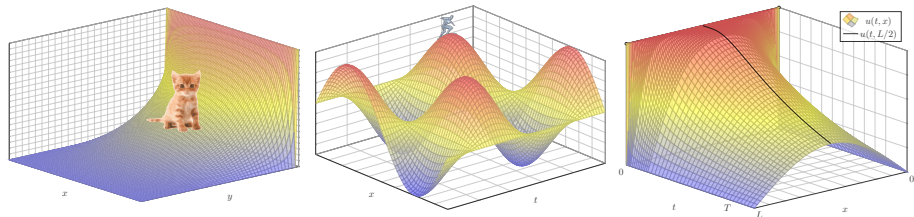


Kapitel R

Lineare PDE zweiter Ordnung



Im Unterschied zu den gewöhnlichen Differentialgleichungen besitzen die partiellen Differentialgleichungen keine einheitliche Theorie.

*Einige Gleichungen haben ihre eigenen Theorien,
für andere gibt es überhaupt keine Theorie.*

Vladimir I. Arnold (1937–2010)

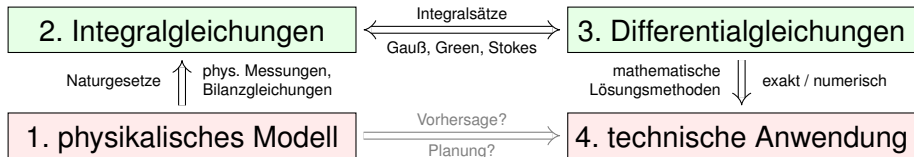
Inhalt dieses Kapitels R

- 1 Lineare PDE zweiter Ordnung
 - Lösung durch Fourier–Transformation
 - Klassifikation linearer PDE zweiter Ordnung
 - Trennung der Variablen durch Produktansatz
- 2 Anwendung auf die Potentialgleichung
 - Laplace–Gleichung auf einem Rechteck
 - Eindeutigkeit und Minimum-Maximum-Prinzip
 - Gut gestellt? Hadamards warnendes Gegenbeispiel
- 3 Anwendung auf die Wellengleichung
 - Die harmonisch schwingende Saite
 - Wellengleichung und die gezupfte Saite
 - Die Energiemethode beweist die Eindeutigkeit.
- 4 Fazit: PDE zweiter Ordnung
 - Zusammenfassung und Verständnisfragen
 - Aufgaben zur Separationsmethode

Motivation zu Differentialgleichungen

Differentialgleichungen sind die Sprache der Naturgesetze.

Typische Anwendungen verlaufen daher nach dem vertrauten Muster:



Wir untersuchen ein physikalisches Phänomen, das uns am Herzen liegt und das wir nutzen wollen. Grundlegende physikalische Gesetze sind Erhaltungsgrößen in Form von Integralgleichungen. Diese formen wir um zu Differentialgleichungen, in der Hoffnung, sie leichter lösen zu können.

Wichtige Anwendungen, die Sie zum Teil schon kennengelernt haben, finden sie in Elektrodynamik (Maxwell–Gleichungen), Thermodynamik (Bilanzgleichungen), klassischer Mechanik (Hamilton–Gleichungen), Quantenmechanik (Schrödinger–Gleichung), Strömungsmechanik (Navier–Stokes–Gleichungen), usw. . . . Die Liste ist schier endlos.

Motivation zu Differentialgleichungen

Wir haben zunächst **gewöhnliche Differentialgleichungen** (ODE) untersucht und gelöst. Theorie und Lösungsmethoden sind hier noch übersichtlich und weitgehend vollständig. Das ist die unentbehrliche Grundlage und beschert uns bereits phantastische Anwendungen.

In der Praxis treten häufig **partielle Differentialgleichungen** (PDE) auf. Erfahrungsgemäß sind die allermeisten höchstens **zweiter Ordnung**. Wir diskutieren etwas genauer die drei zentralen, klassischen Beispiele: Potentialgleichung, Wellengleichung und Wärmeleitungsgleichung.

Bei jeder partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung fragen wir: Ist sie linear? Ist sie elliptisch? oder hyperbolisch? oder parabolisch? Dies deckt nur die einfachsten Möglichkeiten ab, es gibt viele weitere, aber es verhilft uns zu einer ersten Übersicht und Orientierung:

😊 Wenn die Gleichung elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch ist, dann verhält sie sich ähnlich wie die entsprechende **Modellgleichung**, also Potential-, Wellen- oder Wärmeleitungsgleichung. Zu Verständnis und Lösung der Gleichung sind solche Analogien oft sehr nützlich.

Lösung durch Fourier–Transformation

Wir untersuchen die homogene **Wärmeleitungsgleichung** S101

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) &= \kappa \partial_x^2 u(t, x) && \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= u_0(x) && \text{für } t = 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Aufgabe: Lösen Sie dies durch Fourier–Transformation bezüglich x .

Hierzu gibt es Voraussetzungen: Satz K2A erfordert, dass u zweimal stetig nach x differenzierbar ist und $\partial_x^2 u$ absolut integrierbar. Das ist am Ende noch zu überprüfen, siehe hierzu Satz D5D.

Lösung: Die \mathcal{F} –Transformierte $\hat{u}(t, \xi)$ erfüllt $\partial_t \hat{u}(t, \xi) = -\kappa \xi^2 \hat{u}(t, \xi)$.

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung in t mit Parameter ξ .

Wir trennen die Variablen gemäß $[\partial_t \hat{u}(t, \xi)] / \hat{u}(t, \xi) = -\kappa \xi^2$
und integrieren von 0 bis t zu $\ln \hat{u}(t, \xi) - \ln \hat{u}(0, \xi) = -\kappa \xi^2 t$.

Wir erhalten so die Lösung $\hat{u}(t, \xi) = e^{-\kappa \xi^2 t} \hat{u}_0(\xi)$ für alle $t \geq 0$.

Rücktransformation $e^{-\kappa \xi^2 t} \bullet \circ e^{-x^2/4\kappa t} / \sqrt{2\kappa t}$ und Faltung ergibt:

$$u(t, x) = \int_{y \in \mathbb{R}} \frac{e^{-(x-y)^2/4\kappa t}}{\sqrt{4\pi\kappa t}} u_0(y) dy \quad \text{für } t > 0.$$

Lösung durch Fourier–Transformation

😊 Das Ergebnis entspricht unserer in Satz D5D präsentierten Lösung: Die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = \kappa \partial_x^2 u$ hat als Fundamentallösung eine auseinanderfließende Glockenkurve, den **Wärmeleitungskern**

$$H : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : H(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\kappa t}\right).$$

Die Konstanten sichern die Normierung $\int_{\mathbb{R}} H(t, x) dx = 1$. (Gauß C2G)
Für $t = 0$ sei die Wärmeverteilung $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vorgegeben, mit $u_0 \in C_b$.
Für $t > 0$ erhalten wir die Lösung durch **Superposition** (Faltung D5E):

$$u(t, x) = \int_{y \in \mathbb{R}} u_0(x - y) H(t, y) dy = \int_{z \in \mathbb{R}} u_0(z) H(t, x - z) dz.$$

😊 Stehen die Formeln schon da, so genügt geduldiges Nachrechnen: Machen Sie die Probe und zeigen Sie $\partial_t u = \kappa \partial_x^2 u$ durch Ableiten. D517

😊 Die Fourier–Transformation bietet eine elegant-effiziente Herleitung. Anschließend sammeln und prüfen wir die Voraussetzungen (D5D, D5U).

Lösung durch Fourier–Transformation

Die Methode der Fourier–Transformation funktioniert ganz allgemein!
Die Idee ist klar: Zu lösen sei die lineare partielle Differentialgleichung

$$P(\partial) u(x) = g(x)$$

mit einem Polynom $P(x) = \sum a_\nu x^\nu$. Nach Fourier–Transformation gilt

$$P(i\xi) \hat{u}(\xi) = \hat{g}(\xi).$$

Auflösen zu $\hat{u}(\xi) = \hat{g}(\xi)/P(i\xi)$ und Rücktransformation liefert u .

Die Transformation $g(x) \mapsto \hat{g}(\xi)$ und $P(\partial) \mapsto P(i\xi)$ kennen wir bereits, so dass wir $\hat{u}(\xi) = \hat{g}(\xi)/P(i\xi)$ setzen können. Zunächst ist jedoch nicht klar, ob die Rücktransformation $\hat{u} \mapsto u$ überhaupt immer möglich ist – insb. wenn \hat{g} nicht absolut integrierbar ist oder $1/P(i\xi)$ Polstellen hat!

😊 Dies garantiert der grundlegende Satz von Ehrenpreis–Malgrange: Jede lineare PDE mit konstanten Koeff. kann global gelöst werden!

⚠ Für nicht-konstante Koeffizienten gilt die Lösbarkeit nicht allgemein, wie das obige Gegenbeispiel von Lewy–Mizohata [Q336](#) eindrücklich zeigt.

Lösung durch Fourier–Transformation

Satz R1A: Ehrenpreis 1954, Malgrange 1955

Sei $P(x) = \sum_{|\nu| \leq k} a_\nu x^\nu$ ein Polynom mit Koeffizienten $a_\nu \in \mathbb{C}$.

Zu lösen sei für $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ die lineare partielle Differentialgleichung

$$P(\partial) u(x) = g(x).$$

Zu jeder rechten Seite $g \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ existiert eine Lösung $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$.

Genauer gilt: Zu P existiert eine Fundamentallösung F mit $P(\partial) F = \delta$.

Für jede rechte Seite g liefert F dann eine Lösung u durch Faltung:

$$u(x) = \int_{y \in \mathbb{R}^n} F(x - y) g(y) dy = \int_{z \in \mathbb{R}^n} F(z) g(x - z) dz.$$

☺ Für diese Problemklasse ist die Existenz von Lösungen garantiert. Im Einzelfall bleibt „nur“ noch die Fundamentallösung F auszurechnen.

☺ Im Falle $n = 1$ haben wir eine gewöhnliche DG der Ordnung k , linear mit konstanten Koeffizienten und rechter Seite g . (Satz N2F)

Die drei wichtigsten PDE zweiter Ordnung

Potentialgleichung für $u: \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}: (x_1, \dots, x_n) \mapsto u(x_1, \dots, x_n)$:

$$\Delta u = \rho \quad \text{mit} \quad \Delta = \partial_1^2 + \dots + \partial_n^2$$

Die Gleichung $\Delta u = 0$ heißt **homogene Potentialgleichung** oder **Laplace-Gleichung**; ihre Lösungen heißen harmonische Funktionen. Die Gleichung $\Delta u = \rho$ heißt **inhomogene Potentialgleichung** oder **Poisson-Gleichung**. Sie beschreibt das Gravitationspotential u zur Massenverteilung ρ , ebenso das elektrische Potential u zur Ladungsdichte ρ , und vieles mehr.

Wellengleichung für $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ oder $u: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$:

$$\partial_t^2 u - c^2 \Delta u = \rho \quad \text{mit} \quad \Delta = \partial_1^2 + \dots + \partial_n^2$$

Diese Gleichung beschreibt die Ausbreitung von Schallwellen in Röhren (Dim. $n = 1$), flache Oberflächenwellen in Wasser (Dim. 2) oder Lichtwellen im Raum (Dim. 3); hierbei ist $c > 0$ die Ausbreitungsgeschwindigkeit. Im stationären Fall $\partial_t u = 0$ erhalten wir die Potentialgleichung!

Wärmeleitungsgleichung für $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ oder $u: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$:

$$\partial_t u - \kappa \Delta u = q \quad \text{mit} \quad \Delta = \partial_1^2 + \dots + \partial_n^2$$

Sie beschreibt die Wärmeausbreitung in einem homogenen Körper mit Temperaturleitfähigkeit $\kappa > 0$, Wärmeenergiedichte u und Wärmeleistungsdichte q . Sie heißt auch Diffusionsgleichung. Im stationären Fall $\partial_t u = 0$ erhalten wir erneut die Potentialgleichung!

Satz R1B: Lösungen der Potentialgleichung

(1) Die n -dimensionale **Laplace-Gleichung** $\Delta u = 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ hat als **Fundamentallösung** das n -dimensionale Newton-Potential

$$N(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}|x| & \text{für } n = 1, & \frac{1}{2\pi} \ln|x| & \text{für } n = 2, \\ \frac{-1}{4\pi|x|} & \text{für } n = 3, & \frac{|x|^{2-n}}{(2-n)n\tau_n} & \text{für } n \neq 2. \end{cases}$$

(2) Die **Potentialgleichung** $\Delta u = \varrho$ wird gelöst durch **Superposition**:

$$u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} N(x-y) \varrho(y) dy$$

Übung: Die Funktion N erfüllt $\Delta N = 0$ und die Normierung $\int_{\partial B(0,r)} \nabla N dS = 1$ (Satz H1E). Allgemein ist $\tau_n = \text{vol}_n(\mathbb{D}^n)$ das n -dim. Volumen der Einheitskugel. [C425] Bis auf Vorzeichen und Konstante ist N das Gravitationspotential einer Punktmasse im Ursprung. Die Verschiebung $N(x-y)$ ist demnach das Potential um y , und $u(x)$ ihre Superposition. Wenn ϱ vernünftig ist, zum Beispiel stetig differenzierbar mit kompaktem Träger, so folgt hieraus $\Delta u = \varrho$ (Satz H1E).

Satz R1c: Lösungen der Wellengleichung

(1) Die n -dimensionale homogene **Wellengleichung** $\partial_t^2 u - c^2 \Delta u = 0$ hat zu jeder Richtung $\xi \in \mathbb{R}^n$ die separierte **Fundamentallösung**

$$\Psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} : (t, x) \mapsto e^{i\langle \xi | x \rangle} e^{-i|\xi|ct}$$

(2) Die allgemeine Lösung erhalten wir hieraus als **Superposition**

$$u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : (t, x) \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \xi | x \rangle} e^{-i|\xi|ct} a(\xi) d\xi.$$

Wir erhalten $u(0, x) = u_0(x)$ durch die **Fourier-Transformierte** $a = \widehat{u_0}$.

Übung: Rechnen Sie nach, dass die Funktion Ψ tatsächlich $(\partial_t^2 - c^2 \Delta)\Psi = 0$ erfüllt. Die Funktion Ψ beschreibt eine Welle mit Wellenvektor $\xi \in \mathbb{R}^n$. Eine allgemeinere Form ist $u(t, x) = f(\langle \xi | x \rangle - |\xi|ct)$. Der obige Produktansatz erlaubt die Trennung der Variablen. Superposition von endlich vielen Wellen bereitet keine Schwierigkeit. Damit aber das Integral konvergiert, sollte a absolut integrierbar sein. Ist auch der Anfangswert u_0 absolut integrierbar, so können wir $a = \widehat{u_0}$ definieren und erhalten $u(t, x)$ mit $u(0, x) = u_0$. Einfach wunderbar!

Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

◆ Satz D5D: Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

(1) Die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = \kappa \Delta u$ hat als Fundamentallösung eine auseinanderfließende Glockenkurve, den **Wärmeleitungskern**

$$H : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : H(t, x) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi\kappa t})^n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\kappa t}\right).$$

Die Konstanten sichern die Normierung $\int_{x \in \mathbb{R}^n} H(t, x) dx = 1$ für $t > 0$.

