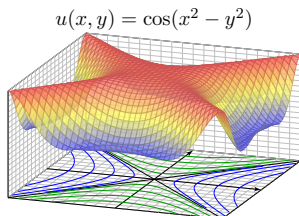
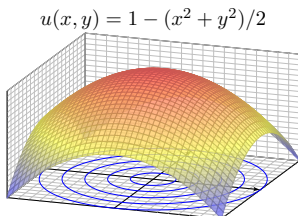
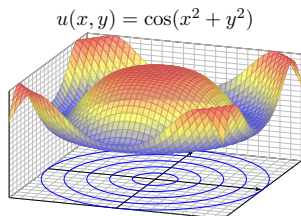


## Kapitel Q

## Partielle Differentialgleichungen (PDE)



*Differential equations represent the most powerful tool  
humanity has ever created for making sense of the material world.*

Steven H. Strogatz (1959–)

# Inhalt dieses Kapitels Q

- 1 Erste Beispiele partieller Differentialgleichungen
  - Partielle Ableitungen und der Satz von Schwarz
  - Cauchy–Riemann und Maxwell–Gleichungen
  - Konvektion-Diffusion und Navier–Stokes–Gleichungen
  - Ideale ebene Strömungen und holomorphe Funktionen
  
- 2 Lineare PDE erster Ordnung
  - Lineare Differentialoperatoren
  - Lösung entlang charakteristischer Kurven
  - Die Charakteristikmethode und warnende Gegenbeispiele
  - Transportgleichung mit konstanten Koeffizienten
  
- 3 Fazit: PDE erster Ordnung
  - Zusammenfassung und Verständnisfragen
  - Aufgaben zur Charakteristikmethode
  - Lösung durch Potenzreihenansatz
  - Methodenvergleich: Viele Wege führen zum Ziel.

# Einleitung und Überblick

Bei **gewöhnlichen Differentialgleichungen** (ODE) oder DGSysystemen betrachten wir Funktionen  $u(x)$  in einer einzigen reellen Variablen  $x$ , also

$$u : \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}^m : x \mapsto u(x).$$

Gesucht sind die Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung

$$F(x, u, u', u'', u''', \dots, u^{(k)}) = 0$$

in der Funktion  $u$  und ihren Ableitungen  $u', u'', u''', \dots, u^{(k)} = \partial^k u$ .

Bei **partiellen Differentialgleichungen** (PDE) betrachten wir allgemein Funktionen  $u(x_1, \dots, x_n)$  in mehreren Variablen  $x_1, \dots, x_n$ ,  $n \geq 1$ , also

$$u : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m : (x_1, \dots, x_n) \mapsto u(x_1, \dots, x_n).$$

Gesucht sind die Lösungen einer partiellen Differentialgleichung

$$F(x_1, \dots, x_n, u, \partial_1 u, \dots, \partial_n u, \dots, \partial^\nu u, \dots) = 0$$

in der Funktion  $u$  und ihren partiellen Ableitungen  $\partial^\nu u = \partial_1^{\nu_1} \cdots \partial_n^{\nu_n} u$ .

Die **Ordnung**  $k$  einer (partiellen) Differentialgleichung ist die höchste Ordnung  $|\nu| = \nu_1 + \cdots + \nu_n$  aller auftretenden (partiellen) Ableitungen.

# Einleitung und Überblick

Die Wichtigkeit der (gewöhnlichen und partiellen) Differentialgleichungen besteht darin, dass sich nahezu alle Naturphänomene so beschreiben lassen. Wir illustrieren dies an drei zentralen klassischen Beispielen: Wärmeleitungsgleichung, Potentialgleichung und Wellengleichung.

Wichtige Anwendungen, die Sie zum Teil schon kennengelernt haben, finden sie in Elektrodynamik (Maxwell-Gleichungen), Thermodynamik (Bilanzgleichungen), klassischer Mechanik (Hamilton-Gleichungen), Quantenmechanik (Schrödinger-Gleichung), Strömungsmechanik (Navier-Stokes-Gleichungen), usw. . . . Die Liste ist schier endlos.

Die Lösung partieller Differentialgleichungen mobilisiert alle bisher erarbeiteten Techniken der Höheren Mathematik: mehrdimensionale Differential- und Integralrechnung, Integralsätze, Fourier-Theorie, gewöhnliche Differentialgleichungen, etc. Differentialgleichungen sind ein riesiges Gebiet, zu dem ich hier nur einen winzigen Einblick gebe.

Die mathematische und oft numerische Bearbeitung praxisrelevanter Probleme führt schnell zu Fragestellungen der aktuellen Forschung und sprengt daher bei weitem den Rahmen dieser Vorlesung.

## Erinnerung: Richtungsableitungen

 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §4.3.

**Eindimensional:** Sei  $I = ]a, b[ \subseteq \mathbb{R}$  und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Wir nennen  $f$  im Punkt  $x \in I$  differenzierbar, wenn der Grenzwert


$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =: f'(x)$$

existiert. In diesem Fall heißt  $f'(x)$  die Ableitung von  $f$  im Punkt  $x$ .

**Mehrdimensional:** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Die Ableitung von  $f$  im Punkt  $x \in \Omega$  in Richtung  $v \in \mathbb{R}^n$  ist

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+hv) - f(x)}{h} =: \partial_v f(x).$$

Dies ist die Ableitung der partiellen Funktion  $h \mapsto f(x+hv)$  in  $h=0$ . Häufig nutzen wir die Ableitung  $\partial_k$  in Richtung  $v = e_k$ , wobei  $e_1, \dots, e_n$  die kanonische Basis des  $\mathbb{R}^n$  ist, also  $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ .

 Die Offenheit von  $\Omega$  garantiert, dass wir um jedem Punkt  $x \in \Omega$  etwas Platz haben: Es gibt einen kleinen Ball  $B(x, \varepsilon) \subseteq \Omega$  vom Radius  $\varepsilon > 0$ . Andernfalls ließe sich die Ableitung erst gar nicht wie oben erklären.

## Erinnerung: partielle Ableitungen

Die  $k$ -te **partielle Ableitung**  $\partial_k f$  von  $f$  im Punkt  $x \in \Omega$  ist demnach

$$\begin{aligned} \partial_k f(x_1, \dots, x_n) &:= \left[ \frac{d}{dt} f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + t, x_{k+1}, \dots, x_n) \right]_{t=0} \\ &:= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\dots, x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1}, \dots) - f(\dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots)}{h} \end{aligned}$$

Wenn diese Ableitungen für alle  $x \in \Omega$  und alle  $k = 1, \dots, n$  existieren, so nennen wir  $f$  **partiell differenzierbar**. Dies definiert  $\partial_k f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

Sind alle  $\partial_k f$  stetig, so heißt  $f$  **stetig partiell differenzierbar**, kurz  $C^1$ .

Sind alle  $\partial_k f$  stetig partiell differenzierbar, so heißt  $f$  **zweimal stetig partiell differenzierbar**, kurz  $C^2$ . Hier gilt der Satz von Schwarz D4A:

◆ **Satz D4A: Satz von Schwarz**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Ist  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar, so gilt

$$\partial_j \partial_k f = \partial_k \partial_j f \quad \text{für alle } j, k \in \{1, \dots, n\}.$$

Induktiv definieren wir die  $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen  $C^k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und schließlich die **glatten Funktionen**  $C^\infty = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k$ .

## Erinnerung: ein warnendes Gegenbeispiel

Vertauschbarkeit gilt nicht immer! Ein warnendes Gegenbeispiel D403:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Die Funktion  $f$  ist stetig und differenzierbar auf  $\mathbb{R}^2$ , auch im Punkt  $(0, 0)$ . Die Ableitungen  $\partial_x f, \partial_y f$  sind stetig und partiell differenzierbar, aber:

$$\begin{aligned} (\partial_y f)(x, y) &= \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}, & (\partial_y f)(0, 0) &= 0, \\ (\partial_y f)(x, 0) &= \frac{+x^5}{x^4} = +x, & (\partial_x \partial_y f)(0, 0) &= +1, \\ (\partial_x f)(x, y) &= \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}, & (\partial_x f)(0, 0) &= 0, \\ (\partial_x f)(0, y) &= \frac{-y^5}{y^4} = -y, & (\partial_y \partial_x f)(0, 0) &= -1. \end{aligned}$$

Für partielle Differentialgleichungen möchten wir dieses lästige Problem beheben bzw. umgehen. Die korrekte Behandlung gelingt wunderbar mit der Theorie der Distributionen (siehe Kapitel D).

## Erinnerung: gebräuchliche Schreibweisen

Zur Illustration nenne ich für  $u: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}: (t, x, y, z) \mapsto u(t, x, y, z)$  die Nummerierung  $(t, x, y, z) = (x_0, x_1, x_2, x_3)$  mit partiellen Ableitungen

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} = \partial_t u = \partial_0 u, \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \partial_x u = \partial_1 u, \quad \text{etc.}$$

Für die Ortsableitung  $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$  gilt  $\nabla u = \text{grad } u = (\partial_1 u, \partial_2 u, \partial_3 u)$ .  
Für zweifache partielle Ableitungen (Vertauschbarkeit vorausgesetzt):

$$u_{xt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} u = \partial_t \partial_x u = \partial_0 \partial_1 u = \partial_0^1 \partial_1^1 \partial_2^0 \partial_3^0 u = \partial^{(1,1,0,0)} u, \quad \text{etc.}$$

**Beispiel:** Die Wellengleichung lässt sich wie folgt schreiben:

$$c^{-2} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}, \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$\partial_t^2 u = c^2 \Delta u \quad \text{mit} \quad \Delta = \nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2,$$

$$\square u = 0 \quad \text{mit} \quad \square = c^{-2} \partial_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2.$$

Die Schreibweise soll jeweils klar und eindeutig sein. Sie ist wie jede Konvention eine Frage von Tradition, Bequemlichkeit und Geschmack.



## Beispiel: die Cauchy–Riemann–Gleichungen

Die **Cauchy–Riemann–Gleichungen** für  $(u, v) : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  lauten

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

$\iff$  Das Vektorfeld  $(u, -v)$  erfüllt  $\operatorname{div}(u, -v) = 0$  und  $\operatorname{rot}(u, -v) = 0$ .

$\iff$  Die komplexe Funktion  $f = u + iv : \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  ist **holomorph**.

$\iff$  Lokal ist  $f$  eine komplexe **Potenzreihe**,  $f(z) = \sum a_k (z - z_0)^k$ .

$\implies$  Beide Funktionen  $u, v$  sind **harmonisch**, also  $\Delta u = \Delta v = 0$ .

Diese spezielle PDE ist extrem wichtig. Cauchys Integralsatz entfaltet hier nämlich ein Wunder: Für holomorphe Funktionen gelten besonders starke Gesetzmäßigkeiten. Diese sind Thema der Funktionentheorie, also der komplexen Analysis. Insbesondere ist jede holomorphe Funktion lokal eine komplexe Potenzreihe und umgekehrt. Damit ist diese PDE vollständig gelöst! Hier zahlt sich Ihre Investition in solide mathematische Grundlagen überreichlich aus.

Holomorphe Funktionen sind in Mathematik und Physik überall anzutreffen und als Werkzeuge unentbehrlich. Klassische Anwendungen sind ebene Elektrostatik (Q1A) und Strömungen (Q1B). Aus obigen Gleichungen folgt insbesondere, dass  $u$  und  $v$  harmonisch sind, also  $\Delta u = \Delta v = 0$ . Versuchen Sie dies durch Ableiten nachzurechnen, als leichte Übung und Wiederholung. F511  
Zur Schreibweise und Verwendung der Differentialoperatoren  $\nabla$  und  $\Delta = \nabla^2$  siehe Seite H101.

# Systeme partieller Differentialgleichungen

Ein **System partieller Differentialgleichungen** entsteht aus mehreren Funktionen  $u_1, \dots, u_m : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Diese können wir zusammenfassen zu

$$u : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad u = (u_1, \dots, u_m).$$

Das System der partiellen Differentialgleichungen schreibt sich dann

$$\begin{cases} F_1(u_1, \dots, u_m, \dots, \partial^\nu u_i, \dots) = 0 \\ \vdots \\ F_\ell(u_1, \dots, u_m, \dots, \partial^\nu u_i, \dots) = 0 \end{cases}$$

Zur Illustration nenne ich drei berühmte Gleichungssysteme, die seit dem 19. Jahrhundert ausgiebig untersucht und vielfältig genutzt werden: Die **Cauchy–Riemann–Gleichungen** sind vollständig verstanden, die **Maxwell–Gleichungen** auch weitgehend, aber viel schwieriger, die **Navier–Stokes–Gleichungen** noch nicht. Letztere sind nicht-linear. Als lineares Pendant untersuchen wir in diesem Kapitel ausführlich die **Konvektions-Diffusions-Gleichung** und lösen wichtige Spezialfälle.

## Beispiel: die Maxwell–Gleichungen

Die **Maxwell–Gleichungen** H157 für Felder  $\vec{E}, \vec{B} : \mathbb{R}^4 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  lauten

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 4\pi \rho, & \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, & \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{J}. \end{aligned}$$

**Aufgabe:** (1) Was besagen die statischen Maxwell–Gleichungen? in quellenfreien Bereichen? Was sind die Lösungen im ebenen Fall?  
 (2) Skizzieren Sie das  $\vec{E}$ –Feld gegenpoliger Punktladungen (Dipolfeld).

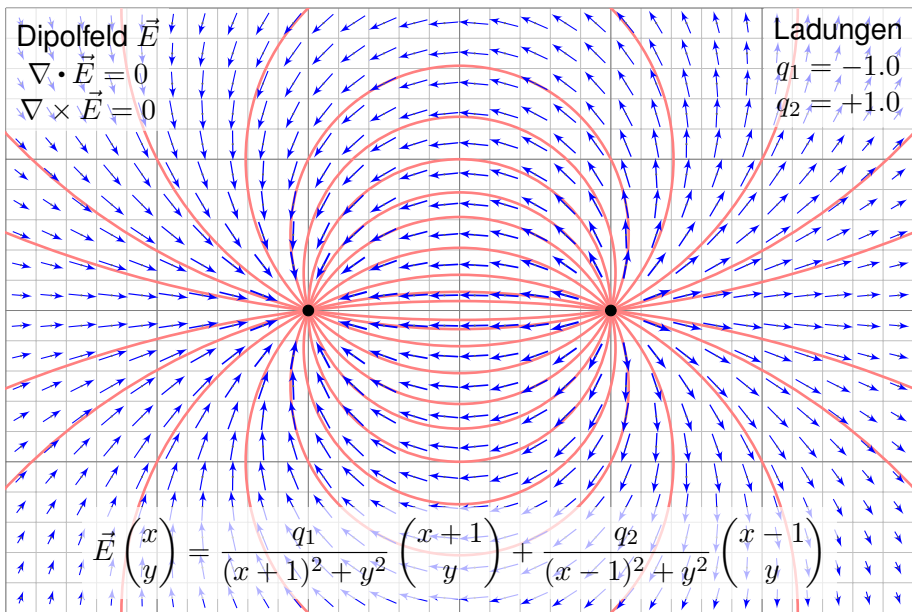
**Lösung:** (1) Wir erhalten  $\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \vec{B} = 0$  und  $\nabla \times \vec{E} = \nabla \times \vec{B} = 0$ .

### Satz Q1A: holomorphe Lösungen der Maxwell–Gleichung

Jedes ebene statische  $E$ -Feld  $\vec{E} : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  ohne Quellen entspricht einer holomorphen Funktion  $f = E_1 - iE_2 : \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  und umgekehrt.

😊 Lösungen sind holomorphe Funktionen, also komplexe Potenzreihen. Damit können wir Lösungen bequem finden und explizit ausschreiben. Umgekehrt können wir uns Residuen als Ladungen vorstellen (F4D).

## Anwendung: ebene Elektrostatik



Rechnung [E317]. Für das Magnetfeld addieren wir zwei Wirbelfelder. [H328]

# Die Konvektions-Diffusions-Gleichung

## Bilanzgleichung der Strömungslehre zu Konvektion und Diffusion:

$$\underbrace{\partial_t u(t, x)}_{\text{Änderungsrate}} + \underbrace{\nabla [\vec{v} u(t, x)]}_{\text{Konvektion: Zu/Abfluss}} = \underbrace{\nabla [\kappa \nabla u(t, x)]}_{\text{Diffusion: div grad}} + \underbrace{q(t, x)}_{\text{Quellen}} + \underbrace{c u(t, x)}_{\text{Wachstum/Zerfall}}$$

Diese partielle Differentialgleichung ist linear zweiter Ordnung. Sie beschreibt den Transport in einer vorgegebenen Strömung  $\vec{v}(t, x)$ , z.B. von Algen im Meer oder eines radioaktiven Markers im Blutkreislauf. Dieselben Gleichungen gelten für die Konvektion und Diffusion von Wärme. Gesucht ist die Stoffkonzentration  $u: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  (Wärmedichte), also die Werte  $u(t, x)$  zur Zeit  $t \in I \subseteq \mathbb{R}$  am Ort  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Zur Ortsableitung schreiben wir wie üblich  $\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_n)$ . [H101](#) Gegeben sind Anfangswerte  $u(0, x) = u_0(x)$  für  $t = 0$  und alle  $x \in \Omega$ , sowie die Strömungsgeschwindigkeit  $\vec{v}: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  (Konvektion), der Diffusionskoeffizient  $\kappa: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  (Temperaturleitfähigkeit), zudem die Quellen und Senken  $q: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  (Wärmeleistungsdichte) und die Wachstumsrate  $c: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  (Vermehrung, Abbau, Zerfall).

Für räumlich **konstante Koeffizienten** gilt  $\nabla \vec{v} = 0$  und  $\nabla \kappa \cdot \nabla u = 0$ :

$$\partial_t u(t, x) + \vec{v} \nabla u(t, x) = \kappa \Delta u(t, x) + q(t, x) + c u(t, x)$$

Links steht die **substantielle Ableitung** [H111](#) entlang der Strömung:

$$\partial_t u(t, x) + \sum_{j=1}^n v_j \partial_j u(t, x) = \kappa \sum_{j=1}^n \partial_j^2 u(t, x) + c u(t, x) + q(t, x)$$

# Die Konvektions-Diffusions-Gleichung

Erster wichtiger Spezialfall: Ohne Diffusion gilt  $\kappa = 0$ . Das vereinfacht!  
Wir erhalten die **Transportgleichung** oder **Konvektionsgleichung**:

$$\partial_t u(t, x) + \nabla [\vec{v}(t, x) u(t, x)] = c(t, x) u(t, x) + q(t, x)$$

😊 Dies ist eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung.  
Mit konstanten Koeffizienten lösen wir sie in Satz Q2E, allgemeiner Q3A.

😊 Solche einfach gebauten Gleichungen können wir bereits lösen!  
Hierzu nutzen wir die raffinierte und vielseitige Charakteristikmethode.

Zweiter Spezialfall: Ohne Konvektion und Wachstum gilt  $v = c = 0$ .

Wir erhalten die **Wärmeleitungsgleichung** oder **Diffusionsgleichung**:

$$\partial_t u(t, x) = \nabla [\kappa(t, x) \nabla u(t, x)] + q(t, x)$$

😊 Dies ist eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung.  
Mit konstanten Koeffizienten,  $\kappa = \text{const}$ , lösen wir sie in Kapitel S.

😊 Die Lösung der Wärmeleitungsgleichung gelingt uns dank guter mathematischer Grundlegung, sie mobilisiert alle bisherigen Techniken.

# Die Konvektions-Diffusions-Gleichung

Dritter Spezialfall: Im **stationären Zustand** gilt  $\partial_t u = 0$  und  $c = 0$ .  
Alle Größen hängen nicht von der Zeit  $t$  ab, sondern nur vom Ort  $x$ .

$$\nabla [\vec{v}(x) u(x)] = \nabla [\kappa(x) \nabla u(x)] + q(x)$$

Für  $v = 0$  und  $\kappa = 1$  erhalten wir die **Potentialgleichung**  $0 = \Delta u + q$ .

