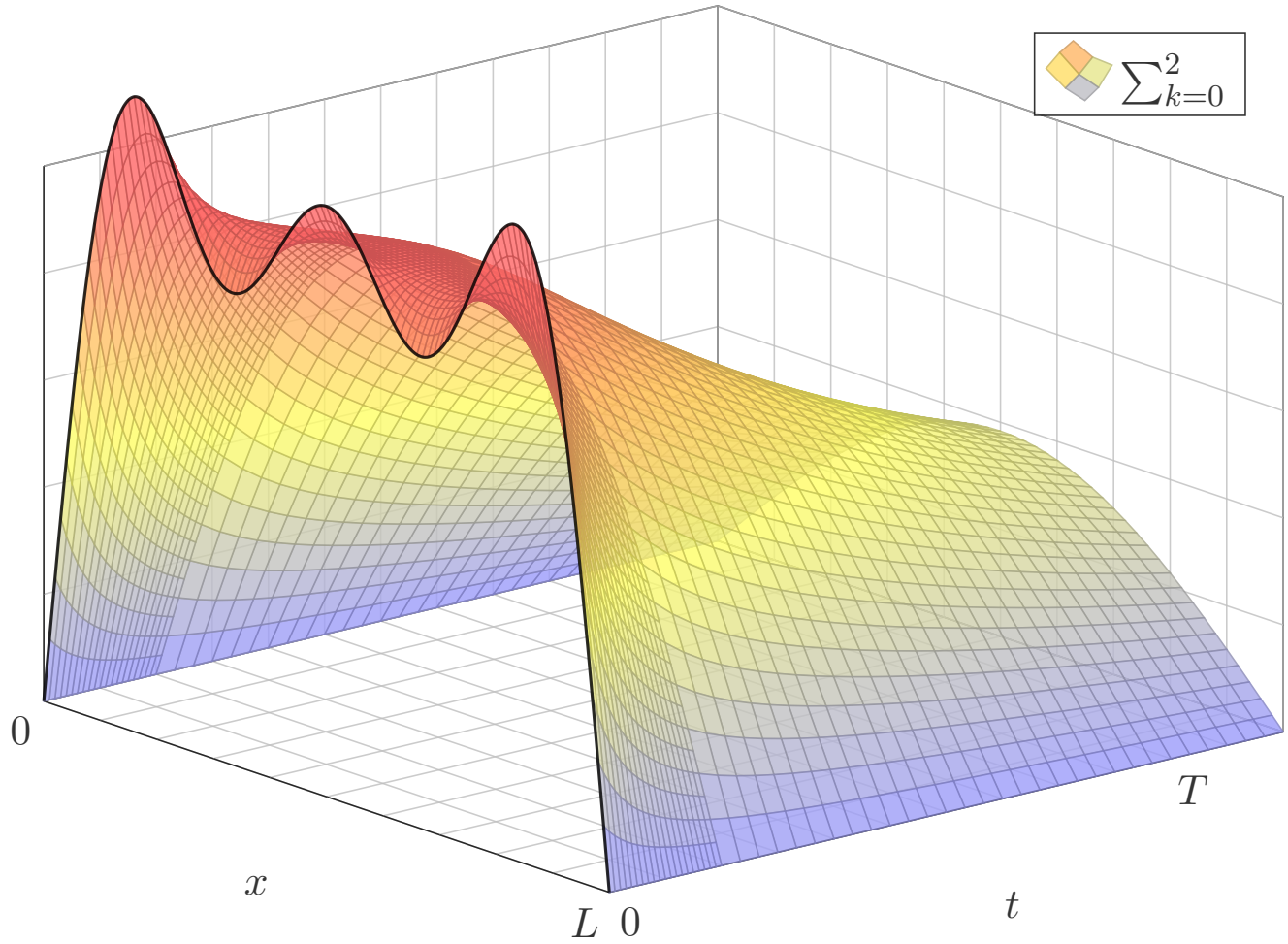


Die Eigenlösungen $u_n(t,x) = v_n(t)\, w_n(x)$ finden wir leicht. Durch Linearkombination können wir die Anfangsbedingung u_0 anähern, sogar exakt erreichen im Übergang zur Reihe.

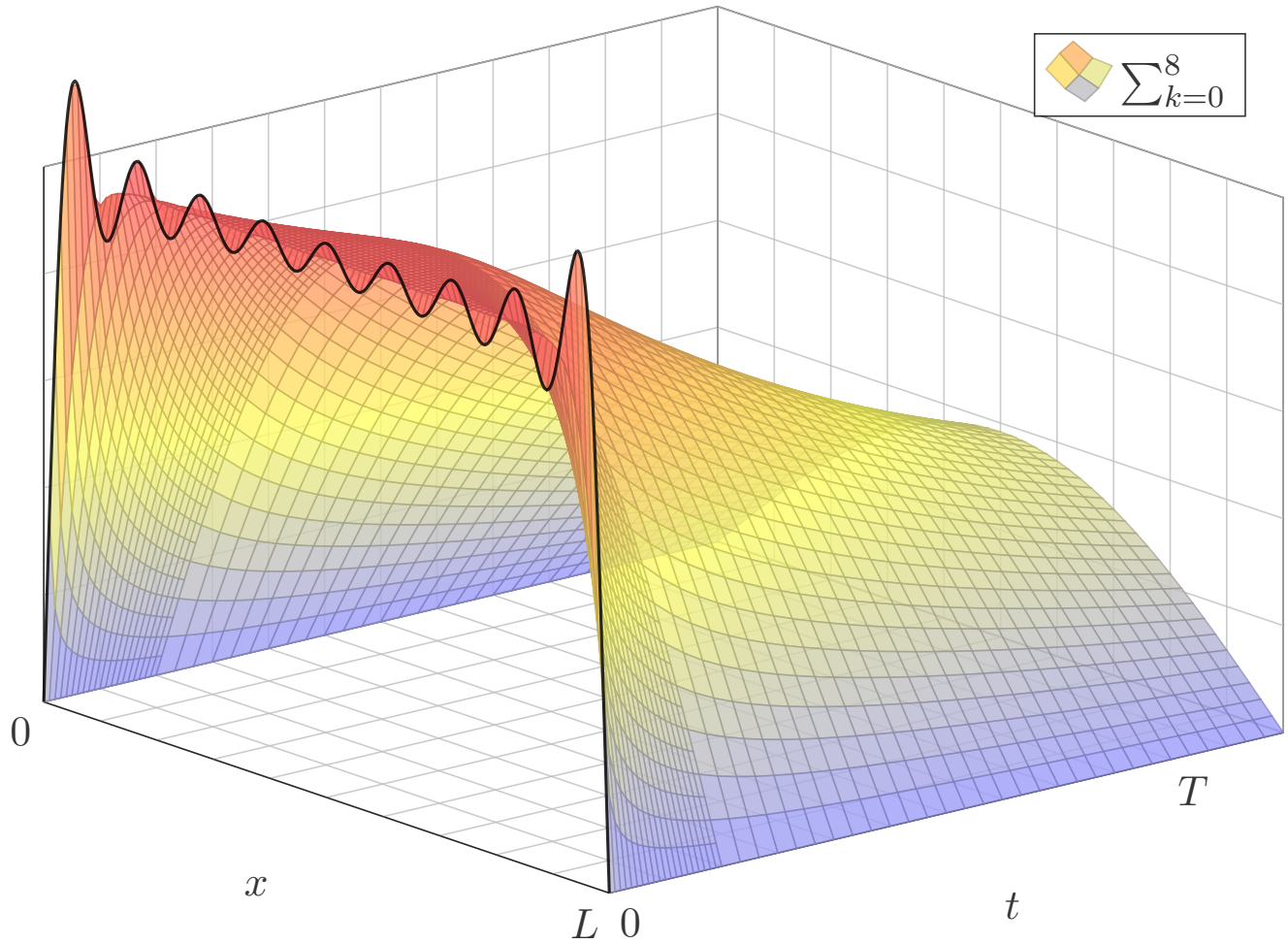
Fourier–Entwicklung von u_0 und Wärmeleitung



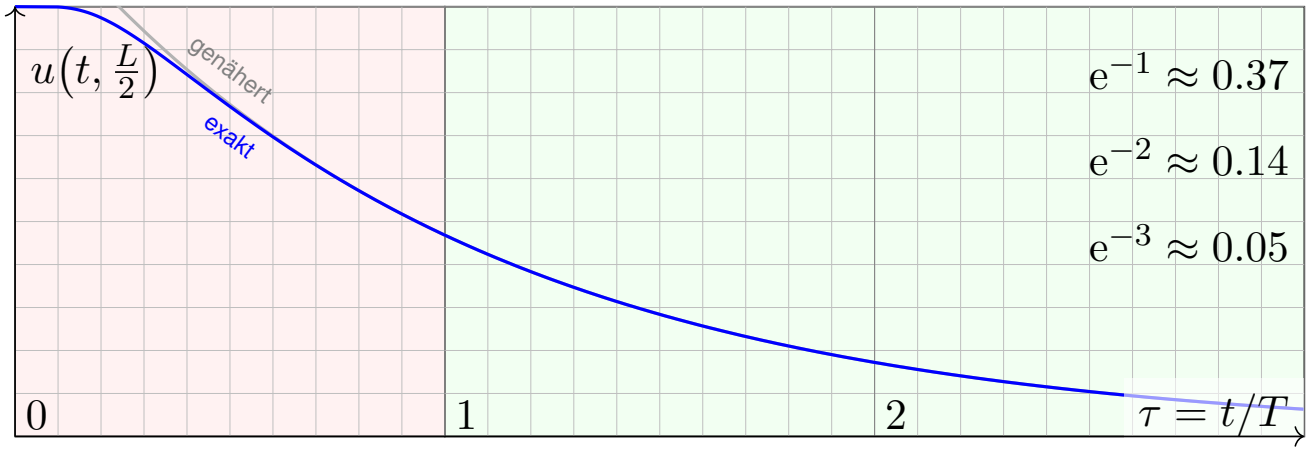
Fourier–Entwicklung von u_0 und Wärmeleitung



Fourier–Entwicklung von u_0 und Wärmeleitung



Zeitliche Entwicklung der Kerntemperatur



Die natürliche Zeitskala ist hier $\tau = (\pi/L)^2 \kappa t = t/T$ mit $T = L^2/\kappa\pi^2$.

$$u(t,x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(2k+1)^2 t/T} \frac{\sin\big((2k+1)\pi x/L\big)}{(2k+1)}$$

$$u(t, \tfrac{L}{2}) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(2k+1)^2 t/T} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} \underset{k=0}{\lessapprox} \frac{4}{\pi} e^{-t/T}$$

☺ Leibniz–Reihe, numerisch günstig, explizite Fehlerschranke B3G!
Wir können Wärmedichte in Temperatur umrechnen und leicht messen.
Die Temperaturdifferenz fällt exponentiell, sehr gute Näherung für $t > T$.

Plausibilitätscheck: Wie lange toastet Brot?

☺ Obigen Verlauf können wir für jede Start- und Zieltemperatur nutzen:
Hierzu genügt eine affin-lineare Transformation der Temperaturskala.

Aufgabe: Wie lange toastet Brot? Welche Temperatur wird erreicht?
Welche Daten benötigen Sie? Schätzen Sie diese soweit möglich!

Lösung: Toastbrot der Dicke $L = 14\mathrm{mm}$ wird bei $220°\mathrm{C}$ getoastet.
Die Temperaturleitfähigkeit beträgt etwa $\kappa \approx 0.5\mathrm{mm}^2/\mathrm{s}$: Messen!
Die natürliche Zeitskala ist hier $T = L^2/\kappa\pi^2 \approx 40\mathrm{s}$: Das ist plausibel.
Der Verlauf der Kerntemperatur ist (näherungsweise für $t > T$):

$$\begin{aligned} t \quad &\mapsto \quad 220°\mathrm{C} - 200°\mathrm{C} \cdot \tfrac{4}{\pi} e^{-t/T} = \vartheta(t) \\ 2\mathrm{min} = 3T \quad &\mapsto \quad 220°\mathrm{C} - 200°\mathrm{C} \cdot \tfrac{4}{\pi} e^{-3} \approx 200°\mathrm{C} \end{aligned}$$

☺ Jetzt wissen Sie, warum das Toasten doch relativ lange dauert.
Bei $20\mathrm{mm}$ Dicke benötigen Sie doppelt so lange... außen verbrannt?

☺ Wärmeleitung und Timing sind essentiell beim Grillen. Mangelnde Kenntnis führt zu falscher Intuition und häufig zu Fehlentscheidungen.
Grillgut muss ruhen! `blog.thermoworks.com/carryover-cooking`

Physikalische Beispiele: Materialkonstanten

Die **Temperaturleitfähigkeit** $\kappa = \lambda/(\varrho\, c)$ können wir berechnen aus Wärmeleitfähigkeit λ, Dichte ϱ und spezifischer Wärmekapazität c.

Material	$\varrho \,/\, \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$	$c \,/\, \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}$	$\lambda \,/\, \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\,K}}$	$\kappa \,/\, \frac{\mathrm{mm}^2}{\mathrm{s}}$
Tannenholz	600	2720	0.12	0.07
Fensterglas	2480	700	0.87	0.50
Stahl (leg./unleg.)	7800	460	$15 \cdots 50$	$4 \cdots 14$
Kupfer (rein)	8940	383	400	117
Marmor	≈ 2600	≈ 800	≈ 2.8	≈ 1.35
Beton	≈ 2400	≈ 880	≈ 2.1	≈ 0.99
Granit	≈ 2640	≈ 820	≈ 1.6	≈ 0.74
Ziegelstein	≈ 1700	≈ 840	≈ 0.4	≈ 0.28
Wasser bei $0°\mathrm{C}$	999	4220	0.561	0.133
$50°\mathrm{C}$	990	4181	0.642	0.155
$100°\mathrm{C}$	958	4216	0.679	0.168
Luft bei $1013\,\mathrm{hPa}$	$1.3 \cdots 1.0$	≈ 1005	$0.025 \cdots 0.030$	$19 \cdots 30$

📖 Lienhard: *A Heat Transfer Textbook.* Dover 2020. Luft isoliert gut, dennoch ist κ hier groß: Zwar wird kaum Wärmeleistung übertragen (λ), aber Dichte (ϱ) und Kapazität (c) sind gering.

Physikalische Beispiele: Materialkonstanten

Wir haben oben die Wärmebilanz umgeformt zur Differentialgleichung

$$(1) \qquad \partial_t u(t,x) - \nabla \cdot \big[\kappa\, \nabla u(t,x)\big] = q(t,x).$$

Erst an dieser Stelle spielt das Medium des Wärmetransports eine Rolle. Die Materialeigenschaft κ wird empirisch durch Messungen bestimmt.

☺ Ist $\kappa \in \mathbb{R}$ eine Konstante, so vereinfacht sich unsere Gleichung zu

$$(2) \qquad \partial_t u(t,x) - \kappa\, \Delta u(t,x) = q(t,x).$$

Die Temperaturleitfähigkeit κ hängt nicht nur vom Material ab, sondern im Allgemeinen auch von dessen Zustand, auch von seiner Temperatur: Die PDE (1) mit $\kappa = \kappa(t,x,u)$ ist dann nicht mehr linear in u. Schwierig!

☺ Wir betrachten hier κ näherungsweise als temperaturunabhängig.

Die Leitfähigkeit ist eventuell richtungsabhängig, also nicht isotrop, bei Holz etwa längs und quer zu den Fasern. Im allgemeinen, anisotropen Fall ist $\kappa(t,x) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ein Tensor zweiter Stufe, also eine (3×3)–Matrix.

☺ Wir betrachten hier nur den idealisierten Fall (2) eines homogenen, isotropen Mediums mit konstanter Temperaturleitfähigkeit κ. Einfacher!

Die inhomogene Wärmeleitungsgleichung

Aufgabe: Lösen Sie die inhomogene Wärmeleitungsgleichung (ARWP)

$$\begin{aligned} &\partial_t u(t,x) - \kappa\,\partial_x^2 u(t,x) = f(t,x) && \text{für alle } t>0 \text{ und } 0<x<L,\\ &u(t,0) = u(t,L) = 0 && \text{Randbedingungen für } t \geq 0,\\ &u(0,x) = g(x) && \text{Anfangswerte für } 0<x<L. \end{aligned}$$

Im Gegensatz zum vorigen Modell wird hier der Stab durch Wärmequellen $f(x,t)$ aufgeheizt. Denken Sie etwa an elektrischen Widerstand, bio/chemische Reaktion oder radioaktiven Zerfall. Der Anfangswert $u(0,x) = g(x)$ gibt die Wärmeverteilung zur Zeit $t = 0$ vor. Die Randwerte $u(t,0) = u(t,L) = 0$ bedeuten, dass wir hier die Wärmedichte u auf Null halten, also kühlen.

Dank unserer Erfahrung versuchen wir folgenden Lösungsansatz:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)\,\sin(n\pi x/L)$$

Das imitiert die Lösungsformel, die wir oben für den homogenen Fall $f = 0$ entwickelt haben; dort fanden wir die Lösung $v_n(t) = a_n \exp(-n^2 t/T)$. Wir setzen diesen erfolgreichen Ansatz in unsere PDE ein, nun mit einer allgemeinen rechten Seite $f(t,x)$, und bestimmen damit $v_n(t)$.

Die inhomogene Wärmeleitungsgleichung

Lösung: Einsetzen dieses Ansatzes in die PDE:

$$\partial_t u(t,x) - \kappa\,\partial_x^2 u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big[v_n'(t) + \kappa v_n(t)(n\pi/L)^2\Big]\sin(n\pi x/L) \overset{!}{=} f(t,x)$$

Für $t = 0$ ist zudem der Anfangswert vorgegeben:

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(0)\sin(n\pi x/L) \;\overset{!}{=}\; g(x)$$

Zum Vergleich entwickeln wir auch g und f in Fourier–Sinusreihen:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x/L), \qquad f(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\sin(n\pi x/L).$$

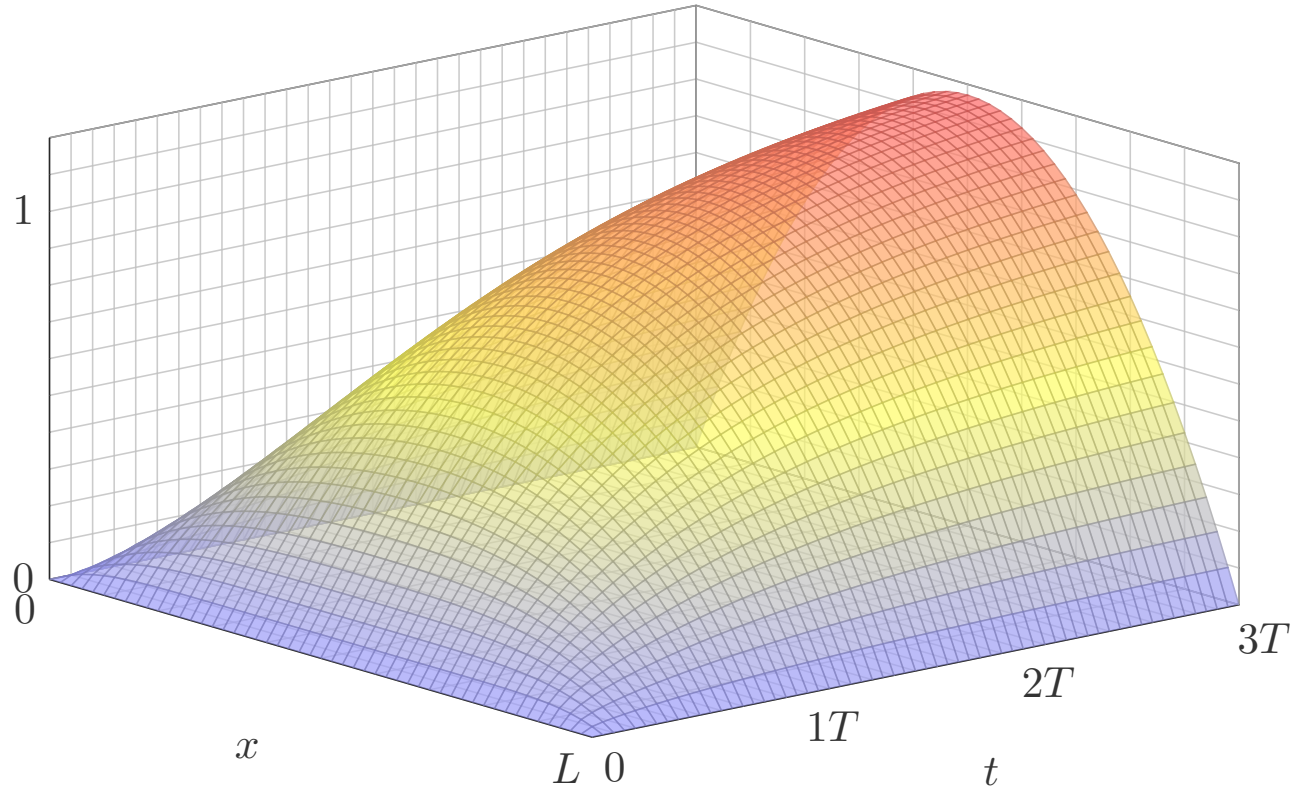
Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir eine ODE erster Ordnung:

$$v_n'(t) + (n^2/T)\,v_n(t) = b_n(t), \quad v_n(0) = a_n$$

☺ Für $b_n = 0$ erhalten wir erneut die vorige Lösung $v_n(t) = a_n\,\mathrm{e}^{-n^2 t/T}$. Auch hier ist die natürliche Zeitskala $T = L^2/\kappa\pi^2$; das vereinfacht!

Beispiel: gleichmäßiges Aufheizen

$$u(t,x) = 4\sum_{k=0}^{\infty}\Big[1 - \mathrm{e}^{-(2k+1)^2 t/T}\Big]\frac{\sin\big((2k+1)\pi x/L\big)}{(2k+1)^3\,\pi}$$



Beispiel: gleichmäßiges Aufheizen

Aufgabe: Lösen Sie die inhomogene Wärmeleitungsgleichung (ARWP)

$\partial_t u(t,x) - \kappa\,\partial_x^2 u(t,x) = 1/T$	für alle $t > 0$ und $0 < x < L$,
$u(t,0) = u(t,L) = 0$	Randbedingungen für $t \geq 0$,
$u(0,x) = 0$	Anfangswerte für $0 < x < L$.

Lösung: Wir kennen bereits die allgemeine Lösung:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)\,\sin(n\pi x/L)$$

Wir nutzen die Fourier–Entwicklung der Rechteckfunktion: I225

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x/L) \overset{!}{=} 1 \quad \text{mit} \quad b_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ gerade,} \\ 4/(n\pi) & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Gewöhnliche Differentialgleichung für die Koeffizienten $v_n(t)$:

$$v_n'(t) + (n^2/T)\,v_n(t) = b_n/T, \qquad v_n(0) = 0$$

Lösung für n gerade $v_n(t) = 0$, ungerade $v_n(t) = 4/(n^3\pi)\big[1 - \mathrm{e}^{-n^2 t/T}\big]$.

Neumann–Randbedingung: Wärmeisolierung

Aufgabe: Lösen Sie die homogene Wärmeleitungsgleichung (ARWP)

$$\begin{aligned} &\partial_t u(t,x) - \kappa\,\partial_x^2 u(t,x) = 0 && \text{für alle } t>0 \text{ und } 0<x<L,\\ &\partial_x u(t,0) = \partial_x u(t,L) = 0 && \text{Randbedingungen für } t \geq 0,\\ &u(0,x) = g(x) && \text{Anfangswerte für } 0 \leq x \leq L. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung ist wie zuvor die homogene Wärmeleitungsgleichung. Der Anfangswert $u(0,x) = g(x)$ gibt die Wärmeverteilung zur Zeit $t = 0$ vor. Neu ist die Randbedingung $\partial_x u(t,0) = \partial_x u(t,L) = 0$: Sie bedeutet, dass keine Wärme über den Rand abfließt. Man stelle sich eine perfekte Wärmeisolierung vor. Die Lösungen zeigen dies anschaulich: Die Gesamtwärmemenge $Q(t) = \int_{x=0}^{L} u(t,x)\,\mathrm{d}x$ bleibt für alle Zeiten $t \geq 0$ konstant.

Lösung: Der Produktansatz $u(t,x) = v(t)\,w(x)$ separiert dies zu

$$\frac{1}{\kappa}\,\frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)} = \lambda.$$

Wir erhalten zwei **gewöhnliche Differentialgleichungen**:

$$v'(t) = \kappa\lambda\,v(t) \quad \text{und} \quad w''(x) = \lambda\,w(x)$$

Die Randbedingung übersetzt sich in $w'(0) = w'(L) = 0$.

Produktlösungen und Superposition

Erstes Teilproblem: $w''(x) = \lambda\,w(x)$ mit $w'(0) = w'(L) = 0$
Lösungen: $w_n(x) = \cos(n\pi x/L)$ mit $\lambda = \lambda_n = -(n\pi/L)^2$

Zweites Teilproblem: $v'(t) = \kappa\lambda\,v(t)$ mit $\lambda = \lambda = -(n\pi/L)^2$
Lösung: $v_n(t) = \mathrm{e}^{-(n\pi/L)^2\kappa t} = \mathrm{e}^{-n^2 t/T}$ mit Abklingzeit $T = L^2/\kappa\pi^2$

Zusammengesetzte Eigenfunktion:

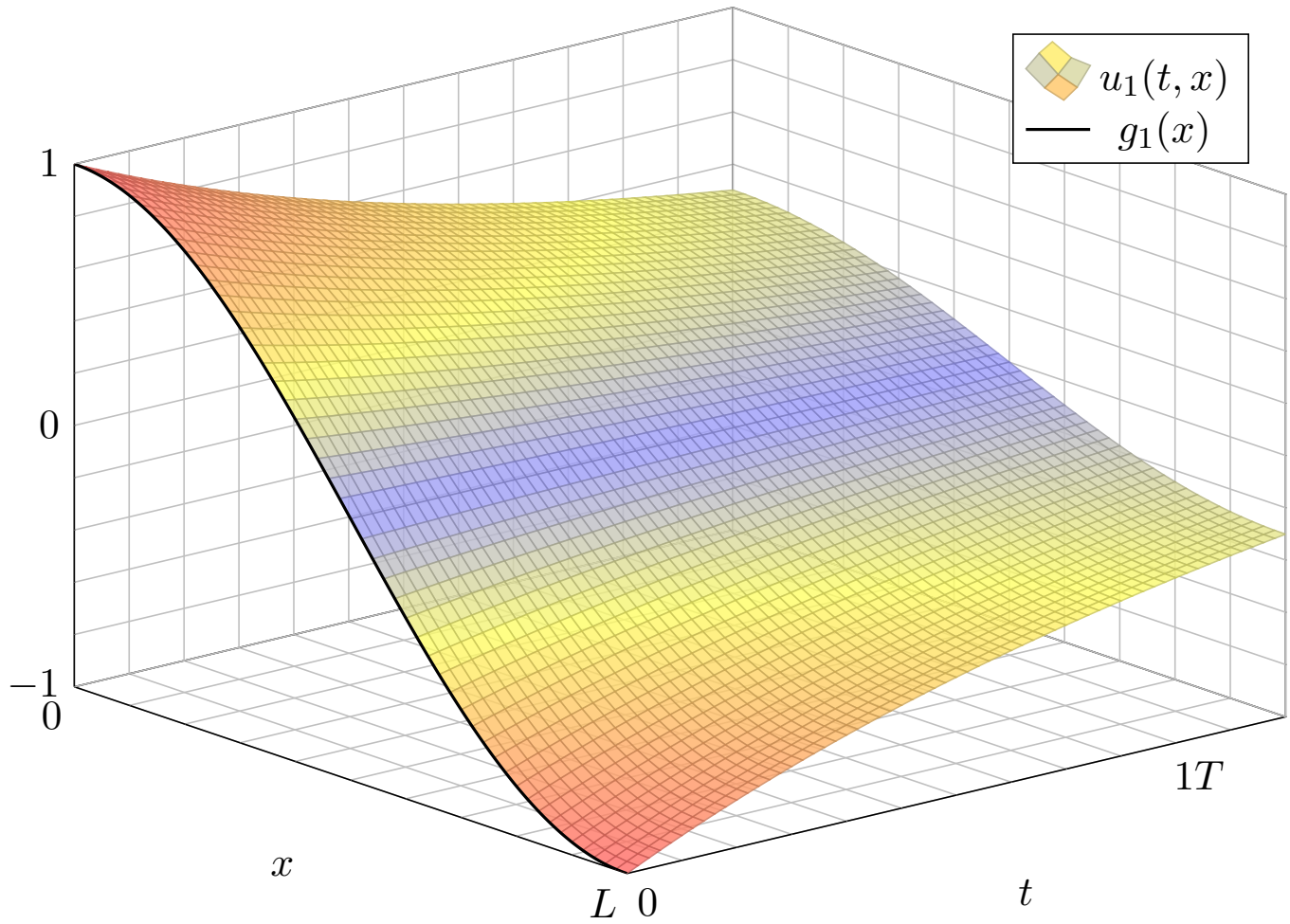
$$u_n(t,x) = v_n(t)\,w_n(x) = \mathrm{e}^{-n^2 t/T}\cos(n\pi x/L)$$

Die allgemeine Lösung erhalten wir durch Superposition:

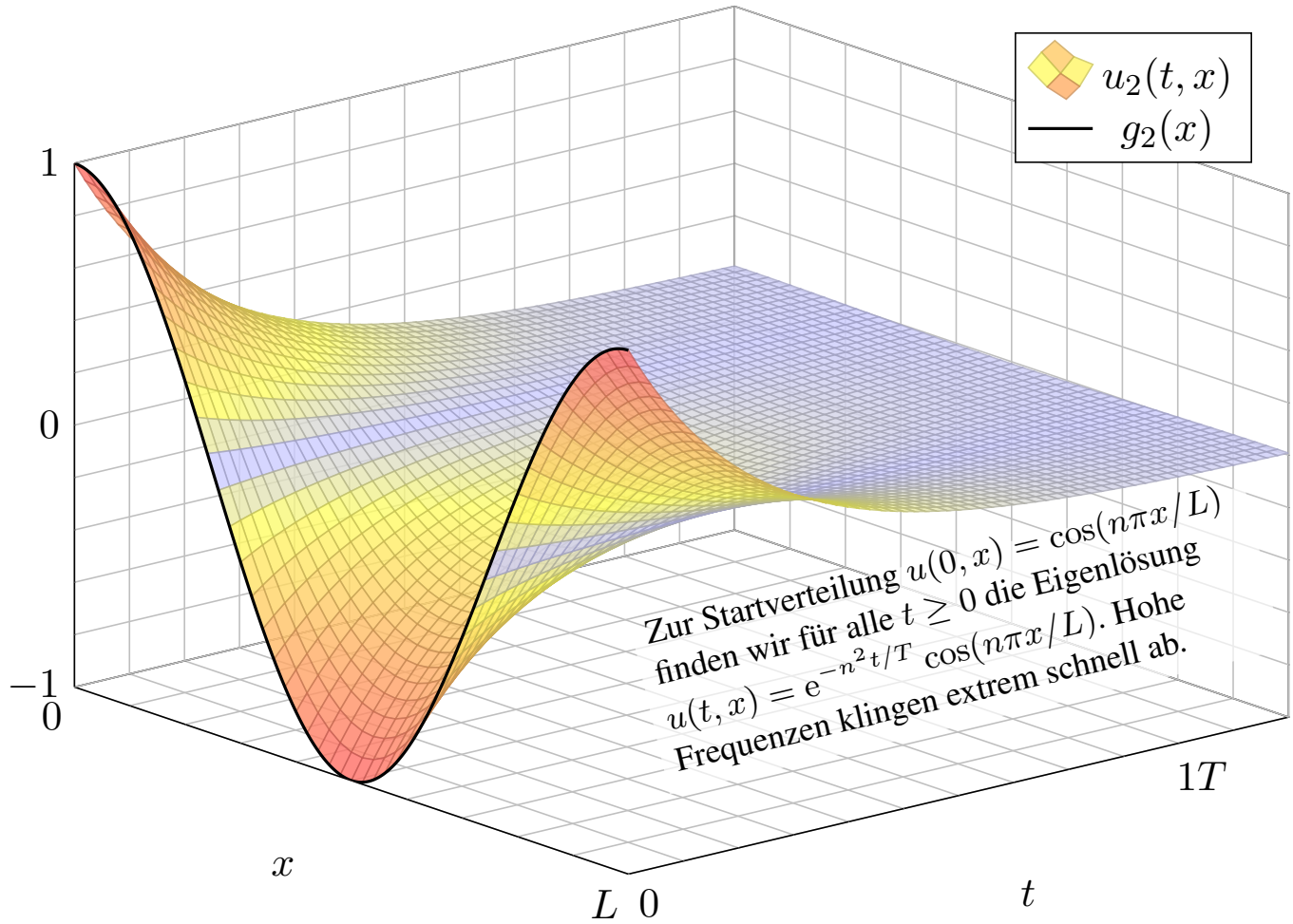
$$u(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\mathrm{e}^{-n^2 t/T}\cos(n\pi x/L)$$

Hier ist die konstante Funktion $u(t,x) = a_0/2$ eine Lösung. Wie für Fourier–Reihen üblich schreiben wir $a_0/2$, so dass die untenstehende Integralformel für alle $n \in \mathbb{N}$ gleich aussieht. Stationäre Lösung: Für $t \to \infty$ gilt $u(t,x) \to a_0/2$. Die Rechnung zeigt Ihnen, wie schnell! Die konstante Lösung entspricht einer homogenen Wärmeverteilung, bei der kein Wärmefluss stattfindet. Jede Lösung strebt für $t \to \infty$ gegen diese stationäre Lösung, wie zu erwarten war.

Produktansatz: Eigenlösung $u_1(t,x)$

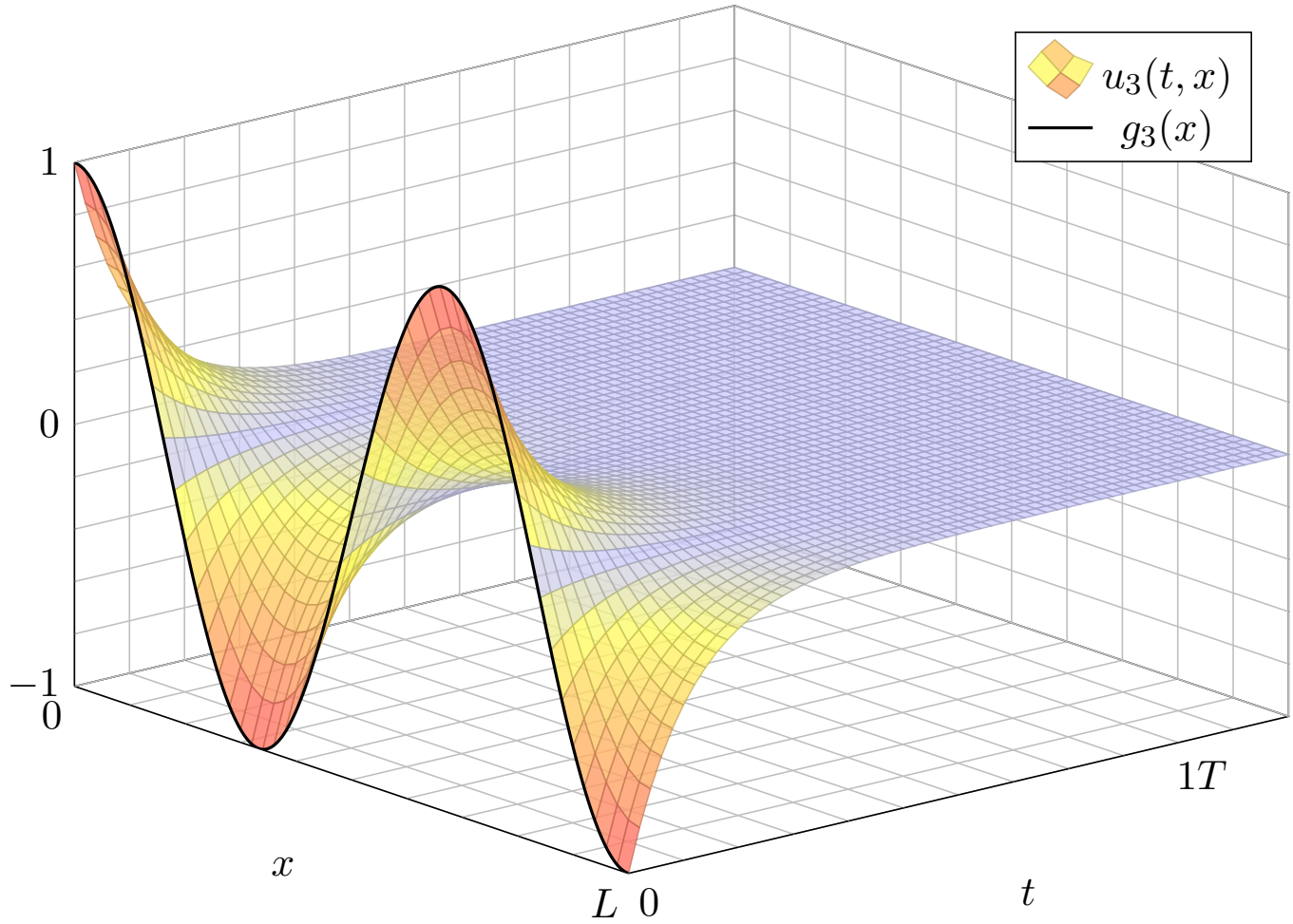


Produktansatz: Eigenlösung $u_2(t,x)$



Zur Startverteilung $u(0,x) = \cos(n\pi x/\mathrm{L})$ finden wir für alle $t \geq 0$ die Eigenlösung $u(t,x) = \mathrm{e}^{-n^2 t/T} \cos(n\pi x/\mathrm{L})$. Hohe Frequenzen klingen extrem schnell ab.

Produktansatz: Eigenlösung $u_3(t,x)$



Lösung der Anfangsbedingungen

Die allgemeine Lösung erhalten wir durch Superposition:

$$\boxed{u(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, \mathrm{e}^{-n^2 t/T} \cos(n\pi x/L)}$$

Einsetzen der Anfangswerte für $t = 0$ liefert:

$$u(0,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x/L) \overset{!}{=} g(x)$$

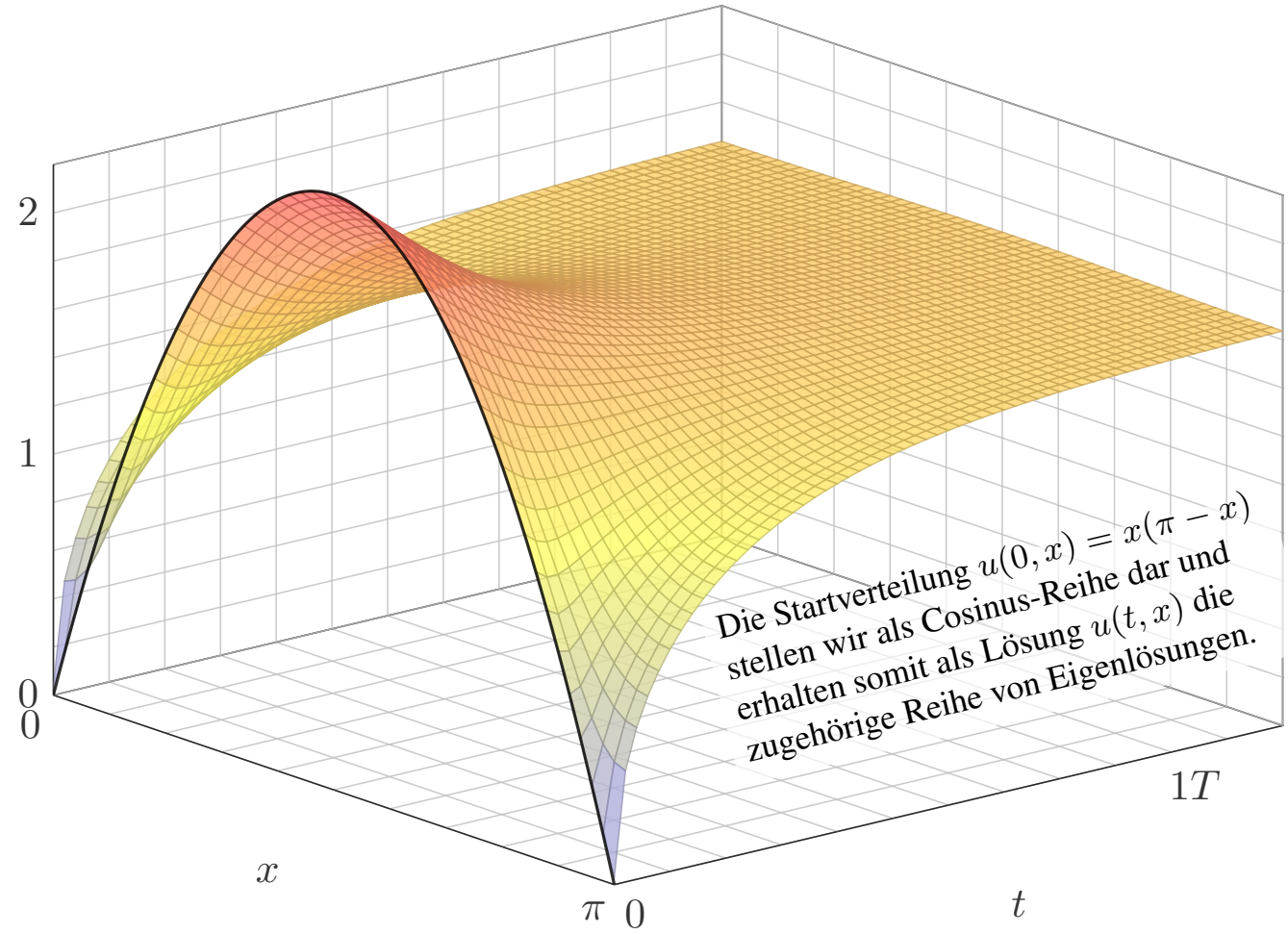
Hier sind $a_0, a_1, \ldots$ die Koeffizienten der Fourier–Cosinusreihe von g.
Wir betrachten daher die gerade Fortsetzung von g auf $[-L, L]$:

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{für } 0 \le x \le L, \\ g(-x) & \text{für } -L \le x \le 0. \end{cases}$$

Anschließend berechnen wir die Fourier–Reihe für $\tilde{g} : [-L, L] \to \mathbb{R}$.
Die Koeffizienten a_n erhalten wir aus den Anfangsdaten dank Fourier:

$$\boxed{a_n = \frac{2}{L} \int_{x=0}^{L} g(x) \, \cos\bigl(n\pi x/L\bigr) \, \mathrm{d}x}$$

Beispiel: Wärmeausgleich bei Isolierung



Beispiel: Wärmeausgleich bei Isolierung

Aufgabe: Lösen Sie die homogene Wärmeleitungsgleichung (ARWP)

$\partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = 0$	für alle $t > 0$ und $0 < x < \pi$,
$\partial_x u(t,0) = \partial_x u(t,\pi) = 0$	Randbedingungen für $t \geq 0$,
$u(0,x) = g(x) := x(\pi - x)$	Anfangswerte für $0 \leq x \leq \pi$.

Lösung: Wir kennen bereits die allgemeine Lösung:

$$u(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, \mathrm{e}^{-n^2 t} \cos(nx)$$

Für $t = 0$ nutzen wir die Fourier–Entwicklung der Anfansgwerte: I225

$$g(x) \overset{!}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, \cos(nx) \quad \text{also} \quad a_n = \begin{cases} -4/n^2 & \text{für } n \geq 2 \text{ gerade,} \\ 0 & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Die gesuchte Lösungsfunktion ist demnach

$$\boxed{u(t,x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-4k^2 t} \, \frac{\cos(2kx)}{k^2}}$$

Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Lösungen suchen wir bisher mit dem Produktansatz $u(t,x) = v(t)\,w(x)$. Das ist zunächst nur geraten, mit etwas Anschauung und Erfahrung. Wir haben Glück und finden die Eigenfunktionen $u_n(t,x) = v_n(t)\,w_n(x)$, genug um mit $u(t,x) = \sum_n a_n\,v_n(t)\,w_n(x)$ alle Bedingungen zu erfüllen.

Unsere Konstruktion von $u(t,x)$ zeigt somit die **Existenz** einer Lösung. Dies zeigt jedoch noch keineswegs die **Eindeutigkeit**: Es könnte noch weitere Lösungen der PDE geben, die aber unserem Ansatz entgehen. Eine dramatische Warnung sind exotische Lösungen wie in Satz S1B.

Mehrdeutigkeiten müssen wir erkennen und nötigenfalls auch beheben: Sind noch mehrere Lösungen möglich, so stellen wir geeignete weitere Bedingungen, um die physikalisch sinnvollen Lösungen herauszuheben. Dieses Vorgehen beruht auf der Überzeugung, dass die physikalische Entwicklung **deterministisch** ist. Ein brauchbares mathematisches Modell soll die zukünftige Entwicklung vorhersagen und muss daher eine **eindeutige Lösung** haben, nämlich die physikalisch beobachtete.

Mathematisch bedeutet die Eindeutigkeit: Je zwei Lösungen sind gleich. Dies wollen wir nun sorgfältig als Satz formulieren und dann beweisen.

Wie lautet die Problemstellung?

Um über Eindeutigkeit zu sprechen, müssen wir zunächst erklären, wie die Problemstellung aussieht und was wir als Lösungen zulassen.

Definition S3A: Anfangs- und Randwertproblem, kurz ARWP

Die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung formulieren wir wie folgt als **Anfangs- und Dirichlet–Randwertproblem**:

$\partial_t u(t,x) - \kappa\,\partial_x^2 u(t,x) = f(t,x)$	für $0 < t < T$ und $a < x < b$,
$u(t,a) = \ell(t),\ u(t,b) = r(t)$	Randbedingung für $0 < t < T$,
$u(0,x) = g(x)$	Anfangswerte für $a < x < b$.

Gegeben sind hierzu stetige Funktionen $f : [0,T[\,\times [a,b] \to \mathbb{R}$ und $\ell, r : [0,T[\,\to \mathbb{R}$ sowie $g : [a,b] \to \mathbb{R}$; schwächer genügt $g \in L^2([a,b])$. Bei **Neumann–Randbedingungen** fordern wir stattdessen

$$\partial_x u(t,a) = \ell(t),\ \partial_x u(t,b) = r(t) \quad \text{für } 0 < t < T.$$

Auch gemischte Randbedingungen sind möglich.

Was fordern wir von einer Lösung?

Stetigkeit in den Randpunkten ist nicht selbstverständlich, wie bereits unser erstes Beispiel mahnt. Wir formulieren daher besonders sorgfältig:

Definition S3B: Lösung des Anfangs- und Randwerteproblems

Eine Funktion $u : [0, T[\times [a, b] \to \mathbb{R}$ nennen wir eine **Lösung** des obigen Anfangs- und Randwertproblems S3A, wenn gilt:

(A) Auf $]0, T[\times]a, b[$ existieren die Ableitungen $\partial_t u$, $\partial_x u$, $\partial_x^2 u$ und sind dort stetig und erfüllen die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t - \kappa\, \partial_x^2 u = f$.

(B) Auf $]0, T[\times [a, b]$ sei u stetig und $\partial_x u$ stetig fortsetzbar, und beide erfüllen auf $]0, T[\times \{a, b\}$ die jeweils geforderten Randbedingungen.

(C) Es gilt $u(0, x) = g(x)$ für alle $x \in [a, b]$ und zudem Stetigkeit:
(C1) Im strengen Sinne sei u stetig auf $[0, T[\times [a, b]$. Schwächer:
(C2) Für $t \searrow 0$ gilt L^2–Konvergenz $\int_{x=a}^{b} |u(t, x) - u(0, x)|^2 \, \mathrm{d}x \to 0$.

☺ Die starke Bedingung (C1) impliziert die schwache (C2) dank D3A.
⚠ Eine unstetige Startverteilung g erfordert die Abschwächung (C2): Uns genügt dann quadratische Integrierbarkeit und L^2–Konvergenz.

Eindeutigkeit der Lösung

Satz S3C: Eindeutigkeitssatz für die Wärmeleitungsgleichung

(0) Löst $u : [0, T[\times [a, b] \to \mathbb{R}$ die homogene Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned}
&\partial_t u(t, x) - \kappa\, \partial_x^2 u(t, x) = 0 && \text{für } 0 < t < T \text{ und } a < x < b,\\
&\begin{cases} u(t, a) = u(t, b) = 0 \\ \partial_x u(t, a) = \partial_x u(t, b) = 0 \end{cases} && \begin{matrix}\text{Dirichlet–Randbedingungen für } t > 0 \text{ oder} \\ \text{Neumann–Randbedingungen für } t > 0,\end{matrix}\\
&u(0, x) = 0 && \text{Anfangswerte für } t = 0 \text{ und } a < x < b,
\end{aligned}$$

dann gilt $u(t, x) = 0$ für alle $(t, x) \in [0, T[\times [a, b]$.

(1) Lösen $\tilde{u}, \check{u} : [0, T[\times [a, b] \to \mathbb{R}$ die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned}
&\partial_t u(t, x) - \kappa\, \partial_x^2 u(t, x) = f(t, x),\\
&\begin{cases} u(t, a) = \ell(t),\ u(t, b) = r(t) \text{ oder} \\ \partial_x u(t, a) = \ell(t),\ \partial_x u(t, b) = r(t), \end{cases}\\
&u(0, x) = g(x),
\end{aligned}$$

dann gilt $\tilde{u}(t, x) = \check{u}(t, x)$ für alle $(t, x) \in [0, T[\times [a, b]$.

Die Energiemethode beweist die Eindeutigkeit.

Die Funktion $u : [0,T[\times [a,b] \to \mathbb{R}$ löse die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = \kappa\, \partial_x^2 u$ mit den Randbedingungen $(u\,\partial_x u)(t,a) = (u\,\partial_x u)(t,b) = 0$. Als mathematische Hilfsgröße untersuchen wir hierzu die **Energie**

$$\boxed{E \;:\; [0,T[\to \mathbb{R} \;:\; t \mapsto E(t) := \int_{x=a}^{b} \frac{1}{2} u(t,x)^2 \,\mathrm{d}x \;\geq\; 0.}$$

Aufgabe: Ist E stetig? Berechnen Sie $\dot{E}(t)$ für $0 < t < T$. **Lösung:**

$$\begin{aligned}
\dot{E}(t) &\overset{\text{Def}}{=} \partial_t \int_{x=a}^{b} \frac{1}{2} u(t,x)^2 \,\mathrm{d}x \overset{\substack{\text{Satz}\\ \text{D3A}}}{=} \int_{x=a}^{b} \partial_t \Big[\frac{1}{2} u(t,x)^2\Big] \,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Prod}}{=} \int_{x=a}^{b} u(t,x) \cdot \partial_t u(t,x) \,\mathrm{d}x \overset{\text{PDE}}{=} \int_{x=a}^{b} u(t,x) \cdot \kappa\, \partial_x^2 u(t,x) \,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{part}}{=} \kappa \underbrace{\Big[u(t,x) \cdot \partial_x u(t,x)\Big]_{x=a}^{b}}_{=\,0 \text{ dank Randbedingung}} - \kappa \underbrace{\int_{x=a}^{b} \Big[\partial_x u(t,x)\Big]^2 \,\mathrm{d}x}_{L^2\text{–Norm von } \partial_x u \text{ auf } [a,b]} \leq 0
\end{aligned}$$

Somit kann $t \mapsto E(t)$ nur sinken. Sie bleibt konstant nur falls $\partial_x u = 0$, wegen $\partial_t u = \kappa\, \partial_x^2 u = 0$ also nur für konstante Lösungen $u(t,x) = \mathrm{const}$.

Die Energiemethode beweist die Eindeutigkeit.

Aufgabe: Beweisen Sie den Eindeutigkeitssatz mit der Energiemethode!

Lösung: (0) Gesucht sind alle Funktionen $u : [0,T[\times [a,b] \to \mathbb{R}$, die die Wärmeleitung $\partial_t u = \kappa\, \partial_x^2 u$ lösen (im Sinne unserer Definition S3B), wobei alle Anfangs- und Randwerte konstant gleich Null sind.

Zunächst ist klar: Die Nullfunktion $u(t,x) = 0$ ist eine mögliche Lösung. Wir wollen nun sorgfältig nachweisen, dass dies die einzige Lösung ist:

Sei $u : [0,T[\times [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beliebige Lösung zu den Daten (0). Aufgrund der Anfangswerte $u(0,x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$ gilt $E(0) = 0$. Die Funktion $E : [0,T[\to \mathbb{R}_{\geq 0} : t \mapsto E(t)$ ist stetig dank D3A bzw. (C2). Dank der Randwerte $u\,\partial_x u = 0$ für alle $t \in]0,T[$ gilt $\dot{E}(t) \leq 0$. Daraus folgt $E(t) = 0$ für alle $t \in [0,T[$, also $u(t,x) = 0$. Das war zu zeigen.

(1) Gegeben seien Lösungen $\tilde{u}, \check{u} : [0,T[\times [a,b] \to \mathbb{R}$ zu den Daten (1). Die Differenz $u = \tilde{u} - \check{u}$ erfüllt alle Gleichungen aus (0), also $u = 0$. Daraus folgt $\tilde{u} = \check{u}$. Es kann also höchstens eine Lösung geben!

☺ Wir nutzen geschickt die lineare Struktur der Problemstellung!

Konstruktion der Lösung durch Fourier–Theorie

Satz S3D: Lösung der Wärmeleitungsgleichung, ∃&E

Zu lösen sei die eindimensionale homogene Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{array}{ll} \partial_t u(t,x) - \kappa\,\partial_x^2 u(t,x) = 0 & \text{für alle } t>0 \text{ und } 0<x<L, \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 & \text{Randbedingungen für } t \ge 0, \\ u(0,x) = g(x) & \text{Anfangswerte für } 0<x<L. \end{array}$$

Gegeben sei $g:[0,L]\to\mathbb{R}$ stetig oder allgemeiner $g\in L^2([0,L])$, also entwickelt $g(x)=\sum_{n=1}^\infty a_n \sin(n\pi x/L)$ mit $\sum_{n=1}^\infty |a_n|^2<\infty$.

Dann wird unser Problem eindeutig gelöst durch

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^\infty a_n\,\mathrm{e}^{-n^2 t/T}\sin(n\pi x/L).$$

Die natürliche Zeitskala ist die Abklingzeit $T=L^2/\kappa\pi^2$ (Eigenzeit).
Gilt sogar $\sum_{n=1}^\infty |a_n|<\infty$, so ist u in $t=0$ stetig und dort gleich g.

Konstruktion der Lösung durch Fourier–Theorie

☺ Wir haben oben ausführlich dargestellt, wie man diese Lösung findet. Der Satz fasst das Ergebnis zusammen und ist leicht nachzurechnen:

Aufgabe: Zeigen Sie, dass u die Gleichung $\partial_t u = \kappa\,\partial_x^2 u$ sowie das Anfangs- und Randwertproblem löst (im Sinne unserer Definition S3B).

Lösung: Für alle $t>0$ und $\nu\in\mathbb{N}$ gilt $\sum_{n=1}^\infty \left|a_n n^\nu\,\mathrm{e}^{-n^2 t/T}\right|<\infty$ dank der exponentiellen Dämpfung. Daher konvergiert die im Satz für u angegebene Reihe in jedem Punkt $(t,x)\in\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}$, und die so definierte Funktion $u:\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist beliebig oft differenzierbar.

Wir dürfen termweise ableiten und finden sofort $\partial_t u = \kappa\,\partial_x^2 u$.

In den Randpunkten $x\in\{0,L\}$ gilt offensichtlich $u(t,x)=0$.

Für $t\searrow 0$ gilt ℓ^2–Konvergenz $\sum_{n=1}^\infty \left|a_n - a_n\,\mathrm{e}^{-n^2 t/T}\right|^2 \searrow 0$ und somit L^2–Konvergenz $\int_{x=0}^L \left|u(t,x)-u(0,x)\right|^2\mathrm{d}x \searrow 0$ (Fourier–Isometrie J1A).

Im Falle $\sum_{n=1}^\infty |a_n|<\infty$ ist die Reihe auf ganz $\mathbb{R}_{\ge 0}\times\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergent, die so definierte Funktion $u:\mathbb{R}_{\ge 0}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist somit stetig.

☺ Mit dieser Methode können Sie zahlreiche ähnliche Probleme lösen, insbesondere inhomogene Gleichungen mit diversen Randbedingungen.

Das Minimum-Maximum-Prinzip

Zu lösen ist für $u : [0,T] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ das Anfangsrandwertproblem

$\partial_t u(t,x) - \kappa\, \partial_x^2 u(t,x) = f(t,x)$	für $0 < t \le T$ und $a < x < b$,
$u(t,a) = \ell(t),\ u(t,b) = r(t)$	Randbedingungen für $t \ge 0$,
$u(0,x) = g(x)$	Anfangswerte für $a < x < b$.

Allgemein untersuchen wir die Wärmeleitung auf einem Körper K; hierzu sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt mit stückweise glattem Rand ∂K. Obiges Beispiel in Dimension $n = 1$ ist das kompakte Intervall $K = [a,b]$ mit den beiden Randpunkten $a < b$, kurz $\partial K = \{a,b\}$.

Auf dem Bereich $\Omega_T = [0,T] \times K$ sei $u : \Omega_T \to \mathbb{R}$ stetig. Zudem gelte $\partial_t u - \kappa\, \Delta u = f$ auf dem **parabolischen Inneren** (*parabolic domain*)

$$D_T =]0,T] \times \mathring{K}.$$

Vorgegeben sind die Rand- und Anfangswerte, also die Einschränkung $u|_{B_T}$ auf dem **parabolischen Rand** (engl. *parabolic boundary*)

$$B_T = \big([0,T] \times \partial K\big) \cup \big(\{0\} \times K\big).$$

☺ Der Bereich Ω_T und sein parabolischer Rand B_T sind kompakt.

Das Minimum-Maximum-Prinzip

Wie zuvor sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, $\Omega_T = [0,T] \times K$ und $u : \Omega_T \to \mathbb{R}$.
Wir untersuchen $\partial_t u = \kappa\, \Delta u$, wobei $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \cdots + \partial^2/\partial x_n^2$.
Zur Vereinfachung der Schreibweise dürfen wir $\kappa = 1$ annehmen.

Satz S3E: Maximumsprinzip für die Wärmeleitungsgleichung

Auf $\Omega_T = [0,T] \times K$ sei $u : \Omega_T \to \mathbb{R}$ stetig. Da Ω_T und B_T kompakt sind, nimmt u hierauf Minimum und Maximum an. Wegen $\Omega_T \supseteq B_T$ gilt also:

$$\min_{\Omega_T} u \le \min_{B_T} u \qquad \text{und} \qquad \max_{\Omega_T} u \ge \max_{B_T} u$$

Zudem gelte $\partial_t u = \Delta u$ auf dem parabolischen Inneren $D_T =]0,T] \times \mathring{K}$.

(1) Dann nimmt u sein Minimum und Maximum auf dem Rand B_T an:

$$\boxed{\min_{\Omega_T} u = \min_{B_T} u \qquad \text{und} \qquad \max_{\Omega_T} u = \max_{B_T} u}$$

Seien $u, v : \Omega_T \to \mathbb{R}$ zwei Lösungen, $\partial_t u = \Delta u$ und $\partial_t v = \Delta v$ auf D_T.

(2) Monotonie: Aus $u \le v$ auf dem Rand B_T folgt $u \le v$ auf ganz Ω_T.

(3) Eindeutigkeit: Aus $u = v$ auf dem Rand B_T folgt $u = v$ auf ganz Ω_T.

Das Minimum-Maximum-Prinzip

☺ In der PDE $\partial_t u - \Delta u = f$ bedeutet $f \lesseqgtr 0$ Senken oder Quellen.

Aufgabe: Beweisen Sie das Prinzip (1) in folgenden Verschärfungen:

(a) Auf D_T gelte $\partial_t u - \Delta u < 0$. Dann folgt $\max u = \max u|_{B_T} > u|_{D_T}$.

(b) Auf D_T gelte $\partial_t u - \Delta u \le 0$. Dann folgt $\max u = \max u|_{B_T} \ge u|_{D_T}$.

(c) Auf D_T gelte $\partial_t u - \Delta u > 0$. Dann folgt $\min u = \min u|_{B_T} < u|_{D_T}$.

(d) Auf D_T gelte $\partial_t u - \Delta u \ge 0$. Dann folgt $\min u = \min u|_{B_T} \le u|_{D_T}$.

Lösung: Durch Übergang von u zu $-u$ gilt (a) $\Leftrightarrow$ (c) und (b) $\Leftrightarrow$ (d).
Daher genügt es, die ersten beiden Aussagen (a) und (b) zu beweisen:

(a) Angenommen, u wäre maximal im inneren Punkt $(t_0, x_0) \in D_T$.
Dann gilt $\partial_t u(t_0, x_0) \ge 0$ und $\partial_{x_i} u(t_0, x_0) = 0$ sowie $\partial^2_{x_i} u(t_0, x_0) \le 0$,
also $\partial_t u(t_0, x_0) - \Delta u(t_0, x_0) \ge 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung < 0.

(b) Wir betrachten $v := u + \varepsilon |x|^2$ mit $\varepsilon > 0$, wobei $|x|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$.
Es gilt $\partial_t v - \Delta v = \partial_t u - \Delta u - 2n\varepsilon < 0$, dank (a) also $\max v = \max_{B_T} v$.
Wir haben $u \le v \le \max v = \max_{B_T} v \le \max_{B_T} u + \varepsilon \max_{B_T} |x|^2$.
Damit gilt $u \le \max_{B_T} u + \varepsilon \max_{B_T} |x|^2$ für alle $\varepsilon > 0$.
Für $\varepsilon \searrow 0$ folgt $u \le \max_{B_T} u$, was zu zeigen war.

Das Minimum-Maximum-Prinzip

Aufgabe: Beweisen Sie die Monotonie (2) in folgenden Verschärfungen:

(e) In jedem Punkt im Inneren D_T gelte $\partial_t u - \Delta u \le \partial_t v - \Delta v$.
Aus $u \le v$ auf dem Rand B_T folgt $u \le v$ auf ganz Ω_T.

(f) In jedem Punkt im Inneren D_T gelte $\partial_t u - \Delta u \le \partial_t v - \Delta v$.
Aus $u < v$ auf dem Rand B_T folgt $u < v$ auf ganz Ω_T.

(g) In jedem Punkt im Inneren D_T gelte $\partial_t u - \Delta u < \partial_t v - \Delta v$.
Aus $u \le v$ auf dem Rand B_T folgt $u < v$ im Inneren D_T.

Lösung: (e) Für die Differenz $w = u - v$ gilt $\partial_t w - \Delta w \le 0$.
Dank (b) folgt $w \le \max w = \max_{B_T} w \le 0$, also $u \le v$.

(f) Für $w = u - v$ gilt $\partial_t w - \Delta w \le 0$ in jedem Punkt von D_T.
Dank (b) folgt $w \le \max w = \max_{B_T} w < 0$, also $u < v$.

(g) Für $w = u - v$ gilt $\partial_t w - \Delta w < 0$ in jedem Punkt von D_T.
Dank (a) folgt $w|_{D_T} < \max_{B_T} w \le 0$, auf D_T also $w < 0$ und $u < v$.

☺ Dies können wir zur Eingrenzung durch Ober/Unterlösungen nutzen.
Solche Ungleichungen und Einschachtelungen kennen wir bereits aus den Sätzen M4C und M4D für gewöhnliche Differentialgleichungen.

Finite-Differenzen-Methode: Approximation

Zu lösen ist für $u\colon [0,T]\times[a,b]\to\mathbb{R}$ das Anfangsrandwertproblem

$\partial_t u(t,x) - \kappa\,\partial_x^2 u(t,x) = f(t,x)$	für $0 < t \le T$ und $a < x < b$,
$u(t,a) = \ell(t),\ u(t,b) = r(t)$	Randbedingungen für $t \ge 0$,
$u(0,x) = g(x)$	Anfangswerte für $a < x < b$.

Zur numerischen Diskretisierung approximieren wir die Ableitungen ∂_t sowie ∂_x und ∂_x^2 (Differentialquotienten) durch Differenzenquotienten:

$$\partial_x u(t,x) \approx \frac{u(t,x{+}\Delta x/2) - u(t,x{-}\Delta x/2)}{\Delta x}$$

$$\partial_x^2 u(t,x) \approx \frac{\partial_x u(t,x{+}\Delta x/2) - \partial_x u(t,x{-}\Delta x/2)}{\Delta x}$$

$$\approx \frac{u(t,x{-}\Delta x) - 2u(t,x) + u(t,x{+}\Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

Die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = \kappa\,\partial_x^2 u + f$ besagt näherungsweise:

$$\boxed{\frac{u(t{+}\Delta t,x) - u(t,x)}{\Delta t} \approx \kappa\frac{u(t,x{-}\Delta x) - 2u(t,x) + u(t,x{+}\Delta x)}{(\Delta x)^2} + f(t,x)}$$

Finite-Differenzen-Methode: Diskretisierung

Hier sind $\Delta x > 0$ und $\Delta t > 0$ Schrittweiten, nicht der Laplace–Operator. Diese Diskretisierung können wir als Rekursionsgleichung nutzen:

$$u(t{+}\Delta t,x) \approx u(t,x) + \Delta t\Big[\kappa\frac{u(t,x{-}\Delta x){-}2u(t,x){+}u(t,x{+}\Delta x)}{(\Delta x)^2} + f(t,x)\Big]$$

Aus den Werten zur Zeit t gewinnen wir so die Werte zur Zeit $t{+}\Delta t$. Die Randwerte $u(t{+}\Delta t,x)$ für $x\in\{a,b\}$ sind dabei vorgegeben.

Aufgabe: Approximieren Sie $u\colon[0,2]\times[0,1]\to\mathbb{R}$ zu den Daten $\kappa = 0.04$, $f = 0$, $g = 1$, $\ell = 0$, $r = 0$ mit Diskretisierung $\Delta t = 0.1$ und $\Delta x = 0.1$.

Lösung: Die folgende Tabelle und die Graphik zeigen die Werte. H125

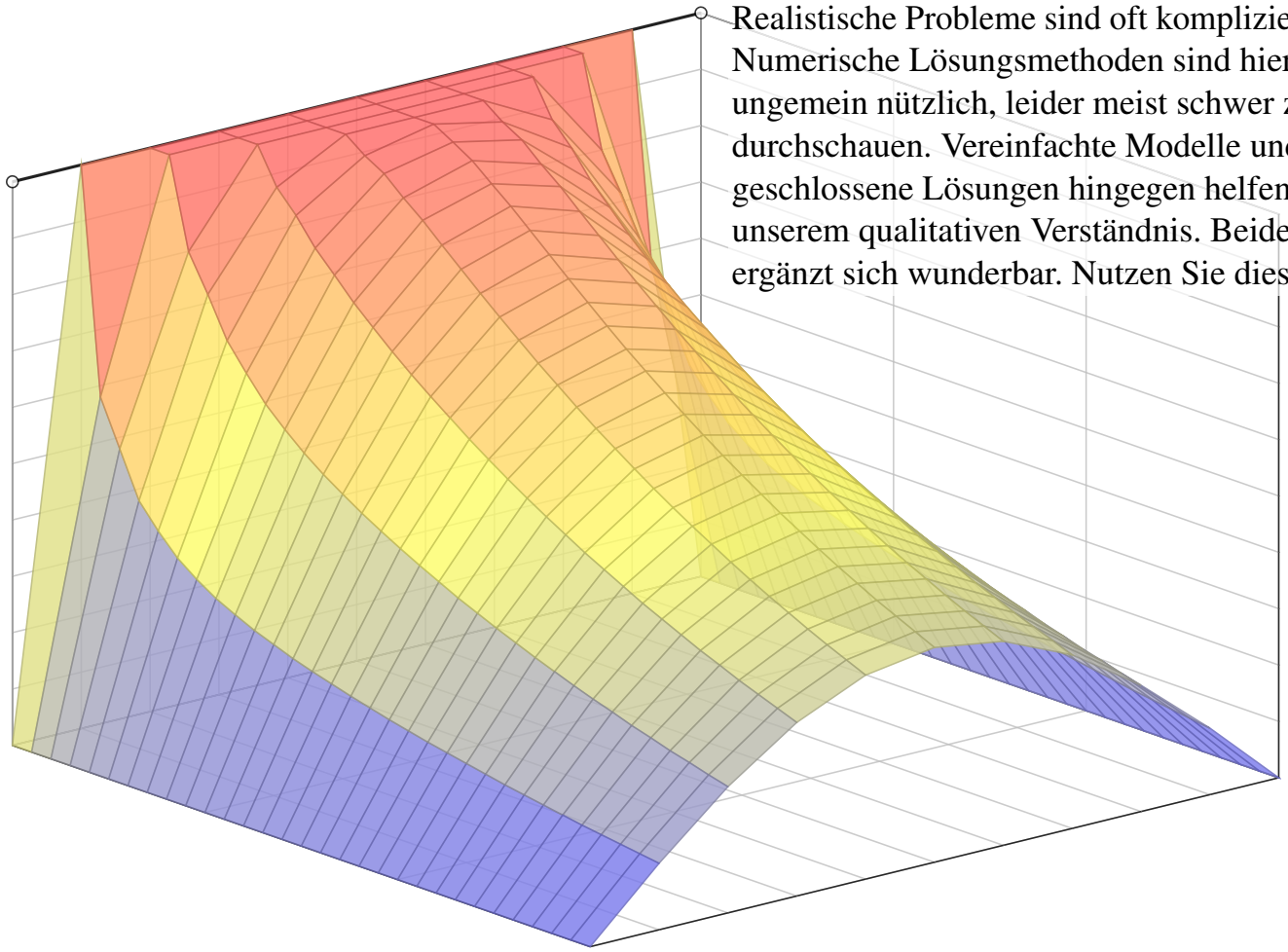
☺ Mit diesem Verfahren können Sie u näherungsweise berechnen. Sie finden dieses Beispiel unter `eiserm.de/lehre/HM3/Irrfahrt.ods`. In der Numerik lernen Sie noch weit bessere und raffiniertere Verfahren.

⚠ Bevor man irgendeine numerische Approximation unternimmt, muss man sicherstellen, dass die Frage gut gestellt ist: Unsere mathematische Vorbereitung zeigt, dass eine exakte Lösung u existiert und dass sie eindeutig ist. Erst das gibt der numerischen Näherung einen Sinn!

Finite-Differenzen-Methode: Kühlung am Rand

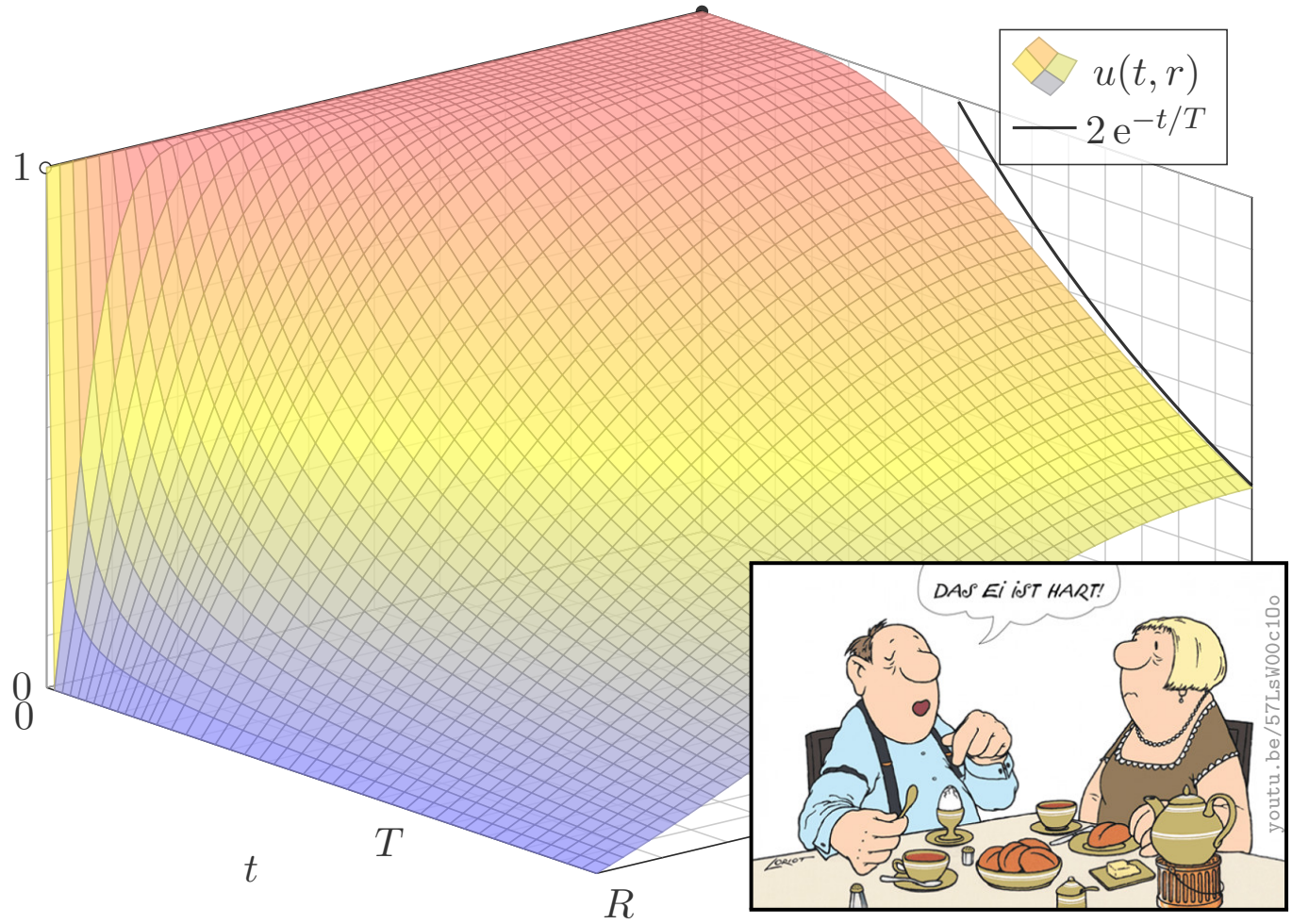
$x=$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$t=0.0$	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000
0.1	0.000	0.600	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.600	0.000
0.2	0.000	0.520	0.840	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.840	0.520	0.000
0.3	0.000	0.440	0.776	0.936	1.000	1.000	1.000	0.936	0.776	0.440	0.000
0.4	0.000	0.398	0.706	0.898	0.974	1.000	0.974	0.898	0.706	0.398	0.000
0.5	0.000	0.362	0.660	0.852	0.954	0.980	0.954	0.852	0.660	0.362	0.000
0.6	0.000	0.336	0.617	0.816	0.923	0.959	0.923	0.816	0.617	0.336	0.000
0.7	0.000	0.314	0.584	0.779	0.895	0.930	0.895	0.779	0.584	0.314	0.000
0.8	0.000	0.297	0.554	0.747	0.863	0.902	0.863	0.747	0.554	0.297	0.000
0.9	0.000	0.281	0.528	0.716	0.832	0.871	0.832	0.716	0.528	0.281	0.000
1.0	0.000	0.268	0.505	0.687	0.801	0.840	0.801	0.687	0.505	0.268	0.000
1.1	0.000	0.255	0.483	0.660	0.771	0.809	0.771	0.660	0.483	0.255	0.000
1.2	0.000	0.244	0.463	0.634	0.742	0.779	0.742	0.634	0.463	0.244	0.000
1.3	0.000	0.234	0.444	0.608	0.713	0.749	0.713	0.608	0.444	0.234	0.000
1.4	0.000	0.224	0.426	0.584	0.686	0.720	0.686	0.584	0.426	0.224	0.000
1.5	0.000	0.215	0.409	0.561	0.659	0.693	0.659	0.561	0.409	0.215	0.000
1.6	0.000	0.206	0.392	0.539	0.633	0.666	0.633	0.539	0.392	0.206	0.000
1.7	0.000	0.198	0.377	0.518	0.609	0.640	0.609	0.518	0.377	0.198	0.000
1.8	0.000	0.190	0.362	0.498	0.585	0.615	0.585	0.498	0.362	0.190	0.000
1.9	0.000	0.183	0.348	0.478	0.562	0.591	0.562	0.478	0.348	0.183	0.000
2.0	0.000	0.176	0.334	0.460	0.540	0.568	0.540	0.460	0.334	0.176	0.000

Finite-Differenzen-Methode: Kühlung am Rand



Realistische Probleme sind oft kompliziert. Numerische Lösungsmethoden sind hier ungemein nützlich, leider meist schwer zu durchschauen. Vereinfachte Modelle und geschlossene Lösungen hingegen helfen unserem qualitativen Verständnis. Beides ergänzt sich wunderbar. Nutzen Sie dies!

Wie schnell kühlt eine Kugel über ihren Rand ab?



Wie schnell kühlt eine Kugel über ihren Rand ab?

Erstes Beispiel, aus der Küche:
Wie lange muss ein Ei kochen? eine Pute garen? ein Bierfass kühlen?
Genauer: Wann erreicht die Kerntemperatur die jeweilige Zielgröße?
Wir untersuchen hier nur Wärmeleitung ohne Konvektion / Strömung;
für Pute und Ei ist das realistisch, bei Bier eine starke Vereinfachung.

Zweites Beispiel, aus der Fernsehunterhaltung:
Mit gut gekühltem, frisch gezapftem Bier schauen Sie *CSI : Stuttgart*.
Die Polizei findet morgens um 6 Uhr ein Mordopfer im Schlossgarten.
Die Außentemperatur beträgt recht konstant $10°\mathrm{C}$, die Temperatur in der Mitte des Gehirns liegt noch bei $20°\mathrm{C}$. Wann geschah der Mord?

Drittes Beispiel, aus Erdgeschichte und Evolution:
Warum waren Dinosaurier groß, aber Vögel sind klein? Erstere waren vermutlich wechselwarm, und ihre Wärmebilanz ist bei großem Volumen günstiger: Das Volumen wächst kubisch, die Oberfläche nur quadratisch.
Warmblüter (Vögel, Säugetiere) haben schnelleren Stoffwechsel und benötigen viel Energie für die Regulierung ihrer Körpertemperatur.

Der Laplace–Operator bei sphärischer Symmetrie

Zur Vereinfachung nutzen wir sphärische Symmetrie:

$$U \,:\, \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \,:\, (x,y,z) \mapsto U(x,y,z) = u\Big(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\Big)$$

Hier zählt nur der Radius $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ und somit die Funktion

$$u \,:\, \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R} \,:\, r \mapsto u(r).$$

Aufgabe: Berechnen Sie den Laplace–Operator $\Delta U(x,y,z)$ mittels u.

Lösung: Wir leiten geduldig ab: Wir finden $\partial_x r = x/r$ und somit

$$\partial_x\, u(r) = u'(r) \cdot \frac{x}{r} \qquad \text{dank Kettenregel,}$$

$$\partial_x^2\, u(r) = u''(r) \cdot \frac{x^2}{r^2} + u'(r) \cdot \frac{r - x^2/r}{r^2} \qquad \text{dank Produktregel.}$$

Ebenso für $\partial_y^2\, u(r)$ und $\partial_z^2\, u(r)$. Die Summe ergibt schließlich:

$$\boxed{\big(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2\big)\, U(x,y,z) \;=\; u''(r) + \frac{2}{r}u'(r) \;=\; \frac{1}{r^2}\partial_r\Big[r^2 \partial_r\, u(r)\Big]}$$

Der Laplace–Operator in Kugelkoordinaten

Allgemein können wir $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ in Kugelkoordinaten parametrisieren:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \sin\theta \cos\varphi \\ \rho \sin\theta \sin\varphi \\ \rho \cos\theta \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad U \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \rho \sin\theta \cos\varphi \\ \rho \sin\theta \sin\varphi \\ \rho \cos\theta \end{pmatrix} =: u \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix}$$

Aus $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ erhalten wir die Funktion $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}$.
Wir übertragen den Laplace–Operator in sphärische Koordinaten:

$$\boxed{\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 = \frac{1}{\rho^2}\partial_\rho\Big(\rho^2 \partial_\rho\Big) + \frac{1}{\rho^2 \sin\theta}\partial_\theta\Big(\sin\theta\, \partial_\theta\Big) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta}\partial_\varphi^2}$$

Das bedeutet ausführlich

$$[\Delta U] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left[\frac{1}{\rho^2}\partial_\rho\Big(\rho^2 \partial_\rho\Big) + \frac{1}{\rho^2 \sin\theta}\partial_\theta\Big(\sin\theta\, \partial_\theta\Big) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta}\partial_\varphi^2\right] u \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix}$$

Übung für Mutige: Rechnen Sie beide Seiten aus und vergleichen Sie!

☺ Hängt u nicht von φ und θ ab, so erhalten wir die vorige Formel in r.

Wärmeleitung einer Kugel

Aufgabe: Lösen Sie die sphärische Wärmeleitungsgleichung (ARWP)

$$\begin{aligned}
&\partial_t u(t,r) = \frac{\kappa}{r^2}\partial_r\Big[r^2\partial_r\, u(t,r)\Big] && \text{für alle } t>0 \text{ und } 0<r<R,\\
&u(t,R)=0 && \text{Randbedingungen für } t\geq 0,\\
&u(0,r)=1 && \text{Anfangswerte für } 0\leq r<R.
\end{aligned}$$

Gesucht sind Funktionen $u:\mathbb{R}_{\geq 0}\times[0,R]\to\mathbb{R}$, stetig auf $\mathbb{R}_{\geq 0}\times[0,R]$ bis auf die Ecke $(0,R)$ und differenzierbar auf $\mathbb{R}_{>0}\times\,]0,R[$, mindestens einmal nach t und zweimal nach r, die obige Gleichungen erfüllen. Der Anfangswert $u(0,r)=1$ gibt die Wärmeverteilung zur Zeit $t=0$ vor. Der Randwert $u(t,R)=0$ bedeutet, dass wir am Kugelrand die Wärmedichte u konstant auf Null halten, etwa durch Kontakt mit einem riesigen Reservoir konstanter Temperatur.

Lösung: Wir separieren die Variablen durch den Produktansatz

$$u(t,r)=v(t)\,w(r).$$

Damit entkoppeln wir unsere PDE in zwei ODE / Eigenprobleme:

$$v'(t)=\lambda\,v(t) \quad \text{und} \quad w''(r)+\frac{2}{r}w'(r)=\frac{\lambda}{\kappa}w(r)$$

Zu jedem $\lambda\in\mathbb{R}$ haben wir links die Lösung $v(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}$.

Wärmeleitung einer Kugel

Rechts substituieren wir $q(r)=r\,w(r)$:

$$\begin{aligned}
w(r)&=q(r)/r\\
w'(r)&=q'(r)/r-q(r)/r^2\\
w''(r)&=q''(r)/r-2q'(r)/r^2+2q(r)/r^3
\end{aligned}$$

Aus $w''(r)+(2/r)\,w'(r)=(\lambda/\kappa)\,w(r)$ wird damit $q''(r)=(\lambda/\kappa)\,q(r)$.

$$\begin{aligned}
&\lambda=0: && w(r)=\frac{ar+b}{r} && \text{mit } a,b\in\mathbb{R},\\
&\lambda>0: && w(r)=\frac{a\,\mathrm{e}^{+\alpha r}+b\,\mathrm{e}^{-\alpha r}}{r}, && \alpha=\sqrt{\lambda/\kappa}\\
&\lambda<0: && w(r)=\frac{a\sin(\omega r)+b\cos(\omega r)}{r}, && \omega=\sqrt{-\lambda/\kappa}
\end{aligned}$$

Endlichkeit von $w(0)$ und die Randbedingung $w(R)=0$ erfüllt nur

$$w(r)=a\,\frac{\sin(\omega r)}{r} \qquad \text{(Spaltfunktion, we meet again!)}$$

mit $\omega=\omega_n:=n\pi/R$ und $n=1,2,3,\ldots$, somit $\lambda=\lambda_n:=-(n\pi/R)^2\kappa$.

Wärmeleitung einer Kugel

Zusammengesetzte Eigenfunktionen:

$$u_n(t,r) = v_n(t)\, w_n(r) = \mathrm{e}^{-n^2 t/T}\, \frac{\sin(n\pi r/R)}{r}$$

Weitere Lösungen erhalten wir durch Superposition:

$$u(t,r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(t,r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, \mathrm{e}^{-n^2 t/T}\, \frac{\sin(n\pi r/R)}{r}$$

Damit lösen wir schließlich die Anfangsbedingung für $t = 0$:

$$u(0,r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, \frac{\sin(n\pi r/R)}{r} \quad \overset{!}{=} \quad 1 \qquad \text{für } 0 \le r < R.$$

Wie lösen Sie $\sum a_n \sin(n\pi r/R) = r$? Durch Fourier–Entwicklung! I205

$$2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\, \frac{\sin(nx)}{n} = x \qquad \text{für } |x| < \pi\text{, hier } x = \pi r/R$$

$$2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\, \frac{\sin(n\pi r/R)}{n\pi r/R} = 1 \qquad \text{für } |r| < R\text{, Einsetzen!}$$

Wärmeleitung einer Kugel

Als Lösung $u : \mathbb{R}_{\ge 0} \times [0,R] \to \mathbb{R}$ für die Kugel erhalten wir:

$$\boxed{u(t,r) = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\, \mathrm{e}^{-n^2 t/T}\, \frac{\sin(n\pi r/R)}{n\pi r/R}}$$

Zum Vergleich die Lösung $u : \mathbb{R}_{\ge 0} \times [0,L] \to \mathbb{R}$ für einen Stab:

$$\boxed{u(t,x) = 4\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(2k+1)^2 t/T}\, \frac{\sin\big((2k+1)\pi x/L\big)}{(2k+1)\pi}}$$

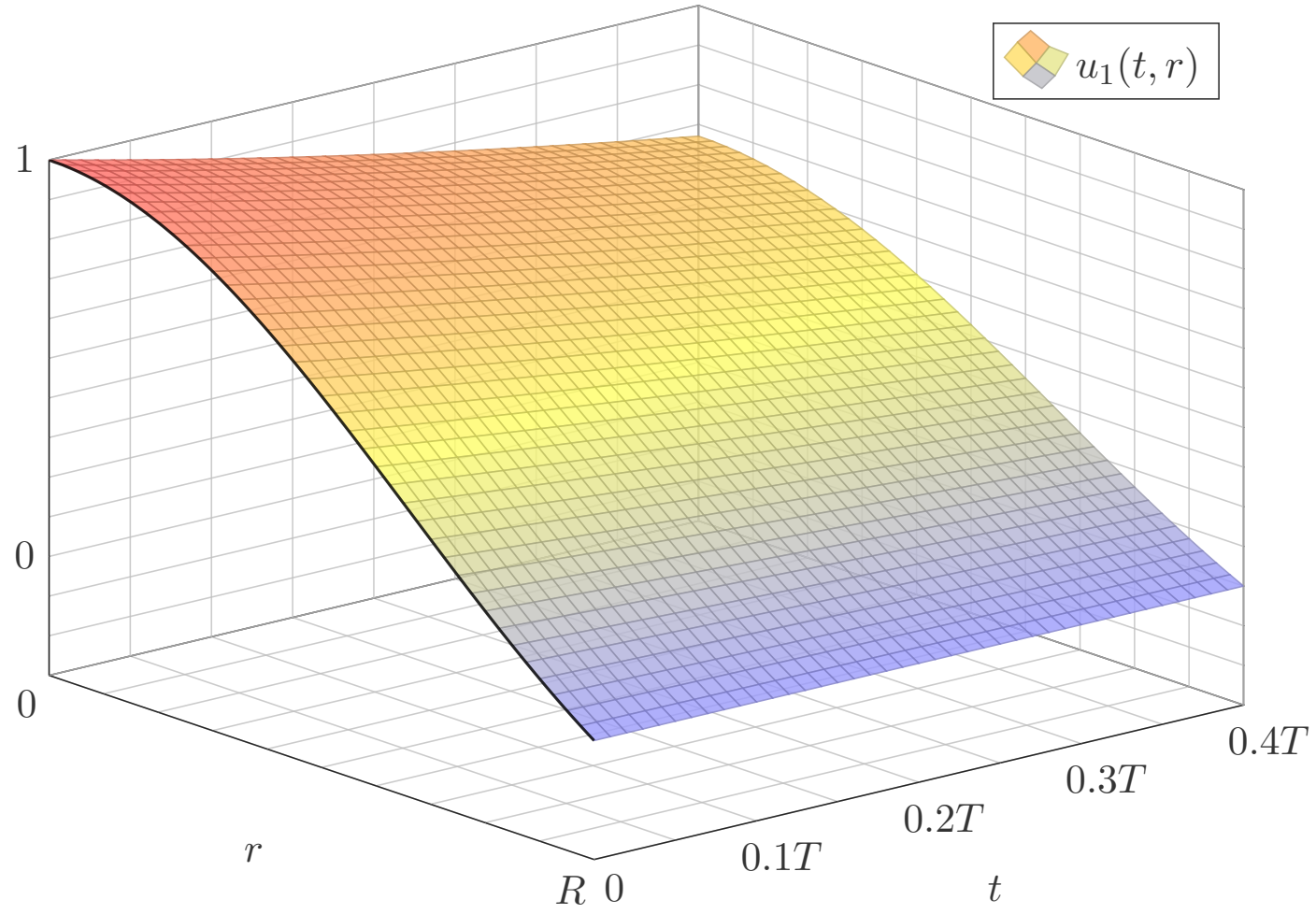
☺ Beide Lösungen haben im Wesentlichen dieselbe Form:

Summiert wird über alle natürlichen Zahlen $n = 1, 2, 3, \ldots$
bzw. über alle ungeraden Zahlen $n = 2k+1 = 1, 3, 5, \ldots$

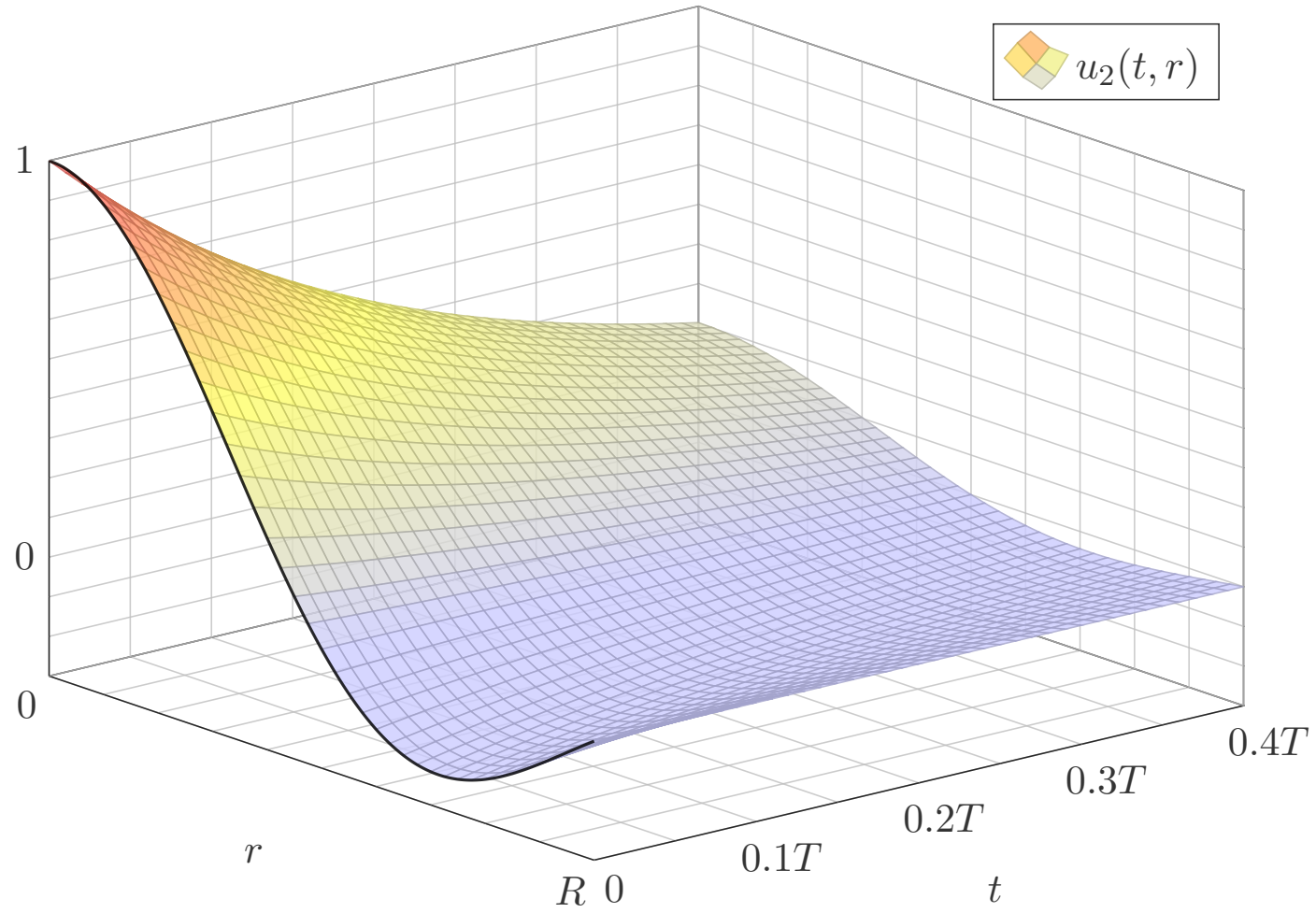
Der Zeitfaktor $\mathrm{e}^{-n^2 t/T}$ sorgt für exponentielles Abklingen.
Für die Kugel erhalten wir zusätzlich einen Faktor r/R.

Die natürliche Zeitskala ist $T = R^2/\kappa\pi^2$ bzw. $T = L^2/\kappa\pi^2$.
Bei doppelter Größe dauert die Abkühlung viermal so lange.

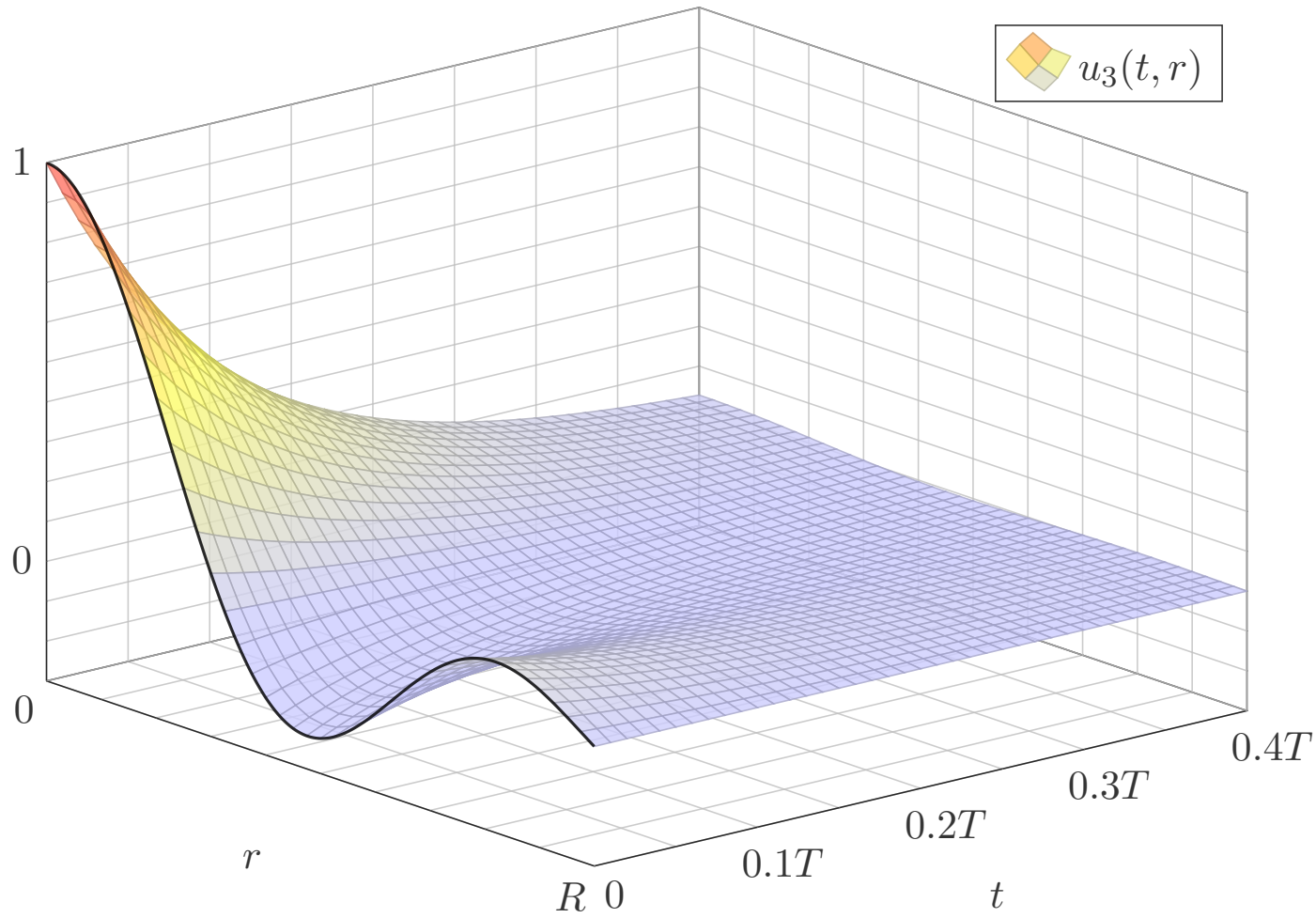
Wärmeleitung einer Kugel: Eigenfunktionen



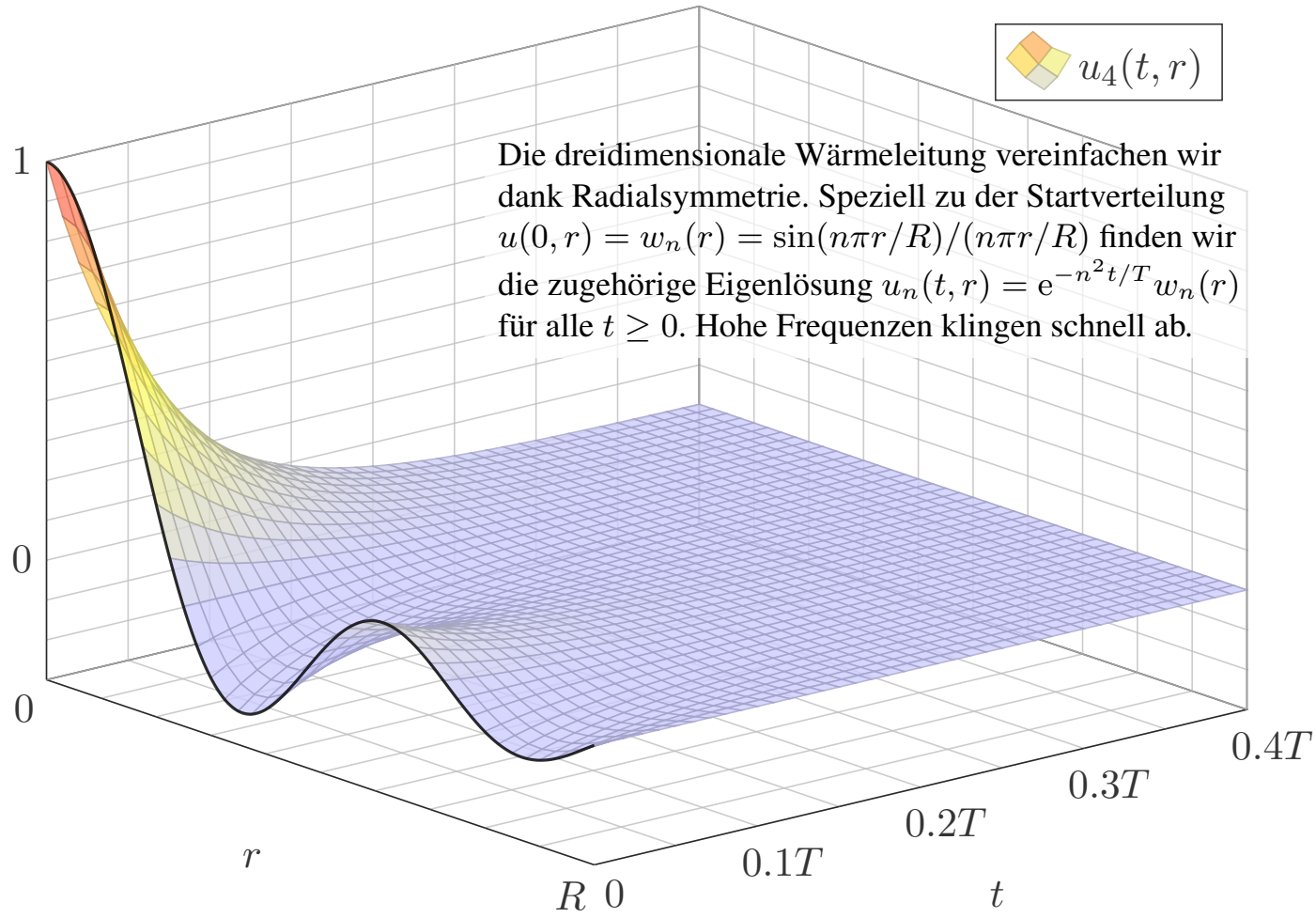
Wärmeleitung einer Kugel: Eigenfunktionen



Wärmeleitung einer Kugel: Eigenfunktionen

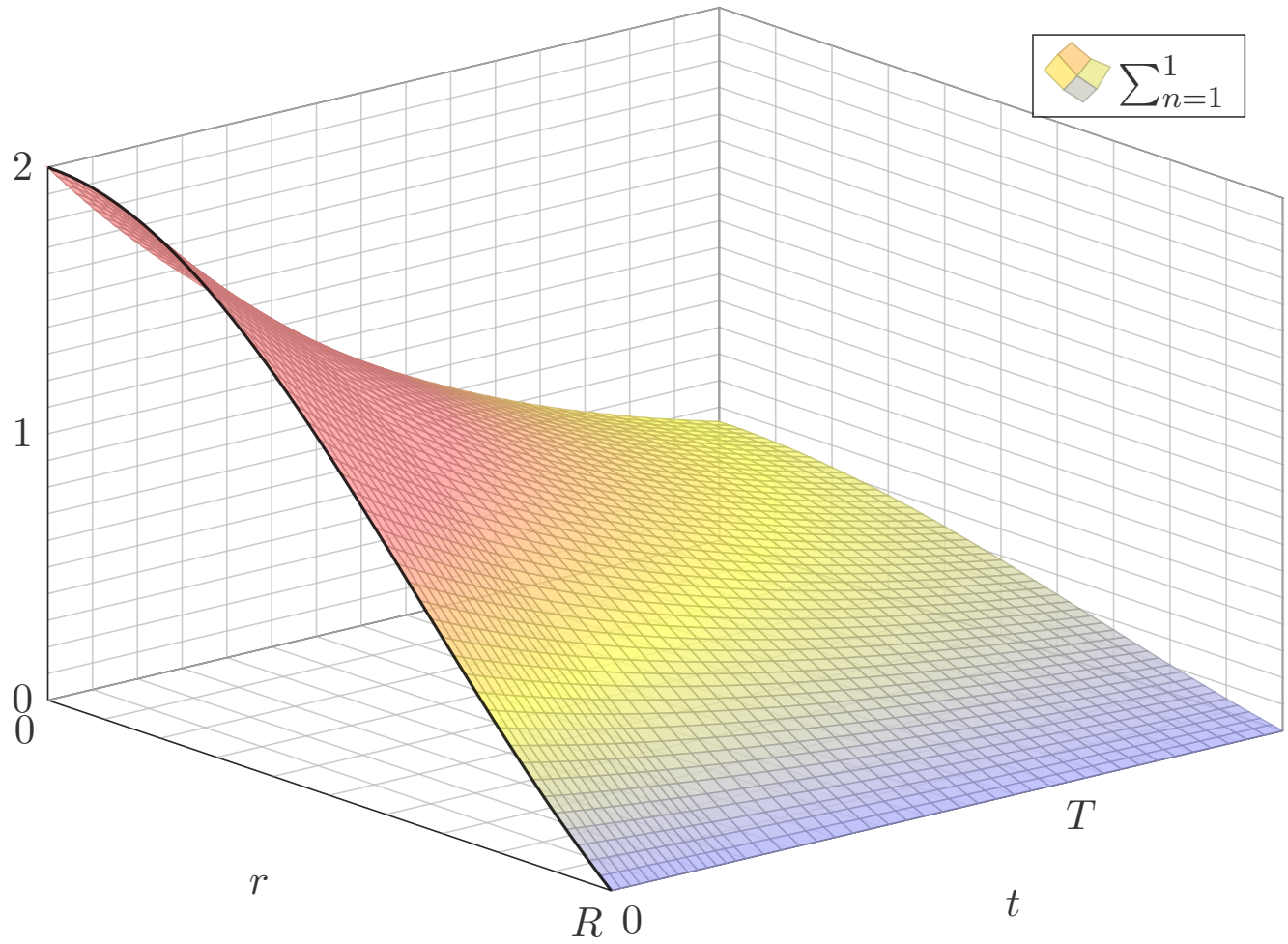


Wärmeleitung einer Kugel: Eigenfunktionen

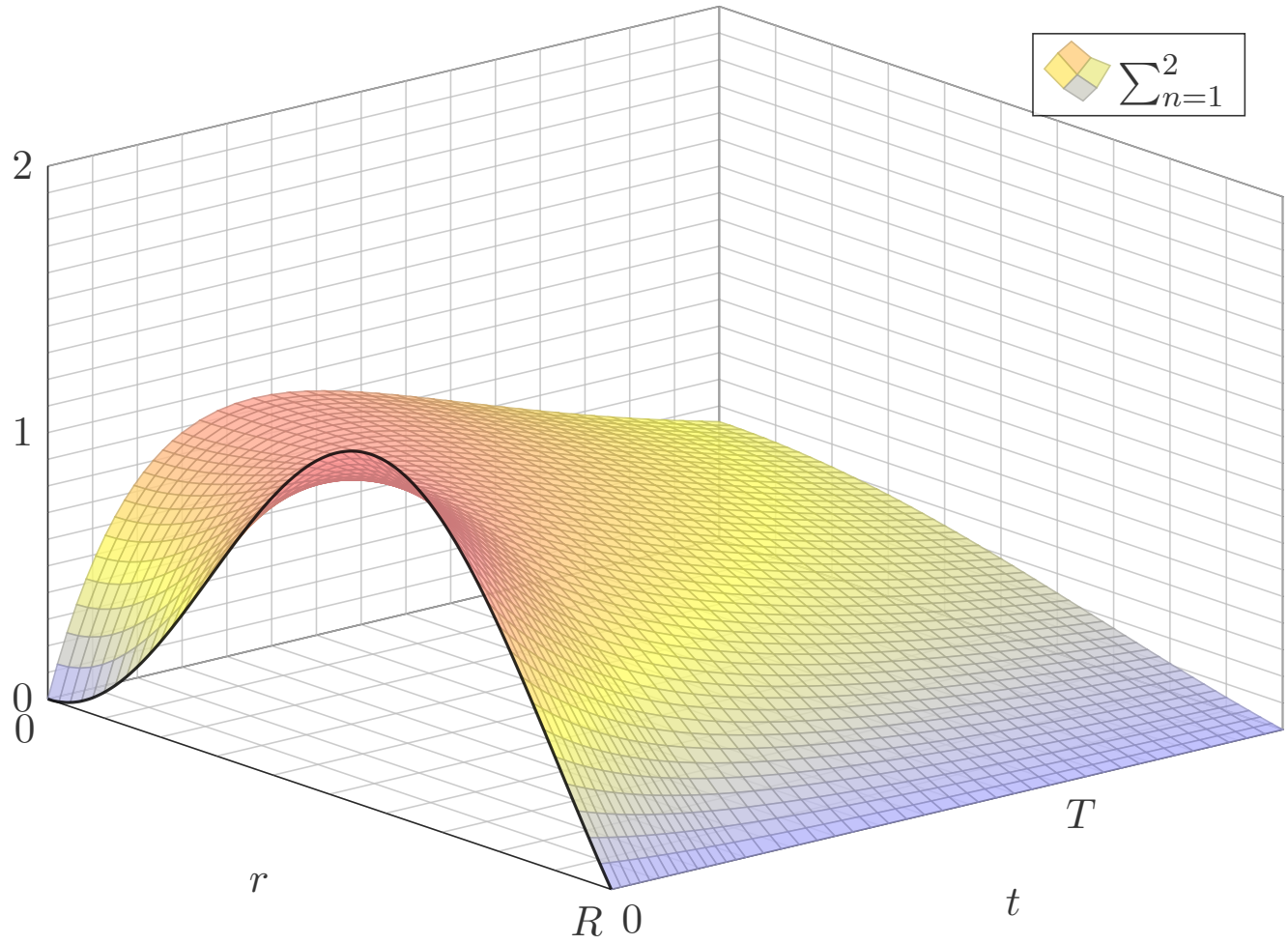


Die dreidimensionale Wärmeleitung vereinfachen wir dank Radialsymmetrie. Speziell zu der Startverteilung $u(0,r) = w_n(r) = \sin(n\pi r/R)/(n\pi r/R)$ finden wir die zugehörige Eigenlösung $u_n(t,r) = \mathrm{e}^{-n^2 t/T} w_n(r)$ für alle $t \geq 0$. Hohe Frequenzen klingen schnell ab.

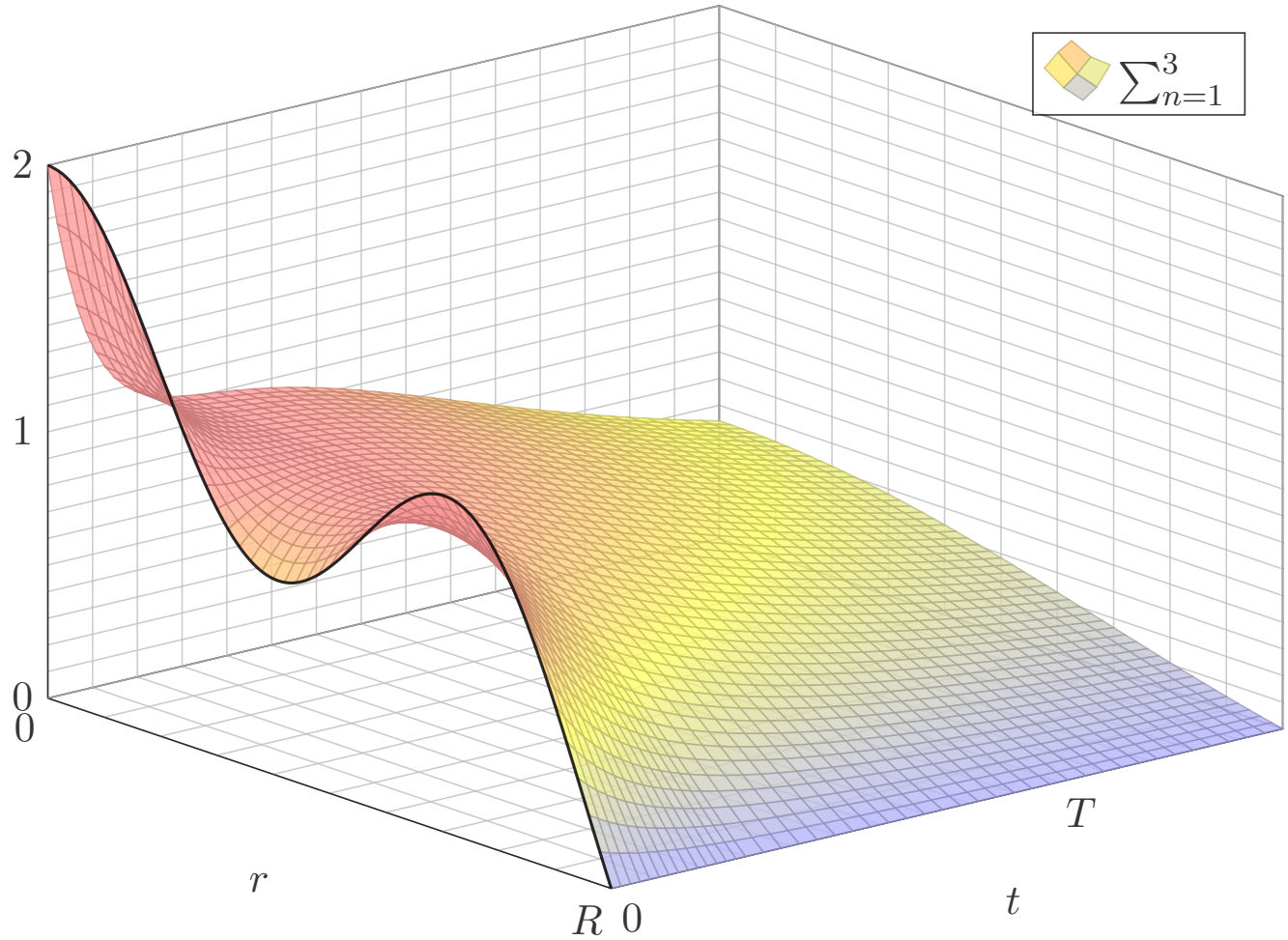
Wärmeleitung einer Kugel: Summe als Näherung



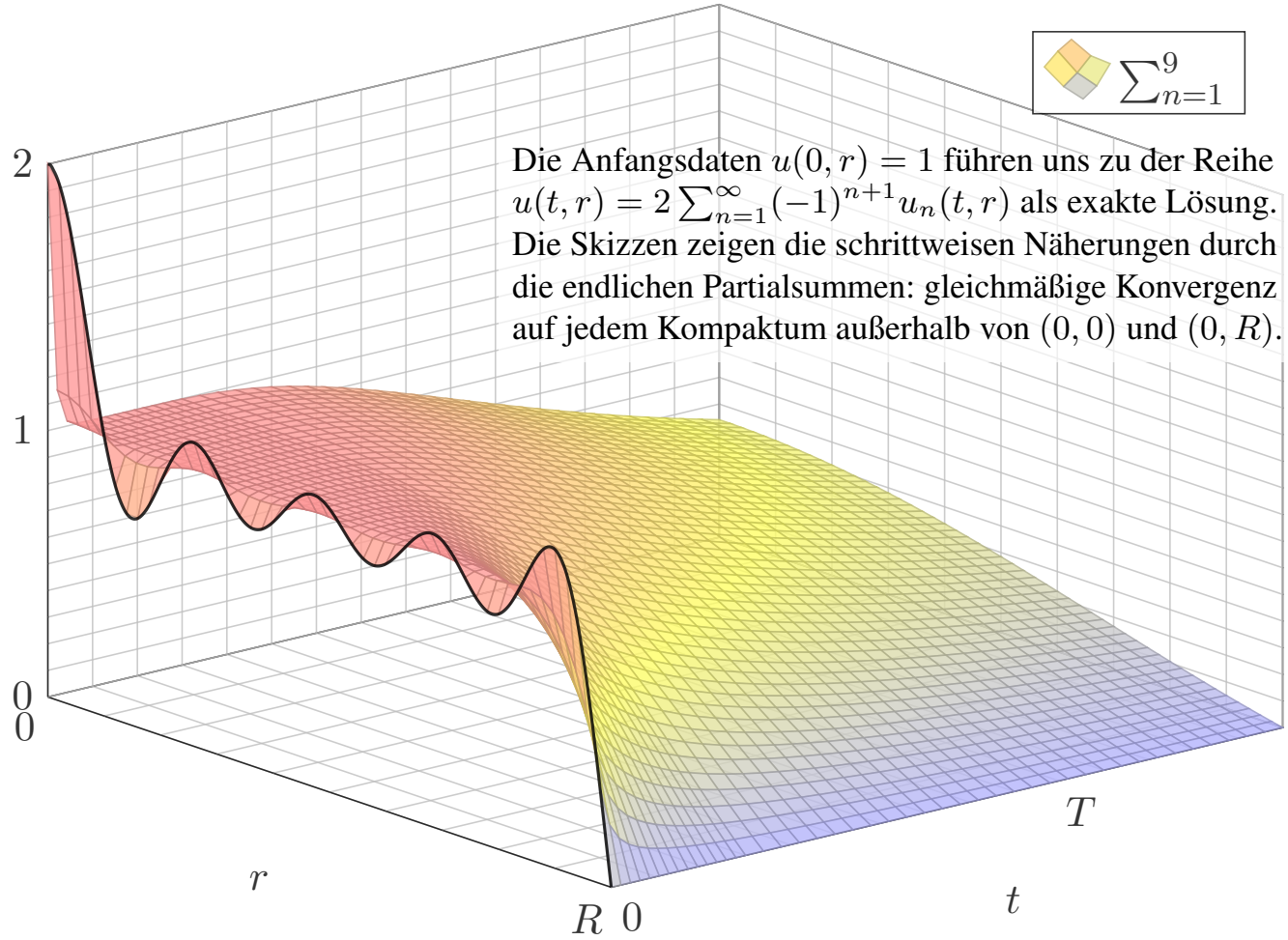
Wärmeleitung einer Kugel: Summe als Näherung



Wärmeleitung einer Kugel: Summe als Näherung

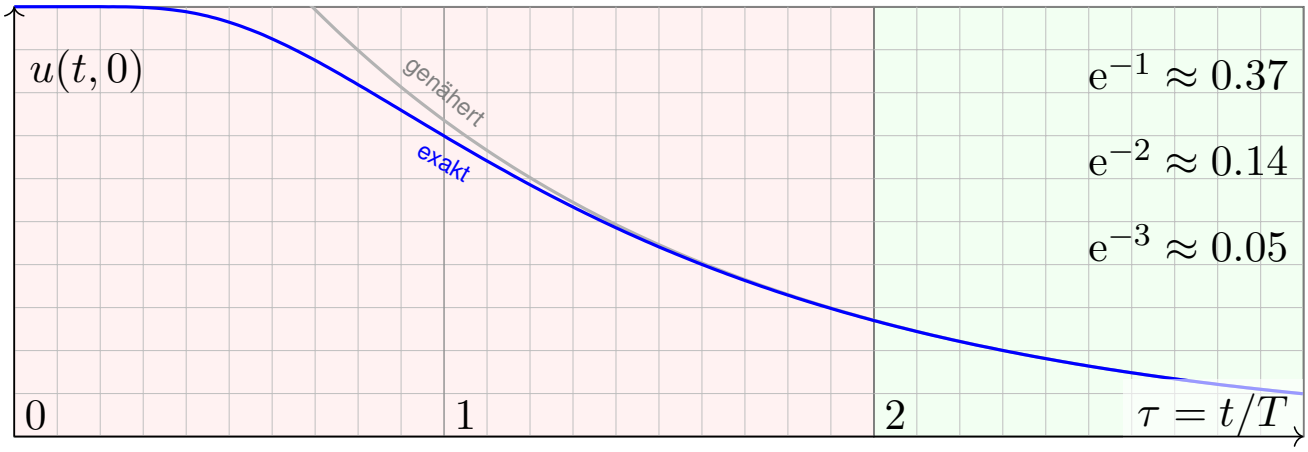


Wärmeleitung einer Kugel: Summe als Näherung



Die Anfangsdaten $u(0,r) = 1$ führen uns zu der Reihe $u(t,r) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n(t,r)$ als exakte Lösung. Die Skizzen zeigen die schrittweisen Näherungen durch die endlichen Partialsummen: gleichmäßige Konvergenz auf jedem Kompaktum außerhalb von $(0,0)$ und $(0,R)$.

Zeitliche Entwicklung der Kerntemperatur



Die natürliche Zeitskala ist hier $\tau = (\pi/R)^2 \kappa t = t/T$ mit $T = R^2/\kappa\pi^2$.

$$u(t,r) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\mathrm{e}^{-n^2 t/T}\,\frac{\sin(n\pi r/R)}{n\pi r/R}$$

$$u(t,0) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\mathrm{e}^{-n^2 t/T} \underset{n\,=\,1}{\lessapprox} 2\,\mathrm{e}^{-t/T}$$

- ☺ Leibniz–Reihe, numerisch günstig, explizite Fehlerschranke B3G!
- ☺ Die Abkühlung ist exponentiell, sehr gute Näherung für $t > 2T$.
- ☺ Bei doppeltem Radius dauert die Abkühlung viermal so lange.

Plausibilitätscheck: Wie lange kochen Eier?

Aufgabe: Wie lange kochen Eier? Erklären Sie die Formel:

$$t = T \cdot \ln\left[2\,\frac{\vartheta_{\text{Außen}} - \vartheta_{\text{Start}}}{\vartheta_{\text{Außen}} - \vartheta_{\text{Ziel}}}\right]$$

Lösung: Typischer Durchmesser $D = 44\mathrm{mm}$, also Radius $R = 22\mathrm{mm}$.
Eier sind keine Kugeln, sondern… eiförmig; das vernachlässigen wir.

Die Temperaturleitfähigkeit beträgt etwa $\kappa \approx 0.2\mathrm{mm}^2/\mathrm{s}$: Messen!
Das ist etwas mehr als Wasser. Die Angaben in der Literatur variieren.

Die natürliche Zeitskala ist $T = R^2/\kappa\pi^2 \approx 240\mathrm{s} = 4\mathrm{min}$: Plausibel!
Der Verlauf der Kerntemperatur ist (näherungsweise für $t > T$):

$$\begin{aligned}
t &\mapsto 100^\circ\mathrm{C} - 93^\circ\mathrm{C}\cdot 2\,\mathrm{e}^{-t/T} = \vartheta(t)\\
6\mathrm{min} = 1.5T &\mapsto 100^\circ\mathrm{C} - 93^\circ\mathrm{C}\cdot 2\,\mathrm{e}^{-1.5} \approx 60^\circ\mathrm{C}\\
8\mathrm{min} = 2.0T &\mapsto 100^\circ\mathrm{C} - 93^\circ\mathrm{C}\cdot 2\,\mathrm{e}^{-2.0} \approx 75^\circ\mathrm{C}\\
10\mathrm{min} = 2.5T &\mapsto 100^\circ\mathrm{C} - 93^\circ\mathrm{C}\cdot 2\,\mathrm{e}^{-2.5} \approx 85^\circ\mathrm{C}
\end{aligned}$$

Der Dotter denaturiert bei $65^\circ\mathrm{C}$, das Eiklar erst bei $82^\circ\mathrm{C}$.

Plausibilitätscheck: Wie lange kühlt Bier?

☺ Eierkochen ist eine Wissenschaft für sich. Manche denken: Dafür braucht's keine Rechnung! Stimmt, dieses Beispiel soll unser Modell illustrieren, prüfen, kalibrieren, mehr nicht. Man kann seine Frühstückseier auch ohne Studium kochen, dennoch gilt: Studieren erleuchtet Probieren! Manchmal stehen Sie auch vor Fragen, zu denen Sie (noch) keine Erfahrung haben, und Sie wollen rechnerisch eine Prognose erstellen. Typische Probleme sind Fragen der Skalierung:

Aufgabe: Wie lange kochen Sie ein Straußenei mit $15\mathrm{cm}$ Durchmesser?
Lösung: Der Durchmesser ist 3.4-mal größer, die Zeit etwa 11.5-mal.

Sie sollten daher eine längere Kochzeit von etwa $90\mathrm{min}$ einplanen. Das hätten Sie ohne Modell wohl nur schwer erraten. Wie hilft Ihnen hier unser mathematisches Modell? Es erklärt Ihnen alle wesentlichen Eigenschaften! Insbesondere sehen Sie daran: Die erste Eigenfunktion ist relevant, alle anderen klingen viel schneller ab. Wir gewinnen so eine brauchbare, robuste Beschreibung unabhängig von Details. Probieren Sie's aus! Genauere Rechnungen sind bei Bedarf möglich.

Aufgabe: Wie lange kühlen Sie ein $5\mathrm{l}$–Fass Bier? eine Flasche Sekt?
Lösung: $R \approx 11\mathrm{cm}$, $\kappa \approx 0.14\mathrm{mm}^2/\mathrm{s}$, $T = R^2/\kappa\pi^2 \approx 8800\mathrm{s} \approx 2.5\mathrm{h}$.
Flasche grob gerundet $R \approx 5\mathrm{cm}$, $T = R^2/\kappa\pi^2 \approx 1800\mathrm{s} \approx 0.5\mathrm{h}$.

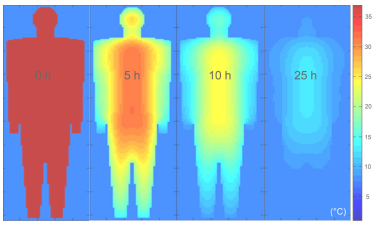
Im Kühlschrank genügen $4T \approx 10\mathrm{h}$ für Bier bzw. $4T \approx 2\mathrm{h}$ für Sekt. Das ist durchaus plausibel. Im Gefrierschrank ist die Temperaturdifferenz größer und die Kühlung entsprechend schneller; die obige Formel berechnet die Zeit. (Vorsicht vor Frost!) Wir vereinfachen hier natürlich die Geometrie, Wärmeleitung, etc., aber immerhin erhalten wir eine brauchbare Größenordnung.

CSI : Stuttgart

Aufgabe: (*MathFlix and Chill*, für hartgesottene Fans der Wärmeleitung)
Die Polizei findet morgens um 6 Uhr ein Mordopfer im Schlossgarten. Die Außentemperatur beträgt recht konstant $10°\mathrm{C}$, die Temperatur in der Mitte des Gehirns liegt noch bei $20°\mathrm{C}$. Der Kopfumfang ist $U = 57\mathrm{cm}$. Wann geschah der Mord? Wie verlässlich ist Ihre Schätzung?

Lösung: Radius $R \approx 9\mathrm{cm}$, Temperaturleitfähigkeit $\kappa \approx 0.2\mathrm{mm}^2/\mathrm{s}$.
Die natürliche Zeitskala ist hier $T = R^2/\kappa\pi^2 \approx 4100\mathrm{s} \approx 1\mathrm{h}10$.

$$t = T \cdot \ln\left[2\,\frac{\vartheta_{\text{Außen}} - \vartheta_{\text{Start}}}{\vartheta_{\text{Außen}} - \vartheta_{\text{Ziel}}}\right] = T \cdot \ln\left[2 \cdot \frac{27}{10}\right] \approx 2\mathrm{h}$$



⚠ Gesicherte Aussagen erfordern große Umsicht:
Wir vereinfachten, der Kopf ist keine homogene Kugel: besseres Modell!
Die Temperaturleitfähigkeit κ ist nur grob geschätzt: bessere Messung!
Jede Messung (Temperaturen, Umfang) hat Fehler: Konfidenzintervall!
Die Methode eignet sich nur von etwa $1T$ bis $4T$: inverses Problem!

📖 Leah Wilk *et al.*, Science (2020), `doi:10.1126/sciadv.aba4243`.
J.B. Keller: *Inverse Problems.* Amer. Math. Monthly 83 (1976) 107–118.

Homogene Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}^n$

Fouriers berühmte Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u - \kappa\,\Delta u = q$ folgt aus der Wärmebilanz für den Wärmefluss dank unserer Integralsätze.

Die homogene Gleichung $\partial_t u = \kappa\,\Delta u$ hat als Fundamentallösung eine auseinanderfließende Glockenkurve, den **Wärmeleitungskern**

$$H : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : H(t,x) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi\kappa t})^n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\kappa t}\right).$$

Die Konstanten sichern die Normierung $\int_{x\in\mathbb{R}^n} H(t,x)\,\mathrm{d}x = 1$ für $t > 0$. In Satz D5D haben wir die Gleichung $(\partial_t - \kappa\,\Delta)H = 0$ nachgerechnet.

Ist für $t = 0$ die Wärmeverteilung $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vorgegeben, $u_0 \in C_b$, so erhalten wir die Lösung durch **Superposition** (Faltung, siehe D5E)

$$u : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : u(t,x) = \int_{\xi\in\mathbb{R}^n} H(t, x-\xi)\, u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Für $t \searrow 0$ gilt dann $u(t,x) \to u_0(x)$. Durch Ableiten unter dem Integral finden wir $(\partial_t - \kappa\,\Delta)\,u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\xi)\,(\partial_t - \kappa\,\Delta)H(t,x-\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0$.

Inhomogene Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}^n$

Zu lösen sei die inhomogene Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} &\partial_t u(t,x) - \kappa\,\Delta u(t,x) = f(t,x) && \text{für alle } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}^n, \\ &u(0,x) = u_0(x) && \text{Anfangswerte für } x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

Gegeben sei $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig mit Schranke $|u_0(x)| \le a\,\mathrm{e}^{b|x|^\alpha}$, $\alpha < 2$ sowie $f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ beschränkt und stetig differenzierbar.

Existenz: Dann wird unser Problem gelöst durch das Integral

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} H(t,x-\xi)\,u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} H(t-\tau, x-\xi) f(\tau,\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau.$$

Zu jedem $T > 0$ gilt eine Schranke $|u(t,x)| \le A\,\mathrm{e}^{Bx^2}$ auf $[0,T] \times \mathbb{R}$.

Eindeutigkeit: Unsere Lösung u ist die einzige mit dieser Schranke.

⚠ Ohne diese Schranke gibt es exotische Gegenbeispiele (S1B). Mehrdeutigkeiten müssen wir erkennen und nötigenfalls auch lösen: Sind noch mehrere Lösungen möglich, so stellen wir geeignete weitere Bedingungen, um die physikalisch sinnvollen Lösungen herauszuheben.

Randbedingungen und Eindeutigkeit

Für die Wärmeleitungsgleichung mit Anfangs- und Randbedingungen (ARWP) nutzen wir den folgenden Eindeutigkeitssatz S3C:

(0) Löst $u : [0,T[\times [a,b] \to \mathbb{R}$ die homogene Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned}
&\partial_t u(t,x) - \kappa\, \partial_x^2 u(t,x) = 0 && \text{für } 0 < t < T \text{ und } a < x < b,\\
&\begin{cases} u(t,a) = u(t,b) = 0 \\ \partial_x u(t,a) = \partial_x u(t,b) = 0 \end{cases} && \begin{matrix}\text{Dirichlet–Randbedingungen für } t > 0 \text{ oder}\\ \text{Neumann–Randbedingungen für } t > 0,\end{matrix}\\
&u(0,x) = 0 && \text{Anfangswerte für } t = 0 \text{ und } a < x < b,
\end{aligned}$$

dann gilt $u(t,x) = 0$ für alle $(t,x) \in [0,T[\times [a,b]$.

(1) Lösen $\tilde{u}, \check{u} : [0,T[\times [a,b] \to \mathbb{R}$ die Wärmeleitungsgleichung

$$\boxed{\begin{aligned}
&\partial_t u(t,x) - \kappa\, \partial_x^2 u(t,x) = f(t,x),\\
&\begin{cases} u(t,a) = \ell(t),\ u(t,b) = r(t) \text{ oder} \\ \partial_x u(t,a) = \ell(t),\ \partial_x u(t,b) = r(t), \end{cases}\\
&u(0,x) = g(x),
\end{aligned}}$$

dann gilt $\tilde{u}(t,x) = \check{u}(t,x)$ für alle $(t,x) \in [0,T[\times [a,b]$.

Das Minimum-Maximum-Prinzip

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $\Omega_T = [0,T] \times K$. Für $u : \Omega_T \to \mathbb{R}$ untersuchen wir die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = \Delta u$. Hierzu zerlegen wir Ω_T in

das parabolische Innere $\quad D_T =]0,T] \times \mathring{K}$

und den parabolische Rand $\quad B_T = \big([0,T] \times \partial K\big) \cup \big(\{0\} \times K\big)$.

Auf $\Omega_T = [0,T] \times K$ sei $u : \Omega_T \to \mathbb{R}$ stetig. Da Ω_T und B_T kompakt sind, nimmt u hierauf Minimum und Maximum an. Wegen $\Omega_T \supseteq B_T$ gilt also:

$$\min\nolimits_{\Omega_T} u \le \min\nolimits_{B_T} u \qquad \text{und} \qquad \max\nolimits_{\Omega_T} u \ge \max\nolimits_{B_T} u$$

Zudem gelte $\partial_t u = \Delta u$ auf dem parabolischen Inneren $D_T =]0,T] \times \mathring{K}$.
(1) Dann nimmt u sein Minimum und Maximum auf dem Rand B_T an:

$$\boxed{\min\nolimits_{\Omega_T} u = \min\nolimits_{B_T} u \qquad \text{und} \qquad \max\nolimits_{\Omega_T} u = \max\nolimits_{B_T} u}$$

Seien $u, v : \Omega_T \to \mathbb{R}$ zwei Lösungen, $\partial_t u = \Delta u$ und $\partial_t v = \Delta v$ auf D_T.
(2) Monotonie: Aus $u \le v$ auf dem Rand B_T folgt $u \le v$ auf ganz Ω_T.
(3) Eindeutigkeit: Aus $u = v$ auf dem Rand B_T folgt $u = v$ auf ganz Ω_T.

Das Prinzip gilt ebenso harmonisch (Satz R2C) und diskret (Satz T4B).

Wärmeleitung eines Stabes

Zu lösen sei die eindimensionale homogene Wärmeleitungsgleichung

$\partial_t u(t,x) - \kappa\,\partial_x^2 u(t,x) = 0$	für alle $t > 0$ und $0 < x < L$,
$u(t,0) = u(t,L) = 0$	Randbedingungen für $t \geq 0$,
$u(0,x) = g(x)$	Anfangswerte für $0 < x < L$.

Gegeben sei $g : [0,L] \to \mathbb{R}$ stetig oder allgemeiner $g \in L^2([0,L])$, entwickelt als $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x/L)$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$.
Dann wird unser Anfangs- und Randwertproblem gelöst durch

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \,\mathrm{e}^{-n^2 t/T} \sin(n\pi x/L).$$

Die natürliche Zeitskala ist die Abklingzeit $T = L^2/\kappa\pi^2$ (Eigenzeit).
Gilt sogar $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, so ist u in $t = 0$ stetig und dort gleich g.

☺ So können Sie Abkühlen und Aufheizen explizit berechnen:
Diese Eigenfunktionen diagonalisieren die Wärmeleitungsgleichung.

☺ Numerisch sehr effizient für $t > T$ dank exponentiellem Abklingen.

Wärmeleitung eines Stabes

Speziell für konstante Anfangswerte $g(x) = 1$ erhalten wir die Lösung

$$u(t,x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(2k+1)^2 t/T} \frac{\sin\big((2k+1)\pi x/L\big)}{(2k+1)}.$$

Die Kerntemperatur im Stabmittelpunkt $x = L/2$ ist demnach

$$u\big(t, \tfrac{L}{2}\big) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(2k+1)^2 t/T} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} \underset{k=0}{\overset{t \gg T}{\sim}} \frac{4}{\pi} \mathrm{e}^{-t/T}.$$

☺ Die Abkühlung ist exponentiell, sehr gute Näherung für $t > T$.
Bei doppelter Länge dauert die Abkühlung viermal so lange.

☺ Hohe Frequenzen klingen besonders schnell ab. Das ist numerisch günstig, führt zu schneller Konvergenz und Glättungseigenschaft:

☺ Zu $t = 0$ dürfen die Anfangsdaten $u(0,x)$ beliebig rau sein, sogar unstetig, doch zu jedem Zeitpunkt $t > 0$ ist die Lösung $u(t,x)$ glatt.

Dieselbe Methode löst die inhomogene Gleichung $\partial_t u - \kappa\,\partial_x^2 u = f$ mit den jeweiligen Randbedingungen: Dirichlet, Neumann, etc.

Wärmeleitung einer Kugel

Zu lösen sei die sphärische homogene Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} &\partial_t u(t,r) = \frac{\kappa}{r^2}\partial_r\Big[r^2\partial_r\, u(t,r)\Big] && \text{für alle } t>0 \text{ und } 0<r<R,\\ &u(t,R)=0 && \text{Randbedingungen für } t\geq 0,\\ &u(0,r)=1 && \text{Anfangswerte für } 0\leq r<R. \end{aligned}$$

Gegeben sei $g\colon[0,R]\to\mathbb{R}$ stetig oder allgemeiner $g\in L^2([0,R])$, entwickelt als $g(r)\cdot r=\sum_{n=1}^\infty a_n\sin(n\pi r/R)$ mit $\sum_{n=1}^\infty|a_n|^2<\infty$.
Dann wird unser Anfangs- und Randwertproblem gelöst durch

$$u(t,r)=\sum_{n=1}^\infty a_n\,\mathrm{e}^{-n^2t/T}\sin(n\pi r/R).$$

Die natürliche Zeitskala ist die Abklingzeit $T=R^2/\kappa\pi^2$ (Eigenzeit).
Gilt sogar $\sum_{n=1}^\infty|a_n|<\infty$, so ist u in $t=0$ stetig und dort gleich g.

☺ So können Sie Abkühlen und Aufheizen explizit berechnen:
Diese Eigenfunktionen diagonalisieren die Wärmeleitungsgleichung.

☺ Numerisch sehr effizient für $t>T$ dank exponentiellem Abklingen.

Wärmeleitung einer Kugel

Speziell für konstante Anfangswerte $g(r)=1$ erhalten wir die Lösung

$$u(t,r)=2\sum_{n=1}^\infty(-1)^{n+1}\,\mathrm{e}^{-n^2t/T}\,\frac{\sin(n\pi r/R)}{n\pi r/R}.$$

Die Kerntemperatur im Kugelmittelpunkt $r=0$ ist demnach

$$u(t,0)=2\sum_{n=1}^\infty(-1)^{n+1}\,\mathrm{e}^{-n^2t/T}\;\underset{n\,=\,1}{\overset{t\,\gg\,T}{\sim}}\;2\,\mathrm{e}^{-t/T}.$$

☺ Die Abkühlung ist exponentiell, sehr gute Näherung für $t>2T$.
Bei doppeltem Radius dauert die Abkühlung viermal so lange.

☺ Hohe Frequenzen klingen besonders schnell ab. Das ist numerisch günstig, führt zu schneller Konvergenz und Glättungseigenschaft:

☺ Zu $t=0$ dürfen die Anfangsdaten $u(0,r)$ beliebig rau sein, sogar unstetig, doch zu jedem Zeitpunkt $t>0$ ist die Lösung $u(t,r)$ glatt.

Dieselbe Methode löst die inhomogene Wärmeleitungsgleichung mit den jeweiligen Randbedingungen: Dirichlet, Neumann, etc.

Kapitel T

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Statistical thinking will one day be as necessary
for efficient citizenship as the ability to read or write.

H.G. Wells (1866–1946)

Les questions les plus importantes de la vie ne sont en effet,
pour la plupart, que des problèmes de probabilité.

Pierre-Simon de Laplace (1749–1827)

So you're telling me it is a matter of probability and odds;
I was worried there was some chance involved.

Vesper Lynd zu James Bond im Film *Casino Royale* (2006)

Inhalt dieses Kapitels T

1 Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume
- Zufall und Wahrscheinlichkeit: Grundbegriffe
- Rechnen mit Ereignissen: Wahrscheinlichkeitsräume

2 Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit
- Bedingte Wahrscheinlichkeiten, Formel von Bayes
- Stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen

3 Das Gesetz der großen Zahlen (GGZ)
- Zufallsvariablen, Erwartung und Varianz
- Die Ungleichungen von Pafnuty Chebychev
- Unabhängige Wiederholung: Gesetz der großen Zahlen
- Stochastische Abhängigkeit: Korrelation vs Kausalität

4 Fazit: Wahrscheinlichkeitsrechnung
- Weitere Aufgaben und Anwendungsbeispiele
- Sex: Was nützen dem Pfau seine Federn?
- Tischkicker: Das Runde muss ins Eckige.
- Google: die zufällige Irrfahrt im Internet

Ziele der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Unser Ziel sind **rationale Entscheidungen unter Unsicherheit**.

- **Experimente** unter Einfluss von Zufällen
- **Prozesse** mit unsicherem Ausgang

That's life: Fast alles im Leben ist ein Wahrscheinlichkeitsexperiment!
Wir wollen **nachvollziehbar begründete, quantitative Aussagen**.

- Ungenauigkeit von Messungen, Konfidenzintervalle, ...
- Ausfallwahrscheinlichkeit, Lebensdauer von Bauteilen, ...
- Risikomanagement: Unfälle, Sicherheit, Versicherung, ...
- Glücksspiele: Lotto, Roulette, Poker, Aktienbörse, Klausur, ...

Ingenieur:innen müssen Risiken abschätzen, minimieren, verkaufen bzw. Chancen berechnen, maximieren, kaufen. Dazu dient die Stochastik!

📖 Literatur: H.-O. Georgii: *Stochastik.* De Gruyter 2009
E. Kreyszig: *Advanced Engineering Mathematics.* Wiley 2010
U. Krengel: *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie.* Vieweg 2005
W. Feller: *Probability Theory and Its Applications.* Wiley 1950–1971

Ziele der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung beginnt im 17. Jh. mit Rechnungen zu Glücksspielen. T417 Heutzutage wird sie überall eingesetzt, von der Wettervorhersage bis zur Industrieproduktion und klinischen Tests neuer Medikamente. In ihrer Bedeutung für den Alltag kommt sie wohl gleich nach Grundrechenarten und Dreisatz. Ich möchte wetten, Wahrscheinlichkeitsrechnung wird von Otto Normalbürger (m/w/d) vielhundertmal häufiger benötigt, gar genutzt, als die sagenhafte Mitternachtsformel! Das hängt natürlich davon ab, was Otto im Alltag oder Beruf so tut...

Viele Vorgänge haben unsicheren Ausgang; stochastische Argumente sind daher unausweichlich. Leider erschreckend häufig werden aber selbst einfache Fragen falsch behandelt – manchmal mit katastrophalen Folgen. Damit es Ihnen nicht so, sondern besser ergeht, sollen Sie hier mit (einer homöopathischen Dosis) Wahrscheinlichkeitsrechnung geimpft werden. Zu Experten werden Sie dadurch noch nicht, aber die Grundregeln müssen Sie kennen und fehlerfrei anwenden können.

Statt *Wahrscheinlichkeitsrechnung* spricht man gleichbedeutend von *Wahrscheinlichkeitstheorie*: Auf Grundlage eines geeigneten Modells (eines Wahrscheinlichkeitsraums wie unten erklärt) erlaubt sie die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten zu den betrachteten Ereignissen.

Ihr Gegenstück ist die *Statistik*, also die Analyse empirischer Daten (Messwerte, Beobachtungen). Diese versucht, möglichst verlässliche Daten zu erheben und daraus relevante Informationen zu extrahieren, insbesondere um ein geeignetes Modell zu finden, zu testen oder zu kalibrieren.

WTheorie und Statistik ergänzen sich demnach. Beide fasst man im deutschsprachigen Raum unter dem Oberbegriff *Stochastik* zusammen, von altgriechisch στοχάζομαι [stochazomai] 'zielen, vermuten, erraten', auch στοχαστικός [stochastikos] 'scharfsinnig'.

Typische Anwendung: Ausfallwahrscheinlichkeit

Aufgabe: Drei unabhängige Bauteile haben Ausfallwkten 0.3, 0.4, 0.5.
(0) Mit welcher Wkt fällt mindestens ein Teil aus? (1) Genau 0, 1, 2, 3?
(2) Wenn nur genau ein Teil ausfällt, mit welcher Wkt ist es A, B, C?
(3) Konstruieren Sie als Modell hierfür explizit einen WRaum $(\Omega, \mathbf{P})$.

Techniken: Rechenregeln für WRäume, bedingte Wkt, Bayes.
Lösung ab Seite T409: Die Wkten in (1) sind 0.21, 0.44, 0.29, 0.06.

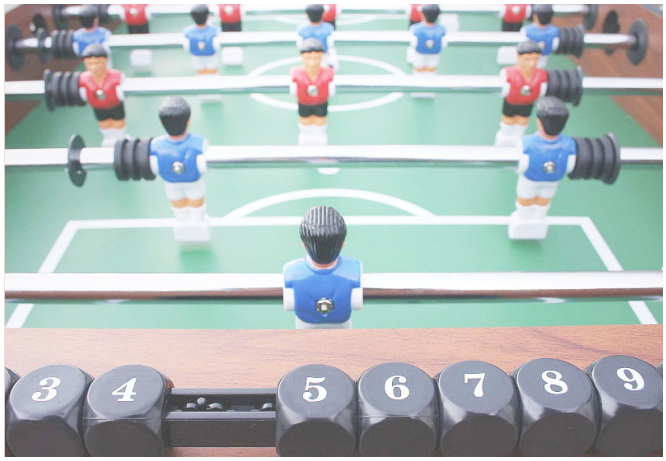
Aus der Presse: „In $14\,000$ Reaktorjahren sind 4 Unfälle der höchsten Stufe aufgetreten. Demnach tritt bei 143 europäischen Reaktoren in 30 Jahren ein solcher Unfall mit Wahrscheinlichkeit von über 100% auf.“

Aufgabe: Was ist hieran falsch? Welche Rechnung wäre richtig?

Techniken: Ausfallwkt (exakt), Poisson–Verteilung (gute Näherung).
Lösung ab Seite U109: Die Wkt ist mit $\gtrapprox 70\%$ erschreckend hoch.

Typische Anwendung: Chancen beim Glücksspiel

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung hat viele praktische Anwendungen! Ihre Ursprünge liegen im Glücksspiel. Eines der ersten Probleme war die gerechte Teilung bei vorzeitigem Spielabbruch. Konkretes Beispiel:



Zwei gleich starke Teams spielen Tischkicker bis 10.

Aufgabe: Wie stehen die Chancen bei $9:8$? bei $4:7$?

Lösung ab Seite T441:
(a) $75:25$ (leicht) bzw.
(b) $14.5:85.5$ (knifflig)

Aufgabe: Sie wiederholen 400 mal unabhängig ein Experiment mit Trefferwkt 20%. Mit welcher Wkt erhalten Sie 60 bis 90 Treffer?

Techniken: Erwartung und Varianz, Binomialverteilung (exakt), lokaler Grenzwertsatz (gute Näherung), Chebychev (Abschätzung).
Lösung ab Seite V317: Die gesuchte Wkt beträgt recht genau 90%.

Typische Anwendung: Gesetze der großen Zahlen

In der Praxis ist nichts exakt. Jede Messung X ist zufälligen Störungen unterworfen, wiederholte Messwerte schwanken um den Erwartungswert μ mit Streuung $\sigma > 0$. Ingenieur:innen müssen sorgsam und sachgerecht mit Messfehlern umgehen: Konfidenzintervalle, Fehlerrechnung, etc.

Beispiel: Sie führen $n = 400$ unabhängige Messungen $X_1, X_2, \ldots, X_{400}$ durch und erhalten Messwerte $x_1, x_2, \ldots, x_{400}$. Sie schätzen μ durch den

$$\text{Stichprobenmittelwert:} \quad \hat{x} := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \quad \underset{\text{(Beispiel)}}{\overset{\text{Messung}}{=}} \quad 57.5$$

Die Streuung von X schätzen Sie (dank der Stichprobe) auf $\sigma \approx 10$. Wie genau ist $\hat{x}$? Wo liegt vermutlich der wahre Erwartungswert μ?

$$I_1 = [57, 58], \quad I_2 = [56.5, 58.5], \quad I_3 = [56, 59], \quad I_k = [57.5 \pm k\,0.5]$$

Aufgabe: Welches Intervall I_k überdeckt den Erwartungswert μ mit Sicherheit $\alpha_k \geq 95\%$ bzw. $\alpha_k \geq 99\%$? **Lösung:** Es genügen I_2 bzw. I_3!

Techniken: Erwartung und Varianz, Chebychev (Abschätzung, T337), genauer Normalverteilung und lokaler / zentraler Grenzwertsatz (W201).

Gewählte Themen und benötigte Techniken

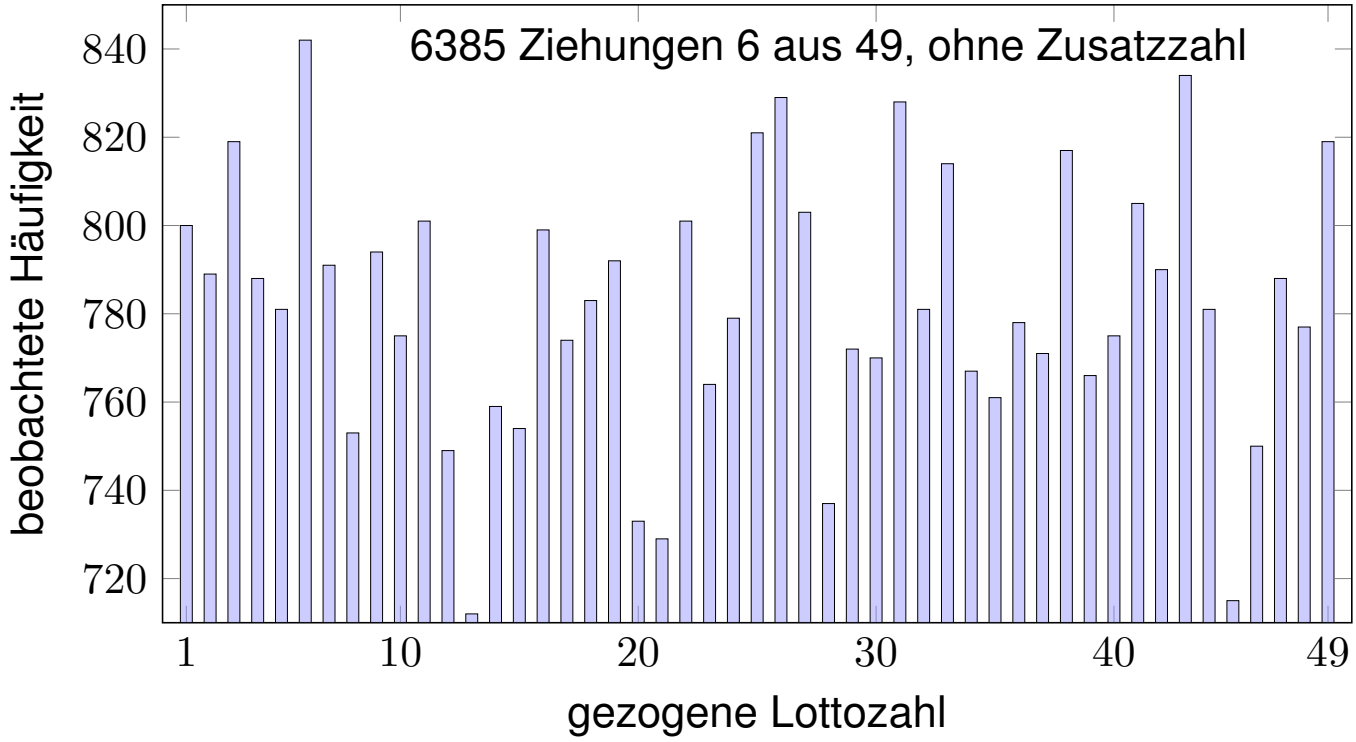
Diese Aufgaben nenne ich stellvertretend für unsere vier Kapitel über Wahrscheinlichkeitsrechnung. Meine Auswahl der Themen (in Breite und Tiefe) ist naturgemäß ein Kompromiss: Für den einen ist es schon zuviel, für die andere noch lange nicht genug. Ihr Bedarf hängt ganz davon ab, womit Sie sich beschäftigen. Ich will und kann nur einen Einstieg bieten, damit Sie diese wichtigen Techniken je nach Bedarf vertiefen können.

Wenn Sie das alles schon aus der Schule kennen und beherrschen, dann können Sie die folgenden Kapitel als Wiederholung genießen. Vermutlich ist aber für die meisten viel Neues und Schönes dabei.

Welche mathematischen Grundlagen und Techniken benötigen wir? Die Anfänge der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wie hier dargelegt, erfordern vor allem begriffliche Präzision (Ereignisse und WMaße), sind aber technisch noch leicht (Reihen, Kombinatorik). Kontinuierliche Verteilungen, wie die Normalverteilung, erfordern zudem Integration.

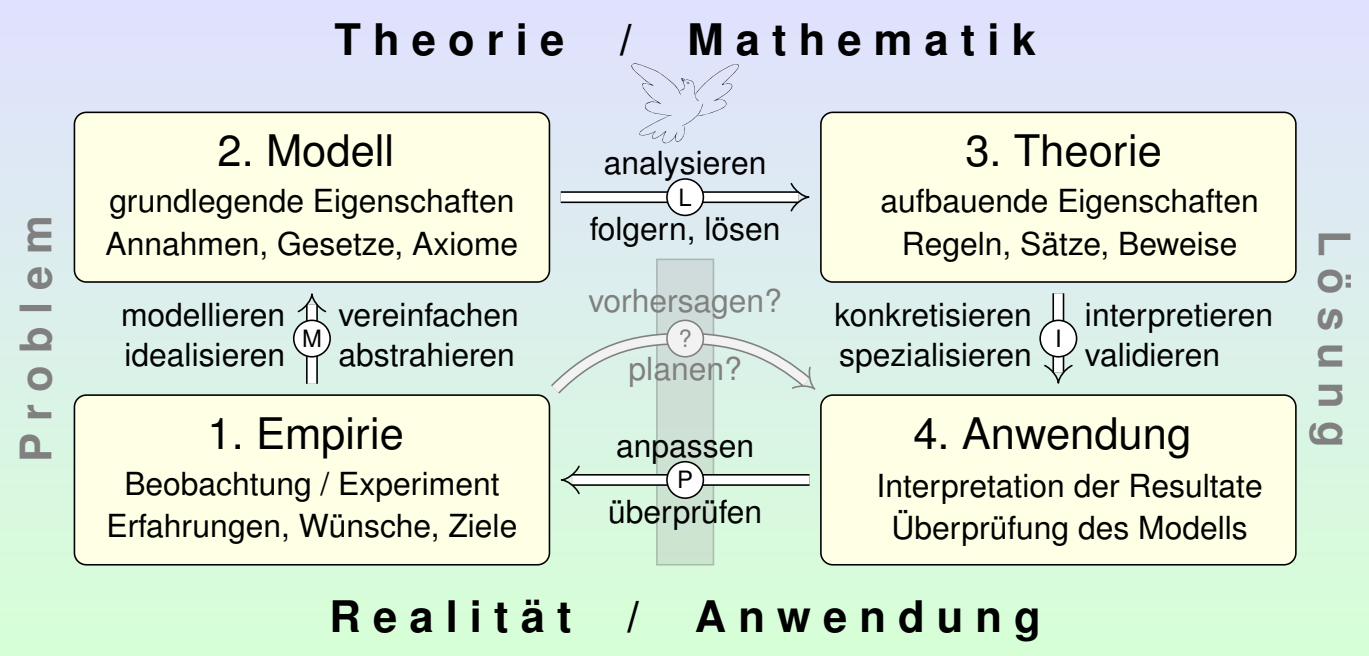
Überall nützlich sind Grenzwerte und Näherungen, wie Stirling–Formel oder Taylor–Entwicklung. Den zentralen Grenzwertsatz W1D schließlich können wir mit der Fourier–Transformation schmerzfrei nachrechnen.

„Experten warnen: Lottozahlen oft reiner Zufall!“ (Titanic)



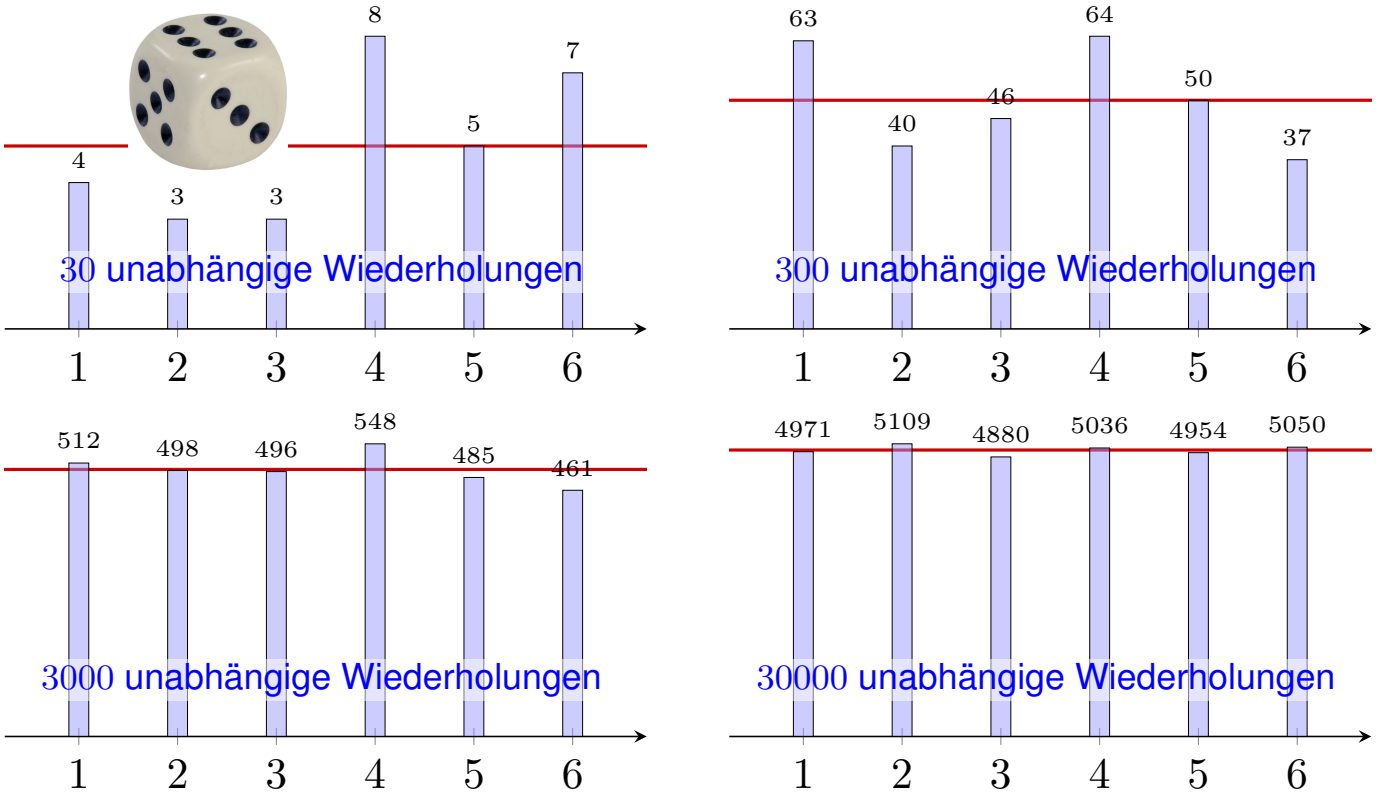
Statistik der ersten 6385 Lottoziehungen, vom 09.10.1955 bis 08.01.2025. „Die Ziehung der Zahlen hängt allein vom Zufall ab. Die statistische Häufigkeit der gezogenen Zahlen hat keinen Einfluss auf die Ziehungswahrscheinlichkeit.“ Alle Zahlen sollten gleich wahrscheinlich sein. Sind sie es wirklich? Jedes Modell ist eine **Annahme** und sollte kritisch überprüft werden. V324

Auch mit dem Zufall können wir rechnen!



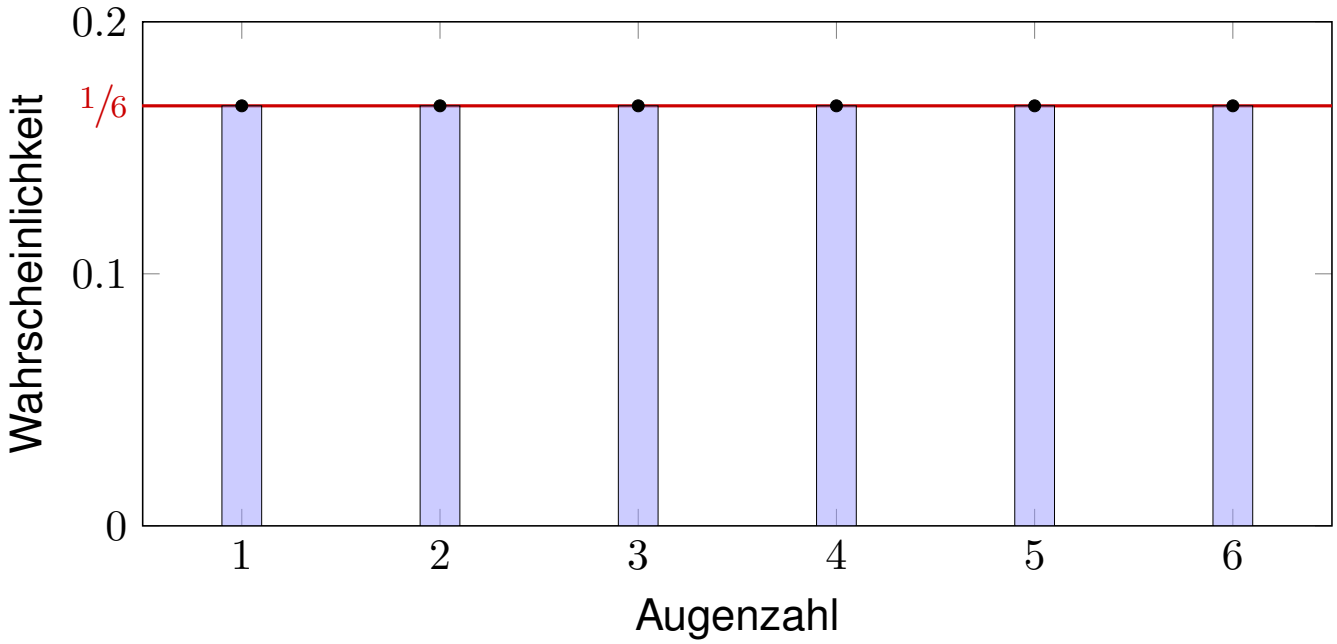
Konkrete Anwendung benötigt abstrakte Kenntnisse; je anspruchsvoller, desto mathematischer! *Zahlen beherrschen sogar das Feuer*, erklärte Fourier 1822 stolz in seinem berühmten Zitat. S *Kann Mathematik selbst den Zufall zähmen?*, fragte Hilbert 1900 in seinem Vortrag den Kongress, und 1933 antwortete Kolmogorov: Erfreulicherweise ja! Das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten ist eine fundamentale Errungenschaft des menschlichen Geistes und wird überall erfolgreich angewendet. Diese segensreiche Kulturtechnik wollen wir verstehen und nutzen lernen.

Statistik: empirische Häufigkeiten beim Würfeln



Wie sollen Sie mit etwas rechnen, wie dem Zufall, das prinzipiell unberechenbar scheint? Das **empirische Gesetz der großen Zahlen** ist folgende Erfahrungstatsache: Bei häufiger unabhängiger Wiederholung nähern sich die relativen Häufigkeiten einem Grenzwert an.

Stochastik: Modell eines fairen Würfels



Diese (plausiblen, aber idealisierten) **Wahrscheinlichkeiten** bilden das stochastische Modell. Es handelt sich um eine *Abstraktion*, also *theoretische* Werte. Hiervon zu unterscheiden sind die *empirischen relativen Häufigkeiten*: Diese werden bei n-maliger Durchführungen des Experiments beobachtet. Für $n \to \infty$ nähern sie sich den Wahrscheinlichkeiten an.
Satz T3J präzisiert und quantifiziert diese Aussage als **Gesetz der großen Zahlen**.
Damit schließt sich ein erster Durchgang im obigen Modellierungskreislauf.

Stochastisches Modell eines fairen Würfels

T105

Mögliche **Ergebnisse** sind die Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6$.
Annahme: Alle Ergebnisse sind gleich wahrscheinlich.

Das bedeutet anschaulich: Wenn Sie „sehr oft“ würfeln, dann treten die Ergebnisse $1, 2, 3, 4, 5, 6$ gleich häufig auf, jedes also in $1/6$ aller Fälle.

Das ist zunächst eine Erfahrung, sodann eine empirische **Beobachtung**, für unser theoretisches Modell ist es die grundlegende **Annahme**.

Abstraktion des Experiments zu einem mathematischen Modell (Ω, p):
Die Menge $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ umfasst alle möglichen **Ergebnisse**.
Hierauf definiert $p : \Omega \to [0, 1]$ die **Elementarwahrscheinlichkeiten**:

$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \tfrac{1}{6}.$$

☺ In diesem Falle ist die Gleichverteilung plausibel aufgrund der Symmetrie des Würfels. Dieses Modell besteht nicht aus empirischen Daten, sondern ist eine axiomatische Festlegung! Wir fixieren damit präzise unsere Annahmen und leiten alle weiteren Rechnungen hieraus ab.

Wie können Sie das interpretieren? oder messen? Was bedeutet Wahrscheinlichkeit $w \in [0, 1]$? Vereinfacht gesagt: Bei häufiger Wiederholung tritt das Ergebnis im Anteil w aller Fälle ein. Mit den nötigen Werkzeugen können wir Wkten empirisch messen, siehe V411, V415, W203.

Wkt von Ergebnissen und Ereignissen

T106

Aufgabe: Sie würfeln mit einem fairen Würfel. Wie wahrscheinlich ist das Ereignis A: gerade Zahl? B: mindestens 5? $A \cap B$: beides?

Lösung: (1) Das Ereignis $A = \{2, 4, 6\} \subseteq \Omega$ hat die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\{2, 4, 6\}) = p(2) + p(4) + p(6) = \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{2}.$$

(2) Das Ereignis $B = \{5, 6\} \subseteq \Omega$ hat die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(\{5, 6\}) = p(5) + p(6) = \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{3}.$$

(3) Die Schnittmenge $A \cap B = \{6\}$ hat die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(\{6\}) = \tfrac{1}{6} \quad = \quad \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{3}.$$

Die Ereignisse A und B sind hier **stochastisch unabhängig**.

Das Ereignis „gerade Zahl“ entspricht der Teilmenge $A = \{2, 4, 6\} \subseteq \Omega$. Dieses Ereignis A tritt genau dann ein, wenn ein Ergebnis $\omega \in A$ gewürfelt wird. Interpretation der Wkt: Das Ereignis $A = \{2, 4, 6\}$ tritt in der Hälfte aller Fälle ein, das Ereignis $B = \{5, 6\}$ nur in einem Drittel aller Fälle. Beide zusammen, also das Ereignis $A \cap B = \{6\}$ tritt in einem Sechstel aller Fälle ein.

☺ Unsere Rechnungen nutzen ausschließlich das zuvor festgelegte Modell eines fairen Würfels. Ein gezinkter Würfel hat andere Wahrscheinlichkeiten, wie im nachfolgenden Beispiel illustriert.

Stochastisches Modell eines gezinkten Würfels

Man kann Würfel durch ungleiche Masse manipulieren (Bleieinlage). Präzisionswürfel sind daher transparent, um Betrug zu erschweren.

Präzisionswürfel aus Kunststoff

Gleiche Wkten!

Handgesägte Würfel aus Holz

Ungleiche Wkten?

Wir nehmen an, die Wahrscheinlichkeiten sind nicht gleich, sondern:

$$p(1) = 0.15, \quad p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = 0.16, \quad p(6) = 0.21$$

Dies ist ein anderes stochastisches Modell (Ω, p) als die zuvor betrachtete Gleichverteilung! Es besagt anschaulich: Wenn Sie „sehr oft“ würfeln, dann tritt die Augenzahl 1 etwa in 15% aller Fälle auf, $2, 3, 4, 5$ jeweils etwa in 16% aller Fälle, und 6 in etwa in 21% aller Fälle.

Wkt von Ergebnissen und Ereignissen

Aufgabe: Sie würfeln mit diesem gezinkten Würfel. Wie wahrscheinlich ist das Ereignis A: gerade Zahl? B: mindestens 5? $A \cap B$: beides?

Lösung: (1) Das Ereignis $A = \{2, 4, 6\} \subseteq \Omega$ hat die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\{2, 4, 6\}) = p(2) + p(4) + p(6) = 0.16 + 0.16 + 0.21 = 0.53.$$

(2) Das Ereignis $B = \{5, 6\} \subseteq \Omega$ hat die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(\{5, 6\}) = p(5) + p(6) = 0.16 + 0.21 = 0.37.$$

(3) Die Schnittmenge $A \cap B = \{6\}$ hat die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(\{6\}) = 0.21 \quad \neq \quad \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) = 0.1961.$$

In diesem Modell sind A und B **stochastisch abhängig**.

Interpretation: Das Ereignis A tritt in 53% aller Fälle ein, und B tritt in 37% aller Fälle ein. Die Wahrscheinlichkeiten sind hier anders als beim fairen Würfel. Es handelt sich um zwei verschiedene Modelle, die unterschiedliche Vorhersagen machen. Welches Modell in einem konkreten Fall das „richtige“ oder das „realistischere“ ist, bleibt hierbei zunächst noch offen. Dazu muss man konkurrierende Modelle empirisch testen und das besser passende auswählen.

Wie beschreiben wir Zufallsereignisse?

Ziel: Geeignete Sprache zur Beschreibung von Zufallsereignissen.

- Möglichst klare und einfache, doch unmissverständliche Notation
- Bequem, flexibel und sicher anwendbar in konkreten Rechnungen

Hierfür bietet sich die universelle Sprache der Mengenlehre an!

Alle Ergebnisse fassen wir zur **Ergebnismenge** Ω zusammen.
Jedes Element $\omega \in \Omega$ nennen wir ein **Ergebnis** oder einen Ausgang.
Jede Teilmenge $A \subseteq \Omega$ nennen wir ein **Ereignis**. Wir vereinbaren dabei:
Das Ereignis A tritt genau dann ein, wenn ein Ergebnis $\omega \in A$ eintritt.

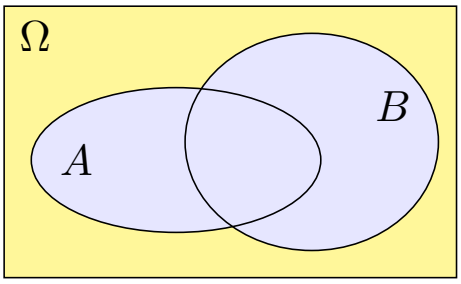
Beispiel Würfeln: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ besteht aus sechs Ergebnissen.
Das Ereignis „gerade Zahl“ entspricht der Teilmenge $A = \{2, 4, 6\}$.
Das Ereignis „mindestens 5“ entspricht der Teilmenge $B = \{5, 6\}$.
(Die Zusammenfassung als Menge ist eine Oder-Verknüpfung.)

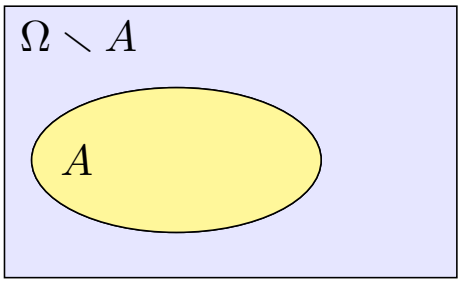
„Ergebnis“ und „Ereignis“ klingen ähnlich, bedeuten aber verschiedenes:
Unterscheiden Sie beides sorgfältig! Dann weiß jede:r, was gemeint ist.
Wir unterscheiden insbesondere das Ergebnis $\omega \in \Omega$ als ein Element von Ω und das Elementarereignis $\{\omega\} \subseteq \Omega$ als eine Teilmenge von Ω.

Grundmenge und Komplemente

Wir bezeichnen mit Ω unsere **Gesamtmenge**, $\emptyset$ ist die **leere Menge**.

Wir schreiben $A \subseteq B$, wenn jedes Element von A auch in B liegt.





Die Teilmenge aller Elemente mit einer **Eigenschaft** P schreiben wir

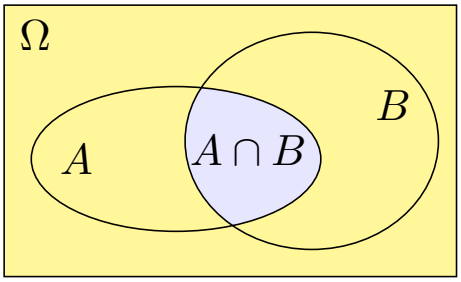
$$\Omega_P = \{\, \omega \in \Omega \mid P(\omega) \,\}.$$

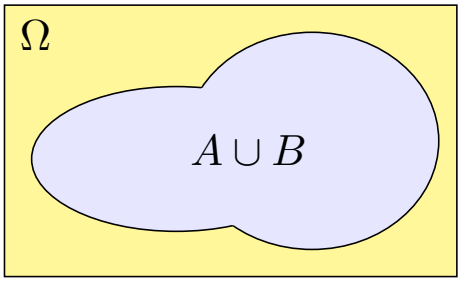
Beispiel: Für $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$ gilt $\{\, \omega \in \Omega \mid \omega \text{ gerade} \,\} = \{2, 4, 6\}$.
Das **Komplement** von A in Ω ist „Ω ohne A“ oder “nicht A“:

$$\Omega \smallsetminus A := \overline{A} = \{\, \omega \in \Omega \mid \omega \notin A \,\}.$$

Es besteht aus allen Elementen von Ω, die nicht in A liegen.
Gebräuchliche Schreibweisen: $\Omega \smallsetminus A = \complement_\Omega A = \complement A = A^c = \overline{A} = \ldots$

Schnitt und Vereinigung





Die **Schnittmenge** „A und B“ ist

$$A \cap B = \{\, \omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ und } \omega \in B \,\}.$$

Sie besteht aus den Elementen, die sowohl in A als auch in B liegen.

Die **Vereinigung** „A oder B“ ist

$$A \cup B = \{\, \omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ oder } \omega \in B \,\}.$$

Sie besteht aus den Elementen, die in A oder B liegen (oder in beiden).

Zwei Mengen A, B heißen **disjunkt**, wenn $A \cap B = \emptyset$ gilt.
In diesem Fall erhalten wir die **disjunkte Vereinigung**:

$$A \sqcup B := A \cup B \quad \text{mit} \quad A \cap B = \emptyset.$$

Schnitt und Vereinigung

Die Vereinigung einer endlichen Familie von Mengen:

$$\bigcup_{k=0}^{n} A_k = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

Vereinigung einer (abzählbar) unendlichen Familie:

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k = \{\, \omega \mid \omega \in A_k \text{ für mind. ein } k \in \mathbb{N} \,\}$$

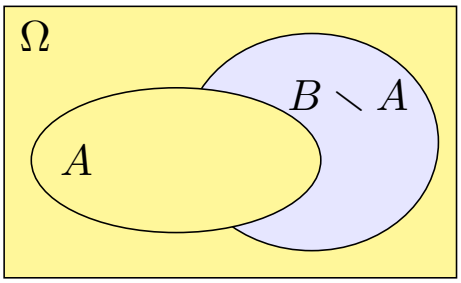
Die Schnittmenge einer endlichen Familie von Mengen:

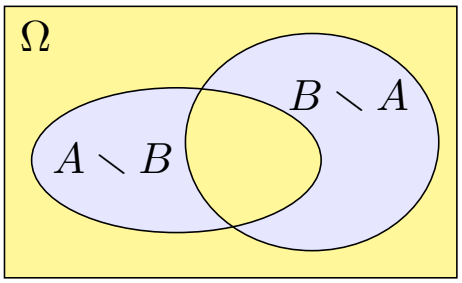
$$\bigcap_{k=0}^{n} A_k = A_0 \cap A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

Schnittmenge einer (abzählbar) unendlichen Familie:

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} A_k = \{\, \omega \mid \omega \in A_k \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \,\}$$

Restmenge und symmetrische Differenz





Die **Restmenge** „B ohne A“ ist

$$B \setminus A := \{\, \omega \in B \mid \omega \notin A \,\}.$$

Sie besteht aus allen Elementen, die zwar in B nicht aber in A liegen.

Die **symmetrische Differenz** „entweder A oder B“ ist

$$A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Sie besteht aus allen Elementen, die entweder in A oder in B liegen, aber nicht in beiden zugleich! Wir nennen dies auch **exklusives Oder**.

Rechenregeln für Vereinigung ∪ und Schnitt ∩

Satz T1A: Rechenregeln für Vereinigung ∪ und Schnitt ∩

Folgende nützliche Rechenregeln gelten für alle $A, B, C \subseteq \Omega$:

Neutralität, Absorbtion, Idempotenz, Komplemente:

$$A \cup \emptyset = A, \qquad A \cup \Omega = \Omega, \qquad A \cup A = A, \qquad A \cup \overline{A} = \Omega$$
$$A \cap \Omega = A, \qquad A \cap \emptyset = \emptyset, \qquad A \cap A = A, \qquad A \cap \overline{A} = \emptyset$$

Kommutativität:

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A$$

Assoziativität:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Distributivität:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Übung: Illustrieren und begründen Sie sorgfältig jede dieser Regeln.

Rechenregeln für Komplement und Restmenge

Satz T1B: Regeln von DeMorgan für Komplemente

Das Komplement einer Menge A in Ω ist definiert durch

$$\overline{A} = \Omega \setminus A := \{\, \omega \in \Omega \mid \omega \notin A \,\}.$$

Es gilt $\overline{\Omega} = \emptyset$ und $\overline{\emptyset} = \Omega$ sowie $\overline{\overline{A}} = A$. Für die Restmenge gilt:

$$B \setminus A = B \cap \overline{A}$$

Für je zwei Mengen $A, B \subseteq \Omega$ gilt

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Allgemein: Für alle $A, B, C \subseteq \Omega$ gilt

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B),$$
$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B).$$

Übung: Illustrieren und begründen Sie sorgfältig jede dieser Regeln.

Einfache Beispiele zu DeMorgan

Wie zuvor sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sowie $A = \{2, 4, 6\}$ und $B = \{5, 6\}$.

Aufgabe: Führen Sie an diesem Beispiel die DeMorgan–Regeln aus.

Lösung: Wir bestimmen Schnitt, Vereinigung und ihre Komplemente.
Das Komplement der Vereinigung ist der Schnitt der Komplemente:

$$\overline{A \cup B} = \overline{\{2, 4, 5, 6\}} = \{1, 3\}$$
$$\overline{A} \cap \overline{B} = \{1, 3, 5\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 3\}$$

Das Komplement des Schnittes ist die Vereinigung der Komplemente:

$$\overline{A \cap B} = \overline{\{6\}} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$\overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 3, 5\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

☺ Diese Rechenregeln sind sehr einfach, sehr häufig und sehr nützlich.
Sie schützen vor ärgerlichen Rechenfehlern und Trugschlüssen!

⚠ Wir sehen insbesondere $\overline{A \cup B} \neq \overline{A} \cup \overline{B}$ und $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.
Nutzen Sie die mathematische Notation mit Sinn und Verstand!

Rechnen mit Ereignissen

Alle Ergebnisse fassen wir zur **Ergebnismenge** Ω zusammen. Jedes Element $\omega \in \Omega$ heißt **Ergebnis**. Jede Teilmenge $A \subseteq \Omega$ heißt **Ereignis**.

Menge	Bedeutung als Zufallsereignis
Ω	Das sichere Ereignis: Ω tritt immer ein.
$\emptyset$	Das unmögliche Ereignis: $\emptyset$ tritt nie ein.
$A \subseteq \Omega$	Das Ereignis A tritt ein bei jedem Ergebnis $\omega \in A$.
$\Omega \setminus A$	Komplement: $\overline{A} = \Omega \setminus A$ tritt ein, wenn A nicht eintritt.
$A \subseteq B$	Teilmenge: Immer wenn A eintritt, dann auch B.
$B \setminus A$	Restmenge: Das Ereignis B tritt ein, aber nicht A.
$A \cap B$	Schnittmenge: Die Ereignisse A und B treten beide ein.
$A \cup B$	Das Ereignis A oder B tritt ein (evtl. auch beide).
$A \sqcup B$	Das Ereignis A oder B tritt ein, wobei $A \cap B = \emptyset$.
$A \triangle B$	Entweder A oder B tritt ein (aber nicht beide).

Unser Ziel sind nachvollziehbar begründete, quantitative Aussagen.
☺ Diese Notation erlaubt präzises Rechnen mit Zufallsereignissen.

Anwendungsbeispiel

Sie würfeln mit unserem gezinkten Würfel, $p\colon \{1,2,3,4,5,6\} \to \mathbb{R}$ mit

$$p(1) = 0.15, \quad p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = 0.16, \quad p(6) = 0.21$$

Aufgabe: Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt unser gezinkter Würfel entweder eine gerade Zahl oder mindestens 5? (aber nicht beides!)

Lösung: Das Ereignis „gerade Zahl“ ist die Teilmenge $A = \{2,4,6\}$. Entsprechend ist das Ereignis „mindestens 5“ die Teilmenge $B = \{5,6\}$. „Entweder A oder B“ entspricht der symmetrischen Differenz:

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{2,4,5,6\} \setminus \{6\} = \{2,4,5\}.$$

Die Wkt berechnen wir durch Aufsummieren der Elementarwkten:

$$\mathbf{P}(A \triangle B) = p(2) + p(4) + p(5) = 0.16 + 0.16 + 0.16 = 0.48$$

Interpretation: Dieses Ereignis tritt in 48% aller Fälle ein.

☺ Bequeme Notation und präzises Rechnen mit Zufallsereignissen.
Übersetzung von Prosa zur Formel und zurück zur Interpretation.

Wahrscheinlichkeit von Ergebnissen

Definition T1C: diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung

Eine **diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung** auf Ω ist eine Abbildung

$$p : \Omega \to [0,1] : \omega \mapsto p(\omega) \quad \text{mit} \quad \textstyle\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = 1.$$

Siehe Definition A2H; hierbei hat p höchstens abzählbaren Träger.
Für jedes **Ereignis** $A \subseteq \Omega$ summieren sich die Elementarwkten:

$$\mathbf{P} : \mathfrak{P}(\Omega) \to [0,1] : A \mapsto \mathbf{P}(A) = \textstyle\sum_{\omega\in A} p(\omega)$$

Ein solches Paar $(\Omega, \mathbf{P})$ heißt **diskreter Wahrscheinlichkeitsraum**.

Jedem Ergebnis $\omega \in \Omega$ wird seine Elementarwahrscheinlichkeit $p(\omega) \in [0,1]$ zugeordnet.
Beispiele: Für den fairen Würfel gilt $p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = 1/6$,
für unseren gezinkten $p(1) = 0.15$, $p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = 0.16$, $p(6) = 0.21$.
Weitere typische Beispiele: Wir betrachten später die Verteilungen $p : \mathbb{N} \to [0,1]$ mit
Elementarwkten $p(k) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^k$ oder $p(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k/k!$ oder $p(k) = q^k(1-q)$.
Es handelt sich hierbei jeweils um die Binomialverteilung $\mathrm{B}(n,t)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $t \in [0,1]$,
die Poisson–Verteilung $\mathrm{P}(\lambda)$ mit $\lambda \geq 0$, und die geometrische Verteilung $\mathrm{G}(q)$ mit $q \in [0,1[$.
Diese erfüllen $p(k) \geq 0$ und $\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = 1$, wie gefordert. Versuchen Sie es als Übung!

Wahrscheinlichkeit von Ereignissen

Es gilt die **Normierung** $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ sowie $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$. Außerdem gilt

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B).$$

Bei disjunkter Vereinigung addieren sich die Wkten: Aus $A \cap B = \emptyset$ folgt

$$\mathbf{P}(A \sqcup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B).$$

Per Induktion folgt aus paarweiser die **endliche Additivität**:

$$\mathbf{P}(A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_n) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \cdots + \mathbf{P}(A_n)$$

Bei diskreten Wahrscheinlichkeiten gilt sogar **allgemeine Additivität**:

$$\mathbf{P}\Big(\bigsqcup\nolimits_{i\in I} A_i\Big) = \sum\nolimits_{i\in I} \mathbf{P}(A_i).$$

Insbesondere gilt $\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega\in A} \mathbf{P}(\{\omega\})$ für jede Teilmenge $A \subseteq \Omega$.

Hier bedeutet $\bigsqcup_i A_i = \bigcup_i A_i$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Die Indexmenge I ist beliebig.
Siehe Definition A2H. Bei endlichem Wert ist der Träger abzählbar, wir haben also eine Reihe.
Für kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsräume nutzen wir später Integrale statt Summen.
Zudem beschränken wir uns dann (aus unumgänglichen technischen Gründen) auf höchstens abzählbare Vereinigungen. Einstweilen ist alles noch diskret und somit besonders einfach.

Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Auch die Zuordnung $A \mapsto \mathbf{P}(A)$ wollen wir als Abbildung auffassen.
Wir fassen alle Ereignisse $A \subseteq \Omega$ zur **Ereignismenge** $\mathscr{A}$ zusammen.
Zur gegebenen **Ergebnismenge** Ω ist dies die **Potenzmenge** U207

$$\mathscr{A} = \mathfrak{P}(\Omega) := \{\, A \mid A \subseteq \Omega \,\}.$$

Definition T1D: diskreter Wahrscheinlichkeitsraum

Ein **diskretes WMaß** ist eine Abbildung $\mathbf{P} : \mathfrak{P}(\Omega) \to [0,1]$ für die gilt:

1. Normierung: Es gilt $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ für die Gesamtmenge Ω.
2. Additivität: Es gilt $\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbf{P}(\{\omega\})$ für jedes $A \subseteq \Omega$.

Ein **diskreter Wahrscheinlichkeitsraum** $(\Omega, \mathbf{P})$ besteht aus

- einer (nicht-leeren) Menge Ω von möglichen Ergebnissen und
- einem diskreten WMaß $\mathbf{P} : \mathfrak{P}(\Omega) \to [0,1]$ wie oben erklärt.

Diese einfache Definition fasst unsere bisherigen Überlegungen zusammen. Sie ist ausreichend flexibel für viele Anwendungen und legt einen präzisen und bequemen Sprachgebrauch fest.
Bei diskreten WRäumen ist $\mathbf{P}$ bestimmt durch die Elementarwkten $p(\omega) := \mathbf{P}(\{\omega\})$ für $\omega \in \Omega$.
Neben diskreten werden wir später auch kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsmaße kennenlernen.

Rechenregeln für Wahrscheinlichkeitsmaße

0. Unmögliches Ereignis:

$$\boxed{\mathbf{P}(\emptyset) = 0}$$

1. Sicheres Ereignis:

$$\boxed{\mathbf{P}(\Omega) = 1}$$

2. Komplement:

$$\boxed{\mathbf{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathbf{P}(A)}$$

3. Monotonie:

$$\boxed{A \subseteq B \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)}$$

4. Restmenge:

$$\boxed{\mathbf{P}(B \setminus A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(B \cap A)}$$

5. Vereinigung:

$$\boxed{\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)}$$

6. Disjunkte Vereinigung:

$$\boxed{\mathbf{P}(A \sqcup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) \quad \text{dank} \quad A \cap B = \emptyset}$$

Endliche WRäume und Gleichverteilung

Definition T1E: endlicher WRaum und Gleichverteilung

Ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbf{P})$ heißt **endlich**,
wenn die Ergebnismenge Ω endlich ist, und **laplacesch**,
wenn zudem alle Ergebnisse $\omega \in \Omega$ gleich wahrscheinlich sind:

$$\mathbf{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}$$

Für dieses **Laplace–Wahrscheinlichkeitsmaß** auf Ω gilt daher

$$\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der Ergebnisse in } A}{\text{Anzahl aller Ergebnisse in } \Omega} = \frac{\text{günstige Ergebnisse}}{\text{mögliche Ergebnisse}}.$$

Dies nennen wir auch die (diskrete, endliche) **Gleichverteilung** auf Ω.

Beispiel: Der Wurf eines fairen Würfels ist ein Laplace–Experiment auf $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$, der Wurf unseres gezinkten Würfels hingegen nicht. Roulette ist ein Laplace–Experiment auf der Menge $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, 36\}$; hingegen sind hierbei $\{\text{rot}, \text{schwarz}, \text{zéro}\}$ nicht gleichwahrscheinlich.

Zweimaliger Wurf eines fairen Würfels

Aufgabe: Sie würfeln zweimal. (1) Beschreiben Sie dies als WRaum.

Lösung: Als Ergebnismenge haben wir

$$\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2 = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6), \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6), \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6), \\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6), \\ (6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6) \end{array} \right\}.$$

Wir nehmen an, beide Würfe seien gleichverteilt und unabhängig.
Es handelt sich demnach bei $(\Omega, \mathbf{P})$ um ein Laplace–Experiment!

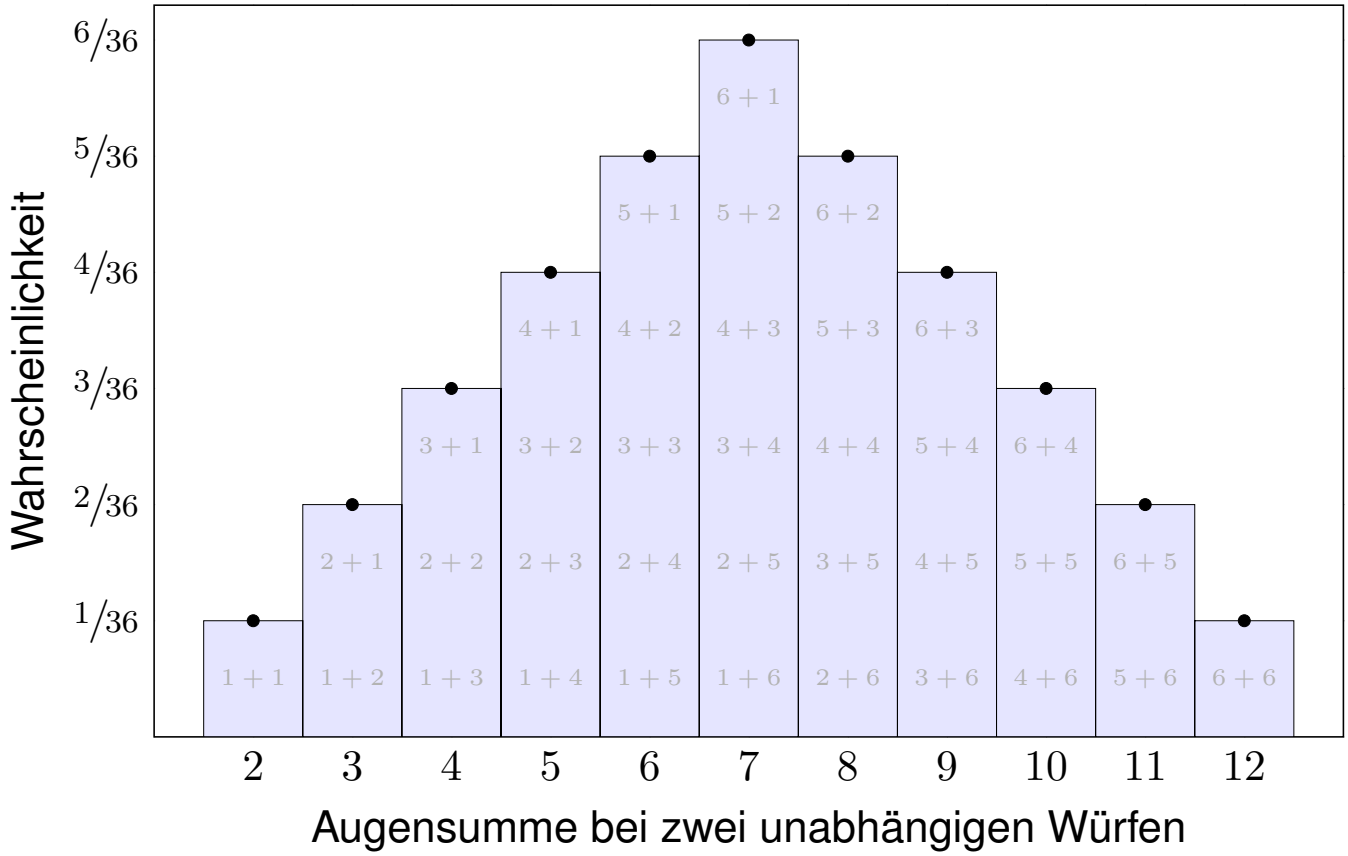
Aufgabe: (2) Welche Wkt hat die Augensumme $2, 3, 4, \ldots, 12$?

