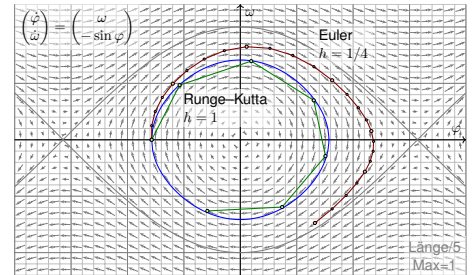
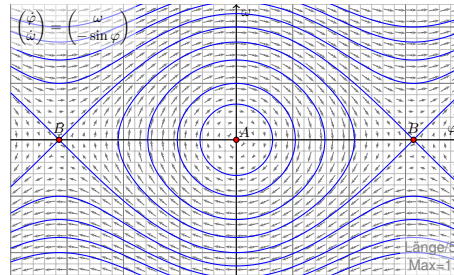
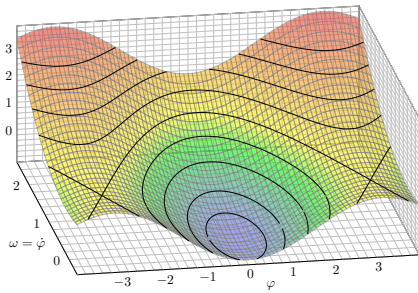


## Kapitel O

## Dynamische Systeme



*Nicht das Existenztheorem ist das Wertvolle,  
sondern die im Beweise geführte Konstruktion.*

Hermann Weyl (1885–1955)

Vollversion

[michael-eisermann.de/lehre/HM3](http://michael-eisermann.de/lehre/HM3)

26.02.2025

## Inhalt dieses Kapitels O

O002

- 1 Dynamische Systeme
  - Der harmonische Oszillator als dynamisches System
  - Gekoppelte Oszillatoren und Eigenfrequenzen
  - Mathematisches Pendel und Energiefläche
  - Das Näherungsverfahren von Runge–Kutta
- 2 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen
  - Lokale Lösungen: Satz von Picard–Lindelöf
  - Fortsetzungen und maximale Lösungskurven
  - Sensible Abhängigkeit von den Anfangsdaten
  - Aufgaben zu Existenz und Eindeutigkeit und Stabilität
- 3 Der Hauptsatz für lineare dynamische Systeme
  - Affin/Lineare Struktur des Lösungsraumes
  - Variation der Konstanten zur Partikulärlösung
  - Matrizenkalkül und Exponentialfunktion
  - Fundamentallösung homogener DGSysteme

**Differentialgleichungen sind die Sprache der Naturgesetze.**

- Oft ist der unabhängige Parameter  $t \in \mathbb{R}$  die Zeit.
- Die abhängige Größe  $x(t)$  ist der Zustand zur Zeit  $t$ .
- Die Gleichung  $x'(t) = f(t, x(t))$  ist das Bewegungsgesetz.
- Die Anfangsdaten  $x(t_0) = x_0$  sind gegeben durch  $(t_0, x_0)$ .

Viele Modelle in Naturwissenschaft und Technik haben diese Form!

Wir nennen dies ein **deterministisches dynamisches System**:

Der zukünftige Verlauf hängt nur vom Anfangszustand  $(t_0, x_0)$  ab.

Solche Modelle werden zur Erklärung und Vorhersage angewendet, von der Mechanik über Klimamodelle bis zur Astronomie.

Bei **zeitdiskreten Systemen** verläuft die Zeit  $t \in \mathbb{Z}\Delta t$  in Schritten,

bei **zeitkontinuierlichen Systemen** ist die Zeit  $t \in \mathbb{R}$  kontinuierlich.


Die wichtigste Technik hierzu sind Differentialgleichungen. Wichtige Fragestellungen sind die (exakte oder numerische) Berechnung von Lösungen sowie ihr Langzeitverhalten (Periodizität, Stabilität, Chaos).


Differentialgleichungen sind ein Universalwerkzeug zur quantitativen Beschreibung von allen Systemen, die vom gegenwärtigen Zustand ausgehend einer kontinuierlichen zeitlichen Entwicklung unterliegen.

*Une loi (physique), pour nous, [...] est une relation constante  
entre le phénomène d'aujourd'hui et celui de demain;  
en un mot, c'est une équation différentielle.*

Henri Poincaré (1854–1912), *La valeur de la science*

Das gilt für naturwissenschaftlich-technische Anwendungen ebenso wie praktisch überall sonst. Trotz drastischer Vereinfachung des Modells sind Differentialgleichungen daher ähnlich komplex wie diese realen Phänomene: Sie sind naturgegeben schwierig, aber auch faszinierend.

 Zur Vertiefung und für zahlreiche Anwendungsbeispiele siehe H. Heuser: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Vieweg, 6. Aufl. 2009

 Die Numerik bietet umfangreiche Werkzeuge, siehe etwa P. Deufhard, F. Bornemann: *Numerische Mathematik*, Band 2: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, De Gruyter, 3. Aufl. 2008

In den vorigen Kapiteln haben wir **Differentialgleichungen** der Form  $y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  untersucht, in Kapitel M zunächst für  $n = 1$  von der speziellen Form  $y' = f(t, y)$ , in Kapitel N allgemeiner für  $n \geq 1$ : Gegeben ist die stetige Funktion  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n \supseteq G \rightarrow \mathbb{K}$ , gesucht sind alle Funktionen  $y : I \rightarrow \mathbb{K}$  auf einem (je maximalen) Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ , die der Gleichung  $y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$  für alle  $t \in I$  genügen.

In vielen Anwendungen geht es statt einer Größe  $y(t) \in \mathbb{K}$  um mehrere Größen  $y_1(t), \dots, y_n(t) \in \mathbb{K}$ , deren Entwicklung und Wechselwirkung durch **gekoppelte Differentialgleichungen** beschrieben wird:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= f_1(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)), \\ y_2'(t) &= f_2(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)), \\ &\vdots \\ y_n'(t) &= f_n(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)). \end{aligned}$$

Mit  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  und  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  bündeln wir dies kurz und übersichtlich zu der vektorwertigen Differentialgleichung  $y' = f(t, y)$ .

Jedes **Differentialgleichungssystem** bündeln wir damit prägnant zu

$$y'(t) = f(t, y(t)).$$

Gegeben ist die stetige Funktion  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n \supseteq G \rightarrow \mathbb{K}^n$  als rechte Seite. Gesucht sind alle differenzierbaren Funktionen  $y : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  auf einem (je maximalen) Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ , die die Bedingung  $(t, y(t)) \in G$  und die ersehnte Gleichung  $y'(t) = f(t, y(t))$  für alle  $t \in I$  erfüllen.

Dieses Leitmotiv der beiden vorigen Kapitel wird hier fortgeführt und mehrdimensional verallgemeinert. Die zugehörige Theorie erlaubt uns, solcherart Phänomene zu beschreiben, zu verstehen, zu berechnen:

- Gibt es immer eine Lösung? mehrere? Existenz und Eindeutigkeit?
- Wie finden wir eine Lösung? gar alle? effiziente Lösungsmethoden?

Wir benötigen wie immer zwei sich ergänzende Lösungsmethoden:

- Leistungsstarke Lösungstheorie als Grundlage
- Erprobte Rezepte für spezielle Gleichungen

Für manche  $f$  können wir die DG exakt lösen, sonst nur numerisch.

Ein **lineares Differentialgleichungssystem** ist von folgender Form:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= a_{11}(t) y_1(t) + a_{12}(t) y_2(t) + \cdots + a_{1n}(t) y_n(t) + b_1(t) \\ y_2'(t) &= a_{21}(t) y_1(t) + a_{22}(t) y_2(t) + \cdots + a_{2n}(t) y_n(t) + b_2(t) \\ &\vdots \\ y_n'(t) &= a_{n1}(t) y_1(t) + a_{n2}(t) y_2(t) + \cdots + a_{nn}(t) y_n(t) + b_n(t) \end{aligned}$$

Solche Gleichungssysteme bündeln wir prägnant zu einer Gleichung:

$$y'(t) = A(t) y(t) + b(t)$$

Hier heißt  $A$  Koeffizientenmatrix und  $b$  rechte Seite des DGSystems.

Bei linearen DGSystemen sind zwei strukturelle Aspekte grundlegend:

- Die Lösungsmenge einer linearen Differentialgleichungssystem ist immer ein **Vektorraum** (für  $b = 0$ ) bzw. ein **affiner Raum** (für  $b \neq 0$ ).
- Dieser Raum hat immer **Dimension  $n$** : Dies folgt aus Existenz und Eindeutigkeit der Lösung zu gegebenen Anfangsdaten. (Satz O3B)

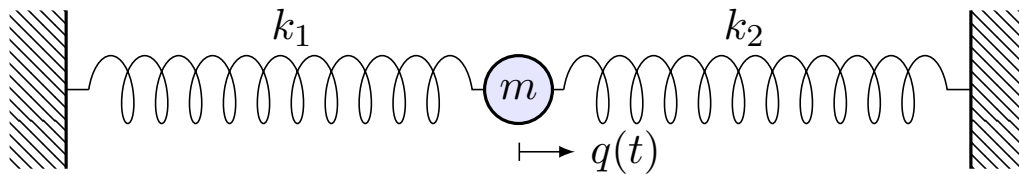
Dies strukturiert und vereinfacht das Problem, alle Lösungen zu finden!

Die Berechnung einer **Basis des Lösungsraumes** ist nicht leicht, aber wir können explizite Lösungsformeln angeben und für wichtige Beispiele ausrechnen. Hierzu benötigen wir geeignete Techniken aus der Analysis, insbesondere die allgegenwärtige Integration.

Lineare Differentialgleichungssysteme mit **konstanten Koeffizienten** sind leicht; ihre Lösung gelingt uns vollständig mit linearer Algebra: Wir lösen den Exponentialansatz direkt mit Hilfe von Eigenvektoren im diagonalisierbaren Fall oder falls nötig mit den Hauptvektoren einer Jordan–Basis; die Integration tritt dabei in den Hintergrund.

Dieses und das nächste Kapitel handeln deshalb im Wesentlichen von **Matrizenrechnung** in ihrer vollen Schönheit. Wir mobilisieren nahezu alle Begriffe und Techniken: Vektorraum, Basis, Dimension, lineare Abbildung, Kern und Bild, Darstellung durch Matrizen, zugehörige Rechenmethoden, Determinante, charakteristisches Polynom, Eigenvektoren und Diagonalform, Hauptvektoren und Jordan–Form.

Hier lohnt sich erneut Ihre Investition in mathematische Grundlagen!



**Aufgabe:** Formulieren und lösen Sie den harmonischen Oszillator  
 (1) als eine eindimensionale Differentialgleichung zweiter Ordnung,  
 (2) als ein zweidim. Differentialgleichungssystem erster Ordnung.

**Lösung:** (1) Zeit  $t \in \mathbb{R}$ , Position  $q(t) \in \mathbb{R}$ , Geschwindigkeit  $\dot{q}(t) \in \mathbb{R}$ , Beschleunigung  $\ddot{q}(t) \in \mathbb{R}$ , Kraft pro Masse  $-\omega_0^2 q(t) - 2\delta \dot{q}(t)$ , also:

$$\ddot{q}(t) + 2\delta \dot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) = 0$$

Allg. Lösung  $q(t) = e^{-\delta t} [c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)]$  mit  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ .

Die Anfangsdaten  $(q(t_0), \dot{q}(t_0))$  bestimmen die Konstanten  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

(2) Zustand  $(x_1(t), x_2(t)) = (q(t), \dot{q}(t))$ , Zustandsraum  $\mathbb{R}^2$ , DGSystem:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1 & -2\delta x_2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

😊 Allgemeiner Trick: Reduktion von höherer auf erste Ordnung! O151

😊 DGSystem erster Ordnung = Vektorfeld auf dem Zustandsraum!

Der harmonische Oszillator dient uns weiterhin als zentrales Modell: Es ist besonders einfach und anschaulich, lässt sich leicht lösen und zeigt im Prinzip bereits alle wesentlichen Phänomene! N105

Wir schreiben seine Differentialgleichung zweiter Ordnung hier neu als System erster Ordnung: Das ist ein Vektorfeld auf dem Zustandsraum!

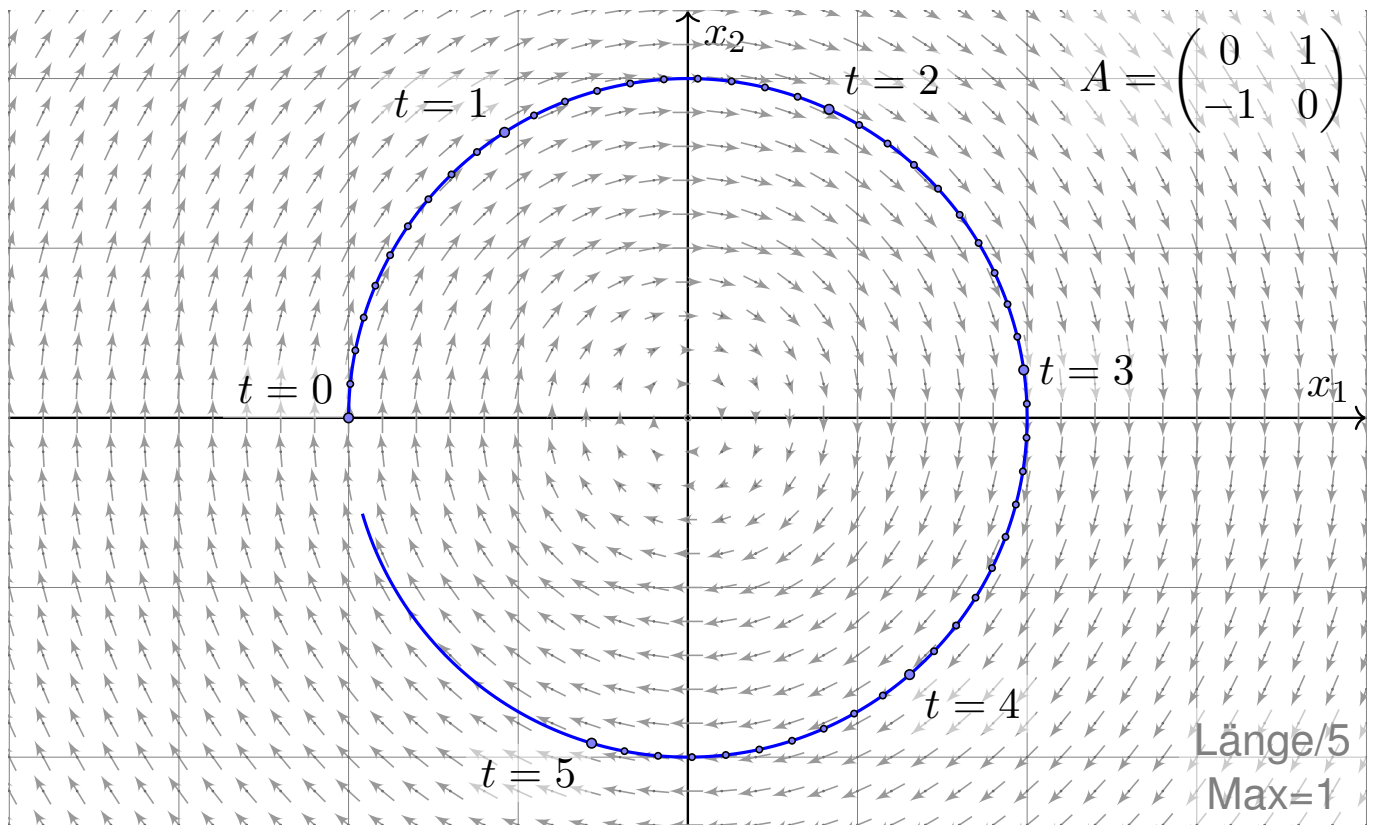
Jedes solche Richtungsfeld ist geometrisch besonders anschaulich als ein „Fluss“, dies uns nützt in der Analysis ebenso wie in der Numerik.

Lösungskurven des DGSystems sind die Trajektorien: Die nächsten beiden Graphiken zeigen den nicht bzw. schwach gedämpften Fall.

Hierzu kennen wir die exakten Lösungen aus Kapitel N! N117

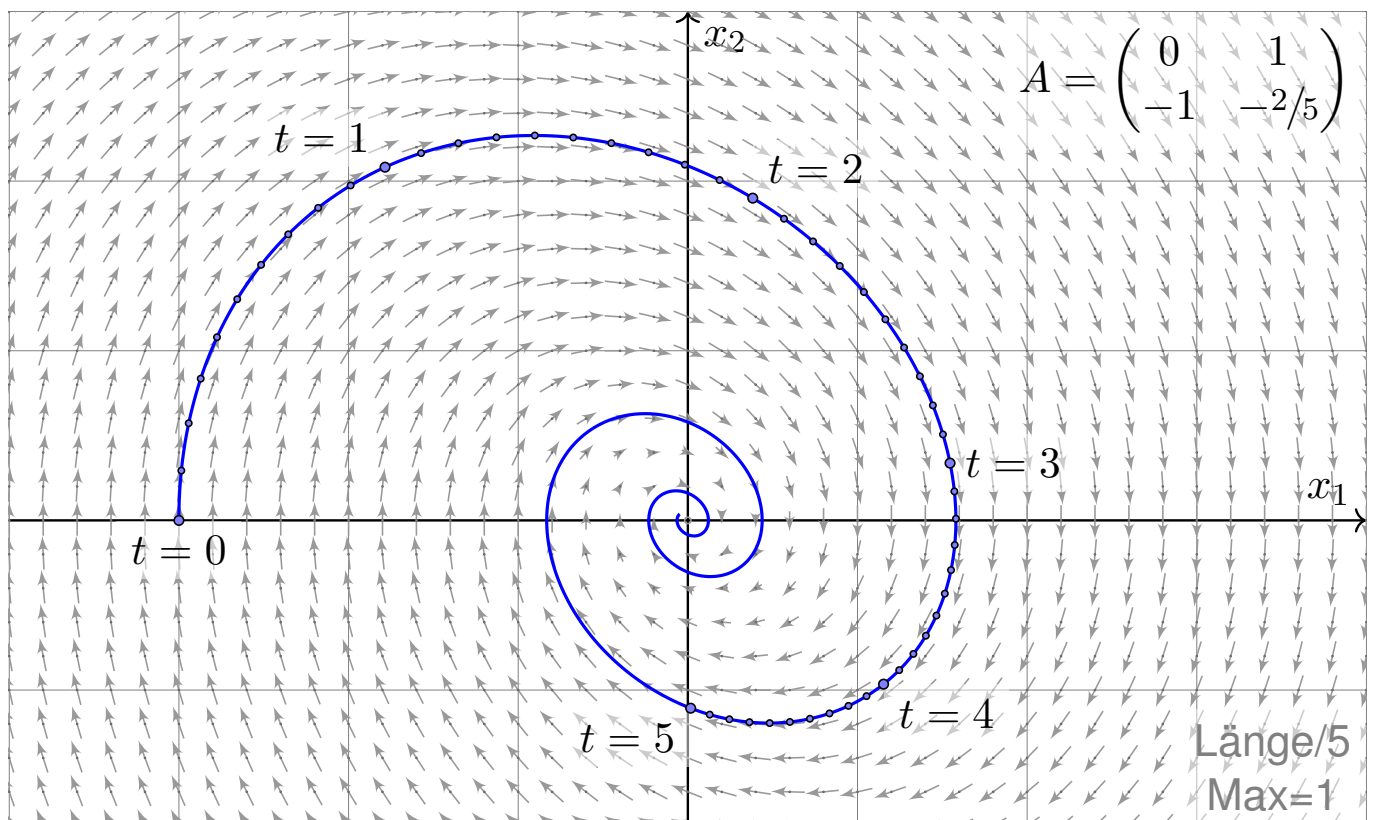
Die dritte Graphik zeigt mehrere numerische Näherungen durch das Euler-Verfahren: Solche Näherungen sind nützlich, wenn wir keine exakte Lösung kennen oder mühsam beschaffen wollen, und nötig, wenn gar keine Lösungsformel in geschlossener Form existiert.

Harmonischer Oszillator, keine Dämpfung  $\delta = 0$ , zum Beispiel  $\omega_0 = 1$ :



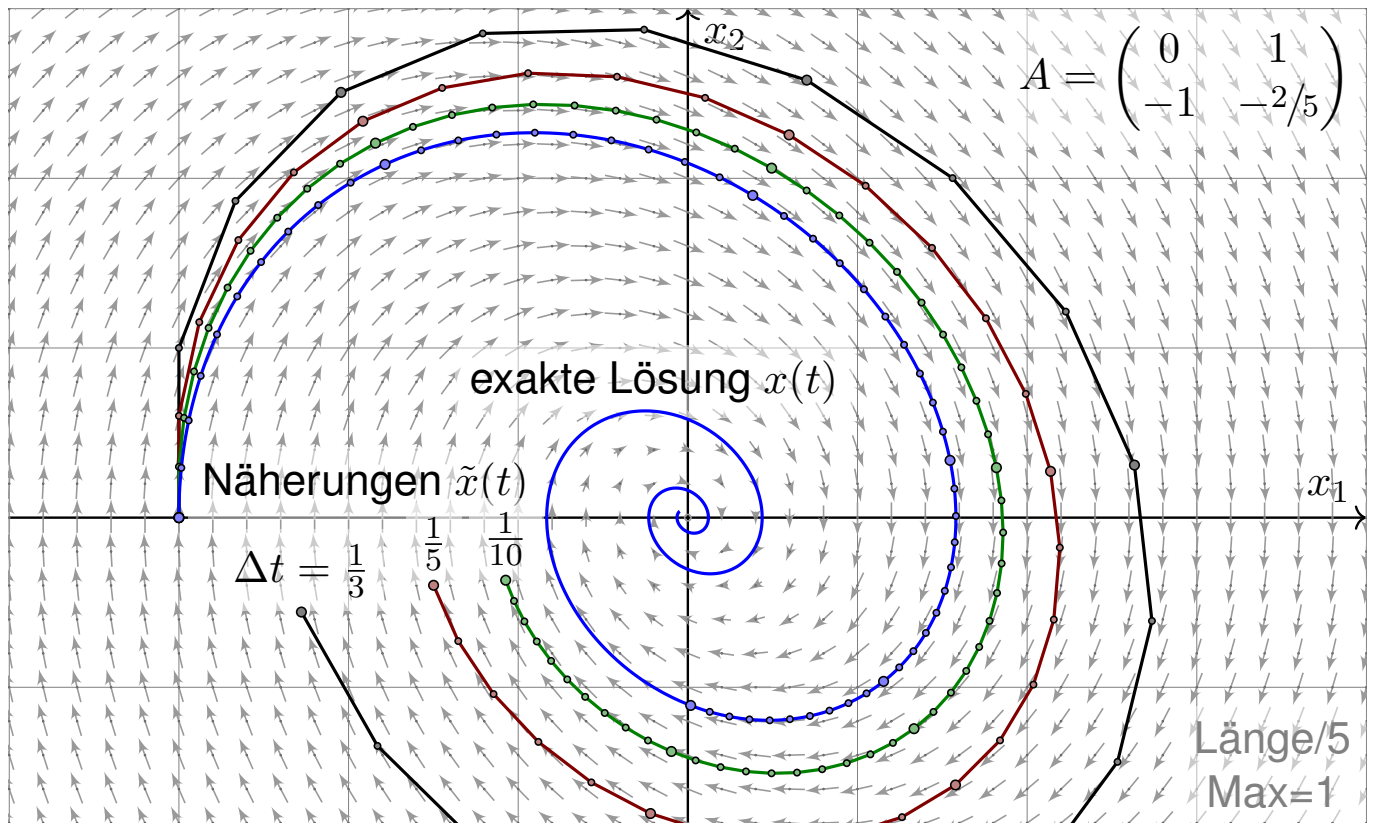
Kein Energieverlust, daher sogar Rückkehr in den Anfangszustand.

Schwache Dämpfung  $0 < \delta < \omega_0$ , zum Beispiel  $\delta = 1/5$  und  $\omega_0 = 1$ :



Echter Energieverlust, daher keine Rückkehr in den Anfangszustand.

Approximation durch das Euler–Verfahren mit Schrittweite  $\Delta t = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ :



Wir erkennen graphisch den Rechenaufwand und Approximationsfehler.

Zu lösen sei ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = x_0$$

😊 Dies ist im Wesentlichen ein Vektorfeld  $f$  auf dem Zustandsraum! Gesucht ist eine Lösungskurve  $x(t)$ , die die obige Gleichung erfüllt. Das **Euler–Verfahren** verschafft uns eine numerische Näherung  $\tilde{x}$ :  
Wir wählen Zeitschritte  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots$  mit  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ . Am einfachsten äquidistant  $t_i = t_0 + i\Delta t$  mit fester Schrittweite  $\Delta t > 0$ . Die Ableitung  $\dot{x}$  approximieren wir durch den **Differenzenquotienten**:

$$\frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \approx \dot{x}(t_i) \stackrel{!}{=} f(t, x(t_i))$$

Damit berechnen wir Näherungswerte  $\tilde{x}(t_1), \tilde{x}(t_2), \tilde{x}(t_3), \dots$  rekursiv:

$$\tilde{x}(t_{i+1}) = \tilde{x}(t_i) + f(t_i, \tilde{x}(t_i)) \cdot (t_{i+1} - t_i) \quad \text{für } i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Unter geeigneten Bedingungen existiert genau eine Lösung  $x(t)$  und die Euler–Approximation  $\tilde{x}(t)$  kommt für kleine Schrittweiten beliebig nahe.

⚠ Zur Anwendung müssen wir zudem den Fehler  $|\tilde{x} - x|$  kontrollieren!

## Geometrische Voraussetzungen für das Euler–Verfahren:

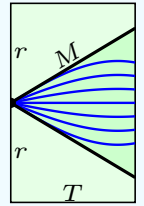
Sei  $I = [t_0, t_0 + T] \subseteq \mathbb{R}$  ein Zeitintervall der Länge  $T > 0$ .

Sei  $K = \bar{B}(x_0, r) \subseteq \mathbb{K}^n$  der Ball um  $x_0$  mit Radius  $r > 0$ .

Sei  $f : I \times K \rightarrow \mathbb{K}^n$  stetig, somit beschränkt, also  $|f| \leq M$ .

Hierbei gelte  $T \cdot M \leq r$ , notfalls verkleinern wir  $T$  und  $I$ .

Dies garantiert, dass Lösungen nicht vorzeitig aus  $K$  rauslaufen.



Gesucht ist  $x : I \rightarrow K$  diff'bar mit  $x(t_0) = x_0$  und  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ .

Das heißt: In jedem Punkt  $(t, x(t))$  ist die Tangente  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ .

**Euler–Approximation:** Wir wählen eine Partition des Zeitintervalls

$$P = \{t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_0 + T\}.$$

Wie oben illustriert definieren wir hierzu den **Euler–Polygonzug**

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_N \\ \tilde{x}_0 & \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \dots & \tilde{x}_N \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \frac{\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i}{t_{i+1} - t_i} = f(t_i, \tilde{x}_i)$$

😊 Praktisch: Aus  $\tilde{x}_0 = x_0$  berechnet man schrittweise  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_N$ .  
Im Punkt  $(t_i, \tilde{x}_i)$  wird die Kurve in Richtung  $f(t_i, \tilde{x}_i)$  weitergeschickt.

## Satz O1A: Existenz von Lösungen, Peano 1890

Zu lösen sei die Differentialgleichung  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$  mit  $x(t_0) = x_0$ .  
Unter den oben erklärten geometrischen Voraussetzungen gilt:

Es existieren Partitionen  $P_1, P_2, P_3, \dots \subseteq I$ , deren Euler–Polygonzüge  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \dots : I \rightarrow K$  gegen eine Lösung  $x : I \rightarrow K$  konvergieren.

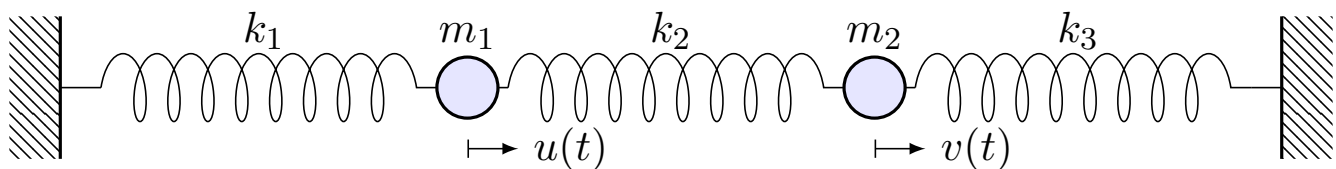
😊 Dies garantiert Existenz von Lösungen, ☹️ aber keine Eindeutigkeit:  
Es kann durchaus mehrere Lösungen geben, siehe Kapitel M. [M123](#) [M325](#)  
Für spezielle  $f$  können wir die DG exakt lösen, sonst nur numerisch.

😊 Die Rechnung ist für  $\Delta t = T/N$  sehr leicht zu implementieren.  
Präzision verlangt großes  $N$ , damit wächst der Rechenaufwand.

☹️ Praktisches Problem: Der Satz ist nicht konstruktiv! Gegeben  $\varepsilon > 0$ ,  
wie wählt man eine Partition  $P$ , um eine  $\varepsilon$ –Approximation zu erhalten?

😊 Die Numerik untersucht und optimiert solche Verfahren, siehe O141.  
Ziel: gute Fehlerschranken und hohe Präzision bei geringem Aufwand.  
Die **Numerik der gewöhnlichen Differentialgleichungen** ist ein hoch entwickeltes Gebiet und stellt umfangreiche Werkzeuge zur Verfügung.





Zwei Massen  $m_1, m_2 > 0$  sind durch Federn  $k_1, k_2, k_3 > 0$  verbunden.

**Aufgabe:** Formulieren Sie das hier skizzierte dynamische System (0) als Bewegungsgleichung sowie (1) als DGSystem erster Ordnung.  
(2) Welche Struktur hat die Lösungsmenge? (a) „Form“ und (b) „Größe“?

**Lösung:** (0) Auslenkungen  $u(t), v(t)$  aus der Ruhelage. Kräftebilanz:

$$F_1(t) = -k_1 u(t) - k_2 [u(t) - v(t)]$$

$$F_2(t) = -k_3 v(t) - k_2 [v(t) - u(t)]$$

Bewegungsgesetz:  $m_1 \ddot{u}(t) = F_1(t)$  und  $m_2 \ddot{v}(t) = F_2(t)$ . Hieraus folgt:

$$\ddot{u}(t) = -\frac{k_1+k_2}{m_1} u(t) + \frac{k_2}{m_1} v(t)$$

$$\ddot{v}(t) = +\frac{k_2}{m_2} u(t) - \frac{k_2+k_3}{m_2} v(t)$$

😊 Zur Vereinfachung betrachten wir keine Reibung oder äußere Kräfte.

(1) Wir haben ein (homogenes, lineares) DGSystem zweiter Ordnung:

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) = a u(t) + b v(t) \\ \ddot{v}(t) = c u(t) + d v(t) \end{cases}$$

Neue Variablen  $x_1 = u, x_2 = v, x_3 = \dot{u}, x_4 = \dot{v}$  reduzieren dies zu einem (ebenso homogenen, linearen) DGSystem erster Ordnung:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \text{kurz } \dot{x} = A x$$

Das DGSystem (1) ist einfacher als (0), da erster Ordnung. Unser System  $\dot{x} = Ax$  ist homogen linear mit Systemmatrix  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ . Hier sind die Koeffizienten konstant, das heißt, sie hängen nicht von der Zeit  $t$  ab. Für solche homogen-linearen DGSysteme mit konstanten Koeffizienten entwickeln wir mit Hilfe der Linearen Algebra exakte und zudem effiziente Lösungsmethoden: Wie in der folgenden Aufgabe nutzen wir dazu Eigenvektoren und alle zugehörigen Techniken. Der grundlegende Existenz- und Eindeutigkeitsatz O3B erklärt ganz allgemein die Struktur:

(2) Die Lösungsmenge ist (a) ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum (b) der Dimension 4.

😊 Hier zählen sich Matrizenrechnung und Lineare Algebra erneut aus.

## Gekoppelte Oszillatoren: Symmetrie und Ansatz

- Aufgabe:** (3) Lösen Sie den symmetrischen Fall  $m_1 = m_2, k_1 = k_3$ , als konkretes Beispiel  $m_1 = m_2 = 1$  und  $k_1 = k_3 = 1$  sowie  $k_2 = 1$ .  
 (4) Welche Bewegung folgt aus  $u(0) = 2, v(0) = 0, \dot{u}(0) = \dot{v}(0) = 0$ ? Sind alle Lösungen unseres dynamischen Systems periodisch?

**Lösung:** Einstweilen nutzen wir unsere physikalische Anschauung!

(3a) Der Ansatz  $u = v$  entkoppelt zu  $\ddot{u} = -\frac{k_1}{m_1}u, \ddot{v} = -\frac{k_1}{m_1}v$ .

Lösungen:  $u_1(t) = \cos(\omega_1 t)$  und  $u_2(t) = \sin(\omega_1 t)$  mit  $\omega_1^2 = \frac{k_1}{m_1}$ .

(3b) Der Ansatz  $u = -v$  entkoppelt zu  $\ddot{u} = -\frac{k_1+2k_2}{m_1}u, \ddot{v} = -\frac{k_1+2k_2}{m_1}v$ .

Lösungen:  $u_3(t) = \cos(\omega_2 t)$  und  $u_4(t) = \sin(\omega_2 t)$  mit  $\omega_2^2 = \frac{k_1+2k_2}{m_1}$ .

Sind wir schon fertig? Ja! Jede Lösung ist eine Linearkombination

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} u_2(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} u_3(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} u_4(t) \\ v_4(t) \end{pmatrix}.$$

😊 Als **Anfangswerte** zur Zeit  $t_0$  können Position und Geschwindigkeit  $u(t_0), v(t_0), \dot{u}(t_0), \dot{v}(t_0) \in \mathbb{R}$  beliebig vorgegeben werden: Sie legen die freien Konstanten  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$  eindeutig fest (und umgekehrt).

## Gekoppelte Oszillatoren: Symmetrie und Ansatz

😊 Unser DGSsystem ist sehr einfach: Die Gleichungen sind linear! Linearkombinationen von Lösungen sind daher wieder Lösungen. Mit anderen Worten: Der Lösungsraum ist ein **Vektorraum** über  $\mathbb{R}$ .

😊 Unser **geschickter Ansatz** entkoppelt das Gleichungssystem: Eindimensionale Differentialgleichungen können wir bereits lösen! Die einfache Rechnung bestätigt und präzisiert unsere physikalische Anschauung: Die Probe ist nun leicht: Einsetzen und Ausrechnen!

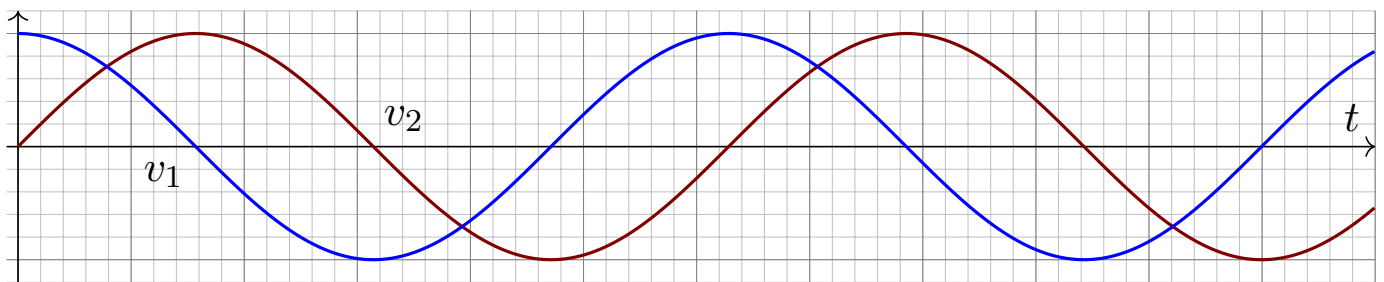
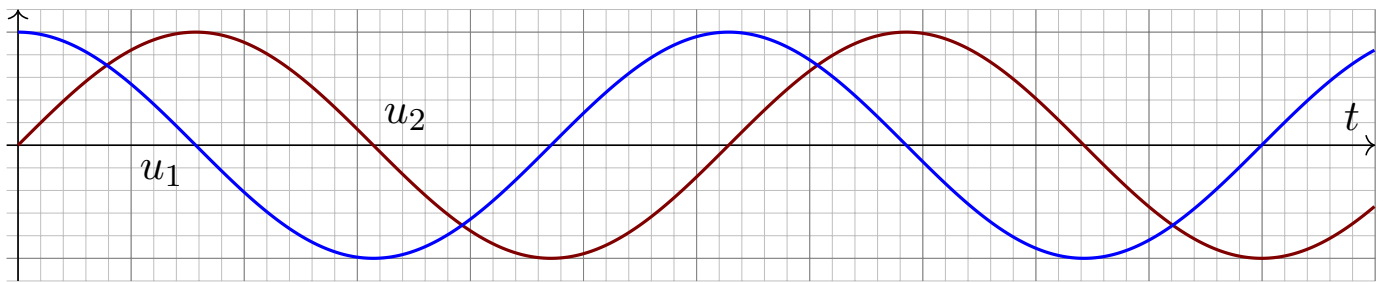
😊 Wir haben vier Lösungen gefunden. Diese sind **linear unabhängig**. Der Lösungsraum hat also Dimension  $\geq 4$ . Gibt es noch mehr?

⚠️ Wir wünschen uns ein einfaches Kriterium für Dimension = 4. Dann wüssten wir sicher: Wir haben alle Lösungen gefunden!

Physikalisch ist das plausibel: Jede Masse hat zur Zeit  $t_0$  eine Position und eine Geschwindigkeit. Diese Daten sollten den weiteren Verlauf eindeutig festlegen. Wir hätten demnach genau 4 Freiheitsgrade.

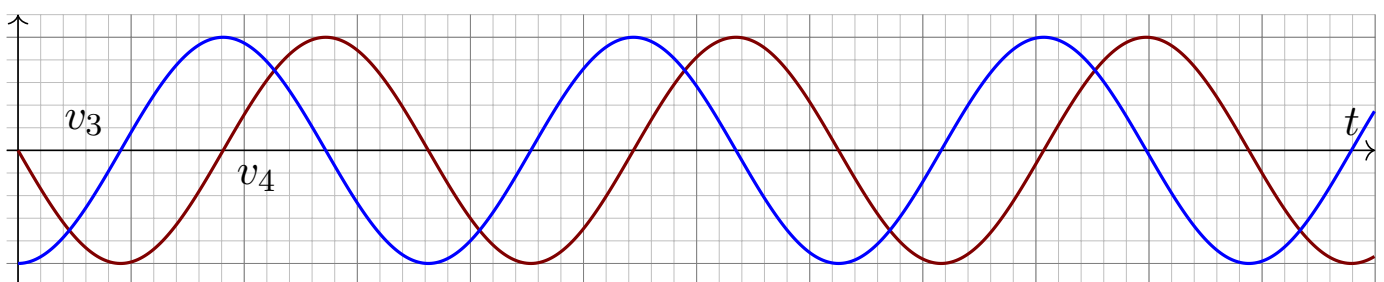
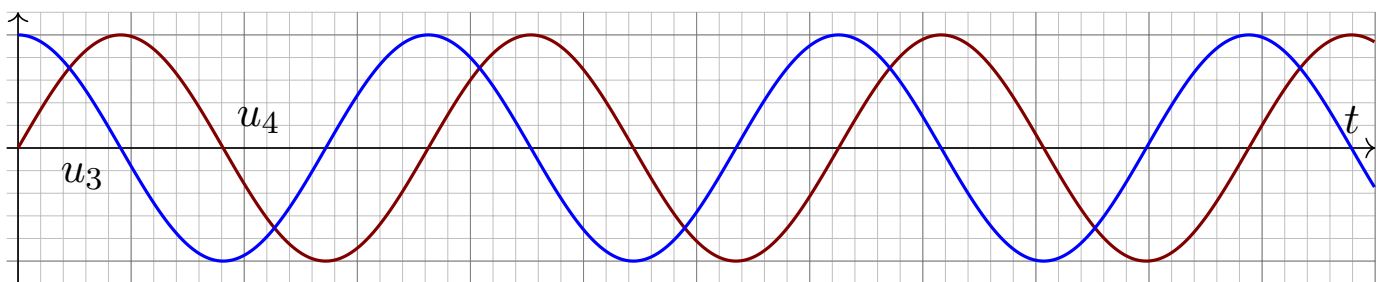
😊 Diese Heuristik lässt sich mathematisch formulieren und beweisen: Es gilt der grundlegende **Existenz- und Eindeigkeitsatz O3B!**

Illustration für den Fall  $m_1 = m_2 = 1$  und  $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ .  
Gleichsinnige Eigenschwingungen zur Frequenz  $\omega_1 = 1$ :



😊 Die Eigenschwingungen unseres Systems sind besonders leicht zu berechnen. Zudem erweisen sie sich als einfach und übersichtlich: Harmonische Schwingung: Jede dieser vier Lösungen ist periodisch.

