

Höhere Mathematik 3 (vertieft)

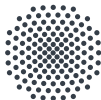
für Luft- und Raumfahrttechnik (LRT)
und Materialwissenschaft (MaWi)



erkennen.
verstehen.
anwenden.

Prof. Dr. Michael Eisermann

michael-eisermann.de/lehre/HM3



Universität Stuttgart

Wintersemester 2026/27

Halbversion 13.10.2026

*Für die Mitteilung von Unklarheiten und Fehlern aller Art
sowie für Verbesserungsvorschläge bin ich stets dankbar!*



Habe Mut, dich deines eigenen
Verstandes zu bedienen!

Much to learn, you still have.
This is just the beginning.



Urheberrecht und Haftungsausschluss

Die hier angebotenen Inhalte sind urheberrechtlich geschützt. Sie dürfen zu nicht-kommerziellen Zwecken in der Lehre verwendet werden, sofern die Quelle wie folgt vollständig angegeben wird.

Prof. Dr. Michael Eisermann: Vorlesungsunterlagen zur Höheren Mathematik,
Institut für Geometrie und Topologie (IGT), Universität Stuttgart,
michael-eisermann.de/lehre/HM3

Diese Unterlagen dienen zur Vorlesung *Höhere Mathematik 3 (vertieft)*. Sie sind konzipiert für das Mathematik-Grundstudium in den Natur- und Ingenieurwissenschaften und vermitteln einschlägiges Basiswissen. Zusammen mit den Grundlagen umfassen sie über 900 Aufgaben mit Lösungen, die Schönsten davon entstanden in Zusammenarbeit mit Dr. Friederike Stoll.

Die Inhalte wurden vom Autor mit größter Sorgfalt für die Präsentation in der Lehre erstellt. Sie werden allein zu Lehrzwecken zur Verfügung gestellt, in der Hoffnung, dass sie zum Lernen und Üben nützen mögen, ohne jeden Anspruch auf Eignung zu irgendeinem anderen Zweck. Sie sind keine Handlungsanweisung oder Empfehlung. Nur eigenständiges Denken hilft!

Kunst und Wissenschaft, Forschung und Lehre sind frei. (GG Art. 5.3.1) Der Autor übernimmt keinerlei Gewähr für die angebotenen Informationen und Daten, deren Aktualität, Korrektheit, Vollständigkeit, Qualität oder irgendeine Nutzbarkeit außerhalb der Lehre. Haftungsansprüche für mögliche Schäden, materieller oder immaterieller Art, sind grundsätzlich ausgeschlossen.

Für Inhalte externer Quellen, insb. verlinkter Webseiten, ist stets deren Anbieter verantwortlich.

Wie nutzen Sie dieses Vorlesungsskript?

Es gibt nichts Praktischeres als eine gute Theorie. (Immanuel Kant, 1724–1804)

Diese Folien dienen als Grundlage meiner Vorlesung. Wie von Studierenden gewünscht, können sie auch eigenständig genutzt werden, zum Nacharbeiten, zur Klausurvorbereitung, oder notfalls als Ersatz. Dazu sind *Definitionen* und *Sätze* mit zahlreichen *Übungen* verwoben; sie bilden ein reiches Lese- und Arbeitsbuch. Die Zusammenfassung bietet dazu ein knappes Nachschlageheft.

Die Vortragsfolien sind durch blaue Titelbalken leicht zu erkennen. Dem studentischen Wunsche folgend präsentiere ich vielfältige *Beispiele* und *Aufgaben mit Lösungen*, zudem *Erläuterungen*, *Erinnerungen* und *Ergänzungen*, instruktive *Rechnungen* und manchmal *Beweise*. Dies folgt der bewährten Erfahrung, dass die Leserin und der Leser leichter eine vorhandene Übung, Erklärung oder Illustration übergehen kann, als eine fehlende selbst (er)finden. Möge es beiden nützen!

Ich versuche, jedes Thema so einfach wie möglich darzustellen, doch so präzise und ausführlich wie es für ein solides Verständnis nötig ist. Erklärungen und Hinweise, die ich in der Vorlesung mündlich gebe, sind hier schriftlich ausgeführt; sie nützen mir als Erinnerung, den Leser:innen als Erläuterung. Eine ideale Mischung für alle und jede:n gibt es leider nicht: Der Bedarf nach Umfang und Tiefe ist individuell unterschiedlich. Das Angebot ist reich. Dosieren Sie selbst!

Neben der *Vollversion* biete ich versuchsweise auch eine *Halbversion*, die mit der Axt auf halbe Länge gekürzt wurde, durch Löschung zahlreicher Beispiele und Aufgaben, Erinnerungen und Illustrationen, Ausführungen und Ergänzungen. Je nach Bedarf der Leser:in ist dies an manchen Stellen hilfreich, an anderen fehlt es. Wer es sich zutraut, nutzt die Vollversion und dosiert selbst.

Wozu benötigen Sie mathematische Methoden?

Alles Leben ist Problemlösen. (Sir Karl Popper, 1902–1994)

Verständnis und Beherrschung komplexer Zusammenhänge benötigen Empirie *und* Theorie, quantitative Modelle und sorgfältige Planung. Diese beruhen im Wesentlichen auf Mathematik. Der Beruf von Ingenieur:innen und vieler anderer ist daher zunehmend mathematisch geprägt. Mathematische Methoden sind häufig Voraussetzung für den Erfolg technischer Entwicklungen; das gilt auch, wenn sie beim Endprodukt im Inneren wirken und oberflächlich nicht sichtbar sind. Deshalb nutzen Sie bereits im Studium vielfältige und umfangreiche mathematische Methoden, und hierzu legt Ihre Mathematikausbildung im Grundstudium das notwendige Fundament.

Es ist dabei völlig unmöglich, alle in späteren Anwendungen relevanten Techniken zu behandeln, sozusagen als Enzyklopädie auf Vorrat. Dazu sind die Anforderungsprofile allzu unterschiedlich: Was für den einen schon viel zu viel wäre, ist für die andere noch längst nicht umfassend genug. Zukünftige Ingenieur:innen sollen daher nicht nur die allgegenwärtigen Grundfertigkeiten lernen, sondern auch mathematische Denkweisen und systematische Problemlösung, um je nach Bedarf erforderliche neue Methoden selbstständig erwerben, vertiefen und anwenden zu können.

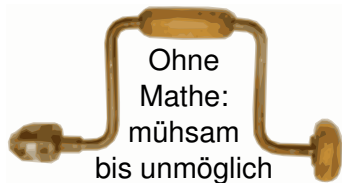
Es ist in hochqualifizierten Berufen unwahrscheinlich, dass Sie genau dieses oder jenes *Beispiel* wörtlich anwenden. Das gilt ganz allgemein, selbst für die bestmögliche Auswahl von Beispielen. Hingegen ist es wahrscheinlich, dass Sie diese oder ähnliche bewährte *Methoden* häufig nutzen. Sie sollen daher nicht nur *Beispiele* lernen, sondern zugleich möglichst vielseitige *Methoden*! Mathematik ist immer beides: sowohl abstrakte Theorie als auch konkrete Anwendung; sie sind keine Gegensätze, sie ergänzen sich, die eine kann nur mit der anderen dauerhaft erfolgreich sein.

Wozu lernen Sie Mathematik?

Hochtechnologie ist immer auch mathematische Technologie.

Sie haben forschungsorientierte Studiengänge gewählt, Sie studieren ambitionierte Fächer, hierzu brauchen Sie handfeste Mathematik.

Was Sie hier lernen, können Sie überall nutzbringend anwenden. Mit diesen Werkzeugen können Sie auch dicke Bretter bohren.



Theorie und Anwendung sind keine Gegensätze, sie ergänzen sich und arbeiten wunderbar effizient zusammen wie linke und rechte Hand.

Mathematik ist zugleich abstrakte Theorie und konkrete Anwendung. Dank Abstraktion ist sie universell anwendbar: Das ist ihre Stärke!

Wozu lernen Sie Mathematik?

Mathematik ist Grundlage und Werkzeug aller modernen Technologie.

Als Ingenieur:in brauchen Sie Ihr methodisches Handwerkszeug.
Dazu gehört als harter Kern und Grundlage die Höhere Mathematik.
Je anspruchsvoller die Aufgabe, desto wichtiger wird die Mathematik.

Sie können das begrüßen oder bejammern, es ist und bleibt Tatsache:
Theorie ist nicht Ballast oder Schikane, sondern effizientes Werkzeug.

Viele von Ihnen wissen bereits, dass Sie mathematische Werkzeuge dringend brauchen.
Andere finden es demnächst heraus, hoffentlich bereits in dieser Grundlagenvorlesung,
andernfalls nachfolgend in Anwendungen und Vertiefungen in Studium und Beruf.
Je früher und je gewissenhafter Sie Ihr Handwerkszeug erlernen, desto besser.

Die Mathematik bietet Ihnen extrem präzise und scharfe Werkzeuge.
Zur effizienten Nutzung brauchen Sie einige grundlegende Kenntnisse.
Greifen Sie nicht wahllos in die Kiste oder packen die Werkzeuge
am falschen Ende: Wissen macht Ah! Unwissen macht Aua!

Vor uns liegt ein sehr anspruchsvolles und sehr lohnendes Semester.
Ich beginne am Ende und will Ihnen zeigen, wo die Reise hingeht:
Wozu nutzen Sie diese Methoden? Welche Aufgaben können Sie
damit lösen, die jetzt noch außerhalb Ihrer Reichweite liegen?

Wozu lernen Sie jetzt schon Mathematik?

*Frage nicht nur, was die HM jetzt schon für dich tun kann.
Frage vor allem, was du jetzt schon für die HM tun kannst.*



*Wenn du ein Schiff bauen willst, lehre deine Leute nicht nur
ihr Handwerk, sondern erwecke ihre Sehnsucht nach dem Meer!*

Wozu lernen Sie jetzt schon Mathematik?

Dem Anwenden muss das Erkennen vorausgehen. (Max Planck, 1858–1947)

Manche:r schimpft auf die „lästige Theorie“ und scheitert alsbald an allzu naiver Anwendung, getreu dem Slogan „Plane nicht, irre lieber!“. Manchmal geht das gut, aber meist leider nicht. Wem nichts besseres einfällt, der prangert pauschal die „Theorielast“ des Studiums an und fordert unspezifisch aber publikumswirksam „Praxisbezug“. Hohle Sprüche werden gerne wiedergekaut.

