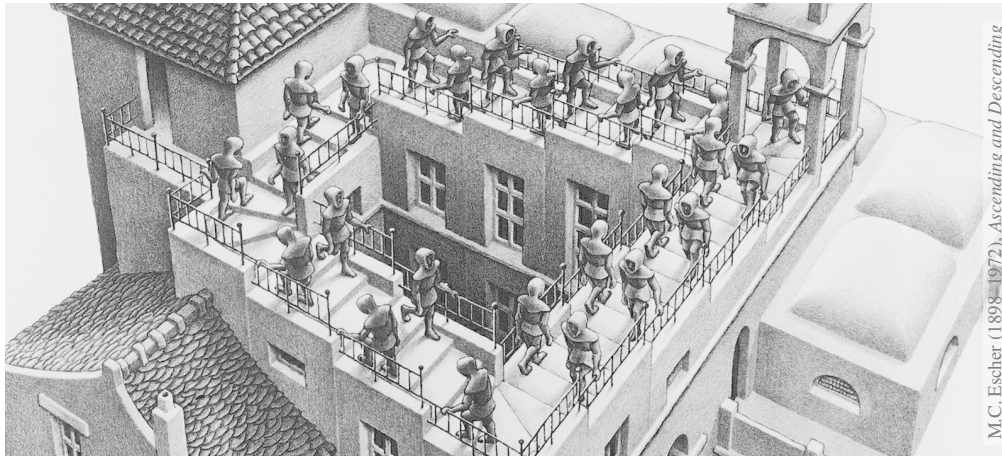


Kapitel H

Erste Anwendungen der Integralsätze



*Alles sollte so einfach wie möglich gemacht werden
— aber nicht noch einfacher.*

Albert Einstein (1879–1955)

Vollversion

• michael-eisermann.de/lehre/HM3

• 26.02.2025

Inhalt dieses Kapitels H

H002

- 1 Partielle Differentialgleichungen der Physik
 - Eulers Kontinuitätsgleichung
 - Fouriers Wärmeleitungsgleichung
 - Newtons Gravitationsgesetz
 - Maxwells Elektrodynamik
- 2 Vektorfelder und Potentiale
 - Konservative Vektorfelder
 - Rotationsfreie Vektorfelder
 - Einfach zusammenhängende Gebiete
 - Radialsymmetrische Felder und Potentiale
- 3 Fazit: Erste Anwendungen der Integralsätze
 - Zusammenfassung und Verständnisfragen
 - Weitere Aufgaben und Anwendungen
 - Notwendige und hinreichende Kriterien
 - Gegenläufige Wirbelfelder, Quadrupolis

Nahezu jedes naturwissenschaftlich-technische Gebiet nutzt Integrale und Integralsätze. Im ersten Teil dieses Kapitels wenden wir sie zur Illustration auf vier zentrale und physikalisch relevante Probleme an:

- 1 Eulers Kontinuitätsgleichung:
Wie verhalten sich strömende Flüssigkeiten?
- 2 Fouriers Wärmeleitungsgleichung:
Wie berechnet man den Wärmefluss in einem Körper?
- 3 Newtons Gravitationsgesetz:
Wie berechnet man das Gravitationsfeld einer Masse?
- 4 Maxwells Elektrodynamik:
Wie breiten sich elektromagnetische Wellen aus?

Diese Problemstellungen sind auch mathematisch von zentraler Bedeutung, denn sie führen uns zu den drei Grundtypen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Diese werden wir mit weiteren Werkzeugen in späteren Kapiteln immer besser behandeln können. Mit unseren bisherigen Techniken wollen dies jetzt vorbereiten.

Im zweiten Teil dieses Kapitels greifen wir das Potentialproblem auf, das Sie bereits aus der HM2 kennen: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Unter welchen Bedingungen erlaubt ein Vektorfeld $f : \mathbb{R}^n \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Potential?

Wir suchen also zu f eine Stammfunktion $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\text{grad } F = f$. Wenn dies möglich ist, so nennen wir f exakt (oder ein Gradientenfeld).

Nicht jedes Vektorfeld f kommt solcherart von einem Potential.

Wir fragen daher: Wie können wir feststellen, ob f exakt ist?

Und wenn ja, wie können wir ein Potential berechnen?

Die Antwort hängt, wie Sie aus der HM2 wissen, zunächst vom Vektorfeld f ab: die lokale Integrabilitätsbedingung $\text{rot}(f) = 0$ ist notwendig. Überraschenderweise ist sie noch nicht hinreichend: Die Antwort hängt zudem von der globalen Gestalt des Gebiets $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ab!

Mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes können wir dieses Problem nun vollständig lösen für konvexe Gebiete $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und allgemeiner für alle einfach zusammenhängenden Gebiete. Potentiale nützen uns überall, etwa in Kapitel M zur Lösung von exakten Differentialgleichungen.

Differentialoperatoren und Integralsätze

Wir nutzen hier zur Übung die dekorative Schreibweise der Physik. Als Abkürzung nützlich ist der **Nabla-Operator** $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$.

$$\text{Gradient: } \text{grad } g = \nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}, \frac{\partial g}{\partial x_3} \right)$$

$$\text{Rotation: } \text{rot } \vec{f} = \nabla \times \vec{f} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)$$

$$\text{Divergenz: } \text{div } \vec{f} = \nabla \cdot \vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$$

$$\text{Laplace: } \Delta g = \nabla^2 g = \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_3^2}$$

Unsere **Integralsätze** schreiben wir dann in folgender Form:

$$\text{HDI: } \int_{\Gamma} (\nabla g) \cdot d\vec{s} = g(\vec{p}_{\text{Ziel}}) - g(\vec{p}_{\text{Start}})$$

$$\text{Stokes: } \iint_S (\nabla \times \vec{f}) \cdot \vec{n} dS = \oint_{\partial S} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

$$\text{Gauß: } \iiint_V \nabla \cdot \vec{f} dV = \oiint_{\partial V} \vec{f} \cdot \vec{n} dS$$

Differentialoperatoren und Integralsätze

Wer seriös arbeitet, gibt immer auch Definitions- und Wertebereich an: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Gebiet, also eine offene zusammenhängende Menge. Wir betrachten hier die Ortsvariable $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ und ein stetig diff'bares Skalarfeld $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. Vektorfeld $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$. Das heißt, jedem Punkt $\vec{x} \in \Omega$ wird eine Zahl $g(\vec{x}) \in \mathbb{R}$ bzw. ein Vektor $\vec{f}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^3$ zugeordnet. Die oben definierten Ableitungen sind demnach Skalarfelder $\nabla \cdot \vec{f}, \Delta g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. Vektorfelder $\nabla \times \vec{f}, \nabla g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Für den HDI sei $\Gamma \subseteq \Omega$ eine stückweise glatte Kurve vom Startpunkt $\vec{p} \in \Omega$ zum Zielpunkt $\vec{q} \in \Omega$ mit vektoriellem Wegelement $d\vec{s} = \vec{t} ds$, also Einheitstangente $\vec{t} \in \mathbb{R}^3$ und skalarem Wegelement ds . Für Stokes sei $S \subseteq \Omega$ eine stückweise glatte Fläche mit vektoriellem Flächenelement $d\vec{S} = \vec{n} dS$, also Einheitsnormale \vec{n} und skalarem Flächenelement dS . Für Gauß schließlich sei $V \subseteq \Omega$ ein Kompaktum mit stückweise glatter Randfläche ∂V und dem üblichen Volumenelement $dV = d(x_1, x_2, x_3)$.

Dekoration als Gedächtnisstütze: Mehrfache Integralsymbole erinnern an die Dimension, der Kringel an geschlossene Kurven bzw. Flächen. Unabhängig von der Schreibweise ist das Integral dasselbe wie zuvor.

Wir nutzen in diesem Abschnitt §H1 diese dekorative Schreibweise, da sie insbesondere in der Physik gerne verwendet wird. In der Literatur finden Sie beide Notationen, daher sollten Sie beide problemlos lesen und verstehen — und gegebenenfalls ineinander übersetzen können.

Die eindimensionale **Differential- und Integralrechnung** führt wie gesehen direkt zur zwei- und dreidimensionalen **Vektoranalysis**. Die hier betonte Dimension 3 ist vor allem physikalisch motiviert; analoge Sätze und Rechentechniken gelten in jeder Dimension.

Integralsätze erlauben und erklären die nötigen Umrechnungen. In den vorigen Kapiteln haben wir die hierzu nötigen Kurven-, Flächen- und Volumenintegrale und hierbei geltenden Integralsätze diskutiert. In diesem Kapitel stelle ich einige klassische Anwendungen vor.

Nahezu alle Gesetzmäßigkeiten in Naturwissenschaft und Technik formuliert man üblicherweise als Integral- und Differentialgleichungen. Die in obigen Formeln zusammengefassten Rechentechniken sind daher Grundwerkzeuge für Ingenieur:innen und Naturwissenschaftler:innen.

Unsere drei Differentialoperatoren auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ bilden folgende Sequenz:

$$0 \longrightarrow C^\infty(\Omega, \mathbb{R}) \xrightarrow{\text{grad}} C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3) \xrightarrow{\text{rot}} C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3) \xrightarrow{\text{div}} C^\infty(\Omega, \mathbb{R}) \longrightarrow 0$$

Folgende Identitäten nützen bei Potentialproblemen und Umformungen:

$$\text{rot grad } g = 0 \quad \text{d.h.} \quad \nabla \times (\nabla g) = 0$$

$$\text{div rot } \vec{f} = 0 \quad \text{d.h.} \quad \nabla \cdot (\nabla \times \vec{f}) = 0$$

$$\text{div grad } g = \Delta g \quad \text{d.h.} \quad \nabla \cdot (\nabla g) = \Delta g$$

$$\text{rot rot } \vec{f} = \text{grad div } \vec{f} - \Delta \vec{f} \quad \text{d.h.} \quad \nabla \times (\nabla \times \vec{f}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{f}) - \nabla^2 \vec{f}$$

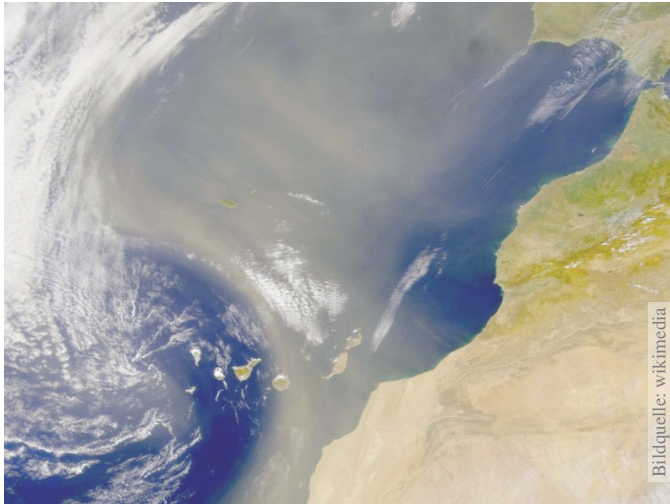
Aufgabe: Rechnen Sie dies nach für zweimal stetig diff'bare Felder. Warum und wo genau benötigen Sie hier den Satz von Schwarz (D4A)?

Lösung: Wir setzen die Definition ein und rechnen es sorgsam aus:

$$\text{rot grad } g = (\partial_2 \partial_3 g - \partial_3 \partial_2 g, \partial_3 \partial_1 g - \partial_1 \partial_3 g, \partial_1 \partial_2 g - \partial_2 \partial_1 g)$$

Wenn $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar ist, so können wir den Satz von Schwarz anwenden: Es gilt $\partial_i \partial_j g = \partial_j \partial_i g$, also $\text{rot grad } g = 0$. Die anderen Gleichungen rechnet man ebenso geduldig nach. Übung!

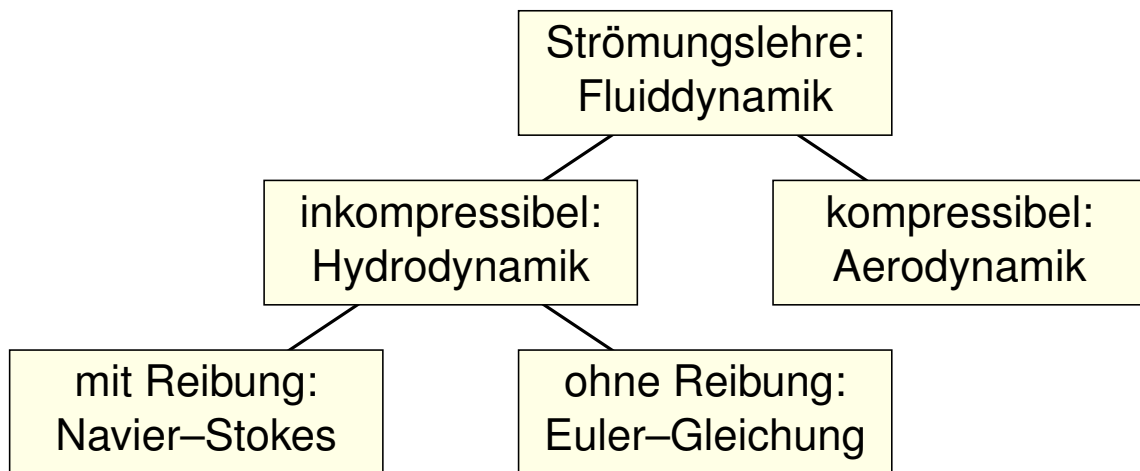
Ziel: Wie verhalten sich Strömungen? Welche Gleichungen gelten hier?



Luft- und Wasserströmung um die Kanarischen Inseln

(0) Wie beschreiben Sie eine Strömung in einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ über ein Zeitintervall $I = [t_0, t_1]$? Geschwindigkeit $\vec{v}: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3: (t, \vec{x}) \mapsto \vec{v}(t, \vec{x})$ und Massendichte $\rho: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}: (t, \vec{x}) \mapsto \rho(t, \vec{x})$ und evtl. weitere Daten. Die Massenstromdichte $\rho\vec{v}: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ beschreibt den Massenfluss. Im Strömungsbereich Ω werde Masse weder erzeugt noch vernichtet.

Die Strömungsmechanik untersucht die Bewegung von fluiden Medien. Sie ist grundlegend für die Meteorologie, beim Bau von Flugzeugen, Schiffen, Autos, ... bis hin zu Verbrennungsmotoren: Alles fließt!



Ein Fluid heißt inkompressibel, wenn seine Dichte nicht vom Druck abhängt. Zum Beispiel ist dies bei Wasser eine gute Näherung für die meisten Anwendungen. Noch einfacher ist zunächst, überall konstante Dichte anzunehmen. Anders als Flüssigkeiten sind Gase leicht komprimierbar, ihre Dichte ist etwa 1000mal geringer, ihre thermische Ausdehnung größer. Für ihre Bewegung aber gelten weitgehend die gleichen Gesetze, zumindest bei nicht allzu großen Drücken und Geschwindigkeiten. Wir wenden uns hier der allgemein gültigen Kontinuitätsgleichung zu.

Die Kontinuitätsgleichung der Strömungslehre

Aufgabe: Welche Beziehung folgt aus der Massenerhaltung?

- (1) Sei $K \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ kompakt, etwa ein Würfel. Formulieren Sie die Massenbilanz für K in Worten und als Volumen-/Flussintegrale.
- (2) Formen Sie dies um zu einem einzigen Volumenintegral.
- (3) Folgern Sie hieraus die zugehörige Differentialgleichung.
- (4) Was folgt für inkompressible Strömungen, also für $\rho = \text{const}$?

Lösung: (1) Die über die Randfläche $S = \partial K$ ausströmende Masse geht der Gesamtmasse in K verloren. Als Integralgleichung formuliert:

$$\frac{d}{dt} \iiint_K \rho \, dK + \iint_{S=\partial K} (\rho \vec{v} \cdot \vec{n}) \, dS = 0$$

(2) Wir dürfen die Ableitung unters Integral ziehen dank Kompaktheit des Integrationsbereichs K und Stetigkeit der Ableitung $\partial \rho / \partial t$:

$$\frac{d}{dt} \iiint_K \rho \, dK \stackrel{\substack{\text{Kpkt} \\ \text{D3c}}}{=} \iiint_K \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dK$$

Die Kontinuitätsgleichung der Strömungslehre

Wir wollen auch das Flussintegral in diese Form bringen und dann beides zusammenfassen. Dies gelingt mit dem Satz von Gauß (G3G):

$$\iint_{S=\partial K} (\rho \vec{v} \cdot \vec{n}) \, dS \stackrel{\substack{\text{Gauß} \\ \text{G3G}}}{=} \iiint_K \text{div}(\rho \vec{v}) \, dK$$

Dank Linearität des Integrals erhalten wir ein einziges Volumenintegral:

$$\iiint_K \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) \right] \, dK = 0$$

(3) Diese lokale Massenbilanz gilt für jedes Kompaktum $K \in \Omega$. Das gilt genau dann, wenn der (stetige!) Integrand verschwindet:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

Diese **Kontinuitätsgleichung** ist grundlegend für die Strömungslehre.

(4) Für inkompressible Strömungen gilt $\rho = \text{const}$ und somit $\text{div} \vec{v} = 0$. Anschaulich: In jedes Volumen K fließt ebensoviel hinein wie heraus. Hierzu genügt allgemein bereits $\partial_t \rho + \vec{v} \cdot \text{grad} \rho = 0$. Sehen Sie warum?

Wir haben oben aus einer Integralgleichung (der Massenerhaltung) eine Differentialgleichung abgeleitet (die Kontinuitätsgleichung). Dahinter steckt folgendes einfache und sehr nützliche Prinzip:

Lemma H1A: Verschwindungslemma für Skalarfelder

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Gilt $\int_K f(x) dx = 0$ für jeden (kleinen) kompakten Würfel $K \Subset \Omega$, so folgt $f = 0$.

Aufgabe: Begründen Sie dies mit Hilfe der Stetigkeit von f .

Lösung: Wir wollen $f = 0$ zeigen.

Nehmen wir im Gegenteil an, es gälte $f \neq 0$.

Das bedeutet, es existiert ein Punkt $a \in \Omega$ mit $f(a) \neq 0$.

Wir können $f(a) > 0$ annehmen; der Fall $f(a) < 0$ ist analog.

Sei also $f(a) = 2b > 0$. Da f stetig ist, existiert um a ein kleiner Würfel $K \Subset \Omega$ mit Kantenlänge $\varepsilon > 0$, sodass $f(x) \geq b$ für alle $x \in K$ gilt.

Hieraus folgt die Abschätzung $\int_K f(x) dx \geq b \operatorname{vol}_n(K) = b \varepsilon^n > 0$.

😊 Wenn also $\int_K f(x) dx = 0$ für alle Würfel $K \Subset \Omega$ gilt, so folgt $f = 0$.

Dieses Prinzip gilt ebenso für Flussintegrale von Vektorfeldern:

Lemma H1B: Verschwindungslemma für Vektorfelder

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $\vec{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig. Gilt $\int_S \vec{f}(x) \cdot \vec{n} dS = 0$ für jedes (kleine) achsenparallele Quadrat $S \Subset \Omega$, so folgt $\vec{f} = 0$.

Aufgabe: Begründen Sie dies mit Hilfe der Stetigkeit von \vec{f} .

Lösung: Wir wollen $\vec{f} = 0$ zeigen.

Nehmen wir im Gegenteil an, es gälte $\vec{f} \neq 0$.

Das heißt, es existiert ein Punkt $a \in \Omega$ mit $f_i(a) \neq 0$ für ein $i \in \{1, 2, 3\}$.

Wir können $i = 3$ annehmen; die Fälle $i = 1, 2$ sind analog.

Wir können $f_3(a) > 0$ annehmen; der Fall $f_3(a) < 0$ ist analog.

Sei also $f_3(a) = 2b > 0$. Da \vec{f} und somit $f_1, f_2, f_3: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind, existiert um a ein kleines Quadrat $S \Subset \Omega$ parallel zur (x_1, x_2) -Ebene mit Kantenlänge $\varepsilon > 0$, sodass hierauf $f_3(x) \geq b$ für alle $x \in S$ gilt.

Hieraus folgt die Abschätzung $\int_S \vec{f}(x) \cdot \vec{n} dS \geq b \operatorname{vol}_2(S) = b \varepsilon^2 > 0$.

😊 Wenn $\int_S \vec{f}(x) \cdot \vec{n} dS = 0$ für alle Quadrate $S \Subset \Omega$ gilt, so folgt $\vec{f} = 0$.

Für **inkompressible Strömungen** gilt $\rho = \text{const}$ und somit $\text{div } \vec{v} = 0$.
 Es handelt sich um eine grundlegende **Erhaltungsgleichung**.
 Diese beschreibt allerdings die Bewegung keineswegs vollständig.
 Dazu werden weitere Erhaltungsgrößen wie Impuls / Energie benötigt.
 Die Impulserhaltung führt zu den **Navier–Stokes–Gleichungen**:
 Sei $\vec{\gamma}(t)$ die Bahn eines Teilchens der Strömung, d.h. $\dot{\vec{\gamma}}(t) = \vec{v}(t, \vec{\gamma}(t))$.
 Newtons Gesetz „Kraft = Masse \times Beschleunigung“ besagt hier:

$$\rho \ddot{\vec{\gamma}}(t) = \vec{F}(t, \vec{\gamma}(t))$$

Einsetzen und ausrechnen der linken Seite nach Kettenregel:

$$\frac{d^2 \gamma_i(t)}{dt^2} = \frac{d\dot{\gamma}_i(t)}{dt} = \frac{dv_i(t, \vec{\gamma}(t))}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial \gamma_k}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_k} v_k$$

Dies heißt **substantielle Ableitung** oder auch **konvektive Ableitung**.
 Auf der rechten Seite setzt sich die Kraft \vec{F} zusammen aus der Reibung, dem inneren Druck und äußeren Kräften, zum Beispiel der Schwerkraft.

Massenerhaltung:	$\text{div } \vec{v} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0$
Impulserhaltung:	$\underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial t}}_{\text{Änderung}} + \underbrace{\sum_{k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}}_{\text{Konvektion}} = \underbrace{\nu \Delta v_i}_{\text{Diffusion}} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}}_{\text{interne Kraft}} + \underbrace{f_i}_{\text{extern}}$

Diese $1 + n$ Gleichungen beschreiben die Strömungsgeschwindigkeit $\vec{v}: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ einer Flüssigkeit zur Zeit $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ am Ort $\vec{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ in der Ebene ($n=2$) oder im Raum ($n=3$), mit konstanter Massendichte $\rho \in \mathbb{R}$ und Viskosität $\nu \in \mathbb{R}$, Druck $p: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und äußerer Kraft $\vec{f}: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sie sind zweiter Ordnung und nicht-linear in \vec{v} . Die Impulserhaltung ist Newtons Bewegungsgesetz: Links steht die Beschleunigung, als konvektive Ableitung. H111
 Rechts stehen die Kräfte durch Reibung ν , Druck p und \vec{f} . Gegeben sind hierzu die äußere Kraft \vec{f} sowie die Anfangsgeschwindigkeiten $\vec{v}(0, \vec{x})$ für $\vec{x} \in \Omega$. Gesucht sind die Funktionen \vec{v} und p .
 Im zweidimensionalen Falle ist die Lösbarkeit bewiesen, im dreidimensionalen Falle noch nicht!
 Die Navier–Stokes–Gleichungen illustrieren die Schwierigkeit partieller Differentialgleichungen: Über dreidimensionale Lösungen weiß man allgemein wenig, z.B. sind Existenz und Regularität ungeklärt – trotz größter Anstrengungen. Das Clay Mathematics Institute hat dies im Jahr 2000 als eines von sieben Millenium-Problemen ausgelobt, mit einem Preisgeld von 1 Million Dollar.

Fouriers Wärmeleitungsgleichung

Ziel: Wie berechnen wir den Wärmefluss in einem Körper?



Wärmebilanz für $K = \text{Kaninchen}$ bei $t \in \text{Winter}$

Wir betrachten ein Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ und ein Zeitintervall $I = [t_0, t_1]$ und suchen eine Beziehung zwischen Wärmeleistungsdichte $q: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, Wärmedichte $u: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und Wärmefluss $\vec{f}: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Fouriers Wärmeleitungsgleichung

- Aufgabe:** (1) Sei $K \Subset \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ kompakt, etwa ein Würfel. Formulieren Sie die Wärmebilanz für K in Worten und als Volumen-/Flussintegrale.
 (2) Formen Sie dies um zu einem einzigen Volumenintegral.
 (3) Folgern Sie hieraus die zugehörige Differentialgleichung.
 (4) Vereinfachen Sie schließlich durch die Annahme $\vec{f} = -\kappa \nabla u$.

Lösung: (1) Für jedes Kompaktum $K \Subset \Omega$ gilt die Wärmebilanz:

Von den Wärmequellen in K zugeführte Energie
 = Zuwachs der in K enthaltenen Wärmeenergie
 + Wärmefluss über den Rand von K nach außen

Als Integralgleichung formuliert bedeutet dies:

$$\iiint_K q(t, x) \, dx = \frac{d}{dt} \iiint_K u(t, x) \, dx + \iint_{S=\partial K} \vec{f}(t, x) \cdot \vec{n} \, dS$$

Alle Funktionen seien so oft stetig differenzierbar wie in der folgenden Rechnung benötigt. Ich greife hier schon mal vor: q sei stetig, f einmal stetig diff'bar, u zweimal stetig diff'bar.

Fouriers Wärmeleitungsgleichung

(2) Mit Gauß (G3G) verwandeln wir Flussintegrale in Volumenintegrale:

$$\oiint_{S=\partial K} \vec{f}(t, x) \cdot \vec{n} \, dS \stackrel[\text{G3G}]{\text{Gauß}}{=} \iiint_K \nabla \cdot \vec{f}(t, x) \, dx$$

Dürfen wir die Ableitung unters Integral ziehen? K kompakt, $\partial_t u$ stetig!

$$\frac{d}{dt} \iiint_K u(t, x) \, dx \stackrel[\text{D3C}]{\text{Kpkt}}{=} \iiint_K \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) \, dx$$

Dank Linearität des Integrals erhalten wir ein einziges Volumenintegral:

$$\iiint_K \left[\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + \nabla \cdot \vec{f}(t, x) - q(t, x) \right] dx = 0.$$

(3) Diese lokale Wärmebilanz gilt für jedes Kompaktum $K \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Das gilt genau dann, wenn der (stetige!) Integrand verschwindet (H1A):

$$\partial_t u(t, x) + \nabla \cdot \vec{f}(t, x) = q(t, x)$$

Diese Gleichung gilt überall dort, wo etwas entsteht (q), gespeichert wird (u) und fließt (\vec{f}). Die Wärmeleitungsgleichung heißt deshalb auch Diffusionsgleichung und tritt in vielfältigen Anwendungen auf. Wir werden sie am Ende des Semesters mit Fourier–Theorie lösen können. Spezialfall: Für $q = 0$ sowie $u = \varrho$ und $\vec{f} = \varrho \vec{v}$ erhalten wir erneut die Kontinuitätsgleichung.

Fouriers Wärmeleitungsgleichung

(4) Wärme fließt von warm nach kalt, genauer $\vec{f} = -\kappa \nabla u$. Einsetzen:

$$\partial_t u(t, x) + \nabla \cdot [-\kappa \nabla u(t, x)] = q(t, x)$$

Mit dem Laplace–Operator $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ schreiben wir dies kurz

$$\partial_t u - \kappa \Delta u = q \quad \text{mit} \quad \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2.$$

Physikalische Begründung: Wärme ist (vereinfacht) proportional zur Temperatur T , genauer $u = \varrho c T$ mit Dichte ϱ und Wärmekapazität c . Sie fließt proportional zur Temperaturdifferenz, also $\vec{f} = -\lambda \nabla T$ mit Wärmeleitfähigkeit λ . Demnach gilt $\vec{f} = -\kappa \nabla u$ mit $\kappa := \lambda / (\varrho c)$. [S223](#)
Zur Vereinfachung sei hier die Temperaturleitfähigkeit $\kappa(t, x)$ räumlich konstant und isotrop.

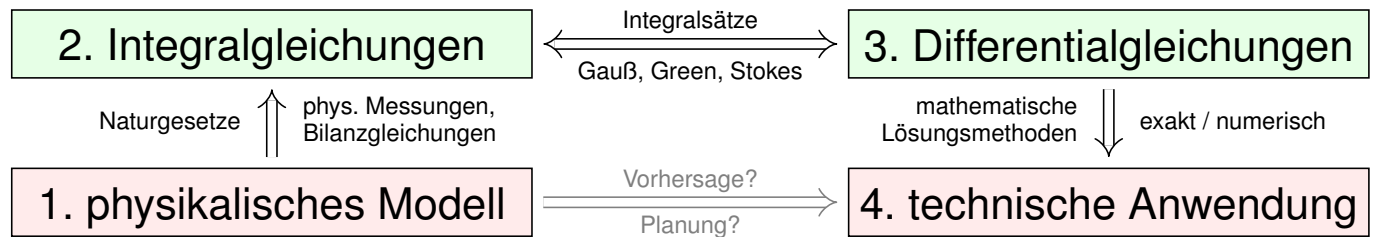
Wir erhalten so Fouriers berühmte **Wärmeleitungsgleichung** (1822):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \Delta u = q \quad \text{mit} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

Dies ist eine lineare partielle Differentialgleichung in u (links) mit Inhomogenität q (rechts). Sie beschreibt, wie sich die Wärme in einem Körper ausbreitet. Joseph Fourier (1768–1830) hat sie in seiner Arbeit *Théorie analytique de la chaleur* 1822 erstmals eingehend untersucht und hierzu die nach ihm benannte Fourier–Theorie entwickelt, mit der wir uns dieses Semester beschäftigen. Gesucht ist u , gegeben sind Anfangswerte und q . Wie sehen die Lösungen aus? Im homogenen Fall ohne Quellen ($q = 0$) können wir die Fundamentallösung angeben! [D516](#)

Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

Was nützen uns solche Gleichungen? Welche Probleme lösen sie?
Typische Anwendungen verlaufen nach dem obigen Muster:



In einigen Paradebeispielen gelingt uns eine **explizite Lösung**:

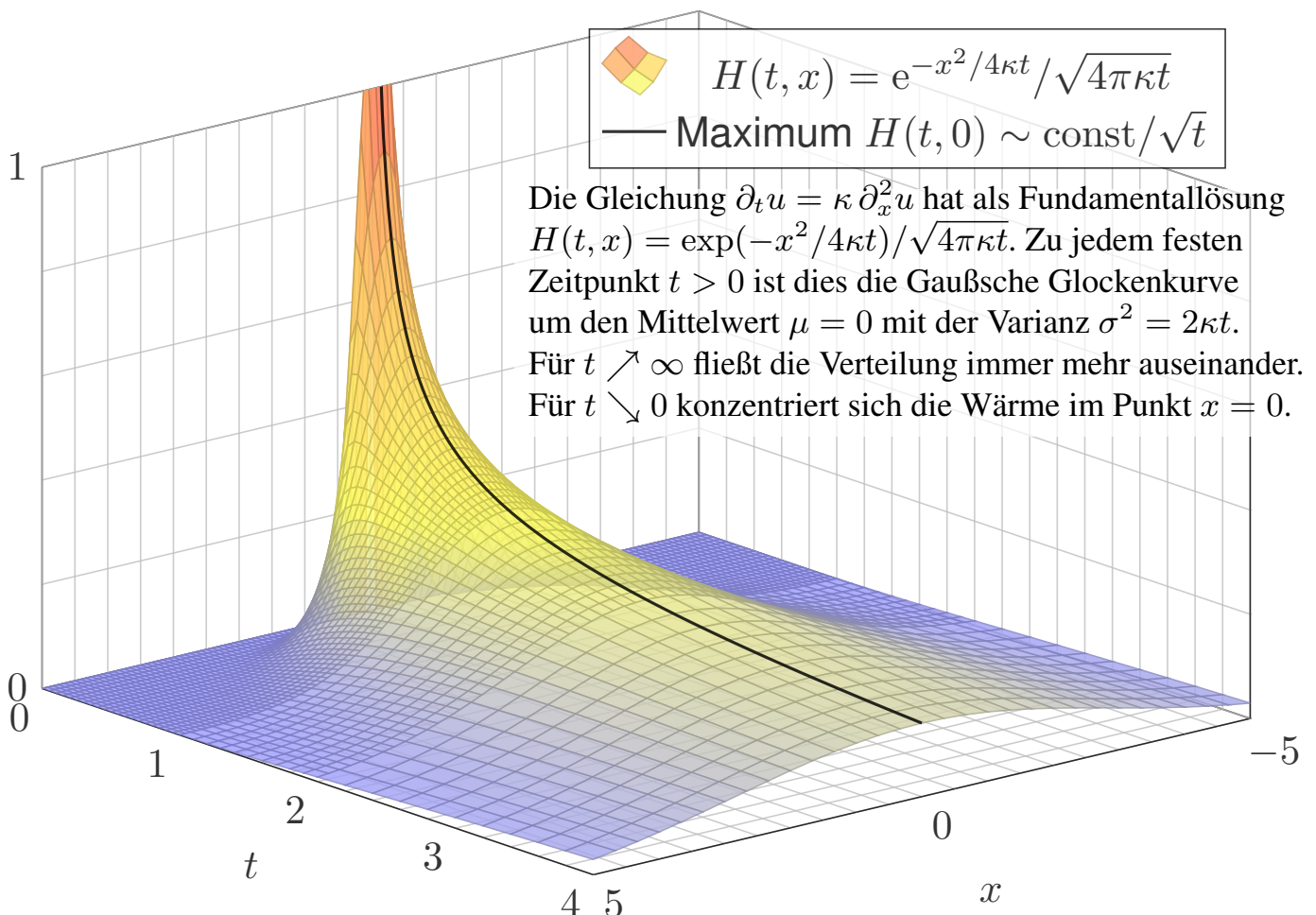
- 😊 exakt, übersichtlich, leicht zu verstehen, zu prüfen und zu nutzen!
- 😞 Solche Lösungen sind leider meist auf einfache Fälle beschränkt.

