Höhere Mathematik 3 (vertieft)

für Luft- und Raumfahrttechnik (LRT)
und Materialwissenschaft (MaWi)

erkennen.
verstehen.
anwenden.

Prof. Dr. Michael Eisermann
Institut für Geometrie und Topologie (IGT)
michael-eisermann.de/lehre/HM3

Universität Stuttgart

Wintersemester 2024/25
Vollversion 26.02.2025

Für die Mitteilung von Unklarheiten und Fehlern aller Art
sowie für Verbesserungsvorschläge bin ich stets dankbar!

Habe Mut, dich deines eigenen
Verstandes zu bedienen!

Much to learn, you still have.
This is just the beginning.

Urheberrecht und Haftungsausschluss

Diese Unterlagen dienen zur Vorlesung *Höhere Mathematik 3 (vertieft)*. Sie sind konzipiert für das Mathematik-Grundstudium in den Natur- und Ingenieurwissenschaften und vermitteln einschlägiges Basiswissen. Zusammen mit den Grundlagen umfassen sie über 800 Aufgaben mit Lösungen, die Schönsten davon entstanden in Zusammenarbeit mit Dr. Friederike Stoll.

Die Inhalte wurden vom Autor mit größter Sorgfalt für die Präsentation in der Lehre erstellt. Sie werden allein zu Lehrzwecken zur Verfügung gestellt, in der Hoffnung, dass sie zum Lernen und Üben nützen mögen, ohne jeden Anspruch auf Eignung zu irgendeinem anderen Zweck. Sie sind keine Handlungsanweisung oder Empfehlung. Nur eigenständiges Denken hilft!

Kunst und Wissenschaft, Forschung und Lehre sind frei. (GG Art. 5.3.1) Der Autor übernimmt keinerlei Gewähr für die angebotenen Informationen und Daten, deren Aktualität, Korrektheit, Vollständigkeit, Qualität oder irgendeine Nutzbarkeit außerhalb der Lehre. Haftungsansprüche für mögliche Schäden, materieller oder immaterieller Art, sind grundsätzlich ausgeschlossen.

Für Inhalte externer Quellen, insb. verlinkter Webseiten, ist stets deren Anbieter verantwortlich.

Wie nutzen Sie dieses Vorlesungsskript?

Es gibt nichts Praktischeres als eine gute Theorie. (Immanuel Kant, 1724–1804)

Diese Folien dienen als Grundlage meiner Vorlesung. Wie von Studierenden gewünscht, können sie auch eigenständig genutzt werden, zum Nacharbeiten, zur Klausurvorbereitung, oder notfalls als Ersatz zur Vorlesung. Dazu sind *Definitionen* und *Sätze* mit zahlreichen *Übungen* verwoben; sie bilden daher kein knappes Nachschlageheft, sondern ein umfängliches Lese- und Arbeitsbuch.

Die Vortragsfolien sind durch blaue Titelbalken leicht zu erkennen. Dem studentischen Wunsche folgend präsentiere ich vielfältige *Beispiele* und *Aufgaben mit Lösungen*, zudem *Erläuterungen*, *Erinnerungen* und *Ergänzungen*, instruktive *Rechnungen* und manchmal *Beweise*. Dies folgt der bewährten Erfahrung, dass die Leserin und der Leser leichter eine vorhandene Übung, Erklärung oder Illustration übergehen kann, als eine fehlende selbst (er)finden. Möge es beiden nützen!

Ich versuche, jedes Thema so einfach wie möglich darzustellen, doch so präzise und ausführlich wie es für ein solides Verständnis nötig ist. Erklärungen und Hinweise, die ich in der Vorlesung mündlich gebe, sind hier schriftlich ausgeführt; sie nützen mir als Erinnerung, den Leser:innen als Erläuterung. Eine ideale Mischung für alle und jede:n gibt es leider nicht: Der Bedarf nach Umfang und Tiefe ist individuell unterschiedlich. Das Angebot ist reich. Dosieren Sie selbst!

Neben der *Vollversion* biete ich versuchsweise auch eine *Halbversion*, die mit der Axt auf halbe Länge gekürzt wurde, durch Löschung zahlreicher Beispiele und Aufgaben, Erinnerungen und Illustrationen, Ausführungen und Ergänzungen. Je nach Bedarf der Leser:in ist dies an manchen Stellen hilfreich, an anderen fehlt es. Wer es sich zutraut, nutzt die Vollversion und dosiert selbst.

Wozu benötigen Sie mathematische Methoden?

Alles Leben ist Problemlösen. (Sir Karl Popper, 1902–1994)

Verständnis und Beherrschung komplexer Zusammenhänge benötigen Empirie *und* Theorie, quantitative Modelle und sorgfältige Planung. Diese beruhen im Wesentlichen auf Mathematik. Der Beruf des Ingenieurs (m/w/d) und vieler anderer ist daher zunehmend mathematisch geprägt. Mathematische Methoden sind häufig Voraussetzung für den Erfolg technischer Entwicklungen; das gilt auch, wenn sie beim Endprodukt im Inneren wirken und oberflächlich nicht sichtbar sind. Deshalb nutzen Sie bereits im Studium vielfältige und umfangreiche mathematische Methoden, und hierzu legt Ihre Mathematikausbildung im Grundstudium das notwendige Fundament.

Es ist dabei völlig unmöglich, alle in späteren Anwendungen relevanten Techniken zu behandeln, sozusagen als Enzyklopädie auf Vorrat. Dazu sind die Anforderungsprofile allzu unterschiedlich: Was für den einen schon viel zu viel wäre, ist für die andere noch längst nicht umfassend genug. Zukünftige Ingenieur:innen sollen daher nicht nur die allgegenwärtigen Grundfertigkeiten lernen, sondern auch mathematische Denkweisen und systematische Problemlösung, um je nach Bedarf erforderliche neue Methoden selbstständig erwerben, vertiefen und anwenden zu können.

Es ist in hochqualifizierten Berufen unwahrscheinlich, dass Sie genau dieses oder jenes *Beispiel* wörtlich anwenden. Das gilt ganz allgemein, selbst für die bestmögliche Auswahl von Beispielen. Hingegen ist es wahrscheinlich, dass Sie diese oder ähnliche bewährte *Methoden* häufig nutzen. Sie sollen daher nicht nur *Beispiele* lernen, sondern zugleich möglichst vielseitige *Methoden*! Mathematik ist immer beides: sowohl abstrakte Theorie als auch konkrete Anwendung; sie sind keine Gegensätze, sie ergänzen sich, die eine kann nur mit der anderen dauerhaft erfolgreich sein.

Wozu lernen Sie Mathematik?

Hochtechnologie ist immer auch mathematische Technologie.

Sie haben forschungsorientierte Studiengänge gewählt, Sie studieren ambitionierte Fächer, hierzu brauchen Sie handfeste Mathematik.

Was Sie hier lernen, können Sie überall nutzbringend anwenden. Mit diesen Werkzeugen können Sie auch dicke Bretter bohren.

Theorie und Anwendung sind keine Gegensätze, sie ergänzen sich und arbeiten wunderbar effizient zusammen wie linke und rechte Hand.

Mathematik ist zugleich abstrakte Theorie und konkrete Anwendung. Dank Abstraktion ist sie universell anwendbar: Das ist ihre Stärke!

Wozu lernen Sie Mathematik?

Mathematik ist Grundlage und Werkzeug aller modernen Technologie.

Als Ingenieur:in brauchen Sie Ihr methodisches Handwerkszeug. Dazu gehört als harter Kern und Grundlage die Höhere Mathematik. Je anspruchsvoller die Aufgabe, desto wichtiger wird die Mathematik.

Sie können das begrüßen oder bejammern, es ist und bleibt Tatsache: Theorie ist nicht Ballast oder Schikane, sondern effizientes Werkzeug.

Viele von Ihnen wissen bereits, dass Sie mathematische Werkzeuge dringend brauchen. Andere finden es demnächst heraus, hoffentlich bereits in dieser Grundlagenvorlesung, andernfalls nachfolgend in Anwendungen und Vertiefungen in Studium und Beruf. Je früher und je gewissenhafter Sie Ihr Handwerkszeug erlernen, desto besser.

Die Mathematik bietet Ihnen extrem präzise und scharfe Werkzeuge. Zur effizienten Nutzung brauchen Sie einige grundlegende Kenntnisse. Greifen Sie nicht wahllos in die Kiste oder packen die Werkzeuge am falschen Ende: Wissen macht Ah! Unwissen macht Aua!

Vor uns liegt ein sehr anspruchsvolles und sehr lohnendes Semester. Ich beginne am Ende und will Ihnen zeigen, wo die Reise hingeht: Wozu nutzen Sie diese Methoden? Welche Aufgaben können Sie damit lösen, die jetzt noch außerhalb Ihrer Reichweite liegen?

Wozu lernen Sie jetzt schon Mathematik?

Frage nicht nur, was die HM jetzt schon für dich tun kann.
Frage vor allem, was du jetzt schon für die HM tun kannst.

Wenn du ein Schiff bauen willst, lehre deine Leute nicht nur ihr Handwerk, sondern erwecke ihre Sehnsucht nach dem Meer!

Wozu lernen Sie jetzt schon Mathematik?

Dem Anwenden muss das Erkennen vorausgehen. (Max Planck, 1858–1947)

Manche:r schimpft auf die „lästige Theorie“ und scheitert alsbald an allzu naiver Anwendung, getreu dem Slogan „Plane nicht, irre lieber!“. Manchmal geht das gut, aber meist leider nicht. Wem nichts besseres einfällt, der prangert pauschal die „Theorielast“ des Studiums an und fordert unspezifisch aber publikumswirksam „Praxisbezug“. Hohle Sprüche werden gerne wiedergekäut.

Wer Mathematik anwendet, weiß es besser: Theorie ist keine Last, sondern wirksames Werkzeug. Gute Ingenieur:innen kennen die möglichen Methoden und entscheiden umsichtig und informiert. Die Erfahrung zeigt: Immer häufiger sind mathematische Methoden der Schlüssel zum Erfolg. Ambitionierte Studiengänge bauen daher konsequent auf umfassende mathematische Grundlagen.

Manche Studenten (m/w/d) des Ingenieurwesens skandieren die Forderung „Wir wollen keine Theorie, sondern nur Beispiele!“ Wenn das Ihre persönliche Überzeugung ist, überdenken Sie Ihre Studienwahl: Es gibt rein *anwendungsorientierte* Ausbildungen mit einem Minimum an Theorie. Für ein *forschungsorientiertes* Studium wäre das unzureichend, allzu einseitig und kurzsichtig. Wie oben erklärt, sollen Sie nicht nur *Beispiele* lernen, sondern möglichst vielseitige *Methoden*!

Der Nutzen konkreter Beispiele zum Erlernen einer Methode steht außer Frage. Ebenso wichtig ist jedoch die zugrundeliegende Theorie: Sie ordnet und erklärt. Das ist meist ein zweistufiger Vorgang: Diese Vorlesung rückt Beispiele soweit möglich in den Vordergrund, stellt aber auch die notwendige Theorie zur Verfestigung und Vertiefung bereit. Damit Sie sich diese Grundlagen möglichst gut aneignen können, werde ich Definitionen und Sätze explizit formulieren und ausführlich behandeln, und deren sichere Beherrschung später auch von Ihnen erwarten.

Mathematik ist schön und nützlich.

Als Ingenieur:in wollen Sie komplexe, praktische Probleme lösen. Dazu brauchen Sie theoretische Grundlagen und mathematische Methoden.

Sie haben forschungsorientierte Studiengänge gewählt: LRT und MaWi. Je anspruchsvoller die Aufgabe, desto mathematischer die Werkzeuge!

Genau zu diesem Ziel bietet und verlangt Ihr Studiengang die HM3. Mit Ihrem Engagement im Studium entscheiden Sie über Ihre Zukunft.

Die richtige Wahl: Aufwärtsspirale — engagiert mitarbeiten, gemeinsam lernen, erfolgreich studieren.

Die falsche Wahl: Abwärtsspirale — desinteressiert mitlaufen, planlos vertrödeln, frustriert aufgeben.

Lohnt sich Ihre Investition in die HM3? Ja, sicher! Fragen Sie Alumni...

1. spannende Themen, schöne und nützliche Mathematik.
2. klare Struktur, hervorragende Betreuung, faire Klausur.

Mathematik ist schön und nützlich.

Die HM3 lässt niemanden kalt. Es gibt zu ihr nur zwei Ansichten:

- Die einen lieben die HM3, sie wissen bereits, dass sie Mathematik dringend benötigen, sie erlernen und nutzen sie daher frühzeitig.
- Alle anderen hingegen... erst später.

Wir beantworten heute die großen Fragen des Lebens... zumindest für dieses Semester in der Höheren Mathematik 3:

Was kann ich wissen?
Was soll ich tun?
Was darf ich hoffen?
Immanuel Kant (1724–1804)

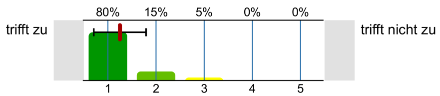
Die HM3 ist für Sie nicht nur Verpflichtung, sondern auch Chance!

Erkläre es mir, und ich werde es vergessen.
Zeige es mir, und ich werde mich erinnern.
Lass es mich tun, und ich werde es verstehen.
Konfuzius (551–497 v.Chr.)

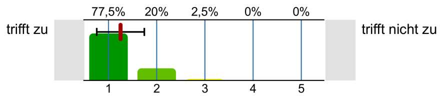
Mathematik ist schön und nützlich... und anspruchsvoll.

In aller Bescheidenheit: Unsere HM3 ist sensationell gut.

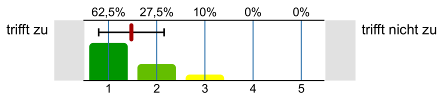
Die Lehrveranstaltung ist außerordentlich gut organisiert.



Es wird auf die Anliegen und Belange der Studierenden eingegangen.

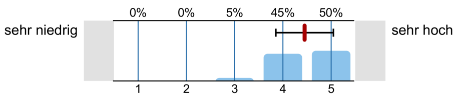


Ich habe durch die Teilnahme an dieser Lehrveranstaltung viel gelernt.

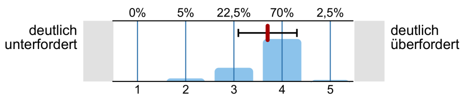


Klar und ehrlich: Studieren heißt sich bemühen!

Im Vergleich zu anderen Lehrveranstaltungen sind die Anforderungen in dieser LV an mich...



Die Lehrveranstaltung hat mich ...



Mathematik ist schön und nützlich... und anspruchsvoll.

Warum erzähle ich Ihnen das? Sie können mit uns rechnen!

Ich möchte, dass Sie vernünftig handeln und erfolgreich studieren. Zu dieser Entscheidung gebe ich Ihnen die nötigen Informationen. Sie haben die Freiheit, unvernünftig zu handeln und zu scheitern. Ich kann Ihnen den Weg zeigen, gehen müssen Sie ihn selbst.

Die Rückmeldungen sind insgesamt sehr positiv, die Befragungen sind sensationell gut, besonders für eine Grundvorlesung am Studienanfang und zudem gar in der Mathematik, als Service im Ingenieurwesen. Unser Gesamtpaket der Höheren Mathematik 3 ist hervorragend.

Dafür arbeite ich extrem hart, genauer gesagt: Ihr gesamtes HM3-Team! Von Ihnen erwarte ich dasselbe: ernsthaftes Engagement und Mitarbeit. Mir ist wichtig, diese Grundfrage anfangs ein für alle mal zu klären. Anschließend können wir uns auf Inhalte konzentrieren!

Quidquid agis, prudenter agas et respice finem!
[Was immer du tust, handele klug und bedenke das Ende!]

Unser Ilias-Kurs ist informativ und liebevoll gestaltet.