(2) Für $t = 0$ sei die Wärmeverteilung $u_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vorgegeben, $u_0 \in C_b$. Für $t > 0$ erhalten wir die Lösung durch **Superposition** (Faltung D5E):

$$u : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : u(t, x) = \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} H(t, x - \xi) u_0(\xi) d\xi.$$

Sie erfüllt $\partial_t u = \kappa \Delta u$ für $t > 0$ sowie $\lim_{t \searrow 0} u(t, x) = u_0(x)$.

Übung: Rechnen Sie nach, dass tatsächlich $(\partial_t - \kappa \Delta)H = 0$ und $\int_{\mathbb{R}^n} H(t, x) dx = 1$ gilt. Für festes $t > 0$ ist $H(t, x - \xi)$ eine Glockenkurve mit Mittelwert ξ und Streuung $\sigma = \sqrt{2\kappa t}$. Ableiten von u ergibt $(\partial_t - \kappa \Delta) u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\xi) (\partial_t - \kappa \Delta)H(t, x - \xi) d\xi = 0$. D517

Klassifikation linearer PDE zweiter Ordnung

Wir erinnern an ebene Quadriken im Hauptachsensystem: E037

$$x^2 + y^2 = 1, \quad \left(\frac{x - x_0}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{r_2}\right)^2 = 1, \quad \text{Ellipse;}$$

$$x^2 - y^2 = 1, \quad \left(\frac{x - x_0}{r_1}\right)^2 - \left(\frac{y - y_0}{r_2}\right)^2 = 1, \quad \text{Hyperbel;}$$

$$x^2 - y = 0, \quad \left(\frac{x - x_0}{r_1}\right)^2 - \left(\frac{y - y_0}{r_2}\right) = 0, \quad \text{Parabel.}$$

In Dimension 2 betrachten wir allgemein das quadratische Polynom

$$P(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c.$$

Zu $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ mit $a_{12} = a_{21}$ betrachten wir $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$.

Wir nennen das Polynom $P(x, y)$ **elliptisch**, wenn $\det A > 0$;

hyperbolisch, wenn $\det A < 0$; **parabolisch**, wenn $\det A = 0$.

□ Zur Klassifikation der Quadriken siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, Kapitel 7.

Wir beschreiben den quadratischen Anteil durch eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Jede symmetrische Matrix lässt sich orthogonal diagonalisieren, damit können wir P in Normalform bringen. Entscheidend ist hierfür das Vorzeichen der Eigenwerte!

Klassifikation linearer PDE zweiter Ordnung

In Dimension 2 betrachten wir den linearen Differentialoperator

$$L = P(\partial_x, \partial_y) = a_{11}\partial_x^2 + 2a_{12}\partial_x\partial_y + a_{22}\partial_y^2 + b_1\partial_x + b_2\partial_y + c.$$

Der quadratische Teil hat die Determinante $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$.

Wir nennen den Differentialoperator L **elliptisch**, wenn $\det A > 0$;
hyperbolisch, wenn $\det A < 0$; **parabolisch**, wenn $\det A = 0$.

In Dimension n betrachten wir allgemein den Differentialoperator

$$L = P(\partial_1, \dots, \partial_n) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} \partial_j \partial_k + \sum_{j=1}^n b_j \partial_j + c.$$

Wir nennen $\pm L$ **elliptisch**, wenn alle Eigenwerte von A positiv sind;
hyperbolisch, wenn ein Eigenwert negativ ist, alle anderen positiv;
parabolisch, wenn ein Eigenwert null ist, aber alle anderen positiv.

Dazu passen spezialisierte Techniken. Hängen die Koeffizienten $a_{jk}, b_j, c: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zudem vom Ort $x \in \Omega$ ab, so muss die Bedingung in jedem Punkt $x \in \Omega$ erfüllt sein. Andernfalls ist L ein Differentialoperator gemischten Typs, in manchen Regionen elliptisch, hyperbolisch, parabolisch.

Klassifikation linearer PDE zweiter Ordnung

Die drei **Modellgleichungen** haben keine gemischten Terme:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = \varrho, & \text{räumlich} & \quad \partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_z^2 u = \varrho, \\
 (2) \quad & \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = \varrho, & \text{räumlich} & \quad \partial_t^2 u - \partial_x^2 u - \partial_y^2 u - \partial_z^2 u = \varrho, \\
 (3) \quad & \partial_t u - \partial_x^2 u = q, & \text{räumlich} & \quad \partial_t u - \partial_x^2 u - \partial_y^2 u - \partial_z^2 u = q.
 \end{aligned}$$

Die Wellengleichung hat die Ausbreitungsgeschwindigkeit $c > 0$, die Wärmeleitungsgleichung die Temperaturleitfähigkeit $\kappa > 0$. Nach Skalierung können wir $c = 1$ bzw. $\kappa = 1$ annehmen. Auf der rechten Seite dieser Gleichungen steht als Inhomogenität jeweils der Quellterm ϱ bzw. q . Im Spezialfall $\varrho = 0$ bzw. $q = 0$ haben wir eine homogene lineare Gleichung zweiter Ordnung.

Die **Potentialgleichung** (1) ist elliptisch.

Die **Wellengleichung** (2) ist hyperbolisch.

Die **Wärmeleitungsgleichung** (3) ist parabolisch.

Unsere Modellgleichungen haben keine gemischten Terme $\partial_x \partial_y$ etc. Deshalb können wir sie gut durch **Separation der Variablen** behandeln, wie wir anschließend ausführen. Dieses Verfahren ist extrem vielseitig und erfolgreich. Eine allgemeine (elliptische, hyperbolische, parabolische) Differentialgleichung zweiter Ordnung können wir durch geeignete Koordinatentransformation diagonalisieren, also auf eine unserer Modellgleichungen zurückführen und somit lösen.

Klassifikation linearer PDE zweiter Ordnung

In der Praxis treten sehr häufig partielle Differentialgleichungen auf. Erfahrungsgemäß sind die allermeisten höchstens **zweiter Ordnung**. Bei jeder partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung fragen wir: Ist sie linear? Ist sie elliptisch? oder hyperbolisch? oder parabolisch? Dies deckt nur die einfachsten Möglichkeiten ab, es gibt viele weitere, aber es verhilft uns zu einer ersten Übersicht und Orientierung.

😊 Wenn die Gleichung elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch ist, dann verhält sie sich ähnlich wie die entsprechende **Modellgleichung**, also Potential-, Wellen- oder Wärmeleitungsgleichung. Zu Verständnis und Lösung der Gleichung sind solche Analogien oft sehr nützlich.

😊 Konkret wird man versuchen, durch eine geeignete Substitution die Gleichung in Normalform zu bringen, **ohne gemischte Terme**. Zur Reduktion auf Normalform konstruiert man geeignete Koordinaten: Im einfachsten Fall mit Hauptachsentransformationen (wie in der HM1). Im allgemeinen Fall nutzt man ein geeignetes Koordinatensystem längs charakteristischer Kurven, siehe Meyberg–Vachenauer, §12.3.

Trennung der Variablen durch Produktansatz

Zu lösen sei eine **separierbare Differentialgleichung** der Form

$$P(\partial_x) u(x, y) = Q(\partial_y) u(x, y).$$

Hier wirkt der Differentialoperator $P(\partial_x)$ nur auf x , und $Q(\partial_y)$ nur auf y . Als Lösungen gesucht sind Funktionen $u: X \times Y \rightarrow \mathbb{K}: (x, y) \mapsto u(x, y)$. In diesem Falle eignet sich der **Produktansatz** $u(x, y) = v(x) \cdot w(y)$:

$$\begin{aligned} [P(\partial_x) v(x)] w(y) &= v(x) [Q(\partial_y) w(y)] \\ \iff \frac{P(\partial_x) v(x)}{v(x)} &= \frac{Q(\partial_y) w(y)}{w(y)} = \lambda \end{aligned}$$

Die triviale Lösung ist $u = 0$; andernfalls dividieren wir durch $v(x)w(y)$. Die linke Seite hängt nur von x ab, die rechte nur von y . Da wir x und y unabhängig verändern können, sind beide Seiten konstant, gleich $\lambda \in \mathbb{K}$. Zu jeder **Separationskonstanten** λ gehören zwei Eigenwertprobleme:

$$P(\partial_x) v(x) = \lambda v(x) \quad \text{und} \quad Q(\partial_y) w(y) = \lambda w(y)$$

Lösung sind **Eigenfunktionen** $u(x, y) = v(x)w(y)$ und Superpositionen. Gleiches gilt für $u(x_1, \dots, x_n) = u_1(x_1) \cdots u_n(x_n)$ in mehreren Variablen.

Trennung der Variablen durch Produktansatz

Da diese Methode oft gebraucht wird, formulieren wir sie hier genauer. Gegeben sind Intervalle $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ und hierauf die Differentialoperatoren

$$P(x, \partial_x) = \sum_{j=0}^m a_j(x) \partial_x^j : C^m(X, \mathbb{K}) \rightarrow C^0(X, \mathbb{K}),$$

$$Q(y, \partial_y) = \sum_{k=0}^n b_k(y) \partial_y^k : C^n(Y, \mathbb{K}) \rightarrow C^0(Y, \mathbb{K}),$$

mit stetigen Koeffizientenfunktionen $a_j : X \rightarrow \mathbb{K}$ und $b_k : Y \rightarrow \mathbb{K}$.

Satz R1D: Trennung der Variablen durch Produktansatz

Sei $u : X \times Y \rightarrow \mathbb{K} : u(x, y) = v(x) \cdot w(y)$ Produkt von $0 \neq v \in C^m(X, \mathbb{K})$ und $0 \neq w \in C^n(Y, \mathbb{K})$. Dann sind folgende zwei Aussagen äquivalent:

(1) Die Funktion u löst die partielle Differentialgleichung

$$P(x, \partial_x) u(x, y) = Q(y, \partial_y) u(x, y).$$

(2) Für einen gemeinsamen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$ gelten die Gleichungen

$$P(x, \partial_x) v(x) = \lambda v(x) \quad \text{und} \quad Q(y, \partial_y) w(y) = \lambda w(y).$$

Trennung der Variablen durch Produktansatz

Aufgabe: Begründen Sie sorgfältig die Äquivalenz „(1) \Leftrightarrow (2)“!

Den Produktansatz $u(x, y) = v(x) w(y)$ haben wir oben bereits erklärt. Dabei haben wir $u \neq 0$ angenommen und sogar so getan als gälte $u(x, y) \neq 0$ in *jedem* Punkt (x, y) . Im Allgemeinen werden die Funktionen $v: X \rightarrow \mathbb{K}$ und $w: Y \rightarrow \mathbb{K}$ jedoch Nullstellen haben, und somit auch u . Diese Feinheit müssen wir klären; diese Präzisierung ist Ziel des Satzes R1D und dieser Übung.

Lösung: Zunächst „(2) \Rightarrow (1)“: In jedem Punkt $(x, y) \in X \times Y$ gilt

$$P u(x, y) = P[v(x) \cdot w(y)] = [P v(x)] w(y) = \lambda v(x) \cdot w(y),$$

$$Q u(x, y) = Q[v(x) \cdot w(y)] = v(x) [Q w(y)] = v(x) \cdot \lambda w(y),$$

also $P u = Q u$. Wir zeigen nun die Umkehrung „(1) \Rightarrow (2)“: Wir nehmen $u, v \neq 0$ an, also $v(x_0) \neq 0$ und $w(y_0) \neq 0$ für je einen Punkt $x_0 \in X$ und $y_0 \in Y$. Beides zusammen ist äquivalent zu $u \neq 0$, denn $u(x_0, y_0) \neq 0$.

In jedem Punkt $(x, y) \in X \times Y$ gilt $P u(x, y) = Q u(x, y)$, also

$$[P v(x)] w(y) = v(x) [Q w(y)], \quad \frac{P v(x_0)}{v(x_0)} = \frac{Q w(y_0)}{w(y_0)} =: \lambda,$$

$$\frac{P v(x_0)}{v(x_0)} w(y) = Q w(y), \quad P v(x) = v(x) \frac{Q w(y_0)}{w(y_0)}.$$

Trennung der Variablen durch Produktansatz

Aufgabe: Wie funktioniert der Produktansatz für folgende PDE?

$$(A) P(x, \partial_x)u(x, y, z) = Q(y, z, \partial_y, \partial_z)u(x, y, z)$$

$$(B) P(x, \partial_x)u(x, y, z) + Q(y, \partial_y)u(x, y, z) + R(z, \partial_z)u(x, y, z) = \lambda u(x, y, z)$$

Lösung: (a) Für $u(x, y, z) = v(x) \cdot w(y, z)$ mit $u \neq 0$ ist (A) äquivalent zu $P(x, \partial_x)v(x) = \lambda v(x)$ und $Q(y, z, \partial_y, \partial_z)w(y, z) = \lambda w(y, z)$ mit einer gemeinsamen Konstante $\lambda \in \mathbb{K}$. Dies beweist man wörtlich wie oben.

(b) Für $u(x, y, z) = u_1(x) \cdot u_2(y) \cdot u_3(z)$ mit $u \neq 0$ ist (B) äquivalent zu den Gleichungen $P(x, \partial_x)u_1(x) = \lambda_1 u_1(x)$ und $Q(y, \partial_y)u_2(y) = \lambda_2 u_2(y)$ und $R(z, \partial_z)u_3(z) = \lambda_3 u_3(z)$ mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$ und $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda$.

Die Implikation „ \Leftarrow “ ist klar. Wir zeigen „ \Rightarrow “: In jedem Punkt (x, y, z) gilt $(Pu_1)u_2u_3 + u_1(Qu_2)u_3 + u_1u_2(Ru_3) = \lambda u_1u_2u_3$, also insbesondere

$$\frac{P u_1(x_0)}{u_1(x_0)} + \frac{Q u_2(y_0)}{u_2(y_0)} + \frac{R u_3(z_0)}{u_3(z_0)} = \lambda,$$

$$P u_1(x) + \frac{Q u_2(y_0)}{u_2(y_0)} u_1(x) + \frac{R u_3(z_0)}{u_3(z_0)} u_1(x) = \lambda u_1(x),$$

$$\frac{P u_1(x_0)}{u_1(x_0)} u_2(y) + Q u_2(y) + \frac{R u_3(z_0)}{u_3(z_0)} u_2(y) = \lambda u_2(y),$$

$$\frac{P u_1(x_0)}{u_1(x_0)} u_3(z) + \frac{Q u_2(y_0)}{u_2(y_0)} u_3(z) + R u_3(z) = \lambda u_3(z).$$

Produktansatz zur Wellengleichung

Aufgabe: Wir suchen Lösungen $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Wellengleichung

$$\partial_t^2 u(t, x) = c^2 \partial_x^2 u(t, x).$$

(1) Finden Sie alle Lösungen in Produktform $u(t, x) = v(t)w(x)$.