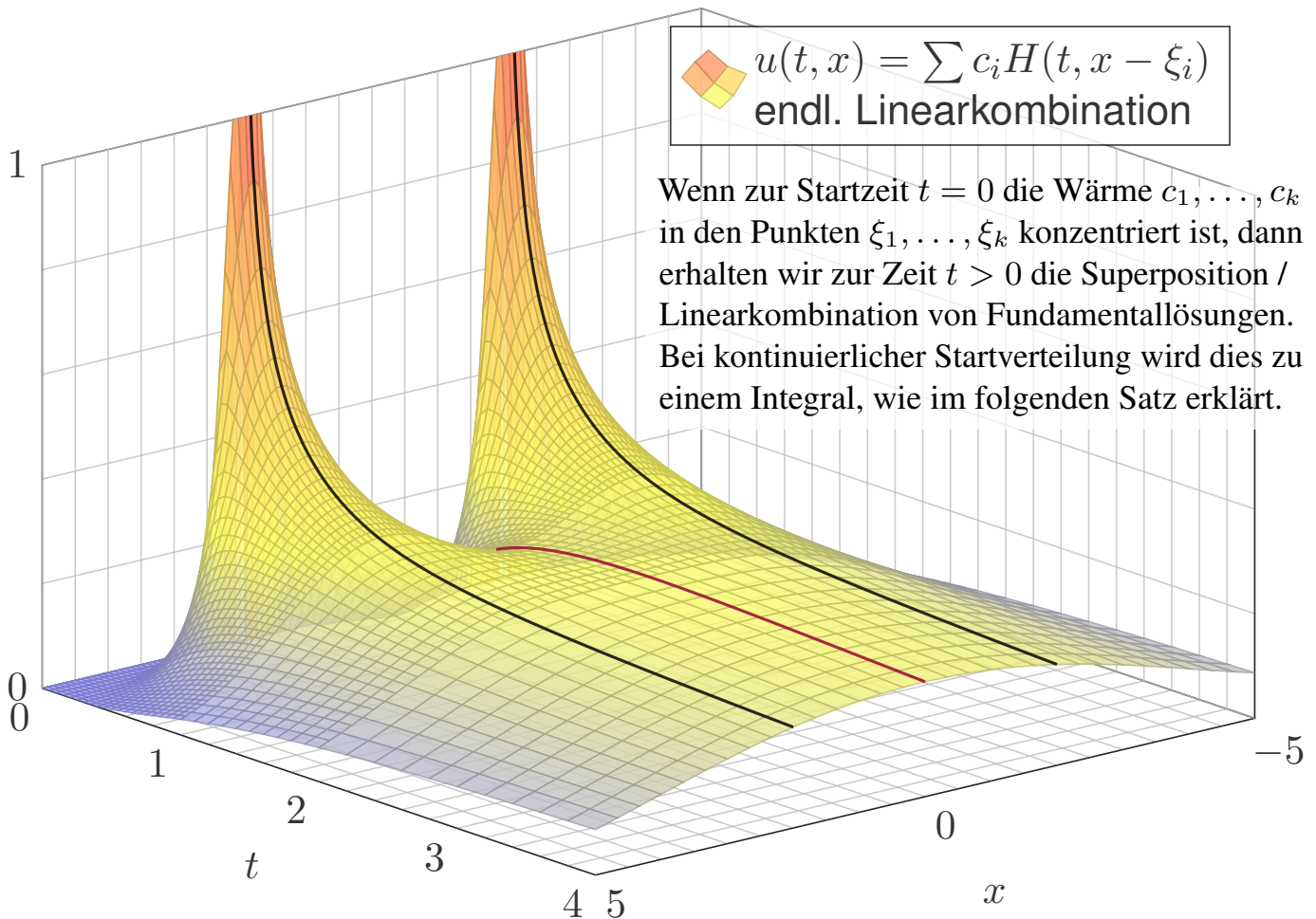
In komplizierteren Fällen bleibt (nur) die **numerische Approximation**:

- 😞 unübersichtlich, schwerer zu verstehen, zu prüfen und zu nutzen.
- 😊 Näherungen sind mit Computerhilfe in vielen Fällen durchführbar!

Auf beiden Wegen leisten Differentialgleichungen die Formulierung und anschließende Lösung des ursprünglichen (physikalischen) Problems. Meist geschieht dies eingebettet in einem Modellierungskreislauf. 105

Lösungen der Wärmeleitungsgleichung





◆ Satz D5D: Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

(1) Die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = \kappa \Delta u$ hat als Fundamentallösung eine auseinanderfließende Glockenkurve, den **Wärmeleitungskern**

$$H : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : H(t, x) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi\kappa t})^n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\kappa t}\right).$$

Die Konstanten sichern die Normierung $\int_{x \in \mathbb{R}^n} H(t, x) dx = 1$ für $t > 0$.

(2) Für $t = 0$ sei die Wärmeverteilung $u_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vorgegeben, $u_0 \in C_b$. Für $t > 0$ erhalten wir die Lösung durch **Superposition** (Faltung D5E):

$$u : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : u(t, x) = \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} H(t, x - \xi) u_0(\xi) d\xi.$$

Sie erfüllt $\partial_t u = \kappa \Delta u$ für $t > 0$ sowie $\lim_{t \searrow 0} u(t, x) = u_0(x)$.

(3) Aus $u(0, x) = \sin(kx)$ für $t = 0$ folgt $u(t, x) = e^{-k^2\kappa t} \sin(kx)$ für $t \geq 0$.
 Aus $u(0, x) = \sum_k c_k \sin(kx)$ folgt $u(t, x) = \sum_k c_k e^{-k^2\kappa t} \sin(kx)$ für $t \geq 0$.
 Die Wärmeleitung glättet: Hohe Frequenzen klingen extrem schnell ab.

Für $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ untersuchen wir die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) &= \kappa \partial_x^2 u(t, x) && \text{für alle } t \geq 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= u_0(x) && \text{Anfangswerte für } t = 0. \end{aligned}$$

Aufgabe: Approximieren Sie die Differentialquotienten ∂_t sowie ∂_x und ∂_x^2 durch Differenzenquotienten zwecks numerischer Lösung. **Lösung:**

$$\begin{aligned} \partial_x u(t, x) &\approx \frac{u(t, x + \Delta x/2) - u(t, x - \Delta x/2)}{\Delta x} \\ \partial_x^2 u(t, x) &\approx \frac{\partial_x u(t, x + \Delta x/2) - \partial_x u(t, x - \Delta x/2)}{\Delta x} \\ &\approx \frac{u(t, x - \Delta x) - 2u(t, x) + u(t, x + \Delta x)}{(\Delta x)^2} \end{aligned}$$

Hier sind $\Delta x > 0$ und $\Delta t > 0$ Schrittweiten, nicht der Laplace-Operator. Die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = \kappa \partial_x^2 u$ besagt dann näherungsweise:

$$u(t + \Delta t, x) \approx u(t, x) + \frac{\kappa \Delta t}{(\Delta x)^2} \left[u(t, x - \Delta x) - 2u(t, x) + u(t, x + \Delta x) \right]$$

Finite-Differenzen-Methode: Diskretisierung

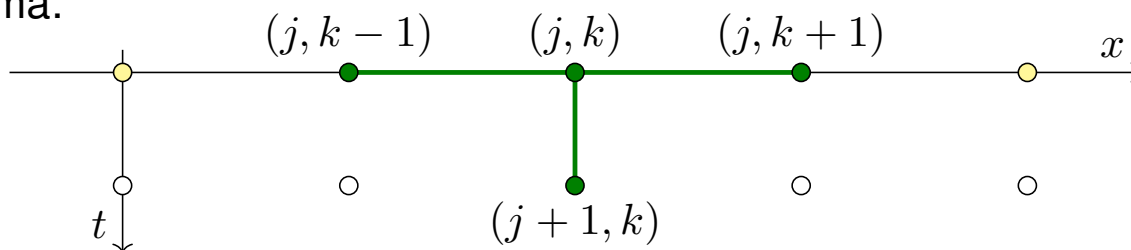
Gegeben sei für $t = 0$ die (diskretisierte) Startverteilung

$$v(0, x) = v_0(x) \quad \text{mit} \quad v_0 : \mathbb{Z}\Delta x \rightarrow \mathbb{R}.$$

Wir berechnen die (diskretisierte) Verteilung $v : \mathbb{N}\Delta t \times \mathbb{Z}\Delta x \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$v(t + \Delta t, x) := v(t, x) + \frac{\kappa \Delta t}{(\Delta x)^2} \left[v(t, x - \Delta x) - 2v(t, x) + v(t, x + \Delta x) \right]$$

Schema:



Mit dieser einfachen Methode können Sie den Wärmefluss für $t > 0$ näherungsweise bestimmen: Aus der Startverteilung v_0 zur Zeit $t = 0$ berechnen Sie die Verteilung v_1 zur Zeit $t = 1\Delta t$, daraus v_2 zur Zeit $t = 2\Delta t$ usw. Die Methode ist wenig aufwändig, außerdem direkt und explizit, das heißt, es müssen keine Gleichungssysteme gelöst werden. Sie ist leicht zu implementieren und wird häufig auf die Wärmeleitungsgleichung und ähnliche Diffusionsprobleme angewendet. In der Numerik lernen Sie noch weit bessere Verfahren, diese sind raffinierter, aber aufwändiger.

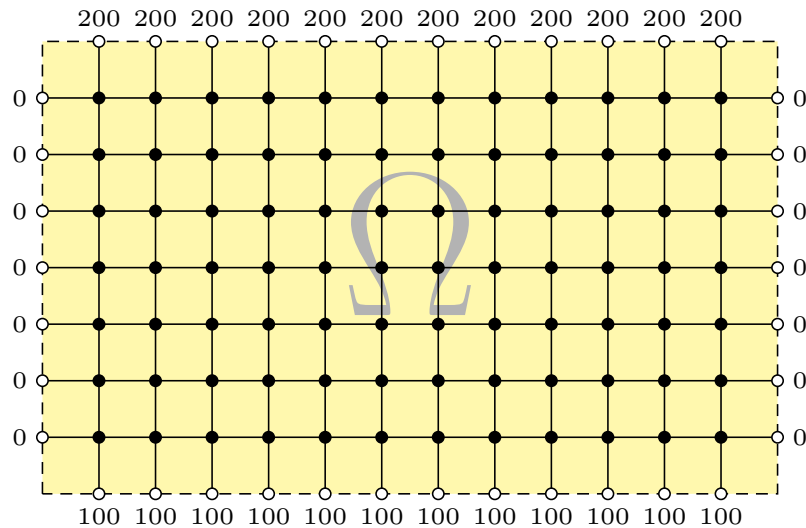
Aufgabe: Simulieren Sie den Wärmefluss auf einem kreisförmigen Kupferdraht der Länge $L = 1$ mit $\kappa = 0.02$ und $\Delta t = 0.1$ und $\Delta x = 0.1$. Zur Zeit $t = 0$ sei die Wärmemenge 1 im Punkt $x = 0.5$ konzentriert.

- (1) Programmieren Sie die Rechnung. (Tabellenkalkulation genügt; Sie finden dieses Beispiel unter eiserm.de/lehre/HM3/Irrfahrt.ods.)
- (2) Erwarten Sie die Erhaltung der Gesamtwärmemenge? Gilt dies?
- (3) Welche Verteilung erwarten Sie für große Werte von t ? Gilt dies?

Lösung: (1) Sie finden die Tabelle auf der nächsten Seite. (2) Das ist physikalisch plausibel. Glücklicherweise erhält unser Algorithmus in jedem Schritt die Gesamtwärme! (3) Wir erwarten die Gleichverteilung: In jedem Punkt $x \in \{0.0, 0.1, \dots, 0.9\}$ gilt $v(t, x) \rightarrow 0.1$ für $t \rightarrow \infty$.

😊 Die Rechnung lässt sich auch stochastisch interpretieren T445 als zufällige Irrfahrt (engl. *random walk*) mit Parameter $p := \kappa \Delta t / (\Delta x)^2$. Zur Zeit t befinden Sie sich im Punkt x mit Wkt $v(t, x)$. Im Zeitschritt Δt gehen Sie jeweils mit Wkt p einen Schritt $\pm \Delta x$ nach rechts / links, mit Wkt $1 - 2p$ bleiben Sie stehen. Die Diffusion der Wahrscheinlichkeiten folgt dann genau der obigen diskreten Gleichung. Siehe die Tabelle!

$x =$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$t=0.0$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.200	0.600	0.200	0.000	0.000	0.000
0.2	0.000	0.000	0.000	0.040	0.240	0.440	0.240	0.040	0.000	0.000
0.3	0.000	0.000	0.008	0.072	0.240	0.360	0.240	0.072	0.008	0.000
0.4	0.000	0.002	0.019	0.093	0.230	0.312	0.230	0.093	0.019	0.002
0.5	0.001	0.005	0.030	0.106	0.219	0.279	0.219	0.106	0.030	0.005
0.6	0.002	0.009	0.040	0.113	0.209	0.255	0.209	0.113	0.040	0.009
0.7	0.005	0.014	0.049	0.118	0.199	0.237	0.199	0.118	0.049	0.014
0.8	0.009	0.019	0.056	0.120	0.190	0.221	0.190	0.120	0.056	0.019
0.9	0.013	0.024	0.061	0.121	0.182	0.209	0.182	0.121	0.061	0.024
1.0	0.017	0.029	0.066	0.121	0.175	0.198	0.175	0.121	0.066	0.029
1.1	0.022	0.034	0.070	0.121	0.169	0.189	0.169	0.121	0.070	0.034
1.2	0.027	0.039	0.073	0.120	0.164	0.181	0.164	0.120	0.073	0.039
1.3	0.032	0.043	0.076	0.120	0.159	0.174	0.159	0.120	0.076	0.043
1.4	0.036	0.047	0.078	0.119	0.154	0.168	0.154	0.119	0.078	0.047
1.5	0.041	0.051	0.080	0.117	0.150	0.162	0.150	0.117	0.080	0.051
1.6	0.045	0.055	0.082	0.116	0.146	0.157	0.146	0.116	0.082	0.055
1.7	0.049	0.058	0.083	0.115	0.142	0.153	0.142	0.115	0.083	0.058
1.8	0.053	0.061	0.085	0.114	0.139	0.148	0.139	0.114	0.085	0.061
1.9	0.056	0.064	0.086	0.113	0.136	0.145	0.136	0.113	0.086	0.064
2.0	0.059	0.067	0.087	0.112	0.133	0.141	0.133	0.112	0.087	0.067



Wir betrachten ein Bauteil $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aus wärmeleitendem Material. An den Rändern liegen die Temperaturen 0°C , 100°C , 200°C an.

Aufgabe: (1) Diskretisieren Sie wie oben die Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u(t, x, y) = \kappa [\partial_x^2 u(t, x, y) + \partial_y^2 u(t, x, y)], \quad u(0, x, y) = u_0(x, y).$$

(2) Lösen Sie die Gleichung numerisch! Was ist der stationäre Zustand? Hierzu sei $\Delta x = \Delta y$, und Δt wählen wir so, dass $\kappa \Delta t / (\Delta x)^2 = 1/4$ gilt.

Lösung: (1) Wir diskretisieren und nähern die partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} \partial_x u(t, x, y) &\approx \frac{u(t, x + \Delta x/2, y) - u(t, x - \Delta x/2, y)}{\Delta x} \\ \partial_x^2 u(t, x, y) &\approx \frac{\partial_x u(t, x + \Delta x/2, y) - \partial_x u(t, x - \Delta x/2, y)}{\Delta x} \\ &\approx \frac{u(t, x - \Delta x, y) - 2u(t, x, y) + u(t, x + \Delta x, y)}{(\Delta x)^2} \end{aligned}$$

Diese Näherungen kennen wir bereits. [H121](#) Ebenso verfahren wir für ∂_y^2 . Die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = \kappa [\partial_x^2 u + \partial_y^2 u]$ nähern wir durch v :

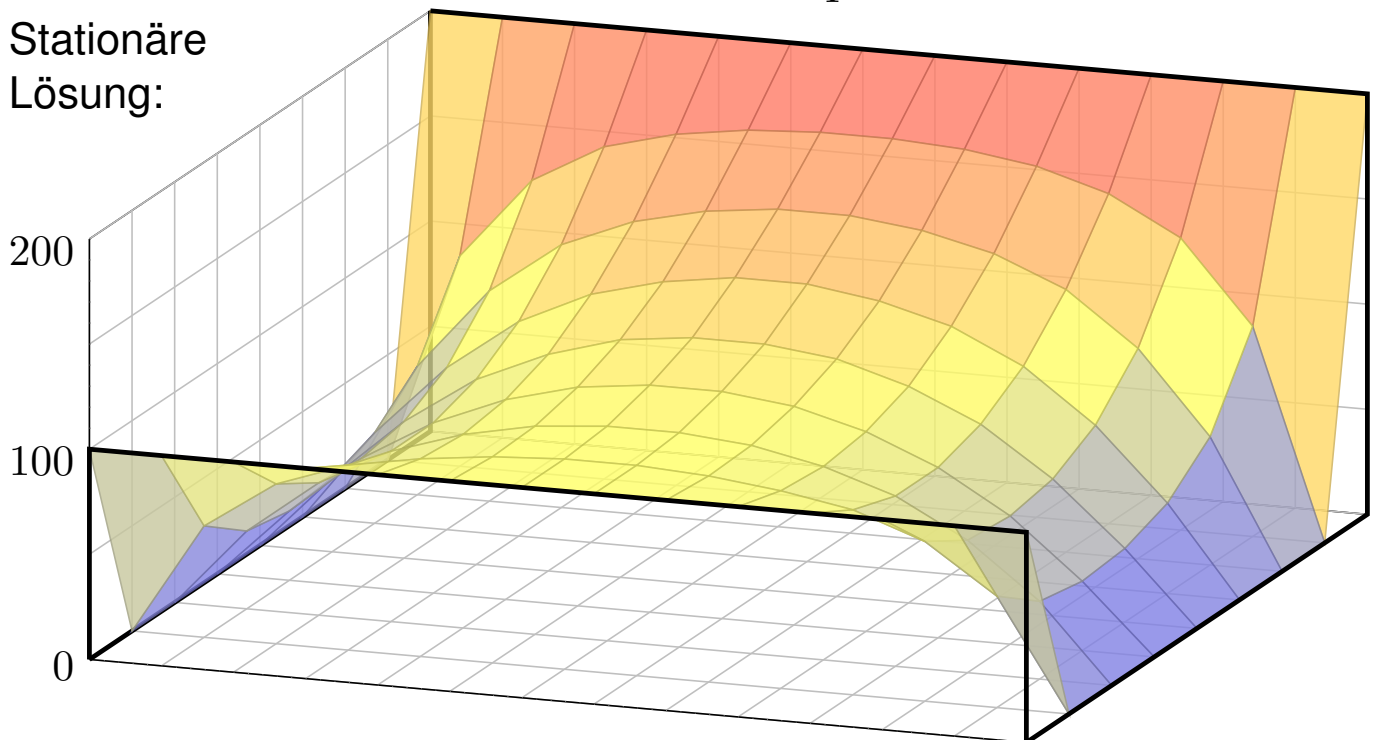
$$\begin{aligned} v(t + \Delta t, x, y) &= v(t, x, y) + \Delta t \partial_t v(t, x, y) \\ &= v(t, x, y) + \frac{\kappa \Delta t}{(\Delta x)^2} \left[v(t, x - \Delta x, y) - 2v(t, x, y) + v(t, x + \Delta x, y) \right] \\ &\quad + \frac{\kappa \Delta t}{(\Delta y)^2} \left[v(t, x, y - \Delta y) - 2v(t, x, y) + v(t, x, y + \Delta y) \right] \end{aligned}$$

Hier sind $\Delta t, \Delta x, \Delta y > 0$ Schrittweiten, nicht der Laplace-Operator.

Im konkreten Beispiel arbeiten wir mit $(x, y) \in \{1, \dots, 12\} \times \{1, \dots, 7\}$, Zeitschritt $\Delta t = 1$ und $\kappa = 1/4$. Wir erhalten die Mittelwerteigenschaft:

$$v(t+1, x, y) = \frac{v(t, x-1, y) + v(t, x+1, y) + v(t, x, y-1) + v(t, x, y+1)}{4}$$

Stationäre
Lösung:



😊 Ausgehend vom gegebenenem Startzustand $v(0, x, y)$ können wir so die zeitliche Entwicklung berechnen. Nochmal zur Betonung: Die diskrete Lösung $v(t, x, y)$ ist nur eine grobe Näherung der kontinuierlichen Lösung $u(t, x, y)$. In der Numerik erfahren Sie mehr zu Fehlerschranken und noch besseren Methoden. Viele davon stehen als Softwarebibliotheken zur Verfügung.

😊 Unsere Näherung ist auf den folgenden Seiten numerisch illustriert. Die Rechnung beginnt mit einer (beliebigen!) Startverteilung zur Zeit $t = 0$ und konvergiert recht schnell gegen die (eindeutige!) stationäre Lösung: Zwischen $t = 50$ und $t = 80$ ist kaum noch ein Unterschied. Das ist für den Computer einfach und schnell zu rechnen; eine Tabellenkalkulation genügt.

😊 Die stationäre Lösung befindet sich im Gleichgewicht, erfüllt also die **Mittelwerteigenschaft**

$$\bar{v}(x, y) = \frac{\bar{v}(x-1, y) + \bar{v}(x+1, y) + \bar{v}(x, y-1) + \bar{v}(x, y+1)}{4}$$

😊 Der stationäre Zustand \bar{v} lässt sich auch stochastisch interpretieren [T445] als Ergebnis einer zufälligen Irrfahrt (engl. *random walk*): Auf einem Spielfeld $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$ ziehen Sie jeweils mit Wkt $p := \kappa \Delta t / (\Delta x)^2$, hier $p = 1/4$, nach links / rechts / oben / unten. Das Spiel endet mit den Gewinnen am Rand. Die Gewinnerwartung auf jedem Feld (x, y) ist der Wert $\bar{v}(x, y)$.

😊 Dieses einfache Beispiel illustriert das allgemeine und überall wichtige **Dirichlet-Problem**. Die Berechnung von \bar{v} führt zu einem linearen Gleichungssystem mit $7 \times 12 = 84$ Unbekannten! Für diese finden wir genau 84 Gleichungen. Die Gleichgewichtslösung \bar{v} ist tatsächlich eindeutig, und die iterative Berechnung als Wärmefluss liefert eine erstaunlich gute numerische Methode.

Zeitliche Entwicklung zum stationären Zustand

$t=50$	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	
000	099	138	156	164	169	171	171	169	164	156	138	099	000	
000	060	098	121	134	141	145	145	141	134	121	098	060	000	
000	042	074	097	111	119	123	123	119	111	097	074	042	000	
000	034	061	082	096	104	108	108	104	096	082	061	034	000	
000	032	057	076	088	095	099	099	095	088	076	057	032	000	
000	036	061	077	087	093	096	096	093	087	077	061	036	000	
000	053	075	086	092	095	097	097	095	092	086	075	053	000	
	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100		

$t=80$	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	
000	100	140	158	167	172	174	174	172	167	158	140	100	000	
000	061	101	125	139	147	151	151	147	139	125	101	061	000	
000	044	078	102	118	127	132	132	127	118	102	078	044	000	
000	036	066	088	103	113	117	117	113	103	088	066	036	000	
000	034	061	081	095	103	107	107	103	095	081	061	034	000	
000	038	064	082	093	099	102	102	099	093	082	064	038	000	
000	054	076	088	095	098	100	100	098	095	088	076	054	000	
	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100		

Zeitliche Entwicklung zum stationären Zustand

Gegeben sind meist Anfangswerte $u(0, x) = u_0(x)$ für $t = 0$ und $x \in \Omega$ sowie Randwerte $u(t, x)$ für alle $t > 0$ und $x \in \partial\Omega$, kurz ARWPproblem. Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u(t, x) = \kappa \Delta u(t, x)$ für alle $t > 0$ und $x \in \Omega$. Stationär $\partial_t u = 0 \Leftrightarrow$ harmonisch $\Delta u = 0 \Leftrightarrow$ Mittelwerteigenschaft

Wir können die stationäre Verteilung exakt bestimmen dank Trennung der Variablen und Fourier–Theorie, siehe R201 und die Graphik R408. Anfangs- und Randwertprobleme (kurz ARWP) werden wir in Kapitel S ausführlich diskutieren und mit Fourier–Theorie lösen, siehe Satz S3D.

Die Wärmeleitung glättet: Hohe Frequenzen klingen extrem schnell ab. Lässt sich die Wärmeleitungsgleichung umkehren, also zurückrechnen? Theoretisch ja, praktisch nein. Gegeben ist statt u_0 zur Zeit $t = 0$ nun u_T zu einem Zeitpunkt $T > 0$, und gesucht ist die/eine Startverteilung u_0 .

Die rückwärtslaufende Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = -\kappa \partial_x^2 u$ entsteht durch Zeitumkehr $t \mapsto -t$. Sie glättet nicht, sie raut auf: Winzig kleine Störungen in u_T führen zu explosionsartigen Störungen in u_0 . Dieses Umkehrproblem ist daher schlecht gestellt (engl. *ill posed*), siehe R221.

Wir betrachten die **Wärmeleitungsgleichung** ohne Quellen:

$$\partial_t u = \kappa \Delta u \quad \text{mit} \quad \Delta = \partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2$$

Für **stationäre Lösungen** gilt $\partial_t u = 0$, also $\Delta u = 0$.

Definition H1c: harmonische Funktion

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine (zweimal stetig differenzierbare) Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **harmonisch**, wenn sie die Gleichung $\Delta u = 0$ erfüllt.

Dies ist die **homogene Potentialgleichung** oder **Laplace–Gleichung**. Sie wird in vielen technisch-physikalischen Anwendungen genutzt.

Bei mangelnder Differenzierbarkeit genügt $u \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$; wir interpretieren die Ableitung $\Delta = \partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2$ dann im Distributionensinne. D529

Diskretisiert erhalten wir für $v : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die **Mittelwerteigenschaft**

$v(x) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n v(x + e_k) + v(x - e_k)$, für $n = 2$ ausgeschrieben:

$$v(x, y) = \frac{v(x-1, y) + v(x+1, y) + v(x, y-1) + v(x, y+1)}{4}$$

Zur Illustration skizziere ich hier eine Anwendung aus der Mechanik: Wir betrachten Massenpunkte in $(x, y) \in (\mathbb{Z}h)^2$ mit Höhe $u(x, y) \in \mathbb{R}$. Jeder ist durch gleich starke Federn mit seinen Nachbarn verbunden. Bei kleinen Auslenkungen ist die Rückstellkraft jeder Feder proportional zur Differenz der beiden Höhen. In der Summe erhalten wir also:

$$\begin{aligned} m \partial_t^2 u(t, x, y) = & + \kappa \left[u(t, x-h, y) - 2u(t, x, y) + u(t, x+h, y) \right] \\ & + \kappa \left[u(t, x, y-h) - 2u(t, x, y) + u(t, x, y+h) \right] \end{aligned}$$

Es gilt: Ruhelage = Kräftegleichgewicht \approx Mittelwerteigenschaft!
Stationäre Lösungen sind demnach harmonisch (hier diskret).

Im Grenzübergang $h \rightarrow \infty$ erhalten wir die **Wellengleichung**:

$$\partial_t^2 u = c^2 \Delta u \quad \text{mit} \quad \Delta = \partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2$$

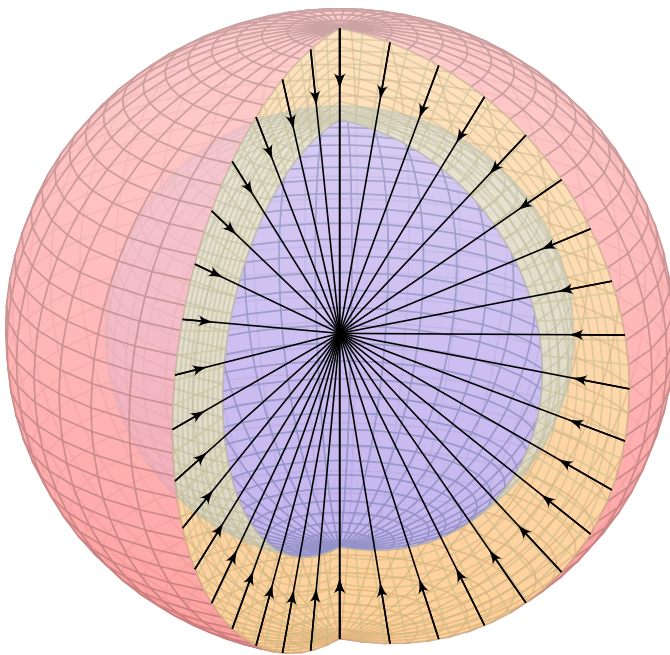
Auch hier gilt: Stationäre Lösungen sind harmonisch. Allgemeiner führt Kräftegleichgewicht zu Minimalflächen, wie im Folgenden illustriert.



Das Zeltdach des Olympiastadions in München ist eine Minimalfläche. Es beruht auf Ideen von Frei Paul Otto (1925–2015) vom Institut für Leichte Flächentragwerke der Universität Stuttgart.



Ein halbes Jahrhundert später werden solche Konstruktionen auf dem Computer berechnet: Von der Seifenblase zur Kelchstütze, nach Ideen von Frei Otto. youtu.be/_LpP6bdxFPU



Ziel: Wie berechnet man das Gravitationsfeld eines Planeten?

Wir betrachten das Gravitationsfeld einer Masse $m = 1$ im Punkt $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$:

$$\vec{f}: \mathbb{R}^3 \setminus \{y\} \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\vec{f}(\vec{x}) = m \frac{\vec{y} - \vec{x}}{|\vec{y} - \vec{x}|^3}.$$

Das Feld \vec{f} ist radial auf den Punkt \vec{y} gerichtet und klingt ab mit $1/r^2$.

Das bringt bemerkenswerte Eigenschaften mit sich!

Aufgabe: (1) Berechnen Sie die Divergenz des Vektorfeldes \vec{f} ,
 (2) das Flussintegral von \vec{f} über die Sphäre $S = \partial B(\vec{y}, r)$ und
 (3) über den Rand ∂D eines beliebigen Kompaktums D .
 Wie lässt sich der Integralsatz von Gauß hier nutzen?

Lösung: (1) Auf ganz $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{y}\}$ finden wir $\operatorname{div} \vec{f} = 0$, denn

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{y_i - x_i}{|y - x|^3} = \frac{-1}{|y - x|^3} + \frac{3(y_i - x_i)^2}{|y - x|^5} \Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = 0.$$

(2) Den Fluss über die Sphäre $\partial B(\vec{y}, r)$ berechnen wir dank Symmetrie:

$$\int_{\partial B(\vec{y}, r)} \vec{f} \cdot dS = \int_{\partial B(\vec{y}, r)} \vec{f} \cdot \vec{n}_S |dS| = \int_{\partial B(\vec{y}, r)} \frac{-1}{r^2} |dS| = -4\pi$$

(3) Für jedes Kompaktum D mit stückweise glattem Rand ∂D folgt

$$\int_{\partial D} \vec{f} \cdot dS = \begin{cases} 0 & \text{für } \vec{y} \notin D \\ -4\pi & \text{für } \vec{y} \in \overset{\circ}{D} \end{cases} = -4\pi \mathbf{I}_{\overset{\circ}{D}}(\vec{y})$$

Nachrechnen dank Gauß: (1) Das Feld $\vec{f}(\vec{x})$ ist divergenzfrei, nur der Pol im Punkt $\vec{x} = \vec{y}$ wirkt als Quelle bzw. Senke. Das ist die räumliche Entsprechung des ebenen Residuensatzes.

(2) Dank Kugelsymmetrie gelingt die Integration mühelos, sogar ohne Parametrisierung!

(3) Im Falle $\vec{y} \notin D$ gilt $\int_{\partial D} \vec{f} \cdot dS = \int_D \operatorname{div}(\vec{f}) d\vec{x} = 0$ dank (1). Im Falle $\vec{y} \in \overset{\circ}{D}$ wählen wir eine kleine Kugel $\overset{\circ}{B}(\vec{y}, r) \subseteq \overset{\circ}{D}$. Mit D ist auch $E = D \setminus B(\vec{y}, r)$ kompakt mit stückweise glattem Rand $\partial E = \partial D \cup -\partial B(\vec{y}, r)$. Wegen $\vec{y} \notin E$ gilt $\int_{\partial E} \vec{f} \cdot dS = \int_E \operatorname{div}(\vec{f}) d\vec{x} = 0$ dank (1) und somit $\int_{\partial D} \vec{f} \cdot dS = \int_{\partial B(\vec{y}, r)} \vec{f} \cdot dS = -4\pi$ dank (2).

Das **Newton–Potential** \square_{D437} einer Masse m im Punkt $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$ ist

$$u : \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{y}\} \rightarrow \mathbb{R} : u(\vec{x}) = \frac{m}{|\vec{y} - \vec{x}|}.$$

(Gravitationskonstante und etwaige Vorzeichen lasse ich hier weg.)

Ein Planet ist keine Punktmasse: Wir betrachten eine Massendichte $\varrho : K \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Kompaktum $K \subseteq \mathbb{R}^3$. Außerhalb ist das Potential

$$u : \mathbb{R}^3 \setminus K \rightarrow \mathbb{R} : u(\vec{x}) = \int_{\vec{y} \in K} \frac{\varrho(\vec{y})}{|\vec{y} - \vec{x}|} d\vec{y}.$$

Das ist die kontinuierliche Superposition (Faltung) von Punktpotentialen. Gleiches gilt für das elektrische Potential einer Ladungsverteilung und ebenso in zahlreichen ähnlichen Anwendungen der Potentialtheorie.

- Aufgabe:** (1) Berechnen Sie jeweils das **Gravitationsfeld** $\vec{f} = \text{grad } u$.
 (2) Ist das Potential u auf $\mathbb{R}^3 \setminus K$ harmonisch, gilt hier also $\Delta u = 0$?
 (3) Warum / Dürfen Sie hier die Ableitungen unters Integral ziehen?

