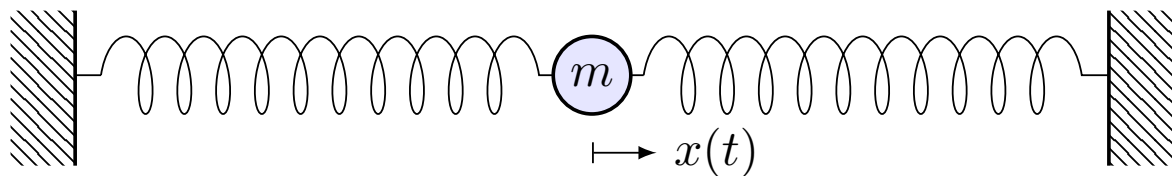


## Kapitel N

## Differentialgleichungen höherer Ordnung



*Une loi (physique), pour nous, [...] est une relation constante entre le phénomène d'aujourd'hui et celui de demain; en un mot, c'est une équation différentielle.*

Henri Poincaré (1854–1912), *La valeur de la science* (1905)

## Inhalt dieses Kapitels N

- 1 Harmonische Schwingungen
  - Freie harmonische Schwingung
  - Erzwungene harmonische Schwingung
- 2 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten
  - Charakteristisches Polynom und Fundamentalsystem
  - Lösungsansatz für spezielle rechte Seiten  $r(x) e^{\mu x}$
  - Greensche Lösungsformel für beliebige rechte Seiten
- 3 Lineare Differentialgleichungen mit stetigen Koeffizienten
  - Fundamentalmatrix und Variation der Konstanten
  - Lösung durch Potenzreihenansatz
- 4 Die Euler–Lagrange–Differentialgleichung
  - Optimierung durch Variationsrechnung
  - Lösung des Brachistochrone-Problems
- 5 Fazit: Differentialgleichungen höherer Ordnung
  - Zusammenfassung und Verständnisfragen
  - Weitere Aufgaben und Methodenvergleich

Im vorigen Kapitel haben wir Differentialgleichungen  $y'(x) = f(x, y(x))$  erster Ordnung in einer Dimension kennen und geschickt lösen gelernt. Unsere Techniken wollen wir nun auf DG **höherer Ordnung** erweitern:

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

Wichtig und noch gut lösbar sind **lineare Differentialgleichungen**:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x)$$

Im Falle  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$  haben wir **konstante Koeffizienten**.

Für lineare DG sind zwei strukturelle Aspekte grundlegend (Satz N3A):

- Die Lösungsmenge einer linearen Differentialgleichung  $Ly = b$  ist immer ein **Vektorraum** ( $b = 0$ ) bzw. ein **affiner Raum** ( $b \neq 0$ ).
- Dieser Raum hat immer **Dimension  $n$** : Dies folgt aus Existenz und Eindeutigkeit der Lösung zu gegebenen Anfangsdaten (N3A).

Das strukturiert und vereinfacht das Problem, alle Lösungen zu finden! Die lineare Struktur war schon für lineare DG erster Ordnung sichtbar, doch erst hier für lineare DG höherer Ordnung spielt die lineare Algebra eine zentrale Rolle und entfaltet ihre ordnende Kraft in voller Schönheit.


Im nächsten Kapitel werden wir allgemeiner mehrdimensionale, gekoppelte Differentialgleichungssysteme untersuchen und lösen.

Jede (lineare) Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung ist äquivalent zu einem (linearen)  $n$ -dimensionalen DGSystem erster Ordnung. Somit können wir alle Techniken des nächsten Kapitels anwenden!

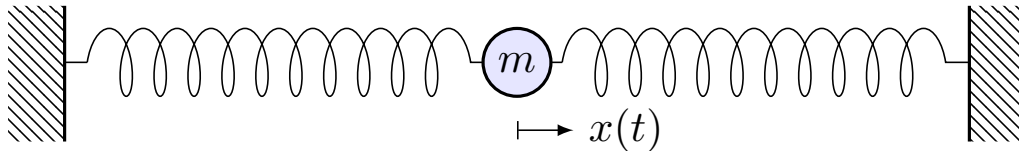
Theoretisch ist damit bereits alles geklärt. Da aber DG höherer Ordnung in der Praxis häufig auftreten, wollen wir hier schon die grundlegenden Rechentechniken möglichst anwendungsfreundlich ausarbeiten.

Für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten gelingt uns dies vollständig. Dieses Kapitel präsentiert hierzu eine Handvoll erfolgreicher Ansätze und illustriert diese durch zahlreiche Beispiele.

Wann wie welcher Ansatz zum Ziel führt, erklärt Ihnen die Theorie! Um die unzähligen Beispiele und alle möglichen Komplikationen zu verstehen, sollten Sie daher unbedingt die Grundlagen beherrschen.

 Für Vertiefung und zahlreiche schöne Anwendungsbeispiele siehe H. Heuser: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Vieweg, 6. Aufl. 2009

Schwingung einer Masse an einer Feder:



Zeit  $t \in \mathbb{R}$ , Auslenkung  $x(t)$  aus Ruhelage, Rückstellkraft  $F_1 = -k x$ , zusätzlich noch Reibung / viskoser Strömungswiderstand  $F_2 = -c \dot{x}$ .

Newtons Bewegungsgesetz  $m \ddot{x} = F_1 + F_2$ , also  $m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = 0$ .

Dies führt zu einer **linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung**

$$\ddot{x}(t) + 2\delta \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

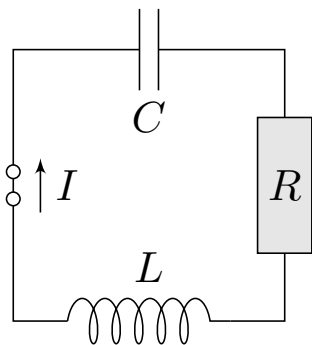
mit konstanten Koeffizienten  $\delta = c/2m \geq 0$  und  $\omega_0^2 = k/m$ ,  $\omega_0 \geq 0$ .

Bei äußerer Anregung durch eine Kraft  $F(t) = m f(t)$  gilt:

$$\ddot{x}(t) + 2\delta \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t)$$

Allgemein suchen wir alle möglichen Lösungen  $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: t \mapsto x(t)$ , speziell die Lösung  $x$  zu vorgegebenen Anfangswerten  $x(t_0)$  und  $\dot{x}(t_0)$ .

Diese Differentialgleichung begegnet uns in sehr vielen Situationen. Sie ist daher grundlegend wichtig in Naturwissenschaft und Technik.



Elektrischer Schwingkreis (RLC), Radioempfänger:

Beziehungen zwischen Strom  $I$  und Spannung  $U$ :

- Ohmscher Widerstand:  $U_R = R I$ ,
- Selbstinduktivität der Spule:  $U_L = L \dot{I}$ ,
- Kapazität des Kondensators:  $I = C \dot{U}_C$ .

In Reihe summieren sich diese Spannungen zu  $U_L + U_R + U_C = \text{const.}$

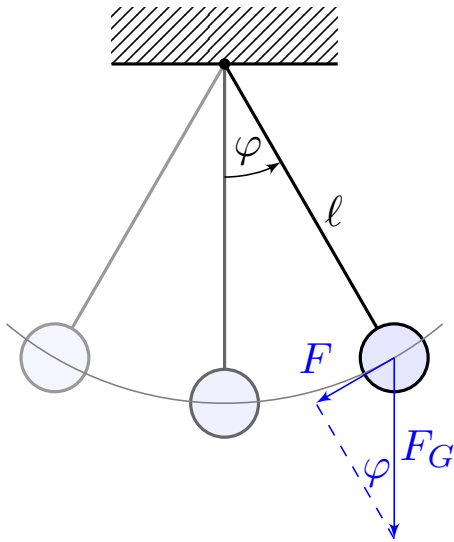
Die Ableitung ergibt  $\dot{U}_L + \dot{U}_R + \dot{U}_C = 0$ , also  $L \ddot{I} + R \dot{I} + \frac{1}{C} I = 0$ .

Dies führt zur selben **Differentialgleichung zweiter Ordnung**

$$\ddot{x}(t) + 2\delta \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

mit  $x(t) = I(t)$  sowie  $\delta = \frac{R}{2L}$  und  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ . Bei äußerer Anregung gilt:

$$\ddot{x}(t) + 2\delta \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t)$$



Die Rückstellkraft ist hier nicht-linear:

$$F(t) = -m \cdot g \cdot \sin \varphi(t)$$

$m$  = Masse des Pendelkörpers

$g = 9.81 \text{ m/s}^2$  Erdbeschleunigung

$F_G = mg$  Gravitationskraft zur Masse  $m$

$l$  = Länge des Pendelstabes

$\varphi(t)$  = Winkelauslenkung

$l \varphi(t)$  = Auslenkung

Newtons Bewegungsgesetz  $F(t) = m \ell \ddot{\varphi}(t)$  führt zu

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{\ell} \sin \varphi(t).$$

Anders als vorige ist dies eine **nicht-lineare Differentialgleichung**.

Gegeben sind die anfängliche Position  $\varphi(0)$  und Geschwindigkeit  $\dot{\varphi}(0)$ .

Fragen: Wie sieht die Trajektorie aus? Wie lang dauert eine Periode?

Beispiel: Pendel bei kleinen Amplituden

**!** Wir vereinfachen etwas: punktförmige Masse des Pendelkörpers, vernachlässigbare Masse des Stabes, reibungsfreie Aufhängung, etc.

Für kleine Auslenkungen gilt  $\sin(\varphi) \approx \varphi$ . (Faustregel für  $|\varphi| < 5^\circ$ )

Dies führt uns zur **linearisierten Differentialgleichung**:

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{\ell} \varphi(t)$$

Diese Differentialgleichung ist viel einfacher, denn sie ist linear in  $\varphi$ :

$$\ddot{\varphi}(t) = -\omega^2 \varphi(t) \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Dies ist die Bewegungsgleichung eines **harmonischen Oszillators**:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t + \alpha), \quad \ddot{\varphi}(t) = -\varphi_0 \omega^2 \cos(\omega t + \alpha).$$

Für kleine Auslenkungen ist demnach die Periodendauer  $T = 2\pi \sqrt{\ell/g}$ .

Die Anfangsdaten bestimmen die Auslenkung  $\varphi_0$  und die Phase  $\alpha$ .

**!** Für große Auslenkungen brauchen wir eine genauere Rechnung!

Die Lösung ist schwieriger und wird im nächsten Kapitel diskutiert. 0133

**Aufgabe:** Finden Sie alle Lösungen  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  der Differentialgleichung

$$\ddot{u}(t) + 2\delta \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0.$$

Wir nennen dies die Gleichung des **harmonischen Oszillators** mit **Dämpfung**  $\delta \geq 0$  und **ungedämpfter Eigenfrequenz**  $\omega_0 > 0$ .

Dies ist eine lineare DG zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. In diesem einfachen aber wichtigen Spezialfall zeigen sich bereits die allgemeinen Techniken dieses Kapitels, die wir anschließend ausführen.

**Lösung:** Der Exponentialansatz  $u(t) = e^{\lambda t}$  führt zur char. Gleichung

$$\underbrace{(\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2)}_{\text{charakteristisches Polynom}} e^{\lambda t} = 0 \quad \iff \quad \lambda = \underbrace{-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}_{\text{Eigenwerte des Systems}} \in \mathbb{C}.$$

Je nach Diskriminante beobachten wir verschiedene Reaktionen:

$\delta < \omega_0$ : **schwache Dämpfung**, zwei komplex-konjugierte Nullstellen

$\delta > \omega_0$ : **starke Dämpfung**, zwei reelle Nullstellen  $\lambda_1 < -\delta < \lambda_2 < 0$

$\delta = \omega_0$ : **kritische Dämpfung**, doppelte reelle Nullstelle  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$

Physikalische Anwendungen fordern meist **reelle Lösungen**  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Oft vereinfachen sich Rechnungen und die Formulierung von Sätzen, wenn wir allgemeiner auch **komplexe Lösungen**  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  zulassen und anschließend in reelle Lösungen umrechnen, falls gewünscht.

Die Bewegung  $u(t)$  wird durch die Startwerte  $u(0)$  und  $\dot{u}(0)$  festgelegt. Die Anfangswerte sind beliebig, wir haben daher **zwei Freiheitsgrade**.

Als Lösungsraum erwarten wir einen **Vektorraum der Dimension 2**: Diese mathematische Aussage formulieren wir später als Satz N3A. Im nächsten Kapitel werden wir sie verallgemeinern und beweisen.

Das **charakteristische Polynom** dieser DG ist  $p(x) = x^2 + 2\delta x + \omega_0^2$ . Die Lösungsformel beschert uns die Nullstellen:  $\lambda_{1/2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$  und so **linear unabhängige Lösungen**  $u_1(t) = e^{\lambda_1 t}$  und  $u_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ . Hierbei unterscheiden wir den komplexen Fall  $\delta < \omega_0$  und den reellen Fall  $\delta > \omega_0$ ; anschließend lösen wir auch den kritischen Fall  $\delta = \omega_0$ .

Wir diskutieren zunächst die homogene Gleichung: rechte Seite  $f = 0$ , anschließend eine harmonische Anregung der Form  $f(t) = \cos(\omega_1 t)$ .

Schwache Dämpfung:  $\delta < \omega_0$ 

Im Fall  $0 \leq \delta < \omega_0$  gibt es **zwei komplex-konjugierte Nullstellen**

$$\lambda_{1/2} = -\delta \pm i\omega \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad 0 < \omega \leq \omega_0.$$

Die komplexen Lösungen  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  der Differentialgleichung sind

$$u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{mit} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

😊 Diese Lösungen bilden einen zweidimensionalen  $\mathbb{C}$ -Vektorraum. Der Körper  $\mathbb{C}$  vereinfacht die Rechnung. Physikalische Anwendungen fordern jedoch reelle Lösungen. Dazu rechnen wir die **komplexe Basis**  $u_{1/2} = e^{-\delta t \pm i\omega t} = v_1 \pm iv_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  um in die **reelle Basis**  $v_{1/2}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $v_1 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) = e^{-\delta t} \cos(\omega t)$  und  $v_2 = \frac{1}{2i}(u_1 - u_2) = e^{-\delta t} \sin(\omega t)$ . Die reellen Lösungen  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  der Differentialgleichung sind demnach

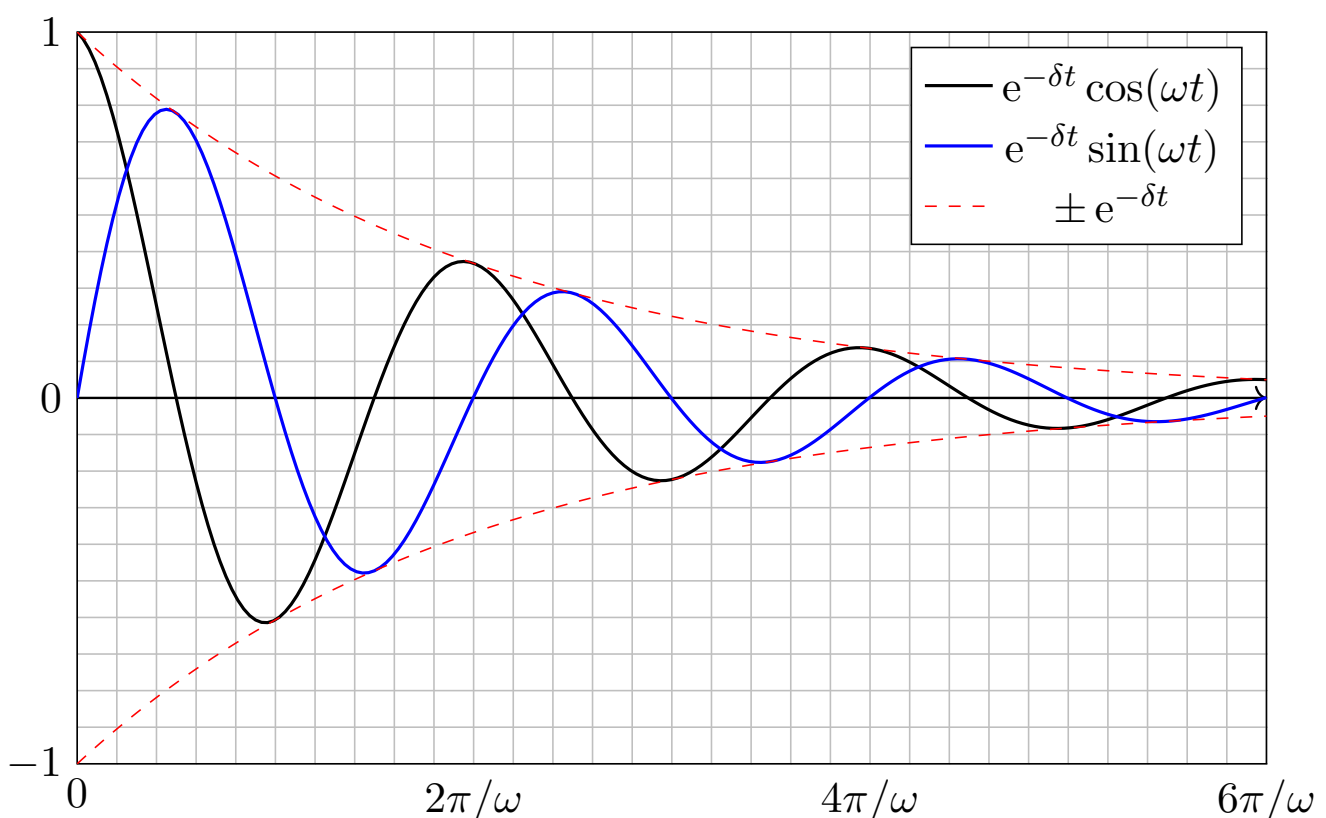
$$u(t) = e^{-\delta t} [\alpha_1 \cos(\omega t) + \alpha_2 \sin(\omega t)] \quad \text{mit} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

😊 Diese Lösungen bilden einen zweidimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

😊 Für  $\delta = 0$  haben wir die **ungedämpfte Schwingung** mit  $\omega = \omega_0$ ,

Schwache Dämpfung:  $\delta < \omega_0$ 

Die Masse wird durch die Federkraft zur Ruhelage zurückgezogen, aufgrund ihrer Trägheit schwingt die Masse jedoch darüber hinaus.



## Starke Dämpfung: $\delta > \omega_0$

Im Fall  $\delta > \omega_0$  gibt es **zwei reelle Nullstellen**  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ , nämlich

$$\lambda_1 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} < -\delta < \lambda_2 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} < 0.$$

Hierzu gehören die Lösungen  $e^{\lambda_1 t}$  und  $e^{\lambda_2 t}$  als Eigenfunktionen.

Die allgemeine Lösung erhalten wir durch Linearkombination:

$$u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

😊 Diese Lösungen bilden einen zweidimensionalen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum: Für reelle Lösungen  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dürfen wir die Konstanten  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  frei wählen, für komplexe Lösungen  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  entsprechend  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ .

**Zahlenbeispiel:** Die Differentialgleichung  $\ddot{u}(t) + 4\dot{u}(t) + 3u(t) = 0$  führt zur Gleichung  $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$ , also  $\lambda_1 = -3$  und  $\lambda_2 = -1$ .

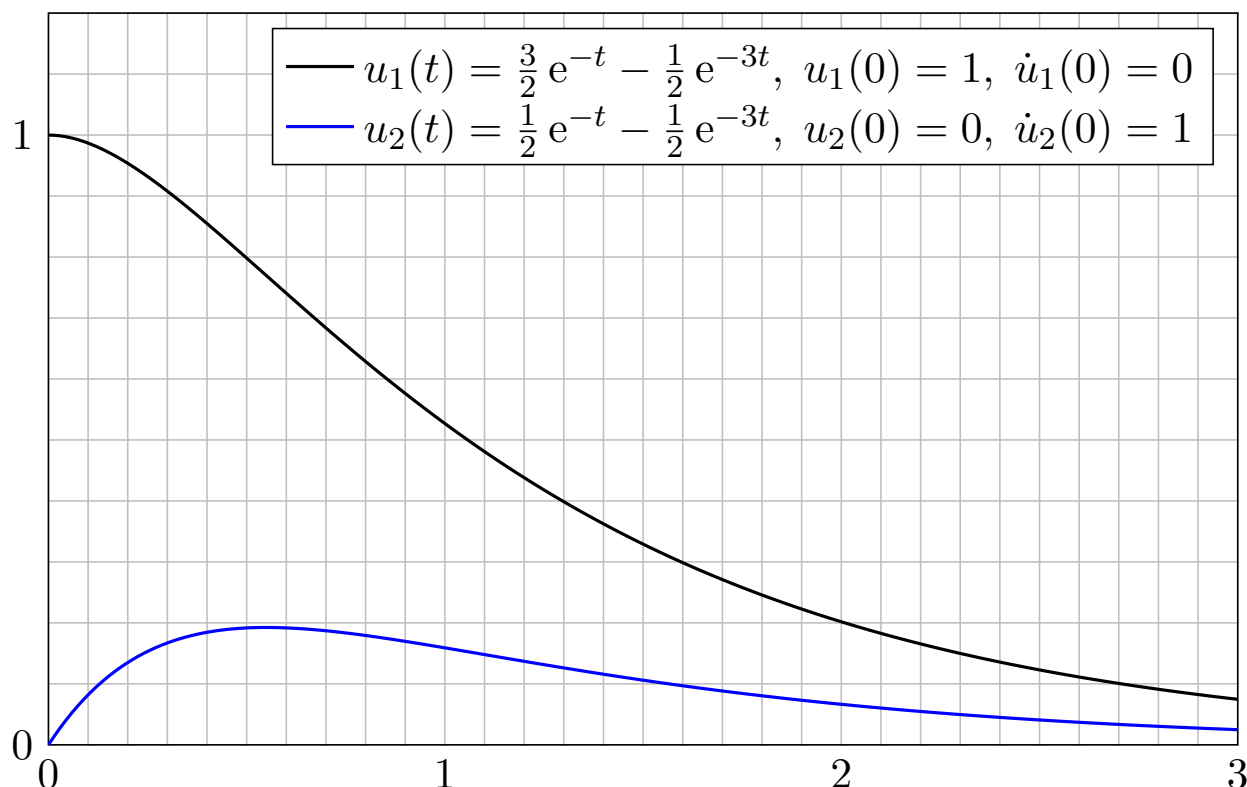
Die DG hat als reelle Lösungen  $u(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-t}$  mit  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

Anfangswerte  $u(0) = 1$  und  $\dot{u}(0) = 0$  führen zu  $u(t) = \frac{3}{2} e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-3t}$ .

Anfangswerte  $u(0) = 0$  und  $\dot{u}(0) = 1$  führen zu  $u(t) = \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-3t}$ .

## Starke Dämpfung: $\delta > \omega_0$

Dies nennt man auch den **Kriechfall**: Es gibt keine Schwingung, das System kriecht nach einer Auslenkung zur Ruhelage zurück.





## Kritische Dämpfung: $\delta = \omega_0$

Im Fall  $\delta = \omega_0$  gibt es eine **doppelte reelle Nullstelle**  $\lambda = -\delta$ .  
Wir finden die Lösung  $e^{\lambda t}$  und zusätzlich  $t e^{\lambda t}$  als Hauptfunktionen.  
Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist in diesem Fall:

$$u(t) = e^{\lambda t}(c_1 + c_2 t)$$

😊 Diese Lösungen bilden einen zweidimensionalen Vektorraum:  
Für reelle Lösungen  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dürfen wir die Konstanten  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  frei wählen, für komplexe Lösungen  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  entsprechend  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ .

**Nachrechnen:** Zu lösen ist hier  $\ddot{u}(t) - 2\lambda \dot{u}(t) + \lambda^2 u(t) = 0$ .  
Linearfaktorzerlegung  $(\partial_t - \lambda)(\partial_t - \lambda) u(t) = 0$ . Einsetzen:

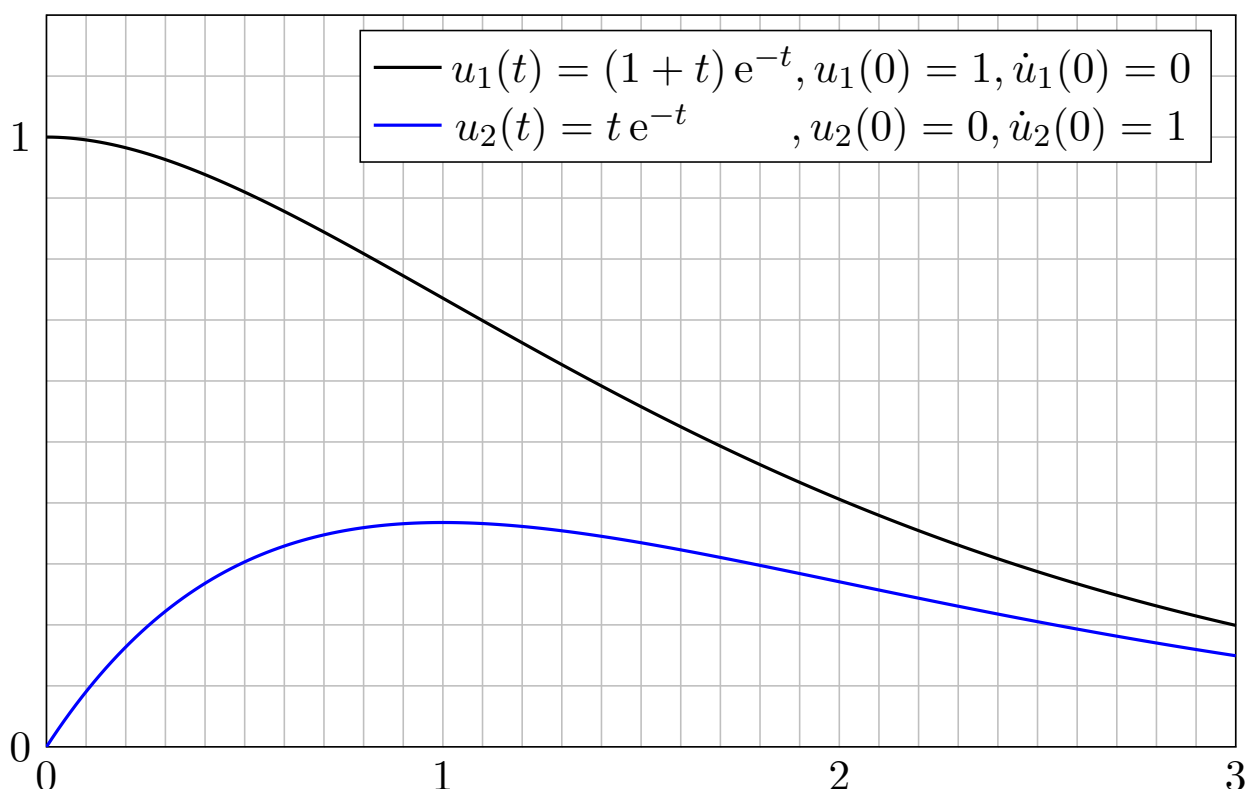
$$\begin{aligned} (\partial_t - \lambda)(\partial_t - \lambda) [e^{\lambda t}] &= (\partial_t - \lambda) [\lambda e^{\lambda t} - \lambda e^{\lambda t}] \\ &= (\partial_t - \lambda) [0] &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\partial_t - \lambda)(\partial_t - \lambda) [t e^{\lambda t}] &= (\partial_t - \lambda) [e^{\lambda t} + \lambda t e^{\lambda t} - \lambda t e^{\lambda t}] \\ &= (\partial_t - \lambda) [e^{\lambda t}] &= 0 \end{aligned}$$

😊 Damit sind zwei linear unabhängige Lösungen gefunden.