😊 Konvektion und Diffusion begegnen Ihnen in vielen Anwendungen. In glücklichen Fällen können Sie die Gleichung allein mit Stift und Papier lösen, explizit und exakt. Meist jedoch ist dies unmöglich und Sie nutzen Computer zur numerischen Approximation. Hierzu benötigen Sie ein solides Grundverständnis: Existiert eine Lösung? Ist sie eindeutig? Wie verhält sie sich typischerweise? Wie lässt sie sich berechnen?

😊 In typischen Anwendungen ist  $u(t, x)$  die Wärmedichte oder eine Stoffkonzentration. Im Allgemeinen hängen die Koeffizienten  $v, \kappa, q$  höchstens von der Zeit  $t$  und dem Ort  $x$  ab. In genaueren Modellen hängen sie zudem von der Wärmedichte bzw. Konzentration  $u$  ab.

⚠ Die Gleichung ist dann nicht-linear und wesentlich komplizierter.

## Die Konvektions-Diffusions-Gleichung

**Aufgabe:** Eine wichtige Anwendung ist die Strömung von Flüssigkeiten.

(1) Setzen Sie als transportierte Größe die Masse ein, also  $u = \rho$ , und vereinfachen Sie durch die plausiblen Annahmen  $\kappa = 0$ ,  $c = 0$ ,  $q = 0$ .

(2) Untersuchen Sie als transportierte Größe die Impulsdichte  $\vec{u} = \vec{v}\rho$ . Welche Differentialgleichung erhalten Sie nach Vereinfachung?

**Lösung:** (1) Wir erhalten die Kontinuitätsgleichung  $\partial_t \rho + \nabla(\vec{v}\rho) = 0$ .

(2) Wir setzen die Komponente  $u = \rho v_i$  in die Konv-Diff-Gleichung ein:

$$\begin{aligned} \partial_t u + \sum_{j=1}^n \partial_j [v_j u] &= \sum_{j=1}^n \partial_j [\kappa \partial_j u] + q_i \\ \partial_t [v_i \rho] + \sum_{j=1}^n \partial_j [v_j \rho v_i] &= \kappa \Delta(\rho v_i) + q_i \\ \rho \partial_t v_i + v_i \partial_t \rho + v_i \sum_{j=1}^n \partial_j [v_j \rho] + \sum_{j=1}^n \rho v_j \partial_j v_i &= \kappa \Delta(\rho v_i) + q_i \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{= 0 \text{ dank Kontinuitätsgleichung (1)}} \end{aligned}$$

😊 Wir erhalten hierdurch genau die  $i$ -te Navier–Stokes–Gleichung: Diese sind nichts anderes als die Bilanzgleichungen für den Impuls! Die Kraft  $q_i = \rho f_i - \partial_i p$  setzt sich zusammen aus der externen Kraft  $\rho f_i$  und der internen Kraft  $-\partial_i p$ , die durch das Druckgefälle erzeugt wird.

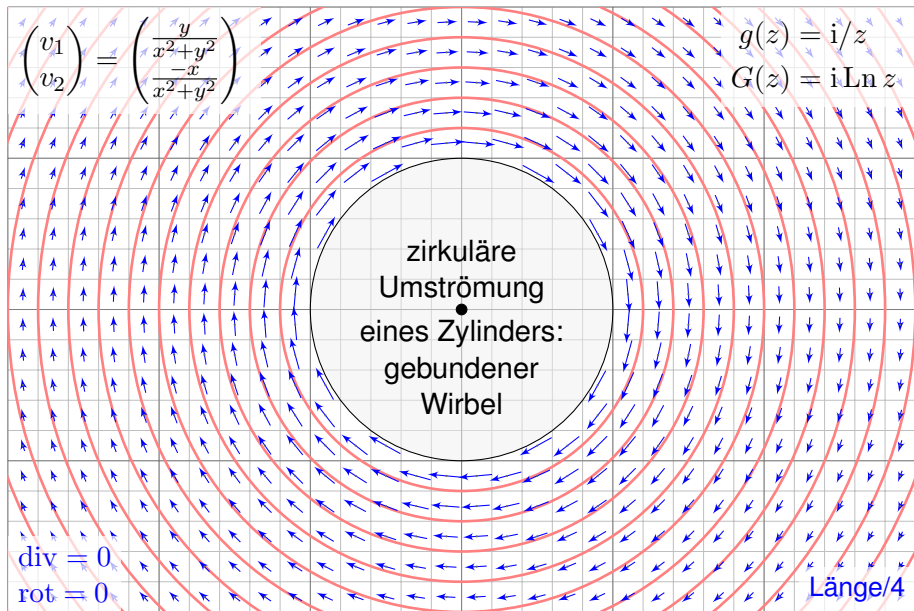


# Beispiel: die Navier–Stokes–Gleichung

$$\begin{array}{l}
 \text{Massenerhaltung:} \quad \operatorname{div} \vec{v} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0 \\
 \\
 \text{Impulserhaltung:} \quad \underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial t}}_{\text{Änderung}} + \underbrace{\sum_{k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}}_{\text{Konvektion}} = \underbrace{\nu \Delta v_i}_{\text{Diffusion}} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}}_{\text{interne Kraft}} + \underbrace{f_i}_{\text{extern}}
 \end{array}$$

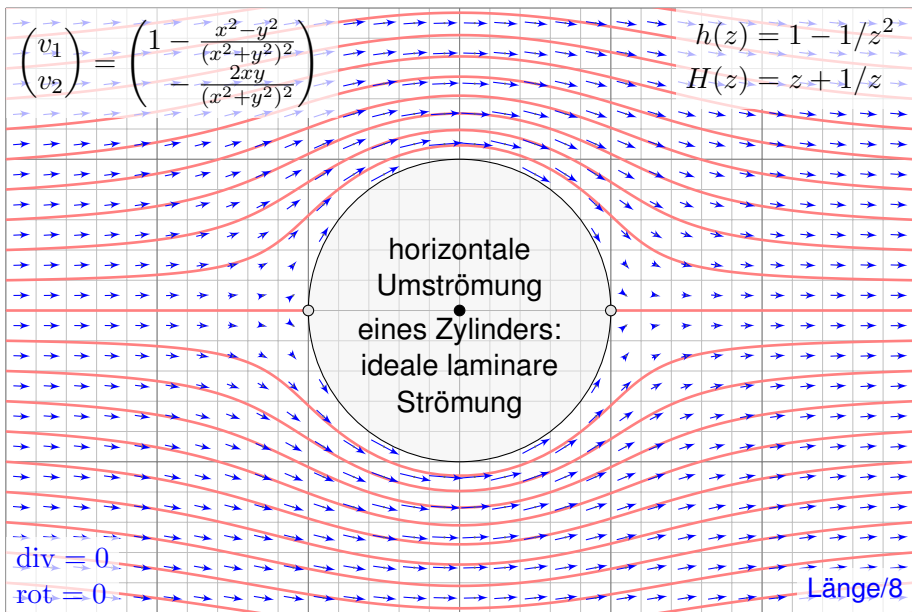
Diese  $1 + n$  Gleichungen beschreiben die Strömungsgeschwindigkeit  $\vec{v}: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  einer Flüssigkeit zur Zeit  $t \in I \subseteq \mathbb{R}$  am Ort  $\vec{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  in der Ebene ( $n=2$ ) oder im Raum ( $n=3$ ), mit konstanter Massendichte  $\rho \in \mathbb{R}$  und Viskosität  $\nu \in \mathbb{R}$ , Druck  $p: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und äußerer Kraft  $\vec{f}: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Sie sind zweiter Ordnung und nicht-linear in  $\vec{v}$ . Die Impulserhaltung ist Newtons Bewegungsgesetz: Links steht die Beschleunigung, als konvektive Ableitung. [\[H11\]](#) Rechts stehen die Kräfte durch Reibung  $\nu$ , Druck  $p$  und  $\vec{f}$ . Gegeben sind hierzu die äußere Kraft  $\vec{f}$  sowie die Anfangsgeschwindigkeiten  $\vec{v}(0, \vec{x})$  für  $\vec{x} \in \Omega$ . Gesucht sind die Funktionen  $\vec{v}$  und  $p$ . Im zweidimensionalen Falle ist die Lösbarkeit bewiesen, im dreidimensionalen Falle noch nicht! Die Navier–Stokes–Gleichungen illustrieren die Schwierigkeit partieller Differentialgleichungen: Über dreidimensionale Lösungen weiß man allgemein wenig, z.B. sind Existenz und Regularität ungeklärt – trotz größter Anstrengungen. Das Clay Mathematics Institute hat dies im Jahr 2000 als eines von sieben Millennium-Problemen ausgelobt, mit einem Preisgeld von 1 Million Dollar.

## Anwendung auf ideale ebene Strömungen



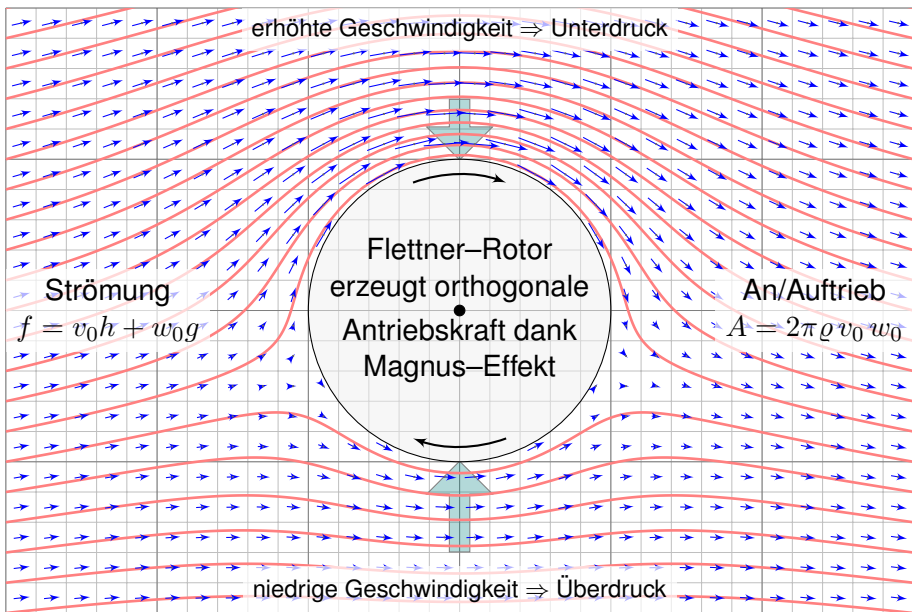
Holomorphe Funktionen beschreiben Strömungen: Wirbelfeld.

## Anwendung auf ideale ebene Strömungen



😊 Einfaches und intuitives Modell, exakte Lösung dank Holomorphie!

## Anwendung auf ideale ebene Strömungen



## Ideale ebene Strömungen und holomorphe Funktionen

😊 Auch Navier–Stokes betrachten wir vereinfachend in der Ebene: Wir erhalten schöne Graphiken und präzise Formeln! So berechneten M.W. Kutta 1902 und N.J. Joukowski 1904 die dynamische Auftriebskraft.

**Aufgabe:** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Gebiet: offen und wegzusammenhängend.

- (1) Hierauf sei  $v = (v_1, v_2) : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  das Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit konstanter Dichte  $\rho$ . Formulieren Sie dies als PDE.
- (2) Folgern Sie für  $\omega = \text{rot}(v) = \partial_x v_2 - \partial_y v_1$  die Wirbeltransportgleichung. Nehmen Sie hierzu die äußere Kraft  $f$  als wirbelfrei an, also  $\text{rot}(f) = 0$ .
- (3) Nehmen Sie als Idealisierung an, unser Strömungsfeld  $v$  sei zudem stationär sowie ohne Rotation, ohne Reibung und ohne äußere Kräfte. Welche Lösungen hat die PDE? Wie berechnen Sie hierbei den Druck?
- (4) Finden Sie alle Lösungen  $v$  auf der gesamten Ebene  $\Omega = \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ .
- (5) Finden Sie alle Lösungen  $v$  auf  $\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < r_1^2 \}$ .
- (6) Finden Sie alle Lösungen auf  $\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid r_0^2 < x^2 + y^2 < r_1^2 \}$ .
- (7) Sei  $D \subseteq \Omega$  kompakt mit stückweise glattem Rand  $\partial D$ . Bestimmt die Strömung  $v|_{\partial D}$  am Rand die Strömung  $v$  im Inneren? (8) im Äußeren?

## Ideale ebene Strömungen und holomorphe Funktionen

**Lösung:** (1) Die Massenerhaltung  $\operatorname{div}(\rho v) + \partial_t \rho = 0$  ergibt  $\operatorname{div}(v) = 0$ . Aus Impulserhaltung folgern wir die Navier–Stokes–Gleichungen H111:

$$\text{Massenerhaltung: } \operatorname{div}(v) = \partial_x v_1 + \partial_y v_2 = 0$$

$$\text{Impulserhaltung: } \partial_t v + (v_1 \partial_x + v_2 \partial_y)v = \nu \Delta v - \operatorname{grad} p / \rho + f$$

(2) Die Rotation der Impulsgleichungen ergibt nach kurzer Rechnung:

$$\partial_t \omega + (v_1 \partial_x + v_2 \partial_y) \omega = \nu \Delta \omega$$

😊 Wir erkennen hierin die Konvektions-Diffusions-Gleichung für  $\omega$ ! Für  $\nu = 0$  sind die Wirbel längs der Flusslinien konstant, „eingefroren“.

⚠ Dreidimensional kommt rechts noch  $(\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v}$  als Summand hinzu. Die Helmholtz'schen Wirbelsätze erklären das Verhalten von Wirbeln.

(3) Die Annahmen bedeuten  $\partial_t v = 0$ ,  $\omega = 0$ ,  $\nu = 0$ ,  $f = 0$ . Somit bleibt:

$$\text{Massenerhaltung: } \partial_x v_1 + \partial_y v_2 = 0$$

$$\text{Rotationsfreiheit: } \partial_x v_2 - \partial_y v_1 = 0$$

$$\text{Impulserhaltung: } (v_1 \partial_x + v_2 \partial_y)v = - \operatorname{grad} p / \rho$$

**Satz Q1B: holomorphe Lösung der Navier–Stokes–Gleichungen**

Jede ebene stationäre Strömung  $v = (v_1, v_2) : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  konstanter Dichte, ohne Wirbel, ohne Reibung und ohne äußere Kräfte entspricht einer holomorphen Funktion  $f = v_1 - iv_2 : \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  und umgekehrt. Der Druck  $p$  berechnet sich hieraus durch  $p + (\rho/2)(v_1^2 + v_2^2) = \text{const.}$

**Nachrechnen:** Wir setzen die Rotationsfreiheit  $\partial_x v_2 = \partial_y v_1$  ein:

$$v_1 \partial_x v_1 + v_2 \partial_y v_1 = v_1 \partial_x v_1 + v_2 \partial_x v_2 = \frac{1}{2} \partial_x (v_1^2 + v_2^2)$$

$$v_1 \partial_x v_2 + v_2 \partial_y v_2 = v_1 \partial_y v_1 + v_2 \partial_y v_2 = \frac{1}{2} \partial_y (v_1^2 + v_2^2)$$

Damit vereinfacht sich die Impulserhaltung zu:

$$\text{grad } p = -\frac{\rho}{2} \text{grad}(v_1^2 + v_2^2) \quad \text{also} \quad p = \text{const} - \frac{\rho}{2}(v_1^2 + v_2^2)$$

😊 Der **hydrostatische Druck**  $p$  ist das Skalarpotential des inneren Kraftfeldes. Der Term  $\frac{\rho}{2}v^2$  ist der **dynamische Druck** oder **Staudruck**. Ihre Summe ist konstant: Energiegleichung und **Gesetz von Bernoulli**.

## Ideale ebene Strömungen und holomorphe Funktionen

😊 Damit können wir Lösungen finden und lokal explizit ausschreiben: Jede Lösung ist eine holomorphe Funktion, also lokal eine Potenzreihe

$$f(z) = v_1(x, y) - iv_2(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \text{mit} \quad a_k \in \mathbb{C}$$

mit Konvergenzradius  $\rho = 1 / \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \in [0, \infty]$  (Hadamard).

(4) Der Radius  $\rho = \infty$  entspricht der Bedingung  $\sqrt[k]{|a_k|} \rightarrow 0$ .

(5) Lösungen sind alle Potenzreihen mit  $\rho \geq r_1$  dank Satz F3E.

(6) Lösungen sind alle konvergenten Laurent-Reihen dank Satz F3F.

(7) Die Antwort lautet überraschenderweise: Ja! Dies verdanken wir der Integralformel von Cauchy  $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$  für  $z_0 \in \mathring{D}$  (Satz F3B).

(8) Angenommen  $\Omega \supseteq \mathbb{C} \setminus \mathring{D}$ , und der Nullpunkt liegt im Inneren,  $0 \in \mathring{D}$ . Wir können Inneres und Äußeres Vertauschen durch die holomorphe Abbildung  $z \mapsto 1/z$ . Wir fordern zudem, dass  $f(z) \rightarrow a$  für  $|z| \rightarrow \infty$  gilt. Dann können wir  $g(z) = f(1/z)$  durch  $g(0) = a$  stetig fortsetzen, und  $g$  ist damit holomorph (F5G). Wir nutzen (7) und transformieren zurück.



## Anwendung: dynamischer Auftrieb eines Tragflügels

## Satz Q1c: dynamischer Auftrieb nach Kutta–Joukowski–Blasius

Sei  $K \in \mathbb{C}$  kompakt mit stückweise glattem Rand  $\partial K$ . Das Komplement  $\Omega = \mathbb{C} \setminus K$  ist offen mit Abschluss  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial K$ . Die Strömung  $v: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$  sei stetig, am Rand  $\partial K$  tangential, und  $f = \bar{v}$  auf  $\Omega$  holomorph (Q1B).

(1) Der Druck  $p$  berechnet sich daraus durch die **Bernoulli–Gleichung**:

$$p + \frac{\rho}{2}(v_1^2 + v_2^2) = \text{const}$$

(2) Für den dynamischen Auftrieb folgt daraus die **Formel von Blasius**:

$$\bar{F} = F_1 - iF_2 = i\frac{\rho}{2} \oint_C f(z)^2 dz$$

(3) Für  $f(z) = v_0 + w_0 z^{-1} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^{-k}$  folgt die **Formel von Kutta**:

$$\bar{F} = -2\pi\rho v_0 w_0 = i\rho v_0 \oint_C f(z) dz$$

## Anwendung: dynamischer Auftrieb eines Tragflügels

**Beweis:** (2) Gegeben ist das Geschwindigkeitsfeld  $z \mapsto v(z) = \overline{f(z)}$ . Gesucht ist die auf den Körper  $K$  wirkende Auftriebskraft  $F = F_1 + iF_2$ . Wir durchlaufen die Randkurve  $C = \partial K$  im positiven Sinne. An jedem Kurvenelement  $dz = dx + i dy$  erzeugt der Druck  $p$  die Kraft  $dF = i p dz$ ; sie steht senkrecht zu  $dz$ , und zwar um  $+90^\circ$  gedreht, daher der Faktor  $i$ . Wir nutzen die Bernoulli-Gleichung (1)  $p = \text{const} - v\bar{v} \cdot \rho/2$  und erhalten:

$$F = \oint_C i p dz = -i \frac{\rho}{2} \oint_C v \bar{v} dz$$

Entlang der Randkurve  $C = \partial K$  ist die Strömung  $v$  überall tangential, also parallel zu  $dz$ . Daher ist das Produkt  $\bar{v} dz = v d\bar{z}$  reell. Daraus folgt:

$$F = -i \frac{\rho}{2} \oint_C v^2 d\bar{z} = -i \frac{\rho}{2} \overline{\oint_C f(z)^2 dz}$$

Nach Konjugation erhalten wir somit die ersehnte Formel von Blasius:

$$\bar{F} = F_1 - iF_2 = i \frac{\rho}{2} \oint_C f(z)^2 dz$$

## Anwendung: dynamischer Auftrieb eines Tragflügels

(3) Fliegerisch interessant sind Strömungen mit  $f(z) \rightarrow v_0$  für  $|z| \rightarrow \infty$ . Für  $K \in B(0, r)$  und  $|z| \geq r$  gilt  $f(z) = v_0 + w_0 z^{-1} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^{-k}$  (F3F). Wir finden  $f(z)^2 = v_0^2 + 2v_0 w_0 z^{-1} + \sum_{k=2}^{\infty} b_k z^{-k}$  und die Auftriebsformel

$$\bar{F} = i \frac{\rho}{2} \oint_C f(z)^2 dz \stackrel{\text{Res}_{F3A}}{=} i \frac{\rho}{2} \oint_{B(0,r)} f(z)^2 dz \stackrel{\text{Res}_{F1B}}{=} -2\pi \rho v_0 w_0.$$

Der dynamische Auftrieb ist das Produkt aus Dichte  $\rho$ , Geschwindigkeit  $v_0$  und Zirkulation  $w_0$ . Ihre Richtung ist senkrecht zur Anströmung: Verläuft die Strömung von links nach rechts und die Zirkulation ist negativ (im Uhrzeigersinn), dann zeigt die Kraft nach oben: plausibel, Auftrieb! Unsere obige Illustration zeigt  $f(z) = v_0(1 - 1/z^2) + w_0 i/z$  mit Auftrieb  $\bar{F} = -2\pi i \rho v_0 w_0$ .

