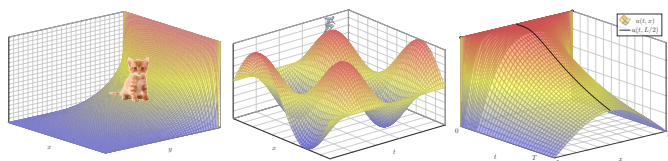


Kapitel R

Lineare PDE zweiter Ordnung



Im Unterschied zu den gewöhnlichen Differentialgleichungen besitzen die partiellen Differentialgleichungen keine einheitliche Theorie. Einige Gleichungen haben ihre eigenen Theorien, für andere gibt es überhaupt keine Theorie.

Vladimir I. Arnold (1937–2010)

Halbversion

michael-eisermann.de/lehre/HM3

14.10.2026

Inhalt dieses Kapitels R

R002

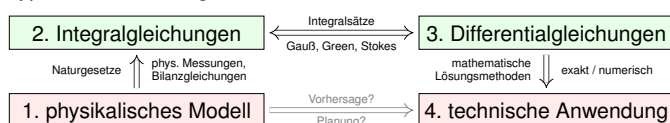
- 1 Lineare PDE zweiter Ordnung
 - Lösung durch Fourier–Transformation
 - Klassifikation linearer PDE zweiter Ordnung
 - Trennung der Variablen durch Produktansatz
- 2 Anwendung auf die Potentialgleichung
 - Laplace–Gleichung auf einem Rechteck
 - Eindeutigkeit und Minimum-Maximum-Prinzip
 - Gut gestellt? Hadamards warnendes Gegenbeispiel
- 3 Anwendung auf die Wellengleichung
 - Die harmonisch schwingende Saite
 - Wellengleichung und die gezupfte Saite

Motivation zu Differentialgleichungen

R003
Überblick

Differentialgleichungen sind die Sprache der Naturgesetze.

Typische Anwendungen verlaufen daher nach dem vertrauten Muster:



Wir untersuchen ein physikalisches Phänomen, das uns am Herzen liegt und das wir nutzen wollen. Grundlegende physikalische Gesetze sind Erhaltungsgrößen in Form von Integralgleichungen. Diese formen wir um zu Differentialgleichungen, in der Hoffnung, sie leichter lösen zu können.

Wichtige Anwendungen, die Sie zum Teil schon kennengelernt haben, finden sie in Elektrodynamik (Maxwell–Gleichungen), Thermodynamik (Bilanzgleichungen), klassischer Mechanik (Hamilton–Gleichungen), Quantenmechanik (Schrödinger–Gleichung), Strömungsmechanik (Navier–Stokes–Gleichungen), usw. . . . Die Liste ist schier endlos.

Motivation zu Differentialgleichungen

R004
Überblick

Wir haben zunächst **gewöhnliche Differentialgleichungen** (ODE) untersucht und gelöst. Theorie und Lösungsmethoden sind hier noch übersichtlich und weitgehend vollständig. Das ist die unentbehrliche Grundlage und beschert uns bereits phantastische Anwendungen.

In der Praxis treten häufig **partielle Differentialgleichungen** (PDE) auf. Erfahrungsgemäß sind die allermeisten höchstens **zweiter Ordnung**. Wir diskutieren etwas genauer die drei zentralen, klassischen Beispiele: Potentialgleichung, Wellengleichung und Wärmeleitungsgleichung.

Bei jeder partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung fragen wir: Ist sie linear? Ist sie elliptisch? oder hyperbolisch? oder parabolisch? Dies deckt nur die einfachsten Möglichkeiten ab, es gibt viele weitere, aber es verhilft uns zu einer ersten Übersicht und Orientierung:

😊 Wenn die Gleichung elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch ist, dann verhält sie sich ähnlich wie die entsprechende **Modellgleichung**, also Potential-, Wellen- oder Wärmeleitungsgleichung. Zu Verständnis und Lösung der Gleichung sind solche Analogien oft sehr nützlich.

Lösung durch Fourier–Transformation

R101

Wir untersuchen die homogene **Wärmeleitungsgleichung** §101

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) &= \kappa \partial_x^2 u(t, x) & \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= u_0(x) & \text{für } t = 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Aufgabe: Lösen Sie dies durch Fourier–Transformation bezüglich x .

Hierzu gibt es Voraussetzungen: Satz K2A erfordert, dass u zweimal stetig nach x differenzierbar ist und $\partial_x^2 u$ absolut integrierbar. Das ist am Ende noch zu überprüfen, siehe hierzu Satz D5D.

Lösung: Die $\mathcal{F}$ -Transformierte $\hat{u}(t, \xi)$ erfüllt $\partial_t \hat{u}(t, \xi) = -\kappa \xi^2 \hat{u}(t, \xi)$.

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung in t mit Parameter ξ .

Wir trennen die Variablen gemäß $[\partial_t \hat{u}(t, \xi)] / \hat{u}(t, \xi) = -\kappa \xi^2$

und integrieren von 0 bis t zu $\ln \hat{u}(t, \xi) - \ln \hat{u}(0, \xi) = -\kappa \xi^2 t$.

Wir erhalten so die Lösung $\hat{u}(t, \xi) = e^{-\kappa \xi^2 t} \hat{u}_0(\xi)$ für alle $t \geq 0$.

Rücktransformation $e^{-\kappa \xi^2 t} \bullet \circ e^{-x^2/4\kappa t} / \sqrt{2\kappa t}$ und Faltung ergibt:

$$u(t, x) = \int_{y \in \mathbb{R}} \frac{e^{-(x-y)^2/4\kappa t}}{\sqrt{4\pi\kappa t}} u_0(y) dy \quad \text{für } t > 0.$$

Lösung durch Fourier–Transformation

R102
Erläuterung

😊 Das Ergebnis entspricht unserer in Satz D5D präsentierten Lösung: Die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = \kappa \partial_x^2 u$ hat als Fundamentallösung eine auseinanderfließende Glockenkurve, den **Wärmeleitungskern**

$$H : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : H(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\kappa t}\right).$$

Die Konstanten sichern die Normierung $\int_{\mathbb{R}} H(t, x) dx = 1$. (Gauß C2G)

Für $t = 0$ sei die Wärmeverteilung $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vorgegeben, mit $u_0 \in C_b$.

Für $t > 0$ erhalten wir die Lösung durch **Superposition** (Faltung D5E):

$$u(t, x) = \int_{y \in \mathbb{R}} u_0(x - y) H(t, y) dy = \int_{z \in \mathbb{R}} u_0(z) H(t, x - z) dz.$$

😊 Stehen die Formeln schon da, so genügt geduldiges Nachrechnen: Machen Sie die Probe und zeigen Sie $\partial_t u = \kappa \partial_x^2 u$ durch Ableiten. D517

😊 Die Fourier–Transformation bietet eine elegant-effiziente Herleitung. Anschließend sammeln und prüfen wir die Voraussetzungen (D5D, D5U).

Lösung durch Fourier–Transformation

R103
Erläuterung

Die Methode der Fourier–Transformation funktioniert ganz allgemein! Die Idee ist klar: Zu lösen sei die lineare partielle Differentialgleichung

$$P(\partial) u(x) = g(x)$$

mit einem Polynom $P(x) = \sum a_\nu x^\nu$. Nach Fourier–Transformation gilt

$$P(i\xi) \hat{u}(\xi) = \hat{g}(\xi).$$

Auflösen zu $\hat{u}(\xi) = \hat{g}(\xi) / P(i\xi)$ und Rücktransformation liefert u .

Die Transformation $g(x) \mapsto \hat{g}(\xi)$ und $P(\partial) \mapsto P(i\xi)$ kennen wir bereits, so dass wir $\hat{u}(\xi) = \hat{g}(\xi) / P(i\xi)$ setzen können. Zunächst ist jedoch nicht klar, ob die Rücktransformation $\hat{u} \mapsto u$ überhaupt immer möglich ist – insb. wenn $\hat{g}$ nicht absolut integrierbar ist oder $1/P(i\xi)$ Polstellen hat!

😊 Dies garantiert der grundlegende Satz von Ehrenpreis–Malgrange: Jede lineare PDE mit konstanten Koeff. kann global gelöst werden!

