

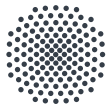
Höhere Mathematik 3 (vertieft)

für Luft- und Raumfahrttechnik (LRT)
und Materialwissenschaft (MaWi)



Prof. Dr. Michael Eisermann

michael-eisermann.de/lehre/HM3



Universität Stuttgart

Wintersemester 2026/27

Halbversion 13.10.2026

Für die Mitteilung von Unklarheiten und Fehlern aller Art
sowie für Verbesserungsvorschläge bin ich stets dankbar!



Habe Mut, dich deines eigenen
Verstandes zu bedienen!

Much to learn, you still have.
This is just the beginning.



erkennen.
verstehen.
anwenden.

Urheberrecht und Haftungsausschluss

002
Überblick

Die hier angebotenen Inhalte sind urheberrechtlich geschützt. Sie dürfen zu nicht-kommerziellen Zwecken in der Lehre verwendet werden, sofern die Quelle wie folgt vollständig angegeben wird.

Prof. Dr. Michael Eisermann: Vorlesungsunterlagen zur Höheren Mathematik,
Institut für Geometrie und Topologie (IGT), Universität Stuttgart,
michael-eisermann.de/lehre/HM3

Diese Unterlagen dienen zur Vorlesung *Höhere Mathematik 3 (vertieft)*. Sie sind konzipiert für das Mathematik-Grundstudium in den Natur- und Ingenieurwissenschaften und vermitteln einschlägiges Basiswissen. Zusammen mit den Grundlagen umfassen sie über 900 Aufgaben mit Lösungen, die Schönsten davon entstanden in Zusammenarbeit mit Dr. Friederike Stoll.

Die Inhalte wurden vom Autor mit größter Sorgfalt für die Präsentation in der Lehre erstellt. Sie werden allein zu Lehrzwecken zur Verfügung gestellt, in der Hoffnung, dass sie zum Lernen und Üben nützen mögen, ohne jeden Anspruch auf Eignung zu irgendeinem anderen Zweck. Sie sind keine Handlungsanweisung oder Empfehlung. Nur eigenständiges Denken hilft!

Kunst und Wissenschaft, Forschung und Lehre sind frei. (GG Art. 5.3.1) Der Autor übernimmt keinerlei Gewähr für die angebotenen Informationen und Daten, deren Aktualität, Korrektheit, Vollständigkeit, Qualität oder irgendeine Nutzbarkeit außerhalb der Lehre. Haftungsansprüche für mögliche Schäden, materieller oder immaterieller Art, sind grundsätzlich ausgeschlossen.

Für Inhalte externer Quellen, insb. verlinkter Webseiten, ist stets deren Anbieter verantwortlich.

Wie nutzen Sie dieses Vorlesungsskript?

003
Überblick

Es gibt nichts Praktischeres als eine gute Theorie. (Immanuel Kant, 1724–1804)

Diese Folien dienen als Grundlage meiner Vorlesung. Wie von Studierenden gewünscht, können sie auch eigenständig genutzt werden, zum Nacharbeiten, zur Klausurvorbereitung, oder notfalls als Ersatz. Dazu sind *Definitionen* und *Sätze* mit zahlreichen *Übungen* verwoben; sie bilden ein reiches Lese- und Arbeitsbuch. Die Zusammenfassung bietet dazu ein knappes Nachschlageheft.

Die Vortragsfolien sind durch blaue Titelbalken leicht zu erkennen. Dem studentischen Wunsche folgend präsentiere ich vielfältige *Beispiele* und *Aufgaben mit Lösungen*, zudem *Erläuterungen*, *Erinnerungen* und *Ergänzungen*, instruktive *Rechnungen* und manchmal *Beweise*. Dies folgt der bewährten Erfahrung, dass die Leserin und der Leser leichter eine vorhandene Übung, Erklärung oder Illustration übergehen kann, als eine fehlende selbst (er)finden. Möge es beiden nützen!

Ich versuche, jedes Thema so einfach wie möglich darzustellen, doch so präzise und ausführlich wie es für ein solides Verständnis nötig ist. Erklärungen und Hinweise, die ich in der Vorlesung mündlich gebe, sind hier schriftlich ausgeführt; sie nützen mir als Erinnerung, den Leser:innen als Erläuterung. Eine ideale Mischung für alle und jede:n gibt es leider nicht: Der Bedarf nach Umfang und Tiefe ist individuell unterschiedlich. Das Angebot ist reich. Dosieren Sie selbst!

Neben der *Vollversion* biete ich versuchsweise auch eine *Halbversion*, die mit der Axt auf halbe Länge gekürzt wurde, durch Löschung zahlreicher Beispiele und Aufgaben, Erinnerungen und Illustrationen, Ausführungen und Ergänzungen. Je nach Bedarf der Leser:in ist dies an manchen Stellen hilfreich, an anderen fehlt es. Wer es sich zutraut, nutzt die Vollversion und dosiert selbst.

Wozu benötigen Sie mathematische Methoden?

004
Überblick

Alles Leben ist Problemlösen. (Sir Karl Popper, 1902–1994)

Verständnis und Beherrschung komplexer Zusammenhänge benötigen Empirie *und* Theorie, quantitative Modelle und sorgfältige Planung. Diese beruhen im Wesentlichen auf Mathematik. Der Beruf von Ingenieur:innen und vieler anderer ist daher zunehmend mathematisch geprägt. Mathematische Methoden sind häufig Voraussetzung für den Erfolg technischer Entwicklungen; das gilt auch, wenn sie beim Endprodukt im Inneren wirken und oberflächlich nicht sichtbar sind. Deshalb nutzen Sie bereits im Studium vielfältige und umfangreiche mathematische Methoden, und hierzu legt Ihre Mathematikausbildung im Grundstudium das notwendige Fundament.

Es ist dabei völlig unmöglich, alle in späteren Anwendungen relevanten Techniken zu behandeln, sozusagen als Enzyklopädie auf Vorrat. Dazu sind die Anforderungsprofile allzu unterschiedlich: Was für den einen schon viel zu viel wäre, ist für die andere noch längst nicht umfassend genug. Zukünftige Ingenieur:innen sollen daher nicht nur die allgegenwärtigen Grundfertigkeiten lernen, sondern auch mathematische Denkweisen und systematische Problemlösung, um je nach Bedarf erforderliche neue Methoden selbstständig erwerben, vertiefen und anwenden zu können.

Es ist in hochqualifizierten Berufen unwahrscheinlich, dass Sie genau dieses oder jenes *Beispiel* wörtlich anwenden. Das gilt ganz allgemein, selbst für die bestmögliche Auswahl von Beispielen. Hingegen ist es wahrscheinlich, dass Sie diese oder ähnliche bewährte *Methoden* häufig nutzen. Sie sollen daher nicht nur *Beispiele* lernen, sondern zugleich möglichst vielseitige *Methoden*! Mathematik ist immer beides: sowohl abstrakte Theorie als auch konkrete Anwendung; sie sind keine Gegensätze, sie ergänzen sich, die eine kann nur mit der anderen dauerhaft erfolgreich sein.

Hochtechnologie ist immer auch mathematische Technologie.

Sie haben forschungsorientierte Studiengänge gewählt, Sie studieren ambitionierte Fächer, hierzu brauchen Sie handfeste Mathematik. Was Sie hier lernen, können Sie überall nutzbringend anwenden. Mit diesen Werkzeugen können Sie auch dicke Bretter bohren.



Theorie und Anwendung sind keine Gegensätze, sie ergänzen sich und arbeiten wunderbar effizient zusammen wie linke und rechte Hand. Mathematik ist zugleich abstrakte Theorie und konkrete Anwendung. Dank Abstraktion ist sie universell anwendbar: Das ist ihre Stärke!

Mathematik ist Grundlage und Werkzeug aller modernen Technologie.

Als Ingenieur:in brauchen Sie Ihr methodisches Handwerkszeug. Dazu gehört als harter Kern und Grundlage die Höhere Mathematik. Je anspruchsvoller die Aufgabe, desto wichtiger wird die Mathematik.

Sie können das begrüßen oder bejammern, es ist und bleibt Tatsache: Theorie ist nicht Ballast oder Schikane, sondern effizientes Werkzeug.

Viele von Ihnen wissen bereits, dass Sie mathematische Werkzeuge dringend brauchen. Andere finden es demnächst heraus, hoffentlich bereits in dieser Grundlagenvorlesung, andernfalls nachfolgend in Anwendungen und Vertiefungen in Studium und Beruf. Je früher und je gewissenhafter Sie Ihr Handwerkszeug erlernen, desto besser.

Die Mathematik bietet Ihnen extrem präzise und scharfe Werkzeuge. Zur effizienten Nutzung brauchen Sie einige grundlegende Kenntnisse. Greifen Sie nicht wahllos in die Kiste oder packen die Werkzeuge am falschen Ende: Wissen macht Ah! Unwissen macht Aua!

Vor uns liegt ein sehr anspruchsvolles und sehr lohnendes Semester. Ich beginne am Ende und will Ihnen zeigen, wo die Reise hingeht: Wozu nutzen Sie diese Methoden? Welche Aufgaben können Sie damit lösen, die jetzt noch außerhalb Ihrer Reichweite liegen?

*Frage nicht nur, was die HM jetzt schon für dich tun kann.
Frage vor allem, was du jetzt schon für die HM tun kannst.*



Wenn du ein Schiff bauen willst, lehre deine Leute nicht nur ihr Handwerk, sondern erwecke ihre Sehnsucht nach dem Meer!

Dem Anwenden muss das Erkennen vorausgehen. (Max Planck, 1858–1947)

Manche:r schimpft auf die „lästige Theorie“ und scheitert alsbald an allzu naiver Anwendung, getreu dem Slogan „Plane nicht, irre lieber!“. Manchmal geht das gut, aber meist leider nicht. Wem nichts besseres einfällt, der prangert pauschal die „Theorielast“ des Studiums an und fordert unspezifisch aber publikumswirksam „Praxisbezug“. Hohle Sprüche werden gerne wiedergekaut.

Wer Mathematik anwendet, weiß es besser: Theorie ist keine Last, sondern wirksames Werkzeug. Gute Ingenieur:innen kennen die möglichen Methoden und entscheiden umsichtig und informiert. Die Erfahrung zeigt: Immer häufiger sind mathematische Methoden der Schlüssel zum Erfolg. Ambitionierte Studiengänge bauen daher konsequent auf umfassende mathematische Grundlagen.