Lösung: Für eine Punktmasse rechnen wir Δu wie oben explizit aus:

$$u(\vec{x}) = \frac{m}{|\vec{y} - \vec{x}|} \Rightarrow \vec{f}(\vec{x}) = \text{grad } u(\vec{x}) = m \frac{\vec{y} - \vec{x}}{|\vec{y} - \vec{x}|^3} \Rightarrow \Delta u = \text{div } \vec{f} = 0.$$

(1) Für eine kontinuierliche Dichte $\varrho : K \rightarrow \mathbb{R}$ erhalten wir

$$u : \mathbb{R}^3 \setminus K \rightarrow \mathbb{R} : u(\vec{x}) = \int_{\vec{y} \in K} \frac{\varrho(\vec{y})}{|\vec{y} - \vec{x}|} d\vec{y}.$$

Das zugehörige Gravitationsfeld $f = \text{grad } u$ ist dann (dank Satz D3c)

$$\vec{f}(\vec{x}) = \text{grad} \int_K \frac{\varrho(\vec{y})}{|\vec{y} - \vec{x}|} d\vec{y} \stackrel{D3c}{=} \int_K \text{grad} \frac{\varrho(\vec{y})}{|\vec{y} - \vec{x}|} d\vec{y} = \int_K \frac{\vec{y} - \vec{x}}{|\vec{y} - \vec{x}|^3} \varrho(\vec{y}) d\vec{y}.$$

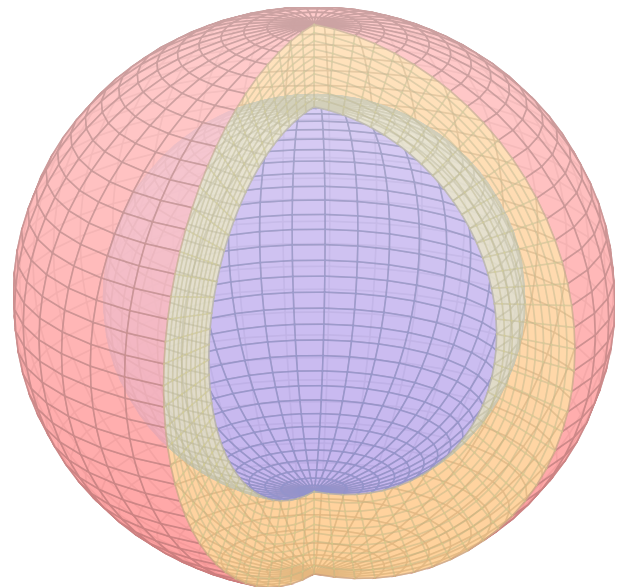
(2) Somit ist das Newton–Potential u auf $\mathbb{R}^3 \setminus K$ harmonisch, denn

$$\Delta u(\vec{x}) = \Delta \int_K \frac{\varrho(\vec{y})}{|\vec{y} - \vec{x}|} d\vec{y} \stackrel{D3c}{=} \int_K \Delta \frac{\varrho(\vec{y})}{|\vec{y} - \vec{x}|} d\vec{y} = \int_K 0 d\vec{y} = 0.$$

(3) Ableitungen und Integral vertauschen, da der Integrationsbereich K kompakt ist und der Integrand in $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus K$ stetig differenzierbar (D3c).

Wir betrachten die Kugelschale

$K = \{ \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \mid r_0 \leq |\vec{y}| \leq r_1 \}$
 mit den Radien $0 \leq r_0 < r_1$ und
 konstanter Massendichte $\rho \in \mathbb{R}$.



Aufgabe: (1) Berechnen Sie das
 Gravitationspotential $u(\vec{x})$ im Punkt
 $\vec{x} = (0, 0, R)$ mittels Kugelkoordinaten
 $\vec{y} = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$.

(2) Welches Gravitationsfeld $\vec{f} = \text{grad } u$ herrscht außerhalb ($|\vec{x}| \geq r_1$)?
 Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Potential einer Punktmasse!

(3) Welches Gravitationsfeld $\vec{f} = \text{grad } u$ herrscht innerhalb ($|\vec{x}| \leq r_0$)?
 Wie interpretieren Sie dieses bemerkenswerte Ergebnis geometrisch?

Hinweis: Der Ansatz ist klar, die Rechnung ist aber nicht leicht. Man
 berechne $|\vec{y} - \vec{x}|^2 = r^2 - 2rR \cos \theta + R^2$ und substituiere $t = -\cos \theta$.

Lösung: (1) Zu berechnen ist das Integral

$$u(\vec{x}) = \int_{\vec{y} \in K} \frac{\rho}{|\vec{y} - \vec{x}|} d\vec{y}.$$

Für die Integration über $\vec{y} \in K$ nutzen wir Kugelkoordinaten

$$\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) =: \Phi(r, \theta, \varphi).$$

Wir kennen die Funktionaldeterminante $\det \Phi' = r^2 \sin \theta$, also

$$d(y_1, y_2, y_3) = r^2 \sin \theta d(r, \theta, \varphi).$$

Wegen Rotationssymmetrie hängt $u(\vec{x})$ nur vom Radius $|x|$ ab.

Es genügt daher, $u(\vec{x})$ etwa längs der z -Achse zu berechnen.

Wir fixieren deshalb den Punkt $\vec{x} = (0, 0, R)$ mit $R = |x| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Der Abstand $|\vec{y} - \vec{x}|$ ist in dieser Parametrisierung

$$\begin{aligned} |\vec{y} - \vec{x}|^2 &= r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + (r \cos \theta - R)^2 \\ &= r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta - 2rR \cos \theta + R^2 \\ &= r^2 - 2rR \cos \theta + R^2. \end{aligned}$$

Damit berechnen wir unser Integral in Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} u(\vec{x}) &= \int_{\vec{y} \in K} \frac{\varrho}{|\vec{y} - \vec{x}|} dy \\ &= \int_{r=r_0}^{r_1} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\varrho r^2 \sin \theta}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta}} d\varphi d\theta dr \\ &= \int_{r=r_0}^{r_1} 2\pi \varrho r^2 \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin \theta}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta}} d\theta dr \end{aligned}$$

Das innere Integral berechnen wir mit $t = -\cos \theta$ und $dt = \sin \theta d\theta$ zu

$$\begin{aligned} \int_{t=-1}^1 \frac{1}{\sqrt{r^2 + R^2 + 2rRt}} dt &= \left[\frac{1}{rR} \sqrt{r^2 + R^2 + 2rRt} \right]_{t=-1}^1 \\ &= \frac{1}{rR} \left[\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR} - \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR} \right] \\ &= \frac{1}{rR} (|r + R| - |r - R|) = \begin{cases} 2/r & \text{für } r \geq R, \\ 2/R & \text{für } r \leq R. \end{cases} \end{aligned}$$

Gravitationspotential einer Kugelschale

(2) Außerhalb der Kugelschale K gilt $R \geq r_1$ und somit

$$u(\vec{x}) = \frac{1}{R} \int_{r=r_0}^{r_1} 4\pi \varrho r^2 dr = \frac{M}{R}.$$

Dies ist das Potential einer punktförmigen Masse M im Ursprung. Außerhalb K herrscht das Gravitationsfeld $\vec{f} = \text{grad } u = M\vec{x}/|\vec{x}|^3$.

(3) Innerhalb der Kugelschale K gilt $R \leq r_0$ und somit

$$u(\vec{x}) = \int_{r=r_0}^{r_1} 4\pi \varrho r dr = \text{const.}$$

Dieses Potential hängt hier nicht weiter von \vec{x} ab. Somit verschwindet das Gravitationsfeld $\vec{f} = \text{grad } u = 0$ im Inneren der Kugelschale.

Geometrische Erklärung: Auf jeden inneren Punkt wirken entgegengesetzte Kräfte gegenüberliegender kleiner Flächenstücke im Abstand a bzw. b . Die Fläche wächst mit a^2 bzw. b^2 , die Kraft nimmt ab mit $1/a^2$ bzw. $1/b^2$, also sind beide Kräfte gleich groß und heben sich auf.

Bemerkung: Für den verbleibenden Fall $r_0 < R < r_1$ zählt nur die Masse $m = \frac{4}{3}\pi \varrho (R^3 - r_0^3)$ der Kugelschale vom Radius r_0 bis zu R . H147

Die Massendichte $\varrho: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ erzeugt das Gravitationsfeld

$$\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \vec{f}(\vec{x}) \stackrel{(1)}{=} \int_{\vec{y} \in \mathbb{R}^3} \frac{\vec{y} - \vec{x}}{|\vec{y} - \vec{x}|^3} \varrho(\vec{y}) \, d\vec{y}.$$

Zwecks Integrierbarkeit sei ϱ beschränkt und absolut integrierbar (H1D).

Aufgabe: Berechnen Sie den Fluss von \vec{f} durch den Rand $S = \partial D$ eines Kompaktums $D \subseteq \mathbb{R}^3$ (mit Fubini und der vorigen Aufgabe).

Lösung: Der Fluss aus D ist proportional zur Gesamtmasse in D :

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \vec{f} \cdot dS &\stackrel{(1)}{=} \int_{\vec{x} \in \partial D} \left(\int_{\vec{y} \in \mathbb{R}^3} \frac{\vec{y} - \vec{x}}{|\vec{y} - \vec{x}|^3} \varrho(\vec{y}) \, d\vec{y} \right) \cdot dS \\ &\stackrel{(2)}{=} \int_{\vec{y} \in \mathbb{R}^3} \left(\int_{\vec{x} \in \partial D} \frac{\vec{y} - \vec{x}}{|\vec{y} - \vec{x}|^3} \cdot dS \right) \varrho(\vec{y}) \, d\vec{y} \\ &\stackrel{(3)}{=} \int_{\vec{y} \in \mathbb{R}^3} (-4\pi) \mathbf{I}_D^\circ(\vec{y}) \varrho(\vec{y}) \, d\vec{y} = -4\pi \int_{\vec{y} \in D} \varrho(\vec{y}) \, d\vec{y} \end{aligned}$$

Hierzu muss ϱ ausreichend gutartig sein, sodass in (1) absolute Integrierbarkeit gilt. Gleichung (2) ist dann Fubini und (3) haben wir zuvor ausgerechnet. Ist zudem f stetig differenzierbar, so folgt $\operatorname{div} f = -4\pi\varrho$ nach Gauß. Der Regularitätssatz H1D präzisiert die Voraussetzungen.

Gravitationsfeld einer Vollkugel / Kugelschale

Aufgabe: Berechnen Sie das Gravitationsfeld \vec{f} einer Kugelschale $K = \{ \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \mid r_0 \leq |y| \leq r_1 \}$ mit $0 \leq r_0 < r_1$ und konstanter Dichte ϱ .

Erste Lösung: direkt durch Integration, mühsam aber lehrreich. H141

Zweite Lösung: Mit dem Integralsatz von Gauß geht es viel leichter.

Das Feld \vec{f} ist kugelsymmetrisch, das heißt $\vec{f}(\vec{x}) = g(|\vec{x}|) \cdot \vec{x}/|\vec{x}|$.

Aus $\overline{B}(\vec{0}, r) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\vec{x}| \leq r \}$ fließt $\int_{\partial B(\vec{0}, r)} \vec{f} \cdot dS = 4\pi r^2 g(r)$.

Dank Gauß gilt andererseits $\int_{\partial B(\vec{0}, r)} \vec{f} \cdot dS = -4\pi \int_{\overline{B}(\vec{0}, r)} \varrho(\vec{y}) \, d\vec{y}$.

Gravitationstärke: $g(r) = \frac{-1}{r^2} \int_{\overline{B}(\vec{0}, r)} \varrho(\vec{y}) \, d\vec{y}$

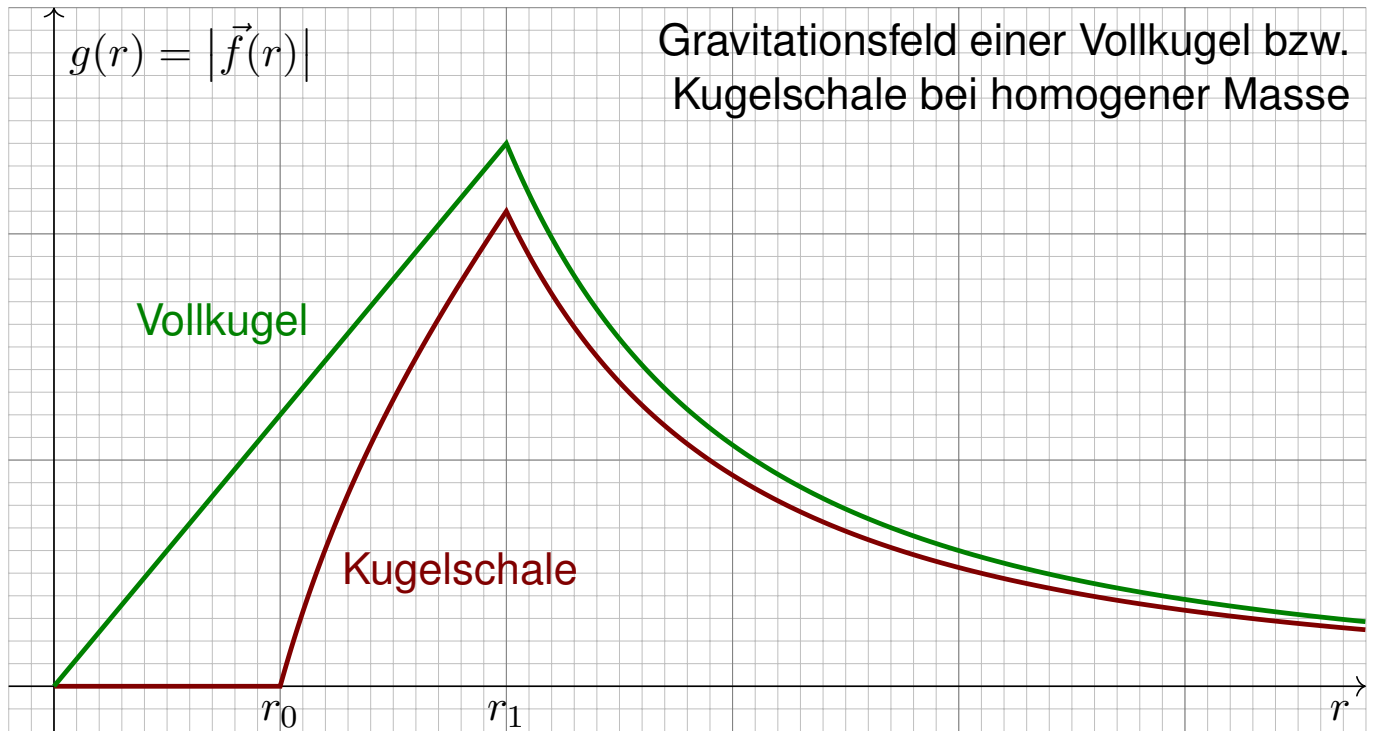
Für $r > r_1$ gilt $g(r) = -m/r^2$: Wie eine Punktmasse im Ursprung.

Für $r < r_0$ gilt $g(r) = 0$: Hier heben sich entgegengesetzte Kräfte auf.

Für $r_0 \leq r \leq r_1$ gilt $g(r) = -\varrho \frac{4\pi}{3r^2} (r^3 - r_0^3)$: Wie Punktmasse, aufgeteilt.

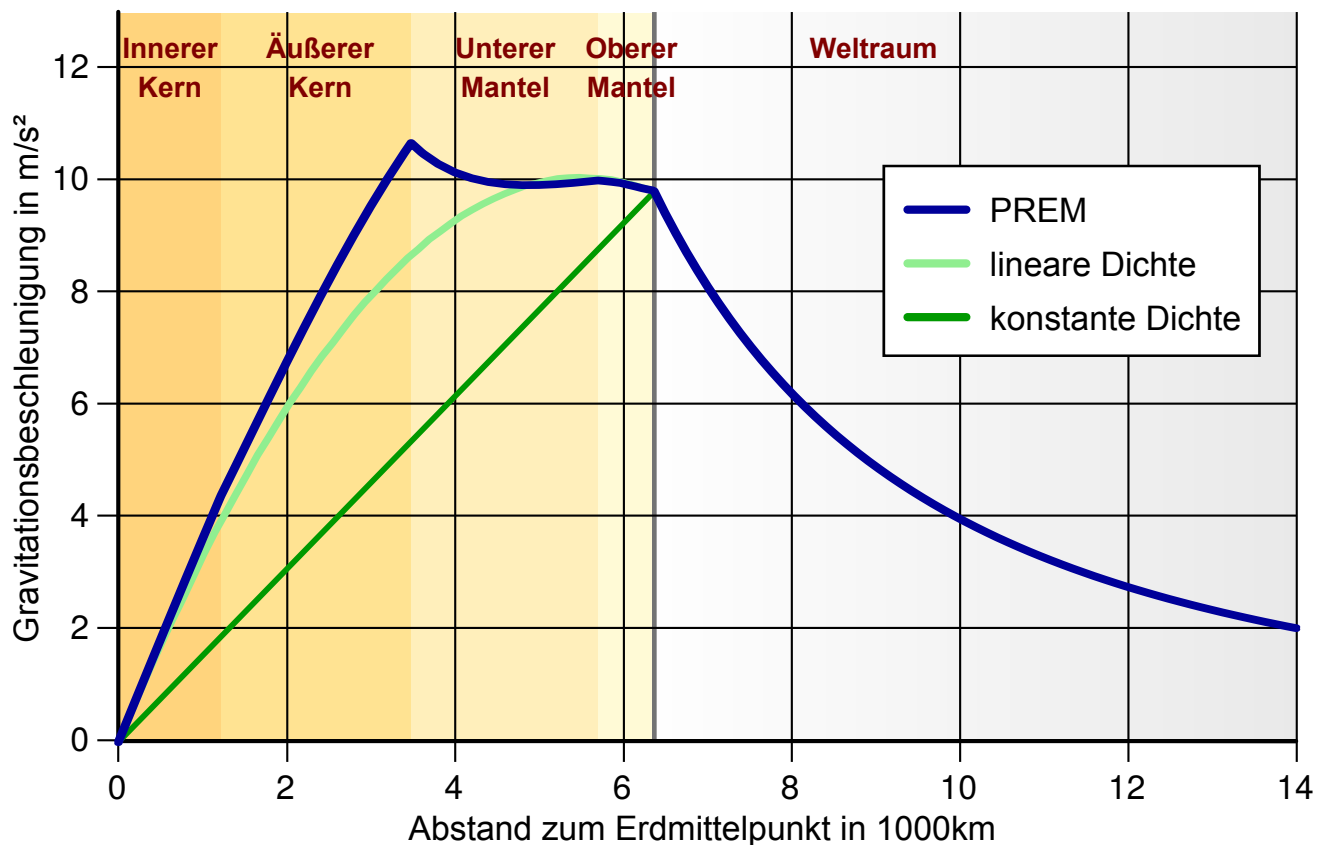
Spezialfall Vollkugel: Für $0 = r_0 \leq r \leq r_1$ ist $g(r) = -\varrho \frac{4\pi}{3} r$ linear.

😊 Der Integralsatz von Gauß vereinfacht die Rechnung erheblich!



Wir sehen in diesem Beispiel sehr schön, dass f stetig ist, wie im folgenden Satz H1D erklärt, und sogar stetig diff'bar wo ρ dies ist. Wir sehen aber auch, dass f nicht überall differenzierbar ist. Um realistische Beispiele wie dieses technisch korrekt zu behandeln, lohnt sich unsere Mühe!

Gravitationsfeld der Erde gemäß *Preliminary Reference Earth Model*:



Bildquelle: wikimedia.org

Satz H1D: Regularität des Gravitationsfeldes

(1) Die Dichte $\varrho: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sei beschränkt und absolut integrierbar, zum Beispiel stetig mit kompaktem Träger. Dann definiert sie ein Gravitationsfeld $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch das absolut konvergente Integral

$$f(x) = \int_{y \in \mathbb{R}^3} \frac{y - x}{|y - x|^3} \varrho(y) dy.$$

(2) Das Vektorfeld f ist stetig und für jedes Kompaktum $D \subseteq \mathbb{R}^3$ gilt


$$\int_{\partial D} f \cdot dS = -4\pi \int_D \varrho(y) dy.$$


(3) Ist ϱ auf $B(x_0, r)$ stetig differenzierbar, so auch f , und dort gilt

$$\operatorname{div} f = -4\pi \varrho.$$

(4) Ist insbesondere $\varrho = 0$ auf $B(x_0, r)$, so gilt dort $\operatorname{div} f = 0$.

Gravitationsfeld einer Massendichte

 Der Integrand hat einen Pol für $y = x$. Es ist ein Wunder, dass das Integral dennoch konvergiert und f sogar stetig bzw. stetig diff'bar ist.

 Die Aussage (4) ist leicht, wie oben gesehen: Liegt x außerhalb des Trägers von ϱ , so treten im Integranden keine Polstellen auf.

Regularitätsbeweise (zu Stetigkeit, Differenzierbarkeit, etc.) wie der folgende sind meist subtil. Physikalisch relevante Anwendungsbeispiele wie das Gravitationsfeld eines Planeten sind aber ein hervorragender Test, um unsere Techniken daran zu erproben. Nur für Unerschrockene!

Beweis des Satzes: (1) Die Dichte $\varrho: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sei beschränkt und absolut integrierbar: Es gibt Konstanten $L, M \in \mathbb{R}$, sodass $|\varrho(x)| \leq L$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$ sowie $\int_{\mathbb{R}^3} |\varrho(x)| dx \leq M$. Für alle $x \in \mathbb{R}^3$ garantiert dies die absolute Integrierbarkeit, denn für jeden Radius $R > 0$ gilt:

$$\int_{|y-x| < R} \frac{|\varrho(y)|}{|y-x|^2} dy \leq \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{L}{r^2} \cdot r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr \leq 4\pi LR < \infty$$

$$\int_{|y-x| \geq R} \frac{|\varrho(y)|}{|y-x|^2} dy \leq \int_{|y-x| \geq R} \frac{|\varrho(y)|}{R^2} dy \leq \frac{1}{R^2} \int_{\mathbb{R}^3} |\varrho(y)| dy \leq M/R^2 < \infty$$

Damit ist das Faltungsintegral $f(x) = \int_{y \in \mathbb{R}^3} (y - x)/|y - x|^3 \cdot \varrho(y) dy$ absolut konvergent.

(4) Gilt $\varrho = 0$ auf einem kleinen Ball $B(x_0, r)$, so können wir dort unter dem Integral ableiten: Das Vektorfeld f ist auf $B(x_0, r)$ beliebig oft differenzierbar, und es gilt $\operatorname{div} f = 0$. H139

(2) Wir beweisen die Stetigkeit von f in $x_0 \in \mathbb{R}^3$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.

Hierzu finden wir $\delta > 0$, sodass für $|x - x_0| < \delta$ stets $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ gilt:

Wir zerlegen $\varrho = \varrho_0 + \varrho_1$ mit $\varrho_0 = \varrho \cdot \mathbf{1}_{B(x_0, \delta_0)}$, also $\varrho_1 = 0$ auf $B(x_0, \delta_0)$.

Hierzu gehört die Zerlegung $f = f_0 + f_1$ der zugehörigen Vektorfelder.

Dank (1) haben wir die Schranke $|f_0| \leq 4\pi L\delta_0 + L\frac{4}{3}\pi\delta_0^3/\delta_0^2 = \varepsilon/3$ für $\delta_0 = \varepsilon/(16\pi L)$.

Das verbleibende Vektorfeld f_1 ist stetig auf $B(x_0, \delta_0)$, sogar C^∞ wie oben für (4) erklärt; daher existiert $\delta_1 > 0$, sodass für $|x - x_0| < \delta_1$ stets $|f_1(x) - f_1(x_0)| < \varepsilon/3$ gilt.

Wir setzen $\delta := \min\{\delta_0, \delta_1\} > 0$. Für jedes $x \in \mathbb{R}^3$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt dann

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f_0(x) - f_0(x_0) + f_1(x) - f_1(x_0)| \\ &\leq |f_0(x)| + |f_0(x_0)| + |f_1(x) - f_1(x_0)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 < \varepsilon. \end{aligned}$$

(3) Zur Differenzierbarkeit: Sei ϱ auf $B(x_0, r)$ stetig differenzierbar und $0 < r' < r$.

Wir können die Dichte $\varrho = \varrho_0 + \varrho_1$ so zerlegen, dass ϱ_0 stetig differenzierbar ist

mit $\varrho_0 = 0$ außerhalb $B(x_0, r)$ sowie $\varrho_0 = \varrho$ auf $B(x_0, r')$, also $\varrho_1 = 0$ auf $B(x_0, r')$.

Hierzu gehört die Zerlegung $f = f_0 + f_1$, und f_1 ist C^∞ auf $B(x_0, r')$ dank (4). Zudem gilt

$$f_0(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{y-x}{|y-x|^3} \varrho_0(y) dy = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{z}{|z|^3} \varrho_0(x+z) dz.$$

Das Gebiet $B(x_0, r)$ ist beschränkt, zudem ist $\partial\varrho_0/\partial x_i$ stetig und beschränkt:

Dank Ableitung unter dem Integral ist f_0 auf $B(x_0, r)$ stetig differenzierbar.

Demnach ist f auf $B(x_0, r')$ stetig differenzierbar, und dies gilt für alle $r' < r$.

Satz H1E: Lösungen der Potentialgleichung

Die dreidimensionale **Laplace-Gleichung** $\Delta u = 0$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ hat als sogenannte Fundamentallösung das **Newton-Potential**:

$$N : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{-1}{4\pi \cdot |x|}$$

Dies entspricht der Gravitation einer Punktmasse im Ursprung;

die Konstanten wählen wir zur Normierung $\int_{\partial B(0,r)} \text{grad } N \cdot dS = 1$.

Die Massendichte $\varrho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sei beschränkt und absolut integrierbar.

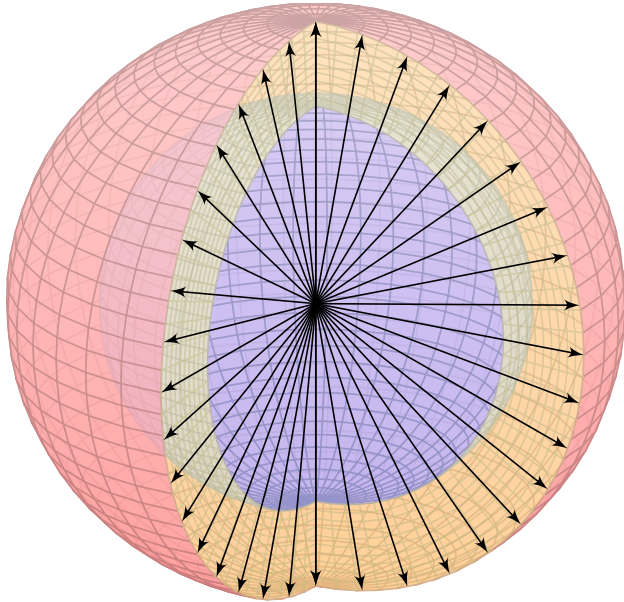
Die **Poisson-Gleichung** $\Delta u = \varrho$ wird gelöst durch **Superposition**:

$$u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \int_{\mathbb{R}^3} N(x-y) \varrho(y) dy$$

Das Potential u ist dann stetig differenzierbar. Für sein Gradientenfeld

$f = \text{grad } u$ und jedes Kompaktum $D \subseteq \mathbb{R}^3$ gilt $\int_{\partial D} f \cdot dS = \int_D \varrho(y) dy$.

Ist ϱ auf $B(x_0, r)$ stetig differenzierbar, so auch f , und $\Delta u = \text{div } f = \varrho$.



Die Elektrostatik untersucht ruhende elektrische Ladungen und das von ihnen erzeugte, zeitlich konstante elektrische Feld $\vec{E}(x, y, z)$.

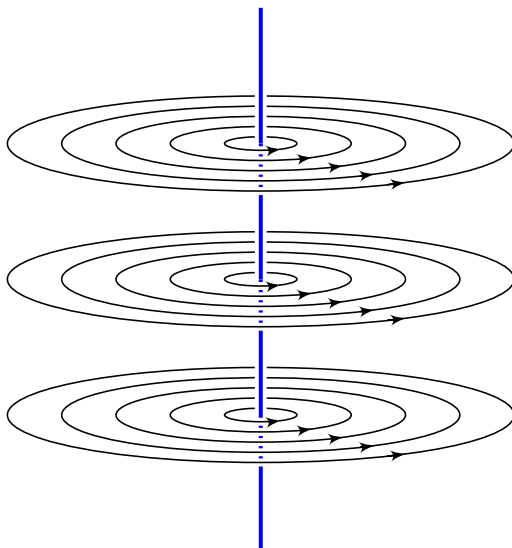
Fundamentales Beispiel: Die Ladung $q \in \mathbb{R}$ sei konzentriert auf den Nullpunkt, den wir uns als unendlich kleines, geladenes Teilchen vorstellen. Das elektrische Feld ist dann radial mit Stärke $|\vec{E}| = \text{const}/r^2$ und hat einen Pol im Ursprung. Das Flussintegral berechnen wir etwa für eine Kugel $V = \bar{B}(0, r)$ vom Radius r um 0.

Das entspricht dem Gravitationsfeld einer Punktmasse. [\[H137\]](#) Die Anwendungen ändern sich, die mathematischen Methoden bleiben.

Beispiel: Elektrisches Feld einer Punktladung q im Ursprung:

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{q}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}(x, y, z) \implies \oiint_{\partial V} \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = 4\pi q$$

😊 Außerhalb des Ursprungs $(0, 0, 0)$ gilt Quellenfreiheit, $\text{div } \vec{E} = 0$, und Rotationsfreiheit, $\text{rot } \vec{E} = 0$. Erinnerung: Rechnen Sie dies erneut nach!



Die Magnetostatik untersucht zeitlich konstante elektrische Ströme und das von ihnen erzeugte, zeitlich konstante Magnetfeld $\vec{B}(x, y, z)$. z.B. Dauermagnet, Erdmagnetfeld und Kompass, etc.

Einfaches Beispiel: Der konstante Strom $j \in \mathbb{R}$ sei konzentriert auf die z -Achse, die wir uns als unendlich dünnen und langen Leiter vorstellen. Das magnetische Feld ist dann zirkulär um die z -Achse (gemäß der Rechte-Hand-Regel) mit Stärke $|\vec{B}| = \text{const}/r$ und wird singulär auf der z -Achse. Das Randintegral berechnen wir für eine Kreisscheibe S um die z -Achse.

Beispiel: Magnetisches Feld eines Stroms j entlang der z -Achse:

$$\vec{B}(x, y, z) = \frac{2j/c}{x^2 + y^2}(-y, x, 0) \implies \oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{4\pi}{c} j$$

😊 Außerhalb der z -Achse $(0, 0, z)$ gilt Rotationsfreiheit, $\text{rot } \vec{B} = 0$, und Quellenfreiheit, $\text{div } \vec{B} = 0$. Erinnerung: Rechnen Sie dies erneut nach!

Übung: Dies sind die beiden zentralen Beispiele! Rechnen Sie nach, dass diese beiden Felder die folgenden Maxwell-Gleichungen erfüllen.

Coulomb Ladungsgesetz
$$\oiint_{\partial V} \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V 4\pi \rho \, dV$$

Faraday Induktionsgesetz
$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{1}{c} \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} \, dS$$

Gauß Quellenfreiheit
$$\oiint_{\partial V} \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = 0$$

Ampère Durchflutungsgesetz
$$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{c} \iint_S \left(4\pi \vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} \, dS$$

Hier ist \vec{E} das elektrische Feld, \vec{B} das magnetische, ρ die Ladungsdichte, \vec{J} die Stromdichte. Dies sind lineare Integralgleichungen, äquivalent hierzu sind lineare Differentialgleichungen in \vec{E} und \vec{B} mit Quelltermen ρ und \vec{J} auf der rechten Seite. Sie besagen: (1) Die Quellen des E -Feldes sind die Ladungen ρ . (2) Die Wirbeldichte des E -Feldes entspricht der zeitlichen Änderung des B -Feldes. (3) Das B -Feld ist quellenfrei, es gibt keine magnetischen Monopole. (4) Die Wirbeldichte des B -Feldes entspricht der Stromdichte \vec{J} plus der zeitlichen Änderung des E -Feldes. Für zeitlich konstante Felder entkoppeln die Gleichungen wie oben gesehen.

📖 Zum Einstieg konsultiere man de.wikipedia.org/wiki/Maxwell-Gleichungen, zur Vertiefung etwa Jackson: *Klassische Elektrodynamik*, de Gruyter, 4. Auflage 2006.

📺 Up and Atom: *Maxwell's Equations – Beginner's Guide*. youtu.be/F3QHUvr8d8I

Maxwell–Gleichungen als Differentialgleichungen

Aufgabe: (1) Folgern Sie die zugehörigen Differentialgleichungen.

Lösung: Wir formen um mit Hilfe unserer Integralsätze:

$$\begin{aligned} \oiint_{\partial V} \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS &\stackrel{\substack{\text{Gauß} \\ \text{G3G}}}{=} \iiint_V (\nabla \cdot \vec{E}) \, dV \\ \oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{s} &\stackrel{\substack{\text{Stokes} \\ \text{G1A}}}{=} \iint_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{n} \, dS \\ \oiint_{\partial V} \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS &\stackrel{\substack{\text{Gauß} \\ \text{G3G}}}{=} \iiint_V (\nabla \cdot \vec{B}) \, dV \\ \oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{s} &\stackrel{\substack{\text{Stokes} \\ \text{G1A}}}{=} \iint_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot \vec{n} \, dS \end{aligned}$$

Für jedes kompakte Volumen V und Flächenstück S gilt demnach

$$\begin{aligned} \iiint_V [\nabla \cdot \vec{E} - 4\pi \rho] \, dV = 0, \quad \iint_S \left[\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] \cdot \vec{n} \, dS = 0, \\ \iiint_V [\nabla \cdot \vec{B}] \, dV = 0, \quad \iint_S \left[\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} \vec{J} \right] \cdot \vec{n} \, dS = 0. \end{aligned}$$

Dies gilt genau dann, wenn die Integranden verschwinden (H1A, H1B).

Wir erhalten die Maxwell–Gleichungen als Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 4\pi \varrho, & \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, & \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{J}. \end{aligned}$$

Die integrale und die differentielle Formulierung sind äquivalent! Je nach Anwendungen ist die eine oder die andere geschickter. Das spüren Sie sehr deutlich beim Nachrechnen der beiden zentralen Beispiele: Auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ bzw. $\mathbb{R}^3 \setminus \{z\text{-Achse}\}$ ist die differentielle Form bequemer. (Warum?) Um den Nullpunkt bzw. die Achse nutzen Sie besser die integrale Form. (Warum?)