Wer Mathematik anwendet, weiß es besser: Theorie ist keine Last, sondern wirksames Werkzeug. Gute Ingenieur:innen kennen die möglichen Methoden und entscheiden umsichtig und informiert. Die Erfahrung zeigt: Immer häufiger sind mathematische Methoden der Schlüssel zum Erfolg. Ambitionierte Studiengänge bauen daher konsequent auf umfassende mathematische Grundlagen.

Manche Studenten (m/w/d) des Ingenieurwesens skandieren die Forderung „Wir wollen keine Theorie, sondern nur Beispiele!“ Wenn das Ihre persönliche Überzeugung ist, überdenken Sie Ihre Studienwahl: Es gibt rein *anwendungsorientierte* Ausbildungen mit einem Minimum an Theorie. Für ein *forschungsorientiertes* Studium wäre das unzureichend, allzu einseitig und kurzichtig. Wie oben erklärt, sollen Sie nicht nur *Beispiele* lernen, sondern möglichst vielseitige *Methoden*!

Der Nutzen konkreter Beispiele zum Erlernen einer Methode steht außer Frage. Ebenso wichtig ist jedoch die zugrundeliegende Theorie: Sie ordnet und erklärt. Das ist meist ein zweistufiger Vorgang: Diese Vorlesung rückt Beispiele soweit möglich in den Vordergrund, stellt aber auch die notwendige Theorie zur Verfestigung und Vertiefung bereit. Damit Sie sich diese Grundlagen möglichst gut aneignen können, werde ich Definitionen und Sätze explizit formulieren und ausführlich behandeln, und deren sichere Beherrschung später auch von Ihnen erwarten.

Willkommen zu Ihrer Höheren Mathematik 3 (vertieft)

Willkommen! Sie machen es richtig und kommen zu Ihrer Vorlesung. Bitte legen Sie jetzt ganz bewusst Ihre Handys und Tablets weg, schauen Sie mich an und hören Sie mir aufmerksam zu.

Universität ist die Gemeinschaft der Lehrenden und Lernenden.

Digitale Lernformen, auch KI, können unterstützen, doch nichts ersetzt die Gemeinschaft.

*Tradition ist nicht die Bewahrung der Asche,
sondern die Weitergabe des Feuers.*

Jean Jaurès (1859–1914)

Sie müssen heute drei Dinge verstehen und sich richtig entscheiden:

- 1 Sie wollen Ingenieur:in werden. Dazu brauchen Sie Werkzeuge, insbesondere Denkwerkzeuge, und dazu gehört die Mathematik.
- 2 Wir meinen es gut mit Ihnen, Ihr HM3-Team kann & will Ihnen helfen. Sie entscheiden über Ihren Erfolg, heute für dieses Semester HM3.
- 3 Ernähren Sie sich gesund, treiben Sie Sport, lernen Sie Mathematik! Das ist Ihr Schlüssel für Erfolg im Studium und ein gutes Leben.

Willkommen zu Ihrer Höheren Mathematik 3 (vertieft)

Als Ingenieur:in wollen Sie komplexe, praktische Probleme lösen. Dazu brauchen Sie theoretische Grundlagen und mathematische Methoden. Sie haben forschungsorientierte Studiengänge gewählt: LRT und MaWi. Je anspruchsvoller die Aufgabe, desto mathematischer die Werkzeuge! Genau zu diesem Ziel bietet und verlangt Ihr Studiengang die HM3. Mit Ihrem Engagement im Studium entscheiden Sie über Ihre Zukunft.

Die richtige Wahl: Aufwärtsspirale —
engagiert mitarbeiten, gemeinsam lernen, erfolgreich studieren.



Die falsche Wahl: Abwärtsspirale —
desinteressiert mitlaufen, planlos verträdeln, frustriert aufgeben.

Lohnt sich Ihre Investition in die HM3? Ja, sicher! Fragen Sie Alumni. . .

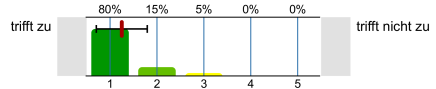
- 1 spannende Themen, schöne und nützliche Mathematik.
- 2 klare Struktur, hervorragende Betreuung, faire Klausur.

Mathematik ist schön und nützlich. . . und anspruchsvoll.

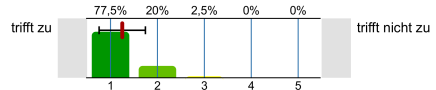


In aller Bescheidenheit: Unsere HM3 ist sensationell gut.

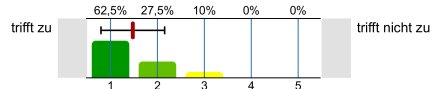
Die Lehrveranstaltung ist außerordentlich gut organisiert.



Es wird auf die Anliegen und Belange der Studierenden eingegangen.

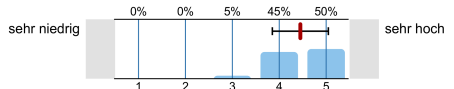


Ich habe durch die Teilnahme an dieser Lehrveranstaltung viel gelernt.

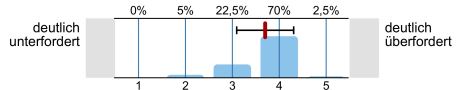


Klar und ehrlich: Studieren heißt sich bemühen!

Im Vergleich zu anderen Lehrveranstaltungen sind die Anforderungen in dieser LV an mich...



Die Lehrveranstaltung hat mich ...



Mathematik ist schön und nützlich. . . und anspruchsvoll.

Warum erzähle ich Ihnen das? Sie können mit uns rechnen!

Ich möchte, dass Sie vernünftig handeln und erfolgreich studieren.
Zu dieser Entscheidung gebe ich Ihnen die nötigen Informationen.
Sie haben die Freiheit, unvernünftig zu handeln und zu scheitern.
Ich kann Ihnen den Weg zeigen, gehen müssen Sie ihn selbst.

Die Rückmeldungen sind insgesamt sehr positiv, die Befragungen sind sensationell gut, besonders für eine Grundvorlesung am Studienanfang und zudem gar in der Mathematik, als Service im Ingenieurwesen.
Unser Gesamtpaket der Höheren Mathematik 3 ist hervorragend.

Dafür arbeite ich extrem hart, genauer gesagt: Ihr gesamtes HM3-Team!
Von Ihnen erwarte ich dasselbe: ernsthaftes Engagement und Mitarbeit.
Mir ist wichtig, diese Grundfrage anfangs ein für alle mal zu klären.
Anschließend können wir uns auf Inhalte konzentrieren!

Quidquid agis, prudenter agas et respice finem!

[Was immer du tust, handle klug und bedenke das Ende!]

Ilias-Kurs: informativ und liebevoll gestaltet

Magazin > Naturwissenschaften und Mathematik > Mathematik > Lehrveranstaltungen > Winter 2026/27 > Höhere Mathematik 3 vertieft - WiSe 26/27

Höhere Mathematik 3 vertieft - WiSe 26/27



Inhalt Timeline Info Mitglieder

Herzlich willkommen zur Höheren Mathematik 3 vertieft!

Startseite

In diesem Ilias-Kurs finden Sie Informationen und Online-Materialien zu unserer Veranstaltung:

- Zur [Vorlesung mit integrierter Vortragsübung](#) bieten wir Ihnen unser Skript, Vortrag und Hintergrund, erprobt und umfassend. Gerne geschehen, möge es nützen!
- Jede Woche lösen Sie hier in Ilias ein [hilfreiches Quiz](#). Damit wiederholen Sie den aktuellen Vorlesungsstoff und sind so für die Übungen bestens vorbereitet.
- Zur [Übung](#) erstellen wir für Sie jede Woche ein Übungsblatt mit gut abgestimmten Aufgaben, ideal zur Verfestigung, zur Vertiefung und als Training.
- Die Präsenzübungen lösen Sie mit Ihren Kommiliton:innen unter Anleitung Ihres Tutors in der Übung, als Vorbereitung für Ihre anschließende Hausübungen.
- Im [Forum](#) können Sie anonym Ihre Fragen stellen und erhalten kompetente Auskunft.

Wir bieten eine **Scheinklausur** am Samstag, den 5. Dezember 2026, von 10 bis 12 Uhr. Ob wir diese schreiben, entscheiden Sie nach reiflicher Überlegung selbst, in einer anonymen Abstimmung demnächst in Ihrer Vorlesung.



HM3-Termine im Überblick

Vorlesung und integrierte Vortragsübung

- Dienstag, 8:00 - 9:30 Uhr in V 57.03
- Dienstag, 14:00 - 15:30 Uhr in V47.02
- Freitag, 11:30 - 13:00 Uhr in V 47.01

Die **erste Vorlesung** beginnt am **Dienstag, den 13. Oktober 2026, um 8:00 Uhr**.

Quiz

Wöchentlich veranstalten wir ein Quiz zu den aktuellen Themen jeweils von Freitag, 13 Uhr, bis Dienstag, 8 Uhr.

Das **erste Quiz** startet am **Freitag, den 16. Oktober 2026**.

Gruppenübung

Die Gruppenübungen finden mittwochs, donnerstags und freitags in verschiedenen Blöcken statt. Die genauen Zeiten und Räume finden Sie im [Gruppenübungsordner](#).

Die **Anmeldung zu den Übungen** findet am **Mittwoch, den 14. Oktober 2026, von 10 bis 16 Uhr** hier in Ilias statt. Treten Sie dazu einer der Ilias-Gruppen im [Gruppenübungsordner](#) bei. Das **erste Übungsblatt** (Blatt 0 zur Wiederholung aus der HM1&2) gibt es schon in der ersten Woche. Die **ersten Gruppenübungen** finden in der zweiten Vorlesungswoche statt, also am **21. bis 23. Oktober 2026**.

Scheinbedingungen

Um den Schein und damit die Zulassung zur Modulprüfung zur HM3 vertieft zu erhalten, erfüllen Sie die folgenden Bedingungen:

- Mindestens die **Hälfte der Punkte aller Quizze** (Quiz 1 bis Quiz 13).
- Mindestens die **Hälfte der Punkte aus den Quizzen der zweiten Hälfte** (Quiz 7 bis Quiz 13).
- Mindestens die **Hälfte der Punkte aller Hausaufgaben** (Blatt 0 bis Blatt 12).
- Mindestens die **Hälfte der Punkte aus den Hausaufgaben der zweiten Hälfte** (Blatt 7 bis Blatt 12).
- Mindestens die **Hälfte der Punkte aus der Scheinklausur** (falls wir eine schreiben).

