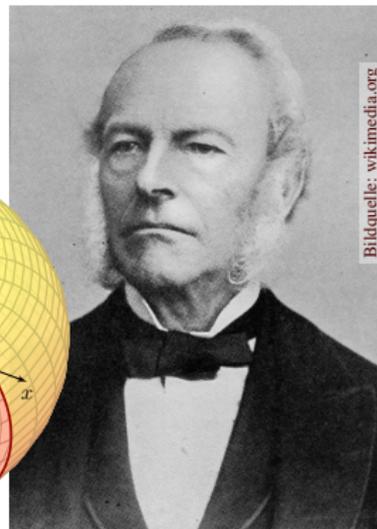
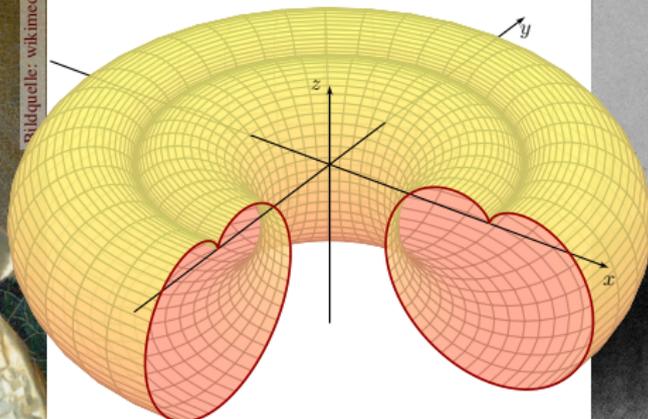


## Kapitel G

## Integralsätze im Raum



Carl Friedrich Gauß  
(1777–1855)



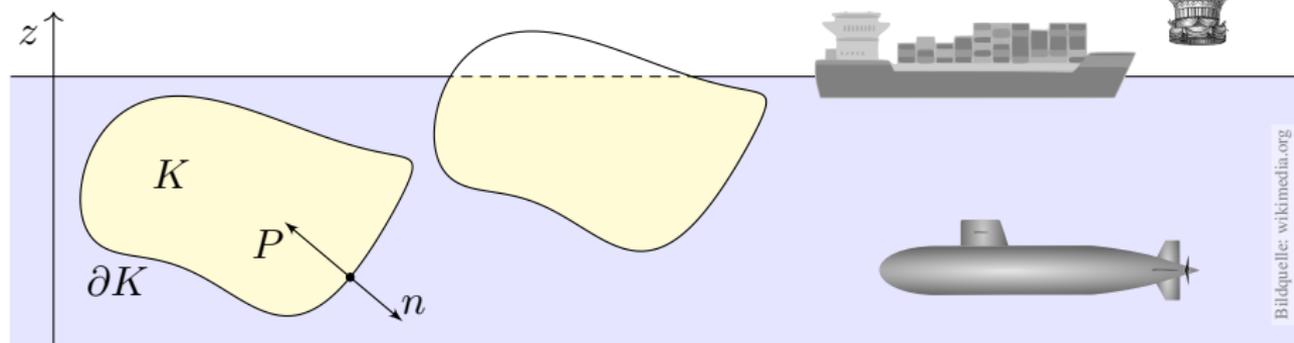
Sir George Stokes  
(1819–1903)

# Inhalt dieses Kapitels G

- 1 Crashkurs zu Integralsätzen im Raum
  - Flächenintegrale und Integralsätze im Raum
  - Einführendes Beispiel zum Satz von Stokes
  - Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß
- 2 Flächenintegrale im Raum
  - Glatte Flächenstücke und Parametrisierungen
  - Kugelsegment, Kugelkappe, Torusfläche
  - Rotationskörper und Guldinsche Regeln
- 3 Integralsätze im Raum
  - Die Integralsätze von Stokes und Gauß
  - Anwendung: das archimedische Prinzip
  - Numerik: Triangulierung und Linearisierung
- 4 Fazit: Integralsätze
  - Zusammenfassung und Verständnisfragen
  - Weitere Aufgaben und Anwendungen
  - Geometrie auf gekrümmten Flächen

# Klassische Anwendung: archimedisches Prinzip

Satz des Archimedes: Die Auftriebskraft eines Körpers  $K$  gleicht dem Gewicht  $g\rho \text{vol}_3(K)$  des verdrängten Mediums.



Es besteht eine bemerkenswerte Beziehung zwischen dem Rand  $\partial K$  (nur hier wirkt der Druck) und dem Inneren von  $K$  (nur dieses verdrängt das Fluid). Solche Gesetzmäßigkeiten begegnen Ihnen häufig in Naturwissenschaft und Technik und sind ungemein nützlich: Es handelt sich um eine typische Anwendung unserer Integralsätze. Diese wollen wir nun kennen und nutzen lernen!

Archimedes von Syrakus (287–212 v. Chr.) war ein genialer Mathematiker, Physiker, Ingenieur. Für König Hieron sollte er prüfen, ob dessen Krone aus reinem Gold bestand oder gestreckt war, ohne sie zu beschädigen! Das archimedische Prinzip soll er beim Bade entdeckt haben. In seiner Begeisterung sprang er aus dem Wasser und rannte nackt durch Syrakus ( $\gamma\upsilon\mu\nu\omicron\varsigma$  [gymnos], ‘nackt’, siehe Gymnasium). Sein Ausruf gilt bis heute als Sinnbild für plötzliche Erkenntnis:  $\epsilon\acute{\upsilon}\rho\eta\kappa\alpha$  [heurēka], ‘Ich habe es gefunden!’, frei übersetzt: ‘Verflucht, wo ist mein Handtuch?’

## Erinnerung: Integralsätze in Dimension 1 und 2

Unser Vorbild ist der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:  
Für jede stetig differenzierbare Funktion  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f = F'$  gilt

$$\text{HDI: } \int_{x=a}^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

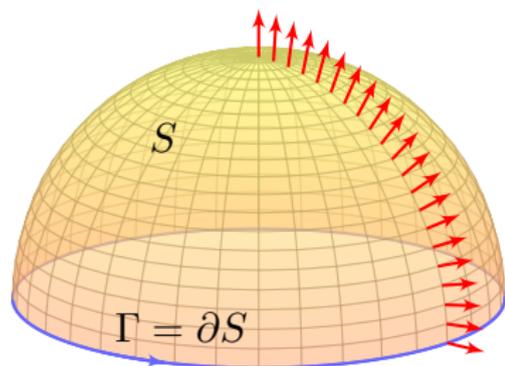
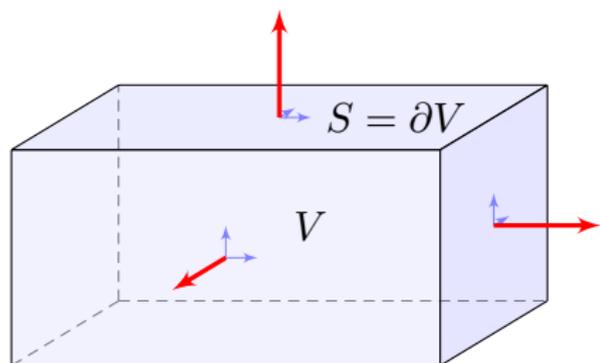
Das ist eine bemerkenswerte Gesetzmäßigkeit: Das Integral über das Intervall  $[a, b]$  lässt sich entlang des Randes  $\partial[a, b] = \{a, b\}$  bestimmen!  
Ebenso in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  kennen wir bereits zwei solche Integralsätze; auch hier lassen sich Flächenintegrale durch Randintegrale bestimmen:

$$\text{Satz von Gauß: } \int_{(x,y) \in D} \operatorname{div} f(x, y) d(x, y) = \int_{s \in \partial D} f(s) \times ds,$$

$$\text{Satz von Green: } \int_{(x,y) \in D} \operatorname{rot} g(x, y) d(x, y) = \int_{s \in \partial D} g(s) \cdot ds.$$

Dasselbe gilt sinngemäß im Raum  $\mathbb{R}^3$ , allgemein in jeder Dimension.  
Hier lassen sich Volumenintegrale durch Randintegrale bestimmen.  
Die hierzu nötigen Flächenintegrale erklären wir in diesem Kapitel.

# Integralsätze im Raum: Gauß und Stokes



Sei  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  kompakt mit stückweise glatter Randfläche  $S = \partial V$ .

$$\text{Satz von Gauß: } \int_{v \in V} \operatorname{div} f(v) \, dV = \int_{s \in S = \partial V} f(s) \cdot dS$$

Sei  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  eine stückw. glatte Fläche, orientiert mit Randkurve  $\Gamma = \partial S$ .

$$\text{Satz von Stokes: } \int_{s \in S} \operatorname{rot} f(s) \cdot dS = \int_{s \in \Gamma = \partial S} f(s) \cdot d\Gamma$$

😊 Dies ist die 3dim. Fortsetzung der 2dim. Sätze von Gauß & Green. Die Orientierungen von  $S$  und  $\Gamma$  sind wie in der Skizze angegeben.

# Integralsätze im Raum: der Satz von Stokes

Hierbei sei  $f : \mathbb{R}^3 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Jedem Punkt  $v \in \Omega$  wird ein Vektor  $f(v) \in \mathbb{R}^3$  zugeordnet. Dies können wir uns z.B. als Strömungsgeschwindigkeit einer Flüssigkeit vorstellen. Die Integralsätze haben dann folgende anschauliche Bedeutung:

Die Divergenz  $\operatorname{div} f(v)$  ist die Quelldichte des Feldes  $f$  im Punkt  $v \in \Omega$ . Das Volumenintegral  $\int_{v \in V} \operatorname{div} f(v) \, dV$  misst die Quellstärke von  $f$  auf  $V$ . Rechts steht das Flussintegral von  $f$  über die Randfläche  $S = \partial V$ .

**Die Quellbilanz im Volumen  $V$  fließt über die Randfläche  $\partial V$ .**

Die Rotation  $\operatorname{rot} f(s)$  ist die Wirbeldichte des Feldes  $f$  im Punkt  $s \in \Omega$ . Das Flächenintegral  $\int_{s \in S} \operatorname{rot} f(s) \, dS$  misst die Zirkulation von  $f$  auf  $S$ . Rechts steht das Arbeitsintegral von  $f$  längs der Randkurve  $\Gamma = \partial S$ .