Die Formel (3) wurde 1902 von Wilhelm Kutta (1867–1944) an der Technischen Hochschule München entwickelt; von 1912 bis 1935 war er Professor für Mathematik in Stuttgart. Mit diesem bahnbrechenden Ergebnis konnten erstmals auftriebserzeugende Flügelprofile entwickelt werden! Kuttas Zirkulationsformel hilft auch näherungsweise noch, wenn keine ideale Strömung vorliegt.

Die Formel heißt auch Kutta–Joukowski–Theorem, nach Kutta und dem russischen Physiker und Aerodynamiker Nikolai Joukowski (1847–1921), der dieses Ergebnis unabhängig entdeckte und 1906 veröffentlichte. Er gründete 1904 nahe Moskau das erste aerodynamische Institut Europas. Berühmt ist das von ihm entwickelte Joukowski–Flügelprofil (1910), das aus einer kreisförmigen Lösung (wie oben illustriert) durch eine Kutta–Joukowski–Transformation gewonnen wird.

# Anwendung: dynamischer Auftrieb eines Tragflügels

Ihre grundlegende Formel haben Kutta und Joukowski aus den Strömungsgleichungen abgeleitet, durch Einschränkung auf zwei Dimensionen und dank der Werkzeuge holomorpher Funktionen. Heinrich Blasius (1883–1970) hat 1911 diesen Ansatz weiter verallgemeinert und vereinfacht.

Die *abstrakten* mathematischen Grundlagen der Funktionentheorie zahlen sich hier *konkret* aus, auch in einem völlig anderen und neuen Gebiet wie der Aerodynamik! Ich betone es nochmals: Abstrakt bedeutet nicht fern der Anwendung, sondern abstrakt bedeutet vielseitig anwendbar.

Die historische Bedeutung des Kutta–Joukowski–Verfahrens liegt darin, dass damit erstmals die Strömungsgleichung für einfache Tragflächen gelöst und so der dynamische Auftrieb errechnet werden konnte. Das ist auch heute noch didaktisch hilfreich, denn zum Verständnis sind einfache, exakte Lösungen nützlich, bevor man zu komplizierten, numerischen Näherungen übergeht.

Unsere Berechnung beruht auf Vereinfachungen: Die  $z$ -Richtung kann vernachlässigt werden, die Strömung ist zweidimensional in  $x$ - $y$ -Richtung, stationär, inkompressibel, reibungslos und wirbelfrei. Unsere Rechnung wird dadurch sehr elegant. Sie ergibt einen realistischen Auftrieb, aber keinen Widerstand! Ohne Reibung ist dies das berühmt-berüchtigte D'Alembert–Paradox.

Im Allgemeinen sind die Navier–Stokes–Strömungsgleichungen extrem kompliziert zu lösen, ebenso die daraus resultierenden Kräfte. Von Anfang an entwickelte man daher neben der Theorie eine umfangreiche Empirie, Experimente und Messungen im Feldversuch, später im Windkanal. Heute nutzt man als dritten Zugang, sozusagen als goldenen Mittelweg, numerische Verfahren zur Simulation auf Hochleistungsrechnern. Damit lassen sich beliebige dreidimensionale Profile untersuchen, zudem ist man nicht mehr auf vereinfachte Strömungsgleichungen eingeschränkt.

# Ableitungen als Differentialoperatoren

Am einfachsten sind wie immer **lineare Differentialgleichungen**.

Es lohnt sich, die vorhandene Struktur zu erkennen und zu nutzen!

Bei unseren Rechnungen wollen wir Funktionen ableiten sowie addieren und multiplizieren. Hier vereinen sich Analysis und Lineare Algebra:

Der Wertebereich ist wie üblich  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ , der Körper der reellen Zahlen oder der Körper der komplexen Zahlen. Beide Fälle sind zunächst sehr ähnlich, daher wollen wir beide auch möglichst parallel behandeln.

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\mathbb{K}^\Omega$  die Menge aller Funktionen  $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ .

Summe  $f + g$  und Produkt  $\alpha f$  mit  $\alpha \in \mathbb{K}$  definieren wir punktweise:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{und} \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega.$$

Hiermit wird  $(\mathbb{K}^\Omega, +, \cdot)$  zu einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Hierin ist die Teilmenge  $C^k(\Omega) = C^k(\Omega, \mathbb{K}) \subseteq \mathbb{K}^\Omega$  aller  $k$ -mal stetig diff'baren Funktionen ein Untervektorraum. Auch das Produkt  $f \cdot g$  definieren wir punktweise:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega.$$

Damit wird  $(\mathbb{K}^\Omega, +, \cdot)$  zu einer  $\mathbb{K}$ -Algebra, darin ebenso  $C^k(\Omega, \mathbb{K})$ .

## Satz Q2A: Ableitung von Summen und Produkten

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge. Die Menge  $C^k(\Omega, \mathbb{K})$  aller  $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  ist ein  **$\mathbb{K}$ -Vektorraum**.

Jede partielle Ableitung  $\partial_1, \dots, \partial_n : C^k(\Omega, \mathbb{K}) \rightarrow C^{k-1}(\Omega, \mathbb{K})$  ist eine  **$\mathbb{K}$ -lineare Abbildung**, das heißt, für alle  $f, g \in C^k$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  gilt

$$\partial_k(\alpha f + \beta g) = \alpha(\partial_k f) + \beta(\partial_k g)$$

Mit der punktweisen Multiplikation wird  $C^k(\Omega, \mathbb{K})$  zu einer  **$\mathbb{K}$ -Algebra**. Für die Ableitung von Produkten gilt wie üblich die **Leibniz-Regel**:

$$\partial_k(f \cdot g) = (\partial_k f) \cdot g + f \cdot (\partial_k g)$$

😊 Sie kennen diese Rechenregeln vom eindimensionalen Fall ( $n = 1$ ). Nachrechnen: Sie übertragen sich auf partielle Ableitungen ( $n \geq 1$ ).

😊 Auf den differenzierbaren Funktionen  $f \in C^k(\Omega, \mathbb{K})$  wirken nun Differentialoperatoren wie z.B. der Laplace-Operator  $\Delta = \partial_1^2 + \dots + \partial_n^2$ .

## Definition Q2B: linearer Differentialoperator

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Zu  $\nu \in \mathbb{N}^n$  betrachten wir die  $\nu$ -fache Ableitung

$$\partial^\nu := \partial_1^{\nu_1} \cdots \partial_n^{\nu_n} : C^k(\Omega, \mathbb{K}) \rightarrow C^{k-|\nu|}(\Omega, \mathbb{K}).$$

Dank Schwarz (D4A) dürfen wir hier umordnen:  $\partial^\mu \partial^\nu = \partial^\nu \partial^\mu = \partial^{\mu+\nu}$ .

Ein **linearer Differentialoperator**  $L : C^k \rightarrow C^0$  ist von der Form

$$L = \sum_{|\nu| \leq k} a_\nu(x) \partial^\nu, \quad \text{also} \quad (Lf)(x) = \sum_{|\nu| \leq k} a_\nu(x) \partial^\nu f(x).$$

Jede **lineare Differentialgleichung** (PDE) hat die Form  $Lu = b$ .

Gegeben ist  $L$  und  $b : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ ; gesucht sind Lösungen  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ .

😊 Die homogene Gleichung  $Lu = 0$  fragt nach dem Kern von  $L$ .  
 Die Menge aller Lösungen  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  von  $Lu = 0$  ist ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum.  
 Die Menge aller Lösungen  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  von  $Lu = b$  ist ein affiner Raum:  
 „Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen.“

# Lineare partielle Differentialgleichungen

Unter den partiellen Differentialgleichungen (PDE) sind die linearen der wichtigste Spezialfall. Hierfür brauchen wir passendes Vokabular.

Bei  $\partial^\nu$  ist  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n$  ein **Multiindex** mit  $\nu_1, \dots, \nu_n \in \mathbb{N}$ .

Die **Ordnung**  $|\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_n$  besagt, wie oft abgeleitet wird.

Der Differentialoperator  $L$  ist eine **Linearkombination** dieser  $\partial^\nu$ .

Dies ist eine **lineare Abbildung**, d.h.  $L(\alpha f + \beta g) = \alpha(Lf) + \beta(Lg)$ .

Die **Koeffizienten**  $a_\nu : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  sind hierbei stetige Funktionen;

bei **konstanten Koeffizienten** sind die  $a_\nu$  auf ganz  $\Omega$  konstant.

Die **Ordnung** von  $L$  ist  $\leq k$ , wenn  $a_\nu = 0$  für alle  $\nu$  mit  $|\nu| > k$  gilt.

Die Ordnung ist  $= k$ , wenn zudem  $a_\nu \neq 0$  für ein  $\nu$  mit  $|\nu| = k$  gilt.

😊 Erfahrung und Intuition gewöhnlicher Differentialgleichungen helfen!

⚠️ Anders als bei gewöhnlichen Differentialgleichungen (Struktursatz O3B) sind die Lösungsräume partieller Differentialgleichungen jedoch meist unendlichdimensional, wie schon die obigen Beispiele zeigen.

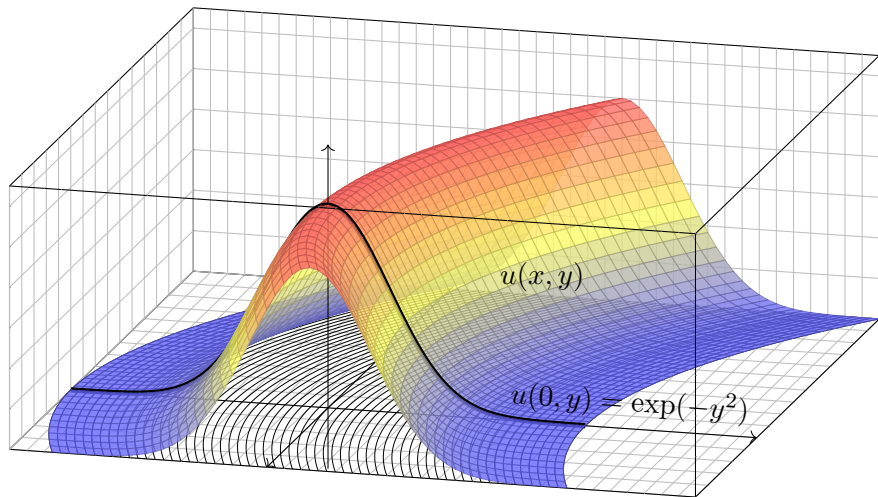
Auch Anfangs- bzw. Randbedingungen sind meistens komplizierter.

Wir müssen je nach Problemstellung individuell darauf eingehen.



# Lineare PDE erster Ordnung

Grundidee: Konstruiere die Funktion  $u(x, y)$  entlang ihrer Höhenlinien!



😊 Charakteristische Kurven sind genial einfach und einfach genial.  
Die Methode erfordert Verständnis und Übung. Schauen Sie genau hin!

## Lineare PDE erster Ordnung

Zu lösen sei eine **quasilineare PDE erster Ordnung**:

$$a(x, y, u) \partial_x u(x, y) + b(x, y, u) \partial_y u(x, y) = f(x, y, u)$$

$$1 \partial_x u(x, y) + x \partial_y u(x, y) = 0$$

mit Anfangswerten  $u(0, y) = \exp(-y^2)$  für alle  $y \in \mathbb{R}$

Unser Beispiel zeigt den Spezialfall einer **homogenen linearen PDE**.  
Das Definitionsgebiet von  $u: \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist dabei implizit ganz  $\mathbb{R}^2$ .

**Aufgabe:** Zur Vereinfachung auf eine Dimension untersuchen wir Wege

$$\gamma: \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^2: s \mapsto (x, y) = (X(s), Y(s)).$$

Diese setzen wir stillschweigend als stetig differenzierbar voraus.

(1) Leiten Sie die Höhe  $U(s) = u(X(s), Y(s))$  ab nach Wegparameter  $s$ .  
Wählen Sie  $\gamma$  so, dass die Wegableitung genau unserer PDE entspricht.

(2) Konstruieren Sie  $u$  entlang dieser **charakteristischen Kurven**.

Was ist der Unterschied zwischen  $x, y, u$  und  $X, Y, U$ ? Was ist gleich?

## Lineare PDE erster Ordnung

**Lösung:** (1) Dank der **Kettenregel** gilt:  $X' \partial_x u + Y' \partial_y u = U'$

**Koeffizientenvergleich** mit unserer PDE:  $a \partial_x u + b \partial_y u = f$

(2) Zum Startpunkt  $(0, y_0)$  gehören **charakteristische Gleichungen:**

$$\begin{aligned} X(0) &= x_0 = 0, & X'(s) &= a(X(s), Y(s), U(s)) = 1, \\ Y(0) &= y_0 \in \mathbb{R}, & Y'(s) &= b(X(s), Y(s), U(s)) = X(s), \\ U(0) &= u(x_0, y_0) = \exp(-y_0^2), & U'(s) &= f(X(s), Y(s), U(s)) = 0. \end{aligned}$$

😊 Gewöhnliche Differentialgleichungen verstehen wir bereits gut!  
Wir können dies für  $X, Y, U$  lösen und dann in  $x, y, u$  umrechnen:

$$\left. \begin{aligned} x &\stackrel{!}{=} X(s) = x_0 + s \\ y &\stackrel{!}{=} Y(s) = y_0 + s^2/2 \\ u(x, y) &\stackrel{!}{=} U(s) = \exp(-y_0^2) \end{aligned} \right\} \implies \begin{cases} s &= x \\ y_0 &= y - x^2/2 \\ u(x, y) &= \exp[-(y - x^2/2)^2] \end{cases}$$

😊 Skizze: Der Graph zeigt diese Funktion  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto u(x, y)$ .

😊 Probe: Diese Funktion  $u$  erfüllt unsere PDE und die Anfangswerte!

😊 Die Rechnung zeigt zudem die Eindeutigkeit der Lösung  $u$ . Warum?

## Lineare PDE erster Ordnung

- 😊 Die **charakteristischen Kurven** transportieren die Anfangswerte. Aus der zur Lösung vorgelegten PDE  $a \partial_x u + b \partial_y u = f$  lesen wir direkt die charakteristischen Gleichungen  $X' = a$ ,  $Y' = b$ ,  $U' = f$  als AWP ab und bestimmen hierzu die charakteristischen Kurven wie zuvor gelernt.
- 😊 Wir nutzen diese Charakteristiken geschickt, um  $u$  zu berechnen. Im Allgemeinen Fall ist  $U' = f$  die Höhenänderung längs des Weges. Im einfachsten Fall  $f = 0$  ist jede Charakteristik  $\gamma$  eine Höhenlinie von  $u$ .
- 😊 **Notation:** Warum schreiben wir erst  $x, y, u$  und dann  $X, Y, U$ ? Zunächst sind  $(x, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  freie Variablen (etwa Ort, Zeit, etc.), davon hängt die gesuchte Funktion  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto u(x, y)$  ab. Entlang des Weges  $\gamma$  parameterisieren wir Ort  $(x, y) = (X(s), Y(s))$  und Höhe  $U(s) = u(X(s), Y(s))$  allein durch den Wegparameter  $s \in I \subseteq \mathbb{R}$ . Dies sind also Funktionen von  $s$ , und das wollen wir präzise notieren.
- 😊 Die Bezeichnung  $X, Y, U$  ist einfach, klar und narrensicher. Üblich sind ebenso  $\xi, \eta, v$  (griechisch) oder  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{u}$  (lästig) oder schlicht  $x, y, u$  (doppeldeutig). Das ist eine Frage von Bequemlichkeit und Geschmack.

# Quasilineare PDE und Charakteristiken

## Definition Q2c: lineare, semilineare und quasilineare PDE

Eine **PDE erster Ordnung** für  $u : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine Gleichung

$$F(x, y, u(x, y), \partial_x u(x, y), \partial_y u(x, y)) = 0 \quad \text{für alle } (x, y) \in \Omega.$$

Gegeben ist  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  offen,  $F : \Omega \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, gesucht ist  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir nennen  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine **(klassische) Lösung**, wenn  $u$  nach  $x$  und  $y$  differenzierbar ist und in jedem Punkt  $(x, y) \in \Omega$  des Definitionsgebiets die geforderte Gleichung  $F(x, y, u(x, y), \partial_x u(x, y), \partial_y u(x, y)) = 0$  erfüllt.

Wichtige Spezialfälle sind **quasilineare / semilineare / lineare PDE**

$$a(x, y, u) \partial_x u(x, y) + b(x, y, u) \partial_y u(x, y) = f(x, y, u)$$

$$a(x, y) \partial_x u(x, y) + b(x, y) \partial_y u(x, y) = f(x, y, u)$$

$$a(x, y) \partial_x u(x, y) + b(x, y) \partial_y u(x, y) = c(x, y) u(x, y) + d(x, y)$$

Gegeben sind die stetigen Koeffizientenfunktionen  $a, b, f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bzw.  $a, b, c, d : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , gesucht sind Lösungen  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  wie erklärt. Lineare PDE sind **homogen** ( $d = 0$ ) oder **inhomogen** ( $d \neq 0$ ).

# Quasilineare PDE und Charakteristiken

**Aufgabe:** Sind folgende PDE linear? semi? quasi? weder noch?

Die PDE  $\partial_x u + \partial_y u = u$  ist... linear homogen.

Die PDE  $y \partial_x u + \sin(x) \partial_y u = \cos(x + y)$  ist... linear inhomogen.

Die PDE  $\partial_x u + x \partial_y u = \cos(y) \cos(u)$  ist... semilinear.

Die PDE  $\partial_x u + u \partial_y u = \cos(y) \cos(u)$  ist... quasilinear.


Die PDE  $x \partial_x u + u^2 \partial_y u = e^u + e^{-u}$  ist... quasilinear.

Die PDE  $\partial_x u + (\partial_y u)^2 = 0$  ist... nicht quasilinear.

Charakteristiken sind maßgeschneidert für quasilineare Gleichungen. Im semilinearen oder linearen Fall wird alles noch etwas einfacher.

 G.B. Folland: *Partial differential equations*, Princeton UP 1995.

Der allgemeine Fall  $F(x, y, u, \partial_x u, \partial_y u) = 0$  ist deutlich schwieriger und wird hier nicht behandelt. Siehe §3.2 des umfassenden Lehrbuchs von

 L.C. Evans: *Partial Differential Equations*, 2nd edition, AMS 2010.

Es kommt vor, dass klassische Lösungen nicht genügen, dann helfen allgemeiner schwache Lösungen und Distributionen, siehe Kapitel D.

# Quasilineare PDE und Charakteristiken

Zu lösen sei eine **quasilineare PDE erster Ordnung**

$$a(x, y, u) \partial_x u + b(x, y, u) \partial_y u = f(x, y, u) \quad \text{für alle } (x, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2,$$

mit Anfangswerten  $u(x, y) = u_0(x, y) \quad \text{für alle } (x, y) \in A \subseteq \Omega.$

Gegeben sind hierzu das Definitionsgebiet  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  und die stetigen Koeffizientenfunktionen  $a, b, f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , gesucht ist  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

Auf einer Teilmenge  $A \subseteq \Omega$  gibt  $u_0 : A \rightarrow \mathbb{R}$  die Anfangswerte vor.

Eine **charakteristische Kurve** der PDE zum Startpunkt  $(x_0, y_0) \in A$  ist ein  $C^1$ -Weg  $\gamma : \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \Omega \times \mathbb{R}$  mit  $s \mapsto (X(s), Y(s), U(s))$  und

$$\begin{aligned} X(0) &= x_0, & X' &= a(X, Y, U), \\ Y(0) &= y_0, & Y' &= b(X, Y, U), \\ U(0) &= u_0(x_0, y_0), & U' &= f(X, Y, U). \end{aligned}$$

Solche gewöhnlichen DGSsysteme können wir bereits lösen (O1B/O2A): Sind  $a, b, f$  stetig diff'bar, so hat das AWP genau eine maximale Lösung.

😊 Der Startwert wird entlang der Charakteristik transportiert (Q2D): Jede Lösung  $u$  der PDE erfüllt  $u(X(s), Y(s)) = U(s)$  für alle  $s \in I$ .

## Quasilineare PDE und Charakteristiken

😊 So können wir **quasilineare PDE** zurückführen auf ODE. Wir nutzen diese Charakteristiken geschickt, um  $u$  zu berechnen. Im Allgemeinen Fall ist  $U' = f$  die Höhenänderung längs des Weges. Im einfachsten Fall  $f = 0$  ist jede Charakteristik  $\gamma$  eine Höhenlinie von  $u$ .

😊 Für **semilineare PDE** vereinfachen sich die char. Gleichungen zu

$$X' = a(X, Y), \quad Y' = b(X, Y).$$

Hier haben wir die **Grundkurve**  $s \mapsto (X(s), Y(s))$  in der  $x$ - $y$ -Ebene, und ihr DGSsystem ist von der Höhe  $U(s) = u(X(s), Y(s))$  entkoppelt. Die Höhe folgt ihrer eigenen Gleichung  $U'(s) = f(X(s), Y(s), U(s))$ .

😊 Für **lineare PDE** vereinfacht sich die letzte Gleichung noch weiter zu

$$U' = c(X, Y)U + d(X, Y).$$

Zu gegebener Grundkurve  $s \mapsto (X(s), Y(s))$  ist die **Höhenfunktion**  $U(s)$  leicht zu berechnen: Sie folgt einer linearen Differentialgleichung (M2E). Zu ihrer Lösung nutzen wir die explizite Integralformel, siehe Satz Q2E.



## Erstes Beispiel: überbestimmt?

**Aufgabe:** Finden Sie alle  $C^1$ -Funktionen  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$y \partial_x u(x, y) - x \partial_y u(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad (1) \quad u(x, 0) = \cos(x^2),$$

$$(2) \quad u(x, 0) = 1 - x^2/2,$$

$$(3) \quad u(x, 0) = \sin(x).$$

**Lösung:** Zum Startpunkt  $(x_0, 0)$  gehört die charakteristische Gleichung

$$\begin{aligned} X(0) &= x_0, & X'(s) &= Y(s), \\ Y(0) &= 0, & Y'(s) &= -X(s). \end{aligned}$$

😊 Entlang dieser Kurve ist  $U(s) = u(X(s), Y(s))$  konstant, da  $U' = 0$ .  
Zu lösen ist nur noch ein lineares DGSsystem, in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

😊 Eigenwerte, Eigenvektoren, Eigenfunktionen, reelle Lösungen...  
Die Lösung ist der Kreis  $X(s) = x_0 \cos(s)$ ,  $Y(s) = -x_0 \sin(s)$ . Probe!

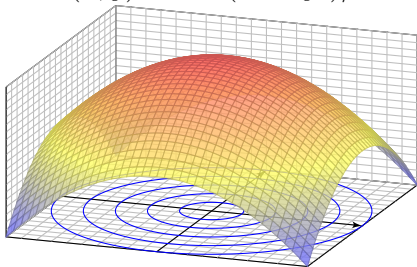
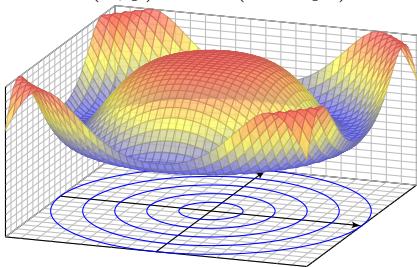
# Erstes Beispiel: überbestimmt?

Entlang jeder Charakteristik ist die gesuchte Lösung  $u(x, y)$  konstant:  
Die allgemeine Lösung ist  $u(x, y) = f(x^2 + y^2)$ . Machen Sie die Probe!  
Zusammen mit den Anfangswerten konstruieren wir hieraus die Lösung.

(1) Die gegebenen Anfangswerte  $u(x, 0) = \cos(x^2)$  auf der  $x$ -Achse werden entlang der Kreise  $x^2 + y^2 = \text{const}$  überallhin transportiert:

$$u(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$$

$$u(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)/2$$



(2) Ebenso für die gegebenen Anfangswerte  $u(x, 0) = 1 - x^2/2$ .

(3) Die Anfangswerte  $u(x, 0) = \sin(x)$  erlauben keine Lösung!

Diese Aufgabe ist **überbestimmt**. Wir wünschen / fordern, dass auf jeder charakteristischen Kurve **genau ein Anfangswert** gegeben ist.

# Die Charakteristikmethode in Worten

😊 Die Grundidee der Charakteristiken ist geometrisch anschaulich:  
Konstruiere die Funktion  $u : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  entlang ihrer Höhenlinien!

Wir kennen die gesuchte Funktion  $u$  noch nicht, sondern nur die PDE.  
Glücklicherweise können wir daraus bereits die Höhenlinien berechnen!  
Voraussetzung: Die PDE ist erster Ordnung und quasilinear (Q2C).

Hierzu lesen wir aus der PDE die charakteristischen Gleichungen ab,  
als System gewöhnlicher Differentialgleichungen mit Anfangswerten.  
Das können wir bereits gut lösen – dank unserer soliden Vorbereitung.

Der Idealfall sieht so aus: Die Charakteristiken überdecken das Gebiet  $\Omega$   
als „parallele“ Kurvenschar, ohne Lücken und ohne Überschneidungen,  
und auf jeder Charakteristik wird genau ein Anfangswert vorgegeben.

Aus den Charakteristiken können wir die Funktion  $u$  rekonstruieren:  
Annahme: Über jeden Punkt  $(x, y) \in \Omega$  läuft genau eine Charakteristik.  
Ihre Höhe bestimmt dann den Funktionswert  $u(x, y)$  in diesem Punkt.

⚠️ Abschließend sollten wir überprüfen, ob  $u$  differenzierbar ist und  
tatsächlich die Differentialgleichung mit allen Anfangswerten erfüllt.

## Die Charakteristikmethode in Worten

Charakteristiken lösen quasilineare Differentialgleichungen (Q2D).  
Zwei **geometrische Hindernisse** können dabei auftreten:

Die PDE kann **unterbestimmt** sein: Läuft über einen Punkt  $(x, y) \in \Omega$  gar keine Charakteristik, so ist der Funktionswert  $u(x, y)$  unbestimmt.

⚠ In diesem Falle kann die PDE mehr als eine Lösung zulassen.

Die PDE kann **überbestimmt** sein: Laufen über einen Punkt  $(x, y) \in \Omega$  mehrere Charakteristiken mit verschiedenen Höhen, so widersprechen sich diese Forderungen, und kein Wert  $u(x, y)$  kann sie alle erfüllen.

⚠ In diesem Falle lässt die PDE überhaupt keine Lösung zu.

Kurzum: Bei Überbestimmtheit gibt es zu viele Charakteristiken, so dass widersprüchliche Forderungen entstehen und keine Lösung möglich ist.

Bei Unterbestimmtheit hingegen gibt es zu wenige Charakteristiken, so dass nicht alle Funktionswerte  $u(x, y)$  eindeutig festgelegt sind.

😊 Die PDE heißt **gut gestellt**, wenn sie genau eine Lösung zulässt, und diese Lösung zudem stetig von den Anfangsdaten abhängt.

## Zweites Beispiel: unterbestimmt?

**Aufgabe:** Finden Sie alle  $C^1$ -Funktionen  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$y \partial_x u(x, y) + x \partial_y u(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad (1) \quad u(x, 0) = \cos(x^2),$$

$$(2) \quad u(0, y) = \cos(y^2),$$

$$(3) \quad \text{beides.}$$

**Lösung:** Zum Startpunkt  $(x_0, 0)$  gehört die charakteristische Gleichung

$$\begin{aligned} X(0) &= x_0, & X'(s) &= Y(s), \\ Y(0) &= 0, & Y'(s) &= X(s). \end{aligned}$$

😊 Entlang dieser Kurve ist  $U(s) = u(X(s), Y(s))$  konstant, da  $U' = 0$ .  
Zu lösen ist nur noch ein lineares DGSsystem, in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

😊 Eigenwerte, Eigenvektoren, Eigenfunktionen, reelle Lösungen...  
Die Lösung ist die Hyperbel  $X(s) = x_0 \cosh(s)$ ,  $Y(s) = x_0 \sinh(s)$ .

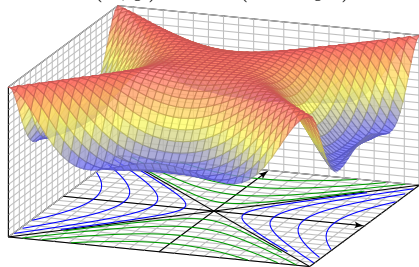
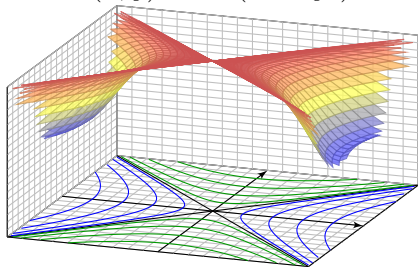
## Zweites Beispiel: unterbestimmt?

Entlang jeder Charakteristik ist die gesuchte Lösung  $u(x, y)$  konstant:  
 Die allgemeine Lösung ist  $u(x, y) = g(x^2 - y^2)$  auf jedem Viertel. Probe!  
 Zusammen mit den Anfangswerten konstruieren wir hieraus die Lösung:

(1) Die gegebenen Anfangswerte  $u(x, 0) = \cos(x^2)$  auf der  $x$ -Achse  
 werden entlang der Hyperbeln  $x^2 - y^2 = \text{const}$  transportiert: überallhin?

$$u(x, y) = \cos(x^2 - y^2)$$

$$u(x, y) = \cos(x^2 - y^2)$$



Diese Aufgabenstellung (1) ist noch **unterbestimmt**. Ebenso (2).  
 Erst beide Daten zusammen (3) bestimmen  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  eindeutig.  
 Zwecks Existenz und Eindeutigkeit der Lösung fordern wir, dass auf  
 jeder charakteristischen Kurve **genau ein Anfangswert** gegeben ist.

## Drittes Beispiel: gut gestellt?

**Aufgabe:** Finden Sie alle  $C^1$ -Funktionen  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\partial_t u(t, x) + 2 \partial_x u(t, x) = 0 \quad \text{und} \quad u(0, x) = g(x) = -x e^{-x^2/2}.$$

**Lösung:** Zum Startpunkt  $(0, x_0)$  gehört die charakteristische Gleichung

$$\begin{aligned} T(0) &= 0, & T'(s) &= 1, \\ X(0) &= x_0, & X'(s) &= 2, \\ U(0) &= g(x_0), & U'(s) &= 0. \end{aligned}$$

Wir finden  $t \stackrel{!}{=} T(s) = s$ . Fortan nutzen wir daher  $t$  als Wegparameter. Weiterhin finden wir  $x \stackrel{!}{=} X(t) = x_0 + 2t$ , nach  $x_0$  aufgelöst  $x_0 = x - 2t$ . Entlang dieser Kurve ist  $U(t) = u(t, x_0 + 2t)$  konstant, denn  $\dot{U} = 0$ . Also:

$$u(t, x) \stackrel{!}{=} U(t) = U(0) = g(x_0) = g(x - 2t).$$

- 😊 Probe: Diese Funktion  $u$  erfüllt unsere PDE und die Anfangswerte!
- 😊 Die Rechnung zeigt zudem die Eindeutigkeit der Lösung  $u$ . Warum?
- 😊 Dies ist ein einfaches Beispiel der Transportgleichung, siehe Q229.

## Viertes Beispiel: gut gestellt?

**Aufgabe:** Finden Sie alle  $C^1$ -Funktionen  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\partial_t u(t, x) + x \partial_x u(t, x) = 0 \quad \text{und} \quad u(0, x) = g(x) = -\sin(x).$$

**Lösung:** Zum Startpunkt  $(0, x_0)$  gehört die charakteristische Gleichung

$$\begin{aligned} T(0) &= 0, & T'(s) &= 1, \\ X(0) &= x_0, & X'(s) &= X(s), \\ U(0) &= g(x_0), & U'(s) &= 0. \end{aligned}$$

Wir finden  $t \stackrel{!}{=} T(s) = s$ . Fortan nutzen wir daher  $t$  als Wegparameter.

Weiterhin finden wir  $x \stackrel{!}{=} X(t) = x_0 e^t$ , nach  $x_0$  aufgelöst  $x_0 = x e^{-t}$ .

Entlang dieser Kurve ist  $U(t) = u(t, x_0 e^t)$  konstant, denn  $\dot{U} = 0$ . Also:

$$u(t, x) \stackrel{!}{=} U(t) = U(0) = g(x_0) = g(x e^{-t})$$

- 😊 Probe: Diese Funktion  $u$  erfüllt unsere PDE und die Anfangswerte!
- 😊 Die Rechnung zeigt zudem die Eindeutigkeit der Lösung  $u$ . Warum?
- 😊 Für eine Variante mit rechter Seite und Graphik siehe Q233.



## Die Charakteristikmethode

Allgemein für  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  verläuft das Verfahren wörtlich genauso.

Gegeben seien stetige Funktionen  $a_1, \dots, a_n, f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Gesucht sind alle stetig diff'baren Funktionen  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k(x, u) \partial_k u(x) &= f(x, u) && \text{für alle } x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \\ u(x) &= u_0(x) && \text{für alle } x \in A \subseteq \Omega. \end{aligned}$$

Das AWP kann **unterbestimmt** sein und mehrere Lösungen zulassen, oder **überbestimmt** und keine Lösung zulassen. Es heißt **gut gestellt**, wenn genau eine Lösung existiert und zudem stetig von  $u_0$  abhängt.

Eine **charakteristische Kurve** der PDE zum Startpunkt  $x_0 \in A$  ist ein  $C^1$ -Weg  $\gamma : \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \Omega \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  mit  $t \mapsto (X(s), U(s))$  und

$$\begin{aligned} X' &= a(X, U), & X(0) &= x_0, \\ U' &= f(X, U), & U(0) &= u_0(x_0). \end{aligned}$$

Sind die Funktionen  $a, f$  sogar stetig differenzierbar, so können wir den Existenz- und Eindeigkeitssatz für gewöhnliche DGSysteme nutzen: Zu jedem Startpunkt  $x_0 \in A$  gehört genau eine Charakteristik. (O1B)

## Die Charakteristikmethode

Annahme (A): Die Koeffizientenfunktionen  $a_1, \dots, a_n, f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sind stetig und bezüglich der letzten Variable  $u$  sogar stetig differenzierbar.

Annahme (B): Die Charakteristiken der PDE überdecken ganz  $\Omega$ ; zu jedem Punkt  $x \in \Omega$  existiert (mindestens) eine Charakteristik  $s \mapsto (X(s), U(s))$  mit Startpunkt  $X(0) \in A$  und  $X(s) = x$  für ein  $s$ .

## Satz Q2D: Lösung entlang charakteristischer Kurven

Unter den Annahmen (A) und (B) gilt für  $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$  die Äquivalenz:

Die Funktion  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  löst die PDE.

(A)  $\Downarrow$   $\Uparrow$  (B)

Es gilt  $u(X(s)) = U(s)$  längs jeder Charakteristik.

Insbesondere existiert dank (A&B) höchstens eine Lösung  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

😊 So können Sie jede Lösung  $u$  finden. Abschließend bleibt zu prüfen, ob die gefundene Funktion  $u$  tatsächlich stetig differenzierbar ( $C^1$ ) ist.

## Beweis der Charakteristikmethode

**Nachrechnen:** (A) Sei  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung unserer PDE.

Sei  $s \mapsto (X(s), U(s))$  eine Charakteristik. Wir zeigen  $u(X(s)) = U(s)$ .

Für die Differenz  $\delta(s) = U(s) - u(X(s))$  gilt  $\delta(0) = 0$  und folgende ODE:

$$\begin{aligned}\delta' &= U' - \sum_{k=1}^n X'_k \partial_k u(X) \\ &= f(X, U) - \sum_{k=1}^n a_k(X, U) \partial_k u(X) \\ &= f(X, u(X) + \delta) - \sum_{k=1}^n a_k(X, u(X) + \delta) \partial_k u(X)\end{aligned}$$

Da  $u$  die PDE löst, ist die Nullfunktion  $\tilde{\delta}(s) = 0$  eine Lösung dieser ODE. Dank Annahme (A) können wir den Eindeigkeitssatz M1c anwenden: Diese ODE kann nur eine einzige Lösung haben! Das bedeutet  $\delta = 0$ . Somit gilt  $u(X(s)) = U(s)$  entlang jeder Charakteristik, wie behauptet.

😊 Das ist die schwierigste und wichtigste Hälfte des Satzes.

Die Startwerte werden entlang von Charakteristiken transportiert:

Lösungen der PDE erfüllen  $u(X(s)) = U(s)$  längs jeder Charakteristik.

😊 Mit Charakteristiken können wir Werte einer Lösung  $u$  bestimmen!  
Das gilt insbesondere, wenn wir genügend Charakteristiken haben (B).

## Beweis der Charakteristikmethode

**Nachrechnen:** (B) Sei  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar.

Sei  $s \mapsto (X(s), U(s))$  eine beliebige Charakteristik der PDE.

Wir setzen  $U(s) - u(X(s)) = 0$  voraus. Die Ableitung ergibt:

$$\begin{aligned} 0 &= U' - \sum_{k=1}^n X'_k \partial_k u(X) \\ &= f(X, U) - \sum_{k=1}^n a_k(X, U) \partial_k u(X) \\ &= f(X, u(X)) - \sum_{k=1}^n a_k(X, u(X)) \partial_k u(X) \end{aligned}$$

In jedem Punkt  $x = X(s)$  erfüllt  $u$  demnach die PDE.

Dank Annahme (B) gilt die PDE in jedem Punkt  $x \in \Omega$ .

😊 Damit können wir aus Charakteristiken eine Lösung  $u$  konstruieren. Dies gilt insbesondere dann, wenn zu jedem Punkt  $x \in \Omega$  *genau* eine Charakteristik  $s \mapsto (X(s), U(s))$  existiert mit  $X(s) = x$  für *genau* ein  $s$ .

⚠ Bei Überbestimmtheit gibt es zu viele Charakteristiken, so dass widersprüchliche Forderungen entstehen und keine Lösung möglich ist. Bei Unterbestimmtheit hingegen gibt es zu wenige Charakteristiken. Die vorangehenden Beispiele illustrieren Über- und Unterbestimmtheit.

# Warnende Gegenbeispiele

Die oben erklärten Voraussetzungen (A) und (B) sind etwas technisch, aber leider unverzichtbar. Dies sehen wir an konkreten Gegenbeispielen:

Die obige Aufgabe zu Hyperbeln (Q217) illustriert Unterbestimmtheit; hier ist (B) verletzt, und somit ist Satz Q2D(B) nicht anwendbar.

Im folgenden Beispiel ist (A) verletzt und daher Q2D(A) nicht anwendbar.

**Aufgabe:** (1) Zu lösen ist für  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  die PDE

$$\partial_x u(x, y) = \sqrt[3]{u(x, y)^2}, \quad u(0, y) = 0.$$

(a) Finden Sie mindestens zwei verschiedene Lösungen  $u$  und  $\tilde{u}$ .

(b) Stellen Sie die charakteristischen Gleichungen auf und finden Sie zu jedem Startwert mindestens zwei verschiedene Charakteristiken.

(2) Finden Sie alle Lösungen  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  der PDE

$$\partial_x u(x, y) = \sqrt[3]{u(x, y)^2}, \quad u(3, y) = 1.$$

Hier ist (A) zwar verletzt, aber dennoch sind Charakteristiken eindeutig.

## Warnende Gegenbeispiele

**Lösung:** In  $x$ -Richtung ist dies die gewöhnliche DG  $u'(x) = \sqrt[3]{u(x)^2}$ . Diese kennen wir von der ausführlichen Untersuchung auf Seite M325.

(1a) Zwei mögliche Lösungen sind  $u(x, y) = 0$  und  $\tilde{u}(x, y) = x^3/27$ .

(1b) Zum Startpunkt  $(0, y_0)$  gehört die charakteristische Gleichung

$$\begin{aligned} X(0) &= 0, & X'(s) &= 1, \\ Y(0) &= y_0, & Y'(s) &= 0, \\ U(0) &= 0, & U'(s) &= \sqrt[3]{U(s)^2}. \end{aligned}$$

Zwei mögliche Lösungen sind die charakteristischen Kurven

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 : s \mapsto (X(s), Y(s), U(s)) = (s, y, 0) \quad \text{und} \\ \tilde{\gamma} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 : s \mapsto (\tilde{X}(s), \tilde{Y}(s), \tilde{U}(s)) = (s, y, s^3/27). \end{aligned}$$

 Dies zeigt, dass sich der Satz Q2D hier nicht anwenden lässt!

(2) Die Charakteristiken  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{\geq 0} : s \mapsto (s, y, U(s))$  sind hier eindeutig, nämlich  $U(s) = s^3/27$  für  $s \geq 0$  und  $U(s) = 0$  für  $s \leq 0$ .

Diese PDE hat demnach genau eine Lösung  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , nämlich  $u(x, y) = x^3/27$  für  $x \geq 0$  und  $u(x, y) = 0$  für  $x \leq 0$ .

## Kritisches Beispiel: Wasseruhr

**Aufgabe:** (1) Finden Sie alle Lösungen  $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  der PDE

$$\partial_x u(x, y) = -2y\sqrt{u(x, y)}, \quad u(0, y) = y^2.$$

(2) Finden Sie zwei verschiedene Lösungen  $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  der PDE

$$\partial_x u(x, y) = -2y\sqrt{u(x, y)}, \quad u(1, y) = 0.$$

Warum versagt die Charakteristikmethode? Was sollte Sie warnen?

Wir erinnern an Torricellis Gesetz (Seite M123): Wasser fließt aus einem Zylinder mit der Geschwindigkeit  $v = \sqrt{2gh}$  gemäß Energieerhaltung. Sei  $x \in \mathbb{R}$  die Zeit und  $u \geq 0$  die Wasserhöhe über der Öffnung. Dann gilt Torricellis Differentialgleichung  $\partial_x u = -y\sqrt{u(x)}$ . Hier ist  $y > 0$  eine Konstante; dieser Parameter hängt von Form und Größe der Öffnung ab.

**Lösung:** (1) Zum Startpunkt  $(0, y_0)$  gehört die char. Gleichung

$$\begin{aligned} X(0) &= 0, & X'(s) &= 1, \\ Y(0) &= y_0, & Y'(s) &= 0, \\ U(0) &= y_0^2, & U'(s) &= -2Y(s)\sqrt{U(s)}. \end{aligned}$$

## Kritisches Beispiel: Wasseruhr

Eindeutige Lösung  $\boxed{M123}$  ist die Charakteristik  $s \mapsto (s, y_0, U(s))$  mit

$$U(s) = \begin{cases} (y_0 - sy_0)^2 & \text{für } s \leq 1, \\ 0 & \text{für } s \geq 1. \end{cases}$$

Für jede Lösung  $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  muss demnach gelten:

$$u(x, y) = \begin{cases} (y - xy)^2 & \text{für } x \leq 1, \\ 0 & \text{für } x \geq 1. \end{cases}$$

Probe: Für alle  $x \leq 1$  gilt  $\partial_x u(x, y) = -2y(y - xy) = -2y\sqrt{u(x, y)}$ .  
Für  $x \geq 1$  gilt  $\partial_x u(x, y) = 0 = -2y\sqrt{u(x, y)}$ . Für  $x = 0$  gilt  $u(0, y) = y^2$ .

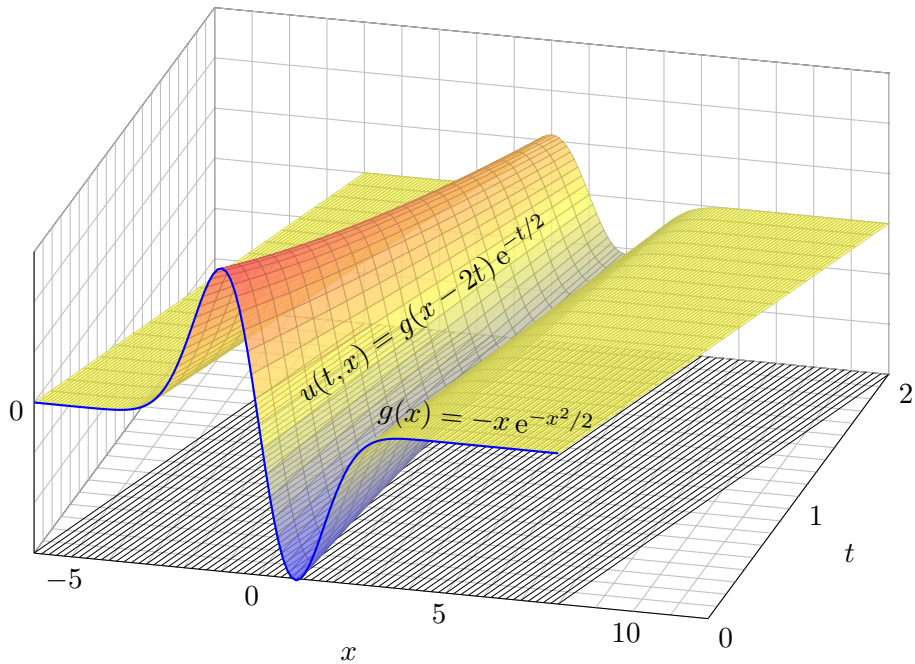
😊 Somit ist  $u$  eine Lösung. Unsere Rechnung zeigt: Es ist die einzige!

(2) Die Nullfunktion ist eine Lösung, ebenso die Funktion  $u$  aus (1).

⚠ Die Charakteristiken sind hier nicht eindeutig! Physikalischer Grund: Ist der Eimer einmal leer, so erkennen wir nicht mehr, wann er auslief!  
Mathematisches Warnsignal: Die rechte Seite  $-2y\sqrt{u}$  ist nicht stetig nach  $u$  differenzierbar, denn die Ableitung  $\partial_u [2y\sqrt{u}] = y/\sqrt{u}$  hat in  $u = 0$  eine Polstelle. Somit können wir unseren Satz Q2D hier nicht anwenden!



## Die Transportgleichung: Illustration



## Die Transportgleichung: Problemstellung

Wir betrachten lineare PDE erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Nach Division durch einen der Koeffizienten erhalten wir folgende Form:

**Aufgabe:** Zu lösen sei die folgende **Transportgleichung**:

$$\partial_t u(t, x) + b \partial_x u(t, x) + c u(t, x) = f(t, x) \quad \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R},$$

mit Anfangswerten  $u(0, x) = g(x) \quad \text{für } t = 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}.$

Gegeben sind die konstanten Koeffizienten  $a = 1, b, c \in \mathbb{R}$  sowie stetige Funktionen  $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , gesucht ist  $u: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Existiert eine Lösung  $u$ ? Ist sie eindeutig? Wie berechnen Sie sie?

Anschaulich und in Worten bedeutet die Transportgleichung folgendes:  
 Die Anfangsdaten  $g(x_0)$  werden mit **Geschwindigkeit**  $b$  transportiert:  
 Die Kurven  $t \mapsto (t, x_0 + bt)$  sind die charakteristischen Kurven der PDE.  
 Im Falle  $c \neq 0$  kommt noch **exponentielle Dämpfung** mit  $e^{-ct}$  hinzu.  
 Beides ist in der Beispielgraphik für  $b = 2$  und  $c = 1/2$  gut zu erkennen.  
 Für  $f \neq 0$  addiert sich auf der rechten Seite der **Quellterm**  $f(t, x)$  längs des Transportweges  $\tau \mapsto (\tau, x_0 + b\tau)$ , integriert von  $\tau = 0$  nach  $\tau = t$ .

# Die Transportgleichung: Rechnung

**Lösung:** Zum Startpunkt  $(0, x_0)$  gehört die charakteristische Gleichung

$$\begin{aligned} T(0) &= 0, & T'(s) &= 1, \\ X(0) &= x_0, & X'(s) &= b, \\ U(0) &= g(x_0), & U'(s) &= f(T(s), X(s)) - cU(s). \end{aligned}$$

Wir finden  $t \stackrel{!}{=} T(s) = s$ . Fortan nutzen wir daher  $t$  als Wegparameter. Weiterhin finden wir  $x \stackrel{!}{=} X(t) = x_0 + bt$ , nach  $x_0$  aufgelöst  $x_0 = x - bt$ . Die Gleichung für  $U$  lautet  $\dot{U}(t) = f(t, x_0 + bt) - cU(t)$ . Sie ist linear! Zur Lösung kennen und nutzen wir die Integralformel (Satz M2E):

$$\begin{aligned} u(t, x) \stackrel{!}{=} U(t) &= g(x_0) e^{-ct} + \int_{\tau=0}^t f(\tau, x_0 + b\tau) e^{c(\tau-t)} d\tau \\ &= g(x - bt) e^{-ct} + \int_{\tau=0}^t f(\tau, x - bt + b\tau) e^{c(\tau-t)} d\tau \end{aligned}$$

- ☺ Probe: Diese Funktion  $u$  erfüllt unsere PDE und die Anfangswerte!
  - ☺ Dieses DGSystem ist besonders einfach, da nahezu entkoppelt.
- Allgemein  $\partial_t u(t, x) + b(t) \partial_x u(t, x) + c(t, x) u(t, x) = f(t, x)$ , siehe Q3A.

## Die Transportgleichung: Zusammenfassung

## Satz Q2E: Integralformel für lineare PDE erster Ordnung

Zu lösen sei die folgende **Transportgleichung**:

$$\partial_t u(t, x) + b \partial_x u(t, x) + c u(t, x) = f(t, x) \quad \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R},$$

mit Anfangswerten  $u(0, x) = g(x) \quad \text{für } t = 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}.$

Gegeben sind die konstanten Koeffizienten  $a = 1, b, c \in \mathbb{R}$  sowie stetige Funktionen  $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , gesucht ist  $u: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Dieses Problem hat genau eine Lösung  $u: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , nämlich

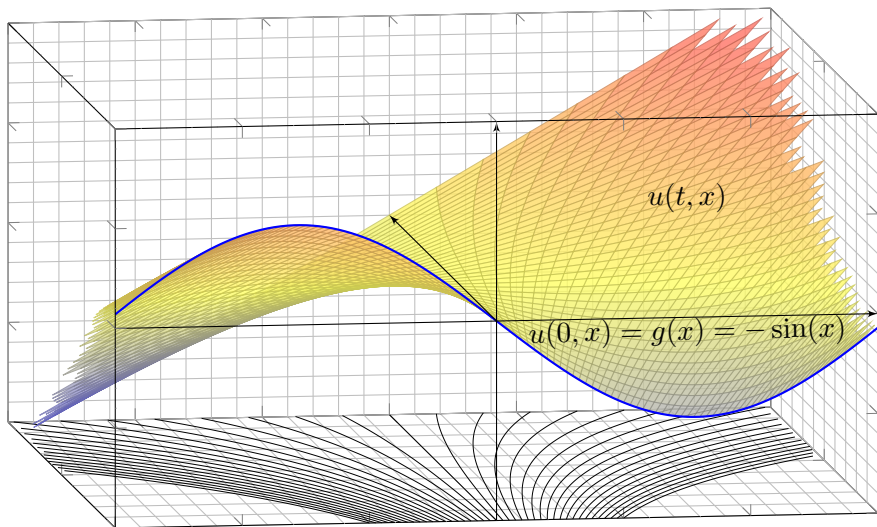
$$u(t, x) = g(x - bt) e^{-ct} + \int_{\tau=0}^t f(\tau, x - bt + b\tau) e^{c(\tau-t)} d\tau$$

- 😊 Liegt die vermutete Formel erst einmal vor, so ist die Probe leicht.
- 😊 Das ist ein seltener Glücksfall: Zu dieser Problemklasse haben wir mühelos eine allgemein gültige und explizite Integralformel gefunden.
- ⚠ Die meisten PDE lassen sich nicht einfach mit Integralformeln lösen.

## Zweidimensionales Anwendungsbeispiel

**Aufgabe:** Finden Sie alle stetig differenzierbaren Funktionen  $u(t, x)$  mit

$$\partial_t u + x \partial_x u = x \quad \text{und} \quad u(0, x) = g(x) = -\sin(x).$$



## Zweidimensionales Anwendungsbeispiel

**Lösung:** Zum Startpunkt  $(0, x_0)$  gehört die charakteristische Gleichung

$$\begin{aligned} T(0) &= 0, & T'(s) &= 1, \\ X(0) &= x_0, & X'(s) &= X(s), \\ U(0) &= g(x_0), & U'(s) &= X(s). \end{aligned}$$

Wir finden  $t \stackrel{!}{=} T(s) = s$ . Fortan nutzen wir daher  $t$  als Wegparameter. Weiterhin gilt  $x \stackrel{!}{=} X(t) = x_0 e^t$ , nach  $x_0$  aufgelöst  $x_0 = x e^{-t}$ . Damit:

$$\begin{aligned} u(t, x) \stackrel{!}{=} U(t) &\stackrel{\text{HDI}}{=} U(0) + \int_{s=0}^t U'(s) \, ds \stackrel{\text{Vor}}{=} g(x_0) + \int_{s=0}^t x_0 e^s \, ds \\ &= g(x_0) + x_0(e^t - 1) \\ &= g(x e^{-t}) + x(1 - e^{-t}) \end{aligned}$$

😊 Machen Sie die Probe durch Einsetzen in die Aufgabenstellung!  
Diese Funktion erfüllt tatsächlich  $\partial_t u + x \partial_x u = x$  und  $u(0, x) = g(x)$ .

😊 Dieses DGSsystem ist besonders einfach, da nahezu entkoppelt.  
Jeden der drei Schritte können wir direkt durch ein Integral lösen (Q3A).

# Dreidimensionales Anwendungsbeispiel

**Aufgabe:** Finden Sie alle stetig diff'baren Funktionen  $u(t, x, y)$  mit

$$\partial_t u + (x - y)\partial_x u + (x + y)\partial_y u = 0 \quad \text{und} \quad u(0, x, y) = xy.$$

**Lösung:** Zum Startpunkt  $(0, x_0, y_0)$  gehört die char. Gleichung

$$\begin{aligned} T(0) &= 0, & T'(s) &= 1, \\ X(0) &= x_0, & X'(s) &= X(s) - Y(s), \\ Y(0) &= y_0, & Y'(s) &= X(s) + Y(s), \\ U(0) &= x_0 y_0, & U'(s) &= 0. \end{aligned}$$

Wir finden  $t \stackrel{!}{=} T(s) = s$ . Fortan nutzen wir daher  $t$  als Wegparameter. In  $X, Y$  ist dies ein lineares DGSsystem mit konstanten Koeffizienten. Wir lösen es wie geübt durch Eigenvektoren und Eigenfunktionen. . .

$$\begin{aligned} x &\stackrel{!}{=} X(t) = e^t(x_0 \cos t - y_0 \sin t) \\ y &\stackrel{!}{=} Y(t) = e^t(x_0 \sin t + y_0 \cos t) \end{aligned}$$

😊 Machen Sie die Probe! Wegen  $\dot{U}(t) = 0$  ist die Höhe  $U(t)$  konstant: Die gefundenen Charakteristiken  $t \mapsto (t, X(t), Y(t))$  sind Niveaulinien.

## Dreidimensionales Anwendungsbeispiel

Die Lösung unserer PDE ist hierdurch implizit gegeben:

$$u(t, X(t), Y(t)) \stackrel{!}{=} U(t) = U(0) = x_0 y_0$$

😊 Laufen wir von  $(0, x_0, y_0)$  nach  $(t, x, y)$ , so kennen wir dort den Wert  $u(t, x, y) = x_0 y_0$ . Wir fragen umgekehrt: Welcher Startpunkt  $(0, x_0, y_0)$  führt zum Ziel  $(t, x, y)$ ? Wir lösen die Formel für  $(x, y)$  nach  $(x_0, y_0)$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= e^{+t} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ \iff \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} &= e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir setzen dies ein und erhalten schließlich die explizite Lösung:

$$\begin{aligned} u(t, x, y) = x_0 y_0 &= e^{-t}(x \cos t + y \sin t) \cdot e^{-t}(-x \sin t + y \cos t) \\ &= e^{-2t} [(y^2 - x^2) \cos t \sin t + xy(\cos^2 t - \sin^2 t)] \end{aligned}$$

😊 Machen Sie die Probe durch Einsetzen in die Aufgabenstellung! Diese Funktion erfüllt die PDE mit den gegebenen Anfangsdaten.

😊 Die Rechnung zeigt zudem die Eindeutigkeit der Lösung  $u$ . Warum?



## Cauchy–Riemann und Maxwell–Gleichungen

Die **Cauchy–Riemann–Gleichungen** für  $u, v : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  lauten

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

$\iff$  Das Vektorfeld  $(u, -v)$  erfüllt  $\operatorname{div}(u, -v) = 0$  und  $\operatorname{rot}(u, -v) = 0$ .

$\iff$  Die komplexe Funktion  $f = u + iv : \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  ist **holomorph**.

$\iff$  Lokal ist  $f$  eine komplexe **Potenzreihe**,  $f(z) = \sum a_k (z - z_0)^k$ .

$\implies$  Beide Funktionen  $u, v$  sind **harmonisch**, also  $\Delta u = \Delta v = 0$ .

Die **Maxwell–Gleichungen** für die Felder  $\vec{E}, \vec{B} : \mathbb{R}^4 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  lauten

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 4\pi \rho, & \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, & \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{J}. \end{aligned}$$

Jede ebene stationäre Lösung  $\vec{E} : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  ohne Quellen entspricht einer holomorphen Funktion  $f = E_1 - iE_2 : \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  und umgekehrt.

## Konvektion-Diffusion und Navier–Stokes

Allgemeine **Bilanzgleichung** / Transportgleichung der Strömungslehre:

$$\underbrace{\partial_t u(t, x)}_{\text{Änderungsrate}} + \underbrace{\nabla [\vec{v} u(t, x)]}_{\text{Zu/Abfluss: Konvektion}} = \underbrace{\nabla [\kappa \nabla u(t, x)]}_{\text{Diffusion: div grad}} + \underbrace{c u(t, x)}_{\text{Wachstum/Zerfall}} + \underbrace{q(t, x)}_{\text{Quellen}}$$

Angewendet auf die Impulsdichte  $\vec{u} = \vec{v} \rho$  erhalten wir daraus die **Navier–Stokes–Gleichungen** für inkompressible Fluide:

$$\begin{aligned} \text{Massenerhaltung:} \quad \operatorname{div} \vec{v} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0 \\ \text{Impulserhaltung:} \quad \underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial t}}_{\text{Änderung}} + \underbrace{\sum_{k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}}_{\text{Konvektion}} &= \underbrace{\nu \Delta v_i}_{\text{Diffusion}} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}}_{\text{interne Kraft}} + \underbrace{f_i}_{\text{extern}} \end{aligned}$$

Jede ebene stationäre Strömung  $v = (v_1, v_2) : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  konstanter Dichte ohne Wirbel, ohne Reibung und ohne äußere Kräfte entspricht einer holomorphen Funktion  $f = v_1 - i v_2 : \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  und umgekehrt. Der Druck  $p$  berechnet sich hieraus durch  $p + (\rho/2)(v_1^2 + v_2^2) = \text{const.}$

## Die Charakteristikmethode

Zu lösen sei eine **quasi-lineare PDE erster Ordnung**

$$a(x, y, u) \partial_x u + b(x, y, u) \partial_y u = f(x, y, u) \quad \text{für alle } (x, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2,$$

mit Anfangswerten  $u(x, y) = u_0(x, y) \quad \text{für alle } (x, y) \in A \subseteq \Omega.$

Gegeben sind hierzu das Definitionsgebiet  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  und die stetigen Koeffizientenfunktionen  $a, b, f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , gesucht ist  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

Auf einer Teilmenge  $A \subseteq \Omega$  gibt  $u_0 : A \rightarrow \mathbb{R}$  die Anfangswerte vor.

Eine **charakteristische Kurve** der PDE zum Startpunkt  $(x_0, y_0) \in A$  ist ein  $C^1$ -Weg  $\gamma : \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \Omega \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^3$  mit  $s \mapsto (X(s), Y(s), U(s))$  und

$$\begin{aligned} X(0) &= x_0, & X' &= a(X, Y, U), \\ Y(0) &= y_0, & Y' &= b(X, Y, U), \\ U(0) &= u_0(x_0, y_0), & U' &= f(X, Y, U). \end{aligned}$$

😊 Solche gewöhnlichen DGSsysteme können wir bereits gut lösen!  
Sind  $a, b, f$  stetig diff'bar, so hat das AWP genau eine maximale Lösung.

😊 Der Startwert wird entlang der Charakteristik transportiert (Q2D):  
Jede Lösung  $u$  der PDE erfüllt  $u(X(s), Y(s)) = U(s)$  für alle  $s \in I$ .

# Die Transportgleichung

Wir betrachten lineare PDE erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Nach Division durch einen der Koeffizienten erhalten wir folgende Form:

$$\partial_t u(t, x) + b \partial_x u(t, x) + c u(t, x) = f(t, x) \quad \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R},$$

mit Anfangswerten  $u(0, x) = g(x) \quad \text{für } t = 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}.$

Gegeben sind die konstanten Koeffizienten  $a = 1, b, c \in \mathbb{R}$  sowie stetige Funktionen  $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , gesucht ist  $u: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dieses Problem hat genau eine Lösung  $u: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , nämlich

$$u(t, x) = g(x - bt) e^{-ct} + \int_{\tau=0}^t f(\tau, x - bt + b\tau) e^{c(\tau-t)} d\tau$$

- 😊 Machen Sie die Probe: einsetzen und sorgfältig nachrechnen!
- 😊 Das ist ein seltener Glücksfall: Zu dieser Problemklasse haben wir mühelos eine allgemein gültige und explizite Integralformel gefunden.
- 😊 Allgemeiner gelingt diese Rechnung ebenso für Gleichungen  $\partial_t u(t, x) + b(t) \partial_x u(t, x) + c(t, x) u(t, x) = f(t, x)$ , siehe Satz Q3A.
- ⚠ Die meisten PDE lassen sich nicht einfach mit Integralformeln lösen.

## Charakteristiken (Klausur Februar 2018)

**Aufgabe:** Finden Sie alle Funktionen  $u: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\begin{aligned}\partial_t u(t, x) + 2t \partial_x u(t, x) &= -u(t, x) && \text{für alle } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= \cos(x) && \text{für } t = 0 \text{ und alle } x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

😊 Dies ist ein Spezialfall der allgemeinen Transportgleichung Q3A.

**Lösung:** Zum Startpunkt  $(0, x_0)$  gehört die charakteristische Gleichung

$$\begin{aligned}T'(s) &= 1, & T(0) &= 0, \\ X'(s) &= 2T(s), & X(0) &= x_0, \\ U'(s) &= -U(s), & U(0) &= \cos(x_0).\end{aligned}$$

Wir finden  $t \stackrel{!}{=} T(s) = s$  und  $x \stackrel{!}{=} X(s) = x_0 + s^2$  sowie schließlich  $u(t, x) \stackrel{!}{=} U(s) = e^{-s} \cos(x_0)$ . Wir lösen dies nach  $(t, x)$  auf und erhalten:

$$u(t, x) = e^{-t} \cos(x - t^2)$$

😊 Startwerte werden längs Charakteristiken transportiert.  
Machen Sie die Probe:  $u$  erfüllt PDE und Anfangswerte!

## Charakteristiken (Klausur September 2018)

**Aufgabe:** Finden Sie alle Funktionen  $u: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) + \cos(t) \partial_x u(t, x) &= \frac{3}{2} \sqrt{t} \quad \text{für alle } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= e^x \quad \text{für } t = 0 \text{ und alle } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

😊 Dies ist ein Spezialfall der allgemeinen Transportgleichung Q3A.

**Lösung:** Zum Startpunkt  $(0, x_0)$  gehört die charakteristische Gleichung

$$\begin{aligned} T'(s) &= 1, & T(0) &= 0, \\ X'(s) &= \cos[T(s)], & X(0) &= x_0, \\ U'(s) &= \frac{3}{2} T(s)^{1/2}, & U(0) &= e^{x_0}. \end{aligned}$$

Wir finden  $t \stackrel{!}{=} T(s) = s$  und  $x \stackrel{!}{=} X(s) = x_0 + \sin(s)$  sowie schließlich  $u(t, x) \stackrel{!}{=} U(s) = s^{3/2} + e^{x_0}$ . Wir lösen dies nach  $(t, x)$  auf und erhalten:

$$u(t, x) = t^{3/2} + e^{x - \sin(t)}$$

😊 Startwerte werden längs Charakteristiken transportiert.  
Machen Sie die Probe:  $u$  erfüllt PDE und Anfangswerte!

## Charakteristiken (Klausur Februar 2016)

Wir untersuchen für  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  die partielle Differentialgleichung

$$(3x - 4y)\partial_x u(x, y) + (2y - x)\partial_y u(x, y) = u(x, y)$$

mit  $u(x, 0) = \sin(x)$ .

**Aufgabe:** Formulieren Sie das Gleichungssystem der charakteristischen Kurven  $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ , sodass  $u(x(t), y(t)) = z(t)$  gilt.

**Lösung:** Diese PDE ist von erster Ordnung und linear (Q2c).

Wir nutzen die zugehörige Charakteristikmethode [Q211](#):

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ \sin(x_0) \end{pmatrix}$$

😊 Dieses gewöhnliche Differentialgleichungssystem ist linear mit konstanten Koeffizienten, wir schreiben es daher gleich in Matrixform. Wir können dies wie gesehen lösen, durch Eigen- & Hauptfunktionen, und damit die gesuchte Funktion  $(x, y) \mapsto u(x, y)$  explizit bestimmen.

## Charakteristiken mobilisieren alle Methoden.

Wir untersuchen für  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  die partielle Differentialgleichung

$$(3x - 4y + 2u)\partial_x u(x, y) + (2y - x - 3u)\partial_y u(x, y) = u(x, y)^2$$


mit  $u(x, 0) = \cos(x)$ .

**Aufgabe:** Formulieren Sie das Gleichungssystem der charakteristischen Kurven  $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ , sodass  $u(x(t), y(t)) = z(t)$  gilt.

**Lösung:** (1) Diese PDE ist von erster Ordnung und quasilinear (Q2c). Wir nutzen die zugehörige Charakteristikmethode [Q211](#):

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x(t) - 4y(t) + 2z(t) \\ -x(t) + 2y(t) - 3z(t) \\ z(t)^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ \cos(x_0) \end{pmatrix}$$

 Dieses gewöhnliche Differentialgleichungssystem ist nicht linear.

 Dennoch können wir es lösen, zunächst leicht für  $z$  und für  $x, y$  dann inhomogen durch Variation der Konstanten. Zumindest im Prinzip finden wir damit schließlich die gesuchte Funktion  $(x, y) \mapsto u(x, y)$ .



# Potentialproblem als PDE

**Aufgabe:** Wir betrachten das ebene Gebiet  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Zu lösen sei das folgende System aus zwei partiellen Differentialgleichungen:

$$\partial_x u = f_1, \quad \partial_y u = f_2.$$

Gegeben sind  $f_1, f_2 \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ , gesucht sind Lösungen  $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ .

- (1) Ist diese PDE linear? Welche Lösungen hat die homogene PDE? Welche Struktur hat der Lösungsraum der inhomogenen PDE?
- (2) Lässt sich jede so gegebene Problemstellung  $f = (f_1, f_2)$  lösen? Welche Bedingungen sind notwendig? Welche sind hinreichend?
- (3) Falls dies überhaupt möglich ist: Wie lösen Sie diese PDE?

😊 Das ist eine typische Problemstellung, die Sie bereits gut kennen. Sie ist häufig und wichtig genug, um sie noch einmal zu wiederholen.

Wir erkennen hier typische Hindernisse bei der Lösung von PDE:

Wir benötigen sowohl lokale Kriterien (an  $f$ ) als auch globale (an  $\Omega$ ).

# Potentialproblem als PDE

**Lösung:** (1) Ja, diese PDE ist linear in  $u$  und von erster Ordnung.

Die homogene PDE  $\partial_x u = \partial_y u = 0$  bedeutet  $\text{grad } u = 0$ , also ist  $u$  lokal konstant dank HDI. Da unser Gebiet  $\Omega$  wegzusammenhängend ist, sind  $u = \text{const}$  tatsächlich die einzigen Lösungen der homogenen PDE.

Ist  $u$  eine partikuläre Lösung der (inhomogenen) PDE  $\text{grad } u = f$ , so ist die gesamte Lösungsmenge der (affine) Raum  $\{u + c \mid c \in \mathbb{R}\}$ .

Warum? Zur Erinnerung: Ist  $v$  eine weitere Lösung zu  $\text{grad } v = f$ , so gilt  $\text{grad}(v - u) = 0$  dank Linearität, also  $v - u = c$  mit  $c \in \mathbb{R}$ .

😊 Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung ist ein affiner Raum:  
„Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen“

Es ist dabei egal ob Differentialgleichung, gewöhnlich oder partiell, allein die lineare Struktur der vorliegenden Gleichung garantiert uns bereits die Struktur des Lösungsraumes. Das vereinfacht und verschafft Überblick.

Wir erkennen in unserem Beispiel das Potentialproblem  $\text{grad } u = f$ .

„Ein Potential ist nur bis auf eine additive Konstante bestimmt.“

In einfachster Form kennen Sie dies schon lange vom HDI.

## Potentialproblem als PDE

(2) Nein, nicht jede Problemstellung  $f = (f_1, f_2)$  lässt sich lösen!

(2a) Wenn eine Lösung  $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$  mit  $\text{grad } u = f$  existiert, so gilt dank Schwarz  $\partial_x f_2 = \partial_x \partial_y u = \partial_y \partial_x u = \partial_y f_1$ , also  $\text{rot}(f_1, f_2) = 0$ .

Diese Bedingung ist notwendig, aber noch nicht hinreichend!

Gegenbeispiel ist das Wirbelfeld  $(f_1, f_2) = (-y, x)/(x^2 + y^2)$ .

(2b) Für den geschlossenen Weg  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega$  mit  $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$  gilt dank HDI zudem  $0 = u(\gamma(1)) - u(\gamma(0)) = \oint_{\gamma} \text{grad}(u) \cdot d\gamma = \oint_{\gamma} (f_1, f_2) \cdot d\gamma$ .

$$\text{rot}(f_1, f_2) = 0 \quad \text{und} \quad \oint_{\gamma} (f_1, f_2) \cdot d\gamma = 0$$

Beide Bedingungen sind notwendig, und zusammen auch hinreichend: Wir zeigen abschließend (3), dass dies tatsächlich zur Lösung reicht.

😊 Die Lösbarkeit ist leicht zu prüfen, aber man muss wissen wie: Wir benötigen sowohl lokale Kriterien (an  $f$ ) als auch globale (an  $\Omega$ ). Im vorliegenden Fall ist das glücklicherweise einfach und übersichtlich.

## Potentialproblem als PDE

(3) Zunächst müssen die obigen Bedingungen erfüllt sein. Dann gelingt die Lösung durch das Arbeitsintegral entlang von Wegen  $\alpha: [0, 1] \rightarrow \Omega$ :

$$u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad u(x, y) = \int_{\alpha(0)=(1,0)}^{\alpha(1)=(x,y)} (f_1, f_2) \cdot d\alpha$$

Ist  $\tilde{\alpha}: [0, 1] \rightarrow \Omega$  ein weiterer Weg von  $\tilde{\alpha}(0) = (1, 0)$  nach  $\tilde{\alpha}(1) = (x, y)$ , so müssen wir Wohldefiniertheit sicherstellen, also  $\int_{\tilde{\alpha}} f \cdot d\tilde{\alpha} = \int_{\alpha} f \cdot d\alpha$ .

Die Bedingung  $\operatorname{rot}(f) = 0$  sichert dies für homotope Wege. (Satz H2B)  
Die Verknüpfung  $\beta = \tilde{\alpha} * \bar{\alpha}$  ist ein geschlossener Weg von  $(1, 0)$  längs  $\tilde{\alpha}$  nach  $(x, y)$  und längs  $\bar{\alpha}$  zurück nach  $(1, 0)$ . Also ist  $\beta$  in  $\Omega$  homotop zum Weg  $\gamma_k(t) = e^{2\pi i k t}$  mit Umlaufzahl  $k \in \mathbb{Z}$ . (Satz H2D) Wir erhalten somit:

$$\int_{\tilde{\alpha}} f \cdot d\tilde{\alpha} - \int_{\alpha} f \cdot d\alpha = \oint_{\beta} f \cdot d\beta \stackrel{(2a)}{=} \oint_{\gamma_k} f \cdot d\gamma_k = k \oint_{\gamma} f \cdot d\gamma \stackrel{(2b)}{=} 0$$

😊 Das Ergebnis  $u(x, y)$  ist unabhängig vom gewählten Integrationsweg. Dank Satz H2A löst die so konstruierte Funktion  $u$  das Potentialproblem. Unsere Bedingungen (2a) und (2b) sind also tatsächlich hinreichend.

# Komplexe Stammfunktion als PDE

**Aufgabe:** Sei  $S \subseteq \mathbb{R}^2$  eine diskrete Menge. Wir betrachten  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus S$ .  
Zu lösen sei folgendes System aus vier partiellen Differentialgleichungen:

$$\begin{pmatrix} \partial_x F_1 & \partial_y F_1 \\ \partial_x F_2 & \partial_y F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & -f_2 \\ f_2 & f_1 \end{pmatrix}.$$

Gegeben sind  $f_1, f_2 \in C^0(\Omega, \mathbb{R})$ , gesucht sind  $F_1, F_2 \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ .  
Links steht die Jacobi-Matrix  $J(F) := \partial(F_1, F_2)/\partial(x, y)$ .

- (1) Ist diese PDE linear? Welche Lösungen hat die homogene PDE? Welche Struktur hat der Lösungsraum der inhomogenen PDE?
- (2) Lässt sich jede so gegebene Problemstellung  $f = (f_1, f_2)$  lösen? Welche Bedingungen sind notwendig? Welche sind hinreichend?
- (3) Falls dies überhaupt möglich ist: Wie lösen Sie diese PDE?

😊 Wir erkennen hier typische Hindernisse bei der Lösung von PDE:  
Wir benötigen sowohl lokale Kriterien (an  $f$ ) als auch globale (an  $\Omega$ ).

# Komplexe Stammfunktion als PDE

**Lösung:** (1) Ja, diese PDE ist linear in  $F = (F_1, F_2)$  und erster Ordnung. Die homogene PDE  $J(F) = 0$  bedeutet  $\text{grad } F_1 = \text{grad } F_2 = 0$ , also sind  $F_1, F_2$  lokal konstant dank HDI. Unser Gebiet  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus S$  ist immer noch wegzusammenhängend: Wir können den Punkten  $s \in S$  ausweichen. Somit sind  $F = \text{const}$  tatsächlich die einzigen Lösungen von  $J(F) = 0$ .

Ist  $F$  eine Lösung der (inhomogenen) PDE  $J(F) = \begin{pmatrix} f_1 & -f_2 \\ f_2 & f_1 \end{pmatrix}$ , so ist die Lösungsmenge der (affine) Raum  $\{ F + c \mid c \in \mathbb{R}^2 \}$ .

Warum? Zur Erinnerung: Ist  $G$  eine weitere Lösung zu  $J(G) = \begin{pmatrix} f_1 & -f_2 \\ f_2 & f_1 \end{pmatrix}$ , so gilt  $J(G - F) = 0$  dank Linearität, also  $G - F = c$  mit  $c \in \mathbb{R}^2$ .

😊 Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung ist ein affiner Raum: „Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen“

Wir erkennen bei genauem Hinsehen das komplexe Potentialproblem: Zu lösen ist  $\partial F / \partial z = f$  für  $F = F_1 + iF_2, f = f_1 + if_2: \Omega = \mathbb{C} \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$ . „Eine Stammfunktion ist nur bis auf eine additive Konstante bestimmt.“

## Komplexe Stammfunktion als PDE

(2) Nicht jede Problemstellung  $f = (f_1, f_2) \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^2)$  lässt sich lösen!

(2a) Wenn eine Lösung  $F = (F_1, F_2) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$  existiert, so erfüllt sie die Cauchy–Riemann–Gleichungen  $\partial_x F_1 = \partial_y F_2$  und  $\partial_x F_2 = -\partial_y F_1$ .

Somit ist die Funktion  $F = F_1 + iF_2: \Omega = \mathbb{C} \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, also auch ihre Ableitung  $F' = f = f_1 + if_2: \Omega = \mathbb{C} \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$ .

Die Holomorphie von  $f$  ist notwendig, aber noch nicht hinreichend!

Gegenbeispiel ist die Funktion  $f: \mathbb{C} \setminus \{s\} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto f(z) = 1/(z - s)$ .

Das ist das zentrale Problem des komplexen Logarithmus. F225

(2b) Für den geschlossenen Weg  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega$  mit  $\gamma(t) = s + r e^{2\pi i t}$  gilt dank HDI zudem  $0 = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = \oint_{\gamma} F'(z) dz = \oint_{\gamma} f(z) dz$ .

$$\partial_x f_1 = \partial_y f_2, \quad \partial_x f_2 = -\partial_y f_1 \quad \text{und} \quad \oint_{\partial B(s,r)} f(z) dz = 0$$

😊 Notwendig ist also, dass die Funktion  $f: \Omega = \mathbb{C} \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph ist, und das Residuum  $\text{res}_s(f)$  in jeder Singularität  $s \in S$  verschwindet!

## Komplexe Stammfunktion als PDE

Beide Bedingungen sind notwendig, und zusammen auch hinreichend: Wir zeigen abschließend, dass dies tatsächlich zur Lösung reicht.

(3) Zunächst müssen die obigen Bedingungen erfüllt sein. Dann gelingt die Lösung durch das Arbeitsintegral entlang von Wegen  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \Omega$ :

$$F : \Omega = \mathbb{C} \setminus S \rightarrow \mathbb{C} : w \mapsto F(w) = \int_{\alpha(0)=w_0}^{\alpha(1)=w} f(z) dz$$

Hierzu fixieren wir einen Startpunkt  $w_0 \in \Omega$ . Da unser Gebiet  $\Omega = \mathbb{C} \setminus S$  wegzusammenhängend ist, gibt es zu jedem beliebigen Zielpunkt  $w \in \Omega$  Wege  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \Omega$  von  $w_0$  nach  $w$ . Dank unserer Integralbedingungen an  $f$  ist das obige Wegintegral unabhängig vom gewählten Weg  $\alpha$ .

😊 Die so konstruierte Funktion  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  löst die Gleichung  $F' = f$ .

Obwohl wir von der Lösung anfangs nur  $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$  verlangt haben, bekommen wir wesentlich mehr geschenkt: Die Lösung ist holomorph!

Das ist zugleich auch eine starke Bedingung:  $f$  muss holomorph sein. Zur Integration zu  $F$  müssen zudem alle Residuen von  $f$  verschwinden.



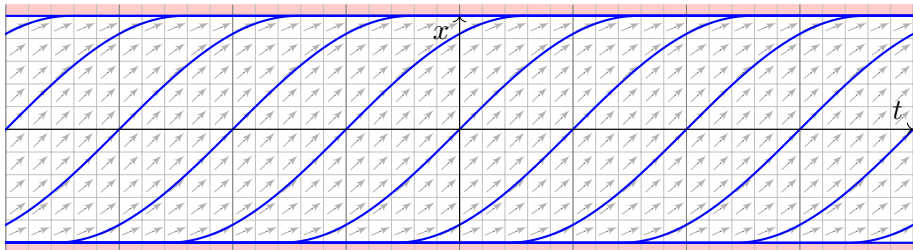
Zu viele Charakteristiken verderben die PDE.

**Aufgabe:** Finden Sie alle  $C^1$ -Lösungen  $u: \mathbb{R} \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  der PDE

$$\partial_t u(t, x) + \sqrt{1 - x^2} \partial_x u(t, x) = 0 \quad \text{für alle } (t, x) \in \mathbb{R} \times [-1, 1].$$

- (1a) Sind konstante Funktionen Lösungen? (1b) Gibt es noch weitere? Wie / Lässt sich die Charakteristikmethode (Satz Q2D) hier anwenden?  
 (2) Finden Sie alle Lösungen  $u \in C^0(\mathbb{R} \times [-1, 1]) \cap C^1(\mathbb{R} \times ]-1, 1[)$ , die auf  $\mathbb{R} \times ]-1, 1[$  die PDE erfüllen. Können Sie  $u(t, 0)$  beliebig vorgeben?

**Lösung:** (1a) Jede konstante Funktion  $u(t, x) = \text{const}$  löst unsere PDE.  
 (1b) Jede charakteristische Kurve  $t \mapsto (t, x(t))$  erfüllt  $\dot{x}(t) = \sqrt{1 - x(t)^2}$ . Wir suchen alle (maximalen) Lösungskurven  $x: \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}$ , siehe M329.



## Zu viele Charakteristiken verderben die PDE.

Trennung der Variablen und genaue Diskussion wie auf Seite M329:  
 Lösungen sind neben  $x_{-\infty}(t) = +1$  und  $x_{+\infty}(t) = -1$  die Funktionen

$$x_c : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1] : t \mapsto x_c(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } t \leq c - \pi/2, \\ \sin(t - c) & \text{für } c - \pi/2 \leq t \leq c + \pi/2, \\ +1 & \text{für } t \geq c + \pi/2. \end{cases}$$

Jeder Punkt  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times [-1, 1]$  liegt auf (mindestens) einer dieser Charakteristiken  $\gamma_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times [-1, 1] : t \mapsto (t, x_c(t))$  für geeignetes  $c \in \bar{\mathbb{R}}$ .

Wir sehen eine Besonderheit: Je zwei Charakteristiken treffen sich!  
 Folgerung: Erfüllt  $u : \mathbb{R} \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  die obige PDE, so ist  $u$  konstant.

☹️ (Zu viele) Charakteristiken erzwingen (zu viele) Einschränkungen.

(2) Hier gilt hingegen: Jeder Punkt  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times ]-1, +1[$  liegt auf genau einer Charakteristik  $\gamma_c^* : ]c - \pi/2, c + \pi/2[ \rightarrow \mathbb{R} \times ]-1, +1[ : t \mapsto (t, x_c(t))$ .

Zu  $u(t, 0) = g(t)$  können wir jede  $C^1$ -Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vorgeben und erhalten die Lösung  $u(t, x) = g(t - \arcsin(x))$ . Machen Sie die Probe!

😊 Charakteristiken erzwingen hier das rechte Maß an Bedingungen.

Zu viele Charakteristiken verderben die PDE.

**Aufgabe:** Finden Sie alle  $C^1$ -Lösungen  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  der Gleichung

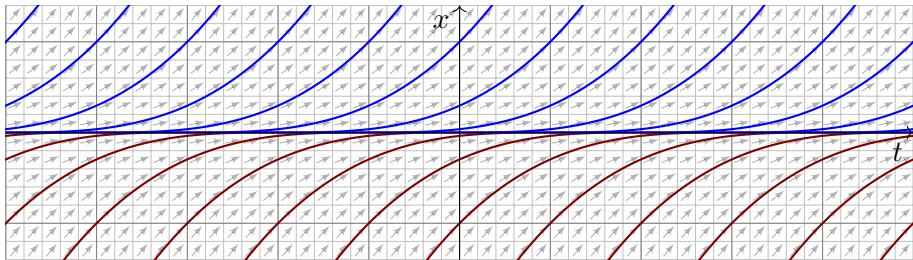
$$\partial_t u(t, x) + \sqrt[3]{x^2} \partial_x u(t, x) = 0 \quad \text{für alle } (t, x) \in \mathbb{R}^2.$$

(1a) Sind konstante Funktionen Lösungen? (1b) Gibt es noch weitere? Wie / Lässt sich die Charakteristikmethode (Satz Q2D) hier anwenden?

(2) Finden Sie alle Lösungen  $u \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*)$ , die obige PDE für  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$  erfüllen. Können Sie  $u(t, 0)$  beliebig vorgeben?

**Lösung:** (1a) Jede konstante Funktion  $u(t, x) = \text{const}$  löst unsere PDE.

(1b) Jede charakteristische Kurve  $t \mapsto (t, x(t))$  erfüllt  $\dot{x}(t) = \sqrt[3]{x(t)^2}$ .



## Zu viele Charakteristiken verderben die PDE.

Trennung der Variablen und genaue Diskussion wie auf Seite M325:  
 Lösungen sind neben  $x(t) = 0$  auch  $x_c(t) = (x - c)^3/27$ , allgemein

$$x_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto x_{a,b}(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } a \leq t \leq b, \\ (t - a)^3/27 & \text{für } t \leq a, \\ (t - b)^3/27 & \text{für } t \geq b, \end{cases}$$

mit Parametern  $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ . Jeder Punkt  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$  liegt auf unendlich vielen dieser Charakteristiken  $\gamma_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, x_{a,b}(t))$ . Jede Charakteristik  $\gamma_{a,b}$  schneidet die Charakteristik  $\gamma_{-\infty, \infty} : t \mapsto (t, 0)$ .  
 Folgerung: Erfüllt  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  unsere PDE auf ganz  $\mathbb{R}^2$ , so ist  $u$  konstant.

☹️ (Zu viele) Charakteristiken erzwingen (zu viele) Einschränkungen.

(2) Hier gilt hingegen: Jeder Punkt  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$  mit  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  liegt auf genau einer Charakteristik  $\gamma_c^* : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t + c, t^3/27)$ .

Zu  $u(t, 0) = g(t)$  können wir jede  $C^1$ -Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vorgeben und erhalten die Lösung  $u(t, x) = g(t - 3\sqrt[3]{x})$ . Machen Sie die Probe!

😊 Charakteristiken erzwingen hier das rechte Maß an Bedingungen.

Zu wenige Charakteristiken erreichen nicht jeden Punkt.

**Aufgabe:** Zu lösen sei die folgende PDE mit Anfangswerten:

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) + x^2 \partial_x u(t, x) &= 0 && \text{für } t \in \mathbb{R} \text{ und } x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = g(x) = e^{-x^2} &&& \text{für } t = 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- (1) Lösen Sie diese Gleichung auf dem maximalen Gebiet  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ :
- (a) Bestimmen Sie zunächst alle Charakteristiken dieser PDE.
  - (b) Welche Punkte  $(t, x) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  werden so erreicht, welche nicht?
  - (c) Berechnen Sie hierauf die eindeutige  $C^1$ -Lösung  $u: \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .
  - (d) Warum tritt das Problem bei der Transportgleichung Q2E nicht auf?
- (2) Wird  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  eindeutig bestimmt durch folgende Anfangswerte?
- (a)  $u(t, +1) = e^{-t^2}$  für alle  $t \in \mathbb{R}$
  - (b)  $u(t, -1) = e^{-t^2}$  für alle  $t \in \mathbb{R}$
  - (c)  $u(t, \pm 1) = e^{-t^2}$  für alle  $t \in \mathbb{R}$
  - (d)  $u(t, +t) = e^{-t^2}$  für alle  $t \in \mathbb{R}$
  - (e)  $u(t, -t) = e^{-t^2}$  für alle  $t \in \mathbb{R}$
  - (f)  $u(mx, x) = e^{-x^2}$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  und eine Konstante  $m \in \mathbb{R}$

Zu wenige Charakteristiken erreichen nicht jeden Punkt.

**Lösung:** (1a) Wir lesen die charakteristische Gleichung ab:

$$\begin{aligned} T(0) &= 0, & T'(s) &= 1, \\ X(0) &= x_0, & X'(s) &= X(s)^2, \\ U(0) &= g(x_0), & U'(s) &= 0. \end{aligned}$$

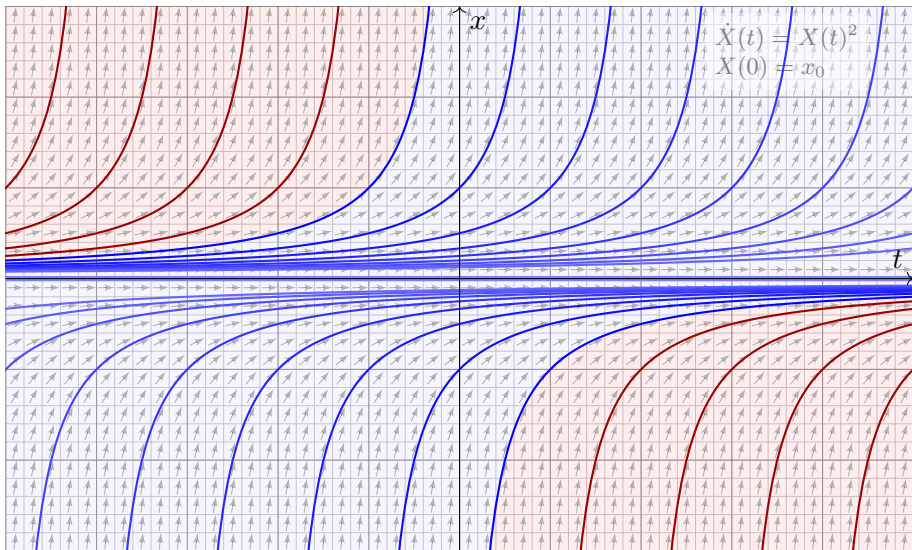
Wir finden  $t \stackrel{!}{=} T(s) = s$ . Fortan nutzen wir daher  $t$  als Wegparameter.  
Wir lösen  $X(0) = x_0$  und  $\dot{X}(t) = X(t)^2$ . Für  $x_0 = 0$  finden wir  $X(t) = 0$ .  
Für  $x_0 \neq 0$  nutzen wir wie üblich die Separation der Variablen: M113

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= X(t)^2 & \implies & X(t)^{-2} \dot{X}(t) = 1 \\ \implies \int_{s=0}^t X(s)^{-2} \dot{X}(s) \, ds &= \int_{s=0}^t 1 \, ds & \implies & \left[ -X(s)^{-1} \right]_{s=0}^t = \left[ s \right]_{s=0}^t \\ \implies X(0)^{-1} - X(t)^{-1} &= t & \implies & X(t) = \frac{x_0}{1 - tx_0} \end{aligned}$$

Die Lösung ist  $x = x_0/(1 - tx_0)$ , nach  $x_0$  aufgelöst  $x_0 = x/(1 + tx)$ .

😊 Die folgende Graphik zeigt die charakteristischen Kurven der PDE.

## Zu wenige Charakteristiken erreichen nicht jeden Punkt.



Die Charakteristiken (blau) decken nur einen Teil aller Punkte  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$  ab; hier wird der Funktionswert  $u(t, x)$  durch die Anfangswerte bestimmt.



Im rot gefärbten Bereich hingegen ist der Wert  $u(t, x)$  unbestimmt.

## Zu wenige Charakteristiken erreichen nicht jeden Punkt.

(1b) Erreicht werden die Punkte  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$  mit  $t = 0$  oder  $(t > 0$  und  $x > -1/t)$  oder  $(t < 0$  und  $x < -1/t)$ , kurz  $\Omega = \{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid tx > -1 \}$ .

(1c) Wir finden die Lösung  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $u(t, x) = \exp(-x^2/(1+tx)^2)$ .  
Probe: Diese Funktion  $u$  erfüllt unsere PDE und die Anfangswerte!

(1d) Bei der Transportgleichung mit konstanten Koeffizienten (Satz Q2E) überdecken die Charakteristiken als Geradenschar die gesamte Ebene.

(2a/b) Nein, die Charakteristiken erreichen nur  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$  mit  $x \geq 0$ .

(2c) Ja, die Charakteristiken erreichen alle Punkte  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$  mit  $x \neq 0$ ; die Werte  $u(t, 0) = 0$  erhalten wir daraus durch stetige Fortsetzung.

(2d) Nein, manche der Charakteristiken  $x = x_0/(1 - tx_0)$  werden von der Geraden  $(t, t)$  nicht geschnitten, die PDE ist daher unterbestimmt, und die Lösung  $u$  ist nicht eindeutig. Andere dieser Kurven werden hingegen zweimal geschnitten, dort ist die PDE also überbestimmt.

(2e) Ja, jede der Charakteristiken  $x = x_0/(1 - tx_0)$  wird von der Geraden  $(t, -t)$  genau einmal geschnitten. Somit wird die Lösung  $u$  eindeutig durch die Anfangswerte auf der Geraden  $(t, -t)$  bestimmt.

(2f) Ja für  $m < 0$ , wie in (2e). Nein für  $m \geq 0$ , wie in (2d).



## Zu wenige oder zu viele Charakteristiken?

**Aufgabe:** Sei  $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ . Zu lösen sei folgende PDE mit Anfangswerten:

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) + |x|^\alpha \partial_x u(t, x) &= 0 && \text{für alle } (t, x) \in \Omega, \\ u(0, x) = g(x) = e^{-x^2} &&& \text{für alle } (0, x) \in \Omega, \end{aligned}$$

- (1) auf der gesamten Ebene  $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , also für alle  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ .
  - (2) auf der abgeschlossenen Halbebene  $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ , kurz  $x \geq 0$ ,
  - (3) auf der offenen Halbebene  $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$ , also kurz für  $x > 0$ ,
- (a) Finden Sie zunächst alle Charakteristiken dieser PDE.
  - (b) Eindeutigkeit: Gibt es höchstens eine Lösung  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ?
  - (c) Existenz: Gibt es mindestens eine Lösung  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ?
  - (d) Berechnung: Gelten Existenz (a) und Eindeutigkeit (b), so finden Sie eine explizite Formel für *die* Lösung  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ !

Diskutieren und zeichnen Sie insbesondere die Fälle  $\alpha = 2/3, 1, 2$ .

Aus Kapitel M kennen wir bereits die illustrativen Beispiele  $\dot{x} = x$  [M111](#) und  $\dot{x} = x^2$  [M113](#) sowie  $\dot{x} = -2\sqrt{|x|}$  [M123](#) und  $\dot{x} = \sqrt[3]{x^2}$  [M325](#). Vergleich und Zusammenfassung  $\dot{x} = |x|^\alpha$  [O233](#), dort finden Sie auch Graphiken.

## Zu wenige oder zu viele Charakteristiken?

**Lösung:** (1a) Wir lesen die charakteristische Gleichung ab:

$$\begin{aligned} T(0) &= 0, & T'(s) &= 1, \\ X(0) &= x_0, & X'(s) &= |X(s)|^\alpha, \\ U(0) &= g(x_0), & U'(s) &= 0. \end{aligned}$$

Wir finden  $t \stackrel{!}{=} T(s) = s$ . Fortan nutzen wir daher  $t$  als Wegparameter. Wir lösen  $\dot{X}(t) = |X(t)|^\alpha$  durch Fallunterscheidung  $X(t) \gtrless 0$  und Separation der Variablen. Der Fall  $\alpha = 1$  ist am einfachsten:

$$X(t) = \begin{cases} x_0 e^{+t} & \text{für } x_0 \geq 0, \\ x_0 e^{-t} & \text{für } x_0 \leq 0. \end{cases}$$

Zu jedem  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$  können wir  $x = x_0 e^{\pm t}$  nach  $x_0 = x e^{\mp t}$  auflösen:

$$u(t, x) = \begin{cases} g(x e^{-t}) & \text{für } x \geq 0, \\ g(x e^{+t}) & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

😊 Dies zeigt im einfachsten Falle  $\alpha = 1$  sofort die Eindeutigkeit (b) und die Existenz (c) der Lösung  $u$  durch ihre explizite Berechnung (d).

## Zu wenige oder zu viele Charakteristiken?

Den Fall  $\alpha \neq 1$  lösen wir ebenso durch Separation. Für  $X(t) > 0$  gilt:

$$\dot{X}(t) = X(t)^\alpha \quad \implies \quad X(t)^{-\alpha} \dot{X}(t) = 1$$

$$\implies \int_{s=0}^t X(s)^{-\alpha} \dot{X}(s) ds = \int_{s=0}^t 1 ds \quad \implies \quad \left[ \frac{X(s)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_{s=0}^t = \left[ s \right]_{s=0}^t$$

$$\implies \frac{X(t)^{1-\alpha} - x_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} = t \quad \implies \quad X(t) = [x_0^{\bar{\alpha}} + \bar{\alpha}t]^{1/\bar{\alpha}}$$

Zur Abkürzung setzen wir hier  $\bar{\alpha} := 1 - \alpha$ . Für  $X(t) < 0$  lösen wir  $\dot{X}(t) = (-X(t))^\alpha$  und erhalten ebenso  $X(t) = -[(-x_0)^{\bar{\alpha}} - \bar{\alpha}t]^{1/\bar{\alpha}}$ .

Im Falle  $\alpha > 1$  erhalten wir demnach  $X(t) = x_0[1 \pm |x_0|^{\alpha-1}\bar{\alpha}t]^{1/\bar{\alpha}}$ .

Zu  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$  können wir dies nach  $x_0 = x[1 \mp |x|^{\alpha-1}\bar{\alpha}t]^{1/\bar{\alpha}}$  auflösen.

Die Lösungskurven haben Polstellen: Wir erreichen nur die Punkte  $\Omega = \{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \mp |x|^{\alpha-1}\bar{\alpha}t > 0 \}$ . Auf  $\Omega$  ist  $u$  eindeutig bestimmt; außerhalb dieses Gebiets  $\Omega$  sind die Funktionswerte  $u(t, x)$  unbestimmt. Siehe [Q321](#) für den Fall  $\alpha = 2$  und  $\Omega = \{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid tx > -1 \}$ .




Für  $\alpha > 1$  gilt zwar die Existenz (c), aber nicht die Eindeutigkeit (b).

