Klausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (1 Punkt)

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Studiengang:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; bearbeiten Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

Viel Erfolg!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Gesamt
Punkte	/1	/12	/12	/11	/7	/9	/10	/12	/74

Nützliche Werte

Tabelle der Exponentialfunktion $e^x = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ für ausgewählte Werte von x:

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
e^x	1.11	1.22	1.35	1.49	1.65	1.82	2.01	2.23	2.46	2.72	3.00	3.32	3.67	4.06	4.48	4.95	5.47	6.05	6.69	7.39
e^{-x}	.905	.819	.741	.670	.607	.549	.497	.449	.407	.368	.333	.301	.273	.247	.223	.202	.183	.165	.150	.135

Tabelle für das Integral $\int_0^x \varphi(t)\,dt$ über die Normalverteilung $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$:

	x+0.00	x+0.01	x+0.02	x+0.03	x+0.04	x+0.05	x+0.06	x+0.07	x+0.08	x+0.09
$x = 0.0$	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41309	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

Ablesebeispiele: Für $x = 1.23$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,dt \approx 0.39065$. Für $x = 2.58$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,dt \approx 0.49506$.

Aufgabe 2. *Verständnisfragen* (12 Punkte)

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung (durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegen/Beispiels).

2A. Seien $(f_k : [0,5] \to \mathbb{R})_{k\in\mathbb{N}}$ stetige Funktionen mit stetiger Grenzfunktion $f : [0,5] \to [-99,99]$, also $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ für jedes $x \in [0,5]$. Gilt dann $\lim_{k\to\infty} \int_0^5 f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

/ 2

2B. Gibt es eine stetige und 2π–periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, deren Fourier–Koeffizienten die Ungleichung $|c_k| \ge 1/\sqrt{k}$ für alle $k = 1, 2, 3, \ldots$ erfüllen?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

/ 2

2C. Die Matrix $A \in \mathbb{C}^{5\times5}$ besitze Hauptvektorketten der Länge 2 zum Eigenwert 1 und der Länge 3 zum Eigenwert 4. Wie lautet demnach das charakteristische Polynom von A?

Begründete Antwort:

/ 2

2D. Für $(u, v) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ lösen wir das Differentialgleichungssystem $u'' = u' + v$ und $v'' = v' - u$ und finden drei Lösungen. Lässt sich daraus jede weitere Lösung linear kombinieren?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

$\overline{}$ 2

2E. Sie werfen einen fairen Würfel mit den Augenzahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Sei A das Ereignis „Der Würfel zeigt eine ungerade Augenzahl“ und B das Ereignis „Der Würfel zeigt die Augenzahl 7“ (kein Tippfehler). Ist das Paar (A, B) stochastisch unabhängig?

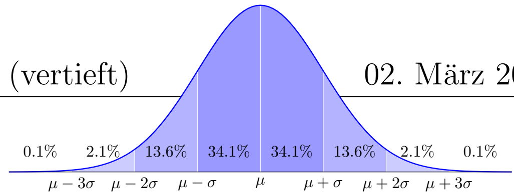
☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

$\overline{}$ 2

2F. Sie suchen $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $y\,\partial_x u(x, y) - x\,\partial_y u(x, y) = 0$ und $u(x, 0) = \sin(x)$. Aus $X' = Y$, $Y' = -X$ erhalten Sie Kreise um $(0, 0)$ als Charakteristiken. Existiert demnach eine Lösung u?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

$\overline{}$ 2



Aufgabe 3. *Wahrscheinlichkeit* (12 Punkte)

3A. In einer Population von 10 Millionen Fischen sind 60% Weibchen. Es werden zufällig 15 000 Fische gefangen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p sind darunter höchstens 9070 Weibchen? (Ergebnis wie üblich in Prozent, gerundet auf den nächsten Prozentpunkt.)

3

3B. Sie wiederholen 1000 mal ein Experiment mit Trefferquote 99.8% (zufällig, unabhängig). Mit welcher Wahrscheinlichkeit q erhalten Sie mindestens 998 Treffer? (Ergebnis in Prozent, gerundet auf den nächsten Prozentpunkt.)