Magazin > Naturwissenschaften und Mathematik > Mathematik > Lehrveranstaltungen > Winter 2024/25 > Höhere Mathematik 3 vertieft - WiSe 24/25

Höhere Mathematik 3 vertieft - WiSe 24/25

Aktionen

Inhalt | Timeline | Info | Mitglieder

Herzlich willkommen zur Höheren Mathematik 3 vertieft!

Startseite

In diesem Ilias-Kurs finden Sie Informationen und Online-Materialen zu unserer Veranstaltung:

- Zur **Vorlesung mit integrierter Vortragsübung** bieten wir Ihnen unser Skript, erprobt und umfassend. Gerne geschehen, möge es nützen!
- Jede Woche lösen Sie hier in Ilias ein **hilfreiches Quiz**. Damit wiederholen Sie den aktuellen Vorlesungsstoff und sind so für die Übungen bestens vorbereitet.
- Zur **Übung** erstellen wir für Sie jede Woche ein Übungsblatt mit gut abgestimmten Aufgaben. Die Präsenzübungen lösen Sie mit Ihren Kommiliton:innen in der Übung, als Vorbereitung für die Hausübungen.
- Im **Forum** können Sie anonym Ihre Fragen stellen und erhalten kompetente Auskunft.

V Q Ü S

HM3-Termine im Überblick

Vorlesung und integrierte Vortragsübung

- Dienstag, 8:00 - 9:30 Uhr in V 57.03
- Dienstag, 14:00 -15:30 Uhr in V47.02
- Freitag, 11:30 - 13:00 Uhr in V 47.01

Die **erste Vorlesung** findet am **Dienstag, den 15. Oktober 2024**, statt.

Quizze

Wöchentlich veranstalten wir ein Quiz jeweils von Freitag, 13 Uhr, bis Dienstag, 8 Uhr.

Das **erste Quiz** startet am **Freitag, den 18. Oktober 2024**.

Gruppenübungen

Die Gruppenübungen finden mittwochs, donnerstags und freitags in verschiedenen Blöcken statt. Die genauen Zeiten und Räume finden Sie im Gruppenübungsordner.

Die **Anmeldung zu den Übungen** findet am **Mittwoch, den 16. Oktober 2024, von 9 bis 17 Uhr** hier in Ilias statt. Treten Sie dazu einer der Ilias-Gruppen im Gruppenübungsordner bei.

Das **erste Übungsblatt** (Bonusblatt 0 zur Wiederholung) gibt es schon in der ersten Woche. Die **ersten Übungen** finden in der zweiten Vorlesungswoche statt, also am **23. bis 25. Oktober 2024**.

Unser HM3-Skript ist erprobt und umfassend.

Das HM3-Rundum-Glücklich-Paket: die Vorlesungsfolien eingebettet in ein Lese- und Arbeitsbuch

Wer vieles bringt, wird manchem etwas bringen.
JOHANN WOLFGANG VON GOETHE (1749–1832), *Faust*

Parallel zu meiner aktuellen Vorlesung HM3 stelle ich hier meine Folien zur Verfügung, erprobt und umfassend. Sie sind kein knappes Nachschlageheft, sondern ein umfängliches Lese- und Arbeitsbuch. Wer sie nur hastig durchblättert, wird ihren Umfang abschreckend finden. Wer sich jedoch ernsthaft einarbeitet, wird sie gut nutzen können.

1 von 112 — Seitengröße

Höhere Mathematik 3 (vertieft)

für Luft- und Raumfahrttechnik (LRT)
und Materialwissenschaft (MaWi)

erkennen. verstehen. anwenden.

Prof. Dr. Michael Eisermann
Institut für Geometrie und Topologie (IGT)
michael-eisermann.de/lehre/HM3

Universität Stuttgart
Wintersemester 2024/25
Vollversion 30.09.2024

Für die Mitteilung von Unklarheiten und Fehlern aller Art sowie für Verbesserungsvorschläge bin ich stets dankbar!

Habe Mut, dich deines eigenen Verstandes zu bedienen!

Much to learn, you still have. This is just the beginning.

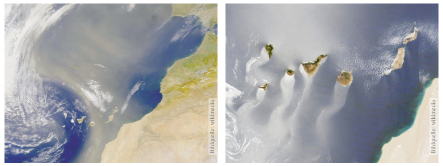
So nutzen Sie das Vorlesungsskript richtig.

blauer Titelbalken = Vorlesung

weißer Titelbalken = Hintergrund

Die Kontinuitätsgleichung der Strömungslehre — 117

Ziel: Wie verhalten sich Strömungen? Welche Gleichungen gelten hier?



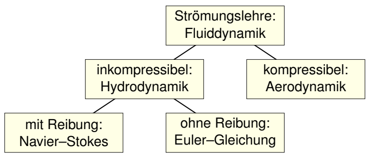
Luft- und Wasserströmung um die Kanarischen Inseln

(0) Wie beschreiben Sie eine Strömung in einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ über ein Zeitintervall $I = [t_0, t_1]$? Geschwindigkeit $\vec{v} : I \times \Omega \to \mathbb{R}^3 : (t, \vec{x}) \mapsto \vec{v}(t, \vec{x})$ und Massendichte $\varrho : I \times \Omega \to \mathbb{R} : (t, \vec{x}) \mapsto \varrho(t, \vec{x})$ und evtl. weitere Daten.

Die Massenstromdichte $\varrho\vec{v} : I \times \Omega \to \mathbb{R}^3$ beschreibt den Massenfluss. Im Strömungsbereich Ω werde Masse weder erzeugt noch vernichtet.

Die Kontinuitätsgleichung der Strömungslehre — 118 Ausführung

Die Strömungsmechanik untersucht die Bewegung von fluiden Medien. Sie ist grundlegend für die Meteorologie, beim Bau von Flugzeugen, Schiffen, Autos, … bis hin zu Verbrennungsmotoren: Alles fließt!



Ein Fluid heißt inkompressibel, wenn seine Dichte nicht vom Druck abhängt. Zum Beispiel ist dies bei Wasser eine gute Näherung für die meisten Anwendungen. Noch einfacher ist zunächst, überall konstante Dichte anzunehmen. Anders als Flüssigkeiten sind Gase leicht komprimierbar, ihre Dichte ist etwa 1000mal geringer, ihre thermische Ausdehnung größer. Für ihre Bewegung aber gelten weitgehend die gleichen Gesetze, zumindest bei nicht allzu großen Drücken und Geschwindigkeiten. Wir wenden uns hier der allgemein gültigen Kontinuitätsgleichung zu.

In jeder Vorlesung werden etwa 20 bis 25 Vorlesungsfolien besprochen; diese bilden den blauen Faden, das Kernprogramm, unser Grundgerüst.

Zu jeder Vorlesungsfolie gehören etwa drei Hintergrundfolien; sie bieten hilfreiche Erläuterungen und Ergänzungen, Anwendungen und Beispiele, Aufgaben und Lösungen, usw. Dosieren Sie selbst nach Ihrem Bedarf!

So nutzen Sie das Vorlesungsskript richtig.

Die Folien erfüllen eine doppelte Funktion. Für meinen Vortrag erstelle ich die Folien zur visuellen Unterstützung und nutze sie als Grundlage. Diese Vortragsfolien sind durch blaue Titelbalken leicht zu erkennen. Hier finden Sie alles Wesentliche, darauf sollten Sie sich konzentrieren.

Dieses Grundgerüst ergänze ich durch Hintergrundinformation in Form von Erläuterungen und Ausführungen, Erinnerungen und Ergänzungen, Aufgaben mit Lösungen, weiteren Beispielen und Rechnungen, etc. Dies folgt der bewährten Erfahrung, dass die Leserin und der Leser leichter eine vorhandene Übung, Erklärung oder Illustration übergehen können, als eine fehlende selbst (er)finden. Möge es beiden nützen!

Ich versuche, jedes Thema so klar und einfach wie möglich darzustellen, doch so präzise und ausführlich wie für ein solides Verständnis nötig ist. Erklärungen und Hinweise, die ich in der Vorlesung mündlich gebe, finden Sie hier zum Nachlesen noch einmal schriftlich ausgeführt; sie nützen mir als Erinnerung und beiden Lesern als Erläuterung.

Tipp: Ein fettgesetztes **Stichwort** kann mit „#Stichwort“ gesucht werden.

Kapitel A: Was sind und was sollen Integrale?

Kapitel B: Eindimensionale Integration

Kapitel C: Mehrdimensionale Integration

Kapitel D: Integrale und Grenzwerte

Kapitel E: Integralsätze in der Ebene

Kapitel F: Integralsätze für komplexe Funktionen

Kapitel G: Integralsätze im Raum

Kapitel H: Erste Anwendungen der Integralsätze

Kapitel I: Fourier–Analyse periodischer Funktionen

Kapitel J: Die Fourier–Isometrie

Kapitel K: Fourier–Transformation

Kapitel L: Laplace–Transformation

Kapitel M: Gewöhnliche Differentialgleichungen

Kapitel N: Differentialgleichungen höherer Ordnung

Kapitel O: Dynamische Systeme

Kapitel P: Autonome Systeme, Gleichgewicht und Stabilität

Kapitel Q: Partielle Differentialgleichungen (PDE)

Kapitel R: Lineare PDE zweiter Ordnung

Kapitel S: Die Wärmeleitungsgleichung

Kapitel T: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Kapitel U: Kombinatorik und Näherungen

Kapitel V: Der lokale Grenzwertsatz

Kapitel W: Der zentrale Grenzwertsatz

Kapitel Z: Zusammenfassung

Das letzte Kapitel versammelt alle Kapitelzusammenfassungen und bietet so eine Zusammenschau der wichtigsten Ergebnisse, Sätze und Methoden dieser Vorlesung zur Höheren Mathematik. Im Laufe des Semesters führen wir Sie Schritt für Schritt dorthin.

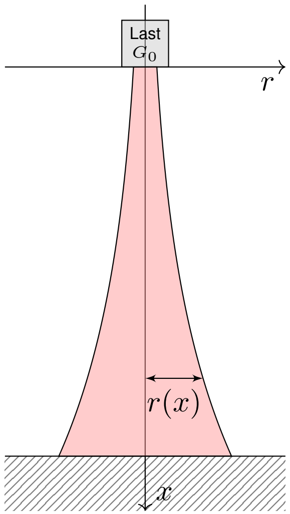
Diese Zusammenfassung ist dazu nur eine Gedächtnisstütze; zum soliden Verständnis benötigen Sie alle Grundlagen und viel Übung! Erfahrung, Umsicht und Verständnis lassen sich nicht eintrichtern, sondern nur durch regelmäßige Übung erwerben. Also: Üben Sie!

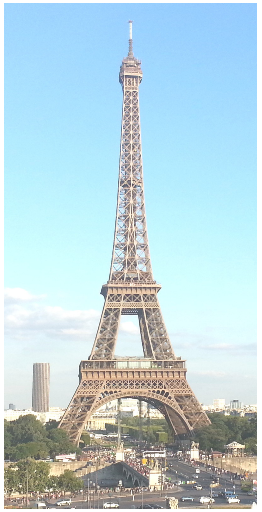
—

Wir beginnen diese Vorlesung mit einem Kapitel zur Vorschau; dies gibt zunächst eine Übersicht der zentralen Themen der HM3 und dient somit zu einer ersten Orientierung und zu Ihrer Motivation.

Auch wenn Sie die nötigen Methoden jetzt noch nicht kennen, so können Sie doch sinngemäß erahnen, welche Techniken Sie brauchen werden. Sie können jetzt schon die Ziele erkennen, auf die wir hinarbeiten. Diese Versprechen werde ich in den nächsten Wochen einlösen.

Ein hoher Turm braucht eine breite Basis.





Der Eiffelturm in Paris am Abend des 14.08.2013, Höhe 324m

Der Burj Khalifa in Dubai, Höhe 830m, Bildquelle: wikimedia

Aufgabe: Konstruieren Sie eine Säule aus einem Material konstanter Dichte ϱ, so dass der Druck (Last pro Fläche) überall konstant p ist.

Zahlenbeispiel: Beton $\varrho = 3\mathrm{g/cm}^3$, Last $G_0 = 4600\mathrm{kN}$, Radius $r_0 = 1\mathrm{m}$, Höhe 300m.
Unser Modell ist zwar extrem vereinfacht, aber es illustriert doch recht gut das Prinzip.

Ein hoher Turm braucht eine breite Basis.

Lösung: In Höhe x haben wir den Radius $r(x) > 0$ gemäß Skizze.
Die Fläche ist $A(x) = \pi r(x)^2$, das Volumen $V(x) = \int_{h=0}^{x} \pi r(h)^2 \,\mathrm{d}h$,
das Gewicht $G(x) = g\varrho V(x)$, der Druck $G(x)/A(x) = p$. Insgesamt:

$$g\varrho \cdot \int_{h=0}^{x} \pi r(h)^2 \,\mathrm{d}h \quad \stackrel{!}{=} \quad p \cdot \pi r(x)^2$$

Ableiten dieser Integralgleichung ergibt unsere Differentialgleichung:

$$g\varrho\, \pi r(x)^2 \quad = \quad 2p\, \pi r(x)\, r'(x).$$

Diese ist elementar lösbar. Wir trennen die Variablen und integrieren:

$$\frac{r'(x)}{r(x)} = \frac{g\varrho}{2p} =: c \quad\Rightarrow\quad \int_{h=0}^{x} \frac{r'(h)}{r(h)} \,\mathrm{d}h = \int_{h=0}^{x} c \,\mathrm{d}h \quad\Rightarrow\quad \ln r(x) - \ln r_0 = cx$$

Wir erhalten somit $r(x) = r_0\, \mathrm{e}^{cx}$. Der Radius wächst exponentiell!

Dank passender mathematischer Werkzeuge gelingt uns die Rechnung erfreulich leicht.
Im Zahlenbeispiel gilt $p \approx 1500\mathrm{kN/m}^2$ und $r(x) = 1\mathrm{m} \cdot \mathrm{e}^{x \cdot 0.01/\mathrm{m}}$, also $r(300\mathrm{m}) \approx 20\mathrm{m}$.
Probe / Plausibilität: Die Druckfestigkeit liegt je nach Beton zwischen 10 und $100\mathrm{N/mm}^2$.
Unsere Rechnung illustriert das Grundprinzip. Anwendungen berechnet man noch viel genauer!

Theorie und Anwendung: Modellierungskreislauf

☺ Abstraktion ist die Kunst, Wichtiges von Unwichtigem zu trennen.
Differentialgleichungen nutzen wir zur Formulierung der Naturgesetze, sie sind die universelle Sprache der Naturwissenschaft und der Technik: Damit können wir Probleme formulieren, strukturieren, verstehen, lösen.

1. Grundlegendes Verständnis der vorliegenden Situation:
Um Anwendungen in der Physik, Mechanik, Thermodynamik, Strömungslehre, etc. zu verstehen, benötigen Sie zunächst die erforderlichen Grundkenntnisse der betroffenen Anwendungsgebiete: Naturgesetze, grundlegende Modelle, geeignete Vereinfachungen, etc.

☺ Erst so können Sie die Situation quantitativ und präzise erfassen.

2. Mathematische Modellierung der vorliegenden Situation:
Durch geeignete Vereinfachung, Formalisierung und Abstraktion erhalten Sie ein mathematisches Modell. Dieses besteht aus den relevanten Größen und den zwischen ihnen gelten Beziehungen, meist geeignete Gleichungen, sehr häufig Differentialgleichungen.

☺ Hierzu nutzen Sie die Techniken Ihrer HM und weitere nach Bedarf.

Theorie und Anwendung: Modellierungskreislauf

3. Lösung durch geeignete mathematische Werkzeuge: Dazu lernen Sie hier die grundlegenden Rechentechniken. Das ist ein weites Gebiet! Je nach Ihren Anwendungen vertiefen Sie die nötigen Techniken zur numerischen Näherung, zu partiellen Differentialgleichungen, etc.

