Klausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (*1 Punkt*)

Name: Musterlösung	Matrikelnummer: Musterlösung
Vorname: Musterlösung	Studiengang: Musterlösung

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Gesamt
Punkte	/1	/16	/8	/12	/10	/12	/7	/66

Erläuterung: Zur Nacharbeit dieser Klausur sind die Antworten ausgiebig erläutert. Ergebnisse und Rechnungen sind ausführlicher dargestellt, als in der Prüfung verlangt war. Möge es nützen!

Tipp für zukünftige Leser: Ihre Vorlesung und wöchentlichen Übungen erklären Ihnen diese wunderbaren Rechentechniken. Nutzen Sie dies, arbeiten Sie kontinuierlich mit, es lohnt sich!

Nützliche Werte und Formeln

- Tabellen der Exponentialfunktion und des Logarithmus

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
e^x	0.05	0.14	0.37	1	2.71	7.39	20.09

x	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.2	1.3
$\ln(x)$	- 0.36	- 0.22	- 0.11	0	0.10	0.18	0.26

Ablesebeispiele: Für $x = 2$ gilt $e^x \approx 7.39$. Für $x = 0.8$ gilt $\ln(x) \approx -0.22$.

- Einige Stammfunktionen:

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1}(x) + c \qquad \int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \log(1+x^2) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sinh^{-1}(x) + c \qquad \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{1+x^2} + c$$

Aufgabe 2. *Vermischtes (4 + 4 + 4 + 4 = 16 Punkte)*

2A. Lösen Sie die gewöhnliche Differentialgleichung $y' + \sqrt{1+y^2} = 0$ zum Anfangswert $y(0) = -1$.

Dies ist eine separierbare nicht lineare Gleichung. Trennung der Variablen ergibt:

$$\int_0^x \frac{y'}{\sqrt{1+y^2}} dt = \int_0^x -1 dt = -x. \blacktriangleright$$

Substitution $y = y(x) \blacktriangleright$:

$$\Leftrightarrow -x = \int_{-1}^{y(x)} \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \sinh^{-1}(y(x)) - c \blacktriangleright \text{ mit } c = \sinh^{-1}(-1). \ \Leftrightarrow y(x) = \sinh(c-x) \blacktriangleright$$

(Die alternative Lösung $-x = \log(|y + \sqrt{1+y^2}|) + c$ gilt auch. Da $y(0) = -1 \implies$ $-x = \log(y + \sqrt{1+y^2}) + c$ mit $c = \log(-1+\sqrt{2})$. Es folgt $y + \sqrt{y^2+1} = (\sqrt{2}-1)e^{-x}$.)

4

2B. Ein Buch mit 500 Seiten enthält 500 Druckfehler. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich auf Seite 34 mindestens drei Druckfehler befinden. Runden Sie dabei auf ganze Prozente. *Hinweis:* Approximieren Sie die hier auftretende Binomialverteilung durch eine geeignete Poissonverteilung.

Ein Druckfehler erscheint mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{500}$ auf Seite 34 unabhängig von allen anderen. Daher ist das Ereignis "k Druckfehler landen auf Seite 34" $B_{500,1/500}$ verteilt.$\blacktriangleright$ Wir approximieren durch eine geeignete Poissonverteilung. Allgemein ist dies die Verteilung $P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ mit $\lambda = N\,p$. Hier konkret $N\,p = 1$.$\blacktriangleright$ Somit

$$\begin{aligned} P(k \geq 3) &= 1 - P(k=2) - P(k=1) - P(k=0) \blacktriangleright \\ &= 1 - e^{-1}(1+1+\frac{1}{2}) \approx 1 - \frac{2.5}{2.7} = \frac{0.2}{2.7} \end{aligned}$$

Schriftliches Dividieren ergibt $\frac{0.2}{2.7} = 7.4\%.\blacktriangleright$. Also erhält man $P(k \geq 3) \approx 7\%$ (8% lassen wir auch noch gelten).

4

2C. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$(xe^y - 1) + xy' = 0.$$

Bestimmen Sie einen nur von y abhängigen integrierenden Faktor $c(y)$, ein Potential der exakten Differentialgleichung und die Lösung des Anfangswertproblems mit $y(2) = 0$.