Aufgabe: (2) Folgern Sie die Ladungserhaltung (Kontinuitätsgleichung):

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

Nachrechnen: Wir nutzen Schwarz, $\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$, hier $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = 0$, angewendet auf die erste und vierte Gleichung (Coulomb und Ampère):

$$4\pi \frac{\partial \varrho}{\partial t} \stackrel{(1)}{=} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{E} \stackrel{\text{D4A}}{=} \nabla \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \stackrel{(4)}{=} \nabla \cdot \left[\nabla \times c\vec{B} - 4\pi \vec{J} \right] \stackrel{\text{D4A}}{=} -4\pi \nabla \cdot \vec{J}$$

Aufgabe: (3) Folgern Sie die elektromagnetischen Wellengleichungen:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= 4\pi \nabla \varrho + \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}, \\ \nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} &= -4\pi \nabla \times \vec{J}. \end{aligned}$$

Für $\varrho = 0$ und $\vec{J} = 0$ bleiben demnach die freien Wellengleichungen:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{E} = 0, \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{B} = 0.$$

Nachrechnen: Wir nutzen $\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$:

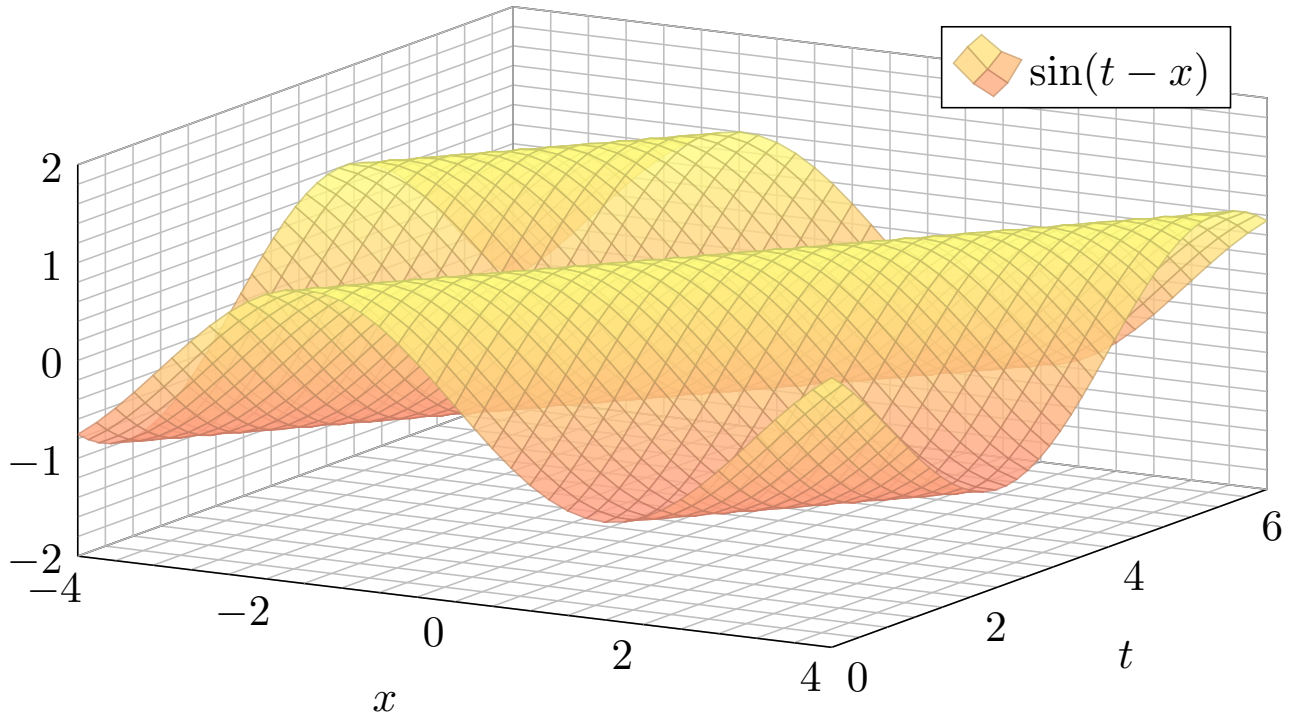
$$\begin{aligned} 0 &= \nabla \times \left[\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B} \\ &= 4\pi \nabla \varrho - \nabla^2 \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \end{aligned}$$

Ebenso erhalten wir die magnetische Wellengleichung.

Die Wellengleichung $(c^{-2}\partial_0^2 - \partial_1^2 - \dots - \partial_n^2)u = 0$ wird gelöst durch Wellenfunktionen $u(t, \vec{x}) = f(c|\vec{\xi}|t - \vec{\xi} \cdot \vec{x})$ mit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe: (4) Rechnen Sie nach, dass u tatsächlich eine Lösung ist.

Lösung: (4) Nun genügt sorgsames Ableiten mit der Kettenregel.



Die Maxwell'schen Gleichungen sind lineare partielle Differentialgleichung in \vec{E} und \vec{B} mit Inhomogenitäten in ρ und \vec{J} auf der rechten Seite. Die hieraus abgeleiteten Wellengleichungen beschreiben, wie sich elektromagnetische Wellen in Raum und Zeit ausbreiten, siehe Seite D533.

Viele berühmte Wissenschaftler des 19. Jahrhunderts waren an der spektakulären Erforschung des Elektromagnetismus beteiligt und haben Teile dieser Gleichungen experimentell und theoretisch untersucht. Doch erst James Clerk Maxwell (*A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*, 1865) konnte sie zu einem konsistenten Gesamtsystem von acht Gleichungen zusammenfügen; diese haben wir oben ausgeschrieben als zwei skalare und zwei vektorielle Gleichungen.

Damit brachte Maxwell die intuitiv-qualitativen Beschreibungen in die mathematisch-quantitative Form der Vektorfelder und eröffnete so theoretische wie praktische Berechnungen. Maxwells mathematische Theorie gab alle zuvor gefundenen Phänomene präzise wieder, zudem konnte sie völlig neue vorhersagen: elektromagnetische Wellen! Diese waren 1865 experimentell noch lange nicht zugänglich; dies gelang Heinrich Hertz 1886. Erst Maxwells theoretischer Durchbruch ermöglichte den technologischen Fortschritt, von dem wir bis heute profitieren!

Jede Lösung $u(t, \vec{x}) = f(c|\vec{\xi}|t - \vec{\xi} \cdot \vec{x})$ ist eine Welle, in Form der Funktion f , die sich mit Lichtgeschwindigkeit c in Richtung $\vec{\xi}$ ausbreitet. (Klassisch sollte f mindestens zweimal stetig differenzierbar sein, etwa $f = \sin$, notfalls nutzen wie die Ableitung im Distributionensinne.)

Maxwells Gleichungen haben eine besondere Symmetrie: Sie beinhalten die Invarianz der Lichtgeschwindigkeit c unabhängig vom Betrachter, auch in bewegten Bezugssystemen. Diese erstaunliche Tatsache führte direkt zu Einsteins Spezieller Relativitätstheorie (1905).

Wir führen die Diskussion von Feldern und Potentialen fort (E341).

Wiederholung: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Was versteht man unter...

- (1) einem Skalarfeld F auf U ?
- (2) einem Vektorfeld f auf U ?
- (3) dem Gradienten von F ?
- (4) einem Potential zu f ?
- (5) Was besagt der HDI für ein Vektorfeld f mit Potential F ?
- (6) Was gilt demnach für Arbeitsintegrale geschlossener Wege?

- (1) Ein **Skalarfeld** auf U ist eine stetige Abbildung $F : \mathbb{R}^n \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}$.
- (2) Ein **Vektorfeld** auf U ist eine stetige Abbildung $f : \mathbb{R}^n \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^n$.
- (3) Zu jedem stetig diff'baren Skalarfeld $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ ist der **Gradient**

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{gegeben durch} \quad f = F' = \text{grad } F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right).$$

- (4) Ein **Potential** zu $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist ein Skalarfeld $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F' = f$.
- (5) Für jeden stückweise stetig diff'baren Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ gilt dann:

$$\int_{\gamma} f \cdot d\gamma \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{t=a}^b F'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \stackrel{\text{KR}}{=} \int_{t=a}^b \frac{dF(\gamma(t))}{dt} dt \stackrel{\text{HDI}}{=} F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

- (6) Ist $f = F'$ und γ geschlossen, also $\gamma(a) = \gamma(b)$, so folgt $\oint_{\gamma} f \cdot d\gamma = 0$.


(1–2) Jedem Punkt $x \in U$ aus dem Definitionsgebiet U wird eine reelle Zahl $F(x) \in \mathbb{R}$ bzw. ein Vektor $f(x) \in \mathbb{R}^n$ zugeordnet. Wir nehmen meist stillschweigend an, dass diese Zuordnungen stetig / stetig diff'bar sind.

(3–4) In Dimension $n = 1$ ist $f = F'$ **Ableitung** und F **Stammfunktion**. Potentiale sind nur bis auf additive Konstanten eindeutig bestimmt.

(5) Das Arbeitsintegral eines Gradientenfeldes $f = F'$ hängt nur vom **Start** $p = \gamma(a)$ und **Ziel** $q = \gamma(b)$ ab, ansonsten aber nicht vom Weg γ . Physikalisch entspricht dies der Energieerhaltung: Die zur Bewegung entlang γ aufgebrauchte Arbeit wird als Lageenergie gespeichert.

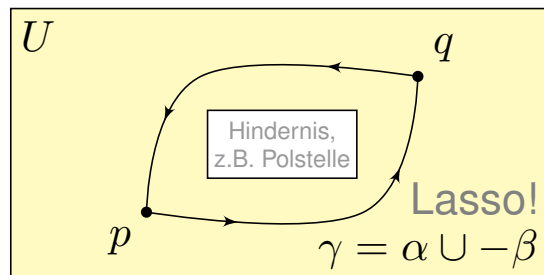
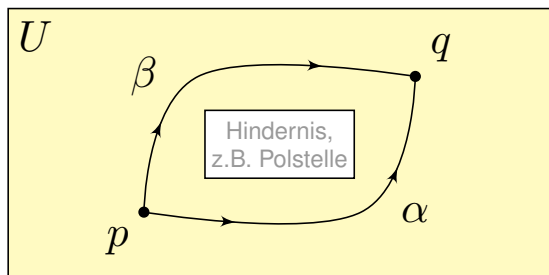
(6) So kann man feststellen, ob ein Vektorfeld f ein Potential hat: Aus $\oint_{\gamma} f \cdot d\gamma \neq 0$ folgt, dass das Feld f kein Potential haben kann.

Wir nennen ein Vektorfeld f **konservativ**, wenn $\oint_{\gamma} f \cdot d\gamma = 0$ gilt. Das bedeutet, längs geschlossener Wege wird keine Arbeit verrichtet. Jede an einer Stelle des Weges aufgewandte Energie wird an anderer Stelle zurückgewonnen, die Gesamtenergie bleibt schließlich erhalten.

 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §5. Das Potentialproblem lösen wir in Kapitel E und hier allgemein. Wir nutzen es in Kapitel M für exakte Differentialgleichungen.

Exakte und konservative Vektorfelder

Ein Vektorfeld $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **exakt**, oder **Gradientenfeld**, wenn es ein Potential erlaubt, also ein Skalarfeld $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F' = f$ existiert. Das ist das Potentialproblem. Wie können wir es konkret anpacken? Ein Vektorfeld $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **konservativ**, oder **global wirbelfrei**, wenn $\oint_{\gamma} f \cdot d\gamma = 0$ für jeden geschlossenen Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ gilt.



Konservativ: Das Arbeitsintegral hängt nur von Start p und Ziel q ab, nicht vom Integrationsweg, denn $\int_{\alpha} f \cdot d\alpha - \int_{\beta} f \cdot d\beta = \oint_{\gamma} f \cdot d\gamma = 0$.

Satz H2A: Hauptsatz: exakt \Leftrightarrow konservativ

- (1) Besitzt das Vektorfeld $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Potential, so ist f konservativ.
- (2) Ist umgekehrt f konservativ, so ist $F(x) = \int_{s=p}^x f(s) \cdot ds$ ein Potential.

Exakte und konservative Vektorfelder

Nachrechnen: (1) Aus $f = F'$ folgt $\oint_{\gamma} f \cdot d\gamma = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$.
 (2) Wir können und werden U als wegzusammenhängend annehmen. Wir wählen einen Fußpunkt $p \in U$ und definieren $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$F(x) := \int_{s=p}^x f(s) \cdot ds = \int_{\alpha} f \cdot d\alpha = \int_{t=0}^1 f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt.$$

Hier ist $\alpha : [0, 1] \rightarrow U$ von $\alpha(0) = p$ nach $\alpha(1) = x$ ein beliebiger (!) Weg.

😊 Der Wert $F(x)$ ist wohldefiniert, also unabhängig vom willkürlich gewählten Weg α , da wir unser Vektorfeld f konservativ voraussetzen.

Ist F ein Potential zu f ? Gilt wirklich $\partial_i F = f_i$ für alle $i = 1, \dots, n$? Für jeden Punkt $x \in U$ und $h > 0$ mit $[x, x + he_i] \subseteq U$ finden wir:

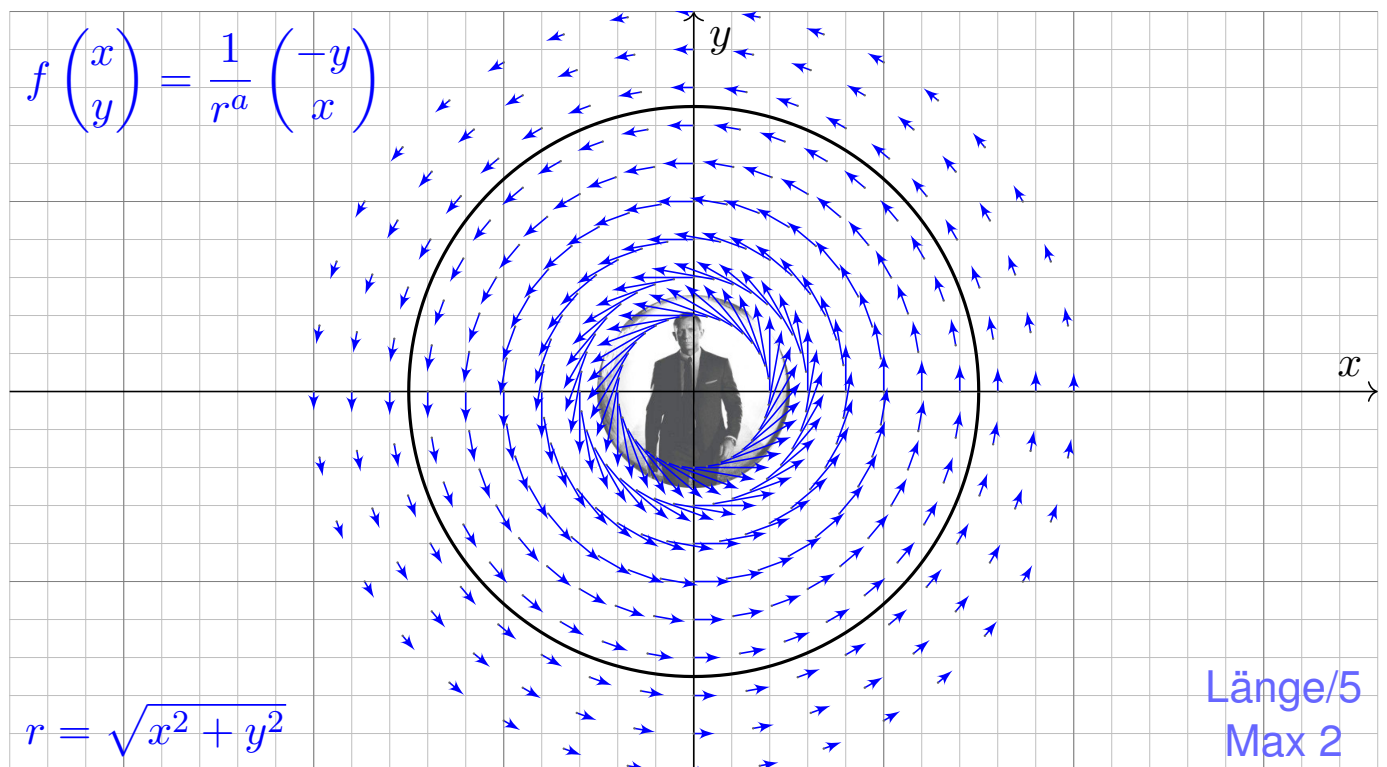
$$F(x + he_i) \stackrel{(2)}{=} F(x) + \int_{t=0}^h f_i(x + te_i) dt$$

$$\partial_i F(x) \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{d}{dh} F(x + he_i) \stackrel{\text{HDI}}{=} f_i(x)$$

😊 Somit gilt $F' = f$ wie gewünscht, das heißt, F ist ein Potential zu f .

Aufgabe: (1) Sei $a \in \mathbb{R}$. Skizzieren Sie das zirkuläre Vektorfeld

$$f : U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad f(x, y) = (-y, x)/(x^2 + y^2)^{a/2}.$$



Aufgabe: Wir betrachten $f(x, y) = (-y, x)/r^a$ mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

- (2) Berechnen Sie $|f(x, y)|$ und das Arbeitsintegral längs $\partial B(0, r)$.
- (3) Berechnen Sie $\text{rot}(f)$. Für welche a ist $\text{rot}(f)$ konstant? Null?
- (4) Für welche a existiert zu f ein Potential $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$?

Lösung: (2) Wir finden $|f(x, y)| = r^{1-a}$. Da f überall tangential ist:

$$\oint_{\partial B(0,r)} f(s) \cdot ds = \oint_{\partial B(0,r)} f(s) \cdot t_{\partial B} |ds| = \oint_{\partial B(0,r)} r^{1-a} |ds| = 2\pi r^{2-a}$$

(3) Wir finden $\text{rot}(f) = \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 = \dots \text{✎} \dots = (2 - a)/r^a$.

Die Rotation ist konstant für $a \in \{0, 2\}$, und Null nur für $a = 2$.

(4) Das Feld f erlaubt kein Potential auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, denn es gilt

$$\oint_{\partial B(0,r)} f(s) \cdot ds \neq 0.$$

😊 Das Vektorfeld ist nicht konservativ, also auch kein Gradientenfeld.

⚠️ Für $a = 2$ ist das Feld f rotationsfrei, besitzt dennoch kein Potential!

Wie kann das sein? Das Vektorfeld f rotiert offensichtlich um den Nullpunkt, aber für $a = 2$ verschwindet die Rotation $\text{rot}(f)$ überall.

⚠ Im Nullpunkt $(x, y) = (0, 0)$ hat das Vektorfeld f eine Polstelle! Die Zirkulation konzentriert sich im Nullpunkt; dort sind f und $\text{rot}(f)$ nicht definiert, aber wir können und werden drumherum integrieren!

😊 Unsere Rechnung nutzt die Symmetrie und kommt ohne explizite Parametrisierung aus. Alternativ können wir die Kreislinie $\partial B(0, r)$ explizit parametrisieren, etwa durch den Weg $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t)$. Damit berechnen wir das Arbeitsintegral:

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(0,r)} f(s) \cdot ds &= \int_{\gamma} f \cdot d\gamma = \int_{t=0}^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_{t=0}^{2\pi} \frac{1}{r^a} \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \end{pmatrix} dt = \int_{t=0}^{2\pi} r^{2-a} dt = 2\pi r^{2-a}. \end{aligned}$$

Für $a = 0$ gilt $\text{rot}(f) = 2$ und das Arbeitsintegral ist gleich $2 \text{vol}_2 B(0, r)$.

Für $a = 2$ gilt $\text{rot}(f) = 0$ und das Arbeitsintegral ist unabhängig von r .

😊 Beide Phänomene erklären sich durch den Satz von Green.

Rotationsfreie Vektorfelder und Potentiale

Wiederholung: 📖 Stroppel, Höhere Mathematik 2, Satz 4.3.10.

- (1) Wann heißt ein C^1 -Vektorfeld $f: \mathbb{R}^n \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^n$ rotationsfrei?
- (2) Was besagt der Satz von Schwarz (D4A) für partielle Ableitungen?
- (3) Ist Rotationsfreiheit für Exaktheit notwendig? (4) hinreichend?
- (5) Auf welchen Gebieten $U \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt „rotationsfrei = exakt“?

(1) Ein C^1 -Vektorfeld f heißt **rotationsfrei**, wenn $\partial_j f_i = \partial_i f_j$ gilt. Das bedeutet, die Jacobi-Matrix $(\partial_j f_i)_{i,j}$ ist symmetrisch.

In Dimension $n = 2, 3$ ist dies gleichbedeutend mit $\text{rot}(f) = 0$.

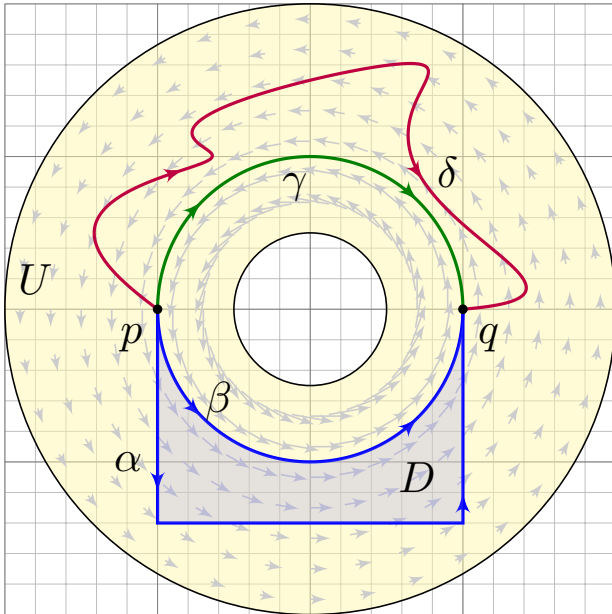
(2) Jede C^2 -Funktion $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ erfüllt $\partial_j \partial_i F = \partial_i \partial_j F$ für alle i, j . Jedes C^1 -Gradientenfeld $f = (\partial_1 F, \dots, \partial_n F)$ ist somit rotationsfrei.

(3) Für jedes C^1 -Vektorfeld f gilt: Exaktheit impliziert Rotationsfreiheit. Existiert nämlich ein Potential F mit $\partial_i F = f_i$, so folgt $\partial_j f_i = \partial_i f_j$.

(4) Aus $\partial_j f_i \neq \partial_i f_j$ folgt, dass das Feld f kein Potential haben kann. Aber allein aus $\partial_j f_i = \partial_i f_j$ folgt noch nicht, dass f ein Potential hat!

(5) Ist das Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^n$ einfach zusammenhängend, so erlaubt jedes rotationsfreie Vektorfeld $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Potential $F: U \rightarrow \mathbb{R}$.

Homotopie von Integrationswegen



Sei $f : \mathbb{R}^n \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld.

Wir integrieren entlang der Wege $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow U$ von p nach q .

Die Ergebnisse sind i.A. verschieden!

Hat f ein Potential F , so ist jedes Arbeitsintegral gleich $F(q) - F(p)$.

Aus $\text{rot}(f) = 0$ und $\alpha \cup -\beta = \partial D$ folgt $\int_{\alpha} f \cdot d\alpha = \int_{\beta} f \cdot d\beta$ dank Stokes.

😊 In dieser glücklichen Situation müssen wir viel weniger rechnen!

Wege α und β heißen **homotop** in U , wenn sie sich stetig ineinander deformieren lassen — innerhalb von U und bei festen Endpunkten.

Satz H2B: Rotationsfreiheit impliziert Homotopieinvarianz.

Ist das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^n \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^n$ rotationsfrei, so liefern homotope Wege $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow U$ dasselbe Arbeitsintegral $\int_{\alpha} f \cdot d\alpha = \int_{\beta} f \cdot d\beta$.

Homotopie von Integrationswegen

Zwei Wege sind homotop, wenn sie sich stetig ineinander deformieren lassen. Um damit auch rechnen zu können, definieren wir es genauer:

Definition H2C: Homotopie mit festen Endpunkten

Eine **Homotopie** ist eine stetige Abbildung $H : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow U$.

Für jedes $s \in [0, 1]$ definiert $H_s(t) := H(s, t)$ einen Weg $H_s : [a, b] \rightarrow U$.

Für eine **Homotopie von α nach β** verlangen wir $H_0 = \alpha$ und $H_1 = \beta$ sowie selben Start $H_s(a) = p$ und selbes Ziel $H_s(b) = q$ für alle $s \in [0, 1]$.

Somit ist H_s für $s \in [0, 1]$ eine Familie von Wegen, die $H_0 = \alpha$ stetig in $H_1 = \beta$ deformiert, innerhalb des Gebietes U , bei festen Endpunkten.

Die Homotopie H parametrisiert H ein Flächenstück mit Rand $\alpha \cup -\beta$, die anderen Kanten $[0, 1] \times \{a, b\}$ des Rechtecks sind konstante Wege. Das Flächenstück muss dabei nicht regulär oder injektiv sein.

Im obigen Beispiel sind α und β in U homotop, aber nicht β und γ . Warum? Wir sehen $\beta \neq \gamma$ an den unterschiedlichen Integralen! Diese Beobachtungen präzisieren wir durch Satz H2B.

Wir können nun die behauptete Homotopieinvarianz nachrechnen:

Beweis des Satzes H2B: Die Wege $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ seien homotop, das heißt, es existiert eine Homotopie $H : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow U$. Dies ist ein parametrisiertes Flächenstück mit parametrisiertem Rand $\partial H = \alpha \cup -\beta$. Die anderen Kanten $[0, 1] \times \{a, b\}$ des Rechtecks sind konstante Wege. Wir dürfen H als stückweise C^2 annehmen. Dank Stokes (G1A) gilt dann

$$\int_{\beta} f \cdot d\beta - \int_{\alpha} f \cdot d\alpha = \int_H \operatorname{rot}(f) \cdot dH = 0.$$

Diese Rechnung gelingt für $n = 2$ und $n = 3$ mit Stokes. In beliebiger Dimension verläuft das Argument im Prinzip genauso, wir haben aber unsere Integralsätze nur für $n \leq 3$ formuliert.

Beispiel: Für Wege $\gamma : [a, b] \rightarrow U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ messen wir den Winkelzuwachs [E317](#) durch

$$W(\gamma) := \int_{\gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}.$$

Dieses Arbeitsintegral ist homotopieinvariant, bei festem Start und Ziel, da unser Vektorfeld rotationsfrei ist. Nicht-homotope Weg unterscheiden wir hier leicht durch ihre Integrale!

Variante: Für die Homotopie geschlossener Wege genügt $H(s, a) = H(s, b)$ für alle $s \in [0, 1]$.

Homotopie von Wegen in einem Kreisring

Satz H2D: Homotopie von Wegen in einem Kreisring

Sei $U = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma^2 < x^2 + y^2 < \rho^2 \}$ ein Kreisring, $0 < \sigma < \rho$. Je zwei Wege $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow U$ mit gleichem Start $p = \gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ und Ziel $q = \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$ sind genau dann homotop im Kreisring U , wenn sie die gleiche Umlaufzahl haben, also $W(\gamma_0) = W(\gamma_1)$ gilt.

Beweis: „ \Rightarrow “: Die Invarianz von $W(\gamma_s)$ haben wir eben nachgerechnet. Für die Umkehrung „ \Leftarrow “ schreiben wir die Wege in Polarkoordinaten:

$$\gamma_0(t) = r_0(t) e^{i\varphi_0(t)} \quad \text{und} \quad \gamma_1(t) = r_1(t) e^{i\varphi_1(t)}$$

Wegen $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ können wir gleiche Startwinkel $\varphi_0(a) = \varphi_1(a)$ wählen, und $W(\gamma_0) = W(\gamma_1)$ impliziert dann gleiche Zielwinkel:

$$\varphi_0(b) = \varphi_0(a) + W(\gamma_0) = \varphi_1(a) + W(\gamma_1) = \varphi_1(b)$$

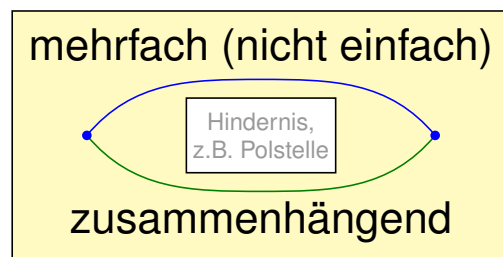
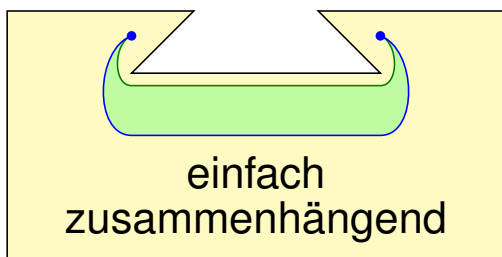
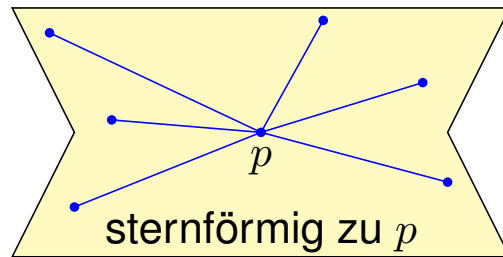
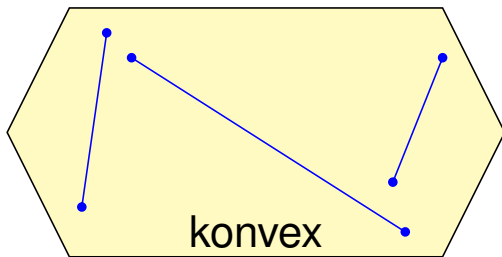
Wir erhalten eine Homotopie H von γ_0 nach γ_1 innerhalb U durch

$$H_s(t) = [(1-s)r_0(t) + sr_1(t)] e^{i[(1-s)\varphi_0(t) + s\varphi_1(t)]}$$

Was ist hierzu zu prüfen? Dies ist eine stetig Abbildung $H : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $H_0 = \gamma_0$ und $H_1 = \gamma_1$. Ihr Bild liegt in U , denn die Radien bleiben zwischen den Grenzen σ und ρ .

Einfach zusammenhängende Gebiete

Wir verstehen Kreisringe und gehen nun zu allgemeineren Gebieten:



Will man prüfen, ob ein Vektorfeld $f: \mathbb{R}^n \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^n$ konservativ ist, so muss man $\oint_{\gamma} f \cdot d\gamma = 0$ nachweisen für *alle* geschlossenen Wege in U ! Ist f rotationsfrei, so genügt jeweils ein Weg in jeder Homotopieklasse. Hier spielt die Form des Gebietes U eine entscheidende Rolle! Ganz einfach wird es, wenn alle Wege untereinander homotop sind.

Einfach zusammenhängende Gebiete

Eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, wenn zu je zwei Punkten $p, q \in U$ ihre Verbindungsstrecke $[p, q] = \{ (1-s)p + sq \mid 0 \leq s \leq 1 \}$ in U liegt.

Wir nennen U **sternförmig** bezüglich eines festen Zentrums $p \in U$, wenn zu jedem Punkt $q \in U$ die Verbindungsstrecke $[p, q]$ in U liegt,

Wir nennen U **(weg)zusammenhängend**, wenn zu je zwei Punkten $p, q \in U$ ein Weg $\alpha: [0, 1] \rightarrow U$ von $\alpha(0) = p$ nach $\alpha(1) = q$ existiert.

Zudem heißt U **einfach zusammenhängend**, wenn zudem je zwei Wege $\alpha, \beta: [0, 1] \rightarrow U$ mit gleichem Start und Ziel homotop in U sind.

Äquivalent als Lasso: Jeder geschlossene Weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$ lässt sich auf einen Punkt zusammenziehen (durch eine Homotopie in U).

Aufgabe: Zeigen Sie für jedes Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^n$ die Implikationen U konvex $\implies U$ sternförmig $\implies U$ einfach zusammenhängend.

Lösung: (1) Ist U konvex, so eignet sich jeder Punkt $p \in U$ als Zentrum.

(2) Sei U sternförmig zu p und $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$ ein geschlossener Weg. Wir können $\gamma(0) = \gamma(1) = p$ annehmen, notfalls dorthin verschieben. Wir finden die Homotopie $H_s(t) = (1-s)p + s\gamma(t)$. Skizzieren Sie's!

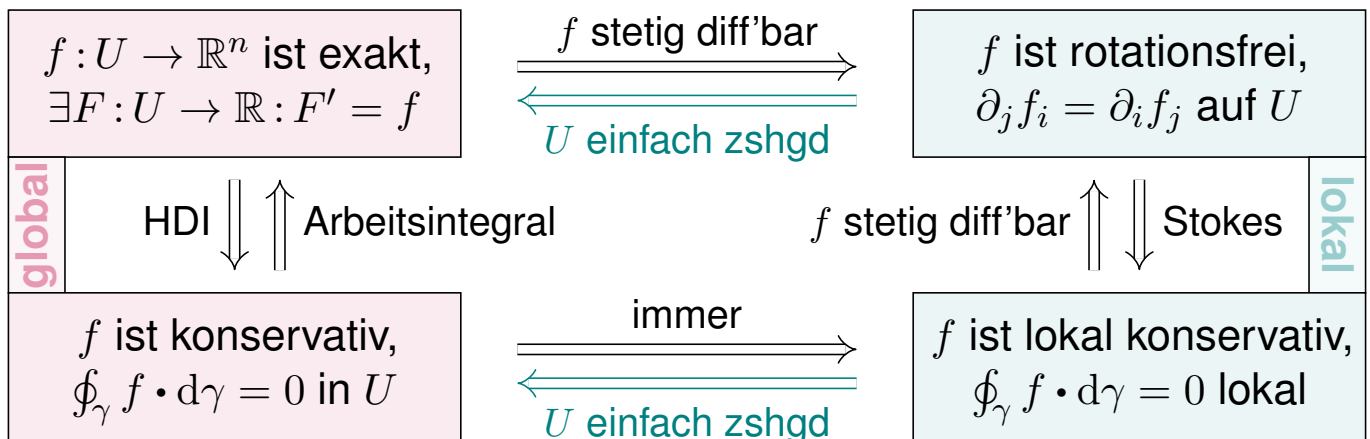
Lösung des Potentialproblems

Satz H2E: Potentiale auf einfach zusammenhängenden Gebieten

Unser Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sei einfach zusammenhängend, z.B. konvex oder sternförmig zu p . Ein C^1 -Vektorfeld $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ erlaubt genau dann ein Potential $F : U \rightarrow \mathbb{R}$, wenn f rotationsfrei ist, also $\partial_j f_i = \partial_i f_j$ erfüllt.