Lösung: Der Produktansatz $u(t, x) = v(t)w(x)$ separiert zu

$$v''(t) = \lambda v(t), \quad c^2 w''(x) = \lambda w(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

1. Fall: Für $\lambda = 0$ finden wir $v''(t) = 0$ und $w''(x) = 0$, also

$$v(t) = a_1 + a_2 t, \quad w(x) = b_1 + b_2 x.$$

2. Fall: Für $\lambda = \alpha^2 > 0$ finden wir die Eigenfunktionen

$$v(t) = a_1 e^{\alpha t} + a_2 e^{-\alpha t}, \quad w(x) = b_1 e^{x\alpha/c} + b_2 e^{-x\alpha/c}.$$

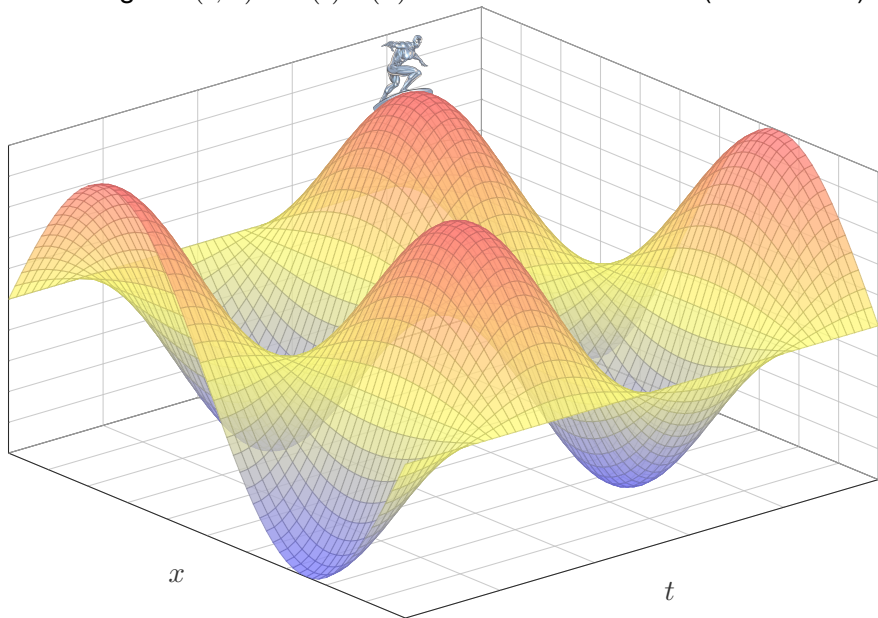
3. Fall: Für $\lambda = -\omega^2 < 0$ finden wir dasselbe komplex, also reell

$$v(t) = a_1 \cos(\omega t) + a_2 \sin(\omega t), \quad w(x) = b_1 \cos(x\omega/c) + b_2 \sin(x\omega/c)$$

😊 Machen Sie die Probe! Nur die letzten Lösungen sind beschränkt.

Produktansatz zur Wellengleichung

Die Lösungen $u(t, x) = v(t) w(x)$ sind stehende Wellen (siehe P101):



Lösung der Wellengleichung: Randbedingung

Aufgabe: Wir suchen Lösungen $u: \mathbb{R} \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ der Wellengleichung

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(t, x) &= c^2 \partial_x^2 u(t, x) && \text{für alle } t \in \mathbb{R} \text{ und } 0 < x < L, \\ u(t, 0) &= u(t, L) = 0 && \text{Randwerte für } x \in \{0, L\} \text{ und } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(2) Finden Sie alle Lösungen in Produktform $u(t, x) = v(t)w(x)$.

Lösung: (2) Dank (1) kennen wir alle möglichen Lösungspaare (v, w) :

$$\begin{aligned} v(t) &= a_1 + a_2 t, & w(x) &= b_1 + b_2 x; \\ v(t) &= a_1 e^{\alpha t} + a_2 e^{-\alpha t}, & w(x) &= b_1 e^{x\alpha/c} + b_2 e^{-x\alpha/c}; \\ v(t) &= a_1 \cos(\omega t) + a_2 \sin(\omega t), & w(x) &= b_1 \cos(x\omega/c) + b_2 \sin(x\omega/c). \end{aligned}$$

Diese lösen die freie Wellengleichung. Die zusätzliche Randbedingung $w(0) = w(L) = 0$ erfüllt nur $\sin(n\pi x/L)$ für $n \in \mathbb{N}$, also $\omega = n\pi c/L$ und

$$u_n(t, x) = [a_n \cos(n\pi ct/L) + b_n \sin(n\pi ct/L)] \sin(n\pi x/L)$$

😊 Für jede natürliche Zahl $n = 1, 2, 3, \dots$ erhalten wir als Lösung eine stehende Wellen mit Wellenlänge $2L/n$ und Periode $2L/n c$.

Lösung der Wellengleichung: Anfangsdaten

Aufgabe: Wir suchen Lösungen $u: \mathbb{R} \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ der Wellengleichung

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(t, x) &= c^2 \partial_x^2 u(t, x) && \text{für alle } t \in \mathbb{R} \text{ und } 0 < x < L, \\ u(t, 0) &= u(t, L) = 0 && \text{Randwerte für } x \in \{0, L\} \text{ und } t \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= g(x) && \text{Anfangsposition für } t = 0 \text{ und } 0 \leq x \leq L, \\ \partial_t u(0, x) &= h(x) && \text{Anfangsgeschwindigkeit für } t = 0. \end{aligned}$$

(3) Lösen Sie dieses ARWP. Dazu liegen g und h als Sinus-Reihen vor, $g(x) = \sum_n A_n \sin(n\pi x/L)$ und $h(x) = \sum_n B_n \sin(n\pi x/L)$ mit $A_n, B_n \in \mathbb{R}$.

Lösung: (3) Dank (2) kennen wir die Lösung mit Randbedingung:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\pi ct/L) + b_n \sin(n\pi ct/L) \right] \sin(n\pi x/L)$$

Die Koeffizienten a_n, b_n entnehmen wir den Anfangsbedingungen:

$$a_n = A_n, \quad b_n = B_n \frac{L}{n\pi c}$$

😊 Dank Fourier-Theorie können wir alle (physikalisch relevanten) Anfangsdaten g und h durch solche Sinus-Reihen darstellen! 1417

Beispiel zum Produktansatz

Aufgabe: Finden Sie beschränkte Lösungen $u: [0, \infty[\times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} \partial_x^2 u + \partial_t^2 u - 2\partial_t u + u &= 0 && \text{für alle } t > 0 \text{ und } 0 < x < \pi, \\ u(t, 0) = u(t, \pi) &= 0 && \text{Randwerte für } x \in \{0, \pi\} \text{ und } t \geq 0, \\ u(0, x) &= f(x) && \text{Anfangswerte für } t = 0 \text{ und } 0 < x < \pi. \end{aligned}$$

Ist diese PDE linear? Von welcher Ordnung? Von welchem Typ?

Lösung: Wir nutzen den Produktansatz $u(t, x) = v(t)w(x)$. Einsetzen:

$$v(t)w''(x) + v''(t)w(x) - 2v'(t)w(x) + v(t)w(x) = 0$$

Die triviale Lösung ist $u = 0$. Andernfalls dividieren wir durch $u = vw$:

$$\frac{w''(x)}{w(x)} = -\frac{v''(t)}{v(t)} + \frac{2v'(t)}{v(t)} - 1 = \lambda \in \mathbb{R}$$

Wir betrachten zunächst das erste Eigenwertproblem $w''(x) = \lambda w(x)$:

Für $\lambda = 0$ finden wir $w(x) = c + dx$.

Für $\lambda = \alpha^2 > 0$ finden wir $w(x) = ce^{\alpha x} + de^{-\alpha x}$.

Für $\lambda = -\omega^2 < 0$ finden wir $w(x) = c \sin(\omega x) + d \cos(\omega x)$.

Beispiel zum Produktansatz

Wir beruckichtigen nun die Randbedingungen $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$.
 Für unseren Produktansatz $v(t)w(x)$ bedeutet das $w(0) = w(\pi) = 0$.
 Nicht-triviale Lösungen existieren nur für $\lambda = -n^2 < 0$, nämlich

$$w_n(x) = \sin(nx) \quad \text{mit} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Damit folgt $v'' - 2v' + (1 - n^2)v = 0$, mit der allgemeinen Lösung

$$v_n(t) = a_n e^{(1-n)t} + b_n e^{(1+n)t}.$$

Wir finden so zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Lösung in Produktform:

$$u_n(t, x) = v_n(x)w_n(t) = \left[a_n e^{(1-n)t} + b_n e^{(1+n)t} \right] \sin(nx)$$

Beschränkt nur für $b_n = 0$. Allgemeine Lösung durch Superposition:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{(1-n)t} \sin(nx) \quad \text{Fourier-Reihe in } x!$$

$$u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \stackrel{!}{=} f(x) \quad \text{Fourier-Analyse von } f!$$

😊 Die Konstanten a_n passen wir den gegebenen Anfangsdaten f an.

Beispiel zum Produktansatz

Aufgabe: Finden Sie beschränkte Lösungen $u: [0, \infty[\times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} \partial_x^2 u + \partial_t^2 u - 2\partial_t u + u &= 0 && \text{für alle } t > 0 \text{ und } 0 < x < \pi, \\ u(t, 0) = u(t, \pi) &= 0 && \text{Randwerte für } x \in \{0, \pi\} \text{ und } t \geq 0, \\ u(0, x) = f(x) &:= 1 && \text{Anfangswerte für } t = 0 \text{ und } 0 < x < \pi. \end{aligned}$$

Dies ist eine PDE mit Anfangsrandwertproblem, kurz ARWP.

Lösung: Wir kennen bereits die allgemeine Lösung:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{(1-n)t} \sin(nx)$$

Fourier-Entwicklung der Rechteckfunktion: 1225

$$f(x) = 1 \stackrel{!}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \quad \text{also} \quad a_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ gerade} \\ 4/(n\pi) & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Die gesuchte Lösungsfunktion u ist demnach die Superposition

$$u(t, x) = 4 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2kt} \frac{\sin((2k+1)x)}{(2k+1)\pi}.$$

Beispiel zum Produktansatz

Aufgabe: Finden Sie beschränkte Lösungen $u: [0, \infty[\times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} \partial_x^2 u + \partial_t^2 u - 2\partial_t u + u &= 0 && \text{für alle } t > 0 \text{ und } 0 < x < \pi, \\ u(t, 0) = u(t, \pi) &= 0 && \text{Randwerte für } x \in \{0, \pi\} \text{ und } t \geq 0, \\ u(0, x) = f(x) &:= x && \text{Anfangswerte für } t = 0 \text{ und } 0 < x < \pi. \end{aligned}$$

Dies ist eine PDE mit Anfangsrandwertproblem, kurz ARWP.

Lösung: Wir kennen bereits die allgemeine Lösung:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{(1-n)t} \sin(nx)$$

Fourier-Entwicklung der Sägezahnfunktion: I205

$$f(x) = x \stackrel{!}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \quad \text{also} \quad a_n = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}$$

Die gesuchte Lösungsfunktion u ist demnach die Superposition

$$u(t, x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{(1-n)t} \frac{\sin(nx)}{n}.$$

Beispiel: die Schrödinger–Gleichung

Die **Schrödinger–Gleichung** für $\Psi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}$ zum Potential $V : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) + V\Psi$$

Gegeben ist V , gesucht ist Ψ . Diese PDE schreiben wir meist kürzer

$$\underbrace{i\hbar \partial_t \Psi = H\Psi}_{\text{Schrödinger–Gleichung}} \quad \text{mit} \quad \underbrace{H = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V}_{\text{Hamilton–Operator}} \quad \text{und} \quad \underbrace{\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2}_{\text{Laplace–Operator}}.$$

Dies ist eine homogene lineare PDE zweiter Ordnung, genauer eine Diffusionsgleichung [\[Q109\]](#), für $V = 0$ eine Wärmeleitungsgleichung mit $\kappa = \hbar/(2im)$. Erwin Schrödinger (1887–1961) hat sie 1926 aufgestellt und damit das Spektrum des Wasserstoffatoms berechnet (Nobelpreis 1933). Sie beschreibt den Zustand Ψ eines Teilchens mit Masse m in einem Potential $V : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$. Hier ist $\hbar = h/2\pi$ die Plancksche Konstante, $p^2/2m = (\hbar^2/2m) \Delta$ die kinetische Energie und V die potentielle. Analog zur *klassischen Mechanik* spricht man daher von *Quantenmechanik*. Beide beschreiben die Bewegung massebehafteter Teilchen unter der Wirkung von Kräften, jedoch werden klassische Begriffe wie „Ort“ und „Bahn“ eines Teilchens nun ersetzt durch die quantenmechanischen Begriffe, die die physikalischen Beobachtungen besser erklären. Die Erweiterung zur *Quantenfeldtheorie* behandelt zudem Erzeugung und Vernichtung von Elementarteilchen, insbesondere die Emission / Absorption von Licht in Form von Photonen.

Beispiel: die Schrödinger–Gleichung

Physikalische Interpretation und Verwendung dieser Gleichung:

Wir betrachten den Vektorraum $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ aller quadrat-integrierbaren Funktionen $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$, also $\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x)|^2 dx < \infty$, mit dem Skalarprodukt

$$\langle - | - \rangle : L^2 \times L^2 \rightarrow \mathbb{C} : \langle \varphi | \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\varphi(x)} \psi(x) dx.$$

Meist dividieren wir durch die Norm $\|\psi\|_{L^2} = \langle \psi | \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x)|^2 dx$; hierdurch können wir die Normierung $\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x)|^2 dx = 1$ sicherstellen.

Die Quantenmechanik beruht auf folgenden Prinzipien:

- 1 Der Zustand eines Teilchens wird durch eine Funktion $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ beschrieben; $|\psi|^2$ ist die Dichte der Aufenthaltswahrscheinlichkeit.
- 2 Die Entwicklung des zeitabhängigen Zustandes $\Psi : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ wird durch die Schrödinger–Gleichung $i\hbar\partial_t\Psi = H\Psi$ bestimmt.
- 3 Observablen entsprechen hermiteschen Operatoren A, B, C, \dots . Der Mittelwert der Observablen A im Zustand ψ ist $\langle \psi | A\psi \rangle$.
- 4 Wird bei einer Messung zur Observablen A der Wert a gefunden, so wird ψ auf den Eigenraum zum Eigenwert a projiziert (Kollaps).

Beispiel: stationäre Lösungen

Angenommen das Potential V ist zeitlich konstant, unabhängig von t :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = H\Psi \quad \text{mit} \quad H = \frac{\hbar}{2m} \Delta + V(x, y, z).$$

Dann wirkt links der Operator ∂_t nur auf t und rechts H nur auf x, y, z .
Wir trennen t von den Ortsvariablen x, y, z durch den Produktansatz

$$\Psi(t, x, y, z) = \varphi(t) \psi(x, y, z).$$

Für die stationäre Lösung $\psi(x, y, z)$ suchen wir Eigenfunktionen

$$H\psi = E\psi \quad \text{mit Eigenwert } E \in \mathbb{R} \text{ (Energie)}.$$

Anschließend $i\hbar \partial_t \varphi = E\varphi$, also $\varphi(t) = e^{-i\omega t}$ mit $E = \hbar\omega$. Wir erhalten

$$\Psi(t, x, y, z) = e^{-i\omega t} \psi(x, y, z) \quad \text{mit Energie } E = \hbar\omega.$$

In der Schrödinger-Gleichung $i\hbar \partial_t \Psi = H\Psi$ tritt die Energie zunächst nicht als Skalar auf, sondern als Hamilton-Operator H , der auf den Zustand Ψ angewendet wird. Die Trennung der Variablen entspricht der Zerlegung in Eigenfunktionen des Operators H . Die Lösung besagt dann, dass die zeitliche Veränderung des Zustands allein durch seine Energie E bestimmt ist.