1. Sei $V(x, y) := (xe^y - 1, x)$ das zugehörige Vektorfeld. Wir bestimmen die Rotation:

   $$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} xe^y - 1 \\ x \end{pmatrix} = 1 - xe^y$$

   Das Vektorfeld ist also nicht rotationsfrei, d.h. die Differentialgleichung ist nicht exakt.

2. Wir bestimmen einen nur von y abhängigen integrierenden Faktor $c(y)$: das modifizierte Vektorfeld $c(y)V(x, y)$ besitzt die Rotation

   $$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c(y)(xe^y - 1) \\ c(y)x \end{pmatrix} = c(y)\,(1 - xe^y) - c'(y)(xe^y - 1)$$

   Das Verschwinden dieser Rotation ist also gleichbedeutend mit der Differentialgleichung $0 = c(y) + c'(y)$, welche etwa von $c(y) = e^{-y}$ erfüllt wird.▶

3. Die Differentialgleichung $x - e^{-y} + xe^{-y}y' = 0$ hat also die selben Lösungen wie die Ausgangsgleichung und ist zusätzlich exakt. Probe:

   $$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x - e^{-y} \\ xe^{-y} \end{pmatrix} = e^{-y} - e^{-y} = 0.$$

4. Ein Potential der exakten DG ist die Funktion $f(x, y) := \frac{1}{2}x^2 - x\,e^{-y}$. ▶
   Probe: $\partial_x f(x, y) = x - e^{-y}$ und $\partial_y f(x, y) = x\,e^{-y}$.

5. Wir setzen dazu $f(x, y) = d$ mit einer Konstanten d, welche sich aus der Anfangsbedingung wie folgt berechnet

   $$d = \frac{1}{2}2^2 - 2 = 0.\blacktriangleright$$

   Wir erhalten $f(x, y(x)) = \frac{1}{2}x^2 - xe^{-y(x)} = 0$, also $x = e^{-y} \pm e^{-y}$. Das Minuszeichen entspricht der Gleichung $x = 0$, welche wir nicht nach y auflösen können. Daher wählen wir das Plus und erhalten $y(x) = -\ln(\frac{x}{2})$. ▶

6. Probe: Es gilt $y(2) = 0$ und weiter $y'(x) = -\frac{1}{2}\frac{2}{x}$. Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

   $$\begin{aligned}(xe^y - 1) + xy' &= x(\frac{2}{x}) - 1 - \frac{1}{2}x\frac{2}{x} \\ &= 2 - 1 - 1 = 0.\end{aligned}$$

4

2D. Zu welchem der folgenden Vektorfelder $g, f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ existiert ein Potential?

(1) $g(x,y,z) = (y,-x,z)$ (2) $f(x,y,z) = (x^2, y^3, z^4)$

Bestimmen Sie ein Potential in den Fällen, wo dieses existiert.

Es ist $g(x,y,z) = (y,-x,0) + (0,0,z)$. Das Vektorfeld $(0,0,z)$ ist offensichtlich rotationsfrei und die Rotation des ebenen Wirbelfeldes $(y,-x,0)$ ist bekanntlich $(0,0,2)$. Aus Linearität folgt $\operatorname{rot} g = (0,0,2)$,▶ also gibt es kein Potential.▶

$\operatorname{rot} f = (0,0,0)$, also existiert ein Potential.▶ Man findet dieses, indem man zuerst bei festgehaltenem (y,z) die erste Komponente des Vektorfeldes nach x aufintegriert:

$$F(x,y,z) = \int x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + c(y,z)$$

wobei $c(y,z)$ eine von x unabhängige Funktion in (y,z) ist. Ableiten nach y und Gleichsetzen mit der zweiten Komponente des Vektorfeldes liefert

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y} c(y,z) \stackrel{!}{=} y^3 \Rightarrow c(y,z) = \frac{1}{4}y^4 + \tilde{c}(z)$$

wobei $\tilde{c}(z)$ eine von x und y unabhängige Funktion in z ist. Das Ganze nochmal nach z,

$$\frac{\partial}{\partial z} F(x,y,z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\tilde{c}(z) \stackrel{!}{=} z^4 \Rightarrow \tilde{c}(z) = \frac{1}{5}z^5 + \bar{c}$$

mit einer (richtigen) Konstanten $\bar{c}$. Also ist

$$F(x,y,z) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}z^5$$

ein Potential.▶ Probe: $\frac{\partial F}{\partial x} = x^2$, $\frac{\partial F}{\partial y} = y^3$, $\frac{\partial F}{\partial z} = z^4$. Daher $\operatorname{grad} F = (x^2, y^3, z^4)$.