Lösung: Wir untersuchen das Ereignis A_k = „Die Augensumme ist k."

$$\begin{aligned} A_2 &= \{(1,1)\}, & \mathbf{P}(A_2) &= |A_2|/|\Omega| = 1/36 \\ A_3 &= \{(1,2), (2,1)\}, & \mathbf{P}(A_3) &= |A_3|/|\Omega| = 2/36 \\ A_4 &= \{(1,3), (2,2), (3,1)\}, & \mathbf{P}(A_4) &= |A_4|/|\Omega| = 3/36 \end{aligned}$$

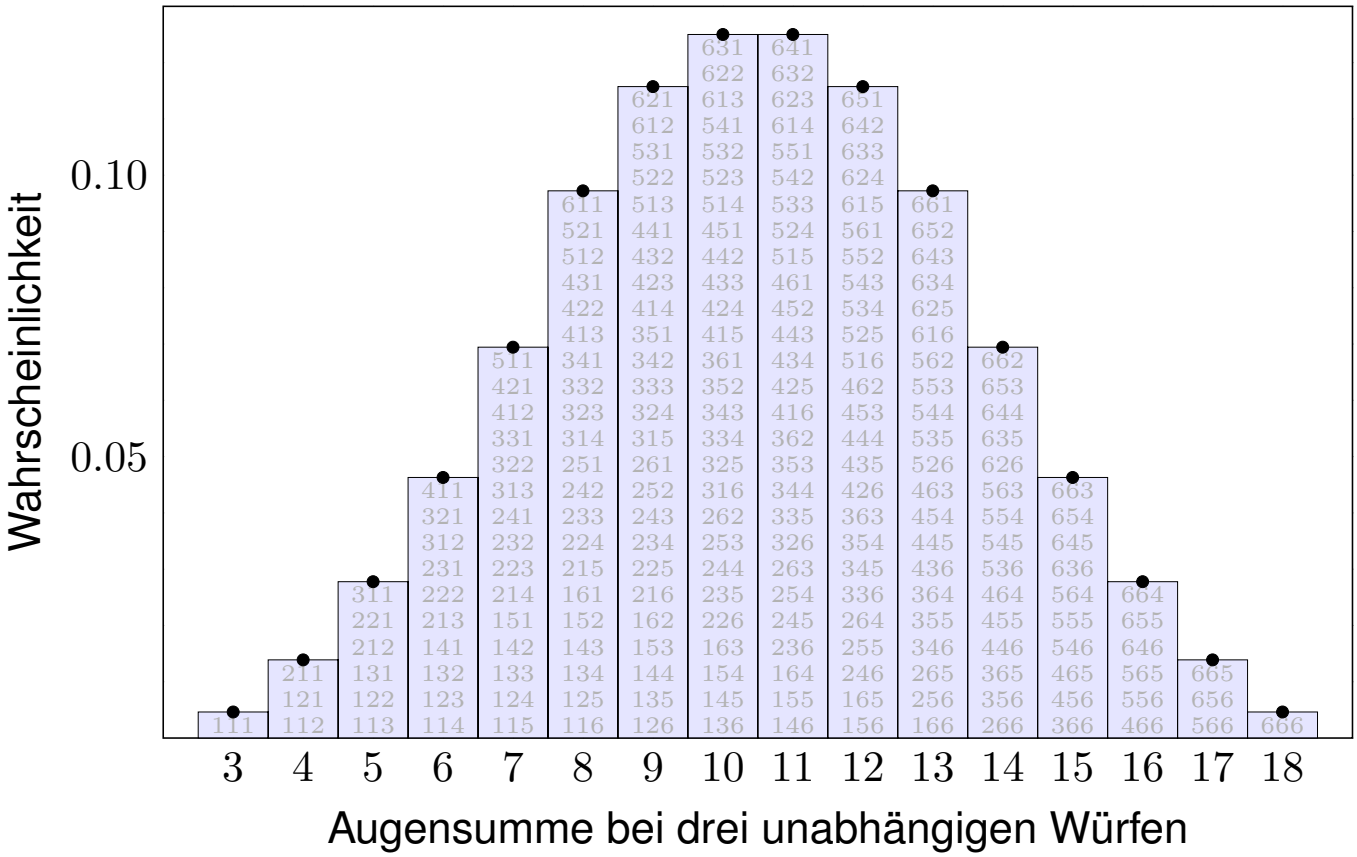
Zweimaliger Wurf eines fairen Würfels

Alle Ergebnisse $(i, j) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ sind gleichwahrscheinlich, die zugehörigen Augensummen $s = i + j$ hingegen nicht!



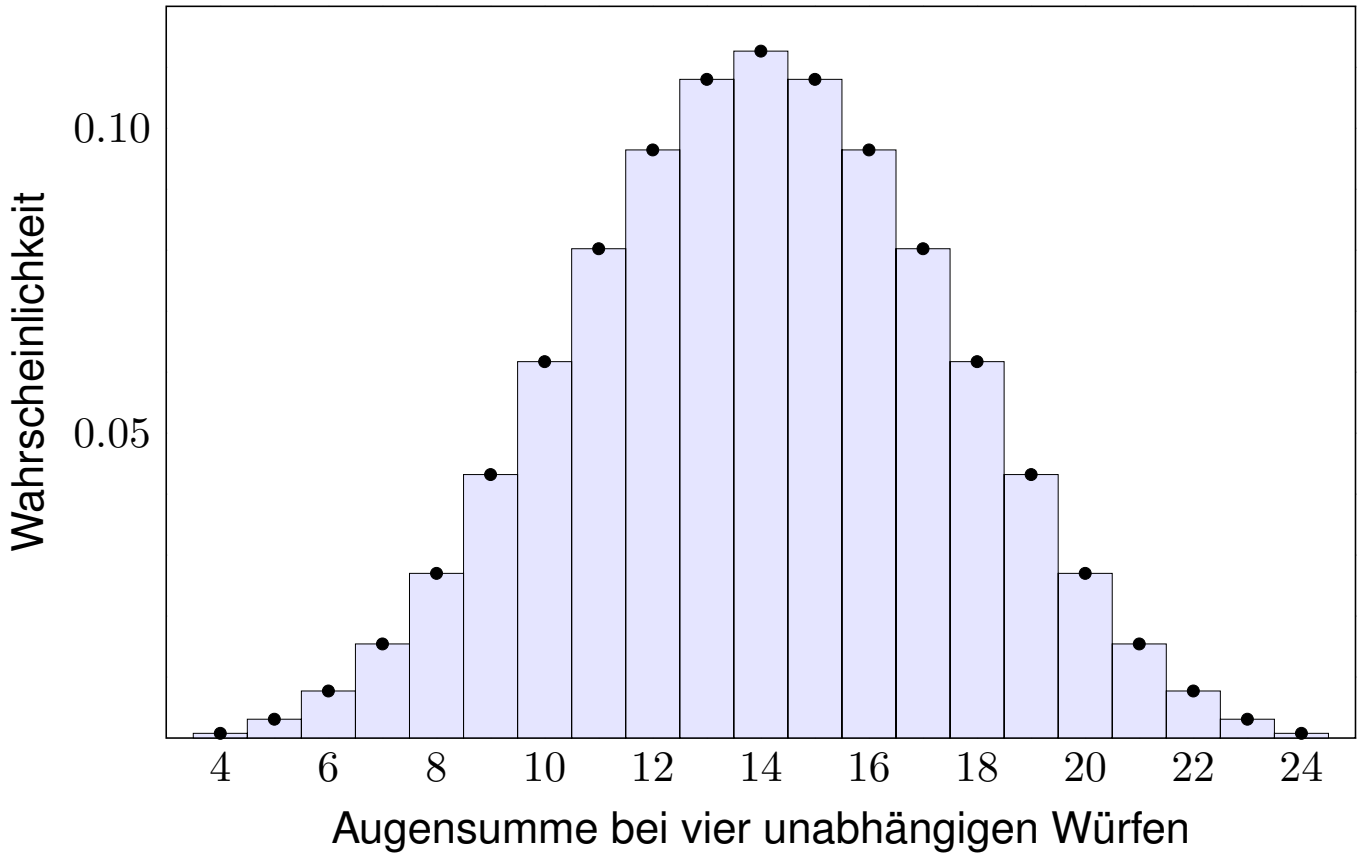
Dreimaliger Wurf eines fairen Würfels

Bei dreimaligem Würfeln sind alle Ergebnisse $(i, j, k) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3$ gleichwahrscheinlich, die Augensummen $s = i + j + k$ hingegen nicht!



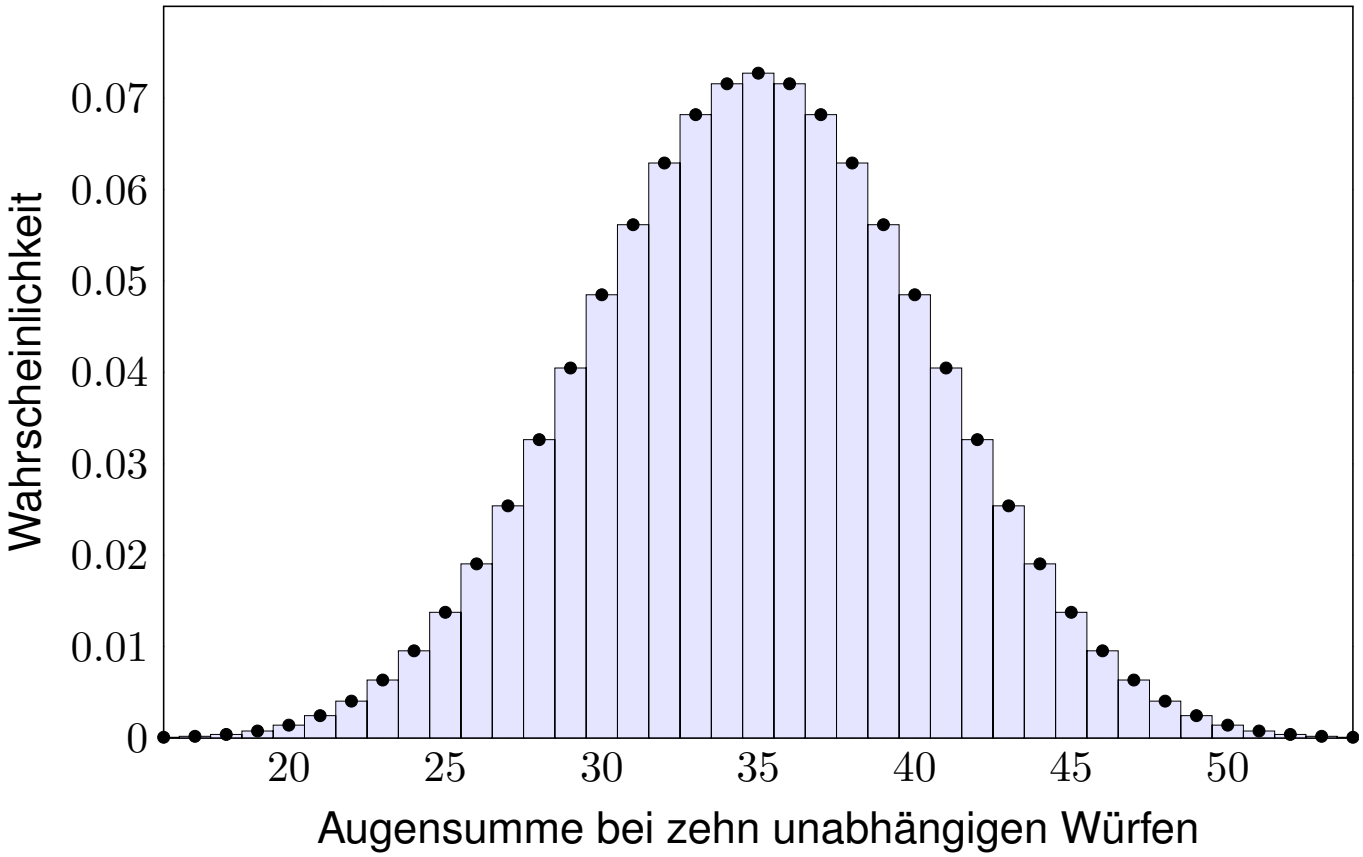
Viermaliger Wurf eines fairen Würfels

Die hier entstehende Glockenkurve wird uns noch viel nützen:
Sie illustriert den **zentralen Grenzwertsatz** W1D, kurz ZGS.



Zehnmaliger Wurf eines fairen Würfels

Kombinatorik (Kapitel U) und Asymptotik (Kapitel V & W): Hier entsteht in immer besserer Näherung die **gaußsche Glockenkurve**! Das hilft!



Kombinatorik der Augensumme beim Würfeln

Aufgabe: Auf wie viele Weisen erhalten Sie die Augensumme s bei einmaligem Würfeln? zweimaligem Würfeln? dreimaligem Würfeln?

Lösung: (1) Bei einmaligem Würfeln ist alles klar:

Augensumme s	1	2	3	4	5	6
Möglichkeiten n_s	1	1	1	1	1	1

Die Wkt $\mathbf{P}(S{=}s) = 1/6$ ist gleichverteit. Wir kodieren sie als Polynom

$$G(z) = \frac{1}{6}z^1 + \frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{6}z^4 + \frac{1}{6}z^5 + \frac{1}{6}z^6 = \frac{z - z^7}{6(1-z)}.$$

(2) Bei zweimaligem Würfeln entspricht die Summe der Augenzahlen der Faltung der Verteilung (1) mit sich selbst, als Polynom also $G(z) \cdot G(z)$:

Augensumme s	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Möglichkeiten n_s	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Die Wkt ist jeweils $\mathbf{P}(S{=}s) = n_s/6^2$, also keine Gleichverteilung mehr! Die Wkt ist am größten für die Augensumme 7, und zwar mit Wkt $1/6$.

Kombinatorik der Augensumme beim Würfeln

(3) Bei dreimaligem Würfeln müssen wir die Rechnung gut organisieren.

Beispiel: Auf wie viele Weisen kann die Augensumme 10 entstehen? Je nach erstem Wurf $10 = 1+9 = 2+8 = 3+7 = 4+6 = 5+5 = 6+4$, dank voriger Tabelle also auf $4+5+6+5+4+3 = 27$ Möglichkeiten Die Wkt ist demnach $\mathbf{P}(S{=}10) = 27/6^3 = 1/8 = 0.125$.

Nach diesem Schema berechnen wir die folgende Tabelle: Die Summe der Augenzahlen entspricht der Faltung der Verteilungen (1) und (2). (Hier kann eine Tabellenkalkulation helfen, zum Beispiel *LibreOffice*.)

Augensumme s	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Möglichkeiten n_s	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1

Die Wkt ist jeweils $\mathbf{P}(S{=}s) = n_s/6^3$, wie oben graphisch dargestellt. Wie zu erwarten ist die Wkt am größten für die mittleren Augensummen 10 und 11, und zwar jeweils mit Wkt $1/8$. Jetzt können Sie's ausrechnen!

☺ Als Polynom entspricht dies dem Produkt $G(z)^3 = G(z) \cdot G(z) \cdot G(z)$. Die Wkten lesen Sie als Koeffizienten von $G(z)^3 = \sum_s \mathbf{P}(S{=}s)\, z^s$ ab. Die Kodierung als **erzeugende Funktion** (U4D) ist elegant und effizient.

Kombinatorik der Summe beim fairen Münzwurf

T131
Ausführung

Würfelexperimente sind schön anschaulich, die Rechnungen sind nicht ganz banal und illustrieren bereits viele wichtige Phänomene.

Münzwürfe sind wesentlich leichter und als Modell noch wichtiger: Wir wiederholen ein Experiment n-mal und zählen die Treffer.

Aufgabe: Sie werfen n-mal eine faire Münze: $0 =$ Kopf, $1 =$ Zahl. Die Summe der Treffer bezeichnen wir mit $S_n \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

(1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}(S_n{=}k)$ für alle $0 \le k \le n$.

(2) Berechnen Sie die erzeugende Funktion $G_n(z) = \sum_k \mathbf{P}(S_n{=}k)\, z^k$.

(3) Skizzieren Sie die Verteilung der Zufallsvariablen $S_1, S_2, S_3, S_4, \ldots$

Lösung: (1) Für unabhängig wiederholte faire Münzwürfe finden wir:

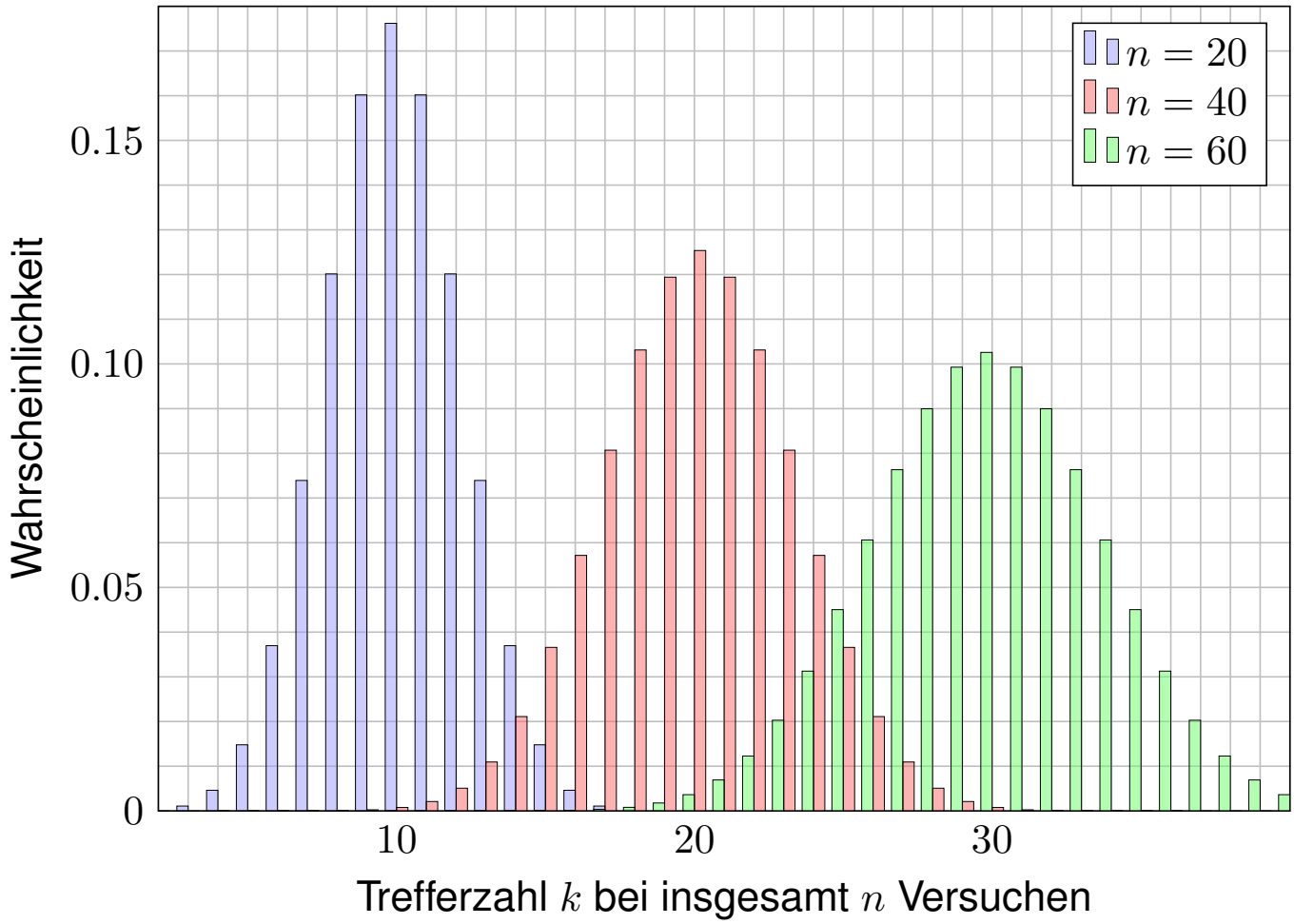
$$\mathbf{P}(S_n{=}k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

☺ Die Binomialverteilung $\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$ ist ein wichtiges Modell. Wir werden sie in den nächsten Kapiteln ausführlich untersuchen.

(2) Wir finden das Polynom $G_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^k = (\frac{1}{2}z + \frac{1}{2})^n$.

Kombinatorik der Summe beim fairen Münzwurf

T132
Ausführung



Bedingte Wahrscheinlichkeit

Häufig stehen Sie vor der Aufgabe, nach Eintritt eines Ereignisses B auf die Wahrscheinlichkeit eines anderen Ereignisses A zu schließen.

Aufgabe: Angenommen, beim Würfeln wurde nicht die 6 gewürfelt. Wie groß ist dann noch die Wahrscheinlichkeit einer geraden Zahl?

Lösung: Wir setzen voraus, das Ereignis $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tritt ein. Zum Ereignis $A = \{2, 4, 6\}$ suchen wir die bedingte Wkt $\mathbf{P}_B(A)$.

Ergebnis $\omega =$	1	2	3	4	5	6
ursprüngliche Wkt $\mathbf{P}(\{\omega\}) =$	$\frac{1}{6}$	$\mathbf{\frac{1}{6}}$	$\frac{1}{6}$	$\mathbf{\frac{1}{6}}$	$\frac{1}{6}$	$\mathbf{\frac{1}{6}}$
bedingte Wkt $\mathbf{P}_B(\{\omega\}) =$	$\frac{1}{5}$	$\mathbf{\frac{1}{5}}$	$\frac{1}{5}$	$\mathbf{\frac{1}{5}}$	$\frac{1}{5}$	0

Die gesuchte Wkt ist demnach $\mathbf{P}_B(A) = {}^1\!/_5 + {}^1\!/_5 = {}^2\!/_5 = 40\%$.

Interpretation: Wir würfeln sehr häufig und werten nur die Fälle, die die Bedingung B erfüllen. In ${}^2\!/_5$ dieser Fälle erhalten wir eine gerade Zahl. In den restlichen ${}^3\!/_5$ dieser Fälle erhalten wir eine ungerade Zahl.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Wie zuvor erklärt, beginnen wir mit einem stochastischen Modell, also einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbf{P})$ gemäß Definition T1C.

Definition T2A: bedingte Wahrscheinlichkeit

Sei $(\Omega, \mathbf{P})$ ein WRaum und $B \subseteq \Omega$ ein Ereignis mit $\mathbf{P}(B) > 0$. Für jedes Ereignis $A \subseteq \Omega$ definieren wir die Wkt von A **unter der Bedingung** B:

$$\boxed{\mathbf{P}(A|B) \;=\; \mathbf{P}_B(A) \;:=\; \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.}$$

Beispiel: In der vorigen Aufgabe finden wir

$$\mathbf{P}(A|B) \;=\; \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} \;=\; \frac{\mathbf{P}(\{2,4\})}{\mathbf{P}(\{1,2,3,4,5\})} \;=\; \frac{2/6}{5/6} \;=\; \frac{2}{5} \;=\; 40\%.$$

- ☺ Bequeme Notation und präzises Rechnen mit Zufallsereignissen.
- ☺ Die Rechnung ist meist leicht, die Interpretation erfordert Übung.
- ☺ Die Definition T2A stellt eindeutig klar, was gemeint ist.

Rechenregeln für bedingte Wahrscheinlichkeiten

Aufgabe: Ist $\mathbf{P}_B : \mathfrak{P}(\Omega) \to [0,1]$ selbst ein (diskretes) WMaß?

Lösung: Ja, $\mathbf{P}_B$ erfüllt die beiden definierenden Eigenschaften (T1D):
(1) Normierung: Es gilt $\mathbf{P}_B(\Omega) = \mathbf{P}(\Omega \cap B)/\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B)/\mathbf{P}(B) = 1$.
(2) Additivität: Für jedes Ereignis $A \subseteq \Omega$ gilt

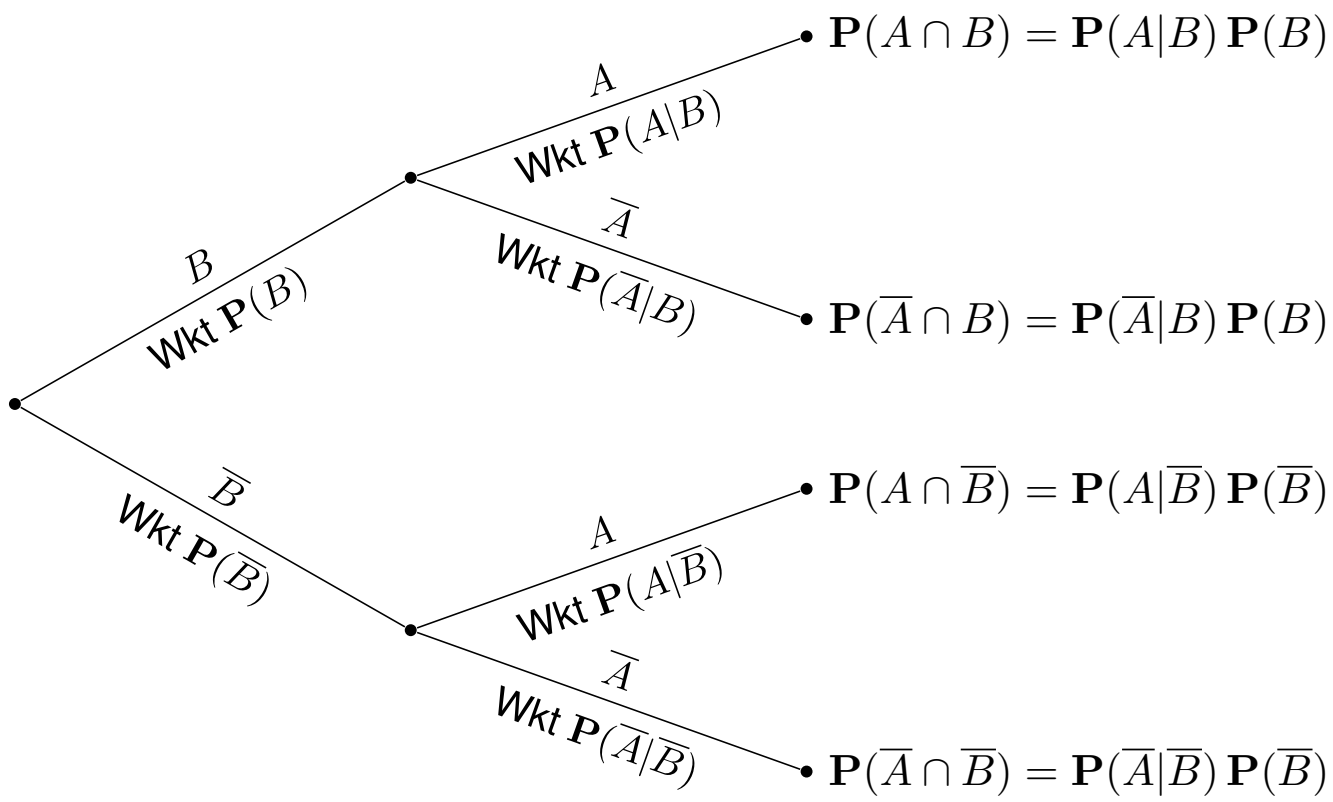
$$\begin{aligned}\mathbf{P}_B(A) &= \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\sum_{\omega \in A} \mathbf{P}(\{\omega\} \cap B)}{\mathbf{P}(B)} \\ &= \sum_{\omega \in A} \frac{\mathbf{P}(\{\omega\} \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \sum_{\omega \in A} \mathbf{P}_B(\{\omega\}).\end{aligned}$$

Gleiches gilt für (abzählbare) disjunkte Vereinigungen $A = \bigsqcup_{i \in I} A_i$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_B(A) &= \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\sum_{i \in I} \mathbf{P}(A_i \cap B)}{\mathbf{P}(B)} \\ &= \sum_{i \in I} \frac{\mathbf{P}(A_i \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \sum_{i \in I} \mathbf{P}_B(A_i)\end{aligned}$$

Aus diesen beiden Eigenschaften folgen alle weiteren Rechenregeln.

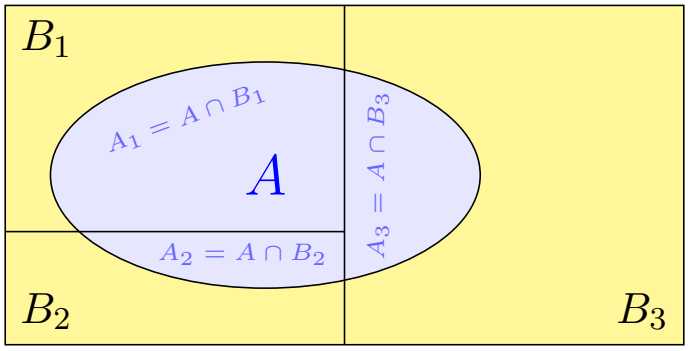
Baummodell und Pfadfinderregeln



Produkteregel: Die Wkt jedes Blattes ist das Produkt der bedingten Wkten entlang des Pfades.
Summenregel: Die Wkt eines Ereignisses A ist die Summe der Wkten aller Pfade, die zu A führen. Implizite Voraussetzung: Diese Zerlegung muss ganz A überdecken und disjunkt sein!

Die Formel der totalen Wahrscheinlichkeit

Sei $\Omega = B_1 \sqcup B_2 \sqcup \ldots \sqcup B_\ell$ eine **Zerlegung** in disjunkte Ereignisse.
Das bedeutet, es gilt $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_\ell$ mit $B_i \cap B_j = \emptyset$ für $i \neq j$.
Dies zerlegt jedes Ereignis $A \subseteq \Omega$ in disjunkte Teilmengen $A_k = A \cap B_k$:



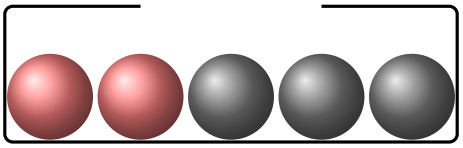
$$A = (A \cap B_1) \sqcup (A \cap B_2) \sqcup \ldots \sqcup (A \cap B_\ell)$$

Hieraus folgt die **Formel der totalen Wahrscheinlichkeit**:

$$\boxed{\mathbf{P}(A) \;=\; \sum_{k=1}^{\ell} \mathbf{P}(A \cap B_k) \;=\; \sum_{k=1}^{\ell} \mathbf{P}(A|B_k)\,\mathbf{P}(B_k)}$$

Diese Formel entspricht dem Baumdiagramm für $\Omega = B_1 \sqcup B_2 \sqcup \ldots \sqcup B_\ell$.
☺ Sie gilt sogar für $\mathbf{P}(B_k) = 0$, wobei wir $\mathbf{P}(A|B_k)\mathbf{P}(B_k) = 0$ setzen.
☺ Strategie: Zerlegung des Problems in einfachere Teilprobleme!

Beispiel zur totalen Wahrscheinlichkeit



Aufgabe: Aus einer Urne mit zwei roten und drei schwarzen Kugeln ziehen wir nacheinander zufällig zwei Kugeln, $\mathbf{P}$: ohne Zurücklegen, $\mathbf{Q}$: mit Zurücklegen. Mit welcher Wkt haben beide die gleiche Farbe?

Lösung: Sei $G = \{\text{Beide Kugeln haben die gleiche Farbe}\}$ sowie $R = \{\text{Die erste ist rot}\}$ und $S = \{\text{Die erste ist schwarz}\}$. Wir wissen:

$$\Omega = R \sqcup S,\;\; \mathbf{P}(R) = \frac{2}{5},\;\; \mathbf{P}(S) = \frac{3}{5},\;\; \mathbf{P}(G|R) = \frac{1}{4},\;\; \mathbf{P}(G|S) = \frac{2}{4},$$

$$\mathbf{P}(G) = \mathbf{P}(G|R)\,\mathbf{P}(R) + \mathbf{P}(G|S)\,\mathbf{P}(S) = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5} + \frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5} = \frac{2+6}{20} = \frac{2}{5},$$

$$\mathbf{Q}(G) = \mathbf{Q}(G|R)\,\mathbf{Q}(R) + \mathbf{Q}(G|S)\,\mathbf{Q}(S) = \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{13}{25}$$

☺ Schön und nützlich: klare Sprache und effiziente Rechenregeln.
Bedingte Wkten strukturieren und vereinfachen die Rechnung!

Die Formel von Bayes: Es lebe der Dreisatz!

Erinnerung: Für alle Ereignisse $A, B \subseteq \Omega$ mit $\mathbf{P}(A), \mathbf{P}(B) > 0$ gilt

$$\mathbf{P}(A|B)\,\mathbf{P}(B) \overset{\text{Def}}{=} \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}\,\mathbf{P}(B) \overset{\mathbb{R}}{=} \mathbf{P}(A \cap B),$$

$$\mathbf{P}(B|A)\,\mathbf{P}(A) \overset{\text{Def}}{=} \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)}\,\mathbf{P}(A) \overset{\mathbb{R}}{=} \mathbf{P}(A \cap B).$$

Durch Umstellen gewinnen wir hieraus die **Formel von Bayes**:

$$\boxed{\mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B)\,\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)}}$$

☺ Dies erlaubt das „Umkehren von Bedingung und Schlussfolgerung“, zwar nicht im kausalen Sinne, aber immerhin im stochastischen Sinne.

☺ Typische Anwendung: Wir kennen die Wkten $\mathbf{P}(A)$ und $\mathbf{P}(B)$, die Bestimmung von $\mathbf{P}(A|B)$ ist leicht, aber gesucht ist $\mathbf{P}(B|A)$.

⚠ Um durch $\mathbf{P}(A)$ zu dividieren, müssen wir $\mathbf{P}(A) > 0$ voraussetzen. Die Formel gilt auch für $\mathbf{P}(B) = 0$; wir setzen dann $\mathbf{P}(A|B)\,\mathbf{P}(B) = 0$.

☺ Anschaulich in obiger Graphik zu $A = (A \cap B_1) \sqcup \cdots \sqcup (A \cap B_\ell)$.

Die Formel von Bayes: Zusammenfassung

Soweit ist alles klar und einfach, die Formel von Bayes ist sehr leicht. In vielen Anwendungen entfaltet sie eine enorme Durchschlagskraft.

Satz T2B: Thomas Bayes (1701–1761), posthum 1763

Sei $(\Omega, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\Omega = B_1 \sqcup B_2 \sqcup \ldots \sqcup B_\ell$ eine Zerlegung, also $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_\ell$ mit $B_i \cap B_j = \emptyset$ für $i \neq j$.

(1) Für alle $A \subseteq \Omega$ gilt die Formel der **totalen Wahrscheinlichkeit**:

$$\boxed{\mathbf{P}(A) = \sum_{k=1}^{\ell} \mathbf{P}(A \cap B_k) = \sum_{k=1}^{\ell} \mathbf{P}(A|B_k)\,\mathbf{P}(B_k)}$$

(2) Im Falle $\mathbf{P}(A) > 0$ gilt zudem die **Formel von Bayes**:

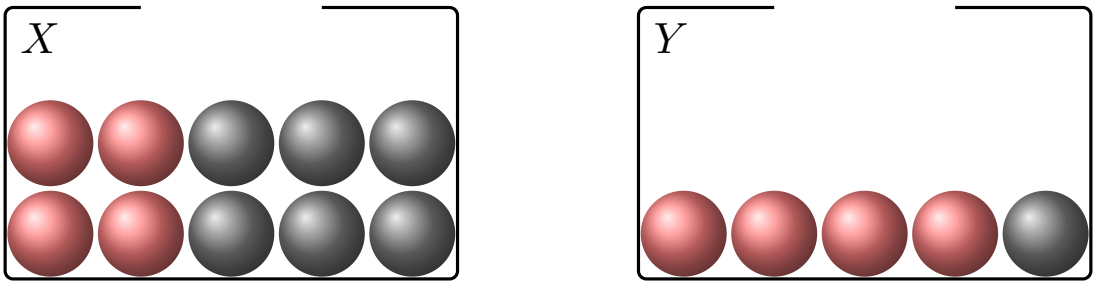
$$\boxed{\mathbf{P}(B_i|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B_i)\,\mathbf{P}(B_i)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(A|B_i)\,\mathbf{P}(B_i)}{\sum_{k=1}^{\ell} \mathbf{P}(A|B_k)\,\mathbf{P}(B_k)}}$$

☺ Alles gilt wörtlich genauso für abzählbare Zerlegungen, also $\ell = \infty$.

☺ Bequeme Notation und präzises Rechnen mit Zufallsereignissen.

⚠ Die Rechnung ist meist leicht, die Interpretation erfordert Übung.

Anwendungsbeispiel: ein Urnenmodell



Urne X: 4 rote und 6 schwarze; Urne Y: 4 rote und 1 schwarze Kugel.
Wir wählen zufällig eine Urne X, Y und ziehen daraus eine Kugel.

Aufgabe: (1) Welche Wkt hat das Ereignis $R = \{\text{rote Kugel}\}$?

$$\mathbf{P}(R) = \mathbf{P}(R|X)\,\mathbf{P}(X) + \mathbf{P}(R|Y)\,\mathbf{P}(Y) = \frac{4}{10}\cdot\frac{1}{2} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

(2) Es wurde eine rote Kugel gezogen. Mit welcher Wkt aus Urne X?

$$\mathbf{P}(X|R) \;=\; \frac{\mathbf{P}(R|X)\,\mathbf{P}(X)}{\mathbf{P}(R)} \;=\; \frac{1/5}{3/5} \;=\; \frac{1}{3}$$

☺ Die Rechnung ist Routine, doch die Interpretation erfordert Übung.

Anwendungsbeispiel: Bestehen von Prüfungen

Zu einer Prüfung treten drei Typen von Teilnehmer:innen an:
Typ A: 10% sind gut vorbereitet und haben Erfolgswkt 100%.
Typ B: 50% sind etwas vorbereitet und haben Erfolgswkt 60%.
Typ C: 40% sind schlecht vorbereitet und haben Erfolgswkt 25%.

Aufgabe: (1) Wie groß ist der Anteil erfolgreicher Teilnehmer:innen E?
(2) Wie groß ist darunter jeweils der Anteil der Typen A, B, C?

Lösung: (0) Die Gesamtmenge wird disjunkt zerlegt in $\Omega = A \sqcup B \sqcup C$.
(1) Nach der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit (T2B) erhalten wir:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(E) \;&=\; \mathbf{P}(E|A)\,\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(E|B)\,\mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(E|C)\,\mathbf{P}(C)\\ &=\; 1.0\cdot 0.1 + 0.6\cdot 0.5 + 0.25\cdot 0.4 \;=\; 0.1 + 0.3 + 0.1 \;=\; 0.5\end{aligned}$$

(2) Nach Bayes (T2B) berechnen wir hieraus folgende Verteilung auf E:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A|E) \;&=\; \mathbf{P}(E|A)\,\mathbf{P}(A)\,/\,\mathbf{P}(E) \;=\; 0.1/0.5 \;=\; 0.2\\ \mathbf{P}(B|E) \;&=\; \mathbf{P}(E|B)\,\mathbf{P}(B)\,/\,\mathbf{P}(E) \;=\; 0.3/0.5 \;=\; 0.6\\ \mathbf{P}(C|E) \;&=\; \mathbf{P}(E|C)\,\mathbf{P}(C)\,/\,\mathbf{P}(E) \;=\; 0.1/0.5 \;=\; 0.2\end{aligned}$$

Die Verteilung ändert sich von $(10, 50, 40)$ auf Ω zu $(20, 60, 20)$ auf E.

Anwendungsbeispiel: Test auf eine Krankheit

Eine bestimmte Krankheit tritt bei 2% aller Personen (zufällig) auf. Sie erfordert frühzeitige Erkennung und geeignete Maßnahmen. Ein Testverfahren für diese Krankheit liefert ein positives Ergebnis bei 98% aller kranken, aber auch bei 6% aller gesunden Personen.

Aufgabe: Mit welcher Wkt ist eine positiv getestete Person krank?

Lösung: (0) Für das Ereignis $K = \{\text{krank}\}$ wissen wir $\mathbf{P}(K) = 0.02$. Für $P = \{\text{positiver Test}\}$ gilt $\mathbf{P}(P|K) = 0.98$ und $\mathbf{P}(P|\overline{K}) = 0.06$.

(1) Aus diesen Daten folgt zunächst die totale Wahrscheinlichkeit

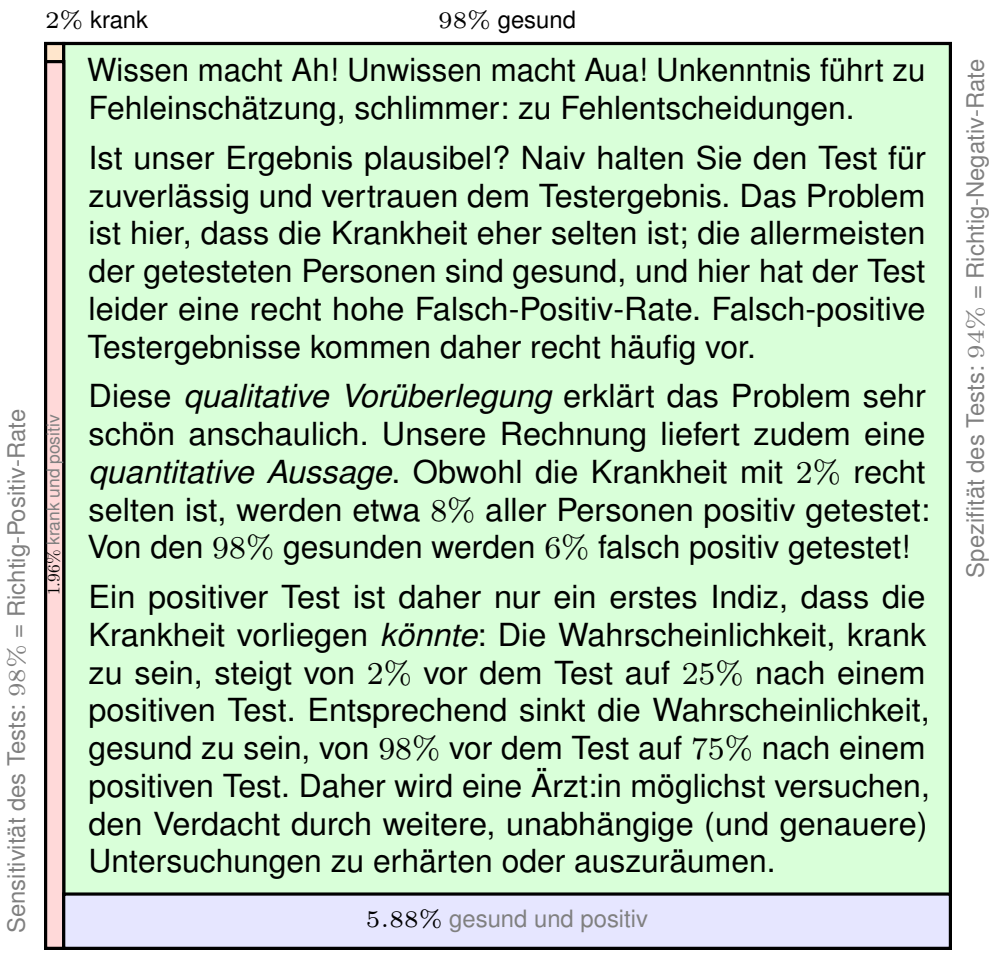
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(P) &= \mathbf{P}(P|K)\,\mathbf{P}(K) + \mathbf{P}(P|\overline{K})\,\mathbf{P}(\overline{K}) \\ &= 0.98 \cdot 0.02 + 0.06 \cdot 0.98 = 0.0196 + 0.0588 = 0.0784 \approx 8\%\end{aligned}$$

(2) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}(K|P)$ erhalten wir mit Bayes:

$$\mathbf{P}(K|P) = \frac{\mathbf{P}(P|K)\,\mathbf{P}(K)}{\mathbf{P}(P)} = \frac{0.0196}{0.0784} = 0.25 = 25\%$$

Komplementär $\mathbf{P}(\overline{K}|P) \approx 75\%$. In diesem Beispiel ist eine positiv getestete Person mit größerer Wahrscheinlichkeit gesund als krank!

Anwendungsbeispiel: Test auf eine Krankheit



Wissen macht Ah! Unwissen macht Aua! Unkenntnis führt zu Fehleinschätzung, schlimmer: zu Fehlentscheidungen.

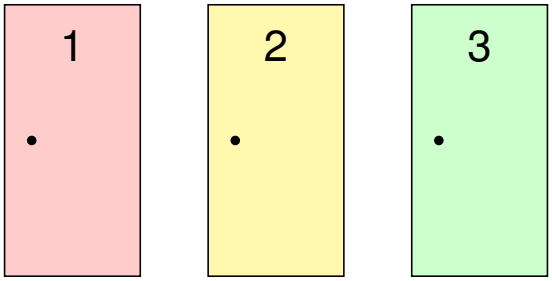
Ist unser Ergebnis plausibel? Naiv halten Sie den Test für zuverlässig und vertrauen dem Testergebnis. Das Problem ist hier, dass die Krankheit eher selten ist; die allermeisten der getesteten Personen sind gesund, und hier hat der Test leider eine recht hohe Falsch-Positiv-Rate. Falsch-positive Testergebnisse kommen daher recht häufig vor.

Diese *qualitative Vorüberlegung* erklärt das Problem sehr schön anschaulich. Unsere Rechnung liefert zudem eine *quantitative Aussage*. Obwohl die Krankheit mit 2% recht selten ist, werden etwa 8% aller Personen positiv getestet: Von den 98% gesunden werden 6% falsch positiv getestet!

Ein positiver Test ist daher nur ein erstes Indiz, dass die Krankheit vorliegen *könnte*: Die Wahrscheinlichkeit, krank zu sein, steigt von 2% vor dem Test auf 25% nach einem positiven Test. Entsprechend sinkt die Wahrscheinlichkeit, gesund zu sein, von 98% vor dem Test auf 75% nach einem positiven Test. Daher wird eine Ärzt:in möglichst versuchen, den Verdacht durch weitere, unabhängige (und genauere) Untersuchungen zu erhärten oder auszuräumen.

Das Ziegenproblem / *Monty Hall Problem*

Bei der Spielshow *Let's make a deal* wählt die Kandidatin zwischen drei Türen: Hinter einer ist ein Auto, hinter den beiden anderen sind Ziegen.



Die Kandidatin wählt eine Tür. Der Showmaster weiß, was hinter den Türen ist, und öffnet eine der beiden anderen Türen, immer mit Ziege. Er bietet der Kandidatin nun die Möglichkeit noch einmal zu wechseln.

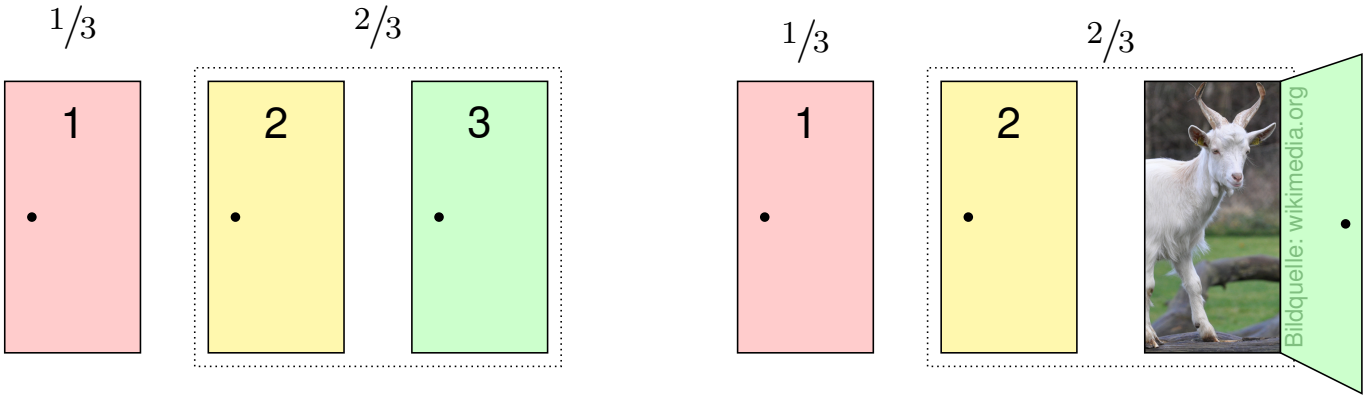
Aufgabe: Ist es vorteilhaft, die Tür zu wechseln?

Antwort: Unglaublich, aber wahr: Ja! Es lohnt sich, zu wechseln!

Dies ist ein berühmtes Problem, zunächst paradox, dann lehrreich. Hierzu bieten sich drei Erklärungen: (1) Anschaulich. (2) Experimentell. (3) Ausführlich mit Bayes (Satz T2B). Versuchen Sie möglichst alle drei!

Das Ziegenproblem: anschauliche Erklärung

(1) Anschauliche Darstellung der Wahrscheinlichkeiten: Die Kandidatin wählt Tür 1, diese hat Gewinnwkt $1/3$, die beiden anderen zusammen $2/3$. Das bleibt auch so, nachdem der Moderator die/eine Ziegentür öffnet.



(2) Experimenteller Vergleich bei 3000 Spielshows:
Die Strategie „nie wechseln" erzielt etwa 1000 Treffer (ein Drittel).
Die Strategie „immer wechseln" erzielt die verbleibenden 2000 Treffer.

☺ Entgegen dem naiven ersten Eindruck ist es tatsächlich die bessere Strategie, die anfangs gewählte Tür im zweiten Schritt zu wechseln! Stochastik (= Scharfsinn) hilft, mindert Risiken, optimiert Chancen.

Das Ziegenproblem: Anwendung von Bayes

Aufgabe: Lösen Sie das Ziegenproblem mit der Formel von Bayes.

Lösung: Wir nummerieren die Türen und betrachten die Ereignisse:

$$A_1, A_2, A_3 = \text{Das Auto steht hinter Tür } 1, 2, 3$$

⚠ Annahme der Gleichverteilung: $\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(A_2) = \mathbf{P}(A_3) = 1/3$

Die Kandidatin wählt Tür 1. Wie kann der Moderator reagieren?

$$M_1, M_2, M_3 = \text{Der Moderator öffnet Tür } 1, 2, 3$$

⚠ Annahme der Gleichverteilung auch bei der Türöffnung:

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(M_2|A_1) = 1/2, \qquad &&\mathbf{P}(M_2|A_2) = 0, \qquad &&\mathbf{P}(M_2|A_3) = 1, \\ &\mathbf{P}(M_3|A_1) = 1/2, \qquad &&\mathbf{P}(M_3|A_2) = 1, \qquad &&\mathbf{P}(M_3|A_3) = 0. \end{aligned}$$

☺ Beide Annahmen kann die Kandidatin erzwingen, indem sie die drei Türen für ihren Gebrauch zufällig nummeriert, also *symmetrisiert*.

Der Moderator öffnet demnach Tür 2 oder Tür 3 jeweils mit Wkt $1/2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(M_3) &= \mathbf{P}(M_3|A_1)\mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(M_3|A_2)\mathbf{P}(A_2) + \mathbf{P}(M_3|A_3)\mathbf{P}(A_3) \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{3} \qquad + 1 \cdot \tfrac{1}{3} \qquad + 0 \cdot \tfrac{1}{3} \qquad = \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Das Ziegenproblem: Anwendung von Bayes

Angenommen der Moderator öffnet Tür 3. Was sollte die Kandidatin tun? Die Formel von Bayes ergibt für die Gewinnwkt der Türen 1 und 2:

$$\mathbf{P}(A_1|M_3) = \frac{\mathbf{P}(M_3|A_1)\,\mathbf{P}(A_1)}{\mathbf{P}(M_3)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbf{P}(A_2|M_3) = \frac{\mathbf{P}(M_3|A_2)\,\mathbf{P}(A_2)}{\mathbf{P}(M_3)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

☺ Das entspricht der anschaulichen Erklärung: Wechseln ist besser! Die Rechnung verläuft in allen Fällen aus Symmetriegründen gleich.

Ein häufiger Einwand gegen diese Rechnung ist folgender: Was wäre, wenn der Moderator die beiden Türen ungleich öffnet? Sei allgemein $\mathbf{P}(M_2|A_1) = \alpha \in [0, 1]$ und $\mathbf{P}(M_3|A_1) = 1 - \alpha$. Wir haben oben vereinfachend $\alpha = 1/2$ angenommen. Die allgemeine Rechnung verläuft so: Zunächst folgt $\mathbf{P}(M_2) = (1 + \alpha)/3$ und $\mathbf{P}(M_3) = (2 - \alpha)/3$. Die obige Rechnung ergibt nun $\mathbf{P}(A_1|M_3) = (1 - \alpha)/(2 - \alpha)$ und $\mathbf{P}(A_2|M_3) = 1/(2 - \alpha)$. Es ist auch hier immer noch vorteilhaft zu wechseln! Der Sonderfall $\alpha = 0$ bedeutet: Hat der Moderator die Wahl, Tür 2 oder 3 zu öffnen, dann nimmt er immer Tür 3. Hier gilt Gleichstand $\mathbf{P}(A_1|M_3) = \mathbf{P}(A_2|M_3) = 1/2$. In allen verbleibenden Fällen *muss* der Moderator Tür 2 öffnen, und hier gilt $\mathbf{P}(A_1|M_2) = 0$ gegen $\mathbf{P}(A_3|M_2) = 1$. Über alle Fälle summiert bleibt die Schlussfolgerung bestehen!

Stochastisch un/abhängige Ereignisse

Wir betrachten weiterhin einen WRaum $(\Omega, \mathbf{P})$ gemäß T1C.
Zwei Ereignisse A und B sind **stochastisch unabhängig**,
wenn die Wahrscheinlichkeit von A nicht von B abhängt:

$$\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)$$

Das setzt $\mathbf{P}(B) > 0$ voraus und bedeutet ausgeschrieben:

$$\frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \mathbf{P}(A),$$

also $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)$. Dies machen wir nun zur Definition:

Definition T2C: stochastisch unabhängige Ereignisse

Sei $(\Omega, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \subseteq \Omega$ zwei Ereignisse.
Wir nennen A und B **(stochastisch) unabhängig** bezüglich $\mathbf{P}$, wenn

$$\boxed{\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B).}$$

In Worten: Die Wkt des Schnitts $A \cap B$ ist das Produkt der Wkten.
Andernfalls heißen die Ereignisse A und B **(stochastisch) abhängig**.

Stochastisch un/abhängige Ereignisse

Aufgabe: Sie würfeln einmal mit einem fairen Würfel.
Dies ist ein Laplace–Experiment auf $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$$A := \{\text{gerade Zahl}\} = \{2, 4, 6\}$$
$$B := \{\text{höchstens } 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Sind A und B stochastisch unabhängig?

Lösung: Wir finden zunächst $A \cap B = \{2, 4\}$.
Es gilt $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2}$ und $\mathbf{P}(B) = \frac{5}{6}$, aber $\mathbf{P}(A \cap B) = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}$.

☺ Die Ereignisse A und B sind demnach **stochastisch abhängig**.

☺ Anschaulich plausibel. Definition T2C sagt genau, was zu prüfen ist.

Quantitativer Vergleich: Es gilt $\mathbf{P}(A|B) = \frac{2}{5} < \frac{1}{2} = \mathbf{P}(A)$ und $\mathbf{P}(B|A) = \frac{2}{3} < \frac{5}{6} = \mathbf{P}(B)$.
Wir sprechen von einer negativen Korrelation: Das Eintreten von B verringert die Wkt von A.
Das Eintreten von A verringert die Wkt von B. Wir führen dies in Definition T3K aus.

Eine Eigenschaft wie Unabhängigkeit können Sie prüfen; das ist zunächst eine (Beweis)Last.
Umgekehrt jedoch, sobald Sie sie voraussetzen dürfen, ist sie für Sie von großem Nutzen!
In vielen praktischen Anwendungen erlaubt ein sorgfältiger Versuchsaufbau die Annahme der Unabhängigkeit, da die Ereignisse sich aus physikalischen Gründen nicht beeinflussen (können).

Stochastisch un/abhängige Ereignisse

T219

Aufgabe: Sie würfeln zweimal mit einem fairen Würfel.
Dies ist ein Laplace–Experiment auf $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$.

$$A := \{\text{Die erste Augenzahl ist gerade}\}$$
$$B := \{\text{Die Augensumme ist gerade}\}$$

Sind A und B stochastisch unabhängig?

Lösung: Wir haben $A \cap B = \{\text{Beide Augenzahlen sind gerade}\}$.
Somit finden wir $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2}$ und $\mathbf{P}(B) = \frac{1}{2}$ sowie $\mathbf{P}(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$.

☺ Die Ereignisse A und B sind demnach **stochastisch unabhängig**.

☺ Auch hier sagt Ihnen die Definition T2c genau, was zu prüfen ist.

Alternative Formulierung: Hier gilt $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2} = \mathbf{P}(A|B)$ und $\mathbf{P}(B) = \frac{1}{2} = \mathbf{P}(B|A)$. Intuitiv-anschaulich ist das vielleicht etwas überraschend, denn die erste Augenzahl beeinflusst natürlich die Augensumme. Dennoch sind beide Ereignisse A und B stochastisch unabhängig.

Es geht bei der stochastischen Unabhängigkeit nicht um Kausalität o.ä., sondern allein um die Multiplikativität der Wahrscheinlichkeiten. Die Ereignisse A und B mögen noch so raffiniert miteinander verwoben sein, doch es zählt allein die Gleichung $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)$. Nutzen Sie beides: Definition und Beispiele, Präzision und Intuition, Handwerk und Kunst.

Stochastisch un/abhängige Ereignisse

T220
Übung

Aufgabe: Sie würfeln zweimal nacheinander mit einem fairen Würfel.
Sei X die erste Augenzahl, Y die zweite, $S = X + Y$ ihre Summe.

(1a) Sind die Ereignisse $X = 3$ und $S = 7$ stochastisch unabhängig?
(1b) Sind die Ereignisse $X = 3$ und $S = 6$ stochastisch unabhängig?
(2) Berechnen und interpretieren Sie ebenso die bedingten Wkten.

Lösung: (1a) Wir wissen schon $\mathbf{P}(X = 3) = \frac{1}{6}$ und $\mathbf{P}(S = 7) = \frac{1}{6}$ sowie $\mathbf{P}(X = 3, S = 7) = \mathbf{P}(\{(3,4)\}) = \frac{1}{36}$. Beide Ereignisse sind unabhängig.
(1b) Wir wissen schon $\mathbf{P}(X = 3) = \frac{1}{6}$ und $\mathbf{P}(S = 6) = \frac{5}{36}$ und finden $\mathbf{P}(X = 3, S = 6) = \mathbf{P}(\{(3,3)\}) = \frac{1}{36}$. Beide Ereignisse sind abhängig.

$$\begin{aligned}
&\text{(2a)} \quad \mathbf{P}(S = 7|X = 3) = \tfrac{1}{6} = \mathbf{P}(S = 7),\\
&\qquad\quad\;\; \mathbf{P}(X = 3|S = 7) = \tfrac{1}{6} = \mathbf{P}(X = 3).\\
&\text{(2b)} \quad \mathbf{P}(S = 6|X = 3) = \tfrac{1}{6} \neq \tfrac{5}{36} = \mathbf{P}(S = 6),\\
&\qquad\quad\;\; \mathbf{P}(X = 3|S = 6) = \tfrac{1}{5} \neq \tfrac{1}{6} = \mathbf{P}(X = 3).
\end{aligned}$$

Nochmal zur Betonung: Es geht bei der stochastischen Unabhängigkeit nicht um Kausalität! Die Ereignisse mögen noch so raffiniert miteinander verwoben sein, für ihre stochastische Unabhängigkeit zählt allein die Multiplikativität der Wahrscheinlichkeiten. So einfach ist das.

Vierfeldertafel und Unabhängigkeit

Aufgabe: Sind folgende Ereignisse A, B stochastisch unabhängig?

Wkt	B	$\overline{B}$	ges.
A	0.28	0.12	0.40
$\overline{A}$	0.42	0.18	0.60
ges.	0.70	0.30	1.00

Wkt	Y	$\overline{Y}$	ges.
X	0.30	0.10	0.40
$\overline{X}$	0.40	0.20	0.60
ges.	0.70	0.30	1.00

Links: Ja! Aus $\mathbf{P}(A), \mathbf{P}(B)$ und Multiplikativität folgt die Tabelle.
Rechts: Nein! Multiplikativität gilt hier nicht; X, Y sind abhängig.
Wir sehen erfreut: Bei einer Vierfeldertafel genügt zur Unabhängigkeit bereits *eines* der vier Produkte, die anderen drei gibt es gratis (T2D).

☺ Die Definition T2C können Sie in beide Richtungen anwenden:
Sind die Wkten gegeben, so können Sie Unabhängigkeit leicht prüfen.
Ist umgekehrt die Unabhängigkeit gegeben, so können Sie die Wkten von Schnitten wunderbar als Produkte ausrechnen. Das hilft ungemein!
Eine schöne Illustration zeigt das „Sudoku für Wahrscheinlichkeiten“.

Komplemente und Unabhängigkeit

Lemma T2D: Komplemente

Sind (A, B) unabhängig, dann auch $(A, \overline{B})$ und $(\overline{A}, B)$ sowie $(\overline{A}, \overline{B})$.
Für jedes Ereignis $A \subseteq \Omega$ sind zudem $(A, \emptyset)$ und (A, Ω) unabhängig.

Aufgabe: Rechnen Sie dies sorgfältig nach! **Lösung:**

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A \cap \overline{B}) &= \mathbf{P}(A \setminus (A \cap B)) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B) \\ &= \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)(1 - \mathbf{P}(B)) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(\overline{B})\end{aligned}$$

Jedes Ereignis A ist von $\emptyset$ stochastisch unabhängig:

$$\mathbf{P}(A \cap \emptyset) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0 = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(\emptyset)$$

Jedes Ereignis A ist von Ω stochastisch unabhängig:

$$\mathbf{P}(A \cap \Omega) = \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(\Omega)$$

Zusammengefasst: Jedes der Ereignisse $\emptyset, A, \overline{A}, \Omega$ ist stochastisch unabhängig von jedem der Ereignisse $\emptyset, B, \overline{B}, \Omega$. Das nützt gelegentlich.

Sudoku für Wahrscheinlichkeiten

Aufgabe: Wie können Sie die Tabelle füllen? bei Unabhängigkeit?

Wkt	B	$\overline{B}$	ges.
A			0.36
$\overline{A}$			
ges.	0.25		

Wkt	B	$\overline{B}$	ges.
A	[0.00, 0.25]	[0.11, 0.36]	0.36
$\overline{A}$	[0.00, 0.25]	[0.39, 0.64]	0.64
ges.	0.25	0.75	1.00

Wkt	B	$\overline{B}$	ges.
A	0.09	0.27	0.36
$\overline{A}$	0.16	0.48	0.64
ges.	0.25	0.75	1.00

Ohne die Voraussetzung der Unabhängigkeit sind die rot markierten Einträge nicht eindeutig: Sie können ein beliebiges Feld aussuchen und frei festlegen – im offensichtlichen Intervall! Bei Unabhängigkeit gibt es jeweils nur eine Lösung (hier gelb). Ein raffinierteres Beispiel: Gleiches gilt bei der nächsten Frage, es gibt aber zwei Lösungen (quadratische Gleichung).

Wkt	B	$\overline{B}$	ges.
A	0.12		
$\overline{A}$		0.32	
ges.			

Wkt	B	$\overline{B}$	ges.
A	0.12	[0.00, 0.56]	[0.12, 0.68]
$\overline{A}$	[0.00, 0.56]	0.32	[0.32, 0.88]
ges.	[0.12, 0.68]	[0.32, 0.88]	1.00

Wkt	B	$\overline{B}$	ges.
A	0.12	0.08 0.48	0.20 0.60
$\overline{A}$	0.48 0.08	0.32	0.80 0.40
ges.	0.60 0.20	0.40 0.80	1.00

Annähernde Unabhängigkeit

Aufgabe: Drei Absender schreiben je einen Brief an einen von zwei Empfängern. Die Wahlen sind zufällig, gleichverteilt und unabhängig.

(1) Berechnen Sie $\mathbf{P}(A_1)$, $\mathbf{P}(A_2)$, $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2)$ für die Ereignisse

$$A_i = \{\text{Der Empfänger } i \text{ erhält mindestens einen Brief}\}.$$

(2) Sind A_1, A_2 stochastisch unabhängig? (3) Was gilt für n Absender?

Lösung: Es gibt $2^3 = 8$ gleichwahrscheinliche Zuordnungen:

$$\begin{array}{cccc} (1,1,1) & (1,1,2) & (1,2,1) & (1,2,2) \\ (2,1,1) & (2,1,2) & (2,2,1) & (2,2,2) \end{array}$$

(1) Demnach finden wir $\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(A_2) = 7/8$ und $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2) = 6/8$.

(2) Wegen $7/8 \cdot 7/8 \neq 6/8$ sind A_1, A_2 stochastisch abhängig.

(3) Allgemein $\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(A_2) = 1 - 2^{-n}$ und $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2) = 1 - 2^{1-n}$. Unabhängigkeit gilt hierbei nie, aber die „Abhängigkeit nimmt ab“: Für $n \to \infty$ gilt $\mathbf{P}(A_1)\,\mathbf{P}(A_2)/\mathbf{P}(A_1 \cap A_2) \to 1$. Das ist plausibel! Mehr zur Korrelation von Ereignissen finden Sie ab Seite T350.

Unabhängigkeit mehrerer Ereignisse

Zwei Ereignisse A, B sind unabhängig, wenn gilt:

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)$$

Drei Ereignisse A, B, C sind unabhängig, wenn gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A \cap B) &= \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B) \\
\mathbf{P}(A \cap C) &= \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(C) \\
\mathbf{P}(B \cap C) &= \mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(C) \\
\mathbf{P}(A \cap B \cap C) &= \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(C)
\end{aligned}$$

⚠ Die Tripelbedingung folgt nicht aus den drei Paarbedingungen!
Sie kennen dieses Problem von linearer Unabhängigkeit von Vektoren.

Definition T2E: stochastische Unabhängigkeit

Sei $(\Omega, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Familie von Ereignissen $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ heißt **(stochastisch) unabhängig**, wenn folgende Produktformel für jede Auswahl $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_\ell \leq n$ gilt:

$$\boxed{\mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_\ell}) = \mathbf{P}(A_{i_1})\,\mathbf{P}(A_{i_2}) \cdots \mathbf{P}(A_{i_\ell})}$$

Unabhängigkeit mehrerer Ereignisse

Sie werfen zweimal eine faire Münze: $0 =$ Kopf, $1 =$ Zahl.

Aufgabe: Sind folgende Ereignisse (A, B, C) unabhängig?

$$\begin{aligned}
A &= \{\text{Zahl beim ersten Wurf}\} &&= \{(1,0),(1,1)\} \\
B &= \{\text{Zahl beim zweiten Wurf}\} &&= \{(0,1),(1,1)\} \\
C &= \{\text{gleiches Ergebnis bei beiden}\} &&= \{(0,0),(1,1)\}
\end{aligned}$$

Welche dieser drei Paare sind unabhängig? Ist das Tripel unabhängig?

Lösung: Der Ergebnisraum ist $\Omega = \{0,1\}^2$ mit Gleichverteilung.
Wir berechnen die erforderlichen Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(C) = \tfrac{1}{2}, \\
&\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A \cap C) = \mathbf{P}(B \cap C) = \tfrac{1}{4}, \\
&\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \tfrac{1}{4} \quad \text{und} \quad \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(C) = \tfrac{1}{8}.
\end{aligned}$$

☺ Jedes der Paare (A, B) und (A, C) und (B, C) ist unabhängig.

⚠ Das Tripel (A, B, C) ist dennoch abhängig! Lesen Sie die Definition!
Sie kennen dieses Problem von linear un/abhängigen Vektoren.

Unabhängigkeit mehrerer Ereignisse

Aufgabe: In einer Urne befinden sich die Lose 112, 121, 211, 222. Sei A_i das Ereignis „1 an i-ter Stelle“. Sind A_1, A_2 unabhängig? und A_1, A_3? und A_2, A_3? Sind A_1, A_2, A_3 unabhängig?

Lösung: Wir finden $\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(A_2) = \mathbf{P}(A_3) = 1/2$ und $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbf{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbf{P}(A_2 \cap A_3) = 1/4$: Die Ereignisse A_1, A_2, A_3 sind paarweise unabhängig. Es gibt kein Los 111, daher gilt $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0$: Das Tripel (A_1, A_2, A_3) ist insgesamt nicht unabhängig.

Aufgabe: Sie würfeln zweimal mit einem fairen Würfel. Berechnen Sie die Wkten von $A = \{\text{erster gerade}\}$ und $B = \{\text{zweiter ungerade}\}$ und $C = \{\text{Summe gleich } 7\}$ und ihrer Schnitte. Sind A, B, C unabhängig?

Lösung: Wir finden $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = 1/2$ und $\mathbf{P}(C) = 1/6$ sowie $\mathbf{P}(A \cap B) = 1/4$ und $\mathbf{P}(A \cap C) = \mathbf{P}(B \cap C) = \mathbf{P}(A \cap B \cap C) = 1/12$: Die Familie (A, B, C) ist paarweise unabhängig, aber nicht unabhängig. Wir kennen dieses erstaunliche Phänomen bereits. Es tritt häufig auf! Es ist keine exotische Ausnahme, sondern ein typisches Problem.

Unabhängigkeit mehrerer Ereignisse

Aufgabe: Wir würfeln zweimal mit einem fairen Würfel. Berechnen Sie die Wkten von $A = \{\text{erster gerade}\}$ und $B = \{\text{zweiter } 2 \text{ oder } 5\}$ und $C = \{\text{Summe gleich } 7\}$ und ihrer Schnitte. Sind A, B, C unabhängig?

Lösung: Wir finden $\mathbf{P}(A) = 1/2$ und $\mathbf{P}(B) = 1/3$ und $\mathbf{P}(C) = 1/6$ sowie $\mathbf{P}(A \cap B) = 1/6$ und $\mathbf{P}(A \cap C) = 1/12$ und $\mathbf{P}(B \cap C) = 1/18$ und $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = 1/36$. Die Familie (A, B, C) ist also unabhängig.

Aufgabe: Seien (A, B, C) drei unabhängige Ereignisse $A, B, C \subseteq \Omega$. Sind dann auch die folgenden Tripel von Ereignissen unabhängig?
(1) (A, C, B), (2) (B, A, C), (3) $(A, B, \overline{C})$, (4) $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C})$

Lösung: Ja! Alle Bedingungen in der Definition der Unabhängigkeit sind invariant unter Vertauschung (1,2). Wir rechnen (3) exemplarisch nach:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(A \cap B \cap \overline{C}) = \mathbf{P}((A \cap B) \smallsetminus (A \cap B \cap C)) \\
&= \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(C) \\
&= \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) \cdot (1 - \mathbf{P}(C)) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(\overline{C})
\end{aligned}$$

Jedes der $3! \cdot 2^3 = 48$ so variierten Tripel ist stochastisch unabhängig.

Die Siebformel

Erinnerung: Für $A, B \subseteq \Omega$ gilt $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.

Aufgabe: (1) Erklären Sie graphisch und rechnerisch die Siebformel:

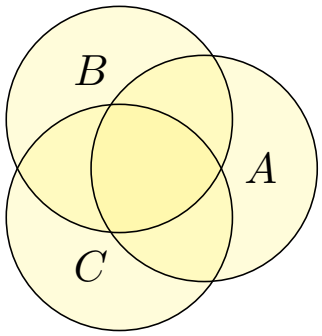
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A \cup B \cup C) = \; & + \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) \\ & - \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A \cap C) - \mathbf{P}(B \cap C) \\ & + \mathbf{P}(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

(2) Was erhalten Sie im Spezialfall, wenn A, B, C unabhängig sind?
(3) Formulieren und erklären Sie die Formel für $\mathbf{P}(A \cup B \cup C \cup D)$.
(4) Formulieren Sie die allgemeine Siebformel: Aus $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ folgt $\prod_{i=1}^n (\mathbf{I}_A - \mathbf{I}_{A_i}) = 0$ und somit $\mathbf{I}_A = \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{|J|-1} \mathbf{I}_{A_J}$.

Lösung: (1a) Die Summe $\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C)$ zählt manche Elemente doppelt oder gar dreifach.

Nach Korrektur $-\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A \cap C) - \mathbf{P}(B \cap C)$ zählen die Elemente in $A \cap B \cap C$ gar nicht mehr.

Nach Korrektur $+\mathbf{P}(A \cap B \cap C)$ stimmt alles.



Die Siebformel

(1b) Wir nutzen $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$ und finden:

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(A \cup B \cup C) = \mathbf{P}(A \cup B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}((A \cup B) \cap C) \\ &= \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\ &= \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A \cap C) - \mathbf{P}(B \cap C) \\ &\quad + \mathbf{P}(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

(2) Sind A, B, C unabhängig, so finden wir die vertraute Produktformel:

$$\mathbf{P}(A \cup B \cup C) = \mathbf{P}(\overline{\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}}) = 1 - [1 - \mathbf{P}(A)][1 - \mathbf{P}(B)][1 - \mathbf{P}(C)]$$

(4) Für $A_1, \dots, A_n \subseteq \Omega$ und $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ gilt $\prod_{i=1}^n (\mathbf{I}_A - \mathbf{I}_{A_i}) = 0$, denn für jedes $x \in A$ ist mindestens ein Faktor Null. Für jede Indexmenge $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ sei $A_J := \bigcap_{i \in J} A_i$ die Schnittmenge, speziell $A_\emptyset = A$. Wir erhalten die **Siebformel**, auch **Inklusions-Exklusions-Prinzip**:

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_A &= \textstyle\sum_{\emptyset \neq J \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{|J|-1} \mathbf{I}_{A_J}, \\ \mathbf{P}\Big(\textstyle\bigcup_{i=1}^n A_i\Big) &= \textstyle\sum_{\emptyset \neq J \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{|J|-1} \mathbf{P}(A_J).\end{aligned}$$

Siebformel vs Produktformel

Aufgabe: (nach Lewis Carroll) Projekte im Research & Development leiden erfahrungsgemäß zu 70% an irrealen Zielen, 75% an schlechter Kommunikation, 80% an Missmanagement, 85% an Zeitmangel.

Wie viele Projekte leiden an allem, also an irrealen Zielen, an schlechter Kommunikation, an Missmanagement und natürlich an Zeitmangel. . . (1) höchstens? (2) mindestens? (0) wenn diese unabhängig sind?

Nennen Sie Mengen $I, K, M, Z \subseteq \Omega$, die diese Schranken realisieren!

M Z 76 . . . 80	Z 81 . . . 85	86 . . . 90	91 . . . 95	96 . . . 100
M Z 51 . . . 55 I K	M Z 56 . . . 60 I K	M Z 61 . . . 65 I K	M Z 66 . . . 70 I K	M Z 71 . . . 75 K
M Z 26 . . . 30 I K	M Z 31 . . . 35 I K	M Z 36 . . . 40 I K	M Z 41 . . . 45 I K	M Z 46 . . . 50 I K
M Z 1 . . . 5 I K	M Z 6 . . . 10 I K	M Z 11 . . . 15 I K	M Z 16 . . . 20 I K	M Z 21 . . . 25 I K

M Z 76 . . . 80 K	M Z 81 . . . 85 K	M Z 86 . . . 90 K	M Z 91 . . . 95 K	M Z 96 . . . 100 K
M Z 51 . . . 55 I	M Z 56 . . . 60 I	M Z 61 . . . 65 I	M Z 66 . . . 70 I	M Z 71 . . . 75 K
Z 26 . . . 30 I K	Z 31 . . . 35 I K	Z 36 . . . 40 I K	Z 41 . . . 45 I K	M Z 46 . . . 50 I
M Z 1 . . . 5 I K	M Z 6 . . . 10 I K	M 11 . . . 15 I K	M 16 . . . 20 I K	M 21 . . . 25 I K

Siebformel vs Produktformel

Lösung: (0) Bei Unabhängigkeit von I, K, M, Z ergibt die Produktformel ganz einfach $\mathbf{P}(I \cap K \cap M \cap Z) = \mathbf{P}(I) \cdot \mathbf{P}(K) \cdot \mathbf{P}(M) \cdot \mathbf{P}(Z) = 0.357$.

(1) Höchstens 70% leiden an allen vier; diese Schranke ist offensichtlich.

(2) Mindestens 10% leiden an allen vier; das rechnen wir geduldig aus:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(I \cap K) &= \mathbf{P}(I) + \mathbf{P}(K) - \mathbf{P}(I \cup K) \\
&\geq 0.70 + 0.75 - 1 = 0.45 \\
\mathbf{P}(I \cap K \cap M) &= \mathbf{P}(I \cap K) + \mathbf{P}(M) - \mathbf{P}((I \cap K) \cup M) \\
&\geq 0.45 + 0.80 - 1 = 0.25 \\
\mathbf{P}(I \cap K \cap M \cap Z) &= \mathbf{P}(I \cap K \cap M) + \mathbf{P}(Z) - \mathbf{P}((I \cap K \cap M) \cup Z) \\
&\geq 0.25 + 0.85 - 1.00 = 0.10
\end{aligned}$$

Die oben skizzierten Graphiken zeigen, dass diese Werte tatsächlich angenommen werden können. Unsere Schranken sind also optimal.

Alternativ: Dank DeMorgan gilt $\overline{I \cap K \cap M \cap Z} = \overline{I} \cup \overline{K} \cup \overline{M} \cup \overline{Z}$, also $\mathbf{P}(\overline{I \cap K \cap M \cap Z}) \leq \mathbf{P}(\overline{I}) + \mathbf{P}(\overline{K}) + \mathbf{P}(\overline{M}) + \mathbf{P}(\overline{Z}) \leq 0.90$.

Diskrete Zufallsvariablen

Beispiel: Bei n-maligem Würfeln nutzen wir $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^n$ mit Gleichverteilung $\mathbf{P}$ und $S_n : \Omega \to \mathbb{R} : (\omega_1, \dots, \omega_n) \mapsto \omega_1 + \dots + \omega_n$.

Definition T3A: Zufallsvariable, zunächst diskret

Sei $(\Omega, \mathbf{P})$ ein WRaum. Eine reelle **Zufallsvariable** ist eine Abbildung

$$X \,:\, \Omega \to \mathbb{R} \,:\, \omega \mapsto X(\omega).$$

Das heißt: X ordnet jedem Ergebnis $\omega \in \Omega$ eine Zahl $X(\omega) \in \mathbb{R}$ zu. Sie transportiert das WMaß $\mathbf{P}$ auf Ω zum **Bildmaß** $\mathbf{P}_X$ auf $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_X(\{a\}) &= \mathbf{P}(X = a) := \mathbf{P}\big(X^{-1}(\{a\})\big) = \mathbf{P}\big(\{\, \omega \in \Omega \mid X(\omega) = a \,\}\big) \\ \mathbf{P}_X(A) \quad &= \mathbf{P}(X \in A) := \mathbf{P}\big(X^{-1}(A)\big) \quad = \mathbf{P}\big(\{\, \omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A \,\}\big) \end{aligned}$$

für jedes Element $a \in \mathbb{R}$ und jede Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$, etwa $A = [a, b]$.

Satz T3B: Auch das Bildmaß ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Sei $(\Omega, \mathbf{P})$ ein (diskreter) WRaum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Dann ist $\mathbf{P}_X$ auf $\mathbb{R}$ ein (diskretes) Wahrscheinlichkeitsmaß (T1D).

Diskrete Zufallsvariablen

☺ Wir setzen den WRaum $(\Omega, \mathbf{P})$ hier vorerst als diskret voraus (T1D). Später ist $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ein allgemeiner WRaum; wir fordern dann von X zudem Messbarkeit, also $X^{-1}([a, b]) \in \mathscr{A}$ für jedes Intervall $[a, b] \in \mathbb{R}$.

Aufgabe: (1) Interpretieren Sie die Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$ stochastisch. (2) Warum ist $\mathbf{P}_X$ auf $\mathbb{R}$ ein diskretes WMaß? Was ist hier zu prüfen?

Lösung: (1) Die Zufallsvariable X ordnet jedem Ergebnis $\omega \in \Omega$ eine reelle Zahl $X(\omega) = a \in \mathbb{R}$ zu, etwa den Gewinn oder eine Auszahlung. Oft beobachten wir nicht direkt das Ergebnis ω, sondern die abgeleitete Zufallsgröße $X(\omega) = a$. Die Menge $X^{-1}(\{a\}) := \{\, \omega \in \Omega \mid X(\omega) = a \,\}$ fasst alle Ergebnisse $\omega \in \Omega$ zusammen, die zum Wert $X(\omega) = a$ führen.

(2) Wir wenden Definition T1D an. (a) $\mathbf{P}_X(\mathbb{R}) = \mathbf{P}\big(X^{-1}(\mathbb{R})\big) = \mathbf{P}(\Omega) = 1$.
(b) Ebenso prüfen wir die Additivität: Für jede Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_X(A) \quad &\overset{\text{Def}}{=} \quad \mathbf{P}\big(X^{-1}(A)\big) \quad &&\overset{\text{Def}}{=} \quad \mathbf{P}\big(\{\, \omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A \,\}\big) \\ &\overset{\text{Dis}}{=} \quad \mathbf{P}\Big(\bigsqcup\nolimits_{a \in A} \{\, \omega \in \Omega \mid X(\omega) = a \,\}\Big) \quad &&\overset{\text{Def}}{=} \quad \mathbf{P}\Big(\bigsqcup\nolimits_{a \in A} X^{-1}(\{a\})\Big) \\ &\overset{\text{Add}}{=} \quad \sum\nolimits_{a \in A} \mathbf{P}\big(X^{-1}(\{a\})\big) \quad &&\overset{\text{Def}}{=} \quad \sum\nolimits_{a \in A} \mathbf{P}_X(\{a\}) \end{aligned}$$

Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariablen

Definition T3C: Erwartungswert, zunächst diskret

Die **absolute Erwartung** der Zufallsvariable $X : (\Omega, \mathbf{P}) \to \mathbb{R}$ ist

$$\mathbf{E}\big(|X|\big) := \sum\nolimits_{\omega\in\Omega} \big|X(\omega)\big| \cdot \mathbf{P}\big(\{\omega\}\big) \quad \in \quad [0,\infty].$$

Ist dieser Wert endlich, so nennen wir X **absolut summierbar**.
Wir sagen hierzu anschaulich **der Erwartungswert von X existiert**; dies gilt immer, wenn Ω endlich oder X beschränkt ist. Wir schreiben:

$$L^1(\Omega, \mathbf{P}; \mathbb{R}) := \big\{\, X : \Omega \to \mathbb{R} \;\big|\; \mathbf{E}(|X|) < \infty \,\big\}$$

Für jede Zufallsvariable $X \in L^1(\Omega, \mathbf{P})$ ist der **Erwartungswert** definiert:

$$\mathbf{E}(X) := \sum\nolimits_{\omega\in\Omega} X(\omega) \cdot \mathbf{P}\big(\{\omega\}\big) = \sum\nolimits_{a\in\mathbb{R}} a \cdot \mathbf{P}(X = a)$$

Satz T3D: Die Erwartung ist linear.

Für jeden WRaum $(\Omega, \mathbf{P})$ ist die Menge $L^1(\Omega, \mathbf{P})$ ein $\mathbb{R}$–Vektorraum und die Erwartung $\mathbf{E} : L^1(\Omega, \mathbf{P}) \to \mathbb{R} : X \mapsto \mathbf{E}(X)$ eine $\mathbb{R}$–lineare Abbildung.

Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariablen

☺ Wir setzen den WRaum $(\Omega, \mathbf{P})$ hier vorerst als diskret voraus (T1D). Im diskreten Fall genügen Reihen, im Allgemeinen nutzen wir Integrale. Für Reihen und Integrale verfügen Sie über alle nötigen Werkzeuge.

Aufgabe: (1) Der Erwartungswert $\mathbf{E}(X)$ kann wie angegeben auf zwei Arten berechnet werden: Beide Summen ergeben denselben Wert!

(2) Beweisen Sie den Satz T3D durch sorgfältiges Nachrechnen.

Lösung: (1) Dank absoluter Summierbarkeit (A2N) dürfen wir umordnen:

$$\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega) \cdot \mathbf{P}\big(\{\omega\}\big) \overset{\text{Um}}{\underset{\text{A2N}}{=}} \sum_{a\in\mathbb{R}} \Big[\sum_{\omega\in X^{-1}(\{a\})} X(\omega) \cdot \mathbf{P}\big(\{\omega\}\big) \Big]$$

$$\overset{\text{Lin}}{=} \sum_{a\in\mathbb{R}} a \cdot \Big[\sum_{\omega\in X^{-1}(\{a\})} \mathbf{P}\big(\{\omega\}\big) \Big] \overset{\text{Def}}{=} \sum_{a\in\mathbb{R}} a \cdot \mathbf{P}(X = a)$$

(2) Es gilt $\mathbf{E}(|\lambda \cdot X|) = |\lambda| \cdot \mathbf{E}(|X|)$ und $\mathbf{E}(|X + Y|) \le \mathbf{E}(|X|) + \mathbf{E}(|Y|)$, für alle Zufallsvariablen $X, Y : (\Omega, \mathbf{P}) \to \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, daher ist $L^1(\Omega, \mathbf{P})$ ein $\mathbb{R}$–Vektorraum. Für $X, Y \in L^1(\Omega, \mathbf{P})$ gilt zudem $\mathbf{E}(\lambda \cdot X) = \lambda \cdot \mathbf{E}(X)$ und $\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y)$ dank Linearität (konvergenter!) Reihen. Die Abbildung $\mathbf{E} : L^1(\Omega, \mathbf{P}) \to \mathbb{R}$ ist also $\mathbb{R}$–linear, wie gewünscht.

Zufallsvariable, Verteilung und Erwartung

Aufgabe: Bei zweimaligem Würfeln betrachten wir die Ergebnismenge $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}^2$ mit der Gleichverteilung $\mathbf{P}$ und den Zufallsvariablen

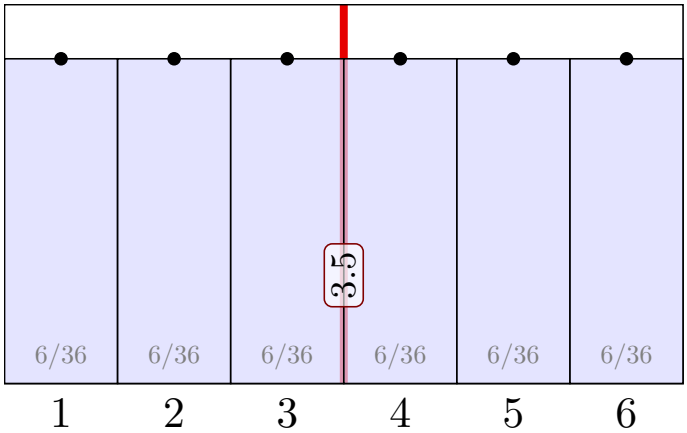
$$X, Y \,:\, \Omega \to \mathbb{R} \,: \quad X(\omega_1, \omega_2) = \omega_1, \quad Y(\omega_1, \omega_2) = \omega_2.$$

Berechnen Sie Verteilung und Erwartung der Zufallsvariablen X, Y, sowie $X - Y$ und $|X - Y|$, schließlich $\max(X, Y)$ und $\min(X, Y)$.

Lösung: Wir beginnen mit der Zufallsvariable $X(\omega_1, \omega_2) = \omega_1$:

$\omega_2 \backslash \omega_1$	1	2	3	4	5	6
6	1	2	3	4	5	6
5	1	2	3	4	5	6
4	1	2	3	4	5	6
3	1	2	3	4	5	6
2	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6

X



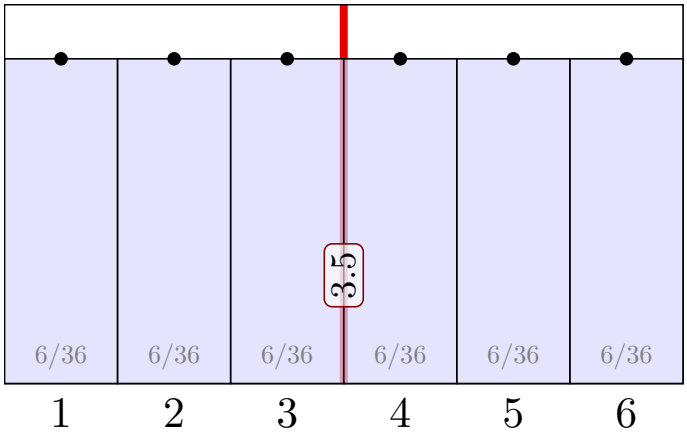
Der Erwartungswert ist hier $\mathbf{E}(X) = 3.5$, wie Sie leicht nachrechnen. Erwartungswert bedeutet nicht häufigster Wert, sondern Schwerpunkt!

Zufallsvariable, Verteilung und Erwartung

Die ZVariable Y ist verschieden von X, aber identisch verteilt:

$\omega_2 \backslash \omega_1$	1	2	3	4	5	6
6	6	6	6	6	6	6
5	5	5	5	5	5	5
4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	3	3	3
2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1

Y



Wir sehen in den ausführlichen Tabellen links die beiden ZVariablen $X \neq Y$. Die Graphik rechts zeigt die Verteilungen, hier gilt $\mathbf{P}_X = \mathbf{P}_Y$. Dies zeigt eindrücklich: Das Bildmaß ist ein stark vergröbertes Abbild!

Die letzte Formel von Definition T3C sagt: Der Erwartungswert $\mathbf{E}(X)$ hängt nur von der Verteilung $\mathbf{P}_X$ ab: Aus $\mathbf{P}_X = \mathbf{P}_Y$ folgt $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y)$.

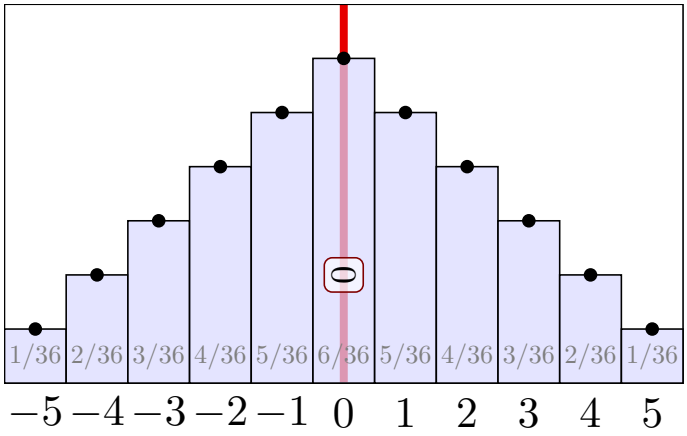
Diese Situation ist typisch für Anwendungen, in denen eine Messung / ein Experiment n-mal unabhängig wiederholt wird: Alle n ZVariablen $X_1, \ldots, X_n$ sind unabhängig und identisch verteilt. Dazu später mehr!

Zufallsvariable, Verteilung und Erwartung

Für $X - Y$ gilt $\mathbf{E}(X - Y) = \mathbf{E}(X) - \mathbf{E}(Y) = 0$ dank Linearität.

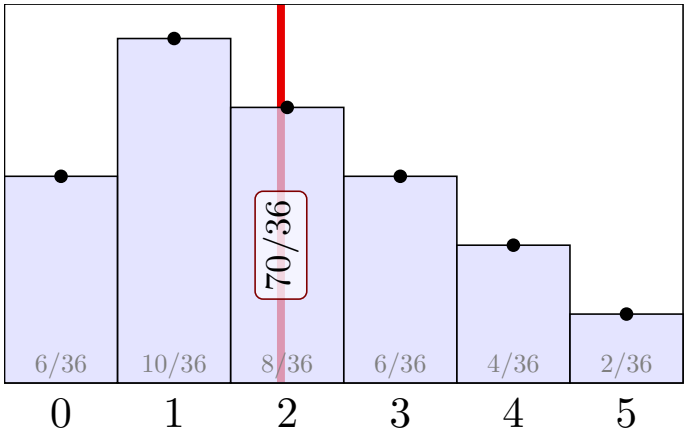
$Z = X - Y$

$\omega_2 \backslash \omega_1$	1	2	3	4	5	6
6	-5	-4	-3	-2	-1	0
5	-4	-3	-2	-1	0	1
4	-3	-2	-1	0	1	2
3	-2	-1	0	1	2	3
2	-1	0	1	2	3	4
1	0	1	2	3	4	5



$Z = |X - Y|$

$\omega_2 \backslash \omega_1$	1	2	3	4	5	6
6	5	4	3	2	1	0
5	4	3	2	1	0	1
4	3	2	1	0	1	2
3	2	1	0	1	2	3
2	1	0	1	2	3	4
1	0	1	2	3	4	5

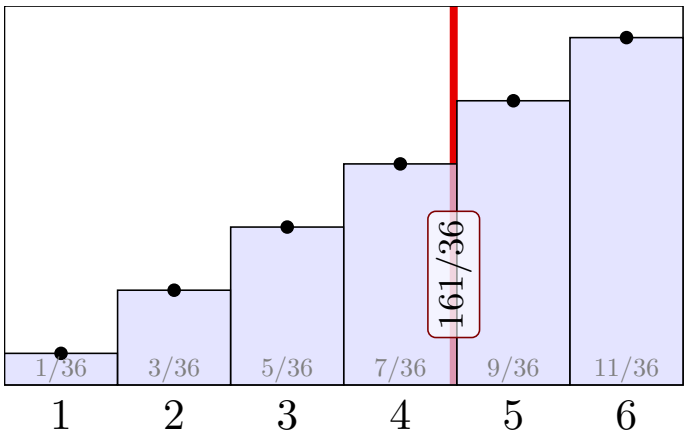


Zufallsvariable, Verteilung und Erwartung

Für die Zufallsvariablen $\max(X, Y)$ und $\min(X, Y)$ finden wir:

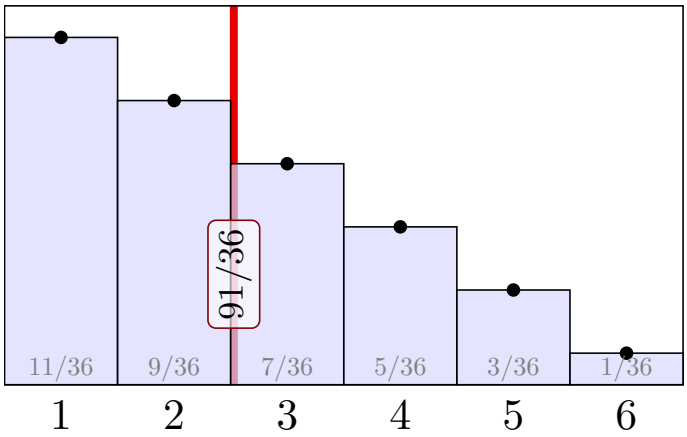
$Z = \max(X, Y)$

$\omega_2 \backslash \omega_1$	1	2	3	4	5	6
6	6	6	6	6	6	6
5	5	5	5	5	5	6
4	4	4	4	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6



$Z = \min(X, Y)$

$\omega_2 \backslash \omega_1$	1	2	3	4	5	6
6	1	2	3	4	5	6
5	1	2	3	4	5	5
4	1	2	3	4	4	4
3	1	2	3	3	3	3
2	1	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1



Erwartung und Varianz von Zufallsvariablen

Definition T3E: Varianz und höhere Momente

Sei $(\Omega, \mathbf{P})$ ein WRaum und $X : \Omega \to \mathbb{R} : \omega \mapsto X(\omega)$ eine Zufallsvariable. Zudem sei $\mathbf{E}(|X|) < \infty$, so dass der Erwartungswert $\mu = \mathbf{E}(X)$ existiert.

Die **Varianz** der ZVariable X ist die mittlere quadratische Abweichung:

$$\sigma^2(X) = \mathbf{V}(X) := \mathbf{E}\big[(X-\mu)^2\big] = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 \geq 0$$

Die **Streuung** oder **Standardabweichung** von X ist die Quadratwurzel

$$\sigma(X) := \sqrt{\mathbf{V}(X)} \geq 0.$$

Das (absolute, zentrierte) **n-te Moment** von X ist gegeben durch

$$\rho^n(X) := \mathbf{E}\big[|X-\mu|^n\big].$$

Anschaulich ist der Erwartungswert μ der Schwerpunkt der Verteilung. Die Varianz $\mathbf{E}[(X-\mu)^2]$ entspricht demnach dem Trägheitsmoment. Varianz und höhere Momente messen, wie weit die Werte um μ streuen: Große Abweichungen wiegen schwerer, quadratisch oder sogar hoch n.

Erwartung und Varianz von Zufallsvariablen

Aufgabe: Berechnen Sie das 1./2./3. Moment für $X = \mathbf{I}_A \sim \mathrm{B}(1,t)$.

Lösung: Hier ist $X : \Omega \to \{0,1\}$ eine Zufallsvariable mit Verteilung

$$\mathbf{P}(X{=}1) = \mathbf{P}(A) = t \quad \text{und} \quad \mathbf{P}(X{=}0) = \mathbf{P}(\Omega \smallsetminus A) = 1-t \;=:\; \bar{t}.$$

Ihre Erwartung und 1./2./3. Momente berechnen wir nach Definition:

$$\begin{aligned}
\mu \;=\; \mathbf{E}(X) &= 0\cdot\mathbf{P}(X{=}0) + 1\cdot\mathbf{P}(X{=}1) &&= t \\
\mathbf{E}\big(|X-\mu|^1\big) &= |0-\mu|^1\cdot\mathbf{P}(X{=}0) + |1-\mu|^1\cdot\mathbf{P}(X{=}1) \\
&= t^1\cdot(1-t) + (1-t)^1\cdot t &&= 2t(1-t) \\
\mathbf{E}\big(|X-\mu|^2\big) &= |0-\mu|^2\cdot\mathbf{P}(X{=}0) + |1-\mu|^2\cdot\mathbf{P}(X{=}1) \\
&= t^2\cdot(1-t) + (1-t)^2\cdot t &&= t(1-t) \\
\mathbf{E}\big(|X-\mu|^3\big) &= |0-\mu|^3\cdot\mathbf{P}(X{=}0) + |1-\mu|^3\cdot\mathbf{P}(X{=}1) \\
&= t^3\cdot(1-t) + (1-t)^3\cdot t &&= t\bar{t}(t^2+\bar{t}^2)
\end{aligned}$$

☺ Zum Vergleich: Auch $\mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = t - t^2$ liefert die Varianz.

Warnende Beispiele: divergente Reihen

Aufgabe: Seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{Z}$ Zufallsvariablen mit Verteilung

$$\mathbf{P}\big[X{=}(-2)^k\big] = \frac{a}{2^k} \quad \text{und} \quad \mathbf{P}\big[Y{=}k\big] = \frac{b}{k^2} \quad \text{für} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

(1) Sind dies tatsächlich WVerteilungen? Für welche a bzw. b?
(2) Existiert der Erwartungswert $\mathbf{E}(X)$ bzw. $\mathbf{E}(Y)$?

Lösung: (1) Ja: Es gilt jeweils $p(k) \geq 0$ und $\sum_{k=1}^{\infty} p(k) = 1$, wobei wir die Konstanten $a = 1$ und $b = 6/\pi^2$ setzen müssen. I324

(2) Nein, die zum Erwartungswert benötigte Reihe konvergiert nicht:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot \mathbf{P}\big[X{=}x_k\big] = \sum_{k=1}^{\infty} (-2)^k \cdot \frac{a}{2^k} = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 \pm \ldots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \mathbf{P}\big[Y{=}k\big] = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{b}{k^2} = \frac{6}{\pi^2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots\right)$$

⚠ Einen Erwartungswert können wir hier also nicht definieren!
Zur Rechnung für die geometrische Verteilung siehe T421.

Warnende Beispiele: die Zeta-Verteilung

Aufgabe: Sei $Z : \Omega \to \mathbb{N}$ eine Zufallsvariable mit der **Zeta–Verteilung**

$$\mathbf{P}\big[Z{=}k\big] = c/k^\alpha \quad \text{für} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

(1) Für welche $\alpha, c \in \mathbb{R}$ ist dies tatsächlich eine WVerteilung?

(2) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert der Erwartungswert $\mu = \mathbf{E}[Z]$?
zudem endliche Varianz $\sigma^2 = \mathbf{V}(Z) = \mathbf{E}(|Z - \mu|^2)$?
und endliches n-tes Moment $\rho^n = \mathbf{E}(|Z - \mu|^n)$?

Lösung: (1) Es muss $c \in \,]0, \infty[$ gelten und $c^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^\alpha =: \zeta(\alpha)$.
Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^\alpha$ konvergiert jedoch nur für $\alpha > 1$. (Warum?)
Für $\alpha \leq 1$ ist dies also keine Wahrscheinlichkeitsverteilung!

(2) Die Reihe $\mathbf{E}[Z] = \sum_{k=1}^{\infty} k/k^\alpha = \zeta(\alpha - 1)$ konvergiert nur für $\alpha > 2$.
Für $1 < \alpha \leq 2$ hingegen existiert der Erwartungswert nicht!

Die Reihe $\mathbf{E}[Z^2] = \sum_{k=1}^{\infty} k^2/k^\alpha = \zeta(\alpha - 2)$ konvergiert nur für $\alpha > 3$.
Für $2 < \alpha \leq 3$ existiert die Erwartung, aber die Varianz ist unendlich!

Allgemein: Die Reihe $\mathbf{E}[Z^n] = \sum_{k=1}^{\infty} k^n/k^\alpha = \zeta(\alpha - n)$ konvergiert nur für $\alpha > n + 1$. Für $1 < \alpha \leq n$ hingegen ist das n-te Moment unendlich!

Erwartung und Varianz von Zufallsvariablen

Aufgabe: (1) Sei $\mu = \mathbf{E}(X)$. Zeigen Sie die nützliche Formel

$$\sigma^2 = \mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\big[(X-\mu)^2\big] \overset{!}{=} \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2.$$

(2) Wie verhalten sich Erwartung und Varianz bei Verschiebung zu $Y = X + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ und Skalierung zu $Z = aX$ mit $a \in \mathbb{R}$?

(3) Was gilt demnach für $Y = X - \mu$ und $Z = (X-\mu)/\sigma$?

Nachrechnen: (1) Wir fordern $\mathbf{E}(|X|) < \infty$ und setzen $\mu = \mathbf{E}(X)$ gemäß Definition T3A. Dank Linearität der Erwartung T3D gilt dann

$$\begin{aligned} 0 \;\le\; \mathbf{E}\big[(X-\mu)^2\big] \quad &= \mathbf{E}\big[X^2 - 2X\mu + \mu^2\big] = \mathbf{E}\big[X^2\big] - 2\mathbf{E}\big[X\big]\mu + \mu^2 \\ = \mathbf{E}(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 &= \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 \end{aligned}$$

☺ Die Varianz $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\big[(X-\mu)^2\big] = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$ können Sie also mit jeder der beiden Formeln ausrechnen. Beide sind nützlich.

⚠ Dies ist eine besondere Eigenschaft des zweiten Moments. Für alle anderen Momente $\mathbf{E}\big[|X-\mu|^n\big]$ mit $n \neq 2$ gilt dies nicht!

Erwartung und Varianz von Zufallsvariablen

(2) Dank der Normierung $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ und der Linearität der Erwartung gilt immer $\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(X+c) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(c) = \mathbf{E}(X) + c$, sowie $\mathbf{E}(Z) = \mathbf{E}(aX) = a\mathbf{E}(X)$. Bei Verschiebung und Skalierung gilt:

$$\begin{aligned} \rho^n(X+c) &= \mathbf{E}\big[|X + c - \mathbf{E}(X+c)|^n\big] &&= \mathbf{E}\big[|X + c - \mathbf{E}(X) - c|^n\big] \\ &= \mathbf{E}\big[|X - \mathbf{E}(X)|^n\big] &&= \rho^n(X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho^n(aX) &= \mathbf{E}\big[|aX - \mathbf{E}(aX)|^n\big] &&= \mathbf{E}\big[|aX - a\mathbf{E}(X)|^n\big] \\ &= |a|^n\mathbf{E}\big[|X - \mathbf{E}(X)|^n\big] &&= |a|^n\rho^n(X) \end{aligned}$$

(3) Speziell für $Y = X - \mu$ gilt somit $\mathbf{E}(Y) = 0$ und $\mathbf{V}(Y) = \mathbf{V}(X) = \sigma^2$. Speziell für $Z = (X-\mu)/\sigma$ gilt somit $\mathbf{E}(Z) = 0$ und $\mathbf{V}(Z) = 1$.

☺ Wir nennen $Y = X - \mu$ die **Zentrierung** und $Z = (X-\mu)/\sigma$ die **Normierung** von X. Dies lässt sich umkehren zu $X = \mu + \sigma Z$.

☺ Für die Zufallsvariable X ist die natürliche Betrachtung die (μ, σ)**–Skala** mit Ursprung in μ und Längeneinheit $\sigma > 0$.

Erwartung und Varianz von Zufallsvariablen

Aufgabe: Bei zweimaligem Würfeln betrachten wir die Ergebnismenge $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}^2$ mit der Gleichverteilung $\mathbf{P}$ und den Zufallsvariablen

$$X, Y \,:\, \Omega \to \mathbb{R} \,: \quad X(\omega_1, \omega_2) = \omega_1, \quad Y(\omega_1, \omega_2) = \omega_2.$$

Berechnen Sie Erwartung und Varianz der Zufallsvariablen X, Y, sowie $X - Y$, $|X - Y|$, schließlich $\max(X, Y)$ und $\min(X, Y)$.

Lösung: Die Verteilungen dieser ZVariablen wurden oben ausgeführt. Wir nutzen direkt die Definition T3C. Für die Zufallsvariable X finden wir:

$$\mathbf{E}(X) = 1 \cdot \tfrac{1}{6} + 2 \cdot \tfrac{1}{6} + 3 \cdot \tfrac{1}{6} + 4 \cdot \tfrac{1}{6} + 5 \cdot \tfrac{1}{6} + 6 \cdot \tfrac{1}{6} = \tfrac{21}{6} = \tfrac{7}{2} = 3.5$$

$$\mathbf{E}(X^2) = 1^2 \cdot \tfrac{1}{6} + 2^2 \cdot \tfrac{1}{6} + 3^2 \cdot \tfrac{1}{6} + 4^2 \cdot \tfrac{1}{6} + 5^2 \cdot \tfrac{1}{6} + 6^2 \cdot \tfrac{1}{6} = \tfrac{91}{6}$$

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \tfrac{91}{6} - \tfrac{49}{4} = \tfrac{182-147}{12} = \tfrac{35}{12}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{35/12} \approx 1.70783$$

Die ZVariable Y ist verschieden von X, aber identisch verteilt: Erwartung, Varianz und Streuung sind demnach dieselben.

Erwartung und Varianz von Zufallsvariablen

☺ Dank Linearität T3D gilt $\mathbf{E}(X - Y) = \mathbf{E}(X) - \mathbf{E}(Y) = 0$. Also:

$$\mathbf{V}(X - Y) = \mathbf{E}\big[(X - Y)^2\big]$$
$$= 0^2 \cdot \tfrac{6}{36} + 1^2 \cdot \tfrac{10}{36} + 2^2 \cdot \tfrac{8}{36} + 3^2 \cdot \tfrac{6}{36} + 4^2 \cdot \tfrac{4}{36} + 5^2 \cdot \tfrac{2}{36} = \tfrac{210}{36} = \tfrac{35}{6}$$
$$\sigma(X - Y) = \sqrt{35/6} \approx 2.41523$$

☺ Das Ergebnis erhalten wir bequemer dank Unabhängigkeit (T3H) der beiden ZVariablen X, Y mittels Additivität der Varianzen (T3I):

$$\mathbf{V}(X - Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(-Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) = \tfrac{35}{12} + \tfrac{35}{12} = \tfrac{35}{6}$$

Für die Zufallsvariable $|X - Y|$ finden wir entsprechend:

$$\mathbf{E}(|X - Y|) = 0 \cdot \tfrac{6}{36} + 1 \cdot \tfrac{10}{36} + 2 \cdot \tfrac{8}{36} + 3 \cdot \tfrac{6}{36} + 4 \cdot \tfrac{4}{36} + 5 \cdot \tfrac{2}{36} = \tfrac{70}{36} = \tfrac{35}{18}$$
$$\mathbf{V}(|X - Y|) = \mathbf{E}\big[|X - Y|^2\big] - \mathbf{E}\big[|X - Y|\big]^2 = \tfrac{35}{6} - (\tfrac{35}{18})^2 = \tfrac{665}{324}$$
$$\sigma(|X - Y|) = \sqrt{665/324} \approx 1.43264$$

Die Rechnungen für $\max(X, Y)$ und $\min(X, Y)$ verlaufen genauso: Wir wenden die Definition T3C direkt auf die Verteilungen an.

Chebychev: Große Abweichungen sind unwahrscheinlich!

Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit Erwartung $\mu = \mathbf{E}(X)$.
Anschaulich gilt: Die Werte schwanken zufällig um μ, und große Abweichungen vom Erwartungswert sind eher unwahrscheinlich.

Wie unwahrscheinlich? Wir fragen also nach $\mathbf{P}(|X - \mu| \geq c)$.
Die Streuung σ misst hierzu die typische Breite der Verteilung um μ.
Die Ungleichungen von Chebychev geben bequeme Abschätzungen!

☺ Wir müssen hierzu über die Verteilung von X nichts weiter wissen als nur ihren Erwartungswert $\mu = \mathbf{E}(X)$ und ihre Varianz $\sigma^2 = \mathbf{V}(X)$!
Dies sind hier (und überall) die beiden wichtigsten Kenngrößen.

☺ Selbst wenn Sie mehr wissen oder mehr herausfinden könnten, die Chebychev–Abschätzungen sind allgemein, unschlagbar einfach und oft sehr nützlich und handlich als erste Überschlagsrechnung.

⚠ Anschließend werden wir den zentralen Grenzwertsatz W1D kennen und nutzen lernen. Wenn der ZGS anwendbar ist, dann ermöglicht er präzisere Schätzungen. In diesen Fällen ist Chebychev zwar einfacher, aber auch viel gröber und kann in Genauigkeit meist nicht konkurrieren.

Chebychev: Große Abweichungen sind unwahrscheinlich!

Satz T3F: die Ungleichungen von Chebychev, 1867

Sei $X : (\Omega, \mathbf{P}) \to \mathbb{R} : \omega \mapsto X(\omega)$ eine ZVariable mit Erwartung $\mu = \mathbf{E}(X)$ und Varianz $\sigma^2 = \mathbf{E}\big[(X - \mu)^2\big]$ bzw. n-tem Moment $\rho^n = \mathbf{E}\big[|X - \mu|^n\big]$.
Dann gelten universelle „worst case“ Abschätzungen für alle $c, k, h > 0$:

(1)	$\mathbf{P}\Big[\ \lvert X - \mu\rvert \geq c\ \Big]$	$\leq$	$\dfrac{\sigma^2}{c^2}$ bzw. $\dfrac{\rho^n}{c^n}$
(2)	$\mathbf{P}\Big[\lvert X - \mu\rvert \geq k\sigma\Big]$	$\leq$	$\dfrac{1}{k^2}$
(3)	$\mathbf{P}\Big[\ X \geq \mu + k\sigma\ \Big]$	$\leq$	$\dfrac{1}{1 + k^2}$
(4)	$\mathbf{P}\Big[\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma\Big]$	$\geq$	$1 - \dfrac{1}{k^2}$
(5)	$\mathbf{P}\Big[\mu - h\sigma < X < \mu + k\sigma\Big]$	$\geq$	$\dfrac{4(hk - 1)}{(h + k)^2}$

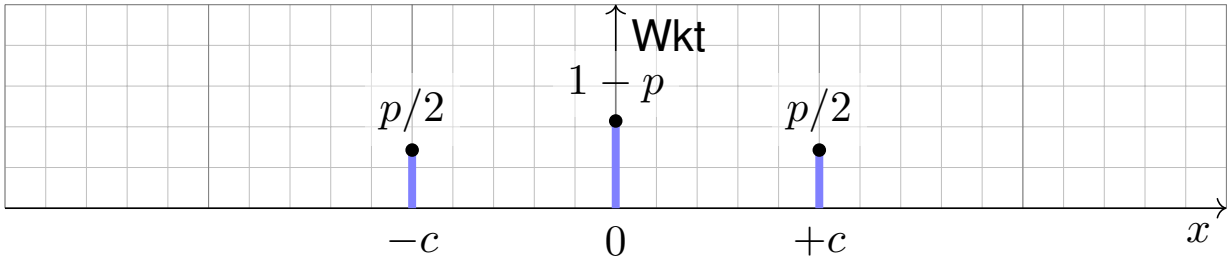
Die Wkt großer Abweichungen fällt mindestens quadratisch, mit $1/k^2$.
Kennen Sie nur μ und σ bzw. ρ, so sind diese Ungleichungen optimal.

Beispiel zur beidseitigen Chebychev–Abschätzung

Die beidseitige Chebychev–Ungleichung (1,2) besagt:

$$\mathbf{P}\big[|X-\mu| \geq c\big] \quad \leq \quad \frac{\sigma^2}{c^2}$$

Aufgabe: Überprüfen Sie diese für folgende Verteilung. Ist sie scharf?



Lösung: Es gilt $\mu = 0$ und $\sigma^2 = c^2 p$. Die Ungleichung ist scharf:

$$p = \mathbf{P}\big[|X-\mu| \geq c\big] \quad \leq \quad \frac{\sigma^2}{c^2} = p$$

☺ Die Abschätzung ist meist grob, dafür aber universell einsetzbar. Unser Beispiel zeigt, dass sie sich allgemein nicht verbessern lässt.

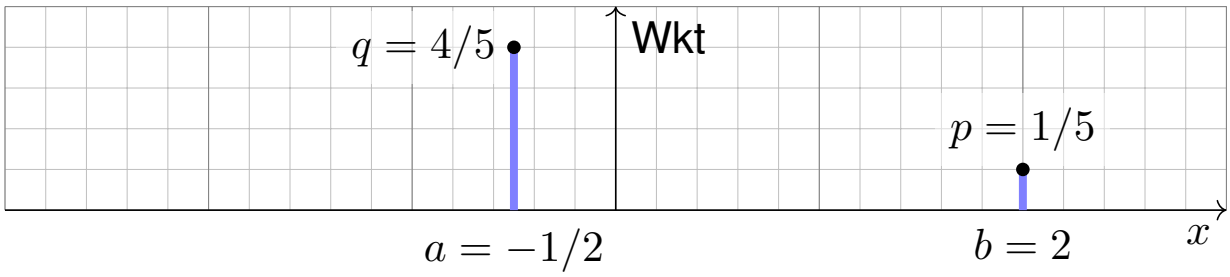
Beispiel: Speziell für $p = 1$ finden wir hier $\mathbf{P}\big[|X-\mu| \geq 1\sigma\big] = 100\%$.

Beispiel zur einseitigen Chebychev–Abschätzung

Die einseitige Chebychev–Ungleichung (3) für $a < \mu < b$ besagt:

$$\mathbf{P}\big[X \leq a\big] \;\leq\; \frac{1}{1+(\frac{a-\mu}{\sigma})^2} \quad \text{und} \quad \mathbf{P}\big[X \geq b\big] \;\leq\; \frac{1}{1+(\frac{b-\mu}{\sigma})^2}$$

Aufgabe: Überprüfen Sie beide für folgende Verteilung. Sind sie scharf?



Lösung: Hier gilt $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$. Die Ungleichungen sind scharf:

$$q = \mathbf{P}\big[X \leq a\big] \;\leq\; \frac{1}{1+a^2} = \frac{4}{5} \quad \text{bzw.} \quad p = \mathbf{P}\big[X \geq b\big] \;\leq\; \frac{1}{1+b^2} = \frac{1}{5}.$$

☺ Die Abschätzung ist meist grob, dafür aber universell einsetzbar. Unser Beispiel zeigt, dass sie sich allgemein nicht verbessern lässt.

Übung: Erfinden und untersuchen Sie weitere einfache Beispiele.

Chebychev–Abschätzungen auf der (μ, σ)–Skala

Aufgabe: Was sagt Chebychev für folgende typische Abschätzungen?

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\big[|X-\mu| \ge 1\sigma\big] &\le {}^1\!/_1 = 100\% \\
\mathbf{P}\big[|X-\mu| \ge 2\sigma\big] &\le {}^1\!/_4 = 25\% \\
\mathbf{P}\big[|X-\mu| \ge 3\sigma\big] &\le {}^1\!/_9 \approx 11\% \\
\mathbf{P}\big[|X-\mu| \ge 4\sigma\big] &\le {}^1\!/_{16} \approx 6\%
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\big[X \ge \mu + 1\sigma\big] &\le {}^1\!/_2 = 50\% \\
\mathbf{P}\big[X \ge \mu + 2\sigma\big] &\le {}^1\!/_5 = 20\% \\
\mathbf{P}\big[X \ge \mu + 3\sigma\big] &\le {}^1\!/_{10} = 10\% \\
\mathbf{P}\big[X \ge \mu + 4\sigma\big] &\le {}^1\!/_{17} \approx 6\%
\end{aligned}$$

☺ Große Abweichungen vom Erwartungswert sind unwahrscheinlich.
Chebychevs Abschätzungen sind grob, dafür aber universell einsetzbar.

Die erste Abschätzung ist trivialerweise immer richtig, aber nie hilfreich.
Mindestens $3/4$ der Wkt liegt in der 2σ–Umgebung $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$.
Mindestens $8/9$ der Wkt liegt in der 3σ–Umgebung $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$.

☺ Für Normalverteilungen gilt die genauere 68–95–99–Regel. V120

Beweis der beidseitigen Chebychev–Abschätzung

Nachrechnen: Die Zufallsvariable X zentrieren wir zu $Z := X - \mu$.
Ihr n-tes Moment ist $\rho^n = \mathbf{E}\big[|Z|^n\big]$; für $n = 2$ ist dies die Varianz σ^2.
Wir vergleichen Z mit der zweiwertigen Zufallsvariablen $Y = c\,\mathbf{I}_{\{|Z| \ge c\}}$,

$$Y : \Omega \to \mathbb{R} : \omega \mapsto Y(\omega) = \begin{cases} c & \text{falls } |Z(\omega)| \ge c, \\ 0 & \text{falls } |Z(\omega)| < c. \end{cases}$$

Es gilt $|Z| \ge Y \ge 0$. Dank Monotonie der Erwartung folgt

$$\rho^n = \mathbf{E}\big[|Z|^n\big] \ge \mathbf{E}\big[Y^n\big] = c^n \cdot \mathbf{P}\big[|X-\mu| \ge c\big].$$

☺ Hieraus folgt (1). Speziell für $n = 2$ und $c = k\sigma$ erhalten wir (2).
Für (3) zeigen wir als Hilfsmittel zunächst die Markov–Ungleichung:

Lemma T3G: Markov–Ungleichung

Sei $Y : (\Omega, \mathbf{P}) \to [0, \infty]$ eine nicht-negative Zufallsvariable.
Für alle $b > 0$ gilt dann die Abschätzung $\mathbf{P}[Y \ge b] \le \mathbf{E}[Y]/b$.

Beweis: Es gilt $Y \ge b\,\mathbf{I}_{\{Y \ge b\}}$, also folgt $\mathbf{E}[Y] \ge b \cdot \mathbf{P}[Y \ge b]$.

☺ Hieraus erhalten wir, nach Rechnung, die Ungleichungen (3–5).

Beweis der einseitigen Chebychev–Abschätzung

Aufgabe: Beweisen Sie mit Lemma T3G die Ungleichungen (3) und (5).

Lösung: Wir beweisen die einseitige Chebychev–Ungleichung (3).
Wie zuvor zentrieren wir die Zufallsvariable X gemäß $Z := X - \mu$.
Für alle $t, b \in \mathbb{R}$ mit $t + b > 0$ gelten folgende Ungleichungen:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\big[Z \geq b\big] &= \mathbf{P}\big[Z + t \geq b + t\big] \\ &\leq \mathbf{P}\big[(Z+t)^2 \geq (b+t)^2\big] \overset{\text{Markov}}{\underset{\text{T3G}}{\leq}} \frac{\mathbf{E}\big[(Z+t)^2\big]}{(b+t)^2} = \frac{\sigma^2 + t^2}{(b+t)^2}\end{aligned}$$

Die erste Ungleichung ist klar, die zweite ist die Markov–Ungleichung.
Die letzte Gleichung folgt dank Zentrierung $\mathbf{E}[Z] = 0$, denn damit gilt

$$\mathbf{E}\big[(Z+t)^2\big] = \mathbf{E}\big[Z^2\big] + 2\mathbf{E}\big[Z\big]t + t^2 = \sigma^2 + t^2.$$

Für $b = k\sigma$ und $t = \sigma/k$ erhalten wir die gewünschte Ungleichung (3):

$$\mathbf{P}\big[X - \mu \geq k\sigma\big] = \frac{\sigma^2 + t^2}{(k\sigma + t)^2} = \frac{\sigma^2 + \sigma^2/k^2}{(k\sigma + \sigma/k)^2} = \frac{k^2+1}{(k^2+1)^2} = \frac{1}{k^2+1}$$

☺ Die Rechnung ist etwas trickreich, aber jeder Schritt ist elementar.

Beweis der asymmetrischen Abschätzung

Ungleichung (4) folgt direkt aus (2); sie betont hier die Analogie zur asymmetrischen Ungleichung (5). Für $a < \mu < b$ ist diese äquivalent zu:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\big[a < X < b\big] &\geq \frac{4\big[(b-\mu)(\mu-a) - \sigma^2\big]}{(b-a)^2}, \\ \mathbf{P}\big[|X - m| \geq c\big] &\leq \frac{\sigma^2 + (m-\mu)^2}{c^2}.\end{aligned}$$

Zur Umformulierung setzen wir $m = (a+b)/2$ und $c = (b-a)/2$.
Für $m = \mu$ ergibt sich die symmetrische Chebychev–Ungleichung.
Die letzte Ungleichung folgt erneut dank Markov–Ungleichung T3G:

$$\mathbf{P}\big[|X - m| \geq c\big] = \mathbf{P}\big[|X-m|^2 \geq c^2\big] \leq \frac{\mathbf{E}\big[|X-m|^2\big]}{c^2} = \frac{\sigma^2 + (m-\mu)^2}{c^2}$$

Auch diese Abschätzung lässt sich nicht verbessern. Obiges Beispiel:
Zu $0 < t < 1$ sei $b = \sqrt{(1-t)/t}$ und $a = -1/b = -\sqrt{t/(1-t)}$ sowie

$$\mathbf{P}(X{=}a) = 1 - t \quad \text{und} \quad \mathbf{P}(X{=}b) = t.$$

Es gilt $\mathbf{E}(X) = a(1-t) + bt = 0$ und $\mathbf{V}(X) = a^2(1-t) + b^2 t = 1$.
In diesem Beispiel sind die obigen Ungleichungen scharf.

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Zwei Zufallsvariablen X_1, X_2 sind unabhängig, wenn das Ergebnis von X_1 nicht die Wkten von X_2 beeinflusst. Dies präzisieren wir wie folgt:

Definition T3H: Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Eine Familie $X = (X_1, \dots, X_n)$ von Zufallsvariablen $X_k : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt **(stochastisch) unabhängig**, wenn für alle Intervalle $I_1, \dots, I_n \subseteq \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbf{P}(\ X_1 \in I_1,\ \dots,\ X_n \in I_n\ ) = \mathbf{P}(X_1 \in I_1) \cdots \mathbf{P}(X_n \in I_n).$$

Anders gesagt: Im WRaum $(\Omega, \mathbf{P})$ ist die Familie $(A_1, \dots, A_n)$ der Ereignisse $A_k = X_k^{-1}(I_k) = \{\, \omega \in \Omega \mid X_k(\omega) \in I_k \,\}$ unabhängig (T2C).

Das bedeutet: Die gemeinsame Verteilung von $(X_1, \dots, X_n)$ in $\mathbb{R}^n$ ist die Produktverteilung $\mathbf{P}_{(X_1,\dots,X_n)} = \mathbf{P}_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{P}_{X_n}$, siehe U1A und W1A.

Diese Formulierungen gelten ebenso für kontinuierliche Verteilungen, zum Beispiel auf einem analogen Messgerät abgelesene Werte.

Für **diskrete Zufallsvariablen** ist Unabhängigkeit äquivalent zu

$$\mathbf{P}(\ X_1 = a_1,\ \dots,\ X_n = a_n\ ) = \mathbf{P}(X_1 = a_1) \cdots \mathbf{P}(X_n = a_n).$$

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Aufgabe: Bei zweimaligem Würfeln betrachten wir die Ergebnismenge $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^2$ mit der Gleichverteilung $\mathbf{P}$ und den Zufallsvariablen

$$X, Y\ :\ \Omega \to \mathbb{R}\ :\quad X(\omega_1, \omega_2) = \omega_1, \quad Y(\omega_1, \omega_2) = \omega_2.$$

(1) Sind X und Y stochastisch unabhängig?
(2) Sind $X + Y$ und $X - Y$ stochastisch unabhängig?
(3) Sind $\min(X, Y)$ und $\max(X, Y)$ stochastisch unabhängig?

Lösung: (1) Ja, denn $\mathbf{P}(\ X{=}a,\ Y{=}b\ ) = \mathbf{P}(X{=}a) \cdot \mathbf{P}(Y{=}b)$.

(2) Nein, die Multiplikativität gilt hier nicht:
Zum Beispiel gilt $\mathbf{P}(\ X{+}Y{=}3,\ X{-}Y{=}0\ ) = 0$,
aber $\mathbf{P}(\ X{+}Y{=}3\ ) = 2/36$ und $\mathbf{P}(\ X{-}Y{=}0\ ) = 6/36$.

(3) Nein, die Multiplikativität gilt hier nicht:
Zum Beispiel gilt $\mathbf{P}(\ \min(X,Y){=}1,\ \max(X,Y){=}6\ ) = 2/36$,
aber $\mathbf{P}(\ \min(X,Y){=}1\ ) = 7/36$ und $\mathbf{P}(\ \max(X,Y){=}6\ ) = 7/36$.

⚠ Zum Nachweis der Unabhängigkeit muss man *alle* Produkte prüfen.
Zum Nachweis der Abhängigkeit hingegen genügt *ein* Gegenbeispiel.

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Aufgabe: Seien $X_1, \ldots, X_n : (\Omega, \mathbf{P}) \to \mathbb{R}$ diskrete Zufallsvariablen; ihre Zusammenfassung $X = (X_1, \ldots, X_n) : (\Omega, \mathbf{P}) \to \mathbb{R}^n$ ist ebenso diskret.

Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden Unabhängigskeitsbedingungen:

$$(1) \qquad \mathbf{P}(\, X_1 \in I_1,\ \ldots,\ X_n \in I_n \,) = \mathbf{P}(X_1 \in I_1) \cdots \mathbf{P}(X_n \in I_n)$$

für alle Intervalle $I_1, \ldots, I_n \subseteq \mathbb{R}$.

$$(2) \qquad \mathbf{P}(\, X_1 = a_1,\ \ldots,\ X_n = a_n \,) = \mathbf{P}(X_1 = a_1) \cdots \mathbf{P}(X_n = a_n)$$

für jeden Punkt $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

☺ Bedingung (1) ist vielseitiger und bequemer anzuwenden.
Zudem ist dies die richtige Definition auch für kontinuierlich verteilte Zufallsvariablen. Daher erheben wir Eigenschaft (1) zur Definition T3H.

☺ Bedingung (2) nützt nur für diskrete Zufallsvariablen, ist dann aber leichter zu prüfen. Genau hierfür nutzen wir die Äquivalenz „(1) $\Leftrightarrow$ (2)“. Erste Beispiele kennen wir aus der vorigen Aufgabe.

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Lösung: Die Implikation „(1) $\Rightarrow$ (2)“ ist eine Einschränkung, also trivial: Hierzu genügt es, die einpunktigen Intervalle $I_k = \{a_k\}$ zu betrachten.

Wir zeigen die Umkehrung „(2) $\Rightarrow$ (1)“: Hierzu sei $I = I_1 \times \cdots \times I_n \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und darin $a = (a_1, \ldots, a_n) \in I$ ein Punkt. Wir finden:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\, X_1 \in I_1,\ \ldots,\ X_n \in I_n \,) \quad &= \quad \mathbf{P}(X \in I) \\
\underset{\text{diskret}}{\overset{X}{=}} \quad & \sum_{a \in I} \mathbf{P}(X = a) \\
\underset{\text{Produkt}}{\overset{I}{=}} \quad & \sum_{a_1 \in I_1} \cdots \sum_{a_n \in I_n} \mathbf{P}(\, X_1 = a_1,\ \ldots,\ X_n = a_n \,) \\
\underset{\text{punktweise}}{\overset{(2)}{=}} \quad & \sum_{a_1 \in I_1} \cdots \sum_{a_n \in I_n} \mathbf{P}(X_1 = a_1) \cdots \mathbf{P}(X_n = a_1) \\
\underset{\text{distributiv}}{\overset{\text{Summe}}{=}} \quad & \Big[\sum_{a_1 \in I_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1) \Big] \cdots \Big[\sum_{a_n \in I_n} \mathbf{P}(X_n = a_1) \Big] \\
\underset{\text{diskret}}{\overset{X_i}{=}} \quad & \mathbf{P}(X_1 \in I_1) \cdots \mathbf{P}(X_n \in I_n)
\end{aligned}$$

Unabhängigkeit von Indikatorfunktionen

Aufgabe: (1) Wann sind zu zwei Ereignissen $A, B \subseteq \Omega$ die Indikatorfunktionen $X = \mathbf{I}_A$ und $Y = \mathbf{I}_B$ unabhängig?

(2) Wann gilt Multiplikativität $\mathbf{E}(\mathbf{I}_A \cdot \mathbf{I}_B) = \mathbf{E}(\mathbf{I}_A) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{I}_B)$?

Lösung: (1) Sei $A \subseteq \Omega$ ein Ereignis und $\mathbf{I}_A$ seine Indikatorfunktion,

$$\mathbf{I}_A \,:\, \Omega \to \mathbb{R} \,:\, \omega \mapsto \mathbf{I}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega \in A, \\ 0 & \text{falls } \omega \notin A. \end{cases}$$

Unabhängigkeit von $\mathbf{I}_A$ und $\mathbf{I}_B$ bedeutet vier äquivalente Bedingungen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\mathbf{I}_A{=}1, \mathbf{I}_B{=}1) = \mathbf{P}(A \cap B) &\overset{!}{=} \mathbf{P}(\mathbf{I}_A{=}1)\,\mathbf{P}(\mathbf{I}_B{=}1) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B) \\
\mathbf{P}(\mathbf{I}_A{=}1, \mathbf{I}_B{=}0) = \mathbf{P}(A \cap \overline{B}) &\overset{!}{=} \mathbf{P}(\mathbf{I}_A{=}1)\,\mathbf{P}(\mathbf{I}_B{=}0) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(\overline{B}) \\
\mathbf{P}(\mathbf{I}_A{=}0, \mathbf{I}_B{=}1) = \mathbf{P}(\overline{A} \cap B) &\overset{!}{=} \mathbf{P}(\mathbf{I}_A{=}0)\,\mathbf{P}(\mathbf{I}_B{=}1) = \mathbf{P}(\overline{A})\,\mathbf{P}(B) \\
\mathbf{P}(\mathbf{I}_A{=}0, \mathbf{I}_B{=}0) = \mathbf{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) &\overset{!}{=} \mathbf{P}(\mathbf{I}_A{=}0)\,\mathbf{P}(\mathbf{I}_B{=}0) = \mathbf{P}(\overline{A})\,\mathbf{P}(\overline{B})
\end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zur Unabhängigkeit der Ereignisse A und B! (T2C)
(Diese vier Gleichungen sind untereinander äquivalent, siehe T2D.)

Unabhängigkeit von Indikatorfunktionen

(2) Die Indikatorfunktion $\mathbf{I}_A$ nimmt nur die beiden Werte 0 und 1 an:

$$\mathbf{P}(\mathbf{I}_A{=}1) = \mathbf{P}(A) \quad \text{und} \quad \mathbf{P}(\mathbf{I}_A{=}0) = 1 - \mathbf{P}(A)$$

Demnach gilt $\mathbf{E}(\mathbf{I}_A) = \mathbf{P}(A)$. Für das Produkt von $\mathbf{I}_A$ und $\mathbf{I}_B$ gilt

$$\mathbf{I}_A \cdot \mathbf{I}_B = \mathbf{I}_{A \cap B}\,.$$

Wir vergleichen damit schließlich

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{I}_A \cdot \mathbf{I}_B) = \mathbf{E}(\mathbf{I}_{A \cap B}) &= \mathbf{P}(A \cap B), \\
\mathbf{E}(\mathbf{I}_A) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{I}_B) &= \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B).
\end{aligned}$$

☺ Die Gleichheit links ist demnach äquivalent zur Gleichheit rechts:
Die Zufallsvariablen $\mathbf{I}_A, \mathbf{I}_B : \Omega \to \mathbb{R}$ sind genau dann unabhängig (T3H), wenn die betrachteten Ereignisse A, B in $(\Omega, \mathbf{P})$ unabhängig sind (T2C). Genau in diesem Falle ist ihre Erwartung multiplikativ.

☺ Für Indikatorfunktionen ist die Rechnung besonders einfach.
Allgemein ist die Sachlage noch interessanter, siehe Satz T3I.

Erwartung und Varianz bei Summen und Produkten

Aufgabe: (0) Ist die Erwartung additiv, $\mathbf{E}(X+Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y)$?
(1) Ist die Erwartung multiplikativ, $\mathbf{E}(X \cdot Y) = \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y)$?
(2) Ist die Varianz additiv, $\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$?

Lösung: (0) Ja! Die Erwartung $\mathbf{E} : L^1(\Omega, \mathbf{P}) \to \mathbb{R}$ ist linear (Satz T3D).
(1) Nein! Gegenbeispiel $X : \Omega \to \{\pm 1\}$ mit $\mathbf{P}(X = \pm 1) = 1/2$: Hier gilt

$$\mathbf{E}(X \cdot X) = \mathbf{E}(1) = 1 \quad \neq \quad 0 = \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(X).$$

⚠ Die Erwartung ist immer additiv, aber i.A. nicht multiplikativ!
Alternativ: $\mathbf{E}(\mathbf{I}_A \cdot \mathbf{I}_B) = \mathbf{E}(\mathbf{I}_A) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{I}_B)$ gilt nur für unabhängige A, B.
Allgemein: Die Varianz ist $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 \geq 0$ und i.A. > 0.

(2) Wir setzen die Definition ein und vereinfachen geduldig:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(X+Y) &\overset{\text{Def}}{=} \mathbf{E}\big[(X+Y-\mathbf{E}(X+Y))^2\big] \overset{\text{Lin}}{=} \mathbf{E}\big[(X-\mathbf{E}(X)+Y-\mathbf{E}(Y))^2\big] \\
&\overset{\text{Bin}}{=} \mathbf{E}\big[X^2-\mathbf{E}(X)^2\big] + \mathbf{E}\big[Y^2-\mathbf{E}(Y)^2\big] + 2\big[\underbrace{\mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)}_{=:\,\mathbf{Cov}(X,Y)}\big] \\
&\overset{\text{Def}}{=} \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\mathbf{Cov}(X,Y)
\end{aligned}$$

⚠ Die Varianzen addieren sich gdw die Kovarianz verschwindet.
☺ Dies gilt glücklicherweise bei **unabhängigen** Zufallsvariablen!

Erwartung und Varianz unabhängiger ZVariablen

Satz T3I: Fubini für unabhängige Zufallsvariablen

(1) Erwartungen unabhängiger Zufallsvariablen X, Y multiplizieren sich:

$$\mathbf{E}(X \cdot Y) = \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y)$$

Ihre Kovarianz $\mathbf{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$ verschwindet somit.

(2) Varianzen unabhängiger Zufallsvariablen X, Y addieren sich:

$$\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\mathbf{Cov}(X,Y)$$

Aufgabe: Rechnen Sie dies nach! **Lösung:** (1) Dank Unabhängigkeit:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\big(X \cdot Y\big) &\overset{\text{Def}}{=} \sum_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} ab\,\mathbf{P}(X{=}a, Y{=}b) \\
&\overset{\text{Fub}}{\underset{\text{Un}}{=}} \sum_{a\in\mathbb{R}} \sum_{b\in\mathbb{R}} ab\,\mathbf{P}(X{=}a)\mathbf{P}(Y{=}b) \\
&\overset{\text{Lin}}{\underset{\text{Dist}}{=}} \Big[\sum_{a\in\mathbb{R}} a\,\mathbf{P}(X{=}a)\Big] \cdot \Big[\sum_{b\in\mathbb{R}} b\,\mathbf{P}(Y{=}b)\Big] \overset{\text{Def}}{=} \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y)
\end{aligned}$$

Erwartung und Varianz unabhängiger ZVariablen

Aufgabe: (1) Einzelner Münzwurf: Berechnen Sie Erwartung und Varianz eines 0–1–Experiments $X_k : \Omega \to \{0,1\}$ mit $\mathbf{P}(X_k{=}1) = t_k$.

(2) Mehrere Münzwürfe: Bestimmen Sie Erwartung und Varianz der Trefferzahl $S = X_1 + \cdots + X_n$. Welche Zusatzinformation brauchen Sie?

Lösung: (1) Wir erhalten $\mathbf{E}(X_k) = t_k$ und $\mathbf{V}(X_k) = t_k(1-t_k)$.

(2) Dank **Linearität** der Erwartung (T3D) gilt hier Additivität:

$$\mathbf{E}(S) = \mathbf{E}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathbf{E}(X_1) + \cdots + \mathbf{E}(X_n) = t_1 + \cdots + t_n$$

Sind die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ zudem **unabhängig**, so addieren sich bei der Summe $S = X_1 + \cdots + X_n$ auch ihre Varianzen (T3I):

$$\mathbf{V}(S) = \mathbf{V}(X_1) + \cdots + \mathbf{V}(X_n) = t_1(1-t_1) + \cdots + t_n(1-t_n)$$

☺ Speziell für $t_1 = \cdots = t_n = t$ gilt $\mathbf{E}(S) = nt$ und $\mathbf{V}(S) = nt(1-t)$. Das ist der wichtige Spezialfall von unabhängigen, identisch verteilten 0–1–Experimenten (U3B): Die Summe ist binomialverteilt, $S \sim \mathrm{B}(n,t)$.

Beispiel: Punkteverteilung in einer Klausur? Gilt hier Unabhängigkeit?

Erwartung und Varianz unabhängiger ZVariablen

☺ Unabhängig wiederholte Experimente sind eine zentrale Methode der Natur- und Ingenieurwissenschaften. Das stochastische Modell (zur Planung) und die statistische Auswertung (nach Durchführung) gehören zum allgegenwärtigen Handwerkszeug seriöser Arbeit.

(1) Der Münzwurf ist das einfachste Zufallsexperiment: Es gibt nur zwei Ergebnisse: Kopf (0) oder Zahl (1). Wir nehmen hier nicht zwangsweise an, dass die Münze fair ist, also $\mathbf{P}(X_k{=}0) = \mathbf{P}(X_k{=}1) = 1/2$ erfüllt. Die Wkt $\mathbf{P}(X_k{=}1) = t_k \in [0,1]$ ist in unserem Modell frei wählbar.

(2) Wenn wir n Münzen werfen, so addieren sich die Erwartungen und dank Unabhängigkeit auch die Varianzen. (Für Letzteres genügt bereits die Unkorreliertheit, das ist i.A. schwächer.) Die Summe unabhängiger zweiwertiger Zufallsvariablen ist ein weiteres einfaches Modell.

(3) Die n-fache Wiederholung eines Münzwurfs ist ein wichtiges Modell: Zur Vereinfachung nehmen wir an, das Experiment wird unabhängig wiederholt und alle Wkten sind gleich. Dies führt zur Binomialverteilung U3B und zum lokalen Grenzwertsatz V3A als wichtiger Näherung.

Anwendungsbeispiel: Überbuchung

Aufgabe: Für eine Klausur sind $n = 320$ Teilnehmer:innen angemeldet. Jede:r davon tritt nur mit Wahrscheinlichkeit $t = 0.8$ tatsächlich an. Wir nehmen stochastische Unabhängigkeit an, keine Grippewelle o.ä. Mit welcher Wkt reichen 300 Plätze? (Chebychev, später LGS, exakt)

Lösung: Wir wissen $\mu = nt = 256, \quad \sigma^2 = nt(1-t) = 51.2, \quad \sigma \approx 7.2.$
Chebychev: Die Wkt für mehr als 300 Teilnehmer ist beschränkt durch

$$\mathbf{P}\big(T \geq 301\big) = \mathbf{P}\big(T - 256 \geq 45\big) \leq \tfrac{1}{1+k^2} \lessapprox 2.5\% \quad \text{mit} \quad k = \tfrac{45}{7.2} \approx 6.22.$$

Die Schätzung 3% ist deutlich zu hoch, dafür aber bequem zu berechnen. Wir wissen über T noch viel mehr als nur μ und σ: Wir kennen die gesamte Verteilung! Die Binomialverteilung $\mathrm{B}(n,t)$ erlaubt dank lokalem Grenzwertsatz V3A eine wesentlich genauere Abschätzung:

LGS V3A: Normalverteilung als Näherung, Tabelle: $\int_k^\infty \varphi(t)\,\mathrm{d}t < 10^{-5}$,
Approximationsfehler: $|\delta| < 1/(6\sigma) < 0.023$, insgesamt Wkt $< 2.3\%$.

Exakt U3B: Die Teilnehmerzahl T ist binomialverteilt, genauer $T \sim \mathrm{B}(n,t)$.
Durch Aufsummieren (mit Computerhilfe) erhalten wir $\mathbf{P}\big(T \geq 301\big) \lessapprox 0.9 \cdot 10^{-12}$.

Es gibt $2^{320} > 2 \cdot 10^{96}$ mögliche Ausgänge dieses Experiments. Das kann offensichtlich niemand naiv aufsummieren, selbst der schnellste Computer nicht. Die exakte Rechnung organisieren wir daher wesentlich effizienter mit den Abzählmethoden des folgenden Kapitels.

Anwendungsbeispiel: Überbuchung

Aufgabe: Angenommen, im obigen Beispiel gilt $n = 320$ und $t = 0.9$. Mit welcher Wkt reichen 300 Plätze? (Chebychev, LGS, exakt)

Lösung: Wir wissen $\mu = nt = 288, \quad \sigma^2 = nt(1-t) = 28.8, \quad \sigma \approx 5.4.$
Chebychev: Die Wkt für mehr als 300 Teilnehmer ist beschränkt durch

$$\mathbf{P}\big(T \geq 301\big) = \mathbf{P}\big(T - 288 \geq 13\big) \leq \tfrac{1}{1+k^2} \lessapprox 15\% \quad \text{mit} \quad k = \tfrac{13}{5.4} \approx 2.33.$$

Diese Größenordnung ist alarmierend: Wir sollten einen größeren Hörsaal buchen — oder genauer hinschauen! Die Binomialverteilung erlaubt eine wesentlich genauere Abschätzung:

LGS V3A: Normalverteilung als Näherung, Tabelle: $\int_k^\infty \varphi(t)\,\mathrm{d}t < 0.01$,
Approximationsfehler: $|\delta| \leq 1/(6\sigma) < 0.04$, insgesamt Wkt $< 5\%$.

Exakt U3B: Die Teilnehmerzahl T ist binomialverteilt, genauer $T \sim \mathrm{B}(n,t)$.
Durch Aufsummieren (mit Computerhilfe) erhalten wir $\mathbf{P}\big(T \geq 301\big) \lessapprox 0.00684$.

Die Ungleichung von Chebychev ist vor allem in Situationen nützlich, in denen wir über die Verteilung wenig wissen (z.B. nur μ und σ), aber die Wahrscheinlichkeit großer Abweichungen abschätzen wollen. In obigen Beispielen kennen wir die Verteilung sogar genau. Der lokale Grenzwertsatz V3A und die Tabelle der Normalverteilung liefern präzisere Abschätzungen.

Solche Risikoabschätzungen und Optimierungen haben enorme wirtschaftliche Bedeutung. Genau dieses Szenario analysieren Fluggesellschaften bei der Überbuchung ihrer Flüge.

Was gewinnen wir durch wiederholte Messungen?

Anwendung: Jede Messung X ist zufälligen Störungen unterworfen, Messwerte schwanken um den Erwartungswert μ mit Streuung $\sigma > 0$.

Beispiel: Sie führen $n = 400$ unabhängige Messungen $X_1, X_2, \ldots, X_{400}$ durch und erhalten Messwerte $x_1, x_2, \ldots, x_{400}$. Sie schätzen μ durch den

Stichprobenmittelwert $\hat{x} := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \underset{\text{(Beispiel)}}{\overset{\text{Messung}}{=}} 57.5$

Die Streuung von X schätzen Sie (dank der Stichprobe) auf $\sigma \lessapprox 10$. Wie genau ist $\hat{x}$? Wo liegt vermutlich der wahre Erwartungswert μ?

$$I_1 = [57, 58], \quad I_2 = [56.5, 58.5], \quad I_3 = [56, 59], \quad I_k = [57.5 \pm k \cdot 0.5]$$

Aufgabe: Welches Intervall I_k überdeckt den Erwartungswert μ mit Sicherheit $\alpha_k \geq 95\%$ bzw. $\alpha_k \geq 99\%$? (Später genauer mit ZGS, W201)

Der Erwartungswert μ ist eine Konstante. Leider ist sie uns unbekannt. Das Ziel der Messung ist, diese Konstante μ möglichst genau zu bestimmen. Als Schätzung für den Wert μ dient uns $\hat{x}$. Wie die Messwerte $x_1, \ldots, x_n$ ist auch $\hat{x}$ zufälligen Schwankungen unterworfen. Wenn Sie eine neue unabhängige Stichprobe durchführen, erhalten Sie einen neuen Mittelwert $\hat{x}$, und mit ihm verschieben sich obige Intervalle. Wir wollen sichergehen und verlangen, dass in 95% aller Stichproben unser Intervall den wahren Wert μ überdecken soll. Welchem Intervall vertrauen wir?

Was gewinnen wir durch wiederholte Messungen?

Lösung: Die Einzelmessung entspricht einer ZVariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mit Erwartung $\mu = \mathbf{E}(X)$, Varianz $\sigma^2 = \mathbf{V}(X)$ und Streuung $\sigma(X) \in \,]0, \infty[$.

(1) Aus unabhängigen Wiederholungen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ bilden wir den

empirischen Mittelwert $\hat{X} := \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$.

Dank Linearität gilt $\mathbf{E}(\hat{X}) = \mathbf{E}(X) = \mu$ und dank Unabhängigkeit zudem

$$\mathbf{V}(\hat{X}) = \frac{1}{n^2}\mathbf{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n^2}\big[\mathbf{V}(X_1) + \cdots + \mathbf{V}(X_n)\big] = \frac{1}{n}\mathbf{V}(X).$$

Demnach gilt $\sigma(\hat{X}) = \sigma(X)/\sqrt{n}$, im Beispiel $\sigma(\hat{X}) \lessapprox 10/\sqrt{400} = 0.5$.

(2) Für unsere Intervalle gelten die Chebychev–Abschätzungen:

$$\alpha_1 \geq 1 - 1/1^2 = 0, \qquad \alpha_2 \geq 1 - 1/2^2 \geq 75\%,$$
$$\alpha_3 \geq 1 - 1/3^2 > 88\%, \qquad \alpha_5 \geq 1 - 1/5^2 \geq 96\%,$$
$$\alpha_{10} \geq 1 - 1/10^2 \geq 99\%, \qquad \alpha_k \geq 1 - 1/k^2.$$

☺ Diese genial-einfache Methode optimieren wir in Kapitel V und W: Unser Ziel sind schärfere Abschätzungen, also genauere Intervalle!

Genauigkeit vs Sicherheit vs Kosten

Planung: Vor der Messung sind $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen. Wir kennen die Messergebnisse noch nicht, noch sind für X_j alle Werte möglich mit ihren jeweiligen Wahrscheinlichkeiten $\mathbf{P}(X_j \in I)$; daher ist es hier sinnvoll, von Erwartung $\mathbf{E}(X_j)$ und Varianz $\mathbf{V}(X_j)$ zu sprechen. Daraus berechnen wir die Zufallsvariable $\hat{X}$ und schließlich das Intervall $I_k = [\hat{X} \pm k\sigma]$. Mit $\hat{X}$ schwankt auch I_k. Wir wollen unser *Verfahren* (!) so einrichten, dass I_k mit hoher Wkt den gesuchten Wert μ überdeckt.

Auswertung: Nach der Messung liegen Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ vor. Wir unterscheiden die Funktion X_i und den Funktionswert $x_i = X_i(\omega)$. Dies sind keine Zufallsvariablen, sondern reelle Zahlen. Es hat daher keinen Sinn, von Erwartung $\mathbf{E}(x_k)$ oder Varianz $\mathbf{V}(x_k)$ zu sprechen. Auch das Intervall $I_k = [\hat{x} \pm k\sigma]$ ist jetzt fixiert. Entweder es überdeckt μ oder eben nicht. Es hat somit keinen Sinn, hier nach Wkt zu fragen.

Reproduzierbarkeit: Nach der Messung ist vor der Messung!
Wir wollen garantieren, dass unsere Schätzungs*methode* zukünftigen, unabhängig wiederholten Messungen standhält. Klarheit und Korrektheit benötigen solides Verständnis und sorgfältige Ausführung!

Das Gesetz der großen Zahlen

☺ Dieses Argument und die Rechnung fassen wir als Satz zusammen:

Satz T3J: Gesetz der großen Zahlen (nach Chebychev)

Seien $X_1, \ldots, X_n : (\Omega, \mathbf{P}) \to \mathbb{R}$ ZVariablen mit Erwartung $\mu = \mathbf{E}(X)$ und Varianz $\sigma^2 = \mathbf{V}(X)$ und zudem unabhängig (es genügt unkorreliert).

Der empirische Mittelwert $\hat{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ nähert sich der Erwartung μ:

(1) Seine Streuung $\sigma(\hat{X}) = \sigma(X)/\sqrt{n} \to 0$ fällt wie $1/\sqrt{n}$ für $n \to \infty$.

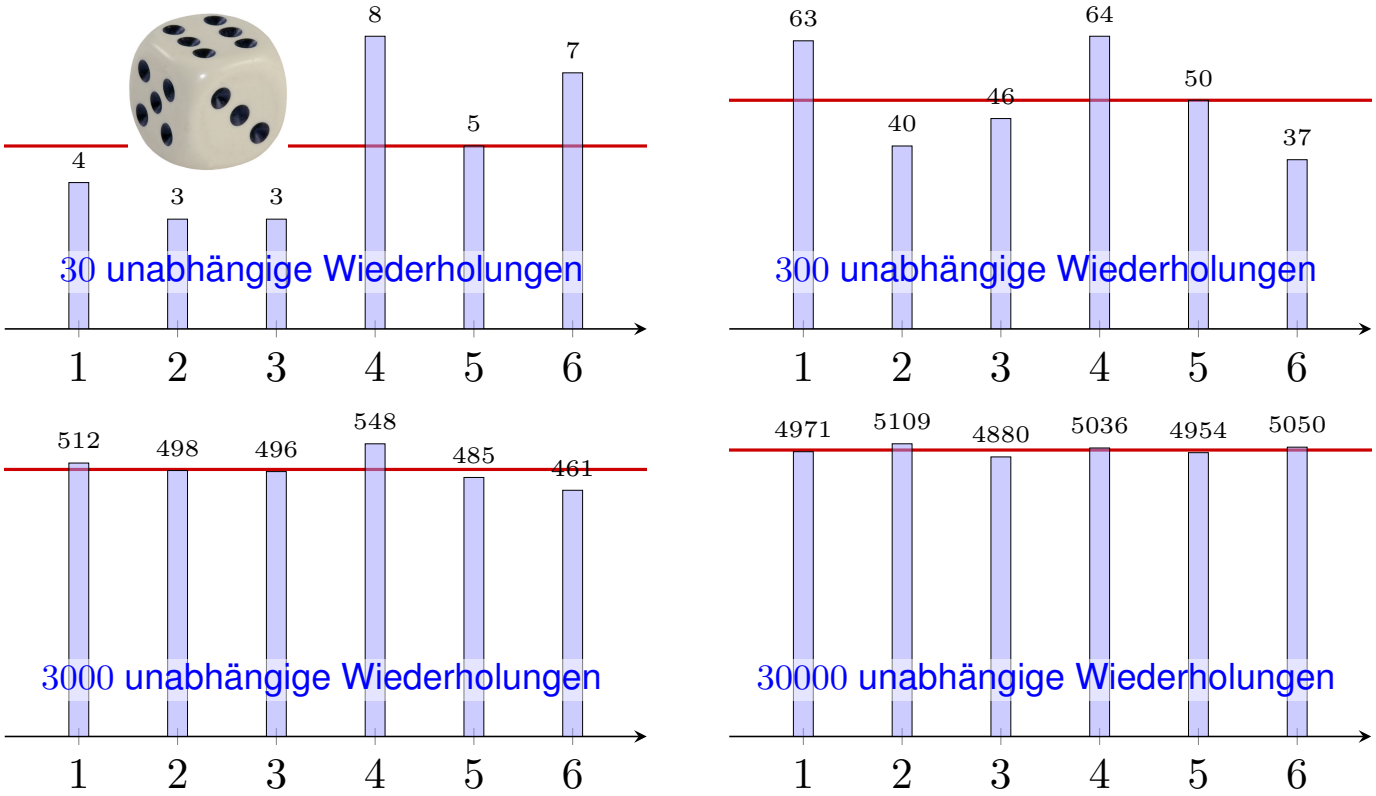
(2) Abweichungen um $\varepsilon > 0$ werden beliebig unwahrscheinlich gemäß

$$\mathbf{P}\Big[|\hat{X} - \mu| \geq \varepsilon\Big] \;\leq\; \frac{\sigma^2}{n\,\varepsilon^2} \;\searrow\; 0.$$

Deshalb wiederholen wir Messungen *unabhängig*, um die Messgenauigkeit zu verbessern! Das Gesetz der großen Zahlen erklärt insbesondere, wie wir Wahrscheinlichkeiten messen können: Die Indikatorfunktion $X = \mathbf{I}_A$ zählt das Eintreten des Ereignisses A. Der Mittelwert $\hat{X}$ ist die relative Häufigkeit nach n Versuchen und konvergiert gegen $\mu = \mathbf{E}(X) = \mathbf{P}(A)$. Ales wird gut!

⚠ Für praktische Anwendungen wollen Sie n nicht zu groß wählen: Wiederholte Messungen sind teuer. Chebychev T3F ist zwar einfach, aber noch recht grob. Sie wollen daher bessere Schranken für die Abweichung $\mathbf{P}(|\hat{X} - \mu| \geq \varepsilon)$. Diese liefert der ZGS! (Satz W1D)

Empirie: häufig wiederholte Experimente



Das **empirische Gesetz der großen Zahlen** ist folgende Erfahrungstatsache: Bei sehr häufiger unabhängiger Wiederholung nähern sich die relativen Häufigkeiten der Wahrscheinlichkeit an. Wir können dies nun begründen und sogar nachrechnen, wie schnell und sicher dies geschieht!

Illustration des Gesetzes der großen Zahlen

Aufgabe: Sie würfeln $n = 3600$ mal mit einem fairen Würfel. Sei S die Häufigkeit der Augenzahl 6. Wie groß sind Erwartung und Streuung? Welche zusätzlichen Annahmen fordern Sie hierzu sinnvollerweise? Wie wahrscheinlich ist $S \in [500, 700]$? $S \in [550, 650]$? $S \in [580, 620]$?

Lösung: Wir nutzen die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n : \Omega \to \{0, 1\}$, wobei $X_k = 1$ bedeutet „Augenzahl 6 im k-ten Wurf“. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
&\text{Trefferwkt } \mathbf{P}(X_k{=}1) = t && = 1/6,\\
&\text{Erwartung } \quad \mathbf{E}(X_k) = t && = 1/6,\\
&\text{Varianz } \quad \mathbf{V}(X_k) = t(1-t) && = 5/36.
\end{aligned}$$

Die Summe $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ zählt die Häufigkeit:

$$\begin{aligned}
&\text{Erwartung } \mathbf{E}(S) = nt && = 600,\\
&\text{Varianz } \quad \mathbf{V}(S) = nt(1-t) && = 500,\\
&\text{Streuung } \quad \sigma(S) = \sqrt{\mathbf{V}(S)} && \approx 22.36.
\end{aligned}$$

Satz T3ı: Für die Additivität der Varianzen fordern wir Unabhängigkeit!

Illustration des Gesetzes der großen Zahlen

Wir nutzen die (worst case) Abschätzungen von Chebychev (Satz T3F):

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\Big[|X-\mu| \geq c\Big] &\leq \frac{\sigma^2}{c^2} \\
\mathbf{P}\Big[|X-\mu| \geq k\sigma\Big] &\leq \frac{1}{k^2}, \\
\mathbf{P}\Big[\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma\Big] &\geq 1 - \frac{1}{k^2},
\end{aligned}$$

In unserem Fall gilt $\mu = 600$ und $\sigma \approx 22.36$, damit erhalten wir:

$$\mathbf{P}\Big[|S-600| \geq 101\Big] \leq \frac{500}{101^2} \approx 0.05 \implies \mathbf{P}\Big[S \in [500, 700]\Big] \geq 0.95,$$

$$\mathbf{P}\Big[|S-600| \geq \ \ 51\Big] \leq \frac{500}{51^2} \approx 0.20 \implies \mathbf{P}\Big[S \in [550, 650]\Big] \geq 0.80,$$

$$\mathbf{P}\Big[|S-600| \geq \ \ 21\Big] \leq \frac{500}{21^2} \approx 1.13 \implies \mathbf{P}\Big[S \in [580, 620]\Big] \geq -0.13.$$

☺ Die ersten beiden Abschätzungen sind hilfreich, die dritte ist nutzlos.
Später rechnen wir genauer mit dem lokalen Grenzwertsatz V3A (LGS).

Illustration des Gesetzes der großen Zahlen

☺ Die Ungleichungen von Chebychev sind zwar grob, aber sie erlauben uns immerhin eine erste Abschätzung, zudem schnell und bequem.

⚠ Zunächst klingen 3600 Versuche nach viel, doch es genügt nicht:
Die Ergebnisse streuen noch stark, die Messung ist recht ungenau!

Aufgabe: Bei 3600 Versuchen gilt $S \in [\mu \pm 0.167\mu]$ mit Wkt $\geq 95\%$.
Wie oft müssen Sie würfeln, damit $S \in [\mu \pm 0.01\mu]$ mit Wkt $\geq 95\%$ gilt?

Lösung: Wir rechnen wie oben, mit unbekannter Versuchszahl n:

$$\mathbf{P}\Big[|S-\mu| \geq 0.01\mu\Big] \leq \frac{\sigma^2}{(0.01\mu)^2} = \frac{nt(1-t)}{(0.01nt)^2} = 10\,000\frac{1-t}{nt} \overset{!}{\leq} 0.05$$

Wegen $(1-t)/t = {}^5\!/_6 \,/\, {}^1\!/_6 = 5$ muss demnach $n \geq 1\,000\,000$ gelten.

☺ Plausibel: Doppelte Genauigkeit erfordert vierfache Versuchszahl,
zehnfache Genauigkeit erfordert hundertfache Versuchszahl,
17-fache Genauigkeit erfordert 289-fache Versuchszahl.

Genauigkeit hat ihren Preis: Wir müssen mehr messen!
Das ist zugleich Fluch und Segen der großen Zahlen.

Anwendung des Gesetzes der großen Zahlen

Präzisionswürfel aus Kunststoff

Gleiche Wkten!

Handgesägte Würfel aus Holz

Ungleiche Wkten?

Bei perfekter Symmetrie sind alle Ergebnisse gleichwahrscheinlich:

$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \tfrac{1}{6}$$

Mit Omas handgefertigtem Lieblingswürfel gewinnt sie verdächtig oft:

$$p(1) = 0.15, \quad p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = 0.16, \quad p(6) = 0.21$$

Wie findet man diese Wkten? Man muss sie messen! Aber wie genau?

Quantitativer Kompromiss: sicher vs präzise vs kostengünstig

Aufgabe: Sie wollen die Wkt $\mathbf{P}(A) = t$ eines Ereignisses A messen:
(1) Bis auf einen Fehler von $\varepsilon = 0.01$. Sie verlangen 98%ige Sicherheit.
(2) Bis auf einen Fehler von $\varepsilon = 0.02$. Sie verlangen 96%ige Sicherheit.
(3) Bis auf einen Fehler von $\varepsilon = 0.05$. Sie verlangen 93%ige Sicherheit.

Wie oft müssen Sie dazu die Messung / das Experiment wiederholen?
☺ Möglichst präzise, sicher, kostengünstig: Wählen Sie zwei von drei!
Nutzen Sie zur Vereinfachung zunächst den Satz von Chebychev T3F, später die Binomialverteilung U3B und den lokalen Grenzwertsatz V3A.

☺ Wir setzen unser Experiment als beliebig wiederholbar voraus.
Das ist für praktische Anwendungen eine starke Annahme; machmal ist schon eine erste Wiederholung zu kostspielig oder gar unmöglich.
Dann muss man Wkten auf andere Weise schätzen, und sei's nur grob.

☺ Selbst wenn das Experiment im Prinzip beliebig wiederholbar ist, so sind Wiederholungen doch meist aufwändig und kostspielig.
Begrenzte Ressourcen erlauben Ihnen nur begrenzte Genauigkeit.
Für dieses Problem soll Sie dieser Aufgabentyp sensibilisieren.

Quantitativer Kompromiss: sicher vs präzise vs kostengünstig

Lösung: Das einfache Experiment hat Erwartung $\mathbf{E}(\mathbf{I}_A) = \mathbf{P}(A) = t$ und Varianz $\mathbf{V}(\mathbf{I}_A) = t(1-t) \le 1/4$. Wir nutzen besser n unabhängige Wiederholungen $X_1, \dots, X_n : \Omega \to \{0,1\}$ und bilden den Mittelwert

$$\hat{X} = \tfrac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) = \textbf{relative Häufigkeit} \text{ des Ereignisses } A.$$

Er hat die Erwartung $\mathbf{E}(\hat{X}) = t$ und dank Unabhängigkeit (!) die Varianz $\sigma^2 = \mathbf{V}(\hat{X}) = \mathbf{V}(X)/n \le 1/4n \searrow 0$, also die Streuung $\sigma \le 1/2\sqrt{n} \searrow 0$. Wir nutzen das Gesetz der großen Zahlen T3J nach Chebychev:

$$\alpha = \mathbf{P}\big[|\hat{X} - t| < \varepsilon\big] \;\ge\; 1 - 1/4n\varepsilon^2 \;\nearrow\; 1$$

(1) Damit schätzen wir die Wiederholungen für $\alpha = 0.98$ und $\varepsilon = 0.01$:

Irrtumswkt: $\mathbf{P}\big(|\hat{X} - t| \ge k\sigma\big) \le 1/k^2 \overset{!}{\le} 0.02 \quad \Leftarrow \quad k \ge 8$

Ungenauigkeit: $8\sigma \le 8/2\sqrt{n} \overset{!}{\le} \varepsilon = 0.01 \quad \Leftarrow \quad n \ge 160\,000$

Für 98%ige Sicherheit genügt immer ein 8σ–Intervall um den Messwert. Zur Genauigkeit $\varepsilon = 0.01$ genügen demnach $n \ge 160\,000$ Messungen. Genauer: Dank LGS genügt $k = 2.33$, somit nur $n = 13\,573$ Messungen.

Quantitativer Kompromiss: sicher vs präzise vs kostengünstig

(2) Wir schätzen die Wiederholungen für $\alpha = 0.96$ und $\varepsilon = 0.02$:

Irrtumswkt: $\mathbf{P}\big(|\hat{X} - t| \ge k\sigma\big) \le 1/k^2 \overset{!}{\le} 0.04 \quad \Leftarrow \quad k \ge 5$

Ungenauigkeit: $5\sigma \le 5/2\sqrt{n} \overset{!}{\le} \varepsilon = 0.02 \quad \Leftarrow \quad n \ge 15\,625$

Für 96%ige Sicherheit genügt immer ein 5σ–Intervall um den Messwert. Für die Genauigkeit $\varepsilon = 0.02$ genügen demnach $n \ge 15\,625$ Messungen. Genauer: Dank LGS genügt $k = 2.06$, somit nur $n = 2\,653$ Messungen.

(3) Wir schätzen die Wiederholungen für $\alpha = 0.93$ und $\varepsilon = 0.05$:

Irrtumswkt: $\mathbf{P}\big(|\hat{X} - t| \ge k\sigma\big) \le 1/k^2 \overset{!}{\le} 0.07 \quad \Leftarrow \quad k \ge 4$

Ungenauigkeit: $4\sigma \le 4/2\sqrt{n} \overset{!}{\le} \varepsilon = 0.05 \quad \Leftarrow \quad n \ge 1\,600$

Für 93%ige Sicherheit genügt immer ein 4σ–Intervall um den Messwert. Für die Genauigkeit $\varepsilon = 0.05$ genügen demnach $n \ge 1\,600$ Messungen. Genauer: Dank LGS genügt $k = 1.82$, somit nur $n = 332$ Messungen.

☺ Genauigkeit und Sicherheit haben ihren Preis! Mathematik kann beide erhöhen und somit die Kosten senken, siehe V411, V415, W203.

Disjunkt versus unabhängig

T349
Ausführung

Seien $A, B \subseteq \Omega$ Ereignisse in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbf{P})$. Für die Wahrscheinlichkeit ihrer Vereinigung gilt die einfache Formel

$$\boxed{\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B).}$$

Diese Formel gilt *immer*. Meist kennen wir die Wahrscheinlichkeiten $\mathbf{P}(A)$ und $\mathbf{P}(B)$, aber wie berechnen wir den „Störterm“ $\mathbf{P}(A \cap B)$? Zwei Fälle sind besonders nützlich und wichtig:

$$\left.\begin{array}{c} A, B \text{ sind disjunkt, } A \cap B = \emptyset, \\ \text{allgemeiner } \mathbf{P}(A \cap B) = 0. \end{array}\right\} \iff \mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$$

$$\left.\begin{array}{c} \text{Die Ereignisse } A, B \text{ sind} \\ \text{stochastisch unabhängig.} \end{array}\right\} \iff \mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$$

Das sind zwar nur die einfachsten (extremen) Fälle, aber sie treten häufig genug auf, um nützlich zu sein. Häufig nutzt (prüft oder fordert) man in Rechnungen daher Disjunktheit oder Unabhängigkeit. Das hilft.

⚠ Disjunkt *und* unabhängig gilt nur für $\mathbf{P}(A) = 0$ oder $\mathbf{P}(B) = 0$.

Kovarianz und Korrelation von Ereignissen

T350
Ausführung

Wir untersuchen genauer die Un/Abhängigkeit von Ereignissen:

Im Falle $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)$ sind die Ereignisse **unabhängig**.
Im Falle $\mathbf{P}(A \cap B) > \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)$ sind sie **positiv korrelliert**.
Im Falle $\mathbf{P}(A \cap B) < \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)$ sind sie **negativ korrelliert**.

Im Allgemeinen können wir dies wie folgt quantifizieren:

Definition T3K: Kovarianz und Korrelation von Ereignissen

Die **Kovarianz** von Ereignissen A, B im WRaum $(\Omega, \mathbf{P})$ ist

$$\mathbf{Cov}(A, B) := \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) = \mathbf{E}(X \cdot Y)$$

mit den zentrierten Zufallsvariablen $X = \mathbf{I}_A - \mathbf{P}(A)$ und $Y = \mathbf{I}_B - \mathbf{P}(B)$.

Im Fall $\mathbf{P}(A), \mathbf{P}(B) \in \,]0, 1[$ definieren wir ihre **Korrelation** durch

$$\mathbf{Cor}(A, B) := \frac{\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)}{\sqrt{\mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(\overline{A}) \cdot \mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(\overline{B})}} = \frac{\mathbf{E}(X \cdot Y)}{\sqrt{\mathbf{V}(X) \cdot \mathbf{V}(Y)}} \in [-1, 1].$$

Im Fall $\mathbf{P}(A) \in \{0, 1\}$ oder $\mathbf{P}(B) \in \{0, 1\}$ setzen wir $\mathbf{Cor}(A, B) := 0$.

Kovarianz und Korrelation von Ereignissen

Die Un/Abhängigkeit von Ereignissen $A, B \subseteq \Omega$ ist eine Ja/Nein–Frage. Ihre Korrelation $\mathbf{Cor}(A, B) \in [-1, 1]$ hingegen quantifiziert den Grad ihrer Abhängigkeit. Hierzu gelten einfache, aber nützliche Regeln:

Aufgabe: Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln:

(1) Genau dann gilt $\mathbf{Cor}(A, B) = 0$, wenn A und B unabhängig sind.

(2) Es gilt $\mathbf{Cor}(A, A) = 1$, $\mathbf{Cor}(A, \overline{A}) = -1$, $\mathbf{Cor}(A, \overline{B}) = -\mathbf{Cor}(A, B)$.

(3) Für alle $A, B \subseteq \Omega$ gilt $\mathbf{Cor}(A, B) \in [-1, 1]$ dank Cauchy–Schwarz.

(4) Aus $\mathbf{Cor}(A, B) = +1$ folgt $A = B$ *fast sicher*, also $\mathbf{P}(A \triangle B) = 0$.

(5) Aus $\mathbf{Cor}(A, B) = -1$ folgt $A = \overline{B}$ *fast sicher*, also $\mathbf{P}(A \triangle \overline{B}) = 0$.

Vereinbarung: Die bequeme Ausdrucksweise „fast sicher“ bedeutet bis auf eine „vernachlässigbare“ Menge mit Wahrscheinlichkeit Null.

Beispiel: Wenn $\mathbf{P}(\{\omega\}) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$ gilt, dann gilt in (4) $A = B$ bzw. in (5) $A = \overline{B}$. Es ist jedoch möglich, dass unser WRaum $(\Omega, \mathbf{P})$ Elemente ω mit Wkt $\mathbf{P}(\{\omega\}) = 0$ enthält, dann können wir nicht $A = B$ bzw. $A = \overline{B}$ schließen, sondern nur $\mathbf{P}(A \triangle B) = 0$ bzw. $\mathbf{P}(A \triangle \overline{B}) = 0$.

Kovarianz und Korrelation von Ereignissen

Lösung: (1) Im Sonderfall $\mathbf{P}(A) \in \{0, 1\}$ oder $\mathbf{P}(B) \in \{0, 1\}$ sind A und B unabhängig, und es gilt $\mathbf{Cor}(A, B) = 0$ nach Vereinbarung. Im regulären Fall $\mathbf{P}(A), \mathbf{P}(B) \in \,]0, 1[$ betrachten wir den obigen Bruch: Genau dann gilt $\mathbf{Cor}(A, B) = 0$, wenn $\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) = 0$.

(2) Einsetzen liefert sofort $\mathbf{Cor}(A, A) = +1$ und $\mathbf{Cor}(A, \overline{A}) = -1$. Zum Ereignis $A \subseteq \Omega$ betrachten wir $X = \mathbf{I}_A - \mathbf{P}(A)$, zum Komplement $\overline{A} = \Omega \smallsetminus A$ entsprechend $\overline{X} = \mathbf{I}_{\overline{A}} - \mathbf{P}(\overline{A}) = (1 - \mathbf{I}_A) - (1 - \mathbf{P}(A)) = -X$. Hieraus folgt $\mathbf{Cov}(A, \overline{B}) = -\mathbf{Cov}(A, B)$ und $\mathbf{Cor}(A, \overline{B}) = -\mathbf{Cor}(A, B)$.

(3) Für $X = \mathbf{I}_A - \mathbf{P}(A)$ gilt $\mathbf{E}(X) = 0$ und $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(\overline{A})$, und für $Y = \mathbf{I}_B - \mathbf{P}(B)$ gilt $\mathbf{E}(Y) = 0$ und $\mathbf{V}(Y) = \mathbf{E}(X^2) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(\overline{B})$. Wir finden $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(\mathbf{I}_A \mathbf{I}_B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$. Dank der Cauchy–Schwarz–Ungleichung gilt $|\mathbf{E}(XY)|^2 \le \mathbf{E}(X^2)\mathbf{E}(Y^2)$, also $\mathbf{Cor}(X, Y)^2 \le 1$ und somit $\mathbf{Cor}(X, Y) \in [-1, 1]$ wie gewünscht.

(4/5) Gleichheit gilt bei Cauchy–Schwarz für $Y = \lambda X$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Wegen $1 = \max X - \min X = \max Y - \min Y$ bleibt nur $\lambda = \pm 1$. In $L^2(\Omega, \mathbf{P})$ gilt demnach $X = \pm Y$, also $A = B$ bzw. $A = \overline{B}$ fast sicher.

Kovarianz und Korrelation von Zufallsvariablen

Die Varianz ist nicht additiv! T331 Die nötige Korrektur liefert gerade die Kovarianz: $\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\mathbf{Cov}(X,Y)$. Das erinnert uns an die Lineare Algebra: Die Varianz $X \mapsto \mathbf{V}(X)$ ist eine quadratische Form, die Kovarianz $(X,Y) \mapsto \mathbf{Cov}(X,Y)$ ist ihre **Polarisierung**.

Definition T3L: Kovarianz und Korrelation von Zufallsvariablen

Seien $X, Y : (\Omega, \mathbf{P}) \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen mit $\mathbf{E}[X^2], \mathbf{E}[Y^2] < \infty$.
Wir definieren ihre **Kovarianz** und ihre **Korrelation** durch

$$\mathbf{Cov}(X,Y) := \mathbf{E}\big[(X - \mathbf{E}(X)) \cdot (Y - \mathbf{E}(Y))\big] = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y),$$

$$\mathbf{Cor}(X,Y) := \frac{\mathbf{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbf{V}(X)\mathbf{V}(Y)}} \qquad \text{bzw. } := 0, \text{ falls } \mathbf{V}(X)\mathbf{V}(Y) = 0.$$

Wir nennen die beiden Zufallsvariablen X, Y

- **unkorreliert**, falls $\mathbf{Cov}(X,Y) = 0$ gilt,
- **positiv korelliert**, falls $\mathbf{Cov}(X,Y) > 0$ gilt,
- **negativ korelliert**, falls $\mathbf{Cov}(X,Y) < 0$ gilt.

Kovarianz als Skalarprodukt

Satz T3M: Kovarianz als Skalarprodukt

Die Kovarianz verhält sich wie ein Skalarprodukt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Cov}(X,X) &= \mathbf{V}(X) \geq 0 \\
\mathbf{Cov}(X,Y) &= \mathbf{Cov}(Y,X) \\
\mathbf{Cov}(a + bX, Y) &= b\,\mathbf{Cov}(X,Y)
\end{aligned}$$

Die Varianz $\mathbf{V}(X) = \mathbf{Cov}(X,X)$ entspricht dem Normquadrat, die Streuung $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$ entspricht somit der Norm.
Genau dann gilt $\mathbf{V}(X) = 0$, wenn $X = \mathrm{const}$ fast sicher.

Für die Varianz einer Summe gilt Pythagoras:

$$\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\mathbf{Cov}(X,Y)$$

Unkorreliert $\mathbf{Cov}(X,Y) = 0$ bedeutet orthogonal $X \perp Y$.
Dank Cauchy–Schwarz–Ungleichung gilt $\mathbf{Cor}(X,Y) \in [-1,1]$, mit $\mathbf{Cor}(X,Y) = \pm 1$ genau dann, wenn $X = \pm\lambda Y$ fast sicher (mit $\lambda > 0$).

Unabhängig vs unkorreliert

Aufgabe: Seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ zwei Zufallsvariablen. Das Paar (X, Y) nimmt die vier Werte $(\pm 1, 0), (0, \pm 1) \in \mathbb{R}^2$ jeweils mit Wkt $1/4$ an.
(1) Berechnen Sie $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{V}(X)$ und $\mathbf{E}(Y)$, $\mathbf{V}(Y)$ sowie $\mathbf{Cov}(X, Y)$.
(2) Sind X und Y unkorreliert? (3) Sind X und Y unabhängig?
(4) Welche Verteilung hat $S = X + Y$? Erwartung? Varianz?

Lösung: (1) Es gilt $\mathbf{P}(X{=}\pm 1) = \frac{1}{4}$ und $\mathbf{P}(X{=}0) = \frac{1}{2}$, also $\mathbf{E}(X) = 0$ und $\mathbf{V}(X) = \frac{1}{2}$. Ebenso für Y, denn Y hat dieselbe Verteilung.

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}\big[(X - \mathbf{E}(X)) \cdot (Y - \mathbf{E}(Y))\big] = \mathbf{E}(XY) = 0$$

(2) Demnach sind X und Y unkorrelliert. (3) Aber nicht unabhängig:

$$\mathbf{P}(X{=}1) = \mathbf{P}(Y{=}1) = \tfrac{1}{4} \quad \text{aber} \quad \mathbf{P}(X{=}1, Y{=}1) = 0$$

(4) Für die Summe $S = X + Y$ gilt offensichtlich $\mathbf{P}(S{=}\pm 1) = \frac{1}{2}$, also $\mathbf{E}(S) = 0 = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y)$ und $\mathbf{V}(S) = 1 = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$.

⚠ Die Variablen X und Y sind abhängig, aber dennoch unkorreliert. Diese schwächere Bedingung genügt für die Additivität der Varianzen.

Unabhängig vs unkorreliert

Aufgabe: Wir untersuchen die drei folgenden Aussagen über X, Y:
(1) Die Zufallsvariablen X, Y sind unabhängig (gemäß Definition T3H).
(2) Die Zufallsvariablen X, Y sind unkorreliert, also $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$.
(3) Die Varianzen addieren sich gemäß $\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$.

Welche der sechs möglichen Implikationen gelten hier?
Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

Lösung: Pythagoras T3M zeigt sofort die Äquivalenz „(2) $\Leftrightarrow$ (3)“.

Es gilt „(1) $\Rightarrow$ (2)“: Satz T3I garantiert $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$ für unabhängige Variablen, also $\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = 0$.

Die Umkehrung „(2) $\Rightarrow$ (1)“ gilt nicht: Die vorige Aufgabe zeigt ein Gegenbeispiel. (Sie können leicht Varianten davon konstruieren.)

⚠ Unabhängig impliziert unkorreliert, aber nicht umgekehrt!

Aufgabe: Für alle *zweiwertigen* Zufallsvariablen $X = a_0 + a_1 \mathbf{I}_A$ und $Y = b_0 + b_1 \mathbf{I}_B$ ist unabhängig äquivalent zu unkorreliert. **Lösung:** T329
⚠ Für drei- und mehrwertige ZVariablen gilt dies allgemein nicht mehr!

Korrelation impliziert nicht Kausalität!

Aufgabe: Wir beobachten sehr häufig folgende Ereignisse:

$$R = \{\text{Es regnet}\}, \qquad S = \{\text{Scheibenwischer laufen}\}$$

(1) Es gilt etwa $\mathbf{P}(S|R) = 99\%$. Was können Sie hieraus folgern?
Verursacht Regen das Anschalten der Scheibenwischer? „Ja, klar!“

(2) Es gilt auch etwa $\mathbf{P}(R|S) = 99\%$. Was können Sie hieraus folgern?
Verursacht Anschalten der Scheibenwischer also Regen? „Whaaa?“

⚠ Dieser Denkfehler ist absurd, aber häufig. Wie ist er zu widerlegen?

Dieses Beispiel ist so gewählt, dass der Denkfehler möglichst auffällig ist, gar absurd.
Doch wo genau liegt der Fehler? Wir wissen alle aus Erfahrung, dass das Anschalten der Scheibenwischer nicht Regen verursacht. Woher wissen wir das? Das sagen uns nicht die obigen Wahrscheinlichkeiten, sondern folgendes aktive Experiment: Wir können willkürlich / zufällig den Scheibenwischer anschalten und den Regen beobachten. Nach zahlreicher Wiederholung dieses Experiments sind wir sicher, dass der vermutete kausale Zusammenhang nicht besteht.

☺ Kausalität beweist man immer nur aktiv, durch randomisierte Tests.

So lernten wir als Kinder, Zusammenhänge zu begreifen und mögliche Erklärungen zu erhärten: durch ausgiebige Tests und endlos wiederholte Spiele. Das ist eine überaus sinnvolle Strategie!
Siehe hierzu `en.wikipedia.org/wiki/Correlation_does_not_imply_causation`.

Korrelation impliziert nicht Kausalität!

☺ Kausalität impliziert meist gewisse Wahrscheinlichkeiten.
Unser Erfahrungswissen nutzen wir zur Erstellung unserer Modelle.

☹ Umgekehrt jedoch müssen wir dabei extrem vorsichtig sein:
Beobachtung einer Korrelation impliziert noch keine Kausalität.

⚠ Wissenschaftliche Grundregel: Ursache und Wirkung lässt sich nur durch ein detailliertes Verständnis der Mechanismen ergründen!

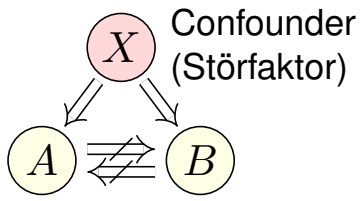
⚠ Ein passives, statistisches Abbild der Situation ist hierfür zu grob.
Um Kausalität zu messen, benötigen wir aktiv randomisierte Tests.

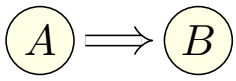
Beispiel: Menschen mit hohem Vitamin-C-Gehalt im Blut erleiden seltener einen Herzinfarkt. Kann man hieraus folgern, dass Vitamin C das Risiko mindert? Nein, daraus allein noch nicht! Ein hoher Vitamin-C-Gehalt kann durch andere Faktoren verursacht werden (wie etwa gesunder Lebenswandel, viel Obst, viel Sport) und diese mindern das Infarktrisiko, nicht allein Vitamin C: Es ist noch nicht schlüssig, ob zusätzlich verabreichtes Vitamin C das Risiko senkt oder erhöht.

Da sehr viele (bekannte und unbekannte) Faktoren das Infarktrisiko beeinflussen, muss man mit voreiligen Schlussfolgerungen vorsichtig sein. Die Wirkung von Vitamin C auf das Infarktrisiko kann man glücklicherweise dennoch untersuchen: Sorgfältig konstruiert kann ein randomisierter kontrollierter Test (RCT) hierauf Antwort geben. Dies ist zwar extrem aufwändig, aber allgemein das beste Studiendesign in der medizinischen, psychologischen und ökonomischen Forschung.

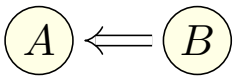
Korrelation impliziert nicht Kausalität!

Korrelation tritt in diversen Zusammenhängen auf, manchmal mit und häufig auch ohne Kausalität:





Kausalität
„A verursacht B“



Kausalität
„B verursacht A“

Gleichzeitigkeit
ohne Kausalität

gemeinsame
Ursache X

Aufgabe: Diskutieren Sie das Auftreten folgender Korrelationen:

1. „Regionen mit mehr Störchen haben höhere Geburtenraten.“
2. „Mit Schuhen zu schlafen, geht mit Kopfschmerzen einher.“
3. „Tabak zu rauchen geht häufig mit Leberschäden einher.“
4. „Je mehr Feinstaub, desto höher das Herzinfarktrisiko.“
5. „Spieler von Ego-Shootern sind häufiger aggressiv.“
6. „Ein Glas Rotwein pro Tag fördert die Gesundheit.“
7. „Vorlesungsbesuch geht mit Klausurerfolg einher.“

Begründet dies eine Kausalität? Sehen Sie mögliche Gegenargumente? Vermeiden Sie voreilige Schlüsse! Fragen Sie nach! Widersprechen Sie!

Korrelation impliziert nicht Kausalität!

(1) Störche und Geburten sind positiv korreliert; siehe Robert Matthews: *Storks deliver Babies.* Teaching Statistics 22 (2000) 36–38. Mögliche gemeinsame Ursache: Ländliche Regionen haben (a) mehr Störche und (b) mehr Geburten. Mehr Störche anzusiedeln, erhöht nicht die Geburten.

(2) Gemeinsame Ursache dürfte Alkoholkonsum sein. Die Schuhe auszuziehen, hilft nicht gegen Kopfschmerz. Sie wollen das ausprobieren? Machen Sie einen randomisierten kontrollierten Test!

(3) Dieser Zusammenhang wurde intensiv untersucht. Ein wesentlicher Störfaktor: Tabakrauchen korreliert mit Alkoholtrinken, und Letzteres verursacht Leberschäden. Das Rauchen aufzuhören, fördert sicherlich allgemein die Gesundheit, hat aber keinen direkten Einfluss auf Leberschäden.

(4) Feinstaub wird heftig diskutiert, gerade in Stuttgart. Studien müssen Störfaktoren vermeiden, Beispiel: Geringes Einkommen impliziert (a) Gesundheitsrisiken und (b) schlechte Wohnlage, darunter auch hohe Luftbelastung. Vereinfacht gesagt: Wer es sich leisten kann, zieht weg.

(5) Ein komplexes stachliges Thema! Der Oberste Gerichtshof der USA resümierte 2011 in einer Urteilsbegründung: „Nearly all of the research is based on correlation, not evidence of causation.“

(6) Positive Korrelation besteht. Mögliche gemeinsame Ursache: Hohes Einkommen impliziert (a) gute Gesundheit und (b) Weinkonsum. Auch medizinische Zusammenhänge werden diskutiert. (Vor allem in französischen Studien? `en.wikipedia.org/wiki/French_paradox` ;-)

(7) Die Korrelation ist stark. Schon drei verpasste Termine senken signifikant den Klausurerfolg. Prof. Dr. Rolf Schulmeister (Uni Hamburg) hat eine Meta-Studie von 300 empirischen Arbeiten vorgelegt: *Abwesenheit von Lehrveranstaltungen. Ein nur scheinbar triviales Problem.* (2015)

Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Ein **diskreter Wahrscheinlichkeitsraum** $(\Omega, \mathbf{P})$ besteht aus

- einer Menge Ω von möglichen Ergebnissen und
- einer normierten und additiven Abbildung $\mathbf{P} : \mathfrak{P}(\Omega) \to [0, 1]$.

Letzteres bedeutet $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ und $\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbf{P}(\{\omega\})$ für alle $A \subseteq \Omega$.

Jedes Element $\omega \in \Omega$ heißt **Ergebnis**, somit ist Ω die **Ergebnismenge**.
Jede Teilmenge $A \subseteq \Omega$ heißt **Ereignis**, somit $\mathfrak{P}(\Omega)$ die **Ereignismenge**.
Das Ereignis A tritt genau dann ein, wenn ein Ergebnis $\omega \in A$ eintritt.
Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist das **Wahrscheinlichkeitsmaß** $\mathbf{P}(A)$.

Spezialfall: Ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbf{P})$ heißt **endlich**, wenn die Ergebnismenge Ω endlich ist. Er heißt **laplacesch**, wenn zudem alle Ergebnisse $\omega \in \Omega$ gleich wahrscheinlich sind.
Für das **Laplace–Wahrscheinlichkeitsmaß** auf Ω gilt daher

$$\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der Ergebnisse in } A}{\text{Anzahl aller Ergebnisse in } \Omega} = \frac{\text{günstige Ergebnisse}}{\text{mögliche Ergebnisse}}.$$

☺ Für Laplace–Experimente berechnet man die Wkten durch Abzählen der Ergebnisse. Hierbei helfen kombinatorische Abzählformeln.

Rechnen mit Ereignissen

Alle Ergebnisse fassen wir zur **Ergebnismenge** Ω zusammen. Jedes Element $\omega \in \Omega$ heißt **Ergebnis**. Jede Teilmenge $A \subseteq \Omega$ heißt **Ereignis**.

Menge	Bedeutung als Zufallsereignis
Ω	Das sichere Ereignis: Ω tritt immer ein.
$\emptyset$	Das unmögliche Ereignis: $\emptyset$ tritt nie ein.
$A \subseteq \Omega$	Das Ereignis A tritt ein bei jedem Ergebnis $\omega \in A$.
$\Omega \setminus A$	Komplement: $\overline{A} = \Omega \setminus A$ tritt ein, wenn A nicht eintritt.
$A \subseteq B$	Teilmenge: Immer wenn A eintritt, dann auch B.
$B \setminus A$	Restmenge: Das Ereignis B tritt ein, aber nicht A.
$A \cap B$	Schnittmenge: Die Ereignisse A und B treten beide ein.
$A \cup B$	Das Ereignis A oder B tritt ein (evtl. auch beide).
$A \sqcup B$	Das Ereignis A oder B tritt ein, wobei $A \cap B = \emptyset$.
$A \triangle B$	Entweder A oder B tritt ein (aber nicht beide).

Unser Ziel sind nachvollziehbar begründete, quantitative Aussagen.
☺ Diese Notation erlaubt präzises Rechnen mit Zufallsereignissen.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

T403
Fazit

Sei $(\Omega, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $B \subseteq \Omega$ ein Ereignis mit Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}(B) > 0$. Für jedes Ereignis $A \subseteq \Omega$ definieren wir die **Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B** durch

$$\boxed{\mathbf{P}(A|B) := \mathbf{P}_B(A) := \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.}$$

Sei $\Omega = B_1 \sqcup B_2 \sqcup \ldots \sqcup B_\ell$ eine Zerlegung in disjunkte Ereignisse. Für $A \subseteq \Omega$ gilt dann die **Formel der totalen Wahrscheinlichkeit**:

$$\boxed{\mathbf{P}(A) = \sum_{k=1}^{\ell} \mathbf{P}(A \cap B_k) = \sum_{k=1}^{\ell} \mathbf{P}(A|B_k)\,\mathbf{P}(B_k)}$$

Im Falle $\mathbf{P}(A) > 0$ gilt zudem die **Formel von Bayes** (Satz T2B):

$$\boxed{\mathbf{P}(B_i|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B_i)\,\mathbf{P}(B_i)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(A|B_i)\,\mathbf{P}(B_i)}{\sum_{k=1}^{\ell} \mathbf{P}(A|B_k)\,\mathbf{P}(B_k)}}$$

☺ Bequeme Notation und präzises Rechnen mit Zufallsereignissen.

☺ Die Rechnung ist meist leicht, die Interpretation erfordert Übung.

Stochastische Unabhängigkeit

T404
Fazit

Eine Familie von Ereignissen $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ heißt **(stochastisch) unabhängig**, wenn alle Schnittmengen die Produktregel erfüllen:

$$\boxed{\mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_\ell}) = \mathbf{P}(A_{i_1})\,\mathbf{P}(A_{i_2}) \cdots \mathbf{P}(A_{i_\ell})}$$

für jede Auswahl $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_\ell \leq n$: Die Wkt jedes Schnitts ist das Produkt der Wahrscheinlichkeiten. Für unabhängige Ereignisse lassen sich damit die Wkten aller erzeugten Ereignisse berechnen.

Das heißt, zwei Ereignisse $A, B \subseteq \Omega$ sind unabhängig, wenn gilt:

- $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)$.

Drei Ereignisse $A, B, C \subseteq \Omega$ sind unabhängig, wenn gilt:

- $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)$,
- $\mathbf{P}(A \cap C) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(C)$,
- $\mathbf{P}(B \cap C) = \mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(C)$,
- $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(C)$.

⚠ Die Tripelbedingung folgt nicht aus den drei Paarbedingungen! T226

Verständnisfragen: typische Fehler

Aufgabe: Seien $A, B, C \subseteq \Omega$ Ereignisse in einem WRaum $(\Omega, \mathbf{P})$. Gelten folgende Formeln allgemein? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel! Kennen Sie zusätzliche, hinreichende Voraussetzungen?

$$
\begin{aligned}
(1) \qquad & \mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) \\
(2) \qquad & \mathbf{P}(\Omega \smallsetminus A) = 1 - \mathbf{P}(A) \\
(3) \qquad & \mathbf{P}(A \smallsetminus B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(B) \\
(4) \qquad & \mathbf{P}(A \sqcup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) \\
(5) \qquad & \mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) \\
(6) \qquad & \mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B) \\
(7) \qquad & \mathbf{P}(A \cup B \cup C) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(B) \\
& \qquad - \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(B \cap C) - \mathbf{P}(A \cap C)
\end{aligned}
$$

Lösung: Zeichnen Sie Skizzen! Formeln (2),(4),(6) gelten immer.
(1) Falsch im Allgemeinen. Dies ist äquivalent zur Unabhängigkeit!
(3) Falsch im Allgemeinen. Es braucht $\mathbf{P}(B \smallsetminus A) = 0$, z.B. $B \subseteq A$.
(5) Falsch im Allgemeinen. Es braucht $\mathbf{P}(A \cap B) = 0$, z.B. $A \cap B = \emptyset$.
(7) Falsch im Allgemeinen. Es fehlt der Korrekturterm $+\mathbf{P}(A \cap B \cap C)$.

Verständnisfragen: typische Fehler

Aufgabe: (1) „Die Wkt, die Klausur zu bestehen, beträgt 40%. Bei drei Versuchen bestehe ich mit 120%iger Sicherheit!“ Richtig?

(2) „Die Erfolgswkt einer unbemannten Marsmission liegt bei 50%. Es genügen also zwei Missionen, und wir haben 100%igen Erfolg!“

Lösung: (1) Offenbar ist $3 \cdot 40\% = 120\%$ nicht die richtige Antwort! Die Wkt, alle dreimal nicht zu bestehen, ist – bei Unabhängigkeit! –

$$0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.6 = 0.216.$$

Die Wkt, mindestens einmal zu bestehen, ist also nur $0.784 \approx 78\%$.

☺ Sie könnten nun einwenden, diese Rechnung sei unrealistisch: Sobald Sie die erste Klausur bestehen, müssen und werden Sie keine weiteren Versuche unternehmen. Wenn Sie möchten, können Sie auch dieses alternative Modell ausführlich durchrechnen. Es kommt dasselbe heraus! Ernster ist folgender Einwand: Klausuren sind keine Lotterie! Unabhängigkeit gilt nicht, da sich jeder vernünftige Prüfling nach einem ersten Misserfolg sorgfältiger vorbereitet. (Nicht wahr?)

(2) Tatsächlich ist $2 \cdot 50\% = 100\%$ auch hier nicht die richtige Antwort! Die Wkt von zwei Misserfolgen ist bei Unabhängigkeit $0.5 \cdot 0.5 = 0.25$. Die Wkt von mindestens einem Erfolg ist demnach nur $0.75 = 75\%$.

Münzen testen: fair oder gezinkt?

T407
Übung

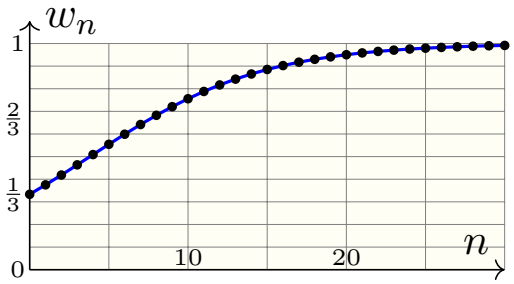
Aufgabe: (Aus der NEW YORK TIMES, August 2011) Von drei gleich aussehenden Münzen sind zwei fair, zeigen also Kopf 0 und Zahl 1 mit gleicher Wkt, die dritte ist gezinkt und zeigt Kopf mit Wkt 60%.

Sie wählen zufällig eine der drei Münzen und machen einen Testwurf. Wenn Sie Kopf erhalten, mit welcher Wkt w_1 ist Ihre Münze gezinkt?