Beispiel: harmonischer Oszillator

Als konkrete Illustration zur Schrödinger-Gleichung nenne ich den **harmonischen Oszillator** in einem parabelförmigen Potentialtopf:

$$V(x, y, z) = \frac{\hbar}{2mr_0^4} (x^2 + y^2 + z^2)$$

Die Eigenwertgleichung $H\psi = E\psi$ erlaubt unendlich viele Lösungen. Hierbei sind die möglichen Energieniveaus **quantisiert**, das heißt die Eigenwerte $3\hbar/2mr_0^2 = E_0 < E_1 < E_2 < E_3 < \dots$ sind diskret.

😊 Der Grundzustand ψ_0 mit $H\psi_0 = E_0\psi_0$ ist eine Glockenkurve:

$$\psi_0(x, y, z) = \frac{1}{(r_0\sqrt{\pi})^3} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2r_0^2}\right)$$

Übung: Dies ist tatsächlich eine Lösung. Machen Sie die Probe!

Dies nur zur Illustration: Wir können hier explizit rechnen! Wer etwas mehr wissen möchte: [de.wikipedia.org/wiki/Harmonischer_Oszillator_\(Quantenmechanik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Harmonischer_Oszillator_(Quantenmechanik)). Dort wird auch skizziert, wie man alle weiteren Lösungen mit der „Leitermethode“ konstruieren kann. Das Wasserstoffatom entspricht dem elektrischen Potential $V = \text{const}/r$. Die Eigenfunktionen der Schrödinger-Gleichung sind dann die berühmten „Orbitale“ aus dem Chemieunterricht.

Die Katze auf dem heißen Blechdach

Aufgabe: Eine quadratische Kupferplatte mit Kantenlänge 1m wird an drei Seiten konstant auf 0°C gekühlt, an der vierten Seite konstant auf 100°C geheizt. Wir suchen die stationäre Temperaturverteilung u .

(1) Formulieren und (2) lösen Sie die Differentialgleichung für u !

Die Rechnung konstruiert eine Lösung. Gibt es (auf anderen Wegen) weitere Lösungen? Oder führen alle Wege zum selben Ziel? Existenz und Eindeutigkeit der Lösung sind für jede Anwendung grundlegend!

Lösung: (1) auf dem Rechteck $R = [0, a] \times [0, b]$ suchen wir $u: R \rightarrow \mathbb{R}$.

Die allgemeine Wärmeleitungsgleichung lautet $\partial_t u = \kappa \Delta u + q$.

Im Bereich R gebe es keine Quellen oder Senken, also $q = 0$.

Im stationären Zustand gilt $\partial_t u = 0$, also haben wir $\Delta u = 0$:

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0 \quad \text{auf dem Rechteck } R = [0, a] \times [0, b] \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$\text{mit } u(x, 0) = u(0, y) = u(a, y) = 0 \text{ und } u(x, b) = 100.$$

😊 Wir lassen die Abmessungen a und b noch unbestimmt und setzen erst am Ende $a = b = 1$ ein. Das macht die Zusammenhänge klarer.

Die Katze auf dem heißen Blechdach

Wie wird sich die Temperatur auf dem Blech verteilen? Das erklärt den Titel der Aufgabe: Die Katze probiert aus, wo ihr die Temperatur am besten gefällt, Sie können es ausrechnen! So heißt auch ein Theaterstück von Tennessee Williams von 1955, erfolgreich verfilmt 1958.

(2) Wir suchen zunächst alle Lösungen der PDE $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$ in Produktform $u(x, y) = v(x) \cdot w(y)$. Unsere PDE wird damit zu:

$$v''(x)w(y) + v(x)w''(y) = 0$$

Trennung der Variablen ergibt

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = -\frac{w''(y)}{w(y)} = \lambda$$

mit einer noch unbekanntem Separationskonstanten $\lambda \in \mathbb{R}$. Die drei Randbedingungen $u(x, 0) = u(0, y) = u(a, y) = 0$ werden erfüllt durch

$$w(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad v(a) = 0.$$

😊 Statt einer PDE in zwei Variablen x, y erhalten wir zwei ODE, getrennt in je einer Variablen x bzw. y . Das ist wesentlich einfacher!

Die Katze auf dem heißen Blechdach

- (A) Wir lösen $v''(x) - \lambda v(x) = 0$ mit Randbedingung $v(0) = v(a) = 0$,
(B) anschließend $w''(y) + \lambda w(y) = 0$ mit Randbedingung $w(0) = 0$.

(A1) Für $\lambda = 0$ gilt $v''(x) = 0$, also $v(x) = \alpha x + \beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Die Randbedingungen liefern $\alpha = \beta = 0$, also die triviale Lösung.

(A2) Für $\lambda = \omega^2 > 0$ gilt $v''(x) - \omega^2 v(x) = 0$. Die allgemeine Lösung ist $v(x) = \alpha e^{\omega x} + \beta e^{-\omega x}$. Die Randbedingungen liefern erneut $\alpha = \beta = 0$.

(A3) Für $\lambda = -\omega^2 < 0$ gilt $v''(x) + \omega^2 v(x) = 0$. Die allgemeine Lösung ist $v(x) = \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)$. Die Randbedingung $v(0) = 0$ liefert $\alpha = 0$, und $v(a) = 0$ liefert $\beta \sin(\omega a) = 0$. Also $\beta = 0$ oder $\omega a = n\pi$ mit $n \in \mathbb{N}$.

😊 Die Lösungen für den Faktor v sind also

$$v_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}_{\geq 1}.$$

Zu jeder Lösung v_n bestimmen wir nun einen passenden Cofaktor w_n . Die beiden sind gekoppelt durch ihren gemeinsamen Eigenwert!

Die Katze auf dem heißen Blechdach

(B) Die Differentialgleichung mit $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{a^2}$ besitzt die Lösungen

$$w_n(y) = a_n \exp\left(\frac{n\pi}{a}y\right) + b_n \exp\left(-\frac{n\pi}{a}y\right).$$

Die Randbedingung $w_n(0) = 0$ impliziert $b_n = -a_n$, also

$$w_n(y) = a_n \left[\exp\left(\frac{n\pi}{a}y\right) - \exp\left(-\frac{n\pi}{a}y\right) \right] = 2a_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right).$$

Alle Lösungen in Produktform $u(x, y) = v(x)w(y)$, die bereits die drei Randbedingungen $u(x, 0) = u(0, y) = u(a, y) = 0$ erfüllen, sind demnach

$$u_n(x, y) = v_n(x)w_n(y) = a_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right).$$

Die obige Konstante $2a_n$ haben wir hierbei zu a_n zusammengefasst.

😊 Durch Superposition erhalten wir die allgemeine Lösung:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

Die Katze auf dem heißen Blechdach

Für die letzte Randbedingung $u(x, b) = 100$ machen wir den Ansatz

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right).$$

Speziell für $y = b$ wird diese Reihe zu

$$u(x, b) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right).$$

Die Koeffizienten c_n erhalten wir durch Fourier-Entwicklung:

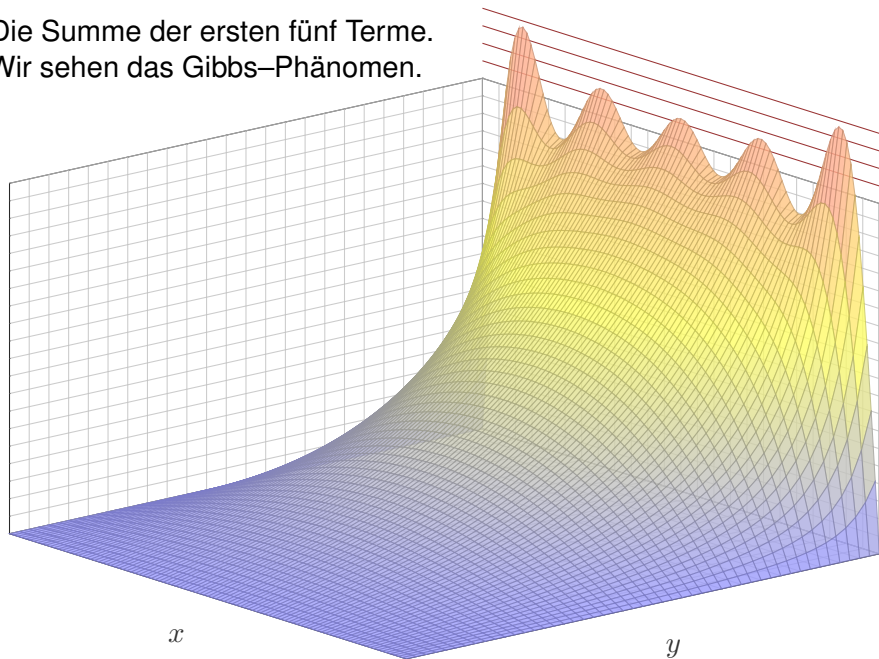
$$a_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) = c_n = \frac{2}{a} \int_{x=0}^a 100 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = \frac{200}{n\pi} [1 - (-1)^n]$$

😊 Für die Abmessungen $a = b = 1$ finden wir schließlich:

$$u(x, y) = \frac{400}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)\pi x) \sinh((2n+1)\pi y)}{(2n+1) \sinh((2n+1)\pi)}$$

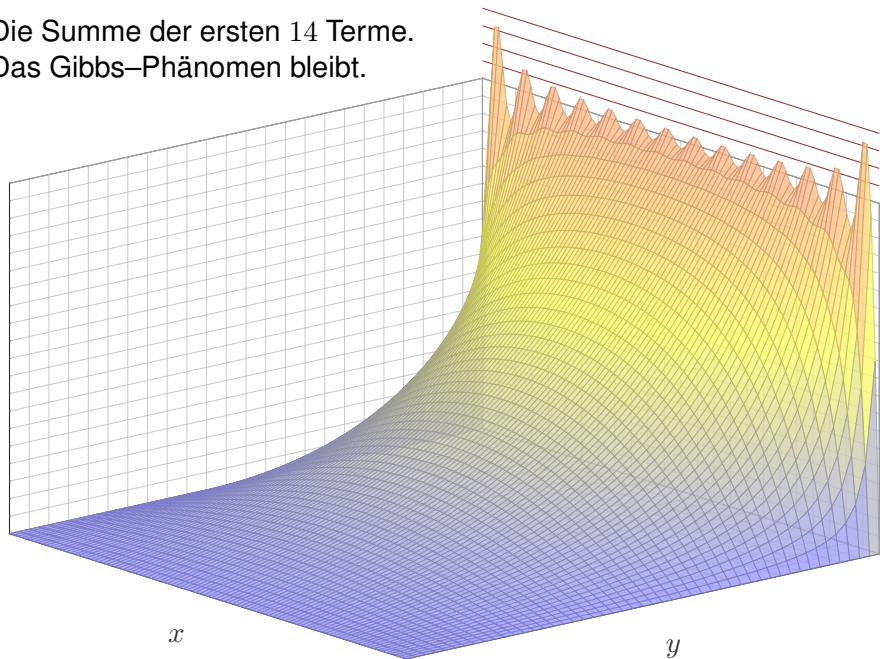
Die Katze auf dem heißen Blechdach

Die Summe der ersten fünf Terme.
Wir sehen das Gibbs-Phänomen.



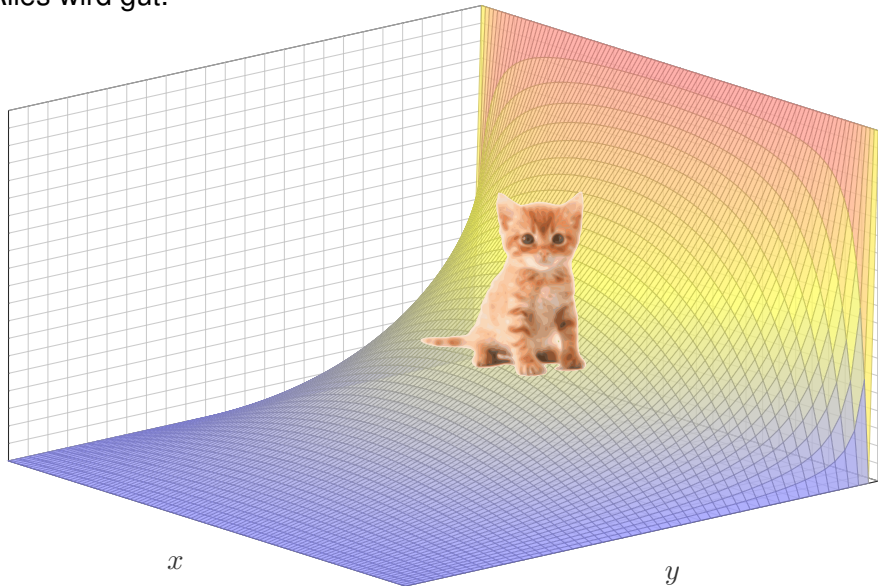
Die Katze auf dem heißen Blechdach

Die Summe der ersten 14 Terme.
Das Gibbs-Phänomen bleibt.



Die Katze auf dem heißen Blechdach

Der Grenzwert der Reihe.
Alles wird gut.



Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Lösungen suchen wir bisher mit dem Produktansatz $u(x, y) = v(x) w(y)$. Das ist zunächst nur geraten, mit etwas Anschauung und Erfahrung.

Wir haben Glück und finden die Eigenfunktionen $u_n(x, y) = v_n(x) w_n(y)$, genug um mit $u(x, y) = \sum_n a_n v_n(x) w_n(y)$ alle Bedingungen zu erfüllen.

Unsere Konstruktion von $u(x, y)$ zeigt somit die **Existenz** einer Lösung. Wir können daran explizit nachprüfen, dass u alle Forderungen erfüllt. Dies zeigt jedoch noch keineswegs die **Eindeutigkeit**: Es könnte noch weitere Lösungen der PDE geben, die aber unserem Ansatz entgehen.

Mehrdeutigkeiten müssen wir erkennen und nötigenfalls auch beheben: Sind noch mehrere Lösungen möglich, so stellen wir geeignete weitere Bedingungen, um die physikalisch sinnvollen Lösungen herauszuheben. Dieses Vorgehen beruht auf der Überzeugung, dass die physikalische Lösung bereits durch die Randdaten festgelegt ist. Daher sollte unser mathematisches Modell genau diese als eindeutige Lösung haben.

Mathematisch bedeutet die Eindeutigkeit: Je zwei Lösungen sind gleich. Dies wollen wir nun sorgfältig als Satz formulieren und dann beweisen.

Wie lautet die Problemstellung?

Um über Eindeutigkeit zu sprechen, müssen wir zunächst erklären, wie die Problemstellung aussieht und was wir als Lösungen zulassen.

Definition R2A: Dirichlet–Problem der Potentialgleichung

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit Abschluss $\bar{\Omega}$ und Rand $\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$.

Hierauf seien $q: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen.

Das **Dirichlet–Problem** zu den Daten (Ω, q, g) lautet:

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= q(x) && \text{für jeden inneren Punkt } x \in \Omega, \\ u(x) &= g(x) && \text{für jeden Randpunkt } x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Gesucht sind Lösungen $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, stetig auf $\bar{\Omega}$ und zweimal stetig differenzierbar im Inneren Ω , die diese Gleichungen erfüllen.

