Klausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Studiengang:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4, eigenhandgeschrieben.
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Sofern nicht anders angegeben, ist nur das Endergebnis einzutragen. Andernfalls sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Als „optional“ ausgewiesene Aufgaben können bearbeitet werden, um Bonuspunkte zu sammeln.
- Neben den Ergebnissen aus der Vorlesung und den Übungen können Sie folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte ohne Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	$\sin(x)\cos(x)+x$	$x-\sin(x)\cos(x)$	$\ln\lvert\frac{x}{x+c}\rvert$
$f'(x)$	$2\cos(x)^2$	$2\sin(x)^2$	$\frac{c}{x(x+c)}$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (Lineare Differentialgleichungen — 4 Punkte)

Das charakteristische Polynom p der homogenen, linearen Differentialgleichung

$$y^{(5)} + 2y^{(4)} + 5y^{(3)} + 8y'' + 4y' = 0 \tag{L}$$

besitzt die doppelte Nullstelle -1.

1. Wie lauten die drei verbleibenden Nullstellen λ_1, λ_2, λ_3 von p?

$$\lambda_1 = \boxed{},\ \lambda_2 = \boxed{},\ \lambda_3 = \boxed{}.$$

2. Geben Sie eine Basis für den Raum aller reellwertigen Lösungen von (L) an:

$$\boxed{}.$$

Aufgabe 2 (Fourier–Transformation *(Optional)* — 2 Bonuspunkte)

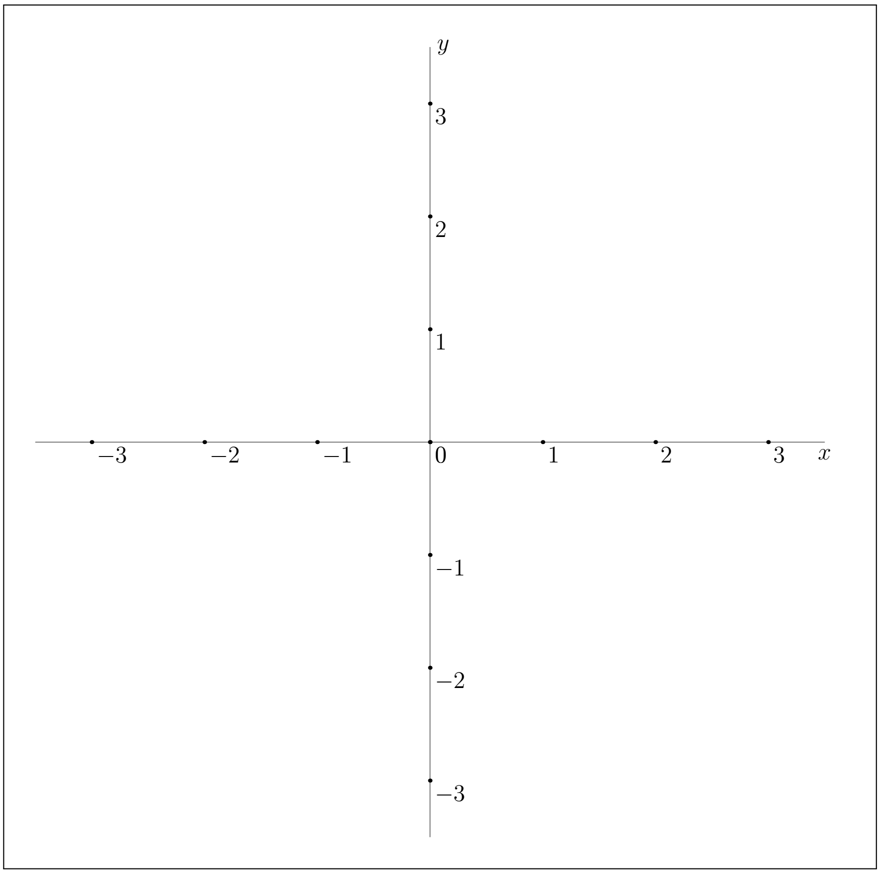
Bestimmen Sie die Fourier–Transformierte $\hat{f} = \mathscr{F}(f)$ der Funktion $f(x) = \mathbf{I}_{[0,\frac{\pi}{2}]}(x) \cdot \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Begründete Antwort:

$\hat{f}(\xi) =$

Aufgabe 3 (Integration in der Ebene *(Optional)* — 6 Bonuspunkte)
Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$ und $P = \{(x, y)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + y^2 - 2 = 0\}$.