> Lernen mit KI - so geht's!

Skript: Vortrag und Hintergrund, erprobt und umfassend

Das HM3-Rundum-Glücklich-Paket: die Vorlesungsfolien eingebettet in ein Lese- und Arbeitsbuch

Wer vieles bringt, wird manchem etwas bringen.
JOHANN WOLFGANG VON GOETHE (1749–1832), *Faust*

Parallel zu meiner [aktuellen Vorlesung HM3](#) stelle ich hier meine Folien zur Verfügung, Vortrag und Hintergrund, Übungen mit Lösung, erprobt und umfassend. Sie bilden ein reiches Lese- und Arbeitsbuch, die Zusammenfassung am Ende bietet dazu ein knappes Nachschlageheft. Wer sich ernsthaft einarbeitet, wird sie gut nutzen können.

1 (1 von 104) — + Seitengröße

Höhere Mathematik 3 (vertieft)

für Luft- und Raumfahrttechnik (LRT) und Materialwissenschaft (MaWi)



Prof. Dr. Michael Eisermann
michael-eisermann.de/lehre/HM3



Universität Stuttgart
Wintersemester 2026/27
Vollversion 01.10.2026

Für die Mitteilung von Unklarheiten und Fehlern aller Art sowie für Verbesserungsvorschläge bin ich stets dankbar!



Habe Mut, dich deines eigenen Verstandes zu bedienen!

Much to learn, you still have. This is just the beginning.



erkennen, verstehen, anwenden.

► „Danke für das umfassende Skript! Wozu lohnt sich noch die Vorlesung?“

Falsche Interpretation: „In der Vorlesung wird nur vorgetragen, was im Skript steht.“
Wer glaubt, der Besuch der Vorlesung sei überflüssig, begeht einen gravierenden Fehler. Die Vorlesung ist Ihr erster und entscheidender Schritt zum gemeinsamen Lernen.

Richtige Interpretation: Ich erarbeite für Sie und biete Ihnen hier mein Skript als zusätzliche Hilfe zu Ihrer Unterstützung. Es dient zu Ihrer *Vor- und Nacharbeit*, als hilfreiche *Fundierung und Vertiefung* zu Vorlesung, Übungen und Klausuren.

► **Leseanleitung.** Die Vortragsfolien sind durch blaue Titelbalken leicht zu erkennen.

Leseanleitung: So nutzen Sie das HM3-Skript richtig!

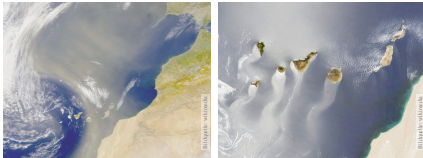
blauer Titelbalken:
Vorlesung, Grundgerüst

weißer Titelbalken:
Hintergrund, Bonus

Die Kontinuitätsgleichung der Strömungslehre

217

Ziel: Wie verhalten sich Strömungen? Welche Gleichungen gelten hier?



Luft- und Wasserströmung um die Kanarischen Inseln

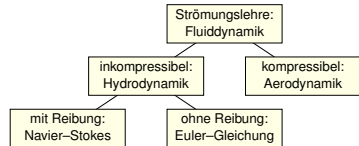
(0) Wie beschreiben Sie eine Strömung in einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ über ein Zeitintervall $I = [t_0, t_1]$? Geschwindigkeit $\vec{v}: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3: (t, \vec{x}) \mapsto \vec{v}(t, \vec{x})$ und Massendichte $\varrho: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}: (t, \vec{x}) \mapsto \varrho(t, \vec{x})$ und evtl. weitere Daten.

Die Massenstromdichte $\varrho \vec{v}: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ beschreibt den Massenfluss. Im Strömungsbereich Ω werde Masse weder erzeugt noch vernichtet.

Die Kontinuitätsgleichung der Strömungslehre

218
Ausführung

Die Strömungsmechanik untersucht die Bewegung von fluiden Medien. Sie ist grundlegend für die Meteorologie, beim Bau von Flugzeugen, Schiffen, Autos, ... bis hin zu Verbrennungsmotoren: Alles fließt!



Ein Fluid heißt inkompressibel, wenn seine Dichte nicht vom Druck abhängt. Zum Beispiel ist dies bei Wasser eine gute Näherung für die meisten Anwendungen. Noch einfacher ist zunächst, überall konstante Dichte anzunehmen. Anders als Flüssigkeiten sind Gase leicht komprimierbar, ihre Dichte ist etwa 1000mal geringer, ihre thermische Ausdehnung größer. Für ihre Bewegung aber gelten weitgehend die gleichen Gesetze, zumindest bei nicht allzu großen Drücken und Geschwindigkeiten. Wir wenden uns hier der allgemein gültigen Kontinuitätsgleichung zu.

In jeder Vorlesung werden etwa 20 bis 25 Vorlesungsfolien besprochen; diese bilden den blauen Faden, das Kernprogramm, unser Grundgerüst. Zu jeder Vorlesungsfolie gehören etwa drei Hintergrundfolien; sie bieten hilfreiche Erläuterungen und Ergänzungen, Anwendungen und Beispiele, Aufgaben und Lösungen, usw. Dosieren Sie selbst nach Ihrem Bedarf!

Leseanleitung: So nutzen Sie das HM3-Skript richtig!

Die Folien erfüllen eine doppelte Funktion. Für meinen Vortrag erstelle ich die Folien zur visuellen Unterstützung und nutze sie als Grundlage. Diese Vortragsfolien sind durch blaue Titelbalken leicht zu erkennen. Hier finden Sie alles Wesentliche, darauf sollten Sie sich konzentrieren.

Dieses Grundgerüst ergänze ich durch Hintergrundinformation in Form von Erläuterungen und Ausführungen, Erinnerungen und Ergänzungen, Aufgaben mit Lösungen, weiteren Beispielen und Rechnungen, etc. Dies folgt der bewährten Erfahrung, dass die Leserin und der Leser leichter eine vorhandene Übung, Erklärung oder Illustration übergehen können, als eine fehlende selbst (er)finden. Möge es beiden nützen!

Ich versuche, jedes Thema so klar und einfach wie möglich darzustellen, doch so präzise und ausführlich wie für ein solides Verständnis nötig ist. Erklärungen und Hinweise, die ich in der Vorlesung mündlich gebe, finden Sie hier zum Nachlesen noch einmal schriftlich ausgeführt; sie nützen mir als Erinnerung und beiden Lesern als Erläuterung.

Tipp: Ein fettgesetztes **Stichwort** kann mit „#Stichwort“ gesucht werden.

Kapitel A: Was sind und was sollen Integrale?

A1 Konstruktion des Volumens

A1.1 Wie misst man Flächen- und Rauminhalt?

A1.2 Was sind und was sollen Integrale?

A1.3 Schreibweisen für Integrale

A2 Reelle Zahlen und reelle Funktionen

A2.1 Der Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ der reellen Zahlen

A2.2 Reelle Funktionen und ihre Operationen

A2.3 Absolute Summation von Reihen

A3 Konstruktion des Integrals

A3.1 Treppenfunktionen und ihr Integral

A3.2 Einschachtelung und Ausschöpfung

A3.3 Absolut integrierbare Funktionen

A4 Eigenschaften des Integrals

A4.1 Zerlegung und Betragsabschätzung

A4.2 Fast überall gleiche Funktionen

A4.3 Erste Beispiele und Verständnisfragen

Kapitel B: Eindimensionale Integration

- B1 Integration durch Einschachtelung (nach Riemann)
 - B1.1 Treppenfunktionen und Integration durch Einschachtelung
 - B1.2 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
 - B1.3 Integrationsregeln und elementare Integralformeln
- B2 Integration durch Ausschöpfung (nach Lebesgue)
 - B2.1 Absolute Integration durch Ausschöpfung
 - B2.2 Der Hauptsatz für integrierbare Funktionen
 - B2.3 Uneigentliche Integrale und Cauchy–Hauptwert
- B3 Integrale und Reihen
 - B3.1 Vergleich von Integral und Reihe
 - B3.2 Stirling–Formel und Gamma-Funktion
 - B3.3 Konvergenzkriterien von Abel, Leibniz und Dirichlet
- B4 Fazit: Eindimensionale Integration
 - B4.1 Zusammenfassung und Verständnisfragen
 - B4.2 Beispiele zur uneigentlichen Integration
 - B4.3 Analytische und glatte Funktionen

Kapitel C: Mehrdimensionale Integration

C1 Der Satz von Fubini

C1.1 Iterierte Integrale für nicht-negative Funktionen

C1.2 Der Satz von Fubini für integrierbare Funktionen

C1.3 Integration über Normalbereiche

C2 Der Transformationssatz

C2.1 Neue Variablen als geschickte Koordinaten

C2.2 Polarkoordinaten und das Gaußsche Integral

C2.3 Zylinder- und Kugelkoordinaten

C3 Fazit: Hauptsatz, Fubini, Transformation

C3.1 Zusammenfassung

C3.2 Verständnisfragen

C3.3 Normalbereiche

C4 Weitere Aufgaben und Anwendungen

C4.1 Trägheitsmoment von Zylinder und Kugel

C4.2 Warnende Gegenbeispiele zu Fubini

C4.3 Volumina, Polstellen, Integrierbarkeit

Kapitel D: Integrale und Grenzwerte

D1 Vertauschen von Integral und Reihe

D1.1 Absolute Konvergenz in L^1

D1.2 Integration von Potenzreihen

D2 Vertauschen von Integral und Limes

D2.1 Punktweise Konvergenz

D2.2 Majorisierte Konvergenz

D3 Vertauschen von Integral und Ableitung

D3.1 Kompakte Integrationsbereiche

D3.2 Beliebige Integrationsbereiche

D4 Weitere Aufgaben und Anwendungen

D4.1 Warnende Beispiele zur Vertauschung

D4.2 Berechnung von Integralen und Reihen

D5 Kalkül der Distributionen

D5.1 Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

D5.2 Distributionen und ihre Rechenregeln

Kapitel E: Integralsätze in der Ebene

E1 Die Integralsätze von Green und Gauß

E1.1 Wegintegrale und Kurvenintegrale

E1.2 Ebene Kompakta mit stückweise glattem Rand

E1.3 Der Integralsatz von Green: anschauen und nachrechnen!

E1.4 Der Integralsatz von Gauß: anschauen und nachrechnen!