4

Aufgabe 3. (*2 + 3 + 3 = 8 Punkte*) Wir wollen im folgenden annehmen, dass die Lebensdauer T eines Turbinen-Strahlwerks, wie es in einem modernen Düsenflugzeug verwendet wird, exponentialverteilt zum Parameter λ ist, d.h. $P(T > t) = e^{-\lambda t}$, wobei die Zeit t in Tausend Betriebsstunden berechnet ist.

3A. Es ist bekannt, dass ein Triebwerk im Schnitt etwa 10.000 Stunden (d.h. 10 Tausend Betriebstunden) durchhält. Bestimmen Sie den zugehörigen Parameter: $\lambda =$ 0.1

Bei einer Exponentialverteilung ist der Mittelwert $1/\lambda$.▶

Also ist $\lambda = 1/10 = 0.1$. ▶

2

3B. Sei $\lambda = 1/5$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p hält das Triebwerk weniger als 10.000 Stunden? Runden Sie auf zwei Nachkommastellen. $p =$ 0.86

Sei T die Lebensdauer eines Triebwerkes. Es gilt $P(T \leq 10) = 1 - e^{-\lambda 10}$▶

mit $\lambda = 1/5$.▶

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $1 - e^{-2} \approx 0.86$.▶

3

3C. Eine Fluggesellschaft benötigt Triebwerke, die mit 90%-tiger Wahrscheinlichkeit auch nach 5.000 Einsatzstunden noch funktionieren sollen. Bestimmen Sie den zugehörigen Parameter:

$\lambda = \boxed{0.022}$ (Runden Sie auf drei Nachkommastellen.)

Es gilt $P(T \geq 5) = e^{-\lambda 5}$.▶

Gleichsetzen liefert $e^{-\lambda 5} \stackrel{!}{=} 0.9$.▶

Mit dem Tabellenwert $\ln(0.9) = -0.11$ folgt $\lambda = -\frac{\ln(0.9)}{5} \approx 0.022$ (Ohne Tabelle würde man durch direkte Rundung den Wert $-\frac{\ln(0.9)}{5} \approx 0.021$ bekommen). ▶

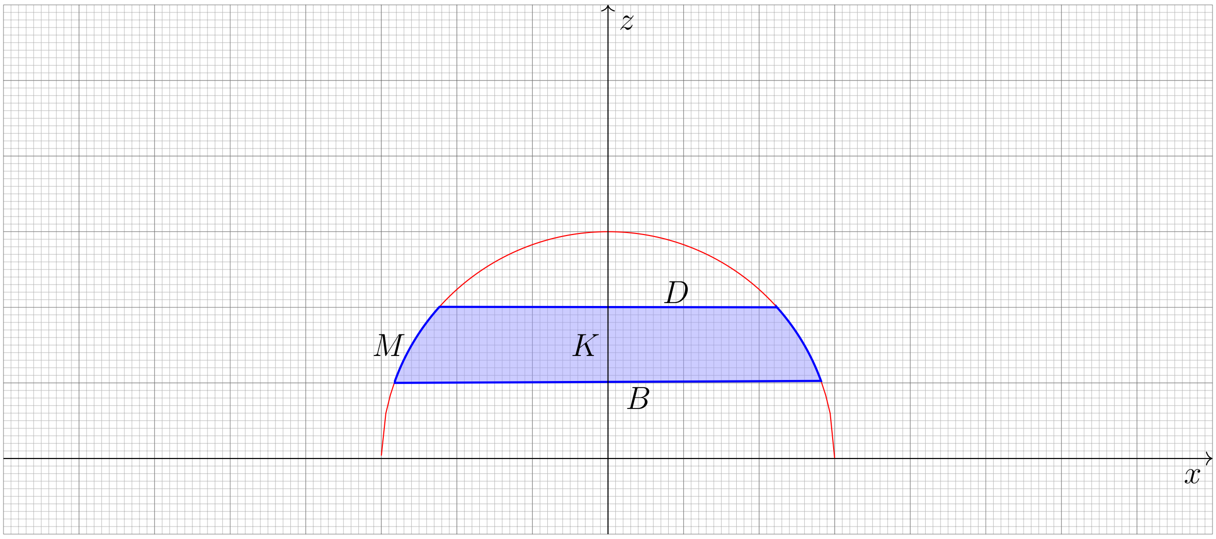
3

Aufgabe 4. *Dreidimensionale Integrale und Integralsätze* (*2 + 3 + 4 + 3 = 12 Punkte*)