Lösung: Wir betrachten gleich n Testwürfe. Dank Bayes erhalten wir:

$$w_n \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{(\frac{3}{5})^n \cdot \frac{1}{3}}{(\frac{3}{5})^n \cdot \frac{1}{3} + (\frac{1}{2})^n \cdot \frac{2}{3}} \overset{\mathbb{Q}}{=} \frac{1}{1 + 2(\frac{5}{6})^n}$$

$$w_0 = \frac{1}{3}, \quad w_1 = \frac{3}{8}, \quad w_2 = \frac{18}{43}, \quad w_3 = \frac{108}{233}$$



Wir betrachten das Ereignis $F :=$ „Ihre Münze ist fair“, komplementär $G := \overline{F} =$ „gezinkt“, und $T_n :=$ „Alle n Testwürfe ergeben Kopf“. Gegeben sind $\mathbf{P}(F) = \frac{2}{3}$ und $\mathbf{P}(G) = \frac{1}{3}$ sowie $\mathbf{P}(T_n|F) = (\frac{1}{2})^n$ und $\mathbf{P}(T_n|G) = (\frac{3}{5})^n$. Daraus berechnen wir $w_n := \mathbf{P}(G|T_n)$ dank Bayes. Wissenszuwachs, Bayessches Lernen, Fortschritt: Vor dem Testwurf ist die Wkt $1/3 \approx 0.333$, nach dem Testwurf $3/8 = 0.375$. Das ist plausibel. Mehr Testwürfe: Für $n \to \infty$ gilt $w_n \nearrow 1$, doch anfangs wächst w_n nur erstaunlich langsam, zudem bis $w_{10} \approx 0.756$ annähernd linear.

Würfel testen: fair oder gezinkt?

T408
Übung

Aufgabe: Von 73 äußerlich gleichen, sechsseitigen Würfeln sind 72 fair, doch einer ist gezinkt und würfelt immer die 6. Sie wählen zufällig einen dieser 73 Würfel und würfeln n mal unabhängig. Wenn alle n Würfe die 6 ergeben, mit welcher Wahrscheinlichkeit w_n ist Ihr Würfel der gezinkte?

Lösung: Sei $F =$ „fair“, $G =$ „gezinkt“ und $S_n =$ „alle n mal die Sechs“.

$$w_n \overset{\text{Def}}{=} \mathbf{P}(G|S_n) \overset{\text{Def}}{=} \frac{\mathbf{P}(G \cap S_n)}{\mathbf{P}(S_n)}$$

Wir nutzen die Formel von Bayes!

$$\overset{\text{Bayes}}{=} \frac{\mathbf{P}(S_n|G) \cdot \mathbf{P}(G)}{\mathbf{P}(S_n|G) \cdot \mathbf{P}(G) + \mathbf{P}(S_n|F) \cdot \mathbf{P}(F)} \overset{\text{Daten}}{=} \frac{\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{73}}{\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{73} + \frac{1}{6^n} \cdot \frac{72}{73}} \overset{\mathbb{Q}}{=} \frac{1}{1 + \frac{72}{6^n}}$$

Konkrete Zahlen sind lehrreich, gar erstaunlich: $w_0 = 1/73$, $w_1 = 1/13$, $w_2 = 1/3$, $w_3 = 3/4$, $w_4 = 18/19 \approx 95\%$, $w_5 = 108/109 \approx 99\%$. Oh, ah!

☺ Die Sprache der Wkt hilft zur Klarheit. Die Rechnung ist dann leicht. Schön und nützlich: klare Sprache und effiziente Rechenregeln. *Fun fact:* Auch ChatGPT antwortet hier mit Bravour. Viele würden vermutlich schon bei zwei Sechsen an den gezinkten Würfel glauben, das ist aber mit Wkt $w_2 = 1/3$ noch recht unsicher. Selbst drei Sechsen erhöhen die Wkt nur auf $w_3 = 3/4$. Erst danach liegen die Wkten $w_4 = 18/19 \approx 95\%$ und $w_5 = 108/109 \approx 99\%$ recht nahe bei 1.

Ausfallwahrscheinlichkeit: Welcome to the machine!

Aufgabe: Drei unabhängige Bauteile A, B, C haben die Ausfallwkten

$$\mathbf{P}(A) = a = 0.3, \qquad \mathbf{P}(B) = b = 0.4, \qquad \mathbf{P}(C) = c = 0.5.$$

(0) Mit welcher Wkt fällt mindestens ein Teil aus? (1) Genau 0, 1, 2, 3?
(2) Wenn nur genau ein Teil ausfällt, mit welcher Wkt ist es A, B, C?
(3) Konstruieren Sie als Modell hierfür explizit einen WRaum $(\Omega, \mathbf{P})$.

Lösung: (0) Offenbar ist $0.3 + 0.4 + 0.5 = 1.2$ unsinnig! (Warum?)
Kein Teil fällt aus, wenn A funktioniert, B funktioniert, C funktioniert:

$$\{\text{Keins fällt aus}\} \;=\; \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$$

Dank **Unabhängigkeit** können wir diese Wkt als Produkt berechnen:

$$\mathbf{P}(\text{Keins fällt aus}) \;=\; \mathbf{P}(\overline{A}) \cdot \mathbf{P}(\overline{B}) \cdot \mathbf{P}(\overline{C}) \;=\; 0.7 \cdot 0.6 \cdot 0.5 \;=\; 0.21$$

Die Wkt, dass mindestens ein Teil ausfällt, ist demnach $1 - 0.21 = 0.79$.

☺ Komplement verkürzt die Rechnung. Frage (1) geht den langen Weg.
Beide Wege führen zum Ziel. Kennen Sie beide, wählen Sie weise!

Ausfallwahrscheinlichkeit: Welcome to the machine!

(1) Mit welcher Wkt fallen genau 0, 1, 2, 3 Teile aus? Wir zerlegen:

$$\begin{aligned}
\{\text{Keins fällt aus}\} &= F_0 := \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \\
\{\text{Eins fällt aus}\} &= F_1 := (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \sqcup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \sqcup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \\
\{\text{Zwei fallen aus}\} &= F_2 := (A \cap B \cap \overline{C}) \sqcup (A \cap \overline{B} \cap C) \sqcup (\overline{A} \cap B \cap C) \\
\{\text{Drei fallen aus}\} &= F_3 := A \cap B \cap C
\end{aligned}$$

☺ Wir nutzen alle oben ausgeführten Rechenregeln:
Bei Vereinigung **disjunkter** Ereignisse ist die Wkt additiv.
Bei Schnitten **unabhängiger** Ereignisse ist die Wkt multiplikativ.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\text{Keins fällt aus}) &= \mathbf{P}(F_0) = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} &&= 0.21 \\
\mathbf{P}(\text{Eins fällt aus}) &= \mathbf{P}(F_1) = a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} + \overline{a} \cdot b \cdot \overline{c} + \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot c &&= 0.44 \\
\mathbf{P}(\text{Zwei fallen aus}) &= \mathbf{P}(F_2) = a \cdot b \cdot \overline{c} + a \cdot \overline{b} \cdot c + \overline{a} \cdot b \cdot c &&= 0.29 \\
\mathbf{P}(\text{Drei fallen aus}) &= \mathbf{P}(F_3) = a \cdot b \cdot c &&= 0.06
\end{aligned}$$

☺ Plausibilitätsprüfung: Für WMaß gilt $0.21 + 0.44 + 0.29 + 0.06 = 1$.

Ausfallwahrscheinlichkeit: Welcome to the machine!

(2) Genau ein Teil fällt aus; mit welcher Wkt ist es A, B, C?
Die Wkten berechnen wir dank Unabhängigkeit (wie zuvor):

Nur A fällt aus:	$X := A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$,	$\mathbf{P}(X) = 0.3 \cdot 0.6 \cdot 0.5$	$= 0.09$
Nur B fällt aus:	$Y := \overline{A} \cap B \cap \overline{C}$,	$\mathbf{P}(Y) = 0.7 \cdot 0.4 \cdot 0.5$	$= 0.14$
Nur C fällt aus:	$Z := \overline{A} \cap \overline{B} \cap C$,	$\mathbf{P}(Z) = 0.7 \cdot 0.6 \cdot 0.5$	$= 0.21$
Eins fällt aus:	$F_1 := X \sqcup Y \sqcup Z$,	$\mathbf{P}(F_1) = 0.09 + 0.14 + 0.21$	$= 0.44$

Für die bedingten Wahrscheinlichkeiten folgt somit:

$$\mathbf{P}(A|F_1) = \frac{\mathbf{P}(A \cap F_1)}{\mathbf{P}(F_1)} = \frac{\mathbf{P}(X)}{\mathbf{P}(F_1)} = \frac{0.09}{0.44} \approx 0.205$$

$$\mathbf{P}(B|F_1) = \frac{\mathbf{P}(B \cap F_1)}{\mathbf{P}(F_1)} = \frac{\mathbf{P}(Y)}{\mathbf{P}(F_1)} = \frac{0.14}{0.44} \approx 0.318$$

$$\mathbf{P}(C|F_1) = \frac{\mathbf{P}(C \cap F_1)}{\mathbf{P}(F_1)} = \frac{\mathbf{P}(Z)}{\mathbf{P}(F_1)} = \frac{0.21}{0.44} \approx 0.477$$

☺ Plausibilitätsprüfung: Für WMaß gilt $0.205 + 0.318 + 0.477 = 1$.

Ausfallwahrscheinlichkeit: Welcome to the machine!

(3) Wir konstruieren explizit einen geeigneten WRaum $(\Omega, \mathbf{P})$.

Mögliches Modell: $\Omega = \{0,1\}^3$ mit $0 =$ „fehlerfrei“ und $1 =$ „fällt aus“.
Die zugehörigen Wkten erhalten wir dank Unabhängigkeit:

$$\mathbf{P}(\{111\}) = a \cdot b \cdot c = 0.06, \qquad \mathbf{P}(\{110\}) = a \cdot b \cdot \overline{c} = 0.06,$$
$$\mathbf{P}(\{101\}) = a \cdot \overline{b} \cdot c = 0.09, \qquad \mathbf{P}(\{100\}) = a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = 0.09,$$
$$\mathbf{P}(\{011\}) = \overline{a} \cdot b \cdot c = 0.14, \qquad \mathbf{P}(\{010\}) = \overline{a} \cdot b \cdot \overline{c} = 0.14,$$
$$\mathbf{P}(\{001\}) = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot c = 0.21, \qquad \mathbf{P}(\{000\}) = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = 0.21$$

☺ Hiermit ist $(\Omega, \mathbf{P})$ tatsächlich ein WRaum, denn $\mathbf{P} \geq 0$ und $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.
Unsere Ereignisse sind $A = \{1??\} = \{100, 101, 110, 111\}$ und $B = \{?1?\}$ und $C = \{??1\}$ sowie komplementär $\overline{A} = \{0??\}$, $\overline{B} = \{?0?\}$, $\overline{C} = \{??0\}$.
Die zugehörigen Wkten erhalten wir jeweils durch Summation (T1D).
Ebenso $X = \{100\}$, $Y = \{010\}$, $Z = \{001\}$ und $F_1 = \{100, 010, 001\}$.

☺ Das explizite Modell (3) ist detailliert; das kann helfen. Oft genügt die implizite Schreibweise wie in (0–2); sie ist schnell und bequem.

⚠ Es liegt immer ein Modell zu Grunde; im Zweifel führt man es aus.

Mikrozensus: Familienbande

Laut Mikrozensus 2009 haben von ca. 12 Mio Haushalten mit Kindern (vereinfacht) etwa 52% ein Kind, 36% zwei Kinder, 9% drei Kinder, 2% vier Kinder, 1% fünf Kinder. (Weitere vernachlässigen wir hier.) Die Wkten von Mädchen und Jungen seien gleich und unabhängig.

Aufgabe: (1) Stimmt die Schlagzeile „Jedes zweite Kind ist Einzelkind“? Wie viele sind Einzelkinder? oder eins von $2, 3, 4, 5$ Geschwistern?

(2) Angenommen Sie haben später einmal drei Kinder. Mit welcher Wkt sind es zwei Mädchen und ein Junge?

(3) Angenommen Sie haben später einmal vier Kinder. Mit welcher Wkt sind es zwei Mädchen und zwei Jungs?

(4) Xanthia hat zwei Geschwister, dabei ist das ältere ein Mädchen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das andere Geschwist ein Junge?

(5) Yago hat zwei Geschwister, dabei (mindestens) eine Schwester. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das andere Geschwist ein Junge?

(6) Sie lernen zufällig Zé kennen, von dem Sie zunächst nichts wissen. Wie groß ist die Wkt, dass er (mindestens) eine Schwester hat?

Mikrozensus: Familienbande

Lösung: (1) Es gab $\frac{52}{100} \cdot 12\text{Mio} = 6\,240\,000$ Einzelkinder,
$2 \cdot \frac{36}{100} \cdot 12\text{Mio} = 8\,640\,000$ Kinder mit genau einem Geschwist,
$3 \cdot \frac{9}{100} \cdot 12\text{Mio} = 3\,240\,000$ Kinder mit genau zwei Geschwistern
$4 \cdot \frac{2}{100} \cdot 12\text{Mio} = 960\,000$ Kinder mit drei Geschwistern und
$5 \cdot \frac{1}{100} \cdot 12\text{Mio} = 600\,000$ Kinder mit vier Geschwistern.
Insgesamt sind das $19\,680\,000$ Kinder. Etwa jedes dritte ist Einzelkind.

☺ Die Zeitungsschlagzeile ist also falsch. Sie gründet, wie so oft, auf mangelnder Sachkenntnis. Man muss eine Statistik auch lesen können!

(2) In Geburtsreihenfolge: $\{\text{MMJ}, \text{MJM}, \text{JMM}\}$. Das sind drei von acht gleichwahrscheinlichen Möglichkeiten. Die Wkt beträgt $3/8 = 37.5\%$.

(3) Hier $\{\text{MMJJ}, \text{MJMJ}, \text{MJJM}, \text{JMMJ}, \text{JMJM}, \text{JJMM}\}$, also 6 von 16 gleichwahrscheinlichen Möglichkeiten. Die Wkt beträgt $6/16 = 37.5\%$.

☺ Diese beiden Fragen sind Spezialfälle der Binomialverteilung U3B.

(4) Das Geschlecht des jüngeren Geschwist ist unabhängig vom Geschlecht der älteren. Also ist die Wahrscheinlichkeit $1/2 = 50\%$.

Mikrozensus: Familienbande

(5) In Geburtsreihenfolge ist möglich: MM, MJ, JM, JJ.
Das Ereignis $A = \{$mindestens ein Bruder$\}$ hat Wkt $\mathbf{P}(A) = 3/4$.
Das Ereignis $B = \{$mindestens eine Schwester$\}$ hat Wkt $\mathbf{P}(B) = 3/4$.
Gefragt ist die Wkt $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A \cap B)/\mathbf{P}(B) = (1/2) \,/\, (3/4) = 2/3$.
Alternativ: Das entspricht zwei der drei Möglichkeiten MM, MJ, JM.

☺ Vergleichen Sie (4) und (5): Der Unterschied mag überraschen.

(6) Zé habe $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ Geschwister. Dann gilt:

$$\mathbf{P}\big(\text{ Zé hat keine Schwester } | \text{ Zé hat } n \text{ Geschwister }\big) = \frac{1}{2^n}$$

Als nächstes benötigen wir die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbf{P}\big(\text{ Zé hat } n \text{ Geschwister }\big) = \frac{\text{Anzahl der Kinder mit } n \text{ Geschwistern}}{\text{Gesamtzahl aller Kinder}}.$$

Aus dem Mikrozensus (1) berechnen wir (auf drei Nachkommastellen):

$n =$	0	1	2	3	4
$p_n \approx$	0.317	0.439	0.165	0.049	0.030

Mikrozensus: Familienbande

Damit finden wir schließlich die totale Gesamtwahrscheinlichkeit (T2B):

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\big(\text{ Zé hat keine Schwester }\big) \\
&= \sum_{n=0}^{4} \mathbf{P}\big(\text{ Zé hat } n \text{ Geschwister und keine Schwester }\big) \\
&= \sum_{n=0}^{4} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{P}\big(\text{ Zé hat } n \text{ Geschwister }\big) \\ \cdot\, \mathbf{P}\big(\text{ Zé hat keine Schwester } | \text{ Zé hat } n \text{ Geschwister }\big) \end{array} \right. \\
&= 0.317 \cdot 1 + 0.439 \cdot \frac{1}{2} + 0.165 \cdot \frac{1}{4} + 0.049 \cdot \frac{1}{8} + 0.030 \cdot \frac{1}{16} \approx 0.586
\end{aligned}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach das Komplement:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\big(\text{ Zé hat mindestens eine Schwester }\big) \\
&= 1 - \mathbf{P}\big(\text{ Zé hat keine Schwester }\big) \\
&\approx 1 - 0.586 = 0.414
\end{aligned}$$

☺ Mit den Mitteln dieses Kapitels verfügen Sie über eine bequeme Notation und präzise Formeln. Der Rest ist sorgfältiges Rechnen.

Glücksritter: Ursprünge der Stochastik im Würfelspiel

Chevalier de Meré (1607–1684) war ein berufsmäßiger Spieler und suchte hierzu Rat bei dem Mathematiker Blaise Pascal (1623–1662).

Speziell plagte ihn folgendes Problem. Beim Würfelspiel war er davon ausgegangen, dass folgende Ereignisse gleich wahrscheinlich seien:

A: Bei 4 Würfen eines Würfels tritt mindestens eine Sechs auf.
B: Bei 24 Würfen zweier Würfel tritt mind. eine Doppelsechs auf.

Er argumentierte ganz einfach und anschaulich so: Eine Doppelsechs ist 6 mal unwahrscheinlicher, dafür führt man 6 mal mehr Würfe aus, also sind beide gleich wahrscheinlich. Damit hatte er jedoch auf Dauer Geld verloren, was ihn recht wunderte – und vor allem sehr verdross.

Dieses praktische Problem wollte er nun mathematisch lösen.
Mit den Techniken dieses Kapitels gelingt Ihnen dies spielend!

Wissen macht Ah! Unwissen macht Aua! Unkenntnis führt zu Fehleinschätzung und – schlimmer noch – zu Fehlentscheidungen.

Die Mathematik bietet Ihnen hierzu extrem präzise Werkzeuge.
Hier macht das den Unterschied, wie in jeder ernsthaften Anwendung.

Glücksritter: Ursprünge der Stochastik im Würfelspiel

Aufgabe: Wie wahrscheinlich sind diese Ereignisse A und B?
Auf welches sollte unser Glücksritter demnach wetten?

Lösung: (A) Die Wahrscheinlichkeit, bei vier Würfen keine Sechs zu werfen ist $(\frac{5}{6})^4 = \frac{625}{1296} \approx 0.4823$. Bei vier Würfen mindestens eine Sechs zu werfen, hat somit die Gegenwahrscheinlichkeit $1 - 0.4823 \approx 0.5177$.

(B) Die Wahrscheinlichkeit, bei 24 Würfen keine Doppelsechs zu werfen ist $(\frac{35}{36})^{24} \approx 0.5086$. Bei 24 Würfen mindestens eine Doppelsechs zu werfen, hat somit die Gegenwahrscheinlichkeit $1 - 0.5086 \approx 0.4914$.

Tatsächlich ist das Ereignis A etwas wahrscheinlicher als B.
Der Chevalier de Meré sollte demnach auf Ereignis A wetten.

Der kleine Unterschied von etwa 2.6% fällt nicht sofort auf.
Bei häufiger Wiederholung fällt er jedoch spürbar ins Gewicht.
Für professionelle Spieler wie Meré ist genaues Wissen wertvoll.

Gleiches gilt für alle Prozesse, die häufig wiederholt werden,
und deren genaue Berechnung / Bewertung daher wesentlich ist.
Bei geringer Wiederholung hingegen verschwimmt die Trennschärfe.

Chancengleichheit: Wie fair ist ein fairer Würfel?

T419
Übung

Bei einem fairen Würfel sind alle sechs Ergebnisse $1, 2, 3, 4, 5, 6$ gleich wahrscheinlich. Manche verstehen „fair“ wesentlich strenger so, dass bei sechsmaligem Würfeln jedes der möglichen Ergebnisse einmal auftritt.

Aufgabe: (1) Warum ist das keine vernünftige Definition von „fair"?
(2) Wie wahrscheinlich ist das? Was sagt Ihre Intuition? Rechnung?
(3) Können Sie dennoch eine realistische Vorhersage machen?

Lösung: (1) Der Würfel müsste wissen, was er noch würfeln darf. Insbesondere beim letzten Wurf wäre er festgelegt und nicht zufällig!

(2) Es gibt 6^6 Möglichkeiten (unter Beachtung der Reihenfolge). Alle sind gleich wahrscheinlich. Darunter sind $6!$ Möglichkeiten, bei denen jede der Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6$ genau einmal vorkommt. Die Wahrscheinscheinlichkeit ist also $6!/6^6 = 720/46656 \approx 0.015$. Das ist unwahrscheinlich und tritt nur etwa in jeder 65. Serie auf.

(3) Das Gesetz der großen Zahlen (T3J) garantiert: Bei unabhängiger Wiederholung nähern sich die relativen Häufigkeiten den Wkten, hier also $1/6$. Sechsmalige Wiederholung ist aber noch keine große Zahl.

Efrons intransitive Würfel: Welcher ist der beste?

T420
Übung

Aufgabe: Der Statistiker Bradley Efron erfand **intransitive Würfel**:

Alice

$$
\begin{aligned}
A &: 5,5,5,1,1,1 &\Longrightarrow\quad \mathbf{E}(A) &= 9/3\\
B &: 6,6,2,2,2,2 &\Longrightarrow\quad \mathbf{E}(B) &= 10/3\\
C &: 3,3,3,3,3,3 &\Longrightarrow\quad \mathbf{E}(C) &= 9/3\\
D &: 4,4,4,4,0,0 &\Longrightarrow\quad \mathbf{E}(D) &= 8/3
\end{aligned}
$$

Bob

Je zwei Würfel treten gegeneinander an, z.B. A gegen B. Wie groß sind die Gewinnwkten $\mathbf{P}(A > B)$ etc.? Welcher Würfel ist dabei der beste? Wie beschreiben Sie diese Situation präzise durch Zufallsvariablen?

Lösung: Unabhängigkeit! Abzählen aller Gewinnkombinationen ergibt:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(A > B) &= 12/36 = 1/3, & \mathbf{P}(B > C) &= 12/36 = 1/3,\\
\mathbf{P}(C > D) &= 12/36 = 1/3, & \mathbf{P}(D > A) &= 12/36 = 1/3,\\
\mathbf{P}(A > C) &= 18/36 = 1/2, & \mathbf{P}(B > D) &= 20/36 = 5/9.
\end{aligned}
$$

Es gibt keinen „besten“ Würfel: Jeder wird vom nächsten geschlagen!

☺ **Penney's Game**: Intransitivität entsteht auch in zufälligen 0-1-Folgen beim Wettrennen von je zwei der acht Tripel: Wer schlägt hier wen?

Die geometrische Verteilung $\mathrm{G}(q)$: Warten auf Godot

Satz T4A: geometrische Verteilung

Wir wiederholen ein Zufallsexperiment mit Misserfolgswkt $0 \le q < 1$ unabhängig so lange, bis im n-ten Versuch der erste Erfolg eintritt.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Wartezeit X ist gegeben durch

$$p : \mathbb{N}_{\ge 1} \to [0,1] : n \mapsto p(n) = q^{n-1}(1-q).$$

Dies nennen wir die **geometrische Verteilung** $\mathrm{G}(q)$, geschrieben

$$X \sim \mathrm{G}(q).$$

Die mittlere Wartezeit bis zum ersten Erfolg und ihre Varianz sind

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} n\, p(n) = \frac{1}{1-q} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{V}[X] = \frac{q}{(1-q)^2}.$$

Beispiele: Lebensdauer eines Geräts, Wartezeit bis zum Ausfall, Würfeln bis die Sechs kommt beim Spiel *Mensch ärgere dich nicht*, Wartezeit auf den Jackpot beim Lotto oder ähnlichen Spielen. U416

Erwartung der geometrischen Verteilung

Aufgabe: (0) Warum ist $\mathrm{G}(q)$ tatsächlich eine WVerteilung? Berechnen Sie hierzu (1) die Erwartung und (2) die Varianz.

Lösung: (0) Zwei Eigenschaften sind zu prüfen: Es gilt $p(n) \ge 0$ und

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(n) = (1-q)\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} q^{n} = (1-q)\cdot\frac{1}{1-q} = 1.$$

(1) Wir berechnen zunächst den Erwartungswert:

$$\mathbf{E}\big[X\big] = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathbf{P}(X{=}n) = (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} n\,q^{n-1} = (1-q)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}q^n$$

$$= (1-q)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\Big[\sum_{n=0}^{\infty} q^n\Big] = (1-q)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\Big[\frac{1}{1-q}\Big] = (1-q)\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{1-q}$$

☺ Der geometrischen Reihe sei Dank! Hier hilft der Ableitungstrick: Die Rechenregeln für Reihen kennen und nutzen Sie seit der HM2.

☺ Das Ergebnis ist bemerkenswert: Die Wartezeit kann beliebig groß werden, aber ihre Erwartung ist endlich, da die Wkt schnell sinkt mit q^n.

Varianz der geometrischen Verteilung

(2) Ebenso berechnen wir $\mathbf{E}[X^2]$, dazu zunächst $\mathbf{E}[X(X-1)]$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\big[X(X-1)\big] &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\,\mathbf{P}(X{=}n) &&= (1-q)q\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)q^{n-2} \\
&= (1-q)q\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}q^2}q^n &&= (1-q)q\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}q^2}\Big[\sum_{n=0}^{\infty} q^n\Big] \\
&= (1-q)q\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}q^2}\Big[\frac{1}{1-q}\Big] &&= (1-q)q\frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2q}{(1-q)^2}
\end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir schließlich die ersehnte Varianz:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}\big[X\big] &= \mathbf{E}\big[X^2\big] - \mathbf{E}\big[X\big]^2 = \mathbf{E}\big[X(X-1)\big] + \mathbf{E}\big[X\big] - \mathbf{E}\big[X\big]^2 \\
&= \frac{2q^2}{(1-q)^2} + \frac{1}{1-q} - \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{q}{(1-q)^2}
\end{aligned}$$

☺ Die Rechnung ist trickreich, aber jeder einzelne Schritt ist leicht: Für Reihen kennen Sie alle nötigen Rechenregeln aus der HM2.

☺ Auch hier hilft erneut der Ableitungstrick: Sie nutzen gewinnbringend die allgegenwärtigen, extrem effizienten Rechenregeln für Potenzreihen!

Sammelbilderproblem / *coupon collector's problem*

Aufgabe: Jeder Bestellung liegt (unabhängig, gleichverteilt) eines von insgesamt n Sammelbildern bei. Wann ist Ihre Sammlung vollständig?

Lösung: Die Wartezeit T_k von k bis $k+1$ Bildern ist geometrisch verteilt mit Misserfolgswkt $q_k = k/n$, also Erfolgswkt $p_k = 1 - q_k = (n-k)/n$, Erwartung $\mu_k = 1/p_k = n/(n-k)$ und Varianz $\sigma_k^2 = (1-p_k)/p_k^2$. T421
Für die Gesamtwartezeit $T = T_0 + \ldots + T_{n-1}$ erwarten wir demnach

$$\mathbf{E}(T) = \textstyle\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{E}(T_k) = \frac{n}{n} + \frac{n}{n-1} + \ldots + \frac{n}{1} = n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} = n\cdot H_n,$$

mit der harmonischen Reihe $H_n \gtrapprox \ln n$. B302 Dank Unabhängigkeit gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(T) &= \textstyle\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{V}(T_k) = \sum_{k=0}^{n-1} p_k^{-2} - p_k^{-1} \\
&= \big(\tfrac{n^2}{n^2} + \tfrac{n^2}{(n-1)^2} + \ldots + \tfrac{n^2}{1^2}\big) - \big(\tfrac{n}{n} + \tfrac{n}{n-1} + \ldots + \tfrac{n}{1}\big),
\end{aligned}$$

also große Varianz $\mathbf{V}(T) \lessapprox n^2\pi^2/6 - n\ln n$, siehe Basler Problem. I324
Die Erwartung ist erfreulich klein, die Varianz jedoch erschreckend groß.

n	2	3	6	10	100	1000	10^6	10^9
$\mathbf{E}(T)$	3	5.5	14.7	≈ 29.3	≈ 519	≈ 7486	$1.4\cdot 10^7$	$2.1\cdot 10^{10}$

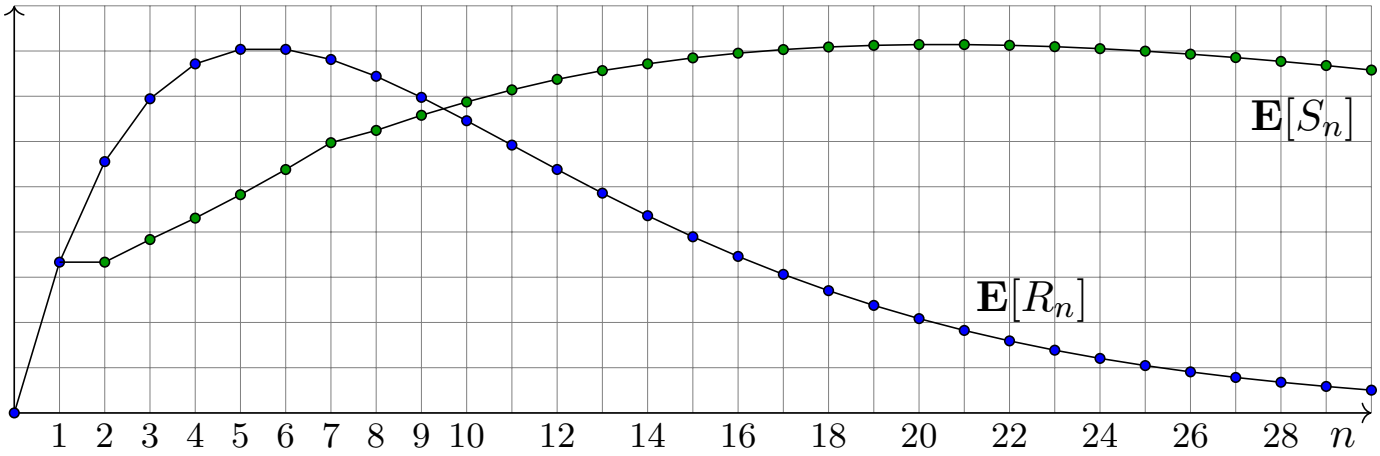
Stoppzeiten: Würfeln bis die Eins kommt

Beim Würfeln werden Augenzahlen addiert bis der Spieler aufhört; würfelt er jedoch eine Eins, so endet sein Spiel mit Totalverlust/Ruin.

Die Spielleiterin zahlt die erreichte Augensumme in Euro, verlangt aber 10€ Einsatz. Wie spielen Sie optimal? Können Sie Profit generieren?

Aufgabe: Sie nutzen die Strategie R_n: „Spiele n Runden (oder Ruin).“
(1) Welchen Gewinn erwarten Sie? Welche n maximieren den Gewinn?

Lösung: (1) Bei n Würfen erwarten wir den Gewinn $\mathbf{E}[R_n] = 4n(\frac{5}{6})^n$.
Bei $n \in \{5, 6\}$ erreichen wir das Maximum $4 \cdot 5(\frac{5}{6})^5 = 4 \cdot 6(\frac{5}{6})^6 \approx 8.038$.



Stoppzeiten: Würfeln bis die Eins kommt

Die Erwartung $\mathbf{E}[R_5] \approx 8$ ist noch zu gering. Gibt es bessere Strategien? Angenommen, im laufenden Spiel beträgt Ihre aktuelle Augensumme s. Sollten Sie noch einen weiteren Zug wagen oder besser jetzt aufhören?

Aufgabe: (2) Bis zu welcher Augensumme s lohnt sich ein weiterer Zug?

Lösung: (2) Nach einem weiteren Zug ist die erwartete Augensumme

$$e(s) = \frac{0 + (s{+}2) + (s{+}3) + (s{+}4) + (s{+}5) + (s{+}6)}{6} = \frac{5s + 20}{6}$$

Der nächste Zug ist genau dann profitabel (im Mittel), wenn $e(s) > s$ gilt:

$$s \overset{!}{<} \frac{5s + 20}{6} \quad \Longleftrightarrow \quad s < 20$$

Das legt folgende Strategie nahe: Sie würfeln bis Sie Augensumme ≥ 20 erreichen (oder aber eine Eins zuvor Ihr Spiel mit Totalverlust ruiniert.)

Ist diese flexible Strategie wirklich besser als R_n mit fest 5 Runden? Können Sie damit sogar die 10€ Einsatz übertreffen und profitieren? Dazu müssen wir die Erwartungswerte berechnen und vergleichen!

Stoppzeiten: Würfeln bis die Eins kommt

Die Strategie S_n lautet: „Spiele bis mindestens n Punkte (oder Ruin).“
Anders als bei R_n nutzen Sie Informationen des bisherigen Verlaufs!

Aufgabe: (3) Welches Ergebnis liefert die Strategie S_n mit welcher Wkt?
(4) Welche der Strategien in $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erwartet den höchsten Gewinn?

Lösung: (3) Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Die Strategie S_n liefert die Ergebnisse $0, n, n{+}1, n{+}2, n{+}3, n{+}4, n{+}5$ mit Wkten $a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n, g_n \in [0,1]$.
Für $n = 1$ sind diese Wkten offensichtlich $1/6, 0, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6$.

Rekursiv gilt dann $a_{n+1} = a_n + b_n/6$, $b_{n+1} = c_n$, $c_{n+1} = d_n + b_n/6$, $d_{n+1} = e_n + b_n/6$, $e_{n+1} = f_n + b_n/6$, $f_{n+1} = g_n + b_n/6$, $g_{n+1} = b_n/6$.
Mit einer Tabellenkalkulation erhalten wir mühelos die folgenden Werte;
Sie finden dieses Beispiel unter `eiserm.de/lehre/HM3/Wuerfeln.ods`.

(4) Der erwartete Gewinn für die Strategie S_n ist gegeben durch
$\mathbf{E}[S_n] = nb_n + (n{+}1)c_n + (n{+}2)d_n + (n{+}3)e_n + (n{+}4)f_n + (n{+}5)g_n$.

Das Maximum $\mathbf{E}[S_{20}] = \mathbf{E}[S_{21}] \approx 8.142$ liegt nur ein klein Wenig höher als zuvor $\mathbf{E}[R_5] = \mathbf{E}[R_6] \approx 8.038$ bei fester Rundenzahl. Immerhin!
Für 10€ Einsatz genügt das nicht. Können Sie mehr rausholen?

Stoppzeiten: Würfeln bis die Eins kommt

S_n	0	n	$n{+}1$	$n{+}2$	$n{+}3$	$n{+}4$	$n{+}5$	$\mathbf{E}[S_n]$
1	.167	.000	.167	.167	.167	.167	.167	3.333
2	.167	.167	.167	.167	.167	.167	.000	3.333
3	.194	.167	.194	.194	.194	.028	.028	3.833
4	.222	.194	.222	.222	.056	.056	.028	4.306
5	.255	.222	.255	.088	.088	.060	.032	4.824
6	.292	.255	.125	.125	.097	.069	.037	5.380
7	.334	.125	.167	.140	.112	.079	.042	5.974
8	.355	.167	.160	.133	.100	.063	.021	6.245
9	.383	.160	.161	.128	.091	.049	.028	6.579
10	.410	.161	.155	.118	.075	.055	.027	6.874
11	.436	.155	.145	.102	.081	.054	.027	7.141
12	.462	.145	.128	.107	.079	.053	.026	7.374
13	.486	.128	.131	.103	.077	.050	.024	7.567
14	.508	.131	.125	.098	.071	.045	.021	7.716
15	.530	.125	.120	.093	.067	.043	.022	7.848
16	.550	.120	.114	.088	.064	.043	.021	7.952
17	.570	.114	.108	.084	.063	.041	.020	8.032
18	.589	.108	.103	.082	.060	.039	.019	8.089
19	.607	.103	.100	.078	.057	.037	.018	8.125
20	.625	.100	.095	.074	.054	.035	.017	8.142
21	.641	.095	.091	.071	.052	.034	.017	8.142
22	.657	.091	.087	.068	.050	.032	.016	8.126
23	.672	.087	.083	.065	.048	.031	.015	8.096
24	.687	.083	.079	.062	.045	.030	.014	8.052
25	.700	.079	.076	.059	.043	.028	.014	7.997

S_n	0	n	$n{+}1$	$n{+}2$	$n{+}3$	$n{+}4$	$n{+}5$	$\mathbf{E}[S_n]$
26	.714	.076	.072	.057	.041	.027	.013	7.931
27	.726	.072	.069	.054	.040	.026	.013	7.855
28	.738	.069	.066	.052	.038	.025	.012	7.771
29	.750	.066	.063	.049	.036	.024	.012	7.679
30	.761	.063	.060	.047	.035	.023	.011	7.579
31	.771	.060	.058	.045	.033	.022	.011	7.474
32	.781	.058	.055	.043	.032	.021	.010	7.363
33	.791	.055	.053	.041	.030	.020	.010	7.248
34	.800	.053	.050	.039	.029	.019	.009	7.128
35	.809	.050	.048	.038	.028	.018	.009	7.005
36	.818	.048	.046	.036	.026	.017	.008	6.878
37	.826	.046	.044	.034	.025	.016	.008	6.750
38	.833	.044	.042	.033	.024	.016	.008	6.619
39	.841	.042	.040	.031	.023	.015	.007	6.487
40	.848	.040	.039	.030	.022	.014	.007	6.353
41	.854	.039	.037	.029	.021	.014	.007	6.219
42	.861	.037	.035	.028	.020	.013	.006	6.084
43	.867	.035	.034	.026	.019	.013	.006	5.949
44	.873	.034	.032	.025	.018	.012	.006	5.814
45	.878	.032	.031	.024	.018	.011	.006	5.680
46	.884	.031	.029	.023	.017	.011	.005	5.546
47	.889	.029	.028	.022	.016	.010	.005	5.412
48	.894	.028	.027	.021	.015	.010	.005	5.280
49	.898	.027	.026	.020	.015	.010	.005	5.149
50	.903	.026	.025	.019	.014	.009	.004	5.019

Nun zu etwas völlig anderem. . .

Es ist überaus bemerkenswert, dass wir mit Wkten rechnen können! Anfangs erschien der Zufall allzu vage, unfassbar, unberechenbar. Doch auch der Zufall folgt gewissen Gesetzen und Rechenregeln.

Mit den Mitteln dieses Kapitels verfügen Sie über eine bequeme und präzise Notation zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten. Insbesondere die Formel von Bayes ist sehr einfach, aber nützlich: Sie klärt viele Rechnungen, die ansonsten undurchdringlich blieben.

Sie können dies in den unterschiedlichsten Situationen einsetzen: Konfidenzintervalle T337 W201, Testverfahren T407, Partnerwahl T437, Bewerbung T439, Glücksspiel T441 T445 oder Googles PageRank T453. Versuchen wir es mal mit den großen Fragen der Menschheit. . .

There is a theory which states that if ever anybody discovers exactly what the Universe is for and why it is here, it will instantly disappear and be replaced by something even more bizarre and inexplicable.

There is another theory which states that this has already happened.

Douglas Adams (1952–2001)

Man sieht nur mit der Mathematik gut.
Das Wesentliche ist für die Augen unsichtbar.

frei nach Antoine de Saint-Exupéry (1900–1944)

Sind Sie das einzige denkende Wesen?

T431
Ergänzung

Als Kopfnuss hier eine erstaunliche Rechnung, die nicht ganz ernst gemeint ist. (Oder doch?) Es gibt Menschen, die glauben, sie seien das einzige denkende Wesen im Universum. Für den Fall, dass auch Sie sich diese Frage stellen, schlage ich Ihnen ein stochastisches Argument vor.

(a) Angenommen, es gibt genau X **denkende Wesen** im Universum. Diese Anzahl X ist Ihnen nicht bekannt, Sie nehmen deshalb die Gleichverteilung auf der Menge $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ an, etwa $n < \mathrm{e}^{100}$.

Wir wollen nur annehmen, dass n sehr groß ist, aber doch kleiner als die geschätzten 10^{80} Elementarteilchen im Universum. (Paralleluniversen werden nicht mitgerechnet, wie auch?)

(b) Angenommen, **nur eines** der Wesen hat zufällig die Erleuchtung: *Ich denke, also bin ich... Bin ich das einzige denkende Wesen?*

Das ist von allen Annahmen die willkürlichste und rechnerisch auch die einschneidendste. Andererseits: Wer sich wirklich fragt, ob er das einzige denkende Wesen im Universum ist, der wird auch vor dieser Annahme der Einzigkeit nicht zurückschrecken. Also sei's drum.

Aufgabe: Angenommen, dieses denkende Wesen sind zufällig Sie. Mit welcher Wahrscheinlichkeit können Sie nun zurückschließen, dass Sie das einzige denkende Wesen im Universum sind?

Sind Sie das einzige denkende Wesen?

T432
Ergänzung

Lösung: Nach Annahme der Gleichverteilung (a) wissen Sie

$$\mathbf{P}(X{=}1) \;=\; \mathbf{P}(X{=}2) \;=\; \ldots \;=\; \mathbf{P}(X{=}n) \;=\; \frac{1}{n}.$$

Ihre Erleuchtung E hat gemäß (b) die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbf{P}(E|X{=}k) = \frac{1}{k}.$$

Ihre Einzigkeit $\{X{=}1\}$ hat nach Bayes die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbf{P}(X{=}1|E) \;=\; \frac{\mathbf{P}(E|X{=}1)\,\mathbf{P}(X{=}1)}{\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(E|X{=}k)\,\mathbf{P}(X{=}k)}$$

$$= \frac{\frac{1}{n}}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{n}} \;=\; \frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}} \;\geq\; \frac{1}{1+\ln n} \;>\; \frac{1}{100} \;=\; 1\%$$

Zur harmonischen Reihe siehe B302. Unter den genannten Annahmen (a) und (b) gibt es also eine nicht zu vernachlässigende Wahrscheinlichkeit von mindestens 1%, dass Sie das einzige denkende Wesen im Universum sind. Wie gut, dass wir das klären konnten. Ich gratuliere!

Objektive und subjektive Wahrscheinlichkeit

Ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbf{P})$ ist ein **theoretisches Modell**: Es dient zur Grundlegung und Formulierung unserer Berechnungen. Was sagt es über die **Wirklichkeit**? Was bedeuten Aussagen wie: „Das Ereignis A tritt mit Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}(A)$ ein“?

Objektive Interpretation: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist die relative Häufigkeit bei **beliebig wiederholbaren Experimenten**. Sie kann empirisch überprüft werden, wir können sie messen! T345

- Bei einem fairen Würfel erscheinen gerade Zahlen mit Wkt $1/2$.
- Bei unserem gezinkten Würfel haben gerade Zahlen Wkt 53%.
- Die Wkt für 6 Richtige beim Lotto ist Eins zu $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$.

Subjektive Interpretation: Die Wahrscheinlichkeit drückt den Grad unseres Unwissens aus, mithin die „**gefühlte Wahrscheinlichkeit**“. Dies hat nur einen vagen Sinn und ist empirisch kaum überprüfbar.

- Morgen beträgt die Regenwahrscheinlichkeit 70%.
- Die Klausur werde ich mit 90% Wahrscheinlichkeit bestehen.
- Mit Wkt 1% bin ich das einzige denkende Wesen im Universum.

Objektive und subjektive Wahrscheinlichkeit

Die objektive Sichtweise heißt auch **frequentistische Interpretation**: Wir betrachten nur Experimente, die wir „beliebig oft“ unter den „gleichen Bedingungen“ wiederholen können. Die Wkt eines Ereignisses ist der Grenzwert der relativen Häufigkeit bei „sehr vielen“ Wiederholungen.

Damit erscheint die Wkt als eine **physikalische Größe**, die zwar Messfehlern unterliegt, die wir aber beliebig genau messen können. Diese Interpretation ist inspiriert durch physikalische Laborexperimente, darunter auch Glücksspiele. Sie versagt allerdings bei Experimenten, die wir nicht wiederholen können, etwa gar nicht oder nicht oft genug.

Die subjektive Sichtweise heißt auch **Bayes’sche Interpretation**: Die Wkt $\mathbf{P}(A) \in [0,1]$ eines Ereignisses A drückt aus, wie überzeugt der subjektive Beobachter vom Eintreten ist. In gewissen Grenzen können wir auch dies recht gut messen: „Wie viel bist du bereit zu wetten?“

Damit erscheint die Wkt als eine **psychologische Größe**; das ist für viele Anwendungen pragmatisch, aber leider vollkommen subjektiv. Oft werden die objektive und die subjektive Interpretation vermischt!

Was ist eigentlich Wahrscheinlichkeit? `youtu.be/BYUKbEXXmG4`

Objektive und subjektive Wahrscheinlichkeit

Beispiel: Sie kaufen ein Los mit Gewinnwkt 1:14Mio und reisen damit in die Berge zum Wandern. Die Ziehung findet statt, doch fernab der Zivilisation wissen Sie davon nichts. Wie groß ist jetzt Ihre Gewinnwkt? Die Aussage „Sie haben gewonnen.“ ist nun entweder wahr oder falsch, und somit keine Frage der Wahrscheinlichkeit mehr! Oder etwa doch?

Beispiel: Diese Situation können wir hier vor Ort sofort nachstellen: Die Spielleiterin wirft eine faire Münze, hält diese aber noch verdeckt. Wie stehen jetzt Ihre Gewinnchancen? objektiv? subjektiv?

Nach dem Ereignis hat es keinen Sinn, nach Wahrscheinlichkeit zu fragen.
Albert Einstein (1879–1955)

Beispiel: Drei gleich gute Studenten A, B, C schreiben eine Klausur. Vorläufiges Ergebnis: Zwei der drei haben die Bestnote Eins, doch die Einzelnoten sind noch nicht bekannt. Student A bezirzt die Assistentin, ihm einen (anderen) Studenten zu nennen, der eine Eins hat, und nach einigem Zögern sagt sie: „C hat eine Eins.“ Daraufhin ist A sehr traurig, denn er fühlt seine Chance von $2/3$ auf $1/2$ gesunken. Zu Recht? T213

Objektive und subjektive Wahrscheinlichkeit

Diese grundlegenden Fragen sind nicht bloß spitzfindige Haarspalterei: Bei der Erklärung von **Konfidenzintervallen** geht es genau darum! Wissenschaft sucht objektive Aussagen und begründete Folgerungen. Äußerungen, die keine Prüfung erlauben, haben keinen objektiven Sinn.

Das ist nicht nur nicht richtig, es ist nicht einmal falsch! [not even wrong]
Wolfgang Pauli (1900–1958)

Präzise Aussagen und rationales Entscheiden folgen strengen Regeln: Dies ist das übliche und bewährte Vorgehen der Naturwissenschaften!

Theorie: Die präzise Beschreibung des zugrundegelegten Modells dient der wissenschaftlichen Redlichkeit: Es enthält alle Annahmen und die festgelegten Wahlen, Parameter, Kalibrierungen etc. Alle Rechnungen bauen auf genau diesen Daten auf — und auf nichts weiter.

Empirie: Ob ein Modell zur Beschreibung der Realität geeignet ist, oder ob von zwei Modellen womöglich eines besser ist als das andere, lässt sich empirisch feststellen: Wir vergleichen hierzu die Vorhersagen und prüfen sie durch Experimente – stochastisch unabhängig wiederholt!

Was nützen dem Pfau seine Federn?

Pfauen-Männchen haben ein prachtvolles Gefieder. Für das Überleben ist es leider hinderlich: Tarnung, Flucht, Energie, … Warum lohnen sich dennoch lange Federn? Wozu dienen sie? Angenommen, es gebe „fitte“ und „unfitte“ Pfauen-Männchen. Letztere werden öfter von Raubtieren gefressen etc. Sowohl fitte als auch unfitte können kurze oder lange Federn haben. Die mit langen Federn werden aufgrund der genannten Nachteile jedenfalls öfter gefressen.

Eine Population von Pfauen-Männchen könnte etwa so aussehen:

Pfauen	fit	unfit
kurze Federn	40%	20%
lange Federn	30%	10%

Das Pfauen-Weibchen sieht nicht die Fitness, sondern nur die Federn!

Aufgabe: Welche Strategie der Partnerwahl ist für sie vorteilhaft?

- Federlänge ignorieren: Trefferquote $70 : 30$ (möglich)
- Kurze Federn bevorzugen: Trefferquote $40 : 20$ (schlechter)
- Lange Federn bevorzugen: Trefferquote $30 : 10$ (besser!)

☺ Trotz aller Nachteile zahlen sich lange Federn doch aus!

Visuelles Ornament und sexuelle Selektion

Das auffällige Gefieder der Pfauen-Männchen wird als *visuelles Ornament* bezeichnet. Die lange Schleppe ist zwar hinderlich und vermindert das Flugvermögen, paradoxerweise kann es dennoch ein Indikator für genetische Fitness sein und Pfauen-Weibchen als Indiz für gesunden Nachwuchs dienen. (Siehe unser Zahlenbeispiel.) Wäre es nicht effizienter, Pfauen würden diesen Aufwand sparen und die Energie in bessere Überlebensstrategien stecken? Auf den ersten Blick besehen ja. Aber für ein Weibchen gibt es keine bessere Wahl: Es sieht nicht die tatsächliche Fitness, sondern nur das *Signal* der Federn. Auf Grundlage dieser unvollständigen Information muss es sich für die langen Federn entscheiden, selbst wenn das Überlebensnachteile mit sich bringt, auch für seinen eigenen Nachwuchs! Damit bleibt auch den Männchen keine Wahl, lange Federn werden zum Must-Have. Diese *sexuelle Selektion* ist der Schlussstein in Darwins Evolutionstheorie.

Auch Menschen ist dieses Phänomen vertraut: Manche Männer beeindrucken Frauen, indem sie Geld verschwenden oder andere verrückte Dinge tun. Wäre dieses Verhalten insgesamt nachteilig, so würde man vermuten, dass es auf lange Sicht ausstirbt. Das ist jedoch nicht der Fall, da Frauen dieses Verhalten als Indikator für (gesellschaftlichen) Erfolg interpretieren können und eventuell bei der Partnerwahl belohnen. (All das funktioniert selbstverständlich auch umgekehrt…)

Dieses Phänomen wird *Handicap-Prinzip* genannt. Beispiele gibt es viele: Produktwerbung verschwendet Geld, wird aber vom Käufer belohnt. Manch akademischer Titel ist scheinbar Zeitverschwendung, wird aber vom Arbeitgeber honoriert. Auch Ihr Studium ist nur teilweise für Ihren späteren Beruf relevant, und dennoch wird diese Anstrengung meist belohnt. Zum Beispiel gelten Leistungen in Mathematik als zuverlässiger Indikator für intellektuelle Leistungsfähigkeit. Dazu diskutieren wir den Arbeitsmarkt, extrem vereinfacht, in folgendem Gedankenexperiment.

Kann ein unnützer Doktortitel doch nützlich sein?

T439

Eine Personalchefin sucht für eine Stelle einen Ingenieur (m/w/d).
Aus Erfahrung schätzt sie die allgemeine Bewerberlage wie folgt:

Bewerber	geeignet	ungeeignet
Diplom/Master	50%	25%
Promotion	20%	5%

Als individuelle Information hat sie zunächst nur den *Abschluss* laut Bewerbungsunterlagen.
Die eigentlich interessante Zielgröße der *tatsächlichen Eignung* kennt sie hingegen nicht.
Eine Promotion kostet Zeit und Mühe, bringt aber für *diese* Stelle keinen direkten Nutzen.

Aufgabe: Welche Strategie ist bei ihrer Auswahl vorteilhaft?

- Abschluss ignorieren: Trefferquote $70 : 30$ (möglich)
- Master einstellen: Trefferquote $50 : 25$ (schlechter)
- Doktor einstellen: Trefferquote $20 : 5$ (besser!)

☺ Trotz aller Nachteile kann sich eine Promotion also auszahlen
... selbst wenn sie für die eigentliche Tätigkeit nicht relevant ist!

⚠ Ineffizienz ist der Preis für unvollständige Information.

Bedingte Wkt: Vorurteil oder Gerechtigkeit?

T440
Erläuterung

Wir untersuchen hier zwei simple, aber frappierende Beispiele: Federn und Doktortitel.
Beide sind durchaus realistisch und handfeste Illustrationen für das Konzept der *bedingten Wahrscheinlichkeit*: Diese ist nicht nur eine schöne Theorie, sondern überall tägliche Praxis.

Die Argumente in unserer fiktiven Bewerbungssituation mögen manche für ungerecht halten.
In der Tat basieren Sie auf *Vorurteilen* der Arbeitgeberin – ein eher negativ besetzter Ausdruck, aber inhaltlich bedeutet es dasselbe wie bedingte Wahrscheinlichkeit: Sie nutzt ihre Erfahrung.
Unter den gegebenen spärlichen Informationen ist das Vorurteil nützlicher als gar kein Urteil.

Das Grundproblem: Die primäre Zielgröße „Eignung“ ist nicht direkt zugänglich.
Der sekundäre Faktor „Ornament“ ist eigentlich unwichtig, dafür aber leicht sichtbar.
In Ermangelung primärer Information muss man sich mit sekundärer Information begnügen.
Diese erhält dadurch eine größere Bedeutung als sie eigentlich haben sollte, und das wird als ineffizient oder ungerecht empfunden. Das ist der Preis für unvollständige Information!

Zur Beruhigung der Gemüter: Nichts hält die Arbeitgeberseite davon ab, über die erste grobe Vorinformation hinaus genauere Information zu gewinnen, zum Beispiel durch Gespräche, Tests, Assessment oder eine Probezeit. Genau das wird in der Praxis auch erfolgreich genutzt. Das ist der Vorteil, wenn man Information nicht nur *passiv* beobachtet, sondern *aktiv* herstellen kann.

Schließlich zur Ehrenrettung der Promotion, auch aus persönlicher Erfahrung: Viele Studierende empfinden große Begeisterung für ihr Fach. Dies kann sogar dazu führen, dass sie aus ehrlichem intrinsischem Interesse einer Frage auf den Grund gehen wollen und darüber sogar promovieren.
Das wird durch die obigen, allzu kühl berechnenden Argumente nicht in Zweifel gezogen!

Das Runde muss ins Eckige: Bayes beim Tischkicker

T441

Angenommen beim Tischkicker bis 10 zwischen den gleich starken Alice und Bob fallen die Tore zufällig $(50:50)$ und unabhängig voneinander.

Aufgabe: Wie stehen die Gewinnchancen bei $9:8$? bei $4:7$?

Lösung: Wahrscheinlichkeitstabelle für den Sieg von Alice beim Stand $a:b$.
Am oberen und linken Rand ist das Spiel beendet und die Wkt ist entweder 0 oder 1.
Im Inneren ist jeder Eintrag der Mittelwert aus dem linken und dem oberen Nachbarn.

$a:b$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
10		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
9	0.000	0.500	0.750	0.875	0.938	0.969	0.984	0.992	0.996	0.998	0.999
8	0.000	0.250	0.500	0.688	0.813	0.891	0.938	0.965	0.980	0.989	0.994
7	0.000	0.125	0.313	0.500	0.656	0.773	0.855	0.910	0.945	0.967	0.981
6	0.000	0.063	0.188	0.344	0.500	0.637	0.746	0.828	0.887	0.927	0.954
5	0.000	0.031	0.109	0.227	0.363	0.500	0.623	0.726	0.806	0.867	0.910
4	0.000	0.016	0.063	0.145	0.254	0.377	0.500	0.613	0.709	0.788	0.849
3	0.000	0.008	0.035	0.090	0.172	0.274	0.387	0.500	0.605	0.696	0.773
2	0.000	0.004	0.020	0.055	0.113	0.194	0.291	0.395	0.500	0.598	0.685
1	0.000	0.002	0.011	0.033	0.073	0.133	0.212	0.304	0.402	0.500	0.593
0	0.000	0.001	0.006	0.019	0.046	0.090	0.151	0.227	0.315	0.407	0.500

Das Runde muss ins Eckige: Bayes beim Tischkicker

T442
Übung

Ausführung: Wie kommt diese Rechnung zustande? Ganz einfach dank der Formel von Bayes! Beim Stand von $a:b$ gibt es zwei mögliche Fortgänge: Entweder es trifft Alice oder es trifft Bob. Wir entwickeln unsere Rechnung übersichtlich in einer Tabelle. Sei $A[a{:}b]$ das Ereignis „Alice gewinnt nach Stand $a:b$“. Dank Satz T2B gilt für die totale Wahrscheinlichkeit:

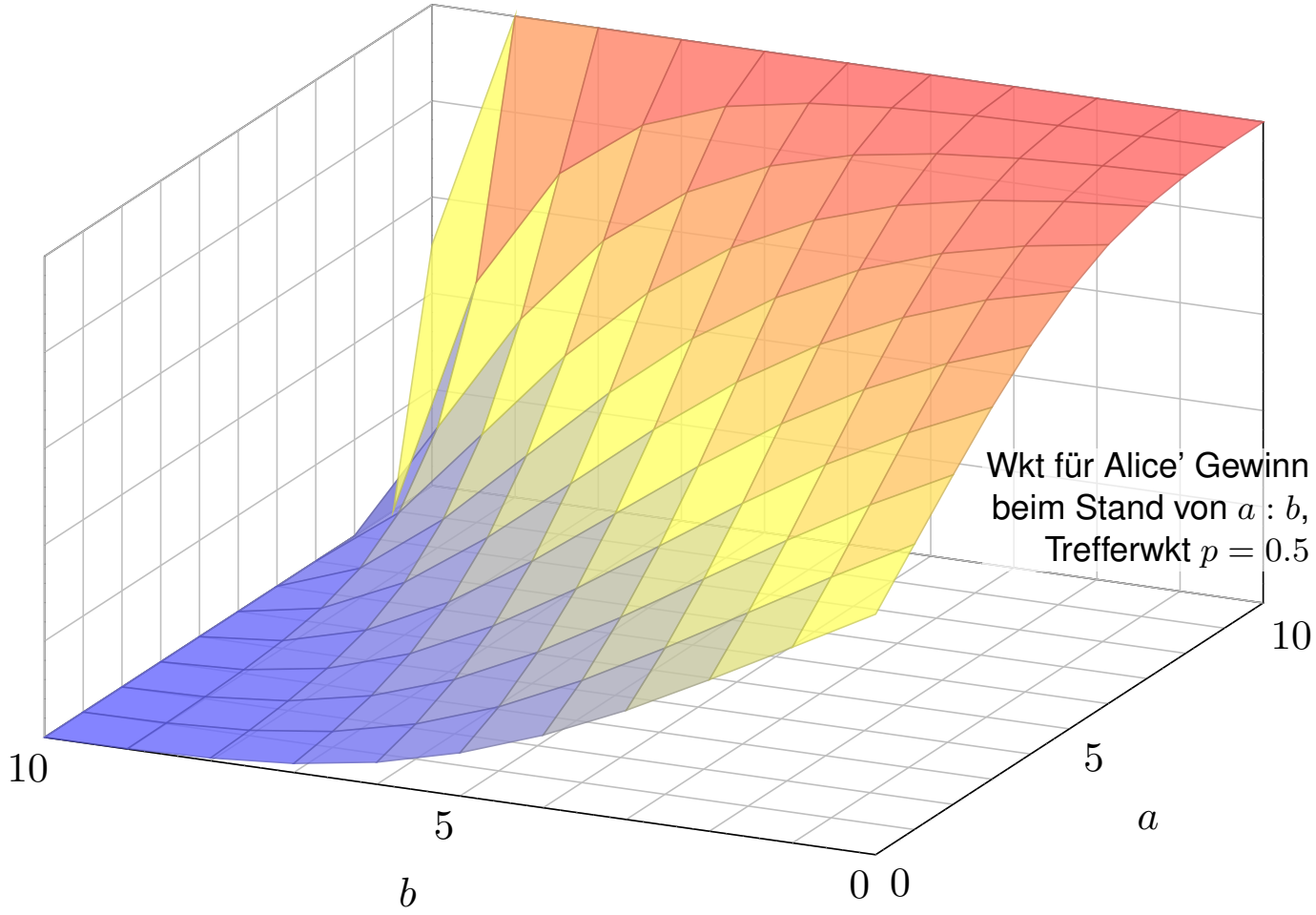
$$\begin{aligned}\mathbf{P}\big(A[a{:}b]\big) &= \mathbf{P}\big(A[a{:}b] \mid \text{Alice trifft}\big)\cdot\mathbf{P}\big(\text{Alice trifft}\big) + \mathbf{P}\big(A[a{:}b] \mid \text{Bob trifft}\big)\cdot\mathbf{P}\big(\text{Bob trifft}\big)\\ &= \mathbf{P}\big(A[a+1{:}b]\big)\cdot\mathbf{P}\big(\text{Alice trifft}\big) + \mathbf{P}\big(A[a{:}b+1]\big)\cdot\mathbf{P}\big(\text{Bob trifft}\big)\end{aligned}$$

☺ Mit dieser einfachen Rekursionsformel können Sie nun die gesamte Tabelle ausfüllen. Besonders bequem und automatisiert geht's mit einer Tabellenkalkulation, z.B. *LibreOffice*.

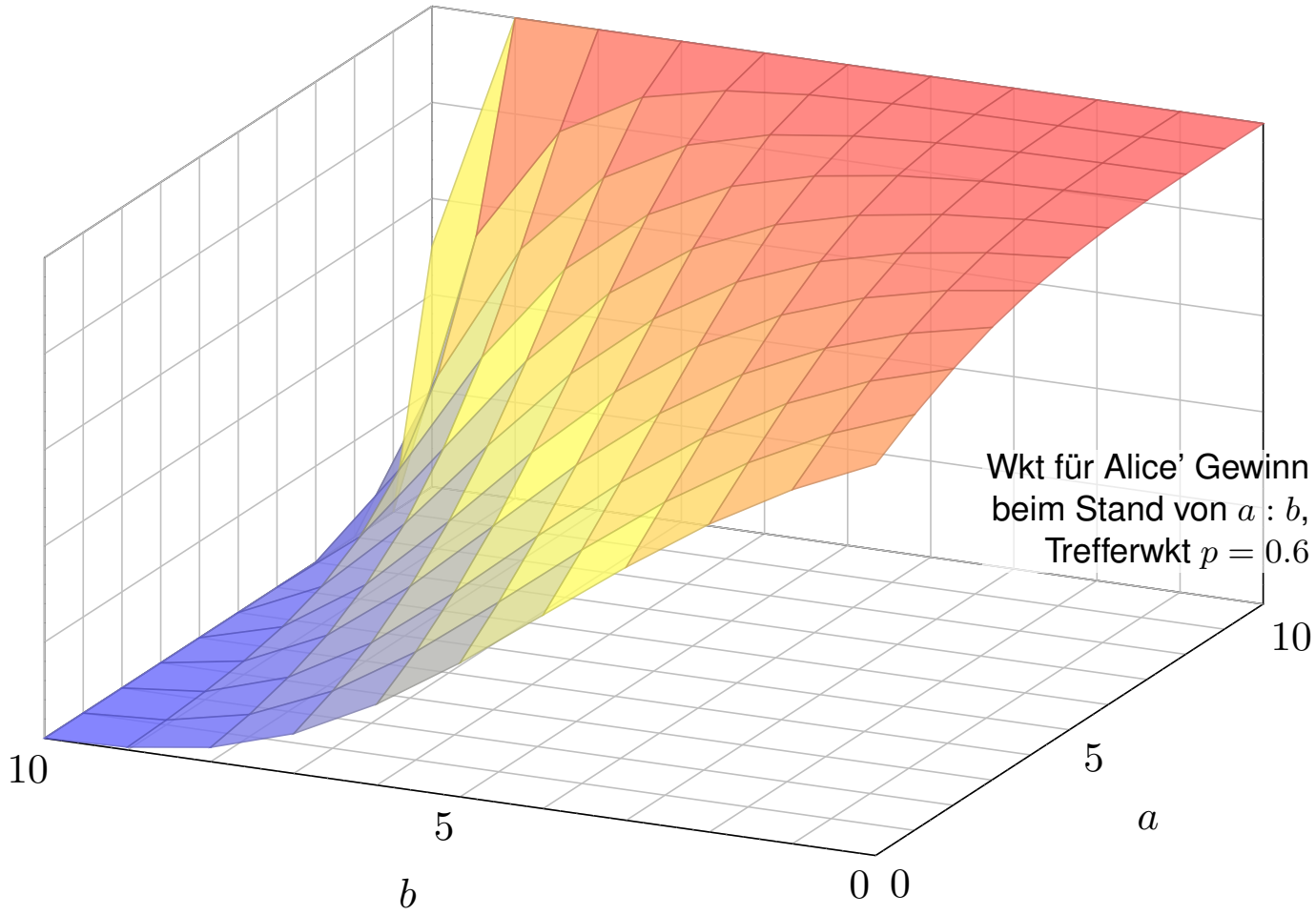
☺ Pascal lässt grüßen: Die n-te Diagonale der Tabelle entspricht der n-ten Zeile des Pascalschen Dreiecks (hier kumuliert und normiert). In unserer Tabelle versteckt sich die Binomialverteilung!

Geschichte: Mitte 1654 schrieb Blaise Pascal (1623–1662) an Pierre de Fermat (1607–1665) einen Brief, der berühmt wurde und als Geburtsurkunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung gilt. Pascal löste darin zwei konkrete Probleme zu Glücksspielen, zu denen ein Freund ihn um Rat gebeten hatte, der berufsmäßige Spieler Antoine Gombaud, Chevalier de Méré (1607–1684). Erstens eine Berechnung von Würfelwahrscheinlichkeiten. T417 Zweitens das Problem der gerechten Teilung bei vorzeitigem Spielabbruch. Was heißt hier „gerecht“? Pascal und Fermat wurden sich nach ausführlicher Diskussion einig, dass der Einsatz gemäß den Gewinnwkten aufgeteilt werden sollte. Das ist die obige Tabelle. Pascal konnte diese kombinatorisch berechnen dank dem von ihm zuvor entwickelten Pascalschen Dreieck für die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$.

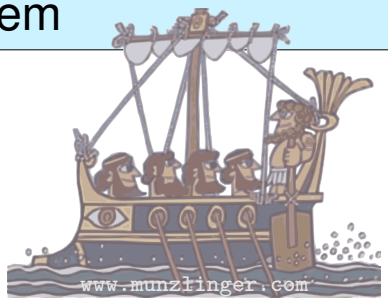
Das Runde muss ins Eckige: Bayes beim Tischkicker



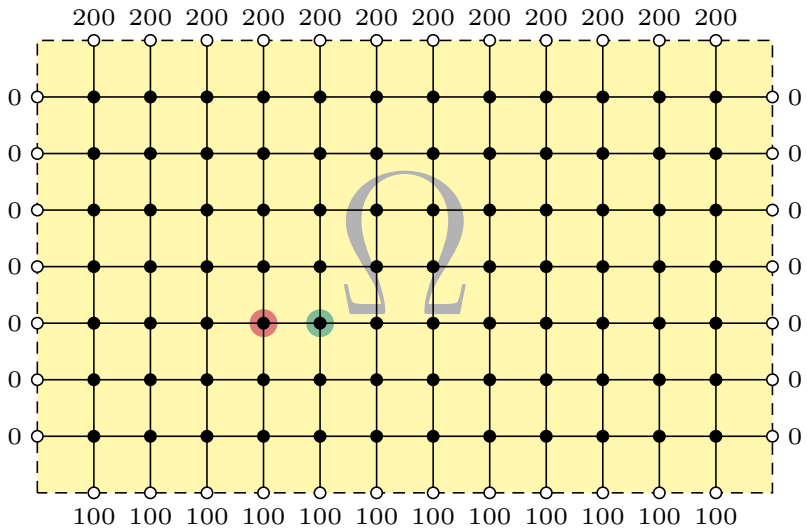
Das Runde muss ins Eckige: Bayes beim Tischkicker



Irrfahrten und Potentiale: das Dirichlet–Problem



Zufällige Irrfahrt auf einem Spielfeld $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$:



Sie ziehen mit Wkt $1/4$ nach links / rechts / oben / unten.

Das Spiel endet am Rand mit dem gezeigten Gewinn.

Für welche Startpunkte würden Sie 100 zahlen?

Aufgabe: (1) Wie groß ist die Gewinnerwartung $u(x,y)$ auf jedem Feld? Wo ist sie maximal? Ist die gesuchte Lösung $u:\Omega \to \mathbb{R}$ eindeutig? Wie berechnet man sie? möglichst effizient? näherungsweise?

☺ Kontext und Anwendung ändern sich, die Rechnung bleibt dieselbe! (2) Hooke: Netz aus Massen und Federn. (3) Kirchhoff: Spannung einer elektrischen Schaltung. (4) Fourier: diskrete Wärmeleitung / Diffusion.

Irrfahrten und Potentiale: das Dirichlet–Problem

Lösung: (1) Sei $u(x,y)$ die Gewinnerwartung auf dem Feld $(x,y) \in \Omega$. In jedem Randpunkt $(x,y) \in \partial\Omega$ ist der Gewinn $u(x,y)$ fest vorgegeben. In jedem inneren Punkt $(x,y) \in \Omega^\circ$ gilt die **Mittelwerteigenschaft**:

$$\boxed{u(x,y) = \tfrac{1}{4}u(x{-}1,y) + \tfrac{1}{4}u(x{+}1,y) + \tfrac{1}{4}u(x,y{-}1) + \tfrac{1}{4}u(x,y{+}1)}$$

Eine solche diskrete Funktion $u:\mathbb{Z}^2 \supseteq \Omega \to \mathbb{R}$ nennen wir **harmonisch**.

☺ Die folgende Tabelle und Graphik zeigen die / eine Lösung u.

Wir betrachten hier das ebene Gitter $\mathbb{Z}^2$ und darin eine Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$. Innere Punkte $z \in \Omega$ sind solche, deren vier direkte Nachbarn ebenfalls in Ω liegen. Bei einem Randpunkt $z \in \Omega$ liegt mindestens ein Nachbar außerhalb von Ω. **Dirichlet–Problem**: In jedem Randpunkt $z \in \partial\Omega$ ist der Wert $u(z)$ festgelegt durch die vorgegebene Randfunktion $v = u|_{\partial\Omega} : \partial\Omega \to \mathbb{R}$. Gesucht ist eine harmonische Funktion $u:\Omega \to \mathbb{R}$ mit $u|_{\partial\Omega} = v$. Existiert eine Lösung? Ist sie eindeutig? Wie können wir sie berechnen bzw. annähern? Kurzum: Ist das Problem **gut gestellt**?

Diese Anwendung ist recht faszinierend: Sie ist physikalisch-anschaulich motiviert und fördert sowohl Intuition als auch Methodik. Hier gilt das Minimum-Maximum-Prinzip (Satz T4B) und daraus können wir nicht nur die Eindeutigkeit, sondern sogar die Existenz einer Lösung ableiten. Diese einfache Differenzengleichung diskretisiert partielle Differentialgleichungen (H125) und enthüllt so unerwartete Zusammenhänge, als Modell / Näherung / Anschauung für harmonische Funktionen $\Delta u = 0$ (Satz R2C) und die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = \kappa\, \Delta u$ (Satz S3E).

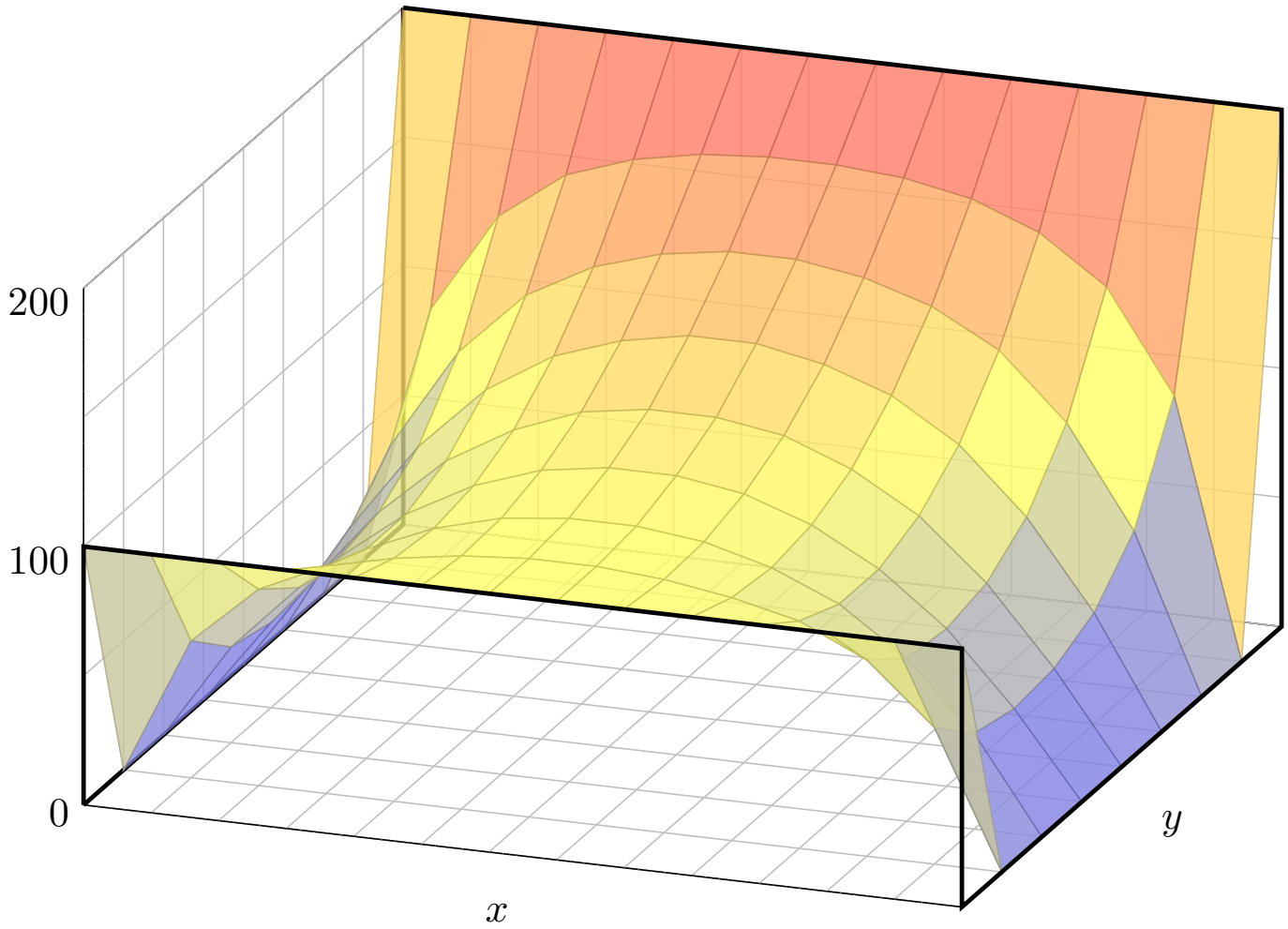
Irrfahrten und Potentiale: das Dirichlet–Problem

Dieses einfache Beispiel illustriert das allgemeine und überall wichtige **Dirichlet–Problem**. Die Rechnung ist trickreicher als in der vorigen Aufgabe: Dort konnten wir mit den Startwerten direkt Zeile für Zeile ausrechnen. Hier hingegen scheint die Rechnung zunächst selbstbezüglich.

	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	
000	100	139	158	167	172	174	174	172	167	157	139	100	000
000	061	100	125	139	147	151	151	147	139	125	100	061	000
000	043	077	102	118	127	132	132	127	118	102	077	043	000
000	035	065	088	103	113	117	117	113	103	088	065	035	000
000	033	061	081	095	104	108	108	104	095	081	061	033	000
000	037	063	081	092	099	102	102	099	092	081	063	037	000
000	053	076	088	094	098	100	100	098	094	088	076	053	000
	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	

Die Aufgabe führt uns zu einem **linearen Gleichungssystem** mit $7 \times 12 = 84$ Unbekannten. Für diese haben wir genau 84 Gleichungen. Das sieht vernünftig aus, bedeutet aber noch nicht, dass es genau eine Lösung gibt. Hierzu müssen wir genauer hinschauen und präzise begründen! Meine Tabellenkalkulation *LibreOffice* weigert sich zunächst mit „Fehler 522: zirkulärer Bezug“. Mit Extras > Optionen > Calc > Iterationen rechnet sie dann iterativ obige Näherungslösung aus. Eine tabellarische Darstellung der ersten 80 Näherungsschritte finden Sie ab Seite H129.

Irrfahrten und Potentiale: das Dirichlet–Problem



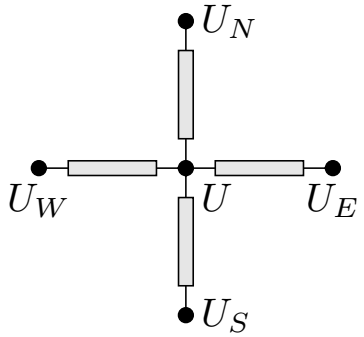
Harmonische Funktionen: Gleichgewicht!

T449
Ausführung

☺ Kontext und Anwendung ändern sich, die Rechnung bleibt dieselbe!

(2) Wir betrachten Massenpunkte in $(x, y, u(x, y)) \in \mathbb{R}^3$ in Ruhelage. Jeder ist durch gleich starke Federn mit seinen Nachbarn verbunden. Somit gilt: Ruhelage $=$ Kräftegleichgewicht $\approx$ Mittelwerteigenschaft!

Sie können es nachrechnen! H134 Genauer gesagt ist dies die Näherung bei geringer Krümmung.



(3) Wir betrachten die gezeigte Schaltung mit vier gleichen Widerstände. An den Nachbarpunkten liegen die Potentiale U_E, U_N, U_W, U_S an.

Ohmsches Gesetz und Kirchhoffsche Regel:

$$U = \frac{U_E + U_N + U_W + U_S}{4}$$

Ausführlich: Es gilt das Ohmsche Gesetz $I_E = (U_E - U)/R$. Die Kirchhoffsche Regel besagt hier $I_E + I_N + I_W + I_S = 0$. Einsetzen und Auflösen nach U ergibt die Mittelwerteigenschaft!

☺ Wir können Ω als Schaltung realisieren und am Rand die genannten Spannungen anlegen. Mit einem Voltmeter messen wir das Potential $u(x, y)$ im Inneren und finden obige Lösung. Physikalische Intuition suggeriert Existenz und Eindeutigkeit der Lösung, siehe Satz T4B.

Wärmeleitungsgleichung: Alles fließt!

T450
Ausführung

(4) Wir betrachten Ω als ein Bauteil aus wärmeleitendem Material. Am Rand liegen die Temperaturen $0°\mathrm{C}$, $100°\mathrm{C}$, $200°\mathrm{C}$ an. H125 R407 Wärme fließt von warm nach kalt proportional zur Temperaturdifferenz. Stationäre Verteilung $=$ Fließgleichgewicht $=$ Mittelwerteigenschaft!

☺ Unser LGS ist die diskrete Version der Potentialgleichung $\Delta u = 0$. Für $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar gilt die Taylor–Formel:

$$0 = \underbrace{u(x{-}1, y) - 2u(x, y) + u(x{+}1, y)}_{= \partial_x^2 u(x,y) \text{ + h.o.t.}} + \underbrace{u(x, y{-}1) - 2u(x, y) + u(x, y{+}1)}_{= \partial_y^2 u(x,y) \text{ + h.o.t.}}$$

Wir diskretisieren die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = \kappa\, \Delta u$ für $\kappa = \frac{1}{4}$:

$$u(t{+}1, x, y) = \frac{u(t, x{-}1, y) + u(t, x{+}1, y) + u(t, x, y{-}1) + u(t, x, y{+}1)}{4}$$

☺ Diese Iteration nähert sich der stationären Lösung u mit $\Delta u = 0$.

Diese Beobachtung führt uns schließlich zur Methode der iterativen Näherung, die ab Seite H129 numerisch illustriert wird. Alles fließt! Dieses Näherungsverfahren beginnt mit einer (beliebigen!) Startverteilung und konvergiert recht schnell gegen die (eindeutige!) stationäre Lösung. Das ist für den Computer einfach und schnell zu rechnen. Genau das nutzt Ihre Tabellenkalkulation.

Harmonische Funktionen: Minimum-Maximum-Prinzip

T451
Ausführung

Wie zuvor sei $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^n$ ein endlicher Graph. Wir zerlegen $\Omega = \Omega^\circ \sqcup \partial\Omega$: Jeder innere Punkt $z \in \Omega^\circ$ hat alle seine $2n$ Nachbarn $z \pm e_k$ in Ω; jeder Randpunkt $z \in \partial\Omega$ hat mindestens einen Nachbarn außerhalb von Ω. Wir nennen $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch, wenn die Mittelwerteigenschaft gilt.

Satz T4B: Minimum-Maximum-Prinzip, Eindeutigkeit & Existenz

(1) Jede harmonische Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ nimmt Minimum und Maximum am Rand $\partial\Omega$ an: Es gilt also $\min_\Omega u = \min_{\partial\Omega} u$ und $\max_\Omega u = \max_{\partial\Omega} u$.

Für je zwei harmonische Funktionen $u, \tilde{u} : \Omega \to \mathbb{R}$ gilt demnach:

(2) Monotonie: Aus $u \le \tilde{u}$ auf dem Rand $\partial\Omega$ folgt $u \le \tilde{u}$ auf ganz Ω.

(3) Eindeutigkeit: Aus $u = \tilde{u}$ auf dem Rand $\partial\Omega$ folgt $u = \tilde{u}$ auf ganz Ω.

Hieraus gewinnen wir die Existenz und sogar eine Konstruktion:

(4) Existenz: Zu jeder vorgegebenen Randfunktion $v : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ existiert genau eine harmonische Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $u|_{\partial\Omega} = v$.

(5) Konstruktion: Die diskrete Wärmeleitung liefert zu v Näherungen $u_0, u_1, u_2, \ldots \to u$, die gegen die eindeutige Lösung u konvergieren.

Harmonische Funktionen: Eindeutigkeit und Existenz

T452
Ausführung

☺ Wir kennen das Prinzip (1-3) von harmonischen Funktionen $\Delta u = 0$ (Satz R2C) und der Wärmeleitung $\partial_t u = \kappa\, \Delta u$ (Satz S3E). Neu hinzu kommen Existenz (4) und Konstruktion (5).

Aufgabe: Beweisen Sie (1-4) mit linearer Algebra. **Lösung:** Die Mittelwerteigenschaft (MWE) ist ein lineares Gleichungssystem: $u(z) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n u(z + e_k) + u(z - e_k)$ für alle $z \in \Omega^\circ$.

(1) Sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch. Da die Menge Ω endlich ist, existiert eine Minimalstelle $z \in \Omega$, das heißt $u(z) \le u$. Liegt z im Inneren, so sind alle Nachbarn $z \pm e_k$ ebenfalls Minimalstellen. Es gibt einen Weg von z zu einem Randpunkt $z' \in \partial\Omega$, also ist auch dieser eine Minimalstelle.
(2) Die Differenz $v = \tilde{u} - u$ ist harmonisch und erfüllt $v \ge 0$ auf $\partial\Omega$, nach (1) also $v \ge 0$ auf Ω. Daraus folgt sofort (3). Alternativ: $v = \tilde{u} - u$ erfüllt $v = 0$ auf $\partial\Omega$, nach (1) also $v = 0$ auf Ω.

(4) Vorgegeben ist die Randfunktion $v : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ als Bedingung $u|_{\partial\Omega} = v$. Wir suchen die/eine harmonische Fortsetzung $w = u|_{\Omega^\circ} : \Omega^\circ \to \mathbb{R}$ auf das Innere. Sei $N = \sharp\Omega^\circ$ die Anzahl innerer Punkte. Wir haben N Variablen $w(z)$ für $z \in \Omega^\circ$ und ebenso viele Gleichungen

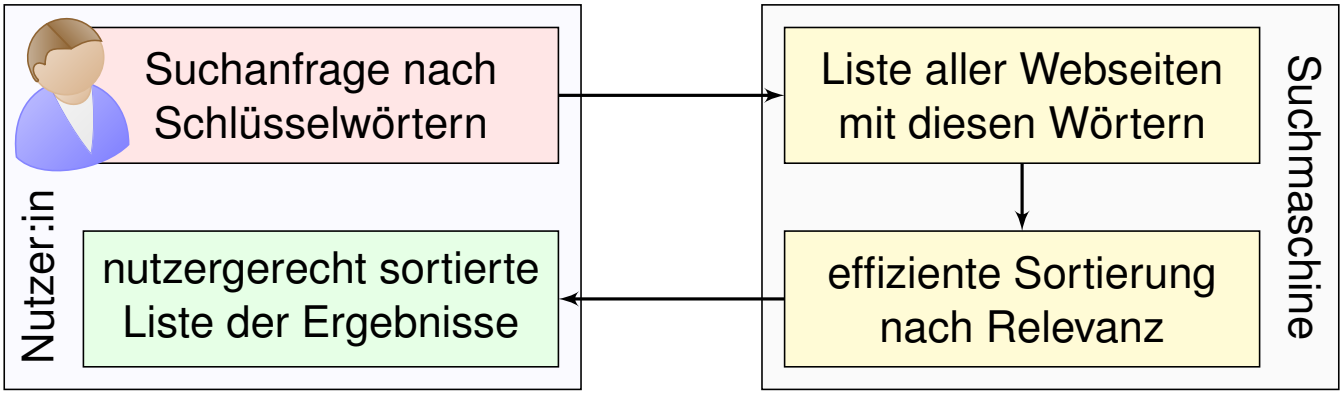
$$\Lambda_v(w)(z) := w(z) - \tfrac{1}{2n} \textstyle\sum_{k=1}^n u(z + e_k) + u(z - e_k) \overset{!}{=} 0 \quad \text{wobei } u = v \sqcup w.$$

Dies definiert die affin-lineare Abbildung $\Lambda_v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N : w \mapsto \Lambda_v(w) = \Lambda_0(w) + \Lambda_v(0)$. Die Abbildung $\Lambda_0 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ ist linear. Dank (3) ist $\Lambda_0(w) = 0$ eindeutig lösbar, also Λ_0 injektiv. Dank Dimensionsformel $\dim \mathbb{R}^N = \dim \operatorname{Kern} \Lambda_0 + \dim \operatorname{Bild} \Lambda_0$ ist Λ_0 surjektiv, also bijektiv. Somit ist auch Λ_v bijektiv. Insbesondere existiert die ersehnte Lösung $w \in \mathbb{R}^N$ mit $\Lambda_v(w) = 0$.

(5) Hierzu liefert die Analysis den Fixpunktsatz von Banach. T459 All unsere Argumente gelten allgemein für jeden endlichen Graphen mit Übergangswkten auf den Kanten (diskrete endliche Markov–Kette). Genau dies nutzt Googles PageRank, wie im Folgenden erläutert.

Die Mathematik hinter Google

„Wo simmer denn dran? Aha, heute krieje mer de Suchmaschin.
Wat is en Suchmaschin? Da stelle mer uns janz dumm. . . . “



Mathematik: Wie misst man Relevanz von Informationen?

Artificial Intelligence (AI), Machine Learning (ML), . . .

Informatik: Wie verarbeitet man enorm große Datenmengen?

Big Data, Data Mining, Data Science, . . . „Data is the new oil.“

Finanzstrategie: Wie verdient man Geld mit einem Gratisprodukt?

„If you’re not paying for it, you’re not the customer, you are the product.“

Die Mathematik hinter Google

Als das World Wide Web Mitte der 1990er noch klein war, da genügte es, zu einer Suchanfrage einfach alle Treffer aufzulisten. Die Liste war noch kurz, jede:r Nutzer:in konnte sie leicht selbst überblicken. Das Internet blieb jedoch nicht lange so überschaubar. . . . Das Volumen explodierte! Als Versuch einer Lösung ging 1998 die Suchmaschine Google in Betrieb und dominiert seither den Markt. Sie wird ständig weiterentwickelt. Die meisten Optimierungen hütet Google streng als Firmengeheimnis, doch das ursprüngliche Grundprinzip ist veröffentlicht und genial einfach:

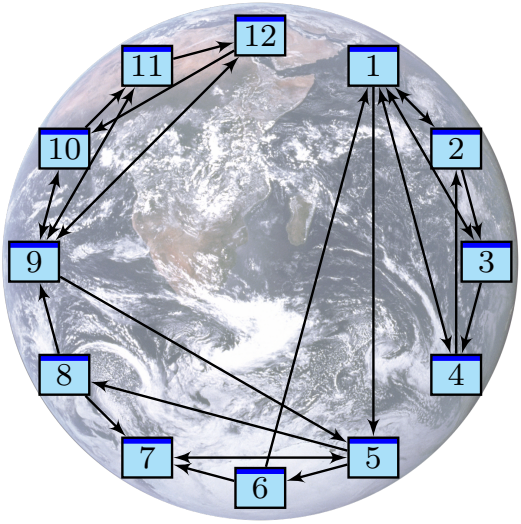
📖 Sergey Brin, Larry Page: *The anatomy of a large-scale hypertextual web search engine.* Stanford University 1998, `infolab.stanford.edu/pub/papers/google.pdf`

Bei vorherigen Suchmaschinen musste man endlose Trefferlisten durchforsten, bis man auf die ersten interessanten Ergebnisse stieß. Bei Google stehen sie auf wundersame Weise ganz oben. Wie ist das möglich? Die Antwort liegt (zu einem großen Teil) in folgender genial-einfachen Idee. Google misst die Popularität p_i (*PageRank*) jeder Seite i durch folgendes Gleichungssystem:

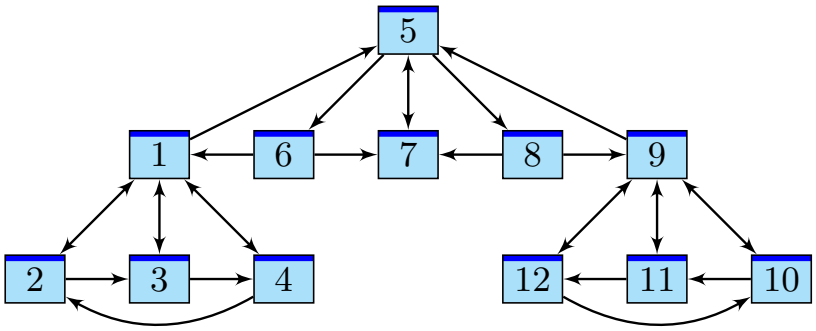
$$\text{PageRank} \qquad p_i = \frac{q}{N} + \sum_{j \to i} \frac{1-q}{\ell_j}\, p_j$$

Keine Angst, die Formel sieht nur auf den ersten Blick kompliziert aus. Ich werde sie anhand von Beispielen Schritt für Schritt erläutern. Wer sowas schon gesehen hat, weiß, dass es sich um eine besonders einfache Formel handelt, nämlich ein *lineares Gleichungssystem*, das keine Quadrate oder komplizierteres enthält. Schon die Formel von Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$ ist komplizierter.

Chaos und Struktur im Web



Miniaturbeispiel des Web als ein Graph aus Seiten $i = 1, \ldots, N$ und Links $i \to j$. Versuch einer hierarchischen Anordnung:



Eine Seite ist populär, wenn viele Seiten auf sie verweisen? Zu naiv!
Eine Seite ist populär, wenn viele populäre Seiten auf sie verweisen.

Ein zufälliger Surfer folgt von der aktuellen Seite zufällig einem der Links.

Aufgabe: Berechnen Sie die Aufenthaltswkten. Konvergieren sie gegen ein Gleichgewicht? Wie schnell? Immer dasselbe, d.h. ist es eindeutig?

☺ Im Rückblick ist die abstrakt-mathematische Idee genial einfach.
Wer diese Aufgabe bis 1998 professionell löste, ist heute Milliardär.

Chaos und Struktur im Web

Klassische Texte sind von einer Person geschrieben und linear: Ein Buch hat einen Anfang und ein Ende, typischerweise liest man es von vorne nach hinten in der Reihenfolge der Seiten. Meist gibt es zudem ein Inhaltsverzeichnis oder einen Index zum leichteren Nachschlagen. (Ja, liebe Kinder, unsere Vorfahren konnten Texte mit hunderttausend Buchstaben am Stück lesen, ohne Clicks und ohne Werbung. Man nannte das „Buch“ und speicherte es auf „Papier“. Damals!)

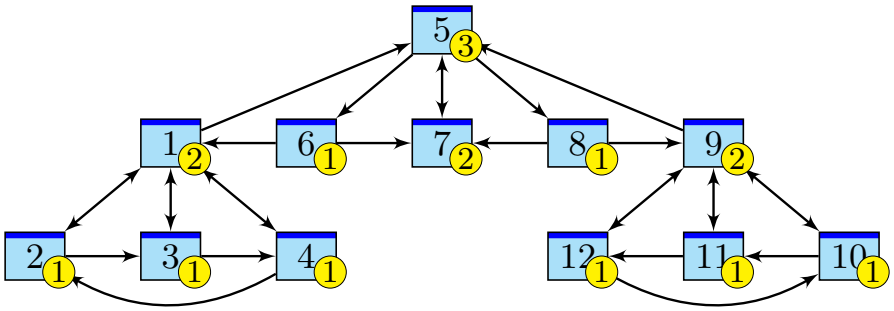
Webseiten bilden hingegen eine gänzlich andere Struktur. Niemand käme auf die Idee, das Internet von Anfang bis Ende durchzulesen: Es hat keine lineare Struktur, keine erste und keine letzte Seite, es ist zudem viel zu groß, und das meiste ist ohnehin uninteressant.

Die Webseiten verweisen gegenseitig aufeinander und bilden einen *Hypertext*. Zur Illustration betrachten wir ein Miniaturbeispiel bestehend aus 12 Webseiten. Unter den Seiten $1, 2, 3, 4$ wird 1 am häufigsten zitiert. Die Seite 1 scheint daher besonders relevant oder populär. Gleiches gilt für $9, 10, 11, 12$ mit 9 an der Spitze. Die Struktur von $5, 6, 7, 8$ ist ähnlich mit 7 an der Spitze. Aber die Seiten $1, 7, 9$, die wir schon als relevant erkannt haben, verweisen alle auf die Seite 5. Diese scheint daher populär / wichtig / zentral und für eine spätere Suche besonders relevant.

Diese Anordnung war Handarbeit. Lässt sie sich automatisieren? Nach welchen Regeln?
Erster Versuch einer Bewertung: Eine Seite ist populär, wenn viele Seiten auf sie verweisen.
Nachteil: Die simple Linkzählung ist zu naiv und anfällig für Manipulationen! (Linkfarmen)

Zweiter Versuch: Eine Seite ist populär, wenn viele populäre Seiten auf sie verweisen.
Das klingt zunächst zirkulär, lässt sich aber in eine einfache Gleichung fassen und lösen.
Ich erläutere dazu die besonders anschauliche Betrachtungsweise des zufälligen Surfers.

Irrfahrt eines zufälligen Surfers

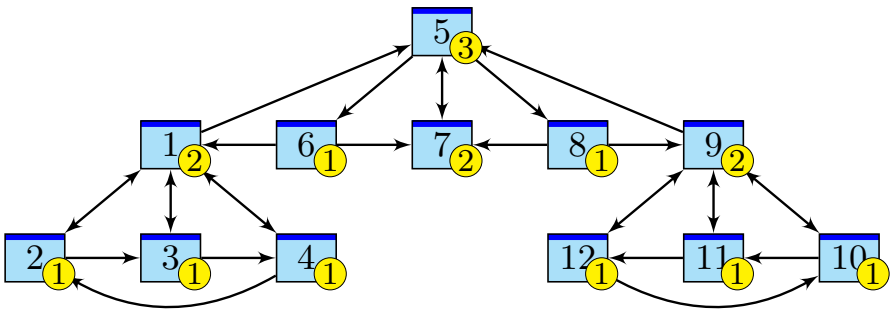


Googles Heuristik: Aufenthaltswkt $\sim$ Popularität $\sim$ Relevanz

Aufgabe: Berechnen Sie die Aufenthaltswkten bei Start auf Seite 7.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$t = 0$	.000	.000	.000	.000	.000	.000	1.00	.000	.000	.000	.000	.000
$t = 1$	.000	.000	.000	.000	1.00	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
$t = 2$	.000	.000	.000	.000	.000	.333	.333	.333	.000	.000	.000	.000
$t = 3$	.167	.000	.000	.000	.333	.000	.333	.000	.167	.000	.000	.000
$t = 4$	.000	.042	.042	.042	.417	.111	.111	.111	.000	.042	.042	.042
$t = 5$	.118	.021	.021	.021	.111	.139	.250	.139	.118	.021	.021	.021
...												
$t = 29$	.117	.059	.059	.059	.177	.059	.117	.059	.117	.059	.059	.059
$t = 30$	.117	.059	.059	.059	.177	.059	.117	.059	.117	.059	.059	.059

Irrfahrt eines zufälligen Surfers



Googles Heuristik: Aufenthaltswkt $\sim$ Popularität $\sim$ Relevanz

Aufgabe: Berechnen Sie die Aufenthaltswkten bei Start auf Seite 1.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$t = 0$	1.00	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
$t = 1$	.000	.250	.250	.250	.250	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
$t = 2$	.375	.125	.125	.125	.000	.083	.083	.083	.000	.000	.000	.000
$t = 3$	.229	.156	.156	.156	.177	.000	.083	.000	.042	.000	.000	.000
$t = 4$	.234	.135	.135	.135	.151	.059	.059	.059	.000	.010	.010	.010
$t = 5$	.233	.126	.126	.126	.118	.050	.109	.050	.045	.005	.005	.005
...												
$t = 69$	.117	.059	.059	.059	.177	.059	.117	.059	.117	.059	.059	.059
$t = 70$	.117	.059	.059	.059	.177	.059	.117	.059	.117	.059	.059	.059

Zufall und Notwendigkeit: Googles PageRank

Wir beobachten eine Diffusion: Sie konvergiert gegen eine stationäre Gleichgewichtsverteilung! Ebenso beim Start in 1; sie konvergiert langsamer, aber schließlich zum selben Gleichgewicht! Dank dieser Betrachtungsweise löst sich unser LGS sozusagen von allein! Verfeinertes Modell:

Sprung: Mit Wkt q startet unser Surfer neu auf irgendeiner zufälligen Seite $i \in \{1, \dots, N\}$.
Fluss: Mit Wkt $(1-q)$ folgt er von der aktuellen Seite j zufällig irgendeinem der ℓ_j Links.
Dies führt zu folgenden Gleichungen, analog zur Wärmeleitung bzw. Potentialgleichung: T445

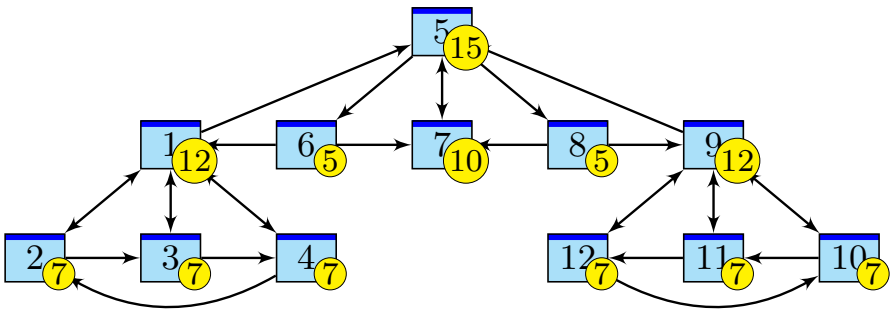
$$\text{Diffusion} \qquad p_i(t+1) = \frac{q}{N} + \sum_{j \to i} \frac{1-q}{\ell_j}\, p_j(t)$$

$$\text{Gleichgewicht} \qquad p_i = \frac{q}{N} + \sum_{j \to i} \frac{1-q}{\ell_j}\, p_j$$

Dieses verfeinerte Modell mit Teleportation lässt sich ebenso leicht berechnen. Für $q = 0.15$ entspricht es dem typischen Verhalten, sechs bis sieben Links zu folgen, bevor man neu anfängt.
☺ Die Ergebnisse entsprechen der Nutzererwartung und sind recht robust gegen Manipulationen.
☺ Unsere obigen Beobachtungen zur Konvergenz sind nicht bloß zufällig, sondern beruhen auf mathematischen Gesetzmäßigkeiten. Diese kann man beweisen und darf sich darauf verlassen:

Der **Fixpunktsatz von Banach** garantiert bei positiver Sprunghaftigkeit $0 < q \le 1$ Folgendes:
(1) Es gibt genau ein Gleichgewicht p. Dieses erfüllt $p_1, \dots, p_N > 0$ und $p_1 + \dots + p_N = 1$.
(2) Für jede Anfangsverteilung konvergiert die Diffusion gegen die Gleichgewichtsverteilung p.
(3) Die Konvergenz ist mindestens so schnell wie die der geometrischen Folge $(1-q)^n \searrow 0$.

Zufall und Notwendigkeit: Googles PageRank



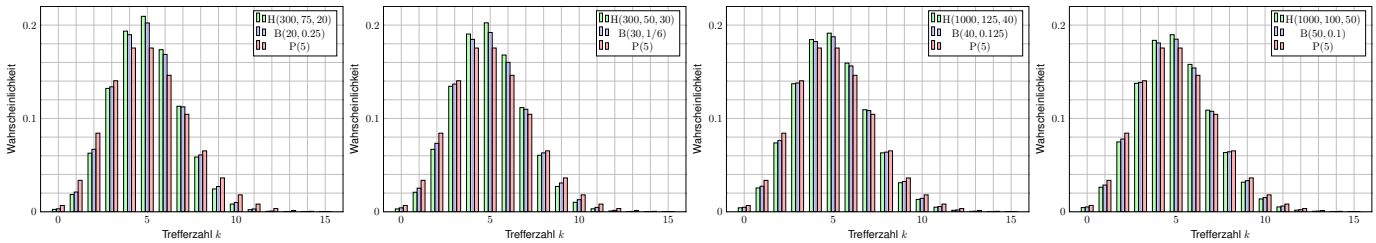
Googles Heuristik: Aufenthaltswkt $\sim$ Popularität $\sim$ Relevanz

Aufgabe: Aufenthaltswkten bei Sprunghaftigkeit $q = 0.15$:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$t = 0$	1.00	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
$t = 1$	.013	.225	.225	.225	.225	.013	.013	.013	.013	.013	.013	.013
$t = 2$	.305	.111	.111	.111	.028	.076	.087	.076	.034	.020	.020	.020
$t = 3$	.186	.124	.124	.124	.158	.021	.085	.021	.071	.028	.028	.028
$t = 4$	.180	.105	.105	.105	.140	.057	.075	.057	.057	.040	.040	.040
$t = 5$	.171	.095	.095	.095	.126	.052	.101	.052	.087	.042	.042	.042
$\dots$												
$t = 29$	.120	.066	.066	.066	.150	.055	.102	.055	.120	.066	.066	.066
$t = 30$	.120	.066	.066	.066	.150	.055	.102	.055	.120	.066	.066	.066

Kapitel U

Kombinatorik und Näherungen



Stochastik ist die scharfsinnige Kunst,
mit unsicheren Ereignissen sicher zu rechnen.

On voit, par cet Essai, que la théorie des probabilités
n'est, au fond, que le bon sens réduit au calcul.

Pierre-Simon de Laplace (1749–1827)

Inhalt dieses Kapitels U

1 Produktexperimente
- Ausfallwahrscheinlichkeiten
- Prognosen zu Reaktorunfällen
- Kollision und Geburtstagsparadox

2 Kombinatorik und Urnenmodelle
- Kombinatorische Abzählformeln
- Schubfachmodelle: $\{1,\dots,k\} \to \{1,\dots,n\}$
- Urnenmodelle: Ziehung von k aus n Kugeln

3 Drei grundlegende stochastische Modelle
- Hypergeometrische Verteilung: Stichproben
- Binomialverteilung: unabhängige Versuche
- Poisson–Verteilung: bequeme Näherung

4 Fazit: hypergeometrisch, binomial, Poisson
- Verständnisfragen und weitere Aufgaben
- Poissons Gesetz der kleinen Zahlen
- Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion

Motivation und Zielsetzung

Viele Zufallsexperimente beschreiben wir durch **Standardmodelle**:

- Produktraum bei unabhängig durchgeführten Experimenten,
- Ziehung von Losen (mit/ohne Zurücklegen, mit/ohne Reihenfolge),
- Schubfachmodelle (*balls in bins*, mit zusätzlichen Bedingungen).

Hier hilft geschicktes systematisches Abzählen, also **Kombinatorik**.
Die entstehenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind zwar vielfältig, haben aber Gemeinsamkeiten, die Sie kennen und nutzen sollten.
Drei besonders wichtige werden wir in diesem Kapitel behandeln:

- die hypergeometrische Verteilung $\mathrm{H}(N, K, n)$ für Stichproben,
- die Binomialverteilung $\mathrm{B}(n, t)$ für Trefferanzahlen,
- die Poisson–Verteilung $\mathrm{P}(\lambda)$ als Näherung.

Viele Rechnungen vereinfachen wir durch hilfreiche **Näherungen**:

- Für große Stichproben ($N \to \infty$) gilt $\mathrm{H}(N, K, n) \approx \mathrm{B}(n, K/N)$.
- Poissons Gesetz der kleinen Zahlen: $\mathrm{B}(n, t) \approx \mathrm{P}(nt)$ für kleines t.
- Lokaler Grenzwertsatz: $\mathrm{B}(n, t) \approx \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, siehe nächstes Kapitel V.

Vorgehensweise

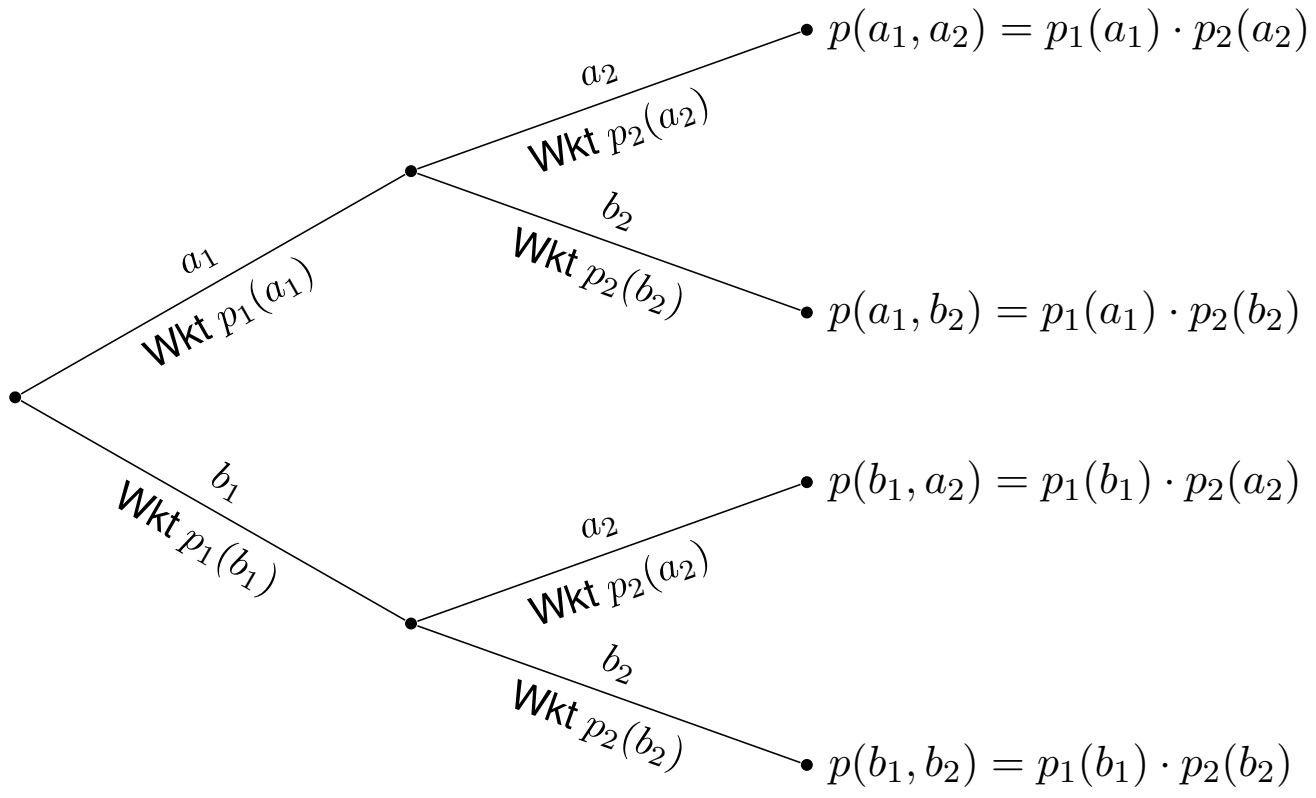
Abschätzung von Risiken ist eine typische und wichtige Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in den Ingenieurwissenschaften.
Ich beginne daher mit Produktexperimenten als Modell unabhängiger Ereignisse und ersten Anwendungen auf Ausfallwahrscheinlichkeiten.
Nach Einführung der Urnenmodelle kommen wir zu Stichproben und damit zu hypergeometrischen, Binomial- und Poisson–Verteilungen.

Auf Grundlage eines stochastischen Modells können Sie die gesuchten Wkten exakt berechnen, d.h. aus den angenommenen Daten ableiten.
Oft ist die exakte Berechnung zu aufwändig, und Sie begnügen sich mit einer guten Näherung. Nützliche Tricks sollten Sie kennen und nutzen!

Grenzwertsätze formuliere ich möglichst mit expliziten Fehlerschranken.
Dies ermöglicht, die üblichen Approximationen nicht nur blind oder naiv nach Gefühl anzuwenden, sondern bequem ihre Güte abzuschätzen.
Ob neben der Berechnung der Approximation auch eine Abschätzung des Fehlers notwendig ist, hängt vom geforderten Sicherheitsniveau ab.
Die Werkzeuge hierzu sind jedenfalls vorhanden und nicht schwierig.

Baummodell für unabhängige Experimente

Durchführung von zwei **unabhängigen Experimenten**:
$(\Omega_1 = \{a_1, b_1, \dots\}, \mathbf{P}_1)$ und $(\Omega_2 = \{a_2, b_2, \dots\}, \mathbf{P}_2)$.



Produkt von Wahrscheinlichkeitsräumen

Definition U1A: Produktwahrscheinlichkeit, zunächst diskret

Seien $(\Omega_1, \mathbf{P}_1)$ und $(\Omega_2, \mathbf{P}_2)$ diskrete Wahrscheinlichkeitsräume.
Der Produktraum ist das **kartesische Produkt**

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \big\{\, (\omega_1, \omega_2) \;\big|\; \omega_1 \in \Omega_1,\ \omega_2 \in \Omega_2 \,\big\}.$$

Die **Produktwahrscheinlichkeit** $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 \otimes \mathbf{P}_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ ist

$$\mathbf{P}\big(\{(\omega_1, \omega_2)\}\big) = \mathbf{P}_1\big(\{\omega_1\}\big) \cdot \mathbf{P}_2\big(\{\omega_2\}\big).$$

Per Additivität setzt sich dies auf alle Ereignisse $A \subseteq \Omega$ fort zur Formel

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{(\omega_1, \omega_2) \in A} \mathbf{P}_1\big(\{\omega_1\}\big) \cdot \mathbf{P}_2\big(\{\omega_2\}\big).$$

Der **Produktraum** $(\Omega, \mathbf{P}) = (\Omega_1, \mathbf{P}_1) \times (\Omega_2, \mathbf{P}_2) = (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathbf{P}_1 \otimes \mathbf{P}_2)$ ist selbst ein diskreter WRaum, denn $\mathbf{P}$ ist additiv und erfüllt $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

Beispiel: Zweimaliges unabhängiges Würfeln, siehe T124.

Ausfallwahrscheinlichkeit bei 2 Teilen

Aufgabe: Eine Maschine bestehe aus zwei unabhängigen Teilen.
Ihre Ausfallwkten seien $p_1 = 0.1 = 10\%$ und $p_2 = 0.2 = 20\%$.

(1) Konstruieren Sie als Modell hierfür explizit einen WRaum $(\Omega, \mathbf{P})$.

(2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktionieren beide? fällt eins aus?

Lösung: (1) Stochastisches Modell $(\Omega_1, \mathbf{P}_1)$ für Teil T_1 allein:

$$\Omega_1 = \{0, 1\} \quad \text{mit} \quad 0 = \text{„}T_1 \text{ fällt aus“}, \qquad 1 = \text{„}T_1 \text{ funktioniert“}$$
$$\mathbf{P}_1(\{0\}) = p_1 = 0.1, \quad \mathbf{P}_1(\{1\}) = \overline{p_1} = 0.9$$

Stochastisches Modell $(\Omega_2, \mathbf{P}_2)$ für Teil T_2 allein:

$$\Omega_2 = \{0, 1\} \quad \text{mit} \quad 0 = \text{„}T_2 \text{ fällt aus“}, \qquad 1 = \text{„}T_2 \text{ funktioniert“}$$
$$\mathbf{P}_2(\{0\}) = p_2 = 0.2, \quad \mathbf{P}_2(\{1\}) = \overline{p_2} = 0.8$$

Wegen Unabhängigkeit ist der Produktraum hier das richtige Modell:
Wir betrachten also den Produktraum $(\Omega, \mathbf{P}) = (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathbf{P}_1 \otimes \mathbf{P}_2)$,
also $\Omega = \{00, 01, 10, 11\}$ mit Produktwahrscheinlichkeit $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 \otimes \mathbf{P}_2$.

Ausfallwahrscheinlichkeit bei 2 Teilen

(2) Wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit der beiden Teile
ist die Produktwahrscheinlichkeit hier das richtige Modell:

T_1 fällt aus und T_2 fällt aus:	$\mathbf{P}(\{00\}) = p_1 \cdot p_2 = 0.1 \cdot 0.2 = 0.02$
T_1 fällt aus und T_2 funktioniert	$\mathbf{P}(\{01\}) = p_1 \cdot \overline{p_2} = 0.1 \cdot 0.8 = 0.08$
T_1 funktioniert und T_2 fällt aus:	$\mathbf{P}(\{10\}) = \overline{p_1} \cdot p_2 = 0.9 \cdot 0.2 = 0.18$
T_1 funktioniert und T_2 funktioniert:	$\mathbf{P}(\{11\}) = \overline{p_1} \cdot \overline{p_2} = 0.9 \cdot 0.8 = 0.72$

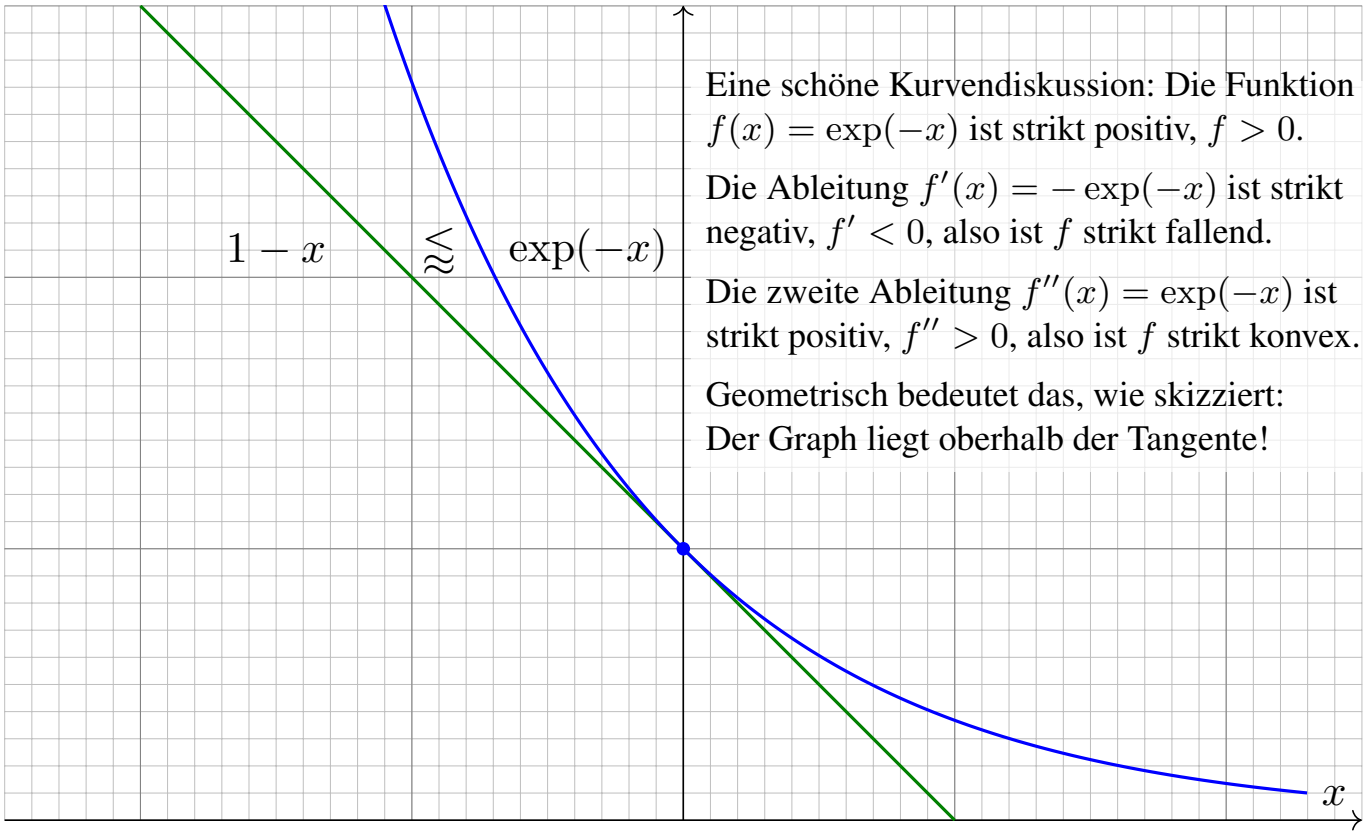
Mit Wahrscheinlichkeit 0.72 funktionieren beide Teile.
Mit Wahrscheinlichkeit 0.28 fällt (mindestens) eins aus.

☺ Das explizite Modell (1) ist detailliert; das kann helfen. Oft genügt die implizite Schreibweise wie in (2); sie ist schnell und bequem.

☺ Es liegt immer ein Modell zu Grunde; im Zweifel führt man es aus. Zur Illustration notiere ich hier (übertrieben) sorgfältig jeden Schritt.

⚠ Verwechseln Sie nicht die gesuchte Wkt und ihre Gegenwkt!
Solche Aufgaben sind leicht, wenn Sie sorgfältig arbeiten.

Erinnerung an die Taylor–Entwicklung $\exp(-x) \gtrapprox 1 - x$



Eine schöne Kurvendiskussion: Die Funktion $f(x) = \exp(-x)$ ist strikt positiv, $f > 0$.

Die Ableitung $f'(x) = -\exp(-x)$ ist strikt negativ, $f' < 0$, also ist f strikt fallend.

Die zweite Ableitung $f''(x) = \exp(-x)$ ist strikt positiv, $f'' > 0$, also ist f strikt konvex.

Geometrisch bedeutet das, wie skizziert: Der Graph liegt oberhalb der Tangente!

Für alle x gilt $1 - x \leq \exp(-x)$, und für $x \approx 0$ zudem $1 - x \approx \exp(-x)$. Wir schreiben dies im Folgenden kurz und prägnant $1 - x \lessapprox \exp(-x)$.

Erinnerung an die Taylor–Entwicklung $\exp(-x) \gtrapprox 1 - x$

Dieses graphische Argument können und wollen wir präzisieren:

Lemma U1B: Exponentialnäherung

(1) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten die Ungleichungen

$$\exp(x) \geq 1 + x \qquad \text{und} \qquad \exp(-x) \geq 1 - x.$$

(2) Für x um 0 sind dies die Taylor–Näherung bis zur ersten Ordnung:

$$\exp(x) \gtrapprox 1 + x \qquad \text{und} \qquad \exp(-x) \gtrapprox 1 - x.$$

Aufgabe: Beweisen Sie diese Ungleichungen durch Kurvendiskussion.

Lösung: (1) Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \exp(x)$ gilt $f(0) = 1$ und $f' = f$.
Die Tangente im Punkt $x = 0$ ist somit $x \mapsto f(0) + f'(0)\,x = 1 + x$.
Wegen $f'' = f' = f > 0$ ist f konvex, liegt also oberhalb der Tangente.
Das beweist die Ungleichung $\exp(x) \geq 1 + x$, ebenso $\exp(-x) \geq 1 - x$.

(2) Anschaulich: Für $x \approx 0$ gilt $\exp(x) \approx 1 + x$, ebenso $\exp(-x) \approx 1 - x$.
Der Fehler ist höherer Ordnung, kurz $O(x^2)$, genauer siehe Restterm!
Wir schreiben dies im Folgenden kurz und prägnant $\exp(-x) \gtrapprox 1 - x$.

Ausfallwahrscheinlichkeit bei n Teilen

Ein Projekt habe n **single points of failure** / Teilschritte $T_1, \ldots, T_n$.
Zum Gesamterfolg muss jeder dieser Teilschritte erfolgreich sein.

Eine Maschine bestehe aus n **unabhängigen** Teilen $T_1, \ldots, T_n$.
Jedes Teil T_k hat eine gewisse Ausfallwahrscheinlichkeit $p_k \in [0, 1]$.

Aufgabe: Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktionieren alle Teile?
Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt (mindestens) ein Teil aus?

Lösung: Für diese Wkten gilt exakt bzw. näherungsweise:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\text{Alle Teile funktionieren}) &= (1-p_1)\cdots(1-p_n) \\
&\lessapprox \mathrm{e}^{-p_1}\cdots\mathrm{e}^{-p_n} \;=\; \mathrm{e}^{-(p_1+\cdots+p_n)}. \\
\mathbf{P}(\text{Mindestens eins fällt aus}) &= 1-(1-p_1)\cdots(1-p_n) \\
&\gtrapprox 1-\mathrm{e}^{-(p_1+\cdots+p_n)}.
\end{aligned}$$

☺ Diese Näherung ist praktisch für $p_1, \ldots, p_n$ klein und n groß:
Statt einem n-fachen Produkt genügt uns eine eine n-fache Summe!

☺ Dies ist die Poisson–Wkt $\mathrm{P}(\lambda)(0)$ mit $\lambda = p_1 + \cdots + p_n$, siehe U3C.

Ausfallwahrscheinlichkeit bei n Teilen

☺ Ein wichtiger Spezialfall sind **unabhängige identische** Teile.

Satz U1C: Ausfallwahrscheinlichkeiten

Von n unabhängigen Teilen habe jedes Ausfallwkt $p \in [0, 1]$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\text{Alle Teile funktionieren}) &= (1-p)^n &\lessapprox \mathrm{e}^{-np} \\
\mathbf{P}(\text{Mindestens eins fällt aus}) &= 1-(1-p)^n &\gtrapprox 1-\mathrm{e}^{-np}
\end{aligned}$$

Aufgabe: Bei Ausfallwkt $p = 0.01$, mit welcher Wkt funktionieren...

alle 50 Teile?	Wkt $0.99^{50} \approx \mathrm{e}^{-0.5} \approx 0.61$
alle 100 Teile?	Wkt $0.99^{100} \approx \mathrm{e}^{-1} \approx 0.37$
alle 200 Teile?	Wkt $0.99^{200} \approx \mathrm{e}^{-2} \approx 0.14$

☺ Die behandeln wir später noch besser, allgemeiner und präziser:
Für den Ausfall von $1, 2, 3, \ldots$ Teilen gilt exakt die Binomialverteilung $\mathrm{B}(n, p)$ und als praktische Näherung die Poisson–Verteilung $\mathrm{P}(np)$.
Poissons Gesetz der kleinen Zahlen (U3E) liefert eine Fehlerschranke.

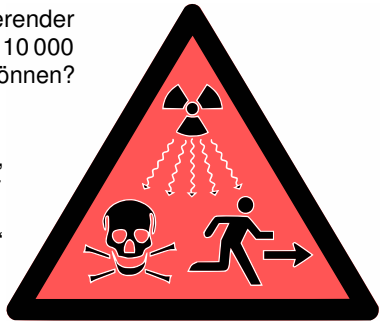
Wahrscheinlichkeit eines Reaktorunfalls

Beliebter, aber tragischer Fehler: „Die Klausur bestehe ich mit 40% Wkt, bei drei Prüfungsversuchen also mit 120%iger Sicherheit.“ *Whaaa?*

☹ Eine „Wkt über 100%“ ist ganz offenkundig blühender Unsinn!
Die Rechnung ist katastrophal falsch. Dunning–Kruger–Effekt?

Diese Symbole warnen vor ionisierender Strahlung. Wird man sie auch in 10 000 Jahren noch richtig interpretieren können?

Schon heute werden diese Symbole falsch verstanden, etwa als „Propeller“ oder „Wundermedizin, die Tote wieder zum Leben erweckt.“



Aus der Presse: „In $14\,000$ Reaktorjahren sind 4 Unfälle der höchsten Stufe aufgetreten. Demnach tritt bei 143 europäischen Reaktoren in 30 Jahren ein solcher Unfall mit Wahrscheinlichkeit von über 100% auf.“

Unfallwkt $p = 4/14000 \approx 0.029\%$ pro Reaktorjahr.
Betrachtete Laufzeit $n = 143 \cdot 30 = 4290$ Reaktorjahre.
☹ Falsche Rechnung: Wkt $np = 4290 \cdot 4/14000 \approx 123\%$.

Wahrscheinlichkeit eines Reaktorunfalls

Nach der Nuklearkatastrophe von Fukushima im März 2011 wurde über Risiken diskutiert. Der Physiker Bernard Laponche und der Ingenieur Benjamin Dessus schrieben hierzu in der Tageszeitung *La Libération*:

Le parc actuel de réacteurs des centrales nucléaires cumule 14000 *années-réacteur, ce qui correspond à environ* 450 *réacteurs fonctionnant durant trente et un ans. [...] Sur ce parc, cinq réacteurs ont connu un accident grave (un à Three Mile Island, un à Tchernobyl et trois à Fukushima), dont quatre sont des accidents majeurs (Tchernobyl et Fukushima). [...] La France compte actuellement 58 réacteurs en fonctionnement et l'Union européenne un parc de 143 réacteurs. Sur la base du constat des accidents majeurs survenus ces trente dernières années, la probabilité d'occurrence d'un accident majeur sur ces parcs serait donc de* 50% *pour la France et de plus de* 100% *pour l'UE.*
(*Accident nucléaire: une certitude statistique*, La Libération, 3.6.2011)

Diese kreative Wahrscheinlichkeitsrechnung wollen wir kritisch prüfen. Nicht alles, was Sie in der Zeitung oder im Internet oder im Lehrbuch lesen, ist wahr und gut und nützlich. Bleiben Sie (selbst)kritisch!

Wahrscheinlichkeit eines Reaktorunfalls

Aufgabe: Welche Rechnung wäre richtig? Ich erinnere an unser Ziel: Wir wollen nachvollziehbar begründete, quantitative Aussagen!

☹ Eine Wkt von „über 100%“ ist offenkundig blühender Unsinn! Aus Daten lernen? Das gelingt nur richtig mit Mathematik...

☺ Wir haben oben die korrekte Formel abgeleitet und approximiert. Das ist nicht weiter schwer. Gehen wir angemessen sorgfältig vor:

Modell: Unfälle ereignen sich unabhängig mit Wkt p pro Raktorjahr. Wahrscheinlichkeit, in n Reaktorjahren **keinen Unfall** zu erleben:

$$(1-p)^n \lessapprox \mathrm{e}^{-np} \approx \mathrm{e}^{-1.23} \approx 29.4\%$$

Wahrscheinlichkeit, **mindestens einen Unfall** zu erleben:

$$1-(1-p)^n \gtrapprox 1-\mathrm{e}^{-np} \approx 70.6\%$$

Die Wkt mindestens eines Unfalls beträgt also etwas über 70%.

☺ Hier ist $\mu = np$ die erwartete Anzahl der Unfälle. Die Näherung $\mathrm{e}^{-np} = \mathrm{P}(\mu)(0)$ gehört zur Poisson–Verteilung, siehe Satz U3E.

Wahrscheinlichkeit eines Reaktorunfalls

⚠ Auch die korrekte Rechnung ergibt noch eine alarmierend hohe Wkt.

Es hätte dem Artikel gut getan, einfach richtig zu rechnen. Durch falsche Rechnung, ja grobe Missachtung mathematischer Sorgfalt, wurde ein gutes und ernsthaftes Argument entwertet. Wir können nun diskutieren, ob die Daten verlässlich sind und die Annahmen überzeugend... Aber wenigstens stimmt jetzt die Rechnung: Soviel Handwerk muss man beherrschen!

Ob die Argumente *sachlich* stichhaltig sind, ist eine sehr schwierige Frage. Für eine gesicherte Auswertung ist die Fallzahl sehr gering. Die statistische Analyse vergangener Unfälle und die daraus abgeleitete Schätzung zukünftiger Unfälle sind daher nur schwer möglich. Zum Beispiel sind die drei Unfälle von Fukushima nicht unabhängig, ihre Zählweise also diskussionswürdig. Die Sachlage ist komplex, die hier vorgestellten Zahlen sind nur ein grober erster Anhaltspunkt.

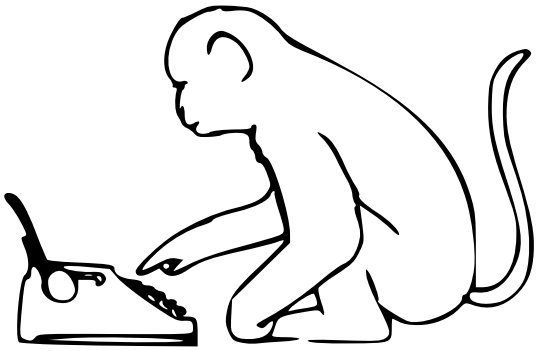
Klar ist immerhin, dass die Unfallwahrscheinlichkeit nicht verschwindend gering ist, und schon gar nicht gleich Null. Zur Vereinfachung schlage ich hier vor, für unsere Beispielrechnung die Annahmen der Autoren zunächst zu akzeptieren und auf dieser Grundlage lediglich zu prüfen, ob die Argumente *rechnerisch* richtig sind. Zur Betonung halten wir daher nochmals fest:

Eine Wahrscheinlichkeit von „über 100%“ ist blühender Unsinn!

Der Fehler liegt in der allzu naiven Rechnung: Bei einer Unfallwahrscheinlichkeit von p pro Reaktorjahr und einer Laufzeit von n Reaktorjahren beträgt die Gesamtwahrscheinlichkeit nicht np. Das fällt spätestens bei einer (groben) Plausibilitätsprüfung auf! Wie jede ernsthafte Frage verdient die Reaktorsicherheit Umsicht und Sorgfalt und insbesondere korrekte Rechnungen!

Der endlos tippende Affe

Ein Affe tippt zufällig, aber endlos lange, auf einer Schreibmaschine.
Wird er dabei irgendwann Shakespeares *Hamlet* schreiben? Ja!
Müssen wir darauf sehr lange warten? Ja, aber sicher!



Bildquelle: wikipedia.org

Sensation: Affe schreibt Hamlet

Vatikan: Die Erde ist eine Scheibe!

Verrückter Professor beweist Affentheorem

Montag, 15. Oktober 2012

Mathe

UNAUSTEHLICH ÜBERFLÜSSIG

Lotterie verkauft Arbeits-Lose

Wahlsieg für DJ Klobrille

Keine Macht den Drogen! Sondersteuer auf Smarties geplant

Der Finanzminister: Nichtraucher gefährden die Steuereinnahmen!

Gefälschte Zeitungen im Umlauf!

Skanda

Weltrekord: Bell im Anmarsch!

Satz U1D: vom endlos tippenden Affen, quantitative Fassung

Sei T ein vorgegebener Text der Länge L über einem Alphabet A.
Ein zufälliger Text Z der Länge nL enthält T mit Wahrscheinlichkeit

$$\mathbf{P}(Z \text{ enthält } T) \;\geq\; 1-(1-|A|^{-L})^n \nearrow 1 \quad \text{für } n\to\infty.$$

Für $p\in[0,1[$ gilt $\mathbf{P}(Z \text{ enthält } T)\geq p$ für $n\geq -\ln(1-p)\cdot|A|^L$.

Der Satz vom endlos tippenden Affen

Aufgabe: (1) Erklären Sie diese Abschätzung und den Grenzwert.
(2) Rechnen Sie ein Zahlenbeispiel für $|A|=26$ und $L=130\,000$.
(3) Ist dies als Strategie für Klausuren zu empfehlen?

(4) Die extrem lange Wartezeit wird manchmal als Argument gegen die Evolution durch zufällige Mutationen verwendet. Ist das gerechtfertigt?

Die Formulierung des „endlos tippenden Affen“ ist provokant-anschaulich, drückt aber präzise einen mathematischen Satz aus! Das betrachtete Alphabet A habe $|A|$ Zeichen. Zum Beispiel im lateinischen Alphabet 26 Klein- und 26 Großbuchstaben, dazu Ziffern, Satzzeichen, etc. Bei Gleichverteilung wird jedes Zeichen mit positiver Wahrscheinlichkeit $a=1/|A|$ getippt.

Für das wiederholte Tippen gehen wir von einem Produktexperiment aus. Unser fleißiger Affe produziert so eine *unendliche* Folge zufälliger Zeichen. Darin findet sich jede *endliche* Folge mit Wahrscheinlichkeit 1. Neben *Hamlet* wird er also auch *Harry Potter* Band 1–7 tippen, ebenso Darwins *Über die Entstehung der Arten*, die gesamte Nationalbibliothek, und überhaupt alle bisher veröffentlichten Texte. Die zu erwartende Wartezeit ist allerdings *sehr sehr laaang*…

Zugrundeliegendes Modell: Auf dem Alphabet A betrachten wir eine WVerteilung $q: A\to[0,1]$ mit $a=\min q>0$, sodass jedes Zeichen mit positiver Wahrscheinlichkeit $\geq a$ getippt wird. Bei Gleichverteilung hätten wir $a=1/|A|$; die folgende Abschätzung gilt etwas allgemeiner. Bei k-facher unabhängiger Wiederholung des zufälligen Tippvorgangs betrachten wir als stochastisches Modell den Produktraum A^k mit der Produktwahrscheinlichkeit.

Der Satz vom endlos tippenden Affen

(1) Beweis der Abschätzung: Die Wkt, bei L zufälligen Zeichen den Text T zu tippen, ist $\geq a^L > 0$. (Sie ist zugegeben sehr klein, aber nicht Null). Die Misserfolgswkt ist $\leq 1 - a^L < 1$ (nahe Eins, aber nicht gleich Eins).

Wenn der Affe $2L$ Zeichen tippt, so ist die Misserfolgswkt $\leq (1 - a^L)^2$.
Wenn der Affe $3L$ Zeichen tippt, so ist die Misserfolgswkt $\leq (1 - a^L)^3$.
Wenn der Affe nL Zeichen tippt, so ist die Misserfolgswkt $\leq (1 - a^L)^n$.
Wegen $(1 - a^L) < 1$ konvergiert $(1 - a^L)^n \searrow 0$, langsam aber sicher!

Für hinreichend großes n ist die Misserfolgswkt also beliebig nahe an 0. Umgekehrt liegt daher die Erfolgswkt bei $\geq 1 - (1 - a^L)^n \nearrow 1$. Genauer: Für Erfolgswkt $\geq p$, also Misserfolgswkt $\leq 1 - p$, genügt demnach

$$(1 - a^L)^n \leq 1 - p.$$

Nach n aufgelöst bedeutet das: $n \ln(1 - a^L) \leq \ln(1 - p)$.
Wegen $\ln(1 - t) \lessapprox -t$ genügt es, die einfachere Ungleichung $n(-a^L) \leq \ln(1 - p)$ zu erfüllen, also $n \geq -\ln(1 - p)/a^L$.
Für $a = 1/|A|$ erhalten wir die Formel des Satzes.

Der Satz vom endlos tippenden Affen

(2) Zahlenbeispiel: Die Abschätzung ist zwar recht grob, aber illustrativ. Wir betrachten $|A| = 26$, also nur Großbuchstaben ohne Satzzeichen. Die Textlänge $L = 130\,000$ entspricht in etwa die Länge von Hamlet. Für Erfolgswkt $> 99.99\%$ genügt ein zufälliger Text der Länge

$$nL \quad \geq \quad 10 \cdot 26^{130\,000} \cdot 130000 \quad \approx \quad 10^{184\,000}.$$

☺ Das scheinbare Paradox ist damit aufgelöst und numerisch illustriert: Die Schwierigkeit liegt in der harmlosen Formulierung „endlos lange“. Hamlet kommt irgendwann, aber es wird dauern... *sehr sehr laaange*!

(3) Nein, als Strategie für Klausuren ist das nicht zu empfehlen: Niemand will, niemand kann so lange warten. Nicht nachmachen!

(4) Nein. Treiber der Evolution sind neben zufälliger Mutation vor allem Selektion und Rekombination. Diese ändern das Modell grundlegend!

Sie wählen zufällig eine Zahl $x \in [0, 1]$ und lesen ihre Nachkommastellen als Text: `00:_`, `01:A`, ..., `26:Z`, `27:a`, ..., `52:z`, ... `90:0`, ..., `99:9`. Mit welcher Wkt enthält x Tolkiens *Der Herr der Ringe*?

Geburtstagsparadox / Kollisionswahrscheinlichkeit

Aufgabe: Wie groß ist die Wkt Q, dass unter $k = 25$ zufälligen Personen mindestens zwei am selben Tag des Jahres geboren sind?

☺ Intuitiv halten viele eine Kollision für unwahrscheinlich. Tatsächlich liegt die Wkt bei über 50%, daher trägt dieses überraschende Ergebnis den Namen „Geburtstagsparadox“. Probieren Sie es selbst einmal aus! Kollisionen untersucht man für Hashfunktionen und Geburtstagsangriffe.

Annahmen: Die Geburtstage sind gleichverteilt auf $n = 365$ Tage (keine Schalttage) und untereinander unabhängig (insb. keine Zwillinge, etc.).

Lösung: Gegenwkt $P = 1 - Q$, alle haben verschiedene Geburtstage:

$$P = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} = 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$$= \prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right) \lessapprox \prod_{j=0}^{k-1}\exp\left(-\frac{j}{n}\right) = \exp\left(-\sum_{j=0}^{k-1}\frac{j}{n}\right) = \exp\left(-\frac{k(k-1)}{2n}\right)$$

Für $k = 25$ und $n = 365$ gilt $P \lessapprox \mathrm{e}^{-0.821} \lessapprox 0.44$ und somit $Q \gtrapprox 0.56$. Schon bei $k = 23$ Personen liegt die Kollisionswkt knapp über 50%.

Geburtstagssatz / Kollisionswahrscheinlichkeit

Satz U1E: Geburtstagssatz / Kollisionswahrscheinlichkeit

Aus n Möglichkeiten wird k mal zufällig ausgewählt (wobei $1 \le k \le n$). Die Wahrscheinlichkeit $P_{n,k}$, dabei k verschiedene auszuwählen, ist

$$\boxed{P_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!\,n^k} \lessapprox \exp\left(-\frac{k(k-1)}{2n}\right).}$$

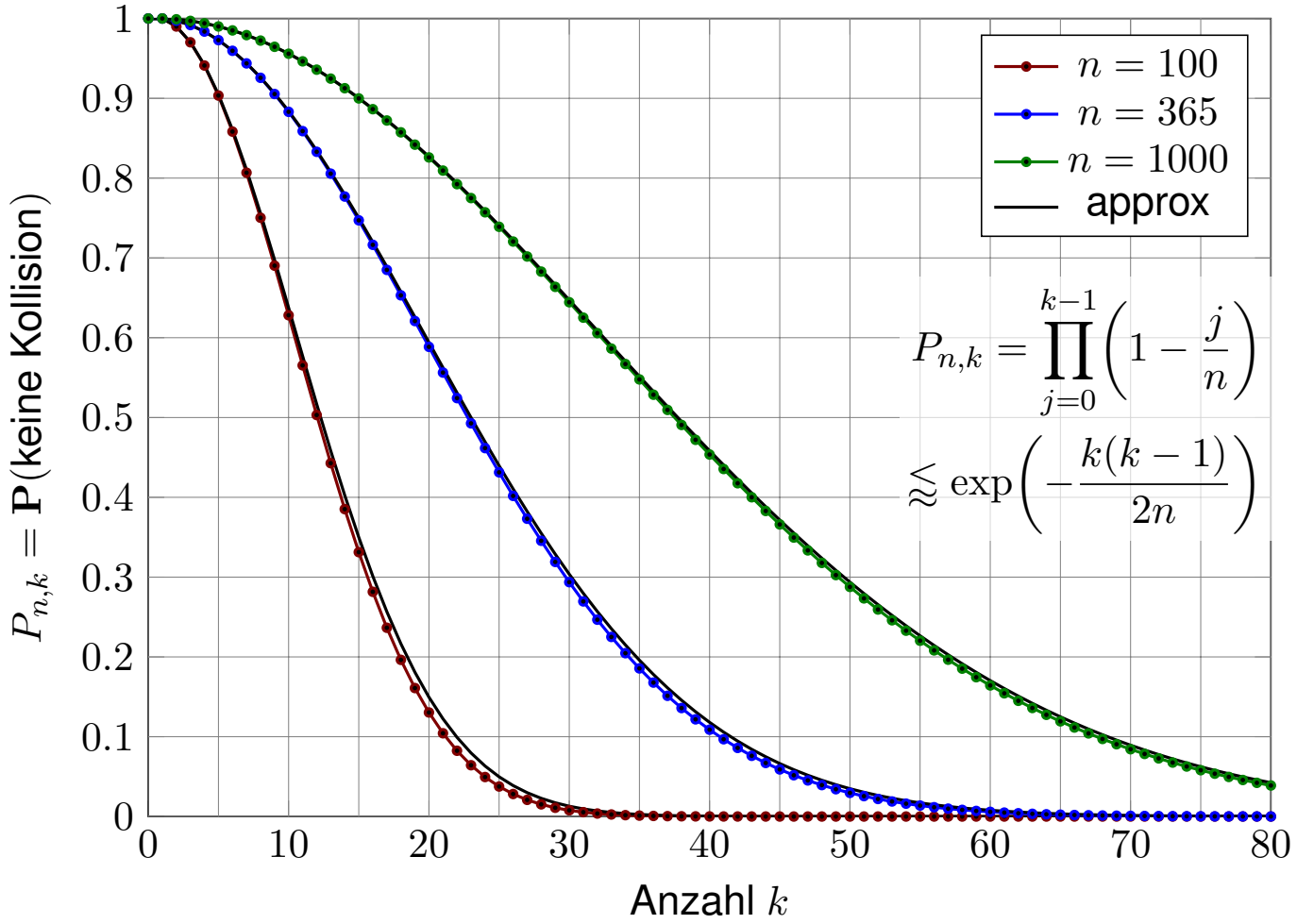
Die Wahrscheinlichkeit $Q_{n,k}$ mindestens einer Kollision ist demnach

$$\boxed{Q_{n,k} = 1 - P_{n,k} \gtrapprox 1 - \exp\left(-\frac{k(k-1)}{2n}\right).}$$

Aus n Möglichkeiten k mal zufällig auswählen soll heißen *gleichverteilt* und *unabhängig*. Die genannte Ungleichung „$\le$“ bzw. „$\ge$“ gilt hier immer. Die Näherung „$\approx$“ ist gut falls n groß ist und k klein. Wie die folgenden Graphen zeigen, ist selbst für große k die Abweichung meist akzeptabel.

☺ Der Graph ist die rechte Hälfte der Gaußschen Glockenkurve $\mathrm{e}^{-x^2/2}$.

Geburtstagssatz / Kollisionsfreiheit



Bälle in Fächern / *balls in bins*

Fun fact: Bei der Fußball-WM 2014 traten 32 Teams an, jedes mit 23 Spielern. Wie viele Teams hatten doppelte Geburtstage? Genau 16.

Geburtstermine sind nicht gleichverteilt, im Sommer werden etwas mehr Kinder geboren als im Winter. Dadurch steigt die Kollisionswkt leicht an.

☺ Ein Teilnehmer, Geburtstag 29.02., wünschte genauere Rechnung.
Wir werfen Bälle $1, \ldots, k$ unabhängig in Fächer $1, \ldots, n$ und zählen die Kollisionen: Ball a landet in Fach f_a mit Wkt $p_a(f_a) \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} p_a(i) = 1$.

Aufgabe: (1) Wie un/wahrscheinlich ist hier die Kollisionsfreiheit?
(2) Wie viele Kollisionen erwarten Sie, d.h. Paare $a < b$ mit $f_a = f_b$?

Lösung: Ergebnismenge ist $\Omega = \{\, f : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, n\} : a \mapsto f_a \,\}$ mit Wkt $p(f) = p_1(f_1) \cdots p_k(f_k)$. Sei $X_{a,b}(f) = 1$ gdw $f_a = f_b$, sonst 0. Kollision a mit b hat Wkt $\mathbf{P}(f_a{=}f_b) = \mathbf{E}(X_{a,b}) = \sum_{i=1}^{n} p_a(i)\, p_b(i)$.

(2) Für die Kollisionszahl $X = \sum_{a<b} X_{a,b}$ folgt $\mathbf{E}(X) = \sum_{a<b} \mathbf{E}(X_{a,b})$.

(1) Kollisionsfreiheit (d.h. f injektiv) hat näherungsweise die Wkt
$P \lessapprox \prod_{a<b}(1 - \mathbf{E}(X_{a,b})) \lessapprox \prod_{a<b} \exp(-\mathbf{E}(X_{a,b})) = \exp(-\mathbf{E}(X))$.

Beispiel: Für $p_a(i) = 1/n$ erhalten wir erneut $P \lessapprox \exp(-k(k-1)/2n)$.

Kombinatorische Abzählformeln

Viele Zufallsexperimente beschreiben wir als **Laplace–Modell** durch einen endlichen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbf{P})$ mit Gleichverteilung:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der Ergebnisse in } A}{\text{Anzahl aller Ergebnisse in } \Omega} = \frac{\text{günstige Ergebnisse}}{\text{mögliche Ergebnisse}}$$

☺ Es genügt hier also, Elemente zu zählen. Das ist meist einfach.

⚠ In realistischen Anwendungen können Ω und A sehr groß sein.

Beispiel: Beim Lotto „6 aus 49“ gibt es ca. 14 Millionen Möglichkeiten. Mengen solcher Größe möchten Sie nicht mehr per Hand abzählen.

Sind die betrachteten Mengen noch etwas größer, so versagen selbst Computer beim expliziten Aufzählen. Wir benötigen daher effiziente Techniken zum systematischen Abzählen und geschickte Näherungen.

☺ Hierzu nutzen wir die folgenden kombinatorischen Abzählformeln!

☺ Für große Werte nutzen wir zudem geeignete Näherungsformeln.

📖 M. Aigner: *Diskrete Mathematik.* Vieweg 2006

Kombinatorische Abzählformeln

Anzahl aller **Tupel** der Länge k von n Elementen:

$$n^k = n \cdot n \cdots n \qquad (k \text{ Faktoren})$$

Anzahl aller **Tupel ohne Wiederholungen**:

$$n^{\underline{k}} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) \qquad (k \text{ Faktoren})$$

Anzahl aller **Permutationen** von n Elementen:

$$n! = n^{\underline{n}} = n(n-1)(n-2)\cdots 1 \qquad (n \text{ Faktoren})$$

Anzahl aller **Auswahlen** von k aus n Elementen

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$$

Für große n und kleine k haben wir folgende Näherungsformeln:

$$\boxed{n^{\underline{k}}/n^k \lessapprox \mathrm{e}^{-k(k-1)/(2n)} \quad \text{und} \quad n!/n^n \sim \sqrt{2\pi n}\,\mathrm{e}^{-n}}$$

📖 Siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §1.3, zur Wiederholung von **Fakultät** und **Binomialkoeffizienten**. Das Produkt $n^{\underline{k}} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = n!/(n-k)!$ heißt **fallende Fakultät** von n mit k Faktoren. Sie entsteht hier als nützliche Abzählformel.

Tupel

Aus $\{0,1\}$ lassen sich folgende 2–Tupel (Paare) bilden:

$$\{0,1\}^2 = \{\ (0,0),\ (0,1),\ (1,0),\ (1,1)\ \}$$

Aus $\{0,1\}$ lassen sich folgende 3–Tupel (Tripel) bilden:

$$\begin{aligned}\{0,1\}^3 = \{\ &(0,0,0),\ (0,0,1),\ (0,1,0),\ (0,1,1),\\ &(1,0,0),\ (1,0,1),\ (1,1,0),\ (1,1,1)\ \}\end{aligned}$$

Aus $\{0,1\}$ lassen sich folgende 4–Tupel (Quadrupel) bilden:

$$\begin{aligned}\{0,1\}^4 = \{\ &(0,0,0,0),\ (0,0,0,1),\ (0,0,1,0),\ (0,0,1,1),\\ &(0,1,0,0),\ (0,1,0,1),\ (0,1,1,0),\ (0,1,1,1),\\ &(1,0,0,0),\ (1,0,0,1),\ (1,0,1,0),\ (1,0,1,1),\\ &(1,1,0,0),\ (1,1,0,1),\ (1,1,1,0),\ (1,1,1,1)\ \}\end{aligned}$$

Das entspricht dem n-maligen Münzwurf (mit $0 =$ Kopf, $1 =$ Zahl).
Beim n-maligen Würfeln betrachten wir analog $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^n$ als Ergebnismenge; den Fall $n = 2$ haben wir auf Seite T124 aufgezählt.

Tupel

Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ haben wir die **Potenz**

$$\boxed{n^k = \text{Anzahl aller } \textbf{Tupel} \text{ der Länge } k \text{ von } n \text{ Elementen.}}$$

Rekursionsformel: $n^0 = 1$ und $n^{k+1} = n^k \cdot n$.
Ausgeschrieben: $n^k = n \cdot n \cdot n \cdots n$ mit k Faktoren.

Zudem betrachten wir die **fallende Fakultät**

$$\boxed{n^{\underline{k}} = \text{Anzahl aller } \textbf{Tupel ohne Wiederholungen}.}$$

Rekursionsformel: $n^{\underline{0}} = 1$ und $n^{\underline{k+1}} = n^{\underline{k}} \cdot (n-k)$.
Ausgeschrieben: $n^{\underline{k}} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$.

Nach Geburtstagssatz U1E gilt $n^{\underline{k}}/n^k \lessapprox \exp\bigl(-k(k-1)/(2n)\bigr)$.
Für kleine k und große n haben wir also die Näherungsformel

$$\boxed{n^{\underline{k}} \lessapprox n^k\, \mathrm{e}^{\frac{-k(k-1)}{2n}}.}$$

Permutationen

Permutationen der Elemente $1, 2$:

$$(1,2),\ (2,1)$$

Permutationen der Elemente $1, 2, 3$:

$$(1,2,3),\ (1,3,2),\ (2,1,3),\ (2,3,1),\ (3,1,2),\ (3,2,1)$$

Permutationen der Elemente $1, 2, 3, 4$:

$$\begin{gathered}(1,2,3,4),\ (1,2,4,3),\ (1,3,2,4),\ (1,3,4,2),\ (1,4,2,3),\ (1,4,3,2),\\ (2,1,3,4),\ (2,1,4,3),\ (2,3,1,4),\ (2,3,4,1),\ (2,4,1,3),\ (2,4,3,1),\\ (3,1,2,4),\ (3,1,4,2),\ (3,2,1,4),\ (3,2,4,1),\ (3,4,1,2),\ (3,4,2,1),\\ (4,1,2,3),\ (4,1,3,2),\ (4,2,1,3),\ (4,2,3,1),\ (4,3,1,2),\ (4,3,2,1)\end{gathered}$$

Eine Permutation der Menge $\{1, \ldots, n\}$ ist ein n–Tupel, in dem jedes Element $1, \ldots, n$ genau einmal vorkommt. Hierzu gibt es $n! := n^{\underline{n}} = n(n-1)(n-2)\cdots 1$ Möglichkeiten.

Obige Näherungsformel liefert die Ungleichung $n! \le n^n\, \mathrm{e}^{\frac{1-n}{2}}$, ist hier aber unnötig grob. Für die Fakultät geben wir die ersten Werte und als Näherung die Stirling–Formel.

Permutationen

Für alle $n \in \mathbb{N}$ haben wir die **Fakultät**

$n! =$ Anzahl aller **Permutationen** von n Elementen.

Rekursionsformel: $0! = 1$ und $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$.

Ausgeschrieben: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$. Die ersten Werte sind:

$0! = 1$	$7! = 5\,040$	$14! = 87\,178\,291\,200$
$1! = 1$	$8! = 40\,320$	$15! = 1\,307\,674\,368\,000$
$2! = 2$	$9! = 362\,880$	$16! = 20\,922\,789\,888\,000$
$3! = 6$	$10! = 3\,628\,800$	$17! = 355\,687\,428\,096\,000$
$4! = 24$	$11! = 39\,916\,800$	$18! = 6\,402\,373\,705\,728\,000$
$5! = 120$	$12! = 479\,001\,600$	$19! = 121\,645\,100\,408\,832\,000$
$6! = 720$	$13! = 6\,227\,020\,800$	$20! = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000$

Dank Stirling–Formel B3D haben wir für große n die Näherung

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

Potenzmenge

U207
Ausführung

Die **Potenzmenge** $\mathfrak{P}(\Omega)$ ist die Menge aller Teilmengen von Ω:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{P}(\emptyset) &= \{\ \emptyset\ \} \\
\mathfrak{P}(\{1\}) &= \{\ \emptyset, \{1\}\ \} \\
\mathfrak{P}(\{1,2\}) &= \{\ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\ \} \\
\mathfrak{P}(\{1,2,3\}) &= \{\ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\ \} \\
\mathfrak{P}(\{1,2,3,4\}) &= \{\ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \\
&\qquad \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \\
&\qquad \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\ \}
\end{aligned}$$

Für die Anzahl aller Teilmengen gilt

$$\boxed{|\mathfrak{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|}.}$$

Beweis: In einer n–elementigen Menge Ω entsteht jede Teilmenge $A \subseteq \Omega$ durch n unabhängige Wahlen: Jedes Element $\omega \in \Omega$ liegt entweder in A oder nicht, und diese Wahlen bestimmen A. Vornehm ausgedrückt: Die Indikatorfunktion stiftet eine Bijektion $\mathfrak{P}(\Omega) \to \{0,1\}^\Omega : A \mapsto \mathbf{I}_A$, ihre Umkehrfunktion ist demnach $\{0,1\}^\Omega \to \mathfrak{P}(\Omega) : f \mapsto \operatorname{supp}(f) = \{\ \omega \in \Omega \mid f(\omega) = 1\ \}$.

Binomialkoeffizienten

U208
Ausführung

Für $n, k \in \mathbb{N}$ haben wir den **Binomialkoeffizienten**

$$\boxed{\binom{n}{k} = \text{Anzahl aller } \textbf{Auswahlen} \text{ von } k \text{ aus } n \text{ Elementen.}}$$

Es gilt $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ und $\binom{n}{k} = 0$ für $k > n$ sowie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
Für alle $n, k \geq 1$ gelingt die Berechnung durch die Rekursionsformel

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.}$$

Beweis: Entweder wird das Element n ausgewählt, dann gibt es genau $\binom{n-1}{k-1}$ Möglichkeiten, noch $k-1$ Elemente aus den verbleibenden $n-1$ auszuwählen. Oder das Element n wird nicht ausgewählt, dann gibt es noch genau $\binom{n-1}{k}$ Möglichkeiten, k Elemente aus den verbleibenden $n-1$ auszuwählen. Beide Fälle sind disjunkt, ihre Summe ist die behauptete Rekursionsformel.

Zusammen mit der vorigen Formel $|\mathfrak{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|}$ erhalten wir mühelos:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Binomialkoeffizienten

Hieraus erhalten wir **Pascals Dreieck für Binomialkoeffizienten**:

$\binom{n}{k}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Für festes k und $n \to \infty$ (also eine Spalte in obiger Tabelle) gilt

$$\boxed{\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!} \exp\left(-\frac{k(k-1)}{2n}\right) \sim \frac{n^k}{k!}.}$$

Binomischer Lehrsatz

Für je zwei Elemente a, b in einem Ring mit $ab = ba$ gilt:

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \\
(a+b)^1 &= 1a + 1b \\
(a+b)^2 &= 1a^2 + 2ab + 1b^2 \\
(a+b)^3 &= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3 \\
(a+b)^4 &= 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4
\end{aligned}$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (per vollständiger Induktion):

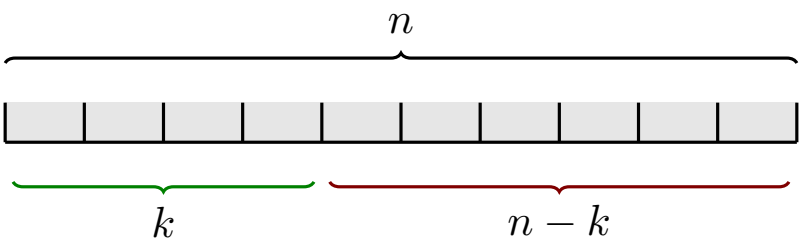
$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k}$$

Speziell für $a = b = 1$ erhalten wir damit erneut:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Binomialkoeffizienten

Auf wie viele Arten können wir aus n Objekten k auswählen?



Die Gesamtzahl der Möglichkeiten ist:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$$

Kombinatorische Herleitung: Wir wählen k aus n Elementen. Hierzu können wir alle n Elemente auf $n!$ Arten anordnen. Bei jeder Anordnung wählen wir die ersten k Elemente aus. Die ersten k dürfen wir dabei auf $k!$ Arten umordnen. Die letzten $n-k$ dürfen wir auf $(n-k)!$ Arten umordnen. Die Auswahl ändert sich hierdurch nicht. Dies liefert die obige Formel.

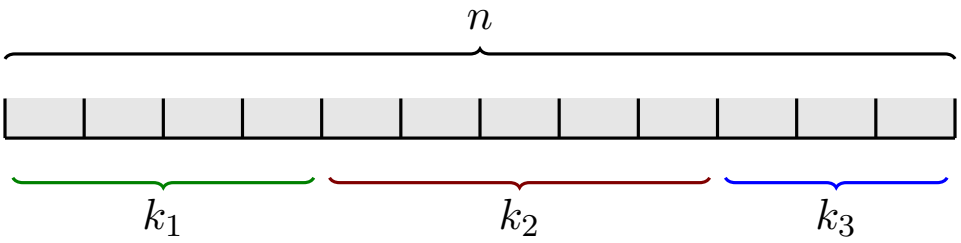
Hieraus erhalten wir die folgenden groben Schranken:

$$\frac{n^k}{k^k} \leq \binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}\exp\left(-\frac{k(k-1)}{2n}\right) \leq \frac{n^k}{k!}$$

Multinomialkoeffizienten

Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ zählt, auf wie viele Arten wir n Objekte in zwei Gruppen der Größe k und $n-k$ aufteilen können. Etwas allgemeiner können wir folgendes zählen:

Auf wie viele Arten können wir n Objekte in ℓ Gruppen zu $k_1, \ldots, k_\ell$ Elementen aufteilen? Hierbei sei $k_1, \ldots, k_\ell \geq 0$ und $k_1 + \cdots + k_\ell = n$.



Die Gesamtzahl der Möglichkeiten ist:

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_\ell} := \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_\ell!}$$

Kombinatorische Herleitung: Wir können die n Elemente auf $n!$ Arten anordnen. Die ersten k_1 bilden die erste Gruppe, die nächsten k_2 bilden die zweite Gruppe, usw. Innerhalb jeder Gruppe können wir beliebig umordnen. Dies liefert die obige Formel.

Anwendungsbeispiele

Aufgabe: Wie viele Kartenverteilungen gibt es beim Skat?

Lösung: Von 32 Karten gehen 10 an jede der drei Spieler:innen:

$$\binom{32}{10,10,10,2} = \frac{32!}{10!\,10!\,10!\,2!} \approx 2.75 \cdot 10^{15}$$

Aufgabe: Auf wie viele Weisen lassen sich 12 (verschiedenfarbige) Bonbons gerecht unter zwei / drei / vier / zwölf Kindern aufteilen?

Lösung: Die Anzahl der möglichen Aufteilungen berechnen wir zu:

$$\begin{aligned}
\binom{12}{6,6} &= \frac{12!}{6!\,6!} &&= 924\\
\binom{12}{4,4,4} &= \frac{12!}{4!\,4!\,4!} &&= 34650\\
\binom{12}{3,3,3,3} &= \frac{12!}{3!\,3!\,3!\,3!} &&= 369600\\
\binom{12}{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1} &= 12! &&= 479001600
\end{aligned}$$

Anwendungsbeispiele

Aufgabe: Wie wahrscheinlich ist es, bei 10 Münzwürfen genau 7 mal Kopf und 3 mal Zahl zu erhalten?

$$\begin{aligned}
\Omega = \{0,1\}^{10}, \qquad & |\Omega| = 2^{10} &&= 1024\\
A = \left\{\begin{matrix}\text{Ergebnisse } \omega \in \Omega \text{ mit}\\ \omega_1 + \cdots + \omega_{10} = 3\end{matrix}\right\}, \qquad & |A| = \binom{10}{7,3} &&= 120\\
& \mathbf{P}(A) = |A|/|\Omega| &&\approx 0.117
\end{aligned}$$

Aufgabe: Wie wahrscheinlich ist es, bei 10-maligem Würfeln, die Augenzahlen $1,2,3,4,5,6$ mit Häufigkeit $1,2,3,3,0,1$ zu erhalten?

$$\begin{aligned}
\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^{10}, \qquad & |\Omega| = 6^{10} &&= 60\,466\,176\\
A = \left\{\begin{matrix}\text{Ergebnisse } \omega \in \Omega \text{ mit}\\ \text{diesen Häufigkeiten}\end{matrix}\right\}, \qquad & |A| = \binom{10}{1,2,3,3,0,1} &&= 50\,400\\
& \mathbf{P}(A) = |A|/|\Omega| &&\approx 0.00083
\end{aligned}$$

Hier wurde ein Laplace–Experiment betrachtet, d.h. alle Ergebnisse sind gleich wahrscheinlich. Es genügt daher, die Anzahl $|A|$ der gesuchten Ergebnisse durch die Gesamtzahl $|\Omega|$ aller Ergebnisse zu teilen. Diese Anzahlen können wir nun leicht bestimmen.

Zerlegungen

U215
Ausführung

Die Menge $\{1\}$ erlaubt nur eine Zerlegung, nämlich $\{\{1\}\}$.
Die Menge $\{1,2\}$ erlaubt zwei Zerlegungen: $\{\{1,2\}\}$ und $\{\{1\},\{2\}\}$.
Die Menge $\{1,2,3\}$ erlaubt die folgenden fünf Zerlegungen:

$$\{\{1,2,3\}\},\ \{\{1\},\{2,3\}\},\ \{\{1,2\},\{3\}\},\ \{\{1,3\},\{2\}\},\ \{\{1\},\{2\},\{3\}\}.$$

Die Menge $\{1,2,3,4\}$ erlaubt die folgenden fünfzehn Zerlegungen:

$$\{\{1,2,3,4\}\},$$

$$\{\{1,2\},\{3,4\}\},\ \{\{1,3\},\{2,4\}\},\ \{\{1,4\},\{2,3\}\},$$
$$\{\{1\},\{2,3,4\}\},\ \{\{2\},\{1,3,4\}\},\ \{\{3\},\{1,2,4\}\},\ \{\{4\},\{1,2,3\}\},$$

$$\{\{1,2\},\{3\},\{4\}\},\ \{\{1,3\},\{2\},\{4\}\},\ \{\{1,4\},\{2\},\{3\}\},$$
$$\{\{2,3\},\{1\},\{4\}\},\ \{\{2,4\},\{1\},\{3\}\},\ \{\{3,4\},\{1\},\{2\}\},$$

$$\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}.$$

Zerlegungszahlen

U216
Ausführung

Für $n,k \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Zerlegungszahl

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \text{Anzahl aller } \textbf{Zerlegungen} \text{ von } n \text{ Elementen in } k \text{ nicht-leere Gruppen (beliebiger Größe).}$$

Offenbar gilt $\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1$ und $\left\{ {n \atop k} \right\} = 0$ für $k > n$.
Für $n \geq 1$ gilt $\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0$, $\left\{ {n \atop 1} \right\} = 1$, $\left\{ {n \atop n} \right\} = 1$.
Für $n \geq 2$ gilt zudem $\left\{ {n \atop n-1} \right\} = \binom{n}{2}$, $\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1$. (Warum?)
Für alle $n,k \geq 1$ gelingt die Berechnung durch die Rekursionsformel

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}.$$

Beweis: Entweder das Element n bildet alleine eine Gruppe, dann gibt es genau $\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$ Möglichkeiten, die verbleibenden $n-1$ Elemente in $k-1$ Gruppen zu zerlegen.
Oder aber das Element n ist Teil einer größeren Gruppe, dann gibt es hierfür genau $\left\{ {n-1 \atop k} \right\}$ Zerlegungen und jeweils k Wahlen, das Element n zu einer bestehenden Gruppe hinzuzufügen.

Die Zerlegungszahlen sind ebenso interessant und natürlich wie die Binomialkoeffizienten, wenn auch weniger prominent. Für $\left\{ {n \atop k} \right\}$ gibt es leider keine so schöne Formel wie für $\binom{n}{k}$.

Zerlegungszahlen

Hieraus erhalten wir folgendes **Dreieck für Zerlegungszahlen**:

$\left\{ n \atop k \right\}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	1	1								
3	1	3	1							
4	1	7	6	1						
5	1	15	25	10	1					
6	1	31	90	65	15	1				
7	1	63	301	350	140	21	1			
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1		
9	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	
10	1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1

Diese Werte heißen auch **Stirling–Zahlen** (zweiter Art).

Für festes k und $n \to \infty$ (also eine Spalte in obiger Tabelle) gilt

$$\left\{ n \atop k \right\} \sim \frac{k^n}{k!} \qquad \text{im Gegensatz zu} \qquad \binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}.$$

Anwendungsbeispiel: Schokokekse

Aufgabe: (Aus dem Mathekalender 2012) Sie backen $k = 100$ Kekse. Sie geben n Chocolate Chips zum Teig, verteilen diese gründlich zufällig und teilen den Teig in 100 Kekse auf. Wieviele Chips brauchen Sie, damit mit 90% Sicherheit jeder Keks mindestens einen Chip enthält?

Lösung: Die Wkt, dass kein Chip im ersten Keks landet, ist $(99/100)^n$. Die Wkt für mindestens einen im ersten Keks ist also $1 - (99/100)^n$. Für $A_i = \{\text{mindestens ein Chip in Keks } i\}$ gilt $\mathbf{P}(A_i) = 1 - 0.99^n$.

(1) Näherung: Zur Vereinfachung rechnen wir, als wären die Ereignisse A_i unabhängig. (Das ist genau genommen nicht richtig, siehe T224, erweist sich aber als erstaunlich gute Näherung, siehe unten.)

Die gewünschte Bedingung vereinfacht sich dann zu:

$$f(n) := (1 - 0.99^n)^{100} \quad \overset{!}{\geq} \quad 0.9$$

Wir erhalten somit (dank Taschenrechner):

$$n \geq \frac{\ln(1 - 0.9^{1/100})}{\ln 0.99} \approx 682.17$$

Anwendungsbeispiel: Schokokekse

(2) Exakt gibt es $k^n = 100^n$ Verteilungen der n Chips auf $k = 100$ Kekse. Darunter sind genau $k!\left\{{n \atop k}\right\}$ mit mindestens einem Chip in jedem Keks.

Anders gesagt: Es gibt k^n Abbildungen $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, k\}$, davon sind genau $k!\left\{{n \atop k}\right\}$ surjektiv. (Schubfachmodell, siehe U222. Gegenstück: Zu injektiv / kollisionsfrei siehe Geburtstagssatz U117.)

Die gewünschte Bedingung ist demnach:

$$g(n) := \frac{k!}{k^n}\left\{{n \atop k}\right\} \quad \overset{!}{\geq} \quad 0.9$$

Ausrechnen für $n = 100, 101, 102, \ldots$ mit Hilfe eines Computers liefert:

$$g(682) = 0.899499\ldots, \qquad g(683) = 0.900455\ldots$$

☺ Sie brauchen also tatsächlich 683 Chocolate Chips! Das rechtfertigt nachträglich die naive Näherung in der obigen vereinfachten Rechnung.

Das erklärt noch nicht, warum diese Näherung so gut funktioniert, oder in welchen anderen Situationen Sie diesen Trick anwenden können. Hierzu wäre eine allgemeine Fehlerabschätzung notwendig.

Zusammenfassung: Abzählformeln

Viele Zufallsexperimente beschreiben wir als **Laplace–Modell** durch einen endlichen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbf{P})$ mit Gleichverteilung:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der Ergebnisse in } A}{\text{Anzahl aller Ergebnisse in } \Omega} = \frac{\text{günstige Ergebnisse}}{\text{mögliche Ergebnisse}}$$

☺ Zum systematischen Abzählen nutzen wir folgende Funktionen:

n^k = Anzahl aller **Tupel** der Länge k von n Elementen,
$n^{\underline{k}}$ = Anzahl aller **Tupel ohne Wiederholungen**,
$n!$ = Anzahl aller **Permutationen** von n Elementen,
$\binom{n}{k}$ = Anzahl aller **Auswahlen** von k aus n Elementen,
$\left\{{n \atop k}\right\}$ = Anzahl aller **Zerlegungen** von n Elementen in k Gruppen.

Diese Grundfunktionen gehören zum kombinatorischen Handwerk, da solche und ähnliche Abzählprobleme sehr häufig vorkommen.

☺ Zur exakten Berechnung haben wir die obigen Rekursionsformeln.

☺ Für große Werte nutzen wir zudem geeignete Näherungsformeln.

Schubfachmodelle im Überblick

Auf wie viele Arten können wir k Murmeln auf n Fächer verteilen?

Beim Verteilen gibt es drei Varianten:

- **beliebig viele Murmeln pro Fach**
- **höchstens eine Murmel pro Fach**
- **mindestens eine Murmel pro Fach**

Auch zur Unterscheidung der Murmeln gibt es zwei Varianten:

- **mit Unterscheidung**: Die Murmeln sind nummeriert $1, \ldots, k$.
- **ohne Unterscheidung**: Die Murmeln sind ununterscheidbar.

Jede Zuordnung der Murmeln zu Fächern entspricht einer Abbildung

$$f : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, n\}.$$

Ununterscheidbare Murmeln dürfen wir umsortieren und erhalten so

$$f(1) \leq f(2) \leq \cdots \leq f(k).$$

Wir zählen nun beliebige / injektive / surjektive Abbildungen.

Schubfachmodelle im Überblick

Auf wie viele Arten können wir k Objekte auf n Fächer verteilen?

Schubfachmodell	unterscheidbare Objekte	ununterscheidbare Objekte
beliebig viele Objekte pro Fach	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
höchstens eins pro Fach (injektiv)	$\frac{n!}{(n-k)!} = k!\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
mindestens eins pro Fach (surjektiv)	$n!\left\{ {k \atop n} \right\}$	$\binom{k-1}{n-1}$

Unterscheidbare Objekte denken wir uns mit $1, \ldots, k$ nummeriert.
Bei ununterscheidbaren Objekten dürfen wir Objekte untereinander vertauschen: Das bedeutet, wir betrachten Anordnungen dann als gleich, wenn sie sich nur durch die Nummerierung der Objekte unterscheiden.
(Für Ausführungen siehe `en.wikipedia.org/wiki/Twelvefold_way`.)

Schubfachmodelle: unterscheidbare Objekte

☺ Die Tabelle ist dank unserer Vorarbeit leicht zu verstehen.

(1) Wir verteilen die Objekte $1, \ldots, k$ auf die Fächer $1, \ldots, n$.
Wir betrachten also Abbildungen $f : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, n\}$.

Beliebige Abbildungen: n^k Möglichkeiten.

Wenn wir k Objekte beliebig auf n Fächer verteilen dürfen, dann haben wir für jedes Objekt n Wahlen. Diese sind untereinander unabhängig. Insgesamt erhalten wir also n^k Möglichkeiten.

Injektive Abbildungen: $n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten.

Wenn wir in jedes Fach höchstens ein Objekt legen dürfen, so muss $k \leq n$ gelten. Für das erste Objekt haben wir n Möglichkeiten, für das zweite nur noch $n-1$, für das dritte nur noch $n-2$, usw. Insgesamt erhalten wir also $n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten.

Surjektive Abbildungen: $n!\left\{ {k \atop n} \right\}$ Möglichkeiten.

Wenn wir in jedes Fach mindestens ein Objekt legen müssen, so muss $k \geq n$ gelten.
Wir zerlegen zunächst alle k Objekte in n Gruppen. Dies gelingt auf $\left\{ {k \atop n} \right\}$ Möglichkeiten.
Diese n Gruppen können wir nun auf $n!$ Weisen n den Fächern zuordnen.

Schubfachmodelle: ununterscheidbare Objekte

(2) Bei ununterscheidbaren Objekten dürfen wir Objekte vertauschen:
Nach Umordnung können wir $f(1) \leq f(2) \leq \cdots \leq f(k)$ annehmen.

Injektive Abbildungen: $f(1) < f(2) < \cdots < f(k)$

Dann ist f bereits durch $\{f(1), f(2), \ldots, f(k)\}$ bestimmt.

Hier gibt es genau $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, diese Teilmenge zu wählen.

Surjektive Abbildungen: $f(1) \leq f(2) \leq \cdots \leq f(k)$.

Für genau $n-1$ der $k-1$ Vergleiche gilt „$<$“, sonst „$=$“.

Hierzu gibt es genau $\binom{k-1}{n-1} = \binom{k-1}{k-n}$ Möglichkeiten.

Beliebige Abbildungen: $f(1) \leq f(2) \leq \cdots \leq f(k)$.

Definiere $g : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, n+k-1\}$ durch $g(x) = f(x) + x - 1$.

Es gilt dann $g(1) < g(2) < \cdots < g(k)$. Dies stiftet eine Bijektion $f \leftrightarrow g$.

Für g gibt es genau $\binom{n+k-1}{k}$ Möglichkeiten; somit auch für f.

Urnenmodelle im Überblick

Viele Zufallsexperimente lassen sich als **Urnenmodelle** verstehen / beschreiben.

Aus einer Urne mit n durchnummerierten Kugeln ziehen wir k Kugeln (oder Lose):

- Ziehung mit oder ohne Zurücklegen,
- Ergebnis mit oder ohne Reihenfolge.

Die Gesamtzahl der möglichen Ergebnisse berechnet sich wie folgt:

Urnenmodell	mR: mit Reihenfolge	oR: ohne Reihenfolge
oZ: ohne Zurücklegen	$\frac{n!}{(n-k)!} = k!\binom{n}{k}$ Laplace!	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ Laplace!
mZ: mit Zurücklegen	n^k Laplace!	$\binom{n+k-1}{k}$ nicht Laplace!

Urnenmodelle im Überblick

Beim Ziehen der Losnummern gibt es zwei Varianten:

- **mit Zurücklegen** (mZ) — Nach jedem Zug wird die Nummer der gezogenen Kugel notiert und die Kugel zurückgelegt.
- **ohne Zurücklegen** (oZ) — Kugeln werden nicht zurückgelegt. Jede Zahl kann daher höchstens einmal auftreten.

Das Endergebnis können wir auf zwei Weisen zusammenfassen:

- **mit** Berücksichtigung der **Ziehungsreihenfolge** (mR)
- **ohne** Berücksichtigung der **Ziehungsreihenfolge** (oR)

☺ Dies entspricht obigen Schubfachmodellen: Jede Ziehung ist eine Abbildung $f : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, n\}$. Ohne Zurücklegen ist sie injektiv. Ohne Reihenfolge dürfen wir umsortieren zu $f(1) \leq f(2) \leq \cdots \leq f(k)$.

☺ Jede Ziehung oZmR, oZoR, mZmR ist **ein Laplace–Experiment**: Die Wahrscheinlichkeit ist hier **gleichverteilt**, also $p(\omega) = 1/|\Omega|$.

⚠ Die Ziehung mZoR hingegen ist **kein Laplace–Experiment**: Bei der Olympialotterie „Glücksspirale 1971“ war dies der fatale Designfehler!

Beispiel: Zweimaliges Würfeln

Zweimal Würfeln ergibt die Gleichverteilung auf $6^2 = 36$ Ergebnissen:

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6), \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6), \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6), \\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6), \\ (6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6) \end{matrix} \right\}$$

Das entspricht dem Urnenmodell „2 aus 6“ mZmR und ist laplacesch.
Umsortiert (also mZoR) bleiben nur noch $\binom{6+2-1}{2} = 21$ Ergebnisse:

$$\Omega^* = \left\{ \begin{matrix} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6), \\ & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6), \\ & & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6), \\ & & & (4,4), & (4,5), & (4,6), \\ & & & & (5,5), & (5,6), \\ & & & & & (6,6) \end{matrix} \right\}$$

Diese sind nicht gleichwahrscheinlich: $p(1,1) = \frac{1}{36}$ aber $p(1,2) = \frac{2}{36}$.

Beispiel: Große Straße beim Kniffel

Aufgabe: Wie wahrscheinlich ist eine große Straße beim Kniffel?

Beim Kniffel (oder Yahtzee) würfelt man mit fünf Würfeln. Eine große Straße besteht aus fünf aufeinanderfolgende Zahlen. Statt „einmal 5 Würfel“ kann man „5 mal einen Würfel“ werfen.

Lösung: Ergebnismenge $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^5$ mit Gleichverteilung.
In diesem Modell ist das Ereignis „große Straße“ die Teilmenge

$$S = \left\{ \omega \in \Omega \;\middle|\; \{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5\} = \{1,2,3,4,5\} \right.$$
$$\left. \text{oder } \{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5\} = \{2,3,4,5,6\} \right\}.$$

Anzahl $|S| = 2 \cdot 5! = 240$. Die Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$\mathbf{P}(S) = \frac{|S|}{|\Omega|} = \frac{2 \cdot 5!}{6^5} = \frac{240}{7776} = \frac{5}{162} \approx 0.0308$$

Urnenmodell ohne Zurücklegen mit Reihenfolge

Urnenmodell „k aus n“ ohne Zurücklegen mit Berücksichtigung der Ziehungsreihenfolge. Die Ergebnismenge ist hier:

$$\Omega = \left\{ \omega \in \{1, \ldots, n\}^k \;\middle|\; \omega_i \neq \omega_j \text{ für } i \neq j \right\}$$

Anzahl der Elemente:

$$|\Omega| = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

☺ Alle Ergebnisse sind gleich wahrscheinlich (Laplace–Experiment). Die Elementarwahrscheinlichkeiten sind demnach:

$$p(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{(n-k)!}{n!}$$

Beispiel: Anzahl der Permutationen einer Menge mit n Elementen. Das Urnenmodell Ziehung „n aus n“ oZmR ergibt $n!$ Permutationen.

Urnenmodell ohne Zurücklegen ohne Reihenfolge

Urnenmodell „k aus n“ ohne Zurücklegen ohne Berücksichtigung der Ziehungsreihenfolge. Äquivalent hierzu: aufsteigende Anordnung, also

$$\begin{aligned}
\Omega &= \left\{ \omega \subseteq \{1, \ldots, n\} \;\middle|\; |\omega| = k \right\} \\
&= \left\{ \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\} \;\middle|\; \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_k \right\} \\
&\cong \left\{ (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k) \in \{1, \ldots, n\}^k \;\middle|\; \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_k \right\}
\end{aligned}$$

Anzahl der Elemente:

$$|\Omega| = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

☺ Alle Ergebnisse sind gleich wahrscheinlich (Laplace–Experiment). Die Elementarwahrscheinlichkeiten sind demnach:

$$p(\omega) = \frac{k!(n-k)!}{n!}$$

Beispiel: Lotto entspricht dem Urnenmodell „6 aus 49“ oZoR
Dies ergibt $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$ mögliche Ergebnisse.

Urnenmodell mit Zurücklegen mit Reihenfolge

Urnenmodell „k aus n“ mit Zurücklegen mit Berücksichtigung der Ziehungsreihenfolge. Die Ergebnismenge besteht aus allen k–Tupeln:

$$\Omega = \{1, \ldots, n\}^k = \left\{ (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k) \;\middle|\; \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k \in \{1, \ldots, n\} \right\}$$

Die Anzahl der Elemente ist demnach die Potenz:

$$|\Omega| = \underbrace{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}_{k \text{ mal}} = n^k$$

☺ Alle Ergebnisse sind gleich wahrscheinlich (Laplace–Experiment). Die Elementarwahrscheinlichkeiten sind demnach:

$$p(\omega) = \frac{1}{n^k}$$

Beispiel: Anzahl der Ergebnisse bei k-maligem Würfeln.
Darstellung als Urnenmodell: Ziehung „k aus 6“ mZmR.
Dies ergibt 6^k mögliche Ergebnisse.

Urnenmodell mit Zurücklegen ohne Reihenfolge

Mögliche Wahl der Ergebnismenge (aufsteigende Reihenfolge):

$$\Omega = \left\{ \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_k) \in \{1, \ldots, n\}^k \;\middle|\; \omega_1 \leq \omega_2 \leq \cdots \leq \omega_k \right\}$$

Die Anzahl der Elemente ist zunächst nicht direkt ersichtlich...
Genial-einfacher Rechentrick: Wir wählen eine geschickte Bijektion!

$$\Phi : \Omega \to \Omega' = \left\{ \omega' \in \{1, \ldots, n+k-1\}^k \;\middle|\; \omega'_1 < \omega'_2 < \cdots < \omega'_k \right\}$$
$$\omega \leftrightarrow \omega' \quad \text{mit} \quad \omega'_j = \omega_j + j - 1 \quad \text{für alle} \quad j = 1, \ldots, k$$

Beispiele dieser Bijektion zur Illustration:

$$\Phi(1,1,1,1,1) = (1,2,3,4,5)$$
$$\Phi(1,1,2,4,4) = (1,2,4,7,8)$$

Diese raffinierte Sichtweise löst das Abzählproblem:

$$|\Omega| = |\Omega'| = \binom{n+k-1}{k}$$

⚠ Hier sind nicht alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich!

Beispiel: Buben beim Skat

Aufgabe: Wie welcher Wkt erhalten Sie $0, 1, 2, 3, 4$ Buben beim Skat?

Lösung: Jede Spieler:in erhält zufällig 10 der insgesamt 32 Karten.
Das Kartenspiel enthält 4 Buben und 28 weitere Karten.

$$\mathbf{P}(4 \text{ Buben}) = \binom{4}{4}\binom{28}{6} \Big/ \binom{32}{10} = \frac{21}{3596} \approx 0.6\%$$

$$\mathbf{P}(3 \text{ Buben}) = \binom{4}{3}\binom{28}{7} \Big/ \binom{32}{10} = \frac{66}{899} \approx 7.3\%$$

$$\mathbf{P}(2 \text{ Buben}) = \binom{4}{2}\binom{28}{8} \Big/ \binom{32}{10} = \frac{2079}{7192} \approx 28.9\%$$

$$\mathbf{P}(1 \text{ Bube}) = \binom{4}{1}\binom{28}{9} \Big/ \binom{32}{10} = \frac{385}{899} \approx 42.8\%$$

$$\mathbf{P}(0 \text{ Buben}) = \binom{4}{0}\binom{28}{10} \Big/ \binom{32}{10} = \frac{1463}{7192} \approx 20.3\%$$

Hypergeometrische Verteilung

Zu Stichproben stellt sich allgemein die folgende Frage:

Aufgabe: In einer Urne liegen N Kugeln, davon genau K rote.
Wir wählen zufällig n der N Kugeln aus. (Ziehung oZoR)
Sei $A_k =$ „Es werden genau k der K roten Kugeln gezogen“.
Wie wahrscheinlich ist das Ereignis A_k?

Lösung: Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A_k ist

$$\mathbf{P}(A_k) = \frac{|A_k|}{|\Omega|} = \binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k} \Big/ \binom{N}{n}.$$

Erläuterung: Das ist ein Laplace–Experiment mit $|\Omega| = \binom{N}{n}$.
Das Ereignis A_k setzt sich aus zwei unabhängigen Teilen zusammen:

- Auswahl von k aus K roten Kugeln: $\binom{K}{k}$ Möglichkeiten
- Auswahl von $n-k$ aus $N-K$ weiteren Kugeln: $\binom{N-K}{n-k}$

Also gilt $|A_k| = \binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}$. Dies ergibt die obige Wahrscheinlichkeit.

Hypergeometrische Verteilung

Satz U3A: hypergeometrische Verteilung

Wir betrachten eine **Stichprobe** ohne Zurücklegen ohne Reihenfolge: Gesamtgröße N, davon K mögliche Treffer, Stichprobengröße $n \leq N$. Die Wahrscheinlichkeit $p(k)$ für k Treffer in der Stichprobe ist dann

$$p(k) = \binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k} \Big/ \binom{N}{n}.$$

Dies nennen wir die **hypergeometrische Verteilung**

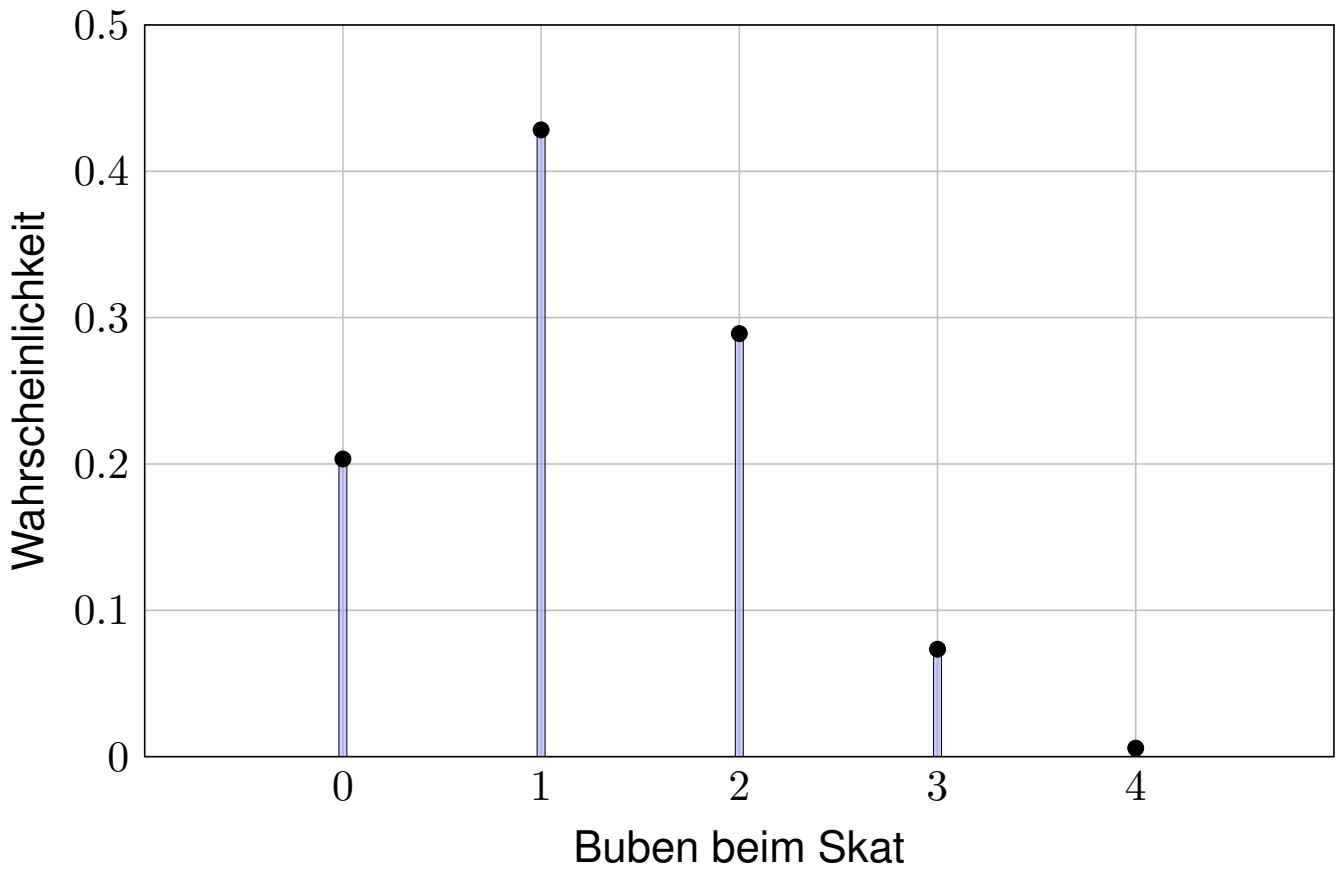
$$\mathrm{H}(N, K, n) \,:\, \mathbb{N} \to [0,1] \,:\, k \mapsto p(k).$$

Dies ist eine WVerteilung, demnach gilt $p(0) + p(1) + \cdots + p(n) = 1$. Hieraus erhalten wir ohne weitere Mühe die **Vandermonde–Identität**:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k} = \binom{N}{n}$$

Für $k < 0$ oder $k > n$ sowie $k > K$ oder $n - k > N - K$ gilt $p(k) = 0$.

Beispiel: $\mathrm{H}(32, 4, 10)$–Verteilung beim Skat



☺ Nur in etwa jedem 200. Blatt erhält man alle vier Buben. Immerhin!

Beispiel: Lotto „6 aus 49“

U305
Ausführung

Aufgabe: Gezogen werden 6 Zahlen aus 49.

(1) Wie viele Möglichkeiten gibt es insgesamt?

(2) Wie wahrscheinlich sind $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ Richtige?

Lösung: Hierzu muss man das Ziehungsverfahren präzisieren:

(1) Urnenmodell „6 aus 49“ ohne Zurücklegen ohne Reihenfolge.

Von insgesamt 49 Zahlen wählt die Spieler:in 6 aus.

Hierzu gibt es $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$ Möglichkeiten.

So sagt es auch die freundliche Stimme aus dem Radio bei der Werbung für Lotto 6 aus 49: „Gewinnchance 1 zu 14 Millionen. Spielteilnahme ab 18. Glücksspiel kann süchtig machen.“

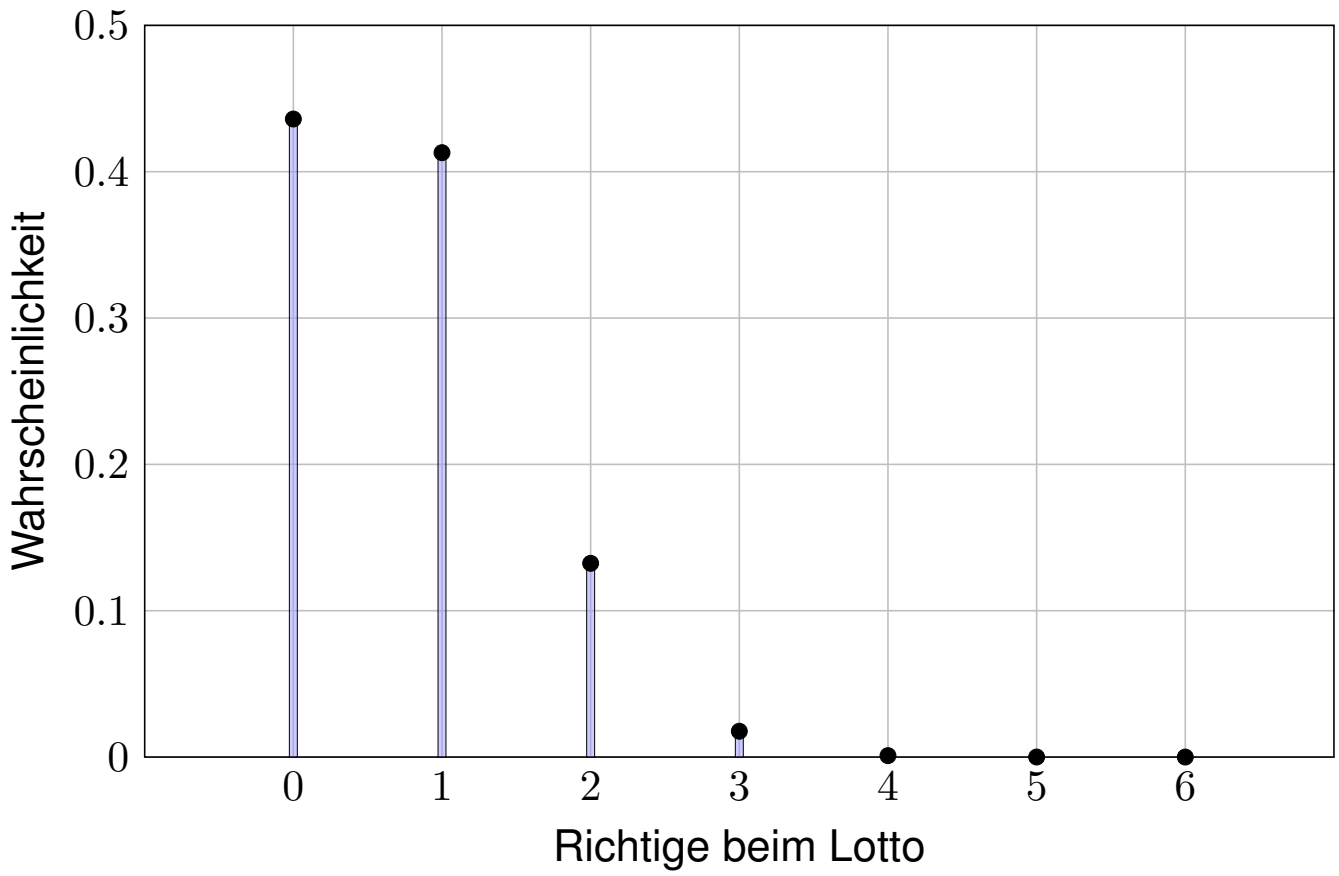
(2) Dies wird durch die hypergeometrische Verteilung gegeben:

$$\mathrm{H}(49, 6, 6)(k) = \binom{6}{k}\binom{43}{6-k} \Big/ \binom{49}{6}$$

☺ Unsere passenden Werkzeuge erleichtern solche Abzählungen.
Die folgenden Graphiken illustrieren die konkreten Werte.

