Klausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (*1 Punkt*)

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Studiengang:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

Viel Erfolg!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Gesamt
Punkte	/1	/16	/8	/12	/10	/12	/7	/66

Nützliche Werte und Formeln

- Tabellen der Exponentialfunktion und des Logarithmus

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
e^x	0.05	0.14	0.37	1	2.71	7.39	20.09

x	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.2	1.3
$\ln(x)$	- 0.36	- 0.22	- 0.11	0	0.10	0.18	0.26

Ablesebeispiele: Für $x = 2$ gilt $e^x \approx 7.39$. Für $x = 0.8$ gilt $\ln(x) \approx -0.22$.

- Einige Stammfunktionen:

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1}(x) + c \qquad \int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \log(1+x^2) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sinh^{-1}(x) + c \qquad \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{1+x^2} + c$$

Aufgabe 2. *Vermischtes* ($4 + 4 + 4 + 4 = 16$ *Punkte*)

2A. Lösen Sie die gewöhnliche Differentialgleichung $y' + \sqrt{1 + y^2} = 0$ zum Anfangswert $y(0) = -1$.

4

2B. Ein Buch mit 500 Seiten enthält 500 Druckfehler. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich auf Seite 34 mindestens drei Druckfehler befinden. Runden Sie dabei auf ganze Prozente. *Hinweis:* Approximieren Sie die hier auftretende Binomialverteilung durch eine geeignete Poissonverteilung.

4

2C. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$(xe^y - 1) + xy' = 0.$$

Bestimmen Sie einen nur von y abhängigen integrierenden Faktor $c(y)$, ein Potential der exakten Differentialgleichung und die Lösung des Anfangswertproblems mit $y(2) = 0$.

$\overline{\quad 4 \quad}$

2D. Zu welchem der folgenden Vektorfelder $g, f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ existiert ein Potential?

(1) $g(x, y, z) = (y, -x, z)$ (2) $f(x, y, z) = (x^2, y^3, z^4)$

Bestimmen Sie ein Potential in den Fällen, wo dieses existiert.

4

Aufgabe 3. (*2 + 3 + 3 = 8 Punkte*) Wir wollen im folgenden annehmen, dass die Lebensdauer T eines Turbinen-Strahlwerks, wie es in einem modernen Düsenflugzeug verwendet wird, exponentialverteilt zum Parameter λ ist, d.h. $P(T > t) = e^{-\lambda t}$, wobei die Zeit t in Tausend Betriebsstunden berechnet ist.

3A. Es ist bekannt, dass ein Triebwerk im Schnitt etwa 10.000 Stunden (d.h. 10 Tausend Betriebstunden) durchhält. Bestimmen Sie den zugehörigen Parameter: $\lambda =$

2

3B. Sei $\lambda = 1/5$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p hält das Triebwerk weniger als 10.000 Stunden? Runden Sie auf zwei Nachkommastellen. $p =$

3

3C. Eine Fluggesellschaft benötigt Triebwerke, die mit 90%-tiger Wahrscheinlichkeit auch nach 5.000 Einsatzstunden noch funktionieren sollen. Bestimmen Sie den zugehörigen Parameter:

$\lambda = \boxed{}$ (Runden Sie auf drei Nachkommastellen.)