Illustration für den Fall  $m_1 = m_2 = 1$  und  $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ .  
Gegensinnige Eigenschwingungen zur Frequenz  $\omega_2 = \sqrt{3}$ :

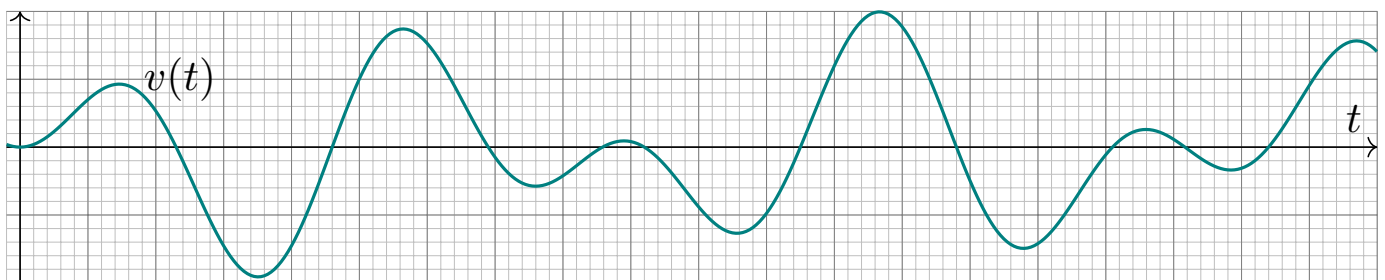
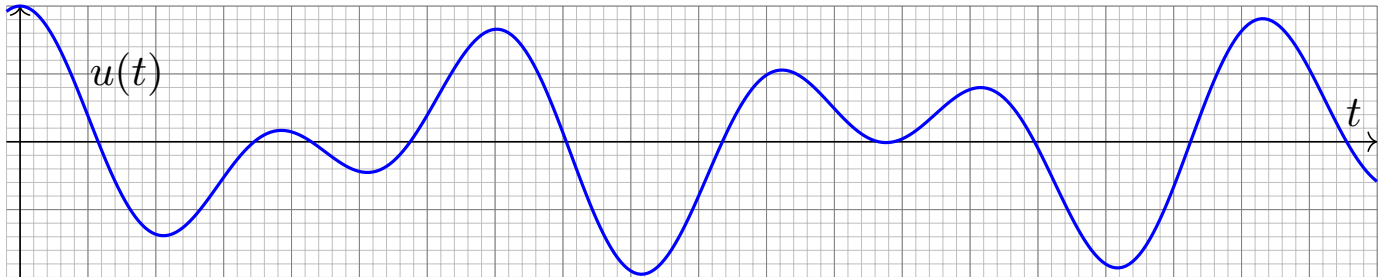


😊 Die Frequenz der gegensinnigen Schwingung ist deutlich größer als die der gleichsinnigen Schwingung. Das ist anschaulich plausibel; probieren Sie es mal aus! Nun können wir es sogar präzise ausrechnen.

(4) Welche Linearkombination von Eigenschwingungen löst das AWP?

$$u(t) = \cos(t) + \cos(\sqrt{3}t), \quad u(0) = 2, \quad \dot{u}(0) = 0$$

$$v(t) = \cos(t) - \cos(\sqrt{3}t), \quad v(0) = 0, \quad \dot{v}(0) = 0$$



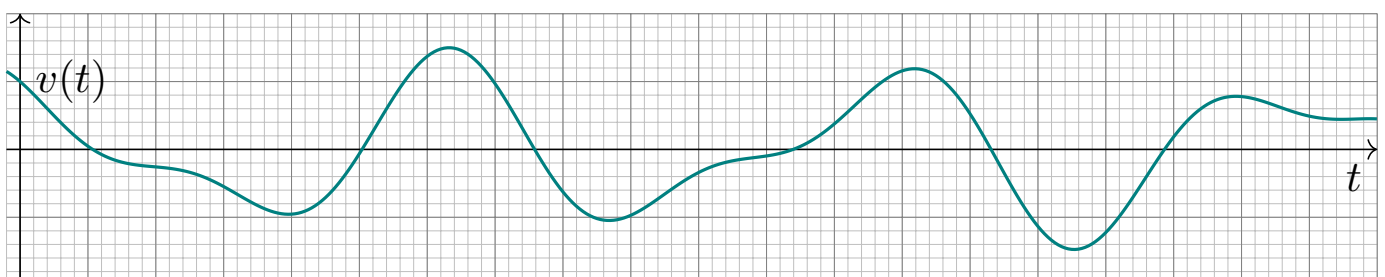
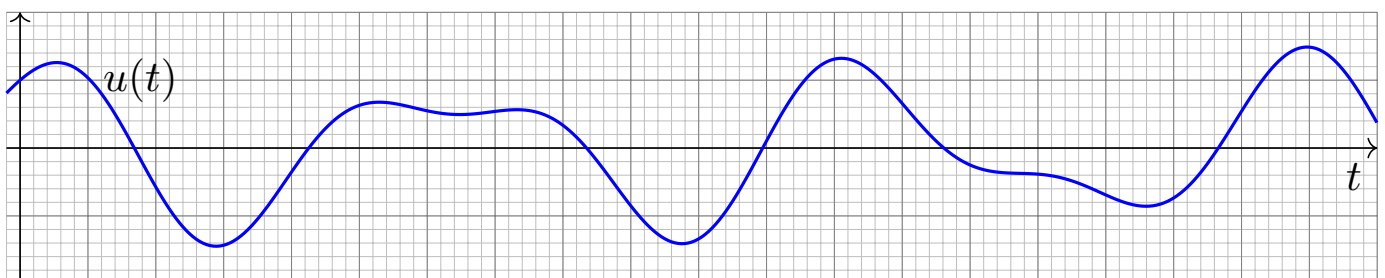
⚠ Diese Bewegung ist nicht periodisch! Sie scheint zuerst kompliziert, ist aber nur die Überlagerung von zwei harmonischen Schwingungen.

# Überlagerung von Eigenschwingungen

Zur Illustration eine weitere Linearkombination von Eigenschwingungen:

$$u(t) = \cos(t) + \frac{1}{2} \sin(\sqrt{3}t)$$

$$v(t) = \cos(t) - \frac{1}{2} \sin(\sqrt{3}t)$$



😊 Die Anfangswerte  $u(0)$ ,  $\dot{u}(0)$  sowie  $v(0)$ ,  $\dot{v}(0)$  können beliebig vorgegeben werden; sie legen den weiteren Verlauf eindeutig fest.

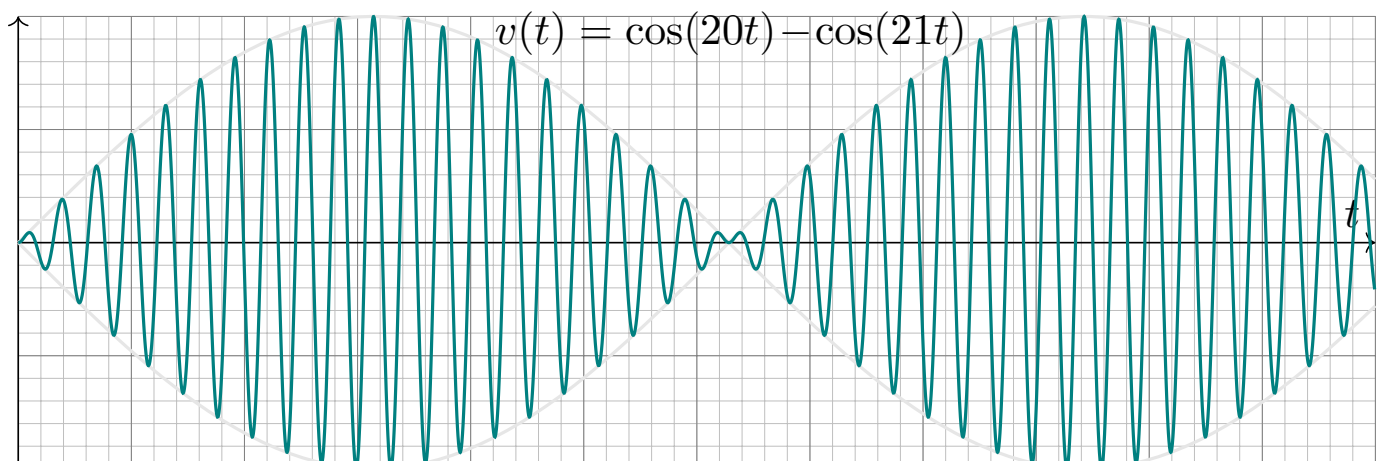
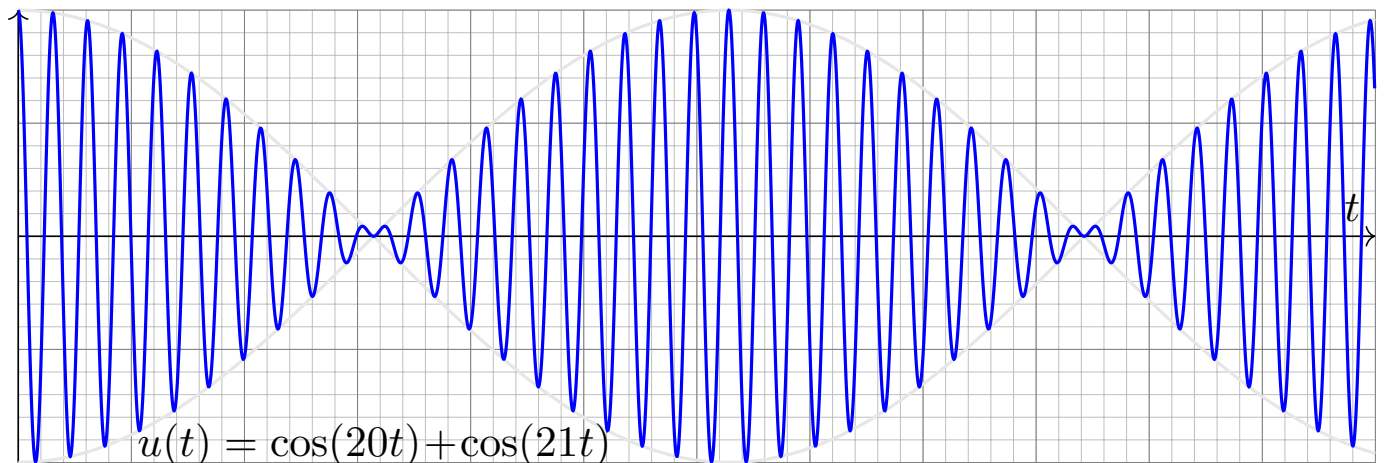


**Aufgabe:** Was geschieht bei schwacher Kopplung, für  $0 < k_2 \ll k_1 = k_3$ ?

(5) Als Zahlenbeispiel sei  $m_1 = m_2 = 1$ ,  
 $k_1 = k_3 = 400$ ,  
 $k_2 = 20.5$ .

**Lösung:** (5) Die Eigenfrequenzen  $\omega_1 = 20$  und  $\omega_2 = 21$  liegen nahe. Das Anfangswertproblem  $u(0) = 2$ ,  $v(0) = 0$  und  $\dot{u}(0) = \dot{v}(0) = 0$  wird gelöst durch  $u(t) = \cos(20t) + \cos(21t)$  und  $v(t) = \cos(20t) - \cos(21t)$ . Die folgenden Graphiken illustrieren den zeitlichen Verlauf für  $t \in [0, 12]$ .

Wir beobachten eine *Schwebung*: In der Überlagerung  $u(t)$  bzw.  $v(t)$  nimmt die Amplitude der Summe mit langer Periode zu und ab, additive Phasen und subtraktive Phasen wechseln sich ab.



Anschaulich geschieht hier folgendes: Wir können den linken Oszillator auslenken und dann loslassen. Er schwingt daraufhin nahezu frei, doch nach und nach überträgt sich (fast) seine gesamte Energie auf den rechten Oszillator, anschließend geschieht dasselbe umgekehrt.

**Aufgabe:** Erklären Sie das hier gezeigte, bemerkenswerte Phänomen der Schwebungen mit Hilfe der trigonometrischen **Additionstheoreme**.

**Lösung:** Aus der Euler-Gleichung  $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$  und der Homomorphie  $e^{z+w} = e^z e^w$  erhalten wir (nach kurzer Rechnung):

$$\begin{aligned}\cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}\end{aligned}$$

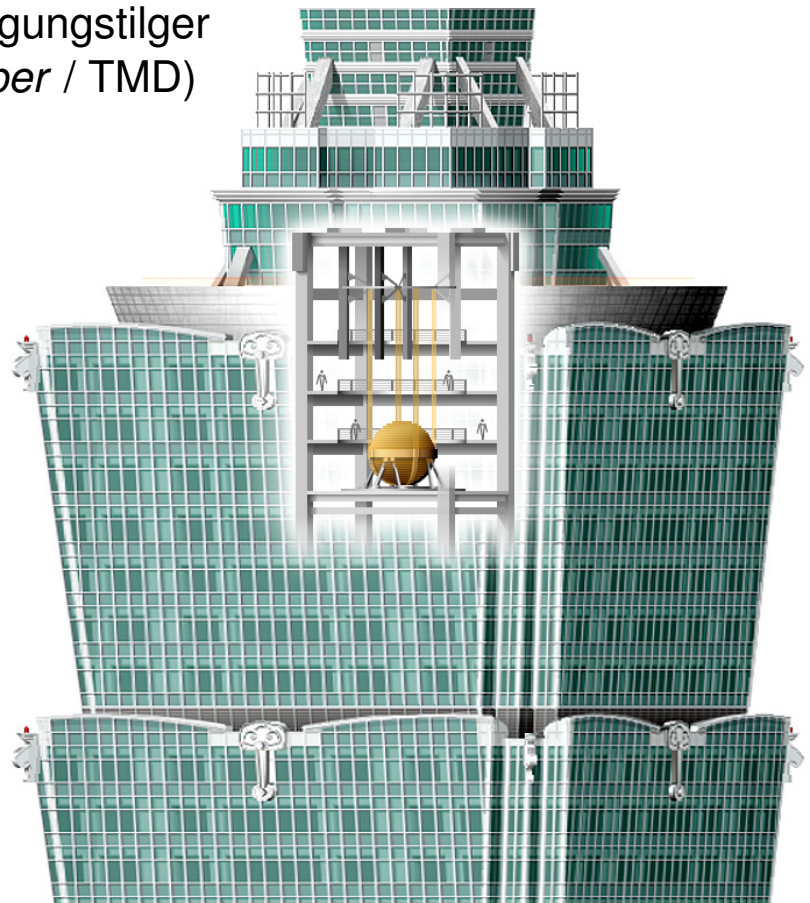
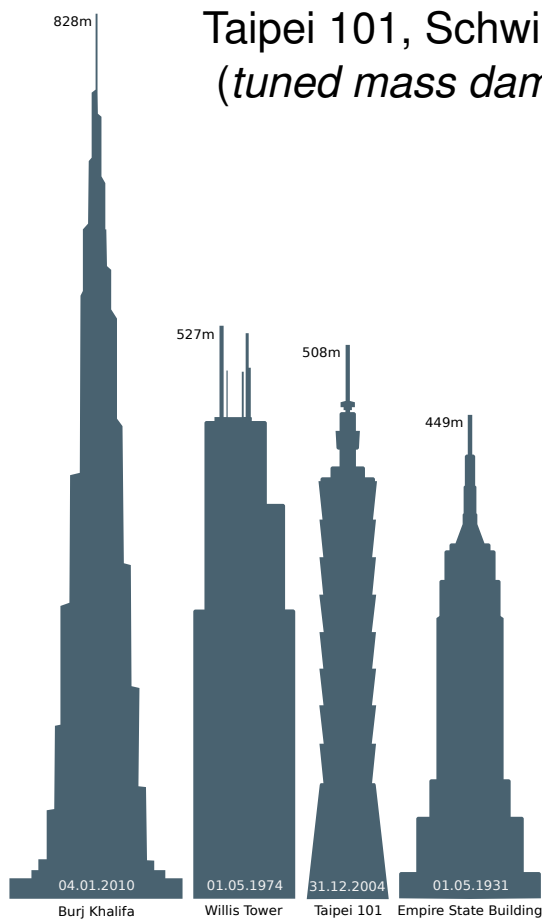
In unserem Zahlenbeispiel erhalten wir:

$$\begin{aligned}u(t) &= \cos(20t) + \cos(21t) = 2 \cos(0.5t) \cdot \cos(20.5t) \\ v(t) &= \cos(20t) - \cos(21t) = -2 \sin(0.5t) \cdot \sin(20.5t)\end{aligned}$$

Wir interpretieren daher die Überlagerung  $u(t) = A(t) \cos(20.5t)$  als eine Grundschiwingung der mittleren Frequenz  $\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) = 20.5$  mit der variablen Amplitude  $A(t) = 2 \cos(0.5t)$ ; diese hat die deutlich niedrigere Frequenz  $\delta = \frac{1}{2}|\omega_1 - \omega_2| = 0.5$ , sodass  $\omega_{1/2} = \bar{\omega} \mp \delta$  gilt.

Diese Rechnung ist in der obigen Graphik schön anschaulich illustriert durch die Trägerschiwingung  $\cos(20.5t)$  und die Einhüllende  $\pm 2 \cos(0.5t)$ . Das Phänomen der Schwebung entsteht immer, wenn sich zwei ähnlich große Schwingungen mit nahezu gleichen Frequenzen überlagern.

In der Akustik sind solche Schwebungen deutlich zu hören: Der Ton ist moduliert, seine Lautstärke schwankt mit der Schwebungsfrequenz, was mitunter als unangenehme Dissonanz empfunden wird. Das ist keine akustische Täuschung, sondern ein reales physikalisches Phänomen.



Gebäude werden zu Schwingungen angeregt, extern durch Wind oder Erdbeben, intern durch Menschen oder Maschinen. Dagegen helfen **Schwingungstilger**, justiert auf die Eigenfrequenz des Gebäudes. Berlins Fernsehturm hat in seiner Spitze ein 1.5-Tonnen-Tilgerpendel. Londons Millennium Bridge, 2000 eröffnet und *wobbly bridge* genannt, wurde nachträglich mit 52 kleinen *tuned mass dampers* ausgestattet.

Das Taipei Financial Center in Taiwan hielt ab 2004 den Rekord des höchsten Gebäudes der Welt, bis es 2009 vom Burj Khalifa überholt wurde. Zwischen dem 88. und 92. Stockwerk befindet sich eine 660 Tonnen schwere Stahlkugel als Pendel mit ölhydraulischer Dämpfung. Dies ist öffentlich zugänglich und eine beliebte Touristen-Attraktion.

Das Gebäude überträgt Schwingungsenergie auf diesen Oszillator, der sie absorbiert und dann durch Dämpfung in Wärme umwandelt. Die maximale Beschleunigung bei Stürmen wird so etwa halbiert! (Taiwan ist sowohl aktive Erdbebenregion als auch Taifungebiet.)

Ein Video sagt mehr als tausend Worte:  [youtu.be/f1U4SAgy60c](https://youtu.be/f1U4SAgy60c).

Wasserwellen regen ein Schiff zu Schwingungen an:

- 1 Das Schiff „rollt“ um seine Längsachse, kippt also nach links (Backbord) und rechts (Steuerbord).
- 2 Das Schiff „stampft“ um seine Querachse, neigt sich also nach vorne (zum Bug) und hinten (zum Heck).

Wenn die anregende Frequenz des Seegangs unglücklich nah an der Eigenfrequenz des Schiffes liegt, so kommt es zur Resonanz. Um eine Katastrophe zu verhindern, möchte man vorsorgen und die auftretenden Resonanzen so weit wie möglich abschwächen.

Für die Rollbewegung um die Längsachse gelingt dies recht effizient mit zwei raffiniert gekoppelten Schwingungen. Hierzu entwickelte der deutsche Schiffsbauer Hermann Frahm (1867–1939) um 1900 den sogenannten Frahmschen **Schlingertank**. Dieser besteht aus zwei Wassertanks an den Längsseiten des Schiffes, die möglichst hoch liegen und über Rohre kommunizieren. Hierin füllt man Wasser, bis die Eigenfrequenz des Tanks der des Schiffes entspricht.

Seitlich auftreffende Wellen regen das Schiff zum Rollen an. Im Resonanzfall erzwingt dies eine Schwingung des Schiffes mit der Phasenverschiebung um  $\pi/2$  gegenüber der Anregung. Das rollende Schiff lässt nun seinerseits das Ballastwasser im Tank periodisch hin- und herströmen, ebenso mit einer Phasenverschiebung um  $\pi/2$ .

Die äußere Anregung und die innere Schwingung des Tanks sind daher gegenphasig. Die so wirkenden entgegengesetzten Drehmomente heben sich weitgehend auf, was die Rollbewegung deutlich verringert.

Die Grundidee ist genial-einfach und in unserem mathematischen Modell gut nachzuverfolgen. Die technische Ausführung erfordert die geeignete Kalibrierung der Parameter und ist eine eigene Kunst.

Das gesamte System ist in Wirklichkeit nicht-linear: Die Frequenz des Schiffes und des Ballastwasser hängen von der Amplitude ab, dadurch wird ihr Zusammenspiel recht kompliziert. Das Prinzip ist jedoch gleich.



**Aufgabe:** Formulieren Sie die Bewegungsgleichungen von  $n$  Körpern mit Masse  $m_k > 0$ , Position  $u_k(t) \in \mathbb{R}^3$  und Geschwindigkeit  $v_k(t) \in \mathbb{R}^3$ .

**Lösung:** Newtons Gravitationsgesetz ergibt die Differentialgleichungen

$$\dot{u}_k = v_k, \quad \dot{v}_k = f_k(u) := \sum_{j \neq k} \gamma m_j \frac{u_j - u_k}{|u_j - u_k|^3}.$$

Vorgegeben sind die Anfangsdaten  $u_k(0)$  und  $v_k(0)$  zur Zeit  $t = 0$ .

Als Lösung gesucht ist die Bewegung  $(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n) : [0, T[ \rightarrow \mathbb{R}^{6n}$ .

Erlaubt ein so komplexes System immer genau eine Lösung? Ja, das ist der zentrale  $\exists$ &E-Satz! Kollision oder Expulsion nach  $\infty$  sind möglich: Eventuell existiert die Lösung nur für eine kurze Zeit  $T > 0$ . Für manche Startwerte sind Lösungen periodisch, oder beinahe: Zu unserem Glück!

😊 Den Fall  $n = 2$  lösen Kegelschnitte: Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln.

😞 Für  $n \geq 3$  lässt sich dieses DGSystem i.A. nicht geschlossen lösen!

😊 Euler–Verfahren: diskrete Zeitschritte  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ ,

$$u_k(t_{i+1}) \approx u_k(t_i) + v_k(t_i) \cdot (t_{i+1} - t_i),$$

$$v_k(t_{i+1}) \approx v_k(t_i) + f_k(u) \cdot (t_{i+1} - t_i).$$

## Newtons Himmelsmechanik: der historische Triumph

Das Verständnis der **Himmelsmechanik** markiert den Übergang vom Mittelalter zur Neuzeit.

Die Beobachtung des Nachthimmels und seiner Sterne fasziniert uns Menschen seit Alters her. Neben den zahlreichen „Fixsternen“ (weit entfernte Sterne) erkennen wir einige „Wandelsterne“ (Planeten unseres Sonnensystems). Ihre Bewegung lässt Regeln erahnen, doch für Wandelsterne scheinen diese zunächst kompliziert und verwirrend. Sie quantitativ zu erfassen und gründlich zu verstehen, ist einer der großen Triumphe menschlicher Neugier und systematischer Forschung!

Von der Erde besehen scheinen sich alle Sterne um uns zu drehen, doch die exakte Bewegung der Planeten erweist sich als schrecklich kompliziert. Kopernikus' heliozentrisches Modell (1543) ist einfacher, daher nützlicher: Die Bahnen der Planeten um die Sonne erweisen sich recht genau als Ellipsen. Diese Koordinatentransformation hat enorme Wirkung und schreibt Weltgeschichte!

Aus Tycho Brahes präzisen **Beobachtungsdaten** leitete Johannes Kepler drei Gesetze ab, die die Ellipsenbewegung der Planeten um die Sonne gut *beschreiben*. Eine *Erklärung* der Bewegungen durch einheitliche physikalische Prinzipien gelang erst Isaac Newton 1686 mit seinen Principia!

Die moderne Naturwissenschaft beginnt mit Newtons Formulierung der drei Bewegungsgesetze, des universellen Gravitationsgesetzes und seiner Lösung des Zwei-Körper-Problems. Mit einer Handvoll physikalischer Prinzipien und den passenden mathematischen Werkzeugen konnte er die Keplerschen Regeln *erklären*, ja *herleiten*. Newtons revolutionäre Idee: Überall im Universum gelten dieselben Gesetze! Newtons Mechanik erklärt die Schwerkraft hier auf Erden ebenso wie außerirdische Phänomene: den Umlauf der Planeten um die Sonne und des Mondes um die Erde, sogar die Gezeiten unserer Meere, ebenso die Coriolis-Kraft und das Foucaultsche Pendel.

Allein schon das obige Differentialgleichungssystem zu formulieren, ist eine Meisterleistung der Mathematik und Physik der Neuzeit. Wir nennen dies **Himmelsmechanik** und sind völlig zu Recht stolz auf sie: Mathematische Sprache und Werkzeuge erleuchten die gesamte Entwicklung und ebnet den Weg von Beobachtung über Erklärung und Berechnung bis zur Raumfahrt.

Auch nach über 300 Jahren sind Newtons Gleichungen immer noch nützlich wie am ersten Tag! Daten ändern sich, Methoden bleiben bestehen. Solide mathematische Arbeit hat eine extrem lange Wirksamkeit. Daher lohnt es sich auch für Sie heute, in mathematische Grundlagen zu investieren und diese wirksamen Werkzeuge zu erlernen, anzuwenden und fortzuführen.


Die drei Fälle  $n = 1$  und  $n = 2$  sowie  $n \geq 3$  sind sehr verschieden! Für einen einzigen Körper ( $n = 1$ ) enthalten Newtons Gleichungen  $\dot{u}_1 = v_1$  und  $\dot{v}_1 = 0$  keine gravitative Wechselwirkung. Ihre Lösung ist eine **geradlinige Bewegung**, nämlich  $u_1(t) = u_1(0) + v_1 t$ .

Ein Zwei-Körper-System ( $n = 2$ ) wie Sonne-Erde oder Erde-Mond ist bereits ausgesprochen interessant. Newton konnte seine Gleichungen hier gut lösen, sie ergeben Ellipsenbahnen und erklären die Keplerschen Gesetze. Allgemeiner sind auch Parabeln und Hyperbeln als Lösungen möglich, je nach Anfangsdaten  $u_1(0), v_1(0), u_2(0), v_2(0)$ . In allen Fällen gelingt die Lösung hier noch in geschlossener Form. Man nennt ein solches System **vollständig integrabel**. [P270]

Newton betrachtete anschließend das Drei-Körper-System Sonne-Erde-Mond. Dies entzog sich jedoch hartnäckig einer Lösung und wurde zum berühmtesten offenen Problem der Mathematik. Das **Drei-Körper-Problem** gilt bis heute als eines der schwierigsten Probleme, die zahlreichen Anstrengungen zu seiner Lösung erfordern und erzeugen immer wieder wichtige neue Methoden.

## Newtons Himmelsmechanik: mögliche Lösungsmethoden

Für künstliche Satelliten wird das **zirkuläre restringierte Drei-Körper-Problem** (CR3BP) sehr ausgiebig untersucht: Zwei massereiche Körper umrunden sich kreisförmig, während der dritte Körper nahezu masselos ist. Hier findet man die berühmten fünf Lagrange-Punkte. [P257]

Nur wenige und sehr spezielle Sonderfälle des  $n$ -Körper-Problems sind geschlossen lösbar. Auch diese haben ihren eigenen Reiz: Seit 1994 wurden zahlreiche **Choreographien** entdeckt, in denen  $n$  Körper symmetrisch angeordnet werden und dann periodische Bahnen durchlaufen. Für generische Anfangsdaten hingegen ist die Bewegung **chaotisch** und kann nur numerisch annähernd berechnet werden.  *Solving the Three Body Problem*, [youtu.be/et7XvBenEo8](https://youtu.be/et7XvBenEo8).

Zum Kontrast untersuchen und vergleichen wir zwei klassische Anwendungen der Mechanik: Einerseits gekoppelte **lineare Systeme** wie harmonische Oszillatoren [O101] [P101], andererseits Planetenbewegung und ähnliche **nicht-lineare Systeme**. Nicht-lineare Systeme sind schwierig und verhalten sich oft chaotisch. Lineare Systeme sind besonders gutartig und einfach zu lösen. Daher sollten Sie Linearität erkennen und wertschätzen, verstehen und nutzen lernen!

Auch nicht-lineare Systeme lassen sich mitunter gut lösen, wie einfache Beispiele zeigen. Dies sind aber Ausnahmen und seltene Glücksfälle. Typischerweise sind nicht-lineare Systeme nicht geschlossen lösbar. Es bleibt dann nur die **numerische Approximation** mit Hilfe geeigneter Näherungsverfahren, z.B. das Euler-Verfahren oder besser gleich das Runge-Kutta-Verfahren. Mehr hierzu erfahren Sie in der Numerik. Aufbauend auf den mathematischen Grundlagen können Sie die Numerik von Differentialgleichungen nutzen und wo nötig vertiefen.

Allgemeine Grundlagen und konkrete Anwendungen ergänzen sich wunderbar.

Jedes **Differentialgleichungssystem erster Ordnung** hat die Form

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= f_1(t, y_1(t), \dots, y_n(t)), \\ &\vdots \\ y_n'(t) &= f_n(t, y_1(t), \dots, y_n(t)). \end{aligned}$$

Dies ist ein System von  $n$  gekoppelten Differentialgleichungen:

Die Änderungsrate  $y_k'(t)$  ist eine Funktion  $f_k$  von  $t$  und  $y_1(t), \dots, y_n(t)$ .

Mit  $y = (y_1, \dots, y_n)$  und  $f = (f_1, \dots, f_n)$  bündeln wir dies kürzer und übersichtlicher als eine **vektorwertige Differentialgleichung**:

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

Gegeben ist die stetige Funktion  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n \supseteq G \rightarrow \mathbb{K}^n$  als rechte Seite. Als Lösung gesucht sind alle diff'baren Funktionen  $y: \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{K}^n$  auf einem (maximalen) Intervall  $I$  mit  $(t, y(t)) \in G$  und  $y'(t) = f(t, y(t))$  für alle  $t \in I$ . Meist ist zudem ein Anfangswert  $(t_0, y_0) \in G$  vorgegeben. Der folgende Satz garantiert Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung.

Beide hier gezeigten **Schreibweisen** sind nützlich und üblich: Die erste ist explizit ausführlich, die zweite ist bequem komprimiert.

Ich verzichte meist auf Pfeile und sonstige Dekoration für Vektoren. Der Kontext gibt jeweils an, mit welchen Objekten (Skalaren, Vektoren, Matrizen, ...) und mit welcher Dimension wir es genau zu tun haben. Ohnehin sollte man dies eingangs klarstellen bzw. in Erinnerung rufen.

Die Funktion  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n \supseteq G \rightarrow \mathbb{K}^n$  erklärt die Differentialgleichung. Sie ist im Allgemeinen nicht auf ganz  $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$  definiert, sondern nur auf einer geeigneten (offenen) Teilmenge  $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$  gegeben.

**Beispiel:** Die Differentialgleichung der Planetenbewegung ist bei einer Kollision  $u_j = u_k$  nicht mehr definiert. Das Definitionsgebiet ist also

$$G = \left\{ (t, u_1, v_1, \dots, u_n, v_n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{6n} \mid u_j \neq u_k \text{ für } j \neq k \right\}.$$

Hierauf ist unsere Funktion  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{6n} \supseteq G \rightarrow \mathbb{R}^{6n}$  definiert durch

$$\dot{u}_k = v_k, \quad \dot{v}_k = \sum_{j \neq k} \gamma m_j \frac{u_j - u_k}{|u_j - u_k|^3}.$$

**Satz O1B: Cauchy Existenz- und Eindeutigkeitsatz, kurz  $\exists \& E$** 

Sei  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n \supseteq G \rightarrow \mathbb{K}^n$  stetig. Zu lösen sei die Differentialgleichung

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{mit Anfangswert} \quad y(t_0) = y_0.$$

(1) Zu jedem Startpunkt  $(t_0, y_0) \in \overset{\circ}{G}$  existieren Lösungen  $y : \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{K}^n$ . Jede kann beidseitig bis zum Rand  $\partial G$  (oder  $\infty$ ) fortgesetzt werden.

(2) Ist  $f(t, y)$  stetig diff'bar nach  $y$ , so ist die Lösung durch  $(t_0, y_0) \in \overset{\circ}{G}$  eindeutig bestimmt. Sie hängt stetig differenzierbar von  $(t_0, y_0)$  ab.

😊 Wir kennen dieses Ergebnis aus Dimension  $n = 1$ . (Satz M1C)  
Die mehrdimensionale Verallgemeinerung O1B gilt wörtlich genauso.  
Planetenbewegung: Zu gegebenen Startwerten  $y(0) \in \mathbb{R}^{6n}$  existiert eine eindeutige Lösung  $y : [0, T[ \rightarrow \mathbb{R}^{6n}$ , zumindest eine gewisse Zeit  $T > 0$ . Entweder gilt  $T = \infty$ , d.h. die Lösung existiert für alle Zeit  $t \geq 0$ , oder aber sie verlässt den Definitionsbereich  $G$ , d.h. sie läuft in eine Polstelle,  $u_j(T) = u_k(T)$ , oder entkommt nach unendlich,  $|u_k(t)| \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow T$ .

## Differentialgleichungssysteme erster Ordnung

Die **Existenz** einer Lösung  $y : \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{K}^n$  bedeutet: Es gibt ein Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  mit  $t_0 \in I$  und eine differenzierbare Funktion  $y : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  mit  $y(t_0) = y_0$  sowie  $(t, y(t)) \in G$  und  $y'(t) = f(t, y(t))$  für alle  $t \in I$ .

Meist suchen wir **maximale Lösungen**  $y : \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{K}^n$ , also solche, die sich auf kein größeres Intervall  $I^* \supsetneq I$  fortsetzen lassen.

⚠ Im Allgemeinen existieren Lösungen  $y : \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{K}^n$  nicht auf ganz  $\mathbb{R}$ , sondern nur auf einem (evtl. endlichen) Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Die Lösung lässt sich im Inneren  $G^\circ$  des Definitionsbereichs zwar immer fortsetzen, aber manche Lösungen verlassen  $G$ , d.h. sie enden auf dem Rand  $\partial G$  oder entkommen nach  $\infty$ . Man denke an obige Planetenbewegung!

⚠ Beispiele zeigen, dass es zum gegebenen Startwert  $(t_0, y_0)$  auch mehrere Lösungen geben kann: Siehe Wasseruhr [M123](#) oder [M325](#). Das Problem ist dann **schlecht gestellt**. Dies gilt es zu vermeiden!

**Eindeutigkeit** bedeutet: Sind  $u : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  und  $v : J \rightarrow \mathbb{K}^n$  Lösungen mit  $u'(t) = f(t, u(t))$  für alle  $t \in I$  und  $v'(t) = f(t, v(t))$  für alle  $t \in J$  sowie  $u(t_0) = v(t_0) = y_0$ , so gilt  $u = v$  auf dem gemeinsamen Intervall  $I \cap J$ . Sind beide Lösungen  $u, v$  maximal, so gilt zudem  $I = J$ .

Welche Schwingungsdauer hat eine Schaukel bei  $90^\circ$  Auslenkung?

⚠ Als eindrücklicher Kontrast vergleichen wir hier noch einmal detailliert ein nicht-lineares DGSsystem mit seiner Linearisierung.



**Aufgabe:** (1) Erstellen Sie die Bewegungsgleichung  $\ddot{\varphi}(t) = \dots$

(2) Nähern und lösen Sie diese für kleine Amplituden ( $|\varphi| < 5^\circ$ ).

(3) Formulieren und beweisen Sie die Energieerhaltung für  $E = \dots$

(4) Schreiben Sie die Bewegungsgleichung als DGSsystem  $\dot{x} = \dots$

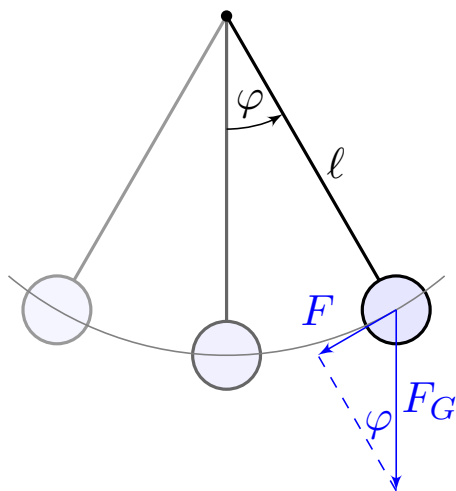
(5) Skizzieren Sie das Vektorfeld  $f$  und Lösungskurven für  $\ell = 9.81m$ .

(6) Wenden Sie das Euler-Verfahren an auf die Anfangsdaten  $\varphi(0) = -\pi/2$  und  $\dot{\varphi}(0) = 0$  mit Schrittweite  $\Delta t = 0.1$ .

Können Sie der so berechneten Näherung vertrauen?

Wie lange dauert ein Umlauf ungefähr?

# Das mathematische Pendel



Die Rückstellkraft ist hier nicht-linear:

$$F(t) = -m \cdot g \cdot \sin \varphi(t)$$

$m$  = Masse des Pendelkörpers

$g = 9.81m/s^2$  Erdbeschleunigung

$F_G = mg$  Gravitationskraft zur Masse  $m$

$\ell$  = Länge des Pendelstabes

$\varphi(t)$  = Winkelauslenkung

$\ell \varphi(t)$  = Auslenkung

(1) Newtons Gesetz  $F(t) = m \ell \ddot{\varphi}(t)$  führt zur Differentialgleichung

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{\ell} \sin \varphi(t).$$

⚠ Wir vereinfachen hier: punktförmige Masse des Pendelkörpers, vernachlässigbare Masse des Stabes, reibungsfreie Aufhängung, etc.