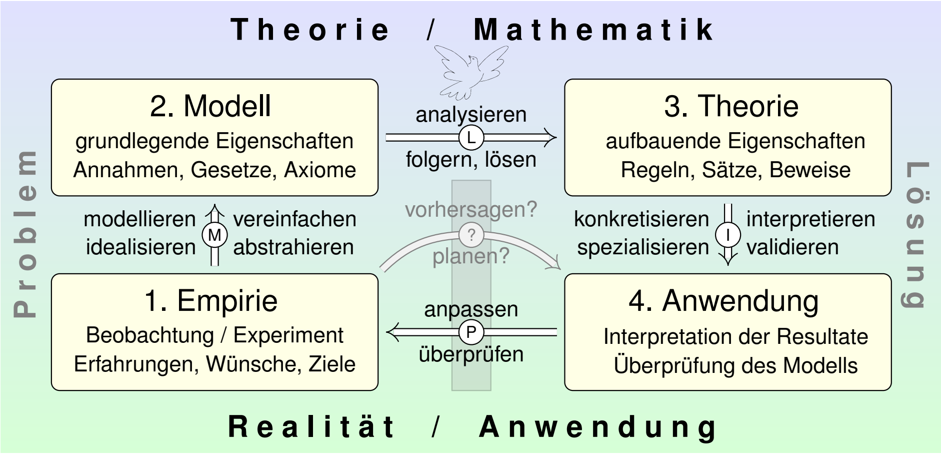
☺ Lösungen sind oft schwer zu finden, aber leicht zu überprüfen.
Zur Sorgfalt gehört, die gefundenen / benachbarte / alle Lösungen zu prüfen, zu diskutieren und umsichtig alle Sonderfälle zu beachten.

4. Anpassung und Überprüfung anhand gegebener Daten:
Ist eine mathematische Lösung oder numerische Näherung gelungen, so passen Sie schließlich die noch freien Parameter des Modells an die gegebenen Daten an und überprüfen soweit möglich die Vorhersagen des Modells durch Experimente, Messungen, Alternativmodelle, etc.

⚠ Falls nötig muss erneut ab (1) ein besseres Modell erstellt werden.

Diese Vorlesung konzentriert sich auf Lösungsmethoden (Schritt 3).
Aus Ihren Vorlesungen kennen Sie bereits einige Anwendungen (1,2,4), viele weitere werden noch folgen. Nutzen Sie diese Querverbindungen!

Warum ist Mathematik so erfolgreich?



Konkrete Anwendung benötigt abstrakte Kenntnisse; je anspruchsvoller, desto mathematischer! Alles Denken beruht auf Modellen; diese können *deskriptiv* oder *normativ* eingesetzt werden. Deskriptiv: beschreibend (Kettenlinie), erklärend (Planetenbewegung), vorhersagend (Wetter). Normativ: vorschreibend (Bauplan), planend (Raumsonde), gesetzgebend (Klimaschutz). Ingenieur:innen wollen beides, nicht nur passiv vorhersagen, sondern auch aktiv steuern und beeinflussen. Hierzu benötigen Sie ausreichend starke mathematische Werkzeuge.

Warum ist Mathematik so erfolgreich?

Die Differential- und Integralrechnung kennen Sie aus der HM1&2 und wissen bereits, wie nützlich sie Ihnen jetzt schon in Anwendungen ist. Diese Techniken werden wir dieses Semester ausbauen und vertiefen: Integralrechnung und ihre Anwendung auf Differentialgleichungen.

Hierzu möchte ich gleich zu Beginn einige berühmte Anwendungen skizzieren, so dass Sie sich einen ersten Eindruck verschaffen können. Im obigen Beispiel suchen wir eine geeignete Form unseres Turmes. Es ist demnach nicht nur eine Zahl gesucht, sondern eine Funktion!

Die Aufgabe führt zu einer Differentialgleichung, also einer Gleichung, in der die gesuchte Funktion $y(x)$ und ihre Ableitungen $y'(x)$ auftreten. Viele Modelle in Naturwissenschaft und Technik haben diese Form: **Differentialgleichungen sind die Sprache der Naturgesetze.**

Auch wenn Sie die nötigen Methoden jetzt noch nicht kennen, so können Sie doch sinngemäß erahnen, welche Techniken wir brauchen werden. Sie können so in etwa die Ziele erkennen, auf die wir hinarbeiten. Diese Versprechen werde ich in den nächsten Wochen einlösen.

Solide Fundamente

Pieter Breugel, *Der Turmbau zu Babel*, Bildquelle: wikimedia

Solide Fundamente

Ein hoher Turm braucht eine breite Basis. Diese Aussage, Sie ahnen es, ist eine Metapher für Ihre Ausbildung als zukünftige Ingenieur:innen. Sie wollen hoch hinaus, zunächst fachlich im Studium, später beruflich. Hierzu legen Sie im Grundstudium ein solides und breites Fundament.

Gerade in grundlagen- und forschungsorientierten Studiengängen wie LRT und MaWi werden Sie ein sehr breites Spektrum mathematischer Techniken anwenden, je nach Ihrer späteren Spezialisierung.

Im Kleinen ist es auch ein Bild für den Aufbau der Höheren Mathematik: Nach zwei Semestern HM1&2 haben Sie solide Grundlagen, auf denen wir in der nun anschließenden HM3 aufbauen können und werden.

Auch in diesem Semester HM3 brauchen wir solide Fundamente: Alles dreht sich um (ein- und mehrdimensionale) Integration. Diese lege ich daher ausreichend breit und tragfähig an.

Der effiziente und strenge Aufbau der Mathematik ist ein Segen, bei sträflichen Lücken leider auch ein Fluch. Bitte nehmen Sie daher diesen Aufbau von Anfang an ernst, es wird Ihnen dauerhaft nützen!

Newtons Himmelsmechanik: die Bewegungsgleichung

Aufgabe: Formulieren Sie die Bewegungsgleichungen von n Körpern mit Masse $m_k > 0$, Position $u_k(t) \in \mathbb{R}^3$ und Geschwindigkeit $v_k(t) \in \mathbb{R}^3$.

Lösung: Newtons Gravitationsgesetz ergibt die Differentialgleichungen

$$\dot{u}_k = v_k, \quad \dot{v}_k = f_k(u) := \sum_{j \neq k} \gamma\, m_j \frac{u_j - u_k}{|u_j - u_k|^3}.$$

Vorgegeben sind die Anfangsdaten $u_k(0)$ und $v_k(0)$ zur Zeit $t = 0$.
Als Lösung gesucht ist die Bewegung $(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n) : [0, T[\to \mathbb{R}^{6n}$.

Erlaubt ein so komplexes System immer genau eine Lösung? Ja, das ist der zentrale ∃&E-Satz! Kollision oder Expulsion nach ∞ sind möglich: Eventuell existiert die Lösung nur für eine kurze Zeit $T > 0$. Für manche Startwerte sind Lösungen periodisch, oder beinahe: Zu unserem Glück!

- ☺ Den Fall $n = 2$ lösen Kegelschnitte: Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln.
- ☹ Für $n \geq 3$ lässt sich dieses DGSystem i.A. nicht geschlossen lösen!
- ☺ Euler–Verfahren: diskrete Zeitschritte $0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots,$

$$\begin{aligned} u_k(t_{i+1}) &\approx u_k(t_i) + v_k(t_i) \cdot (t_{i+1} - t_i), \\ v_k(t_{i+1}) &\approx v_k(t_i) + f_k(u) \cdot (t_{i+1} - t_i). \end{aligned}$$

Newtons Himmelsmechanik: der historische Triumph

Das Verständnis der **Himmelsmechanik** markiert den Übergang vom Mittelalter zur Neuzeit.

Die Beobachtung des Nachthimmels und seiner Sterne fasziniert uns Menschen seit Alters her. Neben den zahlreichen „Fixsternen“ (weit entfernte Sterne) erkennen wir einige „Wandelsterne“ (Planeten unseres Sonnensystems). Ihre Bewegung lässt Regeln erahnen, doch für Wandelsterne scheinen diese zunächst kompliziert und verwirrend. Sie quantitativ zu erfassen und gründlich zu verstehen, ist einer der großen Triumphe menschlicher Neugier und systematischer Forschung!

Von der Erde besehen scheinen sich alle Sterne um uns zu drehen, doch die exakte Bewegung der Planeten erweist sich als schrecklich kompliziert. Kopernikus’ heliozentrisches Modell (1543) ist einfacher, daher nützlicher: Die Bahnen der Planeten um die Sonne erweisen sich recht genau als Ellipsen. Diese Koordinatentransformation hat enorme Wirkung und schreibt Weltgeschichte!

Aus Tycho Brahes präzisen **Beobachtungsdaten** leitete Johannes Kepler drei Gesetze ab, die die Ellipsenbewegung der Planeten um die Sonne gut *beschreiben*. Eine *Erklärung* der Bewegungen durch einheitliche physikalische Prinzipien gelang erst Isaac Newton 1686 mit seinen Principia!

Die moderne Naturwissenschaft beginnt mit Newtons Formulierung der drei Bewegungsgesetze, des universellen Gravitationsgesetzes und seiner Lösung des Zwei-Körper-Problems. Mit einer Handvoll physikalischer Prinzipien und den passenden mathematischen Werkzeugen konnte er die Keplerschen Regeln *erklären*, ja *herleiten*. Newtons revolutionäre Idee: Überall im Universum gelten dieselben Gesetze! Newtons Mechanik erklärt die Schwerkraft hier auf Erden ebenso wie außerirdische Phänomene: den Umlauf der Planeten um die Sonne und des Mondes um die Erde, sogar die Gezeiten unserer Meere, ebenso die Coriolis–Kraft und das Foucaultsche Pendel.

Newtons Himmelsmechanik: die Herausforderung

Allein schon das obige Differentialgleichungssystem zu formulieren, ist eine Meisterleistung der Mathematik und Physik der Neuzeit. Wir nennen dies **Himmelsmechanik** und sind völlig zu Recht stolz auf sie: Mathematische Sprache und Werkzeuge erleuchten die gesamte Entwicklung und ebnen den Weg von Beobachtung über Erklärung und Berechnung bis zur Raumfahrt.

Auch nach über 300 Jahren sind Newtons Gleichungen immer noch nützlich wie am ersten Tag! Daten ändern sich, Methoden bleiben bestehen. Solide mathematische Arbeit hat eine extrem lange Wirksamkeit. Daher lohnt es sich auch für Sie heute, in mathematische Grundlagen zu investieren und diese wirksamen Werkzeuge zu erlernen, anzuwenden und fortzuführen.

Die drei Fälle $n = 1$ und $n = 2$ sowie $n \geq 3$ sind sehr verschieden! Für einen einzigen Körper $(n = 1)$ enthalten Newtons Gleichungen $\dot{u}_1 = v_1$ und $\dot{v}_1 = 0$ keine gravitative Wechselwirkung. Ihre Lösung ist eine **geradlinige Bewegung**, nämlich $u_1(t) = u_1(0) + v_1 t$.

Ein Zwei-Körper-System $(n = 2)$ wie Sonne-Erde oder Erde-Mond ist bereits ausgesprochen interessant. Newton konnte seine Gleichungen hier gut lösen, sie ergeben Ellipsenbahnen und erklären die Keplerschen Gesetze. Allgemeiner sind auch Parabeln und Hyperbeln als Lösungen möglich, je nach Anfangsdaten $u_1(0), v_1(0), u_2(0), v_2(0)$. In allen Fällen gelingt die Lösung hier noch in geschlossener Form. Man nennt ein solches System **vollständig integrabel**. P270

Newton betrachtete anschließend das Drei-Körper-System Sonne-Erde-Mond. Dies entzog sich jedoch hartnäckig einer Lösung und wurde zum berühmtesten offenen Problem der Mathematik. Das **Drei-Körper-Problem** gilt bis heute als eines der schwierigsten Probleme, die zahlreichen Anstrengungen zu seiner Lösung erfordern und erzeugen immer wieder wichtige neue Methoden.

Newtons Himmelsmechanik: mögliche Lösungsmethoden

Für künstliche Satelliten wird das **zirkuläre restringierte Drei-Körper-Problem** (CR3BP) sehr ausgiebig untersucht: Zwei massereiche Körper umrunden sich kreisförmig, während der dritte Körper nahezu masselos ist. Hier findet man die berühmten fünf Lagrange–Punkte. P257

Nur wenige und sehr spezielle Sonderfälle des n–Körper-Problems sind geschlossen lösbar. Auch diese haben ihren eigenen Reiz: Seit 1994 wurden zahlreiche **Choreographien** entdeckt, in denen n Körper symmetrisch angeordnet werden und dann periodische Bahnen durchlaufen. Für generische Anfangsdaten hingegen ist die Bewegung **chaotisch** und kann nur numerisch annähernd berechnet werden. *Solving the Three Body Problem*, `youtu.be/et7XvBenEo8`.

Zum Kontrast untersuchen und vergleichen wir zwei klassische Anwendungen der Mechanik: Einerseits gekoppelte **lineare Systeme** wie harmonische Oszillatoren O101 P101, andererseits Planetenbewegung und ähnliche **nicht-lineare Systeme**. Nicht-lineare Systeme sind schwierig und verhalten sich oft chaotisch. Lineare Systeme sind besonders gutartig und einfach zu lösen. Daher sollten Sie Linearität erkennen und wertschätzen, verstehen und nutzen lernen!

Auch nicht-lineare Systeme lassen sich mitunter gut lösen, wie einfache Beispiele zeigen. Dies sind aber Ausnahmen und seltene Glücksfälle. Typischerweise sind nicht-lineare Systeme nicht geschlossen lösbar. Es bleibt dann nur die **numerische Approximation** mit Hilfe geeigneter Näherungsverfahren, z.B. das Euler–Verfahren oder besser gleich das Runge–Kutta–Verfahren. Mehr hierzu erfahren Sie in der Numerik. Aufbauend auf den mathematischen Grundlagen können Sie die Numerik von Differentialgleichungen nutzen und wo nötig vertiefen.

Allgemeine Grundlagen und konkrete Anwendungen ergänzen sich wunderbar.

Maxwells Elektrodynamik

Michael Faraday
(1791–1867)

Königin Victoria
(1819–1901)

James Clerk Maxwell
(1831–1879)

elektrische Induktion

$$\nabla \bullet \vec{E} = 4\pi\varrho, \qquad \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0,$$

$$\nabla \bullet \vec{B} = 0, \qquad \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}.$$

Maxwells Elektrodynamik

Michael Faraday (1791–1867) war ein englischer Physiker und gehört zu den einflussreichsten Wissenschaftlern der Menschheitsgeschichte. Er hatte kaum formale Ausbildung, aber eine präzise geometrische Anschauung. Seine experimentellen Ergebnisse fasste James Clerk Maxwell (1831–1879) zur elektromagnetischen Theorie zusammen.

Zu Lebzeiten war Faraday berühmt für seine öffentlichen Vorträge und Experimente zur Elektrizität, über die er an vorderster Front forschte. Zum Beispiel demonstrierte er anhand von Spulen und Magneten die Umwandlung von mechanischer Bewegung in Elektrizität und zurück. Das ist ein phantastischer und überaus nützlicher Zusammenhang!

Der Legende nach führte Faraday dies auch Königin Victoria vor, sie war amüsiert, aber auch skeptisch: „Elektrizität ist eine hübsche Spielerei, doch welchen Nutzen hat sie?“ Heutzutage scheint diese Frage naiv, geradezu ignorant; womöglich diente diese Konversation auch als intellektueller Schaukampf. Faraday antwortete diplomatisch und weitsichtig: „Madam, welchen Nutzen hat ein neugeborenes Baby?“

Maxwells Elektrodynamik

Jede:r Zuschauer:in konnte erkennen: Diese Grundlagenforschung war nicht bloß Spielerei, sondern eine phantastische neue Errungenschaft. Es braucht kaum Phantasie zur Anwendung: Mit Magneten und Spulen baut man Telegraphen, um Nachrichten blitzschnell zu übermitteln.