**Die Rotation auf der Fläche  $S$  zirkuliert längs der Randkurve  $\partial S$ .**

Es ist recht leicht und sehr hilfreich, eine Anschauung zu entwickeln. Um zudem die Integralsätze wie oben präzise *formulieren* zu können, müssen wir Kurven- und Flächenintegral einführen und *verstehen*: Sie sollen schließlich nicht nur anschauen, sondern auch rechnen!

# Kurven- und Flächenintegrale

Kurven  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$  parametrisieren wir (stückw.  $C^1$ ) durch  $\gamma: \mathbb{R} \supseteq [a, b] \rightarrow \Gamma$ . Am Punkt  $s = \gamma(t)$  heftet das infinitesimale Wegelement  $d\Gamma = \gamma'(t) dt$ .

**Kurven- und Arbeitsintegral** über das Kurvenstück  $\Gamma$  sind dann:

$$\int_{s \in \Gamma} g(s) |d\Gamma| := \int_{t=a}^b g(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt \quad \text{„1. Art“}$$

$$\int_{s \in \Gamma} f(s) \cdot d\Gamma := \int_{t=a}^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \quad \text{„2. Art“}$$

für ( $C^0$ ) Skalarfelder  $g: \mathbb{R}^3 \supseteq \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  bzw. Vektorfelder  $f: \mathbb{R}^3 \supseteq \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Flächen  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  parametrisieren wir (stückw.  $C^1$ ) durch  $\Phi: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow S$ .

Hierbei ist  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  ein ebenes Kompaktum mit stückweise glattem Rand.

An  $s = \Phi(x, y)$  heftet das inf. Flächenelement  $dS = (\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi) d(x, y)$ .

**Flächen- und Flussintegral** über das Flächenstück  $S$  sind dann:

$$\int_{s \in S} g(s) |dS| := \int_{(x,y) \in D} g(\Phi(x, y)) \cdot |\partial_x \Phi(x, y) \times \partial_y \Phi(x, y)| d(x, y)$$

$$\int_{s \in S} f(s) \cdot dS := \int_{(x,y) \in D} f(\Phi(x, y)) \cdot (\partial_x \Phi(x, y) \times \partial_y \Phi(x, y)) d(x, y)$$

# Kurven- und Flächenintegrale

Ist  $g: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  eine Massendichte (Masse pro Länge), so ist  $\int_{\Gamma} g \, |d\Gamma|$  die Gesamtmasse. Im Spezialfall  $g = 1$  erhalten wir die Gesamtlänge  $\ell(\Gamma)$ .

Das Kurvenelement  $d\Gamma = \gamma'(t) \, dt$  interpretieren wir als kleines Wegstück. Seine Länge ist  $|d\Gamma|$ , und der Vektor  $d\Gamma$  liegt im Punkt  $s$  tangential an  $\Gamma$ . Das Skalarprodukt  $f(s) \cdot d\Gamma = f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt$  ist der tangentielle Anteil von  $f$  längs der Kurve („Kraft mal Weg“). Wir integrieren alle Beiträge.

Ist  $g: S \rightarrow \mathbb{R}$  eine Massendichte (Masse pro Fläche), so ist  $\int_S g \, |dS|$  die Gesamtmasse. Im Fall  $g = 1$  erhalten wir den Flächeninhalt  $\text{vol}_2(S)$ .

Das Flächenelement  $dS$  stellen wir uns als ein kleines Flächenstück vor. Sein Flächeninhalt ist  $|dS|$ , und der zugehörige Vektor  $dS$  steht im Punkt  $s$  senkrecht auf der Fläche  $S$ . Im Flussintegral ist das Skalarprodukt  $f(s) \cdot dS$  somit der normale Anteil von  $f$  senkrecht zur Fläche  $S$ .

Wozu dient  $\Phi$ ? Meist interessiert uns letztlich nur die Fläche  $S \subseteq \mathbb{R}^3$ , aber nur Parametrisierungen können wir differenzieren und integrieren. Die Wahl einer Parametrisierung  $\Phi$  ist unentbehrliche Rechentechnik; das Ergebnis ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung!

## Von Green in der Ebene zu Stokes im Raum

**Aufgabe:** Erklären Sie, warum/wie Green ein Spezialfall von Stokes ist.

**Green:** Für  $S \subseteq \mathbb{R}^2$  kompakt mit stückw. glatter Randkurve  $\Gamma = \partial S$  gilt

$$\int_{s \in S} \operatorname{rot} f(s) \cdot dS = \int_{s \in \Gamma} f(s) \cdot d\Gamma.$$

**Stokes:** Diese Gleichung gilt genauso für orientierte Flächen  $S \subseteq \mathbb{R}^3$ . Die Zerlegung  $dS = n(s) |dS|$  ergibt die gleichwertige Formulierung

$$\int_{s \in S} \operatorname{rot} f(s) \cdot n(s) |dS| = \int_{s \in \Gamma} f(s) \cdot d\Gamma.$$

Erinnerung: Für jedes  $C^1$ -Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^3 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  definieren wir

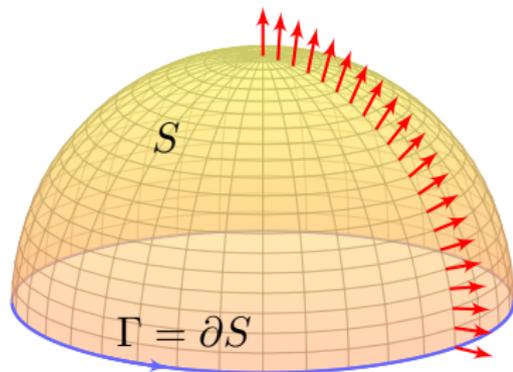
$$\operatorname{rot}(f) = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3 \\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 \end{pmatrix}.$$

Die Ebene betten wir ein als  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^3$  und erhalten demnach  $\operatorname{rot}(f_1, f_2, 0) = (0, 0, \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1)$  und das Flächenelement  $(0, 0, dS)$ .

😊 Der Satz von Green ist der ebene Spezialfall des Satzes von Stokes.

## Einführendes Beispiel zum Satz von Stokes

☺ Der Stokesche Satz überträgt den Greenschen Satz von  $\mathbb{R}^2$  auf  $\mathbb{R}^3$ :



**Aufgabe:** Sei  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  die nördliche Hemisphäre vom Radius  $r$  mit dem Äquator  $\Gamma = \partial S$  als Randkurve. Berechnen Sie  $\int_S \text{rot}(f) \cdot dS$  und  $\int_{\Gamma} f \cdot d\Gamma$  für das Vektorfeld  $f(x, y, z) = (z - y, x + z, -x - y)$ .

**Lösung:** Wir berechnen zunächst die Rotation des Vektorfeldes

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z - y \\ x + z \\ -x - y \end{pmatrix} \implies \text{rot}(f) = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

## Einführendes Beispiel zum Satz von Stokes

Die nördliche Hemisphäre ist  $S = \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2, z \geq 0 \}$ .  
Diese Fläche parametrisieren wir durch Kugelkoordinaten  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ :

$$s = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \stackrel{\text{Param}}{=} \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\}$$

Wir berechnen die Tangentialvektoren und den Normalenvektor:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi \\ -r \sin \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 \sin^2 \theta \cos \varphi \\ r^2 \sin^2 \theta \sin \varphi \\ r^2 \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}$$

Für die gesuchte Zirkulation von  $f$  auf der Fläche  $S$  erhalten wir somit:

$$\begin{aligned} \int_{s \in S} \text{rot } f(s) \cdot dS &\stackrel{\text{Param}}{=} \int_{(\theta, \varphi) \in D} \text{rot } f(\Phi(\theta, \varphi)) \cdot \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) d(\theta, \varphi) \\ &\stackrel{\text{Fub}}{\stackrel{\text{CIE}}{=}} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} -2r^2 \sin^2 \theta \cos \varphi + 2r^2 \sin^2 \theta \sin \varphi + 2r^2 \sin \theta \cos \theta d\varphi d\theta \\ &\stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{BII}}{=}} 4\pi r^2 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta \stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{BII}}{=}} 4\pi r^2 \left[ \frac{1}{2} \sin^2(\theta) \right]_{\theta=0}^{\pi/2} = 2\pi r^2 \end{aligned}$$

## Einführendes Beispiel zum Satz von Stokes

Die Randkurve  $\Gamma = \partial S$  ist der Äquator,  $\partial S = \{ (x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = r^2 \}$ .  
Diese Kurve parametrisieren wir durch den Weg  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

$$s = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \stackrel{\text{Param}}{=} \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ 0 \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \pi/2 \\ t \end{pmatrix} = \gamma(t).$$

Für das gesuchte Arbeitsintegral längs  $\Gamma$  erhalten wir somit

$$\begin{aligned} \int_{s \in \Gamma} f(s) \cdot d\Gamma &\stackrel{\text{Param}}{=} \int_{t=0}^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_{t=0}^{2\pi} \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \\ -r \cos t - r \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_{t=0}^{2\pi} r^2 dt = 2\pi r^2. \end{aligned}$$

😊 Die Gleichheit ist kein Zufall, sondern illustriert den Satz von Stokes:

$$\int_{s \in S} \text{rot } f(s) \cdot dS = \int_{s \in \Gamma} f(s) \cdot d\Gamma$$

# Der Integralsatz von Stokes

Das Ergebnis der vorigen Aufgabe ist kein Zufall, sondern illustriert einen allgemeinen Sachverhalt: den Integralsatz von Stokes im  $\mathbb{R}^3$ . Wir können ihn nun in voller Schönheit formulieren und nachrechnen:

## Satz G1A: Integralsatz von Stokes

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Kompaktum mit stückweise glatter Randkurve  $\partial D$ . Sei  $\Phi: D \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$  eine (zweimal) stetig differenzierbare Abbildung. Die Einschränkung  $\gamma = \Phi|_{\partial D}$  parametrisiert die Randkurve  $\Phi(\partial D)$ . Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^3 \supseteq S \rightarrow \mathbb{R}^3$  gilt dann

$$\int_{s \in D} \operatorname{rot}(f)(\Phi(s)) \cdot d\Phi = \int_{s \in \partial D} f(\gamma(s)) \cdot d\gamma.$$

Hierbei nutzen wir die oben vereinbarten sinnfälligen Abkürzungen: Am Punkt  $\gamma(s)$  heftet das infinitesimale Wegelement  $d\gamma = \gamma'(s) ds$ , an  $\Phi(s)$  heftet das inf. Flächenelement  $d\Phi = (\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi) d(x, y)$ . Die Randkurve  $\partial D$  wird hierbei wie immer positiv orientiert, sodass beim Umlauf  $D$  stets links von  $\partial D$  liegt.