In diesem Fall erhalten wir ein Potential durch das Arbeitsintegral

$$F(x) = \int_{s=p}^x f(s) \cdot ds = \int_{t=a}^b f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \alpha : [a, b] \rightarrow U \text{ und} \\ \alpha(a) = p, \alpha(b) = x. \end{cases}$$



Lösung des Potentialproblems

Gegeben sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld.

Problem: Wie prüfen Sie, ob f exakt ist? Wie finden Sie ein Potential?

- ☺ Notwendiges Kriterium, für $f \in C^1$, ist Rotationsfreiheit $\partial_j f_i = \partial_i f_j$.
- ☺ Auf jedem einfach zusammenhängenden Gebiet ist sie hinreichend!
- ☺ Das Arbeitsintegral $F(x) = c + \int_{s=p}^x f(s) \cdot ds$ liefert uns ein Potential $F : \mathbb{R}^n \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}$. Die Eichung $F(p) = c$ legt das Potential eindeutig fest.
- ☺ Die Wahl des Integrationsweges α vom Fußpunkt p zum Ziel x in U ist beliebig: Je zwei sind homotop und ergeben dasselbe Integral (H2B).
- ☺ Zwecks leichter Integration wählt man α möglichst geschickt, etwa $\alpha : [0, 1] \rightarrow U$ mit $\alpha(t) = (1-t)p + tx$ falls U sternförmig zu p ist.
- ☺ Speziell für Quader kann man auch ein Hakenintegral nutzen:

$$F(x) = \int_{t=p_1}^{x_1} f_1(t, p_2, p_3) dt + \int_{t=p_2}^{x_2} f_2(x_1, t, p_3) dt + \int_{t=p_3}^{x_3} f_3(x_1, x_2, t) dt$$

⚠ Nach der Rechnung die Probe nicht vergessen: Gilt $F' = f$?

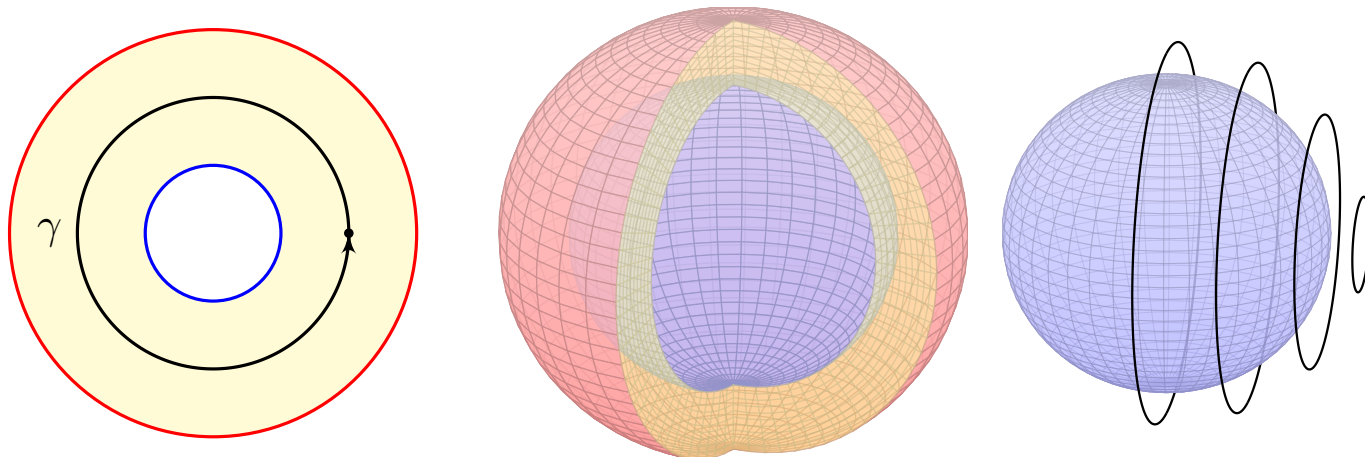
Für die Rotationsfreiheit verlangen wir, dass f stetig differenzierbar ist. Alle anderen Begriffe und Implikationen gelten für stetige Vektorfelder; sie benötigen keine Ableitung, nur Integrale.

Aufgabe: Skizzieren Sie zu Radien $0 \leq \sigma < \rho \leq \infty$

- 1 den Kreisring $A = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma < |x| < \rho \}$,
- 2 die Kugelschale $K = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \sigma < |x| < \rho \}$.
- 3 einen Volltorus $V \subseteq \mathbb{R}^3$ und seinen Außenraum $U = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{V}$.

Sind diese Gebiete konvex? sternförmig? zshgd? einfach zshgd?

Unter welchen Voraussetzungen hat ein Vektorfeld hierauf ein Potential?



Die Kugelschale ist einfach zusammenhängend, der Kreisring nicht!

Jeder geschlossene Weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow K$ ist in K zusammenziehbar!

⚠ Einfach zusammenhängend bedeutet nicht unbedingt „ohne Löcher“.

Anwendung auf Kugelschalen

Die Kugelschale ist nicht konvex oder sternförmig, aber einfach zshgd. (Anschaulich ist das klar, die Konstruktion von Homotopien ist trickreich.)

Gegeben sei hierauf ein stetig differenzierbares Vektorfeld $f: K \rightarrow \mathbb{R}^3$. Zum Feld $f: K \rightarrow \mathbb{R}^3$ suchen wir ein Potential $F: K \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F' = f$.

Wann existiert ein Potential? Genau dann, wenn $\text{rot}(f) = 0$.

Die Bedingung $\text{rot}(f) = 0$ ist immer notwendig nach dem Satz von Schwarz. Die Kugelschale K ist einfach zusammenhängend, dank Satz H2E ist somit $\text{rot}(f) = 0$ hier auch hinreichend!

Wie berechnen Sie ein Potential? Durch das Arbeitsintegral

$$F(x) = \int_{s=p}^x f(s) \cdot ds = \int_{\gamma} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$$

längs eines Weges $\gamma: [a, b] \rightarrow K$ vom Fußpunkt $\gamma(a) = p$ nach $\gamma(b) = x$.

Hierbei ist der Fußpunkt $p \in K$ einmal frei wählbar und wird dann im Folgenden festgehalten.

Ebenso ist der Integrationsweg γ in K frei wählbar, z.B. ein Hakenintegral in Kugelkoordinaten:

Hier ist es leicht, der Parameterbereich für $(r, \theta, \varphi) \in [\sigma, \rho] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ ist ein Quader!

Nach der Rechnung die Probe nicht vergessen! Gilt $F' = f$?

Der Kreisring A ist zusammenhängend, aber nicht einfach zshgd:

Der Weg $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow A: t \mapsto (r \cos t, r \sin t)$ ist nicht zusammenziehbar. (Anschaulich ist das klar, Beweis durch Integral über das Wirbelfeld!)

Gegeben sei hierauf ein stetig differenzierbares Vektorfeld $f: A \rightarrow \mathbb{R}^2$. Zum Feld $f: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ suchen wir ein Potential $F: A \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F' = f$.

Wann existiert ein Potential? Notwendig ist wie immer $\operatorname{rot}(f) = 0$. Hinreichend ist $\operatorname{rot}(f) = 0$ und $\oint_{\gamma} f \cdot d\gamma = 0$ für den obigen Weg γ .

Wir müssen hier also nicht alle (unendliche viele) Wege nachprüfen, sondern nur einen. Verschwindet das Arbeitsintegral längs γ , dann auch für alle anderen geschlossenen Wege: Unser Vektorfeld $f: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist dann konservativ und somit exakt dank Satz H2A!

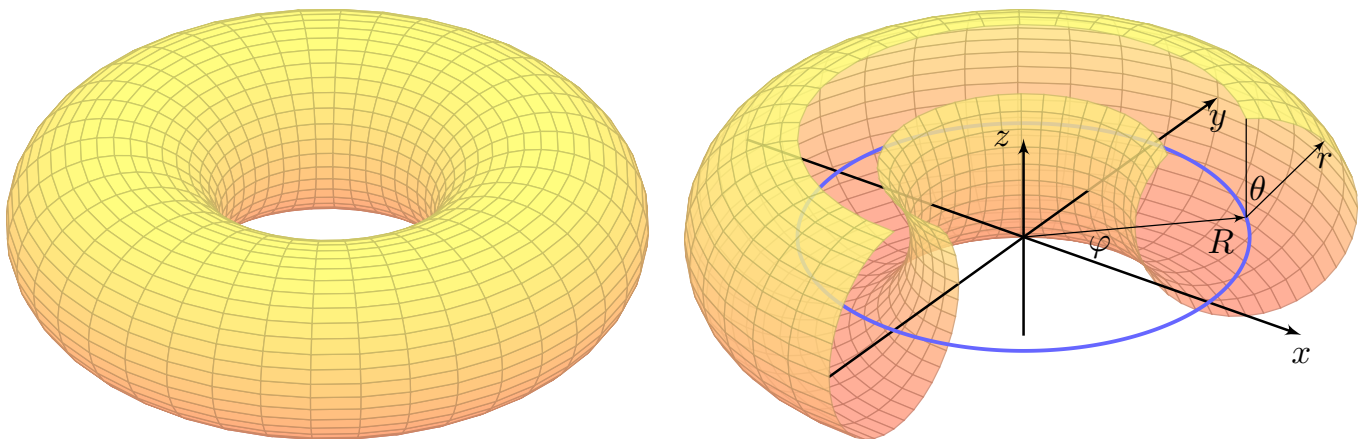
Wie berechnen Sie ein Potential? Durch das Arbeitsintegral

$$F(x) = \int_{s=p}^x f(s) \cdot ds = \int_{\gamma} f_1 dx + f_2 dy$$

längs eines Weges $\gamma: [a, b] \rightarrow A$ vom Fußpunkt $\gamma(a) = p$ nach $\gamma(b) = x$.

Hierbei ist der Fußpunkt $p \in A$ einmal frei wählbar und wird dann im Folgenden festgehalten. Ebenso ist der Integrationsweg γ in A frei wählbar, z.B. ein Hakenintegral in Polarkoordinaten: Hier ist es leicht, denn der Parameterbereich für $(r, \varphi) \in [\sigma, \rho] \times [0, 2\pi]$ ist ein Rechteck!

Volltorus und Außenraum



Der Volltorus $V \subseteq \mathbb{R}^3$ ist zusammenhängend, aber nicht einfach zshgd. Seine Seele (die blaue Kreislinie) ist in V nicht zusammenziehbar. Dasselbe gilt, dual hierzu, für den Außenraum $U = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{V}$.

Anwendung / Anschauung: Wir stellen uns den Torus V als einen stromdurchflossenen Leiter vor, etwa als eine Spule mit Wicklung um die z -Achse. Der Außenraum U ist leer, insbesondere fließt hier keinerlei Strom. Wir untersuchen die Maxwell-Gleichungen [H157] im statischen Fall $\partial_t E = \partial_t B = 0$: Es gilt $\operatorname{div} B = 0$ und auf U zudem $\operatorname{rot} B = 0$, dennoch gilt $\oint_{\beta} B(s) ds \neq 0$; genau dies beobachtet man bei Gleichstrommagneten. Bei Wechselstrom (dynamischer Fall) nutzt man $\operatorname{rot} E = -\partial_t B/c$ zur Induktion in einer zweiten Spule (Transformator).

Gegeben ist ein C^1 -Vektorfeld $f: \mathbb{R}^n \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^n$, gesucht ist ein Potential.

Aufgabe: Formulieren Sie Ihren Algorithmus zur Nutzung der Kriterien (1) „Auf U gilt $\text{rot } f = 0$.“ und (2) „ U ist einfach zusammenhängend.“ sowie (3) „Es gilt $\oint_{\gamma} f \cdot d\gamma = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ in U .“

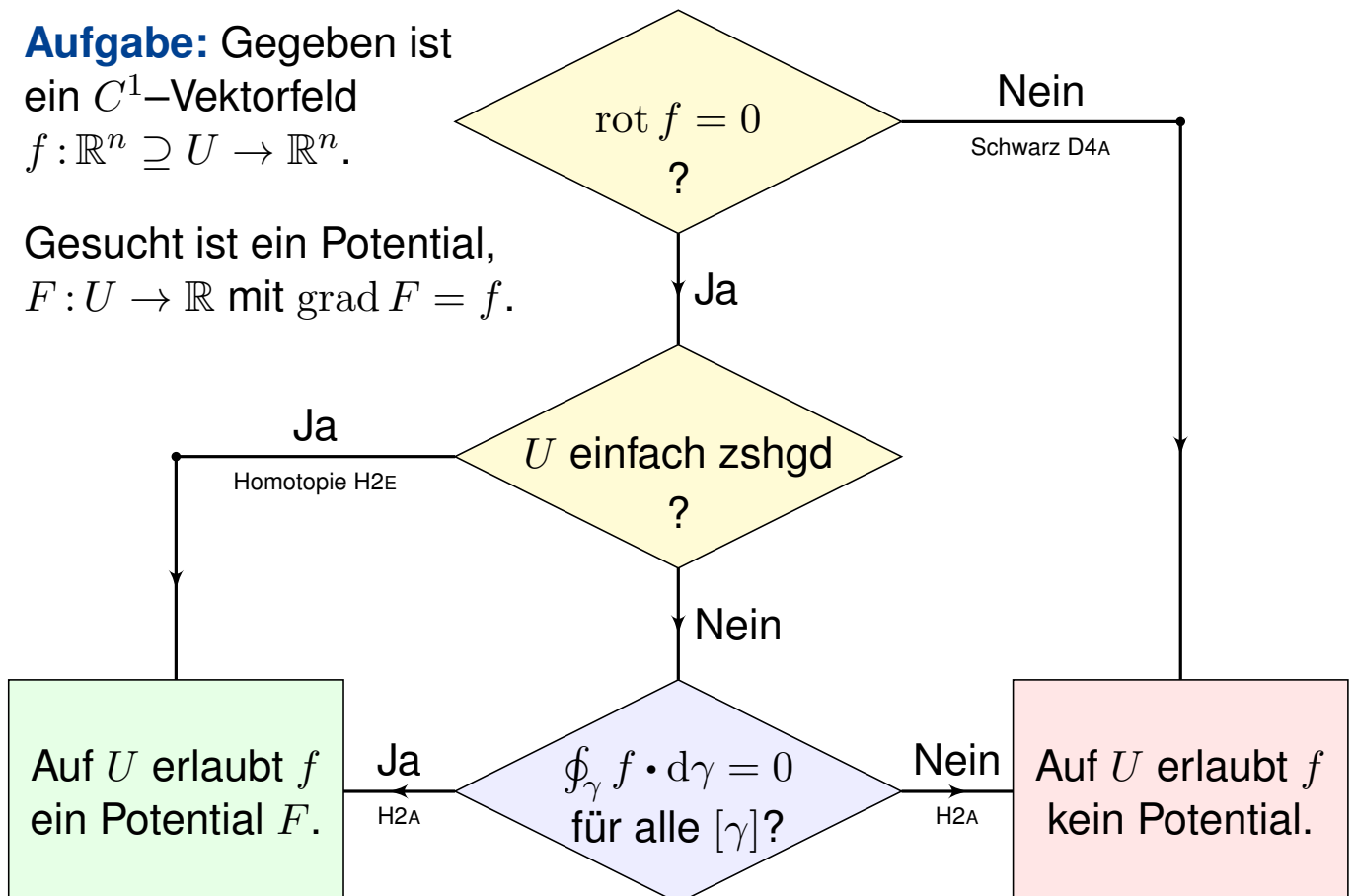
Wie können Sie im positiven Falle ein solches Potential F berechnen? Warum sind Potentiale zu f nicht eindeutig? Wie finden Sie alle?

Kriterien an f und U	U einfach zusammenhängend	U nicht einfach zusammenhängend
$\text{rot } f \neq 0$ $J(f)$ asymmetrisch	Auf U erlaubt f kein Potential.	Auf U erlaubt f kein Potential.
$\text{rot } f = 0$ $J(f)$ symmetrisch	Auf U erlaubt f ein Potential F .	Beides ist möglich. Prüfe $\oint_{\gamma} f \cdot d\gamma = 0$.

! Die vollständige Lösung des Problems erfordert mehrere Kriterien, einige notwendig, andere hinreichend. Diese Zusammenfassung hilft.

Aufgabe: Gegeben ist ein C^1 -Vektorfeld $f: \mathbb{R}^n \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Gesucht ist ein Potential, $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\text{grad } F = f$.



Zur Vereinfachung nehmen wir an, die Menge U ist offen und zshgd. Hierauf ist unser Vektorfeld $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, kurz C^1 . Wir wollen klären, ob f ein Potential erlaubt, $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\text{grad } F = f$.
 Notwendig ist $\text{rot } f = 0$: Aus $f = \text{grad } F$ folgt $\text{rot } f = \text{rot grad } F = 0$ dank Schwarz (D4A). Gilt also $\text{rot } f \neq 0$, so kann f kein Potential haben.
 Nach diesem ersten Hindernis kommt das zweite: Wir nehmen nun $\text{rot } f = 0$ an; hinreichend ist dann U einfach zusammenhängend (H2E).

😊 Damit lassen sich viele Fälle schnell und einfach entscheiden: Notwendig ist $\text{rot } f = 0$, hinreichend ist $\text{rot } f = 0$ und U einfach zshgd.

😊 Gilt $\text{rot } f = 0$, aber U ist nicht einfach zshgd, so prüfen wir genauer. Wir testen aus jeder Homotopieklasse $[\gamma]$ einen geschlossenen Weg γ . Gilt $\oint_{\gamma} f \cdot \gamma \neq 0$, so kann f kein Potential haben (H2A). Gilt $\oint_{\gamma} f \cdot \gamma = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ in U , so hat f ein Potential (H2A), nämlich:

$$F(x) = \int_{s=p}^x f(s) \cdot ds$$

😊 Der Wert $F(x)$ ist wohldefiniert, unabhängig vom gewählten Weg.

Wie beweisen Sie, dass f kein Potential haben kann? Ganz einfach: Sie zeigen $\text{rot } f \neq 0$, oder $\oint_{\gamma} f \cdot \gamma \neq 0$ für einen geschlossenen Weg γ .

Wie beweisen Sie, dass f ein Potential hat? Es gibt drei Möglichkeiten:

- (1) Sie legen ein Potential F explizit vor und weisen $F' = f$ nach.
- (2) Es genügt, $\text{rot } f = 0$ auszurechnen und nachzuweisen, dass das Gebiet U einfach zusammenhängend ist, etwa konvex oder sternförmig.
- (3) Gelingt dies nicht, so müssen Sie schlimmstenfalls nachrechnen, dass hier $\oint_{\gamma} f \cdot \gamma = 0$ gilt für jeden geschlossenen Weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$. Bei $\text{rot } f = 0$ genügt ein Repräsentant γ aus jeder Homotopieklasse.

Angenommen, es gilt $\oint_{\gamma} f \cdot \gamma = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ in U . Wie konstruieren Sie dann zu f ein Potential F ? Als Arbeitsintegral:

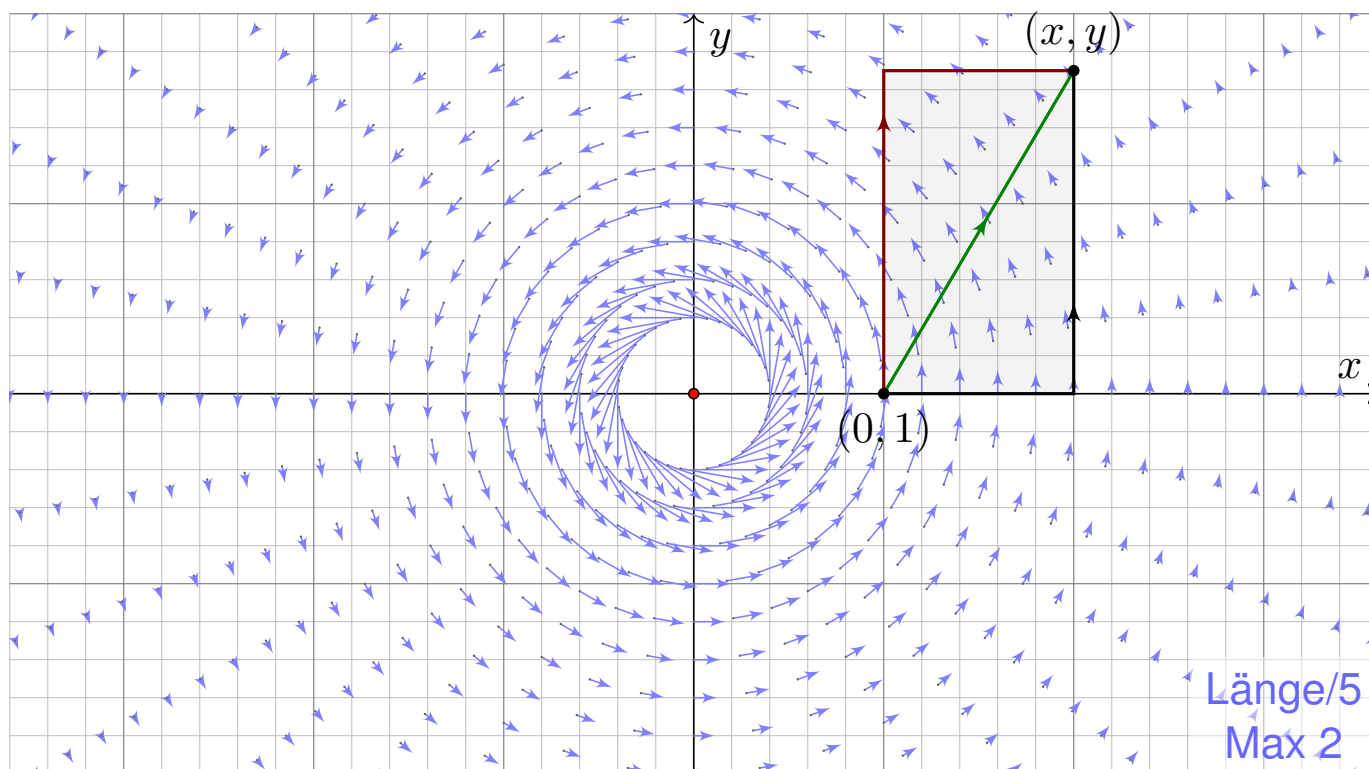
$$F(x) = \int_{s=p}^x f(s) \cdot ds$$

Wie prüfen Sie, ob eine gegebene Funktion $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ ein Potential ist?

😊 Die direkte Probe genügt: $\text{grad } F$ ausrechnen und mit f vergleichen.

Fortsetzung & Schluss: Wir betrachten das zirkuläre Vektorfeld

$$f : U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad f(x, y) = (-y, x)/(x^2 + y^2)^{a/2}.$$



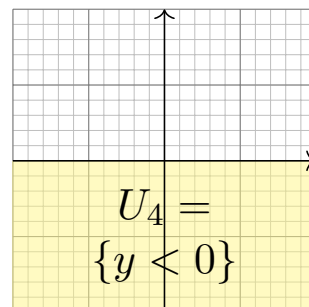
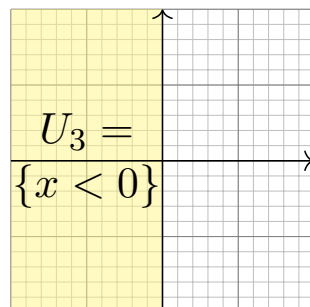
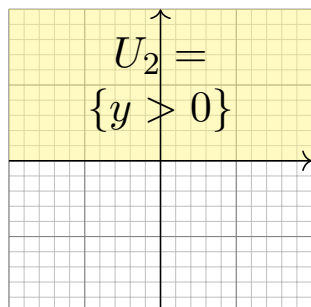
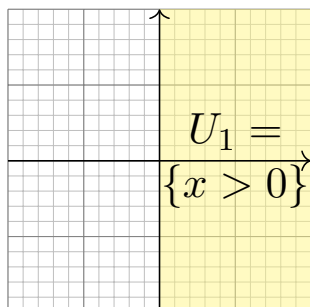
Inwiefern liegt das Problem am Definitionsgebiet $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$?

⚠ Das Gebiet U ist nicht einfach zusammenhängend. (Loch in 0)

Lässt sich Green anwenden: $\int_{\partial B(0,r)} f(s) \cdot ds = \int_{\bar{B}(0,r)} \text{rot}(f) d(x, y)$?

⚠ Offenbar nicht: Im Punkt 0 ist f und somit $\text{rot}(f)$ nicht definiert!
Der punktierte Integrationsbereich $\bar{B}(0, r) \setminus \{0\}$ ist nicht kompakt.

Aufgabe: Statt $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ betrachten wir vier offene Halbebenen:



- (5) Für welche a erlaubt $f_i = f|_{U_i} : U_i \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein Potential $F_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$?
- (6) Bestimmen Sie jeweils zu $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^2$ alle Potentiale $F_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$.
- (7) Existieren Potentiale $F_{12} : U_1 \cup U_2 \rightarrow \mathbb{R}$? $F_{123} : U_1 \cup U_2 \cup U_3 \rightarrow \mathbb{R}$?
Warum konstruieren wir so nicht auch ein Potential $F : U \rightarrow \mathbb{R}$?

(5) Wir finden $\text{rot}(f) = (2 - a)/(x^2 + y^2)^{a/2}$.

Zur Exaktheit ist $\text{rot}(f) = 0$ notwendig, also $a = 2$.

Das ist die notwendige lokale Bedingung, unabhängig vom Gebiet.

Zudem ist U_i konvex (H2E): Für $a = 2$ existiert ein Potential $F_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$.

Ist ein Potential F zu f vorgelegt, so ist die Probe leicht: Es genügt, geduldig nachzurechnen, ob $\partial_i F = f_i$ gilt. Aber wie finden wir F ?

(6) Wir bestimmen ein Potential $F_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}$ dank Arbeitsintegral (H2A):

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= \int_{s=(1,0)}^{(x,0)} f(s) \cdot ds + \int_{s=(x,0)}^{(x,y)} f(s) \cdot ds = 0 + \int_{t=0}^y f(x, t) \cdot (0, 1) dt \\ &= \int_{t=0}^y \frac{x}{x^2 + t^2} dt = \int_{t=0}^y \frac{1}{1 + (t/x)^2} d(t/x) = \int_{u=0}^{y/x} \frac{1}{1 + u^2} du \\ &= \left[\arctan(u) \right]_{u=0}^{y/x} = \arctan(y/x) \end{aligned}$$

Probe: $\partial_x \arctan(y/x) = -y/(x^2 + y^2)$, $\partial_y \arctan(y/x) = x/(x^2 + y^2)$.

Ebenso finden wir $F_2(x, y) = -\arctan(x/y) + \text{const}$ auf U_2 und weiter $F_3(x, y) = \arctan(y/x) + \text{const}$ sowie $F_4(x, y) = -\arctan(x/y) + \text{const}$. Auf jedem dieser (konvexen!) Gebiete U_i erlaubt f ein Potential F_i .

(7) Die folgenden Abbildungen skizzieren diese Potentiale $F_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$. Je drei dieser Potentiale lassen sich verkleben, aber nicht alle vier!

Wir beginnen mit $F_1 = \arctan(y/x)$ und $F_2 = -\arctan(x/y) + c$.

Diese stimmen auf $U_1 \cap U_2$ überein für $c = \pi/2$: Punktprobe in $(1, 1)$.

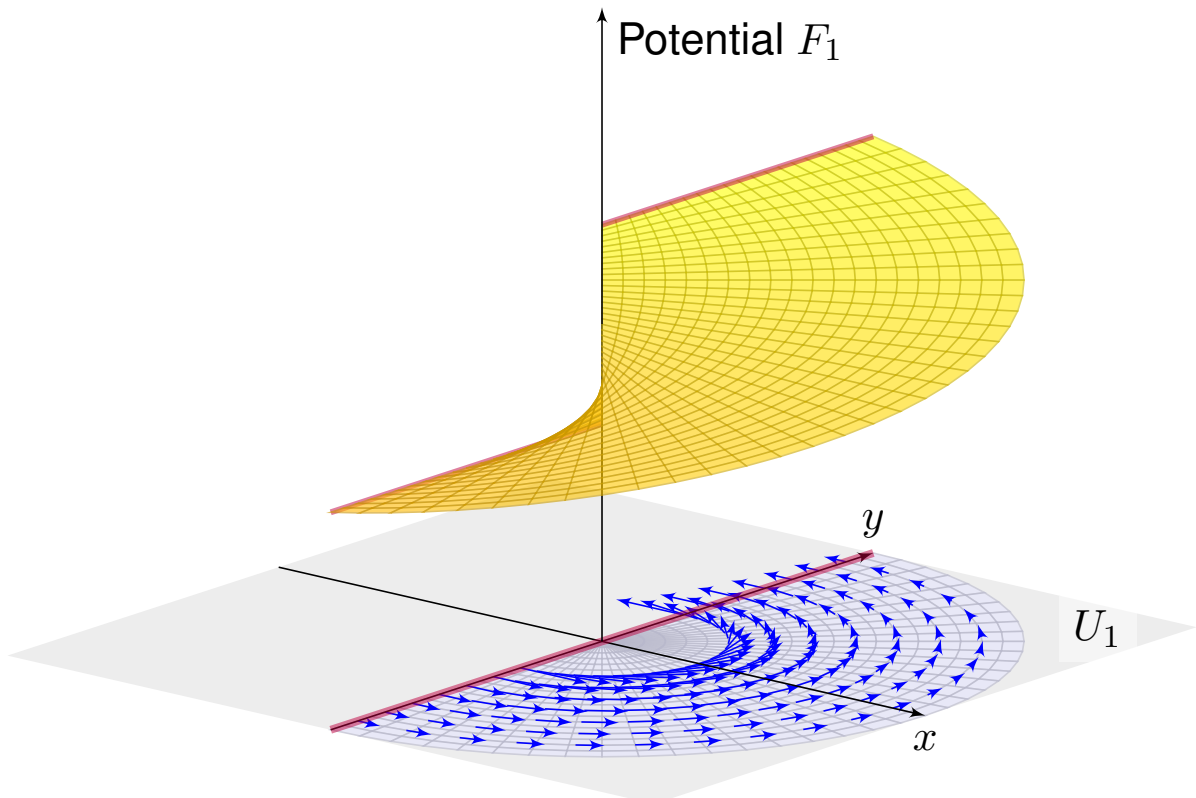
Ebenso $F_3 = \arctan(y/x) + \pi$. Wir erhalten $F : U_1 \cup U_2 \cup U_3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Im letzten Schritt finden wir ebenso $F_4 = -\arctan(x/y) + 3\pi/2$.

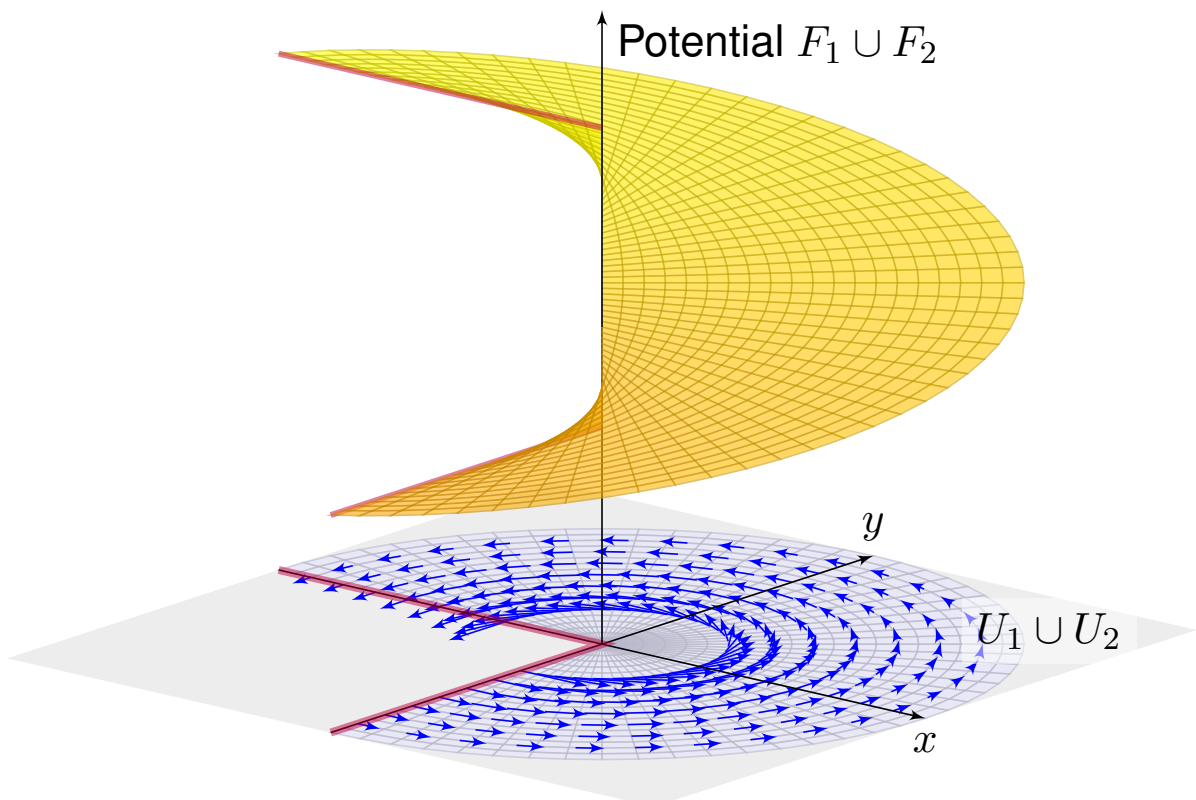
Dies schließt sich nicht: Auf $U_4 \cap U_1$ bleibt die Differenz $F_4 - F_1 = 2\pi$!

Das entspricht dem Integral $\oint_{\partial B(0,r)} f(s) \cdot ds = 2\pi$, wie zuvor gesehen.

