Modulklausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Bitte füllen Sie Folgendes aus.

Name: Musterlösung	Matrikelnummer: Musterlösung
Vorname: Musterlösung	Name des Tutors: Musterlösung

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise.**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4
- Mobiltelefone und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die Kästen für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Aufgaben sind untereinander unabhängig.

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

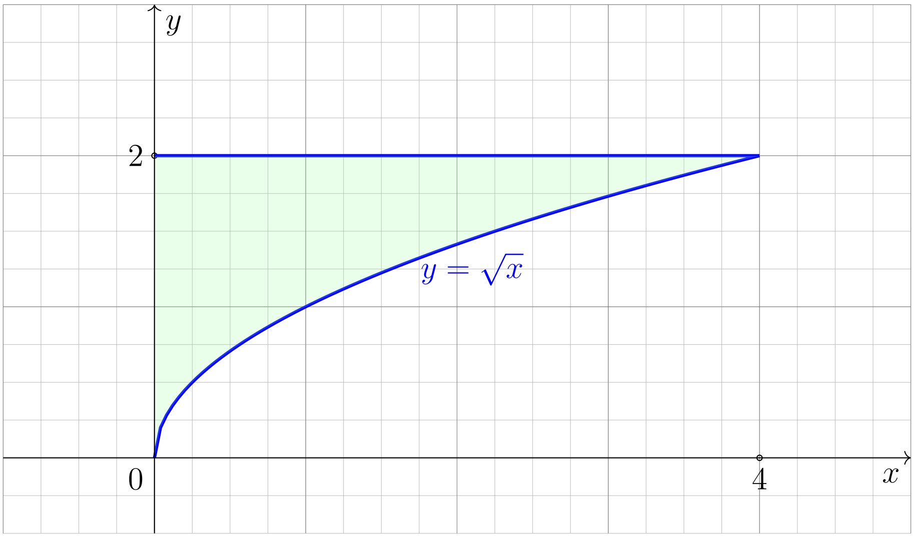
Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt
Punkte	/10	/10	/10	/10	/10	/10	/60

Aufgabe 1. *Integration und Integralsätze in der Ebene (10 Punkte)*

Betrachten Sie das folgende Integral:

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{x}{y^5+1}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

1A. Skizzieren Sie den Integrationsbereich in der xy-Ebene.



2

1B. Beschreiben Sie den Integrationsbereich als Normalbereich in x-Richtung:

$0 \leq y \leq 2$ und $0 \leq x \leq y^2$

2

1C. Bestimmen Sie das Integral.

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{x}{y^5+1}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \int_0^{y^2} \frac{x}{y^5+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{[2 Punkte]}$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{x^2}{2(y^5+1)}\right]_{x=0}^{x=y^2} \mathrm{d}y = \int_0^2 \frac{y^4}{2(y^5+1)}\,\mathrm{d}y \quad \text{[1 Punkt]}$$

$$= \frac{1}{10}\left[\ln(y^5+1)\right]_{y=0}^{y=2} = \frac{1}{10}(\ln(2^5+1)-\ln(1)) = \frac{1}{10}\ln(33). \quad \text{[1 Punkt]}$$

4

1D. Es seien das ebene Vektorfeld $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y) = (-2y, 3x)$ und die Kurve $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 9\}$ gegeben. Berechnen Sie das Flussintegral $\int_\Gamma f \times \mathrm{d}\Gamma$.

Eine Parametrisierung des Kreises ist

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \Gamma \quad \gamma(t) = (3\cos(t), 3\sin(t)) \quad \text{mit} \quad \gamma'(t) = (-3\sin(t), 3\cos(t)).$$

Dann ist

$$\int_\Gamma f \times \mathrm{d}\Gamma = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \times \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -6\sin t \\ 9\cos t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3\sin t \\ 3\cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{2\pi} (-18\sin t\cos t + 27\sin t\cos t)\,\mathrm{d}t$$

$$= 0.$$

Alternativ können Sie den Satz von Gauß benutzen: Aus $\operatorname{div}(f) = 0$ folgt

$$\int_\Gamma f \times \mathrm{d}\Gamma = \int_D \operatorname{div}(f)\,\mathrm{d}(x, y) = 0$$