# Der Integralsatz von Stokes

Das ist eine bemerkenswerte Gleichheit: Links steht das Flussintegral der Rotation  $\operatorname{rot}(f)$  über das parametrisierte Flächenstück  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ , rechts das Arbeitsintegral von  $f$  längs des Randweges  $\gamma : \partial D \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Hierzu muss  $\Phi$  nicht regulär sein, stetig differenzierbar reicht.

Ist die Parametrisierung  $\Phi$  zudem regulär, also injektiv und überall  $\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi \neq 0$ , so ist das Bild  $S = \Phi(D)$  ein glattes Flächenstück und alle regulären Parametrisierungen von  $S$  sind untereinander äquivalent durch Umparametrisierung. (Wir setzen gleiche Orientierung voraus.)

Wie wir später nachrechnen werden, ergeben dann alle regulären Parametrisierungen  $\Phi : D \rightarrow S$  dasselbe Ergebnis, sowohl beim Flächenintegral über  $S$  als auch beim Randintegral über  $\Gamma = \partial S$ .

Dies kürzen wir ab durch die parameterunabhängigen Schreibweise

$$\int_{s \in S} \operatorname{rot} f(s) \cdot dS = \int_{s \in \Gamma} f(s) \cdot d\Gamma.$$

So formulieren wir es in Satz G3E, kurz und bequem. Satz G1A ist etwas allgemeiner, da wir hier noch keine Injektivität oder Regularität fordern.

## Der Integralsatz von Stokes

Den Satz von Green in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  haben wir nachgerechnet. [E141](#)

**Aufgabe:** Der Satz von Stokes im  $\mathbb{R}^3$  folgt aus dem von Green im  $\mathbb{R}^2$ !

**Nachrechnen:** Das 3dim. Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^3 \supseteq S \rightarrow \mathbb{R}^3$  auf der Fläche  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  ziehen wir mittels der Parametrisierung  $\Phi: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$  zurück zu einem 2dim. Vektorfeld  $g: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Hierzu setzen wir

$$g := \left( \langle f \circ \Phi \mid \partial_1 \Phi \rangle, \langle f \circ \Phi \mid \partial_2 \Phi \rangle \right).$$

Für die beiden Vektorfelder  $f$  und  $g$  gilt dank Kettenregel

$$\int_{s \in \partial D} \underbrace{f(\gamma(s)) \cdot d\gamma}_{\text{Wegintegral im } \mathbb{R}^3} = \int_{s \in \partial D} \underbrace{g(s) \cdot ds}_{\text{Wegintegral im } \mathbb{R}^2}.$$

Wir berechnen sogleich  $\text{rot}(g) = \langle \text{rot}(f) \circ \Phi \mid \partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi \rangle$ , also

$$\int_{(x,y) \in D} \underbrace{\text{rot}(f)(\Phi(x,y)) \cdot d\Phi}_{\text{Flächenintegral im } \mathbb{R}^3} = \int_{(x,y) \in D} \underbrace{\text{rot}(g) d(x,y)}_{\text{Flächenintegral im } \mathbb{R}^2}.$$

😊 Damit folgt der Satz von Stokes aus dem Satz von Green!

# Der Integralsatz von Stokes

Zur Vereinfachung setzen wir  $\Phi$  als zweimal stetig differenzierbar voraus. Wir können dann den Satz von Schwarz (D4A) nutzen:  $\partial_2 \partial_1 \Phi_i = \partial_1 \partial_2 \Phi_i$ . Die Umrechnung von  $\text{rot}(g)$  in  $\text{rot}(f)$  gelingt uns nun dank Kettenregel. Wir müssen dabei allerdings über alle Indizes sorgfältig buchführen:

$$\begin{aligned}
 \text{rot}(g) &= \partial_1 g_2 - \partial_2 g_1 \\
 &= \partial_1 \langle f \circ \Phi \mid \partial_2 \Phi \rangle - \partial_2 \langle f \circ \Phi \mid \partial_1 \Phi \rangle \\
 &= \partial_1 \sum_i f_i \circ \Phi \cdot \partial_2 \Phi_i - \partial_2 \sum_i f_i \circ \Phi \cdot \partial_1 \Phi_i \\
 &= + \sum_i \sum_j \partial_j f_i \circ \Phi \cdot \partial_1 \Phi_j \cdot \partial_2 \Phi_i + \sum_i f_i \circ \Phi \cdot \partial_1 \partial_2 \Phi_i \\
 &\quad - \sum_i \sum_j \partial_j f_i \circ \Phi \cdot \partial_2 \Phi_j \cdot \partial_1 \Phi_i - \sum_i f_i \circ \Phi \cdot \partial_2 \partial_1 \Phi_i \\
 &= \sum_i \sum_j \partial_j f_i \circ \Phi \cdot \partial_1 \Phi_j \cdot \partial_2 \Phi_i - \partial_i f_j \circ \Phi \cdot \partial_1 \Phi_j \cdot \partial_2 \Phi_i \\
 &= \sum_{i < j} (\partial_i f_j - \partial_j f_i) \circ \Phi \cdot (\partial_1 \Phi_i \cdot \partial_2 \Phi_j - \partial_1 \Phi_j \cdot \partial_2 \Phi_i) \\
 &= \langle \text{rot}(f) \circ \Phi \mid \partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi \rangle
 \end{aligned}$$

**Übung:** Wer dieser Kurzschreibweise nicht traut, kann mit etwas Fleiß alle Summen sorgfältig ausschreiben und die behaupteten Gleichungen nachprüfen. Rechnen reinigt die Seele!

## Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß

**Aufgabe:** (1) Skizzieren Sie zu gegebenem  $r > 0$  den Körper

$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, z \geq 0 \}$$

(2) Beschreiben Sie den Körper  $V$  explizit durch Parametrisierungen als Normalbereich in  $z$ -Richtung, in Zylinder- und in Kugelkoordinaten.

(3) Berechnen Sie den Rauminhalt  $\text{vol}_3(V)$  je nach Parametrisierung. Ist das Ergebnis unabhängig von der gewählten Parametrisierung?

(4) Beschreiben Sie die Randfläche  $S = \partial V$  implizit / explizit wie in (2).

(5) Bestimmen Sie in jedem Randpunkt  $s$  den nach außen zeigenden Einheitsnormalenvektor  $n_{\partial V}(s)$  sowie  $dS$  je nach Parametrisierung.

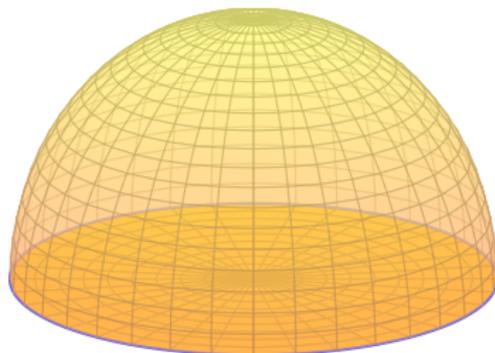
(6) Berechnen Sie den Flächeninhalt  $\text{vol}_2(S)$  je nach Parametrisierung. Ist das Ergebnis unabhängig von der gewählten Parametrisierung?

(7) Berechnen Sie die Divergenz des Vektorfeldes  $f(x, y, z) = (x, y, z)$ , das Volumenintegral  $\int_V \text{div}(f) \, d(x, y, z)$  und das Flussintegral  $\int_S f \cdot dS$ .

😊 Diese Aufgabe bietet Gelegenheit, die bisherigen Integrations-techniken zu wiederholen und die neuen Flächenintegrale einzuüben.

# Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß

(1) Zu  $r > 0$  betrachten wir die nördliche Halbkugel  $V$ :



(2) Wir können  $V$  auf verschiedene Weisen parametrisieren:

$$\begin{aligned}
 V &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2 \\ z \geq 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq r \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq \sqrt{r^2 - \rho^2} \end{array} \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 0 \leq z \leq r \\ 0 \leq \rho \leq \sqrt{r^2 - z^2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \rho \sin \theta \sin \varphi \\ \rho \cos \theta \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq r \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

# Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß

(3a) Parametrisierung  $\Phi: \mathbb{R}^3 \supseteq D \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^3$  als  $z$ -Normalbereich:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq r \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq \sqrt{r^2 - \rho^2} \end{array} \right\}$$

Wir berechnen Jacobi-Matrix und Funktionaldeterminante:

$$\Phi' = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, z)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \det \Phi' = \rho$$

Volumenberechnung dank Transformationssatz, Fubini und HDI:

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(V) &= \int_V 1 \, d(x, y, z) \stackrel{\text{Trafo}}{\stackrel{\text{C2B}}{=}} \int_D |\det \Phi'| \, d(\rho, \varphi, z) \\ &\stackrel{\text{Fub}}{\stackrel{\text{C1E}}{=}} \int_{\rho=0}^r \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{\sqrt{r^2 - \rho^2}} \rho \, dz \, d\varphi \, d\rho \stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B1I}}{=}} \int_{\rho=0}^r 2\pi \rho \sqrt{r^2 - \rho^2} \, d\rho \\ &\stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B1I}}{=}} \left[ -\frac{2\pi}{3} (r^2 - \rho^2)^{3/2} \right]_{\rho=0}^r = \frac{2\pi}{3} r^3 \end{aligned}$$



Das Ergebnis ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung!

## Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß

(3b) Alternativ, Parametrisierung  $\Phi: D \rightarrow V$  in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 0 \leq z \leq r \\ 0 \leq \rho \leq \sqrt{r^2 - z^2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\}$$

Jacobi-Matrix  $\Phi'$  und Funktionaldeterminante  $\det \Phi' = \rho$  wie zuvor.