Der Körper $K \subset \mathbb{R}^3$ und das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$K = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} x^2+y^2+z^2 \le 9 \\ 1 \le z \le 2 \end{matrix} \right\} \quad \text{und} \quad f(x,y,z) = \Big(x - z, 2x + y, 4(x^2+y^2) \Big).$$

4A. Skizzieren Sie den Schnitt von K mit der x–z–Ebene, also mit der Ebene $y = 0$:



Parametrisieren Sie den Körper K in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} 1 \le z \le 2, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le \boxed{\sqrt{9 - z^2}} \end{cases}$$

2

4B. Berechnen Sie mit dieser Parametrisierung das Volumen $\mathrm{vol}_3(K)$ des Körpers K:

$$\mathrm{vol}_3(K) = \int_K 1 \,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_{z=1}^{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{\sqrt{9-z^2}} \rho \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}z$$ ▶ Transformationssatz anwenden

$$= 2\pi \int_{z=1}^{2} \frac{9 - z^2}{2} \,\mathrm{d}z$$ Innere Integrale vereinfachen

$$= \pi \left[9z - \frac{z^3}{3} \right]_{z=1}^{2}$$ ▶ Stammfunktion

$$= \pi \left[9 - \frac{7}{3} \right] = \frac{20}{3}\pi$$ ▶ Einsetzen

3

4C. Die Randfläche ∂K besteht aus dem Boden B mit $z = 1$, dem Deckel D mit $z = 2$ und dem Mantel M. Berechnen Sie den Fluss von f aus K heraus durch D:

$$I_D = \int_{s\in D} f(s) \bullet \mathrm{d}S = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{\sqrt{5}} 4\rho^2 \cdot \rho \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi$$ ▶ Parametrisierung des Deckels

$$= 2\pi\Big[\rho^4\Big]_{\rho=0}^{\sqrt{5}} = 50\pi$$ ▶ Stammfunktion, Grenzen einsetzen

Erläuterung: Für den Kreis D sind Normalenvektor und Integral besonders einfach. Zur Übung können Sie nochmal die Flächenparametrisierung Φ_D explizit ausschreiben und den Normalenvektor $\partial_\rho\Phi_D \times \partial_\varphi\Phi_D$ ausrechnen. Das Ergebnis entspricht der Anschauung. Diese Standardrechnungen können Sie hier routiniert und effizient einsetzen.

Folgern Sie den Fluss I_B des Vektorfeldes f aus K heraus durch den Boden B:

$$I_B = \int_{s\in B} f(s) \bullet \mathrm{d}S = -\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{\sqrt{8}} 4\rho^3 \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi = -128\pi$$

▶ Negativer Integrand, da Normalenvektor nach unten.

4

4D. Berechnen Sie den Fluss I_M des Vektorfeldes f aus K heraus durch den Mantel M:

$$\underbrace{I_D + I_B}_{=-78\pi} + I_M = \int_{s\in\partial K} f(s)\,\mathrm{d}S \qquad \int_K \operatorname{div}(f)\,\mathrm{d}K = 2\,\mathrm{vol}_3(K) = \frac{40}{3}\pi$$