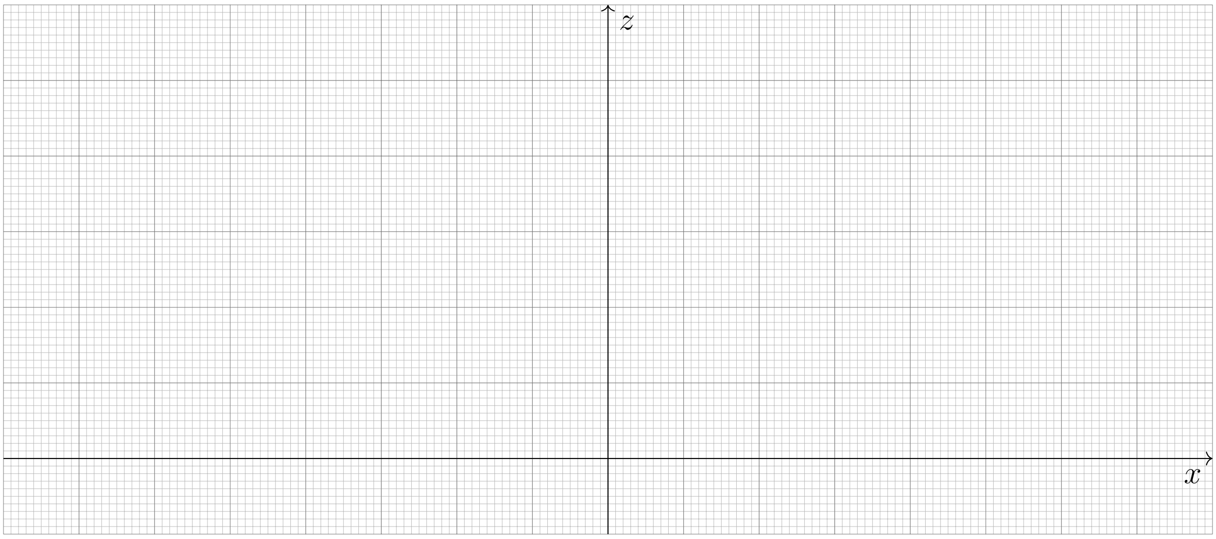
3

Aufgabe 4. *Dreidimensionale Integrale und Integralsätze* (*2 + 3 + 4 + 3 = 12 Punkte*)

Der Körper $K \subset \mathbb{R}^3$ und das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 \\ 1 \leq z \leq 2 \end{array} \right\} \quad \text{und} \quad f(x, y, z) = \Big(x - z, 2x + y, 4(x^2 + y^2)\Big).$$

4A. Skizzieren Sie den Schnitt von K mit der x–z–Ebene, also mit der Ebene $y = 0$:



Parametrisieren Sie den Körper K in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} 1 \leq z \leq 2, \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq \boxed{} \end{cases}$$ 2

4B. Berechnen Sie mit dieser Parametrisierung das Volumen $\operatorname{vol}_3(K)$ des Körpers K:

$\operatorname{vol}_3(K) =$

3

4C. Die Randfläche ∂K besteht aus dem Boden B mit $z = 1$, dem Deckel D mit $z = 2$ und dem Mantel M. Berechnen Sie den Fluss von f aus K heraus durch D:

$$I_D = \int_{s \in D} f(s) \bullet \mathrm{d}S =$$

Folgern Sie den Fluss I_B des Vektorfeldes f aus K heraus durch den Boden B:

$$I_B = \int_{s \in B} f(s) \bullet \mathrm{d}S =$$

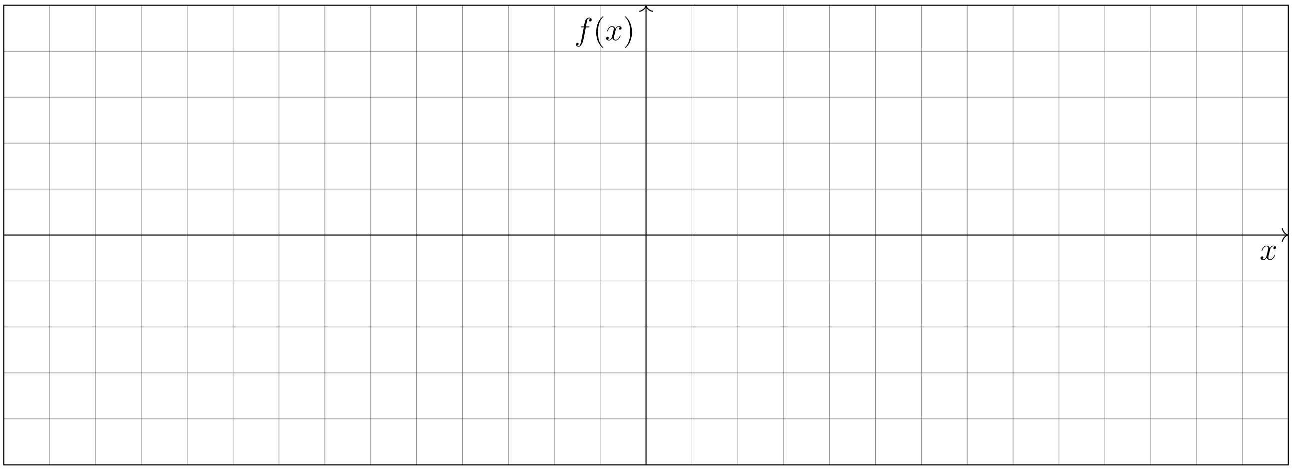
4

4D. Berechnen Sie den Fluss I_M des Vektorfeldes f aus K heraus durch den Mantel M:

3

Aufgabe 5. *Fourier–Reihen* ($2 + 3 + 2 + 3 = 10$ *Punkte*) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei 2π-periodisch und ungerade mit $f(x) = x$ für $0 < x < \pi$.