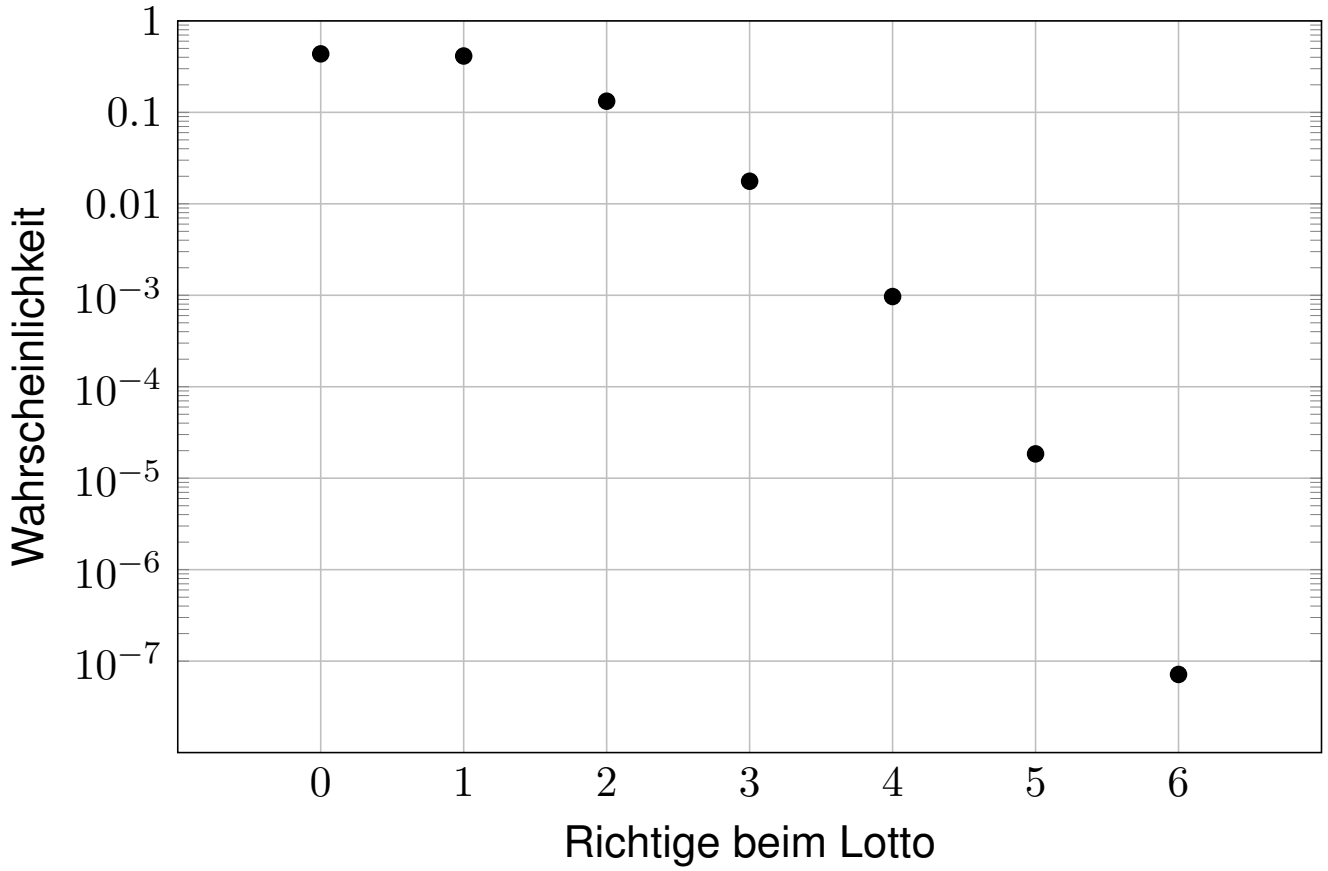
Beispiel: $\mathrm{H}(49, 6, 6)$–Verteilung beim Lotto

U306
Ausführung



☹ Die Wkten für 4, 5, 6 Richtige sind in dieser Graphik kaum erkennbar.

Beispiel: $\mathrm{H}(49, 6, 6)$–Verteilung beim Lotto



☺ Eine logarithmische Skala ist hier wesentlich informativer!

Exkurs: Lohnt es sich, Lotto zu spielen?

Ich denke: Nein! Beim Lotto werden nur 50% der Einsätze als Gewinne ausgeschüttet: Ein zufälliger Tipp erhält also bei 1 Euro Einsatz im Durchschnitt nur 50 Cent Gewinn. Der Ziehungsmechanismus scheint recht zuverlässig, wie die eingangs angegebenen Statistiken andeuten. (Es ist wohl ein skurriler Zufall, dass ausgerechnet die 13 bislang die seltenste Zahl ist… Es ist ja auch nicht weiter verdächtig, dass die häufigste Zahl bislang die 6 ist.)

Selbst wenn die Gewinnwahrscheinlichkeiten gleichverteilt sind, die Gewinne sind es nicht! Durch eine geschickte Wahl des Tipps kann man den erwarteten Gewinn (geringfügig) erhöhen. Die Höhe der Auszahlung hängt nämlich stark davon ab, wie viele Spieler die gezogenen Zahlen getippt haben. Die Problematik wurde 1986 im französischen Parlament vom Abgeordneten Dr. Masson vorgetragen, der eine Offenlegung der Statistik forderte [Der Spiegel 19/1986]; die Abgeordneten konnten den Argumenten jedoch nicht folgen. Hier eine Kurzfassung:

Viele Spieler tippen Geburtstage (Monate $1, \ldots, 12$, Tage $1, \ldots, 31$) oder bevorzugen gewisse Anordnungen. Wird eine beliebte Kombination gezogen, so gibt es viele Gewinner, jede einzelne Gewinnausschüttung ist dann geringer. Hingegen kann man mit höheren Auszahlungen rechnen, wenn man Tipps wählt, die die anderen Spieler vernachlässigen. Mit einem gut gewählten Tipp kann man statt 50 Cent eine Erwartung von 60 bis 70 Cent erreichen [Krengel 2005, S. 11]. Ob mehr möglich ist, weiß ich nicht. 🕮 Henze, Riedwyl: *How to win more.* A K Peters 1998.

Aber selbst mit einer ausgefuchsten Analyse des Spielverhaltens der anderen Spieler bleibt das Lottospielen vermutlich ein Verlustgeschäft. Nur eins ist sicher: Der Betreiber gewinnt immer. Boshaft nennt man solche staatlichen Lotterien deshalb auch eine „Steuer auf Dummheit“.

Die Binomialverteilung $\mathrm{B}(n,t)$

Sie führen n **unabhängige Experimente** durch mit Trefferwkt $t \in [0,1]$.
Ergebnisraum $\Omega = \{0,1\}^n$, Produktraum über $\{1 = \text{Treffer}, 0 = \text{Niete}\}$.
Für $\omega \in \Omega$ mit k Treffern und $n-k$ Nieten ist die Wkt $t^k(1-t)^{n-k}$.
Es gibt genau $\binom{n}{k}$ solcher Ergebnisse $\omega \in \Omega$ mit k Treffern.

Satz U3B: Binomialverteilung

Die Wahrscheinlichkeit $p(k)$ für genau k Treffer ist gegeben durch

$$p(k) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}.$$

Dies nennen wir die **Binomialverteilung**

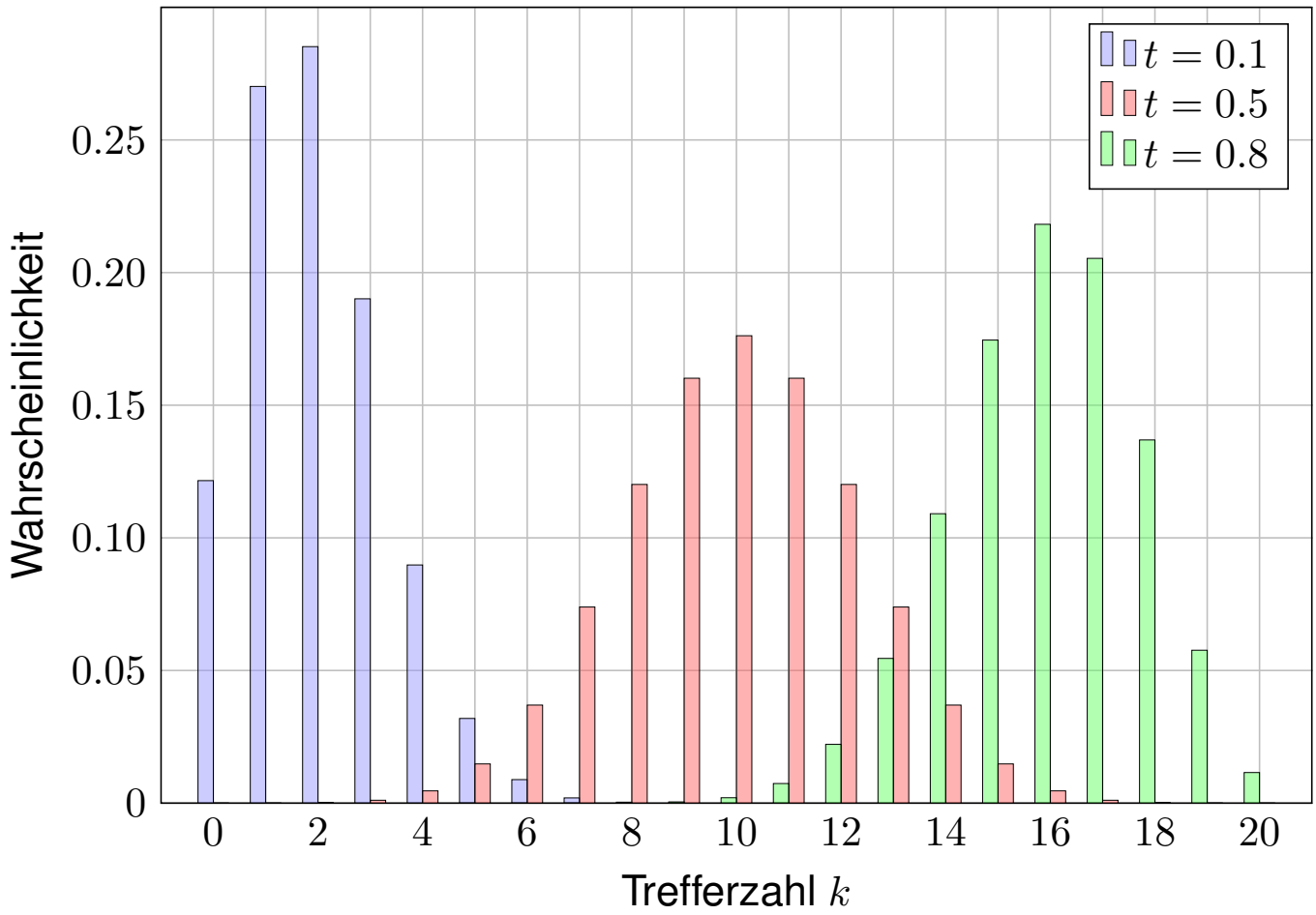
$$\mathrm{B}(n,t) \,:\, \mathbb{N} \to [0,1] \,:\, k \mapsto p(k).$$

Aufgabe: Ist dies eine WVerteilung? **Lösung:** Ja, denn $p(k) \geq 0$ und

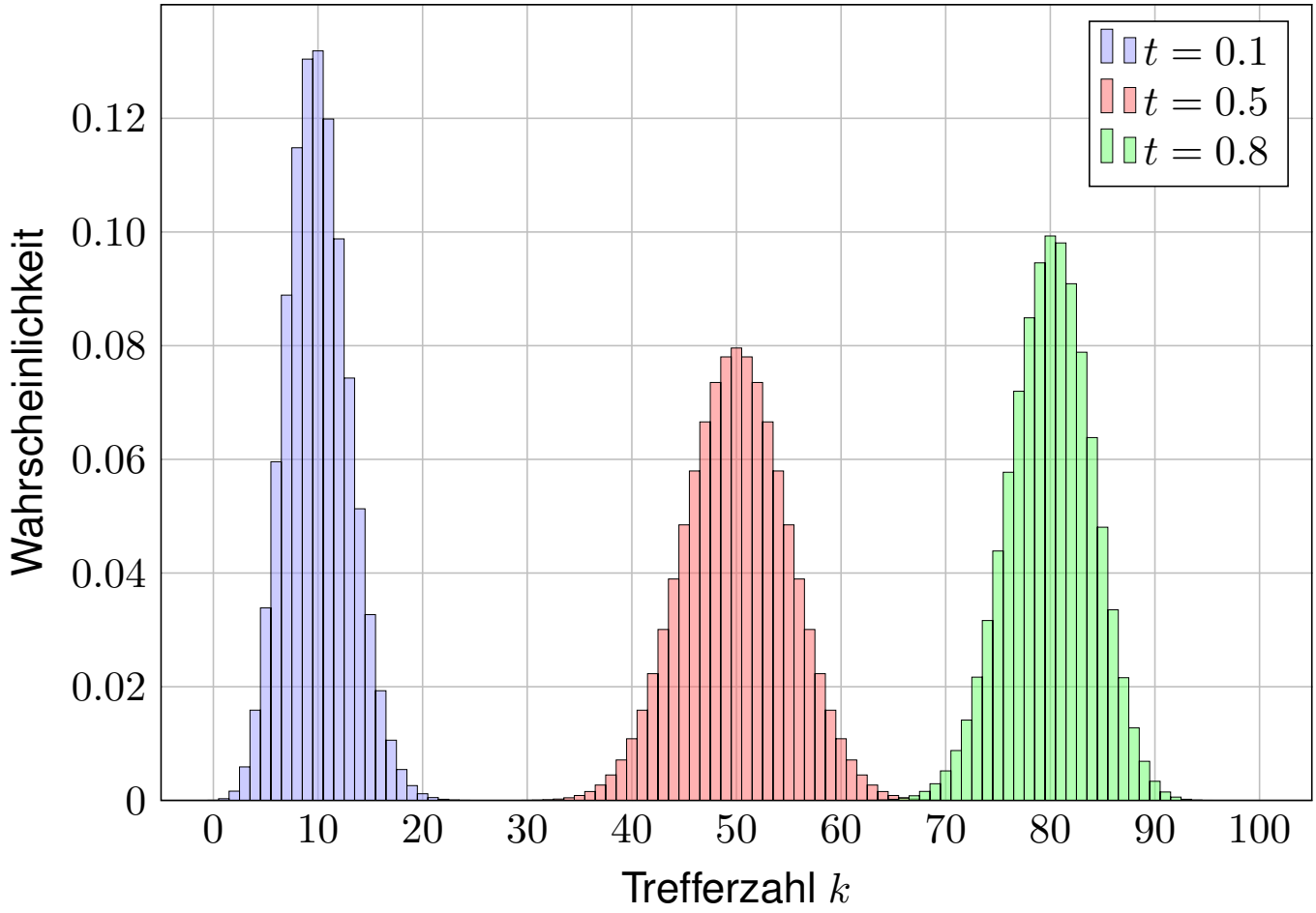
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} p(k) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \;=\; \Big[t + (1-t)\Big]^n \;=\; 1.$$

Der Träger von $\mathrm{B}(n,t)$ ist $\{0,\ldots,n\}$: Für $k<0$ oder $k>n$ gilt $p(k)=0$.

Beispiele zur Binomialverteilung: $\mathrm{B}(20,t)$



Beispiele zur Binomialverteilung: $\mathrm{B}(100, t)$



Anwendung: Anzahl der Geburtstagskinder

Aufgabe: Im Hörsaal sitzen 300 Personen (zufällig und unabhängig). Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben $0, 1, 2, 3, \ldots$ heute Geburtstag?

Lösung: Diese Anzahl $\mathrm{B}(n, t)$–verteilt mit $n = 300$ und $t = 1/365$. Die Wahrscheinlichkeit für $0, 1, 2, 3, \ldots$ Geburtstagskinder ist:

$$\mathrm{B}(n,t)(0) = \binom{300}{0}\left(\frac{1}{365}\right)^0\left(\frac{364}{365}\right)^{300} \approx 0.4391$$

$$\mathrm{B}(n,t)(1) = \binom{300}{1}\left(\frac{1}{365}\right)^1\left(\frac{364}{365}\right)^{299} \approx 0.3619$$

$$\mathrm{B}(n,t)(2) = \binom{300}{2}\left(\frac{1}{365}\right)^2\left(\frac{364}{365}\right)^{298} \approx 0.1486$$

$$\mathrm{B}(n,t)(3) = \binom{300}{3}\left(\frac{1}{365}\right)^3\left(\frac{364}{365}\right)^{297} \approx 0.0406$$

☺ Für $\mathrm{B}(n,t)(0)$ kennen wir bereits die Näherung $(1-t)^n \lessapprox \mathrm{e}^{-nt}$.
Mit $nt = 300/365 \approx 0.8219$ finden wir $\mathrm{B}(n,t)(0) \approx \mathrm{e}^{-0.819} \approx 0.4396$.

Von der Binomial- zur Poisson–Verteilung

Die Binomialverteilung $\mathrm{B}(n,t)$ ist für große n mühsam zu berechnen.

Aufgabe: Wir suchen eine praktische Näherung für n groß und t klein. Sei $\lambda > 0$ gegeben und $t = \lambda/n$. Berechnen Sie für $n \to \infty$ den Limes der Binomialverteilungen $\mathrm{B}(n, \lambda/n)$. **Lösung:** Geduldig ausrechnen:

$$\begin{aligned} B\big(n, \tfrac{\lambda}{n}\big)(k) &= \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{\lambda^k}{n^k}\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!}\cdot\underbrace{\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}}_{\to 1}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}}_{\to \mathrm{e}^{-\lambda}}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1} \quad\to\quad \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} \end{aligned}$$

Beispiel: Für $n = 300$ und $t = 1/365$ gilt $\lambda = nt = 300/365 \approx 0.8219$. Statt exakt $\mathrm{B}(n,t)(k)$ berechnen wir bequemer $p(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\lambda^k/k!$:

$$p(0) \approx 0.4396, \quad p(1) \approx 0.3613, \quad p(2) \approx 0.1485, \quad p(3) \approx 0.0407.$$

Die Poisson–Verteilung $\mathrm{P}(\lambda)$

Definition U3c: Poisson–Verteilung

Die **Poisson–Verteilung** $\mathrm{P}(\lambda)$ für $\lambda \geq 0$ ist gegeben durch

$$\mathrm{P}(\lambda) \,:\, \mathbb{N} \to [0,1] \,:\, k \mapsto p(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\lambda^k/k!.$$

Aufgabe: Ist dies eine WVerteilung? **Lösung:** Ja, denn $p(k) \geq 0$ und

$$\sum_{k=0}^{\infty} p(k) \;=\; \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} \;=\; \mathrm{e}^{-\lambda}\,\mathrm{e}^{\lambda} \;=\; 1.$$

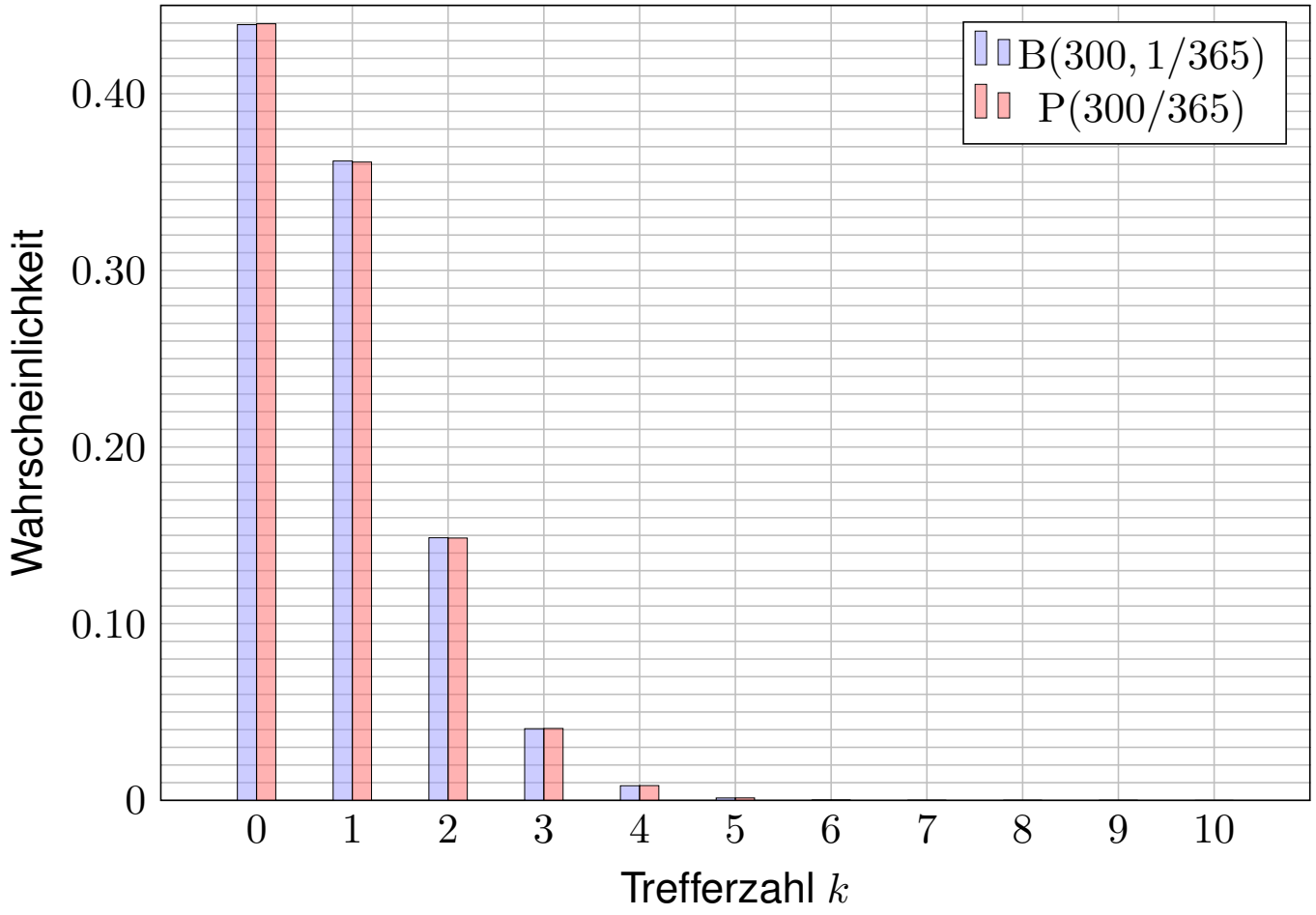
☺ So lässt sich die Poisson–Verteilung besonders leicht merken. Die Terme $\lambda^k/k!$ entsprechen der Exponentialreihe $\mathrm{e}^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k/k!$.

☺ Der Grenzübergang $\mathrm{B}(n,\lambda/n) \to \mathrm{P}(\lambda)$ erklärt die Bedeutung: $\mathrm{P}(\lambda)$ entspricht der Häufigkeit von unabhängigen Ereignissen geringer Wahrscheinlichkeit bei sehr vielen Wiederholungen.

Wie gut ist die Approximation von $\mathrm{B}(n,t)$ durch $\mathrm{P}(nt)$? Auch dies wollen wir nun quantitativ beantworten!

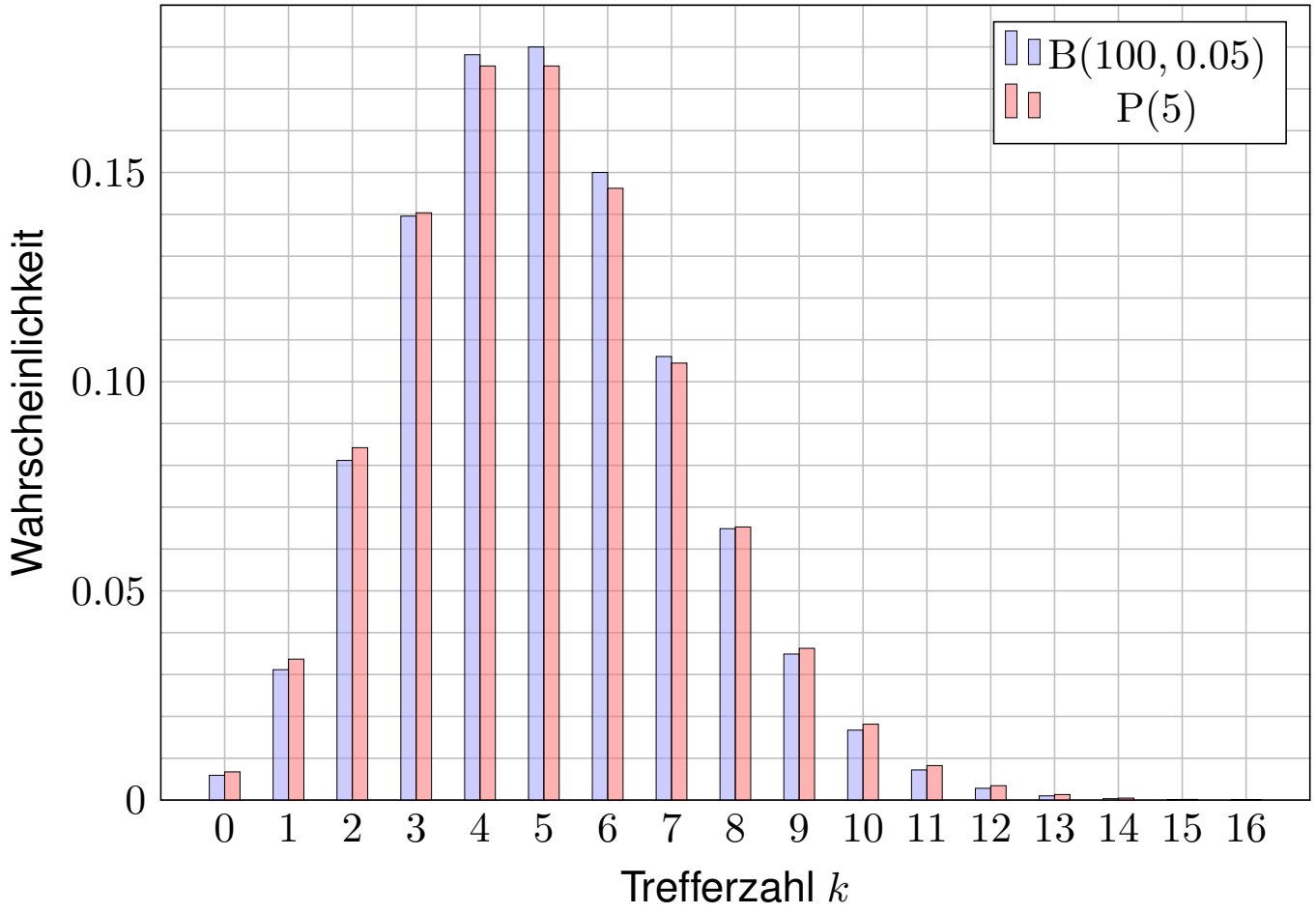
Vergleich von Binomial- und Poisson–Verteilung

U315



Vergleich von Binomial- und Poisson–Verteilung

U316



Abstand von Wahrscheinlichkeitsmaßen

Oft wollen oder müssen wir zwei WMaße $\mathbf{P}_0$ und $\mathbf{P}_1$ auf Ω vergleichen: Ist $\mathbf{P}_0$ mühsam aber $\mathbf{P}_1$ bequem, so wollen wir $\mathbf{P}_0$ durch $\mathbf{P}_1$ ersetzen.

Die beiden WMaße $\mathbf{P}_0$ und $\mathbf{P}_1$ ordnen jedem Ereignis $A \subseteq \Omega$ die Wkten $\mathbf{P}_0(A)$ bzw. $\mathbf{P}_1(A)$ zu. Der totale Abstand zwischen $\mathbf{P}_0$ und $\mathbf{P}_1$ ist das Supremum, die größtmögliche Abweichung, die hierbei auftreten kann:

Definition U3D: totaler Abstand zweier WMaße

Der **totale Abstand** von zwei diskreten WMaße $\mathbf{P}_0$ und $\mathbf{P}_1$ auf Ω ist:

$$\big\|\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_1\big\| \;:=\; \sup_{A\subseteq\Omega}\big|\mathbf{P}_0(A) - \mathbf{P}_1(A)\big| \;=\; \frac{1}{2}\sum_{\omega\in\Omega}\big|\mathbf{P}_0(\{\omega\}) - \mathbf{P}_1(\{\omega\})\big|$$

Diese Fehlerschranke nutzen wir bei näherungsweisen Rechnungen: Ist der Abstand klein genug, etwa $\|\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_1\| \le \varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-3}$, so können wir $\mathbf{P}_0(A)$ durch $\mathbf{P}_1(A)$ ersetzen und machen dabei schlimmstenfalls einen Fehler von ε, das heißt, es gilt $\mathbf{P}_0(A) = \mathbf{P}_1(A) + \delta$ mit $|\delta| \le \varepsilon$.

Der totale Abstand ist (bis auf einen Faktor $1/2$) die Summe über alle punktweisen Abstände: Die linke Seite $\sup_{A\subseteq\Omega}$ ist leicht zu verstehen, die rechte Seite $\sum_{\omega\in\Omega}$ ist leicht zu berechnen. Diese Umformulierung ist oft leichter zugänglich: Es genügt, die absolute Differenz über alle Ergebnisse zu addieren. Die genaue Rechnung U318 beweist dies und erklärt den Faktor $1/2$.

Abstand von Wahrscheinlichkeitsmaßen

Beweis der Umformulierung: Wir betrachten $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $f(\omega) = \mathbf{P}_0(\{\omega\}) - \mathbf{P}_1(\{\omega\})$ und beweisen $\|\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_1\| \le \frac{1}{2}\sum_{\omega\in\Omega}|f(\omega)|$ sowie $\|\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_1\| \ge \frac{1}{2}\sum_{\omega\in\Omega}|f(\omega)|$.

(1) Für jede beliebige Teilmenge $A \subseteq \Omega$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_0(A) - \mathbf{P}_1(A) \quad &= \quad \sum_{\omega\in A} f(\omega) \quad \le \quad \sum_{\omega\in A} f^+(\omega) \quad \le \quad \sum_{\omega\in\Omega} f^+(\omega) \\
&= \quad \sum_{\omega\in\Omega} \frac{1}{2}\Big[|f(\omega)| + f(\omega)\Big] \quad = \quad \frac{1}{2}\sum_{\omega\in\Omega}\big|f(\omega)\big|
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung verdanken wir $\sum_{\omega\in\Omega} f(\omega) = \mathbf{P}_0(\Omega) - \mathbf{P}_1(\Omega) = 0$. Symmetrisch gilt $\mathbf{P}_1(A) - \mathbf{P}_0(A) \le \frac{1}{2}\sum_{\omega\in\Omega}\big|f(\omega)\big|$. Insgesamt folgt $|\mathbf{P}_0(A) - \mathbf{P}_1(A)| \le \frac{1}{2}\sum_{\omega\in\Omega}|f(\omega)|$.

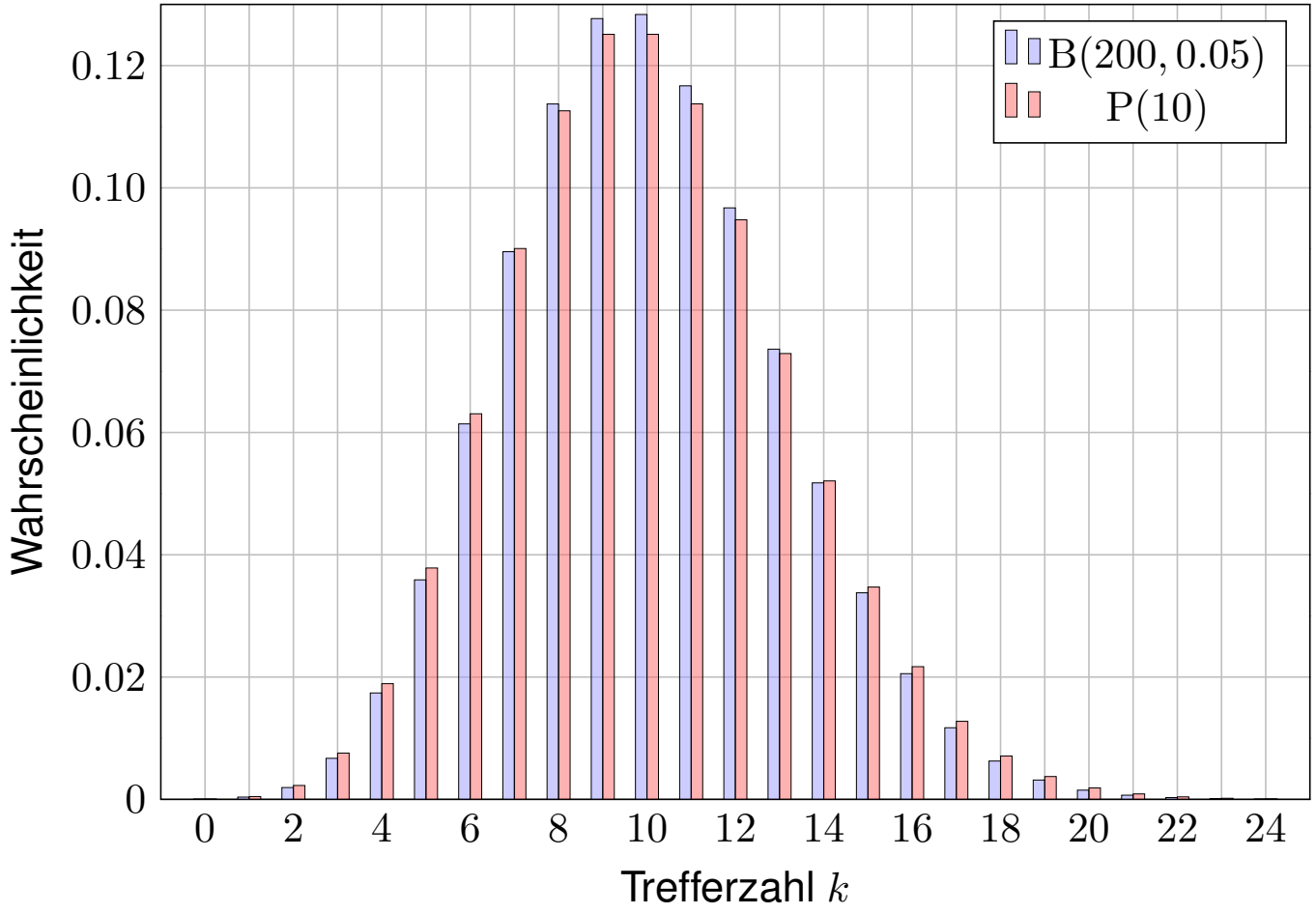
Nach Definition ist $\|\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_1\|$ die kleinste obere Schranke von $|\mathbf{P}_0(A) - \mathbf{P}_1(A)|$ über alle $A \subseteq \Omega$, also $\|\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_1\| \le \frac{1}{2}\sum_{\omega\in\Omega}|f(\omega)|$. Wir zeigen nun die umgekehrte Ungleichung.

(2) Für die beiden Mengen $A = \{\, \omega \in \Omega \mid f(\omega) > 0 \,\}$ und $B = \{\, \omega \in \Omega \mid f(\omega) < 0 \,\}$ gilt

$$\begin{aligned}
0 = \sum_{\omega\in\Omega} f(\omega) \;&= \sum_{\omega\in A} f(\omega) + \sum_{\omega\in B} f(\omega) \qquad \text{und somit} \\
0 \le \sum_{\omega\in\Omega}\big|f(\omega)\big| &= \sum_{\omega\in A} f(\omega) - \sum_{\omega\in B} f(\omega) = 2\big[\mathbf{P}_0(A) - \mathbf{P}_1(A)\big] \le 2\big\|\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_1\big\|.
\end{aligned}$$

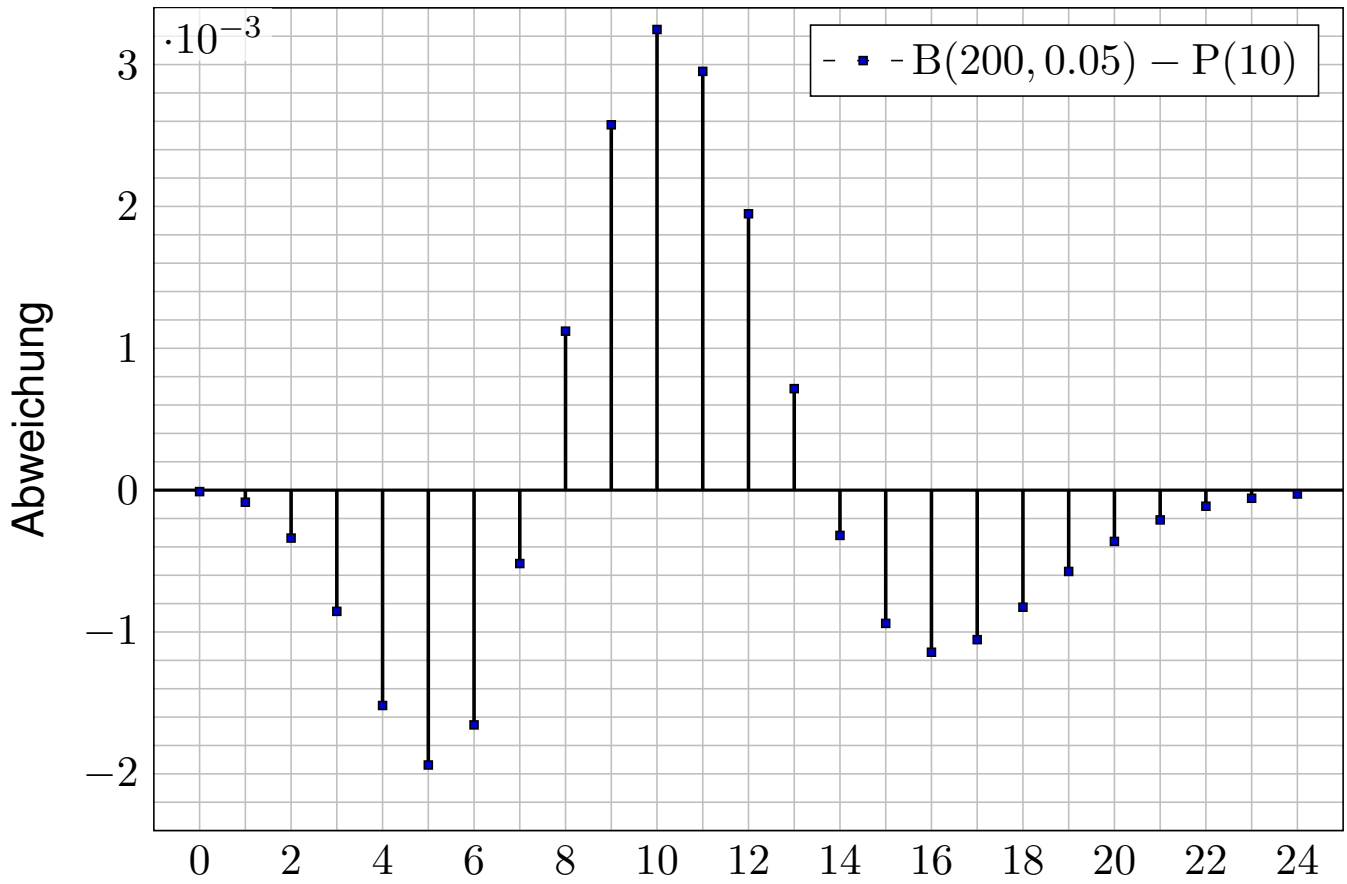
Dies zeigt $\|\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_1\| \ge \frac{1}{2}\sum_{\omega\in\Omega}|f(\omega)|$. Die Ungleichungen (1) und (2) beweisen Gleichheit. Unsere Rechnung zeigt zudem, dass das Supremum für A (und B) tatsächlich angenommen wird.

Vergleich von Binomial- und Poisson–Verteilung



Vergleich von Binomial- und Poisson–Verteilung

Wie gut ist diese Näherung? Punktweise bis auf 0.0033 genau!



Poissons Gesetz der kleinen Zahlen

Für große n ist die Binomialverteilung $\mathrm{B}(n,t)$ mühsam. Bei kleinem t können wir sie durch die bequemere Poisson–Verteilung $\mathrm{P}(nt)$ ersetzen.

Satz U3E: Poissons Gesetz der kleinen Zahlen

(1) Für $n \to \infty$ gilt die punktweise Konvergenz $\mathrm{B}(n,\lambda/n) \to \mathrm{P}(\lambda)$.

(2) Es gilt $\mathrm{B}(n,t) \approx \mathrm{P}(nt)$ mit Fehlerschranke für den totalen Abstand:

$$\boxed{\big\|\mathrm{B}(n,t) - \mathrm{P}(nt)\big\| \;\le\; nt^2 \;=\; \lambda^2/n \quad \searrow \quad 0}$$

Hierbei ist $\lambda = nt$ der Erwartungswert und Parameter für $\mathrm{P}(\lambda)$.

☺ Dank dieses Satzes können wir den Fehler bequem abschätzen!

Z.B. liegen $\mathrm{B}(200, 0.05)$ und $\mathrm{P}(10)$ höchstens 0.5 auseinander, hingegen $\mathrm{B}(2000, 0.005)$ und $\mathrm{P}(10)$ noch höchstens 0.05, $\mathrm{B}(20\,000, 0.0005)$ und $\mathrm{P}(10)$ nur noch höchstens 0.005.

Gilt der Fehler als klein genug, so kann man die mühsame Binomialverteilung durch die wesentlich bequemere Poisson–Verteilung ersetzen. Den Grenzübergang haben wir oben schon ausgerechnet U313. Die Fehlerabschätzung des totalen Abstandes ist etwas trickreicher U435. Wir verallgemeinern dies in Satz U4C und rechnen es anschließend ausführlich und elegant nach.

Anwendungsbeispiel: Pixelfehler

Aufgabe: Bei der Herstellung eines Displays mit $n = 1920 \times 1080$ Pixeln ist jedes mit Wkt $t = 1/2\,764\,800$ defekt, alle unabhängig voneinander.

(1) Mit welcher Wkt p hat ein Display mehr als 2 Pixelfehler? (Garantie)

(2) Welche Verteilung gilt hier exakt? Welche gilt näherungsweise? Wie groß ist der Approximationsfehler, d.h. der totale Abstand?

Lösung: (2) Exakt $\mathrm{B}(n,t)$, näherungsweise $\mathrm{P}(\lambda)$ mit $\lambda = nt = 0.75$. Der totale Abstand $\|\mathrm{B}(n,t) - \mathrm{P}(\lambda)\| \le \lambda^2/n < 10^{-6}$ ist extrem klein.

☺ Die Näherung ist sehr genau und rechtfertigt die Rechnung in (1).

(1) Statt der exakten Verteilung nutzen wir die bequeme Näherung:

$$\begin{aligned} 1 - p \;&=\; \binom{n}{0} t^0 (1-t)^n + \binom{n}{1} t^1 (1-t)^{n-1} + \binom{n}{2} t^2 (1-t)^{n-2} \\ &\approx\; \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{\lambda^0}{0!} + \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!}\right) \;\approx\; 0.95949 \end{aligned}$$

Garantiefall: Mehr als 2 fehlerhafte Pixel treten mit Wkt $p \approx 0.04051$ auf.

☺ Die Poisson–Näherung vereinfacht unsere Rechnung spürbar.

Vergleich von hypergeometrisch zu binomial

Stichprobe: Gesamtgröße N, davon K Treffer, Stichprobengröße n.
Die Trefferzahl k folgt hier der **hypergeometrischen Verteilung**

$$\mathrm{H}(N,K,n)(k) = \binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k} \Big/ \binom{N}{n}.$$

Stichprobe mit Zurücklegen: Stichprobengröße n, Trefferwkt $t = \frac{K}{N}$.
Die Trefferzahl k folgt in diesem Fall der **Binomialverteilung**

$$\mathrm{B}(n,t)(k) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}.$$

Ist N groß gegenüber n, so erwarten wir $\mathrm{H}(N,K,n)(k) \approx \mathrm{B}(n,t)(k)$.

☺ Anschaulich: Zurücklegen oder nicht macht kaum einen Unterschied.

Diese Idee überprüfen wir anhand von Beispielen und Graphiken für endliches N sowie durch die Berechnung des Grenzwertes für $N \to \infty$.

Der abschließende Satz U3F gibt explizite handfeste Fehlerschranken: Der totale Abstand von $\mathrm{H}(N,K,n)$ und $\mathrm{B}(n,K/N)$ ist kleiner als n/N.

Vergleich von hypergeometrisch zu binomial

Aufgabe: Für $N \to \infty$ und $K/N \to t$ zeige man $\mathrm{H}(N,K,n) \to \mathrm{B}(n,t)$.

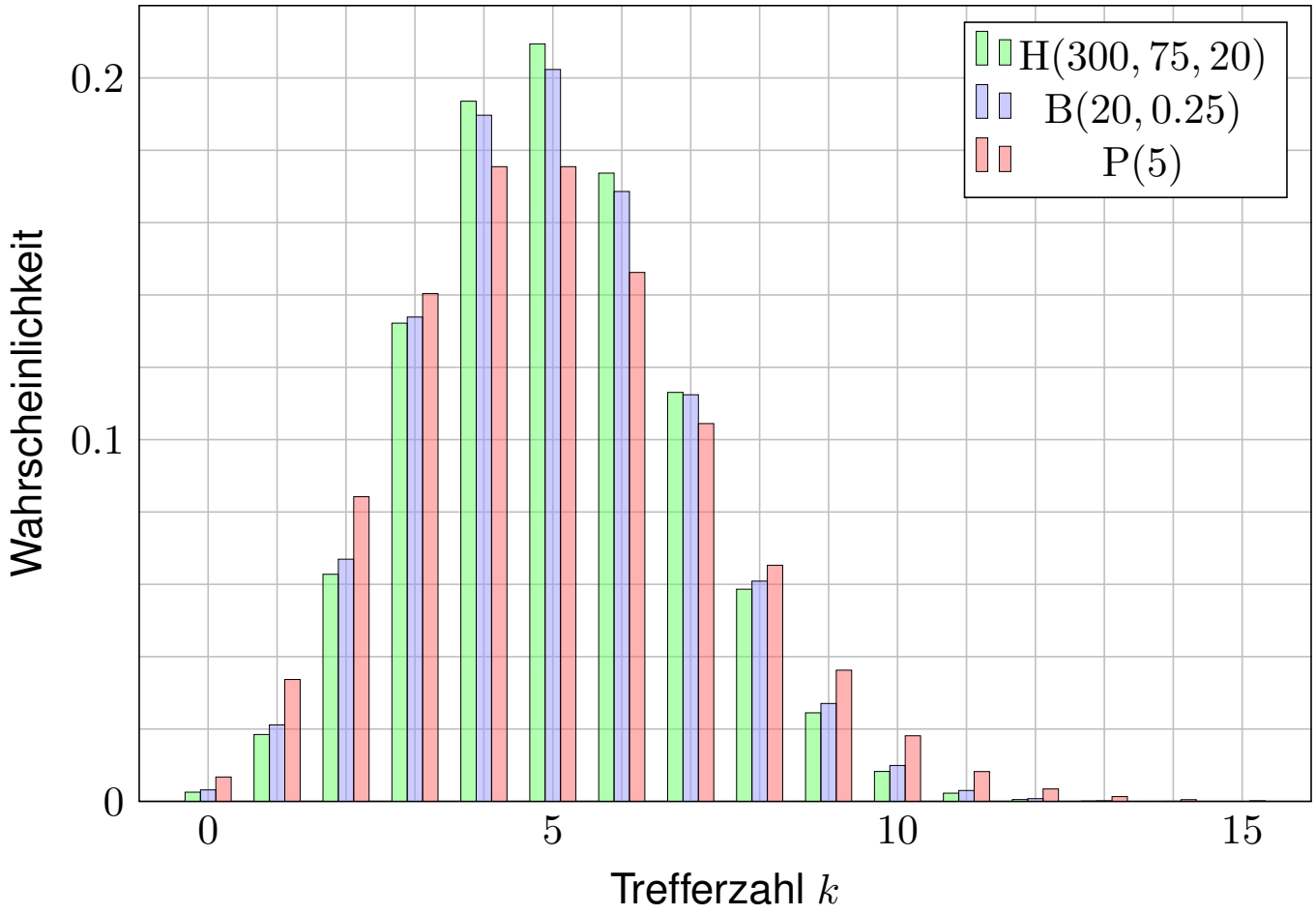
Lösung: Ausschreiben und geduldig vereinfachen:

$$\begin{aligned}
\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k} \Big/ \binom{N}{n} &= \frac{K^{\underline{k}}}{k!}\frac{(N-K)^{\underline{n-k}}}{(n-k)!}\frac{n!}{N^{\underline{n}}} \\
&= \binom{n}{k}\frac{K^{\underline{k}}}{N^{\underline{k}}}\frac{(N-K)^{\underline{n-k}}}{(N-k)^{\underline{n-k}}} \\
&\sim \binom{n}{k}\left(\frac{K}{N}\right)^k\left(\frac{N-K}{N}\right)^{n-k} \\
&\to \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}
\end{aligned}$$

Wie gut ist die Approximation von $\mathrm{H}(N,K,n)$ durch $\mathrm{B}(n,K/N)$?
Die Güte der Approximation ist für die Praxis wesentlich, leider lässt sie sich aus unserer einfachen Grenzwertrechnung noch nicht ablesen.
Der folgende Satz präzisiert dies durch eine explizite Fehlerschranke.

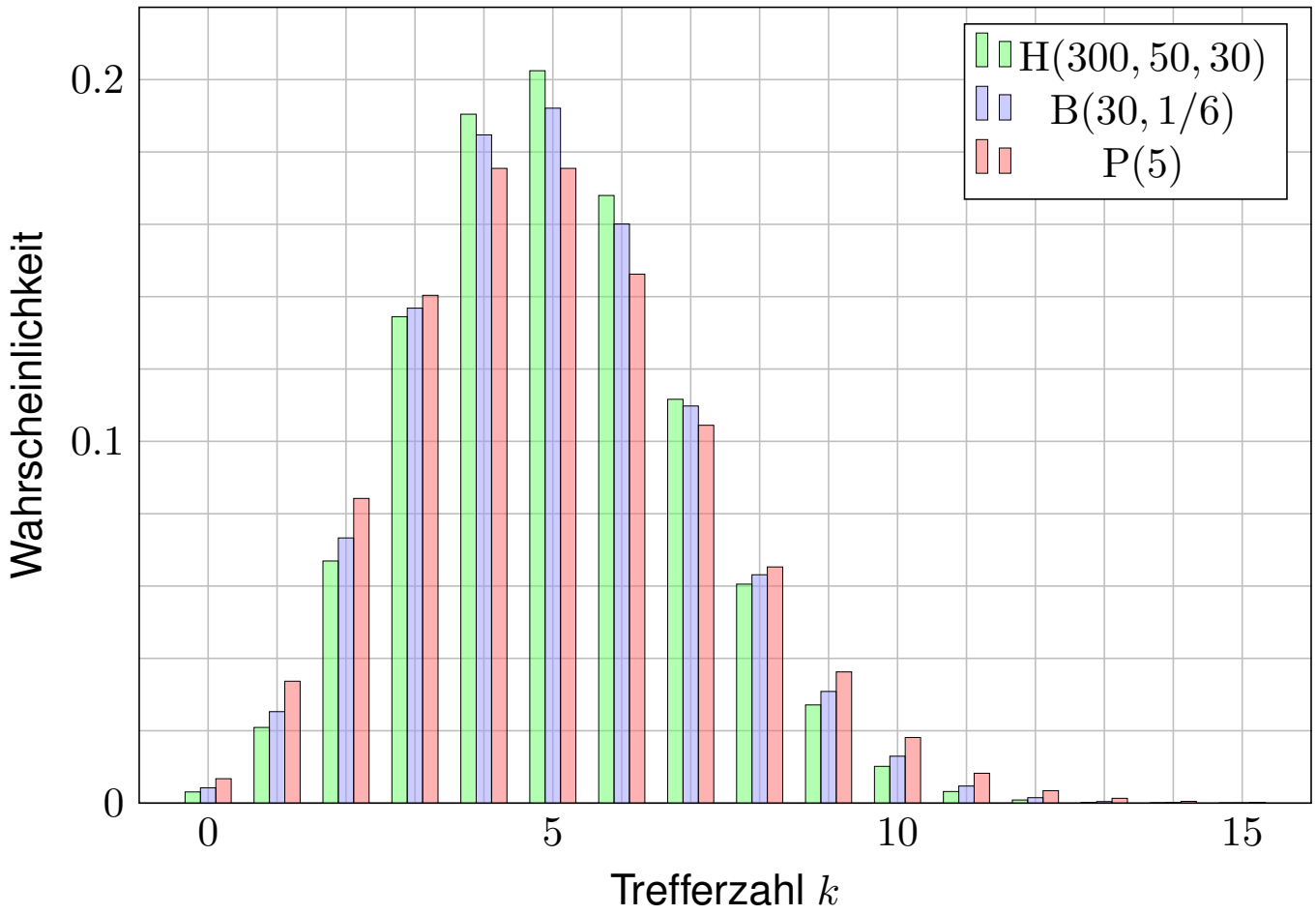
Vergleich: hypergeometrisch, binomial, Poisson

U325

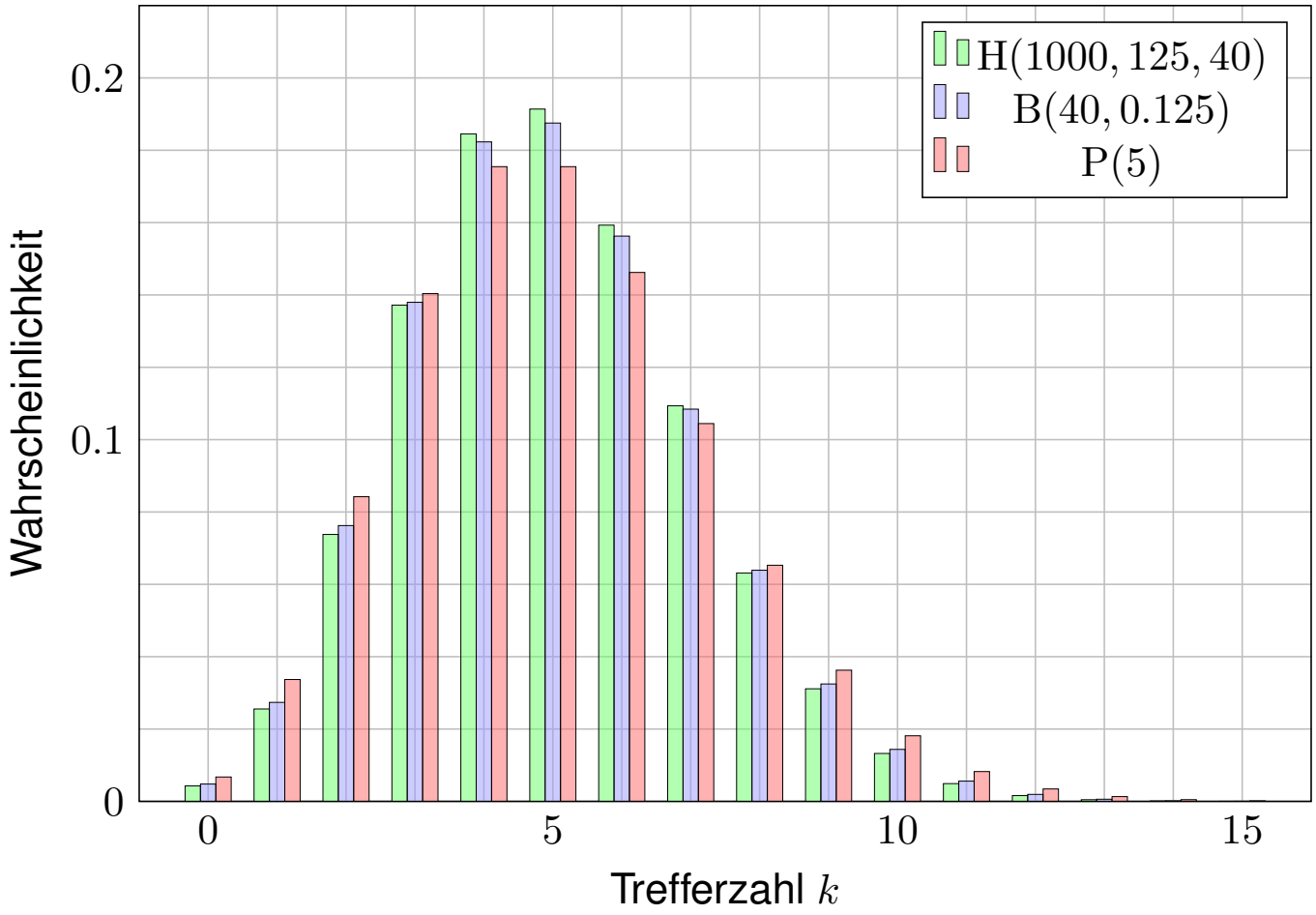


Vergleich: hypergeometrisch, binomial, Poisson

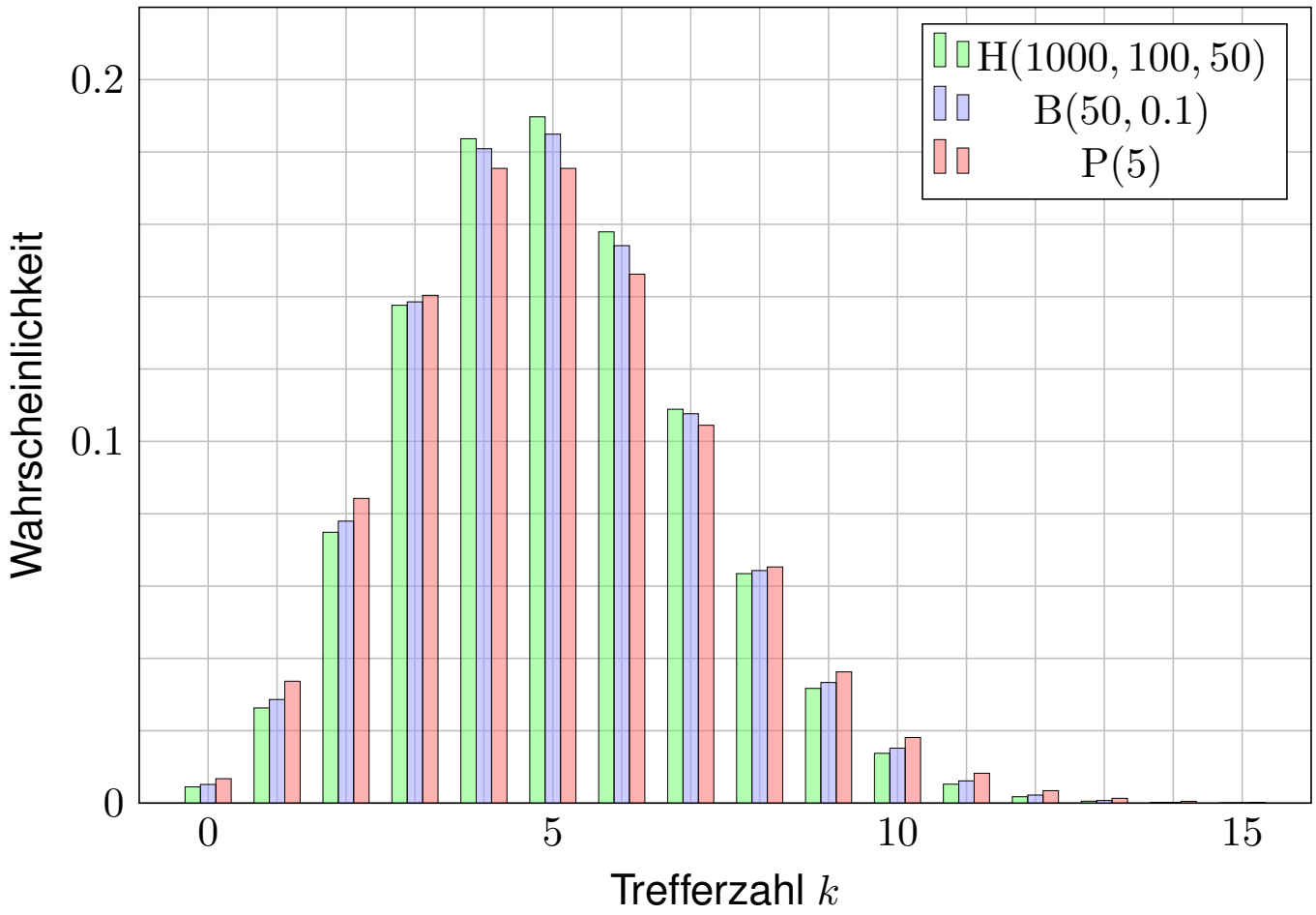
U326



Vergleich: hypergeometrisch, binomial, Poisson



Vergleich: hypergeometrisch, binomial, Poisson



Abstand von hypergeometrisch zu binomial

U329

Für große Stichproben möchten wir die hypergeometrische Verteilung $\mathrm{H}(N, K, n)$ durch die Binomialverteilung $\mathrm{B}(n, k/N)$ ersetzen.

Satz U3F: Abstand von hypergeometrisch zu binomial

(1) Für $N \to \infty$ und $K/N \to t$ gilt Konvergenz $\mathrm{H}(N, K, n) \to \mathrm{B}(n, t)$.

(2) Genauer gilt bei $K > n$ folgende Schranke für den totalen Abstand:

$$\boxed{\big\|\mathrm{H}(N, K, n) - \mathrm{B}(n, K/N)\big\| \;<\; n/N \quad \searrow \quad 0}$$

☺ Dank dieses Satzes können wir den Fehler bequem abschätzen.

Z.B. liegen $\mathrm{H}(1000, 100, 50)$ und $\mathrm{B}(50, 0.1)$ höchstens 0.05 auseinander, hingegen $\mathrm{H}(10000, 1000, 50)$ und $\mathrm{B}(50, 0.1)$ nur noch höchstens 0.005.

Innerhalb der genannten Fehlerschranken nutzen wir die Näherungen

$$\boxed{\mathrm{H}(N, K, n) \approx \mathrm{B}(n, K/N) \quad \text{und} \quad \mathrm{B}(n, t) \approx \mathrm{P}(nt).}$$

Die Grenzübergänge haben wir oben ausgerechnet. Die Fehlerabschätzung ist schwieriger und wird hier nicht ausgeführt. Ist der Fehler klein genug, so kann man die sehr mühsame hypergeometrische Verteilung durch die weniger mühsame Binomialverteilung ersetzen.

Anwendungsbeispiel zu Stichproben

U330

In einer Population von $N = 500\,000$ Tieren sind $K = 25\,000$ erkrankt. Zwecks Untersuchung werden $n = 200$ Tiere zufällig ausgewählt.

Aufgabe: (1) Welche Verteilung hat die Anzahl k der kranken Tiere?
(2) Welche Verteilungen bieten sich als bequeme Näherungen an?
(3) Wie gut sind diese Näherungen? Sind sie bis auf $0.5 \cdot 10^{-3}$ genau?

Lösung: (1) Die Anzahl der kranken Tiere ist $\mathrm{H}(N, K, n)$–verteilt.

(2) Es wäre bequemer, mit $\mathrm{B}(n, K/N)$ oder $\mathrm{P}(nK/N)$ zu rechnen.

(3) Beim Übergang von $\mathrm{H}(N, K, n)$ zu $\mathrm{B}(n, t)$ mit $t = K/N = 0.05$ machen wir einen totalen Fehler von $< n/N = 0.0004$. Das reicht.

Beim Übergang von $\mathrm{B}(n, t)$ zu $\mathrm{P}(\lambda)$ mit $\lambda = nt = 10$ machen wir einen totalen Fehler von $\leq \lambda^2/n = 0.5$. Das scheint allzu grob: Vorsicht!

$$\begin{array}{lll}
\mathrm{H}(N, K, n): & 8 \mapsto 0.11373, & 9 \mapsto 0.12771, \quad 10 \mapsto 0.12838, \\
\mathrm{B}(n, K/N): & 8 \mapsto 0.11372, & 9 \mapsto 0.12769, \quad 10 \mapsto 0.12836, \\
\mathrm{P}(nK/N): & 8 \mapsto 0.11260, & 9 \mapsto 0.12511, \quad 10 \mapsto 0.12511
\end{array}$$

Die Poisson–Verteilung ist in diesen Punkten immerhin bis auf $0.5 \cdot 10^{-2}$ genau. Die Fehler in verschiedenen Punkten können sich jedoch addieren; das Supremum ist der totale Abstand U3D.

Anwendungsbeispiel zur Wareneingangsprüfung

U331

Firma Schlaule kauft einen billigen Restposten von $50\,000$ Bauteilen. Der Lieferant sichert vertraglich zu, dass höchstens $2\,500$ defekt sind. Als Eingangsprüfung nehmen Sie eine Stichprobe von 100 Teilen und finden 6 defekte. Ihr Chef folgert: „Der Vertrag wurde nicht eingehalten.“

Aufgabe: (1) Kann der Chef auch irren? Wenn ja, mit welcher Wkt? Er wird Ihre Rechnung anzweifeln; begründen Sie deshalb ausführlich! Welche Näherungen sind möglich, welche Fehlergrenzen gelten? W204

(2) Ihr Chef will nun den Lieferanten verklagen. Sollte sich der Vorwurf als falsch erweisen, wären die Kosten enorm. Die Anwältin rät daher zu einer erneuten Stichprobe und verlangt einen Test mit 97% Sicherheit. Bei welchen Stichprobenergebnissen können Sie dies garantieren?

Lösung: Wir betrachten zunächst den extremen Fall: $K = 2\,500$ defekte von $N = 50\,000$ Teilen, also $t = K/N = 5\%$. Eine zufällige Stichprobe von $n = 100$ ohne Zurücklegen enthält k defekte mit Wkt $\mathrm{H}(N, K, n)(k)$.

Näherung $\mathrm{B}(n, t)$ mit Fehler $< n/N = 0.002$: Das scheint akzeptabel.

Näherung $\mathrm{P}(5)$ mit Fehler $\leq nt^2 = 0.25$: Hier ist Vorsicht geboten!

Anwendungsbeispiel zur Wareneingangsprüfung

U332

Wir berechnen die drei Verteilungen, die jeweils zweite Zeile kumuliert.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathrm{H}(N, K, n)$	.0059	.0311	.0811	.1395	.1782	.1802	.1502	.1061	.0648	.0348
Kumul	.0059	.0370	.1180	.2576	.4358	.6160	.7662	.8723	.9371	.9719
$\mathrm{B}(n, t)$	.0059	.0312	.0812	.1396	.1781	.1800	.1500	.1060	.0649	.0349
Kumul	.0059	.0371	.1183	.2578	.4360	.6160	.7660	.8720	.9369	.9718
$\mathrm{P}(\lambda)$	.0067	.0337	.0842	.1404	.1755	.1755	.1462	.1044	.0653	.0363
Kumul	.0067	.0404	.1247	.2650	.4405	.6160	.7622	.8666	.9319	.9682

Eine Tabellenkalkulation hilft, z.B. *LibreOffice*. Hier weicht $\mathrm{B}(n, t)$ kaum von $\mathrm{H}(N, K, n)$ ab, $\mathrm{P}(\lambda)$ zwar etwas mehr, aber insgesamt noch wenig.

(1) Angenommen, höchstens $2\,500$ der $50\,000$ Teile sind defekt.
Stichprobe ≤ 5 mit Wkt $\gtrapprox 61\%$, Stichprobe ≥ 6 mit Wkt $\lessapprox 39\%$.
Bei bis zu 38% aller Stichproben würde Ihr Chef demnach irren.

(2) Stichprobe ≤ 9 mit Wkt $\gtrapprox 97\%$, Stichprobe ≥ 10 mit Wkt $\lessapprox 3\%$.
Das Risiko einer irrtümlichen Klage wäre demnach kleiner als 3%.
Im Falle $K < 2\,500$ verstärken sich die Ungleichungen noch.

Ausfallwahrscheinlichkeit

Von n **unabhängigen** Teilen habe jedes Ausfallwkt p. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\text{Alle Teile funktionieren}) &= (1-p)^n &\lessapprox\ & \mathrm{e}^{-np} \\ \mathbf{P}(\text{Mindestens eins fällt aus}) &= 1-(1-p)^n &\gtrapprox\ & 1-\mathrm{e}^{-np} \end{aligned}$$

Taylor–Entwicklung: Es gilt $\exp(x) \gtrapprox 1+x$ und $\exp(-x) \gtrapprox 1-x$.
Genauer: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(x) \geq 1+x$ und $\exp(-x) \geq 1-x$,
und für $x \approx 0$ gilt zudem $\exp(x) \approx 1+x$ und $\exp(-x) \approx 1-x$.

Eine Maschine bestehe aus vielen **unabhängigen** Teilen $T_1, \ldots, T_n$.
Jedes Teil T_k hat eine gewisse Ausfallwahrscheinlichkeit $p_k \in [0,1]$.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\text{Alle Teile funktionieren}) &= (1-p_1)\cdots(1-p_n) \\ &\lessapprox\ \mathrm{e}^{-p_1}\cdots\mathrm{e}^{-p_n} \ = \ \mathrm{e}^{-(p_1+\cdots+p_n)}. \\ \mathbf{P}(\text{Mindestens eins fällt aus}) &= 1-(1-p_1)\cdots(1-p_n) \\ &\gtrapprox\ 1-\mathrm{e}^{-(p_1+\cdots+p_n)}. \end{aligned}$$

☺ Die Näherung ist praktisch für $p_1, \ldots, p_n$ klein und n groß.
Dies ist die Poisson–Verteilung $\mathrm{P}(\lambda)$ mit $\lambda = p_1 + \cdots + p_n$. U314

Kollisionswahrscheinlichkeit

Aus n Möglichkeiten wird k mal zufällig ausgewählt (wobei $1 \leq k \leq n$).
Die Wahrscheinlichkeit $P_{n,k}$, dabei k verschiedene auszuwählen, ist

$$P_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!\,n^k} \lessapprox \exp\left(-\frac{k(k-1)}{2n}\right).$$

☺ Der Graph ist die rechte Hälfte der Gaußschen Glockenkurve $\mathrm{e}^{-x^2/2}$.
Die Wahrscheinlichkeit $Q_{n,k}$ mindestens einer Kollision ist demnach

$$Q_{n,k} = 1 - P_{n,k} \gtrapprox 1 - \exp\left(-\frac{k(k-1)}{2n}\right).$$

Geburtstagsparadox: Mit welcher Wkt Q sind unter $k = 25$ zufälligen Personen mindestens zwei am gleichen Tag des Jahres geboren?

Lösung: Für $k = 25$ und $n = 365$ gilt $P \lessapprox \mathrm{e}^{-0.821} \lessapprox 0.44$, also $Q \gtrapprox 0.56$.

☺ Intuitiv halten viele eine Kollision für unwahrscheinlich. Tatsächlich liegt die Wkt bei über 50%, daher trägt dieses überraschende Ergebnis den Namen „Geburtstagsparadox“. Probieren Sie es selbst einmal aus!

Kombinatorik / Schubfachmodelle

Auf wie viele Arten können wir k Objekte auf n Fächer verteilen?

Schubfachmodell	unterscheidbare Objekte	ununterscheidbare Objekte
beliebig viele Objekte pro Fach	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
höchstens eins pro Fach (injektiv)	$\frac{n!}{(n-k)!} = k!\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
mindestens eins pro Fach (surjektiv)	$n!\left\{ {k \atop n} \right\}$	$\binom{k-1}{n-1}$

Unterscheidbare Objekte denken wir uns mit $1, \ldots, k$ nummeriert.
Bei ununterscheidbaren Objekten dürfen wir Objekte untereinander vertauschen: Das bedeutet, wir betrachten Anordnungen dann als gleich, wenn sie sich nur durch die Nummerierung der Objekte unterscheiden.
(Für Ausführungen siehe `en.wikipedia.org/wiki/Twelvefold_way`.)

Kombinatorik / Urnenmodelle

Aus n durchnummerierten Kugeln ziehen wir k Kugeln (oder Lose):
Ziehung mit / ohne Zurücklegen, Ergebnis mit / ohne Reihenfolge.
Die Gesamtzahl der möglichen Ergebnisse berechnet sich wie folgt:

Urnenmodell	mR: mit Reihenfolge	oR: ohne Reihenfolge
oZ: ohne Zurücklegen	$\frac{n!}{(n-k)!} = k!\binom{n}{k}$ Laplace!	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ Laplace!
mZ: mit Zurücklegen	n^k Laplace!	$\binom{n+k-1}{k}$ nicht Laplace!

Beispiel: In einer Urne liegen N Kugeln, davon sind genau K rot.
Wir ziehen zufällig n der N Kugeln (oZoR). Welche Wkt hat das Ereignis $A_k =$ „Es werden genau k der K roten Kugeln gezogen“? **Lösung:**

$$\mathbf{P}(A_k) = \frac{|A_k|}{|\Omega|} = \binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k} \Big/ \binom{N}{n}$$

Abstand von Wahrscheinlichkeitsmaßen

U405
Fazit

Oft wollen oder müssen wir zwei WMaße $\mathbf{P}_0$ und $\mathbf{P}_1$ auf Ω vergleichen: Ist $\mathbf{P}_0$ mühsam aber $\mathbf{P}_1$ bequem, so wollen wir $\mathbf{P}_0$ durch $\mathbf{P}_1$ ersetzen.

Die beiden WMaße $\mathbf{P}_0$ und $\mathbf{P}_1$ ordnen jedem Ereignis $A \subseteq \Omega$ die Wkten $\mathbf{P}_0(A)$ bzw. $\mathbf{P}_1(A)$ zu. Der **totale Abstand** zwischen $\mathbf{P}_0$ und $\mathbf{P}_1$ ist das Supremum, die größtmögliche Abweichung, die hierbei auftreten kann:

$$\boxed{\big\|\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_1\big\| := \sup_{A\subseteq\Omega}\big|\mathbf{P}_0(A) - \mathbf{P}_1(A)\big| = \frac{1}{2}\sum_{\omega\in\Omega}\big|\mathbf{P}_0(\{\omega\}) - \mathbf{P}_1(\{\omega\})\big|}$$

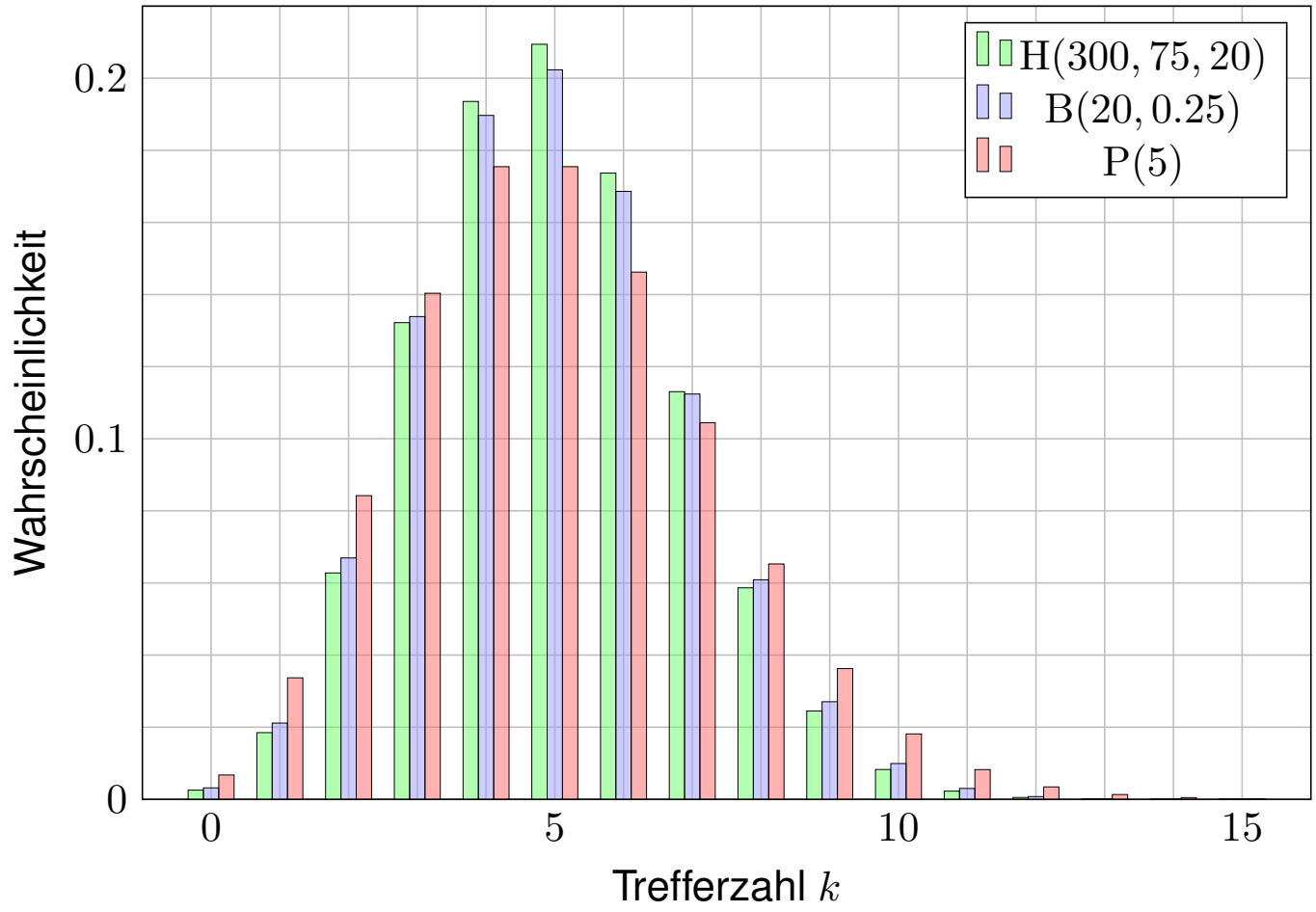
Diese Fehlerschranke nutzen wir bei näherungsweisen Rechnungen: Ist der Abstand klein genug, etwa $\|\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_1\| \le \varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-3}$, so können wir $\mathbf{P}_0(A)$ durch $\mathbf{P}_1(A)$ ersetzen und machen dabei schlimmstenfalls einen Fehler von ε, das heißt, es gilt $\mathbf{P}_0(A) = \mathbf{P}_1(A) + \delta$ mit $|\delta| \le \varepsilon$.

Der totale Abstand ist (bis auf einen Faktor $1/2$) die Summe über alle punktweisen Abstände: Die linke Seite $\sup_{A\subseteq\Omega}$ ist leicht zu verstehen, die rechte Seite $\sum_{\omega\in\Omega}$ ist leicht zu berechnen. Diese Umformulierung ist oft leichter zugänglich: Es genügt, die absolute Differenz über alle Ergebnisse zu addieren. Die genaue Rechnung U318 beweist dies und erklärt den Faktor $1/2$.

Die Rechnung zeigt zudem, dass das Supremum angenommen wird, also ein Maximum ist. Für die Menge $A = \{\, \omega \in \Omega \mid \mathbf{P}_0(\{\omega\}) > \mathbf{P}_1(\{\omega\}) \,\}$ gilt $\|\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_1\| = \big|\mathbf{P}_0(A) - \mathbf{P}_1(A)\big|$.

Hypergeometrisch, binomial, Poisson

U406
Fazit



Hypergeometrisch, binomial, Poisson

Stichprobe: Gesamtgröße N, davon K Treffer, Stichprobengröße n.

Die Trefferzahl k folgt der **hypergeometrischen Verteilung**

$$\boxed{\mathrm{H}(N,K,n)(k) = \binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k} \Big/ \binom{N}{n}.}$$

Ein Experiment mit Trefferwkt t mit n-mal unabhängig wiederholt,
z.B. Stichprobengröße n mit Zurücklegen, Trefferwkt $t = K/N$.

Die Trefferzahl k folgt hier der **Binomialverteilung**

$$\boxed{\mathrm{B}(n,t)(k) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}.}$$

Damit sind $\mathrm{H}(N,K,n)$ und $\mathrm{B}(n,t)$ WVerteilungen auf $\{0,\dots,n\} \subseteq \mathbb{N}$.

Für $N \to \infty$ und $K/N \to t$ gilt die Konvergenz $\mathrm{H}(N,K,n) \to \mathrm{B}(n,t)$.
Genauer gilt für $K > n$ folgende Abschätzung des **totalen Abstands**

$$\boxed{\big\|\mathrm{H}(N,K,n) - \mathrm{B}(n,K/N)\big\| < n/N.}$$

Hypergeometrisch, binomial, Poisson

Die **Poisson–Verteilung** $\mathrm{P}(\lambda)$ zum Parameter $\lambda \geq 0$ ist gegeben durch

$$\boxed{\mathrm{P}(\lambda)(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\lambda^k/k!.}$$

Damit ist $\mathrm{P}(\lambda)$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$.
Das Gesetz der kleinen Zahlen besagt $\mathrm{B}(n,\lambda/n) \to \mathrm{P}(\lambda)$ für $n \to \infty$.

Genauer gilt folgende Abschätzung des **totalen Abstands**:

$$\boxed{\big\|\mathrm{B}(n,\lambda/n) - \mathrm{P}(\lambda)\big\| \leq \lambda^2/n.}$$

Für Trefferwahrscheinlichkeit $t \in [0,1]$ und $\lambda = nt$ erhalten wir

$$\boxed{\big\|\mathrm{B}(n,t) - \mathrm{P}(nt)\big\| \leq nt^2.}$$

☺ Je nach geforderter Genauigkeit können wir so bequem
von hypergeometrisch über binomial zu Poisson übergehen.

☺ Das verallgemeinert und präzisiert die Näherungsformel U108 für
Ausfallwahrscheinlichkeiten bei n gleichen unabhängigen Bauteilen.

Verständnisfragen: unabhängige Experimente

Versuchen Sie, folgende Fragen frei aber genau zu beantworten, etwa so, wie Sie dies einer Kommiliton:in / Kolleg:in erklären wollen.

Wie beschreibt man zwei unabhängige Experimente in einem gemeinsamen Modell, d.h. auf einem Wahrscheinlichkeitsraum? Wie berechnet man z.B. die Sicherheit von drei Bauteilen mit Ausfallwkten p_1, p_2, p_3? Warum ist die Unabhängigkeit wesentlich?

Wie wahrscheinlich ist es, dass von n unabhängigen Teilen mit gleicher Ausfallwkt p mindestens eins ausfällt? Was gilt exakt? Welche Näherung ist für große n nützlich? Wie kommt sie zustande? Inwiefern ist dies ein Spezialfall der Poisson–Verteilung?

Was besagt das Geburtstagsparadox? Was ist daran paradox? Wie berechnet man allgemein die Wkt einer Kollision? exakt? Welche Näherung ist hierzu nützlich? Wie kommt sie zustande? Welche Rolle spielt hierbei die Gaußsche Glockenkurve $\exp(-x^2)$?

Verständnisfragen: Abzählformeln

Welche Abzählformeln gelten bei der Ziehung aus einer Urne mit / ohne Zurücklegen sowie mit / ohne Beachtung der Ziehungsreihenfolge? Welche davon sind Laplace-Experimente, mit gleichverteilter Wkt?

Drei wichtige Beispiele: Wie definiert man folgende Verteilungen?

- die hypergeometrische Verteilung $\mathrm{H}(N, K, n)$
- die Binomialverteilung $\mathrm{B}(n, t)$
- die Poisson–Verteilung $\mathrm{P}(\lambda)$

Nennen Sie Anwendungen, in denen obige Verteilungen auftreten; inwiefern sind diese Modelle jeweils exakt oder nur angenähert?

Wie definiert man allgemein den totalen Abstand zwischen zwei diskreten Wahrscheinlichkeitsmaßen $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1$ auf einer Menge Ω? Hierzu gibt es zwei äquivalente Formeln, als Supremum über alle Mengen (Ereignisse) und als Summe über alle Punkte (Ergebnisse). Wie lauten diese beiden Formeln und was bedeuten sie anschaulich?

Verständnisfragen: Gesetz der kleinen Zahlen

Dies führt zum ersten wichtigen Grenzwertsatz dieses Kapitels:

$$\mathrm{B}(n,t) \approx \mathrm{P}(\lambda)$$

In welchem Sinne nähert sich die Binomial- der Poisson–Verteilung? Nennen / erfinden Sie mindestens zehn konkrete Anwendungsbeispiele, in denen diese Näherung praktisch nützlich ist, sinnvoll und hilfreich.

Wie lautet und was besagt Poissons Gesetz der kleinen Zahlen? Wie bestimmt man hierzu die nötige Kenngröße λ? In welchen Situationen kann man diese Näherung anwenden? Welche Voraussetzungen braucht man und welche Schlussfolgerung gewinnt man?

Wie lautet die Fehlerschranke beim Gesetz der kleinen Zahlen?
Wie verhält sie sich für $n \to \infty$? Wie muss t angepasst werden?
Wozu nützt diese Schranke in konkreten Anwendungen, bei festem n?
Wann darf man sie getrost ignorieren? meistens? manchmal? nie?

Verständnisfragen: Trefferwkt bei Stichproben

Schließlich zum ergänzenden Grenzwertsatz für Stichproben:

$$\mathrm{H}(N,K,n) \approx \mathrm{B}(n,t)$$

In welchem Sinne nähert sich die hypergeom. der Binomialverteilung? Nennen / erfinden Sie mindestens zehn konkrete Anwendungsbeispiele, in denen diese Näherung praktisch nützlich ist, sinnvoll und hilfreich.

In der Praxis betrachtet man häufig eine Stichprobe der Größe n aus einer Population N, entweder mit oder ohne Zurücklegen. Wie lauten jeweils die exakten Wkten für die Trefferzahlen? Welches der beiden Modelle ist bequemer zu berechnen?

Warum sind beide Modelle für großes N nahezu gleich? Wie weit liegen sie höchstens auseinander? Wie verhält sich ihr Abstand für $N \to \infty$?
Wozu nützt diese Schranke in konkreten Anwendungen, bei festem n?
Wann darf man sie getrost ignorieren? meistens? manchmal? nie?

Kollision bei Losen

U413
Übung

Aufgabe: Eine Tombola enthält 850 durchnummerierte Lose.
Sie ziehen zufällig und unabhängig 51 mal ein Los *mit Zurücklegen*.
Wie groß ist die Wkt P, dabei 51 *verschiedene* Lose zu ziehen?

Lösung: Wir nutzen den Geburtstagssatz U1E oder leiten ihn nochmal selbst her. Für die Wahrscheinlichkeit gilt mit $n = 850$ und $k = 51$:

$$\begin{aligned} P &= \Big(1-\frac{0}{n}\Big)\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)\cdots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big) \\ &\lessapprox \exp\Big(-\frac{0}{n}\Big)\exp\Big(-\frac{1}{n}\Big)\exp\Big(-\frac{2}{n}\Big)\cdots\exp\Big(-\frac{k-1}{n}\Big) \\ &= \exp\Big(-\frac{0+1+2+\cdots+(k-1)}{n}\Big) \\ &= \exp\Big(-\frac{k(k-1)}{2n}\Big) \;=\; \exp(-1.5) \;\lessapprox\; 0.223. \end{aligned}$$

⚠ Die Wkt $< 23\%$ ist viel geringer als zunächst vermutet: In 850 scheint für 51 verschiedene Lose genug Platz. Wie beim Geburtstagsparadox sind Kollisionen mit $> 77\%$ viel wahrscheinlicher als man naiv erwartet.

Kollision beim Lotto

U414
Übung

Aufgabe: (1) Wie viele Ergebnisse gibt es beim Lotto „6 aus 49“?
(2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit Q tritt bei 5000 unabhängigen Ziehungen mindestens ein Ziehungsergebnis doppelt auf?

Lösung: (1) Wir nutzen unsere kombinatorischen Abzählformeln:
Beim Lotto „6 aus 49“ sind $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$ Ergebnisse möglich.
(2) Wir nutzen den Geburtstagssatz U1E wie in der vorigen Aufgabe:
Mit $n = \binom{49}{6}$ und $k = 5000$ gilt $k(k-1)/(2n) \gtrapprox 25/28 \gtrapprox 0.89$.
Die Wahrscheinlichkeit, keine Kollision zu erleben, ist demnach:

$$P \;\lessapprox\; \exp\Big(-\frac{k(k-1)}{2n}\Big) \;\lessapprox\; \exp(-0.89) \;\lessapprox\; 0.411$$

⚠ Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Ziehungsergebnis doppelt vorkommt, ist demnach $Q = 1 - P \gtrapprox 0.589$, also fast 60%.

Das ist viel wahrscheinlicher, als man zunächst vermuten würde. Im deutschen Lotto „6 aus 49“ wurden bei den ersten 5000 Ziehungen (von 1955 bis bis 2011) tatsächlich zweimal die selben sechs Zahlen gezogen: Sowohl am 20.12.1986 als auch am 21.06.1995 waren es die Zahlen 15, 25, 27, 30, 42, 48. Ein solches Vorkommnis ist nach unserer Rechnung durchaus plausibel.

Mehrfache Hauptgewinne beim Lotto

U415
Übung

Aufgabe: Beim Lotto beträgt die Wkt für 6 Richtige etwa 1:14 Mio.
An einem typischen Samstag werden etwa 52 Mio Tipps abgegeben.

(1) Wie groß ist die Wkt für $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ Tipps mit 6 Richtigen?
(2) Welche vereinfachenden Annahmen möchten / müssen Sie machen?
(3) Welche Approximation ist geeignet? Wie groß ist dabei der Fehler?

Lösung: $n = 52\,000\,000$ Versuche mit Trefferwkt $t = 1/14\,000\,000$.

(1) Die Trefferzahl ist binomialverteilt: $\mathrm{B}(n,t)(k) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$
(2) Wir nehmen hier die Tipps als gleichverteilt und unabhängig an.
(3) Eine Näherung ist die Poisson–Verteilung $\mathrm{P}(\mu)$ mit $\mu = nt \approx 3.714$:

$$\mathrm{B}(n,t)(k) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \quad \approx \quad \mathrm{P}(\mu)(k) = \mathrm{e}^{-\mu}\,\frac{\mu^k}{k!}$$

☺ Der totale Abstand $\|\mathrm{B}(n,t) - \mathrm{P}(\mu)\| \le nt^2 < 3 \cdot 10^{-7}$ ist extrem klein.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathrm{P}(\mu)(k)$	.024	.091	.168	.208	.193	.144	.089	.047	.022	.009

Übertrag und Jackpot beim Lotto

U416
Übung

Aufgabe: Beim Lotto gibt es ca. 140 Mio Möglichkeiten mit Superzahl.
Samstags werden etwa 52 Mio Tipps abgegeben, Mittwochs nur 26 Mio.

(1) Wie groß ist jeweils die Wkt, dass der Jackpot nicht geknackt wird?
(2) Eine Woche lang? zwei? drei? vier? ... (3) Nennen Sie explizit Ihre vereinfachenden Annahmen und die daraus abgeleiteten Modelle.

Lösung: (3) $M = 10 \cdot \binom{49}{6} \approx 14 \cdot 10^7$ Möglichkeiten. Ziehungen sind unabhängig und gleichverteilt, also Trefferwkt $t = 1/M$. Wir nehmen hierzu vereinfachend die Tipps als unabhängig und gleichverteilt an.

(1) Bei n Tipps mit Trefferwkt t wird der Jackpot nicht geknackt mit Wkt

$$q \;=\; \mathrm{B}(n,t)(0) \;=\; (1-t)^n \;=\; \left(1 - \frac{nt}{n}\right)^n \;\approx\; \mathrm{e}^{-nt} \;=\; \mathrm{P}(nt)(0)$$

Mittwochs $n_M \cdot t = 26/140 \approx 0.1857$, also $q_M = \mathrm{e}^{-0.1857} \approx 0.8305$
Samstags $n_S \cdot t = 52/140 \approx 0.3714$, also $q_S = q_M^2 = \mathrm{e}^{-0.3714} \approx 0.6897$

(2) Jackpot wird in einer Woche nicht geknackt: $q = \mathrm{e}^{-0.5571} \approx 0.5728$.
Mit Wkt $q^{k-1}(1-q)$ wird der Jackpot erst in der k-ten Woche geknackt.

☺ Das ist die geometrische Verteilung T4A: Die Wkt fällt exponentiell.

Symmetrie der hypergeometrischen Verteilung

Aufgabe: Beweisen Sie die folgende Symmetrieformel:

$$\boxed{\mathrm{H}(N,K,n)(k) = \mathrm{H}(N,n,K)(k)}$$

(1) Schreiben Sie beide Seiten explizit aus und vergleichen Sie.

(2) Sie wählen aus der Gesamtmenge $\Omega = \{1, 2, \ldots, N\}$ zufällig eine Teilmenge $A \subseteq \Omega$ mit $|A| = K$ Elementen und eine Teilmenge $B \subseteq \Omega$ mit $|B| = n$ Elementen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gilt $|A \cap B| = k$?

Lösung: (1) Wir setzen die Definition ein und vergleichen:

$$\mathrm{H}(N,K,n)(k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{K!\,(N-K)!\,n!(N-n)!}{k!(K-k)!\,(n-k)!(N-K-n+k)!\,N!}$$

$$\mathrm{H}(N,n,K)(k) = \frac{\binom{n}{k}\binom{N-n}{K-k}}{\binom{N}{K}} = \frac{n!\,(N-n)!\,K!(N-K)!}{k!(n-k)!\,(K-k)!(N-n-K+k)!\,N!}$$

(2) Wenn wir erst A fixieren, finden wir $\mathrm{H}(N,K,n)(k)$. Wenn wir erst B fixieren, finden wir $\mathrm{H}(N,n,K)(k)$. Beide Wkten sind jedoch dieselben!

Diskrete Verteilungen und ihre Kenngrößen

Satz U4A: diskrete Verteilungen und ihre Kenngrößen

$X \sim$ Verteilung	Ω	$p(k) = \mathbf{P}(\{k\})$	$\mathbf{E}$	$\mathbf{V}$
Geometrisch $\mathrm{G}(q)$	$\mathbb{N}_{\geq 1}$	$(1-q)q^{k-1}$	$\frac{1}{1-q}$	$\frac{q}{(1-q)^2}$
Hyperg. $\mathrm{H}(N,K,n)$	$\{0,\ldots,n\}$	$\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}/\binom{N}{n}$	$n\frac{K}{N}$	$n\frac{K}{N}\frac{N-K}{N}\frac{N-n}{N-1}$
Binomial $\mathrm{B}(n,t)$	$\{0,\ldots,n\}$	$\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}$	nt	$nt(1-t)$
Poisson $\mathrm{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$\mathrm{e}^{-\lambda}\,\lambda^k/k!$	λ	λ

Aufgabe: Rechnen Sie dies für die geometrische Verteilung nach.
Lösung: Die Rechnung kennen Sie aus dem vorigen Kapitel, Satz T4A.

Für die folgenden Rechnungen nutzen wir insbesondere die Identität

$$k\binom{K}{k} = \frac{K\cdot(K-1)\cdots(K-k+1)}{(k-1)\cdots 1} = K\binom{K-1}{k-1}.$$

Erwartung der hypergeometrischen Verteilung

Aufgabe: Sei $X \sim \mathrm{H}(N, K, n)$ hypergeometrisch verteilt. Zeigen Sie:

$$\boxed{\mathbf{E}\big[X\big] = n\frac{K}{N} \quad \text{und} \quad \mathbf{V}\big[X\big] = n\frac{K}{N}\frac{N-K}{N}\frac{N-n}{N-1}}$$

Diese Formeln sind symmetrisch in n und K, ganz wie es sein muss!

Lösung: (1) Wir berechnen zunächst den Erwartungswert:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\big[X\big] &= \sum_{k=0}^{n} k\,\mathbf{P}(X{=}k) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k} \Big/ \binom{N}{n} \\
&= \sum_{k=0}^{n} K\binom{K-1}{k-1}\binom{(N-1)-(K-1)}{(n-1)-(k-1)} \Big/ \frac{N}{n}\binom{N-1}{n-1} \\
&= \frac{nK}{N}\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{K-1}{k-1}\binom{(N-1)-(K-1)}{(n-1)-(k-1)} \Big/ \binom{N-1}{n-1}}_{=1}
\end{aligned}$$

☺ Die letzte Summe kumuliert die $\mathrm{H}(N{-}1, K{-}1, n{-}1)$–Verteilung.

Varianz der hypergeometrischen Verteilung

(2) Ebenso berechnen wir $\mathbf{E}\big[X^2\big]$, dazu zunächst $\mathbf{E}\big[X(X-1)\big]$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\big[X(X-1)\big] &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k} \Big/ \binom{N}{n} \\
&= \sum_{k=0}^{n} K(K-1)\binom{K-2}{k-2}\binom{(N-2)-(K-2)}{(n-2)-(k-2)} \Big/ \frac{N}{n}\frac{N-1}{n-1}\binom{N-2}{n-2} \\
&= \frac{n(n-1)K(K-1)}{N(N-1)}\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{K-2}{k-2}\binom{(N-2)-(K-2)}{(n-2)-(k-2)} \Big/ \binom{N-2}{n-2}}_{=1}
\end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir schließlich die ersehnte Varianz:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}\big[X\big] &= \mathbf{E}\big[X^2\big] - \mathbf{E}\big[X\big]^2 = \mathbf{E}\big[X(X-1)\big] + \mathbf{E}\big[X\big] - \mathbf{E}\big[X\big]^2 \\
&= \frac{n(n-1)K(K-1)}{N(N-1)} + \frac{nK}{N} - \frac{n^2K^2}{N^2} = \frac{nK(N-K)(N-n)}{N^2(N-1)}
\end{aligned}$$

☺ Die Rechnung ist länglich, aber jeder einzelne Schritt ist leicht.

Erwartung der Binomialverteilung

Aufgabe: Sei $X \sim \mathrm{B}(n,t)$ binomialverteilt. Zeigen Sie:

$$\boxed{\mathbf{E}[X] = nt \quad \text{und} \quad \mathbf{V}[X] = nt(1-t)}$$

Lösung: Klar als Summe unabhängiger Zufallsvariablen, siehe T333!
Alternativ gelingt die Rechnung auch direkt: (1) Die Erwartung ist:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\big[X\big] &= \sum_{k=0}^{n} k\,\mathbf{P}(X{=}k) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} t^k (1-t)^{n-k} \\
&= nt \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} t^{k-1} (1-t)^{(n-1)-(k-1)} \\
&= nt \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} t^{j} (1-t)^{(n-1)-j}}_{=\,1}
\end{aligned}$$

☺ Die letzte Summe kumuliert alle Wkten der $\mathrm{B}(n{-}1,t)$–Verteilung.

Varianz der Binomialverteilung

(2) Ebenso berechnen wir $\mathbf{E}[X^2]$, dazu zunächst $\mathbf{E}[X(X-1)]$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\big[X(X-1)\big] &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \\
&= \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2} t^k (1-t)^{n-k} \\
&= n(n-1)t^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} t^{k-2} (1-t)^{(n-2)-(k-2)} \\
&= n(n-1)t^2 \underbrace{\sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} t^{j} (1-t)^{(n-2)-j}}_{=\,1}
\end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir schließlich die ersehnte Varianz:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}\big[X\big] &= \mathbf{E}\big[X^2\big] - \mathbf{E}\big[X\big]^2 = \mathbf{E}\big[X(X-1)\big] + \mathbf{E}\big[X\big] - \mathbf{E}\big[X\big]^2 \\
&= n(n-1)t^2 + nt - (nt)^2 = nt(1-t)
\end{aligned}$$

☺ Die Rechnung ist länglich, aber jeder einzelne Schritt ist leicht.

Illustration zur Binomialverteilung

U423
Übung

Ein Experiment mit Trefferwkt 0.5 wird 100 mal unabhängig wiederholt.
Aufgabe: Was ist hier die Verteilung? Erwartung? Varianz? Streuung?
Lösung: $\mathrm{B}(100, 0.5)$, Erwartung $\mu{=}50$, Varianz $\sigma^2{=}25$, Streuung $\sigma{=}5$.

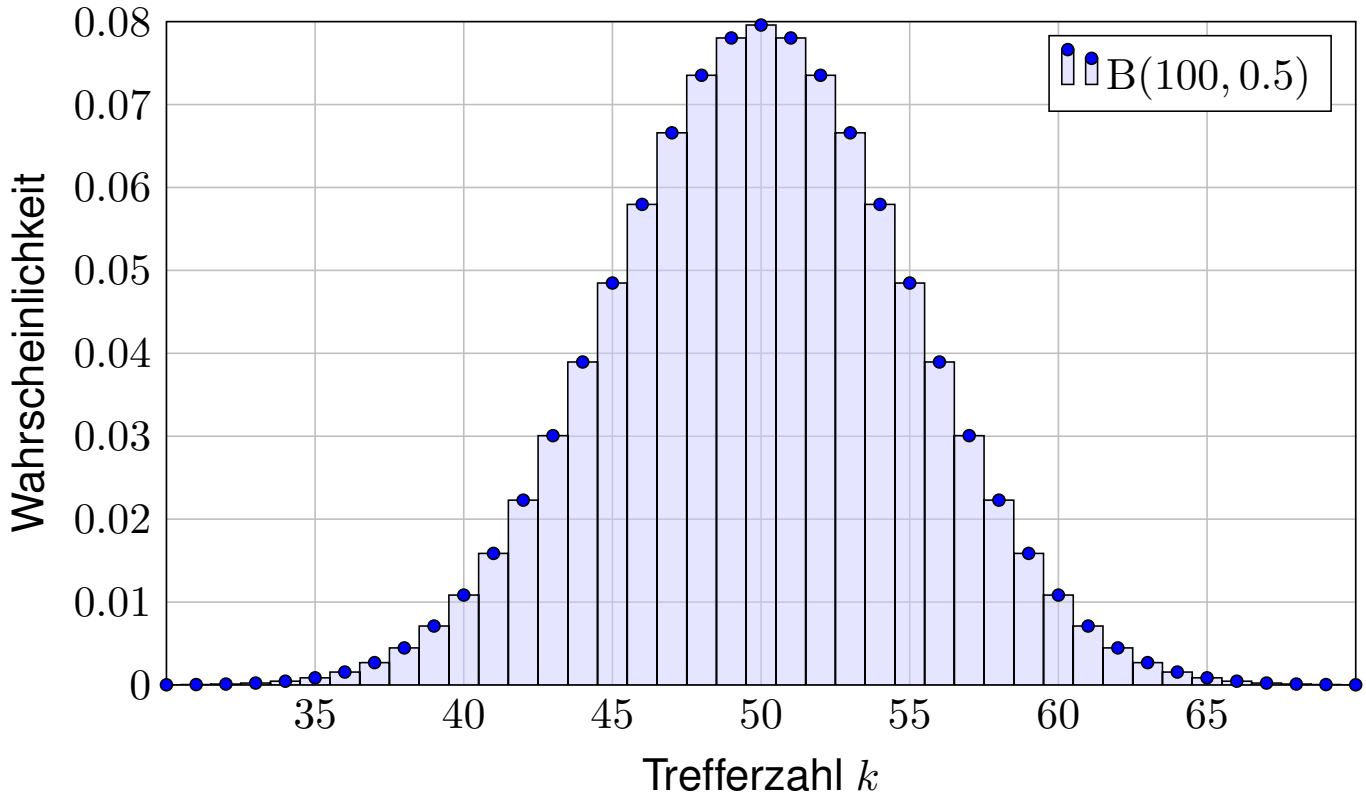
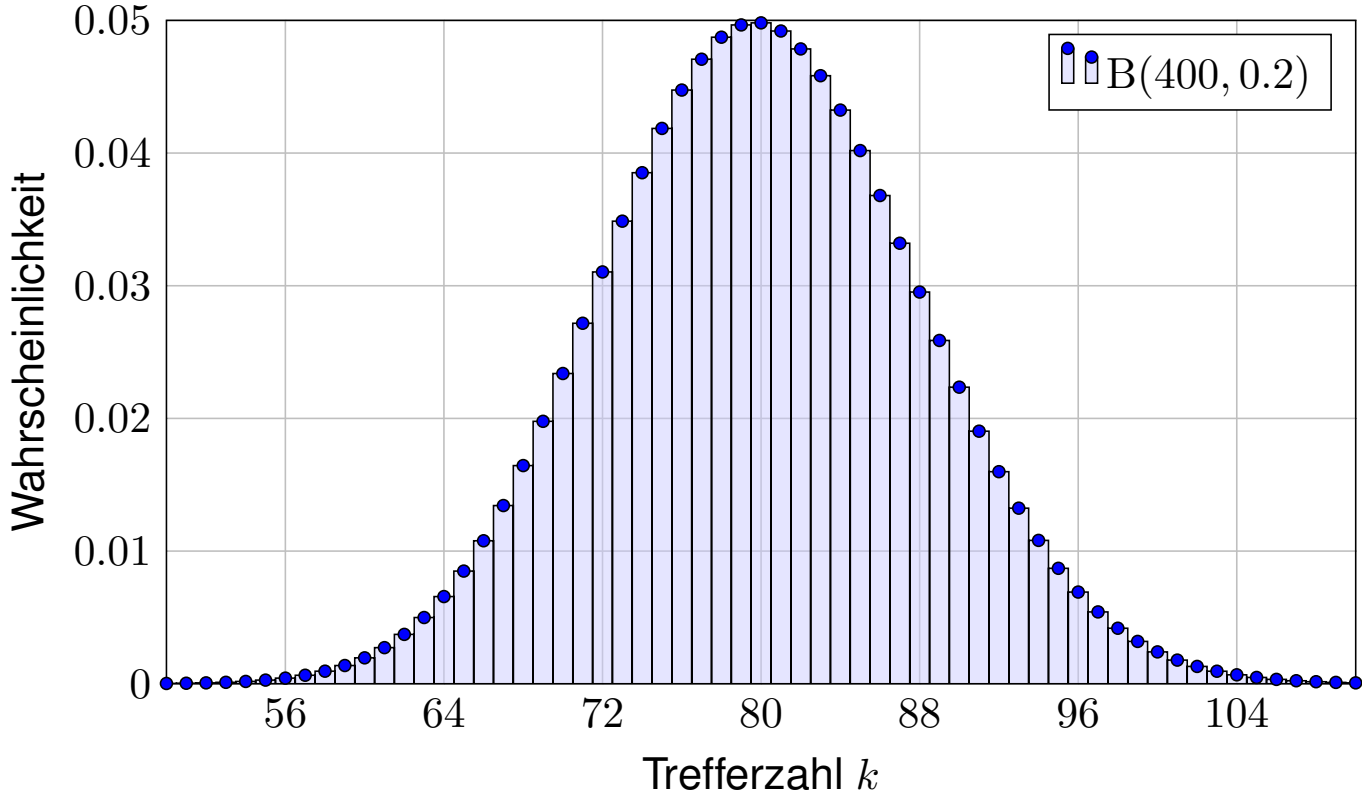


Illustration zur Binomialverteilung

U424
Übung

Ein Experiment mit Trefferwkt 0.2 wird 400 mal unabhängig wiederholt.
Aufgabe: Was ist hier die Verteilung? Erwartung? Varianz? Streuung?
Lösung: $\mathrm{B}(400, 0.2)$, Erwartung $\mu{=}80$, Varianz $\sigma^2{=}64$, Streuung $\sigma{=}8$.



Erwartung der Poisson–Verteilung

Aufgabe: Sei $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$ Poisson–verteilt. Zeigen Sie:

$$\boxed{\mathbf{E}[X] = \lambda \quad \text{und} \quad \mathbf{V}[X] = \lambda}$$

Beweis: (1) Die Erwartung der Poisson–Verteilung $\mathrm{P}(\lambda)$ ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\big[X\big] &= \sum_{k=0}^{\infty} k\,\mathbf{P}(X{=}k) &&= \sum_{k=0}^{\infty} k\,\frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} &&= \lambda \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}}_{=\,1} \quad = \quad \lambda.
\end{aligned}$$

☺ Die letzte Summe kumuliert alle Wkten der $\mathrm{P}(\lambda)$–Verteilung.

☺ Die Verteilungen werden immer einfacher von hypergeometrisch über binomial zu Poisson, und das spüren wir auch in den Rechnungen.

Varianz der Poisson–Verteilung

(2) Ebenso berechnen wir $\mathbf{E}[X^2]$, dazu zunächst $\mathbf{E}[X(X-1)]$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\big[X(X-1)\big] &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\,\mathbf{P}(X{=}k) &&= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \lambda^2 \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} &&= \lambda^2 \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}}_{=\,1} \quad = \quad \lambda^2.
\end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir schließlich die ersehnte Varianz:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}\big[X\big] &= \mathbf{E}\big[X^2\big] - \mathbf{E}\big[X\big]^2 \\
&= \mathbf{E}\big[X(X-1)\big] + \mathbf{E}\big[X\big] - \mathbf{E}\big[X\big]^2 \\
&= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 \quad = \quad \lambda
\end{aligned}$$

☺ Die Rechnung ist länglich, aber jeder einzelne Schritt ist leicht.

Illustration zur Poisson–Verteilung

U427
Übung

Die Verteilung $\mathrm{P}(4)$ hat Erwartung $\mu = 4$ und Streuung $\sigma = 2$.

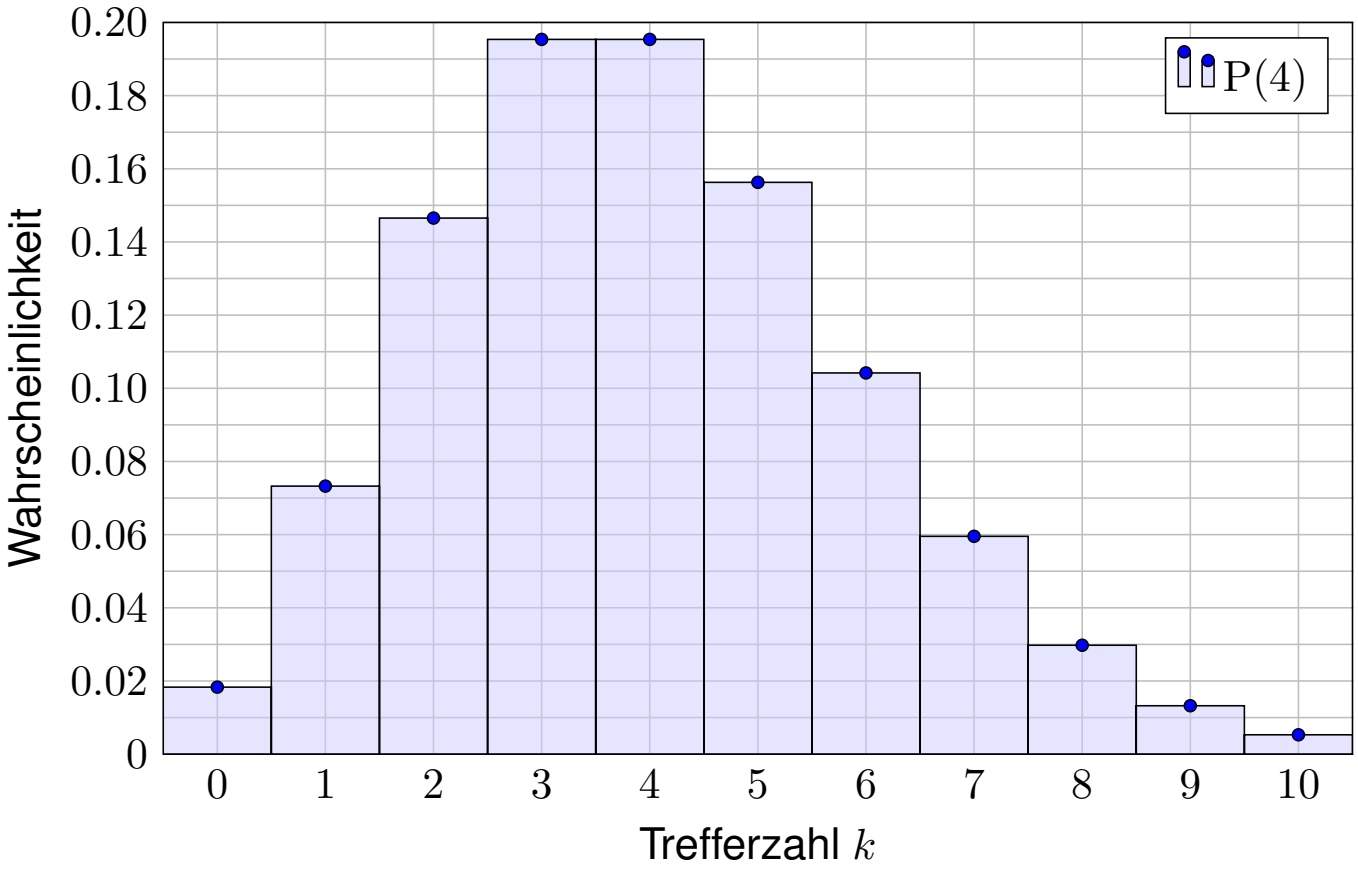
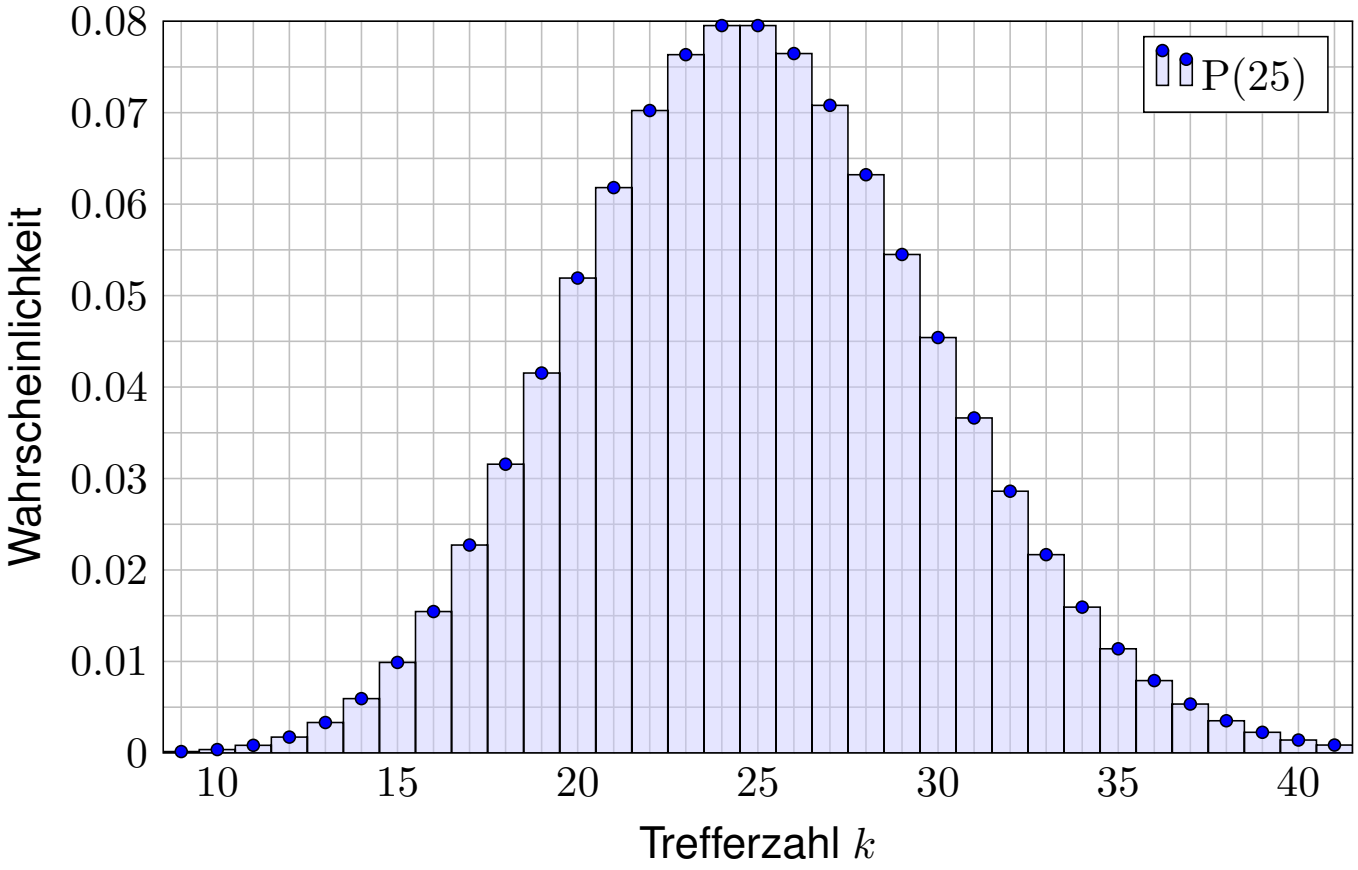


Illustration zur Poisson–Verteilung

U428
Übung

Die Verteilung $\mathrm{P}(25)$ hat Erwartung $\mu = 25$ und Streuung $\sigma = 5$.



Atomzerfall: Vergleich von Messung und Theorie

Ein klassisches Beispiel für eine Poisson–verteilte Zufallsvariable X ist die Anzahl der pro Sekunde emittierten α–Partikel einer radioaktiven Substanz: Die Probe enthält sehr viele Atome, aber jedes Atom zerfällt mit sehr geringer Wahrscheinlichkeit – identisch verteilt und unabhängig von allen anderen. (Bei einer Kettenreaktion sieht es anders aus! U461)

Messungen an einer Probe Americum 241 (Halbwertszeit 458 Jahre) ergaben für 12169 Intervalle von 1–Sekunden–Länge die folgende Verteilung für die Anzahl k der Zerfälle (nach Berkson 1966):

k	0	1	2	3	4	5	Σ
n	5267	4436	1800	534	111	21	12169

Aufgabe: (1) Berechnen Sie den Mittelwert dieser Messdaten.
(2) Welche Poisson–Verteilung passen Sie diesem Datensatz an?
(3) Was sind die zugehörigen theoretischen (abs./rel.) Häufigkeiten?
(4) Was ist der totale Abstand zwischen empirischer und theoretischer Verteilung? Bestätigen oder widerlegen diese Daten die anfängliche Annahme, dass die Zahl der Zerfälle einer Poisson–Verteilung folgt?

Atomzerfall: Vergleich von Messung und Theorie

(1) Der arithmetische Mittelwert μ der gemessenen Zerfallszahlen ist:

$$\frac{0\cdot 5267 + 1\cdot 4436 + 2\cdot 1800 + 3\cdot 534 + 4\cdot 111 + 5\cdot 21}{12169} = \frac{10187}{12169} \approx 0.83713$$

(2) Die Poisson–Verteilung ist gegeben durch $\mathrm{P}(\lambda)(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k/k!$ und hat Erwartungswert λ (Satz U4A). Daher bietet sich die Wahl $\lambda = \mu$ an.

(3) Die Verteilung $\mathrm{P}(\mu)$ gibt uns folgende theoretische Häufigkeiten:

k	0	1	2	3	4	5	≥ 6	Summe
n	5267	4436	1800	534	111	21	0	12169
$\mathrm{e}^{-\mu}\mu^k/k!\cdot\Sigma$	5268.6	4410.5	1846.1	515.1	107.8	18.0	2.9	12169
n/Σ	.43282	.36453	.14792	.04388	.00912	.00173	.00000	1
$\mathrm{e}^{-\mu}\mu^k/k!$	.43295	.36244	.15170	.04233	.00886	.00148	.00023	1

Die erste Zeile zeigt die Anzahl k der Zerfälle. Die zweite und dritte Zeile zeigen die absolute Häufigkeit empirisch bzw. theoretisch. Die vierte und fünfte Zeile zeigen die relative Häufigkeit empirisch bzw. theoretisch.

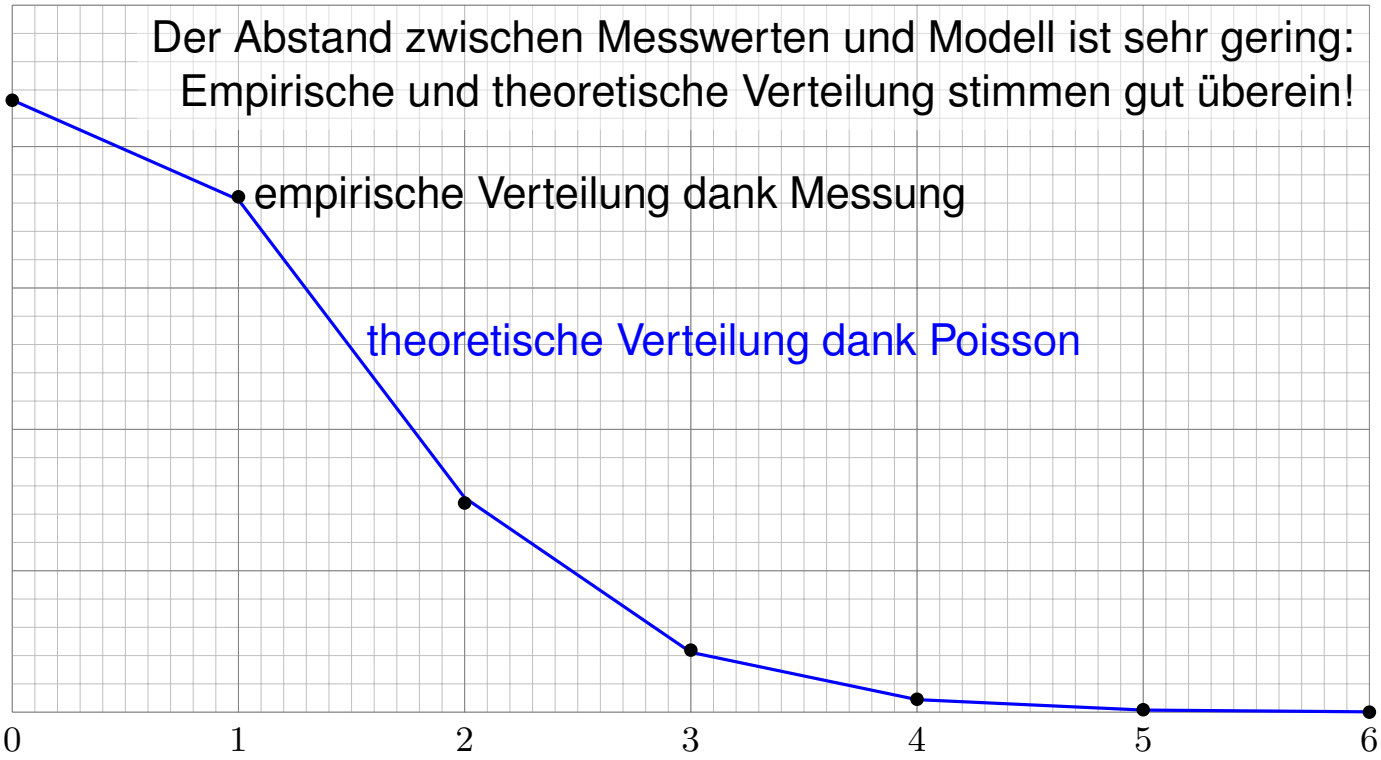
Atomzerfall: Vergleich von Messung und Theorie

(4) Die empirische Verteilung ist $P : \mathbb{N} \to [0,1]$ mit $\mathrm{P}(k) = n(k)/12169$. Die theoretische Verteilung ist $\mathrm{P}(\mu) : \mathbb{N} \to [0,1]$ mit $\mathrm{P}(\mu)(k) = \mathrm{e}^{-\mu}\mu^k/k!$. Ihr totaler Abstand ist (gemäß Definition U3D) gegeben durch

$$\begin{aligned} \|P - \mathrm{P}(\mu)\| &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{n(k)}{12169} - \mathrm{P}(\mu)(k)\right| \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1.6 + 25.5 + 46.1 + 18.9 + 3.2 + 3.0 + 2.9}{12169} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{101.2}{12169} \lessapprox 0.00416 \end{aligned}$$

Für den totalen Abstand U3D haben wir hier die bequemere zweite Formel verwendet: Für jedes Ergebnis $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ berechnen wir die Differenz der Wkten $|P(k) - \mathrm{P}(\mu)(k)|$, summieren auf und teilen durch Zwei. Alternativ können wir auch leicht die erste Formel für das Supremum anwenden: Der Abstand $|P(A) - \mathrm{P}(\mu)(A)|$ wird maximal für $A \subseteq \mathbb{N}$, wenn A alle Ergebnisse k mit $P(k) > \mathrm{P}(\mu)(k)$ enthält, hier also $A = \{1, 3, 4, 5\}$. Der Abstand wird ebenso maximal für das Komplement $\overline{A} = \{0, 2, \geq 6\}$. Summiert man die Abweichungen für jedes der Elemente einer dieser Mengen, dann erhält man ebenfalls den totalen Abstand. Diese Aufgabe bietet so die Gelegenheit, den totalen Abstand anhand eines konkreten Beispiels zu begreifen.

Atomzerfall: Vergleich von Messung und Theorie



Eine perfekte Übereinstimmung ist hier sicher nicht zu erwarten, im Gegenteil wäre sie eher verdächtig: Die Messung ist zufälligen Schwankungen unterworfen! Eine Wiederholung der Messung würde nicht genau dieselben Werte ergeben, sondern nur ähnliche Werte innerhalb der üblichen Schwankungsbreite. Glücklicherweise hilft uns auch hier das Gesetz der großen Zahlen!

Der totale Abstand ist eine Metrik.

Für $u \in \mathbb{R}^n$ nutzen wir die euklidische **Norm** $\|u\| := \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}$.
Diese erfreut sich folgender Eigenschaften für alle $u, v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$:

(N1) $\|v\| \geq 0$, und $\|v\| > 0$ für $v \neq 0$ (positive Definitheit)
(N2) $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ (Homogenität über $\mathbb{R}$)
(N3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (Dreiecksungleichung)

Der damit definierte euklidische **Abstand** $d(u, v) := |u - v|$ erfüllt dann:

(M1) $d(u, u) = 0$, und $d(u, v) > 0$ für $u \neq v$ (Definitheit)
(M2) $d(u, v) = d(v, u)$ (Symmetrie)
(M3) $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$. (Dreiecksungleichung)

Definition U4B: Metrik und metrischer Raum

Eine **Metrik** auf einer Menge X ist eine Abstandsfunktion

$$d : X \times X \to [0, \infty] : (u, v) \mapsto d(u, v),$$

die die obigen Bedingungen (M1,2,3) für alle $u, v, w \in X$ erfüllt.
Das Paar (X, d) nennen wir dann einen **metrischen Raum**.
Im Raum (X, d) ist **Konvergenz** $v_n \to v$ definiert durch $d(v_n, v) \to 0$.

Der totale Abstand ist eine Metrik.

Aufgabe: Sei Ω eine Menge und hierüber sei $\mathscr{M}(\Omega)$ die Menge aller diskreten WMaße (T1D). Ist der totale Abstand (U3D) eine Metrik?

$$\|-\| : \mathscr{M}(\Omega) \times \mathscr{M}(\Omega) \to [0, 1] : (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \mapsto \|\mathbf{P} - \mathbf{Q}\|$$

Lösung: Wir haben die drei Eigenschaften (M1,2,3) zu prüfen.
Hierzu seien $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R} \in \mathscr{M}(\Omega)$ beliebige diskrete WMaße auf Ω.

(M1) Für $\mathbf{P} = \mathbf{Q}$ gilt offensichtlich $\|\mathbf{P} - \mathbf{Q}\| = 0$. Für $\mathbf{P} \neq \mathbf{Q}$ hingegen gibt es $\omega \in \Omega$ mit $\mathbf{P}(\{\omega\}) \neq \mathbf{Q}(\{\omega\})$, und daraus folgt $\|\mathbf{P} - \mathbf{Q}\| > 0$.

(M2) Die Symmetrie $\|\mathbf{P} - \mathbf{Q}\| = \|\mathbf{Q} - \mathbf{P}\|$ ist klar nach Definition.

(M3) Die Dreiecksungleichung für $\|-\|$ rechnen wir sorgfältig nach:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{P} - \mathbf{R}\| &= \frac{1}{2} \sum_{\omega \in \Omega} \big|\mathbf{P}(\{\omega\}) - \mathbf{Q}(\{\omega\}) + \mathbf{Q}(\{\omega\}) - \mathbf{R}(\{\omega\})\big| \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{\omega \in \Omega} \big|\mathbf{P}(\{\omega\}) - \mathbf{Q}(\{\omega\})\big| + \big|\mathbf{Q}(\{\omega\}) - \mathbf{R}(\{\omega\})\big| \\
&= \|\mathbf{P} - \mathbf{Q}\| + \|\mathbf{Q} - \mathbf{R}\|
\end{aligned}$$

☺ Diese Eigenschaften von $\|-\|$ folgen aus denen des Betrages |-|.

Poissons Gesetz der kleinen Zahlen

Poissons Gesetz der kleinen Zahlen U3E sagt $\|\mathrm{B}(n,t) - \mathrm{P}(nt)\| \le nt^2$.
Wir kennen bereits zahlreiche Beispiele und effiziente Anwendungen.
Wir wollen dies allgemein und flexibel formulieren und dann beweisen:

Satz U4C: Poissons Gesetz der kleinen Zahlen

Seien $X_1, \dots, X_n : \Omega \to \{0,1\}$ unabhängig mit $\mathbf{P}(X_k{=}1) = t_k \in [0,1]$, also jeweils $\mathrm{B}(1,t_k)$–verteilt mit $\mathbf{E}(X_k) = t_k$ und $\mathbf{V}(X_k) = t_k(1-t_k)$.

Die Summe $S = X_1 + \dots + X_n$ hat den Erwartungswert $\mu = t_1 + \dots + t_n$ und dank Unabhängigkeit die Varianz $\sigma^2 = t_k(1-t_k) + \dots + t_n(1-t_n)$.

Für kleine t_k ist S annähernd Poisson–verteilt, $\mathbf{P}_S \approx \mathrm{P}(\mu)$. Genauer:

$$\boxed{\big\|\mathbf{P}_S - \mathrm{P}(\mu)\big\| \quad \le \quad t_1^2 + \dots + t_n^2}$$

Spezialfall: Für $t_1 = \dots = t_n = t$ ist S exakt $\mathrm{B}(n,t)$–verteilt, und somit

$$\boxed{\big\|\mathrm{B}(n,t) - \mathrm{P}(\mu)\big\| \quad \le \quad nt^2 = \mu^2/n.}$$

☺ Vergleichen Sie dies später mit dem zentralen Grenzwertsatz W1D.

Poissons Gesetz der kleinen Zahlen

☺ Mit den Techniken dieses Kapitels können wir diese allgemeine Fassung beweisen und die explizite Fehlerschranke nachrechnen:

Aufgabe: (0) Wiederholen Sie den totalen Abstand diskreter WMaße.

(1) Sind $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$ und $Y \sim \mathrm{P}(\mu)$ unabhängig und Poisson–verteilt, dann ist ihre Summe $X + Y \sim \mathrm{P}(\lambda + \mu)$ ebenfalls Poisson–verteilt.

(2) Berechnen Sie den Abstand der WMaße $\mathrm{B}(1,t)$ und $\mathrm{P}(t)$.
Vergröbern Sie die exakte Rechnung zu $\big\|\mathrm{B}(1,t) - \mathrm{P}(t)\big\| \le t^2$.

(3) Bei Produktmaßen addieren sich die totalen Abstände gemäß der einfachen Formel $\big\|\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q} - \mathbf{P}' \otimes \mathbf{Q}'\big\| \le \big\|\mathbf{P} - \mathbf{P}'\big\| + \big\|\mathbf{Q} - \mathbf{Q}'\big\|$.

(4) Seien $\mathbf{P}, \mathbf{P}'$ WMaße auf Ω und $S : \Omega \to \mathbb{N}$ eine Zufallsvariable.
Für den Abstand der Bildmaße gilt dann $\|\mathbf{P}_S - \mathbf{P}'_S\| \le \|\mathbf{P} - \mathbf{P}'\|$.

(5) Folgern Sie Poissons Gesetz der kleinen Zahlen (Satz U4C).
Dies beinhaltet Satz U3E als Spezialfall $\|\mathrm{B}(n,t) - \mathrm{P}(nt)\| \le nt^2$.

☺ Die Rechnung ist länglich, aber jeder einzelne Schritt ist leicht.
Die explizite Fehlerschranke ist, wie wir wissen, oft sehr hilfreich.

Poissons Gesetz der kleinen Zahlen

Lösung: (0) Wir beginnen mit der Erinnerung zur Abstandsmessung. Für diskrete WMaße $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1$ nutzen wir den totalen Abstand U3D:

$$\big\|\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_1\big\| := \sup_{A\subseteq\Omega}\big|\mathbf{P}_0(A) - \mathbf{P}_1(A)\big| = \frac{1}{2}\sum_{\omega\in\Omega}\big|\mathbf{P}_0(\{\omega\}) - \mathbf{P}_1(\{\omega\})\big|$$

(1) Wir berechnen die Wkten geduldig und sorgsam:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\big[X+Y=n\big] &\overset{\text{Zerlegung}}{=} \sum_{k+\ell=n}\mathbf{P}\big[X{=}k, Y{=}\ell\big] \\
&\overset{\text{Unabh'keit}}{=} \sum_{k+\ell=n}\mathbf{P}\big[X{=}k\big]\cdot\mathbf{P}\big[Y{=}\ell\big] \overset{\text{Poisson}}{=} \sum_{k+\ell=n}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\cdot\mathrm{e}^{-\mu}\frac{\mu^\ell}{\ell!} \\
&= \frac{1}{n!}\,\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^k\mu^{n-k}}_{\text{binomische Formel!}} = \underbrace{\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}}_{\text{erneut Poisson!}}
\end{aligned}$$

☺ Dies beweist die ersehnte Faltungsformel $\mathrm{P}(\lambda) * \mathrm{P}(\mu) = \mathrm{P}(\lambda+\mu)$. Diese bemerkenswerte Eigenschaft beweisen wir erneut auf Seite U445, dort mit erzeugenden Funktionen: genauso leicht und noch eleganter.

Poissons Gesetz der kleinen Zahlen

(2) Auf der Menge $\mathbb{N}$ vergleichen wir die Binomialverteilung $\mathrm{B}(1,t)$ mit Trefferwkt $t\in[0,1]$ und die Poisson–Verteilung $\mathrm{P}(t)$ zum Parameter t:

$$\begin{aligned}
2\big\|\mathrm{B}(1,t) - \mathrm{P}(t)\big\| &= \sum\nolimits_{k\in\mathbb{N}}\big|\mathrm{B}(1,t)(k) - \mathrm{P}(t)(k)\big| \\
&\overset{\text{Def}}{=} \left|(1-t) - \frac{t^0}{0!}\,\mathrm{e}^{-t}\right| + \left|t - \frac{t^1}{1!}\,\mathrm{e}^{-t}\right| + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-t} \\
&\overset{\text{U1B}}{=} (\mathrm{e}^{-t} - 1 + t) + t(1-\mathrm{e}^{-t}) + (1 - \mathrm{e}^{-t} - t\,\mathrm{e}^{-t}) \\
&= 2t(1-\mathrm{e}^{-t}) \overset{\text{U1B}}{\le} 2t^2
\end{aligned}$$

Hierbei nutzen wir zweimal die Ungleichung $1 - t \le \mathrm{e}^{-t}$, siehe U1B.

☺ Wir erhalten die ersehnte Abschätzung des totalen Abstands:

$$\boxed{\big\|\mathrm{B}(1,t) - \mathrm{P}(t)\big\| \le t^2}$$

Dies ist Satz U4C für den einfachsten Fall $n=1$. Wir übertragen die Ungleichung nun von $X_1,\dots,X_n$ auf ihre Summe $S = X_1 + \cdots + X_n$.

Poissons Gesetz der kleinen Zahlen

(3) Gegeben sind WMaße $\mathbf{P}, \mathbf{P}'$ auf der Menge A sowie $\mathbf{Q}, \mathbf{Q}'$ auf B. Auf $\Omega = A \times B$ vergleichen wir die Produktmaße $\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q}$ und $\mathbf{P}' \otimes \mathbf{Q}'$:

$$2\big\|\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q} - \mathbf{P}' \otimes \mathbf{Q}'\big\| \quad = \sum_{(a,b)\in A\times B} \big|p(a)q(b) - p'(a)q'(b)\big|$$

$$= \sum_{(a,b)\in A\times B} \big|p(a)q(b) - p'(a)q(b) + p'(a)q(b) - p'(a)q'(b)\big|$$

$$\leq \sum_{(a,b)\in A\times B} \big|p(a) - p'(a)\big| \cdot q(b) + p'(a) \cdot \big|q(b) - q'(b)\big|$$

$$= \sum_{a\in A}\sum_{b\in B} q(b) \cdot \big|p(a) - p'(a)\big| + \sum_{b\in B}\sum_{a\in A} p'(a) \cdot \big|q(b) - q'(b)\big|$$

$$= \sum_{a\in A}\big|p(a) - p'(a)\big| + \sum_{b\in B}\big|q(b) - q'(b)\big| = 2\|\mathbf{P} - \mathbf{P}'\| + 2\|\mathbf{Q} - \mathbf{Q}'\|$$

☺ Wir erhalten folgende Ungleichung für den totalen Abstand:

$$\boxed{\big\|\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q} - \mathbf{P}' \otimes \mathbf{Q}'\big\| \quad \leq \quad \|\mathbf{P} - \mathbf{P}'\| + \|\mathbf{Q} - \mathbf{Q}'\|}$$

Poissons Gesetz der kleinen Zahlen

(4) Es gilt $|\mathbf{P}_S(A) - \mathbf{P}'_S(A)| = |\mathbf{P}(S^{-1}(A)) - \mathbf{P}'(S^{-1}(A))| \leq \|\mathbf{P} - \mathbf{P}'\|$ für jede Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}$. Hieraus folgt die nützliche Ungleichung

$$\boxed{\|\mathbf{P}_S - \mathbf{P}'_S\| \quad \leq \quad \|\mathbf{P} - \mathbf{P}'\|.}$$

(5) Dank (2,3) haben die Produktmaße $\mathbf{P} = \mathrm{B}(1,t_1) \otimes \cdots \otimes \mathrm{B}(1,t_n)$ und $\mathbf{P}' = \mathrm{P}(t_1) \otimes \cdots \otimes \mathrm{P}(t_n)$ auf der Ergebnismenge $\mathbb{N}^n$ den totalen Abstand

$$\big\|\mathbf{P} - \mathbf{P}'\big\| \;=\; \big\|\,\mathrm{B}(1,t_1) \otimes \cdots \otimes \mathrm{B}(1,t_n) \;-\; \mathrm{P}(t_1) \otimes \cdots \otimes \mathrm{P}(t_n)\,\big\|$$
$$\leq\; \big\|\mathrm{B}(1,t_1) - \mathrm{P}(t_1)\big\| + \cdots + \big\|\mathrm{B}(1,t_n) - \mathrm{P}(t_n)\big\| \;\leq\; t_1^2 + \cdots + t_n^2.$$

Unter $\mathbf{P}$ ist die Treffersumme $S = X_1 + \cdots + X_n$ verteilt gemäß $\mathbf{P}_S$. Unter $\mathbf{P}'$ ist das Bildmaß $\mathbf{P}'_S = \mathrm{P}(\mu)$ die Poisson–Verteilung dank (1). Dank (4) haben beide Bildmaße auf $\mathbb{N}$ den totalen Abstand

$$\boxed{\big\|\mathbf{P}_S - \mathrm{P}(\mu)\big\| \quad \leq \quad t_1^2 + \cdots + t_n^2.}$$

☺ Das ist Poissons Gesetz der kleinen Zahlen gemäß Satz U4c. Speziell für $t_1 = \cdots = t_n = t$ ist S exakt $\mathrm{B}(n,t)$–verteilt, also gilt:

$$\boxed{\big\|\mathrm{B}(n,t) - \mathrm{P}(\mu)\big\| \quad \leq \quad nt^2 = \mu^2/n}$$

Erzeugende Funktion: einführendes Beispiel

Aufgabe: (1) Sei $X \sim \mathrm{B}(n,t)$. Berechnen Sie $G(z) := \mathbf{E}\big[z^X\big]$ für $z \in \mathbb{C}$.
(2) Berechnen Sie aus G umgekehrt $G^{(k)}(0)/k!$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$

Lösung: (1) Für $X \sim \mathrm{B}(n,t)$ binomialverteilt wissen wir

$$\mathbf{P}(X{=}k) \;=\; \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}.$$

Als Funktion $G(z) = \mathbf{E}\big[z^X\big]$ erhalten wir ein hübsches Polynom:

$$G(z) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \cdot z^k \;=\; (tz + 1 - t)^n$$

(2) Es gilt $G^{(k)}(z) = n(n-1)\cdots(n-k+1)\, t^k\, (tz+1-t)^{n-k}$, also

$$\frac{1}{k!} G^{(k)}(0) \;=\; \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}.$$

☺ Das geht ganz leicht und das Ergebnis ist noch dazu sehr einfach! Diesen Trick entwickeln wir nun zu einer allgemeinen Rechenmethode.

Erzeugende Funktion: Definition

Definition U4D: erzeugende Funktion einer WVerteilung auf $\mathbb{Z}$

Zur diskreten WVerteilung $g : \mathbb{Z} \to [0,1]$ ist die **erzeugende Funktion**

$$\boxed{G(z) \;:=\; \sum\nolimits_{k\in\mathbb{Z}} g(k) z^k \;=\; \ldots + g(-1)z^{-1} + g(0)z^0 + g(1)z^1 + \ldots.}$$

Ist die Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{Z}$ verteilt gemäß $\mathbf{P}(X{=}k) = g(k)$, so gilt

$$\boxed{G(z) \;=\; \sum\nolimits_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{P}(X{=}k)\, z^k \;=\; \mathbf{E}\big[z^X\big] \qquad \text{für } z \in K(0,\sigma,\rho) \subseteq \mathbb{C}.}$$

Aus G rekonstruieren wir die Verteilung g durch die Wegintegrale (F2Q)

$$\boxed{\mathbf{P}(X{=}k) \;=\; g(k) \;=\; \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\partial\mathrm{B}(0,1)} \frac{G(z)}{z^{k+1}}\, \mathrm{d}z \qquad \text{für } k \in \mathbb{Z}.}$$

Im Falle einer Potenzreihe, also $X : \Omega \to \mathbb{N}$, genügen die Ableitungen

$$\boxed{\mathbf{P}(X{=}k) \;=\; g(k) \;=\; \frac{1}{k!} G^{(k)}(0) \qquad \text{für } k \in \mathbb{N}.}$$

Erzeugende Funktion: Faltung wird zum Produkt.

☺ Erzeugende Funktionen bieten uns sehr effiziente Rechenregeln:

Satz U4E: Faltung wird zum Produkt erzeugender Funktionen.

Für die Summe $X+Y$ unabhängiger Zufallsvariablen $X,Y:\Omega\to\mathbb{Z}$ gilt

$$\boxed{\begin{aligned} G_{X+Y}(z) = \mathbf{E}\big[z^{X+Y}\big] &= \mathbf{E}\big[z^X\cdot z^Y\big] \\ &= \mathbf{E}\big[z^X\big]\cdot\mathbf{E}\big[z^Y\big] = G_X(z)\cdot G_Y(z). \end{aligned}}$$

Aufgabe: Seien $X\sim\mathrm{B}(m,t)$ und $Y\sim\mathrm{B}(n,t)$ unabhängig, $m,n\in\mathbb{N}$. Ist die Summe $S=X+Y$ binomialverteilt? Mit welchen Parametern?

Lösung: Die erzeugenden Funktionen haben wir oben ausgerechnet:

$$G_X(z)=(tz+1-t)^m \quad \text{und} \quad G_Y(z)=(tz+1-t)^n$$

Für die Summe $S=X+Y$ erhalten wir somit ohne weitere Mühen

$$G_S(z)=G_X(z)\cdot G_Y(z)=(tz+1-t)^{m+n}.$$

☺ Somit ist die Summe $S\sim\mathrm{B}(m{+}n,t)$ tatsächlich binomialverteilt.

☺ Wir erhalten die Faltungsformel $\mathrm{B}(m,t)*\mathrm{B}(n,t)=\mathrm{B}(m{+}n,t)$.

Erzeugende Funktion: Faltung wird zum Produkt.

Glücklicherweise lässt sich die Verteilung von S aus G_S rekonstruieren! Die erzeugende Funktion G_S bestimmt die gesamte Verteilung von S.

Alternativ können wir die Verteilung von $S=X+Y$ direkt ausrechnen durch die entsprechende Reihe, ganz ohne erzeugende Funktionen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\big[X+Y=s\big] &\overset{\text{Zerlegung}}{=} \sum_{k+\ell=s}\mathbf{P}\big[X{=}k,Y{=}\ell\big] \\
&\overset{\text{Unabh'keit}}{=} \sum_{k+\ell=s}\mathbf{P}\big[X{=}k\big]\cdot\mathbf{P}\big[Y{=}\ell\big] \\
&\overset{\text{binom'vert}}{=} \sum_{k+\ell=s}\binom{m}{k}t^k(1-t)^{m-k}\cdot\binom{n}{\ell}t^\ell(1-t)^{n-\ell} \\
&= t^s(1-t)^{m+n-s}\underbrace{\sum_{k=0}^{s}\binom{m}{k}\binom{n}{s-k}}_{=\binom{m+n}{s}\text{ dank Satz U3A}}
\end{aligned}$$

☺ Dies zeigt $S\sim\mathrm{B}(m{+}n,t)$ durch direktes Aufsummieren. Unsere erzeugenden Funktionen kodieren dieselbe Information noch effizienter!

Erzeugende Funktion: Poisson–Verteilung

Aufgabe: (1) Sei $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$ mit $\lambda \geq 0$. Berechnen Sie $G(z) = \mathbf{E}\big[z^X\big]$.
(2) Seien $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$ und $Y \sim \mathrm{P}(\mu)$ unabhängig mit Parametern $\lambda, \mu \geq 0$. Ist die Summe $S = X + Y$ Poisson–verteilt? Mit welchem Parameter?

Lösung: (1) Die erzeugende Funktion ist hier denkbar einfach:

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(X{=}k) \cdot z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot z^k = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^k}{k!} = \mathrm{e}^{\lambda(z-1)}$$

☺ Der Exponentialreihe sei Dank! Der Konvergenzradius ist hier ∞.

(2) Für die Summe $S = X + Y$ erhalten wir somit ohne weitere Mühen

$$G_S(z) = G_X(z) \cdot G_Y(z) = \mathrm{e}^{\lambda(z-1)} \cdot \mathrm{e}^{\mu(z-1)} = \mathrm{e}^{(\lambda+\mu)(z-1)}.$$

☺ Somit ist die Summe $S \sim \mathrm{P}(\lambda + \mu)$ tatsächlich Poisson–verteilt.

☺ Wir erhalten die schöne Faltungsformel $\mathrm{P}(\lambda) * \mathrm{P}(\mu) = \mathrm{P}(\lambda + \mu)$.

Auch hier stellt sich die Frage: Lässt sich die Verteilung von S aus der Funktion G_S rekonstruieren? Zum Glück wissen wir $g(k) = G^{(k)}(0)/k!$. Die erzeugende Funktion G_S bestimmt so die gesamte Verteilung von S.

Erzeugende Funktion: Poisson–Verteilung

Alternativ können wir auch hier die Verteilung von S direkt ausrechnen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\big[X + Y = n\big] &\overset{\text{Zerlegung}}{=} \sum_{k+\ell=n} \mathbf{P}\big[X{=}k, Y{=}\ell\big] \\
&\overset{\text{Unabh'keit}}{=} \sum_{k+\ell=n} \mathbf{P}\big[X{=}k\big] \cdot \mathbf{P}\big[Y{=}\ell\big] \\
&\overset{\text{Poisson}}{=} \sum_{k+\ell=n} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \mathrm{e}^{-\mu} \frac{\mu^\ell}{\ell!} \\
&= \frac{1}{n!} \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k}}_{\text{binomische Formel!}} = \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!} \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}
\end{aligned}$$

☺ Dies zeigt $S \sim \mathrm{P}(\lambda + \mu)$ durch direktes Aufsummieren. Unsere erzeugenden Funktionen kodieren dieselbe Information noch effizienter!

☺ Für viele unserer wichtigsten WVerteilungen ist die erzeugende Funktion einfach gebaut. Das ist ein Glücksfall, den wir gerne nutzen.

☹ Für die hypergeometrische Verteilung gilt dies leider nicht.

Erzeugende Funktion: geometrische Verteilung

Aufgabe: Berechnen Sie die erzeugende Funktion $G(z) = \mathbf{E}\big[z^X\big]$ für eine geometrisch verteilte Zufallsvariable $X \sim \mathrm{Geom}(q)$ mit $0 \le q < 1$. Welchen Konvergenzradius hat die Potenzreihe $G(z)$ in diesem Fall?

Lösung: Wir kennen die geometrische Verteilung aus T4A: Für $n \in \mathbb{N}_{\ge 1}$ gilt $\mathbf{P}(X{=}n) = (1-q)q^{n-1}$. Die erzeugende Funktion ist demnach:

$$\begin{aligned} G(z) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{P}(X{=}k)\cdot z^k &&= \sum_{n=1}^{\infty}(1-q)q^{n-1}z^n \\ &= (1-q)z\sum_{j=0}^{\infty}(qz)^j &&= \frac{(1-q)z}{1-qz} \quad \text{für } |z| < 1/q \end{aligned}$$

Die rationale Funktion G hat ihren einzigen Pol im Punkt $z = 1/q$.
Der Konvergenzradius ist demnach $\rho = 1/q > 1$, beliebig dicht an 1!

⚠ Es kann also vorkommen, dass die erzeugende Funktion $G(z)$ nicht für alle $z \in \mathbb{C}$ definiert ist. Wegen $G(1) = 1$ ist die Reihe aber zumindest für alle $|z| \le 1$ absolut konvergent. Das genügt für unsere Anwendungen.

Erzeugende Funktion: Konvergenzradius

Aufgabe: Sei $X : \Omega \to \mathbb{N}$ eine ZVariable mit Verteilung $\mathbf{P}(X{=}k) = g(k)$ und erzeugender Funktion $G(z) = \mathbf{E}\big[z^X\big] = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)z^k$ für $z \in \mathbb{C}$.

(1) Berechnen Sie $G(1)$. Ist somit der Konvergenzradius ≥ 1?
Wie rekonstruieren Sie die Koeffizienten $g(k)$ aus der Funktion $G(z)$?

(2) Was gilt entsprechend für den allgemeinen Fall $X : \Omega \to \mathbb{Z}$?

Lösung: (1) Als WVerteilung gilt $g(k) \ge 0$ und $G(1) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) = 1$.
Dank Majoranten-Kriterium konvergiert $G(z)$ absolut für alle $|z| \le 1$.
Der Konvergenzradius ρ erfüllt also $\rho \ge 1$, und wir erhalten die Funktion

$$G : \overline{B}(0,1) = \big\{\, z \in \mathbb{C} \;\big|\; |z| \le 1 \,\big\} \to \mathbb{C}.$$

Innerhalb des Konvergenzkreises ist G beliebig oft differenzierbar.
Diese Potenzreihe können wir termweise differenzieren und erhalten $G^{(k)}(z) = k!\, g(k)z^0 + \ldots$, also $g(k) = G^{(k)}(0)/k!$ wie in U4D angegeben.

☺ Die WVerteilung g und die Funktion G bestimmen sich gegenseitig.

(2) Allgemein für $X : \Omega \to \mathbb{Z}$ ist $G(z)$ eine Laurent-Reihe. Sie konvergiert mindestens auf der Kreislinie $|z| = 1$, allgemein dem Kreisring $K(0,\sigma,\rho)$.
Der Nullpunkt ist eine Singularität, wir nutzen daher Wegintegrale U4D.

Erzeugende Funktion: Erwartung und Varianz

Satz U4F: Erwartung und Varianz aus erzeugender Funktion

Sei $X : \Omega \to \mathbb{Z}$ eine Zufallsvariable mit Verteilung $\mathbf{P}(X{=}k) = g(k)$ und erzeugender Funktion $G(z) = \mathbf{E}\big[z^X\big] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} g(k) z^k$. Dann gilt

$$\boxed{G(1) = 1, \quad G'(1) = \mathbf{E}\big[X\big], \quad G''(1) = \mathbf{E}\big[X(X-1)\big],}$$

falls das erste bzw. zweite Moment existiert. Allgemein erhalten wir so jedes **faktorielle Moment** $G^{(n)}(1) = \mathbf{E}\big[X(X-1)\cdots(X-n+1)\big]$, falls die zugehörige Reihe konvergiert. Speziell für die Varianz folgt daraus:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 &= \mathbf{E}[X(X-1)] + \mathbf{E}[X] - \mathbf{E}[X]^2 \\ &= G''(1) + G'(1) - G'(1)^2\end{aligned}}$$

Aufgabe: Rechnen Sie dies nach. **Lösung:** Die n-te Ableitung ist

$$G^{(n)}(z) = \sum\nolimits_{k\in\mathbb{Z}} k(k-1)\cdots(k-n+1)\, g(k)\, z^{k-n}.$$

Einsetzen von $z = 1$ liefert die angegebenen Formeln, Konvergenz vorausgesetzt. Dieser Trick beschert uns die wichtigsten Kenngrößen.

Erzeugende Funktion: Erwartung und Varianz

Aufgabe: Berechnen Sie auf diese Weise erneut Erwartung und Varianz (1) der Binomialverteilung $\mathrm{B}(n,t)$ und (2) der Poisson–Verteilung $\mathrm{P}(\lambda)$ sowie (3) der geometrischen Verteilung $\mathrm{Geom}(q)$.

Lösung: (1) Für $X \sim \mathrm{B}(n,t)$ haben wir $G(z) = (tz + 1 - t)^n$. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
&G'(z) = nt\,(tz+1-t)^{n-1} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{E}(X) = G'(1) = nt \\
&G''(z) = n(n-1)\,t^2\,(tz+1-t)^{n-2} \quad \Longrightarrow \\
&\mathbf{V}(X) = G''(1) + G'(1) - G'(1)^2 = nt(1-t)
\end{aligned}$$

(2) Für $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$ haben wir $G(z) = \mathrm{e}^{\lambda(z-1)}$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
&G'(z) = \lambda\,\mathrm{e}^{\lambda(z-1)} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{E}(X) = G'(1) = \lambda \\
&G''(z) = \lambda^2\,\mathrm{e}^{\lambda(z-1)} \quad \Longrightarrow \\
&\mathbf{V}(X) = G''(1) + G'(1) - G'(1)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda
\end{aligned}$$

☺ Das entspricht den zuvor berechneten Werten, siehe U421, U425: Die direkte Berechnung führt ebenso zum Ziel, erzeugende Funktionen organisieren die Rechnung jedoch besonders geschickt und effizient.

Erzeugende Funktion: Erwartung und Varianz

Dieser Trick funktioniert ebenso für die geometrische Verteilung:

(3) Auch für $X \sim \mathrm{Geom}(q)$ kennen wir die erzeugende Funktion

$$G(z) \quad := \quad \sum_{k=1}^{\infty} (1-q) q^{k-1} z^k \quad = \quad \frac{(1-q)z}{1-qz}.$$

Es gilt $G(1) = 1$. Die erste Ableitung liefert uns die Erwartung:

$$G'(z) = \frac{1-q}{(1-qz)^2} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{E}(X) = G'(1) = \frac{1}{1-q}$$

Die zweite Ableitung liefert uns die Varianz:

$$G''(z) = \frac{2q(1-q)}{(1-qz)^3} \quad \Longrightarrow$$

$$\mathbf{V}(X) = G''(1) + G'(1) - G'(1)^2 = \frac{q}{(1-q)^2}$$

☺ Das entspricht den zuvor direkt berechneten Werten aus Satz T4A. Auch dort war die Berechnung der erforderlichen Potenzreihen trickreich. Erzeugende Funktionen organisieren die Rechnung besonders effizient.

Faltung geometrischer Verteilungen

Aufgabe: Seien $X \sim \mathrm{Geom}(q)$ und $Y \sim \mathrm{Geom}(p)$ unabhängig mit $0 \le q, p < 1$. Ist die Summe $S = X + Y$ ebenfalls geometrisch verteilt?

Lösung: Die erzeugenden Funktionen haben wir oben ausgerechnet:

$$G_X(z) = \frac{(1-q)z}{1-qz} \quad \text{und} \quad G_Y(z) = \frac{(1-p)z}{1-pz}$$

Für die Summe $S = X + Y$ erhalten wir dank Unabhängigkeit sofort

$$G_S(z) = G_X(z) \cdot G_Y(z) = \frac{(1-q)(1-p)z^2}{(1-qz)(1-pz)}.$$

Wäre S geometrisch verteilt, also $S \sim \mathrm{Geom}(r)$ mit $0 \le r < 1$, so wäre

$$G_S(z) = \frac{(1-r)z}{1-rz}.$$

Der Vergleich zeigt: S ist nicht geometrisch verteilt. (Warum nicht?)

☺ Die Familie der geometrisch verteilten Zufallsvariablen ist also nicht stabil unter Faltung: Das sehen wir leicht dank erzeugender Funktionen! Die Faltungen untersuchen wir in der nächsten Aufgabe und Satz U4G.

Die negative Binomialverteilung $\mathrm{NB}(r,p)$

Wir wiederholen ein Zufallsexperiment mit Trefferwahrscheinlichkeit p und Gegenwkt $q = 1 - p$. Sei X_r der Zeitpunkt des r-ten Treffers.

Aufgabe: (1) Berechnen Sie erneut $\mathbf{P}[X_1{=}n]$ und allgemein $\mathbf{P}[X_r{=}n]$. Konstruieren Sie hierzu einen geeigneten WRaum als Grundlage.

(2) Berechnen Sie die erzeugende Funktion $G_r(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}[X_r{=}n] z^n$. Was erkennen Sie daran? Folgern Sie hieraus Erwartung und Varianz.

Lösung: (1) Wir finden die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbf{P}\big[X_1{=}n\big] = pq^{n-1} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{P}\big[X_r{=}n\big] = \binom{n-1}{r-1} p^r q^{n-r}.$$

Wir nennen dies die **negative Binomialverteilung**, kurz $X_r \sim \mathrm{NB}(r,p)$.

Genauer: Ein Einzelexperiment liefert das Ergebnis 0 (Niete) mit Wkt q oder 1 (Treffer) mit Wkt p. Als WRaum $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ nutzen wir die Menge Ω aller 0–1–Folgen $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots)$ und dem WMaß erzeugt durch $\mathbf{P}[\{(\omega_1, \dots, \omega_n, *)\}] = p^r q^{n-r}$, wobei $r = \omega_1 + \dots + \omega_n$ die Trefferzahl ist. Die Bedingung $X_r(\omega) = n$ bedeutet $\omega_n = 1$ und $\omega_1 + \dots + \omega_{n-1} = r - 1$. Hierzu gibt es $\binom{n-1}{r-1}$ disjunkte Möglichkeiten, jede davon mit Wkt $p^r q^{n-r}$.

Die negative Binomialverteilung $\mathrm{NB}(r,p)$

(2) Für $X_1 \sim \mathrm{NB}(1,p) = \mathrm{Geom}(q)$ kennen wir die erzeugende Funktion:

$$G_1(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{P}[X_1{=}k] \cdot z^k = \sum_{n=1}^{\infty} pq^{n-1} z^n = pz \sum_{j=0}^{\infty} (qz)^j = \frac{pz}{1-qz}$$

Für den allgemeinen Fall $X_r \sim \mathrm{NB}(r,p)$ finden wir entsprechend:

$$\begin{aligned} G_r(z) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{P}[X_r{=}k] \cdot z^k &&= \sum_{n=r}^{\infty} \binom{n-1}{r-1} p^r q^{n-r} z^n \\ &= (pz)^r \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+r-1}{r-1} (qz)^j &&= (pz)^r \left[\sum_{i=0}^{\infty} (qz)^i\right]^r = \left(\frac{pz}{1-qz}\right)^r \end{aligned}$$

☺ Dies ist das r-fache Produkt von $G_1(z)$. Wir erhalten die Faltungsformeln $\mathrm{NB}(r,p) = \mathrm{Geom}(q)^{*r}$ und $\mathrm{NB}(r,p) * \mathrm{NB}(s,p) = \mathrm{NB}(r{+}s,p)$.

☺ Anschaulich: Die Wartezeit $X_r = W_1 + \dots + W_r$ auf den r-ten Treffer ist die Summe der Wartezeiten $W_1, \dots, W_r \sim \mathrm{Geom}(q)$ auf den jeweils nächsten Treffer. Diese sind ohne Gedächtnis, also unabhängig!

Wir fassen unsere Ergebnisse in folgendem schönen Satz zusammen.

Die negative Binomialverteilung $\mathrm{NB}(r,p)$

Satz U4G: negative Binomialverteilung

Wir wiederholen ein Zufallsexperiment mit Trefferwahrscheinlichkeit p und Gegenwkt $q = 1-p$. Für den Zeitpunkt X_r des r-ten Treffers gilt

$$\mathbf{P}\big[X_1{=}n\big] = pq^{n-1} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{P}\big[X_r{=}n\big] = \binom{n-1}{r-1} p^r q^{n-r}.$$

Wir nennen dies die **negative Binomialverteilung**, kurz $X_r \sim \mathrm{NB}(r,p)$. Im Spezialfall $r=1$ ist dies die geometrische Verteilung, $X_1 \sim \mathrm{Geom}(q)$. Für die erzeugende Funktion $G_r(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}[X_r{=}n] \cdot z^n$ gilt

$$G_1(z) = \frac{pz}{1-qz} \qquad \text{und} \qquad G_r(z) = \left(\frac{pz}{1-qz}\right)^r$$

Das zeigt $\mathrm{NB}(r,p) = \mathrm{Geom}(q)^{*r}$ und $\mathrm{NB}(r,p) * \mathrm{NB}(s,p) = \mathrm{NB}(r{+}s,p)$. Die mittlere Wartezeit bis zum r-ten Treffer und ihre Varianz sind also

$$\mathbf{E}[X_r] = r/p \qquad \text{und} \qquad \mathbf{V}[X_r] = rq/p^2.$$

Die negative Binomialverteilung $\mathrm{NB}(r,p)$

Aufgabe: Sie werfen unabhängig wiederholt einen fairen sechsseitigen Würfel bis Sie im n-ten Versuch das hundertste Mal eine „6“ erhalten.

(1) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $p(n)$ als Funktion von n sowie Erwartung und Varianz der Wartezeit bis zum hundertsten Treffer.

(2) Mit welcher Wkt gelingen 100 Treffer mit höchstens 710 Würfen? Welche Abschätzung liefert Chebychev? der LGS/ZGS? Was gilt exakt?

Lösung: (1) Die Wkt ist negativ-binomial-verteilt mit Parametern $p = 1/6$ und $r = 100$, explizit $p(n) = \mathrm{NB}(100, 1/6)(n) = \binom{n-1}{99}(1/6)^{100}(5/6)^{n-100}$. Dank Satz U4G gilt $\mu = r/p = 600$ und $\sigma^2 = rq/p^2 = 3000$ also $\sigma \approx 55$.

(2) Chebychev liefert eine grobe aber bequeme erste Abschätzung:

$$\mathbf{P}\big[X_r > \mu + 2\sigma\big] \le \frac{1}{1+2^2} = 20\% \quad \text{also} \quad \mathbf{P}\big[X_r \le \mu + 2\sigma\big] \ge 80\%$$

Später erhalten wir noch wesentlich bessere Näherungen durch den lokalen Grenzwertsatz V3A und den zentralen Grenzwertsatz W1D.

Die exakte Wkt ist $\sum_{n=100}^{710} p(n) = \sum_{k=100}^{710} \binom{710}{k}(1/6)^k(5/6)^{710-k}$: mühsam! Die Summe $0.97309\ldots$ lassen wir durch einen Computer berechnen.

Erzeugende Funktion löst Rekursionsgleichung!

Die erzeugende Funktion $G_X(z) = \mathbf{E}[z^X]$ ist eine konzise Schreibweise für die Verteilung einer Zufallsvariablen $X : \Omega \to \mathbb{Z}$. Die Methode ist sehr effizient, wenn wir $\mathbf{E}[X] = G'(1)$ berechnen wollen, aber die explizite Verteilung von X kompliziert ist. Hier ist ein frappierendes Beispiel:

Aufgabe: Seien $X_1, X_2, \ldots \sim \mathrm{B}(1,p)$ unabhängige Experimente und T die Wartezeit zum ersten Erfolgslauf der Länge r, ausgeschrieben:

$$T(\omega) := \inf\big\{\, k \geq r \;\big|\; X_k(\omega) = X_{k-1}(\omega) = \cdots = X_{k-r+1}(\omega) = 1 \,\big\}$$

Berechnen Sie rekursiv $\mathbf{P}[T{=}n]$ und daraus die Erwartung $\mathbf{E}[T]$.

Lösung: (1) Für $n < r$ gilt $\mathbf{P}[T{=}n] = 0$. Für $n = r$ gilt $\mathbf{P}[T{=}r] = p^r$. Für $n > r$ zerlegen wir: An einer Stelle $k \in \{1, 2, \ldots, r\}$ muss die erste 0 auftreten, danach noch Wartezeit $n - k$. Somit gilt die Rekursionsformel

$$\mathbf{P}[T{=}n] \;=\; \sum_{k=1}^{r} p^{k-1}(1-p)\,\mathbf{P}[T{=}n-k].$$

☺ Ein Computer kann damit alle Werte $\mathbf{P}[T{=}n]$ rekursiv berechnen. Geschlossene Formel ist schwierig… gelingt aber als erz. Funktion!

Erzeugende Funktion löst Rekursionsgleichung!

(2) Sei $G(z) := \mathbf{E}[z^T] = \sum_{n=1}^{\infty} z^n\,\mathbf{P}[T{=}n]$. Einsetzen von (1) ergibt:

$$\begin{aligned}
G(z) &\overset{\text{Rek}}{\underset{(1)}{=}} z^r p^r + \sum_{n>r}^{\infty} z^n \sum_{k=1}^{r} p^{k-1}(1-p)\,\mathbf{P}[T = n-k] \\
&\overset{\text{Distr}}{=} (zp)^r + z(1-p)\sum_{k=1}^{r}(zp)^{k-1}\sum_{n>r}^{\infty} z^{n-k}\,\mathbf{P}[T = n-k] \\
&\overset{\text{Def}}{=} (zp)^r + z(1-p)\,\frac{1-(zp)^r}{1-zp}\,G(z)
\end{aligned}$$

☺ Die erzeugende Funktion löst wunderbar die Rekursion! Wir finden:

$$G(z) = \frac{z^r p^r (1-zp)}{1 - z + z^{r+1}p^r(1-p)}$$

Wir erhalten so explizit die gesuchte Funktion G. Bei Bedarf rekonstruieren wir daraus all ihre Koeffizienten $\mathbf{P}[T{=}n]$ durch Partialbruchzerlegung und Entwicklung. Im Spezialfall $r = 1$ ist dies die vertraute geometrische Verteilung, siehe Satz T4A und die erzeugende Funktion U447.

☺ Für den Erwartungswert $\mathbf{E}[T]$ genügt uns einmaliges Ableiten:

$$\mathbf{E}[T] \overset{\text{U4F}}{=} G'(1) = \ldots = \frac{1-p^r}{p^r(1-p)}$$

Zufallssummen zufälliger Länge

Wir nutzen oft Summen $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ unabhängiger Zufallsvariablen. Manchmal ist selbst die Länge n dieser Summe zufällig! Ausführlich:

Satz U4H: Zufallssummen zufälliger Länge

Seien $T, X_1, X_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{N}$ unabhängige Zufallsvariablen. Wir setzen

$$S := \sum_{k=1}^{T} X_k, \quad \text{also} \quad S : \Omega \to \mathbb{N} : \omega \mapsto S(\omega) := \sum_{k=1}^{T(\omega)} X_k(\omega).$$

Alle X_k seien gleichverteilt. Dann gilt $G_S = G_T \circ G_X$. Dank Kettenregel folgt daraus $\mathbf{E}(S) = \mathbf{E}(T)\mathbf{E}(X)$ und $\mathbf{V}(S) = \mathbf{V}(T)\mathbf{E}(X)^2 + \mathbf{E}(T)\mathbf{V}(X)$.

Nachrechnen: Dank U4E wissen wir $G_{X_1+\cdots+X_n}(z) = G_X(z)^n$, also:

$$G_S(z) \overset{\text{Def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} z^k \, \mathbf{P}[S{=}k] \underset{\text{Unabh'keit}}{\overset{\text{Zerlegung}}{=}} \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}[T{=}n] \, \mathbf{P}[S_n{=}k]$$

$$\overset{\text{Distr}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}[T{=}n] \sum_{k=0}^{\infty} z^k \, \mathbf{P}[S_n{=}k] \overset{\text{U4E}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}[T{=}n] \, G_X(z)^n \overset{\text{Def}}{=} G_T(G_X(z))$$

Zufallssummen zufälliger Länge

Erwartung und Varianz finden wir durch Ableiten dank Kettenregel:

$$\mathbf{E}[S] \overset{\text{U4F}}{=} G_S'(1) = G_T'(G_X(1))\, G_X'(1) = G_T'(1)\, G_X'(1) = \mathbf{E}[T]\, \mathbf{E}[X]$$

$$\mathbf{E}[S(S-1)] \overset{\text{U4F}}{=} G_S''(1) = G_T''(G_X(1))\, G_X'(1)^2 + G_T'(G_X(1))\, G_X''(1)$$

$$\mathbf{V}[S] \overset{\text{U4F}}{=} G_S''(1) + G_S'(1) - G_S'(1)^2 = \ldots = \mathbf{V}[T]\, \mathbf{E}[X]^2 + \mathbf{E}[T]\, \mathbf{V}[X]$$

☺ Erzeugende Funktionen bieten eine bequem-konzise Schreibweise.

Aufgabe: Eine radioaktive Probe emittiert $T \sim \mathrm{P}(\lambda)$ Teilchen/Zeit. U429
Im Messgerät wird jedes mit Wkt p registriert, unabhängig voneinander. Berechnen Sie Verteilung, Erwartung, Varianz der registrierten Teilchen.

Lösung: Wir haben $X_1, X_2, \ldots \sim \mathrm{B}(1, p)$, also $G_X(z) = (zp - p + 1)$. Für $T \sim \mathrm{P}(\lambda)$ wissen wir $G_T(z) = \mathrm{e}^{\lambda(z-1)}$. Für die Summe $S = \sum_{k=1}^{T} X_k$ folgt dank U4H dann $G_S(z) = G_T(G_X(z)) = \mathrm{e}^{\lambda p(z-1)}$, also $S \sim \mathrm{P}(\lambda p)$.

Wir finden die Erwartung $\mathbf{E}(S) = \lambda p = \mathbf{E}(T)\mathbf{E}(X)$ und die Varianz $\mathbf{V}(S) = \lambda p = \mathbf{V}(T)\mathbf{E}(X)^2 + \mathbf{E}(T)\mathbf{V}(X)$, so wie es sein muss.

☺ Leistungsstarke Theorie ermöglicht effiziente Berechnung.

Reproduktion und Aussterben: der Galton–Watson–Prozess

Wir beginnen mit einem Individuum. In seiner kurzen Lebenszeit erzeugt es X Nachkommen, mit $\mathbf{P}[X{=}k] = p_k$ und $G(z) := \mathbf{E}[z^X] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$. Alle Nachkommen vermehren sich ebenso, unabhängig voneinander. Die Zufallsvariable Z_n sei die Anzahl der Individuuen in Generation n.

Francis Galton (1822–1911) und Henry William Watson (1827–1903) untersuchten um 1873 das Aussterben aristokratischer Familienamen. Gleiches gilt für bedrohte Tierarten, die Ausbreitung von Genen und Memen, Epidemien und sozial-virale Phänomene, Computer-Viren, Kettenbriefe, ebenso künftige Weltraummissionen oder Nanotechnologie mit selbstreplizierenden Maschinen. Kernspaltung, ob als Bombe oder als Reaktor, folgt demselben Mechanismus der Kettenreaktion: Ein freies Neutron erzeugt zufällig weitere. Im deterministischen Fall gilt $p_a = 1$ für ein $a \in \mathbb{N}$ und somit sicher $Z_n = a^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Fortan schließen wir diesen trivialen Sonderfall aus.

Satz U4I: Aussterbewahrscheinlichkeit nach Galton–Watson

Die Aussterbewkt $q \in [0,1]$ ist die kleinste Lösung der Fixpunktgleichung

$$\boxed{G(q) = q.}$$

Aus der Erwartung $\mu := G'(1) > 1$ folgt $q < 1$: Überleben ist möglich.
Aus Erwartung $\mu \le 1$ (und $p_1 < 1$) folgt $q = 1$: fast sicheres Aussterben.

Reproduktion und Aussterben: der Galton–Watson–Prozess

Aufgabe: Führen Sie das Modell und den Satz sorgfältig aus. **Lösung:**

Das Individuum $i \in \mathbb{N}$ in Generation $n \in \mathbb{N}$ erzeugt $X_{n,i}$ Nachkommen. Zur Vereinfachung nehmen wir hier an, alle $X_{n,i}$ sind unabhängig und identisch verteilt, mit derselben erzeugenden Funktion $G(z) = \mathbf{E}[z^{X_{n,i}}]$. Aus Z_n Individuuen in Generation n werden so $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i}$.

Wir beginnen mit einem Individuum, also $Z_0 = 1$ und $H_0(z) = z$.
Die Anzahl $Z_1 = X_{0,1}$ hat die erzeugende Funktion $H_1(z) = G(z)$.
Rekursiv ist $H_n = G \circ H_{n-1} = G^{\circ n}$ die n-fache Komposition dank U4H.

Dieser **Galton–Watson–Prozess** $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Markov–Kette mit Zustandsraum $\mathbb{N}$ und Übergangswkten $\mathbf{P}[Z_n{=}b|Z_{n-1}{=}a] = p_b^{*a}$.

Aus $Z_n = 0$ folgt $Z_{n+1} = 0$: Aussterben ist ein absorbierender Zustand.
Die gesuchte Wkt $q_n := \mathbf{P}[Z_n{=}0] = H_n(0)$ ist somit monoton wachsend.

Rekursiv gilt $q_n = G(q_{n-1})$. Wir suchen den Grenzwert $q_n \nearrow q \in [0,1]$.
Dank Stetigkeit gilt $G(q) = G(\lim q_n) = \lim G(q_n) = \lim q_{n+1} = q$.

☺ Mit dieser **Fixpunktgleichung** können wir q leicht berechnen.
Ein anfänglich schwieriges Problem wird dadurch elegant gelöst.

Reproduktion und Aussterben: zufällige Zellteilung

Im Falle $p_0 + p_1 = 1$ entspricht der Prozess $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dem Warten auf die erste Null wiederholter 0–1–Experimente: geometrische Verteilung T4A. Wir fordern daher $p_a > 0$ für mindestens ein $a \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Die erz. Funktion $G : [0,1] \to [0,1]$ ist dann strikt konvex. Die Fixpunktgleichung $G(q) = q$ hat neben $G(1) = 1$ somit höchstens eine weitere Lösung $q \in [0,1[$.

Zellteilung: Eine Zelle teilt sich ($p_2 > 0$), überlebt (p_1) oder stirbt (p_0). In unserem Modell gilt dann $p_0 + p_1 + p_2 = 1$ und $p_a = 0$ für alle $a \geq 3$.

Aufgabe: Berechnen Sie die Aussterbewkt q als Funktion von p_0, p_1, p_2.

Lösung: Die erz. Funktion $G(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2$ ist quadratisch. Der Fixpunkt $q = G(q)$ ist dank Mitternachtsformel nach Vereinfachung

$$q = \frac{(p_0 + p_2) - |p_0 - p_2|}{2p_2} = \begin{cases} 1 & \text{falls } p_0 \geq p_2, \\ p_0/p_2 & \text{falls } p_0 \leq p_2. \end{cases}$$

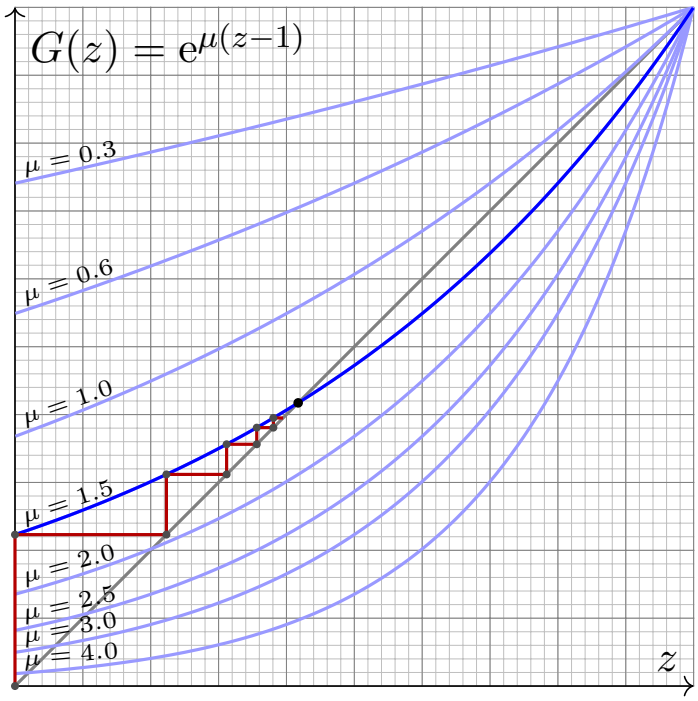
Aus $p_0 = p_2$ folgt $q = 1$. Das ist bemerkenswert und nicht intuitiv.

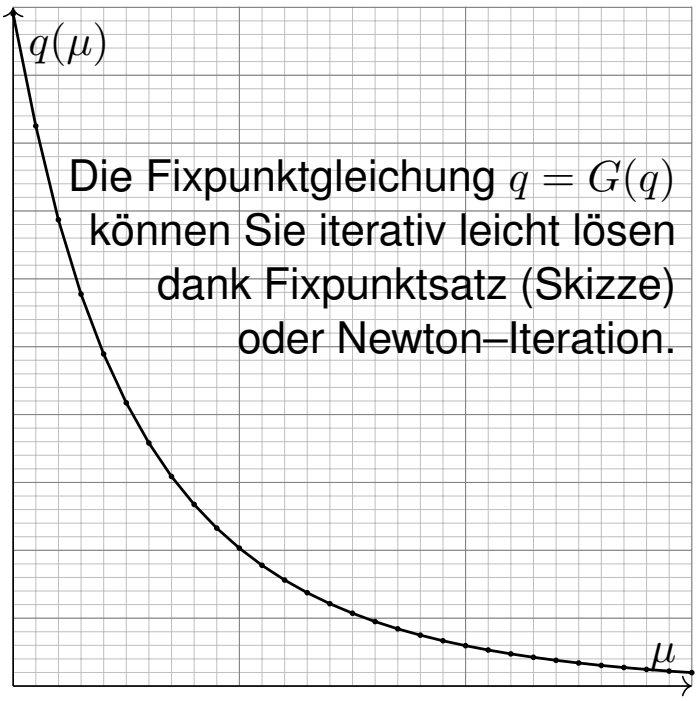
Allgemein gilt $\mathbf{E}[Z_n] = \mu^n$ dank Satz U4H. Im subkritischen Fall $\mu < 1$ ist die Aussterbezeit $T = \inf\{\, n \in \mathbb{N} \mid Z_n = 0 \,\}$ endlich mit Wkt $q = 1$. Genauer gilt $\mathbf{P}[T{>}n] = \mathbf{P}[Z_n{\geq}1] \leq \mu^n$ dank Markov–Ungleichung T3G.

Reproduktion und Aussterben: Poisson–Verteilung

Aufgabe: Illustrieren Sie die Argumente für poisson–verteilte $X \sim \mathrm{P}(\mu)$. Bestimmen Sie graphisch $q_n = \mathbf{P}[Z_n{=}0]$ und den Grenzwert $q_n \nearrow q$. Berechnen und zeichnen Sie die Aussterbewkt $q(\mu)$ für $\mu \in [1,4]$.

Lösung: Hier aktivieren Sie wunderbar Ihre numerischen Methoden:





Die Fixpunktgleichung $q = G(q)$ können Sie iterativ leicht lösen dank Fixpunktsatz (Skizze) oder Newton–Iteration.

Kapitel V

Der lokale Grenzwertsatz

Ich glaube nicht an Fügung und Schicksal, als Techniker bin ich gewohnt mit den Formeln der Wahrscheinlichkeit zu rechnen. [...] „Hast du gewusst?“ frage ich, „dass die Mortalität bei Schlangenbiss nur drei bis zehn Prozent beträgt?“ [...] Ich fragte Hanna, wieso sie nicht an Statistik glaubt, statt dessen aber an Schicksal und Derartiges. „Du mit deiner Statistik!“ sagt sie. „Wenn ich hundert Töchter hätte, alle von einer Viper gebissen, dann ja! Dann würde ich nur drei bis zehn Töchter verlieren. Erstaunlich wenig!“

Max Frisch (1911–1991), *Homo faber* (1957)

Inhalt dieses Kapitels V

1 Kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- Kontinuierliche Verteilungen
- Wahrscheinlichkeitsräume
- Eindimensionale Normalverteilung

2 Erwartung, Varianz, Streuung
- Kumulative Verteilungsfunktion
- Zufallsvariablen, Erwartung und Varianz
- Verteilungen und ihre Kenngrößen

3 Der lokale Grenzwertsatz (LGS)
- Von der Binomial- zur Normalverteilung
- Der lokale Grenzwertsatz $\mathrm{B}(n,t) \approx \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$
- Erste Anwendungsbeispiele

4 Fazit: der lokale Grenzwertsatz
- Zusammenfassung und Verständnisfragen
- Weitere Aufgaben und Anwendungsbeispiele
- Kleine Stichprobe und Intervallschätzung

Motivation und Zielsetzung

Wir kennen bereits einen einfachen und nützlichen Grenzwertsatz:
Das **Gesetz der kleinen Zahlen** besagt $\mathrm{B}(n, \lambda/n) \to \mathrm{P}(\lambda)$ für $n \to \infty$.
Bei seltenen Ereignissen nähert sich die Binomialverteilung $\mathrm{B}(n,t)$ der (viel einfacheren) Poisson–Verteilung $\mathrm{P}(nt)$. Wir nutzen genauer:

$$\mathrm{B}(n,t) \approx \mathrm{P}(nt) \quad \text{mit Fehlerschranke} \quad \big\|\mathrm{B}(n,t) - \mathrm{P}(nt)\big\| \;\le\; nt^2$$

Dies lohnt sich vor allem für kleine Wkten t, also seltene Ereignisse.

Der **lokale Grenzwertsatz** (LGS) hingegen nützt für beliebige $0 < t < 1$ und approximiert Binomialverteilungen durch die **Normalverteilung**:
Es gilt $\mathrm{B}(n,t) \approx \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ mit $\mu = nt$ und $\sigma^2 = nt(1-t)$, genauer:

$$\sum_{k=a}^{b} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \;=\; \int_{\xi=\alpha}^{\beta} \frac{\mathrm{e}^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}\xi \;+\; \delta$$

mit Integrationsgrenzen $\alpha = (a - 1/2 - \mu)/\sigma$ und $\beta = (b + 1/2 - \mu)/\sigma$.
Hierbei ist $\mu = nt$ die **Erwartung** und $\sigma = \sqrt{nt(1-t)}$ die **Streuung**.
Der Approximationsfehler δ ist beschränkt durch $|\delta| < 1/(6\sigma)$ für $\sigma \ge 5$.
Für $n \to \infty$ gilt $\sigma \to \infty$, also $\delta \to 0$: Die Näherung wird beliebig gut.

Vorgehensweise

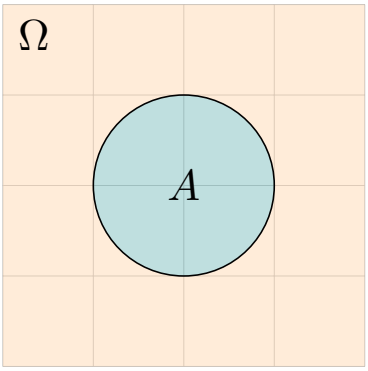
Poissons Gesetz der kleinen Zahlen (Satz U3E) aus dem letzten Kapitel klärt präzise den Übergang von Binomial- zu Poisson–Verteilungen.
Der lokale Grenzwertsatz V3A klärt nun den Übergang von Binomial- zu Normalverteilungen und erlaubt erfreulich genaue Fehlerschranken.
Im nächsten Kapitel werden wir allgemeiner für Summen unabhängiger Zufallsvariablen den zentralen Grenzwertsatz (ZGS W1D) formulieren.

Diese Grenzwertsätze haben in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine zentrale Bedeutung: Im Kleinen, bei einzelnen Experimenten regiert der Zufall ungezügelt; im Großen, bei vielen Experimenten muss er sich den Gesetzen beugen. Als grundlegende Näherungen sind diese Werkzeuge deshalb in allen praktischen Anwendungen der Statistik unentbehrlich.
Stochastische Werkzeuge helfen, mindern Risiken, optimieren Chancen!

Auch in diesem Kapitel formuliere ich Grenzwertsätze gleich mit möglichst expliziten und praktisch anwendbaren Fehlerschranken.
Dies ermöglicht, die üblichen Approximationen nicht nur blind oder naiv nach Gefühl anzuwenden, sondern bequem ihre Güte abzuschätzen.

Beispiel zur kontinuierlichen Gleichverteilung

V101



Aufgabe: Sie werfen zufällig und gleichverteilt Dartpfeile ins Quadrat $\Omega = [-2,+2] \times [-2,+2]$.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit treffen Sie die Kreisscheibe $A = \{\, x \in \Omega \mid |x| \le 1 \,\}$?

Lösung: Hier ist $\mathrm{vol}_2(\Omega) = 16$ und $\mathrm{vol}_2(A) = \pi$, also gilt $\mathbf{P}(A) = \mathrm{vol}_2(A)/\,\mathrm{vol}_2(\Omega) = \pi/16 \approx 0.196$.

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses $A \subseteq \Omega$ ist hier proportional zu seiner Fläche $\mathrm{vol}_2(A)$. Die Wkt genau den Mittelpunkt $(0,0)$ zu treffen ist gleich Null! Gleiches gilt für jeden Punkt: Die Elementarwahrscheinlichkeiten $\mathbf{P}(\{\omega\})$ sind alle gleich Null! Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$ entspricht hier nicht der Anzahl (Summation), sondern dem Volumen (Integration).

So können Sie experimentell π bestimmen: Werfen Sie 1000 Reiskörner auf das Quadrat Ω und zählen Sie… Wenn Sie etwa 200 in A finden, so spräche dies für $\pi \approx 0.2 \cdot 16 = 3.2$. (Für π gibt es genauere und schnellere Methoden.) Diese Art von *Monte-Carlo Simulation* wird in der Praxis häufig vor allem für komplexe Modelle eingesetzt, die von vielen Parametern abhängen. Oft sind die Rechnungen in Einzelfällen (für fest vorgegebene Parameterwerte) leicht möglich, aber eine geschlossene Formulierung für alle Fälle nicht oder nur schwierig möglich. Durch zufällige Wahl der Parameter und wiederholte Simulation gewinnt man einen Eindruck des typischen Verhaltens. Die Methode geht zurück auf Stanisław Ulam und John von Neumann im Manhattan Projekt.

Kontinuierliche Gleichverteilung

V102

Diskrete Erinnerung: Sei Ω eine endliche Menge mit Elementezahl $|\Omega|$, kurz $0 < |\Omega| < \infty$. Hierauf haben wir die **diskrete Gleichverteilung** T1E

$$\mathbf{P} \,:\, \mathfrak{P}(\Omega) \to [0,1] \,:\, A \mapsto \mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Definition V1A: kontinuierliche Gleichverteilung

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine messbare Menge mit $0 < \mathrm{vol}_n(\Omega) < \infty$.
Hierauf haben wir die **kontinuierliche Gleichverteilung**

$$\mathbf{P} \,:\, \mathscr{B}(\Omega) \to [0,1] \,:\, A \mapsto \mathbf{P}(A) = \frac{\mathrm{vol}_n(A)}{\mathrm{vol}_n(\Omega)}.$$

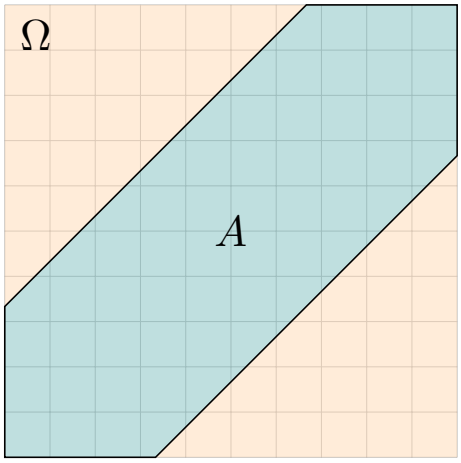
Im diskreten Fall ist $\mathfrak{P}(\Omega)$ die Familie *aller* Teilmengen $A \subseteq \Omega$. U207 Im kontinuierlichen Fall ist $\mathscr{B}(\Omega)$ die Familie aller *messbaren* Teilmengen $A \subseteq \Omega$. A102 Diese wird erzeugt von Quadern $Q \subseteq \mathbb{R}^n$; zum Beispiel sind alle offenen und alle abgeschlossenen Mengen im $\mathbb{R}^n$ messbar.

Extrem exotische Teilmengen $A \subseteq \Omega$ lassen sich nicht messen. Aus diesem Grund *müssen* wir das WMaß $\mathbf{P}$ einschränken auf die Familie $\mathscr{B}(\Omega) \subsetneq \mathfrak{P}(\Omega)$ der messbaren Teilmengen $A \subseteq \Omega$. Diese Vorsichtsmaßnahme ist technischer Natur und spielt im Folgenden keine weitere Rolle.

Beispiel zu kontinuierlicher Wahrscheinlichkeit

Zwei Personen verabreden sich zwischen 12 und 13 Uhr zum Essen:
Jede kommt zu einem zufälligen Zeitpunkt (unabhängig, gleichverteilt).
Jede wartet bis zu 20 Minuten, spätestens aber bis 13 Uhr.

Aufgabe: Wie groß ist die Wkt, dass sich beide treffen?



Lösung: Ankunftszeiten $(t_1, t_2) \in [0,1]^2 = \Omega$.
Ereignis „beide Personen treffen sich“:

$$A = \left\{ (t_1, t_2) \in \Omega \;\middle|\; |t_1 - t_2| \leq \tfrac{1}{3} \right\}$$

Bei kontinuierlicher Gleichverteilung
ist die Wkt proportional zur Fläche:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\mathrm{vol}_2(A)}{\mathrm{vol}_2(\Omega)} = \frac{5}{9} \approx 56\%$$

Dies ist kein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum! Wir können nicht jedem Punkt $\omega \in \Omega$ eine feste positive Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}(\{\omega\}) > 0$ zuordnen, denn dann wäre $\mathbf{P}(\Omega) = \infty$. Wir müssen deshalb jedem Punkt $\omega \in \Omega$ die Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}(\{\omega\}) = 0$ zuordnen. Das geht aber nicht mit den Rechenregeln für diskrete WRäume, denn dann wäre $\mathbf{P}(\Omega) = 0$. Näherung und Simulation mit diskreten Ankunftszeiten, etwa gleichverteilt in $\{0, 1, \ldots, 59\}$.

Was bedeutet hier Gleichverteilung?

Ausführlich: Der Zeitpunkt t_1 liegt im Intervall $[0,1]$ der Länge 1.
Die Wahrscheinlichkeit, dass t_1 in $[a,b]$ liegt, ist demnach

$$\mathbf{P}\big(t_1 \in [a,b]\big) = b - a.$$

Ebenso für t_2. Dank Unabhängigkeit ist die Wahrscheinlichkeit,
dass (t_1, t_2) in $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ liegt, gegeben durch das Produkt:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\big((t_1,t_2) \in [a_1,b_1] \times [a_2,b_2]\big) &= \mathbf{P}\big(t_1 \in [a_1,b_1],\ t_2 \in [a_2,b_2]\big) \\ = \mathbf{P}\big(t_1 \in [a_1,b_1]\big) \cdot \mathbf{P}\big(t_2 \in [a_2,b_2]\big) &= (b_1 - a_1)(b_2 - a_2).\end{aligned}$$

Das legt die Wkten für alle Rechtecke fest als Produktmaß.
Allgemein gilt: Bei Gleichverteilung ist die Wahrscheinlichkeit,
dass (t_1, t_2) in A liegt, proportional zum Flächeninhalt $\mathrm{vol}_2(A)$:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\mathrm{vol}_2(A)}{\mathrm{vol}_2(\Omega)}$$

Im Beispiel gilt $\mathrm{vol}_2(\Omega) = 1$ und $\mathrm{vol}_2(\Omega \setminus A) = 4/9$ und $\mathrm{vol}_2(A) = 5/9$.
Interpretation: In etwa 56% aller Fälle werden sich die beiden treffen.

Erinnerung: Diskrete Verteilungen

Im diskreten Fall ist es oft nützlich oder meist auch nötig, neben der Gleichverteilung noch andere interessante Verteilungen zu betrachten.

Eine **diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung** auf einer Menge Ω ist gegeben durch ihre Elementarwahrscheinlichkeiten, also eine Funktion

$$p : \Omega \to [0,1] \quad \text{mit Gesamtmasse} \quad \sum\nolimits_{x\in\Omega} p(x) = 1.$$

Diese definiert ein **diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß**

$$\mathbf{P} \;:\; \mathfrak{P}(\Omega) \to [0,1] \;:\; A \mapsto \mathbf{P}(A) := \sum\nolimits_{x\in A} p(x).$$

Hierbei ist die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\Omega)$ die Familie aller Teilmengen $A \subseteq \Omega$.