3

3C. Beim weltgrößten Tischkickerturnier in Hamburg treten 2500 Spieler an, davon 2% Profis und 98% Amateure. In die Endrunde gelangen Profis mit Wkt 98%, Amateure mit Wkt 6%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit r ist ein zufällig ausgewählter Endrundenteilnehmer ein Profi?

3

3D. Bei einem *Massive Multiplayer Online Game (MMO)* stehen 10^6 Charaktere zur Auswahl (inklusive aller Varianten). Jeder der 1100 Spieler wählt einen Charakter (zufällig, unabhängig). Mit welcher Wahrscheinlichkeit s sind alle gewählten Charaktere verschieden?

3

Aufgabe 4. *Gewöhnliche Differentialgleichungen* (11 Punkte)

4A. Zu lösen ist für $t \ge 0$ die Differentialgleichung $$y'''(t) - 3y''(t) - y'(t) + 3y(t) = 0. \qquad \text{(L)}$$

Geben Sie das charakteristische Polynom p der Gleichung (L) an:

$p(x) =$

1

Zerlegen Sie das Polynom p in Linearfaktoren:

$p(x) =$

2

Nennen Sie eine Basis des Raumes aller reellen Lösungen $y : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R} : t \mapsto y(t)$ von (L).

Basis:

1

Bestimmen Sie die Lösung $u : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}$ von (L) mit $u(0) = u'(0) = 0$ und $u''(0) = 1$.

$u(t) =$

2

4B. Berechnen Sie den Gradienten der Funktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mapsto \cos(x) - 2xy + y^2$.

$$\operatorname{grad} \Phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

1

Bestimmen Sie die Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $(2y - 2x)y' = \sin(x) + 2y$ und $y(0) = -1$.

4

Aufgabe 5. *Partielle Differentialgleichungen* (7 Punkte)

Zu lösen ist für $u : \mathbb{R}_{>-1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die partielle Differentialgleichung

$$(\mathrm{P}) \begin{cases} \partial_x u(x,y) - \dfrac{y}{1+x}\,\partial_y u(x,y) = -x\,u(x,y) & \text{für alle } x > -1 \text{ und } y \in \mathbb{R}, \\ u(0,y) = y & \text{für } x = 0 \text{ und alle } y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Hierzu sei $\gamma(s) = (X(s), Y(s))$ die Charakteristik mit $\gamma(0) = (0, y_0)$ und $U(s) = u(X(s), Y(s))$.

5A. Stellen Sie das charakteristische Differentialgleichungssystem zu (P) auf:

$X'(s) = \quad 1\,,$ $\qquad X(0) = 0,$

$Y'(s) = \boxed{}\,,$ $\quad Y(0) = y_0,$

$U'(s) = \boxed{}\,,$ $\quad U(0) = y_0.$

2

5B. Lösen Sie das charakteristische Differentialgleichungssystem:

$X(s) = \quad s,$

$Y(s) = \boxed{}\,,$

$U(s) = \boxed{}\,.$

2

5C. Bestimmen Sie zu $(x,y) \in \mathbb{R}_{>-1} \times \mathbb{R}$ die Werte s und y_0 so, dass $\gamma(s) = (x,y)$ gilt:

$s = \boxed{}\,, \quad y_0 = \boxed{}\,.$

2

5D. Geben Sie die Lösung u von (P) an. *Tipp zur Probe:* Im Punkt $(1,2)$ gilt $u(1,2) = 4/\sqrt{\mathrm{e}}$.

$u(x,y) =$

1

Aufgabe 6. *Lineare Differentialgleichungssysteme* (9 Punkte)

Zu lösen ist für $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^4$ das homogene, lineare Differentialgleichungssystem

$$(\mathrm{H})\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} y_1'(t) &=& y_1(t) & & & - & y_3(t) & - & y_4(t) \\ y_2'(t) &=& y_1(t) & - & y_2(t) & - & y_3(t) & - & y_4(t) \\ y_3'(t) &=& y_1(t) & - & y_2(t) & - & 2y_3(t) & - & y_4(t) \\ y_4'(t) &=& -y_1(t) & + & 2y_2(t) & + & 2y_3(t) & + & y_4(t) \end{array}\right.$$

6A. Bestimmen Sie die Matrix A, die das obige System in der Form $y' = A\,y$ darstellt.

