

Kapitel L

Laplace-Transformation

Die Laplace-Transformation verwandelt Anfangswertprobleme für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten in algebraische Gleichungen. Sie erfreut sich besonders bei Physikern und Ingenieuren einer großen Beliebtheit.

Harro Heuser (1927–2011)

I am, and will ever be, a white-socks, pocket protector, nerdy engineer, born under the second law of thermodynamics, steeped in steam tables, in love with free-body diagrams, transformed by Laplace and propelled by compressible flow.

Neil Armstrong (1930–2012)

Vollversion michael-eisermann.de/lehre/HM3 26.02.2025

Inhalt dieses Kapitels L

L002

- Die Laplace-Transformation
 - Definition der Laplace-Transformation
 - Linearität und Ableitungsregel
 - Streckung, Dämpfung, Verschiebung
- Anwendung auf Differentialgleichungen
 - Tabelle einfacher Laplace-Transformierter
 - Lösung von Differentialgleichungen
 - Partialbruchzerlegung und Residuen
- Weitere Eigenschaften und Anwendungen
 - Rücktransformation und Injektivität
 - Faltung und Integralregel
 - Greensche Fundamentallösung
- Fazit: Laplace-Transformation
 - Vergleich von Laplace und Fourier
 - Anwendung in der Systemtheorie

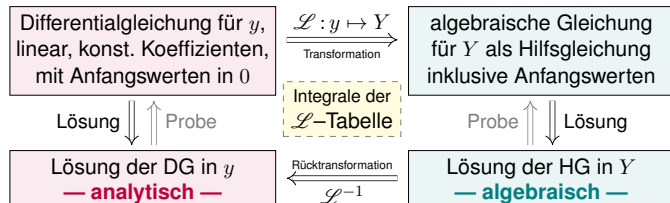
Motivation und Zielsetzung

L003 Überblick

Die Laplace-Transformierte von $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$ ist die Funktion

$$F(s) := \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad \text{für } s \in \mathbb{C}_{\text{Re} > \sigma}.$$

Laplace-Transformation kann lineare Differentialgleichungen lösen:



- Die Methode der Laplace-Transformation ist dann effizient, wenn Sie jeden der drei Schritte effizient ausführen können.
- Ausführliche \mathcal{L} -Tabellen finden Sie in Lehrbüchern, Formelsammlungen und Computer-Algebra-Systemen.

Vorgehensweise

L004 Überblick

Differentialgleichungen lassen sich mittels Integraltransformationen in algebraische Gleichungen verwandeln und so manchmal lösen. Zu dieser formalen „Übersetzung“ dient die Laplace-Transformation. Ihr Vorteil ist eine Reihe einfacher Rechenregeln (die „Grammatik“ mit umfangreichen Tabellen von \mathcal{L} -Integralen (sozusagen die „Vokabeln“). Diese Formalisierung erübrigt praktisch jede Integralberechnung, zumindest in gutartigen Fällen und mit hinreichender Erfahrung. Theorie und Anwendung der \mathcal{L} -Transformation sind ein weites Feld. Sie wird in der Regelungstechnik und Kybernetik ausgiebig genutzt. Ich will daher eine erste Idee dieser vielseitigen Methode vermitteln, sodass Sie sich ein Bild machen und informiert entscheiden können. Hierzu werde ich die nötigen Grundlagen erklären, damit Sie sogleich Anwendungen auf Differentialgleichungen verstehen und nutzen können. Wenn Sie dieses Thema vertiefen möchten, empfehlen sich die Klassiker von Gustav Doetsch: *Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*, 3. Auflage 1976, und *Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation*, 5. Auflage 1985.

Erste Beispiele zur Laplace-Transformation

L101 Beispiel

Aufgabe: Laplace-transformieren Sie $f(t) = e^{at}$ mit $a = \sigma + i\omega \in \mathbb{C}$.

Lösung: Wir setzen die Definition ein und rechnen es einfach aus:

$$F(s) \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{t=0}^{\infty} e^{(a-s)t} dt \stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} \left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \right]_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{s-a}$$

Das Integral existiert nur für $\text{Re}(s) > \sigma$. Wir erhalten folgende Tabelle:

| | | |
|--|--|-----------------------------------|
| $f(t) \circ \bullet F(s)$ | | für $\text{Re}(s) > \sigma$ |
| $1 \circ \bullet \frac{1}{s}$ | | für $\text{Re}(s) > 0$ |
| $e^{at} \circ \bullet \frac{1}{s-a}$ | | für $\text{Re}(s) > \text{Re}(a)$ |
| $e^{i\omega t} \circ \bullet \frac{1}{s-i\omega} = \frac{s+i\omega}{s^2+\omega^2}$ | | für $\text{Re}(s) > 0$ |
| $\cos(\omega t) \circ \bullet \frac{s}{s^2+\omega^2}$ (Realteil) | | für $\text{Re}(s) > 0$ |
| $\sin(\omega t) \circ \bullet \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ (Imaginärteil) | | für $\text{Re}(s) > 0$ |

Erste Beispiele zur Laplace-Transformation

L102 Beispiel

Aufgabe: Laplace-transformieren Sie $f(t) = t^n$ für $n \geq 0$ mit Hilfe der Gamma-Funktion [B313]. Was erhalten Sie für $n \in \mathbb{N}$? Für $n = 1/2$?

Lösung: Für $\text{Re}(s) > 0$ setzen wir die Definition ein und rechnen's aus:

$$\begin{aligned} f(t) = t^n \quad \circ \bullet \quad F(s) &= \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} t^n dt \\ &= \frac{1}{s^n} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} (st)^n dt = \frac{1}{s^{n+1}} \int_{x=0}^{\infty} e^{-x} x^n dx \\ &= \frac{1}{s^{n+1}} \Gamma(n+1) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Aus $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ folgt $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$ und somit $\mathcal{L}(\sqrt{t}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} s^{-3/2}$.

Wir substituieren $x = st$, also $dx = s dt$ bzw. $dt = s^{-1} dx$. Die Werte $\Gamma(n+1) = n!$ haben wir bereits berechnet, durch wiederholte partielle Integration [B316] und durch Ableiten unterm Integral [B417]. Einen alternativen Rechenweg ohne Gamma-Funktion nutzen wir auf Seite L113. Aus dem Gaußschen Integral [C222] folgt $\Gamma(\frac{1}{2})$ und rekursiv die halbzahlgigen Werte $\Gamma(\frac{3}{2})$ usw. Die Gamma-Funktion ist eine der Grundfunktionen der Analysis und tritt in erstaunlich vielen verschiedenen Rechnungen auf. Es hilft daher, wenn Sie sie erkennen und nutzen lernen. Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, Bemerkung 3.7.13.

Konvergenz des Laplace-Integrals

L103 Ausführung

Manche Funktionen lassen sich nicht \mathcal{L} -transformieren! Das ist zwar bedauerlich, aber leider nicht zu ändern.

- Aufgabe:** (1) Lässt sich $f(t) = 1/t$ laplace-transformieren?
- (2) Lässt sich $g(t) = \exp(t^2)$ laplace-transformieren?

Lösung: Wir setzen die Definition ein und rechnen es aus:

$$F(s) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_{t=0}^{\infty} \frac{e^{-st}}{t} dt = +\infty$$

$$G(s) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} g(t) dt = \int_{t=0}^{\infty} e^{t^2-st} dt = +\infty$$

- Diese Integrale konvergieren für keinen Parameterwert $s \in \mathbb{R}$!
- (1) Die Polstelle von $f(t) = 1/t$ in $t = 0$ verhindert die Konvergenz.
- (2) Die Funktion $g(t) = \exp(t^2)$ wächst für $t \rightarrow \infty$ super-exponentiell.
- Die Laplace-Transformation gelingt nur für gutartige Funktionen. Glücklicherweise sind diese ausreichend für viele Anwendungen.

Konvergenz des Laplace-Integrals

L104 Ausführung

Wir setzen im Folgenden voraus, dass die zu transformierende Funktion $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$ höchstens exponentiell wächst. Ausführlich bedeutet das:

$$|f(t)| \leq c e^{\sigma t} \quad \text{für alle } t \geq 0 \text{ und geeignete Konstanten } c, \sigma \in \mathbb{R}.$$

- Aufgabe:** (1) Das Laplace-Integral konvergiert für $s \in \mathbb{C}$ mit $\text{Re}(s) > \sigma$.
- (2) Zudem gilt $|F(s)| \leq c/(\text{Re}(s) - \sigma)$, also $F(s) \rightarrow 0$ für $\text{Re}(s) \rightarrow +\infty$.

Lösung: (1) Wir wenden das Majorantenkriterium an auf die Funktion

$$|f(t) e^{-st}| = |f(t)| e^{-\text{Re}(s)t} \leq c e^{(\sigma - \text{Re}(s))t}.$$

Die Funktion $e^{-\lambda t}$ mit $\lambda = \text{Re}(s) - \sigma$ ist über $[0, \infty[$ integrierbar:

$$\int_{t=0}^{\infty} |f(t) e^{-st}| dt \leq \int_{t=0}^{\infty} c e^{-\lambda t} dt = \frac{c}{\lambda} < \infty.$$

- (2) Hieraus folgt sofort die Betragsabschätzung $|F(s)| \leq c/(\text{Re}(s) - \sigma)$. Insbesondere folgt hieraus das Abklingen $F(s) \rightarrow 0$ für $\text{Re}(s) \rightarrow +\infty$.

Definition L1A: Laplace-Transformation

Das Laplace-Integral von $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$ zum Parameter $s \in \mathbb{C}$ ist

$$F(s) := \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{t=0}^r e^{-st} f(t) dt.$$

Die (Laplace-) Konvergenzabszisse von f ist der kritische Wert

$$\sigma := \inf \{ s \in \mathbb{R} \mid \text{Das obige Laplace-Integral konvergiert} \}.$$

Das schnelle Abklingen des Faktors e^{-st} erzwingt die Konvergenz: Das Integral konvergiert für $\text{Re}(s) > \sigma$ und divergiert für $\text{Re}(s) < \sigma$.

Die Funktion $F: \mathbb{C}_{\text{Re} > \sigma} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt Laplace-Transformierte von f . Schreibweise $F = \mathcal{L}(f)$, kurz $f(t) \circ \bullet F(s)$ oder $F(s) \bullet \circ f(t)$.

Satz L1B: Holomorphie der Laplace-Transformierten

Die Funktion F ist holomorph mit $\partial_s^n F(s) \bullet \circ (-t)^n f(t)$ für $n \in \mathbb{N}$.

Zur Integration setzen wir stillschweigend voraus, dass f auf jedem endlichen Intervall $[0, r]$ integrierbar ist, also $\int_0^r |f(t)| dt < \infty$ erfüllt. Für jeden Parameter $s \in \mathbb{R}$ gilt dann ebenfalls $\int_0^r |e^{-st} f(t)| dt < \infty$. Wir erhalten also ein wohldefiniertes Parameterintegral $\int_0^r e^{-st} f(t) dt$.

Das Laplace-Integral existiert, wenn der obige Grenzwert für $r \rightarrow \infty$ existiert, geschrieben $F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r e^{-st} f(t) dt$. Dies gilt, wenn f höchstens exponentiell wächst, wie oben erklärt.

Der Faktor e^{-st} dämpft den Integranden $f(t)$ exponentiell und erzwingt die Integrierbarkeit für ausreichend großes $\text{Re}(s) > \sigma$. Bei $\sigma = -\infty$ haben wir Konvergenz für alle $s \in \mathbb{C}$, bei $\sigma = +\infty$ für kein $s \in \mathbb{C}$.

Zur Holomorphie prüfen wir geduldig nach, dass wir dank majorisierter Integrierbarkeit die Ableitung nach s unter das Integral ziehen dürfen.