Manche Studenten (m/w/d) des Ingenieurwesens skandieren die Forderung „Wir wollen keine Theorie, sondern nur Beispiele!“ Wenn das Ihre persönliche Überzeugung ist, überdenken Sie Ihre Studienwahl: Es gibt rein *anwendungsorientierte* Ausbildungen mit einem Minimum an Theorie. Für ein *forschungsorientiertes* Studium wäre das unzureichend, allzu einseitig und kurzsichtig. Wie oben erklärt, sollen Sie nicht nur *Beispiele* lernen, sondern möglichst vielseitige *Methoden*!

Der Nutzen konkreter Beispiele zum Erlernen einer Methode steht außer Frage. Ebenso wichtig ist jedoch die zugrundeliegende Theorie: Sie ordnet und erklärt. Das ist meist ein zweistufiger Vorgang: Diese Vorlesung rückt Beispiele soweit möglich in den Vordergrund, stellt aber auch die notwendige Theorie zur Verfestigung und Vertiefung bereit. Damit Sie sich diese Grundlagen möglichst gut aneignen können, werde ich Definitionen und Sätze explizit formulieren und ausführlich behandeln, und deren sichere Beherrschung später auch von Ihnen erwarten.

Willkommen! Sie machen es richtig und kommen zu Ihrer Vorlesung. Bitte legen Sie jetzt ganz bewusst Ihre Handys und Tablets weg, schauen Sie mich an und hören Sie mir aufmerksam zu.

Universität ist die Gemeinschaft der Lehrenden und Lernenden.

Digitale Lernformen, auch KI, können unterstützen, doch nichts ersetzt die Gemeinschaft.

*Tradition ist nicht die Bewahrung der Asche,
sondern die Weitergabe des Feuers.*

Jean Jaurès (1859–1914)

Sie müssen heute drei Dinge verstehen und sich richtig entscheiden:

- 1 Sie wollen Ingenieur:in werden. Dazu brauchen Sie Werkzeuge, insbesondere Denkwerkzeuge, und dazu gehört die Mathematik.
- 2 Wir meinen es gut mit Ihnen, Ihr HM3-Team kann & will Ihnen helfen. Sie entscheiden über Ihren Erfolg, heute für dieses Semester HM3.
- 3 Ernähren Sie sich gesund, treiben Sie Sport, lernen Sie Mathematik! Das ist Ihr Schlüssel für Erfolg im Studium und ein gutes Leben.

Als Ingenieur:in wollen Sie komplexe, praktische Probleme lösen. Dazu brauchen Sie theoretische Grundlagen und mathematische Methoden. Sie haben forschungsorientierte Studiengänge gewählt: LRT und MaWi. Je anspruchsvoller die Aufgabe, desto mathematischer die Werkzeuge! Genau zu diesem Ziel bietet und verlangt Ihr Studiengang die HM3. Mit Ihrem Engagement im Studium entscheiden Sie über Ihre Zukunft.

Die richtige Wahl: Aufwärtsspirale —
engagiert mitarbeiten, gemeinsam lernen, erfolgreich studieren.



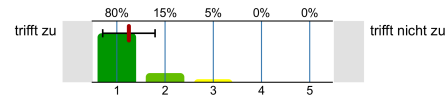
Die falsche Wahl: Abwärtsspirale —
desinteressiert mitlaufen, planlos verträdeln, frustriert aufgeben.

Lohnt sich Ihre Investition in die HM3? Ja, sicher! Fragen Sie Alumni. . .

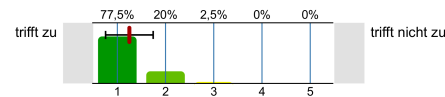
- 1 spannende Themen, schöne und nützliche Mathematik.
- 2 klare Struktur, hervorragende Betreuung, faire Klausur.

😊 In aller Bescheidenheit: Unsere HM3 ist sensationell gut.

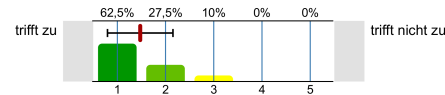
Die Lehrveranstaltung ist außerordentlich gut organisiert.



Es wird auf die Anliegen und Belange der Studierenden eingegangen.

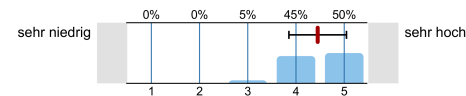


Ich habe durch die Teilnahme an dieser Lehrveranstaltung viel gelernt.

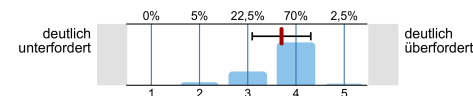


⚠️ Klar und ehrlich: Studieren heißt sich bemühen!

Im Vergleich zu anderen Lehrveranstaltungen sind die Anforderungen in dieser LV an mich...



Die Lehrveranstaltung hat mich ...



Warum erzähle ich Ihnen das? Sie können mit uns rechnen!

Ich möchte, dass Sie vernünftig handeln und erfolgreich studieren. Zu dieser Entscheidung gebe ich Ihnen die nötigen Informationen. Sie haben die Freiheit, unvernünftig zu handeln und zu scheitern. Ich kann Ihnen den Weg zeigen, gehen müssen Sie ihn selbst.

Die Rückmeldungen sind insgesamt sehr positiv, die Befragungen sind sensationell gut, besonders für eine Grundvorlesung am Studienanfang und zudem gar in der Mathematik, als Service im Ingenieurwesen. Unser Gesamtpaket der Höheren Mathematik 3 ist hervorragend.

Dafür arbeite ich extrem hart, genauer gesagt: Ihr gesamtes HM3-Team! Von Ihnen erwarte ich dasselbe: ernsthaftes Engagement und Mitarbeit. Mir ist wichtig, diese Grundfrage anfangs ein für alle mal zu klären. Anschließend können wir uns auf Inhalte konzentrieren!

Quidquid agis, prudenter agas et respice finem!
[Was immer du tust, handle klug und bedenke das Ende!]

Magazin > Naturwissenschaften und Mathematik > Mathematik > Lehrveranstaltungen > Winter 2026/27 > Höhere Mathematik 3 vertieft - WiSe 26/27

Höhere Mathematik 3 vertieft - WiSe 26/27

Inhalt Timeline Info Mitglieder

Herzlich willkommen zur Höheren Mathematik 3 vertieft!

Startseite

In diesem Ilias-Kurs finden Sie Informationen und Online-Materialien zu unserer Veranstaltung:

- Zur **Vorlesung mit integrierter Vortragsübung** bieten wir Ihnen unser Skript, Vortrag und Hintergrund, erprobt und umfassend. Gerne geschehen, möge es nützen!
- Jede Woche lösen Sie hier in Ilias ein **hilfreiches Quiz**. Damit wiederholen Sie den aktuellen Vorlesungsstoff und sind so für die Übungen bestens vorbereitet.
- Zur **Übung** erstellen wir für Sie jede Woche ein Übungsblatt mit gut abgestimmten Aufgaben, ideal zur Verfestigung, zur Vertiefung und als Training.
- Die Präsenzübungen lösen Sie mit Ihren Kommilit:innen unter Anleitung Ihres Tutors in der Übung, als Vorbereitung für Ihre anschließende Hausaufgaben.
- Im **Forum** können Sie anonym Ihre Fragen stellen und erhalten kompetente Auskunft.

Wir bieten eine **Scheinklausur** am Samstag, den 5. Dezember 2026, von 10 bis 12 Uhr. Ob wir diese schreiben, entscheiden Sie nach reiflicher Überlegung selbst, in einer anonymen Abstimmung demnächst in Ihrer Vorlesung.

HM3-Termine im Überblick

Vorlesung und integrierte Vortragsübung	Quiz	Gruppenübung
• Dienstag, 8:00 - 9:30 Uhr in V 57.03 • Dienstag, 14:00 - 15:30 Uhr in V 47.02 • Freitag, 11:30 - 13:00 Uhr in V 47.01 Die erste Vorlesung beginnt am Dienstag, den 13. Oktober 2026, um 8:00 Uhr.	Wöchentlich veranstalten wir ein Quiz zu den aktuellen Themen jeweils von Freitag, 13 Uhr, bis Dienstag, 8 Uhr. Das erste Quiz startet am Freitag, den 16. Oktober 2026.	Die Gruppenübungen finden mittwochs, donnerstags und freitags in verschiedenen Blöcken statt. Die genauen Zeiten und Räume finden Sie im Gruppenübungsordner. Die Anmeldung zu den Übungen findet am Mittwoch, den 14. Oktober 2026, von 10 bis 16 Uhr hier in Ilias statt. Treten Sie dazu einer der Ilias-Gruppen im Gruppenübungsordner bei. Das erste Übungsblatt (Blatt 0 zur Wiederholung aus der HM1&2) gibt es schon in der ersten Woche. Die ersten Gruppenübungen finden in der zweiten Vorlesungswoche statt, also am 21. bis 23. Oktober 2026.

Scheinbedingungen

Um den Schein und damit die Zulassung zur Modulprüfung zur HM3 vertieft zu erhalten, erfüllen Sie die folgenden Bedingungen:

- Mindestens die **Hälfte der Punkte aller Quizzes** (Quiz 1 bis Quiz 13).
- Mindestens die **Hälfte der Punkte aus den Quizzes der zweiten Hälfte** (Quiz 7 bis Quiz 13).
- Mindestens die **Hälfte der Punkte aller Hausaufgaben** (Blatt 0 bis Blatt 12).
- Mindestens die **Hälfte der Punkte aus den Hausaufgaben der zweiten Hälfte** (Blatt 7 bis Blatt 12).
- Mindestens die **Hälfte der Punkte aus der Scheinklausur** (falls wir eine schreiben).

Lernen mit KI - so geht's!

Das HM3-Rundum-Glücklich-Paket: die Vorlesungsfolien eingebettet in ein Lese- und Arbeitsbuch

Wer vieles bringt, wird manchem etwas bringen.
JOHANN WOLFGANG VON GOETHE (1749–1832), *Faust*

Parallel zu meiner aktuellen Vorlesung HM3 stelle ich hier meine Folien zur Verfügung, Vortrag und Hintergrund, Übungen mit Lösung, erprobt und umfassend. Sie bilden ein reiches Lese- und Arbeitsbuch, die Zusammenfassung am Ende bietet dazu ein knappes Nachschlageheft. Wer sich ernsthaft einarbeitet, wird sie gut nutzen können.