😊 Für kleine Auslenkungen gilt  $\sin(\varphi) \approx \varphi$ . (Faustregel für  $|\varphi| < 5^\circ$ )

(2) Dies führt uns zur **linearisierten Differentialgleichung**:

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{\ell} \varphi(t)$$

Dies ist ein harmonischer Oszillator:  $\ddot{\varphi}(t) = -\omega^2 \varphi(t)$  mit  $\omega = \sqrt{g/\ell}$ .

Lösung  $\varphi(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$ , Periodendauer  $T = 2\pi \sqrt{\ell/g}$ .

Beispiel Schiffsschaukel: Für  $\ell = 9.81m$  finden wir  $T = 2\pi s \approx 6.28s$ .

😊 Die Schwingungsdauer ist unabhängig von der Pendelmasse  $m$ ! Bei kleinen Schwingungen ist sie auch unabhängig von der Amplitude.

⚠️ Für große Auslenkungen brauchen wir eine genauere Rechnung!

(3) Kinetische Energie  $\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2$ , potentielle Energie  $mgl(1 - \cos \varphi)$ .

Die **Gesamtenergie**  $E = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \cos \varphi)$  bleibt erhalten:

$$\frac{dE}{dt} = m\ell^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + mgl\dot{\varphi}\sin\varphi = m\ell^2\dot{\varphi}\left[-\frac{g}{\ell}\sin\varphi(t)\right] + mgl\dot{\varphi}\sin\varphi = 0$$

Zum Vergleich der harmonische Oszillator:  $E = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mgl\varphi^2$

(4) Zustand  $(x_1, x_2) = (\varphi(t), \dot{\varphi}(t)) \in \mathbb{R}^2$ . Der Zustandsraum ist hier  $\mathbb{R}^2$ .

Das Bewegungsgesetz darauf lautet:  $\dot{x}_1 = x_2$  und  $\dot{x}_2 = -g/\ell \sin(x_1)$ .

(5) Für  $\ell = 9.81m$  erhalten wir  $(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = f(x_1, x_2) = (x_2, -\sin(x_1))$ .

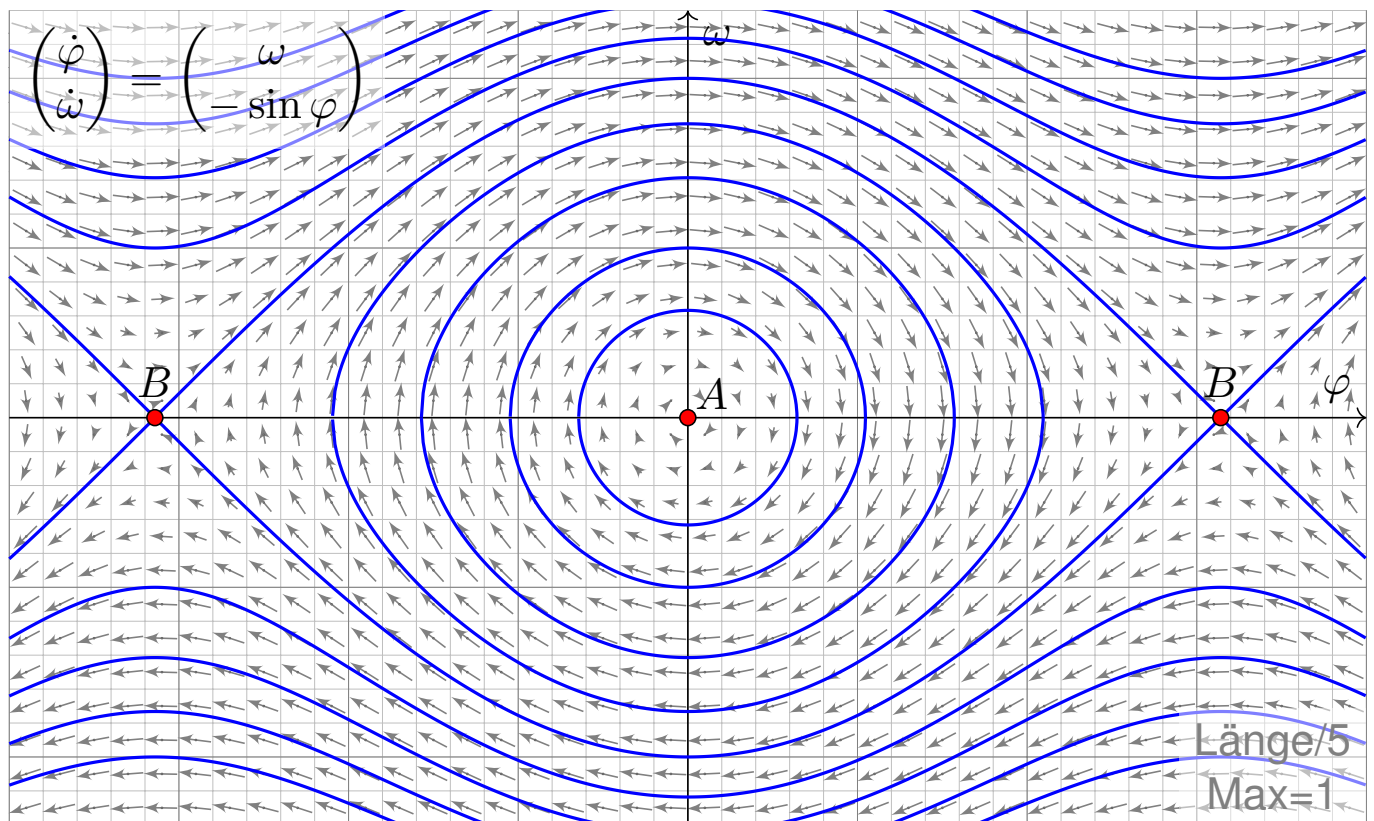
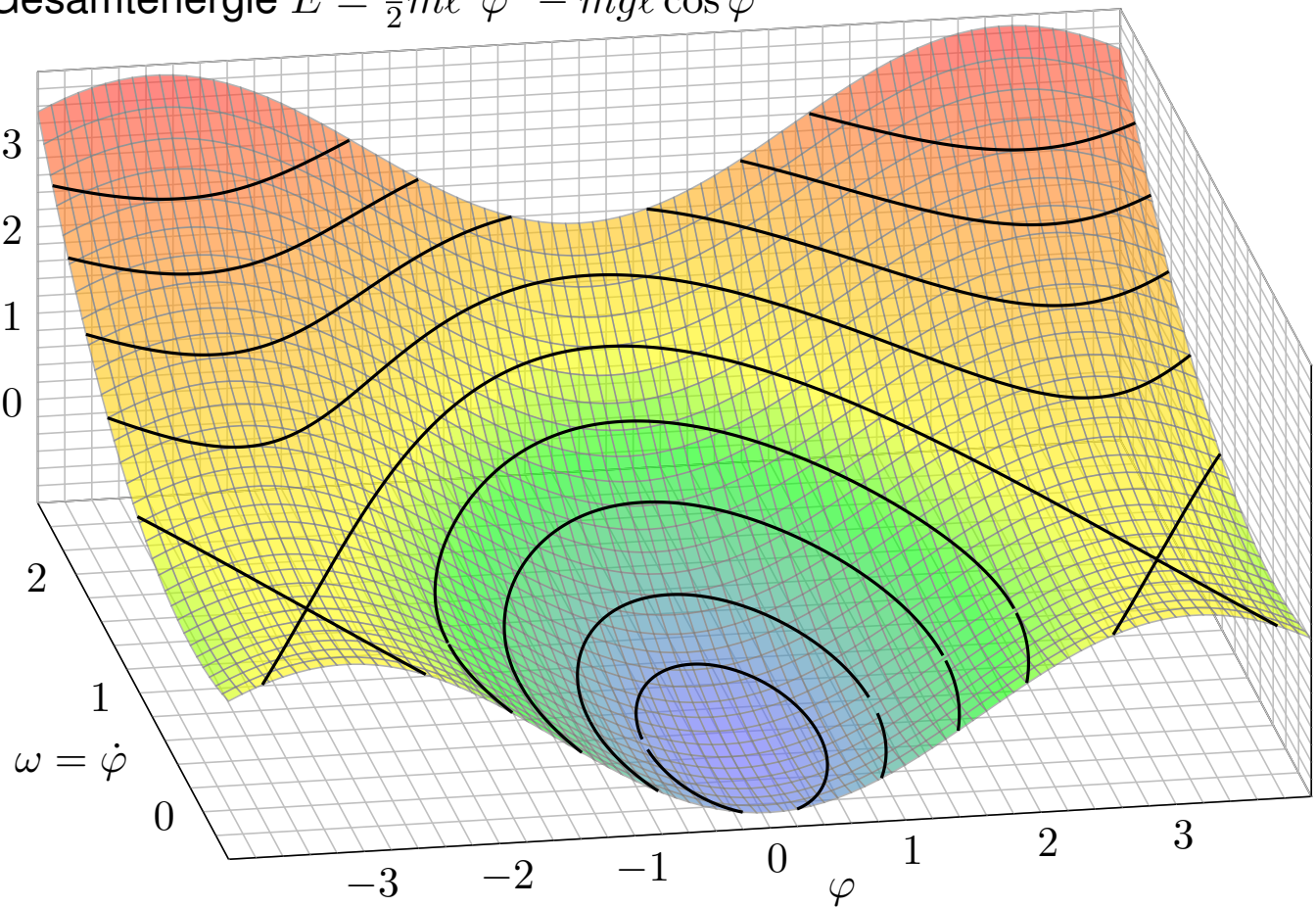
Dieses Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist in folgenden Graphiken dargestellt.

😊 Dank Energieerhaltung können wir sofort die Lösungskurven als Äquipotentiallinien  $E = \text{const}$  einzeichnen! Leider sieht man diesen Kurven ihre zeitliche Parametrisierung oder Periodendauer nicht an.

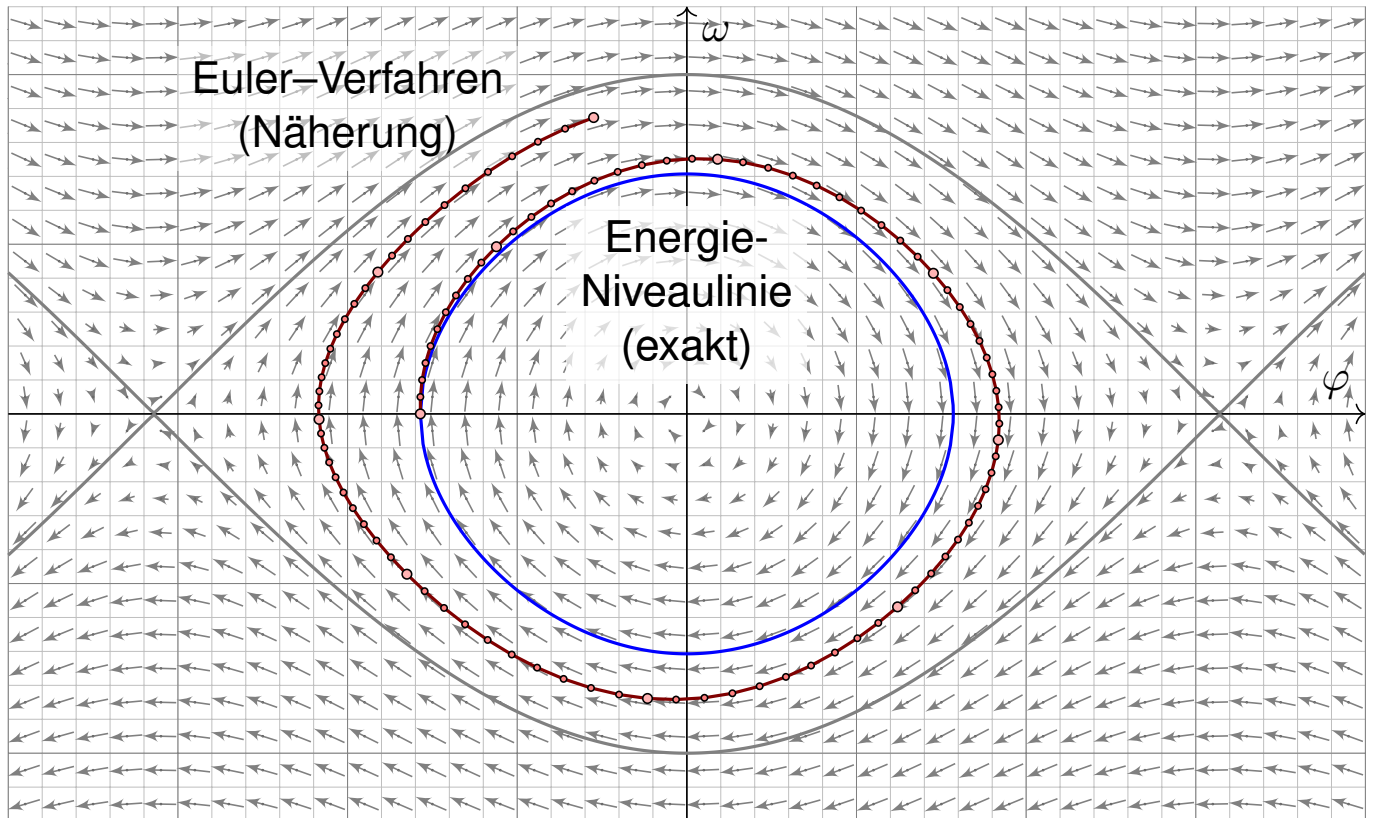
(6) Zeitlich parametrisierte Lösungen  $[0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$  berechnen wir näherungsweise durch das Euler-Verfahren und lesen die Zeit ab: Ein Viertelumlauf benötigt  $\approx 1.85s$ , eine ganze Periode also  $\approx 7.4s$ . Das ist etwa 18% länger als die Periode des linearisierten Modells.

⚠️ Die Näherung akkumuliert Approximationsfehler und entfernt sich von der Energieniveaulinie. Für kleine Zeiten scheint die Abweichung gerade noch akzeptabel. Für eine ernsthafte Rechnung müssen wir die Schrittweite verkleinern oder das gesamte Verfahren verbessern: Fehlerschranken, Effizienz und Präzision erfordern harte Arbeit!

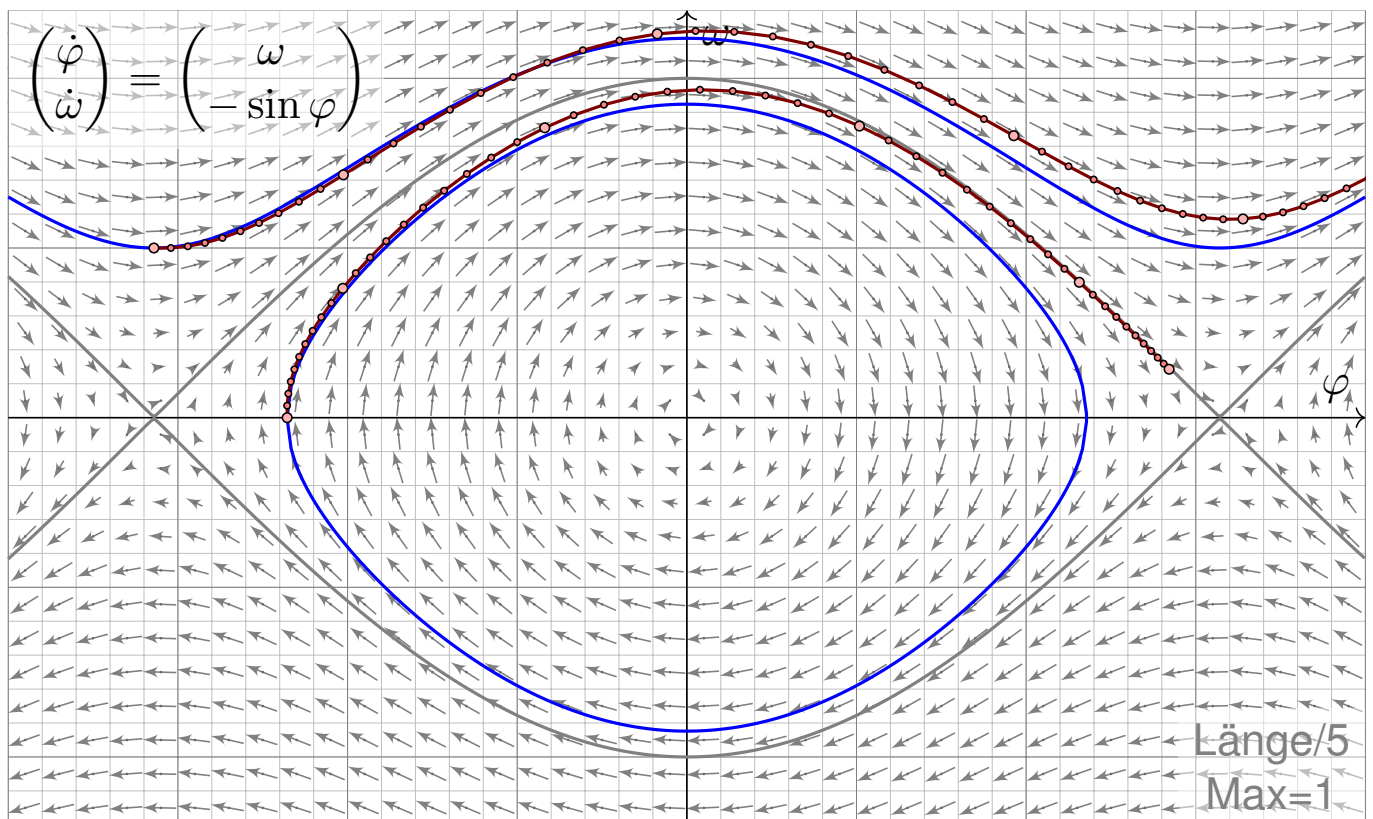
Gesamtenergie  $E = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi$



Wir erkennen harmonische Oszillation um das untere Gleichgewicht  $A$ . Der obere Scheitelpunkt  $B$  hingegen ist ein instabiles Gleichgewicht.



Die Periode dauert etwa  $4 \cdot 1.85s = 7.4s$ : Länger als im linearen Modell!  
Das ist physikalisch plausibel: Kraft und Beschleunigung sind geringer.



Wir erkennen deutlich die Abweichungen der Euler-Approximation.  
Wie erreichen wir möglichst hohe Präzision bei geringem Aufwand?



Das Euler–Verfahren wird hier zu didaktischen Zwecken vorgestellt: Es ist besonders einfach. Leider ist es wenig präzise, wie bereits obige Experimente zeigen, und für ernsthafte Anwendungen nicht geeignet!

Auf zwei Weisen können wir die Präzision der Näherung verbessern:

- Wir können kleinere Schritte wählen und so feiner diskretisieren. Das erhöht den Rechenaufwand, der Computer läuft langsamer.
- Wir können ein Verfahren höherer Konvergenzordnung wählen. Das erhöht den Theorieaufwand, der Computer rechnet schneller.

Die numerische Approximation von Differentialgleichungen ist in naturwissenschaftlich-technischen Anwendungen allgegenwärtig. Es gibt hierzu zahlreiche Verfahren, ständig werden weitere entwickelt, auf spezielle Anwendungen angepasst, untersucht und verbessert.

Das bekannteste ist vermutlich das klassische Runge–Kutta–Verfahren (der Ordnung 4, kurz „RK4“). Es ist in der Praxis sehr weit verbreitet und erfreut sich großer Beliebtheit, denn es ist ebenso einfach zu implementieren wie das Euler–Verfahren, aber wesentlich präziser!



Bildquelle: [wikimedia.org](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Carl_Runge.jpg)

Carl Runge (1856–1927)



Bildquelle: [wikimedia.org](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wilhelm_Kutta.jpg)

Wilhelm Kutta (1867–1944)

Entwickelt hat dieses Verfahren 1895 Carl Runge. Er war 1904–1925 in Göttingen Deutschlands erster Professor für angewandte Mathematik. Weiterentwickelt hat es 1901 Wilhem Kutta, 1912–1935 Professor für Mathematik in Stuttgart. Vor hundert Jahren hätten Sie Ihre Mathematik vermutlich bei ihm gehört. Viele Studierende erinnerten sich später, so heißt es, mit großer Bewunderung an seine einzigartigen Vorlesungen.

Numerisch zu lösen ist  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ . Gegeben ist zur Zeit  $t$  der Zustand  $x = x(t)$ . Gesucht ist nach Zeitschritt  $h$  der Zustand  $x(t + h)$ .

Zur Erinnerung das **Euler–Verfahren** (Ordnung 1):

$$x(t + h) \approx x(t) + hk_1 \quad \text{mit Zuwachs} \quad k_1 = f(t, x)$$

Hier das **Runge–Kutta–Verfahren** (der Ordnung 4, kurz „RK4“):

$$x(t + h) \approx x(t) + h \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} k_1 = f(t, x), \\ k_2 = f(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}k_1), \\ k_3 = f(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}k_2), \\ k_4 = f(t + h, x + hk_3). \end{cases}$$

Diese raffinierte Rechnung verringert den Approximationsfehler. Die Numerik erklärt wie genau das geht. Zunächst ist  $k_1$  der Zuwachs gemäß des Tangentenvektors zur Zeit  $t$  im Punkt  $x$  wie bei Eulers Verfahren, dann ist  $k_2$  der Zuwachs zur Mitte des Zeitschritts im Punkt  $x + h/2 \cdot k_1$ , sodann  $k_3$  der Zuwachs zur Mitte des Zeitschritts aber im Punkt  $x + h/2 \cdot k_2$ , schließlich ist  $k_4$  der Zuwachs am Ende des Zeitschritts im Punkt  $x + hk_3$ . Die vier Zuwächse werden gemittelt, wobei die beiden mittleren doppelt zählen. Wenn  $f(t, x)$  nur von  $t$  und nicht von  $x$  abhängt, dann ist dies die numerische Integration gemäß Simpson, auch Keplers Fassregel genannt.

Die nachfolgenden Graphiken vergleichen Euler und Runge–Kutta. Das Euler–Verfahren, aka RK1, ist **erster Ordnung**, kurz  $O(h)$ :

$$\text{GlobalerFehler(Euler)} \leq C_E(f) \cdot h$$

Die Konstante hängt von der Funktion  $f$  und dem Zeitintervall ab.

Der Fehler  $O(h)$  sinkt für  $h \rightarrow 0$  linear mit der Schrittweite:

Halbe Schrittweite bringt doppelte Genauigkeit.

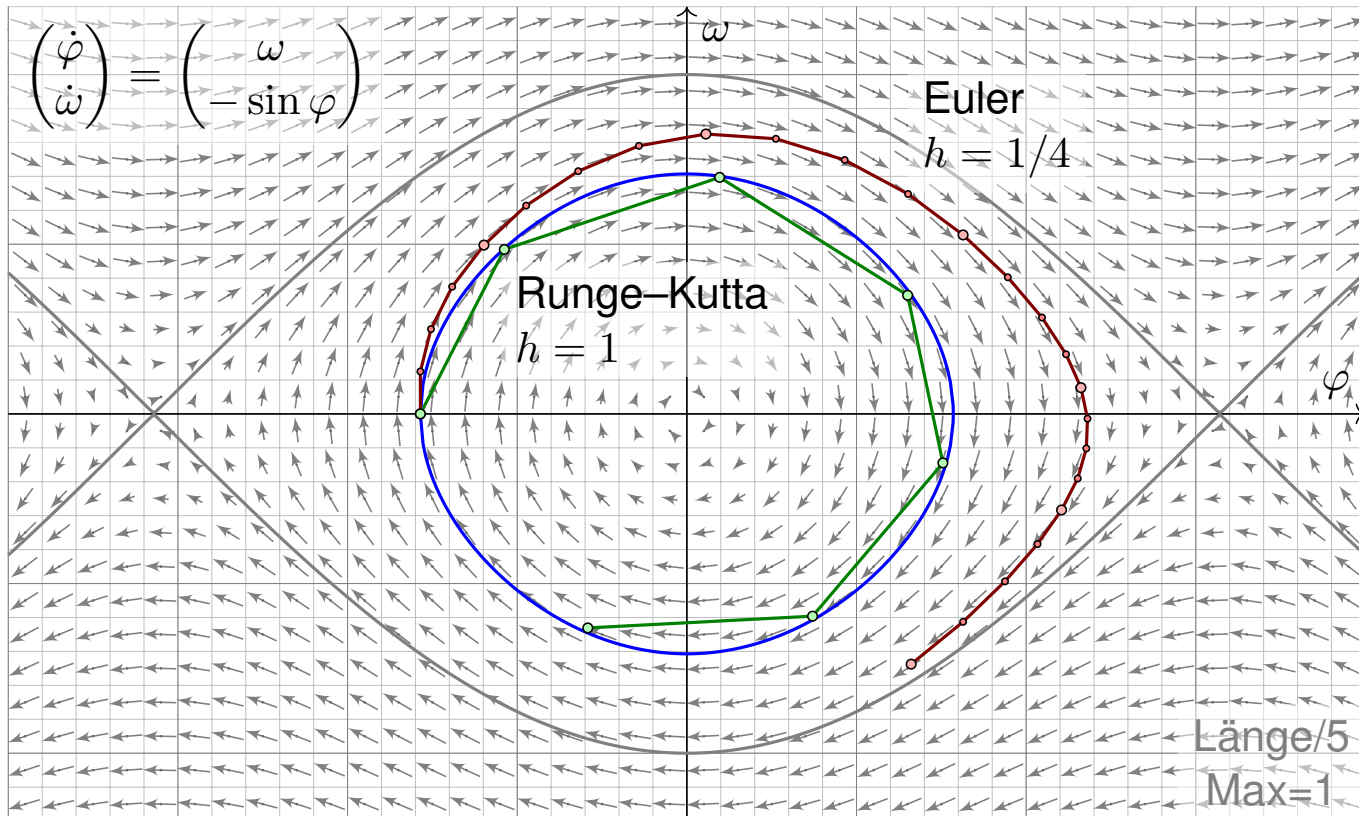
Das Runge–Kutta–Verfahren ist **vierter Ordnung**, kurz  $O(h^4)$ :

$$\text{GlobalerFehler(RK4)} \leq C_{RK}(f) \cdot h^4$$

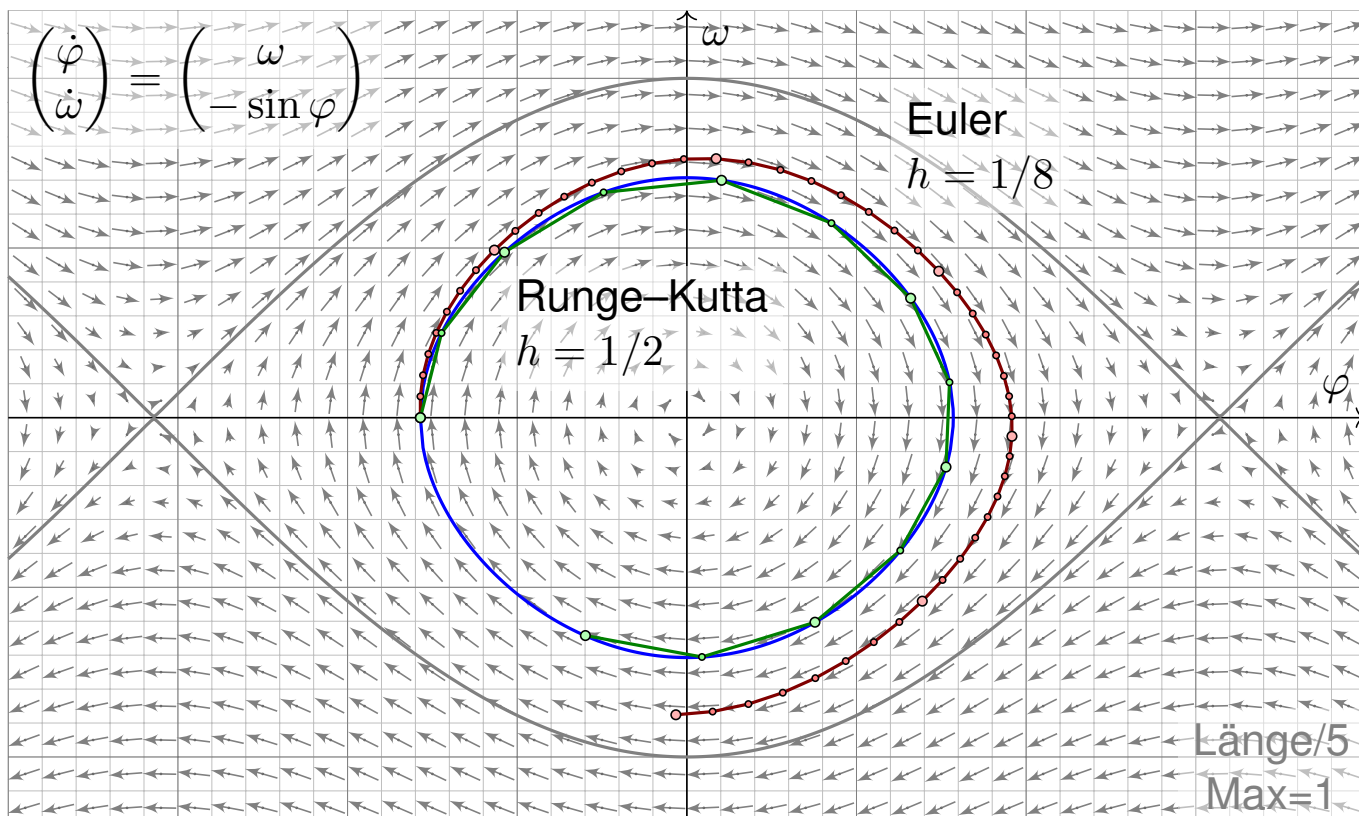
Im Vergleich zu  $O(h)$  sinkt der Fehler  $O(h^4)$  wesentlich schneller: Halbe Schrittweite bringt sechzehnfache Genauigkeit! Das ist eine dramatische Verbesserung. Die folgenden Graphiken illustrieren dies.

Das Runge–Kutta–Verfahren benötigt vier Auswertungen der Funktion  $f$  für jeden Schritt  $h$ . Zur Fairness gebe ich dem Euler–Verfahren seine gerechte Schrittweite  $h/4$ . Dennoch ist Runge–Kutta weit überlegen!

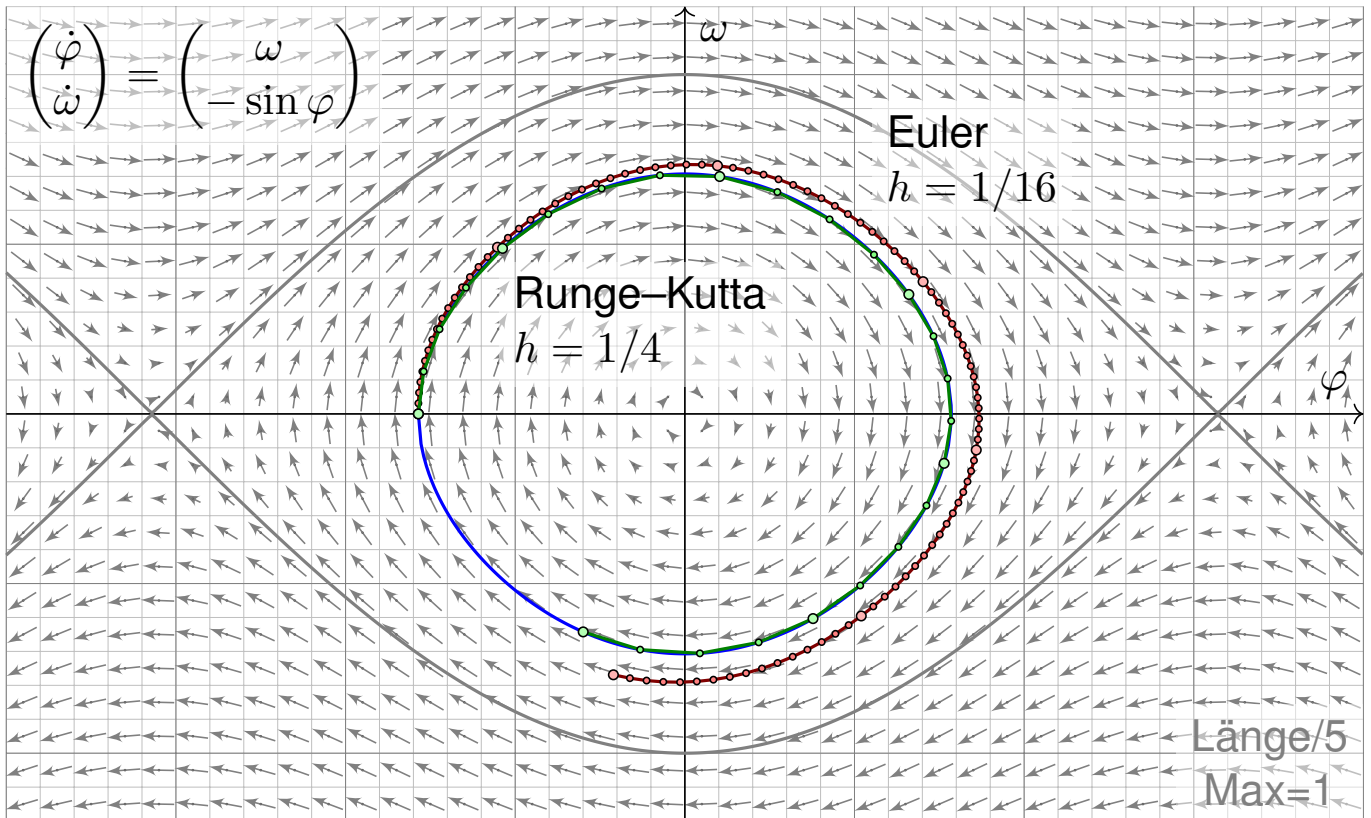
 [Why Runge-Kutta is so much better than Euler's method. youtu.be/dSht1M169kY](https://youtu.be/dSht1M169kY)



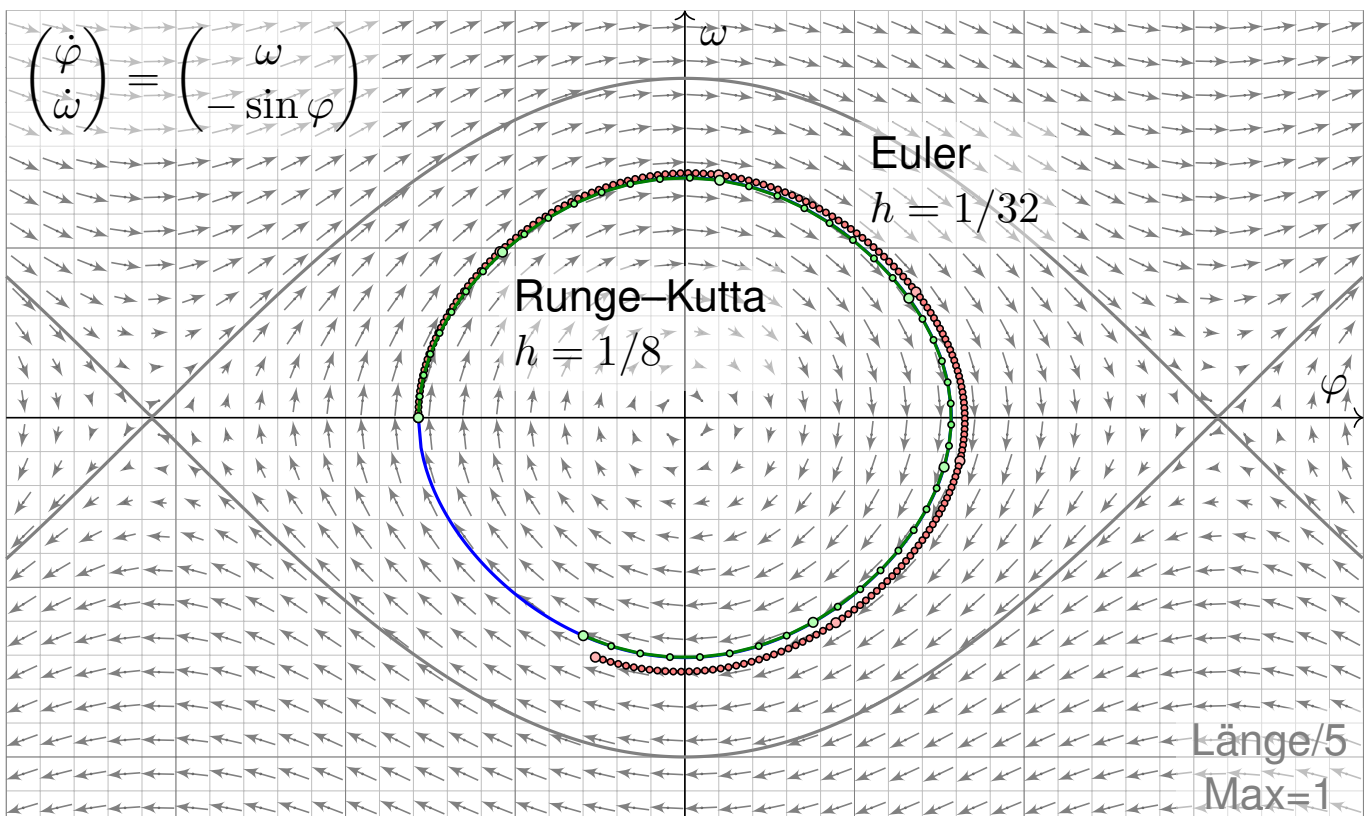
Das Euler–Verfahren (rot) entfernt sich schnell von der exakten Lösung (blau). Das Runge–Kutta–Verfahren (grün) ist bereits recht präzise!



Halbierung der Schrittweite: Das Euler–Verfahren (rot) wird besser. Das Runge–Kutta–Verfahren (grün) scheint weitgehend exakt (blau).



Halbe Schrittweite: Das Euler–Verfahren (rot) halbiert seinen Fehler. Das Runge–Kutta–Verfahren (grün) scheint weitgehend exakt (blau).



Halbe Schrittweite: Das Euler–Verfahren (rot) halbiert seinen Fehler. Das Runge–Kutta–Verfahren (grün) scheint weitgehend exakt (blau).

😊 Differentialgleichungen erster Ordnung sind universell: Wir können jede DG  $n$ -ter Ordnung auf ein DGSystem erster Ordnung reduzieren! Beispiel: Wir nutzen dies zur Formulierung der Planetenbewegung. O125

**Reduktion:** Vorgelegt sei eine **Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung:**

$$(1) \quad y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Diese können wir umformulieren in ein **DGSystem erster Ordnung:**

$$(2) \quad \begin{cases} y'_0 & = & y_1 \\ y'_1 & = & y_2 \\ \vdots & & \\ y'_{n-2} & = & y_{n-1} \\ y'_{n-1} & = & f(t, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \end{cases}$$

**Übung:** Rechnen Sie diesen genial-einfachen Trick sorgsam nach: Löst  $y : I \rightarrow \mathbb{K}$  die DG (1), so löst  $(y, y', \dots, y^{(n-1)})$  das DGSystem (2). Löst  $(y_0, \dots, y_{n-1}) : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  das DGSystem (2), so löst  $y_0$  die DG (1).

😊 Es genügt daher, **DGSysteme erster Ordnung** zu untersuchen! Diese Formulierung ist einfacher und erlaubt starke Werkzeuge:

😊 In jeder Dimension  $n$  gilt **Existenz & Eindeutigkeit & Stabilität**.

😊 Der einfachste Fall sind **entkoppelte Gleichungen:**

$$\begin{aligned} y'_1(t) &= f_1(t, y_1(t)) \\ y'_2(t) &= f_2(t, y_2(t)) \\ &\vdots \\ y'_n(t) &= f_n(t, y_n(t)) \end{aligned}$$

Hierzu lösen wir  $n$  eindimensionale Differentialgleichungen. Das können wir schon recht gut, wie zuvor in Kapitel M erklärt.

**Beispiel:** Wir nutzen dies unten beim Massenwirkungsgesetz. O153

⚠ Im Allgemeinen sind die gegebenen Gleichungen aber gekoppelt. Für dieses Problem benötigen wir daher passende Rechenmethoden. Hierzu nutzen wir die Werkzeuge der Analysis und der linearen Algebra!

Zu lösen sei eine lineare Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung:

$$(1) \quad y^{(n)} + a_{n-1}(t) y^{(n-1)} + \dots + a_1(t) y' + a_0(t) y = b(t)$$

Diese ist äquivalent zu einem linearen DGSystem erster Ordnung:

$$(2) \quad \begin{cases} y_0' & = & y_1 \\ \vdots & & \\ y_{n-2}' & = & y_{n-1} \\ y_{n-1}' & = & -a_0(t) y_0 \quad -a_1(t) y_1 \quad \dots \quad -a_{n-1}(t) y_{n-1} \quad +b(t) \end{cases}$$

Das entspricht  $y'(t) = A(t) y(t) + B(t)$  mit zugehöriger Systemmatrix

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \dots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

**Beispiel:** Wir nutzen dies oben für die gekoppelten Oszillatoren. O109  
Hierbei nennen wir  $A(t)$  die **Begleitmatrix** des Polynoms aus (1).

## Lineare DGSysteme: entkoppelte Gleichungen

😊 Besonders wichtig und gut zu lösen sind lineare DGSysteme  $y'(t) = A y(t) + b(t)$  mit **konstanter Koeffizientenmatrix**  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ . Diese behandeln wir ausführlich in diesem und im nächsten Kapitel.

😊 Der einfachste Fall sind auch hier **entkoppelte Gleichungen**:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= \lambda_1 y_1(t) \\ y_2'(t) &= \lambda_2 y_2(t) \\ &\vdots \\ y_n'(t) &= \lambda_n y_n(t) \end{aligned}$$

Die Lösungen  $y_k(t) = c_k e^{\lambda_k t}$  können wir sofort ausschreiben!

😊 Oft lassen sich komplexe Lösungen  $e^{(\sigma \pm i\omega)t}$  leichter berechnen und dann in reelle Lösungen  $e^{\sigma t} \cos(\omega t)$  und  $e^{\sigma t} \sin(\omega t)$  umrechnen.

**Beispiel:** Wir nutzen dies oben für die gekoppelten Oszillatoren. O109

⚠️ Im Allgemeinen sind die gegebenen Gleichungen aber gekoppelt. Für dieses Problem benötigen wir daher passende Rechenmethoden. Hierzu nutzen wir die Werkzeuge der Analysis und der linearen Algebra!

Chemische Substanzen  $A$  und  $B$  reagieren zu  $C$ , kurz:  $A + B \xrightarrow{k} C$ .  
Wir beobachten ihre Konzentrationen  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $c(t)$  zur Zeit  $t \geq 0$ .  
Für  $t = 0$  sind Anfangswerte  $a(0) = a_0$ ,  $b(0) = b_0$ ,  $c(0) = 0$  gegeben.  
Nach dem Massenwirkungsgesetz ist die Reaktionsrate  $k a b$ , also:

$$a'(t) = -k a(t) b(t)$$

$$b'(t) = -k a(t) b(t)$$

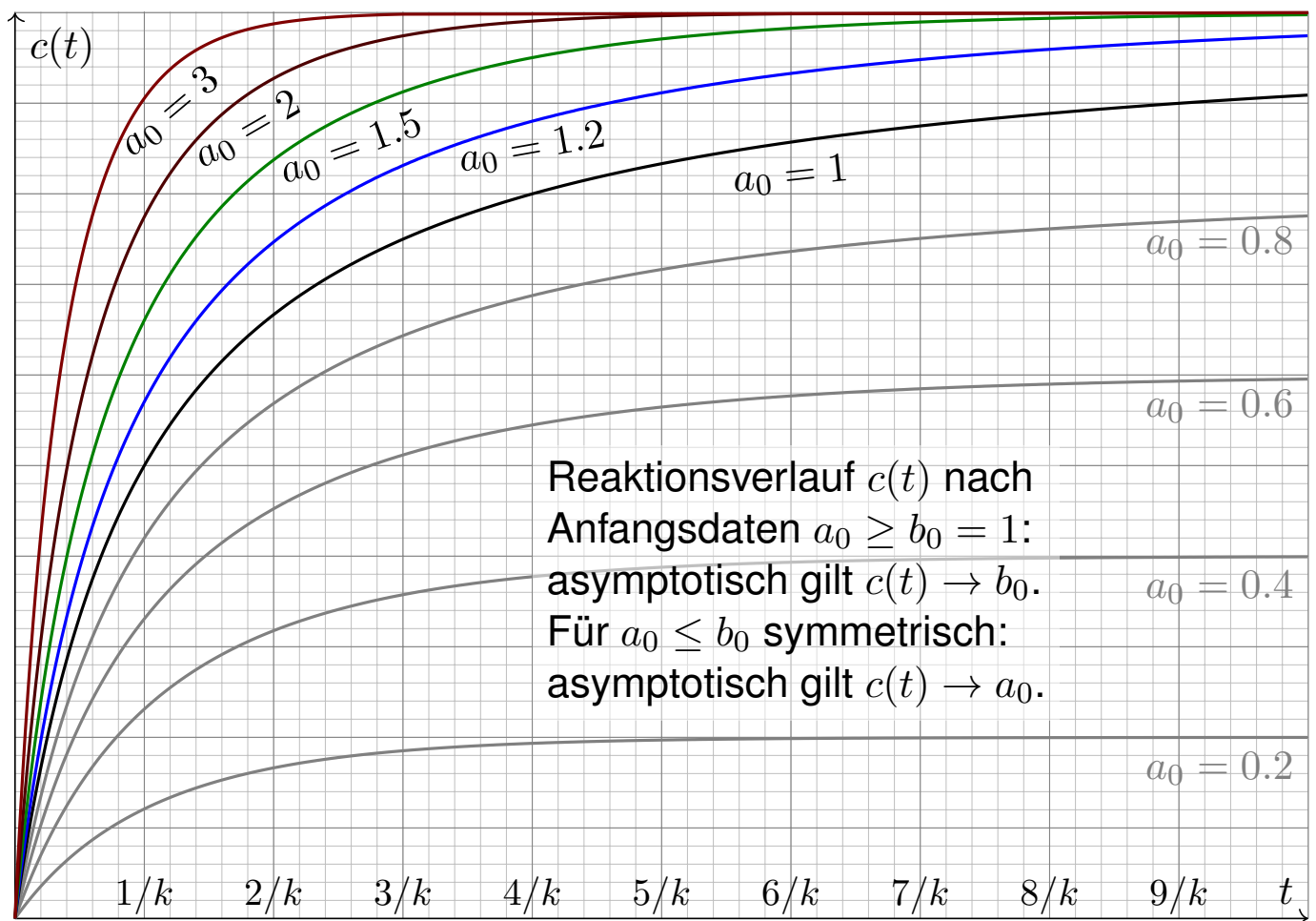
$$c'(t) = +k a(t) b(t)$$

**Aufgabe:** Gesucht ist die Lösungskurve  $y: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $y(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix}$ .

⚠ Dies ist ein nicht-lineares DGSsystem! Gibt es Lösungen?  
mehrere oder nur genau eine? Wie findet man alle Lösungen?

**Lösung:** Glücklicherweise lässt sich dieses DGSsystem explizit lösen.  
Entkoppeln, Trennung der Variablen und Partialbruchzerlegung ergibt:

$$a(t) = a_0 - c(t), \quad b(t) = b_0 - c(t), \quad c(t) = \frac{a_0 b_0 (e^{a_0 k t} - e^{b_0 k t})}{a_0 e^{a_0 k t} - b_0 e^{b_0 k t}}$$



**Lösung:** Wir bemerken und nutzen  $[a + c]' = 0$  und  $[b + c]' = 0$ . Demnach sind  $a(t) + c(t) = a_0$  und  $b(t) + c(t) = b_0$  Konstanten. Einsetzen entkoppelt das DGSsystem zu  $c' = k(a_0 - c)(b_0 - c)$ . Dies entspricht der logistischen Differentialgleichung. M405

Trennung der Variablen und Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned} kt &= \int_{\tau=0}^t \frac{c'(\tau)}{[a_0 - c(\tau)][b_0 - c(\tau)]} d\tau \\ &= \int_{\tau=0}^t \frac{1}{a_0 - b_0} \left[ \frac{c'(\tau)}{b_0 - c(\tau)} - \frac{c'(\tau)}{a_0 - c(\tau)} \right] d\tau \\ &= \frac{1}{a_0 - b_0} \left[ \ln(a_0 - c(\tau)) - \ln(b_0 - c(\tau)) \right]_{\tau=0}^t \\ &= \frac{1}{a_0 - b_0} \ln \left[ \frac{a_0 - c(t)}{b_0 - c(t)} \bigg/ \frac{a_0 - c(0)}{b_0 - c(0)} \right] \end{aligned}$$

Der Anfangswert  $c(0) = 0$  vereinfacht dies zu

$$(a_0 - b_0)kt = \ln \left[ \frac{a_0 - c(t)}{b_0 - c(t)} \bigg/ \frac{a_0}{b_0} \right].$$

Beidseitige Anwendung der Exponentialfunktion liefert:

$$\frac{a_0}{b_0} e^{(a_0 - b_0)kt} = \frac{a_0 - c(t)}{b_0 - c(t)}$$

Wir lösen nach  $c(t)$  auf und erhalten schließlich:

$$c(t) = \frac{a_0 b_0 (e^{a_0 kt} - e^{b_0 kt})}{a_0 e^{a_0 kt} - b_0 e^{b_0 kt}}$$

Hieraus ergeben sich  $a(t) = a_0 - c(t)$  und  $b(t) = b_0 - c(t)$ .

😊 Damit haben wir unsere Differentialgleichung explizit gelöst!

Für  $t \rightarrow \infty$  sehen wir den (asymptotischen) Endzustand der Reaktion:

- Für  $a_0 > b_0$  gilt  $c(t) \rightarrow b_0$ , also  $a(t) \rightarrow a_0 - b_0$  und  $b(t) \rightarrow 0$ .
- Für  $a_0 < b_0$  gilt  $c(t) \rightarrow a_0$ , also  $a(t) \rightarrow 0$  und  $b(t) \rightarrow b_0 - a_0$ .
- Der Sonderfall  $a_0 = b_0$  liefert analog  $c(t) = a_0^2 kt / (akt + 1)$ .

😊 Plausibilitätsprüfung: Die Reaktion verläuft gemäß unserer obigen Formel bis schließlich eine der beiden Substanzen verbraucht ist.



Zum  $\exists$ &E-Satz O1B erklären wir eine allgemeine Lösungsmethode, um 1890 entwickelt von Picard und Lindelöf, für das Anfangswertproblem

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0.$$

Der folgende Satz garantiert (1) die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung und zudem (2) ein Konstruktionsverfahren zur Approximation dieser Lösung mit (3) expliziter Fehlerschranke. Was will man mehr?

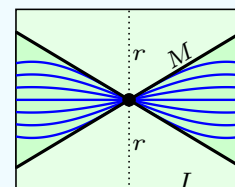
### Geometrische Voraussetzungen für die Picard–Lindelöf–Iteration:

Sei  $I = [t_0 - a, t_0 + b] \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall um  $t_0$  mit  $a, b \leq T$ .

Sei  $K = \bar{B}(y_0, r) \subseteq \mathbb{K}^n$  der Ball um  $y_0$  mit Radius  $r > 0$ .

Sei  $f: I \times K \rightarrow \mathbb{K}^n$  stetig, somit beschränkt, also  $|f| \leq M$ .

Hierbei gelte  $T \cdot M \leq r$ , notfalls verkleinern wir  $T$  und  $I$ .



Zudem erfülle  $f$  für alle  $t \in I$  und  $u, v \in K$  die **Lipschitz-Bedingung**

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq L |u - v|.$$

Ist etwa  $f(t, y)$  stetig differenzierbar nach  $y$ , so genügt  $|\partial f / \partial y| \leq L$ .

### Satz O2A: Picard–Lindelöf–Iteration

Unter den oben erklärten geometrischen Voraussetzungen gilt:

(1) Das Anfangswertproblem hat genau eine Lösung  $y: I \rightarrow K$ .

(2) Die Lösung  $y$  ist die Grenzfunktion der Picard–Lindelöf–Iteration

$$u_0 = y_0, \quad u_{n+1}(t) = y_0 + \int_{\tau=t_0}^t f(\tau, u_n(\tau)) \, d\tau \quad \text{für } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

(3) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $t \in I$  gilt die gleichmäßige Fehlerschranke

$$|y(t) - u_n(t)| \leq \max_I |u_1 - u_0| e^{LT} \cdot \frac{(LT)^n}{n!} \rightarrow 0.$$

(4) Die Lösung  $y$  hängt stetig vom Anfangswert  $y_0$  ab: Ist  $\tilde{y}: \tilde{I} \rightarrow K$  eine Lösung zum Startwert  $\tilde{y}(t_0) = \tilde{y}_0$  auf einem Intervall  $\tilde{I}$  mit  $t_0 \in \tilde{I}$ , so laufen die Lösungen  $y$  und  $\tilde{y}$  höchstens exponentiell auseinander:

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \leq |y_0 - \tilde{y}_0| \cdot e^{L|t-t_0|} \quad \text{für alle } t \in I \cap \tilde{I}$$

**Aufgabe:** Lösen Sie durch Picard–Lindelöf–Iteration das AWP

$$y'(t) = y(t), \quad y(0) = 1.$$

**Lösung:** Sukzessive Approximation gemäß Picard–Lindelöf:

$$u_0(t) = 1$$

$$u_1(t) = 1 + \int_{\tau=0}^t u_0(\tau) d\tau = 1 + t$$

$$u_2(t) = 1 + \int_{\tau=0}^t u_1(\tau) d\tau = 1 + t + \frac{1}{2}t^2$$

$$u_3(t) = 1 + \int_{\tau=0}^t u_2(\tau) d\tau = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3!}t^3$$

$$u_4(t) = 1 + \int_{\tau=0}^t u_3(\tau) d\tau = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4$$

Per Induktion und Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  finden wir die Lösung:

$$u_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} \quad \rightarrow \quad y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = \exp(t)$$

😊 Probe! Dieselbe Lösung finden wir alternativ durch Separation M1A.

**Aufgabe:** Lösen Sie durch Picard–Lindelöf–Iteration das AWP

$$y'(t) = -t y(t), \quad y(0) = 1.$$

**Lösung:** Sukzessive Approximation gemäß Picard–Lindelöf:

$$u_0(t) = 1$$

$$u_1(t) = 1 - \int_{\tau=0}^t \tau u_0(\tau) d\tau = 1 - \frac{1}{2}t^2$$

$$u_2(t) = 1 - \int_{\tau=0}^t \tau u_1(\tau) d\tau = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^4$$

$$u_3(t) = 1 - \int_{\tau=0}^t \tau u_2(\tau) d\tau = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^4 - \frac{1}{48}t^6$$

$$u_4(t) = 1 - \int_{\tau=0}^t \tau u_3(\tau) d\tau = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^4 - \frac{1}{48}t^6 + \frac{1}{384}t^8$$

Per Induktion und Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  finden wir die Lösung:

$$u_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k t^{2k}}{2^k k!} \quad \rightarrow \quad y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{2^k k!} = \exp(-t^2/2)$$

😊 Probe! Dieselbe Lösung finden wir alternativ durch Separation M1A.

**Aufgabe:** (A) Sei  $y: I \rightarrow K$  stetig. Unsere **Differentialgleichung**

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{für alle } t \in I \text{ und } y(t_0) = y_0$$

ist äquivalent zu folgender (für uns vorteilhaften) **Integralgleichung**:

$$y(t) = y_0 + \int_{\tau=t_0}^t f(\tau, y(\tau)) \, d\tau \quad \text{für alle } t \in I$$

Somit sind Lösungen  $y: I \rightarrow K$  genau die **Fixpunkte** der Abbildung

$$\Psi: C(I, K) \rightarrow C(I, \mathbb{K}^n), \quad (\Psi u)(t) = y_0 + \int_{\tau=t_0}^t f(\tau, u(\tau)) \, d\tau.$$

(B) Tatsächlich gilt  $\Psi: C(I, K) \rightarrow C(I, K)$ : Wir können  $\Psi$  also **iterieren!**

(C) Für je zwei Funktionen  $u, v \in C(I, K)$  gilt die **Fehlerschranke**

$$|\Psi^n u(t) - \Psi^n v(t)| \leq \max_{[t_0, t]} |u - v| \cdot \frac{L^n |t - t_0|^n}{n!} \leq \max_I |u - v| \cdot \frac{(LT)^n}{n!}.$$

Für  $n \rightarrow \infty$  gilt  $(LT)^n/n! \rightarrow 0$ . Demnach ist  $\Psi^n$  schließlich **kontraktiv**:

Zu  $0 < \alpha < 1$  existiert  $n \in \mathbb{N}$  sodass  $|\Psi^n u - \Psi^n v|_I \leq \alpha |u - v|_I$  gilt.

**Lösung:** (A) Dank HDI (B1i). Die Integralgleichung besagt  $y = \Psi y$ .

(B) Für  $u \in C(I, K)$  zeigen wir  $\Psi u \in C(I, K)$  durch Nachrechnen:

$$\begin{aligned} |\Psi u(t) - y_0| &= \left| \int_{t_0}^t f(\tau, u(\tau)) \, d\tau \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(\tau, u(\tau))| \, d\tau \right| \leq \left| \int_{t_0}^t M \, d\tau \right| \\ &= |t - t_0| M \leq TM \leq r \end{aligned}$$

(C) Für  $n = 0$  ist die Aussage trivial. Für  $n \geq 1$  folgt sie induktiv:

$$\begin{aligned} |\Psi^n u(t) - \Psi^n v(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(\tau, \Psi^{n-1} u(\tau)) - f(\tau, \Psi^{n-1} v(\tau)) \, d\tau \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t L |\Psi^{n-1} u(\tau) - \Psi^{n-1} v(\tau)| \, d\tau \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \max_{[t_0, t]} |u - v| \cdot \frac{L^n |\tau - t_0|^{n-1}}{(n-1)!} \, d\tau \right| \\ &= \max_{[t_0, t]} |u - v| \cdot \frac{L^n |t - t_0|^n}{n!} \leq \max_I |u - v| \cdot \frac{(LT)^n}{n!} \end{aligned}$$

Diese Rechnungen beweisen den Satz O2A von Picard–Lindelöf:

Der Raum  $C(I, K)$  ist vollständig bezüglich der Supremumsnorm.

Daher können wir auf  $\Psi$  den **Fixpunktsatz von Banach** anwenden:

(1) Die Abbildung  $\Psi : C(I, K) \rightarrow C(I, K)$  hat genau einen Fixpunkt  $y$ .

😊 Dank (A) hat unser AWP somit genau eine Lösung  $y : I \rightarrow K$ .

(2) Wir erhalten die Lösung  $y$  durch sukzessive Approximation.

😊 Für jede Funktion  $u_0 \in C(I, K)$  konvergiert  $u_n = \Psi^n u_0$  gegen  $y$ .

Für den Fixpunkt  $v_0 = y$  liefert die Iteration  $v_n = \Psi^n v_0 = y$ .

Dank der Fehlerschranke (D) erhalten wir also:

$$|y(t) - u_n(t)| \leq \max_{[t_0, t]} |y - u| \cdot \frac{L^n |t - t_0|^n}{n!} \leq \max_I |y - u| \cdot \frac{(LT)^n}{n!}.$$

😊 Die Konvergenz  $u_n \rightarrow y$  der Approximationen  $u_n$  gegen die Lösung  $y$  ist demnach mindestens so schnell wie die Konvergenz  $(LT)^n/n! \rightarrow 0$ .

😊 Die in (3) angegebene Verschärfung nutzt nur die Schritte  $u_0, u_1$ :  
Auf der rechten Seite stehen also nur bereits bekannte Daten.

(3) Wir formulieren die Fehlerschranke nur mit  $u_0$  und  $u_1$ :

$$|u_n(t) - u_{n+1}(t)| = |\Psi^n u_0(t) - \Psi^n u_1(t)| \leq \max_{[t_0, t]} |u_0 - u_1| \cdot \frac{L^n |t - t_0|^n}{n!}$$

$$\begin{aligned} |u_n(t) - u_{n+p}(t)| &\leq |u_n(t) - u_{n+1}(t)| + \cdots + |u_{n+p-1}(t) - u_{n+p}(t)| \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \max_{[t_0, t]} |u_0 - u_1| \cdot \frac{L^k |t - t_0|^k}{k!} \leq \max_{[t_0, t]} |u_1 - u_0| e^{L|t-t_0|} \cdot \frac{L^n |t - t_0|^n}{n!} \end{aligned}$$

Für  $p \rightarrow \infty$  erhalten wir die gewünschte Ungleichung für  $|u_n(t) - y(t)|$ .

(4) Ist  $\tilde{y} : \tilde{I} \rightarrow K$  eine Lösung zum Startwert  $\tilde{y}(t_0) = \tilde{y}_0$ , so gilt dank (A)  $\tilde{y}(t) = \tilde{y}_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \tilde{y}(\tau)) d\tau$ . Wir beginnen die Picard–Lindelöf–Iteration mit der Funktion  $u_0 = \tilde{y}$  und erhalten im ersten Schritt die Verschiebung

$$u_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \tilde{y}(\tau)) d\tau = y_0 - \tilde{y}_0 + u_0(t), \quad \text{dank (3) also}$$

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \leq |y_0 - \tilde{y}_0| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^k |t - t_0|^k}{k!} = |y_0 - \tilde{y}_0| e^{L|t-t_0|}.$$

Diese nützliche Fehlerschranke untersuchen wir im Folgenden genauer.

Sei  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n \supseteq G \rightarrow \mathbb{K}^n$  stetig. Zu lösen sei die Differentialgleichung

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{mit Anfangswert} \quad y(t_0) = y_0.$$

Euler–Polygonzüge und der Peano–Existenzsatz O1A zeigen allgemein die Existenz von lokalen Lösungen. Wir verlangen meist zusätzlich, dass die partielle Ableitung  $\partial_y f$  von  $f$  nach  $y$  existiert und stetig ist. Die Picard–Lindelöf–Iteration O2A löst dann das AWP in einer kleinen Umgebung  $(t_0, y_0) \in I \times K \subseteq G$  mit  $I = [t_0 - a, t_0 + b]$  und  $K = \bar{B}(y_0, r)$ .

### Satz O2B: Fortsetzungen und maximale Lösungen

Aus der lokalen folgt die globale Lösbarkeit im Inneren  $G^\circ$ :

- (1) Sei  $y: [a, b[ \rightarrow \mathbb{K}^n$  eine Lösung mit  $y'(t) = f(t, y(t))$  für alle  $t \in [a, b[$ . Verläuft  $y$  ganz in einer kompakten Menge  $A \Subset G$ , so lässt sich  $y$  auf das Intervall  $[a, b]$  eindeutig fortsetzen zu einer Lösung  $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}^n$ .
  - (2) Sind  $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}^n$  und  $v: [b, c] \rightarrow \mathbb{K}^n$  Lösungen mit  $u(b) = v(b)$ , so lassen sie sich zusammensetzen zu einer Lösung  $y: [a, c] \rightarrow \mathbb{K}^n$ .
- Jede Lösung kann so bis zum Rand  $\partial G$  (oder  $\infty$ ) fortgesetzt werden.

- Aufgabe:** (1) Warum existiert für  $t \nearrow b$  ein Grenzwert  $y(t) \rightarrow w$ ? Warum ist auch die Fortsetzung  $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}^n$  eine Lösung der DG?
- (2) Wie ist  $y: [a, c] \rightarrow \mathbb{K}^n$  definiert? Warum ist  $y$  eine Lösung der DG?
- (3) Peano O1A und Picard–Lindelöf O2A lösen das AWP zunächst lokal. Wie folgt hieraus die globale Formulierung des  $\exists$ &E-Satzes O1B?

**Lösung:** (1) Die Funktion  $f: G \rightarrow \mathbb{K}^n$  ist stetig. Auf jedem Kompaktum  $A \Subset G$  ist sie beschränkt, also  $|f|_A \leq M < \infty$ . Für  $t_1, t_2 \in [a, b[$  folgt:

$$|y(t_1) - y(t_2)| = \left| \int_{t=t_1}^{t_2} y'(t) dt \right| = \left| \int_{t=t_1}^{t_2} f(t, y(t)) dt \right| \leq M |t_1 - t_2|$$

Für  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \nearrow b$  ist  $(y(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy–Folge, somit konvergent. Wir können also  $y: [a, b[ \rightarrow \mathbb{K}^n$  auf genau eine Weise stetig fortsetzen zu  $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}^n$ . Unser AWP ist äquivalent zur Integralgleichung

$$y(t) = y_0 + \int_{\tau=t_0}^t f(\tau, y(\tau)) dt.$$

Sie gilt für alle  $t \in [a, b[$  und per Grenzübergang  $t \nearrow b$  auch für  $t = b$ . Somit ist  $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}^n$  auch in  $b$  differenzierbar mit  $y'(b) = f(b, y(b))$ .

(2) Aus Lösungen  $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}^n$  und  $v: [b, c] \rightarrow \mathbb{K}^n$  mit  $u(b) = v(b)$  setzen wir die Lösung  $y: [a, c] \rightarrow \mathbb{K}^n$  zusammen durch Verkleben:

$$y(t) := \begin{cases} u(t) & \text{für } t \in [a, b], \\ v(t) & \text{für } t \in [b, c]. \end{cases}$$

Wegen  $u(b) = v(b)$  ist dies wohldefiniert. Wir müssen noch nachweisen, dass  $y$  differenzierbar ist und  $y'(t) = f(t, y(t))$  für alle  $t \in [a, c]$  erfüllt. Dies gilt für  $t \in [a, b[$ , denn  $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}^n$  löst die Differentialgleichung. Dies gilt für  $t \in ]b, c]$ , denn  $v: [b, c] \rightarrow \mathbb{K}^n$  löst die Differentialgleichung. Die Ableitung in  $t = b$  ist linksseitig  $y'(b-) = u'(b) = f(b, u(b))$  und rechtsseitig  $y'(b+) = v'(b) = f(b, v(b))$ . Hurra, beide sind gleich!

(3) Wir lösen  $y'(t) = f(t, y(t))$  mit  $y(t_0) = y_0$ . Bei Start in  $(t_0, y_0) \in G^\circ$  existiert eine lokale Lösung  $y: [t_0, t_1[ \rightarrow \mathbb{K}^n$  mit  $t_1 > t_0$  dank O1A / O2A. Im günstigsten Falle  $t_1 = \infty$  existiert diese Lösung für alle Zeit  $t \geq t_0$ . Andernfalls können wir  $y$  maximal fortsetzen mit Hilfe von (1) und (2), mögliche Hindernisse sind nur Polstellen oder der Rand  $\partial G$ . Genauer:

Sei  $\Gamma = \{ (t, y(t)) \mid t \in [t_0, t_1[ \} \subseteq G$  der Graph unserer Lösung  $y$ . Wir betrachten seinen Abschluss  $A = \bar{\Gamma}$  im Inneren  $G^\circ \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ .

**Kompakter Fall:** Ist  $A$  kompakt, so können wir  $y$  dank (1) eindeutig fortsetzen zu einer Lösung  $y: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{K}^n$ . Wegen  $(t_1, y(t_1)) \in A \subseteq G^\circ$  erlaubt das AWP zu  $(t_1, y(t_1))$  eine Lösung  $y: [t_1, t_2[ \rightarrow \mathbb{K}^n$  mit  $t_2 > t_1$ . Dank (2) können wir diese Lösung ankleben. Wir erreichen schließlich:

**Nicht-kompakter Fall:** Die folgenden drei Fälle sind möglich:

- 1  $t_1 = \infty$ : Unsere Lösung  $y: [t_0, t_1[ \rightarrow \mathbb{K}^n$  existiert für alle Zeit  $t \geq t_0$ .
- 2  $\limsup_{t \nearrow t_1} |y(t)| = \infty$ : Unsere Lösung  $y$  entkommt nach Unendlich.
- 3  $\liminf_{t \nearrow t_1} \text{dist}(y(t), \partial G) = 0$ : Unsere Lösung  $y$  läuft zum Rand  $\partial G$ .

In diesen Fällen ist eine Fortsetzung zu  $y: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{K}^n$  in  $G^\circ$  unmöglich. Also ist unsere Lösung  $y: [t_0, t_1[ \rightarrow \mathbb{K}^n$  maximal nach rechts (für  $t \geq t_0$ ). Entsprechend existiert eine maximale Fortsetzung nach links (für  $t \leq t_0$ ).

😊 Jede gegebene Lösung der Differentialgleichung  $y'(t) = f(t, y(t))$  kann beidseitig bis zum Rand  $\partial G$  (oder  $\infty$ ) fortgesetzt werden.

😊 Aus lokaler Eindeutigkeit folgt zudem die globale Eindeutigkeit.

Wir betrachten wie zuvor ein Anfangswertproblem der Form

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(\tau) = \eta.$$

Wir untersuchen nun genauer die Abhängigkeit vom Startpunkt  $(\tau, \eta)$ .

Hierzu sei  $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$  offen und  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n \supseteq G \rightarrow \mathbb{K}^n: (t, y) \mapsto f(t, y)$  stetig, zudem nach  $y$  stetig differenzierbar. Dank  $\exists$ &E-Satz O1B existiert ein maximales Definitionsintervall  $I = I(\tau, \eta) \subseteq \mathbb{R}$  und eine eindeutige Lösung  $y: I \rightarrow \mathbb{K}^n: t \mapsto y(t)$ . Um die Abhängigkeit von den Startwerten  $(\tau, \eta)$  explizit zu notieren, schreiben wir nun genauer  $Y(t; \tau, \eta) := y(t)$ .

Wir erhalten zusammenfassend die **allgemeine Lösung**  $Y: B \rightarrow \mathbb{K}^n$ :

$$\begin{aligned} B &= \{ (t; \tau, \eta) \in \mathbb{R} \times G \mid t \in I(\tau, \eta) \} \\ Y &: \mathbb{R} \times G \supseteq B \rightarrow \mathbb{K}^n : (t; \tau, \eta) \mapsto Y(t; \tau, \eta) \\ \partial_t Y(t; \tau, \eta) &= f(t, Y(t; \tau, \eta)), \quad Y(\tau; \tau, \eta) = \eta \end{aligned}$$

Diese Bezeichnung ist leider etwas schwerfällig; sie ist aber notwendig, wenn wir alle Lösungen zugleich betrachten wollen. Insbesondere wollen wir  $Y(t; \tau, \eta)$  auch nach  $\tau$  und  $\eta$  ableiten.

**Aufgabe:** Finden Sie die allgemeine Lösung der Gleichung  $y' = f(x, y)$ :

- (1) Für  $f(x, y) = x^2$  auf dem Definitionsgebiet  $G = \mathbb{R}^2$ . M109
- (2) Für  $f(x, y) = y$  auf dem Definitionsgebiet  $G = \mathbb{R}^2$ . M111
- (3) Für  $f(x, y) = y^2$  auf dem Definitionsgebiet  $G = \mathbb{R}^2$ . M113
- (4) Für  $y' = f(x, y) = -x/y$  auf  $G = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \}$ . M115

**Lösung:** (1) Die allgemeine Lösung zum AWP  $y(\xi) = \eta$  und  $y' = x^2$  ist  $Y(x; \xi, \eta) = (x^3 - \xi^3)/3 + \eta$  auf ganz  $B = \mathbb{R} \times G$ . Machen Sie die Probe!

(2) Die allgemeine Lösung zum AWP  $y(\xi) = \eta$  und  $y' = y$  ist  $Y(x; \xi, \eta) = \eta e^{x-\xi}$  auf ganz  $B = \mathbb{R} \times G$ . Machen Sie die Probe!

(3) Die allgemeine Lösung zum AWP  $y(\xi) = \eta$  und  $y' = y^2$  ist  $Y(x; \xi, \eta) = \eta / (1 - (x - \xi)\eta)$  auf  $B = \{ (x; \xi, \eta) \in \mathbb{R} \times G \mid (x - \xi)\eta < 1 \}$ .

(4) Die allgemeine Lösung zum AWP  $y(\xi) = \eta$  und  $y' = -x/y$  ist  $Y(x; \xi, \eta) = \sqrt{\eta^2 + \xi^2 - x^2}$  auf  $B = \{ (x; \xi, \eta) \in \mathbb{R} \times G \mid x^2 < \eta^2 + \xi^2 \}$ .

😊 Immer ist  $B$  offen und hierauf  $Y$  stetig differenzierbar in  $(x; \xi, \eta)$ . Das ist kein Zufall, sondern die Aussage des folgenden Satzes.

**Satz O2c: glatte Abhängigkeit von den Anfangsdaten**

Sei  $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$  offen,  $f : G \rightarrow \mathbb{K}^n$  stetig und nach  $y$  stetig diff'bar.

(1) Die allgemeine Lösung  $Y : \mathbb{R} \times G \supseteq B \rightarrow \mathbb{K}^n : (t; \tau, \eta) \mapsto Y(t; \tau, \eta)$  zu  $y' = f(t, y)$ ,  $y(\tau) = \eta$  ist stetig in  $(t; \tau, \eta)$ , und  $B \subseteq \mathbb{R} \times G$  ist offen.

(2) Zudem ist  $Y$  nicht nur nach  $t$ , sondern auch nach den Startwerten  $\tau$  und  $\eta$  stetig partiell differenzierbar.

(3) Die Ableitungen  $W = \partial_\eta Y : B \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  und  $z = \partial_\tau Y : B \rightarrow \mathbb{K}^n$  erfüllen die homogenen linearen Differentialgleichungen (§O3)

$$\begin{aligned}\partial_t W(t; \tau, \eta) &= \partial_y f(t, Y(t; \tau, \eta)) W(t; \tau, \eta), & W(\tau; \tau, \eta) &= 1_{n \times n}, \\ \partial_t z(t; \tau, \eta) &= \partial_y f(t, Y(t; \tau, \eta)) z(t; \tau, \eta), & z(\tau; \tau, \eta) &= -f(\tau, \eta).\end{aligned}$$

Zu festen Startwerten  $(\tau, \eta) \in G$  finden wir die Fundamentallösung  $W(-; \tau, \eta) : I(\tau, \eta) \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  wie in Satz O3I, kommutativ Satz O3J. Insbesondere gilt  $z(t; \tau, \eta) = -W(t; \tau, \eta) f(\tau, \eta)$  für alle  $t \in I(\tau, \eta)$ .

**Glatte Abhängigkeit von den Anfangsdaten**

**Aufgabe:** Schreiben Sie die definierende Differentialgleichung für  $Y$  als Integralgleichung. Nutzen Sie (1) und (2), rechnen Sie damit (3) aus!

**Lösung:** Wir integrieren  $\partial_t Y(t; \tau, \eta) = f(t, Y(t; \tau, \eta))$  ab  $Y(\tau; \tau, \eta) = \eta$ :

$$Y(\tilde{\tau}; \tau, \eta) = Y(\tau; \tau, \eta) + \int_{t=\tau}^{\tilde{\tau}} \partial_t Y(t; \tau, \eta) dt = \eta + \int_{t=\tau}^{\tilde{\tau}} f(t, Y(t; \tau, \eta)) dt$$

Wir setzen (1) und (2) voraus. Dank Leibniz-Regel D3B folgt dann (3):

$$\begin{aligned}\partial_\eta Y(\tilde{\tau}; \tau, \eta) &= 1_{n \times n} + \int_{t=\tau}^{\tilde{\tau}} \partial_y f(t, Y(t; \tau, \eta)) \partial_\eta Y(t; \tau, \eta) dt \\ \partial_\tau Y(\tilde{\tau}; \tau, \eta) &= -f(\tau, \eta) + \int_{t=\tau}^{\tilde{\tau}} \partial_y f(t, Y(t; \tau, \eta)) \partial_\tau Y(t; \tau, \eta) dt\end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen  $W = \partial_\eta Y$  und  $z = \partial_\tau Y$  erfüllen demnach folgende lineare Differentialgleichungen mit speziellen Anfangswerten:

$$\begin{aligned}\partial_t W(t; \tau, \eta) &= \partial_y f(t, Y(t; \tau, \eta)) W(t; \tau, \eta), & W(\tau; \tau, \eta) &= 1_{n \times n} \\ \partial_t z(t; \tau, \eta) &= \partial_y f(t, Y(t; \tau, \eta)) z(t; \tau, \eta), & z(\tau; \tau, \eta) &= -f(\tau, \eta)\end{aligned}$$

Insbesondere gilt  $z(t; \tau, \eta) = -W(t; \tau, \eta) f(\tau, \eta)$  für alle  $t \in I(\tau, \eta)$ .



„Kann der Flügelschlag eines Schmetterlings in Stuttgart einen Tornado in Texas auslösen?“

Der berühmte **Schmetterlingseffekt** besagt: Kleine Abweichungen der Anfangsdaten können im weiteren Verlauf zu großen Abweichungen führen.



😊 Sie pflanzen sich jedoch höchstens exponentiell fort:

### Satz O2D: Auseinanderdriften und Eindeutigkeit

Für je zwei Lösungen  $y, \tilde{y}: I \rightarrow \mathbb{K}^n$  mit  $y' = f(t, y)$  und  $\tilde{y}' = f(t, \tilde{y})$  gilt

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \leq |y(t_0) - \tilde{y}(t_0)| \cdot e^{L|t-t_0|} \quad \text{für alle } t, t_0 \in I.$$

Hier sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall. Sei  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n \supseteq G \rightarrow \mathbb{K}^n$  stetig und erfülle die Lipschitz-Bedingung  $|f(t, y(t)) - f(t, \tilde{y}(t))| \leq L |y(t) - \tilde{y}(t)|$  für  $t \in I$ . Hierzu genügt  $|\partial f / \partial y| \leq L$  auf jeder Strecke  $[(t, y(t)), (t, \tilde{y}(t))]$  für  $t \in I$ .

⚠ Die exponentielle Ungleichung ist optimal, wie  $y'(t) = L y(t)$  zeigt: Die Lösungen  $y_0 e^{L(t-t_0)}$  und  $\tilde{y}_0 e^{L(t-t_0)}$  laufen exponentiell auseinander.

**Beweis:** Die Funktion  $y$  erfüllt  $y'(t) = f(t, y(t))$  für alle  $t \in I$ . Also

$$y(t) \stackrel{\text{HDI}}{=} y(t_0) + \int_{t_0}^t y'(\tau) d\tau \stackrel{\text{DG}}{=} y(t_0) + \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau.$$

Gleiches gilt für  $\tilde{y}$ . Wir untersuchen  $\varphi(t) := |y(t) - \tilde{y}(t)|$ . Für  $t \geq t_0$  gilt:

$$\begin{aligned} 0 \leq \varphi(t) &= \left| y(t_0) + \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau - \tilde{y}(t_0) - \int_{t_0}^t f(\tau, \tilde{y}(\tau)) d\tau \right| \\ &\leq |y(t_0) - \tilde{y}(t_0)| + \left| \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) - f(\tau, \tilde{y}(\tau)) d\tau \right| \\ &\leq |y(t_0) - \tilde{y}(t_0)| + \int_{t_0}^t |f(\tau, y(\tau)) - f(\tau, \tilde{y}(\tau))| d\tau \\ &\leq |y(t_0) - \tilde{y}(t_0)| + \int_{t_0}^t L |y(\tau) - \tilde{y}(\tau)| d\tau \\ &= |y(t_0) - \tilde{y}(t_0)| + L \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Der Satz folgt dann aus dem folgenden Lemma von Gronwall.

Die obige Abschätzung führt uns von Differentialgleichungen zu Ungleichungen. Erste wichtige Beispiele kennen Sie bereits gut:  $y' \geq 0$  heißt wachsend,  $y' \leq 0$  fallend,  $y'' \geq 0$  konvex,  $y'' \leq 0$  konkav. Wir benötigen nun für  $\varphi'(t) \leq L \varphi(t)$  folgendes grundlegende Lemma:

### Lemma O2E: Gronwall 1918

Sei  $\varphi: [t_0, t_0 + b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Aus der impliziten Ungleichung

$$0 \leq \varphi(t) \leq C + L \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_0 + b]$$

mit Konstanten  $C, L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  folgt die explizite Ungleichung

$$0 \leq \varphi(t) \leq C e^{L(t-t_0)} \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_0 + b].$$

Im Grenzfall  $C = 0$  gilt dann  $\varphi(t) = 0$  für alle  $t \in [t_0, t_0 + b]$ .

😊 Die erste Ungleichung ist *implizit*, da die Funktion  $\varphi$  links und rechts vorkommt. Die zweite Ungleichung liefert eine *explizite* Schranke für  $\varphi$ .

**Beweis:** Zu  $0 \leq C < D$  betrachten wir folgende Vergleichsfunktion:

$$\psi(t) = D e^{L(t-t_0)}$$

Sie erfüllt die Gleichung  $\psi(t) = D + L \int_{t_0}^t \psi(\tau) d\tau$  für alle  $t \geq t_0$ .

Es gilt  $0 \leq \varphi(t) < \psi(t)$  für  $t = t_0$ , und wir zeigen dies nun für alle  $t > t_0$ .

Andernfalls gäbe es einen ersten Zeitpunkt  $t_1 > t_0$  mit  $\varphi(t_1) = \psi(t_1)$ .

Andererseits gilt  $\varphi(t) < \psi(t)$  für  $t_0 \leq t < t_1$  und somit:

$$\varphi(t_1) \leq C + L \int_{t_0}^{t_1} \varphi(\tau) d\tau < D + L \int_{t_0}^{t_1} \psi(\tau) d\tau = \psi(t_1)$$

Demnach ist  $\varphi(t_1) = \psi(t_1)$  nicht möglich. Also gilt  $\varphi(t) < \psi(t)$  für alle  $t \in [t_0, t_0 + b]$ . Insbesondere gilt demnach die schwache Ungleichung:

$$0 \leq \varphi(t) \leq D e^{L(t-t_0)} \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_0 + b]$$

Diese Ungleichung bleibt beim Grenzübergang  $D \searrow C$  bestehen:

$$0 \leq \varphi(t) \leq C e^{L(t-t_0)} \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_0 + b]$$

Damit ist die Ungleichung von Gronwalls Lemma O2E bewiesen.

In praktischen Anwendungen stehen wir vor folgendem Problem:

Anfangsdaten sind oft zufälligen kleinen Schwankungen unterworfen, etwa durch kleine äußere Störungen oder durch ungenaue Messdaten.

Statt der exakten Daten  $(t_0, y_0)$  kennen wir oft nur eine Näherung  $(\tilde{t}_0, \tilde{y}_0)$  sowie (hoffentlich gute) Fehlerschranken  $|t_0 - \tilde{t}_0| \leq \delta$  und  $|y_0 - \tilde{y}_0| \leq \eta$ .

Auch das Vektorfeld  $f$  unserer Differentialgleichung  $y' = f(t, y)$  ist oft nicht exakt bekannt, etwa aufgrund ungenauer von Daten. Wir arbeiten daher mit einer Näherung  $\tilde{f}$  sowie einer Fehlerschranke  $|f - \tilde{f}| \leq \varepsilon$ .

Manchmal ist die rechte Seite  $f$  auch schlicht zu kompliziert und wir wollen sie durch eine Vereinfachung  $\tilde{f}$  ersetzen, also „runden“. M448

Statt der richtigen Gleichung  $y'(t) = f(t, y(t))$ ,  $y(t_0) = y_0$  lösen wir die benachbarte (etwas falsche) Gleichung  $\tilde{y}'(t) = \tilde{f}(t, \tilde{y}(t))$ ,  $\tilde{y}(\tilde{t}_0) = \tilde{y}_0$ .

Unsere berechnete (etwas falsche) Näherungslösung  $\tilde{y}$  weicht von der richtigen (aber uns unbekannt) Lösung  $y$  ab. Es ist daher wichtig, den möglichen Fehler zu kontrollieren. Dies leistet die folgende Schranke!

### Satz O2F: Fehlerschranke für Näherungslösungen

Wir vergleichen eine exakte Lösung  $y$  mit einer Näherungslösung  $\tilde{y}$ :

$$\begin{aligned} y: I \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t) = f(t, y(t)) \text{ für alle } t \in I, \\ \tilde{y}: I \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad \tilde{y}(\tilde{t}_0) = \tilde{y}_0, \quad |\tilde{y}'(t) - f(t, \tilde{y}(t))| \leq \varepsilon(t). \end{aligned}$$

Unter folgenden Voraussetzungen gilt für alle  $t \in I$  die Fehlerschranke

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \leq [|y_0 - \tilde{y}_0| + M |t_0 - \tilde{t}_0|] e^{L|t-t_0|} + \varepsilon(t) \frac{e^{L|t-t_0|} - 1}{L} :$$

Die hierzu nötigen Daten  $\varepsilon, L, M$  bestimmen wir nach folgenden Regeln:

(1) Sei  $I = [t_0 - a, t_0 + b]$ . Sei  $f: I \times \mathbb{K}^n \supseteq G \rightarrow \mathbb{K}^n$  stetig und erfülle die Lipschitz-Bedingung  $|f(t, y(t)) - f(t, \tilde{y}(t))| \leq L |y(t) - \tilde{y}(t)|$  für  $t \in I$ .

Hierzu genügt  $|\partial f / \partial y| \leq L$  auf jeder Strecke  $[(t, y(t)), (t, \tilde{y}(t))]$  für  $t \in I$ .

(2) Die Schranke  $\varepsilon: I \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  sei monoton fallend links, auf  $[t_0 - a, t_0]$ , und monoton wachsend rechts, auf  $[t_0, t_0 + b]$ ; etwa eine Konstante.

(3) Es gelte  $|\tilde{y}(t_0) - \tilde{y}(\tilde{t}_0)| \leq M |t_0 - \tilde{t}_0|$ ; etwa  $|\tilde{y}'| \leq M = \max|f| + \varepsilon$ .

Die umfassende Fehlerschranke O2F garantiert eine allgemeine und quantitative Stetigkeitsaussage. Ich betone zwei wichtige Spezialfälle:

**Aufgabe:** Was besagt O2F für (1)  $\varepsilon = 0$  und (2)  $(t_0, y_0) = (\tilde{t}_0, \tilde{y}_0)$ ?

**Erster Spezialfall:** Im Falle  $\varepsilon = 0$  ist neben  $y$  auch  $\tilde{y}$  eine exakte Lösung, allerdings statt  $(t_0, y_0)$  mit anderen Startwerten  $(\tilde{t}_0, \tilde{y}_0)$ .

Die Lösungen  $y$  und  $\tilde{y}$  laufen höchstens exponentiell auseinander:

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \leq \left[ |y_0 - \tilde{y}_0| + M|t_0 - \tilde{t}_0| \right] e^{L|t-t_0|}$$

😊 Das zeigt insbesondere stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten: Wenn die Startwerte  $(t_0, y_0)$  und  $(\tilde{t}_0, \tilde{y}_0)$  sich nur wenig unterscheiden, so unterscheiden sich auch die zugehörigen Lösungen  $y$  und  $\tilde{y}$  wenig.

😊 Bei gleichen Startzeitpunkten  $t_0 = \tilde{t}_0$  ist dies der obige Satz O2D. Im Allgemeinen Fall gilt  $|\tilde{y}(t_0) - \tilde{y}(\tilde{t}_0)| \leq M|t_0 - \tilde{t}_0|$ , so dass umgekehrt auch Satz O2D zur obigen, etwas allgemeineren Ungleichung führt.

😊 Aus  $(t_0, y_0) = (\tilde{t}_0, \tilde{y}_0)$  folgt die wichtige Eindeutigkeitsaussage, wie wir sie von Cauchy O1B und Picard–Lindelöf O2A bereits kennen.

**Zweiter Spezialfall:** Bei gleichen Startwerten  $(t_0, y_0) = (\tilde{t}_0, \tilde{y}_0)$  gilt:

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \leq \varepsilon(t) \frac{e^{L|t-t_0|} - 1}{L}$$

😊 Hier erfüllt  $\tilde{y}$  die Differentialgleichung  $y'(t) = f(t, y(t))$  nicht exakt, sondern näherungsweise gemäß  $|\tilde{y}'(t) - f(t, \tilde{y}(t))| \leq \varepsilon(t)$  für alle  $t \in I$ . Glücklicherweise entfernt sich  $\tilde{y}$  auch hier höchstens exponentiell von  $y$ .

😊 Für exakte Lösungen,  $\varepsilon = 0$ , folgt erneut die Eindeutigkeitsaussage, wie wir sie von Cauchy O1B und Picard–Lindelöf O2A bereits kennen.

😊 Auch diese Ungleichung zeigt eine stetige Abhängigkeit: Wenn wir  $y(t_0) = y_0$  festhalten und die rechte Seite von  $y'(t) = f(t, y(t))$  wenig ändern zu  $\tilde{f}$  mit  $|f - \tilde{f}| \leq \varepsilon$ , so ändert sich auch die Lösung  $\tilde{y}$  nur wenig.

😊 Dies können wir zum „Runden“ der rechten Seite  $f$  nutzen. M448

**Allgemeiner Fall:** Die umfassende Fehlerschranke aus Satz O2F ist die Summe von zwei anschaulich leicht verständlichen Beiträgen: der Fehler der Anfangsdaten  $(\tilde{t}_0, \tilde{y}_0)$  und der Fehler der rechten Seite  $\tilde{f}$ .

😊 Die Abschätzungen  $\varepsilon, L, M$  liefern unsere explizite Fehlerschranke!

**Aufgabe:** (1) Finden Sie alle Funktionen  $y : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$y'(t) = y(t)^2, \quad y(0) = 0.25.$$

(2) Wie verlaufen Lösungen  $\tilde{y} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  der gestörten Gleichung?

- (a)  $\tilde{y}'(t) = \tilde{y}(t)^2 + 0.01 \sin(t^2 + 9000 y(t)), \quad \tilde{y}(0.05) = 0.27$   
 (b)  $\tilde{y}'(t) = \tilde{y}(t)^2 - 0.08 \tilde{y}(t)^3, \quad \tilde{y}(0.04) = 0.23$   
 (c)  $\tilde{y}'(t) = \tilde{y}(t)^2 + \tilde{g}(t, \tilde{y}(t)), \quad \tilde{y}(\tilde{t}_0) = \tilde{y}_0$

mit  $|\tilde{g}| \leq \varepsilon = 0.01$  sowie  $|t_0 - \tilde{t}_0| \leq \delta = 0.05$  und  $|y_0 - \tilde{y}_0| \leq \eta = 0.02$ .  
Nutzen Sie die Schranke O2F mit möglichst guten Konstanten  $M, L$ .

**Lösung:** (1) Separation, Lösung  $y(t) = 1/(4 - t)$ , Probe! Eindeutigkeit!

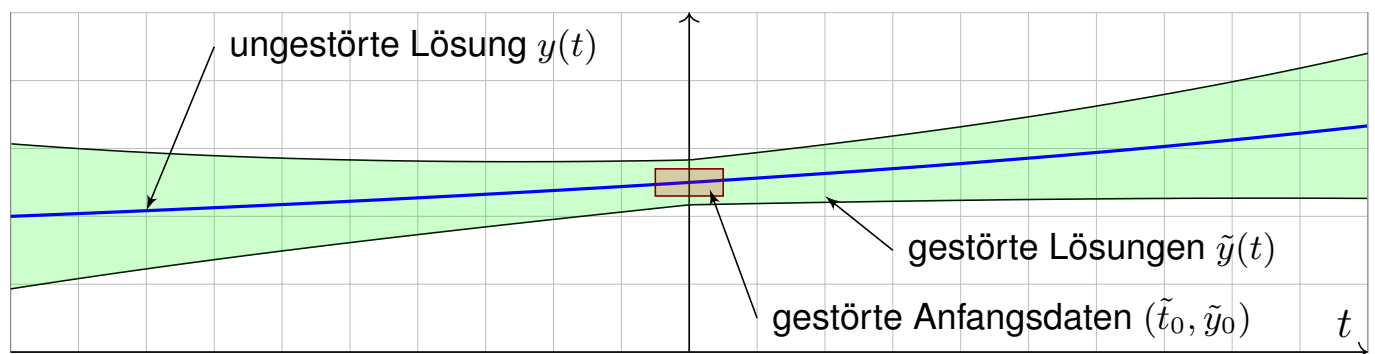
(2) Wir prüfen bzw. schaffen die geometrischen Voraussetzungen:

Wir haben das Intervall  $I = [-1, 1]$  um  $t_0 = 0$  vom Radius  $T = 1$ .

Wir wählen  $K = \bar{B}(y_0, r) = [0, 0.5]$  um  $y_0 = 0.25$  mit Radius  $r = 0.25$ .

Hierauf ist  $f : I \times K \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt durch  $|f| \leq M := 0.25$ .

Dank  $\partial f / \partial y = 2y$  ist  $f$  Lipschitz mit  $L = \max_{I \times K} |\partial f / \partial y| = 1$ .



(a/b/c) Für Lösungen  $\tilde{y} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  gilt dank O2F die Fehlerschranke

$$\begin{aligned} |y(t) - \tilde{y}(t)| &\leq \left[ |y_0 - \tilde{y}_0| + (M + \varepsilon) |t_0 - \tilde{t}_0| \right] e^{L|t-t_0|} + \frac{\varepsilon}{L} \left[ e^{L|t-t_0|} - 1 \right] \\ &\leq [0.02 + 0.26 \cdot 0.05] e^{|t|} + 0.01 [e^{|t|} - 1] = 0.043 e^{|t|} - 0.01. \end{aligned}$$

Die Graphik zeigt die ungestörte Lösung  $y$  und den möglichen Verlauf gestörter Lösungen  $\tilde{y}$ . Probe:  $\tilde{y}$  verläuft tatsächlich ganz in  $K = [0, 0.5]$ .

😊 Meist können wir den Verlauf gestörter Lösungen  $\tilde{y}(t)$  nicht genau bestimmen, aber wir können ihn immerhin recht präzise eingrenzen!

**Aufgabe:** Beweisen Sie die Fehlerschranke O2F analog zu Satz O2D.

**Lösung:** Wir betrachten die Differenz  $\varphi(t) := |y(t) - \tilde{y}(t)|$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} 0 \leq \varphi(t) &= \left| y(t_0) + \int_{t_0}^t y'(\tau) d\tau - \tilde{y}(\tilde{t}_0) + \tilde{y}(\tilde{t}_0) - \tilde{y}(t_0) - \int_{t_0}^t \tilde{y}'(\tau) d\tau \right| \\ &\leq \underbrace{|y_0 - \tilde{y}_0| + M |t_0 - \tilde{t}_0|}_{=: C} + \left| \int_{t_0}^t y'(\tau) - \tilde{y}'(\tau) d\tau \right| \end{aligned}$$

Wir nehmen nun  $t \geq t_0$  an. Für das letzte Integral finden wir:

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_0}^t y'(\tau) - \tilde{y}'(\tau) d\tau \right| &= \left| \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) - f(\tau, \tilde{y}(\tau)) + f(\tau, \tilde{y}(\tau)) - \tilde{y}'(\tau) d\tau \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(\tau, y(\tau)) - f(\tau, \tilde{y}(\tau))| + |f(\tau, \tilde{y}(\tau)) - \tilde{y}'(\tau)| d\tau \\ &\leq \int_{t_0}^t L |y(\tau) - \tilde{y}(\tau)| + \varepsilon(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t L \varphi(\tau) + \varepsilon(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Wir erhalten so die Ungleichung  $0 \leq \varphi(t) \leq C + \int_{t_0}^t L \varphi(\tau) + \varepsilon(\tau) d\tau$ .

**Trick:** Zu  $0 \leq C < D$  betrachten wir folgende Vergleichsfunktion:

$$\psi(t) = D e^{L|t-t_0|} + \varepsilon(t) \frac{e^{L|t-t_0|} - 1}{L}$$

Sie erfüllt die Ungleichung  $\psi(t) \geq D + \int_{t_0}^t L \psi(\tau) + \varepsilon(\tau) d\tau$  für alle  $t \geq t_0$ .

Es gilt  $0 \leq \varphi(t) < \psi(t)$  für  $t = t_0$ , und wir zeigen dies nun für alle  $t > t_0$ .

Andernfalls gäbe es einen ersten Zeitpunkt  $t_1 > t_0$  mit  $\varphi(t_1) = \psi(t_1)$ .

Andererseits gilt  $\varphi(t) < \psi(t)$  für  $t_0 \leq t < t_1$  und somit:

$$\varphi(t_1) \leq C + \int_{t_0}^{t_1} L \varphi(\tau) + \varepsilon(\tau) d\tau < D + \int_{t_0}^{t_1} L \psi(\tau) + \varepsilon(\tau) d\tau \leq \psi(t_1)$$

Demnach ist  $\varphi(t_1) = \psi(t_1)$  nicht möglich. Also gilt  $\varphi(t) < \psi(t)$  für alle  $t \in [t_0, t_0 + b]$ . Insbesondere gilt demnach die schwache Ungleichung:

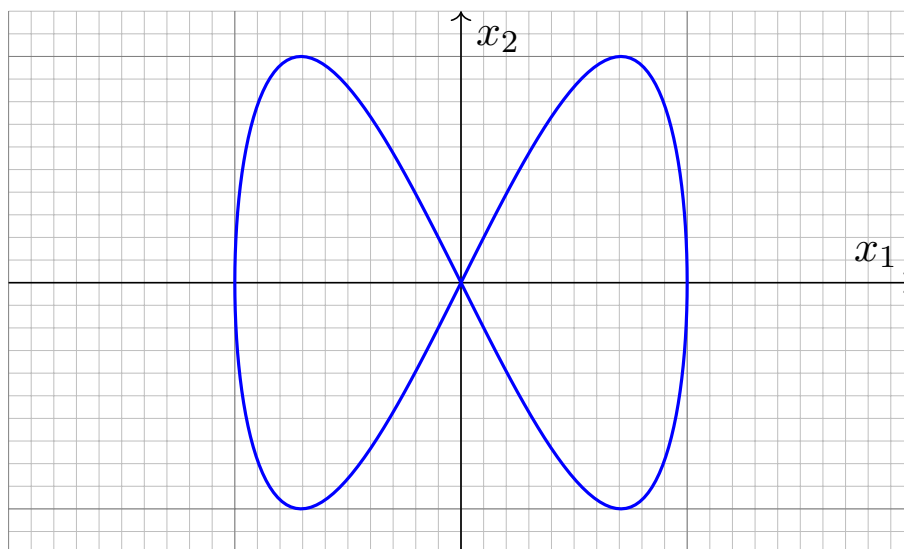
$$0 \leq \varphi(t) \leq D e^{L|t-t_0|} + \varepsilon(t) \frac{e^{L|t-t_0|} - 1}{L} \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_0 + b]$$

Diese Ungleichung bleibt beim Grenzübergang  $D \searrow C$  bestehen:

$$0 \leq \varphi(t) \leq C e^{L|t-t_0|} + \varepsilon(t) \frac{e^{L|t-t_0|} - 1}{L} \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_0 + b]$$

Ebenso für  $t \in [t_0 - a, t_0]$ . Damit ist die Ungleichung O2F bewiesen.

**Aufgabe:** (1) Skizzieren Sie  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\sin(t), \sin(2t))$ . Kann dies Lösung eines dynamischen Systems  $\dot{x} = f(x)$  mit  $f \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  sein?



(2) Können sich bei einem autotomen dynamischen System  $\dot{x} = f(x)$  zwei Lösungen  $u, v$  kreuzen mit  $u(t_1) = v(t_2)$  und  $\dot{u}(t_1) \neq \dot{v}(t_2)$ ?

(3) Können sich bei einem System  $\dot{x} = f(x)$  mit  $f \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  zwei verschiedene Lösungen kreuzen mit  $u(t_1) = v(t_2)$  und  $\dot{u}(t_1) = \dot{v}(t_2)$ ?

**Lösung:** (1) Für  $t = 0$  gilt  $u(0) = (0, 0)$  und  $\dot{u}(0) = (1, 2)$ . Für  $t = \pi$  gilt ebenfalls  $u(\pi) = (0, 0)$  aber  $\dot{u}(\pi) = (-1, 2)$ . Demnach müsste sowohl  $f(0, 0) = (1, 2)$  als auch  $f(0, 0) = (-1, 2)$  gelten, ein Widerspruch!

(2) Nein, das ist unmöglich! Teil (1) zeigt ein Beispiel, nun allgemein: Jede Lösung  $u: \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}^2$  erfüllt  $\dot{u}(t) = f(u(t))$  für alle  $t \in I$ , auch die Lösung  $v: \mathbb{R} \supseteq J \rightarrow \mathbb{R}^2$  erfüllt  $\dot{v}(t) = f(v(t))$  für alle  $t \in J$ . Aus  $u(t_1) = v(t_2)$  folgt zwingend  $\dot{u}(t_1) = f(u(t_1)) = f(v(t_2)) = \dot{v}(t_2)$ .

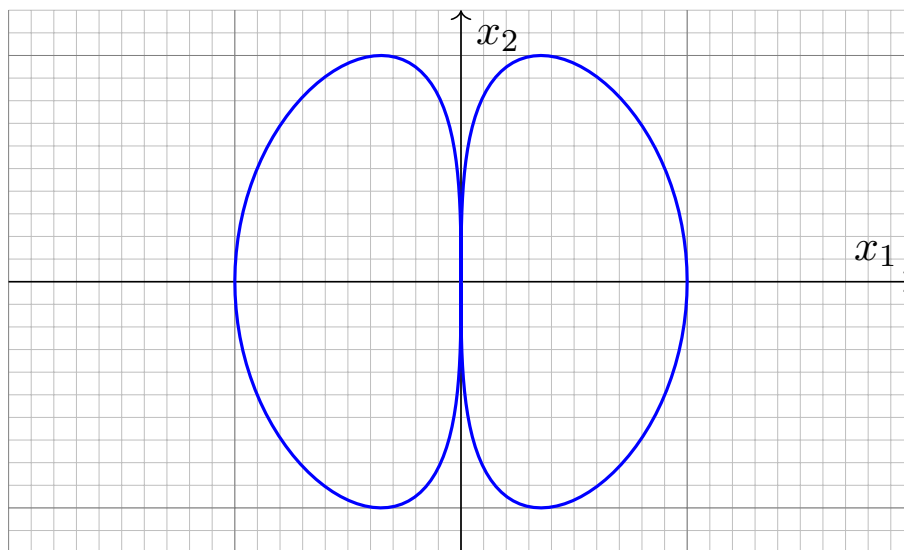
😊 Der Eindeutigkeitsatz vereinfacht die Geometrie von Lösungen.

(3) Ja, solche Beispiele kennen wir von der Wasseruhr [M123](#) oder [M325](#). Das Vektorfeld  $f(x_1, x_2) = (1, 3\sqrt[3]{x_2^2})$  definiert das System  $\dot{x} = f(x)$ . Dieses Vektorfeld ist stetig aber nicht stetig differenzierbar.

Unendlich viele Lösungen laufen durch den Startpunkt  $x(0) = (0, 0)$ , zum Beispiel  $u, v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $u(t) = (t, 0)$  und  $v(t) = (t, t^3)$ .

☹️ Ohne Eindeutigkeit wird das Problem komplizierter.

**Aufgabe:** (4) Skizzieren Sie  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\sin(t)^3, \sin(2t))$ . Kann dies Lösung eines dynamischen Systems  $\dot{x} = f(x)$  mit  $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  sein?



(5) Wir betrachten ein System  $\dot{x} = f(x)$  mit  $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . Erfüllt eine Lösung  $u$  zudem  $u(\tau) = u(0)$  für ein  $\tau > 0$ , ist sie dann  $\tau$ -periodisch?

**Lösung:** (4) Für  $\tau \in \{0, \pi\}$  gilt  $u(\tau) = (0, 0)$  und  $\dot{u}(\tau) = f(0, 0) = (0, 2)$ . Laut Aufgabenstellung wird hier  $f$  stetig differenzierbar vorausgesetzt. Wir können daher den Eindeutigkeitssatz O1B nutzen:

Bei gleichen Startwerten muss der weitere Verlauf identisch sein; im vorliegenden Fall bedeutet das  $u(t) = u(\pi + t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

Die vorgelegte Funktion  $u$  ist aber nicht  $\pi$ -periodisch!

⚠ Ist  $f$  nur stetig (und nicht zudem stetig differenzierbar), dann ist eine solche exotische Lösung durchaus möglich.

(5) Ja. Teil (4) zeigt ein Gegenbeispiel, allgemein gilt folgendes:

Sei  $u: \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine maximale Lösung mit  $0, \tau \in I$  und  $\tau > 0$ .

Wir verschieben  $u$ : Hierzu sei  $J = I - \tau$  und  $v: J \rightarrow \mathbb{R}^n : t \mapsto u(t + \tau)$ .

Die beiden Funktionen  $u$  und  $v$  sind Lösungen des autonomen Systems  $\dot{x} = f(x)$  mit  $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  zum selben Startpunkt  $u(0) = v(0)$ .

Dank Eindeutigkeitssatz O1B sind sie gleich, also  $u(t) = v(t) = u(t + \tau)$ . Insbesondere lässt sich  $u$  periodisch fortsetzen, also gilt  $I = \mathbb{R}$ .



**Aufgabe:** Sei  $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ . Finden Sie alle maximalen Lösungen

- (1)  $y: I \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  mit  $y'(t) = y(t)^\alpha$ ,
- (2)  $y: I \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit  $y'(t) = y(t)^\alpha$ ,
- (3)  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $y'(t) = |y(t)|^\alpha$ .

- (a) Ist die rechte Seite (stetig) differenzierbar? Ist sie (lokal) Lipschitz?
- (b) Zu welchen Anfangswerten  $y(t_0) = y_0$  ist die Lösung eindeutig?
- (c) Quantitative Lösung: Berechnen Sie alle maximalen Lösungen.
- (d) Diskutieren und zeichnen Sie insbesondere die Fälle  $\alpha = 1/2, 1, 2$ .

Der Fall  $\alpha = 0$  ist trivial. Bei  $\alpha < 0$  hätten wir eine Polstelle in  $y = 0$ . Zur Vereinfachung nehmen wir im Folgenden kurzerhand  $\alpha > 0$  an.

Wir lassen auch gebrochene Exponenten zu, zum Beispiel  $y^{1/2} = \sqrt{y}$ . Bei (3) müssen wir den Absolutbetrag nehmen, denn  $\sqrt{-1}$  ist nicht reell. Wir setzen  $|y|^\alpha := \exp(\alpha \ln|y|)$  für  $y \neq 0$  dabei stetig fort durch  $0^\alpha := 0$ . Aus Kapitel M kennen wir bereits die illustrativen Beispiele  $y' = y$  [M111](#) und  $y' = y^2$  [M113](#) sowie  $y' = -2\sqrt{|y|}$  [M123](#) und  $y' = \sqrt[3]{y^2}$  [M325](#).

- Lösung:** (1a) Die rechte Seite  $f(t, y) = y^\alpha$  ist stetig differenzierbar mit  $\partial f / \partial y = \alpha y^{\alpha-1}$ ; sie erfüllt demnach lokal eine Lipschitz-Bedingung.
- (1b) Wir können den  $\exists$ &E-Satz M1c anwenden, sogar Separation M1A. Zum Anfangswert  $y(t_0) = y_0 > 0$  ist die Lösung  $y: I \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  eindeutig. Zwei verschiedene (maximale) Lösungen können sich nicht schneiden.
- (1c) Wir lösen diese Gleichung durch Separation:  $y^{-\alpha}(t) y'(t) = 1$ .

$$\alpha = 1: \quad \ln y(t) = t - c \quad \Rightarrow \quad y(t) = e^{t-c} = C e^t, \quad C > 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\alpha > 1: \quad \frac{y(t)^{1-\alpha}}{1-\alpha} = t - c \quad \Rightarrow \quad y(t) = [(\alpha - 1)(c - t)]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad t < c$$

$$\alpha < 1: \quad \frac{y(t)^{1-\alpha}}{1-\alpha} = t - c \quad \Rightarrow \quad y(t) = [(1 - \alpha)(t - c)]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad t > c$$

**⚠** Nur für  $\alpha = 1$  existiert die Lösung  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  für alle Zeit  $t \in \mathbb{R}$ . Für  $\alpha > 1$  läuft jede Lösung in eine Polstelle: Für  $t \nearrow c$  gilt  $y(t) \nearrow \infty$ . Für  $0 < \alpha < 1$  läuft jede Lösung  $y$  gegen Null: Für  $t \searrow c$  gilt  $y(t) \searrow 0$ . Für  $\alpha \neq 1$  ist deshalb das Lösungsintervall rechts / links beschränkt.

**😊** Dank (1b) sind dies die einzigen Lösungen; das vereinfacht enorm.

(2a) Für  $\alpha \geq 1$  ist  $f(t, y) = y^\alpha$  stetig differenzierbar mit  $\partial f / \partial y = \alpha y^{\alpha-1}$ . Demnach erfüllt  $f$  in diesem Falle lokal eine Lipschitz-Bedingung.

(2b) Für  $\alpha \geq 1$  können wir den  $\exists$ &E-Satz anwenden dank (2a): Zum Anfangswert  $y(t_0) = y_0 \geq 0$  ist die Lösung  $y: I \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  eindeutig.

(2c) Für  $y \geq 0$  ist zudem die konstante Funktion  $y(t) = 0$  eine Lösung. Für  $\alpha \geq 1$  sind Null und die Funktionen aus (1c) die einzigen Lösungen.

Für  $0 < \alpha < 1$  lässt sich jede Lösung aus (1c) maximal fortsetzen zu

$$y_c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad y_c(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq c, \\ [(1 - \alpha)(t - c)]^{\frac{1}{1-\alpha}} & \text{für } t \geq c. \end{cases}$$

Durch jeden Startpunkt  $(t_0, y_0)$  mit  $y_0 > 0$  läuft genau eine Lösung.

Durch jeden Punkt  $(t_0, 0)$  hingegen laufen unendlich viele Lösungen!

⚠ Jedes AWP  $y(t_0) = y_0 > 0$  ist gut gestellt, aber  $y(t_0) = 0$  schlecht.

⚠ Den  $\exists$ &E-Satz können wir für  $0 < \alpha < 1$  nicht anwenden:

Die rechte Seite  $f(t, y) = y^\alpha$  ist differenzierbar mit  $\partial f / \partial y = \alpha y^{\alpha-1}$ , doch die Ableitung hat in  $y = 0$  eine Polstelle:  $f$  ist nicht Lipschitz!

(3c) Wir finden weitere Lösungen  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $y'(t) = |y(t)|^\alpha$ :

$$\alpha = 1: \quad y_0(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$y_c^-(t) = -e^{c-t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$y_c^+(t) = +e^{t-c}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\alpha > 1: \quad y_c^-(t) = -[(\alpha - 1)(t - c)]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad t > c$$

$$y_c^+(t) = +[(\alpha - 1)(c - t)]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad t < c$$

$$\alpha < 1: \quad y_{b,c}(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } b \leq t \leq c, \\ -[(1 - \alpha)(b - t)]^{\frac{1}{1-\alpha}} & \text{für } t \leq b, \\ +[(1 - \alpha)(t - c)]^{\frac{1}{1-\alpha}} & \text{für } t \geq c. \end{cases}$$

(3b) Für  $\alpha \geq 1$  bleiben die drei Lösungszweige  $> 0$ ,  $= 0$ ,  $< 0$  getrennt.

Eindeutigkeit: Durch jeden Startpunkt  $(t_0, y_0)$  läuft genau eine Lösung.

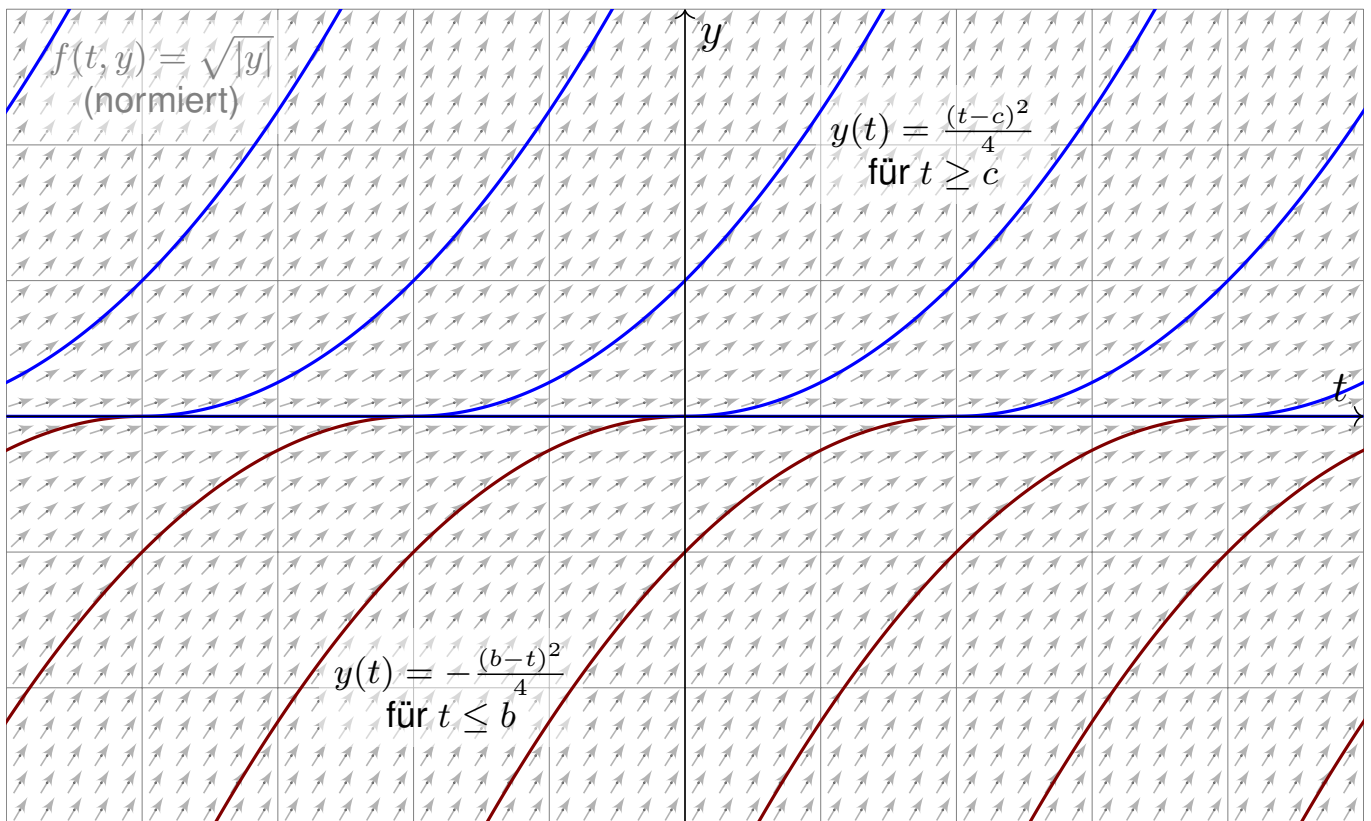
Für  $0 < \alpha < 1$  fügen sich die Lösungszweige differenzierbar zusammen.

(Hierbei lassen wir auch die Sonderfälle  $b = -\infty$  und  $c = +\infty$  zu.)

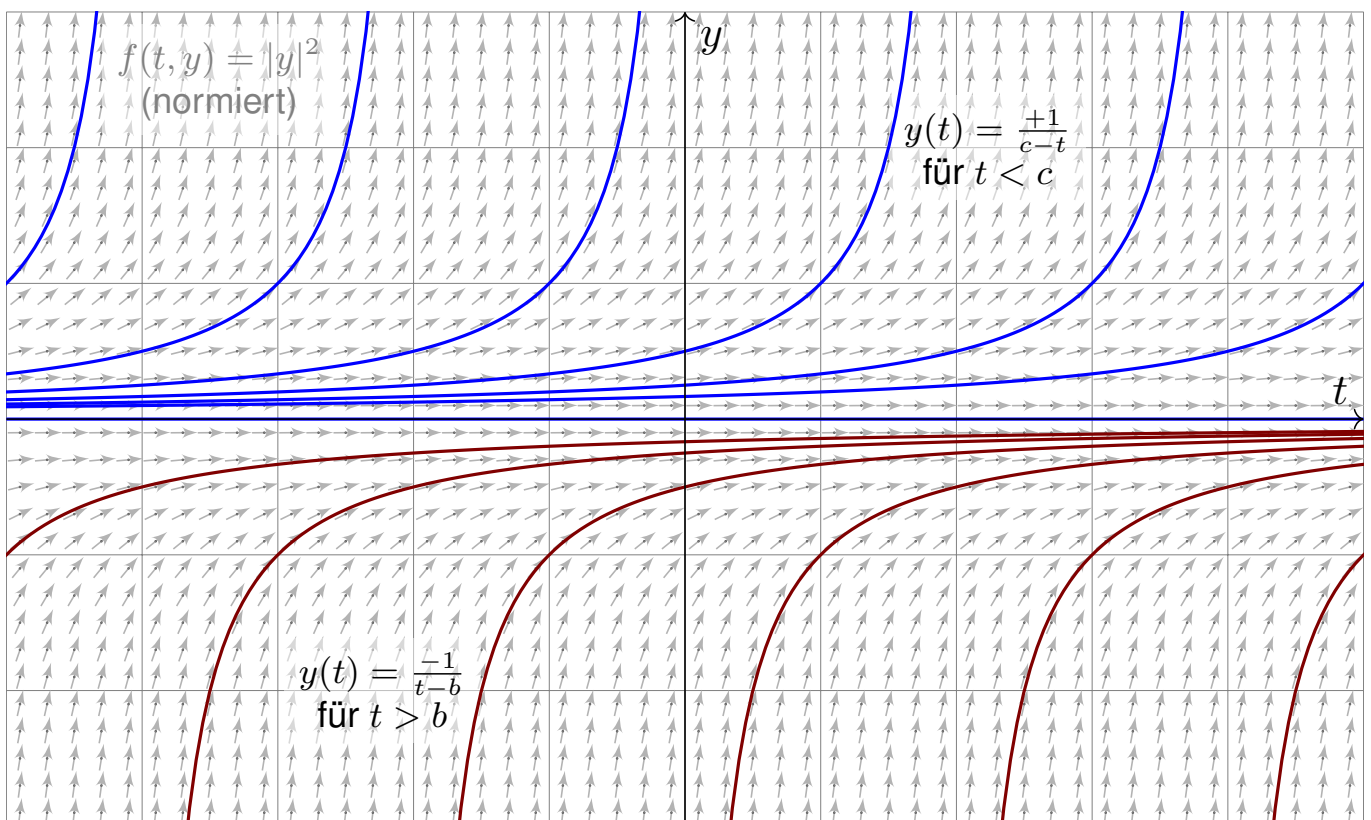
Durch jeden Startpunkt  $(t_0, y_0)$  laufen unendlich viele Lösungen!

(3a) Für  $0 < \alpha < 1$  ist  $f(t, y) = |y|^\alpha$  um  $y = 0$  nicht Lipschitz!

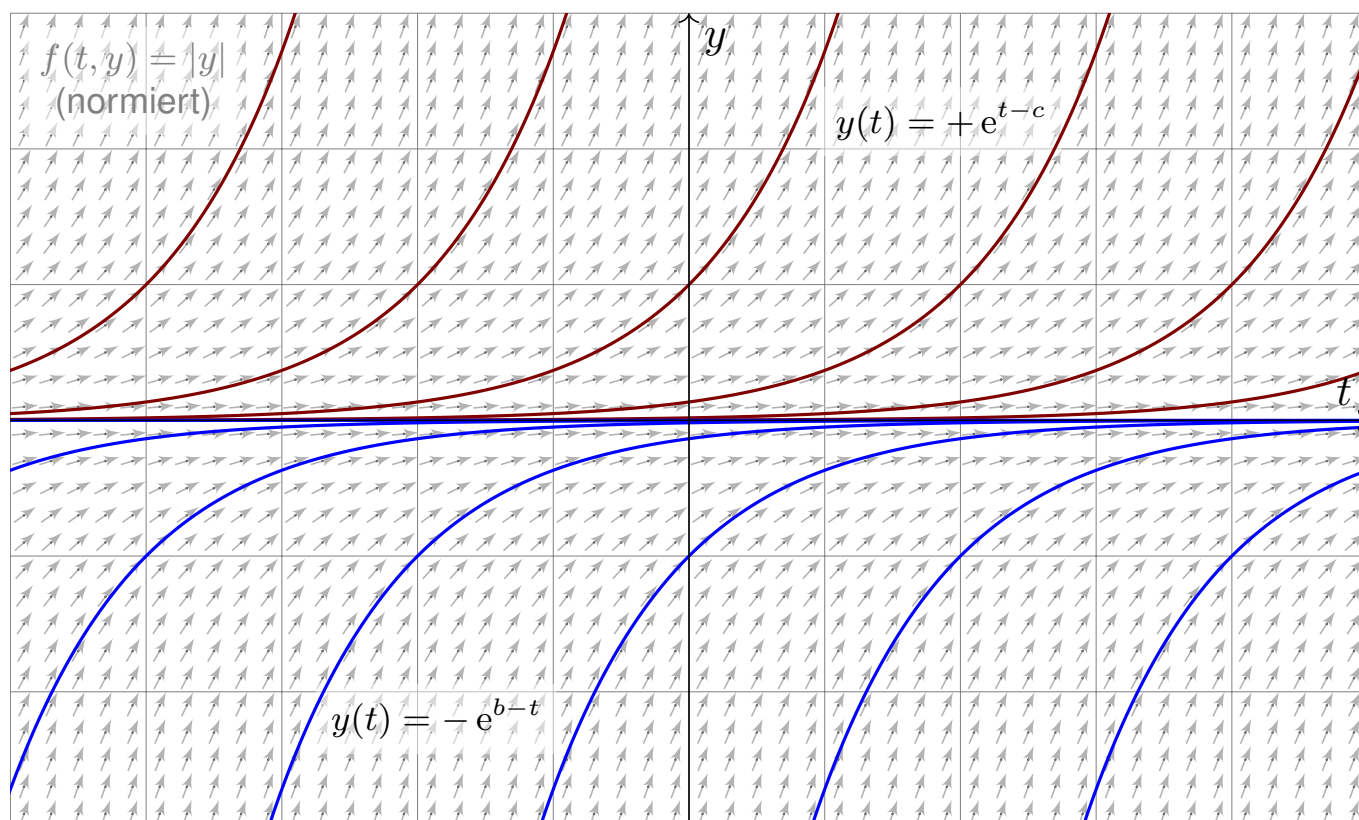
- ⚠ Auf  $y'(t) = \sqrt{|y(t)|}$  können wir den  $\exists$ &E-Satz nicht anwenden.
- ⚠ Durch jeden Startpunkt  $(t_0, y_0)$  verlaufen unendlich viele Lösungen!



- 😊 Auf  $y'(t) = |y(t)|^2$  hingegen können wir den  $\exists$ &E-Satz anwenden:  
Die rechte Seite  $f(t, y) = |y|^2$  ist differenzierbar, also lokal Lipschitz.



😊 Auch auf  $y'(t) = |y(t)|$  können wir den  $\exists$ &E-Satz anwenden:  
 Zwar ist  $f(t, y) = |y|$  nicht differenzierbar, aber Lipschitz mit  $L = 1$ .



# Beispielfamilie zu Existenz und Eindeutigkeit

😊 Der Existenz-und-Eindeutigkeits-Satz von Cauchy O1B oder genauer Picard–Lindelöf O2A ist ein grundlegendes und mächtiges Werkzeug.

😊 Die Lipschitz–Bedingung prüfen wir am bequemsten durch ableiten:  
 Ist  $f(t, y)$  stetig diff'bar nach  $y$ , so genügt  $f$  lokal auf  $[a, b] \times \bar{B}(y_0, r)$  der Lipschitz–Bedingung  $|f(t, u) - f(t, v)| \leq L|u - v|$  mit  $L = \max|\partial f / \partial y|$ .  
 Dies gilt für  $f(t, y) = |y|^\alpha$  mit  $\alpha > 1$ : Hier greift der Eindeutigkeitsatz!

Für  $0 < \alpha < 1$  hingegen ist  $|y|^\alpha$  in  $y = 0$  nicht diff'bar und nicht Lipschitz.  
 Wir können den Eindeutigkeitsatz hier also nicht anwenden. Tatsächlich finden wir durch jeden Startpunkt  $(t_0, y_0)$  unendlich viele Lösungen!

Im kritischen Fall  $\alpha = 1$  haben wir die Differentialgleichung  $y' = |y|$ .  
 Die rechte Seite  $f(t, y) = |y|$  ist in  $y = 0$  nicht differenzierbar. (Skizze!)  
 Dennoch erfüllt sie eine Lipschitz–Bedingung, sogar global mit  $L = 1$ ,  
 denn es gilt  $||u| - |v|| \leq |u - v|$  für alle  $u, v \in \mathbb{R}$ . (Dreiecksungleichung)

😊 Beispiele wie dieses zeigen, dass die Lipschitz–Bedingung in  $y$   
 etwas allgemeiner ist als die (sehr bequeme) Differenzierbarkeit in  $y$ .

**Aufgabe:** (1a) Skizzieren Sie das Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

(1b) Finden Sie (durch Anschauung und Probe) eine Lösung  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  des Systems  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  zum Startwert  $x(0) = (r_0 \cos t_0, r_0 \sin t_0)$ .

(1c) Gibt es weitere Lösungen oder haben Sie damit alle gefunden?

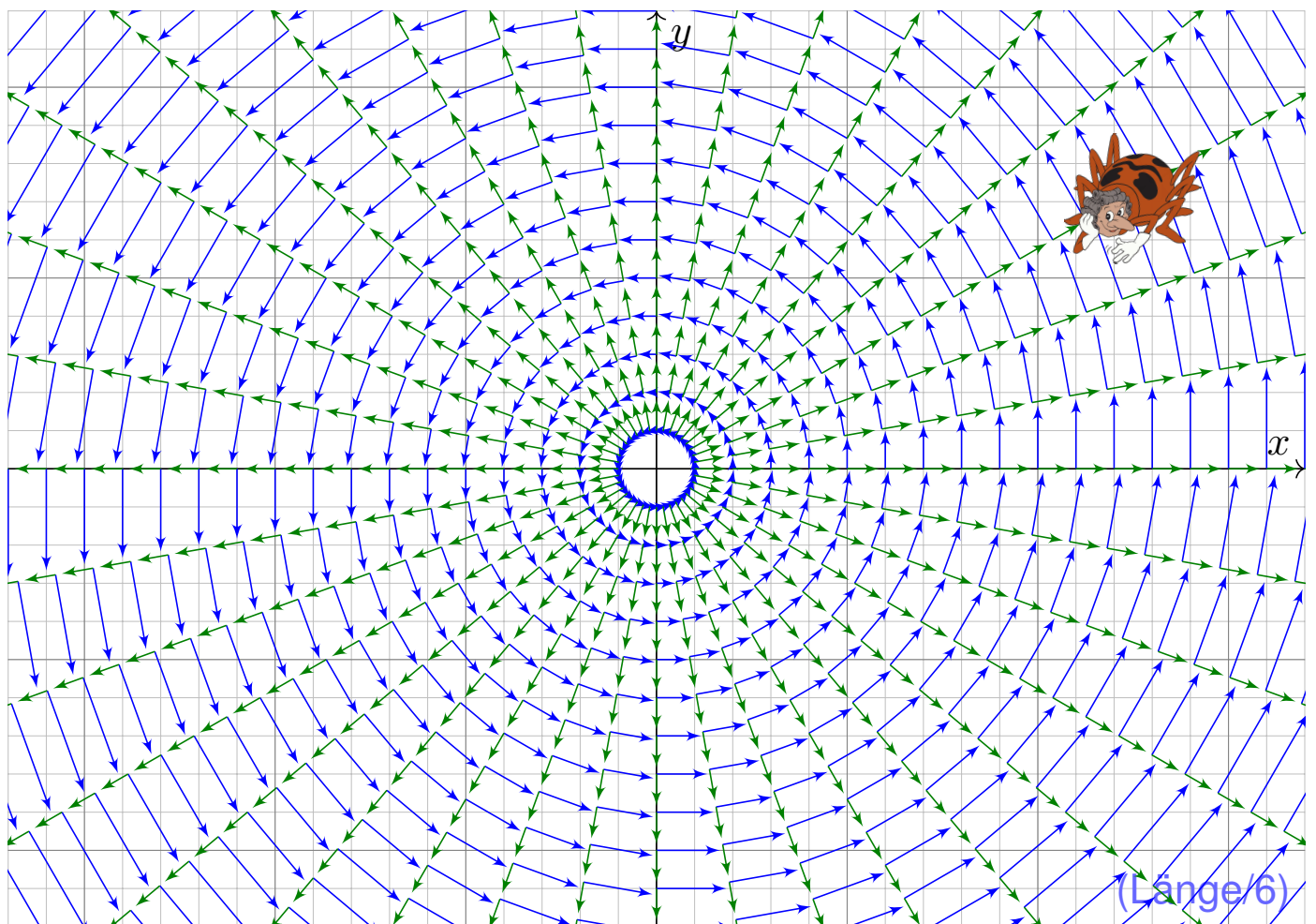
(2a) Skizzieren Sie das Vektorfeld

$$g : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

(2b) Finden Sie (durch Anschauung und Probe) eine Lösung  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  des Systems  $\dot{x}(t) = g(x(t))$  zum Startwert  $x(0) = (r_0 \cos t_0, r_0 \sin t_0)$ .

(2c) Gibt es weitere Lösungen oder haben Sie damit alle gefunden?

😊 In günstigen Fällen finden wir leicht explizite Lösungen. Für  $f \in C^1$  garantiert der Eindeutigkeitsatz, dass wir keine Lösungen übersehen.



**Aufgabe:** (3a) Skizzieren Sie soweit möglich das gestörte Vektorfeld

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 : x \mapsto f(x) + \sqrt[3]{(|x| - 2)^2} \cdot g(x)$$

(3b) Nennen Sie eine periodische Lösung von  $\dot{x}(t) = \tilde{f}(x(t))$ .

(3c) Finden Sie eine Lösung mit  $x(0) = (1, 0)$  und  $x(4\pi) = (3, 0)$ .

Hinweis: Nutzen Sie den Ansatz  $x(t) = (r(t) + 2) \cdot (\cos t, \sin t)$

Ist die Lösung eindeutig? Lässt sie sich für alle Zeit  $t \in \mathbb{R}$  fortsetzen?

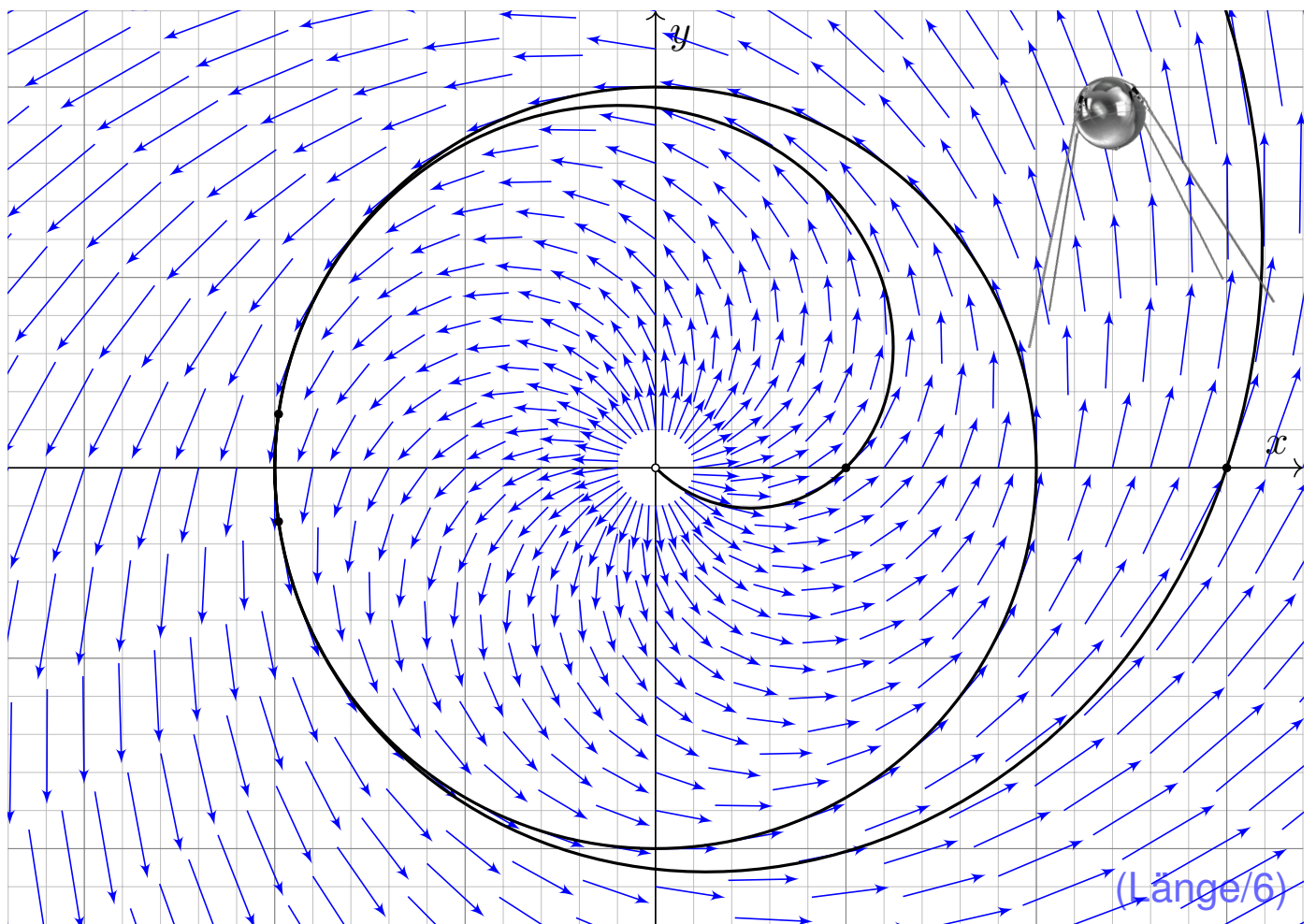
Bleibt sie für immer beschränkt oder entkommt sie nach Unendlich?

**Lösung:** (3a) Diese Linearkombination ist graphisch sehr anschaulich!

(3b) Die Skizze suggeriert  $x(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$ . Die Probe zeigt's!

(3c) Wir finden die Lösung  $r(t) = (\frac{t-3}{3})^3$  für  $3 - 3\sqrt[3]{2} < t \leq 3$ ,  
 $r(t) = 0$  für  $3 \leq t \leq 4\pi - 3$  und  $r(t) = (\frac{t-4\pi+3}{3})^3$  für  $t \geq 4\pi - 3$ ,  
 also  $r(t) \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow \infty$ . Machen Sie die Probe!

**!** Differentialgleichungen können auch unerwartete Lösungen haben, etwa so wie hier „exotische“ Lösungen neben den „offensichtlichen“. Diese Gefahrenquelle müssen Sie kennen und beherrschen, besser: soweit möglich ausschließen. Genau hierzu hilft Ihnen der  $\exists$ &E-Satz!



**Aufgabe:** (4a) Skizzieren Sie soweit möglich das gestörte Vektorfeld

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \tilde{f}(x) = f(x) + (|x|^2 - 4) h(x_1, x_2) \quad \text{mit} \quad h \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$$

(4b) Nennen Sie eine periodische Lösung von  $\dot{x}(t) = \tilde{f}(x(t))$ .

(4c) Existiert eine Lösung  $u$  zum Startwert  $u(0) = (1, 0)$ ?

Ist sie eindeutig? Lässt sie sich für alle Zeit  $t \in \mathbb{R}$  fortsetzen?

Bleibt sie beschränkt oder kann sie nach Unendlich entkommen?

😊 Der Existenz- und Eindeutigkeitsatz hilft Ihnen auch / gerade dann, wenn Sie (noch) keine explizite Lösung ausrechnen können oder wollen.

😊 Sie können dann immerhin noch qualitative Vorhersagen machen, hier etwa eine Stabilitätsgarantie. Solche Überlegungen sind ein erster wichtiger Schritt *vor* der numerischen Näherung, oder dienen *danach* als Probe / Plausibilitätscheck für die berechneten Näherungslösungen.

😊 Die theoretischen Grundlagen leiten die konkreten Rechnungen und sichern praktische Anwendungen. Ihr mathematisches Handwerkszeug hilft Ihnen, lernen Sie möglichst früh, es zu beherrschen und zu nutzen!

**Lösung:** (4a) Solche Vektorfelder ähneln sehr der vorigen Skizze, doch schmiegen sie sich wesentlich glatter an den Kreis  $\partial B(0, 2)$ . Spezialfall: Ist das Vektorfeld  $h$  rotationssymmetrisch, so auch  $\tilde{f}$ .

(4b) Zum Vektorfeld  $f$  ist  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (2 \cos t, 2 \sin t)$  eine Lösung. Sie bleibt für die Störung  $\tilde{f}$  erhalten, da sich auf  $\partial B(0, 2)$  nichts ändert.

(4c) Ja: Unser Vektorfeld  $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist stetig differenzierbar.

Dank  $\exists$ &E-Satz existiert zu jedem Startwert  $u(0) \in \mathbb{R}^2$  eine eindeutige maximale Lösung  $u : \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Bei Start in der Kreisscheibe  $B(0, 2)$ , also  $|u(0)| < 2$ , kann die Lösung  $u$  die Kreisscheibe nicht verlassen: Hierzu müsste sie die obige Lösung  $x$  kreuzen, und das ist nach dem Eindeutigkeitsatz nicht möglich!

Insbesondere kann die Lösung  $u$  nicht nach Unendlich entkommen.

(In der vorigen Aufgabe geschah überraschenderweise genau dies!)

Die Lösung  $u$  lässt sich daher für alle Zeit  $t \in \mathbb{R}$  fortsetzen;

die maximale Lösung ist von der Form  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

**Aufgabe:** (5a) Skizzieren Sie das Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (-x_2, x_1, 0).$$

(5b) Finden Sie (durch Anschauung und Probe) eine Lösung  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  des Systems  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  zum Startwert  $x(0) = (r_0 \cos t_0, r_0 \sin t_0, z_0)$ .

(5c) Gibt es weitere Lösungen oder haben Sie damit alle gefunden?

(6) Wir untersuchen zu  $h \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  das gestörte Vektorfeld

$$\tilde{f}(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3) + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4) h(x_1, x_2, x_3).$$

(6a) Nennen Sie periodische Lösungen von  $\dot{x}(t) = \tilde{f}(x(t))$ .

(6b) Existiert eine Lösung  $u : \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $u(0) = (1, 0, 0)$ ?  
Ist sie eindeutig? Lässt sie sich für alle Zeit  $t \in \mathbb{R}$  fortsetzen?  
Bleibt sie beschränkt oder entkommt sie nach Unendlich?

😊 Diese Beispiele entsprechen den vorigen – in Farbe und 3D.

**Lösung:** (5a) Das Vektorfeld  $f$  ist in jeder  $x_1$ - $x_2$ -Ebene wie zuvor.

(5b) Eine Lösung ist  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto (r_0 \cos(t - t_0), r_0 \sin(t - t_0), z_0)$ .  
Probe: Sie erfüllt  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  und  $x(0) = (r_0 \cos t_0, r_0 \sin t_0, z_0)$ .

(5c) Dank  $\exists$ &E-Satz ist diese Lösung eindeutig: Wir haben sie alle!

(6a) Das Vektorfeld bleibt unverändert auf der Kugel vom Radius 2:  
Für  $r_0^2 + z_0^2 = 4$  erhalten wir erneut genau die Lösungen aus (5b).

(6b) Ja: Unser Vektorfeld  $\tilde{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist stetig differenzierbar.

Dank  $\exists$ &E-Satz existiert zu jedem Startwert  $u(0) \in \mathbb{R}^3$   
eine eindeutige maximale Lösung  $u : \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Bei Start in der Kugel  $\overline{B}(0, 2)$ , also  $r_0^2 + z_0^2 \leq 4$ , kann die Lösung  $u$  die Kugel nicht verlassen: Hierzu müsste sie eine der obigen Lösungen  $x$  kreuzen, und das ist nach dem Eindeutigkeitssatz nicht möglich!

Insbesondere kann die Lösung  $u$  nicht nach Unendlich entkommen.

Die Lösung  $u$  lässt sich daher für alle Zeit  $t \in \mathbb{R}$  fortsetzen;  
die maximale Lösung ist von der Form  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ .



Jedes **lineare Differentialgleichungssystem** hat die Form

$$\begin{cases} y_1'(t) = a_{11}(t)y_1(t) + \dots + a_{1n}(t)y_n(t) + b_1(t), \\ \vdots \\ y_n'(t) = a_{n1}(t)y_1(t) + \dots + a_{nn}(t)y_n(t) + b_n(t). \end{cases}$$

Wir bündeln dies prägnant zu einer vektorwertigen Gleichung:

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t)$$

Gegeben sind hierzu stetige Funktionen  $A: I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  und  $b: I \rightarrow \mathbb{K}^n$ , dabei ist  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein reelles Intervall und  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder allgemeiner  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Hier heißt  $A$  **Koeffizientenmatrix** und  $b$  **rechte Seite** oder **Störterm**. Gesucht sind alle Funktionen  $y: I \rightarrow \mathbb{K}^n$ , die  $y' = Ay + b$  erfüllen.

Die zugehörige **homogene Gleichung** erhalten wir für  $b = 0$ :

$$y'(t) = A(t)y(t)$$

😊 Sie lernen nun, lineare DGSysteme explizit und effizient zu lösen!

## Affin/Lineare Struktur des Lösungsraumes

**Beispiel:** Unser einführendes Beispiel ist das homogene DGSystem

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2+k_3}{m_2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

Hier ist die Koeffizientenmatrix  $A$  konstant und der Störterm  $b = 0$ .

### Lemma O3A: Linearkombination von Lösungen

Seien  $y_1, y_2: I \rightarrow \mathbb{K}^n$  Lösungen zu  $y_1' = Ay_1 + b_1$  und  $y_2' = Ay_2 + b_2$ . Ihre **Linearkombination**  $y = c_1y_1 + c_2y_2$  mit  $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$  ist dann eine Lösung der Gleichung  $y' = Ay + b$  mit rechter Seite  $b = c_1b_1 + c_2b_2$ .

(1) Im homogenen Fall ist  $L_0 = \{y \mid y' = Ay\}$  ein **Vektorraum** über  $\mathbb{K}$ : Jede Linearkombination von Lösungen ist selbst wieder eine Lösung.

(2) Im inhomogenen Fall ist  $L_b = \{y \mid y' = Ay + b\}$  ein **affiner Raum**: Für jede beliebige („partikuläre“) Lösung  $y_b \in L_b$  gilt  $L_b = y_b + L_0$ .

📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §4.6.

😊 Wie jeder Vektorraum enthält  $L_0$  den Nullpunkt, der affine Raum  $L_b$  hingegen ist um  $y_b$  verschoben. Diesen allgemeinen Sachverhalt kennen Sie aus der linearen Algebra von linearen Gleichungssystemen in  $\mathbb{K}^n$ !

**Nachrechnen:** (1) Die Menge  $L_0$  ist ein Untervektorraum von  $C^1(I, \mathbb{K}^n)$ : Es gilt  $0 \in L_0$  und aus  $y_1, y_2 \in L_0, c_1, c_2 \in \mathbb{K}$  folgt  $c_1 y_1 + c_2 y_2 \in L_0$ .

(2) Die Menge  $L_b$  ist ein affiner Unterraum: Lösen  $y, y_b \in C^1(I, \mathbb{K}^n)$  das inhomogene DGS, dann löst  $y_h = y - y_b$  das homogene. Das bedeutet  $y = y_b + y_h$  mit  $y_h \in L_0$ , kurz  $L_b \subseteq y_b + L_0$ . Umgekehrt: Für jede homogene Lösung  $y_h \in L_0$  gilt  $y_b + y_h \in L_b$ , kurz  $L_b \supseteq y_b + L_0$ .

⚠ Für  $y' = Ay$  haben wir immer die triviale Lösung  $0$ . Denkbar wäre aber, dass dies die einzige Lösung ist, also  $L_0 = \{0\}$ . Für  $y' = Ay + b$  wäre sogar zu befürchten, dass es gar keine Lösung gibt, also  $L_b = \emptyset$ .

😊 Hier rettet uns der  $\exists$ &E-Satz O1B mit der globalen Schranke O2D, oder konkret ausgeführt die Konstruktion O3I und die Methode O3D. Die Dimension ist immer  $n$ : Bei jeder konkreten Rechnung wissen wir, wie viele Lösungen wir suchen, und wann wir alle gefunden haben!

### Satz O3B: Struktursatz für lineare Differentialgleichungssysteme

Wie zuvor sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $A: I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  und  $b: I \rightarrow \mathbb{K}^n$  stetig. Wir betrachten die Lösungsmenge  $L_b = \{y \in C^1(I, \mathbb{K}^n) \mid y' = Ay + b\}$ .

(0) **Globale Existenz und Eindeutigkeit:** Zu jedem Zeitpunkt  $t_0 \in I$  und Anfangsdatum  $y_0 \in \mathbb{K}^n$  existiert genau eine Lösung  $y \in L_b$  mit  $y(t_0) = y_0$ . Die Auswertung  $\Psi: L_b \rightarrow \mathbb{K}^n: y \mapsto y(t_0)$  ist also bijektiv.

(1)  $L_0 = \{y \mid y' = Ay\}$  ist ein **Vektorraum** der Dimension  $n$  über  $\mathbb{K}$ . Wir finden ein **Fundamentalsystem**  $y_1, \dots, y_n \in L_0$ , also eine Basis von  $L_0$  bestehend aus  $n$  linear unabhängigen Lösungen, und erhalten:

$$L_0 = \{c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}\} \cong \mathbb{K}^n$$

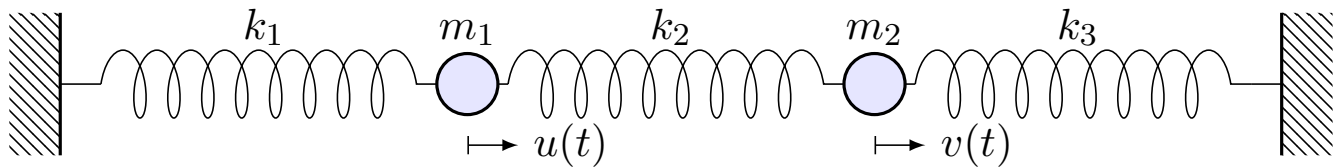
(2)  $L_b = \{y \mid y' = Ay + b\}$  ist ein **affiner Raum** der Dimension  $n$ . Für jede **Partikulärlösung**  $y_b \in L_b$  gilt  $L_b = y_b + L_0$ , ausgeschrieben:

$$L_b = y_b + L_0 = \{y_b + c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}\}$$

„Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen“

## Anwendungsbeispiel: gekoppelte Oszillatoren

**Aufgabe:** Formulieren und lösen Sie folgendes dynamische System:



- (1) Formulieren Sie das Differentialgleichungssystem erster Ordnung.
- (2) Welche Struktur hat der Lösungsraum? („Form“ und „Größe“)
- (3) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem reeller Lösungen.
- (4) Wie erhalten Sie hieraus eine allgemeine Lösung  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ?
- (5) Wie lösen Sie das Anfangswertproblem  $y(t_0) = y_0$  für  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ ?

**Lösung:** (1) Für die Variablen  $y_1 = u$ ,  $y_2 = v$ ,  $y_3 = u'$ ,  $y_4 = v'$  ist die Bewegungsgleichung ein **DGSystem erster Ordnung**: O109

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{m} & \frac{k_2}{m} & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m} & -\frac{k_2+k_1}{m} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \quad \text{kurz } y' = A y$$

## Anwendungsbeispiel: gekoppelte Oszillatoren

(2) Die Menge aller Lösungen  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$  ist ein  **$\mathbb{R}$ -Vektorraum**. Dank des  $\exists$ &E-Satzes hat dieser Vektorraum die **Dimension 4**.

(3) Durch Entkopplung finden wir Lösungen  $y_1, y_2, y_3, y_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ . Diese bündeln wir übersichtlich zur **Fundamentalmatrix**

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t) & \sin(\omega_1 t) & +\cos(\omega_2 t) & +\sin(\omega_2 t) \\ \cos(\omega_1 t) & \sin(\omega_1 t) & -\cos(\omega_2 t) & -\sin(\omega_2 t) \\ -\omega_1 \sin(\omega_1 t) & \omega_1 \cos(\omega_1 t) & -\omega_2 \sin(\omega_2 t) & +\omega_2 \cos(\omega_2 t) \\ -\omega_1 \sin(\omega_1 t) & \omega_1 \cos(\omega_1 t) & +\omega_2 \sin(\omega_2 t) & -\omega_2 \cos(\omega_2 t) \end{pmatrix}.$$

Die Frequenzen sind hierbei  $\omega_1^2 = k_1/m$  und  $\omega_2^2 = (k_1 + 2k_2)/m$ . **Lineare Unabhängigkeit** testen wir in einem beliebigen Punkt:

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \omega_1 & 0 & \omega_2 \\ 0 & \omega_1 & 0 & -\omega_2 \end{pmatrix}, \quad \det Y(0) = -4\omega_1\omega_2 \neq 0$$

## Anwendungsbeispiel: gekoppelte Oszillatoren

😊 Unsere vier Lösungen  $y_1, y_2, y_3, y_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$  sind linear unabhängig. Da der Lösungsraum die Dimension 4 hat, haben wir also eine **Basis**! Man nennt dies auch ein **Fundamentalsystem** des homogenen DGS. Wie aus der linearen Algebra bekannt bedeutet Basis folgendes:

(4) Jede Lösung  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$  unserer homogenen Gleichung  $y' = A y$  ist eine **Linearkombination**  $y(t) = c_1 y_1(t) + \dots + c_4 y_4(t)$  mit  $c \in \mathbb{R}^4$ , zusammengefasst  $y(t) = Y(t) c$  mit obiger Fundamentalmatrix  $Y(t)$ .

(5) Ist ein **Anfangswert**  $y(t_0) = y_0$  vorgegeben durch  $y_0 \in \mathbb{R}^4$ , so gilt

$$Y(t_0) c \stackrel{!}{=} y_0 \quad \Longrightarrow \quad c = Y(t_0)^{-1} y_0$$

😊 Die Matrix  $Y(t)$  ist invertierbar zu jedem Zeitpunkt  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Das AWP  $y(t_0) = y_0$  wird demnach gelöst durch  $y(t) = Y(t) Y(t_0)^{-1} y_0$ .

Theoretisch ist damit alles klar. In unserem Beispiel fanden wir das Fundamentalsystem durch die Methode des scharfen Hinsehens. Wir werden hierzu im Folgenden allgemeine Methoden erklären und im nächsten Kapitel zu einer effizienten Konstruktion ausbauen.

## Fundamentalsystem und Fundamentalmatrix

Lösungen  $y_1, \dots, y_n : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  bündeln wir zur **Fundamentalmatrix**:

$$Y : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}, \quad Y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t)) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) & y_{21}(t) & \dots & y_{n1}(t) \\ y_{12}(t) & y_{22}(t) & \dots & y_{n2}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1n}(t) & y_{2n}(t) & \dots & y_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

Man nennt  $Y(t)$  auch die **Wronski-Matrix** der Funktionen  $y_1, \dots, y_n$  und  $\det Y(t)$  ihre **Wronski-Determinante**. Diese sind oft nützlich:

### Korollar O3c: Unabhängigkeitskriterium dank O3B/O3M

Die folgenden vier Aussagen sind untereinander äquivalent:

- (a) Die Funktionen  $y_1, \dots, y_n : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  sind linear unabhängig über  $\mathbb{K}$ .
- (b) Die Vektoren  $y_1(t), \dots, y_n(t)$  sind linear unabhängig für jedes  $t \in I$ .
- (c) Die Vektoren  $y_1(t), \dots, y_n(t)$  sind linear unabhängig für ein  $t \in I$ .
- (d) Die Determinante erfüllt  $\det Y(t) \neq 0$  für ein und damit alle  $t \in I$ .

😊 Dieses Kriterium ist einfach und übersichtlich. In kleiner Dimension kann man die Determinante tatsächlich noch bequem ausrechnen.

## Anwendungsbeispiel zur Entkopplung

**Aufgabe:** Lösen Sie das homogene Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_1(t) + y_2(t), & y_1(0) = 2, \\ y_2'(t) = y_1(t) - y_2(t), & y_2(0) = 0. \end{cases}$$

(0) Welche Struktur hat der allgemeine Lösungsraum? (Form & Größe)

(1) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem reeller Lösungen.

(2) Formulieren Sie die allgemeine Lösung  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

(3) Lösen Sie speziell das Anfangswertproblem.

**Lösung:** (1) Wir nutzen weiterhin die Methode des scharfen Hinsehens:

Der Ansatz  $y_1 = y_2$  entkoppelt zu  $y_1' = y_2' = 0$ . Wir erhalten eine Lösung

$$u(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Ansatz  $y_1 = -y_2$  entkoppelt zu  $y_1' = -2y_1$ . Wir erhalten eine Lösung

$$v(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

😊 Dieser Trick ist so gut, dass wir ihn im nächsten Kapitel P zu einer Methode ausbauen, indem wir systematisch Eigenvektoren nutzen. P114

## Anwendungsbeispiel zur Entkopplung

Sind beide Lösungen linear unabhängig? Wir betrachten die Matrix

$$Y(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) & v_1(t) \\ u_2(t) & v_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e^{-2t} \\ 1 & -e^{-2t} \end{pmatrix}, \quad \det Y(t) = -2e^{-2t} \neq 0.$$

(2) Damit haben wir eine **Fundamentalmatrix** gefunden. Diese erfüllt

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -2e^{-2t} \\ 0 & 2e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} Y(t) \quad \text{mit} \quad Y(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Jede Lösung  $y$  hat die Form  $y = c_1 u + c_2 v = Yc$ . (3) Anfangswert:

$$y(0) = Y(0)c \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow c = Y(0)^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die gesuchte **Lösung des Anfangswertproblems** ist demnach:

$$y(t) = u(t) + v(t) = \begin{pmatrix} 1 + e^{-2t} \\ 1 - e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Probe:  $y(0) = (2, 0)$ ,  $y_1' = -2e^{-2t} = -y_1 + y_2$ ,  $y_2' = 2e^{-2t} = y_1 - y_2$ .

## Lösung durch Variation der Konstanten

Zu lösen sei nun ein **inhomogenes Differentialgleichungssystem**

$$y'(t) = A(t) y(t) + b(t).$$

Einfacher ist das zugehörige homogene DGSystem  $y'(t) = A(t) y(t)$ .  
Hierzu sei eine Fundamentalmatrix  $Y : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  bereits gefunden,

$$Y'(t) = A(t) Y(t) \quad \text{mit} \quad \det Y(t) \neq 0 \quad \text{für alle} \quad t \in I.$$

Das bedeutet, die Spalten  $y_1, \dots, y_n$  sind linear unabhängige Lösungen.  
Jede Lösung  $y : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ ,  $y' = A y$ , ist **eindeutige Linearkombination**

$$y(t) = c_1 y_1(t) + \dots + c_n y_n(t) = Y(t) c \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{K}^n.$$

Ansatz für eine Partikulärlösung durch **Variation der Konstanten**:

$$y_b(t) = c_1(t) y_1(t) + \dots + c_n(t) y_n(t) = Y(t) c(t) \quad \text{mit} \quad c : I \rightarrow \mathbb{K}^n.$$

Das ist zunächst nur ein Ansatz, aber einen Versuch ist es wert!

Das erfreuliche ist: Dieser Ansatz lohnt sich tatsächlich immer.

**Aufgabe:** Bestimmen Sie die Funktionen  $c_1, \dots, c_n$  möglichst explizit.

## Lösung durch Variation der Konstanten

**Lösung:** Ableiten von  $y_b(t) = Y(t) c(t)$  nach der Produktregel:

$$y'_b = [Yc]' = Y'c + Yc' = AYc + Yc'$$

Einsetzen in unser DGSystem  $y' = A y + b$  ergibt die Gleichung

$$AYc + Yc' \stackrel{!}{=} AYc + b.$$

Wir erhalten  $Yc' = b$ , umgeformt  $c' = Y^{-1}b$ , und integriert:

$$c(t) = \int_{\tau=t_0}^t Y(\tau)^{-1} b(\tau) d\tau + c(t_0)$$

😊 Die **Partikulärlösung**  $y_b = Yc$  löst unsere Gleichung  $y' = A y + b$ .

Den eindimensionalen Fall haben wir ab Seite M433 ausgeführt. Alternativ gelingt die Rechnung mit einem integrierendem Faktor, siehe Seite M221; exakte Differentialgleichungen stehen uns in höherer Dimension nicht mehr zur Verfügung. Für höhere Ableitungen siehe Seite N311.

Die „Variation der Konstanten“ klingt widersinnig, beschreibt aber treffend unser Vorgehen: Wir betrachten die Koeffizienten  $c_1, \dots, c_n$  nicht als Konstanten, sondern als Funktionen von  $t$ . Wir rechnen es aus, und das Ergebnis ist bemerkenswert: Dieser Kunstgriff gelingt immer!

😊 Damit lösen Sie jede inhomogene Gleichung, die allgemeine Lösungsformel gilt immer. Sie sollten diesen Lösungsweg in mehreren Übungsbeispielen schrittweise nachvollziehen: Bei der Lösung von  $Yc' = b$  und anschließender Integration sind evtl. Abkürzungen möglich.

**Satz O3D: Variation der Konstanten**

Seien  $A: I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  und  $b: I \rightarrow \mathbb{K}^n$  stetig,  $Y = (y_1, \dots, y_n): I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  eine Fundamentalmatrix der homogenen Gleichung  $Y'(t) = A(t)Y(t)$ .

Zu lösen sei das inhomogene Differentialgleichungssystem

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t) \quad \text{mit} \quad y(t_0) = y_0.$$

Zu jedem Anfangswert  $y_0 \in \mathbb{K}^n$  existiert genau eine Lösung, nämlich

$$y(t) = Y(t) \int_{\tau=t_0}^t Y(\tau)^{-1} b(\tau) d\tau + Y(t)Y(t_0)^{-1}y_0.$$

**Beweis:** Kennt man erst einmal diese Formel, so genügt ableiten!

In der Praxis nutzt man direkt den Ansatz zur Variation der Konstanten. Die allgemeine Lösung ist  $y = y_b + c_1y_1 + \dots + c_ny_n$  mit  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ .

- 😊 Explizite Formel    😊 Eindeutigkeit    😊 Stetig abhängig von  $(t_0, y_0)$   
 😊 Für  $A = 0$  ist's der HDI.    😊 Für  $b = 0$  entfällt der inhomogene Term.

**Anwendungsbeispiel zur Variation der Konstanten**

**Aufgabe:** Lösen Sie das inhomogene Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_1(t) + y_2(t) + t, & y_1(0) = 2, \\ y_2'(t) = y_1(t) - y_2(t) + t, & y_2(0) = 0. \end{cases}$$

**Lösung:** (0) In Matrixschreibweise gilt  $y'(t) = A y(t) + b(t)$  mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}.$$

Eine **Fundamentalmatrix** des homogenen Systems kennen wir [O309](#):

$$Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^{-2t} \\ 1 & -e^{-2t} \end{pmatrix}, \quad \det Y(t) = -2e^{-2t} \neq 0$$

Zur Inversion (kleiner) Matrizen ist die Cramersche Regel nützlich:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Wir erhalten:

$$Y(t)^{-1} = -\frac{e^{2t}}{2} \begin{pmatrix} -e^{-2t} & -e^{-2t} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{2t} & -e^{2t} \end{pmatrix}$$

# Anwendungsbeispiel zur Variation der Konstanten

(1) Wir berechnen die **Partikulärlösung**  $y_b(t) = Y(t) c(t)$  gemäß O3D:

$$c(t) = \int_{\tau=0}^t Y(\tau)^{-1} b(\tau) d\tau = \int_{\tau=0}^t \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{2\tau} & -e^{2\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ \tau \end{pmatrix} d\tau$$

$$= \int_{\tau=0}^t \begin{pmatrix} \tau \\ 0 \end{pmatrix} d\tau = \left[ \begin{pmatrix} \tau^2/2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{\tau=0}^t = \begin{pmatrix} t^2/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die ersehnte Partikulärlösung ist demnach:

$$y_b(t) = Y(t) c(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^{-2t} \\ 1 & -e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}$$

(2) Die **allgemeine Lösung** unserer inhomogenen DG ist gemäß O3B:

$$y(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$$

(3) Die Lösung unseres **Anfangswertproblems**  $y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  ist also:

$$y(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 + e^{-2t} \\ 1 - e^{-2t} \end{pmatrix}$$

## Verständnisfragen zum Struktursatz

**Aufgabe:** Wir betrachten folgende DGSysteme und Lösungsmengen. Welche DGSysteme sind linear? in/homogen? Welche Lösungsmengen sind affin/lineare Unterräume? Was ist gegebenenfalls die Dimension?

$$A = \left\{ \begin{array}{l} y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \text{differenzierbar} \end{array} \left| \begin{array}{l} y'_1 = y_2 - y_1 \\ y'_2 = y_1 - y_2 \end{array} \right. \right\}$$

Dieses DGSystem ist linear und zudem homogen. Wir können also direkt unseren Struktursatz O3B anwenden: Die Lösungsmenge  $A$  ist ein Untervektorraum der Dimension 2. Explizite Rechnung auf Seite O309.

$$B = \left\{ \begin{array}{l} y: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \text{differenzierbar} \end{array} \left| \begin{array}{l} y'_1 = y_2 - y_1 + 1 \\ y'_2 = y_1 - y_2 + 1 \end{array} \right. \right\}$$

Dieses DGSystem ist linear, nun jedoch inhomogen. Wir können direkt unseren Struktursatz O3B anwenden: Die Lösungsmenge  $B$  ist ein affiner Unterraum der Dimension 2, explizite Rechnung auf Seite O314.

$$C = \left\{ \begin{array}{l} y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \text{zweimal diff'bar} \end{array} \left| \begin{array}{l} y'_1 = y_1 + y_2 \\ y''_2 = y_2 \end{array} \right. \right\}$$

Dieses DGSystem ist homogen linear. Wir können den Struktursatz O3B anwenden, dazu reduzieren wir zu  $y'_2 = y_2$  und  $y'_1 = y_1 + y_2$ . Die Lösungsmenge  $C$  ist ein Untervektorraum der Dimension 3.

$$D = \left\{ \begin{array}{l} y: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \text{differenzierbar} \end{array} \left| \begin{array}{l} y'_1 = y_1 + y_2 \\ y'_2 = y_2^2 \end{array} \right. \right\}$$

Dieses DGSystem ist nicht linear. Daher greift unser Struktursatz O3B hier nicht! Die Lösungsmenge  $D$  können Sie explizit ausrechnen, siehe M13 für  $y_2$  und M22 für  $y_1$ . Die Menge  $D$  ist kein Untervektorraum!

$$E = \left\{ \begin{array}{l} y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \text{differenzierbar} \end{array} \left| \begin{array}{l} y'_1 = y_1 + y_2 \\ y'_2 = y_2^2 \end{array} \right. \right\}$$

Dieses DGSystem ist nicht linear. Daher greift unser Struktursatz O3B hier nicht! Die Lösungsmenge  $E$  ist wider Erwarten ein Untervektorraum, der Dimension 1: Wir finden  $y_2 = 0$ , siehe M13, also  $y_1(t) = c e^t$ .

 Schauen Sie hin, denken Sie scharf nach, es gibt Überraschungen!



Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper, wir denken dabei insbesondere an den Körper  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  der **reellen Zahlen** oder den Körper  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  der **komplexen Zahlen**. Eine **Matrix**  $A$  der Größe  $m \times n$  über  $\mathbb{K}$  ist eine Abbildung

$$A : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{K} : (i, j) \mapsto a(i, j) = a_{i,j} = a_{ij}.$$

Die Menge aller  $m \times n$ -Matrizen bezeichnen wir deshalb mit  $\mathbb{K}^{m \times n}$ .

Wir schreiben die Matrix  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  bequem als rechteckiges Schema

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mit  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten, kurz  $A = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$  oder  $A = (a_{ij})_{ij}$ .

In dieser Schreibweise ist  $v \in \mathbb{K}^{m \times 1}$  ein **Spaltenvektor** mit  $m$  Zeilen.

Entsprechend ist  $w \in \mathbb{K}^{1 \times n}$  ein **Zeilenvektor** mit  $n$  Spalten.

Jede Matrix  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  können wir auffassen als Familie  $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$  von Zeilenvektoren  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{K}^{1 \times n}$ , ebenso als Familie

$A = (v_1, \dots, v_n)$  von Spaltenvektoren  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^{m \times 1}$ .

Zu  $A = (a_{ij})_{ij}$  definieren wir die **transponierte Matrix**  $A^T = (a_{ij})_{ji}$ .

Dies definiert die Bijektion  $\mathbb{K}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{K}^{n \times m} : A \mapsto A^T$  mit  $(A^T)^T = A$ .

Genau dann gilt  $A^T = A$ , wenn die Matrix  $A$  **symmetrisch** ist,

also quadratisch ist ( $m = n$ ) und  $a_{ij} = a_{ji}$  für alle  $i, j = 1, \dots, n$  erfüllt.

Ebenso definieren wir die **komplex-konjugierte Matrix**  $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{ij}$ .

Dies definiert die Bijektion  $\mathbb{K}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{K}^{m \times n} : A \mapsto \bar{A}$  mit  $\overline{\bar{A}} = A$ .

Genau dann gilt  $\bar{A} = A$ , wenn  $A$  reell ist, also  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  für alle  $i, j$  gilt.

Die **Einheitsmatrix**  $E = 1_{n \times n}$  der Größe  $n \times n$  ist gegeben durch

$$1_{n \times n} = (e_{ij})_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Sie hat als Spalten die **Spalten-Einheitsvektoren**  $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{K}^{n \times 1}$ , und als Zeilen die **Zeilen-Einheitsvektoren**  $e_1^T, \dots, e_n^T \in \mathbb{K}^{1 \times n}$ .

Matrizen passender Größe können wir addieren und multiplizieren:

$$+ : \mathbb{K}^{m \times n} \times \mathbb{K}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{K}^{m \times n} : (A, B) \mapsto C = A + B, \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

$$* : \mathbb{K}^{p \times q} \times \mathbb{K}^{q \times r} \rightarrow \mathbb{K}^{p \times r} : (A, B) \mapsto C = AB, \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}.$$

Die **Addition** definiert eine abelsche Gruppe  $(\mathbb{K}^{m \times n}, +)$ .

Die **Multiplikation**  $*$  ist assoziativ und distributiv über die Addition.

Zu jeder Matrix  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  ist die Einheitsmatrix  $1_{m \times m}$  links-neutral, also  $1_{m \times m} * A = A$ , und  $1_{n \times n}$  ist rechts-neutral, also  $A * 1_{n \times n} = A$ .

Konjugation erhält die Multiplikation, das heißt es gilt  $\overline{A * B} = \overline{A} * \overline{B}$ .

Transposition hingegen kehrt die Reihenfolge um,  $(A * B)^T = B^T * A^T$ .

Zudem haben wir die **Multiplikation mit Skalaren**:

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{K}^{m \times n} : (\lambda, A) \mapsto B = \lambda A, \quad b_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Für alle  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  gilt  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$  und  $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$  sowie  $1A = A$  und  $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$  und  $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ .

Matrizen gleicher Größe bilden demnach einen Vektorraum  $(\mathbb{K}^{m \times n}, +, \cdot)$ .

Quadratische Matrizen bilden einen Ring  $(\mathbb{K}^{n \times n}, +, *)$  bzw.  $\mathbb{K}$ -Algebra.

Wir identifizieren den Vektorraum  $\mathbb{K}^n$  mit  $\mathbb{K}^{n \times 1}$  (Spaltenvektoren).

Hierauf operieren Matrizen  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  durch Multiplikation von links:

$$* : \mathbb{K}^{m \times n} \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m : (A, v) \mapsto Av.$$

Das dient zur bequemen Darstellung linearer Gleichungssysteme

$$Ax = y.$$

Ein effizientes Lösungsverfahren bietet der **Gauß-Algorithmus**.

Quadratische Matrizen (mit  $m = n$ ) bilden einen Ring  $(\mathbb{K}^{n \times n}, +, \cdot)$ .

Eine Matrix  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  heißt **invertierbar**, wenn es eine Matrix  $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$  gibt, sodass  $AB = BA = E$ . In diesem Fall ist  $B$  eindeutig und wird die zu  $A$  **inverse Matrix** genannt, geschrieben  $B = A^{-1}$ .

Das Gleichungssystem  $Ax = y$  wird dann gelöst durch  $x = A^{-1}y$ .

Die invertierbaren Matrizen im Ring  $\mathbb{K}^{n \times n}$  bilden demnach eine Gruppe, genannt die **allgemeine lineare Gruppe** der  $n \times n$ -Matrizen über  $\mathbb{K}$ , geschrieben  $GL(n; \mathbb{K})$  oder  $GL_n(\mathbb{K})$ , englisch **general linear group**.

Matrizen dienen insbesondere zur Darstellung linearer Abbildungen.

Eine Abbildung  $f: V \rightarrow W$  zwischen  $\mathbb{K}$ -Vektorräumen heißt **linear**, wenn  $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$  gilt für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  und  $u, v \in V$ .

Beispiel: Für  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  ist die Abbildung  $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  mit  $v \mapsto Av$  linear. Wir können umgekehrt jede lineare Abbildung so als Matrix darstellen:

Jede lineare Abbildung  $f: V \rightarrow W$  ist bereits eindeutig festgelegt durch die Bilder der Elemente einer Basis von  $V$ .

Genauer: Sei  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  eine Basis von  $V$  und  $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$  eine Basis von  $W$ . Dann existieren Konstanten  $a_{ij} \in \mathbb{K}$  sodass

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i \quad \text{für alle } j = 1, \dots, n.$$

Hierbei sind die  $a_{ij}$  eindeutig bestimmt durch  $f$  sowie  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$ . So ordnen wir der linearen Abbildung  $f$  ihre Matrix  $A$  zu:

$$f \mapsto {}_{\mathcal{C}}(f)_{\mathcal{B}} := A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{K}^{m \times n}$$

Abbildungen  $f, g: V \rightarrow W$  addieren wir durch

$$(f + g)(v) = f(v) + g(v) \quad \text{für alle } v \in V.$$

Abbildungen  $f: U \rightarrow V$  und  $g: V \rightarrow W$  komponieren wir durch

$$(g \circ f)(u) = g(f(u)) \quad \text{für alle } u \in U.$$

Skalarmultiplikation von  $f: U \rightarrow V$  mit  $\lambda \in \mathbb{K}$  definieren wir durch

$$(\lambda \cdot f)(u) = \lambda \cdot f(u) \quad \text{für alle } u \in U.$$

Sind  $f, g$  linear, dann auch Summe, Komposition, Skalarmultiplikation.

Diese Rechenoperationen für lineare Abbildungen übersetzen sich direkt in die entsprechenden Rechenoperationen für Matrizen:

$$\begin{aligned} {}_{\mathcal{C}}(\lambda \cdot f)_{\mathcal{B}} &= \lambda \cdot {}_{\mathcal{C}}(f)_{\mathcal{B}} \\ {}_{\mathcal{C}}(f + g)_{\mathcal{B}} &= {}_{\mathcal{C}}(f)_{\mathcal{B}} + {}_{\mathcal{C}}(g)_{\mathcal{B}} \\ {}_{\mathcal{D}}(g \circ f)_{\mathcal{B}} &= {}_{\mathcal{D}}(g)_{\mathcal{C}} * {}_{\mathcal{C}}(f)_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

Damit können wir den Matrizenkalkül für lineare Abbildungen nutzen!

Dank Übersetzung der linearen Abbildung  $f: V \rightarrow W$  in eine Matrix löst der Gauß–Algorithmus die folgenden grundlegenden Probleme:

- 1 Bestimmung des Kerns  $\text{Kern}(f) = \{ v \in V \mid f(v) = 0 \}$ .
- 2 Bestimmung des Bildes  $\text{Bild}(f) = \{ f(v) \mid v \in V \}$ .

Beides sind jeweils Untervektorräume und ihre Berechnung gelingt durch explizite Angabe einer Basis. Insbesondere lässt sich so der **Rang**  $\dim_{\mathbb{K}} \text{Bild}(f)$  und der **Defekt**  $\dim_{\mathbb{K}} \text{Kern}(f)$  ausrechnen.

Für jede lineare Abbildungen  $f: V \rightarrow W$  gilt die **Dimensionsformel**

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{Kern}(f) + \dim_{\mathbb{K}} \text{Bild}(f) = \dim_{\mathbb{K}} V.$$

😊 Kennt man zwei dieser Dimensionen, so auch die dritte. Das reduziert bei vielen Rechnungen den Aufwand erheblich.

- (1) Es gibt  $f: V \rightarrow W$  lineare und surjektiv gdw  $\dim V \geq \dim W$ .
- (2) Es gibt  $f: V \rightarrow W$  lineare und injektiv gdw  $\dim V \leq \dim W$ .
- (3) Es gibt  $f: V \rightarrow W$  lineare und bijektiv gdw  $\dim V = \dim W$ .
- (4) Für  $\dim V = \dim W < \infty$  gilt  $f$  injektiv gdw  $f$  surjektiv.

### Satz O3E: Definition und Eigenschaften der Determinante

In jeder Dimension  $n \in \mathbb{N}$  existiert genau eine multilineare, alternierende, normierte Abbildung  $\det = \det_{\mathbb{K}}^n: \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}$ . Diese Abbildung nennen wir die **Determinante**. Sie erfreut sich folgender Eigenschaften:

- 1 Es gilt  $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1),1} \cdot a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$ . (**Leibniz**)
- 2 Die Determinante ist transpositionsinvariant:  $\det(A^T) = \det(A)$ .
- 3 Die Determinante ist multiplikativ:  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ .
- 4 Genau dann ist  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  invertierbar, wenn  $\det(A) \neq 0$  gilt.
- 5 Genauer gilt  $A\tilde{A} = \tilde{A}A = \det(A)E$ , also  $A^{-1} = \det(A)^{-1}\tilde{A}$ . (**Cramer**)

Zu  $A = (a_1, \dots, a_n)$  definieren wir die **adjunkte Matrix**  $A' = \text{adj}(A)$  durch die Cofaktoren  $a'_{ij} := \det(a_1, \dots, a_{i-1}, e_j, a_{i+1}, \dots, a_n)$ .

- 😊 Explizite polynomielle Formel. 😊 Sofort praktisch für kleine  $n$ .  
 😞 Naive Anwendung der Leibniz–Formel ist für große  $n$  aufwändig ( $n!$ ).  
 😊 Eine effiziente Berechnung gelingt mit dem Gauß–Algorithmus ( $n^3$ ).

Sei  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  eine Matrix,  $v \in \mathbb{K}^n$  ein Vektor,  $\lambda \in \mathbb{K}$  ein Skalar.  
Wir nennen  $v$  einen **Eigenvektor** von  $A$  zum **Eigenwert**  $\lambda$ , wenn

$$Av = \lambda v \quad \text{und} \quad v \neq 0.$$

Die Menge  $V_\lambda = \{ v \in \mathbb{K}^n \mid Av = \lambda v \}$  heißt **Eigenraum** zu  $\lambda$ .  
Genau dann ist  $\lambda \in \mathbb{K}$  ein Eigenwert von  $A$ , wenn  $\dim V_\lambda > 0$  gilt,  
d.h.  $(A - \lambda E)v = 0$  hat nicht-triviale Lösungen, also  $\det(A - \lambda E) = 0$ .

Das **charakteristische Polynom** von  $A$  ist  $p_A(\lambda) := \det(A - \lambda E)$ .  
Somit sind die Nullstellen von  $p_A$  gerade die Eigenwerte von  $A$ .  
Für ihre algebraische Vielfachheit  $k_\lambda$  gilt stets  $1 \leq \dim V_\lambda \leq k_\lambda$ .  
Hierbei ist  $\dim V_\lambda < k_\lambda$  durchaus möglich: Der **Jordan-Block**

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

hat den Eigenwert  $\lambda$  mit algebraischer Vielfachheit  $k_\lambda = n$ ,  
aber der Eigenraum  $V_\lambda = \mathbb{K}e_1$  hat nur Dimension  $\dim V_\lambda = 1$ .

Zwei Matrizen  $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$  heißen **konjugiert** oder **ähnlich** wenn es eine invertierbare Matrix  $T \in \mathbb{K}^{n \times n}$  gibt, sodass  $B = T^{-1}AT$  gilt.  
(Die Bedingung  $B = T^{-1}AT$  ist äquivalent zu  $A = TBT^{-1}$ .)

Beispiel: Wir können jede lineare Abbildung  $f: V \rightarrow V$  bezüglich verschiedener Basen  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  von  $V$  darstellen. Die zugehörigen Matrizen  $A = {}_{\mathcal{A}}(f)_{\mathcal{A}}$  und  $B = {}_{\mathcal{B}}(f)_{\mathcal{B}}$  sind i.A. verschieden, aber immer ähnlich: Es gilt  $B = T^{-1}AT$  mit der Basiswechselmatrix  $T = {}_{\mathcal{B}}(\text{id}_V)_{\mathcal{A}}$ .

Ist  $v$  ein Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$ , dann ist  $T^{-1}v$  ein Eigenvektor von  $B$  zum selben Eigenwert, und umgekehrt.  
Insbesondere haben  $A$  und  $B$  dieselben Eigenwerte.

Allgemeiner sind sogar ihre charakteristischen Polynome gleich:

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda E) &= \det(T^{-1}AT - \lambda E) \\ &= \det[T^{-1}(A - \lambda E)T] \\ &= \det(T^{-1}) \det(A - \lambda E) \det(T) = \det(A - \lambda E), \end{aligned}$$

insbesondere auch Determinante  $\det A = \det B$  und Spur  $\text{tr } A = \text{tr } B$ .

Eine Matrix  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  heißt über  $\mathbb{K}$  **diagonalisierbar**, wenn es eine Basis  $v_1, \dots, v_n$  des  $\mathbb{K}^n$  aus Eigenvektoren von  $A$  gibt, also  $Av_j = \lambda_j v_j$ . Die Basiswechselmatrix  $T = (v_1, \dots, v_n)$  ist invertierbar, und es gilt

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Gilt umgekehrt  $T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , so ist  $v_1 = Te_1, \dots, v_n = Te_n$  eine Basis des  $\mathbb{K}^n$  aus Eigenvektoren, und zwar gilt  $Av_j = \lambda_j v_j$ .

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig. Das vereinfacht konkrete Rechnungen und allgemeine Überlegungen.

Genau dann ist  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  über  $\mathbb{K}$  diagonalisierbar, wenn gilt:

- 1 Das charakteristische Polynom  $p_A$  zerfällt über  $\mathbb{K}$  in Linearfaktoren, das heißt  $p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{k_m}$  mit Nullstellen  $\lambda_i \in \mathbb{K}$  der Vielfachheiten  $k_i \geq 1$  für  $i = 1, \dots, m$  sowie  $\lambda_i \neq \lambda_j$  für  $i \neq j$ .
- 2 Für jeden Eigenwert erreicht die geometrische die algebraische Vielfachheit, das heißt  $\dim \ker(A - \lambda_i E) = k_i$  für alle  $i = 1, \dots, m$ .

Nicht alle Matrizen sind diagonalisierbar, etwa Jordan–Blöcke. O325

Wir betrachten daher auch folgende schwächere Bedingung:

Eine Matrix  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  heißt über  $\mathbb{K}$  **trigonalisierbar**, wenn es eine invertierbare Matrix  $T \in \mathbb{K}^{n \times n}$  gibt, sodass

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich gilt dann  $p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n)$ , das heißt, das charakteristische Polynom zerfällt in Linearfaktoren über  $\mathbb{K}$ .

Hierzu gilt die Umkehrung: Genau dann ist  $A$  über  $\mathbb{K}$  trigonalisierbar, wenn das charakteristische Polynom über  $\mathbb{K}$  in Linearfaktoren zerfällt.

Speziell über dem Körper  $\mathbb{C}$  gilt dies immer: Nach dem Fundamentalsatz der Algebra (F3C) zerfällt jedes Polynom über  $\mathbb{C}$  in Linearfaktoren.

Besser noch: Ist  $A$  trigonalisierbar, so ist  $A$  sogar **jordanisierbar**!

 Zur Vertiefung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §Z.4.

Gegeben sei ein (reelles oder komplexes) Polynom

$$f(x) = \sum_{j=0}^k a_j x^j = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k \in \mathbb{K}[x].$$

Darin können wir jede Matrix  $X \in \mathbb{K}^{n \times n}$  einsetzen:

$$f(X) = \sum_{j=0}^k a_j X^j = a_0 E + a_1 X + \cdots + a_k X^k \in \mathbb{K}^{n \times n}.$$

Das gilt allgemeiner für jede Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Auch hier können wir jede Matrix  $X \in \mathbb{K}^{n \times n}$  einsetzen:

$$f(X) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j X^j = a_0 E + a_1 X + a_2 X^2 + \dots$$

Einzigste Voraussetzung ist – wie immer – die Konvergenz!

## Die euklidische Norm für Vektoren und Matrizen

Für Vektoren  $v \in \mathbb{K}^n$  nutzen wir die **euklidische Norm**:

$$|v| = \sqrt{|v_1|^2 + \cdots + |v_n|^2}$$

Für Matrizen  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  definieren wir genauso die **Matrixnorm**

$$|A| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$$

Dies ist tatsächlich eine Norm auf dem Vektorraum  $\mathbb{K}^{m \times n}$ , das heißt:

- 1 Es gilt  $|A| \geq 0$  für alle  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ , und  $|A| = 0$  nur für  $A = 0$ .
- 2 Es gilt  $|\lambda A| = |\lambda| \cdot |A|$  für alle  $\lambda \in \mathbb{K}$  und  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ .
- 3 Es gilt  $|A + B| \leq |A| + |B|$  für alle  $A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ .

Die Norm  $|A - B|$  misst den Abstand der Matrizen  $A$  und  $B$ .

Aus (3) folgt  $|A - B| \geq ||A| - |B||$ . (Übung: Zeigen Sie dies.)

Konvergenz von Matrizen  $A_k \rightarrow A$  ist definiert durch  $|A_k - A| \rightarrow 0$ .

Dies ist gleichbedeutend mit komponentenweise Konvergenz.

Die Matrixnorm ist verträglich mit der Vektornorm:

**4** Es gilt  $|A \cdot v| \leq |A| \cdot |v|$  für alle  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  und  $v \in \mathbb{K}^n$ .

Allgemeiner ist die Matrixnorm submultiplikativ:

**5** Es gilt  $|A \cdot B| \leq |A| \cdot |B|$  für alle  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  und  $B \in \mathbb{K}^{n \times p}$ .

Bei Potenzen gilt insbesondere  $|A^k| \leq |A|^k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ .

**Nachrechnen:** Dank CSU gilt  $|u \cdot v| \leq |u| \cdot |v|$  für  $u, v \in \mathbb{K}^n$ .

Seien  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{K}^{1 \times n}$  die Zeilen der Matrix  $A$ . Dann gilt:

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \cdot v = \begin{pmatrix} a_1 \cdot v \\ \vdots \\ a_m \cdot v \end{pmatrix}$$

Hieraus folgt die erste Ungleichung:

$$|Av|^2 = |a_1 \cdot v|^2 + \dots + |a_m \cdot v|^2 \leq |a_1|^2 |v|^2 + \dots + |a_m|^2 |v|^2 = |A|^2 \cdot |v|^2$$

Die Ungleichung  $|A \cdot B| \leq |A| \cdot |B|$  folgt ebenso, spaltenweise über  $B$ .

## Inversion durch geometrische Reihe

### Satz O3F: Einsetzen einer Matrix in eine Potenzreihe

Sei  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $\rho > 0$ .

Für jede Matrix  $X \in \mathbb{K}^{n \times n}$  mit Norm  $|X| < \rho$  konvergiert die Reihe  $f(X) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$  absolut in  $\mathbb{K}^{n \times n}$  und damit komponentenweise, denn sie wird majorisiert durch  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k X^k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot |X|^k < \infty$ .

**Beispiel:** Wir betrachten die geometrische Reihe. Für  $|x| < 1$  gilt

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} x^j = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = (1 - x)^{-1},$$

denn  $(1 - x)(1 + x + x^2 + \dots + x^{k-1}) = 1 - x^k \rightarrow 1$  für  $k \rightarrow \infty$ .

Gleiches gilt auch für jede Matrix  $X \in \mathbb{K}^{n \times n}$ : Für  $|X| < 1$  gilt

$$f(X) = \sum_{j=0}^{\infty} X^j = 1 + X + X^2 + X^3 + \dots = (1 - X)^{-1}.$$

😊 Allgemein und explizit. 😊 Beweis einfach durch Nachrechnen!

😊 Endliche Summen können zur Approximation genutzt werden.

😊 Leichtere Spezialfälle löst man besser per Gauß-Algorithmus.



Jedes lineare DGSystem mit **konstanten Koeffizienten** hat die Form

$$\begin{cases} y_1'(t) = a_{11} y_1(t) + \cdots + a_{1n} y_n(t) + b_1(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = a_{n1} y_1(t) + \cdots + a_{nn} y_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

Wir bündeln dies prägnant zu einer vektorwertigen Gleichung:

$$y'(t) = A y(t) + b(t)$$

Hierbei ist  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  eine Matrix und  $b: I \rightarrow \mathbb{K}^n$  eine stetige Abbildung. Die **Koeffizientenmatrix**  $A$  ist hier konstant, d.h. unabhängig von  $t$ . Der **Störterm**  $b(t)$  hingegen darf weiterhin von  $t$  abhängen.

Die zugehörige **homogene Gleichung** erhalten wir für  $b = 0$ :

$$y'(t) = A y(t).$$

😊 Diese geschickte Schreibweise spart Arbeit und betont die Struktur: Sie verschafft uns Übersicht und macht den Blick frei fürs Wesentliche.

## Die Exponentialfunktion für Matrizen

**Erinnerung:** Sei  $a \in \mathbb{C}$ . Wir suchen eine Lösung  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  der eindimensionalen Differentialgleichung  $y'(t) = a y(t)$  mit  $y(0) = 1$ . Hierzu gibt es genau eine Lösung, nämlich die Funktion  $y(t) = e^{at}$ . Wir nutzen hierzu dankend die gute alte Exponentialfunktion

$$\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

**Allgemeiner:** Sei nun  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  eine Matrix (zuvor  $n = 1$ , jetzt  $n \geq 2$ ). Wir suchen  $Y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$  mit  $Y'(t) = A Y(t)$  und  $Y(0) = E$ . Als Lösung vermuten wir auch hier die Funktion  $Y(t) = e^{tA}$ . Wir bräuchten hierzu die Exponentialfunktion für Matrizen

$$\exp: \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}, \quad \exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3!} + \dots$$

😊 Das sieht verwegen aus, aber es funktioniert ganz wunderbar! Der folgende Satz garantiert, dass diese Exponentialreihe tatsächlich für jede Matrix konvergiert und alle ersehnten Eigenschaften hat.

## Satz O3G: Exponentialfunktion für Matrizen

Für jede Matrix  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  konvergiert die Exponentialreihe

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = E + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{4!}A^4 + \dots$$

Dies definiert die Matrix-Exponentialfunktion  $\exp: \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ .

- 1 Die Nullmatrix wird auf die Einheitsmatrix  $\exp(0) = E$  abgebildet.
- 2 Aus  $AB = BA$  folgt  $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$ .
- 3 Insbesondere gilt  $\exp(A)\exp(-A) = \exp(A-A) = \exp(0) = E$ .  
Somit ist die Matrix  $\exp(A)$  invertierbar mit  $\exp(-A) = \exp(A)^{-1}$ .
- 4 Die Zuordnung  $t \mapsto \exp(tA)$  definiert eine differenzierbare Kurve  $Y: \mathbb{R} \rightarrow \text{GL}_n \mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}^{n \times n}$  mit  $0 \mapsto E$  und  $\frac{d}{dt} \exp(tA) = A \exp(tA)$ .

**Übung:** Rechnen Sie dies nach wie für die reelle Exponentialfunktion.

 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §1.14, sowie Seite F222ff.

## Satz O3G: Exponentialfunktion für Matrizen

Die Exponentialfunktion verträgt sich zudem mit Matrix-Operationen:

- 5 komplexe Konjugation  $\exp(\overline{A}) = \overline{\exp(A)}$
- 6 Transposition  $\exp(A^\top) = \exp(A)^\top$
- 7 Konjugation  $\exp(PAP^{-1}) = P \exp(A) P^{-1}$
- 8 Determinante  $\det(\exp(A)) = \exp(\text{tr}(A))$
- 9 Euler-Grenzwert  $(E + \frac{1}{n}A)^n \rightarrow \exp(A)$  für  $n \rightarrow \infty$

Für (5) nutzen wir  $\overline{A^k} = \overline{A}^k$ , für (6) entsprechend  $(A^\top)^k = (A^k)^\top$ , und für (7) schließlich  $(PAP^{-1})^k = PAP^{-1} \dots PAP^{-1} = PA^k P^{-1}$ . Formel (8) ist klar für Dreiecksmatrizen:

$$\det \exp \begin{pmatrix} a_{11} & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e^{a_{11}} & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & e^{a_{nn}} \end{pmatrix} = e^{a_{11}} \dots e^{a_{nn}} = e^{a_{11} + \dots + a_{nn}}$$

Für den allgemeinen Fall nutzen wir unser Wissen aus der linearen Algebra: Jede Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ist trigonalisierbar, das heißt, es existiert  $P \in \text{GL}_n \mathbb{C}$  sodass  $PAP^{-1}$  eine obere Dreiecksmatrix ist. Determinante und Spur bleiben dank (7) bei Konjugation unverändert:

$$\det(\exp(A)) = \det(\exp(PAP^{-1})) = \exp(\text{tr}(PAP^{-1})) = \exp(\text{tr}(A))$$

**Aufgabe:** Berechnen Sie die Exponentialfunktion  $\exp(A)$  einer Diagonalmatrix  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  sowie  $\exp(tA)$  für  $t \in \mathbb{R}$ .

**Lösung:** (0) Die Potenzen der Matrix  $A$  sind leicht zu berechnen:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \implies A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

(1) Hieraus berechnen wir ebenso leicht die Exponentialreihe:

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

(2) Mit dem Zeitparameter  $t \in \mathbb{R}$  im Exponenten erhalten wir:

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix}$$

**Aufgabe:** Berechnen Sie  $\exp(A)$  einer  $2 \times 2$ -Dreiecksmatrix.

**Lösung:** (0) Wir betrachten eine obere  $2 \times 2$ -Dreiecksmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & (a+b)c \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & (a^2 + ab + b^2)c \\ 0 & b^3 \end{pmatrix}, \dots$$

(1) Wir nehmen zunächst  $a \neq b$  an. Per Induktion finden wir dann

$$A^k = \begin{pmatrix} a^k & \frac{a^k - b^k}{a-b} c \\ 0 & b^k \end{pmatrix} \implies \exp \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a & \frac{e^a - e^b}{a-b} c \\ 0 & e^b \end{pmatrix}.$$

(2) Resonanz: Für  $b \rightarrow a$  gilt  $\frac{e^a - e^b}{a-b} \rightarrow e^a$ . Für  $a = b$  finden wir tatsächlich:

$$A^k = \begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1}c \\ 0 & a^k \end{pmatrix} \implies \exp \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a & ce^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix}.$$

Für große Matrizen ist diese Rechnung ebenso möglich, aber mühsam. In Kapitel P werden wir hierfür Eigen- und Hauptvektoren nutzen. Diese Werkzeuge erweisen sich auch hier als sehr effizient.

**Aufgabe:** Berechnen Sie  $\exp(tN)$  einer nilpotenten Jordan–Matrix

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots$$

**Lösung:** (1) Es gilt  $N^4 = 0$ . Die Exponentialreihe bricht hier ab:

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{N^0}{0!} + \frac{N^1}{1!} + \frac{N^2}{2!} + \frac{N^3}{3!} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Mit dem Zeitparameter  $t \in \mathbb{R}$  im Exponenten erhalten wir:

$$\exp(tN) = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe:** Berechnen Sie  $\exp(tB)$  einer beliebigen Jordan–Matrix

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}.$$

**Lösung:** (1) Dank  $B = \lambda I + N$  und  $IN = NI$  erhalten wir

$$\exp(B) = \exp(\lambda I + N) = \exp(\lambda I) \exp(N) = e^\lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Mit dem Zeitparameter  $t \in \mathbb{R}$  im Exponenten erhalten wir:

$$\exp(tB) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## Korollar O3H: Lösung durch Exponentialfunktion

Zu gegebenen Matrizen  $A, Y_0 \in \mathbb{K}^{n \times n}$  hat die Differentialgleichung

$$Y'(t) = AY(t) \quad \text{mit} \quad Y(t_0) = Y_0$$

genau eine Lösung  $Y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ , nämlich  $Y(t) = \exp[(t - t_0)A]Y_0$ .

Ebenso hat zu jedem  $y_0 \in \mathbb{K}^n$  die vektorwertige Differentialgleichung

$$y'(t) = Ay(t) \quad \text{mit} \quad y(t_0) = y_0$$

genau eine Lösung  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n$ , nämlich  $y(t) = \exp[(t - t_0)A]y_0$ .

Somit hat die Differentialgleichung  $y' = Ay$  als Lösungsmenge  $L_0 = \{ e^{(t-t_0)A} y_0 \mid y_0 \in \mathbb{K}^n \}$  einen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum der Dimension  $n$ .

- 😊 Für einfache Matrizen können wir  $\exp(tA)$  explizit berechnen (s.o.).
- 😞 Für komplizierte Matrizen  $A$  ist leider auch  $\exp(tA)$  kompliziert.
- 😊 Vereinfachung mit linearer Algebra durch Eigen-/Hauptvektoren!

## Beispiel: ein Jordan-Block

**Aufgabe:** Lösen Sie folgende gekoppelte Differentialgleichungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' = \lambda y_1 + y_2 \\ y_2' = \lambda y_2 + y_3 \\ y_3' = \lambda y_3 + y_4 \\ y_4' = \lambda y_4 \end{array} \right\} \iff \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

**Lösung:** Die Exponentialfunktion liefert eine Fundamentalmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \exp(tA) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zur Probe rechnet man die vier Fundamentallösungen direkt nach:

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t e^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} e^{\lambda t} \\ t e^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{t^3}{3!} e^{\lambda t} \\ \frac{t^2}{2} e^{\lambda t} \\ t e^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

- 😊 Das AWP  $y' = Ay$  mit  $y(0) = y_0$  wird gelöst durch  $y(t) = \exp(tA)y_0$ .

**Aufgabe:** Lösen Sie das DGSytem  $y'_1 = -y_2$  und  $y'_2 = y_1$ .

**Lösung:** Wir lösen das Differentialgleichungssystem  $y' = A y$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots$$

Hieraus berechnen wir mühelos die Matrix-Exponentialfunktion:

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots & -t + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^5}{5!} + \dots \\ t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots & 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Kurzum:

$$Y(t) = \exp \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Die Probe ist leicht: Für die Ableitung gilt wie gewünscht

$$\frac{d}{dt} Y(t) = \begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix} = A Y(t).$$

😊 Das AWP  $y' = A y$  mit  $y(0) = y_0$  wird gelöst durch  $y(t) = \exp(tA) y_0$ .

**Aufgabe:** Lösen Sie das DGSytem  $y'_1 = y_2$  und  $y'_2 = y_1$ .

**Lösung:** Wir lösen das Differentialgleichungssystem  $y' = A y$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots$$

Hieraus berechnen wir mühelos die Matrix-Exponentialfunktion:

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \dots & t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots \\ t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots & 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$$

Kurzum:

$$Y(t) = \exp \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$$

Die Probe ist leicht: Für die Ableitung gilt wie gewünscht

$$\frac{d}{dt} Y(t) = \begin{pmatrix} \sinh t & \cosh t \\ \cosh t & \sinh t \end{pmatrix} = A Y(t).$$

😊 Das AWP  $y' = A y$  mit  $y(0) = y_0$  wird gelöst durch  $y(t) = \exp(tA) y_0$ .

😊 Wir erkennen einen schönen Zusammenhang zwischen der Matrix-Exponentialfunktion und der Näherung durch das Euler–Verfahren!

**Aufgabe:** (1) Berechnen Sie die Lösung  $x : [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}^2$  des AWP

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2, & x_1(0) = 1, \\ \dot{x}_2 = x_1, & x_2(0) = 0. \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die Matrix-Exponentialfunktion  $x(t) = \exp(tA)x_0$ .

(b) Vergleichen Sie dies mit der numerischen Näherung durch das Euler–Verfahren mit Polygonzügen zu Schrittweiten  $\Delta t = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ .

(2) Untersuchen Sie ebenso die Lösung  $x : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$  des AWP

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(-2) = \sinh(-2), \\ \dot{x}_2 = x_1, & x_2(-2) = \cosh(-2). \end{cases}$$

(3) Zu lösen sei  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  mit konstanter Matrix  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ .

Konvergieren die Euler–Näherungen zum Anfangswert  $x(t_0) = x_0$  gegen die exakte Lösung  $x : [t_0, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{K}^n$  mit  $x(t) = \exp[(t - t_0)A]x_0$ ?

**Lösung:** (a) Die Exponentialfunktion haben wir oben berechnet:

$$X(t) = \exp \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \implies x(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$X(t) = \exp \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t & -\sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \implies x(t) = \begin{pmatrix} \sinh t \\ \cosh t \end{pmatrix}$$

(b) Die Graphiken zeigen die Polygonzüge des Euler–Verfahrens.

(3) Wir betrachten die Schrittweite  $\Delta t = T/N$ , also  $t_k = t_0 + kT/N$ .

Die Euler–Approximation  $\tilde{x} : [t_0, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{K}^n$  interpoliert die Werte

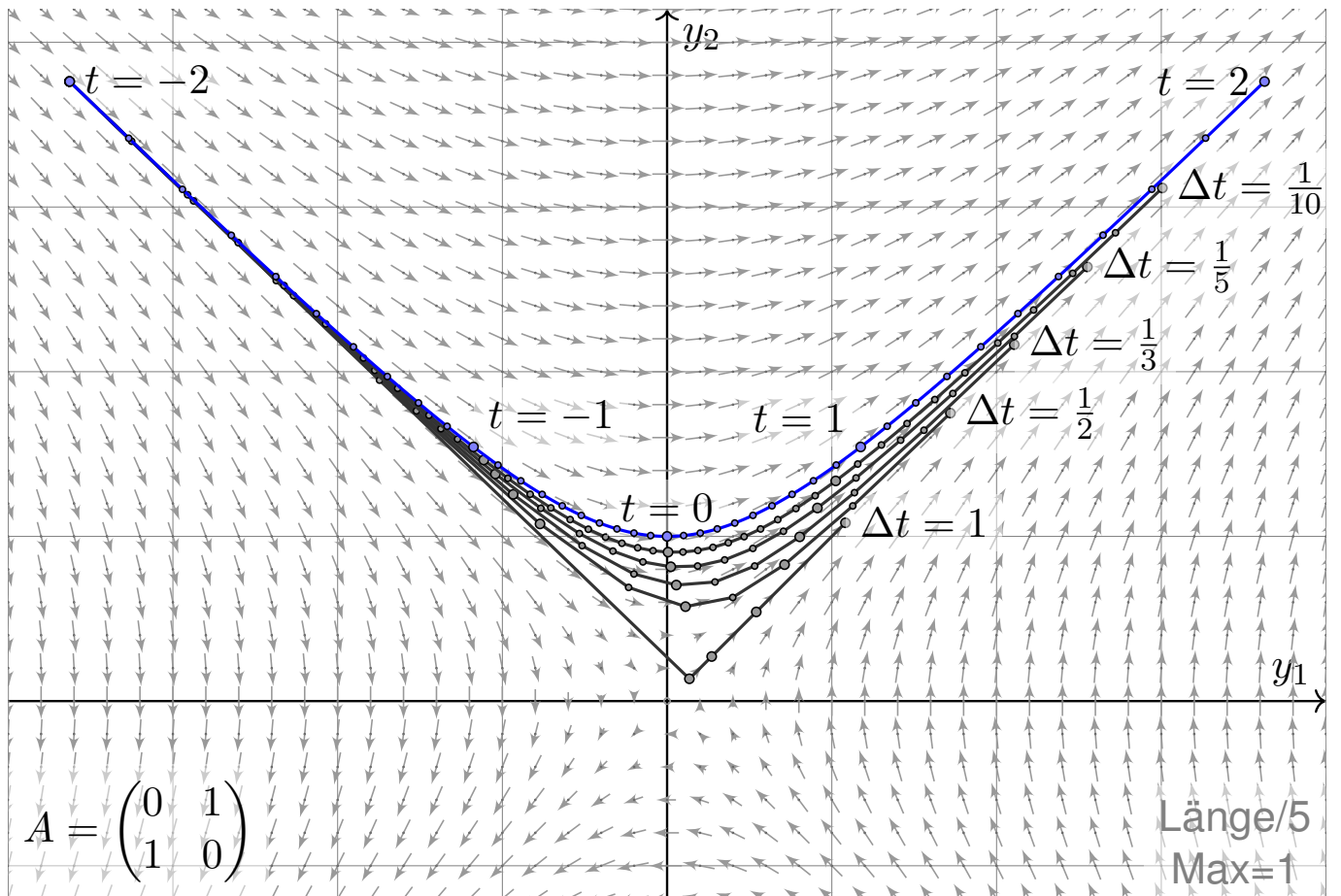
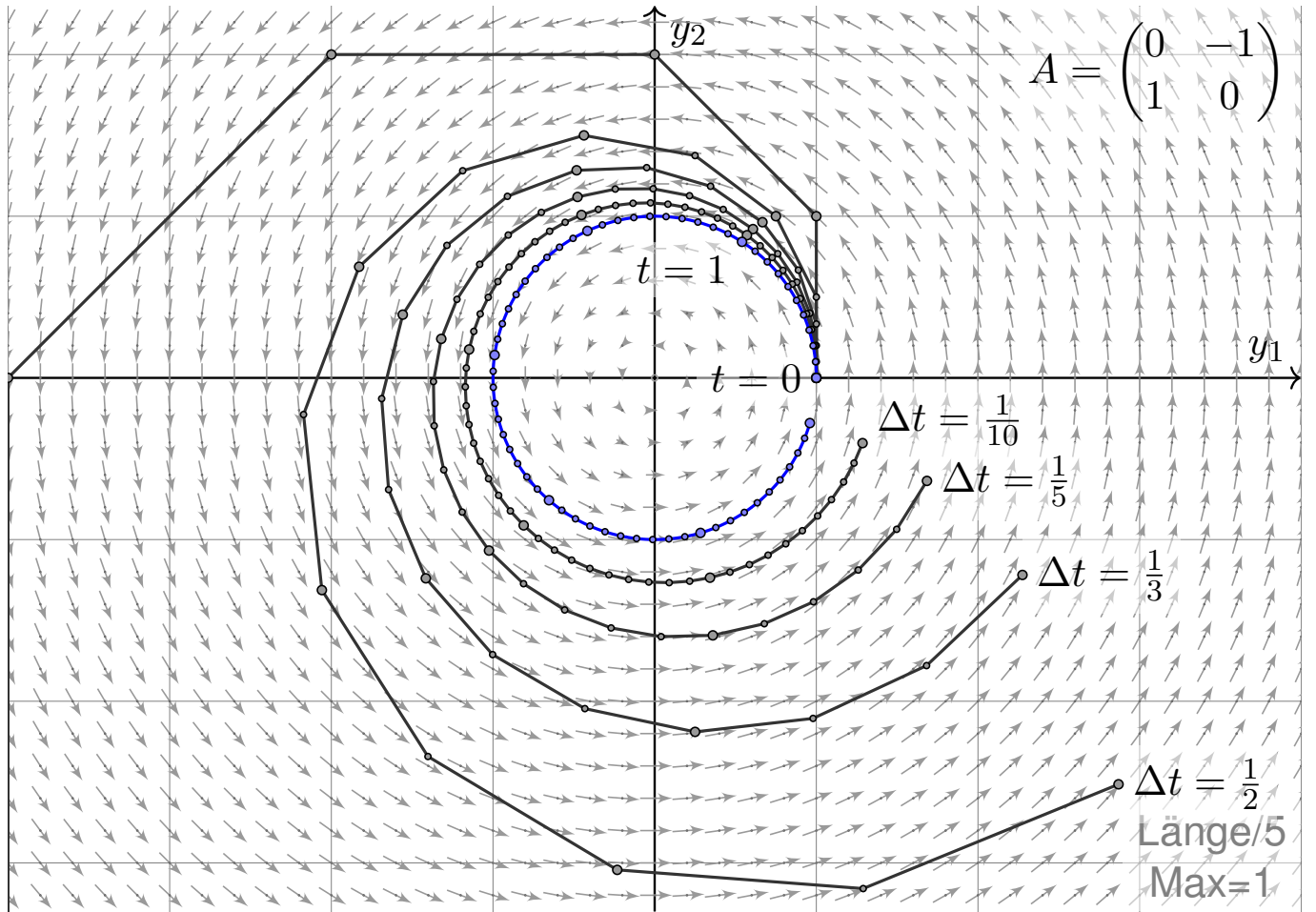
$$\tilde{x}(t_{k+1}) = \tilde{x}(t_k) + A \tilde{x}(t_k) \cdot (t_{k+1} - t_k) = \left(1 + \frac{T}{N}A\right) \tilde{x}(t_k).$$

Rekursiv erhalten wir  $\tilde{x}(t_k) = \left(1 + \frac{T}{N}A\right)^k x_0$  für alle  $k = 0, 1, 2, \dots, N$ .

Für  $N \rightarrow \infty$  kennen wir den Grenzwert  $\left(1 + \frac{T}{N}A\right)^N \rightarrow \exp(TA)$ . Also:

$$\tilde{x}(t_0 + T) = \left(1 + \frac{T}{N}A\right)^N x_0 \rightarrow \exp(TA)x_0 = x(t_0 + T)$$

Gleiches gilt für  $t \in [t_0, t_0 + T]$ , die Rechnung ist nur etwas mühsamer.





Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $A : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  eine stetige Funktion.

Wir interessieren uns für **vektorwertige Differentialgleichungen**

$$y'(t) = A(t) y(t).$$

Gesucht sind Lösungen  $y : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ . Diese bilden einen Vektorraum.

Ebenso nützlich sind **matrixwertige Differentialgleichungen**

$$Y'(t) = A(t) Y(t)$$

Gesucht sind matrixwertige Lösungen  $Y : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n} : t \mapsto Y(t)$ .

Auch diese bilden einen Vektorraum. Spalten sind Lösungsvektoren.

Entscheidender Vorteil: Matrizen kann man zudem auch multiplizieren!

Auch hier stellen sich die für Differentialgleichungen üblichen Fragen: Gibt es immer eine Lösung? Wenn ja, wie findet man eine? gar alle? Ist die Lösung durch einen gegebenen Anfangswert eindeutig bestimmt? Die folgende Lösungsformel löst all diese Fragen! Wir werden anschließend lernen, sie zu nutzen und in wichtigen Spezialfällen zu vereinfachen.

## Fundamentallösung homogener DGSysteme

Die Picard–Lindelöf–Iteration O2A beschert uns folgende Lösung:

### Satz O3I: Fundamentallösung homogener DGSysteme

Sei  $A : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  stetig. Die **matrixwertige Differentialgleichung**

$$W'(t) = A(t) W(t) \quad \text{mit Anfangswert} \quad W(t_0) = E$$

erlaubt die **Fundamentallösung**  $W : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  gegeben durch

$$W(t) = E + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t_k=t_0}^t A(t_k) \cdots \int_{t_2=t_0}^{t_3} A(t_2) \int_{t_1=t_0}^{t_2} A(t_1) dt_1 dt_2 \cdots dt_k.$$

Für jedes  $t \in I$  ist die Reihe absolut konvergent und  $W(t)$  invertierbar.

- 😊 Allgemein und explizit. 😊 Beweis durch termweises Ableiten!
- 😊 Endliche Summen können zur Approximation genutzt werden.
- 😊 Diese Lösungsformel dient als Vorlage für alle Spezialfälle.

**Aufgabe:** Rechnen Sie nach, dass  $W$  tatsächlich eine Lösung ist.

**Lösung:** Die Fundamentallösung ist gegeben als Reihe

$$W(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t).$$

Die Summanden sind  $A_0(t) = E$  und für  $k = 1, 2, 3, \dots$  rekursiv

$$A_k(t) = \int_{\tau=t_0}^t A(\tau) A_{k-1}(\tau) d\tau.$$

Dank HDI gilt  $A'_k(t) = A(t) A_{k-1}(t)$ . Durch termweises Ableiten folgt

$$W'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A'_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A(t) A_{k-1}(t) = A(t) \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) = A(t) W(t).$$

Also erfüllt  $W(t)$  die Differentialgleichung mit Anfangswert  $W(t_0) = E$ .

😊 Dies garantiert die Existenz einer Lösung... samt Lösungsformel!

Ergibt die Reihe  $W(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t)$  und obige Rechnung einen Sinn?  
Zur Begründung und Erläuterung: Warum konvergiert diese Reihe?

Das Integral über Matrizen in  $\mathbb{K}^{n \times n}$  geschieht komponentenweise.  
Dank Stetigkeit von  $A$  existiert jedes dieser Integrale, und  $A_k$  ist stetig.

Auch die Konvergenz der Reihe ist komponentenweise zu verstehen.

Zu  $t$  existiert  $M \in \mathbb{R}$  mit  $|A(t)| \leq M$  für alle  $t$  zwischen  $t_0$  und  $t$ .

Für die iterierten Integrale folgt induktiv  $|A_k(t)| \leq M^k |t - t_0|^k / k!$ .

Die Reihe  $W(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t)$  konvergiert absolut, majorisiert durch

$$\sum_{k=0}^{\infty} |A_k(t)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k |t - t_0|^k}{k!} = e^{M|t-t_0|} < \infty.$$

Die so definierte Funktion  $W : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  mit  $W(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t)$  ist stetig diff'bar, und wir dürfen termweise ableiten:  $W'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A'_k(t)$

😊 Damit ist die obige Rechnung gerechtfertigt und Satz O3I bewiesen.

**Aufgabe:** Lösen Sie  $W'(t) = A(t)W(t)$  mit  $W(0) = E$  und

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Lösung:** Wir setzen  $A_0(t) = E$  und für  $k = 1, 2, 3, \dots$  rekursiv

$$A_k(t) = \int_{\tau=0}^t A(\tau)A_{k-1}(\tau) d\tau.$$

Die ersten Schritte sind:

$$A_1(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} d\tau = \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

$$A_2(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau & \frac{1}{2}\tau^2 \\ 0 & \tau \end{pmatrix} d\tau = \int_0^t \begin{pmatrix} \tau & \frac{3}{2}\tau^2 \\ 0 & \tau \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{2}t^3 \\ 0 & \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix}$$

$$A_3(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\tau^2 & \frac{1}{2}\tau^3 \\ 0 & \frac{1}{2}\tau^2 \end{pmatrix} d\tau = \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\tau^2 & \tau^3 \\ 0 & \frac{1}{2}\tau^2 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} \frac{1}{3!}t^3 & \frac{1}{4}t^4 \\ 0 & \frac{1}{3!}t^3 \end{pmatrix}$$

Wir rechnen munter so weiter... und finden per Induktion

$$A_k(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^k}{k!} & \frac{t^{k+1}}{2(k-1)!} \\ 0 & \frac{t^k}{k!} \end{pmatrix}.$$

Als Fundamentallösung erhalten wir schließlich die Reihe

$$W(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) = \begin{pmatrix} e^t & \frac{t^2}{2} e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Wie nach jeder Rechnung empfiehlt sich auch hier die Probe:

Zur Startzeit  $t = 0$  gilt  $W(0) = E$  sowie allgemein

$$W'(t) = \begin{pmatrix} e^t & t e^t + \frac{t^2}{2} e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix},$$

$$A(t)W(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & \frac{t^2}{2} e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & t e^t + \frac{t^2}{2} e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe:** Lösen Sie  $W'(t) = A(t)W(t)$  mit  $W(0) = E$  und

$$A(t) = \begin{pmatrix} a & ct \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

**Lösung:** Wir setzen  $A_0(t) = E$  und für  $k = 1, 2, 3, \dots$  rekursiv

$$A_k(t) = \int_{\tau=0}^t A(\tau)A_{k-1}(\tau) d\tau.$$

Die ersten Schritte sind:

$$A_1(t) = \int_{\tau=0}^t \begin{pmatrix} a & c\tau \\ 0 & b \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} at & \frac{c}{2!}t^2 \\ 0 & bt \end{pmatrix}$$

$$A_2(t) = \int_{\tau=0}^t \begin{pmatrix} a^2\tau & \frac{a+2b}{2!}c\tau^2 \\ 0 & b^2\tau \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{2!}t^2 & \frac{a+2b}{3!}ct^3 \\ 0 & \frac{b^2}{2!}t^2 \end{pmatrix}$$

$$A_3(t) = \int_{\tau=0}^t \begin{pmatrix} \frac{a^3}{2!}\tau^2 & \frac{a^2+2ab+3b^2}{3!}c\tau^3 \\ 0 & \frac{b^3}{2!}\tau^2 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} \frac{a^3}{3!}t^3 & \frac{a^2+2ab+3b^2}{4!}ct^4 \\ 0 & \frac{b^3}{3!}t^3 \end{pmatrix}$$

Wir rechnen munter so weiter... und finden (für  $a \neq b$ ) per Induktion

$$A_k(t) = \begin{pmatrix} \frac{a^k}{k!}t^k & \frac{c c_k}{(k+1)!}t^{k+1} \\ 0 & \frac{b^k}{k!}t^k \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{(a-b)^2} + (k+1)\frac{b^k}{b-a}.$$

Als Fundamentallösung erhalten wir schließlich die Reihe

$$W(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) = \begin{pmatrix} e^{at} & c f(t) \\ 0 & e^{bt} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad f(t) = \frac{e^{at} - e^{bt}}{(b-a)^2} + \frac{t e^{bt}}{b-a}$$

Wie nach jeder Rechnung empfiehlt sich auch hier die Probe:

$$f'(t) = \frac{a e^{at} - b e^{bt}}{(b-a)^2} + \frac{e^{bt} + b t e^{bt}}{b-a} = \dots = a f(t) + t e^{bt}$$

$$W'(t) = \begin{pmatrix} a e^{at} & c f'(t) \\ 0 & b e^{bt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & ct \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{at} & c f(t) \\ 0 & e^{bt} \end{pmatrix} = A(t)W(t).$$

Im Sonderfall  $a = b$  erhalten wir  $c_k = \frac{k(k+1)}{2}a^k$  und  $f(t) = \frac{t^2}{2}e^{at}$ .

Im Allgemeinen brauchen wir die iterierten Integrale aus Satz O3I. Speziell für kommutierende Matrizen können wir dies mit Hilfe der Exponentialfunktion vereinfachen zu einem einzigen Integral:

### Satz O3J: DGSystem mit kommutierenden Matrizen

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $A: I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  stetig. Zu lösen sei

$$Y'(t) = A(t)Y(t) \quad \text{mit} \quad Y(t_0) = E.$$

Gilt  $A(s)A(t) = A(t)A(s)$  für alle  $s, t \in I$ , so ist die Fundamentallösung

$$Y(t) = \exp\left(\int_{\tau=t_0}^t A(\tau) d\tau\right).$$

😊 Speziell für jede konstante Matrix  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  erhalten wir erneut

$$Y(t) = \exp[(t - t_0)A].$$

⚠️ Ohne Kommutativität gibt es Gegenbeispiele wie unten illustriert.

**Aufgabe:** Rechnen Sie nach, dass  $Y$  tatsächlich eine Lösung ist.

**Lösung:** Für  $B(t) = \int_{\tau=t_0}^t A(\tau) d\tau$  gilt  $A(t)B(t) = B(t)A(t)$ , denn

$$\begin{aligned} A(t)B(t) &\stackrel{\text{Def}}{=} A(t) \left[ \int_{\tau=t_0}^t A(\tau) d\tau \right] \stackrel{\text{Lin}}{=} \int_{\tau=t_0}^t A(t)A(\tau) d\tau \\ &\stackrel{\text{Kom}}{=} \int_{\tau=t_0}^t A(\tau)A(t) d\tau \stackrel{\text{Lin}}{=} \left[ \int_{\tau=t_0}^t A(\tau) d\tau \right] A(t) \stackrel{\text{Def}}{=} B(t)A(t). \end{aligned}$$

Aus  $B'(t) = A(t)$  berechnen wir die Ableitung von  $Y(t) = \exp B(t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Y &= \frac{d}{dt} \left[ E + B + \frac{1}{2!}BB + \frac{1}{3!}BBB + \dots \right] \\ &= A + \frac{1}{2!} (AB + BA) + \frac{1}{3!} (ABB + BAB + BBA) + \dots \\ &= A + \frac{2}{2!}AB + \frac{3}{3!}AB^2 + \dots = A \left( E + B + \frac{1}{2!}B^2 + \dots \right) = AY. \end{aligned}$$

Somit gilt  $Y'(t) = A(t)Y(t)$  und  $Y(t_0) = E$  wie gewünscht.

**Aufgabe:** Lösen Sie  $Y'(t) = A(t)Y(t)$  mit  $Y(0) = E$  und

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Lösung:** Die Matrizen  $A(s), A(t)$  kommutieren für alle  $s, t \in \mathbb{R}$ :

$$A(s)A(t) = \begin{pmatrix} 1 & s+t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A(t)A(s)$$

Wir finden

$$\int_{\tau=0}^t A(\tau) d\tau = \int_{\tau=0}^t \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} t & t^2/2 \\ 0 & t \end{pmatrix}.$$

Die Exponentialfunktion solcher Matrizen kennen wir schon:

$$\exp \begin{pmatrix} t & t^2/2 \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & \frac{t^2}{2} e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$$

Probe! Dies haben wir auch durch iterierte Integrale erhalten [O353](#).

😊 Dank Vereinfachung kommen wir hier mit nur einem Integral aus!

**Aufgabe:** Lässt sich die Lösungsformel aus Satz O3J anwenden auf

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & -1 \end{pmatrix}?$$

**Lösung:** Diese Matrizen kommutieren nicht untereinander:

$$A(s)A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t-s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A(t)A(s) = \begin{pmatrix} 1 & s-t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Formel des Satzes liefert folgendes [O338](#):

$$B(t) = \int_{\tau=0}^t A(\tau) d\tau = \begin{pmatrix} t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & -t \end{pmatrix} \Rightarrow e^{B(t)} = \begin{pmatrix} e^t & (e^t - e^{-t}) \frac{t}{4} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Das ist leider keine Lösung zu  $Y' = AY$ : Machen Sie die Probe!

Die richtige Lösung haben wir oben bereits berechnet [O355](#):

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^t & f(t) \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad f(t) = (e^t - e^{-t} - 2te^{-t})/4$$

⚠ Die Kommutativität  $A(s)A(t) = A(t)A(s)$  ist wesentlich für die Gültigkeit des Satzes; ohne Kommutativität gibt es Gegenbeispiele.

## Satz O3k: Invertierbarkeit der Fundamentallösung

Wie zuvor sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $t_0 \in I$ , und  $A: I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  stetig.

Dann existieren Lösungen  $W, V: I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  der Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} W'(t) &= A(t) W(t), & W(t_0) &= E, \\ V'(t) &= -V(t) A(t), & V(t_0) &= E. \end{aligned}$$

Diese erfüllen die Gleichung  $V(t) W(t) = E$  für alle  $t \in I$ .

Das heißt, jede Matrix  $W(t)$  ist invertierbar und  $W(t)^{-1} = V(t)$ .

**Nachrechnen:** Wir setzen  $F(t) := V(t) W(t)$ . Nach Produktregel gilt

$$F'(t) = [-V(t) A(t)] W(t) + V(t) [A(t) W(t)] = 0.$$

Aus  $F(t_0) = E$  und  $F' = 0$  folgt  $F(t) = E$  für alle  $t \in I$ .

😊 Anders gesagt: Die Fundamentallösung  $W$  zu  $W'(t) = A(t) W(t)$  ist zu jedem Zeitpunkt  $t \in I$  invertierbar, und die Inverse  $V(t) = W(t)^{-1}$  erfüllt ihrerseits die Differentialgleichung  $V'(t) = -V(t) A(t)$ .

## Invertierbarkeit der Fundamentallösung

Wir müssen noch die Existenz von  $W$  und  $V$  sicherstellen.

Mit Satz O3i konstruieren wir explizit eine Lösung  $W$  zu

$$W'(t) = A(t) W(t) \quad \text{mit Anfangswert} \quad W(t_0) = E.$$

Ebenso können wir eine Lösung  $V$  konstruieren zu

$$V'(t) = -V(t) A(t) \quad \text{mit Anfangswert} \quad V(t_0) = E.$$

Die Koeffizientenmatrix steht hier allerdings auf der rechten Seite!

Die Fundamentallösung müsste entsprechend umformuliert werden...

Ich greife lieber zu einem Trick: Wir konstruieren  $U: I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  zu

$$U'(t) = -A(t)^T U(t) \quad \text{mit} \quad U(t_0) = E \quad \text{und erhalten} \quad V(t) := U(t)^T,$$

denn die Transposition kehrt die Produktreihenfolge um.

😊 Ein Lob der Matrizenrechnung: Sie vereinfacht unsere Rechnungen! Lineare Differentialgleichungssysteme  $y'(t) = A(t) y(t)$  sind zwar nur ein Spezialfall des allgemeinen Problems  $y'(t) = f(t, y(t))$ , doch sie sind häufig und wichtig. Daher lohnt sich ihre eingehende Untersuchung.

## Definition O3L: Wronski–Determinante

Die Determinante  $w(t) = \det W(t)$  heißt **Wronski–Determinante**.

Unser einfaches Beispiel [O353](#):

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{tr} A(t) = 2,$$

$$W(t) = \begin{pmatrix} e^t & \frac{t^2}{2} e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}, \quad \det W(t) = e^{2t}.$$

Unser weniger einfaches Beispiel [O355](#):

$$A(t) = \begin{pmatrix} a & ct \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad \operatorname{tr} A(t) = a + b,$$

$$W(t) = \begin{pmatrix} e^{at} & c f(t) \\ 0 & e^{bt} \end{pmatrix}, \quad \det W(t) = e^{(a+b)t}.$$

😊 Wir sehen hier einen sehr einfachen und nützlichen Zusammenhang zwischen  $\operatorname{tr} A(t)$  und  $\det W(t)$ : Dies ist die berühmte Liouville–Formel!

## Satz O3M: Liouville–Formel

(1) Aus  $W'(t) = A(t)W(t)$  und  $w(t) = \det W(t)$  folgt

$$w'(t) = [\operatorname{tr} A(t)] w(t) \quad \text{und daraus}$$

$$w(t) = w(t_0) \cdot \exp \left[ \int_{\tau=t_0}^t \operatorname{tr} A(\tau) d\tau \right].$$

Insbesondere folgt aus  $w(t_0) \neq 0$  bereits  $w(t) \neq 0$  für alle  $t \in I$ .

(2) Ist  $\operatorname{tr} A(t) = a$  konstant, so folgt  $\det W(t) = \det W(t_0) \cdot e^{a(t-t_0)}$ .

(3) Für spurlose Matrizen, also  $\operatorname{tr} A(t) = 0$ , ist  $t \mapsto \det W(t)$  konstant.

**Nachrechnen:** (1) Für  $w = \det(w_1, \dots, w_n)$  folgt die Ableitung gemäß Produktregel:

$$\begin{aligned} w' &= \det(w_1', \dots, w_n) + \dots + \det(w_1, \dots, w_n') \\ &= \det(Aw_1, \dots, w_n) + \dots + \det(w_1, \dots, Aw_n) = (\operatorname{tr} A) w \end{aligned}$$

Als Funktion von  $w_1, \dots, w_n$  ist die letzte Zeile multilinear und alternierend in  $w_1, \dots, w_n$ . Dank Eindeutigkeit der Determinante ist dies also gleich  $c \cdot \det(w_1, \dots, w_n)$ ; die Konstante  $c = \operatorname{tr} A$  finden wir durch Einsetzen der Einheitsmatrix  $(w_1, \dots, w_n) = (e_1, \dots, e_n)$ .



- Aufgabe:** (1) Schreiben Sie das DGSytem  $y'_1 = -y_2$  und  $y'_2 = y_1$  als Matrixgleichung  $Y'(t) = AY(t)$ . Lösen Sie das AWP mit  $Y(0) = E$ . Welche besonderen Eigenschaften haben die Matrizen  $A$  und  $Y(t)$ ?
- (2) Seien  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  reelle Matrizen. Wann heißt  $A$  symmetrisch? antisymmetrisch? Wann heißt  $B$  orthogonal, geschrieben  $B \in O_n \mathbb{R}$ ?
- (3) Sei  $A$  antisymmetrisch. Wie sieht die Lösung zu  $Y'(t) = AY(t)$  mit  $Y(0) = E$  aus? Ist die Matrix  $Y(t)$  zu jedem Zeitpunkt  $t \in \mathbb{R}$  orthogonal?
- (4) Was bedeutet diese Orthogonalitätseigenschaft geometrisch? Was folgt speziell für die Spur  $\text{tr } A$  und die Determinante  $\det Y(t)$ ?
- (5) Was gilt komplex für antihermitesche und unitäre Matrizen?

**Lösung:** (1) Wir lösen die Matrix-Differentialgleichung  $Y' = AY$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung erhalten wir durch die Matrix-Exponentialfunktion: O343

$$Y(t) = \exp \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

- 😊 Diese DG tritt häufig auf, wir kennen sie bereits gut von der ebenen Kreisbewegung sowie dem harmonischen Oszillator ohne Reibung. O101
- Die Systemmatrix  $A$  ist hier antisymmetrisch, erfüllt also  $A^T = -A$ . Zu jedem Zeitpunkt  $t \in \mathbb{R}$  ist  $Y(t)$  eine Drehmatrix, also orthogonal! Diesen Zusammenhang wollen wir nun allgemein nachrechnen.
- (2) Zur Erinnerung: Die Matrix  $A$  ist **symmetrisch**, falls  $A^T = A$ , und **antisymmetrisch**, falls  $A^T = -A$ . Diese Bedingung ist leicht zu prüfen: Man sieht dies jeweils leicht durch Spiegelung an der Hauptdiagonalen! Die Matrix  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt **orthogonal**, wenn ihre Spaltenvektoren eine Orthonormalbasis des  $\mathbb{R}^n$  bilden, also  $B^T B = E$  gilt. Das ist äquivalent für Zeilenvektoren, also  $BB^T = E$ . Beides bedeutet  $B^{-1} = B^T$ .
- (3) Ist die Systemmatrix  $A$  antisymmetrisch, so ist die Lösung  $Y(t) = e^{At}$  orthogonal, da  $Y(t)^T = \exp(A^T t) = \exp(-At) = \exp(At)^{-1} = Y(t)^{-1}$ .
- (4) Die Lösung  $Y(t) = e^{At}$  ist demnach eine Drehung. Aus  $A^T = -A$  folgt  $\text{tr } A = 0$  und dank Liouville  $\det Y(t) = \det Y(0) = 1$ . (Für  $B \in O_n \mathbb{R}$  gilt allgemein  $\det B = \pm 1$ ; der Fall  $-1$  tritt für  $Y(t) = e^{At}$  nicht auf.)
- (5) Gleiches gilt komplex für antihermitesche und unitäre Matrizen.

Zur Erinnerung: Die Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ist **hermitesch**, falls  $A^\top = \bar{A}$ , und **antihermitesch**, falls  $A^\top = -\bar{A}$ . Diese Bedingung ist schnell zu prüfen: Man sieht dies jeweils leicht durch Spiegelung an der Hauptdiagonalen!

Die Matrix  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  heißt **unitär**, wenn ihre Spaltenvektoren eine Orthonormalbasis des  $\mathbb{C}^n$  bilden, also  $\bar{B}^\top B = E$  gilt. Das ist äquivalent für Zeilenvektoren, also  $B \bar{B}^\top = E$ . Beides bedeutet  $B^{-1} = \bar{B}^\top$ .

### Satz O3N: antisymmetrische / antihermitesche Systemmatrizen

Zu lösen sei  $W'(t) = A(t)W(t)$  mit  $W(t_0) = E$  und  $A: I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  stetig.

(1) Ist die Systemmatrix  $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  antisymmetrisch für alle  $t \in I$ , so ist die Lösungsmatrix  $W(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  orthogonal für alle  $t \in I$ .

Insbesondere gilt  $\operatorname{tr} A(t) = 0$  und  $\det W(t) = 1$  für alle  $t \in I$ .

(2) Ist die Systemmatrix  $A(t) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  antihermitesch für alle  $t \in I$ , so ist die Lösungsmatrix  $W(t) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  unitär für alle  $t \in I$ .

Insbesondere gilt  $\operatorname{tr} A(t) \in i\mathbb{R}$  und  $\det W(t) \in \mathbb{S}^1$  für alle  $t \in I$ .

**Aufgabe:** Rechnen Sie diese Aussagen sorgfältig nach!

**Lösung:** Wir rechnen den unitären Fall; der orthogonale Fall ist analog. (Letzteres ist genau der Spezialfall, in dem alle Matrizen reell sind.)

(2) Wir zeigen  $\overline{W(t)}^\top W(t) = E$  für alle  $t \in I$ . Wegen  $W(t_0) = E$  gilt dies zum Startzeitpunkt  $t_0 \in I$ . Anschließend betrachten wir die Ableitung:

$$\begin{aligned} [\overline{W}^\top W]' &= \overline{W'}^\top W + \overline{W}^\top W' &&= \overline{A} \overline{W}^\top W + \overline{W}^\top A W \\ &= \overline{W}^\top \overline{A}^\top W + \overline{W}^\top A W = \overline{W}^\top (\overline{A}^\top + A) W &&= 0 \end{aligned}$$

Auf dem Intervall  $I$  ist die Funktion  $t \mapsto \overline{W(t)}^\top W(t)$  konstant, also  $= E$ .

Wegen  $A(t)^\top = -\bar{A}(t)$  sind alle Diagonaleinträge rein imaginär, somit auch ihre Summe  $\operatorname{tr} A(t) \in i\mathbb{R}$ . Dank Liouville gilt  $\det Y(t) \in e^{i\mathbb{R}} = \mathbb{S}^1$ .

😊 Letzteres wissen wir aus der Linearen Algebra: Aus  $E = \bar{B}^\top B$  folgt  $1 = \det E = \det(\bar{B}^\top B) = \det(\bar{B}^\top) \det(B) = |\det(B)|^2$ , also  $B \in \mathbb{S}^1$ .

😊 Orthogonale und unitäre Matrizen sind sehr nützlich, insbesondere leicht invertierbar. Jede solche zusätzliche Information ist wertvoll zur Lösung von DGsystemen, sei es zur Probe oder zur Berechnung:

Im  $\mathbb{R}^2$  folgt aus einer Lösungsspalte  $y_1(t)$  die zweite  $y_2(t) = \odot y_1(t)$ .

Im  $\mathbb{R}^3$  folgt aus zwei Spalten  $y_1(t), y_2(t)$  die dritte  $y_3(t) = y_1(t) \times y_2(t)$ .

**Satz O30: Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen**

Wie zuvor sei  $A : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  stetig und  $W : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  die Fundamentallösung zu  $W'(t) = A(t) W(t)$  mit  $W(t_0) = E$ .

(1) Zur Startmatrix  $Y_0 \in \mathbb{K}^{n \times n}$  lösen wir die Matrix-Differentialgleichung

$$Y'(t) = A(t) Y(t) \quad \text{mit} \quad Y(t_0) = Y_0.$$

Diese hat genau eine Lösung  $Y : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ , nämlich  $Y(t) = W(t) Y_0$ .

Somit hat die Differentialgleichung  $Y' = A Y$  als Lösungsmenge  $L_0 = \{ W Y_0 \mid Y_0 \in \mathbb{K}^{n \times n} \}$  einen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum der Dimension  $n^2$ .

(2) Zum Startvektor  $y_0 \in \mathbb{K}^n$  lösen wir die Vektor-Differentialgleichung

$$y'(t) = A(t) y(t) \quad \text{mit} \quad y(t_0) = y_0.$$

Diese hat genau eine Lösung  $y : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ , nämlich  $y(t) = W(t) y_0$ .

Somit hat die Differentialgleichung  $y' = A y$  als Lösungsmenge  $L_0 = \{ W y_0 \mid y_0 \in \mathbb{K}^n \}$  einen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum der Dimension  $n$ .

**Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen**

Zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen können wir an den allgemeinen Satz appellieren (O1B / O2A). In der speziellen Situation eines linearen DGSsystems (O3B / O3I) kennen wir zudem die explizite Fundamentalmatrix  $W(t)$  und können damit alles direkt nachrechnen...

**Existenz:** Für  $Y(t) = W(t) Y_0$  gilt der Startwert  $Y(t_0) = Y_0$  sowie

$$Y'(t) = W'(t) Y_0 = A(t) W(t) Y_0 = A(t) Y(t).$$

**Eindeutigkeit:** Angenommen  $Y'(t) = A(t) Y(t)$  und  $Y(t_0) = Y_0$ .

Für  $t \in I$  setzen wir  $F(t) := W(t)^{-1} Y(t)$ . Nach Produktregel gilt

$$F'(t) = [-W(t)^{-1} A(t)] Y(t) + W(t)^{-1} [A(t) Y(t)] = 0$$

Aus  $F(t_0) = Y_0$  und  $F' = 0$  folgt  $F(t) = Y_0$  für alle  $t \in I$ . Also

$$W(t)^{-1} Y(t) = Y_0 \quad \Rightarrow \quad Y(t) = W(t) Y_0$$

😊 Somit hat jede Lösung des AWP die im Satz genannte Form. Die Aussage für  $y = W y_0$  rechnet man wörtlich genauso nach.

😊 Die Dimension sehen wir direkt so: Jeder Startwert  $y_0 \in \mathbb{K}^n$  legt die Lösung  $y$  eindeutig fest, also haben wir genau  $n$  Freiheitsgrade.

**Ausführlich:** Wir erhalten zueinander inverse, lineare Abbildungen

$$\Phi : \mathbb{K}^n \rightarrow L_0 : y_0 \mapsto W y_0,$$

$$\Psi : L_0 \rightarrow \mathbb{K}^n : y \mapsto y(t_0).$$

Für jeden Startvektor  $y_0 \in \mathbb{K}^n$  gilt dabei

$$y_0 \xrightarrow{\Phi} W y_0 \xrightarrow{\Psi} W(t_0) y_0 = y_0 \quad \text{dank} \quad W(t_0) = E.$$

Für jede Lösung  $y \in L_0$  gilt umgekehrt

$$y \xrightarrow{\Psi} y(t_0) \xrightarrow{\Phi} W y(t_0) = y \quad \text{dank Eindeutigkeit der Lösung.}$$

Dies zeigt  $L_0 \cong \mathbb{K}^n$ , insbesondere  $\dim_{\mathbb{K}}(L_0) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$ .

Der Satz O30 liefert explizite Formeln und garantiert die Eindeutigkeit der Lösung. Wir folgern hieraus insbesondere die Dimension des Lösungsraumes. Für einfache  $A(t)$  können wir zudem  $W(t)$  explizit berechnen. Damit ist jedes homogene lineare DGSsystem im Prinzip gelöst.

😊 Die nötigen Rechnungen vereinfachen wir im nächsten Kapitel.

## Zwischenbilanz zu linearen DGSsystemen

Mit unseren Werkzeugen können wir die beiden Grundprobleme lösen:

Ein **homogenes lineares DGSsystem** erster Ordnung ist von der Form

$$y'(t) = A(t) y(t).$$

Gegeben ist hierzu eine stetige **Koeffizientenmatrix**  $A : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ .

Iterierte Integrale O31 liefern die Fundamentallösung  $W : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ .

Jede vektorwertige Lösung  $y : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  hat die Form  $y(t) = W(t) y_0$ .

Die Lösungsmenge  $L_0 = \{ W y_0 \mid y_0 \in \mathbb{K}^n \}$  ist ein  $n$ -dim. Vektorraum.

Ein **inhomogenes lineares DGSsystem** ist von der Form

$$y'(t) = A(t) y(t) + b(t).$$

Gegeben ist hier neben  $A : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  ein stetiger **Störterm**  $b : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ .

Variation der Konstanten (O3D) liefert eine Partikulärlösung  $y_b : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ .

Somit hat die Differentialgleichung  $y' = A y + b$  als Lösungsmenge

$L_b = \{ y_b + W y_0 \mid y_0 \in \mathbb{K}^n \}$  einen affinen Raum der Dimension  $n$ .

😊 Die nötigen Rechnungen vereinfachen wir im nächsten Kapitel.