Beispiel: Die diskrete Gleichverteilung auf Ω mit $0 < |\Omega| < \infty$ entsteht durch Summation über die konstante Verteilung $p = 1/|\Omega|$.

Weitere wichtige Beispiele kennen wir aus dem vorigen Kapitel U: Hypergeometrische, Binomial- und Poisson–Verteilungen auf $\Omega = \mathbb{N}$.

Wir betrachten nun neben diskreten auch kontinuierliche WVerteilungen. Die Summe der Elementarwkten wird dabei ersetzt durch ein Integral.

Kontinuierliche Verteilungen

Definition V1B: kontinuierliche WDichte und WMaß

Eine **kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung** oder **WDichte** auf einer Ergebnismenge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine messbare Funktion

$$f : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \text{mit Gesamtmasse} \quad \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Diese definiert ein **kontinuierliches Wahrscheinlichkeitsmaß**

$$\mathbf{P} \;:\; \mathscr{B}(\Omega) \to [0,1] \;:\; A \mapsto \mathbf{P}(A) := \int_A f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Hierbei ist $\mathscr{B}(\Omega)$ die Familie aller messbaren Mengen $A \subseteq \Omega$.

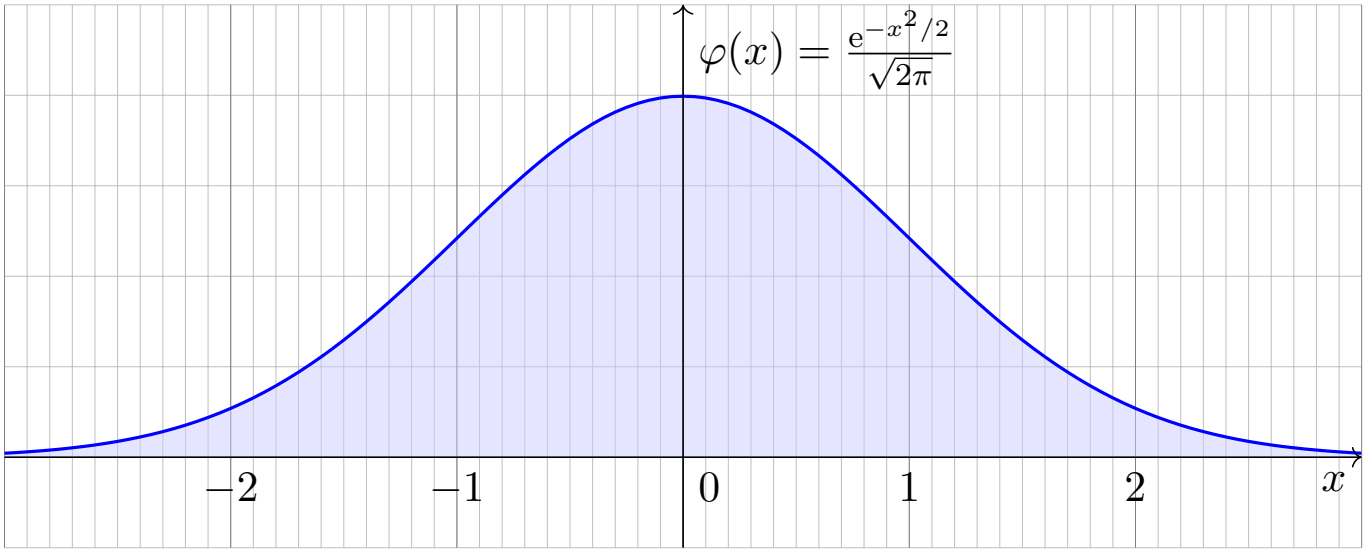
Beispiel: Die Gaußsche Glockenkurve $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist eine WDichte.

☺ Allgemein genügt auch hier $0 < \int_\Omega \tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x < \infty$ mit Normierung.

Beispiel: Die kont. Gleichverteilung auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $0 < \mathrm{vol}_n(\Omega) < \infty$ entsteht durch Integration über die konstante Dichte $f = 1/\mathrm{vol}_n(\Omega)$. In diesem Falle gilt einfach $\mathbf{P}(A) = \mathrm{vol}_n(A)/\mathrm{vol}_n(\Omega)$ wie in V1A.

Beispiel: eindimensionale Standard-Normalverteilung

V107
Ausführung



Zentrales Beispiel ist die **Gaußsche Glockenkurve**

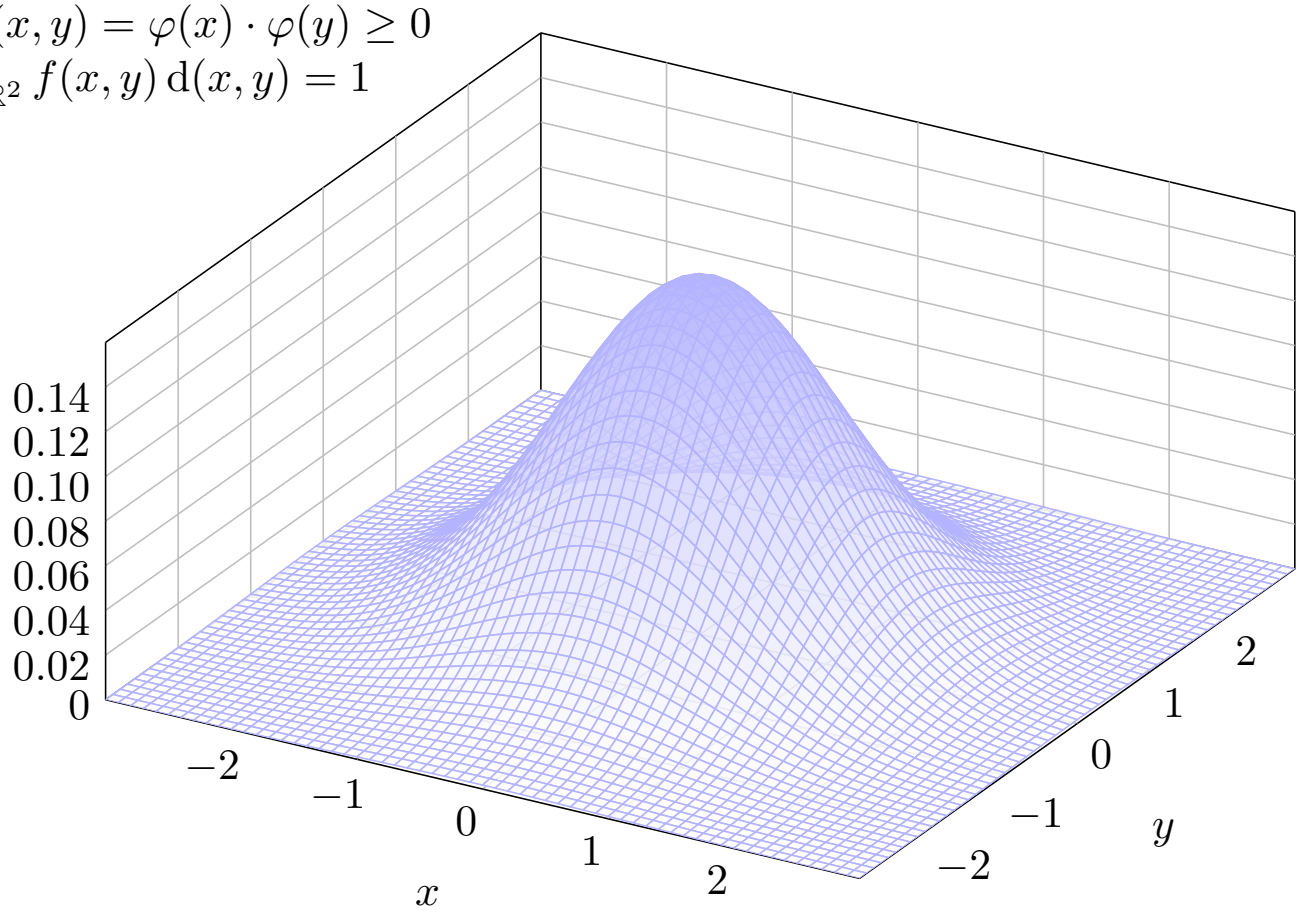
$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

Dies ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte: Es gilt $\varphi \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$ dank C2G. Wir nennen φ die **Dichte der Standard-Normalverteilung**.

Beispiel: zweidimensionale Standard-Normalverteilung

V108
Ausführung

$f(x,y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y) \geq 0$
$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = 1$



Wahrscheinlichkeitsräume: allgemeiner Fall

Bisher kennen wir zwei Typen von Wahrscheinlichkeitsräumen:

(1) Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \mathbf{P})$, wobei

$$\mathbf{P}(A) = \sum\nolimits_{x \in A} p(x) \qquad \text{mit Elementarwkt } p : \Omega \to [0,1].$$

(2) Kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsräume $(\Omega, \mathscr{B}(\Omega), \mathbf{P})$, wobei

$$\mathbf{P}(A) = \int_{x \in A} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{mit WDichte } f : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Im diskreten Fall ist die Wkt in einzelnen, höchstens abzählbar vielen Punkten konzentriert, im zweiten Fall ist die Wkt kontinuierlich verteilt. Auch Mischungen aus diskret und kontinuierlich sind ebenso möglich.

Ziel: Wir suchen eine einheitliche Formulierung für alle Fälle. Hierzu fassen wir die wesentlichen Rechenregeln zusammen und erhalten Kolmogorovs Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung (V1C).

Historische Einordnung. David Hilbert fragte 1900 im sechsten seiner berühmten 23 Probleme: *Wie kann die Physik axiomatisiert werden?* Ursprünglich ging es in erster Linie um WTheorie und Mechanik. Für die Physik ist die allgemeine Frage weiterhin offen, für die WTheorie fand Kolmogorov 1933 eine Lösung. Die mathematischen Grundlagen hierzu lieferte Lebesgue.

Wahrscheinlichkeitsräume: allgemeiner Fall

Ein Zufallsexperiment beschreiben wir durch seine **Ergebnismenge** Ω.
Die beobachtbaren **Ereignisse** $A \subseteq \Omega$ bilden eine Familie $\mathscr{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$.
Das **Wahrscheinlichkeitsmaß** ist eine Abbildung $\mathbf{P} : \mathscr{A} \to [0,1]$.
Es ordnet jedem Ereignis $A \in \mathscr{A}$ sein WMaß $\mathbf{P}(A) \in [0,1]$ zu.

Um damit vernünftig rechnen zu können, benötigen wir folgendes:

0 Unmögliches Ereignis: Es gilt $\emptyset \in \mathscr{A}$ und

$$\boxed{\mathbf{P}(\emptyset) = 0.}$$

1 Sicheres Ereignis: Es gilt $\Omega \in \mathscr{A}$ und

$$\boxed{\mathbf{P}(\Omega) = 1.}$$

2 Komplement: Aus $A \in \mathscr{A}$ folgt $(\Omega \setminus A) \in \mathscr{A}$ und

$$\boxed{\mathbf{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathbf{P}(A).}$$

3 Monotonie: Für alle $A, B \in \mathscr{A}$ gilt

$$\boxed{A \subseteq B \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B).}$$

Wahrscheinlichkeitsräume: allgemeiner Fall

V111
Ausführung

Mengenvereinigung und Maßaddition müssen wir sorgsam formulieren:

4 Vereinigung: Aus $A, B \in \mathscr{A}$ folgt $(A \cup B), (A \cap B) \in \mathscr{A}$ und

$$\boxed{\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B).}$$

5 Paarweise Additivität: Für alle $A, B \in \mathscr{A}$ mit $A \cap B = \emptyset$ gilt

$$\boxed{\mathbf{P}(A \sqcup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B).}$$

6 Endliche Additivität: Aus $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$ folgt $A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathscr{A}$, und bei disjunkter Vereinigung addieren sich die Wkten:

$$\boxed{\mathbf{P}\big(A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n\big) = \mathbf{P}(A_1) + \cdots + \mathbf{P}(A_n).}$$

7 Abzählbare Additivität: Aus $A_0, A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}$ folgt $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathscr{A}$, und bei disjunkter Vereinigung addieren sich die Wkten:

$$\boxed{\mathbf{P}\Big(\bigsqcup_{k=0}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(A_k) \quad \text{falls } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j.}$$

Diese Wunschliste ist noch redundant: (1,2,7) implizieren alle anderen. Übung! Wir extrahieren daher nur diese grundlegenden Eigenschaften.

Wahrscheinlichkeitsräume: allgemeiner Fall

V112
Erläuterung

Das führt uns zu folgender Definition; sie ist genial-einfach und flexibel.

Definition V1C: Wahrscheinlichkeitsraum, Kolmogorov 1933

Ein **Wahrscheinlichkeitsraum** $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ besteht aus

- einer **Ergebnismenge** Ω,
- einer **Ereignismenge** $\mathscr{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ und
- einem **Wahrscheinlichkeitsmaß** $\mathbf{P} : \mathscr{A} \to [0, 1]$,

mit folgenden grundlegenden Eigenschaften, wie oben erklärt:

1 **Normierung:** Es gilt $\Omega \in \mathscr{A}$ und $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

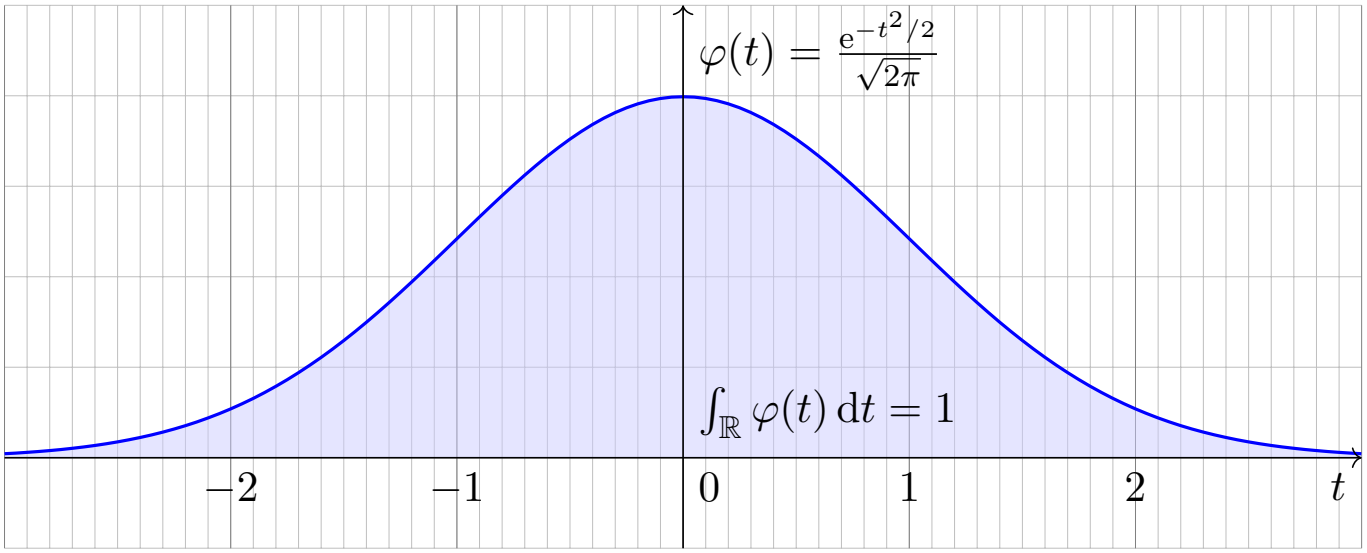
2 **Komplemente:** Aus $A \in \mathscr{A}$ folgt $(\Omega \smallsetminus A) \in \mathscr{A}$.

3 **σ–Additivität:** Aus $A_0, A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}$ folgt $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathscr{A}$, sowie

$$\mathbf{P}\Big(\bigsqcup_{k=0}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(A_k) \quad \text{falls } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j.$$

☺ Ein WRaum ist ein Maßraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ im Sinne der Definition A1B mit der Normierung $\mathbf{P}(\Omega) = 1$. Diese Definition extrahiert und präzisiert die grundlegenden Rechenregeln, auf denen alle weiteren aufbauen.

Die Standard-Normalverteilung

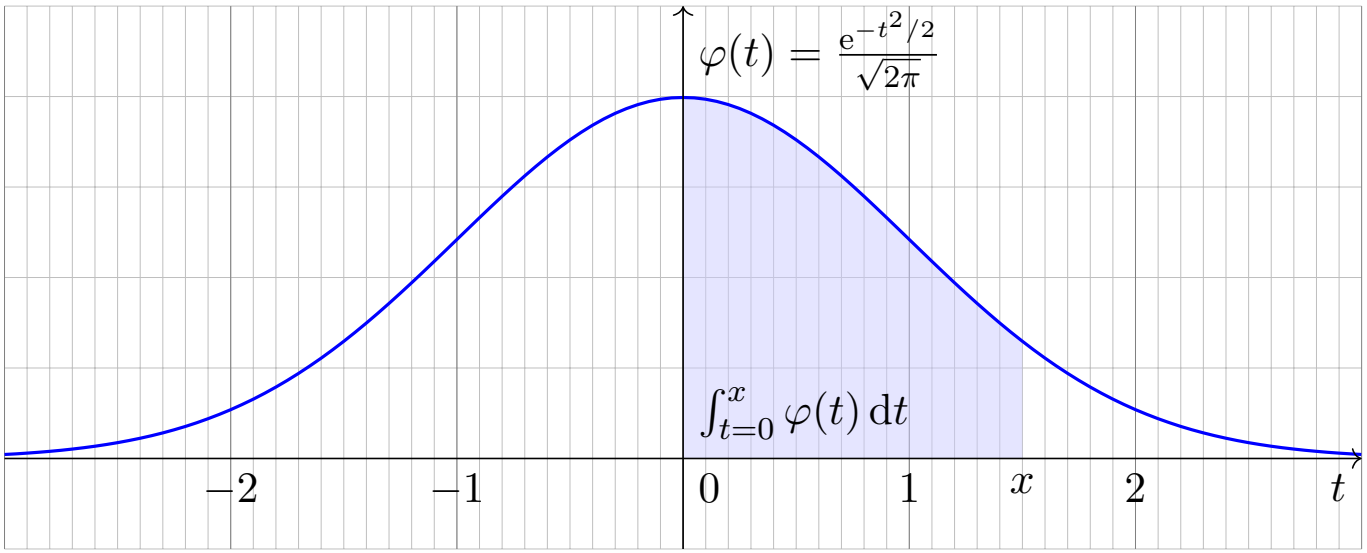


Die **Dichte der Standard-Normalverteilung** ist

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-t^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^k k!}.$$

Dies ist eine WDichte, denn $\varphi \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,dt = 1$ dank Satz C2G, mit Erwartung $\int_{\mathbb{R}} t\,\varphi(t)\,dt = 0$ V239 und Varianz $\int_{\mathbb{R}} t^2 \varphi(t)\,dt = 1$ V240.

Das Gaußsche Fehlerintegral



☹ Es gibt keine elementare Formel B145 für die Integralfunktion

$$\int_{t=0}^{x} \varphi(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t=0}^{x} e^{-t^2/2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2^k k!(2k+1)}.$$

☺ Die Potenzreihe hingegen ist wunderbar einfach und effizient!
Die numerische Auswertung liefert die folgende hilfreiche Tabelle.

Das Gaußsche Fehlerintegral: effiziente Näherung

Aufgabe: Approximieren Sie φ für $x \in [-4, 4]$ auf 7 Nachkommastellen.

Lösung: Wir entwickeln die Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in ihre Potenzreihe und integrieren termweise! Für $k \geq 8$ ist dies eine Leibniz–Reihe (B147).

Zur Näherung durch eine endliche Summe schätzen wir den Fehler ab. Eine geeignete Approximation ist dann folgendes Polynom vom Grad 61:

$$\int_{t=0}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{30} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2^k k!(2k+1)} + \delta \qquad \begin{cases} \text{mit } |\delta| < 0.4 \cdot 10^{-7} \\ \text{für alle } x \in [-4, 4] \end{cases}$$

Diese Näherung kann ein Computer leicht auswerten und tabellieren. In Python gelingt dies elegant wie folgt und liefert die ersehnte Tabelle.

```python
def normal_distribution(x):
    sum = term = x / sqrt(2*pi)    # Summe und Term für k=0
    factor = (-1) * x*x / 2        # nützlicher gemeinsamer Faktor
    for k in range(1,31):          # Grenze 30 aus dem Beweis
        term *= factor / k         # Fortführung des Terms
        sum += term / (2*k+1)      # Summe bis k
    return sum
```


Standard-Normalverteilung: Tabelle für $\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$

	x+0.00	x+0.01	x+0.02	x+0.03	x+0.04	x+0.05	x+0.06	x+0.07	x+0.08	x+0.09
x=0.0	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41309	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900
3.1	0.49903	0.49906	0.49910	0.49913	0.49916	0.49918	0.49921	0.49924	0.49926	0.49929
3.2	0.49931	0.49934	0.49936	0.49938	0.49940	0.49942	0.49944	0.49946	0.49948	0.49950

Ablesebeispiele

Diese Tabelle werden wir häufig nutzen! Ablesebeispiele:

$$\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0.34134$$

$$\int_0^{1.5} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0.43319$$

$$\int_0^{1.53} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0.43699$$

Ablesen eines Integrals der Form $\int_\alpha^\beta \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ mit $\alpha < 0 < \beta$:

$$\begin{aligned}\int_{-1.23}^{2.34} \varphi(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-1.23}^{0} \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{2.34} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{1.23} \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{2.34} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \\ &= 0.39065 + 0.49036 = 0.88101\end{aligned}$$

Ablesebeispiele

Ablesen eines Integrals der Form $\int_\alpha^\beta \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ mit $0 < \alpha < \beta$:

$$\begin{aligned}\int_1^2 \varphi(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^2 \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t \\ &= 0.47725 - 0.34134 = 0.13591\end{aligned}$$

Ebenso nutzen Sie auch die **kumulative Verteilungsfunktion**

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + \int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Ablesebeispiele:

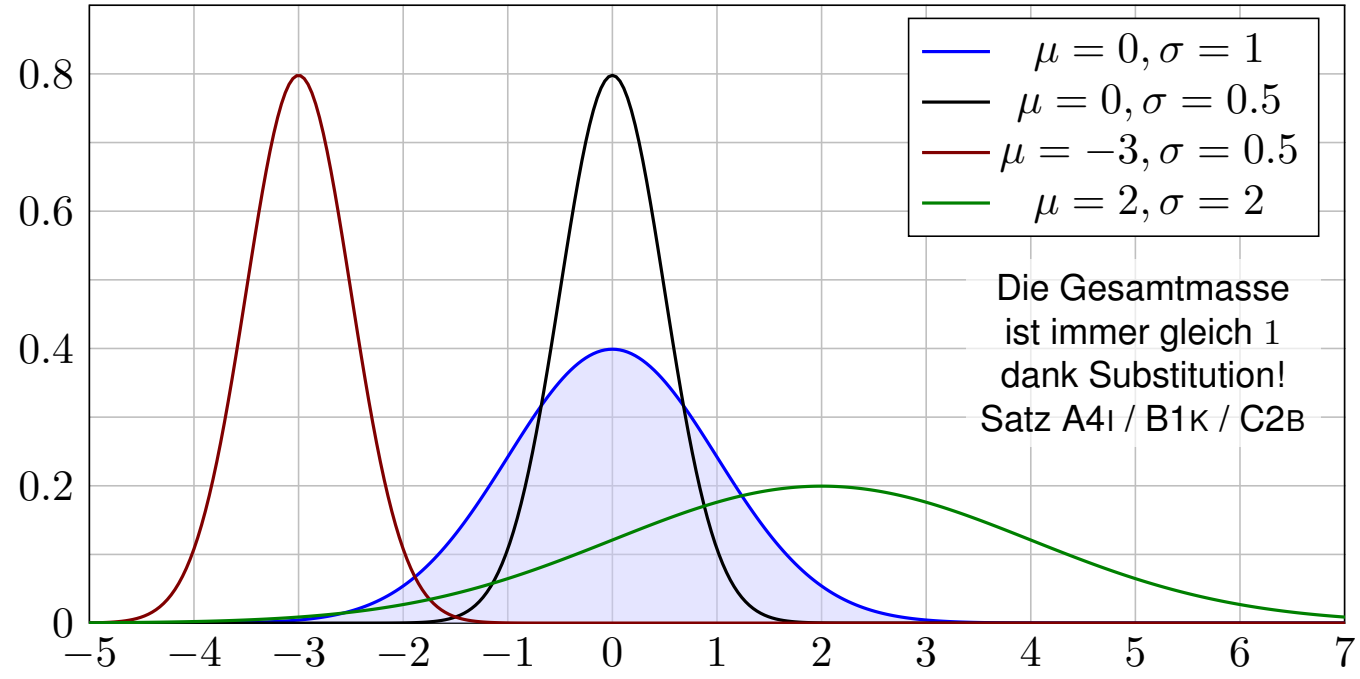
$$\begin{aligned}\Phi(0.00) &= 0.50000 \\ \Phi(1.00) &= 0.84134 \\ \Phi(1.50) &= 0.93319 \\ \Phi(1.53) &= 0.93699\end{aligned}$$

☺ Wahrscheinlichkeiten berechnen Sie leicht mit der nötigen Übung.

Die Familie der Normalverteilungen $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

Sei $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ mit $\sigma > 0$. Die Dichte der **Normalverteilung** $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ ist

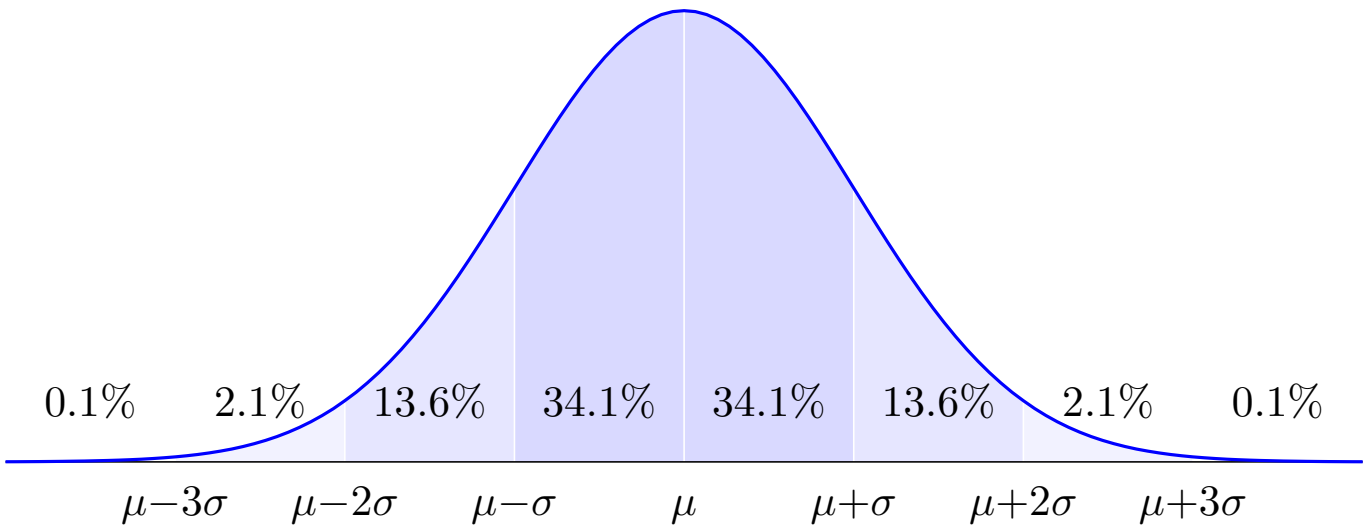
$$\varphi_{\mu,\sigma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{\sigma}\varphi\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



Normalverteilungen: Kennst du eine, kennst du alle! Eine Tabelle genügt.

Die 68–95–99–Regel

Die Normalverteilung $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ ist extrem konzentriert um μ:



Jede Normalverteilung $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ ist symmetrisch um μ. Gemäß unserer Tabelle gilt:

$$\int_{x=\mu}^{\mu+\sigma} \varphi_{\mu,\sigma}(x)\,\mathrm{d}x \approx 0.34134, \quad \int_{x=\mu}^{\mu+2\sigma} \varphi_{\mu,\sigma}(x)\,\mathrm{d}x \approx 0.47725, \quad \int_{x=\mu}^{\mu+3\sigma} \varphi_{\mu,\sigma}(x)\,\mathrm{d}x \approx 0.49865$$

Das bedeutet ausformuliert: Die Masse liegt zu etwas über 68.2% in der 1σ–Umgebung um μ, zu über 95.4% in der 2σ–Umgebung um μ, und zu über 99.7% in der 3σ–Umgebung um μ. Chybechev T3F liefert universell nur die gröberen Ungleichungen $\geq 0\%$, $\geq 75\%$, $\geq 88\%$.

Kumulative Verteilungsfunktion

Definition V2A: kumulative Verteilungsfunktion

Sei $\mathbf{P}:\mathscr{B}(\mathbb{R})\to[0,1]$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$.
Hierzu definieren wir die **kumulative Verteilungsfunktion**

$$F:\mathbb{R}\to[0,1] \quad \text{durch} \quad F(x):=\mathbf{P}\big(]-\infty,x]\big).$$

Wichtige Spezialfälle: Für jede diskrete Verteilung $p:\mathbb{R}\to[0,1]$ gilt

$$F(x)=\sum\nolimits_{t\le x} p(t).$$

Für jede kontinuierliche Verteilung mit Dichte $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{\ge 0}$ gilt

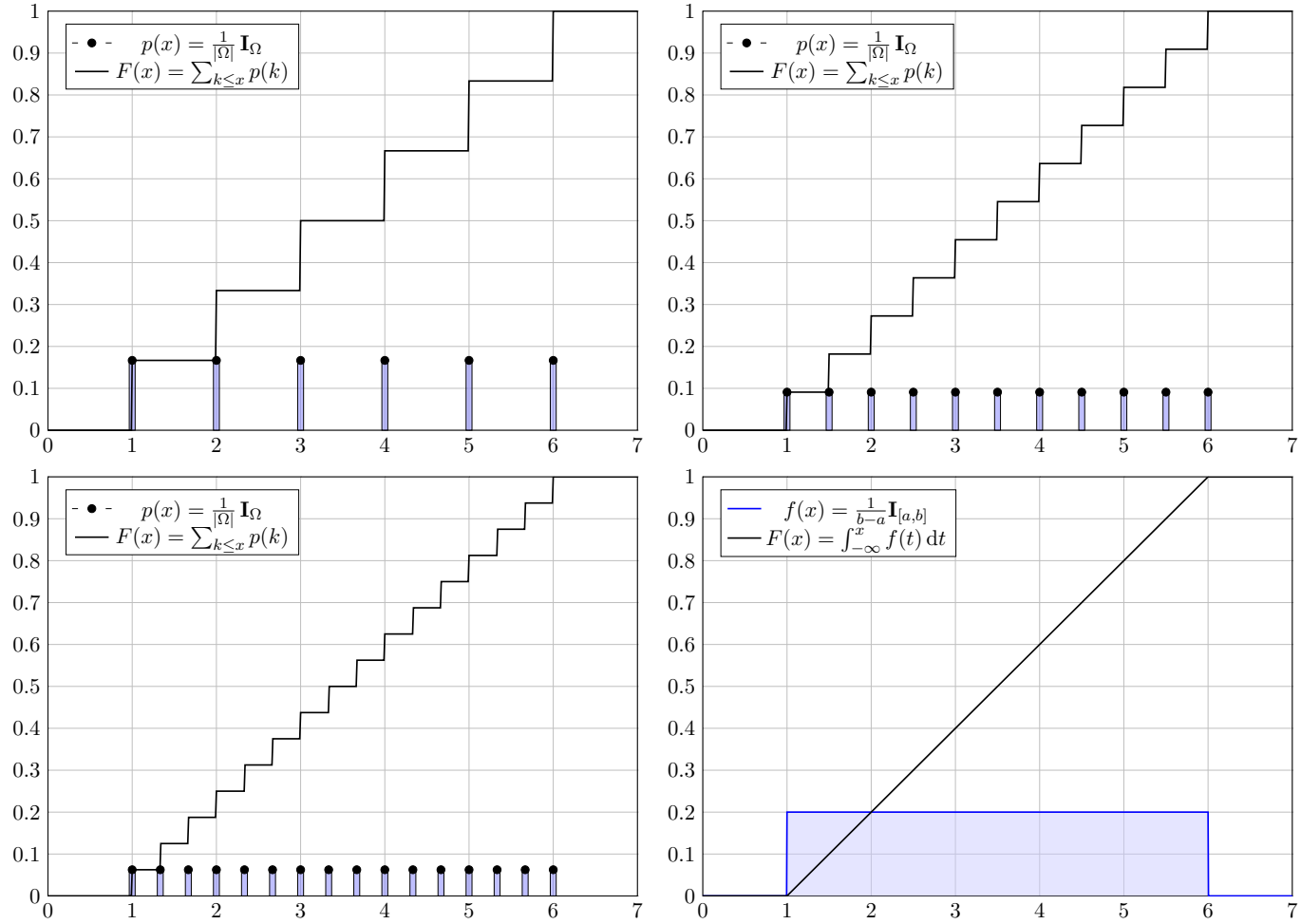
$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

☺ Diese Beschreibung ist einheitlich, bequem und übersichtlich.

Sauber unterscheiden und benennen: Auf englisch heißt f *probability density function* (pdf) und F *cumulative distribution function* (cdf).

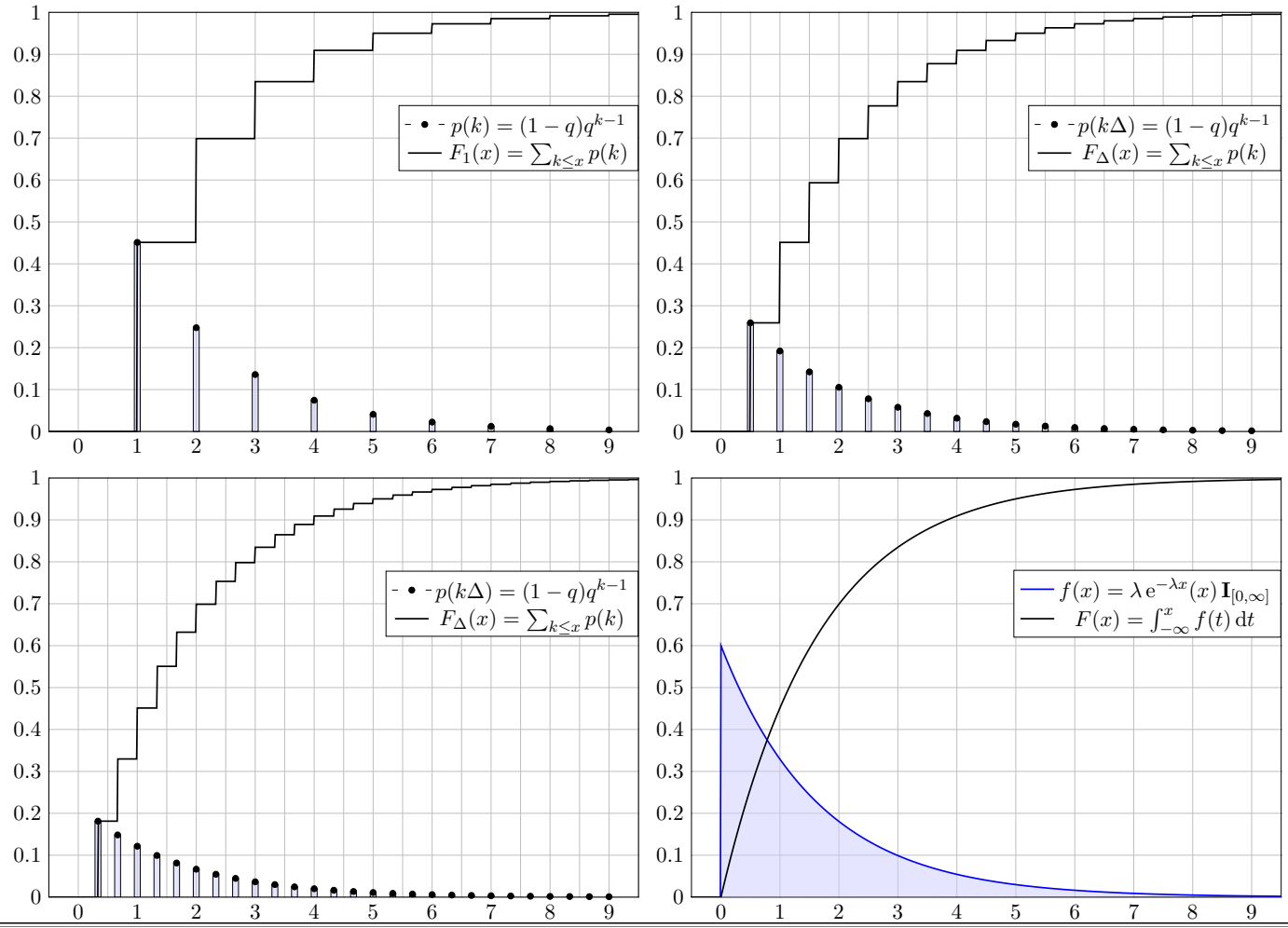
Aus F lässt sich $\mathbf{P}$ rekonstruieren gemäß $\mathbf{P}(]a,b])=F(b)-F(a)$ und $\mathbf{P}(\{a\})=F(a)-\lim_{x\nearrow a}F(x)$ im Falle einer Sprungstelle, siehe V2B.

Von diskreter zu kontinuierlicher Gleichverteilung



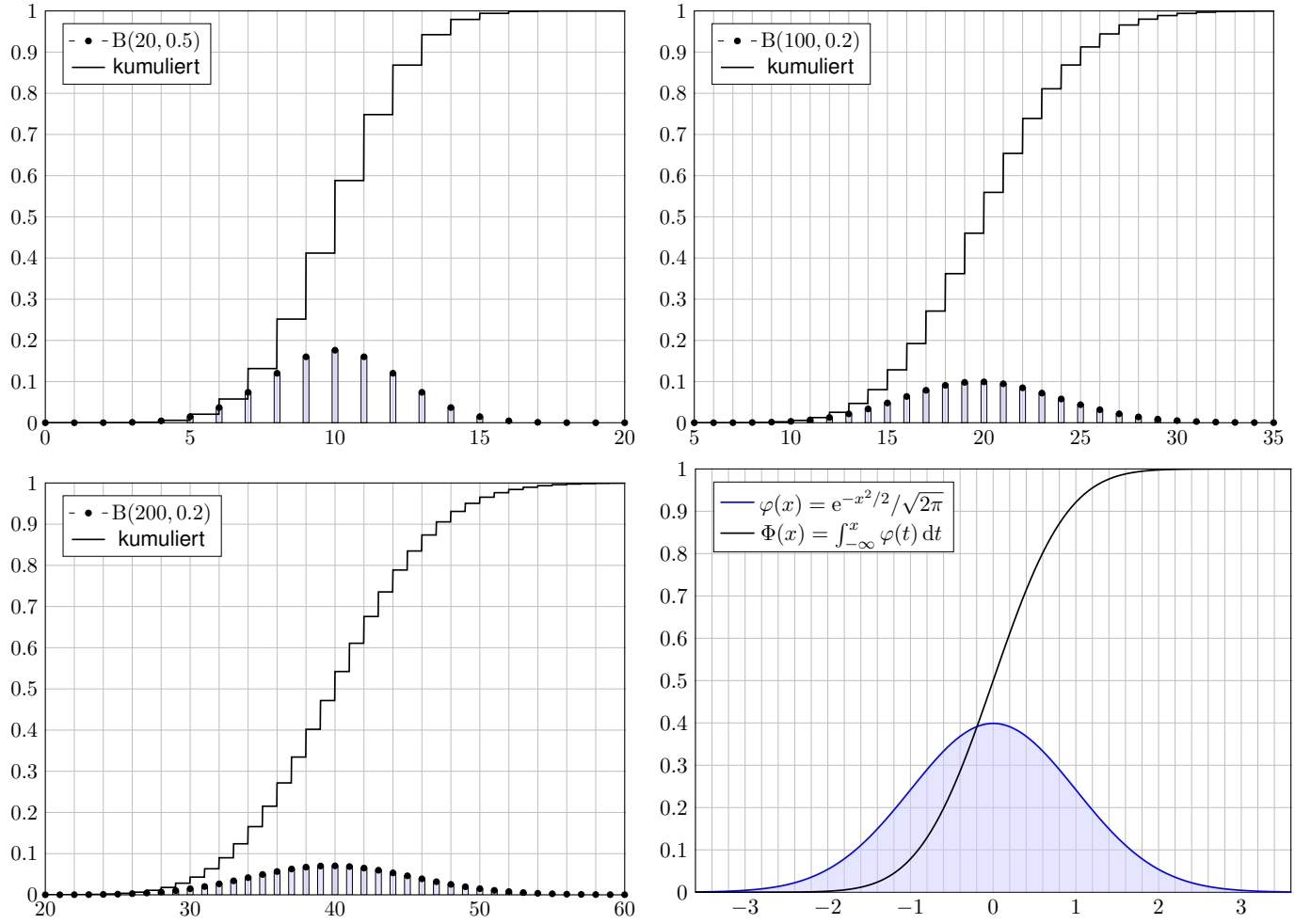
Von geometrischer zu Exponentialverteilung

V203
Ausführung



Von Binomial- zu Normalverteilung

V204
Ausführung



Eigenschaften der kumul. Verteilungsfunktion

Satz V2B: WMaße auf $\mathbb{R}$ und ihre Verteilungsfunktionen

Zu jedem WMaß $\mathbf{P} : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ haben wir seine Verteilungsfunktion

$$F \,:\, \mathbb{R} \to [0,1] \,:\, x \mapsto F(x) := \mathbf{P}\big(]-\infty, x]\big).$$

Sie erfreut sich folgender Eigenschaften:

1. F ist monoton wachsend, für alle $x \le y$ gilt $F(x) \le F(y)$.
2. Für $x \searrow -\infty$ gilt $F(x) \searrow 0$ und für $x \nearrow +\infty$ gilt $F(x) \nearrow 1$.
3. F ist rechtsseitig stetig, d.h. für $x \searrow a$ gilt $F(x) \searrow F(a)$.

Umgekehrt definiert jede solche Funktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ eindeutig ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P} : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ mit $\mathbf{P}(]a,b]) = F(b) - F(a)$.

In jedem Punkt $a \in \mathbb{R}$ gilt $\mathbf{P}(\{a\}) = F(a) - \lim_{x \nearrow a} F(x)$.
Genau dann ist F stetig in a, wenn $\mathbf{P}(\{a\}) = 0$ gilt.

Genau dann ist F differenzierbar mit stetiger Ableitung $f = F'$, wenn $\mathbf{P}$ durch eine stetige Dichte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ gegeben ist.

Eigenschaften der kumul. Verteilungsfunktion

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ein WRaum und hierin $A_0, A_1, A_2, \ldots, A \in \mathscr{A}$ Ereignisse.
Wir schreiben $A_k \nearrow A$, falls $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ und $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$ gilt.
Wir schreiben $A_k \searrow A$, falls $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ und $A = \bigcap_{k=0}^{\infty} A_k$ gilt.

Lemma V2C: Ausschöpfung und Eingrenzung

Jedes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$ ist in folgendem Sinne stetig:

Aus $A_k \nearrow A$ folgt $\mathbf{P}(A_k) \nearrow \mathbf{P}(A)$,
Aus $A_k \searrow A$ folgt $\mathbf{P}(A_k) \searrow \mathbf{P}(A)$.

Beweis: Wir setzen $B_0 := A_0$ und $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$ für $k = 1, 2, 3, \ldots$.
Es gilt $A_n = \bigsqcup_{k=0}^{n} B_k$ und $A = \bigsqcup_{k=0}^{\infty} B_k$. Dank abzählbarer Additivität

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}\Big(\bigsqcup_{k=0}^{\infty} B_k\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(B_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(B_k) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n).$$

Die zweite Aussage folgt aus der ersten durch Komplementbildung.

Eigenschaften der kumul. Verteilungsfunktion

Für $x < y$ gilt $]-\infty, x] \subseteq]-\infty, y]$ und daher

$$F(x) = \mathbf{P}\big(]-\infty, x]\big) \leq \mathbf{P}\big(]-\infty, y]\big) = F(y).$$

Für $x \to \pm\infty$ gilt:

$$\lim_{n\to-\infty} F(n) = \lim_{n\to-\infty} \mathbf{P}\big(]-\infty, n]\big) = \mathbf{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}]-\infty, n]\Big) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} F(n) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\big(]-\infty, n]\big) = \mathbf{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}]-\infty, n]\Big) = \mathbf{P}(\mathbb{R}) = 1$$

Zur rechtsseitigen Stetigkeit:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} F\big(x + \tfrac{1}{n}\big) &= \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\big(]-\infty, x + \tfrac{1}{n}]\big) \\ &= \mathbf{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}]-\infty, x + \tfrac{1}{n}]\Big) = \mathbf{P}\big(]-\infty, x]\big) = F(x)\end{aligned}$$

Umkehrung: Ist F gegeben, so setzen wir $\mathbf{P}(]a, b]) = F(b) - F(a)$.
Die Familie der messbaren Mengen wird von diesen Intervallen erzeugt.
Daraus folgt die Eindeutigkeit und (mit mehr Mühe) die Existenz von $\mathbf{P}$.

Eigenschaften der kumul. Verteilungsfunktion

Zur linksseitigen Stetigkeit:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} F\big(x - \tfrac{1}{n}\big) &= \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\big(]-\infty, x - \tfrac{1}{n}]\big) \\ &= \mathbf{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}]-\infty, x - \tfrac{1}{n}]\Big) = \mathbf{P}(]-\infty, x[)\end{aligned}$$

Dies ist genau dann gleich $F(x) = \mathbf{P}(]-\infty, x])$, wenn $\mathbf{P}(\{x\}) = 0$ gilt.
Allgemein gilt in jedem Punkt $\mathbf{P}(\{a\}) = F(a) - \lim_{x\nearrow a} F(x)$.

Hat $\mathbf{P}$ eine stetige Dichte f, so gilt $F' = f$ nach dem HDI, denn

$$F(x) = \mathbf{P}\big(]-\infty, x]\big) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

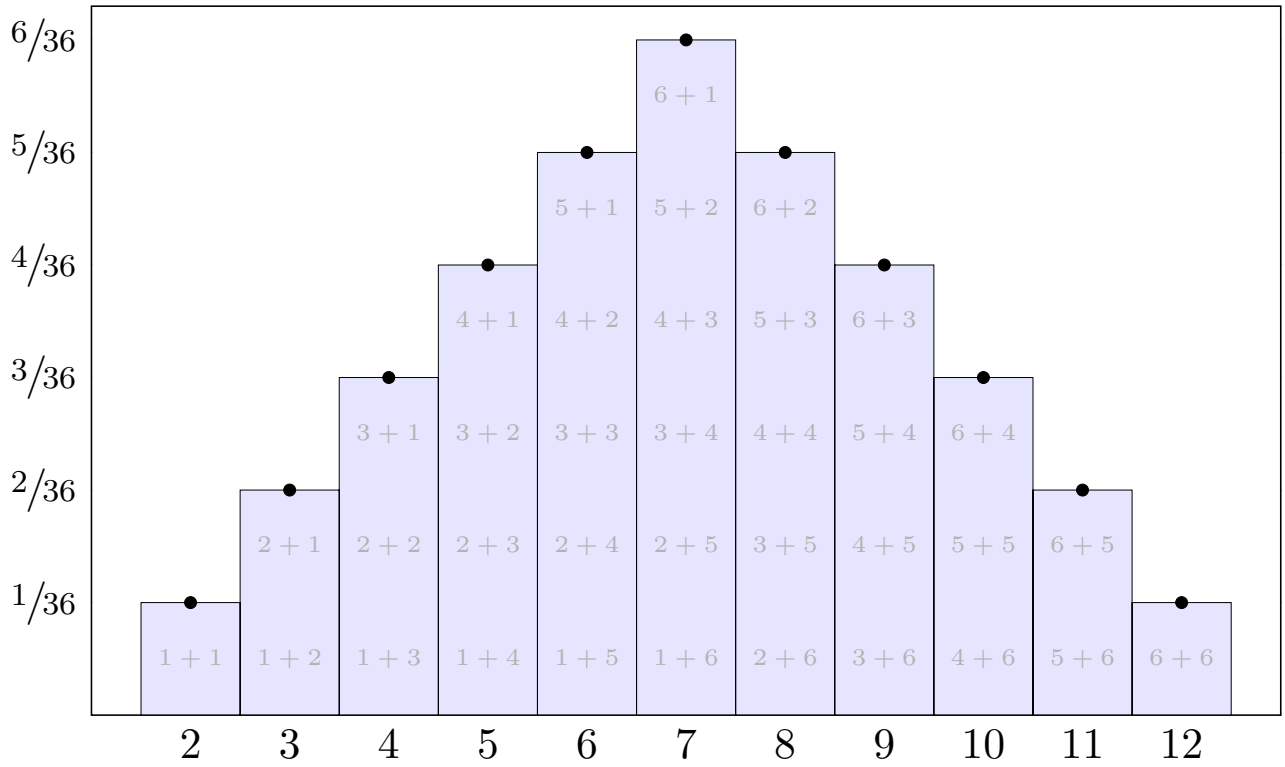
Ist umgekehrt F stetig differenzierbar mit Ableitung $f = F'$, so gilt diese Gleichung. Für jede messbare Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ gilt dann

$$\mathbf{P}(A) = \int_A f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Somit ist das WMaß $\mathbf{P}$ kontinuierlich mit stetiger Dichte f.

Erinnerung: Augensumme von zwei Würfeln

Ergebnisse $\omega \in \Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$ mit Gleichverteilung $\mathbf{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{36}$.
Augenzahlen $X_1, X_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $X_1(\omega_1,\omega_2) = \omega_1$ und $X_2(\omega_1,\omega_2) = \omega_2$.
Augensumme $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $X = X_1 + X_2$. Die Verteilung von X ist:



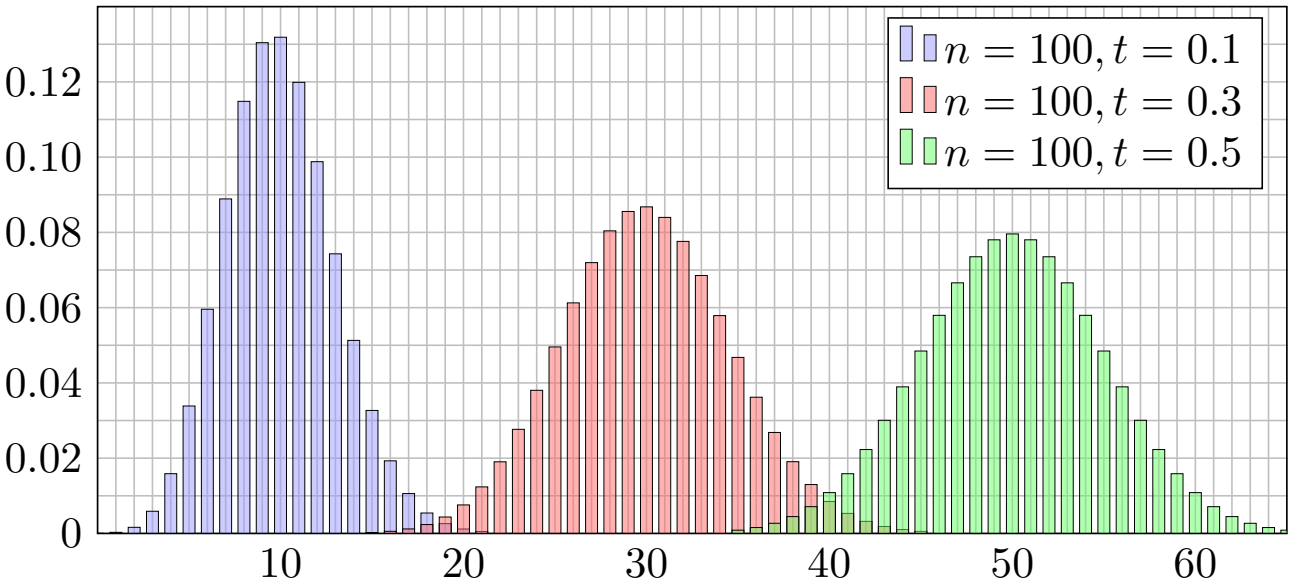
Erinnerung: unabhängig wiederholte Tests

Ergebnisse sind n–Tupel $\omega \in \Omega = \{0,1\}^n$. Die WVerteilung ist hier

$$\mathbf{P}(\{\omega\}) = t^k(1-t)^{n-k} \quad \text{bei Trefferzahl} \quad k = \omega_1 + \cdots + \omega_n.$$

Für $X_i : \Omega \to \{0,1\}$ mit $X_i(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n) = \omega_i$ gilt $X_i \sim \mathrm{B}(1,t)$.
Für $X = X_1 + \cdots + X_n$ gilt $X \sim \mathrm{B}(n,t)$, d.h. X hat die Verteilung

$$\mathbf{P}(X{=}k) = \mathbf{P}\big(\{\, \omega \mid X(\omega) = k \,\}\big) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}.$$



Zufallsvariablen: allgemeine Definition

Oft interessiert bei Experimenten nicht das detaillierte Ergebnis $\omega \in \Omega$, sondern nur eine reelle Größe $X(\omega) \in \mathbb{R}$, die vom Ergebnis ω abhängt.

Definition V2D: Zufallsvariable

Wir betrachten einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. V112

Eine reelle **Zufallsvariable** ist eine messbare Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Diese definiert auf $\mathbb{R}$ eine WVerteilung $\mathbf{P}_X : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ durch

$$\mathbf{P}_X(B) = \mathbf{P}(X \in B) := \mathbf{P}\big(X^{-1}(B)\big) = \mathbf{P}\big(\{\, \omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B \,\}\big).$$

Diese nennen wir die **Verteilung** der Zufallsvariablen X (Bildmaß).

Wir sagen hierzu **X ist $\mathbf{P}_X$–verteilt** und schreiben kurz $X \sim \mathbf{P}_X$.

Wir stellen uns Ω als Lostopf vor; zu jedem Los $\omega \in \Omega$ ist $X(\omega) \in \mathbb{R}$ der Gewinn. Die Wkt $\mathbf{P}$ ist auf die verschiedenen Ergebnisse $\omega \in \Omega$ verteilt, entsprechend $\mathbf{P}_X$ auf die möglichen Gewinne. Messbarkeit von $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ist eine technisch notwendige Bedingung. Sie bedeutet: Für jedes Intervall $B \subseteq \mathbb{R}$ ist die Urbildmenge $A = X^{-1}(B) = \{\, \omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B \,\} = `\{X \in B\}_1$ in Ω messbar, das heißt $A \in \mathscr{A}$. Diese Vorsichtsmaßnahme ist mathematisch-technischer Natur: Sie stellt sicher, dass die Definition von $\mathbf{P}_X$ und alle weiteren Rechnungen möglich sind.

Zufallsvariablen: Anschauung und Bedeutung

Wir betrachten statt reeller auch vektorwertige Zufallsvariablen

$$X = (X_1, \dots, X_n) \;:\; (\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P}) \to (\mathbb{R}^n, \mathscr{B}, \mathbf{P}_X).$$

Allgemeiner: Jede Zufallsvariable ist eine messbare Abbildung

$$X \;:\; (\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P}) \to (\Omega', \mathscr{B}, \mathbf{P}_X)$$

Anschaulich wird die Massenverteilung von $\mathbf{P}$ auf $\mathbf{P}_X$ transportiert.

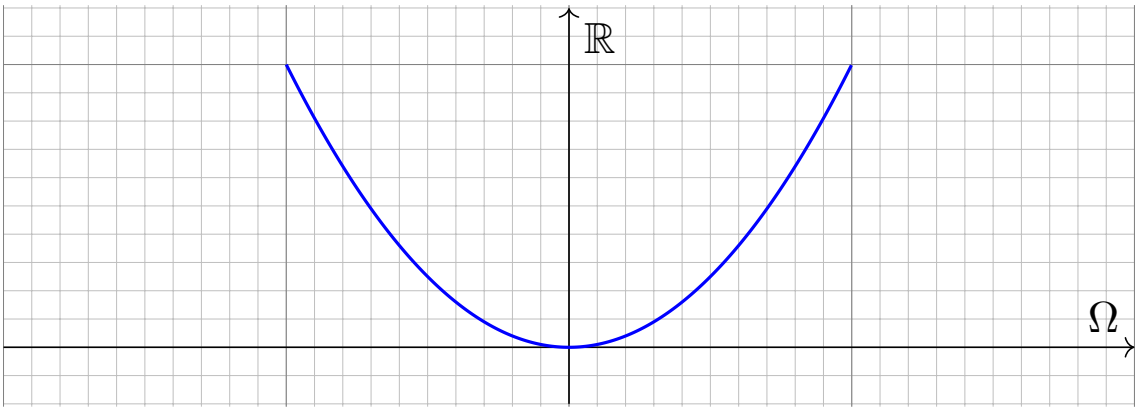
Statt mit einer Zufallsvariable $X : \Omega \to \Omega'$ auf dem WRaum $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ können wir ebenso auch direkt mit dem Bildraum $(\Omega', \mathscr{B}, \mathbf{P}_X)$ arbeiten.

Mit der Zufallsvariable X können wir so einen *komplizierten* durch einen *einfachen* Wahrscheinlichkeitsraum ersetzen.

Die Einführung von Zufallsvariablen ist oft bequem und nützlich:

- Bequeme Notation und natürliche Sprechweise: ZVariablen sind z.B. Messungen, Stichproben, etc. Das ist für Anwendungen hilfreich.
- Wir können mehrere Experimente als Zufallsvariablen $X_1, X_2, X_3, \dots$ auf dem gemeinsamen WRaum $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ betrachten. Das hilft.
- Wir können vom zugrundeliegenden WRaum $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ abstrahieren und müssen ihn häufig gar nicht explizit ausführen. Das vereinfacht.

Zufallsvariablen: kontinuierliche Beispiele



Aufgabe: (1) Auf $\Omega = [-1, 1]$ betrachten wir die Gleichverteilung $\mathbf{P}$. Zeichnen Sie hierzu die WDichte g und die kumul. Verteilung G.

(2) Bestimmen Sie für die ZVariable $X : \Omega \to \mathbb{R} : t \mapsto X(t) = t^2$ die kumulative Verteilungsfunktion F und ihre WDichte f.

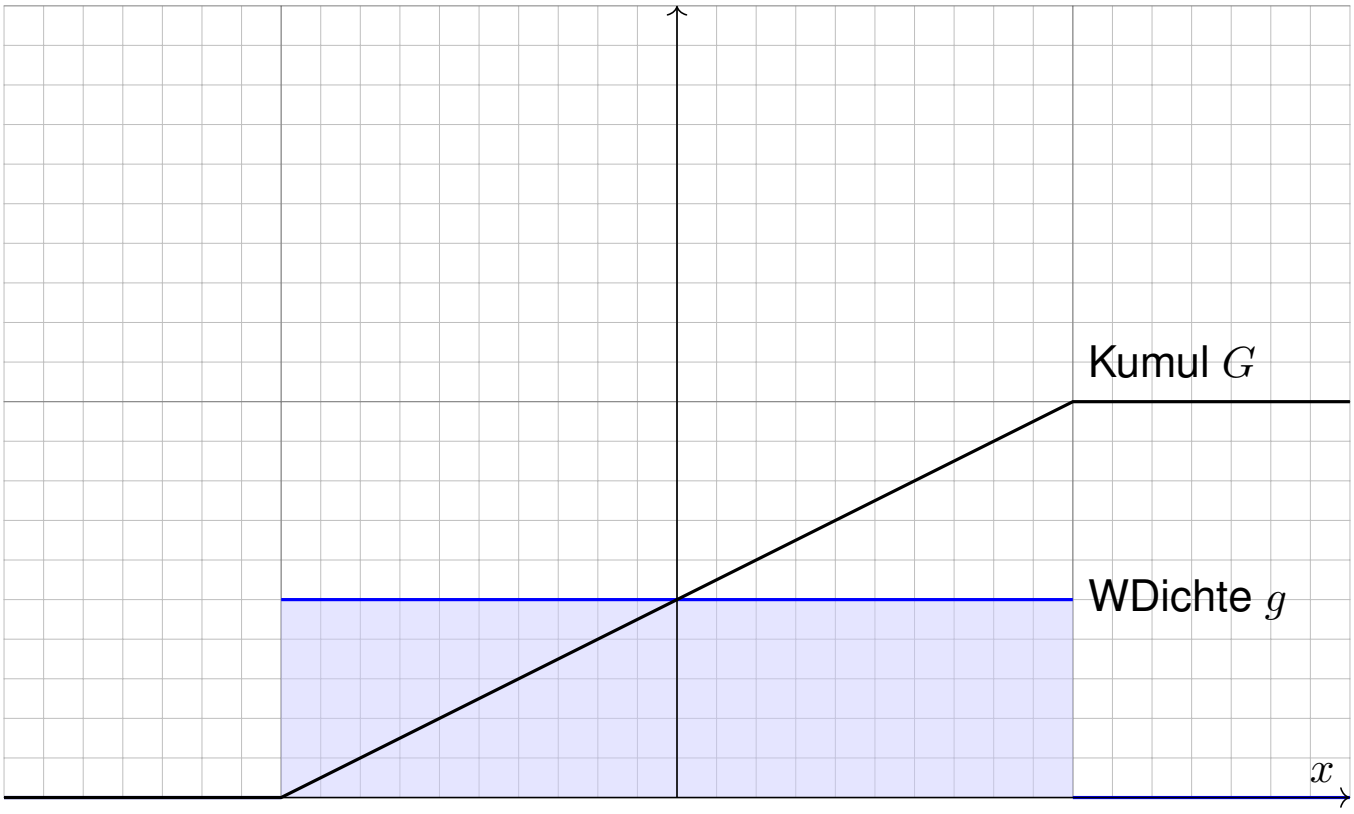
Lösung: Die Bildmenge ist $[0, 1]$, aber die Wkt ist nicht gleichverteilt! Das Bildmaß $\mathbf{P}_X$ hat für $0 \leq x \leq 1$ die kumulative Verteilung

$$F(x) = \mathbf{P}(t^2 \leq x) = \mathbf{P}(|t| \leq \sqrt{x}) = \sqrt{x}.$$

Demnach hat $\mathbf{P}_X$ die Dichte $f(x) = F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

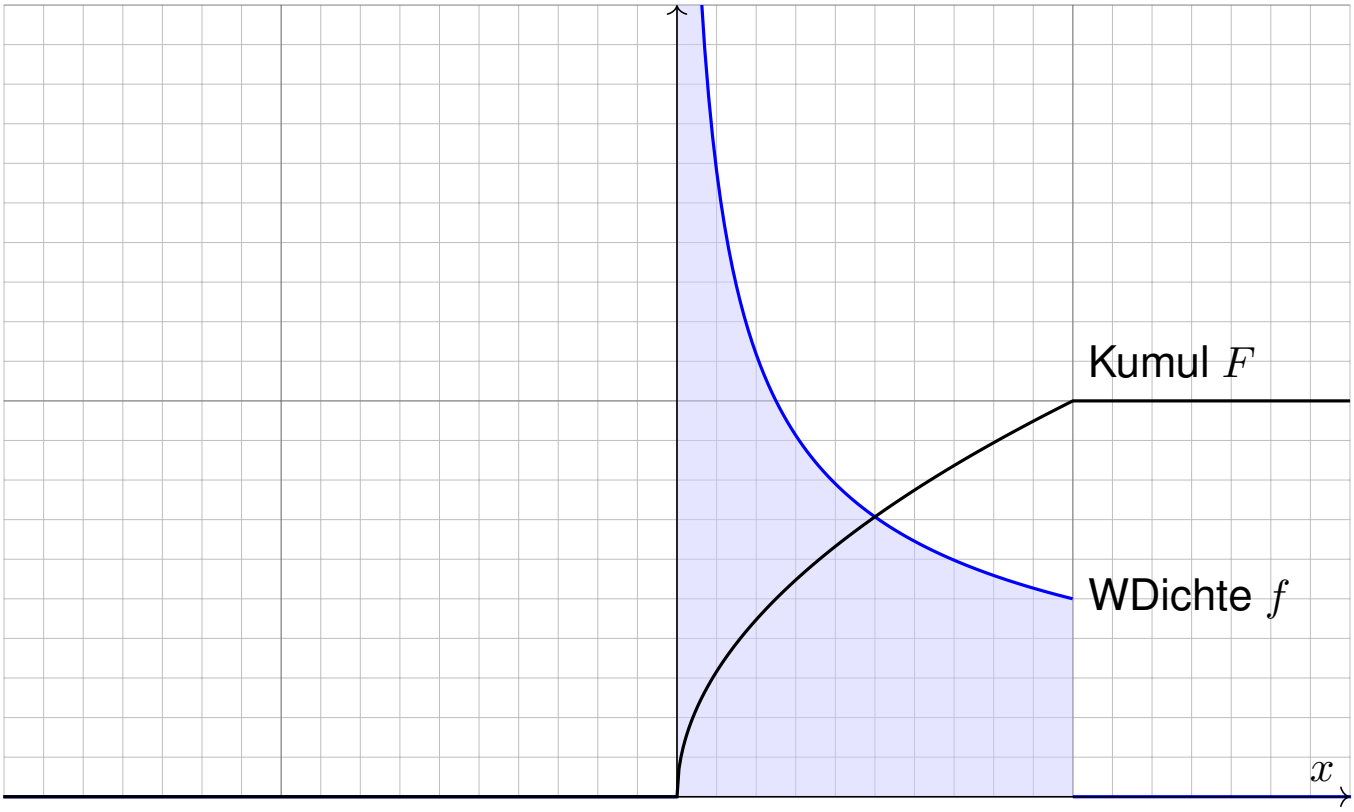
Zufallsvariablen: kontinuierliche Beispiele

(1) Gleichverteilung $\mathbf{P}$ auf dem Definitionsbereich $\Omega = [-1, 1]$:



Zufallsvariablen: kontinuierliche Beispiele

(2) Verteilung $\mathbf{P}_X$ der ZVariablen $X(t) = t^2$ im Bildbereich $\Omega' = [0, 1]$:



Zufallsvariablen: kontinuierliche Beispiele

Die Massenverteilung $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ wird nach $(\mathbb{R}, \mathscr{B}, \mathbf{P}_X)$ transportiert: Die Parameter $t \in [-1, 1]$ sind gleichverteilt, nicht jedoch $t^2 \in [0, 1]$. Im Bildraum $[0, 1]$ werden die niedrigen Werte um 0 wahrscheinlicher getroffen (hohe Dichte) als die hohen Werte um 1 (geringere Dichte).

Dies können Sie konkret simulieren: Generieren Sie gleichverteilte Zufallszahlen $t \in [-1, 1]$ und zeichnen Sie ihre Bildpunkte $X(t) = t^2$. Es ergibt sich eine Punktwolke in $[0, 1]$, deren Dichte von 0 nach 1 monoton abnimmt. Nahe 0 wird diese Wolke tatsächlich extrem dicht.

Unser Ergebnis für die Zufallsvariable $X(t) = t^2$ ist daher plausibel. Will man die genaue Verteilung, so muss man rechnen (wie gezeigt). Wir sehen insbesondere, dass WDichten nicht beschränkt sein müssen: Hier hat sie eine Polstelle, beim Nullpunkt 0 also unendlich große Dichte. Dennoch ist die Gesamtmasse weiterhin endlich, immer noch gleich 1.

Hinter diesen Beispielen steckt der Transformationssatz für Integrale: Ist die Zufallsvariable $X : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar, so hat das Bildmaß $\mathbf{P}_X$ die kumulative Verteilung $F(x) = \mathbf{P}(X^{-1}([a, x]))$ und WDichte $f = F'$.

Simulation reeller WMaße durch Gleichverteilung

Die Transformation von WMaßen können wir auch umgekehrt nutzen: Wir nehmen an, gleichverteilte unabhängige Zufallszahlen $x \in [0,1]$ werden uns kostengünstig zur Verfügung gestellt. Wie können Sie nun daraus Zufallszahlen erzeugen, die einer anderen Verteilung folgen, zum Beispiel einer Normalverteilung oder einer Exponentialverteilung?

Jedes WMaß auf $\mathbb{R}$ können wir als Bildmaß aus der Gleichverteilung auf $[0,1]$ gewinnen! Diese Beobachtung können Sie zur Simulation verwenden. Das ist ein vielgenutztes Verfahren:

Für manche Modelle ist es sinnvoll, stochastische Simulationen (am Computer) durchzuführen. Hierzu benötigen Sie einen Generator von gleichverteilten Zufallszahlen $x \in [0,1]$. Das ist ein eigenes Kapitel der Informatik und birgt erstaunliche Schwierigkeiten und Überraschungen.

Wir betrachten dies als „black box“ und nehmen an, gleichverteilte unabhängige Zufallszahlen $x \in [0,1]$ werden uns kostengünstig zur Verfügung gestellt. Dann ist z.B. $3x+2$ gleichverteilt auf $[2,5]$. Wie können Sie Zufallszahlen $x \in \mathbb{R}$ erzeugen, die einer ganz anderen Verteilung folgen, zum Beispiel einer Normalverteilung auf $\mathbb{R}$ oder einer Exponentialverteilung auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$?

Zur Erzeugung solcher Zufallszahlen nutzen wir, dass auch die kumulative Verteilungsfunktion einen Bildbereich zwischen Null und Eins aufweist! Wählen Sie in diesem Intervall zufällig eine Zahl $y \in [0,1]$, so können Sie dies als Wert $y = F(x)$ einer Verteilungsfunktion interpretieren. Der zugehörige Wert x ist dann die gewünschte Zufallszahl. Genau dies erklärt der folgende Satz.

Simulation reeller WMaße durch Gleichverteilung

Satz V2E: Quantilfunktion

Vorgegeben sei eine kumulative Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$.

Wir betrachten $\Omega = [0,1]$ mit Gleichverteilung $\mathbf{P}$ und definieren

$$X : \Omega \to \bar{\mathbb{R}} \quad \text{durch} \quad X(t) = F^{-1}(t) = \inf\{\, x \in \mathbb{R} \mid t \leq F(x) \,\}$$

Dann ist X messbar und $\mathbf{P}_X$ hat die kumulative Verteilung F.

☺ Wenn F stetig und streng wachsend ist, so ist $F : \mathbb{R} \to]0,1[$ bijektiv. Im allgemeinen Fall muss F nur schwach wachsend sein und darf auch Sprungstellen haben. Für diese Fälle ist die ausführlichere Formel als Infimum angegeben. Die Funktion X heißt **Quantilfunktion** von F.

Nachrechnen: Nach Konstruktion gilt $X(t) \leq x \Leftrightarrow t \leq F(x)$, also

$$\mathbf{P}_X\big(]-\infty, x]\big) = \mathbf{P}\big(X(t) \leq x\big) = \mathbf{P}\big(t \leq F(x)\big) = F(x)$$

☺ Anwendung: Simulation von WMaßen auf $\mathbb{R}$, z.B. am Computer. Aus der Gleichverteilung gewinnen Sie jede beliebige Verteilung.

Simulation reeller WMaße durch Gleichverteilung

V219
Ausführung

Aufgabe: Was ist die Quantilfunktion der Exponentialverteilung $\mathrm{E}(\lambda)$? Wie können Sie diese Verteilung mit einer Gleichverteilung simulieren?

Lösung: Wir haben die Dichte $f(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$ auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$, kumuliert also

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

(Siehe V203.) Die Quantilfunktion hierzu ist einfach die Umkehrfunktion

$$F^{-1}(y) = -\frac{\ln(1-y)}{\lambda}.$$

Die $\mathrm{E}(\lambda)$–Verteilung simulieren wir demnach so: Wir ziehen zufällig Zahlen $y \in [0,1]$ und bilden diese ab auf $x = F^{-1}(y) = -\ln(1-y)/\lambda$.

Auf $\Omega = [0,1]$ mit Gleichverteilung entspricht dies der Zufallsvariablen

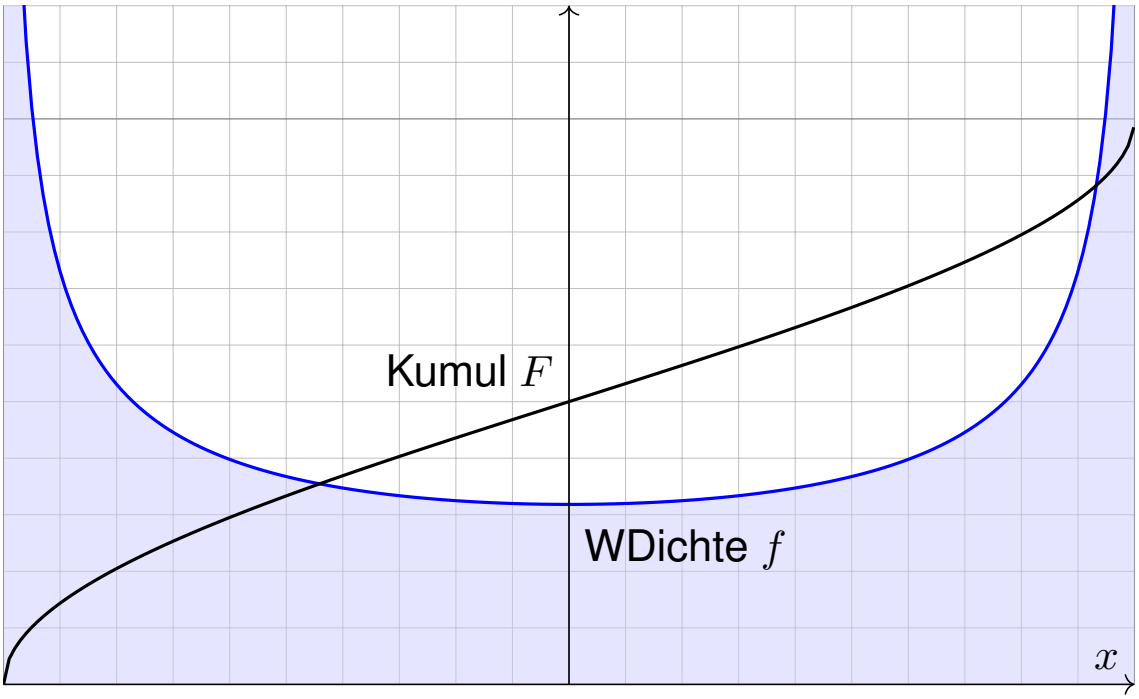
$$X : \Omega \to \mathbb{R} : \omega \mapsto X(\omega) = -\frac{\ln(1-\omega)}{\lambda}.$$

Sie prüfen leicht nach, dass X die gewünschte Verteilungsfunktion hat: Abstrakt ist das der obige Beweis, hier ganz konkret und anschaulich.

Simulation reeller WMaße durch Gleichverteilung

V220
Ausführung

Aufgabe: Wir betrachten das Intervall $\Omega = [0,1]$ mit Gleichverteilung $\mathbf{P}$. Finden Sie $X : [0,1] \to [-1,1]$ sodass $\mathbf{P}_X$ die Dichte $f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ hat.



Lösung: Kumul. Verteilung $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\arcsin(x) + \frac{1}{2}$.

Wir wählen $X : [0,1] \to [-1,1]$ gemäß $X(t) = F^{-1}(t) = \sin(\pi t - \pi/2)$.

Konstruktion der Erwartung: einfache Funktionen

Definition V2F: einfache Zufallsvariablen und ihre Erwartung

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ein WRaum. Eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt **einfach**, wenn sie nur endliche viele Werte $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ in $\mathbb{R}$ annimmt.

Somit gilt $X = \sum_{k=1}^n a_k \, \mathbf{I}_{A_k}$ mit $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$ und $\Omega = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n$. In diesem Falle ist ihr Erwartungswert der gewichtete Mittelwert

$$\mathbf{E}(X) \;:=\; \sum_{k=1}^n a_k \cdot \mathbf{P}(X{=}a_k) \;=\; \sum_{k=1}^n a_k \cdot \mathbf{P}(A_k)$$

Aufgabe: Berechnen Sie $\mathbf{E}(X)$ für $X \sim \mathrm{B}(n,t)$ binomialverteilt.

Lösung: Die Berechnung des Erwartungswertes kennen wir U421:

$$\mathbf{E}(X) \;=\; \sum_{k=0}^n k \cdot \mathbf{P}(X{=}k) \;=\; \sum_{k=0}^n k \cdot \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \;=\; nt$$

Dies ist eine einfache Funktion, in diesem konkreten Beispiel gilt nämlich $X = \sum_{k=0}^n k \, \mathbf{I}_{A_k}$ mit $A_k = X^{-1}(\{k\}) = \{\, \omega \in \Omega \mid X(\omega) = k \,\}$. Dies verallgemeinert Treppenfunktionen (A307): Hier nun sind $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$ beliebige messbare Mengen in Ω, nicht nur Quader im $\mathbb{R}^n$.

Konstruktion der Erwartung: einfache Funktionen

Zum WRaum $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ betrachten wir die Menge der Treppenfunktionen

$$T(\Omega, \mathscr{A}) = \Big\{ \sum\nolimits_{k=1}^n a_k \, \mathbf{I}_{A_k} \;\Big|\; a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R},\; A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A}. \Big\}$$

Aufgabe: (1) Die Menge $T(\Omega, \mathscr{A}) \subseteq \mathrm{Abb}(\Omega, \mathbb{R})$ ist ein $\mathbb{R}$–Vektorraum, erzeugt von den Indikatorfunktionen $\mathbf{I}_A$ aller messbarer Mengen $A \in \mathscr{A}$.

(2) Hierauf ist die Erwartung $\mathbf{E} : T(\Omega, \mathscr{A}) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\mathbf{E}\Big(\sum\nolimits_{k=1}^n a_k \, \mathbf{I}_{A_k} \Big) = \sum\nolimits_{k=1}^n a_k \, \mathbf{P}(A_k).$$

Dies ist die einzige lineare Abbildung mit der Normierung $\mathbf{E}(\mathbf{I}_A) = \mathbf{P}(A)$.

Lösung: Die Aussage (1) ist klar nach Konstruktion von $T(\Omega, \mathscr{A})$.

Aussage (2) folgt aus Definition V2F, falls die Mengen $A_k \in \mathscr{A}$ disjunkt und die Werte $a_k \in \mathbb{R}$ verschieden sind (wie in der vorigen Aufgabe). Jede Treppenfunktion können wir so darstellen (per Induktion über n).

☺ Die Erwartung entspricht dem Integral! Wir nutzen unsere guten Erfahrungen und unsere solide Vorbereitung und führen die Konstruktion des Integrals aus Kapitel A hier erneut durch.

Konstruktion der Erwartung: nicht-negative Zufallsvariablen

☺ Für die Erwartung gehen wir wie beim Integral vor (siehe Kapitel A): Für jede einfache Zufallsvariable (aka Treppenfunktion) können wir das Integral durch eine endliche Summe definieren. Anschließend gelangen wir per Grenzübergang von einfachen zu messbaren Funktionen:

Lemma V2G: Ausschöpfung durch einfache Funktionen

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Für jede Funktion $f : \Omega \to [0, \infty]$ sind äquivalent:

(1) Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist $f^{-1}([0, a])$ messbar: $\{\, \omega \in \Omega \mid f(\omega) \leq a \,\} \in \mathscr{A}$.

(2) Es existiert eine wachsende Folge einfacher Funktionen

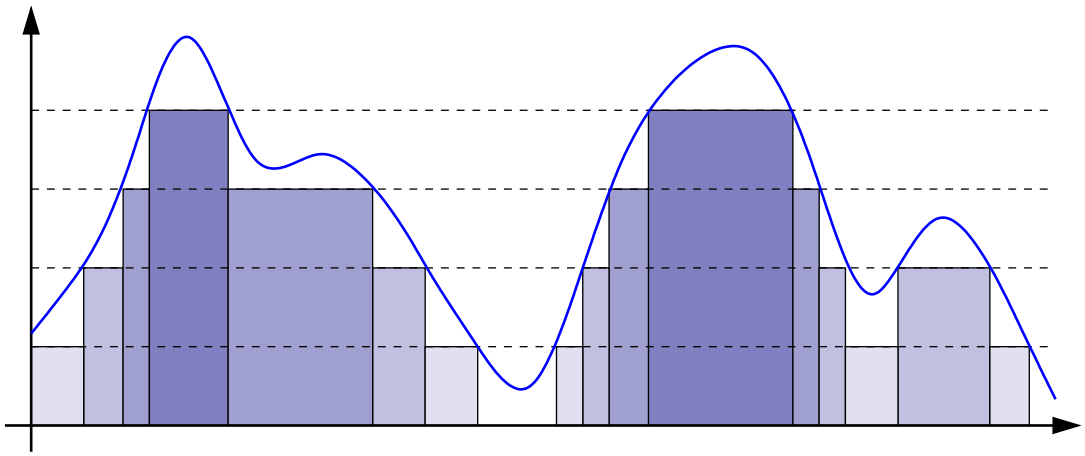
$$0 \leq f_0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots : \Omega \to [0, \infty] \quad \text{mit} \quad f_k \nearrow f.$$

In diesem Fall gilt $0 \leq \mathbf{E}(f_0) \leq \mathbf{E}(f_1) \leq \ldots$ und wir definieren

$$\mathbf{E}(f) := \lim \mathbf{E}(f_k) \in [0, \infty].$$

Dies ist wohldefiniert, d.h. von der Wahl der Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ unabhängig.

Konstruktion der Erwartung: nicht-negative Zufallsvariablen



„(1) $\Rightarrow$ (2)“: Wir konstruieren einfache Funktionen $f_k : \Omega \to [0, \infty]$.
Sei $k \in \mathbb{N}$. Für $j \in \{0, \ldots, N = k2^k\}$ setzen wir $h_j := j/2^k$ und $A_j := f^{-1}([h_j, h_{j+1}[)$, wobei $A_N := f^{-1}([h_N, \infty])$. Wir definieren $f_k := \sum_{k=0}^{N} h_j \cdot \mathbf{I}_{A_j}$. Für jeden Punkt $x \in \Omega$ gilt dann $f_k(x) \nearrow f(x)$.

„(2) $\Leftarrow$ (1)“: Seien $f_k : \Omega \to [0, \infty]$ messbar und $f_k \nearrow f$.
Die Menge $A_k = f_k^{-1}([0, a])$ ist messbar, also $A_k \in \mathscr{A}$.
Für $A = f^{-1}([0, a])$ gilt dann $A = \bigcap_{k=0}^{\infty} A_k$, also $A \in \mathscr{A}$.

Definition der Erwartung

Satz V2H: messbare und absolut integrierbare Funktionen

Genau dann ist $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ **messbar**, wenn f^+ und f^- messbar sind.
(1) In diesem Fall ist auch $|f| = f^+ + f^-$ messbar, und somit gilt

$$\mathbf{E}(|f|) = \mathbf{E}(f^+) + \mathbf{E}(f^-).$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so nennen wir f **(absolut) integrierbar**.
In diesem Fall können wir den Erwartungswert von f definieren durch

$$\boxed{\mathbf{E}(f) := \mathbf{E}(f^+) - \mathbf{E}(f^-).}$$

(3) Der Erwartungswert verhält sich als Integral $\mathbf{E}(f) = \int_{x\in\Omega} f(x)\,\mathrm{d}\mathbf{P}$:
Die integrierbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ bilden einen Vektorraum,

$$L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P}; \mathbb{R}) := \{\, f : \Omega \to \mathbb{R} \mid \mathbf{E}(|f|) < \infty \,\}.$$

Hierauf ist die Erwartung $\mathbf{E} : L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P}) \to \mathbb{R} : f \mapsto \mathbf{E}(f)$ eine $\mathbb{R}$–lineare Abbildung, erfüllt Normierung, Monotonie, und Ausschöpfung.

Berechnung der Erwartung

Satz V2I: Erwartungswert von Zufallsvariablen

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ein WRaum und $X : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ eine Zufallsvariable.
Ihr **Erwartungswert** (oder kurz ihre **Erwartung**) ist gegeben durch

$$\mu(X) = \mathbf{E}(X) := \int_{\omega\in\Omega} X(\omega)\,\mathrm{d}\mathbf{P} = \int_{x\in\mathbb{R}} x\,\mathrm{d}\mathbf{P}_X.$$

Ist die Verteilung $\mathbf{P}_X$ auf $\mathbb{R}$ kontinuierlich mit Dichte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, so gilt

$$\mathbf{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x\, f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ist $\mathbf{P}_X$ diskret mit Wkten $p(x) = \mathbf{P}(\{\, \omega \in \Omega \mid X(\omega) = x \,\})$, so gilt

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{x\in\mathbb{R}} x\, p(x).$$

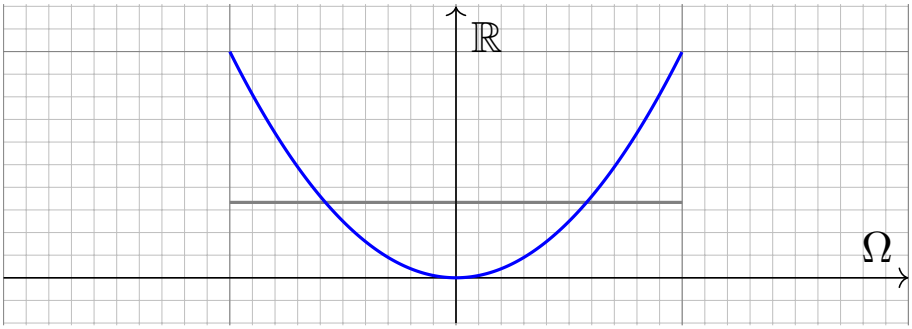
Dies ist jeweils nur sinnvoll für $\mathbf{E}(|X|) < \infty$. In diesem Fall nennen wir X **integrierbar** oder sagen: **Der Erwartungswert von X existiert.**

Erwartung: kontinuierliches Beispiel

V227
Ausführung

Für jede Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ist der Erwartungswert das Integral:

$$\mathbf{E}(X) := \int_{\omega \in \Omega} X(\omega)\,\mathrm{d}\mathbf{P} = \int_{x \in \mathbb{R}} x\,\mathrm{d}\mathbf{P}_X$$



Aufgabe: Sei $\mathbf{P}$ die kontinuierliche Gleichverteilung auf $\Omega = [-1, 1]$. Berechnen Sie den Erwartungswert von $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $X(t) = t^2$.

Lösung: Das gelingt durch Integration über $(\Omega, \mathbf{P})$:

$$\mathbf{E}(X) = \int_{\Omega} X(t)\,\mathrm{d}\mathbf{P} = \int_{-1}^{1} X(t) \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} t^2 \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{6}t^3\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}$$

Erwartung: kontinuierliches Beispiel

V228
Ausführung

☺ Die Verteilung $\mathbf{P}_X$ dieser Zufallsvariable haben wir oben diskutiert. Der Erwartungswert ist anschaulich plausibel: Niedrige Werte nahe 0 werden wahrscheinlicher getroffen als hohe Werte nahe 1. Ein Wert unter $1/2$ scheint daher plausibel. Den genauen Wert $1/3$ hingegen muss man ausrechnen. Dafür haben wir alle Techniken zur Integration!

Aufgabe: Berechnen Sie den Erwartungswert alternativ mit dem Bildmaß $\mathbf{P}_X$. Stimmen beide Ergebnisse überein? Warum ist das so?

Lösung: Zu $\mathbf{P}_X$ auf $[0, 1]$ haben wir oben die Dichte $f(x) = 1/(2\sqrt{x})$ ausgerechnet. Hieraus erhalten wir den Erwartungswert wie folgt:

$$\int_{\mathbb{R}} x\,\mathrm{d}\mathbf{P}_X = \int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2}x^{1/2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Beide Integrale sind gleich dank Transformationssatz / Substitution!

Die Erwartung lässt sich auf zwei Weisen berechnen: als Integral $\int_\Omega X(\omega)\,\mathrm{d}\mathbf{P}$ der messbaren Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ bezüglich des Maßes $\mathbf{P}$ auf Ω, oder als Schwerpunkt $\int_{\mathbb{R}^n} x\,\mathrm{d}\mathbf{P}_X$ des Bildmaßes $\mathbf{P}_X$ auf $\mathbb{R}^n$. Beide ergeben dasselbe Ergebnis. Daher darf sich jede:r aussuchen, welcher Rechenweg im konkreten Beispiel jeweils bequemer ist. Ich werde im Folgenden meist Bildmaße auf $\mathbb{R}^n$ vorziehen, da uns diese aus der n–dimensionalen Integration vertraut sind.

Erwartung, Varianz, Streuung einer diskreten Verteilung

Definition V2J: Erwartung, Varianz, Streuung

Sei $p : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \to [0,1]$ eine diskrete WVerteilung, also $\sum_{x\in\Omega} p(x) = 1$.
Der Schwerpunkt von p heißt **Mittelwert** oder **Erwartung**:

$$\boxed{\mu := \sum_{x\in\Omega} x\, p(x) \in \mathbb{R}^n.}$$

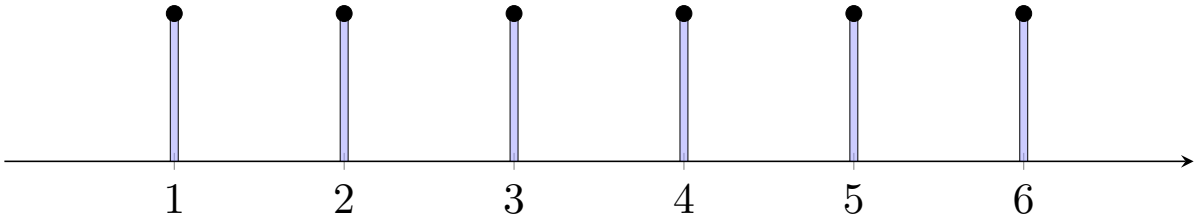
Hierbei setzen wir absolute Summierbarkeit voraus: $\sum |x|\, p(x) < \infty$.
Die **Varianz** der Verteilung p ist ihr Trägheitsmoment bezüglich μ:

$$\boxed{\sigma^2 := \sum_{x\in\Omega} |x-\mu|^2\, p(x) = \left[\sum_{x\in\Omega} |x|^2\, p(x)\right] - |\mu|^2 \geq 0.}$$

Die Wurzel $\sigma \geq 0$ dieses Wertes heißt die **Streuung** der Verteilung.

Anschaulich misst σ, wie weit die Werte um den Mittelwert μ streuen.
Wir nennen die Streuung σ daher auch die **Standardabweichung**.
Genau dann gilt $\sigma = 0$, wenn $p(\mu) = 1$ auf den Punkt μ konzentriert ist.

Beispiel: Erwartung und Varianz beim Würfeln



Aufgabe: Welchen **Mittelwert** $\mu \in \mathbb{R}$ hat die Augenzahl beim Würfeln?
Was ist hier die Varianz $\sigma^2 = \sum (x-\mu)^2\, p(x)$? Und die Streuung σ?
Lösung: Jede der Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6$ tritt in $\frac{1}{6}$ der Fälle auf. Also:

$$\mu \;=\; 1\cdot\tfrac{1}{6} + 2\cdot\tfrac{1}{6} + 3\cdot\tfrac{1}{6} + 4\cdot\tfrac{1}{6} + 5\cdot\tfrac{1}{6} + 6\cdot\tfrac{1}{6} \;=\; \tfrac{21}{6} \;=\; 3.5$$

Anschaulich ist μ der **Schwerpunkt** der Verteilung p.
Die **Varianz** σ^2 misst die mittlere quadratische Abweichung von μ:

$$\sigma^2 = \tfrac{1}{6}\left[\left(1-\tfrac{7}{2}\right)^2 + \left(2-\tfrac{7}{2}\right)^2 + \left(3-\tfrac{7}{2}\right)^2 + \left(4-\tfrac{7}{2}\right)^2 + \left(5-\tfrac{7}{2}\right)^2 + \left(6-\tfrac{7}{2}\right)^2\right]$$
$$= \tfrac{1}{3}\left[\left(\tfrac{5}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2\right] \;=\; \tfrac{1}{3}\left[\tfrac{25}{4} + \tfrac{9}{4} + \tfrac{1}{4}\right] \;=\; \tfrac{35}{12} \;=\; 2.91666\ldots$$

Die **Streuung** ist demnach $\sigma = \sqrt{35/12} \approx 1.70783$.

Erwartung, Varianz, Streuung einer kont. Verteilung

Definition V2K: Erwartung, Varianz, Streuung

Sei $f : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine WDichte, also $\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.
Der Schwerpunkt von f heißt **Mittelwert** oder **Erwartung**:

$$\boxed{\mu := \int_\Omega x\, f(x)\,\mathrm{d}x}$$

Hierbei setzen wir absolute Integrierbarkeit voraus: $\int |x|\, f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$.
Die **Varianz** der Verteilung f ist ihr Trägheitsmoment bezüglich μ:

$$\boxed{\sigma^2 := \int_\Omega |x-\mu|^2\, f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega |x|^2\, f(x)\,\mathrm{d}x - |\mu|^2 \geq 0}$$

Die Wurzel $\sigma \geq 0$ dieses Wertes heißt die **Streuung** der Verteilung.

Wir nutzen hier euklidische Norm $|\text{-}|$ und Skalarprodukt $\langle \text{-} \mid \text{-} \rangle$ des $\mathbb{R}^n$.
Anschaulich misst σ, wie weit die Werte um den Mittelwert μ streuen.
Wir nennen die Streuung σ daher auch die **Standardabweichung**.

Wichtige Verteilungen und ihre Kenngrößen

diskret		Ω	$p(k) = \mathbf{P}(\{k\})$	$\mathbf{E}$	$\mathbf{V}$
Gleichverteilung	V233	$\{a,\dots,b\}$	$\frac{1}{b-a+1}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$
Hyperg. $\mathrm{H}(N,K,n)$	U419	$\{0,\dots,n\}$	$\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}/\binom{N}{n}$	$n\frac{K}{N}$	$n\frac{K}{N}\frac{N-K}{N}\frac{N-n}{N-1}$
Binomial $\mathrm{B}(n,t)$	U421	$\{0,\dots,n\}$	$\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}$	nt	$nt(1-t)$
Poisson $\mathrm{P}(\lambda)$	U425	$\mathbb{N}$	$\mathrm{e}^{-\lambda}\,\lambda^k/k!$	λ	λ
Geometrisch $\mathrm{G}(q)$	T421	$\mathbb{N}_{\geq 1}$	$(1-q)q^{k-1}$	$\frac{1}{1-q}$	$\frac{q}{(1-q)^2}$
Zeta $Z(s)$, $s=2$	T312	$\mathbb{N}_{\geq 1}$	$\frac{6}{\pi^2}\frac{1}{k^2}$	— nicht definiert! — Diese Reihen divergieren.	
kontinuierlich		Ω	Dichte $f(x)$	$\mathbf{E}$	$\mathbf{V}$
Gleichverteilung	V235	$[a,b]$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponential $\mathrm{E}(\lambda)$	V243	$\mathbb{R}_{\geq 0}$	$\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$	λ^{-1}	λ^{-2}
Normal $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$	V239	$\mathbb{R}$	$\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$	μ	σ^2
Cauchy $\mathrm{C}(m,a)$	V241	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+(x-m)^2}$	— nicht definiert! — Diese Integrale divergieren.	

Diskrete Gleichverteilung

Aufgabe: Seien $a \leq b$ in $\mathbb{Z}$ ganze Zahlen. Berechnen Sie Erwartung und Varianz der diskreten Gleichverteilung auf $\Omega = \{a, a+1, \ldots, b\}$.

Lösung: Wir setzen die Definition ein und rechnen's aus:

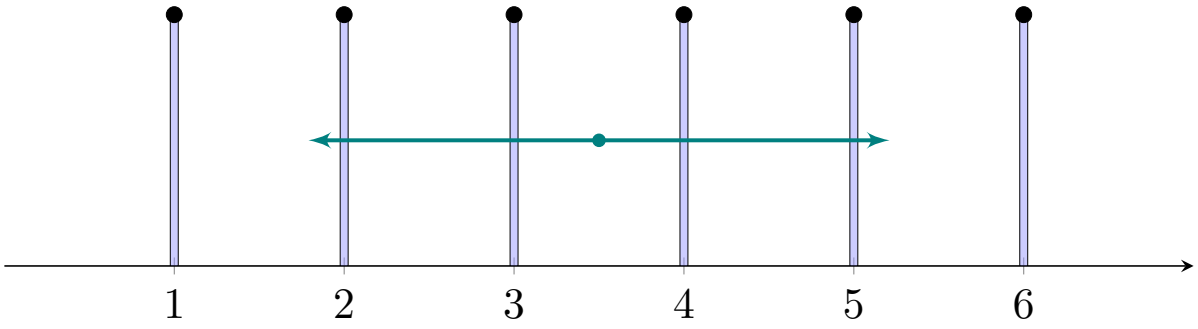
$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{n} \sum_{k=a}^{b} k &&= \frac{a+b}{2} \\ \sigma^2 &= \left[\frac{1}{n} \sum_{k=a}^{b} k^2\right] - \mu^2 &&= \frac{n^2-1}{12} \end{aligned}$$

Zur Abkürzung setzen wir $n = |\Omega| = b - a + 1$ für die Elementezahl. Für große n ist die Streuung näherungsweise $\sigma \approx n/\sqrt{12} \approx n/3.46$. Zur Rechnung nutzen wir die bekannten Summenformeln (HDI B3B):

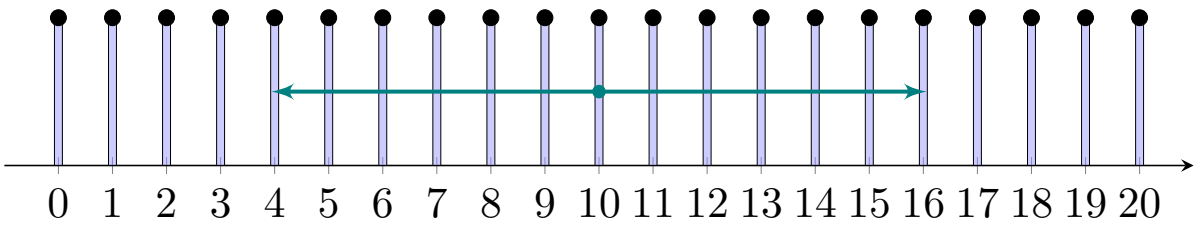
$$\begin{aligned} \sum_{k=a}^{b} k &= (b-a+1)\,\frac{a+b}{2}, \\ \sum_{k=a}^{b} k^2 &= (b-a+1)\,\frac{2a^2+2ab+2b^2+b-a}{6}. \end{aligned}$$

Diskrete Gleichverteilung

Beispiel: Für $a = 1$, $b = 6$ gilt $\mu = 3.5$, $\sigma^2 = 35/12$, $\sigma \approx 1.71$.



Beispiel: Für $a = 0$, $b = 20$ gilt $\mu = 10$, $\sigma^2 = 440/12$, $\sigma \approx 6.06$.

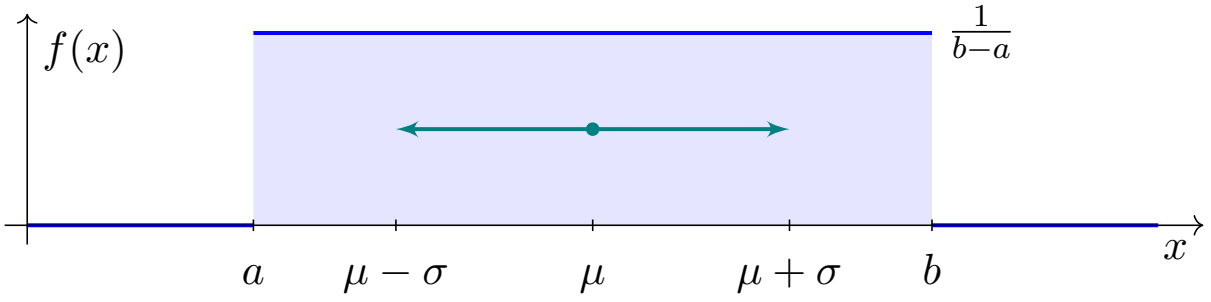


☺ Anschaulich ist der Mittelwert μ der Schwerpunkt der Verteilung. Die Standardabweichung σ misst die typische Breite der Verteilung.

Kontinuierliche Gleichverteilung

Für $a < b$ in $\mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ betrachten wir die Schrittweite $h = \frac{b-a}{n-1}$ und die diskrete Gleichverteilung auf $\Omega := \{\, a + kh \mid k = 0, 1, \ldots, n-1 \,\}$. Diese diskreten Verteilungen sind auf den vorigen Folien skizziert.

Im Grenzwert für $n \to \infty$ erhalten wir als Idealisierung folgendes Bild:



Für $a < b$ in $\mathbb{R}$ betrachten wir die kontinuierliche Gleichverteilung auf dem Intervall $[a, b]$. Dies ist eine kontinuierliche Verteilung mit Dichte

$$f \,:\, [a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0} \,:\, x \mapsto f(x) = \frac{1}{b-a}.$$

Kontinuierliche Gleichverteilung

Aufgabe: Berechnen Sie Erwartung und Varianz der kontinuierlichen Gleichverteilung auf $[a, b]$, mit Dichte $f : [a, b] \to \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto f(x) = \frac{1}{b-a}$.

Lösung: Wir setzen die Definition ein und rechnen's aus:

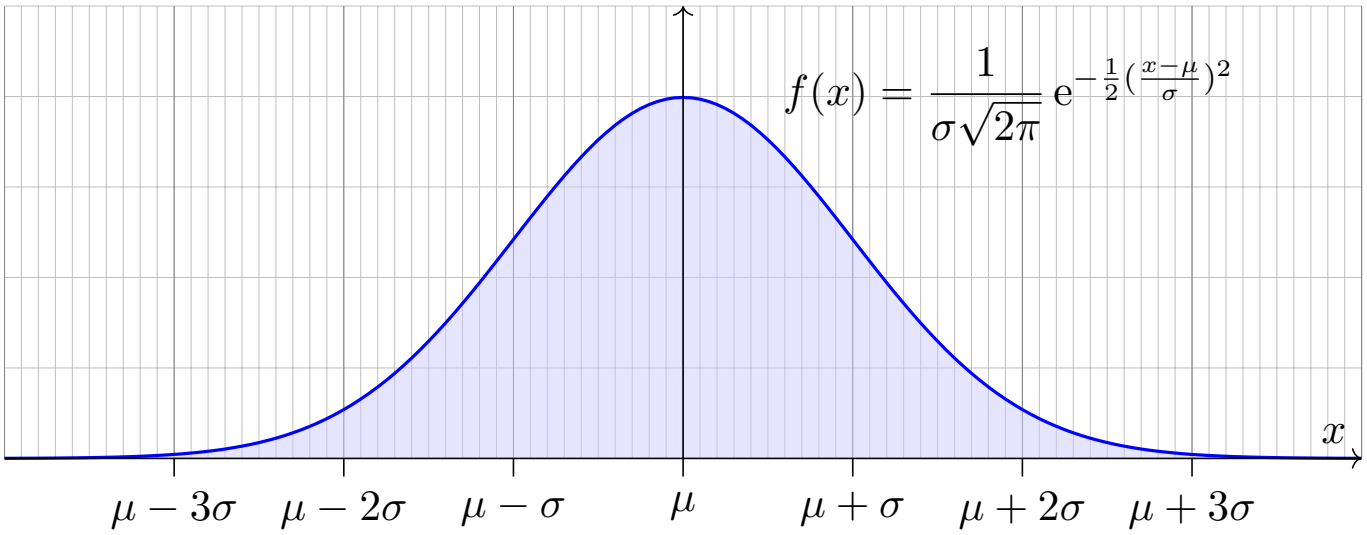
$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{1}{b-a}\int_{x=a}^{b} x \,\mathrm{d}x &&= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} &&= \frac{a+b}{2} \\
\sigma^2 &= \frac{1}{b-a}\int_{x=a}^{b} x^2 \,\mathrm{d}x - \mu^2 &&= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} &&= \frac{(b-a)^2}{12} \\
\sigma &= \sqrt{\sigma^2} &&= \frac{b-a}{2\sqrt{3}} &&\approx \frac{b-a}{3.46}
\end{aligned}$$

☺ Wie zuvor im diskreten Fall ist der Mittelwert μ sehr anschaulich, die Varianz σ^2 hingegen müssen wir als Integral explizit ausrechnen.

Die ersten Beispiele hierzu sind nicht schwer und eine gute Übung, sowohl zur Schulung Ihrer Intuition als auch Ihrer Rechentechniken.

Normalverteilung

Für $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ mit $\sigma > 0$ ist die **Normalverteilung** $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ gegeben durch folgende Dichte, die allseits beliebte Gaußsche Glockenkurve:



Aufgabe: (1) Warum ist dies eine Wahrscheinlichkeitsverteilung?

(2) Skizzieren Sie $x\,f(x)$ und berechnen Sie die Erwartung.

(3) Skizzieren Sie $x^2\,f(x)$ und berechnen Sie die Varianz.

Normalverteilung: Gesamtmasse

Lösung: Offenbar gilt $f \geq 0$. Wir haben drei Integrale zu berechnen:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1, \qquad \int_{\mathbb{R}} x\,f(x)\,\mathrm{d}x = \mu, \qquad \int_{\mathbb{R}} (x-\mu)^2\,f(x)\,\mathrm{d}x = \sigma^2.$$

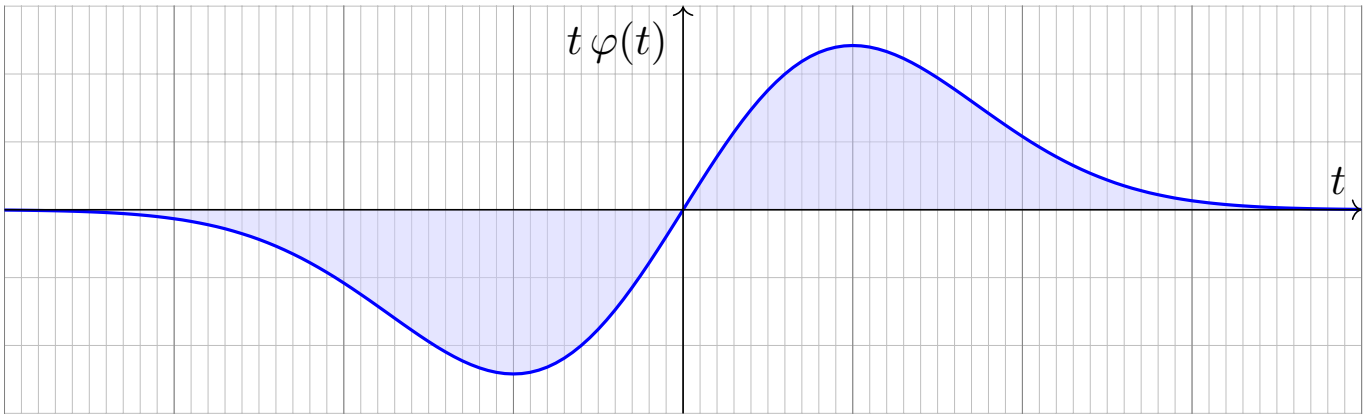
Vereinfachung: Nach Substitution $t = (x-\mu)/\sigma$ erhalten wir $\mu = 0$ und $\sigma = 1$, also die Dichte der Standard-Normalverteilung:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-t^2/2}$$

(1) Wir berechnen $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ durch den Gaußschen Kunstgriff $\boxed{\text{C230}}$:

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t\right)^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y\right) \\
&\overset{\text{Fub}}{=} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}\,\mathrm{d}(x,y) \overset{\text{Trafo}}{=} \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}\times[0,2\pi]} \mathrm{e}^{-r^2/2}\,r\,\mathrm{d}(r,\alpha) \\
&\overset{\text{Fub}}{=} \int_{r=0}^{\infty}\int_{\alpha=0}^{2\pi} \mathrm{e}^{-r^2/2}\,r\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}r \overset{\text{HDI}}{=} 2\pi\Big[-\mathrm{e}^{-r^2/2}\Big]_{r=0}^{\infty} = 2\pi
\end{aligned}$$

Normalverteilung: Erwartung



(2) Die Erwartung ist Null aufgrund der Symmetrie $\varphi(-t) = \varphi(t)$:

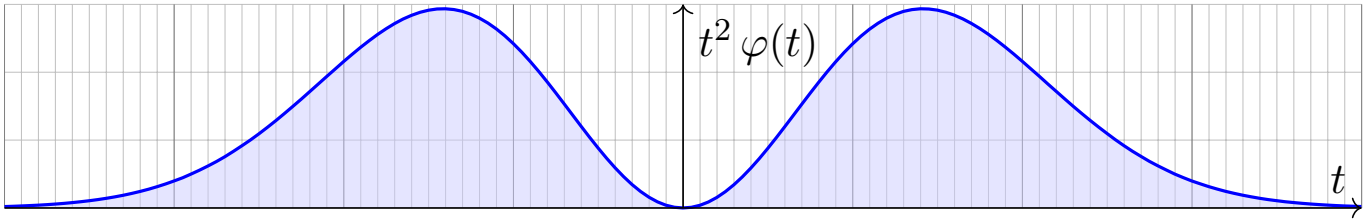
$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} t\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Alternativ können wir explizit eine Stammfunktion angeben:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t \overset{\text{HDI}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big[-\mathrm{e}^{-t^2/2}\Big]_{-\infty}^{\infty} = 0$$

Der allgemeine Fall folgt mit Substitution $t = (x-\mu)/\sigma$:
Die Erwartung der Normalverteilung $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ ist μ.

Normalverteilung: Varianz



(3) Die Varianz berechnen wir mit partieller Integration:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &\overset{\text{Def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \frac{\mathrm{e}^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-t)\cdot(-t)\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t \\ &\overset{\text{part}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big[-t\cdot\mathrm{e}^{-t^2/2}\Big]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = 1\end{aligned}$$

Der allgemeine Fall folgt mit Substitution $t = (x-\mu)/\sigma$:
Die Varianz der Normalverteilung $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ ist σ^2.

☺ Siehe D419 für die geraden Momente ρ^{2k} der Normalverteilung.
Ungerade Momente $\int_{\mathbb{R}} t^{2k+1}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ verschwinden dank Symmetrie.

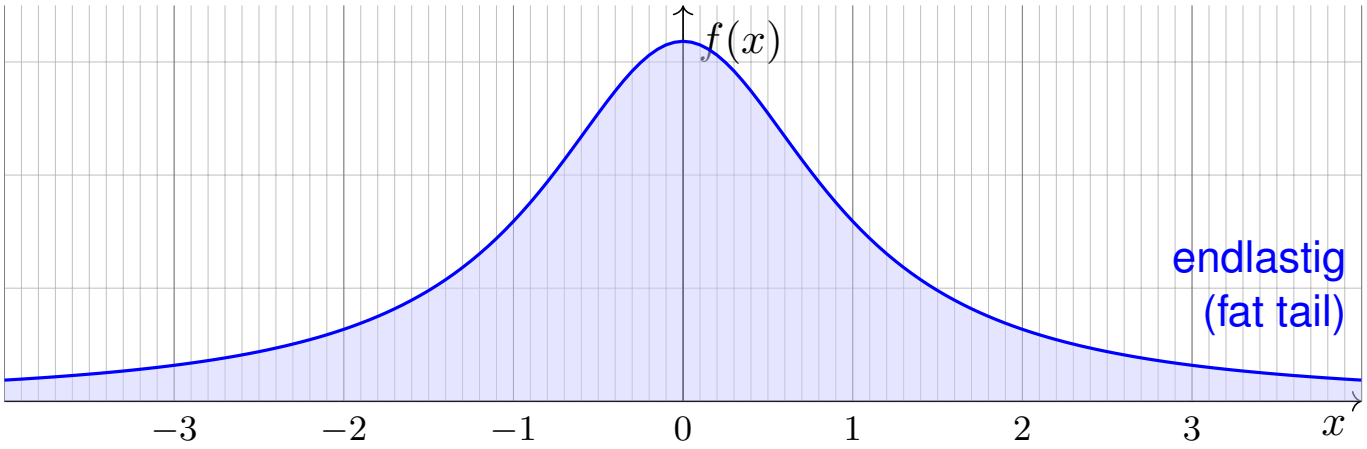
Übung: Legen Sie die Vorlage beiseite und versuchen Sie es selbst!

Cauchy–Verteilung

Aufgabe: Ist die folgende Funktion eine Wahrscheinlichkeitsdichte?

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1/c}{1+x^2}$$

Für welche Konstanten $c \in \mathbb{R}$? Existieren hierzu Erwartung und Varianz?



⚠ Der Graph erinnert grob an die Glockenkurve $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$.
Doch Vorsicht: Die Cauchy–Verteilung hat völlig andere Eigenschaften!
Vor allem klingt $f(x)$ nicht exponentiell ab, sondern nur wie $x \mapsto 1/x^2$.
Das hat dramatische Konsequenzen: Die Erwartung existiert nicht!

Cauchy–Verteilung

Lösung: (1) Wir haben $f \geq 0$ und für $c = 1$ ist die Gesamtmasse

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \Big[\arctan(x)\Big]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

☺ Die Wahl $c = \pi$ normiert die Gesamtmasse auf $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.
Erst hierdurch wird f zu einer Wahrscheinlichkeitsdichte.

(2) Für Erwartung und Varianz benötigen wir folgende Integrale:

$$\mu \overset{?}{=} \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad \sigma^2 \overset{?}{=} \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \infty.$$

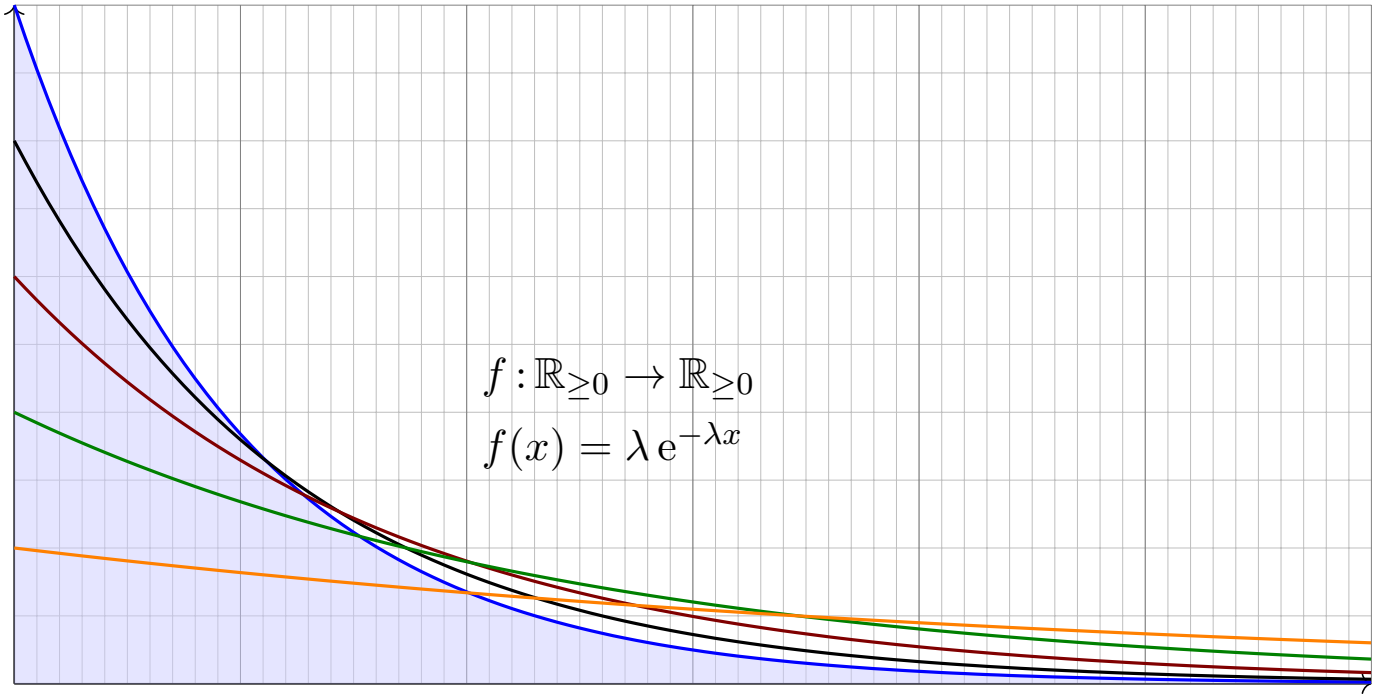
Der erste Integrand ist nicht absolut integrierbar, siehe B417.
Der Median ist offensichtlich 0, aber die Erwartung existiert nicht!
Der zweite Integrand ist nicht-negativ, sein Integral ist unendlich.

⚠ Hier haben Erwartung und Varianz demnach keinen Sinn.

Solche Schwierigkeiten vermeiden wir durch absolute Integrierbarkeit!
Dies garantiert für unsere Integrale alle gewohnten Rechenregeln.

Exponentialverteilung

Für $\lambda > 0$ ist die **Exponentialverteilung** $\mathrm{E}(\lambda)$ gegeben durch die Dichte



Aufgabe: (1) Ist dies eine Wahrscheinlichkeitsverteilung?
(2) Berechnen Sie ihre Erwartung und ihre Varianz.

Exponentialverteilung

Lösung: (1) Ja: Auf $\Omega = \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt $f \geq 0$ und $\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, denn

$$\int_{x=0}^{\infty} \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x} = \Big[-\mathrm{e}^{-\lambda x} \Big]_{x=0}^{\infty} = 1.$$

(2) Die Erwartung berechnen wir mit partieller Integration:

$$\begin{aligned} \mu &= \int_{x=0}^{\infty} x\, \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x \\ &= \Big[-x\, \mathrm{e}^{-\lambda x} \Big]_{x=0}^{\infty} + \int_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x = \Big[-\frac{1}{\lambda}\, \mathrm{e}^{-\lambda x} \Big]_{x=0}^{\infty} = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

Die Varianz berechnen wir ebenso:

$$\begin{aligned} \sigma^2 + \mu^2 &= \int_{x=0}^{\infty} x^2\, \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x = \Big[-x^2\, \mathrm{e}^{-\lambda x} \Big]_{x=0}^{\infty} + \int_{x=0}^{\infty} 2x\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\lambda} \int_{x=0}^{\infty} x\, \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x = \frac{2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Hieraus folgt $\sigma^2 = 1/\lambda^2$.

Wartezeit: The Magic Bus (frei nach *The Who*, 1965)

V245
Ausführung

Every day I get in the queue // To get on the bus that takes me to you.
I'm so nervous, I just sit and smile. // Your house is only another mile.

Aufgabe: Ihre Buslinie fährt streng nach Fahrplan alle 20 Minuten, also zum Beispiel um 6:00, 6:20, 6.40, etc. bis Dienstschluss um 24:00 Uhr.

Sie kommen zufällig irgendwann im Laufe des Tages an die Haltestelle. Wie lang ist Ihre mittlere Wartezeit? (Gemeint ist der Erwartungswert, aber die Formulierung „erwartete Wartezeit" klingt etwas seltsam.)

Lösung: Sei t Ihre Ankunftszeit und t_0 die Abfahrtzeit des letzten Busses, den Sie verpasst haben. Dann gilt $t_0 < t \leq t_0 + 20$ mit Wartezeit $T = 20 - (t - t_0) \in [0, 20[$. Daher ist Ihre mittlere Wartezeit:

$$\overline{T} = \frac{1}{20} \int_{t=t_0}^{t_0+20} \underbrace{20 - (t - t_0)}_{=\,\tau} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{20} \int_{\tau=0}^{20} \tau \,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{20} \left[\frac{\tau^2}{2}\right]_{\tau=0}^{20} = 10$$

Sie müssen also im Durchschnitt $10\mathrm{min}$ auf den nächsten Bus warten.

☺ Diese Rechnung ist völlig plausibel und wird Sie kaum überraschen. Sie dient zum Aufwärmen und als Kontrast für die folgenden Aufgaben.

Wartezeit: The Magic Bus (frei nach *The Who*, 1965)

V246
Ausführung

Aufgabe: Die Exponentialverteilung hat kein Gedächtnis! Genauer, für jede exponentialverteilte Zufallsvariable $X \sim \mathrm{E}(\lambda)$ und $s, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt:

$$\boxed{\mathbf{P}\big(X \geq s + t \,\big|\, X \geq s\big) \;=\; \mathbf{P}\big(X \geq t\big) \;=\; \mathrm{e}^{-\lambda t}}$$

Lösung: Wir nutzen die Definitionen und rechnen es geduldig aus:

$$\mathbf{P}\big(X \geq s\big) \;=\; \int_{x=s}^{\infty} \lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda x} \,\mathrm{d}x \;=\; -\Big[\mathrm{e}^{-\lambda x}\Big]_{x=s}^{\infty} \;=\; \mathrm{e}^{-\lambda s}$$

$$\mathbf{P}\big(\{X \geq s + t\} \cap \{X \geq s\}\big) \;=\; \mathbf{P}\big(X \geq s + t\big) \;=\; \mathrm{e}^{-\lambda(s+t)}$$

$$\mathbf{P}\big(X \geq s + t \,\big|\, X \geq s\big) \;=\; \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(s+t)}}{\mathrm{e}^{-\lambda s}} \;=\; \mathrm{e}^{-\lambda t} \;=\; \mathbf{P}(X \geq t)$$

Die Exponentialverteilung modelliert kontinuierliche Wartezeiten. Sie ist ohne Gedächtnis: Wenn Sie schon bis zur Zeit s gewartet haben, so ist die weitere Wartezeit t davon unabhängig!

Diskrete Analogie ist die geometrische Verteilung T421: „Ich kaufe jeden Tag ein Rubbellos mit Gewinnwkt 1:100. Im Mittel warte ich also 100 Tage auf den nächsten Gewinn. Seit 70 Tagen bin ich ohne Gewinn, also warte ich nur noch 30 Tage." Ist das plausibel? Was sagt die Rechnung?

Wartezeit: The Magic Bus (frei nach *The Who*, 1965)

Aufgabe: Ihr Bus fährt nun nicht mehr nach Fahrplan, sondern zufällig: Der Abstand aufeinanderfolgender Busse sei exponentialverteilt mit Dichte $f(t) = \mathrm{e}^{-t/20}/20$. (Wir messen die Zeit t hier in Minuten.)

(1) Wie lang ist der mittlere Zeitabstand zwischen zwei Bussen?

(2) Sie kommen zufällig irgendwann am Tag an die Haltestelle. Wie lang ist Ihre mittlere Wartezeit? Warum ist das erstaunlich? Können Sie das Ergebnis dennoch möglichst anschaulich erklären?

(3) Diskutieren Sie das diskrete Analogon: An der Wendestelle lässt der Busfahrer zunächst den Vorgänger abfahren. Er würfelt jede Minute eine Zahl $1, \ldots, 20$ (mit einem regulären Ikosaeder), bei einer 1 fährt er los.

(4) Welcher Übergang führt vom diskreten zum kontinuierlichen Modell?

Lösung: (1) Diesen Erwartungswert haben wir bereits berechnet:

$$\mu = \int_{t=0}^{\infty} t\,\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \Big[-t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\Big]_{t=0}^{\infty} + \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \Big[-\frac{1}{\lambda}\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\Big]_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

In unserem Beispiel ist $\lambda = 1/20$, also der mittlere Abstand 20 Minuten.

Wartezeit: The Magic Bus (frei nach *The Who*, 1965)

(2) Nehmen wir zunächst an, Sie haben gerade einen Bus verpasst. Dann ist Ihre mittlere Wartezeit $20\mathrm{min}$ wie zuvor in (1) berechnet.

Allgemeiner Fall: Sie haben den letzten Bus um $s \geq 0$ Minuten verpasst. Nach der obigen Aufgabe hat die Exponentialverteilung kein Gedächtnis. Daher ist Ihre mittlere Wartezeit immer $20\mathrm{min}$! Vielleicht dachten Sie, das sei Ihr besonderes Pech. Jetzt kennen Sie den wahren Grund!

Naiv würde man hoffen, die Wartezeit wäre nur halb so groß, aber nein! Anschaulich erklärt: Mit großer Wkt treffen Sie große Intervalle, leider. Daher warten Sie im Mittel nicht nur $10\mathrm{min}$, sondern tatsächlich $20\mathrm{min}$.

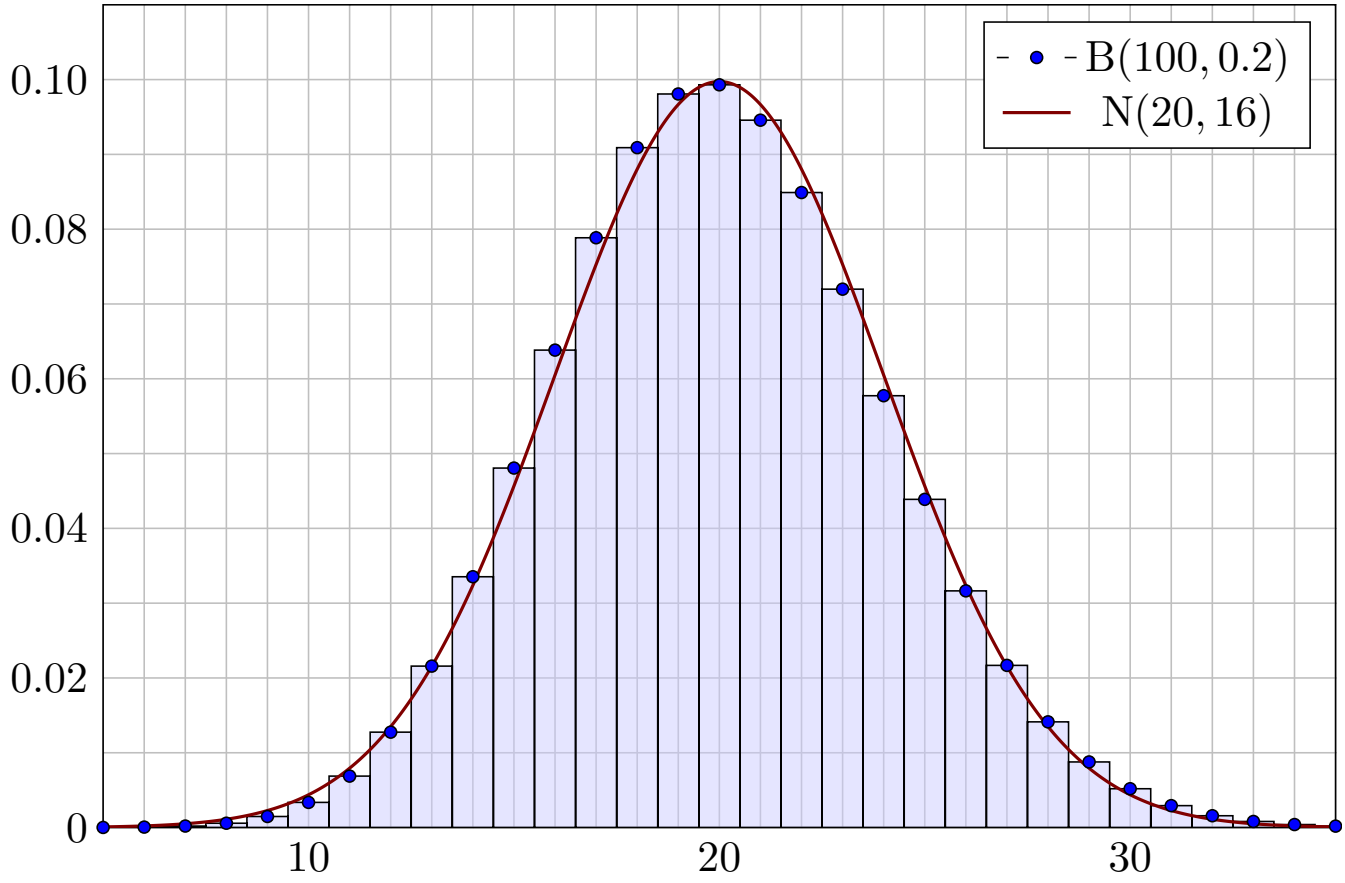
(3) Die Wkt, nach einer Minute loszufahren, ist $p = 1/20$.
Die Wkt, nach zwei Minuten loszufahren, ist $q \cdot p$ mit $q := 1 - p$.
Die Wkt, nach k Minuten loszufahren, ist dementsprechend $q^{k-1} \cdot p$.
Dies ist die geometrische Verteilung $\mathrm{G}(q)$. Der mittlere Abstand ist $1/p$, also 20 Minuten. In diesem diskreten Modell gilt dasselbe wie in (2).

(4) Lassen wir den Zeitschritt Δt gegen Null gehen, so erhalten wir aus der geometrischen Verteilung die Exponentialverteilung, siehe V203.

Vergleich von Binomial- und Normalverteilung

V301
Ausführung

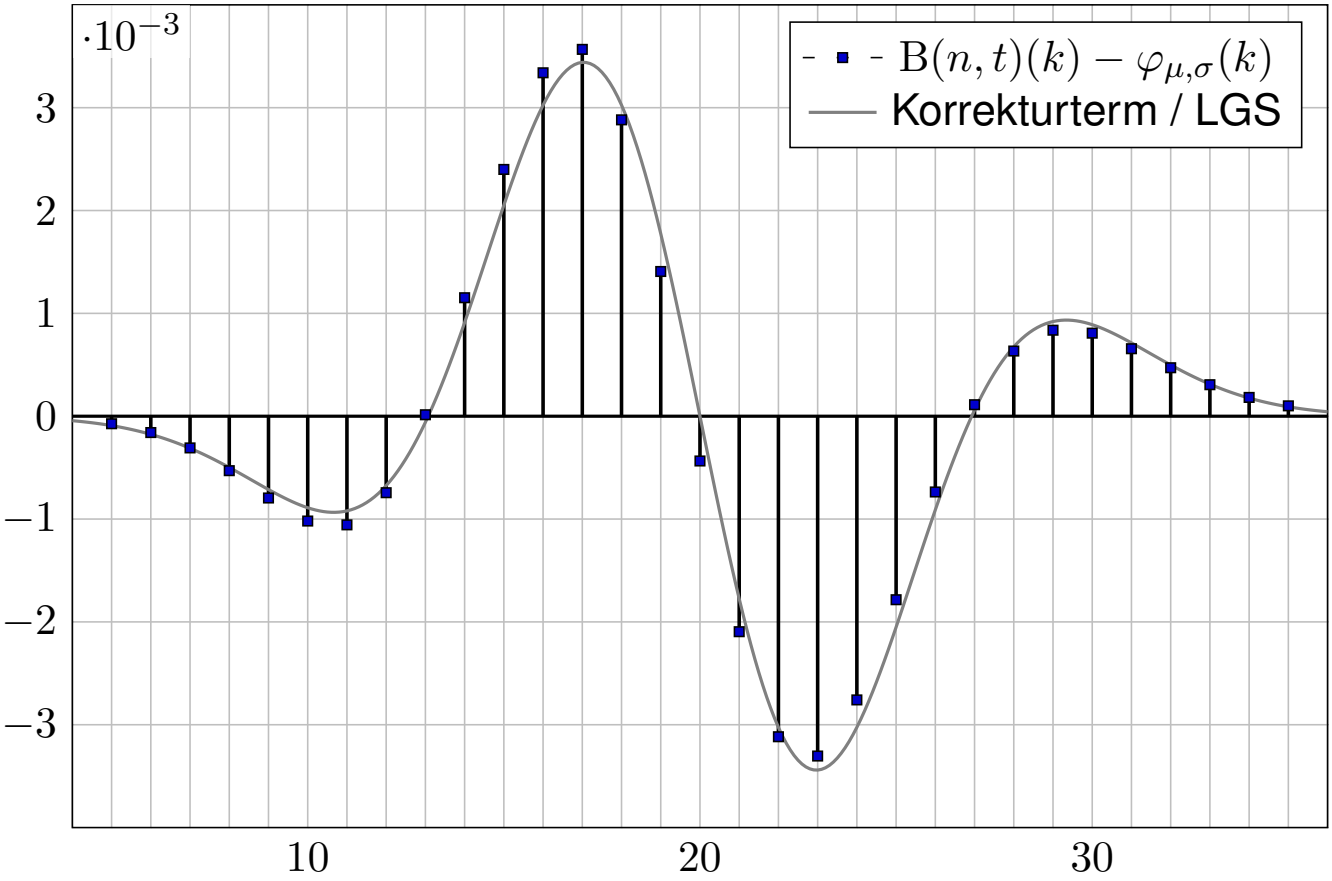
Beispiel: $n = 100$ und $t = 0.2$, also $\mu = nt = 20$ und $\sigma^2 = nt(1-t) = 16$



Vergleich von Binomial- und Normalverteilung

V302
Ausführung

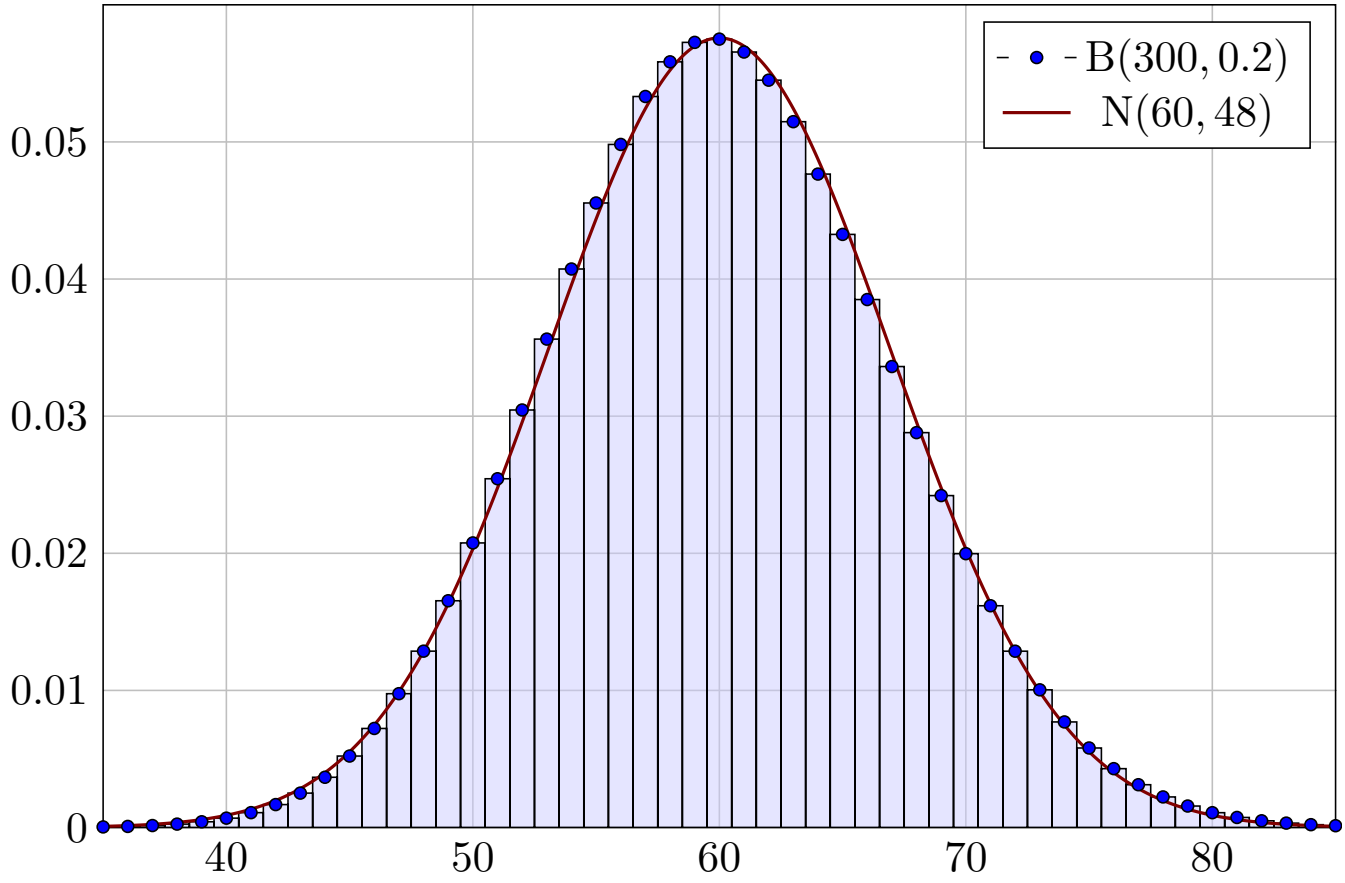
Wie gut ist die Näherung? Punktweise bis auf 0.004 genau!



Vergleich von Binomial- und Normalverteilung

V303
Ausführung

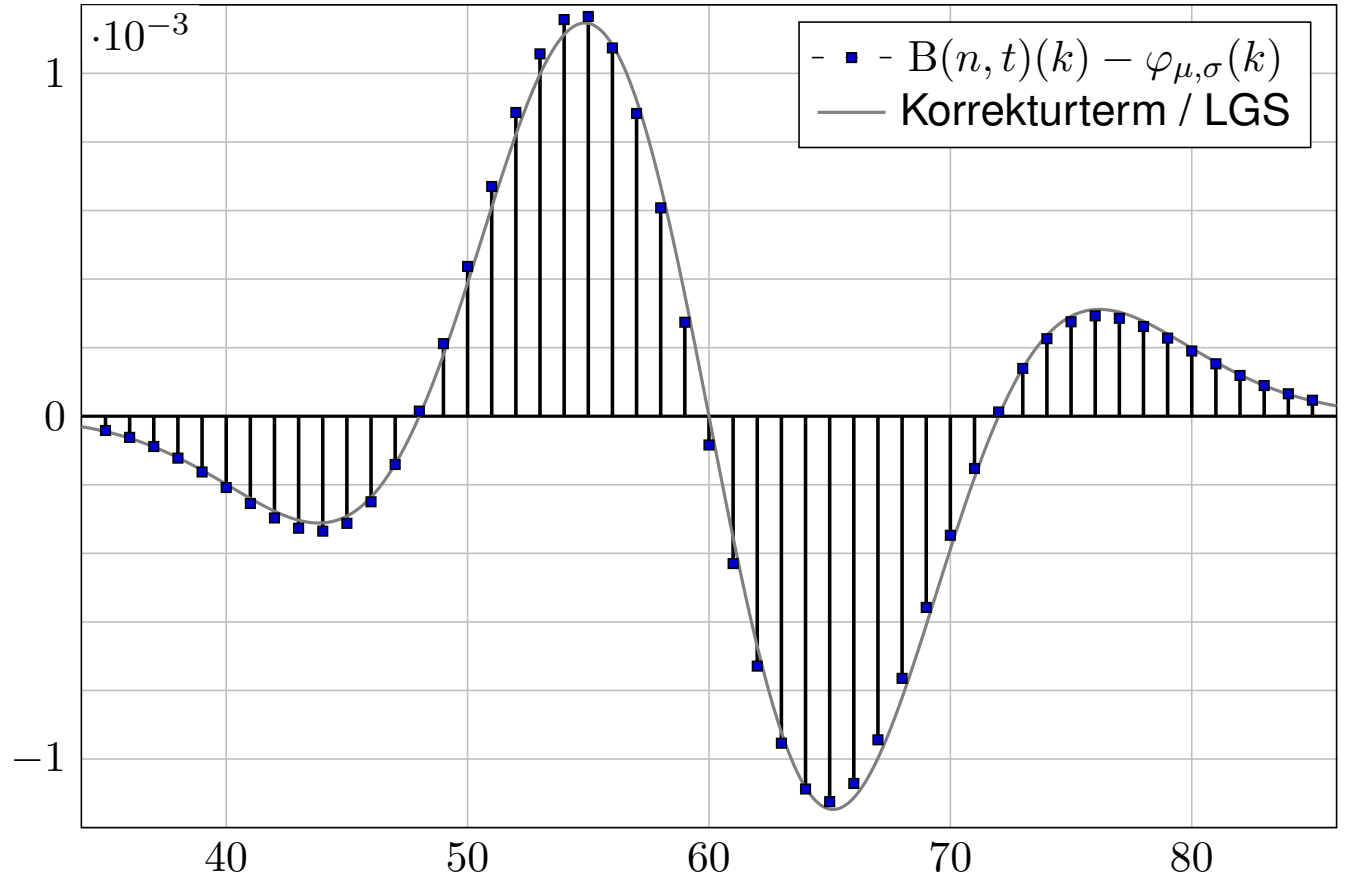
Beispiel: $n = 300$ und $t = 0.2$, also $\mu = nt = 60$ und $\sigma^2 = nt(1-t) = 48$



Vergleich von Binomial- und Normalverteilung

V304
Ausführung

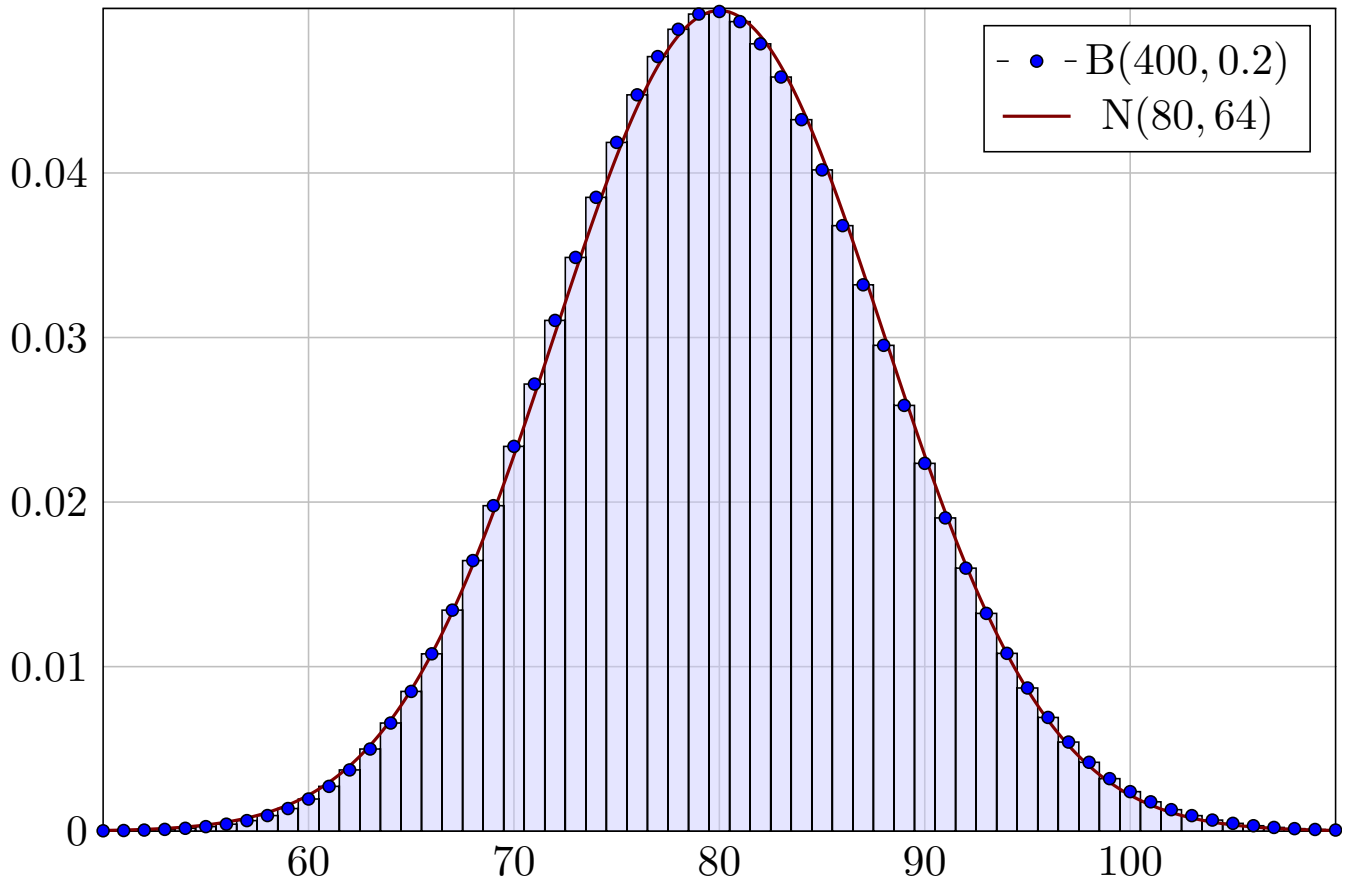
Wie gut ist die Näherung? Punktweise bis auf 0.0012 genau!



Vergleich von Binomial- und Normalverteilung

V305
Ausführung

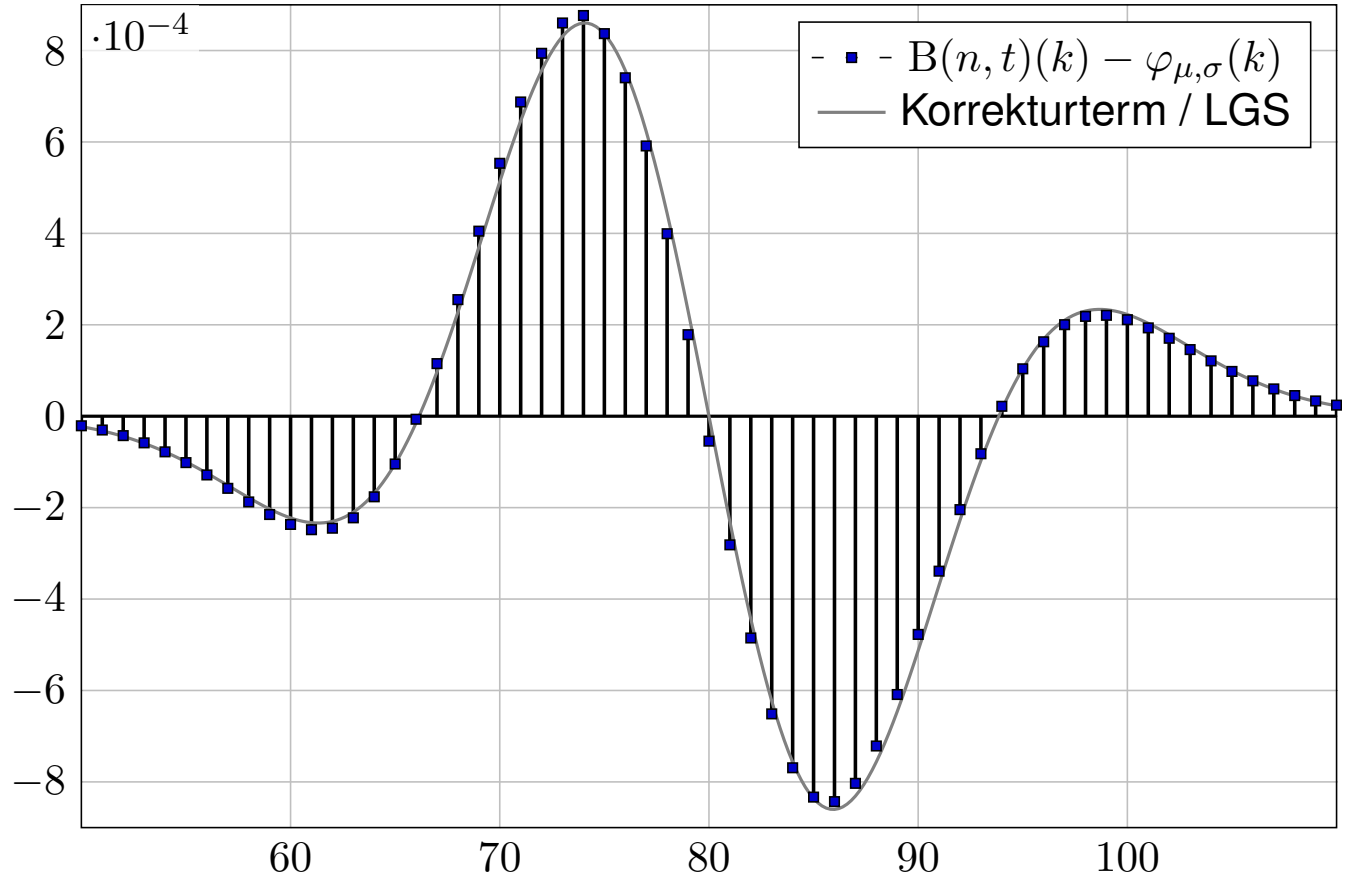
Beispiel: $n = 400$ und $t = 0.2$, also $\mu = nt = 80$ und $\sigma^2 = nt(1-t) = 64$



Vergleich von Binomial- und Normalverteilung

V306
Ausführung

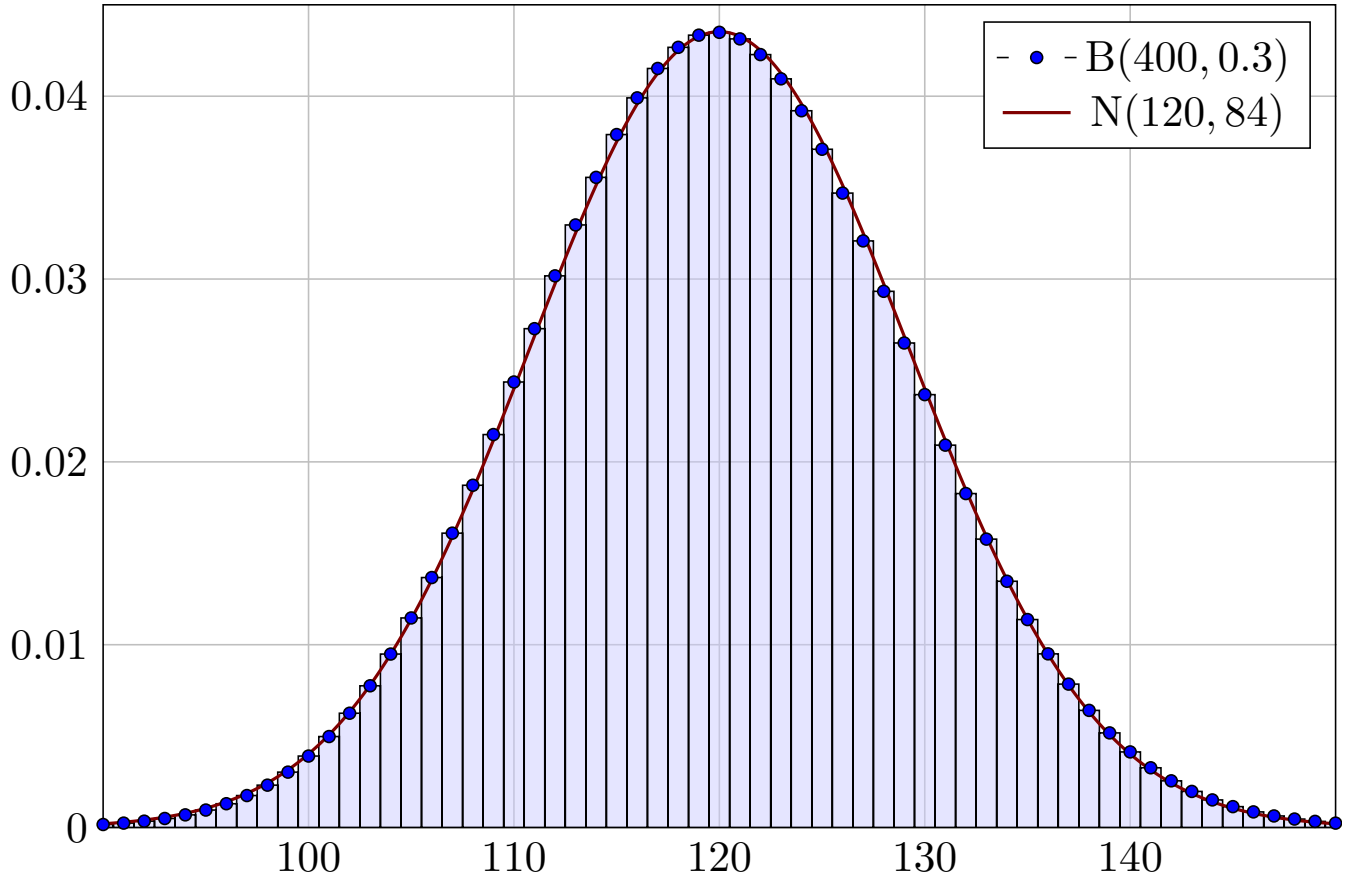
Wie gut ist die Näherung? Punktweise bis auf 0.0009 genau!



Vergleich von Binomial- und Normalverteilung

V307
Ausführung

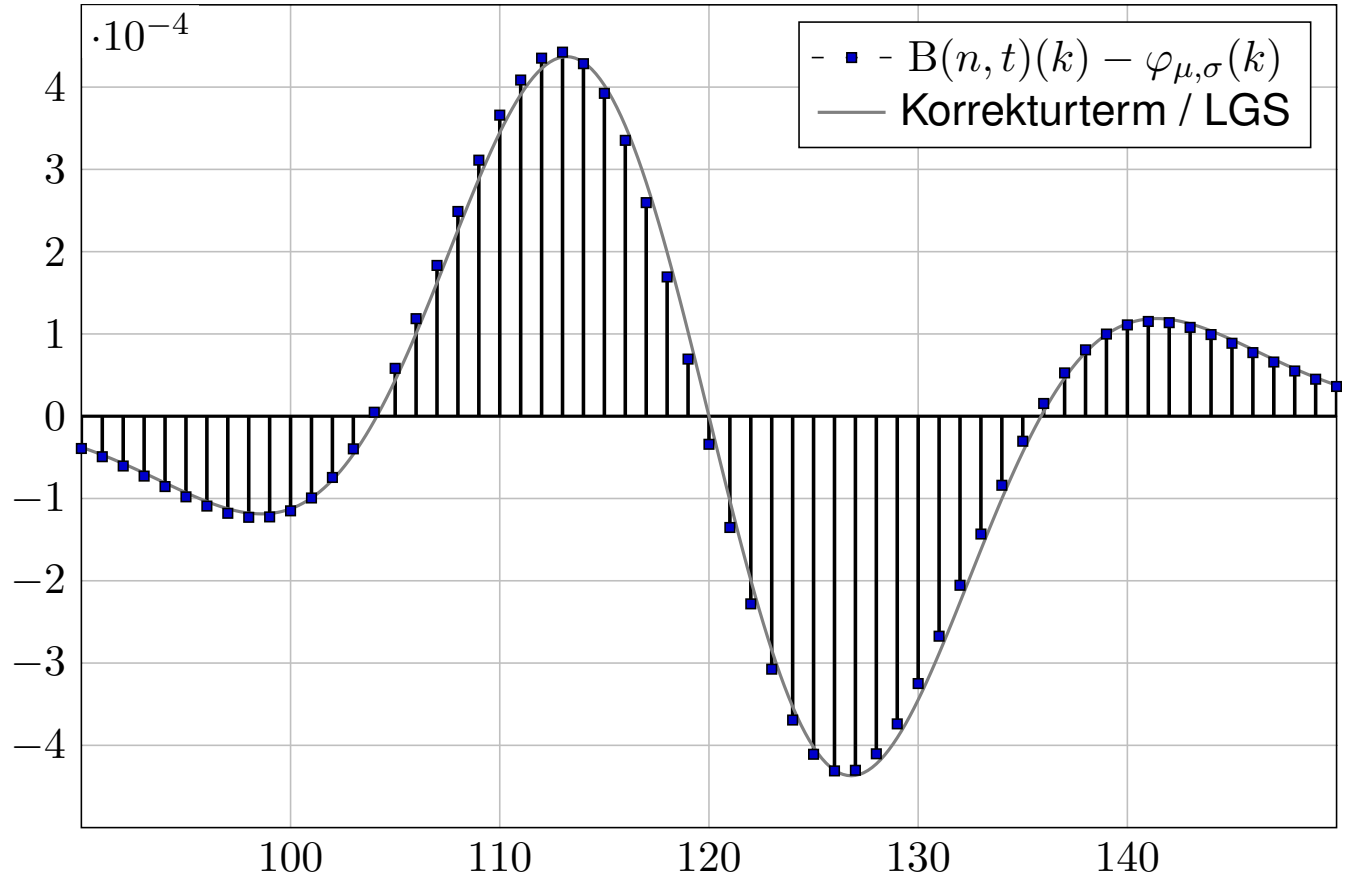
Beispiel: $n = 400$ und $t = 0.3$, also $\mu = nt = 120$ und $\sigma^2 = nt(1-t) = 84$



Vergleich von Binomial- und Normalverteilung

V308
Ausführung

Wie gut ist die Näherung? Punktweise bis auf 0.0005 genau!



Übergang von Binomial- zu Normalverteilung

☺ Obige Beispiele illustrieren die Annäherung der Binomial- an die Normalverteilung. Wir können sie nun als Grenzwert nachrechnen.

Dank Stirling–Formel und Taylor–Entwicklung gilt (siehe unten)

$$\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \approx \frac{\mathrm{e}^{-\frac{(k-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \approx \int_{k-1/2}^{k+1/2} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}x.$$

Die Stetigkeitskorrektur um $-1/2$ bzw. $+1/2$ ist hier sehr anschaulich. Mühsame Summen ersetzen wir so durch bequemere Integrale:

$$\sum_{k=a}^{b} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \approx \int_{x=a-1/2}^{b+1/2} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}x = \int_{\xi=\alpha}^{\beta} \frac{\mathrm{e}^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}\xi$$

Die Substitution $\xi = (x-\mu)/\sigma$ führt zur Standard-Normalverteilung.

☺ Wir müssen daher nur in einer einzigen Tabelle nachschlagen!
Die Grenzen sind dabei $\alpha = (a - 1/2 - \mu)/\sigma$ und $\beta = (b + 1/2 - \mu)/\sigma$.
Die Stetigkeitskorrektur um $-1/2$ bzw. $+1/2$ ist auch hier anschaulich.

Übergang von Binomial- zu Normalverteilung

Für $n \in \mathbb{N}$ und $0 < t < 1$ sei $\mu = nt$ und $\sigma = \sqrt{nt(1-t)}$. Sei $k = k_n$ ein Folge in $\mathbb{N}$.
Für $n \to \infty$ gelte $(k-\mu)/\sigma \to \xi$, somit insbesondere $k/n \to t$, jeweils gelesen als $k = k_n$.
Dank Stirling–Formel $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ gilt dann:

$$\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \approx \sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}} \cdot \left(\frac{nt}{k}\right)^k \left(\frac{n(1-t)}{n-k}\right)^{n-k} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \mathrm{e}^{-\xi^2/2}$$

Zur Berechnung dieses Grenzwertes nutzen wir die Potenzreihe des natürlichen Logarithmus:

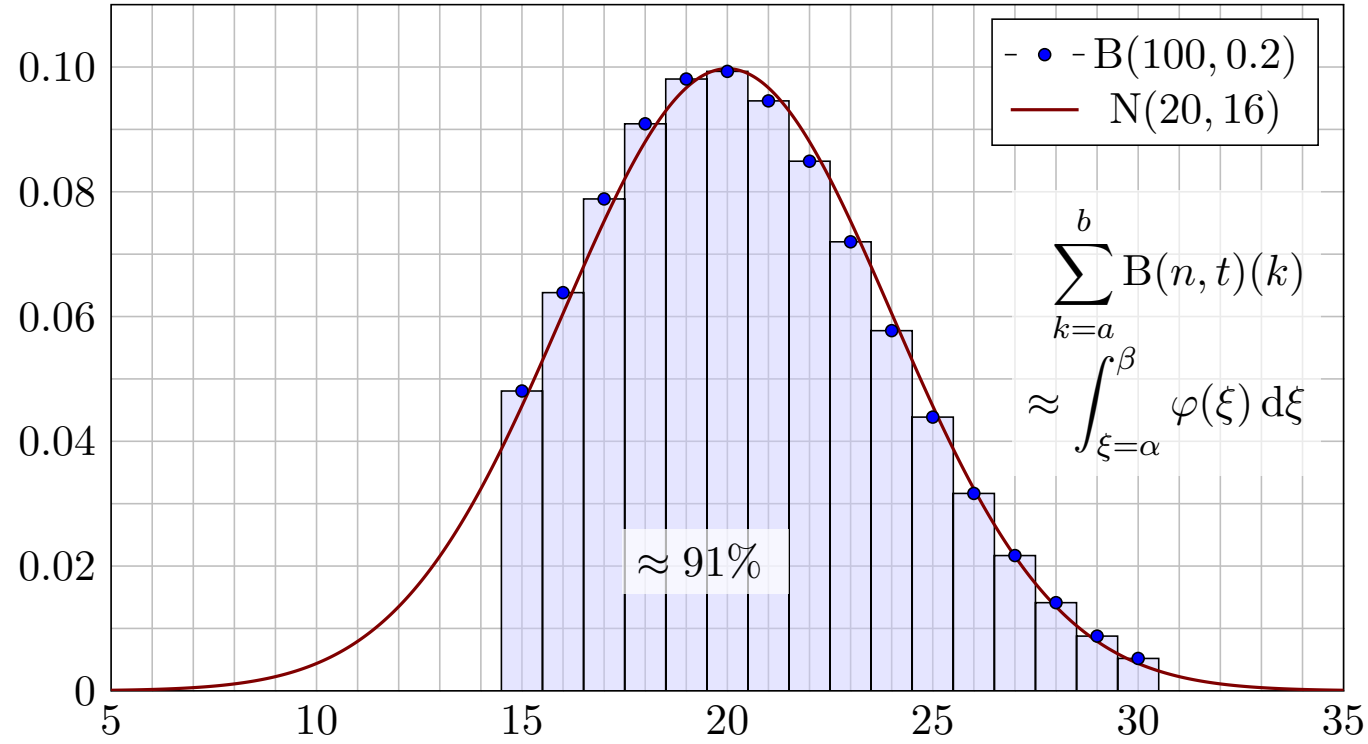
$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots \quad \text{für } |z| < 1$$

Bis Grad 2 schreiben wir kurz $\ln(1+z) \approx z - z^2/2$. Hieraus erhalten wir

$$\begin{aligned}
\left(\frac{nt}{k}\right)^k \left(\frac{n(1-t)}{n-k}\right)^{n-k} &= \left(1 + \frac{nt-k}{k}\right)^k \left(1 - \frac{nt-k}{n-k}\right)^{n-k} \\
&= \exp\left[k \ln\left(1 + \frac{nt-k}{k}\right) + (n-k)\ln\left(1 - \frac{nt-k}{n-k}\right)\right] \\
&\approx \exp\left[(nt-k) - \frac{(nt-k)^2}{2k} - (nt-k) - \frac{(nt-k)^2}{2(n-k)}\right] \\
&= \exp\left[-\frac{(nt-k)^2 n}{2k(n-k)}\right] = \exp\left[-\frac{(k-nt)^2}{2n(k/n)(1-k/n)}\right] \to \mathrm{e}^{-\xi^2/2}
\end{aligned}$$

Übergang von Binomial- zu Normalverteilung

Wir **approximieren** mühsame Summen durch bequemere Integrale:



Beispiel für $\mathrm{B}(100, 0.2)$ mit Summationsgrenzen $a = 15$ und $b = 30$, Integration von 14.5 bis 30.5, normiert also $\alpha = -5.5/4 = -1.375$ und $\beta = 10.5/4 = 2.625$. Das Integral $\int_\alpha^\beta \varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ entnehmen wir der Tabelle.

Übergang von Binomial- zu Normalverteilung

Wozu nützt die **Näherung** der Binomial- durch die Normalverteilung? Die Binomialverteilung $\mathrm{B}(n,t)$ ist für große n mühsam zu summieren. Die Normalverteilung hingegen ist leicht, und Φ liegt tabelliert vor. V116

$$\sum_{k=a}^{b} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \approx \int_{\xi=\alpha}^{\beta} \frac{\mathrm{e}^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}\xi = \Big[\Phi\Big]_\alpha^\beta$$

Hierzu benötigen wir nur Erwartung $\mu = nt$ und Varianz $\sigma^2 = nt(1-t)$ und berechnen damit $\alpha = (a - 1/2 - \mu)/\sigma$ und $\beta = (b + 1/2 - \mu)/\sigma$. Der natürlich auftretende Summand $\mp 1/2$ heißt **Stetigkeitskorrektur**. Er erklärt sich aus obiger Graphik. Denken Sie insbesondere an $a = b$!

Die Binomialverteilung $\mathrm{B}(n,t)$ können wir somit durch die einfachere Normalverteilung approximieren. Wann ist diese Näherung gut genug? Die Faustregel ist „n soll groß sein“ oder „$\sigma^2 = nt(1-t)$ soll groß sein“. Naja... Wie groß ist groß genug? Wie klein ist dann noch der Fehler?

Die genaue Analyse des Fehlers ist leider mühsam. Ich gebe hier ein praktisches Ergebnis von James Uspensky (1937) in vereinfachter Form.

Der lokale Grenzwertsatz (LGS)

Satz V3A: de Moivre 1733, Laplace 1812, Uspensky 1937

Für die Binomialverteilung $\mathrm{B}(n,t)$ gilt $\mu = nt$ und $\sigma = \sqrt{nt(1-t)}$.
Sie ähnelt der Normalverteilung: $\mathrm{B}(n,t) \approx \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$. Genauer gilt:

$$\sum_{k=a}^{b} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \quad = \quad \int_{\xi=\alpha}^{\beta} \frac{\mathrm{e}^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}\xi \quad + \quad \delta$$

Die Grenzen sind hier $\alpha = (a - 1/2 - \mu)/\sigma$ und $\beta = (b + 1/2 - \mu)/\sigma$.
(1) Für $\sigma \geq 5$ ist der Fehler δ beschränkt durch $|\delta| < \frac{|1-2t|}{10\sigma} + \frac{1}{3\sigma^2} \leq \frac{1}{6\sigma}$.
(2) Genauer gilt $\delta = \kappa + \varepsilon$ mit Korrekturterm κ und restlichem Fehler ε:

$$\kappa = \frac{1-2t}{6\sigma\sqrt{2\pi}} \Big[(1-\xi^2)\,\mathrm{e}^{-\xi^2/2}\Big]_{\alpha}^{\beta}, \quad |\kappa| < \frac{|1-2t|}{10\sigma}, \quad |\varepsilon| < \frac{1}{3\sigma^2}.$$

$\sigma \geq 5$	$\sigma \geq 8$	$\sigma \geq 13$	$\sigma \geq 19$	$\sigma \geq 26$
$\lvert\delta\rvert < 0.034$	$\lvert\delta\rvert < 0.0178$	$\lvert\delta\rvert < 0.0097$	$\lvert\delta\rvert < 0.0062$	$\lvert\delta\rvert < 0.0043$
$\lvert\varepsilon\rvert < 0.014$	$\lvert\varepsilon\rvert < 0.0053$	$\lvert\varepsilon\rvert < 0.0020$	$\lvert\varepsilon\rvert < 0.0010$	$\lvert\varepsilon\rvert < 0.0005$

Der lokale Grenzwertsatz (LGS)

Für $n \to \infty$ gilt $\sigma = \sqrt{nt(1-t)} \to \infty$, also $\delta \to 0$, und somit

$$\sum_{k=\lceil \mu+\alpha\sigma \rceil}^{\lfloor \mu+\beta\sigma \rfloor} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \quad \to \quad \int_{\xi=\alpha}^{\beta} \frac{\mathrm{e}^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}\xi.$$

Meist wird diese schwächere Aussage lokaler Grenzwertsatz genannt.
Außer $\delta \to 0$ macht sie keine quantitative Aussage über den Fehler.
In der Praxis rechnen wir nicht für $n \to \infty$, sondern mit festem $n \in \mathbb{N}$.
Für praktische Rechnungen ist daher die Fehlerkontrolle wesentlich:

$$|\delta| < \frac{1}{6\sigma} = \frac{1}{6\sqrt{nt(1-t)}} \quad \searrow \quad 0$$

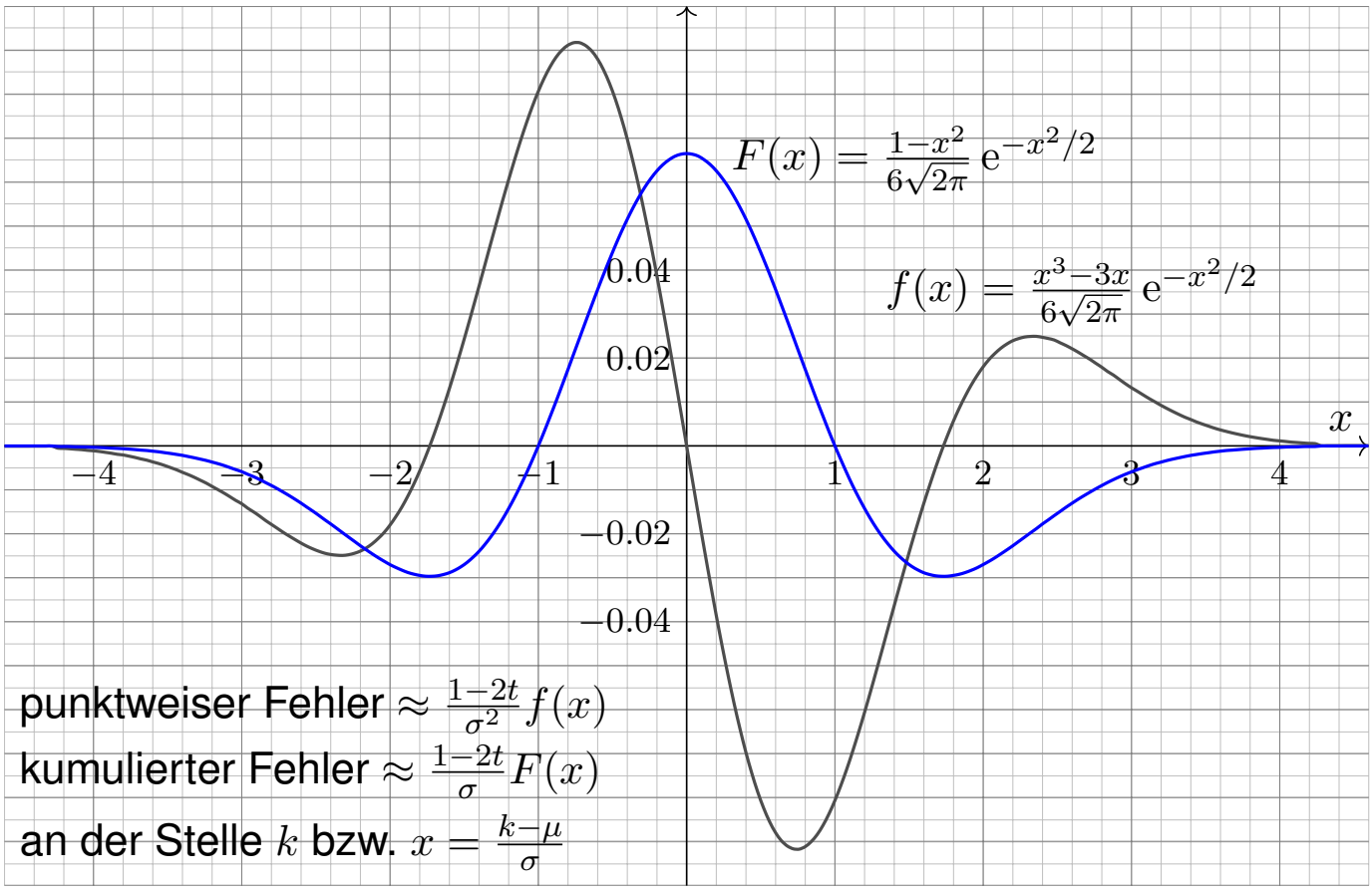
Wenn wir zum Integral den Korrekturterm κ hinzuaddieren, so wird der Approximationsfehler noch um eine Größenordnung kleiner, nämlich:

$$|\varepsilon| < \frac{0.15 + 0.18|1-2t|}{\sigma^2} < \frac{1}{3\sigma^2} = \frac{1}{3nt(1-t)}$$

☺ Für $t = 1/2$ oder $\alpha = -\beta$ gilt $\kappa = 0$ und somit $|\delta| < 1/(3\sigma^2)$. In diesen Fällen ist die Näherung durch die Normalverteilung besonders genau.

Der lokale Grenzwertsatz (LGS)

Form des Korrekturterms $\kappa(\alpha,\beta) = \frac{1-2t}{\sigma}\big[F(\beta) - F(\alpha)\big]$ wie illustriert:



Der lokale Grenzwertsatz (LGS)

☺ Gilt der Fehler als klein genug, so können wir die mühsame Summe der Binomialverteilung (links) durch das wesentlich bequemere Integral der Normalverteilung (rechts) ersetzen: Dieses liegt tabelliert vor. V116

Die Gleichung des Satzes (mit Fehler δ) können wir vergröbern zu:

$$\sum_{k=a}^{b} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \quad\approx\quad \int_{\xi=\alpha}^{\beta} \frac{\mathrm{e}^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}\xi \quad=\quad \Big[\Phi\Big]_{\alpha}^{\beta}$$

Das ist eine nützliche Faustformel, leider ohne jegliche Fehlerkontrolle. In der Praxis vernachlässigt man meist den Approximationsfehler δ und beruft sich erfahrungsgemäß darauf, dass σ schon „groß genug“ sei.

☺ Möchte man ein möglichst genaues Ergebnis mit garantierter Fehlerschranke, so nimmt man die Grenzen mit der Stetigkeitskorrektur $\mp 1/2$.

Statt der Grenzen $\alpha = (a - 1/2 - \mu)/\sigma$ und $\beta = (b + 1/2 - \mu)/\sigma$ nutzt man auch gerne $(a-\mu)/\sigma$ und $(b-\mu)/\sigma$. Das ist bequem, aber ungenauer. Meist ist diese Vereinfachung gut genug, insbesondere bei großem σ. Die gröberen Grenzen nutzen wir im zentralen Grenzwertsatzes W1D.

Erstes Anwendungsbeispiel

Aufgabe: Ein Experiment mit Trefferwkt 0.2 wird 400 mal unabhängig wiederholt. Mit welcher Wkt ergibt sich eine Trefferzahl von 60 bis 90? (Ergebnis in Prozent, gerundet zum nächsten Prozentpunkt)

Lösung: Die Trefferzahl ist $\mathrm{B}(n,t)$–verteilt mit $n = 400$ und $t = 0.2$. Dies ist die exakte Verteilung, die wir nun numerisch nähern wollen. Erwartung $\mu = nt = 80$, Varianz $\sigma^2 = nt(1-t) = 64$, Streuung $\sigma = 8$.

Grob: Trefferzahl 60 bis 90 entspricht $\mu - 2.5\sigma$ bis $\mu + 1.25\sigma$. Also

$$p \;=\; \sum_{k=60}^{90} \binom{400}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{400-k} \;\approx\; \int_{-2.5}^{1.25} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dank der Symmetrie $\varphi(-t) = \varphi(t)$ gilt für das Integral

$$p \;\approx\; \int_{-2.5}^{1.25} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_{t=0}^{2.5} \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \int_{t=0}^{1.25} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Die Tabelle liefert $p \approx 0.49379 + 0.39435 = 0.88814$, also $p \approx 89\%$.
Was ist hier schludrig? Schlechte Grenzen und keine Fehlerschranke!

Erstes Anwendungsbeispiel

Fein: Genauer ist die im Satz angegebene Näherung $p \approx \int_\alpha^\beta \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ mit $\alpha = (60 - 0.5 - 80)/8 \approx -2.56$ und $\beta = (90 + 0.5 - 80)/8 \approx 1.31$.

$$p \;\approx\; \int_{-2.56}^{1.31} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_{t=0}^{2.56} \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \int_{t=0}^{1.31} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Die Tabelle liefert $p \approx 0.49477 + 0.40490 = 0.89967$, also $p \approx 90\%$.

Güte: Wie genau ist diese Approximation? Laut Satz gilt:

$$|\delta| < \frac{1}{6\sigma} = \frac{1}{48} \approx 0.02$$

Diese Schranke ist noch zu grob. Wir schauen daher genauer hin:

$$\kappa \approx 0.00047 \quad \text{und} \quad |\varepsilon| < \frac{1}{3\sigma^2} = \frac{1}{192} \lessapprox 0.00521$$

Unsere Approximation $p \approx 0.89967$ hat also einen Fehler $|\delta| < 0.00568$.
Damit erfüllt der Wert $p \approx 90\%$ die geforderte Genauigkeit 0.01.

Exakt: Mühsames Aufsummieren ergibt $p = 0.89982\ldots$, also $p \approx 90\%$.

Zweites Anwendungsbeispiel

Aufgabe: Ein Experiment mit Trefferwkt 1% wird 3600 mal unabhängig wiederholt. Mit welcher Wkt ergibt sich eine Trefferzahl von 36 bis 46? (Ergebnis in Prozent, gerundet zum nächsten Prozentpunkt)

Lösung: Die Trefferzahl ist $\mathrm{B}(n,t)$–verteilt mit $n = 3600$ und $t = 0.01$. Dies ist die exakte Verteilung, die wir nun numerisch nähern wollen.

Wir finden Erwartung $\mu = nt = 36$, Varianz $\sigma^2 = nt(1-t) = 35.64$, Streuung $\sigma \approx 5.97$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit

$$p \;=\; \sum_{k=36}^{46} \binom{3600}{k} \Big(\frac{1}{100}\Big)^k \Big(\frac{99}{100}\Big)^{3600-k} \;\approx\; \int_{t=\alpha}^{\beta} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

mit $\alpha = -0.5/5.97 \approx -0.084$ und $\beta = 10.5/5.97 \approx 1.759$. Demnach gilt

$$p \;\approx\; \int_{-0.084}^{1.759} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_{t=0}^{0.084} \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \int_{t=0}^{1.759} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Für die dritte Dezimalstelle interpolieren wir zwischen den Nachbarn. Interpolation der Tabelle liefert $p \approx 0.03347 + 0.46071 = 0.49418$.

Zweites Anwendungsbeispiel

Güte: Laut Satz ist der Approximationsfehler $|\delta| < 1/(6\sigma) \lessapprox 0.028$. Damit könnnen wir die gewünschte Genauigkeit noch nicht garantieren.

Der Korrekturterm ist $\kappa \approx -0.01567$, also korrigieren wir zu

$$p \;\approx\; 0.49418 - 0.01567 \;=\; 0.47851$$

Dann bleibt nur noch $|\varepsilon| < 1/(3\sigma^2) \lessapprox 0.00936$. Wir schließen $p \approx 48\%$.

In diesem Beispiel ist die Streuung $\sigma \approx 6$ sehr klein, und die Näherungen des lokalen Grenzwertsatzes daher entsprechend grob. Auch sind sowohl die Trefferwahrscheinlichkeit $t = 0.01$ als auch die Integrationsgrenzen α und β besonders unsymmetrisch, und so ist der Korrekturterm κ hier recht groß. Die Addition von κ bringt eine spürbare Verbesserung:

Die erste Näherung $p \approx 0.49418$ ist deutlich schlechter als die um κ korrigierte Näherung $p \approx 0.47851$. Nur letztere erfüllt die geforderte Genauigkeit von 0.01. Auch gerundet hätten wir zunächst 49% erhalten, aber die tatsächliche Wahrscheinlichkeit liegt knapp unter 48%:

Exakt: Mühsames Aufsummieren ergibt $p = 0.47880\ldots$, also $p \approx 48\%$.

☺ Egal ob grob oder genau, der Satz stellt alle Werkzeuge bereit. Lesen Sie den Satz genau, er ist wunderbar explizit und hilfreich.

Drittes Anwendungsbeispiel

Aufgabe: Wie wahrscheinlich ist es, dass bei 600maligem Würfeln die Augenzahl 6 zwischen einschließlich 90 und 110 mal eintritt? Bestimmen Sie diese Wahrscheinlichkeit auf 0.005 genau.

Lösung: Die Anzahl ist $\mathrm{B}(n,t)$–verteilt mit $n = 600$ und $t = 1/6$. Dies ist die exakte Verteilung, die wir nun numerisch nähern wollen.

Wir finden Erwartung $\mu = nt = 100$, Varianz $\sigma^2 = nt(1-t) = 500/6$, Streuung $\sigma = 10\sqrt{5/6} \approx 9.13$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit

$$p \;=\; \sum_{k=90}^{110} \binom{600}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{600-k} \;\approx\; \int_{t=\alpha}^{\beta} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

mit $\alpha = (90 - 0.5 - 100)/9.13 \approx -1.15$ und $\beta \approx 1.15$. Demnach gilt

$$p \;\approx\; \int_{-1.15}^{1.15} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \;=\; 2\int_{t=0}^{1.15} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \;\approx\; 2 \cdot 0.37493 = 0.74986.$$

Also $p \approx 75\%$. (Plausibel, denn etwas mehr als die 1σ–Umgebung.)

Drittes Anwendungsbeispiel

Güte: Wie genau ist die Approximation in diesem Fall?

Dank der Symmetrie von α und β verschwindet der Korrekturterm.

Wegen $\kappa = 0$ bleibt hier nur ein besonders kleiner Fehler von

$$|\delta| = |\varepsilon| < \frac{1}{3\sigma^2} = \frac{2}{500} = 0.004.$$

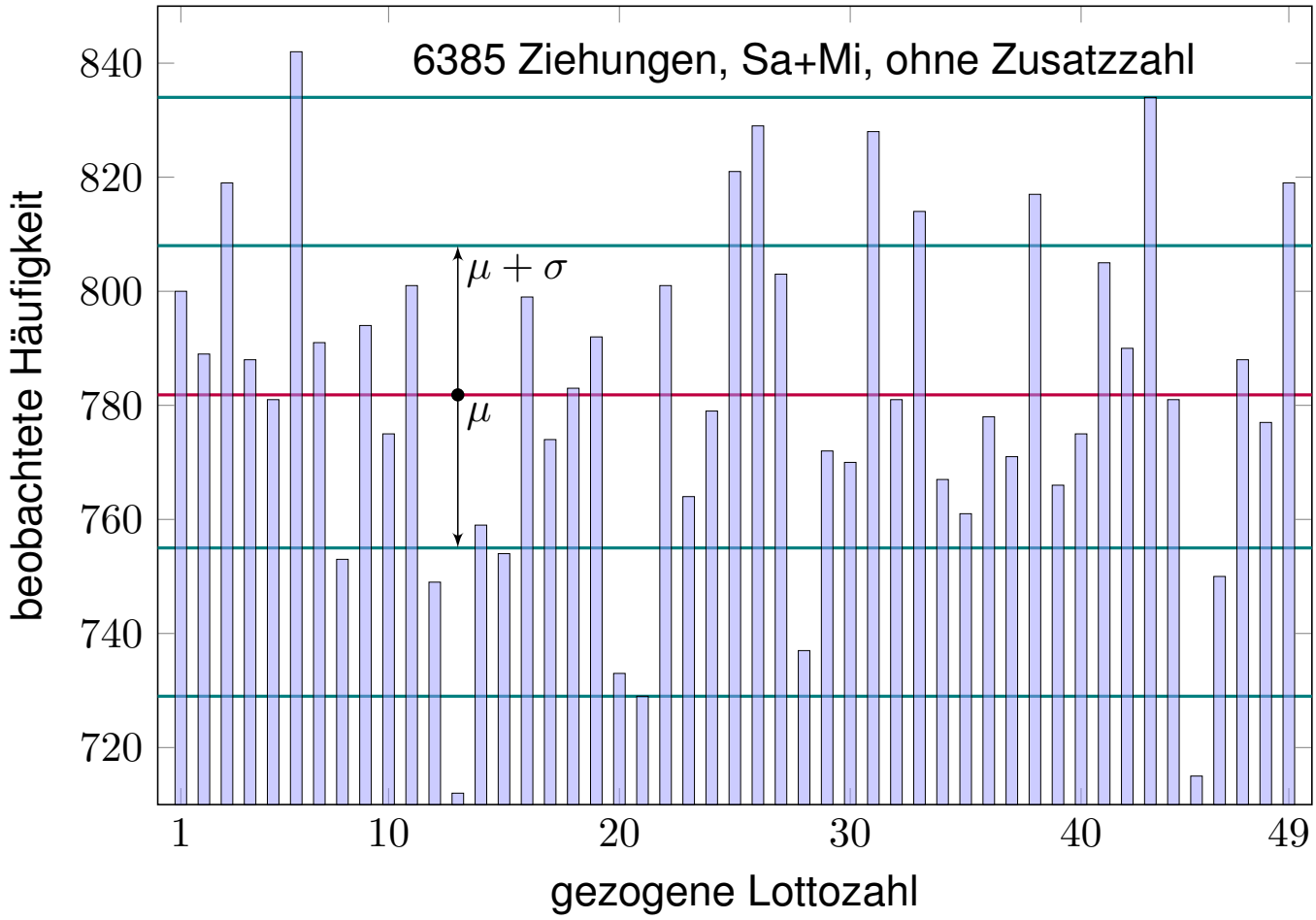
Somit ist unsere Approximation $p \approx 75\%$ auf 0.005 genau.

Exakt: Mühsames Aufsummieren ergibt $p = 0.75012\ldots$.

Wir sehen in diesen Beispielen, dass die Approximation meist noch besser ist, als die allgemeine Fehlerabschätzung des Satzes vermuten lässt. Das ist auch verständlich: Es handelt sich nur um eine *obere Schranke* für den Fehler, aber sie ist doch recht nah an der wirklichen Abweichung. Die exakten Werte liefern immer einen Fehler unter dieser Schranke, manchmal deutlich darunter.

Der Nutzen des Satzes ist über die Konvergenz für $n \to \infty$ hinaus vor allem die bequeme und aussagekräftige Fehlerschranke für endliches n. Damit können Sie schnell und sicher abschätzen, ob die gewünschte Genauigkeit gewährleistet ist. Ist eine höhere Genauigkeit nötig, so müssen Sie beim Fehler genauer hinschauen und gegebenenfalls eine präzisere Rechnung nutzen, notfalls aufwändig $\mathrm{B}(n,t)$ aufsummieren. Alle hierzu nötigen Informationen liegen explizit vor.

Sind die Lotto-Zahlen verdächtig?



Sind die Lotto-Zahlen verdächtig?

Die Graphik zeigt die Statistik über 6385 Lotto-Ziehungen 6 aus 49.
Aufgabe: Ist die geringe Ziehungshäufigkeit der Zahl 13 verdächtig?

Lösung: Wir untersuchen $n = 6385$ Ziehungen von je 6 Zahlen.
Die Ziehungswahrscheinlichkeit jeder Zahl ist $t = \binom{48}{5} / \binom{49}{6} = 6/49$.
Bei ordnungsgemäßer Ziehung ist jede Anzahl $\mathrm{B}(n, t)$–verteilt.

Erwartung $\mu = nt \approx 781.84$
Varianz $\sigma^2 = nt(1-t) \approx 686.10$
Streuung $\sigma \approx 26.19$

Die 1σ–Umgebung $[755, 808]$ enthält 31 der 49 Anzahlen, also 63%.
Die 2σ–Umgebung $[729, 834]$ enthält 46 der 49 Anzahlen, also 94%.
Die 3σ–Umgebung $[703, 860]$ enthält 49 der 49 Anzahlen, also 100%.

☺ Diese Verteilung entspricht der erwarteten 68–95–99–Regel.
Schwankungen dieser Größenordnung sind normal. Im Gegenteil, weniger wäre verdächtig. Also doch keine Lotto-Verschwörung.
Titanic (26.10.2011): *„Experten warnen: Lottozahlen oft reiner Zufall!“*

Wahrscheinlichkeitsräume

Mit Kolmogorovs Axiomen (V1C) fixieren wir die grundlegenden Forderungen für WMaße, woraus alle weiteren Rechenregeln folgen:

Ein **Wahrscheinlichkeitsraum** $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ besteht aus

- einer **Ergebnismenge** Ω,
- einer **Ereignismenge** $\mathscr{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ und
- einem **Wahrscheinlichkeitsmaß** $\mathbf{P} : \mathscr{A} \to [0,1]$,

mit folgenden grundlegenden Eigenschaften:

1. **Normierung:** Es gilt $\Omega \in \mathscr{A}$ und $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.
2. **Komplemente:** Aus $A \in \mathscr{A}$ folgt $(\Omega \setminus A) \in \mathscr{A}$.
3. **σ–Additivität:** Aus $A_0, A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}$ folgt $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathscr{A}$, sowie

$$\mathbf{P}\Big(\bigsqcup_{k=0}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(A_k) \quad \text{wenn } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j.$$

Die Bezeichnung „σ“ steht abkürzend für „abzählbar“. Wir nennen $\mathscr{A}$ eine **σ–Algebra** und hierauf $\mathbf{P} : \mathscr{A} \to [0,1]$ ein **σ–additives Maß**.

Wichtigste Beispiele sind diskrete und kontinuierliche WRäume. Auch Mischungen aus diskret und kontinuierlich sind möglich.

Diskrete und kontinuierliche WRäume

Eine **diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung** auf Ω ist eine Funktion

$$p : \Omega \to [0,1] \quad \text{mit Gesamtmasse} \quad \sum_{x \in \Omega} p(x) = 1.$$

Diese definiert ein **diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß**

$$\mathbf{P} : \mathfrak{P}(\Omega) \to [0,1] \quad \text{durch} \quad \mathbf{P}(A) := \sum_{x \in A} p(x).$$

Hierbei ist $\mathfrak{P}(\Omega)$ die Familie aller Teilmengen $A \subseteq \Omega$.

Eine **kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung** oder **WDichte** auf einer Ergebnismenge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine messbare Funktion

$$f : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \text{mit Gesamtmasse} \quad \int_{\Omega} f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Diese definiert ein **kontinuierliches Wahrscheinlichkeitsmaß**

$$\mathbf{P} : \mathscr{B}(\Omega) \to [0,1] \quad \text{durch} \quad \mathbf{P}(A) := \int_{A} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Hierbei ist $\mathscr{B}(\Omega)$ die Familie aller messbaren Teilmengen $A \subseteq \Omega$.

Erwartung, Varianz, Streuung

Sei $\mathbf{P}$ ein WMaß auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, zum Beispiel diskret oder kontinuierlich. Der Schwerpunkt der Verteilung $\mathbf{P}$ heißt **Mittelwert** oder **Erwartung**:

$$\mu := \sum\nolimits_{x\in\Omega} x\,p(x) \quad \text{bzw.} \quad \mu := \int_{x\in\Omega} x\,f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Hierbei setzen wir absolute Summierbarkeit / Integrierbarkeit voraus. Die **Varianz** der Verteilung ist ihr Trägheitsmoment bezüglich μ:

$$\sigma^2 := \sum\nolimits_{x\in\Omega} (x-\mu)^2\,p(x) \quad = \left[\sum\nolimits_{x\in\Omega} x^2\,p(x)\right] - \mu^2 \quad \geq 0 \quad \text{bzw.}$$

$$\sigma^2 := \int_{x\in\Omega} (x-\mu)^2\,f(x)\,\mathrm{d}x \quad = \int_{x\in\Omega} x^2\,f(x)\,\mathrm{d}x - \mu^2 \quad \geq 0.$$

Die Wurzel $\sigma \geq 0$ dieses Wertes heißt die **Streuung** der Verteilung. Anschaulich misst σ, wie weit die Werte um den Mittelwert μ streuen. Man nennt die Streuung σ daher auch die **Standardabweichung**. Genau dann gilt $\sigma = 0$, wenn $\mathbf{P}$ auf den Punkt μ konzentriert ist, d.h. für $A \subseteq \mathbb{R}$ gilt $\mathbf{P}(A) = 1$ falls $\mu \in A$ und $\mathbf{P}(A) = 0$ falls $\mu \notin A$.

Existenz von Erwartung und Varianz

Aufgabe: Welche der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind WDichten?

$$f(x) = \frac{1/c}{1+|x|}, \qquad f(x) = \frac{1/c}{1+|x|^2},$$

$$f(x) = \frac{1/c}{1+|x|^3}, \qquad f(x) = \frac{1/c}{1+|x|^\alpha},$$

$$g(x) = \frac{1/c}{1+|x|^\alpha \ln(\mathrm{e}+|x|)}, \qquad h(x) = \frac{1/c}{1+|x|^\alpha \ln(\mathrm{e}+|x|)^2},$$

mit geeignetem $c \in \mathbb{R}$. Für welche existieren Erwartung und Varianz?

Lösung: Wir haben jeweils $f \geq 0$. Die erste lässt sich nicht normieren:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|x|^\alpha}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} +\infty & \text{für } \alpha \leq 1, \\ < \infty & \text{für } \alpha > 1. \end{cases}$$

Für $\alpha = 2$ erhalten wir die Cauchy–Verteilung $f(x) = \frac{1/\pi}{1+x^2}$. V241
Das Integral konvergiert für $\alpha > 1$. Für die Erwartung braucht's $\alpha > 2$. Für die Varianz braucht's $\alpha > 3$. Für h genügt jeweils schon $\alpha \geq 1, 2, 3$.