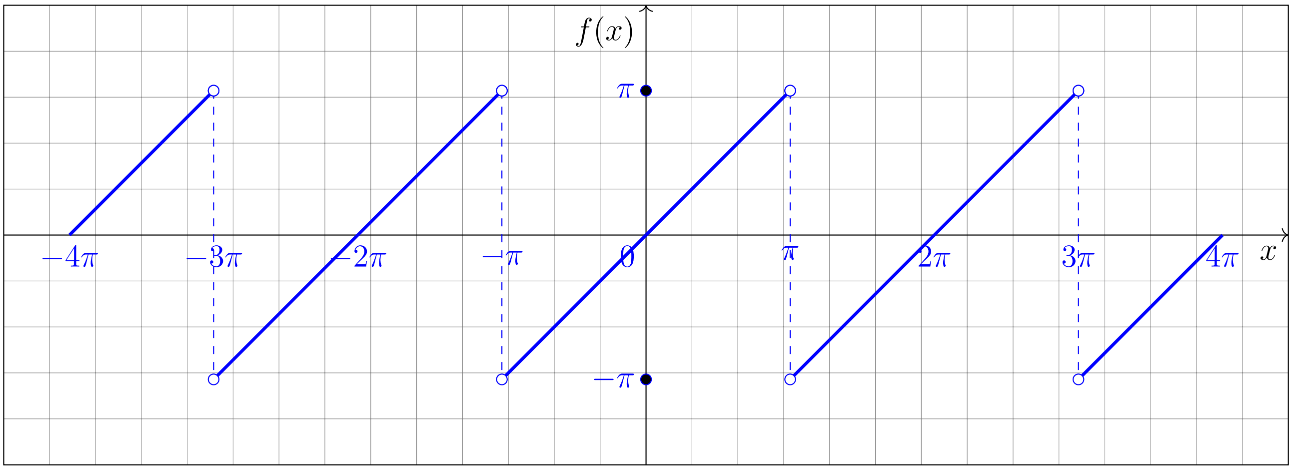
$$I_M = (78 + \frac{40}{3})\pi$$

Erläuterung: Sie können das Flussintegral I_M wie die anderen auch direkt ausrechnen: Mantelfläche M parametrisieren, Normalenvektor $\mathrm{d}S$ ausrechnen, Skalarprodukt mit dem Vektorfeld f liefert den Integranden, Versuchen Sie es einmal als Übung und vergleichen Sie beide Rechenwege. Mit dem Integralsatz von Gauß geht es hier wesentlich effizienter.

3

Aufgabe 5. *Fourier–Reihen* (*2 + 3 + 2 + 3 = 10 Punkte*) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei 2π-periodisch und ungerade mit $f(x) = x$ für $0 < x < \pi$.

5A. Skizzieren Sie die Funktion f auf dem Intervall $[-4\pi, 4\pi]$.



Bestimmen Sie den Grenzwert der Fourier–Reihe $f_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \, \mathrm{e}^{ikx}$ von f im Punkt $x = \pi$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\pi) = \boxed{\frac{1}{2}(\pi - \pi) = 0}$$

Dank Dirichlet-Kriterium!

2

5B. Bestimmen Sie die Koeffizienten c_k der komplexen Fourier–Reihe $f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \, \mathrm{e}^{ikx}$:

$$c_0 = \boxed{0}$$

$$c_k = \boxed{0}$$ für $k \neq 0$.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{x=-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} f(x)\,\mathrm{d}x$$ Definition der komplexen Fourier–Koeffizienten

$$= \frac{1}{2\pi}\Big(\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-ikx}\,\mathrm{d}x\Big) \overset{(\text{Falls } k\neq 0)}{=} \frac{1}{2\pi}\Big(\Big[x\frac{e^{-ikx}}{-ik}\Big]_{x=-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-ikx}}{-ik}\,\mathrm{d}x\Big)$$ ▶ Einsetzen und vereinfachen

$$= \frac{1}{2\pi}\Big(-\frac{\pi e^{-ik\pi}}{ik} - \frac{\pi e^{ik\pi}}{ik} - \Big[\frac{e^{-ikx}}{(-ik)^2}\Big]_{x=-\pi}^{\pi}\Big)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Big(-\frac{\pi}{ik}\cos(-k\pi) - \frac{\pi}{ik}\cos(k\pi) - \frac{e^{-ik\pi}}{(ik)^2} + \frac{e^{ik\pi}}{(ik)^2}\Big)$$

$$= \frac{i}{k}\cos(k\pi) - \frac{i}{\pi k^2}\sin(k\pi) = (-1)^k\frac{i}{k}$$ für alle $k\neq 0$ ▶

Falls $k=0$,

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\mathrm{d}x = 0.$$ ▶

3

5C. Bestimmen Sie die Koeffizienten a_k und b_k der reellen Fourier-Reihe $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$:

$a_0 =$	0	
$a_k =$	0	für $k \geq 1$,
$b_k =$	$2(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$	für $k \geq 1$.