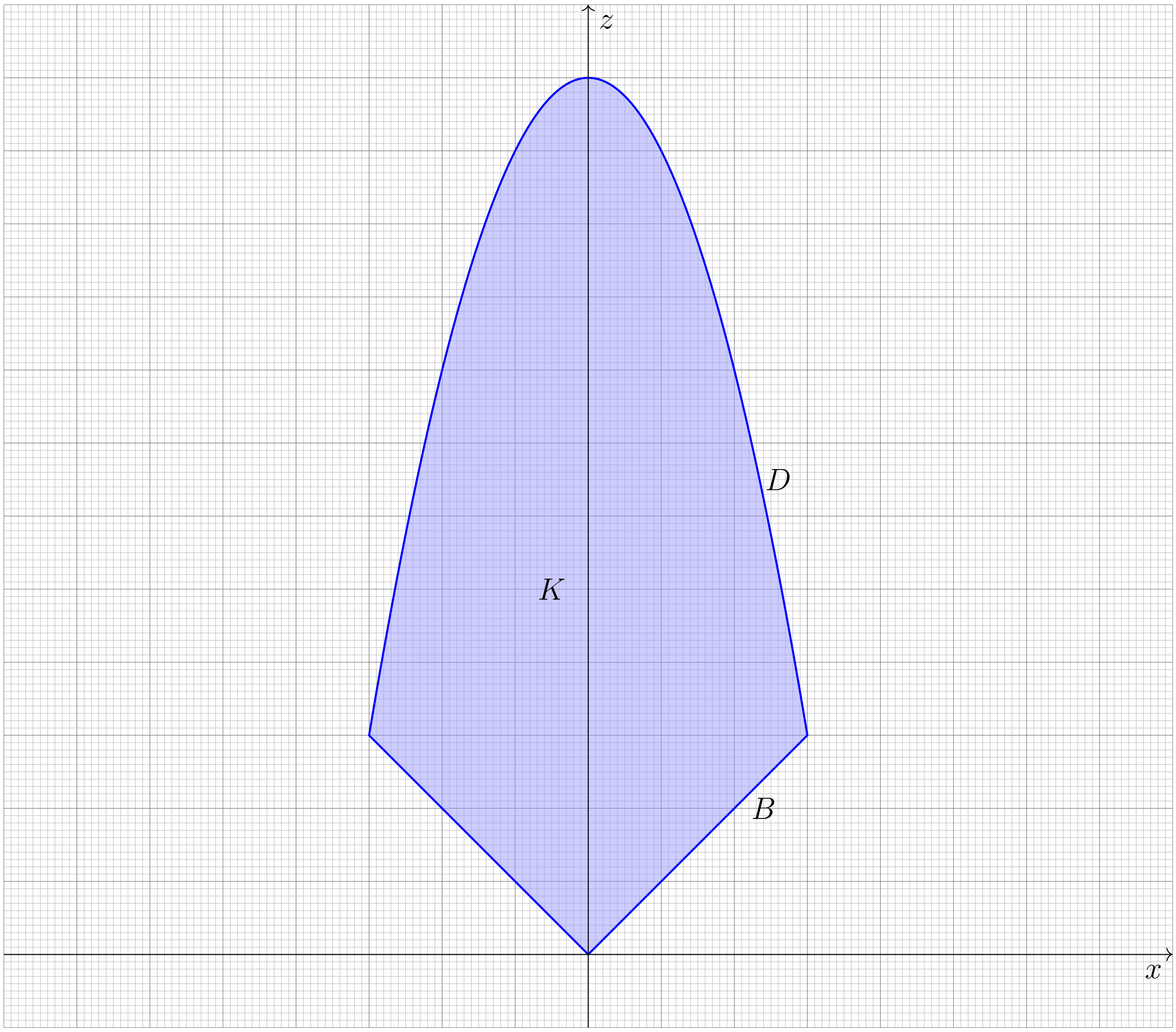
2

Aufgabe 2. *Dreidimensionale Integrale und Integralsätze* (*10 Punkte*)

Der Körper $K \subset \mathbb{R}^3$ und das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 12 - x^2 - y^2 \right\} \quad \text{und} \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ 2x + e^y \\ 2y \end{pmatrix}.$$

2A. Skizzieren Sie den Schnitt von K mit der x–z–Ebene, also mit der Ebene $y = 0$:



1

Parametrisieren Sie den Körper K in Zylinderkoordinaten um die z-Achse:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} 0 \leq \rho \leq \boxed{3} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ \boxed{\rho} \leq z \leq \boxed{12-\rho^2} \end{cases}$$

3

2B. Berechnen Sie mit dieser Parametrisierung das Volumen des Körpers K:

$\mathrm{vol}_3(K) = \int_K 1 \,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{3}\int_{z=\rho}^{12-\rho^2} \rho \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi$ Transformationssatz [1 Punkt]

$= 2\pi \int_{\rho=0}^{3} (12-\rho^2-\rho)\rho \,\mathrm{d}\rho$ Integrale vereinfachen

$= \frac{99}{2}\pi$ [1 Punkt]

Erläuterung: Beim Transformationssatz die Funktionaldeterminante nicht vergessen!