Volumenberechnung dank Transformationsatz, Fubini und HDI:

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(V) &= \int_V 1 \, d(x, y, z) && \stackrel{\text{Trafo}}{\stackrel{\text{C2B}}{=}} \int_D |\det \Phi'| \, d(\rho, \varphi, z) \\ &\stackrel{\text{Fub}}{\stackrel{\text{C1E}}{=}} \int_{z=0}^r \int_{\rho=0}^{\sqrt{r^2-z^2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho \, d\varphi \, d\rho \, dz && \stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} \int_{z=0}^r \int_{\rho=0}^{\sqrt{r^2-z^2}} 2\pi \rho \, d\rho \, dz \\ &\stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} \int_{z=0}^r \pi \left[ \rho^2 \right]_{\rho=0}^{\sqrt{r^2-z^2}} dz && = \int_{z=0}^r \pi (r^2 - z^2) \, dz \\ &\stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} \pi \left[ r^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{z=0}^r && = \frac{2\pi}{3} r^3 \end{aligned}$$



Das Ergebnis ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung!

# Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß

(3c) Zum Vergleich, Parametrisierung  $\Phi : D \rightarrow V$  in Kugelkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \rho \sin \theta \sin \varphi \\ \rho \cos \theta \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq r \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\}$$

Jacobi-Matrix  $\Phi'$  und Funktionaldeterminante  $\det \Phi' = \rho^2 \sin \theta$ :

Volumenberechnung dank Transformationsatz, Fubini und HDI:

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(V) &= \int_V 1 \, d(x, y, z) && \stackrel{\text{Trafo}}{=} \int_D |\det \Phi'| \, d(\rho, \theta, \varphi) \\ & && \stackrel{\text{C2B}}{=} \\ \stackrel{\text{Fub}}{=} \int_{\rho=0}^r \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho^2 \sin \theta \, d\varphi \, d\theta \, d\rho && \stackrel{\text{HDI}}{=} \int_{\rho=0}^r \int_{\theta=0}^{\pi/2} 2\pi \rho^2 \sin \theta \, d\theta \, d\rho \\ \stackrel{\text{HDI}}{=} \int_{\rho=0}^r 2\pi \left[ -\rho^2 \cos \theta \right]_{\theta=0}^{\pi/2} d\rho && \stackrel{\text{HDI}}{=} \int_{\rho=0}^r 2\pi \rho^2 \, d\rho \\ \stackrel{\text{HDI}}{=} \frac{2\pi}{3} \left[ \rho^3 \right]_{\rho=0}^r && = \frac{2\pi}{3} r^3 \end{aligned}$$



Das Ergebnis ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung!

## Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß

**Aufgabe:** (1) Skizzieren Sie zu gegebenem  $r > 0$  den Körper

$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, z \geq 0 \}$$

(2) Beschreiben Sie den Körper  $V$  explizit durch Parametrisierungen als Normalbereich in  $z$ -Richtung, in Zylinder- und in Kugelkoordinaten.

(3) Berechnen Sie den Rauminhalt  $\text{vol}_3(V)$  je nach Parametrisierung. Ist das Ergebnis unabhängig von der gewählten Parametrisierung?

(4) Beschreiben Sie die Randfläche  $S = \partial V$  implizit / explizit wie in (2).

(5) Bestimmen Sie in jedem Randpunkt  $s$  den nach außen zeigenden Einheitsnormalenvektor  $n_{\partial V}(s)$  sowie  $dS$  je nach Parametrisierung.

(6) Berechnen Sie den Flächeninhalt  $\text{vol}_2(S)$  je nach Parametrisierung. Ist das Ergebnis unabhängig von der gewählten Parametrisierung?

(7) Berechnen Sie die Divergenz des Vektorfeldes  $f(x, y, z) = (x, y, z)$ , das Volumenintegral  $\int_V \text{div}(f) \, d(x, y, z)$  und das Flussintegral  $\int_S f \cdot dS$ .

😊 Diese Aufgabe bietet Gelegenheit, die bisherigen Integrations-techniken zu wiederholen und die neuen Flächenintegrale einzuüben.

# Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß

(4) Zur Halbkugel  $V$  besteht die Randfläche  $S = \partial V = A \cup B$  aus der äquatorialen Kreisscheibe  $A$  und der nördlichen Hemisphäre  $B$ .

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid x^2 + y^2 \leq r^2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq r \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \\ z \geq 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq r \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ z = \sqrt{r^2 - \rho^2} \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 0 \leq z \leq r \\ \rho = \sqrt{r^2 - z^2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \rho \sin \theta \sin \varphi \\ \rho \cos \theta \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} \rho = r \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\}$$

😊 Im Inneren des Körpers haben wir drei Freiheitsgrade, z.B.  $\rho, \theta, \varphi$ , auf der Randfläche entsprechend nur noch zwei, z.B.  $\theta, \varphi$ .

Das entspricht dem Unterschied zwischen dreidimensionalen Körpern (Volumen) und zweidimensionalen Objekten (Flächen). Hinschauen!

# Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß

(5a) In jedem Punkt  $s \in A$  sehen wir die äußere Einheitsnormale

$$n_{\partial V}(s) = (0, 0, -1) \quad (\text{senkrecht auf } A, \text{ Länge } 1, \text{ aus } V \text{ heraus}).$$

Wir nutzen die Parametrisierung  $\Phi : D \rightarrow A$  in Polarkoordinaten:

$$s = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq r \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\}.$$

Die beiden Tangentialvektoren und der Normalenvektor sind:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\rho \sin \varphi \\ \rho \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \end{pmatrix}.$$

(6a) Hieraus erhalten wir erneut den wohlbekannten Flächeninhalt:

$$\text{vol}_2(A) = \int_A |dA| \stackrel{\text{Param}}{=} \int_D \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right| d(\rho, \varphi) = \int_{\rho=0}^r \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho \, d\varphi \, d\rho = \pi r^2$$

😊 Die Formel für  $dA$  beinhaltet die 2dim. Funktionaldeterminante. Die Norm  $|d\Phi| = \rho$  ist die Flächenverzerrung der Parametrisierung  $\Phi$ . Der Vektor  $d\Phi$  steht senkrecht auf der Fläche  $A$ , hier in  $V$  hinein.

# Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß

(7a) Das Flussintegral des Vektorfeldes  $f$  über die Kreisscheibe  $A$  ist:

$$\begin{aligned} \int_{s \in A} f(s) \cdot dA &\stackrel{\text{Param}}{=} \int_D f(\Phi(\rho, \varphi)) \cdot \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) d(\rho, \varphi) \\ &= \int_D \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho \end{pmatrix} d(\rho, \varphi) = 0 \end{aligned}$$

😊 Anschauung: Das Feld  $f$  ist tangential zu  $A$ , daher  $f(s) \cdot dA = 0$ .

(7) Das Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  und seine Divergenz:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \implies \operatorname{div}(f) = 1 + 1 + 1 = 3$$

😊 In diesem Beispiel ist  $\operatorname{div}(f)$  konstant und daher das Integral besonders leicht: Die Quellstärke von  $f$  auf dem Bereich  $V$  ist

$$\int_V \operatorname{div}(f) d(x, y, z) = \int_V 3 d(x, y, z) = 3 \operatorname{vol}_3(V) = 2\pi r^3.$$

Wo fließt dieser Überschuss hin? Über  $A$  sicher nicht! Also über  $B \dots$

## Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß

(5b) In jedem Punkt  $s \in B$  sehen wir die äußere Einheitsnormale

$$n_{\partial V}(s) = s/|s| = s/r \quad (\text{senkrecht auf } B, \text{ Länge } 1, \text{ aus } V \text{ heraus}).$$

Wir nutzen obige Parametrisierung  $\Phi : D \rightarrow B$  in Polarkoordinaten:

$$s = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ \sqrt{r^2 - \rho^2} \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq r \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\}.$$

Die beiden Tangentialvektoren und der Normalenvektor sind:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ -\rho/\sqrt{r^2 - \rho^2} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\rho \sin \varphi \\ \rho \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} \rho^2 \cos \varphi / \sqrt{r^2 - \rho^2} \\ \rho^2 \sin \varphi / \sqrt{r^2 - \rho^2} \\ \rho \end{pmatrix} = \frac{\rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix}$$

😊 Dieser Normalenvektor zeigt nach außen, aber mit variabler Länge. Die Norm  $|d\Phi|$  ist die Flächenverzerrung der Parametrisierung  $\Phi$ .

# Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß

(6b) Hieraus erhalten wir den Flächeninhalt der Hemisphäre  $B$ :

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(B) &= \int_B |dB| \stackrel{\text{Param}}{=} \int_D \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right| d(\rho, \varphi) = \int_D \frac{r\rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} d(\rho, \varphi) \\ &= \int_{\rho=0}^r \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{r\rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} d\varphi d\rho = 2\pi r \left[ -\sqrt{r^2 - \rho^2} \right]_{\rho=0}^r = 2\pi r^2 \end{aligned}$$

(7b) Das Flussintegral des Vektorfeldes  $f$  über die Hemisphäre  $B$  ist:

$$\begin{aligned} \int_{s \in B} f(s) \cdot dB &\stackrel{\text{Param}}{=} \int_D f(\Phi(\rho, \varphi)) \cdot \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) d(\rho, \varphi) \\ &= \int_D \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ \sqrt{r^2 - \rho^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \rho^2 \cos \varphi / \sqrt{r^2 - \rho^2} \\ \rho^2 \sin \varphi / \sqrt{r^2 - \rho^2} \\ \rho \end{pmatrix} d(\rho, \varphi) \\ &= \dots \img alt="blue pen icon" data-bbox="188 825 240 895"/> \dots = \int_D \frac{r^2 \rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} d(\rho, \varphi) = 2\pi r^3 \quad (\text{wie 6b}) \end{aligned}$$

# Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß

😊 Anschauung: Das Vektorfeld  $f$  steht überall senkrecht auf  $B$  und hat dort Länge  $r$ . Hieraus folgt das Flussintegral direkt und mühelos:

$$\int_B f \cdot dB = \int_{s \in B} f(s) \cdot n_{\partial V}(s) |dB| = \int_B r |dB| = r \cdot \text{vol}_2(B) = r \cdot 2\pi r^2$$

**Bilanz** zur Halbkugel  $V$  und ihrer Randfläche  $S = \partial V = A \cup B$ :

$$\text{vol}_3(V) = \int_V |dV| = \frac{2\pi}{3} r^3, \quad \int_V \text{div}(f) dV = 2\pi r^3,$$

$$\text{vol}_2(A) = \int_A |dA| = \pi r^2, \quad \int_{s \in A} f(s) \cdot dA = 0,$$

$$\text{vol}_2(B) = \int_A |dA| = 2\pi r^2, \quad \int_{s \in B} f(s) \cdot dB = 2\pi r^3.$$

😊 Die Gleichheit ist kein Zufall, sondern illustriert den Satz von Gauß:

$$\int_{v \in V} \text{div} f(v) dV = \int_{s \in S} f(s) \cdot dS$$

# Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß

😊 Wir können die Hemisphäre  $B$  auf viele Weisen parametrisieren!