⚠ Für nicht-konstante Koeffizienten gilt die Lösbarkeit nicht allgemein, wie das obige Gegenbeispiel von Lewy–Mizohata §336 eindrücklich zeigt.

Lösung durch Fourier–Transformation

R104
Erläuterung

Satz R1A: Ehrenpreis 1954, Malgrange 1955

Sei $P(x) = \sum_{|\nu| \leq k} a_\nu x^\nu$ ein Polynom mit Koeffizienten $a_\nu \in \mathbb{C}$.

Zu lösen sei für $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ die lineare partielle Differentialgleichung

$$P(\partial) u(x) = g(x).$$

Zu jeder rechten Seite $g \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ existiert eine Lösung $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$.

Genauer gilt: Zu P existiert eine Fundamentallösung F mit $P(\partial) F = \delta$.

Für jede rechte Seite g liefert F dann eine Lösung u durch Faltung:

$$u(x) = \int_{y \in \mathbb{R}^n} F(x - y) g(y) dy = \int_{z \in \mathbb{R}^n} F(z) g(x - z) dz.$$

😊 Für diese Problemklasse ist die Existenz von Lösungen garantiert. Im Einzelfall bleibt „nur“ noch die Fundamentallösung F auszurechnen.

😊 Im Falle $n = 1$ haben wir eine gewöhnliche DG der Ordnung k , linear mit konstanten Koeffizienten und rechter Seite g . (Satz N2F)

Die drei wichtigsten PDE zweiter Ordnung	R105
Potentialgleichung für $u: \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}: (x_1, \dots, x_n) \mapsto u(x_1, \dots, x_n)$: $\Delta u = \varrho \quad \text{mit} \quad \Delta = \partial_1^2 + \dots + \partial_n^2$ Die Gleichung $\Delta u = 0$ heißt homogene Potentialgleichung oder Laplace-Gleichung; ihre Lösungen heißen harmonische Funktionen. Die Gleichung $\Delta u = \varrho$ heißt inhomogene Potentialgleichung oder Poisson-Gleichung. Sie beschreibt das Gravitationspotential u zur Massenverteilung ϱ, ebenso das elektrische Potential u zur Ladungsdichte ϱ, und vieles mehr. Wellengleichung für $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ oder $u: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$: $\partial_t^2 u - c^2 \Delta u = \varrho \quad \text{mit} \quad \Delta = \partial_1^2 + \dots + \partial_n^2$ Diese Gleichung beschreibt die Ausbreitung von Schallwellen in Röhren (Dim. $n = 1$), flache Oberflächenwellen in Wasser (Dim. 2) oder Lichtwellen im Raum (Dim. 3); hierbei ist $c > 0$ die Ausbreitungsgeschwindigkeit. Im stationären Fall $\partial_t u = 0$ erhalten wir die Potentialgleichung! Wärmeleitungsgleichung für $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ oder $u: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$: $\partial_t u - \kappa \Delta u = q \quad \text{mit} \quad \Delta = \partial_1^2 + \dots + \partial_n^2$ Sie beschreibt die Wärmeausbreitung in einem homogenen Körper mit Temperaturleitfähigkeit $\kappa > 0$, Wärmeenergie u und Wärmeleistungsdichte q. Sie heißt auch Diffusionsgleichung. Im stationären Fall $\partial_t u = 0$ erhalten wir erneut die Potentialgleichung!	

Klassifikation linearer PDE zweiter Ordnung	R110
In Dimension 2 betrachten wir den linearen Differentialoperator $L = P(\partial_x, \partial_y) = a_{11}\partial_x^2 + 2a_{12}\partial_x\partial_y + a_{22}\partial_y^2 + b_1\partial_x + b_2\partial_y + c.$ Der quadratische Teil hat die Determinante $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$. Wir nennen den Differentialoperator L elliptisch, wenn $\det A > 0$; hyperbolisch, wenn $\det A < 0$; parabolisch, wenn $\det A = 0$. In Dimension n betrachten wir allgemein den Differentialoperator $L = P(\partial_1, \dots, \partial_n) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} \partial_j \partial_k + \sum_{j=1}^n b_j \partial_j + c.$ Wir nennen $\pm L$ elliptisch, wenn alle Eigenwerte von A positiv sind; hyperbolisch, wenn ein Eigenwert negativ ist, alle anderen positiv; parabolisch, wenn ein Eigenwert null ist, aber alle anderen positiv. Dazu passen spezialisierte Techniken. Hängen die Koeffizienten $a_{jk}, b_j, c: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zudem vom Ort $x \in \Omega$ ab, so muss die Bedingung in jedem Punkt $x \in \Omega$ erfüllt sein. Andernfalls ist L ein Differentialoperator gemischten Typs, in manchen Regionen elliptisch, hyperbolisch, parabolisch.	

Trennung der Variablen durch Produktansatz	R113
Zu lösen sei eine separierbare Differentialgleichung der Form $P(\partial_x) u(x, y) = Q(\partial_y) u(x, y).$ Hier wirkt der Differentialoperator $P(\partial_x)$ nur auf x, und $Q(\partial_y)$ nur auf y. Als Lösungen gesucht sind Funktionen $u: X \times Y \rightarrow \mathbb{K}: (x, y) \mapsto u(x, y)$. In diesem Falle eignet sich der Produktansatz $u(x, y) = v(x) \cdot w(y)$: $\begin{aligned} [P(\partial_x) v(x)] w(y) &= v(x) [Q(\partial_y) w(y)] \\ \iff \frac{P(\partial_x) v(x)}{v(x)} &= \frac{Q(\partial_y) w(y)}{w(y)} = \lambda \end{aligned}$ Die triviale Lösung ist $u = 0$; andernfalls dividieren wir durch $v(x)w(y)$. Die linke Seite hängt nur von x ab, die rechte nur von y. Da wir x und y unabhängig verändern können, sind beide Seiten konstant, gleich $\lambda \in \mathbb{K}$. Zu jeder Separationskonstanten λ gehören zwei Eigenwertprobleme: $P(\partial_x) v(x) = \lambda v(x) \quad \text{und} \quad Q(\partial_y) w(y) = \lambda w(y)$ Lösung sind Eigenfunktionen $u(x, y) = v(x)w(y)$ und Superpositionen. Gleiches gilt für $u(x_1, \dots, x_n) = u_1(x_1) \cdots u_n(x_n)$ in mehreren Variablen.	

Trennung der Variablen durch Produktansatz	R115 Erläuterung
Aufgabe: Begründen Sie sorgfältig die Äquivalenz „(1) $\Leftrightarrow$ (2)“! Den Produktansatz $u(x, y) = v(x)w(y)$ haben wir oben bereits erklärt. Dabei haben wir $u \neq 0$ angenommen und sogar so getan als gälte $u(x, y) \neq 0$ in <i>jedem</i> Punkt (x, y). Im Allgemeinen werden die Funktionen $v: X \rightarrow \mathbb{K}$ und $w: Y \rightarrow \mathbb{K}$ jedoch Nullstellen haben, und somit auch u. Diese Feinheit müssen wir klären; diese Präzisierung ist Ziel des Satzes R1D und dieser Übung. Lösung: Zunächst „(2) $\Rightarrow$ (1)“: In jedem Punkt $(x, y) \in X \times Y$ gilt $\begin{aligned} P u(x, y) &= P[v(x) \cdot w(y)] = [P v(x)] w(y) = \lambda v(x) \cdot w(y), \\ Q u(x, y) &= Q[v(x) \cdot w(y)] = v(x) [Q w(y)] = v(x) \cdot \lambda w(y), \end{aligned}$ also $P u = Q u$. Wir zeigen nun die Umkehrung „(1) $\Rightarrow$ (2)“: Wir nehmen $u, v \neq 0$ an, also $v(x_0) \neq 0$ und $w(y_0) \neq 0$ für je einen Punkt $x_0 \in X$ und $y_0 \in Y$. Beides zusammen ist äquivalent zu $u \neq 0$, denn $u(x_0, y_0) \neq 0$. In jedem Punkt $(x, y) \in X \times Y$ gilt $P u(x, y) = Q u(x, y)$, also $\begin{aligned} [P v(x)] w(y) &= v(x) [Q w(y)], & \frac{P v(x_0)}{v(x_0)} &= \frac{Q w(y_0)}{w(y_0)} =: \lambda, \\ \frac{P v(x_0)}{v(x_0)} w(y) &= Q w(y), & P v(x) &= v(x) \frac{Q w(y_0)}{w(y_0)}. \end{aligned}$	