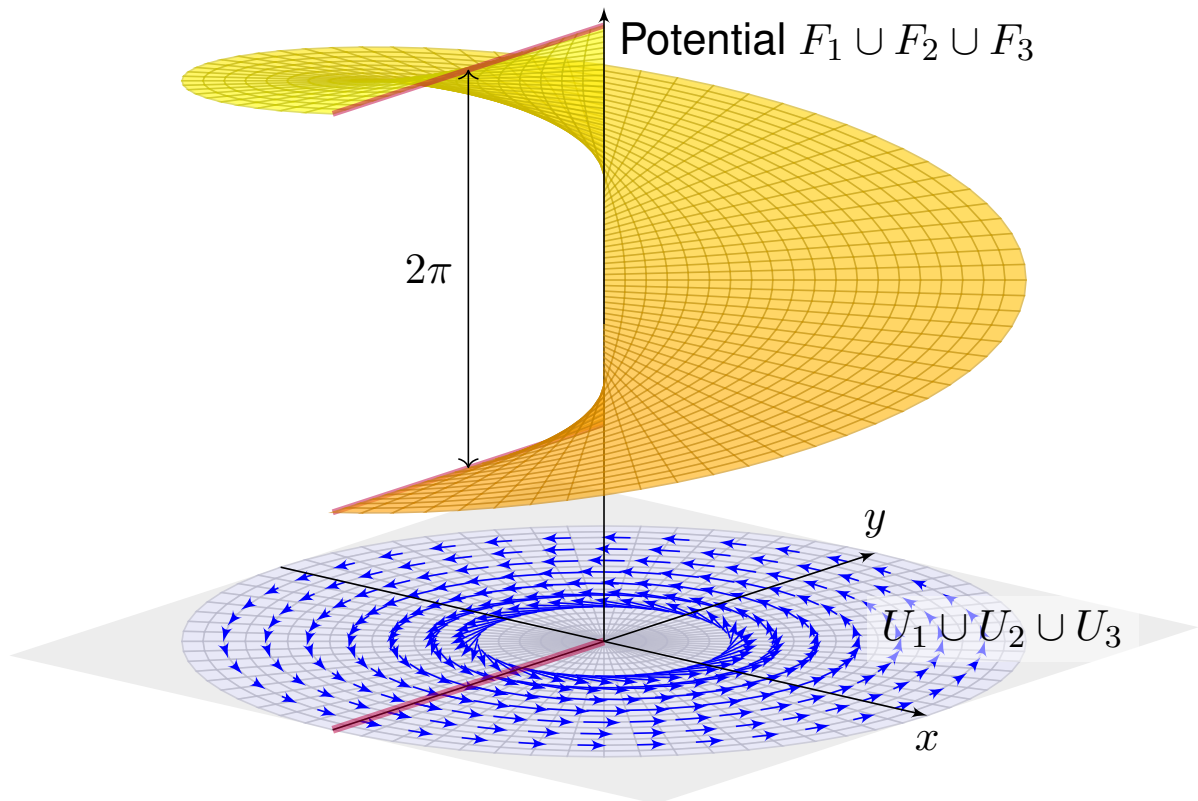
Das Bild von M.C. Escher illustriert diese bemerkenswerte Situation: Das Gravitationsfeld ist konservativ: Sie können nicht ständig bergab laufen, auch nicht ständig bergauf! Denken Sie etwa ans Wandern im Gebirge. In einer kreisförmigen Gegenströmung hingegen können Sie stets gegen den Strom schwimmen, so wie hier im Wirbelfeld.



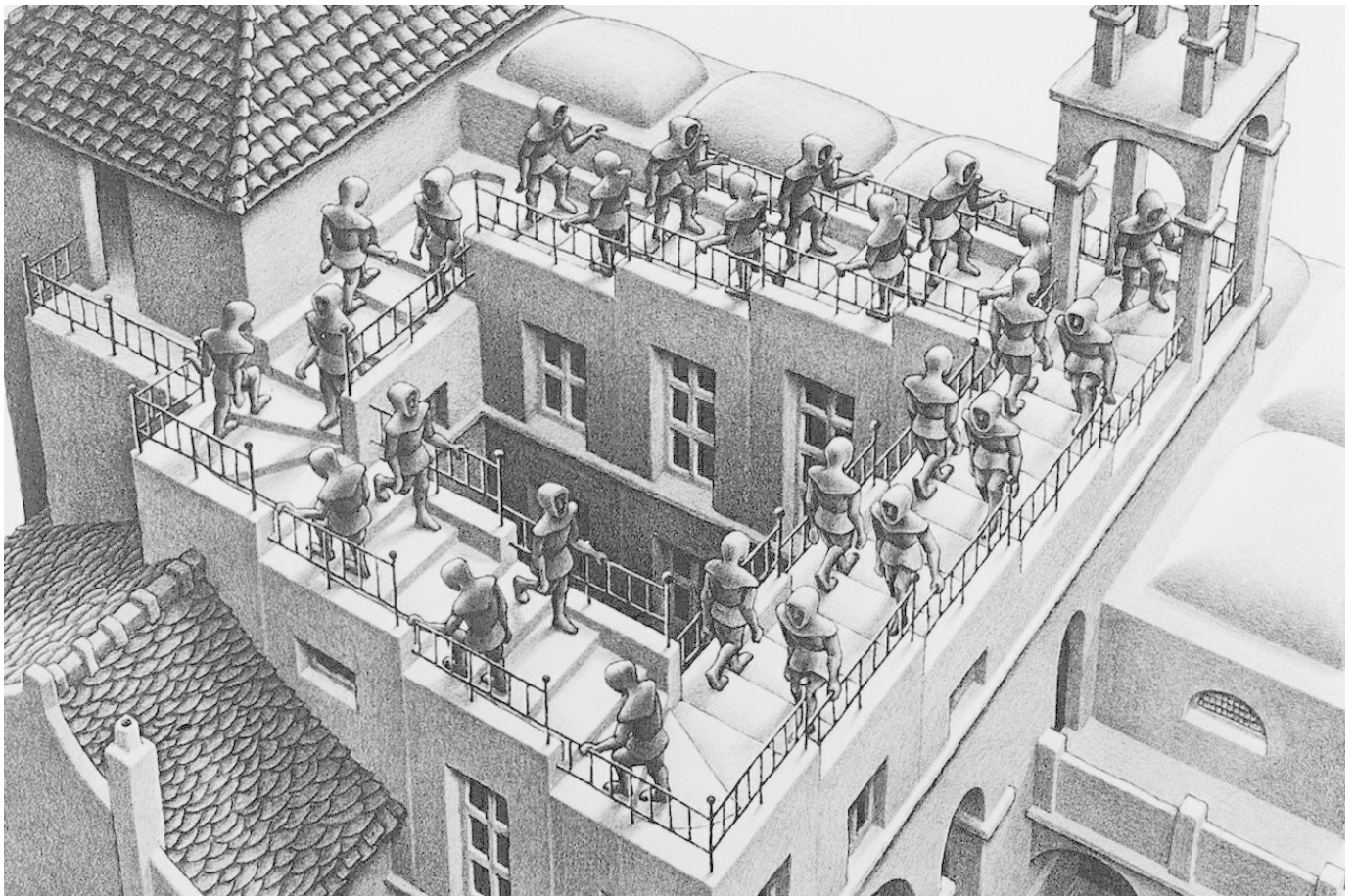
Unser Vektorfeld $f : U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ erfüllt $\text{rot}(f) = 0$ auf ganz U .
 Die offene Halbebene U_1 ist konvex, hierauf hat f also ein Potential F_1 .
 Die obige Rechnung zeigt alle Lösungen: $F_1(x, y) = \arctan(y/x) + \text{const}$



Unser Vektorfeld $f : U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ erfüllt $\text{rot}(f) = 0$ auf ganz U .
 Die Vereinigung $U_1 \cup U_2$ ist sternförmig, hierauf hat f ein Potential.
 Wir passen die Integrationskonstanten an und verkleben F_1 und F_2 .



Auch $U_1 \cup U_2 \cup U_3$ ist sternförmig: Wir erhalten die Ebene \mathbb{R}^2 minus eine Halbgerade. Auch hierauf hat f ein Potential: die Wendelfläche! Diese schließt sich nicht, daher erhalten wir kein Potential $F : U \rightarrow \mathbb{R}$.



1. Über jedem Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ haben wir das **unorientierte Integral**

$$\int_{[a,b]} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad \text{für } a \leq b \text{ in } \mathbb{R}.$$

2. Für das **orientierte Integral** vereinbaren wir zudem

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx \quad \text{für } a, b \in \mathbb{R}.$$

3. Das **unbestimmte Integral** ist eine Stammfunktion (Potential):

$$F = \int f(x) dx \quad \text{bedeutet} \quad F' = f.$$

In Dimension 1 leistet der HDI die Übersetzung dieser drei Konzepte.

In Dimension ≥ 2 laufen diese drei Aspekte zunächst auseinander:

1. Volumen und mehrdimensionales Integral (unorientiert, Kapitel A–D)
2. Wegintegral und Flächenintegral (orientiert, siehe die vorigen Kapitel E–G)
3. Vektorfelder und Potentiale: Diesen Punkt haben wir in diesem Kapitel H geklärt.

Differentialformen fügen diese drei Sichtweisen wieder zu einer einheitlichen Theorie, siehe Burg–Haf–Meister–Wille, *Vektoranalysis* aus ihrer Reihe HM für Ingenieur:innen. Wir gehen hier nicht darauf ein, sondern lösen bescheiden aber konkret lediglich das Potentialproblem (3).

Zentrales Beispiel: das Newton–Potential

Wichtige Beispiele und Anwendungen von Potentialen liefert die Physik. Das **Newton–Potential** einer Masse m im Punkt $y \in \mathbb{R}^3$ ist

$$F : \mathbb{R}^3 \setminus \{y\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) = \frac{m}{|y - x|}$$

(bis auf Konstanten&Vorzeichen). Das zugehörige **Gravitationsfeld** ist

$$f : \mathbb{R}^3 \setminus \{y\} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad f(x) = \text{grad } F(x) = m \frac{y - x}{|y - x|^3}.$$

Für jede beschränkte **Massenverteilung** $\varrho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ haben wir

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) = \int_{y \in K} \frac{\varrho(y)}{|y - x|} dy.$$

Das zugehörige Gravitationsfeld ist dann die **Superposition** (Faltung)

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad f(x) = \text{grad } F(x) = \int_{y \in K} \frac{y - x}{|y - x|^3} \varrho(y) dy.$$

Hier nutzen wir das Ableiten unter dem Integral, genauer Satz H1D.

Aufgabe: Zu $x \in \mathbb{R}^n$ sei $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ die euklidische Norm.

- (1) Berechnen Sie $\text{grad } F$ zur Funktion $F: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto |x|$ sowie $F(x) = 1/|x|^\alpha$ und $F(x) = G(|x|)$ mit $G: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diff'bar.
- (2) Skizzieren Sie $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n: x \mapsto x/|x|$ sowie $f(x) = x/|x|^a$ und allgemein $f(x) = g(|x|) \cdot x/|x|$ mit $g: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.
- (3) Berechnen Sie die Rotation $\partial_j f_i - \partial_i f_j$ des Vektorfeldes f .
- (4) Wann hat f ein Potential? (5) Finden Sie ein Potential F zu f .

Lösung: (1) Wir schreiben alles geduldig aus und leiten ab:

$$|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \partial_i |x| = x_i/|x|, \quad \text{grad}|x| = x/|x|$$

Dank Kettenregel folgt $\text{grad } G(|x|) = G'(|x|) \cdot x/|x|$. Speziell im Beispiel:

$$F(x) = |x|^{-\alpha}, \quad \partial_i F(x) = -\alpha x_i |x|^{-\alpha-2}, \quad \text{grad } F(x) = -\alpha x |x|^{-\alpha-2}$$

- (2) Skizzen! Für $n = a = 2$ ist $f(x) = x/|x|^2$ das ebene Quellenfeld. E317
Der dreidimensionale Fall $n = a = 3$ entspricht einer Punktladung. H153

- (3) Sei g stetig differenzierbar und $i \neq j$. Aus $f_i(x) = g(|x|) \cdot x_i/|x|$ folgt

$$\partial_j f_i(x) = g'(|x|) \cdot \frac{x_j}{|x|} \cdot \frac{x_i}{|x|} - g(|x|) \cdot \frac{x_i x_j}{|x|^3} = \left[g'(|x|) - \frac{g(|x|)}{|x|} \right] \cdot \frac{x_i x_j}{|x|^2},$$

also $\partial_j f_i - \partial_i f_j = 0$. Für $f(x) = x/|x|^a$ gilt $\partial_j f_i(x) = -a x_i x_j / |x|^{a+2}$.

- (4) Wie immer ist $\text{rot}(f) = 0$ notwendig für die Existenz eines Potentials. Für $n \geq 3$ ist $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ einfach zusammenhängend, also ist $\text{rot}(f) = 0$ auch hinreichend. Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ müssen wir noch genauer hinschauen: Dank $\oint_{\partial B(0,1)} f(s) \cdot ds = 0$ verschwindet auch das zweite Hindernis!

- (5) Zu $f(x) = g(|x|) \cdot x/|x|$ finden wir mit (1) das Potential $F(x) = G(|x|)$ mit $G(r) = \int_1^r g(\rho) d\rho$. Das beantwortet zugleich (4) und (3). Speziell:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2-a)|x|^{a-2}} & \text{für } a \neq 2 \\ \ln|x| & \text{für } a = 2 \end{cases} \implies \text{grad } F(x) = \frac{x}{|x|^a}$$

Im Beispiel $n = a = 3$ finden wir das Newton-Potential $F(x) = -1/|x|$. Unsere allgemeine Rechnung gilt in jeder Dimension, siehe Satz R1B.

Aufgabe: Wir setzen die vorige Aufgabe fort.

(6) Berechnen Sie $\operatorname{div}(f)$ zu $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $f(x) = x/|x|^a$.

Für welche $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$ ist dieses Feld f divergenzfrei?

(7) Berechnen Sie zu f das Flussintegral über die Sphäre $r\mathbb{S}^{n-1}$.

(8) Allgemeiner sei $g: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben durch $f(x) = g(|x|) \cdot x/|x|$. Für welche g ist das Feld f divergenzfrei?

(9) Sei schließlich $G: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Für welche G ist die Funktion $F: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto F(x) = G(|x|)$ harmonisch?

Lösung: (6a) Wie immer leiten wir geduldig ab und berechnen $\operatorname{div}(f)$:

$$f_i(x) = x_i(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-\frac{a}{2}}$$

$$\partial_i f_i(x) = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-\frac{a}{2}} - a x_i^2 (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-\frac{a+2}{2}}$$

$$\operatorname{div} f(x) = (n - a)(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-\frac{a}{2}}$$

(6b) Dies verschwindet genau für $a = n$. In jeder Dimension n finden wir das uns vertraute Quellenfeld $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n: x \mapsto f(x) = x/|x|^n$.

(7a) Im Raum \mathbb{R}^n betrachten wir die Sphäre $r\mathbb{S}^{n-1}$ vom Radius $r > 0$.

In jedem Punkt $s \in r\mathbb{S}^{n-1}$ ist die Einheitsnormale $n(s) = s/|s|$.

Der Fluss des Vektorfeldes $f(x) = x/|x|^a$ ist demnach:

$$\begin{aligned} \int_{r\mathbb{S}^{n-1}} f(s) \cdot n(s) \, dS &= \int_{r\mathbb{S}^{n-1}} \frac{s}{|s|^a} \cdot \frac{s}{|s|} \, dS = r^{1-a} \int_{r\mathbb{S}^{n-1}} dS \\ &= r^{1-a} \operatorname{vol}_{n-1}(r\mathbb{S}^{n-1}) = r^{1-a} r^{n-1} \operatorname{vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) = r^{n-a} \operatorname{vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \end{aligned}$$

(7b) Damit beantworten wir erneut die Frage nach der Divergenzfreiheit:

Wir nehmen $\operatorname{div}(f) = 0$ an. Auf der Kugelschale $K(0, r_1, r_2)$ gilt:

$$\int_{r_2\mathbb{S}^{n-1}} f(s) \cdot n(s) \, dS - \int_{r_1\mathbb{S}^{n-1}} f(s) \cdot n(s) \, dS = \int_{K(0, r_1, r_2)} \operatorname{div} f(x) \, dx = 0$$

Die Funktion $r \mapsto r^{n-a}$ ist demnach konstant, folglich muss $a = n$ gelten.

Umgekehrt erfüllt $f(x) = x/|x|^n$ tatsächlich $\operatorname{div}(f) = 0$, dank (6).

😊 Die Rechnung in (6) gelingt durch sorgfältiges Ableiten, die Rechnung in (7) geometrisch durch das Flussintegral.

(8a) Der Fluss des Vektorfeldes $f(x) = g(|x|) \cdot x/|x|$ über $r\mathbb{S}^{n-1}$ ist:

$$\begin{aligned} \int_{r\mathbb{S}^{n-1}} f(s) \cdot n(s) \, dS &= \int_{r\mathbb{S}^{n-1}} g(|s|) \frac{s}{|s|} \cdot \frac{s}{|s|} \, dS = g(r) \int_{r\mathbb{S}^{n-1}} dS \\ &= g(r) \operatorname{vol}_{n-1}(r\mathbb{S}^{n-1}) = g(r) r^{n-1} \operatorname{vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \end{aligned}$$

(8b) Wir nehmen nun $\operatorname{div}(f) = 0$ an. Auf der Kugelschale $K(0, r_1, r_2)$ gilt:

$$\int_{r_2\mathbb{S}^{n-1}} f(s) \cdot n(s) \, dS - \int_{r_1\mathbb{S}^{n-1}} f(s) \cdot n(s) \, dS = \int_{K(0, r_1, r_2)} \operatorname{div} f(x) \, dx = 0$$

Die Funktion $r \mapsto g(r) r^{n-1}$ ist demnach konstant, also $g(r) = c/r^{n-1}$:
Wenn $f(x) = g(|x|) \cdot x/|x|$ divergenzfrei ist, dann gilt $f(x) = c \cdot x/|x|^n$.
Umgekehrt erfüllt $f(x) = c \cdot x/|x|^n$ tatsächlich $\operatorname{div}(f) = 0$, siehe (6).

😊 Die in (6,7) gefundenen Lösungen $f(x) = c \cdot x/|x|^n$ sind demnach die einzigen radialsymmetrischen Vektorfelder mit $\operatorname{div}(f) = 0$!

Wir haben also tatsächlich alle solchen Lösungen gefunden.

😊 Dies sind genau die physikalisch beobachteten Felder.

(9) Der Laplace-Operator ist $\Delta = \nabla^2 = \operatorname{div} \circ \operatorname{grad} = \partial_1^2 + \dots + \partial_n^2$.

Wir berechnen zu F zunächst den Gradienten $f = \operatorname{grad} F$ wie in (1):

Aus $F(x) = G(|x|)$ folgt $f(x) = g(|x|) \cdot x/|x|$ mit $g = G'$.

Dank (8) wissen wir, dass $\operatorname{div}(f) = 0$ genau für $g(r) = c/r^{n-1}$ gilt.

Im Falle $n \neq 2$ finden wir $G(r) = 1/r^{n-2}$ mit $G'(r) = (2-n)/r^{n-1}$.

Im Falle $n = 2$ finden wir $G(r) = \ln r$ mit $G'(r) = 1/r$.

Zusammenfassend halten wir folgendes Ergebnis fest:

Satz H2F: radialsymmetrische harmonische Funktionen

Sei $F: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ radialsymmetrisch, also $F(x) = G(|x|)$. Genau dann ist F harmonisch, $\Delta F = 0$, wenn für geeignete $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$F(x) = a + \begin{cases} b/|x|^{n-2} & \text{für } n \neq 2, \\ b \ln|x| & \text{für } n = 2. \end{cases}$$

Sei $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ radialsymmetrisch, also $f(x) = g(|x|) \cdot x/|x|$.

Genau dann ist f divergenzfrei, $\operatorname{div} f = 0$, wenn $f(x) = \operatorname{const} \cdot x/|x|^n$.

Strömungslehre: Die Massenbilanz als Integralgleichung:

$$\frac{d}{dt} \iiint_K \rho \, dK + \iint_{S=\partial K} (\rho \vec{v} \cdot \vec{n}) \, dS = 0$$

Hieraus erhalten wir dank Gauß die **Kontinuitätsgleichung:**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad \text{bei } \rho = \text{const also } \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

Wärmeleitung: Die Wärmebilanz als Integralgleichung:

$$\iiint_K q(t, x) \, dx = \frac{d}{dt} \iiint_K u(t, x) \, dx + \iint_{S=\partial K} \vec{f}(t, x) \cdot \vec{n} \, dS$$

Hieraus erhalten wir Fouriers berühmte **Wärmeleitungsgleichung:**

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \Delta u = q \quad \text{mit} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

😊 Diese Differentialgleichung können wir lösen, exakt oder numerisch.

Elektrodynamik: Die Maxwell-Gleichungen als Integralgleichungen:

Coulomb Ladungsgesetz $\iint_{\partial V} \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V 4\pi \rho \, dV$

Faraday Induktionsgesetz $\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{1}{c} \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} \, dS$

Gauß Quellenfreiheit $\iint_{\partial V} \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = 0$

Ampère Durchflutungsgesetz $\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{c} \iint_S \left(4\pi \vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} \, dS$

Dank Gauß und Stokes erhalten wir hieraus Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 4\pi \rho, & \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, & \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{J}. \end{aligned}$$

😊 Daraus folgen insbesondere Ladungserhaltung und Wellengleichung.

Ein Vektorfeld $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **exakt**, oder **Gradientenfeld**, wenn es ein Potential erlaubt, also ein Skalarfeld $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F' = f$ existiert.

$$f = F' = \text{grad } F = (\partial_1 F, \dots, \partial_n F) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right).$$

😊 Für jeden stückweise stetig diff'baren Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ gilt dann:

$$\int_{\gamma} f \cdot d\gamma = \int_{t=a}^b F'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_{t=a}^b \frac{dF(\gamma(t))}{dt} dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Ist der Weg γ geschlossen, $\gamma(a) = \gamma(b)$, so folgt demnach $\oint_{\gamma} f \cdot d\gamma = 0$.

Ein Vektorfeld $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **konservativ**, oder **global wirbelfrei**, wenn $\oint_{\gamma} f \cdot d\gamma = 0$ für jeden geschlossenen Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ gilt.

😊 Das garantiert: Arbeitsintegrale hängen nur von Start und Ziel ab.

Diese beiden Begriffe erweisen sich als äquivalent (Hauptsatz H2A):

- (1) Besitzt das Vektorfeld $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Potential, so ist f konservativ.
- (2) Ist umgekehrt f konservativ, so ist $F(x) = \int_{s=p}^x f(s) \cdot ds$ ein Potential.

😊 Der Wert $F(x)$ ist wohldefiniert, unabhängig vom gewählten Weg γ .

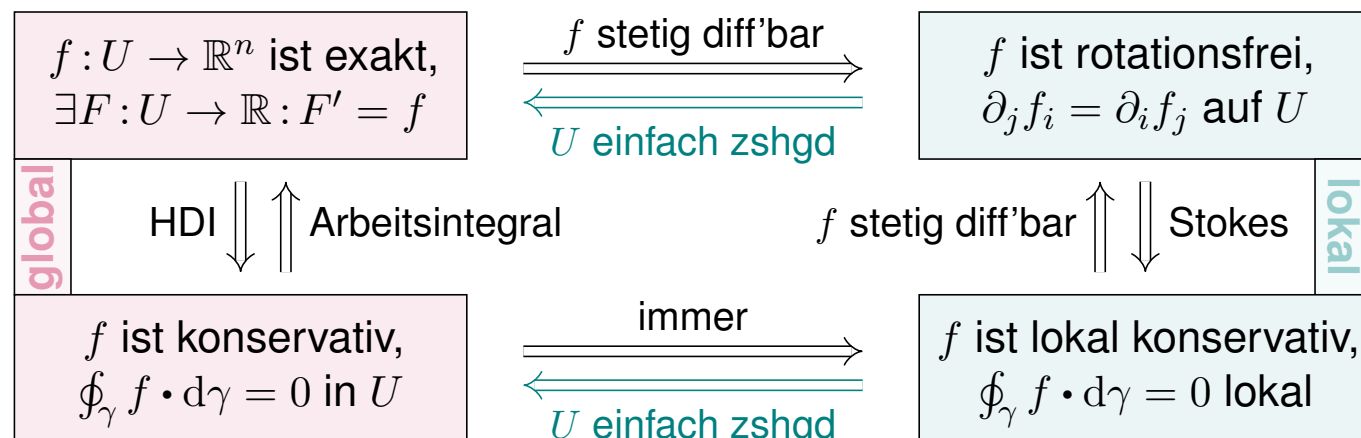
Konstruktion von Potentialen

Lösung des Potentialproblems bei einfachem Zusammenhang (H2E):

Unser Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sei einfach zusammenhängend, z.B. konvex oder sternförmig zu p . Ein C^1 -Vektorfeld $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ erlaubt genau dann ein Potential $F : U \rightarrow \mathbb{R}$, wenn f rotationsfrei ist, also $\partial_j f_i = \partial_i f_j$ erfüllt.

In diesem Fall erhalten wir ein Potential durch das Arbeitsintegral

$$F(x) = \int_{s=p}^x f(s) \cdot ds = \int_{t=a}^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \gamma : [a, b] \rightarrow U, \\ \gamma(a)=p, \gamma(b)=x. \end{cases}$$



Aufgabe: Unter welchen Voraussetzungen gilt... ?

$$(1) \quad \int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

$$(2) \quad \int_X \int_Y f(x, y) \, dy \, dx = \int_Y \int_X f(x, y) \, dx \, dy$$

$$(3) \quad \int_Y f(y) \, dy = \int_X f(\Phi(x)) |\det \Phi'(x)| \, dx$$

$$(4) \quad \int_{\Omega} \sum_{k=0}^n f_k(x) \, dx = \sum_{k=0}^n \int_{\Omega} f_k(x) \, dx$$

$$(5) \quad \int_{\Omega} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Omega} f_k(x) \, dx$$

$$(6) \quad \int_{\Omega} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k(x) \, dx$$

$$(7) \quad \frac{d}{dx} \int_Y f(x, y) \, dy = \int_Y \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \, dy$$

Zusammenfassung und Verständnisfragen

- (1) Voraussetzungen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung [\[B123\]](#), kurz HDI: Die Funktion $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ sei stetig differenzierbar mit Ableitung $f = F'$. (Es genügt F stetig und stückweise stetig differenzierbar [\[B213\]](#), oder noch allgemeiner F absolut stetig [\[B214\]](#).)
- (2) Gegenbeispiele [\[C414\]](#): Vertauschbarkeit gilt nicht immer! Voraussetzungen des Satzes von Fubini [\[C121\]](#): $f : X \times Y \rightarrow [0, \infty]$ sei messbar oder $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ absolut integrierbar.
- (3) Voraussetzungen des Transformationssatzes [\[C209\]](#): Die Mengen $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ seien messbar, $f : Y \rightarrow [0, \infty]$ messbar oder $f : Y \rightarrow \mathbb{C}$ absolut integrierbar, $\Phi : X \rightarrow Y$ stetig differenzierbar und bijektiv (zumindest injektiv und surjektiv bis auf Ausnahmemengen vom Volumen Null).
- (4) Das Integral ist linear! Die Behauptung gilt unter den üblichen Vorsichtsmaßnahmen: $f_k : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ messbar oder $f_k : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ absolut integrierbar.
- (5) Gegenbeispiele [\[D101\]](#): Für Reihen, also unendliche Summen, gilt Vertauschung nicht immer! Hinreichend ist $f_k : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ messbar oder L^1 -Konvergenz $\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Omega} |f_k| \leq \infty$. [\[D106\]](#)
- (6) Für Grenzwerte und Integrale gilt Vertauschung nicht immer! [\[D201\]](#) Voraussetzungen für den Satz der majorisierten Konvergenz [\[D209\]](#): Hinreichend ist punktweise Konvergenz $f_k \rightarrow f$ (fast überall) und eine absolut integrierbare Majorante g mit $|f_k| \leq g$ (fast überall) für alle k .
- (7) Gegenbeispiele [\[D409\]](#): Leider kann man nicht immer die Ableitung unter das Integral ziehen! Hinreichend ist insb. Y kompakt und $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und stetig nach x differenzierbar. Allgemein wie bei der majorisierten Konvergenz [\[D309\]](#): Für jedes x ist $y \mapsto f(x, y)$ integrierbar über y , für fast jedes y ist $x \mapsto f(x, y)$ stetig differenzierbar nach x , und zudem existiert eine integrierbare Majorante $g(y)$, das heißt, $|(\partial f_y / \partial x_j)(x, y)| \leq g(y)$ für alle x und fast alle y .

Aufgabe: Was ist ein Skalarfeld g ? ein Vektorfeld f ?
Unter welchen Voraussetzungen gilt...?

$$(1) \quad \partial_i \partial_j g = \partial_j \partial_i g$$

$$(2) \quad \operatorname{rot} \operatorname{grad} g = 0$$

$$(3) \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} f = 0$$

$$(4) \quad \int_{s \in \Gamma} \operatorname{grad} g(s) \cdot ds = \sum_{s \in \partial \Gamma} g(s) n(s)$$

$$(5) \quad \int_{s \in S} \operatorname{rot} f(s) \cdot dS = \int_{s \in \partial S} f(s) \cdot ds$$

$$(6) \quad \int_{v \in V} \operatorname{div} f(v) dV = \int_{s \in \partial V} f(s) \cdot dS$$

Erklären Sie Bedeutung, Definition und Funktionsweise dieser Formeln.
Welche physikalischen und mathematischen Anwendungen kennen Sie?

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Gebiet, also eine offene zusammenhängende Teilmenge. Hierauf betrachten wir ein Skalarfeld g , also eine stetige Abbildung $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, sowie ein Vektorfeld f , also eine stetige Abbildung $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$. Sind diese zudem stetig differenzierbar, so definieren wir wie üblich die Ableitungen grad , rot , div , siehe zum Beispiel die Wiederholung zu Beginn von Kapitel H.

Aussage (1) gilt für alle zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$: Das ist der Satz von Schwarz (D4A). Damit rechnet man die angegebenen Identitäten (2) und (3) leicht nach. [H104](#)

Die Gleichungen (4–6) sind unsere Integralsätze. Hierzu seien f und g stetig differenzierbar. (Etwas weniger genügt, zum Beispiel Lipschitz–stetig und somit fast überall differenzierbar.)

Für den HDI (4) sei $\Gamma \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ eine stückweise glatte Kurve vom Startpunkt p zum Zielpunkt q mit vektorielllem Wegelement ds . Hierzu sei Γ orientiert; genau wie beim eindimensionalen HDI werten wir Startpunkte negativ, $n(p) = -1$, und Zielpunkte positiv, $n(q) = +1$. Allgemein kann eine solche Kurve Γ mehrere Komponenten und mehrere Randpunkte $s \in \partial \Gamma$ haben.

Für Stokes (5) sei $S \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ eine orientierte, stückweise glatte Fläche mit vektorielllem Flächenelement $dS = n |dS|$, also Einheitsnormale $n: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ und skalarem Flächenelement $|dS|$. Die Randkurve $\Gamma = \partial S$ ist dann ebenfalls stückweise glatt und wird positiv orientiert gemäß der Rechte-Hand-Regel. (Für ebene Flächen $S \subseteq \mathbb{R}^2$ entspricht der Satz von Stokes im Raum \mathbb{R}^3 dem Satz von Green in der Ebene \mathbb{R}^2 , siehe Kapitel E. Beide sind äquivalent.)

Für Gauß (6) schließlich sei $V \subseteq \Omega$ ein Kompaktum mit stückweise glatter Randfläche ∂V und dem üblichen euklidischen Volumenelement $dV = d(x_1, x_2, x_3)$. Die Randfläche $S = \partial V$ wird orientiert durch die nach außen weisende Einheitsnormale $n: S \rightarrow \mathbb{R}^3$, so dass $dS = n |dS|$.

Aufgabe: Sei $A \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Gerade, D eine Kreisscheibe um 0 sowie K eine Kugel um 0. Begründen oder widerlegen Sie:

- (1) Jeder stetige Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ hat endliche Länge.
- (2) Jeder stetig diff'bare Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ hat endliche Länge.
- (3) Für $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\operatorname{div}(f) = 0$ gilt $\int_{\partial D} f(s) \times ds = 0$.
- (4) Für $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\operatorname{rot}(f) = 0$ gilt $\int_{\partial D} f(s) \cdot ds = 0$.
- (5) Für $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{rot}(f) = 0$ gilt $\int_{\partial D} f(s) \cdot ds = 0$.
- (6) Für $f: \mathbb{R}^3 \setminus A \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{rot}(f) = 0$ gilt $\int_{\partial D} f(s) \cdot ds = 0$.
- (7) Für $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{div}(f) = 0$ gilt $\int_{\partial K} f(s) \cdot dS = 0$.
- (8) Für $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $f(x) = \operatorname{const} \cdot x/|x|^n$ gilt $\operatorname{div}(f) = 0$.
- (9) Für $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{div}(f) = 0$ gilt $f(x) = \operatorname{const} \cdot x/|x|^n$.
- (0) Wikipedia zu *Konservative Kraft* (aufgerufen 11.11.2024):
„Äquivalent sind: 1. Die Arbeit entlang jeder beliebigen geschlossenen Kurve innerhalb des Feldes ist gleich Null. [. . .] 4. Das Feld ist auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet definiert und [dort rotationsfrei].“

Zusammenfassung und Verständnisfragen

Aussage (1) gilt nicht. Die Kochkurve ist ein beliebtes Gegenbeispiel. [E104](#)

Aussage (2) gilt dank der Integralformel $\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$ für die Weglänge. [E107](#)

Aussage (3) gilt nicht immer! Gegenbeispiel ist das Quellenfeld $f(x, y) := (x, y)/(x^2 + y^2)$. [E317](#) Hier gilt $\operatorname{div}(f) = 0$ auf ganz $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und dennoch $\int_{\partial D} f(s) \times ds = 2\pi$.