$A =$ $\boxed{}$

$\overline{}$ 1

6B. Die Matrix A besitzt die Jordan–Normalform

$$A \sim T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad T = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathrm{GL}_4\,\mathbb{R} \quad \text{und} \quad \lambda = \boxed{}\,.$$

$\overline{}$ 1

6C. Bestimmen Sie eine Basis v_1, v_2, v_3, v_4 des $\mathbb{R}^4$, die diese Jordan–Normalform realisiert:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \boxed{}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \boxed{}\,.$$

$\overline{}$ 2

6D. Bestimmen Sie zu (H) die zugehörige Fundamentalmatrix $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{4\times 4} : t \mapsto W(t)$.
Die $k$te Spalte ist die Lösung $w_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4 : t \mapsto w_k(t)$ von (H) mit Startvektor $w_k(0) = v_k$.

$$W(t) = \left(\begin{array}{c:c:c:c} 1 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ 1 & & & \end{array}\right)$$

3

6E. Wir wählen den Startwert $y(0) \in \mathbb{R}^4$ zufällig, stetig verteilt um den Nullpunkt.
Wie verhält sich typischerweise die Lösung $t \mapsto y(t)$ für $t \to \infty$?

- ☐ $|y(t)|$ konvergiert gegen 0 für $t \to \infty$.
- ☐ $|y(t)|$ konvergiert nicht, bleibt aber beschränkt.
- ☐ $|y(t)|$ ist unbeschränkt und wächst polynomiell.
- ☐ $|y(t)|$ ist unbeschränkt und wächst exponentiell.

Begründung:

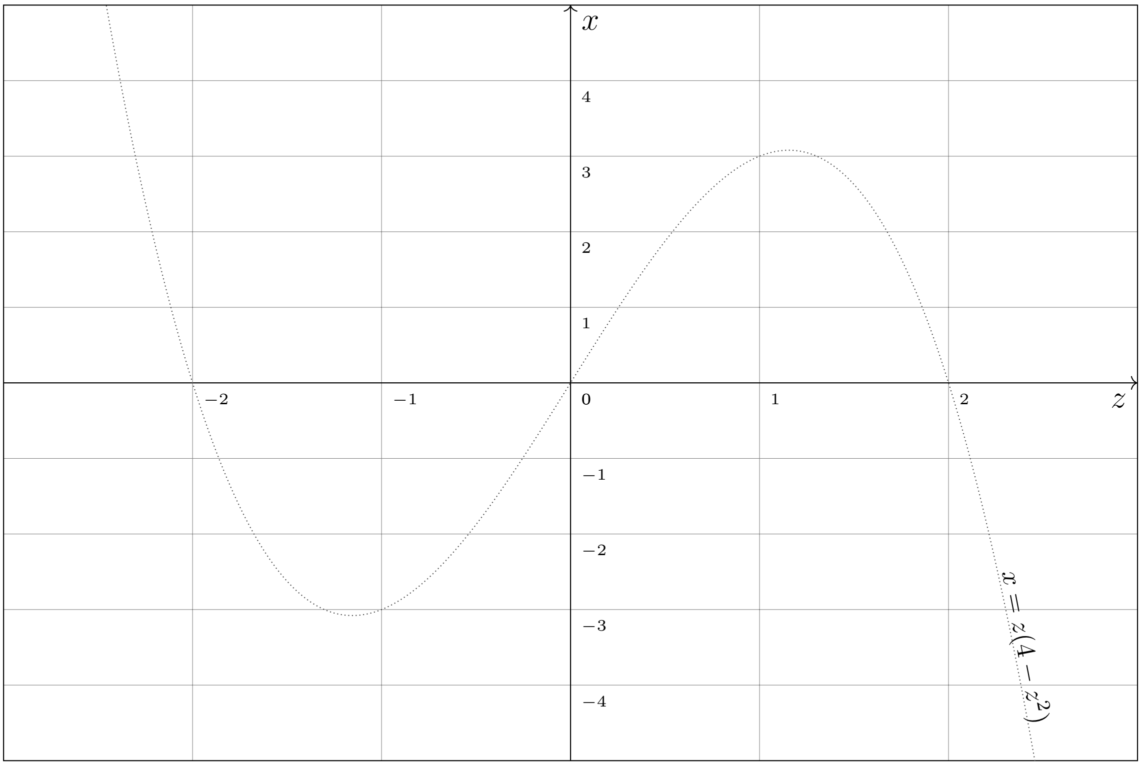
2

Aufgabe 7. *Integration und Integralsätze* (10 Punkte)