Wichtige Verteilungen und ihre Kenngrößen

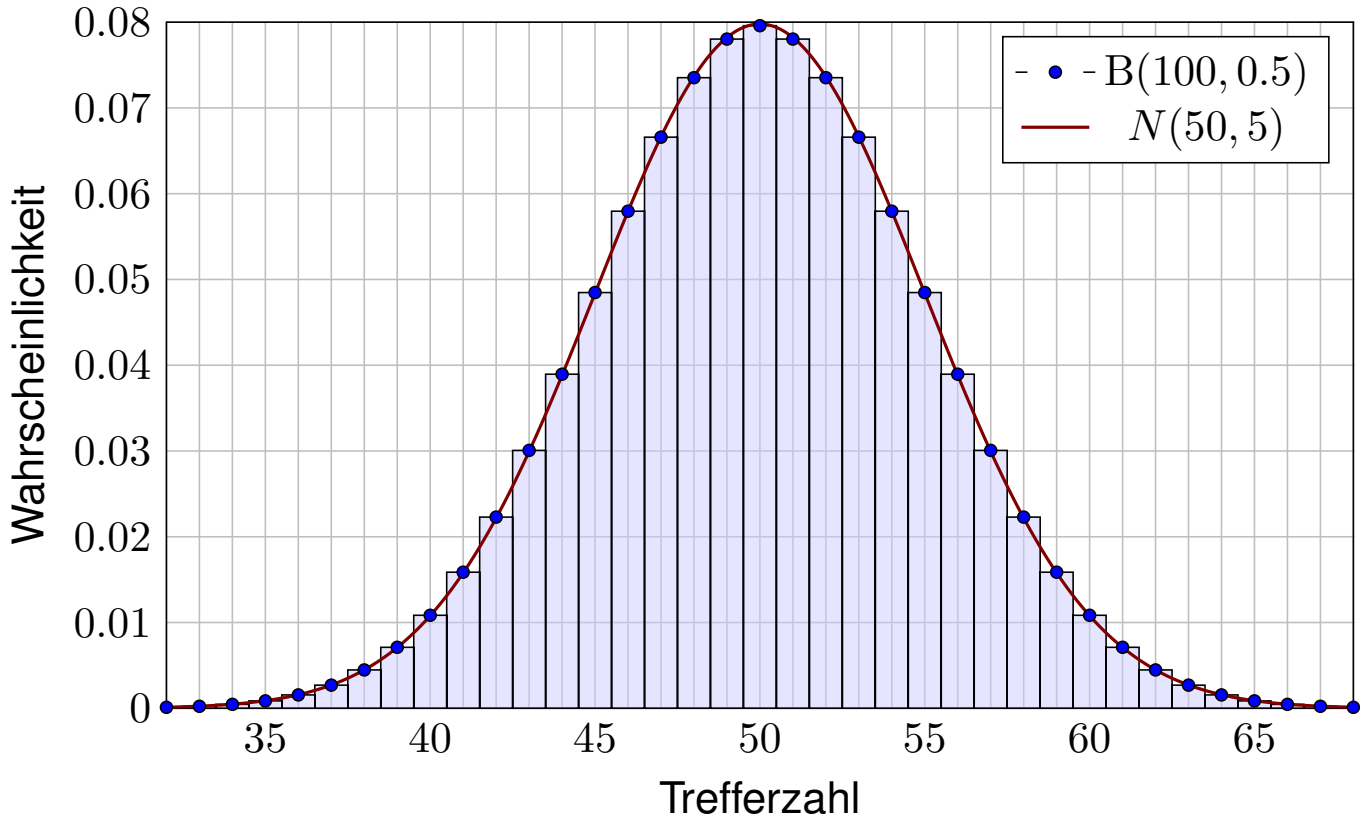
V405
Fazit

diskret		Ω	$p(k) = \mathbf{P}(\{k\})$	$\mathbf{E}$	$\mathbf{V}$
Gleichverteilung	V233	$\{a, \ldots, b\}$	$\frac{1}{b-a+1}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$
Hyperg. $\mathrm{H}(N, K, n)$	U419	$\{0, \ldots, n\}$	$\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}/\binom{N}{n}$	$n\frac{K}{N}$	$n\frac{K}{N}\frac{N-K}{N}\frac{N-n}{N-1}$
Binomial $\mathrm{B}(n, t)$	U421	$\{0, \ldots, n\}$	$\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}$	nt	$nt(1-t)$
Poisson $\mathrm{P}(\lambda)$	U425	$\mathbb{N}$	$\mathrm{e}^{-\lambda}\,\lambda^k/k!$	λ	λ
Geometrisch $\mathrm{G}(q)$	T421	$\mathbb{N}_{\geq 1}$	$(1-q)q^{k-1}$	$\frac{1}{1-q}$	$\frac{q}{(1-q)^2}$
Zeta $Z(s)$, $s = 2$	T312	$\mathbb{N}_{\geq 1}$	$\frac{6}{\pi^2}\frac{1}{k^2}$	— nicht definiert! — Diese Reihen divergieren.	
kontinuierlich		Ω	Dichte $f(x)$	$\mathbf{E}$	$\mathbf{V}$
Gleichverteilung	V235	$[a, b]$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponential $\mathrm{E}(\lambda)$	V243	$\mathbb{R}_{\geq 0}$	$\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$	λ^{-1}	λ^{-2}
Normal $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$	V239	$\mathbb{R}$	$\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$	μ	σ^2
Cauchy $\mathrm{C}(m, a)$	V241	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+(x-m)^2}$	— nicht definiert! — Diese Integrale divergieren.	

Von Binomial- zu Normalverteilungen

V406
Fazit

Grundbeobachtung: Binomialverteilungen ähneln Normalverteilungen.
Der lokale Grenzwertsatz präzisiert dies und sichert Fehlerschranken.



Der lokale Grenzwertsatz (LGS)

Für die **Binomialverteilung** $\mathrm{B}(n,t)$ gilt $\mu = nt$ und $\sigma^2 = nt(1-t)$.
Sie ähnelt der **Normalverteilung**: $\mathrm{B}(n,t) \approx N(\mu,\sigma^2)$, das heißt:

$$\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \approx \frac{\mathrm{e}^{-\frac{(k-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \approx \int_{k-1/2}^{k+1/2} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}x.$$

Dies nennt man auch Satz von de Moivre (1733) und Laplace (1812).
Mühsame Summen ersetzen wir so durch bequemere Integrale:

$$\boxed{\sum_{k=a}^{b} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \int_{\xi=\alpha}^{\beta} \frac{\mathrm{e}^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}\xi + \delta}$$

mit den Grenzen $\alpha = (a - 1/2 - \mu)/\sigma$ und $\beta = (b + 1/2 - \mu)/\sigma$.
(1) Für $\sigma \geq 5$ ist der Approximationsfehler δ beschränkt durch

$$|\delta| < \frac{|1-2t|}{10\sigma} + \frac{1}{3\sigma^2} \leq \frac{1}{6\sigma} = \frac{1}{6\sqrt{nt(1-t)}}$$

☺ Gilt der Fehler als klein genug, so können wir die mühsame Summe der Binomialverteilung (links) durch das wesentlich bequemere Integral der Normalverteilung (rechts) ersetzen: Dieses liegt tabelliert vor. V116

Der lokale Grenzwertsatz (LGS)

(2) Ist eine genauere Approximation nötig, so addiert man zur obigen Näherung durch das Integral noch folgenden Korrekturterm κ:

$$\sum_{k=a}^{b} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \int_{\xi=\alpha}^{\beta} \frac{\mathrm{e}^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}\xi + \kappa + \varepsilon$$

mit Korrektur $\quad \kappa = \dfrac{1-2t}{6\sigma\sqrt{2\pi}} \Big[(1-\xi^2)\,\mathrm{e}^{-\xi^2/2} \Big]_{\alpha}^{\beta}$

Der verbleibende Fehler ε ist noch eine Größenordnung kleiner, nämlich

$$|\kappa| < \frac{|1-2t|}{10\sigma}, \qquad |\varepsilon| < \frac{0.15 + 0.18|1-2t|}{\sigma^2} < \frac{1}{3\sigma^2} = \frac{1}{3nt(1-t)}.$$

Speziell für $t = 1/2$ oder $\alpha = \beta$ verschwindet der Korrekturterm κ.
Für $n \to \infty$ geht der Fehler gegen Null mit $1/\sqrt{n} \to 0$ bzw. $1/n \to 0$.

$\sigma \geq 5$	$\sigma \geq 8$	$\sigma \geq 13$	$\sigma \geq 19$	$\sigma \geq 26$
$\lvert\delta\rvert < 0.034$	$\lvert\delta\rvert < 0.0178$	$\lvert\delta\rvert < 0.0097$	$\lvert\delta\rvert < 0.0062$	$\lvert\delta\rvert < 0.0043$
$\lvert\varepsilon\rvert < 0.014$	$\lvert\varepsilon\rvert < 0.0053$	$\lvert\varepsilon\rvert < 0.0020$	$\lvert\varepsilon\rvert < 0.0010$	$\lvert\varepsilon\rvert < 0.0005$

Verständnisfragen: lokaler Grenzwertsatz

Erklären Sie in eigenen Worten den lokalen Grenzwertsatz:

$$\mathrm{B}(n,t) \approx \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$$

In welchem Sinne nähert sich die Binomial- der Normalverteilung? Nennen / erfinden Sie mindestens zehn konkrete Anwendungsbeispiele, in denen diese Näherung praktisch nützlich ist, sinnvoll und hilfreich.

Wie lautet und was besagt der lokale Grenzwertsatz? Wie bestimmt man hierzu die nötigen Kenngrößen μ und σ? In welchen Situationen kann man den LGS anwenden und wie? Welche Voraussetzungen braucht man und welche Schlussfolgerung gewinnt man?

Woher kommen im LGS die Integrationsgrenzen $\alpha = (a - 1/2 - \mu)/\sigma$ und $\beta = (b + 1/2 - \mu)/\sigma$? Woher kommt die Stetigkeitskorrektur $\pm 1/2$? Wann darf man sie ignorieren? Was passiert im Extremfall $a = b$?

Wie lauten die Fehlerschranken im LGS? Was passiert für $n \to \infty$? Wie verbessert man bei Bedarf die Näherung um eine Größenordnung? Wozu nützen die Schranken in konkreten Anwendungen, bei festem n? Wann darf man sie getrost ignorieren? meistens? manchmal? nie?

Verständnisfragen: Gesetz der kleinen Zahlen

Vergleichen Sie den LGS mit Poissons Gesetz der kleinen Zahlen:

$$\mathrm{B}(n,t) \approx \mathrm{P}(\lambda)$$

In welchem Sinne nähert sich die Binomial- der Poisson–Verteilung? Nennen / erfinden Sie mindestens zehn konkrete Anwendungsbeispiele, in denen diese Näherung praktisch nützlich ist, sinnvoll und hilfreich.

Wie lautet und was besagt Poissons Gesetz der kleinen Zahlen? Wie bestimmt man hierzu die nötige Kenngröße λ? In welchen Situationen kann man diese Näherung anwenden? Welche Voraussetzungen braucht man und welche Schlussfolgerung gewinnt man?

Wie lautet die Fehlerschranke beim Gesetz der kleinen Zahlen? Wie verhält sie sich für $n \to \infty$? Wie muss t angepasst werden? Wozu nützt diese Schranke in konkreten Anwendungen, bei festem n? Wann darf man sie getrost ignorieren? meistens? manchmal? nie?

Die Klärung dieser Fragen ist Gegenstand von Kapitel U und V. Prüfen Sie sich selbst und lesen Sie alles nötige gründlich nach.

Wie messen wir Wahrscheinlichkeiten? (Clopper–Pearson)

V411
Erläuterung

Im Experiment $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ wollen Sie die Wkt $p = \mathbf{P}(A)$ messen.
Sie führen n unabhängige Versuche durch und erhalten k Treffer.

Diese Stichprobe liefert für p Ihre **Punktschätzung** $\hat{p} = k/n \in [0,1]$.
Diese Zahl sagt leider rein gar nichts über die Güte Ihrer Schätzung!

Aufgabe: Bestimmen Sie zu $k \in \{0,\dots,n\}$ ein **Intervall** $I_k = [a_k, b_k]$, das in $\alpha = 95\%$ aller Stichproben die wahre Wkt $p \in [0,1]$ überdeckt.

Lösung: Wir setzen $c := (1-\alpha)/2$ und bestimmen $a_k, b_k \in [0,1]$ durch

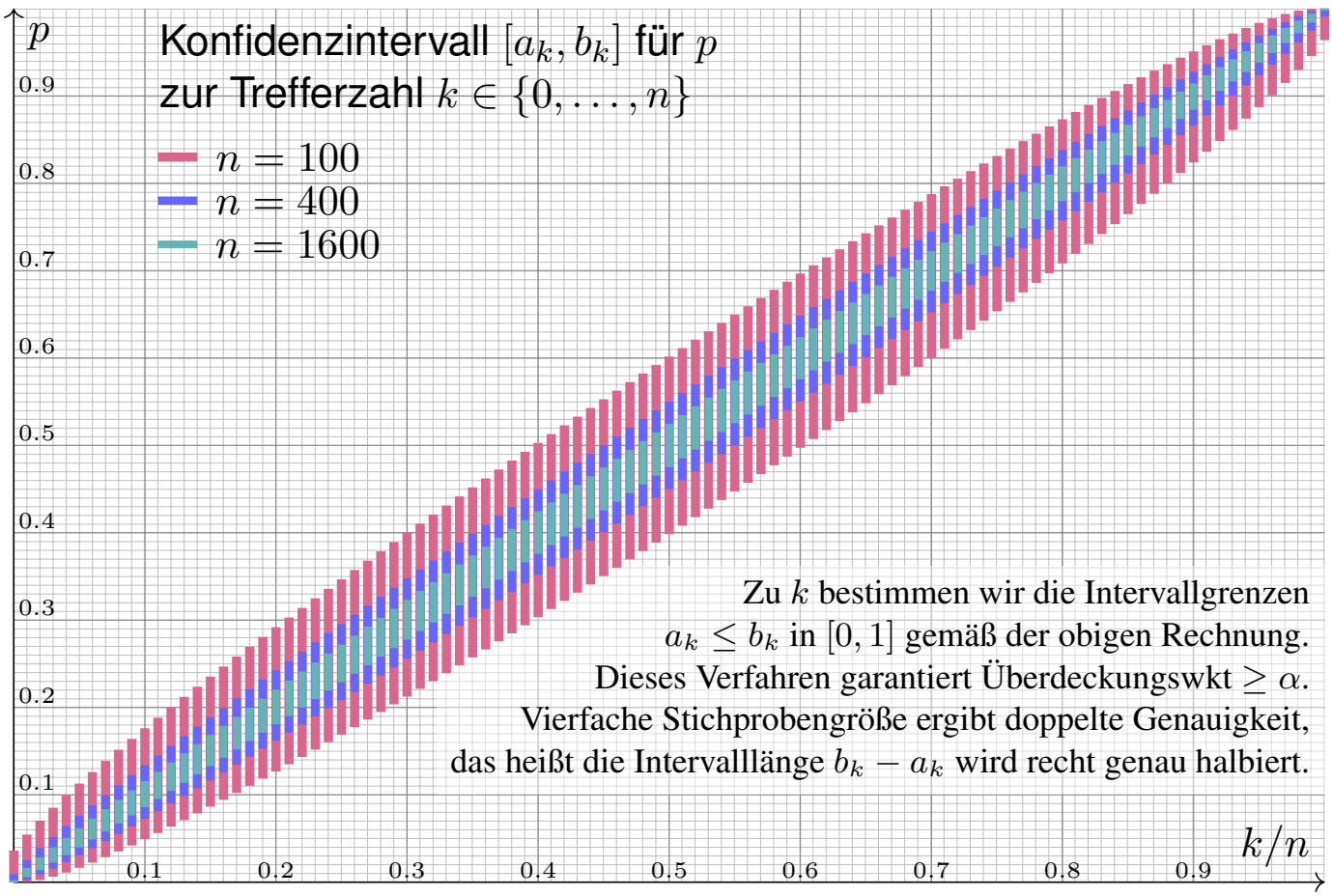
$$f_k(a) := \textstyle\sum_{j<k} \mathrm{B}(n,a)(j) \overset{!}{=} c \quad \text{und} \quad g_k(b) := \textstyle\sum_{j>k} \mathrm{B}(n,b)(j) \overset{!}{=} c.$$

Dabei ist f_k ein Polynom und für $k > 0$ streng fallend von $f_k(0) = 1$ nach $f_k(1) = 0$. Daher existiert genau ein $a_k \in [0,1]$ mit $f_k(a_k) = c$. Für $k = 0$ setzen wir $a_0 := 0$. Ebenso verfahren wir für b_k und setzen $b_n := 1$.

Begründung: Nicht-Überdeckung $p \notin I_k$ bedeutet $p < a_k$ oder $b_k < p$.
Wir bestimmen $\ell \in \{0,\dots,n\}$ durch $a_\ell \le p \le b_\ell$ und $p < a_k$ für $k > \ell$.
Damit finden wir $\mathbf{P}(a_X > p) = \sum_{k>\ell} \mathrm{B}(n,p)(k) = g_\ell(p) \le g_\ell(b_\ell) \le c$.
Ebenso $\mathbf{P}(b_X < p) \le c$. Somit gilt $\mathbf{P}(I_X \not\ni p) \le 2c$, also $\mathbf{P}(I_X \ni p) \ge \alpha$.

Konfidenzintervall für die Wkt p (nach Clopper–Pearson)

V412
Erläuterung



Anwendung in der Meinungsforschung

Das Meinungsforschungsinstitut *Infratest dimap* schreibt über ihre Befragungsmethode auf `www.infratest-dimap.de/service/faqs` (aufgerufen am 10.03.2016) folgendes:

Aus finanziellen und organisatorischen Gründen ist es nicht möglich, Millionen oder Hunderttausende Wahlberechtigte zu befragen. Die Wahlforschung arbeitet daher generell mit Stichproben. Befragt wird lediglich eine kleine Auswahl von Personen, zum Beispiel 1000, die für viele Millionen wahlberechtigte Bundesbürger stehen. [...]

Das Ziel, ein kleines Abbild des Ganzen zu bekommen, ist am besten mit einer Zufallsstichprobe zu erreichen. Sie stellt einerseits sicher, dass jeder einzelne Wahlberechtigte oder jeder einzelne Wähler prinzipiell die gleiche Chance besitzt, befragt zu werden, andererseits garantiert sie, dass Interviewer keinen subjektiven Einfluss auf die Auswahl der Befragten haben. [...]

Die Genauigkeit einer Befragung oder die Fehlergröße hängt ab von der Anzahl der befragten Personen. Faustregel: Eine Vervierfachung der Befragten halbiert den Zufallsfehler.

Wahltagsbefragungen sind meist exakter als Erhebungen in der Zwischen- und Vorwahlzeit. Bei Vorwahlerhebungen befragt Infratest dimap in der Regel 1 000 Wahlberechtigte, am Wahlsonntag bei Landtags-, Bundestags- und Europawahlen aber bis zu 50 000 Wähler. [...] Vorwahlerhebungen finden in der Regel als computergestützte Telefonerhebung statt.

Aufgabe: Erklären Sie möglichst genau die genannte Faustregel: Eine Vervierfachung der Befragten halbiert den Zufallsfehler.

Anwendung in der Meinungsforschung

Der Stimmanteil $p \in [0.07, 0.93]$ einer Partei soll prognostiziert werden. Hierzu werden $n = 1000$ zufällige Personen befragt. Den gesuchten Anteil $p = K/N$ schätzen wir durch den Stichprobenanteil $\hat{p} = k/n$.

Aufgabe: Mit welcher Wkt q ist die Schätzung auf 0.01 genau?

Lösung: Die Anzahl k ist $\mathrm{B}(n,p)$–verteilt. Erwartung $\mu = np \in [70, 930]$, Varianz $\sigma^2 = np(1-p) \in [65, 250]$, Streuung $\sigma \in [8, 16]$ (ausgerundet). Abweichung $|k/n - p| \le 0.01$ bedeutet $|k - np| \le 0.01n = 10$. Also

$$q \;=\; \sum_{k=\lceil np-10\rceil}^{\lfloor np+10\rfloor} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \;\approx\; \int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \;=\; 2\int_{t=0}^{\alpha} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Hier ist $\alpha = 10.5/\sigma \in [0.65, 1.32]$. Tabelle ablesen: $q \in [0.47, 0.82]$.
Der Näherungsfehler $|\varepsilon| < 1/(3\sigma^2) < 0.006$ wurde hier mitgerechnet.
☺ Mit Wahrscheinlichkeit $q \ge 47\%$ ist die Schätzung auf 0.01 genau.

$\lvert k/n - p\rvert$	≤ 0.01	≤ 0.02	≤ 0.03	≤ 0.04	≤ 0.05
α	$[0.65, 1.32]$	$[1.28, 2.57]$	$[1.90, 3.82]$	$[2.53, 5.07]$	$[3.15, 6.32]$
q	$[0.47, 0.82]$	$[0.79, 0.99]$	$[0.94, 1.00]$	$[0.98, 1.00]$	$[0.99, 1.00]$

Anwendung in der Meinungsforschung

Eine Wahl mit über $5\,000\,000$ Stimmberechtigten steht bevor.
Der Stimmanteil $p \in [0.02, 0.98]$ einer Partei soll geschätzt werden.
Hierzu werden n zufällige Personen befragt. Die Schätzung soll mit Wahrscheinlichkeit $\geq 95\%$ bis auf einen Fehler von ≤ 0.01 genau sein.

Aufgabe: Wie viele Personen sollten hierfür befragt werden?
Welche Näherungen nutzen Sie hierzu? mit welcher Güte?

Lösung: Von allen N Stimmberechtigten stimmen K für die Partei.
Sei k die Anzahl der n befragten Personen, die sich für die Partei aussprechen. Diese Anzahl ist $\mathrm{H}(N, K, n)$–verteilt (Stichprobe oZ).
Für große N ist dies annähernd $\mathrm{B}(n, p)$–verteilt (Stichprobe mZ).

Diese Näherung werden wir nachträglich rechtfertigen: Der totale Abstand von $\mathrm{H}(N, K, n)$ zu $\mathrm{B}(n, p)$ ist kleiner als n/N, für $n \leq 10\,000$ und $N \geq 5\,000\,000$ also kleiner als 0.002. Alternativ könnte man die Befragung auch so gestalten, dass statt der hypergeometrischen gleich die Binomialverteilung entsteht, nämlich durch Auslosung mit Zurücklegen.

Den unbekannten Anteil $p = K/N$ schätzen wir durch den Wert k/n.
Fehler ≤ 0.01 bedeutet $|k/n - p| \leq 0.01$, also $|k - np| \leq 0.01n$.
Das heißt $a \leq k \leq b$ mit $a = \lceil np - 0.01n \rceil$ und $b = \lfloor np + 0.01n \rfloor$.

Anwendung in der Meinungsforschung

Diese noch tolerierbare Abweichung tritt auf mit Wahrscheinlichkeit

$$\sum_{k=a}^{b} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{\alpha} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \overset{!}{\geq} 0.95$$

wobei $\alpha = 0.01n/\sqrt{np(1-p)}$. Aus der Tabelle lesen wir ab: $\alpha \overset{!}{\geq} 2$.
Hieraus bestimmen wir eine geeignete Stichprobengröße n:

$$\alpha = \frac{0.01\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \geq 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{n} \geq 200\sqrt{p(1-p)}$$

$$\Longleftrightarrow \quad n \geq 40\,000 \cdot p(1-p) \quad \Longleftarrow \quad n \geq 10\,000$$

Wegen $p(1-p) \leq 1/4$ genügt es in jedem Falle, $n \geq 200^2 \cdot 1/4 = 10\,000$ zu wählen. Genauer: Für $p \in [0.2, 0.8]$ gilt $\sigma^2 = np(1-p) \in [1600, 2500]$, also $\sigma \in [40, 50]$. Mit Rundung und Stetigkeitskorrektur gilt demnach $\alpha' = (0.01n - 0.5)/\sigma \in [1.99, 2.49]$ und Wkt $\geq 95.34\%$.
Für $p \in [0.02, 0.2] \cup [0.8, 0.98]$ gilt $\sigma^2 = np(1-p) \in [196, 1600]$, also $\sigma \in [14, 40]$.
Wir erhalten demnach $\alpha' = (0.01n - 0.5)/\sigma \in [2.48, 7.11]$ und sogar Wkt $\geq 98.68\%$.
Der Approximationsfehler des LGS ist höchstens $|\varepsilon| < 1/(3\sigma^2) < 0.00021$ bzw. < 0.00171.

☺ Bei Stichprobengröße $n \geq 10\,000$ ist die Schätzung k/n für K/N mit Wahrscheinlichkeit $\geq 95\%$ bis auf einen Fehler von ≤ 0.01 genau.

Stichprobe und Intervallschätzung (Min und Max)

Jede Messung unterliegt zufälligen Störungen, wir betrachten sie daher als eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Wir nehmen nun $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ an, das heißt, die Messwerte sind normalverteilt um den Mittelwert $\mu \in \mathbb{R}$ mit Streuung $\sigma \in \mathbb{R}_{>0}$. Ziel der Messung ist die Schätzung des Wertes μ.

Wir untersuchen das Motto: „Die Wahrheit liegt irgendwo in der Mitte."

Sie betrachten folgende besonders simple Methode: Sie wiederholen die Messung n mal unabhängig und erhalten Messwerte $X_1, \ldots, X_n$. Hieraus bilden Sie das Minimum $A = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ und Maximum $B = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ und nehmen als Schätzung das Intervall $[A, B]$.

Aufgabe: (1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}\big([A, B] \ni \mu\big)$, dass Ihr Intervall tatsächlich den gesuchten Mittelwert μ überdeckt. Wie verhält sich diese Wkt mit wachsender Fallzahl $n = 1, 2, 3, \ldots$?

(2) Berechnen Sie die Wkten $\mathbf{P}\big(B \le \mu + \sigma\big)$ und $\mathbf{P}\big(B \le \mu + 2\sigma\big)$ etc., dass Ihre Schätzung $[A, B]$ keine allzu große Unsicherheit offen lässt. Wie verhält sich diese Wkt mit wachsender Fallzahl $n = 1, 2, 3, \ldots$?

(3) Warum ist diese Min-Max-Schätzung noch nicht zufriedenstellend?

Stichprobe und Intervallschätzung (Min und Max)

Lösung: (1) Nach Konstruktion unseres Verfahrens gilt immer $A \le B$.

Zu hohe Schätzung $\mu < A \le B$ bedeutet, dass n mal ausschließlich Werte $X_1, \ldots, X_n > \mu$ gemessen wurde. Wegen $\mathbf{P}(X_k > \mu) = 1/2$ und Unabhänigkeit der Messungen geschieht dies mit Wkt $\mathbf{P}(A > \mu) = 2^{-n}$.

Zu niedrige Schätzung $A \le B < \mu$ bedeutet, dass n mal ausschließlich Werte $X_1, \ldots, X_n < \mu$ gemessen wurde. Wegen $\mathbf{P}(X_k < \mu) = 1/2$ und Unabhänigkeit der Messungen geschieht dies mit Wkt $\mathbf{P}(B < \mu) = 2^{-n}$.

Das Ereignis $A \le \mu \le B$ hat also die Wkt $\mathbf{P}(A \le \mu \le B) = 1 - 2^{1-n}$.

Für $n = 1$ erhalten wir nur die Punktschätzung $[A, B] = \{X_1\}$. Ihre Trefferwahrscheinlichkeit $\mathbf{P}(X_1 = \mu)$ ist tatsächlich gleich Null.

Für $n = 2$ ist die Trefferwkt $\mathbf{P}(A \le \mu \le B) = 1/2$: immerhin etwas.

Für $n = 3$ ist die Trefferwkt $\mathbf{P}(A \le \mu \le B) = 3/4$: etwas besser.

Für $n = 4$ ist die Trefferwkt $\mathbf{P}(A \le \mu \le B) = 7/8$: noch besser.

Für $n = 11$ ist die Trefferwkt $\mathbf{P}(A \le \mu \le B) = 1 - 2^{-10} \gtrapprox 99.9\%$.

Für $n \to \infty$ erhalten wir den Grenzwert $\mathbf{P}(A \le \mu \le B) = 1 - 2^{1-n} \nearrow 1$.

Stichprobe und Intervallschätzung (Min und Max)

(2) Laut Tabelle der Normalverteilung gilt $\mathbf{P}(X_k \le \mu + \sigma) \approx 0.84134$.
Demnach gilt $\mathbf{P}(B \le \mu + \sigma) \approx 0.84134^n \searrow 0$ für $n \to \infty$. Schade!
Für $n = 11$ finden wir $\mathbf{P}(B \le \mu + \sigma) \approx 0.84134^{11} \lessapprox 0.15$.

Laut Tabelle der Normalverteilung gilt $\mathbf{P}(X_k \le \mu + 2\sigma) \approx 0.97725$.
Demnach gilt $\mathbf{P}(B \le \mu + 2\sigma) \approx 0.97725^n \searrow 0$ für $n \to \infty$. Schade!
Für $n = 11$ finden wir $\mathbf{P}(B \le \mu + 2\sigma) \approx 0.97725^{11} \approx 0.78$.

Laut Tabelle der Normalverteilung gilt $\mathbf{P}(X_k \le \mu + 3\sigma) \approx 0.99865$.
Demnach gilt $\mathbf{P}(B \le \mu + 3\sigma) \approx 0.99865^n \searrow 0$ für $n \to \infty$. Schade!
Für $n = 11$ finden wir $\mathbf{P}(B \le \mu + 3\sigma) \approx 0.99865^{11} \gtrapprox 0.98$.

(3) Das hier genutzte Verfahren ist einfach und sicher, aber ungenau:

☺ Die Berechnung von $A = \min$ und $B = \max$ ist denkbar einfach.
Die Intervallschätzung $[A, B]$ wird mit größerem n immer sicherer.

☹ Leider wird sie gleichzeitig immer ungenauer, sogar sehr schnell, obwohl mehr Messwerte doch größere Genauigkeit bringen sollten!

⚠ Aus diesen triftigen Gründen nutzt man für die Berechnung von **Konfidenzintervallen** genauere Methoden (nach Neyman 1937).

Stichprobe und Intervallschätzung (nach Neyman 1937)

Als Stichprobe für X führen wir n **unabhängige Messungen** aus.
Aus den so gewonnenen Messwerten $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ berechnen wir

den **Stichprobenmittelwert** $$\hat{x} := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k,$$

die **Stichprobenvarianz** $$\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \hat{x})^2,$$

das **Konfidenzintervall** $$I_k := \left[\, \hat{x} - k\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}},\ \hat{x} + k\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \,\right].$$

Aufgabe: Für $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma)$ machen wir $n = 2$ Messungen.
(1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}\big([\hat{x} \pm \hat{\sigma}/\sqrt{n}] \ni \mu\big)$,
dass das Intervall I_1 tatsächlich den gesuchten Wert μ überdeckt.
(2) Berechnen Sie ebenso $\mathbf{P}\big([\hat{x} \pm k\hat{\sigma}/\sqrt{n}] \ni \mu\big)$ für das Intervall I_k.

☺ Größeres k bringt Sicherheit, mehr Messwerte bringen Genauigkeit!
Für $n = 2, 3, 4, \ldots$ nutzen wir Gossets Student–t–Verteilung (Satz V4A).
Für große n nähert sie sich rasch der Normalverteilung, das vereinfacht.

Kleine Stichprobe und Intervallschätzung (Neyman für $n = 2$)

Lösung: Wir rechnen den einfachsten Fall $n = 2$ sorgfältig durch.

$$\begin{aligned}
\hat{x} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k &&\overset{n=2}{=} \frac{x_1 + x_2}{2} \\
\hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \hat{x})^2 &&= \frac{(x_1 - x_2)^2}{2} \\
\hat{\sigma} &= \sqrt{\hat{\sigma}^2} &&= \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{2}} \\
I_k &= \left[\hat{x} \pm k\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right] &&= \left[\frac{x_1 + x_2}{2} \pm k\frac{|x_1 - x_2|}{2}\right]
\end{aligned}$$

☺ Speziell für $k = 1$ erhalten wir erneut $I_1 = [\min(x_1, x_2), \max(x_1, x_2)]$.

Die beiden Messungen $X_1, X_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ setzen wir als unabhängig und $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$–verteilt voraus. Das Intervall $I_k \subseteq \mathbb{R}$ hängt nur von den beiden Messwerten $x_1 = X_1(\omega)$ und $x_2 = X_2(\omega)$ ab, und ist wie diese ebenso dem Zufall unterworfen, also dem zufälligen Ergebnis $\Omega \ni \omega \mapsto (x_1, x_2)$.

Kleine Stichprobe und Intervallschätzung (Neyman für $n = 2$)

Wir berechnen nun die Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}(I_k \ni \mu)$, dass unser zufälliges Intervall $I_k \subseteq \mathbb{R}$ den tatsächlichen Wert $\mu \in \mathbb{R}$ überdeckt.

Dank Unabhängigkeit ist die Verteilung von $(X_1, X_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ eine zweidimensionale Normalverteilung $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \otimes \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ mit Dichte

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-(x_1-\mu)^2/(2\sigma^2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-(x_2-\mu)^2/(2\sigma^2)} \\
&= \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{e}^{-|(x_1,x_2)-(\mu,\mu)|^2/(2\sigma^2)}.
\end{aligned}$$

Sie ist rotationssymmetrisch um ihren Schwerpunkt (μ, μ), siehe V108. Unsere Formeln für $\hat{x}$ und $\hat{\sigma}$ legen die folgende Transformation nahe:

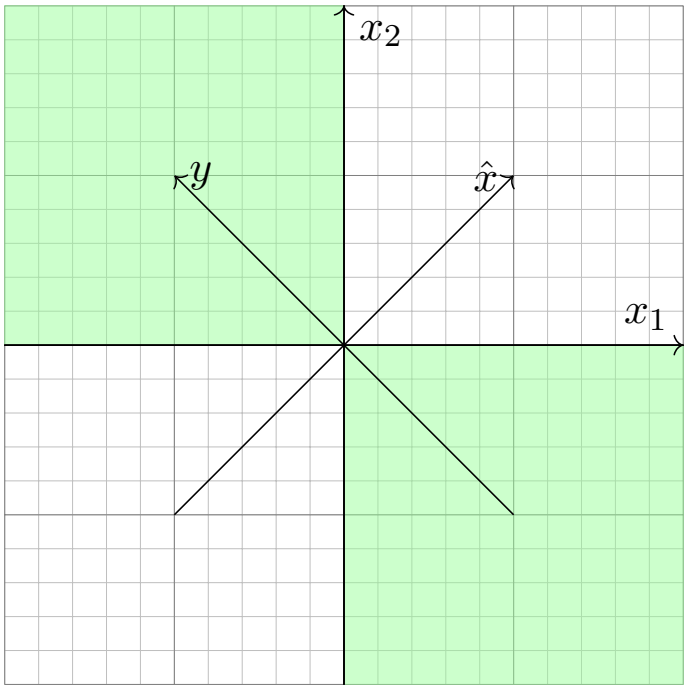
$$\left.\begin{aligned}
\hat{X} &= \tfrac{1}{2}(X_1 + X_2) \\
Y &= \tfrac{1}{2}(X_2 - X_1)
\end{aligned}\right\} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \hat{X} \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

Dies ist eine Drehstreckung: Drehung um $45°$ und Stauchung um $\sqrt{2}$. Demnach ist auch die Verteilung von $(\hat{X}, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ normalverteilt und ebenso rotationssymmetrisch um ihren Schwerpunkt $(\mu, 0)$.

Kleine Stichprobe und Intervallschätzung (Neyman für $n = 2$)

V423
Ergänzung

(1) Das Ereignis $I_1 \ni \mu$ entspricht $|\hat{X} - \mu| \leq |Y|$. Skizze für $\mu = 0$:



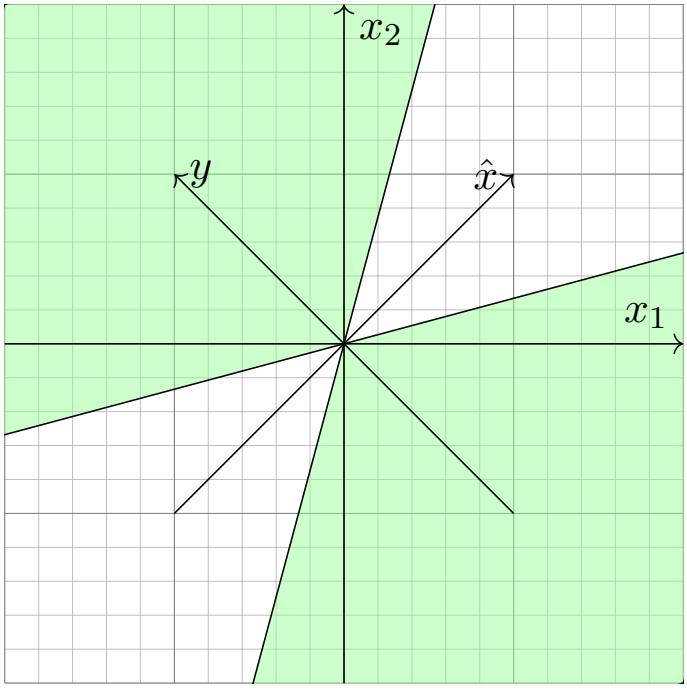
Seine Wkt entspricht dem grünen Winkel, somit gilt $\mathbf{P}(I_1 \ni \mu) = 1/2$.

☺ Dies entspricht der Min-Max-Schätzung aus der vorigen Aufgabe.

Kleine Stichprobe und Intervallschätzung (Neyman für $n = 2$)

V424
Ergänzung

(2) Das Ereignis $I_2 \ni \mu$ entspricht $|\hat{X} - \mu| \leq 2|Y|$. Skizze für $\mu = 0$:



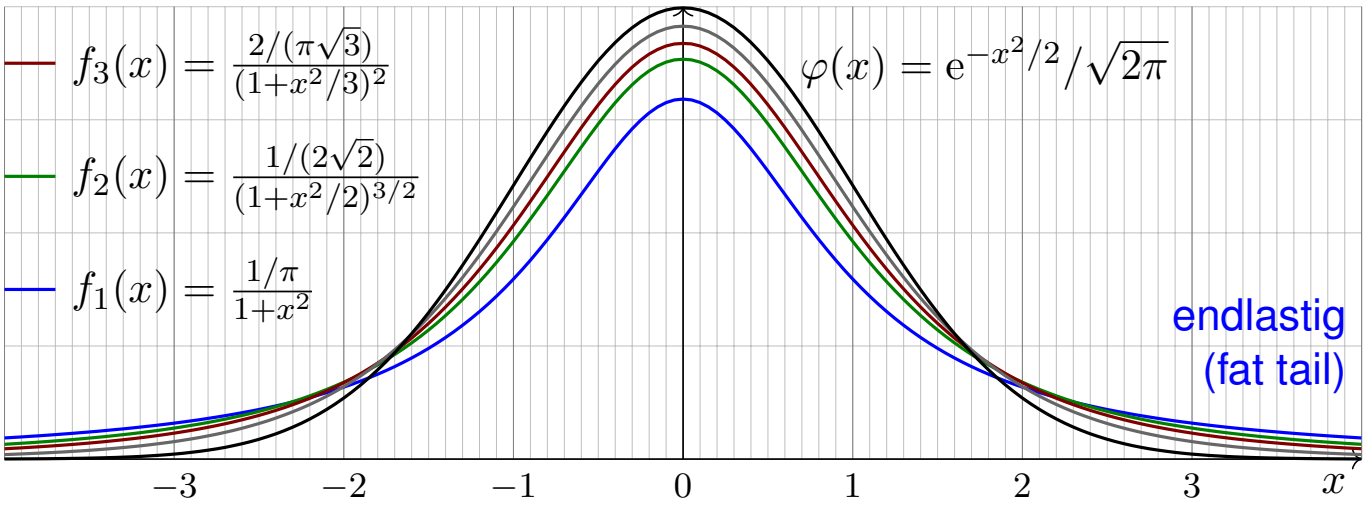
Seine Wkt ist $\mathbf{P}(I_2 \ni \mu) \approx 70\%$, allgemein $\mathbf{P}(I_k \ni \mu) = \frac{2}{\pi} \arctan(k)$.

☺ Für $k \to \infty$ gilt demnach $\mathbf{P}(I_k \ni \mu) = \frac{2}{\pi} \arctan(k) \nearrow 1$.

Kleine Stichproben und Gossets Student–t–Verteilung

Zur Anzahl $\nu \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ von „Freiheitsgraden“ definieren wir die Wktsdichte

$$f_\nu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{\nu\pi}} \left(1 + x^2/\nu\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}.$$



Normierung $\int_{\mathbb{R}} f_\nu(x)\,\mathrm{d}x = 1$ gelingt dank Gamma–Funktion. B316 C232
Für $\nu = 1$ erhalten wir die obige Cauchy–Verteilung $f_1(x) = \frac{1/\pi}{1+x^2}$. V241
Für $\nu \to \infty$ erhalten wir die Standard-Normalverteilung φ. (Übung!)

Kleine Stichproben und Gossets Student–t–Verteilung

Diese Verteilung hat folgende zentrale Bedeutung in der Statistik:

Satz V4A: Gosset 1908, alias „Student“

Seien $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängig, normalverteilt, $X_k \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.
Wir betrachten Stichprobenmittelwert, -Varianz und -Abweichung:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k, \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2 \quad \text{und} \quad T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

Dann sind die ZVariablen $\bar{X}$ und S^2 stochastisch unabhängig,
der Stichprobenmittelwert $\bar{X} \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2/n)$ ist normalverteilt,
die Stichprobenvarianz S^2 ist χ^2–verteilt, und die Abweichung T
ist Student–t–verteilt mit der oben angegebenen Dichte f_{n-1}.

Das bedeutet: Der Abstand des gemessenen Mittelwertes $\bar{X}$ zum wahren (aber uns unbekannten) Mittelwert μ ist verteilt wie $T\,S/\sqrt{n}$.
Den Fall $n = 2$ haben wir oben ausgeführt; der allgemeine Fall gelingt ähnlich. Diese Rechnung und die χ^2–Verteilung führe ich hier nicht aus.

Kleine Stichproben und Gossets Student–t–Verteilung

Zum Konfidenzniveau α nutzen wir das **Konfidenzintervall**

$$I_k = \left[\, \bar{X} - k\,S/\sqrt{n},\ \bar{X} + k\,S/\sqrt{n}\,\right].$$

Den Wert k bestimmen wir dabei so, dass $\int_{-k}^{k} f_\nu(x)\,\mathrm{d}x = 1 - \alpha$ gilt.

$\alpha =$	0.500	0.750	0.800	0.900	0.950	0.980	0.990	0.998
$\nu = 1$	1.000	2.414	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.309
2	0.816	1.604	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327
3	0.765	1.423	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215
4	0.741	1.344	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	0.727	1.301	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
10	0.700	1.221	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
20	0.687	1.185	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
30	0.683	1.173	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
40	0.681	1.167	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307
50	0.679	1.164	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261
100	0.677	1.157	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174
200	0.676	1.154	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601	3.131
300	0.675	1.153	1.284	1.650	1.968	2.339	2.592	3.118
400	0.675	1.152	1.284	1.649	1.966	2.336	2.588	3.111
500	0.675	1.152	1.283	1.648	1.965	2.334	2.586	3.107
∞	0.674	1.150	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090

Kleine Stichproben und Gossets Student–t–Verteilung

(0) Durch Stichprobe wollen wir den Mittelwert μ schätzen. Aus Messwerten $X_1, X_2, \ldots, X_n$ bestimmen wir dazu ein geeignetes Konfidenzintervall $I = [A, B]$. Dieses überdeckt den wahren (aber uns unbekannten) Wert μ mit der Wkt $\mathbf{P}(I \ni \mu)$. Wir geben uns ein Konfidenzniveau α vor und verlangen $\mathbf{P}(I \ni \mu) \geq \alpha$. Typische Werte sind $\alpha = 95\%$ oder $\alpha = 99\%$.

(1) Die Zufallsvariable $\bar{X}$ ist $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2/n)$–verteilt. Ist die Varianz σ^2 bekannt, so betrachten wir das Intervall $I = [\bar{X} - \tau\sigma/\sqrt{n}, \bar{X} + \tau\sigma/\sqrt{n}]$ und bestimmen τ so, dass $\int_{-\tau}^{\tau} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1 - \alpha$.

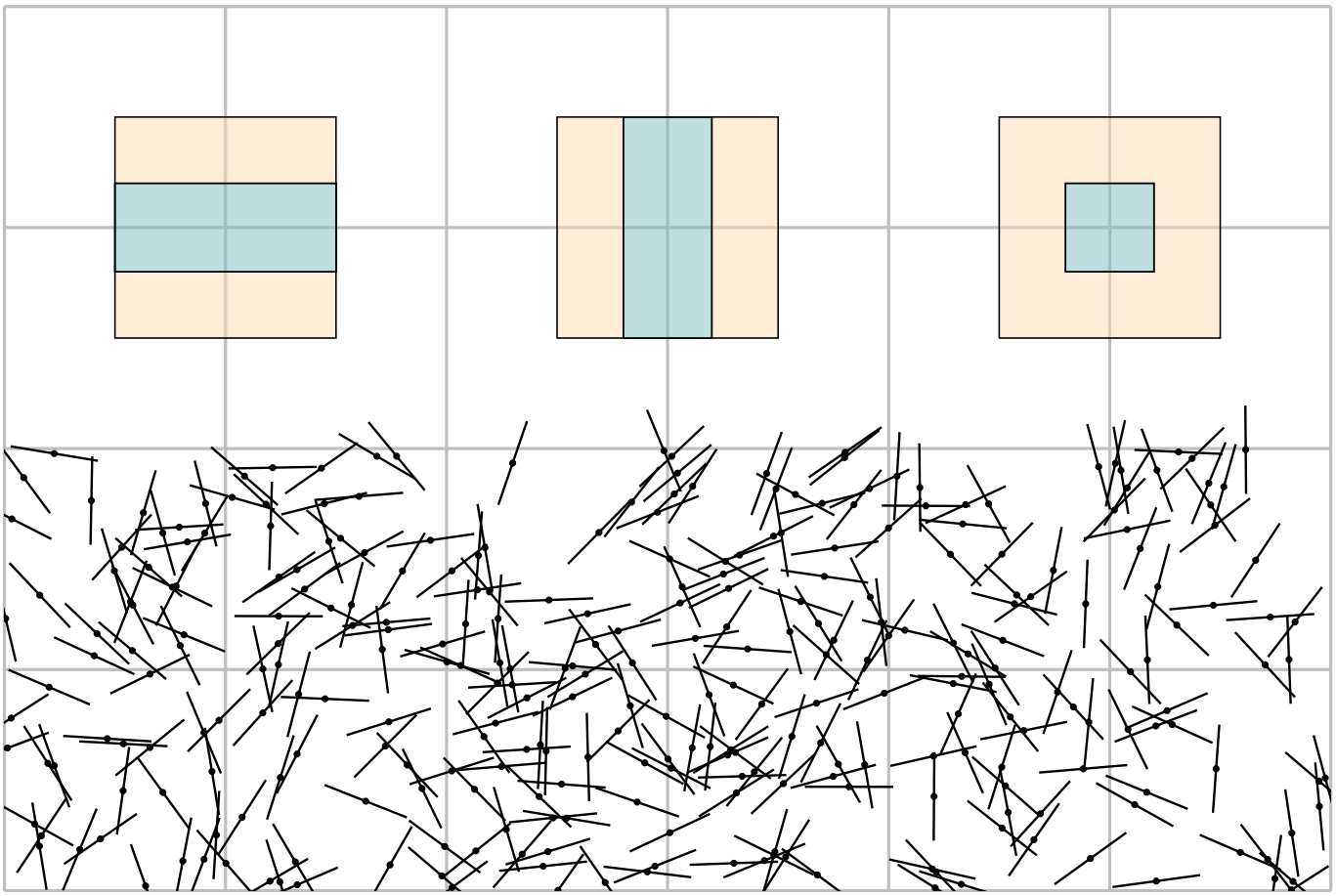
(2) In realistischen Anwendungen ist die Varianz σ^2 unbekannt und muss ebenso wie μ aus der Stichprobe geschätzt werden. Dies gelingt durch die (Bessel–korrigierte) Stichprobenvarianz S^2. Wir betrachten $T = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$ als Abweichung vom Mittelwert. Bei großen Stichproben ($n \to \infty$) nimmt man näherungsweise an, dass T normalverteilt ist, wie in (1), das vereinfacht.

(3) Bei kleinen Stichprobengrößen n ist dies jedoch allzu optimistisch. William Gosset stellte 1908 fest, dass T nicht normalverteilt ist, sondern der oben angegebenen Verteilung f_ν folgt, wobei $\nu = n - 1$, genannt *Student–t–Verteilung*, kurz *t–Verteilung*. Das ist das richtige Modell! Die Abweichung von f_ν zu φ ist für kleine n deutlich spürbar; für $n \to \infty$ nähert sich f_ν rasch der Standard-Normalverteilung φ. (Lehrreiche Übung: Rechnen Sie dies sorgfältig nach!)

Zur Mittelwertschätzung nutzen wir das Konfidenzintervall $I_k = [\bar{X} - kS/\sqrt{n}, \bar{X} + kS/\sqrt{n}]$ und bestimmen den Wert k so, dass $\int_{-k}^{k} f_\nu(x)\,\mathrm{d}x = 1 - \alpha$ gilt. Die obige Tabelle zeigt hierzu Quantile der Student–t–Verteilungen. Das Ergebnis k ist etwas größer als der Wert τ aus (1).

Fun fact: Gosset arbeitete in der Dubliner Guinness–Brauerei. Da sie ihm die Veröffentlichung seines Artikels untersagte, veröffentlichte er kurzerhand unter dem Pseudonym „Student“.

Geometrische Wahrscheinlichkeit



Geometrische Wahrscheinlichkeit

Aufgabe: In der Ebene $\mathbb{R}^2$ liegen die Geradenscharen $X = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ und $Y = \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$. Sie werfen zufällig eine Münze vom Durchmesser $\ell \in [0, 1]$ und beobachten, ob sie die Geraden X oder die Geraden Y schneidet.

(1) Warum ist das Quadrat $\Omega = [-1/2, 1/2]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ mit kontinuierlicher Gleichverteilung ein geeignetes Modell für dieses Zufallsexperiment?

(2) Wie wahrscheinlich ist es, dass die Münze die Geraden X schneidet? Y schneidet? Beide gleichzeitig? Sind beide stochastisch unabhängig?

Lösung: (1) Die Lage der Münze wird durch die Position $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ihres Mittelpunktes festgelegt. (Alle Drehungen sind hier irrelevant.) Schnitte sind invariant unter ganzzahligen Verschiebungen um $v \in \mathbb{Z}^2$. Wir notieren nur die Position $(x, y) \in \Omega$ zur nächstgelegenen Geraden. Die Koordinaten $x, y \in [-1/2, 1/2]$ seien gleichverteilt und unabhängig. Dann ist $\mathbf{P}(A) = \mathrm{vol}_2(A)$ auf Ω das richtige stochastische Modell.

(2) Die gefragten Wahrscheinlichkeiten lesen wir aus der Skizze ab: Das Ereignis $A :=$ {Münze trifft X} entspricht $|y| \leq \ell/2$, also $\mathbf{P}(A) = \ell$. Das Ereignis $B :=$ {Münze trifft Y} entspricht $|x| \leq \ell/2$, also $\mathbf{P}(B) = \ell$. Entsprechend gilt $\mathbf{P}(A \cap B) = \ell^2 = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$. Beide sind unabhängig!

Graf Buffon würfelt mit einer Nadel.

V431
Ergänzung

Der junge Graf Georges-Louis de Buffon (1707–1788) warf Stöcke über die Schulter auf einen gekachelten Fußboden. Anschließend zählte er, wie oft sie die Fugen trafen. Die Berechnung dieser geometrischen Wahrscheinlichkeiten bezeichnet man als **Buffonsches Nadelproblem.** Als wunderbares Video zu mathematischer Eleganz: Weitz, `youtu.be/YIkqZsz4faA`

Aufgabe: Sie werfen zufällig eine Nadel der Länge $\ell \in [0,1]$.

(1) Warum ist $\Omega = [-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2] \times [0, 2\pi]$ mit kontinuierlicher Gleichverteilung ein geeignetes Modell für dieses Zufallsexperiment?

(2) Wie wahrscheinlich ist es, dass die Nadel die Geraden X schneidet? Y schneidet? Beide gleichzeitig? Sind beide stochastisch unabhängig?

Lösung: (1) Die Lage der Nadel wird durch die Position $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ihres Mittelpunktes und den Winkel $\varphi \in [0, 2\pi]$ festgelegt, gemessen zwischen der x–Achse und dem Vektor vom Mittelpunkt zur Spitze.

Schnitte sind invariant unter ganzzahligen Verschiebungen um $v \in \mathbb{Z}^2$. Wir notieren daher nur die Position (x, y) zur nächstgelegenen Geraden. Wir erhalten so $(x, y, \varphi) \in \Omega = [-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2] \times [0, 2\pi]$. Annahme: Die drei Koordinaten x, y, φ sind jeweils gleichverteilt und unabhängig. Daher ist $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{vol}_3(A)$ auf Ω das richtige stochastische Modell.

Graf Buffon würfelt mit einer Nadel.

V432
Ergänzung

(2) Das Ereignis $A := \{\text{Nadel trifft } X\}$ entspricht $|y| \le \ell/2 \cdot |\cos\varphi|$. Also:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{vol}_3(A) = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{x=-1/2}^{1/2} \int_{y=-\ell/2\cdot|\cos\varphi|}^{\ell/2\cdot|\cos\varphi|} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \ell\,|\cos\varphi|\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\ell}{\pi} \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\ell}{\pi}\Big[\sin(\varphi)\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2\ell}{\pi}$$

Das Ereignis $B := \{\text{Nadel trifft } Y\}$ entspricht dann $|x| \le \ell/2 \cdot |\sin\varphi|$. Dank Symmetrie gilt $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)\ldots$ oder nachrechnen! Schließlich:

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{x=-\ell/2\cdot|\sin\varphi|}^{\ell/2\cdot|\sin\varphi|} \int_{y=-\ell/2\cdot|\cos\varphi|}^{\ell/2\cdot|\cos\varphi|} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{\ell^2}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} |\sin\varphi| \cdot |\cos\varphi|\,\mathrm{d}\varphi = \frac{2\ell^2}{\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{\ell^2}{\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \sin(2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\ell^2}{\pi}\Big[-\frac{\cos(2\varphi)}{2}\Big]_{\varphi=0}^{\pi/2} = \frac{\ell^2}{\pi} < \frac{4\ell^2}{\pi^2} = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$$

⚠ Die Ereignisse A und B sind nicht unabhängig! Das ist plausibel: A ist besonders wahrscheinlich für $\varphi \approx \pm\pi/2$, aber B eher für $\varphi \approx 0, \pi$.

Kapitel W

Der zentrale Grenzwertsatz

Zweck des vorliegenden Heftes ist eine axiomatische Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. […] Vor Entstehung der Lebesgueschen Maß- und Integrationstheorie war diese Aufgabe ziemlich hoffnungslos. Nach den Lebesgueschen Untersuchungen lag die Analogie zwischen dem Maße einer Menge und der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses sowie zwischen dem Integral einer Funktion und der mathematischen Erwartung einer zufälligen Größe auf der Hand.

Andrei Kolmogorov (1902–1987),
Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (1933)

Vollversion • michael-eisermann.de/lehre/HM3 • 26.02.2025

Inhalt dieses Kapitels W

1 Der zentrale Grenzwertsatz (ZGS)
- Stochastisch unabhängige Zufallsvariablen
- Beispiele und erste Beobachtungen
- Der zentrale Grenzwertsatz

2 Statistische Anwendungen
- Konfidenzintervalle
- Fehlerfortpflanzung
- Regressionsanalyse

3 Fazit: der zentrale Grenzwertsatz
- Zusammenfassung und Verständnisfragen
- Summen von Zufallsvariablen und Grenzwertsätze
- Weitere Aufgaben und Anwendungsbeispiele

4 Analytische Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung
- Laplace– und Fourier–Transformation von WMaßen
- Beweisidee des zentralen Grenzwertsatzes
- Entropie verstehen und anwenden

Motivation und Zielsetzung

Wir kennen bereits zwei nützliche und wichtige Grenzwertsätze:

☺ Bei seltenen Ereignissen können wir die **Binomialverteilung** $\mathrm{B}(n,t)$ durch die **Poisson–Verteilung** $\mathrm{P}(nt)$ nähern mit guter Fehlerschranke. Das **Gesetz der kleinen Zahlen** besagt $\mathrm{B}(n,\lambda/n) \to \mathrm{P}(\lambda)$ für $n \to \infty$.

☺ Der **lokale Grenzwertsatz** hingegen nützt für beliebige $0 < t < 1$ und approximiert Binomialverteilungen durch **Normalverteilungen**:

$$\mathbf{P}(a \le S \le b) \overset{\text{exakt}}{=} \sum_{k=a}^{b} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \overset{\text{LGS}}{=} \int_{\xi=\alpha}^{\beta} \frac{\mathrm{e}^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}\xi \;+\; \delta$$

☺ Die Normalverteilung ist zudem **universell**: Sie entsteht immer, wenn sich viele unabhängige, ähnlich große Beiträge aufsummieren:

$$S = X_1 + \ldots + X_n \implies \mathbf{P}(a \le S \le b) \overset{\text{ZGS}}{=} \int_{\xi=\alpha}^{\beta} \frac{\mathrm{e}^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}\xi \;+\; \delta$$

Entscheidend ist hier, wie immer, den Fehler δ geeignet zu beschränken. Die genaue Aussage ist Inhalt des **zentralen Grenzwertsatzes** W1D.

Vorgehensweise

Unser Ziel sind **rationale Entscheidungen unter Unsicherheit**. Hierzu müssen wir stochastische Gesetzmäßigkeiten klären und nutzen.

Eine Messung betrachten wir als **Zufallsvariable** $X : (\Omega, \mathbf{P}) \to \mathbb{R}$; sie definiert eine WVerteilung auf $\mathbb{R}$, Erwartung $\mathbf{E}(X)$ und Varianz $\mathbf{V}(X)$.

Wir können damit die **Chebychev–Ungleichung** T3F formulieren und hieraus das (schwache) **Gesetz der großen Zahlen** T3J ableiten.

Entscheidend ist der Begriff der **Unabhängigkeit** von Zufallsvariablen. Die intuitive Anschauung präzisieren wir durch Definitionen und Sätze.

Höhepunkt dieses Kapitels ist der **zentrale Grenzwertsatz** W1D. Diesen formuliere ich mit einer allgemeinen, expliziten Fehlerschranke.

Die vom ZGS vorhergesagte **Normalverteilung** ist ein universelles Werkzeug und bietet für viele Situationen ein brauchbares Modell.

Sie dient insbesondere zur Bestimmung von **Konfidenzintervallen** und wird daher in nahezu allen praktischen Anwendungen benötigt.

Hierzu gebe ich abschließend erste einfache Anwendungsbeispiele. Mit diesen Grundlagen gewappnet beginnt die mathematische **Statistik**.

Erinnerung: Unabhängigkeit von Ereignissen

Wir erinnern an die Definition T2E der Unabhängigkeit: Im WRaum $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ heißt eine Familie von Ereignissen $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$ **(stochastisch) unabhängig** wenn folgende Produktformel gilt

$$\boxed{\mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_\ell}) = \mathbf{P}(A_{i_1})\,\mathbf{P}(A_{i_2}) \cdots \mathbf{P}(A_{i_\ell})}$$

für jede Auswahl von Indizes $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_\ell \le n$.

Zwei Ereignisse A, B sind unabhängig, wenn gilt:

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)$$

Drei Ereignisse A, B, C sind unabhängig, wenn gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A \cap B) &= \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B) \\ \mathbf{P}(A \cap C) &= \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(C) \\ \mathbf{P}(B \cap C) &= \mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(C) \\ \mathbf{P}(A \cap B \cap C) &= \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(C) \end{aligned}$$

⚠ Die Tripelbedingung folgt nicht aus den drei Paarbedingungen!
Sie kennen dieses Problem von linearer Unabhängigkeit von Vektoren.

Erinnerung: Produktwahrscheinlichkeit

Definition W1A: Produkt von Wahrscheinlichkeitsräumen

Wir beschreiben die Durchführung unabhängiger Experimente durch Wahrscheinlichkeitsräume $(\Omega_1, \mathscr{A}_1, \mathbf{P}_1), \ldots, (\Omega_n, \mathscr{A}_n, \mathbf{P}_n)$.

Der **Produktraum** $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ basiert auf dem kartesischen Produkt

$$\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n = \left\{ (\omega_1, \ldots, \omega_n) \;\middle|\; \omega_1 \in \Omega_1, \ldots, \omega_n \in \Omega_n \right\}.$$

Die **Ereignismenge** $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathscr{A}_n$ wird erzeugt von Produkten

$$A = A_1 \times \cdots \times A_n \quad \text{mit} \quad A_1 \in \mathscr{A}_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A}_n.$$

Das **Produktmaß** $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{P}_n : \mathscr{A} \to [0,1]$ ist definiert durch

$$\mathbf{P}(A_1 \times \cdots \times A_n) = \mathbf{P}_1(A_1) \cdots \mathbf{P}_n(A_n).$$

Wir erhalten den WRaum $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ durch eindeutige Fortsetzung.

Für diskrete WRäume kennen und nutzen wir dies bereits, siehe U1A
Sind $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_n$ kontinuierlich auf $\mathbb{R}$ mit Dichten $f_1, \ldots, f_n$, so ist $\mathbf{P}$ auf $\mathbb{R}^n$ kontinuierlich, mit Produktdichte $f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$.

Unabhängige Zufallsvariablen

Zwei Zufallsvariablen X_1, X_2 sind unabhängig, wenn das Ergebnis von X_1 nicht die Wkten von X_2 beeinflusst. Dies präzisieren wir wie folgt:

Definition W1B: Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Eine Familie $X = (X_1, \ldots, X_n)$ von Zufallsvariablen $X_k : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt **(stochastisch) unabhängig**, wenn für alle Intervalle $I_1, \ldots, I_n \subseteq \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbf{P}(\ X_1 \in I_1,\ \ldots,\ X_n \in I_n\ ) = \mathbf{P}(X_1 \in I_1) \cdots \mathbf{P}(X_n \in I_n).$$

Ausführlich heißt das: Im WRaum $(\Omega, \mathbf{P})$ ist jede Familie $(A_1, \ldots, A_n)$ von Ereignissen $A_k = X_k^{-1}(I_k) = \{\, \omega \in \Omega \mid X_k(\omega) \in I_k \,\}$ unabhängig.

Die gemeinsame Verteilung von $X_1, \ldots, X_n$ ist dann das Produktmaß

$$\mathbf{P}_X = \mathbf{P}_{(X_1,\ldots,X_n)} = \mathbf{P}_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{P}_{X_n}.$$

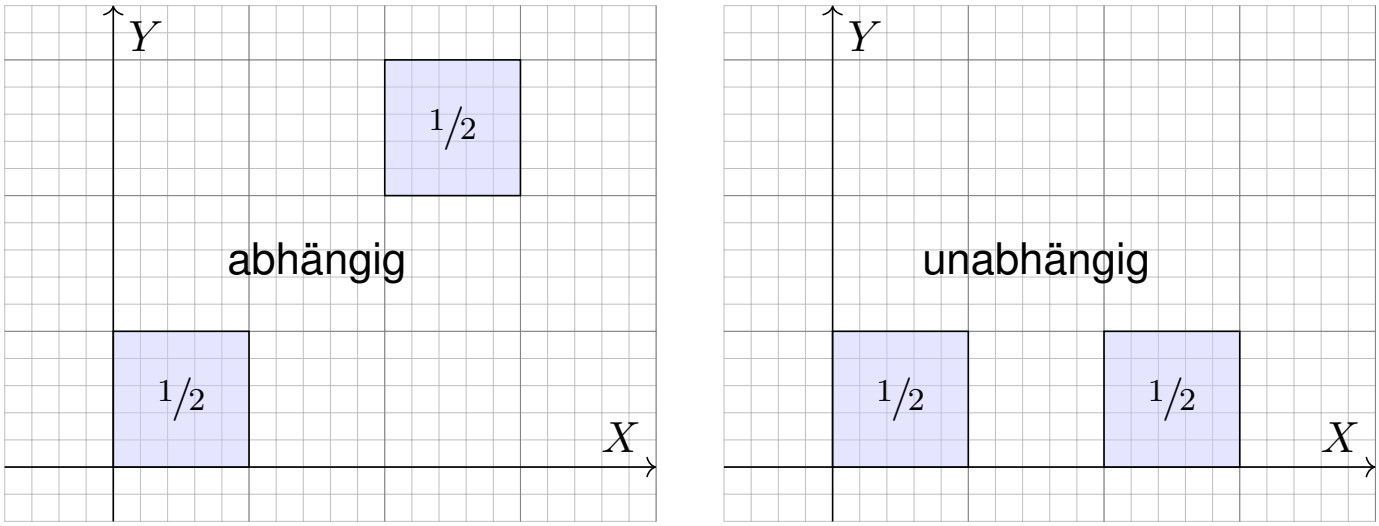
Sind $\mathbf{P}_{X_1}, \ldots, \mathbf{P}_{X_n}$ auf $\mathbb{R}$ kontinuierliche WMaße mit Dichten $f_1, \ldots, f_n$, so ist auch das Produktmaß $\mathbf{P}_X$ auf $\mathbb{R}^n$ kontinuierlich, mit Produktdichte

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n).$$

Unabhängige Zufallsvariablen

Anschaulich: Zwei Zufallsvariablen X, Y sind unabhängig, wenn das Ergebnis von X nicht die Wkten von Y beeinflusst, und umgekehrt.

Beispiel: Die gemeinsame Verteilung von $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ sei wie folgt:



Die Skizze zeigt die Gleichverteilung auf den Mengen $Q, R \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $Q = ([0,1] \times [0,1]) \cup ([2,3] \times [2,3])$, $R = ([0,1] \times [0,1]) \cup ([2,3] \times [0,1])$. Im ersten Fall ist das Paar (X, Y) abhängig, im zweiten unabhängig.

Erwartungswert und Varianz bei Unabhängigkeit

Satz W1c: Fubini für unabhängige Zufallsvariablen

(1) Erwartungen unabhängiger Zufallsvariablen X, Y multiplizieren sich:

$$\mathbf{E}(X \cdot Y) = \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y)$$

Ihre Kovarianz $\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$ verschwindet somit.

(2) Varianzen unabhängiger Zufallsvariablen X, Y addieren sich:

$$\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\mathbf{Cov}(X, Y)$$

Aufgabe: Rechnen Sie dies nach! **Lösung:** (1) Dank Unabhängigkeit:

$$\mathbf{E}(X \cdot Y) \overset{\text{Def}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} xy \, \mathrm{d}\mathbf{P}_{(X,Y)} \underset{\text{Un}}{\overset{\text{Fub}}{=}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} xy \, \mathrm{d}\mathbf{P}_X \, \mathrm{d}\mathbf{P}_Y$$

$$\overset{\text{Lin}}{=} \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} x \, \mathrm{d}\mathbf{P}_X \Big) y \, \mathrm{d}\mathbf{P}_Y \overset{\text{Lin}}{=} \int_{\mathbb{R}} x \, \mathrm{d}\mathbf{P}_X \cdot \int_{\mathbb{R}} y \, \mathrm{d}\mathbf{P}_Y \overset{\text{Def}}{=} \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y)$$

(2) Wir setzen die Definition ein und vereinfachen geduldig: T331

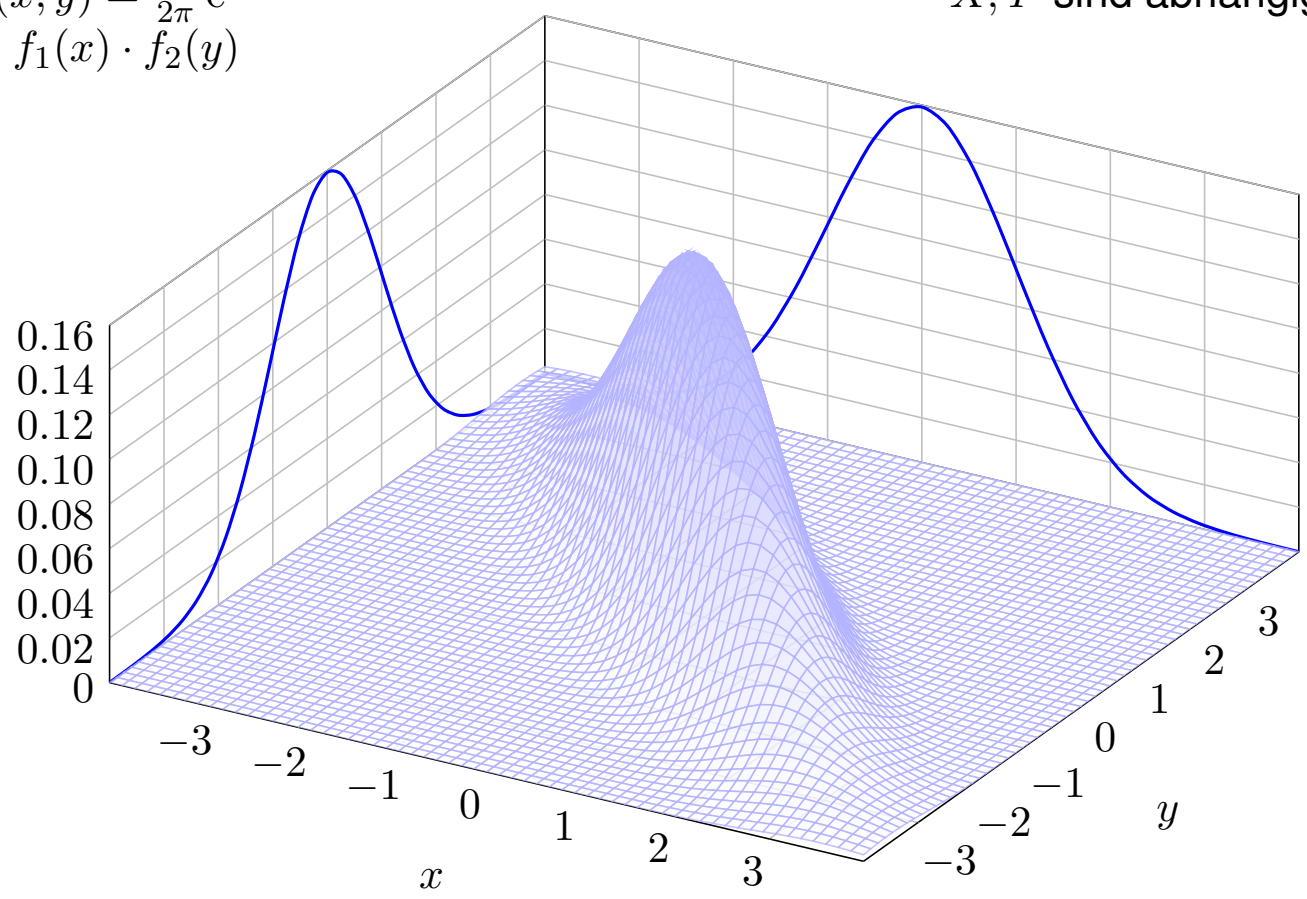
$$\mathbf{V}(X + Y) \underset{\text{Lin}}{\overset{\text{Def}}{=}} \mathbf{E}\big[(X - \mathbf{E}(X) + Y - \mathbf{E}(Y))^2\big]$$

$$\overset{\text{Bin}}{=} \mathbf{E}\big[(X - \mathbf{E}(X))^2 + (Y - \mathbf{E}(Y))^2 + 2(\mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y))\big]$$

Beispiel einer zweidimensionalen Normalverteilung

$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \, \mathrm{e}^{-(x+y)^2 - (x-y)^2/16}$
$\neq f_1(x) \cdot f_2(y)$

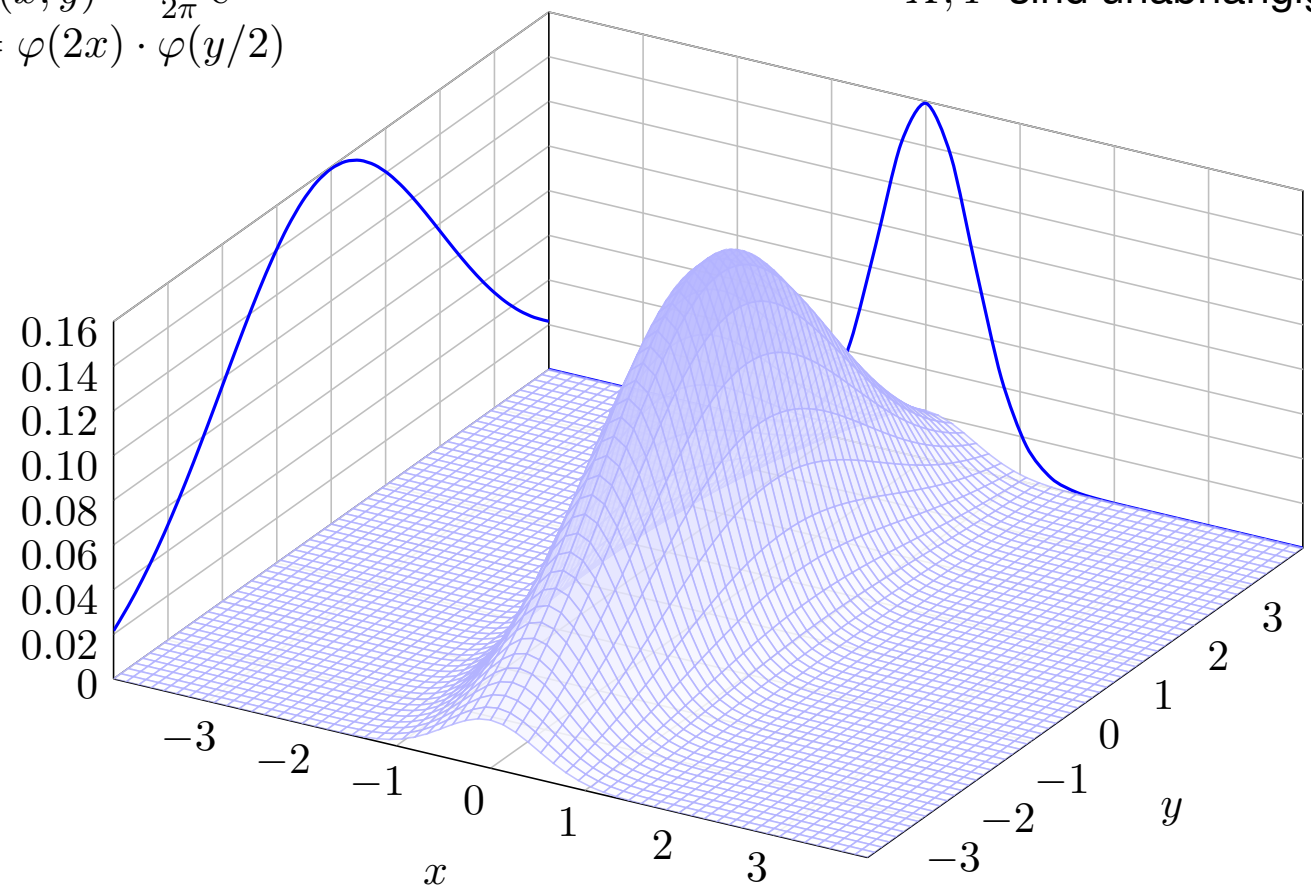
X, Y sind abhängig!



Beispiel einer zweidimensionalen Normalverteilung

$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{e}^{-2x^2+y^2/8}$
$= \varphi(2x)\cdot\varphi(y/2)$

X, Y sind unabhängig!



Mehrdimensionale Normalverteilung

Die n–dimensionale Standard-Normalverteilung hat die WDichte

$$f\,:\,\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,:\,x \mapsto f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{(2\pi)^n}} = \varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n).$$

Die Zufallsvariablen $Z_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : z \mapsto z_k$ sind unabhängig und identisch verteilt gemäß der eindim. Standard-Normalverteilung, $Z_k \sim \mathrm{N}(0,1)$.

Sei nun $X = (X_1,\ldots,X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine Familie von Zufallsvariablen. Dies definiert den Vektor $\mu \in \mathbb{R}^n$ mit $\mu_k = \mathbf{E}(X_k)$ und die symmetrische Matrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\Sigma_{k\ell} = \mathbf{Cov}(X_k, X_\ell)$, insbesondere $\Sigma_{kk} = \mathbf{V}(X_k)$. Wir nehmen Σ als positiv definit an, insbesondere $\det\Sigma > 0$. Wir nennen X normalverteilt, kurz $X \sim \mathrm{N}(\mu,\Sigma)$, falls $\mathbf{P}_X$ folgende WDichte hat:

$$f(x) = \frac{\exp[-\frac{1}{2}(x-\mu)\Sigma^{-1}(x-\mu)]}{\sqrt{(2\pi)^n \det\Sigma}}$$

Übung: (1) Für jede affin-lineare Transformation $Y = AX + v$ mit Matrix $A \in \mathrm{GL}_n\,\mathbb{R}$ und Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ gilt $Y \sim \mathrm{N}(A\mu + v, A\Sigma A^{-1})$.

(2) Sind die Komponenten von X paarweise unkorreliert, so sind sie sogar stochastisch unabhängig (analog zu Indikatorfunktionen T350).

Motivation zum zentralen Grenzwertsatz

Anwendung: Jede Messung X_k ist zufälligen Störungen unterworfen. Sie habe Erwartung $\mu_k = \mathbf{E}(X_k)$ und Varianz $\sigma_k^2 = \mathbf{E}(|X_k - \mu_k|^2) > 0$.

Die Summe $S = X_1 + \ldots + X_n$ hat die Erwartung $\mu = \mu_1 + \ldots + \mu_n$. Bei Unabhängigkeit addieren sich die Varianzen $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2$.

Das sind soweit nur grobe Kenngrößen. Jetzt geschieht das Wunder: **Typischerweise** ähnelt die Verteilung von S der Normalverteilung:

$$S \sim \mathbf{P}_S \approx \mathrm{N}(\mu, \sigma^2), \quad \text{das heißt ausgeschrieben}$$

$$\mathbf{P}(a \le S \le b) \approx \int_{(a-\mu)/\sigma}^{(b-\mu)/\sigma} \frac{\mathrm{e}^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}\xi \overset{\text{Tabelle}}{=} \Big[\Phi\Big]_{(a-\mu)/\sigma}^{(b-\mu)/\sigma}$$

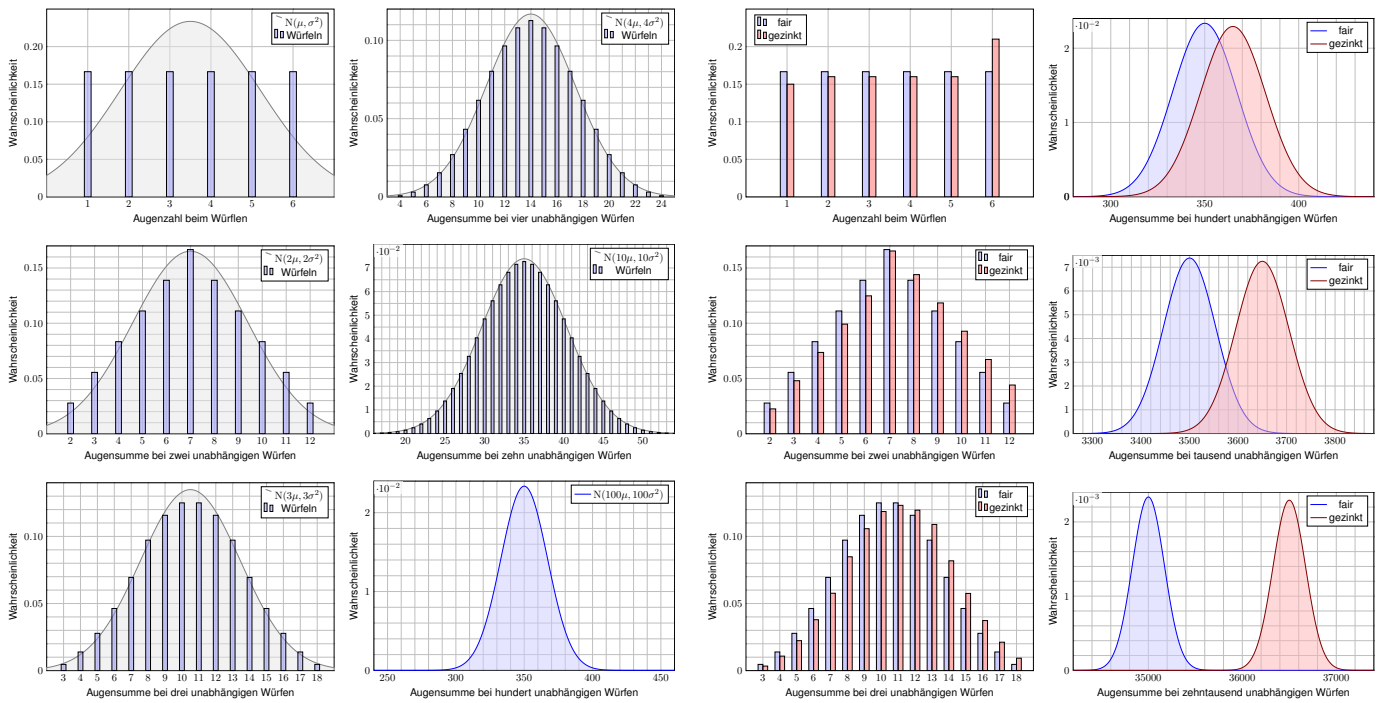
Das ist eine enorme Vereinfachung: Die Verteilung von S ist kompliziert und meist unbekannt, die Normalverteilung hingegen ist explizit & leicht! Die Normalverteilung entsteht, egal welche Verteilungen die X_k haben!

Wie gut ist die Approximation für festes n? Wie groß ist der Fehler δ? Gilt $\delta \to 0$ für $n \to \infty$? Das ist Inhalt des zentralen Grenzwertsatzes!

Motivation zum zentralen Grenzwertsatz

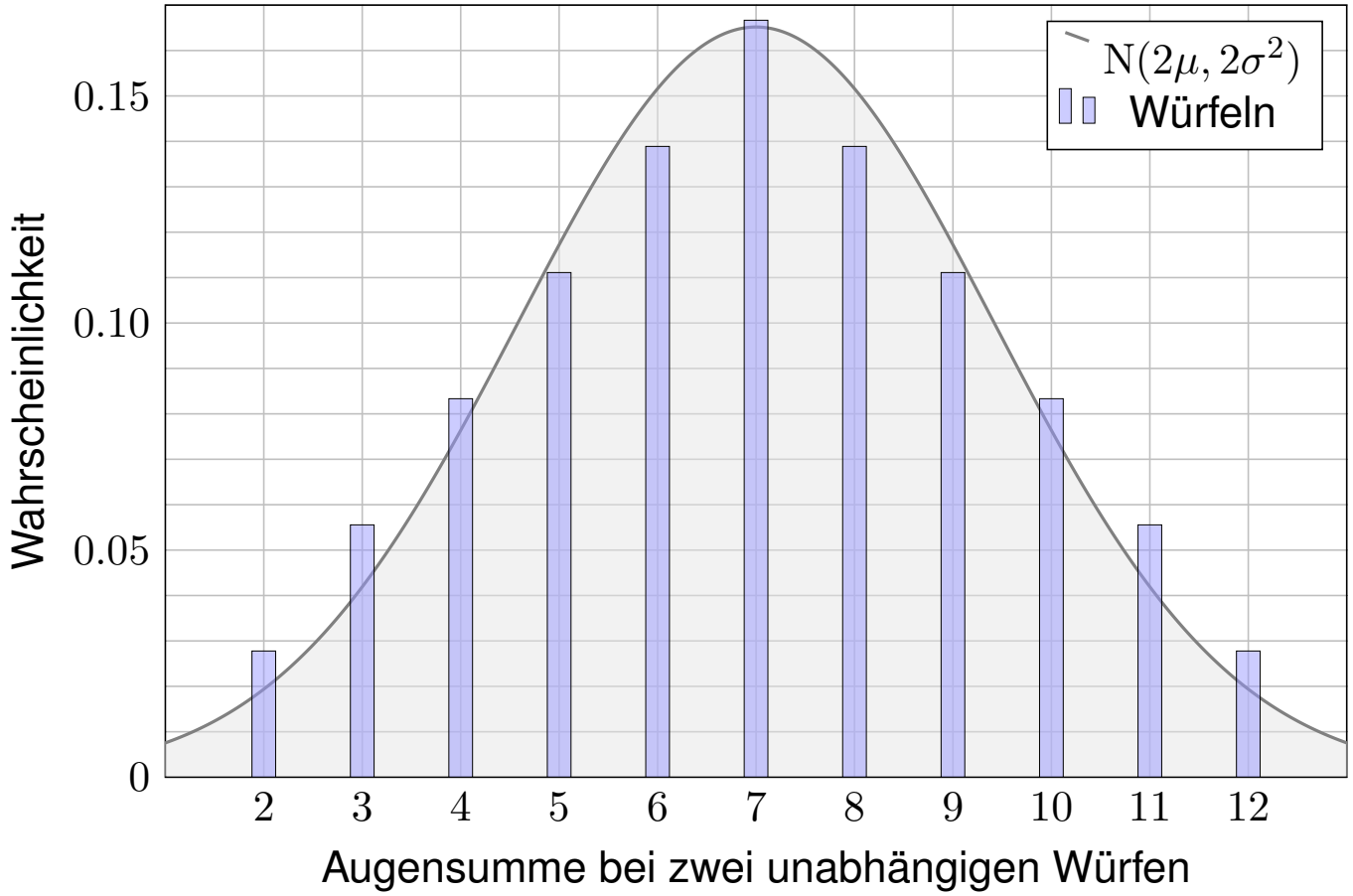
Aufgabe: Illustrieren Sie diese Näherung numerisch für Würfelsummen mit einem fairen Würfel (T105) und unserem gezinkten Würfel (T107).

Anschließend erklärt Ihnen der zentrale Grenzwertsatz W1D, was von diesen konkreten Beobachtungen allgemein garantiert werden kann.



Augensumme bei zweimaligem Würfeln

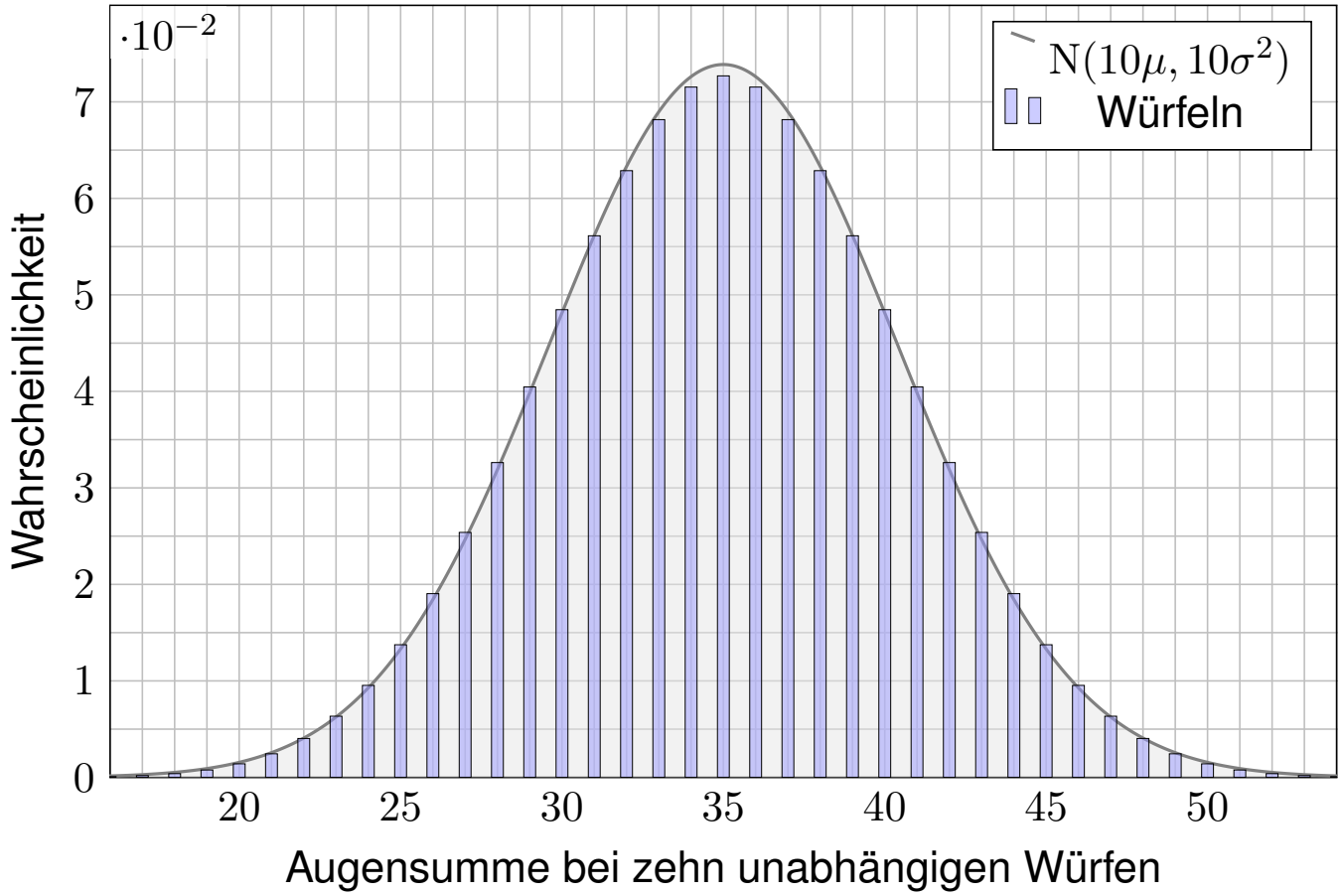
W111
Ausführung



☺ Die Augensumme hat Erwartung $2\mu = 7$ und Varianz $2\sigma^2 = 35/6$.

Augensumme bei zehnmaligem Würfeln

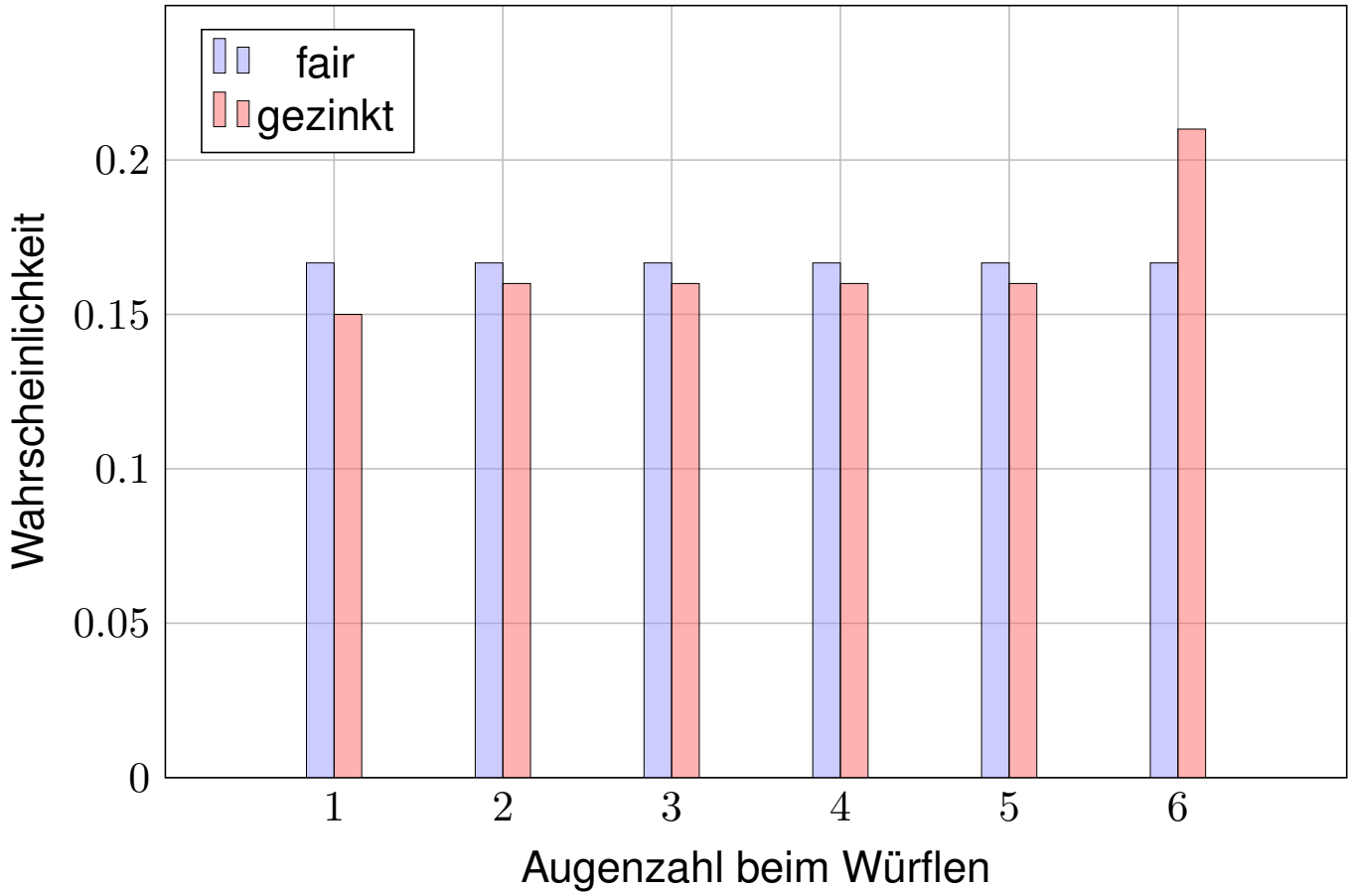
W112
Ausführung



☺ Große Zahlen: Die Verteilung von $\hat{X}$ konzentriert sich um μ.

Augenzahl bei einmaligem Würfeln

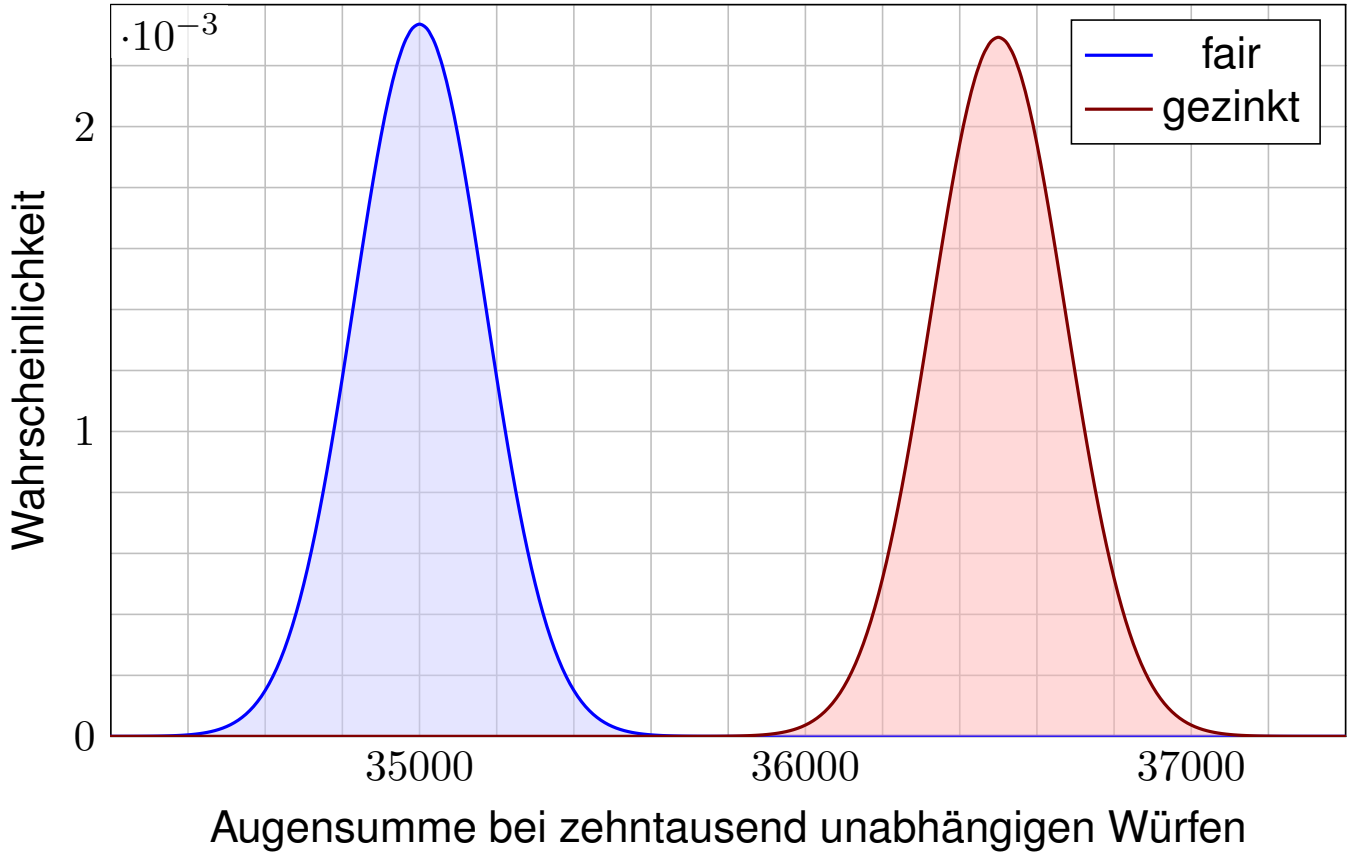
W113
Ausführung



☺ Gezinkt ist die Erwartung $\mu_2 = 3.65$ etwas größer als fair $\mu_1 = 3.5$.

Augensumme bei zehntausendmaligem Würfeln

W114
Ausführung



☺ Bei zehntausend Würfen unterscheiden sich die Ergebnisse sicher. So können wir den gezinkten Würfel experimentell erkennen! W329

Was sehen wir in diesen Beispielen?

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Experiments X_k, hier Würfeln, bestimmt die Erwartung $\mu = \mathbf{E}(X_k)$ und die Varianz $\sigma^2 = \mathbf{V}(X_k)$. Das sind, wie immer so auch hier, die wichtigsten Kenngrößen.

☺ Die Summe $S = X_1 + \ldots + X_n$ von n unabhängigen Wiederholungen hat dann Erwartung $n\mu$ und Varianz $n\sigma^2$. ☹ Sie ist nicht binomialverteilt, also können wir den lokalen Grenzwertsatz V3A hier nicht anwenden.

☺ Nach vielen Wiederholungen spielt die Ausgangsverteilung keine Rolle: Es entsteht immer annähernd die Normalverteilung $\mathrm{N}(n\mu, n\sigma^2)$. Ihre universelle Rolle ist ein phantastisch nützliche Eigenschaft!

Man kann dies (etwas vage aber poetisch) auch wie folgt formulieren: Im Kleinen, bei einzelnen Experimenten regiert der Zufall ungezügelt; im Großen, bei vielen Experimenten muss er sich Gesetzen beugen.

☺ Diese Gesetzmäßigkeit müssen Sie kennen und sollten Sie nutzen: Solide Grundlagen ermöglichen Ihnen den sicheren Umgang mit Wkten. *„Nul n'est censé ignorer la loi."* [Niemand darf das Gesetz ignorieren.]

Was sagt der zentrale Grenzwertsatz?

☺ Der ZGS besagt: Die Summe $S = X_1 + \ldots + X_n$ vieler unabhängiger, aber ähnlich großer Zufallsvariablen ist annähernd normalverteilt.

Beispiel: Für unabhängige und identisch verteilte 0–1–Zufallsvariablen $X_k : \Omega \to \{0, 1\}$ ist $S = X_1 + \ldots + X_n$ exakt binomialverteilt, $S \sim \mathrm{B}(n, t)$. Hier gilt $\mathrm{B}(n, t) \approx \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ mit expliziten Fehlerschranken (LGS, V3A).

☺ Im allgemeineren ZGS dürfen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ beliebig verteilt sein. Wir benötigen hierzu allerdings einige Vorsichtsmaßnahmen W309:

1. Die Beiträge $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sollen unabhängig sein.
   Für $S = X + X + \ldots + X$ gilt der ZGS sicher nicht.
2. Die Beiträge $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sollen alle etwas streuen.
   Für $S = 1 + 1 + \ldots + 1$ gilt der ZGS sicher nicht.
3. Die Beiträge $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sollen „ähnlich groß" sein.

Folgender Satz, formuliert nach A.C. Berry 1941 und C.G. Esséen 1944, präzisiert diese Voraussetzungen in Form des 2. und 3. Moments und quantifiziert den Approximationsfehler durch eine explizite Schranke.

☺ Allgemein gültige Näherung mit verlässlicher Fehlerabschätzung!

Der zentrale Grenzwertsatz: allgemein und verlässlich

Satz W1D: zentraler Grenzwertsatz, ZGS

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ein WRaum und $X_1, X_2, X_3, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängig mit

1. endlichen Erwartungen $\mu_k = \mathbf{E}(X_k)$ dank $\mathbf{E}(|X_k|) < \infty$,
2. strikt positiven Varianzen $\sigma_k^2 = \mathbf{E}\big(|X_k - \mu_k|^2\big) \geq \sigma_0^2 > 0$,
3. beschränkten dritten Momenten $\rho_k^3 = \mathbf{E}\big(|X_k - \mu_k|^3\big) \leq \rho_0^3 < \infty$.

Die Summe $S = X_1 + \ldots + X_n$ hat die Erwartung $\mu = \mu_1 + \ldots + \mu_n$ und die Varianz $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2$. Es gilt $\mathbf{P}_S \approx \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, genauer

$$\mathbf{P}(a \leq S \leq b) = \int_{(a-\mu)/\sigma}^{(b-\mu)/\sigma} \frac{\mathrm{e}^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}\xi + \delta,$$

$$|\delta| \leq \frac{\rho_1^3 + \ldots + \rho_n^3}{(\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2)^{3/2}} \leq \frac{\rho_0^3}{\sigma_0^3\sqrt{n}} \searrow 0.$$

Zentriert und normiert zu $S^* := (S - \mu)/\sigma$ erhalten wir $\mathbf{P}_{S^*} \approx \mathrm{N}(0, 1)$.

⚠ Alle drei Voraussetzungen (1–3) werden wirklich benötigt. W309

Vergleich zwischen ZGS und LGS

Aufgabe: Wer ist für $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{B}(1, t)$ genauer: ZGS oder LGS?

Lösung: Zu $X_k \sim \mathrm{B}(1, t)$ finden wir (T310) $\mu_k = t$ und $\sigma_k^2 = t(1-t)$ sowie $\rho_k^3 = t(1-t)(t^2 + (1-t)^2)$. Die Summe $S = X_1 + \ldots + X_n$ ist $\mathrm{B}(n, t)$–verteilt mit $\mu = nt$ und $\sigma^2 = nt(1-t)$, also exakt / genähert:

$$\mathbf{P}(a \leq S \leq b) = \sum_{k=a}^{b} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \int_{(a-1/2-\mu)/\sigma}^{(b+1/2-\mu)/\sigma} \frac{\mathrm{e}^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}\xi + \delta$$

Für $\sigma \geq 5$ ist der Approximationsfehler δ im LGS/ZGS beschränkt durch

$$|\delta| \overset{\text{LGS}}{<} \frac{1}{6\sigma} = \frac{1}{6\sqrt{nt(1-t)}} \overset{\text{ZGS}}{<} \frac{\rho_0^3}{\sigma_0^3\sqrt{n}} = \frac{t^2 + (1-t)^2}{\sqrt{nt(1-t)}}$$

Der LGS liefert die bessere Konstante: $1 \geq t^2 + (1-t)^2 \geq 1/2 > 1/6$. Die Fehlerschranke ist also um einen Faktor 3 bis 6 kleiner als im ZGS. Mit Korrekturterm κ sinkt der Fehler auf $|\varepsilon| < 1/(3\sigma^2) = 1/[3nt(1-t)]$.

☺ Der lokale Grenzwertsatz ist spezieller, dabei aber auch präziser.

☺ Der ZGS gilt nicht nur für $S \sim \mathrm{B}(n, t)$, sondern viel allgemeiner!

Vergleich zwischen ZGS und LGS

Der LGS nutzt die Stetigkeitskorrektur $\pm 1/2$ in den Integrationsgrenzen zur genaueren Approximation. Der ZGS kennt diese Korrektur nicht: Er gilt für kontinuierlich verteilte Zufallsvariablen ebenso wie für diskrete, und im kontinuierlichen Fall hat die Stetigkeitskorrektur keinen Sinn.

Aufgabe: Welcher Fehler entsteht hierdurch schlimmstenfalls?

Lösung: Für $S \sim \mathrm{B}(n,t)$ und $k = 0, 1, \ldots, n$ gilt exakt und nach LGS:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\big(k \le S \le k\big) &= \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \overset{\text{LGS}}{\approx} \int_{(k-1/2-\mu)/\sigma}^{(k+1/2-\mu)/\sigma} \frac{\mathrm{e}^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}\xi \\ &\approx \frac{\mathrm{e}^{-(k-\mu)^2/2\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \qquad \le \frac{1}{\sqrt{2\pi n t(1-t)}} \end{aligned}$$

Beachten Sie die Stetigkeitskorrektur $\pm 1/2$ in den Integrationsgrenzen! Andernfalls wäre die Approximation $\mathbf{P}\big(k \le S \le k\big) \approx 0$ völlig nutzlos.

Die obere Schranke erhalten wir für $k = \mu$ und nutzen $\sigma^2 = nt(1-t)$. Hier nimmt die Normalverteilung (Glockenkurve) ihr Maximum an.

Vergleich zwischen ZGS und LGS

Der ZGS hingegen liefert ohne Stetigkeitskorrektur leider nur

$$\mathbf{P}\big(k \le S \le k\big) \overset{\text{ZGS}}{=} \int_{(k-\mu)/\sigma}^{(k-\mu)/\sigma} \frac{\mathrm{e}^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}\xi \;+\; \delta \;=\; 0 + \delta$$

Dieses Integral verschwindet! Belügt uns der ZGS in diesem Fall? Nein, er nützt nur nicht mehr viel, denn er besagt jetzt lediglich:

$$0 \;\le\; \mathbf{P}\big(k \le S \le k\big) = \delta \;\le\; \frac{\rho_0^3}{\sigma_0^3\sqrt{n}}$$

Alles ist gut. Der Fehler δ bleibt unter der Fehlerschranke des ZGS:

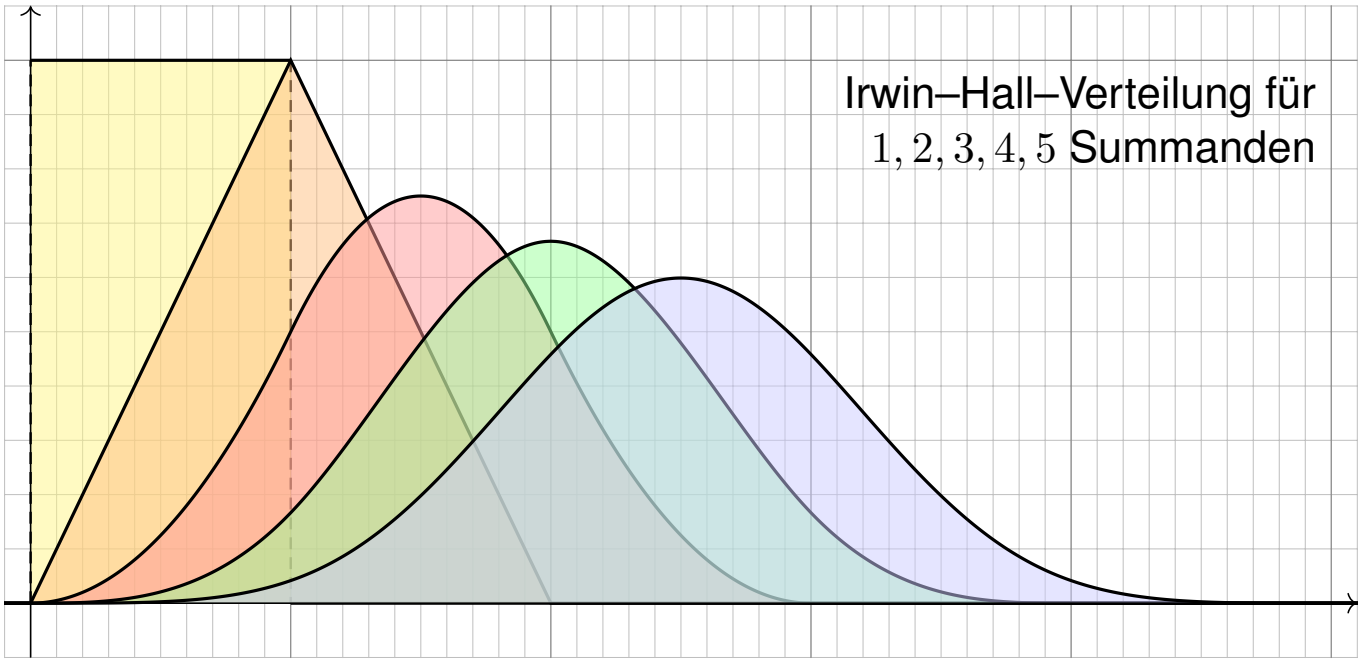
$$\frac{\rho_0^3}{\sigma_0^3\sqrt{n}} = \frac{t^2 + (1-t)^2}{\sqrt{nt(1-t)}} \ge \frac{1}{2\sqrt{nt(1-t)}} \ge \frac{1}{\sqrt{2\pi n t(1-t)}} \ge \delta \ge 0$$

In solch extremen Fällen wird man den ZGS wohl kaum nutzen wollen, doch sie illustrieren eindrücklich, was schlimmstenfalls passieren kann.

☺ Hier wird der ZGS zwar missbraucht, aber dank δ bleibt alles richtig: Die Approximation kann schlecht sein, die Fehlerschranke stimmt immer.

☺ Der LGS mit Stetigkeitskorrektur ist hier wesentlich genauer.

Summen gleichverteilter Zufallsvariablen



Aufgabe: Wir betrachten unabhängige gleichverteilte Zufallsvariablen $X_1, X_2, X_3, \ldots : \Omega \to [0,1]$, das heißt $X_k \sim \mathbf{P}_1$ mit WDichte $f_1 = \mathbf{I}_{[0,1]}$. Welche Verteilung hat $S_n = X_1 + \ldots + X_n$? Bestimmen Sie die Dichte:

$$f_n(x) = (f_{n-1} * f_1)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{n-1}(x-u) f_1(u)\,\mathrm{d}u = \int_{u=0}^{1} f_{n-1}(x-u)\,\mathrm{d}u$$

Summen gleichverteilter Zufallsvariablen

Lösung: Für $x \in [0,n]$ gilt $f_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} (x-k)^{n-1}/(n-1)!$. Die Dichte f_n ist stückweise polynomiell vom Grad n. Für $t \in [0,1]$ gilt:

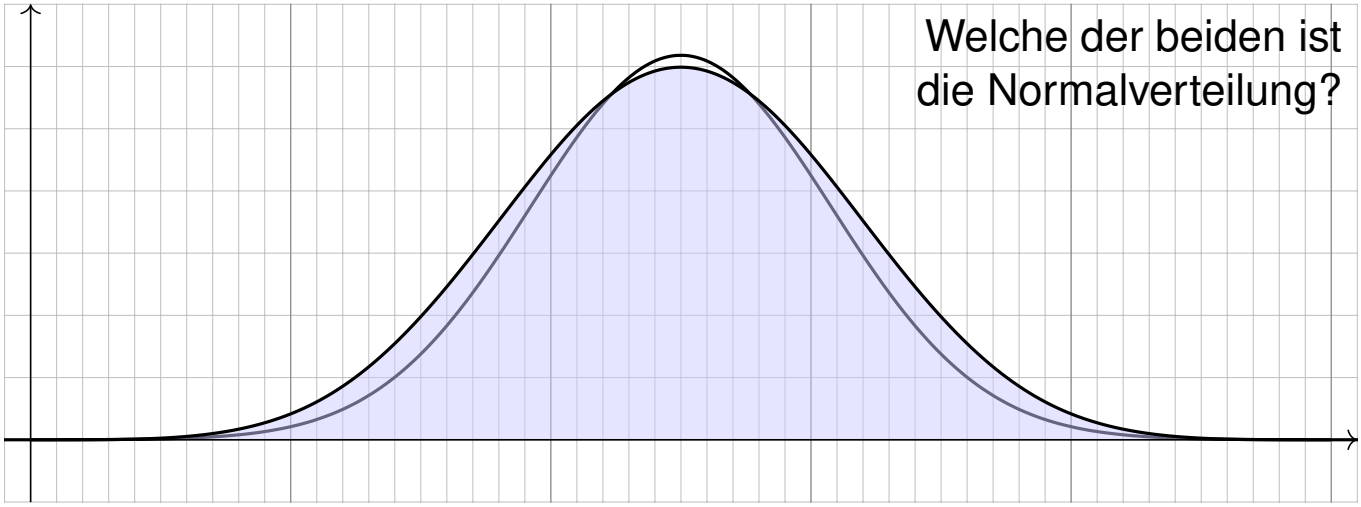
$$f_2(k+t) = \begin{cases} t & \text{für } k = 0, \\ 1-t & \text{für } k = 1. \end{cases}$$

$$f_3(k+t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & \text{für } k = 0, \\ \frac{1}{2} + t - t^2 & \text{für } k = 1, \\ \frac{1}{2} - t + \frac{1}{2}t^2 & \text{für } k = 2. \end{cases}$$

$$f_4(k+t) = \begin{cases} \frac{1}{6}t^3 & \text{für } k = 0, \\ \frac{1}{6}(1 + 3t + 3t^2 - 3t^3) & \text{für } k = 1, \\ \frac{1}{6}(4 - 6t^2 + 3t^3) & \text{für } k = 2, \\ \frac{1}{6}(1 - 3t + 3t^2 - t^3) & \text{für } k = 3. \end{cases}$$

☺ Die ersten Terme $f_1, f_2, \ldots, f_5$ sind in obiger Graphik dargestellt.

Summen gleichverteilter Zufallsvariablen

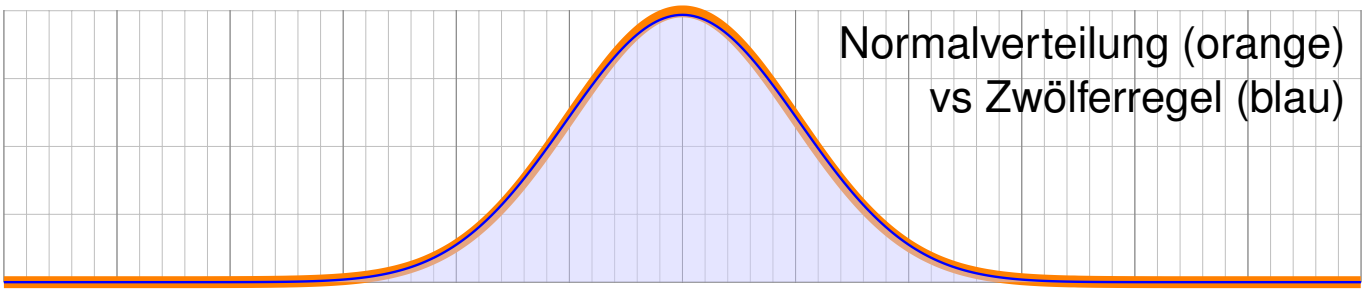


Die obige Verteilung der fünffachen Summe S_5 ähnelt augenscheinlich der Normalverteilung $\mathrm{N}(5/2, 5/12)$. Der Vergleich zeigt Abweichungen.

⚠ Nicht jede glockenähnliche Kurve ist eine Normalverteilung!
Die obigen Illustrationen zeigen eindrückliche Gegenbeispiele.

Aufgabe: Untersuchen Sie die **Zwölferregel**: „Wählt man Zufallszahlen $X_1, \ldots, X_{12}$ unabhängig und gleichverteilt im Intervall $[-1/2, 1/2]$, so ist ihre Summe $S = X_1 + \ldots + X_{12}$ näherungsweise std-normalverteilt.“

Summen gleichverteilter Zufallsvariablen



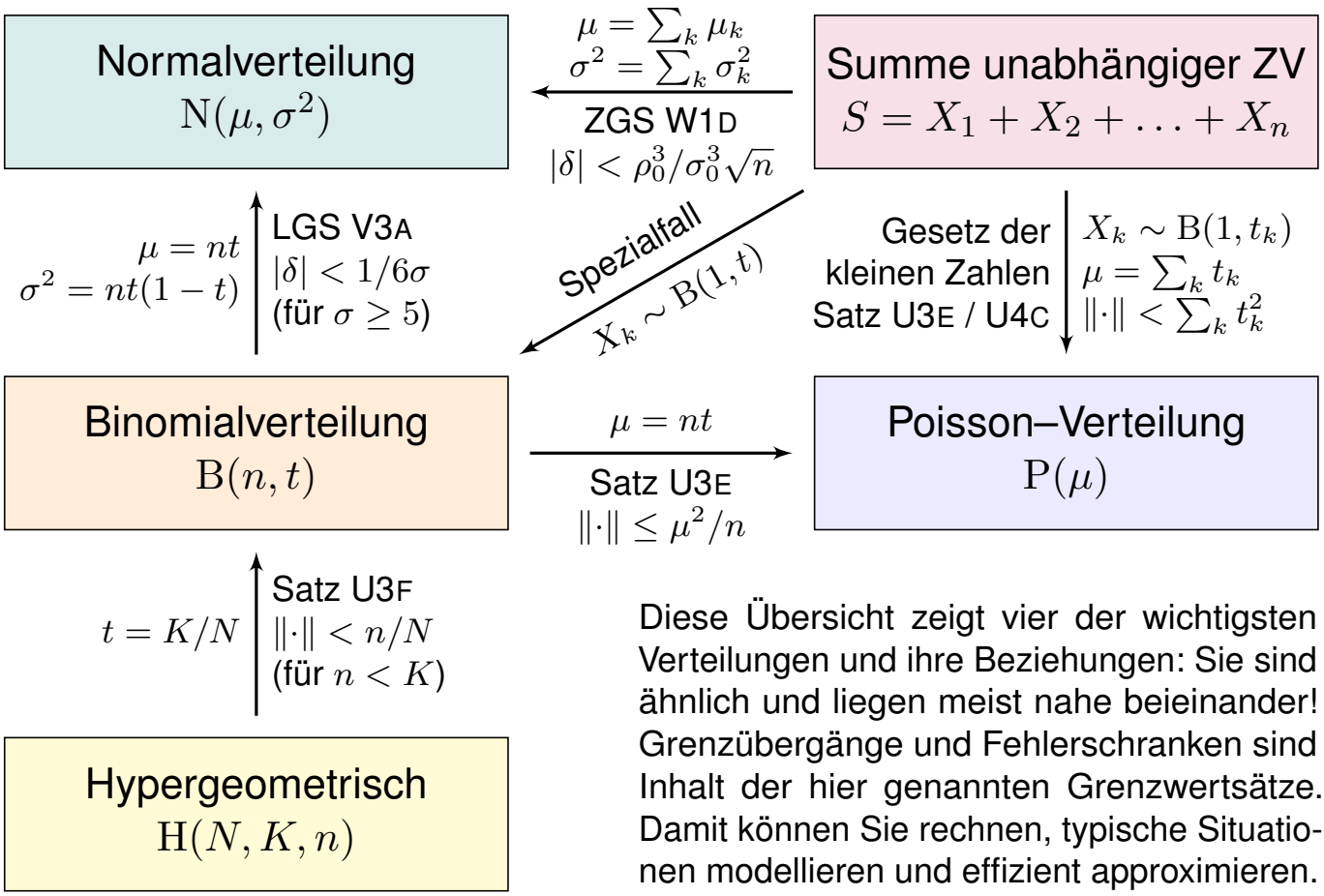
Lösung: Es gilt $\mu_k = 0$. Wir berechnen das n-te absolute Moment:

$$\int_{-1/2}^{1/2} |x|^n \,\mathrm{d}x = 2 \int_{x=0}^{1/2} x^n \,\mathrm{d}x = \frac{2}{n+1} \Big[x^{n+1} \Big]_{x=0}^{1/2} = \frac{2^{-n}}{n+1}$$

Demnach gilt $\sigma_k^2 = 1/12$ und $\rho_k^3 = 1/32$. Die Summe S hat Erwartung $\mathbf{E}(S) = 0$ und Varianz $\mathbf{V}(S) = 1$. Die Näherung ist recht brauchbar, doch die pessimistische Fehlerschranke des ZGS garantiert nur $|\delta| \leq 12/32$.

☺ Die **Polarmethode** ist wesentlich genauer und effizienter, siehe `en.wikipedia.org/wiki/Marsaglia_polar_method`: Sie erzeugt *zwei* exakt normalverteilte Zufallszahlen durch den Gaußschen Kunstgriff. Mathematische Sachkenntnis ermöglicht effiziente Lösungen.

Wichtige Verteilungen und Grenzwertsätze



Diese Übersicht zeigt vier der wichtigsten Verteilungen und ihre Beziehungen: Sie sind ähnlich und liegen meist nahe beieinander! Grenzübergänge und Fehlerschranken sind Inhalt der hier genannten Grenzwertsätze. Damit können Sie rechnen, typische Situationen modellieren und effizient approximieren.

Wichtige Verteilungen und Grenzwertsätze

Viele Zufallsexperimente beschreiben wir durch **Standardmodelle**. Hierzu nutzen wir vier besonders häufige und wichtige WVerteilungen:

- die hypergeometrische Verteilung $\mathrm{H}(N,K,n)$ für Stichproben oZ,
- die Binomialverteilung $\mathrm{B}(n,t)$ für Trefferzahlen und Stichproben mZ,
- die Poisson–Verteilung $\mathrm{P}(\mu)$ als Näherung für kleine Trefferwkt t,
- die Normalverteilung $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ als Näherung für beliebige $t \in]0,1[$.

Viele Rechnungen vereinfachen wir durch asymptotische **Näherungen**:

- Für große Stichproben ($N \to \infty$) gilt $\mathrm{H}(N,K,n) \approx \mathrm{B}(n,K/N)$.
- Gesetz der kleinen Zahlen: $\mathrm{B}(n,t) \approx \mathrm{P}(nt)$ für kleines t.
- Lokaler Grenzwertsatz: $\mathrm{B}(n,t) \approx \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ für großes σ.

Insbesondere für eine **Summe S unabhängiger Zufallsvariablen** gilt:

- Als Spezialfall erhalten wir exakt die Binomialverteilung $\mathrm{B}(n,t)$.
- Gesetz der kleinen Zahlen: $\mathbf{P}_S \approx \mathrm{P}(\mu)$ für kleine t_k, siehe U4C.
- Zentraler Grenzwertsatz: $\mathbf{P}_S \approx \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$, siehe W1D.

☺ Unsere Sätze garantieren bequeme, allgemeine Fehlerschranken.

Wichtige Verteilungen und Grenzwertsätze

Dieser abschließende Rückblick ist auch ein guter Moment für eine grundsätzliche, strategische Frage: Wozu tun wir das alles? Warum geben wir uns soviel Mühe mit diesen Grenzwertsätzen? Machen heutige Computer nicht solche Näherungen überflüssig?

☺ Tatsächlich sind Computer eine enorme Hilfe; sie können dank brutaler Rechengewalt (engl. *brute force*) viele Probleme berechnen, die vor wenigen Jahrzehnten noch außerhalb unserer Reichweite lagen.

☺ Dazu helfen nicht nur schnellere Prozessoren, sondern mehr noch bessere mathematische Werkzeuge in Form effizienter Algorithmen. Dazu gehören insbesondere gute Näherungen und Grenzwertsätze!

Moores Regel prognostiziert, dass Computer etwa alle 18 Monate ihre Leistung verdoppeln; bislang beschreibt dies recht gut die Entwicklung.

⚠ Auch wenn diese Faustregel weiterhin zutreffen sollte, fallen selbst einfache Berechnungen wie W321 leicht so groß aus, dass sie weit außer Reichweite liegen. Das Grundproblem bleibt somit immer bestehen.

⚠ Effiziente Näherungen bleiben daher weiterhin numerisch wichtig!

Wichtige Verteilungen und Grenzwertsätze

☺ Die Grenzwertsätze erklären Ihnen die logischen und numerischen **Beziehungen** zwischen den verschiedenen stochastischen Modellen.

Die Struktur des vorgelegten Problems diktiert meist ein Modell, die gegebenen Daten kalibrieren es und bestimmen die Parameter. Anschließend können Sie das Modell modifizieren und vereinfachen, und innerhalb der Fehlergrenzen gegen ein einfacheres austauschen.

⚠ Diese Beziehungen helfen Ihnen, in praktischen Anwendungen das passende mathematische Werkzeug zu wählen und sicher zu rechnen.

☺ Dasselbe gilt für die Nutzung und **Programmierung** von Computern: Sie müssen dem Computer genau sagen, *was* er zu rechnen hat, und in vielen Fällen sogar, *wie* er zu rechnen hat. Denn nur Sie wissen, welche Genauigkeit Sie am Ende verlangen und wieviel Rechenzeit Sie dafür zur Verfügung stellen. Hierzu dient die Wahl der Methode, der Näherung.

Schließlich müssen Sie computer-berechnete Ergebnisse verstehen, auf Korrektheit bzw. Plausibilität prüfen, interpretieren und anwenden.

⚠ Gerade hierzu dienen Gesetzmäßigkeiten und Rechenregeln!

Lobeshymne auf den zentralen Grenzwertsatz

In Natur- und Ingenieurwissenschaften, in Wirtschaft und Gesellschaft treten **zufällige Größen** X auf. Sie sind meist unvermeidbar, genauere Informationen sind oft zu teuer oder manchmal gar nicht zugänglich.

Die Stochastik liefert Werkzeuge zum sicheren Umgang mit unsicheren Ereignissen, allgemein zum rationalen Entscheiden unter Unsicherheit. Hierzu ist es von zentraler Bedeutung, die **Verteilung** $\mathbf{P}_X$ zu kennen, oder zumindest so gut abzuschätzen wie es eben geht oder nötig ist.

Oft ist unsere Zufallsgröße S eine Summe zahlreicher kleiner Einflüsse, die unabhängig voneinander wirken. Der zentrale Grenzwertsatz erklärt, dass wir dann eine **Normalverteilung** erwarten dürfen, $\mathbf{P}_S \approx \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

Der Name des Satzes geht zurück auf George Pólyas Arbeit *Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung* von 1920.

Wie in der Mathematik üblich, geht man zum **Grenzwert** (Limes) über, um die Ergebnisse bequem und übersichtlich formulieren zu können. Für praktische Anwendungen ist eine **Fehlerschranke** notwendig für den Wechsel von $\mathbf{P}_S$ zu $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Satz W1D stellt hierzu alles bereit.

Lobeshymne auf den zentralen Grenzwertsatz

☺ Der zentrale Genzwertsatz ist ein phantastisches Ergebnis.

Er ist allgemein gültig und daher vielseitig anwendbar. Das ermöglicht die Modellierung, Berechnung und Erklärung vieler stochastischer Phänomene, die uns täglich umgeben. Implizit oder explizit wird er in praktisch allen naturwissenschaftlich-technischen Modellen oder industriellen Prozessen benutzt, in denen zufällige Schwankungen vorkommen.

☺ Die Voraussetzungen des ZGS sind sehr allgemein und oft erfüllt. Daher ist der ZGS nahezu überall anwendbar (anders als der LGS).

Zunächst setzen wir die Unabhängigkeit der Zufallsvariablen $X_1, X_2, X_3, \ldots$ voraus, was für viele Anwendungen realistisch ist. (Man kann dies weiter abschwächen, und ein kontrolliertes Maß an schwacher Abhängigkeit erlauben, aber dies würde uns hier zu weit vom Weg führen.)

Die vorausgesetzten Schranken $\sigma_k \geq \sigma_0 > 0$ und $\rho_k \leq \rho_0 < \infty$ des zentralen Grenzwertsatzes W1D stellen sicher, dass alle Beiträge $X_1, X_2, X_3, \ldots$ ähnlich stark streuen. Andernfalls könnte zum Beispiel X_1 alle anderen Summanden $X_2, X_3, \ldots$ überwiegen, und in der Summe würde keine Normalverteilung entstehen, sondern im Wesentlichen die Verteilung von X_1. W309

☺ Eine allgegenwärtige Anwendung sind Konfidenzintervalle. W209

Diese werden überall in Naturwissenschaft und Technik verwendet, um die Genauigkeit einer Messung, Rechnung oder Spezifikation zu quantifizieren (Fehlerrechnung). Diese wichtige Information muss man mindestens passiv intuitiv verstehen, meist auch aktive präzise nutzen.

Lobeshymne auf den zentralen Grenzwertsatz

☺ Sehr wenige Informationen reichen für den ZGS bereits aus!

Für die Näherung genügen Erwartungen μ_k und Varianzen $\sigma_k^2 \geq \sigma_0^2 > 0$, für die Fehlerschranke die dritten Momente $\rho_k^3 \leq \rho_0^3 < \infty$, notfalls nach oben abgeschätzt. Das gelingt oft problemlos.

Ein besonders wichtiger Spezialfall ist die unabhängige Wiederholung von Messungen bzw. Experimenten: Hier sind die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt, insbesondere gilt für ihre Kenngrößen $\mu_k = \mu_0$, $\sigma_k = \sigma_0$, $\rho_k = \rho_0$ für alle $k = 1, 2, \ldots, n$. Zur Existenz dieser Integrale benötigen wir lediglich $X_k \in L^3(\Omega; \mathbb{R})$, denn $L^3 \supseteq L^2 \supseteq L^1$.

Der lokale Grenzwertsatz V3A ist bei Bedarf genauer: Dort geht es nur um Binomialverteilungen, dafür liefert der LGS den nützlichen Korrekturterm κ und wesentlich schärfere Fehlerschranken. Diese Verbesserung ist auch für den ZGS möglich und führt zur Edgeworth–Entwicklung mittels höherer Momente. Der obige zentrale Grenzwertsatz ist die erste Näherung dieser Reihe.

☺ Wir können den ZGS durch Fourier–Transformation nachrechnen.

Da wir die Fourier–Transformation aus Kapitel K bereits gut kennen, skizziere ich die Rechnung im Anhang zu diesem Kapitel, ab Seite W406. Die Idee ist einfach-genial und leicht zu verstehen!

⚠ Ohne die geforderten Momente gilt der ZGS im Allgemeinen nicht!

Wir finden hierzu einfache Gegenbeispiele, in denen der ZGS nicht anwendbar ist. W309
Die Cauchy–Verteilungen W413 zum Beispiel erfüllen nicht die Voraussetzungen des ZGS und auch nicht seine Schlussfolgerung, denn sie konvergieren nicht gegen die Normalverteilung.

Lobeshymne auf den zentralen Grenzwertsatz

☺ Der ZGS liefert eine explizite Fehlerschranke $|\delta| \leq \rho_0^3/\sigma_0^3\sqrt{n}$.

Der Grenzwertsatz in der Form $\mathbf{P}_S \approx \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ oder besser $\mathbf{P}_S \to \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ für $n \to \infty$ ist eine qualitative Aussage: Er garantiert die Konvergenz der Verteilungen, sagt aber noch nichts über die Konvergenzgeschwindigkeit oder den Approximationsfehler für ein vorgegebenes n.

Oft verwendet man den ZGS nicht für $n \to \infty$, sondern als $\mathbf{P}_S \approx \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ für ein festes n. Für die konkrete Anwendung ist es dann wichtig zu wissen: Wie gut ist die Approximation? Obige Formulierung von Berry–Esséen ist eine quantitative Präzisierung: Sie besagt, wie schnell die Konvergenz ist (nämlich wie $1/\sqrt{n} \to 0$) und garantiert sogar explizite Fehlerschranken!

Der LGS bietet eine genauere Schranke; symmetrisch oder mit Korrekturterm sinkt der Fehler sogar von $|\delta| \leq \mathrm{const}/\sqrt{n}$ auf $|\varepsilon| \leq \mathrm{const}/n$. Wenn im ZGS eine ähnliche Garantie nötig sein sollte, müsste man genauere und umfangreichere Rechnungen anstrengen. Auch das kommt in sicherheitskritischen Anwendungen vor. Hierzu existiert eine ausgedehnte Spezialliteratur.

☺ Oft ist die Näherung besser als die pessimistische Fehlerschranke!

Die im zentralen Grenzwertsatz angegebene Fehlerschranke $|\delta| \leq \rho_0^3/\sigma_0^3\sqrt{n}$ ist ein bequemer erster Schritt. In günstigen Fällen ist die Approximation tatsächlich besser, wie Beispiele zeigen. Die Fehlerschranke gilt allgemein, sie muss daher pessimistisch vom schlechtesten Fall ausgehen.

⚠ Beispiele zeigen den asymptotischen Fehler $|\delta| \sim \mathrm{const}/\sqrt{n}$. W317
Diese Fehlerschranke lässt sich also allgemein nicht weiter verbessern.

Anwendung auf Konfidenzintervalle

Anwendung: Jede Messung X ist zufälligen Störungen unterworfen, Messwerte schwanken um den Erwartungswert μ mit Streuung $\sigma > 0$.

Beispiel: Sie führen $n = 400$ unabhängige Messungen $X_1, X_2, \ldots, X_{400}$ durch und erhalten Messwerte $x_1, x_2, \ldots, x_{400}$. Sie schätzen μ durch den

Stichprobenmittelwert $\hat{x} := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \overset{\text{Messung}}{\underset{\text{(Beispiel)}}{=}} 57.5$

Die Streuung von X schätzen Sie (dank der Stichprobe) auf $\sigma \lessapprox 10$. Wie genau ist $\hat{x}$? Wo liegt vermutlich der wahre Erwartungswert μ?

$$I_1 = [57, 58], \quad I_2 = [56.5, 58.5], \quad I_3 = [56, 59], \quad I_k = [57.5 \pm k \cdot 0.5]$$

Aufgabe: Welches Intervall I_k überdeckt den Erwartungswert μ mit Sicherheit $\alpha_k \geq 95\%$ bzw. $\alpha_k \geq 99\%$? Was sagt Chebychev? der ZGS?

Der Erwartungswert μ ist eine Konstante. Leider ist sie uns unbekannt. Das Ziel der Messung ist, diese Konstante μ möglichst genau zu bestimmen. Als Schätzung für den Wert μ dient uns $\hat{x}$. Wie die Messwerte $x_1, \ldots, x_n$ ist auch $\hat{x}$ zufälligen Schwankungen unterworfen. Wenn Sie eine neue unabhängige Stichprobe durchführen, erhalten Sie einen neuen Mittelwert $\hat{x}$, und mit ihm verschieben sich obige Intervalle. Wir wollen sichergehen und verlangen, dass in 95% aller Stichproben unser Intervall den wahren Wert μ überdecken soll. Welchem Intervall vertrauen wir?

Anwendung auf Konfidenzintervalle

Lösung: Wir nutzen das Gesetz der großen Zahlen und den ZGS!

Der Mittelwert $\hat{X} := \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$ unabhängiger Messungen hat Erwartung $\mathbf{E}(\hat{X}) = \mathbf{E}(X) = \mu$ und Varianz $\mathbf{V}(\hat{X}) = \mathbf{V}(X)/n$. Also $\sigma(\hat{X}) = \sigma(X)/\sqrt{n}$. Im Beispiel gilt $\sigma(\hat{X}) = 10/\sqrt{400} = 0.5$.

Chebychev liefert eine einfache, aber leider nur grobe Abschätzung:

$$\alpha_1 \geq 1 - 1/1^2 = 0, \qquad \alpha_2 \geq 1 - 1/2^2 \geq 75\%,$$
$$\alpha_3 \geq 1 - 1/3^2 > 88\%, \qquad \alpha_4 \geq 1 - 1/4^2 > 93\%,$$
$$\alpha_5 \geq 1 - 1/5^2 \geq 96\%, \qquad \alpha_{10} \geq 1 - 1/10^2 \geq 99\%,$$

Dank ZGS gilt annähernd $\hat{X} \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2/n)$ mit besseren Schranken:

$$\alpha_1 > 68.26\% - \delta, \qquad \alpha_2 > 95.44\% - \delta,$$
$$\alpha_3 > 99.73\% - \delta, \qquad \alpha_4 > 99.993\% - \delta,$$
$$\alpha_5 > 99.99994\% - \delta, \qquad \alpha_6 > 99.9999998\% - \delta.$$

☺ Für die Normalverteilung gilt die 68–95–99–Regel V120:
Das 2σ–Intervall genügt für 95%ige Sicherheit, und 3σ für 99%.

Anwendungsbeispiel: Meinungsforschung

Eine Wahl mit über $5\,000\,000$ Stimmberechtigten steht bevor.
Der Stimmanteil $p \in [0.02, 0.98]$ einer Partei soll geschätzt werden.
Hierzu werden n zufällige Personen befragt. Die Schätzung soll mit Wahrscheinlichkeit $\geq 95\%$ bis auf einen Fehler von ≤ 0.01 genau sein.

Aufgabe: Wie viele Personen sollten hierfür befragt werden?

Lösung: Sicherheit 95% garantieren wir mit einer 2σ–Umgebung.
Der empirische Mittelwert $\hat{X} = (X_1 + \ldots + X_n)/n$ hat die Varianz

$$\mathbf{V}(\hat{X}) = \frac{1}{n}\mathbf{V}(X) = \frac{p(1-p)}{n} \leq \frac{1}{4n}, \qquad \sigma(\hat{X}) \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Wir wollen eine Genauigkeit von $2\sigma(\hat{X}) \leq 0.01$. Hierzu genügt

$$2\sigma(\hat{X}) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \overset{!}{\leq} 0.01, \quad \text{also} \quad n \geq 10\,000.$$

☺ Die detaillierte Rechnung haben wir bereits im letzten Kapitel V mit dem LGS und allen Fehlerabschätzungen ausgeführt. V415
Mit der Approximation dieses Kapitels wird's ein Zweizeiler.

Anwendungsbeispiel: Wareneingangsprüfung

Ihr Zulieferer schickt Ihnen $N = 6000$ Bauteile (z.B. Temperaturfühler).
Als Eingangsprüfung nehmen Sie eine Stichprobe von $n = 200$ Teilen und prüfen die vereinbarten Anforderungen; $k = 10$ Stück fallen durch.

Aufgabe: Wie viele Teile von den 6000 sind fehlerhaft? Geben Sie ein Intervall an, das den wahren Wert mit 95%iger Sicherheit überdeckt.
(Für einen analogen, aber einfacheren Hypothesentest siehe U331.)

Lösung: Wir schätzen den Anteil fehlerhafter Teile auf $t = k/n = 5\%$.
Das entspräche $K = Nt = 300$ Teilen in der gesamten Lieferung.
Wie gut ist diese Schätzung? Einzelprüfung: $\sigma^2(X) = t(1-t) \leq 0.08$.
Stichprobe: $\sigma^2(\hat{X}) \leq 0.08/200 = 0.0004$, Streuung $\sigma(\hat{X}) \leq 0.02$.
Das 2σ–Intervall um unsere Schätzung ist demnach:

$$\text{Anteil} \quad t \in [0.01, 0.09], \qquad \text{absolut} \quad K \in [60, 540]$$

Die Wareneingangsprüfung obliegt dem Käufer (§377 HGB). Hierzu gibt es normierte Methoden. Die Norm ISO2859 etwa beschreibt ein statistisches Qualitätsprüfungsverfahren für attributive Merkmale („in Ordnung“ / „nicht in Ordnung“). Sie wurde 1974 eingeführt und basiert auf dem Standard der amerikanischen Streitkräfte zur Qualitätsprüfung der anzukaufenden Ausrüstung.

Wie liest / schreibt / berechnet man Konfidenzintervalle?

Beispiel: Hilft Melatonin beim Einschlafen? Hierzu lesen wir *Effects of exogenous melatonin on sleep: a meta-analysis.* Sleep Medicine Reviews 9 (2005) 41–50. `doi.org/10.1016/j.smrv.2004.06.004`

> *The study effect size was taken to be the difference between the response on placebo and the mean response on melatonin for each outcome measured. Melatonin [...] reduced sleep onset latency by 4.0 min (95% CI 2.5, 5.4) [...] and increased total sleep duration by 12.8 min (95% CI 2.9, 22.8).*

Übung: Lesen Sie laut vor und übersetzen Sie in Ihre eigenen Worte. Was wurde gemessen? Wie gerechnet? Was bedeuten diese Intervalle? (Zur umsichtigen Entscheidung müssen weitere Fragen geklärt werden; mehr zu Melatonin siehe Doktor Whatson, `youtu.be/oQ-oOd60NuI`.)

Problem: Jede Messung X unterliegt zufälligen Störungen, die wir nicht beseitigen können. Wir betrachten sie als Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Messwerte schwanken um den Erwartungswert μ mit Streuung $\sigma > 0$.

☹ Die Erwartung μ und die Verteilung von X sind jedoch unbekannt. Das Ziel unserer Messung ist, μ möglichst genau zu bestimmen.

Wie liest / schreibt / berechnet man Konfidenzintervalle?

Annahme: Die Messung lässt sich beliebig, unabhängig wiederholen. Wir erhalten unabhängige Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ verteilt wie X, und

$$\text{die Schätzfunktion} \quad \hat{X} := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \ : \ \Omega \to \mathbb{R}$$

☺ Der **ZGS** hilft: $\hat{X}$ ist annähernd normalverteilt, kurz $\hat{X} \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2/n)$. Für große n spielt die genaue Verteilung von X gar keine Rolle mehr!
Anwendung: Aus Messwerten $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ bilden wir

$$\text{den Stichprobenmittelwert} \quad \hat{x} := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k .$$

Dieser wird meist vom Erwartungswert $\mu = \mathbf{E}(X)$ abweichen!
Als 2σ–Konfidenzintervall dieser Stichprobe bezeichnet man

$$I_2 = \left[\ \hat{x} - 2\sigma/\sqrt{n}, \ \ \hat{x} + 2\sigma/\sqrt{n} \ \right].$$

Wie $\hat{X}$ ist auch das Intervall I_2 zufälligen Schwankungen unterworfen.
☺ Mit 95% Wkt überdeckt dieses Intervall den Erwartungswert μ.

Bessel–Korrektur zum erwartungstreuen Schätzer

Problem: Wie die Erwartung μ ist auch die Streuung σ unbekannt.
Lösung: Wir schätzen die Varianz σ^2 durch die (Bessel–korrigierte)

$$\text{Stichprobenvarianz} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \hat{x})^2.$$

⚠ Der korrigierte Nenner $n-1$ sichert Erwartungstreue: $\mathbf{E}(S^2) = \sigma^2$.
Für große n ist der Unterschied zwischen n und $n-1$ unerheblich.
Wir rechnen nach: Der Schätzer $\hat{X}$ für μ ist erwartungstreu, denn

$$\mathbf{E}\big[\hat{X}\big] \;=\; \mathbf{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right] \;=\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\big[X_k\big] \;=\; \frac{1}{n}n\mu \;=\; \mu$$

Ist der Erwartungswert μ bekannt, so schätzen wir die Varianz σ durch

$$S_0^2 := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\big(X_k - \mu\big)^2, \quad \text{denn in Erwartung gilt tatsächlich}$$

$$\mathbf{E}\big[S_0^2\big] \;=\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\big[(X_k-\mu)^2\big] \;=\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{V}\big[X_k\big] \;=\; \frac{1}{n}n\sigma^2 \;=\; \sigma^2.$$

Bessel–Korrektur zum erwartungstreuen Schätzer

Ist μ unbekannt, so würde man naiv zunächst folgendes versuchen:

$$\begin{aligned} S_1^2 \;:=\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \hat{X})^2 \;&=\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\big[(X_k-\mu) - (\hat{X}-\mu)\big]^2 \\ &=\; \left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)^2\right] - 2\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)(\hat{X}-\mu)\right] + (\hat{X}-\mu)^2 \\ &=\; \left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)^2\right] - (\hat{X}-\mu)^2 \end{aligned}$$

Somit gilt $\mathbf{E}(S_1^2) = \mathbf{V}(X) - \mathbf{V}(\hat{X}) = \sigma^2 - \sigma^2/n = \sigma^2\cdot(n-1)/n$.
Als Schätzer nimmt man daher die korrigierte Stichprobenvarianz

$$S^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\big(X_k - \hat{X}\big)^2.$$

Dieser Schätzer ist nun erwartungstreu, das heißt $\mathbf{E}(S^2) = \sigma^2$.
Das Gesetz der großen Zahlen T3J garantiert die Konvergenz

$$\hat{X} \to \mathbf{E}(\hat{X}) = \mu \quad \text{und} \quad S^2 \to \mathbf{E}(S^2) = \sigma^2 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Was sind und was bedeuten Konfidenzintervalle?

Satz W2A: Konfidenzintervalle

Als Stichprobe für X führen wir n **unabhängige Messungen** aus. Aus den so gewonnenen Messwerten $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ berechnen wir

den **Stichprobenmittelwert** $$\hat{x} := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k,$$

die **Stichprobenvarianz** $$\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \hat{x})^2,$$

das 2σ**–Konfidenzintervall** $$I_2 := \left[\, \hat{x} - 2\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}},\ \hat{x} + 2\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \,\right].$$

Für große n gilt: Bei 95% aller Stichproben überdeckt das Intervall I_2 den (konstanten, aber uns unbekannten) Erwartungswert $\mu = \mathbf{E}(X)$.

☺ Ein wunderbar praktischer Satz! Was genau bedeutet hier „große n“? Als Faustregel wird oft $n \geq 30$ gefordert. Satz V4A: Bei Normalverteilung genügt $n \geq 60$. Bei ungünstiger Verteilung von X ist größeres n nötig.

Was sind und was bedeuten Konfidenzintervalle?

☺ Das 2σ–Intervall liefert 95% Sicherheit, das 3σ–Intervall über 99%. Bei sicherheitskritischen Anwendungen wird man noch mehr verlangen. Als ein extremes Sicherheitsniveau wurde etwa 6σ propagiert, was bei exakter Normalverteilung über 99.9999998% Sicherheit bedeutet. W201

Kosten-Nutzen-Abwägung: Kleines n ist billig, großes n ist präzise: Mit wachsendem n wird der Intervallradius $2\hat{\sigma}/\sqrt{n}$ beliebig klein. Der Nenner $\sqrt{n}$ bedeutet: Für doppelte Genauigkeit braucht man eine viermal größere Stichprobe, für zehnfache Genauigkeit eine 100mal größere Stichprobe. Das ist Fluch und Segen der großen Zahlen!

⚠ Sicherheit $\geq 95\%$ für das 2σ–Intervall gilt für „hinreichend große n“. Solche Faustregeln ganz ohne Begründung sind Autoritätsargumente; manchmal beruhen sie auf etwas Erfahrung, meist jedoch auf Unwissen. Kleine Stichproben erfordern Korrekturen. Den Fall $n = 2$ skizziere ich ab V420. Allgemein antwortet der Satz V4A von Gosset alias „Student“.

Ich belasse es bei diesem Überblick. Für die ernsthafte Anwendung statistischer Methoden verweise ich auf die umfangreiche Literatur.

Was sind und was bedeuten Konfidenzintervalle?

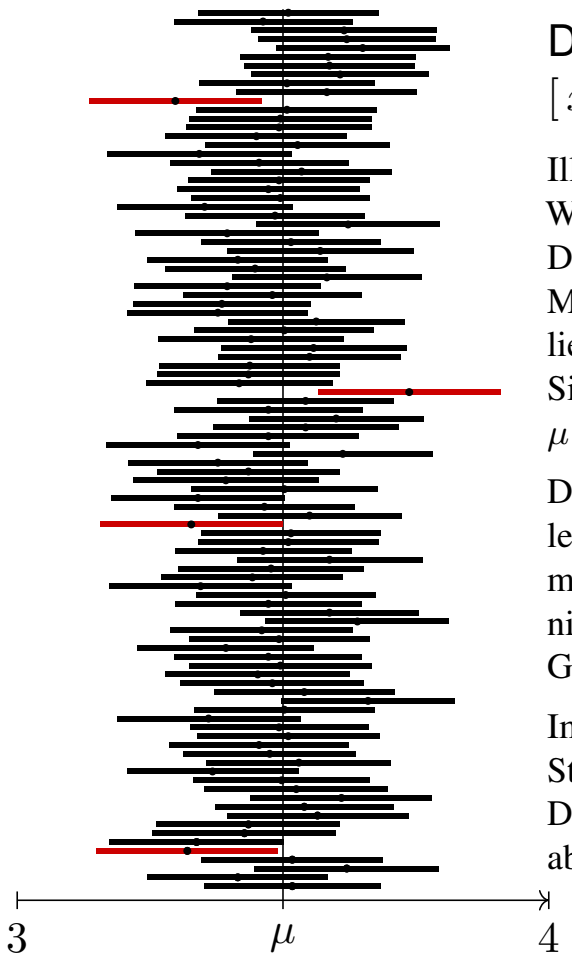
⚠ Ich warne vorsorglich vor einem weitverbreiteten **Missverständnis**: Man sagt „Mit Wkt $\geq 95\%$ überdeckt das Intervall I den wahren Wert μ.“ Das ist bequem, aber irreführend; die Interpretation müssen wir klären.

Der Mittelwert $\mu = \mathbf{E}(X) \in \mathbb{R}$ ist eine **Zahl**, unbekannt aber konstant. Aus den Messdaten $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ berechnen wir ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Entweder liegt μ in I oder nicht: Das ist eine Aussage über eine feste Zahl μ und ein festes Intervall I, mit Wkt hat das nichts mehr zu tun.

⚠ Die Aussage „mit Wkt $\geq 95\%$“ betrifft genau genommen also nicht ein einzelnes berechnetes Intervall, sondern das **Verfahren** insgesamt: Bei unabhängiger Wiederholung können wir jedesmal dieses Verfahren anwenden, und in $\geq 95\%$ aller Fälle werden wir damit richtig liegen.

⚠ Das Verfahren ist einfach, doch seine Interpretation erfordert Übung! Am besten spielen Sie es gegeneinander: `eiserm.de/lehre/Konfidenz` Zur Illustration gebe ich zwei Beispiele: zunächst ein etwas künstliches, aber besonders einfaches zum Würfeln, sodann ein sehr realistisches, aber auch komplizierteres mit echten Daten zum Venus-Express.

Was sind und was bedeuten Konfidenzintervalle?



Die Graphik zeigt 100 Konfidenzintervalle $[\,\hat{x} \pm 2\hat{\sigma}/\sqrt{n}\,]$, Sicherheitsniveau $\geq 95\%$.

Illustration: Wir werfen 400 mal einen fairen Würfel. Wir wissen $\mu = 3.5$ und $\sigma = \sqrt{35/12} \approx 1.70783$. Die Messwerte schwanken, und mit ihnen Stichproben-Mittelwert $\hat{x} \approx \mu$ und -Streuung $\hat{\sigma} \approx \sigma$. Jede Stichprobe liefert daher ihr eigenes Konfidenzintervall. Bei unserer Simulation überdecken 96 Intervalle den Erwartungswert $\mu = 3.5$, die übrigen 4 Intervalle (in rot) tun dies nicht.

Dieses Beispiel ist etwas künstlich, dafür aber besonders leicht zu verstehen. In realistischen Anwendungen kennt man den wahren Mittelwert μ und die wahre Streuung σ nicht, sondern will / muss sie durch Stichprobe schätzen. Genau dieses Verfahren wenden wir hier 100 mal an.

Im Allgemeinen weiß man nicht, ob man eine typische Stichprobe erwischt (schwarz) oder viele Ausreißer (rot). Das Verfahren kann keine absolute Sicherheit garantieren, aber immerhin 95%. Die 3σ–Umgebung liefert 99%, etc.

Ausprobieren: `eiserm.de/lehre/Konfidenz`

Stochastisches Modell des Messprozesses

Das Ergebnis einer Messung X hängt ab vom wahren Wert x (dieser ist meist unbekannt und wird gesucht) und einem Fehler F_X als Störung:

$$X = x + F_X \quad \text{etwa mit} \quad F_X \sim \mathrm{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$$

In der Praxis nehmen wir zur Vereinfachung meist an, dass der Fehler F_X die Summe von vielen unabhängigen Fehlerquellen ist. Der zentrale Grenzwertsatz W1D sagt dann für F_X eine Normalverteilung voraus.

Der Fehler F_X wird beschrieben durch zwei Kenngrößen:

1. einem systematischen (konstanten) Fehler μ_X,
2. einem stochastischen Fehler mit Streuung σ_X.

☺ Für normalverteilte Fehler genügen bereits diese zwei Parameter.

Wiederholte Messung ergibt immer denselben systematischen Fehler. Mittelwertbildung reduziert nur den stochastischen Fehler, siehe oben!

Systematische Fehler entstehen durch falsche Justierung oder Nutzung der Messinstrumente, oder falsche Theorie, siehe etwa GPS (W217).

Idealfall: Nach Behebung aller systematischen Fehler gilt $\mu_X = 0$.

Fehlerfortpflanzung: Vereinfachung durch Linearisierung

Die Messwerte X, Y verarbeiten wir zu einer Zielgröße $Z = f(X, Y)$. Im einfachsten Falle ist die hier genutzte Funktion f affin-linear:

$$\begin{aligned} f(X,Y) &= f(x,y) + c_1 \cdot \underbrace{(X-x)}_{=F_X} + c_2 \cdot \underbrace{(Y-y)}_{=F_Y} \\ z &= f(x,y) \\ \mu_Z &= c_1\mu_X + c_2\mu_Y \\ \sigma_Z^2 &= c_1^2\sigma_X^2 + c_2^2\sigma_Y^2 + 2c_1c_2\mathbf{Cov}(X,Y) \end{aligned}$$

Wir berechnen so $Z = z + F_Z$ als den wahren Wert $z = f(x, y)$ plus den Fehler $F_Z \sim \mathrm{N}(\mu_Z, \sigma_Z^2)$. Der systematische Fehler pflanzt sich linear fort. Bei unabhängigen stochastischen Fehlern addieren sich die Varianzen.

Im allgemeinen Falle linearisieren wir um (x, y) nach Taylor:

$$\begin{aligned} f(X,Y) &\approx f(x,y) + \underbrace{\partial_1 f(x,y)}_{=c_1} \cdot \underbrace{(X-x)}_{=F_X} + \underbrace{\partial_2 f(x,y)}_{=c_2} \cdot \underbrace{(Y-y)}_{=F_Y} \\ z &= f(x,y) \\ \mu_Z &\approx \partial_1 f(x,y)\,\mu_X + \partial_2 f(x,y)\,\mu_Y && \text{(systematisch)} \\ \sigma_Z^2 &\approx [\partial_1 f(x,y)]^2\,\sigma_X^2 + [\partial_2 f(x,y)]^2\,\sigma_Y^2 && \text{(stochastisch)} \end{aligned}$$

Fehlerfortpflanzung am Beispiel des Ohmschen Gesetzes

Aufgabe: Wir betrachten das Ohmsche Gesetz $R = U/I$. Wie pflanzen sich Messfehler von U und I auf R fort? systematisch? stochastisch?

Lösung: Für $R = U/I$ gilt $\partial R/\partial U = 1/I$ und $\partial R/\partial I = -U/I^2$.
Für hinreichend **kleine Fehler** gilt demnach näherungsweise:

systematischer Fehler $\quad \mu_R \approx \frac{1}{I}\,\mu_U - \frac{U}{I^2}\,\mu_I$

stochastischer Fehler $\quad \sigma_R^2 \approx \frac{1}{I^2}\,\sigma_U^2 + \frac{U^2}{I^4}\,\sigma_I^2$

Nach Behebung aller systematischen Fehler gilt $\mu_U = 0$ und $\mu_I = 0$.

Wir messen die Spannung $U = \bar{U} \pm \sigma_U$ und den Strom $I = \bar{I} \pm \sigma_I$ als Mittelwerte $\bar{U}$ und $\bar{I}$ mit stochastischen Fehlern $\pm\sigma_U$ und $\pm\sigma_I$.

Daraus berechnen wir den Widerstand $R = \bar{R} \pm \sigma_R$ als den Mittelwert $\bar{R} = \bar{U}/\bar{I}$ mit stochastischem Fehler σ_R gemäß der Fehlerfortpflanzung

$$\sigma_R = \sqrt{(1/\bar{I}^2)\,\sigma_U^2 + (\bar{U}^2/\bar{I}^4)\,\sigma_I^2}.$$

☺ Dank Unabhängigkeit heben sich stochastische Fehler teilweise auf.

Fehlerfortpflanzung und gefährliche Auslöschung

Erste Annahme: Die Fehler F_U und F_I sind stochastisch unabhängig. In diesem Falle addieren sich die Varianzen, nicht die Streuungen! Das ist anschaulich plausibel: Dank Unabhängigkeit heben sich stochastische Fehler teilweise auf. Wir nutzen dies im Gesetz der großen Zahlen T3J.

Zweite Annahme: Die Fehler F_U und F_I sind klein genug, sodass wir die Linearisierung als Näherung nutzen können. Genau genommen müssten wir den Satz B4C von Taylor nutzen und das Restglied abschätzen. Das wird in der hastigen Praxis meist ignoriert. Wird schon gut gehen?

Im folgenden Beispiel ist die Rechnung tatsächlich linear, auch ohne Taylor–Approximation.

Aufgabe: Sie wollen Ihre Hauskatze wiegen ($\approx 4\text{kg}$). Dazu haben Sie eine Personenwaage ($\pm 1\%$), auf der Ihre Katze aber nicht stehenbleibt. Sie halten daher Ihre Katze auf dem Arm und wiegen sich gemeinsam (Messwert X), davon substrahieren Sie Ihr eigenes Gewicht ($Y \approx 75\text{kg}$). Wie genau können Sie damit das Gewicht Ihrer Katze bestimmen?

Lösung: Wir berechnen $Z = X - Y$ und erwarten einen Wert $z < 5\text{kg}$. Dabei gilt $X = x \pm \sigma_X$ mit $\sigma_X \approx 790\text{g}$ und $Y = y \pm \sigma_Y$ mit $\sigma_Y \approx 750\text{g}$.

Die Differenz $Z = X - Y$ hat den Mittelwert $z = x - z$ und die Streuung $\sigma_Z = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2} \approx 1.1\text{kg}$. Der relative Fehler ist demnach über 25%.

☺ Wiederholung und Mittelwert reduzieren den stochastischen Fehler!

Genauigkeit und Messfehler bei der Satellitennavigation

Einsteins Relativität wird verehrt als Inbegriff einer genialen Theorie, sie genießt Kultstatus in der Popkultur. Wie jede mathematische Theorie gilt sie vielen jedoch als nutzlos-abstrakt und fern alltäglichen Lebens.

Das Gegenteil ist der Fall: Wir alle nutzen die Relativitätstheorie täglich! Sie ist nicht nur Grundlage der modernen Astronomie, von schwarzen Löchern bis Gravitationswellen, sondern mitten im Alltag angekommen, insbesondere in den Milliardenprojekten rund um Satellitennavigation.

Flugzeuge, Schiffe, Autos, Mobiltelephone nutzen Satellitennavigation, genauer das **Global Navigation Satellite System** (GNSS) und speziell das US-amerikanische **NAVSTAR Global Positioning System** (GPS).

Relativität ist dabei nicht bloß eine unwichtige Spitzfindigkeit, sondern ihr genaues Verständnis und ihre praktische Anwendung sind essentiell für das Funktionieren der Navigation. Ohne präzise Theorie geht es nicht!

Die GPS-Konfiguration besteht aus (mindestens) 24 Satelliten, sodass von jedem Punkt der Erde zu jeder Zeit mindestens vier sichtbar sind. Jeder Satellit S_i sendet ständig seine aktuelle Position und Systemzeit. Aus der Signallaufzeit berechnet der Empfänger die Entfernung r_i zu S_i.

Genauigkeit und Messfehler bei der Satellitennavigation

Die Entfernung r_1 zu einem ersten Satelliten S_1 genügt noch nicht: Der Empfänger findet sich irgendwo auf der Sphäre um S_1 mit Radius r_1. Die Entfernung r_2 zu einem zweiten Satelliten S_2 schränkt weiter ein: Schnittmenge zweier Sphären (in allgemeiner Lage) ist eine Kreislinie. Die Entfernung r_3 zu einem dritten Satelliten S_3 lässt als Schnittmenge nur noch zwei Punkte. Eine der beiden Lösungen liegt weit über der Erde, somit ist die andere als richtige erkennbar. Diese quadratischen Gleichungen werden in kartesischen Koordinaten gelöst und geozentrisch in Kugelkoordinaten (C237) umgerechnet zu geographischer Länge φ, Breite ϑ, Höhe $h = r - r_E$.

Wir benötigen Präzision! Jeder Satellit trägt eine Atomuhr mit einer wöchentlichen Genauigkeit von $\theta \approx 1\,\mathrm{ns} = 10^{-9}\,\mathrm{s}$. Im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit $c \approx 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$ entspricht das der räumlichen Entfernung $c\,\theta = 30\,\mathrm{cm}$. Handelsübliche mobile GPS-Empfänger haben jedoch keine langzeitstabile Atomuhr, sondern nur eine lokale Messgenauigkeit um $10\,\mathrm{ns}$, also etwa $3\,\mathrm{m}$. Hinzu kommen zufällige Störungen und Messfehler. Die erreichte Genauigkeit ist bemerkenswert und liegt bei etwa $10\,\mathrm{m}$! Im Auto genügt dies gerade noch für Position und Geschwindigkeit.

Räumlich genügen die Abstände zu drei Satelliten. GPS-Empfänger führen keine ausreichend genaue absolute Uhrzeit, um die Laufzeiten präzise genug zu messen. Deshalb wird zusätzlich das Signal eines vierten Satelliten genutzt, und so die obige Rechnung statt im euklidischen $\mathbb{R}^3$ in der vierdimensionalen Minkowski–Raumzeit $\mathbb{R}^{3+1}$ durchgeführt. Das Prinzip ist dasselbe.

📖 Siehe G. Strang, K. Borre: *Linear Algebra, Geodesy, and GPS* (1997) sowie für offizielle technische Spezifikationen `www.navcen.uscg.gov/pubs/gps/sigspec/gpssps1.pdf`. Damit können Sie die konkreten Daten einsetzen und selbständig alle Rechnungen prüfen. Die Mühe lohnt sich, denn GPS ist ein mathematisch-physikalisch-technisches Meisterwerk.

Genauigkeit und Messfehler bei der Satellitennavigation

Um die nötige extreme Präzision zu gewährleisten, müssen vermeidbare Fehler als solche erkannt und möglichst behoben werden. Dazu zählen insbesondere relativistische Effekte, diese sind hier deutlich spürbar!

Ein Objekt mit Geschwindigkeit v im Erdgravitationsfeld GM/r hat eine Eigenzeit $\Delta\tau$ im Vergleich zur Referenzzeit Δt weit außerhalb der Erde:

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta t} \approx 1 - \left(\frac{v^2}{2c^2} + \frac{GM}{rc^2}\right)$$

Im Vergleich zwischen Satellit S und Empfänger E erhalten wir somit:

$$\frac{\Delta\tau_S}{\Delta\tau_E} \approx 1 - \left(\frac{v_S^2}{2c^2} + \frac{GM}{r_S\,c^2}\right) + \left(\frac{v_E^2}{2c^2} + \frac{GM}{r_E\,c^2}\right)$$

Für GPS-Satelliten gilt $r_S \approx 26580\,\mathrm{km}$ und $v_S \approx 3872\,\mathrm{m/s}$. Am Äquator haben wir $r_E \approx 6380\,\mathrm{km}$ und $v_E \approx 464\,\mathrm{m/s}$. Die Korrekturen sind also:

$$\begin{array}{llcll}
\text{SRT:} & \dfrac{v_E^2}{2c^2} - \dfrac{v_S^2}{2c^2} & \approx & -8.3\cdot 10^{-11} & \approx & -7.2\,\mu\mathrm{s/day} \\[2ex]
\text{GRT:} & \dfrac{GM}{r_E c^2} - \dfrac{GM}{r_S c^2} & \approx & 5.31\cdot 10^{-10} & \approx & 45.9\,\mu\mathrm{s/day}
\end{array}$$

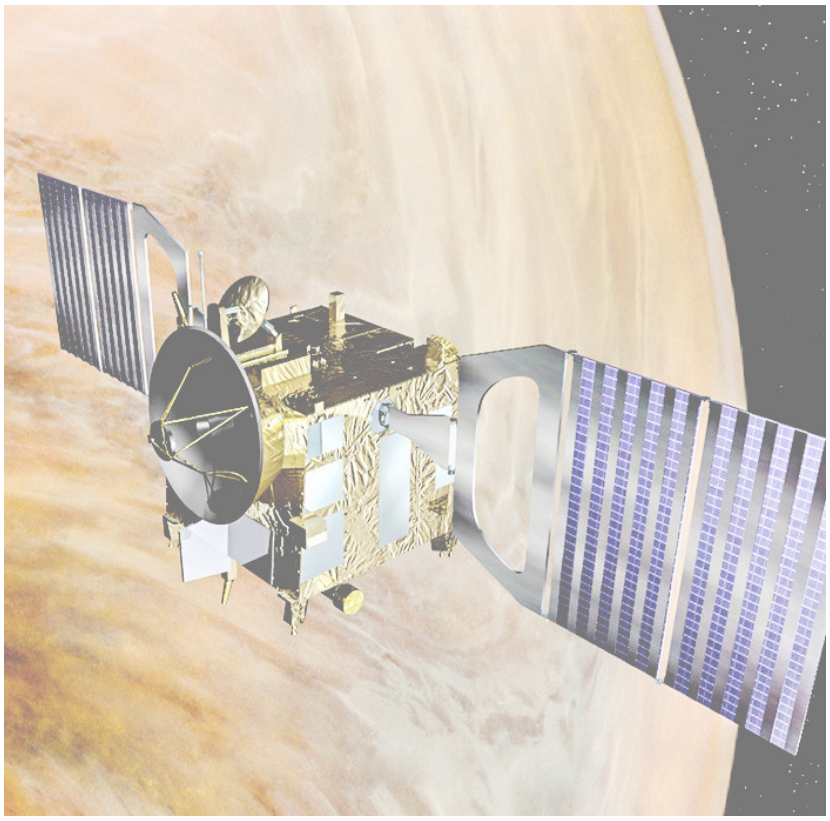
Genauigkeit und Messfehler bei der Satellitennavigation

Aufgrund spezieller Relativität (SRT) gehen Satellitenuhren um $7200\,\mathrm{ns}$ pro Tag nach, aufgrund allgemeiner Relativität (GRT) um $45900\,\mathrm{ns}$ vor, in der Summe also $38600\,\mathrm{ns}$ vor. Wir benötigen aber eine Genauigkeit im Bereich von wenigen Nanosekunden! Dazu wird ein genial-einfacher Trick angewendet: Die Satellitenuhren werden nicht auf ihre nominelle Frequenz $10.23\,\mathrm{Mhz}$ geeicht, sondern auf $10.229999995453\,\mathrm{Mhz}$. Das erledigt die relativistisch nötige Korrektur! Von der Erde aus gesehen ticken die Satelliten mit der gewünschten Frequenz von $10.23\,\mathrm{Mhz}$.

Die Physik arbeitet seit über hundert Jahren mit Einsteins spezieller Relativitätstheorie (1905) und seiner allgemeinen Relativitätstheorie (1915). Beide sind in vielen Situationen mit großer Genauigkeit experimentell überprüft worden, zum Beispiel durch astronomische Beobachtungen, beim Müon-Zerfall in der Erdatmosphäre, in Teilchenbeschleunigern, und vielen mehr. Die sehr genauen Zeitmessungen des GPSystems sind eine weitere beeindruckende Illustration. Hier wirkt die Theorie auch umgekehrt auf ingenieurstechnische Fragen der Konstruktion: Um die nötige Zeitgenauigkeit zu garantieren, wurden die Satelliten sorgfältig relativistisch korrekt konstruiert. Damit ist Einsteins Relativitätstheorie innerhalb eines Jahrhunderts alltagsrelevant geworden.

Fake science? In Diskussionsforen tobt die Debatte, ob die relativistischen Korrekturen für das Funktionieren des GPSystems *absolut notwendig* sind, oder ob es auch irgendwie anders ginge: Speziell für die Positionsbestimmung könnte der Empfänger die Absolutzeit überflüssig machen, indem er nur Laufzeit*differenzen* misst und verrechnet. Das ist eine alternative Herangehensweise, zur Ausführung siehe etwa `www.alternativephysics.org/book/GPSmythology.htm`. Klar ist und bleibt dabei: Die Zeitdilatation ist real, sie wird im GPSystem tatsächlich gemessen, und ihre Korrektur ist zur *globalen* Kalibrierung der GPSystemzeit notwendig. *Science works!*

Mars & Venus Express



Missionen der ESA

Start Jun. 2003 in Baikonur
Mars-Orbit ab Jan. 2004
→ Suche nach Wasser

Start Nov. 2005 in Baikonur
Venus-Orbit ab Apr. 2006
→ Atmosphäre der Venus

Orbiter: Masse 633kg leer
plus Treibstoff (MMH+NTO)

Acht Steuertriebwerke mit
je 10N Schub (im Labor)

Fortsetzung oder Ende:
Wie lange reicht der Sprit?

Siehe `en.wikipedia.org/wiki/Mars_Express` und `/Venus_Express`

Mars & Venus Express

Design erfordert Entscheidungen und meist Kompromisse. Die ESA hat auf Messgeräte für die Tankfüllung verzichtet. Zum geplanten Ende der Mission stellt sich die Frage: Kann die Mission verlängert werden? Ist dazu noch genug Treibstoff im Tank? Wie kann man das mit ausreichender Sicherheit herausfinden? Idee: Die ESA verfügt über alle bisherigen Positions- und Steuerdaten. Hieraus könnte man jeweils die Trägheit berechnen und indirekt die Gesamtmasse! Geht das?

Realistische Analogie: Heutige Autos haben eine Masse von etwa 1.2 bis 1.6 Tonnen bei einem Tankvolumen von 50 bis 70 Litern. Sie fahren ein Auto ohne Tankanzeige, die Tankfüllung erspüren Sie in Kurven, beim Gasgeben und Abbremsen. Ist das verrückt? Ja. Ist das möglich? Schwierig! Man muss genau und sehr häufig messen – und dann die Messfehler rausfiltern!

Vereinfachte Analogie: Sie haben eine Gasflasche für einen Herd oder Grill: Leergewicht 6kg, Inhalt 0-5kg Propan, ebenfalls ohne Anzeige des Füllstandes. Sie können durch Schütteln recht gut erspüren, wie voll die Gasflasche ist. Probieren Sie es bei Gelegenheit mal aus!

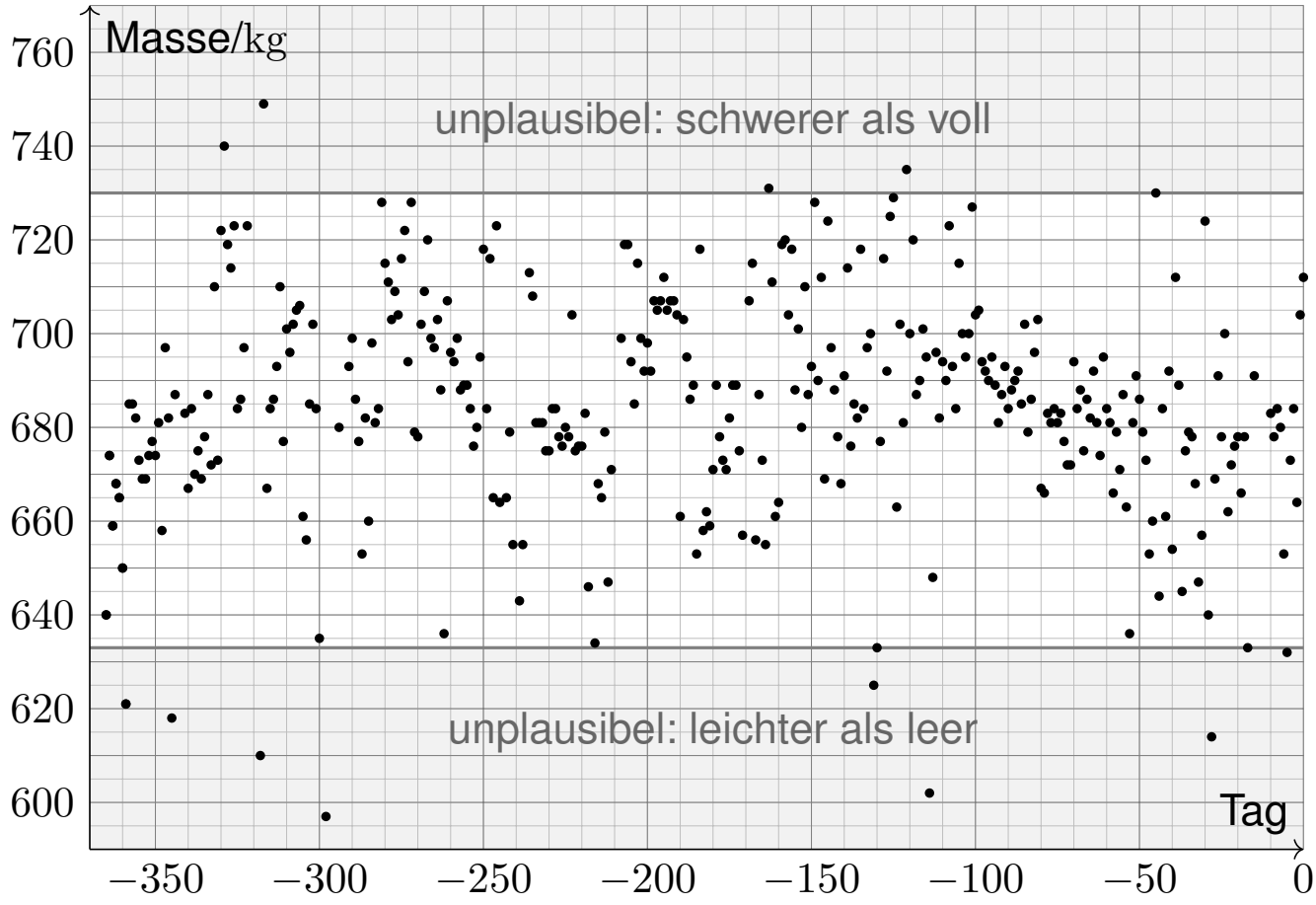
Jede Messung ist mit Fehlern behaftet: systematische müssen wir erkennen und dann korrigieren, bei zufälligen können wir dies nicht direkt! Wir müssen lernen, sie geschickt rauszufiltern, um ein möglichst verlässliches Ergebnis zu erhalten. Das ist das Ziel der mathematischen Statistik.

Es geht um rationale Entscheidungen unter Unsicherheit. Dafür genügt es nicht, eine willkürliche Schätzung auszuspucken! Die Anwendung ist ernst, es geht um Geld, wir müssen überzeugen. Wir wollen nicht nur eine gute Schätzung, sondern auch die Güte der Schätzung berechnen!

Hierzu will ich Sie mit meiner Einführung anleiten. Wer darüber hinaus ernsthafte statistische Analysen betreiben will/muss, kann sich darauf aufbauend in die Spezialliteratur einarbeiten.

Venus Express: Wieviel Treibstoff ist noch im Tank?

Aus Steuermanövern errechnete Masse für 366 Tage bis 31.12.2012.



Venus Express: Wieviel Treibstoff ist noch im Tank?

Impuls-Messungs-Methode (Impulse Measurement Method, IMM):
Aus Positions- und Steuerdaten errechnet man Werte für die Masse;
folgende Daten finden Sie unter `eiserm.de/lehre/HM3/VEX2012.txt`.

Tag	Datum	Masse
1	01.01.2012	640
2	02.01.2012	674
3	03.01.2012	659
...	...	...

Tag	Datum	Masse
...	...	...
364	29.12.2012	664
365	30.12.2012	704
366	31.12.2012	712

Datengewinnung ist mühsam, erfordert Umsicht und Sachkenntnis! Diese Daten stellt uns freundlicherweise Herr Caglayan Gürbüz zur Verfügung. Er hat 2012 die Höhere Mathematik 3 gehört und am IRS / ESOC seine Bachelor-Arbeit zum Mars & Venus Express geschrieben.

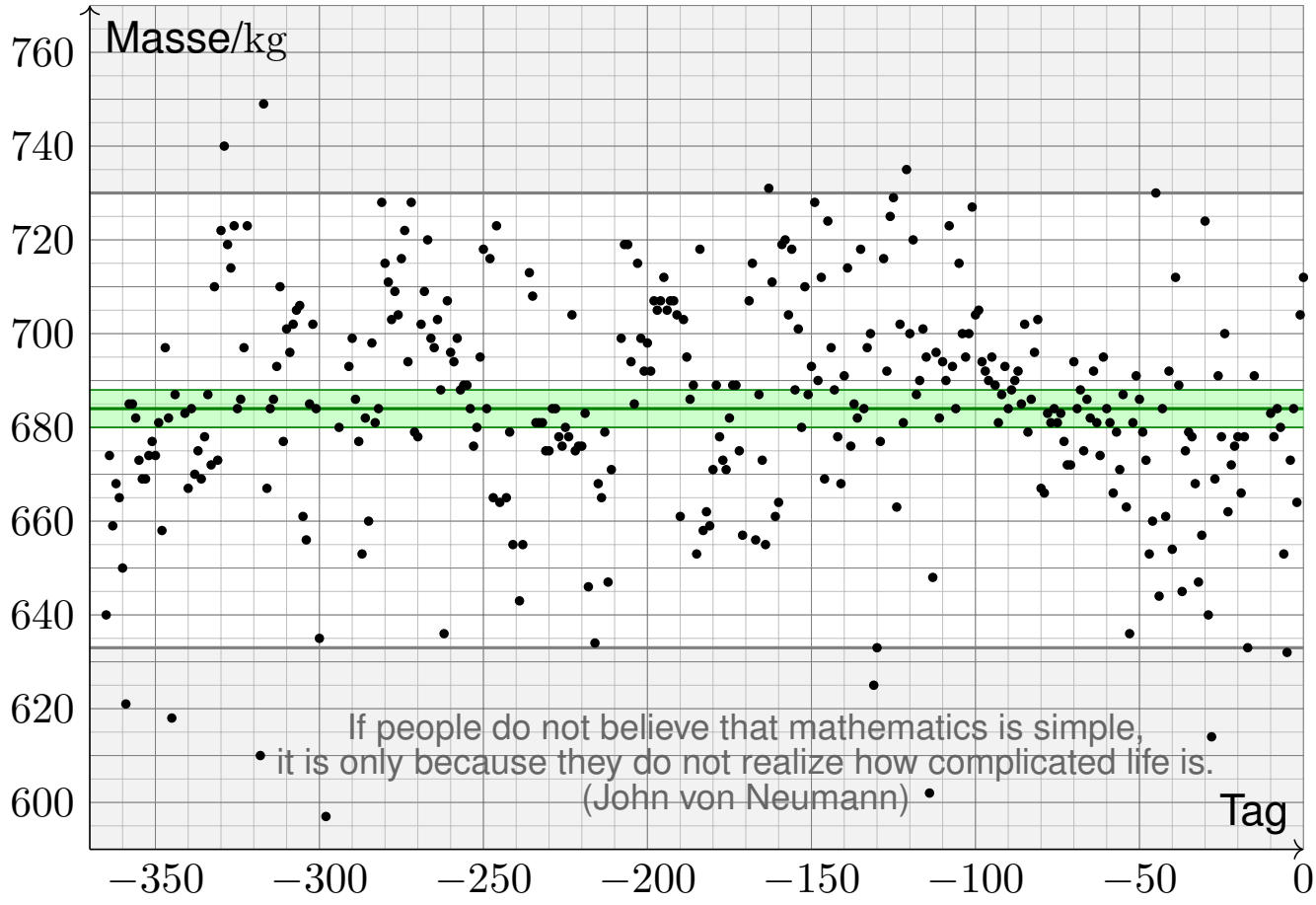
Rationale Entscheidung: Kann / sollte man die Mission verlängern? Grundlose Schätzungen sind sinnlos, wir brauchen Sicherheit!

Techniken: Erwartung und Streuung, Stichproben und Schätzung, Gesetz der großen Zahlen, zentraler Grenzwertsatz, Konfidenzintervall

☺ *This is rocket science.* Mathematische Statistik zeigt, wie es geht.

Mathematische Statistik: Konfidenzintervalle

Jahresmittelwert der Gesamtmasse mit 3σ–Konfidenzintervall.



Mathematische Statistik: Konfidenzintervalle

Aufgabe: Wie groß war der Tankinhalt im Jahresmittel 2012?
Geben Sie das 3σ–Konfidenzintervall an (für 99%ige Sicherheit).

Lösung: Unser Datensatz liefert Mittelwert und Streuung:
Der Stichprobenmittelwert ist $\hat{m} = 684\text{kg}$. Dies schätzt die Masse m.
Die Stichprobenstreuung ist $\hat{\sigma}_m = 24.6\text{kg}$. Dies schätzt die Streuung.

Bei $n = 345$ Datenpunkten gilt $\hat{\sigma}_{\hat{m}} = \hat{\sigma}_m/\sqrt{n} = 1.33\text{kg}$. Großes n hilft!
Das 3σ–Intervall $[\hat{m} \pm 3\hat{\sigma}_{\hat{m}}] = [680; 688]\text{kg}$ ist erstaunlich schmal!
Der Tankinhalt betrug demnach $[47; 55]\text{kg}$ mit 99%iger Sicherheit.

☹ Messdaten sind voller Messfehler und anderer Ungenauigkeiten.

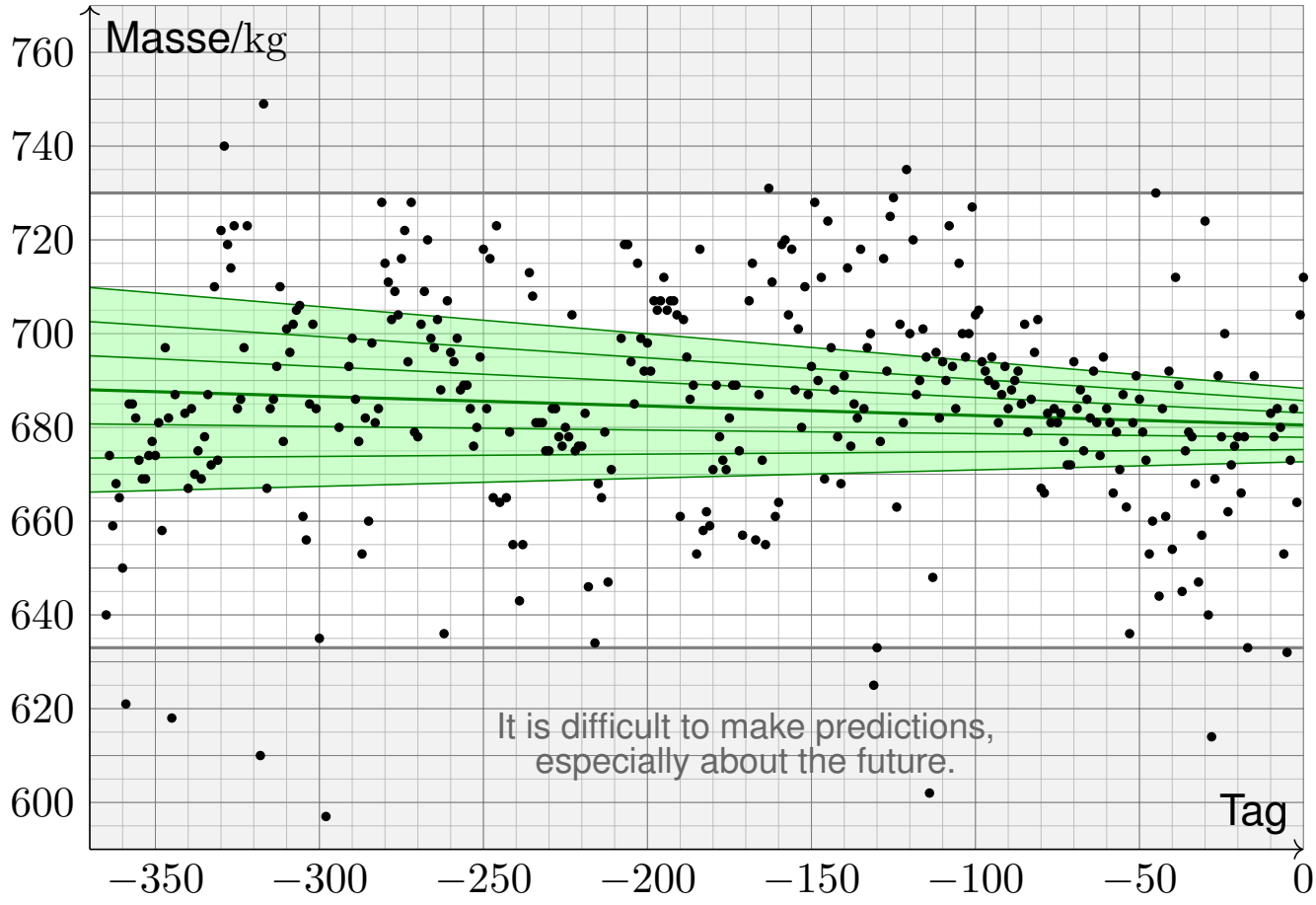
☺ Unsere Daten sind schmutzig doch glücklicherweise sehr zahlreich:
Wir können Gesetze der großen Zahlen und Grenzwertsätze nutzen!

☺ Dank passender Technik können Sie so präzise Schlüsse ziehen!
Dank Statistik fördern Sie Information zutage, die zuvor verborgen war.

⚠ Jede Prognose ist höchstens so gut wie die zugrundeliegenden Daten! Zufällige Fehler können wir durch große Messreihen rausfiltern, systematische Fehler nicht! Hier helfen nur Umsicht und Sachkenntnis!

Mathematische Statistik: lineare Regression

Regressionsgerade mit Konfidenzintervallen: 1σ, 2σ, 3σ.



Mathematische Statistik: lineare Regression

Aufgabe: Wie groß war der Tankinhalt Ende 2012?
Wie lange reicht es noch? Wie sicher ist Ihre Prognose?

Lösung: Unser Datensatz liefert die Regressionsgerade $y = \hat{a} + \hat{b}\,x$:
Ende 2012 ist die Gesamtmasse $\hat{a} = 680.5\mathrm{kg}$ mit Streuung $\hat{\sigma}_{\hat{a}} = 2.6\mathrm{kg}$.
Im Tank verbleiben $\hat{t} = 47.5\mathrm{kg}$ Treibstoff mit Streuung $\hat{\sigma}_{\hat{t}} = 2.6\mathrm{kg}$.
Der Verbrauch ist $\hat{b} = -20.3\mathrm{g/Tag}$ mit Streuung $\hat{\sigma}_{\hat{b}} = 12.6\mathrm{g/Tag}$.

Sehr grobe Prognose der verbleibenden Missionsdauer: 2300 Tage.
Wie verlässlich ist diese Prognose aufgrund unserer Messdaten?

Mit 95% Sicherheit reicht der Treibstoff noch für über 930 Tage:
Tank $[\hat{t} \pm 2\hat{\sigma}_{\hat{t}}] \subseteq [42.3; 52.7]\mathrm{kg}$, Verbrauch $[\hat{b} \pm 2\hat{\sigma}_{\hat{b}}] \subseteq [-45.5; 4.9]\mathrm{g/Tag}$.

Mit 99% Sicherheit reicht der Treibstoff noch für über 680 Tage:
Tank $[\hat{t} \pm 3\hat{\sigma}_{\hat{t}}] \subseteq [39.7; 55.3]\mathrm{kg}$, Verbrauch $[\hat{b} \pm 3\hat{\sigma}_{\hat{b}}] \subseteq [-58.1; 17.5]\mathrm{g/Tag}$.

☺ Wir extrahieren sorgsam, was die vorliegenden Daten hergeben!
⚠ Systematische Fehler? physikalische Annahmen? Alternativen?
War 2012 ein typisches Jahr? Wenn man Sprit spart, reicht er länger!
VEX wird 2013/14 tiefer in Atmosphäre abgesenkt, der Verbrauch steigt.
Die Mission endet im Dezember 2014 wegen Treibstoffmangels. Wow!

Mathematische Statistik: Konfidenzintervalle

Das Ergebnis X einer Messung hängt von zufälligen Störungen F ab:

$$X = x + F \quad \text{etwa mit} \quad F \sim \mathrm{N}(0, \sigma_F^2)$$

Das heißt: Die Messung $X = x + F$ schwankt um den Wert $x = \mathbf{E}(X)$, der Fehler $F = X - x$ hat Erwartung $\mathbf{E}(F) = 0$ und Varianz $\mathbf{V}(F) = \sigma_F^2$.
Problem: Erwartung $\mathbf{E}(X) = x$ und Varianz $\mathbf{V}(X) = \sigma_F^2$ sind uns nicht bekannt. Wir wollen sie durch wiederholte Messungen ermitteln.

Unabhängige Wiederholung ergibt die Messwerte $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Erwartung $\mu_X = x$ und Varianz $\sigma_X^2 = \sigma_F^2$ schätzen wir hieraus wie folgt:

$$x \approx \hat{x} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \sigma_X^2 \approx \hat{\sigma}_X^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{x})^2, \quad \sigma_{\hat{X}} \approx \hat{\sigma}_{\hat{X}} := \frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}}$$

Hieraus erhalten wir Konfidenzintervalle für den gesuchten Wert x:

$$I_2 = [\hat{x} \pm 2\hat{\sigma}_{\hat{X}}] = \left[\, \hat{x} - 2\hat{\sigma}_{\hat{X}} \;;\; \hat{x} + 2\hat{\sigma}_{\hat{X}} \,\right] \quad \ni x \text{ mit } 95\% \text{ Sicherheit}$$
$$I_3 = [\hat{x} \pm 3\hat{\sigma}_{\hat{X}}] = \left[\, \hat{x} - 3\hat{\sigma}_{\hat{X}} \;;\; \hat{x} + 3\hat{\sigma}_{\hat{X}} \,\right] \quad \ni x \text{ mit } 99\% \text{ Sicherheit}$$

Mathematische Statistik: Konfidenzintervalle

Gesucht ist der wahre Wert x, doch dieser ist uns leider unbekannt.
Wir schätzen ihn durch $\hat{x}$ anhand der Messdaten $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Die Güte dieser Schätzung wird bestimmt durch die Varianz σ_X^2.
Wir schätzen sie wiederum durch die Stichprobenvarianz $\hat{\sigma}_X^2$.

Grundlegende Annahmen unseres **stochastischen Modells**:
Der Messfehler F ist zufällig und hat **Mittelwert** $\mathbf{E}(F) = 0$.
Andernfalls machen wir einen **systematischen Fehler**!

Den Fehler F können wir nicht direkt beobachtet (und korrigieren).
Je mehr Messwerte wir haben, desto besser können wir ihn rausfiltern:

Mit Wkt 95% überdeckt das Konfidenzintervall I_2 den wahren Wert x.
Mit Wkt 99% überdeckt das Konfidenzintervall I_3 den wahren Wert x.

Dies sind die Konfidenzniveaus 95% bzw. 99% der **Normalverteilung**!
Sie gilt falls $F \sim \mathrm{N}(0, \sigma_F^2)$ normalverteilt ist oder n ausreichend groß, denn $\hat{X} \sim \mathrm{N}(x, \sigma_F^2/n)$ gilt exakt oder in guter Näherung dank ZGS.

☺ Mit hinreichend vielen Messdaten bestimmen wir x beliebig genau.
Merke: Doppelte Genauigkeit kostet viermal so viele Messungen.

Mathematische Statistik: lineare Regression

Wir nehmen an, Y hängt linear von X ab plus zufällige Störung F:

$$Y = a + b\,X + F \quad \text{etwa mit} \quad F \sim \mathrm{N}(0, \sigma_F^2)$$

Unabhängige Wiederholung ergibt die Messdaten $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$.
Die **Regressionsparameter** a und b schätzen wir hieraus wie folgt:

$$b \approx \hat{b} := \frac{\sum (x_i - \hat{x})(y_i - \hat{y})}{\sum (x_i - \hat{x})^2}, \qquad a \approx \hat{a} := \hat{y} - \hat{b}\,\hat{x}$$

Die **Güte dieser Schätzungen** wird bestimmt durch die Varianzen:

$$\sigma_{\hat{b}}^2 \approx \hat{\sigma}_{\hat{b}}^2 := \frac{\sum (\hat{a} + \hat{b}\,x_i - y_i)^2}{(n-2)\sum (x_i - \hat{x})^2}, \qquad \sigma_{\hat{a}}^2 \approx \hat{\sigma}_{\hat{a}}^2 := \frac{\hat{\sigma}_{\hat{b}}^2}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Wir erhalten **Konfidenzintervalle** für die gesuchten Werte a bzw. b:

$$\hat{I}_2 = [\hat{a} \pm 2\hat{\sigma}_{\hat{a}}] = \left[\, \hat{a} - 2\hat{\sigma}_{\hat{a}} \;;\; \hat{a} + 2\hat{\sigma}_{\hat{a}} \,\right] \quad \ni a \text{ mit } 95\% \text{ Sicherheit}$$

$$\hat{I}_3 = [\hat{a} \pm 3\hat{\sigma}_{\hat{a}}] = \left[\, \hat{a} - 3\hat{\sigma}_{\hat{a}} \;;\; \hat{a} + 3\hat{\sigma}_{\hat{a}} \,\right] \quad \ni a \text{ mit } 99\% \text{ Sicherheit}$$

Mathematische Statistik: lineare Regression

Gesucht sind die Werte a, b, doch diese sind uns leider unbekannt.
Wir schätzen sie durch $\hat{a}, \hat{b}$ anhand der Messdaten $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$.

Grundlegende Annahmen unseres **stochastischen Modells**:
Der Messfehler F ist unabhängig von X mit **Mittelwert** $\mathbf{E}(F) = 0$.
Andernfalls machen wir immer denselben **systematischen Fehler**!

Den Fehler F können wir weder direkt beobachten noch korrigieren.
Je mehr Messwerte wir haben, desto besser können wir ihn rausfiltern:

Mit Wkt 95% überdeckt das Konfidenzintervall I_2 den wahren Wert a.
Mit Wkt 99% überdeckt das Konfidenzintervall I_3 den wahren Wert a.