## Kritische Dämpfung: $\delta = \omega_0$

Dies nennt man den **aperiodischen Grenzfall**: Er liegt genau auf der Grenze zwischen gedämpfter Schwingung und Kriechfall.





**Aufgabe:** Bei Anregung durch  $f(t) = a \cos(\omega_1 t)$  ist als DG zu lösen

$$\ddot{u}(t) + 2\delta \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = a \cos(\omega_1 t).$$

Gesucht ist eine reelle Lösung der Form  $u(t) = A \cos(\omega t - \varphi)$ , also Frequenz  $\omega \in \mathbb{R}$ , Amplitude  $A \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  und Phase  $\varphi \in \mathbb{R}$ .

**Lösung:** Dies ist der Realteil der komplexen Differentialgleichung

$$\ddot{z}(t) + 2\delta \dot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = a e^{i\omega_1 t}.$$

Der Exponentialansatz  $z(t) = c e^{i\omega t}$  führt uns zur Gleichung

$$[-\omega^2 + 2\delta i\omega + \omega_0^2] c e^{i\omega t} \stackrel{!}{=} a e^{i\omega_1 t}.$$

Damit finden wir  $\omega = \omega_1$  und  $c = a/(\omega_0^2 - \omega^2 + 2\delta i\omega) = A e^{-i\varphi}$ .

😊 Das System reagiert mit derselben Frequenz wie die Anregung! In der Polardarstellung  $c = A e^{-i\varphi}$  erhalten wir  $z(t) = A e^{i(\omega_1 t - \varphi)}$  mit

$$A = \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2 \omega_1^2}}, \quad \varphi = \arctan \frac{2\delta \omega_1}{\omega_0^2 - \omega_1^2} + \begin{cases} 0 & \text{für } \omega_1 < \omega_0, \\ \pi & \text{für } \omega_1 > \omega_0. \end{cases}$$

😊 Damit haben wir die reelle Lösung  $u(t) = A \cos(\omega t - \varphi)$  gefunden.

## Erzwungene harmonische Schwingung

⚠ Im Sonderfall  $\delta = 0$  und  $\omega_1 = \omega_0$  schlägt unser Ansatz  $c e^{i\omega t}$  fehl!

$$\ddot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = [\omega_0^2 - \omega^2] c e^{i\omega t} \neq a e^{i\omega_0 t}$$

Zur Gleichheit muss  $\omega = \omega_0$  gelten, aber dann verschwindet  $[\omega_0^2 - \omega^2]$ . In obiger Formel für  $c$  ist das genau die Polstelle! Modifizierter Ansatz:

$$z(t) = c t e^{i\omega t}, \quad \dot{z}(t) = c e^{i\omega t} + c t i\omega e^{i\omega t}, \quad \ddot{z}(t) = 2c i\omega e^{i\omega t} - c t \omega^2 e^{i\omega t}$$

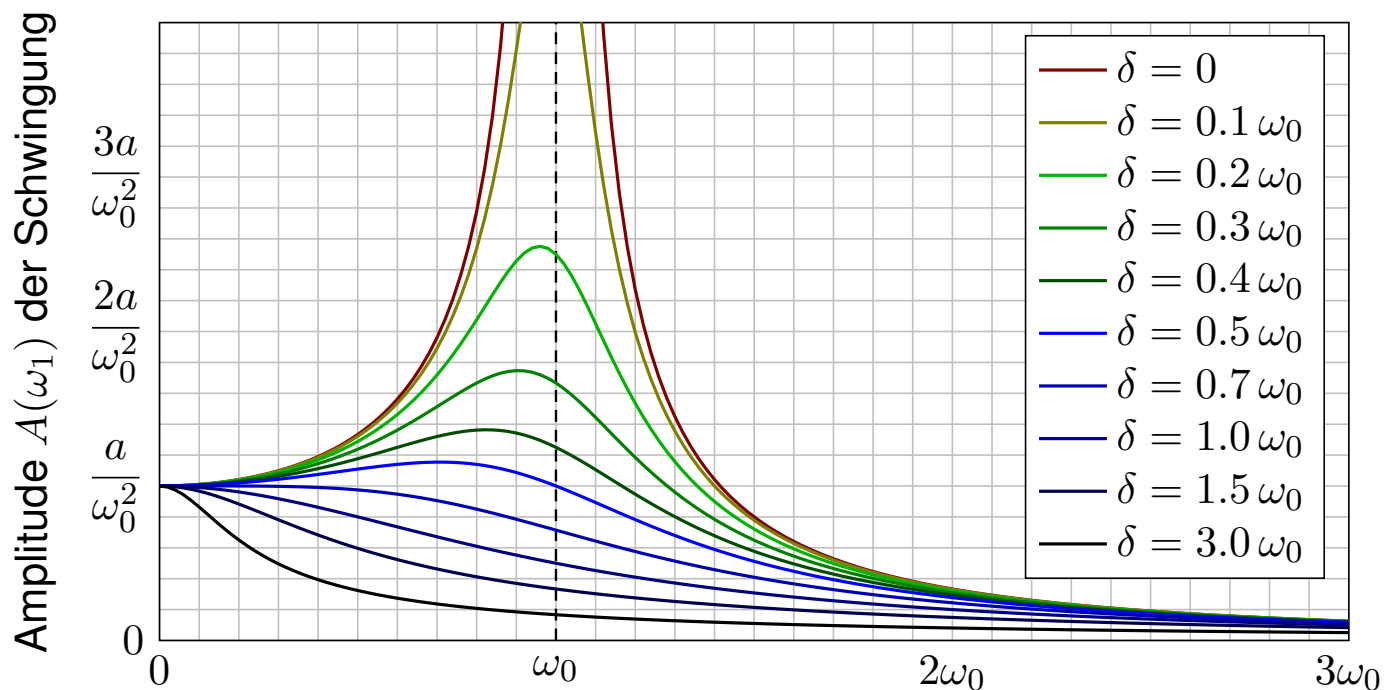
$$\implies \ddot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = [2i\omega + t(\omega_0^2 - \omega^2)] c e^{i\omega t} \stackrel{!}{=} a e^{i\omega_0 t}$$

Durch Vergleich finden wir die Werte  $\omega = \omega_0$  und  $c = a/(2i\omega_0)$ . Also:

$$z(t) = \frac{at e^{i\omega_0 t}}{2i\omega_0} = \frac{at \cos(\omega_0 t) + iat \sin(\omega_0 t)}{2i\omega_0} = \frac{at}{2\omega_0} \sin(\omega_0 t) - i \frac{at}{2\omega_0} \cos(\omega_0 t)$$

Der Realteil  $u(t) = (a/2\omega_0) t \sin(\omega_0 t)$  löst  $\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = a \cos(\omega_0 t)$ .

⚠ Das System reagiert mit derselben Frequenz  $\omega$  wie die Anregung, aber die Amplitude wächst unbeschränkt: Wir nennen dies **Resonanz**. Anschaulich: Jedes Kind lernt dieses Phänomen beim Schaukeln. L429 Die Anregungsfrequenz trifft genau eine Eigenfrequenz des Systems!



Frequenz  $\omega_1$  der äußeren Anregung  $f(t) = a \cos(\omega_1 t)$

Die Amplitude ist maximal für  $\omega_1^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2$  bzw.  $\omega_1 = 0$  falls  $2\delta^2 > \omega_0^2$ . Die **Resonanz** ist dabei umso stärker, je kleiner die Dämpfung  $\delta$  ist. Für  $\delta \approx 0$  und  $\omega_1 \approx \omega_0$  kommt es zur **Resonanzkatastrophe**.

Erzwungene Schwingungen sind ein weit verbreitetes Phänomen:

- Mechanik: Schaukel, Brücke bei gleichmäßigen Schritten / Wind, Vibrationen von Fahrzeugteilen bei bestimmten Drehzahlen,
- Akustik: Tonerzeugung in Musikinstrumenten, Resonanzkörper, Mitschwingen einer nicht gespielten Saite oder einer Stimmgabel,
- Elektrotechnik: elektrischer Schwingkreis, Radioempfang, WLAN,
- Hydromechanik: Tideresonanz der Ozeane und großen Meere.

Auch die (Hochschul-)Didaktik zeigt Resonanzphänomene: Jede Lernende folgt ihrem eigenen kognitiven Bewegungsgesetz (Rückstellkraft, Trägheit, Vergessen), wird von außen durch die Lehrende angeregt auf einer vorgegebenen Frequenz (als erzwungene Bewegung, extrinsisch). Trifft die anregende Frequenz in etwa eine Eigenfrequenz (intrinsisches Interesse), so kommt es zur Resonanz: Das ist die ideale Lern- und Lehrsituation! Anregung mit zu niedriger oder zu hoher Frequenz hingegen zeigt kaum Wirkung. Auch das kennen Sie aus eigener Erfahrung.

Bei hunderten Teilnehmer:innen sind die individuellen Eigenfrequenzen meist sehr breit gestreut. Egal auf welcher Frequenz ich sende, nur bei einen kleinen Teil bringt es eine Saite zum Klingen. Dieses Phänomen ist mir schmerzhaft bewusst, aber unter den gegebenen Bedingungen wohl unvermeidlich. Das erklärt auch die Bedeutung, sich aufeinander einzustellen. Ich versuche, auf verschiedenen Frequenzen zu senden, und lausche den Reaktionen. Das eigentlich Erstaunliche ist nicht, wie oft die Übertragung misslingt, sondern dass sie manchmal tatsächlich funktioniert.

## Satz N1A: freie harmonische Schwingung

Gegeben seien reelle Konstanten  $\delta, \omega_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  sowie  $\omega_1, a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

(1) Die **homogene lineare Differentialgleichung**

$$\ddot{u}(t) + 2\delta \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0$$

hat einen zweidim. **linearen Lösungsraum**; die allgemeine Lösung ist

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) \quad \text{mit freien Konstanten } c_1, c_2 \in \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

$$= \begin{cases} e^{-\delta t} [c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)] & \text{für } \delta < \omega_0 \text{ und } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \\ e^{-\delta t} [c_1 e^{-\lambda t} + c_2 e^{\lambda t}] & \text{für } \delta > \omega_0 \text{ und } \lambda = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \\ e^{-\delta t} [c_1 + c_2 t] & \text{für } \delta = \omega_0 \text{ (kritische Dämpfung)}. \end{cases}$$

Diese Lösungen sind reell, also eine Basis über  $\mathbb{R}$ , ebenso über  $\mathbb{C}$ .

**Anfangswerte**  $u(t_0)$  und  $\dot{u}(t_0)$  können beliebig vorgegeben werden: Sie legen die freien Konstanten  $c_1, c_2$  eindeutig fest (und umgekehrt).

## Zusammenfassung: erzwungene harmonische Schwingung

## Satz N1A: erzwungene harmonische Schwingung

(2) Die **inhomogene lineare Differentialgleichung**

$$\ddot{u}(t) + 2\delta \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = a \cos(\omega_1 t)$$

hat einen zweidim. **affinen Lösungsraum**; die allgemeine Lösung ist

$$u(t) = u_0(t) + c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) \quad \text{mit freien Konstanten } c_1, c_2 \in \mathbb{K} \text{ und}$$

$$u_0(t) = \begin{cases} A \cos(\omega_1 t - \varphi) & \text{für } \delta > 0 \text{ oder } \omega_1 \neq \omega_0 \text{ (generisch N113),} \\ & \text{Amplitude } A = a / \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2 \omega_1^2}, \\ & \text{Phase } \varphi = \arctan[2\delta\omega_1 / (\omega_0^2 - \omega_1^2)] (+\pi), \\ \frac{a}{2\omega_1} t \sin(\omega_1 t) & \text{für } \delta = 0 \text{ und } \omega_1 = \omega_0 \text{ (Resonanz N114).} \end{cases}$$

„Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen“

**Anfangswerte**  $u(t_0)$  und  $\dot{u}(t_0)$  können beliebig vorgegeben werden: Sie legen die freien Konstanten  $c_1, c_2$  eindeutig fest (und umgekehrt).

Typische Beispiele: Bei **schwacher Dämpfung**  $0 < \delta < \omega_0$  gilt

$$u(t) = \underbrace{A \cos(\omega_1 t - \varphi)}_{\text{periodische Lösung}} + \underbrace{e^{-\delta t} [c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)]}_{\text{Einschwingvorgang} \rightarrow 0 \text{ f\"ur } t \rightarrow \infty}.$$

Nach Einschwingzeit sehen wir nur noch die periodische Lösung  $u_0$ : Das System reagiert mit der erzwungenen Frequenz  $\omega_1$  der Anregung, mit konstanter Amplitude  $A$  und Phasenverschiebung  $\varphi$  wie berechnet.

Für  $\omega_1 \rightarrow 0$  gilt  $A \rightarrow a/\omega_0^2$ : Niedrige Frequenzen werden gedämpft.

Für  $\omega_1 \rightarrow \infty$  gilt  $A \rightarrow 0$ : Hohe Frequenzen werden verschluckt.

Der Sonderfall  $\delta = 0$  und  $\omega_1 = \omega_0$  führt zur **Resonanz(katastrophe)**:

$$u(t) = \underbrace{\frac{a}{2\omega_0} t \sin(\omega_0 t)}_{\text{wächst unbeschränkt}} + \underbrace{c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t)}_{\text{periodisch, insbesondere beschränkt}}$$

Manchmal ist genau dies erwünscht, etwa beim Radioempfang.

😊 Mit unseren Techniken lösen Sie alle Fälle vollständig und explizit.

Die allgemeine Lösung / Schwingung  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$  ist die **Überlagerung** einer inhomogenen Lösung / **erzwungenen Schwingung**  $u_0$  und einer homogenen Lösung / **freien Schwingung**  $c_1 u_1 + c_2 u_2$ .

Die Konstanten  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  ergeben sich aus Anfangsdaten  $u(t_0), \dot{u}(t_0)$ . Bei Dämpfung  $\delta > 0$  klingen  $u_1(t) \rightarrow 0$  und  $u_2(t) \rightarrow 0$  exponentiell ab. Der Einfluss der Startwerte ist nach gewisser **Einschwingzeit** kaum noch spürbar, es bleibt schließlich nur die **periodische Lösung**  $u_0$ .

Im dämpfungsfreien Fall  $\delta = 0$  klingen die freien Schwingungen  $u_1(t) = \cos(\omega_0 t)$  und  $u_2(t) = \sin(\omega_0 t)$  nicht ab. Zudem führt eine äußere Anregung mit Frequenz  $\omega_1 = \omega_0$  zur **Resonanzkatastrophe**: Die Amplitude der Schwingung wächst (theoretisch) unbegrenzt. L429

Für **praktische Zwecke** gilt dies bereits für  $\delta \approx 0$ : Die Schwingungen  $u_1, u_2$  klingen sehr langsam ab, bei realistischer Beobachtungsdauer sind Dämpfungsverluste kaum wahrnehmbar. Bei Anregung mit  $\omega_1 \approx \omega_0$  kommt es zu sehr starker Resonanz, die Amplitude der erzwungenen Schwingung wächst schließlich über die Belastbarkeit des Materials.

## Lineare DG mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten eine **lineare DG mit konstanten Koeffizienten**:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = b(x)$$

Hier sind  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  konstant und  $b: \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{K}$  stetig. Den wichtigen Spezialfall  $n = 2$  haben wir bereits eingangs ausgeführt.

Wir lösen zunächst die **homogene Differentialgleichung** mit  $b = 0$ .

**Exponentialansatz:**  $y(x) = e^{\lambda x}$ ,  $y' = \lambda y$ ,  $y'' = \lambda^2 y$ ,  $\dots$ ,  $y^{(n)} = \lambda^n y$ . Einsetzen in die DG ergibt  $(\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0) e^{\lambda x} \stackrel{!}{=} 0$ .

Genau dann erfüllt  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}: x \mapsto y(x) = e^{\lambda x}$  die homogene DG, wenn  $\lambda \in \mathbb{C}$  eine Nullstelle des **charakteristischen Polynoms** ist:

$$p(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Wir zerlegen  $p \in \mathbb{C}[x]$  in Linearfaktoren:  $p(x) = (x - \lambda_1)^{k_1} \dots (x - \lambda_\ell)^{k_\ell}$  mit Nullstellen  $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell \in \mathbb{C}$  und ihren Vielfachheiten  $k_1, \dots, k_\ell \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ . Diese Nullstellen seien paarweise verschieden, also  $\lambda_i \neq \lambda_j$  für  $i \neq j$ . Fundamentalsatz F3c: Über  $\mathbb{C}$  ist die Zerlegung immer möglich!

## Lineare DG: Fundamentallösungen

## Satz N2A: komplexe und reelle Fundamentallösungen

Zu lösen sei  $p(\partial) y = 0$  mit  $p(x) = (x - \lambda_1)^{k_1} \dots (x - \lambda_\ell)^{k_\ell} \in \mathbb{C}[x]$ .

(1) Hierzu haben wir  $n$  linear unabhängige **Fundamentallösungen**

$$\begin{aligned} & e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, x^2 e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{k_1-1} e^{\lambda_1 x}, \dots \\ & e^{\lambda_\ell x}, x e^{\lambda_\ell x}, x^2 e^{\lambda_\ell x}, \dots, x^{k_\ell-1} e^{\lambda_\ell x}. \end{aligned}$$

(2) Ist  $p \in \mathbb{R}[x]$  reell und  $\lambda = \sigma + i\omega$  mit  $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$  und  $\omega \neq 0$  eine  $k$ -fache Nullstelle, so gilt dies auch für die komplex-konjugierte Zahl  $\bar{\lambda} = \sigma - i\omega$ . Durch Basiswechsel [N107](#) erhalten wir  $n$  **reelle Fundamentallösungen**:

$$\left. \begin{array}{l} e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda x} \\ e^{\bar{\lambda} x}, \dots, x^{k-1} e^{\bar{\lambda} x} \end{array} \right\} \begin{array}{c} \Longleftrightarrow \\ \text{Basiswechsel} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} e^{\sigma x} \cos(\omega x), \dots, x^{k-1} e^{\sigma x} \cos(\omega x) \\ e^{\sigma x} \sin(\omega x), \dots, x^{k-1} e^{\sigma x} \sin(\omega x) \end{array} \right.$$

(3) Diese  $n$  Lösungen  $y_1, \dots, y_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  sind  $\mathbb{K}$ -linear unabhängig.

(4) Jede Lösung  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  der homogenen DG  $p(\partial) y = 0$  hat die Form  $y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$  mit  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ . Kurz: Lösungsraum  $L_0 \cong \mathbb{K}^n$ .

**Aufgabe:** Lösen Sie (a) allgemein und (b) das Anfangswertproblem

$$y'' + 3y' + 2y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

**Lösung:** (a) Das char. Polynom unserer Gleichung  $p(\partial) y = 0$  ist

$$p(x) = x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2).$$

Nullstellen:  $-1, -2$ . Als Fundamentallösungen der DG erhalten wir

$$y_1(x) = e^{-x}, \quad y_2(x) = e^{-2x}.$$

Diese sind linear unabhängig. Die allgemeine reelle Lösung ist also

$$y(x) = \alpha_1 e^{-x} + \alpha_2 e^{-2x} \quad \text{mit} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Die Anfangsdaten bestimmen eindeutig die freien Konstanten:

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ y'(0) = -\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = -1 \end{cases}$$

Die gesuchte Lösung des AWP ist also  $y(x) = 2e^{-x} - e^{-2x}$ . Probe!  
Das entspricht einem harmonischen Oszillator mit starker Dämpfung.

**Aufgabe:** Lösen Sie (a) allgemein und (b) das Anfangswertproblem

$$y'' + 2y' + y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

**Lösung:** (a) Das char. Polynom unserer Gleichung  $p(\partial) y = 0$  ist

$$p(x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2.$$

Doppelte Nullstelle  $-1$ . Als Fundamentallösungen der DG erhalten wir

$$y_1(x) = e^{-x}, \quad y_2(x) = x e^{-x}.$$

Probe:  $y_2'(x) = (1 - x)e^{-x}$ ,  $y_2''(x) = (x - 2)e^{-x}$ ,  $y_2'' + 2y_2' + y_2 = 0$ .

Diese sind linear unabhängig. Die allgemeine reelle Lösung ist also

$$y(x) = e^{-x}(\alpha_1 + \alpha_2 x) \quad \text{mit} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Die Anfangsdaten bestimmen eindeutig die freien Konstanten:

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = \alpha_1 = 1 \\ y'(0) = -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

Die gesuchte Lösung des AWP ist also  $y(x) = e^{-x}(1 + x)$ . Probe!  
Das entspricht einem harmonischen Oszillator mit kritischer Dämpfung.



**Aufgabe:** Lösen Sie (a) allgemein und (b) das Anfangswertproblem

$$u''' - 7u' + 6u = 0 \quad \text{mit} \quad u(0) = 3, \quad u'(0) = 5, \quad u''(0) = 8.$$

(c) Berechnen Sie das Fundamentalsystem  $u_1, u_2, u_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1' & u_2' & u_3' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' \end{pmatrix} (0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Lösung:** (a) Das char. Polynom unserer Gleichung  $p(\partial) y = 0$  ist

$$p(x) = x^3 - 7x + 6 = (x - 1)(x - 2)(x + 3).$$

Die Nullstellen des char. Polynoms  $p$  sind hier 1, 2,  $-3$ . Die Probe ist wie immer leicht!

In Übungs- oder Klausuraufgaben wird man eine Nullstelle  $\lambda$  raten und dann den Linearfaktor  $(x - \lambda)$  durch Polynomdivision abspalten, bis man auf ein Polynom vom Grad  $\leq 2$  kommt. Diese künstliche Situation ist hoffnungslos unrealistisch aber leider üblich. Wenn Ihnen ein freilaufendes Polynom in der Natur begegnet, werden Sie seine Nullstellen nicht raten können. Es bleibt oft nur ihre näherungsweise Bestimmung durch geeignete numerische Methoden.

Als Fundamentallösungen der DG erhalten wir somit  $e^x, e^{2x}, e^{-3x}$ .

Die allgemeine Lösung ist  $\alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x} + \alpha_3 e^{-3x}$  mit  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ .

(c) Unsere drei Fundamentallösungen  $y_1(x) = e^x, y_2(x) = e^{2x}, y_3(x) = e^{-3x}$  fassen wir zur **Fundamentalmatrix** zusammen:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & e^{2x} & e^{-3x} \\ e^x & 2e^{2x} & -3e^{-3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{-3x} \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist stets **invertierbar**, speziell für  $x = 0$  finden wir:

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow Y(0)^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 30 & -5 & -5 \\ -12 & 8 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

**Basiswechsel** von der alten Basis  $y_1, y_2, y_3$  zur neuen Basis  $u_1, u_2, u_3$ :

$$Y(x)Y(0)^{-1} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1' & u_2' & u_3' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = +\frac{30}{20}y_1 - \frac{12}{20}y_2 + \frac{2}{20}y_3 \\ u_2 = -\frac{5}{20}y_1 + \frac{8}{20}y_2 - \frac{3}{20}y_3 \\ u_3 = -\frac{5}{20}y_1 + \frac{4}{20}y_2 + \frac{1}{20}y_3 \end{cases}$$

(b) Die gesuchte Lösung des AWP ist  $u(x) = 3u_1 + 5u_2 + 8u_3$ . Probe!



**Aufgabe:** Lösen Sie (a) allgemein und (b) das Anfangswertproblem

$$y'' + 2y' + 5y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$$

**Lösung:** (a) Das charakteristische Polynom ist  $p(x) = x^2 + 2x + 5$ .

Die Nullstellen  $\lambda_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1 - 5} = -1 \pm 2i$  sind komplex-konjugiert.

Komplexes Fundamentalsystem:  $e^{(-1+2i)x}, e^{(-1-2i)x}$

Komplexe Lösungen:  $z(x) = c_1 e^{(-1+2i)x} + c_2 e^{(-1-2i)x}$  mit  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

Reelles Fundamentalsystem:  $e^{-x} \cos(2x), e^{-x} \sin(2x)$

Reelle Lösungen:  $y(x) = \alpha_1 e^{-x} \cos(2x) + \alpha_2 e^{-x} \sin(2x)$  mit  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

(b) Die Anfangsdaten bestimmen eindeutig die freien Konstanten:

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = \alpha_1 = 1 \\ y'(0) = -\alpha_1 + 2\alpha_2 = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 2 \end{cases}$$

Probe! Die Lösung des Anfangswertproblems ist demnach

$$y(x) = e^{-x} (\cos(2x) + 2 \sin(2x)).$$

😊 Über die komplexe Lösung kommt man zur selben Lösung.

**Aufgabe:** Finden Sie ein reelles Fundamentalsystem der Gleichung

$$y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0.$$

**Lösung:** Das char. Polynom unserer Gleichung  $p(\partial) y = 0$  ist

$$p(x) = x^4 + 8x^2 + 16 = (x^2 + 4)^2 = (x - 2i)^2 (x + 2i)^2.$$

Doppelte Nullstellen  $2i, -2i$ . Ein komplexes Fundamentalsystem ist

$$e^{2ix}, e^{-2ix}, x e^{2ix}, x e^{-2ix}.$$

Probe! Hieraus gewinnen wir das reelle Fundamentalsystem

$$\cos(2x), \sin(2x), x \cos(2x), x \sin(2x).$$

Basiswechsel! Jede reelle Lösung hat demnach die Form

$$y(x) = \cos(2x)(\alpha_1 + \alpha_2 x) + \sin(2x)(\alpha_3 + \alpha_4 x)$$

mit eindeutig bestimmten Konstanten  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ .

😊 Wie immer gilt: **Anfangswerte**  $y(x_0), y'(x_0), y''(x_0), y'''(x_0) \in \mathbb{R}$  zu einem Startzeitpunkt  $x_0$  können beliebig vorgegeben werden; sie legen die freien Konstanten  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$  eindeutig fest.

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $\mathbb{K}^I$  die Menge aller Funktionen  $f, g: I \rightarrow \mathbb{K}$ . Ihre Summe  $f + g: I \rightarrow \mathbb{K}$  ist  $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$  für jedes  $x \in I$ . Für Skalare  $\alpha \in \mathbb{K}$  definieren wir  $\alpha f: I \rightarrow \mathbb{K}$  durch  $(\alpha f)(x) := \alpha f(x)$ . Dies definiert den  **$\mathbb{K}$ -Vektorraum**  $(\mathbb{K}^I, +, \cdot)$  aller Funktionen  $I \rightarrow \mathbb{K}$ .

Sei  $C^n = C^n(I, \mathbb{K})$  die Teilmenge aller  $n$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen  $f: I \rightarrow \mathbb{K}$ . Dies ist ein **Untervektorraum** von  $(\mathbb{K}^I, +, \cdot)$ .

Die Ableitung  $\partial: C^n \rightarrow C^{n-1}: f \mapsto f'$  ist eine  **$\mathbb{K}$ -lineare Abbildung**, das heißt  $\partial(\alpha f + \beta g) = \alpha(\partial f) + \beta(\partial g)$  für alle  $f, g \in C^n$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ . Gleiches gilt auch für die  $k$ -fache Ableitung  $\partial^k: C^n \rightarrow C^{n-k}: f \mapsto f^{(k)}$ . Hierbei ist  $\partial^0 = \text{id}: f \mapsto f$  die identische Abbildung („nullmal ableiten“).

Auch das **Produkt**  $f \cdot g$  zweier Funktionen definieren wir punktweise.

Damit wird  $(\mathbb{K}^I, +, \cdot)$  zu einem Ring, ebenso die Teilmenge  $C^n(I, \mathbb{K})$ .

Zu  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in C^0(I, \mathbb{K})$  betrachten wir den **Differentialoperator**

$$L = a_0 \partial^0 + a_1 \partial^1 + \dots + a_{n-1} \partial^{n-1} + \partial^n: C^n \rightarrow C^0 \quad \text{mit}$$

$$f \mapsto Lf = a_0 f + a_1 f' + \dots + a_{n-1} f^{(n-1)} + f^{(n)}.$$

Dies ist eine  $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung, d.h.  $L(\alpha f + \beta g) = \alpha(Lf) + \beta(Lg)$ .

Jede lineare DG hat die Form  $Ly = b$ . Gegeben ist hierzu  $L: C^n \rightarrow C^0$  und die rechte Seite  $b \in C^0$ ; gesucht sind alle Lösungen  $y \in C^n$ .

Die homogene Gleichung  $Ly = 0$  zu lösen bedeutet, den **Kern** von  $L$  zu bestimmen. Dank Existenz- und Eindeutigkeitsatz N3A ist  $L: C^n \rightarrow C^0$  surjektiv, und es gilt  $\dim_{\mathbb{K}} \ker L = n$ . Wir suchen eine **Basis** für  $\ker L$ .

Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Wir nennen  $v_1, \dots, v_\ell \in V$  **linear abhängig** über  $\mathbb{K}$ , wenn es  $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell \in \mathbb{K}$  gibt, sodass  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_\ell v_\ell = 0$  gilt, wobei mindestens einer der Koeffizienten  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  ungleich 0 ist.

Hingegen heißt die Familie  $v_1, \dots, v_\ell \in V$  **linear unabhängig**, wenn  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_\ell v_\ell = 0$  nur für  $\alpha_1 = \dots = \alpha_\ell = 0$  möglich ist.

Dies ist äquivalent zur Bedingung des **Koeffizientenvergleichs**:

Aus  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_\ell v_\ell = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_\ell v_\ell$  folgt  $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_\ell = \beta_\ell$ .

**Beispiel:** Zu  $a < b$  in  $\mathbb{R}$  betrachten wir den Vektorraum  $C^0([a, b], \mathbb{K})$ .

Hierin sind die Monomfunktionen  $1, x, x^2, \dots, x^n$  linear unabhängig:

Es gilt  $\alpha_0 1 + \alpha_1 x^1 + \dots + \alpha_n x^n = 0$  nur für  $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ .

Aus  $\alpha_0 1 + \alpha_1 x^1 + \dots + \alpha_n x^n = \beta_0 1 + \beta_1 x^1 + \dots + \beta_n x^n$  folgt somit die Gleichheit aller Koeffizienten, also  $\alpha_0 = \beta_0, \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$ .

**Satz N2B: lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren**

Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum, sei  $L: V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung mit Eigenvektoren  $v_1, \dots, v_n \in V$ , also  $Lv_k = \lambda_k v_k$  und  $v_k \neq 0$ .

Sind die Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  paarweise verschieden, also  $\lambda_i \neq \lambda_j$  für  $i \neq j$ , dann sind die Eigenvektoren  $v_1, \dots, v_n \in V$  linear unabhängig.

Für die Eigenräume  $E_i = \ker(L - \lambda_i)$  erhalten wir  $E_1 \oplus \dots \oplus E_n < V$ .

**Beweis:** Wir führen Induktion über die Länge  $n$  der Familie  $v_1, \dots, v_n$ .  
 Induktionsanfang  $n = 1$ : Wegen  $v_1 \neq 0$  folgt aus  $\alpha_1 v_1 = 0$  sofort  $\alpha_1 = 0$ .  
 Induktionsschritt: Gilt  $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ , so betrachten wir

$$\begin{aligned} 0 &= Lv - \lambda_n v \\ &= \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_n)v_1 + \dots + \alpha_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)v_{n-1} + \alpha_n(\lambda_n - \lambda_n)v_n. \end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung sind  $v_1, \dots, v_{n-1}$  linear unabhängig. Hieraus folgt  $\alpha_j(\lambda_j - \lambda_n) = 0$  für alle  $j = 1, \dots, n-1$ . Wegen  $\lambda_j \neq \lambda_n$  folgt  $\alpha_j = 0$ . Nun bleibt  $v = \alpha_n v_n = 0$ : Wegen  $v_n \neq 0$  folgt auch  $\alpha_n = 0$ .

😊 Für die Arbeit mit Differentialgleichungen beschert uns dieser Satz ein besonders praktisches Kriterium für die lineare Unabhängigkeit!

**Beispiele:** Wir betrachten ein Intervall  $I = [a, b]$  mit  $a < b$  und hierzu den Vektorraum  $C^\infty(I, \mathbb{K})$  aller beliebig oft diff'baren Funktionen.

- 1 Die Exponentialfunktionen  $e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$  sind linear unabhängig: Sie sind Eigenvektoren des Differentialoperators  $\partial$  zu  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .
- 2 Ebenso sind die Monome  $1, x, x^2, \dots, x^n$  linear unabhängig: Sie sind Eigenvektoren des Diff'operators  $x\partial$  zu  $0, 1, 2, \dots, n$ .
- 3 Auch die Funktionen  $e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \dots, x^n e^{\lambda x}$  sind linear unabhängig: Sie sind Eigenvektoren des Diff'operators  $x(\partial - \lambda)$  zu  $0, 1, \dots, n$ .

**Allgemeiner:** Hauptvektoren [P119](#) zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig. Der Beweis ist analog und nur etwas länger.

😊 Zu Verständnis und Lösung von Differentialgleichungen arbeiten Analysis und lineare Algebra wunderbar zusammen. Hier lohnt sich erneut Ihre Investition in die mathematischen Grundlagen der HM1&2!

Einsetzen von  $\partial$  in das Polynom  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbb{C}[x]$  gibt

$$L = p(\partial) = a_0\partial^0 + a_1\partial^1 + \dots + a_{n-1}\partial^{n-1} + \partial^n : C^n \rightarrow C^0 \quad \text{mit}$$

$$f \mapsto Lf = p(\partial)f = a_0f + a_1f' + \dots + a_{n-1}f^{(n-1)} + f^{(n)}.$$

Jede lineare DG mit konstanten Koeffizienten hat somit die Form

$$p(\partial)y = b$$

mit rechter Seite  $b: I \rightarrow \mathbb{K}$ , und speziell  $b = 0$  im homogenen Fall. Gesucht sind alle Lösungen  $y: I \rightarrow \mathbb{K}$  dieser linearen Gleichung.

Die homogene Differentialgleichung  $p(\partial)y = 0$  zu lösen bedeutet, den Kern der linearen Abbildung  $p(\partial): C^n \rightarrow C^0$  zu bestimmen.

Das kennen Sie gut für lineare Abbildungen  $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$  und nutzen effiziente Rechentechniken: Wir können Gleichungen durch Matrizen darstellen und durch den Gauß-Algorithmus lösen. Auch für Differentialgleichungen nutzen wir geschickt die lineare Struktur. Allerdings ist der Raum  $C^n$  nicht endlich-dimensional und Matrizen stehen deshalb leider nicht zur Verfügung. Doch dank des Existenz- und Eindeigkeitssatzes N3A für Differentialgleichungen gilt immer  $\dim \ker p(\partial) = n$ . Zudem ist die Abbildung  $p(\partial): C^n \rightarrow C^0$  surjektiv, d.h. zu jeder rechten Seite  $b$  existiert mindestens eine Lösung, und damit ein affiner Lösungsraum der Dimension  $n$ .

### Lemma N2c: Komposition linearer Differentialoperatoren

Seien  $p(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$  und  $q(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$  Polynome in  $\mathbb{K}[x]$ .

Dann gilt  $p(\partial) \circ q(\partial) = (p \cdot q)(\partial)$ ; Komposition entspricht Multiplikation.

**Nachrechnen:** Für jede Funktion  $f \in C^{m+n}(I, \mathbb{K})$  gilt

$$p(\partial)q(\partial)f = \sum_j a_j \partial^j \left[ \sum_k b_k f^{(k)} \right] = \sum_j \sum_k a_j b_k f^{(j+k)} = (p \cdot q)(\partial)f.$$

😊 Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten verhalten sich wie Polynome! Dies können und werden wir bei Rechnungen nutzen.

⚠️ Diese Rechnung nutzt aus, dass die Koeffizienten konstant sind! Andernfalls ist die Komposition von Operatoren nicht mehr kommutativ:

**Beispiel:** Wir betrachten  $p = \partial: f(x) \mapsto f'(x)$  und  $q = x: f \mapsto x \cdot f(x)$ .

$$\left. \begin{array}{l} (p \circ q)f(x) = \partial(xf(x)) = f(x) + xf'(x) \\ (q \circ p)f(x) = x(\partial f(x)) = xf'(x) \end{array} \right\} \implies p \circ q - q \circ p = 1$$

In der Quantenmechanik ist  $p$  der Impulsoperator und  $q$  der Ortsoperator. Sie kommutieren nicht! Das ist die Ursache der Unschärferelation. K309

**Satz N2D: Eigenwerte und Lösungen**

Sei  $\lambda$  eine  $k$ -fache Nullstelle des Polynoms  $p \in \mathbb{C}[x]$ , also

$$p(x) = p_1(x) (x - \lambda)^k \quad \text{mit einem Polynom } p_1 \in \mathbb{C}[x].$$

Dann erlaubt  $p(\partial) y = 0$  die  $k$  linear unabhängigen Lösungen

$$e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda x}.$$

**Nachrechnen:** Für jede Funktion  $y(x) = q(x) e^{\lambda x}$  gilt:

$$(\partial - \lambda) [q(x) e^{\lambda x}] = q'(x) e^{\lambda x} + q(x) \lambda e^{\lambda x} - \lambda q(x) e^{\lambda x} = q'(x) e^{\lambda x}$$

Bei  $k$ -facher Anwendung erhalten wir  $(\partial - \lambda)^k [q(x) e^{\lambda x}] = q^{(k)}(x) e^{\lambda x}$ . Dies verschwindet genau dann, wenn  $q$  ein Polynom vom Grad  $< k$  ist.

**Vorschau:** Wir erkennen hier zudem die Hauptvektorkette (siehe P1c)

$$0 \xleftarrow{\partial - \lambda} e^{\lambda x} \xleftarrow{\partial - \lambda} x e^{\lambda x} \xleftarrow{\partial - \lambda} \frac{x^2}{2} e^{\lambda x} \xleftarrow{\partial - \lambda} \frac{x^3}{3!} e^{\lambda x} \xleftarrow{\partial - \lambda} \dots \xleftarrow{\partial - \lambda} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} e^{\lambda x}$$

😊 Die Linearfaktorzerlegung von  $p$  ergibt so  $n$  unabhängige Lösungen!

**Aufgabe:** Lösen Sie (a) allgemein und (b) das Anfangswertproblem

$$y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 2.$$

**Lösung:** (a) Char. Polynom  $p(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x + 2)^3$ .

Fundamentallösungen:  $e^{-2x}, x e^{-2x}, x^2 e^{-2x}$ . Allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} y(x) &= [c_0 + c_1 x + c_2 x^2] e^{-2x} \\ y'(x) &= [c_1 - 2c_0 + (2c_2 - 2c_1)x - 2c_2 x^2] e^{-2x} \\ y''(x) &= [(2c_2 - 4c_1 + 4c_0) + (\dots)x + (\dots)x^2] e^{-2x} \end{aligned}$$

(b) Die Anfangsdaten bestimmen eindeutig die freien Konstanten:

$$\left. \begin{aligned} y(0) = c_0 &= 1 \\ y'(0) = c_1 - 2c_0 &= 2 \\ y''(0) = 2c_2 - 4c_1 + 4c_0 &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} c_0 = 1 \\ c_1 = 4 \\ c_2 = 7 \end{cases}$$

😊 Die Lösung unseres AWP ist also  $y(x) = (7x^2 + 4x + 1) e^{-2x}$ . Probe!

**Satz N2E: Lösungsansatz für spezielle rechte Seiten**

(1) Seien  $p, r \in \mathbb{C}[x]$  Polynome. Zu lösen sei die Differentialgleichung

$$p(\partial) y(x) = r(x) e^{\mu x}.$$

Ist  $\mu$  eine  $k$ -fache Nullstelle von  $p$ , so existiert eine Lösung der Form

$$y_b(x) = q(x) x^k e^{\mu x}$$

mit einem eindeutigen Polynom  $q \in \mathbb{C}[x]$  vom Grad  $\deg q = \deg r$ .

Hier ist  $k = 0$  erlaubt; bei  $k > 0$  spricht man von  $k$ -facher **Resonanz**.

(2) Speziell  $p(\partial) y(x) = e^{\mu x}$  wird gelöst durch  $y_b(x) = e^{\mu x} x^k / p^{(k)}(\mu)$ .

- 😊 Sie finden  $q$  geduldig durch Einsetzen und Koeffizientenvergleich.
- 😊 Der Ansatz funktioniert ebenso für  $r(x) = r(x) e^{0x}$  mit  $\mu = 0$  sowie

$$r(x) e^{\sigma x} \cos(\omega x) = r(x) \cdot \frac{1}{2} [e^{(\sigma+i\omega)x} + e^{(\sigma-i\omega)x}],$$

$$r(x) e^{\sigma x} \sin(\omega x) = r(x) \cdot \frac{1}{2i} [e^{(\sigma+i\omega)x} - e^{(\sigma-i\omega)x}].$$

**Vorbereitung:** Wir wollen Differentialoperatoren geschickt nutzen. Dank Produktregel  $\partial(f \cdot g) = (\partial f) \cdot g + f \cdot (\partial g)$  finden wir:

$$\begin{aligned} \partial [e^{\mu x} q(x)] &= e^{\mu x} [(\partial + \mu) q(x)] \\ \partial^k [e^{\mu x} q(x)] &= e^{\mu x} [(\partial + \mu)^k q(x)] \end{aligned}$$

Für jedes Polynom  $p \in \mathbb{C}[x]$  gilt somit

$$p(\partial) [e^{\mu x} q(x)] = e^{\mu x} [p(\partial + \mu) q(x)]$$

Kurz  $e^{-\mu x} p(\partial) e^{\mu x} = p(\partial + \mu)$ . Als Beispiele haben wir insbesondere:

$$\begin{aligned} (\partial - \lambda) [e^{\mu x} q(x)] &= e^{\mu x} [(\partial - \lambda + \mu) q(x)] \\ (\partial - \lambda)^k [e^{\mu x} q(x)] &= e^{\mu x} [(\partial - \lambda + \mu)^k q(x)] \end{aligned}$$

Die Vertauschungsregel vereinfacht die Rechnungen sowohl in folgenden Beispielen als auch im anschließenden Beweis. Dieser Rechentrick ist eine nützliche Abkürzung aber keine Pflicht: Sie können die Ableitung  $p(\partial)$  immer auch direkt ausrechnen; zur Vorbereitung können Sie einmal beides ausprobieren und dann entscheiden, welcher Rechenweg für Sie einfacher ist.



**Beweis des Satzes:** Der Satz erklärt ein Lösungsrezept: „Wenn die Aufgabe soundso gegeben ist, dann sieht die Lösung soundso aus.“

Wir zeigen, dass der genannte Ansatz tatsächlich immer gelingt.

Hierzu betrachten wir die Menge aller Polynome vom Grad  $< n$ :

$$\mathbb{C}[x]_{<n} = \{ a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} \mid a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C} \}.$$

Dies ist ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum der Dimension  $n$ . Die  $k$ -fache Ableitung  $\partial^k : \mathbb{C}[x]_{<n} \rightarrow \mathbb{C}[x]_{<n-k}$  ist surjektiv. Ihr Kern ist der Unterraum  $\mathbb{C}[x]_{<k}$ .

Für  $\lambda \neq 0$  gilt  $(\partial - \lambda) : \mathbb{C}[x]_{<n} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[x]_{<n}$ : Dieser Operator erhält den Grad, hat also trivialen Kern, ist somit injektiv, dank Dimensionsformel auch surjektiv und somit ein Vektorraumisomorphismus. Alternative und konkretere Sichtweise: Bezüglich der Monombasis  $x^0, x^1, \dots, x^{n-1}$  schreibt sich  $\partial - \lambda$  als obere Dreiecksmatrix mit Determinante  $(-\lambda)^n$ .

Nach Voraussetzung gilt  $p(x) = \tilde{p}(x) (x - \mu)^k$  mit  $\tilde{p}(\mu) \neq 0$ , also

$$p(\partial) [e^{\mu x} x^k q(x)] = e^{\mu x} p(\partial + \mu) [x^k q(x)] = e^{\mu x} \tilde{p}(\partial + \mu) \partial^k [x^k q(x)].$$

Zunächst senkt  $\partial^k$  den Grad um  $k$ , sodann erhält  $\tilde{p}(\partial + \mu)$  den Grad.

Zusammenfassend erhalten wir also die Vektorraumisomorphismen

$$\begin{aligned} \partial^k &: x^k \mathbb{C}[x]_{<n} &\xrightarrow{\sim}& \mathbb{C}[x]_{<n}, \\ p(\partial) &: e^{\mu x} x^k \mathbb{C}[x]_{<n} &\xrightarrow{\sim}& e^{\mu x} \mathbb{C}[x]_{<n}. \end{aligned}$$

Für unsere Differentialgleichung bedeutet das ausführlich folgendes: Zu jedem Polynom  $r(x) = r_0 + r_1x + \dots + r_{n-1}x^{n-1} \in \mathbb{C}[x]_{<n}$  existiert genau ein Polynom  $q(x) = q_0 + q_1x + \dots + q_{n-1}x^{n-1} \in \mathbb{C}[x]_{<n}$ , das unsere Differentialgleichung  $p(\partial) [e^{\mu x} x^k q(x)] = e^{\mu x} r(x)$  löst. Das war zu zeigen.

😊 Die praktische Berechnung gelingt durch Koeffizientenvergleich: Die lineare Abbildung  $q \mapsto r$  können wir leicht ausrechnen, für ihre Umkehrung  $r \mapsto q$  nutzen wir die Methoden der linearen Algebra.

Dies gelingt besonders leicht im wichtigen Spezialfall  $p(\partial) y(x) = e^{\mu x}$ :

$$\begin{aligned} p(\partial) [e^{\mu x} x^k] &= e^{\mu x} \tilde{p}(\partial + \mu) \partial^k x^k = e^{\mu x} \tilde{p}(\partial + \mu) k! = e^{\mu x} \tilde{p}(\mu) k! \\ p^{(k)}(x) &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \partial^j \tilde{p}(x) \cdot \partial^{k-j} (x - \mu)^k \quad \Rightarrow \quad p^{(k)}(\mu) = \tilde{p}(\mu) k! \end{aligned}$$

😊 Somit wird  $p(\partial) y(x) = e^{\mu x}$  gelöst durch  $y_b(x) = e^{\mu x} x^k / p^{(k)}(\mu)$ .



**Aufgabe:** Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 2y(x) = x e^{2x}.$$

**Lösung:** Char. Polynom  $p(x) = x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$ .

Fundamentalsystem der homogenen Gleichung:  $e^{-x}$ ,  $e^{2x}$ .

Wir lösen  $p(\partial) y(x) = x e^{\mu x}$  für  $\mu = 2$ . (spezielle rechte Seite)

Hier ist  $\mu = 2$  eine einfache Nullstelle von  $p$ . (Vielfachheit  $k = 1$ )

Gemäß Satz N2E gelingt  $y_b(x) = q(x) e^{2x}$  mit  $q(x) = c_1 x + c_2 x^2$ .

Einsetzen in die DG und geduldiges Ausrechnen liefert:

$$\begin{aligned} p(\partial) y_b(x) &= (\partial + 1)(\partial - 2) [q(x) e^{2x}] = e^{2x} (\partial + 3) \partial q(x) \\ &= e^{2x} [q''(x) + 3q'(x)] = e^{2x} (2c_2 + 3c_1 + 6c_2 x) \stackrel{!}{=} x e^{2x} \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:  $c_2 = 1/6$  und  $c_1 = -1/9$ . Allgemeine Lösung:

$$y(x) = \alpha_1 e^{-x} + \left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{9}x + \alpha_2\right) e^{2x}$$

Machen Sie die Probe: in DG einsetzen und geduldig ausrechnen!

Zu lösen ist hier  $p(\partial) y(x) = x e^{\mu x}$  mit einfacher Nullstelle  $\mu$ .

Dank Satz N2E wissen wir, wie eine Lösung zu finden ist:

Wir setzen  $(c_1 + c_2 x) x e^{2x}$  ein und vergleichen die Koeffizienten.

Sie benötigen nur den richtigen Ansatz N2E und sorgsames Rechnen.

😊 Der obige Satz N2E garantiert, dass unser Ansatz gelingt.

Die Rechnung mag länglich sein, aber jeder Schritt ist einfach. . .

und am Ende geht alles auf. Das ist der Nutzen dieses Satzes!

Für spezielle rechte Seiten  $r(x) e^{\mu x}$  ist damit das Problem gelöst.

⚠ Die schöne simple Lösungsformel (2) greift hier leider nicht!

Speziell  $p(\partial) y(x) = e^{\mu x}$  wird gelöst durch  $y_b(x) = e^{\mu x} x^k / p^{(k)}(\mu)$ .

Für  $p(\partial) y(x) = x e^{\mu x}$  müssen wir den ausführlichen Weg gehen.

Der Ansatz (1) gelingt immer, speziell für (2) kann abgekürzt werden.

Wie immer gilt auch hier: Die **Anfangswerte**  $y(x_0), y'(x_0) \in \mathbb{R}$  zu einem Startzeitpunkt  $x_0 \in \mathbb{R}$  können beliebig vorgegeben werden; sie legen die freien Konstanten  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  eindeutig fest (und auch umgekehrt).

Ihre Berechnung gelingt durch ein lineares Gleichungssystem.

**Aufgabe:** Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 10e^{-2x}.$$

**Lösung:** Char. Polynom  $p(x) = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ .

Fundamentalsystem der homogenen Gleichung:  $e^{-2x}$ ,  $x e^{-2x}$ .

Wir lösen  $p(\partial) y(x) = 10 e^{\mu x}$  für  $\mu = -2$ . (spezielle rechte Seite)

Hier ist  $\mu = -2$  eine doppelte Nullstelle von  $p$ . (Vielfachheit  $k = 2$ )

Gemäß Satz N2E gelingt der Ansatz  $y_b(x) = c x^2 e^{-2x}$ . Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} p(\partial) y_b(x) &= (\partial + 2)^2 [c x^2 e^{-2x}] \\ &= e^{-2x} \cdot \partial^2 (c x^2) = e^{-2x} \cdot 2c \stackrel{!}{=} 10 e^{-2x}. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:  $c = 5$ . Die allgemeine Lösung ist demnach

$$y(x) = (5x^2 + \alpha_1 x + \alpha_2) e^{-2x}.$$

Machen Sie die Probe: in DG einsetzen und geduldig ausrechnen!

**Anfangswerte**  $y(x_0)$  und  $y'(x_0)$  können beliebig vorgegeben werden: Sie legen die freien Konstanten  $\alpha_1, \alpha_2$  eindeutig fest (und umgekehrt).

Wir haben hier  $c x^2 e^{-2x}$  angesetzt und Koeffizienten verglichen.

Der obige Satz N2E nennt für diesen Fall eine Lösungsformel:

Speziell  $p(\partial) y(x) = e^{\mu x}$  wird gelöst durch  $y_b(x) = e^{\mu x} x^k / p^{(k)}(\mu)$ .

Wir können den gesuchten Koeffizienten  $c$  also auch direkt durch die Formel  $c = 10/p''(-2)$  berechnen; die Wahl ist Geschmackssache.

Wir führen diese alternative Rechnung als lehrreiche Übung aus:

$$\begin{aligned} p(x) &= x^2 + 4x + 4, & p(-2) &= 0, \\ p'(x) &= 2x + 4, & p'(-2) &= 0, \\ p''(x) &= 2, & p''(-2) &= 2. \end{aligned}$$

Wir erhalten  $c = 10/p''(-2) = 5$ , also  $y_b(x) = 5x^2 e^{-2x}$  wie zuvor.

😊 Beide Ergebnisse stimmen überein. Die Wahl des Rechenweges ist Geschmackssache, beide sind hier in etwa gleich lang: Das liegt an der besonders einfachen Form des charakteristischen Polynoms  $p(x)$ .

⚠ Im Allgemeinen ist die Lösungsformel  $y_b(x) = e^{\mu x} x^k / p^{(k)}(\mu)$  kürzer und leichter. Die vorige Aufgabe illustriert dies recht gut.

**Aufgabe:** Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = b(x)$$

mit rechten Seiten  $b(x) = 0, 24 e^{2x}, 24 x e^{2x}, e^{-2x}, e^{\pm ix}, \cos(x)$ .

**Lösung:** (a) Das char. Polynom unserer Gleichung  $p(\partial) y = 0$  ist

$$p(x) = x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2).$$

Nullstellen  $-1, -2$ . Fundamentallösungen unserer DG sind  $e^{-x}, e^{-2x}$ .

Die allgemeine Lösung ist demnach  $y(x) = \alpha_1 e^{-x} + \alpha_2 e^{-2x}$ .

(b) Wir lösen  $p(\partial) y(x) = 24 e^{\mu x}$  für  $\mu = 2$ . (spezielle rechte Seite)

Dies ist keine Nullstelle von  $p$  (Vielfachheit  $k = 0$ ), genauer  $p(2) = 12$ .

Gemäß Satz N2E gelingt der Ansatz  $y_b(x) = c e^{2x}$ . Einsetzen in die DG:

$$y_b''(x) + 3y_b'(x) + 2y_b(x) = p(2) c e^{2x} \stackrel{!}{=} 24 e^{2x}$$

Koeffizientenvergleich:  $c = 2$ . Die allgemeine Lösung ist demnach

$$y(x) = 2 e^{2x} + \alpha_1 e^{-x} + \alpha_2 e^{-2x}.$$

(c) Wir lösen  $p(\partial) y(x) = 24 x e^{\mu x}$  für  $\mu = 2$ . (spezielle rechte Seite)

Dies ist keine Nullstelle von  $p$ . Gemäß Satz N2E gelingt der Ansatz

$$y_b(x) = (c_0 + c_1 x) e^{2x}$$

$$y_b'(x) = (2c_0 + c_1 + 2c_1 x) e^{2x}$$

$$y_b''(x) = (4c_0 + 4c_1 + 4c_1 x) e^{2x}$$

$$y_b''(x) + 3y_b'(x) + 2y_b(x) = [(12c_0 + 7c_1) + 12c_1 x] e^{2x} \stackrel{!}{=} 24 x e^{2x}$$

Koeffizientenvergleich:  $c_1 = 2$  und  $c_0 = -\frac{7}{6}$ .

Unser Partikulärlösung ist also  $y_b(x) = (2x - \frac{7}{6}) e^{2x}$ .

Machen Sie die Probe! Die allgemeine Lösung ist demnach

$$y(x) = (2x - \frac{7}{6}) e^{2x} + \alpha_1 e^{-x} + \alpha_2 e^{-2x}.$$

**Anfangswerte**  $y(x_0)$  und  $y'(x_0)$  können beliebig vorgegeben werden: Sie legen die freien Konstanten  $\alpha_1, \alpha_2$  eindeutig fest (und umgekehrt).

(d) Wir lösen  $p(\partial) y(x) = e^{\mu x}$  für  $\mu = -2$ . (spezielle rechte Seite)  
Einfache Nullstelle (Vielfachheit  $k = 1$ ):  $p(-2) = 0$ ,  $p'(-2) = -1$ .  
Partikulärlösung:  $y_b(x) = e^{-2x} x / (-1)$ . Allgemeine Lösung:

$$y(x) = \alpha_1 e^{-x} + (\alpha_2 - x) e^{-2x}.$$

😊 Machen Sie die Probe! Ebenso findet man  $y_b$  durch den Ansatz  $y_b(x) = c x e^{-2x}$ , Einsetzen in die DG und Koeffizientenvergleich.

Wir führen dies als lehrreiche Übung aus, analog zu Teil (c):

$$y_b(x) = c x e^{-2x}$$

$$y_b'(x) = c(1 - 2x) e^{-2x}$$

$$y_b''(x) = c(-4 + 4x) e^{-2x}$$

$$y_b''(x) + 3y_b'(x) + 2y_b(x) = -c e^{-2x} \stackrel{!}{=} e^{-2x}$$

Koeffizientenvergleich:  $c = -1$ . Partikulärlösung:  $y_b(x) = -x e^{-2x}$ .

😊 Die obige Lösungsformel kürzt diese Rechnung beträchtlich ab.

(e) Wir lösen  $p(\partial) y(x) = e^{\mu x}$  für  $\mu = i$ . (spezielle rechte Seite)

Dies ist keine Nullstelle von  $p$ , genauer  $p(i) = 1 + 3i$ .

Partikulärlösung:  $y_b(x) = e^{ix} / (1 + 3i)$ . Allgemeine Lösung:

$$y(x) = \frac{1-3i}{10} e^{ix} + \alpha_1 e^{-x} + \alpha_2 e^{-2x}.$$

Entsprechend hat  $p(\partial) y(x) = e^{-ix}$  die Partikulärlösung  $e^{-ix} / (1 - 3i)$ .

(f) Wir lösen  $p(\partial) u(x) = \cos(x)$  und  $p(\partial) v(x) = \sin(x)$ .

Dies ist Real- und Imaginärteil der Gleichung  $p(\partial) y(x) = e^{ix}$ .

Lösungen erhalten wir aus Real-/Imaginärteil der komplexen Lösung

$$\begin{aligned} y_b(x) &= \frac{1-3i}{10} e^{ix} = \frac{1}{10} \cdot (1 - 3i) \cdot (\cos x + i \sin x) \\ &= \underbrace{\frac{1}{10} (\cos x + 3 \sin x)}_{u_b} + i \underbrace{\frac{1}{10} (-3 \cos x + \sin x)}_{v_b} \end{aligned}$$

Die allgemeinen reellen Lösungen sind demnach:

$$u(x) = \frac{1}{10} (\cos x + 3 \sin x) + \alpha_1 e^{-x} + \alpha_2 e^{-2x}$$

$$v(x) = \frac{1}{10} (-3 \cos x + \sin x) + \alpha_1 e^{-x} + \alpha_2 e^{-2x}$$

**Aufgabe:** Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y^{(5)}(x) + y^{(4)}(x) + 2y'''(x) + 2y''(x) + y'(x) + y(x) = b(x)$$

mit rechten Seiten  $b(x) = 0, e^x, e^{-x}, e^{ix}, e^{-ix}, \cos(x), \cos(2x)$ .

**Lösung:** (a) Das char. Polynom unserer Gleichung  $p(\partial) y = 0$  ist

$$\begin{aligned} p(x) &= x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^4 + 2x^2 + 1) \\ &= (x + 1)(x^2 + 1)^2 = (x + 1)(x - i)^2(x + i)^2 \end{aligned}$$

Nullstellen:  $-1, i, i, -i, -i$  (ausprobieren und faktorisieren)

Komplexe Fundamentallösungen:  $e^{-x}, e^{ix}, x e^{ix}, e^{-ix}, x e^{-ix}$

Allgemein komplex:  $y(x) = c_1 e^{-x} + e^{ix}(c_2 + c_3 x) + e^{-ix}(c_4 + c_5 x)$

Reelle Fundamentallösungen:  $e^{-x}, \cos(x), x \cos(x), \sin(x), x \sin(x)$

Allgemein reell:  $y(x) = \alpha_1 e^{-x} + \cos(x)(\alpha_2 + \alpha_3 x) + \sin(x)(\alpha_4 + \alpha_5 x)$

😊 **Anfangswerte**  $y(x_0), \dots, y^{(4)}(x_0) \in \mathbb{R}$  können beliebig vorgegeben werden und legen die freien Konstanten  $\alpha_1, \dots, \alpha_5 \in \mathbb{R}$  eindeutig fest.

(b) Wir lösen  $p(\partial) y(x) = e^{\mu x}$  für  $\mu = 1$ . (spezielle rechte Seite)

Dies ist keine Nullstelle von  $p$  (Vielfachheit  $k = 0$ ), genauer  $p(1) = 8$ .

Partikulärlösung:  $y_b(x) = e^x/8$ . Allgemeine Lösung:

$$y(x) = \frac{1}{8} e^x + \alpha_1 e^{-x} + \cos(x)(\alpha_2 + \alpha_3 x) + \sin(x)(\alpha_4 + \alpha_5 x)$$

😊 Machen Sie die Probe! Ebenso findet man  $y_b$  durch den Ansatz  $y_b(x) = c e^x$ , Einsetzen  $p(\partial) e^x = 8 e^x$ , Koeffizientenvergleich  $c = 1/8$ .

(c) Wir lösen  $p(\partial) y(x) = e^{\mu x}$  für  $\mu = -1$ . (spezielle rechte Seite)

Einfache Nullstelle von  $p$  (Vielfachheit  $k = 1$ ):  $p(-1) = 0, p'(-1) = 4$ .

Partikulärlösung:  $y_b(x) = e^{-x} x/4$ . Allgemeine Lösung:

$$y(x) = e^{-x} \left( \alpha_1 + \frac{x}{4} \right) + \cos(x)(\alpha_2 + \alpha_3 x) + \sin(x)(\alpha_4 + \alpha_5 x)$$

😊 Machen Sie die Probe! Ebenso findet man  $y_b$  durch den Ansatz  $y_b(x) = c x e^{-x}$ , Einsetzen in die DG und Koeffizientenvergleich. Übung!

(d) Wir lösen  $p(\partial) y(x) = e^{\mu x}$  für  $\mu = i$ . (spezielle rechte Seite)

Dies ist eine doppelte Nullstelle von  $p$  (Vielfachheit  $k = 2$ ), genauer:

$$\begin{aligned} p(x) &= x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1, & p(i) &= 0, \\ p'(x) &= 5x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1, & p'(i) &= 0, \\ p''(x) &= 20x^3 + 12x^2 + 12x + 4, & p''(i) &= -8 - 8i. \end{aligned}$$

Partikulärlösung:  $y_b(x) = e^{ix} x^2 / (-8 - 8i)$ . Allgemeine Lösung:

$$y(x) = c_1 e^{-x} + e^{ix} \left( c_2 + c_3 x - \frac{1-i}{16} x^2 \right) + e^{-ix} (c_4 + c_5 x)$$

(e) Wir lösen  $p(\partial) y(x) = e^{\mu x}$  für  $\mu = -i$  analog zu (d):

Wir berechnen hierzu  $p(-i) = 0$ ,  $p'(-i) = 0$ ,  $p''(-i) = -8 + 8i$ .

Partikulärlösung:  $y_b(x) = e^{-ix} x^2 / (-8 + 8i)$ . Allgemeine Lösung:

$$y(x) = c_1 e^{-x} + e^{ix} (c_2 + c_3 x) + e^{-ix} (c_4 + c_5 x - \frac{1+i}{16} x^2)$$

😊 Machen Sie die Probe! Ebenso findet man  $y_b$  jeweils durch den Ansatz  $y_b(x) = c x^2 e^{\pm ix}$ , Einsetzen und Koeffizientenvergleich. Übung!

😊 Gleichungen (c-d) und ihre Lösungen sind komplex-konjugiert.

(f) Wir lösen  $p(\partial) u(x) = \cos(x)$  und  $p(\partial) v(x) = \sin(x)$ .

Dies ist Real- und Imaginärteil der Gleichung  $p(\partial) y(x) = e^{ix}$ .

Lösungen erhalten wir aus Real-/Imaginärteil der komplexen Lösung

$$\begin{aligned} y_b(x) &= \frac{i-1}{16} x^2 e^{ix} = \frac{1}{16} x^2 \cdot (i-1) \cdot (\cos x + i \sin x) \\ &= \underbrace{-\frac{1}{16} x^2 (\cos x + \sin x)}_{u_b} + i \underbrace{\frac{1}{16} x^2 (\cos x - \sin x)}_{v_b} \end{aligned}$$

Die allgemeinen reellen Lösungen sind demnach:

$$\begin{aligned} u(x) &= \alpha_1 e^{-x} + \cos(x) \left( \alpha_2 + \alpha_3 x - \frac{1}{16} x^2 \right) + \sin(x) \left( \alpha_4 + \alpha_5 x - \frac{1}{16} x^2 \right) \\ v(x) &= \alpha_1 e^{-x} + \cos(x) \left( \alpha_2 + \alpha_3 x + \frac{1}{16} x^2 \right) + \sin(x) \left( \alpha_4 + \alpha_5 x - \frac{1}{16} x^2 \right) \end{aligned}$$

😊 Machen Sie die Probe! Ebenso findet man  $y_b$  durch den Ansatz  $y_b(x) = (a \cos x + b \sin x) x^2 e^{ix}$ , Einsetzen und Koeffizientenvergleich.

(g) Wir lösen  $p(\partial) y(x) = e^{\mu x}$  für  $\mu = 2i$ . Hier finden wir  $p(2i) = 9 + 18i$ .

Partikulärlösung:  $y_b(x) = e^x / (9 + 18i) = (\cos x + i \sin x) \cdot (1 - 2i) / 45$ .

Real-/Imaginärteil lösen  $p(\partial) u(x) = \cos(2x)$  und  $p(\partial) v(x) = \sin(2x)$ .



**Aufgabe:** Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichungen

$$(a) \quad y'''(x) + 3y''(x) - 4y(x) = 0,$$

$$(b) \quad y'''(x) + 3y''(x) - 4y(x) = 8x^2 e^{-x},$$

$$(c) \quad y'''(x) + 3y''(x) - 4y(x) = 108x^2 e^{-2x}.$$

**Lösung:** (a) Das char. Polynom unserer Gleichung  $p(\partial)y = 0$  ist

$$p(x) = x^3 + 3x^2 - 4 = (x - 1)(x^2 + 4x + 4) = (x - 1)(x + 2)^2.$$

Fundamentalsystem der homogenen Gleichung:  $e^x, e^{-2x}, xe^{-2x}$ .

Die allgemeine Lösung ist  $y(x) = \alpha_1 e^x + (\alpha_2 + \alpha_3 x) e^{-2x}$ .

**Anfangswerte**  $y(x_0), y'(x_0), y''(x_0)$  können beliebig vorgegeben werden: Sie legen die freien Konstanten  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  eindeutig fest.

(b) Wir lösen  $p(\partial)y(x) = 8x^2 e^{-x}$ . (spezielle rechte Seite)

Hier ist  $\mu = -1$  keine Nullstelle von  $p$  (Vielfachheit  $k = 0$ ).

Gemäß Satz N2E gelingt der Ansatz  $y_b(x) = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2) e^{-x}$ .

Einsetzen in die Differentialgleichung und geduldig ausrechnen:

$$\begin{aligned} p(\partial)y_b(x) &= p(\partial)[q(x)e^{-x}] = e^{-x} p(\partial - 1)q(x) = \dots \\ &= e^{-x}[q'''(x) - 3q'(x) - 2q(x)] \stackrel{!}{=} 8x^2 e^{-x} \end{aligned}$$

Wir erhalten hieraus die Gleichung

$$-3(c_1 + 2c_2 x) - 2(c_0 + c_1 x + c_2 x^2) \stackrel{!}{=} 8x^2.$$

Koeffizientenvergleich:

$$\left. \begin{aligned} -2c_2 &= 8 \\ -6c_2 - 2c_1 &= 0 \\ -3c_1 - 2c_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = -4 \\ c_1 = 12 \\ c_0 = -18 \end{cases}$$

Wir erhalten so die Partikulärlösung  $y_b(x) = (-4x^2 + 12x - 18) e^{-x}$ .

Die allgemeine Lösung unserer Differentialgleichung ist schließlich

$$y(x) = (-18 + 12x - 4x^2) e^{-x} + \alpha_1 e^x + (\alpha_2 + \alpha_3 x) e^{-2x}$$

Machen Sie die Probe: in DG einsetzen und geduldig ausrechnen!



(c) Wir lösen  $p(\partial) y(x) = 108 x^2 e^{-2x}$ . (spezielle rechte Seite)

Hier ist  $\mu = -2$  eine doppelte Nullstelle von  $p$ . (Vielfachheit  $k = 2$ )

Gemäß Satz N2E gelingt der Ansatz  $y_b(x) = (c_0 x^2 + c_1 x^3 + c_2 x^4) e^{-2x}$ .

Einsetzen in die Differentialgleichung und geduldig ausrechnen:

$$\begin{aligned} p(\partial) y_b(x) &= p(\partial) \left[ q(x) e^{-2x} \right] = e^{-2x} p(\partial - 2) q(x) \\ &= e^{-2x} (\partial - 3) \partial^2 q(x) = e^{-2x} [q'''(x) - 3q''(x)] \\ &= e^{-2x} [6c_1 + 24c_2 x - 6c_0 - 18c_1 x - 36c_2 x^2] \stackrel{!}{=} 108 x^2 e^{-2x} \end{aligned}$$

Wir erhalten hieraus die Gleichung

$$(6c_1 - 6c_0) + (24c_2 - 18c_1)x - 36c_2 x^2 \stackrel{!}{=} 108x^2.$$

Koeffizientenvergleich:

$$\left. \begin{array}{l} -36c_2 = 108 \\ 24c_2 - 18c_1 = 0 \\ 6c_1 - 6c_0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = -3 \\ c_1 = -4 \\ c_0 = -4 \end{cases}$$

Wir erhalten so die Partikulärlösung  $y_b(x) = (-3x^4 - 4x^3 - 4x^2) e^{-2x}$ .

Die allgemeine Lösung unserer Differentialgleichung ist schließlich

$$y(x) = \alpha_1 e^x + (\alpha_2 + \alpha_3 x - 4x^2 - 4x^3 - 3x^4) e^{-2x}$$

Machen Sie die Probe: in DG einsetzen und geduldig ausrechnen!

**Anfangswerte**  $y(x_0), y'(x_0), y''(x_0)$  können beliebig vorgegeben werden: Sie legen die freien Konstanten  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  eindeutig fest.

😊 Für spezielle rechte Seiten wissen wir, welcher Ansatz gelingt: Die inhomogene lineare Differentialgleichung  $p(\partial) y(x) = r(x) e^{\mu x}$  wird gelöst durch den Ansatz  $y_b(x) = q(x) x^k e^{\mu x}$  mit  $\deg q = \deg r$ . Es genügt Einsetzen, Koeffizientenvergleich und geduldiges Rechnen!

😊 Speziell  $p(\partial) y(x) = e^{\mu x}$  wird gelöst durch  $y_b(x) = e^{\mu x} x^k / p^{(k)}(\mu)$ . Für (b–c) genügt dieser Spezialfall nicht, und wir müssen tatsächlich ein Gleichungssystem lösen; es ist triangulär und daher leicht.

**Aufgabe:** Finden Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = x e^{-x} \cos(2x).$$

**Lösung:** Char. Polynom  $p(x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ .

Fundamentalsystem der homogenen Gleichung:  $e^{-x}$ ,  $x e^{-x}$ .

Die rechte Seite ist der Realteil von  $b(x) = x e^{(-1+2i)x}$ .

Wir betrachten daher die komplexe Differentialgleichung

$$z''(x) + 2z'(x) + z(x) = x e^{(-1+2i)x}$$

Hier ist  $\mu = -1 + 2i$  keine Nullstelle von  $p$ . (Vielfachheit  $k = 0$ )

Ansatz für eine Partikulärlösung der komplexen Gleichung:

$$z_b(x) = q(x) e^{(-1+2i)x} \quad \text{mit} \quad q(x) = c_0 + c_1 x$$

Einsetzen in die DG und geduldig ausrechnen:

$$\begin{aligned} p(\partial) z_b(x) &= (\partial + 1)^2 \left[ q(x) e^{(-1+2i)x} \right] = e^{(-1+2i)x} (\partial + 2i)^2 q(x) \\ &= e^{(-1+2i)x} \left[ q''(x) + 4i q'(x) - 4q(x) \right] \stackrel{!}{=} x e^{(-1+2i)x} \end{aligned}$$

Wir erhalten hieraus die Gleichung

$$4ic_1 - 4(c_0 + c_1 x) = x.$$

Koeffizientenvergleich:

$$\left. \begin{array}{l} -4c_1 = 1 \\ -4c_0 + 4ic_1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -1/4 \\ c_0 = -i/4 \end{cases}$$

Komplexe Partikulärlösung für die rechte Seite  $b(x) = x e^{(-1+2i)x}$ :

$$z_b(x) = -\frac{1}{4}(x + i) e^{(-1+2i)x}$$

Reelle Partikulärlösung für die rechte Seite  $\operatorname{Re} b(x) = x e^{-x} \cos(2x)$ :

$$y_b(x) = \operatorname{Re} [z_b(x)] = \frac{1}{4} e^{-x} (\sin(2x) - x \cos(2x))$$

Die allgemeine reelle Lösung ist schließlich:

$$y(x) = \frac{1}{4} e^{-x} (\sin(2x) - x \cos(2x)) + e^{-x} (\alpha_1 + \alpha_2 x)$$

Machen Sie die Probe: in DG einsetzen und geduldig ausrechnen!

**Aufgabe:** Finden Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$y''(x) + y(x) = x^2 \sin x + \cos x.$$

**Lösung:** Char. Polynom  $p(x) = x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$ .

Komplexes Fundamentalsystem der homogenen Gleichung:  $e^{ix}$ ,  $e^{-ix}$ .

Reelles Fundamentalsystem der homogenen Gleichung:  $\cos x$ ,  $\sin x$ .

Die rechte Seite ist der Realteil von  $b(x) = (1 - ix^2)e^{ix}$ .

Wir betrachten daher die komplexe Differentialgleichung

$$z''(x) + z(x) = (1 - ix^2)e^{ix}.$$

Hier ist  $\mu = i$  eine einfache Nullstelle von  $p$ . (Vielfachheit  $k = 1$ )

Ansatz für eine Partikulärlösung der komplexen Gleichung:

$$z_b(x) = q(x)e^{ix} \quad \text{mit} \quad q(x) = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$$

Einsetzen in die DG und Koeffizientenvergleich liefert (wie immer) ein Gleichungssystem. So berechnet man die komplexe Partikulärlösung:

$$z_b(x) = \left( -\frac{1}{6}x^3 - \frac{i}{4}x^2 + \left( \frac{1}{4} - \frac{i}{2} \right) x \right) e^{ix}$$

Ihr Realteil ist die gesuchte reelle Partikulärlösung:

$$y_b(x) = \left( -\frac{x^3}{6} + \frac{x}{4} \right) \cos x + \left( \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} \right) \sin x$$

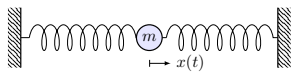
Probe! Die allgemeine reelle Lösung ist schließlich:

$$y(x) = \left( -\frac{x^3}{6} + \frac{x}{4} + \alpha_1 \right) \cos x + \left( \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \alpha_2 \right) \sin x$$

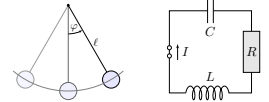
Die Konstanten  $\alpha_1, \alpha_2$  ergeben sich aus eventuellen Anfangsdaten.

😊 Der entscheidende Schritt ist, den richtigen Ansatz zu wählen. Genau dies leistet unser Satz N2E! Die Lösung gelingt garantiert und ist somit nur eine Frage des geduldigen Ausrechnens. Alles wird gut.

Wir betrachten die Differentialgleichung  $p(\partial) u(t) = a(t)$ , zum Beispiel



$$\ddot{u}(t) + 2\delta \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = a(t)$$



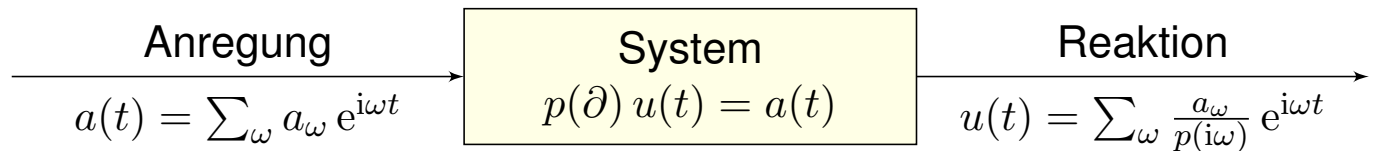
Jede harmonische Anregung  $a$  erzwingt eine harmonische Reaktion  $u$ :

$$u(t) = e^{i\omega t} \xrightarrow{(1)} a(t) = p(i\omega) e^{i\omega t}$$

$$a(t) = e^{i\omega t} \xrightarrow{(2)} u(t) = p(i\omega)^{-1} e^{i\omega t} + \text{homogene Lösung}$$

Die Rechnung (1) ist leicht. Für die Umkehrung (2) betrachten wir zur Vereinfachung nur den Fall ohne Resonanz, also  $p(i\omega) \neq 0$ . (Satz N2E)

Dank Linearität des Operators  $p(\partial)$  überlagern sich diese Lösungen:



Wir können zu  $u$  noch homogene Lösungen addieren; diese lasse ich hier weg und denke an das Langzeitverhalten bei Dämpfung  $\delta > 0$ . N119

😊 Die Transformation in den Frequenzbereich vereinfacht das Problem! Durch Fourier-Entwicklung können wir so diese Differentialgleichung für jede rechte Seite lösen und für jede Frequenz leicht verstehen.

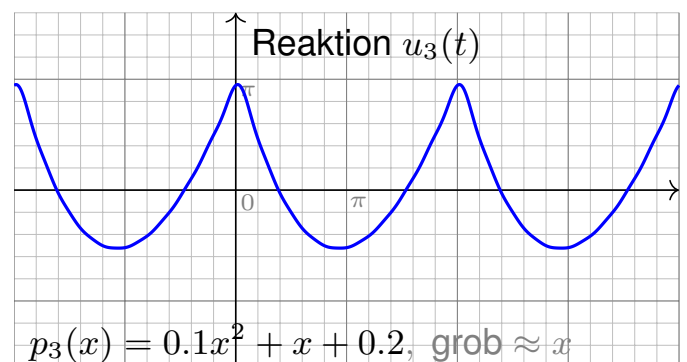
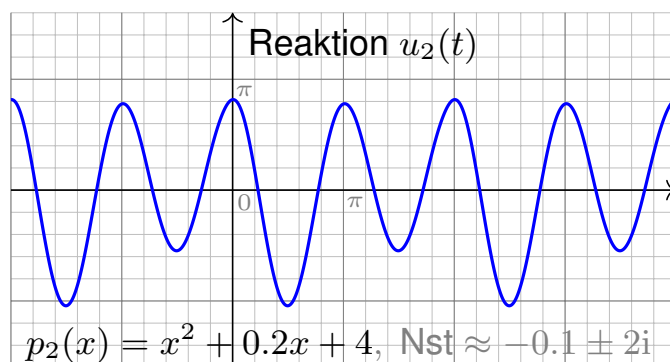
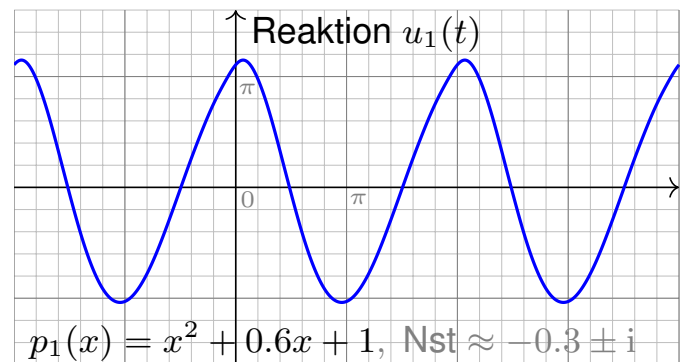
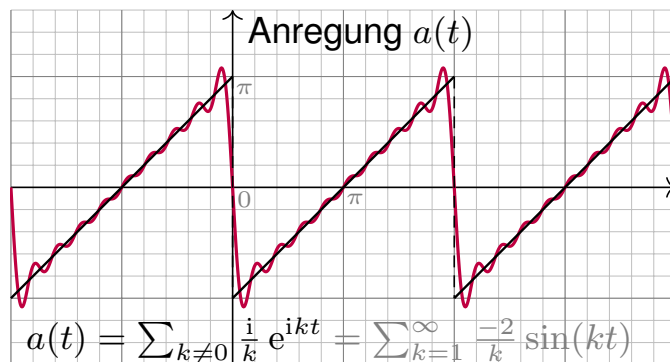
Anders gesagt: Für den Differentialoperator  $p(\partial)$  ist  $e^{\lambda t}$  Eigenfunktion zum Eigenwert  $p(\lambda)$ . Die Fourier-Zerlegung  $u(t) = \sum_{\omega} u_{\omega} e^{i\omega t}$  führt zu  $a(t) = p(\partial) u(t) = \sum_{\omega} p(i\omega) u_{\omega} e^{i\omega t}$ , dank Diagonalisierung von  $p(\partial)$ .

Umgekehrt lösen wir so die Differentialgleichung  $p(\partial) u(t) = a(t)$ : Die Anregung  $a(t) = \sum_{\omega} a_{\omega} e^{i\omega t}$  führt dank dieser Diagonalisierung zur Reaktion  $u(t) = p(\partial)^{-1} a(t) = \sum_{\omega} p(i\omega)^{-1} a_{\omega} e^{i\omega t} + \text{homogene Lösung}$ .

Dies gelingt für endliche Summen, also trigonometrische Polynome, ebenso wie für unendliche, also Fourier-Reihen und Fourier-Integrale. Hier zahlt sich aus, dass wir die Fourier-Analyse bereits beherrschen!

Der hier wirkende Verstärkungsfaktor  $\omega \mapsto 1/p(i\omega)$  ist frequenzabhängig! Dies nennt man den **Frequenzgang** oder die **Übertragungsfunktion** des Systems. Durch Wahl des Systems und seiner Parameter können wir aus dem Spektrum des Signals gezielt Frequenzen ausfiltern.

**Aufgabe:** Wir untersuchen ein System mit charakteristischem Polynom  $p(x) = x^2 + 0.6x + 1$  oder  $x^2 + 0.2x + 4$  oder  $0.1x^2 + x + 0.2$  oder .... Welche Antwort  $u(t)$  entsteht bei sägezahnförmiger Anregung  $a(t)$ ? [I205]



Diese Graphiken illustrieren die oben erklärte Frequenzanalyse und Filterwirkung. Auf den ersten Blick ist das Ergebnis überraschend: Die Reaktion  $u(t)$  hat wenig mit der Anregung  $a(t)$  gemeinsam!

😊 In der Frequenzanalyse hingegen wird das Bild klar und einfach. Die anregende Funktion  $a(t)$  enthält alle Frequenzen  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Die Verstärkung  $p(ik)$  hängt nur vom charakteristischen Polynom  $p$  ab!

Für  $p_1(x) = x^2 + 0.6x + 1$  haben wir die beiden Nullstellen  $\approx -0.3 \pm i$ . Demnach ist  $p(i)$  sehr klein und  $p(i)^{-1}$  sehr groß: Die Grundfrequenz wird extrem verstärkt, die anderen Frequenzen deutlich weniger.

Für  $p_2(x) = x^2 + 0.2x + 4$  haben wir die beiden Nullstellen  $\approx -0.1 \pm 2i$ . Demnach ist  $p(2i)$  sehr klein und  $p(2i)^{-1}$  sehr groß: Daher wird diese erste Oberschwingung extrem verstärkt, die anderen deutlich weniger.

Für  $p_3(x) = 0.1x^2 + x + 0.2$  erinnert die Graphik an die Parabelfunktion. Das ist kein Zufall! Wir haben grob  $p_3(x) \approx x$ , das entspricht  $\partial u = a$ , also der Integration der Sägezahnfunktion  $a$  zur Parabelfunktion  $u$ ! [I321]

😊 Die Anschauung stimmt. Sie können dies nun auch quantitativ lösen!

## Greensche Lösungsformel für beliebige rechte Seiten

Zu lösen sei  $p(\partial) y = b$  mit  $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \in \mathbb{K}[x]$ :

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1y'(x) + a_0y(x) = b(x).$$

Die Funktion  $b: \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{K}$  sei stetig auf einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$ .

Sie heißt **Inhomogenität** oder **Störterm** oder kurz **rechte Seite**.

Für spezielle rechte Seiten wie in N2E können wir die DG leicht lösen.

## Satz N2F: Greensche Fundamentallösung und Lösungsformel

Die homogene Gleichung  $p(\partial) u = 0$  hat genau eine Lösung  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  mit den **Anfangswerten**  $u(0) = \dots = u^{(n-2)}(0) = 0$  und  $u^{(n-1)}(0) = 1$ .

Wir nennen  $u$  die **Greensche Fundamentallösung**. Hieraus erhalten wir eine Lösung der inhomogenen Gleichung  $p(\partial) y = b$  durch **Faltung**:

$$y(x) = \int_{t=x_0}^x u(x-t) b(t) dt.$$

Genauer ist  $y$  die einzige Lösung der inhomogenen Gleichung  $p(\partial) y = b$  mit Anfangswerten  $y(x_0) = y'(x_0) = \dots = y^{(n-2)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0) = 0$ .

## Greensche Lösungsformel für beliebige rechte Seiten

**Aufgabe:** Zu lösen sei, für  $-\pi/2 < x < \pi/2$ , die Differentialgleichung

$$y''(x) + y(x) = \frac{1}{\cos x} \quad \text{mit} \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

**Lösung:** Allgemeine homogene Lösung ist  $u(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ .

Die Anfangswerte  $u(0) = 0$  und  $u'(0) = 1$  erfüllt nur  $u(x) = \sin x$ .

Wir falten diese **Fundamentallösung**  $u$  mit der **rechten Seite**  $b$ :

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_{t=0}^x \sin(x-t) \frac{1}{\cos t} dt = \int_{t=0}^x (\sin x \cos t - \cos x \sin t) \frac{1}{\cos t} dt \\ &= \int_{t=0}^x \sin x - \cos x \cdot \frac{\sin t}{\cos t} dt = \left[ t \sin x + \cos x \cdot \ln \cos t \right]_{t=0}^x \\ &= x \sin x + \cos x \cdot \ln \cos x \end{aligned}$$

😊 Die Probe ist wie immer leicht und lohnend! Geduldig ausrechnen:

$$y'(x) = \sin x + x \cos x - \sin x \cdot \ln \cos x - \sin x$$

$$y''(x) = \cos x - x \sin x - \cos x \cdot \ln \cos x + \sin(x)^2 / \cos x$$

Einsetzen:  $y''(x) + y(x) = \cos x + \sin(x)^2 / \cos x = 1 / \cos x$ . Alles passt!

**Aufgabe:** Beweisen Sie Greens Lösungsformel (a) durch Nachrechnen oder alternativ (b) durch Laplace–Transformation (wie auf Seite [L309](#)).

**Lösung:** (a) Für die Ableitung nutzen wir die Leibniz–Regel [D303](#):

$$\frac{d}{dx} \int_{t=x_0}^{h(x)} f(x, t) dt = h'(x) f(x, h(x)) + \int_{t=x_0}^{h(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

Angewendet auf  $h(x) = x$  und  $f(x, t) = u(x - t) b(t)$  erhalten wir

$$\begin{aligned} y'(x) &= \underbrace{u(0)}_{=0} b(x) + \int_{t=x_0}^x u'(x-t) b(t) dt, \\ y''(x) &= \underbrace{u'(0)}_{=0} b(x) + \int_{t=x_0}^x u''(x-t) b(t) dt, \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x) &= \underbrace{u^{(n-2)}(0)}_{=0} b(x) + \int_{t=x_0}^x u^{(n-1)}(x-t) b(t) dt, \\ y^{(n)}(x) &= \underbrace{u^{(n-1)}(0)}_{=1} b(x) + \int_{t=x_0}^x u^{(n)}(x-t) b(t) dt. \end{aligned}$$

Einsetzen dieser Ableitungen in unsere Differentialgleichung ergibt

$$\begin{aligned} &y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) \\ &= b(x) + \int_{t=x_0}^x \underbrace{[u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u]}_{=0, \text{ da } u \text{ eine Lösung der homogenen DG ist}}(x-t) b(t) dt \end{aligned}$$

Somit ist  $y$  eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = b(x).$$

Die Anfangswerte  $y(x_0) = y'(x_0) = \dots = y^{(n-2)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0) = 0$  ergeben sich aus der obigen Zwischenrechnung für die Ableitungen.

**Anschauliche Erklärung** wie sie in der Physik beliebt ist: Für alle  $x < 0$  sei das System in Ruhelage  $u(x) = 0$ . Zum Zeitpunkt  $x = 0$  gilt  $u(0) = u'(0) = \dots = u^{(n-2)}(0) = 0$ , und es wird abrupt beschleunigt durch  $u^{(n-1)}(0) = 1$ . Man stellt sich dies als „Hammerschlag“ vor. Das System vollführt als sogenannte **Impulsantwort** die Bewegung  $u(x)$  für  $x \geq 0$ . [L421](#)  
Entsprechend verschoben ist  $u(x-t) b(t)$  ein Hammerschlag zum Zeitpunkt  $t$  mit Stärke  $b(t)$ . Das Integral über  $t$  ist die Summe dieser Beiträge: Wir nutzen Superposition dank Linearität. Gilt  $b(x) = 0$  für  $x \leq x_0$ , so ist  $y(x) = \int_{\mathbb{R}} u(x-t) b(t) dt = \int_{t=x_0}^x u(x-t) b(t) dt$ . [L429](#)



Eine **lineare Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung** ist von der Form

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x).$$

Hierbei sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und wie üblich  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

Die stetigen Funktionen  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{K}$  heißen **Koeffizienten**.

Die stetige Funktion  $b : I \rightarrow \mathbb{K}$  heißt **Störterm** oder kurz **rechte Seite**.

Links wirkt der **lineare Differentialoperator**  $L : C^n(I, \mathbb{K}) \rightarrow C^0(I, \mathbb{K})$ ,

$$L = a_0\partial^0 + a_1\partial^1 + \dots + a_{n-1}\partial^{n-1} + \partial^n,$$

$$y \mapsto a_0y + a_1y' + \dots + a_{n-1}y^{(n-1)} + y^{(n)}.$$

Wir suchen alle Funktionen  $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ , die die Gleichung  $Ly = b$  erfüllen.

Linearität bedeutet  $L(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1L(y_1) + c_2L(y_2)$  für  $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$ .

In anderen Worten: Aus Lösungen  $y_1$  zu  $b_1$  und  $y_2$  zu  $b_2$  ergibt die Linearkombination  $y = c_1y_1 + c_2y_2$  eine Lösung zu  $b = c_1b_1 + c_2b_2$ .

Zu  $Ly = b$  gehört die **homogene lineare Differentialgleichung**  $Ly = 0$ .

Als Lösungsmenge suchen wir also den Kern der linearen Abbildung  $L$ .

Bisher untersuchen wir lineare Differentialgleichungen mit **konstanten Koeffizienten**. Hier können wir alle Lösungen explizit angeben, uns genügen Exponentialansatz N2D und Greensche Lösungsformel N2F.

😊 Die Anwendungen sind wie gesehen bereits sehr reichhaltig!

Wir wollen nun auch **nicht-konstante Koeffizienten** betrachten, da solche Gleichungen ebenso natürlich in Anwendungen auftreten.

😊 Für Ordnung  $n = 1$  kennen wir bereits eine Lösungsformel. M221

Als mögliche Lösungen betrachten wir hier alle Funktionen  $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ , die  $n$ -mal stetig differenzierbar sind, kurz  $y \in C^n(I, \mathbb{K})$ , denn hierauf sind die Differentialoperatoren  $\partial, \dots, \partial^n$  und  $L = \sum_{k=0}^n a_k\partial^k$  definiert.

⚠️ Lösungen der Gleichung  $Ly = b$  wirklich **explizit** auszurechnen, kann mühsam und beliebig schwierig sein, mitunter gar unmöglich. Daher nutzen wir dankbar zunächst allgemeine Strukturaussagen!

😊 Einen guten Überblick verschafft uns der folgende wichtige Satz: Alles ist linear und wir haben  $n$  Freiheitsgrade; Anfangswerte können beliebig vorgegeben werden und legen die Lösung eindeutig fest.

## Satz N3A: Struktursatz für lineare Differentialgleichungen

Zu  $Ly = b$  suchen wir die Lösungsmenge  $L_b = \{ y \in C^n(I, \mathbb{K}) \mid Ly = b \}$ .

(0) **Globale Existenz und Eindeutigkeit:** Zu jedem Anfangsdatum  $(x_0, v_0, \dots, v_{n-1}) \in I \times \mathbb{K}^n$  existiert genau eine Lösung  $y \in L_b$  mit  $y(x_0) = v_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = v_{n-1}$ . Das heißt, in jedem Punkt  $x_0 \in I$  ist die Auswertung  $\Psi : L_b \rightarrow \mathbb{K}^n : y \mapsto (y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0))$  bijektiv.

(1)  $L_0 = \{ y \mid Ly = 0 \}$  ist ein **Vektorraum** der Dimension  $n$  über  $\mathbb{K}$ . Wir finden ein **Fundamentalsystem**  $y_1, \dots, y_n \in L_0$ , also eine Basis von  $L_0$  bestehend aus  $n$  linear unabhängigen Lösungen, und erhalten:

$$L_0 = \{ c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K} \} \cong \mathbb{K}^n$$


(2)  $L_b = \{ y \mid Ly = b \}$  ist ein **affiner Raum** der Dimension  $n$  über  $\mathbb{K}$ . Für jede **Partikulärlösung**  $y_b \in L_b$  gilt  $L_b = y_b + L_0$ , ausgeschrieben:


$$L_b = y_b + L_0 = \{ y_b + c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K} \}$$

„Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen“

Sie kennen diese Strukturaussagen bereits aus der linearen Algebra!

 Zur Wiederholung siehe Kimmerle–Stroppel, Lineare Algebra §3.6.


 Zu Verständnis und Lösung von Differentialgleichungen arbeiten Analysis und lineare Algebra wunderbar zusammen. Hier lohnt sich erneut Ihre Investition in die mathematischen Grundlagen der HM1&2!

 Die Menge  $C^n(I, \mathbb{K})$  aller  $n$ -mal stetig diff'baren Funktionen ist ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Allerdings ist er unendlich-dimensional; daher greifen die wunderbar erfolgreichen Methoden der Matrizenrechnung wie etwa der Gauß-Algorithmus hier nicht. Wir benötigen nun verstärkt Analysis!

Glücklicherweise sind unsere Lösungsräume endlich-dimensional:

$$L_0 = \{ y \in C^n(I, \mathbb{K}) \mid Ly = 0 \}, \quad \dim_{\mathbb{K}} L_0 = n,$$

$$L_b = \{ y \in C^n(I, \mathbb{K}) \mid Ly = b \}, \quad \dim_{\mathbb{K}} L_b = n.$$

 Strukturaussage und  $\exists$ &E-Satz sagen uns zu jeder linearen DG  $n$ -ter Ordnung genau, wie groß der Lösungsraum ist: Er hat immer Dimension  $n$ ! Bei jeder konkreten Berechnung wissen wir daher, wie viele Lösungen wir suchen müssen und wann wir alle gefunden haben!

**Aufgabe:** (1) Zu lösen sei zunächst die homogene Differentialgleichung

$$y''(x) + \frac{1}{x} y'(x) - \frac{4}{x^2} y(x) = 0 \quad \text{für } y: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}.$$

(1a) Welche Struktur hat die Lösungsmenge? (Form und Größe)

(1b) Gibt es Lösungen der Form  $y(x) = x^k$ ? (geschickter Ansatz)

(1c) Bestimmen Sie die Lösung  $y$  zum AWP  $y(1) = 0$  und  $y'(1) = 1$ .

**Lösung:** (1a) Die Lösungsmenge ist ein Vektorraum der Dimension 2.

(1b) Ableiten von  $y(x) = x^k$  und Einsetzen in die DG ergibt

$$k(k-1)x^{k-2} + kx^{k-2} - 4x^{k-2} = 0.$$

Also  $(k^2 - 4)x^{k-2} = 0$ . Lösungen  $k = \pm 2$ , also  $y_1(x) = x^2$ ,  $y_2(x) = x^{-2}$ .

Diese sind linear unabhängig, also eine Basis, aka Fundamentalsystem.

Einfacher Test dank Wronski:  $Y(x) = \begin{pmatrix} x^2 & x^{-2} \\ 2x & -2x^{-3} \end{pmatrix}$ , z.B.  $Y(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ .

Die allgemeine Lösung ist demnach  $y(x) = c_1 x^2 + c_2 x^{-2}$  mit  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

(1c) Anfangswerte:  $y(1) = c_1 + c_2 \stackrel{!}{=} 0$  und  $y'(1) = 2c_1 - 2c_2 \stackrel{!}{=} 1$ .

Die gesuchte Lösung des AWP ist  $y(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^{-2}$ . Probe!

**Aufgabe:** (2) Zu lösen sei nun die inhomogene Differentialgleichung

$$y''(x) + \frac{1}{x} y'(x) - \frac{4}{x^2} y(x) = x \quad \text{für } y: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}.$$

(2a) Welche Struktur hat die Lösungsmenge? (Form und Größe)

(2b) Gibt es Lösungen der Form  $y(x) = c x^k$ ? (geschickter Ansatz)

(2c) Bestimmen Sie die Lösung  $y$  zum AWP  $y(1) = 1$  und  $y'(1) = 1$ ?

**Lösung:** (2a) Die Lösungsmenge ist ein affiner Raum der Dimension 2.

(2b) Ableiten von  $y_b(x) = c x^k$  und Einsetzen in die DG ergibt

$$ck(k-1)x^{k-2} + ckx^{k-2} - 4cx^{k-2} = x.$$

Also  $c(k^2 - 4) = x^{3-k}$ . Die linke Seite hängt nicht von  $x$  ab.

Lösung:  $k = 3$  und  $c = \frac{1}{5}$ , also  $y_b(x) = \frac{1}{5}x^3$ . Die Probe ist leicht!

Ein Fundamentalsystem der homogenen DG kennen wir bereits!

Die allgemeine Lösung ist  $y(x) = \frac{1}{5}x^3 + c_1 x^2 + c_2 x^{-2}$  mit  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

(2c) Anfangswerte:  $y(1) = \frac{1}{5} + c_1 + c_2 \stackrel{!}{=} 1$  und  $y'(1) = \frac{3}{5} + 2c_1 - 2c_2 \stackrel{!}{=} 1$ .

Die gesuchte Lösung ist schließlich  $y(x) = \frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{10}x^{-2}$ . Probe!

**Aufgabe:** (3) Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y''(x) + \frac{1}{x} y'(x) - \frac{4}{x^2} y(x) = x \quad \text{für } y: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$$

durch Substitution:  $x = e^t$ ,  $t = \ln x$  und  $u(t) = y(e^t)$ ,  $y(x) = u(\ln x)$ .

**Lösung:** (3) Wir rechnen sorgsam die Ableitungen aus:

$$y(x) = u(\ln x), \quad y'(x) = \dot{u}(\ln x) \frac{1}{x}, \quad y''(x) = \ddot{u}(\ln x) \frac{1}{x^2} - \dot{u}(\ln x) \frac{1}{x^2}$$

$$u(t) = y(e^t) \quad \dot{u}(t) = y'(e^t) e^t \quad \ddot{u}(t) = y''(e^t) e^{2t} + y'(e^t) e^t$$

Unsere Differentialgleichung können wir äquivalent umschreiben:

$$y''(x) + \frac{1}{x} y'(x) - \frac{4}{x^2} y(x) = x \quad \iff$$

$$\ddot{u}(t) e^{-2t} - \dot{u}(t) e^{-2t} + \dot{u}(t) e^{-2t} - 4u(t) e^{-2t} = e^t$$

Wir erhalten eine lineare DG mit konstanten Koeffizienten:

$$\ddot{u}(t) - 4u(t) = e^{3t}$$

😊 Wir haben Glück und unser Substitutionsansatz zahlt sich aus!

😊 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beherrschen wir gut! Ihre Lösungen finden wir nach Schema:

Charakteristisches Polynom  $p(x) = x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ .

Nullstellen 2, -2. Fundamentalsystem:  $u_1(t) = e^{2t}$ ,  $u_2(t) = e^{-2t}$ .

Wir lösen  $p(\partial) u(t) = e^{\mu t}$  für  $\mu = 3$ . (spezielle rechte Seite)

Dies ist keine Nullstelle von  $p$  (Vielfachheit  $k = 0$ ), genauer  $p(3) = 5$ .

Partikulärlösung:  $u_b(t) = e^{3t}/5$ . Die allgemeine Lösung ist demnach:

$$u(t) = \frac{1}{5} e^{3t} + c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}.$$

Rücksubstitution von  $u(t)$  zu  $y(x)$  ergibt schließlich:

$$y(x) = \frac{1}{5} x^3 + c_1 x^2 + c_2 x^{-2}$$

😊 Dies entspricht der Lösung der vorigen Aufgabe (2).

Dieses Beispiel zeigt erneut, dass eine geschickte Substitution manchmal eine komplizierte DG in eine einfache verwandeln kann, hier bei einer linearen DG etwa variable in konstante Koeffizienten.

Aus Lösungen  $y_1, \dots, y_n : I \rightarrow \mathbb{K}$  bilden wir die **Fundamentalmatrix**:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

Man nennt  $Y(x)$  auch die **Wronski-Matrix** der Funktionen  $y_1, \dots, y_n$ , und  $\det Y(x)$  ihre **Wronski-Determinante**. Diese sind oft nützlich:

### Korollar N3B: Unabhängigkeitskriterium

Folgende Aussagen sind untereinander äquivalent:

- (a) Die Funktionen  $y_1, \dots, y_n : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  sind linear unabhängig.
- (b) Die Spaltenvektoren von  $Y$  sind linear unabhängig für jedes  $x \in I$ .
- (c) Die Spaltenvektoren von  $Y$  sind linear unabhängig für ein  $x \in I$ .
- (d) Die Determinante erfüllt  $\det Y(x) \neq 0$  für ein und damit alle  $x \in I$ .

😊 Dieses Kriterium ist einfach und übersichtlich. In kleiner Dimension  $n = 2, 3$  kann man die Determinante tatsächlich bequem ausrechnen.

Seien  $y_1, \dots, y_n : I \rightarrow \mathbb{K}$  linear unabhängige Lösungen von  $Ly = 0$ . In diesem Fall ist  $y_1, \dots, y_n$  eine **Basis des Lösungsraumes**  $L_0$ ; man nennt dies auch ein **Fundamentalsystem** der homogenen DG. Dann hat jede Lösung  $y \in L_0$  der homogenen Gleichung  $Ly = 0$  die Form  $y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$  mit eindeutigen Konstanten  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ . Sind **Anfangswerte**  $(y(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)) \in \mathbb{K}^n$  vorgegeben, so bestimmen wir  $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{K}^n$  durch folgendes Gleichungssystem:

$$Y \cdot c = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

In jedem Punkt  $x_0 \in I$  ist die Fundamentalmatrix  $Y(x_0)$  invertierbar, somit stiftet  $c = Y(x_0)^{-1} \cdot y(x_0)$  die gesuchte Linearkombination.

😊 Wir gehen von  $C^n(I, \mathbb{K})$  zum Teilraum  $L_0 = \{ y \mid Ly = 0 \}$  über. Hier in endlicher Dimension greifen unsere bewährten Methoden: Basiswahl, Matrizen, Gauß-Algorithmus, Determinante, Inversion, etc.

Zu lösen sei eine **inhomogene lineare Differentialgleichung**

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x) y'(x) + a_0(x) y(x) = b(x).$$

Zur homogenen Gleichung  $Ly = 0$  sei bereits ein Fundamentalsystem  $y_1, \dots, y_n : I \rightarrow \mathbb{K}$  gefunden. Ihre allgemeine Lösung ist dann

$$y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \quad \text{mit} \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}.$$

Ansatz für eine Partikulärlösung durch **Variation der Konstanten**:

$$y(x) = c_1(x) y_1(x) + \dots + c_n(x) y_n(x) \quad \text{mit} \quad c_1, \dots, c_n : I \rightarrow \mathbb{K}$$

Diese bestimmen wir durch folgendes lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ \vdots \\ c_{n-1}'(x) \\ c_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

Die Fundamentalmatrix  $Y(x)$  ist für jedes  $x \in I$  invertierbar.

Dies garantiert eine eindeutige Lösung  $c_1'(x), \dots, c_n'(x)$  gemäß

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ \vdots \\ c_{n-1}'(x) \\ c_n'(x) \end{pmatrix} = Y(x)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

Integration liefert dann die gesuchten Funktionen  $c_1(x), \dots, c_n(x)$ .

### Satz N3c: Variation der Konstanten

Diese Konstruktion der Koeffizientenfunktionen  $c_1, \dots, c_n : I \rightarrow \mathbb{K}$  ergibt eine Partikulärlösung  $y(x) = c_1(x) y_1(x) + \dots + c_n(x) y_n(x)$  mit  $Ly = b$ .

😊 Jede inhomogene Differentialgleichung lässt sich so lösen!

Probe: Einsetzen und geduldiges Ausrechnen ergibt  $Ly = b$ .

Dies entspricht der Lösung linearer Differentialgleichungen  $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$  erster Ordnung, wie wir sie aus dem vorigen Kapitel kennen, siehe Seite M437, alternativ Seite M221. Der Unterschied ist, dass nicht im Körper  $\mathbb{K}$  invertiert wird, sondern im Matrizenring  $\mathbb{K}^{n \times n}$ . Matrixwertige Differentialgleichungen führen wir in Kapitel O aus, siehe Seite O311



**Aufgabe:** Rechnen Sie nach, dass die angegebene Lösungsformel der „Variation der Konstanten“ aus Satz N3C tatsächlich immer zum Erfolg führt, also eine Partikulärlösung  $y: I \rightarrow \mathbb{K}$  der Gleichung  $Ly = b$  liefert.

**Lösung:** Wir rechnen zunächst die Ableitungen von  $y$  geduldig aus.

$$\begin{aligned}
 y &= c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \\
 y' &= c_1 y_1' + \dots + c_n y_n' && + \underbrace{c_1' y_1 + \dots + c_n' y_n}_{=0} \\
 y'' &= c_1 y_1'' + \dots + c_n y_n'' && + \underbrace{c_1' y_1' + \dots + c_n' y_n'}_{=0} \\
 &\vdots \\
 y^{(n-1)} &= c_1 y_1^{(n-1)} + \dots + c_n y_n^{(n-1)} && + \underbrace{c_1' y_1^{(n-2)} + \dots + c_n' y_n^{(n-2)}}_{=0} \\
 y^{(n)} &= c_1 y_1^{(n)} + \dots + c_n y_n^{(n)} && + \underbrace{c_1' y_1^{(n-1)} + \dots + c_n' y_n^{(n-1)}}_{=b}
 \end{aligned}$$

😊 Die Konstruktion von  $c_1, \dots, c_n$  vereinfacht die Rechnung!

Damit erfüllt  $y$  die inhomogene Differentialgleichung  $Ly = b$ :

$$\begin{aligned}
 Ly &= y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y \\
 &= b + c_1' \underbrace{[y_1^{(n)} + a_{n-1} y_1^{(n-1)} + \dots + a_1 y_1' + a_0 y_1]}_{=0} \\
 &\quad + \dots \\
 &\quad + c_n' \underbrace{[y_n^{(n)} + a_{n-1} y_n^{(n-1)} + \dots + a_1 y_n' + a_0 y_n]}_{=0}
 \end{aligned}$$

😊 Dies zeigt, dass der Ansatz immer gelingt! Für eine konkrete Aufgabe mag die explizite Rechnung mühsam sein, aber wir wissen immerhin, dass eine Lösung existiert und wie wir sie finden können. Oft ist allein das schon eine sehr wertvolle Information!

😊 Meist wird man versuchen, die Rechnung weiter zu vereinfachen. Dies kennen wir von konstanten Koeffizienten und speziellen rechten Seiten: Hier führen sowohl die allgemeine Greensche Methode N2F als auch die noch allgemeinere Variation N3C der Konstanten zum Ziel, doch der Exponentialansatz N2E kürzt die Rechnungen erheblich ab!

**Aufgabe:** Zu lösen sei, für  $-\pi/2 < x < \pi/2$ , die Differentialgleichung

$$y''(x) + y(x) = \frac{1}{\cos x} \quad \text{mit} \quad y(0) = \alpha_1, \quad y'(0) = \alpha_2.$$

Allgemeine rechte Seite: Nutzen Sie die Variation der Konstanten!

**Lösung:** Die zugehörige homogene Gleichung ist  $y''(x) + y(x) = 0$ .

Fundamentalsystem:  $y_1(x) = \cos x$ ,  $y_2(x) = \sin x$ . Fundamentalmatrix:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}, \quad Y^{-1} = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

Probe! Dies ist eine Rotationsmatrix mit  $\det Y = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$ .

Die Inversion gelingt mit Cramerscher Regel:  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ .

Ansatz für eine Partikulärlösung durch **Variation der Konstanten**:

$$y_b(x) = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x \quad \text{mit} \quad c_1, c_2 : ]-\pi/2, \pi/2[ \rightarrow \mathbb{R}$$

Die Koeffizientenfunktionen  $c_1, c_2$  bestimmen wir gemäß obigem Satz:

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = Y^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos & -\sin \\ \sin & \cos \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\cos \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin / \cos \\ 1 \end{pmatrix}$$

Integration von  $c_1', c_2'$  zu  $c_1, c_2$  liefert die gesuchten Funktionen:

$$c_1(x) = \int_{t=0}^x \frac{-\sin t}{\cos t} dt = \left[ \ln \cos t \right]_{t=0}^x = \ln \cos x$$

$$c_2(x) = \int_{t=0}^x 1 dt = \left[ x \right]_{t=0}^x = x$$

Als Partikulärlösung erhalten wir so  $y_b(x) = (\ln \cos x) \cos x + x \sin x$ .

Machen Sie die Probe! N246 Die allgemeine Lösung ist demnach

$$y(x) = (\ln \cos x + \alpha_1) \cos x + (x + \alpha_2) \sin x.$$

Die Konstanten entsprechen Anfangswerten  $y(0) = \alpha_1$  und  $y'(0) = \alpha_2$ .

😊 Wie immer gilt auch hier: **Anfangswerte**  $y(x_0), y'(x_0) \in \mathbb{R}$  zu einem Zeitpunkt  $x_0 \in I$  können beliebig vorgegeben werden; sie bestimmen eindeutig die Lösung, also die Konstanten  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ , und umgekehrt.

😊 Wir haben hier eine DG mit konstanten Koeffizienten. Für diesen Spezialfall können wir die Greensche Lösungsformel nutzen. N246

Die Variation der Konstanten funktioniert ebenso, zudem sogar ganz allgemein auch für Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten!

**Aufgabe:** Bestimmen Sie alle Potenzreihen  $u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  mit

$$u'(x) - u(x) = 0.$$

**Lösung:** Einsetzen von  $u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  in die DG ergibt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

Dies fassen wir als eine einzige Potenzreihe zusammen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+1)a_{k+1} - a_k] x^k = 0$$

Koeffizientenvergleich ergibt  $(k+1)a_{k+1} - a_k = 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ .

Wir erhalten rekursiv  $a_{k+1} = a_k / (k+1)$ , also  $a_k = a_0 / k!$ .

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_0}{k!} x^k = a_0 \exp(x)$$

😊 Das war zu erwarten. Wenn wir die Exponentialfunktion nicht schon kennen, wir müssten sie spätestens für diese DG als Lösung erfinden!

**Aufgabe:** Bestimmen Sie alle Potenzreihen  $v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  mit

$$v''(x) + v(x) = 0.$$

**Lösung:** Einsetzen von  $v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  in die DG ergibt:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

Dies fassen wir als eine einzige Potenzreihe zusammen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)(k+1)a_{k+2} + a_k] x^k = 0$$

Wir erhalten rekursiv  $a_{k+2} = -a_k / (k+2)(k+1)$ , für gerade Indizes  $a_{2j} = (-1)^j a_0 / (2j)!$  und für ungerade  $a_{2j+1} = (-1)^j a_1 / (2j+1)!$

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 \cos(x) + a_1 \sin(x)$$

😊 Auch das war zu erwarten. Hier schließt sich der Kreis, den wir zu Beginn des Kapitels mit der Schwingungsgleichung eröffneten.

Viele wichtige Funktionen lassen sich als **Potenzreihen** darstellen:

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Jede dieser fünf Reihen hat unendlichen Konvergenzradius, sie konvergiert daher für jeden Parameter  $x \in \mathbb{R}$ , sogar  $x \in \mathbb{C}$ .

Ihre Ableitungen lesen wir direkt aus den Potenzreihen ab:

$$\exp' = \exp, \quad \sin' = \cos, \quad \cos' = -\sin, \quad \sinh' = \cosh, \quad \cosh' = \sinh$$

Diese Funktionen sind in der Mathematik allgegenwärtig, wir finden sie insbesondere als Lösungen grundlegender Differentialgleichungen:

$$y' = y, \quad y'' = -y, \quad y'' = y$$

Vor allem die einfachste Gleichung  $y' = y$  ist omnipräsent, denn sie beschreibt in Natur und Technik viele wichtige Wachstumsprozesse. Kein Polynom kann diese Gleichung lösen. (Warum?) Daher ist die Erweiterung von rationalen zu transzendenten Funktionen wie  $\exp$ ,  $\sin$ ,  $\cos$ , etc. unumgänglich. Bemerkenswerterweise benötigen wir für lineare Differentialgleichungen mit *konstanten* Koeffizienten keine weiteren Funktionen: Der Exponentialansatz  $x^k e^{\mu x}$  gelingt immer!

Bei *nicht-konstanten* Koeffizienten hingegen werden neue Funktionen als Lösungen von Differentialgleichungen benötigt bzw. konstruiert. Die Bessel-Funktionen sind hierfür ein prominentes Beispiel...

Für viele Differentialgleichungen existiert keine elementare Lösung. In diesem Fall kann uns der Potenzreihenansatz meist weiterhelfen:

**Aufgabe:** (1) Bestimmen Sie die Potenzreihe  $J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  mit

$$x^2 J_0''(x) + x J_0'(x) + x^2 J_0(x) = 0 \quad \text{und} \quad J_0(0) = 1, \quad J_0'(0) = 0.$$

(2) Berechnen Sie aus den Koeffizienten den Konvergenzradius.

(3) Skizzieren Sie die so dargestellte Funktion  $J_0$ .

**Bessel-Funktionen**  $J_\alpha$  treten in der Physik auf. Sie sind Lösungen der Differentialgleichung  $x^2 J_\alpha'' + x J_\alpha' + (x^2 - \alpha^2) J_\alpha = 0$  mit  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Es gibt keine elementare Lösung in  $\exp, \sin, \cos, \dots$ , daher der Potenzreihenansatz. Als typisches Beispiel lösen wir hier den Spezialfall  $\alpha = 0$ .

Die numerische Lösung von Differentialgleichungen ist für die Praxis ein überaus wichtiges Gebiet. Stellvertretend skizzieren wir hier nur den besonders eleganten Potenzreihenansatz: Diese Darstellung nutzen wir für viele Funktionen; sie ist für praktische wie theoretische Belange beinahe ebenso gut wie eine Darstellung durch elementare Funktionen  $\exp, \sin, \cos, \dots$ .

Für die numerische Berechnung auf dem Computer wählen wir ein Intervall  $[a, b]$  und eine Fehlerschranke  $\varepsilon > 0$ . Hierzu bestimmen wir  $n$  so, dass der Rest  $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k$  beschränkt wird durch  $|R_n(x)| < \varepsilon$  für alle  $x \in [a, b]$ . Wir können dann  $J_\alpha(x)$  durch das Polynom  $\sum_{k=0}^n a_k x^k$  annähern, und für alle  $x \in [a, b]$  bleibt der Fehler kleiner als  $\varepsilon$ .

**Lösung:** (1) Einsetzen von  $J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  in die DG ergibt:

$$x^2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} + x \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} + x^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

Dies fassen wir als eine einzige Potenzreihe zusammen:

$$a_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} [k^2 a_k + a_{k-2}] x^k = 0$$

Wir erhalten  $a_k = -a_{k-2}/k^2$  für alle  $k \geq 2$ . Aus  $a_0 = 1$  und  $a_1 = 0$  folgt

$$a_{2j} = \frac{(-1)^j}{4^j (j!)^2} \quad \text{und} \quad a_{2j+1} = 0 \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}.$$

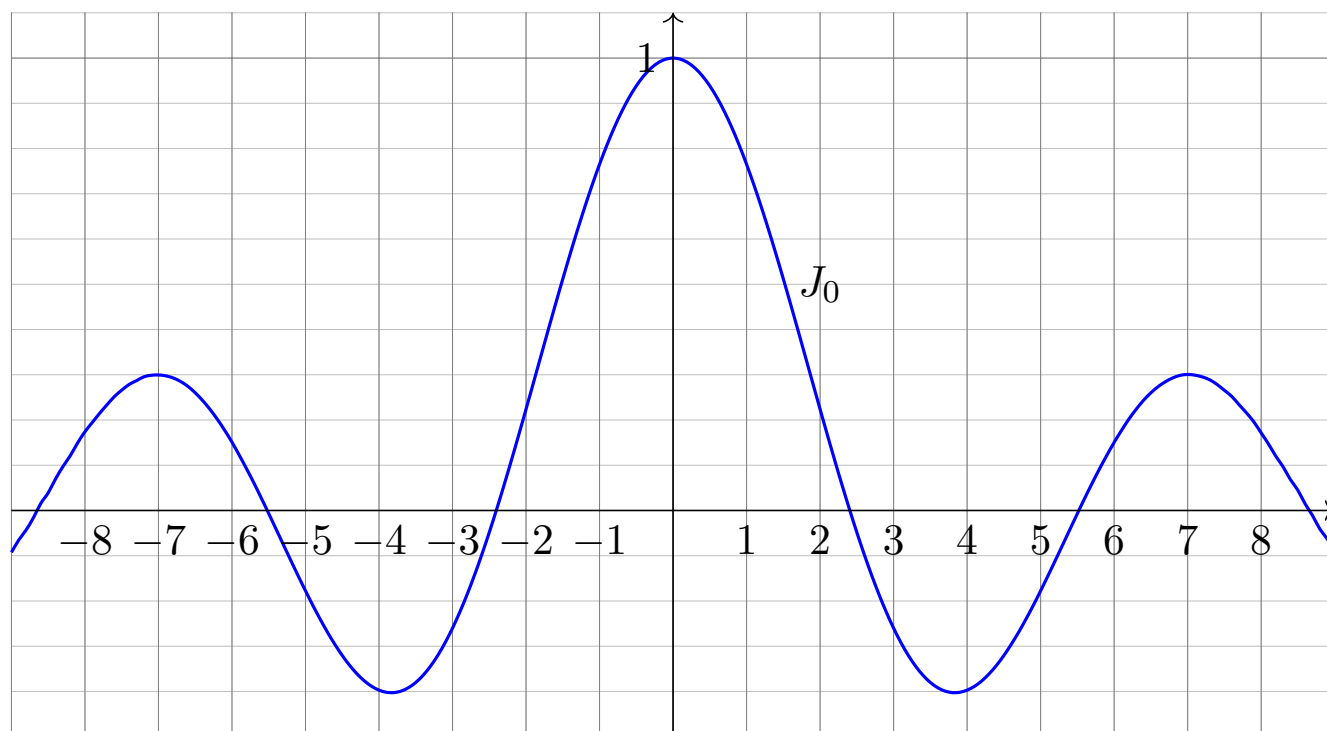
Wenn es also eine Lösung in Form einer Potenzreihe gibt, dann diese!

(2) Sie konvergiert für alle  $x \in \mathbb{R}$ , definiert also eine Funktion  $J_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dank Eindeutigkeitsatz N3A ist diese Funktion  $J_0$  die einzige Lösung.

😊 Die Differentialgleichung gebiert eine neue fundamentale Funktion!

(3) Wir skizzieren schließlich den Graphen der Bessel-Funktion

$$J_0(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{4^j (j!)^2} x^{2j} = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + \dots$$



Die Lösungen  $J_\alpha$  der **Bessel-Differentialgleichung**

$$x^2 J_\alpha''(x) + x J_\alpha'(x) + (x^2 - \alpha^2) J_\alpha(x) = 0$$

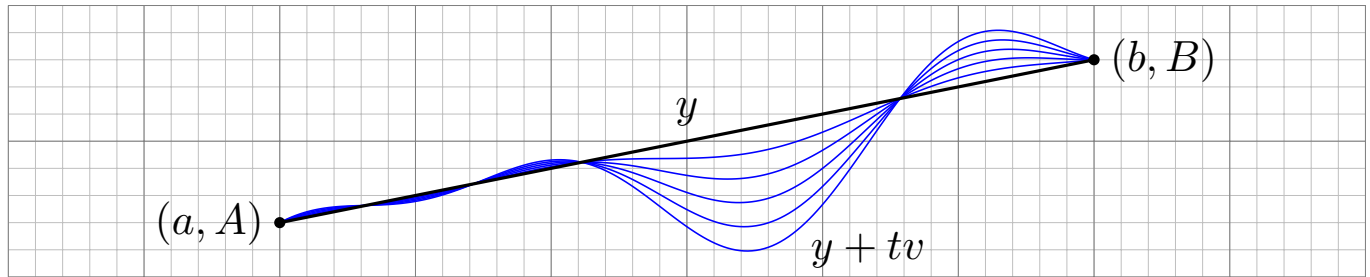
heißen **Bessel-Funktionen** zum Parameter  $\alpha \in \mathbb{C}$ . (Wir haben oben den Fall  $\alpha = 0$  ausgeführt.) Sie begegnen uns bei der Lichtbeugung an kreisförmigen Öffnungen, der Ausbreitung von Wasserwellen in kreisförmigen Behältern, der Untersuchung von Eigenschwingungen einer kreisförmigen Membran, der Wärmeleitung in Stäben, etc.

📖 H. Heuser: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, §28, sowie [de.wikipedia.org/wiki/Besselsche\\_Differentialgleichung](https://de.wikipedia.org/wiki/Besselsche_Differentialgleichung).

Man zählt sie zu den **speziellen Funktionen**. Damit bezeichnet man allgemein all solche Funktionen, die in Mathematik und Physik häufig auftreten und daher eine grundlegende Rolle spielen, dabei aber über die elementaren Funktionen  $\exp, \sin, \cos, \dots$  hinausgehen.

📖 M. Abramowitz, I.A. Stegun: *Handbook of mathematical functions*, online frei erhältlich etwa unter [numerical.recipes/aands/](https://numerical.recipes/aands/)





Welche Funktion  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  verbindet  $(a, A)$  und  $(b, B)$  mit minimaler Länge  $L = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$ ? oder Wirkung  $S = \frac{1}{2} \int_a^b 1 + y'(x)^2 dx$ ?  
Zu minimieren ist hier das **Wirkungsfunktional**  $S : C^2([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$y \mapsto S(y) := \int_{x=a}^b F(x, y(x), y'(x)) dx \quad \text{mit} \quad F(x, q, p) = \begin{cases} 1 + p^2 \\ \sqrt{1 + p^2} \end{cases}$$

Die folgende Rechnung zeigt, wie wir minimierende Kurven finden.  
Angenommen, die Funktion  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist minimal bezüglich  $S$ , das heißt, es gilt  $S(y) \leq S(z)$  für alle Konkurrenten  $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .  
Sei  $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine kleine Variation mit  $v(a) = v(b) = 0$  und

$$\varphi(t) := S(y + tv) = \int_{x=a}^b F(x, y(x) + tv(x), y'(x) + tv'(x)) dx.$$

## Optimierung durch Variationsrechnung

Die Funktion  $t \mapsto \varphi(t)$  hat in  $t = 0$  ein Minimum, also gilt  $\varphi'(0) = 0$ .

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \frac{d}{dt} \int_{x=a}^b F(x, y + tv, y' + tv') dx = \int_{x=a}^b \frac{d}{dt} F(x, y + tv, y' + tv') dx \\ &= \int_{x=a}^b \frac{\partial F}{\partial q}(x, y + tv, y' + tv') \cdot v + \frac{\partial F}{\partial p}(x, y + tv, y' + tv') \cdot v' dx \end{aligned}$$

Den zweiten Summanden vereinfachen wir durch partielle Integration:

$$\int_{x=a}^b \frac{\partial F}{\partial p} \cdot v' dx = \underbrace{\left[ \frac{\partial F}{\partial p} \cdot v \right]_{x=a}^b}_{=0} - \int_{x=a}^b \left[ \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial p} \right] \cdot v dx$$

Somit gilt schließlich:

$$\varphi'(0) = \int_{x=a}^b \left[ \frac{\partial F}{\partial q}(x, y, y') - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial p}(x, y, y') \right] \cdot v(x) dx \stackrel{!}{=} 0$$

😊 Anschaulich: Dies ist die Ableitung von  $S$  im Punkt  $y$  in Richtung  $v$ . Sie verschwindet für alle Variationen  $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $v(a) = v(b) = 0$ . Folglich verschwindet die Funktion  $u(x)$  in eckigen Klammern:  $[...] = 0$ .

Gegeben sei ein **Wirkungsfunktional**  $S : C^2 = C^2([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$y \mapsto S(y) := \int_{x=a}^b F(x, y(x), y'(x)) dx$$

als Integral einer  $C^2$ -Funktion  $F : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, q, p) \mapsto F(x, q, p)$ .

### Satz N4B: Euler–Lagrange–Differentialgleichung

Ist  $y \in C^2$  **extremal**, also minimal  $S(y) \leq S(z)$  für alle  $z \in C^2$  oder maximal  $S(y) \geq S(z)$  für alle  $z \in C^2$ , dann erfüllt  $y$  die Gleichung

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial q} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial p} \right] (x, y(x), y'(x)) = 0.$$

Ausgeschrieben bedeutet das: Für alle  $x \in [a, b]$  gilt die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial q}(x, y(x), y'(x)) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial p}(\dots) + \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial p}(\dots) y'(x) + \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}(\dots) y''(x).$$

😊 Mit dieser Differentialgleichung können wir  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  berechnen!

**Übung:** (1) Anwendung auf Verbindungswege geringster Wirkung:

$$F(x, q, p) = \frac{1 + p^2}{2}, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial p} = p$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial p} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial p} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} = 1.$$

Die Euler–Lagrange–Gleichung reduziert sich damit zu  $y''(x) = 0$ , also  $y(x) = c_0 + c_1 x$ . Minimierende Verbindungswege sind Geraden!

⚠ Dass umgekehrt die gefundenen Lösungen tatsächlich minimal sind, muss man jeweils durch genauere Analyse absichern, etwa  $\varphi''(0) > 0$ .

**Übung:** (2) Anwendung auf Verbindungswege kürzester Länge:

$$F(x, q, p) = \sqrt{1 + p^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial p} = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial p} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial p} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} = \frac{1}{(1 + p^2)^{3/2}}.$$

Auch hier reduziert sich die Euler–Lagrange–Gleichung zu  $y''(x) = 0$ .

😊 Geraden waren hier zu erwarten, nun können wir es nachrechnen!

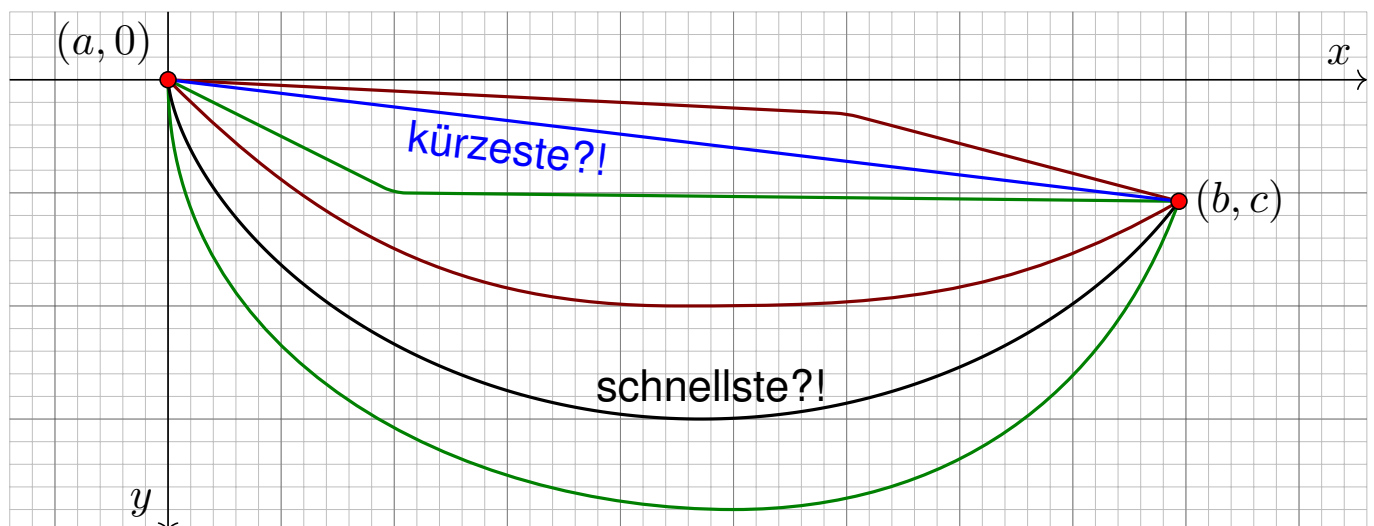


Bildquelle: wikimedia.org

Eine Skaterampe (im Bild eine Halfpipe in Rotterdam) wird meist aus einfachen geometrischen Formen zusammengesetzt. Welche Kurve optimiert die Geschwindigkeit, wird also am schnellsten durchlaufen? Das ist das berühmte Problem der **Brachistochrone**, also der Kurve kürzester Laufzeit. Seine Untersuchung führt zur Variationsrechnung.

## Die Brachistochrone

Ein Massepunkt ruht in  $(a, 0)$  und bewegt sich dann allein durch seine Schwerkraft reibungsfrei auf der Kurve  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  nach  $(b, c)$ .



Problem der Brachistochrone: Welche Kurve  $y$  hat kürzeste Laufzeit?

- Aufgabe:** (1) Finden / begründen Sie  $1 + y'(x)^2 + 2y(x)y''(x) = 0$ .  
 (2) Lösen Sie diese Differentialgleichung durch die **Zykloide**

$$\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (x(\theta), y(\theta)) = r(\theta - \sin \theta, 1 - \cos \theta)$$

**Lösung:** (1) Wir berechnen die Laufzeit  $T(y)$  längs  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ :

Energieerhaltung:  $\frac{1}{2}mv^2 = mgy \Rightarrow$  Geschwindigkeit:  $v = \sqrt{2gy}$

Wegstück:  $ds = \sqrt{1 + y'(x)^2} dx \Rightarrow$  Zeitverbrauch:  $dt = ds/v$

Die Laufzeit von  $(a, 0)$  nach  $(b, c)$  längs  $(x, y(x))$  ist demnach:

$$T(y) = \int_{x=a}^b \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2gy(x)}} dx$$

Zu minimieren ist hier also das Funktional  $T : C^2([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$y \mapsto T(y) := \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx \quad \text{mit} \quad F(x, q, p) = \sqrt{\frac{1 + p^2}{2gq}}$$

Wir finden Kandidaten  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dank Euler–Lagrange:

$$\frac{\partial F}{\partial q}(x, y(x), y'(x)) - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial p}(\dots) - \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial p}(\dots) y'(x) - \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}(\dots) y''(x) = 0$$

Die nötigen Ableitungen berechnen wir sorgsam und geduldig:

$$F(x, q, p) = \left[ \frac{1 + p^2}{2gq} \right]^{1/2}, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = -\frac{1 + p^2}{4gq^2} \left[ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \right]^{-1/2}, \quad \frac{\partial F}{\partial p} = \frac{p}{2gq} \left[ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \right]^{-1/2},$$

Die zweiten Ableitungen sind dann  $\partial^2 F / \partial x \partial p = 0$  sowie

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial p} &= -\frac{p}{2gq^2} \left[ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \right]^{-1/2} + \frac{p}{2gq} \frac{1 + p^2}{4gq^2} \left[ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \right]^{-3/2} = -\frac{p}{4gq^2} \left[ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \right]^{-1/2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} &= +\frac{1}{2gq} \left[ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \right]^{-1/2} - \frac{p}{2gq} \frac{p}{2gq} \left[ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \right]^{-3/2}, \quad = +\frac{1}{2gq(1 + p^2)} \left[ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \right]^{-1/2} \end{aligned}$$

Die Euler–Lagrange–Gleichung vereinfachen sich damit wie folgt:

$$\frac{\partial F}{\partial q}(x, y(x), y'(x)) - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial p}(\dots) - \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial p}(\dots) y'(x) - \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}(\dots) y''(x) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1 + y'(x)^2}{4g y(x)^2} + \frac{y'(x)^2}{4g y(x)^2} - \frac{1}{2g y(x)(1 + y'(x)^2)} y''(x) = 0$$

$$\Rightarrow 1 + y'(x)^2 + 2y(x)y''(x) = 0 \quad \text{Uff! Alles wird gut.}$$

(2) Die Kurve  $x(\theta) = r \cdot (\theta - \sin \theta)$  und  $y(\theta) = r \cdot (1 - \cos \theta)$  mit  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  löst unsere Differentialgleichung  $1 + (y')^2 + 2yy'' = 0$ . Nachrechnen:

$$\frac{dx}{d\theta} = r \cdot (1 - \cos \theta), \quad \frac{dy}{d\theta} = r \sin \theta, \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$$

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{\sin(\theta)^2}{(1 - \cos \theta)^2} = \frac{1 - 2 \cos \theta + \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2}{(1 - \cos \theta)^2} = \frac{2}{1 - \cos \theta}$$

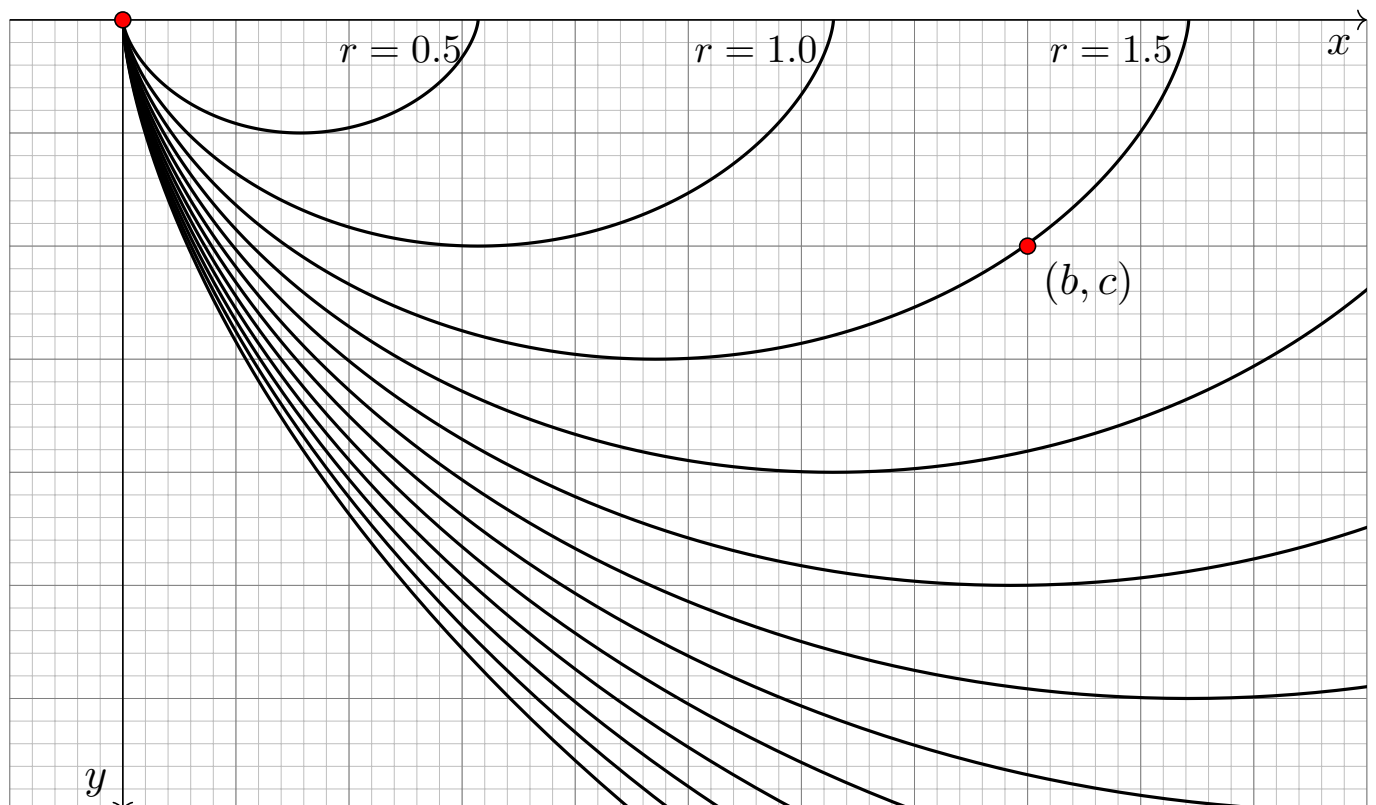
$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{\cos \theta \cdot (1 - \cos \theta) - \sin \theta \cdot \sin \theta}{r \cdot (1 - \cos \theta)^3} = \frac{-1}{r \cdot (1 - \cos \theta)^2}$$

$$2yy'' = 2r \cdot (1 - \cos \theta) \cdot \frac{-1}{r \cdot (1 - \cos \theta)^2} = \frac{-2}{1 - \cos \theta}$$

😊 Wir haben Glück, die Lösung ist schön und einfach: Die gesuchte Kurve ist eine Zykloide! Das war nicht zu erwarten. Sie beginnt im Ursprung  $(x(0), y(0)) = (0, 0)$ ; die freie Konstante  $r$  wählen wir so, dass die Zykloide durch den vorgegebenen Endpunkt  $(x(\Theta), y(\Theta)) = (b, c)$  geht.

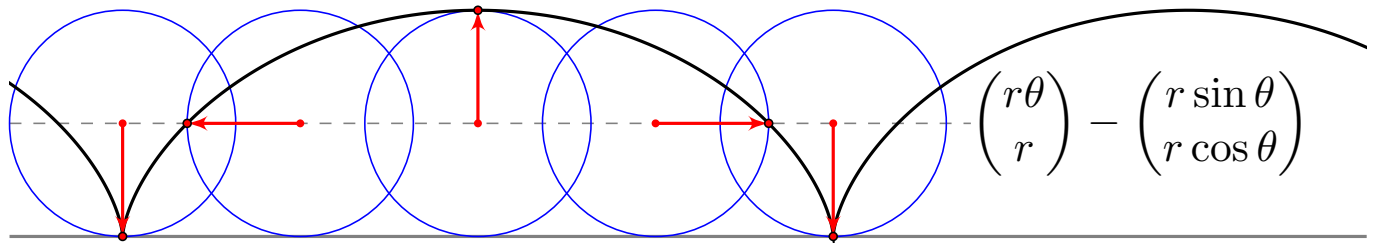
Bemerkungen: Die Kurve ist unabhängig von der Masse  $m$  und der Erdbeschleunigung  $g$ . Die Tangente im Startpunkt ist senkrecht. Bei starkem Gefälle  $c/b \geq 2/\pi$  ist  $(b, c)$  der tiefste Punkt, bei schwachem Gefälle  $c/b < 2/\pi$  liegt der Tiefpunkt strikt zwischen  $(a, 0)$  und  $(b, c)$ ! Bei Gefälle 0 liegen  $(a, 0)$  und  $(b, 0)$  auf derselben Höhe, und die Kurve ist symmetrisch.

## Die Brachistochrone



Die freie Konstante  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  können wir eindeutig so wählen, dass die Zykloide durch den vorgegebenen Endpunkt  $(x(\Theta), y(\Theta)) = (b, c)$  läuft.

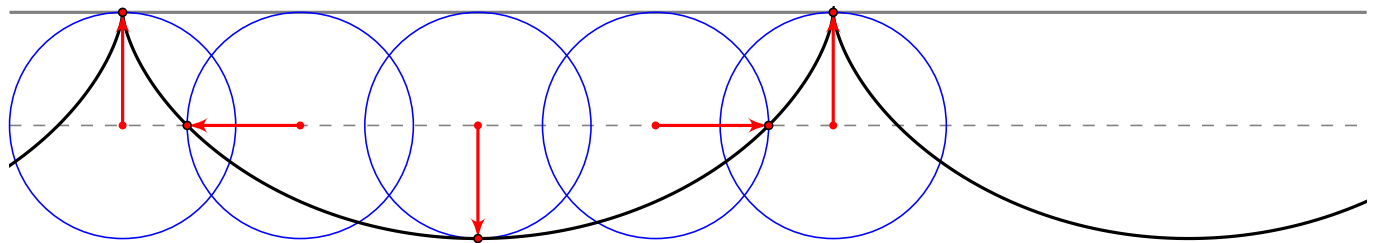
Geometrische Konstruktion der **Zykloide** durch Abrollen eines Kreises:



Die Zykloide ist die **Radkurve**, die ein Kreispoint beim Abrollen eines Kreises auf einer Leitkurve beschreibt, hier auf einer horiz. Geraden.

Mit dieser Beschreibung finden wir sofort die Koordinaten  $(x(\theta), y(\theta))$  in Abhängigkeit vom zurückgelegten Drehwinkel  $\theta \in \mathbb{R}$ , wie angegeben.

Zykloiden haben bemerkenswerte Eigenschaften; uns begegnen sie hier als Brachistochrone: Diese ist eine nach oben geöffnete Zykloide.



## Die Brachistochrone

**Aufgabe:** Berechnen Sie die minimale Laufzeit entlang der Zykloide.

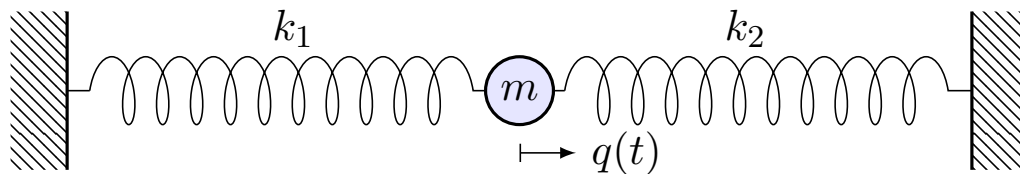
**Lösung:** Wir nutzen die oben entwickelten Formeln:

$$\begin{aligned}
 T(y) &= \int_{x=a}^b \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2g y(x)}} dx \quad \text{mit} \quad \begin{cases} x(\theta) = r(\theta - \sin \theta) \\ y(\theta) = r(1 - \cos \theta) \end{cases} \\
 &= \int_{\theta=0}^{\Theta} \sqrt{\frac{2/(1 - \cos \theta)}{2g r(1 - \cos \theta)}} r(1 - \cos \theta) d\theta \\
 &= \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{\theta=0}^{\Theta} 1 d\theta = \sqrt{\frac{r}{g}} \Theta
 \end{aligned}$$

😊 Unser zunächst willkürlicher Parameter  $\theta$  ist proportional zur Zeit. Das ist ein bemerkenswerter und nützlicher Nebeneffekt.

😊 Das Geradensegment ist zwar die geometrisch kürzeste Verbindung aber nicht die schnellste! Sie können die Laufzeiten auch für andere Kurven explizit berechnen und vergleichen: Die Zykloide schlägt sie alle! Im Internet finden Sie zahlreiche Illustrationen und Experimente dazu. Sie können dies mit etwas Geschick selbst bauen und ausprobieren.





Ein Teilchen habe die Masse  $m$ , Position  $q(t)$  und Geschwindigkeit  $\dot{q}(t)$ , die kinetische Energie  $T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2$  und die potentielle Energie  $V = \frac{1}{2}kq^2$ .

Dies definiert folgende **Lagrange–Funktion** und ihr **Wirkungsintegral**:

$$L := T - V, \quad S(q) := \int_{t=a}^b L(t, q, \dot{q}) dt = \int_{t=a}^b \frac{1}{2}m\dot{q}(t)^2 - \frac{1}{2}kq(t)^2 dt$$

**Aufgabe:** Finden Sie die Kurven  $q: \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}$  minimaler Wirkung. Entspricht dies der Bewegung nach der Newtonschen Mechanik?

**Lösung:** Die Euler–Lagrange–Gleichung N4B ergibt:

$$\frac{\partial L}{\partial q} \stackrel{!}{=} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad \text{hier mit} \quad \frac{\partial L}{\partial q} = -kq \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt} [m\dot{q}] = m\ddot{q}.$$

Wir erhalten somit  $-kq = m\ddot{q}$ , also „Kraft = Masse · Beschleunigung“.

😊 Die Lösungen sind harmonische Schwingungen  $A \cos(\omega t + \varphi)$ .

Lagranges Formulierung ist Grundlage der **analytischen Mechanik**: Die Dynamik des Systems  $q(t)$  wird durch eine einzige skalare Funktion  $L(t, q, \dot{q})$  beschrieben; hieraus gewinnen wir dank Variationsrechnung die Bewegungsgleichung durch die Euler–Lagrange–Gleichung N4B .

Hierzu formulierte Hamilton das **Prinzip der kleinsten Wirkung**:

Unter allen denkbaren Trajektorien ist die physikalisch beobachtete Bahn des Teilchens extremal: Sie minimiert das Wirkungsintegral!

„Die Natur wählt unter allen möglichen Wegen den sparsamsten.“

Diese Betrachtungsweise vereinheitlicht viele physikalische Probleme und vereinfacht ihre Analyse: Lagrange– bzw. Hamilton–Formalismus.

😊 In unserem besonders schönen Spezialfall finden wir  $m\ddot{q} + kq = 0$ . Das ist die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators! **N105**

Damit schließt sich wunderbar der Kreis: Wir haben dieses Kapitel mit dem harmonischen Oszillator begonnen und beschließen es auch damit. Auf diesem Weg haben wir Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung lösen gelernt. Ich hoffe, diese Anregung findet Ihre Resonanz.

**Satz N4c: Invarianzsatz, Emmy Noether 1918**

Angenommen, die Lagrange–Funktion  $L(t, q, \dot{q})$  hängt nicht von  $t$  ab, es gelte also  $\partial L/\partial t = 0$ . Dann ist die Energie bzw. Hamilton–Funktion

$$H(q, \dot{q}) = \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L(q, \dot{q})$$

eine Invariante der Bewegung: Es gilt also  $\dot{H} = dH(q(t), \dot{q}(t))/dt = 0$  entlang jeder Trajektorie / Lösung  $t \mapsto q(t)$  des dynamischen Systems.

**Aufgabe:** (1) Beweisen Sie den Satz durch explizites Ausrechnen.

(2) Finden Sie  $H$  für den harmonischen Oszillator  $L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$ .

(3) Wenden Sie Noethers Satz auf das Brachistochrone–Problem an: Die Aufstellung der Differentialgleichung gelingt damit viel leichter!

**Lösung:** (1) Wir leiten ab und nutzen die Euler–Lagrange–Gleichung:

$$\frac{dH}{dt} = \ddot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \dot{q} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} = \dot{q} \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \right] \stackrel{\text{EuLa}}{\stackrel{\text{N4B}}{=}} 0$$

## Lagrange–Funktion in der klassischen Mechanik

(2) Für  $L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$  ist  $H = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2$  die Gesamtenergie!

(3) Für die Lagrange–Funktion  $L(q, \dot{q}) = \sqrt{(1 + \dot{q}^2)/(2gq)}$  finden wir:

$$\begin{aligned} H &= \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L(q, \dot{q}) = \dot{q} \frac{\dot{q}}{2gq} \left[ \frac{1 + \dot{q}^2}{2gq} \right]^{-1/2} - \left[ \frac{1 + \dot{q}^2}{2gq} \right]^{1/2} \\ &= -\frac{1}{2gq} \left[ \frac{1 + \dot{q}^2}{2gq} \right]^{-1/2} + \frac{1 + \dot{q}^2}{2gq} \left[ \frac{1 + \dot{q}^2}{2gq} \right]^{-1/2} - \left[ \frac{1 + \dot{q}^2}{2gq} \right]^{1/2} \\ &= \frac{1}{2gq} \sqrt{\frac{2gq}{1 + \dot{q}^2}} = \frac{1}{\sqrt{2gq(1 + \dot{q}^2)}} \stackrel{!}{=} \text{const} \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Erhaltungsgröße  $q(1 + \dot{q}^2) = \text{const}$ , also wie oben

$$1 + \dot{q}(t)^2 + 2q(t)\ddot{q}(t) = 0.$$

😊 Diese Rechnung ist viel kürzer und leichter als unsere erste. [N406](#)  
Zudem erhalten wir gratis ein Integral / eine Invariante der Bewegung!

😊 In beide Gleichungen kann man die Zykloide einsetzen und so das Problem der Brachistochrone lösen. Dies haben wir oben ausgeführt.

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b: I \rightarrow \mathbb{K}$  stetig,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ .  
Dies definiert eine **lineare Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung**

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x).$$

Die stetigen Funktionen  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}: I \rightarrow \mathbb{K}$  heißen **Koeffizienten**.  
Die stetige Funktion  $b: I \rightarrow \mathbb{K}$  heißt **Störterm** oder kurz **rechte Seite**.  
Links wirkt der **lineare Differentialoperator**  $L: C^n(I, \mathbb{K}) \rightarrow C^0(I, \mathbb{K})$ ,

$$L = a_0\partial^0 + a_1\partial^1 + \dots + a_{n-1}\partial^{n-1} + \partial^n,$$

$$y \mapsto a_0y + a_1y' + \dots + a_{n-1}y^{(n-1)} + y^{(n)}.$$

Wir suchen alle Funktionen  $y: I \rightarrow \mathbb{K}$ , die die Gleichung  $Ly = b$  erfüllen.  
Linearität bedeutet  $L(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1L(y_1) + c_2L(y_2)$  für  $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$ .

In anderen Worten: Aus Lösungen  $y_1$  zu  $b_1$  und  $y_2$  zu  $b_2$  ergibt die  
Linearkombination  $y = c_1y_1 + c_2y_2$  eine Lösung zu  $b = c_1b_1 + c_2b_2$ .

Zu  $Ly = b$  gehört die **homogene lineare Differentialgleichung**  $Ly = 0$ .  
Als Lösungsmenge suchen wir also den Kern der linearen Abbildung  $L$ .

Qualitativer Überblick dank **Existenz- und Eindeigkeitssatz N3A**  
(Fortsetzung von M1C, konstruktiv M2E, später O1B, konstruktiv O2A):

Zu jedem Anfangsdatum  $(x_0, v_0, \dots, v_{n-1}) \in I \times \mathbb{K}^n$  existiert genau eine  
Lösung  $y: I \rightarrow \mathbb{K}$  mit  $Ly = b$  und  $y(x_0) = v_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = v_{n-1}$ .

Die Lösungsmenge  $L_0 = \{y: I \rightarrow \mathbb{K} \mid Ly = 0\}$  ist ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  
der Dimension  $n$ : Wir wählen ein Fundamentalsystem  $y_1, \dots, y_n \in L_0$   
von  $n$  linear unabhängigen Lösungen und erhalten:

$$L_0 = \{c_1y_1 + \dots + c_ny_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}\} \cong \mathbb{K}^n$$

Die Lösungsmenge  $L_b = \{y: I \rightarrow \mathbb{K} \mid Ly = b\}$  ist ein affiner Raum.  
Für jede Partikulärlösung  $y_b \in L_b$  gilt  $L_b = y_b + L_0$ , ausgeschrieben:

$$L_b = y_b + L_0 = \{y_b + c_1y_1 + \dots + c_ny_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}^n\}$$

„Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen“

Sind Anfangswerte  $y(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$  vorgegeben, so kann man  
hieraus  $c_1, \dots, c_n$  eindeutig bestimmen (lineares Gleichungssystem).

Besonders leicht sind **lineare DG mit konstanten Koeffizienten**:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0$$

Kurzschreibweise  $p(\partial) y = 0$  mit dem **charakteristischen Polynom**

$$p(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Jede  $k$ -fache Nullstelle  $\lambda \in \mathbb{C}$  liefert  $k$  linear unabhängige Lösungen

$$e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda x}.$$

Ist  $p \in \mathbb{R}[x]$  reell und  $\lambda = \sigma + i\omega$  mit  $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$  und  $\omega \neq 0$  eine  $k$ -fache Nullstelle, so gilt dies auch für die komplex-konjugierte Zahl  $\bar{\lambda} = \sigma - i\omega$ . Durch Linearkombination erhalten wir die zugehörigen reellen Lösungen; sie entsprechen Real- und Imaginärteil der komplexen Lösungen:

$$\left. \begin{array}{l} e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda x} \\ e^{\bar{\lambda} x}, \dots, x^{k-1} e^{\bar{\lambda} x} \end{array} \right\} \begin{array}{c} \Longleftrightarrow \\ \text{Basiswechsel} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} e^{\sigma x} \cos(\omega x), \dots, x^{k-1} e^{\sigma x} \cos(\omega x) \\ e^{\sigma x} \sin(\omega x), \dots, x^{k-1} e^{\sigma x} \sin(\omega x) \end{array} \right.$$

Zu lösen sei schließlich eine **inhomogene lineare DG**  $p(\partial) y(x) = b(x)$ :

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = b(x)$$

Eine Lösung  $y_b$  gewinnen wir durch **Variation der Konstanten** (N3C) oder Faltung von  $b$  mit der **Greenschen Fundamentallösung**  $u$  (N2F), für die  $p(\partial) u = 0$  und  $u(0) = \cdots = u^{(n-2)}(0) = 0$ ,  $u^{(n-1)}(0) = 1$  gilt:

$$y_b(x) = \int_{t=x_0}^x u(x-t) b(t) dt$$

Für **spezielle rechte Seiten** lohnt sich folgender Ansatz (N2E):

Zu lösen sei  $p(\partial) y(x) = r(x) e^{\mu x}$  mit Polynomen  $p, r \in \mathbb{C}[x]$ .

Ist  $\mu$  eine  $k$ -fache Nullstelle von  $p$ , so existiert eine Lösung

$$y_b(x) = q(x) x^k e^{\mu x}$$

mit einem eindeutigen Polynom  $q \in \mathbb{C}[x]$  vom Grad  $\deg q = \deg r$ .

Speziell  $p(\partial) y(x) = e^{\mu x}$  wird gelöst durch  $y_b(x) = e^{\mu x} x^k / p^{(k)}(\mu)$ .

Für manche Differentialgleichungen reichen elementare Funktionen nicht aus; es werden neue Funktionen als Lösungen benötigt bzw. konstruiert. Bessel-Funktionen sind ein prominentes Beispiel. N321

Zu lösen sei eine analytische Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

mit gegebenen Anfangsdaten  $y(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$  und einer Potenzreihe

$$f(x, u_0, u_1, \dots, u_{n-1}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}} c_\alpha u_0^{\alpha_0} u_1^{\alpha_1} \dots u_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x^{\alpha_n}.$$

Diese DG wird von genau einer Potenzreihe  $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  erfüllt: Aus den vorgegebenen Anfangsdaten  $a_0, \dots, a_{n-1}$  berechnen sich rekursiv alle weiteren Koeffizienten  $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$  der Reihe.

😊 Hat diese Potenzreihe einen Konvergenzradius  $\rho > 0$ , dann löst die so definierte Funktion  $y : ]-\rho, \rho[ \rightarrow \mathbb{R}$  die gegebene Differentialgleichung.

😊 Dieses Verfahren ist manchmal mühsam, aber immer konstruktiv!

## Euler–Lagrange–Differentialgleichung

Gegeben sei ein **Wirkungsfunktional**  $S : C^2([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$y \mapsto S(y) := \int_{x=a}^b F(x, y(x), y'(x)) dx$$

mit einer  $C^2$ -Funktion  $F : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, q, p) \mapsto F(x, q, p)$ .

Dann gilt die **Euler–Lagrange–Differentialgleichung** (Satz N4B): Ist  $y \in C^2$  **extremal**, also minimal  $S(y) \leq S(z)$  für alle  $z \in C^2$  oder maximal  $S(y) \geq S(z)$  für alle  $z \in C^2$ , dann erfüllt  $y$  die Gleichung

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial q} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial p} \right] (x, y(x), y'(x)) = 0.$$

Ausgeschrieben bedeutet das: Für alle  $x \in [a, b]$  gilt die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial q}(x, y(x), y'(x)) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial p}(\dots) + \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial p}(\dots) y'(x) + \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}(\dots) y''(x).$$

😊 Mit dieser Differentialgleichung können wir  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  berechnen! Dies ist die Grundlage der Optimierung durch Variationsrechnung. N401

Versuchen Sie, folgende Fragen frei aber genau zu beantworten, etwa so, wie Sie dies einer Kommiliton:in / Kolleg:in erklären wollen.

- (1) Was ist ein linearer Differentialoperator  $L : C^n(I, \mathbb{K}) \rightarrow C^0(I, \mathbb{K})$ ?
- (2) Ist diese Abbildung  $L$  injektiv? Welche Dimension hat ihr Kern?
- (3) Welche Struktur hat die Lösungsmenge der Gleichung  $Ly = 0$ ?
- (4) Was versteht man unter einem Fundamentalsystem?
- (5) Ist diese Abbildung  $L : C^n(I, \mathbb{K}) \rightarrow C^0(I, \mathbb{K})$  surjektiv?
- (6) Wie bestimmt man zu  $b \in C^0$  ein Urbild  $y \in C^n$  mit  $Ly = b$ ?
- (7) Welche Struktur hat die Lösungsmenge der Gleichung  $Ly = b$ ?

**Lösung:** (1) Dies ist eine Zuordnung  $L : y \mapsto a_0y + a_1y' + \dots + a_{n-1}y^{(n-1)} + y^{(n)}$  mit Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in C^0(I, \mathbb{K})$ , eventuell konstant. (Zur Vereinfachung  $a_n = 1$ .)  
 (2) Die Abbildung  $L : C^n(I, \mathbb{K}) \rightarrow C^0(I, \mathbb{K})$  ist linear. Sie ist für  $n \geq 1$  nicht injektiv, genauer:  
 (3) Die Lösungsmenge  $\ker L = \{ y \in C^n \mid Ly = 0 \}$  ist ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum der Dimension  $n$ .  
 (4) Ein Fundamentalsystem ist eine Basis  $y_1, \dots, y_n \in \ker L$ . (5) Die Abbildung  $L$  ist surjektiv:  
 (6) Partikulärlösungen  $y_b$  mit  $Ly_b = b$  finden wir durch die Greensche Lösungsformel [N245] oder Variation der Konstanten [N311] oder geeigneten Ansatz für spezielle rechte Seiten [N217].  
 (7) Die Lösungsmenge der Gleichung  $Ly = b$  ist ein affiner Raum der Dimension  $n$ , explizit ausgeschrieben  $\{ y : I \rightarrow \mathbb{K} \mid Ly = b \} = \{ y_b + c_1y_1 + \dots + c_ny_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K} \}$ .

- (1) Was ist eine lineare Differentialgleichung  $Ly = 0$  mit konstanten Koeffizienten? Was ist ihr charakteristisches Polynom?
- (2) Wie bestimmt man hierzu ein Fundamentalsystem?
- (3) Wie bestimmt man zu  $b \in C^0$  ein Urbild  $y \in C^n$  mit  $Ly = b$ ?
- (4) Was versteht man unter einer speziellen rechten Seite  $b$ ?  
Wie bestimmt man hierzu ein Urbild  $y \in C^n$  mit  $Ly = b$ ?
- (5) Was versteht man in diesem Zusammenhang unter Resonanz?
- (6) Was ist die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators?  
Wie löst man sie? Was passiert bei harmonischer Anregung?  
Was versteht man unter dem Begriff Resonanzkatastrophe?

**Lösung:** (1) Hier gilt  $L : y \mapsto a_0y + a_1y' + \dots + a_{n-1}y^{(n-1)} + y^{(n)}$  mit konstanten Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ . Wir schreiben hierfür kurz  $L = p(\partial)$  mit  $\partial = d/dx$  und dem charakteristischen Polynom  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n \in \mathbb{K}[x]$ .  
 (2) Der Exponentialansatz N2D liefert hier stets  $n$  unabhängige Lösungen  $y_1, \dots, y_n \in \ker L$ .  
 (3) Neben Greenscher Lösungsformel [N245] und Variation der Konstanten [N311] lohnt sich meist  
 (4) der passende Ansatz für spezielle rechte Seiten  $r(x) e^{\mu x}$ ,  $e^{\sigma x} \cos(\tau x)$ ,  $e^{\sigma x} \sin(\tau x)$ . [N217]  
 (5) Bei  $p(\partial) y = r(x) e^{\mu x}$  liegt ( $k$ -fache) Resonanz vor, falls die Anregung  $\mu$  eine ( $k$ -fache) Nullstelle des char. Polynoms  $p$  trifft. (6) Siehe die Ausführung am Anfang des Kapitels N.



**Aufgabe:** Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen für reelle Funktionen  $u, v, w, y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Die vier Gleichungen sind untereinander eng verwandt, das können und sollen Sie zur Lösung ausnutzen.

(1) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$u''(x) - 4u'(x) + 4u(x) = 0.$$

(2) Bestimmen Sie eine Partikulärlösung der inhomogenen Gleichung

$$v''(x) - 4v'(x) + 4v(x) = e^{2x}.$$

(3) Bestimmen Sie eine Partikulärlösung der inhomogenen Gleichung

$$w''(x) - 4w'(x) + 4w(x) = \cos(x).$$

(4) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 2e^{2x} + 25\cos(x).$$

(5) Lösen Sie schließlich das Anfangswertproblem  $y(0) = 5, y'(0) = 1$ .

**Lösung:** Im folgenden Telegrammstil sollten Sie alle Rechnungen eigenhändig nachprüfen und Zwischenrechnungen ergänzen.

(1) Charakteristisches Polynom  $p(x) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$ .

Fundamentallösungen:  $u_1(x) = e^{2x}$  und  $u_2(x) = x e^{2x}$ . Probe!

Allgemeine Lösung:  $u(x) = (c_1 + c_2 x) e^{2x}$  mit  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

(2) Für die rechte Seite  $e^{\mu x}$  mit  $\mu = 2$  liegt (doppelte) Resonanz vor:

$p(\mu) = p'(\mu) = 0, p''(\mu) = 2$ . Partikulärlösung ist also  $v(x) = e^{2x} x^2 / 2$ .

(3) Für die rechte Seite  $\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix})$  liegt keine Resonanz vor.

Wir lösen  $p(\partial) z(x) = e^{ix}$ . Es gilt  $p(\mu) = 3 - 4i$ . Partikulärlösung:

$$z(x) = \frac{e^{ix}}{3 - 4i} = \frac{3 + 4i}{25} e^{ix} = \left[ \frac{3}{25} \cos x - \frac{4}{25} \sin x \right] + i \left[ \frac{4}{25} \cos x + \frac{3}{25} \sin x \right]$$

Der Realteil  $w(x) = \frac{3}{25} \cos x - \frac{4}{25} \sin x$  löst demnach  $p(\partial) w(x) = \cos(x)$ .

Wann wie welcher Ansatz zum Ziel führt, erklärt Ihnen die Theorie!  
Um alle möglichen Komplikationen und die unzähligen Beispiele zu verstehen, sollten Sie daher unbedingt die Grundlagen beherrschen.

**Alternativen:** (2b) Wir machen den Ansatz  $v(x) = cx^2 e^{2x}$ :

Ableiten  $v'(x) = c(2x + 2x^2) e^{2x}$  und  $v''(x) = c(2 + 8x + 4x^2) e^{2x}$

ergibt  $v''(x) - 4v'(x) + 4v(x) = 2c e^{2x}$ . Koeffizientenvergleich mit  $e^{2x}$ :

Unser Ansatz löst die DG für  $c = 1/2$ , also  $v(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{2x}$ . Probe!

(3b) Wir machen den Ansatz  $w(x) = a \cos x + b \sin x$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Ableiten  $w'(x) = -a \sin x + b \cos x$  und  $w''(x) = -a \cos x - b \sin x$

ergibt  $w''(x) - 4w'(x) + 4w(x) = (3a - 4b) \cos x + (4a + 3b) \sin x$ .

Koeffizientenvergleich  $3a - 4b = 1$  und  $4a + 3b = 0$  ergibt  $a = 3/25$

und  $b = -4/25$ . Wir erhalten  $w(x) = \frac{3}{25} \cos(x) - \frac{4}{25} \sin(x)$ . Probe!

(3c) Ebenso gelingt der komplexe Ansatz  $z(x) = c e^{ix}$  mit  $c \in \mathbb{C}$ :

Ableiten  $z'(x) = ci e^{ix}$  und  $z''(x) = -c e^{ix}$  ergibt in die DG eingesetzt

$z''(x) - 4z'(x) + 4z(x) = c(3 - 4i) e^{ix}$ . Koeffizientenvergleich mit  $e^{ix}$ :

Für die Konstante  $c$  finden wir somit  $c = (3 - 4i)^{-1} = (3 + 4i)/25$ .

Die reelle Lösung findet man wie oben als Realteil  $w(x) = \operatorname{Re} z(x)$ .

(4) Die allgemeine Lösung erhalten wir nun als Linearkombination:

$$y(x) = u(x) + 2v(x) + 25w(x) = (c_1 + c_2x + x^2) e^{2x} + 3 \cos(x) - 4 \sin(x)$$

Dank Linearität erfüllt dies  $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 2 e^{2x} + 25 \cos(x)$ .

(5) Wir lösen schließlich das AWP  $y(0) = 5$ ,  $y'(0) = 1$ . Ableiten:

$$y'(x) = (c_2 + 2x) e^{2x} + 2(c_1 + c_2x + x^2) e^{2x} - 3 \sin(x) - 4 \cos(x)$$

Einsetzen führt zu  $y(0) = c_1 + 3 \stackrel{!}{=} 5$  und  $y'(0) = 2c_1 + c_2 - 4 \stackrel{!}{=} 1$ .

Die gesuchten Konstanten sind demnach  $c_1 = 2$  und  $c_2 = 1$ . Lösung:

$$y(x) = (2 + x + x^2) e^{2x} + 3 \cos(x) - 4 \sin(x)$$

Machen Sie wie immer die Probe: Lösen ist schwer, prüfen ist leicht!

😊 Die Rechnung ist lang, jeder Schritt ist leicht. No pain, no gain!

😊 Zu jedem Schritt ist klar, was zu tun ist. Der Theorie sei Dank!

😊 Die abschließende Probe ist leicht und sicher. Alles wird gut!

**Aufgabe:** Lösen Sie die beiden Differentialgleichungen

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = e^{\pm t} \quad \text{mit} \quad y(0) = y'(0) = 0$$

auf je drei verschiedenen Wegen: (1) allgemein und dann das AWP, (2) mit Greenscher Lösungsformel, (3) mit Laplace–Transformation.

Vergleich: Welcher Rechenweg scheint Ihnen am geschicktesten?

**Lösung:** (1) Charakteristisches Polynom  $p(s) = s^2 + 2s + 1 = (s + 1)^2$ . Doppelte Nullstelle  $-1$ . Fundamentallösungen:  $e^{-t}$ ,  $t e^{-t}$ .

(a) Wir lösen  $p(\partial) y(t) = e^{\mu t}$  für  $\mu = 1$ : keine Nullstelle,  $p(1) = 4$ .

Partikulär:  $y_b(t) = e^t/4$ . Allgemein:  $y(t) = \frac{1}{4} e^t + (c_1 + c_2 t) e^{-t}$ .

Die Lösung des AWP ist  $y(t) = \frac{1}{4} e^t + (-\frac{1}{4} - \frac{1}{2} t) e^{-t}$ . Probe!

(b) Wir lösen  $p(\partial) y(t) = e^{\mu t}$  für  $\mu = -1$ : doppelte Nullst.,  $p''(-1) = 2$ .

Partikulär:  $y_b(t) = e^{-t} t^2/2$ . Allgemein:  $y(t) = (c_1 + c_2 t + \frac{1}{2} t^2) e^{-t}$ .

Die Lösung des AWP ist  $y(t) = \frac{1}{2} t^2 e^{-t}$ . Probe!

**Lösung:** (2) Allgemeine Lösungen der homogenen DG:  $(c_1 + c_2 t) e^{-t}$ . Greensche Fundamentallösung:  $u(t) = t e^{-t}$  mit  $u(0) = 0$ ,  $u'(0) = 1$ .

(a) Die Faltung von  $u$  mit der rechten Seite  $b(t) = e^t$  ergibt:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{\tau=0}^t u(t-\tau) b(\tau) d\tau = \int_{\tau=0}^t (t-\tau) e^{\tau-t} e^{\tau} d\tau \\ &= e^{-t} \left[ \frac{2t+1-2\tau}{4} e^{2\tau} \right]_{\tau=0}^t = \frac{1}{4} e^t - \frac{1+4t}{4} e^{-t} \end{aligned}$$

(b) Die Faltung von  $u$  mit der rechten Seite  $b(t) = e^{-t}$  ergibt:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{\tau=0}^t u(t-\tau) b(\tau) d\tau = \int_{\tau=0}^t (t-\tau) e^{\tau-t} e^{-\tau} d\tau \\ &= e^{-t} \left[ t\tau - \frac{1}{2} \tau^2 \right]_{\tau=0}^t = \frac{1}{2} t^2 e^{-t} \end{aligned}$$

😊 Die Greensche Lösungsformel führt immer zum Ziel. Das ist gut. Hier geht es noch geschickter: Für spezielle rechte Seiten gelingt der richtige Exponentialansatz leichter und schneller. Das ist sein Zweck!

**Lösung:** (3) Wir Laplace-transformieren dank  $\mathcal{L}$ -Tabelle:

$$\begin{aligned} y(t) & \circ \longrightarrow \bullet Y(s) & = Y(s) \\ y'(t) & \circ \longrightarrow \bullet s Y(s) - y(0) & = s Y(s) \\ y''(t) & \circ \longrightarrow \bullet s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) & = s^2 Y(s) \\ e^{\mu t} & \circ \longrightarrow \bullet 1/(s - \mu) \end{aligned}$$

(a) Dank Linearität transformieren wir die DG zur Hilfsgleichung

$$\underbrace{(s^2 + 2s + 1)}_{\text{charakteristisches Polynom}} Y(s) = \underbrace{\frac{1}{s - \mu}}_{\text{rechte Seite}} .$$

Vor  $Y(s)$  steht als Faktor immer das charakteristische Polynom, hier  $p(s) = s^2 + 2s + 1$ . Das gilt allgemein:  $p(\partial) y(t) \circ \longrightarrow \bullet p(s) Y(s) + \dots$ , im Allgemeinen steuern Anfangswerte weitere Terme bei; zur Vereinfachung wurde hier das AWP  $y(0) = y'(0) = 0$  vorgegeben.

Die Anfangswerte werden schon im ersten Schritt in die  $\mathcal{L}$ -Transformation eingearbeitet und somit nur die spezielle Lösung des AWP angesteuert. Die allgemeine Lösung der Gleichung  $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = e^{\mu t}$  wird hier nicht benötigt (und auch nicht nebenbei gefunden).

Im Fall  $\mu = -1$  liegt Resonanz vor; die  $\mathcal{L}$ -Transformation verarbeitet das automatisch.

(b) Auflösung der Hilfsgleichung nach  $Y$  und Partialbruchzerlegung:

$$Y(s) = \frac{1}{(s - \mu)(s + 1)^2} = \begin{cases} \frac{1}{4(s-1)} - \frac{1}{2(s+1)} - \frac{1}{4(s+1)^2} & \text{für } \mu = +1, \\ \frac{1}{(s+1)^3} & \text{für } \mu = -1. \end{cases}$$

(c) Rücktransformation von  $Y$  zu  $y$  dank  $\mathcal{L}$ -Tabelle:

$$Y(s) = \frac{1}{(s - \mu)(s + 1)^2} \bullet \longrightarrow \circ y(t) = \begin{cases} \frac{1}{4} e^t - \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{4} t e^{-t} & \text{für } \mu = +1, \\ \frac{1}{2} t^2 e^{-t} & \text{für } \mu = -1. \end{cases}$$

Machen Sie wie immer die Probe: Lösen ist schwer, prüfen ist leicht!

😊 Die allgemeine Lösung (1) betont die lineare / affine Struktur. Dies gibt uns einen guten Überblick des Raumes *aller* Lösungen.

😊 Aus (1) erhalten wir insb. die Greensche Fundamentallösung. Die Greensche Lösungsformel (2) funktioniert für *alle* rechten Seiten.

😊 Die Laplace-Transformation (3) behandelt alle Fälle einheitlich. Eventuelle Resonanz zeigt sich in der Partialbruchzerlegung (3b,c).

Die Methode der Laplace-Transformation ist dann effizient, wenn man jeden der drei Schritte (a-c) schnell und sicher ausführen kann. Hierzu nützen Tabellen, vor allem aber *viel Erfahrung!*

**Aufgabe:** Lösen Sie die Differentialgleichung

$$u'''(t) - u(t) = 1 \quad \text{mit} \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = u''(0) = 1$$

(1) allgemein und dann das AWP, (2) mit Laplace–Transformation.  
Vergleich: Welcher Rechenweg scheint Ihnen am geschicktesten?

**Lösung:** (1) Das char. Polynom der Gleichung  $p(\partial) u = 0$  ist

$$p(s) = s^3 - 1 = (s - 1)(s^2 + s + 1) = (s - 1)(s - \omega)(s - \bar{\omega})$$

$$\omega = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3} = e^{2\pi i/3}, \quad \bar{\omega} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3} = e^{4\pi i/3}$$

Nullstellen:  $1, \omega, \bar{\omega}$ . Fundamentallösungen:  $e^t, e^{\omega t}, e^{\bar{\omega} t}$ .

(a) Wir lösen  $p(\partial) u(t) = e^{\mu t}$  für  $\mu = 0$ : keine Nullstelle,  $p(0) = -1$ .

Partikulärlösung:  $u_b(t) = e^{0t}/(-1) = -1$ . Probe: klar!

Die allgemeine Lösung der DG  $u'''(t) - u(t) = 1$  ist demnach:

$$u(t) = c_1 e^t + c_2 e^{\omega t} + c_3 e^{\bar{\omega} t} - 1$$

(b) Die Anfangsdaten bestimmen eindeutig die freien Konstanten:

$$\left. \begin{array}{l} u(0) = c_1 + c_2 + c_3 - 1 \quad \stackrel{!}{=} 0 \\ u'(0) = c_1 + \omega c_2 + \bar{\omega} c_3 \quad \stackrel{!}{=} 1 \\ u''(0) = c_1 + \bar{\omega} c_2 + \omega c_3 \quad \stackrel{!}{=} 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

Probe! Die gesuchte Lösung des AWP ist also

$$u(t) = e^t - 1.$$

Wir machen die Probe: Lösen ist schwer, prüfen ist leicht!

$$\begin{aligned} u(t) &= e^t - 1, & u'(t) &= u''(t) = u'''(t) = e^t \\ u'''(t) - u(t) &= 1, & u(0) &= 0, \quad u'(0) = u''(0) = 1 \end{aligned}$$

😊 Die Funktion  $u$  erfüllt die Differentialgleichung mit Anfangsdaten!

Dieses Lösungsschema hat nur zwei rechenintensive Schritte: Wir müssen (a) die Nullstellen des charakteristischen Polynoms finden und (b) die freien Koeffizienten durch ein lineares Gleichungssystem bestimmen. Das ist mitunter mühsam aber letztlich Routinearbeit. Für Gleichungen kleiner Ordnung  $n = 2, 3, 4, \dots$  gelingt es jedenfalls leicht.

**Lösung:** (2) Wir Laplace-transformieren dank  $\mathcal{L}$ -Tabelle:

$$\begin{aligned}
 u(t) & \circ \text{---} \bullet & U(s) & & = U(s) \\
 u'(t) & \circ \text{---} \bullet & sU(s) - u(0) & & = sU(s) \\
 u''(t) & \circ \text{---} \bullet & s^2U(s) - su(0) - u'(0) & & = s^2U(s) - 1 \\
 u'''(t) & \circ \text{---} \bullet & s^3U(s) - s^2u(0) - su'(0) - u''(0) & & = s^3U(s) - s - 1 \\
 1 & \circ \text{---} \bullet & s^{-1} & & 
 \end{aligned}$$

(a) Dank Linearität transformieren wir die DG zur Hilfsgleichung

$$\begin{aligned}
 s^3U(s) - s - 1 - U(s) & = s^{-1} \\
 \underbrace{(s^3 - 1)U(s)}_{\text{char. Polynom}} - \underbrace{(s + 1)}_{\text{Anfangsdaten}} & = \underbrace{s^{-1}}_{\text{rechte Seite}}
 \end{aligned}$$

Vor  $U(s)$  steht als Faktor immer das charakteristische Polynom, hier also  $p(s) = s^3 - 1$ , denn  $p(\partial)y(t) \circ \text{---} \bullet p(s)Y(s) + \dots$ . Die Anfangswerte steuern die weiteren Terme bei.

Die Anfangswerte werden schon im ersten Schritt in die  $\mathcal{L}$ -Transformation eingearbeitet und somit nur die spezielle Lösung des AWP angesteuert. Die allgemeine Lösung der Gleichung  $u'''(t) - u(t) = 1$  wird hier nicht benötigt (und auch nicht nebenbei gefunden).

(b) Auflösung der Hilfsgleichung nach  $U$ :

$$\begin{aligned}
 (s^3 - 1)U(s) & = s + 1 + s^{-1} \\
 U(s) & = \frac{s + 1 + s^{-1}}{s^3 - 1} = \frac{s^2 + s + 1}{s(s - 1)(s^2 + s + 1)} = \frac{1}{s(s - 1)}
 \end{aligned}$$

(c) Rücktransformation von  $U$  zu  $u$  dank  $\mathcal{L}$ -Tabelle:

$$U(s) = \frac{1}{s(s - 1)} \stackrel{\text{PBZ}}{=} \frac{1}{s - 1} - \frac{1}{s} \quad \bullet \text{---} \circ \quad e^t - 1 = u(t)$$

😊 Wir machen die Probe wie in (1). Lösen ist schwer, prüfen ist leicht!

Die Transformation entnimmt man am besten einer der umfangreichen  $\mathcal{L}$ -Tabellen.

Dies ist besonders einfach für spezielle rechte Seiten wie  $t^n e^{at} \circ \text{---} \bullet n!/(s - a)^{n+1}$  etc.

Zur Rücktransformation nutzen wir die Partialbruchzerlegung. Das ist Routinearbeit.

Damit bringen wir unsere Hilfslösung  $U(s)$  in eine möglichst einfache Form, deren Bestandteile wir in der  $\mathcal{L}$ -Tabelle finden und so bequem zur gesuchten Lösung  $u(t)$  zurücktransformieren.

Die Methode der Laplace-Transformation ist dann effizient, wenn man jeden der drei Schritte (a-c) schnell und sicher ausführen kann. Hierzu nützen Tabellen, vor allem aber *viel Erfahrung!*



**Aufgabe:** Lösen Sie die Differentialgleichung

$$u''(t) + 2u'(t) + 10u(t) = 2 \cos(t) + 9 \sin(t) \quad \text{mit } u(0) = 0, \quad u'(0) = 4.$$

(1) allgemein und dann das AWP, (2) mit Laplace–Transformation.

Vergleich: Welcher Rechenweg scheint Ihnen am geschicktesten?

**Lösung:** (1) Das char. Polynom der Gleichung  $p(\partial) u = 0$  ist

$$p(s) = s^2 + 2s + 10 = (s + 1 + 3i)(s + 1 - 3i)$$

Komplexe Fundamentallösungen:  $e^{(-1-3i)t}$ ,  $e^{(-1+3i)t}$ .

Reelle Fundamentallösungen:  $e^{-t} \cos(3t)$ ,  $e^{-t} \sin(3t)$ .

(a) Wir lösen  $p(\partial) z(t) = (2 - 9i) e^{it}$ . Es gilt  $p(i) = 9 + 2i$ , also

$$z(t) = \frac{2 - 9i}{9 + 2i} e^{it} = -i e^{it} = \sin(t) - i \cos(t).$$

Der Realteil  $\sin(t)$  löst unsere Differentialgleichung. Allgemein:

$$\begin{aligned} u(t) &= \sin(t) + c_1 e^{(-1-3i)t} + c_2 e^{(-1+3i)t} \\ &= \sin(t) + \alpha_1 e^{-t} \cos(3t) + \alpha_2 e^{-t} \sin(3t) \end{aligned}$$

(b) Die Anfangsdaten bestimmen eindeutig die freien Konstanten:

$$\left. \begin{aligned} u(0) &= \alpha_1 && \stackrel{!}{=} 0 \\ u'(0) &= 1 - \alpha_1 + 3\alpha_2 && \stackrel{!}{=} 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

Probe! Die gesuchte Lösung des AWP ist also

$$u(t) = \sin(t) + e^{-t} \sin(3t).$$

Wir machen die Probe: Lösen ist schwer, prüfen ist leicht!

$$\begin{aligned} u(t) &= + \sin(t) + e^{-t} \sin(3t) \\ u'(t) &= + \cos(t) - e^{-t} \sin(3t) + 3 e^{-t} \cos(3t) \\ u''(t) &= - \sin(t) - 8 e^{-t} \sin(3t) - 6 e^{-t} \cos(3t) \end{aligned}$$

😊 Die Funktion  $u$  erfüllt die Differentialgleichung mit Anfangsdaten!

Bei diesem Lösungsweg müssen wir (a) die Nullstellen des charakteristischen Polynoms finden und (b) die freien Koeffizienten durch ein lineares Gleichungssystem bestimmen. Das ist mitunter mühsam aber letztlich Routinearbeit. Für Gleichungen kleiner Ordnung gelingt es leicht.

**Lösung:** (2) Wir Laplace-transformieren dank  $\mathcal{L}$ -Tabelle:

$$\begin{array}{llll}
 u(t) & \circ \text{---} \bullet & U(s) & = U(s) \\
 u'(t) & \circ \text{---} \bullet & sU(s) - u(0) & = sU(s) \\
 u''(t) & \circ \text{---} \bullet & s^2U(s) - su(0) - u'(0) & = s^2U(s) - 4 \\
 \cos(\omega t) & \circ \text{---} \bullet & \frac{s}{s^2 + \omega^2} & \sin(\omega t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}
 \end{array}$$

(a) Dank Linearität transformieren wir die DG zur Hilfgleichung:

$$\begin{array}{l}
 s^2U(s) - 4 + 2sU(s) + 10U(s) = \frac{2s}{s^2 + 1} + \frac{9}{s^2 + 1} \\
 \underbrace{(s^2 + 2s + 10)}_{\text{char. Polynom}} U(s) - \underbrace{4}_{\text{Anfangsdaten}} = \underbrace{\frac{2s + 9}{s^2 + 1}}_{\text{rechte Seite}}
 \end{array}$$

Vor  $U(s)$  steht als Faktor immer das charakteristische Polynom, hier also  $p(s) = s^2 + 1$ , denn  $p(\partial)y(t) \circ \text{---} \bullet p(s)Y(s) + \dots$ . Die Anfangswerte steuern die weiteren Terme bei.

(b) Auflösung der Hilfgleichung nach  $U$  und Partialbruchzerlegung:

$$\begin{array}{l}
 (s^2 + 2s + 10)U(s) = 4 + \frac{2s + 9}{s^2 + 1} \\
 U(s) = \frac{4}{s^2 + 2s + 10} + \frac{2s + 9}{(s^2 + 1)(s^2 + 2s + 10)} \\
 \stackrel{\text{PBZ}}{=} \frac{4}{s^2 + 2s + 10} + \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{s^2 + 2s + 10}
 \end{array}$$

(c) Rücktransformation von  $U$  zu  $u$  dank  $\mathcal{L}$ -Tabelle:

$$U(s) = \frac{3}{(s + 1)^2 + 3^2} + \frac{1}{s^2 + 1} \quad \bullet \text{---} \circ \quad e^{-t} \sin(3t) + \sin(t) = u(t)$$

😊 Wir machen die Probe wie in (1). Lösen ist schwer, prüfen ist leicht!

Die Transformation entnimmt man am besten einer der umfangreichen  $\mathcal{L}$ -Tabellen. Dies ist einfach für spezielle rechte Seiten wie  $e^{-at} \sin(\omega t) \circ \text{---} \bullet \omega / ((s + a)^2 + \omega^2)$ . Zur Rücktransformation nutzen wir die Partialbruchzerlegung. Das ist Routinearbeit.