Im Raum $\mathbb{R}^3$ betrachten wir den folgenden Körper K und das Vektorfeld $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} -1 \le z \le 2 \\ x^2 + y^2 \le z^2(4 - z^2)^2 \end{matrix} \right\} \quad \text{und} \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35x \\ \frac{8}{3}yz \\ -\frac{4}{3}z^2 \end{pmatrix}$$

7A. Skizzieren Sie den Schnitt von K mit der z–x–Ebene $E = \{\, (x, y, z)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0 \,\}$:



2

7B. Parametrisieren Sie K mittels Zylinderkoordinaten $\Phi : D \xrightarrow{\sim} K$ vermöge

$$\Phi\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} -1 \le z \le 2, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le \boxed{} \end{matrix} \right\}.$$

1

7C. Die Bodenfläche von K bezeichnen wir mit $B = \{\, (x, y, z)^\intercal \in K \mid z = -1 \,\}$.
Bestimmen Sie das Flussintegral von f durch den Boden B aus dem Körper K heraus:

$$\int_B f \bullet \mathrm{d}B$$

2

7D. Berechnen Sie das Volumen von K. *Hinweis:* Es gilt $35 \cdot \left[\frac{16}{3}u^3 - \frac{8}{5}u^5 + \frac{1}{7}u^7\right]_{u=-1}^{2} = 477$.

$\mathrm{vol}(K) =$

3

7E. Berechnen Sie die Divergenz des Vektorfeldes f.

$\operatorname{div} f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$

1

7F. Bezeichne M die verbleibende Randfläche von K ohne den Boden B.
Bestimmen Sie das Flussintegral von f durch M aus dem Körper K heraus.

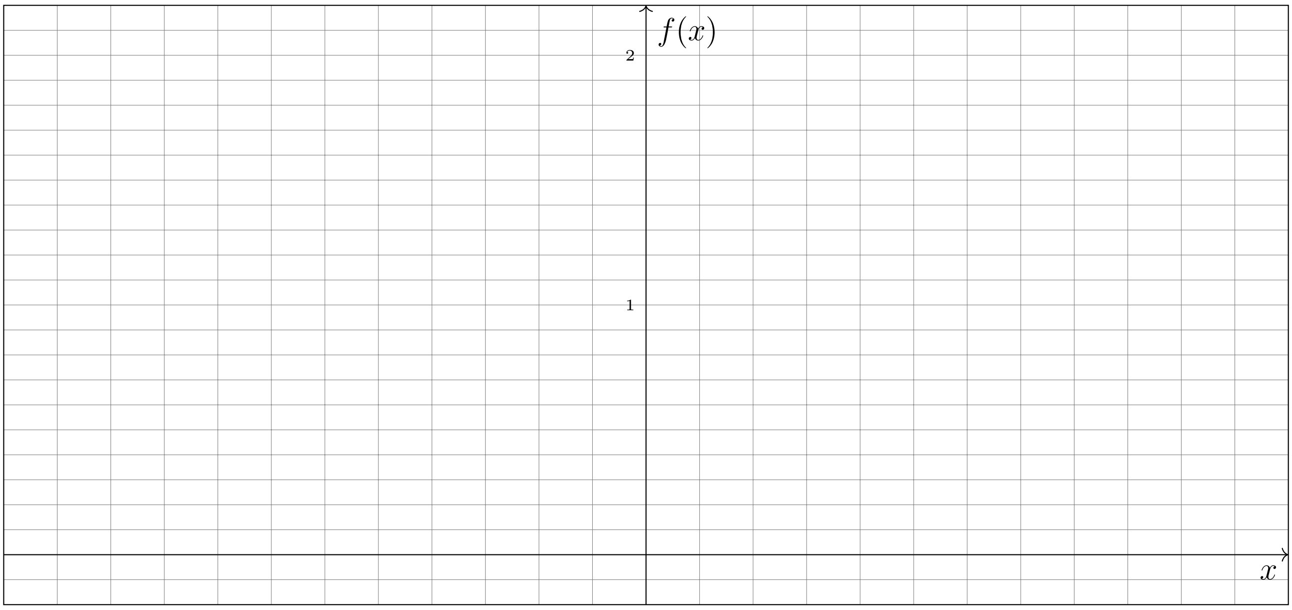
$\int_M f \bullet \mathrm{d}M =$

1

Aufgabe 8. *Fourier–Reihen* (12 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hier 2π–periodisch mit $f(x) = 0$ für $-\pi < x < 0$ und $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ für $0 \le x \le \pi$.