Aussage (4) gilt nicht immer! Gegenbeispiel ist das Wirbelfeld $f(x, y) := (-y, x)/(x^2 + y^2)$. [E317](#) Hier gilt $\operatorname{rot}(f) = 0$ auf ganz $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und dennoch $\int_{\partial D} f(s) \cdot ds = 2\pi$.

Aussage (5) gilt dank Stokes und der Geometrie des Raumes: Wir haben $\partial D = \partial S$ für eine Hemisphäre $S \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, also $\int_{\partial D} f(s) \cdot ds = \int_{\partial S} f(s) \cdot ds = \int_S \operatorname{rot}(f) \cdot dS = 0$.
Allgemein: Das Gebiet $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ist zwar nicht konvex oder sternförmig, aber dennoch einfach zusammenhängend! Das bedeutet, jede geschlossene Kurve Γ in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ist zusammenziehbar, somit verschwindet längs Γ das Arbeitsintegral jedes rotationsfreien Vektorfeldes.

Aussage (6) gilt nicht immer! Gegenbeispiel ist das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters A , etwa das Wirbelfeld $f(x, y, z) = (-y, x, 0)/(x^2 + y^2)$ um die z -Achse A . [H154](#)
Hier gilt $\operatorname{rot}(f) = 0$ auf ganz $\mathbb{R}^3 \setminus A$ und dennoch $\int_{\partial D} f(s) \cdot ds = 2\pi$.

Aussage (7) gilt nicht immer! Gegenbeispiel ist das Feld einer im Ursprung konzentrierten Masse oder Ladung, also das Quellenfeld $f(x, y, z) = (x, y, z)/(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$. [H137](#)
Hier gilt $\operatorname{div}(f) = 0$ auf ganz $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und dennoch $\int_{\partial K} f(s) \cdot dS = 4\pi$.

Aussage (8) rechnet man leicht nach. [H237](#) Die Umkehrung (9) ist falsch, zum Beispiel erfüllt jedes konstante Vektorfeld f auch $\operatorname{div}(f) = 0$. Wenn wir jedoch verlangen, dass f divergenzfrei und zudem *radialsymmetrisch* ist, so folgt tatsächlich $f(x) = \operatorname{const} \cdot x/|x|^n$, siehe Satz H2F.

Aufgabe: Begründen Sie durch ein Ergebnis Ihrer Vorlesung oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel aus Ihrem Fundus:

- (1) Jedes Vektorfeld $f : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ hat ein Potential.
- (2) Jedes Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ hat ein Potential.
- (3) Jedes Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\text{rot}(f) = 0$ hat ein Potential.
- (4) Jedes Vektorfeld $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\partial_i f_j = \partial_j f_i$ hat ein Potential.
- (5) Jedes Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\text{rot}(f) = 0$ hat ein Potential.
- (6) Jedes Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\text{rot}(f) = 0$ hat ein Potential.
- (7) Jedes Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \setminus A \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\text{rot}(f) = 0$ hat ein Potential.

Hierbei sei $A \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Gerade, etwa die z -Achse.

- (8) Jedes Feld $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n : f(x) = g(|x|) \cdot x/|x|$ hat ein Potential.
- (9) Wikipedia zu *Rotation eines Vektorfeldes* (aufgerufen 11.11.2021):
„Die Divergenz der Rotation eines Vektorfeldes ist gleich null. Umgekehrt ist in einfach zusammenhängenden Gebieten [im \mathbb{R}^3] ein Feld, dessen Divergenz gleich null ist, die Rotation eines anderen Vektorfeldes.“

Zusammenfassung und Verständnisfragen

Aussage (1) gilt immer: Dank HDI ist $F(x) = \int_{t=0}^x f(t) dt$ eine Stammfunktion, also $F' = f$.

Aussage (2) gilt nicht immer: Notwendiges Kriterium ist $\text{rot}(f) = 0$. Beispiel: Das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = (-y, x)$ erfüllt $\text{rot}(f) = 2 \neq 0$. Demnach erlaubt f kein Potential, das heißt, es gibt keine Funktion $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\text{grad } F = f$. Unnötig danach zu suchen!

Aussagen (3) und (4) gelten immer: Auf einfach zusammenhängenden Gebieten (wie \mathbb{R}^n) ist für C^1 -Vektorfelder $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ das notwendige Kriterium $\text{rot}(f) = 0$ auch hinreichend. [\[H215\]](#)

Aussage (5) gilt nicht immer. Unser zentrales Gegenbeispiel ist das Wirbelfeld. [\[H205\]](#)

Hier gilt $\text{rot}(f) = 0$ auf ganz $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, aber dennoch $\oint_{\partial B(0,r)} f(s) \cdot ds = 2\pi$.

Aussage (6) gilt immer, denn im Gegensatz zur punktierten Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist der punktierte Raum $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ einfach zusammenhängend. Hier ist $\text{rot}(f) = 0$ hinreichend. [\[H215\]](#)

Aussage (7) gilt nicht immer. Gegenbeispiel ist das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters A , etwa das Wirbelfeld $f(x, y, z) = (-y, x, 0)/(x^2 + y^2)$ um die z -Achse A .

Hier gilt $\text{rot}(f) = 0$ auf ganz $\mathbb{R}^3 \setminus A$, aber dennoch $\oint_{\partial D} f(s) \cdot ds = 2\pi$. [\[H154\]](#)

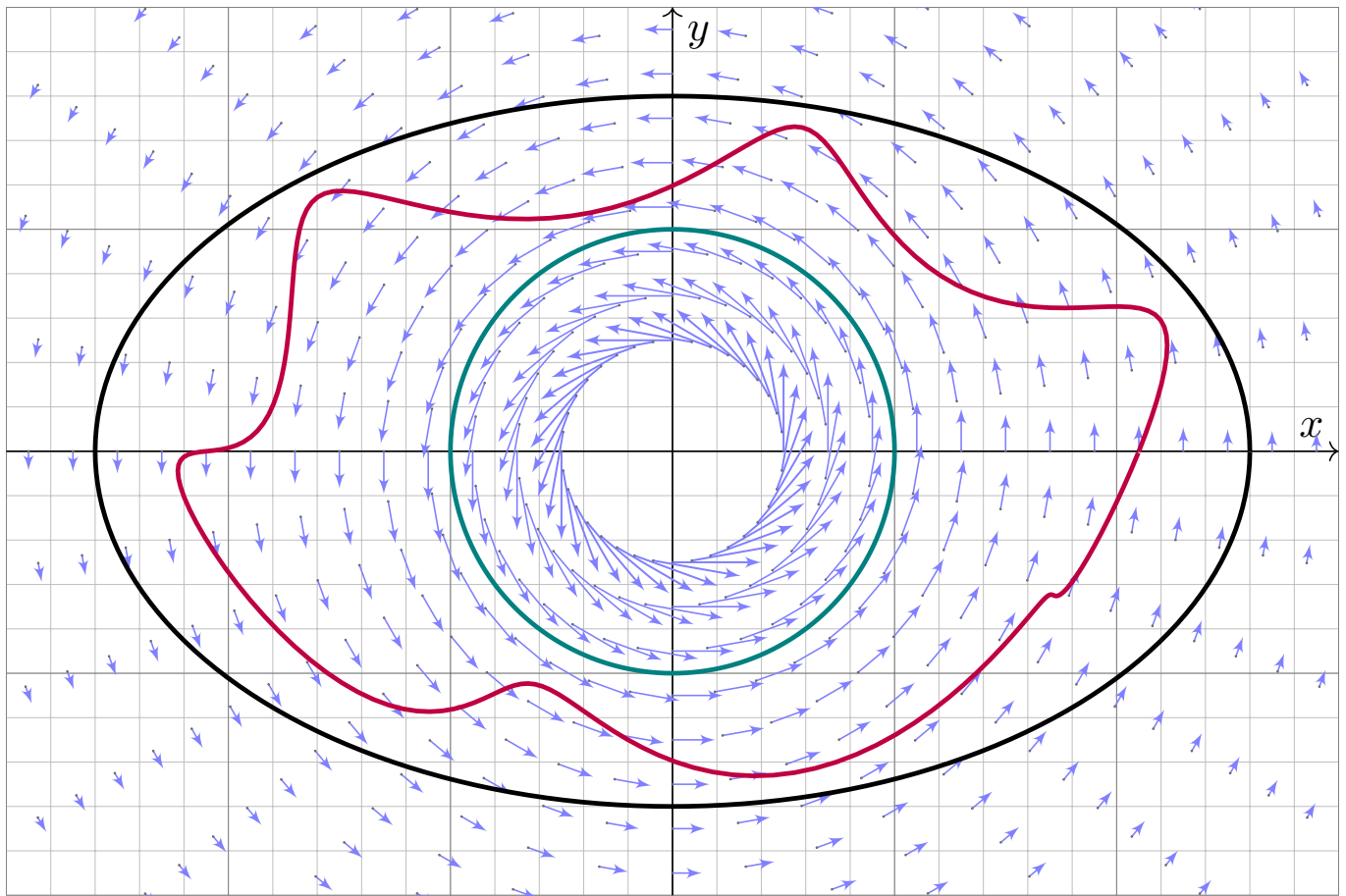
(8) Zu $f(x) = g(|x|) \cdot x/|x|$ mit g stetig finden wir explizit das Potential $F(x) = G(|x|)$ mit $G(r) = \int_1^r g(\rho) d\rho$: Leiten Sie es geduldig ab, Sie finden $\text{grad } F = f$. Somit $\text{rot } f = 0$. [\[H104\]](#)

(9) Ja. [\[H104\]](#) Nein! Prominentes Gegenbeispiel: Das Gebiet $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ist einfach zshgd. [\[H217\]](#)

Das (Gravitations-)Vektorfeld $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3 : x \mapsto x/|x|^3$ erfüllt $\text{div}(f) = 0$ auf ganz U . [\[H137\]](#)

Für jede Sphäre S um 0 gilt $\int_S f \cdot dS = 4\pi > 0$. [\[H137\]](#) Somit ist $f = \text{rot}(g)$ unmöglich! [\[G316\]](#)

Dank $\partial S = \emptyset$ und dem Satz von Stokes (G3E) gilt nämlich $\int_S \text{rot}(g) \cdot dS = \int_{\partial S} g \cdot ds = 0$.



Aufgabe: Berechnen Sie mit Hilfe der Homotopieinvarianz das Integral

$$\int_{t=0}^{2\pi} \frac{ab}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt.$$

Was erhalten Sie speziell für $a = b = 1$? Was gilt allgemein für $a, b > 0$?

Lösung: Dies ist das Arbeitsintegral des rotationsfreien Vektorfeldes $f(x, y) = (-y, x)/(x^2 + y^2)$ längs der Ellipse $\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t)$.

Der Integrationsweg α ist im Definitionsgebiet $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ homotop zum kreisförmigen Integrationsweg $\beta(t) = (\cos t, \sin t)$. Damit finden wir:

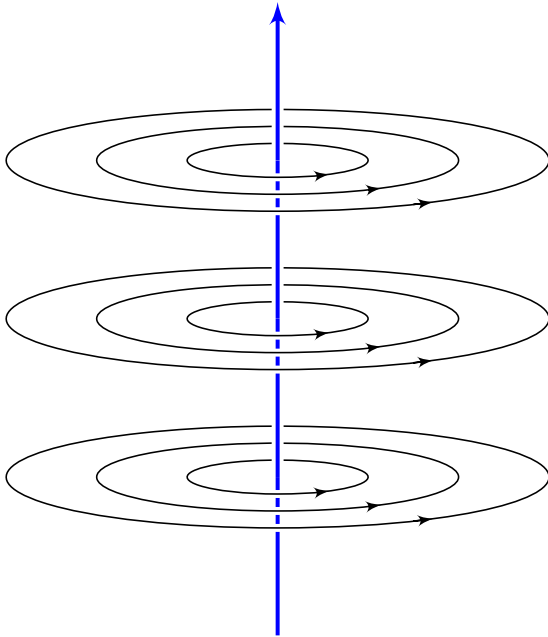
$$\int_{t=0}^{2\pi} \frac{ab}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt = \int_{\alpha} f \cdot d\alpha = \int_{\beta} f \cdot d\beta = \int_{t=0}^{2\pi} 1 dt = 2\pi$$

😊 Die Homotopieinvarianz vereinfacht die Rechnung erheblich!

Unter allen homotopen Wegen suchen wir uns den leichtesten aus.

😊 Geometrisches Verständnis ermöglicht & vereinfacht die Rechnung. Das ist die Stärke und typische Anwendung der Integralsätze!

😊 Genau dieser Trick und ganz speziell dieses Beispiel liegen dem Residuenkalkül zu Grunde, dessen erstaunliche Kraft wir schätzen.



Ein elektrischer Strom längs der z -Achse erzeugt das Magnetfeld

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2}(-y, x, 0).$$

Das Definitionsgebiet ist hier

$$U = (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) \times \mathbb{R}$$

Ein geschlossener Weg $\alpha: [0, 1] \rightarrow U$ verlaufe dreimal rechtshändig um die z -Achse. (Machen Sie eine Skizze!)

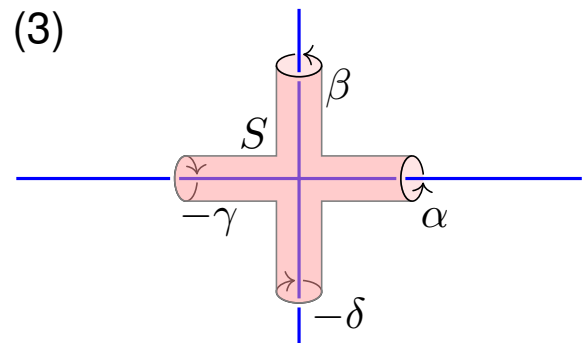
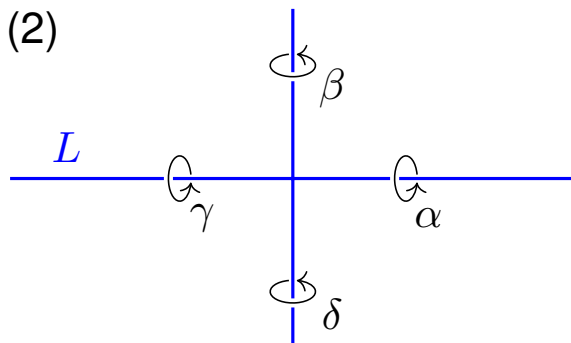
Aufgabe: Berechnen Sie $\text{rot}(f)$ und das Arbeitsintegral von f längs α . Warum ist die grobe Verlaufsskizze von α hierzu ausreichend genau?

Lösung: Es gilt $\text{rot}(f) = 0$. Daher ist $\oint_{\alpha} f \cdot d\alpha$ homotopieinvariant. Wir ersetzen α durch den hierzu homotopen Weg $\beta: [0, 1] \rightarrow U$ mit $\beta(t) = (\cos(6\pi t), \sin(6\pi t))$. Es folgt $\oint_{\alpha} f \cdot d\alpha = \oint_{\beta} f \cdot d\beta = 6\pi$.

Anwendung des Satzes von Stokes

- Aufgabe:** (1) Skizzieren Sie $L = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 y^2 + z^2 = 0 \}$.
 (2) Hat jedes rotationsfreie Vektorfeld $f: U = \mathbb{R}^3 \setminus L \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Potential?
 (3) Beranden $\alpha, \beta, \gamma, \delta: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\alpha(t), \gamma(t) = (\pm 3, \cos t, \sin t)$ und $\beta(t), \delta(t) = (\sin t, \pm 3, \cos t)$ eine orientierte Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus L$?
 (4) Sei $f: U = \mathbb{R}^3 \setminus L \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein rotationsfreies Feld. Angenommen es gilt $\oint_{\alpha} f = 3, \oint_{\beta} f = 7, \oint_{\gamma} f = 6$. Was folgt für das vierte Integral $\oint_{\delta} f$?

Lösung: (1) Die Menge L ist die Vereinigung der x - und y -Achse.
 (2) Nein. Gegenbeispiele erhalten wir wie in der vorigen Aufgabe.



(4) Wir sehen $\partial S = \alpha \cup \beta \cup (-\gamma) \cup (-\delta)$. Dank Stokes gilt demnach $\oint_{\alpha} f + \oint_{\beta} f - \oint_{\gamma} f - \oint_{\delta} f = \int_S \text{rot}(f) \cdot dS = 0$. Hieraus folgt $\oint_{\delta} f = 4$.

Aufgabe: Gegeben sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $f(x, y, z) = (\alpha y, x - \beta z, z - y)$.

(1) Für welche Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist dieses Vektorfeld f exakt?

(2) Falls existent, finden Sie $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F' = f$ und $F(2, 2, 2) = 0$.

Lösung: (1) Als notwendiges Kriterium berechnen wir die Rotation:

$$\text{rot}(f)_1 = \partial_y f_3 - \partial_z f_2 = \beta - 1$$

$$\text{rot}(f)_2 = \partial_z f_1 - \partial_x f_3 = 0$$

$$\text{rot}(f)_3 = \partial_x f_2 - \partial_y f_1 = 1 - \alpha$$

Demnach ist f rotationsfrei nur für $\alpha = \beta = 1$. Das Gebiet \mathbb{R}^3 ist konvex, dank Satz H2E ist das Vektorfeld $f(x, y, z) = (y, x - z, z - y)$ exakt.

(2) Wir integrieren f koordinatenweise zu einem Potential $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\partial_x F(x, y, z) = y \quad \Rightarrow \quad F(x, y, z) = xy + a(y, z)$$

$$\partial_y F(x, y, z) = x - z \quad \Rightarrow \quad F(x, y, z) = xy - yz + b(z)$$

$$\partial_z F(x, y, z) = z - y \quad \Rightarrow \quad F(x, y, z) = xy - yz + \frac{1}{2}z^2 + c$$

Probe: Die Funktion $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(x, y, z) = xy - yz + \frac{1}{2}z^2 - 2$ erfüllt $F(2, 2, 2) = 0$ sowie $\partial_x F = y$ und $\partial_y F = x - z$ und $\partial_z F = z - y$.

Aufgabe: Auf $U = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y > 0, z > 0 \}$ betrachten wir

$$f : \mathbb{R}^3 \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (\ln(y/z), ax/y, bx/z).$$

(1) Für welche Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ ist dieses Vektorfeld f exakt?

(2) Bestimmen Sie in diesen Fällen ein Potential F mit $F(1, 1, 1) = 1$.

Lösung: (1) Als notwendiges Kriterium berechnen wir die Rotation:

$$\text{rot}(f)_1 = \partial_y f_3 - \partial_z f_2 = \partial_y(bx/z) - \partial_z(ax/y) = 0,$$

$$\text{rot}(f)_2 = \partial_z f_1 - \partial_x f_3 = \partial_z(\ln(y/z)) - \partial_x(bx/z) = -1/z - b/z \stackrel{!}{=} 0,$$

$$\text{rot}(f)_3 = \partial_x f_2 - \partial_y f_1 = \partial_x(ax/y) - \partial_y(\ln(y/z)) = a/y - 1/y = 0.$$

Demnach ist f rotationsfrei nur für $(a, b) = (+1, -1)$. Das Gebiet U ist konvex, dank Satz H2E ist $f(x, y, z) = (\ln(y/z), +x/y, -x/z)$ exakt.

(2) Als Potential finden wir durch koordinatenweise Integration

$$F(x, y, z) = x \ln(y/z) + c.$$

Machen Sie die Probe! Um $F(1, 1, 1) = 1$ zu erhalten, wählen wir $c = 1$.

Aufgabe: Bestimmen Sie alle Potentiale des ebenen Vektorfeldes

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{2}{x^2 + y^2 - 1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{a}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Lösung: Wir berechnen zunächst die Rotation. . . Überall gilt $\text{rot}(f) = 0$. Wir sehen $\oint_{\partial B(0,r)} f(s) \cdot ds = 2\pi a$. Für $a \neq 0$ existiert kein Potential! Im Folgenden sei daher $a = 0$. Auf der Kreislinie $x^2 + y^2 = 1$ wird der erste Nenner Null. Der Definitionsbereich zerfällt somit in zwei Gebiete

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1 \}, \quad B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \}.$$

Das Gebiet A ist ein Kreisring (hier mit Radien 1 und ∞).

Das Integral längs Kreisen um 0 verschwindet, da f radial ist.

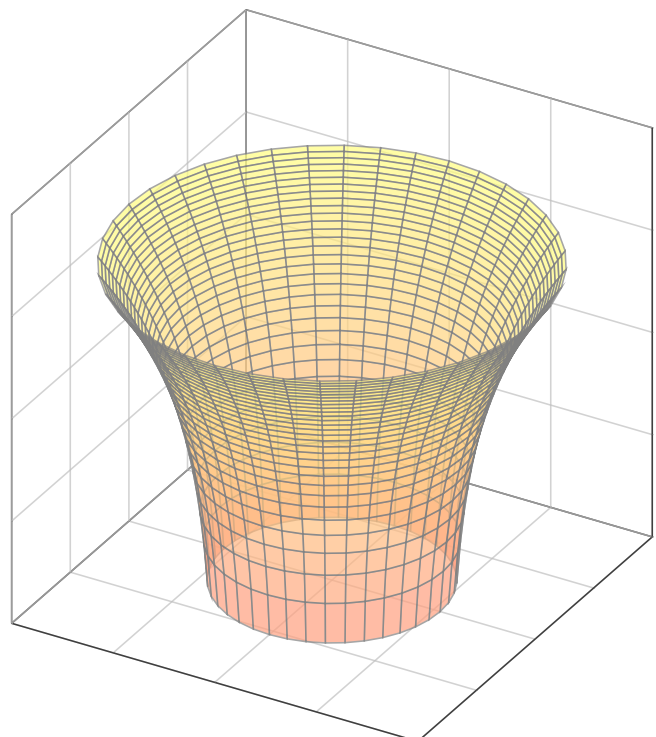
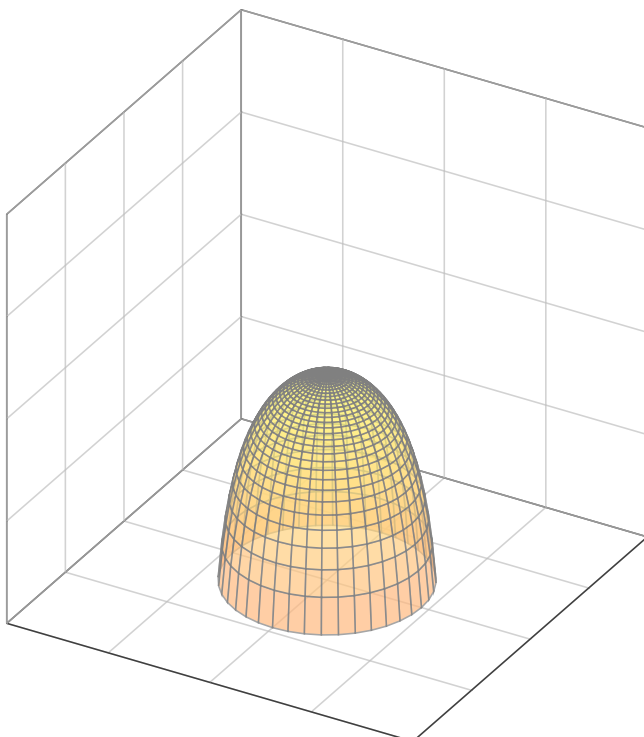
Auf A finden wir das Potential $F_A(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1) + c_A$. Probe!

Das Gebiet B ist eine Kreisscheibe, auch hierauf hat f ein Potential.

Auf B finden wir das Potential $F_B(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2) + c_B$. Probe!

Insgesamt erhalten wir also $F(x, y) = \ln|x^2 + y^2 - 1| + c_A \mathbf{I}_A + c_B \mathbf{I}_B$.

Die beiden Zweige des Potentials $F(x, y) = \ln|x^2 + y^2 - 1|$ auf den beiden Gebieten A und B sehen etwa wie folgt aus. Wir haben eine Singularität $F(x, y) \rightarrow -\infty$ entlang der Kreislinie $x^2 + y^2 = 1$.



Aufgabe: (Ausführung zur Klausur vom Februar 2018)

(0) Skizzieren Sie $U = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \geq 1 + z^2 \}$.

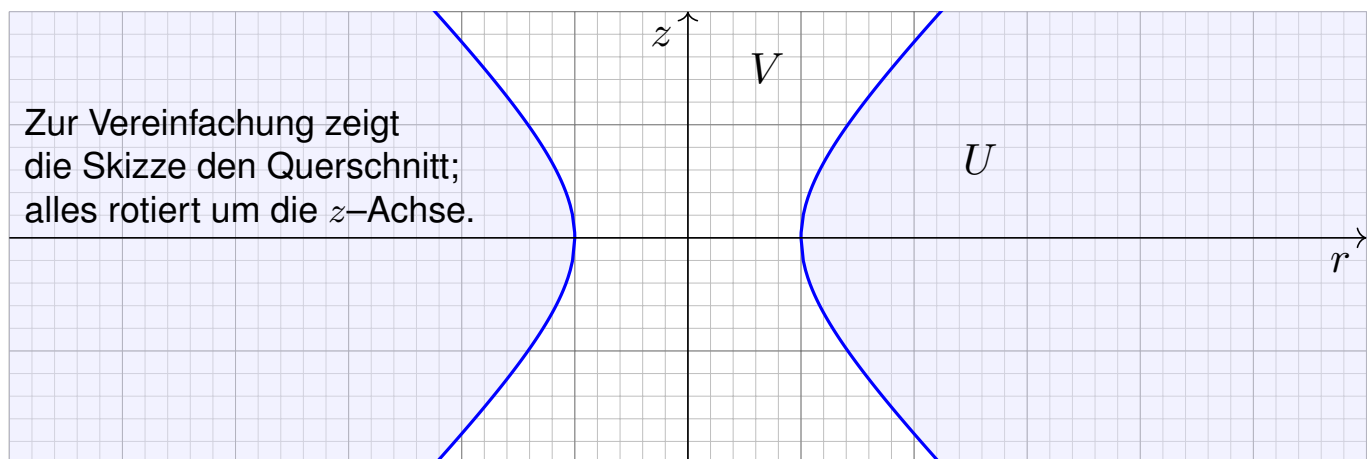
(1) Hat jedes rotationsfreie Vektorfeld $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Potential?

Sei $V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1 + z^2 \}$ das Komplement von U .

(2) Hat jedes rotationsfreie Vektorfeld $f: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Potential?

Geben Sie explizit ein Gegenbeispiel, falls es eines gibt, andernfalls erklären Sie die Konstruktion eines Potentials.

Lösung: (0) Eine Skizze hilft wie immer enorm:



(1) Nein. Ein konkretes Gegenbeispiel ist das Wirbelfeld um die z -Achse, explizit etwa $f(x, y, z) = (-y, x, 0)/(x^2 + y^2)$.

Auf ganz U gilt $\operatorname{rot} f = 0$, aber dennoch gilt $\oint_{\gamma} f(s) \cdot ds \neq 0$ entlang $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow U: t \mapsto (2 \cos t, 2 \sin t, 0)$. Demnach hat f kein Potential!

Die Bedingung $\operatorname{rot} f = 0$ ist zwar immer *notwendig* für ein Potential, aber *hinreichend* erst auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet.

😊 Unser Gebiet U ist nicht einfach zusammenhängend:

Die beiden Rechnungen $\operatorname{rot} f = 0$ und $\oint_{\gamma} f(s) \cdot ds \neq 0$ beweisen, dass sich der Weg γ in U nicht zusammenziehen lässt! (Satz H2B)

(2) Ja. Die Menge V ist zwar nicht konvex, aber immerhin sternförmig zum Ursprung $(0, 0, 0)$ und somit einfach zusammenhängend.

Zu jedem vorgelegten Vektorfeld $f: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{rot} f = 0$ erhalten wir ein Potential $F: V \rightarrow \mathbb{R}$ als Arbeitsintegral, am einfachsten direkt von $(0, 0, 0)$ nach (x, y, z) , oder von $(0, 0, 0)$ über $(0, 0, z)$ nach (x, y, z) .

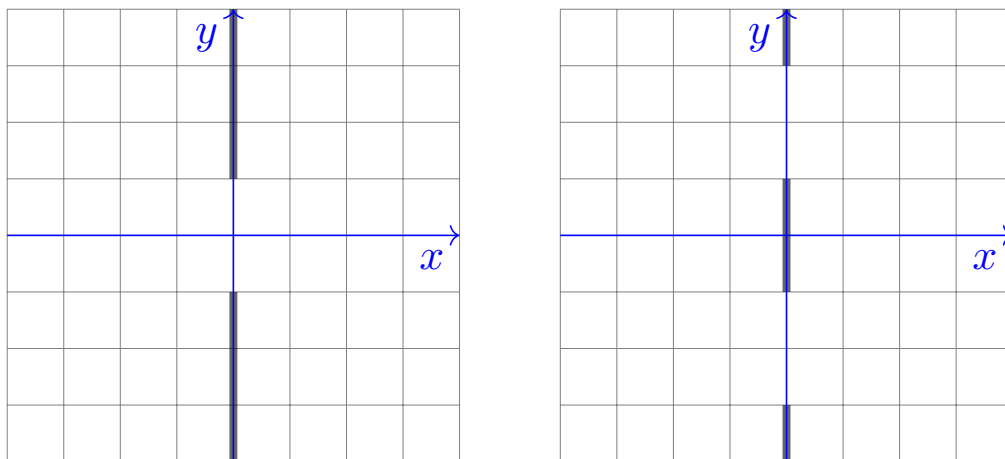
😊 Dank Rotationsfreiheit von f und einfachem Zusammenhang von U ist das Ergebnis $F(x, y, z)$ vom gewählten Integrationsweg unabhängig.

Aufgabe: (Ausführung zur Klausur vom September 2018)

(1) Im Raum \mathbb{R}^3 betrachten wir $E = \{ (0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |y| \geq 1 \}$, eine Ebene mit Einzelspalt, und ihr Komplement $U = \mathbb{R}^3 \setminus E$. Hat jedes rotationsfreie Vektorfeld $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Potential?

(2) Wir betrachten $D = \{ (0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |y| \leq 1 \text{ oder } |y| \geq 3 \}$, eine Ebene mit Doppelspalt, und ihr Komplement $V = \mathbb{R}^3 \setminus D$. Hat jedes rotationsfreie Vektorfeld $f : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Potential?

Lösung: Eine Skizze hilft wie immer enorm:



(1) Ja. Die Menge U ist zwar nicht konvex, aber immerhin sternförmig zum Ursprung $(0, 0, 0)$, und somit ist U einfach zusammenhängend.

Zu jedem vorgelegten Vektorfeld $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\text{rot } f = 0$ erhalten wir ein Potential $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ als Arbeitsintegral, am einfachsten direkt von $(0, 0, 0)$ nach (x, y, z) , oder von $(0, 0, 0)$ über $(0, 0, z)$ nach (x, y, z) .

😊 Dank Rotationsfreiheit von f und einfachem Zusammenhang von U ist das Ergebnis $F(x, y, z)$ vom gewählten Integrationsweg unabhängig.

(2) Nein. Ein konkretes Gegenbeispiel ist das Wirbelfeld um die z -Achse, also explizit $f(x, y, z) = (-y, x, 0)/(x^2 + y^2)$.

Auf ganz V gilt $\text{rot } f = 0$, aber dennoch gilt $\oint_{\gamma} f(s) \cdot ds \neq 0$ entlang $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow V : t \mapsto (2 \cos t, 2 \sin t, 0)$. Demnach hat f kein Potential!

😊 Das lässt sich physikalisch messen im **Aharonov-Bohm-Effekt**, laut *New Scientist* eines der „sieben Wunder der Quantenmechanik“.

😊 Unser Gebiet V ist also nicht einfach zusammenhängend. Die Bedingung $\text{rot } f = 0$ ist zwar immer *notwendig* für ein Potential, aber *hinreichend* erst auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet.

Aufgabe: Auf dem Gebiet $U = \mathbb{R}^2 \setminus ([-1, 1] \times \{0\})$ betrachten wir

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{(x-1)^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x-1 \end{pmatrix}, \quad g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{-1}{(x+1)^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x+1 \end{pmatrix},$$

- (1) Skizzieren Sie die Felder f , g und ihre Superposition $h = f + g$.
- (2) Bestimmen Sie die Rotation. (3) Besitzt f ein Potential? g ? und h ?
- (4) Bestimmen Sie möglichst explizit ein Potential, falls existent.