E2 Anwendungsbeispiele

E2.1 Schreibweise als Differentialform

E2.2 Die Greenschen Flächenformeln

E2.3 Arbeitsintegrale in der Thermodynamik

E2.4 Flächeninhalt und Schwerpunkt

E3 Verständnisfragen und Aufgaben

E3.1 Sherlock Holmes: Which way did the bicycle go?

E3.2 Zwei prominente Vektorfelder: Wirbel und Quelle

E3.3 Der Hauptsatz für Arbeitsintegrale: HDI

E3.4 Lösung des Potentialproblems

Kapitel F: Integralsätze für komplexe Funktionen

F1 Crashkurs zum Residuensatz

F2 Komplexe Funktionen und Potenzreihen

F2.1 Die Cauchy–Riemann–Differentialgleichungen

F2.2 Exponentialfunktion und Zweige des Logarithmus

F2.3 Laurent–Reihen, Polstellen und Residuen

F3 Die Integralformel von Cauchy

F3.1 Integralsatz und Integralformel von Cauchy

F3.2 Fundamentalsatz der Algebra und Nullstellensuche

F3.3 Entwicklung in Potenzreihen und in Laurent–Reihen

F4 Der Residuensatz und Anwendungen

F4.1 Das Residuum einer isolierten Singularität

F4.2 Der Residuensatz für Kompakta

F4.3 Anwendung auf reelle Integrale

F5 Fazit: Residuenkalkül

F5.1 Verständnisfragen und Vertiefungen

F5.2 Anwendungsbeispiele zum Residuenkalkül

Kapitel G: Integralsätze im Raum

G1 Crashkurs zu Integralsätzen im Raum

G1.1 Flächenintegrale und Integralsätze im Raum

G1.2 Einführendes Beispiel zum Satz von Stokes

G1.3 Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß

G2 Flächenintegrale im Raum

G2.1 Glatte Flächenstücke und Parametrisierungen

G2.2 Kugelsegment, Kugelkappe, Torusfläche

G2.3 Rotationskörper und Guldinsche Regeln

G3 Integralsätze im Raum

G3.1 Die Integralsätze von Stokes und Gauß

G3.2 Anwendung: das archimedische Prinzip

G3.3 Numerik: Triangulierung und Linearisierung

G4 Fazit: Integralsätze

G4.1 Zusammenfassung und Verständnisfragen

G4.2 Weitere Aufgaben und Anwendungen

G4.3 Geometrie auf gekrümmten Flächen

Kapitel H: Erste Anwendungen der Integralsätze

H1 Partielle Differentialgleichungen der Physik

H1.1 Eulers Kontinuitätsgleichung

H1.2 Fouriers Wärmeleitungsgleichung

H1.3 Newtons Gravitationsgesetz

H1.4 Maxwells Elektrodynamik

H2 Vektorfelder und Potentiale

H2.1 Konservative Vektorfelder

H2.2 Rotationsfreie Vektorfelder

H2.3 Einfach zusammenhängende Gebiete

H2.4 Radialsymmetrische Felder und Potentiale

H3 Fazit: Erste Anwendungen der Integralsätze

H3.1 Zusammenfassung und Verständnisfragen

H3.2 Weitere Aufgaben und Anwendungen

H3.3 Notwendige und hinreichende Kriterien

H3.4 Gegenläufige Wirbelfelder, Quadrupolis

Kapitel I: Fourier–Analyse periodischer Funktionen

- I1 Die trigonometrische Orthonormalbasis
 - I1.1 Periodische Funktionen, erste Beispiele
 - I1.2 Periodische Fortsetzung, Spiegelung
 - I1.3 Skalarprodukt und Orthonormalbasis
- I2 Fourier–Analyse und das Dirichlet–Kriterium
 - I2.1 Fourier–Entwicklung der Sägezahnfunktion
 - I2.2 Das Konvergenz-Kriterium von Dirichlet
 - I2.3 Fourier–Entwicklung von Treppenfunktionen
- I3 Rechenregeln zu Integration und Glattheit
 - I3.1 Integrieren und Differenzieren
 - I3.2 Abklingen der Fourier–Koeffizienten
 - I3.3 Von Potenzreihen zu Fourier–Reihen
- I4 Fazit: Fourier–Analyse periodischer Funktionen
 - I4.1 Zusammenfassung und Verständnisfragen
 - I4.2 Weitere Aufgaben und Anwendungen

Kapitel J: Die Fourier–Isometrie

J1 Parseval–Gleichung und Fourier–Isometrie

J1.1 Die Energiegleichung und erste Anwendungsbeispiele

J1.2 Die Fourier–Isometrie zwischen Funktion und Spektrum

J1.3 Isoperimetrische Optimierung durch Fourier–Reihen

J2 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz

J2.1 Punktweise Konvergenz nach Dirichlet

J2.2 Gleichmäßige Approximation nach Fejér

J2.3 Wann gilt punktweise Konvergenz fast überall?

J3 Konvergenz im quadratischen Mittel

J3.1 Bestapproximation durch Orthogonalprojektion

J3.2 Konvergenz im quadratischen Mittel

J3.3 Vergleich der drei Konvergenzbegriffe

J4 Fazit: Fourier–Analyse und Synthese

J4.1 Zusammenfassung

J4.2 Verständnisfragen

Kapitel K: Fourier–Transformation

K1 Erste Beispiele, Eigenschaften, Rechenregeln

K1.1 Von der Fourier–Reihe zum Fourier–Integral

K1.2 Einfache Beispiele und erste Eigenschaften

K1.3 Der Umkehrsatz für Fourier–Transformierte

K2 Analytische Eigenschaften

K2.1 Rechenregeln der Fourier–Transformation

K2.2 Ableitung und Multiplikation

K2.3 Faltung und Produkt

K3 Metrische Eigenschaften

K3.1 Energiegleichung und Fourier–Isometrie

K3.2 Die Unschärferelation für Fourier–Paare

K3.3 Bedeutung in der Quantenmechanik

K4 Fazit: Fourier–Transformation

K4.1 Zusammenfassung

K4.2 Verständnisfragen

K4.3 Weitere Aufgaben

Kapitel L: Laplace–Transformation

L1 Die Laplace–Transformation

L1.1 Definition der Laplace–Transformation

L1.2 Linearität und Ableitungsregel

L1.3 Streckung, Dämpfung, Verschiebung

L2 Anwendung auf Differentialgleichungen

L2.1 Tabelle einfacher Laplace–Transformierter

L2.2 Lösung von Differentialgleichungen

L2.3 Partialbruchzerlegung und Residuen

L3 Weitere Eigenschaften und Anwendungen

L3.1 Rücktransformation und Injektivität

L3.2 Faltung und Integralregel

L3.3 Greensche Fundamentallösung

L4 Fazit: Laplace–Transformation

L4.1 Vergleich von Laplace und Fourier

L4.2 Anwendung in der Systemtheorie

L4.3 Aufgaben zu Differentialgleichungen

Kapitel M: Gewöhnliche Differentialgleichungen

M1 Erste Beispiele von Differentialgleichungen

M1.1 Einfache Beispiele aus der Mechanik

M1.2 Separierbare Differentialgleichungen

M1.3 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

M2 Exakte Differentialgleichungen

M2.1 Exaktheit und Potential von $f(x, y) + g(x, y) y' = 0$

M2.2 Lösung durch einen integrierenden Faktor

M2.3 Lineare Differentialgleichungen

M3 Fazit: Existenz, Eindeutigkeit, Lösungsmethoden

M3.1 Zusammenfassung und Verständnisfragen

M3.2 Methodenvergleich: Viele Wege führen zum Ziel.

M3.3 Gut & schlecht gestellte Anfangswertprobleme

M4 Weitere Aufgaben und Anwendungsbeispiele

M4.1 Umformung und Lösung durch Substitution

M4.2 Exakte Differentialgleichungen und Potentiale

M4.3 Qualitative Analyse, Runden und Eingrenzen

Kapitel N: Differentialgleichungen höherer Ordnung

N1 Harmonische Schwingungen

N1.1 Freie harmonische Schwingung

N1.2 Erzwungene harmonische Schwingung

N2 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

N2.1 Charakteristisches Polynom und Fundamentalsystem

N2.2 Lösungsansatz für spezielle rechte Seiten $r(x)e^{\mu x}$

N2.3 Greensche Lösungsformel für beliebige rechte Seiten

N3 Lineare Differentialgleichungen mit stetigen Koeffizienten

N3.1 Fundamentalmatrix und Variation der Konstanten

N3.2 Lösung durch Potenzreihenansatz

N4 Die Euler–Lagrange–Differentialgleichung

N4.1 Optimierung durch Variationsrechnung

N4.2 Lösung des Brachistochrone-Problems

N5 Fazit: Differentialgleichungen höherer Ordnung

N5.1 Zusammenfassung und Verständnisfragen

N5.2 Weitere Aufgaben und Methodenvergleich

Kapitel O: Dynamische Systeme

O1 Dynamische Systeme

O1.1 Der harmonische Oszillator als dynamisches System

O1.2 Gekoppelte Oszillatoren und Eigenfrequenzen

O1.3 Mathematisches Pendel und Energiefläche

O1.4 Das Näherungsverfahren von Runge–Kutta

O2 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

O2.1 Lokale Lösungen: Satz von Picard–Lindelöf

O2.2 Fortsetzungen und maximale Lösungskurven

O2.3 Sensible Abhängigkeit von den Anfangsdaten

O2.4 Aufgaben zu Existenz und Eindeutigkeit und Stabilität

O3 Der Hauptsatz für lineare dynamische Systeme

O3.1 Affin/Lineare Struktur des Lösungsraumes

O3.2 Variation der Konstanten zur Partikulärlösung

O3.3 Matrizenkalkül und Exponentialfunktion

O3.4 Fundamentallösung homogener DGSysteme

Kapitel P: Autonome Systeme, Gleichgewicht und Stabilität

P1 Lineare DGSysysteme mit konstanten Koeffizienten

P1.1 Gekoppelte Oszillatoren und stehende Wellen

P1.2 Lösungen mittels Eigenvektoren und Eigenfunktionen

P1.3 Lösungen mittels Hauptvektoren und Hauptfunktionen

P1.4 Von komplexen zu reellen Lösungen

P2 Gleichgewichtslagen und In/Stabilität von Fixpunkten

P2.1 Linearisierung um Fixpunkte und In/Stabilität

P2.2 Räuber-Beute-Modell nach Lotka–Volterra

P2.3 Stabilitätsanalyse nach Lyapunov

P2.4 Hamiltonsche Dynamik und Stabilität

P3 Fazit: Differentialgleichungssysteme

P3.1 Zusammenfassung und Verständnisfragen

P3.2 Reduktion der Ordnung und Methodenvergleich

P3.3 Beispiele zur Dynamik um Fixpunkte und In/Stabilität

P3.4 Invariante Mengen dank Tangentialbedingung

Kapitel Q: Partielle Differentialgleichungen (PDE)

Q1 Erste Beispiele partieller Differentialgleichungen

Q1.1 Partielle Ableitungen und der Satz von Schwarz

Q1.2 Cauchy–Riemann und Maxwell–Gleichungen

Q1.3 Konvektion-Diffusion und Navier–Stokes–Gleichungen

Q1.4 Ideale ebene Strömungen und holomorphe Funktionen

Q2 Lineare PDE erster Ordnung

Q2.1 Lineare Differentialoperatoren

Q2.2 Lösung entlang charakteristischer Kurven

Q2.3 Die Charakteristikmethode und warnende Gegenbeispiele

Q2.4 Transportgleichung mit konstanten Koeffizienten

Q3 Fazit: PDE erster Ordnung

Q3.1 Zusammenfassung und Verständnisfragen

Q3.2 Aufgaben zur Charakteristikmethode

Q3.3 Lösung durch Potenzreihenansatz

Q3.4 Methodenvergleich: Viele Wege führen zum Ziel.