8A. Skizzieren Sie die Funktion f auf dem Intervall $[-12, 12]$:

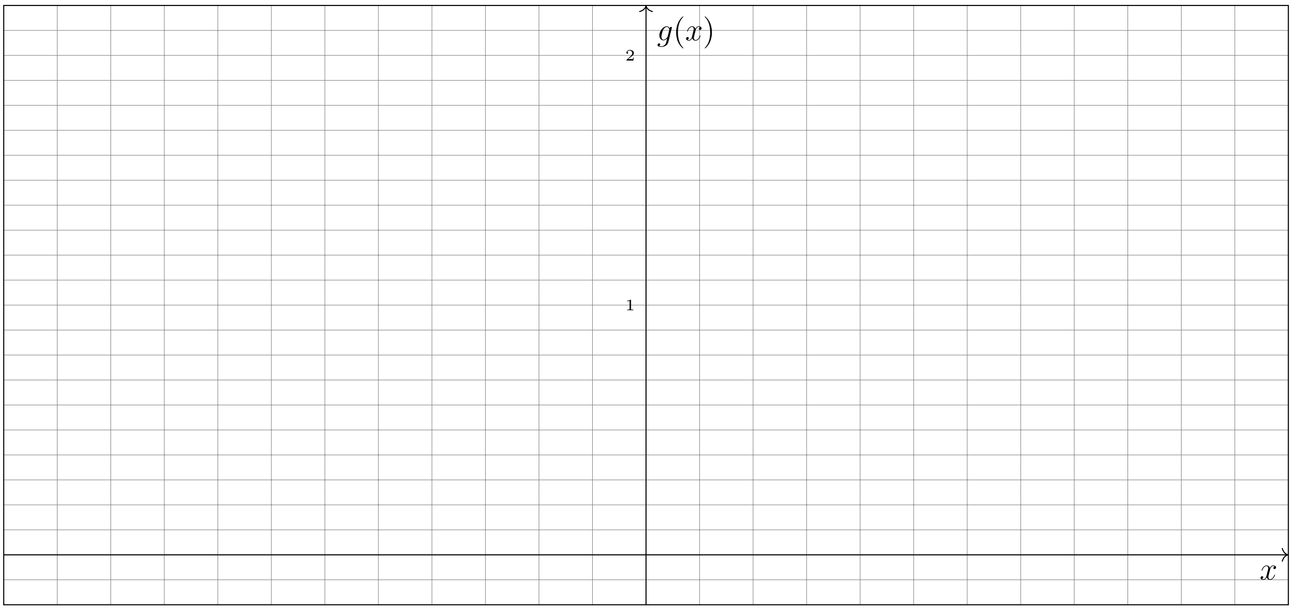


Bestimmen Sie zu f den Grenzwert der Fourier–Polynome $f_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ in $x = \pi$:

$\lim_{n\to\infty} f_n(\pi) =$

2

8B. Skizzieren Sie ebenso die (unstetige!) Funktion g mit $g(x) = f(-x) + f(x)$.



Bestimmen Sie zu g den Grenzwert der Fourier–Polynome $g_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} d_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ in $x = 0$:

$\lim_{n\to\infty} g_n(0) =$

3

8C. Bestimmen Sie die Koeffizienten c_k der Fourier–Reihe $f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$:

$c_k =$

3

8D. Aus der Fourier–Reihe $f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ folgt sofort $f(-x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{-k}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$.

Bestimmen Sie die Fourier–Koeffizienten von $g(x) := f(-x) + f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$:

$d_k =$

1

8E. Bestimmen Sie den exakten Wert der Summe $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{1+k^2}\big[1 - \mathrm{e}^{-\pi}(-1)^k\big] \in [2.1, 2.2]$:

3

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.