Aber die Geschichte ist noch nicht zu Ende, es kommt noch besser! Faradays Ergebnisse formulierte Maxwell 1865 in obigen Gleichungen. Erst seine einheitliche Theorie eröffnete völlig neue Anwendungen: Allein durch Rechnung erkannte er, was keiner zuvor gesehen hatte, und sagte die Möglichkeit elektromagnetischer Wellen voraus. Diese waren 1865 noch unbekannt und experimentell noch lange nicht zugänglich; ihr Nachweis gelang Heinrich Hertz 1886. Wir nutzen sie bis heute!

Maxwells Gleichungen sind abstrakt und nützlich. Damit erkannte er neue Zusammenhänge und neue Anwendungen. Selbst Faraday oder jeder noch so geschickte Experimentator hätte das nicht ahnen können. Erst das Wechselspiel von Theorie und Anwendung führt zum Erfolg!

🙂 Dies ist das allgemeine Muster und Kennzeichen von Wissenschaft.

Warum hilft Abstraktion?

Mathematik ist zugleich abstrakte Theorie und konkrete Anwendung.
Sie erklärt und quantifiziert Zusammenhänge: Das ist ihr Nutzen!
Dank Abstraktion ist sie universell anwendbar: Das ist ihre Stärke!
Sie ist schön und gut: ästhetische Kunst und nützliches Handwerk.

Les mathématiques ont un triple but. Elles doivent fournir un instrument pour l’étude de la nature. Mais ce n’est pas tout: elles ont un but philosophique et, j’ose le dire, un but esthétique.
Henri Poincaré (1854–1912)

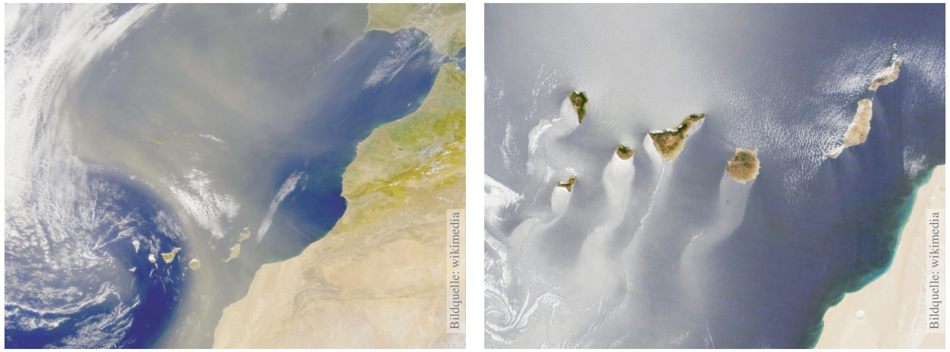
Das Wort „abstrakt“ missbraucht der Ignorant gern als Schimpfwort für alles, worüber ihm die Kenntnis fehlt oder wovor er die Mühe scheut.

Zur Klarstellung muss und will ich Partei ergreifen für die Abstraktion: Abstraktion strukturiert und vereinfacht: Eine allgemeine Tatsache ist oft leichter zu verstehen und zu erklären als ihre zahlreichen Spezialfälle. Denkökonomie: Daten ändern sich, Methoden bleiben bestehen.

🙂 Daher betone ich konkrete historische Beispiele zum Wechselspiel von Theorie und Anwendung. Die Geschichte ist lehrreich und lohnend.

Die Kontinuitätsgleichung der Strömungslehre

Ziel: Wie verhalten sich Strömungen? Welche Gleichungen gelten hier?



Luft- und Wasserströmung um die Kanarischen Inseln

(0) Wie beschreiben Sie eine Strömung in einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ über ein Zeitintervall $I = [t_0, t_1]$? Geschwindigkeit $\vec{v} : I \times \Omega \to \mathbb{R}^3 : (t, \vec{x}) \mapsto \vec{v}(t, \vec{x})$ und Massendichte $\varrho : I \times \Omega \to \mathbb{R} : (t, \vec{x}) \mapsto \varrho(t, \vec{x})$ und evtl. weitere Daten.

Die Massenstromdichte $\varrho\vec{v} : I \times \Omega \to \mathbb{R}^3$ beschreibt den Massenfluss. Im Strömungsbereich Ω werde Masse weder erzeugt noch vernichtet.

Die Kontinuitätsgleichung der Strömungslehre

Die Strömungsmechanik untersucht die Bewegung von fluiden Medien. Sie ist grundlegend für die Meteorologie, beim Bau von Flugzeugen, Schiffen, Autos, … bis hin zu Verbrennungsmotoren: Alles fließt!

- Strömungslehre: Fluiddynamik
  - inkompressibel: Hydrodynamik
    - mit Reibung: Navier–Stokes
    - ohne Reibung: Euler–Gleichung
  - kompressibel: Aerodynamik

Ein Fluid heißt inkompressibel, wenn seine Dichte nicht vom Druck abhängt. Zum Beispiel ist dies bei Wasser eine gute Näherung für die meisten Anwendungen. Noch einfacher ist zunächst, überall konstante Dichte anzunehmen. Anders als Flüssigkeiten sind Gase leicht komprimierbar, ihre Dichte ist etwa 1000mal geringer, ihre thermische Ausdehnung größer. Für ihre Bewegung aber gelten weitgehend die gleichen Gesetze, zumindest bei nicht allzu großen Drücken und Geschwindigkeiten. Wir wenden uns hier der allgemein gültigen Kontinuitätsgleichung zu.

Die Kontinuitätsgleichung der Strömungslehre

Aufgabe: Welche Beziehung folgt aus der Massenerhaltung?

(1) Sei $K \Subset \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ kompakt, etwa ein Würfel. Formulieren Sie die Massenbilanz für K in Worten und als Volumen-/Flussintegrale.

(2) Formen Sie dies um zu einem einzigen Volumenintegral.

(3) Folgern Sie hieraus die zugehörige Differentialgleichung.

(4) Was folgt für inkompressible Strömungen, also für $\varrho = \mathrm{const}$?

Lösung: (1) Die über die Randfläche $S = \partial K$ ausströmende Masse geht der Gesamtmasse in K verloren. Als Integralgleichung formuliert:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_K \varrho \,\mathrm{d}K + \oiint_{S=\partial K} (\varrho\vec{v} \bullet \vec{n}) \,\mathrm{d}S = 0}$$

(2) Wir dürfen die Ableitung unters Integral ziehen dank Kompaktheit des Integrationsbereichs K und Stetigkeit der Ableitung $\partial\varrho/\partial t$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_K \varrho \,\mathrm{d}K \overset{\text{Kpkt}}{\underset{\text{D3c}}{=}} \iiint_K \frac{\partial\varrho}{\partial t} \,\mathrm{d}K$$

Die Kontinuitätsgleichung der Strömungslehre

Wir wollen auch das Flussintegral in diese Form bringen und dann beides zusammenfassen. Dies gelingt mit dem Satz von Gauß (G3G):

$$\oiint_{S=\partial K} (\varrho\vec{v} \bullet \vec{n}) \,\mathrm{d}S \overset{\text{Gauß}}{\underset{\text{G3G}}{=}} \iiint_K \operatorname{div}(\varrho\vec{v}) \,\mathrm{d}K$$

Dank Linearität des Integrals erhalten wir ein einziges Volumenintegral:

$$\iiint_K \left[\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho\vec{v})\right] \mathrm{d}K = 0$$

(3) Diese lokale Massenbilanz gilt für jedes Kompaktum $K \Subset \Omega$. Das gilt genau dann, wenn der (stetige!) Integrand verschwindet:

$$\boxed{\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho\vec{v}) = 0}$$

Diese **Kontinuitätsgleichung** ist grundlegend für die Strömungslehre.

(4) Für inkompressible Strömungen gilt $\varrho = \mathrm{const}$ und somit $\operatorname{div} \vec{v} = 0$. Anschaulich: In jedes Volumen K fließt ebensoviel hinein wie heraus. Hierzu genügt allgemein bereits $\partial_t \varrho + \vec{v} \bullet \operatorname{grad} \varrho = 0$. Sehen Sie warum?

Von Integral- zu Differentialgleichungen

Wir haben oben aus einer Integralgleichung (der Massenerhaltung) eine Differentialgleichung abgeleitet (die Kontinuitätsgleichung). Dahinter steckt folgendes einfache und sehr nützliche Prinzip:

♦ Lemma H1A: Verschwindungslemma für Skalarfelder

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Gilt $\int_K f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ für jeden (kleinen) kompakten Würfel $K \Subset \Omega$, so folgt $f = 0$.

Aufgabe: Begründen Sie dies mit Hilfe der Stetigkeit von f.

Lösung: Wir wollen $f = 0$ zeigen.
Nehmen wir im Gegenteil an, es gälte $f \neq 0$.
Das bedeutet, es existiert ein Punkt $a \in \Omega$ mit $f(a) \neq 0$.

Wir können $f(a) > 0$ annehmen; der Fall $f(a) < 0$ ist analog.

Sei also $f(a) = 2b > 0$. Da f stetig ist, existiert um a ein kleiner Würfel $K \Subset \Omega$ mit Kantenlänge $\varepsilon > 0$, sodass $f(x) \geq b$ für alle $x \in K$ gilt.
Hieraus folgt die Abschätzung $\int_K f(x)\,\mathrm{d}x \geq b \operatorname{vol}_n(K) = b\,\varepsilon^n > 0$.

☺ Wenn also $\int_K f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ für alle Würfel $K \Subset \Omega$ gilt, so folgt $f = 0$.

Von Integral- zu Differentialgleichungen

Dieses Prinzip gilt ebenso für Flussintegrale von Vektorfeldern:

♦ Lemma H1B: Verschwindungslemma für Vektorfelder

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $\vec f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ stetig. Gilt $\int_S \vec f(x) \bullet \vec n\,\mathrm{d}S = 0$ für jedes (kleine) achsenparallele Quadrat $S \Subset \Omega$, so folgt $\vec f = 0$.

Aufgabe: Begründen Sie dies mit Hilfe der Stetigkeit von $\vec f$.

Lösung: Wir wollen $\vec f = 0$ zeigen.
Nehmen wir im Gegenteil an, es gälte $\vec f \neq 0$.
Das heißt, es existiert ein Punkt $a \in \Omega$ mit $f_i(a) \neq 0$ für ein $i \in \{1, 2, 3\}$.

Wir können $i = 3$ annehmen; die Fälle $i = 1, 2$ sind analog.
Wir können $f_3(a) > 0$ annehmen; der Fall $f_3(a) < 0$ ist analog.
Sei also $f_3(a) = 2b > 0$. Da $\vec f$ und somit $f_1, f_2, f_3 : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig sind, existiert um a ein kleines Quadrat $S \Subset \Omega$ parallel zur (x_1, x_2)–Ebene mit Kantenlänge $\varepsilon > 0$, sodass hierauf $f_3(x) \geq b$ für alle $x \in S$ gilt.
Hieraus folgt die Abschätzung $\int_S \vec f(x) \bullet \vec n\,\mathrm{d}S \geq b \operatorname{vol}_2(S) = b\,\varepsilon^2 > 0$.

☺ Wenn $\int_S \vec f(x) \bullet \vec n\,\mathrm{d}S = 0$ für alle Quadrate $S \Subset \Omega$ gilt, so folgt $\vec f = 0$.

Die Navier–Stokes–Gleichungen für inkompressible Fluide

Für **inkompressible Strömungen** gilt $\varrho = \text{const}$ und somit $\operatorname{div} \vec v = 0$.
Es handelt sich um eine grundlegende **Erhaltungsgleichung**.
Diese beschreibt allerdings die Bewegung keineswegs vollständig.
Dazu werden weitere Erhaltungsgrößen wie Impuls / Energie benötigt.

Die Impulserhaltung führt zu den **Navier–Stokes–Gleichungen**:
Sei $\vec\gamma(t)$ die Bahn eines Teilchens der Strömung, d.h. $\dot{\vec\gamma}(t) = \vec v(t, \vec\gamma(t))$.
Newtons Gesetz „Kraft = Masse × Beschleunigung“ besagt hier:

$$\boxed{\varrho\,\ddot{\vec\gamma}(t) = \vec F\big(t, \vec\gamma(t)\big)}$$

Einsetzen und ausrechnen der linken Seite nach Kettenregel:

$$\frac{\mathrm{d}^2\gamma_i(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\dot\gamma_i(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_i(t, \vec\gamma(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\frac{\partial \gamma_k}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_k} v_k$$

Dies heißt **substantielle Ableitung** oder auch **konvektive Ableitung**.

Auf der rechten Seite setzt sich die Kraft $\vec F$ zusammen aus der Reibung, dem inneren Druck und äußeren Kräften, zum Beispiel der Schwerkraft.

Die Navier–Stokes–Gleichungen für inkompressible Fluide

Massenerhaltung: $$\operatorname{div} \vec v = \sum_{k=1}^n \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0$$

Impulserhaltung: $$\underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial t}}_{\text{Änderung}} + \underbrace{\sum_{k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}}_{\text{Konvektion}} = \underbrace{\nu \Delta v_i}_{\text{Diffusion}} - \underbrace{\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x_i}}_{\text{interne Kraft}} + \underbrace{f_i}_{\text{extern}}$$

Diese $1 + n$ Gleichungen beschreiben die Strömungsgeschwindigkeit $\vec v : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ einer Flüssigkeit zur Zeit $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ am Ort $\vec x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ in der Ebene (n=2) oder im Raum (n=3), mit konstanter Massendichte $\varrho \in \mathbb{R}$ und Viskosität $\nu \in \mathbb{R}$, Druck $p : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ und äußerer Kraft $\vec f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$. Sie sind zweiter Ordnung und nicht-linear in $\vec v$. Die Impulserhaltung ist Newtons Bewegungsgesetz: Links steht die Beschleunigung, als konvektive Ableitung. H111
Rechts stehen die Kräfte durch Reibung ν, Druck p und $\vec f$. Gegeben sind hierzu die äußere Kraft $\vec f$ sowie die Anfangsgeschwindigkeiten $\vec v(0, \vec x)$ für $\vec x \in \Omega$. Gesucht sind die Funktionen $\vec v$ und p.
Im zweidimensionalen Falle ist die Lösbarkeit bewiesen, im dreidimensionalen Falle noch nicht!
Die Navier–Stokes–Gleichungen illustrieren die Schwierigkeit partieller Differentialgleichungen: Über dreidimensionale Lösungen weiß man allgemein wenig, z.B. sind Existenz und Regularität ungeklärt – trotz größter Anstrengungen. Das Clay Mathematics Institute hat dies im Jahr 2000 als eines von sieben Millenium-Problemen ausgelobt, mit einem Preisgeld von 1 Million Dollar.

Anwendung auf ideale ebene Strömungen

Komplexe Funktionen gehören zum mathematischen Grundwerkzeug. Auch darüber hinaus begegnen sie Ihnen häufig und nützen überall.

Die vorsichtige Ingenieur:in fragt sich: Lohnt sich diese Investition? Ja! Ich greife vor und nenne zwei wunderschöne klassische Anwendungen.

Wir können jede holomorphe Funktion $f(x+\mathrm{i}y) = u(x,y) - \mathrm{i}v(x,y)$ als ein Vektorfeld $(u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\operatorname{div}(u,v) = \operatorname{rot}(u,v) = 0$ betrachten.