In manchen Anwendungen ist die Randfunktion g unstetig, wie oben: Auf dem Rechteck $\bar{\Omega} = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$ fordern wir daher schwächer nur L^2 –Konvergenz, also $\int_{x=a}^b |u(x, y) - u(x, c)|^2 dx \rightarrow 0$ für $y \searrow c$, und entsprechend für jede der vier Seiten des Rechtecks.


Eindeutigkeit gilt nicht immer.

Aufgabe: Sei $\bar{\Omega} = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{B}^2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1 \}$ die Ebene \mathbb{R}^2 ohne die Einheitskreisscheibe \mathbb{B}^2 . Wir betrachten den Fall ohne Quellen. Auf dem Rand $\partial\Omega = \mathbb{S}^1$ sei $g(x, y) = x$. Das Dirichlet–Problem lautet:

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= 0 && \text{für jeden inneren Punkt } (x, y) \in \Omega, \\ u(x, y) &= x && \text{für jeden Randpunkt } (x, y) \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Seien $u, v: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $u(x, y) = x$ und $v(x, y) = x/(x^2 + y^2)$. Zeigen Sie, dass beide Funktionen das Dirichlet–Problem lösen. Folgern Sie damit, dass es sogar unendlich viele Lösungen gibt.

Lösung: Die Kandidaten u, v liegen explizit vor. Die Randbedingung $u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} = g$ ist klar. Es genügt also, $\Delta u = \Delta v = 0$ nachzurechnen. Das ist trivial für u und eine leichte Übung für v : Versuchen Sie es! Damit ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ auch $w_t = (1 - t)u + tv$ eine Lösung.

 Dieses Beispiel zeigt eindrücklich, dass die Randwerte $g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ die gesuchte harmonische Lösung $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ nicht eindeutig festlegen. Das Problem ist hier leicht zu ahnen: Das Gebiet Ω ist unbeschränkt. Der folgende Satz garantiert: Ist $\bar{\Omega}$ kompakt, so ist die Lösung eindeutig!

Kompaktheit garantiert Eindeutigkeit.

Satz R2B: Eindeutigkeitssatz für die Potentialgleichung

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, also der Abschluss $\overline{\Omega}$ kompakt.

(0) Löst $u: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ die homogene Potentialgleichung

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= 0 && \text{für jeden inneren Punkt } x \in \Omega, \\ u(x) &= 0 && \text{für jeden Randpunkt } x \in \partial\Omega,\end{aligned}$$

dann gilt $u(x) = 0$ für alle $x \in \overline{\Omega}$.

(1) Lösen $\tilde{u}, \check{u}: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ die inhomogene Potentialgleichung

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= q(x) && \text{für jeden inneren Punkt } x \in \Omega, \\ u(x) &= g(x) && \text{für jeden Randpunkt } x \in \partial\Omega,\end{aligned}$$

dann gilt $\tilde{u}(x) = \check{u}(x)$ für alle $x \in \overline{\Omega}$.

Wie üblich folgt (1) aus (0) dank Linearität: Angenommen \tilde{u}, \check{u} erfüllen (1). Die Differenz $u = \tilde{u} - \check{u}$ erfüllt dann (0). Also gilt $u = 0$ und somit $\tilde{u} = \check{u}$. Wir müssen daher nur Aussage (0) zeigen. Wir geben zwei Beweise.

Minimum-Maximum-Prinzip harmonischer Funktionen

Beweis der Eindeutigkeit mit dem Minimum-Maximum-Prinzip:

Harmonische Funktionen nehmen ihre Extrema auf dem Rand an:

Satz R2c: Maximumsprinzip für harmonische Funktionen

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, also der Abschluss $\bar{\Omega}$ kompakt.

Sei $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Da $\bar{\Omega}$ und $\partial\Omega$ kompakt sind, nimmt u hierauf jeweils ein Minimum und ein Maximum an. Wegen $\bar{\Omega} \supseteq \partial\Omega$ gilt dann allgemein:

$$\min_{\bar{\Omega}} u \leq \min_{\partial\Omega} u \quad \text{und} \quad \max_{\bar{\Omega}} u \geq \max_{\partial\Omega} u$$

Zudem sei u harmonisch auf dem Inneren Ω , also $u \in C^2$ und $\Delta u = 0$.

(1) Dann nimmt u sein Minimum und Maximum auf dem Rand $\partial\Omega$ an:

$$\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u \quad \text{und} \quad \max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$$

Seien $u, v: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf dem Inneren Ω harmonisch.

(2) Monotonie: Aus $u \leq v$ auf dem Rand $\partial\Omega$ folgt $u \leq v$ auf ganz $\bar{\Omega}$.

(3) Eindeutigkeit: Aus $u = v$ auf dem Rand $\partial\Omega$ folgt $u = v$ auf ganz $\bar{\Omega}$.

Minimum-Maximum-Prinzip harmonischer Funktionen

Aufgabe: Beweisen Sie das Prinzip (1) in folgenden Verschärfungen:

(a) Auf Ω gelte $\Delta u > 0$. Dann folgt $\max u = \max u|_{\partial\Omega} > u|_{\Omega}$.

(b) Auf Ω gelte $\Delta u \geq 0$. Dann folgt $\max u = \max u|_{\partial\Omega} \geq u|_{\Omega}$.

(c) Auf Ω gelte $\Delta u < 0$. Dann folgt $\min u = \min u|_{\partial\Omega} < u|_{\Omega}$.

(d) Auf Ω gelte $\Delta u \leq 0$. Dann folgt $\min u = \min u|_{\partial\Omega} \leq u|_{\Omega}$.

Lösung: Durch Übergang von u zu $-u$ gilt (a) \Leftrightarrow (c) und (b) \Leftrightarrow (d).

Es genügt daher, die ersten beiden Aussagen (a) und (b) zu beweisen:

(a) Angenommen, u wäre maximal in einem inneren Punkt $x_0 \in \Omega$.

Dann gilt $\partial_i u(x_0) = 0$ und $\partial_i^2 u(x_0) \leq 0$ in jede Richtung $i = 1, \dots, n$,

also $\Delta u(x_0) \leq 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung $\Delta u > 0$.

(b) Wir betrachten $v := u + \varepsilon|x|^2$ mit $\varepsilon > 0$ und $|x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$.

Damit gilt $\Delta v = \Delta u + 2n\varepsilon > 0$, dank (a) also $\max v = \max_{\partial\Omega} v$.

Wir haben $u \leq v \leq \max v = \max_{\partial\Omega} v \leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon \max_{\partial\Omega} |x|^2$.

Damit gilt $u \leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon \max_{\partial\Omega} |x|^2$ für alle $\varepsilon > 0$.

Für $\varepsilon \searrow 0$ folgt $u \leq \max_{\partial\Omega} u$, was zu zeigen war.

Minimum-Maximum-Prinzip harmonischer Funktionen

Aufgabe: Beweisen Sie die Monotonie (2) in folgenden Verschärfungen:

(e) In jedem Punkt im Inneren Ω gelte $\Delta u \geq \Delta v$.

Aus $u \leq v$ auf dem Rand $\partial\Omega$ folgt $u \leq v$ auf ganz Ω .

(f) In jedem Punkt im Inneren Ω gelte $\Delta u \geq \Delta v$.

Aus $u < v$ auf dem Rand $\partial\Omega$ folgt $u < v$ auf ganz Ω .

(g) In jedem Punkt im Inneren Ω gelte $\Delta u > \Delta v$.

Aus $u \leq v$ auf dem Rand $\partial\Omega$ folgt $u < v$ im Inneren Ω .

Lösung: (e) Für die Differenz $w = u - v$ gilt $\Delta w \geq 0$.

Dank (b) folgt $w \leq \max w = \max_{\partial\Omega} w \leq 0$, also $u \leq v$.

(f) Für $w = u - v$ gilt $\Delta w \geq 0$ in jedem Punkt von Ω .

Dank (b) folgt $w \leq \max w = \max_{\partial\Omega} w < 0$, also $u < v$.

(g) Für $w = u - v$ gilt $\Delta w > 0$ in jedem Punkt von Ω .

Dank (a) folgt $w|_{\Omega} < \max_{\partial\Omega} w \leq 0$, auf Ω also $w < 0$ und $u < v$.

😊 Dies können wir zur Eingrenzung durch Ober/Unterlösungen nutzen. Solche Ungleichungen und Einschachtelungen kennen wir bereits aus den Sätzen M4C und M4D für gewöhnliche Differentialgleichungen.

Die Energiemethode beweist die Eindeutigkeit.

Beweis der Eindeutigkeit mit der Energiemethode:

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\bar{\Omega}$ kompakt mit stückweise glattem Rand, etwa ein Rechteck ($n = 2$) oder ein Quader ($n = 3$). Vorgelegt sei eine Funktion $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Delta u = 0$ und $u|_{\partial\Omega} = 0$. Wir wollen $u = 0$ auf Ω zeigen.

Als mathematische Hilfsgröße untersuchen wir hierzu die **Energie**

$$E(u) := \int_{x \in \Omega} [\nabla u(x)]^2 dx \geq 0.$$

Wir formen E in ein Randintegral um und folgern $u = 0$:

$$\begin{aligned} E(u) &\stackrel{\text{Def}}{=} \int_{x \in \Omega} [\nabla u(x)]^2 dx = \int_{x \in \Omega} \nabla \cdot [u(x) \nabla u(x)] - u(x) \underbrace{\Delta u(x)}_{=0} dx \\ &\stackrel{\text{Gau\ss}}{=} \int_{s \in \partial\Omega} \underbrace{u(x)}_{=0} \nabla u(x) \cdot dS = 0 \quad (\text{Flussintegral, hier f\"ur } n = 3) \end{aligned}$$

Aus $E(u) = 0$ folgt $\nabla u = 0$ auf Ω , also ist u auf dem Gebiet Ω konstant. Dank Stetigkeit von u und Randwerten $u|_{\partial\Omega} = 0$ folgt $u = 0$ auf ganz $\bar{\Omega}$. Der entscheidende Punkt ist die Anwendbarkeit des Satzes von Gau\ss. Hierzu m\u00fcssen die Funktion u und der Rand $\partial\Omega$ hinreichend glatt sein.

Hadamards warnendes Gegenbeispiel

⚠ Hadamards Beispiel zeigt, dass die Lösungen einer PDE im Allgemeinen nicht stetig von den Anfangsdaten abhängen!

Aufgabe: (1) Sei $n \in \mathbb{N}$. Lösen Sie für $u: \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ die PDE

$$\begin{array}{ll} \partial_t^2 u(t, x) + \partial_x^2 u(t, x) = 0 & \text{für alle } t > 0 \text{ und } 0 < x < \pi, \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 & \text{Randbedingungen für } t \geq 0, \\ u(0, x) = g(x) := 0 & \text{Anfangswerte für } 0 < x < \pi, \\ \partial_t u(0, x) = h(x) := n \sin(nx) & \text{Anfangswerte für } 0 < x < \pi. \end{array}$$

(2) Bestimmen Sie für jeden Parameter $n = 0, 1, 2, \dots$ die Lösung $u_n: \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ zu den Randwerten $h_n(x) = n e^{-n/2} \sin(nx)$.

(3) Konvergieren die Randwerte $h_n: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ für $n \rightarrow \infty$?

Konvergieren die zugehörigen Lösungen $u_n: \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$?

Lösung: (1) Der Produktansatz $u(t, x) = v(t) w(x)$ entkoppelt (dank Satz R1D) unsere PDE zu zwei Eigenwertgleichungen

$$v''(t) = -\lambda v(t) \quad \text{und} \quad w''(x) = \lambda w(x) \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Hadamards warnendes Gegenbeispiel

Wir bestimmen zunächst die Ortsfunktion $x \mapsto w(x)$:

$$\lambda = 0 \quad \implies \quad w(x) = a + bx$$

$$\lambda = \alpha^2 > 0 \quad \implies \quad w(x) = a e^{\alpha x} + b e^{-\alpha x}$$

$$\lambda = -\omega^2 < 0 \quad \implies \quad w(x) = a \sin(\omega x) + b \cos(\omega x)$$

Die Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ können hierbei frei gewählt werden.

Die Randbedingung $w(0) = w(\pi) = 0$ erfüllen nur Vielfache der Lösung $w(x) = a \sin(\omega x)$ mit $\omega = n \in \mathbb{N}$, also $\lambda = -n^2$.

Die Gleichung $v''(t) = n^2 v(t)$ wird gelöst durch $v(t) = a e^{nt} + b e^{-nt}$.

Wir erhalten so die Eigenfunktion $u(t, x) = (a e^{nt} + b e^{-nt}) \sin(nx)$.

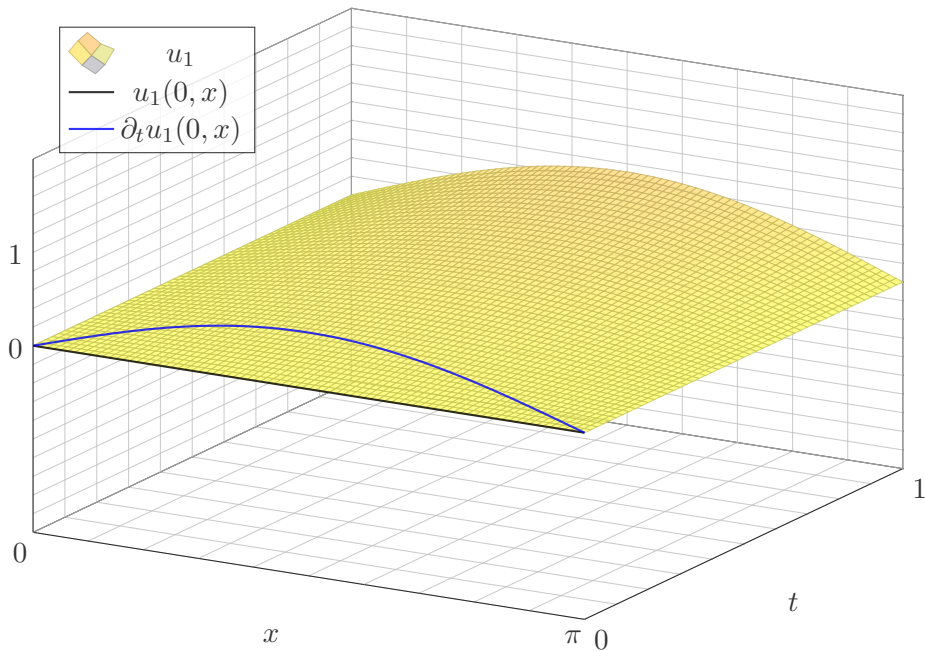
Der Anfangswert $u(0, x) = 0$ erfordert $a = -b$, und $\partial_t u(0, x) = n \sin(nx)$ erfordert $a = 1/2$. Damit finden wir schließlich die erhoffte Lösung:

$$u(t, x) = \sinh(nt) \sin(nx)$$

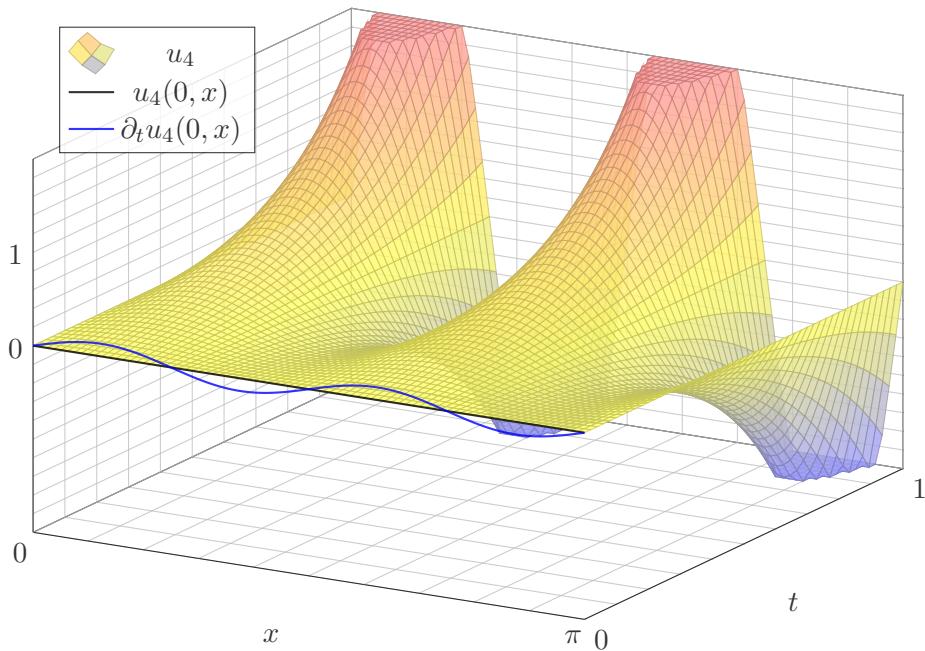
(2) Dank Linearität finden wir $u_n(t, x) = e^{-n/2} \sinh(nt) \sin(nx)$