Auch hier nutzen wir die Konfidenzniveaus der **Normalverteilung**!
Sie gilt falls $F \sim \mathrm{N}(0, \sigma_F^2)$ normalverteilt ist oder n ausreichend groß,
denn $\hat{A} \sim \mathrm{N}(a, \sigma_{\hat{a}}^2)$ und $\hat{B} \sim \mathrm{N}(b, \sigma_{\hat{b}}^2)$ gilt exakt oder in guter Näherung.

☺ Ausreichend viele Messdaten bestimmen a, b beliebig genau.
Zudem erhalten wir eine Schätzung für die Güte der Näherung.

⚠ Jede gegebene Messreihe liefert nur eine begrenzte Genauigkeit.
Doppelte Genauigkeit kostet viermal so viele Messungen.

Bestimmung der Ausgleichsgeraden

Wir nehmen an, y_i hängt linear von x_i ab plus zufällige Störung f_i:

$$y_i = a + b\,x_i + f_i \quad \text{mit Fehler} \quad f_i = y_i - a - b\,x_i$$

Wir suchen nach der Geraden, die diese Fehler insgesamt minimiert:

$$Q(a,b) := \sum\nolimits_{i=1}^{n} f_i^2 = \sum\nolimits_{i=1}^{n} (y_i - a - b\,x_i)^2 \quad \overset{!}{\to} \quad \min$$

Das ist eine positive quadratische Funktion in a und b. Minimum:

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = \sum\nolimits_{i=1}^{n} 2(y_i - a - b\,x_i)\cdot(-1) \quad \overset{!}{=} \quad 0$$
$$\frac{\partial Q}{\partial b} = \sum\nolimits_{i=1}^{n} 2(y_i - a - b\,x_i)\cdot(-x_i) \quad \overset{!}{=} \quad 0$$

Dieses lineare Gleichungssystem führt zu den obigen Formeln:

$$\hat a = \hat y - \hat b\,\hat x, \qquad \hat b = \frac{\sum(x_i - \hat x)(y_i - \hat y)}{\sum(x_i - \hat x)^2} = \frac{\sum x_i y_i - n\hat x\hat y}{\sum x_i^2 - n\hat x^2}$$

☺ Geometrisch: Für die zentrierten Vektoren $\vec x_i = x_i - \hat x$ und $\vec y_i = y_i - \hat y$ berechnet sich $\hat b = \langle \vec x \mid \vec y \rangle / \langle \vec x \mid \vec x \rangle$ durch Skalarprodukte!

Bestimmung der Ausgleichsgeraden

Wir nennen $y = \hat a + \hat b\,x$ die **Kleinste-Quadrate-Gerade** (KQ-Gerade). Der Wert $\hat y_i = \hat a + \hat b\,x_i$ heißt der **KQ-gefittete Wert** und entsprechend die Abweichung $\hat f_i = y_i - \hat y_i = y_i - \hat a + \hat b\,x_i$ der **KQ-gefittete Fehler**.

Eigenschaften: Die Summe aller Fehler $\hat f_i = y_i - a - b\,x_i$ ist Null. Liegen alle Datenpunkte (x_i, y_i) auf einer Geraden $y = a + bx$, so gilt $\hat a = a$ und $\hat b = b$ mit perfektem Fit: $\hat y_i = y_i$ und $\hat f_i = 0$.

Wie gut beschreibt die Gerade die Daten? **Korrelationskoeffizient**

$$r(x,y) := \frac{\sum(x_i - \hat x)(y_i - \hat y)}{\sqrt{\sum(x_i - \hat x)^2}\sqrt{\sum(y_i - \hat y)^2}} = \frac{\langle \vec x \mid \vec y \rangle}{\sqrt{\langle \vec x \mid \vec x \rangle}\sqrt{\langle \vec y \mid \vec y \rangle}}$$

Es gilt $-1 \le r \le 1$, mit $r = \pm 1$ genau dann, wenn alle Daten auf einer Geraden liegen: gleichsinnig für $r = +1$ und gegensinnig für $r = -1$.

Die Linearisierung ist gut für große Werte von r^2, schlecht für kleine.

Geometrisch bedeutet $r = 0$: Die Vektoren $\vec x, \vec y$ stehen **senkrecht**.
Stochastisch: Die Zufallsvariablen x, y sind **linear unkorreliert**.

Für Skalarprodukte $\langle \vec x \mid \vec y \rangle$ gilt die Cauchy–Schwarz–Ungleichung. I134

📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §3.5.

Bestimmung der Ausgleichsgeraden

Wir nehmen an, Y hängt linear von X ab plus zufällige Störung F:

$$\boxed{Y = a + b\,X + F \quad \text{etwa mit} \quad F \sim \mathrm{N}(0, \sigma_F^2)}$$

Wie gut ist unsere Schätzung $\hat{a}, \hat{b}$ für die unbekannten Parameter a, b? Wir betrachten unabhängig wiederholte Messungen (X_i, Y_i) und analysieren unsere Schätzungen $\hat{a}, \hat{b}$ als Zufallsvariable $\hat{A}, \hat{B}$:

$$Y_i = a + b\,X_i + F_i, \qquad F_i \sim \mathrm{N}(0, \sigma_F^2)$$

$$\hat{X} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad \hat{Y} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$\hat{B} = \frac{\sum (X_i - \hat{X})(Y_i - \hat{Y})}{\sum (X_i - \hat{X})^2}, \qquad \hat{A} = \hat{Y} - \hat{B}\hat{X}$$

Wir nehmen vereinfachend an, die additiven Fehler $F_i \sim \mathrm{N}(0, \sigma_F^2)$ sind normalverteilt. Dann sind die Zufallsvariablen $\hat{A}$ und $\hat{B}$ normalverteilt; allgemein gilt dies für große n in guter Näherung dank ZGS.

Bestimmung der Ausgleichsgeraden

Für die Erwartungen finden wir (nach kurzer Rechnung):

$$\mathbf{E}(\hat{B}) = b \approx \hat{b} := \frac{\sum (x_i - \hat{x})(y_i - \hat{y})}{\sum (x_i - \hat{x})^2}, \qquad \mathbf{E}(\hat{A}) = a \approx \hat{a} := \hat{y} - \hat{b}\,\hat{x}$$

Für die Varianzen finden wir (nach längerer Rechnung):

$$\mathbf{V}(\hat{B}) = \frac{\sigma_F^2}{n\,\mathbf{V}(X)} \qquad \approx \hat{\sigma}_b^2 := \frac{\sum (\hat{a} + \hat{b}\,x_i - y_i)^2}{(n-2)\sum (x_i - \hat{x})^2}$$

$$\mathbf{V}(\hat{A}) = \frac{\sigma_F^2\,\mathbf{E}(X^2)}{n\,\mathbf{V}(X)} \qquad \approx \hat{\sigma}_a^2 := \hat{\sigma}_b^2 \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Die Form der Varianzschätzer ist plausibel, die kleine Korrektur von $1/n$ zu $1/(n-1)$ oder $1/(n-2)$ sichert die richtige Erwartung. (Für große n, etwa $n \gg 100$, ist diese Korrektur meist unerheblich.)

Hieraus erhalten wir Vertrauensintervalle, etwa 2σ zu 95% Sicherheit. Der Aufwand lohnt sich: Wir gewinnen ein Maß für die (Un)Sicherheit.

☺ Wir bekommen nicht nur **Punktschätzer** der gesuchten Werte a, b, sondern sogar **Intervallschätzer**: Das enthält viel mehr Information!

⚠ Grundlose Schätzungen sind sinnlos, wir brauchen Sicherheit!

Zufallsvariablen und Erwartungswerte

W301
Fazit

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ein WRaum, zum Beispiel diskret oder kontinuierlich. V112
Eine reelle **Zufallsvariable** ist eine messbare Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$. V211
Sie ordnet jedem Zufallsergebnis $\omega \in \Omega$ eine reelle Zahl $X(\omega) \in \mathbb{R}$ zu.
Im Bildbereich $\mathbb{R}$ definiert sie die **Verteilung** $\mathbf{P}_X : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ durch

$$\mathbf{P}_X(B) = \mathbf{P}(X \in B) = \mathbf{P}\big(\{\, \omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B \,\}\big).$$

Ihr **Erwartungswert** ist gegeben durch

$$\mu = \mathbf{E}(X) := \int_\Omega X(\omega)\,\mathrm{d}\mathbf{P} = \int_\mathbb{R} x\,\mathrm{d}\mathbf{P}_X.$$

Ist die Verteilung $\mathbf{P}_X$ auf $\mathbb{R}$ kontinuierlich mit Dichte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, so gilt

$$\mathbf{E}(X) = \int_\mathbb{R} x\, f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ist $\mathbf{P}_X$ diskret mit Wkten $p(x) = \mathbf{P}(\{\, \omega \in \Omega \mid X(\omega) = x \,\})$, so gilt

$$\mathbf{E}(X) = \sum\nolimits_{x \in \mathbb{R}} x\, p(x).$$

⚠ Wir setzen hierzu absolute Integrierbarkeit / Summierbarkeit voraus!

Varianz und Streuung

W302
Fazit

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ein WRaum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable.
Sei $\mathbf{E}(|X|) < \infty$, so dass der Erwartungswert $\mu = \mathbf{E}(X)$ existiert.
Das (absolute, zentrierte) **n-te Moment** von X ist gegeben durch

$$\rho^n(X) := \mathbf{E}\big[|X - \mu|^n\big].$$

Fall $n = 2$: Die **Varianz** von X ist die mittlere quadratische Abweichung

$$\sigma^2(X) = \mathbf{V}(X) := \mathbf{E}\big[(X - \mu)^2\big] = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 \geq 0.$$

Die **Streuung** oder **Standardabweichung** ist $\sigma(X) := \sqrt{\mathbf{V}(X)}$.
Nach Chebychev gelten folgende Abschätzungen für alle $h, k > 0$:

$$\mathbf{P}\Big[|X - \mu| \geq k\sigma\Big] \leq \frac{1}{k^2}, \qquad \mathbf{P}\Big[\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma\Big] \geq 1 - \frac{1}{k^2},$$

$$\mathbf{P}\Big[X \geq \mu + k\sigma\Big] \leq \frac{1}{1 + k^2}, \quad \mathbf{P}\Big[\mu - h\sigma < X < \mu + k\sigma\Big] \geq \frac{4(hk - 1)}{(h + k)^2}$$

☺ Kennen Sie nur μ und σ, so sind diese Ungleichungen optimal.
Die Wkt großer Abweichungen fällt mindestens quadratisch, mit $1/k^2$.

Unabhängige Zufallsvariablen

Eine Familie $X = (X_1, \ldots, X_n)$ von Zufallsvariablen $X_k : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt **(stochastisch) unabhängig**, wenn für alle Intervalle $I_1, \ldots, I_n \subseteq \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbf{P}(\ X_1 \in I_1,\ \ldots,\ X_n \in I_n\ ) = \mathbf{P}(X_1 \in I_1) \cdots \mathbf{P}(X_n \in I_n).$$

Die gemeinsame Verteilung von $X_1, \ldots, X_n$ ist dann das Produktmaß

$$\mathbf{P}_X = \mathbf{P}_{(X_1,\ldots,X_n)} = \mathbf{P}_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{P}_{X_n}.$$

Sind $\mathbf{P}_{X_1}, \ldots, \mathbf{P}_{X_n}$ auf $\mathbb{R}$ kontinuierliche WMaße mit Dichten $f_1, \ldots, f_n$, so ist auch das Produktmaß $\mathbf{P}_X$ auf $\mathbb{R}^n$ kontinuierlich, mit Produktdichte

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n).$$

Erwartungen unabhängiger Zufallsvariablen X, Y multiplizieren sich:

$$\mathbf{E}(X \cdot Y) = \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y)$$

Ihre Kovarianz $\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$ verschwindet somit.
Varianzen unabhängiger Zufallsvariablen X, Y addieren sich:

$$\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\mathbf{Cov}(X, Y)$$

⚠ Für abhängige Zufallsvariablen gilt dies im Allgemeinen nicht!

Das Gesetz der großen Zahlen

Eine Messung / ein Experiment entspricht einer Zufallsvariablen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mit Erwartung $\mu = \mathbf{E}(X)$ und Varianz $\sigma^2 = \mathbf{V}(X) < \infty$.
Wir führen unabhängige Wiederholungen $X_1, X_2, X_3, \ldots$ durch.
Aus diesen Messwerten bilden wir den **empirischen Mittelwert**

$$\hat{X} := \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n).$$

Es gilt $\mathbf{E}(\hat{X}) = \mu$ und dank Unabhängigkeit zudem $\mathbf{V}(\hat{X}) = \sigma^2/n$.
Mit zunehmendem n streut $\hat{X}$ immer weniger, denn $\hat{\sigma} = \sigma/\sqrt{n} \to 0$.
Der Mittelwert $\hat{X}$ nähert sich dem Erwartungswert μ: Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\boxed{\mathbf{P}\Big[|\hat{X} - \mu| \geq \varepsilon\Big] \ \leq\ \frac{\sigma^2}{n\,\varepsilon^2} \ \searrow\ 0.}$$

Dieser Grenzwert besagt in Worten: Große Abweichungen $|\hat{X} - \mu| \geq \varepsilon$ werden beliebig unwahrscheinlich, wenn wir n hinreichend groß wählen.

In praktischen Anwendungen möchte man n nicht allzu groß wählen, denn wiederholte Messungen sind teuer. Wir brauchen daher bessere Schranken für die Abweichung $\mathbf{P}(|\hat{X} - \mu| \geq \varepsilon)$. Diese liefert der ZGS!

Der zentrale Grenzwertsatz (ZGS)

Der ZGS besagt: Die Summe $S = X_1 + \ldots + X_n$ vieler unabhängiger, aber ähnlich großer Zufallsvariablen ist annähernd normalverteilt.

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ein WRaum und $X_1, X_2, X_3, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängig mit

1. endlichen Erwartungen $\mu_k = \mathbf{E}(X_k)$ dank $\mathbf{E}(|X_k|) < \infty$,
2. strikt positiven Varianzen $\sigma_k^2 = \mathbf{E}\big(|X_k - \mu_k|^2\big) \geq \sigma_0^2 > 0$,
3. beschränkten dritten Momenten $\rho_k^3 = \mathbf{E}\big(|X_k - \mu_k|^3\big) \leq \rho_0^3 < \infty$.

Die Summe $S = X_1 + \ldots + X_n$ hat die Erwartung $\mu = \mu_1 + \ldots + \mu_n$ und die Varianz $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2$. Es gilt $\mathbf{P}_S \approx N(\mu, \sigma^2)$, genauer

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{P}(a \leq S \leq b) &= \int_{(a-\mu)/\sigma}^{(b-\mu)/\sigma} \frac{\mathrm{e}^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}\xi \;+\; \delta, \\ |\delta| &\leq \frac{\rho_1^3 + \ldots + \rho_n^3}{(\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2)^{3/2}} \leq \frac{\rho_0^3}{\sigma_0^3\sqrt{n}} \searrow 0. \end{aligned}}$$

Zentriert und normiert zu $S^* := (S - \mu)/\sigma$ erhalten wir $\mathbf{P}_{S^*} \approx N(0, 1)$. Der lokale Grenzwertsatz V3A ist spezieller, dabei aber auch präziser.

Konfidenzintervalle

In der Praxis ist folgende Anwendung des ZGS besonders wichtig: Als Stichprobe für X führen wir n **unabhängige Messungen** aus. Aus den so gewonnenen Messwerten $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ berechnen wir

den **Stichprobenmittelwert** $\hat{x} := \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$,

die **Stichprobenvarianz** $\hat{\sigma}^2 := \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (x_k - \hat{x})^2$,

das 2σ**–Konfidenzintervall** $I_2 := \Big[\, \hat{x} - 2\dfrac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}},\ \hat{x} + 2\dfrac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \,\Big]$.

Für große n gilt: Bei 95% aller Stichproben überdeckt das 2σ–Intervall I_2 den (konstanten aber uns unbekannten) Erwartungswert $\mu = \mathbf{E}(X)$.

Noch strenger: Bei 99% aller Stichproben überdeckt das 3σ–Intervall I_3 den (konstanten aber uns unbekannten) Erwartungswert $\mu = \mathbf{E}(X)$.

Der Nenner $\sqrt{n}$ bedeutet: Für doppelte Genauigkeit braucht man eine viermal größere Stichprobe, für zehnfache Genauigkeit eine 100mal größere Stichprobe. Das ist Fluch und Segen der großen Zahlen!

Verständnisfragen: Zufallsvariablen

Versuchen Sie, folgende Fragen frei aber genau zu beantworten, etwa so, wie Sie dies einer Kommiliton:in / Kolleg:in erklären wollen.

Was ist ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$? Was ist hierauf eine (reelle) Zufallsvariable X? Was ist ihre Verteilung $\mathbf{P}_X$ im Bildraum $\mathbb{R}$? Erinnerung: Wann ist $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ diskret? endlich? laplacesch?

Wie berechnet man den Erwartungswert $\mu = \mathbf{E}(X)$? bei diskreter Verteilung? bei kontinuierlicher Verteilung? Wie berechnet man die Varianz $\sigma^2 = \mathbf{V}(X)$ und Streuung σ? Was sind die Momente von X?

Nennen Sie wichtige Verteilungen und ihre Anwendungen.
Was sind ihre Kenngrößen μ und σ? Wie berechnet man sie?
Wie verhalten sie sich bei einer affinen Skalierung $Y = aX + b$?

Wie lauten und was besagen die Ungleichungen von Chebychev?
Wann lassen sie sich anwenden, was muss man hierzu wissen?

Gibt es genauere Ungleichungen, wenn man die Verteilung kennt?
Was gilt für die Normalverteilung? Was besagt die 68–95–99–Regel?

Verständnisfragen: zentraler Grenzwertsatz

Wann sind zwei Zufallsvariablen X, Y unabhängig? Wann sind die Indikatorfunktionen $\mathbf{I}_A, \mathbf{I}_B$ zweier Ereignisse $A, B \subseteq \Omega$ unabhängig? Kennen Sie weitere Beispiele von un/abhängigen Zufallsvariablen?

Gilt stets $\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y)$? und $\mathbf{E}(X \cdot Y) = \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y)$? und $\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(X)$? Was gilt bei Unabhängigkeit?

Was sind Erwartungswert und Varianz für $\mathrm{B}(1, t)$? Wie kann man hieraus mühelos Erwartungswert und Varianz von $\mathrm{B}(n, t)$ ablesen?

Was besagt das Gesetz der großen Zahlen? Wie kann man Wkten / Erwartungswerte empirisch messen? Wie schnell ist die Konvergenz?

Was besagt der zentrale Grenzwertsatz? Welche drei Voraussetzungen braucht, welche Schlussfolgerung gewinnt man? Wie schnell ist die Konvergenz? Was ist gleich / anders beim lokalen Grenzwertsatz?

Wie berechnet man Stichprobenmittelwert und -Varianz?
Wie bestimmt man hieraus das Konfidenzintervall der Stichprobe?
Wie liegt es zum (gesuchten aber unbekannten) Erwartungswert?

ZGS: Wann erhalten wir nicht die Normalverteilung?

⚠ Die Voraussetzungen $\sigma_k \geq \sigma_0 > 0$ und $\rho_k \leq \rho_0 < \infty$ des zentralen Grenzwertsatzes W1D stellen sicher, dass alle Beiträge $X_1, X_2, X_3, \ldots$ ähnlich stark streuen. Andernfalls können wir nicht garantieren, dass ihre Summen $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ sich der Normalverteilung nähern. Warnende Gegenbeispiele illustrieren dies, einfach aber eindrücklich:

Seien $X_1, X_2, X_3 \ldots : \Omega \to \{0, 1\}$ unabhängig und jeweils gleichverteilt.

Aufgabe: (1) Wir betrachten die Summe $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ sowie ihre Normierung $S_n^* = (S_n - \mu(S_n))/\sigma(S_n)$, sodass $\mu(S_n^*) = 0$ und $\sigma(S_n^*) = 1$.
(a) Berechnen Sie explizit $\mu(X_k)$, $\sigma(X_k)$, $\rho(X_k)$ sowie $\mu(S_n)$, $\sigma(S_n)$.
(b) Bestimmen Sie die Verteilung $\mathbf{P}_{S_n}$, skizzieren Sie die ersten Fälle.
(c) Welche Voraussetzungen des ZGS sind erfüllt, welche nicht?
(d) Welcher Grenzverteilung nähern sich $\mathbf{P}_{S_n}$ bzw. $\mathbf{P}_{S_n^*}$ für $n \to \infty$?

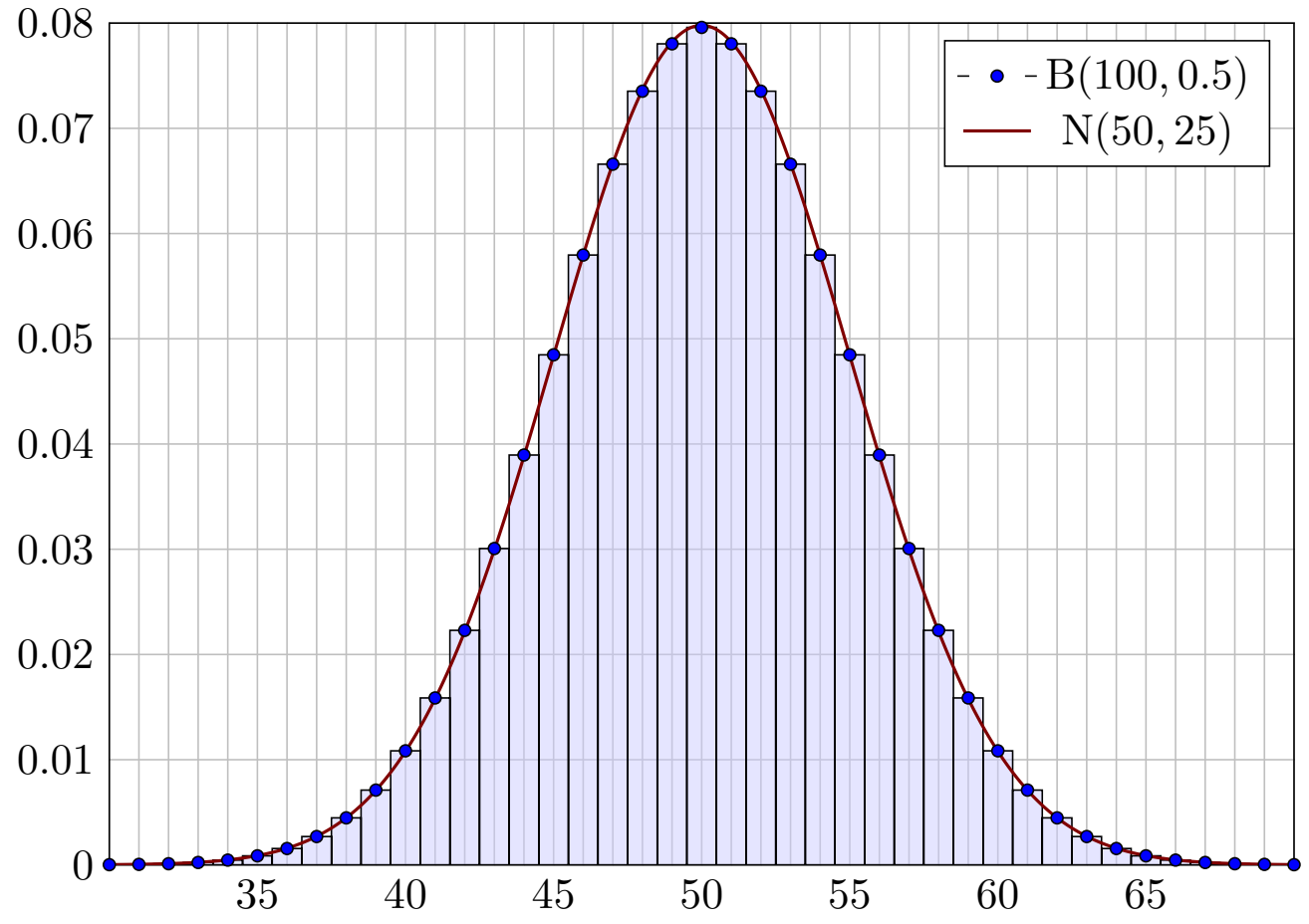
(2) Dieselben Fragen (a–d) für $S_n = Y_1 + \ldots + Y_n$ mit $Y_k = X_1$.

(3) Dieselben Fragen (a–d) für $S_n = Y_1 + \ldots + Y_n$ mit $Y_k = 2^{-k} X_k$.

(4) Dieselben Fragen (a–d) für $S_n = Y_1 + \ldots + Y_n$ mit $Y_k = 2^{k-1} X_k$.

Variante: $X_1, X_2, X_3 \ldots : \Omega \to \{-1, 0, +1\}$ und (3–4) zur Basis 3 statt 2.

ZGS: Wann erhalten wir nicht die Normalverteilung?



ZGS: Wann erhalten wir nicht die Normalverteilung?

Lösung: (1a) Hier gilt $\mu(X_k) = 1/2$ und $\sigma^2(X_k) = 1/4$ und $\rho^3(X_k) = 1/8$, dank Linearität $\mu(S_n) = n/2$, zudem dank Unabhängigkeit $\sigma^2(S_n) = n/4$.

(1b) Wir wissen bereits $\mathbf{P}_{S_n} = \mathrm{B}(n,p)$ mit $p = 1/2$, also ausgeschrieben:

$$\mathbf{P}(S_n = k) \;=\; \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \;=\; \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}$$

(1c) Alle drei Voraussetzungen des Satzes W1D sind hier erfüllt! ✔ ✔ ✔

(1d) Dank ZGS erhalten wir $\mathbf{P}_{S_n^*} \to \mathrm{N}(0,1)$. Ausführlich und genauer:

$$\mathbf{P}(a \le S_n \le b) \;=\; \int_{(a-\mu_n)/\sigma_n}^{(b-\mu_n)/\sigma_n} \frac{\mathrm{e}^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}\xi \;+\; \delta$$

$$\mathbf{P}(\alpha \le S_n^* \le \beta) \;=\; \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\mathrm{e}^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}\xi \;+\; \delta$$

mit der Fehlerschranke $|\delta| \le 1/\sqrt{n} \to 0$. Der lokale Grenzwertsatz V3A garantiert die noch bessere Fehlerschranke $|\delta| \le 4/3n$ für $n \ge 100$.

⚠ Ohne Normierung gilt $\mathbf{P}(S_n \in [a,b]) \to 0$ für $n \to \infty$. (Skizze!)

ZGS: Wann erhalten wir nicht die Normalverteilung?

(2a) Wie in (1a) gilt $\mu(Y_k) = 1/2$ und $\sigma^2(Y_k) = 1/4$ und $\rho^3(Y_k) = 1/8$.
Für die Summe $S_n = nX_1$ gilt $\mu(S_n) = n/2$ aber $\sigma^2(S_n) = n^2/4$.

(2b) Die Summe S_n ist gleichverteilt auf $\{0, n\}$, das heißt,
sie nimmt nur zwei Werte an: $\mathbf{P}(S_n{=}0) = \mathbf{P}(S_n{=}n) = 1/2$.
Normiert ist $S_n^* = 2X_1 - 1$ gleichverteilt auf $\{-1, +1\}$.

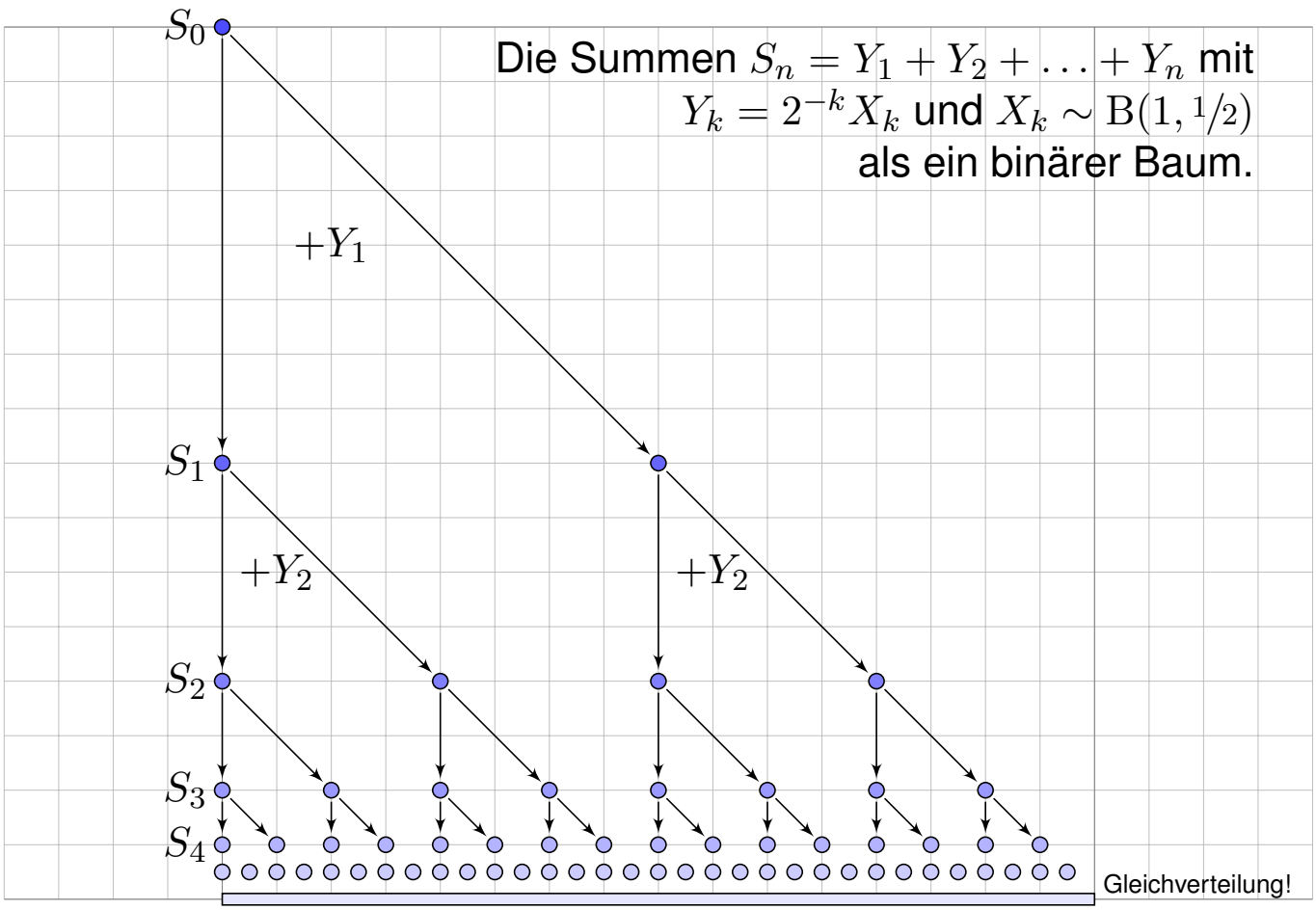
(2c) Nur zwei der drei Voraussetzungen des ZGS sind hier erfüllt:
Die Varianzen $\sigma_k^2 = 1/4 > 0$ sind strikt positiv. ✔
Die dritten Momente $\rho_k^3 = 1/8 < \infty$ sind beschränkt. ✔
Aber die Zufallsvariablen $Y_1, Y_2, \ldots$ sind nicht unabhängig! ✘

⚠ Der zentrale Grenzwertsatz lässt sich daher hier nicht anwenden.
Tatsächlich konvergiert $\mathbf{P}_{S_n^*}$ *nicht* gegen die Normalverteilung $\mathrm{N}(0,1)$!

(2d) Für alle n ist die normierte Summe S_n^* gleichverteilt auf $\{-1, +1\}$.

⚠ Ohne Normierung gilt für $n \to \infty$ der Grenzwert $\mathbf{P}(S_n \in [a,b]) \to 0$ falls $0 \notin [a,b]$ und $\mathbf{P}(S_n \in [a,b]) \to 1/2$ falls $0 \in [a,b]$. Das ist keine WVerteilung mehr: Wie in (1d) verschwindet Masse nach Unendlich.

ZGS: Wann erhalten wir nicht die Normalverteilung?



ZGS: Wann erhalten wir nicht die Normalverteilung?

(3a) Für $Y_k = 2^{-k} X_k$ gilt dank (1a) nach Skalierung $\mu(Y_k) = 2^{-k}/2$ und $\sigma^2(Y_k) = 2^{-2k}/4$ und $\rho^3(Y_k) = 2^{-3k}/8$. Dank Linearität gilt dann $\mu(S_n) = (1 - 2^{-n})/2$, dank Unabhängigkeit $\sigma^2(S_n) = (1 - 2^{-2n})/12$.

(3b) Im Binärsystem gilt:

$$S_n = 2^{-1} X_1 + 2^{-2} X_2 + \ldots + 2^{-n} X_n = (0.X_1 X_2 \ldots X_n)_{\text{bin}}$$

Demnach ist $\mathbf{P}_{S_n}$ die Gleichverteilung auf der endlichen Menge

$$M_n = \left\{ m/2^n \;\middle|\; m = 0, 1, \ldots, 2^n - 1 \right\} \subseteq [0, 1].$$

(3c) Nur zwei der drei Voraussetzungen des ZGS sind hier erfüllt:
Die Zufallsvariablen $Y_k = 2^{-k} X_k$ sind untereinander unabhängig. ✔
Die dritten Momente $\rho_k^3 = 2^{-3k}/8 \leq \rho_1^3 = 1/64 < \infty$ sind beschränkt. ✔
Hingegen gilt $\sigma_k^2 = 2^{-2k}/4 \searrow 0$, also nicht $\sigma_k \geq \sigma_0 > 0$. ✘

⚠ Der zentrale Grenzwertsatz lässt sich daher hier nicht anwenden.
Genauer zeigen wir schließlich, dass die Verteilungen $\mathbf{P}_{S_n}$ bzw. $\mathbf{P}_{S_n^*}$ tatsächlich *nicht* gegen die Normalverteilung konvergieren!

ZGS: Wann erhalten wir nicht die Normalverteilung?

(3d) Für $n \to \infty$ nähert sich $\mathbf{P}_{S_n}$ der Gleichverteilung auf $[0,1]$.
Dank (3b) scheint dies plausibel. Wir rechnen es ausführlich nach.
Für alle $0 \le a < b \le 1$ und $k \in \mathbb{N}$ gelten folgende Implikationen:

$$\begin{aligned} & \big|[a,b] \cap M_n\big| = k \\ \Longrightarrow\quad & k2^{-n} \le |b-a| < (k+1)2^{-n} \\ \Longrightarrow\quad & \big|[a,b] \cap M_n\big| \in \{k, k+1\} \end{aligned}$$

Man beweist dies für $k = 0$ und per Induktion für $k = 1, 2, 3, \ldots$. Also:

$$\mathbf{P}\big(S_n \in [a,b]\big) \in \frac{\lfloor (b-a)2^n \rfloor + \{0,1\}}{2^n} \to |b-a|$$

☺ Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $S_n \in [a,b]$ geht für $n \to \infty$ gegen die Intervalllänge $|b-a|$. Das ist die Gleichverteilung auf $[0,1]$.
Demnach konvergiert die normierte Zufallsvariable $S_n^* = (S_n - \mu_n)/\sigma_n$ gegen die kontinuierliche Gleichverteilung auf dem Intervall $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.
All diese Verteilungen haben Erwartung 0 und Streuung 1. V235

ZGS: Wann erhalten wir nicht die Normalverteilung?

(4a) Für $Y_k = 2^{k-1} X_k$ gilt nach (1a) dank Skalierung $\mu(Y_k) = 2^{k-1}/2$ und $\sigma^2(Y_k) = 2^{2k-2}/4$ und $\rho^3(Y_k) = 2^{3k-3}/8$. Dank Linearität gilt $\mu(S_n) = (2^n - 1)/2$ dank Unabhängigkeit $\sigma^2(S_n) = (2^{2n} - 1)/12$.

(4b) Im Binärsystem gilt:

$$S_n = X_1 + 2X_2 + \ldots + 2^{n-1} X_n = (X_n \ldots X_2 X_1)_{\text{bin}}$$

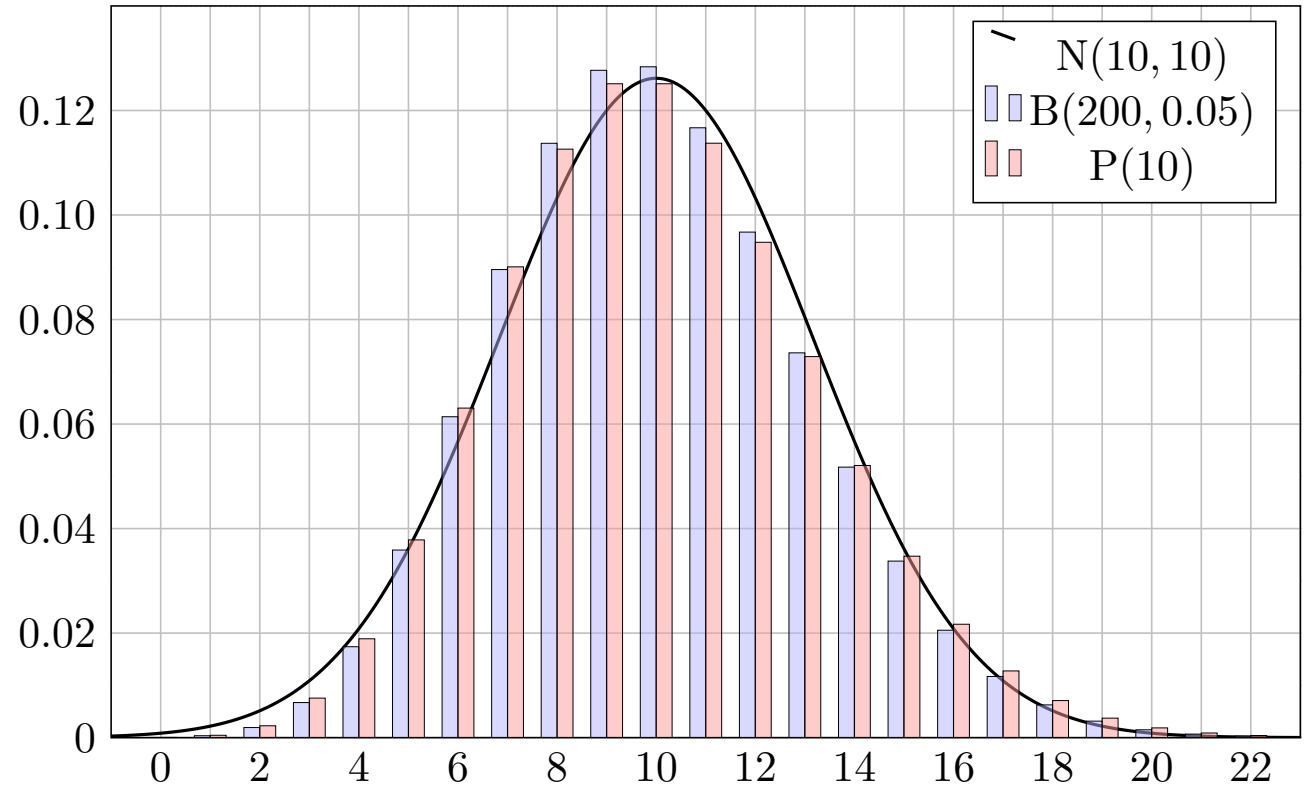
Demnach ist $\mathbf{P}_{S_n}$ die Gleichverteilung auf der endlichen Menge

$$M_n = \big\{0, 1, \ldots, 2^n - 1\big\} \subseteq \mathbb{N}.$$

(4c) Nur zwei der drei Voraussetzungen des ZGS sind hier erfüllt:
Die Zufallsvariablen $Y_k = 2^{-k} X_k$ sind untereinander unabhängig. ✔
Die Varianzen $\sigma_k^2 = 2^{2k-2}/4 \ge \sigma_1^2 = 1/4 > 0$ sind strikt positiv. ✔
Hingegen gilt $\rho_k^3 = 2^{3k-3}/8 \nearrow \infty$, also nicht $\rho_k \le \rho_0 < \infty$. ✘

⚠ Der zentrale Grenzwertsatz lässt sich daher hier nicht anwenden.
Wie in (3d) folgt, dass die Verteilung von S_n^* tatsächlich nicht gegen $\mathrm{N}(0,1)$ konvergiert, sondern gegen die Gleichverteilung auf $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

Vergleich: Binomial, Poisson, Normal



Aufgabe: Die Poisson–Näherung $\mathrm{B}(n, \mu/n) \to \mathrm{P}(\mu)$ für $n \to \infty$ und der LGS $\mathrm{B}(n, \mu/n) \approx \mathrm{N}(\mu, \mu)$ zeigen $\mathrm{P}(\mu) \approx \mathrm{N}(\mu, \mu)$ wie skizziert. Welche Fehlerschranke gilt demnach zwischen $\mathrm{P}(\mu)$ und $\mathrm{N}(\mu, \mu)$?

Vergleich: Binomial, Poisson, Normal

Lösung: Für $\mu \geq 0$ ist die Poisson–Verteilung gegeben durch

$$\mathrm{P}(\mu) : \mathbb{N} \to [0, 1] \quad \text{mit} \quad \mathrm{P}(\mu)(k) = \mathrm{e}^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!}.$$

Sie hat Erwartung μ und Varianz $\sigma^2 = \mu$. Für $t = \mu/n$ und $n \to \infty$ gilt

$$\mathrm{B}(n, t) \to \mathrm{P}(\mu) \quad \text{also punktweise} \quad \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \to \mathrm{e}^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!}.$$

Dank LGS nähert sich also auch die Poisson– der Normalverteilung:

$$\sum_{k=a}^{b} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \to \sum_{k=a}^{b} \mathrm{e}^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!} = \int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{e}^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{d}\xi + \delta$$

$$= \int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{e}^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{d}\xi + \left[\frac{1-\xi^2}{6\sigma\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{e}^{-\xi^2/2} \right]_\alpha^\beta + \varepsilon$$

mit den Grenzen $\alpha = (a - 1/2 - \mu)/\sigma$ und $\beta = (b + 1/2 - \mu)/\sigma$ und Fehlerschranken $|\delta| < 1/(6\sigma)$ bzw. $|\varepsilon| < 1/(3\sigma^2)$ für $\sigma \geq 5$.

☺ Dies zeigt $|\delta| < 1/\sigma \to 0$, aber auch $|\delta| \sim \mathrm{const}/\sqrt{n}$ im ZGS.

Fixpunkte zufälliger Abbildungen

Aufgabe: (1) Wir betrachten zufällige Abbildungen $\omega : I \to I$ der Menge $I = \{1, \ldots, n\}$ in sich. Hierzu sei $(\Omega = I^I, \mathbf{P})$ laplacesch mit $|\Omega| = n^n$.

Zu $\omega \in \Omega$ sei $F(\omega) := \sharp\{\, i \in I \mid \omega(i) = i \,\}$ die Anzahl der Fixpunkte.
(a) Bestimmen Sie die Erwartung $\mathbf{E}(F)$ und die Varianz $\mathbf{V}(F)$.
(b) Ist die Zufallsvariable F binomial- oder Poisson–verteilt?

(2) Dieselben Fragen für zufällige Permutationen $\omega : I \xrightarrow{\sim} I$.

Lösung: Die Rechnung scheint zunächst schwierig, gar hoffnungslos. Unsere mathematischen Werkzeuge helfen: Geschickt zerlegen wir $F = F_1 + \ldots + F_n$ mit $F_i(\omega) = 1$ falls $\omega(i) = i$ und $F_i(\omega) = 0$ sonst.

(1a) Es gilt $\mathbf{E}(F_i) = 1/n$, dank Linearität der Erwartung also $\mathbf{E}(F) = 1$. Zur Varianz $\mathbf{V}(F) = \mathbf{E}(F^2) - \mathbf{E}(F)^2$ gilt $F^2 = \sum_i F_i^2 + 2\sum_{i<j} F_i F_j$. Hierbei ist $F_i^2 = F_i$, also $\mathbf{E}(F_i^2) = 1/n$, sowie $\mathbf{E}(F_i F_j) = 1/n^2$. Somit gilt $\mathbf{V}(F) = \mathbf{E}(F^2) - \mathbf{E}(F)^2 = n(n-1)/n^2 = 1 - 1/n$.

(1b) Die Zufallsvariablen $F_1, \ldots, F_n$ sind unabhängig $\mathrm{B}(1, 1/n)$–verteilt. Somit ist $F \sim \mathrm{B}(n, 1/n)$ tatsächlich binomialverteilt. Für große n gilt die Näherung $\mathbf{P}_F \approx \mathrm{P}(1)$ dank Poissons Gesetz der kleinen Zahlen U3E.

Fixpunkte zufälliger Permutationen

(2a) Wir nutzen weiterhin die Summenzerlegung $F = F_1 + \ldots + F_n$. Diese Zufallsvariablen auf $\Omega = \{\, \omega : I \to I \,\}$ schränken wir nun jedoch ein auf $\Omega' = \{\, \omega : I \xrightarrow{\sim} I \,\}$. Auch $(\Omega', \mathbf{P}')$ ist laplacesch, wobei $|\Omega'| = n!$. Auch hier gilt $\mathbf{E}(F_i) = 1/n$, dank Linearität der Erwartung also $\mathbf{E}(F) = 1$. Im Unterschied zu (1) gilt jedoch $\mathbf{E}(F_i F_j) = 1/n(n-1)$, somit $\mathbf{V}(F) = 1$.

☺ Einfache Merkregel: Eine zufällige Permutation hat 1 ± 1 Fixpunkte.

⚠ Auf $(\Omega', \mathbf{P}')$ sind die Zufallsvariablen $F_1, \ldots, F_n$ nicht unabhängig! Wegen $\mathbf{Cov}(F_i, F_i) = \mathbf{E}(F_i F_j) - \mathbf{E}(F_i)\mathbf{E}(F_j) = 1/n^2(n-1) > 0$ sind sie positiv korreliert, wie anschaulich zu erwarten, wenn auch nur schwach. Ihre Varianzen $\mathbf{V}(F_i)$ addieren sich nicht zu $\mathbf{V}(F)$, nur dank Korrektur gemäß $\mathbf{V}(F) = \sum_i \mathbf{V}(F_i) + 2\sum_{i<j} \mathbf{Cov}(F_i, F_j) = (1 - 1/n) + 1/n = 1$.

(2b) Die Zufallsvariable $F : (\Omega', \mathbf{P}') \to \mathbb{N}$ ist nicht exakt Poisson–verteilt, da sie nur ein endliches Bild $\{0, 1, \ldots, n\}$ hat. Für $n \to \infty$ nimmt die Korrelation ab, und wir vermuten die Näherung $\mathbf{P}_F \approx \mathrm{P}(1)$ wie in (1). Numerisches Experiment oder sorgfältige Rechnung bestätigen dies. Die Normalverteilung $\mathrm{N}(1, 1)$ ist offensichtlich eine schlechte Näherung.

Anwendungsbeispiel: radioaktiver Zerfall

Ein Atom Uran 238 zerfällt in der nächsten Stunde mit Wkt $2 \cdot 10^{-14}$. Eine Probe von $20\mathrm{mg}$ enthält etwa $5 \cdot 10^{19}$ Atome. Wir nehmen Zerfälle als stochastisch unabhängig an, insbesondere ohne Kettenreaktion. U461

Aufgabe: Sei X die Gesamtzahl der Zerfälle in der nächsten Stunde.

(1) Nennen Sie die exakte Verteilung (in diesem vereinfachten Modell).

(2) Berechnen Sie Erwartung $\mu = \mathbf{E}(X)$, Varianz $\sigma^2 = \mathbf{V}(X)$, Streuung. Runden Sie jedes Ergebnis auf die nächstgelegene ganze Zahl.

(3) Wie klein ist der totale Abstand zur Poisson–Verteilung $\mathrm{P}(\mu)$?

(4) Wie klein ist der Näherungsfehler zur Normalverteilung $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$?

(5) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}\big(|X - \mu| \le 2500\big)$ in Prozent, gerundet auf den nächstgelegenen Prozentpunkt.

(6) Ist unser Modell für Uran 238 realistisch? Warum / warum nicht?

(7) Würden Sie diese Rechnung ebenso durchführen bei Uran 235? (Spaltbares Material wie Uran 235 *kann* zur Kettenreaktion führen. Dies wird genutzt zum Beispiel als Kernreaktor oder als Kernwaffe.)

Anwendungsbeispiel: radioaktiver Zerfall

Lösung: (1) Es handelt sich um die Binomialverteilung $\mathrm{B}(n, p)$:

$$\mathbf{P}(X{=}k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad n = 5 \cdot 10^{19}, \quad p = 2 \cdot 10^{-14}$$

(2) Erwartung, Varianz und Streuung von $\mathrm{B}(n, p)$ sind

$$\begin{aligned}
\mu = \mathbf{E}(X) &= np = 5 \cdot 10^{19} \cdot 2 \cdot 10^{-14} &&= 10^6 \\
\sigma^2 = \mathbf{V}(X) &= np(1-p) = 10^6 - 2 \cdot 10^{-8} &&\approx 10^6 \\
\sigma = \sqrt{\mathbf{V}(X)} &= \sqrt{10^6 - 2 \cdot 10^{-8}} \approx \sqrt{10^6} &&= 10^3
\end{aligned}$$

(3) Es gilt $\big\|\mathbf{P}_X - \mathrm{P}(\mu)\big\| \le np^2 = 5 \cdot 10^{19} \cdot 4 \cdot 10^{-28} = 2 \cdot 10^{-8}$.

(4) Im LGS bzw. ZGS gilt für den Approximationsfehler δ die Schranke

$$|\delta| \;\le\; \frac{|1-2p|}{10\sigma} + \frac{1}{3\sigma^2} \;<\; \frac{1}{6\sigma} \;<\; \frac{1}{\sigma} \;=\; 10^{-3}.$$

Mancher verwendet die Grenzwertsätze nur gefühlt „nach Erfahrung“. Fehlerschranken sind verlässlicher als ein vages subjektives Gefühl. Sie helfen insbesondere auch dort, wo noch keine Erfahrung vorliegt!

Anwendungsbeispiel: radioaktiver Zerfall

(5) Dank (4) ist die Normalverteilung ausreichend genau:

$$\mathbf{P}\big(|X-\mu|\le 2500\big) \approx \int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 2\cdot\int_{t=0}^{2.5} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\approx 2\cdot 0.49379 \qquad = 0.98758 \qquad \approx 99\%$$

☺ Wir entscheiden uns hier für den lokalen Grenzwertsatz V3A und nähern die Binomialverteilung durch die Normalverteilung. Dank unserer Fehlerabschätzung (4) ist das genau genug.

Genau genommen müssten wir mit $\alpha = 2500.5/\sigma = 2.5005$ rechnen, aber die Stetigkeitskorrektur ist hier klein und fällt nicht ins Gewicht.

☺ Die Poisson–Verteilung wäre nach (3) eine noch bessere Näherung. Für $\mathrm{P}(1\,000\,000)$ haben wir hier allerdings keine Tabelle vorliegen.

Es gibt auch kumulative Tabellen zu Poisson–Verteilungen $\mathrm{P}(\mu)$; noch bequemer ist heutzutage die Nutzung eines Computers.

⚠ Auch Computer können $\mathbf{P}_X = \mathrm{B}(n,p)$ für $n = 5\cdot 10^{19}$ in realistischer Zeit nicht direkt berechnen, etwa die exakte Summe $\sum_{k=a}^{b} \mathrm{B}(n,p)(k)$. Hierzu nutzen wir Näherungen wie $\mathbf{P}_X \approx \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ oder $\mathbf{P}_X \approx \mathrm{P}(\mu)$.

Anwendungsbeispiel: radioaktiver Zerfall

(6) Ja. Zwischen Uran 238 findet nahezu keine Wechselwirkung statt.

(7) Nein. Die stochastische Unabhängigkeit der Zerfälle gilt nicht mehr!

⚠ Allein die größere Zerfallswkt $p \in [0,1]$ ändert noch nicht das Modell. Doch unser Modell $\mathrm{B}(n,p)$ beruht auf stochastischer *Unabhängigkeit*! Andernfalls ist die Anzahl X der Zerfälle nicht mehr binomialverteilt. U461

Eine fahrlässige, falsche Modellbildung kann zu Katastrophen führen! Zwar sind die Werte innerhalb des Modells noch rechnerisch richtig, aber das gewählte Modell beschreibt keineswegs die Wirklichkeit.

Die Grundlagen der Kernphysik gehören natürlich nicht zur HM3, aber soviel Anwendungsbezug gehört zur Allgemeinbildung für technisch Gebildete, gerade angehende Ingenieur:innen. Ein qualitatives Modell kennen Sie vielleicht aus der Schule: Die Kettenreaktion entsteht, weil beim Zerfall Neutronen emittiert werden, die von anderen Atomkernen absorbiert werden und diese zum Zerfall anregen. Das ist das Gegenteil von Unabhängigkeit! Otto Hahn (1879–1968) bekam für diese wichtige Entdeckung 1945 den Nobelpreis für Chemie. Ihre Anwendungen, zum Guten wie zum Bösen, prägten das 20. Jahrhundert und wirken fort.

Anwendung des ZGS auf den fairen Würfel

Aufgabe: Sie würfeln 100 mal mit einem fairen Würfel.
Mit welcher Wkt erhalten Sie eine Augensumme $S \geq 390$?
Was sagt Chebychev? der ZGS? der LGS? die exakte Rechnung?

Lösung: Für die Augenzahl X bei einem fairen Würfel gilt:

$$\mathbf{E}(X) = 1 \cdot \tfrac{1}{6} + 2 \cdot \tfrac{1}{6} + 3 \cdot \tfrac{1}{6} + 4 \cdot \tfrac{1}{6} + 5 \cdot \tfrac{1}{6} + 6 \cdot \tfrac{1}{6} = 21/6 = 3.5$$
$$\mathbf{E}(X^2) = 1^2 \cdot \tfrac{1}{6} + 2^2 \cdot \tfrac{1}{6} + 3^2 \cdot \tfrac{1}{6} + 4^2 \cdot \tfrac{1}{6} + 5^2 \cdot \tfrac{1}{6} + 6^2 \cdot \tfrac{1}{6} = 91/6$$
$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = 91/6 - 49/4 = 35/12 \approx 2.9167$$

Für einmaliges Würfeln erhalten wir also folgende Kenngrößen:

$$\mu(X) = 3.5, \quad \sigma^2(X) \approx 2.9167, \quad \sigma(X) \approx 1.7078$$

Für die Augensumme S bei 100 unabhängigen Würfen gilt demnach:

$$\mu(S) = 350, \quad \sigma^2(S) = 291.67, \quad \sigma(S) \approx 17.078$$

☺ Man bewundere die Magie der großen Zahlen!

Erwartungswert und Varianz werden mit $n = 100$ multipliziert, die Streuung jedoch nur mit $\sqrt{n} = 10$. Im Verhältnis zum Erwartungswert 350 wird die Streuung 17 deutlich geringer! Aus diesem Grund liefern größere Stichproben zuverlässigere Ergebnisse. Doch alles im Leben hat seinen Preis: Für 10mal höhere Genauigkeit benötigt man eine 100mal größere Stichprobe!

Anwendung des ZGS auf den fairen Würfel

Abweichung vom Erwartungswert: Für $S \geq 390 = \mu + \alpha\sigma$ gilt

$$\alpha = (390 - \mu)/\sigma = (390 - 350)/17 \approx 2.34.$$

Chebychev gilt allgemein und liefert eine erste grobe Abschätzung:

$$\mathbf{P}(S \geq 390) \leq \frac{1}{1 + \alpha^2} \lessapprox 0.16$$

Der **LGS** lässt sich nicht anwenden, da S nicht binomialverteilt ist!

Der **zentrale Grenzwertsatz** nutzt die Normalverteilung als Näherung:

$$\mathbf{P}(S \geq 390) \approx \int_\alpha^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{d}\xi \approx 0.01$$

Hierzu genügt es, die Tabelle abzulesen: $\mathbf{P}(S \geq 390) \approx 0.5 - 0.49036 = 0.00964$.
Der ZGS garantiert nur die pessimistische Fehlerschranke $|\delta| < 13\%$, mit $\rho^3(X) = 6.375$.
Wir nehmen optimistisch an, dass die Normalverteilung hier wesentlich besser approximiert.
In diesem konkreten Fall können wir das durch eine exakte Rechnung direkt nachprüfen:

Exakte Rechnung: Durch mühsames Aufsummieren erhalten wir:

$$\mathbf{P}(S \geq 390) = 0.0102875\ldots \approx 1\%$$

Anwendung des ZGS auf gezinkten Würfel

Aufgabe: Sie würfeln 100 mal mit unserem gezinkten Würfel (T107). Mit welcher Wkt erhalten Sie dabei eine Augensumme $S \geq 390$? Was sagt Chebychev? der ZGS? der LGS? die exakte Rechnung?

Lösung: Für die Augenzahl Y bei unserem gezinkten Würfel gilt:

$$\mathbf{E}(Y) = 1 \cdot 0.15 + 2 \cdot 0.16 + 3 \cdot 0.16 + 4 \cdot 0.16 + 5 \cdot 0.16 + 6 \cdot 0.21 = 3.65$$

$$\mathbf{E}(Y^2) = 1^2 \cdot 0.15 + 2^2 \cdot 0.16 + 3^2 \cdot 0.16 + 4^2 \cdot 0.16 + 5^2 \cdot 0.16 + 6^2 \cdot 0.21$$

$$\mathbf{V}(Y) = \mathbf{E}(Y^2) - \mathbf{E}(Y)^2 = 16.35 - 13.3225 = 3.0275$$

Für einmaliges Würfeln erhalten wir also folgende Kenngrößen:

$$\mu(Y) = 3.65, \quad \sigma^2(Y) \approx 3.0275, \quad \sigma(Y) \approx 1.74$$

Für die Augensumme S bei 100 unabhängigen Würfen gilt demnach:

$$\mu(S) = 365, \quad \sigma^2(S) = 302.75, \quad \sigma \approx 17.4$$

☺ Man bewundere die Magie der großen Zahlen!

Erwartungswert und Varianz werden mit $n = 100$ multipliziert, die Streuung jedoch nur mit $\sqrt{n} = 10$. Im Verhältnis zum Erwartungswert 365 wird die Streuung 17.4 deutlich geringer! Aus diesem Grund liefern größere Stichproben zuverlässigere Ergebnisse. Doch alles im Leben hat seinen Preis: Für 10mal höhere Genauigkeit benötigt man eine 100mal größere Stichprobe!

Anwendung des ZGS auf gezinkten Würfel

Abweichung vom Erwartungswert: Für $S \geq 390 = \mu + \alpha\sigma$ gilt

$$\alpha = (390 - \mu)/\sigma = (390 - 365)/17.4 \approx 1.44.$$

Chebychev gilt allgemein und liefert eine erste grobe Abschätzung:

$$\mathbf{P}(S \geq 390) \leq \frac{1}{1 + \alpha^2} \lessapprox 0.33$$

Der **LGS** lässt sich nicht anwenden, da S nicht binomialverteilt ist!

Der **zentrale Grenzwertsatz** nutzt die Normalverteilung als Näherung:

$$\mathbf{P}(S \geq 390) \approx \int_\alpha^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{d}\xi \approx 0.075$$

Hierzu genügt es, die Tabelle abzulesen: $\mathbf{P}(S \geq 390) \approx 0.5 - 0.42507 = 0.07493 \approx 7.5\%$
Der ZGS garantiert nur die pessimistische Fehlerschranke $|\delta| < 13\%$, mit $\rho^3(Y) = 6.745$.
Wir nehmen optimistisch an, dass die Normalverteilung hier wesentlich besser approximiert.
In diesem konkreten Fall können wir das durch eine exakte Rechnung direkt nachprüfen:

Exakte Rechnung: Durch mühsames Aufsummieren erhalten wir:

$$\mathbf{P}(S \geq 390) = 0.0794448\ldots \approx 8\%$$

Anwendung: fair oder gezinkt?

Aufgabe: Sie haben drei Würfel, zwei faire und unseren gezinkten (alle äußerlich gleich). Sie wählen einen zufällig und würfeln damit 100 mal.

(1) Mit welcher Wkt erhalten Sie dabei eine Augensumme $S \geq 390$?

(2) Angenommen $S \geq 390$: Mit welcher Wkt ist der Würfel gezinkt?

Lösung: (1) Die totale Wahrscheinlichkeit (T2B) ist:

$$\mathbf{P}(S \geq 390) = \mathbf{P}(S \geq 390|\text{fair})\,\mathbf{P}(\text{fair}) + \mathbf{P}(S \geq 390|\text{zink})\,\mathbf{P}(\text{zink})$$

$$\approx 0.01 \cdot 2/3 + 0.08 \cdot 1/3 = 1/30 \approx 3.33\%$$

(2) Nach der Formel von Bayes (T2B) gilt:

$$\mathbf{P}(\text{zink}|S \geq 390) = \frac{\mathbf{P}(S \geq 390|\text{zink})\,\mathbf{P}(\text{zink})}{\mathbf{P}(S \geq 390)} \approx \frac{0.08 \cdot 1/3}{1/30} = 80\%$$

Das Auftreten einer Augensumme ≥ 390 ist demnach ein starkes Indiz, dass der von uns gewählte Würfel nicht fair, sondern der gezinkte ist.

☺ Leistungsstarke Theorie ermöglicht effiziente Berechnung.
Zu Klarheit, Verständnis und Korrektheit hilft eine präzise Notation.

Anwendung: fair oder gezinkt?

Wir frischen hier nochmals unsere Grundlagen aus Kapitel T auf.
Dank der Formel von Bayes sind solche Rechnungen meist leicht
– und doch oft überraschend. Üben Sie sich mit diesem Werkzeug!
Berechnung und Interpretation des Ergebnisses erfordern Übung.

Ohne weitere Information ist der von Ihnen gewählte Würfel mit Wkt $1/3$ gezinkt und mit Wkt $2/3$ fair. Nach Durchführung des Tests mit dem Ergebnis $S \geq 390$ ist er mit deutlich höherer Wkt von 80% gezinkt.
Das ist plausibel; die genaue Wkt erfordert präzise Rechnung.

Wir können nicht 100% sicher sein, aber der Test spricht dafür, dass der Würfel nicht fair ist. Ist eine höhere Sicherheit nötig, dann sollten Sie weitere Tests durchführen. Eine größere Datenreihe liefert größere Genauigkeit bzw. größere Sicherheit (wenn auch nie 100%).

Dieses einfache Anwendungsbeispiel ist leicht, doch repräsentativ.
Stochastik (WRechnung und Statistik) ist die Mathematik des Zufalls.
Unser Ziel dabei sind rationale Entscheidungen unter Unsicherheit.
Wir suchen nachvollziehbar begründete, quantitative Aussagen.

Anwendung: ZGS oder LGS?

Aufgabe: In einer Geburtsklinik beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine Jungengeburt $t = 0.514$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von den nächsten $n = 1000$ Neugeborenen genau $k = 514$ Jungen sind?

Was sagt Chebychev? der ZGS? der LGS? die exakte Rechnung?

Lösung: Wir haben $S \sim \mathrm{B}(n,t)$. Wir suchen $\mathbf{P}(S = k)$. Es gilt:

$$\mu = \mathbf{E}(S) = nt = 514, \quad \sigma^2 = \mathbf{V}(S) = nt(1-t) \approx 249.8, \quad \sigma \approx 15.8$$

⚠ Chebychev nützt für Intervalle um μ, aber nicht für einzelne Punkte! Das gilt auch für den ZGS. Mangels Stetigkeitskorrektur liefert er nur

$$\mathbf{P}\big(k \le S \le k\big) = \int_{(k-\mu)/\sigma}^{(k-\mu)/\sigma} \frac{\mathrm{e}^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}\xi \quad + \quad \delta$$

Pech: Das Integral verschwindet! Die Fehlerschranke liefert immerhin

$$0 \le \mathbf{P}\big(k \le S \le k\big) = \delta \le \frac{1}{2\sqrt{nt(1-t)}} \lessapprox 0.032.$$

☹ Die Ungleichung stimmt, aber damit sind wir noch nicht zufrieden!

Anwendung: ZGS oder LGS?

☺ Der LGS ist besser: Dank seiner Stetigkeitskorrektur liefert er

$$\mathbf{P}\big(k \le S \le k\big) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \quad \approx \int_{(k-1/2-\mu)/\sigma}^{(k+1/2-\mu)/\sigma} \frac{\mathrm{e}^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}\xi$$

$$\approx \frac{\mathrm{e}^{-(k-\mu)^2/2\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \quad \overset{(k=\mu)}{=} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \quad \approx \quad 0.0252412\ldots$$

Die Fehlerschranke ist wegen $\kappa \approx 0$ hier $|\varepsilon| < 1/(3\sigma^2) < 0.0014$.

☺ Noch besser: Die exakte Rechnung ist hier direkt und mühelos!

$$\mathbf{P}\big(S = k\big) = \binom{1000}{514} (0.514)^{514} (0.486)^{486} = 0.0252349\ldots$$

Was lernen wir daraus? Augen auf bei der Methodenwahl!

Diese bemerkenswerten Grenzwertsätze bilden einen umfangreichen Werkzeugkasten: Sie liefern mächtige Werkzeuge und ganz praktische Rechenregeln. Um sie zu nutzen, muss man die Voraussetzungen kennen und die Schlussfolgerungen verstehen. Es lohnt sich!

Anwendung: Fehlerwahrscheinlichkeiten

Aufgabe: Ein Elektroniksystem habe $n = 10^6$ unabhängige Bauteile mit den Fehlerwkten p_k. Wir wissen nur $10^{-4} \le p_k \le 10^{-2}$ laut Spezifikation. Sie interessiert die Gesamtzahl $S = \sum_{k=1}^n X_k$ der auftretenden Fehler.

Wir denken an eine mehrjährige Marsmission, Störungen durch Sonnenwind, oder ähnliches. Fehler sind zahlreich, daher wollen wir ausreichend Redundanz für ein solches System. Ein explizites Beispiel für $n = 3$ haben wir auf Seite T409 ausführlich diskutiert.

(1) Berechnen Sie Erwartung $\mu = \mathbf{E}(S)$ und Varianz $\sigma^2 = \mathbf{V}(S)$. Ist hier die Verteilung durch die Kenngrößen (μ, σ) bereits festgelegt?

$$\mu = \mathbf{E}(S) = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(X_k) = \sum_{k=1}^n p_k \quad \in \quad [100, 10\,000]$$

Da die $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig sind, addieren sich auch die Varianzen:

$$\sigma^2 = \mathbf{V}(S) = \sum_{k=1}^n \mathbf{V}(X_k) = \sum_{k=1}^n p_k(1-p_k) \quad \in \quad [99.99, 9900].$$

☺ Wegen $(1 - p_k) \in [0.99, 1]$ gilt hier $\sigma^2 \approx \mu$ bis auf 1% genau.

⚠ Die exakte Verteilung ist allein durch (μ, σ) noch nicht festgelegt.

Anwendung: Fehlerwahrscheinlichkeiten

(2) Welche Modelle beschreiben die Verteilung von S exakt / approx.? Binomial? Poisson? LGS? ZGS? mit welchen Fehlerschranken?

☹ Die Summe ist nicht binomialverteilt, da die p_k verschieden sind.

Erinnerung: Die Binomialverteilung $\mathrm{B}(n, p)$ entsteht bei n unabhängigen Experimenten mit identischer Trefferwkt p. Das ist hier nicht der Fall, also ist dieses Modell eher ungeeignet. Allgemein siehe `de.wikipedia.org/wiki/Verallgemeinerte_Binomialverteilung`.

☺ Poissons Gesetz der kleinen Zahlen liefert $\mathbf{P}_S \approx \mathrm{P}(\mu)$ mit Fehler

$$\|\mathbf{P}_S - \mathrm{P}(\mu)\| \le p_1^2 + \ldots + p_n^2 \quad \in \quad [0.01, 100].$$

☹ Der LGS lässt sich nicht anwenden, da S nicht binomialverteilt ist.

☺ Der ZGS ist anwendbar und liefert $\mathbf{P}_S \approx \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ mit Fehler

$$|\delta| \le \frac{\rho_1^3 + \ldots + \rho_n^3}{(\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2)^{3/2}} \approx \frac{\mu}{\mu^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \quad \in \quad [0.01, 0.1].$$

Daher nutzen wir den ZGS für große p_k und Poisson für kleine p_k.

Die einzelnen Summanden von $S = X_1 + \ldots + X_n$ sind leicht zu verstehen: $X_k \sim \mathrm{B}(1, p_k)$ hat Erwartung $\mu_k = \mathbf{E}(X_k) = p_k$, Varianz $\sigma_k^2 = \mathbf{V}(X_k) = p_k(1-p_k) \approx p_k$, drittes Moment $\rho_k^3 = \mathbf{E}(|X_k - \mu_k|^3) = p_k(1-p_k)(p_k^2 + (1-p_k)^2) \approx p_k$. Trotz der großen Zahl $n = 10^6$ ist die Fehlerschranke nicht besonders gut. Für Poisson sieht's allerdings auch nicht besser aus.

Anwendung: Fehlerwahrscheinlichkeiten

(3a) Wie beurteilen Sie einen Testlauf mit mehr als $11\,000$ Fehlern?

Im Extremfall $\mu = 10\,000$ und $\sigma = 100$ liefert Chebychev ganz grob

$$\mathbf{P}(S \geq 11\,000) \leq \frac{1}{1+k^2} < 0.01 \quad \text{mit} \quad k = 10.$$

Für die Normalverteilung sind 10σ–Abweichungen unwahrscheinlich:

$$\int_{10}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}\xi < 10^{-23}, \quad \text{aber leider nur} \quad |\delta| \leq 1/\sqrt{\mu} \in [0.01, 0.1].$$

Wenn wir der Normalverteilung glauben, dann ist eine 10σ–Abweichung praktisch unmöglich: Sie ist unwahrscheinlicher als dreimal nacheinander sechs Richtige im Lotto zu tippen!

Exakt liegt hier allerdings nicht die Normalverteilung $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ vor, daher müssen wir zusätzlich den Approximationsfehler berücksichtigen: Unsere Schranke aus (2) ist hier leider recht grob.

Für $\mu < 10\,000$ wird alles nur noch schlimmer. Nach Beobachtung von $11\,000$ Fehlern scheint das Modell jedenfalls nicht mehr glaubwürdig! Dann ist die Annahme $p_k \leq 10^{-2}$ nicht haltbar oder die Unabhängigkeit nicht gegeben: Vielleicht beeinflusst ein Fehler die anderen (z.B. durch lokale Überhitzung) oder externe Einflüsse provozieren massenhafte Fehler (z.B. Strahlung). Dem Modell liegen wichtige Annahmen zu Grunde; diese müssen kritisch überprüft werden.

Anwendung: Fehlerwahrscheinlichkeiten

(3b) Wie beurteilen Sie einen Testlauf mit etwa $10\,100$ Fehlern?

Das ist etwa mit $\mu = 10\,000$ und $\sigma = 100$ durchaus vereinbar.

(4) Durch $N = 25$ Testläufe ermitteln Sie $\hat{x} \approx 3600$ und $\sigma^2 \approx 3600$.
Welches Konfidenzintervall überdeckt μ mit 95%iger Sicherheit?

Wir haben die Streuung $\sigma \approx 60$ und $\sqrt{N} = 5$, also $2\sigma/\sqrt{N} = 24$.
Als 2σ–Intervall finden wir $[3576, 3624]$. Das ist bereits recht genau.

(5) Wie viele Testläufe brächten eine 2σ–Genauigkeit von ± 10?

Wir verlangen $2\sigma/\sqrt{N} \leq 10$, im oben Beispiel $\sigma \approx 60$ also $N \geq 144$.
Das ist genauer, aber vielleicht auch zu aufwändig, das heißt zu teuer.

Vielleicht ist das Intervall aus (4) oder noch gröber bereits gut genug; das ist eine strategische Entscheidung und hängt vom Kontext ab, vor allem von der weiteren Verwendung dieser Daten und Schätzungen.

Wir suchen nachvollziehbar begründete, quantitative Aussagen.
☺ Mit den Werkzeugen der Mathematik sind Sie dafür gewappnet.

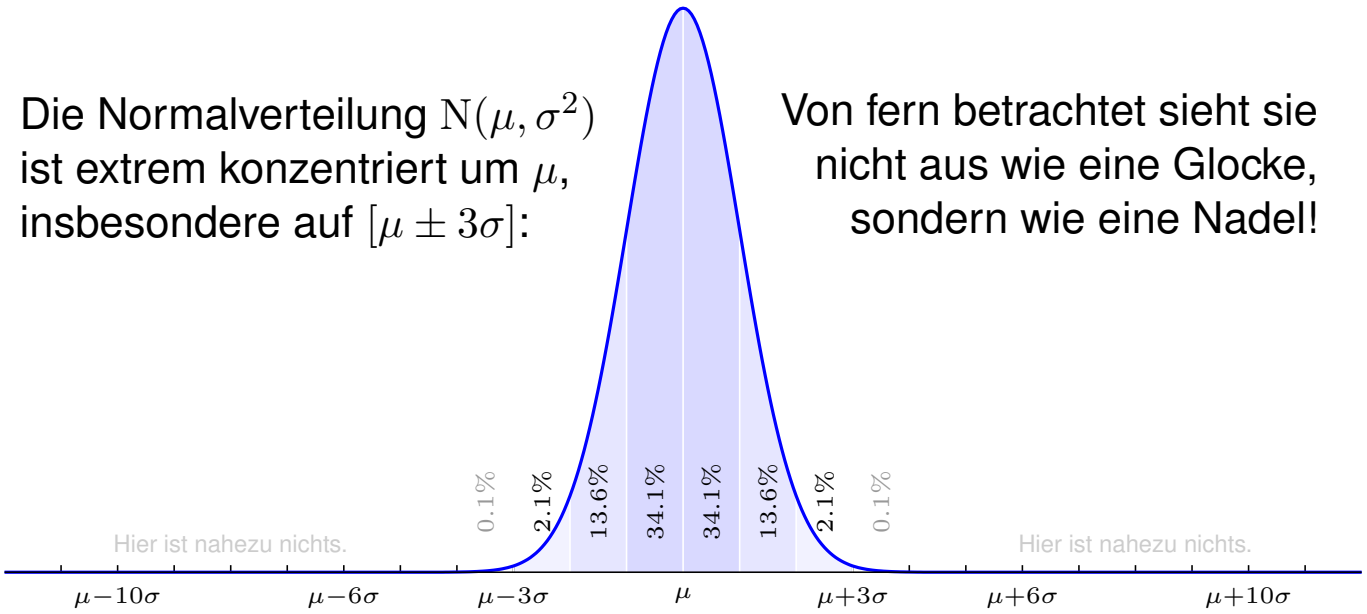
Wie selten sind seltene Ereignisse?

„We were seeing things that were 25-standard deviation moves, several days in a row.“, sagte der damalige Finanzvorstand von Goldman-Sachs, David Viniar, der Financial Times im August des Krisenjahres 2007.

Aufgabe: Ist das plausibel? Meint er ernsthaft die Normalverteilung? Sollte er sein Modell für diese Wahrscheinlichkeiten überdenken?

Die Normalverteilung $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ ist extrem konzentriert um μ, insbesondere auf $[\mu \pm 3\sigma]$:

Von fern betrachtet sieht sie nicht aus wie eine Glocke, sondern wie eine Nadel!



Wie selten sind seltene Ereignisse?

Lösung: Für die Normalverteilung ist das sicher nicht plausibel!
Die Wkt für $k\sigma$–Abweichungen nach Normalverteilung und Chebychev:

$$p_k \;=\; \int_{x=k}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}x \;\le\; \frac{1}{1+k^2}$$

Chebychev gilt für alle Verteilungen. Die Wkt $< 1/2500 = 0.04\%$ ist klein, und das auch noch mehrfach hintereinander! Das wäre extremes Pech. Die genaueren Werte von p_k entnehmen wir der (erweiterten) Tabelle:

$k =$	2	3	4	5	6
$p_k \lessapprox$	0.02275	0.00135	$3.2 \cdot 10^{-5}$	$2.9 \cdot 10^{-7}$	$9.9 \cdot 10^{-10}$

$k =$	7	10	15	20	25
$p_k \lessapprox$	$1.3 \cdot 10^{-12}$	$7.7 \cdot 10^{-24}$	$3.7 \cdot 10^{-51}$	$2.8 \cdot 10^{-87}$	$3.1 \cdot 10^{-136}$

Letzteres ist unwahrscheinlicher als 20mal nacheinander im Lotto sechs Richtige zu tippen. Das genannte Modell scheint unplausibel / unseriös.

Durch mathematische Kompetenz können Sie überzeugen und glänzen, aber durch Inkompetenz machen Sie sich unglaubwürdig und lächerlich.

Anwendung: ZGS oder LGS?

Wir untersuchen die Summe $S = X_1 + \ldots + X_n$ von n unabhängigen ZVariablen $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$. Als Verteilungen betrachten wir dabei:

(1) $X_k \sim \mathrm{N}(\mu_k, \sigma_k^2)$ normalverteilt mit $\mu_k, \sigma_k \in \mathbb{R}$

(2) $X_k \sim \mathrm{B}(1, t_k)$ mit $t_k \in [0.1, 0.9]$ abhängig von k

(3) $X_k \sim \mathrm{B}(1, t)$ mit $t \in [0.1, 0.9]$ unabhängig von k

(4) $X_k \sim \mathrm{B}(N_k, t)$ mit $N_k \in \mathbb{N}$ und $t \in [0.1, 0.9]$

(5) Denken Sie sich zehn weitere, ebenso konkrete Beispiele aus, etwa jede Zufallsvariable $X_k \sim \mathrm{P}(\mu_k)$ Poisson–verteilt oder $X_k \sim G(q_k)$ geometrisch verteilt oder $X_k \sim \mathrm{H}(N_k, K_k, n_k)$ hypergeometrisch, etc.

Aufgabe: (a) Auf welche Summen S lässt sich der ZGS anwenden?

(b) Auf welche lässt sich zudem der speziellere LGS anwenden?

(c) Was lässt sich jeweils über den Approximationsfehler δ sagen?

(d) In welchen Fällen kennen Sie die exakte Verteilung von S?

Anwendung: ZGS oder LGS?

Lösung: (1) Der ZGS lässt sich anwenden, aber nicht der LGS da die Summe S nicht binomialverteilt ist. Sie ist hier exakt normalverteilt:

$$S \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \quad \text{mit} \quad \mu = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \quad \text{und} \quad \sigma^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$$

Der Approximationsfehler ist demnach $\delta = 0$, siehe folgende Aufgaben.

(2) Der ZGS lässt sich anwenden, der LGS jedoch nicht, da die Summe S nicht binomialverteilt ist. Den Approximationsfehler δ entnehmen wir Satz W1D. Ein solches Beispiel diskutiert die obige Aufgabe W333.

(3) Die exakte Verteilung ist hier die Binomialverteilung $S \sim \mathrm{B}(n, t)$. Der ZGS lässt sich anwenden, der LGS auch und liefert eine bessere Näherung. Den Fehler δ bzw. korrigiert ε entnehmen wir Satz V3A.

(4) Die exakte Verteilung ist hier $S \sim \mathrm{B}(N, t)$ mit $N = N_1 + \ldots + N_n$. Der ZGS lässt sich anwenden, der LGS auch, wenn man es richtig anstellt. Zur Summe von binomialverteilten ZVariablen siehe unten.

Summe normalverteilter Zufallsvariablen

Aufgabe: Die Zufallsvariablen $X \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $Y \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ seien unabhängig und normalverteilt mit den angegebenen Parametern.

Bestimmen Sie für die Summe $S = X + Y$ den Erwartungswert $\mathbf{E}(S)$ und die Varianz $\mathbf{V}(S)$ sowie die Verteilung auf $\mathbb{R}$. Ist S normalverteilt?

Lösung: Dank Linearität addieren sich die Erwartungswerte:

$$\mathbf{E}(S) = \mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y) = \mu_1 + \mu_2$$

Dank Unabhängigkeit addieren sich auch die Varianzen:

$$\mathbf{V}(S) = \mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$$

Schließlich berechnen wir die Verteilung von S dank Unabhängigkeit:

$$\mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2) * \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2) = \mathrm{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

Das ist keineswegs offensichtlich! Sie können die Faltung geduldig direkt ausrechnen oder noch geschickter mit Fourier–Transformation. K417

Summe normalverteilter Zufallsvariablen

Aufgabe: Seien $X_1, X_2, X_3, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen, und jede sei normalverteilt gemäß $X_k \sim \mathrm{N}(\mu_k, \sigma_k^2)$ mit $\mu_k, \sigma_k \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie für die Summe $S = X_1 + \ldots + X_n$ die Erwartung $\mathbf{E}(S)$ und die Varianz $\mathbf{V}(S)$ sowie die Verteilung auf $\mathbb{R}$. Gilt hier der ZGS?

Es darf gelacht werden: Wie groß ist der Approximationsfehler δ?

Lösung: Dank Linearität addieren sich die Erwartungswerte:

$$\mathbf{E}(S) = \mathbf{E}(X_1 + \ldots + X_n) = \mathbf{E}(X_1) + \ldots + \mathbf{E}(X_n) = \mu_1 + \ldots + \mu_n =: \mu$$

Dank Unabhängigkeit addieren sich auch die Varianzen:

$$\mathbf{V}(S) = \mathbf{V}(X_1 + \ldots + X_n) = \mathbf{V}(X_1) + \ldots + \mathbf{V}(X_n) = \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2 =: \sigma^2$$

Aus der vorigen Aufgabe erhalten wir die Verteilung $S \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.
(Wir haben dies für zwei Summanden explizit nachgerechnet.
Für n Summanden folgt es dann offensichtlich durch Induktion.)

☺ Hier gilt der ZGS exakt, d.h. mit Approximationsfehler $\delta = 0$.

Summe binomialverteiler Zufallsvariablen

Aufgabe: Seien $X \sim \mathrm{B}(1,p)$ und $Y \sim \mathrm{B}(1,q)$ unabhängig mit $p,q>0$. Bestimmen Sie für die Summe $S = X+Y$ die Erwartung $\mathbf{E}(S)$ und die Varianz $\mathbf{V}(S)$ sowie die Verteilung auf $\{0,1,2\}$. Ist S binomialverteilt?

Lösung: Dank Linearität addieren sich die Erwartungswerte:

$$\mathbf{E}(S) = \mathbf{E}(X+Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y) = p+q$$

Dank Unabhängigkeit addieren sich auch die Varianzen:

$$\mathbf{V}(S) = \mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) = p(1-p) + q(1-q).$$

Schließlich berechnen wir die Verteilung von S dank Unabhängigkeit:

$$\mathbf{P}(S{=}0) = (1-p)(1-q),\ \mathbf{P}(S{=}1) = p(1-q)+(1-p)q,\ \mathbf{P}(S{=}2) = pq$$

Wäre dies binomialverteilt, so hätten wir $S \sim \mathrm{B}(2,t)$ für ein $t \in [0,1]$.
Der Vergleich von $\mathbf{E}(S) = 2t = p+q$ und $\mathbf{P}(S{=}2) = t^2 = pq$ zeigt $p=q$.
Eine Binomialverteilung erhalten wir demnach nur für den Fall $p=q$!
`de.wikipedia.org/wiki/Verallgemeinerte_Binomialverteilung`
Im Sonderfall $p=0$ gilt $S \sim \mathrm{B}(1,q)$; für $q=0$ gilt $S \sim \mathrm{B}(1,p)$.

Summe binomialverteiler Zufallsvariablen

Aufgabe: Seien $X \sim \mathrm{B}(m,t)$ und $Y \sim \mathrm{B}(n,t)$ unabhängig, $m,n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie für $S = X+Y$ die Erwartung $\mathbf{E}(S)$ und Varianz $\mathbf{V}(S)$ Ist die Summe $S = X+Y$ binomialverteilt? Mit welchen Parametern?

Lösung: Wir wissen $\mathbf{E}(X) = mt$ und $\mathbf{V}(X) = mt(1-t)$, entsprechend $\mathbf{E}(Y) = nt$ und $\mathbf{V}(Y) = nt(1-t)$. Dank Linearität der Erwartung folgt

$$\mathbf{E}(S) = \mathbf{E}(X+Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y) = (m+n)t.$$

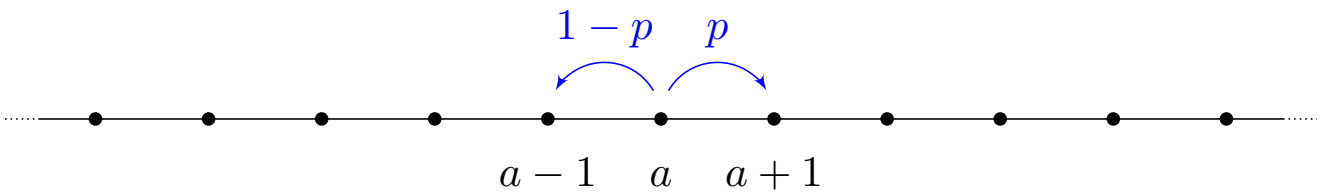
Dank Unabhängigkeit addieren sich auch die Varianzen:

$$\mathbf{V}(S) = \mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) = (m+n)t(1-t).$$

Wie finden wir geschickt die Verteilung von S? durch direkte Rechnung?
Wir nutzen die Darstellung $X = X_1 + \ldots + X_m$ und $Y = Y_1 + \ldots + Y_n$ als Summe unabhängiger Zufallsvariablen $X_i, Y_j \sim \mathrm{B}(1,t)$.
Hieraus folgt $S \sim \mathrm{B}(m+n,t)$ ohne weitere Rechnung.

☺ Dieser Rechentrick vereinfacht die Aufgabe ungemein! Zur expliziten Faltung nutzen wir dankend gerne erzeugende Funktionen (Satz U4E).

Zufällige Irrfahrt / Random Walk



Zufällige Irrfahrt: Zur Zeit $t = 0$ starten Sie im Punkt $S_0 = a$.

Im Schritt von S_t nach S_{t+1} gehen Sie mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$ nach rechts und entsprechend mit Wahrscheinlichkeit $(1 - p)$ nach links.

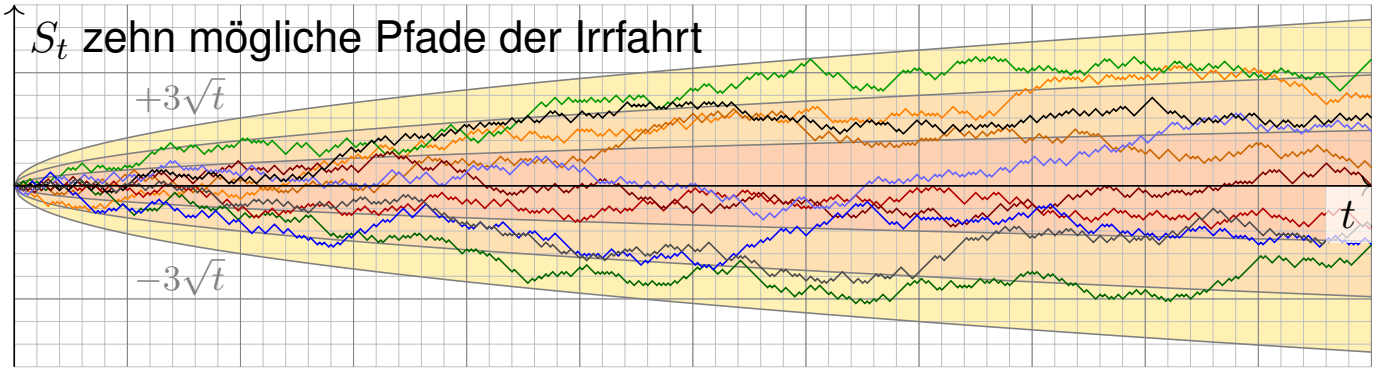
Das heißt, $S_t : \Omega \to \mathbb{Z}$ ist gegeben durch $S_t = a + X_1 + \ldots + X_t$ mit unabhängigen Zuwächsen, $\mathbf{P}_a(X_t{=}{+1}) = p$ und $\mathbf{P}_a(X_t{=}{-1}) = 1 - p$.

Das ist ein einfaches aber wichtiges Modell. Mögliche Anwendung: Kontostand bei zufälligen Gewinnen und Verlusten. Daher werden solche Irrfahrten als Modelle für **Aktienkurse** genutzt.

Ähnlich entsteht die **Brownsche Bewegung** durch Wärmebewegung. Der schottische Botaniker Robert Brown (1773–1858) entdeckte 1827 unter dem Mikroskop das unregelmäßige Zittern von Pollen in Wasser. Anfangs hielt er Pollen für belebt, doch er fand dasselbe bei Staubteilchen.

Albert Einstein erklärte die Zitterbewegung 1905 durch die ungeordnete Wärmebewegung der Wassermoleküle, die aus allen Richtungen in großer Zahl gegen die Pollen stoßen. Quantitativ konnte er so die Größe von Atomen bestimmen und die Anzahl pro Mol, die **Avogadro–Zahl**. Die präzisen quantitativen Vorhersagen wurden in den Folgejahren experimentell bestätigt.

Zufällige Irrfahrt / Random Walk



Aufgabe: (1) Bestimmen Sie zu S_t die Verteilung, Erwartung, Streuung. Wir untersuchen speziell den symmetrischen Fall $p = 1/2$, ohne Drift.

(2) Sie beginnen im Startpunkt $a \in \mathbb{Z}$ und fixieren einen Zielpunkt $z \in \mathbb{Z}$. Wie groß ist die Wkt $u(a) \in [0, 1]$, das Ziel z irgendwann zu erreichen?

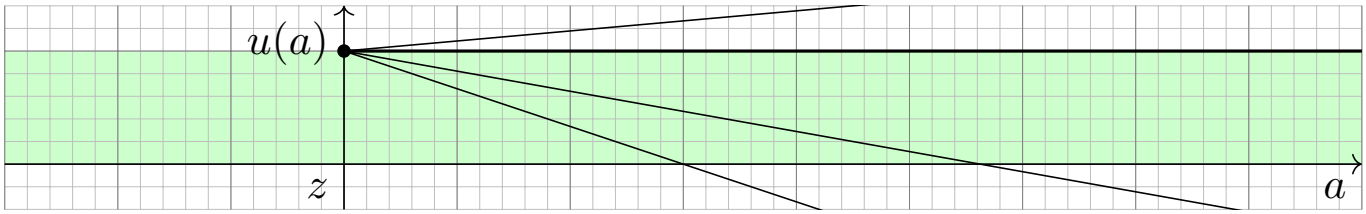
(3) Wie groß ist hierbei die erwartete Reisezeit von a nach z?

Lösung: (1) Wir erhalten eine Binomialverteilung, affin transformiert: $\mathbf{P}_a\big(S_t = a - t + 2k\big) = \binom{t}{k} p^k (1-p)^{t-k} = \binom{t}{k} \frac{1}{2^t}$ für $t, k \in \mathbb{N}$ und $p = \frac{1}{2}$.

Somit gilt $\mathbf{E}(S_t) = a$ und $\mathbf{V}(S_t) = t$, also $\sigma(S_t) = \sqrt{t}$ und $S_t \approx \mathrm{N}(a, t)$.

☺ Wir erkennen die Lösung D5D der Wärmeleitungsgleichung!

Zufällige Irrfahrt / Random Walk



(2) Offensichtlich gilt $u(z) = 1$, denn hier ist der Start auch das Ziel.
Für $a > z$ gilt die Mittelwerteigenschaft $u(a) = \frac{1}{2}u(a+1) + \frac{1}{2}u(a-1)$.
Somit ist $u : \mathbb{Z}_{\geq z} \to [0,1]$ eine Gerade, $u(a) = 1 + m(a-z)$. (Warum?)
Zudem ist u beschränkt, $0 \leq u \leq 1$, daher folgt $m = 0$. Ebenso auf $\mathbb{Z}_{\leq z}$.

Die Gerade finden wir durch vollständige Induktion: Aus $u(z) = 1$ und $u(z+1) = 1 + m$ folgt $u(a+1) = 2u(a) - u(a-1) = [2 + 2m(a-z)] - [1 + m(a-1-z)] = 1 + m(a+1-z)$.

☺ Bei einer symmetrischen Irrfahrt ($p = 1/2$, ohne Drift) erreichen wir jeden Punkt mit Wkt 1! George Pólya (1887–1985) zeigte 1921: Jeden Punkt in $\mathbb{Z}$ besuchen wir mit Wkt 1 unendlich oft. Dies gilt ebenso in Dimension 2 bei Irrfahrt auf dem ebenen Gitter $\mathbb{Z}^2$. Erstaunlicherweise gilt es nicht mehr in Dimension $n \geq 3$ bei Irrfahrt auf dem Gitter $\mathbb{Z}^n$. Anschaulich bedeutet das: Ein betrunkener Mensch findet sicher irgendwann nach Hause, ein betrunkener Fisch hingegen nicht!

📖 Ausführung bei Feller, *Introduction to Probability*, vol. 1 (1968), §XIV.7: Das Sprichwort „Alle Wege führen nach Rom.“ stimmt zumindest zweidimensional. Dreidimensional ist die Rückkehrwahrscheinlichkeit nur etwa 34%, siehe `en.wikipedia.org/wiki/Random_walk`.

Zufällige Irrfahrt / Random Walk

(3) Sei $T_z \in \mathbb{N}$ die Zeit des ersten Besuchs im Zielpunkt z und $\mathbf{E}_a(T_z)$ die erwartete Reisezeit vom Startpunkt a zum Zielpunkt z.
Dies ist invariant unter Verschiebungen, also $\mathbf{E}_{a+k}(T_{z+k}) = \mathbf{E}_a(T_z)$.

Zunächst gilt $\mathbf{E}_a(T_a) = 0$. Für $a \neq z$ zeigen wir nun $\mathbf{E}_a(T_z) = \infty$:

$$x := \mathbf{E}_0(T_1) = \tfrac{1}{2}\big[\underbrace{\mathbf{E}_1(T_1)}_{=0} + \mathbf{E}_{-1}(T_1)\big] + 1 = \tfrac{1}{2}\mathbf{E}_{-1}(T_1) + 1$$

$$\mathbf{E}_{-1}(T_1) = \underbrace{\mathbf{E}_{-1}(T_0)}_{=x} + \underbrace{\mathbf{E}_0(T_1)}_{=x} = 2x$$

Hieraus folgt $x = \frac{1}{2}(2x) + 1 = x + 1$. Das ist für $x \in \mathbb{R}$ unmöglich.
Es bleibt nur $\mathbf{E}_0(T_1) = x = \infty$, erst recht $\mathbf{E}_0(T_z) = \infty$ für alle $z \neq 0$.

☺ Bei einer symmetrischen Irrfahrt ($p = 1/2$, ohne Drift) erreichen wir jeden Punkt mit Wkt 1, aber die erwartete Reisezeit ist unendlich!

Die Rechnung ist einfach, dank unserer geschickten Formalisierung.
Die Interpretation hingegen muss man erst einmal verarbeiten.
Die naive Anschauung kann einen hier leicht narren.

Laplace–Transformation von WVerteilungen

☺ Die Laplace–Transformation ist in vielen Bereichen ein nützliches Werkzeug, insbesondere bei Differentialgleichungen, siehe Kapitel L. Mathematische Abstraktion hilft: *Learn once, apply everywhere!*

☺ Erfreulicherweise lassen sich solche Integraltransformationen auch in der WTheorie ganz wunderbar nutzen. Diese effiziente und elegante Rechentechnik will ich im Folgenden kurz skizzieren.

Motivation: Zu $X : \Omega \to \mathbb{N}$ haben wir die erzeugende Funktion (U4E)

$$G(z) = \mathbf{E}\big[z^X\big] \quad \text{zumindest für } |z| \le 1.$$

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung treten erzeugende Funktionen $G(z) = \mathbf{E}\big[z^X\big]$ natürlich auf, wenn man Zufallsvariablen $X : \Omega \to \mathbb{N}$ effizient behandeln will. Wir haben dies in Beispielen ausgeführt.

Entsprechendes wünschen wir uns für Zufallsvariablen $X : \Omega \to \mathbb{R}_{\ge 0}$. Der Erwartungswert $\mathbf{E}(z^X)$ existiert für $z = 1$, denn $\mathbf{E}(1^X) = \mathbf{E}(1) = 1$. Für $0 < z \le 1$ gilt die Majorante $0 < z^X \le 1$, also existiert auch $\mathbf{E}\big[z^X\big]$. Wir parametrisieren $z = \mathrm{e}^{-s} \in \,]0,1]$ durch $s \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ und vereinbaren:

Laplace–Transformation von WVerteilungen

Definition W4A: Laplace–Transformierte eines WMaßes auf $\mathbb{R}_{\ge 0}$

Für jedes WMaß $\mathbf{P}_X$ auf $\mathbb{R}_{\ge 0}$ ist seine **Laplace–Transformierte**:

$$\boxed{F \,:\, \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R} \,:\, s \mapsto F(s) := \mathbf{E}\big[\mathrm{e}^{-sX}\big] = \int_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}\mathbf{P}_X}$$

Für eine kontinuierliche Verteilung $\mathbf{P}_X$ mit Dichte f erhalten wir also

$$F(s) = \int_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-sx} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Die Majorante $|\mathrm{e}^{-sx}| \le 1$ sichert absolute Integrierbarkeit und $|F(s)| \le 1$. Allgemeiner erhalten wir so die stetige Funktion $F : \mathbb{C}_{\mathrm{Re}\ge 0} \to \mathbb{C}$. Sie ist holomorph auf der offenen Halbebene $\mathbb{C}_{\mathrm{Re}>0}$.

☺ Hier tritt die Laplace–Transformierte $F(s) = \mathbf{E}\big[\mathrm{e}^{-sX}\big]$ natürlich auf, um kontinuierliche Zufallsvariablen $X : \Omega \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ effizient zu behandeln. Dies möchte ich mit einem kurzen Rechenbeispiel illustrieren.

Laplace–Transformation von WVerteilungen

Aufgabe: (1) Für die Laplace–Transformierte $F(s) = \mathbf{E}\big[\mathrm{e}^{-sX}\big]$ gilt

$$\boxed{F(0) = \mathbf{E}(1) = 1, \quad F'(0) = -\mathbf{E}(X), \quad F''(0) = \mathbf{E}(X^2).}$$

(2) Berechnen Sie $F(s)$ sowie $\mathbf{E}(X)$ und $\mathbf{V}(X)$ für $X \sim E(\lambda)$, also die Exponentialverteilung mit Dichte $f(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$ für $x \geq 0$.

Lösung: (1) Wir nehmen an, dass diese Erwartungswerte existieren:

$$\mathbf{E}(X) = \int_{x=0}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \mathbf{E}(X^2) = \int_{x=0}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Wir dürfen dann die Ableitung unter das Integral ziehen und erhalten

$$F'(s) = \int_{x=0}^{\infty} -x\,\mathrm{e}^{-sx} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad F''(s) = \int_{x=0}^{\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-sx} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Für $s = 0$ ergeben sich hieraus obige Formeln. Sehr praktisch!

☺ Die Laplace–Transformierte ist sogar holomorph, siehe Satz L1B. Erneut lohnt sich Ihre Investition in solide mathematische Grundlagen.

Laplace–Transformation von WVerteilungen

(2) Sei X exponentialverteilt gemäß $\mathrm{E}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$, mit Dichte

$$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto f(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

Ihre Laplace–Transformierte rechnen wir direkt aus:

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-sx} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-sx} \cdot \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \\ &= \lambda \int_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(s+\lambda)x}\,\mathrm{d}x = \frac{\lambda}{s+\lambda}\Big[-\mathrm{e}^{-(s+\lambda)x}\Big]_{x=0}^{\infty} = \frac{\lambda}{s+\lambda} \end{aligned}$$

Plausibilitätscheck: Es gilt tatsächlich $F(0) = 1$, so wie es sein muss. Aus der Funktion F berechnen wir leicht Erwartungswert und Varianz:

$$\begin{aligned} F'(s) &= \frac{-\lambda}{(s+\lambda)^2} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{E}(X) = -F'(0) = \frac{1}{\lambda}, \\ F''(s) &= \frac{2\lambda}{(s+\lambda)^2} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{E}(X^2) = F''(0) = \frac{2}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Wir erhalten $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$, wie zuvor berechnet. V243

Fourier–Transformation von WVerteilungen

Motivation: Die vorigen Rechnungen sind sehr effizient und elegant. Zur Zufallsvariablen $X : \Omega \to \mathbb{N}$ nutzen wir die erzeugende Funktion

$$G(z) = \mathbf{E}\big[z^X\big] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(X{=}k) \cdot z^k \quad \text{zumindest für } |z| \le 1.$$

Allgemein für $X : \Omega \to \mathbb{Z}$, eventuell mit negativen Werten, haben wir

$$G(z) = \mathbf{E}\big[z^X\big] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(X{=}k) \cdot z^k \quad \text{zumindest für } |z| = 1.$$

Mit diesen Potenzreihen können wir wunderbar arbeiten, siehe U4D. Die erzeugende Funktion $G(z)$ ist eine konzise Schreibweise für die (beliebig komplizierte) Verteilung der Zufallsvariablen $X : \Omega \to \mathbb{Z}$.

Entsprechendes wünschen wir uns auch für Zufallsvariablen $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Der Erwartungswert $\mathbf{E}(z^X)$ existiert für $|z| = 1$, denn $\mathbf{E}(1^X) = \mathbf{E}(1) = 1$. Wir parametrisieren daher $z = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi} \in \mathbb{S}^1$ durch $\xi \in \mathbb{R}$ und vereinbaren:

Fourier–Transformation von WVerteilungen

Definition W4B: Fourier–Transformierte eines WMaßes auf $\mathbb{R}$

Für jedes WMaß $\mathbf{P}_X$ auf $\mathbb{R}_{\ge 0}$ ist seine **Fourier–Transformierte**

$$\boxed{F : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \xi \mapsto F(\xi) := \mathbf{E}\big[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi X}\big] = \int_{x \in \mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} \, \mathrm{d}\mathbf{P}_X}$$

Für eine kontinuierliche Verteilung $\mathbf{P}_X$ mit Dichte f erhalten wir also

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Die Majorante $|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}| \le 1$ sichert absolute Integrierbarkeit und $|F(s)| \le 1$.

⚠ Man beachte die hier gewählte Konvention der Normierung: Zur Bequemlichkeit lasse ich den Normierungsfaktor $1/\sqrt{2\pi}$ weg. In der Rücktransformation benötigen wir dann den Faktor $1/2\pi$.

☺ Fourier $\mathbf{E}\big[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi X}\big]$ ist ein Spezialfall von Laplace $\mathbf{E}\big[\mathrm{e}^{-sX}\big]$ eingeschränkt auf die imaginäre Achse $s = \mathrm{i}\xi$ mit $\xi \in \mathbb{R}$.

Fourier–Transformation von WVerteilungen

Wiederholung: Nennen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$ einer normalverteilten Zufallsvariablen $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ sowie die Fourier–Transformierte $F(\xi) = \mathbf{E}\big[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi X}\big]$ und ihre Rücktransformation.

Lösung: Für die Normalverteilung $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ wissen wir K128

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \Longrightarrow \quad F(\xi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\xi - \sigma^2\xi^2/2}.$$

Durch Rücktransformation von F lässt sich f rekonstruieren:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi$$

⚠ Man beachte die hier gewählte Konvention der Normierung.

☺ Die Fourier–Transformation $f \mapsto F$ verliert keine Information: Die Rücktransformation rekonstruiert die ursprüngliche Verteilung. Erneut lohnt sich Ihre Investition in solide mathematische Grundlagen.

Fourier–Transformation von WVerteilungen

☺ Die Fourier–Transformation ist ein mächtiges Universalwerkzeug. Wir haben dieser wichtigen Technik daher ein eigenes Kapitel gewidmet. Die dort erlernten Rechenmethoden zahlen sich bei der Behandlung vieler Probleme aus, so auch hier für die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Zudem haben wir wichtige Beispiele und Erfahrungen gesammelt, die in vielen Problemstellungen erneut und abgewandelt auftreten.

☺ Erzeugende Funktionen $\mathbf{E}[z^X]$, Laplace–Transformierte $\mathbf{E}[\mathrm{e}^{-sX}]$ und Fourier–Transformierte $\mathbf{E}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi X}]$ sind nützliche Rechenmethoden. Sie entspringen alle derselben natürlichen Idee, wie hier skizziert: Transformation reorganisiert alle Informationen auf praktische Weise. Die Momente der Verteilung entsprechen nun Ableitungen, so werden insbesondere Erwartung und Varianz rechnerisch leicht zugänglich.

Durch Rücktransformation lässt sich jeweils die ursprüngliche Verteilung rekonstruieren, es geht also tatsächlich keinerlei Information verloren. Zur Illustration will ich als Hauptergebnis den zentralen Grenzwertsatz (ZGS W1D) mit der Fourier–Transformation erklären und nachrechnen.

Erwartungswert und Varianz

Aufgabe: Berechnen Sie $F(0)$, $F'(0)$, $F''(0)$ und $F'''(0)$ sowie hiermit für $\mu = 0$ die Taylor–Entwicklung zweiter Ordnung von $F(\xi)$ um $\xi = 0$.

Lösung: Existieren die Momente $\int_{\mathbb{R}} |x|^k f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$ für $k = 1, 2, 3, \ldots$, so dürfen wir für $F^{(k)}$ die Ableitung unters Integral ziehen K205:

$$\begin{aligned}
F'(\xi) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x &&= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial \xi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} (-\mathrm{i}x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x &\implies\quad & F'(0) = -\mathrm{i}\mathbf{E}(X) \\
F''(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} (-x^2)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x &\implies\quad & F''(0) = -\mathbf{E}(X^2) \\
F'''(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} (\mathrm{i}x^3)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x &\implies\quad & F'''(0) = \mathrm{i}\mathbf{E}(X^3)
\end{aligned}$$

☺ Für $\mu = 0$ und $\sigma^2 > 0$ hat F demnach die Taylor–Entwicklung

$$\boxed{F(\xi) = 1 - \sigma^2\xi^2/2 + \ldots}$$

Das dritte Moment liefert eine Fehlerschranke $O(\xi^3)$ für das Restglied.

📖 Ausführung bei Feller, *Introduction to Probability*, vol. 2 (1971), §XVI

Summe unabhängiger Zufallsvariablen

Lemma W4C: Summe unabhängiger Zufallsvariablen

Seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängige ZV mit Transformierten F_X, F_Y.
Die Summe $X + Y$ hat dann die Transformierte $F_{X+Y} = F_X \cdot F_Y$.

Nachrechnen: Auch $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi X}$ und $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi Y}$ sind unabhängig, also gilt

$$\begin{aligned}
F_{X+Y}(\xi) &= \mathbf{E}\big[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi(X+Y)}\big] \\
&= \mathbf{E}\big[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi X} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi Y}\big] \\
&= \mathbf{E}\big[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi X}\big] \cdot \mathbf{E}\big[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi Y}\big] \;=\; F_X(\xi) \cdot F_Y(\xi)
\end{aligned}$$

☺ Das ist der entscheidende Trick! Er vereinfacht unsere Rechnung.

Damit haben wir alle Werkzeuge, um den zentralen Grenzwertsatz zu beweisen! Ich formuliere ihn in vereinfachter Form für identisch verteilte, unabhängige Zufallsvariablen. Vor allem aber zeige ich die Konvergenz ohne eine explizite Fehlerschranke, um alle Argumente so einfach wie möglich zu halten. Für eine detaillierte Ausarbeitung müsste man die Fehlerterme kontrollieren, die hier nur mit „. . . “ abgekürzt werden.

Beweis des zentralen Grenzwertsatzes

Seien $X_1, X_2, X_3, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängige Zufallsvariablen.
Es gelte $\mathbf{E}(X_k) = \mu$ und $\mathbf{E}(X_k^2) = \sigma^2 > 0$ sowie $\mathbf{E}(|X_k|^3) \le \rho^3 < \infty$.
Die Summe $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ hat Erwartung $n\mu$ und Varianz $n\sigma^2$.
Wir normieren S_n zu Erwartung 0 und Varianz 1 durch die Skalierung

$$S_n^* := \frac{X_1 + \ldots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Wir wollen nun $\mathbf{P}_{S_n} \approx \mathrm{N}(n\mu, n\sigma^2)$ zeigen, normiert also $\mathbf{P}_{S_n^*} \approx \mathrm{N}(0,1)$.
Fehlerschranken sind für die Praxis wichtig, aber schwerer zu zeigen.
In dieser Skizze begnügen wir uns mit dem Grenzwert für $n \to \infty$.

Satz W4D: zentraler Grenzwertsatz, ohne Fehlerschranken

Die Verteilung von S_n^* konvergiert gegen die Normalverteilung $\mathrm{N}(0,1)$.

☺ Das ist die qualitative Aussage $\mathbf{P}_S \approx \mathrm{N}(n\mu, n\sigma^2)$ aus Satz W1D.
Die quantitative Fehlerabschätzung lassen wir hier außer Acht.

Beweis des zentralen Grenzwertsatzes

Aufgabe: (1) Berechnen Sie die Fourier–Transformierte F_n von S_n^*.
(2) Wie folgt hieraus der zentrale Grenzwertsatz für $n \to \infty$?
(3) Warum geht das plötzlich so leicht?

Beweis: (1) Die Transformierte von $\frac{X_k - \mu}{\sigma\sqrt{n}}$ ist $F_k(\xi) = 1 - \xi^2/2n + \ldots$.
Die Transformierte der Summe S_n^* ist das Produkt der Transformierten:

$$F_n(\xi) = \left(1 - \xi^2/2n + \ldots\right)^n \quad \to \quad \exp(-\xi^2/2) = F(\xi) \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

(2) Der Grenzwert F ist die Transformierte der Normalverteilung $\mathrm{N}(0,1)$!
Rücktransformation: Die Verteilung von S_n^* konvergiert gegen $\mathrm{N}(0,1)$.

(3) Das geht leicht dank starker Werkzeuge wie Fourier–Transformation!
Zwecks Vereinfachung verzichten wir zudem auf Fehlerabschätzungen.

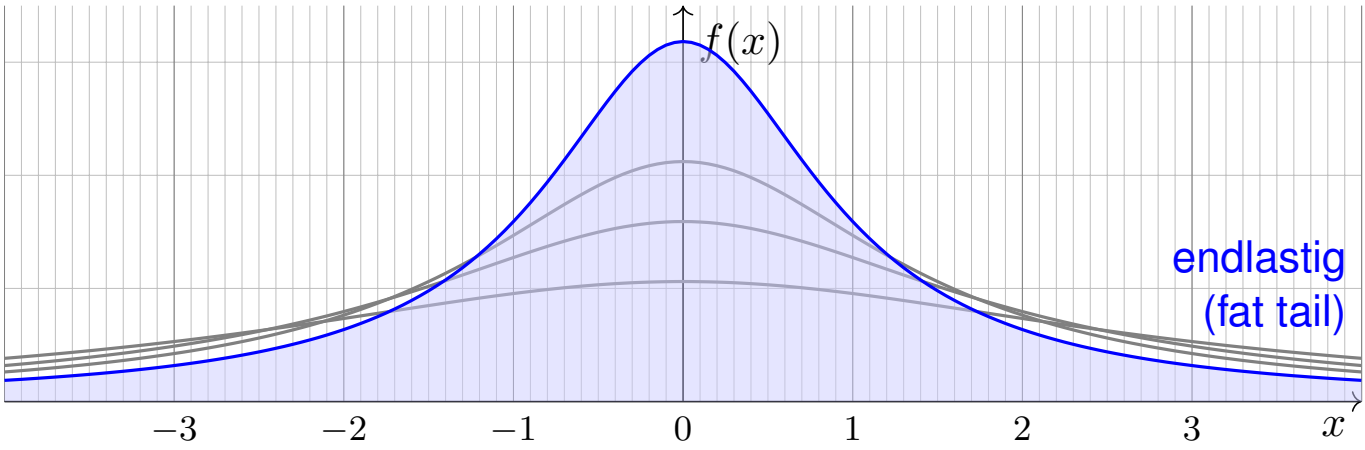
☺ Damit können wir den ZGS zumindest qualitativ nachrechnen:
Für großes n ist $X_1 + \ldots + X_n$ annähernd $\mathrm{N}(n\mu, n\sigma^2)$–verteilt.

Fourier–Transformation der Cauchy–Verteilung

Aufgabe: Ist für $a > 0$ die folgende Funktion eine WDichte?

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2}$$

Bestimmen Sie Erwartung und Varianz und Fourier–Transformierte.



⚠ Der Graph erinnert grob an die Glockenkurve $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$.
Doch Vorsicht: Die Cauchy–Verteilung hat völlig andere Eigenschaften!
Vor allem klingt $f(x)$ nicht exponentiell ab, sondern nur wie $x \mapsto 1/x^2$.
Das hat dramatische Konsequenzen: Die Erwartung existiert nicht!

Fourier–Transformation der Cauchy–Verteilung

Lösung: Wir haben $f \geq 0$ und die Gesamtmasse ist

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \left[\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)\right]_{x=-\infty}^{\infty} \;=\; 1$$

Für Erwartung und Varianz benötigen wir folgende Integrale:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{ax}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \text{und} \qquad \mathbf{V} = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{ax^2}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \infty.$$

Das erste ist nicht absolut integrierbar, nur als Cauchy–Hauptwert.
Der Median ist offensichtlich 0, aber die Erwartung existiert nicht!
Hier haben Erwartungswert und Varianz demnach keinen Sinn.

Die Fourier–Transformierte haben wir bereits berechnet K113:

$$F(\xi) \;=\; \mathbf{E}\big[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi X}\big] \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} \cdot \frac{a}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x \;=\; \mathrm{e}^{-a|\xi|}$$

☺ Die ursprüngliche WDichte f rekonstruieren wir hieraus durch Rücktransformation. Man beachte, dass F in 0 nicht differenzierbar ist.
Dies entspricht der Tatsache, dass der Erwartungswert $\mathbf{E}$ nicht existiert.

Fourier–Transformation der Cauchy–Verteilung

Die **Cauchy–Verteilung** $\mathrm{C}(a)$ mit $a > 0$ ist gegeben durch die Dichte

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2}.$$

Aufgabe: Seien $X \sim \mathrm{C}(a)$ und $Y \sim \mathrm{C}(b)$ unabhängig Cauchy–verteilt. Ist ihre Summe $S = X + Y$ Cauchy–verteilt? Mit welchem Parameter?

Lösung: Wir wissen $\mathbf{E}\big[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi X}\big] = \mathrm{e}^{-a|\xi|}$ und ebenso $\mathbf{E}\big[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi Y}\big] = \mathrm{e}^{-b|\xi|}$. Dank Unabhängigkeit von X und Y gilt für die Summe $S = X + Y$ somit

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\big[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi S}\big] &= \mathbf{E}\big[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi (X+Y)}\big] \\
&= \mathbf{E}\big[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi X} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi Y}\big] \\
&= \mathbf{E}\big[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi X}\big] \cdot \mathbf{E}\big[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi Y}\big] \;=\; \mathrm{e}^{-a|\xi|} \cdot \mathrm{e}^{-b|\xi|} \;=\; \mathrm{e}^{-(a+b)|\xi|}
\end{aligned}$$

Durch Rücktransformation gewinnen wir hieraus die Verteilung von S: Demnach ist die Summe ebenfalls Cauchy–verteilt gemäß $\mathrm{C}(a+b)$. Sie können dies auch direkt aus dem Faltungsintegral nachrechnen.

☺ Die Cauchy–Verteilungen $(\mathrm{C}(a))_{a \in \mathbb{R}_{>0}}$ sind stabil unter Faltung!

Fourier–Transformation der Cauchy–Verteilung

Seien $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{C}(a)$ unabhängig und identisch Cauchy–verteilt. Wie im ZGS betrachten wir die (wie üblich normierte) Summe

$$S_n^* := \frac{1}{\sqrt{n}} \big(X_1 + \ldots + X_n\big).$$

Aufgabe: Welche Verteilung $\mathbf{P}_{S_n^*}$ hat die Zufallsvariable S_n^*? Konvergiert $\mathbf{P}_{S_n^*}$ für $n \to \infty$ gegen eine Normalverteilung?

Lösung: Die Summe $X_1 + \ldots + X_n$ ist $\mathrm{C}(na)$–verteilt. Durch den Normierungsfaktor $1/\sqrt{n}$ ist S_n^* dann $\mathrm{C}(a)$–verteilt. Für $n \to \infty$ ist die Verteilung fix und konvergiert somit gegen $\mathrm{C}(a)$. Insbesondere konvergiert sie keineswegs gegen eine Normalverteilung!

⚠ Die Cauchy–Verteilungen $\mathrm{C}(a)$ erfüllen nicht die Voraussetzungen des ZGS (W1D): Die geforderten Momente μ, σ, ρ existieren nicht! Daher lässt sich der zentrale Grenzwertsatz hier nicht anwenden.

☺ Unsere explizite Rechnung zeigt tatsächlich genauer noch mehr: Die Verteilung der Summe konvergiert nicht gegen die Normalverteilung!

Was ist Entropie?

The most misunderstood concept in physics

Veritasium, `youtu.be/DxL2HoqLbyA`

Hauptsätze der Thermodynamik

1) *Die Energie der Welt ist constant.*
2) *Die Entropie der Welt strebt einem Maximum zu.*

Rudolf Clausius (1822–1888), *Mechanische Wärmetheorie* (1865)

You may see a cup of tea fall off a table and break into pieces on the floor… But you will never see the cup gather itself back together and jump back on the table. The increase of disorder, or entropy, is what distinguishes the past from the future, giving a direction to time.

Stephen Hawking (1942–2018), *A Brief History of Time* (1988)

The fact that you can remember yesterday but not tomorrow is because of entropy. […] So I think that entropy is underappreciated as something that has a crucial role in how we go through life.

Sean M. Carroll (1966–), *The Passage of Time and the Meaning of Life*

`youtu.be/KFXYCrqUTmI`, ausführlich `/EntaPoSEXog`

Energie und Entropie in der Thermodynamik

Die **Wärmelehre** ist eine wissenschaftlich-technische Errungenschaft des 19. Jahrhunderts und prägt unsere hochtechnisierte Zivilisation.

(1) Die **technische Thermodynamik** beschreibt **makroskopische Phänomene** durch Temperatur, Wärme, Druck, Volumen, Arbeit, etc. und ihre Änderung in Prozessen (Hauptsätze, Zustandsgleichungen). Sie ist grundlegend zur Konstruktion und Analyse von Maschinen.

Ihre grobe Sichtweise (aka Abstraktion) ist didaktische Herausforderung und methodische Stärke; dadurch wird sie extrem vielseitig anwendbar auf große Klassen von Systemen und Prozessen.

(2) Die **statistische Physik** untersucht die **mikroskopischen Zustände** der Teilchen (Moleküle). Sie erklärt die makroskopischen Phänomene durch klassische Mechanik (Energie, Impuls, etc.) und dient so als theoretisches Fundament der Thermodynamik (Mikrofundierung).

Analogie in der Wirtschaftslehre: Die **Makroökonomik** untersucht übergeordnete Größen und Kennzahlen: Investition & Konsum, Export & Import, Staatsausgaben & Steuern, Geldpolitik, etc. Die **Mikroökonomik**, insbesondere die Spieltheorie, untersucht das Verhalten einzelner Akteure (Menschen, Haushalte, Unternehmen). Auch dies dient der Mikrofundierung, also dem detaillierten mikroökonomischen Verständnis der makroökonmisch beobachtbaren Phänomene.

Energie und Entropie in der Thermodynamik

0. Hauptsatz: Die Temperatur $T > 0$ eines Systems (im thermischen Gleichgewicht) beschreibt die mittlere Energie ungeordneter Bewegung.

Die Thermodynamik handelt von Temperatur, Wärme und Entropie. Allgemein beschreibt sie Vielteilchensysteme und hat daher eine fundamentale Stellung in Naturwissenschaft und Technik. Gegenüber Systemen mit wenigen Teilchen zeigen sich hier völlig neue Erscheinungen wie die Irreversibilität fast aller makroskopischen Prozesse. Die Entropie kennt nur eine Richtung!

1. Hauptsatz: Die Energie U bleibt erhalten gemäß $\mathrm{d}U = \mathrm{d}Q + \mathrm{d}W$.

Es gibt kein Perpetuum Mobile erster Art: Keine Maschine kann aus nichts Arbeit verrichten. Die Thermodynamik wirkt als Systemtheorie: Jedes Teilsystem wird als Black Box durch nur wenige Parameter beschrieben (Temperatur T, Druck p, Volumen V, etc.) und wechselwirkt durch Ströme (Energie $\mathrm{d}U$, Arbeit $\mathrm{d}W = p\,\mathrm{d}V +$ weitere, Wärme $\mathrm{d}Q$, Entropie $\mathrm{d}S$, etc.)

2. Hauptsatz: Die Entropie S wächst gemäß $\mathrm{d}S = \mathrm{d}Q/T \geq 0$.

In jedem abgeschlossenen System kann die Entropie nur anwachsen: $S_1 - S_0 = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}Q/T \geq 0$. Bestenfalls bleibt sie konstant, bei reversiblen Prozessen. Das hat weitreichende Konsequenzen:
Carnot: Wärmeenergie kann niemals vollständig in mechanische Arbeit umgewandelt werden.
Kelvin, Planck: Es gibt kein Perpetuum Mobile zweiter Art. Keine Maschine kann mechanische Arbeit verrichten allein durch Abkühlung eines Wärmespeichers.

3. Hauptsatz: Im idealen Grundzustand gilt $U = 0$ und $T = 0$ und $S = 0$.

Was ist Entropie? . . . in mikroskopischer Sicht?

Wir betrachten einen endlichen WRaum (Ω, P) mit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ als M „Lostopf“, P „Zustandsraum“ oder I „Quelle zufälliger Nachrichten“. Das Ergebnis ω_i hat Wkt $p_i \in [0,1]$ und Überraschung $-\log_2 p_i \in [0,\infty]$.

p	1	$1/2$	$1/4$	$1/8$	$\dots$	0
$-\log_2 p$	0	1	2	3	$\dots$	∞

Das misst den Informationsgehalt der Nachricht ω_i in Bit, zur Basis 2. Jede andere Basis b skaliert die Information gemäß $\log_b p = \ln(p)/\ln(b)$. Unabhängigkeit heißt Wkten multiplizieren, Überraschungen addieren.

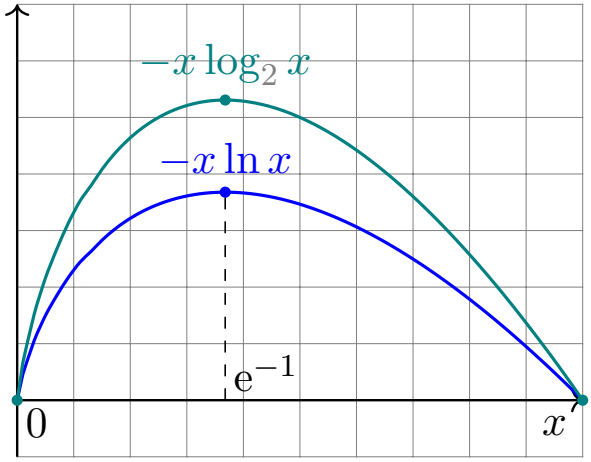
Die **Entropie** ist die erwartete Überraschung oder mittlere Information:

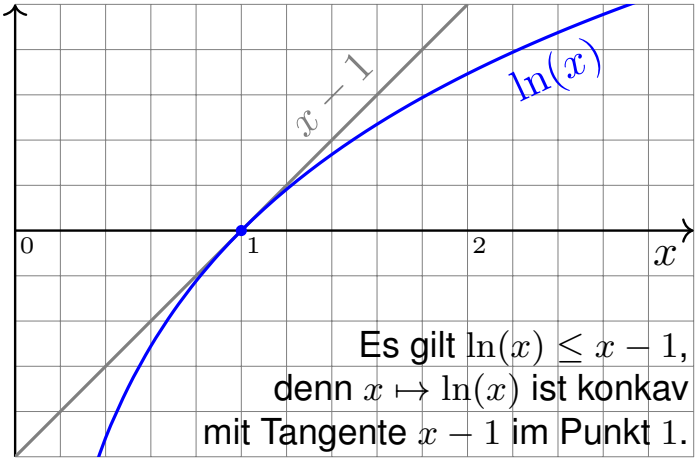
$$\mathrm{H}_2(P) := \mathbf{E}_P\big[\omega_i \mapsto -\log_2 p_i\big] = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i \quad \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

Beispiel: Münzwurf $\Omega = \{\, 0 = \mathrm{Kopf},\ 1 = \mathrm{Zahl},\ 2 = \mathrm{Rand} \,\}$ mit den Wkten $q = (\,0.50,\ 0.50,\ 0.00\,)$ und $p = (\,0.49,\ 0.49,\ 0.02\,)$.

$$\begin{aligned} \mathrm{H}(Q) &\overset{\text{Def}}{=} 0.50 \cdot 1.00 + 0.50 \cdot 1.00 + 0.00 \cdot \infty &&= 1.00 \\ \mathrm{H}(P) &\approx 0.49 \cdot 1.03 + 0.49 \cdot 1.03 + 0.02 \cdot 5.64 &&\approx 1.12. \end{aligned}$$

Eintropie nach Clausius, Boltzmann, Gibbs, Shannon, . . .





Eingeführt wurde die Entropie 1865 von Rudolf Clausius im 2. Hauptsatz der Thermodynamik. Ludwig Boltzmann und Willard Gibbs erklärten sie 1875 in der statistischen Mechanik durch $S = -\mathrm{k} \sum_i p_i \ln(p_i)$ mit den Wkten p_i aller Mikrozustände i, skaliert durch die Boltzmann–Konstante $\mathrm{k} = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K. Claude Shannon klärte 1948 optimale Codierung von Information durch die Entropie und gründete die Informationstheorie.

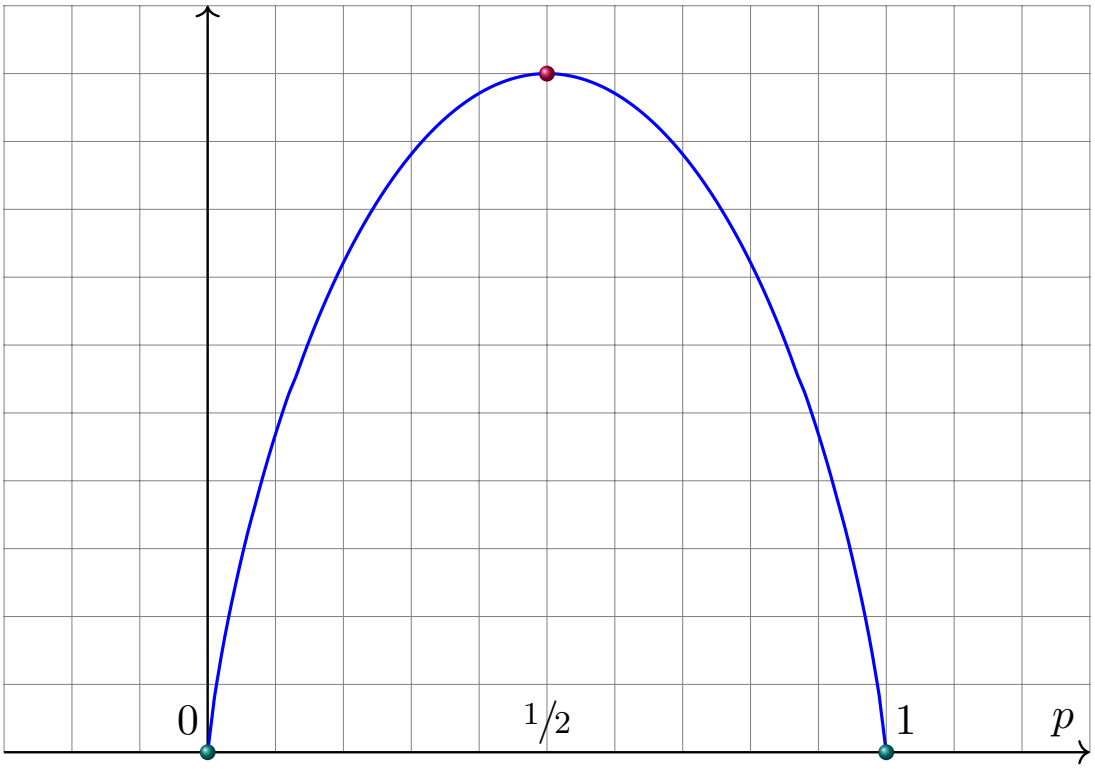
📖 Thomas M. Cover, Joy A. Thomas: *Information Theory.* Wiley 2006

Entropie spielt überall eine zentrale Rolle, von Quanten über Strömung zu schwarzen Löchern, von Kommunikation zu maschinellem Lernen.

Welche WVerteilung hat maximale Entropie?

Auf $\Omega = \{1, 2\}$ hat die WVerteilung $P := (p, 1-p)$ die Entropie

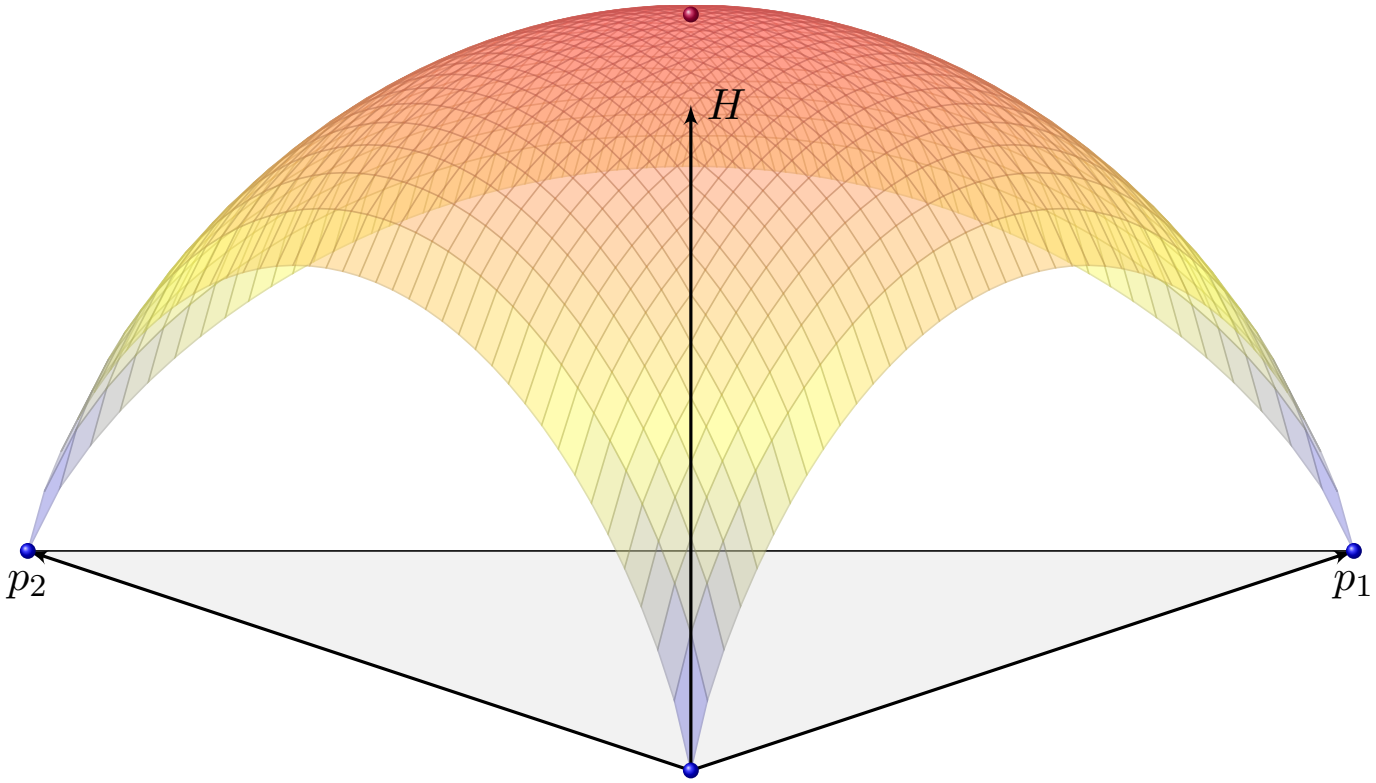
$$\mathrm{H}(P) = -p\log(p) - (1-p)\log(1-p).$$



Welche WVerteilung hat maximale Entropie?

Auf $\Omega = \{1, 2, 3\}$ hat die WVerteilung $P := (p_1, p_2, p_3)$ die Entropie

$$\mathrm{H}(P) = -p_1 \log p_1 - p_2 \log p_2 - p_3 \log p_3.$$



Die Kreuzentropie $\mathrm{H}(P,Q)$ misst die Überraschung.

Oft schätzen wir die wahre Verteilung P (engl. *ground truth*) durch ein Modell Q. Das Ergebnis ω_i hat Wkt p_i, aber die Überraschung $-\log q_i$ als unser Maß der Information. Erstere ist objektiv, also physikalisch real, zweitere subjektiv, eine Eigenschaft unseres Modells der Wirklichkeit.

$$\mathrm{H}(P,Q) := \underbrace{\mathbf{E}_P\big[\omega_i \mapsto -\log q_i\big]}_{\text{experimentell messbar}} = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log q_i \quad \in [0,\infty]$$

Die **Kreuzentropie** von P und Q ist auch hier die „mittlere Information“ oder die „erwartete Überraschung“ des Modells Q in der Wirklichkeit P. Diese kann durch Stichprobe geschätzt werden (Monte Carlo Methode).

▶ *The Key Equation Behind Probability.* `youtu.be/KHVR587oW8I`

Beispiel: Weiter sei $q = (\,0.50,\ 0.50,\ 0.00\,)$ und $p = (\,0.49,\ 0.49,\ 0.02\,)$.

$$\mathrm{H}(P,Q) \;=\; 0.49\cdot 1.00 + 0.49\cdot 1.00 + 0.02\cdot\infty \;=\; \infty$$

Ist das Modell $q' = (\,0.46,\ 0.46,\ 0.08\,)$ näher an der Realität?

$$\mathrm{H}(P,Q') \;\approx\; 0.49\cdot 1.12 + 0.49\cdot 1.12 + 0.02\cdot 3.64 \;\approx\; 1.17$$
$$\mathrm{H}(P,P) \;\approx\; 0.49\cdot 1.03 + 0.49\cdot 1.03 + 0.02\cdot 5.64 \;\approx\; 1.12$$

Die relative Entropie $\mathrm{D}(P,Q)$ misst die Abweichung.

Die **relative Entropie** des Modells Q bezüglich der Wirklichkeit P, oder **Kullback–Leibler–Divergenz**, ist die „zusätzliche Überraschung“:

$$\mathrm{D}(P,Q) \;:=\; \underbrace{\mathrm{H}(P,Q)}_{\text{exp. messbar}} - \underbrace{\mathrm{H}(P)}_{\text{konstant}} \;=\; \sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{p_i}{q_i} \quad \in [0,\infty]$$

Divergenz: Gilt $\mathrm{D}(P,Q') < \mathrm{D}(P,Q)$, so weicht Q' weniger ab als Q.

Satz W4E: Gibbs' Informationsungleichung

Es gilt $\mathrm{D}(P,Q) \geq 0$, also $\mathrm{H}(P,Q) \geq \mathrm{H}(P)$, mit Gleichheit nur für $P = Q$.

Beweis: Für $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt $\ln(x) \leq x - 1$, mit Gleichheit gdw $x = 1$. Also:

$$-\textstyle\sum_i p_i \ln(q_i/p_i) \;\overset{(1)}{\geq}\; -\sum_i p_i(q_i/p_i - 1) \;\overset{(2)}{\geq}\; \sum_i p_i - q_i \;\overset{\text{Wkt}}{=}\; 0$$

In den ersten beiden Summen setzen wir $0\cdot(\pm\infty) := 0$. Hier zählen also nur Indizes i mit $p_i > 0$. In der dritten Summe zählen alle Indizes i, auch mit $p_i = 0$, daher die Ungleichung (2). Gleichheit gilt genau dann, wenn $p_i = q_i$ für alle i gilt: Für $p_i > 0$ folgt dies aus (1), für $p_i = 0$ aus (2). □

Maximale Entropie: die diskrete Gleichverteilung

☺ Auf $\Omega = \{1, \dots, n\}$ maximiert $Q := (1/n, \dots, 1/n)$ die Entropie:

Satz W4F: Die diskrete Gleichverteilung maximiert die Entropie.

Jedes WMaß P auf $\Omega = \{1, \dots, n\}$ erfüllt $0 \le \mathrm{H}(P) \le \log n$.
(1) Maximum: Genau dann gilt $\mathrm{H}(P) = \log n$, wenn P gleichverteilt ist.
(2) Minimum: Genau dann gilt $\mathrm{H}(P) = 0$, wenn $p_i = 1$ für ein $i \in \Omega$ gilt.

Beweis: (1) Dank Gibbs' Informationsungleichung $\mathrm{H}(P) \le \mathrm{H}(P, Q)$ gilt:

$$\mathrm{H}(P) \overset{\text{W4E}}{\le} \mathrm{H}(P, Q) \overset{\text{Def}}{=} -\textstyle\sum_{i=1}^n p_i \log q_i \overset{Q}{=} \sum_{i=1}^n p_i \log n \overset{P}{=} \log n$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $p_i = q_i$ für alle $i \in \Omega$, also $P = Q$.

(2) Für alle $x \in [0, 1]$ gilt $-x \log x \ge 0$, also $\mathrm{H}(P) = -\sum_i p_i \log p_i \ge 0$. Gleichheit $-x \log x = 0$ gilt nur für $x \in \{0, 1\}$. Aus $\mathrm{H}(P) = 0$ folgt also $p_1, \dots, p_n \in \{0, 1\}$. Mit $\sum_i p_i = 1$ folgt $p_i = 1$ für genau ein $i \in \Omega$. □

Prinzip der Indifferenz (Laplace 1812): Wenn keine Gründe vorliegen, irgendein Ergebnis zu begünstigen, so sind alle gleich wahrscheinlich. Dieses Modell maximiert die Symmetrie... und zugleich die Entropie!

Maximale Entropie: die diskrete Gleichverteilung

☺ Für $n = 2$ und $n = 3$ sehen wir das sehr schön in obigen Graphiken. Allgemein hilft uns hier die Informationsungleichung! Oder Lagrange:

Aufgabe: Maximieren Sie die Entropie $H(p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^n -p_i \ln p_i$ unter der Nebenbedingung $g(p) := p_1 + \ldots + p_n = 1$ und $p_1, \dots, p_n \ge 0$.

Lösung: Wir erinnern uns an den Satz über Lagrange–Multiplikatoren und lösen $\nabla H = -\lambda \nabla g$. Aus $-\ln p_i - 1 = -\lambda$ folgt erneut $p_i = q_i := 1/n$.

Ist dies das globale Maximum? Der Definitionsbereich Δ ist kompakt, hierauf ist $H : \Delta \to \mathbb{R}$ stetig, nimmt also Minimum und Maximum an. Im Inneren Δ° ist q die einzige kritische Stelle, mit Wert $H(q) = \ln(n)$. Auf dem Rand $\partial\Delta$ gilt $H(\partial\Delta) = [0, \ln(n-1)]$ per Induktion über n. Also gilt $H(\Delta) = [0, \ln(n)]$ mit q als einziger Maximalstelle. Raffiniert!

☺ Gibbs' Ungleichung / Konkavität erledigt alles auf einen Schlag!

? Ist dieses Ergebnis nicht offensichtlich? Nein, erst im Rückblick!

☺ Das Maximum zu bestimmen, übersichtlich und nachvollziehbar, ist nicht trivial, insbesondere in höherer Dimension. Es ist eine erste, effiziente und elegante Anwendung von Gibbs' Informationsungleichung.

Maximale Entropie: die Boltzmann–Verteilung

Ein Teilchen gerät in Zustand $\omega_i \in \Omega$ mit Energie $u : \Omega \to \mathbb{R} : \omega_i \mapsto u_i$. Zustände hoher Energie sind unwahrscheinlicher, aber wie genau?

Zur Wkt macht Boltzmann den Exponentialansatz $q_i = \exp(-\alpha - \beta u_i)$. Hier ist $\beta := 1/(\mathrm{k}T)$ mit Temperatur $T > 0$ und Boltzmann–Konstante $\mathrm{k} = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K. Normierung: Wir bestimmen die Zustandssumme $Z := \sum_i \exp(-\beta u_i) > 0$ und erhalten $\alpha := \ln Z \in \mathbb{R}$; damit gilt $\sum_i q_i = 1$.

Sie hat Energie $\mathrm{E}(Q) = \sum_i q_i u_i$ und Entropie $\mathrm{S}(Q) = \mathrm{k} \sum_i q_i(\alpha + \beta u_i)$. Die Shannon–Entropie H skalieren wir zur Gibbs–Entropie $\mathrm{S} = \mathrm{k} \ln(2)\, \mathrm{H}$.

Satz W4G: Boltzmann maximiert die Entropie.

Jedes WMaß P auf Ω mit der Energieschranke $\mathrm{E}(P) \le \mathrm{E}(Q)$ erfüllt auch die Entropieschranke $\mathrm{S}(P) \le \mathrm{S}(Q)$, und Gleichheit gilt nur für $P = Q$.

Beweis: Dank Gibbs' Informationsungleichung $\mathrm{S}(P) \le \mathrm{S}(P, Q)$ gilt:

$$\mathrm{S}(P) \overset{\text{W4E}}{\le} \mathrm{k} \textstyle\sum_i p_i(\alpha + \beta u_i) \overset{\text{Lin}}{=} \mathrm{k}[\alpha + \beta \mathrm{E}(P)] \overset{\text{Vor}}{\le} \mathrm{k}[\alpha + \beta \mathrm{E}(Q)]$$

Für $P = Q$ gilt Gleichheit, sonst die strikte Ungleichung „$<$“. □

Maximale Entropie: geometrische Verteilung

Beispiele: (1) Bei n Zuständen $\omega_1, \dots, \omega_n$ gleicher Energie $u_i = \mathrm{const}$ erhalten wir erneut die Gleichverteilung $q_i = 1/n$ wie oben in Satz W4F.

(2) Auf $\Omega = \mathbb{N}$ ist die geometrische Verteilung $q_i = (1-q)q^i$ mit $q \in [0, 1[$ die Boltzmann–Verteilung zu $u_i = i$ und $\beta = -\ln q$ und $\alpha = -\ln(1-q)$.

Sie hat Erwartung / Energie $\mathrm{E}(Q) = \sum_{i=0}^\infty q_i \cdot i = q/(1-q)$ und Entropie

$$\begin{aligned} \mathrm{H}(Q) &= -\textstyle\sum_{i=0}^\infty q_i \big[\ln(1-q) + i \ln(q)\big] \\ &= -\ln(1-q) - \ln(q) \cdot q/(1-q). \end{aligned}$$

Übung: Jedes WMaß P auf $\mathbb{N}$ mit Erwartung $\mathrm{E}(P) \le \mathrm{E}(Q) = q/(1-q)$ erfüllt die Entropieschranke $\mathrm{H}(P) \le \mathrm{H}(Q)$, mit Gleichheit nur für $P = Q$.

☺ Unter allen WMaßen P auf $\Omega = \mathbb{N}$ mit Erwartung $\le \mu < \infty$ maximiert die obige geometrische Verteilung Q mit $\mu = q/(1-q)$ die Entropie; dabei gilt $q = \mu/(1+\mu)$ und $\mathrm{H}(Q) = (1+\mu)\ln(1+\mu) - \mu \ln \mu$.

Methode der maximalen Entropie (Jaynes 1957): Erlauben die Daten mehrere Verteilungen, so wählen wir diejenige mit maximaler Entropie.

Jaynes' Methode der maximalen Entropie

Wir suchen WVerteilungen mit vorgegebenen Eigenschaften, wie z.B. Erwartung und Varianz, und wählen diejenige mit maximaler Entropie. Jede mit kleinerer Entropie enthält mehr Information / Struktur als unsere Messdaten stützen. Laplace' Prinzip der Indifferenz ist der Spezialfall.

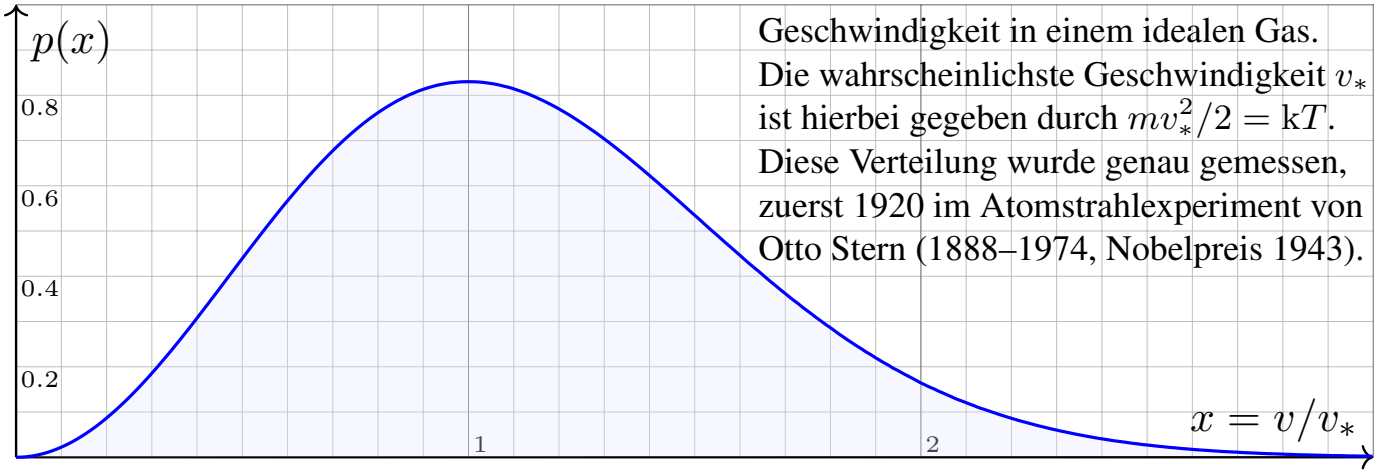
Aufgabe: Ein fairer Würfel $\Omega = \{1, \dots, 6\}$ mit $P = (1/6, \dots, 1/6)$ hat die erwartete Augenzahl $\mu = 3.5$. Sie messen $\mu_1 = 4.7$, andermal $\mu_2 = 2.8$. Welches Modellmaß Q auf Ω wählen Sie? Die Frage ist unterbestimmt!

Lösung: Gemäß der Methode der maximalen Entropie macht Jaynes den Ansatz $q_i = \exp(-\alpha - \beta i)$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Numerisch bestimmen wir den Parameter $\beta \in \mathbb{R}$ mit $\mu(\beta) = (\sum_{i=1}^6 \mathrm{e}^{-\beta i} \cdot i)/(\sum_{i=1}^6 \mathrm{e}^{-\beta i})$ und finden $\beta_1 \approx -0.463$ und $Q_1 \approx (0.039, 0.062, 0.098, 0.157, 0.249, 0.395)$ ebenso $\beta_2 \approx +0.249$ und $Q_2 \approx (0.284, 0.221, 0.172, 0.134, 0.104, 0.081)$. *Whaaa?*

Für Jaynes war dies zuerst eine Frage der Logik, dann erst der Physik. Die statistische Mechanik liefert überzeugende weitere Argumente und begründet so den 2. Hauptsatz: Jedes physikalische System strebt zum thermischen Gleichgewicht, das heißt zum Zustand maximaler Entropie.

Maxwell–Verteilung der Geschwindigkeit im idealen Gas

Zustände hoher Energie werden seltener angenommen. Mit dem obigen Exponentialansatz konnten Boltzmann und Gibbs dies quantifizieren!



Geschwindigkeit in einem idealen Gas. Die wahrscheinlichste Geschwindigkeit v_* ist hierbei gegeben durch $mv_*^2/2 = \mathrm{k}T$. Diese Verteilung wurde genau gemessen, zuerst 1920 im Atomstrahlexperiment von Otto Stern (1888–1974, Nobelpreis 1943).

In einem idealen Gas ist die Teilchenenergie rein kinetisch, $E = mv^2/2$. Im thermischen Gleichgewicht ist die Wkt proportional zu $\exp(-E/\mathrm{k}T)$.

In 3 Dimensionen gilt $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_y^2$. Die Zustände gleicher Energie füllen also die (Energie-)Kugelschale $[v, v + \mathrm{d}v]$ vom Volumen $4\pi v^2\,\mathrm{d}v$.

Für $x = v/v_*$ mit $mv_*^2/2 = \mathrm{k}T$ ist die WDichte $p(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \cdot x^2 \cdot 4/\sqrt{\pi}$.

Kontinuierliche WVerteilungen auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ und ihre Entropie

Auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ sei P ein WMaß mit Dichte $p : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\int_\Omega p(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Ihre (natürliche) **Entropie** definieren wir (nun zur Basis e) durch

$$\mathrm{H}(P) := -\int_{x\in\Omega} p(x) \ln p(x)\,\mathrm{d}x \quad \in \bar{\mathbb{R}}$$

gemessen in Nat (*natural unit of information*), alternativ Bit zur Basis 2. Die **Kreuzentropie** kontinuierlicher WVerteilungen P und Q ist demnach

$$\mathrm{H}(P,Q) := -\int_{x\in\Omega} p(x) \ln q(x)\,\mathrm{d}x \quad \in \bar{\mathbb{R}}.$$

Die **relative Entropie** des Modells Q bezüglich der Wirklichkeit P ist

$$\mathrm{D}(P,Q) \;:=\; \mathrm{H}(P,Q) - \mathrm{H}(P) \;=\; \int_{x\in\Omega} p(x) \ln \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x \quad \in \bar{\mathbb{R}}.$$

Aufgabe: Weiterhin gilt Gibbs' Informationsungleichung (Satz W4E), also $\mathrm{D}(P,Q) \geq 0$, somit $\mathrm{H}(P,Q) \geq \mathrm{H}(P)$. Gleichheit gilt genau dann, wenn $p(x) = q(x)$ für fast alle $x \in \Omega$ gilt, somit $P = Q$. Sind die Dichten $p, q : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ sogar stetig, so gilt $p(x) = q(x)$ in jedem Punkt $x \in \Omega$.

Maximale Entropie: kontinuierliche Gleichverteilung

Auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $0 < \mathrm{vol}_n(\Omega) < \infty$ hat die Gleichverteilung Q die Dichte

$$q \;:\; \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0} \;:\; q(x) = 1/\,\mathrm{vol}_n(\Omega).$$

Satz W4H: Die Gleichverteilung maximiert die Entropie.

(0) Für jedes kontinuierliche WMaß P auf Ω gilt die Schranke

$$\mathrm{H}(P) \leq \mathrm{H}(Q) = \ln \mathrm{vol}_n(\Omega).$$

Gleichheit gilt genau für $P = Q$, die Gleichverteilung auf Ω.

Beweis: Dank Gibbs' Informationsungleichung $\mathrm{H}(P) \leq \mathrm{H}(P,Q)$ gilt:

$$\mathrm{H}(P) \;\leq\; \int_{x\in\Omega} p(x) \ln \mathrm{vol}_n(\Omega)\,\mathrm{d}x \;\overset{P}{=}\; \ln \mathrm{vol}_n(\Omega)$$

Für $P = Q$ gilt Gleichheit, sonst die strikte Ungleichung „$<$". □

Beispiel: Die Gleichverteilung auf $[0,1]^n$ hat die Entropie $\ln 1 = 0$.
⚠ Die kontinuierliche Entropie kann negativ sein, die diskrete niemals.

Maximale Entropie: Exponentialverteilung $\mathrm{E}(\mu^{-1})$

Auf $\Omega = \mathbb{R}_{\geq 0}$ hat die Exponentialverteilung $Q := \mathrm{E}(\mu^{-1})$ die Dichte

$$q \,:\, \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \,:\, q(x) = \mathrm{e}^{-x/\mu} \cdot \mu^{-1}$$

mit Erwartung $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$.Diese können wir wie folgt charakterisieren:

Satz W4H: Die Exponentialverteilung maximiert die Entropie.

(1) Für jedes kontinuierliche WMaß P auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ mit Erwartung $\leq \mu$ gilt

$$\mathrm{H}(P) \leq \mathrm{H}(Q) = 1 + \ln \mu.$$

Gleichheit gilt genau für $P = Q$, die Exponentialverteilung $\mathrm{E}(\mu^{-1})$.

Beweis: Dank Gibbs' Informationsungleichung $\mathrm{H}(P) \leq \mathrm{H}(P, Q)$ gilt:

$$\mathrm{H}(P) \;\leq\; \int_{x=0}^{\infty} p(x) \left[\frac{x}{\mu} + \ln \mu\right] \mathrm{d}x \;\overset{P}{\leq}\; 1 + \ln \mu$$

Für $P = Q$ gilt Gleichheit, sonst die strikte Ungleichung „$<$“. □

Beispiel: Die Verteilung $\mathrm{E}(1)$ hat die Dichte $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ und die Entropie 1.

Maximale Entropie: Normalverteilung $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

Auf $\Omega = \mathbb{R}$ hat die Normalverteilung $Q := \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ die Dichte

$$q \,:\, \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \,:\, q(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

mit Erwartung $\mu \in \mathbb{R}$ und Varianz $\sigma^2 \in \mathbb{R}_{>0}$. Entropie-Charakterisierung:

Satz W4H: Die Normalverteilung maximiert die Entropie.

(2) Für jedes kont. WMaß P auf $\mathbb{R}$ mit Erwartung μ und Varianz $\leq \sigma^2$ gilt

$$\mathrm{H}(P) \leq \mathrm{H}(Q) = \ln \sqrt{2\pi\,\mathrm{e}} + \ln \sigma$$

Gleichheit gilt genau für $P = Q$, die Normalverteilung $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

Beweis: Dank Gibbs' Informationsungleichung $\mathrm{H}(P) \leq \mathrm{H}(P, Q)$ gilt:

$$\mathrm{H}(P) \;\leq\; \int_{\mathbb{R}} p(x) \left[\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 + \ln(\sigma\sqrt{2\pi})\right] \mathrm{d}x \;\overset{P}{\leq}\; \frac{1}{2} + \ln(\sigma\sqrt{2\pi})$$

Für $P = Q$ gilt Gleichheit, sonst die strikte Ungleichung „$<$“. □

Beispiel: Die Normalverteilung $\mathrm{N}(0, 1)$ hat Entropie $\ln \sqrt{2\pi\,\mathrm{e}} \approx 1.419$.

Entropie im zentralen Grenzwertsatz (ZGS)

Die obigen Rechnungen zeigen eindrucksvolle Beispiele und lassen die große Bedeutung der Entropie erahnen. Als Ausblick skizziere ich drei Anwendungen: Grenzwertsatz, maschinelles Lernen, Thermodynamik.

Gegeben seien unabhängige ZVariablen $X_1, X_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}$.
Die Summe $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ ist annähernd normalverteilt,
also $S_n \approx \mathrm{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$ mit $\mu_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(X_i)$ und $\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^n \mathbf{V}(X_i)$.
Zentriert und normiert erhalten wir $S_n^* := (S_n - \mu_n)/\sigma_n \approx \mathrm{N}(0,1)$.
Die Entropie strebt für $n \to \infty$ zum Maximum, $\mathrm{H}(S_n^*) \nearrow \mathrm{H}(\mathrm{N}(0,1))$.
Die Entropie treibt so die Konvergenz der Verteilungen, $S_n^* \to \mathrm{N}(0,1)$.

Physikalische Anschauung: Die vielen unabhängigen Summanden in S_n^* sorgen für hohe Entropie. Mit wachsendem n nähert sich die Entropie dem Maximum... der Normalverteilung, wie in Satz W4H gesehen.

Oft wird der ZGS durch Fourier–Transformation bewiesen. Das ist genial, aber auch etwas unintuitiv. Das Entropie-Argument hingegen entspricht direkt unserer physikalischen Anschauung aus dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik, ist in diesem Sinne also intuitiv näherliegend.

Entropie im zentralen Grenzwertsatz (ZGS)

☺ Mit diesem letzten Höhepunkt endet unsere kurze Einführung in die wunderbare Welt der Wahrscheinlichkeit und insgesamt diese Vorlesung. Unser Weg war lang, auch anstrengend, doch er hat sich wieder gelohnt!

Unsere Beispiele illustrieren eindrücklich: Wahrscheinlichkeit begegnet Ihnen überall, ob Sie wollen oder nicht, in alltäglichen Entscheidungen ebenso wie in Mathematik, Physik und technischen Anwendungen bis hin zu gesellschaftlichen und ökonomischen Belangen.

Unser Ziel sind rationale Entscheidungen unter Unsicherheit.
Die Erfahrung zeigt: Auch mit dem Zufall können wir rechnen!
Wir wollen nachvollziehbar begründete, quantitative Aussagen.
Die Mathematik stellt Ihnen dafür alle Werkzeuge bereit.

Das gilt allgemein für jede physikalisch-technische Betrachtung und insbesondere für raffinierte, fortgeschrittene Konzepte wie die Entropie. Damit können Sie nun der vagen Idee vom „Maß für die Unordnung“ einen präzisen mathematischen Sinn geben.

Divergenz und Entropie im maschinellen Lernen (ML)

Shannon verband 1948 die fundamentalen Begriffe „Information“ und „Entropie“. Jüngst feiert dies im maschinellen Lernen große Erfolge:

Wie kann ein Computer aus Daten lernen? Die Grundidee ist einfach: Die Wirklichkeit entspricht einem WMaß P (*ground truth*). Das Training anhand von Beispieldaten erzeugt ein approximatives WMaß Q (*model*). Wie gut ist es? Die Divergenz $\mathrm{D}(P,Q) = \mathrm{H}(P,Q) - \mathrm{H}(P) \geq 0$ misst die Abweichung des Modells Q von der Wirklichkeit P. Diese Zielgröße wollen wir minimieren: Die Entropie misst den Lernfortschritt!

Problem: Leider kennen wir die Entropie $\mathrm{H}(P)$ der Wirklichkeit P nicht. Geniale Lösung: Es genügt, die Kreuzentropie $\mathrm{H}(P,Q)$ zu minimieren. Sie kann durch Stichprobe geschätzt werden (Monte Carlo Methode). So kann die Güte verbessert und durch Training optimiert werden.

Aus diesem Grund ist die Kreuzentropie $\mathrm{H}(P,Q)$ die zentrale Zielgröße im maschinellen Lernen (ML). Die Erfolge der generativen künstlichen Intelligenz (genAI) beruhen maßgeblich auf dieser fundamentalen Idee und ihrer effizienten Implementierung für gigantisch große Modelle.

Zum guten Schluss

So jung und mit so geringer Entropie
kommen wir nie wieder zusammen.

Tocotronic, `youtu.be/CpqeCZB3sMQ`

In Ihrem Leben, Studium und Karriere, werden diese zentralen Themen eine Rolle spielen. Bewährte Techniken des Ingenieurwesens werden erweitert durch Künstliche Intelligenz, demnächst Quantum Computing, zukünftig noch weitere Ideen, die derzeit noch niemand ahnt.

Ihre mathematische Ausbildung wird Ihnen überall gute Dienste leisten.

Ich wünsche Ihnen, die hier dargelegten Werkzeuge bieten Ihnen eine gute Grundlage im Studium und einen Einstieg zur weiteren Vertiefung. Ich hoffe, damit bleiben die vielen wichtigen Anwendungen nicht „most misunderstood“, sondern führen Sie zu einem besseren Verständnis.

Habe Mut, dich deines eigenen Verstandes zu bedienen!

Much to learn, you still have.
This is just the beginning.

Kapitel Z

Zusammenfassung

Wir stehen selbst enttäuscht und sehn betroffen
Den Vorhang zu und alle Fragen offen.
Bertolt Brecht (1898–1956), *Der gute Mensch von Sezuan* (1940)

Inhalt dieses Kapitels Z

1 Integration in mehreren Dimensionen

2 Integralsätze in der Ebene und im Raum

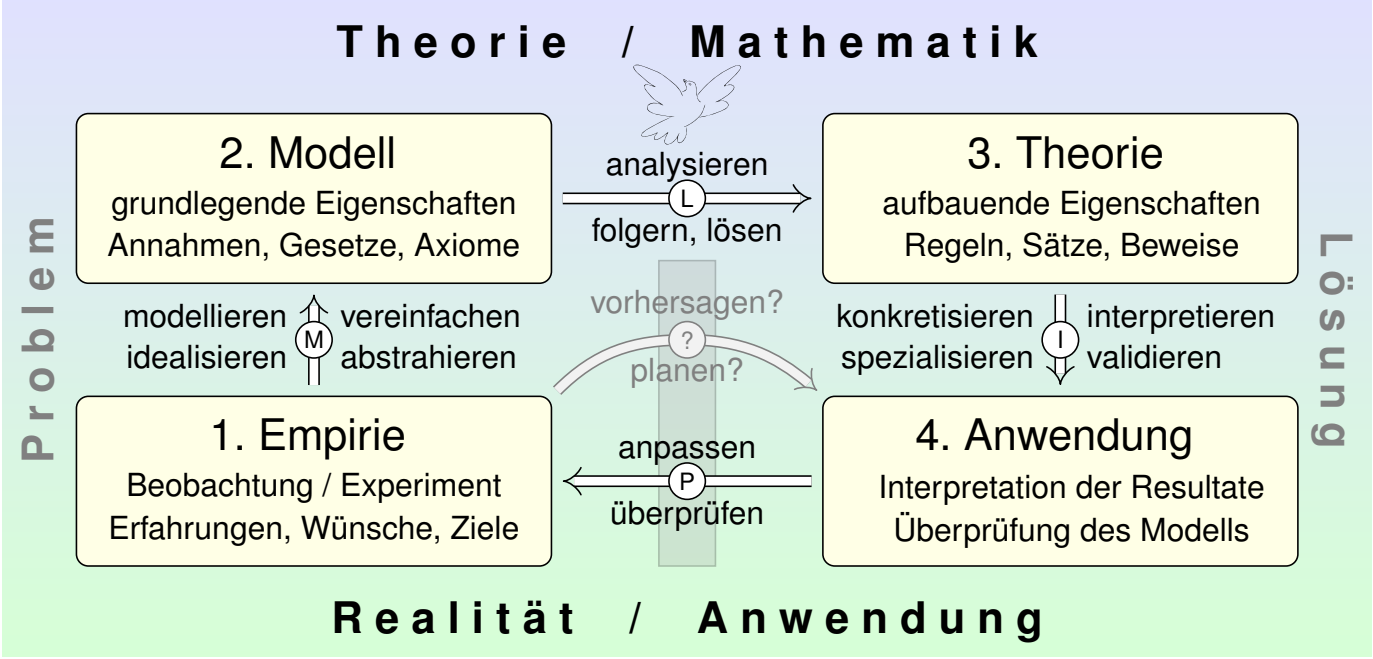
3 Fourier–Analyse und Laplace–Transformation

4 Gewöhnliche Differentialgleichungen (ODE)

5 Partielle Differentialgleichungen (PDE)

6 Wahrscheinlichkeitsrechnung

Warum ist Mathematik so erfolgreich?



Konkrete Anwendung benötigt abstrakte Kenntnisse; je anspruchsvoller, desto mathematischer! Alles Denken beruht auf Modellen; diese können *deskriptiv* oder *normativ* eingesetzt werden. Deskriptiv: beschreibend (Kettenlinie), erklärend (Planetenbewegung), vorhersagend (Wetter). Normativ: vorschreibend (Bauplan), planend (Raumsonde), gesetzgebend (Klimaschutz). Ingenieur:innen wollen beides, nicht nur passiv vorhersagen, sondern auch aktiv steuern und beeinflussen. Hierzu benötigen Sie ausreichend starke mathematische Werkzeuge.

Warum ist Mathematik so erfolgreich?

Typische Anwendungen verlaufen in folgenden Schritten:

1. Grundlegendes Verständnis der vorliegenden Situation:
Möglichst präzise Erfassung durch (passive) Beobachtungen, (aktive) Experimente, Formulierung von Naturgesetzen, Arbeitshypothesen, etc.

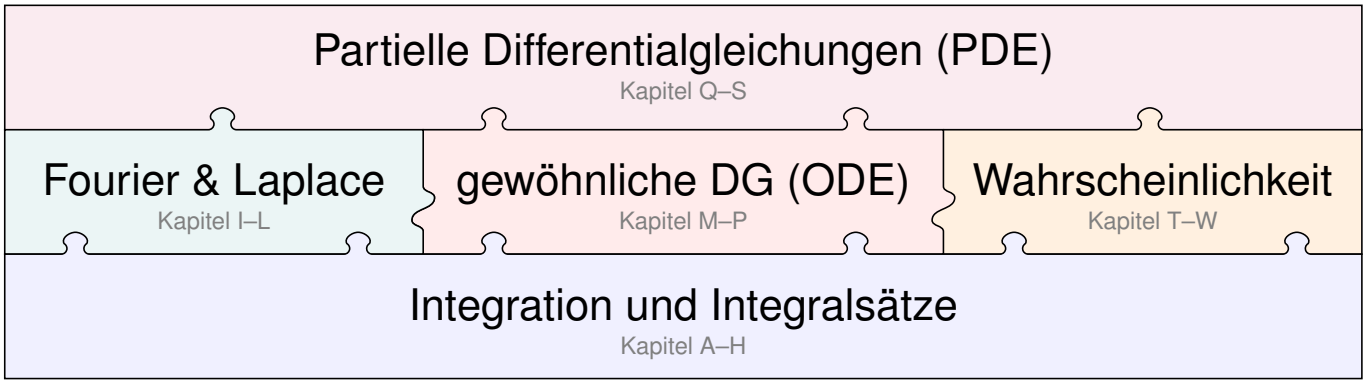
2. Mathematische Modellierung der vorliegenden Situation:
Vereinfachung und Abstraktion zu einem mathematischen Modell. Dieses besteht aus den relevanten Größen und ihren Beziehungen.

3. Lösung durch geeignete mathematische Werkzeuge:
Hierzu nutzen Sie die Techniken Ihrer HM und weitere nach Bedarf. Ziel: Sie kennen und nutzen die möglichen Methoden, Sie optimieren Aufwand und Genauigkeit, Sie entscheiden umsichtig und informiert.

4. Anpassung und Überprüfung anhand gegebener Daten:
Ist eine mathematische Lösung oder numerische Näherung gelungen, so passen Sie schließlich die noch freien Parameter des Modells den gegebenen Daten an und überprüfen soweit möglich die Vorhersagen des Modells durch Experimente, Messungen, Alternativmodelle, etc.

Falls nötig muss erneut ab (1) ein besseres Modell erstellt werden.

Mathematische Methoden in den Ingenieurwissenschaften

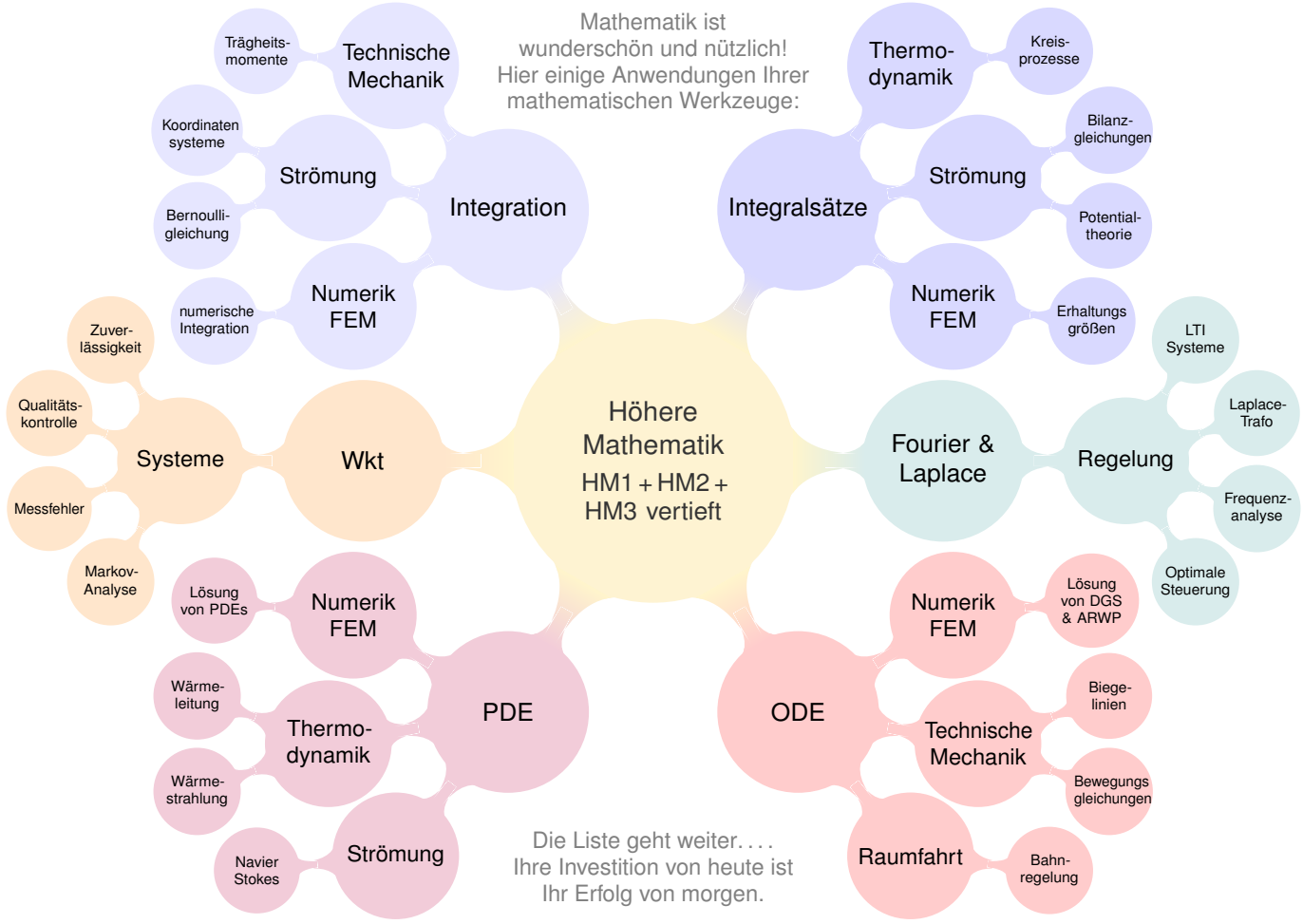


Als Ingenieur:in brauchen Sie Ihr methodisches Handwerkszeug.
Dazu gehört als harter Kern und Grundlage die Höhere Mathematik.
Je anspruchsvoller die Aufgabe, desto wichtiger wird die Mathematik.

Mathematik ist zugleich abstrakte Theorie und konkrete Anwendung.
Sie erklärt und quantifiziert Zusammenhänge: Das ist ihr Nutzen!
Dank Abstraktion ist sie universell anwendbar: Das ist ihre Stärke!

Abstraktion strukturiert und vereinfacht: Eine allgemeine Tatsache ist oft leichter zu verstehen und zu erklären als ihre zahlreichen Spezialfälle.
Denkökonomie: Daten ändern sich, Methoden bleiben bestehen.

Einige Anwendungen Ihrer mathematischen Werkzeuge



Schlusswort (nach Richard P. Feynman)

Nun habe ich [...] lang zu Ihnen gesprochen und höre nun damit auf. Einerseits möchte ich mich entschuldigen und andererseits wieder nicht. Ich hoffe – ja, ich weiß –, dass zwei oder drei Dutzend von Ihnen allem mit großer Spannung folgen konnten und eine angenehme Zeit damit verbrachten. Aber ich weiß auch, dass die Kräfte der Lehre von sehr geringer Wirkung sind, außer in jenen glücklichen Umständen, in denen sie praktisch überflüssig sind. Daher darf ich im Hinblick auf die zwei oder drei Dutzend, die alles verstanden haben, sagen, dass ich nichts anderes getan habe, als Ihnen die Dinge zu zeigen. Was die anderen betrifft, tut es mir leid, wenn ich Ihren Widerwillen gegen dieses Fachgebiet erregt habe. [...] Ich hoffe nur, dass ich Sie nicht ernsthaft verwirrt habe, und dass Sie dieses interessante Geschäft nicht aufgeben. Ich hoffe, dass jemand anderes es Ihnen so beibringen kann, dass es Ihnen nicht im Magen liegt, und dass sie trotz allem eines Tages feststellen, dass es nicht so schrecklich ist, wie es aussieht.

Richard P. Feynman (1918–1988),
Epilog seiner *Vorlesungen über Physik* (1965)
`www.feynmanlectures.caltech.edu/III_22.html`

Zusammenfassung Ihrer HM3

Dieses letzte Kapitel Z versammelt alle Kapitelzusammenfassungen. Es bietet eine konzise Bilanz der wichtigsten Ergebnisse und Techniken. Es nützt nur schwer als Einstieg, wohl als Übersicht und Erinnerung. Hierzu sind Rückverweise auf die einzelnen Themen angegeben.

Diese Zusammenfassung dient nur im Rückblick als Gedächtnisstütze; zum soliden Verständnis benötigen Sie alle Grundlagen und viel Übung! Dazu hat Ihr HM3-Team Sie das gesamte Semester umfassend betreut.

Insbesondere wiederhole ich hier nur Definitionen und Sätze, aber kaum Beispiele und Übungen. Erfahrung, Umsicht und Verständnis lassen sich nicht eintrichtern, sondern nur durch Übung erwerben. Also: Üben Sie!

Detaillierte Beispiele, Übungen und Erläuterungen zu jedem Thema bieten die zugehörigen Kapitel und die weiterführende Literatur. Ihre Werkzeuge können Sie nun anwenden und vertiefen.

Kafkas ganze Kunst besteht darin, den Leser zum Wiederlesen zu zwingen. [...] Genau das hat der Verfasser beabsichtigt.

Albert Camus (1913–1960), *Der Mythos des Sisyphos* (1942)

Definition und erste Eigenschaften des Integrals

☺ Das Integral $\int_\Omega f$ misst das Volumen unter dem Graphen von f. Hierzu sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader. Messbare Funktionen $f : \Omega \to [0, \infty]$ und ihr Integral $\int_\Omega f \in [0, \infty]$ definieren wir nach folgenden fünf Grundregeln:

(1) **Normierung:** Für jeden endlichen Quader $A \subseteq \Omega$ ist die Indikatorfunktion $\mathbf{I}_A : \Omega \to [0, \infty]$ messbar, und es gilt $\int_\Omega \mathbf{I}_A = \mathrm{vol}_n(A)$.

(2) **Linearität:** Sind f, g messbar, so auch jede Linearkombination $af + bg$ mit $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, und es gilt $\int_\Omega (af + bg) = a \int_\Omega f + b \int_\Omega g$.

(3) **Monotonie:** Sind f, g messbar, so auch $h = \max(g - f, 0)$. Aus $f \leq g$ folgt $h = g - f$ und $\int_\Omega f \leq \int_\Omega g$ dank Additivität.

(4) **Einschachtelung:** Gilt $f_0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq h \leq \ldots \leq g_2 \leq g_1 \leq g_0$ mit f_k, g_k messbar und $\int_\Omega (g_k - f_k) \searrow 0$, so ist auch h messbar. Dank Monotonie gilt dann $\int_\Omega f_k \nearrow \int_\Omega h \swarrow \int_\Omega g_k$.

(5) **Ausschöpfung:** Sind $f_0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ messbar mit $f_k \nearrow f$, so ist auch f messbar, und es gilt $\int_\Omega f_k \nearrow \int_\Omega f$.

☺ Diese Wünsche lassen sich erfüllen: Die kleinste Funktionenmenge, für die dies möglich ist, sind die **Lebesgue–messbaren Funktionen** $f : \Omega \to [0, \infty]$. Hierauf ist das Integral eindeutig durch (1–5) bestimmt.

Definition und erste Eigenschaften des Integrals

☺ Ganz einfach: Alle für uns wichtigen Funktionen sind messbar!
Alle Treppenfunktionen und alle stetigen Funktionen sind messbar.
Mit f, g sind $f + g$ und $f \cdot g$ sowie $\min(f, g)$ und $\max(f, g)$ messbar.
Konvergiert $f_k \to f$ und sind alle f_k messbar, so ist auch f messbar.

Wir nennen $f : \mathbb{R}^n \supseteq A \to [0, \infty]$ messbar, wenn die triviale Fortsetzung $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ messbar ist, wobei $\tilde{f}(x) = f(x)$ für $x \in A$ und $\tilde{f}(x) = 0$ sonst. Wir definieren dann das Integral von f durch

$$\boxed{\int_A f(x)\,\mathrm{d}x := \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Genau dann ist eine Menge $A \subseteq \Omega$ messbar, wenn $\mathbf{I}_A$ messbar ist, und

$$\boxed{\mathrm{vol}_n(A) = \int_A 1\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \mathbf{I}_A(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Ist zudem die Funktion $f : \Omega \to [0, \infty]$ messbar, so auch $\mathbf{I}_A \cdot f$, und es gilt

$$\boxed{\int_A f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \mathbf{I}_A(x)\, f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Definition und erste Eigenschaften des Integrals

Das Integral von $f:\Omega\to[0,\infty]$ interpretieren wir als Volumen unter f.
Zu integrieren sei nun eine Funktion $f:\Omega\to\bar{\mathbb{R}}$, wobei $\bar{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.
Wo immer f negativ ist, ist das Volumen negativ in Ansatz zu bringen.
Wir zerlegen $f=f^+-f^-$ in **Positivteil** f^+ und **Negativteil** f^- gemäß

$$f^+(x)=\begin{cases} f(x) & \text{falls } f(x)>0,\\ 0 & \text{sonst,}\end{cases}\qquad f^-(x)=\begin{cases} -f(x) & \text{falls } f(x)<0,\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Es gilt $f=f^+-f^-$ und $|f|=f^++f^-$ und umgekehrt $f^\pm=\frac{1}{2}(|f|\pm f)$.
Genau dann ist f messbar, wenn $f^\pm:\Omega\to[0,\infty]$ messbar sind.
(1) In diesem Fall ist auch $|f|=f^++f^-$ messbar, und somit gilt

$$\int_\Omega |f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_\Omega f^+(x)\,\mathrm{d}x+\int_\Omega f^-(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so nennen wir f **(absolut) integrierbar**.
In diesem Fall können wir das Integral von f definieren durch

$$\boxed{\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x:=\int_\Omega f^+(x)\,\mathrm{d}x-\int_\Omega f^-(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Definition und erste Eigenschaften des Integrals

☺ Die Menge aller absolut integrierbaren Funktionen

$$L^1(\Omega)=\left\{\, f:\Omega\to\mathbb{R}\;\middle|\; \textstyle\int_\Omega|f(x)|\,\mathrm{d}x<\infty\,\right\}$$

ist ein $\mathbb{R}$–Vektorraum. Hierauf ist das Integral eine $\mathbb{R}$–lineare Abbildung

$$L^1(\Omega)\to\mathbb{R},\qquad f\mapsto \textstyle\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Sie ist normiert, monoton, erfüllt Einschachtelung und Ausschöpfung.
Durch diese Eigenschaften ist das Integral eindeutig bestimmt.

☺ Das Integral ist linear; dank $\mathbf{I}_A+\mathbf{I}_B=\mathbf{I}_{A\cup B}+\mathbf{I}_{A\cap B}$ folgt daher

$$\boxed{\int_A f(x)\,\mathrm{d}x+\int_B f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{A\cup B} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{A\cap B} f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Der letzte Term entfällt falls $\mathrm{vol}_n(A\cap B)=0$, insb. falls $A\cap B=\emptyset$.

☺ Das Integral ist monoton; dank $-|f|\le f\le|f|\le\sup|f|$ folgt daher

$$\boxed{\left|\int_A f(x)\,\mathrm{d}x\right|\;\le\;\int_A|f(x)|\,\mathrm{d}x\;\le\;\sup_A|f|\cdot\mathrm{vol}(A).}$$

☺ Zwei fast überall gleiche Funktionen verhalten sich bei Integration genau gleich. Wir dürfen und werden sie daher als gleich betrachten.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Der **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung** B1I erklärt, in welchem Sinne Differenzieren und Integrieren einander umkehren:

Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar. Ihre Integralfunktion

$$F : [a, b] \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

ist differenzierbar, und für die Ableitung gilt $F' = f$. Ist umgekehrt $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit stetiger Ableitung $f = F'$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F\Big]_a^b \quad \text{mit} \quad \Big[F\Big]_a^b := F(b) - F(a).$$

☺ Der HDI ist das Arbeitspferd der eindimensionalen Integration: die Berechnung vieler elementarer Integrale gelingt erst dank HDI.

Dieser nützliche Zusammenhang gilt noch wesentlich allgemeiner:

f stetig	$\Longleftrightarrow$	F stetig differenzierbar	B123
f stückweise stetig	$\Longleftrightarrow$	F stückweise stetig differenzierbar	B213
f absolut integrierbar	$\Longleftrightarrow$	F absolut stetig	B214

Elementare Grundintegrale / Stammfunktionen

$$\int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} \quad (a \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x|$$

$$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \qquad \int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x \qquad \int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x$$

$$\int \cosh x\,\mathrm{d}x = \sinh x \qquad \int \sinh x\,\mathrm{d}x = \cosh x$$

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2}\,\mathrm{d}x = \tan x \qquad \int \frac{1}{(\sin x)^2}\,\mathrm{d}x = -\cot x$$

$$\int \frac{1}{(\cosh x)^2}\,\mathrm{d}x = \tanh x \qquad \int \frac{1}{(\sinh x)^2}\,\mathrm{d}x = -\coth x$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x \qquad \int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \ln\sqrt{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arsinh} x$$

☺ Probe als Übung: Integrale sind durch Ableiten leicht nachzuprüfen!

Partielle Integration und Substitution

Z107
Fazit

Aus der Produktregel folgt dank HDI die **partielle Integration** B129:
Für alle stetig differenzierbaren Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{x=a}^{b} f(x)\, g'(x)\, \mathrm{d}x = \Big[f(x)\, g(x)\Big]_{x=a}^{b} - \int_{x=a}^{b} f'(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x.$$

Aus der Kettenregel folgt dank HDI die **Substitutionsregel** B131:
Für $g : [a, b] \to [c, d]$ stetig differenzierbar und $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ stetig gilt

$$\int_{t=a}^{b} f(g(t))\, g'(t)\, \mathrm{d}t = \int_{u=g(a)}^{g(b)} f(u)\, \mathrm{d}u.$$

☺ Damit lassen sich bereits viele Integrale elementar berechnen.

☺ Jede rationale Funktion $r(x) = p(x)/q(x)$ ist elementar integrierbar durch Partialbruchzerlegung und unsere Grundintegrale. B135

⚠ Viele elementare Funktionen sind nicht elementar integrierbar! Prominenteste Beispiele sind die Glockenkurve $\exp(-x^2/2)$ B145 und die Spaltfunktion $\mathrm{si}(x) = \sin(x)/x$ B149. Hier nutzen wir Potenzreihen o.ä.

Uneigentliche Integrale und Cauchy–Hauptwert

Z108
Fazit

Zur Integration über ganz $\mathbb{R}$ haben wir drei nützliche Möglichkeiten:

(1) Bei **absoluter Integration** zerlegen wir $f = f^+ - f^-$ und setzen

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{d}x := \int_{\mathbb{R}} f^+(x)\, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} f^-(x)\, \mathrm{d}x.$$

⚠ Hierzu müssen rechts beide Integrale endlich sein.

☺ Dieser Integrationsbegriff gilt allgemein über $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ (A3K).

(2) Das **uneigentliche Integral** von f ist die Summe der Grenzwerte

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \mathrm{d}x := \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{z} f(x)\, \mathrm{d}x + \lim_{b \to +\infty} \int_{z}^{b} f(x)\, \mathrm{d}x.$$

⚠ Hierzu müssen beide Grenzwerte existieren und endlich sein.

☺ Existiert das Integral (1) so auch (2) und beide sind gleich. B221

(3) Der **Cauchy–Hauptwert** von f ist der Grenzwert (falls existent)

$$(\mathrm{CH}) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \mathrm{d}x := \lim_{r \to \infty} \int_{-r}^{r} f(x)\, \mathrm{d}x.$$

☺ Existiert das Integral (2) so auch (3) und beide sind gleich. B223

⚠ Die Umkehrungen (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) gelten im Allgemeinen nicht. B417

Vergleich von Reihe und Integral

Sei $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ monoton fallend. Für alle $a \leq b$ in $\mathbb{N}$ gilt dann

$$\int_{x=a}^{b+1} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \leq \quad \sum_{k=a}^{b} f(k) \quad \leq \quad f(a) + \int_{x=a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Das ist oft eine nützliche Näherung: Wir ersetzen mühsame Summen durch bequeme Integral, oder auch umgekehrt je nach Anwendung. Durch Grenzübergang $b \to \infty$ erhalten wir

$$\int_{x=a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \leq \quad \sum_{k=a}^{\infty} f(k) \quad \leq \quad f(a) + \int_{x=a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Insbesondere haben Reihe und Integral gleiches Konvergenzverhalten.

Beispiel: Für die Funktion $f(x) = 1/x$ erhalten wir

$$\ln(n+1) \quad \leq \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \leq \quad 1 + \ln(n)$$

☺ Die **harmonische Reihe** wächst wie der natürliche Logarithmus! Insbesondere erkennen wir die Divergenz $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to \infty$ für $n \to \infty$.

Abelscher Grenzwertsatz

☺ Jede Potenzreihe ist stetig im **Inneren** ihres Konvergenzkreises. Abels Grenzwertsatz ergänzt dies zur Stetigkeit in **Randpunkten**:

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe komplexer Zahlen $a_k \in \mathbb{C}$. Dann konvergiert die Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ für alle $x \in [0,1]$ und die so definierte Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ ist stetig, sogar in $x = 1$. Für $x \nearrow 1$ konvergiert also $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ gegen $f(1) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Beispiel: Für alle $x \in [0,1[$ gilt die Reihenentwicklung

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \qquad = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \ldots$$

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \qquad = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \ldots$$

Für $x \nearrow 1$ erhalten wir dank Abel die beiden berühmten Reihen

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.}$$

Konvergenzkriterium von Leibniz

Wir untersuchen die Konvergenz von Reihen und Integralen der Form

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k := \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a_k,$$

$$(2) \qquad \int_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\, a(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{r\to\infty}\int_{x=0}^{r} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\, a(x)\,\mathrm{d}x, \quad \omega \neq 0.$$

(1) Die Folge $a_k \in \mathbb{R}$ sei monoton fallend gegen 0, kurz $a_k \searrow 0$, also $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \ldots$ und $a_k \to 0$. Dann konvergiert die Reihe (1), und wir haben die Fehlerabschätzung $|\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^k a_k| \leq a_n \searrow 0$.

(2) Die Funktion $a\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ sei monoton fallend gegen 0, kurz $a(x) \searrow 0$, Dann konvergiert das Integral (2), ebenso mit $\cos(\omega x)$ und $\sin(\omega x)$.

Beispiel: Das Leibniz–Kriterium sichert die Konvergenz von Reihen wie den beiden obigen $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k/(k+1)$ und $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k/(2k+1)$.

☹ Über den Grenzwert macht das Leibniz–Kriterium keine Aussage.

☺ Immerhin erlaubt es praktische Näherungen mit Fehlerabschätzung!

Für die Konvergenz trigonometrischer Reihen wie $\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}/k^a$ oder $\sum_{k=1}^{\infty}\cos(kx)/k^a$ oder $\sum_{k=1}^{\infty}\sin(kx)/k^a$ nutzen wir folgendes Kriterium.

Konvergenzkriterium von Dirichlet

Wir untersuchen die Konvergenz von Reihen und Integralen der Form

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, b_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} a_k\, b_k,$$

$$(2) \qquad \int_{x=0}^{\infty} a(x)\, b(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty}\int_{x=0}^{r} a(x)\, b(x)\,\mathrm{d}x.$$

(1) Die Folge $a_k \in \mathbb{R}$ sei monoton fallend gegen 0, kurz $a_k \searrow 0$.
Die Folge $b_k \in \mathbb{C}$ habe beschränkte Partialsummen $B_n = \sum_{k=0}^{n-1} b_k$, das heißt $|B_n| \leq M$ für eine Konstante $M \in \mathbb{R}$ und alle Indizes $n \in \mathbb{N}$.
Dann konvergiert die Reihe (1) mit Fehler $\leq 2Ma_n \searrow 0$ für $n \to \infty$.

(2) Die Funktion $a\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ sei monoton fallend gegen 0, kurz $a(x) \searrow 0$.
Die Funktion $b\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ sei auf jedem Intervall $[0, r]$ integrierbar mit beschränkter Integralfunktion $B(r) = \int_0^r b(x)\,\mathrm{d}x$, das heißt $|B(r)| \leq M$.
Dann konvergiert das Integral (2) mit Fehler $\leq 2Ma(r) \searrow 0$ für $r \to \infty$.

☹ Über den Grenzwert macht das Dirichlet–Kriterium keine Aussage.

☺ Immerhin erlaubt es praktische Näherungen mit Fehlerabschätzung!

Komplexe Funktionen und ihr Integral

Auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ betrachten wir neben reellen auch komplexe Funktionen. Jede komplexe Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ können wir zerlegen in ihren

Realteil $\operatorname{Re} f : \Omega \to \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{Re} f(x)$, und

Imaginärteil $\operatorname{Im} f : \Omega \to \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{Im} f(x)$.

Hieraus lässt sich f zusammensetzen gemäß $f = \operatorname{Re} f + \mathrm{i} \operatorname{Im} f$.
Es gilt $|f|^2 = |\operatorname{Re} f|^2 + |\operatorname{Im} f|^2$ und $|\operatorname{Re} f|, |\operatorname{Im} f| \le |f| \le |\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f|$.

Wir nennen $f : \Omega \to \mathbb{C}$ **messbar**, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ messbar sind.
Wir nennen f **integrierbar**, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ integrierbar sind.
Äquivalent hierzu: die Funktion f ist messbar und $\int_\Omega |f| < \infty$.
In diesem Fall können wir das Integral von f definieren durch

$$\boxed{\int_\Omega f := \int_\Omega \operatorname{Re} f + \mathrm{i} \int_\Omega \operatorname{Im} f.}$$

☺ Wegen $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ ist das reelle Integral ein Spezialfall des komplexen.

☺ Linearität überträgt unsere Rechenregeln aufs komplexe Integral.

Der Hauptsatz (HDI) für komplexe Integrale

☺ Wir formulieren allgemeine Rechenregeln gleich reell und komplex.
Der HDI gilt wörtlich für komplexe genauso wie für reelle Funktionen:
Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ ist integrierbar. Ihre Integralfunktion

$$F : [a, b] \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

ist differenzierbar, und für die Ableitung gilt $F' = f$. Ist umgekehrt $F : [a, b] \to \mathbb{C}$ differenzierbar mit stetiger Ableitung $f = F'$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F\Big]_a^b \quad \text{mit} \quad \Big[F\Big]_a^b := F(b) - F(a).$$

Beispiel: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt:

$$\boxed{\int_{t=a}^b \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\Big]_{t=a}^b}$$

☺ Alles gilt ebenso für $f : [a, b] \to \mathbb{C}^n$ und $f : [a, b] \to \mathbb{C}^{n \times n}$, wobei komponentenweise integriert und differenziert wird.

Der Satz von Fubini

Z115
Fazit

Seien $X \subseteq \mathbb{R}^p$ und $Y \subseteq \mathbb{R}^q$ messbare Teilmengen, zum Beispiel Quader. Der Satz von Fubini C1E führt die Integration über $X \times Y$ zurück auf die (iterierte aber jeweils einfache) Integration über X und über Y. Das hilft.

(1) Absolute Integration: Für jede messbare Funktion $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ gilt

$$\int_{X\times Y} \big|f(x,y)\big| \,\mathrm{d}(x,y) = \int_X \int_Y |f(x,y)| \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_Y \int_X |f(x,y)| \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so ist f absolut integrierbar, und dann gilt

$$\boxed{\int_{X\times Y} f(x,y) \,\mathrm{d}(x,y) = \int_X \int_Y f(x,y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_Y \int_X f(x,y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.}$$

⚠ Hierzu ist die absolute Integrierbarkeit (1) wesentlich! Andernfalls ist das linke Integral nicht definiert und die rechten beiden evtl. verschieden.

Für einfache, aber drastische Gegenbeispiele siehe C117, C409, C413. Diese Vorsichtsmaßnahme ist also nötig, die müssen Sie beherrschen.

☺ Absolute Integrierbarkeit und somit Vertauschbarkeit gilt, wenn X, Y und f beschränkt sind, also insbesondere für X, Y kompakt und f stetig.

Integration über Normalbereiche

Z116
Fazit

Integration über Normalbereiche ist ein wichtiger Spezialfall und die wohl häufigste Anwendung des Satzes von Fubini:

Das Integral einer absolut integrierbaren Funktion $f : B \to \mathbb{C}$ über

$$B = \left\{\, x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; a_k(x_1,\dots,x_{k-1}) \le x_k \le b_k(x_1,\dots,x_{k-1}) \text{ für alle } k \,\right\}$$

lässt sich durch iterierte eindimensionale Integrale berechnen:

$$\int_B f(x) \,\mathrm{d}x = \int_{x_1=a_1}^{b_1} \int_{x_2=a_2(x_1)}^{b_2(x_1)} \cdots \int_{x_n=a_n(x_1,\dots,x_{n-1})}^{b_n(x_1,\dots,x_{n-1})} f(x_1,x_2,\dots,x_n) \,\mathrm{d}x_n \cdots \mathrm{d}x_2 \,\mathrm{d}x_1$$

☺ Dies gilt ebenso bei jeder anderen Reihenfolge der Variablen. Sie haben hier also die Wahl der Integrationsreihenfolge.

⚠ Man muss hierzu allerdings die Integrationsgrenzen umschreiben! Geometrische Hilfe: Das gelingt einfach und sicher anhand einer Skizze.