♦ **Satz Q1A: holomorphe Lösungen der Maxwell–Gleichung**

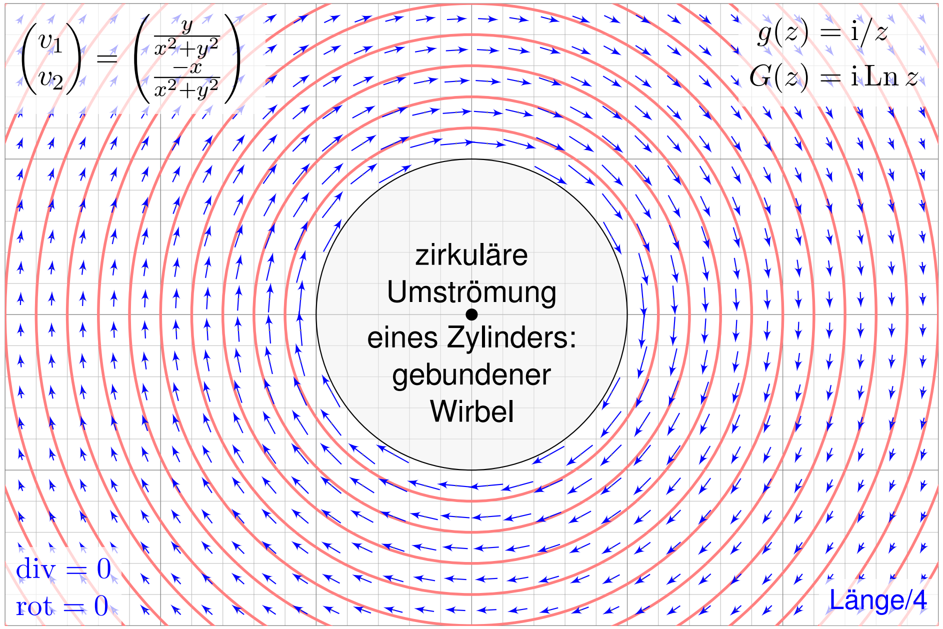
Jedes ebene statische E-Feld $\vec{E} : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \to \mathbb{R}^2$ ohne Quellen entspricht einer holomorphen Funktion $f = E_1 - \mathrm{i}E_2 : \mathbb{C} \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$ und umgekehrt.

♦ **Satz Q1B: holomorphe Lösungen der Navier-Stokes-Gleichung**

Jede ebene stationäre Strömung $v = (v_1, v_2) : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \to \mathbb{R}^2$ konstanter Dichte, ohne Wirbel, ohne Reibung und ohne äußere Kräfte entspricht einer holomorphen Funktion $f = v_1 - \mathrm{i}v_2 : \mathbb{C} \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$ und umgekehrt.

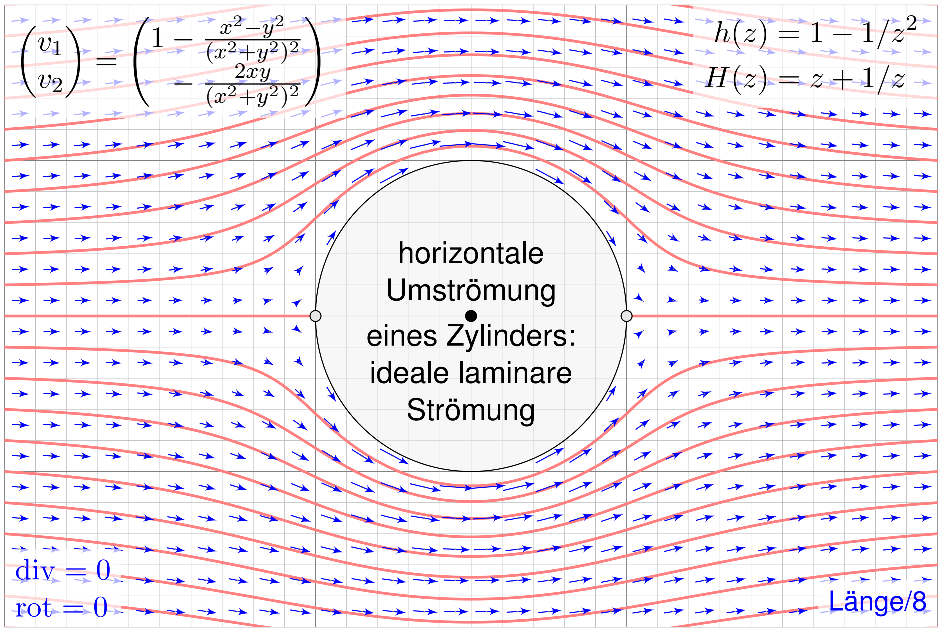
Vertiefungen und Anwendungen bieten die zugehörigen Vorlesungen.

Anwendung auf ideale ebene Strömungen



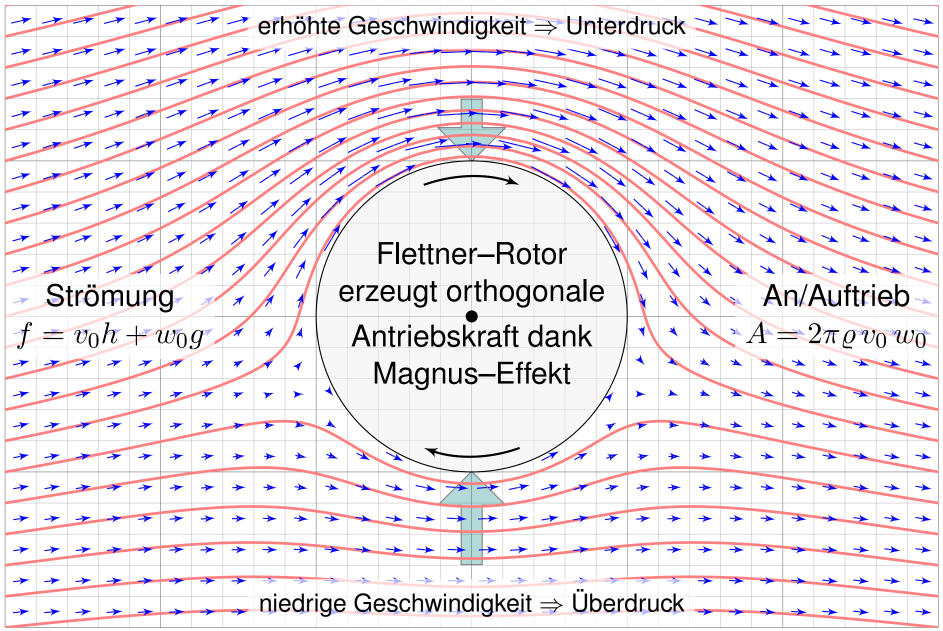
☺ Holomorphe Funktionen beschreiben Strömungen: Wirbelfeld.

Anwendung auf ideale ebene Strömungen



☺ Einfaches und intuitives Modell, exakte Lösung dank Holomorphie!

Anwendung auf ideale ebene Strömungen



☺ So berechneten Kutta und Joukowski die dynamische Auftriebskraft!

Was ist Mathematik?

Mathematik (gr. μαθηματική τέχνη) ist die 'Kunst des Erkennens'; sie ist schöpferischer und systematischer Prozess zum Lösen von Problemen.

Sie ist die **Sprache** des strukturierten logischen Denkens und damit unverzichtbare **Grundlage** für Naturwissenschaft und Technik. Sie ist

- **Werkzeugkasten**, um relevante Probleme eigenständig zu lösen,
- **Wissensgebiet**, allgemeine Kulturtechnik, Schlüsseltechnologie,
- **Wissenschaft**, Ideenschmiede, lebendiges Forschungsgebiet.

Wie ist Mathematik? Anstrengend, aber lohnend!

- abstrakt & schwierig, aber durch Übung erlernbar
- nützlich & effizient, meist an Anwendungen orientiert
- klar & einfach, auch überraschend, kunstvoll, schön

Was bedeutet „Höhere Mathematik“?

- Fortführung der Schulmathematik an der Hochschule
- Grundlage der Ingenieur- und Naturwissenschaften
- Rechentechniken für praktische Anwendungen

Mathematik ist universelle Sprache.

Jahrhunderte naturwissenschaftlicher und technischer Erfahrung lehren uns eindrücklich: **Mathematik ist die Sprache des Universums!**
Wir können diese Sprache verstehen und sprechen lernen.
Wir können sie anwenden und damit gezielt Probleme lösen.
Wie jede Sprache lernt man Mathematik durch Üben! Üben! Üben!

Die Grenzen meiner Sprache bedeuten die Grenzen meiner Welt.
Ludwig Wittgenstein (1889–1951), *Tractatus Logico-Philosophicus* (1921)

Als eindringliches Beispiel nenne ich wie skizziert die Elektrodynamik. Faradays Ergebnisse formulierte Maxwell 1865 als Induktionsgesetz

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\frac{1}{c} \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \bullet \vec{n} \, \mathrm{d}S \quad \text{bzw.} \quad \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0.$$

Maxwells einheitliche **Theorie** der Elektrodynamik eröffnete auch in der **Praxis** völlig neue Anwendungen. Dank seiner Gleichungen konnte er insbesondere die Möglichkeit elektromagnetischer Wellen vorhersagen. Diese waren 1865 noch unbekannt und experimentell nicht zugänglich; ihr Nachweis gelang Heinrich Hertz erst 1886. Wir nutzen sie bis heute!

Mathematik ist effizientes Werkzeug.

Dieselben mathematischen Formeln und Gleichungen treten in immer neuen Zusammenhängen auf und beschreiben völlig unterschiedliche Phänomene! Statt eines „elektrischen Feldes $\vec{E}$“ erscheint nun das „Strömungsfeld $\vec{v}$ einer Flüssigkeit“... oder allgemein ein „Vektorfeld f“: Abstraktion ist die Kunst, Wesentliches von Unwesentlichem zu trennen.

Der Kontext ändert sich, aber die Rechnung ist immer dieselbe!
Mathematische Modelle haben somit ihre eigenständige Bedeutung und ihre Wichtigkeit, daher lohnt es sich, sie eigenständig und allgemein zu untersuchen. Genau dies wollen wir in dieser Vorlesung tun, damit Sie für alle Fälle gewappnet sind, auch für zukünftige Anwendungen!

The enormous usefulness of mathematics in the natural sciences is something bordering on the mysterious and there is no rational explanation for it. [...] The miracle of the appropriateness of the language of mathematics [...] is a wonderful gift which we neither understand nor deserve. We should be grateful for it and hope that it will remain valid in future research.
Eugene Wigner (1902–1995), *The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences* (1960)

Mathematik ist Schlüsseltechnologie.

„Wir haben doch Computer! Wozu lernen wir noch Mathematik?“

Mathematische Modelle und Methoden erlernen Sie zunächst unter vereinfachten *Laborbedingungen*, in kleinem Maßstab, sozusagen unter dem Mikroskop. Unter *Industriebedingungen* ist ihre Vielfalt oft nur mit Computerhilfe voll auszuschöpfen. Umso wichtiger ist es, die Zusammenhänge und Mechanismen grundlegend zu verstehen:
Algorithmen und Programme übersetzen mathematische Modelle!

Meist können Sie nicht in ein laufendes Programm eingreifen, um ad hoc mit Ihrer „Intuition“, „Anschauung“ oder „gesundem Menschenverstand“ zu korrigieren, was die „dumme Maschine“ alleine nicht richtig macht. Im Gegenteil müssen Sie vorher verstehen, wie ein Verfahren im Detail funktioniert, um korrekte Anweisungen zu formulieren. Hierzu müssen Sie sorgfältig arbeiten, akribisch jeden möglichen Fall berücksichtigen.

Sie müssen dem Computer genau sagen, was er tun soll, oft auch wie. Das Ergebnis müssen Sie kritisch prüfen, verstehen und interpretieren. Die Mathematik stellt hierzu alles Nötige zur Verfügung. — Sie wollen Computer korrekt und effizient nutzen? Dazu brauchen Sie Mathematik!

Fouriers Wärmeleitungsgleichung

Ziel: Wie berechnen wir den Wärmefluss in einem Körper?

Bild- und Wärmequelle: Momo

Wärmebilanz für $K =$ Kaninchen bei $t \in$ Winter

Wir betrachten ein Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ und ein Zeitintervall $I = [t_0, t_1]$ und suchen eine Beziehung zwischen Wärmeleistungsdichte $q : I \times \Omega \to \mathbb{R}$, Wärmedichte $u : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ und Wärmefluss $\vec{f} : I \times \Omega \to \mathbb{R}^3$.

Fouriers Wärmeleitungsgleichung

Aufgabe: (1) Sei $K \Subset \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ kompakt, etwa ein Würfel. Formulieren Sie die Wärmebilanz für K in Worten und als Volumen-/Flussintegrale.

(2) Formen Sie dies um zu einem einzigen Volumenintegral.

(3) Folgern Sie hieraus die zugehörige Differentialgleichung.

(4) Vereinfachen Sie schließlich durch die Annahme $\vec{f} = -\kappa \nabla u$.

Lösung: (1) Für jedes Kompaktum $K \Subset \Omega$ gilt die Wärmebilanz:

Von den Wärmequellen in K zugeführte Energie
$=$ Zuwachs der in K enthaltenen Wärmeenergie
$+$ Wärmefluss über den Rand von K nach außen

Als Integralgleichung formuliert bedeutet dies:

$$\iiint_K q(t,x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_K u(t,x)\,\mathrm{d}x + \oiint_{S=\partial K} \vec{f}(t,x) \bullet \vec{n}\,\mathrm{d}S$$

Alle Funktionen seien so oft stetig differenzierbar wie in der folgenden Rechnung benötigt. Ich greife hier schon mal vor: q sei stetig, f einmal stetig diff'bar, u zweimal stetig diff'bar.

Fouriers Wärmeleitungsgleichung

(2) Mit Gauß (G3G) verwandeln wir Flussintegrale in Volumenintegrale:

$$\oiint_{S=\partial K} \vec{f}(t,x) \bullet \vec{n}\,\mathrm{d}S \overset{\text{Gauß}}{\underset{\text{G3G}}{=}} \iiint_K \nabla \bullet \vec{f}(t,x)\,\mathrm{d}x$$

Dürfen wir die Ableitung unters Integral ziehen? K kompakt, $\partial_t u$ stetig!

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_K u(t,x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Kpkt}}{\underset{\text{D3c}}{=}} \iiint_K \frac{\partial}{\partial t} u(t,x)\,\mathrm{d}x$$

Dank Linearität des Integrals erhalten wir ein einziges Volumenintegral:

$$\iiint_K \left[\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) + \nabla \bullet \vec{f}(t,x) - q(t,x) \right] \mathrm{d}x = 0.$$

(3) Diese lokale Wärmebilanz gilt für jedes Kompaktum $K \Subset \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Das gilt genau dann, wenn der (stetige!) Integrand verschwindet (H1A):

$$\partial_t u(t,x) + \nabla \bullet \vec{f}(t,x) = q(t,x)$$

Diese Gleichung gilt überall dort, wo etwas entsteht (q), gespeichert wird (u) und fließt ($\vec{f}$). Die Wärmeleitungsgleichung heißt deshalb auch Diffusionsgleichung und tritt in vielfältigen Anwendungen auf. Wir werden sie am Ende des Semesters mit Fourier–Theorie lösen können. Spezialfall: Für $q = 0$ sowie $u = \varrho$ und $\vec{f} = \varrho\vec{v}$ erhalten wir erneut die Kontinuitätsgleichung.