1. Skizzieren Sie den Graphen von f sowie die Menge P in einem gemeinsamen Koordinatensystem:



Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ die durch den Graphen von f und durch P beschränkte Fläche.

2. Stellen Sie A als Normalbereich in x–Richtung dar:

$$A = \left\{ (x, y)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} \boxed{} \le x \le \boxed{} \\ \boxed{} \le y \le \boxed{} \end{array} \right\}.$$

3. Berechnen Sie $\mathrm{vol}_2(A)$:

Begründete Antwort:

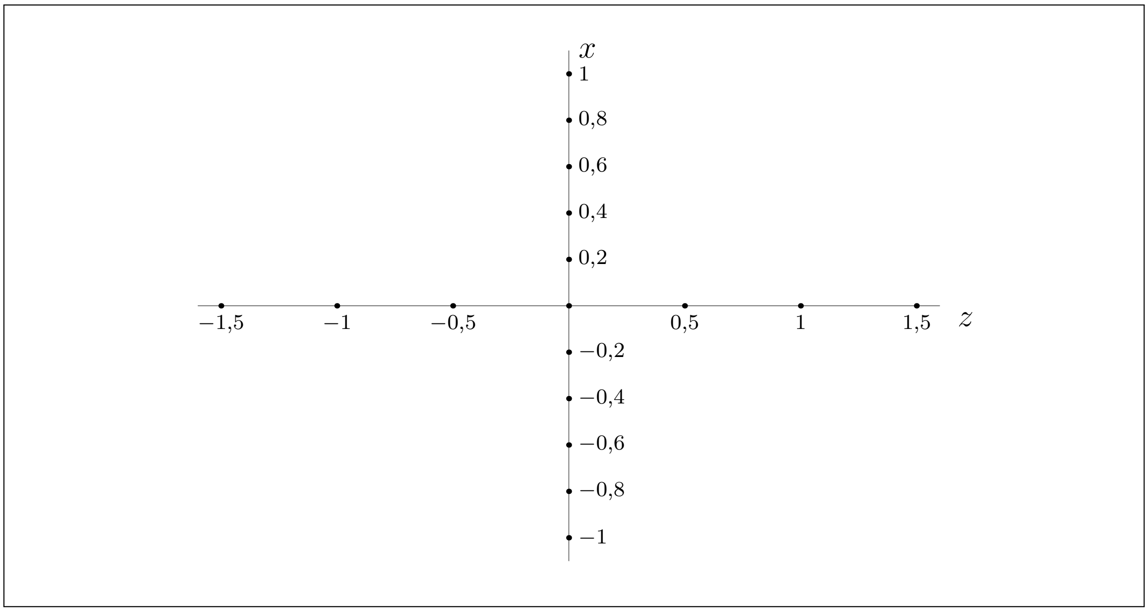
$\mathrm{vol}_2(A) =$

Aufgabe 4 (Integration im Raum — 14 Punkte)

Der Rotationskörper K sei definiert als

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \tfrac{z^4}{4} \leq x^2 + y^2 \leq \cos(\tfrac{\pi}{4} z)^4 \right\}.$$

1. Skizzieren Sie den Schnitt von K mit der Ebene $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x, z \in \mathbb{R} \right\}$.



2. Parametrisieren Sie K mittels Zylinderkoordinaten $\Phi\colon D \to K$, $\Phi\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$:

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \varphi \in [0, 2\pi];\ \begin{matrix} \boxed{} \leq r \leq \boxed{} \\ \boxed{} \leq z \leq \boxed{} \end{matrix} \right\}.$$

3. Berechnen Sie das Volumen von K. (*Hinweis.* Es gilt $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(u)^4 \,\mathrm{d}u = \frac{1}{2} + \frac{3}{16}\pi$.)