(5c) Alternativ die Parametrisierung  $\Phi : D \rightarrow B$  in Zylinderkoordinaten:

$$s = \Phi \begin{pmatrix} z \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{r^2 - z^2} \cos \varphi \\ \sqrt{r^2 - z^2} \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ \varphi \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 0 \leq z \leq r \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\}.$$

Die beiden Tangentialvektoren und der Normalenvektor sind:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \begin{pmatrix} -z/\sqrt{r^2 - z^2} \cos \varphi \\ -z/\sqrt{r^2 - z^2} \sin \varphi \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sqrt{r^2 - z^2} \sin \varphi \\ \sqrt{r^2 - z^2} \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sqrt{r^2 - z^2} \cos \varphi \\ -\sqrt{r^2 - z^2} \sin \varphi \\ -z \end{pmatrix} = -\Phi(z, \varphi)$$

⚠ Der Normalenvektor  $d\Phi$  zeigt in  $V$  hinein, Rechte-Hand-Regel.  
Die Norm  $|d\Phi| = r$  ist die Flächenverzerrung der Parametrisierung  $\Phi$ .

# Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß

(6c) Hieraus erhalten wir den Flächeninhalt der Hemisphäre  $B$ :

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(B) &= \int_B |\text{d}B| = \int_D \left| \frac{\partial \Phi}{\partial z} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right| \text{d}(z, \varphi) = \int_D r \text{d}(z, \varphi) \\ &= \int_{z=0}^r \int_{\varphi=0}^{2\pi} r \text{d}\varphi \text{d}z = \int_{z=0}^r 2\pi r \text{d}z = 2\pi r^2 \end{aligned}$$

(7c) Das Flussintegral des Vektorfeldes  $f$  über die Hemisphäre  $B$  ist:

$$\begin{aligned} \int_{s \in B} f(s) \cdot \text{d}B &\stackrel{\text{Param}}{=} \int_D f(\Phi(z, \varphi)) \cdot \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \text{d}(z, \varphi) \\ &= \int_D \begin{pmatrix} \sqrt{r^2 - z^2} \cos \varphi \\ \sqrt{r^2 - z^2} \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{r^2 - z^2} \cos \varphi \\ -\sqrt{r^2 - z^2} \sin \varphi \\ -z \end{pmatrix} \text{d}(z, \varphi) \\ &= \dots \img alt="blue pencil icon" data-bbox="218 745 268 810"/> \dots = \int_D -r^2 \text{d}(z, \varphi) = -2\pi r^3 \quad (\text{wie 6c}) \end{aligned}$$

 Der Normalenvektor  $\text{d}\Phi$  zeigt in  $V$  hinein; Rechte-Hand-Regel.  
Der Flächeninhalt  $\int |\text{d}\Phi|$  ist von der Orientierung unabhängig.  
Das Flussintegral wechselt das Vorzeichen bei Orientierungsumkehr.

# Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß

😊 Wir können die Hemisphäre  $B$  auf viele Weisen parametrisieren!

(5d) Zum Vergleich schließlich in Kugelkoordinaten  $\Phi : D \rightarrow B$ :

$$s = \Phi \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\}.$$

Die beiden Tangentialvektoren und der Normalenvektor sind:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi \\ -r \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} r^2 \sin^2 \theta \cos \varphi \\ r^2 \sin^2 \theta \sin \varphi \\ r^2 \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} = r \sin \theta \cdot \Phi(\theta, \varphi)$$

😊 Der Normalenvektor  $d\Phi$  zeigt aus  $V$  heraus, Rechte-Hand-Regel. Die Norm  $|d\Phi| = r^2 \sin \theta$  ist wie immer die Flächenverzerrung.

# Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß

(6d) Hieraus erhalten wir den Flächeninhalt der Hemisphäre  $B$ :

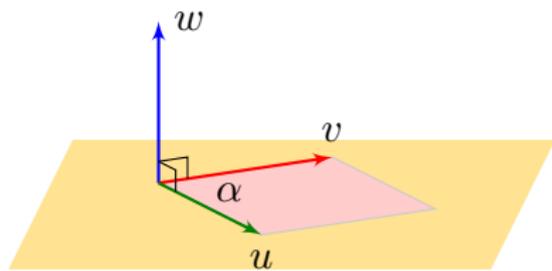
$$\begin{aligned} \text{vol}_2(B) &= \int_B |dB| = \int_D \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right| d(\theta, \varphi) = \int_D r^2 \sin \theta d(\theta, \varphi) \\ &= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2 \sin \theta d\varphi d\theta = 2\pi r^2 \left[ \cos \theta \right]_{\theta=0}^{\pi/2} = 2\pi r^2 \end{aligned}$$

(7d) Das Flussintegral des Vektorfeldes  $f$  über die Hemisphäre  $B$  ist:

$$\begin{aligned} \int_{s \in B} f(s) \cdot dB &\stackrel{\text{Param}}{=} \int_D f(\Phi(\theta, \varphi)) \cdot \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) d(\theta, \varphi) \\ &= \int_D \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r^2 \sin^2 \theta \cos \varphi \\ r^2 \sin^2 \theta \sin \varphi \\ r^2 \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} d(\theta, \varphi) \\ &= \dots \img alt="blue pencil icon" data-bbox="210 745 260 810"/> \dots = \int_D r^3 \sin \theta d(\theta, \varphi) = 2\pi r^3 \quad (\text{wie 6d}) \end{aligned}$$

😊 Der Normalenvektor  $d\Phi$  zeigt aus  $V$  heraus; Rechte-Hand-Regel.  
Der Flächeninhalt  $\int |d\Phi|$  ist von der Orientierung unabhängig.  
Das Flussintegral wechselt das Vorzeichen bei Orientierungsumkehr.

# Das Kreuzprodukt von Vektoren im $\mathbb{R}^3$



Erinnerung: Das **Kreuzprodukt** zweier Vektoren  $u, v \in \mathbb{R}^3$  ist

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor  $w = u \times v$  steht senkrecht auf den Vektoren  $u, v$ .

Die Orientierung von  $(u, v, w)$  entspricht der Rechte-Hand-Regel.

Die Norm  $|w|$  ist der Flächeninhalt des von den Vektoren  $u$  und  $v$  aufgespannten Parallelogramms, also  $|w| = |u| \cdot |v| \cdot \sin \angle(u, v)$ .

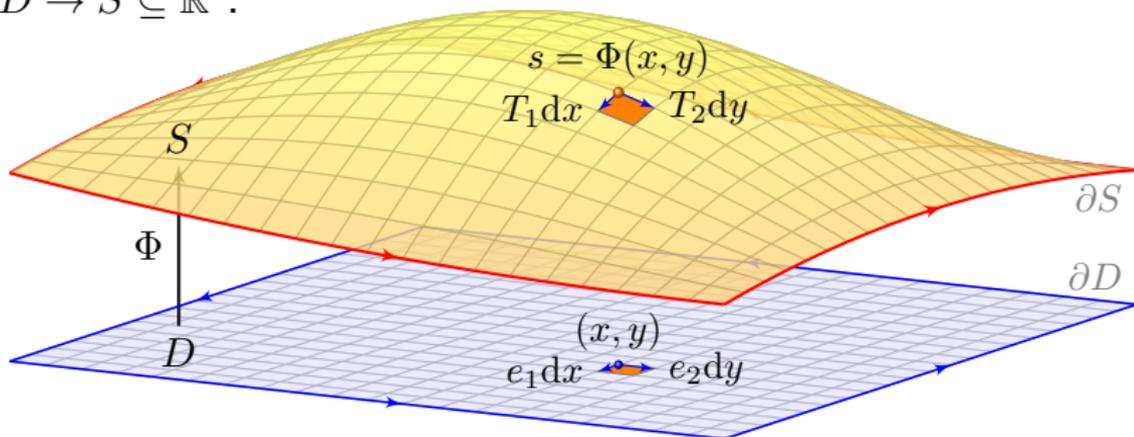
Daher gilt  $w = 0$  genau dann, wenn  $u$  und  $v$  linear abhängig sind, und umgekehrt  $w \neq 0$  genau dann, wenn  $u$  und  $v$  linear unabhängig sind.

Die Abbildung  $(u, v) \mapsto u \times v$  ist antisymmetrisch,  $v \times u = -(u \times v)$ , und bilinear, also  $u \times (av + bv') = a(u \times v) + b(u \times v')$ , ebenso in  $u$ .

 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §3.10.

# Tangentialvektoren und Flächenelemente

Ein **parametrisiertes Flächenstück** ist eine stetig diff'bare Abbildung  $\Phi: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ .



Am Punkt  $s = \Phi(x, y)$  heften die **Tangentialvektoren**

$$T_1 := \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) \quad \text{und} \quad T_2 := \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y).$$

Der zugehörige **Normalenvektor** ist das Kreuzprodukt  $N = T_1 \times T_2$ .  
Der **Flächeninhalt** eines kleinen Flächenelements  $dS$  ist daher

$$\text{vol}_2 \Phi \left( [x, x + dx] \times [y, y + dy] \right) \approx \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) \right| dx dy$$

## Glatte Flächenstücke

Hier sei der Definitionsbereich  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  kompakt mit stückweise glattem Rand, z.B. ein Rechteck  $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ , eine Kreisscheibe, etc. Zur Vereinfachung werden wir  $D$  als zusammenhängend annehmen. Die Abbildung  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  sei stetig diff'bar, wo nötig sogar zweimal.

Die Flächenparametrisierung  $\Phi : \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^3$  heißt **regulär**, wenn sie injektiv ist und  $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) \neq 0$  in jedem Punkt  $(x, y) \in D$  erfüllt. Das Bild  $S = \Phi(D) \subseteq \mathbb{R}^3$  nennen wir dann ein **glattes Flächenstück**. Der Rand  $\partial S := \Phi(\partial D)$  ist somit eine stückweise glatte Kurve im  $\mathbb{R}^3$ .