Kapitel R: Lineare PDE zweiter Ordnung

R1 Lineare PDE zweiter Ordnung

R1.1 Lösung durch Fourier–Transformation

R1.2 Klassifikation linearer PDE zweiter Ordnung

R1.3 Trennung der Variablen durch Produktansatz

R2 Anwendung auf die Potentialgleichung

R2.1 Laplace–Gleichung auf einem Rechteck

R2.2 Eindeutigkeit und Minimum-Maximum-Prinzip

R2.3 Gut gestellt? Hadamards warnendes Gegenbeispiel

R3 Anwendung auf die Wellengleichung

R3.1 Die harmonisch schwingende Saite

R3.2 Wellengleichung und die gezupfte Saite

R3.3 Die Energiemethode beweist die Eindeutigkeit.

R4 Fazit: PDE zweiter Ordnung

R4.1 Zusammenfassung und Verständnisfragen

R4.2 Aufgaben zur Separationsmethode

Kapitel S: Die Wärmeleitungsgleichung

- S1 Die Wärmeleitungsgleichung und ihre freien Lösungen
 - S1.1 Von der Wärmebilanz zur Differentialgleichung
 - S1.2 Wärmeleitungskern und Superposition
 - S1.3 Lösung durch Fourier–Transformation
- S2 Die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung als ARWP
 - S2.1 Wie schnell kühlt ein Stab über seine Enden ab?
 - S2.2 Was passiert bei gleichmäßigem Aufheizen?
 - S2.3 Was passiert bei Isolierung an den Rändern?
- S3 Existenz und Eindeutigkeit und Näherung des ARWP
 - S3.1 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen
 - S3.2 Energie und Minimum-Maximum-Prinzip
 - S3.3 Approximation durch finite Differenzen
- S4 Die dreidimensionale Wärmeleitungsgleichung als ARWP
 - S4.1 Wie schnell kühlt eine Kugel über ihren Rand ab?
 - S4.2 Anwendungsbeispiele aus Küche, Keller, Krimi
 - S4.3 Fazit: Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

Kapitel T: Wahrscheinlichkeitsrechnung

T1 Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

T1.1 Zufall und Wahrscheinlichkeit: Grundbegriffe

T1.2 Rechnen mit Ereignissen: Wahrscheinlichkeitsräume

T2 Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit

T2.1 Bedingte Wahrscheinlichkeiten, Formel von Bayes

T2.2 Stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen

T3 Das Gesetz der großen Zahlen (GGZ)

T3.1 Zufallsvariablen, Erwartung und Varianz

T3.2 Die Ungleichungen von Pafnuty Chebychev

T3.3 Unabhängige Wiederholung: Gesetz der großen Zahlen

T3.4 Stochastische Abhängigkeit: Korrelation vs Kausalität

T4 Fazit: Wahrscheinlichkeitsrechnung

T4.1 Weitere Aufgaben und Anwendungsbeispiele

T4.2 Sex: Was nützen dem Pfau seine Federn?

T4.3 Tischkicker: Das Runde muss ins Eckige.

T4.4 Google: die zufällige Irrfahrt im Internet

Kapitel U: Kombinatorik und Näherungen

U1 Produktexperimente

U1.1 Ausfallwahrscheinlichkeiten

U1.2 Prognosen zu Reaktorunfällen

U1.3 Kollision und Geburtstagsparadox

U2 Kombinatorik und Urnenmodelle

U2.1 Kombinatorische Abzählformeln

U2.2 Schubfachmodelle: $\{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$

U2.3 Urnenmodelle: Ziehung von k aus n Kugeln

U3 Drei grundlegende stochastische Modelle

U3.1 Hypergeometrische Verteilung: Stichproben

U3.2 Binomialverteilung: unabhängige Versuche

U3.3 Poisson–Verteilung: bequeme Näherung

U4 Fazit: hypergeometrisch, binomial, Poisson

U4.1 Verständnisfragen und weitere Aufgaben

U4.2 Poissons Gesetz der kleinen Zahlen

U4.3 Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion

Kapitel V: Der lokale Grenzwertsatz

V1 Kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen

V1.1 Kontinuierliche Verteilungen

V1.2 Wahrscheinlichkeitsräume

V1.3 Eindimensionale Normalverteilung

V2 Erwartung, Varianz, Streuung

V2.1 Kumulative Verteilungsfunktion

V2.2 Zufallsvariablen, Erwartung und Varianz

V2.3 Verteilungen und ihre Kenngrößen

V3 Der lokale Grenzwertsatz (LGS)

V3.1 Von der Binomial- zur Normalverteilung

V3.2 Der lokale Grenzwertsatz $B(n, t) \approx N(\mu, \sigma^2)$

V3.3 Erste Anwendungsbeispiele

V4 Fazit: der lokale Grenzwertsatz

V4.1 Zusammenfassung und Verständnisfragen

V4.2 Weitere Aufgaben und Anwendungsbeispiele

V4.3 Kleine Stichprobe und Intervallschätzung

Kapitel W: Der zentrale Grenzwertsatz

W1 Der zentrale Grenzwertsatz (ZGS)

W1.1 Stochastisch unabhängige Zufallsvariablen

W1.2 Beispiele und erste Beobachtungen

W1.3 Der zentrale Grenzwertsatz

W2 Statistische Anwendungen

W2.1 Konfidenzintervalle

W2.2 Fehlerfortpflanzung

W2.3 Regressionsanalyse

W3 Fazit: der zentrale Grenzwertsatz

W3.1 Zusammenfassung und Verständnisfragen

W3.2 Summen von Zufallsvariablen und Grenzwertsätze

W3.3 Weitere Aufgaben und Anwendungsbeispiele

W4 Analytische Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung

W4.1 Laplace– und Fourier–Transformation von WMaßen

W4.2 Beweisidee des zentralen Grenzwertsatzes

W4.3 Entropie verstehen und anwenden

Kapitel Z: Zusammenfassung

Das letzte Kapitel versammelt alle Kapitelzusammenfassungen und bietet so eine Zusammenschau der wichtigsten Ergebnisse, Sätze und Methoden dieser Vorlesung zur Höheren Mathematik. Im Laufe des Semesters führen wir Sie Schritt für Schritt dorthin.

Diese Zusammenfassung ist dazu nur eine Gedächtnisstütze; zum soliden Verständnis benötigen Sie alle Grundlagen und viel Übung! Erfahrung, Umsicht und Verständnis lassen sich nicht eintrichtern, sondern nur durch regelmäßige Übung erwerben. Also: Üben Sie!

Wir beginnen diese Vorlesung mit einem Kapitel zur Vorschau; dies gibt zunächst eine Übersicht der zentralen Themen der HM3 und dient somit zu einer ersten Orientierung und zu Ihrer Motivation.

Auch wenn Sie die nötigen Methoden jetzt noch nicht kennen, so können Sie doch sinngemäß erraten, welche Techniken Sie brauchen werden. Sie können jetzt schon die Ziele erkennen, auf die wir hinarbeiten. Diese Versprechen werde ich in den nächsten Wochen einlösen.

Themen der HM1&2: Voraussetzung

Lineare Algebra und Geometrie:

- Reelle und komplexe Zahlen $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$
- Euklidische Vektorräume $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$
- Matrizen & lineare Gleichungssysteme $Ax = y$
- Eigenvektoren und Diagonalisierung $Av = \lambda v$
- Normalformen für Quadriken $x^2 - y^2 = 1$

Analysis:

- Konvergenz von Folgen und Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$
- Funktionen, Grenzwerte und Stetigkeit $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
- Differential- und Integralrechnung $\int_a^b f(x) dx = [F]_a^b$
- Differentialrechnung mehrerer Variablen $\partial_x \partial_y f = \partial_y \partial_x f$
- Vektorfelder, Wegintegrale und Potentiale $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$

😊 Auf die Beherrschung all dieser Grundlagen können Sie stolz sein, als Handwerkszeug schon jetzt im Studium und ebenso später im Beruf!

Themen der HM3: Zielsetzung

Die HM3 bietet viel und verlangt viel . . . in kurzer Zeit (37 Termine):

- Mehrdimensionale Integration (4) $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx$

- Integralsätze in Ebene und Raum (7) $\int_B df = \int_{\partial B} f$

- Fourier–Analyse und Laplace–Transformation (5) $f(t) \sim \sum c_k e^{ikt}$

- Gewöhnliche Differentialgleichungen (8) $u'(t) = f(t, u(t))$

- Partielle Differentialgleichungen (4) $\partial_t u(t, x) = \partial_x^2 u(t, x)$

- Wahrscheinlichkeitsrechnung (8) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

😊 Diese mächtigen Techniken sind in Anwendungen allgegenwärtig. Jedes dieser Themen verdient eigentlich seine eigene Vorlesung. . . Sie bekommen alles als „*Best-of*“ in einem einzigen Semester!

Ziele der HM3 laut Modulbeschreibung

Die Studierenden verfügen über grundlegende Kenntnisse

- der Integralrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher,
- gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen,
- Fourier–Reihen und Integraltransformationen sowie Stochastik.