Sie können aus c_k leicht die reellen Koeffizienten $a_k = c_k + c_{-k}$ und $b_k = \mathrm{i}(c_k - c_{-k})$ ablesen.

2

5D. Betrachten Sie jetzt die Funktion $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.
Bestimmen Sie die Koeffizienten A_k und B_k ihrer reellen Fourier-Reihe:
$F(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx)$:

$A_0 =$	$\frac{1}{3}\pi^2$	
$A_k =$	$2(-1)^k \frac{1}{k^2}$	für $k \geq 1$,
$B_k =$	0	für $k \geq 1$.

Da f ungerade ist $\Longrightarrow$ F ist gerade. Es folgt $B_k = 0$ für alle $k \geq 0$.

$$f(x) \sim 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x \dots\right)$$

Aus $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ erhalten wir dank Integrationsregel

$$F(x) \sim \frac{A_0}{2} - 2\left(\cos x - \frac{1}{2^2}\cos 2x + \frac{1}{3^2}\cos 3x - \frac{1}{4^2}\cos 4x + \dots\right)$$

Die nullte Fourier-Koeffizient $\frac{A_0}{2}$ ist genau $C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^2}{2}dx = \frac{\pi^2}{6}$
$\Longrightarrow A_0 = \frac{1}{3}\pi^2$.

3

Aufgabe 6. *Differentialgleichungssystem (4 + 3 + 3 + 2 = 12 Punkte)*

Wir betrachten das lineare Differentialgleichungssystem $y'(t) = A\,y(t) + b(t)$ mit AWP:

$$\begin{cases} y_1'(t) = -2y_1(t) + y_2(t) + e^{-t}, & y_1(0) = 1 \\ y_2'(t) = -y_1(t) - 2e^{-t}. & y_2(0) = 2. \end{cases}$$

6A. Bestimmen Sie die Matrix A des zugehörigen homogenen Differentialgleichungssystem, ihr charakteristisches Polynom und die Eigenwerte.

$A = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}$, $P(\lambda) = \boxed{\lambda^2 + 2\lambda + 1}$, $\lambda_1 = \boxed{-1}$, $\lambda_2 = \boxed{-1}$.

Es gilt $P(\lambda) = (-2-\lambda)(-\lambda) + 1 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2$.
Daraus liest man die doppelte Nullstelle $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ ab.

4

Im folgenden geben wir Ihnen die beiden Vektoren $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $w := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vor.

6B. Bestimmen Sie eine Fundamentalmatrix des homogenen Differentialgleichungssystems. *Hinweis:* Zeigen Sie zunächst, dass $Av = -v$ und $Aw = -w + v$ gilt.

$y_1(t) = \boxed{e^{-t}v = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$, $y_2(t) = \boxed{e^{-t}(tv + w) = e^{-t}\begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix}}$,

$Y(t) = \boxed{e^{-t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & t+1 \end{pmatrix}}$.

3

6C. Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung $y_p(t)$ durch Variationen der Konstanten.

$y_p(t) = \boxed{e^{-t}\begin{pmatrix} -\frac{3}{2}t^2 + t \\ -\frac{3}{2}t^2 - 2t \end{pmatrix}}$. Machen Sie die Probe.

Durch Variation der Konstanten ist eine partikuläre Lösung gegeben durch

$$y_p(t) = Y(t)\int_{\tau=0}^{t} Y(\tau)^{-1}b(\tau)d\tau$$

wobei $b(\tau) = \begin{pmatrix} e^{-\tau} \\ -2e^{-\tau} \end{pmatrix}$ und die Inverse $Y(t)^{-1} = e^t\begin{pmatrix} t+1 & -t \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Dann

$$Y(\tau)^{-1}b(\tau) = \begin{pmatrix} 3\tau + 1 \\ -3 \end{pmatrix} \blacktriangleright$$

und

$$y_p(t) = Y(t)\int_{\tau=0}^{t} Y(\tau)^{-1}b(\tau)d\tau = Y(t)\int_{\tau=0}^{t}\begin{pmatrix} 3\tau + 1 \\ -3 \end{pmatrix} d\tau$$
$$= Y(t)\begin{pmatrix} \frac{3}{2}t^2 + t \\ -3t \end{pmatrix} = e^{-t}\begin{pmatrix} -\frac{3}{2}t^2 + t \\ -\frac{3}{2}t^2 - 2t \end{pmatrix} \blacktriangleright$$