**Beispiel:** Jede stetig diff'bare Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$  definiert ein reguläres Flächenstück  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\Phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$ . Tangentialvektoren sind  $\partial_x \Phi = (1, 0, \partial_x f)$  und  $\partial_y \Phi = (0, 1, \partial_y f)$ , sie ergeben den Normalenvektor  $\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi = (-\partial_x f, -\partial_y f, 1)$ .

**Beispiel:** Sei  $\varphi : \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^2$  injektiv und stetig diff'bar mit  $\det \varphi' > 0$ . Sei  $\Phi : \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^3$  gegeben durch  $\Phi(x, y) = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), c)$ . Die Tangentialvektoren  $\partial_x \Phi = (\partial_x \varphi_1, \partial_x \varphi_2, 0)$ ,  $\partial_y \Phi = (\partial_y \varphi_1, \partial_y \varphi_2, 0)$  ergeben den senkrechten Normalenvektor  $\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi = (0, 0, \det \varphi')$ .

# Glatte Flächenstücke

Reguläre Parametrisierungen haben besonders gute geometrische Eigenschaften und entsprechen unserer Anschauung: Die Regularität stellt sicher, dass die Bildmenge  $S = \Phi(D) \subseteq \mathbb{R}^3$  eine glatte Fläche ist.

Die Forderung  $\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi \neq 0$  bedeutet, dass die Tangentialvektoren  $\partial_x \Phi$  und  $\partial_y \Phi$  linear unabhängig sind, also eine Tangentialebene an  $S$  aufspannen, und somit  $S$  überall eine eindeutige Normalenrichtung hat.

Diese Forderung ist streng, in vielen Rechnungen genügt weniger: Wir nennen  $\Phi$  **semiregulär**, wenn  $\Phi$  regulär auf dem Inneren  $\overset{\circ}{D}$  ist. Wir fordern Injektivität und  $\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi \neq 0$  dann nur im Inneren  $\overset{\circ}{D}$ , auf dem Rand  $\partial D$  benötigen und fordern wir dies dann nicht mehr.

**Aufgabe:** In der vorigen Aufgabe nutzen wir drei Parametrisierungen der Hemisphäre. Welche sind regulär? Welche sind semiregulär?

**Lösung:** Keine ist regulär: (5b) ist injektiv, aber auf  $\partial D$  divergiert  $\partial_\rho \Phi$ . Anschaulich plausibel: Die Flächenverzerrung wird hier beliebig groß. Hingegen sind (5c) und (5d) stetig diff'bar, aber auf  $\partial D$  nicht injektiv.

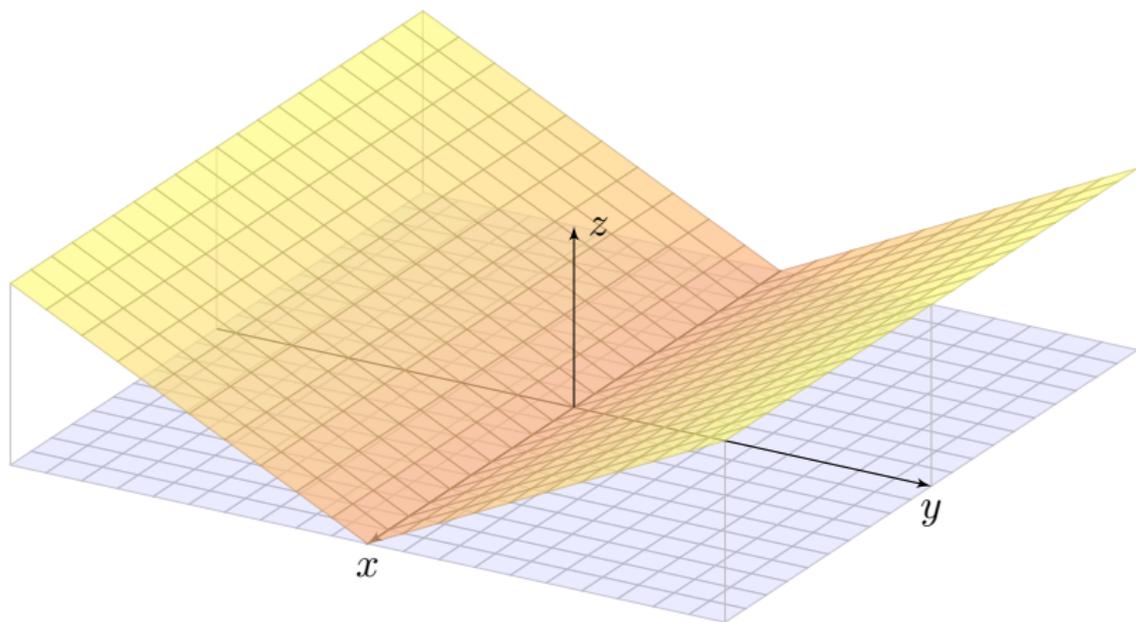
😊 Alle drei sind jedoch semiregulär, und das genügt zur Integration!

## Differenzierbarkeit und Knicke

**Aufgabe:** Über dem Quadrat  $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$  liegt der Graph

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1, z = |y| \}.$$

Skizzieren Sie  $S$  und geben Sie eine stetige Bijektion  $\Phi: D \rightarrow S$  an.  
und stetig differenzierbar? Wird  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  somit zu einer glatten Fläche?



## Differenzierbarkeit und Knicke

**Lösung:** Die Fläche  $S$  kann  $C^0$ -parametrisiert werden, etwa durch

$$\Psi: \mathbb{R}^2 \supseteq D \xrightarrow{\sim} S \subseteq \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \Psi(x, y) = (x, y, |y|).$$

Dies ist eine Bijektion von  $D$  auf  $S$ , aber nicht differenzierbar (in  $y = 0$ ). Die Fläche  $S$  kann ebenso  $C^1$ -parametrisiert werden, etwa durch

$$\Phi: \mathbb{R}^2 \supseteq D \xrightarrow{\sim} S \subseteq \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \Phi(x, t) = (x, t|t|, t^2).$$

Auch  $\Phi$  ist eine Bijektion des Definitionsbereichs  $D$  auf die Fläche  $S$ . Sie ist offensichtlich stetig und zudem stetig differenzierbar mit

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2|t| \\ 2t \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2t \\ 2|t| \end{pmatrix}.$$

Der Tangentialvektor  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$  verschwindet für  $t = 0$ , entlang der  $x$ -Achse.

⚠ Erstaunlich: Ein stetig differenzierbar parametrisiertes Flächenstück  $\Phi: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow S$  kann also, wie hier gesehen, durchaus Knicke haben!

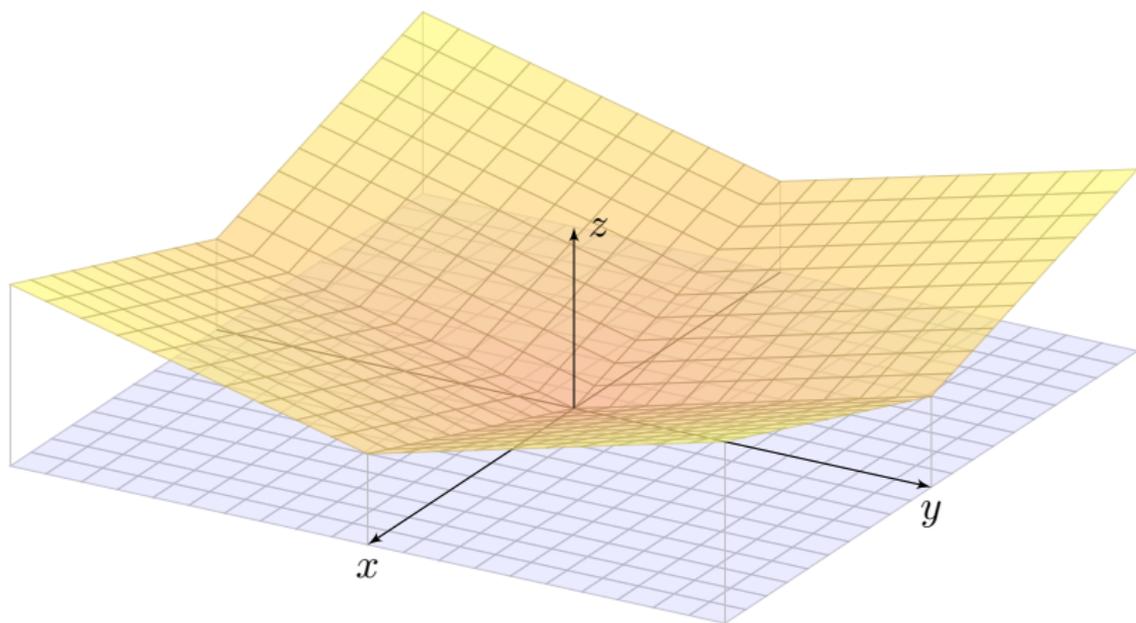
😊 Glattheit verlangt überall linear unabhängige Tangentialvektoren!

## Differenzierbarkeit und Ecken

**Aufgabe:** Über dem Quadrat  $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$  liegt der Graph

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1, z = |x| + |y| \}.$$

Skizzieren Sie  $S$  und geben Sie eine stetige Bijektion  $\Phi: D \rightarrow S$  an.  
und stetig differenzierbar? Wird  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  somit zu einer glatten Fläche?



## Differenzierbarkeit und Ecken

**Lösung:** Die Fläche  $S$  kann  $C^0$ -parametrisiert werden, etwa durch

$$\Psi: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \Psi(x, y) = (x, y, |x| + |y|).$$

Die Fläche  $S$  kann ebenso  $C^1$ -parametrisiert werden, etwa durch

$$\Phi: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \Phi(s, t) = (s|s|, t|t|, s^2 + t^2).$$

Dies ist eine Bijektion des Definitionsbereichs  $D$  auf die Fläche  $S$ .  
Sie ist offensichtlich stetig und zudem stetig differenzierbar mit

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = \begin{pmatrix} 2|s| \\ 0 \\ 2s \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2|t| \\ 2t \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \begin{pmatrix} +4s|t| \\ -4|s|t \\ +4|st| \end{pmatrix}.$$

Der Tangentialvektor  $\frac{\partial \Phi}{\partial s}$  verschwindet für  $s = 0$ , entlang der  $y$ -Achse.  
Der Tangentialvektor  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$  verschwindet für  $t = 0$ , entlang der  $x$ -Achse.