⚠ Das Ergebnis ist dasselbe, aber der Rechenweg kann verschieden schwierig sein. Für ein bemerkenswertes Beispiel siehe C133.

Der Transformationssatz

Der Transformationssatz C2B verallgemeinert die eindimensionale Substitution: Wir wählen neue Variablen als geschickte Koordinaten.

Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und $\Phi : X \to Y$ bijektiv und stetig diff'bar.
(1) Ist $f : Y \to \mathbb{C}$ messbar, so auch $(f \circ \Phi) \cdot \det \Phi' : X \to \mathbb{C}$, und es gilt

$$\int_Y |f(y)| \, \mathrm{d}y \;=\; \int_X |f(\Phi(x))| \cdot |\det \Phi'(x)| \, \mathrm{d}x.$$

(2) Ist dieser Wert endlich, so ist f absolut integrierbar, und dann gilt

$$\boxed{\int_Y f(y) \, \mathrm{d}y \;=\; \int_X f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)| \, \mathrm{d}x.}$$

⚠ Auch hier ist die absolute Integrierbarkeit (1) wesentlich! C413

Die Ableitung $\Phi' : X \to \mathbb{R}^{n \times n}$ ist die **Jacobi–Matrix**, $\Phi' = (\partial_j \Phi_i)_{ij}$.
Die Funktion $\det \Phi' : X \to \mathbb{R}$ ist hierzu die **Funktionaldeterminante**.
Ihr Betrag $|\det \Phi'|$ misst die durch Φ bewirkte **Volumenverzerrung**.

☺ Für eindimensionale Integrale entspricht dies der Substitutionsregel.
Allerdings nehmen wir hier den Betrag und vergessen die Orientierung.
Allgemeiner formuliert Satz C2C die orientierte Version mit Vorzeichen.

Polarkoordinaten

Fubini und Transformation sind zwei häufig genutzte Techniken.
Polarkoordinaten sind eine einfache und häufige Anwendung.

Zu Radien $0 \le r_0 < r_1 < \infty$ betrachten wir den Kreisring

$$K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; r_0^2 \le x^2 + y^2 \le r_1^2 \right\}.$$

Diesen können wir durch **Polarkoordinaten** parametrisieren:

$$\Phi : [r_0, r_1] \times [0, 2\pi] \to K \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \end{pmatrix} =: \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix}$$

Jacobi–Matrix und Funktionaldeterminante sind hier:

$$\Phi' = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \varphi)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \det \Phi' = \rho$$

Für jede absolut integrierbare Funktion $f : K \to \mathbb{C}$ gilt somit:

$$\boxed{\int_K f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mathrm{d}(x, y) \overset{\text{Trafo}}{\underset{\text{Fub}}{=}} \int_{\rho = r_0}^{r_1} \int_{\varphi = 0}^{2\pi} f \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \end{pmatrix} \underbrace{\rho}_{\text{Fu'det}} \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\rho}$$

Zylinderkoordinaten

Fubini und Transformation sind zwei häufig genutzte Techniken.
Zylinderkoordinaten sind eine einfache und häufige Anwendung.

Zu Radien $r_0, r_1 : [a,b] \to \mathbb{R}_{>0}$ betrachten wir den Rotationskörper

$$K = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a \le z \le b,\; r_0(z)^2 \le x^2 + y^2 \le r_1(z)^2 \right\}.$$

Diesen können wir durch **Zylinderkoordinaten** parametrisieren:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos\varphi \\ \rho \sin\varphi \\ z \end{pmatrix} =: \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

mit den Grenzen $a \le z \le b$ und $0 \le \varphi \le 2\pi$ sowie $r_0(z) \le \rho \le r_1(z)$.

Die Funktionaldeterminante ist hier wie zuvor $\det \Phi' = \rho$. (Übung!)

Für jede absolut integrierbare Funktion $f : K \to \mathbb{C}$ gilt somit:

$$\boxed{\int_K f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mathrm{d}(x,y,z) \overset{\text{Trafo}}{\underset{\text{Fub}}{=}} \int_{z=a}^{b} \int_{\rho=r_0(z)}^{r_1(z)} \int_{\varphi=0}^{2\pi} f \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \underbrace{\rho}_{\text{Fu'det}} \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}z}$$

Kugelkoordinaten

Fubini und Transformation sind zwei häufig genutzte Techniken.
Kugelkoordinaten sind eine einfache und häufige Anwendung.

Zum Radius $r > 0$ betrachten wir die Kugelschale

$$K = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; r_0^2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le r_1^2 \right\}.$$

Diese können wir durch **Kugelkoordinaten** parametrisieren:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos\varphi \sin\theta \\ \rho \sin\varphi \sin\theta \\ \rho \cos\theta \end{pmatrix} =: \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$$

mit den Grenzen $r_0 \le \rho \le r_1$ und $0 \le \theta \le \pi$ sowie $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Die Funktionaldeterminante ist hier $\det \Phi' = \rho^2 \sin\theta$. (Übung!)

Für jede absolut integrierbare Funktion $f : K \to \mathbb{C}$ gilt somit:

$$\boxed{\int_K f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mathrm{d}(x,y,z) \overset{\text{Trafo}}{\underset{\text{Fub}}{=}} \int_{\rho=r_0}^{r_1} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} f \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi\sin\theta \\ \rho\sin\varphi\sin\theta \\ \rho\cos\theta \end{pmatrix} \underbrace{\rho^2 \sin\theta}_{\text{Fu'det}} \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\rho}$$

Wann vertauschen Integral und Reihe?

Z121
Fazit

Für $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ möchten wir Integral und Reihe vertauschen:

$$\int_\Omega \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right) \mathrm{d}x \quad \stackrel{?}{=} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_\Omega f_k(x) \, \mathrm{d}x \right)$$

⚠ Einfache Gegenbeispiele zeigen: Vertauschbarkeit gilt nicht immer!

Für die Vertauschbarkeit haben wir folgende **hinreichende Kriterien**:

- Gleichheit gilt für $f_k \geq 0$: monotone Konvergenz! A309
- Gleichheit gilt für $\int \sum |f_k| < \infty$ bzw. für $\sum \int |f_k| < \infty$, D106
- insbesondere für konvergente Potenzreihen, $f_k(x) = a_k x^k$. D107

☺ Dieses einfache Kriterium ist in vielen Anwendungen nützlich.
Es verhindert insbesondere, dass Masse nach Unendlich verschwindet.

⚠ Andernfalls ist Vorsicht geboten: Vertauschbarkeit gilt nicht immer!
Schon in einfachsten Gegenbeispielen gilt $\sum \int f_k \neq \int \sum f_k$. D101

⚠ Diese Kriterien sind hinreichend, aber i.A. nicht notwendig. D429
Die majorisierte Konvergenz erlaubt genauere Aussagen.

Wann vertauschen Integral und Limes?

Z122
Fazit

Für $f_n \to f$ möchten wir Integral und Limes vertauschen:

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x) \, \mathrm{d}x \quad \stackrel{?}{=} \quad \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n(x) \, \mathrm{d}x$$

⚠ Einfache Gegenbeispiele zeigen: Vertauschbarkeit gilt nicht immer!

Für die Vertauschbarkeit haben wir folgende **hinreichende Kriterien**:

- Gleichheit gilt bei monotoner Konvergenz $0 \leq f_n \nearrow f$, A309
- bei majorisierter Konvergenz $f_n \to f$ mit $|f_n| \leq h$ und $\int_\Omega h < \infty$,
- insbesondere, wenn $\mathrm{vol}(\Omega) < \infty$ und $|f_n| \leq M \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

☺ Dies verhindert, dass Masse nach Unendlich verschwindet.

☺ Sei $h : \Omega \to [0, \infty]$ integrierbar. Auf der Teilmenge aller messbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{C}$ mit Schranke $|f| \leq h$ ist die Zuordnung $f \mapsto \int_\Omega f$ folgenstetig: Aus punktweiser Konvergenz $f_n \to f$ folgt $\int_\Omega f_n \to \int_\Omega f$.
Dies ist eine starke und nützliche Stetigkeitseigenschaft des Integrals!

⚠ Andernfalls ist Vorsicht geboten: Vertauschbarkeit gilt nicht immer!
Wie zuvor gesehen können selbst einfache Beispiele fehlschlagen.

Stetigkeit von Parameterintegralen

Wir wollen Stetigkeit nutzen und Grenzwerte unter das Integral ziehen:

$$\lim_{x\to x_0}\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y \overset{?}{=} \int_Y \lim_{x\to x_0} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_Y f(x_0,y)\,\mathrm{d}y$$

⚠ Einfache Gegenbeispiele zeigen: Vertauschbarkeit gilt nicht immer!

Sei $f: X\times Y\to\mathbb{C}$ mit $X\subseteq\mathbb{R}^p$ offen und $Y\subseteq\mathbb{R}^q$. Zudem existiere

$$F: X\to\mathbb{C} \quad \text{mit} \quad F(x) := \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Für die Stetigkeit von F haben wir folgende **hinreichende Kriterien**:

- Sie gilt, wenn f stetig ist und Y kompakt, oder allgemeiner,
- wenn f bezüglich x stetig ist und über Y majorisiert integrierbar.

In diesem Fall dürfen wir den Grenzwert unter das Integral ziehen:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y \overset{!}{=} \int_Y \lim_{x\to x_0} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_Y f(x_0,y)\,\mathrm{d}y.}$$

Ableitung von Parameterintegralen

Wir wollen differenzieren und die Ableitung unter das Integral ziehen:

$$F(x) = \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial}{\partial x_j}F(x) \overset{?}{=} \int_Y \frac{\partial}{\partial x_j} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

⚠ Einfache Gegenbeispiele zeigen: Vertauschbarkeit gilt nicht immer!

Sei $f: X\times Y\to\mathbb{C}$ mit $X\subseteq\mathbb{R}^p$ offen und $Y\subseteq\mathbb{R}^q$. Zudem existiere

$$F: X\to\mathbb{C} \quad \text{mit} \quad F(x) := \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Für die stetige Differenzierbarkeit von F haben wir folgende Kriterien:

- Sie gilt, wenn $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ stetig ist und Y kompakt, oder allgemeiner,
- wenn $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ bezüglich x_j stetig ist und über Y majorisiert int'bar.

In diesem Fall dürfen wir die Ableitung unter das Integral ziehen:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_j}F(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y \overset{!}{=} \int_Y \frac{\partial}{\partial x_j} f(x,y)\,\mathrm{d}y.}$$

Kurvenintegrale

Ein **Weg** ist eine stetige Abbildung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, hier meist $n \in \{2,3\}$.
Er parametrisiert die **Kurve** $\Gamma = \{\, \gamma(t) \mid a \le t \le b \,\} \subseteq \mathbb{R}^n$ als Bildmenge.

Der Weg heißt **regulär**, wenn γ injektiv ist und stetig differenzierbar mit $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$. Seine Bildmenge Γ heißt dann **glatte Kurve**.

Am Punkt $s = \gamma(t)$ heftet das infinitesimale **Wegelement** $\mathrm{d}s = \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$.
Das **Kurvenintegral** eines Skalarfeldes $g : \mathbb{R}^n \supseteq \Gamma \to \mathbb{R}$ entlang γ ist

$$\int_\Gamma g\,|\mathrm{d}\Gamma| = \int_{s\in\Gamma} g(s)\,|\mathrm{d}s| := \int_{t=a}^{b} g\big(\gamma(t)\big) \cdot \big|\gamma'(t)\big|\,\mathrm{d}t.$$

Speziell für $g = 1$ erhalten wir so die Länge $\mathrm{vol}_1(\Gamma) = \ell(\gamma)$ der Kurve Γ.
Das **Arbeitsintegral** eines Vektorfeldes $f : \mathbb{R}^n \supseteq \Gamma \to \mathbb{R}^n$ entlang γ ist

$$\int_\Gamma f \bullet \mathrm{d}\Gamma = \int_{s\in\Gamma} f(s) \bullet \mathrm{d}s := \int_{t=a}^{b} f\big(\gamma(t)\big) \bullet \gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Das Arbeitsintegral wechselt das Vorzeichen bei Orientierungsumkehr.

☺ Diese Integrale sind invariant bei (positiver) Umparametrisierung und somit wohldefiniert für jede (orientierte) stückweise glatte Kurve Γ.

Glatte Flächenstücke

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt **Kompaktum mit stückweise glattem Rand**, wenn gilt:

- D ist kompakt und der Rand ∂D ist eine stückweise glatte Kurve.
- In jedem regulären Randpunkt $s \in \partial D$ liegt das Innere von D auf der einen Seite von ∂D und das Äußere auf der anderen Seite.

Beispiele: Rechtecke, Polygone, Kreisscheiben, Kreisringe, ...

Der Rand ist **positiv orientiert**, wenn D stets links von ∂D liegt.
Die Einheitstangente $t_{\partial D} : \partial D \to \mathbb{R}^2$ zeigt in Richtung der Orientierung, die Einheitsnormale $n_{\partial D} = \circlearrowright t_{\partial D} : \partial D \to \mathbb{R}^2$ zeigt überall aus D heraus.

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ zusammenhängend kompakt mit stückweise glattem Rand.
Ein parametrisiertes **Flächenstück** ist eine C^1–Abbildung $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$.

Senkrecht auf den **Tangentenvektoren** $\partial_x\Phi(x,y)$ und $\partial_y\Phi(x,y)$ steht der **Normalenvektor** $\partial_x\Phi(x,y) \times \partial_y\Phi(x,y)$ für $(x,y) \in D$.

Die Parametrisierung Φ heißt **regulär**, wenn sie injektiv ist und zudem $\partial_x\Phi(x,y) \times \partial_y\Phi(x,y) \neq 0$ in jedem Punkt $(x,y) \in D$ erfüllt.

Das Bild $S = \Phi(D) \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt dann **glattes Flächenstück**.
Der Rand $\partial S := \Phi(\partial D)$ ist dann eine stückweise glatte Kurve.

Flächenintegrale

Flächen $S \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrisieren wir (stückweise) durch $\Phi : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to S$.
An $s = \Phi(x, y)$ heftet das inf. Flächenelement $\mathrm{d}S = (\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi)\,\mathrm{d}(x, y)$.
Das **Flächenintegral** eines Skalarfeldes $g : \mathbb{R}^3 \supseteq S \to \mathbb{R}$ entlang Φ ist

$$\int_{s \in S} g(s)\,|\mathrm{d}S| := \int_{(x,y) \in D} g\big(\Phi(x, y)\big) \cdot \big|\partial_x \Phi(x, y) \times \partial_y \Phi(x, y)\big|\,\mathrm{d}(x, y).$$

Speziell für $g = 1$ erhalten wir den Inhalt $\mathrm{vol}_2(\Phi) = \mathrm{vol}_2(S)$ der Fläche S.
Das **Flussintegral** eines Vektorfeldes $f : \mathbb{R}^3 \supseteq S \to \mathbb{R}^3$ entlang Φ ist

$$\int_{s \in S} f(s) \cdot \mathrm{d}S := \int_{(x,y) \in D} f\big(\Phi(x, y)\big) \cdot \big(\partial_x \Phi(x, y) \times \partial_y \Phi(x, y)\big)\,\mathrm{d}(x, y).$$

Der Normalenvektor $\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi$ im Punkt $\Phi(x, y)$ steht senkrecht auf S.
Für das Flussintegral zählt daher nur der Anteil von f senkrecht zu S.

Das Flussintegral wechselt das Vorzeichen bei Orientierungsumkehr.

☺ Diese Integrale sind invariant bei (positiver) Umparametrisierung, somit wohldefiniert für jede (orientierte) stückweise glatte Fläche S.

Kompakta mit stückweise glattem Rand

Hier ist $|\mathrm{d}S| = |\mathrm{d}\Phi| = |\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi|\,\mathrm{d}(x, y)$ das **skalare Flächenelement** und $\mathrm{d}S = \mathrm{d}\Phi = (\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi)\,\mathrm{d}(x, y)$ das **vektorielle Flächenelement**.

Die Zerlegung $\mathrm{d}S = n(s)\,|\mathrm{d}S|$ definiert die Einheitsnormale $n : S \to \mathbb{R}^3$.
Diese definiert für jedes Flächenstück eine der beiden Orientierungen.
Für stückweise glatte Flächen verlangen wir, dass die Orientierungen einzelner Flächenstücke am gemeinsamen Rand zusammenpassen.

☺ Zur numerischen Approximation können wir die Kurve / Fläche triangulieren und das Vektorfeld linearisieren / Taylor–entwickeln. Für Polygone E017 oder Polyeder G325 und lineare Vektorfelder ist dies exakt.

$V \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt **Kompaktum mit stückweise glattem Rand**, wenn gilt:

- V ist kompakt und der Rand ∂V ist eine stückweise glatte Fläche.
- In jedem regulären Punkt $s \in \partial V$ liegt das Innere von V auf der einen Seite von ∂V und das Äußere von V auf der anderen Seite.

Beispiele: Quader, Polyeder, Vollkugeln, Kugelschalen, Volltori, ...

Der Rand ∂V ist **positiv orientiert**, wenn $n_{\partial V}$ stets nach außen zeigt.
Die Einheitsnormale ist der Einheitsvektor in Richtung $\mathrm{d}\Phi = n_{\partial V} |\mathrm{d}\Phi|$.

Der HDI als eindimensionaler Integralsatz

Unsere Integralsätze beruhen alle auf dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI, Satz B1ı) und verallgemeinern diesen:

1dim: Jedes kompakte Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ hat als Rand $\partial[a,b] = \{a,b\}$. Der Startpunkt zählt negativ, $n(a) = -1$, der Zielpunkt positiv, $n(b) = +1$. Für jede stetig differenzierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt dann

$$\int_{s\in[a,b]} f'(s)\,\mathrm{d}s \overset{\text{HDI}}{=} \sum_{s\in\{a,b\}} f(s)\,n(s) = f(b) - f(a).$$

Allgemein: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zudem sei $\Gamma \subseteq \Omega$ eine stückweise glatte und orientierte Kurve. Für das Arbeitsintegral von $f' = \operatorname{grad} f$ entlang Γ gilt dann:

$$\int_{s\in\Gamma} f'(s) \bullet \mathrm{d}s \overset{\text{HDI}}{=} \sum_{s\in\partial\Gamma} f(s)\,n(s)$$

Die Orientierung teilt die Randpunkte $s \in \partial\Gamma$ in Start- und Zielpunkte; Startpunkte zählen negativ, $n(s) = -1$, Zielpunkte positiv, $n(s) = +1$. Ist die Kurve Γ geschlossen, also $\partial\Gamma = \emptyset$, so folgt $\oint_{s\in\Gamma} f'(s) \bullet \mathrm{d}s = 0$.

Der Integralsatz von Gauß

☺ Der Satz von Gauß in der Ebene $\mathbb{R}^2$ und im Raum $\mathbb{R}^3$ besagt: Das Volumenintegral der Divergenz $\operatorname{div}(f)$ über das Kompaktum V ist gleich dem Flussintegral von f nach außen über die Randfläche ∂V.

2dim: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt mit stückweise glatter Randkurve $\Gamma = \partial D$. Sei $n : \Gamma \to \mathbb{R}^2 : s \mapsto n(s)$ die nach außen weisende Einheitsnormale. Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to \mathbb{R}^2$ gilt dann

$$\int_{(x,y)\in D} \operatorname{div} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \overset{\text{Gauß}}{=} \int_{s\in\Gamma} f(s) \bullet n(s)\,|\mathrm{d}s| = \int_{s\in\Gamma} f(s) \times \mathrm{d}s.$$

3dim: Sei $V \subseteq \mathbb{R}^3$ kompakt mit stückweise glatter Randfläche $S = \partial V$. Sei $n : S \to \mathbb{R}^3 : s \mapsto n(s)$ die nach außen weisende Einheitsnormale. Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \supseteq V \to \mathbb{R}^3$ gilt dann

$$\int_{(x,y,z)\in V} \operatorname{div} f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) \overset{\text{Gauß}}{=} \int_{s\in S} f(s) \bullet n(s)\,|\mathrm{d}S| = \int_{s\in S} f(s) \bullet \mathrm{d}S.$$

Gleichwertige Schreibweise mit $n(s)\,|\mathrm{d}s| = \circlearrowright \mathrm{d}s$ bzw. $\mathrm{d}S = n(s)\,|\mathrm{d}S|$.

Der Integralsatz von Green und Stokes

☺ Der Satz von Green in der Ebene bzw. von Stokes im Raum:
Das Flächenintegral der Rotation $\operatorname{rot}(f)$ über die Fläche S ist gleich dem Arbeitsintegral von f entlang der Randkurve ∂S.

2dim: Sei $S \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt mit stückweise glatter Randkurve $\Gamma = \partial S$.
Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \supseteq S \to \mathbb{R}^2$ gilt dann

$$\boxed{\int_{s \in S} \operatorname{rot} f(s) \cdot \mathrm{d}S \overset{\text{Green}}{=} \int_{s \in \Gamma} f(s) \cdot \mathrm{d}s.}$$

3dim: Allgemeiner gilt dies für jede stückweise glatte, orientierte Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$ und jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \supseteq S \to \mathbb{R}^3$.

Die Zerlegung $\mathrm{d}S = n(s)\,|\mathrm{d}S|$ ergibt das gleichwertige Flächenintegral

$$\boxed{\int_{s \in S} \operatorname{rot} f(s) \cdot n(s)\,|\mathrm{d}S| \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{s \in \Gamma} f(s) \cdot \mathrm{d}s.}$$

Die stückweise glatte Randkurve $\Gamma = \partial S$ sei hierbei positiv orientiert.
Liegt die Fläche S in einer Ebene, so reduziert sich Stokes zu Green.

Zusammenfassung und Rückblick

Diese Integralsätze sind gut und schön! Geht es auch einfacher?
Nein, denn Sie sollen nicht nur fühlen, sondern auch rechnen können!

Zur präzisen Formulierung und konkreten Berechnung benötigen Sie daher alle Werkzeuge für Kurven-, Flächen- und Volumenintegrale.

Hierzu brauchen Sie solide Grundlagen und effiziente Methoden:
Definitionen & Sätze, Beispiele & Rechentricks... sowie Übung!

Nochmal die Lernziele laut Modulhandbuch:

- Die Studierenden verfügen über grundlegende Kenntnisse zur Integralrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher. [...]
- Sie sind in der Lage, die behandelten Methoden selbstständig, sicher, kritisch, korrekt und kreativ anzuwenden.
- Sie besitzen die mathematische Grundlage für das Verständnis quantitativer Modelle aus den Ingenieurwissenschaften.
- Sie können sich mit Spezialist:innen aus dem ingenieurs- und naturwissenschaftlichen Umfeld über die benutzten mathematischen Methoden verständigen.

Holomorphe Funktionen und Laurent–Reihen

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Der Weg $\gamma : [a,b] \to \Omega$ sei stückweise stetig diff'bar.
Das **komplexe Wegintegral** einer stetigen Funktion $f : \mathbb{C} \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$ ist

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_{t=a}^{b} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t. \quad \text{Merkregel: } z = \gamma(t),\ \mathrm{d}z = \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

Eine komplexe Funktion $f = u + \mathrm{i}v : \mathbb{C} \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$ heißt **holomorph**, wenn sie auf ganz Ω komplex differenzierbar ist und $f' : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig.

$\Leftrightarrow$ **Cauchy–Riemann–Gleichungen** $\partial_x u = \partial_y v$ und $\partial_x v = -\partial_y u$.

$\Leftrightarrow$ Die **Strömung** $\overline{f} = (u, -v) : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \to \mathbb{R}^2$ erfüllt $\operatorname{div} \overline{f} = \operatorname{rot} \overline{f} = 0$.

$\Leftrightarrow$ Auf jeder Kreisscheibe $B(z_0, \rho) \subseteq \Omega$ gleicht f einer **Potenzreihe**:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit} \quad a_k := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}\zeta$$

$\Leftrightarrow$ Auf jedem Kreisring $K(z_0, \sigma, \rho) \subseteq \Omega$ gleicht f einer **Laurent–Reihe**:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit} \quad a_k := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}\zeta$$

Der Koeffizient $\operatorname{res}_{z_0}(f) := a_{-1}$ heißt das **Residuum** von f in z_0.

Der Residuensatz für Kompakta

Wir nutzen den Satz von Green / Gauß in der komplexen Ebene $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.
Für holomorphe Funktionen erhalten wir so den **Residuensatz** F4D:

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \setminus S \to \mathbb{C}$ holomorph auf Ω bis auf eine Menge S isolierter Singularitäten. Sei $D \subseteq \Omega$ kompakt mit stückweise glattem Rand, wobei $\partial D \cap S = \emptyset$. Dann gilt

$$\boxed{\int_{\partial D} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 2\pi\mathrm{i} \sum\nolimits_{s \in \mathring{D}} \operatorname*{res}_s(f).}$$

Das **Residuum** von $f : K(s, 0, \rho) \to \mathbb{C}$ im Punkt s ist definiert durch

$$\operatorname*{res}_s(f) := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial B(s,r)} f(z)\,\mathrm{d}z \quad \text{für } 0 < r < \rho.$$

Ist s eine **höchstens n-fache Polstelle** von f, so gilt

$$\operatorname*{res}_s(f) = \lim_{z \to s} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{n-1} \Big[(z - s)^n f(z)\Big].$$

Für $f = p/q$ mit **einfacher Polstelle** s gilt $\operatorname{res}_s(p/q) = p(s)/q'(s)$.

☺ Damit lassen sich Residuen in Polstellen meist leicht berechnen.

Residuenkalkül für reelle Integrale

(1) Sei $R(x,y) = P(x,y)/Q(x,y)$ eine rationale Funktion mit Nenner $Q(\cos t, \sin t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann ergibt die Weierstraß–Substitution

$$f(z) := \frac{1}{\mathrm{i}z} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}}\right)$$

eine rationale Funktion in z ohne Polstellen auf $\partial B(0,1)$, und es gilt

$$\boxed{\int_{t=0}^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t = \int_{\partial B(0,1)} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum\nolimits_{s\in B(0,1)} \operatorname*{res}_{s}(f).}$$

(2) Sei $f(z) = p(z)/q(z)$ eine rationale Funktion; reelle Polstellen $z \in \mathbb{R}$ seien höchstens einfach. Für $\deg(q) \geq \deg(p) + 2$ und $u \geq 0$ gilt dann:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}ux}\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\mathrm{Im}(s)>0} \operatorname*{res}_{z=s}\Big[f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}uz}\Big] + \pi\mathrm{i} \sum_{\mathrm{Im}(s)=0} \operatorname*{res}_{z=s}\Big[f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}uz}\Big]}$$

Diese Gleichung gilt auch noch im Falle $\deg(q) \geq \deg(p) + 1$ und $u > 0$.

Residuenkalkül für reelle Integrale

(3) Sei $f(z) = p(z)/q(z)$ rational mit $p, q \in \mathbb{C}[z]$ und $\deg q \geq \deg p + 2$, aber ohne Polstellen in $\mathbb{R}_{\geq 0}$, gekürzt also $q(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann gelten folgende Formeln für Integrale über die reelle Halbachse:

$$\boxed{\begin{aligned}
\int_{x=0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= -\sum\nolimits_{s\neq 0} \operatorname*{res}_{z=s}\Big[f(z)\ln(z)\Big] \\
\int_{x=0}^{\infty} f(x)\ln(x)\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\sum\nolimits_{s\neq 0} \operatorname*{res}_{z=s}\Big[f(z)\ln(z)^2\Big] - \pi\mathrm{i}\int_{x=0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \\
\int_{x=0}^{\infty} f(x)\,x^{\alpha}\,\mathrm{d}x &= \frac{2\pi\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}} \sum\nolimits_{s\neq 0} \operatorname*{res}_{z=s}\Big[f(z)\,z^{\alpha}\Big] \quad \text{für } 0<\alpha<1
\end{aligned}}$$

Hierbei nutzen wir für jede komplexe Zahl $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ mit $0 < r < \infty$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$ ihren komplexen Logarithmus mit $\ln z := \ln r + \mathrm{i}\varphi$. Auf $\mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ entspricht dies dem Nebenzweig $\ln = \ln_{\pi}$ aus Satz F2M.

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ setzen wir $z^{\alpha} := \mathrm{e}^{\alpha \ln z}$. Auf $\mathbb{R}_{>0}$ sind das die üblichen reellen Definitionen; ihre komplexen Fortsetzungen sind unstetig quer zu $\mathbb{R}_{>0}$.

Physikalische Anwendungen der Integralsätze

Strömungslehre: Die Massenbilanz als Integralgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_K \varrho\,\mathrm{d}K + \oiint_{S=\partial K} (\varrho\vec{v}\cdot\vec{n})\,\mathrm{d}S = 0$$

Hieraus erhalten wir dank Gauß die **Kontinuitätsgleichung**:

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho\vec{v}) = 0, \quad \text{bei } \varrho = \mathrm{const} \text{ also } \operatorname{div}\vec{v} = 0$$

Wärmeleitung: Die Wärmebilanz als Integralgleichung:

$$\iiint_K q(t,x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_K u(t,x)\,\mathrm{d}x + \oiint_{S=\partial K} \vec{f}(t,x)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$$

Hieraus erhalten wir Fouriers berühmte **Wärmeleitungsgleichung**:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\,\Delta u = q \quad \text{mit} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

☺ Diese Differentialgleichung können wir lösen, exakt oder numerisch.

Physikalische Anwendungen der Integralsätze

Elektrodynamik: Die Maxwell–Gleichungen als Integralgleichungen:

Coulomb Ladungsgesetz $\quad \oiint_{\partial V} \vec{E}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \iiint_V 4\pi\varrho\,\mathrm{d}V$

Faraday Induktionsgesetz $\quad \oint_{\partial S} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = -\frac{1}{c}\iint_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$

Gauß Quellenfreiheit $\quad \oiint_{\partial V} \vec{B}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = 0$

Ampère Durchflutungsgesetz $\quad \oint_{\partial S} \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \frac{1}{c}\iint_S \left(4\pi\vec{J} + \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$

Dank Gauß und Stokes erhalten wir hieraus Differentialgleichungen:

$$\nabla\cdot\vec{E} = 4\pi\varrho, \qquad \nabla\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0,$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0, \qquad \nabla\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}.$$

☺ Daraus folgen insbesondere Ladungserhaltung und Wellengleichung.

Exakte und konservative Vektorfelder

Ein Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^n$ heißt **exakt**, oder **Gradientenfeld**, wenn es ein Potential erlaubt, also ein Skalarfeld $F : U \to \mathbb{R}$ mit $F' = f$ existiert.

$$f = F' = \operatorname{grad} F = \big(\partial_1 F, \dots, \partial_n F\big) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}\right).$$

☺ Für jeden stückweise stetig diff'baren Weg $\gamma : [a,b] \to U$ gilt dann:

$$\int_\gamma f \bullet \mathrm{d}\gamma = \int_{t=a}^b F'(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=a}^b \frac{\mathrm{d}F(\gamma(t))}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Ist der Weg γ geschlossen, $\gamma(a) = \gamma(b)$, so folgt demnach $\oint_\gamma f \bullet \mathrm{d}\gamma = 0$.

Ein Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^n$ heißt **konservativ**, oder **global wirbelfrei**, wenn $\oint_\gamma f \bullet \mathrm{d}\gamma = 0$ für jeden geschlossenen Weg $\gamma : [a,b] \to U$ gilt.
☺ Das garantiert: Arbeitsintegrale hängen nur von Start und Ziel ab.

Diese beiden Begriffe erweisen sich als äquivalent (Hauptsatz H2A):
(1) Besitzt das Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^n$ ein Potential, so ist f konservativ.
(2) Ist umgekehrt f konservativ, so ist $F(x) = \int_{s=p}^x f(s) \bullet \mathrm{d}s$ ein Potential.
☺ Der Wert $F(x)$ ist wohldefiniert, unabhängig vom gewählten Weg γ.

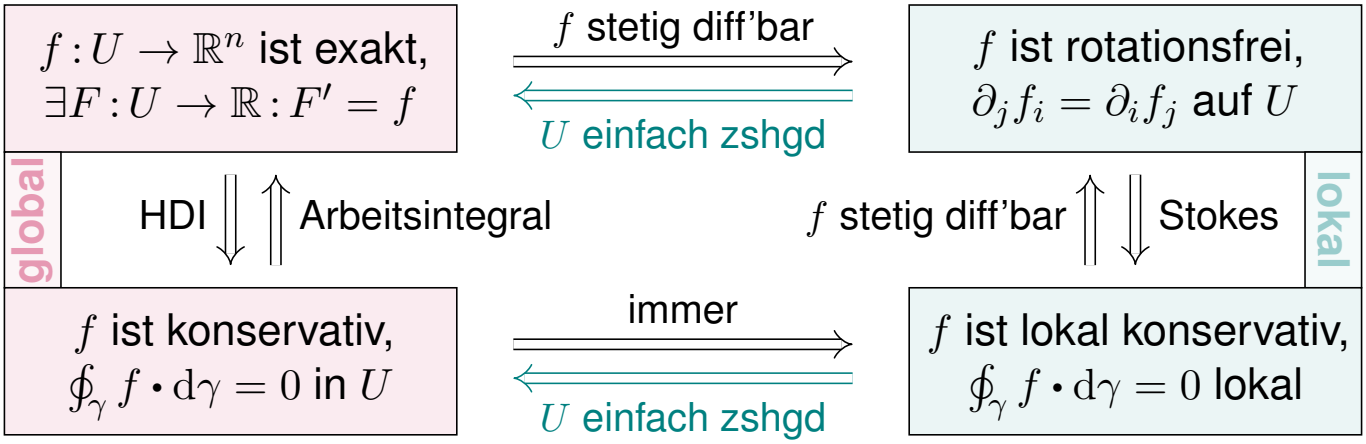
Konstruktion von Potentialen

Lösung des Potentialproblems bei einfachem Zusammenhang (H2E):

Unser Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sei einfach zusammenhängend, z.B. konvex oder sternförmig zu p. Ein C^1–Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^n$ erlaubt genau dann ein Potential $F : U \to \mathbb{R}$, wenn f rotationsfrei ist, also $\partial_j f_i = \partial_i f_j$ erfüllt.

In diesem Fall erhalten wir ein Potential durch das Arbeitsintegral

$$F(x) = \int_{s=p}^x f(s) \bullet \mathrm{d}s = \int_{t=a}^b f(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \gamma : [a,b] \to U, \\ \gamma(a) = p, \gamma(b) = x. \end{cases}$$



Zusammenfassung und Verständnisfragen

Aufgabe: Unter welchen Voraussetzungen gilt. . . ?

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

$$(2) \qquad \int_X \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_Y \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$(3) \qquad \int_Y f(y)\,\mathrm{d}y = \int_X f(\Phi(x))\,|\det \Phi'(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$(4) \qquad \int_\Omega \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \int_\Omega f_k(x)\,\mathrm{d}x$$

$$(5) \qquad \int_\Omega \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \int_\Omega f_k(x)\,\mathrm{d}x$$

$$(6) \qquad \int_\Omega \lim_{k\to\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(x)\,\mathrm{d}x$$

$$(7) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_Y \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

Zusammenfassung und Verständnisfragen

(1) Voraussetzungen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung B123, kurz HDI: Die Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ sei stetig differenzierbar mit Ableitung $f = F'$. (Es genügt F stetig und stückweise stetig differenzierbar B213, oder noch allgemeiner F absolut stetig B214.)

(2) Gegenbeispiele C414: Vertauschbarkeit gilt nicht immer! Voraussetzungen des Satzes von Fubini C121: $f : X \times Y \to [0,\infty]$ sei messbar oder $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ absolut integrierbar.

(3) Voraussetzungen des Transformationssatzes C209: Die Mengen $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ seien messbar, $f : Y \to [0,\infty]$ messbar oder $f : Y \to \mathbb{C}$ absolut integrierbar, $\Phi : X \to Y$ stetig differenzierbar und bijektiv (zumindest injektiv und surjektiv bis auf Ausnahmemengen vom Volumen Null).

(4) Das Integral ist linear! Die Behauptung gilt unter den üblichen Vorsichtsmaßnahmen: $f_k : \Omega \to [0,\infty]$ messbar oder $f_k : \Omega \to \mathbb{C}$ absolut integrierbar.

(5) Gegenbeispiele D101: Für Reihen, also unendliche Summen, gilt Vertauschung nicht immer! Hinreichend ist $f_k : \Omega \to [0,\infty]$ messbar oder L^1–Konvergenz $\sum_{k=0}^{\infty} \int_\Omega |f_k| \le \infty$. D106

(6) Für Grenzwerte und Integrale gilt Vertauschung nicht immer! D201 Voraussetzungen für den Satz der majorisierten Konvergenz D209: Hinreichend ist punktweise Konvergenz $f_k \to f$ (fast überall) und eine absolut integrierbare Majorante g mit $|f_k| \le g$ (fast überall) für alle k.

(7) Gegenbeispiele D409: Leider kann man nicht immer die Ableitung unter das Integral ziehen! Hinreichend ist insb. Y kompakt und $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ stetig und stetig nach x differenzierbar. Allgemein wie bei der majorisierten Konvergenz D309: Für jedes x ist $y \mapsto f(x,y)$ integrierbar über y, für fast jedes y ist $x \mapsto f(x,y)$ stetig differenzierbar nach x, und zudem existiert eine integrierbare Majorante $g(y)$, das heißt, $|(\partial f_y/\partial x_j)(x,y)| \le g(y)$ für alle x und fast alle y.

Zusammenfassung und Verständnisfragen

Aufgabe: Was ist ein Skalarfeld g? ein Vektorfeld f?
Unter welchen Voraussetzungen gilt. . . ?

$$(1) \qquad \partial_i \partial_j g = \partial_j \partial_i g$$

$$(2) \qquad \operatorname{rot} \operatorname{grad} g = 0$$

$$(3) \qquad \operatorname{div} \operatorname{rot} f = 0$$

$$(4) \qquad \int_{s \in \Gamma} \operatorname{grad} g(s) \cdot \mathrm{d}s = \sum\nolimits_{s \in \partial\Gamma} g(s)\, n(s)$$

$$(5) \qquad \int_{s \in S} \operatorname{rot} f(s) \cdot \mathrm{d}S = \int_{s \in \partial S} f(s) \cdot \mathrm{d}s$$

$$(6) \qquad \int_{v \in V} \operatorname{div} f(v)\, \mathrm{d}V = \int_{s \in \partial V} f(s) \cdot \mathrm{d}S$$

Erklären Sie Bedeutung, Definition und Funktionsweise dieser Formeln.
Welche physikalischen und mathematischen Anwendungen kennen Sie?

Zusammenfassung und Verständnisfragen

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Gebiet, also eine offene zusammenhängende Teilmenge. Hierauf betrachten wir ein Skalarfeld g, also eine stetige Abbildung $g : \Omega \to \mathbb{R}$, sowie ein Vektorfeld f, also eine stetige Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$. Sind diese zudem stetig differenzierbar, so definieren wir wie üblich die Ableitungen grad, rot, div, siehe zum Beispiel die Wiederholung zu Beginn von Kapitel H.

Aussage (1) gilt für alle zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $g : \Omega \to \mathbb{R}$: Das ist der Satz von Schwarz (D4A). Damit rechnet man die angegebenen Identitäten (2) und (3) leicht nach. H104

Die Gleichungen (4–6) sind unsere Integralsätze. Hierzu seien f und g stetig differenzierbar. (Etwas weniger genügt, zum Beispiel Lipschitz–stetig und somit fast überall differenzierbar.)

Für den HDI (4) sei $\Gamma \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ eine stückweise glatte Kurve vom Startpunkt p zum Zielpunkt q mit vektoriellem Wegelement $\mathrm{d}s$. Hierzu sei Γ orientiert; genau wie beim eindimensionalen HDI werten wir Startpunkte negativ, $n(p) = -1$, und Zielpunkte positiv, $n(q) = +1$. Allgemein kann eine solche Kurve Γ mehrere Komponenten und mehrere Randpunkte $s \in \partial\Gamma$ haben.

Für Stokes (5) sei $S \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ eine orientierte, stückweise glatte Fläche mit vektoriellem Flächenelement $\mathrm{d}S = n\,|\mathrm{d}S|$, also Einheitsnormale $n : S \to \mathbb{R}^3$ und skalarem Flächenelement $|\mathrm{d}S|$. Die Randkurve $\Gamma = \partial S$ ist dann ebenfalls stückweise glatt und wird positiv orientiert gemäß der Rechte-Hand-Regel. (Für ebene Flächen $S \subseteq \mathbb{R}^2$ entspricht der Satz von Stokes im Raum $\mathbb{R}^3$ dem Satz von Green in der Ebene $\mathbb{R}^2$, siehe Kapitel E. Beide sind äquivalent.)

Für Gauß (6) schließlich sei $V \subseteq \Omega$ ein Kompaktum mit stückweise glatter Randfläche ∂V und dem üblichen euklidischen Volumenelement $\mathrm{d}V = \mathrm{d}(x_1, x_2, x_3)$. Die Randfläche $S = \partial V$ wird orientiert durch die nach außen weisende Einheitsnormale $n : S \to \mathbb{R}^3$, so dass $\mathrm{d}S = n\,|\mathrm{d}S|$.

Zusammenfassung und Verständnisfragen

Z221
Fazit

Aufgabe: Sei $A \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Gerade, D eine Kreisscheibe um 0 sowie K eine Kugel um 0. Begründen oder widerlegen Sie:

(1) Jeder stetige Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ hat endliche Länge.

(2) Jeder stetig diff'bare Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ hat endliche Länge.

(3) Für $f : \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ mit $\operatorname{div}(f) = 0$ gilt $\int_{\partial D} f(s) \times \mathrm{d}s = 0$.

(4) Für $f : \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ mit $\operatorname{rot}(f) = 0$ gilt $\int_{\partial D} f(s) \cdot \mathrm{d}s = 0$.

(5) Für $f : \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{rot}(f) = 0$ gilt $\int_{\partial D} f(s) \cdot \mathrm{d}s = 0$.

(6) Für $f : \mathbb{R}^3 \smallsetminus A \to \mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{rot}(f) = 0$ gilt $\int_{\partial D} f(s) \cdot \mathrm{d}s = 0$.

(7) Für $f : \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{div}(f) = 0$ gilt $\int_{\partial K} f(s) \cdot \mathrm{d}S = 0$.

(8) Für $f : \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ mit $f(x) = \mathrm{const} \cdot x/|x|^n$ gilt $\operatorname{div}(f) = 0$.

(9) Für $f : \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{div}(f) = 0$ gilt $f(x) = \mathrm{const} \cdot x/|x|^n$.

(0) Wikipedia zu *Konservative Kraft* (aufgerufen 11.11.2024): „Äquivalent sind: 1. Die Arbeit entlang jeder beliebigen geschlossenen Kurve innerhalb des Feldes ist gleich Null. [. . .] 4. Das Feld ist auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet definiert und [dort rotationsfrei].“

Zusammenfassung und Verständnisfragen

Z222
Fazit

Aussage (1) gilt nicht. Die Kochkurve ist ein beliebtes Gegenbeispiel. E104
Aussage (2) gilt dank der Integralformel $\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \, \mathrm{d}t$ für die Weglänge. E107

Aussage (3) gilt nicht immer! Gegenbeispiel ist das Quellenfeld $f(x,y) := (x,y)/(x^2+y^2)$. E317 Hier gilt $\operatorname{div}(f) = 0$ auf ganz $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ und dennoch $\int_{\partial D} f(s) \times \mathrm{d}s = 2\pi$.

Aussage (4) gilt nicht immer! Gegenbeispiel ist das Wirbelfeld $f(x,y) := (-y,x)/(x^2+y^2)$. E317 Hier gilt $\operatorname{rot}(f) = 0$ auf ganz $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ und dennoch $\int_{\partial D} f(s) \cdot \mathrm{d}s = 2\pi$.

Aussage (5) gilt dank Stokes und der Geometrie des Raumes: Wir haben $\partial D = \partial S$ für eine Hemisphäre $S \subseteq \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\}$, also $\int_{\partial D} f(s) \cdot \mathrm{d}s = \int_{\partial S} f(s) \cdot \mathrm{d}s = \int_S \operatorname{rot}(f) \cdot \mathrm{d}S = 0$.
Allgemein: Das Gebiet $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\}$ ist zwar nicht konvex oder sternförmig, aber dennoch einfach zusammenhängend! Das bedeutet, jede geschlossene Kurve Γ in $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\}$ ist zusammenziehbar, somit verschwindet längs Γ das Arbeitsintegral jedes rotationsfreien Vektorfeldes.

Aussage (6) gilt nicht immer! Gegenbeispiel ist das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters A, etwa das Wirbelfeld $f(x,y,z) = (-y,x,0)/(x^2+y^2)$ um die z–Achse A. H154
Hier gilt $\operatorname{rot}(f) = 0$ auf ganz $\mathbb{R}^3 \smallsetminus A$ und dennoch $\int_{\partial D} f(s) \cdot \mathrm{d}s = 2\pi$.

Aussage (7) gilt nicht immer! Gegenbeispiel ist das Feld einer im Ursprung konzentrierten Masse oder Ladung, also das Quellenfeld $f(x,y,z) = (x,y,z)/(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$. H137
Hier gilt $\operatorname{div}(f) = 0$ auf ganz $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\}$ und dennoch $\int_{\partial K} f(s) \cdot \mathrm{d}S = 4\pi$.

Aussage (8) rechnet man leicht nach. H237 Die Umkehrung (9) ist falsch, zum Beispiel erfüllt jedes konstante Vektorfeld f auch $\operatorname{div}(f) = 0$. Wenn wir jedoch verlangen, dass f divergenzfrei und zudem *radialsymmetrisch* ist, so folgt tatsächlich $f(x) = \mathrm{const} \cdot x/|x|^n$, siehe Satz H2F.

Zusammenfassung und Verständnisfragen

Aufgabe: Begründen Sie durch ein Ergebnis Ihrer Vorlesung oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel aus Ihrem Fundus:

(1) Jedes Vektorfeld $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ hat ein Potential.

(2) Jedes Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ hat ein Potential.

(3) Jedes Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\operatorname{rot}(f) = 0$ hat ein Potential.

(4) Jedes Vektorfeld $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $\partial_i f_j = \partial_j f_i$ hat ein Potential.

(5) Jedes Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ mit $\operatorname{rot}(f) = 0$ hat ein Potential.

(6) Jedes Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{rot}(f) = 0$ hat ein Potential.

(7) Jedes Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \smallsetminus A \to \mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{rot}(f) = 0$ hat ein Potential.

Hierbei sei $A \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Gerade, etwa die z–Achse.

(8) Jedes Feld $f : \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^n : f(x) = g(|x|) \cdot x/|x|$ hat ein Potential.

(9) Wikipedia zu *Rotation eines Vektorfeldes* (aufgerufen 11.11.2021): „Die Divergenz der Rotation eines Vektorfeldes ist gleich null. Umgekehrt ist in einfach zusammenhängenden Gebieten [im $\mathbb{R}^3$] ein Feld, dessen Divergenz gleich null ist, die Rotation eines anderen Vektorfeldes.“

Zusammenfassung und Verständnisfragen

Aussage (1) gilt immer: Dank HDI ist $F(x) = \int_{t=0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ eine Stammfunktion, also $F' = f$.

Aussage (2) gilt nicht immer: Notwendiges Kriterium ist $\operatorname{rot}(f) = 0$. Beispiel: Das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = (-y, x)$ erfüllt $\operatorname{rot}(f) = 2 \neq 0$. Demnach erlaubt f kein Potential, das heißt, es gibt keine Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} F = f$. Unnötig danach zu suchen!

Aussagen (3) und (4) gelten immer: Auf einfach zusammenhängenden Gebieten (wie $\mathbb{R}^n$) ist für C^1–Vektorfelder $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ das notwendige Kriterium $\operatorname{rot}(f) = 0$ auch hinreichend. H215

Aussage (5) gilt nicht immer. Unser zentrales Gegenbeispiel ist das Wirbelfeld. H205
Hier gilt $\operatorname{rot}(f) = 0$ auf ganz $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$, aber dennoch $\oint_{\partial B(0,r)} f(s) \cdot \mathrm{d}s = 2\pi$.

Aussage (6) gilt immer, denn im Gegensatz zur punktierten Ebene $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ ist der punktierte Raum $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\}$ einfach zusammenhängend. Hier ist $\operatorname{rot}(f) = 0$ hinreichend. H215

Aussage (7) gilt nicht immer. Gegenbeispiel ist das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters A, etwa das Wirbelfeld $f(x, y, z) = (-y, x, 0)/(x^2 + y^2)$ um die z–Achse A.
Hier gilt $\operatorname{rot}(f) = 0$ auf ganz $\mathbb{R}^3 \smallsetminus A$, aber dennoch $\oint_{\partial D} f(s) \cdot \mathrm{d}s = 2\pi$. H154

(8) Zu $f(x) = g(|x|) \cdot x/|x|$ mit g stetig finden wir explizit das Potential $F(x) = G(|x|)$ mit $G(r) = \int_1^r g(\rho)\,\mathrm{d}\rho$: Leiten Sie es geduldig ab, Sie finden $\operatorname{grad} F = f$. Somit $\operatorname{rot} f = 0$. H104

(9) Ja. H104 Nein! Prominentes Gegenbeispiel: Das Gebiet $U = \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\}$ ist einfach zshgd. H217
Das (Gravitations-)Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto x/|x|^3$ erfüllt $\operatorname{div}(f) = 0$ auf ganz U. H137
Für jede Sphäre S um 0 gilt $\int_S f \cdot \mathrm{d}S = 4\pi > 0$. H137 Somit ist $f = \operatorname{rot}(g)$ unmöglich! G316
Dank $\partial S = \emptyset$ und dem Satz von Stokes (G3E) gilt nämlich $\int_S \operatorname{rot}(g) \cdot \mathrm{d}S = \int_{\partial S} g \cdot \mathrm{d}s = 0$.

Skalarprodukt periodischer Funktionen

Für Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ definieren wir ihr **Skalarprodukt** durch

$$L^p \times L^q \to \mathbb{C} \;:\; (f, g) \mapsto \langle\, f \mid g \,\rangle := \frac{1}{b-a} \int_{t=a}^{b} \overline{f(t)}\, g(t)\, \mathrm{d}t.$$

Der Integrand $\overline{f}g$ sei absolut integrierbar, etwa $f \in L^\infty$ beschränkt und $g \in L^1$ absolut integrierbar, allgemein $f \in L^p, g \in L^q$ mit $1/p + 1/q = 1$.
Bei Periode T wählen wir ein beliebiges Intervall der Länge $b - a = T$.
Dieses Periodenintegral ist invariant bei Verschieben oder Vervielfachen.
Sei $\omega = 2\pi/T$. Als **Basisfunktion** $e_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ definieren wir

$$e_k(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} = \cos(k\omega t) + \mathrm{i}\sin(k\omega t).$$

Für diese Funktionen gelten die **Orthonormalitätsrelationen**

$$\langle\, e_k \mid e_\ell \,\rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell\text{:} \quad \text{paarweise Orthogonalität,} \\ 1 & \text{für } k = \ell\text{:} \quad \text{Normierung auf Länge } 1. \end{cases}$$

Ähnliche, etwas kompliziertere Formeln gelten für $\cos(k\omega t)$ und $\sin(k\omega t)$.
☺ Meist gehen wir mit $x = \omega t$ zur Periode $T = 2\pi$ und $\omega = 1$ über.

Trigonometrische Polynome

Trigonometrisches Polynom nennt man jede $\mathbb{C}$–Linearkombination

$$f(t) \;=\; \sum_{k=-n}^{n} c_k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} \;=\; \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t).$$

☺ Die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist ein $\mathbb{C}$–Vektorraum. Hierin ist die Teilmenge aller T–periodischen Funktionen ein Untervektorraum.
Die Basisfunktion e_k spannen den Unterraum der trigon. Polynome auf.
Jede solche Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ bestimmt ihre Koeffizienten gemäß

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t}\, f(t)\, \mathrm{d}t &&= \langle\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} \mid f \,\rangle \quad \text{bzw.} \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_{t=0}^{T} \cos(k\omega t)\, f(t)\, \mathrm{d}t &&= 2\langle\, \cos(k\omega t) \mid f \,\rangle, \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_{t=0}^{T} \sin(k\omega t)\, f(t)\, \mathrm{d}t &&= 2\langle\, \sin(k\omega t) \mid f \,\rangle. \end{aligned}$$

☺ Formeln für c_k sind meist einfacher und übersichtlicher als für a_k, b_k.

Fourier–Koeffizienten und Fourier–Reihe

Allgemein: Ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ periodisch und über $[0,T]$ integrierbar, dann definieren wir durch obige Formeln die **Fourier–Koeffizienten** von f. Diese Koeffizienten von f fassen wir zur **Fourier–Reihe** zusammen:

$$f(t) \;\sim\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} \;=\; \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t).$$

⚠ Diese Reihe ist zunächst nur eine symbolische Schreibweise!
Gelesen: „Die Funktion f hat die Fourier–Koeffizienten c_k bzw. a_k, b_k."
Aufgrund der **Euler–Formel** $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} = \cos(k\omega t) + \mathrm{i}\sin(k\omega t)$ gilt dabei

$$a_k = c_k + c_{-k}, \qquad b_k = \mathrm{i}(c_k - c_{-k}),$$
$$c_k = \frac{a_k - \mathrm{i}b_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + \mathrm{i}b_k}{2}.$$

Ist f **reell**, also $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, so gilt $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, also $c_{-k} = \overline{c_k}$.
Ist f **gerade**, so liefert f eine **Cosinusreihe**, $b_k = 0$, $c_{-k} = c_k$.
Ist f **ungerade**, so liefert f eine **Sinusreihe**, $a_k = 0$, $c_{-k} = -c_k$.

Konvergenz-Kriterium von Dirichlet

Zur Funktion f ist $f_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}$ ihr n-tes **Fourier–Polynom**.
Wir sagen, die Fourier–Reihe von f **konvergiert im Punkt** $t\in\mathbb{R}$, wenn die Zahlenfolge $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ für $n\to\infty$ konvergiert. Beispiel: Ist f im Punkt t differenzierbar, so folgt $f_n(t)\to f(t)$. Allgemeiner gilt Satz I2A:

(1) Angenommen, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ erfüllt die Dirichlet–Bedingung im Punkt t, d.h. beide Grenzwerte $f(t\pm)$ und beide Ableitungen $f'(t\pm)$ existieren. Dann konvergiert in diesem Punkt t die Fourier–Reihe $f_n(t)$ gemäß

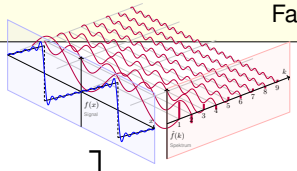
$$f_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} \;\to\; \frac{1}{2}\Big[f(t+) + f(t-)\Big] \quad \text{für} \quad n\to\infty.$$

(2) Ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ stetig und stückweise stetig differenzierbar mit $|f'|\le L$, so konvergiert die Fourier–Reihe $f_n\to f$ sogar gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$:

$$\big|f_n(t) - f(t)\big| \;\le\; 2L/\omega\cdot\ln(n)/n \;\to 0 \quad \text{für} \quad n\to\infty$$

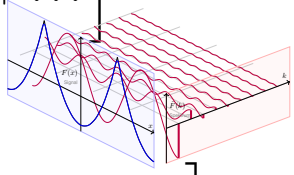
(3) Ist f mindestens d-mal stetig differenzierbar, so ist die gleichmäßige Konvergenz entsprechend schneller gemäß $|f_n - f| \le \mathrm{const}\cdot\ln(n)/n^d$.

Vier wichtige Beispiele



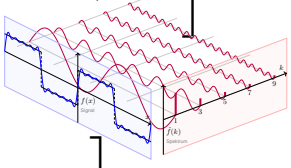
Für unsere Sägezahnfunktion I205 finden wir:

$$f(x) = 2\left[\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \ldots\right]$$



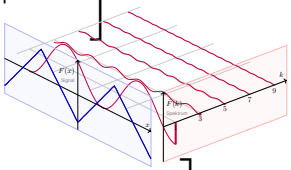
Für die Parabelfunktion $F(x) = \int_{t=0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ folgt I321:

$$F(x) = \frac{\pi^2}{6} - 2\left[\cos x - \frac{1}{2^2}\cos 2x + \frac{1}{3^2}\cos 3x - \frac{1}{4^2}\cos 4x + \ldots\right]$$



Für unsere Rechteckfunktion I225 finden wir:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \ldots\right]$$



Für die Dreieckfunktion $F(x) = \int_{t=0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ folgt I309:

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \frac{1}{7^2}\cos 7x + \ldots\right]$$

☺ Es gilt Konvergenz in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$: Wir schreiben „$=$“ statt „$\sim$“.
☺ Wir sehen explizit, wie schnell die Fourier–Koeffizienten abklingen.

Integrieren und Differenzieren

⚠ Fourier–Reihen können wir **nicht immer termweise ableiten**! I319
☺ Hingegen können wir sie **immer termweise integrieren**: I318

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periodisch und integrierbar, und $F(t) := C + \int_{u=0}^{t} f(u)\,\mathrm{d}u$.
Genau dann ist F periodisch, wenn $\int_{u=0}^{T} f(u)\,\mathrm{d}u = 0$. In diesem Fall gilt:

$$f(t) \sim c_0 + \sum_{k\neq 0} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} \quad \underset{?!}{\overset{\Longrightarrow}{\Longleftarrow}} \quad F(t) \sim C_0 + \sum_{k\neq 0} \frac{c_k}{\mathrm{i}k\omega}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}$$

☺ Wir können die Umkehrung sorgsam als Ableitungsregel für F lesen:
Hierzu sei F **absolut stetig** mit $F' = f$, also $F(t) = F(0) + \int_{u=0}^{t} f(u)\,\mathrm{d}u$.
Zum Beispiel genügt: F stetig und stückweise stetig differenzierbar.

Glattheit entspricht schnellem **Abklingen** der Fourier–Koeffizienten:
Für jede integrierbare Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ gilt $|c_k| \to 0$ für $|k| \to \infty$.
Ist f mindestens d-mal stetig differenzierbar, so gilt sogar $|k^d c_k| \to 0$.

Umgekehrt: Gilt $\sum |c_k| < \infty$, zum Beispiel $|c_k| \le c/|k|^\alpha$ für $\alpha > 1$,
so konvergiert $\sum c_k e_k$ gleichmäßig gegen eine stetige Funktion f.
Gilt sogar $\sum |k^d c_k| < \infty$, so ist f mindestens d-mal stetig diff'bar.

Signal und Spektrum

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ absolut integrierbar auf $[0,T]$ und T–periodisch.
Wir entwickeln f in **Harmonische** zur Grundfrequenz $\omega = 2\pi/T$:

$$f \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{f}, \quad \widehat{f}(k) := \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}.$$

Diese **Analyse** zerlegt das Signal $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ in sein Spektrum $\widehat{f}:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$.
Die Reihe ist wie zuvor zunächst nur eine symbolische Schreibweise;
wir schreiben Gleichheit nur im Falle der (punktweisen) Konvergenz.
Für diese Fourier–Analyse gelten folgende nützliche Rechenregeln:

Linearität:	$af \circ\!\!-\!\!\bullet\, a\widehat{f}$,	$f+g \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{f}+\widehat{g}$,
Symmetrie:	$f(-t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{f}(-k)$,	$\overline{f(t)} \circ\!\!-\!\!\bullet\, \overline{\widehat{f}(-k)}$,
Verschiebung:	$f(t-a) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega a}\widehat{f}(k)$,	$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\omega t} f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{f}(k-\ell)$,
Produkte:	$f\cdot g \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{f} * \widehat{g}$,	$f * g \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{f}\cdot\widehat{g}$.

Punktweises Produkt und Faltungsprodukt

☺ Diese nützlichen Eigenschaften vereinfachen unsere Rechnungen.
Linearität, Symmetrie und Verschiebung rechnet man leicht nach.

Die Fourier–Analyse übersetzt das punktweise Produkt $h = f\cdot g$
der Signale in das Faltungsprodukt $\widehat{h} = \widehat{f} * \widehat{g}$ der Spektren:

$$h = f\cdot g \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{h} = \widehat{f} * \widehat{g} \quad \text{mit} \quad \widehat{h}(k) = \sum_{m+n=k} \widehat{f}(m)\,\widehat{g}(n)$$

Konvergenz und Summierbarkeit sind garantiert falls $\widehat{f},\widehat{g} \in \ell^1(\mathbb{Z},\mathbb{C})$:
Aus $\sum|\widehat{f}(m)| < \infty$ und $\sum|\widehat{g}(n)| < \infty$ folgt dann $\sum|\widehat{h}(k)| < \infty$.

Umgekehrt gilt: Die Fourier–Analyse übersetzt das Faltungsprodukt
$h = f * g$ der Signale in das punktweise Produkt $\widehat{h} = \widehat{f}\cdot\widehat{g}$ der Spektren:

$$h = f * g \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{h} = \widehat{f}\cdot\widehat{g} \quad \text{mit} \quad h(t) = \frac{1}{T}\int_{u=0}^{T} f(u)\,g(t-u)\,\mathrm{d}u.$$

Konvergenz und Integrierbarkeit sind garantiert falls $f,g \in L^1([0,T],\mathbb{C})$:
Aus $\int_{u=0}^{T}|f(u)|\,\mathrm{d}u < \infty$ und $\int_{v=0}^{T}|g(v)|\,\mathrm{d}v < \infty$ folgt $\int_{t=0}^{T}|h(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$.

Satz von Parseval: Energiegleichung

Es gilt die **Parseval–Gleichung**, auch **Energiegleichung** genannt:

$$\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{\ell^2} \quad \text{also} \quad \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2$$

Ist dieser Wert endlich, so ist die Funktion f quadrat-integrierbar, kurz $f \in L^2$, und die Koeffizientenfolge $\widehat{f}$ ist quadrat-summierbar, kurz $\widehat{f} \in \ell^2$.
Alternativ nutzen wir die Co/Sinus-Reihe mit $c_{\pm k} = \frac{1}{2}(a_k \mp \mathrm{i} b_k)$:

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$$

$$\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2.$$

Für $f, g \in L^2$ gilt die **Parseval–Gleichung** zudem für Skalarprodukte:

$$\langle f \mid g \rangle = \langle \widehat{f} \mid \widehat{g} \rangle \quad \text{also} \quad \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \overline{f(t)}\, g(t) \,\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}(k)}\, \widehat{g}(k)$$

Die Fourier–Isometrie

Die **quadrat-integrierbaren** Funktionen bilden den $\mathbb{C}$–Vektorraum

$$L^2 = L^2([0,T],\mathbb{C}) := \left\{ f : [0,T] \to \mathbb{C} \;\middle|\; \int_{t=0}^{T} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t < \infty \right\}.$$

Hierauf haben wir als **Skalarprodukt** und **Norm** die Integrale

$$\langle f \mid g \rangle_{L^2} := \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \overline{f(t)}\, g(t) \,\mathrm{d}t \quad \text{und} \quad \|f\|_{L^2}^2 := \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t.$$

Die **quadrat-summierbaren** Folgen bilden den $\mathbb{C}$–Vektorraum

$$\ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}) := \left\{ \widehat{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 < \infty \right\}.$$

Hierauf haben wir als **Skalarprodukt** und **Norm** die Summen

$$\langle \widehat{f} \mid \widehat{g} \rangle_{\ell^2} := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}(k)}\, \widehat{g}(k) \quad \text{und} \quad \|\widehat{f}\|_{\ell^2}^2 := \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2.$$

Das Produkt ist absolut integrierbar/summierbar dank Cauchy–Schwarz.
☺ Beide Vektorräume L^2 und ℓ^2 scheinen zunächst sehr verschieden.
Die Fourier–Isometrie enthüllt jedoch das Gegenteil: Sie sind isomorph!

Die Fourier–Isometrie

Die **Fourier–Isometrie** J1A ist folgende Analyse / Synthese:

$$\boxed{(\mathscr{F}, \mathscr{F}^{-1}) \,:\, L^2([0,T],\mathbb{C}) \;\cong\; \ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}) \,:\, f \leftrightarrow \widehat{f}}$$

Jeder Funktion $f \in L^2$ ordnen wir ihre Fourier–Koeffizienten $\widehat{f} \in \ell^2$ zu:

$$\mathscr{F} \,:\, L^2 \to \ell^2 \,:\, f \mapsto \widehat{f} \quad \text{mit} \quad \widehat{f}(k) = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Umgekehrt definiert jede Koeffizientenfolge $\widehat{f} \in \ell^2$ eine Funktion $f \in L^2$:

$$\mathscr{F}^{-1} \,:\, \ell^2 \to L^2 \,:\, \widehat{f} \mapsto f \quad \text{mit} \quad f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}$$

Diese Abbildungen sind $\mathbb{C}$–linear und zueinander inverse Isometrien zwischen dem Funktionenraum $L^2([0,T],\mathbb{C})$ und Folgenraum $\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})$.

☺ Funktionen $f \in L^2$ und Folgen $\widehat{f} \in \ell^2$ entsprechen sich verlustfrei. Norm und Skalarprodukt bleiben erhalten dank Parseval–Gleichung.

☺ Eine Anwendung ist die **isoperimetrische Ungleichung** J1B: Allein der Kreis maximiert den umschlossenen Flächeninhalt F.

Die Fourier–Isometrie

Die Fourier–Isometrie nutzt wesentlich die Begriffe der linearen Algebra: Vektorräume mit Skalarprodukt I1G, Cauchy–Schwarz–Ungleichung I1H, Satz des Pythagoras I1I, Orthonormalisierung I1J. Zentrales Beispiel:

Die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist ein $\mathbb{C}$–Vektorraum. Hierin ist die Teilmenge der T–periodischen Funktionen ein Untervektorraum.

Die Funktionen $e_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} = \cos(k\omega t) + \mathrm{i}\sin(k\omega t)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ spannen den Unterraum $V = \{\, \sum_{k=-n}^{n} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} \mid n \in \mathbb{N},\, c_k \in \mathbb{C} \,\}$ aller trigonometrischen Polynome auf und sind hierin eine Orthonormalbasis.

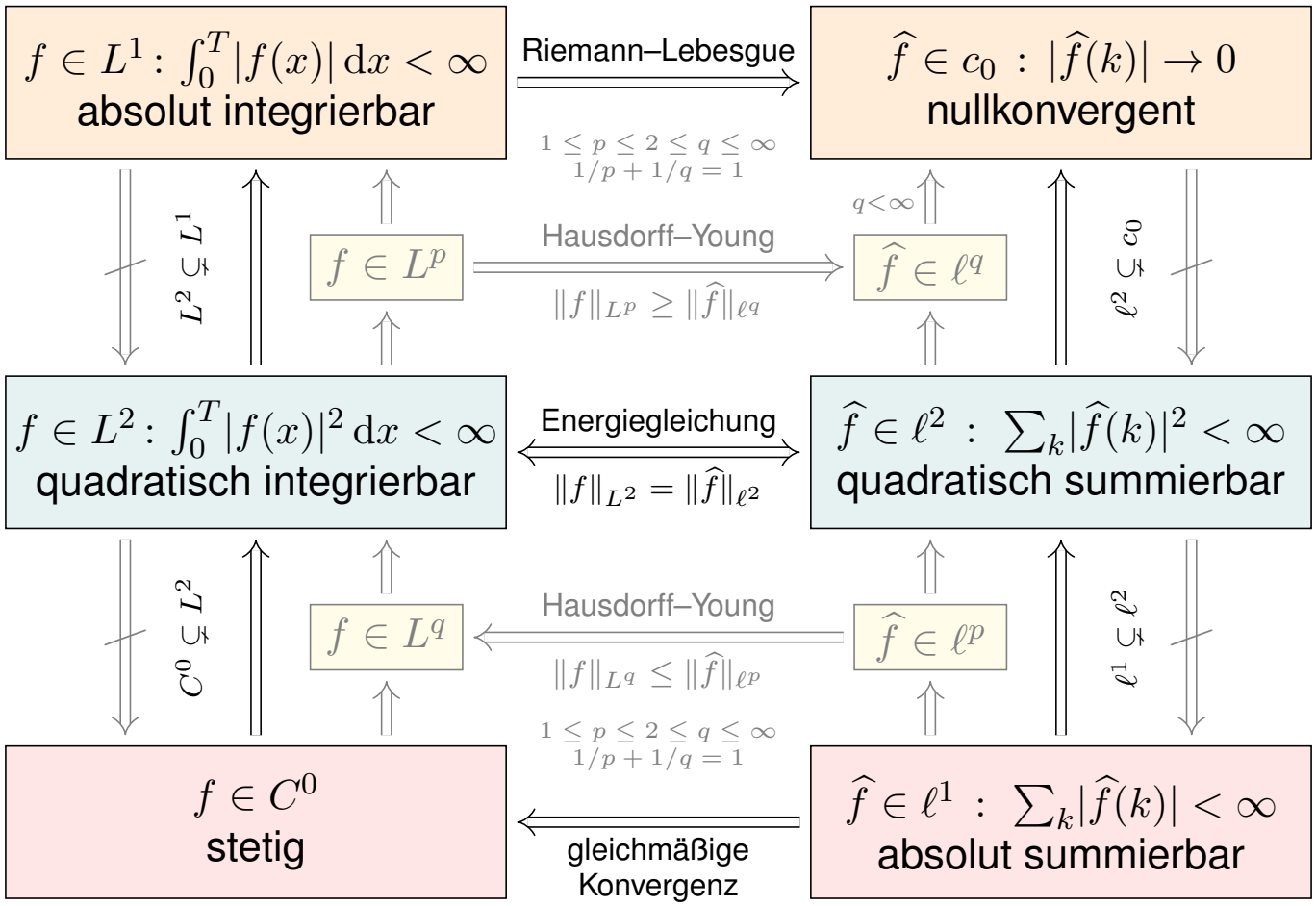
Die Vervollständigung dieses Raumes V bezüglich der L^2–Norm ist der Raum $L^2 = L^2([0,T],\mathbb{C})$ aller quadrat–integrierbaren Funktionen.

Auch die Menge aller Folgen $\widehat{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ ist ein $\mathbb{C}$–Vektorraum.
Die Folgen $\delta_k : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ mit $\delta_k(k) = 1$ und $\delta_k(\ell) = 0$ für $\ell \neq k$ spannen den Unterraum $W = \{\, \sum_{k=-n}^{n} c_k \delta_k \mid n \in \mathbb{N},\, c_k \in \mathbb{C} \,\}$ aller Folgen mit endlichem Träger auf und sind hierin eine Orthonormalbasis.

Die Vervollständigung dieses Raumes W bezüglich der ℓ^2–Norm ist der Raum $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ aller quadrat–summierbaren Folgen.

☺ Die Fourier–Isometrie $f \leftrightarrow \widehat{f}$ liefert $V \cong W$, vervollständigt $L^2 \cong \ell^2$.

Fourier–Analyse: Glattheit und Abklingen



Fourier–Analyse: Glattheit und Abklingen

Von oben nach unten werden die Bedingungen strikt stärker.
Die Implikationen gehen daher immer nur von unten nach oben.
Die Umkehrungen gelten nicht, wie geeignete Gegenbeispiele zeigen.

In der oberen Hälfte gehen Implikationen von links nach rechts:
Schwache Bedingungen an f garantieren schwache Folgerungen für $\widehat{f}$.

In der unteren Hälfte gehen Implikationen von rechts nach links:
Erst starke Bedingungen an $\widehat{f}$ garantieren starke Folgerungen für f.

In der Mitte steht der symmetrische Fall $p = q = 2$: Die Energiegleichung $\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{\ell^2}$ garantiert die nützliche Äquivalenz $f \in L^2 \iff \widehat{f} \in \ell^2$.
Die L^2–Theorie ist daher zentral: die schönste, beste und einfachste.

Ergänzend nenne ich zudem die Hausdorff–Young–Ungleichungen:
Sie interpolieren zwischen $(p, q) = (1, \infty)$ und dem zentralen Fall $(p, q) = (2, 2)$ durch $1 \le p \le 2 \le q \le \infty$ mit $1/p + 1/q = \infty$.

Dasselbe Diagramm gilt für $g \in C^n$ und die n-fache Ableitung $f = g^{(n)}$, allgemein für $g \in AC^n$, also $g \in C^{n-1}$ und $g^{(n-1)} \in AC$ absolut stetig.

Fourier–Analyse: Integrieren und Differenzieren

$\int_0^T |g^{(n)}(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$
absolut integrierbar

$\xRightarrow{\text{Riemann–Lebesgue}}$

$|k^n \widehat{g}(k)| \to 0$
nullkonvergent

$1 \le p \le 2 \le q \le \infty$
$1/p + 1/q = 1$

$\not\Downarrow$ $L^2 \subsetneq L^1$ $\Uparrow$

$g^{(n)} \in L^p$ $\xRightarrow{\text{Hausdorff–Young}}$ $k^n \widehat{g} \in \ell^q$

$\|f\|_{L^p} \ge \|\widehat{f}\|_{\ell^q}$

$q<\infty$ $\Uparrow$ $\Uparrow$ $\ell^2 \subsetneq c_0$ $\not\Downarrow$

$\int_0^T |g^{(n)}(x)|^2\,\mathrm{d}x < \infty$
quadratisch integrierbar

$\xLeftrightarrow{\text{Energiegleichung}}$

$\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{\ell^2}$

$\sum_k |k^n \widehat{g}(k)|^2 < \infty$
quadratisch summierbar

$\not\Downarrow$ $C^0 \subsetneq L^2$ $\Uparrow$

$g^{(n)} \in L^q$ $\xLeftarrow{\text{Hausdorff–Young}}$ $k^n \widehat{g} \in \ell^p$

$\|f\|_{L^q} \le \|\widehat{f}\|_{\ell^p}$

$1 \le p \le 2 \le q \le \infty$
$1/p + 1/q = 1$

$\ell^1 \subsetneq \ell^2$ $\not\Downarrow$

$g \in C^n$, also $g^{(n)} \in C^0$,
n-mal stetig diff'bar

$\xLeftarrow{\text{gleichmäßige Konvergenz}}$

$\sum_k |k^n \widehat{g}(k)| < \infty$
absolut summierbar

Punktweise Konvergenz vs quadratisches Mittel

Wir fassen die Beziehungen dieser drei Konvergenzarten zusammen.
Seien $f_0, f_1, f_2, \ldots, f : \Omega \to \mathbb{C}$ Funktionen auf einer Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$.

Gleichmäßige Konvergenz:
$\sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)| \to 0$

$\mathrm{vol}\,\Omega < \infty$ $\Downarrow$ $\not\Uparrow$ $\not\Uparrow$ $\Downarrow$ immer

Konvergenz im quadratischen Mittel:
$\int_{x\in\Omega} |f_n(x) \to f(x)|^2\,\mathrm{d}x \to 0$

$\not\Longrightarrow$
$\not\Longleftarrow$

Punktweise Konvergenz:
$f_n(x) \to f(x)$
in jedem Punkt $x \in \Omega$

☺ Die Implikation „gleichmäßig $\Rightarrow L^p$“ folgt sofort aus der Ungleichung

$$\int_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)|^p\,\mathrm{d}x \le \mathrm{vol}(\Omega) \cdot (\sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)|)^p \to 0.$$

☺ Die Implikation „gleichmäßig $\Rightarrow$ punktweise“ ist klar: Für $x \in \Omega$ gilt

$$|f_n(x) - f(x)| \le \sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)| \to 0.$$

⚠ Die Umkehrungen gelten nicht, siehe Gegenbeispiele. J319 J320

Fourier–Transformation

Die **Fourier–Transformierte** von $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ ist definiert durch

$$\boxed{\widehat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{für } \xi\in\mathbb{R}.}$$

Wir fordern hierzu, dass f auf jedem Intervall $[-r,r]$ integrierbar ist.
Unter dem Integral über $\mathbb{R}$ verstehen wir hier den **Cauchy–Hauptwert**

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Die Zuordnung $\mathscr{F}: f\mapsto \widehat{f}$ heißt **Fourier–Transformation**.
Die **inverse Fourier–Transformation** $\mathscr{F}^{-1}: \widehat{f}\mapsto f$ ist

$$\boxed{f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi \quad \text{für } x\in\mathbb{R}.}$$

Dies kürzen wir ab als **Fourier–Transformationspaar** $f \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{f}$.
Die Fourier–Transformation ist linear, kurz $a\,f + b\,g \circ\!\!-\!\!\bullet\, a\,\widehat{f} + b\,\widehat{g}$.

Eigenschaften der Transformierten

Beispiele:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{e}^{-x^2/2} &\circ\!\!-\!\!\bullet\, \mathrm{e}^{-\xi^2/2} \\ \mathrm{e}^{-a|x|} &\circ\!\!-\!\!\bullet\, \sqrt{2/\pi}\; a/(a^2+\xi^2) \\ \mathbf{I}_{[-r,r]}(x) &\circ\!\!-\!\!\bullet\, \sqrt{2/\pi}\;\sin(\xi r)/\xi \end{aligned}}$$

Ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ absolut integrierbar, also $\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,\mathrm{d}x<\infty$, dann gilt:
Die Fourier–Transformierte $\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ ist stetig und beschränkt:

$$\boxed{|\widehat{f}(\xi)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,\mathrm{d}x \quad \text{für alle } \xi\in\mathbb{R}}$$

Sie verschwindet im Unendlichen (Riemann–Lebesgue–Lemma):

$$\boxed{|\widehat{f}(\xi)| \to 0 \quad \text{für} \quad |\xi|\to\infty}$$

Zudem gilt die Plancherel–Gleichung (Energiegleichung):

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi}$$

Grundlegende Rechenregeln

Für die Transformation $f(x) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x$ gilt:

$$af(x) \circ\!\!-\!\!\bullet\, a\widehat{f}(\xi), \qquad f(x)+g(x) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{f}(\xi)+\widehat{g}(\xi),$$

$$f(-x) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{f}(-\xi), \qquad \overline{f(x)} \circ\!\!-\!\!\bullet\, \overline{\widehat{f}(-\xi)},$$

$$f(ax) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{|a|}\widehat{f}\Big(\frac{\xi}{a}\Big), \qquad \frac{1}{|a|} f\Big(\frac{x}{a}\Big) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{f}(a\xi),$$

$$f(x-a) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi a}\widehat{f}(\xi), \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} f(x) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{f}(\xi-a),$$

$$\partial_x f(x) \overset{\text{⚠}}{\underset{\text{K2A}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}}\, \mathrm{i}\xi\, \widehat{f}(\xi), \qquad x\, f(x) \overset{\text{⚠}}{\underset{\text{K2A}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}}\, \mathrm{i}\partial_\xi\, \widehat{f}(\xi),$$

$$(f*g)(x) \overset{\text{⚠}}{\underset{\text{K2B}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}}\, \sqrt{2\pi}\cdot\widehat{f}(\xi)\cdot\widehat{g}(\xi), \qquad f(x)\cdot g(x) \overset{\text{⚠}}{\underset{\text{K2B}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\widehat{f}*\widehat{g})(\xi).$$

⚠ Die letzten vier erfordern L^1–Voraussetzungen, siehe K2A und K2B.

☺ Glattheit der Funktion f entspricht schnellem Abklingen von $\widehat{f}$.

☺ Schnelles Abklingen der Funktion f entspricht Glattheit von $\widehat{f}$.

Umkehrsätze und Isometrie

Sind $f, \widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolut integrierbar und stetig, so gilt punktweise

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi = f(x) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Die linke Gleichung gilt, ebenso punktweise, wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolut integrierbar ist und stückweise stetig differenzierbar und sprungnormiert.

Die quadrat-integrierbaren Funktionen bilden den $\mathbb{C}$–Vektorraum

$$L^2 = L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}) := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t < \infty \right\}.$$

Die Fourier–Transformation definiert eine Isometrie $\mathscr{F} : L^2 \to L^2$, also

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi \quad \text{und} \quad \langle\, f \mid g \,\rangle = \langle\, \widehat{f} \mid \widehat{g} \,\rangle \quad \text{für } f, g \in L^2.$$

Unschärfe ist anschaulich: Ist f schmal, so ist $\widehat{f}$ breit, und umgekehrt.
Quantitativ: Für alle $f \in L^2$ gilt die Unschärferelation $\mathbf{V}(f)\cdot\mathbf{V}(\widehat{f}) \geq \frac{1}{4}$.
Optimalfall: Gleichheit gilt genau dann, wenn f eine Glockenkurve ist.

Die Laplace–Transformation

Die **Laplace–Transformierte** von $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(s) := \mathscr{L}\big(f\big)(s) = \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Die **Konvergenzabszisse** ist $\sigma := \inf\{\, s \in \mathbb{R} \mid F(s) \text{ konvergiert} \,\}$.
Das Integral konvergiert für alle $s > \sigma$ und divergiert für alle $s < \sigma$.
Es definiert eine holomorphe Funktion $F : \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>\sigma} \to \mathbb{C}$. Umgekehrt gilt

$$F(s) \bullet\!\!-\!\!\circ\, f(t) = \mathscr{L}^{-1}(F)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{(s+\mathrm{i}x)t}\, F(s+\mathrm{i}x)\,\mathrm{d}x$$

für jedes $s > \sigma$ und fast alle $t \geq 0$, und immer wo f stetig diff'bar ist.
Insbesondere ist $\mathscr{L}$ injektiv, das heißt, aus $\mathscr{L}(f) = \mathscr{L}(g)$ folgt $f = g$.
(Wir identifizieren Funktionen, die nur auf einer Nullmenge differieren.)

Residuen: Hat F in $\mathbb{C}$ nur isolierte Singularitäten und klingt ab, so gilt

$$\mathscr{L}^{-1}(F)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{(s+\mathrm{i}x)t}\, F(s+\mathrm{i}x)\,\mathrm{d}x = \sum_{z_0 \in \mathbb{C}} \operatorname*{res}_{z=z_0} \big[\mathrm{e}^{zt} F(z)\big].$$

Unsere kleine $\mathscr{L}$–Tabelle: Vokabeln und Grammatik

$f(t)_{\,t\geq 0}$	$F(s)_{\,\mathrm{Re}(s)>\sigma}$
1	$\frac{1}{s}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$t^n\,\mathrm{e}^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$

$f(t)_{\,t\geq 0}$	$F(s) = \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$
$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$\mathrm{e}^{at} f(t)$	$F(s-a)$
$f(at),\ a > 0$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
$f(t-a)u(t-a)$	$\mathrm{e}^{-as} F(s)$

Anwendung auf Differentialgleichungen

Laplace–Transformation kann lineare Differentialgleichungen lösen:

Differentialgleichung für y, linear, konst. Koeffizienten, mit Anfangswerten in 0	$\xRightarrow[\text{Transformation}]{\mathscr{L}: y \mapsto Y}$	algebraische Gleichung für Y als Hilfsgleichung inklusive Anfangswerten
Lösung $\Downarrow$ $\Uparrow$ Probe	Integrale der $\mathscr{L}$–Tabelle	Probe $\Uparrow$ $\Downarrow$ Lösung
Lösung der DG in y **— analytisch —**	$\xLeftarrow[\mathscr{L}^{-1}]{\text{Rücktransformation}}$	Lösung der HG in Y **— algebraisch —**

Anstatt das Anfangswertproblem im Original direkt zu lösen, machen wir den gezeigten Umweg über den Bildraum; das ist manchmal leichter.

☺ Die Methode der Laplace–Transformation ist dann effizient, wenn Sie jeden der drei Schritte effizient ausführen können.

☺ Ausführliche $\mathscr{L}$–Tabellen finden Sie in Lehrbüchern, Formelsammlungen und Computer-Algebra-Systemen.

☺ Zudem nutzen wir die obigen Rechenregeln für $\mathscr{L}$ und $\mathscr{L}^{-1}$, sowie Basisalgorithmen wie Partialbruchzerlegung (PBZ), etc.

Zusammenfassung und Verständnisfragen

Aufgabe: Begründen Sie durch ein Ergebnis Ihrer Vorlesung oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel aus Ihrem Fundus:

(1) Jede Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ ist $\mathscr{L}$–transformierbar.
(2) Welche Bedingungen garantieren $\mathscr{L}$–Transformierbarkeit?
(3) Ist jede $\mathscr{L}$–Transformierte $F : \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>\sigma} \to \mathbb{C}$ holomorph? Warum?
(4) Lässt sich jede $\mathscr{L}$–Transformierte F holomorph auf $\mathbb{C}$ fortsetzen?
(5) Ist die Transformation $f \circ\!\!-\!\!\bullet\, F = \mathscr{L}(f)$ linear? Ist sie injektiv?
(6) Lässt sich F zu f rücktransformieren? Wie? Inwiefern eindeutig?
(7) Ist jede rationale Funktion $F = P/Q$ eine $\mathscr{L}$–Transformierte? Wie?

Lösung: (1) Nein, einfache Gegenbeispiele sind $f(t) = 1/t$ und $f(t) = \exp(t^2)$. L103
(2) Wir fordern, dass f auf jedem endlichen Intervall $[0, r]$ integrierbar ist und höchstens exponentiell wächst gemäß $|f(t)| \leq c\,\mathrm{e}^{\sigma t}$ für alle $t \geq 0$ und Konstanten $c, \sigma \in \mathbb{R}$. L104
(3) Ja, wir ziehen die Ableitung unters Integral (L1B) dank majorisierter Integrierbarkeit (D3E).
(4) Nein, schon für $1 \circ\!\!-\!\!\bullet\, 1/s$ müssen wir mit Polstellen rechnen. (Es gibt noch schlimmeres.)
(5) Ja, die Transformation $f \circ\!\!-\!\!\bullet\, F = \mathscr{L}(f)$ ist linear (L1C). Sie ist im Wesentlichen injektiv:
(6) Die Umkehrformel $F \mapsto f = \mathscr{L}^{-1}(F)$ bestimmt f zumindest fast überall (Satz L3A): Wir können f auf jeder Menge vom Maß 0 beliebig abändern, ohne das Integral $F(s)$ zu beeinflussen. Eindeutigkeit gilt, wenn f stückweise stetig differenzierbar ist und zudem sprungnormiert.
(7) Nein, für $s \to \infty$ muss $F(s) \to 0$ gelten! L104 Für $\deg P < \deg Q$ gelingt's mit PBZ.

Elementar lösbare Differentialgleichungen

Sei $f : \mathbb{R}^2 \supseteq G \to \mathbb{R}$ stetig. Zu lösen sei die **Differentialgleichung**

$$\boxed{y'(x) = f(x, y(x)) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0.}$$

Qualitativer Überblick dank **Existenz- und Eindeutigkeitssatz** M1C:
(1) Im Inneren $\mathring{G}$ existieren Lösungen und laufen bis zum Rand ∂G.
(2) Ist f stetig diff'bar nach y, so ist die Lösung durch $(x_0, y_0) \in \mathring{G}$ eindeutig bestimmt und hängt stetig von diesen Anfangswerten ab.

Elementar lösen können wir vor allem **exakte Differentialgleichungen**:

- $f(x, y) + g(x, y)\, y' = 0$ ist exakt, wenn $(f, g) = \operatorname{grad} \Phi$. M206

Wichtige **Spezialfälle** hiervon sind:

- $y' = f(x)$ durch Integration dank HDI. B123
- $y' = g(x)\, h(y)$ durch Trennung der Variablen. M118
- $y' = a(x)\, y + b(x)$ lineare DG, explizite Lösungsformel. M222

Durch **Substitution** hierauf zurückführbar sind:

- $y' = f(ax + by + c)$ mit Substitution $v = ax + by + c$. M409
- $y' = f(y/x)$ Ähnlichkeits-DG, mit Substitution $v = y/x$. M411
- $y' = a(x)\, y + b(x)\, y^n$ Bernoulli–DG, mit Substitution $v = y^{1-n}$. M413

Existenz, Eindeutigkeit, Lösungsmethoden

Kapitel M präsentiert die wichtigsten Lösungsmethoden für gewöhnliche eindimensionale Differentialgleichungen sowie Anwendungsbeispiele.

Zahlreiche Aufgaben üben, illustrieren und vertiefen diese Techniken. Das ist für Differentialgleichungen unentbehrlich: Üben, üben, üben!

Eine Lösung zu finden ist schwer, sie zu überprüfen ist meist leicht. Deshalb sollen Sie am Ende jeder Rechnung die Probe machen!

Trotz allgemeiner Lösungstheorie und -methoden hat jede DG ihre Eigenarten: Man muss genau hinschauen und sorgfältig arbeiten!

Insbesondere ist zu klären und bei jeder Rechnung zu beachten, auf welchem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^2$ die DG definiert und Lösungen gesucht sind.

Bei allen Umformungen ist sicherzustellen oder nachträglich zu prüfen, dass keine fiktiven Lösungen hinzukommen oder echte verloren gehen.

Zur Sorgfalt gehört, die gefundenen / benachbarte / alle Lösungen zu prüfen, zu skizzieren, zu diskutieren und alle Sonderfälle zu beachten.

📖 Zur Vertiefung und für zahlreiche Anwendungsbeispiele siehe H. Heuser: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Vieweg, 6. Aufl. 2009

Zusammenfassung und Verständnisfragen

Aufgabe: Begründen Sie durch ein Ergebnis Ihrer Vorlesung oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel aus Ihrem Fundus:

(1) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig. Zu jedem Startpunkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ existiert ein Intervall $[x_0, x_1]$ mit $x_1 > x_0$ und eine Funktion $y : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ mit $y(x_0) = y_0$ und $y'(x) = f(x, y(x))$ für alle $x \in [x_0, x_1]$.

(2) Sei $f : [x_0, x_1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $y_0 \in \mathbb{R}$. Dann existiert eine Lösung $y : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ mit $y(x_0) = y_0$ und $y'(x) = f(x, y(x))$ für alle $x \in [x_0, x_1]$.

(3) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig. Für je zwei Funktionen $y, \tilde{y} : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ mit $y(x_0) = \tilde{y}(x_0) = y_0$ sowie $y'(x) = f(x, y(x))$ und $\tilde{y}'(x) = f(x, \tilde{y}(x))$ für alle $x \in [x_0, x_1]$ gilt Gleichheit $y(x) = \tilde{y}(x)$ für alle $x \in [x_0, x_1]$.

(4) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig und nach y stetig differenzierbar. Für je zwei Lösungen wie in (3) gilt Gleichheit $y(x) = \tilde{y}(x)$ für alle $x \in [x_0, x_1]$.

(5) Ist jede separierbare DG exakt? bis auf integrierenden Faktor?

(6) Ist jede lineare DG exakt? bis auf einen integrierenden Faktor?

(7) Ist jede exakte DG separierbar? Ist jede exakte DG linear? Nennen Sie eine exakte DG, die weder separierbar noch linear ist.

Zusammenfassung und Verständnisfragen

Lösung: (1) Ja, das ist die Existenzaussage des ∃&E-Satzes M1C.

(2) Nein, wir können das Lösungsintervall $[x_0, x_1]$ nicht vorschreiben: Die Lösung y startet in $y(x_0) = y_0$, kann aber noch vor Erreichen von x_1 an den Rand gelangen M115 oder nach Unendlich entkommen M113.

(3) Nein, die Stetigkeit der rechten Seite f allein reicht hierzu nicht. Ein anschauliches Gegenbeispiel ist Torricellis Wasseruhr $y' = \sqrt{|y|}$ M123; ganz ähnlich ist $y' = \sqrt[3]{y(x)^2}$ M325 und allgemein $y' = |y|^\alpha$ O233.

(4) Ja, das ist die Eindeutigkeitsaussage des ∃&E-Satzes M1C.

(5) Die separierbare DG $y' = g(x)h(y)$ schreiben wir $g(x)h(y) - y' = 0$. In dieser Form ist sie exakt nur für $g(x) = 0$ oder $h'(y) = 0$. Sie wird exakt durch Multiplikation mit dem integrierenden Faktor $1/h(y)$. M211

(6) Die lineare DG $y' = a(x)y + b(x)$ schreiben wir $a(x)y + b(x) - y' = 0$. In dieser Form ist sie exakt nur für $a(x) = 0$. Sie wird exakt durch Multiplikation mit dem integrierenden Faktor $\mathrm{e}^{-A(x)}$ mit $A' = a$. M221

(7) Nicht jede exakte DG ist separierbar, ebenso ist nicht jede linear. Beispiele sind leicht zu konstruieren: $x + y^2 + 2xyy' = 0$ für $x, y > 0$ ist exakt, aber $y' = {}^1\!/\!_2(y/x + 1/y)$ ist weder linear noch separierbar. M316

Separierbare Differentialgleichungen

Satz M1A erklärt die Lösung **separierbarer Differentialgleichungen**:

$$\boxed{y' = g(x)\,h(y) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0}$$

Gegeben sind hierzu stetige Funktionen $g : I \to \mathbb{R}$ und $h : J \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ auf Intervallen $I, J \subseteq \mathbb{R}$ sowie Anfangswerte $x_0 \in I$ und $y_0 \in J$.
Wir definieren Stammfunktionen $G : I \to \mathbb{R}$ und $H : J \to \mathbb{R}$ durch

$$G(x) := \int_{t=x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{und} \qquad H(y) := \int_{u=y_0}^{y} \frac{1}{h(u)}\,\mathrm{d}u.$$

Die Funktion H ist streng monoton, also bijektiv auf ihr Bild $H(J) \subseteq \mathbb{R}$.
Sei $I_0 \subseteq I$ ein hinreichend kleines Intervall um $x_0 \in I_0$ mit $G(I_0) \subseteq H(J)$.
Das AWP erlaubt genau eine Lösung $y : \mathbb{R} \supseteq I_0 \to J \subseteq \mathbb{R}$, nämlich

$$\boxed{y(x) = H^{-1}(G(x)).}$$

☺ Lösungsformel ☺ Eindeutigkeit ☺ Stetig abhängig von (x_0, y_0)
☺ Die Probe ist leicht! Einsetzen und sorgfältig nachrechnen...

Lineare Differentialgleichungen

Satz M2E erklärt die Lösungsformel für **lineare DG erster Ordnung**:

$$\boxed{y'(x) = a(x)\,y(x) + b(x) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0}$$

Hierzu sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}$.
Die homogene DG $y'(x) = a(x)y(x)$ mit $y(x_0) = y_0$ wird gelöst durch $y_1(x) = \mathrm{e}^{A(x)}\,y_0$ mit $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t$. Zur inhomogenen Gleichung existiert genau eine Lösung $y : I \to \mathbb{R}$, und diese ist gegeben durch

$$\boxed{y(x) \;=\; \mathrm{e}^{A(x)} \int_{t=x_0}^{x} \mathrm{e}^{-A(t)}\,b(t)\,\mathrm{d}t \;+\; \mathrm{e}^{A(x)}\,y_0.}$$

☺ Lösungsformel ☺ Eindeutigkeit ☺ Stetig abhängig von (x_0, y_0)
☺ Für $a = 0$ ist's der HDI. ☺ Für $b = 0$ entfällt der inhomogene Term.
☺ Die Lösungsmenge $\{\, y_b + \mathrm{e}^{A}\,y_0 \mid y_0 \in \mathbb{R} \,\}$ ist ein affiner Raum.
„Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen".
☺ Diese Lösungsformel gilt allgemein für lineare DGSysteme (O3D).
☺ Die Probe ist leicht! Einsetzen und sorgfältig nachrechnen...

Exakte Differentialgleichungen

Jedes stetige Vektorfeld $(f,g):\mathbb{R}^2 \supseteq G \to \mathbb{R}^2$, G offen, definiert eine DG

$$\boxed{f(x,y) + g(x,y)\,y' = 0.}$$

Diese DG heißt **exakt**, wenn ein Potential Φ zu (f,g) existiert, also eine C^1–Funktion $\Phi:\mathbb{R}^2 \supseteq G \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad}\Phi = (f,g)$, d.h. $\partial_x\Phi = f$, $\partial_y\Phi = g$.

Satz M2A erklärt die Lösungskurven exakter Differentialgleichung:
Die Lösungen $x \mapsto (x, y(x))$ der DG sind Äquipotentialkurven von Φ.

(1) Eine differenzierbare Funktion $y:\mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}$ ist genau dann Lösung der Differentialgleichung, wenn $\Phi(x,y(x)) = \mathrm{const}$ für alle $x \in I$ gilt.

(2) Zu jedem Punkt $(x_0,y_0) \in G$ mit $g(x_0,y_0) \neq 0$ existiert ein offenes Intervall I um x_0 und eine eindeutige Lösung $y: I \to \mathbb{R}$ mit $y(x_0) = y_0$.

☺ Implizite Lösung ☺ Eindeutigkeit ☺ Stetig abhängig von (x_0,y_0)

☺ Explizit: Wir können $\Phi(x,y(x)) = c := \Phi(x_0,y_0)$ nach $y(x)$ auflösen, zumindest lokal falls $g(x_0,y_0) \neq 0$ dank Satz über implizite Funktionen. Wie leicht die explizite Auflösung gelingt, hängt vom Einzelfall ab.

Integrierende Faktoren

Eine Funktion $\lambda: G \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ heißt **integrierender Faktor** zu (f,g), wenn das skalierte Vektorfeld $(\lambda f, \lambda g): G \to \mathbb{R}^2$ ein Potential hat.
Beispiele: Separierbar $\lambda(y) = 1/h(y)$ M211, linear $\lambda(x) = \mathrm{e}^{-A(x)}$ M221.

Satz M2C erklärt integrierende Faktoren in nur einer Variablen:
Für jeden nur von x abhängigen integrierenden Faktor $\lambda = \lambda(x)$ gilt:

$$\boxed{\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = \frac{\partial_y f(x,y) - \partial_x g(x,y)}{g(x,y)}, \quad \text{kurz:} \quad \frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = -\frac{\operatorname{rot}(f,g)}{g}(x,y)}$$

Für jeden nur von y abhängigen integrierenden Faktor $\lambda = \lambda(y)$ gilt:

$$\boxed{\frac{\lambda'(y)}{\lambda(y)} = \frac{\partial_x g(x,y) - \partial_y f(x,y)}{f(x,y)}, \quad \text{kurz:} \quad \frac{\lambda'(y)}{\lambda(y)} = +\frac{\operatorname{rot}(f,g)}{f}(x,y)}$$

Dies ist lösbar, wenn auch die rechte Seite nur von x bzw. y abhängt.
Ob eine dieser Lösungen möglich ist, muss man jeweils ausprobieren.

☺ Vorgehensweise: Man prüft zunächst $\operatorname{rot}(f,g) = 0$. Falls möglich, berechnet man ein Potential Φ zu (f,g), notfalls nur lokal um (x_0,y_0). Andernfalls versucht man einen der beiden obigen Korrekturfaktoren λ.

Lineare DG n-ter Ordnung

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b : I \to \mathbb{K}$ stetig, $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
Dies definiert eine **lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung**

$$\boxed{y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)\, y'(x) + a_0(x)\, y(x) = b(x).}$$

Die stetigen Funktionen $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} : I \to \mathbb{K}$ heißen **Koeffizienten**.
Die stetige Funktion $b : I \to \mathbb{K}$ heißt **Störterm** oder kurz **rechte Seite**.
Links wirkt der **lineare Differentialoperator** $L : C^n(I, \mathbb{K}) \to C^0(I, \mathbb{K})$,

$$L = a_0 \partial^0 + a_1 \partial^1 + \cdots + a_{n-1} \partial^{n-1} + \partial^n,$$
$$y \mapsto a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_{n-1} y^{(n-1)} + y^{(n)}.$$

Wir suchen alle Funktionen $y : I \to \mathbb{K}$, die die Gleichung $L\,y = b$ erfüllen.
Linearität bedeutet $L(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 L(y_1) + c_2 L(y_2)$ für $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$.

In anderen Worten: Aus Lösungen y_1 zu b_1 und y_2 zu b_2 ergibt die Linearkombination $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ eine Lösung zu $b = c_1 b_1 + c_2 b_2$.

Zu $Ly = b$ gehört die **homogene lineare Differentialgleichung** $Ly = 0$.
Als Lösungsmenge suchen wir also den Kern der linearen Abbildung L.

Lineare DG n-ter Ordnung

Qualitativer Überblick dank **Existenz- und Eindeutigkeitssatz** N3A
(Fortsetzung von M1C, konstruktiv M2E, später O1B, konstruktiv O2A):

Zu jedem Anfangsdatum $(x_0, v_0, \ldots, v_{n-1}) \in I \times \mathbb{K}^n$ existiert genau eine Lösung $y : I \to \mathbb{K}$ mit $L\,y = b$ und $y(x_0) = v_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = v_{n-1}$.

Die Lösungsmenge $L_0 = \{\, y : I \to \mathbb{K} \mid L\,y = 0 \,\}$ ist ein $\mathbb{K}$–Vektorraum der Dimension n: Wir wählen ein Fundamentalsystem $y_1, \ldots, y_n \in L_0$ von n linear unabhängigen Lösungen und erhalten:

$$\boxed{L_0 = \left\{\, c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n \;\middle|\; c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K} \,\right\} \quad \cong \quad \mathbb{K}^n}$$

Die Lösungsmenge $L_b = \{\, y : I \to \mathbb{K} \mid L\,y = b \,\}$ ist ein affiner Raum.
Für jede Partikulärlösung $y_b \in L_b$ gilt $L_b = y_b + L_0$, ausgeschrieben:

$$\boxed{L_b = y_b + L_0 = \left\{\, y_b + c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n \;\middle|\; c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}^n \,\right\}}$$

„Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen“

Sind Anfangswerte $y(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0)$ vorgegeben, so kann man hieraus $c_1, \ldots, c_n$ eindeutig bestimmen (lineares Gleichungssystem).

Lineare DG n-ter Ordnung

Besonders leicht sind **lineare DG mit konstanten Koeffizienten**:

$$\boxed{y^{(n)}(x) + a_{n-1}\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1\, y'(x) + a_0\, y(x) = 0}$$

Kurzschreibweise $p(\partial)\, y = 0$ mit dem **charakteristischen Polynom**

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Jede k-fache Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}$ liefert k linear unabhängige Lösungen

$$\boxed{\mathrm{e}^{\lambda x},\ x\,\mathrm{e}^{\lambda x},\ x^2\,\mathrm{e}^{\lambda x}, \ldots,\ x^{k-1}\,\mathrm{e}^{\lambda x}.}$$

Ist $p \in \mathbb{R}[x]$ reell und $\lambda = \sigma + \mathrm{i}\omega$ mit $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$ und $\omega \neq 0$ eine k-fache Nullstelle, so gilt dies auch für die komplex-konjugierte Zahl $\overline{\lambda} = \sigma - \mathrm{i}\omega$. Durch Linearkombination erhalten wir die zugehörigen reellen Lösungen; sie entsprechen Real- und Imaginärteil der komplexen Lösungen:

$$\boxed{\left.\begin{matrix} \mathrm{e}^{\lambda x}, \ldots,\ x^{k-1}\,\mathrm{e}^{\lambda x} \\ \mathrm{e}^{\overline{\lambda} x}, \ldots,\ x^{k-1}\,\mathrm{e}^{\overline{\lambda} x} \end{matrix}\right\} \underset{\text{Basiswechsel}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{matrix} \mathrm{e}^{\sigma x}\cos(\omega x), \ldots,\ x^{k-1}\,\mathrm{e}^{\sigma x}\cos(\omega x) \\ \mathrm{e}^{\sigma x}\sin(\omega x), \ldots,\ x^{k-1}\,\mathrm{e}^{\sigma x}\sin(\omega x) \end{matrix}\right.}$$

Lineare DG n-ter Ordnung

Zu lösen sei schließlich eine **inhomogene lineare DG** $p(\partial)\, y(x) = b(x)$:

$$\boxed{y^{(n)}(x) + a_{n-1}\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1\, y'(x) + a_0\, y(x) = b(x)}$$

Eine Lösung y_b gewinnen wir durch **Variation der Konstanten** (N3C) oder Faltung von b mit der **Greenschen Fundamentallösung** u (N2F), für die $p(\partial)\, u = 0$ und $u(0) = \cdots = u^{(n-2)}(0) = 0$, $u^{(n-1)}(0) = 1$ gilt:

$$\boxed{y_b(x) = \int_{t=x_0}^{x} u(x-t)\, b(t)\, \mathrm{d}t}$$

Für **spezielle rechte Seiten** lohnt sich folgender Ansatz (N2E):
Zu lösen sei $p(\partial)\, y(x) = r(x)\, \mathrm{e}^{\mu x}$ mit Polynomen $p, r \in \mathbb{C}[x]$.
Ist μ eine k-fache Nullstelle von p, so existiert eine Lösung

$$\boxed{y_b(x) = q(x)\, x^k\, \mathrm{e}^{\mu x}}$$

mit einem eindeutigen Polynom $q \in \mathbb{C}[x]$ vom Grad $\deg q = \deg r$.
Speziell $p(\partial)\, y(x) = \mathrm{e}^{\mu x}$ wird gelöst durch $y_b(x) = \mathrm{e}^{\mu x}\, x^k / p^{(k)}(\mu)$.

Differentialgleichung in Potenzreihen

Für manche Differentialgleichungen reichen elementare Funktionen nicht aus; es werden neue Funktionen als Lösungen benötigt bzw. konstruiert. Bessel–Funktionen sind ein prominentes Beispiel. N321

Zu lösen sei eine analytische Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$\boxed{y^{(n)} = f\big(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\big)}$$

mit gegebenen Anfangsdaten $y(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$ und einer Potenzreihe

$$f(x, u_0, u_1, \dots, u_{n-1}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}} c_\alpha u_0^{\alpha_0}\, u_1^{\alpha_1} \cdots u_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\, x^{\alpha_n}.$$

Diese DG wird von genau einer Potenzreihe $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ erfüllt: Aus den vorgegebenen Anfangsdaten $a_0, \dots, a_{n-1}$ berechnen sich rekursiv alle weiteren Koeffizienten $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$ der Reihe.

☺ Hat diese Potenzreihe einen Konvergenzradius $\rho > 0$, dann löst die so definierte Funktion $y :]-\rho, \rho[\to \mathbb{R}$ die gegebene Differentialgleichung.

☺ Dieses Verfahren ist manchmal mühsam, aber immer konstruktiv!

Euler–Lagrange–Differentialgleichung

Gegeben sei ein **Wirkungsfunktional** $S : C^2([a,b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ durch

$$y \mapsto S(y) := \int_{x=a}^{b} F\big(x, y(x), y'(x)\big)\, \mathrm{d}x$$

mit einer C^2–Funktion $F : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, q, p) \mapsto F(x, q, p)$.

Dann gilt die **Euler–Lagrange–Differentialgleichung** (Satz N4B): Ist $y \in C^2$ **extremal**, also minimal $S(y) \le S(z)$ für alle $z \in C^2$ oder maximal $S(y) \ge S(z)$ für alle $z \in C^2$, dann erfüllt y die Gleichung

$$\boxed{\left[\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial p}\right]\big(x, y(x), y'(x)\big) = 0.}$$

Ausgeschrieben bedeutet das: Für alle $x \in [a,b]$ gilt die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial q}\big(x, y(x), y'(x)\big) = \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial p}(\cdots) + \frac{\partial^2 F}{\partial q\, \partial p}(\cdots)\, y'(x) + \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}(\cdots)\, y''(x).$$

☺ Mit dieser Differentialgleichung können wir $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ berechnen! Dies ist die Grundlage der Optimierung durch Variationsrechnung. N401

Verständnisfragen

Versuchen Sie, folgende Fragen frei aber genau zu beantworten, etwa so, wie Sie dies einer Kommiliton:in / Kolleg:in erklären wollen.

(1) Was ist ein linearer Differentialoperator $L : C^n(I, \mathbb{K}) \to C^0(I, \mathbb{K})$?

(2) Ist diese Abbildung L injektiv? Welche Dimension hat ihr Kern?

(3) Welche Struktur hat die Lösungsmenge der Gleichung $L\,y = 0$?

(4) Was versteht man unter einem Fundamentalsystem?

(5) Ist diese Abbildung $L : C^n(I, \mathbb{K}) \to C^0(I, \mathbb{K})$ surjektiv?

(6) Wie bestimmt man zu $b \in C^0$ ein Urbild $y \in C^n$ mit $L\,y = b$?

(7) Welche Struktur hat die Lösungsmenge der Gleichung $L\,y = b$?

Lösung: (1) Dies ist eine Zuordnung $L : y \mapsto a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_{n-1} y^{(n-1)} + y^{(n)}$ mit Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in C^0(I, \mathbb{K})$, eventuell konstant. (Zur Vereinfachung $a_n = 1$.) (2) Die Abbildung $L : C^n(I, \mathbb{K}) \to C^0(I, \mathbb{K})$ ist linear. Sie ist für $n \geq 1$ nicht injektiv, genauer: (3) Die Lösungsmenge $\ker L = \{\, y \in C^n \mid L\,y = 0 \,\}$ ist ein $\mathbb{K}$–Vektorraum der Dimension n. (4) Ein Fundamentalsystem ist eine Basis $y_1, \ldots, y_n \in \ker L$. (5) Die Abbildung L ist surjektiv: (6) Partikulärlösungen y_b mit $L\,y_b = b$ finden wir durch die Greensche Lösungsformel N245 oder Variation der Konstanten N311 oder geeigneten Ansatz für spezielle rechte Seiten N217. (7) Die Lösungsmenge der Gleichung $L\,y = b$ ist ein affiner Raum der Dimension n, explizit ausgeschrieben $\{\, y : I \to \mathbb{K} \mid L\,y = b \,\} = \left\{\, y_b + c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n \;\middle|\; c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K} \,\right\}$.

Verständnisfragen

(1) Was ist eine lineare Differentialgleichung $L\,y = 0$ mit konstanten Koeffizienten? Was ist ihr charakteristisches Polynom?

(2) Wie bestimmt man hierzu ein Fundamentalsystem?

(3) Wie bestimmt man zu $b \in C^0$ ein Urbild $y \in C^n$ mit $L\,y = b$?

(4) Was versteht man unter einer speziellen rechten Seite b? Wie bestimmt man hierzu ein Urbild $y \in C^n$ mit $L\,y = b$?

(5) Was versteht man in diesem Zusammenhang unter Resonanz?

(6) Was ist die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators? Wie löst man sie? Was passiert bei harmonischer Anregung? Was versteht man unter dem Begriff Resonanzkatastrophe?

Lösung: (1) Hier gilt $L : y \mapsto a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_{n-1} y^{(n-1)} + y^{(n)}$ mit konstanten Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$. Wir schreiben hierfür kurz $L = p(\partial)$ mit $\partial = \mathrm{d}/\mathrm{d}x$ und dem charakteristischen Polynom $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n \in \mathbb{K}[x]$. (2) Der Exponentialansatz N2D liefert hier stets n unabhängige Lösungen $y_1, \ldots, y_n \in \ker L$. (3) Neben Greenscher Lösungsformel N245 und Variation der Konstanten N311 lohnt sich meist (4) der passende Ansatz für spezielle rechte Seiten $r(x)\,\mathrm{e}^{\mu x}$, $\mathrm{e}^{\sigma x}\cos(\tau x)$, $\mathrm{e}^{\sigma x}\sin(\tau x)$. N217 (5) Bei $p(\partial)\,y = r(x)\,\mathrm{e}^{\mu x}$ liegt (k-fache) Resonanz vor, falls die Anregung μ eine (k-fache) Nullstelle des char. Polynoms p trifft. (6) Siehe die Ausführung am Anfang des Kapites N.

Differentialgleichungssysteme und Cauchys ∃&E-Satz

Differentialgleichungssysteme können wir auf 1. Ordnung reduzieren:

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1\big(t, y_1(t), \dots, y_n(t)\big), \\ \qquad\vdots \\ y_n'(t) = f_n\big(t, y_1(t), \dots, y_n(t)\big). \end{cases}$$

Mit $y = (y_1, \dots, y_n)$ und $f = (f_1, \dots, f_n)$ bündeln wir dies prägnant und übersichtlich als eine **vektorwertige Differentialgleichung**:

$$\boxed{y'(t) = f(t, y(t))}$$

Gegeben ist hierzu die stetige Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n \supseteq G \to \mathbb{K}^n$. Gesucht sind alle Funktionen $y : I \to \mathbb{K}^n$ auf einem (maximalen) Intervall I, die $(t, y(t)) \in G$ und die Gleichung $y'(t) = f(t, y(t))$ für alle $t \in I$ erfüllen.

Qualitativer Überblick dank **Existenz- und Eindeutigkeitssatz** O1B:

(1) Zu jedem Startpunkt (t_0, y_0) im Inneren $\mathring{G}$ existieren Lösungen; jede kann beidseitig bis zum Rand von G (oder ∞) fortgesetzt werden.

(2) Ist $f(t, y)$ stetig diff'bar nach y, so ist die Lösung durch $(t_0, y_0) \in \mathring{G}$ eindeutig bestimmt und hängt stetig von diesen Anfangswerten ab.

Struktursatz für lineare Differentialgleichungssysteme

Ein **homogenes lineares DGSystem** erster Ordnung ist von der Form

$$\boxed{y'(t) = A(t)\, y(t).}$$

Gegeben ist hierzu eine stetige **Koeffizientenmatrix** $A : I \to \mathbb{K}^{n \times n}$.
Die Lösungsmenge $L_0 = \{\, y : I \to \mathbb{K}^n \mid y' = Ay \,\}$ ist ein $\mathbb{K}$–Vektorraum der Dimension n: Wir wählen ein **Fundamentalsystem** $y_1, \dots, y_n \in L_0$ von n linear unabhängigen Lösungen. Bezüglich dieser Basis gilt dann:

$$\boxed{L_0 = \Big\{\, c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \;\Big|\; c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K} \,\Big\} \quad \cong \quad \mathbb{K}^n}$$

Ein (inhomogenes) **lineares DGSystem** ist von der Form

$$\boxed{y'(t) = A(t)\, y(t) + b(t).}$$

Gegeben ist hier neben $A : I \to \mathbb{K}^{n \times n}$ ein stetiger **Störterm** $b : I \to \mathbb{K}^n$.
Eine partikuläre Lösung y_b liefert die **Variation der Konstanten** (O3D).
Die Lösungsmenge $L_b = \{\, y : I \to \mathbb{K}^n \mid y' = Ay + b \,\}$ ist ein affiner Raum:

$$\boxed{L_b = y_b + L_0 = \Big\{\, y_b + c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \;\Big|\; c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K} \,\Big\}}$$

„Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen."

Fundamentalsysteme für homogene lineare DGSysteme

Sei $A : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ stetig. Die **matrixwertige Differentialgleichung**

$$\boxed{W'(t) = A(t)\,W(t) \quad \text{mit} \quad W(t_0) = E}$$

erlaubt die **Fundamentallösung** $W : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ gegeben durch

$$\boxed{W(t) = E + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t_k=t_0}^{t} A(t_k) \cdots \int_{t_2=t_0}^{t_3} A(t_2) \int_{t_1=t_0}^{t_2} A(t_1)\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2 \cdots \mathrm{d}t_k.}$$

Für jedes $t \in I$ ist die Reihe absolut konvergent und $W(t)$ invertierbar. Zu jedem $y_0 \in \mathbb{K}^n$ hat daher die **vektorwertige Differentialgleichung**

$$\boxed{y'(t) = A(t)\,y(t) \quad \text{mit} \quad y(t_0) = y_0}$$

genau eine Lösung $y : I \to \mathbb{K}^n$, nämlich $y(t) = W(t)\,y_0$. Somit hat die Differentialgleichung $y' = A\,y$ als Lösungsmenge den $\mathbb{K}$–Vektorraum

$$\boxed{L_0 = \left\{\, W y_0 \;\middle|\; y_0 \in \mathbb{K}^n \,\right\}.}$$

☺ Diese allgemeine Lösungsformel ist einfach und übersichtlich.

Fundamentalsysteme für homogene lineare DGSysteme

Lösungen $y_1, \ldots, y_n : I \to \mathbb{K}^n$ bündeln wir zur **Fundamentalmatrix**:

$$Y : I \to \mathbb{K}^{n\times n},$$
$$Y(t) = \big(y_1(t), \ldots, y_n(t)\big) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) & y_{21}(t) & \ldots & y_{n1}(t) \\ y_{12}(t) & y_{22}(t) & \ldots & y_{n2}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{1n}(t) & y_{2n}(t) & \ldots & y_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

Die folgenden vier Aussagen sind untereinander äquivalent:
(a) Die Funktionen $y_1, \ldots, y_n : I \to \mathbb{K}^n$ sind linear unabhängig über $\mathbb{K}$.
(b) Die Vektoren $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ sind linear unabhängig für jedes $t \in I$.
(c) Die Vektoren $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ sind linear unabhängig für ein $t \in I$.
(d) Die Determinante erfüllt $\det Y(t) \neq 0$ für ein und damit alle $t \in I$.

Man nennt $Y(t)$ auch die **Wronski–Matrix** der Funktionen $y_1, \ldots, y_n$.
Die **Wronski–Determinante** $w(t) = \det Y(t)$ entwickelt sich gemäß

$$\boxed{w(t) = w(t_0) \cdot \exp\left[\int_{\tau=t_0}^{t} \operatorname{tr} A(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right].}$$

Unsere **Fundamentallösung** W ist der Spezialfall mit $W(t_0) = E$;
Umrechnung via $Y(t) = W(t)Y(t_0)$ bzw. $W(t) = Y(t)Y(t_0)^{-1}$.

Partikulärlösung für inhomogene lineare DGSysteme

Seien $A : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ und $b : I \to \mathbb{K}^n$ stetig, $Y = (y_1, \dots, y_n) : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Fundamentalmatrix der homogenen Gleichung $Y'(t) = A(t)\,Y(t)$.

Zu lösen sei das inhomogene Differentialgleichungssystem

$$\boxed{y'(t) = A(t)\,y(t) + b(t) \quad \text{mit} \quad y(t_0) = y_0.}$$

Eine Lösung y_b erhalten wir durch **Variation der Konstanten**. O311
Zu jedem Anfangswert $y_0 \in \mathbb{K}^n$ existiert genau eine Lösung, nämlich

$$\boxed{y(t) \;=\; Y(t) \int_{\tau=t_0}^{t} Y(\tau)^{-1}\, b(\tau)\,\mathrm{d}\tau \;+\; Y(t)Y(t_0)^{-1}y_0.}$$

Somit hat die Differentialgleichung $y' = A\,y + b$ als Lösungsmenge

$$\boxed{L_b = y_b + L_0 = \{\, y_b + W\,y_0 \mid y_0 \in \mathbb{K}^n \,\}.}$$

Dies ist ein affiner Raum der Dimension n und präzisiert die Merkregel:
„Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen.“

Lösung durch Eigenvektoren und Eigenfunktionen

Häufig trifft man **lineare DGSysteme mit konstanten Koeffizienten**, z.B. durch Linearisierung autonomer DGSysteme um Fixpunkte (§P2).

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Zu lösen sei das DGSystem

$$\boxed{y'(t) = A\,y(t) \quad \text{für} \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n.}$$

Zu jedem Startvektor $y(t_0) = y_0$ existiert genau eine Lösung, nämlich

$$\boxed{y : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n \quad \text{mit} \quad y(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}\,y_0.}$$

Die Berechnung dieser Matrix-Exponentialfunktion ist leider schwierig.

☺ Eigen- & Hauptvektoren können dies dramatisch vereinfachen:
Eigenvektoren $v_1, \dots, v_\ell \in \mathbb{K}^n$ mit $Av_k = \lambda_k v_k$ liefern **Eigenfunktionen**

$$\boxed{y_1, \dots, y_\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n \quad \text{mit} \quad y_k(t) = \mathrm{e}^{\lambda_k t}\,v_k.}$$

Genau dann sind die Eigenfunktionen $y_1, \dots, y_\ell$ **linear unabhängig**, wenn die Eigenvektoren $v_1, \dots, v_\ell \in \mathbb{K}^n$ linear unabhängig sind.

Genau dann sind $y_1, \dots, y_n$ eine **Basis** des Lösungsraumes der DG, wenn die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ eine Basis des Raumes $\mathbb{K}^n$ sind.

Lösung durch Hauptvektorketten und Hauptfunktionen

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Matrix und $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Skalar. Eine **Hauptvektorkette**

$$0 \xleftarrow{A-\lambda} v_1 \xleftarrow{A-\lambda} v_2 \xleftarrow{A-\lambda} \dots \xleftarrow{A-\lambda} v_\ell$$

besteht aus Vektoren $0 \neq v_1, \dots, v_\ell \in \mathbb{K}^n$ mit $(A-\lambda)v_k = v_{k-1}$.
Diese löst das DGSystem durch **Hauptfunktionen** $y_1, \dots, y_\ell$ mit

$$\boxed{y_k(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\left[v_k + t\,v_{k-1} + \frac{t^2}{2}v_{k-2} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}v_1\right]}$$

☺ Ist A **diagonalisierbar**, so können wir die Differentialgleichungen vollständig entkoppeln (P1B): Wir finden eine Basis $(v_1, \dots, v_n)$ des $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren, $Av_k = \lambda_k v_k$. Diese liefert uns sofort eine Basis aus Eigenfunktionen $y_1, \dots, y_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ mit $y_k(t) = \mathrm{e}^{\lambda_k t} v_k$.

Dies vereinfacht die Berechnung der obigen Matrix-Exponentialfunktion.

☺ Ist A **nicht diagonalisierbar**, so doch immerhin noch jordanisierbar: Es existiert eine Basis des Raumes $\mathbb{C}^n$ aus Hauptvektoren, und diese liefern eine Basis des Lösungsraumes L_0 aus Hauptfunktionen.

Von komplexen zu reellen Lösungen

☺ Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ existiert eine Basis aus Hauptvektorketten. Das obige Verfahren führt also stets zu einer Basis des Lösungsraums.

Ist die Matrix reell, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so fordert man meist reelle Lösungen.
Sei $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{C}^n$ eine Hauptvektorkette zum Eigenwert $\lambda = \sigma + \mathrm{i}\omega$.
Dann ist $\overline{v_1}, \dots, \overline{v_k}$ eine Hauptvektorkette zum Eigenwert $\overline{\lambda} = \sigma - \mathrm{i}\omega$.
Dank Basiswechsel hat das DGSystem folgende **reelle Lösungen**

$$\boxed{\begin{aligned}
\operatorname{Re} y_k(t) &= \mathrm{e}^{\sigma t}\operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\left[v_k + t\,v_{k-1} + \frac{t^2}{2}v_{k-2} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}v_1\right]\right),\\
\operatorname{Im} y_k(t) &= \mathrm{e}^{\sigma t}\operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\left[v_k + t\,v_{k-1} + \frac{t^2}{2}v_{k-2} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}v_1\right]\right).
\end{aligned}}$$

Wir erkennen hieran insbesondere das **asymptotische Verhalten**:
Für $\sigma < 0$ gilt exponentielles Abklingen, $|y_k(t)| \to 0$ für $t \to \infty$.
Für $\sigma > 0$ gilt exponentielles Wachstum, $|y_k(t)| \to \infty$ für $t \to \infty$.
Für $\sigma = 0$ ist y_1 beschränkt, aber $y_2, \dots, y_\ell$ wachsen polynomiell.

☺ Das Eigenwert-Kriterium gilt allgemein für Linearisierungen (P2D).

Cauchy–Riemann und Maxwell–Gleichungen

Die **Cauchy–Riemann–Gleichungen** für $u, v : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \to \mathbb{R}$ lauten

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.}$$

$\iff$ Das Vektorfeld $(u, -v)$ erfüllt $\operatorname{div}(u, -v) = 0$ und $\operatorname{rot}(u, -v) = 0$.
$\iff$ Die komplexe Funktion $f = u + \mathrm{i}v : \mathbb{C} \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$ ist **holomorph**.
$\iff$ Lokal ist f eine komplexe **Potenzreihe**, $f(z) = \sum a_k (z - z_0)^k$.
$\implies$ Beide Funktionen u, v sind **harmonisch**, also $\Delta u = \Delta v = 0$.

Die **Maxwell–Gleichungen** für die Felder $\vec{E}, \vec{B} : \mathbb{R}^4 \supseteq \Omega \to \mathbb{R}^3$ lauten

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 4\pi\varrho, & \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, & \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c}\vec{J}. \end{aligned}}$$

Jede ebene stationäre Lösung $\vec{E} : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \to \mathbb{R}^2$ ohne Quellen entspricht einer holomorphen Funktion $f = E_1 - \mathrm{i}E_2 : \mathbb{C} \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$ und umgekehrt.

Konvektion-Diffusion und Navier–Stokes

Allgemeine **Bilanzgleichung** / Transportgleichung der Strömungslehre:

$$\boxed{\underbrace{\partial_t u(t,x)}_{\text{Änderungsrate}} + \underbrace{\nabla\big[\vec{v}\,u(t,x)\big]}_{\text{Zu/Abfluss: Konvektion}} = \underbrace{\nabla\big[\kappa\,\nabla u(t,x)\big]}_{\text{Diffusion: } \operatorname{div}\operatorname{grad}} + \underbrace{c\,u(t,x)}_{\text{Wachstum/Zerfall}} + \underbrace{q(t,x)}_{\text{Quellen}}}$$

Angewendet auf die Impulsdichte $\vec{u} = \vec{v}\varrho$ erhalten wir daraus die **Navier–Stokes–Gleichungen** für inkompressible Fluide:

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Massenerhaltung:} && \operatorname{div}\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0 \\ &\text{Impulserhaltung:} && \underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial t}}_{\text{Änderung}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}}_{\text{Konvektion}} = \underbrace{\nu\Delta v_i}_{\text{Diffusion}} - \underbrace{\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x_i}}_{\text{interne Kraft}} + \underbrace{f_i}_{\text{extern}} \end{aligned}}$$

Jede ebene stationäre Strömung $v = (v_1, v_2) : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \to \mathbb{R}^2$ konstanter Dichte ohne Wirbel, ohne Reibung und ohne äußere Kräfte entspricht einer holomorphen Funktion $f = v_1 - \mathrm{i}v_2 : \mathbb{C} \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$ und umgekehrt. Der Druck p berechnet sich hieraus durch $p + (\varrho/2)\big(v_1^2 + v_2^2\big) = \mathrm{const}$.

Die Charakteristikmethode

Zu lösen sei eine **quasi-lineare PDE erster Ordnung**

$$\begin{aligned} a(x,y,u)\,\partial_x u + b(x,y,u)\,\partial_y u &= f(x,y,u) && \text{für alle } (x,y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2, \\ \text{mit Anfangswerten} \quad u(x,y) &= u_0(x,y) && \text{für alle } (x,y) \in A \subseteq \Omega. \end{aligned}$$

Gegeben sind hierzu das Definitionsgebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ und die stetigen Koeffizientenfunktionen $a, b, f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gesucht ist $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Auf einer Teilmenge $A \subseteq \Omega$ gibt $u_0 : A \to \mathbb{R}$ die Anfangswerte vor.

Eine **charakteristische Kurve** der PDE zum Startpunkt $(x_0, y_0) \in A$ ist ein C^1–Weg $\gamma : \mathbb{R} \supseteq I \to \Omega \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $s \mapsto (X(s), Y(s), U(s))$ und

$$\begin{aligned} X(0) &= x_0, & X' &= a(X,Y,U), \\ Y(0) &= y_0, & Y' &= b(X,Y,U), \\ U(0) &= u_0(x_0,y_0), & U' &= f(X,Y,U). \end{aligned}$$

☺ Solche gewöhnlichen DGSysteme können wir bereits gut lösen! Sind a, b, f stetig diff'bar, so hat das AWP genau eine maximale Lösung.

☺ Der Startwert wird entlang der Charakteristik transportiert (Q2D): Jede Lösung u der PDE erfüllt $u(X(s), Y(s)) = U(s)$ für alle $s \in I$.

Die Transportgleichung

Wir betrachten lineare PDE erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Nach Division durch einen der Koeffizienten erhalten wir folgende Form:

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,x) + b\,\partial_x u(t,x) + c\,u(t,x) &= f(t,x) && \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}, \\ \text{mit Anfangswerten} \quad u(0,x) &= g(x) && \text{für } t = 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Gegeben sind die konstanten Koeffizienten $a = 1, b, c \in \mathbb{R}$ sowie stetige Funktionen $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gesucht ist $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dieses Problem hat genau eine Lösung $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nämlich

$$u(t,x) = g(x - bt)\,\mathrm{e}^{-ct} + \int_{\tau=0}^{t} f\big(\tau, x - bt + b\tau\big)\,\mathrm{e}^{c(\tau - t)}\,\mathrm{d}\tau$$

☺ Machen Sie die Probe: einsetzen und sorgfältig nachrechnen!

☺ Das ist ein seltener Glücksfall: Zu dieser Problemklasse haben wir mühelos eine allgemein gültige und explizite Integralformel gefunden.

☺ Allgemeiner gelingt diese Rechnung ebenso für Gleichungen $\partial_t u(t,x) + b(t)\,\partial_x u(t,x) + c(t,x)\,u(t,x) = f(t,x)$, siehe Satz Q3A.

⚠ Die meisten PDE lassen sich nicht einfach mit Integralformeln lösen.

Potenzreihen und Fourier–Transformation

☹ Nicht jede PDE besitzt eine Lösung; selbst wenn sie eine besitzt, so doch meist nicht elementar, das heißt in geschlossener Form.

☺ In solchen Fällen hilft meist nur der **Potenzreihenansatz** Q333: Existenz- und Eindeutigkeitssatz Q3B von Cauchy–Kowalewskaja

☺ **Fourier–Transformation** löst $P(\partial)\,u(x) = g(x)$ für jedes Polynom $P(x) = \sum a_\nu x^\nu$. Die Transformation ergibt nämlich $P(\mathrm{i}\xi)\,\widehat{u}(\xi) = \widehat{g}(\xi)$, Auflösen zu $\widehat{u}(\xi) = \widehat{g}(\xi)/P(\mathrm{i}\xi)$ und Rücktransformation liefert dann u: Dies garantiert der Existenzsatz R1A von Ehrenpreis–Malgrange.

In der Praxis treten sehr häufig partielle Differentialgleichungen auf. Erfahrungsgemäß sind die allermeisten höchstens **zweiter Ordnung**.

☺ Lineare PDE *erster* Ordnung lösen wir entlang **Charakteristiken**. Die wichtigsten linearen PDE *zweiter* Ordnung sind folgende Modelle: Die Poisson–Gleichung $\Delta u = \varrho$, die Wellengleichung $\partial_t^2 u - c^2 \Delta u = \varrho$ und die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u - \kappa\,\Delta u = q$ mit $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$.

Nach diesen drei Modellgleichungen klassifiziert man lineare PDE zweiter Ordnung in **elliptisch**, **hyperbolisch** und **parabolisch** R110.

Trennung der Variablen durch Produktansatz

Zu lösen sei eine **separierbare Differentialgleichung** der Form

$$\boxed{P(x,\partial_x)\,u(x,y) = Q(y,\partial_y)\,u(x,y).}$$

Gegeben sind Intervalle $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ und hierauf die Differentialoperatoren $P(x,\partial_x) = \sum_{j=0}^m a_j(x)\partial_x^j$ und $Q(y,\partial_y) = \sum_{k=0}^n b_k(y)\partial_y^k$ mit a_j, b_k stetig. Das bedeutet anschaulich: P operiert nur auf x und Q operiert nur auf y.

Als Lösungen gesucht sind Funktionen $u : X \times Y \to \mathbb{K} : (x,y) \mapsto u(x,y)$. In diesem Falle eignet sich der **Produktansatz** gemäß Satz R1D:

Sei $u : X \times Y \to \mathbb{K} : u(x,y) = v(x) \cdot w(y)$ Produkt von $0 \neq v \in C^m(X,\mathbb{K})$ und $0 \neq w \in C^n(Y,\mathbb{K})$. Dann ist die obige PDE äquivalent zu den beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen / Eigenwertgleichungen

$$\boxed{P(x,\partial_x)\,v(x) = \lambda\,v(x) \quad \text{und} \quad Q(y,\partial_y)\,w(y) = \lambda\,w(y)}$$

mit einem gemeinsamen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$ als **Separationskonstante**. Lösung sind Eigenfunktionen $u(x,y) = v(x)w(y)$ und Superpositionen. Gleiches gilt für $u(x_1,\ldots,x_n) = u_1(x_1)\cdots u_n(x_n)$ in mehreren Variablen.

Kompaktheit garantiert Eindeutigkeit.

Die Konstruktion einer Lösung oder erfolgreiche Probe eines Kandidaten zeigt die **Existenz** einer Lösung, aber noch nicht die **Eindeutigkeit**: Es könnte weitere Lösungen geben, die unserem Ansatz entgehen.

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, also der Abschluss $\overline{\Omega}$ kompakt.

(0) Löst $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ die homogene Poisson–Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0 \quad \text{für jeden inneren Punkt } x \in \Omega, \\ u(x) &= 0 \quad \text{für jeden Randpunkt } x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

dann gilt $u(x) = 0$ für alle $x \in \overline{\Omega}$.

(1) Lösen $\tilde{u}, \check{u} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ die inhomogene Poisson–Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= q(x) \quad \text{für jeden inneren Punkt } x \in \Omega, \\ u(x) &= g(x) \quad \text{für jeden Randpunkt } x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

dann gilt $\tilde{u}(x) = \check{u}(x)$ für alle $x \in \overline{\Omega}$.

Wie üblich folgt (1) aus (0) dank Linearität: Angenommen $\tilde{u}, \check{u}$ erfüllen (1). Die Differenz $u = \tilde{u} - \check{u}$ erfüllt dann (0). Also gilt $u = 0$ und somit $\tilde{u} = \check{u}$.

Minimum-Maximum-Prinzip harmonischer Funktionen

Beweise für die Eindeutigkeit liefern die **Energiemethode** und das folgende **Minimum-Maximum-Prinzip** für harmonische Funktionen.

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, also der Abschluss $\overline{\Omega}$ kompakt. Sei $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ stetig. Da $\overline{\Omega}$ und $\partial\Omega$ kompakt sind, nimmt u hierauf jeweils ein Minimum und ein Maximum an. Wegen $\overline{\Omega} \supseteq \partial\Omega$ gilt dann allgemein:

$$\min_{\overline{\Omega}} u \le \min_{\partial\Omega} u \qquad \text{und} \qquad \max_{\overline{\Omega}} u \ge \max_{\partial\Omega} u$$

Zudem sei u harmonisch auf dem Inneren Ω, also $u \in C^2$ und $\Delta u = 0$.

(1) Dann nimmt u sein Minimum und Maximum auf dem Rand $\partial\Omega$ an:

$$\boxed{\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u \qquad \text{und} \qquad \max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u}$$

Seien $u, v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ stetig und auf dem Inneren Ω harmonisch. Dann gilt:

(2) Monotonie: Aus $u \le v$ auf dem Rand $\partial\Omega$ folgt $u \le v$ auf ganz $\overline{\Omega}$.

(3) Eindeutigkeit: Aus $u = v$ auf dem Rand $\partial\Omega$ folgt $u = v$ auf ganz $\overline{\Omega}$.

☺ Dies können wir zur Eingrenzung durch Ober/Unterlösungen nutzen. Das Minimum-Maximum-Prinzip gilt ebenso diskret für endliche Graphen (Satz T4B) und beweist neben Eindeutigkeit auch Existenz der Lösung!

Homogene Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}^n$

Fouriers berühmte Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u - \kappa\,\Delta u = q$ folgt aus der Wärmebilanz für den Wärmefluss dank unserer Integralsätze.

Die homogene Gleichung $\partial_t u = \kappa\,\Delta u$ hat als Fundamentallösung eine auseinanderfließende Glockenkurve, den **Wärmeleitungskern**

$$H : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : H(t,x) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi\kappa t})^n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\kappa t}\right).$$

Die Konstanten sichern die Normierung $\int_{x\in\mathbb{R}^n} H(t,x)\,\mathrm{d}x = 1$ für $t > 0$. In Satz D5D haben wir die Gleichung $(\partial_t - \kappa\,\Delta)H = 0$ nachgerechnet.

Ist für $t = 0$ die Wärmeverteilung $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vorgegeben, $u_0 \in C_b$, so erhalten wir die Lösung durch **Superposition** (Faltung, siehe D5E)

$$u : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : u(t,x) = \int_{\xi\in\mathbb{R}^n} H(t, x-\xi)\, u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Für $t \searrow 0$ gilt dann $u(t,x) \to u_0(x)$. Durch Ableiten unter dem Integral finden wir $(\partial_t - \kappa\,\Delta)\,u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\xi)\,(\partial_t - \kappa\,\Delta)H(t,x-\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0$.

Inhomogene Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}^n$

Zu lösen sei die inhomogene Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} &\partial_t u(t,x) - \kappa\,\Delta u(t,x) = f(t,x) && \text{für alle } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}^n, \\ &u(0,x) = u_0(x) && \text{Anfangswerte für } x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

Gegeben sei $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig mit Schranke $|u_0(x)| \le a\,\mathrm{e}^{b|x|^\alpha}$, $\alpha < 2$ sowie $f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ beschränkt und stetig differenzierbar.

Existenz: Dann wird unser Problem gelöst durch das Integral

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} H(t,x-\xi)\,u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} H(t-\tau, x-\xi) f(\tau,\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau.$$

Zu jedem $T > 0$ gilt eine Schranke $|u(t,x)| \le A\,\mathrm{e}^{Bx^2}$ auf $[0,T] \times \mathbb{R}$.

Eindeutigkeit: Unsere Lösung u ist die einzige mit dieser Schranke.

⚠ Ohne diese Schranke gibt es exotische Gegenbeispiele (S1B). Mehrdeutigkeiten müssen wir erkennen und nötigenfalls auch lösen: Sind noch mehrere Lösungen möglich, so stellen wir geeignete weitere Bedingungen, um die physikalisch sinnvollen Lösungen herauszuheben.

Randbedingungen und Eindeutigkeit

Für die Wärmeleitungsgleichung mit Anfangs- und Randbedingungen (ARWP) nutzen wir den folgenden Eindeutigkeitssatz S3C:

(0) Löst $u : [0, T[\times [a, b] \to \mathbb{R}$ die homogene Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned}
&\partial_t u(t,x) - \kappa\, \partial_x^2 u(t,x) = 0 && \text{für } 0 < t < T \text{ und } a < x < b,\\
&\begin{cases} u(t,a) = u(t,b) = 0 \\ \partial_x u(t,a) = \partial_x u(t,b) = 0 \end{cases} && \begin{matrix}\text{Dirichlet–Randbedingungen für } t > 0 \text{ oder}\\ \text{Neumann–Randbedingungen für } t > 0,\end{matrix}\\
&u(0,x) = 0 && \text{Anfangswerte für } t = 0 \text{ und } a < x < b,
\end{aligned}$$

dann gilt $u(t,x) = 0$ für alle $(t,x) \in [0, T[\times [a, b]$.

(1) Lösen $\tilde{u}, \check{u} : [0, T[\times [a, b] \to \mathbb{R}$ die Wärmeleitungsgleichung

$$\boxed{\begin{aligned}
&\partial_t u(t,x) - \kappa\, \partial_x^2 u(t,x) = f(t,x),\\
&\begin{cases} u(t,a) = \ell(t),\ u(t,b) = r(t) \text{ oder} \\ \partial_x u(t,a) = \ell(t),\ \partial_x u(t,b) = r(t), \end{cases}\\
&u(0,x) = g(x),
\end{aligned}}$$

dann gilt $\tilde{u}(t,x) = \check{u}(t,x)$ für alle $(t,x) \in [0, T[\times [a, b]$.

Das Minimum-Maximum-Prinzip

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $\Omega_T = [0, T] \times K$. Für $u : \Omega_T \to \mathbb{R}$ untersuchen wir die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = \Delta u$. Hierzu zerlegen wir Ω_T in

das parabolische Innere $\quad D_T =]0, T] \times \mathring{K}$

und den parabolische Rand $\quad B_T = \big([0, T] \times \partial K\big) \cup \big(\{0\} \times K\big)$.

Auf $\Omega_T = [0, T] \times K$ sei $u : \Omega_T \to \mathbb{R}$ stetig. Da Ω_T und B_T kompakt sind, nimmt u hierauf Minimum und Maximum an. Wegen $\Omega_T \supseteq B_T$ gilt also:

$$\min\nolimits_{\Omega_T} u \le \min\nolimits_{B_T} u \qquad \text{und} \qquad \max\nolimits_{\Omega_T} u \ge \max\nolimits_{B_T} u$$

Zudem gelte $\partial_t u = \Delta u$ auf dem parabolischen Inneren $D_T =]0, T] \times \mathring{K}$.
(1) Dann nimmt u sein Minimum und Maximum auf dem Rand B_T an:

$$\boxed{\min\nolimits_{\Omega_T} u = \min\nolimits_{B_T} u \qquad \text{und} \qquad \max\nolimits_{\Omega_T} u = \max\nolimits_{B_T} u}$$

Seien $u, v : \Omega_T \to \mathbb{R}$ zwei Lösungen, $\partial_t u = \Delta u$ und $\partial_t v = \Delta v$ auf D_T.
(2) Monotonie: Aus $u \le v$ auf dem Rand B_T folgt $u \le v$ auf ganz Ω_T.
(3) Eindeutigkeit: Aus $u = v$ auf dem Rand B_T folgt $u = v$ auf ganz Ω_T.

Das Prinzip gilt ebenso harmonisch (Satz R2C) und diskret (Satz T4B).

Wärmeleitung eines Stabes

Zu lösen sei die eindimensionale homogene Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{array}{ll} \partial_t u(t,x) - \kappa\,\partial_x^2 u(t,x) = 0 & \text{für alle } t>0 \text{ und } 0<x<L, \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 & \text{Randbedingungen für } t \geq 0, \\ u(0,x) = g(x) & \text{Anfangswerte für } 0<x<L. \end{array}$$

Gegeben sei $g\colon [0,L] \to \mathbb{R}$ stetig oder allgemeiner $g \in L^2([0,L])$, entwickelt als $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x/L)$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$.
Dann wird unser Anfangs- und Randwertproblem gelöst durch

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, \mathrm{e}^{-n^2 t/T} \sin(n\pi x/L).$$

Die natürliche Zeitskala ist die Abklingzeit $T = L^2/\kappa\pi^2$ (Eigenzeit).
Gilt sogar $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, so ist u in $t=0$ stetig und dort gleich g.

☺ So können Sie Abkühlen und Aufheizen explizit berechnen:
Diese Eigenfunktionen diagonalisieren die Wärmeleitungsgleichung.

☺ Numerisch sehr effizient für $t > T$ dank exponentiellem Abklingen.

Wärmeleitung eines Stabes

Speziell für konstante Anfangswerte $g(x) = 1$ erhalten wir die Lösung

$$u(t,x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(2k+1)^2 t/T}\, \frac{\sin\bigl((2k+1)\pi x/L\bigr)}{(2k+1)}.$$

Die Kerntemperatur im Stabmittelpunkt $x = L/2$ ist demnach

$$u\bigl(t, \tfrac{L}{2}\bigr) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(2k+1)^2 t/T}\, \frac{(-1)^k}{(2k+1)} \underset{k=0}{\overset{t \gg T}{\sim}} \frac{4}{\pi}\, \mathrm{e}^{-t/T}.$$

☺ Die Abkühlung ist exponentiell, sehr gute Näherung für $t > T$.
Bei doppelter Länge dauert die Abkühlung viermal so lange.

☺ Hohe Frequenzen klingen besonders schnell ab. Das ist numerisch günstig, führt zu schneller Konvergenz und Glättungseigenschaft:

☺ Zu $t = 0$ dürfen die Anfangsdaten $u(0,x)$ beliebig rau sein, sogar unstetig, doch zu jedem Zeitpunkt $t > 0$ ist die Lösung $u(t,x)$ glatt.

Dieselbe Methode löst die inhomogene Gleichung $\partial_t u - \kappa\,\partial_x^2 u = f$ mit den jeweiligen Randbedingungen: Dirichlet, Neumann, etc.

Wärmeleitung einer Kugel

Zu lösen sei die sphärische homogene Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} &\partial_t u(t,r) = \frac{\kappa}{r^2}\partial_r\Big[r^2\partial_r\, u(t,r)\Big] && \text{für alle } t>0 \text{ und } 0<r<R,\\ &u(t,R)=0 && \text{Randbedingungen für } t\geq 0,\\ &u(0,r)=1 && \text{Anfangswerte für } 0\leq r<R. \end{aligned}$$

Gegeben sei $g\colon[0,R]\to\mathbb{R}$ stetig oder allgemeiner $g\in L^2([0,R])$, entwickelt als $g(r)\cdot r=\sum_{n=1}^\infty a_n\sin(n\pi r/R)$ mit $\sum_{n=1}^\infty|a_n|^2<\infty$.
Dann wird unser Anfangs- und Randwertproblem gelöst durch

$$u(t,r)=\sum_{n=1}^\infty a_n\,\mathrm{e}^{-n^2t/T}\sin(n\pi r/R).$$

Die natürliche Zeitskala ist die Abklingzeit $T=R^2/\kappa\pi^2$ (Eigenzeit).
Gilt sogar $\sum_{n=1}^\infty|a_n|<\infty$, so ist u in $t=0$ stetig und dort gleich g.

☺ So können Sie Abkühlen und Aufheizen explizit berechnen:
Diese Eigenfunktionen diagonalisieren die Wärmeleitungsgleichung.

☺ Numerisch sehr effizient für $t>T$ dank exponentiellem Abklingen.

Wärmeleitung einer Kugel

Speziell für konstante Anfangswerte $g(r)=1$ erhalten wir die Lösung

$$u(t,r)=2\sum_{n=1}^\infty(-1)^{n+1}\,\mathrm{e}^{-n^2t/T}\,\frac{\sin(n\pi r/R)}{n\pi r/R}.$$

Die Kerntemperatur im Kugelmittelpunkt $r=0$ ist demnach

$$u(t,0)=2\sum_{n=1}^\infty(-1)^{n+1}\,\mathrm{e}^{-n^2t/T}\underset{n\,=\,1}{\overset{t\,\gg\,T}{\sim}}2\,\mathrm{e}^{-t/T}.$$

☺ Die Abkühlung ist exponentiell, sehr gute Näherung für $t>2T$.
Bei doppeltem Radius dauert die Abkühlung viermal so lange.

☺ Hohe Frequenzen klingen besonders schnell ab. Das ist numerisch günstig, führt zu schneller Konvergenz und Glättungseigenschaft:

☺ Zu $t=0$ dürfen die Anfangsdaten $u(0,r)$ beliebig rau sein, sogar unstetig, doch zu jedem Zeitpunkt $t>0$ ist die Lösung $u(t,r)$ glatt.

Dieselbe Methode löst die inhomogene Wärmeleitungsgleichung mit den jeweiligen Randbedingungen: Dirichlet, Neumann, etc.

Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Ein **diskreter Wahrscheinlichkeitsraum** $(\Omega, \mathbf{P})$ besteht aus

- einer Menge Ω von möglichen Ergebnissen und
- einer normierten und additiven Abbildung $\mathbf{P} : \mathfrak{P}(\Omega) \to [0, 1]$.

Letzteres bedeutet $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ und $\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbf{P}(\{\omega\})$ für alle $A \subseteq \Omega$.

Jedes Element $\omega \in \Omega$ heißt **Ergebnis**, somit ist Ω die **Ergebnismenge**.
Jede Teilmenge $A \subseteq \Omega$ heißt **Ereignis**, somit $\mathfrak{P}(\Omega)$ die **Ereignismenge**.
Das Ereignis A tritt genau dann ein, wenn ein Ergebnis $\omega \in A$ eintritt.
Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist das **Wahrscheinlichkeitsmaß** $\mathbf{P}(A)$.

Spezialfall: Ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbf{P})$ heißt **endlich**, wenn die Ergebnismenge Ω endlich ist. Er heißt **laplacesch**, wenn zudem alle Ergebnisse $\omega \in \Omega$ gleich wahrscheinlich sind.
Für das **Laplace–Wahrscheinlichkeitsmaß** auf Ω gilt daher

$$\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der Ergebnisse in } A}{\text{Anzahl aller Ergebnisse in } \Omega} = \frac{\text{günstige Ergebnisse}}{\text{mögliche Ergebnisse}}.$$

☺ Für Laplace–Experimente berechnet man die Wkten durch Abzählen der Ergebnisse. Hierbei helfen kombinatorische Abzählformeln.

Rechnen mit Ereignissen

Alle Ergebnisse fassen wir zur **Ergebnismenge** Ω zusammen. Jedes Element $\omega \in \Omega$ heißt **Ergebnis**. Jede Teilmenge $A \subseteq \Omega$ heißt **Ereignis**.

Menge	Bedeutung als Zufallsereignis
Ω	Das sichere Ereignis: Ω tritt immer ein.
$\emptyset$	Das unmögliche Ereignis: $\emptyset$ tritt nie ein.
$A \subseteq \Omega$	Das Ereignis A tritt ein bei jedem Ergebnis $\omega \in A$.
$\Omega \setminus A$	Komplement: $\overline{A} = \Omega \setminus A$ tritt ein, wenn A nicht eintritt.
$A \subseteq B$	Teilmenge: Immer wenn A eintritt, dann auch B.
$B \setminus A$	Restmenge: Das Ereignis B tritt ein, aber nicht A.
$A \cap B$	Schnittmenge: Die Ereignisse A und B treten beide ein.
$A \cup B$	Das Ereignis A oder B tritt ein (evtl. auch beide).
$A \sqcup B$	Das Ereignis A oder B tritt ein, wobei $A \cap B = \emptyset$.
$A \triangle B$	Entweder A oder B tritt ein (aber nicht beide).

Unser Ziel sind nachvollziehbar begründete, quantitative Aussagen.
☺ Diese Notation erlaubt präzises Rechnen mit Zufallsereignissen.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Z603
Fazit

Sei $(\Omega, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $B \subseteq \Omega$ ein Ereignis mit Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}(B) > 0$. Für jedes Ereignis $A \subseteq \Omega$ definieren wir die **Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B** durch

$$\boxed{\mathbf{P}(A|B) := \mathbf{P}_B(A) := \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.}$$

Sei $\Omega = B_1 \sqcup B_2 \sqcup \ldots \sqcup B_\ell$ eine Zerlegung in disjunkte Ereignisse. Für $A \subseteq \Omega$ gilt dann die **Formel der totalen Wahrscheinlichkeit**:

$$\boxed{\mathbf{P}(A) = \sum_{k=1}^{\ell} \mathbf{P}(A \cap B_k) = \sum_{k=1}^{\ell} \mathbf{P}(A|B_k)\,\mathbf{P}(B_k)}$$

Im Falle $\mathbf{P}(A) > 0$ gilt zudem die **Formel von Bayes** (Satz T2B):

$$\boxed{\mathbf{P}(B_i|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B_i)\,\mathbf{P}(B_i)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(A|B_i)\,\mathbf{P}(B_i)}{\sum_{k=1}^{\ell} \mathbf{P}(A|B_k)\,\mathbf{P}(B_k)}}$$

☺ Bequeme Notation und präzises Rechnen mit Zufallsereignissen.

☺ Die Rechnung ist meist leicht, die Interpretation erfordert Übung.

Stochastische Unabhängigkeit

Z604
Fazit

Eine Familie von Ereignissen $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ heißt **(stochastisch) unabhängig**, wenn alle Schnittmengen die Produktregel erfüllen:

$$\boxed{\mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_\ell}) = \mathbf{P}(A_{i_1})\,\mathbf{P}(A_{i_2}) \cdots \mathbf{P}(A_{i_\ell})}$$

für jede Auswahl $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_\ell \leq n$: Die Wkt jedes Schnitts ist das Produkt der Wahrscheinlichkeiten. Für unabhängige Ereignisse lassen sich damit die Wkten aller erzeugten Ereignisse berechnen.

Das heißt, zwei Ereignisse $A, B \subseteq \Omega$ sind unabhängig, wenn gilt:

- $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)$.

Drei Ereignisse $A, B, C \subseteq \Omega$ sind unabhängig, wenn gilt:

- $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)$,
- $\mathbf{P}(A \cap C) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(C)$,
- $\mathbf{P}(B \cap C) = \mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(C)$,
- $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(C)$.

⚠ Die Tripelbedingung folgt nicht aus den drei Paarbedingungen! T226

Ausfallwahrscheinlichkeit

Von n **unabhängigen** Teilen habe jedes Ausfallwkt p. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\text{Alle Teile funktionieren}) &= (1-p)^n &\lessapprox\ & \mathrm{e}^{-np} \\ \mathbf{P}(\text{Mindestens eins fällt aus}) &= 1-(1-p)^n &\gtrapprox\ & 1-\mathrm{e}^{-np} \end{aligned}$$

Taylor–Entwicklung: Es gilt $\exp(x) \gtrapprox 1+x$ und $\exp(-x) \gtrapprox 1-x$.
Genauer: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(x) \geq 1+x$ und $\exp(-x) \geq 1-x$,
und für $x \approx 0$ gilt zudem $\exp(x) \approx 1+x$ und $\exp(-x) \approx 1-x$.

Eine Maschine bestehe aus vielen **unabhängigen** Teilen $T_1, \ldots, T_n$.
Jedes Teil T_k hat eine gewisse Ausfallwahrscheinlichkeit $p_k \in [0,1]$.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\text{Alle Teile funktionieren}) &= (1-p_1)\cdots(1-p_n) \\ &\lessapprox\ \mathrm{e}^{-p_1}\cdots\mathrm{e}^{-p_n} \ = \ \mathrm{e}^{-(p_1+\cdots+p_n)}. \\ \mathbf{P}(\text{Mindestens eins fällt aus}) &= 1-(1-p_1)\cdots(1-p_n) \\ &\gtrapprox\ 1-\mathrm{e}^{-(p_1+\cdots+p_n)}. \end{aligned}$$

☺ Die Näherung ist praktisch für $p_1, \ldots, p_n$ klein und n groß.
Dies ist die Poisson–Verteilung $\mathrm{P}(\lambda)$ mit $\lambda = p_1 + \cdots + p_n$. U314

Kollisionswahrscheinlichkeit

Aus n Möglichkeiten wird k mal zufällig ausgewählt (wobei $1 \leq k \leq n$).
Die Wahrscheinlichkeit $P_{n,k}$, dabei k verschiedene auszuwählen, ist

$$P_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!\,n^k} \lessapprox \exp\left(-\frac{k(k-1)}{2n}\right).$$

☺ Der Graph ist die rechte Hälfte der Gaußschen Glockenkurve $\mathrm{e}^{-x^2/2}$.
Die Wahrscheinlichkeit $Q_{n,k}$ mindestens einer Kollision ist demnach

$$Q_{n,k} = 1 - P_{n,k} \gtrapprox 1 - \exp\left(-\frac{k(k-1)}{2n}\right).$$

Geburtstagsparadox: Mit welcher Wkt Q sind unter $k = 25$ zufälligen Personen mindestens zwei am gleichen Tag des Jahres geboren?

Lösung: Für $k = 25$ und $n = 365$ gilt $P \lessapprox \mathrm{e}^{-0.821} \lessapprox 0.44$, also $Q \gtrapprox 0.56$.

☺ Intuitiv halten viele eine Kollision für unwahrscheinlich. Tatsächlich liegt die Wkt bei über 50%, daher trägt dieses überraschende Ergebnis den Namen „Geburtstagsparadox“. Probieren Sie es selbst einmal aus!

Kombinatorik / Schubfachmodelle

Auf wie viele Arten können wir k Objekte auf n Fächer verteilen?

Schubfachmodell	unterscheidbare Objekte	ununterscheidbare Objekte
beliebig viele Objekte pro Fach	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
höchstens eins pro Fach (injektiv)	$\frac{n!}{(n-k)!} = k!\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
mindestens eins pro Fach (surjektiv)	$n!\left\{ {k \atop n} \right\}$	$\binom{k-1}{n-1}$

Unterscheidbare Objekte denken wir uns mit $1, \ldots, k$ nummeriert.
Bei ununterscheidbaren Objekten dürfen wir Objekte untereinander vertauschen: Das bedeutet, wir betrachten Anordnungen dann als gleich, wenn sie sich nur durch die Nummerierung der Objekte unterscheiden.
(Für Ausführungen siehe `en.wikipedia.org/wiki/Twelvefold_way`.)

Kombinatorik / Urnenmodelle

Aus n durchnummerierten Kugeln ziehen wir k Kugeln (oder Lose):
Ziehung mit / ohne Zurücklegen, Ergebnis mit / ohne Reihenfolge.
Die Gesamtzahl der möglichen Ergebnisse berechnet sich wie folgt:

Urnenmodell	mR: mit Reihenfolge	oR: ohne Reihenfolge
oZ: ohne Zurücklegen	$\frac{n!}{(n-k)!} = k!\binom{n}{k}$ Laplace!	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ Laplace!
mZ: mit Zurücklegen	n^k Laplace!	$\binom{n+k-1}{k}$ nicht Laplace!

Beispiel: In einer Urne liegen N Kugeln, davon sind genau K rot.
Wir ziehen zufällig n der N Kugeln (oZoR). Welche Wkt hat das Ereignis $A_k =$ „Es werden genau k der K roten Kugeln gezogen“? **Lösung:**

$$\mathbf{P}(A_k) = \frac{|A_k|}{|\Omega|} = \binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k} \Big/ \binom{N}{n}$$

Abstand von Wahrscheinlichkeitsmaßen

Oft wollen oder müssen wir zwei WMaße $\mathbf{P}_0$ und $\mathbf{P}_1$ auf Ω vergleichen: Ist $\mathbf{P}_0$ mühsam aber $\mathbf{P}_1$ bequem, so wollen wir $\mathbf{P}_0$ durch $\mathbf{P}_1$ ersetzen.

Die beiden WMaße $\mathbf{P}_0$ und $\mathbf{P}_1$ ordnen jedem Ereignis $A \subseteq \Omega$ die Wkten $\mathbf{P}_0(A)$ bzw. $\mathbf{P}_1(A)$ zu. Der **totale Abstand** zwischen $\mathbf{P}_0$ und $\mathbf{P}_1$ ist das Supremum, die größtmögliche Abweichung, die hierbei auftreten kann:

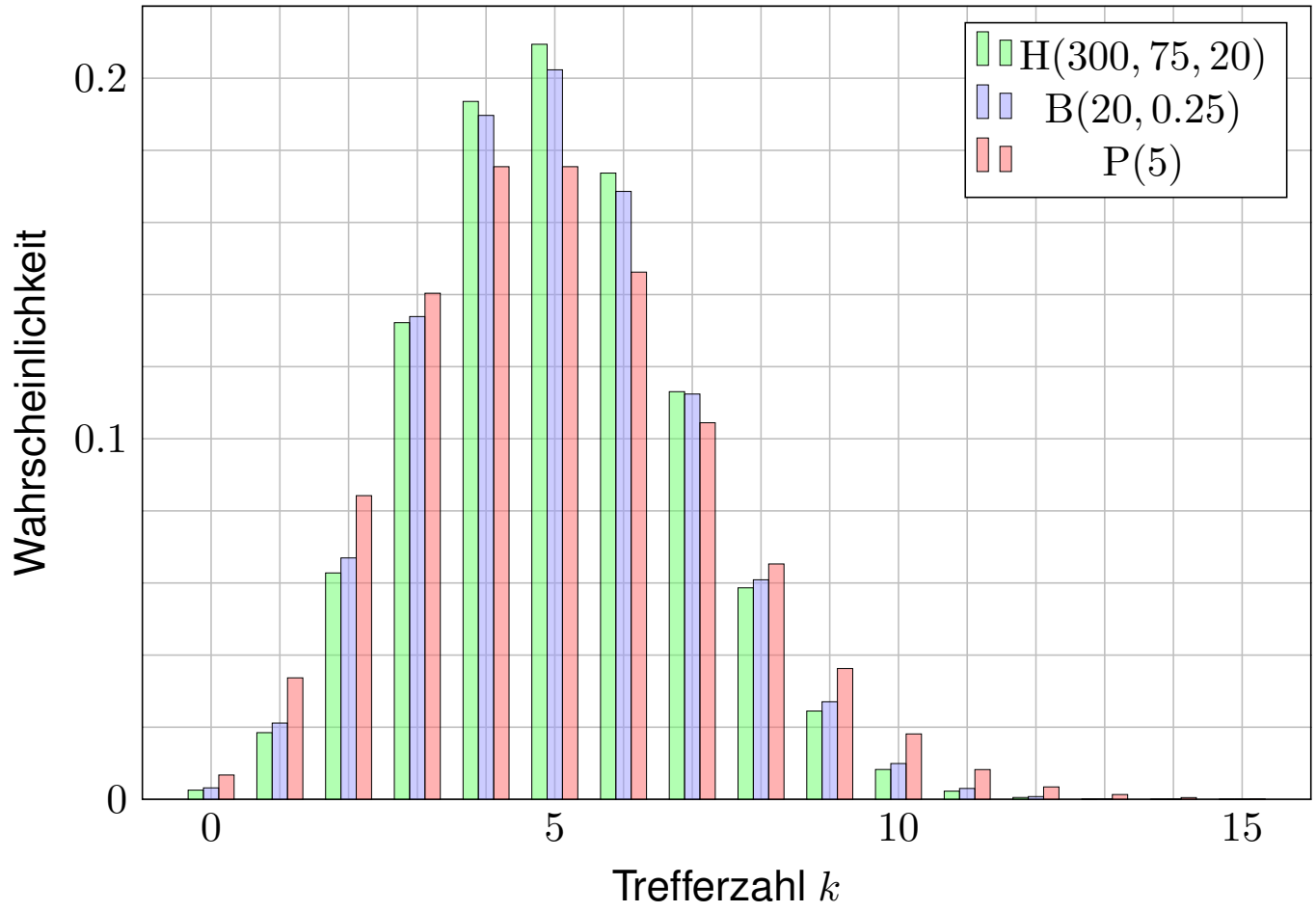
$$\boxed{\big\|\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_1\big\| := \sup_{A\subseteq\Omega}\big|\mathbf{P}_0(A) - \mathbf{P}_1(A)\big| = \frac{1}{2}\sum_{\omega\in\Omega}\big|\mathbf{P}_0(\{\omega\}) - \mathbf{P}_1(\{\omega\})\big|}$$

Diese Fehlerschranke nutzen wir bei näherungsweisen Rechnungen: Ist der Abstand klein genug, etwa $\|\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_1\| \le \varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-3}$, so können wir $\mathbf{P}_0(A)$ durch $\mathbf{P}_1(A)$ ersetzen und machen dabei schlimmstenfalls einen Fehler von ε, das heißt, es gilt $\mathbf{P}_0(A) = \mathbf{P}_1(A) + \delta$ mit $|\delta| \le \varepsilon$.

Der totale Abstand ist (bis auf einen Faktor $1/2$) die Summe über alle punktweisen Abstände: Die linke Seite $\sup_{A\subseteq\Omega}$ ist leicht zu verstehen, die rechte Seite $\sum_{\omega\in\Omega}$ ist leicht zu berechnen. Diese Umformulierung ist oft leichter zugänglich: Es genügt, die absolute Differenz über alle Ergebnisse zu addieren. Die genaue Rechnung U318 beweist dies und erklärt den Faktor $1/2$.

Die Rechnung zeigt zudem, dass das Supremum angenommen wird, also ein Maximum ist. Für die Menge $A = \{\, \omega \in \Omega \mid \mathbf{P}_0(\{\omega\}) > \mathbf{P}_1(\{\omega\}) \,\}$ gilt $\|\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_1\| = \big|\mathbf{P}_0(A) - \mathbf{P}_1(A)\big|$.

Hypergeometrisch, binomial, Poisson



Hypergeometrisch, binomial, Poisson

Stichprobe: Gesamtgröße N, davon K Treffer, Stichprobengröße n.

Die Trefferzahl k folgt der **hypergeometrischen Verteilung**

$$\boxed{\mathrm{H}(N,K,n)(k) = \binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k} \Big/ \binom{N}{n}.}$$

Ein Experiment mit Trefferwkt t mit n-mal unabhängig wiederholt,
z.B. Stichprobengröße n mit Zurücklegen, Trefferwkt $t = K/N$.

Die Trefferzahl k folgt hier der **Binomialverteilung**

$$\boxed{\mathrm{B}(n,t)(k) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}.}$$

Damit sind $\mathrm{H}(N,K,n)$ und $\mathrm{B}(n,t)$ WVerteilungen auf $\{0,\dots,n\} \subseteq \mathbb{N}$.

Für $N \to \infty$ und $K/N \to t$ gilt die Konvergenz $\mathrm{H}(N,K,n) \to \mathrm{B}(n,t)$.
Genauer gilt für $K > n$ folgende Abschätzung des **totalen Abstands**

$$\boxed{\big\|\mathrm{H}(N,K,n) - \mathrm{B}(n,K/N)\big\| < n/N.}$$

Hypergeometrisch, binomial, Poisson

Die **Poisson–Verteilung** $\mathrm{P}(\lambda)$ zum Parameter $\lambda \geq 0$ ist gegeben durch

$$\boxed{\mathrm{P}(\lambda)(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\lambda^k/k!.}$$

Damit ist $\mathrm{P}(\lambda)$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$.
Das Gesetz der kleinen Zahlen besagt $\mathrm{B}(n,\lambda/n) \to \mathrm{P}(\lambda)$ für $n \to \infty$.

Genauer gilt folgende Abschätzung des **totalen Abstands**:

$$\boxed{\big\|\mathrm{B}(n,\lambda/n) - \mathrm{P}(\lambda)\big\| \leq \lambda^2/n.}$$

Für Trefferwahrscheinlichkeit $t \in [0,1]$ und $\lambda = nt$ erhalten wir

$$\boxed{\big\|\mathrm{B}(n,t) - \mathrm{P}(nt)\big\| \leq nt^2.}$$

☺ Je nach geforderter Genauigkeit können wir so bequem
von hypergeometrisch über binomial zu Poisson übergehen.

☺ Das verallgemeinert und präzisiert die Näherungsformel U108 für
Ausfallwahrscheinlichkeiten bei n gleichen unabhängigen Bauteilen.

Wahrscheinlichkeitsräume

Mit Kolmogorovs Axiomen (V1c) fixieren wir die grundlegenden Forderungen für WMaße, woraus alle weiteren Rechenregeln folgen:

Ein **Wahrscheinlichkeitsraum** $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ besteht aus

- einer **Ergebnismenge** Ω,
- einer **Ereignismenge** $\mathscr{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ und
- einem **Wahrscheinlichkeitsmaß** $\mathbf{P} : \mathscr{A} \to [0,1]$,

mit folgenden grundlegenden Eigenschaften:

1. **Normierung:** Es gilt $\Omega \in \mathscr{A}$ und $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.
2. **Komplemente:** Aus $A \in \mathscr{A}$ folgt $(\Omega \setminus A) \in \mathscr{A}$.
3. **σ–Additivität:** Aus $A_0, A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}$ folgt $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathscr{A}$, sowie

$$\mathbf{P}\Big(\bigsqcup_{k=0}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(A_k) \quad \text{wenn } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j.$$

Die Bezeichnung „σ“ steht abkürzend für „abzählbar“. Wir nennen $\mathscr{A}$ eine **σ–Algebra** und hierauf $\mathbf{P} : \mathscr{A} \to [0,1]$ ein **σ–additives Maß**.

Wichtigste Beispiele sind diskrete und kontinuierliche WRäume. Auch Mischungen aus diskret und kontinuierlich sind möglich.

Diskrete und kontinuierliche WRäume

Eine **diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung** auf Ω ist eine Funktion

$$p : \Omega \to [0,1] \quad \text{mit Gesamtmasse} \quad \sum_{x \in \Omega} p(x) = 1.$$

Diese definiert ein **diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß**

$$\mathbf{P} : \mathfrak{P}(\Omega) \to [0,1] \quad \text{durch} \quad \mathbf{P}(A) := \sum_{x \in A} p(x).$$

Hierbei ist $\mathfrak{P}(\Omega)$ die Familie aller Teilmengen $A \subseteq \Omega$.

Eine **kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung** oder **WDichte** auf einer Ergebnismenge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine messbare Funktion

$$f : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \text{mit Gesamtmasse} \quad \int_{\Omega} f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Diese definiert ein **kontinuierliches Wahrscheinlichkeitsmaß**

$$\mathbf{P} : \mathscr{B}(\Omega) \to [0,1] \quad \text{durch} \quad \mathbf{P}(A) := \int_{A} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Hierbei ist $\mathscr{B}(\Omega)$ die Familie aller messbaren Teilmengen $A \subseteq \Omega$.

Erwartung, Varianz, Streuung

Sei $\mathbf{P}$ ein WMaß auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, zum Beispiel diskret oder kontinuierlich. Der Schwerpunkt der Verteilung $\mathbf{P}$ heißt **Mittelwert** oder **Erwartung**:

$$\mu := \sum\nolimits_{x\in\Omega} x\,p(x) \quad \text{bzw.} \quad \mu := \int_{x\in\Omega} x\,f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Hierbei setzen wir absolute Summierbarkeit / Integrierbarkeit voraus. Die **Varianz** der Verteilung ist ihr Trägheitsmoment bezüglich μ:

$$\sigma^2 := \sum\nolimits_{x\in\Omega} (x-\mu)^2\,p(x) \quad = \left[\sum\nolimits_{x\in\Omega} x^2\,p(x)\right] - \mu^2 \quad \geq 0 \quad \text{bzw.}$$

$$\sigma^2 := \int_{x\in\Omega} (x-\mu)^2\,f(x)\,\mathrm{d}x \quad = \int_{x\in\Omega} x^2\,f(x)\,\mathrm{d}x - \mu^2 \quad \geq 0.$$

Die Wurzel $\sigma \geq 0$ dieses Wertes heißt die **Streuung** der Verteilung. Anschaulich misst σ, wie weit die Werte um den Mittelwert μ streuen. Man nennt die Streuung σ daher auch die **Standardabweichung**. Genau dann gilt $\sigma = 0$, wenn $\mathbf{P}$ auf den Punkt μ konzentriert ist, d.h. für $A \subseteq \mathbb{R}$ gilt $\mathbf{P}(A) = 1$ falls $\mu \in A$ und $\mathbf{P}(A) = 0$ falls $\mu \notin A$.

Existenz von Erwartung und Varianz

Aufgabe: Welche der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind WDichten?

$$f(x) = \frac{1/c}{1+|x|}, \qquad f(x) = \frac{1/c}{1+|x|^2},$$

$$f(x) = \frac{1/c}{1+|x|^3}, \qquad f(x) = \frac{1/c}{1+|x|^\alpha},$$

$$g(x) = \frac{1/c}{1+|x|^\alpha \ln(\mathrm{e}+|x|)}, \qquad h(x) = \frac{1/c}{1+|x|^\alpha \ln(\mathrm{e}+|x|)^2},$$

mit geeignetem $c \in \mathbb{R}$. Für welche existieren Erwartung und Varianz?

Lösung: Wir haben jeweils $f \geq 0$. Die erste lässt sich nicht normieren:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|x|^\alpha}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} +\infty & \text{für } \alpha \leq 1, \\ < \infty & \text{für } \alpha > 1. \end{cases}$$

Für $\alpha = 2$ erhalten wir die Cauchy–Verteilung $f(x) = \frac{1/\pi}{1+x^2}$. V241
Das Integral konvergiert für $\alpha > 1$. Für die Erwartung braucht's $\alpha > 2$. Für die Varianz braucht's $\alpha > 3$. Für h genügt jeweils schon $\alpha \geq 1, 2, 3$.

Wichtige Verteilungen und ihre Kenngrößen

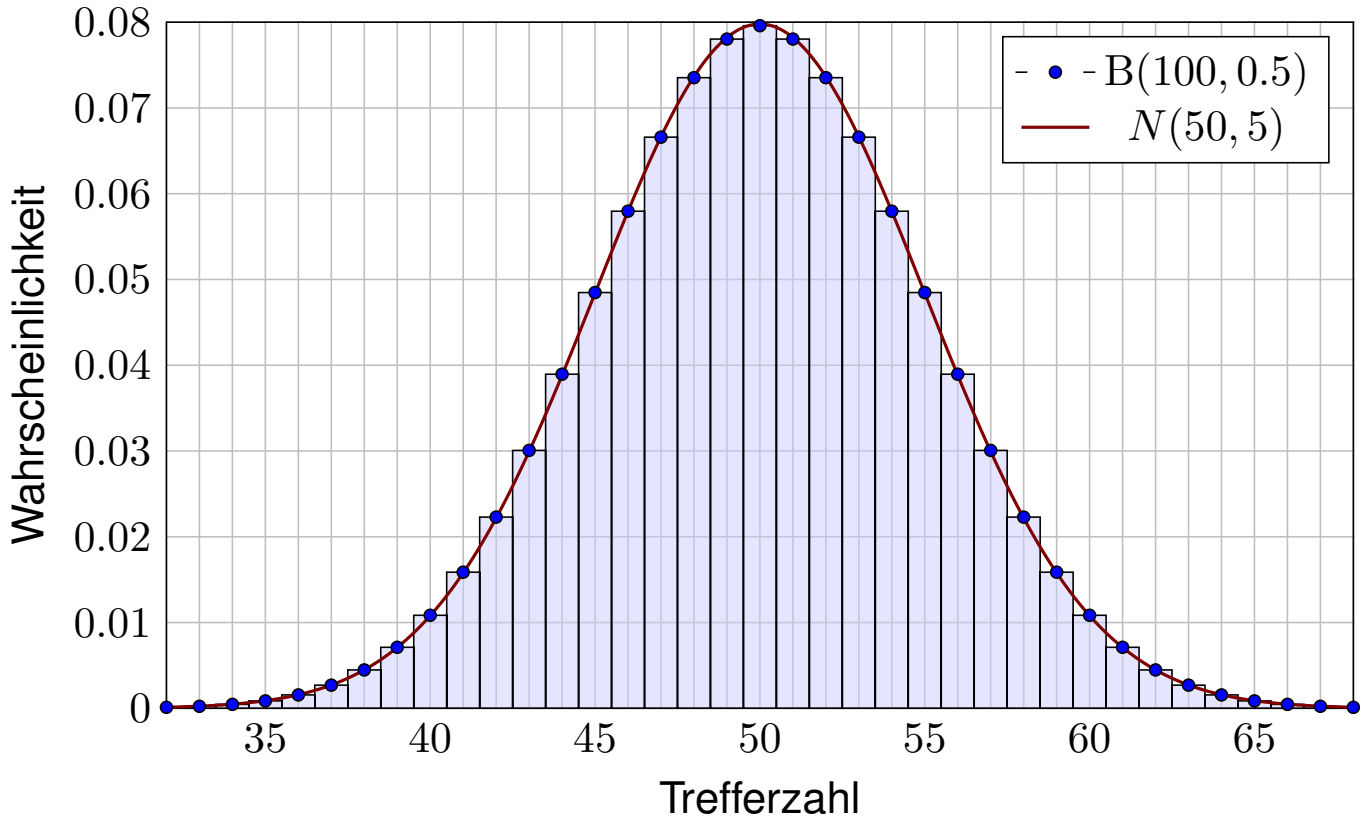
Z617
Fazit

diskret		Ω	$p(k) = \mathbf{P}(\{k\})$	$\mathbf{E}$	$\mathbf{V}$
Gleichverteilung	V233	$\{a, \ldots, b\}$	$\frac{1}{b-a+1}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$
Hyperg. $\mathrm{H}(N, K, n)$	U419	$\{0, \ldots, n\}$	$\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}/\binom{N}{n}$	$n\frac{K}{N}$	$n\frac{K}{N}\frac{N-K}{N}\frac{N-n}{N-1}$
Binomial $\mathrm{B}(n, t)$	U421	$\{0, \ldots, n\}$	$\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}$	nt	$nt(1-t)$
Poisson $\mathrm{P}(\lambda)$	U425	$\mathbb{N}$	$\mathrm{e}^{-\lambda}\,\lambda^k/k!$	λ	λ
Geometrisch $\mathrm{G}(q)$	T421	$\mathbb{N}_{\geq 1}$	$(1-q)q^{k-1}$	$\frac{1}{1-q}$	$\frac{q}{(1-q)^2}$
Zeta $Z(s)$, $s = 2$	T312	$\mathbb{N}_{\geq 1}$	$\frac{6}{\pi^2}\frac{1}{k^2}$	— nicht definiert! — Diese Reihen divergieren.	
kontinuierlich		Ω	Dichte $f(x)$	$\mathbf{E}$	$\mathbf{V}$
Gleichverteilung	V235	$[a, b]$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponential $\mathrm{E}(\lambda)$	V243	$\mathbb{R}_{\geq 0}$	$\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$	λ^{-1}	λ^{-2}
Normal $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$	V239	$\mathbb{R}$	$\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$	μ	σ^2
Cauchy $\mathrm{C}(m, a)$	V241	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+(x-m)^2}$	— nicht definiert! — Diese Integrale divergieren.	

Von Binomial- zu Normalverteilungen

Z618
Fazit

Grundbeobachtung: Binomialverteilungen ähneln Normalverteilungen.
Der lokale Grenzwertsatz präzisiert dies und sichert Fehlerschranken.



Der lokale Grenzwertsatz (LGS)

Für die **Binomialverteilung** $\mathrm{B}(n,t)$ gilt $\mu = nt$ und $\sigma^2 = nt(1-t)$.
Sie ähnelt der **Normalverteilung**: $\mathrm{B}(n,t) \approx N(\mu,\sigma^2)$, das heißt:

$$\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \approx \frac{\mathrm{e}^{-\frac{(k-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \approx \int_{k-1/2}^{k+1/2} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}x.$$

Dies nennt man auch Satz von de Moivre (1733) und Laplace (1812).
Mühsame Summen ersetzen wir so durch bequemere Integrale:

$$\boxed{\sum_{k=a}^{b} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \int_{\xi=\alpha}^{\beta} \frac{\mathrm{e}^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}\xi + \delta}$$

mit den Grenzen $\alpha = (a - 1/2 - \mu)/\sigma$ und $\beta = (b + 1/2 - \mu)/\sigma$.
(1) Für $\sigma \geq 5$ ist der Approximationsfehler δ beschränkt durch

$$|\delta| < \frac{|1-2t|}{10\sigma} + \frac{1}{3\sigma^2} \leq \frac{1}{6\sigma} = \frac{1}{6\sqrt{nt(1-t)}}$$

☺ Gilt der Fehler als klein genug, so können wir die mühsame Summe der Binomialverteilung (links) durch das wesentlich bequemere Integral der Normalverteilung (rechts) ersetzen: Dieses liegt tabelliert vor. V116

Der lokale Grenzwertsatz (LGS)

(2) Ist eine genauere Approximation nötig, so addiert man zur obigen Näherung durch das Integral noch folgenden Korrekturterm κ:

$$\sum_{k=a}^{b} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \int_{\xi=\alpha}^{\beta} \frac{\mathrm{e}^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}\xi + \kappa + \varepsilon$$

mit Korrektur $\quad \kappa = \dfrac{1-2t}{6\sigma\sqrt{2\pi}} \Big[(1-\xi^2)\,\mathrm{e}^{-\xi^2/2}\Big]_{\alpha}^{\beta}$

Der verbleibende Fehler ε ist noch eine Größenordnung kleiner, nämlich

$$|\kappa| < \frac{|1-2t|}{10\sigma}, \qquad |\varepsilon| < \frac{0.15 + 0.18|1-2t|}{\sigma^2} < \frac{1}{3\sigma^2} = \frac{1}{3nt(1-t)}.$$

Speziell für $t = 1/2$ oder $\alpha = \beta$ verschwindet der Korrekturterm κ.
Für $n \to \infty$ geht der Fehler gegen Null mit $1/\sqrt{n} \to 0$ bzw. $1/n \to 0$.

$\sigma \geq 5$	$\sigma \geq 8$	$\sigma \geq 13$	$\sigma \geq 19$	$\sigma \geq 26$
$\lvert\delta\rvert < 0.034$	$\lvert\delta\rvert < 0.0178$	$\lvert\delta\rvert < 0.0097$	$\lvert\delta\rvert < 0.0062$	$\lvert\delta\rvert < 0.0043$
$\lvert\varepsilon\rvert < 0.014$	$\lvert\varepsilon\rvert < 0.0053$	$\lvert\varepsilon\rvert < 0.0020$	$\lvert\varepsilon\rvert < 0.0010$	$\lvert\varepsilon\rvert < 0.0005$

Zufallsvariablen und Erwartungswerte

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ein WRaum, zum Beispiel diskret oder kontinuierlich. V112
Eine reelle **Zufallsvariable** ist eine messbare Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$. V211
Sie ordnet jedem Zufallsergebnis $\omega \in \Omega$ eine reelle Zahl $X(\omega) \in \mathbb{R}$ zu.
Im Bildbereich $\mathbb{R}$ definiert sie die **Verteilung** $\mathbf{P}_X : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ durch

$$\mathbf{P}_X(B) = \mathbf{P}(X \in B) = \mathbf{P}\big(\{\, \omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B \,\}\big).$$

Ihr **Erwartungswert** ist gegeben durch

$$\mu = \mathbf{E}(X) := \int_\Omega X(\omega)\,\mathrm{d}\mathbf{P} = \int_\mathbb{R} x\,\mathrm{d}\mathbf{P}_X.$$

Ist die Verteilung $\mathbf{P}_X$ auf $\mathbb{R}$ kontinuierlich mit Dichte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, so gilt

$$\mathbf{E}(X) = \int_\mathbb{R} x\, f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ist $\mathbf{P}_X$ diskret mit Wkten $p(x) = \mathbf{P}(\{\, \omega \in \Omega \mid X(\omega) = x \,\})$, so gilt

$$\mathbf{E}(X) = \sum\nolimits_{x \in \mathbb{R}} x\, p(x).$$

⚠ Wir setzen hierzu absolute Integrierbarkeit / Summierbarkeit voraus!

Varianz und Streuung

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ein WRaum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable.
Sei $\mathbf{E}(|X|) < \infty$, so dass der Erwartungswert $\mu = \mathbf{E}(X)$ existiert.
Das (absolute, zentrierte) **n-te Moment** von X ist gegeben durch

$$\rho^n(X) := \mathbf{E}\big[|X - \mu|^n\big].$$

Fall $n = 2$: Die **Varianz** von X ist die mittlere quadratische Abweichung

$$\sigma^2(X) = \mathbf{V}(X) := \mathbf{E}\big[(X - \mu)^2\big] = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 \geq 0.$$

Die **Streuung** oder **Standardabweichung** ist $\sigma(X) := \sqrt{\mathbf{V}(X)}$.
Nach Chebychev gelten folgende Abschätzungen für alle $h, k > 0$:

$$\mathbf{P}\Big[|X - \mu| \geq k\sigma\Big] \leq \frac{1}{k^2}, \qquad \mathbf{P}\Big[\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma\Big] \geq 1 - \frac{1}{k^2},$$

$$\mathbf{P}\Big[X \geq \mu + k\sigma\Big] \leq \frac{1}{1+k^2}, \quad \mathbf{P}\Big[\mu - h\sigma < X < \mu + k\sigma\Big] \geq \frac{4(hk-1)}{(h+k)^2}$$

☺ Kennen Sie nur μ und σ, so sind diese Ungleichungen optimal.
Die Wkt großer Abweichungen fällt mindestens quadratisch, mit $1/k^2$.

Unabhängige Zufallsvariablen

Eine Familie $X = (X_1, \ldots, X_n)$ von Zufallsvariablen $X_k : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt **(stochastisch) unabhängig**, wenn für alle Intervalle $I_1, \ldots, I_n \subseteq \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbf{P}(\ X_1 \in I_1,\ \ldots,\ X_n \in I_n\ ) = \mathbf{P}(X_1 \in I_1) \cdots \mathbf{P}(X_n \in I_n).$$

Die gemeinsame Verteilung von $X_1, \ldots, X_n$ ist dann das Produktmaß

$$\mathbf{P}_X = \mathbf{P}_{(X_1,\ldots,X_n)} = \mathbf{P}_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{P}_{X_n}.$$

Sind $\mathbf{P}_{X_1}, \ldots, \mathbf{P}_{X_n}$ auf $\mathbb{R}$ kontinuierliche WMaße mit Dichten $f_1, \ldots, f_n$, so ist auch das Produktmaß $\mathbf{P}_X$ auf $\mathbb{R}^n$ kontinuierlich, mit Produktdichte

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n).$$

Erwartungen unabhängiger Zufallsvariablen X, Y multiplizieren sich:

$$\mathbf{E}(X \cdot Y) = \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y)$$

Ihre Kovarianz $\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$ verschwindet somit.
Varianzen unabhängiger Zufallsvariablen X, Y addieren sich:

$$\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\mathbf{Cov}(X, Y)$$

⚠ Für abhängige Zufallsvariablen gilt dies im Allgemeinen nicht!

Das Gesetz der großen Zahlen

Eine Messung / ein Experiment entspricht einer Zufallsvariablen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mit Erwartung $\mu = \mathbf{E}(X)$ und Varianz $\sigma^2 = \mathbf{V}(X) < \infty$.
Wir führen unabhängige Wiederholungen $X_1, X_2, X_3, \ldots$ durch.
Aus diesen Messwerten bilden wir den **empirischen Mittelwert**

$$\hat{X} := \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n).$$

Es gilt $\mathbf{E}(\hat{X}) = \mu$ und dank Unabhängigkeit zudem $\mathbf{V}(\hat{X}) = \sigma^2/n$.
Mit zunehmendem n streut $\hat{X}$ immer weniger, denn $\hat{\sigma} = \sigma/\sqrt{n} \to 0$.
Der Mittelwert $\hat{X}$ nähert sich dem Erwartungswert μ: Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\boxed{\mathbf{P}\Big[|\hat{X} - \mu| \geq \varepsilon\Big] \ \leq\ \frac{\sigma^2}{n\,\varepsilon^2} \ \searrow\ 0.}$$

Dieser Grenzwert besagt in Worten: Große Abweichungen $|\hat{X} - \mu| \geq \varepsilon$ werden beliebig unwahrscheinlich, wenn wir n hinreichend groß wählen.

In praktischen Anwendungen möchte man n nicht allzu groß wählen, denn wiederholte Messungen sind teuer. Wir brauchen daher bessere Schranken für die Abweichung $\mathbf{P}(|\hat{X} - \mu| \geq \varepsilon)$. Diese liefert der ZGS!

Der zentrale Grenzwertsatz (ZGS)

Der ZGS besagt: Die Summe $S = X_1 + \ldots + X_n$ vieler unabhängiger, aber ähnlich großer Zufallsvariablen ist annähernd normalverteilt.

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ein WRaum und $X_1, X_2, X_3, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängig mit

1. endlichen Erwartungen $\mu_k = \mathbf{E}(X_k)$ dank $\mathbf{E}(|X_k|) < \infty$,
2. strikt positiven Varianzen $\sigma_k^2 = \mathbf{E}\big(|X_k - \mu_k|^2\big) \geq \sigma_0^2 > 0$,
3. beschränkten dritten Momenten $\rho_k^3 = \mathbf{E}\big(|X_k - \mu_k|^3\big) \leq \rho_0^3 < \infty$.

Die Summe $S = X_1 + \ldots + X_n$ hat die Erwartung $\mu = \mu_1 + \ldots + \mu_n$ und die Varianz $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2$. Es gilt $\mathbf{P}_S \approx N(\mu, \sigma^2)$, genauer

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{P}(a \leq S \leq b) &= \int_{(a-\mu)/\sigma}^{(b-\mu)/\sigma} \frac{\mathrm{e}^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}\xi \;+\; \delta, \\ |\delta| &\leq \frac{\rho_1^3 + \ldots + \rho_n^3}{(\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2)^{3/2}} \leq \frac{\rho_0^3}{\sigma_0^3\sqrt{n}} \searrow 0. \end{aligned}}$$

Zentriert und normiert zu $S^* := (S - \mu)/\sigma$ erhalten wir $\mathbf{P}_{S^*} \approx N(0, 1)$. Der lokale Grenzwertsatz V3A ist spezieller, dabei aber auch präziser.

Konfidenzintervalle

In der Praxis ist folgende Anwendung des ZGS besonders wichtig: Als Stichprobe für X führen wir n **unabhängige Messungen** aus. Aus den so gewonnenen Messwerten $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ berechnen wir

den **Stichprobenmittelwert** $\hat{x} := \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$,

die **Stichprobenvarianz** $\hat{\sigma}^2 := \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (x_k - \hat{x})^2$,

das 2σ**–Konfidenzintervall** $I_2 := \Big[\, \hat{x} - 2\dfrac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}},\ \hat{x} + 2\dfrac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \,\Big]$.

Für große n gilt: Bei 95% aller Stichproben überdeckt das 2σ–Intervall I_2 den (konstanten aber uns unbekannten) Erwartungswert $\mu = \mathbf{E}(X)$.

Noch strenger: Bei 99% aller Stichproben überdeckt das 3σ–Intervall I_3 den (konstanten aber uns unbekannten) Erwartungswert $\mu = \mathbf{E}(X)$.

Der Nenner $\sqrt{n}$ bedeutet: Für doppelte Genauigkeit braucht man eine viermal größere Stichprobe, für zehnfache Genauigkeit eine 100mal größere Stichprobe. Das ist Fluch und Segen der großen Zahlen!

Verständnisfragen: Zufallsvariablen

Versuchen Sie, folgende Fragen frei aber genau zu beantworten, etwa so, wie Sie dies einer Kommiliton:in / Kolleg:in erklären wollen.

Was ist ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$? Was ist hierauf eine (reelle) Zufallsvariable X? Was ist ihre Verteilung $\mathbf{P}_X$ im Bildraum $\mathbb{R}$? Erinnerung: Wann ist $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ diskret? endlich? laplacesch?

Wie berechnet man den Erwartungswert $\mu = \mathbf{E}(X)$? bei diskreter Verteilung? bei kontinuierlicher Verteilung? Wie berechnet man die Varianz $\sigma^2 = \mathbf{V}(X)$ und Streuung σ? Was sind die Momente von X?

Nennen Sie wichtige Verteilungen und ihre Anwendungen.
Was sind ihre Kenngrößen μ und σ? Wie berechnet man sie?
Wie verhalten sie sich bei einer affinen Skalierung $Y = aX + b$?

Wie lauten und was besagen die Ungleichungen von Chebychev?
Wann lassen sie sich anwenden, was muss man hierzu wissen?

Gibt es genauere Ungleichungen, wenn man die Verteilung kennt?
Was gilt für die Normalverteilung? Was besagt die 68–95–99–Regel?

Verständnisfragen: zentraler Grenzwertsatz

Wann sind zwei Zufallsvariablen X, Y unabhängig? Wann sind die Indikatorfunktionen $\mathbf{I}_A, \mathbf{I}_B$ zweier Ereignisse $A, B \subseteq \Omega$ unabhängig? Kennen Sie weitere Beispiele von un/abhängigen Zufallsvariablen?

Gilt stets $\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y)$? und $\mathbf{E}(X \cdot Y) = \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y)$? und $\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(X)$? Was gilt bei Unabhängigkeit?

Was sind Erwartungswert und Varianz für $\mathrm{B}(1, t)$? Wie kann man hieraus mühelos Erwartungswert und Varianz von $\mathrm{B}(n, t)$ ablesen?

Was besagt das Gesetz der großen Zahlen? Wie kann man Wkten / Erwartungswerte empirisch messen? Wie schnell ist die Konvergenz?

Was besagt der zentrale Grenzwertsatz? Welche drei Voraussetzungen braucht, welche Schlussfolgerung gewinnt man? Wie schnell ist die Konvergenz? Was ist gleich / anders beim lokalen Grenzwertsatz?

Wie berechnet man Stichprobenmittelwert und -Varianz?
Wie bestimmt man hieraus das Konfidenzintervall der Stichprobe?
Wie liegt es zum (gesuchten aber unbekannten) Erwartungswert?

Weise Worte zum guten Ausgang

La bêtise n'est pas mon fort.
[Dummheit ist nicht meine Stärke.]
Paul Valéry (1871–1945)

Monsieur Cauchy annonce, que, pour se conformer au vœu du Conseil,
il ne s'attachera plus à donner, comme il a fait jusqu'à présent,
des démonstrations parfaitement rigoureuse.
Conseil d'instruction de l'École Polytechnique (1825)

Je dois dire qu'il n'y avait pas un cours de Lebesgue
où l'on ne riait pas d'une manière infiniment agréable.
Je soupçonne même qu'au moins le tiers des gens
venait au cours de Lebesgue pour s'amuser.
C'était infiniment intéressant, infiniment profond.
Szolem Mandelbrojt (1899–1983), *Souvenirs à bâtons rompus*

Weise Worte zum guten Ausgang

Why waste time learning,
when ignorance is instantaneous?
Hobbes (1985–1995)

Mathematik lernen Sie nicht durch Zuschauen allein,
sondern durch eigene Arbeit und regelmäßige Übung!
Klavierspielen lernen Sie ja auch nicht
durch den Besuch von Konzerten.
nach Carl Runge (1856–1927)

If you stop at general math,
you're only going to make general math money.
Snoop Dogg (1971–)

Weise Worte zum guten Ausgang

While physics and mathematics may tell us how the universe began,
they are not much use in predicting human behavior because
there are far too many equations to solve. I'm no better
than anyone else at understanding what makes people tick.
Stephen Hawking (1942–2018)

Es gibt drei Möglichkeiten, klug zu handeln:
1. Durch Nachahmen — Das ist die leichteste.
2. Durch Nachdenken — Das ist die edelste.
3. Durch Erfahrung — Das ist die bitterste.

Erkläre es mir, und ich werde es vergessen.
Zeige es mir, und ich werde mich erinnern.
Lass es mich tun, und ich werde es verstehen.
Konfuzius (551–497 v.Chr.)

Weise Worte zum guten Ausgang

It was the best of times, it was the worst of times,
it was the age of wisdom, it was the age of foolishness,
it was the epoch of belief, it was the epoch of incredulity,
it was the season of Light, it was the season of Darkness,
it was the spring of hope, it was the winter of despair.
Charles Dickens (1812–1870), *A Tale of Two Cities* (1859)

Manches sagt ich, mehr noch wollt ich,
ließe zur Rede Raum das Geschick.
Die Stimme weicht, Wunden schwellen:
Wahres sprach ich; will nun enden.
Edda, das dritte Lied von Sigurd dem Fafnirstödter

Prophetische Rede verachtet nicht.
Alles aber prüfet, das Gute behaltet.
Die Bibel, 1. Thessalonicher 5, 20–21