2

2C. Die Randfläche ∂K besteht aus dem Boden B mit $z = \sqrt{x^2+y^2}$ und dem Deckel D mit $z = 12 - x^2 - y^2$.

Wir parametrisieren D durch $\Phi_D : [0,3]\times[0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\Phi_D\begin{pmatrix}\rho\\ \varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\rho\cos\varphi\\ \rho\sin\varphi\\ 12-\rho^2\end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial\Phi_D}{\partial\rho}\times\frac{\partial\Phi_D}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ -2\rho\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-\rho\sin\varphi\\ \rho\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}2\rho^2\cos\varphi\\ 2\rho^2\sin\varphi\\ \rho\end{pmatrix}}$$

1

Berechnen Sie den Fluss von $F = \mathrm{rot}(f)$ durch D nach außen.

$$F = \mathrm{rot}(f) = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$$

$\int_D F\cdot dS = \int_0^3\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\rho^2\cos\varphi\\ 2\rho^2\sin\varphi\\ \rho\end{pmatrix} \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho$ [1 Punkt], da $\begin{pmatrix}2\rho^2\cos\varphi\\ 2\rho^2\sin\varphi\\ \rho\end{pmatrix}$ nach außen zeigt

$= \int_0^3\int_0^{2\pi} (4\rho^2(\cos\varphi+\sin\varphi)+2\rho)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho = \int_0^3 4\pi\rho\,\mathrm{d}\rho = 18\pi.$ [1 Punkt]

2

Sei $\Gamma = \partial D$ orientiert gegen den Uhrzeigersinn. Berechnen Sie das Arbeitsintegral $\int_\Gamma f\cdot \mathrm{d}\Gamma$.

$\int_\Gamma f\cdot d\Gamma = \int_D \mathrm{rot}(f)\cdot \mathrm{d}S = 8\pi$ dank Stokes.

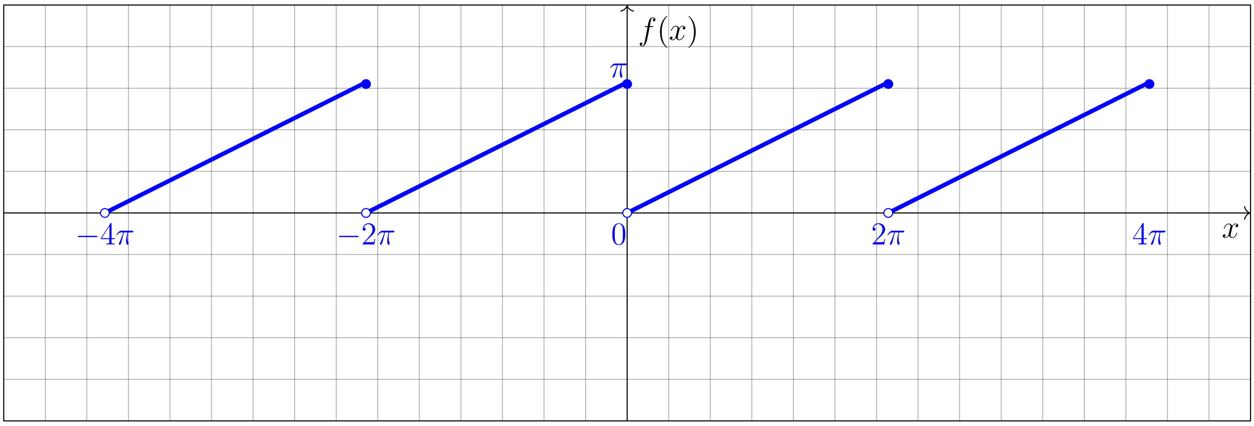
1

Aufgabe 3. *Fourier-Reihen (10 Punkte)*

Wir definieren eine 2π-periodische Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \frac{x}{2} \text{ für } x \in (0, 2\pi].$$

3A. Skizzieren Sie die Funktion f auf dem Intervall $[-4\pi, 4\pi]$.