Höhere Mathematik 3 (vertieft)
für Luft- und Raumfahrttechnik (LRT) und Materialwissenschaft (MaWi)

Prof. Dr. Michael Eisermann
michael-eisermann.de/lehre/HM3

Universität Stuttgart
Wintersemester 2026/27
Vollversion 01.10.2026

Für die Mitteilung von Unklarheiten und Fehlern aller Art sowie für Verbesserungsvorschläge bis ich stets dankbar!

Habe Mut, dich deines eigenen Verstandes zu bedienen! Much to learn, you still have. This is just the beginning!

► „Danke für das umfassende Skript! Wozu lohnt sich noch die Vorlesung?“

Falsche Interpretation: „In der Vorlesung wird nur vorgetragen, was im Skript steht.“ Wer glaubt, der Besuch der Vorlesung sei überflüssig, begeht einen gravierenden Fehler. Die Vorlesung ist Ihr erster und entscheidender Schritt zum gemeinsamen Lernen.

Richtige Interpretation: Ich erarbeite für Sie und biete Ihnen hier mein Skript als zusätzliche Hilfe zu Ihrer Unterstützung. Es dient zu Ihrer *Vor- und Nacharbeit*, als hilfreiche Fundierung und Vertiefung zu Vorlesung, Übungen und Klausuren.

► **Leseanleitung.** Die Vortragsfolien sind durch **blaue Titelfolien** leicht zu erkennen.

Leseanleitung: So nutzen Sie das HM3-Skript richtig!

015

blauer Titelfolien:
Vorlesung, Grundgerüst

weißer Titelfolien:
Hintergrund, Bonus

Die Kontinuitätsgleichung der Strömungslehre

Ziel: Wie verhalten sich Strömungen? Welche Gleichungen gelten hier?

Luft- und Wasserströmung um die Kanarischen Inseln

(0) Wie beschreiben Sie eine Strömung in einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ über ein Zeitintervall $I = [t_0, t_1]$? Geschwindigkeit $\vec{v}: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3: (t, \vec{x}) \mapsto \vec{v}(t, \vec{x})$ und Massendichte $\rho: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}: (t, \vec{x}) \mapsto \rho(t, \vec{x})$ und evtl. weitere Daten. Die Massenstromdichte $\rho \vec{v}: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ beschreibt den Massenfluss. Im Strömungsbereich Ω werde Masse weder erzeugt noch vernichtet.

Strömungslehre: Fluidodynamik

inkompressibel: Hydrodynamik

kompressibel: Aerodynamik

mit Reibung: Navier-Stokes

ohne Reibung: Euler-Gleichung

Ein Fluid heißt inkompressibel, wenn seine Dichte nicht vom Druck abhängt. Zum Beispiel ist dies bei Wasser eine gute Näherung für die meisten Anwendungen. Noch einfacher ist zunächst, überall konstante Dichte anzunehmen. Anders als Flüssigkeiten sind Gase leicht komprimierbar, ihre Dichte ist etwa 1000mal geringer, ihre thermische Ausdehnung größer. Für ihre Bewegung aber gelten weitgehend die gleichen Gesetze, zumindest bei nicht allzu großen Drücken und Geschwindigkeiten. Wir wenden uns hier der allgemein gültigen Kontinuitätsgleichung zu.

In jeder Vorlesung werden etwa 20 bis 25 Vorlesungsfolien besprochen; diese bilden den blauen Faden, das Kernprogramm, unser Grundgerüst. Zu jeder Vorlesungsfolie gehören etwa drei Hintergrundfolien; sie bieten hilfreiche Erläuterungen und Ergänzungen, Anwendungen und Beispiele, Aufgaben und Lösungen, usw. Dosieren Sie selbst nach Ihrem Bedarf!

Leseanleitung: So nutzen Sie das HM3-Skript richtig!

016
Erläuterung

Die Folien erfüllen eine doppelte Funktion. Für meinen Vortrag erstelle ich die Folien zur visuellen Unterstützung und nutze sie als Grundlage. Diese Vortragsfolien sind durch blaue Titelfolien leicht zu erkennen. Hier finden Sie alles Wesentliche, darauf sollten Sie sich konzentrieren.

Dieses Grundgerüst ergänze ich durch Hintergrundinformation in Form von Erläuterungen und Ausführungen, Erinnerungen und Ergänzungen, Aufgaben mit Lösungen, weiteren Beispielen und Rechnungen, etc. Dies folgt der bewährten Erfahrung, dass die Leserin und der Leser leichter eine vorhandene Übung, Erklärung oder Illustration übergehen können, als eine fehlende selbst (er)finden. Möge es beiden nützen!

Ich versuche, jedes Thema so klar und einfach wie möglich darzustellen, doch so präzise und ausführlich wie für ein solides Verständnis nötig ist. Erklärungen und Hinweise, die ich in der Vorlesung mündlich gebe, finden Sie hier zum Nachlesen noch einmal schriftlich ausgeführt; sie nützen mir als Erinnerung und beiden Lesern als Erläuterung.

Tipp: Ein fettgesetztes **Stichwort** kann mit „#Stichwort“ gesucht werden.

Kapitel A: Was sind und was sollen Integrale?

- A1 Konstruktion des Volumens
 - A1.1 Wie misst man Flächen- und Rauminhalt?
 - A1.2 Was sind und was sollen Integrale?
 - A1.3 Schreibweisen für Integrale
- A2 Reelle Zahlen und reelle Funktionen
 - A2.1 Der Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ der reellen Zahlen
 - A2.2 Reelle Funktionen und ihre Operationen
 - A2.3 Absolute Summation von Reihen
- A3 Konstruktion des Integrals
 - A3.1 Treppenfunktionen und ihr Integral
 - A3.2 Einschachtelung und Ausschöpfung
 - A3.3 Absolut integrierbare Funktionen
- A4 Eigenschaften des Integrals
 - A4.1 Zerlegung und Betragsabschätzung
 - A4.2 Fast überall gleiche Funktionen
 - A4.3 Erste Beispiele und Verständnisfragen

Kapitel B: Eindimensionale Integration

- B1 Integration durch Einschachtelung (nach Riemann)
 - B1.1 Treppenfunktionen und Integration durch Einschachtelung
 - B1.2 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
 - B1.3 Integrationsregeln und elementare Integralformeln
- B2 Integration durch Ausschöpfung (nach Lebesgue)
 - B2.1 Absolute Integration durch Ausschöpfung
 - B2.2 Der Hauptsatz für integrierbare Funktionen
 - B2.3 Uneigentliche Integrale und Cauchy-Hauptwert
- B3 Integrale und Reihen
 - B3.1 Vergleich von Integral und Reihe
 - B3.2 Stirling-Formel und Gamma-Funktion
 - B3.3 Konvergenzkriterien von Abel, Leibniz und Dirichlet
- B4 Fazit: Eindimensionale Integration
 - B4.1 Zusammenfassung und Verständnisfragen
 - B4.2 Beispiele zur uneigentlichen Integration
 - B4.3 Analytische und glatte Funktionen

Kapitel C: Mehrdimensionale Integration

- C1 Der Satz von Fubini
 - C1.1 Iterierte Integrale für nicht-negative Funktionen
 - C1.2 Der Satz von Fubini für integrierbare Funktionen
 - C1.3 Integration über Normalbereiche
- C2 Der Transformationssatz
 - C2.1 Neue Variablen als geschickte Koordinaten
 - C2.2 Polarkoordinaten und das Gaußsche Integral
 - C2.3 Zylinder- und Kugelkoordinaten
- C3 Fazit: Hauptsatz, Fubini, Transformation
 - C3.1 Zusammenfassung
 - C3.2 Verständnisfragen
 - C3.3 Normalbereiche
- C4 Weitere Aufgaben und Anwendungen
 - C4.1 Trägheitsmoment von Zylinder und Kugel
 - C4.2 Warnende Gegenbeispiele zu Fubini
 - C4.3 Volumina, Polstellen, Integrierbarkeit

Kapitel D: Integrale und Grenzwerte

- D1 Vertauschen von Integral und Reihe
 - D1.1 Absolute Konvergenz in L^1
 - D1.2 Integration von Potenzreihen
- D2 Vertauschen von Integral und Limes
 - D2.1 Punktweise Konvergenz
 - D2.2 Majorisierte Konvergenz
- D3 Vertauschen von Integral und Ableitung
 - D3.1 Kompakte Integrationsbereiche
 - D3.2 Beliebige Integrationsbereiche
- D4 Weitere Aufgaben und Anwendungen
 - D4.1 Warnende Beispiele zur Vertauschung
 - D4.2 Berechnung von Integralen und Reihen
- D5 Kalkül der Distributionen
 - D5.1 Lösungen der Wärmeleitungsgleichung
 - D5.2 Distributionen und ihre Rechenregeln

Kapitel E: Integralsätze in der Ebene

- E1 Die Integralsätze von Green und Gauß
 - E1.1 Wegintegrale und Kurvenintegrale
 - E1.2 Ebene Kompakta mit stückweise glattem Rand
 - E1.3 Der Integralsatz von Green: anschauen und nachrechnen!
 - E1.4 Der Integralsatz von Gauß: anschauen und nachrechnen!
- E2 Anwendungsbeispiele
 - E2.1 Schreibweise als Differentialform
 - E2.2 Die Greenschen Flächenformeln
 - E2.3 Arbeitsintegrale in der Thermodynamik
 - E2.4 Flächeninhalt und Schwerpunkt
- E3 Verständnisfragen und Aufgaben
 - E3.1 Sherlock Holmes: Which way did the bicycle go?
 - E3.2 Zwei prominente Vektorfelder: Wirbel und Quelle
 - E3.3 Der Hauptsatz für Arbeitsintegrale: HDI
 - E3.4 Lösung des Potentialproblems

Kapitel F: Integralsätze für komplexe Funktionen

- F1 Crashkurs zum Residuensatz
- F2 Komplexe Funktionen und Potenzreihen
 - F2.1 Die Cauchy–Riemann–Differentialgleichungen
 - F2.2 Exponentialfunktion und Zweige des Logarithmus
 - F2.3 Laurent–Reihen, Polstellen und Residuen
- F3 Die Integralformel von Cauchy
 - F3.1 Integralsatz und Integralformel von Cauchy
 - F3.2 Fundamentalsatz der Algebra und Nullstellensuche
 - F3.3 Entwicklung in Potenzreihen und in Laurent–Reihen
- F4 Der Residuensatz und Anwendungen
 - F4.1 Das Residuum einer isolierten Singularität
 - F4.2 Der Residuensatz für Kompakta
 - F4.3 Anwendung auf reelle Integrale
- F5 Fazit: Residuenkalkül
 - F5.1 Verständnisfragen und Vertiefungen
 - F5.2 Anwendungsbeispiele zum Residuenkalkül