Fouriers Wärmeleitungsgleichung

(4) Wärme fließt von warm nach kalt, genauer $\vec{f} = -\kappa \nabla u$. Einsetzen:

$$\partial_t u(t,x) + \nabla \bullet \big[-\kappa \nabla u(t,x) \big] = q(t,x)$$

Mit dem Laplace–Operator $\Delta = \nabla \bullet \nabla$ schreiben wir dies kurz

$$\partial_t u - \kappa \Delta u = q \quad \text{mit} \quad \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2.$$

Physikalische Begründung: Wärme ist (vereinfacht) proportional zur Temperatur T, genauer $u = \varrho c T$ mit Dichte ϱ und Wärmekapazität c. Sie fließt proportional zur Temperaturdifferenz, also $\vec{f} = -\lambda \nabla T$ mit Wärmeleitfähigkeit λ. Demnach gilt $\vec{f} = -\kappa \nabla u$ mit $\kappa := \lambda/(\varrho c)$. S223
Zur Vereinfachung sei hier die Temperaturleitfähigkeit $\kappa(t,x)$ räumlich konstant und isotrop.

Wir erhalten so Fouriers berühmte **Wärmeleitungsgleichung** (1822):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \Delta u = q \quad \text{mit} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

Dies ist eine lineare partielle Differentialgleichung in u (links) mit Inhomogenität q (rechts). Sie beschreibt, wie sich die Wärme in einem Körper ausbreitet. Joseph Fourier (1768–1830) hat sie in seiner Arbeit *Théorie analytique de la chaleur* 1822 erstmals eingehend untersucht und hierzu die nach ihm benannte Fourier–Theorie entwickelt, mit der wir uns dieses Semester beschäftigen. Gesucht ist u, gegeben sind Anfangswerte und q. Wie sehen die Lösungen aus? Im homogenen Fall ohne Quellen ($q = 0$) können wir die Fundamentallösung angeben! D516

Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

Was nützen uns solche Gleichungen? Welche Probleme lösen sie?
Typische Anwendungen verlaufen nach dem obigen Muster:

2. Integralgleichungen $\Longleftrightarrow$ 3. Differentialgleichungen (Integralsätze; Gauß, Green, Stokes)

1. physikalisches Modell $\Uparrow$ 2. Integralgleichungen (Naturgesetze; phys. Messungen, Bilanzgleichungen)

3. Differentialgleichungen $\Downarrow$ 4. technische Anwendung (mathematische Lösungsmethoden; exakt / numerisch)

1. physikalisches Modell $\Longrightarrow$ 4. technische Anwendung (Vorhersage?; Planung?)

In einigen Paradebeispielen gelingt uns eine **explizite Lösung**:

☺ exakt, übersichtlich, leicht zu verstehen, zu prüfen und zu nutzen!

☹ Solche Lösungen sind leider meist auf einfache Fälle beschränkt.

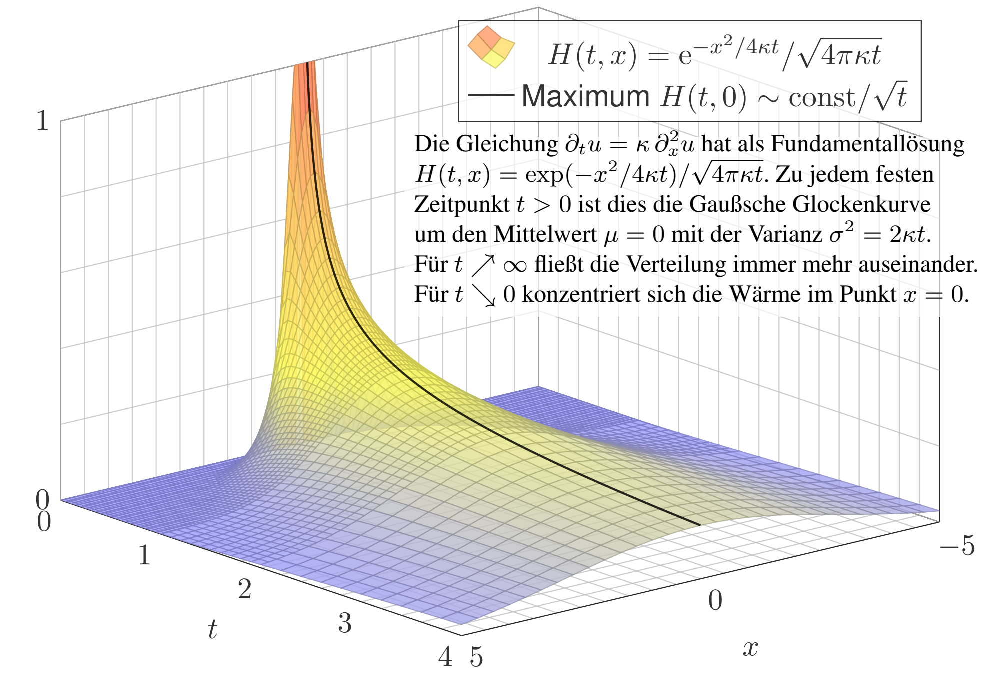
In komplizierteren Fällen bleibt (nur) die **numerische Approximation**:

☹ unübersichtlich, schwerer zu verstehen, zu prüfen und zu nutzen.

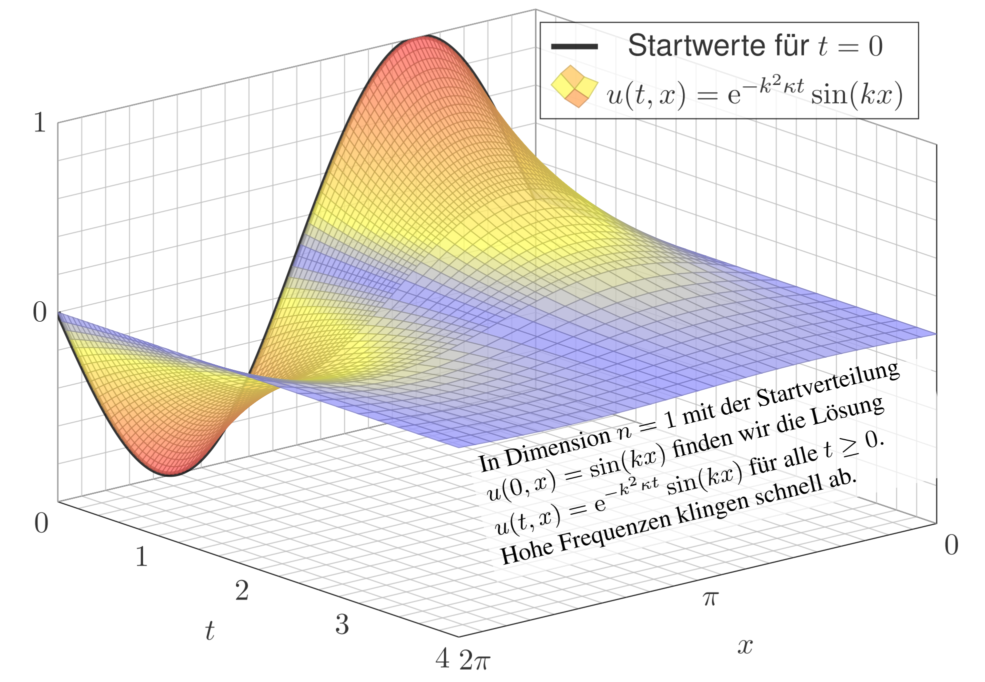
☺ Näherungen sind mit Computerhilfe in vielen Fällen durchführbar!

Auf beiden Wegen leisten Differentialgleichungen die Formulierung und anschließende Lösung des ursprünglichen (physikalischen) Problems. Meist geschieht dies eingebettet in einem Modellierungskreislauf. 105

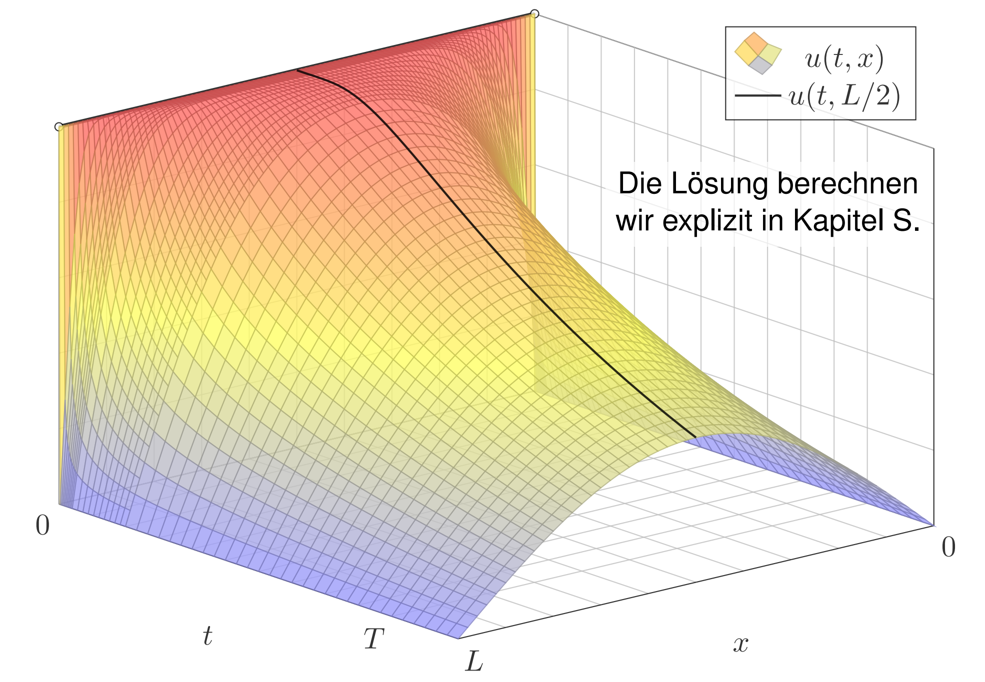
Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung



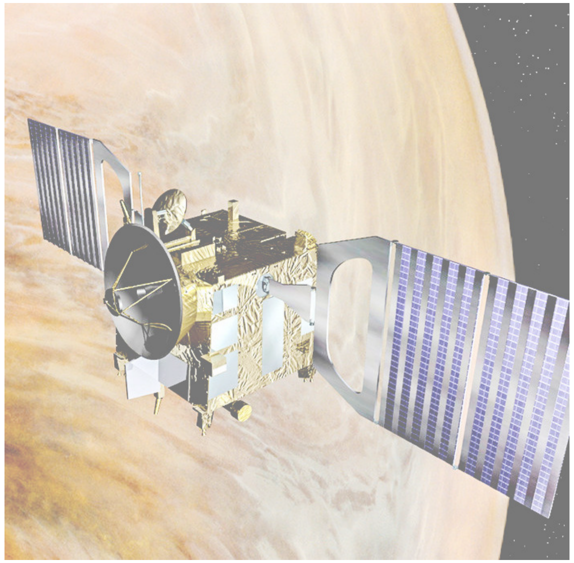
Eigenlösungen der Wärmeleitungsgleichung



Wie schnell kühlt ein Stab über seine Enden ab?



Mars & Venus Express



Missionen der ESA

Start Jun. 2003 in Baikonur
Mars-Orbit ab Jan. 2004
→ Suche nach Wasser

Start Nov. 2005 in Baikonur
Venus-Orbit ab Apr. 2006
→ Atmosphäre der Venus

Orbiter: Masse 633kg leer plus Treibstoff (MMH+NTO)

Acht Steuertriebwerke mit je 10N Schub (im Labor)

Fortsetzung oder Ende: Wie lange reicht der Sprit?

Siehe `en.wikipedia.org/wiki/Mars_Express` und `/Venus_Express`

Mars & Venus Express

Design erfordert Entscheidungen und meist Kompromisse. Die ESA hat auf Messgeräte für die Tankfüllung verzichtet. Zum geplanten Ende der Mission stellt sich die Frage: Kann die Mission verlängert werden? Ist dazu noch genug Treibstoff im Tank? Wie kann man das mit ausreichender Sicherheit herausfinden? Idee: Die ESA verfügt über alle bisherigen Positions- und Steuerdaten. Hieraus könnte man jeweils die Trägheit berechnen und indirekt die Gesamtmasse! Geht das?

Realistische Analogie: Heutige Autos haben eine Masse von etwa 1.2 bis 1.6 Tonnen bei einem Tankvolumen von 50 bis 70 Litern. Sie fahren ein Auto ohne Tankanzeige, die Tankfüllung erspüren Sie in Kurven, beim Gasgeben und Abbremsen. Ist das verrückt? Ja. Ist das möglich? Schwierig! Man muss genau und sehr häufig messen – und dann die Messfehler rausfiltern!

Vereinfachte Analogie: Sie haben eine Gasflasche für einen Herd oder Grill: Leergewicht 6kg, Inhalt 0-5kg Propan, ebenfalls ohne Anzeige des Füllstandes. Sie können durch Schütteln recht gut erspüren, wie voll die Gasflasche ist. Probieren Sie es bei Gelegenheit mal aus!

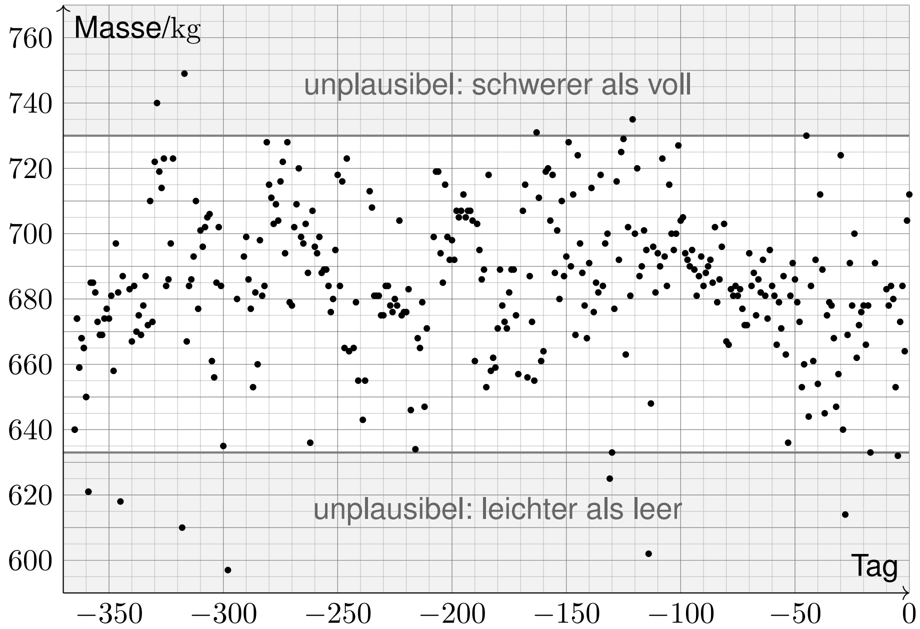
Jede Messung ist mit Fehlern behaftet: systematische müssen wir erkennen und dann korrigieren, bei zufälligen können wir dies nicht direkt! Wir müssen lernen, sie geschickt rauszufiltern, um ein möglichst verlässliches Ergebnis zu erhalten. Das ist das Ziel der mathematischen Statistik.

Es geht um rationale Entscheidungen unter Unsicherheit. Dafür genügt es nicht, eine willkürliche Schätzung auszuspucken! Die Anwendung ist ernst, es geht um Geld, wir müssen überzeugen. Wir wollen nicht nur eine gute Schätzung, sondern auch die Güte der Schätzung berechnen!

Hierzu will ich Sie mit meiner Einführung anleiten. Wer darüber hinaus ernsthafte statistische Analysen betreiben will/muss, kann sich darauf aufbauend in die Spezialliteratur einarbeiten.

Venus Express: Wieviel Treibstoff ist noch im Tank?

Aus Steuermanövern errechnete Masse für 366 Tage bis 31.12.2012.



Venus Express: Wieviel Treibstoff ist noch im Tank?

Impuls-Messungs-Methode (Impulse Measurement Method, IMM):
Aus Positions- und Steuerdaten errechnet man Werte für die Masse;
folgende Daten finden Sie unter `eiserm.de/lehre/HM3/VEX2012.txt`.