(3) Für $n \rightarrow \infty$ konvergieren die Anfangsdaten $h_n \rightarrow 0$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion, nicht aber die zugehörigen Lösungen: $u_n \not\rightarrow 0!$

Hadamards warnendes Gegenbeispiel



Hadamards warnendes Gegenbeispiel



Wärmeleitung, vorwärts und rückwärts

Aufgabe: Wir suchen Lösungen $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Wärmeleitung:

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) &= \kappa \partial_x^2 u(t, x) && \text{für alle } t \in \mathbb{R} \text{ und } x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= \sum_n c_n \sin(nx) && \text{Anfangswerte für } t = 0. \end{aligned}$$

- (1) Finden Sie alle Lösungen in Produktform $u(t, x) = v(t)w(x)$.
(2) Was folgt daraus für Anfangswerte $u(0, x) = \sum_n c_n \sin(nx)$?

Lösung: (1) Der Produktansatz $u(t, x) = v(t)w(x)$ separiert zu

$$v'(t) = \lambda v(t), \quad \kappa w''(x) = \lambda w(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Wir nutzen die Anfangsdaten $w(x) = \sin(nx)$ und $v(0) = 1$.
Daraus lesen wir $\lambda = -n^2\kappa$ ab und erhalten $v(t) = e^{-n^2\kappa t}$.

(2) Linearkombination / Superposition ergibt die Lösung

$$u(t, x) = \sum_n c_n e^{-n^2\kappa t} \sin(nx)$$

Für $t > 0$ gilt: Hohe Frequenzen klingen extrem schnell ab.
Für $t < 0$ gilt: Hohe Frequenzen werden extrem verstärkt.

Wärmeleitung, vorwärts und rückwärts

- (3) Was bedeutet das für die Stabilität der Wärmeleitungsgleichung?
(a) Wenn sie vorwärts läuft? (b) Wenn wir sie rückwärts betrachten?
Ist das Problem demnach gut gestellt im Sinne von Hadamard?

Lösung: (3) Eine partielle Differentialgleichung (PDE), hier als Anfangs- und Randwertproblem (ARWP), heißt **gut gestellt**, wenn genau eine Lösung existiert und diese stetig von den gegebenen Daten abhängt.

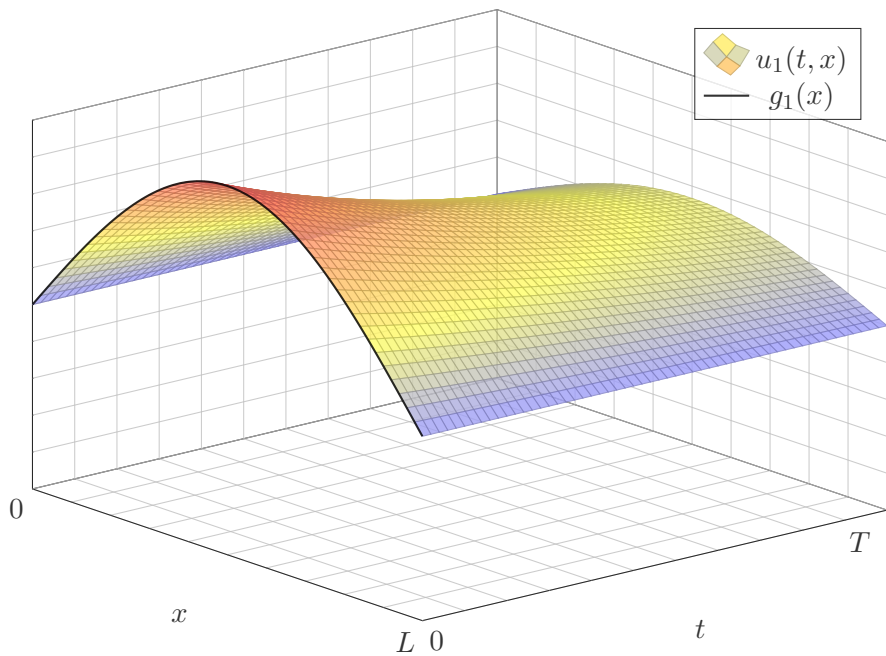
Für die Wärmeleitungsgleichung sind Existenz und Eindeutigkeit nicht offensichtlich, wir werden beides im nächsten Kapitel noch diskutieren. Die Abhängigkeit von den Anfangsdaten können wir sofort ablesen:

😊 Für die (übliche, vorwärtslaufende) Wärmeleitung hängt die Lösung $u: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig von den Anfangsdaten $u(0, -) = u_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ab: Ist u_0 klein, so auch u (in einer geeigneten Norm als Präzisierung).

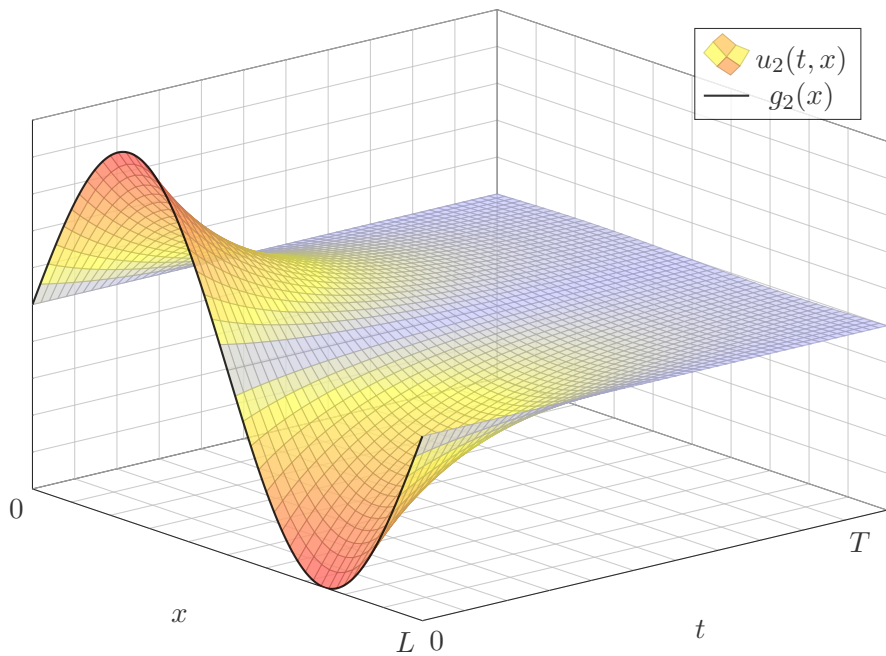
😞 Für die rückwärtslaufende Wärmeleitung gilt dies offensichtlich nicht: Die Anfangsdaten $u(0, x) = n^{-1} \sin(nx)$ sind beliebig klein für $n \rightarrow \infty$, doch die Lösung $u(t, x) = n^{-1} e^{-n^2 \kappa t} \sin(nx)$ wird für $t < 0$ beliebig groß.

⚠ Für manche Anfangsdaten existiert die Lösung nur für $t \geq 0$.

Wärmeleitung, vorwärts und rückwärts



Wärmeleitung, vorwärts und rückwärts



Wellengleichung und die harmonisch schwingende Saite

Wie schwingt die Saite eines Musikinstruments (Geige, Klavier, Gitarre)?
Nach d'Alembert 1747 beschrieb Euler 1748 die Problemstellung so:

*Eine Saite wird gespannt und in eine von der geradlinigen wenig abweichende, sonst aber beliebige Lage gebracht, und nachher sich selbst überlassen.
Man bestimme die vollständige schwingende Bewegung der Saite.*

Aufgabe: (0) Beschreiben Sie die Lage $u(t, x)$ einer gezupften Saite für alle $x \in [0, L]$ und $t \geq 0$ durch eine PDE mit Rand- und Anfangswerten.

(1) Lösen Sie zunächst den **Separationsansatz** $u(t, x) = v(t) w(x)$.

(2) Skizzieren Sie $u_n(t, x) = \cos(n\pi ct/L) \sin(n\pi x/L)$ für $n = 1, 2, 3, \dots$.
Erfüllt diese Funktion die PDE und alle Rand- und Anfangswerte?

Lösung: (0) Wir suchen $u: \mathbb{R} \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}: (t, x) \mapsto u(t, x)$. Dazu gilt:

$\partial_t^2 u(t, x) = c^2 \partial_x^2 u(t, x)$	für alle $t \in \mathbb{R}$ und $0 < x < L$,
$u(t, 0) = u(t, L) = 0$	Randwerte für $x \in \{0, L\}$ und $t \geq 0$,
$u(0, x) = g(x)$	Anfangsposition für $t = 0$ und $0 \leq x \leq L$,
$\partial_t u(0, x) = 0$	Anfangsgeschwindigkeit für $t = 0$.

Wellengleichung und die harmonisch schwingende Saite

(1) Der Produktansatz $u(t, x) = v(t)w(x)$ separiert zu: R117

$$v''(t) = \lambda v(t), \quad c^2 w''(x) = \lambda w(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Die Lösungspaare hängen von der Separationskonstanten $\lambda \in \mathbb{R}$ ab:

$$\lambda = 0 : \quad v(t) = a_1 + a_2 t,$$

$$w(x) = b_1 + b_2 x$$

$$\lambda = \alpha^2 > 0 : \quad v(t) = a_1 e^{\alpha t} + a_2 e^{-\alpha t},$$

$$w(x) = b_1 e^{x\alpha/c} + b_2 e^{-x\alpha/c}.$$

$$\lambda = -\omega^2 < 0 : \quad v(t) = a_1 \cos(\omega t) + a_2 \sin(\omega t),$$

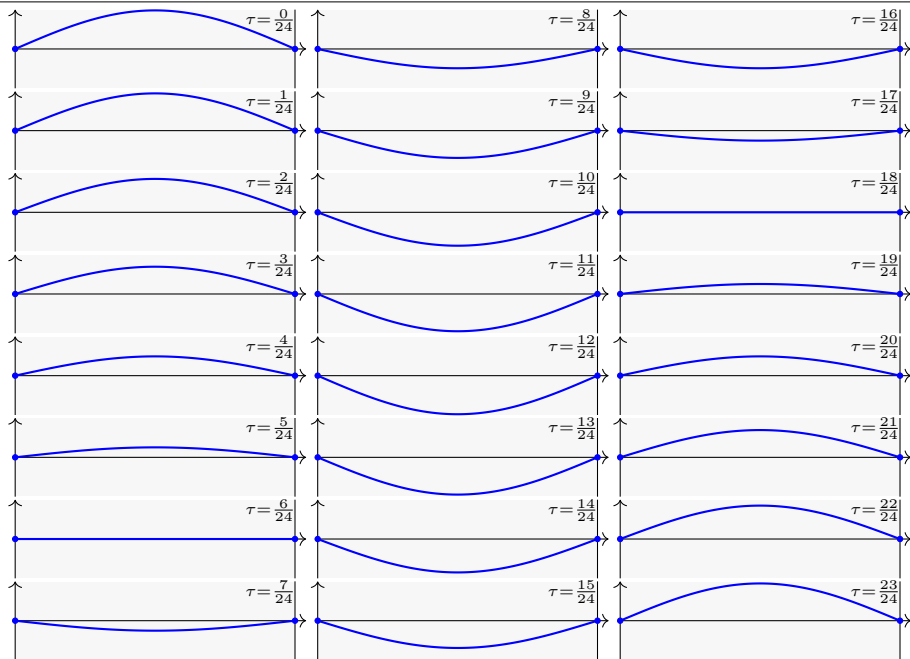
$$w(x) = b_1 \cos(x\omega/c) + b_2 \sin(x\omega/c)$$

Diese lösen die *freie* Wellengleichung. Die geforderte Randbedingung $w(0) = w(L) = 0$ erfüllt nur $\sin(n\pi x/L)$ für $n \in \mathbb{N}$, also $\omega = n\pi c/L$ und

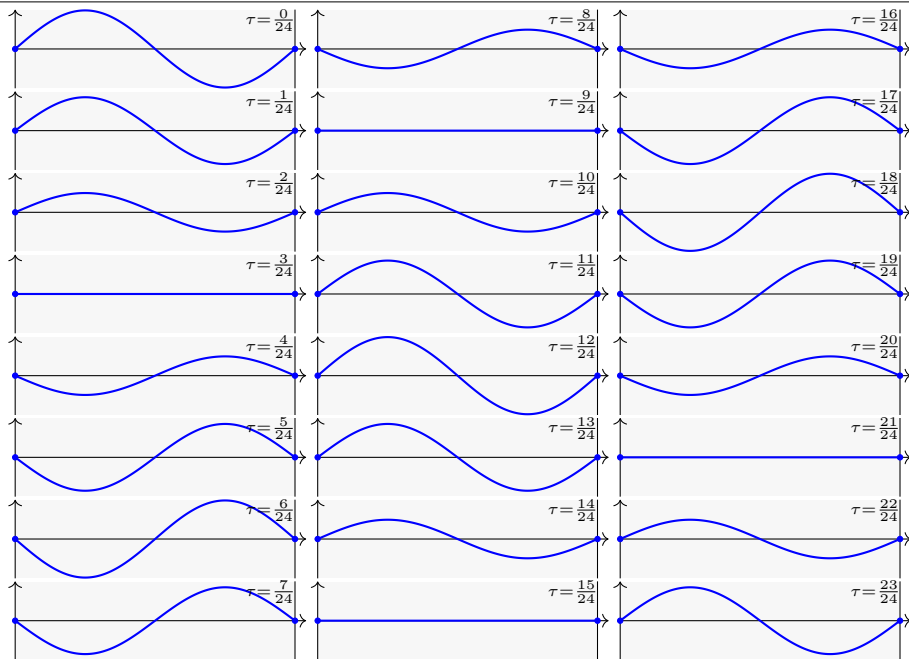
$$u_n(t, x) = [a_n \cos(n\pi ct/L) + b_n \sin(n\pi ct/L)] \sin(n\pi x/L)$$

Da wir zudem $\partial_t u(0, x) = 0$ für alle $x \in [0, L]$ fordern, folgt $b_n = 0$.