Die Probe:

$$y'(t) = -e^{-t}\begin{pmatrix} -\frac{3}{2}t^2 + t \\ -\frac{3}{2}t^2 - 2t \end{pmatrix} + e^{-t}\begin{pmatrix} -3t + 1 \\ -3t - 2 \end{pmatrix} = e^{-t}\begin{pmatrix} \frac{3}{2}t^2 - 4t + 1 \\ \frac{3}{2}t^2 - t - 2 \end{pmatrix}$$

$$Ay(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{3}{2}t^2 + t \\ -\frac{3}{2}t^2 - 2t \end{pmatrix} = e^{-t}\begin{pmatrix} \frac{3}{2}t^2 - 4t \\ \frac{3}{2}t^2 - t \end{pmatrix}$$

$$b(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Man erkennt nun, dass die Gleichung $y'(t) = Ay(t) + b(t)$ erfüllt ist$\blacktriangleright$

3

6D. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung und die Lösung des Anfangswertproblems

$$y(t) = \boxed{e^{-t}\begin{pmatrix} -\frac{3}{2}t^2+t \\ -\frac{3}{2}t^2-2t \end{pmatrix} + c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix}},$$

$$y_{\text{AWP}}(t) = \boxed{e^{-t}\begin{pmatrix} -\frac{3}{2}t^2+2t+1 \\ -\frac{3}{2}t^2-t+2 \end{pmatrix}}$$

Die Allgemeine Lösung $y(t)$ berechnet sich nach der Formel $y(t) = y_p(t) + c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ wobei $y_1(t)$ und $y_2(t)$ die zuvor in Teil b berechneten Spalten der Fundamentalmatrix $Y(t)$ sind. Daher folgt $y(t) = y_p(t) + c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$

$$y(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} -\frac{3}{2}t^2+t \\ -\frac{3}{2}t^2-2t \end{pmatrix} + c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix} \blacktriangleright$$

Für das AWP muss $y(0) = \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ gelten. Da $y_p(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist $\Longrightarrow$

$y(0) = Y(0)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$. Dann ist $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = Y(0)^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \blacktriangleright$

2

Aufgabe 7. *Charaktertest (2 + 2 + 3 = 7 Punkte)*

Zu lösen ist für $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto u(x, y)$ die partielle Differentialgleichung

$$2\partial_y u + (u + y)\,\partial_x u = u \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R},$$
$$u(x, 0) = x \qquad \text{für } y = 0 \text{ und alle } x \in \mathbb{R}.$$

7A.

Geben Sie das charakteristische Differentialgleichungssystem zu $u(x(s), y(s)) = z(s)$ an:

$x'(s) = \boxed{z(s) + y(s)}$, $\quad x(0) = x_0$,

$y'(s) = 2$, $\quad y(0) = 0$,

$z'(s) = \boxed{z(s)}$, $\quad z(0) = x_0$.

2

7B.

Bestimmen Sie damit die zugehörige Charakteristik $s \mapsto (x(s), y(s), z(s))$:

$y(s) = 2s$, $\quad z(s) = \boxed{x_0\, e^s}$, $\quad x(s) = \boxed{x_0\, e^s + s^2}$

2

7C.

Bestimmen Sie die gesuchte Lösung und machen Sie die Probe: $u(x, y) =$ $\boxed{x - y^2/4}$

Wegen $y(s) = 2s$ folgt $s = y/2$. Aus $x(s) = x_0 e^s + s^2$ erhält man $x_0 = e^{-s}(x - y^2/4)$.▶ Substituieren in $u(s, x_0) = z(s, x_0) = x_0 e^s$ liefert $u(x, y) = e^{-s}(x - y^2/4)e^s = x - y^2/4$.▶ Probe: Wir haben $\partial_y u(x, y) = -\frac{1}{2}y$ und $\partial_x u(x, y) = 1$. Daher $2\partial_y u(x, y) + (u + y)\partial_x u(x, y) = -y + u + y = u$▶

3

Diese Seite ist nur zufällig leer und muss es nicht bleiben.