Tag	Datum	Masse
1	01.01.2012	640
2	02.01.2012	674
3	03.01.2012	659
...	...	...

Tag	Datum	Masse
...	...	...
364	29.12.2012	664
365	30.12.2012	704
366	31.12.2012	712

Datengewinnung ist mühsam, erfordert Umsicht und Sachkenntnis! Diese Daten stellt uns freundlicherweise Herr Caglayan Gürbüz zur Verfügung. Er hat 2012 die Höhere Mathematik 3 gehört und am IRS / ESOC seine Bachelor-Arbeit zum Mars & Venus Express geschrieben.

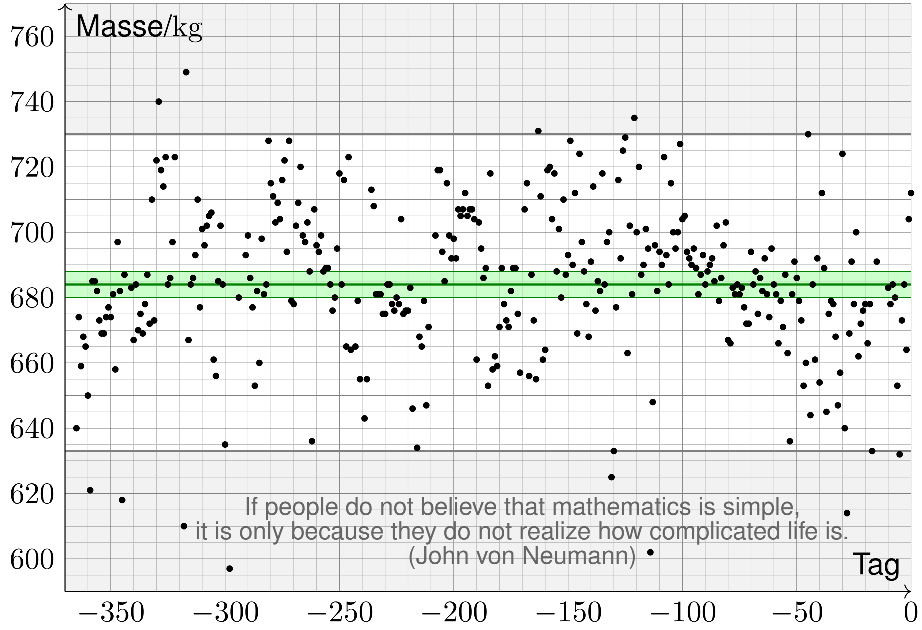
Rationale Entscheidung: Kann / sollte man die Mission verlängern? Grundlose Schätzungen sind sinnlos, wir brauchen Sicherheit!

Techniken: Erwartung und Streuung, Stichproben und Schätzung, Gesetz der großen Zahlen, zentraler Grenzwertsatz, Konfidenzintervall

☺ *This is rocket science.* Mathematische Statistik zeigt, wie es geht.

Mathematische Statistik: Konfidenzintervalle

Jahresmittelwert der Gesamtmasse mit 3σ–Konfidenzintervall.



Mathematische Statistik: Konfidenzintervalle

Aufgabe: Wie groß war der Tankinhalt im Jahresmittel 2012? Geben Sie das 3σ–Konfidenzintervall an (für 99%ige Sicherheit).

Lösung: Unser Datensatz liefert Mittelwert und Streuung:
Der Stichprobenmittelwert ist $\hat{m} = 684\mathrm{kg}$. Dies schätzt die Masse m.
Die Stichprobenstreuung ist $\hat{\sigma}_m = 24.6\mathrm{kg}$. Dies schätzt die Streuung.

Bei $n = 345$ Datenpunkten gilt $\hat{\sigma}_{\hat{m}} = \hat{\sigma}_m/\sqrt{n} = 1.33\mathrm{kg}$. Großes n hilft!
Das 3σ–Intervall $[\hat{m} \pm 3\hat{\sigma}_{\hat{m}}] = [680; 688]\mathrm{kg}$ ist erstaunlich schmal!
Der Tankinhalt betrug demnach $[47; 55]\mathrm{kg}$ mit 99%iger Sicherheit.

☹ Messdaten sind voller Messfehler und anderer Ungenauigkeiten.

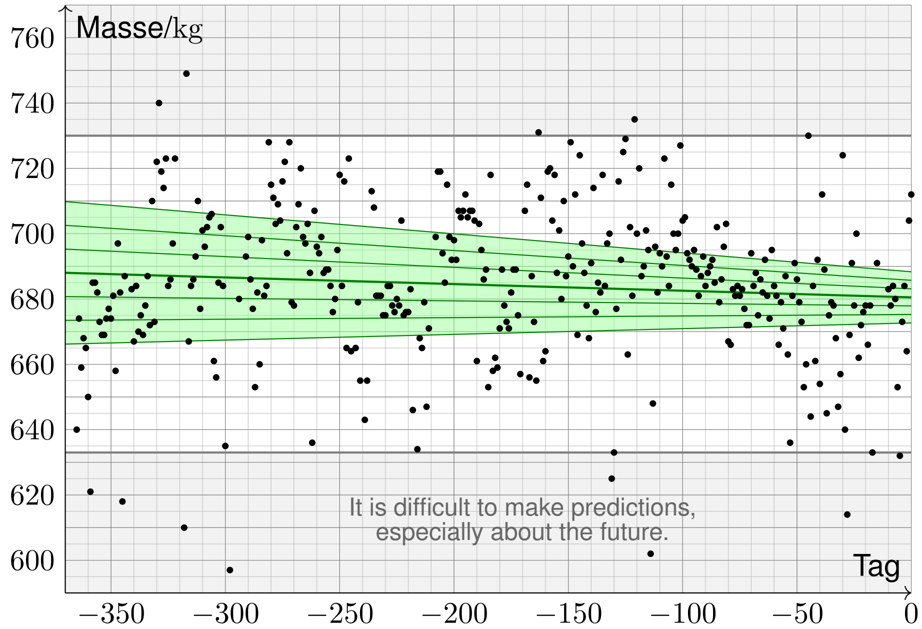
☺ Unsere Daten sind schmutzig doch glücklicherweise sehr zahlreich: Wir können Gesetze der großen Zahlen und Grenzwertsätze nutzen!

☺ Dank passender Technik können Sie so präzise Schlüsse ziehen! Dank Statistik fördern Sie Information zutage, die zuvor verborgen war.

⚠ Jede Prognose ist höchstens so gut wie die zugrundeliegenden Daten! Zufällige Fehler können wir durch große Messreihen rausfiltern, systematische Fehler nicht! Hier helfen nur Umsicht und Sachkenntnis!

Mathematische Statistik: lineare Regression

Regressionsgerade mit Konfidenzintervallen: 1σ, 2σ, 3σ.



Mathematische Statistik: lineare Regression

Aufgabe: Wie groß war der Tankinhalt Ende 2012? Wie lange reicht es noch? Wie sicher ist Ihre Prognose?

Lösung: Unser Datensatz liefert die Regressionsgerade $y = \hat{a} + \hat{b}\,x$:
Ende 2012 ist die Gesamtmasse $\hat{a} = 680.5\mathrm{kg}$ mit Streuung $\hat{\sigma}_{\hat{a}} = 2.6\mathrm{kg}$.
Im Tank verbleiben $\hat{t} = 47.5\mathrm{kg}$ Treibstoff mit Streuung $\hat{\sigma}_{\hat{t}} = 2.6\mathrm{kg}$.
Der Verbrauch ist $\hat{b} = -20.3\mathrm{g/Tag}$ mit Streuung $\hat{\sigma}_{\hat{b}} = 12.6\mathrm{g/Tag}$.

Sehr grobe Prognose der verbleibenden Missionsdauer: 2300 Tage.
Wie verlässlich ist diese Prognose aufgrund unserer Messdaten?

Mit 95% Sicherheit reicht der Treibstoff noch für über 930 Tage:
Tank $[\hat{t} \pm 2\hat{\sigma}_{\hat{t}}] \subseteq [42.3; 52.7]\mathrm{kg}$, Verbrauch $[\hat{b} \pm 2\hat{\sigma}_{\hat{b}}] \subseteq [-45.5; 4.9]\mathrm{g/Tag}$.

Mit 99% Sicherheit reicht der Treibstoff noch für über 680 Tage:
Tank $[\hat{t} \pm 3\hat{\sigma}_{\hat{t}}] \subseteq [39.7; 55.3]\mathrm{kg}$, Verbrauch $[\hat{b} \pm 3\hat{\sigma}_{\hat{b}}] \subseteq [-58.1; 17.5]\mathrm{g/Tag}$.

☺ Wir extrahieren sorgsam, was die vorliegenden Daten hergeben!

⚠ Systematische Fehler? physikalische Annahmen? Alternativen? War 2012 ein typisches Jahr? Wenn man Sprit spart, reicht er länger! VEX wird 2013/14 tiefer in Atmosphäre abgesenkt, der Verbrauch steigt. Die Mission endet im Dezember 2014 wegen Treibstoffmangels. Wow!

Themen der HM1&2: Voraussetzung

Lineare Algebra und Geometrie:

- Reelle und komplexe Zahlen $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$
- Euklidische Vektorräume $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$
- Matrizen & lineare Gleichungssysteme $Ax = y$
- Eigenvektoren und Diagonalisierung $Av = \lambda v$
- Normalformen für Quadriken $x^2 - y^2 = 1$

Analysis:

- Konvergenz von Folgen und Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$
- Funktionen, Grenzwerte und Stetigkeit $\lim_{x \to x_0} f(x)$
- Differential- und Integralrechnung $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F]_a^b$
- Differentialrechnung mehrerer Variablen $\partial_x \partial_y f = \partial_y \partial_x f$
- Vektorfelder, Wegintegrale und Potentiale $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$

☺ Auf die Beherrschung all dieser Grundlagen können Sie stolz sein, als Handwerkszeug schon jetzt im Studium und ebenso später im Beruf!

Themen der HM3: Zielsetzung

Die HM3 bietet viel und verlangt viel … in kurzer Zeit (37 Termine):

- Mehrdimensionale Integration (4) $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x$
- Integralsätze in Ebene und Raum (7) $\int_B \mathrm{d}f = \int_{\partial B} f$
- Fourier–Analyse und Laplace–Transformation (5) $f(t) \sim \sum c_k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$
- Gewöhnliche Differentialgleichungen (8) $u'(t) = f(t, u(t))$
- Partielle Differentialgleichungen (4) $\partial_t\, u(t,x) = \partial_x^2\, u(t,x)$
- Wahrscheinlichkeitsrechnung (8) $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

☺ Diese mächtigen Techniken sind in Anwendungen allgegenwärtig. Jedes dieser Themen verdient eigentlich seine eigene Vorlesung… Sie bekommen alles als „*Best-of*“ in einem einzigen Semester!

Ziele der HM3 laut Modulbeschreibung

Die Studierenden verfügen über grundlegende Kenntnisse

- der Integralrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher,
- gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen,
- Fourier–Reihen und Integraltransformationen sowie Stochastik.

Sie können die behandelten Methoden selbstständig, sicher, kritisch, korrekt und kreativ anwenden.

Sie besitzen die mathematische Grundlage für das Verständnis quantitativer Modelle aus den Ingenieurwissenschaften. Sie können sich mit Spezialist:innen aus dem ingenieurs- und naturwissenschaftlichen Umfeld über die benutzten mathematischen Methoden verständigen.

Konkrete Anwendung benötigt abstrakte Kenntnisse; je anspruchsvoller, desto mathematischer! Daher Ihr Ziel: Sie beherrschen Ihr Handwerk, verstehen die Grundlagen und wenden passende Werkzeuge fachgerecht an. Sie müssen dazu das Rad nicht neu erfinden: Ihr Studium bündelt die Erfahrung vieler Generationen. Diesen Erfahrungsschatz sollen sie kennen und nutzen lernen. Das gilt insbesondere für die Mathematik: Hier erlernen Sie Ihre Denk- und Rechenwerkzeuge. Man kann Techniken auch oberflächlich kennen, aber ohne Übung nicht effizient anwenden. Aus diesem Grund sollen sie jede Woche die Übungen ausgiebig und selbstkritisch nutzen!

Ziele Ihrer universitären Ausbildung

Aus dieser ambitionierten Zielsetzung ergibt sich die Vorgehensweise:

- **Selbstständig:** Es geht nicht nur um Auswendiglernen, sondern um Verstehen und unabhängige Urteilsfähigkeit.
- **Sicher:** Es geht nicht nur um Intuition oder Spekulieren, sondern um nachvollziehbare Argumente und Rechnungen.
- **Kritisch:** Es geht nicht nur um Glauben oder (Auto)Suggestion, sondern um (selbst)kritische Fragen und sorgfältige Antworten.
- **Korrekt:** Sie beherrschen Definitionen, Sätze, Methoden, Proben. Gegenbeispiele zeigen Fehlerquellen, die es zu vermeiden gilt.
- **Kreativ:** Es geht nicht nur um fertige Rezepte, sondern um eigenständige Anwendung.

Manche:r möchte Werkzeuge anwenden, auch ohne zu verstehen. „Echte Macher lesen keine Bedienungsanleitung.“ Für Low-Tech mag das vielleicht genügen, bei High-Tech sicher nicht. Auch im Studium lockt diese scheinbare Abkürzung: unverstandene Rezepte blind anwenden. Das ist weder selbstständig noch sicher, weder kritisch noch kreativ, und meist nicht korrekt! Kurzum: Ohne Grundlagenwissen tappen Sie im Dunkeln und können die Werkzeuge nicht richtig nutzen. Damit verbauen Sie sich den Weg zu effizienten Lösungen, oder schlimmer noch, treffen fatale Fehlentscheidungen. Seriöse Ingenieursarbeit braucht grundlegendes Verständnis!

Zeitplan dieses Semesters

Alle Informationen zur HM3 finden Sie in unserem liebevoll gestalteten Ilias-Kurs sowie ergänzend auf der öffentlichen Webseite der HM3.

Vorlesung und Vortragsübung ab dem 15.10.2024:

wöchentlich	Di	8:00 – 9:30	V 57.03
wöchentlich	Di	14:00 – 15:30	V 47.02
wöchentlich	Fr	11:30 – 13:00	V 47.01

Gruppenübungen ab der zweiten Vorlesungswoche, siehe Ilias.

Der **Übungsschein** ist Voraussetzung für die Abschlussklausur:

- mindestens 50% der Punkte in den wöchentlichen Quizzen,
- mindestens 50% der Punkte der schriftlichen Hausübungen.

Scheinklausuren bleiben sinnvoll, für die HM3 derzeit ausgesetzt.

Klausur: Anfang März / Anfang September

Spacenight: Mai 2025

Some dance to remember,
some dance to forget.

SPACENIGHT
FACHSCHAFT LUFT- UND RAUMFAHRTTECHNIK

Ablauf der Übungen

Wir führen das bewährte **Übungssystem** der HM1&2 in der HM3 fort: Sie bekommen Präsenzübungen (leicht, zum Einüben und Wiederholen) sowie Hausübungen (etwa mittelschwer, zum Trainieren und Vertiefen), darunter auch umfassendere, aus denen sich Klausuraufgaben ableiten.

Für Ihren Lernerfolg entscheidend ist, dass Sie sich gut vorbereiten, engagiert mitarbeiten und selbständig Ihre Hausübungen bearbeiten. Das wöchentliche Quizz bildet die Brücke von der Vorlesung zur Übung: Hier wiederholen Sie wichtige Begriffe und verfestigen neue Techniken.

Ihre Ausbildung verfolgt ein doppeltes Ziel: **Wissen** und **Können**. Sie benötigen beides! Mit den Grundlagen der Vorlesung und dem Training der Übungen können Sie (klausur)typische Aufgaben lösen. Ohne Grundlagen oder ohne eigene Übung kommen Sie nicht weiter.