☺ Dank Satz L1B ist F beliebig oft differenzierbar, sogar analytisch: $F: \mathbb{C}_{\text{Re} > \sigma} \rightarrow \mathbb{C}$ lässt sich (lokal) in eine Potenzreihe entwickeln (F3E).

☺ Oft lässt sich die Funktion F holomorph auf die gesamte Ebene \mathbb{C} fortsetzen mit Ausnahme einiger Polstellen, wie in obigen Beispielen.

Die Laplace-Transformierte ist holomorph.

Aufgabe: Wir wollen die Ableitung ∂_s unter das Integral ziehen:

$$F(s) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt \implies F'(s) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} (-t) f(t) dt$$

Warum dürfen wir das hier? Finden Sie eine geeignete Majorante!

☺ Zur Erinnerung und als Vorbild: Die entsprechende Aufgabe für die Gamma-Funktion haben wir auf Seite D417 gelöst.

Wir setzen weiterhin voraus, dass f höchstens exponentiell wächst, das heißt $|f(t)| \leq c e^{\sigma t}$ für alle $t \geq 0$ und geeignete Konstanten $c, \sigma \in \mathbb{R}$.

Lösung: Wir nutzen die Ableitung von Parameterintegralen (D3E). Zunächst ist der Integrand $f(t) e^{-st}$ stetig differenzierbar nach s . Zudem ist die Ableitung $-t f(t) e^{-st}$ majorisiert integrierbar:

Für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\text{Re}(s) \geq \sigma_0 > \sigma$ gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} |-t f(t) e^{-st}| &= |t| \cdot |f(t)| \cdot |e^{-st}| \leq c t e^{\sigma t} e^{-\text{Re}(s)t} \\ &\leq c t e^{\sigma t - \text{Re}(s)t} \leq c t e^{(\sigma - \sigma_0)t} =: h(t). \end{aligned}$$

Die Laplace-Transformierte ist holomorph.

Die Majorante $h(t) = c t e^{-\lambda t}$ mit $\lambda = \sigma_0 - \sigma > 0$ ist unabhängig von s . Sie ist zudem über $[0, \infty[$ integrierbar: Dank partieller Integration gilt

$$\int_{t=0}^r t e^{-\lambda t} dt = \left[-t \lambda^{-1} e^{-\lambda t} - \lambda^{-1} e^{-\lambda t} \right]_{t=0}^r \rightarrow \lambda^{-2} \quad \text{für } r \rightarrow \infty.$$

Demnach ist die Ableitung $-t f(t) e^{-st}$ majorisiert integrierbar.

☺ Alle Voraussetzungen zur Ableitung von Parameterintegralen (D3E) sind also erfüllt, und wir dürfen die Ableitung ∂_s unters Integral ziehen.

☺ Somit ist die Funktion $F: \mathbb{C}_{\text{Re} > \sigma} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph (F2C), denn F ist auf ganz $\mathbb{C}_{\text{Re} > \sigma}$ komplex differenzierbar und die Ableitung F' ist stetig.

☺ Genau dies haben wir in obigen Beispielen bereits beobachtet! Unsere Rechnung zeigt, dass dies kein Zufall ist, sondern immer gilt.

☺ Hier zählt sich unsere solide Vorbereitung aus: Wir können unsere Werkzeuge für holomorphe Funktionen gewinnbringend einsetzen, insbesondere den Residuensatz zur Laplace-Umkehrformel L3A.

Linearität der Laplace-Transformation

Wir suchen weitere hilfreiche Eigenschaften der \mathcal{L} -Transformation

$$f(t) \circ \bullet F(s) = \mathcal{L}(f)(s) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Satz L1C: Linearität

Die Laplace-Transformation ist linear:

$$\mathcal{L}[a f + b g] = a \mathcal{L}(f) + b \mathcal{L}(g)$$

für alle \mathcal{L} -transformierbaren Funktionen $f, g: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$ und $a, b \in \mathbb{C}$.

$$f \circ \bullet F, \quad g \circ \bullet G \implies a f + b g \circ \bullet a F + b G$$

Die Schreibweise $f \circ \bullet F$ bedeutet, dass f transformierbar ist mit \mathcal{L} -Transformierter F , und $g \circ \bullet G$ bedeutet, dass g transformierbar ist mit \mathcal{L} -Transformierter G . Genauer ist $F(s)$ definiert für $\text{Re}(s) > \sigma_f$ und $G(s)$ für $\text{Re}(s) > \sigma_g$. Dann ist ihre Summe $F + G$ zumindest definiert für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\text{Re}(s) > \sigma = \max(\sigma_f, \sigma_g)$, und in diesem Bereich gilt Linearität. Meist unterdrückt man die explizite Nennung des Definitionsbereichs. In den Beispielen haben F und G häufig Polstellen in \mathbb{C} und erinnern uns daran, dass sie nur für große s definiert sind.

Linearität der Laplace-Transformation

Aufgabe: Berechnen Sie geschickt die \mathcal{L} -Transformierten von

$$\cosh(at), \quad \sinh(at), \quad \cos(\omega t), \quad \sin(\omega t).$$

Lösung: \mathcal{L} -Integrale ausrechnen... oder gleich Linearität nutzen:

$$\begin{aligned} f(t) \circ \bullet F(s) & \quad \text{für } s > \sigma \\ e^{at} \circ \bullet \frac{1}{s-a} & \quad \text{für } s > \text{Re}(a) \\ \cosh(at) = \frac{1}{2} [e^{at} + e^{-at}] \circ \bullet \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \right] & = \frac{s}{s^2 - a^2} \\ \sinh(at) = \frac{1}{2} [e^{at} - e^{-at}] \circ \bullet \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a} \right] & = \frac{a}{s^2 - a^2} \\ \cos(\omega t) = \frac{1}{2} [e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}] \circ \bullet \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s-i\omega} + \frac{1}{s+i\omega} \right] & = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \\ \sin(\omega t) = \frac{1}{2i} [e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}] \circ \bullet \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{s-i\omega} - \frac{1}{s+i\omega} \right] & = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Ableitungsregel der Laplace-Transformation

Aufgabe: Berechnen Sie $\mathcal{L}(f')$, $\mathcal{L}(f'')$, $\mathcal{L}(f''')$ usw. aus $\mathcal{L}(f)$.

Lösung: (1) Wir nutzen die Definition und partielle Integration:

$$\begin{aligned} f'(t) \circ \bullet \mathcal{L}(f')(s) &\stackrel{\text{Def}}{=} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} f'(t) dt \quad \text{partielle Integration!} \\ &\stackrel{\text{B1}}{\stackrel{\text{L1}}{=}} \left[e^{-st} f(t) \right]_{t=0}^{\infty} - \int_{t=0}^{\infty} -s e^{-st} f(t) dt \\ &= s \mathcal{L}(f)(s) - f(0) \end{aligned}$$

Hierzu sei f absolut stetig und für $s > \sigma$ gelte $e^{-st} f(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$.

(2) Für die zweite Ableitung $f'' = (f')'$ wenden wir dies erneut an:

$$\begin{aligned} f''(t) \circ \bullet \mathcal{L}(f'')(s) &\stackrel{\text{L1}}{=} s \mathcal{L}(f')(s) - f'(0) \\ &\stackrel{\text{L1}}{=} s [s \mathcal{L}(f)(s) - f(0)] - f'(0) \\ &= s^2 \mathcal{L}(f)(s) - s f(0) - f'(0) \end{aligned}$$

☺ Alle weiteren Ableitungen folgen nun ebenso per Induktion...

Ableitungsregel der Laplace-Transformation

Satz L1D: Ableitungsregel der Laplace-Transformation

Sind $f, f', f'', \dots, f^{(n)}: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und \mathcal{L} -transformierbar, so gilt

$$\begin{aligned} f(t) \circ \bullet F(s) \\ f'(t) \circ \bullet s F(s) - f(0) \\ f''(t) \circ \bullet s^2 F(s) - s f(0) - f'(0) \\ f'''(t) \circ \bullet s^3 F(s) - s^2 f(0) - s f'(0) - f''(0) \\ f^{(4)}(t) \circ \bullet s^4 F(s) - s^3 f(0) - s^2 f'(0) - s f''(0) - f'''(0) \\ \dots \\ f^{(n)}(t) \circ \bullet s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \end{aligned}$$

☺ Die erste Gleichung haben wir oben durch partielle Integration direkt nachgewiesen. Alle weiteren Gleichungen ergeben sich per Induktion durch Anwendung dieser Formel.

☺ Ableitungen nach t werden zu polynomiellen Ausdrücken in s . Hierin liegt der ungemein praktische Nutzen der \mathcal{L} -Transformation für das Lösen von Differentialgleichungen.

Aufgabe: Berechnen Sie dank Ableitungsregel die \mathcal{L} -Transformierte

$$t^n \circ \bullet \frac{n!}{s^{n+1}} \text{ f\u00fcr alle } n \in \mathbb{N}.$$

L\u00f6sung: Wir haben bereits $1 \circ \bullet 1/s$ berechnet. L107

F\u00fcr $f(t) = t^n$ gilt $f^{(n)}(t) = n!$, dank Linearit\u00e4t also

$$f^{(n)}(t) \circ \bullet n!/s.$$

Andererseits liefert die Ableitungsregel f\u00fcr $f(t) \circ \bullet F(s)$ hier

$$f^{(n)}(t) \circ \bullet s^n F(s) \text{ da } f(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0.$$

Wir erhalten $n!/s = s^n F(s)$, also $F(s) = n!/s^{n+1}$, wie behauptet.

☺ Wir k\u00f6nnen das Laplace-Integral auch direkt ausrechnen wie auf Seite L102. Dies f\u00fchrt zu wiederholter partieller Integration f\u00fcr die Gamma-Funktion wie auf Seite B316 erkl\u00e4rt.

☺ Wir haben stattdessen unsere Rechnung gleich so formuliert, dass wir die Ableitungsregel geschickt ausnutzen k\u00f6nnen. Damit wird der Rechenweg wesentlich k\u00fcrzer und leichter!

☺ Auch hier f\u00fchrt Differenzieren der Funktion f auf einfache algebraische Operationen der Bildfunktion $F = \mathcal{L}(f)$. Dies ist die Eigenart und der Nutzen der Laplace-Transformation.

Wir betrachten $f(t) \circ \bullet F(s)$. F\u00fcr die **Ableitung von F** gilt: L107

$$\frac{d}{ds} F(s) = \int_{t=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} e^{-st} f(t) dt = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} (-t) f(t) dt = \mathcal{L}[-t f(t)]$$

D\u00e4mpfung: F\u00fcr alle Exponenten $a \in \mathbb{C}$ gilt

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} e^{at} f(t) dt = \int_{t=0}^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt = F(s-a).$$

Streckung: Substitution mit $\tau = at$ und $a > 0$ liefert

$$\mathcal{L}[f(at)] = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} f(at) dt = \int_{\tau=0}^{\infty} \frac{1}{a} e^{-s\tau/a} f(\tau) d\tau = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right).$$

Verschiebung: Substitution mit $\tau = t-a$ und $a \geq 0$ liefert

$$\mathcal{L}[f(t-a)] = \int_{t=a}^{\infty} e^{-st} f(t-a) dt = \int_{\tau=0}^{\infty} e^{-s\tau-as} f(\tau) d\tau = e^{-as} F(s).$$

⚠ Hierbei gelte $f(t) = 0$ f\u00fcr alle $t \leq 0$, also $f(t-a) = 0$ f\u00fcr alle $t \leq a$. Die Heaviside-Sprungfunktion $u = \mathbf{1}_{[0, \infty[}$ bedeutet Anschalten bei $t = 0$. F\u00fcr unsere Funktion schreiben wir $f(t)u(t)$, verschoben $f(t-a)u(t-a)$.