Begründete Antwort:

$\mathrm{vol}_3(K) =$

4. Durch $\Psi((\varphi, z)^\mathsf{T}) = (\cos(\frac{\pi}{4}z)^2 \cdot \cos(\varphi), \cos(\frac{\pi}{4}z)^2 \cdot \sin(\varphi), z)^\mathsf{T}$ wird eine der Randflächen M von K parametrisiert. Berechnen Sie die Jacobi–Matrix $J\Psi$ und das Kreuzprodukt $\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Psi}{\partial z}$:

$J\Psi \left(\begin{smallmatrix}\varphi \\ z\end{smallmatrix}\right) =$ $\boxed{}$,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Psi}{\partial z} \left(\begin{smallmatrix} \varphi \\ z \end{smallmatrix} \right) = \boxed{}.$$

Im Nachfolgenden sei M durch den von K nach *innen* zeigenden Normalenvektor orientiert. Wir definieren außerdem das Vektorfeld W auf $\mathbb{R}^3$ durch $W((x, y, z)^\mathsf{T}) = (0, xz, 0)^\mathsf{T}$.

5. Berechnen Sie $\operatorname{rot} W$ und $\int_M \operatorname{rot} W \cdot \mathrm{d}S$:

$$\operatorname{rot} W \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boxed{}.$$

Begründete Antwort:

$\int_M \operatorname{rot} W \cdot \mathrm{d}S =$

Begründete Antwort (Fortsetzung):

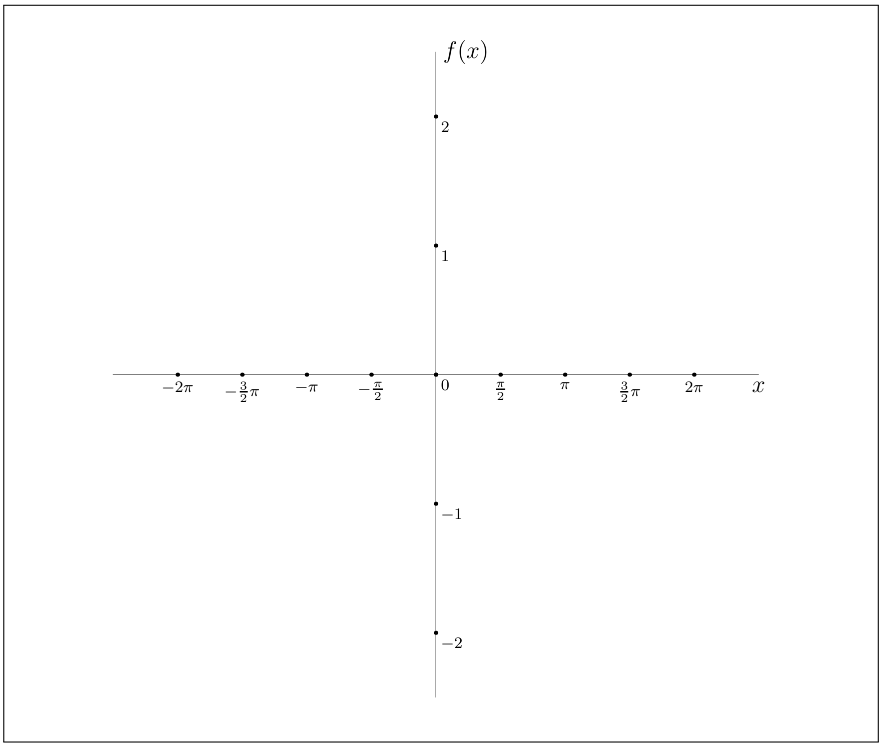
6. Der Rand $\Gamma = \partial M$ sei positiv orientiert. Schließen Sie auf den Wert des Arbeitsintegrals $\int_\Gamma W \bullet \mathrm{d}\Gamma$:

$$\int_\Gamma W \bullet \mathrm{d}\Gamma = \boxed{}.$$

Aufgabe 5 (Fourier–Reihen — 10 Punkte)

Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π–periodische, gerade Funktion mit $f(x) = \mathbf{I}_{[\frac{\pi}{2},\pi]}(x) \cdot \sin(x)$ für alle $x \in [0, \pi]$.