5A. Skizzieren Sie die Funktion f auf dem Intervall $[-4\pi, 4\pi]$.



Bestimmen Sie den Grenzwert der Fourier–Reihe $f_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ von f im Punkt $x = \pi$:

$\lim_{n\to\infty} f_n(\pi) =$

2

5B. Bestimmen Sie die Koeffizienten c_k der komplexen Fourier–Reihe $f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$:

$c_0 =$

$c_k =$ für $k \neq 0$.

3

5C. Bestimmen Sie die Koeffizienten a_k und b_k der reellen Fourier-Reihe $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$:

$a_0 =$		
$a_k =$		für $k \geq 1$,
$b_k =$		für $k \geq 1$.

2

5D. Betrachten Sie jetzt die Funktion $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.
Bestimmen Sie die Koeffizienten A_k und B_k ihrer reellen Fourier-Reihe:
$F(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx)$:

$A_0 =$		
$A_k =$		für $k \geq 1$,
$B_k =$		für $k \geq 1$.

3

Aufgabe 6. *Differentialgleichungssystem (4 + 3 + 3 + 2 = 12 Punkte)*

Wir betrachten das lineare Differentialgleichungssystem $y'(t) = A\,y(t) + b(t)$ mit AWP:

$$\begin{cases} y_1'(t) = -2y_1(t) + y_2(t) + e^{-t}, & y_1(0) = 1 \\ y_2'(t) = -y_1(t) - 2e^{-t}. & y_2(0) = 2. \end{cases}$$

6A. Bestimmen Sie die Matrix A des zugehörigen homogenen Differentialgleichungssystem, ihr charakteristisches Polynom und die Eigenwerte.

$A = \boxed{}$, $P(\lambda) = \boxed{}$, $\lambda_1 = \boxed{}$, $\lambda_2 = \boxed{}$.

4

Im folgenden geben wir Ihnen die beiden Vektoren $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $w := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vor.

6B. Bestimmen Sie eine Fundamentalmatrix des homogenen Differentialgleichungssystems. *Hinweis:* Zeigen Sie zunächst, dass $Av = -v$ und $Aw = -w + v$ gilt.

$y_1(t) = \boxed{}$, $y_2(t) = \boxed{}$,

$Y(t) = \boxed{}$.

3

6C. Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung $y_p(t)$ durch Variationen der Konstanten.

$y_p(t) =$ $\boxed{}$. Machen Sie die Probe.

3

6D. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung und die Lösung des Anfangswertproblems

$y(t) =$,

$y_{\text{AWP}}(t) =$

$\overline{2}$

Aufgabe 7. *Charaktertest (2 + 2 + 3 = 7 Punkte)*

Zu lösen ist für $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto u(x, y)$ die partielle Differentialgleichung

$$2\partial_y u + (u + y)\,\partial_x u = u \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R},$$
$$u(x, 0) = x \qquad \text{für } y = 0 \text{ und alle } x \in \mathbb{R}.$$

7A.

Geben Sie das charakteristische Differentialgleichungssystem zu $u(x(s), y(s)) = z(s)$ an:

$x'(s) =$ [ ], $\quad x(0) = x_0,$

$y'(s) = \quad 2,$ $\quad y(0) = 0,$

$z'(s) =$ [ ], $\quad z(0) = x_0.$

2

7B.

Bestimmen Sie damit die zugehörige Charakteristik $s \mapsto (x(s), y(s), z(s))$:

$y(s) = 2s, \quad z(s) =$ [ ], $\quad x(s) =$ [ ]

2

7C.

Bestimmen Sie die gesuchte Lösung und machen Sie die Probe: $u(x, y) =$

3

Diese Seite ist nur zufällig leer und muss es nicht bleiben.