Sie können die behandelten Methoden selbstständig, sicher, kritisch, korrekt und kreativ anwenden.

Sie besitzen die mathematische Grundlage für das Verständnis quantitativer Modelle aus den Ingenieurwissenschaften. Sie können sich mit Spezialist:innen aus dem ingenieur- und naturwissenschaftlichen Umfeld über die benutzten mathematischen Methoden verständigen.

Konkrete Anwendung benötigt abstrakte Kenntnisse; je anspruchsvoller, desto mathematischer! Daher Ihr Ziel: Sie beherrschen Ihr Handwerk, verstehen die Grundlagen und wenden passende Werkzeuge fachgerecht an. Sie müssen dazu das Rad nicht neu erfinden: Ihr Studium bündelt die Erfahrung vieler Generationen. Diesen Erfahrungsschatz sollen sie kennen und nutzen lernen. Das gilt insbesondere für die Mathematik: Hier erlernen Sie Ihre Denk- und Rechenwerkzeuge. Man kann Techniken auch oberflächlich kennen, aber ohne Übung nicht effizient anwenden. Aus diesem Grund sollen sie jede Woche die Übungen ausgiebig und selbstkritisch nutzen!

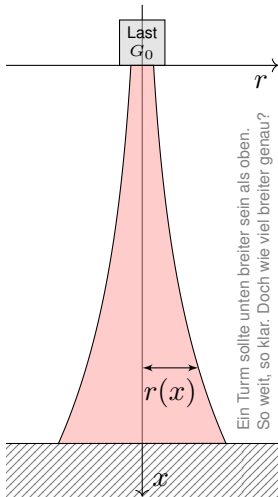
Ziele Ihrer universitären Ausbildung

Aus dieser ambitionierten Zielsetzung ergibt sich die Vorgehensweise:

- **Selbstständig:** Es geht nicht nur um Auswendiglernen, sondern um Verstehen und unabhängige Urteilsfähigkeit.
- **Sicher:** Es geht nicht nur um Intuition oder Spekulieren, sondern um nachvollziehbare Argumente und Rechnungen.
- **Kritisch:** Es geht nicht nur um Glauben oder (Auto)Suggestion, sondern um (selbst)kritische Fragen und sorgfältige Antworten.
- **Korrekt:** Sie beherrschen Definitionen, Sätze, Methoden, Proben. Gegenbeispiele zeigen Fehlerquellen, die es zu vermeiden gilt.
- **Kreativ:** Es geht nicht nur um fertige Rezepte, sondern um eigenständige Anwendung.

Manche:r möchte Werkzeuge anwenden, auch ohne zu verstehen. „Echte Macher lesen keine Bedienungsanleitung.“ Für Low-Tech mag das vielleicht genügen, bei High-Tech sicher nicht. Auch im Studium lockt diese scheinbare Abkürzung: unverstandene Rezepte blind anwenden. Das ist weder selbstständig noch sicher, weder kritisch noch kreativ, und meist nicht korrekt! Kurzum: Ohne Grundlagenwissen tappen Sie im Dunkeln und können die Werkzeuge nicht richtig nutzen. Damit verbauen Sie sich den Weg zu effizienten Lösungen, oder schlimmer noch, treffen fatale Fehlentscheidungen. Seriöse Ingenieursarbeit braucht grundlegendes Verständnis!

Ein hoher Turm braucht eine breite Basis.



Der Eiffelturm in Paris am Abend des 14.08.2013, Höhe 324m



Der Burj Khalifa in Dubai, Höhe 828m, Bildquelle: wikimedia

Aufgabe: Konstruieren Sie eine Säule aus einem Material konstanter Dichte ϱ , so dass der Druck (Last pro Fläche) überall konstant p ist. Zahlenbeispiel: Beton $\varrho = 3\text{g/cm}^3$, Last $G_0 = 4600\text{kN}$, Radius $r_0 = 1\text{m}$, Höhe 300m. Unser Modell ist vereinfacht, aber illustriert gut das Prinzip.

Ein hoher Turm braucht eine breite Basis.

Lösung: In Höhe x haben wir den Radius $r(x) > 0$ gemäß Skizze. Die Fläche ist $A(x) = \pi r(x)^2$, das Volumen $V(x) = \int_{h=0}^x \pi r(h)^2 dh$, das Gewicht $G(x) = g \rho V(x)$, der Druck $G(x)/A(x) = p$. Insgesamt:

$$g \rho \cdot \int_{h=0}^x \pi r(h)^2 dh \stackrel{!}{=} p \cdot \pi r(x)^2$$

Ableiten dieser Integralgleichung ergibt unsere Differentialgleichung:

$$g \rho \pi r(x)^2 = 2p \pi r(x) r'(x).$$

Diese ist elementar lösbar. Wir trennen die Variablen und integrieren:

$$\frac{r'(x)}{r(x)} = \frac{g \rho}{2p} =: c \Rightarrow \int_{h=0}^x \frac{r'(h)}{r(h)} dh = \int_{h=0}^x c dh \Rightarrow \ln r(x) - \ln r_0 = cx$$

Freistellen ergibt $r(x) = r_0 e^{cx}$. Der Radius wächst exponentiell!

Dank passender mathematischer Werkzeuge gelingt uns diese Rechnung erfreulich leicht.

Im Zahlenbeispiel gilt $p \approx 1500 \text{ kN/m}^2$ und $r(x) = 1 \text{ m} \cdot e^{x \cdot 0.01/\text{m}}$, also $r(300 \text{ m}) \approx 20 \text{ m}$.

Probe / Plausibilität: Die Druckfestigkeit liegt je nach Beton grob zwischen 10 und 100 N/mm².

Unsere Rechnung illustriert das Grundprinzip. Anwendungen berechnet man noch viel genauer!

Theorie und Anwendung: Modellierungskreislauf

😊 Abstraktion ist die Kunst, Wichtiges von Unwichtigem zu trennen. Differentialgleichungen nutzen wir zur Formulierung der Naturgesetze, sie sind die universelle Sprache der Naturwissenschaft und der Technik: Damit können wir Probleme formulieren, strukturieren, verstehen, lösen.

1. Grundlegendes Verständnis der vorliegenden Situation:

Um Anwendungen in der Physik, Mechanik, Thermodynamik, Strömungslehre, etc. zu verstehen, benötigen Sie zunächst die erforderlichen Grundkenntnisse der betroffenen Anwendungsgebiete: Naturgesetze, grundlegende Modelle, geeignete Vereinfachungen, etc.

😊 Erst so können Sie die Situation quantitativ und präzise erfassen.

2. Mathematische Modellierung der vorliegenden Situation:

Durch geeignete Vereinfachung, Formalisierung und Abstraktion erhalten Sie ein mathematisches Modell. Dieses besteht aus den relevanten Größen und den zwischen ihnen gelten Beziehungen, meist geeignete Gleichungen, sehr häufig Differentialgleichungen.

😊 Hierzu nutzen Sie die Techniken Ihrer HM und weitere nach Bedarf.

3. Lösung durch geeignete mathematische Werkzeuge: Dazu lernen Sie hier die grundlegenden Rechentechniken. Das ist ein weites Gebiet! Je nach Ihren Anwendungen vertiefen Sie die nötigen Techniken zur numerischen Näherung, zu partiellen Differentialgleichungen, etc.

😊 Lösungen sind oft schwer zu finden, aber leicht zu überprüfen. Zur Sorgfalt gehört, die gefundenen / benachbarte / alle Lösungen zu prüfen, zu diskutieren und umsichtig alle Sonderfälle zu beachten.

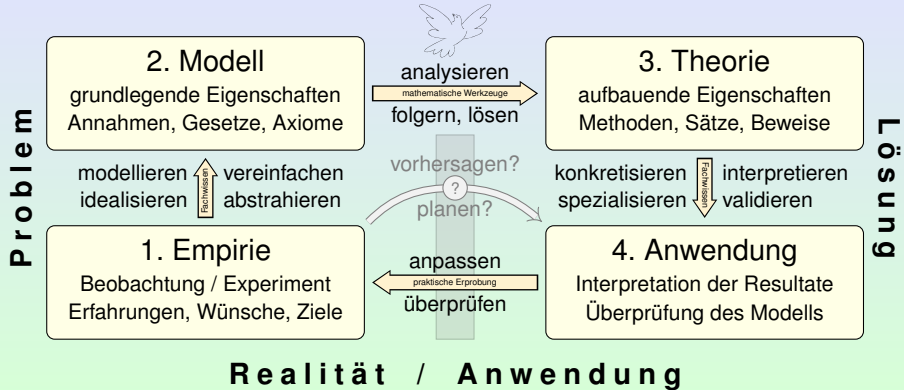
4. Anpassung und Überprüfung anhand gegebener Daten:

Ist eine mathematische Lösung oder numerische Näherung gelungen, so passen Sie schließlich die noch freien Parameter des Modells an die gegebenen Daten an und überprüfen soweit möglich die Vorhersagen des Modells durch Experimente, Messungen, Alternativmodelle, etc.

⚠ Falls nötig muss erneut ab (1) ein besseres Modell erstellt werden. Diese Vorlesung konzentriert sich auf die Lösungsmethoden (Schritt 3). Aus Ihren Vorlesungen kennen Sie bereits einige Anwendungen (1,2,4), viele weitere werden noch folgen. Nutzen Sie diese Querverbindungen!

Wo, wie, warum ist Mathematik nachhaltig erfolgreich?

Theorie / Mathematik



Konkrete Anwendung benötigt abstrakte Kenntnisse; je anspruchsvoller, desto mathematischer! Alles Denken beruht auf Modellen; diese können *deskriptiv* oder *normativ* eingesetzt werden. Deskriptiv: beschreibend (Kettenlinie), erklärend (Planetenbewegung), vorhersagend (Wetter). Normativ: vorschreibend (Bauplan), planend (Raumsonde), gesetzgebend (Klimaschutz). Ingenieur:innen wollen beides, nicht nur passiv vorhersagen, sondern auch aktiv steuern und beeinflussen. Hierzu benötigen Sie ausreichend starke mathematische Werkzeuge.

Wo, wie, warum ist Mathematik nachhaltig erfolgreich?

Die Differential- und Integralrechnung kennen Sie aus der HM1&2 und wissen bereits, wie nützlich sie Ihnen jetzt schon in Anwendungen ist. Diese Techniken werden wir dieses Semester ausbauen und vertiefen: Integralrechnung und ihre Anwendung auf Differentialgleichungen.