1. Skizzieren Sie f auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi]$. Kennzeichnen Sie dabei Unstetigkeitsstellen.



2. Bezeichne S_f die Fourier–Reihe von f. Berechnen Sie $S_f(\frac{\pi}{2})$ und $S_f(\pi)$.

$$S_f(\tfrac{\pi}{2}) = \boxed{\qquad\qquad}, \quad S_f(\pi) = \boxed{\qquad\qquad}.$$

3. Bestimmen Sie die reelle und komplexe Darstellung von S_f:

$$S_f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{\mathrm{i}kx}, \text{ mit } c_{\pm 1} = \boxed{} \text{ und}$$

$$c_k = \boxed{} \quad (k \neq \pm 1).$$

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx), \text{ mit } a_0 = \boxed{},$$

$$a_1 = \boxed{},$$

$$a_k = \boxed{} \text{ und}$$

$$b_k = \boxed{} \quad (k > 1).$$

Aufgabe 6 (Lineare Differentialgleichungssysteme — 7 Punkte + 2 Bonuspunkte)
Zu lösen ist das lineare, homogene Differentialgleichungssystem

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} y_1' & = & -4y_1 & + & 3y_2 & + & 2y_3 & - & 5y_4, \\ y_2' & = & -y_1 & + & y_2 & + & y_3 & + & y_4, \\ y_3' & = & -5y_1 & + & 3y_2 & + & 3y_3 & - & 5y_4, \\ y_4' & = & -y_1 & & & + & y_3 & + & y_4. \end{array}\right. \tag{H}$$

1. Formulieren Sie (H) in der Gestalt $y' = Ay$ für eine Matrix A:

$$A = \boxed{}.$$

2. Die Matrix A besitzt die Jordan–Normalform

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Wie lautet demnach die geometrische Vielfachheit m des Eigenwerts 1?

$$m = \boxed{}.$$

3. Geben Sie eine Basis $B : v_1, v_2, v_3, v_4$ des $\mathbb{C}^4$ an, die obige Jordan–Normalform realisiert.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_2 = \boxed{}, \; v_3 = \boxed{} \text{ und } v_4 = \boxed{}.$$

4. Bestimmen Sie eine Fundamentalmatrix W für (H):

$$W(x) = \boxed{}.$$

5. Lösen Sie (H) zu den Anfangsbedingungen $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 2$, $y_3(0) = 3$ und $y_4(0) = 2$:

$$y(x) = \boxed{}.$$

Wir betrachten nun das inhomogene Differentialgleichungssystem

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} y_1' & = & -4y_1 & + & 3y_2 & + & 2y_3 & - & 5y_4 & + & e^{2x} - xe^x\sin(x), \\ y_2' & = & -y_1 & + & y_2 & + & y_3 & + & y_4 & + & e^{2x} - (2+x)e^x\sin(x), \\ y_3' & = & -5y_1 & + & 3y_2 & + & 3y_3 & - & 5y_4 & + & e^{2x} - xe^x\sin(x), \\ y_4' & = & -y_1 & & & + & y_3 & + & y_4 & + & -e^x\sin(x). \end{array}\right. \tag{I}$$

6. *(Optional).* Bestimmen Sie die partikuläre Lösung von (I) mit $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 1$, $y_3(0) = 1$ und $y_4(0) = 0$:

$$y_{\mathrm{p}}(x) = \boxed{}.$$

(*Hinweis.* Verwenden Sie den Ansatz $y_{\mathrm{p}}(x) = W(x)c(x)$ für eine noch zu bestimmende Funktion $c(x) = (*, *, 0, 0)^{\mathsf{T}}$.)