1 Punkt, falls die Funktion 2π-periodisch ist

$\frac{\quad}{2}$

3B. Berechnen Sie die Koeffizienten a_k und b_k der reellen Fourier–Reihe

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k\in\mathbb{N}} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) .$$

Die Koeffizienten folgen durch Integration:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{x}{2}dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}\frac{4\pi^2}{4} = \pi. \text{ [1 Punkt]}$$

$$\begin{aligned}
a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{x}{2}\cos(nx)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{1}{n}x\sin(nx)\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{1}{n}\sin(nx)dx\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(0 - 0 - \left[-\frac{1}{n^2}\cos(nx)\right]_0^{2\pi}\right) \quad \text{[1 Punkt]} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(0 - 0 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right) = 0. \text{ [1 Punkt]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{x}{2}\sin(nx)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\left[-\frac{1}{n}x\cos(nx)\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}-\frac{1}{n}\cos(nx)dx\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{2\pi}{n} - 0 + \left[\frac{1}{n^2}\sin(nx)\right]_0^{2\pi}\right) \quad \text{[1 Punkt]} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{2\pi}{n} - 0 + 0 - 0\right) \\
&= -\frac{1}{2\pi}\frac{2\pi}{n} \\
&= -\frac{1}{n}. \text{ [1 Punkt]}
\end{aligned}$$

5

3C. Seien c_k die Koeffizienten der komplexen Fourier–Reihe $f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$.

Berechnen Sie c_{-k}, falls $k \in \mathbb{Z}_{>0}$.

$$c_{-k} = \boxed{-\frac{i}{2k}}.$$

1

$c_{-k} = \dfrac{a_k + ib_k}{2}$.

3D. Bestimmen Sie den Grenzwert der Fourier–Reihe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von f in den Punkten $x = -3\pi$ und $x = 0$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(-3\pi) = \boxed{-3\pi/2}, \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(0) = \boxed{\pi/2}.$$ dank Dirichlet-Kriterium

2

Aufgabe 4. *Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung (10 Punkte)*

Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung

$$(2x^2 - x)y'(x) + y(x) = 2x \quad \text{für } x > \frac{1}{2}.$$

4A. Diese Gleichung hat die Form $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$, wobei

$$a(x) = \boxed{-\frac{1}{x(2x-1)}}.$$

1 Punkt auch, wenn $a(x) = -\dfrac{1}{2x^2 - x}$.

$$b(x) = \boxed{\frac{2}{2x-1}}.$$

2

4B. Lösen Sie für $x > \frac{1}{2}$ das Anfangswertproblem

$$(2x^2 - x)y'(x) + y(x) = 2x \ \text{ mit } y(1) = 2.$$

Es ist $a(x) = -\dfrac{1}{x(2x-1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{2x-1}$. [1 Punkt]

Deshalb folgt $A(x) = \int_1^x a(t)\mathrm{d}t = [\ln(t) - \ln(2t-1)]_1^x = \ln(x) - \ln(2x-1)$. [1 Punkt]

Wir erhalten damit die homogene Lösung.

Es ist $e^{A(x)} = e^{\ln(x)-\ln(2x-1)} = e^{\ln\left(\frac{x}{2x-1}\right)}$. [1 Punkt]

Daher gilt $e^{A(x)} = \dfrac{x}{2x-1}$ [1 Punkt] und $y_h(x) = y_0 \cdot e^{A(x)} = \dfrac{2x}{2x-1}$. [1 Punkt]

Eine partikuläre Lösung ist:

$y_p(x) = \mathrm{e}^{A(x)} \displaystyle\int_1^x e^{-A(t)} b(t)\mathrm{d}t = \frac{2x}{2x-1} \int_1^x \frac{2t-1}{t} \frac{1}{2t-1} \mathrm{d}t$. [1 Punkt]

Es folgt $y_p(x) = \dfrac{2x}{2x-1} \ln(x)$. [1 Punkt]

Die Lösung ist $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (1 + \ln(x))\dfrac{2x}{2x-1}$. [1 Punkt]

8

Aufgabe 5. *Differentialgleichungssystem (10 Punkte)*

Wir betrachten das folgende DG-System

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) \\ y_2'(t) = y_2(t) - y_3(t) \\ y_3'(t) = y_2(t) + y_3(t) \end{cases} .$$

5A. In Matrixschreibweise gilt $y'(t) = Ay(t)$ mit $A = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$. 1

Bestimmen Sie das zugehörige charakteristische Polynom p von A und seine Faktorisierung in Polynome 1. Ordnung über $\mathbb{C}$:

$$p(\lambda) = \boxed{-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\lambda + 2 = (1-\lambda)(\lambda - 1 - \mathrm{i})(\lambda - 1 + \mathrm{i})}.$$

2

[1 Punkte] für das richtige Polynom und [1 Punkte] für die Faktorisierung.

5B. Berechnen Sie die komplexe Eigenwerte und komplexe Eigenvektoren der Matrix A.