Hierzu möchte ich gleich zu Beginn einige berühmte Anwendungen skizzieren, so dass Sie sich einen ersten Eindruck verschaffen können. Im obigen Beispiel suchen wir eine geeignete Form unseres Turmes. Es ist demnach nicht nur eine Zahl gesucht, sondern eine Funktion!

Die Aufgabe führt zu einer Differentialgleichung, also einer Gleichung, in der die gesuchte Funktion $y(x)$ und ihre Ableitungen $y'(x)$ auftreten. Viele Modelle in Naturwissenschaft und Technik haben diese Form:

Differentialgleichungen sind die Sprache der Naturgesetze.

Auch wenn Sie die nötigen Methoden jetzt noch nicht kennen, so können Sie doch sinngemäß erraten, welche Techniken wir brauchen werden. Sie können so in etwa die Ziele erkennen, auf die wir hinarbeiten. Diese Versprechen werde ich in den nächsten Wochen einlösen.

Newton's Himmelsmechanik: die Bewegungsgleichung

Aufgabe: Nennen Sie die Bewegungsgleichung für Körper $k = 1, \dots, n$ mit Masse $m_k > 0$, Position $u_k(t) \in \mathbb{R}^3$ und Geschwindigkeit $v_k(t) \in \mathbb{R}^3$.

Lösung: Newton's Gravitationsgesetz ergibt die Differentialgleichungen

$$\dot{u}_k \stackrel{(0)}{=} v_k, \quad \dot{v}_k \stackrel{(1)}{=} f_k(u) \stackrel{(2)}{=} \sum_{j \neq k} \gamma m_j (u_j - u_k) / |u_j - u_k|^3.$$

Vorgegeben sind die Anfangsdaten $u_k(0)$ und $v_k(0)$ zur Zeit $t = 0$.

Als Lösung gesucht ist die Bewegung $(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n) : [0, T[\rightarrow \mathbb{R}^{6n}$.

Erlaubt ein so komplexes System immer genau eine Lösung? Ja, das ist der zentrale $\exists$ &E-Satz! Kollision oder Expulsion nach ∞ sind möglich: Eventuell existiert die Lösung nur für eine kurze Zeit $T > 0$. Für manche Startwerte sind Lösungen periodisch, oder beinahe: Zu unserem Glück!

😊 Den Fall $n = 2$ lösen Kegelschnitte: Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln.

😞 Für $n \geq 3$ lässt sich dieses DGS i.A. nicht geschlossen lösen!

😊 Euler-Verfahren: diskrete Zeitschritte $0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots$,

$$u_k(t_{i+1}) \approx u_k(t_i) + v_k(t_i) \cdot (t_{i+1} - t_i),$$

$$v_k(t_{i+1}) \approx v_k(t_i) + f_k(u) \cdot (t_{i+1} - t_i).$$

Newtons Himmelsmechanik: der historische Triumph

Das Verständnis der **Himmelsmechanik** markiert den Übergang vom Mittelalter zur Neuzeit.

Die Beobachtung des Nachthimmels und seiner Sterne fasziniert uns Menschen seit Alters her. Neben den zahlreichen „Fixsternen“ (weit entfernte Sterne) erkennen wir einige „Wandelsterne“ (Planeten unseres Sonnensystems). Ihre Bewegung lässt Regeln erahnen, doch für Wandelsterne scheinen diese zunächst kompliziert und verwirrend. Sie quantitativ zu erfassen und gründlich zu verstehen, ist einer der großen Triumphe menschlicher Neugier und systematischer Forschung!

Von der Erde besehen scheinen sich alle Sterne um uns zu drehen, doch die exakte Bewegung der Planeten erweist sich als schrecklich kompliziert. Kopernikus' heliozentrisches Modell (1543) ist einfacher, daher nützlicher: Die Bahnen der Planeten um die Sonne erweisen sich recht genau als Ellipsen. Diese Koordinatentransformation hat enorme Wirkung und schreibt Weltgeschichte!

Aus Tycho Brahes präzisen **Beobachtungsdaten** leitete Johannes Kepler drei Gesetze ab, die die Ellipsenbewegung der Planeten um die Sonne gut *beschreiben*. Eine *Erklärung* der Bewegungen durch einheitliche physikalische Prinzipien gelang erst Isaac Newton 1686 mit seinen Principia!

Die moderne Naturwissenschaft beginnt mit Newtons Formulierung der drei Bewegungsgesetze, des universellen Gravitationsgesetzes und seiner Lösung des Zwei-Körper-Problems. Mit einer Handvoll physikalischer Prinzipien und den passenden mathematischen Werkzeugen konnte er die Keplerschen Regeln *erklären*, ja *herleiten*. Newtons revolutionäre Idee: Überall im Universum gelten dieselben Gesetze! Newtons Mechanik erklärt die Schwerkraft hier auf Erden ebenso wie außerirdische Phänomene: den Umlauf der Planeten um die Sonne und des Mondes um die Erde, sogar die Gezeiten unserer Meere, die Coriolis-Kraft und das Foucaultsche Pendel. Universell!

Warum hilft Abstraktion?

Mathematik ist zugleich abstrakte Theorie und konkrete Anwendung.
Sie erklärt und quantifiziert Zusammenhänge: Das ist ihr Nutzen!
Dank Abstraktion ist sie universell anwendbar: Das ist ihre Stärke!
Sie ist schön und gut: ästhetische Kunst und nützliches Handwerk.

*Les mathématiques ont un triple but. Elles doivent fournir
un instrument pour l'étude de la nature. Mais ce n'est pas tout:
elles ont un but philosophique et, j'ose le dire, un but esthétique.*

Henri Poincaré (1854–1912)

Das Wort „abstrakt“ missbraucht der Ignorant gern als Schimpfwort für alles, worüber ihm die Kenntnis fehlt oder wovor er die Mühe scheut.

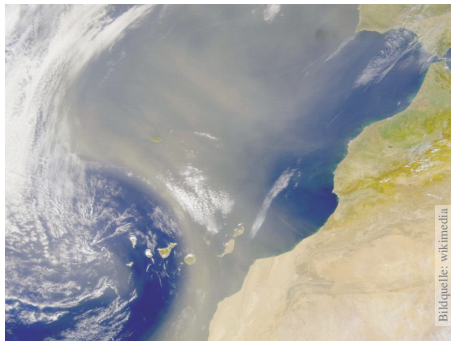
Zur Klarstellung muss und will ich Partei ergreifen für die Abstraktion:
Abstraktion strukturiert und vereinfacht: Eine allgemeine Tatsache ist oft leichter zu verstehen und zu erklären als ihre zahlreichen Spezialfälle.
Denkökonomie: Daten ändern sich, Methoden bleiben bestehen.



Daher betone ich konkrete historische Beispiele zum Wechselspiel von Theorie und Anwendung. Die Geschichte ist lehrreich und lohnend.

Die Kontinuitätsgleichung der Strömungslehre

Ziel: Wie verhalten sich Strömungen? Welche Gleichungen gelten hier?



Luft- und Wasserströmung um die Kanarischen Inseln

(0) Wie beschreiben Sie eine Strömung in einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ über ein Zeitintervall $I = [t_0, t_1]$? Geschwindigkeit $\vec{v}: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3: (t, \vec{x}) \mapsto \vec{v}(t, \vec{x})$ und Massendichte $\rho: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}: (t, \vec{x}) \mapsto \rho(t, \vec{x})$ und evtl. weitere Daten. Die Massenstromdichte $\rho \vec{v}: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ beschreibt den Massenfluss. Im Strömungsbereich Ω werde Masse weder erzeugt noch vernichtet.

Die Kontinuitätsgleichung der Strömungslehre

Aufgabe: Welche Beziehung folgt aus der Massenerhaltung?

- (1) Sei $K \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ kompakt, etwa ein Würfel. Formulieren Sie die Massenbilanz für K in Worten und als Volumen-/Flussintegrale.
- (2) Formen Sie dies um zu einem einzigen Volumenintegral.
- (3) Folgern Sie hieraus die zugehörige Differentialgleichung.
- (4) Was folgt für inkompressible Strömungen, also für $\varrho = \text{const}$?

Lösung: (1) Die über die Randfläche $S = \partial K$ ausströmende Masse geht der Gesamtmasse in K verloren. Als Integralgleichung formuliert:

$$\frac{d}{dt} \iiint_K \varrho \, dK + \iint_{S=\partial K} (\varrho \vec{v} \cdot \vec{n}) \, dS = 0$$

- (2) Wir dürfen die Ableitung unter das Integral ziehen dank Kompaktheit des Integrationsbereichs K und Stetigkeit der Ableitung $\partial \varrho / \partial t$:

$$\frac{d}{dt} \iiint_K \varrho \, dK \stackrel[\text{D3c}]{\text{Kpkt}} \iiint_K \frac{\partial \varrho}{\partial t} \, dK$$

Die Kontinuitätsgleichung der Strömungslehre

Wir wollen auch das Flussintegral in diese Form bringen und dann beides zusammenfassen. Dies gelingt mit dem Satz von Gauß (G3G):

$$\oiint_{S=\partial K} (\varrho \vec{v} \cdot \vec{n}) \, dS \stackrel[\text{G3G}]{\text{Gauß}} = \iiint_K \operatorname{div}(\varrho \vec{v}) \, dK$$

Dank Linearität des Integrals erhalten wir ein einziges Volumenintegral:

$$\iiint_K \left[\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \vec{v}) \right] dK = 0$$

(3) Diese lokale Massenbilanz gilt für jedes Kompaktum $K \Subset \Omega$. Das gilt genau dann, wenn der (stetige!) Integrand verschwindet:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \vec{v}) = 0$$

Diese **Kontinuitätsgleichung** ist grundlegend für die Strömungslehre.

(4) Für inkompressible Strömungen gilt $\varrho = \text{const}$ und somit $\operatorname{div} \vec{v} = 0$. Anschaulich: In jedes Volumen K fließt ebensoviel hinein wie heraus. Hierzu genügt allgemein bereits $\partial_t \varrho + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \varrho = 0$. Sehen Sie warum?

Fouriers Wärmeleitungsgleichung

Ziel: Wie berechnen wir den Wärmefluss in einem Körper?