Klassifikation linearer PDE zweiter Ordnung	R109
Wir erinnern an ebene Quadriken im Hauptachsensystem: E037 $\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1, & \left(\frac{x-x_0}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{r_2}\right)^2 &= 1, & \text{Ellipse;} \\ x^2 - y^2 &= 1, & \left(\frac{x-x_0}{r_1}\right)^2 - \left(\frac{y-y_0}{r_2}\right)^2 &= 1, & \text{Hyperbel;} \\ x^2 - y &= 0, & \left(\frac{x-x_0}{r_1}\right)^2 - \left(\frac{y-y_0}{r_2}\right) &= 0, & \text{Parabel.} \end{aligned}$ In Dimension 2 betrachten wir allgemein das quadratische Polynom $P(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c.$ Zu $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ mit $a_{12} = a_{21}$ betrachten wir $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$. Wir nennen das Polynom $P(x, y)$ elliptisch, wenn $\det A > 0$; hyperbolisch, wenn $\det A < 0$; parabolisch, wenn $\det A = 0$. ☐ Zur Klassifikation der Quadriken siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, Kapitel 7. Wir beschreiben den quadratischen Anteil durch eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Jede symmetrische Matrix lässt sich orthogonal diagonalisieren, damit können wir P in Normalform bringen. Entscheidend ist hierfür das Vorzeichen der Eigenwerte!	

Klassifikation linearer PDE zweiter Ordnung	R111
Die drei Modellgleichungen haben keine gemischten Terme: $\begin{aligned} (1) \quad \partial_x^2 u + \partial_y^2 u &= \varrho, & \text{räumlich} \quad \partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_z^2 u &= \varrho, \\ (2) \quad \partial_t^2 u - \partial_x^2 u &= \varrho, & \text{räumlich} \quad \partial_t^2 u - \partial_x^2 u - \partial_y^2 u - \partial_z^2 u &= \varrho, \\ (3) \quad \partial_t u - \partial_x^2 u &= q, & \text{räumlich} \quad \partial_t u - \partial_x^2 u - \partial_y^2 u - \partial_z^2 u &= q. \end{aligned}$ Die Wellengleichung hat die Ausbreitungsgeschwindigkeit $c > 0$, die Wärmeleitungsgleichung die Temperaturleitfähigkeit $\kappa > 0$. Nach Skalierung können wir $c = 1$ bzw. $\kappa = 1$ annehmen. Auf der rechten Seite dieser Gleichungen steht als Inhomogenität jeweils der Quellterm ϱ bzw. q. Im Spezialfall $\varrho = 0$ bzw. $q = 0$ haben wir eine homogene lineare Gleichung zweiter Ordnung. Die Potentialgleichung (1) ist elliptisch. Die Wellengleichung (2) ist hyperbolisch. Die Wärmeleitungsgleichung (3) ist parabolisch. Unsere Modellgleichungen haben keine gemischten Terme $\partial_x \partial_y$ etc. Deshalb können wir sie gut durch Separation der Variablen behandeln, wie wir anschließend ausführen. Dieses Verfahren ist extrem vielseitig und erfolgreich. Eine allgemeine (elliptische, hyperbolische, parabolische) Differentialgleichung zweiter Ordnung können wir durch geeignete Koordinatentransformation diagonalisieren, also auf eine unserer Modellgleichungen zurückführen und somit lösen.	

Trennung der Variablen durch Produktansatz	R114 Erläuterung
Da diese Methode oft gebraucht wird, formulieren wir sie hier genauer. Gegeben sind Intervalle $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ und hierauf die Differentialoperatoren $\begin{aligned} P(x, \partial_x) &= \sum_{j=0}^m a_j(x) \partial_x^j: C^m(X, \mathbb{K}) \rightarrow C^0(X, \mathbb{K}), \\ Q(y, \partial_y) &= \sum_{k=0}^n b_k(y) \partial_y^k: C^n(Y, \mathbb{K}) \rightarrow C^0(Y, \mathbb{K}), \end{aligned}$ mit stetigen Koeffizientenfunktionen $a_j: X \rightarrow \mathbb{K}$ und $b_k: Y \rightarrow \mathbb{K}$. Satz R1B: Trennung der Variablen durch Produktansatz Sei $u: X \times Y \rightarrow \mathbb{K}: u(x, y) = v(x) \cdot w(y)$ Produkt von $0 \neq v \in C^m(X, \mathbb{K})$ und $0 \neq w \in C^n(Y, \mathbb{K})$. Dann sind folgende zwei Aussagen äquivalent: (1) Die Funktion u löst die partielle Differentialgleichung $P(x, \partial_x) u(x, y) = Q(y, \partial_y) u(x, y).$ (2) Für einen gemeinsamen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$ gelten die Gleichungen $P(x, \partial_x) v(x) = \lambda v(x) \quad \text{und} \quad Q(y, \partial_y) w(y) = \lambda w(y).$	

Trennung der Variablen durch Produktansatz	R116 Erläuterung
Aufgabe: Wie funktioniert der Produktansatz für folgende PDE? (A) $P(x, \partial_x)u(x, y, z) = Q(y, z, \partial_y, \partial_z)u(x, y, z)$ (B) $P(x, \partial_x)u(x, y, z) + Q(y, \partial_y)u(x, y, z) + R(z, \partial_z)u(x, y, z) = \lambda u(x, y, z)$ Lösung: (a) Für $u(x, y, z) = v(x) \cdot w(y, z)$ mit $u \neq 0$ ist (A) äquivalent zu $P(x, \partial_x) v(x) = \lambda v(x)$ und $Q(y, z, \partial_y, \partial_z) w(y, z) = \lambda w(y, z)$ mit einer gemeinsamen Konstante $\lambda \in \mathbb{K}$. Dies beweist man wörtlich wie oben. (b) Für $u(x, y, z) = u_1(x) \cdot u_2(y) \cdot u_3(z)$ mit $u \neq 0$ ist (B) äquivalent zu den Gleichungen $P(x, \partial_x) u_1(x) = \lambda_1 u_1(x)$ und $Q(y, \partial_y) u_2(y) = \lambda_2 u_2(y)$ und $R(z, \partial_z) u_3(z) = \lambda_3 u_3(z)$ mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$ und $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda$. Die Implikation „$\Leftarrow$“ ist klar. Wir zeigen „$\Rightarrow$“: In jedem Punkt (x, y, z) gilt $(P u_1) u_2 u_3 + u_1 (Q u_2) u_3 + u_1 u_2 (R u_3) = \lambda u_1 u_2 u_3$, also insbesondere $\frac{P u_1(x_0)}{u_1(x_0)} + \frac{Q u_2(y_0)}{u_2(y_0)} + \frac{R u_3(z_0)}{u_3(z_0)} = \lambda,$ $\begin{aligned} P u_1(x) + \frac{Q u_2(y_0)}{u_2(y_0)} u_1(x) + \frac{R u_3(z_0)}{u_3(z_0)} u_1(x) &= \lambda u_1(x), \\ \frac{P u_1(x_0)}{u_1(x_0)} u_2(y) + Q u_2(y) + \frac{R u_3(z_0)}{u_3(z_0)} u_2(y) &= \lambda u_2(y), \\ \frac{P u_1(x_0)}{u_1(x_0)} u_3(z) + \frac{Q u_2(y_0)}{u_2(y_0)} u_3(z) + R u_3(z) &= \lambda u_3(z). \end{aligned}$	

Produktansatz zur Wellengleichung
R117

Aufgabe: Wir suchen Lösungen $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Wellengleichung

$$\partial_t^2 u(t, x) = c^2 \partial_x^2 u(t, x).$$

(1) Finden Sie alle Lösungen in Produktform $u(t, x) = v(t)w(x)$.