Satz L1E: Transformationsregeln

Sei $f(t) \circ \bullet F(s)$. F\u00fcr alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die **Multiplikationsregel:**

$$t^n f(t) \circ \bullet (-1)^n F^{(n)}(s)$$

F\u00fcr alle $a \in \mathbb{C}$ gilt die **D\u00e4mpfungsregel:**

$$e^{at} f(t) \circ \bullet F(s-a)$$

F\u00fcr alle $a \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt die **Streckungsregel:**

$$f(at) \circ \bullet \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Sei $f(t) = 0$ f\u00fcr $t \leq 0$. F\u00fcr alle $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt die **Verschiebungsregel:**

$$f(t-a) \circ \bullet e^{-as} F(s)$$

Dies schreibt man zur Betonung $f(t-a) \mathbf{1}_{[0, \infty[}(t-a) \circ \bullet e^{-as} F(s)$.

Aufgabe: Berechnen Sie geschickt die \mathcal{L} -Transformierten von

$$t^n e^{at}, \quad \sin(\omega t) e^{at}, \quad \cos(\omega t) e^{at}.$$

L\u00f6sung: Mit D\u00e4mpfungsregel:

$$\mathcal{L}(t^n e^{at})(s) = \mathcal{L}(t^n)(s-a) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t) e^{at})(s) = \mathcal{L}(\sin \omega t)(s-a) = \frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}(\cos(\omega t) e^{at})(s) = \mathcal{L}(\cos \omega t)(s-a) = \frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$$

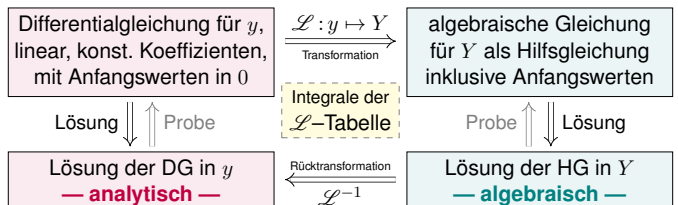
Die erste Formel gewinnen wir auch mit Multiplikationsregel:

$$\mathcal{L}(t^n e^{at})(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \frac{1}{s-a} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

☺ Die \mathcal{L} -Transformation gehorcht einfachen Regeln. Zusammen mit einer Tabelle grundlegender \mathcal{L} -Integrale er\u00fcbigt sich h\u00e4ufig jede Integralsberechnung — zumindest mit hinreichender Erfahrung.

| $f(t)_{t \geq 0}$ | $F(s)_{\operatorname{Re}(s) > \sigma}$ | $f(t)_{t \geq 0}$ | $F(s) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ |
|-------------------|--|-------------------|--|
| 1 | $\frac{1}{s}$ | $af(t) + bg(t)$ | $aF(s) + bG(s)$ |
| e^{at} | $\frac{1}{s-a}$ | $f'(t)$ | $sF(s) - f(0)$ |
| t^n | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ | $f''(t)$ | $s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$ |
| $t^n e^{at}$ | $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ | $f^{(n)}(t)$ | $s^n F(s) - \dots - f^{(n-1)}(0)$ |
| $\sin(\omega t)$ | $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ | $t^n f(t)$ | $(-1)^n F^{(n)}(s)$ |
| $\cos(\omega t)$ | $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$ | $e^{at} f(t)$ | $F(s-a)$ |
| $\sinh(at)$ | $\frac{a}{s^2 - a^2}$ | $f(at), a > 0$ | $\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$ |
| $\cosh(at)$ | $\frac{s}{s^2 - a^2}$ | $f(t-a)u(t-a)$ | $e^{-as} F(s)$ |

Laplace-Transformation kann lineare Differentialgleichungen l\u00f6sen:



☺ Die Laplace-Transformation verwandelt etwas kompliziertes in etwas einfaches, n\u00e4mlich Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen.

Die L\u00f6sung der Hilfsgleichung ist oft einfach und beruht haupts\u00e4chlich auf Bruchrechnung: Partialbruchzerlegung der berechneten Funktionen.

☺ Die Methode der Laplace-Transformation ist dann effizient, wenn Sie jeden der drei Schritte effizient ausf\u00fchren k\u00f6nnen.

☺ Ausf\u00fchrliche \mathcal{L} -Tabellen finden Sie in Lehrb\u00fcchern, Formelsammlungen und Computer-Algebra-Systemen.

Aufgabe: L\u00f6sen Sie durch \mathcal{L} -Transformation die Differentialgleichung

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 2e^{-t} \text{ mit } y(0) = -1, y'(0) = 1.$$

L\u00f6sung: (1) Wir Laplace-transformieren dank \mathcal{L} -Tabelle:

$$\begin{aligned} y(t) &\circ \bullet Y(s) &&= Y(s) \\ y'(t) &\circ \bullet sY(s) - y(0) &&= sY(s) + 1 \\ y''(t) &\circ \bullet s^2 Y(s) - sy'(0) - y''(0) &&= s^2 Y(s) + s - 1 \\ e^{-t} &\circ \bullet 1/(s+1) \end{aligned}$$

Dank Linearit\u00e4t transformieren wir die DG zur **Hilfsgleichung**

$$(s^2 + 2s + 1) Y(s) + s + 1 = \frac{2}{s+1}$$

char. Polynom
Anfangsdaten
rechte Seite

Die Anfangswerte werden schon im ersten Schritt in die \mathcal{L} -Transformation eingearbeitet und somit nur die spezielle L\u00f6sung des AWP angestrebt. Die allgemeine L\u00f6sung der Gleichung $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 2e^{-t}$ wird hier nicht ben\u00f6tigt (und auch nicht nebenbei gefunden). In diesem Beispiel liegt Resonanz vor; die \mathcal{L} -Transformation verarbeitet das automatisch.

(2) **Aufl\u00f6sung** der Hilfsgleichung nach Y und Partialbruchzerlegung:

$$Y(s) = \frac{\frac{2}{s+1} - (s+1)}{s^2 + 2s + 1} = \frac{2 - (s+1)^2}{(s+1)^3} \stackrel{\text{PBZ}}{=} \frac{2}{(s+1)^3} - \frac{1}{s+1}$$

(3) **R\u00fccktransformation** von Y zu y dank \mathcal{L} -Tabelle:

$$Y(s) = \frac{2}{(s+1)^3} - \frac{1}{s+1} \circ \bullet t^2 e^{-t} - e^{-t} = y(t)$$

(4) Wir machen die **Probe**: L\u00f6sen ist schwer, pr\u00fcfen ist leicht!

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= (t^2 - 1)e^{-t} \\ y'(t) &= (-t^2 + 2t + 1)e^{-t} \\ y''(t) &= (t^2 - 4t + 1)e^{-t} \end{aligned} \right\} \implies y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 2e^{-t}$$

☺ Die Funktion y erf\u00fcllt die Differentialgleichung mit Anfangsdaten!

Die Methode der Laplace-Transformation ist effizient, wenn Sie jeden der drei Schritte (1–3) schnell und sicher ausf\u00fchren k\u00f6nnen. Hierzu n\u00fctzen Tabellen, vor allem aber *viel Erfahrung!* Daher zahlt sich die \mathcal{L} -Methode vor allem bei l\u00e4ngerm Gebrauch aus; bei nur gelegentlicher Anwendung zeigt sie sich dem Amateur eher abweisend. Das m\u00fcssen Sie selbst ausprobieren. Diese Differentialgleichung l\u00f6sen wir sp\u00e4ter erneut mit anderen Methoden, siehe Seite N517.

Partialbruchzerlegung und Residuen L205
Ausführung

Sei $q(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ns^n \in \mathbb{C}[s]$ ein Polynom vom Grad n . Wir zerlegen q in Linearfaktoren: Dank Fundamentalsatz der Algebra (F3c) existieren n komplexe Nullstellen $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, sodass gilt:

$$q(s) = a_n(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_n) = a_n \prod_{k=1}^n (s - z_k)$$

Wir betrachten eine rationale Funktion p/q mit Zählerpolynom $p \in \mathbb{C}[s]$. Nach Polynomdivision können und werden wir $\deg p < \deg q$ annehmen.

Einfacher Fall: Angenommen q hat nur einfache Nullstellen, d.h. $z_i \neq z_j$ für $i \neq j$. Dann hat die Partialbruchzerlegung von p/q folgende Form:

$$\frac{p(s)}{q(s)} = \frac{c_1}{s - z_1} + \frac{c_2}{s - z_2} + \dots + \frac{c_n}{s - z_n} = \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{s - z_k}$$

Wir wollen die Koeffizienten $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ bestimmen. Die primitive Methode besteht darin, die Summe auf den gemeinsamen Nenner $q(s)$ zu bringen und dann den Zähler mit $p(s)$ zu vergleichen. Das führt auf ein lineares Gleichungssystem. ... Noch effizienter geht es wie folgt.

Partialbruchzerlegung und Residuen L206
Ausführung

Multiplikation mit dem k -ten Linearfaktor $(s - z_k)$ ergibt:

$$\frac{p(s)(s - z_k)}{q(s)} = c_k + \sum_{j \neq k} c_j \frac{s - z_k}{s - z_j}$$

Für $s \rightarrow z_k$ geht die rechte Seite gegen c_k . Für die linke Seite gilt:

$$\frac{p(s)(s - z_k)}{q(s)} = \frac{p(s)}{\frac{q(s) - q(z_k)}{s - z_k}} \rightarrow \frac{p(z_k)}{q'(z_k)}$$

Für die Koeffizienten c_1, c_2, \dots, c_n erhalten wir so die praktische Formel

$$c_k = \frac{p(z_k)}{q'(z_k)}$$

Ausgeschrieben erhalten wir die ersehnte Partialbruchzerlegung:

$$\frac{p(s)}{q(s)} = \sum_{k=1}^n \frac{p(z_k)}{q'(z_k)} \frac{1}{s - z_k}, \quad \text{speziell} \quad \frac{1}{q(s)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{q'(z_k)} \frac{1}{s - z_k}$$

☺ Wir nutzen diesen Trick für Residuen einfacher Polstellen (F4B)

Partialbruchzerlegung und Residuen L207
Ausführung

Allgemeiner Fall: Wir sammeln mehrfache Faktoren von q gemäß

$$q(s) = a_n(s - z_1)^{n_1}(s - z_2)^{n_2} \cdots (s - z_\ell)^{n_\ell}$$

mit Nullstellen $z_i \neq z_j$ für $i \neq j$ und Vielfachheiten $n_1, n_2, \dots, n_\ell \geq 1$. (Für den Gesamtgrad gilt weiterhin $\deg(q) = n = n_1 + n_2 + \dots + n_\ell$.) Dann hat die Partialbruchzerlegung von p/q die allgemeine Form:

$$\frac{p(s)}{q(s)} = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{\nu=1}^{n_k} \frac{c_{k,\nu}}{(s - z_k)^\nu}$$

☺ Für jedes $k = 1, \dots, \ell$ ist die Summe $H_k(s) = \sum_{\nu=1}^{n_k} c_{k,\nu}(s - z_k)^{-\nu}$ der **Hauptteil** der Laurent-Reihe von p/q im Entwicklungspunkt z_k , und entsprechend ist $N_k(s) = \sum_{j \neq k} H_j(s)$ dann ihr **Nebenteil** (F20). (Für die reelle Zerlegung fasst man komplex konjugierte zusammen.)

Wir wollen wie zuvor die Koeffizienten $c_{k,\nu} \in \mathbb{C}$ bestimmen. Auch hier ist die primitive Methode des Koeffizientenvergleichs immer möglich, doch das lineare Gleichungssystem ist bei höherem Grad meist umständlich. Das folgende Verfahren ist etwas raffinierter und meist effizienter.

Partialbruchzerlegung und Residuen L208
Ausführung

Multiplikation mit dem k -ten Faktor $(s - z_k)^{n_k}$ ergibt:

$$\frac{p(s)(s - z_k)^{n_k}}{q(s)} = c_{k,1}(s - z_k)^{n_k-1} + c_{k,2}(s - z_k)^{n_k-2} + \dots + c_{k,n_k} + N_k(s)(s - z_k)^{n_k}$$

Der Nenner $r_k(s) = q(s)/(s - z_k)^{n_k}$ entsteht aus $q(s)$ durch Kürzung. Die Koeffizienten $c_{k,1}, c_{k,2}, \dots, c_{k,n_k}$ erhalten wir wieder durch Ableiten:

$$c_{k,\nu} = \lim_{s \rightarrow z_k} \frac{1}{(n_k - \nu)!} \left(\frac{d}{ds} \right)^{n_k - \nu} \left[\frac{p(s)}{q(s)/(s - z_k)^{n_k}} \right]$$

☺ Speziell für eine einfache Polstelle ($n_k = 1$) gilt wie zuvor:

$$c_k = c_{k,1} = \frac{q(z_k)}{r_k(z_k)} = \frac{p(z_k)}{q'(z_k)}$$

☺ Wir nutzen diesen Trick für Residuen mehrfacher Polstellen (F4c):

$$\text{res}_{z_0}(f) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{n-1} [(z - z_0)^n f(z)]$$

☺ Der Residuensatz ist allgemeiner; über rationale Funktionen hinaus gilt er sogar für alle holomorphen Funktionen mit isolierten Polstellen.

Umkehrformel zur Laplace-Transformation L301
Ausführung

Satz L3A: Umkehrformel zur Laplace-Transformation

Zu $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$ betrachten wir die Laplace-Transformierte:

$$f \circ \bullet \rightarrow F \quad \text{mit} \quad F(s) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad \text{Re}(s) > \sigma$$

Aus $F: \mathbb{C}_{\text{Re} > \sigma} \rightarrow \mathbb{C}$ lässt sich f rekonstruieren, denn es gilt:

$$F \bullet \rightarrow f \quad \text{mit} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{(s+ix)t} F(s+ix) dx$$

für $\text{Re}(s) > \sigma$ und fast alle $t \geq 0$, und immer wo f stetig diff'bar ist. Insbesondere ist \mathcal{L} injektiv, das heißt, aus $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$ folgt $f = g$. (Wir identifizieren Funktionen, die nur auf einer Nullmenge differieren.)

Residuen: Hat F in \mathbb{C} nur isolierte Singularitäten und klingt ab, so gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{(s+ix)t} F(s+ix) dx = \sum_{z_0 \in \mathbb{C}} \text{res}_{z=z_0} [e^{zt} F(z)]$$

Umkehrformel zur Laplace-Transformation L302
Ausführung

☺ Die Umkehrformel zeigt, dass die Rücktransformation prinzipiell immer möglich ist. Zur praktischen Berechnung ist es meist am effizientesten, die \mathcal{L} -Tabelle rückwärts zu lesen.

Das Fourier-Integral dieser Umkehrformel ist recht raffiniert und bedarf einiger Erläuterungen. (Eine Diskussion findet sich in Doetschs Einführung §24, §27.) Die Umkehrformel gilt in allen Punkten $t \geq 0$, in denen f stetig diff'bar ist. Sie gilt auch in Sprungstellen, in denen f links- und rechtsseitige Ableitungen besitzt, wenn wir gemäß $f(t) = \frac{1}{2}[f(t+) + f(t-)]$ sprungnormieren.

Ganz ohne Voraussetzungen gilt sie natürlich nicht: Wir können f auf einer Nullmenge ändern, ohne die Integrale zu verändern. Zur Vereinfachung betrachten wir Funktionen als gleich, wenn sie sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden; dann gilt die Umkehrformel für fast alle $t \geq 0$.

Die Laplace-Transformierte $F: \mathbb{C}_{\text{Re} > \sigma} \rightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph. Eventuelle Singularitäten der Fortsetzung $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ können daher nur für $s \in \mathbb{C}$ mit $\text{Re}(s) \leq \sigma$ vorliegen. Das Integral

$$f(t) = \frac{e^{st}}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{ixt} F(s+ix) dx = \sum_{z_0 \in \mathbb{C}} \text{res}_{z=z_0} [e^{zt} F(z)]$$

können wir bereits als Fourier-Rücktransformation behandeln. Dank Residuensatz sind wir sogar in der glücklichen Lage, einfache Integrale dieser Bauart explizit ausrechnen zu können.

Wir nehmen an, dass F auf ganz \mathbb{C} fortgesetzt werden kann bis auf isolierte Singularitäten. Als Integrationsweg wählen wir dann das Segment von $s - ir$ nach $s + ir$ gefolgt von dem linken Halbkreis von $s + ir$ zurück nach $s - ir$. Wenn das Wegintegral von F über solche Halbkreise für $r \rightarrow \infty$ verschwindet, dann gilt die genannte Residuenformel.

Beispiel zur Umkehrformel L303
Ausführung

Aufgabe: Mittels Umkehrformel bestimme man die Urbildfunktion f zu

$$F(s) = \frac{1}{s-a} \quad \text{für} \quad \text{Re}(s) > \text{Re}(a), \quad a \in \mathbb{C}$$

Lösung: Laut \mathcal{L} -Umkehrformel berechnen wir das Integral

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{(s+ix)t} F(s+ix) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{e^{(s+ix)t}}{s-a+ix} dx$$

Wir wenden den Residuensatz an. Einzige Polstelle ist $z_0 = i(s-a)$:

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{e^{(s+ix)t}}{s-a+ix} dx = 2\pi i \text{res}_{z=z_0} \left[\frac{e^{(s+iz)t}}{s-a+iz} \right]$$

$$= 2\pi i \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{e^{(s+iz)t}}{i(z - z_0)} = 2\pi e^{at}$$

Wir erhalten also $f(t) = e^{at}$. Die Probe ist leicht: $\mathcal{L}(f) = F$.

☺ Es lebe der Residuensatz! Noch einfacher geht's mit \mathcal{L} -Tabelle! Diese erübrigt häufig die explizite und mühsame Integralberechnung.

Beispiel zur Umkehrformel L304
Ausführung

Aufgabe: Bestimmen Sie die Urbildfunktion f zu

$$F(s) = \frac{1}{1+s^3} \quad \text{für} \quad s > -1$$

Lösung: (1) Wir wenden direkt den Residuensatz an:

$$f(t) = \sum_{z_0 \in \mathbb{C}} \text{res}_{z=z_0} [e^{zt} F(z)]$$

Die Polstellen $z_1 = -1$ und $z_{2,3} = e^{\pm i\pi/3} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ sind einfach. Die Residuen rechnen wir geduldig aus:

$$f(t) = \sum_{k=1}^3 \frac{e^{z_k t}}{3z_k^2} = \frac{1}{3} \left[e^{-t} - e^{t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \sqrt{3}e^{t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right]$$

(2) Alternativ in Partialbrüche zerlegen und \mathcal{L} -Tabelle nachschlagen:

$$\frac{1}{1+s^3} = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{s+1} - \frac{(1-i\sqrt{3})/2}{s-(1-i\sqrt{3})/2} - \frac{(1+i\sqrt{3})/2}{s-(1+i\sqrt{3})/2} \right] \bullet \rightarrow f(t)$$

Die Rücktransformation führt gelegentlich zu folgendem Problem:
 $F(s)$ und $G(s)$ finden wir in der Tabelle, nicht aber $H(s) = F(s)G(s)$.
 Die Anwendbarkeit der \mathcal{L} -Tabelle erweitern wir dann durch Faltung:

Satz L3B: Faltungsregel der Laplace-Transformation

Zu den Funktionen $f, g: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$ definieren wir ihre Faltung durch

$$(f * g)(t) := \int_{u=0}^t f(u)g(t-u) du = \int_{v=0}^t f(t-v)g(v) dv.$$

Die \mathcal{L} -Transformation überführt die Faltung ins punktweise Produkt:

$$(f * g)(t) \circ \bullet (F \cdot G)(s)$$

Speziell für $g(t) = 1 \circ \bullet 1/s = G(s)$ erhalten wir die Integralregel:

$$\int_{u=0}^t f(u) du \circ \bullet F(s)/s$$

Aufgabe: Rechnen Sie die Faltungsregel nach!

Nachrechnen: Zur Vereinfachung setzen wir f, g fort zu $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(t) = g(t) = 0$ für $t < 0$. Dank Fubini und Substitution $v = t - u$ gilt:

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &\circ \bullet H(s) = \int_{t \in \mathbb{R}} e^{-st} \cdot (f * g)(t) dt \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} \int_{t \in \mathbb{R}} e^{-st} \cdot \left[\int_{u \in \mathbb{R}} f(u)g(t-u) du \right] dt \\ &\stackrel{\text{Lin}}{=} \int_{t \in \mathbb{R}} \int_{u \in \mathbb{R}} e^{-st} f(u)g(t-u) du dt \\ &\stackrel{\text{Fub}}{=} \int_{u \in \mathbb{R}} \int_{t \in \mathbb{R}} e^{-st} f(u)g(t-u) dt du \\ &\stackrel{\text{Subs}}{=} \int_{u \in \mathbb{R}} \int_{v \in \mathbb{R}} e^{-s(u+v)} f(u)g(v) dv du \\ &\stackrel{\text{Lin}}{=} \int_{u \in \mathbb{R}} e^{-su} f(u) du \cdot \int_{v \in \mathbb{R}} e^{-sv} g(v) dv \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} F(s) \cdot G(s) \end{aligned}$$

Aufgabe: Nutzen Sie das Faltungsintegral zur Rücktransformation von

$$H(s) = \frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2} \circ \bullet h(t) = ?$$

Lösung: Wir zerlegen H in ein Produkt bekannter Funktionen:

$$H(s) = \frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \cdot \frac{1}{s^2 + \omega^2}$$

Die beiden Faktoren können wir leicht rücktransformieren:

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \circ \bullet \cos(\omega t) = f(t)$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + \omega^2} \circ \bullet \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) = g(t)$$

$$H(s) = (F \cdot G)(s) \circ \bullet (f * g)(t) = h(t)$$

😊 Die \mathcal{L} -Tabelle erleichtert uns den Großteil der Arbeit.

Es bleibt schließlich nur noch, die Faltung $h = f * g$ zu berechnen:

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau = \frac{1}{\omega} \int_0^t \cos(\omega t - \omega\tau) \sin(\omega\tau) d\tau$$

Dank Additionstheorem $2 \cos(\alpha) \sin(\beta) = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$ folgt:

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\omega} \int_0^t \sin(\omega t) - \sin(\omega t - 2\omega\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2\omega} t \sin(\omega t) - \frac{1}{4\omega^2} \left[\cos(\omega t - 2\omega\tau) \right]_{\tau=0}^t \\ &= \frac{1}{2\omega} t \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Wir machen die Probe! Hier hilft die letzte Regel unserer \mathcal{L} -Tabelle:

$$t \sin(\omega t) \circ \bullet -\frac{d}{ds} \left[\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right] = \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$$

😊 Das ist Satz L1B. Wer's sofort sieht, kann's auch so berechnen.

Zu lösen sei eine lineare Differentialgleichung mit Anfangswerten:

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) &= b(t), \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(0) &= y_0^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Gegeben sind hierzu konstante Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$.

Die rechte Seite $b: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$ sei stetig und $\mathcal{L}: b(t) \circ \bullet B(s)$.

Das **charakteristische Polynom** unserer Gleichung ist

$$q(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0.$$

Die Differentialgleichung schreiben wir damit kurz $q(\partial_t)y(t) = b(t)$.

Laplace transformiert dies mit AW zu folgender **Hilfsgleichung**:

$$q(s)Y(s) = B(s) + \begin{cases} + y_0 & (s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2} + \dots + a_2s + a_1) \\ + y'_0 & (s^{n-2} + a_{n-1}s^{n-3} + \dots + a_2) \\ + \dots \\ + y_0^{(n-2)} & (s + a_{n-1}) \\ + y_0^{(n-1)} & \end{cases}$$

Aufgabe: Lösen Sie den homogenen Fall ($b = 0$) und zwar speziell:

$$\begin{aligned} u^{(n)}(t) + a_{n-1}u^{(n-1)}(t) + \dots + a_1u'(t) + a_0u(t) &= 0, \\ u(0) = u'(0) = \dots = u^{(n-2)}(0) = 0 \quad \text{und} \quad u^{(n-1)}(0) &= 1. \end{aligned}$$

Lösung: Laplace transformiert dies zu $q(s)U(s) = 1$, also $U(s) = 1/q(s)$.

Zur Rücktransformation $U(s) \circ \bullet u(t)$ zerlegen wir $1/q(s)$ wie oben:

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{q'(z_k)} e^{z_k t} \quad \text{im einfachen Fall bzw. allgemein:} \\ u(t) &= \sum_{k=1}^{\ell} \left[c_{k,1} + c_{k,2} \frac{t}{1!} + c_{k,3} \frac{t^2}{2!} + \dots + c_{k,n_k} \frac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!} \right] e^{z_k t} \end{aligned}$$

Die Koeffizienten $c_{k,\nu}$ der Partialbruchzerlegung finden wir wie [L205].

Diese Funktion $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt die **Greensche Fundamentallösung**

unserer homogenen linearen Differentialgleichung $q(\partial_t)u(t) = 0$.

Wir nutzen sie in Kapitel N zur Greenschen Lösungsformel N2F.

Wir lösen nun die homogene Gleichung mit beliebigen Anfangswerten:

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) &= 0, \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(0) &= y_0^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Diese könnten wir wie zuvor \mathcal{L} -transformieren und in Partialbrüche zerlegen. Es geht aber noch einfacher: Dank der Fundamentallösung

$u(t)$ können wir die gesuchte Lösung nämlich sofort hinschreiben:

$$\begin{aligned} y(t) = & y_0 \left[u^{(n-1)}(t) + a_{n-1}u^{(n-2)}(t) + \dots + a_2u'(t) + a_1u(t) \right] \\ & + y'_0 \left[u^{(n-2)}(t) + a_{n-1}u^{(n-3)}(t) + \dots + a_2u(t) \right] \\ & + \dots \\ & + y_0^{(n-2)} \left[u'(t) + a_{n-1}u(t) \right] \\ & + y_0^{(n-1)} u(t) \end{aligned}$$

Aufgabe: Machen Sie die Probe! Lösen $u, u', \dots, u^{(n-1)}$ die DG? Ist jede Zeile eine Lösung der DG? Mit welchen Anfangswerten?

Wir nutzen weiter unsere Fundamentallösung $u(t) \circ \bullet U(s) = 1/q(s)$.

Aufgabe: Lösen Sie schließlich die inhomogene Differentialgleichung

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) &= b(t), \\ y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-2)}(0) = y^{(n-1)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

mit verschwindenden Anfangswerten. **Lösung:** Laplace transformiert zu

$$q(s)Y(s) = B(s), \quad \text{also} \quad Y(s) = \frac{1}{q(s)} B(s) = U(s)B(s).$$

Dank Faltungssatz L3B erhalten wir die Rücktransformation:

$$Y(s) \circ \bullet y(t) = (u * b)(t) = \int_{\tau=0}^t u(t-\tau)b(\tau) d\tau$$

😊 Dies ist die Greensche Lösungsformel N2F. Kapitel N diskutiert Differentialgleichungen genauer und gibt zahlreiche Rechenbeispiele.

😊 Steht die Lösungsformel erst einmal da, so können wir sie auch ohne \mathcal{L} -Transformation direkt anwenden: Wir müssen uns lediglich die Fundamentallösung $u(t)$ beschaffen. Rechnen Sie's nach! [N247]

Die Laplace-Transformation

L401
Fazit

Die **Laplace-Transformierte** von $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$f(t) \circ \bullet F(s) := \mathcal{L}(f)(s) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Die **Konvergenzabszisse** ist $\sigma := \inf\{s \in \mathbb{R} \mid F(s) \text{ konvergiert}\}$. Das Integral konvergiert für alle $s > \sigma$ und divergiert für alle $s < \sigma$. Es definiert eine holomorphe Funktion $F: \mathbb{C}_{\text{Re} > \sigma} \rightarrow \mathbb{C}$. Umgekehrt gilt

$$F(s) \bullet \circ f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{(s+ix)t} F(s+ix) dx$$

für jedes $s > \sigma$ und fast alle $t \geq 0$, und immer wo f stetig diff'bar ist. Insbesondere ist \mathcal{L} injektiv, das heißt, aus $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$ folgt $f = g$. (Wir identifizieren Funktionen, die nur auf einer Nullmenge differieren.)
Residuen: Hat F in \mathbb{C} nur isolierte Singularitäten und klingt ab, so gilt

$$\mathcal{L}^{-1}(F)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{(s+ix)t} F(s+ix) dx = \sum_{z \in \mathbb{C}} \text{res}_{z=z_0} [e^{zt} F(z)].$$

Unsere kleine \mathcal{L} -Tabelle: Vokabeln und Grammatik

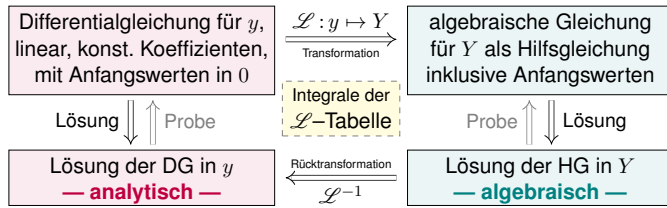
L402
Fazit

| | | | |
|-------------------|---------------------------------|-------------------|--|
| $f(t)_{t \geq 0}$ | $F(s)_{\text{Re}(s) > \sigma}$ | $f(t)_{t \geq 0}$ | $F(s) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ |
| 1 | $\frac{1}{s}$ | $af(t) + bg(t)$ | $aF(s) + bG(s)$ |
| e^{at} | $\frac{1}{s-a}$ | $f'(t)$ | $sF(s) - f(0)$ |
| t^n | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ | $f''(t)$ | $s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$ |
| $t^n e^{at}$ | $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ | $f^{(n)}(t)$ | $s^n F(s) - \dots - f^{(n-1)}(0)$ |
| $\sin(\omega t)$ | $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ | $t^n f(t)$ | $(-1)^n F^{(n)}(s)$ |
| $\cos(\omega t)$ | $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$ | $e^{at} f(t)$ | $F(s-a)$ |
| $\sinh(at)$ | $\frac{a}{s^2 - a^2}$ | $f(at), a > 0$ | $\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$ |
| $\cosh(at)$ | $\frac{s}{s^2 - a^2}$ | $f(t-a)u(t-a)$ | $e^{-as} F(s)$ |

Anwendung auf Differentialgleichungen

L403
Fazit

Laplace-Transformation kann lineare Differentialgleichungen lösen:



Anstatt das Anfangswertproblem im Original direkt zu lösen, machen wir den gezeigten Umweg über den Bildraum; das ist manchmal leichter.

😊 Die Methode der Laplace-Transformation ist dann effizient, wenn Sie jeden der drei Schritte effizient ausführen können.

😊 Ausführliche \mathcal{L} -Tabellen finden Sie in Lehrbüchern, Formelsammlungen und Computer-Algebra-Systemen.

😊 Zudem nutzen wir die obigen Rechenregeln für \mathcal{L} und \mathcal{L}^{-1} , sowie Basisalgorithmen wie Partialbruchzerlegung (PBZ), etc.

Zusammenfassung und Verständnisfragen

L404
Fazit

Aufgabe: Begründen Sie durch ein Ergebnis Ihrer Vorlesung oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel aus Ihrem Fundus:

- (1) Jede Funktion $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$ ist \mathcal{L} -transformierbar.
- (2) Welche Bedingungen garantieren \mathcal{L} -Transformierbarkeit?
- (3) Ist jede \mathcal{L} -Transformierte $F: \mathbb{C}_{\text{Re} > \sigma} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph? Warum?
- (4) Lässt sich jede \mathcal{L} -Transformierte F holomorph auf \mathbb{C} fortsetzen?
- (5) Ist die Transformation $f \circ \bullet F = \mathcal{L}(f)$ linear? Ist sie injektiv?
- (6) Lässt sich F zu f rücktransformieren? Wie? Inwiefern eindeutig?
- (7) Ist jede rationale Funktion $F = P/Q$ eine \mathcal{L} -Transformierte? Wie?

Lösung: (1) Nein, einfache Gegenbeispiele sind $f(t) = 1/t$ und $f(t) = \exp(t^2)$. [L103]
(2) Wir fordern, dass f auf jedem endlichen Intervall $[0, r]$ integrierbar ist und höchstens exponentiell wächst gemäß $|f(t)| \leq c e^{\sigma t}$ für alle $t \geq 0$ und Konstanten $c, \sigma \in \mathbb{R}$. [L04]
(3) Ja, wir ziehen die Ableitung unters Integral (L1B) dank majorisierter Integrierbarkeit (D3E).
(4) Nein, schon für $1 \circ \bullet 1/s$ müssen wir mit Polstellen rechnen. (Es gibt noch schlimmeres.)
(5) Ja, die Transformation $f \circ \bullet F = \mathcal{L}(f)$ ist linear (L1C). Sie ist im Wesentlichen injektiv:
(6) Die Umkehrformel $F \mapsto f = \mathcal{L}^{-1}(F)$ bestimmt f zumindest fast überall (Satz L3A): Wir können f auf jeder Menge vom Maß 0 beliebig ändern, ohne das Integral $F(s)$ zu beeinflussen. Eindeutigkeit gilt, wenn f stückweise stetig differenzierbar ist und zudem sprungnormiert.
(7) Nein, für $s \rightarrow \infty$ muss $F(s) \rightarrow 0$ gelten! [L04] Für $\deg P < \deg Q$ gelingt's mit PBZ.

Laplace-Integrale und Potenzreihen

L405
Ausführung

Aufgabe: (Erinnerung an die HM2) Wir betrachten die Potenzreihe

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^k \quad \text{mit } z \in \mathbb{C} \text{ und Koeffizienten } f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}.$$

Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert sie? Was passiert für $z = e^{ix}$? für $z = e^{-s}$?

Lösung: Die Reihe konvergiert für $|z| < \rho$ und divergiert für $|z| > \rho$, wobei $\rho = 1/\limsup \sqrt[k]{|f(k)|}$ der Konvergenzradius dieser Reihe ist. Für $x \in \mathbb{R}$ durchläuft $z = e^{ix}$ den Kreis; wir erhalten eine Fourier-Reihe! In komplexen Polarkoordinaten schreiben wir $z = e^{-s}$ und erhalten

$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) e^{-sk} \quad \text{mit } s \in \mathbb{C}.$$

Diese Reihe konvergiert für $s \in \mathbb{C}$ mit $\text{Re}(s) > -\ln \rho$ und divergiert für $\text{Re}(s) < -\ln \rho$. Der Konvergenzradius wird zur Konvergenzabszisse. Die Laplace-Transformation ersetzt diese Summe durch das Integral

$$F(s) = \int_{t=0}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad \text{mit } s \in \mathbb{C}.$$

😊 Daher verhalten sich Laplace-Integrale und Potenzreihen ähnlich, insbesondere bei Konvergenzverhalten und Holomorphie. (Satz L1B)

Vergleich von Laplace und Fourier

L406
Ausführung

Aufgabe: Für $f \circ \bullet F$ ist $\hat{f}(\omega) = F(i\omega)/\sqrt{2\pi}$ die \mathcal{F} -Transformierte.

Lösung: Wir setzen $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$ für $t < 0$ trivial fort durch $f(t) = 0$. Die Laplace-Transformierte von f ist die Funktion $F: \mathbb{C}_{\text{Re} > \sigma} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$F(s) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_{t=-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Das ist nur für solche $s \in \mathbb{C}$ definiert, für die das Integral konvergiert. Ist f absolut integrierbar, so konvergiert das Integral für alle $\text{Re}(s) \geq 0$. Für imaginäres $s = i\omega$ mit $\omega \in \mathbb{R}$ erhalten wir so das Fourier-Integral

$$F(i\omega) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt = \int_{t=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt.$$

Das entspricht (bis auf Normierung) der Fourier-Transformierten

$$\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \hat{f}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt.$$

😊 Laplace beinhaltet Fourier demnach als Spezialfall.

Vergleich von Laplace und Fourier

L407
Ausführung

Aufgabe: Erklären Sie mit Fourier-Theorie die Laplace-Umkehrformel.

Lösung: Physikalische Interpretation: Für $s, \omega \in \mathbb{R}$ ist das Integral

$$F(s + i\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \cdot e^{-st} f(t) dt$$

die Spektralfunktion der gedämpften Zeitfunktion $g(t) = e^{-st} f(t)$.

Diese Sicht erklärt die Rücktransformation durch die Umkehrformel:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} e^{(s+i\omega)t} F(s+i\omega) d\omega$$

Das ist genau die Umkehrformel der Fourier-Transformation!

Die Integrale konvergieren für $\text{Re}(s) > \sigma$, und dann gilt Satz K1E:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(s+i\omega)t} F(s+i\omega) d\omega = \frac{e^{st}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \hat{g}(\omega) d\omega = e^{st} g(t) = f(t)$$

Hier gelten die üblichen Vorsichtsmaßnahmen der Fourier-Theorie: Die Gleichheit gilt für fast alle $t \geq 0$, und immer wo f stetig diff'bar ist.

Vergleich von Laplace und Fourier

L408
Ausführung

Aufgabe: Lässt sich jede Funktion $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$ fourier-transformieren? und laplace-transformieren? Warum ist Letzteres allgemeiner?

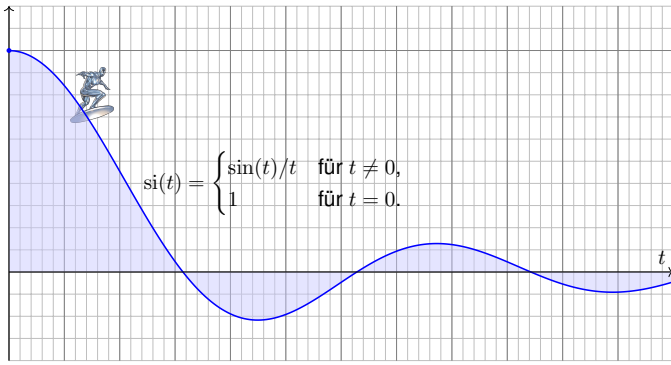
Lösung: Zur Konvergenz des Fourier-Integrals setzen wir f als absolut integrierbar voraus. Für den Cauchy-Hauptwert genügt etwas weniger, doch für gute, robuste Eigenschaften benötigen wir $\int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt < \infty$.

Dies trifft jedoch für viele einfache und geläufige Funktionen gar nicht zu: $f(t) = 1$, $f(t) = \sin(t)$ oder Polynome $f(t) = \sum a_k t^k$ erfüllen dies nicht! Diese Funktionen sind daher zunächst nicht Fourier-transformierbar.

😊 Beim Laplace-Integral ist die Lage von Anfang an spürbar besser: Für hinreichend großes s klingt der Integrand $e^{-st} f(t)$ schnell genug ab. Genauer: Für $s \in \mathbb{C}$ mit $\text{Re}(s) > \sigma$ konvergiert das Laplace-Integral. Wir setzen hierzu voraus, dass $f(t)$ höchstens exponentiell wächst.

So ist die Laplace-Transformierte $F(s)$ nicht nur für reelle Parameter $s \in \mathbb{R}_{> \sigma}$ definiert, sondern für alle komplexen Parameter $s \in \mathbb{C}_{\text{Re} > \sigma}$. Die Funktion $F: \mathbb{C}_{\text{Re} > \sigma} \rightarrow \mathbb{C}$ ist sogar holomorph! (Satz L1B)

😊 Damit stehen uns die mächtigen Werkzeuge holomorpher Funktionen zur Verfügung, insbesondere Laurent-Reihen und der Residuensatz.



Die Spaltfunktion si und das Dirichlet-Integral $\int_{t=0}^{\infty} si(t) dt$ begegnen uns häufig in der Physik, der Signalverarbeitung oder der Fourier-Analyse. Wir sind mutig und wollen zu si die Laplace-Transformierte berechnen.

Aufgabe: Berechnen Sie für $s \in \mathbb{R}_{>0}$ die Laplace-Transformierte

$$F(s) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

Anleitung: (1) Zeigen Sie $|F(s)| \leq 1/s$. Für $s \nearrow \infty$ folgt also $F(s) \rightarrow 0$.

(2) Berechnen Sie die Ableitung $F'(s)$ und damit $F(s)$ für alle $s \in \mathbb{R}_{>0}$. (Nehmen Sie dazu vorläufig an, dass Sie die Ableitung unter das Integral ziehen dürfen, und zeigen Sie anschließend, warum.)

(3) Angenommen, F ist stetig in $s = 0$, also $F(s) \rightarrow F(0)$ für $s \searrow 0$. Folgern Sie unter dieser Annahme den Wert des Integrals

$$F(0) = \int_{t=0}^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

Lösung: (1) Für $s \in \mathbb{R}_{>0}$ nutzen wir die üblichen Abschätzungen:

$$|F(s)| \leq \int_{t=0}^{\infty} \left| e^{-st} \frac{\sin(t)}{t} \right| dt \leq \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{s}$$

Satz L4A: Laplace-Transformation der Spaltfunktion

Die Laplace-Transformation der Spaltfunktion ist

$$f(t) = \frac{\sin t}{t} \circ \bullet F(s) = \frac{\pi}{2} - \arctan(s).$$

Ausführlich bedeutet das: Für jedes $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt die Gleichung

$$F(s) := \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2} - \arctan(s).$$

😊 Plausibilitätscheck: Die Regel $t f(t) \circ \bullet F'(s)$ ist hier erfüllt. [L201] Nochmal gelingt der Trick nicht: $\sin(t)/t^2$ ist nicht \mathcal{L} -transformierbar.

Aufgabe: Gehen Sie die bisherige Rechnung (1–3) kritisch durch:

- (4) Warum dürfen wir in (2) die Ableitung unter das Integral ziehen?
 - (5) Warum gilt in (3) Stetigkeit in $s = 0$, also $F(s) \rightarrow F(0)$ für $s \searrow 0$?
 - (a) Majorisierte Konvergenz? (b) Ausrechnen? (c) Dirichlet-Kriterium?
- ⚠️ Diese Sorgfalt ist nötig, wird aber meist missachtet, siehe D423.

(5a) Zur Stetigkeit von F in $s = 0$ benötigen wir folgenden Grenzwert:

$$\lim_{s \searrow 0} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} \frac{\sin(t)}{t} dt \stackrel{?}{=} \int_{t=0}^{\infty} \lim_{s \searrow 0} e^{-st} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_{t=0}^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

- 😊 Zur Stetigkeit von Parameterintegralen kennen wir Satz D3D: Unser Integrand $g(s, t) = e^{-st} si(t)$ ist stetig in s (und auch in t), ...
- ☹️ aber leider um den Punkt $s = 0$ nicht majorisiert integrierbar über t : Die kleinste Majorante $h(t) = |si(t)| = |\sin(t)/t|$ ist nicht integrierbar!
- ⚠️ Der beliebte und bequeme Satz D3D lässt sich hier nicht anwenden. Es gelingt nicht alles auf Anhieb, auch das ist lehrreich und heilsam. Das bedeutet noch nicht, dass F unstetig ist. Die Frage bleibt offen.

(5b) Einerseits haben wir für $s \searrow 0$ den Grenzwert $F(s) \nearrow \pi/2$, denn die Funktion $s \mapsto \pi/2 - \arctan(s)$ ist stetig, auch in $s = 0$. Andererseits kennen wir das Integral $F(0) = \pi/2$ dank F425.

😊 Diese explizite Rechnung zeigt die Stetigkeit von F im Punkt $s = 0$. Geht das auch direkt, ohne Residuenkalkül? Ja, das geht auch direkt...

Wir untersuchen erneut die **Spaltfunktion** $si: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}: t \mapsto \sin(t)/t$, wie immer stetig fortgesetzt durch $si(0) = 1$. Die Funktion ist elementar, nicht jedoch ihre Stammfunktion, der **Integralsinus** $Si(t) = \int_{\tau=0}^t si(\tau) d\tau$. Daher konnten wir das Dirichlet-Integral $\int_{t=0}^{\infty} si(t) dt$ mit elementaren Integrationsmethoden (aus der HM2) zunächst nicht ausrechnen. [B149] Dies gelang uns trickreich erst später mit dem **Residuensatz**. [F115] [F425] Solch knifflige Integrale treten in Natur- und Ingenieurwissenschaften häufig auf. Sie sind daher ein guter Test für unsere Rechenmethoden. Erfreulicherweise stellt sich heraus, dass wir dieses schwierige Integral ganz wunderbar mit der Laplace-Transformation berechnen können!

$$f(t) = \frac{\sin(t)}{t} \circ \bullet F(s) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

Der Dämpfungsfaktor e^{-st} hat hier zwei nützliche Eigenschaften: Erstens garantiert er absolute Konvergenz für $s > 0$, so wie erwartet. Zweitens beschert uns die partielle Ableitung ∂_s den hilfreichen Faktor t . Für $s > 0$ können wir die Integration damit entscheidend vereinfachen.

(2) In jedem Punkt $s \in \mathbb{R}_{>0}$ finden wir die Ableitung wie folgt:

$$\begin{aligned} F'(s) &= \frac{d}{ds} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} \frac{\sin(t)}{t} dt && \text{Wir ziehen die Ableitung...} \\ &= \int_{t=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} \left[e^{-st} \frac{\sin(t)}{t} \right] dt && \text{unter das Integral [L414]...} \\ &= \int_{t=0}^{\infty} -e^{-st} \sin(t) dt && \text{und vereinfachen!} \\ &= \frac{-1}{s^2 + 1} && \text{dank } \mathcal{L}\text{-Tabelle} \end{aligned}$$

Daraus folgt $F(s) = c - \arctan(s)$ mit einer Integrationskonstanten $c \in \mathbb{R}$. Für $s \nearrow \infty$ wissen wir aus (1) bereits $F(s) \rightarrow 0$. Daraus folgt $c = \pi/2$.

(3) Wir nehmen an, dass F in 0 stetig ist, also $F(s) \nearrow F(0)$ für $s \searrow 0$. Damit erhalten wir $F(0) = \lim_{s \searrow 0} F(s) = \pi/2 - \arctan(0) = \pi/2$.

⚠️ Die Stetigkeit von F ist keineswegs selbstverständlich und auch nicht leicht zu beweisen. Zur Vereinfachung haben wir sie in (3) vorausgesetzt.

Lösung: Für alle $s \in \mathbb{R}_{>0}$ haben wir die Gleichung in der vorigen Aufgabe (1–2) nachgerechnet; das gelingt sogar erstaunlich leicht. (4) Die entscheidende Umformung ist folgende Ableitung:

$$F'(s) = \frac{d}{ds} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} \frac{\sin(t)}{t} dt \stackrel{?}{=} \int_{t=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} \left[e^{-st} \frac{\sin(t)}{t} \right] dt$$

- 😊 Das ist eine Variante des beliebten Feynman-Tricks, siehe D423.
- ⚠️ Diese Umformung gilt nicht immer, wir müssen genau hinschauen!
- 😊 Zur Ableitung unter dem Integral nutzen wir bequem den Satz D3E. Für alle $s \geq s_0 > 0$ finden wir eine integrierbare Majorante:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial s} g(s, t) \right| &= \left| e^{-st} \sin(t) \right| \leq e^{-st} \leq e^{-s_0 t} =: h(t) \\ \int_{t=0}^{\infty} h(t) dt &= \left[-\frac{1}{s_0} e^{-s_0 t} \right]_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{s_0} < \infty \end{aligned}$$

😊 Leistungsstarke Theorie ermöglicht effiziente Berechnung: Dank Satz D3E dürfen wir die Ableitung ∂_s unter das Integral ziehen.

(5c) Für $f(t) = \sin(t)/t$ müssen wir etwas tiefer in die Trickkiste greifen:

Satz L4B: Stetigkeit $F(s) \rightarrow F(0)$ für $s \searrow 0$

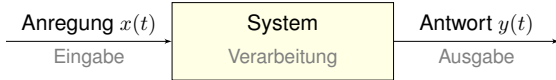
Sei $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$ absolut integrierbar über $[0, r]$ für jedes $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Für $r \rightarrow \infty$ existiere der Grenzwert $\int_{t=0}^r f(t) dt \rightarrow \int_{t=0}^{\infty} f(t) dt =: F(0)$. Dank Dirichlet-Kriterium B3J konvergiert auch $\int_{t=0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt =: F(s)$ für alle $s > 0$, und im Grenzwert für $s \searrow 0$ gilt $F(s) \rightarrow F(0)$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Für alle $s, r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt:

$$\begin{aligned} |F(0) - F(s)| &\stackrel{\text{LIM}}{=} \left| \int_{t=0}^r (1 - e^{-st}) f(t) dt + \int_{t=r}^{\infty} f(t) dt - \int_{t=r}^{\infty} e^{-st} f(t) dt \right| \\ &\leq (1 - e^{-sr}) \int_{t=0}^r |f(t)| dt + \left| \int_{t=r}^{\infty} f(t) dt \right| + \left| \int_{t=r}^{\infty} e^{-st} f(t) dt \right| \end{aligned}$$

Wir wählen $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ so groß, dass die letzten beiden Summanden $\leq \varepsilon/3$ ausfallen. Dann wählen wir $\delta > 0$ so klein, dass für alle $s \in [0, \delta]$ auch der erste Summand $\leq \varepsilon/3$ ausfällt. Somit gilt $|F(0) - F(s)| \leq \varepsilon$. □

Ziel der **Systemtheorie** ist es, komplexe (meist technische) Systeme zu beschreiben, zu analysieren, zu steuern und zu optimieren, etwa in der Kybernetik, Regelungstechnik, Signalverarbeitung, Kommunikation uvm.

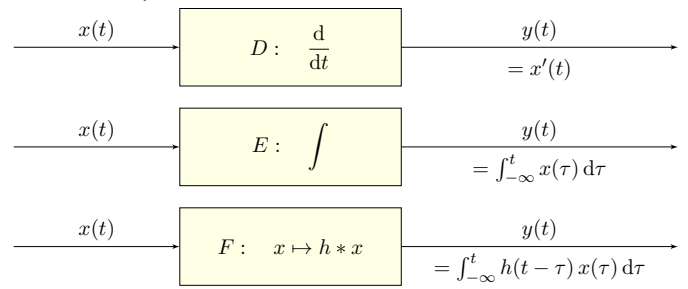


Typische Beispiele sind mechanische Systeme oder elektrische Schaltkreise (aus Widerständen, Kapazitäten, Induktivitäten, etc), allgemein auch chemische, biologische, ... gar soziale Systeme.

Auf jedes Eingangssignal $x(t)$ antwortet das System mit einem bestimmten Ausgangssignal $y(t)$. Das System entspricht somit einer Zuordnung Eingabe \mapsto Ausgabe oder Anregung \mapsto Antwort.

Wir betrachten hierzu reelle oder komplexe Funktionen $x, y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ und schreiben kurz $x(t) \mapsto y(t)$. Den Parameter $t \in \mathbb{R}$ betrachten wir als Zeit. Zum Eingang x möchten wir den Ausgang y berechnen, oder umgekehrt zum gewünschten Ergebnis y die hierzu nötige Aktion x bestimmen.

Einfache Beispiele:



Vereinbarung: Im ersten Falle sei x differenzierbar, im zweiten über $\mathbb{R}_{\leq t}$ absolut integrierbar, im dritten auch h . Es handelt sich um die Faltung $y(t) = \int_{-\infty}^t h(t-\tau) x(\tau) d\tau$, wenn wir $h(t) = 0$ für $t < 0$ voraussetzen. Mit $h(t) = 1$ für $t \geq 0$ erhalten wir aus dem dritten den zweiten Fall.

Wichtige Eigenschaften für ein solches System $x(t) \mapsto y(t)$ sind:

Linearität: Aus $x_k(t) \mapsto y_k(t)$ folgt $\sum_k c_k x_k(t) \mapsto \sum_k c_k y_k(t)$.

Zeitinvarianz: Aus $x(t) \mapsto y(t)$ folgt $x(t-t_0) \mapsto y(t-t_0)$.

Kausalität: Aus $x(t) = 0$ für $t < t_0$ folgt $y(t) = 0$ für $t < t_0$.

Stabilität: Es gilt $\|y\|_{L^1([0,t])} \leq K(t) \cdot \|x\|_{L^1([0,t])}$ mit $K: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Definition L4c: LTI-System

Erfüllt das vorliegende System $x(t) \mapsto y(t)$ Linearität und Zeitinvarianz, so nennen wir es kurz ein LZI-System, geläufiger jedoch auf englisch **linear time invariant system**, kurz ein **LTI-System**.

😊 LTI-Systeme gelten als relativ einfach und leicht zu lösen – im Gegensatz zu nicht-linearen und zeitabhängigen Systemen!

Aufgabe: Welche dieser Eigenschaften haben die vorigen Beispiele?

Lösung: (1) Linear, zeitinvariant, kausal, nicht stabil für $x(t) = \sin(\omega t)$. (2,3) Linear und zeitinvariant sind klar, kausal dank $h(t) = 0$ für $t < 0$, stabil gdw $K(t) = \|h\|_{L^1([0,t])} = \int_0^t |h(\tau)| d\tau < \infty$ für alle $t \geq 0$.

Aufgrund der Kausalität betrachten wir meist nur Funktionen der Form $x, y, h: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$ und setzen diese für $t < 0$ trivial fort durch $t \mapsto 0$.

Das System beschreiben wir dann durch das Faltungsprodukt

$$x(t) \mapsto y(t) = (h * x)(t) := \int_{\tau=0}^t h(t-\tau) x(\tau) d\tau.$$

Laplace transformiert die Faltung zum punktweisen Produkt: [L305]

$$X(s) \mapsto Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$

Fourier transformiert dies ebenso, wobei wir $\hat{x}(\omega) = X(i\omega)$ betrachten:

$$X(i\omega) \mapsto Y(i\omega) = H(i\omega) \cdot X(i\omega)$$

Bezeichnungen: Wir nennen $h(t)$ die **Impulsantwort** des Systems, $H(s)$ die **Übertragungsfunktion** und $H(i\omega)$ die **Frequenzantwort**.

😊 Mit diesen mathematischen Werkzeugen kann man nun technische oder allgemeine Systeme beschreiben, analysieren, steuern, optimieren. Mehr hierzu lernen Sie zum Beispiel in der Regelungstechnik. [L429] [N241]

Wir betrachten einen kurzen Impuls der Länge $\varepsilon > 0$ und Stärke $1/\varepsilon$:

$$\delta_\varepsilon: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \mathbf{I}_{[0,\varepsilon]}(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{für } 0 \leq t < \varepsilon, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Breite ε und Höhe $1/\varepsilon$ sind so eingerichtet, dass der Impuls immer dieselbe Gesamtstärke $\int_{\mathbb{R}} \delta_\varepsilon(t) dt = 1$ hat. Für $\varepsilon \rightarrow 0$ erhalten wir so eine beliebig kurze, schlagartige Übertragung des Einheitsimpulses. Bei einem mechanischen System denken wir an einen Hammerschlag.

Aufgabe: Konvergiert δ_ε punktweise? Gegen welche Funktion f ?

Erfüllt auch die Grenzfunktion noch die Bedingung $\int_{\mathbb{R}} f(t) dt = 1$?

Lösung: Für $\varepsilon \rightarrow 0$ konvergiert δ_ε punktweise gegen die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \quad \text{mit} \quad f(t) = \begin{cases} \infty & \text{für } t = 0, \\ 0 & \text{für } t \neq 0. \end{cases}$$

⚠ Es gilt $\int_{\mathbb{R}} f(t) dt = 0$: „Die Masse verschwindet nach Unendlich.“ Anschaulich will man sowohl $\delta_\varepsilon \rightarrow \delta_0$ als auch $\int_{\mathbb{R}} \delta_0(t) dt = 1$ verwenden. Hierzu sind **punktweise Konvergenz** und **Dirac-Funktion** f ungeeignet! Die korrekte Behandlung gelingt erst durch **Distributionen** (Kapitel D).

Wir betrachten wie zuvor ein System $x(t) \mapsto y(t)$ von der Form

$$x(t) \mapsto y(t) = (h * x)(t) := \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(t-\tau) x(\tau) d\tau.$$

Zur Vereinfachung denken wir an eine stetige Funktion $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

Aufgabe: Berechnen Sie zur Anregung $\delta_\varepsilon(t)$ die Antwort $h_\varepsilon(t)$ und bestimmen Sie den (punktweisen) Grenzwert für $\varepsilon \rightarrow 0$.

Lösung: Wir setzen die Definition ein und rechnen es geduldig aus:

$$\delta_\varepsilon(t) \mapsto h_\varepsilon(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(t-\tau) \delta_\varepsilon(\tau) d\tau = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau=0}^{\varepsilon} h(t-\tau) d\tau \rightarrow h(t)$$

HDI (B1): Der Grenzübergang für $\varepsilon \rightarrow 0$ gelingt leicht dank Stetigkeit. Allgemein nutzen wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung (B4B).

Allgemein könnte die Funktion h zum Beispiel Sprungstellen haben, dann gilt der genannte Grenzwert nicht mehr ohne Weiteres. Für jede (lokal) integrierbare Funktion h gilt der Grenzwert jedoch für fast alle t .

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ interpretieren wir $\delta_\varepsilon \rightarrow \delta_0$ als beliebig kurzen Einheitsimpuls. Die Antwort des Systems ist $h_\varepsilon(t) \rightarrow h(t)$, wie oben ausgerechnet. Daher nennt man $h(t)$ auch die **Impulsantwort** des Systems.

😊 Allein aus $h(t)$ können wir das Systemverhalten rekonstruieren!

Aufgabe: Gegeben sei ein LTI-System mit Impulsantwort $h_\varepsilon(t) \rightarrow h(t)$. Welche Antwort $y(t)$ gibt das System auf eine Treppenfunktion $x(t)$?

Lösung: Jede Treppenfunktion $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist Summe kleiner Impulse.

Für die Unterteilung $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ mit $\varepsilon_k = t_{k+1} - t_k$ gelte:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{\varepsilon_k}(t - t_k) x(t_k) \varepsilon_k$$

Auf diese Anregung $x(t)$ antwortet unser LTI-System demnach mit:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} h_{\varepsilon_k}(t - t_k) x(t_k) \varepsilon_k$$

😊 Wir nutzen hierzu nur die Linearität und die Zeitinvarianz! Das genügt, um die Antwort auf Treppenfunktionen zu bestimmen.

Aufgabe: Wie folgt mit L^1 -Stabilität die allgemeine Systemantwort?

Lösung: Jede integrierbare Funktion $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ kann in der L^1 -Norm approximiert werden durch geeignete Treppenfunktionen $x_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Das heißt $x = x_n + f_n$ mit Fehlerschranke $\|f_n\|_{L^1([0,t])} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

Auf die Anregung $x(t)$ antwortet unser LTI-System $y = y_n + f_n^*$, mit Fehlerschranke $\|f_n^*\|_{L^1([0,t])} \leq K(t) \cdot \|f_n\|_{L^1([0,t])} \rightarrow 0$.

Die Antwort $x_n \mapsto y_n$ haben wir oben ausgerechnet dank Linearität und Zeitinvarianz. Für $n \rightarrow \infty$ gilt $x_n \rightarrow x$ und $y_n \rightarrow y$, also schließlich

$$y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(t-\tau) x(\tau) d\tau.$$

😊 Allein aus der Impulsantwort $h(t)$ folgt dank Linearität, Zeitinvarianz und L^1_{loc} -Stabilität die allgemeine Systemantwort durch die Faltung

$$x(t) \mapsto y(t) = (h * x)(t) := \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(t-\tau) x(\tau) d\tau.$$

Das erlaubt eine bequeme Beschreibung aller stabilen LTI-Systeme: Es genügt nach einem Hammerschlag dem Echo h zu lauschen.

Aufgabe: Lösen Sie durch \mathcal{L} -Transformation die Differentialgleichung

$$u'''(t) - u(t) = 1 \quad \text{mit} \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = u''(0) = 1.$$

- (1) Laplace-transformieren Sie diese Gleichung mittels $\mathcal{L} : u \mapsto U$.
- (2) Lösen Sie die so erhaltene Hilfsgleichung nach U auf.
- (3) Bestimmen Sie die Rücktransformation $\mathcal{L}^{-1} : U \mapsto u$.
- (4) Machen Sie die Probe: Erfüllt u die Differentialgleichung?

Lösung: (1) Wir Laplace-transformieren dank \mathcal{L} -Tabelle:

$$\begin{aligned} u(t) &\circ \bullet U(s) &&= U(s) \\ u'(t) &\circ \bullet sU(s) - u(0) &&= sU(s) \\ u''(t) &\circ \bullet s^2U(s) - su(0) - u'(0) &&= s^2U(s) - 1 \\ u'''(t) &\circ \bullet s^3U(s) - s^2u(0) - su'(0) - u''(0) &&= s^3U(s) - s - 1 \\ 1 &\circ \bullet s^{-1} \end{aligned}$$

Dank Linearität transformieren wir die DG zur **Hilfsgleichung**

$$s^3U(s) - s - 1 - U(s) = s^{-1}.$$

(2) **Auflösung** der Hilfsgleichung nach U :

$$\begin{aligned} (s^3 - 1)U(s) &= \underbrace{s + 1}_{\text{Anfangsdaten}} + \underbrace{s^{-1}}_{\text{rechte Seite}} \\ \Rightarrow U(s) &= \frac{s + 1 + s^{-1}}{s^3 - 1} = \frac{s^2 + s + 1}{s(s-1)(s^2 + s + 1)} = \frac{1}{s(s-1)} \end{aligned}$$

(3) **Rücktransformation** von U zu u dank \mathcal{L} -Tabelle:

$$U(s) = \frac{1}{s(s-1)} \stackrel{\text{PBZ}}{=} \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} \quad \bullet \circ \quad e^t - 1 = u(t)$$

(4) Machen Sie die **Probe!** Lösen ist schwer, prüfen ist leicht. Die Funktion u erfüllt die Differentialgleichung mit Anfangsdaten!

☺ Die Laplace-Transformation verwandelt etwas kompliziertes in etwas einfaches. Die Transformation entnimmt man am besten einer der umfangreichen \mathcal{L} -Tabellen.

⚠ Zur Rücktransformation nutzen wir die Partialbruchzerlegung. Das ist Routinearbeit. Die Anfangswerte werden schon im ersten Schritt in die \mathcal{L} -Transformation eingearbeitet.

Vergleichen Sie diesen Rechenweg mit den Methoden aus Kapitel N. Alle Wege führen zum selben Ergebnis, aber man muss die jeweils gewählte Methode einüben, um sie zu beherrschen.

Aufgabe: Lösen Sie durch \mathcal{L} -Transformation die Differentialgleichung

$$u''(t) + 2u'(t) + 10u(t) = 2 \cos(t) + 9 \sin(t) \quad \text{mit} \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 4.$$

- (1) Laplace-transformieren Sie diese Gleichung mittels $\mathcal{L} : u \mapsto U$.
- (2) Lösen Sie die so erhaltene Hilfsgleichung nach U auf.
- (3) Bestimmen Sie die Rücktransformation $\mathcal{L}^{-1} : U \mapsto u$.
- (4) Machen Sie die Probe: Erfüllt u die Differentialgleichung?

Lösung: (1) Wir Laplace-transformieren dank \mathcal{L} -Tabelle:

$$\begin{aligned} u(t) &\circ \bullet U(s) &&= U(s) \\ u'(t) &\circ \bullet sU(s) - u(0) &&= sU(s) \\ u''(t) &\circ \bullet s^2U(s) - su(0) - u'(0) &&= s^2U(s) - 4 \\ \cos(\omega t) &\circ \bullet \frac{s}{s^2 + \omega^2} && \sin(\omega t) \circ \bullet \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Dank Linearität transformieren wir die DG zur **Hilfsgleichung**

$$s^2U(s) - 4 + 2sU(s) + 10U(s) = \frac{2s}{s^2 + 1} + \frac{9}{s^2 + 1}.$$

(2) **Auflösung** der Hilfsgleichung nach U und Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned} (s^2 + 2s + 10)U(s) &= \underbrace{4}_{\text{Anfangsdaten}} + \underbrace{\frac{2s + 9}{s^2 + 1}}_{\text{rechte Seite}} \\ \Rightarrow U(s) &= \frac{4}{s^2 + 2s + 10} + \frac{2s + 9}{(s^2 + 1)(s^2 + 2s + 10)} \\ &\stackrel{\text{PBZ}}{=} \frac{4}{s^2 + 2s + 10} + \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{s^2 + 2s + 10} \end{aligned}$$

(3) **Rücktransformation** von U zu u dank \mathcal{L} -Tabelle:

$$U(s) = \frac{3}{(s+1)^2 + 3^2} + \frac{1}{s^2 + 1} \quad \bullet \circ \quad e^{-t} \sin(3t) + \sin(t) = u(t)$$

(4) Wir machen die **Probe!** Lösen ist schwer, prüfen ist leicht!

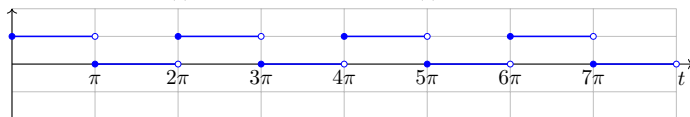
$$\begin{aligned} u(t) &= + e^{-t} \sin(3t) && + \sin(t) \\ u'(t) &= - e^{-t} \sin(3t) && + 3 e^{-t} \cos(3t) + \cos(t) \\ u''(t) &= - 8 e^{-t} \sin(3t) && - 6 e^{-t} \cos(3t) - \sin(t) \end{aligned}$$

☺ Die Funktion u erfüllt die Differentialgleichung mit Anfangsdaten!

Aufgabe: Zu lösen sei die Gleichung der erzwungenen Schwingung

$$y''(t) + y(t) = f(t) \quad \text{mit} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Die anregende Kraft $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ sei die 2π -periodische Impulsfunktion gegeben durch $f(t) = 1$ für $0 \leq t < \pi$ und $f(t) = 0$ für $\pi \leq t < 2\pi$.



- (1) Berechnen Sie die Greensche Fundamentallösung dieser Gleichung, also $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u''(t) + u(t) = 0$ sowie $u(0) = 0$ und $u'(0) = 1$.
- (2) Lösen Sie die inhomogene Gleichung durch die Faltung $y = u * f$. Erklären Sie an diesem Beispiel das Phänomen der Resonanz.
- (3) Skizzieren Sie die Anregung f und die Antwort y . Probe! Wo liegen Schwierigkeiten? Ist Ihre Lösung dennoch sinnvoll?

Lösung: (1) Wir Laplace-transformieren dank \mathcal{L} -Tabelle:

$$\begin{aligned} u(t) &\circ \bullet U(s) &&= U(s) \\ u'(t) &\circ \bullet sU(s) - u(0) &&= sU(s) \\ u''(t) &\circ \bullet s^2U(s) - su(0) - u'(0) &&= s^2U(s) - 1 \end{aligned}$$

Die Hilfsgleichung $(s^2 + 1)U(s) = 1$ lösen wir auf zu $U(s) = 1/(s^2 + 1)$. Die Rücktransformation ergibt $u(t) = \sin(t)$. Machen Sie die Probe!

☺ Wer die Lösung sofort sieht oder wiedererkennt, kann hier abkürzen.

(2) Wir Laplace-transformieren dank \mathcal{L} -Tabelle:

$$\begin{aligned} y(t) &\circ \bullet Y(s) &&= Y(s) \\ y'(t) &\circ \bullet sY(s) - u(0) &&= sY(s) \\ y''(t) &\circ \bullet s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) &&= s^2Y(s) \end{aligned}$$

Die Hilfsgleichung $(s^2 + 1)Y(s) = F(s)$ ergibt $Y(s) = U(s)F(s)$. Die Transformation $f \circ \bullet F$ müssen wir nicht explizit berechnen:

☺ Als Rücktransformation erhalten wir die Faltung $y = u * f$.

Dank Faltungssatz erhalten wir so die gesuchte Lösung:

$$y(t) = \int_{\tau=0}^t \sin(t-\tau)f(\tau) d\tau$$

Dies rechnen wir schließlich geduldig aus. Für $t \in [2k\pi, (2k+1)\pi]$ gilt:

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{\ell=0}^{k-1} \int_{\tau=2\ell\pi}^{(2\ell+1)\pi} \sin(t-\tau) d\tau + \int_{\tau=2k\pi}^t \sin(t-\tau) d\tau \\ &= \sum_{\ell=0}^{k-1} [\cos(t-\tau)]_{\tau=2\ell\pi}^{(2\ell+1)\pi} + [\cos(t-\tau)]_{\tau=2k\pi}^t = 1 - (2k+1)\cos(t) \end{aligned}$$

Für $t \in [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$ finden wir ebenso $y(t) = -(2k+2)\cos(t)$.

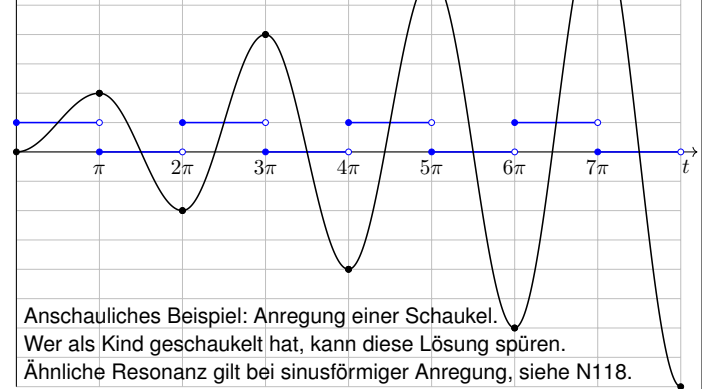
(3) Probe: Auf jedem dieser Intervalle gilt $y'' + y = 1$ bzw. $y'' + y = 0$.

⚠ Die hier vorgegebene rechte Seite f ist nur stückweise stetig. Die Lösung y ist daher nicht C^2 , sondern nur C^1 und stückweise C^2 .

☺ Die Differentialgleichung gilt für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ bis auf abzählbar viele Ausnahmestellen, hier $t \in \{\pi, 2\pi, 3\pi, \dots\}$. Das muss uns genügen.

Skizze unserer berechneten Lösung $y : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$:

Die Amplitude wächst linear mit der Zeit. Wir sehen wunderbar die Resonanz!



Anschauliches Beispiel: Anregung einer Schaukel.

Wer als Kind geschaukelt hat, kann diese Lösung spüren.

Ähnliche Resonanz gilt bei sinusförmiger Anregung, siehe N118.