Wärmebilanz für $K = \text{Kaninchen}$ bei $t \in \text{Winter}$

Wir betrachten ein Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ und ein Zeitintervall $I = [t_0, t_1]$ und suchen eine Beziehung zwischen Wärmeleistungsdichte $q: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, Wärmedichte $u: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und Wärmefluss $\vec{f}: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Fouriers Wärmeleitungsgleichung

- Aufgabe:** (1) Sei $K \Subset \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ kompakt, etwa ein Würfel. Formulieren Sie die Wärmebilanz für K in Worten und als Volumen-/Flussintegrale.
- (2) Formen Sie dies um zu einem einzigen Volumenintegral.
- (3) Folgern Sie hieraus die zugehörige Differentialgleichung.
- (4) Vereinfachen Sie schließlich durch die Annahme $\vec{f} = -\kappa \nabla u$.

Lösung: (1) Für jedes Kompaktum $K \Subset \Omega$ gilt die Wärmebilanz:

Von den Wärmequellen in K zugeführte Energie
 = Zuwachs der in K enthaltenen Wärmeenergie
 + Wärmefluss über den Rand von K nach außen

Als Integralgleichung formuliert bedeutet dies:

$$\iiint_K q(t, x) \, dx = \frac{d}{dt} \iiint_K u(t, x) \, dx + \iint_{S=\partial K} \vec{f}(t, x) \cdot \vec{n} \, dS$$

Alle Funktionen seien so oft stetig differenzierbar wie in der folgenden Rechnung benötigt. Ich greife hier schon mal vor: q sei stetig, f einmal stetig diff'bar, u zweimal stetig diff'bar.

Fouriers Wärmeleitungsgleichung

(2) Mit Gauß (G3G) verwandeln wir Flussintegrale in Volumenintegrale:

$$\oiint_{S=\partial K} \vec{f}(t, x) \cdot \vec{n} \, dS \stackrel[\text{G3G}]{\text{Gauß}} \iiint_K \nabla \cdot \vec{f}(t, x) \, dx$$

Dürfen wir die Ableitung unters Integral ziehen? K kompakt, $\partial_t u$ stetig!

$$\frac{d}{dt} \iiint_K u(t, x) \, dx \stackrel[\text{D3c}]{\text{Kpkt}} \iiint_K \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) \, dx$$

Dank Linearität des Integrals erhalten wir ein einziges Volumenintegral:

$$\iiint_K \left[\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + \nabla \cdot \vec{f}(t, x) - q(t, x) \right] dx = 0.$$

(3) Diese lokale Wärmebilanz gilt für jedes Kompaktum $K \Subset \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$.
Das gilt genau dann, wenn der (stetige!) Integrand verschwindet (H1A):

$$\partial_t u(t, x) + \nabla \cdot \vec{f}(t, x) = q(t, x)$$

Diese Gleichung gilt überall dort, wo etwas entsteht (q), gespeichert wird (u) und fließt ($\vec{f}$).
Die Wärmeleitungsgleichung heißt deshalb auch Diffusionsgleichung und tritt in vielfältigen Anwendungen auf. Wir werden sie am Ende des Semesters mit Fourier-Theorie lösen können.
Spezialfall: Für $q = 0$ sowie $u = \varrho$ und $\vec{f} = \varrho \vec{v}$ erhalten wir erneut die Kontinuitätsgleichung.

Fouriers Wärmeleitungsgleichung

(4) Wärme fließt von warm nach kalt, genauer $\vec{f} = -\kappa \nabla u$. Einsetzen:

$$\partial_t u(t, x) + \nabla \cdot [-\kappa \nabla u(t, x)] = q(t, x)$$

Mit dem Laplace–Operator $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ schreiben wir dies kurz

$$\partial_t u - \kappa \Delta u = q \quad \text{mit} \quad \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2.$$

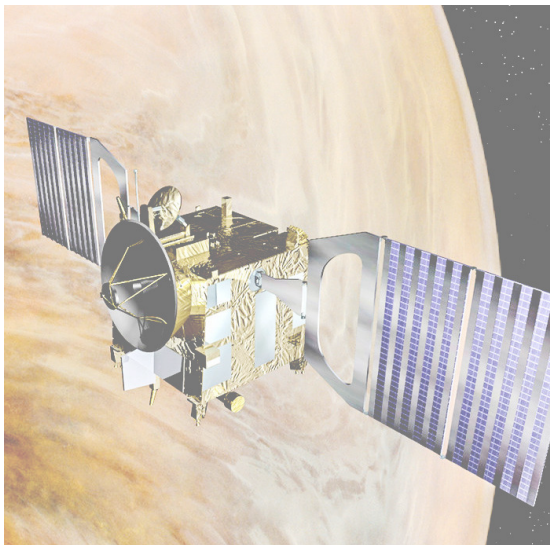
Physikalische Begründung: Wärme ist (vereinfacht) proportional zur Temperatur T , genauer $u = \varrho c T$ mit Dichte ϱ und Wärmekapazität c . Sie fließt proportional zur Temperaturdifferenz, also $\vec{f} = -\lambda \nabla T$ mit Wärmeleitfähigkeit λ . Demnach gilt $\vec{f} = -\kappa \nabla u$ mit $\kappa := \lambda/(\varrho c)$. [§223](#)
Zur Vereinfachung sei hier die Temperaturleitfähigkeit $\kappa(t, x)$ räumlich konstant und isotrop.

Wir erhalten so Fouriers berühmte **Wärmeleitungsgleichung** (1822):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \Delta u = q \quad \text{mit} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

Dies ist eine lineare partielle Differentialgleichung in u (links) mit Inhomogenität q (rechts). Sie beschreibt, wie sich die Wärme in einem Körper ausbreitet. Joseph Fourier (1768–1830) hat sie in seiner Arbeit *Théorie analytique de la chaleur* 1822 erstmals eingehend untersucht und hierzu die nach ihm benannte Fourier–Theorie entwickelt, mit der wir uns dieses Semester beschäftigen. Gesucht ist u , gegeben sind Anfangswerte und q . Wie sehen die Lösungen aus? Im homogenen Fall ohne Quellen ($q = 0$) können wir die Fundamentallösung angeben! [§516](#)

Mars & Venus Express



Zwei Missionen der ESA:

Start Jun. 2003 in Baikonur
Mars-Orbit ab Jan. 2004

→ Suche nach Wasser

Start Nov. 2005 in Baikonur
Venus-Orbit ab Apr. 2006

→ Atmosphäre der Venus

Orbiter: Masse 633kg leer
plus Treibstoff (MMH+NTO)

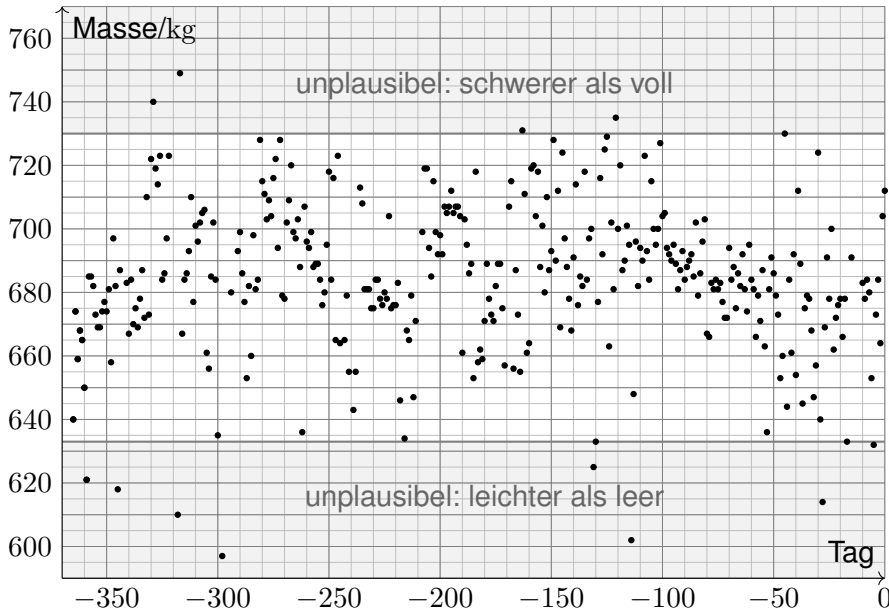
Acht Steuertriebwerke mit
je 10N Schub (im Labor)

Fortsetzung oder Ende:
Wie lange reicht der Sprit?

Siehe en.wikipedia.org/wiki/Mars_Express und [/Venus_Express](http://en.wikipedia.org/wiki/Venus_Express)

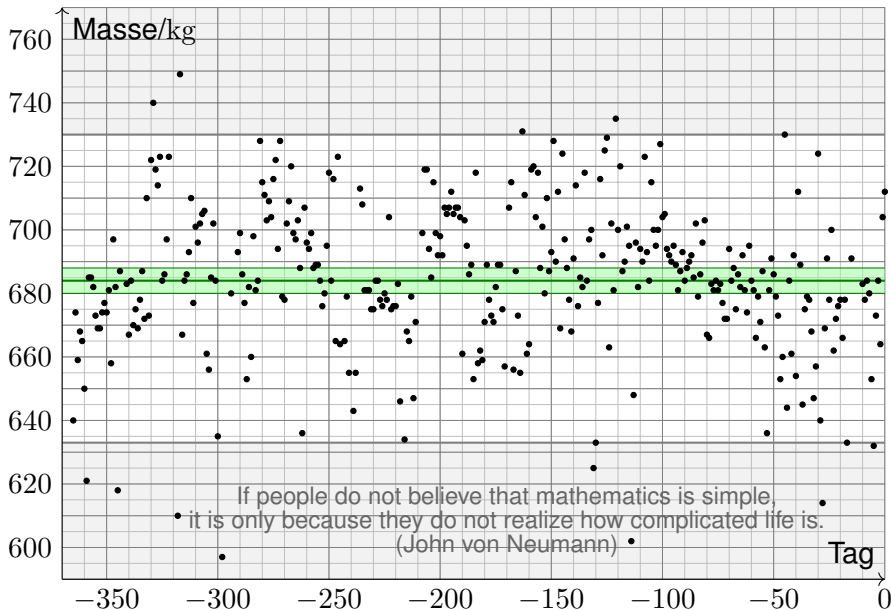
Venus Express: Wieviel Treibstoff ist noch im Tank?

Aus Steuermanövern errechnete Masse für 366 Tage bis 31.12.2012.



Mathematische Statistik: Konfidenzintervalle

Jahresmittelwert der Gesamtmasse mit 3σ -Konfidenzintervall.



Mathematische Statistik: lineare Regression

Regressionsgerade mit Konfidenzintervallen: 1σ , 2σ , 3σ .