Das klingt sportlich und ist es auch: ideales wöchentliches Training. Es erfüllt den vehementen studentischen Wunsch nach regelmäßiger Übung klausurtypischer Aufgaben. Das ist anstrengend, aber lohnend! Wer die Mühe scheut und die Hilfe ausschlägt, dem ist nicht zu helfen.

Wie gelingt Ihnen die HM3?

Selbstverständliche Voraussetzungen:

- **Sichere Beherrschung** aller Grundlagen aus der HM1&2
- **Wöchentliche Bearbeitung** von Vorlesung, Quiz und Übungen

Die Höhere Mathematik 3 entspricht 9 LP: insgesamt 270h

- **Präsenz:** 15 Wochen à 2h Übung + 5h Vorlesung/VÜ = 105h
- **Individuelle Arbeit:** ca. ein weiterer Tag (7h) pro Woche = 105h
- **Wiederholung** zur Prüfungsvorbereitung: 1 bis 2 Wochen = 60h

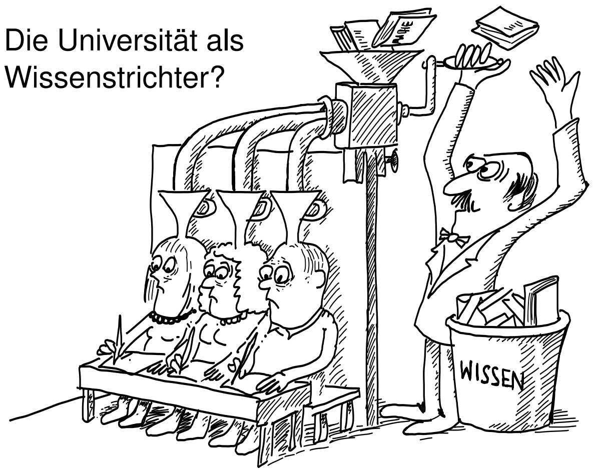
Sie können Ihre Zeit anders aufteilen, aber viel Spielraum bleibt nicht. Es gilt die Erhaltung der Arbeit: Die 270 Stunden werden Sie brauchen!

Beispiel: Wer beschließt, Vorlesung und Übung zu schwänzen und jeweils nur das Übungsblatt in 2h abzuschreiben, der muss zur Klausur etwa 240h in Eigenregie nachholen, alleine! Das sind sechs Wochen konzentrierte Eigenarbeit … und scheitert erfahrungsgemäß.

Qui va lentement, va sûrement, et qui va sûrement, va loin.
[Wer langsam geht, geht sicher, und wer sicher geht, kommt weit.]

Wie gelingt Ihnen das Studium?

Die Universität als Wissenstrichter?



Erwarten Sie nicht, dass irgendjemand Ihnen irgendetwas beibringen könnte — ohne Ihr Zutun. Ich kann Ihnen viel Spannendes erzählen, doch nur Sie selbst können sich Verständnis erarbeiten. Zwei Faktoren bestimmen Ihren Lernerfolg: extrinsische Anregung und intrisische Motivation!

Diese Vorlesung wird Ihnen viele interessante Dinge zeigen, Phänomene und Beispiele erläutern, Argumente und Rechenregeln erklären. Wenn Sie möchten, kann das eine große Hilfe sein, doch letztlich müssen Sie selbst dieses Material eigenständig durcharbeiten, um es zu beherrschen.

Ziel Ihres Studiums: Schärfen Sie Ihr Werkzeug!

Alice trifft Bob, der sich mit stumpfer Axt abmüht, einen Baum zu fällen. „Schärf deine Axt! Dann gelingt dir deine Arbeit leichter.“, rät Alice ihm. Das weist Bob zurück: „Dazu fehlt mir die Zeit, ich muss Bäume fällen!“ Das ist, kurz gesagt, die Entscheidung Ihres Studiums, ja Ihres Lebens.

Verdammte Axt: erst investieren, dann profitieren

Genau dazu studieren Sie: Hier schärfen Sie Ihre Denk-Werkzeuge, um effizient arbeiten zu können. Alice hat das verstanden. „Das Studium ist abstrakter Quatsch und völlig nutzlos für die Praxis.“ Wenn das Bobs Überzeugung ist, dann bitte soll er konsequent sein und nicht studieren.

Sie haben die Wahl, beide Alternativen sind gangbar. Vielleicht möchten Sie sich rasch in der viel gelobten „Praxis“ austoben und keine Zeit in die oft geschmähte „Theorie“ investieren. Auch mit stumpfer Axt können Sie Bäume fällen, mühsam zwar, doch für wenige kleine wird es reichen.

Die Kunst des Lernens, ganz allgemein des verausschauenden Planens, ist die Balance zwischen sofortigem Nutzen und langfristiger Investition. Wenn Sie richtig studieren, erreichen Sie beides, sowohl langfristigen Nutzen durch Wissen und Können als auch Freude schon beim Lernen.

Das ist eine grundlegende Einsicht und vielfach bewährte Weisheit, so in dem lateinischen Motto *Festina lente*, übersetzt „Eile langsam!“, sinngemäß „Eile mit Weile!“. Jedes ernsthafe Vorhaben gelingt Ihnen am besten im richtigen Gleichgewicht zwischen zügig und sorgsam.

Verdammte Axt: erst investieren, dann profitieren

Als Mahnung im Handwerk: *Measure twice, cut once!*
Schlechte Vorbereitung verschwendet Zeit und Ressourcen.
Als Motto der Navy Seals: *Slow is smooth, and smooth is fast!*
Gute Vorbereitung sorgt für reibungslose, effiziente Abläufe.

In seiner Fabel vom Hasen und der Schildkröte schreibt Jean de La Fontaine (1621–1695): *Rien ne sert de courir; il faut partir à point.*
Es nützt nichts zu rennen; man muss rechtzeitig starten.
Besonnenheit und Zielstrebigkeit setzen sich durch.

Was bedeutet das für Ihr Studium, speziell in dieser Veranstaltung? Anfangs fällt Ihnen die Anwendung vermutlich schwer. Jetzt wissen Sie, warum: Schärfen Sie Ihre Werkzeuge, lernen Sie Definitionen und Sätze, üben Sie Mathematik, das wirkt, so gelingen Ihnen die Anwendungen!

Manche lebt achtsam, anderer schimpft achtlos auf die „lästige Theorie“ und scheitert alsbald an allzu naiver Anwendung, getreu dem Slogan „Plane nicht, irre lieber!“. Manchmal geht das gut, meist leider nicht.
Was immer du tust, handele klug und bedenke das Ende!

Verdammte Axt: erst investieren, dann profitieren

Warum erzähle ich das? Die meisten Studierenden kommen an die Uni mit ihren eingefahrenen Gewohnheiten, manche gut und viele schlecht. Bitte studieren Sie selbstbewusst und selbstkritisch, legen Sie schlechte Gewohnheiten ab, erlernen Sie gute Gewohnheiten! Wir leiten Sie an und geben beste Praktiken weiter. Nehmen und wenden Sie dies an!

We must choose between what is easy and what is right.
Albus Dumbledore

Die Schule hat Ihnen herzlich wenig Mathematik zugetraut. Anfangs mag das gefallen, es ist ja so leicht! Doch dann haben Sie sich entschieden, Ingenieurwesen oder Physik oder Mathe zu studieren, und darauf hatte die Schule Sie in keinster Weise vorbereitet. Ihre Axt war leider stumpf!

Manch verlockende „Abkürzung“ ist letztlich Irrweg und Vergeudung. Manch vermeintlicher „Umweg“ erweist sich als zielführend und effizient. In dieser gut durchdachten Vorlesung und den zugehörigen Übungen machen wir Sie mit den nötigen, scharfen Werkzeugen vertraut und leiten Sie an zum fachgerechten Gebrauch. Diese Mühe lohnt sich!

Wie studiere ich richtig?

Ihr Ziel sind Erwerb von Techniken und Training Ihrer Fertigkeiten. Hierzu erkläre ich Ihnen, wie Sie erfolgreich Mathematik lernen.

Die HM3 bietet viel und verlangt viel. Jede Woche erkläre ich Ihnen neue Werkzeuge, die Ihnen in vielfältigen Anwendungen nützen werden. Schon nach wenigen Wochen werden wir recht viel Gepäck beisammen haben. Wichtig ist daher, dass Sie im Semester nicht den Anschluss verlieren! Das 15wöchige Programm lässt sich unmöglich im Schnelldurchgang nachholen.

Die genannten Themen der HM3 sind nützlich und vielseitig, diese Techniken werden überall in den Ingenieurwissenschaften genutzt, je nach Spezialisierung sogar noch wesentlich mehr. Andernorts reserviert man für die HM3&4 zwei Semester, in Stuttgart nur eins. Unser Programm ist daher sehr voll: Für jedes Thema stehen nur 2 bis 3 Wochen zur Verfügung. Die knappe Zeit müssen Sie nutzen. Vertrödeln Sie nicht das Semester, indem Sie nur mit einem Ohr zuhören; das bringt rein gar nichts – außer Ohrenkitzel und dem trügerischen Gefühl, irgendwie mitzulaufen.

Die obige Rechnung ist keine Übertreibung: Sie brauchen ca. 7 Stunden Eigenarbeit jede Woche!

Noch einmal quer gerechnet: Diese Veranstaltung macht fast ein Drittel Ihres Semesters aus. Bei einer Arbeitswoche von 6 Tagen müssen Sie zwei Tage für die Mathematik einplanen. Davon verbringen Sie bereits 7 Stunden mit Übung und Vorlesung. Der wichtigste Teil sind die verbleibenden ca. 7 Stunden eigene Arbeit! Wer nur einen Teil der Zeit investiert, wird auch nur einen Teil des Stoffes durcharbeiten. Das muss Ihnen klar sein, wenn Sie Ihre Zeit einteilen.

Wie studiere ich richtig?

Engagieren Sie sich und nutzen Sie intensiv Ihre Studienzeit! Ohne Fleiß und Ausdauer können Sie Wissen und Können nicht erwerben.

studēre (lat.): sich bemühen, beschäftigen, streben, widmen, bilden. Partizip präs. aktiv: *studens* ‘studierend’ > der Student / die Studentin. Student / studierend ist, wer sich aktiv um seine Bildung bemüht. (Zur Wortbedeutung siehe `de.wiktionary.org/wiki/studieren`.)

In dieser Vorlesung präsentiere ich Ihnen nur wenige Definitionen und Sätze, dafür umso mehr Anwendungen in Form von Übungsaufgaben. Beides müssen Sie sorgfältig durcharbeiten, nur so verstehen und beherrschen Sie es. Alles können Sie selbst ausprobieren: Üben! Üben! Üben!

Sie wünschen sich ausschließlich Beispiele ohne jede Theorie? Das reicht nur für den ersten Schritt und wird schnell ineffizient. Sie benötigen sowohl handfeste Beispiele als auch die zugrundeliegende Theorie, wie linke und rechte Hand! Beides zusammen garantiert Ihren Erfolg.

Die Mathematik ist extrem klar strukturiert, das erleichtert das Lernen!

Haben Sie keine Angst vor neuen Begriffen: Definitionen erklären, Beispiele illustrieren und Sätze bündeln die Rechenregeln.

Ein gut verstandenes Beispiel nützt Ihnen mehr als ein schlecht verstandener Satz. Nutzen Sie ernsthaft die zahlreichen Aufgaben für Ihre eigene Übung!

Erarbeiten Sie sich parallel dazu die nötigen Grundlagen und verfestigen Sie Ihr Wissen in Form von Definitionen und Sätzen. Ein gut verstandener Satz bündelt 1000 Beispiele.

Wie kann / soll ich Mathematik lernen?

Mancher lernt gut aus Büchern, eine andere besser aus Vorlesungen, eine dritte beginnt mit den Übungen, ein vierter mit den Klausuren. Alle schauen gerne Videos, das ist unterhaltsam und vielleicht auch hilfreich. Ihre individuellen Lernstrategien und Motivationen kennen Sie selbst am besten und sollten sie optimieren. Nehmen Sie die Herausforderung an und werden Sie aktiv!

Die oben erklärte Struktur ist eine Besonderheit der Mathematik: Definition, Beispiel, Satz, Beweis, Anwendung, ... Sie hat sich aus guten Gründen so entwickelt: Sie strukturiert die Darstellung und betont das Wesentliche. Sie wird überall genutzt, weil sie sich bewährt. Es gibt keinen Grund, sie zu fürchten, im Gegenteil: Nutzen Sie sie als Hilfestellung!

Das bloße Lesen / Hören / Zuschauen ist leider wenig ergiebig, dieser Eindruck bleibt passiv, oberflächlich und flüchtig. Klavierspielen lernen Sie nicht durch den Besuch von Konzerten! Sie müssen selbst aktiv werden und schrittweise lernen, Probleme eigenständig zu lösen. Es ist und bleibt eine menschliche Grundtatsache: Wir leben und streben, lernen und entwickeln uns, indem wir uns Erfahrungen, Wissen und Können aktiv und eigenständig aneignen.

- Bilden Sie Lerngruppen, diskutieren Sie die Aufgaben und Ihre Lösungen!
- Bleiben Sie neugierig, präzisieren Sie Ihre Ideen und klären Sie Ihre Fragen!
- Arbeiten Sie mit Stift und Papier: Nicht abschreiben, eigenständig arbeiten!

Besonders gut bewährt sich die Kombination aus kontinuierlicher eigener Vorbereitung und gemeinsamer Diskussion in der Gruppe. Genau darauf zielen unsere wöchentlichen Übungen. Vertrödeln Sie während des Semester nicht diese entscheidende Hilfestellung!

Wie kann / soll ich Mathematik lernen?

Faire Klausur bedeutet: Ihr Erfolg ist proportional zu Ihrem Können. Klausur ist keine Lotterie: Ihr Können ist proportional zur Ihrer Übung.

Für die Scheinklausuren verschlafen viele den Start ins Semester und zum wöchentlichen Lernen. Das Studium, insbesondere der Mathematik, erfordert Ausdauer, Fleiß und Disziplin. Nicht jede:r ist dazu bereit, manche geben leichtfertig auf und schieben ins nächste Jahr. Tun Sie das nicht! In den Modulprüfungen hingegen waren die Klausurergebnisse der letzten Jahre erfreulich gut. Das ist kein Widerspruch, sondern das Ergebnis von einem Semester Vorbereitung und Training.

Das Semester war anstrengend aber erfolgreich, alle konnten das spüren: Viele Teilnehmer:innen haben Vorlesung und Übungen engagiert genutzt und waren dementsprechend gut vorbereitet. Das zahlt sich aus! Auch dieses Jahr gilt: Wer dabei bleibt und wöchentlich mitarbeitet, ist aller Erfahrung nach gut vorbereitet und hat schließlich wenig Schwierigkeiten mit der Klausur.

Engagieren Sie sich ab der ersten Woche! Pokern Sie nicht auf eine knappe Vier, das geht meist schief. Seien Sie mutig und arbeiten Sie auf eine Zwei oder Drei, dann läuft’s. Doppelter Vorteil: Die mathematischen Grundlagen, die Sie jetzt hier lernen, nützen Ihnen auch sonst überall!

Wenn Sie durchfallen wollen, ignorieren Sie meine Ratschläge. Leider tun das einige, zu viele. Dann müssen Sie nächstes Jahr wieder ran oder Ihr Studium beenden. Manche finden Kamikaze scheinbar toll, ich kann davon nur abraten. Studieren Sie ernsthaft, studieren Sie richtig!

Wir sorgen dafür, dass Sie in dieser Veranstaltung alles Nötige lernen und trainieren können. Nutzen Sie diese Chance und erfüllen Sie Ihren Teil! Verdienen Sie sich eine gute Note!