Eigenwert $\lambda_1 = \boxed{1}$ mit Eigenvektor $v_1 = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$,

Eigenwert $\lambda_2 = \boxed{1 + \mathrm{i}}$ mit Eigenvektor $v_2 = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}}$,

Eigenwert $\lambda_3 = \boxed{1 - i}$ mit Eigenvektor $v_3 = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}}$. 3

5C. Eine komplexe Fundamentalmatrix des DG-Systems ist

$$W(t) = \boxed{\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i}\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t} & -\mathrm{i}\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})t} \\ 0 & \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t} & \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})t} \end{pmatrix}}.$$ 1

5D. Bestimmen Sie eine reelle Fundamentalsystem des DG-Systems.

Es ist $\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})t} = \mathrm{e}^{t}(\cos(t) - \mathrm{i}\sin(t))$ und $\mathrm{e}^{(1+i)t} = \mathrm{e}^{t}(\cos(t) + \mathrm{i}\sin(t))$. Deshalb:

$$u_1(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } u_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{t}(-\sin(t) + \mathrm{i}\cos(t)) \\ \mathrm{e}^{t}(\cos(t) + \mathrm{i}\sin(t)) \end{pmatrix}.$$ sind (komplexe) Lösungen.

Eine Fundamentalsystem reellen Lösungen ist:

$$w_1(t) = u_1(t) \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [1 \text{ Punkt}]$$

$$w_2(t) = \mathrm{Re}\,(u_2(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathrm{e}^{t}\sin(t) \\ \mathrm{e}^{t}\cos(t) \end{pmatrix} \quad [1 \text{ Punkt}]$$

$$w_3(t) = \mathrm{Im}\,(u_2(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{t}\cos(t) \\ \mathrm{e}^{t}\sin(t) \end{pmatrix} \quad [1 \text{ Punkt}]$$

$\overline{3}$

Aufgabe 6. *Wahrscheinlichkeitstheorie* (*10 Punkte*)

6A. Es werden zwei verschiedene faire Würfel geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(A)$, $P(B)$, und $P(A \cap B)$ für die Ereignisse

$A = \{$Es fällt mindestens eine Sechs$\}$ und $B = \{$Die Würfel haben die gleiche Augenzahl$\}$.

Entscheiden Sie (mit Begründung), ob A und B stochastisch unabhängig sind.

Jede Kombination (a, b) mit $1 \leq a, b \leq 6$ hat die Wahrscheinlichkeit $P(a, b) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$.

$A = \{(1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), (6,6), (6,5), (6.4), (6,3), (6,2), (6,1)\}$. Dann ist $P(A) = \frac{11}{36}$. [1 Punkt]

$B = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$. Dann ist $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. [1 Punkt]

Da $A \cap B = \{\text{Jeder Würfel ist eine Sechs}\} \implies P(A \cap B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.
Da $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$ [1 Punkt] und $P(A) \cdot P(B) = \frac{11}{36} \cdot \frac{1}{6}$ verschieden sind $\implies$ die Ereignisse A und B sind stochastisch abhängig. [1 Punkt]

4

6B. Für eine Klausur sind $n = 400$ Studierenden angemeldet. Jeder davon tritt mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.8$ tatsächlich an. (Wir nehmen dabei stochastische Unabhängigkeit an.) Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass 360 Plätze reichen!

Die Erwartungswert und Varianz sind
$\mu = n \cdot p = 400 \cdot \frac{8}{10} = 320$ [1 Punkt]
$\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p) = 400 \cdot \frac{8}{10} \cdot 210 = 64 \implies \sigma = 8$. [1 Punkt]

Mit Chebyshev folgt
$P(T > 360) = P(T - 320 \geq 41) = P(T - 320 \geq \frac{41}{8} 8) = P(T \geq \mu + k\sigma) \leq \frac{1}{1+k^2} \approx 3.8\%$ [1 Punkt]
mit $k = \frac{41}{8}$.

Also $P(T \leq 360) \geq 1 - \dfrac{1}{1 + k^2} \approx 96.2\%$. [1 Punkt]

4

6C. Sei X eine Zufallsvariable mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & \text{für } 1 \leq x < 3 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $\int_{-\infty}^{x} f(s)\, ds$ von X und berechnen Sie $P(X > 2)$.

Da $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^3 (\frac{1}{2}x - \frac{1}{2})\,\mathrm{d}x = 1$, ist klar, dass $f(x)$ die Dichte einer Zufallsvariable ist. Die Verteilungsfunktion ist $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s \implies$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1 \\ \frac{1}{4}(x^2-1) - \frac{1}{2}(x-1) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} & \text{für } 1 \le x < 3 \quad \text{[1 Punkt]} \\ 1 & \text{für } x \ge 3. \end{cases}$$

$P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - \int_{-\infty}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 - F(2) = 3/4$. [1 Punkt]

2