Die harmonisch schwingende Saite: Eigenfunktion



Die harmonisch schwingende Saite: Eigenfunktion



Wellengleichung und die gezupfte Saite

Die vorige Aufgabe löst unser Problem, falls zum Startzeitpunkt $t = 0$ die Schwingung mit $u(0, x) = \sin(n\pi x/L)$ und $\partial_t u(0, x) = 0$ beginnt.

D'Alembert-Ansatz: (3) Die Funktion $u(t, x) = f(x \mp ct)$ beschreibt eine Welle der Form f , die mit Geschwindigkeit c nach rechts/links läuft.

(4) Lösen Sie mit diesem Ansatz das allgemeine ARWP wie oben in (0).

(5) Erklären Sie, wie die Faktorisierung $\partial_t^2 - c\partial_x^2 = (\partial_t + c\partial_x)(\partial_t - c\partial_x)$ die Wellengleichung aus (0) in zwei einfache Transportprobleme zerlegt.

Lösung: (3) Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar (stetig genügt, wenn wir Ableitungen im Distributionensinne verstehen, siehe D533).

Für $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (t, x) \mapsto u(t, x) = f(x - ct)$ gilt $\partial_x^2 u(t, x) = f''(x - ct)$ und $\partial_t^2 u(t, x) = c^2 f''(x - ct) = c^2 \partial_x^2 u(t, x)$. Die PDE ist also erfüllt!

(4) Wir setzen die gegebene Funktion $g: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(0) = g(L) = 0$ ungerade und $2L$ -periodisch fort zu $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und erhalten:

$$u(t, x) = \frac{1}{2} [g(x - ct) + g(x + ct)]$$

😊 D'Alemberts geniale Lösung überlagert zwei gegenläufige Wellen.

Wellengleichung und die gezupfte Saite

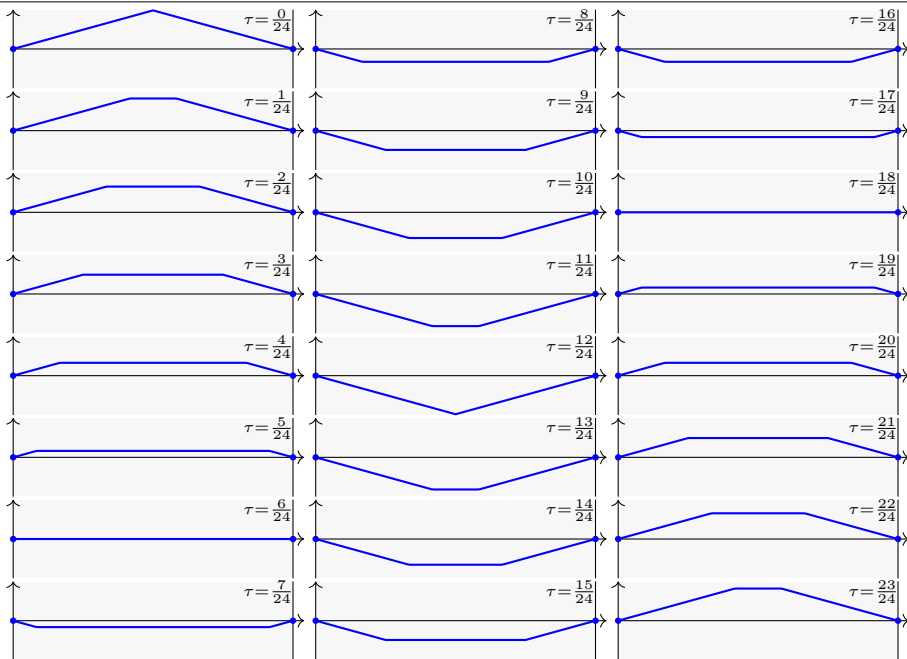
Daniel Bernoulli hingegen war weiterhin überzeugt, dass die Bewegung aus harmonischen Grund- und Oberschwingungen bestehen müssen. Er war unzufrieden mit d'Alemberts Lösung und schrieb 1753:

Ich folgere daraus, dass alle schwingenden Körper eine Unmenge von Tönen von sich geben [...], aber diese Vielfalt der Schwingungen bei der Saite verschweigen die Herren d'Alembert und Euler. [...] In der Tat stimmen alle Musiker darin überein, dass eine gezupfte Saite außer ihrem Grundton zugleich auch noch andere, sehr viel hellere Töne von sich gibt. Dies ist der Beweis dafür, dass sich in einer und derselben Saite eine Überlagerung mehrerer Arten taylorscher [harmonischer] Schwingungen zugleich einstellen kann.

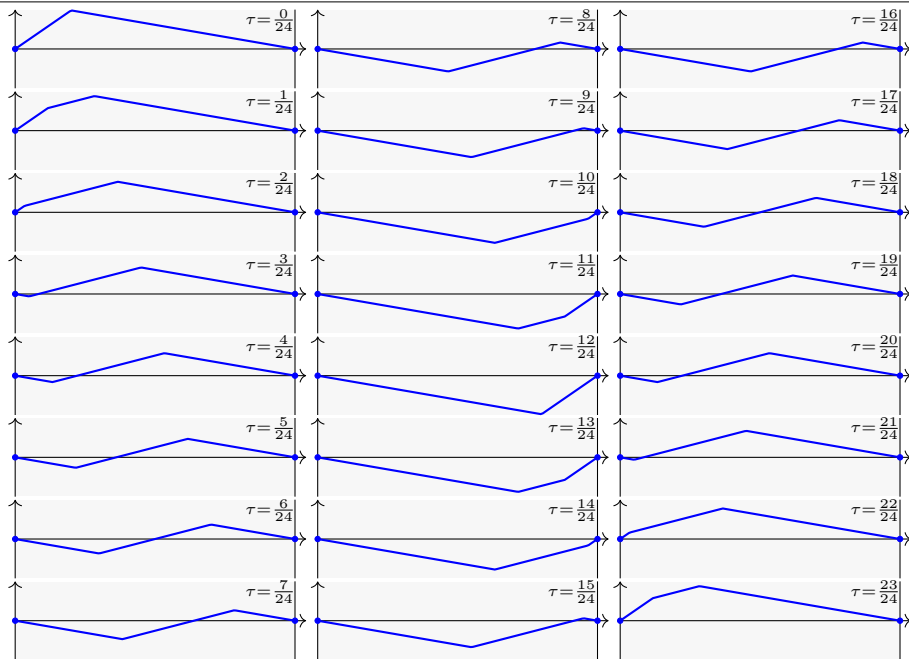
Wer hat denn nun Recht? D'Alembert (1747) und Euler (1748) mit ihrer Summe gegenläufiger Wellen oder Taylor (1713) und Bernoulli (1753) mit der Überlagerung vieler stehender harmonischer Schwingungen?

Diese Kontroverse dauerte über fünfzig Jahre. Die revolutionäre Lösung lieferte Fourier (1807): Beide haben Recht! Jede (physikalisch relevante) Anfangsposition kann als Reihe harmonischer Terme dargestellt werden. Fouriers Theorie erklärte auch, wie die Koeffizienten zu bestimmen sind.

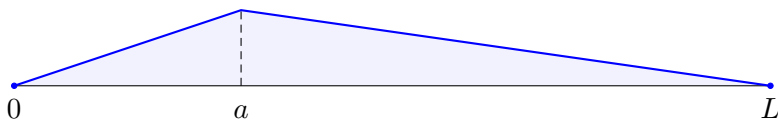
Die gezupfte Saite: gegenläufige Wellen



Die gezupfte Saite: gegenläufige Wellen



Wellengleichung & Fourier: O'zupft is!



Aufgabe: (6) Zu $0 < a < L$ betrachten wir die Anfangsposition

$$g : [0, L] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto g(x) = \begin{cases} x/a & \text{für } 0 \leq x \leq a, \\ (L-x)/(L-a) & \text{für } a \leq x \leq L. \end{cases}$$

Überlagern Sie die Eigenfunktionen aus (1–2)

$$u_n(t, x) = \cos(n\pi ct/L) \sin(n\pi x/L)$$

für $n = 1, 2, 3, \dots$ durch „unendliche Linearkombination“ zu einer Reihe

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(t, x)$$

mit Anfangswerten $u(0, x) = g(x)$ und $\partial_t u(0, x) = 0$ für alle $x \in [0, L]$.
Wie bestimmen Sie effizient und sicher die Koeffizienten a_1, a_2, a_3, \dots ?

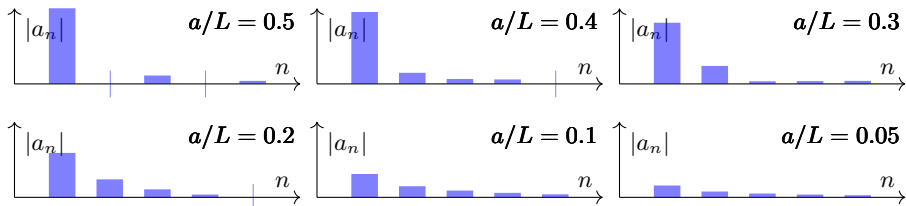
(7) Zeichnen Sie die ersten Partialsummen dieser Reihenentwicklung.

Wellengleichung & Fourier: O'zupft is!

Lösung: (6) Es gilt bereits $\partial_t u_n(0, x) = 0$, folglich auch $\partial_t u(0, x) = 0$. Für $u(0, x) = g(x)$ bestimmen wir a_n durch Fourier-Analyse und finden

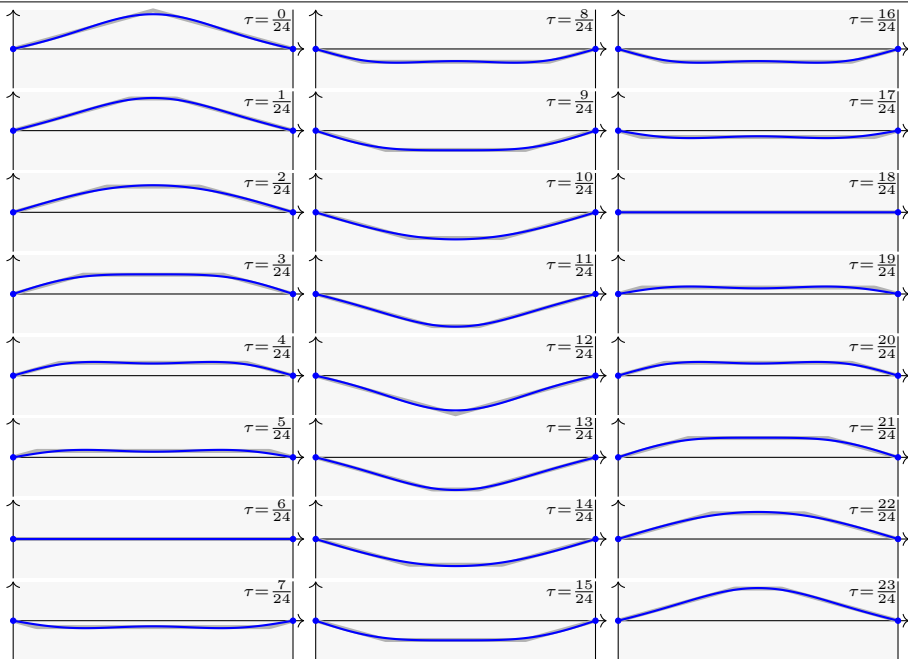
$$u(t, x) = \frac{2L^2}{\pi^2 a(L-a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi a/L)}{n^2} \sin(n\pi x/L) \cos(n\pi ct/L).$$

Die n -te Schwingung hat die Amplitude $\sin(n\pi a/L)/n^2$, hängt also von der Stelle $a \in [0, L]$ ab, an der gezupft wird. Etwa bei $a = 0.2L$ sind erste und zweite Oberschwingung recht stark, was einen vollen Klang bewirkt.

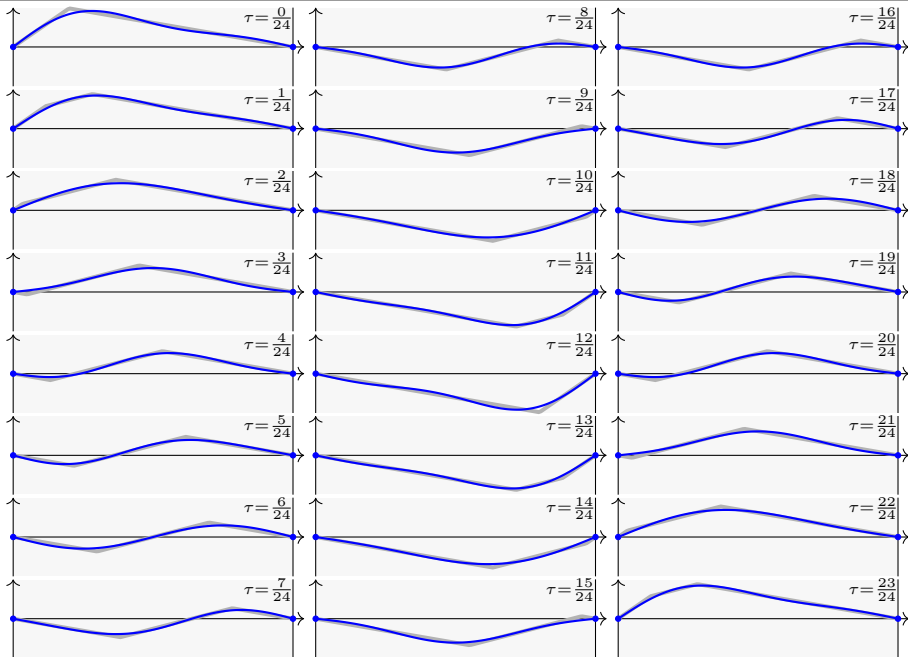


(7) Die folgenden Graphiken zeigen die Summe der ersten drei Terme. 😊 Die Näherung ist schnell recht gut. Fourier-Theorie wirkt auch hier!

Wellengleichung & Fourier: O'zupft is!



Wellengleichung & Fourier: O'zupft is!



Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Lösungen suchen wir zuerst mit dem Produktansatz $u(t, x) = v(t) w(x)$. Das ist zunächst nur geraten, mit etwas Anschauung und Erfahrung.

Wir haben Glück und finden die Eigenfunktionen $u_n(t, x) = v_n(t) w_n(x)$, genug um mit $u(t, x) = \sum_n a_n v_n(t) w_n(x)$ alle Bedingungen zu erfüllen.

Unsere Konstruktion von $u(t, x)$ zeigt somit die **Existenz** einer Lösung. Dies zeigt jedoch noch keineswegs die **Eindeutigkeit**: Es könnte noch weitere Lösungen der PDE geben, die aber unserem Ansatz entgehen. D'Alemberts Ansatz liefert eine weitere Lösung. Sind beide gleich?

Wir wünschen uns sehnlichst die Eindeutigkeit der gesuchten Lösung. Mehrdeutigkeiten müssen wir erkennen und nötigenfalls auch beheben: Sind noch mehrere Lösungen möglich, so stellen wir geeignete weitere Bedingungen, um die physikalisch sinnvollen Lösungen herauszuheben.