Aufgabe 7 (Partielle Differentialgleichungen — 12 Punkte)

Zu finden ist die Lösung $u\colon (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ der partiellen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \partial_x u \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) - \tfrac{y}{x} \partial_y u \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) &= \tfrac{5+y}{2x(1+y)} \cdot u \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right), && \text{auf } (0,\infty) \times (0,\infty), \\ u \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ y \end{smallmatrix}\right) &= (1+y)^2, && \text{für alle } y \in (0,\infty). \end{aligned} \tag{P}$$

In den drei nachfolgenden Aufgabenteilen sei $y_0 \in (0,\infty)$ fixiert und $\gamma(s) = (x(s), y(s))^\top$ die Charakteristik der Differentialgleichung (P) mit $\gamma(0) = (1, y_0)^\top$.

1. Formulieren Sie die charakteristischen Gleichungen zu (P) für die Charakteristik γ.

$$x'(s) = \boxed{}, \quad x(0) = 1,$$

$$y'(s) = \boxed{}, \quad y(0) = y_0,$$

$$z'(s) = \boxed{}, \quad z(0) = z_0.$$

2. Lösen Sie die charakteristischen Gleichungen.

$$x(s) = \boxed{},$$

$$y(s) = \boxed{},$$

$$z(s) = \boxed{}.$$

3. Es sei $\binom{a}{b} \in (0, \infty) \times (0, \infty)$. Wie sind s und y_0 zu wählen, damit $\gamma(s) = \binom{a}{b}$ gilt?

$$s = \boxed{},$$

$$y_0 = \boxed{}.$$

4. Schließen Sie auf die Lösung von (P):

Begründete Antwort:

$u\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) =$

5. Machen Sie eine Probe:

$$\partial_x u\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \boxed{},$$

$$\tfrac{y}{x} \cdot \partial_y u\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \boxed{}.$$

Aufgabe 8 (Wahrscheinlichkeitsrechnung — 4 Punkte + 2 Bonuspunkte)

Im Videospiel *Among us* bilden die Spieler die Crew eines Raumschiffs, welches von Betrügern infiltriert wurde, die sich als Crewmitglieder ausgeben und deren einziges Ziel es ist, die echten Crewmitglieder zu beseitigen. Das Ziel der echten Crewmitglieder ist es, die Betrüger zu eliminieren, bevor sie selbst ausgelöscht werden. Insgesamt befinden sich auf dem Raumschiff 9 Personen, von denen 2 Betrüger sind.

3 der Spieler fanden bereits durch die eisige Leere des Weltalls ein jähes Ende, es leben also noch 6 Personen. Da weder die Crewmitglieder ein besonderes detektivisches Gespür an den Tag legten noch die Betrüger mit besonderen Überredungskünsten glänzten, nehmen wir an, dass diese zufällig ausgewählt wurden.

1. Sei X die Anzahl der noch lebenden Betrüger. Wie ist X verteilt?

$$\mathbb{P}(X = k) = \boxed{}.$$

2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist unter den verbleibenden Crewmitgliedern noch mindestens ein Betrüger? (Hier und nachfolgend ist das Ergebnis als Quotient zweier vollständig berechneter oder in Primfaktoren zerlegter Zahlen anzugeben.)

$$p = \boxed{}.$$

3. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Betrüger noch leben, unter der Annahme, dass noch nicht alle Betrüger eliminiert wurden?

$$p = \boxed{}.$$

Von den 200 Spielern, die gerade im Spiel sind, wurde 40 die Rolle des Betrügers zugeteilt. Wir wählen 4 Spieler zufällig aus und schauen ihnen zu.

4. *(Optional).* Sei nun Y die Anzahl der Betrüger unter den ausgewählten Spielern. Wie ist Y näherungsweise verteilt, wenn wir als Näherung eine Binomialverteilung einsetzen?

$$\mathbb{P}(Y = k) = \boxed{}.$$

5. *(Optional).* Wie hoch ist demnach etwa die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens einer der ausgewählten Spieler ein Betrüger ist?

$$p = \boxed{}.$$