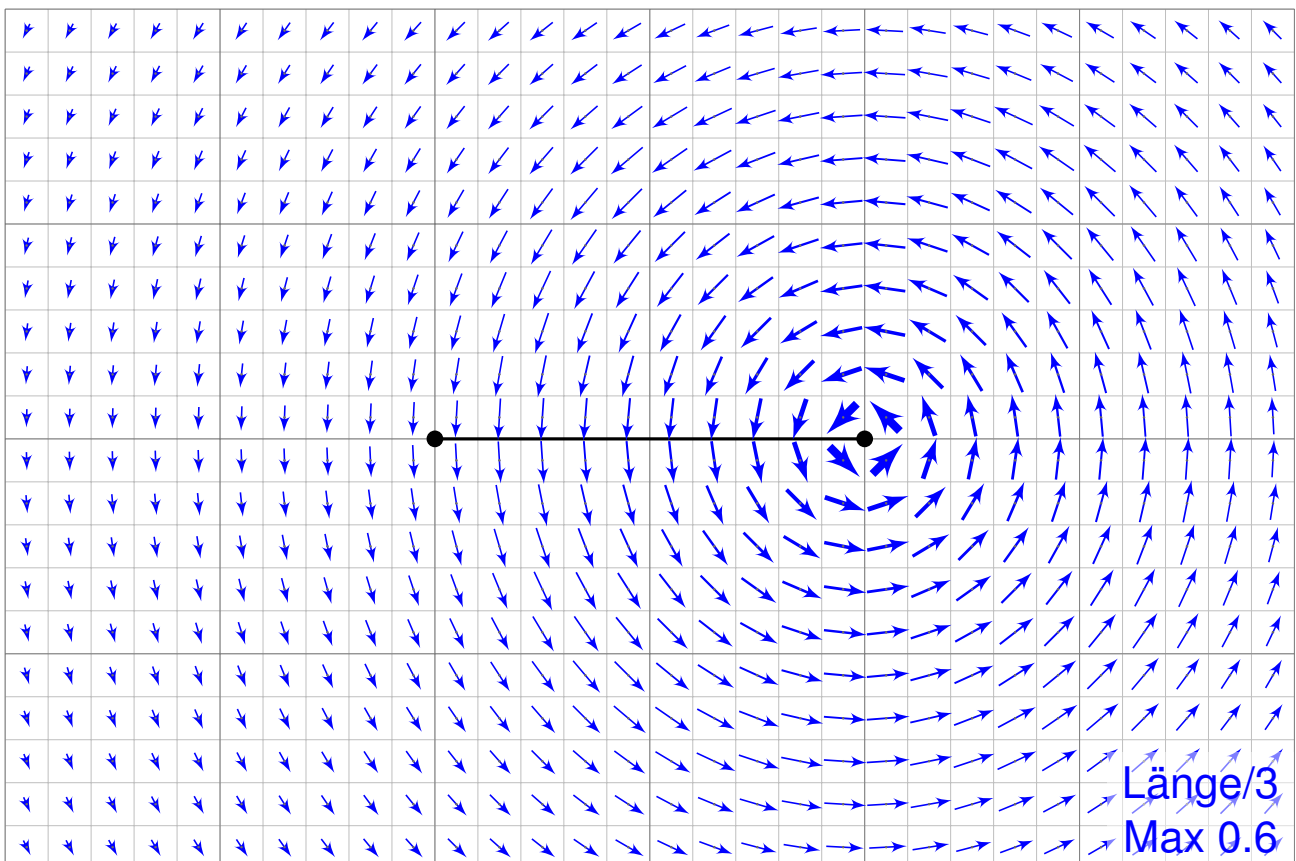
Lösung: (1) Das Feld f ist das rechtsdrehende Wirbelfeld um $(1, 0)$. Entsprechend ist g das linksdrehende Wirbelfeld um den Pol $(-1, 0)$. Ihre Superposition $h = f + g$ ergibt sich durch punktweise Addition. (Beispiele: Wirbelschleppe eines Flugzeugs, Magnetfeld einer Spule)

(2) Wir wissen bereits $\text{rot}(f) = 0$ und $\text{rot}(g) = 0$ und somit $\text{rot}(h) = 0$. Wir nutzen die Linearität der Ableitung: $\text{rot}(f + g) = \text{rot}(f) + \text{rot}(g)$.

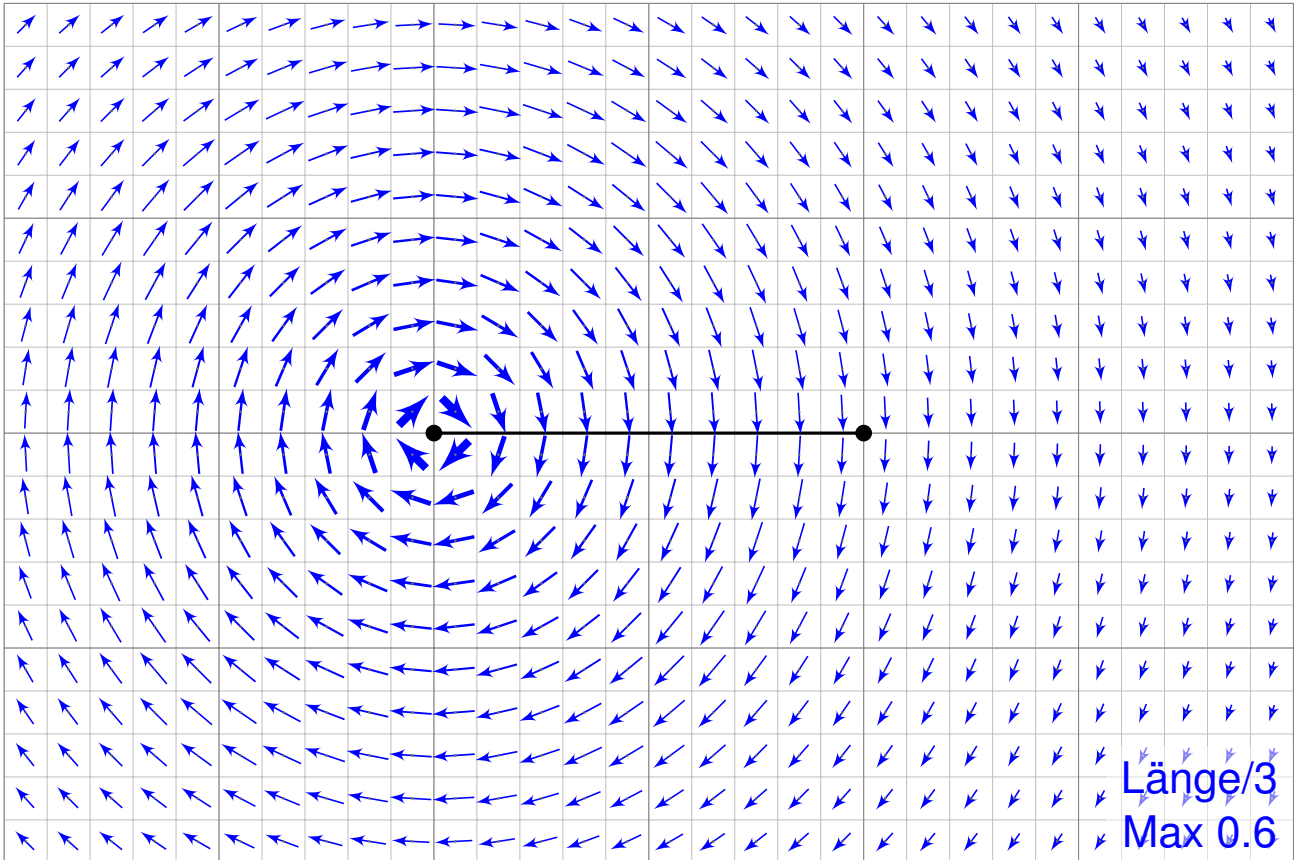
(3) Das Feld f hat auf U kein Potential, denn $\oint_{\partial B(0,2)} f(s) \cdot ds = 2\pi \neq 0$. Ebenso hat g auf U kein Potential, denn $\oint_{\partial B(0,2)} g(s) \cdot ds = -2\pi \neq 0$.

😊 Das Feld h hingegen hat auf unserem Gebiet U ein Potential!

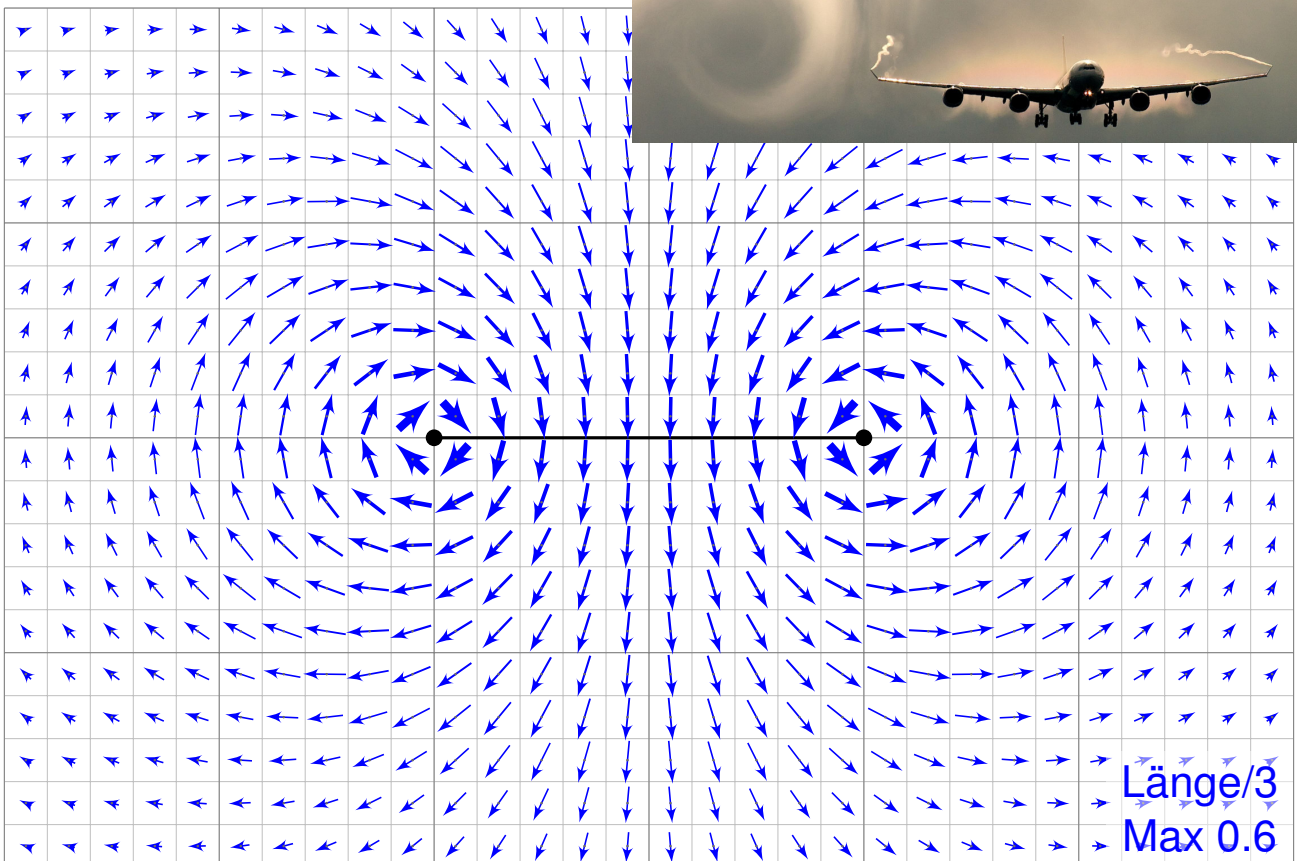
Das rechtsdrehende Wirbelfeld f um den Punkt $(1, 0)$.



Das linksdrehende Wirbelfeld g um den Punkt $(-1, 0)$.



Die Superposition $h = f + g$.



Wie kann man zu $h : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein Potential $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ konstruieren?
 Für f und g kennen wir jeweils Potentiale F_i und G_i auf Halbebenen.
 Hieraus erhalten wir jeweils Potentiale $H_i = F_i + G_i$ zu $h = f + g$:

$$U_1 = \{x > +1\} : H_1(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x-1}\right) - \arctan\left(\frac{y}{x+1}\right) + \text{const}$$

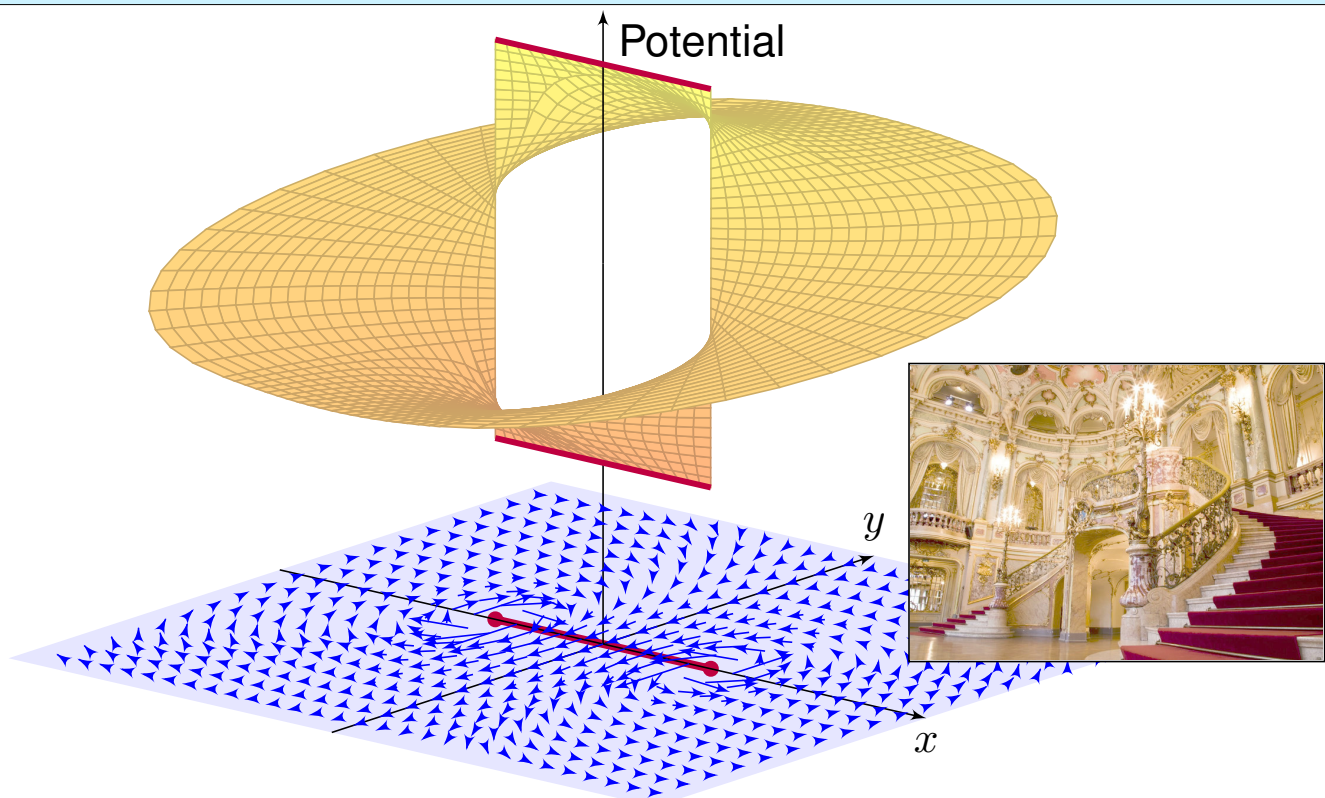
$$U_2 = \{y > 0\} : H_2(x, y) = \arctan\left(\frac{x+1}{y}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{y}\right) + \text{const}$$

$$U_3 = \{x < -1\} : H_3(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x-1}\right) - \arctan\left(\frac{y}{x+1}\right) + \text{const}$$

$$U_4 = \{y < 0\} : H_4(x, y) = \arctan\left(\frac{x+1}{y}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{y}\right) + \text{const}$$

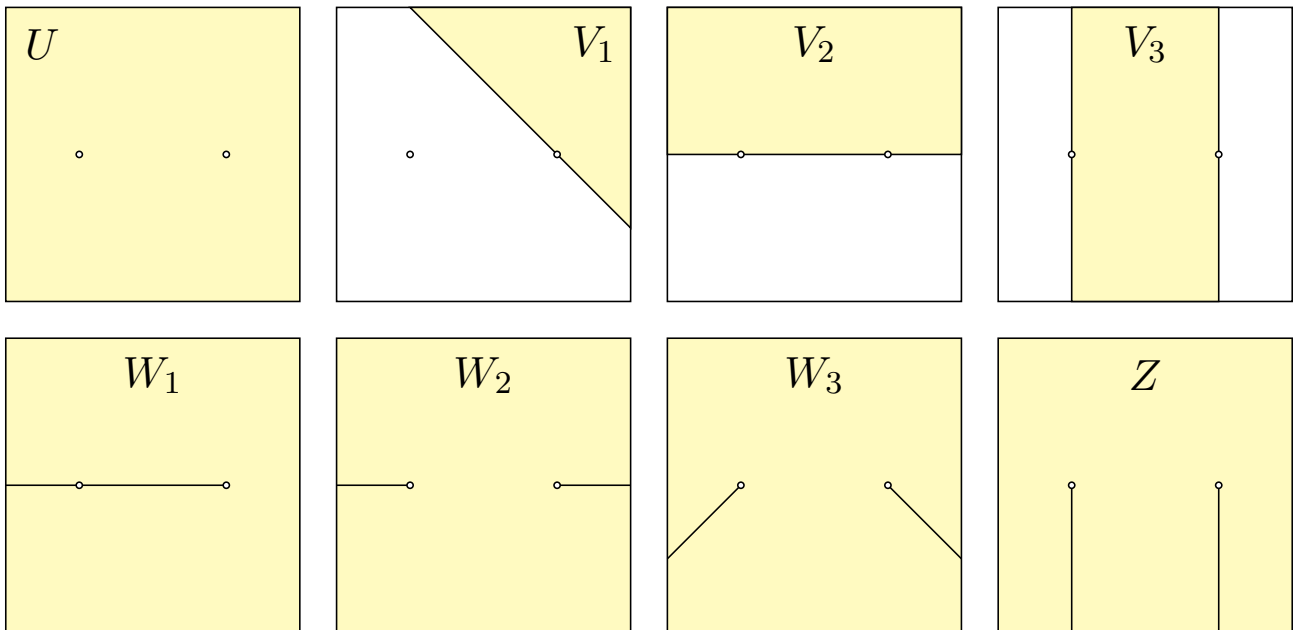
Wir versuchen, diese zusammenzukleben... und erleben ein Wunder:
 Setzt man alle Konstanten Null, so passen H_1, H_2, H_3, H_4 zusammen!
 Die Sprungstelle $[-1, 1] \times \{0\}$ ist hier aus U ausgenommen.

Wir machen die Punktprobe: Es gilt $H_1(2, 0) = 0$ sowie $H_2(2, y) \rightarrow 0$ für $y \searrow 0$ und $H_4(2, y) \rightarrow 0$ für $y \nearrow 0$. Ebenso gilt $H_3(-2, 0) = 0$ sowie $H_2(-2, y) \rightarrow 0$ für $y \searrow 0$ und $H_4(-2, y) \rightarrow 0$ für $y \nearrow 0$. Alles wird gut!



Das Wirbelfeld $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ hat kein Potential auf U , ebensowenig das gegenläufige Wirbelfeld $g : U \rightarrow \mathbb{R}^2$. Erstaunlicherweise hat für $a, b \in \mathbb{R}$ ihre Superposition $h = af + bg$ genau dann ein Potential, wenn $a = b$ gilt.

Aufgabe: Welche der folgenden Gebiete in $U =]-2, 2[^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\}$ sind konvex? sternförmig? einfach zusammenhängend?



Das Gebiet U ist weder konvex noch sternförmig, nicht einmal einfach zusammenhängend, wie wir aus unserem zentralen Beispiel wissen! Die Gebiete V_1, V_2, V_3 sind konvex, W_1, W_2, W_3 sind nicht konvex aber sternförmig, und Z nicht sternförmig aber einfach zusammenhängend.

Aufgabe: Wir betrachten das Gebiet $U = B(0, 2) \setminus \{(0, 0)\}$.

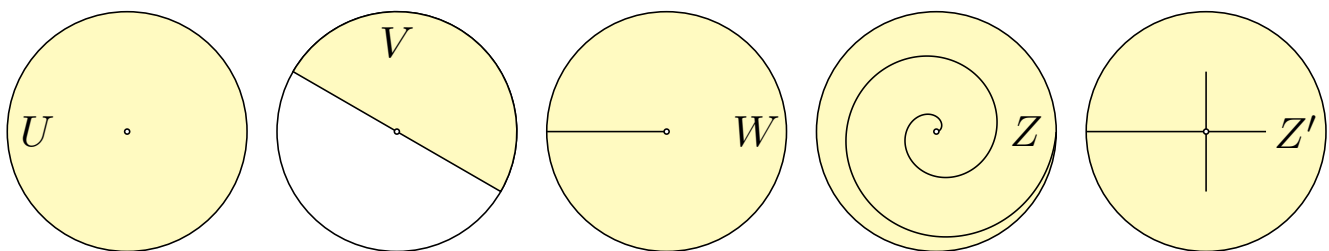
(1) Ist U konvex? sternförmig? einfach zusammenhängend?

Finden Sie, jeweils maximal, (2) ein konvexes Gebiet $V \subseteq U$,

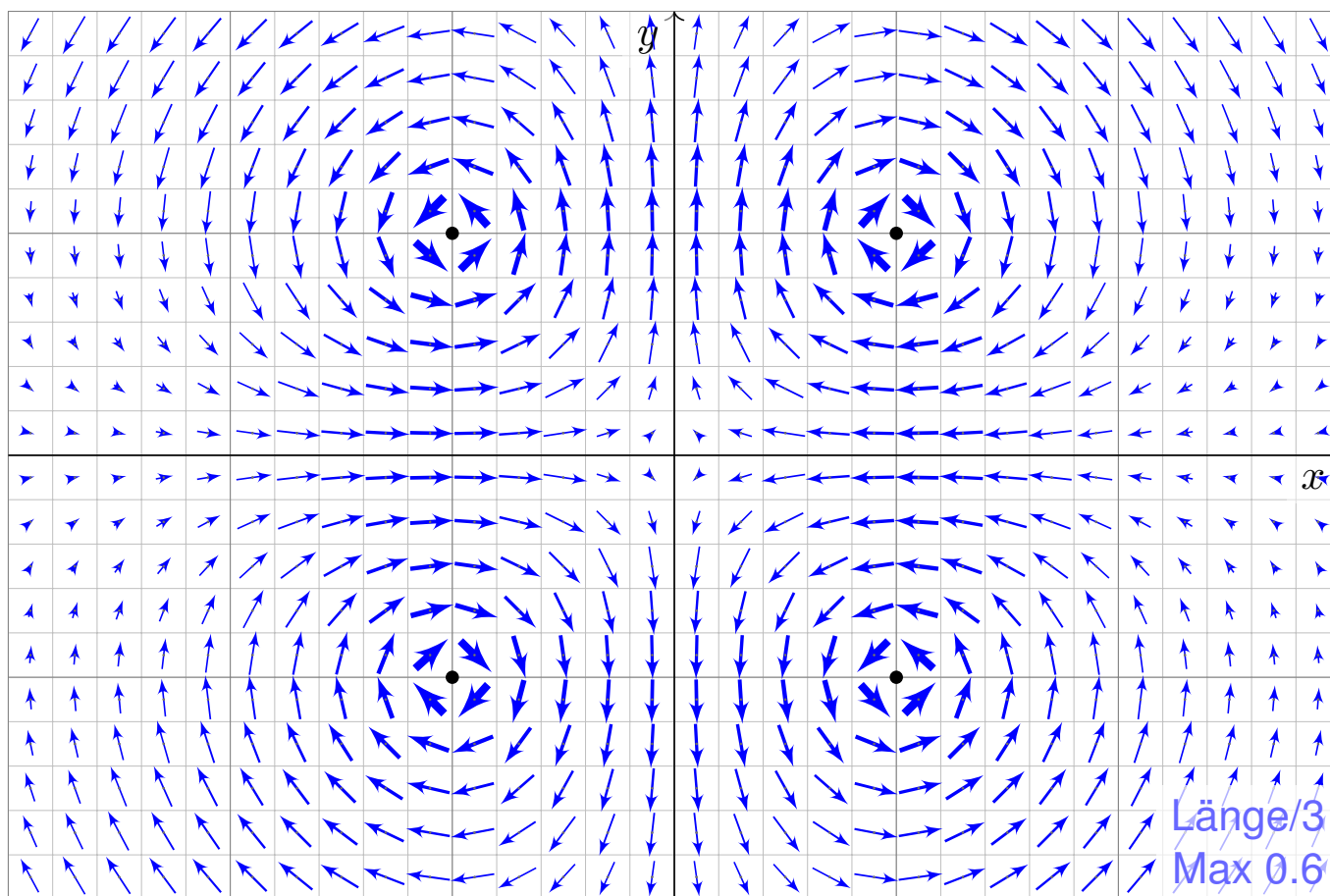
(3) ein sternförmiges Gebiet $W \subseteq U$, sowie (4) ein einfach

zusammenhängendes Gebiet $Z \subseteq U$, das nicht sternförmig ist.

Lösung: Für $U = B(0, 2) \setminus \{(0, 0)\}$ betrachte man folgende Skizzen:



Das Gebiet U ist weder konvex noch sternförmig, nicht einmal einfach zusammenhängend, wie wir aus unserem zentralen Beispiel wissen! Offensichtlich ist V konvex und sogar maximal mit dieser Eigenschaft. Entsprechend ist W nicht konvex aber sternförmig bezüglich $(1, 0)$, zudem maximal mit dieser Eigenschaft. Die Gebiete Z und Z' sind nicht sternförmig, aber immerhin einfach zusammenhängend. Zudem ist Z maximal mit dieser Eigenschaft, aber Z' nicht.



Aufgabe: Auf dem Gebiet $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1, \pm 1)\}$ untersuchen wir

$$f : \mathbb{R}^2 \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{(x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2} \begin{pmatrix} +2x(y^2 - 1) \\ -2y(x^2 - 1) \end{pmatrix}.$$

- (1) Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie das Arbeitsintegral $\int f(s) \cdot ds$
 - (a) für den geraden Weg α von $(0, y)$ nach (x, y) , wobei $y \neq \pm 1$,
 - (b) für den geraden Weg β von $(x, 0)$ nach (x, y) , wobei $x \neq \pm 1$.
- (2) Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ das Quadrat mit den Ecken $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$, $(0, 2)$. Berechnen Sie das Arbeitsintegral $\oint_{\partial Q} f(s) \cdot ds$. Nutzen Sie hierzu

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} +\pi/2 - \arctan x & \text{falls } x > 0, \\ -\pi/2 - \arctan x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

- (3) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix f' . (a) Ist unser Vektorfeld f divergenzfrei? und rotationsfrei? (b) Besitzt f ein Potential auf U ?
- (c) Berechnen Sie das Arbeitsintegral $\oint_{\partial B((1,1),r)} f(s) \cdot ds$ für $0 < r < 2$.
- (4) Besitzt f ein Potential auf $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \pm 1, |y| \geq 1\}$? Falls ja, berechnen Sie dies als Arbeitsintegral von $(0, 0)$ nach (x, y) .

Die Lösung dieser Aufgabe sollen Sie *berechnen* und dann *bewundern*. Zur Unterstützung Ihrer Anschauung, als Ermutigung und zur Probe der sorgsamten Rechnung skizziere ich nachfolgend die Potentialflächen.

Die ersten beiden Graphiken zeigen die Funktionen

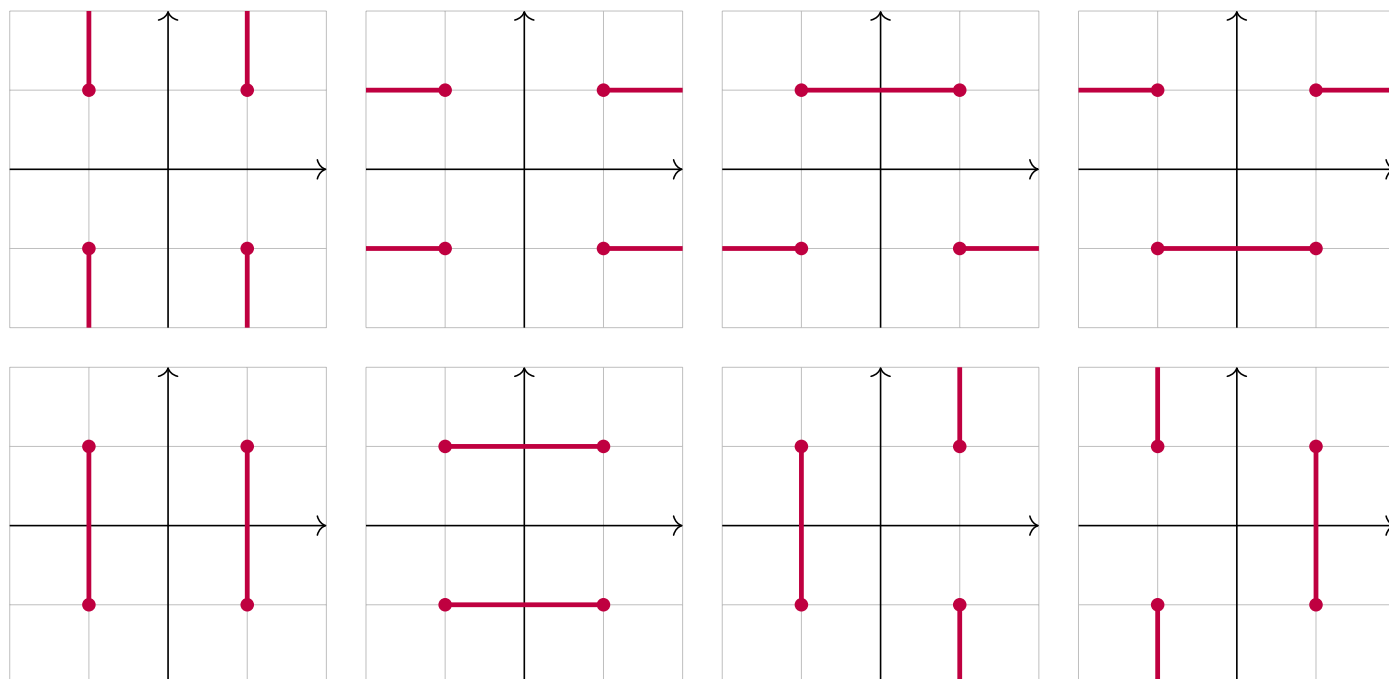
$$+ \arctan\left(\frac{x^2 - 1}{y^2 - 1}\right) \quad \text{und} \quad - \arctan\left(\frac{y^2 - 1}{x^2 - 1}\right).$$

Die roten Linien markieren die Definitionslücken $y = \pm 1$ bzw. $x = \pm 1$: Unsere Lösungsfunktion kann hier nicht stetig fortgesetzt werden!

Die letzten Graphiken zeigen eine hieraus zusammengesetzte Fläche; die Verschiebungen entstehen durch geeignete additive Konstanten. Hierdurch können wir die zuvor konstruierten Flächenstücke glatt zu einem Gesamtkunstwerk verkleben. Das Ergebnis ist sensationell, erhellend und schön anzuschauen. Sie dürfen stolz darauf sein.

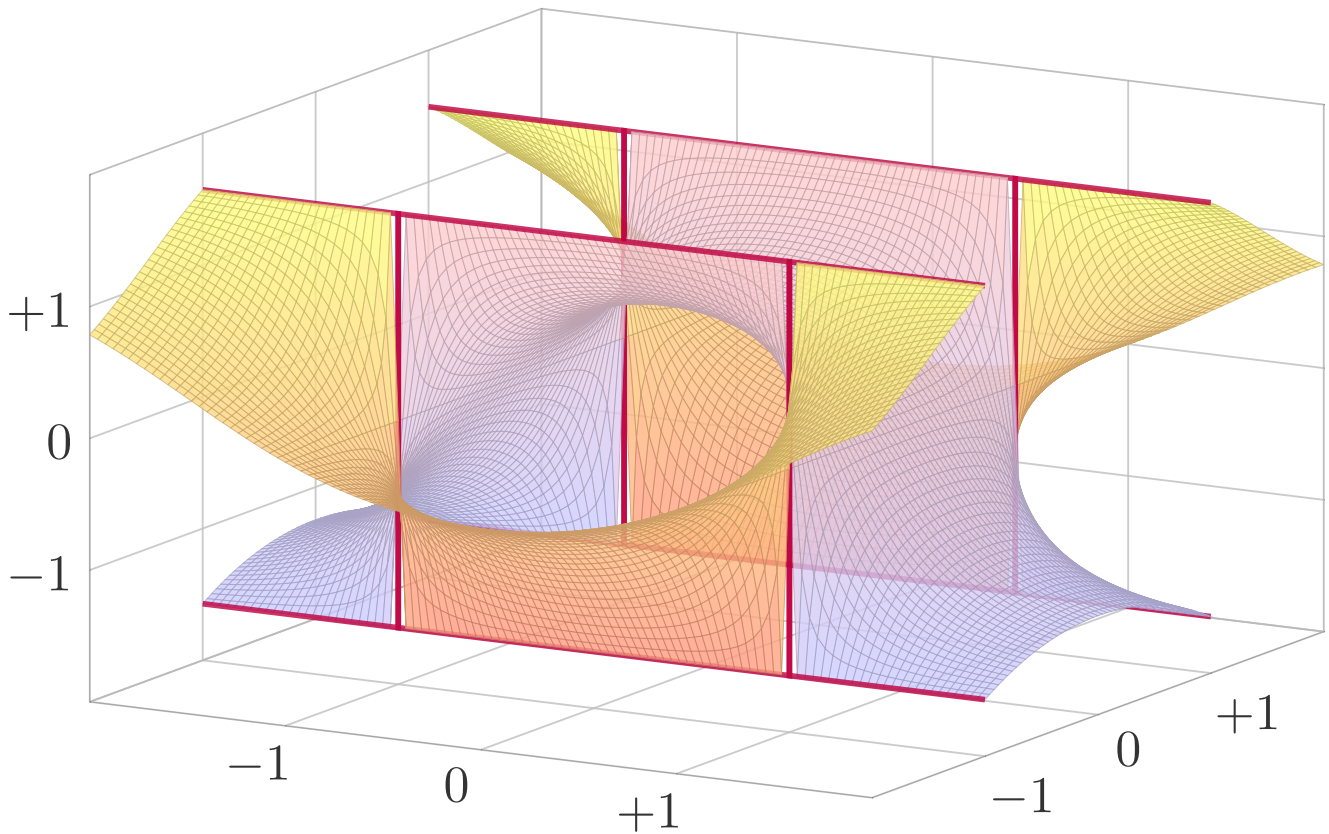
Die so entstehende Potentialfläche über $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1, \pm 1)\}$ ist aber leider keine Funktion! Die gesuchte Potentialfunktion über V ist nur ein Teil dieser Fläche: Welcher Teil? Das hängt von der „Aufschneidung“ ab.

Beispiele: Auf folgenden Gebieten erlaubt das Vektorfeld f ein Potential. Die letzten sechs Beispiele sind dabei nicht einfach zusammenhängend!



Es gibt unzählige weitere Beispiele geeigneter Gebiete $U \subseteq \mathbb{R}^2$, auf denen das Vektorfeld $f|_U$ ein Potential F_U erlaubt, mit $\text{grad } F_U = f|_U$. Obacht! Es gibt ebenso unzählige Beispiele ungeeigneter Gebiete.

Die Funktion $\arctan\left(\frac{x^2 - 1}{y^2 - 1}\right)$ springt bei $|y| = 1$ zwischen $\pm \frac{\pi}{2}$.



Die Funktion $\arctan\left(\frac{y^2 - 1}{x^2 - 1}\right)$ springt bei $|x| = 1$ zwischen $\mp \frac{\pi}{2}$.