Dieses Vorgehen beruht auf der Überzeugung, dass die physikalische Entwicklung **deterministisch** ist. Ein brauchbares mathematisches Modell soll die zukünftige Entwicklung vorhersagen und muss daher eine **eindeutige Lösung** haben, nämlich die physikalisch beobachtete.

Satz R3A: Eindeutigkeitsatz für die Wellengleichung

(0) Löst $u : [0, T[\times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ in C^2 die homogene Wellengleichung

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(t, x) - c^2 \partial_x^2 u(t, x) &= 0 && \text{für } 0 \leq t < T \text{ und } a \leq x \leq b, \\ \begin{cases} u(t, a) = u(t, b) = 0 \\ \partial_x u(t, a) = \partial_x u(t, b) = 0 \end{cases} &&& \text{Dirichlet-Randbedingungen für } t \geq 0 \text{ oder} \\ &&& \text{Neumann-Randbedingungen für } t \geq 0, \\ u(0, x) = 0, \partial_t u(0, x) &= 0 && \text{Anfangswerte für } t = 0 \text{ und } a \leq x \leq b, \end{aligned}$$

dann gilt $u(t, x) = 0$ für alle $(t, x) \in [0, T[\times [a, b]$.

(1) Lösen $\tilde{u}, \check{u} : [0, T[\times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ in C^2 die inhomogene Wellengleichung

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(t, x) - c^2 \partial_x^2 u(t, x) &= f(t, x), \\ \begin{cases} u(t, a) = \ell(t), u(t, b) = r(t) \\ \partial_x u(t, a) = \ell(t), \partial_x u(t, b) = r(t), \end{cases} &&& \text{oder} \\ u(0, x) = g(x), \partial_t u(0, x) &= h(x) \end{aligned}$$

dann gilt $\tilde{u}(t, x) = \check{u}(t, x)$ für alle $(t, x) \in [0, T[\times [a, b]$.

Die Energiemethode beweist die Eindeutigkeit.

Aufgabe: Beweisen Sie die Eindeutigkeit mit der Energiemethode!
Als mathematische Hilfsgröße untersuchen wir hierzu die **Energie**

$$E : [0, T[\rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \frac{1}{2} \int_{x=a}^b [\partial_t u(t, x)]^2 + [c \partial_x u(t, x)]^2 dx \geq 0.$$

- (0) Berechnen Sie $\dot{E} = 0$, folgern Sie $E = 0$ und schließlich $u = 0$.
 (1) Folgern Sie die allgemeine Aussage (1) aus der speziellen (0).

Lösung: (0) Zur Abkürzung schreiben wir $\partial_x u = u_x$ und $\partial_t u = u_t$ usw.
 Dank $u \in C^2$ nutzen wir $u_{xt} = u_{tx}$ nach dem Satz D4A von Schwarz.

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) &\stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{2} \partial_t \int_{x=a}^b u_t^2 - c^2 u_x^2 dx \stackrel{\text{Satz D3A}}{=} \int_{x=a}^b u_t u_{tt} + c^2 u_x u_{xt} dx \\ &\stackrel{\text{part}}{=} \int_{x=a}^b u_t \underbrace{(u_{tt} - c^2 u_{xx})}_{= 0 \text{ Wellengleichung}} dx + \underbrace{[c u_x u_t]_{x=a}^b}_{= 0 \text{ Randbedingung}} = 0 \end{aligned}$$

Aus $u(0, x) = 0$ für $x \in [a, b]$ folgt $E(0) = 0$, somit $E(t) = 0$ für alle $t \geq 0$.
 Das bedeutet $\partial_t u(t, x) = \partial_x u(t, x) = 0$ für alle $(t, x) \in [0, T[\times [a, b]$.
 Zusammen mit $u(0, x) = 0$ folgt daraus $u(t, x) = 0$ für alle (t, x) .

Die Energiemethode beweist die Eindeutigkeit.

(1) Gegeben seien Lösungen $\tilde{u}, \check{u} : [0, T[\times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zu den Daten (1). Die Differenz $u = \tilde{u} - \check{u}$ erfüllt alle Gleichungen aus (0), also $u = 0$. Daraus folgt $\tilde{u} = \check{u}$. Es kann also höchstens eine Lösung geben!

- 😊 Wir nutzen geschickt die lineare Struktur der Problemstellung!
- 😊 Die Energiemethode ist für PDE ungemein nützlich und vielseitig.
- 😊 Der Eindeutigkeitsatz gilt allgemein für alle stetigen Lösungen u , wenn wir Ableitungen im Distributionensinne verstehen, siehe D533.
- 😊 In unserem Beispiel erhalten wir (vereinfacht für $L = \pi$):

$$\frac{1}{2} [g(x - ct) + g(x + ct)] = \frac{2}{a(\pi - a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{n^2} \sin(nx) \cos(nct)$$

Links steht die Lösung nach d'Alembert und Euler als Summe gegenläufiger Wellen. Rechts steht die Lösung nach Bernoulli und Fourier als unendliche Reihe harmonischer Schwingungen. Dank Eindeutigkeitsatz R3A kann es jedoch nur eine Lösung geben, also sind beide gleich.

Potenzreihen und Fourier–Transformation

☹ Nicht jede PDE besitzt eine Lösung; selbst wenn sie eine besitzt, so doch meist nicht elementar, das heißt in geschlossener Form.

😊 In solchen Fällen hilft meist nur der **Potenzreihenansatz** [Q333]: Existenz- und Eindeigkeitssatz Q3B von Cauchy–Kowalewskaja

😊 **Fourier–Transformation** löst $P(\partial) u(x) = g(x)$ für jedes Polynom $P(x) = \sum a_\nu x^\nu$. Die Transformation ergibt nämlich $P(i\xi) \hat{u}(\xi) = \hat{g}(\xi)$, Auflösen zu $\hat{u}(\xi) = \hat{g}(\xi)/P(i\xi)$ und Rücktransformation liefert dann u : Dies garantiert der Existenzsatz R1A von Ehrenpreis–Malgrange.

In der Praxis treten sehr häufig partielle Differentialgleichungen auf. Erfahrungsgemäß sind die allermeisten höchstens **zweiter Ordnung**.

😊 Lineare PDE *erster* Ordnung lösen wir entlang **Charakteristiken**. Die wichtigsten linearen PDE *zweiter* Ordnung sind folgende Modelle: Die Poisson–Gleichung $\Delta u = \rho$, die Wellengleichung $\partial_t^2 u - c^2 \Delta u = \rho$ und die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u - \kappa \Delta u = q$ mit $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$.

Nach diesen drei Modellgleichungen klassifiziert man lineare PDE zweiter Ordnung in **elliptisch**, **hyperbolisch** und **parabolisch** [R110].

Trennung der Variablen durch Produktansatz

Zu lösen sei eine **separierbare Differentialgleichung** der Form

$$P(x, \partial_x) u(x, y) = Q(y, \partial_y) u(x, y).$$

Gegeben sind Intervalle $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ und hierauf die Differentialoperatoren $P(x, \partial_x) = \sum_{j=0}^m a_j(x) \partial_x^j$ und $Q(y, \partial_y) = \sum_{k=0}^n b_k(y) \partial_y^k$ mit a_j, b_k stetig.

Das bedeutet anschaulich: P operiert nur auf x und Q operiert nur auf y .

Als Lösungen gesucht sind Funktionen $u: X \times Y \rightarrow \mathbb{K}: (x, y) \mapsto u(x, y)$.

In diesem Falle eignet sich der **Produktansatz** gemäß Satz R1D:

Sei $u: X \times Y \rightarrow \mathbb{K}: u(x, y) = v(x) \cdot w(y)$ Produkt von $0 \neq v \in C^m(X, \mathbb{K})$ und $0 \neq w \in C^n(Y, \mathbb{K})$. Dann ist die obige PDE äquivalent zu den beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen / Eigenwertgleichungen

$$P(x, \partial_x) v(x) = \lambda v(x) \quad \text{und} \quad Q(y, \partial_y) w(y) = \lambda w(y)$$

mit einem gemeinsamen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$ als **Separationskonstante**. Lösung sind Eigenfunktionen $u(x, y) = v(x)w(y)$ und Superpositionen. Gleiches gilt für $u(x_1, \dots, x_n) = u_1(x_1) \cdots u_n(x_n)$ in mehreren Variablen.

Kompaktheit garantiert Eindeutigkeit.

Die Konstruktion einer Lösung oder erfolgreiche Probe eines Kandidaten zeigt die **Existenz** einer Lösung, aber noch nicht die **Eindeutigkeit**: Es könnte weitere Lösungen geben, die unserem Ansatz entgehen.

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, also der Abschluss $\overline{\Omega}$ kompakt.

(0) Löst $u: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ die homogene Poisson–Gleichung

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= 0 && \text{für jeden inneren Punkt } x \in \Omega, \\ u(x) &= 0 && \text{für jeden Randpunkt } x \in \partial\Omega,\end{aligned}$$

dann gilt $u(x) = 0$ für alle $x \in \overline{\Omega}$.

(1) Lösen $\tilde{u}, \check{u}: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ die inhomogene Poisson–Gleichung

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= q(x) && \text{für jeden inneren Punkt } x \in \Omega, \\ u(x) &= g(x) && \text{für jeden Randpunkt } x \in \partial\Omega,\end{aligned}$$

dann gilt $\tilde{u}(x) = \check{u}(x)$ für alle $x \in \overline{\Omega}$.

Wie üblich folgt (1) aus (0) dank Linearität: Angenommen \tilde{u}, \check{u} erfüllen (1). Die Differenz $u = \tilde{u} - \check{u}$ erfüllt dann (0). Also gilt $u = 0$ und somit $\tilde{u} = \check{u}$.

Minimum-Maximum-Prinzip harmonischer Funktionen

Beweise für die Eindeutigkeit liefern die **Energiemethode** und das folgende **Minimum-Maximum-Prinzip** für harmonische Funktionen.

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, also der Abschluss $\bar{\Omega}$ kompakt. Sei $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Da $\bar{\Omega}$ und $\partial\Omega$ kompakt sind, nimmt u hierauf jeweils ein Minimum und ein Maximum an. Wegen $\bar{\Omega} \supseteq \partial\Omega$ gilt dann allgemein:

$$\min_{\bar{\Omega}} u \leq \min_{\partial\Omega} u \quad \text{und} \quad \max_{\bar{\Omega}} u \geq \max_{\partial\Omega} u$$

Zudem sei u harmonisch auf dem Inneren Ω , also $u \in C^2$ und $\Delta u = 0$.

(1) Dann nimmt u sein Minimum und Maximum auf dem Rand $\partial\Omega$ an:

$$\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u \quad \text{und} \quad \max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$$

Seien $u, v: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf dem Inneren Ω harmonisch. Dann gilt:

(2) Monotonie: Aus $u \leq v$ auf dem Rand $\partial\Omega$ folgt $u \leq v$ auf ganz $\bar{\Omega}$.

(3) Eindeutigkeit: Aus $u = v$ auf dem Rand $\partial\Omega$ folgt $u = v$ auf ganz $\bar{\Omega}$.

😊 Dies können wir zur Eingrenzung durch Ober/Unterlösungen nutzen. Das Minimum-Maximum-Prinzip gilt ebenso diskret für endliche Graphen (Satz T4B) und beweist neben Eindeutigkeit auch Existenz der Lösung!

Separation (Klausur Februar 2016)

Wir untersuchen für $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die partielle Differentialgleichung

$$\partial_x^2 u(x, y) + 6 \partial_x u(x, y) = \partial_y^2 u(x, y).$$

Gesucht sind Lösungen in Produktform $u(x, y) = v(x) w(y) \neq 0$.

Aufgabe: (1) Formulieren Sie die Gleichungen für $v(x)$ und $w(y)$.

(2) Finden Sie alle Lösungen der Form $u(x, y) = v(x) \cdot \cos(3y)$.

Lösung: (1) Wir folgen dem Separationsansatz:

$$\frac{v''(x) + 6v'(x)}{v(x)} = \frac{w''(y)}{w(y)} = \lambda \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} v''(x) + 6v'(x) = \lambda v(x) \\ w''(y) = \lambda w(y) \end{cases}$$

😊 Zu jedem $\lambda \in \mathbb{R}$ können wir diese beiden ODE lösen. Speziell:

(2) Aus $w(y) = \cos(3y)$ folgt $w''(y) = -9w(y)$, also $\lambda = -9$.

Wir lösen die zugehörige Gleichung $v''(x) + 6v'(x) + 9v(x) = 0$.

Wir finden $u(x, y) = (c_1 + c_2 x) e^{-3x} \cdot \cos(3y)$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Probe!

Separation (Klausur September 2016)

Wir untersuchen für $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die partielle Differentialgleichung

$$\partial_x^2 u(x, y) + 10 \partial_x u(x, y) = \partial_y^2 u(x, y).$$

Gesucht sind Lösungen in Produktform $u(x, y) = v(x) w(y) \neq 0$.

Aufgabe: (1) Formulieren Sie die Gleichungen für $v(x)$ und $w(y)$.

(2) Finden Sie alle Lösungen der Form $u(x, y) = v(x) \cdot \cos(4y)$.

Lösung: (1) Wir folgen dem Separationsansatz:

$$\frac{v''(x) + 10v'(x)}{v(x)} = \frac{w''(y)}{w(y)} = \lambda \quad \implies \quad \begin{cases} v''(x) + 10v'(x) = \lambda v(x) \\ w''(y) = \lambda w(y) \end{cases}$$

😊 Zu jedem $\lambda \in \mathbb{R}$ können wir diese beiden ODE lösen. Speziell:

(2) Aus $w(y) = \cos(4y)$ folgt $w''(y) = -16w(y)$, also $\lambda = -16$.

Wir lösen die zugehörige Gleichung $v''(x) + 10v'(x) + 16v(x) = 0$.

Wir finden $u(x, y) = (c_1 e^{-8x} + c_2 e^{-2x}) \cdot \cos(4y)$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Probe!

Existenz, Eindeutigkeit, Superposition

Aufgabe: Eine quadratische Kupferplatte mit Kantenlänge 1m wird an zwei gegenüberliegenden Seiten konstant auf 100°C bzw. 200°C geheizt, an den beiden anderen konstant auf 0°C gekühlt. (1) Formulieren und (2) lösen Sie die PDE für die stationäre Temperaturverteilung u !
(3) Wie viele Lösungen u existieren? Wie können Sie sicher sein?

Lösung: (1) auf dem Quadrat $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ suchen wir $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$. Die allgemeine Wärmeleitungsgleichung lautet $\partial_t u = \kappa \Delta u + q$. Im Bereich Q gebe es keine Quellen oder Senken, also $q = 0$. Im stationären Zustand gilt $\partial_t u = 0$, also haben wir $\Delta u = 0$:

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0 \quad \text{auf dem Quadrat } Q = [0, 1] \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$$

mit $u(0, y) = u(1, y) = 0$, $u(x, 0) = 100$, $u(x, 1) = 200$.

(2) Wir haben den grundlegenden Fall auf Seite R201 bereits eindeutig gelöst durch $v : Q \rightarrow \mathbb{R}$. Bitte wiederholen Sie sorgfältig alle Argumente! Aus der dortigen ergibt sich unsere hiesige Lösung durch Superposition, nämlich als die Linearkombination $u(x, y) = 2v(x, y) + v(x, 1 - y)$.

Existenz, Eindeutigkeit, Superposition

Stationäre Wärmeverteilung
auf einer Kupferplatte:

