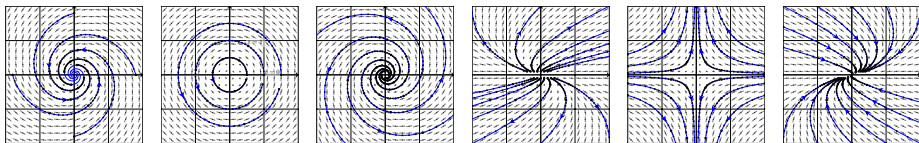


Kapitel P

Autonome Systeme,
Gleichgewicht und Stabilität

Wie ist es möglich, daß die Mathematik, letztlich doch ein Produkt menschlichen Denkens unabhängig von der Erfahrung, den wirklichen Gegebenheiten so wunderbar entspricht?

Albert Einstein (1879–1955), *Geometrie und Erfahrung* (1921)

Inhalt dieses Kapitels P

- 1 Lineare DGSysteme mit konstanten Koeffizienten
 - Gekoppelte Oszillatoren und stehende Wellen
 - Lösungen mittels Eigenvektoren und Eigenfunktionen
 - Lösungen mittels Hauptvektoren und Hauptfunktionen
 - Von komplexen zu reellen Lösungen

- 2 Gleichgewichtslagen und In/Stabilität von Fixpunkten
 - Linearisierung um Fixpunkte und In/Stabilität
 - Räuber-Beute-Modell nach Lotka–Volterra
 - Stabilitätsanalyse nach Lyapunov
 - Hamiltonsche Dynamik und Stabilität

- 3 Fazit: Differentialgleichungssysteme
 - Zusammenfassung und Verständnisfragen
 - Reduktion der Ordnung und Methodenvergleich
 - Beispiele zur Dynamik um Fixpunkte und In/Stabilität
 - Invariante Mengen dank Tangentialbedingung

Differentialgleichungen sind die Sprache der Naturgesetze.

Im vorigen Kapitel O haben wir dazu Differentialgleichungssysteme der Form $x'(t) = f(t, x(t))$ mit Anfangsdaten $x(t_0) = x_0$ untersucht: Gibt es immer eine Lösungsfunktion x ? nur eine? oder mehrere?

Der **Existenz- und Eindeigkeitssatz** O1B antwortet umfassend: Es genügt, dass f stetig differenzierbar ist. Hoch lebe die Analysis! Nachdem Existenz- und Eindeigkeit geklärt sind, wenden wir uns der praktischen Berechnung zu: Wie finden wir eine Lösung? gar alle?

Für **lineare Differentialgleichungssysteme** $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ haben wir eine vollständige Lösungstheorie. Der Struktursatz O3B sagt: Die Lösungsmenge ist ein **linearer / affiner Raum** der Dimension n . Im homogenen Fall $b = 0$ suchen wir also eine **Basis** der Länge n .

Für **konstante Koeffizienten** $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist die Lösung besonders einfach: Es genügt, eine Basis des Raums \mathbb{K}^n aus **Eigenvektoren** der Matrix A zu finden. Falls dies nicht gelingt, so führen allgemeiner **Hauptvektoren** stets zum Ziel. Hoch lebe die Lineare Algebra!

Langzeitverhalten und Stabilität von Lösungen

Anfangsdaten sind oft zufälligen kleinen Schwankungen unterworfen, etwa durch äußere **Störungen** oder ungenaue **Messdaten**. Hierzu untersucht die **Stabilitätstheorie** die Auswirkung von Störungen auf dynamische Systeme, insbesondere um Gleichgewichtszustände.

Zur Vereinfachung betrachten wir **autonome Systeme** $x'(t) = f(x(t))$; hier hängt also die rechte Seite $f(x)$ nicht explizit von der Zeit t ab. Ein **Fixpunkt** x_0 (Ruhelage) zeichnet sich durch $f(x_0) = 0$ aus: Bei Start in $x(t_0) = x_0$ verharrt das System in dieser Ruhelage.

Die Ruhelage x_0 ist **instabil**, wenn eine zufällige kleine Störung im weiteren zeitlichen Verlauf immer größer wird und von x_0 wegführt. Sie ist (asymptotisch) **stabil**, wenn kleine Störungen beschränkt bleiben (bzw. abklingen und das System langfristig in die Ruhelage zurückkehrt).

Kleine Auslenkungen $x(t) = x_0 + u(t)$ aus der Ruhelage befolgen in erster Näherung $u(t) = A u'(t)$ mit Jacobi-Matrix $A = f'(x_0) \in \mathbb{K}^{n \times n}$, ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten! Genau hierdurch erhalten lineare DGSysteme ihre zentrale Bedeutung.

Lineare DGSysteme von besonders einfacher Form

Aufgabe: Wie lösen Sie (geschickt) die folgenden linearen DGSysteme?

(1) Die Koeffizienten sind konstant und bilden eine **Diagonalmatrix**:

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \\ y_4'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix}$$

(2) Die Koeffizienten sind konstant und bilden einen **Jordan-Block**:

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \\ y_4'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix}$$

(3) Die Koeffizienten sind konstant und bilden eine **beliebige Matrix**:

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \\ y_4'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix}$$

Lineare DGSysteme von besonders einfacher Form

Lösung: (1) Dieses DGSystem entkoppelt zu n eindimensionalen DG $y'_k(t) = \lambda_k y_k(t)$. Die Lösungen sind $y_k(t) = c_k e^{\lambda_k t}$ mit $c_k \in \mathbb{K}$ beliebig, also $y(t) = \sum_{k=1}^n c_k u_k(t)$ mit den **Eigenfunktionen** $u_k(t) = e^{\lambda_k t} e_k$. (P1B)

(2) Dieses DGSystem ist zwar nicht entkoppelt wie (1), doch wir können es ebenso rekursiv lösen: Die letzte Gleichung ergibt $y_4(t) = c_4 e^{\lambda t}$ für $y'_4 = \lambda y_4$. Damit finden wir $y_3(t) = (c_4 t + c_3) e^{\lambda t}$ für $y'_3 = \lambda y_3 + y_4$, dann $y_2(t) = (c_4 t^2/2 + c_3 t + c_2) e^{\lambda t}$ für $y'_2 = \lambda y_2 + y_3$, und damit schließlich $y_1(t) = (c_4 t^3/3! + c_3 t^2/2 + c_2 t + c_1) e^{\lambda t}$ für $y'_1 = \lambda y_1 + y_2$. Insgesamt also $y(t) = \sum_{k=1}^n c_k u_k(t)$ mit $u_k(t) = e^{\lambda t} [e_k + t e_{k-1} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e_1]$. Diese Lösungen u_1, u_2, u_3, \dots nennen wir **Hauptfunktionen**. (P1E)

(3) Für jede Lösung gilt $y(t) = e^{A(t-t_0)} y_0$ mit $y(t_0) = y_0 \in \mathbb{K}^n$. (O3H)
Die Matrix-Exponentialfunktion (O3G) ist jedoch mühsam zu berechnen.
Effizienter: Mit Eigenvektoren P1A und Hauptvektoren P1C führen wir das allgemeine Problem (3) zurück auf die einfachen Fälle (1) und (2).
Das ist unser Ziel in §P1: Jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ lässt sich aufbauen aus Jordan-Blöcken (2) mittels einer Basis aus Hauptvektorketten (P1D).

Lineare DGSysteme von besonders einfacher Form

Aufgabe: Wie lösen Sie die folgenden linearen DGSysteme?

(4) Die Koeffizienten bilden eine **Diagonalmatrix:**

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \\ y_4'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ b_3(t) \\ b_4(t) \end{pmatrix}$$

(5) Die Koeffizienten bilden eine **obere Dreiecksmatrix:**

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \\ y_4'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) & a_{14}(t) \\ 0 & a_{22}(t) & a_{23}(t) & a_{24}(t) \\ 0 & 0 & a_{33}(t) & a_{34}(t) \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ b_3(t) \\ b_4(t) \end{pmatrix}$$

(6) Die Koeffizienten bilden eine **beliebige Matrix:**

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \\ y_4'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) & a_{14}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) & a_{24}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) & a_{34}(t) \\ a_{41}(t) & a_{42}(t) & a_{43}(t) & a_{44}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ b_3(t) \\ b_4(t) \end{pmatrix}$$

Lineare DGSysteme von besonders einfacher Form

Lösung: (4) Dieses DGSystem $y'(t) = A(t)y(t) + b(t)$ entkoppelt zu n eindimensionalen Differentialgleichungen $y'_k(t) = a_{kk}(t)y_k(t) + b_k(t)$. Diese können wir bereits lösen, etwa dank der Lösungsformel M2E.

(5) Dieses DGSystem ist zwar nicht entkoppelt wie (4), doch wir können es rekursiv lösen: Die letzte Gleichung $y'_4(t) = a_{44}(t)y_4(t) + b_4(t)$ lösen wir dank M2E. Genauso können wir nun $y'_3(t) = a_{33}(t)y_3(t) + \dots$ lösen, dann $y'_2(t) = a_{22}(t)y_2(t) + \dots$ und schließlich $y'_1(t) = a_{11}(t)y_1(t) + \dots$

(6) Die allgemeine Konstruktion O3I liefert eine Fundamentallösung für das homogene DGSystem $Y'(t) = A(t)Y(t)$. Variation der Konstanten O3D löst dann das inhomogene DGSystem $Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$.

Das Problem ist also konstruktiv lösbar. Die Lösung ist eindeutig. (O3O) Die in O3I benötigten Rechnungen sind jedoch meist sehr aufwändig.

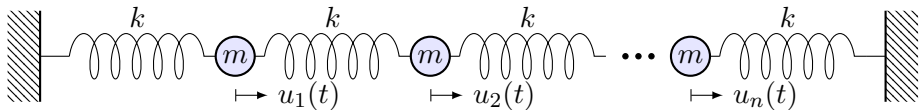
Für kommutierende Matrizen O3J haben wir $Y(t) = \exp\left(\int_{\tau=t_0}^t A(\tau) d\tau\right)$.

Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten (3) sind der einfachste Fall. Die Integration tritt hierbei in den Hintergrund, die Lösung gelingt uns allein dank linearer Algebra wie in (1) und (2).

Gekoppelte Oszillatoren und stehende Wellen

Wir untersuchen die Ausbreitung einer Welle, zum Beispiel einer Druck- oder Schallwelle, zunächst als diskretes, endlich-dimensionales Modell: mit Federn verbundene Massenpunkte. In diesem schönen Beispiel können wir alles explizit berechnen und anschaulich interpretieren. Zudem können wir unsere Methoden der linearen Algebra und Analysis erproben und schärfen. Anschließend extrahieren wir die zentrale Idee: Eigenvektoren und Eigenfunktionen (P1A).

Aufgabe: Formulieren und lösen Sie folgendes dynamische System:



Linear sind n Massen $m > 0$ durch $n + 1$ Federn $k > 0$ verbunden.

- (1) Formulieren Sie das Differentialgleichungssystem erster Ordnung.
- (2) Welche Struktur hat der Lösungsraum? („Form“ und „Größe“)
- (3) Finden Sie alle Lösungen zum Produktansatz $u_j(t) = e^{i\omega t} e^{i\alpha j}$. Auch später bei PDE nützt diese Trennung der Variablen (R113).
- (4) Gewinnen Sie hieraus eine reelle Basis des Lösungsraumes. Wie können Sie garantieren, wirklich eine Basis gefunden zu haben?

Gekoppelte Oszillatoren und stehende Wellen

Lösung: (1) Auslenkung $u_j(t) \in \mathbb{R}$ aus der Ruhelage,
 lineare Rückstellkraft $F_j = k(u_{j+1} - u_j) + k(u_{j-1} - u_j)$,
 Newtons Bewegungsgesetz $F_j = m\ddot{u}_j$. Mit $c^2 := k/m$ gilt

$$\ddot{u}_j(t) = c^2 [u_{j-1}(t) - 2u_j(t) + u_{j+1}(t)] \quad \text{mit} \quad u_0(t) = u_{n+1}(t) = 0.$$

Dies gilt für jeden der Massenpunkte $j = 1, \dots, n$ im Inneren der Kette.
 Randbedingungen: Die beiden Enden $u_0 = u_{n+1} = 0$ sind hierbei fixiert.
 Anfangswerte: Position $u_j(0)$ und Geschwindigkeit $\dot{u}_j(0)$ für $j = 1, \dots, n$.
 Diese **Bewegungsgleichung** ist zweiter Ordnung in n Unbekannten.
 Wir reduzieren sie äquivalent zu erster Ordnung in $2n$ Unbekannten:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \ddot{u}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & E_n \\ c^2 B_n & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{pmatrix}$$

Mit $y = (u, \dot{u})$ ist dies eine homogene lineare Differentialgleichung
 $\dot{y}(t) = A y(t)$ mit der angegebenen Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$.
 Hier ist 0_n die $(n \times n)$ -Nullmatrix und E_n die $(n \times n)$ -Einheitsmatrix.

Gekoppelte Oszillatoren und stehende Wellen

Die **Bandmatrix** $B = B_n$ kodiert hierbei die geometrische Anordnung:

$$B_n := \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad A := \begin{pmatrix} 0 & E \\ c^2 B & 0 \end{pmatrix}$$

(2) Wir suchen $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ mit $\dot{y}(t) = A y(t)$. Struktursatz O3B:

Die Lösungsmenge ist ein \mathbb{R} -Vektorraum der Dimension $2n$.

😊 Dank Existenz und Eindeutigkeit gehört zu jedem Startzustand $y(0) = (u(0), \dot{u}(0)) \in \mathbb{R}^{2n}$ genau eine Lösungsfunktion $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$.

Diese wichtige Information strukturiert und erleichtert unsere Rechnung: Wir müssen jetzt nur noch $2n$ linear unabhängige Lösungen finden! Unser Produktansatz liefert uns $2n$ unabhängige Lösungen; jede davon ist eine *stehende Welle*. Wo bleiben die erwarteten *wandernden Wellen*? Die Antwort ist ebenso einfach wie verblüffend: Je nach Startzustand $y(0)$ erhalten wir eine Linearkombination stehender Wellen, ihre Summe ist eine wandernde Welle! Basiswechsel: Stehende Wellen und wandernde Wellen sind zwei mögliche Basen des Lösungsraums.

Gekoppelte Oszillatoren und stehende Wellen

(3) Wir machen den Produktansatz $u_j(t) = e^{i\omega t} e^{i\alpha j}$. Einsetzen ergibt:

$$-\omega^2 e^{i\omega t} e^{i\alpha j} = c^2 [e^{i\omega t} e^{i\alpha(j-1)} - 2e^{i\omega t} e^{i\alpha j} + e^{i\omega t} e^{i\alpha(j+1)}], \quad \text{also}$$

$$\omega^2 = -c^2(e^{-i\alpha} - 2 + e^{i\alpha}) = -c^2(e^{-i\alpha/2} - e^{i\alpha/2})^2 = 4c^2 \sin(\alpha/2)^2$$

Zu jedem $\alpha \in \mathbb{R}$ erhalten wir $\omega = \pm 2c \sin(\alpha/2)$. Linearkombination der vier komplexen Lösungen $e^{\pm i\omega t} e^{\pm i\alpha j}$ liefert uns vier reelle Lösungen

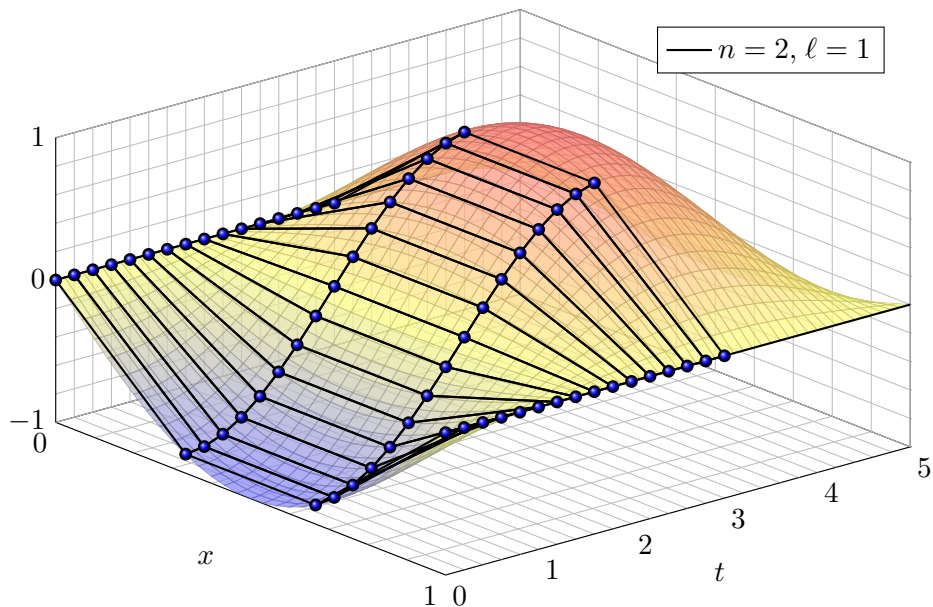
$$u_j(t) = \begin{cases} \sin(\alpha j) \cos(\omega t), & \cos(\alpha j) \cos(\omega t), \\ \sin(\alpha j) \sin(\omega t), & \cos(\alpha j) \sin(\omega t). \end{cases}$$

Randbedingungen $u_0 = u_{n+1} = 0$: Die Lösungen links erfüllen $u_0(t) = 0$, und $u_{n+1}(t) = 0$ für $\alpha = \ell\pi/(n+1)$ und $\ell = 1, \dots, n$. **Eigenfunktionen:**

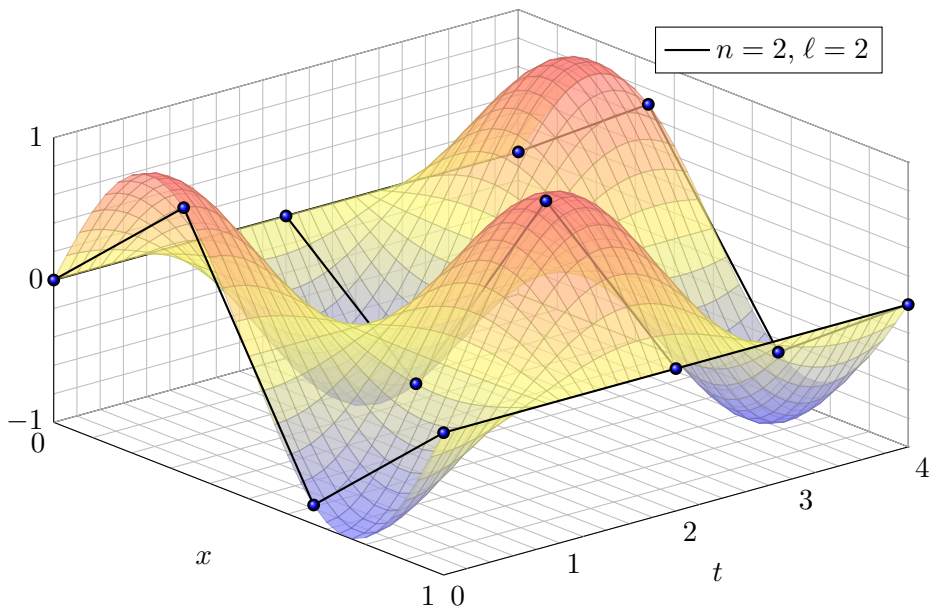
$$\left. \begin{aligned} u_{\ell,j}(t) &= \sin(\alpha_\ell j) \cos(\omega_\ell t) \\ v_{\ell,j}(t) &= \sin(\alpha_\ell j) \sin(\omega_\ell t) \end{aligned} \right\} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \alpha_\ell = \ell\pi/(n+1), \\ \omega_\ell = 2c \sin(\alpha_\ell/2). \end{cases}$$

(4) Diese $2n$ Lösungen sind linear unabhängig, also eine **Basis**!

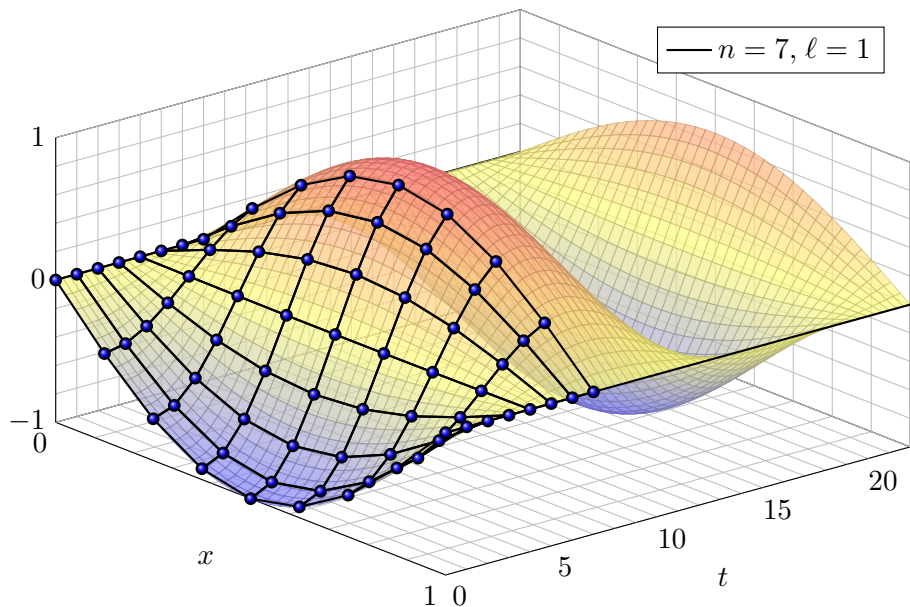
Wir haben je zwei unabhängige Eigenfunktionen gefunden, $\partial_t^2 u_\ell = -\omega_\ell^2 u_\ell$ und $\partial_t^2 v_\ell = -\omega_\ell^2 v_\ell$. Das hilft: Die Eigenwerte $\omega_1^2 < \dots < \omega_n^2$ sind verschieden. Dank Satz N2B sind die zugehörigen Eigenfunktionen linear unabhängig. Die zugehörigen Eigenräume bilden eine direkte Summe.

Eigenfunktionen: Grundschiwingung ($\ell = 1$)

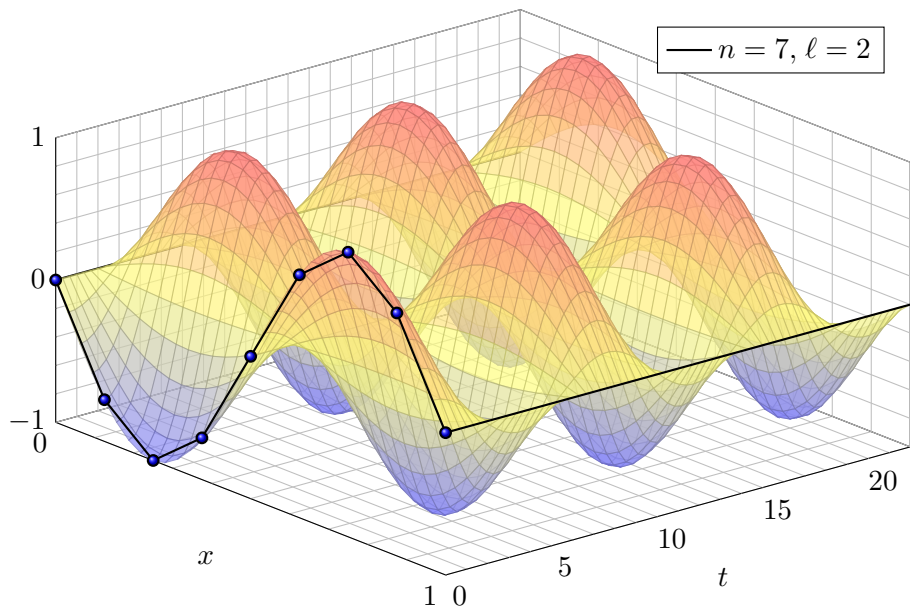
Das ist eine stehende Welle, mit Randbedingungen $u_0(t) = u_{n+1}(t) = 0$.

Eigenfunktionen: Oberschwingung ($\ell = 2$)

Auch dies ist eine stehende Welle; die Frequenz $\omega_2 > \omega_1$ wird größer.

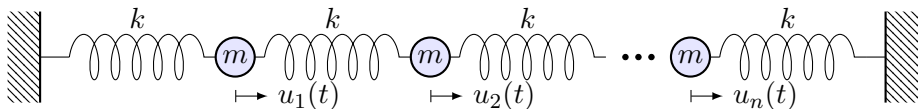
Eigenfunktionen: Grundschiwingung ($\ell = 1$)

Dieses Phänomen kennt jedes Kind vom Seilspringen. Probieren Sie es!

Eigenfunktionen: erste Oberschwingung ($\ell = 2$)

😊 Von der Intuition zur Präzision: Nun können Sie alles ausrechnen!

Eigenfunktionen und Eigenvektoren



Lemma P1A: Lösung eines DGSystems durch Eigenfunktionen

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Zu lösen sei das DGSystem

$$y'(t) = A y(t) \quad \text{für} \quad y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n.$$

Eine **Eigenfunktion** zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$ ist eine Lösung der Form

$$y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n \quad \text{mit} \quad y(t) = e^{\lambda t} v$$

und $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$. Wir vergleichen $y'(t) = \lambda e^{\lambda t} v$ und $A y(t) = A e^{\lambda t} v$.
Somit ist $y'(t) = A y(t)$ äquivalent zur **Eigenvektorgleichung** $Av = \lambda v$.

😊 Hier zahlen sich erneut Ihre Kenntnisse der linearen Algebra aus: Eigenwerte und -vektoren von Matrizen beherrschen Sie seit der HM1. Mit dieser Technik lösen Sie nun auch Differentialgleichungssysteme!

Algorithmus zur Berechnung von Eigenvektoren

Aufgabe: Sei V ein Vektorraum über dem Grundkörper $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

(1) Was ist ein Eigenvektor & -wert einer \mathbb{K} -linearen Abb. $f: V \rightarrow V$?

(2) Finden Sie alle EV / EW der Ableitung $\partial = d/dx: V_i \rightarrow V_i$ auf

$$V_1 = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}) = \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ ist beliebig oft differenzierbar} \},$$

$$V_2 = \{ a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \mid n \in \mathbb{N}, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K} \} \subseteq C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}),$$

$$V_3 = \{ a_1x^{-1} + \dots + a_nx^{-n} \mid n \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K} \} \subseteq C^\infty(\mathbb{R}_{>0}, \mathbb{K}).$$

Gibt es lineare Abbildungen ohne Eigenwert? mit unendlich vielen?

Gibt es solche extremen Fälle auch für lineare Abbildung $f: V \rightarrow V$ auf einem endlich-dimensionalen \mathbb{C} -Vektorraum? oder \mathbb{R} -Vektorraum?

(3) Erklären Sie den Zusammenhang lineare Abbildung – Matrix sowie Eigenvektor / Eigenwert – Determinante – charakteristisches Polynom.

Lösung: (1) Ein **Eigenvektor** der \mathbb{K} -linearen Abbildung $f: V \rightarrow V$ ist ein Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ mit der Eigenschaft $f(v) = \lambda v$ für ein $\lambda \in \mathbb{K}$.

Wir nennen dann λ einen **Eigenwert** von f , und v einen Eigenvektor zum Eigenwert λ . (Der Vektor $v \neq 0$ bestimmt den Skalar λ eindeutig.)

Algorithmus zur Berechnung von Eigenvektoren

(2) Beispiele: (a) $V_1 = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ ist ein \mathbb{K} -Vektorraum. Die Ableitung $\partial: V_1 \rightarrow V_1$ ist eine \mathbb{K} -lineare Abbildung. Für jede Zahl $\lambda \in \mathbb{K}$ ist die Exponentialfunktion $t \mapsto e^{\lambda t}$ ein Eigenvektor von ∂ zum Eigenwert λ , denn $\partial e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}$. Vielfache sind die einzigen Lösungen (Satz M2D).

(b) Auch auf der Polynomalgebra $\mathbb{K}[x] = \{ a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \}$ ist die Ableitung $\partial: \mathbb{K}[x] \rightarrow \mathbb{K}[x]$ eine \mathbb{K} -lineare Abbildung. Eigenvektoren sind hier die konstanten Funktionen $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, denn es gilt $\partial c = 0 = 0 \cdot c$. Für jedes Polynom $P \in \mathbb{K}[x]$ vom Grad $n \geq 1$ hat die Ableitung ∂P den Grad $n - 1$, ist also sicher kein Vielfaches von P , also kein Eigenvektor.

(c) Auch auf der Algebra $V_3 = \{ a_1x^{-1} + \cdots + a_nx^{-n} \}$ ist die Ableitung $\partial: V_3 \rightarrow V_3$ eine \mathbb{K} -lineare Abbildung. Diese hat keine Eigenvektoren!

Das sind lehrreiche und mahnende Beispiele: Es gibt also durchaus lineare Abbildungen ohne Eigenwert (c) oder mit unendlich vielen (a).

Solche Komplikationen sind ausgeschlossen für jede lineare Abbildung $f: V \rightarrow V$ auf einem endlich-dimensionalen \mathbb{C} -Vektorraum oder einem ungerade-dimensionalen \mathbb{R} -Vektorraum, wie folgende Rechnung zeigt.

Algorithmus zur Berechnung von Eigenvektoren

(3) Ist V endlich-dimensional, so können wir eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ wählen. Jede lineare Abbildung $f: V \rightarrow V$ können wir dann durch ihre Matrix $A = {}_{\mathcal{B}}(f)_{\mathcal{B}} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ darstellen. Für $v = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$ gilt $f(v) = \lambda v$ genau dann, wenn $Au = \lambda u$ gilt. Damit wird das Problem berechenbar! Für Matrizen können wir die **Determinante** nutzen:

$$\begin{aligned} \exists v \in V, v \neq 0: \quad & f(v) = \lambda v \\ \iff \exists u \in \mathbb{K}^n, u \neq 0: \quad & Au = \lambda u \\ \iff \exists u \in \mathbb{K}^n, u \neq 0: \quad & (A - \lambda E)u = 0 \\ \iff \exists u \in \mathbb{K}^n, u \neq 0: \quad & u \in \ker(A - \lambda E) \\ \iff & \ker(A - \lambda E) \neq \{0\} \\ \iff & \det(A - \lambda E) = 0 \end{aligned}$$

Für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist $p_A(x) := \det(A - xE) \in \mathbb{K}[x]$ ein Polynom vom Grad n über \mathbb{K} . Wir nennen es das **charakteristische Polynom**. Unsere Rechnung zeigt: Die Nullstellen des Polynoms p_A sind genau die Eigenwerte von A . Damit können wir EW und EV berechnen!



Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §6.

Eigenfunktionen und Eigenvektoren

Satz P1B: Lösung eines DGSystems durch Eigenfunktionen

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Zu lösen sei das DGSystem

$$y'(t) = A y(t) \quad \text{für} \quad y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n.$$


Der \mathbb{K} -Vektorraum aller Lösungen $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n$ hat Dimension n . (O3B)
Eigenvektoren $v_1, \dots, v_\ell \in \mathbb{K}^n$ mit $Av_k = \lambda_k v_k$ liefern Eigenfunktionen

$$y_1, \dots, y_\ell: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n \quad \text{mit} \quad y_k(t) = e^{\lambda_k t} v_k.$$

Genau dann sind die Eigenfunktionen y_1, \dots, y_ℓ **linear unabhängig**, wenn die Eigenvektoren $v_1, \dots, v_\ell \in \mathbb{K}^n$ linear unabhängig sind. (O3B)

Genau dann bilden y_1, \dots, y_n eine **Basis** des Lösungsraums der DG, wenn die Vektoren v_1, \dots, v_n eine Basis des Vektorraums \mathbb{K}^n bilden.

Letzteres nennen wir ein **Fundamentalsystem** aus Eigenfunktionen.

 Eigenvektoren von A entsprechen Eigenfunktionen von $y' = A y$. Dies sind jedoch verschiedene Objekte: Bitte sauber unterscheiden!

Anwendungsbeispiel zu Eigenfunktionen

Aufgabe: Lösen Sie das Differentialgleichungssystem mit AWP

$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_1(t) + y_2(t), & y_1(0) = 1, \\ y_2'(t) = y_1(t) - y_2(t), & y_2(0) = 2. \end{cases}$$

- (1) Welche Struktur hat der allgemeine Lösungsraum? (Form & Größe)
- (2) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem aus Eigenfunktionen.
- (3) Wie erhalten Sie hieraus eine allgemeine Lösung $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$?
Stabilität: Wie verhalten sich die Lösungen für $t \rightarrow \infty$?
- (4) Lösen Sie damit speziell das Anfangswertproblem!

Lösung: (1) Dies ist eine homogene lineare Differentialgleichung:

$$y'(t) = A y(t) \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Lösungen $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^2$ bilden einen \mathbb{K} -Vektorraum der Dimension 2.

😊 Die Lösungen haben wir zuvor bereits durch scharfes Hinsehen gefunden (O309). Mit den Werkzeugen der linearen Algebra können wir diesen Trick jetzt endlich zu einer systematischen Methode ausbauen!

Anwendungsbeispiel zu Eigenfunktionen

(2) Wir berechnen das **charakteristische Polynom** von A :

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \det(A - xE) = \det \begin{pmatrix} -1-x & 1 \\ 1 & -1-x \end{pmatrix} \\ &= (-1-x)^2 - 1 = x^2 + 2x = x(x+2) \end{aligned}$$

Die **Eigenwerte** sind demnach $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = -2$.

Wir suchen **Eigenvektoren**. Zu $\lambda_1 = 0$ lösen wir $(A - \lambda_1 E)v_1 = 0$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} v_1 = 0, \quad \text{eine Lösung } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zu $\lambda_2 = -2$ lösen wir entsprechend $(A - \lambda_2 E)v_2 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v_2 = 0, \quad \text{eine Lösung } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten das **Fundamentalsystem** bzw. die **Fundamentalmatrix**:

$$y_1(t) = e^{0t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y_2(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \implies Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^{-2t} \\ 1 & -e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Beide Lösungen sind linear unabhängig, denn $\det Y(t) = -2e^{-2t} \neq 0$.

Anwendungsbeispiel zu Eigenfunktionen

(3) **Allgemeine Lösung** unseres DGSystems $y'(t) = A y(t)$:

$$y(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e^{-2t} \\ 1 & -e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = Y(t) c$$

(4) **Spezielle Lösung** zu den gegebenen Anfangsdaten:

$$y(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Zu lösen ist hierzu das LGS $Y(0) c = y(0)$, also $c = Y(0)^{-1} y(0)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Die gesuchte **Lösung des Anfangswertproblems** ist demnach:

$$y(t) = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 - e^{-2t} \\ 3 + e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Probe! $y(0) = (1, 2)$, $y_1' = -2e^{-2x} = -y_1 + y_2$, $y_2' = 2e^{-2x} = y_1 - y_2$.

Von Eigenvektoren zu Hauptvektoren

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist **diagonalisierbar** über \mathbb{K} , wenn es eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ des \mathbb{K}^n aus Eigenvektoren gibt, also $Av_k = \lambda_k v_k$. (P1B)

Beispiel: Jede symmetrische / hermitesche Matrix ist diagonalisierbar!

Bezüglich dieser Basis hat die Abbildung $v \mapsto Av$ Diagonalgestalt:

$$\mathcal{B}(A)\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

Nicht jede Matrix ist diagonalisierbar! Typisch ist der **Jordan-Block**:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}, \quad B - \lambda E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es gibt nicht genug Eigenvektoren: $\ker(B - \lambda) = \mathbb{K}e_1$ ist eindimensional.

Stattdessen haben wir $Be_k = \lambda e_k + e_{k-1}$, also eine **Hauptvektorkette**:

$$0 \xleftarrow{B-\lambda} e_1 \xleftarrow{B-\lambda} e_2 \xleftarrow{B-\lambda} \dots \xleftarrow{B-\lambda} e_n$$

Von Eigenvektoren zu Hauptvektoren

😊 Für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hat das charakteristische Polynom genau n Nullstellen in \mathbb{C} , also $p_A(x) = \det(A - xE) = (\lambda_1 - x) \cdots (\lambda_n - x)$.

😊 Sind zudem alle $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ verschieden, so ist A diagonalisierbar.

⚠️ Bei mehrfachen Nullstellen müssen wir genauer hinschauen! P127

😊 Satz 11κ: Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch bzw. $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch sind alle EW reell, für jeden erreicht die geometrische Vielfachheit die algebraische, EV zu verschiedenen EW stehen senkrecht aufeinander, somit gibt es eine Orthonormalbasis des \mathbb{K}^n aus Eigenvektoren von A .

😞 Jordan-Block: $p_B(x) = (\lambda - x)^n$ hat die n -fache Nullstelle λ .
Der zugehörige Kern $\ker(B - \lambda E) = \mathbb{C}e_1$ hat aber nur Dimension 1:
Die geometrische Vielfachheit (1) ist kleiner als die algebraische (n).
Deshalb existiert keine Basis des \mathbb{C}^n aus Eigenvektoren von B !

Anders gesagt: Für die Matrix B existieren nicht genug Eigenvektoren, um eine Basis zu bilden. Mit der Verallgemeinerung zu Hauptvektoren können wir dieses Problem allgemein lösen. Die Matrix kommt zwar nicht in Diagonalform, wird aber immerhin so einfach wie möglich.

Von Eigenvektoren zu Hauptvektoren

Definition P1C: Hauptvektoren

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Matrix und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Skalar. Eine **Hauptvektorkette**

$$0 \xleftarrow{A-\lambda} v_1 \xleftarrow{A-\lambda} v_2 \xleftarrow{A-\lambda} \dots \xleftarrow{A-\lambda} v_\ell$$

besteht aus Vektoren $0 \neq v_1, \dots, v_\ell \in \mathbb{C}^n$ mit $(A - \lambda)v_k = v_{k-1}$.

Die Vektoren v_1, v_2, \dots, v_ℓ sind linear unabhängig. Wie Eigenvektoren sind auch Hauptvektoren zu verschiedenen Eigenwerten unabhängig.

Satz P1D: Jordan–Basis einer Matrix

- (1) Zu $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ existiert eine Basis \mathcal{B} des \mathbb{C}^n aus Hauptvektorketten.
- (2) Bezüglich dieser Basis \mathcal{B} besteht $v \mapsto Av$ aus Jordan–Blöcken:

$$\mathcal{B}(A)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_m \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad B_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Von Eigenvektoren zu Hauptvektoren

Wir nennen v_k einen **Hauptvektor k -ter Stufe**. Das bedeutet:

$$(A - \lambda E)^k v_k = 0 \quad \text{aber} \quad v_k = (A - \lambda E)^{k-1} v_k \neq 0$$

Die Eigenvektoren v_1 von A sind genau die **Hauptvektoren 1. Stufe**:

$$(A - \lambda E)^1 v_1 = 0 \quad \text{aber} \quad v_1 = (A - \lambda E)^0 v_1 \neq 0$$

Ein Vektor v_2 mit $(A - \lambda E)v_2 = v_1$ ist dann **Hauptvektor 2. Stufe**.

Ein Vektor v_3 mit $(A - \lambda E)v_3 = v_2$ ist dann **Hauptvektor 3. Stufe**, usw.

Daher heißen Hauptvektoren auch **verallgemeinerte Eigenvektoren**.

Jeder k -fache Eigenwert λ erlaubt mindestens einen und höchstens k linear unabhängige Eigenvektoren; alle Möglichkeiten können auftreten.

Hingegen existieren zu λ immer k linear unabhängige Hauptvektoren!

Genauer besagt Satz P1D: Es gibt eine Basis aus Hauptvektorketten.

□ Zur Vertiefung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §Z.4. Sei \mathbb{K} ein Körper, etwa \mathbb{R} oder \mathbb{C} , und $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix über \mathbb{K} . Dann gelten folgende Implikationen: Das char. Polynom hat n verschiedene Nullstellen in $\mathbb{K} \Rightarrow$ Die Matrix ist über \mathbb{K} diagonalisierbar \Leftrightarrow Es existiert eine Basis des \mathbb{K}^n aus Eigenvektoren \Rightarrow Das char. Polynom hat n Nullstellen in $\mathbb{K} \Leftrightarrow$ Die Matrix ist über \mathbb{K} trigonalisierbar \Leftrightarrow Die Matrix ist über \mathbb{K} jordanisierbar \Leftrightarrow Es existiert eine Jordan-Basis des \mathbb{K}^n aus Hauptvektorketten von A . Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt Letzteres immer.

Algorithmus zur Berechnung von Hauptvektoren

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine reelle / komplexe $n \times n$ -Matrix. Das charakteristische Polynom $p_A(x) = \det(A - xE) \in \mathbb{C}[x]$ zerfällt über \mathbb{C} in Linearfaktoren:

$$p_A(x) = \pm(x - \lambda_1)^{n_1} \cdots (x - \lambda_\ell)^{n_\ell}$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell \in \mathbb{C}$ und $n_1, \dots, n_\ell \in \mathbb{N}_{\geq 1}$; hierbei gelte $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$. Daher existiert zu $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Basis des \mathbb{C}^n aus Hauptvektorketten.

Ebenso: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reelle Matrix, und das charakteristische Polynom $p_A(x) = \det(A - xE) \in \mathbb{R}[x]$ zerfalle in Linearfaktoren über \mathbb{R} . Dann existiert zu $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Basis des \mathbb{R}^n aus Hauptvektorketten. (Meist müssen wir hierzu jedoch von \mathbb{R} zu \mathbb{C} übergehen.)

Wir berechnen im Folgenden Hauptvektoren zu jedem Eigenwert $\lambda = \lambda_k$. Zusammen liefern diese die gewünschte Basis aus Hauptvektorketten. Dieser Algorithmus beweist somit die Richtigkeit des obigen Satzes P1D. (Den Nachweis der Richtigkeit aller Schritte führen wir hier nicht.)

Das Verfahren besteht aus zwei Schritten: Im ersten Schritt finden wir stufenweise eine Basis aus Hauptvektoren der Stufe $s = 1, 2, \dots, r$. Im zweiten Schritt ordnen wir diese Hauptvektoren dann zu Ketten.

Algorithmus zur Berechnung von Hauptvektoren

...	...	b_{k_r}
-----	-----	-----------

Hauptvektoren r . Stufe

...	b_{k_2}	
b_1	b_2	b_{k_1}

Hauptvektoren 2. Stufe

Eigenvektoren (1. Stufe)

1. Schritt: Wir finden stufenweise eine Basis aus Hauptvektoren.Bestimme eine Basis b_1, \dots, b_{k_1} des Kerns $V_1 = \ker(A - \lambda E)$.Im Falle $k_1 = n_1$ haben wir eine Basis aus Eigenvektoren. Andernfalls:Ergänze zu einer Basis b_1, \dots, b_{k_2} des Kerns $V_2 = \ker(A - \lambda E)^2 \supseteq V_1$.Im Falle $k_2 = n_1$ haben wir eine Basis aus Hauptvektoren. Andernfalls:Ergänze zu einer Basis b_1, \dots, b_{k_r} des Kerns $V_r = \ker(A - \lambda E)^r \supseteq V_{r-1}$.Schließlich gilt $k_r = n_1$ und wir haben eine Basis aus Hauptvektoren.

Algorithmus zur Berechnung von Hauptvektoren

v_1^r	\dots	$v_{m_r}^r$
---------	---------	-------------

Hauptvektoren r . Stufe

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & & (A - \lambda E) \end{array}$$

v_1^2	\dots	\dots	$v_{m_1}^2$	
v_1^1	\dots	\dots	\dots	$v_{m_1}^1$

Hauptvektoren 2. Stufe

Eigenvektoren (1. Stufe)

2. Schritt: Wir ordnen unsere Hauptvektoren zu Ketten.

Wir bilden eine Basis sodass $(A - \lambda E)v_i^s = v_i^{s-1}$ in jeder Stufe $s \geq 2$.

Ausführlich gehen wir nach obigem Schema von oben nach unten vor:

Die oberste Stufe $v_1^r, \dots, v_{m_r}^r$ wurde im 1. Schritt bereits berechnet.

Ist $v_1^{s+1}, \dots, v_{m_{s+1}}^{s+1}$ in Stufe $s+1$ bereits berechnet, so erhalten wir

$v_i^s := (A - \lambda E)v_i^{s+1}$ und ergänzen zur Basis $v_1^s, \dots, v_{m_s}^s$ der Stufe s .

Algorithmus zur Berechnung von Hauptvektoren

Die Abbildung $(A - \lambda E)$ bildet die Stufe $s + 1$ injektiv in die Stufe s ab. Insbesondere ist demnach die Stufe $s + 1$ niemals breiter als die Stufe s .

Im 2. Schritt sind die $v_1^{s+1}, \dots, v_{m_{s+1}}^{s+1}$ in Stufe $s + 1$ linear unabhängig, und somit auch die zugehörigen Bilder $v_i^s := (A - \lambda E)v_i^{s+1}$ in Stufe s .

Es genügt, diese Vektoren in die bestehende Basis einzutauschen gemäß dem Basisaustauschlemma von Steinitz. Anders gesagt:

Wir wählen einen Hauptvektor höchster Stufe und bilden seine Kette.

Wir ergänzen durch linear unabhängige Ketten bis eine **Basis des Hauptraumes** $H_\lambda = \ker(A - \lambda E)^r$ aus Hauptvektorketten gefunden ist.

Diese Konstruktion führen wir für jeden Hauptraum $H_{\lambda_k} = \ker(A - \lambda_k)^{n_k}$ aus und erhalten so die ersehnte **Jordan-Basis** zu unserer Matrix A .

😊 Der Begriff und die Berechnung von Hauptvektoren mag zunächst kompliziert erscheinen, er ist aber kaum komplizierter als der Begriff und die Berechnung von Eigenvektoren. Hier lohnt sich erneut Ihre langfristige Investition in die mathematischen Grundlagen der HM1&2!

📖 Für Ausführungen und Beispiele siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §Z.4.

Hauptfunktionen und Hauptvektoren

Satz P1E: Lösung eines DGSystems durch Hauptfunktionen

Vorgelegt sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Zu lösen sei das DGSystem $y'(t) = A y(t)$.

Hierzu sei $0 \xleftarrow{A-\lambda} v_1 \xleftarrow{A-\lambda} v_2 \xleftarrow{A-\lambda} \dots \xleftarrow{A-\lambda} v_\ell$ eine **Hauptvektorkette**.

(1) Wir definieren die zugehörigen **Hauptfunktionen** y_1, \dots, y_ℓ durch

$$y_k(t) = e^{\lambda t} \left[v_k + t v_{k-1} + \frac{t^2}{2} v_{k-2} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} v_1 \right].$$

Die Hauptvektoren $v_1, \dots, v_\ell \in \mathbb{C}^n$ sind linear unabhängig, daher auch die zugehörigen Hauptfunktionen $y_1, \dots, y_\ell: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$, denn $y_k(0) = v_k$.

(2) Wie die Hauptvektoren bilden auch die Hauptfunktionen eine Kette:

$$\begin{aligned} 0 \xleftarrow{A-\lambda} y_1 \xleftarrow{A-\lambda} y_2 \xleftarrow{A-\lambda} \dots \xleftarrow{A-\lambda} y_\ell & \quad \text{also} \quad A y_k = \lambda y_k + y_{k-1}, \\ 0 \xleftarrow{\partial-\lambda} y_1 \xleftarrow{\partial-\lambda} y_2 \xleftarrow{\partial-\lambda} \dots \xleftarrow{\partial-\lambda} y_\ell & \quad \text{also} \quad y'_k = \lambda y_k + y_{k-1}. \end{aligned}$$

Insbesondere lösen $y_1, \dots, y_\ell: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ unser DGSystem $y'(t) = A y(t)$.

Hauptfunktionen und Hauptvektoren

☺ Ist A diagonalisierbar, so können wir unsere Differentialgleichungen vollständig entkoppeln (P1B): Wir finden eine Basis (v_1, \dots, v_n) des \mathbb{C}^n aus Eigenvektoren, $Av_k = \lambda_k v_k$. Diese liefert uns sofort eine Basis aus Eigenfunktionen $y_1, \dots, y_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ mit $y_k(t) = e^{\lambda_k t} v_k$. (Satz P1B)

☺ Ist A nicht diagonalisierbar, so doch immerhin noch jordanisierbar: Es existiert eine Basis des Raumes \mathbb{C}^n aus Hauptvektoren, und diese liefern eine Basis des Lösungsraumes L_0 aus Hauptfunktionen.

☺ Damit ist das zunächst schwierige analytische Problem, ein DGSsystem $y'(t) = Ay(t)$ zu lösen, zurückgeführt auf das einfachere algebraische Problem, Hauptvektoren der Matrix A zu berechnen. Das ist zwar mitunter mühsam, aber letztlich Routinearbeit. Es kann insbesondere von Computer-Algebra-Systemen ausgeführt werden.

☺ Wir erkennen hieran Stabilität und Langzeitverhalten der Lösungen: Für $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ gilt exponentielles Abklingen, $|y_k(t)| \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$. Für $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ gilt exponentielles Wachstum, $|y_k(t)| \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$. Für $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$ ist y_1 beschränkt, aber y_2, \dots, y_l wachsen polynomiell.

Anwendungsbeispiel zu Hauptfunktionen

Aufgabe: Finden Sie ein Fundamentalsystem aus Hauptfunktionen zu

$$(1) \quad y' = A y \text{ mit } A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (2) \quad y' = B y \text{ mit } B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Wie verhalten sich die Lösungen für $t \rightarrow \infty$ und $\lambda < 0$? $\lambda > 0$? $\lambda = 0$?

Lösung: (1) Die Matrix A hat den doppelten Eigenwert λ .

Eigenvektoren bestimmen wir durch $(A - \lambda)v = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v = 0, \quad \text{mögliche Lösungen } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten das Fundamentalsystem bzw. die Fundamentalmatrix:

$$y_1(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y_2(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \implies \quad Y(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

😊 Jede andere Basis (v_1, v_2) des \mathbb{C}^2 wäre hier ebenso möglich.

Sie führt zum Fundamentalsystem $y_1(t) = e^{\lambda t} v_1$, $y_2(t) = e^{\lambda t} v_2$.

⚠️ Eigenvektoren von A entsprechen Eigenfunktionen von $y' = A y$, aber es sind verschiedene Objekte: Bitte sauber unterscheiden!

Anwendungsbeispiel zu Hauptfunktionen

(2) Auch die Matrix B hat den doppelten Eigenwert λ . Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_1 = 0, \quad \text{eine Lösung ist } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir suchen daher noch einen Hauptvektor v_2 über v_1 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_2 = v_1, \quad \text{eine Lösung ist } v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten das Fundamentalsystem bzw. die Fundamentalmatrix:

$$y_1(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y_2(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \implies Y(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

😊 Andere Wahlen sind möglich: Jeder Vektor $v_1 = (a, 0)$ mit $a \neq 0$ ist Eigenvektor, und jeder Vektor $v_2 = (b, a)$ liegt darüber als Hauptvektor.

$$y_1(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y_2(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} at + b \\ a \end{pmatrix} \implies Y(t) = \begin{pmatrix} a e^{\lambda t} & (at + b) e^{\lambda t} \\ 0 & a e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

⚠️ Hauptvektoren von A entsprechen Hauptfunktionen von $y' = Ay$, aber es sind verschiedene Objekte: Bitte sauber unterscheiden!

Von komplexen zu reellen Lösungen

Zur Vereinfachung haben wir bisher alles komplex betrachtet.

Vorteil: Jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hat n Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.

Für eine reelle Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ werden wir im Allgemeinen nicht n reelle Eigenwerte finden: Wir brauchen auch komplexe Eigenwerte!

Für reelle DGSysteme wollen wir aber meist nur reelle Lösungen!
Den genial-einfachen Zusammenhang können wir leicht klären:

Lemma P1F: Konjugation von Lösungen

Gegeben sei die Systemmatrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Zu lösen sei das DGSystem

$$y'(t) = A y(t).$$

Ist $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ Lösung von $y' = A y$, so ist \bar{y} Lösung von $\bar{y}' = \bar{A} \bar{y}$.

Genau dann ist unsere Matrix reell, also $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, wenn $\bar{A} = A$ gilt.

In diesem Fall ist mit $y' = A y$ automatisch auch $\bar{y}' = A \bar{y}$ eine Lösung.

Somit sind $\operatorname{Re} y = \frac{1}{2}(y + \bar{y})$ und $\operatorname{Im} y = \frac{1}{2i}(y - \bar{y})$ reelle Lösungen.

Umgekehrt gilt $\{y, \bar{y}\} = \{\operatorname{Re} y \pm i \operatorname{Im} y\}$. Dies ist ein Basiswechsel!

Von komplexen zu reellen Lösungen

Satz P1G: reelle Lösungen

Gegeben sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zu lösen sei das DGSytem $y'(t) = Ay(t)$.

Sei $0 \xleftarrow{A-\lambda} v_1 \xleftarrow{A-\lambda} \dots \xleftarrow{A-\lambda} v_\ell$ eine Hauptvektorkette zu $\lambda = \sigma + i\omega$.

Dann ist $0 \xleftarrow{A-\bar{\lambda}} \bar{v}_1 \dots \xleftarrow{A-\bar{\lambda}} \bar{v}_\ell$ eine Hauptvektorkette zu $\bar{\lambda} = \sigma - i\omega$.

Dank Basiswechsel P1F hat das DGSytem 2ℓ **reelle Lösungen**

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} y_k(t) &= e^{\sigma t} \operatorname{Re} \left(e^{i\omega t} \left[v_k + t v_{k-1} + \frac{t^2}{2} v_{k-2} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} v_1 \right] \right), \\ \operatorname{Im} y_k(t) &= e^{\sigma t} \operatorname{Im} \left(e^{i\omega t} \left[v_k + t v_{k-1} + \frac{t^2}{2} v_{k-2} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} v_1 \right] \right). \end{aligned}$$

Im Falle $\omega \neq 0$ sind diese 2ℓ Lösungen linear unabhängig. (Im Falle $\omega = 0$ erhalten wir nur eine Kette von ℓ linear unabhängigen Lösungen.)

😊 Wir erkennen hieran Stabilität und Langzeitverhalten der Lösungen, wie oben erklärt, je nach Vorzeichen $\sigma > 0$ oder $\sigma < 0$ oder $\sigma = 0$.

Anwendungsbeispiel: komplex und reell

Aufgabe: Zu lösen sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} y_1' = -2y_1 + 1y_2, & y_1(0) = 1, \\ y_2' = -1y_1 - 2y_2, & y_2(0) = 2. \end{cases}$$

- (1) Finden Sie ein komplexes Fundamentalsystem und (2) ein reelles.
- (3) Stabilität: Wie verhalten sich die Lösungen für $t \rightarrow \infty$?
- (4) Lösen Sie schließlich das AWP.

Lösung: In Matrix-Schreibweise gilt $y' = Ay$ mit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Das charakteristische Polynom der Matrix A ist:

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -2 - \lambda & 1 \\ -1 & -2 - \lambda \end{pmatrix} = (-2 - \lambda)^2 + 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 5$$

Die Nullstellen sind $\lambda_{1/2} = -2 \pm \sqrt{4 - 5} = -2 \pm i$. Eigenvektoren?

Zu $\lambda_1 = -2 + i$: $\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} v_1 = 0$, eine Lösung $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

Zu $\lambda_2 = -2 - i$: $\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} v_2 = 0$, eine Lösung $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

Anwendungsbeispiel: komplex und reell

(1) Komplexes Fundamentalsystem des DGSystems:

$$u_1(t) = e^{(-2+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ -\sin t + i \cos t \end{pmatrix}, \quad u_2(t) = e^{(-2-i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

(2) Basiswechsel zu einem reellen Fundamentalsystem:

$$y_1(t) = \operatorname{Re} u_1(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \quad y_2(t) = \operatorname{Im} u_1(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

(3) Die allgemeine reelle Lösung klingt exponentiell ab:

$$y(t) = Y(t) c = e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

(4) Spezielle Lösung zu den gegebenen Anfangsdaten:

$$y(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \implies y(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos t + 2 \sin t \\ 2 \cos t - \sin t \end{pmatrix}.$$



Dies löst das Anfangswertproblem. Machen Sie die Probe!

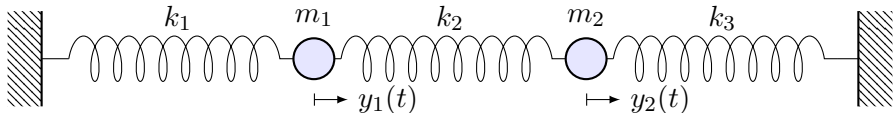
Anwendungsbeispiel: gekoppelte Schwingungen

Aufgabe: Zu lösen sei folgende Bewegungsgleichung:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2+k_3}{m_2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

- (1) Finden Sie ein komplexes Fundamentalsystem und (2) ein reelles.
- (3) Stabilität: Wie verhalten sich die Lösungen für $t \rightarrow \infty$?
- (4) Lösen Sie schließlich das AWP $y(0) = (2, 0, 0, 0)$.

Lösung: Wir erkennen das Modell von zwei gekoppelten Oszillatoren:



Dieses System können wir nach obigem Schema lösen: char. Polynom, Eigenwerte, Eigenvektoren, ... Diese Daten müssen wir nicht mühsam neu berechnen, denn hier kennen wir die Lösung bereits! O109 P101

Anwendungsbeispiel: gekoppelte Schwingungen

(1) Wir kennen ein Fundamentalsystem komplexer Eigenfunktionen:

$$e^{i\omega_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i\omega_1 \\ i\omega_1 \end{pmatrix}, \quad e^{-i\omega_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -i\omega_1 \\ -i\omega_1 \end{pmatrix}, \quad e^{i\omega_2 t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ i\omega_2 \\ -i\omega_2 \end{pmatrix}, \quad e^{-i\omega_2 t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -i\omega_2 \\ i\omega_2 \end{pmatrix}$$

Die Frequenzen sind hierbei $\omega_1^2 = k_1/m$ und $\omega_2^2 = (k_1 + 2k_2)/m$.

Diese Lösung beschert uns nebenbei die Eigenvektoren der Matrix A .
Eigenwerte $\pm i\omega_1$ und $\pm i\omega_2$, char. Polynom $p_A(x) = (x^2 + \omega_1^2)(x^2 + \omega_2^2)$.

(2) Wir erhalten ein Fundamentalsystem reeller Eigenfunktionen:

$$\begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t) \\ \cos(\omega_1 t) \\ -\omega_1 \sin(\omega_1 t) \\ -\omega_1 \sin(\omega_1 t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sin(\omega_1 t) \\ \sin(\omega_1 t) \\ \omega_1 \cos(\omega_1 t) \\ \omega_1 \cos(\omega_1 t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos(\omega_2 t) \\ -\cos(\omega_2 t) \\ -\omega_2 \sin(\omega_2 t) \\ \omega_2 \sin(\omega_2 t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sin(\omega_2 t) \\ -\sin(\omega_2 t) \\ \omega_2 \cos(\omega_2 t) \\ -\omega_2 \cos(\omega_2 t) \end{pmatrix}$$

(3) Für $t \rightarrow \infty$ bleibt jede Lösung $y = c_1 y_1 + \dots + c_4 y_4$ beschränkt.

(4) Das AWP $y(0) = (2, 0, 0, 0)$ wird gelöst durch $y(t) = y_1(t) + y_3(t)$.

Eigen-/Hauptfunktionen und Stabilität

Aufgabe: (Klausur September 2013) Wir untersuchen das lineare Differentialgleichungssystem $y'(t) = A y(t)$ mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad v_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \mp i \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (1) Berechnen Sie die Vektoren Av_1, Av_2, Av_3, Av_4 und schreiben Sie jeden als Linearkombination bezüglich der Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$.
- (2) Schreiben Sie die Abbildung A als Matrix $B = {}_{\mathcal{B}}(A)_{\mathcal{B}}$ und lesen Sie das char. Polynom $p_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)(x - \lambda_3)(x - \lambda_4)$ ab.
- (3) Bestimmen Sie zu $y'(t) = A y(t)$ ein reelles Fundamentalsystem $y_1, y_2, y_3, y_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ mit Anfangswerten $y_1(0) = (1, 0, 0, 0) = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$ und $y_2(0) = (0, 0, 1, 0) = \frac{i}{2}(v_1 - v_2)$ sowie $y_3(0) = v_3$ und $y_4(0) = v_4$.
- (4) Stabilität: Wenn Sie zufällig (stetig verteilt) einen Startvektor $y(0) \in \mathbb{R}^4$ nahe Null wählen und die zugehörige Lösung von $y'(t) = A y(t)$ verfolgen, wie verhält sich $|y(t)|$ für $t \rightarrow \infty$?

Eigen-/Hauptfunktionen und Stabilität

⚠ Es ist für diesen Aufgabentyp nicht sinnvoll, blind und stur nach Schema loszurechnen: char. Polynom, Eigenwerte, Eigenvektoren, ... Dieser lange Weg ist nötig, wenn Sie außer der Matrix nichts wissen. Diese Daten müssen Sie jedoch nicht mühsam neu berechnen, wenn alle wesentlichen Daten bereits vorliegen! Hierzu dienen (1) und (2).

😊 Es ist hier (wie fast immer im Leben) geschickter und effizienter, die bereits vorliegende Information zu verstehen und auszunutzen.

Zu (3): Hier können und sollen Sie unsere Lösungsformeln anwenden.

Zu (4): Der Startpunkt $y(0) = 0$ ist ein Fixpunkt dieses dynamischen Systems, der weitere Verlauf ist offensichtlich $y(t) = 0$ für alle $t \geq 0$.

Anfangsdaten sind oft zufälligen kleinen Schwankungen unterworfen, etwa durch kleine äußere Störungen oder ungenaue Messdaten.

Wir betrachten daher einen zufälligen Startwert $y(0)$ nahe Null.

Entscheidend ist das Langzeitverhalten von $|y(t)|$ für $t \rightarrow \infty$:

- Gilt Abklingen $|y(t)| \rightarrow 0$? sogar exponentiell?
- Gilt Beschränktheit gemäß $0 < c_0 \leq |y(t)| \leq c_1 < \infty$?
- Gilt Wachstum $|y_k(t)| \rightarrow \infty$? nur polynomiell? gar exponentiell?

Lösung: (1) Die vorgeschlagene Rechnung ergibt folgendes:

$$Av_1 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} iv_1 \\ +0v_2 \\ +0v_3 \\ +0v_4 \end{cases}, \quad Av_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 0v_1 \\ -iv_2 \\ +0v_3 \\ +0v_4 \end{cases},$$

$$Av_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 0v_1 \\ +0v_2 \\ +0v_3 \\ +0v_4 \end{cases}, \quad Av_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 0v_1 \\ +0v_2 \\ +1v_3 \\ +0v_4 \end{cases}.$$

😊 Diese einfache Rechnung beschert uns wertvolle Informationen:

- Der Vektor v_1 ist ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $+i$.
- Der Vektor v_2 ist ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $-i$.
- Der Vektor v_3 ist ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 0 ,
- darüber liegt v_4 als ein Hauptvektor zweiter Stufe.

Diese Vektoren sind linear unabhängig: Sie bilden eine Basis des \mathbb{C}^4 .

Eigen-/Hauptfunktionen und Stabilität

⚠ Der Hauptvektor 2. Stufe zeigt, dass A nicht diagonalisierbar ist!

😊 Das Ergebnis aus (1) wird besonders übersichtlich gebündelt, wenn wir A bezüglich unserer Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ schreiben...

(2) Bezüglich der Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ finden wir die **Jordan-Form**:

$$B = {}_{\mathcal{B}}(A)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrizen $A \sim B$ sind **konjugiert**. Hieraus folgt das char. Polynom

$$p_A(x) = p_B(x) = (x - i)(x + i)(x - 0)^2 = x^4 + x^2.$$

⚠ Alternativ könnte man $p_A(x) = \det(A - xE)$ entwickeln, faktorisieren, Eigen/Hauptvektoren finden... Das ist länglich und viel mühsamer.

😊 Hier gilt wie allgemein immer: Es ist geschickter und effizienter, die bereits vorliegende Information zu verstehen und auszunutzen.

Eigen-/Hauptfunktionen und Stabilität

😊 Unsere Vorarbeit (2) setzen wir in unsere Lösungsformeln P1E ein:
Aus Eigen-/Hauptvektoren gewinnen wir Eigen-/Hauptfunktionen!

(3) Zwei komplex-konjugierte Lösungen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^4$ sind $e^{it}v_1$ und $e^{-it}v_2$.
Die gegebenen reellen AWP führen zu reellen Lösungen:

$$y_1(0) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}(v_1 + v_2) \quad \Longrightarrow \quad y_1(t) = \frac{1}{2}[e^{it}v_1 + e^{-it}v_2] = \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$y_2(0) \stackrel{!}{=} \frac{i}{2}(v_1 - v_2) \quad \Longrightarrow \quad y_2(t) = \frac{i}{2}[e^{it}v_1 - e^{-it}v_2] = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 0 \\ +\cos t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eigen- & Hauptvektor zum Eigenwert 0 liefern direkt reelle Lösungen:

$$y_3(t) = e^{0t}v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y_4(t) = e^{0t}(v_4 + tv_3) = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1 \\ 1+t \\ 1+t \end{pmatrix}.$$

Eigen-/Hauptfunktionen und Stabilität

😊 Jede Funktion $y_1, y_2, y_3, y_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ löst die Gleichung $y' = A y$:
 Setzen Sie alles ein und machen Sie die Probe; sie erfüllen zudem die
 gewünschten **Anfangsbedingungen**. $y_1(0) = (1, 0, 0, 0) = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$
 und $y_2(0) = (0, 0, 1, 0) = \frac{1}{2}(v_1 - v_2)$ sowie $y_3(0) = v_3$ und $y_4(0) = v_4$.

(4) Zur Stabilität untersuchen wir das **Langzeitverhalten** für $t \rightarrow \infty$.
 Die Lösungen y_1, y_2, y_3 sind beschränkt, hingegen gilt $|y_4(t)| \rightarrow \infty$.

Für jede Lösung $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + c_3 y_3(t) + c_4 y_4(t)$ mit $c_4 \neq 0$
 gilt somit $|y(t)| \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$. Der Fixpunkt 0 ist demnach instabil.

Bei zufälliger Wahl des Startwerts $y(0)$ sind mit Wahrscheinlichkeit 1
 alle Koeffizienten c_1, c_2, c_3, c_4 ungleich Null, also gilt $|y(t)| \rightarrow \infty$.


Der Startpunkt $y(0) = 0$ ist ein **Fixpunkt** dieses dynamischen Systems.
 Er ist jedoch nicht stabil, denn eine zufällige Störung wird im Verlauf
 immer größer und führt von 0 weg. (Eine stetige Verteilung entspricht
 einer Wahrscheinlichkeitsdichte $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\int_{\mathbb{R}^4} \varphi(x) dx = 1$.)

Im vorliegenden Beispiel ist das Wachstum $|y_4(t)| \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$
 nicht exponentiell, sondern nur linear, also vergleichsweise langsam.

Eigen-/Hauptfunktionen und Stabilität

Aufgabe: (Klausur Februar 2013) Wir untersuchen das lineare Differentialgleichungssystem $y'(t) = A y(t)$ mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}.$$

- (1) Berechnen Sie $u = Av$ und Au sowie Aw . Bestimmen Sie hieraus eine Basis \mathcal{B} des \mathbb{C}^4 bestehend aus Hauptvektorketten von A .
 - (2) Schreiben Sie die Abbildung A als Matrix $B = {}_{\mathcal{B}}(A)_{\mathcal{B}}$ und lesen Sie das char. Polynom $p_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)(x - \lambda_3)(x - \lambda_4)$ ab.
 - (3) Bestimmen Sie zu $y'(t) = A y(t)$ ein reelles Fundamentalsystem $y_1, y_2, y_3, y_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ mit Anfangswerten $u, v, e_1, e_4 \in \mathbb{R}^4$.
 - (4) Stabilität: Wenn Sie zufällig (stetig verteilt) einen Startvektor $y(0) \in \mathbb{R}^4$ nahe Null wählen und die zugehörige Lösung von $y'(t) = A y(t)$ verfolgen, wie verhält sich $|y(t)|$ für $t \rightarrow \infty$?
-  Es gelten alle Tipps und Warnungen der vorigen Aufgabe.

Eigen-/Hauptfunktionen und Stabilität

Lösung: (1) Die vorgeschlagene Rechnung beschert uns folgendes:

$$Av = u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Au = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Aw = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = iw, \quad A\bar{w} = -i\bar{w}.$$

Somit ist u ein EV zum EW 0, und hierüber v ein Hauptvektor 2. Stufe. Zudem ist w ein EV zum EW i . Da A reell ist, gilt $A\bar{w} = \overline{Aw} = \overline{iw} = -i\bar{w}$. Somit ist \bar{w} ein EV zum EV $-i$. Das beschert uns die Basis u, v, w, \bar{w} .

(2) Bezüglich der Basis $\mathcal{B} = (u, v, w, \bar{w})$ finden wir die **Jordan-Form**:

$$B = {}_{\mathcal{B}}(A)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

Wir lesen die Eigenwerte $0, 0, i, -i$ ab. Das char. Polynom ist

$$p_A(x) = p_B(x) = (x - 0)(x - 0)(x - i)(x + i) = x^4 + x^2.$$

Alternativ kann man $\det(A - xE)$ direkt entwickeln. Versuchen Sie es!

Eigen-/Hauptfunktionen und Stabilität

😊 Unsere Vorarbeit (2) setzen wir in unsere **Lösungsformeln** ein:

(3) Eigen-&Hauptvektor zum Eigenwert 0 liefern reelle Lösungen:

$$y_1(t) = e^{0t}u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad y_2(t) = e^{0t}(v + tu) = \begin{pmatrix} 1 + t \\ 1 \\ 1 + t \\ -1 - t \end{pmatrix}.$$

Zwei komplex-konjugierte Lösungen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^4$ sind $e^{it}w$ und $e^{-it}\bar{w}$.

Hieraus erhalten wir zwei reelle Lösungen als Real-/Imaginärteil:

$$y_3(t) = \operatorname{Re}\left[e^{it}w\right] = \frac{1}{2}\left[e^{it}w + e^{-it}\bar{w}\right] = \begin{pmatrix} +\cos t \\ 0 \\ 0 \\ -\sin t \end{pmatrix},$$

$$y_4(t) = \operatorname{Im}\left[e^{it}w\right] = \frac{1}{2i}\left[e^{it}w - e^{-it}\bar{w}\right] = \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \\ 0 \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Eigen-/Hauptfunktionen und Stabilität

😊 Jede Funktion $y_1, y_2, y_3, y_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ löst die Gleichung $y' = A y$:
Setzen Sie ein und machen Sie die Probe; sie erfüllen die gewünschten
Anfangsbedingungen: $y_1(0) = u, y_2(0) = v, y_3(0) = e_1, y_4(0) = e_4$.

(4) Zur Stabilität untersuchen wir das **Langzeitverhalten** für $t \rightarrow \infty$.
Die Lösungen y_1, y_3, y_4 sind beschränkt, hingegen gilt $|y_2(t)| \rightarrow \infty$.
Für jede Lösung $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + c_3 y_3(t) + c_4 y_4(t)$ mit $c_2 \neq 0$
gilt somit $|y(t)| \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$. Der Fixpunkt 0 ist demnach instabil.
Bei zufälliger Wahl des Startwerts $y(0)$ sind mit Wahrscheinlichkeit 1
alle Koeffizienten c_1, c_2, c_3, c_4 ungleich Null, also gilt $|y(t)| \rightarrow \infty$.

Der Startpunkt $y(0) = 0$ ist ein **Fixpunkt** dieses dynamischen Systems.
Er ist jedoch nicht stabil, denn eine zufällige Störung wird im Verlauf
immer größer und führt von 0 weg. (Eine stetige Verteilung entspricht
einer Wahrscheinlichkeitsdichte $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\int_{\mathbb{R}^4} \varphi(x) dx = 1$.)
Im vorliegenden Beispiel ist das Wachstum $|y_2(t)| \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$
nicht exponentiell, sondern nur linear, also vergleichsweise langsam.

Hauptvektoren sind deine Freunde!

Aufgabe: Wir lösen das Differentialgleichungssystem $y'(t) = A y(t)$,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

- (0) Welche Beziehung gilt zwischen Eigenwerten, $\text{tr}(A)$ und $\det(A)$?
- (1) Das char. Polynom ist hier $p_A(x) = (\lambda - x)^5$. Bestimmen Sie λ .
- (2) Ist u Hauptvektor? Welcher Stufe? Lösen Sie $y' = A y$ mit $y(0) = u$.
- (3) Ist v Hauptvektor? Welcher Stufe? Lösen Sie $y' = A y$ mit $y(0) = v$.
- (4) Bestimmen Sie eine Basis des \mathbb{R}^5 aus Hauptvektorketten und damit ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $y' = A y$.

Lösung: (0) Allgemein gilt $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$ und $\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$. Das ist offensichtlich für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ diagonal oder in Jordan-Form, und jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ lässt sich in diese Form konjugieren (P1D).

- (1) Hier ist λ fünffacher Eigenwert: Es gilt $5\lambda = \text{tr}(A) = 10$, also $\lambda = 2$.

Hauptvektoren sind deine Freunde!

(2) Es gilt

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen zunächst die **Stufe des Hauptvektors** u :

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{A-2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A-2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A-2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{A-2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\quad \quad \quad =: u_4 \quad \quad \quad =: u_3 \quad \quad \quad =: u_2 \quad \quad \quad =: u_1$

Hieraus erhalten wir die spezielle Lösung von $y' = Ay$ mit $y(0) = u$:

$$y(t) \stackrel{\text{PIE}}{=} e^{2t} \begin{pmatrix} +2t & -t^3/3! \\ 1 & -t \\ -2t & +t^2/2 \\ & +t^2/2 & -t^3/3! \\ -t & +t^2/2 \end{pmatrix}$$

Hauptvektoren sind deine Freunde!

(3) Wir bestimmen ebenso die **Stufe des Hauptvektors** v :

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[A-2]{\text{pencil}} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} =: v_4 \xrightarrow[A-2]{\text{pencil}} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} =: v_3 \xrightarrow[A-2]{\text{pencil}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} =: v_2 \xrightarrow[A-2]{} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} =: v_1 \xrightarrow[A-2]{} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hieraus erhalten wir die spezielle Lösung von $y' = Ay$ mit $y(0) = v$:

$$y(t) \stackrel{\text{PIE}}{=} e^{2t} \begin{pmatrix} -1 & -t & -2t^2/2 & & +2t^4/4! \\ 2 & -2t & +2t^2/2 & & \\ 3 & -2t & +4t^2/2 & -2t^3/3! & \\ 4 & -3t & +2t^2/2 & -2t^3/3! & +2t^4/4! \\ 5 & -2t & +2t^2/2 & -2t^3/3! & \end{pmatrix}$$

(4) **Basis des Lösungsraums:** Die oben gefundene Hauptvektorkette

$0 \xleftarrow{A-\lambda} v_1 \dots \xleftarrow{A-\lambda} v_5$ liefert die Hauptfunktionen $y_1, \dots, y_5 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^5$:

$$y_k(t) \stackrel{\text{PIE}}{=} e^{\lambda t} \left[v_k + t v_{k-1} + \frac{t^2}{2} v_{k-2} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} v_1 \right]$$

Hauptvektoren sind deine Freunde!

Aufgabe: (Wir untersuchen weiterhin die Daten der vorigen Aufgabe.)

(5) Stabilität: Wie verhalten sich hier typische Lösungen für $t \rightarrow \infty$?

(6) Welche Dimension hat der Hauptraum 4. Stufe $U = \ker(A - \lambda E)^4$?

(7) Wählen Sie zufällig (stetig verteilt) einen Vektor $w \in \mathbb{R}^5$ und berechnen Sie seine Stufe... Mit welcher Wkt. ist er fünfter Stufe?

Lösung: (5) Für $t \rightarrow \infty$ gilt $|y(t)| \rightarrow \infty$, typischerweise $\sim e^{2t} t^4 / 4!$.

(6) Zu $(A - 2E)^4 v_5 \neq 0$ gehört die Hauptvektorkette der Länge 5:

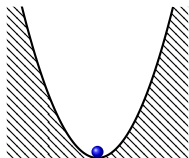
$$0 \xleftarrow{A-2} v_1 \xleftarrow{A-2} v_2 \xleftarrow{A-2} v_3 \xleftarrow{A-2} v_4 \xleftarrow{A-2} v_5.$$

Der Unterraum $U = \mathbb{R}v_1 + \mathbb{R}v_2 + \mathbb{R}v_3 + \mathbb{R}v_4$ hat also Dimension 4.

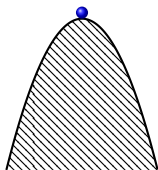
(7) Mit 100% Wahrscheinlichkeit ist w ein Hauptvektor 5. Stufe!

Fast jeder Vektor $v \in \mathbb{R}^5$ ist hier von 5. Stufe: Alle Hauptvektoren der Stufe 4, 3, 2, 1 und der Nullvektor liegen in der Hyperebene U . Wenn wir also zufällig (stetig verteilt) einen Vektor $w \in \mathbb{R}^5$ wählen, dann liegt w mit Wahrscheinlichkeit 0 im Unterraum U .

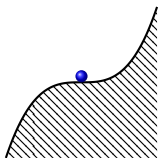
Gleichgewichtslagen und In/Stabilität von Fixpunkten



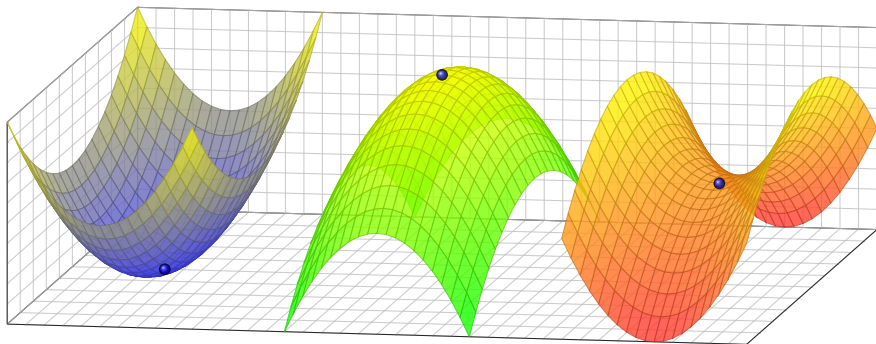
Der Fixpunkt ist
stabil / attraktiv.



Der Fixpunkt ist
instabil / repulsiv.



kritischer Fixpunkt
(höhere Ordnung)





Gleichgewichtslagen und In/Stabilität von Fixpunkten

Anfangsdaten sind oft zufälligen kleinen Schwankungen unterworfen, etwa durch kleine äußere Störungen oder ungenaue Messdaten.

Wir wollen das Langzeitverhalten in der Nähe von Fixpunkten verstehen. Hier gilt $\dot{x}(t) = f(x(t))$, für $x(t) = x_0 + u(t) \approx x_0$ also $\dot{u}(t) \approx f'(x_0) u(t)$.

- Gilt Abklingen $|u(t)| \rightarrow 0$? sogar exponentiell?
- Gilt Beschränktheit gemäß $0 < c_0 \leq |u(t)| \leq c_1 < \infty$?
- Gilt Wachstum $|u(t)| \rightarrow \infty$? nur polynomiell? gar exponentiell?

 Instabile Fixpunkte sind meist Opfer des **Schmetterlingseffekts**: Sie zeigen eine extrem sensible Abhängigkeit von den Anfangsdaten; typischerweise können kleine Störungen exponentiell anwachsen! Beispiele wie $\dot{x}(t) = a x(t)$ zeigen, dass dies tatsächlich vorkommt.

 Technische Anwendungen erfordern meist stabile Gleichgewichte! Die **Stabilitätstheorie** untersucht die Auswirkung kleiner Störungen, die als Abweichung von Gleichgewichtszuständen auftreten, etwa in der Regelungstechnik (P2D) oder der Technischen Mechanik (P2H).

Eindimensionale Dynamik um einen Fixpunkt

Aufgabe: (1) Wir untersuchen $\dot{x}(t) = a x(t)$ mit $x(0) = x_0$ und $a \in \mathbb{R}$.
Welches asymptotische Verhalten haben die Lösungen für $t \rightarrow \infty$?

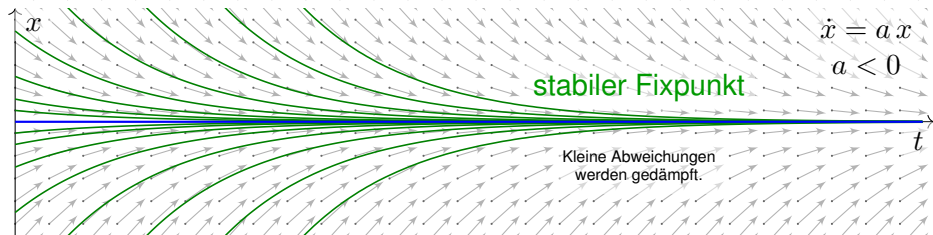
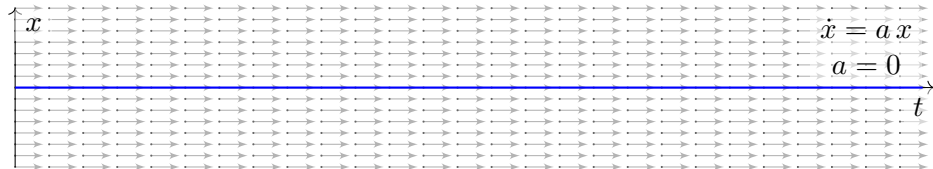
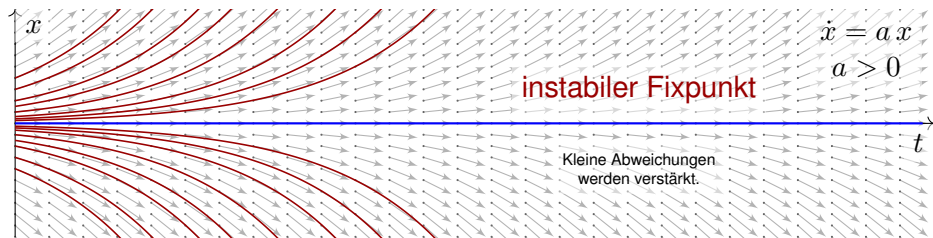
(2) Welches Verhalten erwarten Sie für eine nicht-lineare Gleichung $\dot{x}(t) = f(x(t))$ mit $x(0) = x_0$ und $f(x_0) = 0$? Ist x_0 ein Fixpunkt?
Welche Rolle spielt die Ableitung $f'(x_0)$ für die Stabilität?

Lösung: (1) Dieses AWP hat als eindeutige Lösung $x(t) = x_0 e^{at}$.
Die Dynamik eindimensionaler linearer Systeme ist sehr einfach:

- $a > 0$ streckt; Störungen werden exponentiell verstärkt.
Der einzige Fixpunkt 0 ist **instabil**.
- $a < 0$ staucht: Störungen werden exponentiell gedämpft.
Der einzige Fixpunkt 0 ist **stabil**.
- Im Falle $a = 0$ ist jeder Startpunkt x_0 ein Fixpunkt.

(2) Nicht-lineare Systeme sind wesentlich komplizierter! In der Nähe eines Fixpunktes können wir jedoch linearisieren und annähernd eine **lineare Dynamik** erwarten. Diese Idee wird im Folgenden ausgeführt.

Eindimensionale Dynamik um einen Fixpunkt



Dynamik und Linearisierung um einen Fixpunkt

Wir betrachten ein **autonomes Differentialgleichungssystem**:

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

Hierbei sei $f: \mathbb{R}^n \supseteq G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Die rechte Seite $f(x)$ hängt nicht explizit von der Zeit t ab, daher **autonom**. Zu jedem Startpunkt $x_0 \in \overset{\circ}{G}$ existiert eine eindeutige Lösung $x: [0, T[\rightarrow \overset{\circ}{G}$ für $T > 0$ mit $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(t) = f(x(t))$ für $t \in [0, T[$. Für das maximale T gilt entweder $T = \infty$ oder $f(t) \rightarrow \partial G \cup \{\infty\}$ für $t \nearrow T < \infty$.

Aufgabe: Was geschieht bei Start nahe einer Gleichgewichtslage?

Lösung: Jeder Startpunkt x_0 mit $f(x_0) = 0$ ist ein **Fixpunkt**.

Für kleine Auslenkungen $x(t) = x_0 + u(t)$ können wir **linearisieren**:

$$\dot{u}(t) = \dot{x}(t) = f(x(t)) = f(x_0 + u(t)) \approx f(x_0) + f'(x_0) u(t) = A u(t)$$

Sei $x: [0, T[\rightarrow \overset{\circ}{G}$ die Lösung zum Startpunkt $x(0) = x_0$ mit $\dot{x}(t) = f(x(t))$ für alle $t \in [0, T[$.

Ruhelage: Genau dann herrscht Konstanz $x(t) = x_0$ für alle $t \in [0, T[$, wenn $f(x_0) = 0$ gilt. Die **Jacobi-Matrix** $A = f'(x_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ von f beschreibt das Verhalten um den Fixpunkt x_0 : Wir erhalten als Näherung die lineare Differentialgleichung $\dot{u}(t) = A u(t)$. Hierdurch erhalten lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten ihre zentrale Bedeutung!

Dynamik und Linearisierung um einen Fixpunkt

😊 Kleine Auslenkungen aus der Ruhelage x_0 folgen näherungsweise dem linearen DGS-System mit konstanter Systemmatrix $A = f'(x_0)$:

$$\text{nicht-linear } \dot{x}(t) = f(x(t)) \quad \rightsquigarrow \quad \text{linear } \dot{u}(t) = A u(t)$$

😊 Linearisierung vereinfacht die ursprüngliche Gleichung enorm! Jede Lösung dieser Approximation ist von der Form $u(t) = e^{tA} u_0$. Zum Eigenwert $\lambda = \sigma + i\omega$ gehören Eigen- und Hauptfunktionen

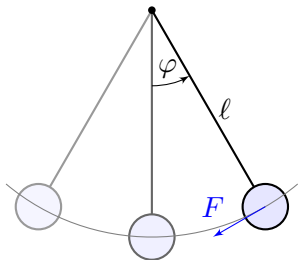
$$u(t) = e^{\sigma t} e^{i\omega t} \left[v_k + t v_{k-1} + \frac{t^2}{2} v_{k-2} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} v_1 \right],$$

siehe P1E und P1G. Damit erkennen wir die **Stabilität** des Fixpunktes:

- $\text{Re}(\lambda) < 0$ staucht; kleine Störungen werden exponentiell gedämpft. Der Fixpunkt ist **stabil**, wenn $\text{Re}(\lambda) < 0$ für *alle* Eigenwerte gilt.
- $\text{Re}(\lambda) > 0$ streckt; kleine Störungen werden exponentiell verstärkt. Der Fixpunkt ist **instabil**, wenn $\text{Re}(\lambda) > 0$ für *einen* Eigenwert gilt.

Der Grenzfall $\text{Re}(\lambda) = 0$ bedarf genauerer Analyse (höhere Ordnung).

Linearisierung um Fixpunkte und In/Stabilität



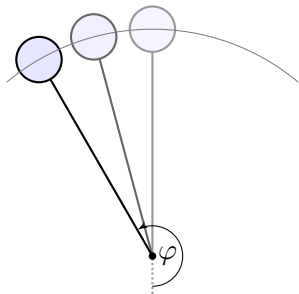
Dynamisches System:

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ -(g/l) \sin \varphi - 2\delta\omega \end{pmatrix}$$

Linearisierung um $(0, 0)$:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(g/l) & -2\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Der Fixpunkt $(0, 0)$ ist stabil.



Dynamisches System:

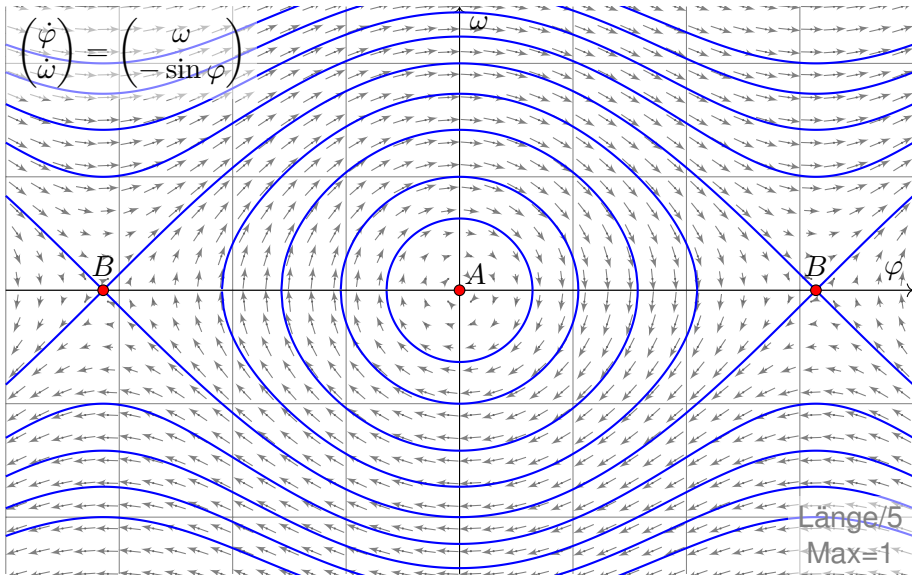
$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ -(g/l) \sin \varphi - 2\delta\omega \end{pmatrix}$$

Linearisierung um $(\pi, 0)$:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ +(g/l) & -2\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Der Fixpunkt $(\pi, 0)$ ist instabil.

Linearisierung um Fixpunkte und In/Stabilität



Wir erkennen harmonische Oszillation um das untere Gleichgewicht A . Der obere Scheitelpunkt B hingegen ist ein instabiles Gleichgewicht.

Zweidimensionale Dynamik um einen Fixpunkt

Wir untersuchen das DGSsystem $\dot{u}(t) = A u(t)$ zur Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$:
 Polynom $\det(A - tE) = t^2 - 2at + d$, Eigenwerte $\lambda_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - d}$.
 Spur $\text{tr}(A) = 2a$, Determinante $\det(A) = d$, Diskriminante $\Delta = a^2 - d$.

Aufgabe: Skizzieren Sie die Dynamik je nach Lage der Eigenwerte (14 Fälle) und untersuchen Sie das Verhalten von $|u(t)|$ für $t \rightarrow \infty$.

- Gilt Abklingen $|u(t)| \rightarrow 0$? sogar exponentiell?
- Gilt Beschränktheit gemäß $0 < c_0 \leq |u(t)| \leq c_1 < \infty$?
- Gilt Wachstum $|u(t)| \rightarrow \infty$? nur polynomiell? gar exponentiell?

Lösung: Wir unterscheiden zunächst reelle und komplexe Eigenwerte:

$$a^2 < d: \text{komplex-konjugiert } \lambda_{1,2} = a \pm ib, \quad A \sim \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$a^2 > d: \text{zwei reelle Eigenwerte } \lambda_1 < \lambda_2, \quad A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$a^2 = d: \text{ein doppelter Eigenwert } \lambda, \quad A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ oder } A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Zweidimensionale Dynamik um einen Fixpunkt

😊 Damit haben wir alle möglichen Fälle vollständig gelöst!
Dank Eigen- und Hauptfunktionen wird alles klar und einfach.

Erinnerung [O326](#): Hier bedeutet $A \sim B$, dass A und B konjugiert sind, also $B = T^{-1}AT$ für eine geeignete Basiswechselmatrix $T \in GL_2 \mathbb{R}$.

Dies beschreibt den Übergang zu unserer neuen Basis aus Eigen- bzw. Hauptvektoren, in der sich das Problem wesentlich einfacher darstellt.

😊 Wir finden drei Klassen, je nach Vorzeichen der Diskriminante

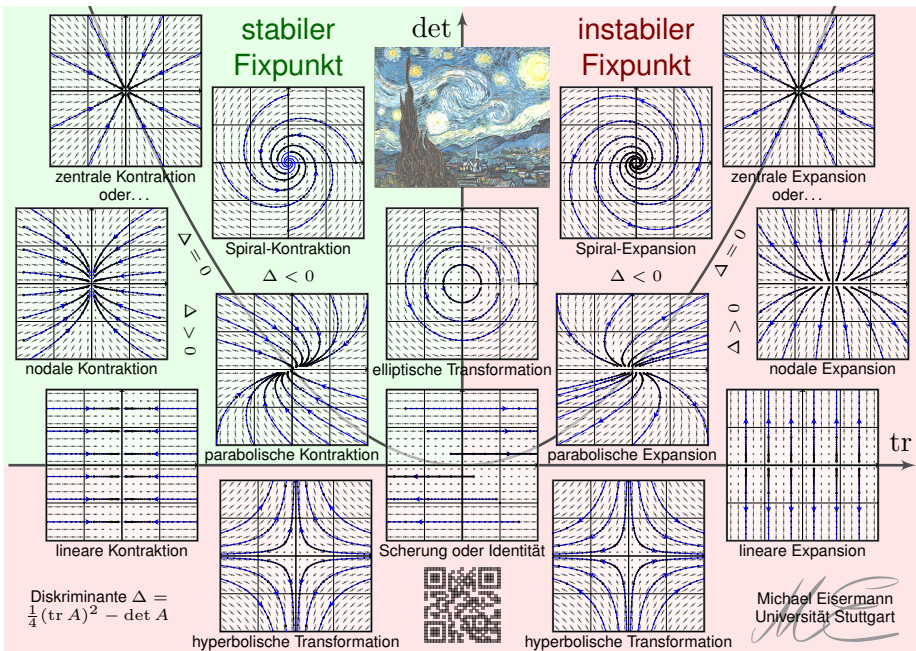
$$\Delta = \frac{1}{4}(\operatorname{tr} A)^2 - \det A.$$

Das Vorzeichen der Diskriminante unterscheidet, wie oben gesehen, zwischen reellen Eigenwerten und (echt) komplexen Eigenwerten.

Der Fixpunkt ist stabil, wenn $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ für beide Eigenwerte gilt.
Das bedeutet: Kleine Störungen werden exponentiell gedämpft.

Das gilt hier genau dann, wenn $\operatorname{tr}(A) < 0$ und $\det(A) > 0$ gilt.
Die stabile Region ist grün gefärbt, die instabile Region rot.

Zweidimensionale Dynamik um einen Fixpunkt




Zweidimensionale Dynamik um einen Fixpunkt


Diese schöne Graphik gibt einen guten Überblick: Sie klassifiziert die (linearisierte) Dynamik um einen Fixpunkt in der Ebene \mathbb{R}^2 .


Im obigen Beispiel des mathematischen Pendels haben wir bereits zwei Fälle gesehen, einen stabilen und einen instabilen Fixpunkt.


Die folgenden Folien diskutieren alle gezeigten Einzelfälle im Detail, wir zoomen also auf einzelne Punkte dieses Gesamtkunstwerks.

 Wir betrachten hier als einfaches Modell die linearisierte Gleichung. Nicht-lineare dynamische Systeme sind meist wesentlich komplizierter!

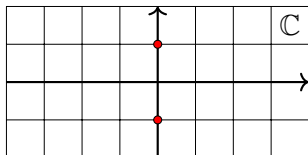
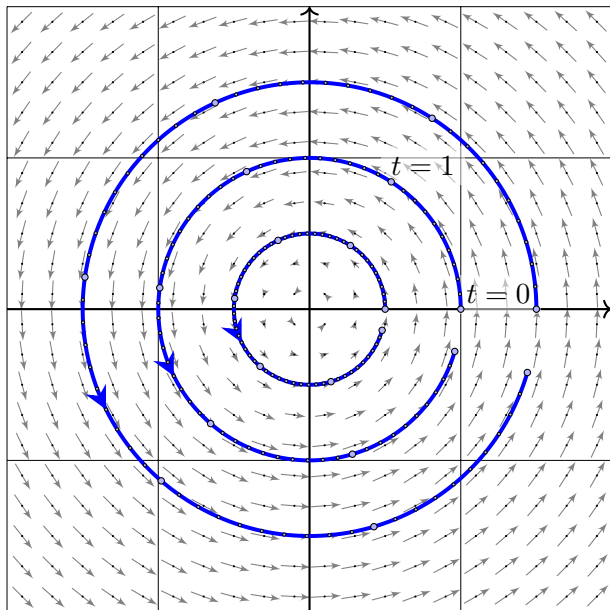
Dennoch gibt uns das linearisierte Modell sehr nützliche Auskunft, denn im Kleinen verhält sich das nicht-lineare Modell ganz ähnlich:

 Für die Stabilität des Fixpunktes x_0 genügt die Matrix $A = f'(x_0)$, falls alle Eigenwerte negativen Realteil haben (Satz von Lyapunov).

 In diesem Falle sieht die lokale Dynamik von $\dot{x} = f(x)$ topologisch aus wie im linearisierten Modell $\dot{u} = Au$ (Satz von Hartman–Grobman).

 Dieser Linearisierungssatz gilt ganz allgemein in jeder Dimension n um jeden *hyperbolischen* Fixpunkt (ohne Eigenwerte mit Realteil Null).

Wirbelpunkt: elliptische Transformation



Komplexe Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \pm ib$$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

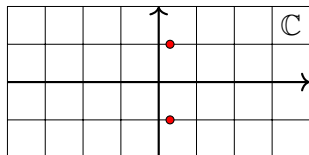
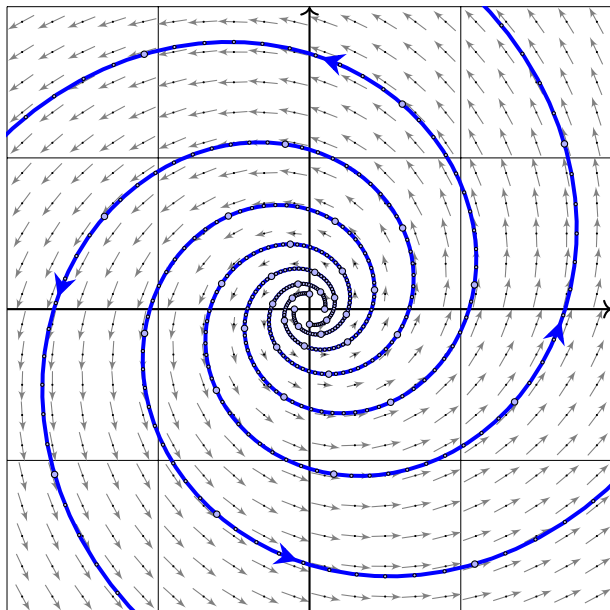
Konkretes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Instabiler Strudel: Spiral-Expansion



Komplexe Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = a \pm ib, \quad a > 0$$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

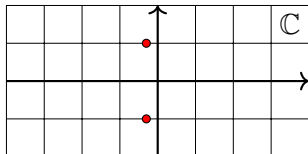
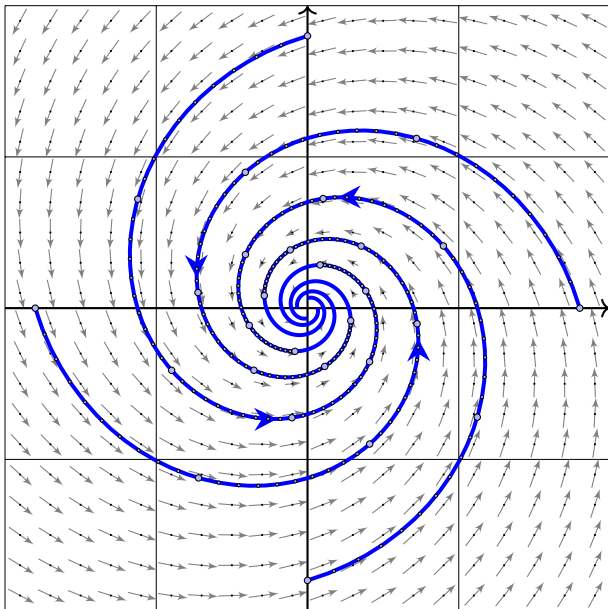
Konkretes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & -1 \\ 1 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{0.3t} \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Stabiler Strudel: Spiral-Kontraktion



Komplexe Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = a \pm ib, \quad a < 0$$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Konkretes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} -0.3 & -1 \\ 1 & -0.3 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{-0.3t} \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Stabilität und Eigenwerte

😊 Die ersten drei Fälle komplex-konjugierter Eigenwerte zeigen bereits den Einfluss auf das Langzeitverhalten und die Stabilität der Lösungen:

- $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ staucht; kleine Störungen werden exponentiell gedämpft. Der Fixpunkt 0 ist **stabil**, wenn $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ für alle Eigenwerte gilt.
- $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ streckt; kleine Störungen werden exponentiell verstärkt. Der Fixpunkt 0 ist **instabil**, wenn $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ für einen Eigenwert gilt.

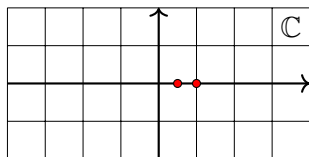
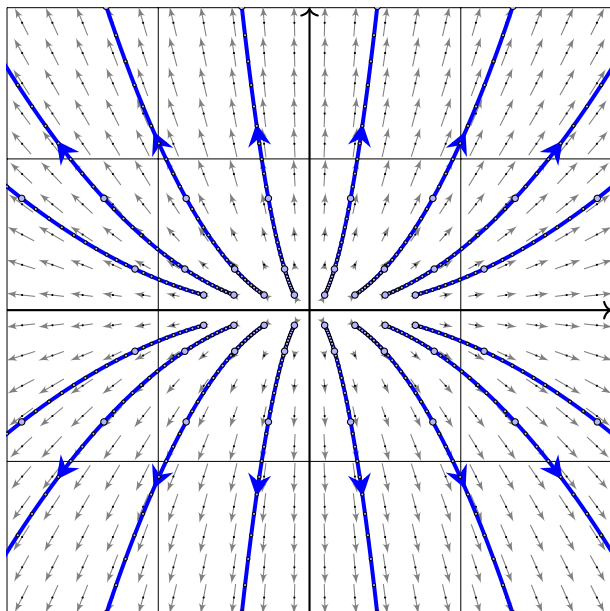
😊 Wir diskutieren die verbleibenden Fälle reeller Eigenwerte $\lambda_1 \leq \lambda_2$:

Im Falle $\lambda_1 < \lambda_2$ unterscheiden wir fünf Fälle je nach Lage zu 0:
Die Matrix A ist hierbei wegen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ immer diagonalisierbar.

Im Falle $\lambda_1 = \lambda_2$ unterscheiden wir drei Fälle je nach Lage zu 0:
Im einfachsten Falle ist $A \sim \operatorname{diag}(\lambda, \lambda)$ diagonalisierbar (drei Fälle);
andernfalls nutzen wir Hauptvektoren zur Jordan-Form (drei Fälle).

😊 Dank unserer gründlichen Vorarbeit zu Eigen- und Hauptvektoren können wir alle 14 Fälle vollständig lösen und übersichtlich darstellen. Ebenso gelingt die Klassifikation linearer Dynamik in jeder Dimension!

Instabiler Knoten: nodale Expansion



Zwei reelle Eigenwerte

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2$$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

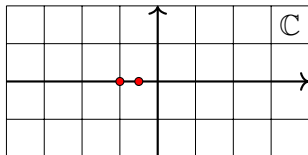
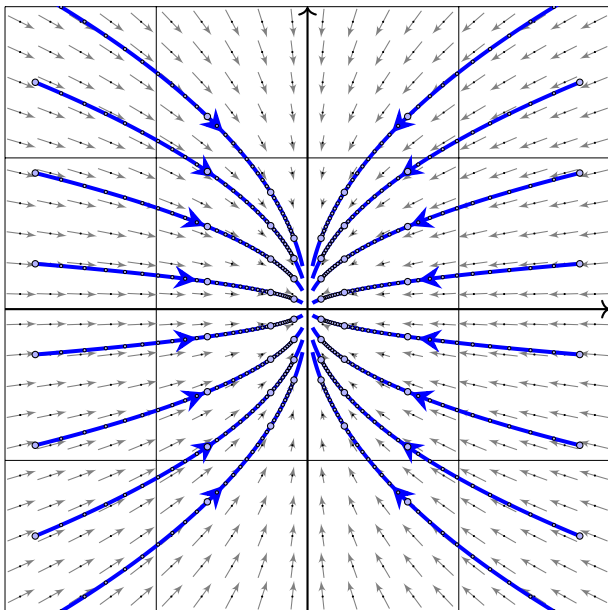
Konkretes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

Stabiler Knoten: nodale Kontraktion



Zwei reelle Eigenwerte

$$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

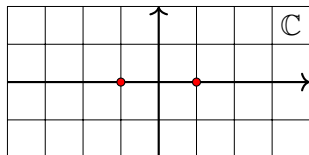
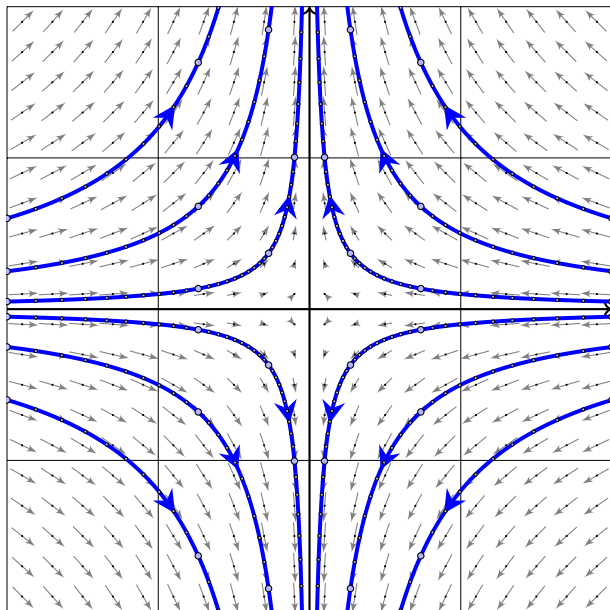
Konkretes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{bmatrix}$$

Sattelpunkt: hyperbolische Transformation



Zwei reelle Eigenwerte

$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Konkretes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

Eigenwerte und Eigenvektoren

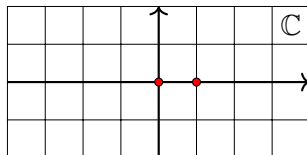
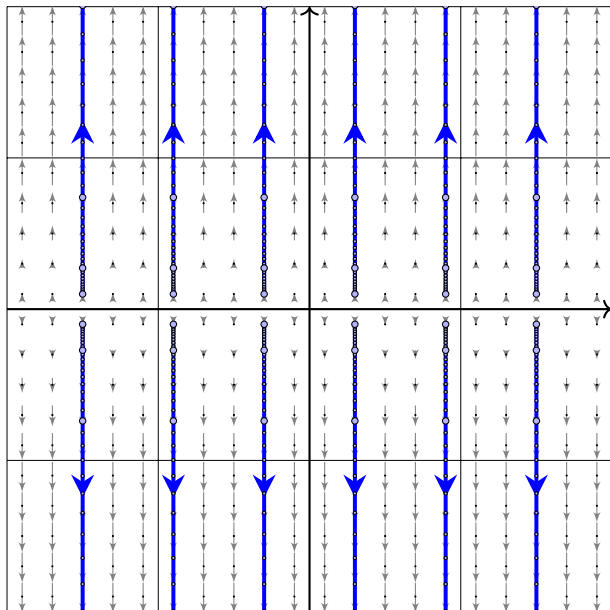
😊 Die hier illustrierten Beispiele zeigen die typische ebene Dynamik um den Fixpunkt $(0, 0)^T$ im elliptischen und im hyperbolischen Fall: Die Eigenwerte geben Auskunft über Dynamik und Stabilität!

- Sind beide Eigenwerte positiv, so erhalten wir eine Expansion, typischerweise zwei Eigenräume / Achsen: langsam und schnell.
- Sind beide Eigenwerte negativ, so erhalten wir eine Kontraktion, typischerweise zwei Eigenräume / Achsen: langsam und schnell.
- Ist einer negativ und einer positiv, so erhalten wir eine stabile und eine instabile Richtung, wie im hyperbolischen Fall gezeigt.

😊 Die nächsten Folien zeigen schließlich alle Rand- und Sonderfälle. Zur Vereinfachung transformieren wir die beiden Eigen/Hauptvektoren der Systemmatrix A auf $(1, 0)^T$ und $(0, 1)^T$; das ist übersichtlicher.

⚠ Im Allgemeinen liegen diese beiden Achsen beliebig in der Ebene; sie sind typischerweise verdreht und stehen nicht senkrecht zueinander. Nach Koordinatenwechsel entsteht das hier gezeigte, einfache Bild. Die Aufgabe auf Seite P229 zeigt ein realistisches Beispiel.

Lineare Expansion



Zwei reelle Eigenwerte

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2$$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

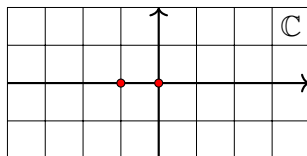
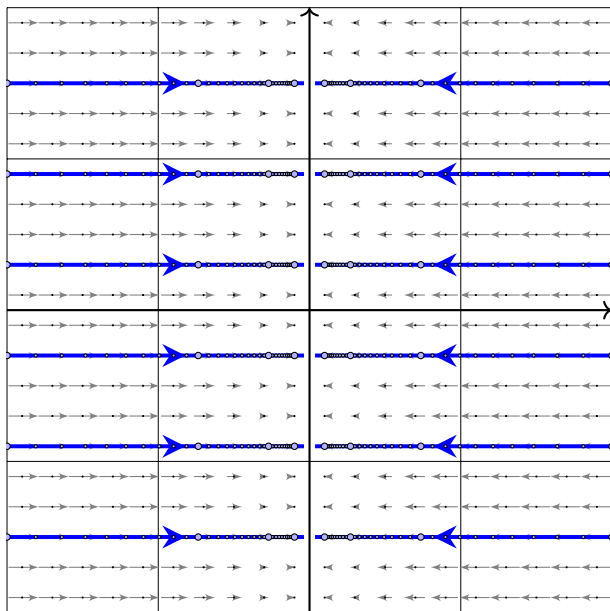
Konkretes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

Lineare Kontraktion



Zwei reelle Eigenwerte

$$\lambda_1 < \lambda_2 = 0$$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

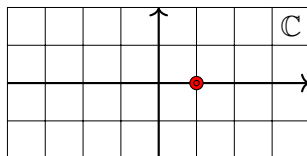
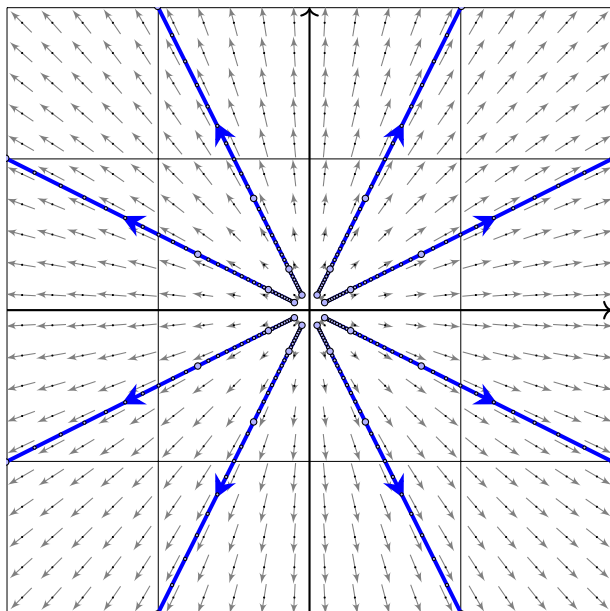
Konkretes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zentrale Expansion



Doppelter Eigenwert
 $\lambda > 0$

Diagonalisierbarer Fall

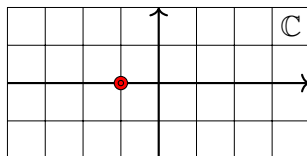
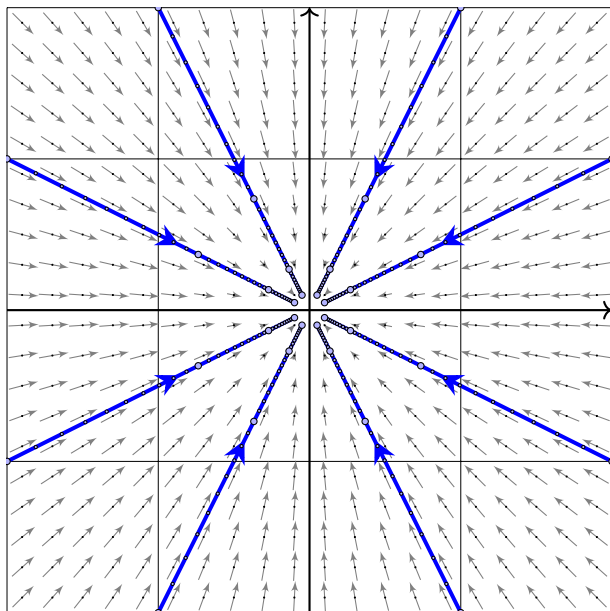
$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Konkretes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$



Doppelter Eigenwert
 $\lambda < 0$

Diagonalisierbarer Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

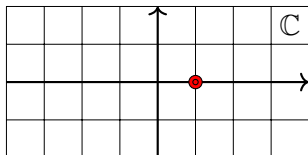
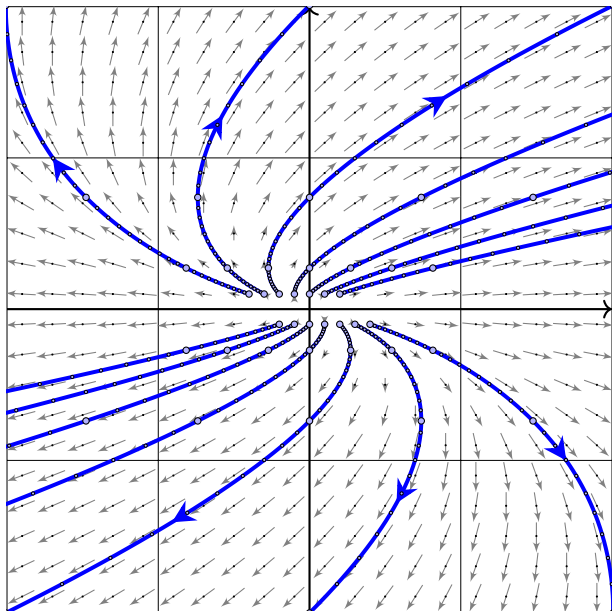
Konkretes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

Instabiler Knoten: parabolische Expansion



Doppelter Eigenwert

$$\lambda > 0$$

Nicht-diagonalisierbar

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

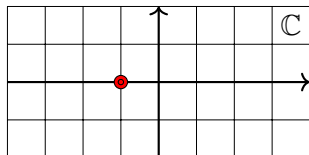
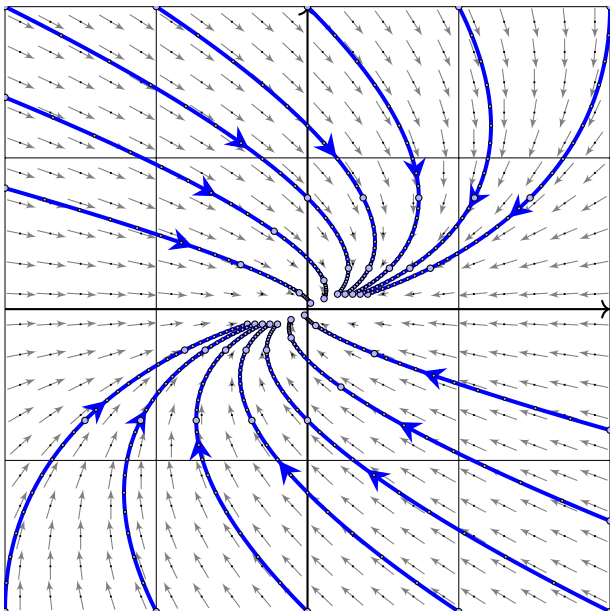
Konkretes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^t & t e^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

Stabiler Knoten: parabolische Kontraktion



Doppelter Eigenwert

$$\lambda < 0$$

Nicht-diagonalisierbar

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

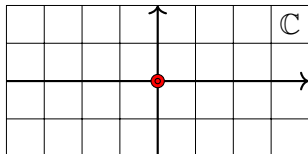
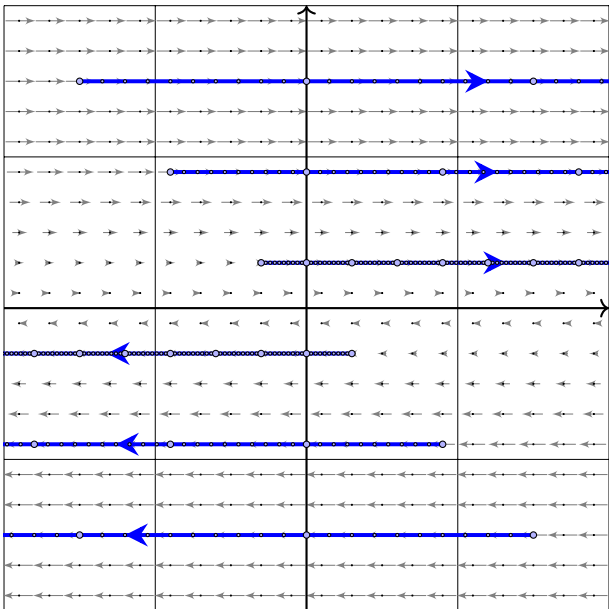
Konkretes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{-t} & t e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

Scherung



Doppelter Eigenwert

$$\lambda = 0$$

Nicht-diagonalisierbar

$$A \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Konkretes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Diagonalisierbar oder nicht diagonalisierbar?

Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit doppeltem Eigenwert λ gilt $\lambda \in \mathbb{R}$ sowie

$$\text{entweder } A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Im ersten Fall existiert eine Basis des \mathbb{R}^2 aus Eigenvektoren von A . Die Matrix A wird hierdurch diagonalisiert. Es gilt dann:

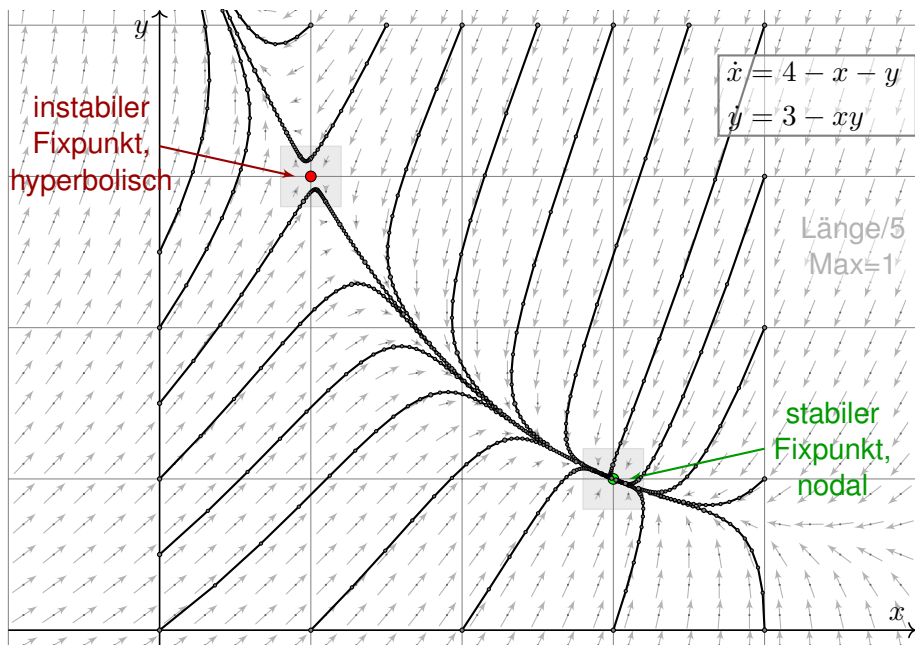
$$e^{tA} \sim e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Andernfalls existiert eine Hauptvektorkette der Länge 2. Diese nutzen wir als Basis des \mathbb{R}^2 und erhalten obigen Jordan-Block. Es gilt dann:

$$e^{tA} \sim e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

😊 Nach demselben Schema können wir n -dimensionale autonome Systeme analysieren: Fixpunkte, Linearisierung, Eigenwerte, Stabilität. Unsere gründliche Vorarbeit zu Eigen- und Hauptvektoren zahlt sich aus!

Ein nicht-lineares DGSystem: quadratisches Vektorfeld



Ein nicht-lineares DGSystem: quadratisches Vektorfeld

Aufgabe: Wir untersuchen folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\begin{cases} \dot{x} = 4 - x - y \\ \dot{y} = 3 - xy \end{cases}$$

(0) Skizzieren Sie das zugehörige Vektorfeld und einige Flusslinien.

(1a) Finden Sie alle Fixpunkte. Es gibt genau zwei: $(1, 3)$ und $(3, 1)$.

(1b) Linearisieren Sie um jeden Fixpunkt: Welche Dynamik gilt hier?

Leichtere Teilfrage: Ist der betrachtete Fixpunkt stabil oder instabil?

Was bedeuten die zugehörigen Eigenvektoren und die Eigenwerte?

(2) Erklären Sie (qualitativ anhand Ihrer Skizze) für jeden Startpunkt $(x(0), y(0)) \in \mathbb{R}^2$ das Verhalten der Lösung $(x(t), y(t))$ für $t \rightarrow \infty$.

(2a) Gibt es zu jedem Startwert eine Lösung? Ist sie eindeutig?

(2b) Für welche Startwerte konvergiert die Lösung gegen $(3, 1)$?

(2c) Für welche Startwerte konvergiert die Lösung gegen $(1, 3)$?

(2d) Für welche Startwerte divergiert die Lösung? gegen ∞ ?

Ist dieses Verhalten stabil? Wird das Ziel in endlicher Zeit erreicht?

Ein nicht-lineares DGSsystem: quadratisches Vektorfeld

Lösung: (1a) Fixpunkte sind die Nullstellen des Vektorfeldes:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 4 - x - y \stackrel{!}{=} 0 \\ \dot{y} &= 3 - xy \stackrel{!}{=} 0\end{aligned}$$

Die erste Gleichung bedeutet $y = 4 - x$, einsetzen in die zweite ergibt:

$$3 - 4x + x^2 = 0 \iff x \in \{1, 3\}$$

😊 Die beiden einzigen Fixpunkte sind daher $(1, 3)$ und $(3, 1)$. Probe!

(1b) Wir berechnen die Jacobi-Matrix in jedem der beiden Fixpunkte:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - x - y \\ 3 - xy \end{pmatrix} \implies f' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -y & -x \end{pmatrix}$$

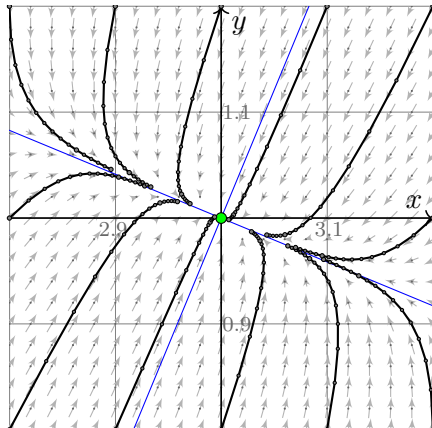
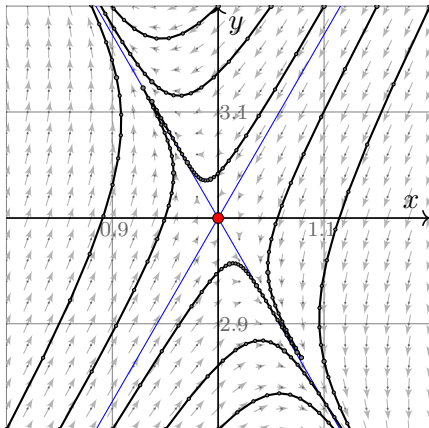
$$f' \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \det = -2 < 0, \operatorname{tr} = -2 : \\ \text{instabil! genauer: hyperbolisch} \end{cases}$$

$$f' \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \det = +2 > 0, \operatorname{tr} = -4 < 0 : \\ \text{stabil! genauer: nodale Kontraktion} \end{cases}$$

😊 Vergleich mit der obigen Skizze: Das entspricht der Anschauung!

Ein nicht-lineares DGSystem: Zoom auf Fixpunkte

Die Vergrößerung um die Fixpunkte zeigt annähernd lineares Verhalten:



Die beiden Eigenvektoren entsprechen den Hauptachsen der Dynamik:

$$v = \begin{pmatrix} \pm 1/\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \mp\sqrt{3} - 1$$

$$v = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{2} - 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \mp\sqrt{2} - 2$$

😊 Rechts ist die Jacobi-Matrix symmetrisch, die EV daher orthogonal.

Räuber-Beute-Modell nach Lotka–Volterra

$$\text{Räuber-Beute-Modell: } \begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha_1 x_1 - \beta_1 x_1 x_2 & =: f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = -\alpha_2 x_2 + \beta_2 x_1 x_2 & =: f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

Größe	Bedeutung	Beispiel
$t \geq 0$	Zeit	Jahre
$x_1(t) \geq 0$	Anzahl der Beutetiere	Hasen/Mio
$x_2(t) \geq 0$	Anzahl der Raubtiere	Luchse/Tsd
$\alpha_1 > 0$	Reproduktionsrate der Beute (ohne Räuber)	0.8/Jahr
$\beta_1 > 0$	Sterberate der Beute pro Räuber	0.4/Jahr
$\alpha_2 > 0$	Sterberate der Räuber (ohne Beute)	0.6/Jahr
$\beta_2 > 0$	Reproduktionsrate der Räuber pro Beute	0.2/Jahr

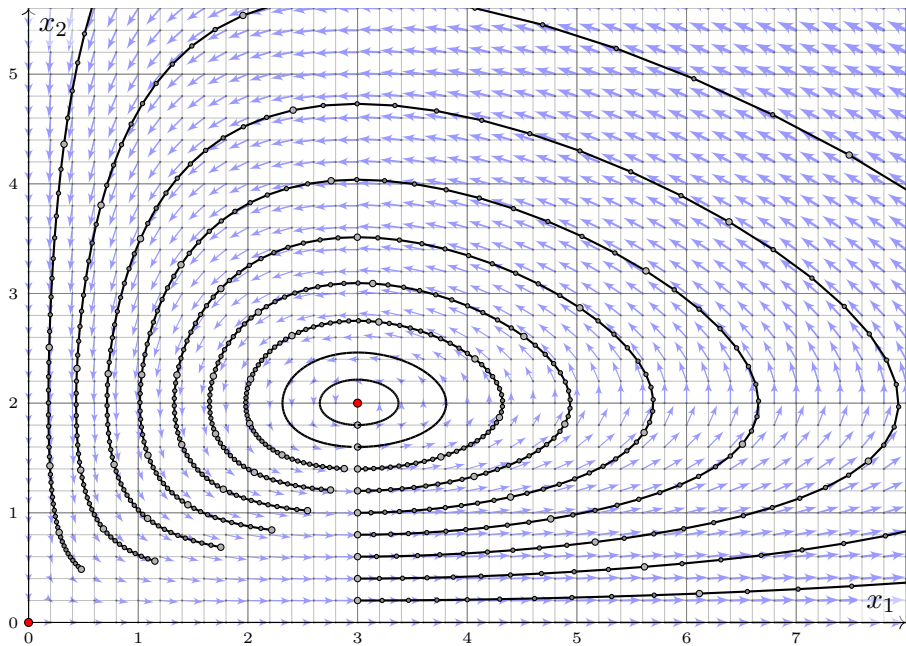
Dieses DGSsystem beschreibt die Entwicklung großer Räube-Beute-Populationen. Beispiel: Fangaufzeichnungen der Hudson Bay Company zeigten über 90 Jahre einen 9jährigen Zyklus. Formuliert und untersucht wurde dieses Modell 1925 von Alfred Lotka und unabhängig 1926 von Vito Volterra, seither ist es das Paradebeispiel einer Populationsdynamik in der Biologie. Die quadratischen Terme entsprechen dem Massenwirkungsgesetz chemischer Reaktionen. Epidemien folgen einer ähnlichen Dynamik, man untersucht und nutzt dies für Maßnahmen. Mechanische Systeme mit nicht-linearen Rückkopplungen gehorchen ähnlichen Gleichungen.

Räuber-Beute-Modell nach Lotka–Volterra

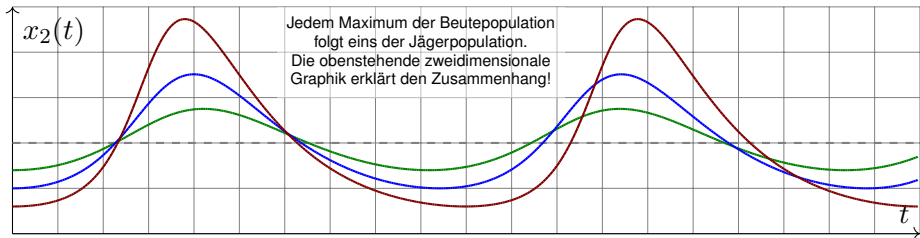
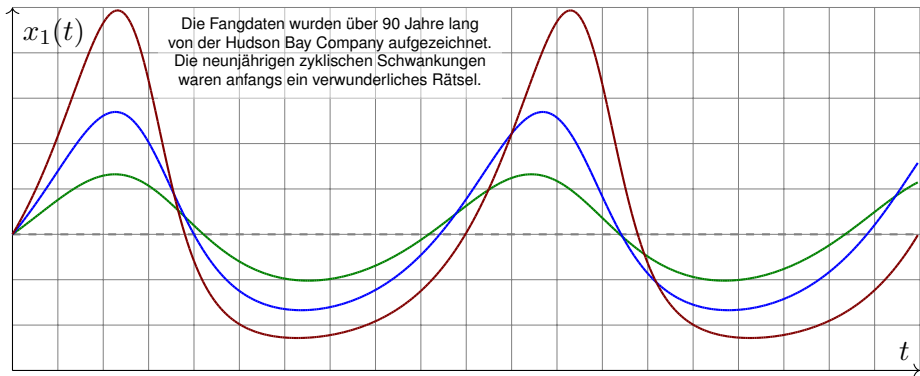
Räuber-Beute-Modell:
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0.8 x_1 - 0.4 x_1 x_2 & =: f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = -0.6 x_2 + 0.2 x_1 x_2 & =: f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

- Aufgabe:** (1) Skizzieren Sie den Zustandsraum und das Vektorfeld. Existiert zu jedem Startwert $x(0) \in \mathbb{R}^2$ eine Lösung $t \mapsto x(t)$? eindeutig?
- (2) Was folgt aus $x_2(0) = 0$? aus $x_1(0) = 0$? Wo liegen Fixpunkte? Skizzieren Sie Lösungen zu $x_1(0) = 3$ und $x_2(0) = 2.0, 1.8, \dots, 0.0$.
- (3) Ist das System linear? Wie / Können Sie Lösungen berechnen?
- (4) Linearisieren & lösen Sie für kleine Störungen des Gleichgewichts. Wie lange dauert eine Periode? Wie verlässlich ist das lineare Modell?
- (5) Das Potential $\Phi := \beta_2 x_1 - \alpha_2 \ln x_1 + \beta_1 x_2 - \alpha_1 \ln x_2$ erfüllt $\dot{\Phi} = 0$.
- (6) Erste Lotka–Volterra–Regel, Periodizität der Lösungen:
Beide Populationsgrößen entwickeln sich periodisch.
- (7) Zweite Lotka–Volterra–Regel, Konstanz der Mittelwerte:
Die zeitlichen Mittelwerte sind $\bar{x}_1 = \alpha_2 / \beta_2$ und $\bar{x}_2 = \alpha_1 / \beta_1$.
- (8) Angenommen, der Mensch hält die Beutetiere für Schädlinge. Im Zustand $(3, 1)$ werden sie gejagt und auf $(1, 1)$ reduziert. Erfolg?

Räuber-Beute-Modell nach Lotka–Volterra



Räuber-Beute-Modell nach Lotka–Volterra



Räuber-Beute-Modell: Linearisierung

Lösung: (1) Wir nutzen den \exists &E-Satz: f ist stetig differenzierbar.

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 - \beta_1 x_1 x_2 \\ -\alpha_2 x_2 + \beta_2 x_1 x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow f' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \beta_1 x_2 & -\beta_1 x_1 \\ \beta_2 x_2 & -\alpha_2 + \beta_2 x_1 \end{pmatrix}$$

😊 Zu jedem $x(0) \in \mathbb{R}^2$ existiert genau eine Lösung mit $\dot{x}(t) = f(x(t))$.

(2) Aus $x_2(0) = 0$ folgt $x_2(t) = 0$ und $x_1(t) = e^{\alpha_1 t} x_1(0)$ für alle $t \geq 0$.

Aus $x_1(0) = 0$ folgt $x_1(t) = 0$ und $x_2(t) = e^{-\alpha_2 t} x_2(0)$ für alle $t \geq 0$.

Die Fixpunkte $\dot{x} = f(x) \stackrel{!}{=} 0$ sind $(0, 0)$ und $(\alpha_2/\beta_2, \alpha_1/\beta_1) = (3, 2)$.

(3) Dieses System ist nicht linear! Lösungen können wir (hier wie meist) nur numerisch berechnen. Wie skizziert, Runge–Kutta sei Dank!

(4) Wir linearisieren um $x_0 = (\alpha_2/\beta_2, \alpha_1/\beta_1)$. Für $x(t) = x_0 + u(t)$ gilt:

$$\dot{u} = \dot{x} = f(x) = f(x_0 + u) \approx f(x_0) + f'(x_0) u = A u$$

😊 Die Jacobi–Matrix beschreibt das Verhalten um den Fixpunkt:

$$A = f'(x_0) = f' \begin{pmatrix} \alpha_2/\beta_2 \\ \alpha_1/\beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_2 \beta_1 / \beta_2 \\ \alpha_1 \beta_2 / \beta_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Räuber-Beute-Modell: Linearisierung

Nicht-linear ist schwierig, doch **lineare Systeme** lösen wir leicht:

$$p_A(x) = \det(A - xE) = \det \begin{pmatrix} -x & -\alpha_2\beta_1/\beta_2 \\ \alpha_1\beta_2/\beta_1 & -x \end{pmatrix} = x^2 + \alpha_1\alpha_2$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = +i\sqrt{\alpha_1\alpha_2} = +i\omega$, $\lambda_2 = -i\sqrt{\alpha_1\alpha_2} = -i\omega$

Eigenvektoren: $v_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_2\beta_1/\beta_2} \\ -i\sqrt{\alpha_1\beta_2/\beta_1} \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_2\beta_1/\beta_2} \\ +i\sqrt{\alpha_1\beta_2/\beta_1} \end{pmatrix}$

Eigenfunktionen: $u_1(t) = e^{\lambda_1 t} v_1$, $u_2(t) = e^{\lambda_2 t} v_2$

Für unser reelles System verlangen wir **reelle Lösungen**:

$$\operatorname{Re} u_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \sqrt{\alpha_2\beta_1/\beta_2} \\ \sin(\omega t) \sqrt{\alpha_1\beta_2/\beta_1} \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Im} u_1(t) = \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \sqrt{\alpha_2\beta_1/\beta_2} \\ -\cos(\omega t) \sqrt{\alpha_1\beta_2/\beta_1} \end{pmatrix}$$

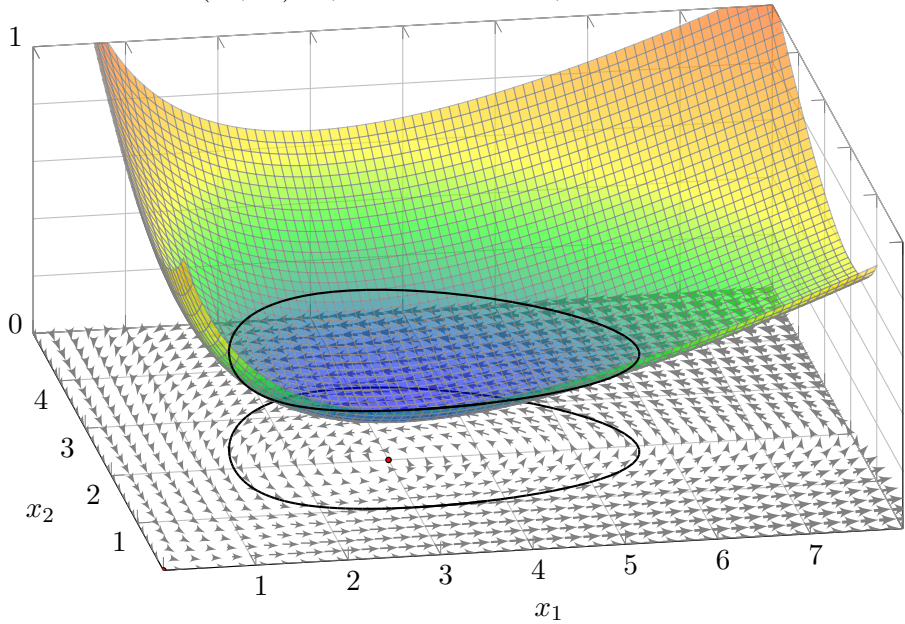
Die Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{\alpha_1\alpha_2}$ bedeutet Periodendauer $T = 2\pi/\omega$.

Im Beispiel ist $\alpha_1 = 0.8$ und $\alpha_2 = 0.6$, also $\omega \approx 0.69$ und $T \approx 9.07$.

😊 Plausibel: Für kleine Störungen deckt sich das mit obigen Skizzen. Große Störungen und Langzeitverhalten erfordern weitere Argumente!

Räuber-Beute-Modell: Potentialfläche

Das Potential $\Phi(x_1, x_2) = \beta_2 x_1 - \alpha_2 \ln x_1 + \beta_1 x_2 - \alpha_1 \ln x_2$ erfüllt $\dot{\Phi} = 0$.



Räuber-Beute-Modell: Periodizität

(5) Für das Potential $\Phi(x_1, x_2) := \beta_2 x_1 - \alpha_2 \ln x_1 + \beta_1 x_2 - \alpha_1 \ln x_2$ gilt

$$\begin{aligned}\dot{\Phi} &= \beta_2 \dot{x}_1 - \alpha_2 \dot{x}_1 / x_1 + \beta_1 \dot{x}_2 - \alpha_1 \dot{x}_2 / x_2 \\ &= (\beta_2 - \alpha_2 / x_1)(\alpha_1 x_1 - \beta_1 x_1 x_2) + (\beta_1 - \alpha_1 / x_2)(-\alpha_2 x_2 + \beta_2 x_1 x_2) = 0.\end{aligned}$$

(6) Jede Lösung in $\mathbb{R}_{>0}^2$ schließt sich deshalb nach endlicher Zeit $T > 0$:

(7) Die zeitlichen Mittelwerte der Populationsgrößen sind

$$\bar{x}_1 := \frac{1}{T} \int_{t=0}^T x_1(t) dt \quad \text{und} \quad \bar{x}_2 := \frac{1}{T} \int_{t=0}^T x_2(t) dt.$$

Aus den beiden Differentialgleichungen folgt:

$$\begin{aligned}\beta_2 \bar{x}_1 - \alpha_2 &= \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \beta_2 x_1(t) - \alpha_2 dt = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \frac{\dot{x}_2(t)}{x_2(t)} dt = \left[\frac{\ln x_2(t)}{T} \right]_{t=0}^T = 0 \\ \alpha_1 - \beta_1 \bar{x}_2 &= \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \alpha_1 - \beta_1 x_2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \frac{\dot{x}_1(t)}{x_1(t)} dt = \left[\frac{\ln x_1(t)}{T} \right]_{t=0}^T = 0\end{aligned}$$

Das bedeutet $\bar{x}_1 = \alpha_2 / \beta_2$ und $\bar{x}_2 = \alpha_1 / \beta_1$. Erstaunlich: Der Mittelwert \bar{x}_1 der Beutepopulation hängt nicht von deren Reproduktionsrate ab!

Potentiale: Lösungen als Niveaulinien

Das Potential und seine Niveaulinien $\Phi(x, y) = \text{const}$ sind der Schlüssel zur exakten Lösung des Räuber-Beute-Modells, wie zuvor schon des harmonischen Oszillators [O101](#) und des mathematischen Pendels [O133](#).

Dasselbe nutzen wir seit Kapitel M für exakte Differentialgleichungen.

Wir wollen daher unsere guten Erfahrungen mit dieser Methode zusammenfassen und zu einem allgemeingültigen Satz bündeln.

Zu lösen sei das **autonome Differentialgleichungssystem**

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Hierbei sei $f: \mathbb{R}^2 \supseteq G \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein stetiges Vektorfeld in der Ebene.

Wir haben zudem ein Potential $\Phi: \mathbb{R}^2 \supseteq G \rightarrow \mathbb{R}$, das entlang jeder Lösung zeitlich konstant ist, das heißt, die Ableitung verschwindet:

$$0 = \frac{d}{dt} \Phi \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \dot{x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \dot{y} = \text{grad } \Phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

😊 Geometrisch: Genau dann ist $\Phi: G \rightarrow \mathbb{R}$ ein Potential, wenn das Vektorfeld f und das Gradientenfeld $\text{grad } \Phi$ überall senkrecht stehen.

Potentiale: Lösungen als Niveaulinien

Beispiel: Zu $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha_1 x - \beta_1 xy \\ -\alpha_2 y + \beta_2 xy \end{pmatrix}$ nutze $g\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \circlearrowleft f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha_2 y - \beta_2 xy \\ \alpha_1 x - \beta_1 xy \end{pmatrix}$.
Es gilt $f \cdot g = 0$ aber leider $\text{rot}(g) \neq 0$. Der integrierende Faktor $-1/xy$ liefert $\tilde{g}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \beta_2 - \alpha_2/x \\ \beta_1 - \alpha_1/y \end{pmatrix}$ mit $\text{rot}(\tilde{g}) = 0$, also $\tilde{g} = \text{grad } \Phi$. Damit finden wir leicht das ersehnte Potential $\Phi\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \beta_2 x - \alpha_2 \ln x + \beta_1 y - \alpha_1 \ln y$.

😊 Jede Lösung $[t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (x(t), y(t))$ hat konstantes Potential und ist somit gefangen auf ihrer **Niveaulinie** $\{(x, y) \mid \Phi(x, y) = \text{const}\}$.

Die oben genannten Beispiele illustrieren dies sehr eindrücklich:
Ein solches Potential ist hilfreich und liefert uns die Lösungskurven als Niveaulinien (zunächst implizit und zeitlich nicht parametrisiert).

Man nennt dies auch ein **erstes Integral** der Differentialgleichung.
Diese traditionelle Bezeichnung stammt aus Zeiten als man versuchte, alle Differentialgleichungen durch solcherart Integration explizit zu lösen.

⚠️ Damit wir wirklich eine Niveaulinie erhalten (und kein Plateau oder schlimmeres), fordern wir $\text{grad } \Phi(x, y) \neq 0$. Damit die Lösung nirgends stehen bleibt, fordern wir $|f(x, y)| \geq M > 0$. Diese beiden bilden die geometrischen Voraussetzungen des folgenden Periodizitätssatzes.

Periodizitätssatz: gefangen im Potentialtopf

In Anwendungen verhalten sich viele dynamische Systeme periodisch: harmonischer Oszillator, mathematisches Pendel, Lotka–Volterra, etc. Der folgende Satz erklärt dies ganz allgemein für zweidimensionale Systeme mit Potential: Kompakte Niveaulinien sind geschlossen!

Satz P2A: Periodizitätssatz zweidimensionaler Dynamik

Sei $f: \mathbb{R}^2 \supseteq G \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein stetiges Vektorfeld und $\Phi: G \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zu $a \leq b$ sei $K = \{ (x, y) \in G \mid a \leq \Phi(x, y) \leq b \}$ kompakt und liege ganz im Inneren $\overset{\circ}{G}$ des Definitionsbereichs G .

In jedem $(x, y) \in K$ sei $(f(x, y), \text{grad } \Phi(x, y))$ eine Orthogonalbasis, also $f(x, y) \neq 0$ und $\text{grad } \Phi(x, y) \neq 0$ und $f(x, y) \cdot \text{grad } \Phi(x, y) = 0$.

Dann sind Niveaulinien von $\Phi: K \rightarrow \mathbb{R}$ geschlossene Lösungskurven: Jeder Startwert $(x(0), y(0)) \in K$ führt zu einer eindeutigen periodischen Lösung $(x, y): \mathbb{R} \rightarrow G$ mit $(\dot{x}, \dot{y}) = f(x, y)$. Es gibt eine kleinste Periode $T > 0$, sodass $(x(t+T), y(t+T)) = (x(t), y(t))$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

😊 Die Voraussetzungen sind geometrisch anschaulich und in unseren Anwendungen leicht zu prüfen. Wir erhalten periodische Lösungen!

Periodizitätssatz: gefangen im Potentialtopf

Beweis: Zu $c \in [a, b]$ ist die Niveaulinie $C = \{ (x, y) \in G \mid \Phi(x, y) = c \}$ eine glatte Kurve in \mathbb{R}^2 (dank des Satzes über implizite Funktionen).

Nach Konstruktion ist C abgeschlossen, wegen $C \subseteq K$ also kompakt. Jede kompakte Kurve ist eine Kreislinie oder Vereinigung von endlich vielen disjunkten Kreislinien (dank der Klassifikation der Kurven).

Für $(x, y) \in K$ gilt $f(x, y) \neq 0$. Die Absolutgeschwindigkeit $|f|: K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist stetig. Dank Kompaktheit nimmt sie ihr Minimum an. Demnach ist die Mindestgeschwindigkeit positiv, $M := \min |f(x, y)| = |f(x_m, y_m)| > 0$.

Jede der Kurven C hat endliche Länge $\ell(C)$. Bei Mindestgeschwindigkeit $M > 0$ wird sie also in endlicher Zeit $T \leq \ell(C)/M < \infty$ durchlaufen.

Jeder Startwert $(x(0), y(0)) \in K$ mit $\Phi(x(0), y(0)) = c$ führt schließlich zu einer periodischen Lösung: Jede Lösung $t \mapsto (x(t), y(t))$ verbleibt in C und läuft nicht aus G hinaus; sie setzt sich unendlich fort für alle $t \in \mathbb{R}$.

Die Lösung $\mathbb{R} \rightarrow G: t \mapsto (x(t), y(t))$ durchläuft ewig die Kreislinie C . Nach der Zeit $T > 0$ kehrt sie zwingend zurück in den Ausgangszustand $(x(T), y(T)) = (x(0), y(0))$. Dank des Eindeutigkeitsatzes O1B folgt hieraus die Periodizität $(x(t+T), y(t+T)) = (x(t), y(t))$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Lie–Ableitung und erste Integrale

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : \mathbb{R}^n \supseteq G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Dieses Vektorfeld definiert die **autonome Differentialgleichung** $\dot{x}(t) = f(x(t))$.

Zu jedem vorgegebenen Startwert $x(0) = x_0 \in G$ existiert genau eine maximale Lösung $x : \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow G$ mit $\dot{x}(t) = f(x(t))$ für alle $t \in I$ (O1B).

Sei $E : G \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zum Gradienten ∇E bilden wir das Produkt $\dot{E} := \nabla E \cdot f : G \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \partial_1 E(x) \cdot f_1(x) + \cdots + \partial_n E(x) \cdot f_n(x)$. Dies ist die **Lie–Ableitung** von E in Richtung des Vektorfeldes f .

Aufgabe: (1) Auf ganz G gelte (a) $\nabla E \cdot f = 0$ oder (b) ≥ 0 oder (c) ≤ 0 . Wie verhält sich $t \mapsto E(x(t))$ entlang einer Lösung $x : I \rightarrow G$?

(2) Eine Funktion $E : G \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\nabla E \cdot f = 0$ heißt **erstes Integral**. Wie nutzen Sie dies, um den Verlauf von Lösungen zu bestimmen? Geben Sie möglichst viele Beispiele! exakte Differentialgleichungen!

(3) Es gelte $\nabla E \cdot f \leq 0$ auf ganz G . Zum Startwert $E_0 = E(x_0)$ sei die Menge $K = \{ x \in G \mid E(x) \leq E_0 \}$ kompakt. Bleibt die Lösung $t \mapsto x(t)$ in der Teilmenge $K \subseteq G$ gefangen? Existiert die Lösung für alle $t \geq 0$?

(4) Welche drei Formen können Lösungskurven $\{ x(t) \mid t \in \mathbb{R} \}$ haben?

Lie–Ableitung und erste Integrale

Lösung: (1) Die Zeitableitung von $t \mapsto E(x(t))$ ergibt dank Kettenregel

$$\frac{d}{dt}E(x(t)) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial E}{\partial x_k}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \cdot \frac{dx_k}{dt}(t) = (\nabla E \cdot f)(x(t)).$$

Folglich ist $t \mapsto E(x(t))$ also (a) konstant, (b) wachsend, (c) fallend.

😊 Wir denken uns $\dot{x} = f(x)$ als mechanisches System, E als eine verallgemeinerte Energiefunktion und $\dot{E} \leq 0$ als Dissipation (Verlust).

(2) Zum Startwert $E_0 = E(x_0)$ verläuft die Lösung $t \mapsto x(t)$ ganz in der Teilmenge $K = \{x \in G \mid E(x) = E_0\}$. 😊 Ohne sie explizit zu kennen, können wir Lösungskurven eingrenzen, manchmal implizit bestimmen!

(3) Ja! Zum Beweis sei $[0, T[\rightarrow G : t \mapsto x(t)$ eine Lösung mit $0 < T < \infty$. Wegen $E(x_0) \in K$ und $\nabla E \cdot f \leq 0$ verläuft diese Lösung ganz in K .

Wegen $|\dot{x}(t)| = |f(x(t))| \leq M := \max_K |f|$ gilt $|x(s) - x(t)| \leq M|s - t|$. Dank dieser Cauchy–Bedingung konvergiert $x(t) \rightarrow x_T \in K$ für $t \nearrow T$. Dank des \exists &E-Satzes O1B können wir die Lösung weiter fortsetzen.

(4) Entweder ist $t \mapsto x(t)$ konstant, nämlich für $f(x_0) = 0$, oder injektiv oder periodisch. Die Kurve $\{x(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ ist demnach ein Punkt $\{x_0\}$, eine eingebettete unendliche Kurve $\mathbb{R} \hookrightarrow G$ oder kreisförmig $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow G$.

Stabilität von Fixpunkten

Wir untersuchen damit Fixpunkte und kleine Störungen noch genauer:

Definition P2B: Fixpunkte und Stabilität

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: \mathbb{R}^n \supseteq G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar.

Wir betrachten das Anfangswertproblem $\dot{x}(t) = f(x(t))$, $x(0) = x_0$.

(0) Wir nennen $x_0 \in G$ einen **Fixpunkt**, wenn er $f(x_0) = 0$ erfüllt.

Äquivalent hierzu: Die zugehörige Lösung $t \mapsto x(t)$ ist konstant.

(1) Der Fixpunkt x_0 heißt **Lyapunov-stabil**, wenn zu jedem Radius $\varepsilon > 0$ mit $\bar{B}(x_0, \varepsilon) \subseteq G$ ein (eventuell kleinerer) Radius $\delta > 0$ existiert, sodass für jeden Startpunkt $\tilde{x}_0 \in B(x_0, \delta)$ die zugehörige Lösung $t \mapsto \tilde{x}(t)$ für alle $t \in [0, \infty[$ existiert und ganz in $B(x_0, \varepsilon)$ verläuft.

(2) Der Fixpunkt x_0 heißt **asymptotisch stabil**, wenn (1) gilt und zudem ein $\delta > 0$ existiert, sodass für jeden Startpunkt $\tilde{x}_0 \in B(x_0, \delta)$ die zugehörige Lösung $t \mapsto \tilde{x}(t)$ für $t \rightarrow \infty$ gegen x_0 konvergiert.

(3) Der Fixpunkt x_0 heißt **exponentiell stabil**, wenn (2) gilt mit Schranke $|\tilde{x}(t) - x_0| \leq \alpha \cdot |\tilde{x}_0 - x_0| \cdot e^{-\lambda t}$ für Konstanten $\alpha, \lambda > 0$ und alle $t \geq 0$.

Stabilität von Fixpunkten

Übung: Formulieren Sie zur Wiederholung den un/gedämpften harmonischen Oszillator [O101], das un/gedämpfte mathematische Pendel [O133], Lotka–Volterra [P233], usw. . . als dynamisches System $\dot{x} = f(x)$. Wo sind die Fixpunkte? Welche sind stabil? asymptotisch? exponentiell? Formulieren Sie die Gesamtenergie E und zeigen Sie $\dot{E} = 0$ bzw. $\dot{E} \leq 0$.

Aufgabe: Zu $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ betrachten wir das lineare System $\dot{x}(t) = Ax(t)$. Wo sind die Fixpunkte? Welche sind stabil? asymptotisch? exponentiell? Sei 0 asymptotisch stabil. Dann ist $\langle u | v \rangle_A := \int_{t=0}^{\infty} \langle e^{tA}u | e^{tA}v \rangle dt$ ein Skalarprodukt, und für die „Energie“ $E(x) = \langle x | x \rangle_A$ gilt $\dot{E}(x) = -|x|^2$.

Lösung: Ein Fixpunkt ist 0; weitere gibt's nur für $Ax = 0$, also $x \in \ker A$. Genau dann ist 0 asymptotisch stabil, gar exponentiell, wenn $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$, und instabil, wenn $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$ für ein $k \in \{1, \dots, n\}$. Im verbleibenden kritischen Fall gilt $\operatorname{Re}(\lambda_k) \leq 0$ für alle k und $\operatorname{Re}(\lambda_k) = 0$ für ein k . Er kann instabil oder stabil sein, aber nicht asymptotisch stabil.

Das Integral konvergiert, erfüllt alle Anforderungen (I1G), und es gilt $\dot{E}(x) = 2\langle x | Ax \rangle_A = \int_{t=0}^{\infty} 2\langle x(t) | \dot{x}(t) \rangle dt = [|x(t)|^2]_{t=0}^{\infty} = -|x|^2$.

Die Methode von Lyapunov

Nicht-lineare dynamische Systeme $\dot{x}(t) = f(x(t))$ können wir meist nicht explizit lösen. Lyapunovs Methode liefert dennoch Schlussfolgerungen über Lösungsverlauf und Stabilität. Sei x_0 ein Fixpunkt, also $f(x_0) = 0$.

Satz P2c: Lyapunov–Kriterium für In/Stabilität

Sei $E : \mathbb{R}^n \supseteq G \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und **positiv definit** um x_0 :
Es gelte $E(x_0) = 0$ und $E(x) > 0$ für $x \neq x_0$. (Lyapunov–Funktion)

(1) Sei E **schwach dissipativ** um x_0 : Für $|x - x_0| \leq \varepsilon$ gelte $\dot{E}(x) \leq 0$.
Dann ist der Fixpunkt x_0 stabil.

(2) Sei E **strikt dissipativ** um x_0 : Für $0 < |x - x_0| \leq \varepsilon$ gelte $\dot{E}(x) < 0$.
Dann ist der Fixpunkt x_0 asymptotisch stabil.

(3) Für $|x - x_0| \leq \varepsilon$ gelte $\dot{E} \leq -\alpha E$ und $E(x) \geq c|x - x_0|^\beta$ mit $\alpha, \beta, c > 0$.
Dann ist der Fixpunkt x_0 exponentiell stabil.

(4) Für $0 < |x - x_0| \leq \varepsilon$ gelte $\dot{E}(x) > 0$. Dann ist der Fixpunkt x_0 instabil.

Aufgabe: Erklären Sie diese Aussagen möglichst anschaulich anhand von Skizzen und versuchen Sie sie anschließend zu beweisen!

Die Methode von Lyapunov

- (1) Sei $\varepsilon > 0$. Wir können ε so klein wählen, dass $\bar{B}(x_0, \varepsilon) \subseteq G$ gilt. Die Sphäre $\partial B(x_0, \varepsilon)$ ist kompakt. Die stetige Funktion E nimmt hierauf ihr Minimum an, also gilt $m := \min\{ E(x) \mid x \in \partial B(x_0, \varepsilon) \} > 0$. Zu $E(x_0) = 0$ wählen wir $\delta > 0$ so, dass $E(x) < m$ für alle $x \in B(x_0, \delta)$. Zum Startpunkt $\tilde{x}_0 \in B(x_0, \delta)$ gilt $E(\tilde{x}(t)) \leq E(\tilde{x}(0)) < m$ für alle $t \geq 0$. Somit kann die Lösung $t \mapsto \tilde{x}(t)$ die Sphäre $\partial B(x_0, \varepsilon)$ nicht erreichen, und demnach den vorgegebenen Ball $B(x_0, \varepsilon)$ um x_0 niemals verlassen.
- (2) Zum Startpunkt $\tilde{x}_0 \in B(x_0, \delta)$ bleibt die Lösung $t \mapsto x(t)$ in $B(x_0, \varepsilon)$. Zudem ist $t \mapsto E(x(t)) \in [0, m]$ monoton fallend, konvergiert also für $t \rightarrow \infty$ gegen einen Grenzwert $e \geq 0$. Wir haben $e = 0$ zu zeigen. Angenommen $e > 0$. Es existiert $\rho > 0$ sodass $E(x) < e$ für $x \in B(x_0, \rho)$. Die Lösung $t \mapsto \tilde{x}(t)$ verläuft also vollständig im kompakten Kreisring $K = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \rho \leq |x - x_0| \leq \varepsilon \}$. Die stetige Funktion $\dot{E} = \nabla E \cdot f < 0$ nimmt hierauf ihr Maximum an, also gilt $a := \max\{ \dot{E}(x) \mid x \in K \} < 0$. Es folgt $E(\tilde{x}(t)) = E(\tilde{x}(0)) + \int_0^t \dot{E}(\tilde{x}(\tau)) d\tau \leq E(\tilde{x}(0)) + at \searrow -\infty$. Das ist wegen $E \geq 0$ unmöglich. Also gilt $e = 0$, und somit $x(t) \rightarrow x_0$.
- Aussagen (3) und (4) beweist man ähnlich; ich führe dies hier nicht aus.

Lyapunovs indirekte Methode: das Eigenwertkriterium

Wir betrachten das autonome System $\dot{x} = f(x)$ um einen Fixpunkt x_0 . Nach Verschieben können wir ohne Einschränkung $x_0 = 0$ annehmen. Für kleine Auslenkungen um den Fixpunkt 0 linearisieren wir gemäß

$$\dot{x} = Ax + g(x).$$

Die Jacobi-Matrix $A = f'(0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist der **lineare Hauptteil**.


Der **Störterm** g sei stetig und erfülle $|g(x)|/|x| \rightarrow 0$ für $x \rightarrow 0$.

Das **ungestörte System** $\dot{u} = Au$ ist linear: Satz P1G gibt uns explizit alle Lösungen mit Hilfe der Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, damit Stabilität.

Satz P2D: Eigenwertkriterium für In/Stabilität

Für das gestörte System $\dot{x} = Ax + g(x)$ gilt wie für das ungestörte:

- (1) Gilt $\operatorname{Re}(\lambda_k) < 0$ für *alle* Eigenwerte, so ist der Fixpunkt exp. **stabil**.
- (2) Gilt $\operatorname{Re}(\lambda_k) > 0$ für *einen* Eigenwert, so ist der Fixpunkt **instabil**.

 Den verbleibenden kritischen Fall muss man gesondert untersuchen: Hier gilt weder (1) noch (2), also $\sigma_A := \max\{\operatorname{Re}(\lambda_k) \mid k = 1, \dots, n\} = 0$.

Lyapunovs indirekte Methode: das Eigenwertkriterium

Zum Beweis konstruieren wir eine Lyapunov–Funktion gemäß Satz P2c.

Beweis: (1) Wie oben P248 nutzen wir zu $u, v \in \mathbb{R}^n$ das Skalarprodukt $\langle u | v \rangle_A := \int_{t=0}^{\infty} \langle e^{tA}u | e^{tA}v \rangle dt$. Für die Energie $E(x) = \langle x | x \rangle_A$ gilt:

$$\begin{aligned} \dot{E}(x) &\stackrel{\text{Def}}{=} 2\langle x | Ax + g(x) \rangle_A \stackrel{\text{Lin}}{=} 2\langle x | Ax \rangle + 2\langle x | g(x) \rangle_A \\ &\stackrel{\text{P248}}{=} -|x|^2 + 2\langle x | g(x) \rangle_A \stackrel{\text{CSU}}{\leq} -|x|^2 + 2 \cdot |x|_A \cdot |g(x)|_A \end{aligned}$$

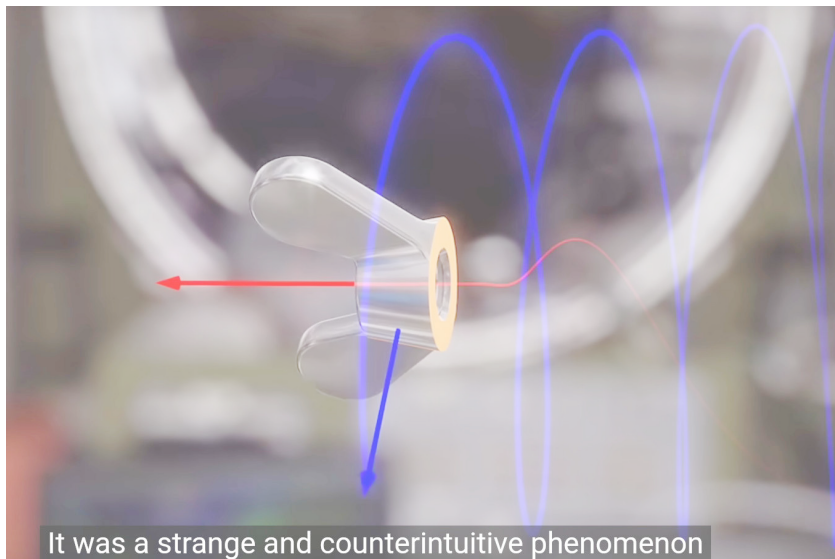
Auf dem \mathbb{R}^n sind je zwei Normen wie $|\cdot|$ und $|\cdot|_A$ äquivalent, das heißt, es gibt Konstanten $0 < a < b$ sodass $a|x| \leq |x|_A \leq b|x|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Wir wählen $\varepsilon > 0$ so klein, dass $B(0, \varepsilon) \subseteq G$ gilt, dank $|g(x)|/|x| \rightarrow 0$ zudem $|g(x)| \leq (1/4b^2)|x|$ für alle $x \in B(0, \varepsilon)$. Wir erhalten:

$$\dot{E}(x) \leq -|x|^2 + 2b^2 \cdot |x| \cdot |g(x)| \leq -\frac{1}{2}|x|^2 \leq -\frac{1}{2a^2}E(x)$$

Dank Lyapunov–Kriterium P2c(2) ist der Fixpunkt asymptotisch stabil; dank der Verschärfung P2c(3) ist er sogar exponentiell stabil.

Das Instabilitatskriterium (2) beweist man ähnlich; ich verweise auf

 W. Walter: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Springer, §29–30



It was a strange and counterintuitive phenomenon

The bizarre behavior of rotating bodies

▶ Veritasium, youtu.be/1VPfZ_XzisU

Der torkelnde Tennisschläger / *intermediate axis theorem*

Wir betrachten einen rotierenden Körper (in körperfesten Koordinaten). Die Drehbewegung wird beschrieben durch die **Euler-Gleichungen**:

$$\Theta \dot{\omega} = (\Theta \omega) \times \omega + M$$

Zu jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ ist $\omega(t) \in \mathbb{R}^3$ die Winkelgeschwindigkeit und $M(t) \in \mathbb{R}^3$ das angewendete Drehmoment; wir setzen hier $M(t) = 0$.

Hierbei ist $L = \Theta \omega$ der Drehimpuls, wir haben also $\dot{L} = L \times \omega + M$.

Das Trägheitsmoment $\Theta \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ diagonalisieren wir in **Hauptachsen**:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3 \end{pmatrix}$$
 (symmetrisch \implies orthogonal diagonalisierbar)
 Koordinatenweise ausgeschrieben erhalten wir unser nicht-lineares DGSsystem erster Ordnung:

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \dot{\omega}_1 \\ \theta_2 \dot{\omega}_2 \\ \theta_3 \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 \omega_1 \\ \theta_2 \omega_2 \\ \theta_3 \omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\theta_2 - \theta_3) \omega_2 \omega_3 + M_1 \\ (\theta_3 - \theta_1) \omega_3 \omega_1 + M_2 \\ (\theta_1 - \theta_2) \omega_1 \omega_2 + M_3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe: Sei $0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3$. Bestimmen Sie Fixpunkte und Stabilität.

Der torkelnde Tennisschläger / *intermediate axis theorem*

Lösung: (1) Es gibt genau die Fixpunkte $(\omega_1, 0, 0)$, $(0, \omega_2, 0)$, $(0, 0, \omega_3)$.
 (2) Wir linearisieren, dazu berechnen wir zunächst die Jacobi-Matrix:

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha_1 \omega_2 \omega_3 \\ \alpha_2 \omega_3 \omega_1 \\ \alpha_3 \omega_1 \omega_2 \end{pmatrix} \Rightarrow f' \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \omega_3 & \alpha_1 \omega_2 \\ \alpha_2 \omega_3 & 0 & \alpha_2 \omega_1 \\ \alpha_3 \omega_2 & \alpha_3 \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Linearisiert um den Fixpunkt $(0, \omega_2, 0)$ erhalten wir $\dot{u} = Au$:

$$A = f' \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 \omega_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha_3 \omega_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(A - \lambda E) = -\lambda(\lambda^2 - \alpha_1 \alpha_3 \omega_2^2) \\ = -\lambda(\lambda^2 - \omega_2^2 (\theta_3 - \theta_2)(\theta_2 - \theta_1) / \theta_1 \theta_3)$$

Eigenwerte sind 0 und $\pm \omega_2 \sqrt{(\theta_3 - \theta_2)(\theta_2 - \theta_1) / \theta_1 \theta_3}$. Daraus folgt:

Satz P2E: torkelnder Tennisschläger / *intermediate axis theorem*

Wir untersuchen die kräftefreie Bewegung eines starren Körpers mit Trägheitsmomenten $0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3$ bezüglich seiner Hauptachsen.

Die Rotation um die mittlere Achse ist instabil: Jede kleine Störung wird exponentiell verstärkt mit $e^{\lambda t}$ und $\lambda = |\omega_2| \sqrt{(\theta_3 - \theta_2)(\theta_2 - \theta_1) / \theta_1 \theta_3}$.

Der torkelnde Tennisschläger / *intermediate axis theorem*

Um $(\omega_1, 0, 0)$ linearisiert finden wir $0, \pm i\omega_1 \sqrt{(\theta_2 - \theta_1)(\theta_3 - \theta_1)/\theta_2\theta_3} \in i\mathbb{R}$.

Um $(0, 0, \omega_3)$ linearisiert finden wir $0, \pm i\omega_3 \sqrt{(\theta_3 - \theta_1)(\theta_3 - \theta_2)/\theta_1\theta_2} \in i\mathbb{R}$.

⚠ Das Eigenwertkriterium P2D können wir hier leider nicht anwenden! Die In/Stabilität lässt sich allein aus diesen Daten noch nicht schließen; dazu sind genauere Untersuchungen nötig, dank Lyapunov-Funktionen:

$$V_1 = (\theta_2 - \theta_1)\theta_2\omega_2^2 + (\theta_3 - \theta_1)\theta_3\omega_3^2 \geq 0, \quad V_1 = 0 \Leftrightarrow \omega_2 = \omega_3 = 0, \quad \dot{V}_1 = 0$$

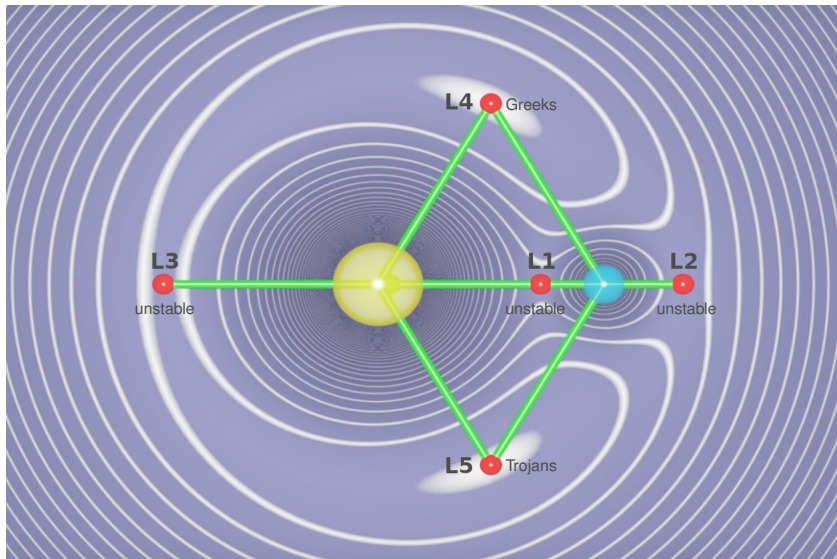
$$V_3 = (\theta_3 - \theta_1)\theta_1\omega_1^2 + (\theta_3 - \theta_2)\theta_2\omega_2^2 \geq 0, \quad V_3 = 0 \Leftrightarrow \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \dot{V}_3 = 0$$

😊 Diese Invarianten zeigen, dass die Rotation um die erste bzw. dritte Achse stabil ist. Letzteres gilt nur bei Energieerhaltung, wie eingangs vereinfachend angenommen. Bei Dissipation gilt $\dot{V}_1 \geq 0$ und $\dot{V}_3 \leq 0$.

⚠ Die Rotation um die kleine Achse wird dann ebenfalls instabil. Die NASA erfuhr dies 1958 schmerzlich mit Explorer 1, ihrem ersten künstlichen Erdsatelliten, siehe en.wikipedia.org/wiki/Explorer_1.

📖 Colley: *The tumbling box*. Amer. Math. Monthly 94 (1987) 62–68.
Marsden, Ratiu: *Mechanics and Symmetry*. Springer 1999, §15.9.

Die Lagrange-Punkte eines Zwei-Körper-Systems



What makes Lagrange points special locations in space?



Scott Manley, youtu.be/7PHvDj4TDfM

Die Lagrange–Punkte eines Zwei-Körper-Systems

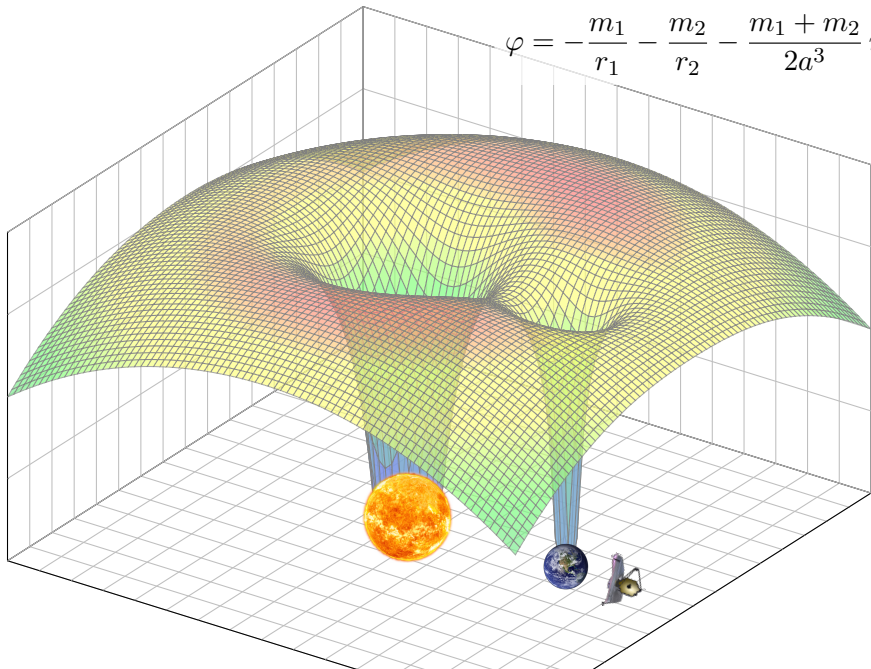
Newtons N –Körper-Problem spezialisieren wir zu $N = 2$ Körpern, etwa Sonne-Erde oder Erde-Mond; sie umkreisen sich ellipsenförmig. In jedem solchen System gibt es genau fünf **Lagrange–Punkte** oder **Librationspunkte**, in denen sich alle wirkenden Kräfte ausgleichen. Hier kann ein dritter, leichter Körper antriebslos geparkt werden.

Die Punkte $L_{1/2/3}$ sind in Radialrichtung instabil, also insgesamt instabil. Natürliche Objekte sammeln sich hier nicht, sondern werden langfristig ausgefegt; Dauerparken erfordert eine (leichte) **aktive Bahnkorrektur**. Der L_2 -Punkt ist ideal für Weltraumteleskope, etwa WMAP (2001–2010), Planck und Herschel (2009–2013), aktuell James-Webb (seit 2022).

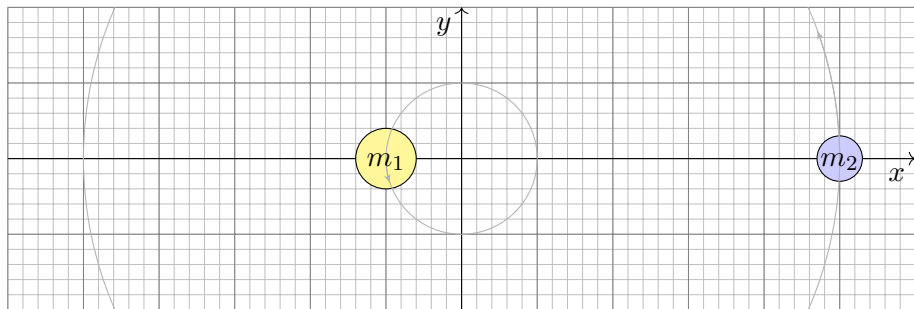
Die Punkte $L_{4/5}$ hingegen sind Lyapunov–stabil: Kleine Abweichungen bleiben beschränkt und vollführen kleine Oszillationen um den Fixpunkt. Hier können sich natürliche Objekte dauerhaft ansammeln, ganz ohne aktive Bahnkorrektur. Insbesondere auf den Umlaufbahnen der großen Planeten sammeln sich die **Griechen** um L_4 und die **Trojaner** um L_5 . Wir untersuchen nun dieses restringierte Drei-Körper-Problem (CR3BP).

Die Lagrange-Punkte eines Zwei-Körper-Systems

$$\varphi = -\frac{m_1}{r_1} - \frac{m_2}{r_2} - \frac{m_1 + m_2}{2a^3} r^2$$



Die Lagrange–Punkte eines Zwei-Körper-Systems



Wir betrachten zwei Massen $m_1 \geq m_2 > 0$ mit Abstand $a > 0$. Durch diese legen wir die x -Achse mit Ursprung im Schwerpunkt, genauer $x_1 < 0 < x_2$ mit $x_1 m_1 + x_2 m_2 = 0$ und $a = x_2 - x_1 = x_2(m_1 + m_2)/m_1$. Kreisförmige Bewegung entspricht der Winkelgeschwindigkeit ω mit Zentripetalkraft gleich Schwerkraft, also $\omega^2 x_2 m_2 = \gamma m_1 m_2 / a^2$, somit

$$\omega^2 = \gamma \frac{m_1 + m_2}{a^3}.$$

Das entspricht **Keplers drittem Gesetz**: Das Quadrat der Umlaufzeit ist proportional zum Kubus der großen Halbachse der Bahnellipse.

Die Lagrange–Punkte eines Zwei-Körper-Systems

Wir betrachten ein Testteilchen mit sehr kleiner Masse $m \ll m_2 \leq m_1$. Im rotierenden Koordinatensystem wirkt effektiv das **Roche–Potential**:

$$V(x, y, z) = -\gamma \frac{m_1}{r_1} - \gamma \frac{m_2}{r_2} - \frac{1}{2} \omega^2 r^2$$

mit den Abständen $r^2 = x^2 + y^2$ und $r_i^2 = (x - x_i)^2 + y^2 + z^2$. Auf das Testteilchen wirkt dadurch die Kraft $-m \nabla V$, als Summe der Schwerkraft zu m_1 und zu m_2 sowie der (fiktiven) Zentrifugalkraft weg von der Achse.

😊 Mit der Gleichung $\nabla V = 0$ finden wir alle **Gleichgewichtslagen!** In der Dynamik wirkt zudem die Corioliskraft $2m\vec{v} \times \vec{\omega}$, ausgeschrieben:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\partial_x V(x, y, z) + 2\dot{y}\omega \\ \ddot{y} &= -\partial_y V(x, y, z) - 2\dot{x}\omega \\ \ddot{z} &= -\partial_z V(x, y, z)\end{aligned}$$

Die **Gesamtenergie** des Zustands entspricht der Jacobi–Invariante

$$H(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = V(x, y, z) + \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Die Lagrange–Punkte eines Zwei-Körper-Systems

- Übung:** (1a) Bestimmen Sie die Lagrange–Punkte L_1, L_2, L_3 auf der x -Achse in Abhängigkeit vom Massenverhältnis $\mu = m_2/(m_1 + m_2)$.
- (1b) Setzen Sie die Zahlen für Sonne-Erde und für Erde-Mond ein. Vergleichen Sie dies mit der Position des James-Webb–Teleskops.
- (2) Genau dann gilt $\nabla V(p) = 0$, wenn $p \in \{L_1, L_2, L_3, L_4, L_5\}$:
- (2a) Jeder der fünf Lagrange–Punkte ist ein Gleichgewicht.
- (2b) Jedes Gleichgewicht ist einer der fünf Lagrange–Punkte.
- (3) Die Jacobi–Invariante H ist konstant entlang jeder Trajektorie, denn dank Kettenregel gilt $\dot{H} = \partial_x V \cdot \dot{x} + \partial_y V \cdot \dot{y} + \partial_z V \cdot \dot{z} + \ddot{x}x + \ddot{y}y + \ddot{z}z = 0$.


Lösung: Anschaulich erhalten wir die Situation der obigen Skizzen: Auf der x -Achse liegen die Lagrange–Punkte L_1, L_2, L_3 als Sattel; sie sind instabil bei Störung in x -Richtung, also insgesamt instabil. Die Maxima liegen in den Ecken L_4 und L_5 der beiden gleichseitigen Dreiecke in der x - y -Ebene; die Corioliskraft macht sie Lyapunov–stabil.





Eine schöne Ausführung und Lösung finden Sie bei Neil Cornish: *Lagrange Points*, map.gsfc.nasa.gov/ContentMedia/lagrange.pdf.


Die Lagrange–Punkte eines Zwei-Körper-Systems

Die fünf Lagrange–Punkte sind die Gleichgewichte. Ihre In/Stabilität erfordert eine genauere Analyse der Dynamik inklusive Corioliskraft. Beim ersten Blick auf das Potential V scheinen L_4 und L_5 instabil, erst die Corioliskraft stabilisiert sie. Eine detaillierte Darstellung finden Sie in:

 Meyer, Offin: *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*. Springer 2017. Ich fasse hier §4.5 zusammen:

 Die Punkte L_1, L_2, L_3 sind instabil dank Eigenwertkriterium P2D. Für diese Schlussfolgerung genügt also bereits die Linearisierung.

 Für die Stabilität der Punkte L_4 und L_5 ist das Massenverhältnis $\mu = m_2/(m_1 + m_2)$ entscheidend. Der kritische Wert ist nach Routh $\mu_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{69}/9) \approx 0.03852$. Für $\mu_1 < \mu \leq 1/2$ gibt es Eigenwerte mit positiven Realteil; gemäß P2D sind die Librationspunkte somit instabil. Für $0 < \mu \leq \mu_1$ sind alle Eigenwerte imaginär. Bedeutet das Stabilität?

 Zur Stabilität von L_4 und L_5 genügt die Linearisierung noch nicht. Erst eine genauere Untersuchung zeigt die Stabilität von L_4 und L_5 mit Methoden der KAM–Theorie (nach Kolmogorov, Arnold, Moser).

Die Lagrange–Punkte eines Zwei-Körper-Systems

- 😊 Mit aktiver Bahnkorrektur können Satelliten um L_1 , L_2 , L_3 kreisen, aktuell zum Beispiel das James-Webb Space Telescope (JWST) um L_2 .
- 😊 Die Jacobi–Invariante zeigt insbesondere, dass jede energetisch günstigste Flugbahn von der Erde zum Mond über den L_1 –Punkt führt.
- 😊 In einem binären Sternsystem kann über den L_1 –Sattelpunkt Masse leicht vom kleineren zum größeren Stern fließen (*accreting binaries*).
- 😊 Die Bahn eines Probetauchens kann überraschend kompliziert sein, kaulquappenförmig (*tadpole orbit*) oder hufeisenförmig (*horseshoe orbit*) um L_4 und L_5 , siehe de.wikipedia.org/wiki/Hufeisenumlaufbahn. Spektakuläres Beispiel sind die Saturnmonde Janus und Epimetheus.
- 😊 Die Erde hat neben dem Mond einen zweiten Begleiter als Minimond: Der Asteroid 3753 hat einen Durchmesser von etwa 5km. Er umkreist nicht die Erde, sondern den vorauseilenden Lagrange–Punkt L_4 des Sonne-Erde-Systems auf einer hufeisenförmigen Bahn. *Math rocks!*
- 📖 Wiegert, Innanen, Mikkola: *An asteroidal companion to the Earth*. Nature 387 (1997) 685–686, siehe www.nature.com/articles/42662

Hamiltonsche Dynamik: Energie als Antrieb

Jedes stetige Vektorfeld $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ definiert ein DGSystem

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)).$$

In physikalischen Anwendungen ist das Feld f oft von spezieller Form: Der Zustand $x = (q, p)$ besteht aus den Ortskoordinaten $q = (q_1, \dots, q_n)$ und den Impulskoordinaten $p = (p_1, \dots, p_n)$; somit ist $m = 2n$ gerade.

Definition P2F: hamiltonsches dynamisches System

Vorgegeben sei eine beliebige C^2 -Funktion $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, genannt **Hamilton-Funktion**. Diese definiert das **hamiltonsche Vektorfeld** $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ mit $f_k = \partial H / \partial p_k$ und $f_{n+k} = -\partial H / \partial q_k$ für $k = 1, \dots, n$. Wir erhalten so das **hamiltonsche dynamische System** (Ω, H) mit

$$\begin{aligned}\dot{q}_k(t) &= \frac{\partial H}{\partial p_k}(t, q(t), p(t)), \\ \dot{p}_k(t) &= -\frac{\partial H}{\partial q_k}(t, q(t), p(t)).\end{aligned}$$

Hamiltonsche Dynamik: Energie als Antrieb

😊 Dies vereinfacht dramatisch: Statt eines Vektorfeldes $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ betrachten wir nur noch eine skalare Funktion $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und setzen

$$f = J \cdot \nabla H \quad \text{mit} \quad J = \begin{pmatrix} 0_n & E_n \\ -E_n & 0_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}.$$

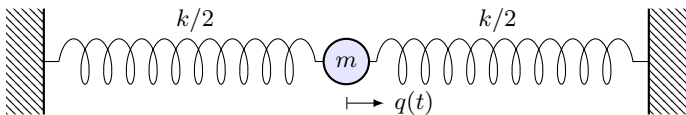
😊 Genau dann ist f hamiltonsch, wenn $-J \cdot f$ ein Potential H erlaubt. Das Potentialproblem für $(\Omega, -J \cdot f)$ haben wir in §H2 vollständig gelöst. Geometrisch: In jeder (q_k, p_k) -Ebene wirkt $\pm J$ als eine Vierteldrehung.

Somit ist (Ω, H) ein dynamisches System von der ganz speziellen Form $(\dot{q}, \dot{p}) = J \cdot \nabla H(t, q, p)$. Es lebt immer auf einem **Phasenraum** gerader Dimension $m = 2n$, und wir nennen n die **Anzahl der Freiheitsgrade**.

Jede Lösungskurve $t \mapsto (t, q(t), p(t))$ bezüglich H folgt dem zugehörigen hamiltonschen Vektorfeld $f = J \cdot \nabla H$ und wird **Trajektorie** genannt. Dank Cauchy O1B / Picard–Lindelöf O2A gilt Existenz und Eindeutigkeit.

Autonome Systeme sind zeitunabhängig: Hier gilt $\dot{x} = f(x)$ bzw. $(\dot{q}, \dot{p}) = J \cdot \nabla H(q, p)$, wobei f und H nicht von der Zeit t abhängen.

Hamiltonsche Dynamik: harmonischer Oszillator



Beispiel: Für den (reibungsfreien) harmonischen Oszillator betrachten wir den Zustandsraum $\Omega = \mathbb{R}^2$ und hierauf die Hamilton-Funktion

$$H(q, p) = \frac{k}{2}q^2 + \frac{1}{2m}p^2.$$

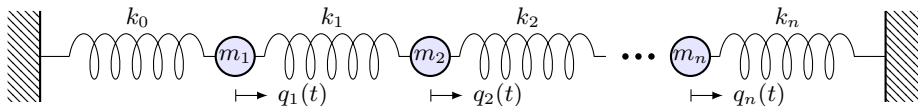
☺ Die Gesamtenergie $H(q, p)$ ist die Summe der potentiellen Energie $V(q) = \frac{k}{2}q^2$ und der kinetischen Energie $T(p) = \frac{1}{2m}p^2$ im Zustand (q, p) .

☺ Die zugehörigen hamiltonschen Bewegungsgleichungen P2F lauten

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p/m, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -kq.$$

Das ist sehr vertraut: Die erste Gleichung $p = m\dot{q}$ erklärt den Impuls p als Masse m mal Geschwindigkeit \dot{q} . Die zweite Gleichung $m\ddot{q} = -kq$ besagt Masse m mal Beschleunigung \ddot{q} ist gleich Federkraft $-kq$. O101

Hamiltonsche Dynamik: gekoppelte Oszillatoren



Beispiel: Für n linear gekoppelte Oszillatoren [P101] betrachten wir

$$H(q, p) = \sum_{i=0}^n \frac{k_i}{2} (q_{i+1} - q_i)^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2m_i} p_i^2.$$

Wie zuvor vereinbaren wir Dirichlet–Randbedingungen $q_0 = q_{n+1} = 0$.
 Hamiltons Bewegungsgleichungen P2F ergeben erneut Vertrautes:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = p_i/m_i, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -k_i(q_{i+1} - q_i) - k_{i-1}(q_{i-1} - q_i)$$

- ☺ Vorteile: einfache Funktion H , symmetrische Struktur in (q, p) .
 Dynamik und Stabilität lassen sich geometrisch untersuchen (P2H).
- ☺ Der Fluss im Phasenraum entspricht einem inkompressiblen Fluid
 und ermöglicht eine statistische Formulierung in der Thermodynamik.
- ☺ Leichter Übergang von klassischer zur Quantenmechanik. [R125]

Hamiltonsche Dynamik: die Poisson–Klammer

Aufgabe: Wie verändert sich eine skalare C^1 –Funktion $E : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ entlang der Trajektorie $t \mapsto (t, q(t), p(t))$ durch den Punkt $(\bar{t}, \bar{q}, \bar{p})$?

Lösung: Wir wenden die Kettenregel auf $t \mapsto E(t, q(t), p(t))$ an:

$$\begin{aligned} \dot{E}(\bar{t}, \bar{q}, \bar{p}) &\stackrel{\text{Def}}{=} \frac{dE(t, q(t), p(t))}{dt}(\bar{t}) \quad \text{mit} \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \\ &\stackrel{\text{KR}}{=} \frac{\partial E}{\partial t}(\bar{t}, \bar{q}, \bar{p}) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial E}{\partial q_k}(\bar{t}, \bar{q}, \bar{p}) \cdot \dot{q}_k(\bar{t}) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial E}{\partial p_k}(\bar{t}, \bar{q}, \bar{p}) \cdot \dot{p}_k(\bar{t}) \\ &= \frac{\partial E}{\partial t} + \{E, H\} \quad \text{mit} \quad \{E, F\} := \sum_{k=1}^n \frac{\partial E}{\partial q_k} \frac{\partial F}{\partial p_k} - \frac{\partial E}{\partial p_k} \frac{\partial F}{\partial q_k} \end{aligned}$$

Beispiel: Speziell für $E = H$ gilt $\{H, H\} = 0$. Daraus folgt $\dot{H} = \partial_t H$:

Satz P2G: Energieerhaltung in hamiltonscher Dynamik

Gegeben sei eine autonome Hamilton–Funktion H , das heist $\partial_t H = 0$. Dann gilt $\dot{H} = 0$, das heist H ist konstant entlang jeder Trajektorie.

Entspricht physikalischer Erfahrung: Die Gesamtenergie bleibt erhalten!

Hamiltonsche Dynamik: die Poisson–Klammer

Übung: Für C^1 -Funktionen $E, F, G, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Phasenraum definieren wir die **Poisson–Klammer** $\{E, F\}$ wie oben motiviert durch

$$\{E, F\} := \sum_{k=1}^n \frac{\partial E}{\partial q_k} \frac{\partial F}{\partial p_k} - \frac{\partial E}{\partial p_k} \frac{\partial F}{\partial q_k}.$$

Dann gelten die folgenden nützlichen Rechenregeln:

- (1) Antisymmetrie: $\{F, E\} = -\{E, F\}$, somit $\{E, E\} = 0$
- (2) Bilinearität: $\{aE + bF, G\} = a\{E, G\} + b\{F, G\}$ für $a, b \in \mathbb{R}$
- (3) Leibniz–Produktregel: $\{E \cdot F, G\} = E \cdot \{F, G\} + \{E, G\} \cdot F$
- (4) Jacobi–Identität: $\{E, \{F, G\}\} + \{F, \{G, E\}\} + \{G, \{E, F\}\} = 0$
- (5) Für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ gilt $\{q_i, q_j\} = 0$, $\{p_i, p_j\} = 0$, $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$.
- (6) Sei H autonom. Dann gilt $\dot{E} = \{E, H\}$. Gilt $\{E, H\} = 0$, so ist E eine **Erhaltungsgröße**. Gilt dies für E, F , so auch für $aE + bF$, $E \cdot F$, $\{E, F\}$.

Das System (Ω, H) heißt **vollständig integrabel** (nach Liouville), falls es n unabhängige Erhaltungsgrößen $H = E_1, \dots, E_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ erlaubt, die $\{E_i, E_j\} = 0$ für alle i, j erfüllen. Diese Bewegungsinvarianten legen alle Trajektorien eindeutig fest, wie etwa beim Pendel [O133](#) illustriert.

Hamiltonsche Dynamik: Fixpunkte und Stabilität

Sei $H(q, p) = V(q) + T(p)$ die Summe der Lageenergie $V(q)$ und der Bewegungsenergie $T(p)$. Hierbei sei $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine positiv definite quadratische Form, etwa $T(p) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2m_i} p_i^2$ mit Massen $m_i > 0$.

Satz P2H: Fixpunkte und Stabilität und kleine Schwingungen

- (0) Genau dann ist $(\bar{q}, 0) \in \Omega$ ein Fixpunkt, wenn $\nabla V(\bar{q}) = 0$ gilt.
 (1) Ist \bar{q} ein striktes lokales Minimum von V , so ist $(\bar{q}, 0)$ stabil.
 (2) Nach affiner Transformation der Koordinaten gilt dann

$$H(q, p) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} p_i^2 + \frac{1}{2} \omega_i^2 q_i^2 + (\text{höhere Terme})$$

„In erster Näherung ist alles eine harmonische Schwingung.“ (Horst Kilp)

- Beweis:** (0) Die Bewegungsgleichungen besagen $\dot{p}_k(t) = \partial H / \partial q_k = 0$, also $p_k(t) = \bar{p}_k = 0$, und $\dot{q}_k(t) = \partial H / \partial p_k = p_k / m_k = 0$, also $q_k(t) = \bar{q}_k$.
 (1) Dank P2G können wir das Lyapunov–Kriterium P2C anwenden:
 $E(q, p) = H(q, p) - V(\bar{q})$ ist positiv definit um $(\bar{q}, 0)$ und erfüllt $\dot{E} = 0$.

Hamiltonsche Dynamik: kleine Schwingungen

(2) Nach Verschieben der Koordinaten um \bar{q} dürfen wir $\bar{q} = 0$ annehmen. Das Potential V sei zweimal stetig differenzierbar, dank Taylor also

$$V(q) = V_0 + \sum_{i=1}^n V_i q_i + \sum_{i,j=1}^n V_{ij} q_i q_j + \varepsilon(q).$$

Das Energiegrundniveau V_0 können wir vereinfachend auf Null setzen. Da V in 0 ein lokales Minimum hat, gilt hier $(V_1, \dots, V_n) = \nabla V(0) = 0$. Die Hesse-Matrix $(V_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist symmetrisch und positiv semidefinit. Der Fehler $\varepsilon(q)$ liegt in $o(|q|^2)$, erfüllt also $\varepsilon(q)/|q|^2 \rightarrow 0$ für $|q| \rightarrow 0$.

Insgesamt erhalten wir also um den Zustand $(0, 0)$ die Näherung

$$H(q, p) = \sum_{i,j=1}^n T_{ij} p_i p_j + \sum_{i,j=1}^n V_{ij} q_i q_j + (\text{höhere Terme})$$

Wir können beide Matrizen (T_{ij}) und (V_{ij}) simultan diagonalisieren:

Dank Gram-Schmidt existiert eine Basis (e_1, \dots, e_n) mit $e_i^T T e_j = \frac{1}{2} \delta_{ij}$. Eine Drehung diagonalisiert nun die Matrix (V_{ij}) zu $\frac{1}{2} \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2)$.

In diesen Koordinaten gilt $H(q, p) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} p_i^2 + \frac{1}{2} \omega_i^2 q_i^2 + \text{höhere Terme}$. Die Bewegungsgleichungen sind $\dot{q}_i = p_i$ und $\dot{p}_i = -\omega_i^2 q_i$ (annähernd). Daraus folgt $q_i(t) = q_i^* \sin(\omega_i t + \varphi_i)$ und $p_i(t) = q_i^* \omega_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)$.

Differentialgleichungssysteme können wir auf 1. Ordnung reduzieren:

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1(t, y_1(t), \dots, y_n(t)), \\ \vdots \\ y_n'(t) = f_n(t, y_1(t), \dots, y_n(t)). \end{cases}$$

Mit $y = (y_1, \dots, y_n)$ und $f = (f_1, \dots, f_n)$ bündeln wir dies prägnant und übersichtlich als eine **vektorwertige Differentialgleichung**:

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

Gegeben ist hierzu die stetige Funktion $f: \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n \supseteq G \rightarrow \mathbb{K}^n$. Gesucht sind alle Funktionen $y: I \rightarrow \mathbb{K}^n$ auf einem (maximalen) Intervall I , die $(t, y(t)) \in G$ und die Gleichung $y'(t) = f(t, y(t))$ für alle $t \in I$ erfüllen.

Qualitativer Überblick dank **Existenz- und Eindeigkeitsatz** O1B:

- (1) Zu jedem Startpunkt (t_0, y_0) im Inneren $\overset{\circ}{G}$ existieren Lösungen; jede kann beidseitig bis zum Rand von G (oder ∞) fortgesetzt werden.
- (2) Ist $f(t, y)$ stetig diff'bar nach y , so ist die Lösung durch $(t_0, y_0) \in \overset{\circ}{G}$ eindeutig bestimmt und hängt stetig von diesen Anfangswerten ab.

Struktursatz für lineare Differentialgleichungssysteme

Ein **homogenes lineares DGSystem** erster Ordnung ist von der Form

$$y'(t) = A(t) y(t).$$

Gegeben ist hierzu eine stetige **Koeffizientenmatrix** $A: I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$.
Die Lösungsmenge $L_0 = \{ y: I \rightarrow \mathbb{K}^n \mid y' = Ay \}$ ist ein \mathbb{K} -Vektorraum der Dimension n : Wir wählen ein **Fundamentalsystem** $y_1, \dots, y_n \in L_0$ von n linear unabhängigen Lösungen. Bezüglich dieser Basis gilt dann:

$$L_0 = \{ c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K} \} \cong \mathbb{K}^n$$

Ein (inhomogenes) **lineares DGSystem** ist von der Form

$$y'(t) = A(t) y(t) + b(t).$$

Gegeben ist hier neben $A: I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ ein stetiger **Störterm** $b: I \rightarrow \mathbb{K}^n$.
Eine partikuläre Lösung y_b liefert die **Variation der Konstanten** (O3D).
Die Lösungsmenge $L_b = \{ y: I \rightarrow \mathbb{K}^n \mid y' = Ay + b \}$ ist ein affiner Raum:

$$L_b = y_b + L_0 = \{ y_b + c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K} \}$$

„Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen.“

Fundamentalsysteme für homogene lineare DGSysteme

Sei $A : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ stetig. Die **matrixwertige Differentialgleichung**

$$W'(t) = A(t) W(t) \quad \text{mit} \quad W(t_0) = E$$

erlaubt die **Fundamentallösung** $W : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ gegeben durch

$$W(t) = E + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t_k=t_0}^t A(t_k) \cdots \int_{t_2=t_0}^{t_3} A(t_2) \int_{t_1=t_0}^{t_2} A(t_1) dt_1 dt_2 \cdots dt_k.$$

Für jedes $t \in I$ ist die Reihe absolut konvergent und $W(t)$ invertierbar. Zu jedem $y_0 \in \mathbb{K}^n$ hat daher die **vektorwertige Differentialgleichung**

$$y'(t) = A(t) y(t) \quad \text{mit} \quad y(t_0) = y_0$$

genau eine Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{K}^n$, nämlich $y(t) = W(t) y_0$. Somit hat die Differentialgleichung $y' = A y$ als Lösungsmenge den \mathbb{K} -Vektorraum

$$L_0 = \{ W y_0 \mid y_0 \in \mathbb{K}^n \}.$$



Diese allgemeine Lösungsformel ist einfach und übersichtlich.

Fundamentalsysteme für homogene lineare DGSysteme

Lösungen $y_1, \dots, y_n : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ bündeln wir zur **Fundamentalmatrix**:

$$Y : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n},$$
$$Y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t)) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) & y_{21}(t) & \dots & y_{n1}(t) \\ y_{12}(t) & y_{22}(t) & \dots & y_{n2}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{1n}(t) & y_{2n}(t) & \dots & y_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

Die folgenden vier Aussagen sind untereinander äquivalent:

- (a) Die Funktionen $y_1, \dots, y_n : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ sind linear unabhängig über \mathbb{K} .
- (b) Die Vektoren $y_1(t), \dots, y_n(t)$ sind linear unabhängig für jedes $t \in I$.
- (c) Die Vektoren $y_1(t), \dots, y_n(t)$ sind linear unabhängig für ein $t \in I$.
- (d) Die Determinante erfüllt $\det Y(t) \neq 0$ für ein und damit alle $t \in I$.

Man nennt $Y(t)$ auch die **Wronski-Matrix** der Funktionen y_1, \dots, y_n .

Die **Wronski-Determinante** $w(t) = \det Y(t)$ entwickelt sich gemäß

$$w(t) = w(t_0) \cdot \exp \left[\int_{\tau=t_0}^t \operatorname{tr} A(\tau) \, d\tau \right].$$

Unsere **Fundamentallösung** W ist der Spezialfall mit $W(t_0) = E$;
Umrechnung via $Y(t) = W(t)Y(t_0)$ bzw. $W(t) = Y(t)Y(t_0)^{-1}$.

Partikulärlösung für inhomogene lineare DGSysteme

Seien $A: I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ und $b: I \rightarrow \mathbb{K}^n$ stetig, $Y = (y_1, \dots, y_n): I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ eine Fundamentalmatrix der homogenen Gleichung $Y'(t) = A(t)Y(t)$.

Zu lösen sei das inhomogene Differentialgleichungssystem

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t) \quad \text{mit} \quad y(t_0) = y_0.$$

Eine Lösung y_b erhalten wir durch **Variation der Konstanten**. O311

Zu jedem Anfangswert $y_0 \in \mathbb{K}^n$ existiert genau eine Lösung, nämlich

$$y(t) = Y(t) \int_{\tau=t_0}^t Y(\tau)^{-1} b(\tau) d\tau + Y(t)Y(t_0)^{-1}y_0.$$

Somit hat die Differentialgleichung $y' = Ay + b$ als Lösungsmenge

$$L_b = y_b + L_0 = \{ y_b + W y_0 \mid y_0 \in \mathbb{K}^n \}.$$

Dies ist ein affiner Raum der Dimension n und präzisiert die Merkmregel:
„Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen.“

Lösung durch Eigenvektoren und Eigenfunktionen

Häufig trifft man **lineare DGSysteme mit konstanten Koeffizienten**, z.B. durch Linearisierung autonomer DGSysteme um Fixpunkte (§P2).

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Zu lösen sei das DGSystem

$$y'(t) = A y(t) \quad \text{für} \quad y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n.$$

Zu jedem Startvektor $y(t_0) = y_0$ existiert genau eine Lösung, nämlich

$$y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n \quad \text{mit} \quad y(t) = e^{(t-t_0)A} y_0.$$

Die Berechnung dieser Matrix-Exponentialfunktion ist leider schwierig.

😊 Eigen- & Hauptvektoren können dies dramatisch vereinfachen: Eigenvektoren $v_1, \dots, v_\ell \in \mathbb{K}^n$ mit $Av_k = \lambda_k v_k$ liefern **Eigenfunktionen**

$$y_1, \dots, y_\ell: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n \quad \text{mit} \quad y_k(t) = e^{\lambda_k t} v_k.$$

Genau dann sind die Eigenfunktionen y_1, \dots, y_ℓ **linear unabhängig**, wenn die Eigenvektoren $v_1, \dots, v_\ell \in \mathbb{K}^n$ linear unabhängig sind.

Genau dann sind y_1, \dots, y_n eine **Basis** des Lösungsraumes der DG, wenn die Vektoren v_1, \dots, v_n eine Basis des Raumes \mathbb{K}^n sind.

Lösung durch Hauptvektorketten und Hauptfunktionen

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine Matrix und $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Skalar. Eine **Hauptvektorkette**

$$0 \xleftarrow{A-\lambda} v_1 \xleftarrow{A-\lambda} v_2 \xleftarrow{A-\lambda} \dots \xleftarrow{A-\lambda} v_\ell$$

besteht aus Vektoren $0 \neq v_1, \dots, v_\ell \in \mathbb{K}^n$ mit $(A - \lambda)v_k = v_{k-1}$.

Diese löst das DGSsystem durch **Hauptfunktionen** y_1, \dots, y_ℓ mit

$$y_k(t) = e^{\lambda t} \left[v_k + t v_{k-1} + \frac{t^2}{2} v_{k-2} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} v_1 \right]$$

☺ Ist A **diagonalisierbar**, so können wir die Differentialgleichungen vollständig entkoppeln (P1B): Wir finden eine Basis (v_1, \dots, v_n) des \mathbb{C}^n aus Eigenvektoren, $Av_k = \lambda_k v_k$. Diese liefert uns sofort eine Basis aus Eigenfunktionen $y_1, \dots, y_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ mit $y_k(t) = e^{\lambda_k t} v_k$.

Dies vereinfacht die Berechnung der obigen Matrix-Exponentialfunktion.

☺ Ist A **nicht diagonalisierbar**, so doch immerhin noch jordanisierbar: Es existiert eine Basis des Raumes \mathbb{C}^n aus Hauptvektoren, und diese liefern eine Basis des Lösungsraumes L_0 aus Hauptfunktionen.

Von komplexen zu reellen Lösungen

😊 Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ existiert eine Basis aus Hauptvektorketten. Das obige Verfahren führt also stets zu einer Basis des Lösungsraums.

Ist die Matrix reell, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so fordert man meist reelle Lösungen. Sei $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{C}^n$ eine Hauptvektorkette zum Eigenwert $\lambda = \sigma + i\omega$. Dann ist $\overline{v_1}, \dots, \overline{v_k}$ eine Hauptvektorkette zum Eigenwert $\overline{\lambda} = \sigma - i\omega$. Dank Basiswechsel hat das DGS System folgende **reelle Lösungen**

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} y_k(t) &= e^{\sigma t} \operatorname{Re} \left(e^{i\omega t} \left[v_k + t v_{k-1} + \frac{t^2}{2} v_{k-2} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} v_1 \right] \right), \\ \operatorname{Im} y_k(t) &= e^{\sigma t} \operatorname{Im} \left(e^{i\omega t} \left[v_k + t v_{k-1} + \frac{t^2}{2} v_{k-2} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} v_1 \right] \right). \end{aligned}$$

Wir erkennen hieran insbesondere das **asymptotische Verhalten**:

Für $\sigma < 0$ gilt exponentielles Abklingen, $|y_k(t)| \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$.

Für $\sigma > 0$ gilt exponentielles Wachstum, $|y_k(t)| \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$.

Für $\sigma = 0$ ist y_1 beschränkt, aber y_2, \dots, y_l wachsen polynomiell.

😊 Das Eigenwert-Kriterium gilt allgemein für Linearisierungen (P2D).

Verständnisfragen zu Eigen- & Hauptfunktionen

- Aufgabe:** (0) Welche Funktionen gehören zur Menge $V = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$? Ist sie ein \mathbb{C} -Vektorraum? Ist die Abbildung $\partial: V \rightarrow V: f \mapsto f'$ linear?
- (1) Finden Sie zu jedem Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ alle Eigenfunktionen von ∂ .
 - (2) Finden Sie zu jedem Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ alle Hauptfunktionen von ∂ .
 - (3) Welche Dimension hat V : endlich? unendlich? gar überabzählbar?
 - (4) Erlaubt der Raum V eine Basis aus Eigen-/Hauptfunktionen zu ∂ ?

- Lösung:** (0) Die Menge $V = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ der beliebig oft differenzierbaren Funktionen ist ein Vektorraum, genauer gesagt ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: Linearkombinationen glatter Funktionen sind glatt. Die Ableitung $\partial: V \rightarrow V: f \mapsto f'$ ist hierauf eine lineare Abbildung.
- (1) Die Eigenwertgleichung $\partial f = \lambda f$ ist die lineare Differentialgleichung $(\partial - \lambda)f = 0$ und wird gelöst von $f(x) = c e^{\lambda x}$ mit $c \in \mathbb{C}$. Eindeutigkeit: Der Eigenraum $E_\lambda = \ker(\partial - \lambda)$ ist eindimensional, erzeugt von $x \mapsto e^{\lambda x}$.
 - (2) Wir kennen den Hauptraum n -ter Stufe $H_\lambda^n = \ker(\partial - \lambda)^n$: Er besteht aus allen Funktionen $f(x) = (\sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k / k!) e^{\lambda x}$ mit $c_0, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{C}$. Er ist demnach n -dimensional, mit Basis $(e^{\lambda x} x^{k-1} / (k-1)!)_{k=1}^{n-1}$.

Verständnisfragen zu Eigen- & Hauptfunktionen

(3) Der Vektorraum $V = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist unendlich-dimensional:
Er enthält alle Polynome $\sum_{k=0}^n c_k x^k$ beliebigen Grades $n \in \mathbb{N}$.
Die Monome $1, x, x^2, x^3, \dots$ sind linear unabhängig, also $\dim V = \infty$.
Noch extremer: Die Familie der Eigenfunktionen $(e_\lambda : x \mapsto e^{\lambda x})_{\lambda \in \mathbb{R}}$ ist überabzählbar und linear unabhängig. Also ist die Dimension von V nicht nur abzählbar unendlich, sondern sogar überabzählbar unendlich.

😊 All diese Eigen- und Hauptfunktionen $e^{\lambda x} x^{k-1} / (k-1)!$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}$ sind überaus nützlich zur Lösung linearer Differentialgleichungen. Sie bieten uns ein großes Repertoire, das viele Anwendungen abdeckt.

(4) Sie bilden jedoch keine Basis von $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Zum Beleg suchen wir Funktionen $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, die sich nicht als Linearkombination von Eigen- und Hauptfunktionen $e^{\lambda x} x^{k-1} / (k-1)!$ darstellen lassen.

Jede Hauptfunktion $e^{\lambda x} x^{k-1} / (k-1)!$ ist analytisch, also darstellbar als Potenzreihe, und auf ganz \mathbb{R} konvergent. Gleiches gilt daher für jede Linearkombination. Für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ glatt mit kompaktem Träger (B438) gilt dies nicht, demnach ist f so nicht als Linearkombination darstellbar!

Verständnisfragen zu Eigen- & Hauptfunktionen

Aufgabe: Wir betrachten die Ableitung $\partial: f \mapsto f'$ als lineare Abbildung auf endlich-dimensionalen \mathbb{K} -Untervektorräumen von $V = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} V_1 &= \left\{ \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \mid c_k \in \mathbb{C} \right\} && \text{über } \mathbb{K} = \mathbb{C} \\ V_2 &= \left\{ \sum_{k=-n}^n c_k e^{kx} \mid c_k \in \mathbb{K} \right\} && \text{über } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C} \\ V_3 &= \mathbb{K}[x]_{<n} = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \mid a_k \in \mathbb{K} \right\} && \text{über } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C} \\ V_4 &= e^{\lambda x} \mathbb{K}[x]_{<n} = \left\{ e^{\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \mid a_k \in \mathbb{K} \right\} && \text{über } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C} \end{aligned}$$

Finden Sie eine Basis von V_i aus Eigenvektoren bzw. Hauptvektorketten. Berechnen Sie das char. Polynom der linearen Abbildung $\partial: V_i \rightarrow V_i$.

Lösung: (1) Die Funktionen $e_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $e_k(x) = e^{ikx}$ sind C^∞ -glatt und 2π -periodisch. Sie spannen den Raum T der trigonometrischen Polynome auf, und bilden hierin eine Orthonormalbasis (Kapitel I).

Sie sind Eigenfunktionen des Ableitungsoperators, denn $\partial e_k = ike_k$. Deshalb sind Fourier-Reihen für Differentialgleichungen so nützlich!

Die lineare Abbildung $\partial: V_1 \rightarrow V_1$ wird durch diese Basis diagonalisiert. Das char. Polynom ist demnach $\det(\partial - x \text{id}) = \prod_{k=-n}^n (x - ik) \in \mathbb{C}[x]$.

Verständnisfragen zu Eigen- & Hauptfunktionen

(2) Auch die reellen Funktionen $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_k(x) = e^{kx}$ sind Eigenfunktionen des Ableitungsoperators, denn $\partial f_k = k e_k$. Insbesondere sind sie linear unabhängig, und somit ist $(f_k)_{k=-n}^n$ eine Basis des Vektorraums V_2 bestehend aus Eigenfunktionen von ∂ . Die lineare Abbildung $\partial : V_2 \rightarrow V_2$ wird durch diese Basis diagonalisiert. Das char. Polynom ist demnach $\det(\partial - x \text{id}) = \prod_{k=-n}^n (x - k) \in \mathbb{R}[x]$.

(3) Hier ist $(x^k/k!)_{k=0}^{n-1}$ eine Hauptvektorkette und eine Basis von V_3 . Das char. Polynom ist demnach $\det(\partial - x \text{id}) = x^n \in \mathbb{R}[x]$. Für $\dim V_3 = n \geq 2$ ist ∂ auf V_3 nicht diagonalisierbar!

(4) Hier ist $(e^{\lambda x} x^k/k!)_{k=0}^{n-1}$ eine Hauptvektorkette und eine Basis von V_4 . Das char. Polynom ist demnach $\det(\partial - x \text{id}) = (x - \lambda)^n \in \mathbb{C}[x]$. Für $\dim V_4 = n \geq 2$ ist ∂ auf V_4 nicht diagonalisierbar!

😊 Der Ableitungsoperator ∂ ist für Differentialgleichungen und ihre Anwendungen extrem wichtig. Als lineare Abbildung ist er ebenso kompliziert wie interessant und illustriert nahezu alle Möglichkeiten. Die Lineare Algebra verschafft uns hierzu Klarheit und Übersicht.

Verständnisfragen: Vektorräume

Wir wollen lineare Differentialgleichungssysteme $\dot{u}(t) = A u(t)$ lösen. Dieses grundlegende Problem tritt in Anwendungen nahezu überall auf, meist als einfaches Teilproblem eines komplexeren Zusammenhangs. Zur Lösung mobilisieren wir den gesamten Apparat der linearen Algebra. Bitte wiederholen Sie hierzu noch einmal alle wichtigen Begriffe:

Was ist ein Körper $(\mathbb{K}, +, \cdot)$? Erklären Sie Beispiele: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$?

Was ist ein \mathbb{K} -Vektorraum $(V, +, \cdot)$? Beispiele? $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}[x], C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Was ist eine Basis? Geben Sie mehrere Beispiele für \mathbb{K}^n und $\mathbb{K}[x]$.

Was ist die Dimension eines \mathbb{K} -Vektorraums? Beispiele? $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}[x]$?

Was ist ein Untervektorraum $U \subseteq V$? Beispiele? $\mathbb{R}[x] \subseteq C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Was ist eine \mathbb{K} -lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$? Beispiele? $\partial = d/dx$?

Wann / womit / wie kann man $f: V \rightarrow W$ durch eine Matrix darstellen?

Beispiele: Stellen Sie $\partial = d/dx: \mathbb{R}[x]_{<n} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{<n}$ als eine Matrix dar,

und allgemein $\partial: Q_n \rightarrow Q_n$ auf $Q_n = \{ x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{x^k}{k!} e^{\lambda x} \mid c_k \in \mathbb{C} \}$

sowie $\partial: T_n \rightarrow T_n$ auf $T_n = \{ x \mapsto \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \mid c_k \in \mathbb{C} \} \subseteq C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

Warum ist die Antwort noch nicht eindeutig? Was benötigen Sie hierzu?

Verständnisfragen: Matrizenrechnung

Matrizenrechnung: Was ist $\mathbb{K}^{m \times n}$? Erklären Sie Addition $+$ und Multiplikation \cdot von Matrizen. Ist $(\mathbb{K}^{2 \times 2}, \cdot)$ kommutativ? nullteilerfrei? Welche Probleme löst der Gauß-Algorithmus und wie funktioniert er? Jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ definiert eine \mathbb{K} -lineare Abbildung $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ durch $v \mapsto Av$. Wie berechnen Sie ihren Kern? ihr Bild? Sind dies jeweils Untervektorräume? Welche nützliche Beziehung gilt zwischen $\dim_{\mathbb{K}} \text{Kern}(A)$ und $\dim_{\mathbb{K}} \text{Bild}(A)$? Wann ist A surjektiv? und injektiv? Was ist die Determinante? Welche charakteristischen Eigenschaften definieren sie? Wie kann man sie berechnen? Wie geht es effizient? Was bedeutet $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ist invertierbar? Warum gilt dabei $m = n$? Was gilt für den Kern von A ? für das Bild? für die Determinante? Welche Implikationen / Äquivalenzen gelten für diese Kriterien? Einfaches Beispiel: Untersuchen Sie Kern, Bild, Determinante und Invertierbarkeit der Telefonmatrix T und der Vandermonde-Matrix V :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

Verständnisfragen: Eigenvektoren

Was ist ein Eigenvektor / Eigenwert einer \mathbb{K} -linearen Abb. $f: V \rightarrow V$?

Beispiel: Finden Sie alle EV / EW der Ableitung $\partial = d/dx: V_i \rightarrow V_i$ auf

$$V_1 = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist beliebig oft differenzierbar} \},$$

$$V_2 = \{ a_0 + a_1x^1 + \dots + a_nx^n \mid n \in \mathbb{N}, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \} \subseteq C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

$$V_3 = \{ a_1x^{-1} + \dots + a_nx^{-n} \mid n \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \} \subseteq C^\infty(\mathbb{R}_{>0}, \mathbb{R}).$$

Gibt es lineare Abbildungen ohne Eigenwert? mit unendlich vielen?

Gibt es solche Fälle auch für lineare Abbildung $f: V \rightarrow V$ auf einem endlich-dimensionalen \mathbb{C} -Vektorraum? oder \mathbb{R} -Vektorraum?

Erklären Sie den Zusammenhang lineare Abbildungen – Matrizen sowie Eigenvektor / Eigenwert – Determinante – charakteristisches Polynom.

Fußballproblem: Kann man den Kreis $S^1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \}$ so drehen, dass kein einziger Punkt fix bleibt? Geht das auch mit der zweidimensionalen Sphäre $S^2 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$?

Was sagt Ihre Anschauung? Formulieren und begründen Sie es präzise!

Hier helfen Drehmatrizen $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und das charakteristische Polynom!

Verständnisfragen: Hauptvektoren

Was versteht man unter einer Hauptvektorkette für $f : V \rightarrow V$?

Sind die Vektoren einer solchen Kette linear unabhängig?

Was versteht man unter einer Jordan-Basis von V zu f ?

Finden Sie für $\partial : \mathbb{R}[x]_{\leq 7} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 7}$ eine Basis aus Hauptvektorketten.

Stellen Sie ∂ als Matrix in dieser Basis dar. Gilt diese Form allgemein?

Wie liest man hieraus das char. Polynom und alle Eigenwerte ab?

Gibt es reelle Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, die keine reellen Eigenwerte haben?
die reelle Eigenwerte haben aber dennoch nicht diagonalisierbar sind?

Gibt es reelle Matrizen $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, die keine reellen Eigenwerte haben?
die reelle Eigenwerte haben aber dennoch nicht diagonalisierbar sind?

Wenn $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ verschiedene reelle bzw. konjugiert-komplexe EW hat,
ist A dann diagonalisierbar über \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} ? Gilt hierzu die Umkehrung?

Wichtiger Spezialfall: Was gilt für jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Gibt es eine Basis aus Eigenvektoren? sogar eine Orthonormalbasis?

Wie lösen Sie eine Differentialgleichung $\dot{u}(t) = A u(t)$ mit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$
durch Eigen- & Hauptvektoren? Wann genügen nur Eigenvektoren?

Reduktion der Ordnung und Methodenvergleich

Wir vergleichen unsere Methoden zu den beiden Grundproblemen

$$p(\partial) y(t) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{u}(t) = A u(t).$$

Beides sind lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Im ersten Fall ist $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eindimensional aber der Differentialoperator $p(\partial)$ von Ordnung n . Hierzu liefert Kapitel N explizit alle Lösungen (N2D). Im zweiten Fall ist $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ mehrdimensional, wird aber nur einmal abgeleitet. Hierzu erklärt Kapitel P die allgemeine Lösungstheorie (P1E). Beide Probleme erweisen sich als äquivalent, und wir wollen sehen wie.

Aufgabe: Gegeben sei $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$.

- (1) Reduzieren Sie die DG $p(\partial) y(t) = 0$ auf ein System $\dot{u}(t) = A u(t)$.
- (2) Bestimmen Sie das char. Polynom dieser Systemmatrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.
- (3) Bestimmen Sie die Eigenräume. (4) Wann ist A diagonalisierbar?
- (5) Bestimmen Sie eine Basis des \mathbb{C}^n aus Hauptvektorketten von A .

Wie entsprechen Hauptlösungen von $p(\partial) y(t) = 0$ den Hauptfunktionen des DGSystems $\dot{u}(t) = A u(t)$ und den Hauptvektoren der Matrix A ?

Reduktion der Ordnung und Methodenvergleich

Lösung: (1) Wir setzen $u := (u_0 = y, u_1 = y', \dots, u_{n-1} = y^{n-1})$.
Damit ist $p(\partial) y(t) = 0$ äquivalent zu $\dot{u}(t) = A u(t)$ mit der Systemmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

😊 Dies erlaubt die **Reduktion** von Ordnung n auf Ordnung 1. 151

(2) Für das charakteristische Polynom der Matrix A betrachten wir

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & \dots & \lambda + a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

😊 Wir entwickeln die letzte Zeile und erhalten $\det(\lambda E - A) = p(\lambda)$.
Man nennt die Matrix A auch die **Begleitmatrix** zum Polynom p .
Das charakteristische Polynom von A ist das vorgegebene p .

Reduktion der Ordnung und Methodenvergleich

(3) Wir betrachten die **Eigenvektorgleichung** für $v \in \mathbb{C}^n$ und $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$A \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_{n-1} \\ -a_0 v_0 - \dots - a_{n-1} v_{n-1} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \lambda \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$$

Diese Gleichungen sind erfüllt genau für $v_k = \lambda^k v_0$ und $p(\lambda) v_0 = 0$.

😊 Zum Eigenwert λ gehört also der Eigenvektor $(1, \lambda, \dots, \lambda^{n-1})^\top$.

(4) Hier hat jeder Eigenwert λ geometrische Vielfachheit 1: Genau dann ist A diagonalisierbar, wenn p verschiedene Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ hat; genauer gilt $V^{-1}AV = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ mit der **Vandermonde-Matrix**

$$V = V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1^0 & \dots & \lambda_n^0 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Andernfalls ist die Matrix A nicht diagonalisierbar: Zu jedem Eigenwert der Vielfachheit $\ell \geq 1$ gehört eine einzige Hauptvektorkette der Länge ℓ und somit ein Jordan-Block der Größe $\ell \times \ell$. Auch das kommt also vor.

Reduktion der Ordnung und Methodenvergleich

(5) Sei λ eine Nullstelle der Vielfachheit $\ell \geq 1$. Hierzu hat $p(\partial) y(t) = 0$ die Hauptlösungen $y_1(t) = e^{\lambda t}$, $y_2(t) = t e^{\lambda t}$, \dots , $y_\ell(t) = \frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!} e^{\lambda t}$.

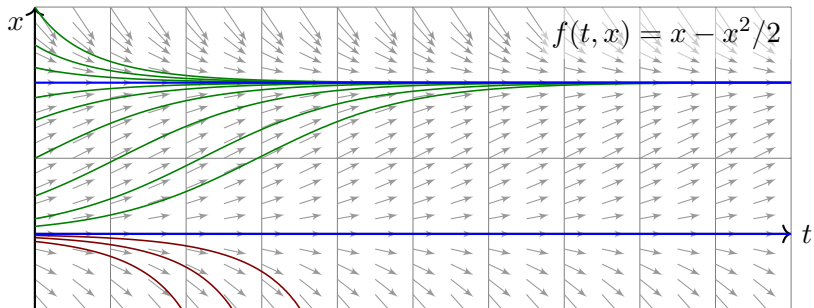
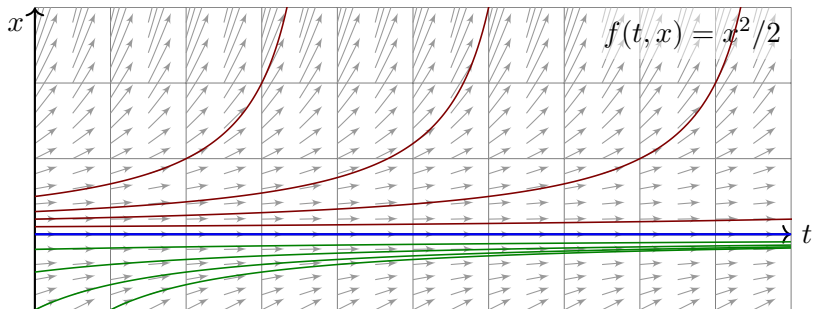
Diesen Lösungen von $p(\partial) y(t) = 0$ entsprechen bei $\dot{u}(t) = A u(t)$ wie erklärt die Hauptfunktionen $u_1, u_2, \dots, u_\ell: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$, ausgeschrieben:

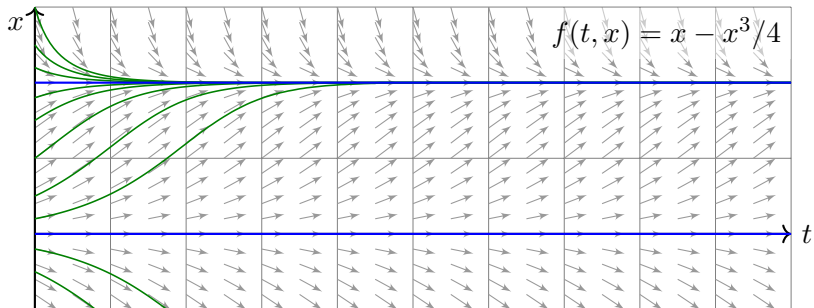
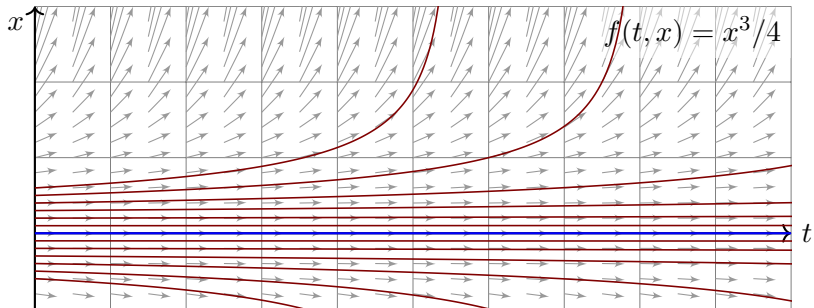
$$u_1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_2' \\ \vdots \\ y_2^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad u_\ell = \begin{pmatrix} y_\ell \\ y_\ell' \\ \vdots \\ y_\ell^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Ausgewertet in $t = 0$ erhalten wir die Hauptvektoren $v_1, v_2, \dots, v_\ell \in \mathbb{C}^n$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} \lambda^0 \\ \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1\lambda^0 \\ \vdots \\ (n-1)\lambda^{(n-2)} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad v_\ell = \begin{pmatrix} \binom{0}{\ell-1} \lambda^{(1-\ell)} \\ \binom{1}{\ell-1} \lambda^{(2-\ell)} \\ \vdots \\ \binom{n-1}{\ell-1} \lambda^{(n-\ell)} \end{pmatrix}$$

😊 Für Eigenvektoren & -funktionen ist das schön, leicht und erhellend. Für Hauptvektoren & -funktionen geht alles genauso, ist aber mühsamer.





Eindimensionale Dynamik: Fixpunkte & Stabilität

Aufgabe: Zu $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ untersuchen wir die nicht-lineare Gleichung

$$\dot{x} = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 \quad \text{für } x: \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}.$$

Diese Differentialgleichung ist recht einfach aber lehrreich: Sie illustriert das Wechselspiel zwischen Linearisierung und höheren Ordnungen.

- (1) Finden Sie alle Fixpunkte, jeweils in Abhängigkeit von α, β, γ .
- (2) Wie lautet die Linearisierung um 0? Lösungen? Stabilität?
- (3) Diskutieren Sie die Stabilität der nicht-linearen Gleichung.
 - (3a) Nutzen Sie möglichst effizient die Stabilitätskriterien.
 - (3b) Wo nötig / möglich lösen Sie die Gleichung explizit.
 - (3c) Skizzieren Sie die Lösungen, notfalls numerisch.

Lösung: (1) Ein Fixpunkt ist $x = 0$, für $\alpha \neq 0 = \beta = \gamma$ der einzige, für $\beta \neq 0 = \gamma$ auch $-\alpha/\beta$, für $\gamma \neq 0$ auch $(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma})/(2\gamma)$.

(2) Die Linearisierung um $x = 0$ lautet $\dot{x} = \alpha x$. Lösung $x(t) = x_0 e^{\alpha t}$. Für $\alpha < 0$ asymptotisch stabil, für $\alpha > 0$ instabil. Im kritischen Fall $\alpha = 0$ sind alle Lösungen konstant, der FP also stabil aber nicht asymptotisch.

Eindimensionale Dynamik: Fixpunkte & Stabilität

(3a) Für $\alpha < 0$ ist der Fixpunkt $x = 0$ stabil, für $\alpha > 0$ instabil.

Im kritischen Fall $\alpha = 0$ müssen wir die zweite Ordnung betrachten:

- Für $\beta > 0$ ist der FP linksseitig stabil aber rechtsseitig instabil.
- Für $\beta < 0$ ist der FP rechtsseitig stabil aber linksseitig instabil.

Also ist für $\alpha = 0$ und $\beta \neq 0$ der Fixpunkt $x = 0$ nicht stabil!

Im kritischen Fall $\alpha = \beta = 0$ müssen wir die dritte Ordnung betrachten:

Für $\gamma < 0$ ist der Fixpunkt beidseitig stabil, für $\gamma > 0$ beidseitig instabil.

(3b) Lösung von $\dot{x} = \beta x^2$ bzw. $\dot{x} = \alpha x + \beta x^2$, Bernoulli-Gleichung M413:

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 \beta t}, \quad x(t) = \frac{x_0 e^{\alpha t}}{1 - x_0 \beta (e^{\alpha t} - 1) / \alpha}$$

Lösung von $\dot{x} = \gamma x^3$ bzw. $\dot{x} = \alpha x + \gamma x^3$, Bernoulli-Gleichung M413:

$$x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{1 - 2x_0^2 \gamma t}}, \quad x(t) = \frac{x_0 e^{\alpha t}}{\sqrt{1 - x_0^2 \gamma (e^{2\alpha t} - 1) / \alpha}}$$

😊 Probe! Quantitativ (3b) ist es mühsam, qualitativ (3a) ist es leicht.

Zweidimensionale Dynamik: Fixpunkte & Stabilität

Aufgabe: (1) Zu lösen sei das lineare DGSytem $\dot{u}(t) = Au(t)$ mit

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (b) \quad A = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ist der Fixpunkt $(0, 0)$ stabil? oder instabil? von welchem Typ?
Gibt es außer dem Ursprung $(0, 0)$ noch weitere Fixpunkte?

(2) Untersuchen ebenso Sie die folgenden nicht-linearen Systeme:

$$(a) \quad \dot{x} = 2x + y, \quad \dot{y} = 3x + 3y^2 \quad \text{um } (0, 0)$$

$$(b) \quad \dot{x} = -2x - 5y, \quad \dot{y} = x + 3x^2 \quad \text{um } (0, 0)$$

(3) Untersuchen Sie die Stabilität mit Hilfe einer Lyapunov-Funktion:

$$(a) \quad \dot{x} = -x^3 - y, \quad \dot{y} = x - y^3, \quad V(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$$

$$(b) \quad \dot{x} = x^5 - 3y, \quad \dot{y} = 2x + y^3, \quad V(x, y) = 2x^2 + 3y^2$$

(4) Seien $a, b > 0$. Untersuchen Sie die Stabilität von $\dot{x} = \alpha x^3 - by$,
 $\dot{y} = ax + \beta y^3$ mit Hilfe der Lyapunov-Funktion $V(x, y) = ax^2 + by^2$.

Zweidimensionale Dynamik: Fixpunkte & Stabilität

Lösung: Dank Katalog: (1a) $\det A = -3$: instabil! genauer: Sattelpunkt.

(1b) $\det A = 5$, $\operatorname{tr} A = -2$, $\Delta A = -4$: stabil! genauer: stabiler Strudel.

😊 Determinante, Spur und Diskriminante genügen hierzu bereits!

Übung: Führen Sie die Rechnung aus bis zu Eigen-/Hauptfunktionen.

(2) Wir linearisieren $(\dot{x}, \dot{y}) = f(x, y)$ um den angegebenen Fixpunkt. Als Jacobi-Matrix erhalten wir jeweils ein Beispiel aus (1).

😊 Die Linearisierung vereinfacht das Problem ganz wesentlich:
Ein Lob an die effizienten Methoden der Linearen Algebra!

(3a) $\dot{V} = x\dot{x} + y\dot{y} = -x^4 - xy + xy - y^4 < 0 \Rightarrow$ asymp. stabil dank P2c

(3b) $\dot{V} = 4x\dot{x} + 6y\dot{y} = 4x^6 - 12xy + 12yx + 6y^4 > 0 \Rightarrow$ instabil dank P2c

😞 Linearisierung und Eigenwertkriterium P2D genügen hier nicht.

😊 Eine geeignete Lyapunov-Funktion löst das Problem elegant.

(4) Es gilt $\dot{V} = ax\dot{x} + by\dot{y} = \alpha ax^4 + \beta by^4$. Für $\alpha, \beta \leq 0$ ist der Fixpunkt $(0, 0)$ stabil, für $\alpha, \beta < 0$ sogar asymptotisch stabil, für $\alpha, \beta > 0$ instabil.

Übung: Denken Sie sich selbst weitere Beispiele dieser Art aus!
Falls Ihnen nichts einfällt, untersuchen Sie zufällige DGSsysteme.

Klassifikation zweidimensionaler linearer Dynamik

😊 Diese Übersicht und Klassifikation der zweidimensionalen Dynamik um einen Fixpunkt beruht auf unserem Verständnis der linearen Algebra: Wie bei jeder Klassifikation stellen sich zwei Fragen: Ist unsere Liste vollständig, haben wir also wirklich alle möglichen Fälle gefunden? Ist unsere Liste redundanzfrei, kommt also jeder Fall in unserer Liste höchstens einmal vor?

Satz P3A: Klassifikation von 2×2 -Matrizen bis auf Konjugation

Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ können wir durch Basiswechsel konjugieren zu genau einer der folgenden Modellmatrizen:

$$M_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \leq \mu \text{ in } \mathbb{R},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R} \text{ und } b > 0.$$

Dies sind die **Normalformen** oder **kanonischen Repräsentanten**:
Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ enthält die Menge $\{ T^{-1}AT \mid T \in GL_2 \mathbb{R} \}$ aller hierzu äquivalenten Matrizen genau eines der obigen Modelle.

Klassifikation zweidimensionaler linearer Dynamik

Aufgabe: Formulieren Sie den Beweis allgemein als Algorithmus:
Eingabe $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, Ausgabe $T \in GL_2 \mathbb{R}$ mit $T^{-1}AT = M_i$ wie gefordert.

😊 Die Klassifikation P3A und den Algorithmus führen Sie in jedem Anwendungsbeispiel durch. Das können Sie genauso programmieren!

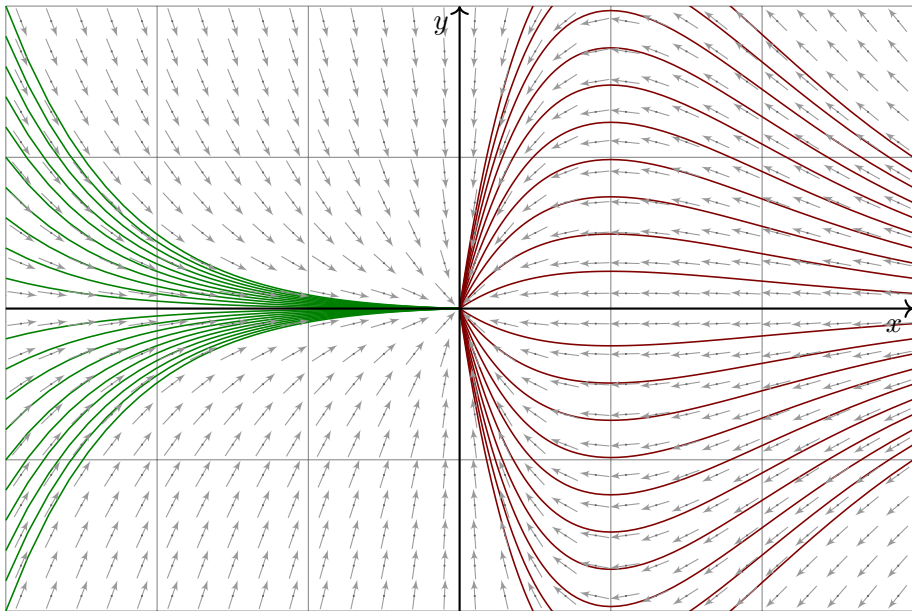
Lösung: (0) Berechne das char. Polynom $p_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$ und die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Unterscheide drei Fälle je nach Lage in \mathbb{C} :

(1) Zu $\lambda_1 < \lambda_2$ in \mathbb{R} berechne Eigenvektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$. Dank N2B sind sie linear unabhängig. Die Matrix $T = (v_1, v_2)$ erfüllt $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

(2) Im Falle $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda \in \mathbb{R}$ ist $\dim_{\mathbb{R}} \ker(A - \lambda) \in \{1, 2\}$ möglich. Bei $\dim = 2$ wähle zwei linear unabhängige Eigenvektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ wie in (1). Bei $\dim = 1$ berechne eine Hauptvektorkette $0 \leftarrow v_1 \leftarrow v_2$. Die Matrix $T = (v_1, v_2)$ erfüllt $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

(3) Im Falle $\lambda_{1/2} = a \pm ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $b > 0$ berechne Eigenvektoren $u_1 \in \mathbb{C}^2$ und $u_2 = \overline{u_1}$. Dank N2B sind sie \mathbb{C} -linear unabhängig. Realteil $v_1 = \operatorname{Re} u_1 = (u_1 + u_2)/2$ und Imaginärteil $v_2 = \operatorname{Im} u_1 = (u_1 - u_2)/2i$ bilden eine Basis $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ mit $Av_1 = av_1 + bv_2$ und $Av_2 = av_2 + bv_1$. Die Matrix $T = (v_1, v_2)$ erfüllt $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Zweidimensionale Dynamik: Fixpunkte & Stabilität



Aufgabe: Wir untersuchen das nicht-lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x, \\ \dot{y} &= -y + xy.\end{aligned}$$

- (1) Schreiben Sie dies als $(\dot{x}, \dot{y}) = f(x, y)$ mit Vektorfeld $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Finden Sie alle Fixpunkte dieses Systems, also Nullstellen von f .
- (2) Skizzieren Sie das Vektorfeld f auf dem Rechteck $[-3, 3] \times [-2, 2]$.
- (3) Linearisieren Sie um den Fixpunkt $(0, 0)$: Was ist die Jacobi-Matrix? Welchen Typ hat der Fixpunkt (laut unserem Katalog)? Ist er in/stabil?
- (4) Ist $E: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto x^2 + \ln(1 + y^2)$ eine Lyapunov-Funktion? Ausführlich gefragt: Wo gilt $E = 0$? Wo gilt $E > 0$? Gilt hier $\dot{E} < 0$? Was folgt damit für das asymptotische Verhalten der Lösungen?
- (5) Lösen Sie explizit das nicht-lineare Differentialgleichungssystem. Wie verhalten sich die Lösungen $(x(t), y(t))$ für $t \rightarrow \infty$?

Lösung: (1) Das Vektorfeld ist hier $f(x, y) = (-x, -y + xy)$. Für jeden Fixpunkt gilt $f(x, y) = 0$. Einzige Lösung ist $(0, 0)$.

Zweidimensionale Dynamik: Fixpunkte & Stabilität

(3) Die Linearisierung von f um den Fixpunkt $(0, 0)$ ist offensichtlich:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{= f'(0,0) =: A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix}}_{=: g(x,y)}$$

Die Lösung $t \mapsto e^{At}$ der linearen Gleichung ist eine zentrale Kontraktion. Der Fixpunkt $(0, 0)$ ist stabil, zumindest lokal unter kleinen Störungen.

(4) Es gilt $E(0, 0) = 0$. Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ gilt $E(x, y) > 0$ sowie

$$\begin{aligned} \dot{E}(x, y) &= \partial_x E(x, y) \cdot \dot{x} + \partial_y E(x, y) \cdot \dot{y} = 2x \cdot \dot{x} + \frac{2y}{1+y^2} \cdot \dot{y} \\ &= -2x^2 + \frac{2y^2(x-1)}{1+y^2} = \frac{-2x^2(1+y^2) + 2y^2(x-1)}{1+y^2} \\ &= -\frac{2x^2 + y^2 + x^2y^2 + (1-x)^2y^2}{1+y^2} < 0 \end{aligned}$$

Somit ist E eine Lyapunov-Funktion (P2c) und zudem strikt dissipativ. Der Fixpunkt $(0, 0)$ ist asymptotisch stabil, wie bereits erwartet dank der obigen Linearisierung (3), zumindest lokal unter kleinen Störungen.

Zweidimensionale Dynamik: Fixpunkte & Stabilität

Genauer: Jede Menge $K(c) := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid E(x, y) \leq c \}$ ist kompakt. Zu jedem Startwert $(x(0), y(0)) \in \mathbb{R}^2$ mit $E(x(0), y(0)) \leq c$ verbleibt die Lösung $(x(t), y(t))$ daher in $K(c)$ und existiert daher für alle Zeit $t \geq 0$.

Entlang jeder Lösung $(x(t), y(t))$ gilt $\dot{E} < 0$, also fällt $t \mapsto E(x(t), y(t))$ streng monoton und konvergiert für $t \rightarrow \infty$: Wir vermuten gegen Null! Dank Konvergenz $E \searrow e$ gilt $\dot{E} \rightarrow 0$. Dies ist nur für $(x, y) \rightarrow 0$ möglich!

(5) Wir lösen $\dot{x} = -x$ durch $x(t) = x_0 e^{-t}$ und dann $\dot{y} = (x - 1)y$ als lineare Differentialgleichung (M2D) durch $y(t) = y_0 \exp[x_0(1 - e^{-t}) - t]$.

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 e^{-t} \\ y_0 \exp[x_0(1 - e^{-t}) - t] \end{pmatrix}$$

😊 Zu jedem Startwert $(x(0), y(0)) \in \mathbb{R}^2$ gilt tatsächlich Konvergenz $(x(t), y(t)) \rightarrow (0, 0)$ für $t \rightarrow \infty$, wie in (4) bereits qualitativ gefunden.

😊 Die explizite Lösung beschert uns (wie immer) wesentlich genauere Aussagen über den Lösungsverlauf und die Konvergenzgeschwindigkeit.

⚠️ Obwohl alle Lösungen gegen den Fixpunkt $(0, 0)$ konvergieren, können sie zuvor noch beliebig große Umwege machen!

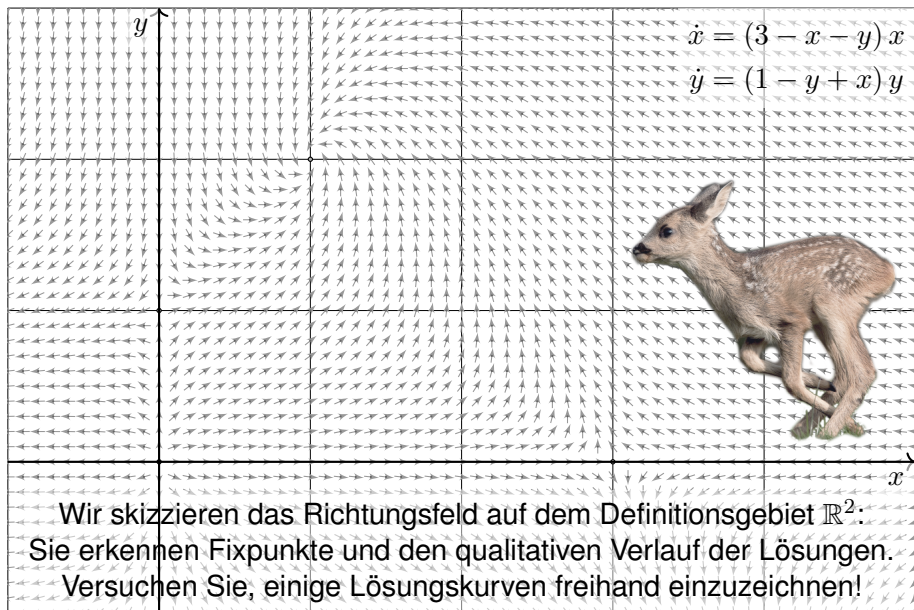
Populationsdynamik: Rehe und Wölfe

Aufgabe: Wir untersuchen das nicht-lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (3 - x - y)x, \\ \dot{y} &= (1 - y + x)y.\end{aligned}$$

- (1) Schreiben Sie dies als $(\dot{x}, \dot{y}) = f(x, y)$ mit Vektorfeld $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Finden Sie alle Fixpunkte dieses Systems, also Nullstellen von f .
- (2) Linearisieren Sie um jeden Fixpunkt p : Was ist die Jacobi-Matrix? Welchen Typ hat der Fixpunkt (laut unserem Katalog)? Ist er in/stabil?
- (3) Genauere Untersuchung: Finden Sie alle reellen Lösungen des linearisierten Differentialgleichungssystems um den Fixpunkt $p \in \mathbb{R}_{>0}^2$.
- (4) Was bedeuten in den Fixpunkten die Eigenvektoren? Erklären Sie dies anschaulich-geometrisch in folgender Skizze des Vektorfeldes.
- (5) Wie verhalten sich Lösungen $(x(t), y(t))$ mit Anfangspunkt $(x(0), y(0)) \in \mathbb{R}_{>0}^2$ für $t \rightarrow \infty$? Formulieren Sie eine qualitative Vermutung und begründen Sie diese anschaulich!
- (6) Interpretation: Welche Lösungskurven passen zu der Geschichte „Rehe allein auf der Insel“ und anschließend „Die Ankunft der Wölfe“?

Populationsdynamik: Rehe und Wölfe



Wir skizzieren das Richtungsfeld auf dem Definitionsgebiet \mathbb{R}^2 :
Sie erkennen Fixpunkte und den qualitativen Verlauf der Lösungen.
Versuchen Sie, einige Lösungskurven freihand einzuzeichnen!

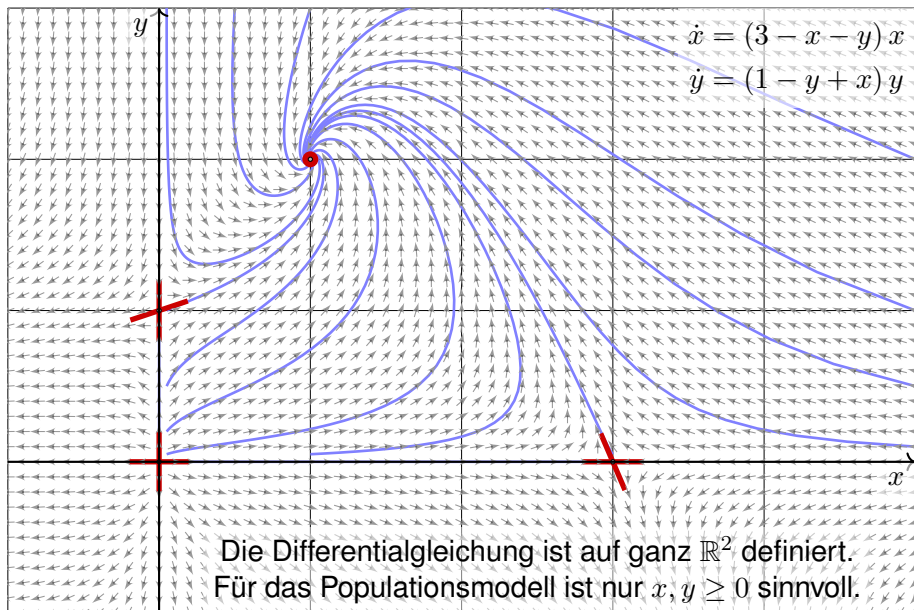
Populationsdynamik: Rehe und Wölfe

Interpretation / Motivation: Auf einer Insel vermehren sich Rehe. Zunächst wächst die noch kleine Rehpopulation proportional zur Populationsgröße $x(t)$, im Beispiel $\dot{x}(t) \approx 3x(t)$. Bei wachsender Population machen sich die begrenzten Ressourcen bemerkbar: Realistischer ist die logistische Gleichung $\dot{x} = (3 - x)x$, siehe M405. Fixpunkte sind hier $x = 0$ (keine Rehe) und $x = 3$ (Gleichgewicht).

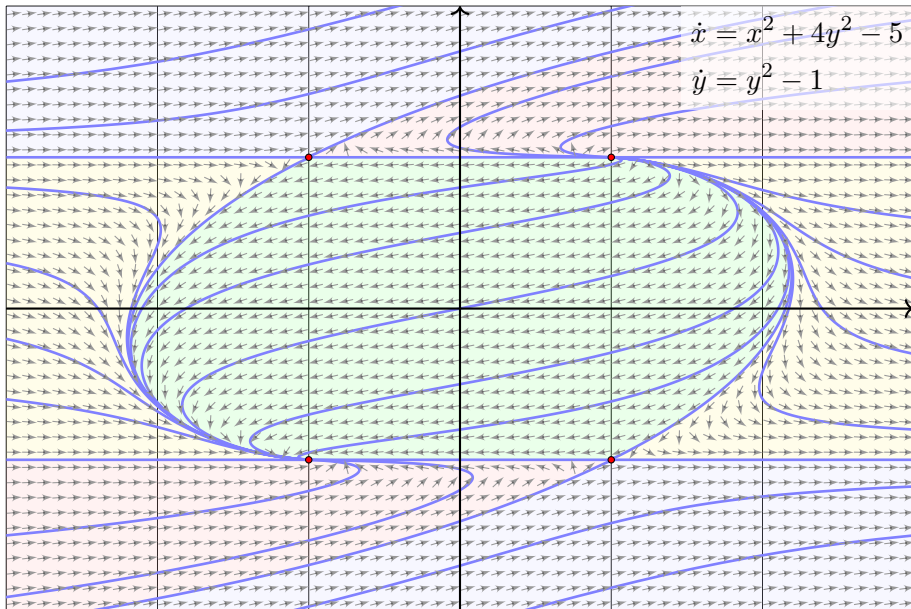
Eines Tages schwimmt ein Rudel Wölfe zur Insel. Die Rehpopulation $x(t)$ bietet der Wolfspopulation $y(t)$ reichlich Nahrung: Für die Wölfe gilt $\dot{y} = (1 - y)y + xy$. Für die Rehe hingegen gilt jetzt $\dot{x} = (3 - x)x - xy$. Die Entwicklung dieser beiden Populationen ist damit ein gekoppeltes nicht-lineares Differentialgleichungssystem. Voilà, unsere Aufgabe!

Die obige Skizze zeigt das Vektorfeld (auf Einheitslänge normiert). Sie erkennen hier graphisch die vier Fixpunkte, die Sie in Frage (1) explizit ausrechnen. Sie sehen auch den Typ jedes Fixpunkts (2). Quantitativ und ausführlich berechnen Sie dies für den besonders interessanten Fixpunkt (3), die anderen behandeln Sie analog (4). Damit können Sie das Verhalten der Lösungen beschreiben und erklären (5).

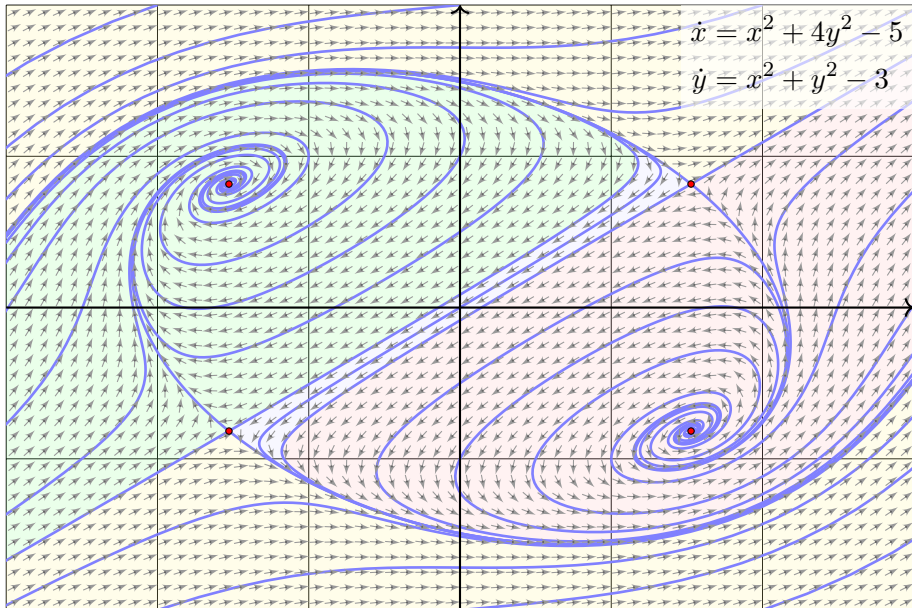
Populationsdynamik: Rehe und Wölfe



Dynamik eines quadratischen Vektorfeldes in der Ebene



Dynamik eines quadratischen Vektorfeldes in der Ebene



Dynamik polynomialer Vektorfelder in der Ebene

$$\begin{aligned}\dot{x} = P(x, y) &= p_{00} + p_{10}x + p_{01}y + p_{20}x^2 + p_{11}xy + p_{02}y^2 + \dots \\ \dot{y} = Q(x, y) &= q_{00} + q_{10}x + q_{01}y + q_{20}x^2 + q_{11}xy + q_{02}y^2 + \dots\end{aligned}$$

Wir betrachten die Differentialgleichung $(\dot{x}, \dot{y}) = (P, Q)$ in der Ebene \mathbb{R}^2 . Die Funktionen $P, Q \in \mathbb{R}[x, y]$ seien Polynome in x, y vom Grad $\leq n$.

Für Grad $n = 1$ haben wir ein **affin-lineares Vektorfeld**. Hierzu gibt es typischerweise genau einen Fixpunkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, und um diesen ist die Dynamik exakt linear. Dies konnten wir oben vollständig lösen!

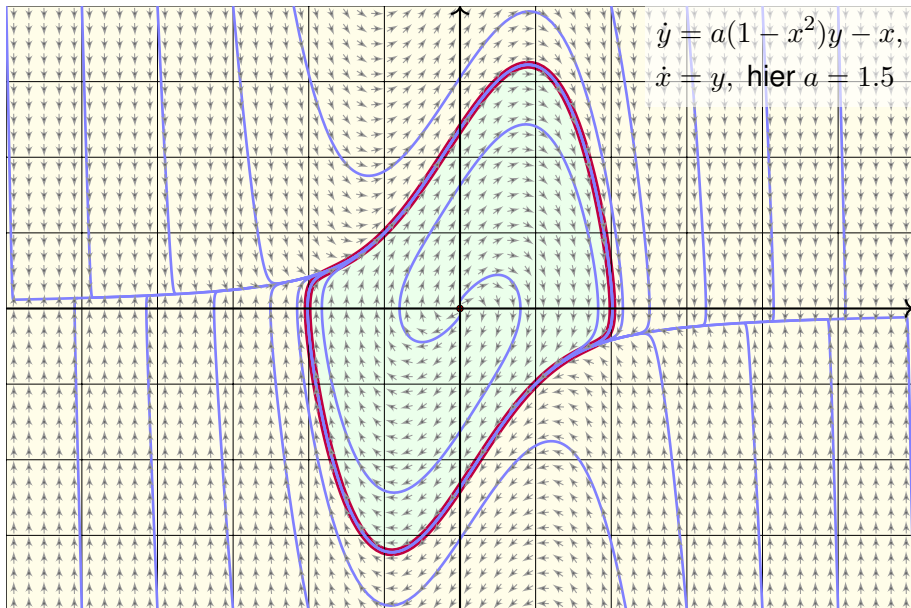
Für Grad $n = 2$ haben wir ein **quadratisches Vektorfeld**. Hierzu gibt es typischerweise vier Fixpunkte; zur Berechnung nutzen wir Quadriken.

Folgende Beispiele zeigen **polynomiale Vektorfelder** vom Grad $n = 3$.

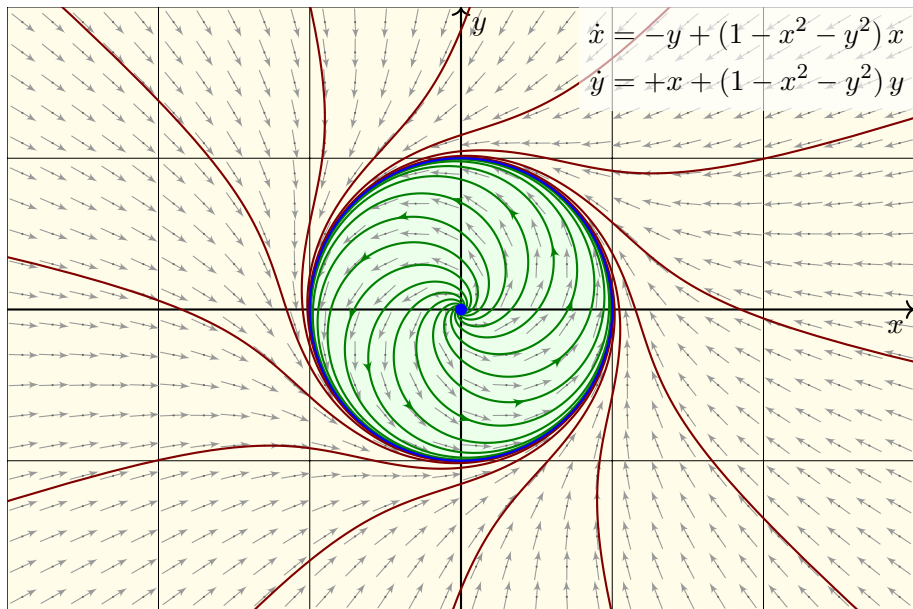
Die globale Dynamik in der Ebene ist verblüffend vielfältig. Hilberts 16. Problem fragt nach einer Klassifikation oder zumindest einer groben Zählung, en.wikipedia.org/wiki/Hilbert's_sixteenth_problem.

In drei Dimensionen sind zudem **chaotisches Verhalten** und **seltsame Attraktoren** möglich, de.wikipedia.org/wiki/Lorenz-Attraktor.

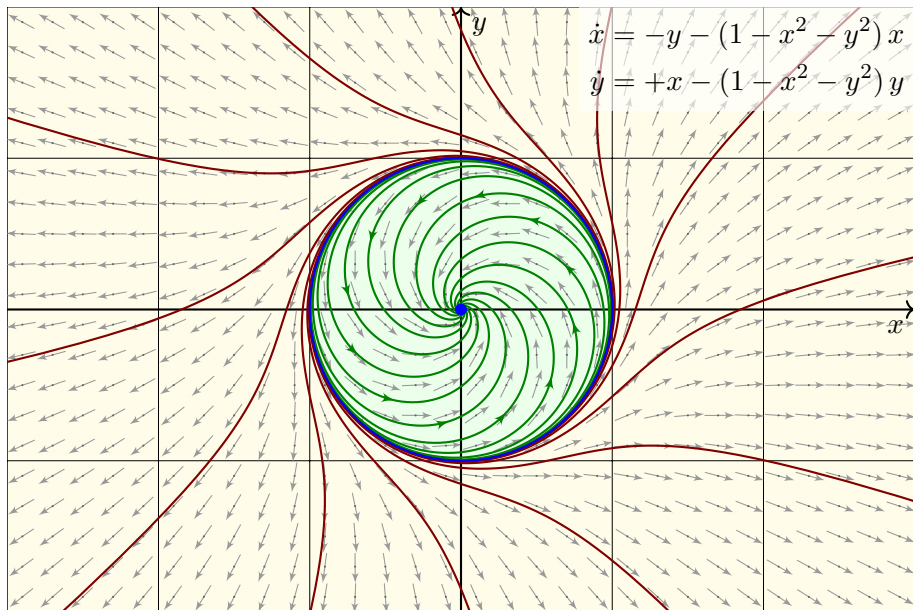
Der Van-der-Pol-Oszillator und sein Grenzzyklus / Attraktor



Kreisförmiger Attraktor und Stabilität



Kreisförmiger Attraktor und Instabilität



Kreisförmiger Attraktor und In/Stabilität

Aufgabe: Wir untersuchen das autonome dynamische System

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} + \alpha (1 - x^2 - y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

- (1) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist das System linear? Was sind dann Lösungen?
- (2) Bestimmen Sie alle Fixpunkte und diskutieren Sie ihre Stabilität: Wie lautet die Linearisierung? die Eigenwerte? das Stabilitätskriterium?
- (3) Bestimmen Sie alle Lösungen durch explizite Lösungsformeln. Nutzen Sie Polarkoordinaten $(x(t), y(t)) = r(t)(\cos \varphi(t), \sin \varphi(t))$.

Lösung: (1) Das System ist linear genau für $\alpha = 0$. Lösungen von $(\dot{x}, \dot{y}) = (-y, x)$ sind $r_0(\cos(t - t_0), \sin(t - t_0))$ für $r_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $t_0 \in \mathbb{R}$. (Für $\alpha \neq 0$ kommt eine radiale Bewegung hinzu, wie in (3) berechnet.)

(2) Der einzige Fixpunkt ist $(0, 0)$. Die Linearisierung um $(0, 0)$ ist

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x - y \\ x + \alpha y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Charakteristisches Polynom $p(\lambda) = (\alpha - \lambda)^2 + 1$, Eigenwerte $\lambda = \alpha \pm i$.

Kreisförmiger Attraktor und In/Stabilität

😊 Aus diesen Daten können wir bequem die Stabilität ablesen:

Für $\alpha > 0$ ist der Fixpunkt $(0, 0)$ instabil. (Erste Skizze oben: $\alpha = 1$)

Für $\alpha < 0$ ist er asymptotisch stabil. (Zweite Skizze oben: $\alpha = -1$)

(3) Die beiden Gleichungen entkoppeln zu $\dot{\varphi} = 1$ und $\dot{r} = \alpha r(1 - r^2)$.
Konstante Lösungen $r = 0$ (Fixpunkt) und $r = 1$ (Kreis, siehe Skizze).

Bernoulli-Gleichung $\dot{r} = \alpha r - \alpha r^3$ M413 dank Substitution $v = r^{-2}$:

$$r(t) = \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + (1 - r_0^2) e^{-2\alpha t}}}, \quad r(0) = r_0$$

$$\alpha > 0: \quad \begin{cases} 0 < r_0 < 1: & r(t) \nearrow 1 \quad \text{für } t \nearrow \infty \\ r_0 > 1: & r(t) \searrow 1 \quad \text{für } t \nearrow \infty \end{cases}$$

$$\alpha < 0: \quad \begin{cases} 0 < r_0 < 1: & r(t) \searrow 0 \quad \text{für } t \nearrow \infty \\ r_0 > 1: & r(t) \nearrow \infty \quad \text{für } t \nearrow \alpha^{-1} \ln \sqrt{(r_0^2 - 1)/r_0^2} \end{cases}$$

😊 Die obigen Skizzen zeigen die typischen Fälle $\alpha = +1$ und $\alpha = -1$.

Für $\alpha > 0$ ist der Fixpunkt $(0, 0)$ instabil, aber der Kreis ein Attraktor.

Für $\alpha < 0$ ist der Fixpunkt $(0, 0)$ asympt. stabil, aber der Kreis repulsiv.

Das bestätigt und präzisiert die qualitative Stabilitätsanalyse aus (2).

Invariante Mengen und die Tangentialbedingung

Wir untersuchen ein autonomes dynamisches System $\dot{x} = f(x)$.

Hierzu sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und hierauf $f : \mathbb{R}^n \supseteq G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig.

Eine Teilmenge $K \subseteq G$ heißt **(positiv) invariant** bezuglich f ,

wenn jede Lösung $x : [0, T[\rightarrow G$ mit $x(0) \in K$ ganz in K verläuft.

(Dies betrifft die positive Zeitrichtung. Für **negativ invariant** muss

jede Lösung $x :]-T, 0] \rightarrow G$ mit $x(0) \in K$ ganz in K verlaufen.)

Lemma P3B: maximale Lösungen in invariantem Kompaktum

Sei $K \subseteq G$ kompakt und (positiv) invariant bezuglich f . Jede maximale Lösung mit Startwert $x(0) \in K$ existiert für alle $t \geq 0$ und verbleibt in K .

Aufgabe: Beweisen Sie dies! Benötigen Sie die Kompaktheit von K ?

Lösung: Sei $x : [0, T[\rightarrow G : t \mapsto x(t)$ eine Lösung mit $0 < T < \infty$.

Aus der Startbedingung $x(0) \in K$ folgt $x(t) \in K$ für alle $t \in [0, T[$.

Wegen $|\dot{x}(t)| = |f(x(t))| \leq M := \max_K |f|$ gilt $|x(s) - x(t)| \leq M|s - t|$.

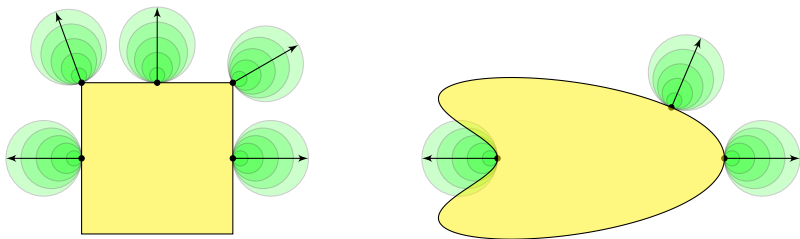
Dank dieser Cauchy-Bedingung konvergiert $x(t) \rightarrow x_T \in K$ für $t \nearrow T$.

Dank des \exists &E-Satzes O1B können wir die Lösung weiter fortsetzen.

 Ohne Kompaktheit gilt dies nicht, wie $\dot{x} = x^2$ auf \mathbb{R} zeigt (M113).

Invariante Mengen und die Tangentialbedingung

Wie prüfen wir möglichst effizient, ob eine Menge $K \subseteq G$ invariant ist? Notwendig ist recht offensichtlich folgende geometrische Eigenschaft:



Tangentialbedingung: Das Vektorfeld f zeigt nirgends aus K heraus: Für jede von $x \in \partial K$ nach außen weisende Einheitsnormale $n \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$f(x) \cdot n \leq 0.$$

Ist der Rand ∂K im Punkt $x \in \partial K$ glatt, so bestimmt dies n eindeutig. Allgemein fordern wir $|n| = 1$ und $K \cap B(x + \varepsilon n, \varepsilon) = \emptyset$ für ein $\varepsilon > 0$.

☺ Damit decken wir bequem alle Fälle ab, insbesondere alle Kompakta mit stückweise glattem Rand wie Quadrate und Würfel und ähnliches.

Invariante Mengen und die Tangentialbedingung

☺ Für C^1 -Vektorfelder ist die Tangentialbedingung auch hinreichend:

Satz P3C: invariante Mengen dank Tangentialbedingung

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, $K \subseteq G$, und (K, f) erfülle obige Tangentialbedingung.

Dann ist (K, f) positiv invariant: Jede Lösung $x : [0, T[\rightarrow G$ des Systems $\dot{x} = f(x)$ mit Startwert $x(0) \in K$ verbleibt ganz in K .

Ist K zudem kompakt, so gilt: Jede maximale Lösung zu $\dot{x} = f(x)$ mit Startwert $x(0) \in K$ existiert für alle Zeit $t \geq 0$ und verbleibt ganz in K .

Aufgabe: (1) Untersuchen Sie wie oben das autonome System

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} + \alpha(1 - x^2 - y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$. Welche der Bälle $K = \overline{B}(0, r)$ sind invariant?

(2) Untersuchen Sie das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : f(x, y) = (1, \sqrt[3]{y(x)^2})$. Sind die Halbebenen $H_{\pm} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \pm y \geq 0\}$ invariant? Erfüllt (H_{\pm}, f) die Tangentialbedingung? Lässt sich Satz P3C anwenden?

Invariante Mengen und die Tangentialbedingung

Lösung: (1) Obige Skizzen zeigen: Für $\alpha = 0$ ist jeder Ball invariant; für $\alpha > 0$ nur $r = 0$ und $r \geq 1$; für $\alpha < 0$ nur $0 \leq r \leq 1$. Dank Satz P3C können Sie es bequem nachrechnen: Alle Voraussetzungen sind erfüllt! Im Sonderfall $r = 0$ enthält die Menge $K = \{(0, 0)\}$ nur den Nullpunkt; dieser ist für jeden Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Fixpunkt, somit ist K invariant. Für $r > 0$ kennen wir die Randpunkte und die äußere Einheitsnormale:

$$(x, y) \in \partial K \iff x^2 + y^2 = r^2 \implies n = (x, y)/r$$

☺ Die Tangentialbedingung wird damit besonders einfach:

$$f(x, y) \cdot n = \alpha(1 - x^2 + y^2)(x^2 + y^2)/r = \alpha(1 - r^2)r \stackrel{!}{\leq} 0$$

(2) Das ist unser warnendes Beispiel $y'(x) = \sqrt[3]{y(x)^2}$ von Seite M325. Die obere Halbebene H_+ ist tatsächlich invariant, die untere Halbebene H_- jedoch nicht, wie die Lösung $t \mapsto (t, t^3/27)$ zeigt. Dennoch erfüllen beide Halbebenen H_{\pm} die Tangentialbedingung, denn $f(x, 0) = (1, 0)$.

⚠ Der schöne und bequeme Satz P3C lässt sich nicht anwenden, da das hier betrachtete Vektorfeld f nicht stetig differenzierbar ist.

Zweidimensionale Dynamik und invariante Mengen

Aufgabe: Zu $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ untersuchen wir das lineare System

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Speziell sei A eine unserer Modellmatrizen aus der Klassifikation P211.

- (1) Für welche Matrizen A ist die Kreisscheibe $D = \overline{B}(0, r)$ invariant?
- (2) Für welche Matrizen A ist das Quadrat $Q = [-r, r]^2$ invariant?
- (3) Skizzieren Sie das Vektorfeld $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ des Systems (P329)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x, \\ \dot{y} &= -y + xy. \end{aligned}$$

- (4) Welche Rechtecke $K = [-a, a] \times [-b, b]$ sind unter f invariant?
- (5) Skizzieren Sie das Vektorfeld $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ des Systems (P333)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (3 - x - y)x, \\ \dot{y} &= (1 - y + x)y. \end{aligned}$$

- (6) Welche Rechtecke $K = [0, a] \times [0, b]$ sind unter g invariant?

Zweidimensionale Dynamik und invariante Mengen

- ☺ Invariante Teilmengen $K \subseteq G$ des Systems $\dot{x} = f(x)$ erlauben uns, mögliche Lösungen geschickt einzugrenzen: Einmal in K , immer in K .
- ☺ Diese Sichtweise ist zwar etwas vergrößert, aber gerade deshalb oft nützlich, insbesondere wenn Sie Stabilitatsgarantien erarbeiten wollen.
- ☺ Dieser Ansatz gelingt selbst in schwierigen Situationen, wenn Sie den genauen Verlauf nicht bestimmen können (oder nicht wollen).
- ☺ Für einzelne Startpunkte können Sie die Trajektorien als numerische Näherungen berechnen (lassen). Das schützt Sie aber noch nicht vor eventuell bösartigen Ausreißern, hier helfen invariante Teilmengen!

Beispiele aus der Physik: Bleibt die Energie $E : G \rightarrow \mathbb{R}$ erhalten, also $\dot{E} = 0$, so ist jede Niveaumenge $E=c = \{ x \in G \mid E(x) = c \}$ invariant. Nimmt die Energie ab, also $\dot{E} \leq 0$, so ist noch jede Subniveaumenge $E \leq c = \{ x \in G \mid E(x) \leq c \}$ invariant: Trajektorien bleiben gefangen!

In dieser einfachen Aufgabe sollen Sie zunächst graphisch-anschaulich Kandidaten für invariante Mengen erkennen und dann rechnerisch-exakt mit der Tangentialbedingung und Satz P3C nachprüfen. Das hilft!

Zweidimensionale Dynamik und invariante Mengen

(1) Im Sonderfall $r = 0$ ist $D = \{(0, 0)\}$ invariant: Fixpunkt! Sei nun $r > 0$. Die graphische Darstellung unserer 14 Modellfälle zeigt uns die Antwort:

- Unter $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ist D invariant nur für $a \leq 0$, sonst nicht:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a(x^2 + y^2) \stackrel{!}{\leq} 0$$

- Unter $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ ist D invariant nur für $\lambda, \mu \leq 0$, sonst nicht:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda x^2 + \mu y^2 \stackrel{!}{\leq} 0$$

- Unter $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ist D invariant nur für $\lambda \leq -\frac{1}{2}$, sonst nicht:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \lambda(x^2 + y^2) + xy \\ &= \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}(x - y)^2 \stackrel{!}{\leq} 0 \end{aligned}$$

Allgemein muss die Systemmatrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ negativ semidefinit sein.

Zweidimensionale Dynamik und invariante Mengen

(2) Im Sonderfall $r = 0$ ist $Q = \{(0, 0)\}$ invariant: Fixpunkt! Sei nun $r > 0$. Die graphische Darstellung unserer 14 Modellfälle zeigt uns die Antwort: Wir diskutieren hier zunächst nur die rechte Quadratseite $\{r\} \times [-r, r]$; die anderen drei Seiten führen zu ähnlichen Gleichungen. (Übung)

- Unter $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ist Q invariant nur für $a \leq -|b|$, sonst nicht:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ y \end{pmatrix} = ra - by \stackrel{!}{\leq} 0$$

- Unter $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ ist Q invariant nur für $\lambda, \mu \leq 0$, sonst nicht:

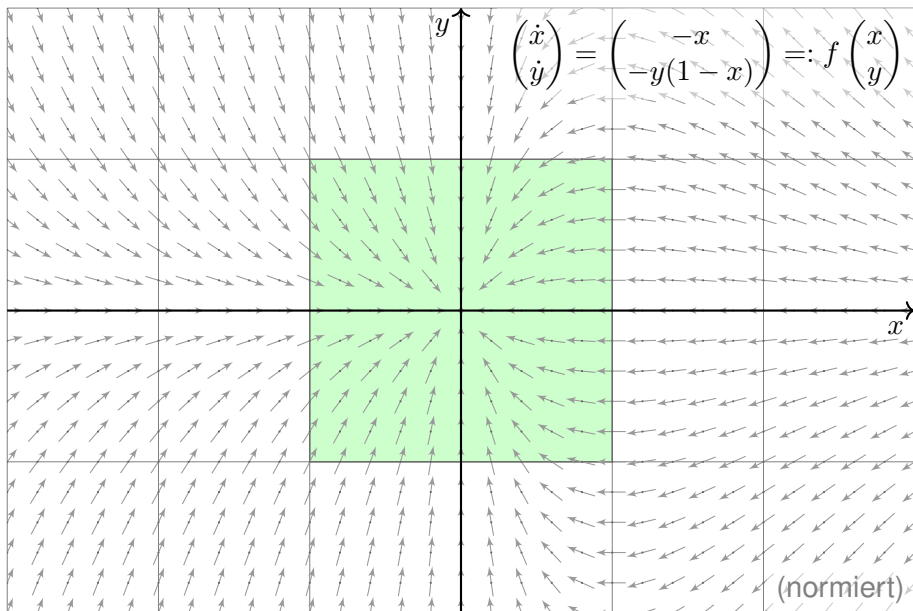
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ y \end{pmatrix} = \lambda r \stackrel{!}{\leq} 0$$

- Unter $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ist Q invariant nur für $\lambda \leq -1$, sonst nicht:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ y \end{pmatrix} = \lambda r + y \stackrel{!}{\leq} 0$$

Wie zu erwarten war, erhalten wir in (1) quadratische Ungleichungen und in (2) lineare Ungleichungen. Übung: Schreiben Sie die Lösung aus.

Zweidimensionale Dynamik und invariante Mengen



Zweidimensionale Dynamik und invariante Mengen

(4) Das degenerierte Rechteck $\{(0, 0)\}$ ist invariant: unser Fixpunkt!
Ebenso ist jedes Intervall $[-a, a] \times \{0\}$ und $\{0\} \times [-b, b]$ invariant:
In diesem Sonderfall ist die Dynamik lediglich eindimensional.

Wir betrachten nun echte Rechtecke $K = [-a, a] \times [-b, b]$ mit $a, b > 0$.
Unsere Skizze zeigt bereits, dass nicht alle Rechtecke invariant sind:
Für $a > 1$ und $b > 0$ zeigt $f(a, b)$ nach oben und somit nach außen.

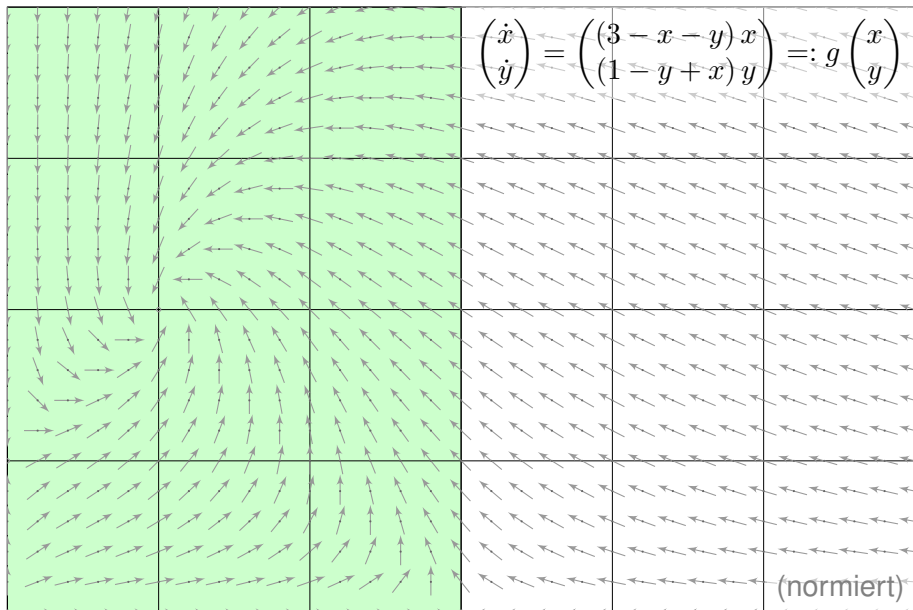
Als Kandidaten bleiben $K = [-a, a] \times [-b, b]$ mit $0 < a \leq 1$ und $b > 0$.
Wir prüfen auf jeder der vier Rechteckseiten die Tangentialbedingung:

- Es gilt $f_1(-1, y) = +1 \geq 0$: Hier zeigt f nach innen.
- Es gilt $f_2(x, -1) = 1 - x \geq 0$: Hier zeigt f nach innen.
- Es gilt $f_1(+1, y) = -1 \leq 0$: Hier zeigt f nach innen.
- Es gilt $f_2(x, +1) = x - 1 \leq 0$: Hier zeigt f nach innen.

Also zeigt f nirgends nach außen, und (K, f) ist tatsächlich invariant!
Ein solches Rechteck $K = [-1, 1] \times [-1, 1]$ ist in der Skizze grün gefärbt.

☺ Die Tangentialbedingung ist geometrisch wunderbar anschaulich
und mit einer Parametrisierung des Randes bequem nachzurechnen.

Zweidimensionale Dynamik und invariante Mengen



Zweidimensionale Dynamik und invariante Mengen

(6) Zunächst die Sonderfälle: $K = [0, a] \times \{0\}$ ist invariant für $a = 0$ und für $a \geq 3$, und $K = \{0\} \times [0, b]$ ist invariant für $b = 0$ und für $b \geq 1$.

Wir betrachten nun echte Rechtecke $K = [0, a] \times [0, b]$ mit $a, b > 0$.

Unsere Skizze zeigt bereits, dass nicht alle Rechtecke invariant sind!

Zunächst muss $a \geq 3$ gelten, sonst zeigt $f(a, 0)$ nach rechts (außen).

Zudem muss $b \geq 1 + a$ gelten, sonst zeigt $f(a, b)$ nach oben (außen).

Als Kandidaten bleiben somit $K = [0, a] \times [0, b]$ mit $a \geq 3$ und $b \geq 1 + a$.

Wir prüfen auf jeder der vier Rechteckseiten die Tangentialbedingung:

- Für $(0, y)$ gilt $g_1(0, y) = 0 \geq 0$: Hier zeigt g nach innen.
- Für $(x, 0)$ gilt $g_2(x, 0) = 0 \geq 0$: Hier zeigt g nach innen.
- Für (a, y) gilt $g_1(a, y) = (3 - a - y) a \leq 0$: Hier zeigt g nach innen.
- Für (x, b) gilt $g_2(x, b) = (1 - b + x) b \leq 0$ wegen $0 \leq x \leq a \leq b - 1$.

Also zeigt g nirgends nach außen, und (K, g) ist tatsächlich invariant!

Das kleinste Rechteck $K = [0, 3] \times [0, 4]$ ist in der Skizze grün gefärbt.



Die Tangentialbedingung ist geometrisch wunderbar anschaulich.



W. Walter: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Springer, §10