## Charakteristiken kommen überall hin, oder nicht?

Im verbleibenden Falle  $0 < \alpha < 1$  finden wir die Charakteristiken:


$$X_{a,b}(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } a \leq t \leq b, \\ -[\bar{\alpha}(a-t)]^{1/\bar{\alpha}} & \text{für } t \leq a, \\ +[\bar{\alpha}(t-b)]^{1/\bar{\alpha}} & \text{für } t \geq b, \end{cases}$$

mit Parametern  $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ . Jeder Punkt  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$  liegt auf unendlich vielen dieser Charakteristiken  $\gamma_{a,b}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto (t, X_{a,b}(t))$ . Jede Charakteristik  $\gamma_{a,b}$  schneidet die Charakteristik  $\gamma_{-\infty, \infty}: t \mapsto (t, 0)$ . Folgerung: Erfüllt  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  unsere PDE auf ganz  $\mathbb{R}^2$ , so ist  $u$  konstant. Siehe [Q319](#) für eine Ausführung und Skizze des Falls  $\alpha = 2/3$ .

 Für  $0 < \alpha < 1$  ist jede Lösung  $u$  konstant. Zwar gilt die Eindeutigkeit (b), aber nicht die Existenz (c) einer Lösung zu den Anfangsdaten  $g$ .

(2) Auf  $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  gilt sinngemäß dasselbe in jedem der Fälle  $\alpha \leq 1$ .

(3) Auf  $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{> 0}$  gilt Existenz und Eindeutigkeit für  $0 < \alpha \leq 1$ .

 Das ist der Idealfall: Die Charakteristiken überdecken das Gebiet  $\Omega$  als „parallele“ Kurvenschar, ohne Lücken und ohne Überschneidungen, und auf jeder Charakteristik wird genau ein Anfangswert vorgegeben.

# Allgemeine Transportgleichung: Problemstellung

Die vorangehenden Beispiele zeigen exotische Transportgleichungen mit nicht-eindeutigen oder nicht-ausreichenden Transportwegen.

**Aufgabe:** Wiederholen Sie die Lösung der **Transportgleichung**:

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) + b \partial_x u(t, x) + c u(t, x) &= f(t, x) && \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= g(x) && \text{für } t = 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Was bedeuten die Daten  $b, c, f, g$  anschaulich / physikalisch?

Lösen Sie möglichst ebenso explizit folgende Verallgemeinerung:

$$\partial_t u(t, x) + b(t, x) \partial_x u(t, x) + c(t, x) u(t, x) = f(t, x)$$

Gegeben sind stetige Koeffizientenfunktionen  $b, c, f: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und Anfangsdaten  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , gesucht sind alle Lösungen  $u: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Existiert eine Lösung  $u$ ? Ist sie eindeutig? Wie berechnen Sie sie?

- (1) Lösen Sie den Fall  $b(t, x) = b_0(t)$ , in dem  $b$  nur von  $t$  abhängt.
- (2) Lässt sich der lineare Fall  $b(t, x) = b_0(t) + b_1(t)x$  ebenso lösen?
- (3) Welche Probleme bereitet die Lösung der allgemeinen Gleichung?

## Allgemeine Transportgleichung: Rechnung

**Lösung:** (1) Wir lesen die charakteristische Gleichung ab:

$$\begin{aligned} T(0) &= 0, & T'(s) &= 1, \\ X(0) &= x_0, & X'(s) &= b_0(s), \\ U(0) &= g(x_0), & U'(s) &= f(T(s), X(s)) - c(T(s), X(s))U(s). \end{aligned}$$

Wir finden  $t \stackrel{!}{=} T(s) = s$ . Fortan nutzen wir daher  $t$  als Wegparameter.

Wir haben die Integralfunktion  $B_0(t) = \int_{\tau=0}^t b_0(\tau) d\tau$  dank Stetigkeit.

Die Lösung ist  $x \stackrel{!}{=} X(t) = x_0 + B_0(t)$ , nach  $x_0$  aufgelöst  $x_0 = x - B_0(t)$ .

(2) Etwas allgemeiner: Für  $b(t, x) = b_0(t) + b_1(t)x$  finden wir

$$\begin{aligned} x \stackrel{!}{=} X(t) &= e^{B_1(t)}x_0 + e^{B_1(t)} \int_{\tau=0}^t e^{-B_1(\tau)}b_0(\tau) d\tau, \\ x_0 &= e^{-B_1(t)}x - \int_{\tau=0}^t e^{-B_1(\tau)}b_0(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

😊 Das ist der Idealfall: Die Charakteristiken überdecken das Gebiet  $\Omega$  als „parallele“ Kurvenschar, ohne Lücken und ohne Überschneidungen, und auf jeder Charakteristik wird genau ein Anfangswert vorgegeben.

## Allgemeine Transportgleichung: Diskussion

⚠ Im allgemeinen Fall (3) treten zwei Hindernisse auf: Charakteristiken können sich schneiden oder manche Punkte  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$  nicht erreichen. Die vorangehenden Aufgaben illustrieren die möglichen Komplikationen.

😊 Wir gehen vom Idealfall aus, wie für  $b(t, x) = b_0(t) + b_1(t)x$  gezeigt. Für  $U(t) = u(t, X(t))$  erhalten wir die lineare Differentialgleichung

$$U(0) = g(x_0), \quad \dot{U}(t) = \varphi(t) - \gamma(t)U(t)$$

mit den Koeffizientenfunktionen  $\varphi(t) = f(t, X(t))$  und  $\gamma(t) = c(t, X(t))$ . Wir setzen  $C(t) = \int_{\tau=0}^t \gamma(\tau) d\tau$  und nutzen die Integralformel M2E:

$$u(t, x) \stackrel{!}{=} U(t) = e^{-C(t)}g(x_0) + e^{-C(t)} \int_{\tau=0}^t e^{C(\tau)}\varphi(\tau) d\tau$$

😊 Jede Lösung  $u$  erfüllt  $u(t, X(t)) = U(t)$ . Damit ist  $u(t, x)$  bestimmt! Zu jedem Punkt  $(t, x)$  können wir wie oben erklärt den Startpunkt  $x_0$  bestimmen und damit den Weg  $t \mapsto (t, X(t))$  von  $(0, x_0)$  nach  $(t, x)$ .

😊 Das ist ein seltener Glücksfall: Zu dieser Problemklasse haben wir direkt eine allgemein gültige und explizite Integralformel gefunden.

⚠ Die meisten PDE lassen sich nicht einfach mit Integralformeln lösen.

## Allgemeine Transportgleichung: Lösung

## Satz Q3A: Integralformel für lineare PDE erster Ordnung

Zu lösen sei die allgemeine **Transportgleichung**:

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) + b(t, x) \partial_x u(t, x) + c(t, x) u(t, x) &= f(t, x), \\ u(0, x) &= g(x). \end{aligned}$$

Gegeben sind stetige Koeffizientenfunktionen  $b, c, f: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und Anfangsdaten  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , gesucht sind alle Lösungen  $u: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Im allgemeinen Fall können Hindernisse auftreten, wir betrachten daher  $b(t, x) = b_0(t) + b_1(t)x$ . Dieses Problem hat genau eine Lösung, nämlich

$$u(t, x) = e^{-C(t)} g(x_0) + e^{-C(t)} \int_{\tau=0}^t e^{C(\tau)} f(\tau, X(\tau)) d\tau$$

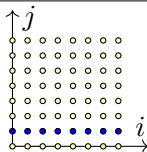
Aus der Funktion  $B_1(t) = \int_{\tau=0}^t b_1(\tau) d\tau$  erhalten wir die Charakteristik  $X(t) = e^{B_1(t)} x_0 + e^{B_1(t)} \int_{\tau=0}^t e^{-B_1(\tau)} b_0(\tau) d\tau$  mit passendem Startpunkt  $x_0 = e^{-B_1(t)} x - \int_{\tau=0}^t e^{-B_1(\tau)} b_0(\tau) d\tau$  sowie  $C(t) = \int_{\tau=0}^t c(\tau, X(\tau)) d\tau$ .



## Lösung durch Potenzreihen

**Aufgabe:** Mit dem Ansatz  $u(t, x) = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} a_{ij} t^i x^j$  löse man

$$\partial_t u(t, x) + x \partial_x u(t, x) = 0, \quad u(0, x) = x.$$



**Lösung:** Einsetzen in die geforderten Gleichungen ergibt:

$$(1) \quad \sum i a_{ij} t^{i-1} x^j + \sum j a_{ij} t^i x^{j-1} \stackrel{!}{=} 0, \quad (2) \quad \sum a_{0j} x^j \stackrel{!}{=} x$$

(2) Koeffizientenvergleich ergibt  $a_{01} = 1$  und  $a_{0j} = 0$  für  $j \neq 1$ .

(1) Es gilt  $(i+1)a_{i+1,j} + ja_{ij} = 0$ , also rekursiv  $a_{i+1,j} = -\frac{j}{i+1}a_{ij}$ :

$$j = 1: \quad a_{0,1} \stackrel{(2)}{=} 1, \quad a_{1,1} = -\frac{1}{1!}, \quad a_{2,1} = +\frac{1}{2!}, \quad a_{3,1} = -\frac{1}{3!}, \quad \dots$$

$$j \neq 1: \quad a_{0,j} \stackrel{(2)}{=} 0, \quad a_{1,j} = 0, \quad a_{2,j} = 0, \quad a_{3,j} = 0, \quad \dots$$

Diese Koeffizienten bestimmen eine Lösung. Wir erhalten so:

$$u(t, x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} t^i x^1 = x e^{-t}$$

😊 Die Reihe genügt meist. Hier erkennen wir zudem die  $\exp$ -Funktion. Schön. Machen Sie die Probe! Es gilt  $\partial_t u + x \partial_x u = 0$  und  $u(0, x) = x$ .

## Lösung durch Potenzreihen

Dieses Beispiel dient hier zur Illustration; diese spezielle PDE ist linear und kann mit der Charakteristikmethode ebenso leicht gelöst werden. Auch der Separationsansatz  $u(t, x) = v(t) \cdot w(x)$  führt hier zum Erfolg. Sehen Sie, wie das hier gelingt? Versuchen Sie es als Übung!

☹ Nicht jede PDE besitzt eine Lösung. Selbst wenn sie eine Lösung besitzt, so doch meist nicht elementar, d.h. in geschlossener Form. In solchen Fällen hilft recht häufig der Potenzreihenansatz.

😊 Jede PDE mit analytischen Koeffizienten kann lokal gelöst werden. Der Potenzreihenansatz hat den Vorteil, dass er allgemein anwendbar ist und dank Satz Q3B immer eine konvergente Reihe als Lösung liefert.

😊 Die Methode eignet sich auch zur numerischen Approximation. Da die Rechnungen jedoch aufwändig werden können, wählt man den Potenzreihenansatz nur mit Bedacht. Notfalls kann man so immerhin qualitative Aussagen gewinnen und Approximationen berechnen.

## Satz Q3B: Cauchy 1842, Kowalewskaja 1875

Zu lösen sei wie zuvor ein **Cauchy–Problem** der Form

$$\partial_t u = F(t, x, u, \partial_x u), \quad u(t_0, x) = f(x).$$

Gegeben sind Intervalle  $t_0 \in I \subseteq \mathbb{R}$  und  $x_0 \in \Omega \subseteq \mathbb{R}$  sowie Funktionen  $F: I \times \Omega \times \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}$  und  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ . Beide Funktionen seien analytisch.

Dann existiert lokal genau eine analytische Lösung  $u: I_0 \times \Omega_0 \rightarrow \mathbb{K}$  auf (eventuell kleineren) Intervallen  $t_0 \in I_0 \subseteq I$  und  $x_0 \in \Omega_0 \subseteq \Omega$ .

**Konstruktion:** Wir entwickeln um den Nullpunkt  $(t_0, x_0) = (0, 0)$ :  
Hier gilt  $F(t, x, u, v) = \sum_{i,j,k \in \mathbb{N}} b_{ijkl} t^i x^j u^k v^l$  und  $f(x) = \sum_{j \in \mathbb{N}} c_j x^j$ .  
Für  $u$  wählen wir den Potenzreihenansatz  $u(t, x) = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} a_{ij} t^i x^j$ .  
Einsetzen ergibt rekursive Gleichungen für die Koeffizienten  $a_{ij}$ .  
Diese sind eindeutig lösbar. Der Satz garantiert Konvergenzradius  $> 0$ .  
(Letzteres ist die eigentliche Aussage; wir rechnen dies hier nicht nach.)

# Lösung durch Potenzreihen

😊 Analytische Cauchy–Probleme sind gut gestellt, das heißt, es gibt genau eine Lösung, zumindest lokal um den Entwicklungspunkt  $(t_0, x_0)$ .

Diese Lösung ist analytisch, d.h. lokal eine konvergente Potenzreihe: Die Koeffizienten lassen sich rekursiv berechnen, wie oben skizziert. Zudem gilt eine allgemeine Majorante und damit lokale Konvergenz.

⚠ Hadamards Beispiel (Seite R217) zeigt, dass die Lösungen einer PDE im Allgemeinen nicht stetig von den Anfangsdaten abhängen!

😊 Die rechte Seite  $F$  und die Funktion  $f$  müssen analytisch sein. Das ist in vielen Anwendungen eine harmlose Voraussetzung.

⚠ Differenzierbarkeit reicht nicht! Die erstaunliche Entdeckung von Lewy (1956) und Mizohata (1962): Es gibt glatte, nicht-analytische Funktionen  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ , sodass  $\partial_t u(t, x) + it\partial_x u(t, x) = g(t, x)$  keine Lösung hat, nicht einmal lokal auf einem beliebig kleinen Gebiet!

😊 Die Koeffizienten sind hier nicht-konstante Polynome; für konstante Koeffizienten rettet uns der Satz R1A von Ehrenpreis–Malgrange.

# Methodenvergleich: Viele Wege führen zum Ziel.

**Aufgabe:** Finden Sie alle  $C^1$ -Funktionen  $u: \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\partial_t u(t, x) + x^2 \partial_x u(t, x) = 0 \quad \text{und} \quad u(0, x) = x.$$

Nutzen und vergleichen Sie die beiden bisherigen Techniken: (1) die Charakteristikmethode und (2) den Potenzreihenansatz. Auf welchem Gebiet  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  gelingt Ihnen diese Berechnung? Wie können Sie sicher sein, alle Lösungen gefunden zu haben?

**Lösung:** (1) Die Charakteristiken haben wir oben ausgeführt (Q321): Die charakteristische Kurve durch  $(0, x_0)$  ist  $t \mapsto (t, x_0/(1 - tx_0))$ . Erreicht werden nur die Punkte in  $\Omega = \{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid tx > -1 \}$ .

Als eine mögliche Lösung finden wir so:

$$u: \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R} : (t, x) \mapsto u(t, x) = \frac{x}{1 + tx}$$

- 😊 Gehen Sie die Rechnung erneut durch und machen Sie die Probe!
- 😊 Der Transport entlang von Charakteristiken beweist die Eindeutigkeit auf  $\Omega$  dank Satz Q2D; darüber hinaus reichen die Anfangswerte nicht.

## Methodenvergleich: Viele Wege führen zum Ziel.

Was ergibt der Potenzreihenansatz? Kommen wir damit weiter?

(2) Einsetzen von  $u(t, x) = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} a_{ij} t^i x^j$  in die PDE ergibt:

$$\sum i a_{ij} t^{i-1} x^j + \sum j a_{ij} t^i x^{j+1} \stackrel{!}{=} 0, \quad \sum a_{0j} x^j \stackrel{!}{=} x$$

Koeffizientenvergleich ergibt  $a_{01} = 1$  und  $a_{0j} = 0$  für  $j \neq 1$ .

Es gilt  $(i+1)a_{i+1,j+1} + ja_{ij} = 0$ , also rekursiv  $a_{i+1,j+1} = -\frac{j}{i+1}a_{ij}$ :

$$j = 1: a_{0,1} = +1, \quad a_{1,2} = -1, \quad a_{2,1} = +1, \quad a_{3,1} = -1, \quad \dots$$

$$j \neq 1: a_{0,j} = 0, \quad a_{1,j+1} = 0, \quad a_{2,j+2} = 0, \quad a_{3,j+3} = 0, \quad \dots$$

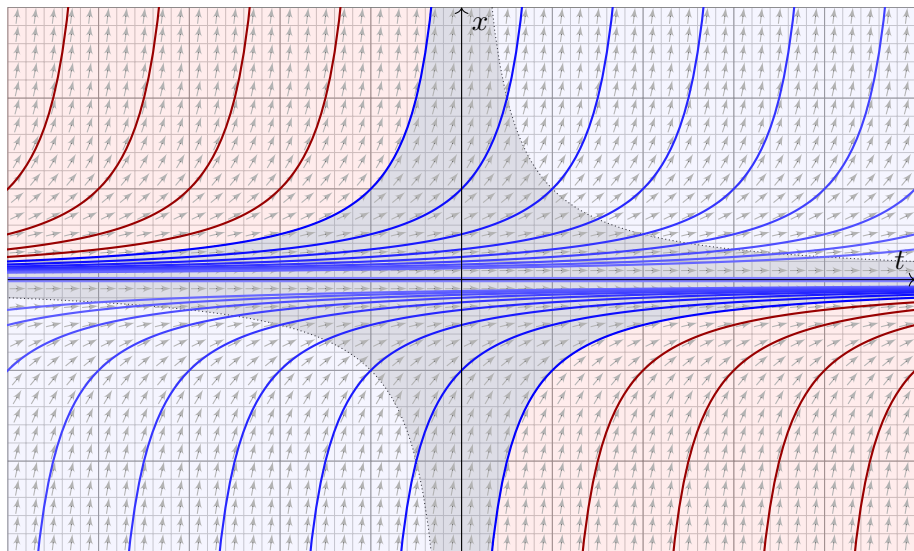
Diese Koeffizienten bestimmen eine Lösung. Wir erhalten so:

$$u(t, x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i t^i x^{i+1} = \frac{x}{1+tx}$$

😊 Die Reihe genügt meist! Hier erkennen wir die geometrische Reihe.

⚠ Sie konvergiert nur auf  $\Omega' = \{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid |tx| < 1 \}$ . Dieser Bereich ist kleiner als zuvor  $\Omega = \{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid tx > -1 \}$  mit Charakteristiken.

# Methodenvergleich: Viele Wege führen zum Ziel.



Die Charakteristiken (blau) decken nur einen Teil aller Punkte  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$  ab; hier wird der Funktionswert  $u(t, x)$  durch die Anfangswerte bestimmt.

⚠ Im rot gefärbten Bereich hingegen ist der Wert  $u(t, x)$  unbestimmt.

# Methodenvergleich: Viele Wege führen zum Ziel.

⚠ Unsere Potenzreihe konvergiert nur im grau unterlegten Gebiet  $\Omega'$ .

Wir arbeiten hier mit einer Potenzreihe  $u(t, x) = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} a_{ij} t^i x^j$  in zwei reellen Variablen  $t, x \in \mathbb{R}$  um den Entwicklungspunkt  $(t_0, x_0) = (0, 0)$ . Ihr Konvergenzgebiet  $\Omega'$  wird von den Hyperbeln  $x = \pm 1/t$  begrenzt. Im Gegensatz dazu erwarten wir für Potenzreihen  $f(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k z^k$  in einer komplexen Variablen  $z \in \mathbb{C}$  die üblichen Konvergenzkreise.

😊 Auf dem gemeinsamen Definitionsbereich  $\Omega' \subseteq \Omega$  stimmen beide Lösungen überein, so wie es sein muss: Aus (1) wissen wir bereits, dank Satz Q2D, dass die Lösung auf  $\Omega$  eindeutig ist! Insbesondere hat somit der (willkürlich gewählte) Rechenweg keinen Einfluss auf das Ergebnis.

Unsere Wahl des Rechenweges und der zugehörigen Darstellung der Lösung beeinflusst lediglich das Definitionsgebiet, zuvor  $\Omega$ , hier  $\Omega' \subsetneq \Omega$ ,

😊 Die Charakteristikmethode betont die geometrische Sichtweise: Sie zeigt das maximale Definitionsgebiet und hierauf Eindeutigkeit.

😊 Der Potenzreihenansatz betont hingegen die analytische Sichtweise: Er entwickelt die Lösung, soweit möglich, als konvergente Potenzreihe.