Kapitel G: Integralsätze im Raum

- G1 Crashkurs zu Integralsätzen im Raum
 - G1.1 Flächenintegrale und Integralsätze im Raum
 - G1.2 Einführendes Beispiel zum Satz von Stokes
 - G1.3 Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß
- G2 Flächenintegrale im Raum
 - G2.1 Glatte Flächenstücke und Parametrisierungen
 - G2.2 Kugelsegment, Kugelkappe, Torusfläche
 - G2.3 Rotationskörper und Guldinsche Regeln
- G3 Integralsätze im Raum
 - G3.1 Die Integralsätze von Stokes und Gauß
 - G3.2 Anwendung: das archimedische Prinzip
 - G3.3 Numerik: Triangulierung und Linearisierung
- G4 Fazit: Integralsätze
 - G4.1 Zusammenfassung und Verständnisfragen
 - G4.2 Weitere Aufgaben und Anwendungen
 - G4.3 Geometrie auf gekrümmten Flächen

Kapitel H: Erste Anwendungen der Integralsätze

- H1 Partielle Differentialgleichungen der Physik
 - H1.1 Eulers Kontinuitätsgleichung
 - H1.2 Fouriers Wärmeleitungsgleichung
 - H1.3 Newtons Gravitationsgesetz
 - H1.4 Maxwells Elektrodynamik
- H2 Vektorfelder und Potentiale
 - H2.1 Konservative Vektorfelder
 - H2.2 Rotationsfreie Vektorfelder
 - H2.3 Einfach zusammenhängende Gebiete
 - H2.4 Radialsymmetrische Felder und Potentiale
- H3 Fazit: Erste Anwendungen der Integralsätze
 - H3.1 Zusammenfassung und Verständnisfragen
 - H3.2 Weitere Aufgaben und Anwendungen
 - H3.3 Notwendige und hinreichende Kriterien
 - H3.4 Gegenläufige Wirbelfelder, Quadrupolis

Kapitel I: Fourier–Analyse periodischer Funktionen

- I1 Die trigonometrische Orthonormalbasis
 - I1.1 Periodische Funktionen, erste Beispiele
 - I1.2 Periodische Fortsetzung, Spiegelung
 - I1.3 Skalarprodukt und Orthonormalbasis
- I2 Fourier–Analyse und das Dirichlet–Kriterium
 - I2.1 Fourier–Entwicklung der Sägezahnfunktion
 - I2.2 Das Konvergenz-Kriterium von Dirichlet
 - I2.3 Fourier–Entwicklung von Treppenfunktionen
- I3 Rechenregeln zu Integration und Glattheit
 - I3.1 Integrieren und Differenzieren
 - I3.2 Abklingen der Fourier–Koeffizienten
 - I3.3 Von Potenzreihen zu Fourier–Reihen
- I4 Fazit: Fourier–Analyse periodischer Funktionen
 - I4.1 Zusammenfassung und Verständnisfragen
 - I4.2 Weitere Aufgaben und Anwendungen

Kapitel J: Die Fourier–Isometrie

- J1 Parseval–Gleichung und Fourier–Isometrie
 - J1.1 Die Energiegleichung und erste Anwendungsbeispiele
 - J1.2 Die Fourier–Isometrie zwischen Funktion und Spektrum
 - J1.3 Isoperimetrische Optimierung durch Fourier–Reihen
- J2 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz
 - J2.1 Punktweise Konvergenz nach Dirichlet
 - J2.2 Gleichmäßige Approximation nach Fejér
 - J2.3 Wann gilt punktweise Konvergenz fast überall?
- J3 Konvergenz im quadratischen Mittel
 - J3.1 Bestapproximation durch Orthogonalprojektion
 - J3.2 Konvergenz im quadratischen Mittel
 - J3.3 Vergleich der drei Konvergenzbegriffe
- J4 Fazit: Fourier–Analyse und Synthese
 - J4.1 Zusammenfassung
 - J4.2 Verständnisfragen

Kapitel K: Fourier–Transformation

- K1 Erste Beispiele, Eigenschaften, Rechenregeln
 - K1.1 Von der Fourier–Reihe zum Fourier–Integral
 - K1.2 Einfache Beispiele und erste Eigenschaften
 - K1.3 Der Umkehrsatz für Fourier–Transformierte
- K2 Analytische Eigenschaften
 - K2.1 Rechenregeln der Fourier–Transformation
 - K2.2 Ableitung und Multiplikation
 - K2.3 Faltung und Produkt
- K3 Metrische Eigenschaften
 - K3.1 Energiegleichung und Fourier–Isometrie
 - K3.2 Die Unschärferelation für Fourier–Paare
 - K3.3 Bedeutung in der Quantenmechanik
- K4 Fazit: Fourier–Transformation
 - K4.1 Zusammenfassung
 - K4.2 Verständnisfragen
 - K4.3 Weitere Aufgaben

Kapitel L: Laplace–Transformation

- L1 Die Laplace–Transformation
 - L1.1 Definition der Laplace–Transformation
 - L1.2 Linearität und Ableitungsregel
 - L1.3 Streckung, Dämpfung, Verschiebung
- L2 Anwendung auf Differentialgleichungen
 - L2.1 Tabelle einfacher Laplace–Transformierter
 - L2.2 Lösung von Differentialgleichungen
 - L2.3 Partialbruchzerlegung und Residuen
- L3 Weitere Eigenschaften und Anwendungen
 - L3.1 Rücktransformation und Injektivität
 - L3.2 Faltung und Integralregel
 - L3.3 Greensche Fundamentallösung
- L4 Fazit: Laplace–Transformation
 - L4.1 Vergleich von Laplace und Fourier
 - L4.2 Anwendung in der Systemtheorie
 - L4.3 Aufgaben zu Differentialgleichungen

Kapitel M: Gewöhnliche Differentialgleichungen

- M1 Erste Beispiele von Differentialgleichungen
 - M1.1 Einfache Beispiele aus der Mechanik
 - M1.2 Separierbare Differentialgleichungen
 - M1.3 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen
- M2 Exakte Differentialgleichungen
 - M2.1 Exaktheit und Potential von $f(x, y) + g(x, y) y' = 0$
 - M2.2 Lösung durch einen integrierenden Faktor
 - M2.3 Lineare Differentialgleichungen
- M3 Fazit: Existenz, Eindeutigkeit, Lösungsmethoden
 - M3.1 Zusammenfassung und Verständnisfragen
 - M3.2 Methodenvergleich: Viele Wege führen zum Ziel.
 - M3.3 Gut & schlecht gestellte Anfangswertprobleme
- M4 Weitere Aufgaben und Anwendungsbeispiele
 - M4.1 Umformung und Lösung durch Substitution
 - M4.2 Exakte Differentialgleichungen und Potentiale
 - M4.3 Qualitative Analyse, Runden und Eingrenzen

Kapitel N: Differentialgleichungen höherer Ordnung

- N1 Harmonische Schwingungen
 - N1.1 Freie harmonische Schwingung
 - N1.2 Erzwungene harmonische Schwingung
- N2 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten
 - N2.1 Charakteristisches Polynom und Fundamentalsystem
 - N2.2 Lösungsansatz für spezielle rechte Seiten $r(x)e^{\mu x}$
 - N2.3 Greensche Lösungsformel für beliebige rechte Seiten
- N3 Lineare Differentialgleichungen mit stetigen Koeffizienten
 - N3.1 Fundamentalmatrix und Variation der Konstanten
 - N3.2 Lösung durch Potenzreihenansatz
- N4 Die Euler–Lagrange–Differentialgleichung
 - N4.1 Optimierung durch Variationsrechnung
 - N4.2 Lösung des Brachistochrone-Problems
- N5 Fazit: Differentialgleichungen höherer Ordnung
 - N5.1 Zusammenfassung und Verständnisfragen
 - N5.2 Weitere Aufgaben und Methodenvergleich

Kapitel O: Dynamische Systeme

- O1 Dynamische Systeme
 - O1.1 Der harmonische Oszillator als dynamisches System
 - O1.2 Gekoppelte Oszillatoren und Eigenfrequenzen
 - O1.3 Mathematisches Pendel und Energiefläche
 - O1.4 Das Näherungsverfahren von Runge–Kutta
- O2 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen
 - O2.1 Lokale Lösungen: Satz von Picard–Lindelöf
 - O2.2 Fortsetzungen und maximale Lösungskurven
 - O2.3 Sensible Abhängigkeit von den Anfangsdaten
 - O2.4 Aufgaben zu Existenz und Eindeutigkeit und Stabilität
- O3 Der Hauptsatz für lineare dynamische Systeme
 - O3.1 Affin/Lineare Struktur des Lösungsraumes
 - O3.2 Variation der Konstanten zur Partikulärlösung
 - O3.3 Matrizenkalkül und Exponentialfunktion
 - O3.4 Fundamentallösung homogener DGSysysteme

Kapitel P: Autonome Systeme, Gleichgewicht und Stabilität

- P1 Lineare DGSysysteme mit konstanten Koeffizienten
 - P1.1 Gekoppelte Oszillatoren und stehende Wellen
 - P1.2 Lösungen mittels Eigenvektoren und Eigenfunktionen
 - P1.3 Lösungen mittels Hauptvektoren und Hauptfunktionen
 - P1.4 Von komplexen zu reellen Lösungen
- P2 Gleichgewichtslagen und In/Stabilität von Fixpunkten
 - P2.1 Linearisierung um Fixpunkte und In/Stabilität
 - P2.2 Räuber-Beute-Modell nach Lotka–Volterra
 - P2.3 Stabilitätsanalyse nach Lyapunov
 - P2.4 Hamiltonsche Dynamik und Stabilität
- P3 Fazit: Differentialgleichungssysteme
 - P3.1 Zusammenfassung und Verständnisfragen
 - P3.2 Reduktion der Ordnung und Methodenvergleich
 - P3.3 Beispiele zur Dynamik um Fixpunkte und In/Stabilität
 - P3.4 Invariante Mengen dank Tangentialbedingung

Kapitel Q: Partielle Differentialgleichungen (PDE)

- Q1 Erste Beispiele partieller Differentialgleichungen
 - Q1.1 Partielle Ableitungen und der Satz von Schwarz
 - Q1.2 Cauchy–Riemann und Maxwell–Gleichungen
 - Q1.3 Konvektion-Diffusion und Navier–Stokes–Gleichungen
 - Q1.4 Ideale ebene Strömungen und holomorphe Funktionen
- Q2 Lineare PDE erster Ordnung
 - Q2.1 Lineare Differentialoperatoren
 - Q2.2 Lösung entlang charakteristischer Kurven
 - Q2.3 Die Charakteristikmethode und warnende Gegenbeispiele
 - Q2.4 Transportgleichung mit konstanten Koeffizienten
- Q3 Fazit: PDE erster Ordnung
 - Q3.1 Zusammenfassung und Verständnisfragen
 - Q3.2 Aufgaben zur Charakteristikmethode
 - Q3.3 Lösung durch Potenzreihenansatz
 - Q3.4 Methodenvergleich: Viele Wege führen zum Ziel.

Kapitel R: Lineare PDE zweiter Ordnung

- R1 Lineare PDE zweiter Ordnung
 - R1.1 Lösung durch Fourier–Transformation
 - R1.2 Klassifikation linearer PDE zweiter Ordnung
 - R1.3 Trennung der Variablen durch Produktansatz
- R2 Anwendung auf die Potentialgleichung
 - R2.1 Laplace–Gleichung auf einem Rechteck
 - R2.2 Eindeutigkeit und Minimum-Maximum-Prinzip
 - R2.3 Gut gestellt? Hadamards warnendes Gegenbeispiel
- R3 Anwendung auf die Wellengleichung
 - R3.1 Die harmonisch schwingende Saite
 - R3.2 Wellengleichung und die gezupfte Saite
 - R3.3 Die Energiemethode beweist die Eindeutigkeit.
- R4 Fazit: PDE zweiter Ordnung
 - R4.1 Zusammenfassung und Verständnisfragen
 - R4.2 Aufgaben zur Separationsmethode

Kapitel S: Die Wärmeleitungsgleichung

- S1 Die Wärmeleitungsgleichung und ihre freien Lösungen
 - S1.1 Von der Wärmebilanz zur Differentialgleichung
 - S1.2 Wärmeleitungskern und Superposition
 - S1.3 Lösung durch Fourier–Transformation
- S2 Die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung als ARWP
 - S2.1 Wie schnell kühlt ein Stab über seine Enden ab?
 - S2.2 Was passiert bei gleichmäßigem Aufheizen?
 - S2.3 Was passiert bei Isolierung an den Rändern?
- S3 Existenz und Eindeutigkeit und Näherung des ARWP
 - S3.1 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen
 - S3.2 Energie und Minimum-Maximum-Prinzip
 - S3.3 Approximation durch finite Differenzen
- S4 Die dreidimensionale Wärmeleitungsgleichung als ARWP
 - S4.1 Wie schnell kühlt eine Kugel über ihren Rand ab?
 - S4.2 Anwendungsbeispiele aus Küche, Keller, Krimi
 - S4.3 Fazit: Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

Kapitel T: Wahrscheinlichkeitsrechnung

- T1 Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume
 - T1.1 Zufall und Wahrscheinlichkeit: Grundbegriffe
 - T1.2 Rechnen mit Ereignissen: Wahrscheinlichkeitsräume
- T2 Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit
 - T2.1 Bedingte Wahrscheinlichkeiten, Formel von Bayes
 - T2.2 Stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen
- T3 Das Gesetz der großen Zahlen (GGZ)
 - T3.1 Zufallsvariablen, Erwartung und Varianz
 - T3.2 Die Ungleichungen von Pafnuty Chebychev
 - T3.3 Unabhängige Wiederholung: Gesetz der großen Zahlen
 - T3.4 Stochastische Abhängigkeit: Korrelation vs Kausalität
- T4 Fazit: Wahrscheinlichkeitsrechnung
 - T4.1 Weitere Aufgaben und Anwendungsbeispiele
 - T4.2 Sex: Was nützen dem Pfau seine Federn?
 - T4.3 Tischkicker: Das Runde muss ins Eckige.
 - T4.4 Google: die zufällige Irrfahrt im Internet

Kapitel U: Kombinatorik und Näherungen

- U1 Produktexperimente
 - U1.1 Ausfallwahrscheinlichkeiten
 - U1.2 Prognosen zu Reaktorunfällen
 - U1.3 Kollision und Geburtstagsparadox
- U2 Kombinatorik und Urnenmodelle
 - U2.1 Kombinatorische Abzählformeln
 - U2.2 Schubfachmodelle: $\{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$
 - U2.3 Urnenmodelle: Ziehung von k aus n Kugeln
- U3 Drei grundlegende stochastische Modelle
 - U3.1 Hypergeometrische Verteilung: Stichproben
 - U3.2 Binomialverteilung: unabhängige Versuche
 - U3.3 Poisson–Verteilung: bequeme Näherung
- U4 Fazit: hypergeometrisch, binomial, Poisson
 - U4.1 Verständnisfragen und weitere Aufgaben
 - U4.2 Poissons Gesetz der kleinen Zahlen
 - U4.3 Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion

Kapitel V: Der lokale Grenzwertsatz

- V1 Kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen
 - V1.1 Kontinuierliche Verteilungen
 - V1.2 Wahrscheinlichkeitsräume
 - V1.3 Eindimensionale Normalverteilung
- V2 Erwartung, Varianz, Streuung
 - V2.1 Kumulative Verteilungsfunktion
 - V2.2 Zufallsvariablen, Erwartung und Varianz
 - V2.3 Verteilungen und ihre Kenngrößen
- V3 Der lokale Grenzwertsatz (LGS)
 - V3.1 Von der Binomial- zur Normalverteilung
 - V3.2 Der lokale Grenzwertsatz $B(n, t) \approx N(\mu, \sigma^2)$
 - V3.3 Erste Anwendungsbeispiele
- V4 Fazit: der lokale Grenzwertsatz
 - V4.1 Zusammenfassung und Verständnisfragen
 - V4.2 Weitere Aufgaben und Anwendungsbeispiele
 - V4.3 Kleine Stichprobe und Intervallschätzung

Kapitel W: Der zentrale Grenzwertsatz

- W1 Der zentrale Grenzwertsatz (ZGS)
 - W1.1 Stochastisch unabhängige Zufallsvariablen
 - W1.2 Beispiele und erste Beobachtungen
 - W1.3 Der zentrale Grenzwertsatz
- W2 Statistische Anwendungen
 - W2.1 Konfidenzintervalle
 - W2.2 Fehlerfortpflanzung
 - W2.3 Regressionsanalyse
- W3 Fazit: der zentrale Grenzwertsatz
 - W3.1 Zusammenfassung und Verständnisfragen
 - W3.2 Summen von Zufallsvariablen und Grenzwertsätze
 - W3.3 Weitere Aufgaben und Anwendungsbeispiele
- W4 Analytische Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung
 - W4.1 Laplace– und Fourier–Transformation von WMaßen
 - W4.2 Beweisidee des zentralen Grenzwertsatzes
 - W4.3 Entropie verstehen und anwenden

Kapitel Z: Zusammenfassung

Das letzte Kapitel versammelt alle Kapitelzusammenfassungen und bietet so eine Zusammenschau der wichtigsten Ergebnisse, Sätze und Methoden dieser Vorlesung zur Höheren Mathematik. Im Laufe des Semesters führen wir Sie Schritt für Schritt dorthin.

Diese Zusammenfassung ist dazu nur eine Gedächtnisstütze; zum soliden Verständnis benötigen Sie alle Grundlagen und viel Übung! Erfahrung, Umsicht und Verständnis lassen sich nicht eintrichtern, sondern nur durch regelmäßige Übung erwerben. Also: Üben Sie!

—

Wir beginnen diese Vorlesung mit einem Kapitel zur Vorschau; dies gibt zunächst eine Übersicht der zentralen Themen der HM3 und dient somit zu einer ersten Orientierung und zu Ihrer Motivation.

Auch wenn Sie die nötigen Methoden jetzt noch nicht kennen, so können Sie doch sinngemäß erraten, welche Techniken Sie brauchen werden. Sie können jetzt schon die Ziele erkennen, auf die wir hinarbeiten. Diese Versprechen werde ich in den nächsten Wochen einlösen.

Lineare Algebra und Geometrie:

- Reelle und komplexe Zahlen
- Euklidische Vektorräume
- Matrizen & lineare Gleichungssysteme
- Eigenvektoren und Diagonalisierung
- Normalformen für Quadriken

$$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

$$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$$

$$Ax = y$$

$$Av = \lambda v$$

$$x^2 - y^2 = 1$$

Analysis:

- Konvergenz von Folgen und Reihen
- Funktionen, Grenzwerte und Stetigkeit
- Differential- und Integralrechnung
- Differentialrechnung mehrerer Variablen
- Vektorfelder, Wegintegrale und Potentiale

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

$$\int_a^b f(x) dx = [F]_a^b$$

$$\partial_x \partial_y f = \partial_y \partial_x f$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$$

😊 Auf die Beherrschung all dieser Grundlagen können Sie stolz sein, als Handwerkszeug schon jetzt im Studium und ebenso später im Beruf!

Die HM3 bietet viel und verlangt viel . . . in kurzer Zeit (37 Termine):

- Mehrdimensionale Integration (4) $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$
- Integralsätze in Ebene und Raum (7) $\int_B df = \int_{\partial B} f$
- Fourier–Analyse und Laplace–Transformation (5) $f(t) \sim \sum c_k e^{ikt}$
- Gewöhnliche Differentialgleichungen (8) $u'(t) = f(t, u(t))$
- Partielle Differentialgleichungen (4) $\partial_t u(t, x) = \partial_x^2 u(t, x)$
- Wahrscheinlichkeitsrechnung (8) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

😊 Diese mächtigen Techniken sind in Anwendungen allgegenwärtig. Jedes dieser Themen verdient eigentlich seine eigene Vorlesung. . . Sie bekommen alles als „Best-of“ in einem einzigen Semester!

Die Studierenden verfügen über grundlegende Kenntnisse

- der Integralrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher,
- gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen,
- Fourier–Reihen und Integraltransformationen sowie Stochastik.

Sie können die behandelten Methoden selbstständig, sicher, kritisch, korrekt und kreativ anwenden.

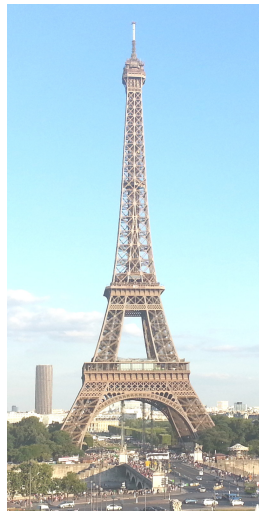
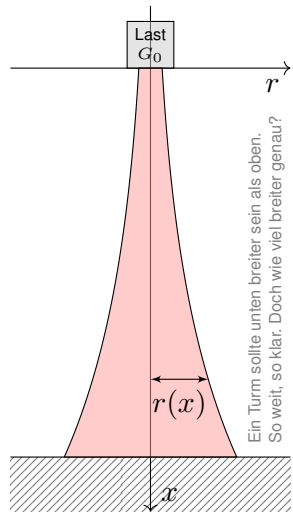
Sie besitzen die mathematische Grundlage für das Verständnis quantitativer Modelle aus den Ingenieurwissenschaften. Sie können sich mit Spezialist:innen aus dem ingenieur- und naturwissenschaftlichen Umfeld über die benutzten mathematischen Methoden verständigen.

Konkrete Anwendung benötigt abstrakte Kenntnisse; je anspruchsvoller, desto mathematischer! Daher Ihr Ziel: Sie beherrschen Ihr Handwerk, verstehen die Grundlagen und wenden passende Werkzeuge fachgerecht an. Sie müssen dazu das Rad nicht neu erfinden: Ihr Studium bündelt die Erfahrung vieler Generationen. Diesen Erfahrungsschatz sollen sie kennen und nutzen lernen. Das gilt insbesondere für die Mathematik: Hier erlernen Sie Ihre Denk- und Rechenwerkzeuge. Man kann Techniken auch oberflächlich kennen, aber ohne Übung nicht effizient anwenden. Aus diesem Grund sollen sie jede Woche die Übungen ausgiebig und selbstkritisch nutzen!

Aus dieser ambitionierten Zielsetzung ergibt sich die Vorgehensweise:

- **Selbstständig:** Es geht nicht nur um Auswendiglernen, sondern um Verstehen und unabhängige Urteilsfähigkeit.
- **Sicher:** Es geht nicht nur um Intuition oder Spekulieren, sondern um nachvollziehbare Argumente und Rechnungen.
- **Kritisch:** Es geht nicht nur um Glauben oder (Auto)Suggestion, sondern um (selbst)kritische Fragen und sorgfältige Antworten.
- **Korrekt:** Sie beherrschen Definitionen, Sätze, Methoden, Proben. Gegenbeispiele zeigen Fehlerquellen, die es zu vermeiden gilt.
- **Kreativ:** Es geht nicht nur um fertige Rezepte, sondern um eigenständige Anwendung.

Manche:r möchte Werkzeuge anwenden, auch ohne zu verstehen. „Echte Macher lesen keine Bedienungsanleitung.“ Für Low-Tech mag das vielleicht genügen, bei High-Tech sicher nicht. Auch im Studium lockt diese scheinbare Abkürzung: unverstandene Rezepte blind anwenden. Das ist weder selbstständig noch sicher, weder kritisch noch kreativ, und meist nicht korrekt! Kurzum: Ohne Grundlagenwissen tapen Sie im Dunkeln und können die Werkzeuge nicht richtig nutzen. Damit verbauen Sie sich den Weg zu effizienten Lösungen, oder schlimmer noch, treffen fatale Fehlentscheidungen. Seriöse Ingenieursarbeit braucht grundlegendes Verständnis!



Der Eiffelturm in Paris am Abend des 14.08.2013, Höhe 324m



Der Burj Khalifa in Dubai, Höhe 828m, Bildquelle: wikipedia

Aufgabe: Konstruieren Sie eine Säule aus einem Material konstanter Dichte ρ , so dass der Druck (Last pro Fläche) überall konstant p ist. Zahlenbeispiel: Beton $\rho = 3\text{g/cm}^3$, Last $G_0 = 4600\text{kN}$, Radius $r_0 = 1\text{m}$, Höhe 300m . Unser Modell ist vereinfacht, aber illustriert gut das Prinzip.

Lösung: In Höhe x haben wir den Radius $r(x) > 0$ gemäß Skizze. Die Fläche ist $A(x) = \pi r(x)^2$, das Volumen $V(x) = \int_{h=0}^x \pi r(h)^2 dh$, das Gewicht $G(x) = g\rho V(x)$, der Druck $G(x)/A(x) = p$. Insgesamt:

$$g\rho \cdot \int_{h=0}^x \pi r(h)^2 dh \stackrel{!}{=} p \cdot \pi r(x)^2$$

Ableiten dieser Integralgleichung ergibt unsere Differentialgleichung:

$$g\rho \pi r(x)^2 = 2p \pi r(x) r'(x).$$

Diese ist elementar lösbar. Wir trennen die Variablen und integrieren:

$$\frac{r'(x)}{r(x)} = \frac{g\rho}{2p} =: c \Rightarrow \int_{h=0}^x \frac{r'(h)}{r(h)} dh = \int_{h=0}^x c dh \Rightarrow \ln r(x) - \ln r_0 = cx$$

Freistellen ergibt $r(x) = r_0 e^{cx}$. Der Radius wächst exponentiell!

Dank passender mathematischer Werkzeuge gelingt uns diese Rechnung erfreulich leicht. Im Zahlenbeispiel gilt $p \approx 1500\text{kN/m}^2$ und $r(x) = 1\text{m} \cdot e^{x \cdot 0.01/\text{m}}$, also $r(300\text{m}) \approx 20\text{m}$. Probe / Plausibilität: Die Druckfestigkeit liegt je nach Beton grob zwischen 10 und 100N/mm^2 . Unsere Rechnung illustriert das Grundprinzip. Anwendungen berechnet man noch viel genauer!

😊 Abstraktion ist die Kunst, Wichtiges von Unwichtigem zu trennen. Differentialgleichungen nutzen wir zur Formulierung der Naturgesetze, sie sind die universelle Sprache der Naturwissenschaft und der Technik: Damit können wir Probleme formulieren, strukturieren, verstehen, lösen.

1. Grundlegendes Verständnis der vorliegenden Situation:

Um Anwendungen in der Physik, Mechanik, Thermodynamik, Strömungslehre, etc. zu verstehen, benötigen Sie zunächst die erforderlichen Grundkenntnisse der betroffenen Anwendungsgebiete: Naturgesetze, grundlegende Modelle, geeignete Vereinfachungen, etc.

😊 Erst so können Sie die Situation quantitativ und präzise erfassen.

2. Mathematische Modellierung der vorliegenden Situation:

Durch geeignete Vereinfachung, Formalisierung und Abstraktion erhalten Sie ein mathematisches Modell. Dieses besteht aus den relevanten Größen und den zwischen ihnen gelten Beziehungen, meist geeignete Gleichungen, sehr häufig Differentialgleichungen.

😊 Hierzu nutzen Sie die Techniken Ihrer HM und weitere nach Bedarf.

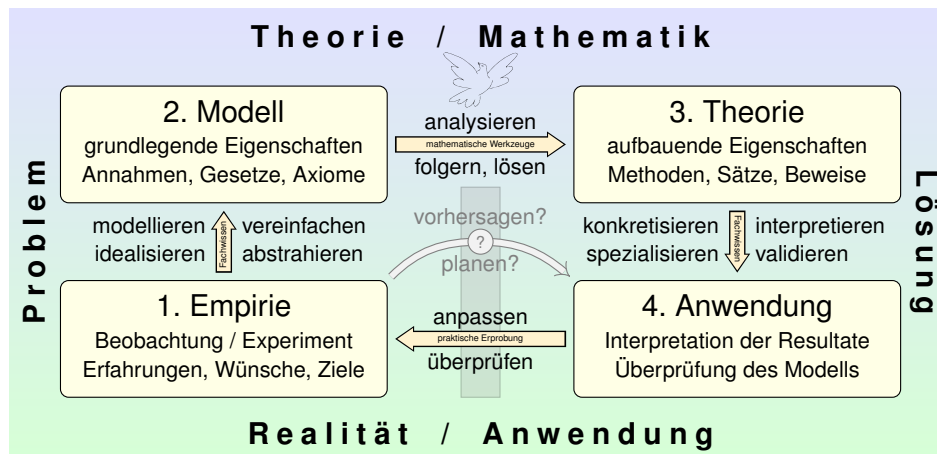
3. Lösung durch geeignete mathematische Werkzeuge: Dazu lernen Sie hier die grundlegenden Rechentechniken. Das ist ein weites Gebiet! Je nach Ihren Anwendungen vertiefen Sie die nötigen Techniken zur numerischen Näherung, zu partiellen Differentialgleichungen, etc.

😊 Lösungen sind oft schwer zu finden, aber leicht zu überprüfen. Zur Sorgfalt gehört, die gefundenen / benachbarte / alle Lösungen zu prüfen, zu diskutieren und umsichtig alle Sonderfälle zu beachten.

4. Anpassung und Überprüfung anhand gegebener Daten:

Ist eine mathematische Lösung oder numerische Näherung gelungen, so passen Sie schließlich die noch freien Parameter des Modells an die gegebenen Daten an und überprüfen soweit möglich die Vorhersagen des Modells durch Experimente, Messungen, Alternativmodelle, etc.

⚠ Falls nötig muss erneut ab (1) ein besseres Modell erstellt werden. Diese Vorlesung konzentriert sich auf die Lösungsmethoden (Schritt 3). Aus Ihren Vorlesungen kennen Sie bereits einige Anwendungen (1,2,4), viele weitere werden noch folgen. Nutzen Sie diese Querverbindungen!



Konkrete Anwendung benötigt abstrakte Kenntnisse; je anspruchsvoller, desto mathematischer! Alles Denken beruht auf Modellen; diese können *deskriptiv* oder *normativ* eingesetzt werden. Deskriptiv: beschreibend (Kettenlinie), erklärend (Planetenbewegung), vorhersagend (Wetter). Normativ: vorschreibend (Bauplan), planend (Raumsonde), gesetzgebend (Klimaschutz). Ingenieur:innen wollen beides, nicht nur passiv vorhersagen, sondern auch aktiv steuern und beeinflussen. Hierzu benötigen Sie ausreichend starke mathematische Werkzeuge.

Die Differential- und Integralrechnung kennen Sie aus der HM1&2 und wissen bereits, wie nützlich sie Ihnen jetzt schon in Anwendungen ist. Diese Techniken werden wir dieses Semester ausbauen und vertiefen: Integralrechnung und ihre Anwendung auf Differentialgleichungen.

Hierzu möchte ich gleich zu Beginn einige berühmte Anwendungen skizzieren, so dass Sie sich einen ersten Eindruck verschaffen können. Im obigen Beispiel suchen wir eine geeignete Form unseres Turmes. Es ist demnach nicht nur eine Zahl gesucht, sondern eine Funktion!

Die Aufgabe führt zu einer Differentialgleichung, also einer Gleichung, in der die gesuchte Funktion $y(x)$ und ihre Ableitungen $y'(x)$ auftreten. Viele Modelle in Naturwissenschaft und Technik haben diese Form:

Differentialgleichungen sind die Sprache der Naturgesetze.

Auch wenn Sie die nötigen Methoden jetzt noch nicht kennen, so können Sie doch sinngemäß erraten, welche Techniken wir brauchen werden. Sie können so in etwa die Ziele erkennen, auf die wir hinarbeiten. Diese Versprechen werde ich in den nächsten Wochen einlösen.

Newton's Himmelsmechanik: die Bewegungsgleichung

209

Erläuterung

Aufgabe: Nennen Sie die Bewegungsgleichung für Körper $k = 1, \dots, n$ mit Masse $m_k > 0$, Position $u_k(t) \in \mathbb{R}^3$ und Geschwindigkeit $v_k(t) \in \mathbb{R}^3$.

Lösung: Newtons Gravitationsgesetz ergibt die Differentialgleichungen

$$\dot{u}_k \stackrel{(0)}{=} v_k, \quad \dot{v}_k \stackrel{(1)}{=} f_k(u) \stackrel{(2)}{=} \sum_{j \neq k} \gamma m_j (u_j - u_k) / |u_j - u_k|^3.$$

Vorgegeben sind die Anfangsdaten $u_k(0)$ und $v_k(0)$ zur Zeit $t = 0$.

Als Lösung gesucht ist die Bewegung $(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{6n}$.

Erlaubt ein so komplexes System immer genau eine Lösung? Ja, das ist der zentrale $\exists$ &E-Satz! Kollision oder Expulsion nach ∞ sind möglich: Eventuell existiert die Lösung nur für eine kurze Zeit $T > 0$. Für manche Startwerte sind Lösungen periodisch, oder beinahe: Zu unserem Glück!

- 😊 Den Fall $n = 2$ lösen Kegelschnitte: Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln.
- 😞 Für $n \geq 3$ lässt sich dieses DGSsystem i.A. nicht geschlossen lösen!
- 😊 Euler-Verfahren: diskrete Zeitschritte $0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots$,

$$u_k(t_{i+1}) \approx u_k(t_i) + v_k(t_i) \cdot (t_{i+1} - t_i),$$

$$v_k(t_{i+1}) \approx v_k(t_i) + f_k(u) \cdot (t_{i+1} - t_i).$$

Newton's Himmelsmechanik: der historische Triumph

210

Erläuterung

Das Verständnis der **Himmelsmechanik** markiert den Übergang vom Mittelalter zur Neuzeit.

Die Beobachtung des Nachthimmels und seiner Sterne fasziniert uns Menschen seit Alters her. Neben den zahlreichen „Fixsternen“ (weit entfernte Sterne) erkennen wir einige „Wandelsterne“ (Planeten unseres Sonnensystems). Ihre Bewegung lässt Regeln erraten, doch für Wandelsterne scheinen diese zunächst kompliziert und verwirrend. Sie quantitativ zu erfassen und gründlich zu verstehen, ist einer der großen Triumphe menschlicher Neugier und systematischer Forschung!

Von der Erde besehen scheinen sich alle Sterne um uns zu drehen, doch die exakte Bewegung der Planeten erweist sich als schrecklich kompliziert. Kopernikus' heliozentrisches Modell (1543) ist einfacher, daher nützlicher: Die Bahnen der Planeten um die Sonne erweisen sich recht genau als Ellipsen. Diese Koordinatentransformation hat enorme Wirkung und schreibt Weltgeschichte!

Aus Tycho Brahes präzisen **Beobachtungsdaten** leitete Johannes Kepler drei Gesetze ab, die die Ellipsenbewegung der Planeten um die Sonne gut *beschreiben*. Eine *Erklärung* der Bewegungen durch einheitliche physikalische Prinzipien gelang erst Isaac Newton 1686 mit seinen Principia!

Die moderne Naturwissenschaft beginnt mit Newtons Formulierung der drei Bewegungsgesetze, des universellen Gravitationsgesetzes und seiner Lösung des Zwei-Körper-Problems. Mit einer Handvoll physikalischer Prinzipien und den passenden mathematischen Werkzeugen konnte er die Keplerschen Regeln *erklären*, ja *herleiten*. Newtons revolutionäre Idee: Überall im Universum gelten dieselben Gesetze! Newtons Mechanik erklärt die Schwerkraft hier auf Erden ebenso wie außerirdische Phänomene: den Umlauf der Planeten um die Sonne und des Mondes um die Erde, sogar die Gezeiten unserer Meere, die Coriolis-Kraft und das Foucaultsche Pendel. Universell!

Mathematik ist zugleich abstrakte Theorie und konkrete Anwendung. Sie erklärt und quantifiziert Zusammenhänge: Das ist ihr Nutzen! Dank Abstraktion ist sie universell anwendbar: Das ist ihre Stärke! Sie ist schön und gut: ästhetische Kunst und nützliches Handwerk.

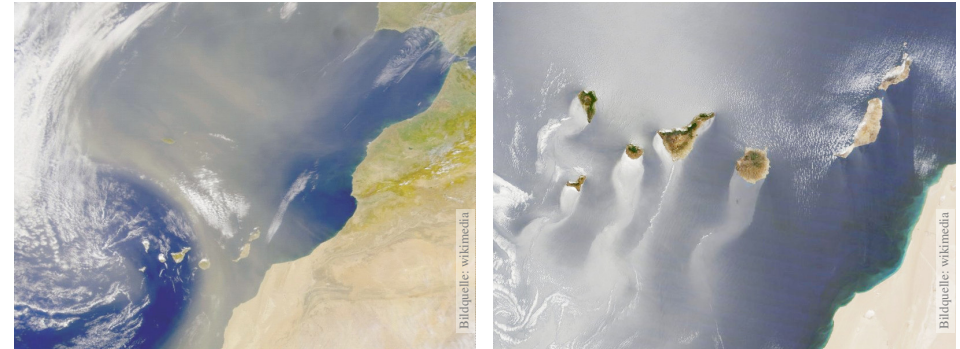
Les mathématiques ont un triple but. Elles doivent fournir un instrument pour l'étude de la nature. Mais ce n'est pas tout: elles ont un but philosophique et, j'ose le dire, un but esthétique.

Henri Poincaré (1854–1912)

Das Wort „abstrakt“ missbraucht der Ignorant gern als Schimpfwort für alles, worüber ihm die Kenntnis fehlt oder wovor er die Mühe scheut. Zur Klarstellung muss und will ich Partei ergreifen für die Abstraktion: Abstraktion strukturiert und vereinfacht: Eine allgemeine Tatsache ist oft leichter zu verstehen und zu erklären als ihre zahlreichen Spezialfälle. Denkökonomie: Daten ändern sich, Methoden bleiben bestehen.

😊 Daher betone ich konkrete historische Beispiele zum Wechselspiel von Theorie und Anwendung. Die Geschichte ist lehrreich und lohnend.

Ziel: Wie verhalten sich Strömungen? Welche Gleichungen gelten hier?



Luft- und Wasserströmung um die Kanarischen Inseln

(0) Wie beschreiben Sie eine Strömung in einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ über ein Zeitintervall $I = [t_0, t_1]$? Geschwindigkeit $\vec{v}: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3: (t, \vec{x}) \mapsto \vec{v}(t, \vec{x})$ und Massendichte $\varrho: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}: (t, \vec{x}) \mapsto \varrho(t, \vec{x})$ und evtl. weitere Daten. Die Massenstromdichte $\varrho \vec{v}: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ beschreibt den Massenfluss. Im Strömungsbereich Ω werde Masse weder erzeugt noch vernichtet.

Aufgabe: Welche Beziehung folgt aus der Massenerhaltung?

- (1) Sei $K \Subset \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ kompakt, etwa ein Würfel. Formulieren Sie die Massenbilanz für K in Worten und als Volumen-/Flussintegrale.
- (2) Formen Sie dies um zu einem einzigen Volumenintegral.
- (3) Folgern Sie hieraus die zugehörige Differentialgleichung.
- (4) Was folgt für inkompressible Strömungen, also für $\varrho = \text{const}$?

Lösung: (1) Die über die Randfläche $S = \partial K$ ausströmende Masse geht der Gesamtmasse in K verloren. Als Integralgleichung formuliert:

$$\frac{d}{dt} \iiint_K \varrho \, dK + \iint_{S=\partial K} (\varrho \vec{v} \cdot \vec{n}) \, dS = 0$$

(2) Wir dürfen die Ableitung unter Integral ziehen dank Kompaktheit des Integrationsbereichs K und Stetigkeit der Ableitung $\partial \varrho / \partial t$:

$$\frac{d}{dt} \iiint_K \varrho \, dK \stackrel{\text{Kpkt}}{\stackrel{\text{D3c}}{=}} \iiint_K \frac{\partial \varrho}{\partial t} \, dK$$

Wir wollen auch das Flussintegral in diese Form bringen und dann beides zusammenfassen. Dies gelingt mit dem Satz von Gauß (G3G):

$$\iint_{S=\partial K} (\varrho \vec{v} \cdot \vec{n}) \, dS \stackrel{\text{Gauß}}{\stackrel{\text{G3G}}{=}} \iiint_K \text{div}(\varrho \vec{v}) \, dK$$

Dank Linearität des Integrals erhalten wir ein einziges Volumenintegral:

$$\iiint_K \left[\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \text{div}(\varrho \vec{v}) \right] \, dK = 0$$

(3) Diese lokale Massenbilanz gilt für jedes Kompaktum $K \Subset \Omega$. Das gilt genau dann, wenn der (stetige!) Integrand verschwindet:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \text{div}(\varrho \vec{v}) = 0$$

Diese **Kontinuitätsgleichung** ist grundlegend für die Strömungslehre.

(4) Für inkompressible Strömungen gilt $\varrho = \text{const}$ und somit $\text{div} \vec{v} = 0$. Anschaulich: In jedes Volumen K fließt ebensoviel hinein wie heraus. Hierzu genügt allgemein bereits $\partial_t \varrho + \vec{v} \cdot \text{grad} \varrho = 0$. Sehen Sie warum?

Ziel: Wie berechnen wir den Wärmefluss in einem Körper?



Wärmebilanz für $K = \text{Kaninchen}$ bei $t \in \text{Winter}$

Wir betrachten ein Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ und ein Zeitintervall $I = [t_0, t_1]$ und suchen eine Beziehung zwischen Wärmeleistungsdichte $q: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, Wärmedichte $u: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und Wärmefluss $\vec{f}: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$.

- Aufgabe:** (1) Sei $K \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ kompakt, etwa ein Würfel. Formulieren Sie die Wärmebilanz für K in Worten und als Volumen-/Flussintegrale.
 (2) Formen Sie dies um zu einem einzigen Volumenintegral.
 (3) Folgern Sie hieraus die zugehörige Differentialgleichung.
 (4) Vereinfachen Sie schließlich durch die Annahme $\vec{f} = -\kappa \nabla u$.

Lösung: (1) Für jedes Kompaktum $K \in \Omega$ gilt die Wärmebilanz:

Von den Wärmequellen in K zugeführte Energie
 = Zuwachs der in K enthaltenen Wärmeenergie
 + Wärmefluss über den Rand von K nach außen

Als Integralgleichung formuliert bedeutet dies:

$$\iiint_K q(t, x) \, dx = \frac{d}{dt} \iiint_K u(t, x) \, dx + \iint_{S=\partial K} \vec{f}(t, x) \cdot \vec{n} \, dS$$

Alle Funktionen seien so oft stetig differenzierbar wie in der folgenden Rechnung benötigt. Ich greife hier schon mal vor: q sei stetig, f einmal stetig diff'bar, u zweimal stetig diff'bar.

(2) Mit Gauß (G3G) verwandeln wir Flussintegrale in Volumenintegrale:

$$\iint_{S=\partial K} \vec{f}(t, x) \cdot \vec{n} \, dS \stackrel{\text{Gauß}}{\stackrel{\text{G3G}}{=}} \iiint_K \nabla \cdot \vec{f}(t, x) \, dx$$

Dürfen wir die Ableitung unters Integral ziehen? K kompakt, $\partial_t u$ stetig!

$$\frac{d}{dt} \iiint_K u(t, x) \, dx \stackrel{\text{Kpkt}}{\stackrel{\text{D3C}}{=}} \iiint_K \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) \, dx$$

Dank Linearität des Integrals erhalten wir ein einziges Volumenintegral:

$$\iiint_K \left[\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + \nabla \cdot \vec{f}(t, x) - q(t, x) \right] dx = 0.$$

(3) Diese lokale Wärmebilanz gilt für jedes Kompaktum $K \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Das gilt genau dann, wenn der (stetige!) Integrand verschwindet (H1A):

$$\partial_t u(t, x) + \nabla \cdot \vec{f}(t, x) = q(t, x)$$

Diese Gleichung gilt überall dort, wo etwas entsteht (q), gespeichert wird (u) und fließt ($\vec{f}$). Die Wärmeleitungsgleichung heißt deshalb auch Diffusionsgleichung und tritt in vielfältigen Anwendungen auf. Wir werden sie am Ende des Semesters mit Fourier-Theorie lösen können. Spezialfall: Für $q = 0$ sowie $u = \varrho$ und $\vec{f} = \varrho \vec{v}$ erhalten wir erneut die Kontinuitätsgleichung.

(4) Wärme fließt von warm nach kalt, genauer $\vec{f} = -\kappa \nabla u$. Einsetzen:

$$\partial_t u(t, x) + \nabla \cdot [-\kappa \nabla u(t, x)] = q(t, x)$$

Mit dem Laplace-Operator $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ schreiben wir dies kurz

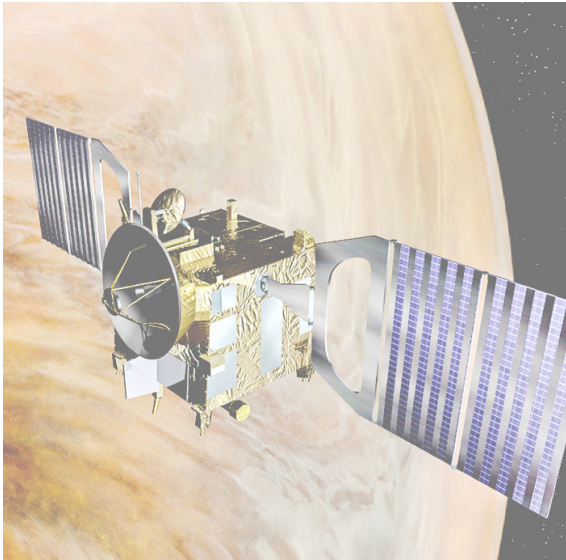
$$\partial_t u - \kappa \Delta u = q \quad \text{mit} \quad \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2.$$

Physikalische Begründung: Wärme ist (vereinfacht) proportional zur Temperatur T , genauer $u = \varrho c T$ mit Dichte ϱ und Wärmekapazität c . Sie fließt proportional zur Temperaturdifferenz, also $\vec{f} = -\lambda \nabla T$ mit Wärmeleitfähigkeit λ . Demnach gilt $\vec{f} = -\kappa \nabla u$ mit $\kappa := \lambda/(\varrho c)$. [S223]
 Zur Vereinfachung sei hier die Temperaturleitfähigkeit $\kappa(t, x)$ räumlich konstant und isotrop.

Wir erhalten so Fouriers berühmte **Wärmeleitungsgleichung** (1822):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \Delta u = q \quad \text{mit} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

Dies ist eine lineare partielle Differentialgleichung in u (links) mit Inhomogenität q (rechts). Sie beschreibt, wie sich die Wärme in einem Körper ausbreitet. Joseph Fourier (1768–1830) hat sie in seiner Arbeit *Théorie analytique de la chaleur* 1822 erstmals eingehend untersucht und hierzu die nach ihm benannte Fourier-Theorie entwickelt, mit der wir uns dieses Semester beschäftigen. Gesucht ist u , gegeben sind Anfangswerte und q . Wie sehen die Lösungen aus? Im homogenen Fall ohne Quellen ($q = 0$) können wir die Fundamentallösung angeben! [D516]

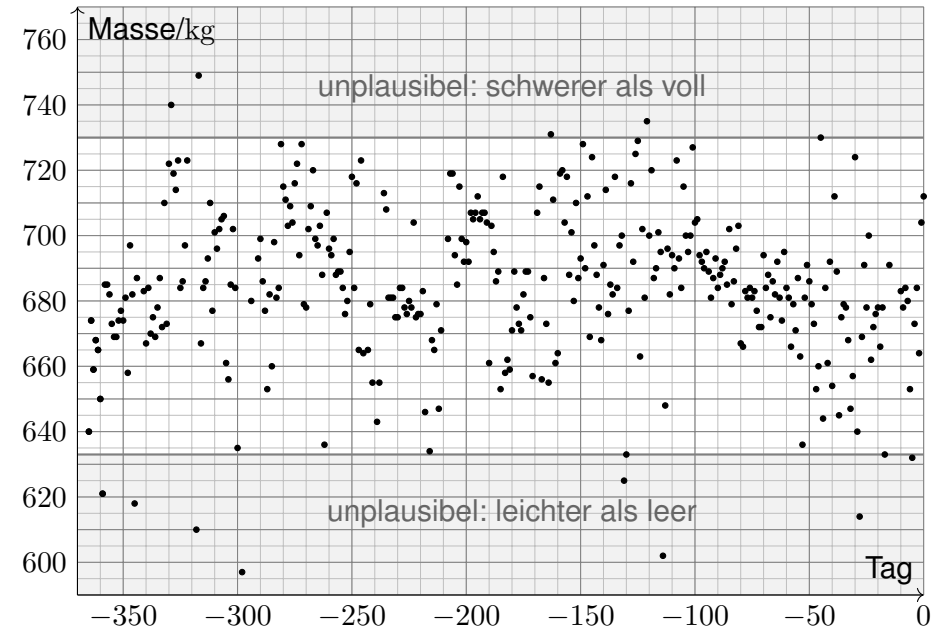


Zwei Missionen der ESA:
 Start Jun. 2003 in Baikonur
 Mars-Orbit ab Jan. 2004
 → Suche nach Wasser
 Start Nov. 2005 in Baikonur
 Venus-Orbit ab Apr. 2006
 → Atmosphäre der Venus

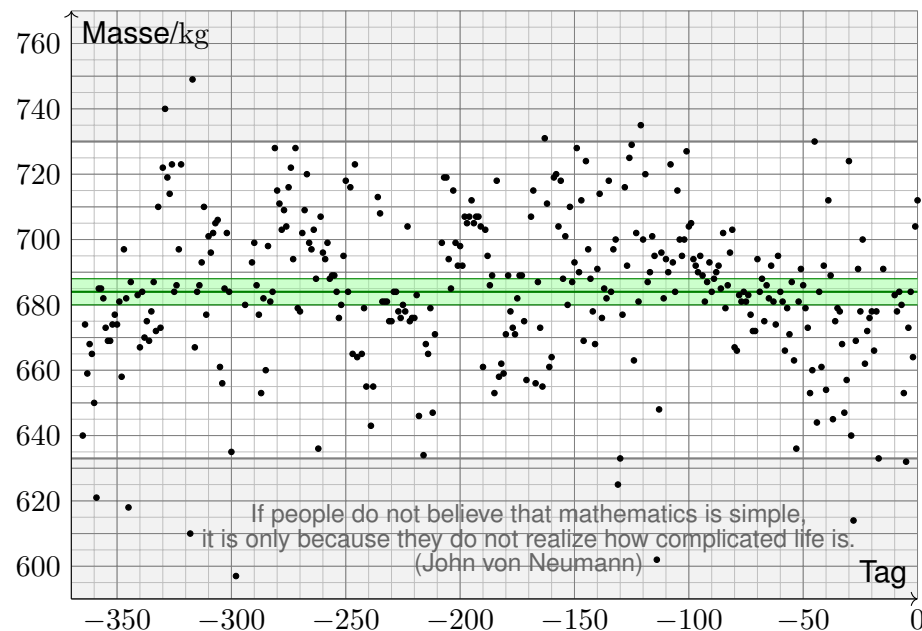
Orbiter: Masse 633kg leer
 plus Treibstoff (MMH+NTO)
 Acht Steuertriebwerke mit
 je 10N Schub (im Labor)
 Fortsetzung oder Ende:
 Wie lange reicht der Sprit?

Siehe en.wikipedia.org/wiki/Mars_Express und [/Venus_Express](http://en.wikipedia.org/wiki/Venus_Express)

Aus Steuermanövern errechnete Masse für 366 Tage bis 31.12.2012.



Jahresmittelwert der Gesamtmasse mit 3σ -Konfidenzintervall.



Regressionsgerade mit Konfidenzintervallen: 1σ , 2σ , 3σ .