Lösung: Der Produktansatz $u(t, x) = v(t)w(x)$ separiert zu

$$v''(t) = \lambda v(t), \quad c^2 w''(x) = \lambda w(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

1. Fall: Für $\lambda = 0$ finden wir $v''(t) = 0$ und $w''(x) = 0$, also

$$v(t) = a_1 + a_2 t, \quad w(x) = b_1 + b_2 x.$$

2. Fall: Für $\lambda = \alpha^2 > 0$ finden wir die Eigenfunktionen

$$v(t) = a_1 e^{\alpha t} + a_2 e^{-\alpha t}, \quad w(x) = b_1 e^{x\alpha/c} + b_2 e^{-x\alpha/c}.$$

3. Fall: Für $\lambda = -\omega^2 < 0$ finden wir dasselbe komplex, also reell

$$v(t) = a_1 \cos(\omega t) + a_2 \sin(\omega t), \quad w(x) = b_1 \cos(x\omega/c) + b_2 \sin(x\omega/c)$$

😊 Machen Sie die Probe! Nur die letzten Lösungen sind beschränkt.

Produktansatz zur Wellengleichung
R118

Die Lösungen $u(t, x) = v(t)w(x)$ sind stehende Wellen (siehe P101):

Lösung der Wellengleichung: Randbedingung
R119

Aufgabe: Wir suchen Lösungen $u: \mathbb{R} \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ der Wellengleichung

$$\partial_t^2 u(t, x) = c^2 \partial_x^2 u(t, x) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \text{ und } 0 < x < L,$$

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0 \quad \text{Randwerte für } x \in \{0, L\} \text{ und } t \in \mathbb{R}.$$

(2) Finden Sie alle Lösungen in Produktform $u(t, x) = v(t)w(x)$.

Lösung: (2) Dank (1) kennen wir alle möglichen Lösungspaare (v, w) :

$$v(t) = a_1 + a_2 t, \quad w(x) = b_1 + b_2 x;$$

$$v(t) = a_1 e^{\alpha t} + a_2 e^{-\alpha t}, \quad w(x) = b_1 e^{x\alpha/c} + b_2 e^{-x\alpha/c};$$

$$v(t) = a_1 \cos(\omega t) + a_2 \sin(\omega t), \quad w(x) = b_1 \cos(x\omega/c) + b_2 \sin(x\omega/c).$$

Diese lösen die freie Wellengleichung. Die zusätzliche Randbedingung $w(0) = w(L) = 0$ erfüllt nur $\sin(n\pi x/L)$ für $n \in \mathbb{N}$, also $\omega = n\pi c/L$ und

$$u_n(t, x) = [a_n \cos(n\pi c t/L) + b_n \sin(n\pi c t/L)] \sin(n\pi x/L)$$

😊 Für jede natürliche Zahl $n = 1, 2, 3, \dots$ erhalten wir als Lösung eine stehende Wellen mit Wellenlänge $2L/n$ und Periode $2L/n c$.

Lösung der Wellengleichung: Anfangsdaten
R120

Aufgabe: Wir suchen Lösungen $u: \mathbb{R} \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ der Wellengleichung

$$\partial_t^2 u(t, x) = c^2 \partial_x^2 u(t, x) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \text{ und } 0 < x < L,$$

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0 \quad \text{Randwerte für } x \in \{0, L\} \text{ und } t \in \mathbb{R},$$

$$u(0, x) = g(x) \quad \text{Anfangsposition für } t = 0 \text{ und } 0 \leq x \leq L,$$

$$\partial_t u(0, x) = h(x) \quad \text{Anfangsgeschwindigkeit für } t = 0.$$

(3) Lösen Sie dieses ARWP. Dazu liegen g und h als Sinus-Reihen vor, $g(x) = \sum_n A_n \sin(n\pi x/L)$ und $h(x) = \sum_n B_n \sin(n\pi x/L)$ mit $A_n, B_n \in \mathbb{R}$.

Lösung: (3) Dank (2) kennen wir die Lösung mit Randbedingung:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\pi c t/L) + b_n \sin(n\pi c t/L)] \sin(n\pi x/L)$$

Die Koeffizienten a_n, b_n entnehmen wir den Anfangsbedingungen:

$$a_n = A_n, \quad b_n = B_n \frac{L}{n\pi c}$$

😊 Dank Fourier-Theorie können wir alle (physikalisch relevanten) Anfangsdaten g und h durch solche Sinus-Reihen darstellen! [1417]

Die Katze auf dem heißen Blechdach
R201
Übung

Aufgabe: Eine quadratische Kupferplatte mit Kantenlänge 1m wird an drei Seiten konstant auf 0°C gekühlt, an der vierten Seite konstant auf 100°C geheizt. Wir suchen die stationäre Temperaturverteilung u .

(1) Formulieren und (2) lösen Sie die Differentialgleichung für u !

Die Rechnung konstruiert eine Lösung. Gibt es (auf anderen Wegen) weitere Lösungen? Oder führen alle Wege zum selben Ziel? Existenz und Eindeutigkeit der Lösung sind für jede Anwendung grundlegend!

Lösung: (1) auf dem Rechteck $R = [0, a] \times [0, b]$ suchen wir $u: R \rightarrow \mathbb{R}$. Die allgemeine Wärmeleitungsgleichung lautet $\partial_t u = \kappa \Delta u + q$. Im Bereich R gebe es keine Quellen oder Senken, also $q = 0$. Im stationären Zustand gilt $\partial_t u = 0$, also haben wir $\Delta u = 0$:

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0 \quad \text{auf dem Rechteck } R = [0, a] \times [0, b] \subseteq \mathbb{R}^2$$

mit $u(x, 0) = u(0, y) = u(a, y) = 0$ und $u(x, b) = 100$.

😊 Wir lassen die Abmessungen a und b noch unbestimmt und setzen erst am Ende $a = b = 1$ ein. Das macht die Zusammenhänge klarer.

Die Katze auf dem heißen Blechdach
R202
Übung

Wie wird sich die Temperatur auf dem Blech verteilen? Das erklärt den Titel der Aufgabe: Die Katze probiert aus, wo ihr die Temperatur am besten gefällt, Sie können es ausrechnen! So heißt auch ein Theaterstück von Tennessee Williams von 1955, erfolgreich verfilmt 1958.

(2) Wir suchen zunächst alle Lösungen der PDE $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$ in Produktform $u(x, y) = v(x) \cdot w(y)$. Unsere PDE wird damit zu:

$$v''(x)w(y) + v(x)w''(y) = 0$$

Trennung der Variablen ergibt

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = -\frac{w''(y)}{w(y)} = \lambda$$

mit einer noch unbekannten Separationskonstanten $\lambda \in \mathbb{R}$. Die drei Randbedingungen $u(x, 0) = u(0, y) = u(a, y) = 0$ werden erfüllt durch

$$w(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad v(a) = 0.$$

😊 Statt einer PDE in zwei Variablen x, y erhalten wir zwei ODE, getrennt in je einer Variablen x bzw. y . Das ist wesentlich einfacher!

Die Katze auf dem heißen Blechdach
R203
Übung

(A) Wir lösen $v''(x) - \lambda v(x) = 0$ mit Randbedingung $v(0) = v(a) = 0$,
(B) anschließend $w''(y) + \lambda w(y) = 0$ mit Randbedingung $w(0) = 0$.

(A1) Für $\lambda = 0$ gilt $v''(x) = 0$, also $v(x) = \alpha x + \beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Die Randbedingungen liefern $\alpha = \beta = 0$, also die triviale Lösung.

(A2) Für $\lambda = \omega^2 > 0$ gilt $v''(x) - \omega^2 v(x) = 0$. Die allgemeine Lösung ist $v(x) = \alpha e^{\omega x} + \beta e^{-\omega x}$. Die Randbedingungen liefern erneut $\alpha = \beta = 0$.

(A3) Für $\lambda = -\omega^2 < 0$ gilt $v''(x) + \omega^2 v(x) = 0$. Die allgemeine Lösung ist $v(x) = \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)$. Die Randbedingung $v(0) = 0$ liefert $\alpha = 0$, und $v(a) = 0$ liefert $\beta \sin(\omega a) = 0$. Also $\beta = 0$ oder $\omega a = n\pi$ mit $n \in \mathbb{N}$.

😊 Die Lösungen für den Faktor v sind also

$$v_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}_{\geq 1}.$$

Zu jeder Lösung v_n bestimmen wir nun einen passenden Cofaktor w_n . Die beiden sind gekoppelt durch ihren gemeinsamen Eigenwert!

Die Katze auf dem heißen Blechdach
R204
Übung

(B) Die Differentialgleichung mit $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{a^2}$ besitzt die Lösungen

$$w_n(y) = a_n \exp\left(\frac{n\pi}{a}y\right) + b_n \exp\left(-\frac{n\pi}{a}y\right).$$

Die Randbedingung $w_n(0) = 0$ impliziert $b_n = -a_n$, also

$$w_n(y) = a_n \left[\exp\left(\frac{n\pi}{a}y\right) - \exp\left(-\frac{n\pi}{a}y\right) \right] = 2a_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right).$$

Alle Lösungen in Produktform $u(x, y) = v(x)w(y)$, die bereits die drei Randbedingungen $u(x, 0) = u(0, y) = u(a, y) = 0$ erfüllen, sind demnach

$$u_n(x, y) = v_n(x)w_n(y) = a_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right).$$

Die obige Konstante $2a_n$ haben wir hierbei zu a_n zusammengefasst.

😊 Durch Superposition erhalten wir die allgemeine Lösung:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

Die Katze auf dem heißen Blechdach

R205
Übung

Für die letzte Randbedingung $u(x, b) = 100$ machen wir den Ansatz

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right).$$

Speziell für $y = b$ wird diese Reihe zu

$$u(x, b) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right).$$

Die Koeffizienten c_n erhalten wir durch Fourier-Entwicklung:

$$a_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) = c_n = \frac{2}{a} \int_{x=0}^a 100 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = \frac{200}{n\pi} [1 - (-1)^n]$$

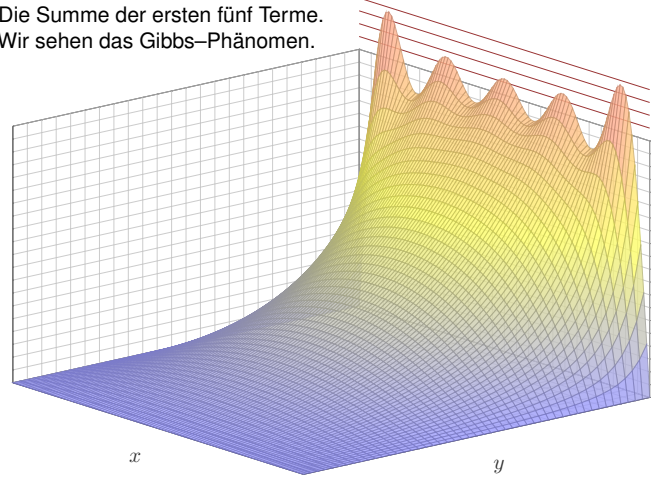
😊 Für die Abmessungen $a = b = 1$ finden wir schließlich:

$$u(x, y) = \frac{400}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)\pi x) \sinh((2n+1)\pi y)}{(2n+1) \sinh((2n+1)\pi)}$$

Die Katze auf dem heißen Blechdach

R206
Übung

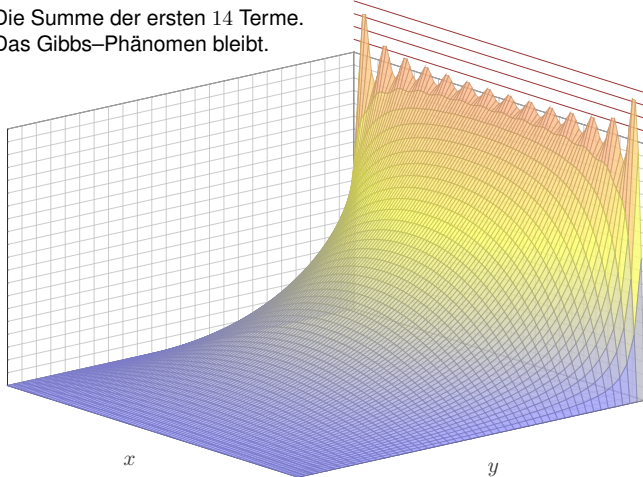
Die Summe der ersten fünf Terme.
Wir sehen das Gibbs-Phänomen.



Die Katze auf dem heißen Blechdach

R207
Übung

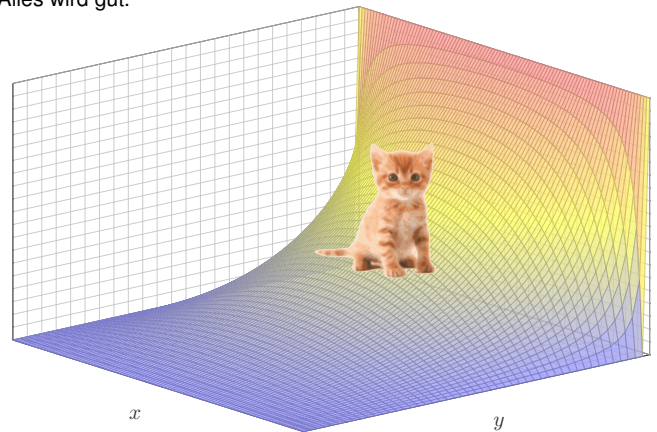
Die Summe der ersten 14 Terme.
Das Gibbs-Phänomen bleibt.



Die Katze auf dem heißen Blechdach

R208
Übung

Der Grenzwert der Reihe.
Alles wird gut.



Wärmeleitung, vorwärts und rückwärts

R221
Übung

Aufgabe: Wir suchen Lösungen $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Wärmeleitung:

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) &= \kappa \partial_x^2 u(t, x) && \text{für alle } t \in \mathbb{R} \text{ und } x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= \sum_n c_n \sin(nx) && \text{Anfangswerte für } t = 0. \end{aligned}$$

(1) Finden Sie alle Lösungen in Produktform $u(t, x) = v(t)w(x)$.

(2) Was folgt daraus für Anfangswerte $u(0, x) = \sum_n c_n \sin(nx)$?

Lösung: (1) Der Produktansatz $u(t, x) = v(t)w(x)$ separiert zu

$$v'(t) = \lambda v(t), \quad \kappa w''(x) = \lambda w(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Wir nutzen die Anfangsdaten $w(x) = \sin(nx)$ und $v(0) = 1$.
Daraus lesen wir $\lambda = -n^2\kappa$ ab und erhalten $v(t) = e^{-n^2\kappa t}$.

(2) Linearkombination / Superposition ergibt die Lösung

$$u(t, x) = \sum_n c_n e^{-n^2\kappa t} \sin(nx)$$

Für $t > 0$ gilt: Hohe Frequenzen klingen extrem schnell ab.

Für $t < 0$ gilt: Hohe Frequenzen werden extrem verstärkt.

Wärmeleitung, vorwärts und rückwärts

R222
Übung

(3) Was bedeutet das für die Stabilität der Wärmeleitungsgleichung?

(a) Wenn sie vorwärts läuft? (b) Wenn wir sie rückwärts betrachten?
Ist das Problem demnach gut gestellt im Sinne von Hadamard?

Lösung: (3) Eine partielle Differentialgleichung (PDE), hier als Anfangs- und Randwertproblem (ARWP), heißt **gut gestellt**, wenn genau eine Lösung existiert und diese stetig von den gegebenen Daten abhängt.

Für die Wärmeleitungsgleichung sind Existenz und Eindeutigkeit nicht offensichtlich, wir werden beides im nächsten Kapitel noch diskutieren. Die Abhängigkeit von den Anfangsdaten können wir sofort ablesen:

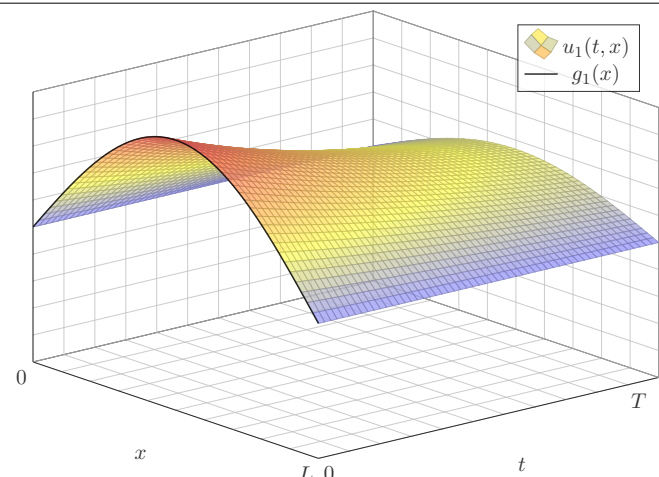
😊 Für die (übliche, vorwärtslaufende) Wärmeleitung hängt die Lösung $u: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig von den Anfangsdaten $u(0, -) = u_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ab: Ist u_0 klein, so auch u (in einer geeigneten Norm als Präzisierung).

😞 Für die rückwärtslaufende Wärmeleitung gilt dies offensichtlich nicht: Die Anfangsdaten $u(0, x) = n^{-1} \sin(nx)$ sind beliebig klein für $n \rightarrow \infty$, doch die Lösung $u(t, x) = n^{-1} e^{-n^2\kappa t} \sin(nx)$ wird für $t < 0$ beliebig groß.

⚠️ Für manche Anfangsdaten existiert die Lösung nur für $t \geq 0$.

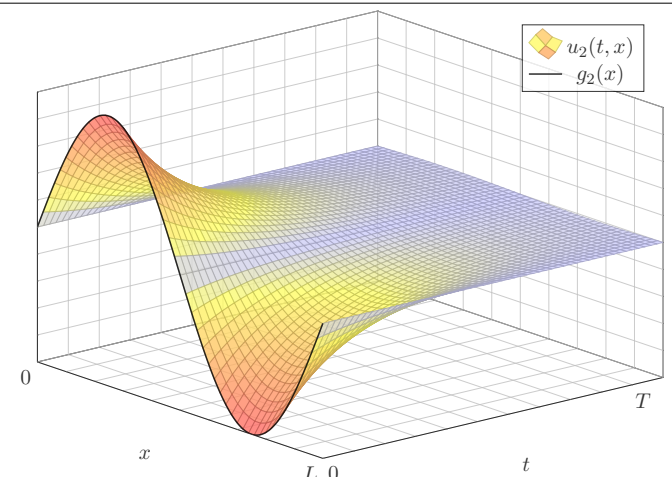
Wärmeleitung, vorwärts und rückwärts

R223
Übung



Wärmeleitung, vorwärts und rückwärts

R224
Übung



Wellengleichung und die harmonisch schwingende Saite

R301
Übung

Wie schwingt die Saite eines Musikinstruments (Geige, Klavier, Gitarre)? Nach d'Alembert 1747 beschrieb Euler 1748 die Problemstellung so:

Eine Saite wird gespannt und in eine von der geradlinigen wenig abweichende, sonst aber beliebige Lage gebracht, und nachher sich selbst überlassen.

Man bestimme die vollständige schwingende Bewegung der Saite.

Aufgabe: (0) Beschreiben Sie die Lage $u(t, x)$ einer gezupften Saite für alle $x \in [0, L]$ und $t \geq 0$ durch eine PDE mit Rand- und Anfangswerten.

(1) Lösen Sie zunächst den **Separationsansatz** $u(t, x) = v(t) w(x)$.

(2) Skizzieren Sie $u_n(t, x) = \cos(n\pi ct/L) \sin(n\pi x/L)$ für $n = 1, 2, 3, \dots$. Erfüllt diese Funktion die PDE und alle Rand- und Anfangswerte?

Lösung: (0) Wir suchen $u: \mathbb{R} \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}: (t, x) \mapsto u(t, x)$. Dazu gilt:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(t, x) &= c^2 \partial_x^2 u(t, x) && \text{für alle } t \in \mathbb{R} \text{ und } 0 < x < L, \\ u(t, 0) &= u(t, L) = 0 && \text{Randwerte für } x \in \{0, L\} \text{ und } t \geq 0, \\ u(0, x) &= g(x) && \text{Anfangsposition für } t = 0 \text{ und } 0 \leq x \leq L, \\ \partial_t u(0, x) &= 0 && \text{Anfangsgeschwindigkeit für } t = 0. \end{aligned}$$

Wellengleichung und die gezupfte Saite

R305
Übung

Die vorige Aufgabe löst unser Problem, falls zum Startzeitpunkt $t = 0$ die Schwingung mit $u(0, x) = \sin(n\pi x/L)$ und $\partial_t u(0, x) = 0$ beginnt.

D'Alembert-Ansatz: (3) Die Funktion $u(t, x) = f(x \mp ct)$ beschreibt eine Welle der Form f , die mit Geschwindigkeit c nach rechts/links läuft.

(4) Lösen Sie mit diesem Ansatz das allgemeine ARWP wie oben in (0).

(5) Erklären Sie, wie die Faktorisierung $\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2 = (\partial_t + c \partial_x)(\partial_t - c \partial_x)$ die Wellengleichung aus (0) in zwei einfache Transportprobleme zerlegt.

Lösung: (3) Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar (stetig genügt, wenn wir Ableitungen im Distributionensinne verstehen, siehe D533).

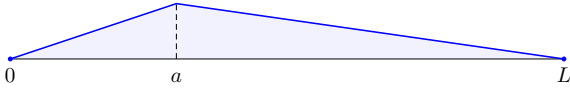
Für $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (t, x) \mapsto u(t, x) = f(x - ct)$ gilt $\partial_x^2 u(t, x) = f''(x - ct)$ und $\partial_t^2 u(t, x) = c^2 f''(x - ct) = c^2 \partial_x^2 u(t, x)$. Die PDE ist also erfüllt!

(4) Wir setzen die gegebene Funktion $g: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(0) = g(L) = 0$ ungerade und $2L$ -periodisch fort zu $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und erhalten:

$$u(t, x) = \frac{1}{2} [g(x - ct) + g(x + ct)]$$

☺ D'Alemberts geniale Lösung überlagert zwei gegenläufige Wellen.

Wellengleichung & Fourier: O'zupft ist!

R309
Übung

Aufgabe: (6) Zu $0 < a < L$ betrachten wir die Anfangsposition

$$g: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto g(x) = \begin{cases} x/a & \text{für } 0 \leq x \leq a, \\ (L-x)/(L-a) & \text{für } a \leq x \leq L. \end{cases}$$

Überlagern Sie die Eigenfunktionen aus (1–2)

$$u_n(t, x) = \cos(n\pi ct/L) \sin(n\pi x/L)$$

für $n = 1, 2, 3, \dots$ durch „unendliche Linearkombination“ zu einer Reihe

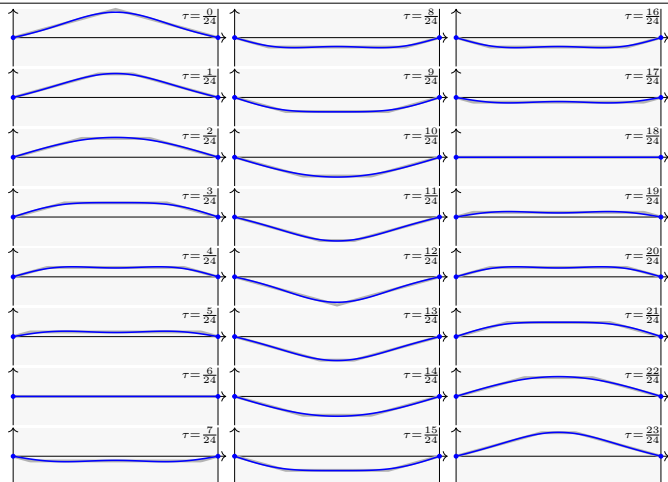
$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(t, x)$$

mit Anfangswerten $u(0, x) = g(x)$ und $\partial_t u(0, x) = 0$ für alle $x \in [0, L]$.

Wie bestimmen Sie effizient und sicher die Koeffizienten $a_1, a_2, a_3, \dots$?

(7) Zeichnen Sie die ersten Partialsummen dieser Reihenentwicklung.

Wellengleichung & Fourier: O'zupft ist!

R311
Übung

Wellengleichung und die harmonisch schwingende Saite

R302
Übung

(1) Der Produktansatz $u(t, x) = v(t)w(x)$ separiert zu: **R117**

$$v''(t) = \lambda v(t), \quad c^2 w''(x) = \lambda w(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Die Lösungspaare hängen von der Separationskonstanten $\lambda \in \mathbb{R}$ ab:

$$\begin{aligned} \lambda = 0: & \quad v(t) = a_1 + a_2 t, \\ & \quad w(x) = b_1 + b_2 x \\ \lambda = \alpha^2 > 0: & \quad v(t) = a_1 e^{\alpha t} + a_2 e^{-\alpha t}, \\ & \quad w(x) = b_1 e^{x\alpha/c} + b_2 e^{-x\alpha/c}. \\ \lambda = -\omega^2 < 0: & \quad v(t) = a_1 \cos(\omega t) + a_2 \sin(\omega t), \\ & \quad w(x) = b_1 \cos(x\omega/c) + b_2 \sin(x\omega/c) \end{aligned}$$

Diese lösen die **freie** Wellengleichung. Die geforderte Randbedingung $w(0) = w(L) = 0$ erfüllt nur $\sin(n\pi x/L)$ für $n \in \mathbb{N}$, also $\omega = n\pi c/L$ und

$$u_n(t, x) = [a_n \cos(n\pi ct/L) + b_n \sin(n\pi ct/L)] \sin(n\pi x/L)$$

Da wir zudem $\partial_t u(0, x) = 0$ für alle $x \in [0, L]$ fordern, folgt $b_n = 0$.

Wellengleichung und die gezupfte Saite

R306
Übung

Daniel Bernoulli hingegen war weiterhin überzeugt, dass die Bewegung aus harmonischen Grund- und Oberschwingungen bestehen müssen. Er war unzufrieden mit d'Alemberts Lösung und schrieb 1753:

Ich folgere daraus, dass alle schwingenden Körper eine Unmenge von Tönen von sich geben [...], aber diese Vielfalt der Schwingungen bei der Saite verschweigen die Herren d'Alembert und Euler. [...] In der Tat stimmen alle Musiker darin überein, dass eine gezupfte Saite außer ihrem Grundton zugleich auch noch andere, sehr viel hellere Töne von sich gibt. Dies ist der Beweis dafür, dass sich in einer und derselben Saite eine Überlagerung mehrerer Arten taylorscher [harmonischer] Schwingungen zugleich einstellen kann.

Wer hat denn nun Recht? D'Alembert (1747) und Euler (1748) mit ihrer Summe gegenläufiger Wellen oder Taylor (1713) und Bernoulli (1753) mit der Überlagerung vieler stehender harmonischer Schwingungen?

Diese Kontroverse dauerte über fünfzig Jahre. Die revolutionäre Lösung lieferte Fourier (1807): Beide haben Recht! Jede (physikalisch relevante) Anfangsposition kann als Reihe harmonischer Terme dargestellt werden. Fouriers Theorie erklärte auch, wie die Koeffizienten zu bestimmen sind.

Wellengleichung & Fourier: O'zupft ist!

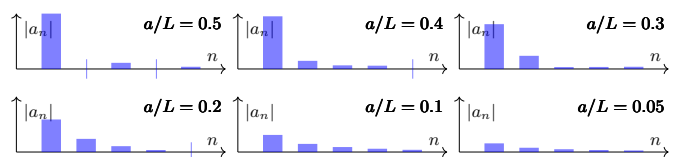
R310
Übung

Lösung: (6) Es gilt bereits $\partial_t u_n(0, x) = 0$, folglich auch $\partial_t u(0, x) = 0$.

Für $u(0, x) = g(x)$ bestimmen wir a_n durch Fourier-Analyse und finden

$$u(t, x) = \frac{2L^2}{\pi^2 a(L-a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi a/L)}{n^2} \sin(n\pi x/L) \cos(n\pi ct/L).$$

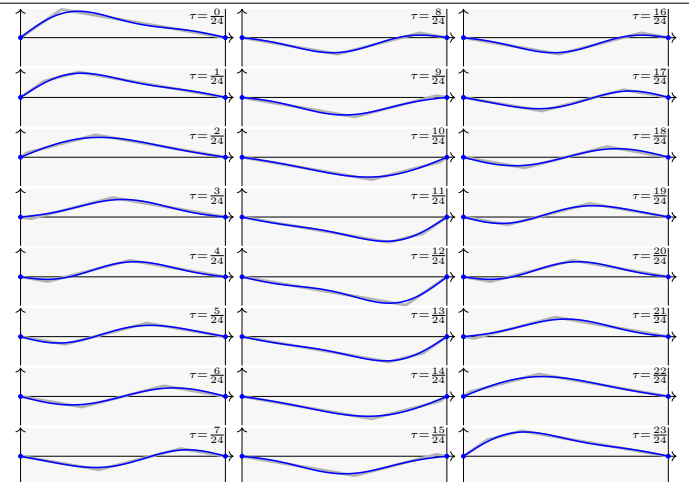
Die n -te Schwingung hat die Amplitude $\sin(n\pi a/L)/n^2$, hängt also von der Stelle $a \in [0, L]$ ab, an der gezupft wird. Etwa bei $a = 0.2L$ sind erste und zweite Oberschwingung recht stark, was einen vollen Klang bewirkt.



(7) Die folgenden Graphiken zeigen die Summe der ersten drei Terme.

☺ Die Näherung ist schnell recht gut. Fourier-Theorie wirkt auch hier!

Wellengleichung & Fourier: O'zupft ist!

R312
Übung

Potenzreihen und Fourier-Transformation	R401 Fazit
☹ Nicht jede PDE besitzt eine Lösung; selbst wenn sie eine besitzt, so doch meist nicht elementar, das heißt in geschlossener Form. 😊 In solchen Fällen hilft meist nur der Potenzreihenansatz Q333: Existenz- und Eindeutigkeitssatz Q3B von Cauchy-Kowalewskaja 😊 Fourier-Transformation löst $P(\partial) u(x) = g(x)$ für jedes Polynom $P(x) = \sum a_\nu x^\nu$. Die Transformation ergibt nämlich $P(i\xi) \hat{u}(\xi) = \hat{g}(\xi)$, Auflösen zu $\hat{u}(\xi) = \hat{g}(\xi)/P(i\xi)$ und Rücktransformation liefert dann u: Dies garantiert der Existenzsatz R1A von Ehrenpreis-Malgrange. In der Praxis treten sehr häufig partielle Differentialgleichungen auf. Erfahrungsgemäß sind die allermeisten höchstens zweiter Ordnung. 😊 Lineare PDE erster Ordnung lösen wir entlang Charakteristiken. Die wichtigsten linearen PDE zweiter Ordnung sind folgende Modelle: Die Poisson-Gleichung $\Delta u = \varrho$, die Wellengleichung $\partial_t^2 u - c^2 \Delta u = \varrho$ und die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u - \kappa \Delta u = q$ mit $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$. Nach diesen drei Modellgleichungen klassifiziert man lineare PDE zweiter Ordnung in elliptisch, hyperbolisch und parabolisch R110.	

Kompaktheit garantiert Eindeutigkeit.	R403 Fazit
Die Konstruktion einer Lösung oder erfolgreiche Probe eines Kandidaten zeigt die Existenz einer Lösung, aber noch nicht die Eindeutigkeit: Es könnte weitere Lösungen geben, die unserem Ansatz entgehen. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, also der Abschluss $\bar{\Omega}$ kompakt. (0) Löst $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ die homogene Poisson-Gleichung $\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0 && \text{für jeden inneren Punkt } x \in \Omega, \\ u(x) &= 0 && \text{für jeden Randpunkt } x \in \partial\Omega, \end{aligned}$ dann gilt $u(x) = 0$ für alle $x \in \bar{\Omega}$. (1) Lösen $\tilde{u}: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ die inhomogene Poisson-Gleichung $\begin{aligned} \Delta u(x) &= q(x) && \text{für jeden inneren Punkt } x \in \Omega, \\ u(x) &= g(x) && \text{für jeden Randpunkt } x \in \partial\Omega, \end{aligned}$ dann gilt $\tilde{u}(x) = \tilde{u}(x)$ für alle $x \in \bar{\Omega}$. Wie üblich folgt (1) aus (0) dank Linearität: Angenommen $\tilde{u}, \tilde{u}$ erfüllen (1). Die Differenz $u = \tilde{u} - \tilde{u}$ erfüllt dann (0). Also gilt $u = 0$ und somit $\tilde{u} = \tilde{u}$.	

Separation (Klausur Februar 2016)	R405 Übung
Wir untersuchen für $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die partielle Differentialgleichung $\partial_x^2 u(x, y) + 6 \partial_x u(x, y) = \partial_y^2 u(x, y).$ Gesucht sind Lösungen in Produktform $u(x, y) = v(x) w(y) \neq 0$. Aufgabe: (1) Formulieren Sie die Gleichungen für $v(x)$ und $w(y)$. (2) Finden Sie alle Lösungen der Form $u(x, y) = v(x) \cdot \cos(3y)$. Lösung: (1) Wir folgen dem Separationsansatz: $\frac{v''(x) + 6v'(x)}{v(x)} = \frac{w''(y)}{w(y)} = \lambda \implies \begin{cases} v''(x) + 6v'(x) = \lambda v(x) \\ w''(y) = \lambda w(y) \end{cases}$ 😊 Zu jedem $\lambda \in \mathbb{R}$ können wir diese beiden ODE lösen. Speziell: (2) Aus $w(y) = \cos(3y)$ folgt $w''(y) = -9w(y)$, also $\lambda = -9$. Wir lösen die zugehörige Gleichung $v''(x) + 6v'(x) + 9v(x) = 0$. Wir finden $u(x, y) = (c_1 + c_2 x) e^{-3x} \cdot \cos(3y)$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Probe!	

Existenz, Eindeutigkeit, Superposition	R407 Übung
Aufgabe: Eine quadratische Kupferplatte mit Kantenlänge 1m wird an zwei gegenüberliegenden Seiten konstant auf 100°C bzw. 200°C geheizt, an den beiden anderen konstant auf 0°C gekühlt. (1) Formulieren und (2) lösen Sie die PDE für die stationäre Temperaturverteilung u! (3) Wie viele Lösungen u existieren? Wie können Sie sicher sein? Lösung: (1) auf dem Quadrat $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ suchen wir $u: Q \rightarrow \mathbb{R}$. Die allgemeine Wärmeleitungsgleichung lautet $\partial_t u = \kappa \Delta u + q$. Im Bereich Q gebe es keine Quellen oder Senken, also $q = 0$. Im stationären Zustand gilt $\partial_t u = 0$, also haben wir $\Delta u = 0$: $\begin{aligned} \partial_x^2 u + \partial_y^2 u &= 0 && \text{auf dem Quadrat } Q = [0, 1] \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^2 \\ \text{mit } u(0, y) &= u(1, y) = 0, && u(x, 0) = 100, u(x, 1) = 200. \end{aligned}$ (2) Wir haben den grundlegenden Fall auf Seite R201 bereits eindeutig gelöst durch $v: Q \rightarrow \mathbb{R}$. Bitte wiederholen Sie sorgfältig alle Argumente! Aus der dortigen ergibt sich unsere hiesige Lösung durch Superposition, nämlich als die Linearkombination $u(x, y) = 2v(x, y) + v(x, 1 - y)$.	

Trennung der Variablen durch Produktansatz	R402 Fazit
Zu lösen sei eine separierbare Differentialgleichung der Form $P(x, \partial_x) u(x, y) = Q(y, \partial_y) u(x, y).$ Gegeben sind Intervalle $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ und hierauf die Differentialoperatoren $P(x, \partial_x) = \sum_{j=0}^m a_j(x) \partial_x^j$ und $Q(y, \partial_y) = \sum_{k=0}^n b_k(y) \partial_y^k$ mit a_j, b_k stetig. Das bedeutet anschaulich: P operiert nur auf x und Q operiert nur auf y. Als Lösungen gesucht sind Funktionen $u: X \times Y \rightarrow \mathbb{K}: (x, y) \mapsto u(x, y)$. In diesem Falle eignet sich der Produktansatz gemäß Satz R1D: Sei $u: X \times Y \rightarrow \mathbb{K}: u(x, y) = v(x) \cdot w(y)$ Produkt von $0 \neq v \in C^m(X, \mathbb{K})$ und $0 \neq w \in C^n(Y, \mathbb{K})$. Dann ist die obige PDE äquivalent zu den beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen / Eigenwertgleichungen $P(x, \partial_x) v(x) = \lambda v(x) \quad \text{und} \quad Q(y, \partial_y) w(y) = \lambda w(y)$ mit einem gemeinsamen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$ als Separationskonstante. Lösung sind Eigenfunktionen $u(x, y) = v(x)w(y)$ und Superpositionen. Gleiches gilt für $u(x_1, \dots, x_n) = u_1(x_1) \cdots u_n(x_n)$ in mehreren Variablen.	

Minimum-Maximum-Prinzip harmonischer Funktionen	R404 Fazit
Beweise für die Eindeutigkeit liefern die Energimethode und das folgende Minimum-Maximum-Prinzip für harmonische Funktionen. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, also der Abschluss $\bar{\Omega}$ kompakt. Sei $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Da $\bar{\Omega}$ und $\partial\Omega$ kompakt sind, nimmt u hierauf jeweils ein Minimum und ein Maximum an. Wegen $\bar{\Omega} \supseteq \partial\Omega$ gilt dann allgemein: $\min_{\bar{\Omega}} u \leq \min_{\partial\Omega} u \quad \text{und} \quad \max_{\bar{\Omega}} u \geq \max_{\partial\Omega} u$ Zudem sei u harmonisch auf dem Inneren Ω, also $u \in C^2$ und $\Delta u = 0$. (1) Dann nimmt u sein Minimum und Maximum auf dem Rand $\partial\Omega$ an: $\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u \quad \text{und} \quad \max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$ Seien $u, v: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf dem Inneren Ω harmonisch. Dann gilt: (2) Monotonie: Aus $u \leq v$ auf dem Rand $\partial\Omega$ folgt $u \leq v$ auf ganz $\bar{\Omega}$. (3) Eindeutigkeit: Aus $u = v$ auf dem Rand $\partial\Omega$ folgt $u = v$ auf ganz $\bar{\Omega}$. 😊 Dies können wir zur Eingrenzung durch Ober/Unterslösungen nutzen. Das Minimum-Maximum-Prinzip gilt ebenso diskret für endliche Graphen (Satz T4B) und beweist neben Eindeutigkeit auch Existenz der Lösung!	

Separation (Klausur September 2016)	R406 Übung
Wir untersuchen für $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die partielle Differentialgleichung $\partial_x^2 u(x, y) + 10 \partial_x u(x, y) = \partial_y^2 u(x, y).$ Gesucht sind Lösungen in Produktform $u(x, y) = v(x) w(y) \neq 0$. Aufgabe: (1) Formulieren Sie die Gleichungen für $v(x)$ und $w(y)$. (2) Finden Sie alle Lösungen der Form $u(x, y) = v(x) \cdot \cos(4y)$. Lösung: (1) Wir folgen dem Separationsansatz: $\frac{v''(x) + 10v'(x)}{v(x)} = \frac{w''(y)}{w(y)} = \lambda \implies \begin{cases} v''(x) + 10v'(x) = \lambda v(x) \\ w''(y) = \lambda w(y) \end{cases}$ 😊 Zu jedem $\lambda \in \mathbb{R}$ können wir diese beiden ODE lösen. Speziell: (2) Aus $w(y) = \cos(4y)$ folgt $w''(y) = -16w(y)$, also $\lambda = -16$. Wir lösen die zugehörige Gleichung $v''(x) + 10v'(x) + 16v(x) = 0$. Wir finden $u(x, y) = (c_1 e^{-8x} + c_2 e^{-2x}) \cdot \cos(4y)$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Probe!	

Existenz, Eindeutigkeit, Superposition	R408 Übung
Stationäre Wärmeverteilung auf einer Kupferplatte: 