 Erstaunlich: Ein stetig differenzierbar parametrisiertes Flächenstück  $\Phi: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$  kann durchaus Knicke und sogar Ecken haben!

 Glattheit verlangt überall linear unabhängige Tangentialvektoren!

# Integration über parametrisierte Flächenstücke

Weiterhin sei  $\Phi : \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$  ein parametrisiertes Flächenstück. Für das **vektorielle** bzw. **skalare Flächenelement** schreiben wir

$$d\Phi := \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) d(x, y) \quad \text{und} \quad |d\Phi| = \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right| d(x, y).$$

Der **Flächeninhalt** des parametrisierten Flächenstücks  $\Phi$  ist

$$\text{vol}_2(\Phi) := \int_D |d\Phi| = \int_{(x,y) \in D} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) \right| d(x, y).$$

Das **Flächenintegral** eines Skalarfeldes  $g : \mathbb{R}^3 \supseteq S \rightarrow \mathbb{R}$  ist

$$\int_D g |d\Phi| := \int_{(x,y) \in D} g(\Phi(x, y)) \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) \right| d(x, y).$$

Das **Flussintegral** eines Vektorfeldes  $f : \mathbb{R}^3 \supseteq S \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist

$$\int_D f \cdot d\Phi := \int_{(x,y) \in D} \left\langle f(\Phi(x, y)) \mid \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) \right\rangle d(x, y).$$

# Integration über parametrisierte Flächenstücke

Links steht die bequeme **Kurzschreibweise**, rechts steht, wie Sie dies explizit ausrechnen mit dem Flächenelement  $d\Phi = (\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi) d(x, y)$ :

Das Flächenelement  $d\Phi = n |d\Phi|$  steht für ein kleines Flächenstück; sein Flächeninhalt ist  $|d\Phi|$ , der Vektor  $n$  steht senkrecht zur Fläche. So kommen wir, wie oben erklärt, von der Geometrie zum Integral.

Einfachstes Beispiel für ein **Flächenintegral** ist der Flächeninhalt  $\int_D |d\Phi|$ : Anschaulich summiert dieses Integral alle Flächenelemente.

Allgemein ist das Integral  $\int_D g |d\Phi|$  ein durch  $g: S \rightarrow \mathbb{R}$  gewichteter Flächeninhalt. Wir können uns  $g$  als Massendichte vorstellen (Masse pro Fläche); das Flächenintegral über  $S$  ergibt so die Gesamtmasse auf  $S$ .

Das **Flussintegral**  $\int_D f \cdot d\Phi$  misst, wieviel  $f$  durch  $\Phi$  fließt: Der Vektor  $d\Phi$  steht senkrecht zur Fläche, somit ist das Skalarprodukt  $f \cdot d\Phi$  der normale Anteil von  $f$  senkrecht zur Fläche. Sind  $f$  und  $d\Phi$  parallel, so multipliziert man die Länge  $|f|$  mit  $|d\Phi|$ . Im Allgemeinen sind  $f$  und  $d\Phi$  nicht parallel; es zählt dann nur der Anteil von  $f$  in Normalenrichtung: Die oben erklärte Zerlegung  $d\Phi = n |d\Phi|$  ergibt  $f \cdot d\Phi = (f \cdot n) |d\Phi|$ .

## Orientierungsumkehr einer parametrisierten Fläche

Flächenintegrale formulieren wir wie oben zunächst für parametrisierte Flächenstücke  $\Phi : \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Wir wollen nun nachrechnen, dass sie invariant sind unter (orientierungstreuer) Umparametrisierung.

**Beispiel:** Zur Parametrisierung  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  erhalten wir die umgekehrte Parametrisierung  $\bar{\Phi} : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$  durch Vertauschung der Variablen:

$$\begin{aligned}\bar{D} &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y, x) \in D \} \\ \bar{\Phi} : \bar{D} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \bar{\Phi}(x, y) = \Phi(y, x)\end{aligned}$$

Beide parametrisieren dieselbe Menge  $S = \Phi(D) = \bar{\Phi}(\bar{D})$ , aber mit umgekehrter Orientierung: Das Kreuzprodukt wechselt sein Vorzeichen! Flächenintegrale bleiben bei Orientierungsumkehr unverändert:

$$\int_{\bar{D}} g \, |d\bar{\Phi}| = \int_D g \, |d\Phi|$$

Flussintegrale hingegen wechseln das Vorzeichen:

$$\int_{\bar{D}} f \cdot d\bar{\Phi} = - \int_D f \cdot d\Phi.$$

## Orientierungsumkehr einer parametrisierten Fläche

Als Beispiel betrachten wir Kugelkoordinaten  $\Phi: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ :

$$\Phi \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\}$$

Die beiden Tangentialvektoren und der Normalenvektor sind:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi \\ -r \sin \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 \sin^2 \theta \cos \varphi \\ r^2 \sin^2 \theta \sin \varphi \\ r^2 \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}$$

Durch Vertauschung erhalten wir  $\bar{\Phi}: \mathbb{R}^2 \supseteq \bar{D} \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$  mit

$$\bar{\Phi} \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \bar{D} = \left\{ \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \end{array} \right\}.$$

Die beiden Tangentialvektoren und der Normalenvektor sind nun

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi \\ -r \sin \theta \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} r^2 \sin^2 \theta \cos \varphi \\ r^2 \sin^2 \theta \sin \varphi \\ r^2 \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}.$$

## Invarianz unter Umparametrisierung

Wir wollen verschiedene Parametrisierungen  $\Phi: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$  und  $\tilde{\Phi}: \mathbb{R}^2 \supseteq \tilde{D} \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$  derselben Fläche  $S$  miteinander vergleichen.

Eine **Umparametrisierung** ist eine stetige Bijektion  $H: \tilde{D} \rightarrow D$ .

Für eine **reguläre Umparametrisierung** verlangen wir zudem, dass sowohl  $H$  als auch  $H^{-1}: D \rightarrow \tilde{D}$  stetig differenzierbar sind.

Wir nennen  $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  und  $\tilde{\Phi}: \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$  **äquivalent** vermöge einer Umparametrisierung  $H$ , wenn  $\tilde{\Phi} = \Phi \circ H$  gilt, also  $\tilde{\Phi} \circ H^{-1} = \Phi$ .

## Satz G2A: Transformationssatz für Flächenintegrale

Äquivalente Flächenparametrisierungen  $\tilde{\Phi} = \Phi \circ H$  haben dieselbe Bildmenge  $S = \Phi(D) = \tilde{\Phi}(\tilde{D})$  und denselben Flächeninhalt. Es gilt

$$\partial_1 \tilde{\Phi} \times \partial_2 \tilde{\Phi} = (\partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi) \circ H \cdot \det H'.$$

Daher sind Flächenintegrale invariant unter Umparametrisierung:

$$\int_{\tilde{D}} g |d\tilde{\Phi}| = \int_D g |d\Phi|, \quad \int_{\tilde{D}} f \cdot d\tilde{\Phi} = \text{sign}(\det H') \int_D f \cdot d\Phi$$

## Invarianz unter Umparametrisierung

**Aufgabe:** Rechnen Sie dies nach mit Hilfe des Transformationssatzes!

**Nachrechnen** der ersten Koordinate von  $\partial_1 \tilde{\Phi} \times \partial_2 \tilde{\Phi}$  dank Kettenregel:

$$\begin{aligned}
 (\partial_1 \tilde{\Phi} \times \partial_2 \tilde{\Phi})_1 &= \partial_1 \tilde{\Phi}_2 \cdot \partial_2 \tilde{\Phi}_3 - \partial_1 \tilde{\Phi}_3 \cdot \partial_2 \tilde{\Phi}_2 \\
 &= \partial_1(\Phi_2 \circ H) \cdot \partial_2(\Phi_3 \circ H) - \partial_1(\Phi_3 \circ H) \cdot \partial_2(\Phi_2 \circ H) \\
 &= +(\partial_1 \Phi_2 \circ H \cdot \partial_1 H_1 + \partial_2 \Phi_2 \circ H \cdot \partial_1 H_2) \\
 &\quad \cdot (\partial_1 \Phi_3 \circ H \cdot \partial_2 H_1 + \partial_2 \Phi_3 \circ H \cdot \partial_2 H_2) \\
 &\quad - (\partial_1 \Phi_3 \circ H \cdot \partial_1 H_1 + \partial_2 \Phi_3 \circ H \cdot \partial_1 H_2) \\
 &\quad \cdot (\partial_1 \Phi_2 \circ H \cdot \partial_2 H_1 + \partial_2 \Phi_2 \circ H \cdot \partial_2 H_2) \\
 &= (\partial_1 \Phi_2 \cdot \partial_2 \Phi_3 - \partial_1 \Phi_3 \cdot \partial_2 \Phi_2) \circ H \\
 &\quad \cdot (\partial_1 H_1 \cdot \partial_2 H_2 - \partial_2 H_1 \cdot \partial_1 H_2) \\
 &= (\partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi)_1 \circ H \cdot \det H'
 \end{aligned}$$

Gleiches gilt für die Koordinaten  $(\partial_1 \tilde{\Phi} \times \partial_2 \tilde{\Phi})_2$  und  $(\partial_1 \tilde{\Phi} \times \partial_2 \tilde{\Phi})_3$ .  
Hieraus folgt die Behauptung  $\partial_1 \tilde{\Phi} \times \partial_2 \tilde{\Phi} = (\partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi) \circ H \cdot \det H'$ .

## Invarianz unter Umparametrisierung

**Flächenintegral** eines Skalarfeldes  $g: \mathbb{R}^3 \supseteq S \rightarrow \mathbb{R}$  über  $\tilde{\Phi} = \Phi \circ H$ :

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{D}} g |d\tilde{\Phi}| &\stackrel{(1)}{=} \int_{\tilde{D}} (g \circ \tilde{\Phi}) \cdot |\partial_1 \tilde{\Phi} \times \partial_2 \tilde{\Phi}| d(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ &\stackrel{(2)}{=} \int_{\tilde{D}} (g \circ \Phi \circ H) \cdot (|\partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi| \circ H) \cdot |\det H'| d(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ &\stackrel{(3)}{=} \int_D (g \circ \Phi) \cdot |\partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi| d(x, y) \stackrel{(4)}{=} \int_D g |d\Phi| \end{aligned}$$

Gleichungen (1) und (4) sind die Definition des Flächenintegrals bezüglich  $\tilde{\Phi}$  und  $\Phi$ , (2) folgt aus der Kettenregel wie oben erklärt, und (3) ist der Transformationssatz C2B angewendet auf  $H: \tilde{D} \rightarrow D$ .

😊 Zur Berechnung des Integrals müssen wir eine Parametrisierung wählen, doch das Ergebnis ist von dieser willkürlich Wahl unabhängig. Jede:r darf sich die jeweils bequemste Parametrisierung aussuchen.

😊 Statt Regularität der gesamten Umparametrisierung  $H: \tilde{D} \rightarrow D$  genügt es, dies im Inneren zu fordern: Dank  $\text{vol}_2(\partial \tilde{D}) = \text{vol}_2(\partial D) = 0$  tragen die Ränder nichts zu den Flächenintegralen bei, siehe Satz C2B.

## Invarianz unter Umparametrisierung

**Flussintegral** eines Vektorfeldes  $f : \mathbb{R}^3 \supseteq S \rightarrow \mathbb{R}^3$  über  $\tilde{\Phi} = \Phi \circ H$ :

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{D}} f \cdot d\tilde{\Phi} &\stackrel{(1)}{=} \int_{\tilde{D}} \left\langle f \circ \tilde{\Phi} \mid \partial_1 \tilde{\Phi} \times \partial_2 \tilde{\Phi} \right\rangle d(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ &\stackrel{(2)}{=} \int_{\tilde{D}} \left\langle f \circ \Phi \circ H \mid (\partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi) \circ H \right\rangle \cdot \det H' d(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ &\stackrel{(3)}{=} \text{sign}(\det H') \int_D \left\langle f \circ \Phi \mid \partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi \right\rangle d(x, y) \\ &\stackrel{(4)}{=} \text{sign}(\det H') \int_D f \cdot d\Phi \end{aligned}$$

 Das hier auftretende Vorzeichen  $\text{sign}(\det H') = \pm 1$  gilt, je nachdem ob die Parametrisierungen  $\Phi$  und  $\tilde{\Phi}$  gleichsinnig oder gegensinnig sind.

 Das Ergebnis ist ansonsten von der Parametrisierung unabhängig. Jede:r darf sich die jeweils bequemste Parametrisierung aussuchen.

 Statt Regularität der gesamten Umparametrisierung  $H : \tilde{D} \rightarrow D$  genügt es, dies im Inneren zu fordern: Dank  $\text{vol}_2(\partial \tilde{D}) = \text{vol}_2(\partial D) = 0$  tragen die Ränder nichts zu den Flächenintegralen bei, siehe Satz C2B.

# Kugelsegment und Kugelkappe

**Aufgabe:** (1) Skizzieren Sie zu  $0 \leq h \leq r$  das **Kugelsegment**

$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, r - h \leq z \leq r \}$$

(2) Beschreiben Sie den Körper  $V$  explizit durch Parametrisierungen in Zylinderkoordinaten sowie als Normalbereich in  $z$ -Richtung.

(3) Berechnen Sie den Rauminhalt  $\text{vol}_3(V)$  je nach Parametrisierung. Ist das Ergebnis unabhängig von der gewählten Parametrisierung?

(4) Beschreiben Sie ebenso explizit wie in (2) die **Kugelkappe**

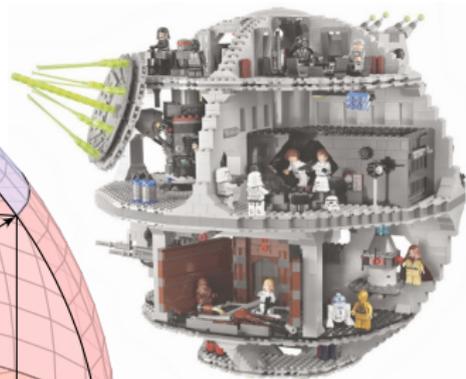
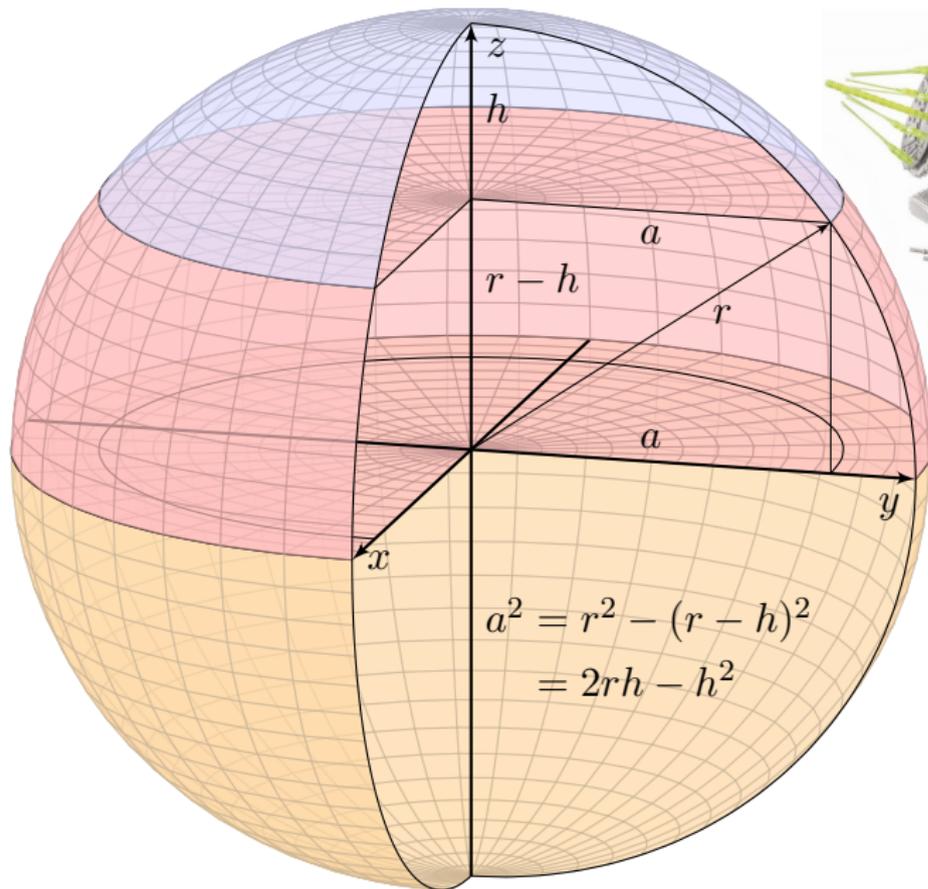
$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2, r - h \leq z \leq r \}$$

(5) Bestimmen Sie in jedem Punkt  $s \in S$  den nach außen zeigenden Einheitsnormalenvektor  $n(s)$  sowie  $dS$  je nach Parametrisierung.

(6) Berechnen Sie den Flächeninhalt  $\text{vol}_2(S)$  je nach Parametrisierung. Ist das Ergebnis unabhängig von der gewählten Parametrisierung?

😊 Diese Aufgaben bieten Gelegenheit, die bisherigen Volumen-Integrale zu wiederholen und die neuen Flächenintegrale einzuüben.

# Kugelsegment und Kugelkappe



# Volumen eines Kugelsegments

(2) Der Körper  $V$  ist implizit durch Un/Gleichungen gegeben:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2 \\ r - h \leq z \leq r \end{array} \right\}$$

Wir können ihn explizit in Zylinderkoordinaten parametrisieren:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} r - h \leq z \leq r \\ 0 \leq \rho \leq \sqrt{r^2 - z^2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\}$$

Wir können ihn ebenso als Normalbereich in  $z$ -Richtung beschreiben:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq a \\ r - h \leq z \leq \sqrt{r^2 - \rho^2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\}$$

😊 Das Ergebnis ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung: Jede andere Parametrisierungen geht evtl. einen anderen Rechenweg, endet aber beim selben Ergebnis. Wir wählen geschickte Parameter!

# Volumen eines Kugelsegments

(3a) Parametrisierung  $\Phi : D \rightarrow V$  in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} r-h \leq z \leq r \\ 0 \leq \rho \leq \sqrt{r^2 - z^2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\}$$

Jacobi-Matrix  $\Phi'$  und Funktionaldeterminante  $\det \Phi' = \rho$  wie zuvor.

Volumenberechnung dank Transformationsatz, Fubini und HDI:

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(V) &= \int_V 1 \, d(x, y, z) && \stackrel{\text{Trafo}}{\stackrel{\text{C2B}}{=}} \int_D |\det \Phi'| \, d(\rho, \varphi, z) \\ &\stackrel{\text{Fub}}{\stackrel{\text{C1E}}{=}} \int_{z=r-h}^r \int_{\rho=0}^{\sqrt{r^2-z^2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho \, d\varphi \, d\rho \, dz && \stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} \int_{z=r-h}^r \int_{\rho=0}^{\sqrt{r^2-z^2}} 2\pi\rho \, d\rho \, dz \\ &\stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} \int_{z=r-h}^r \pi \left[ \rho^2 \right]_{\rho=0}^{\sqrt{r^2-z^2}} \, dz && = \int_{z=r-h}^r \pi(r^2 - z^2) \, dz \\ &\stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} \pi \left[ r^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{z=r-h}^r && = \pi h^2 \left( r - \frac{h}{3} \right) \end{aligned}$$



Ist das plausibel? Das Ergebnis stimmt zumindest für  $h = 0, r, 2r$ .

# Volumen eines Kugelsegments

😊 Wir können den Körper  $V$  auf viele Weisen parametrisieren!

(3b) Alternativ, Parametrisierung  $\Phi: D \rightarrow V$  als  $z$ -Normalbereich:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq a \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ r-h \leq z \leq \sqrt{r^2 - \rho^2} \end{array} \right\}$$

Jacobi-Matrix  $\Phi'$  und Funktionaldeterminante  $\det \Phi' = \rho$  wie zuvor.  
Volumenberechnung dank Transformationssatz, Fubini und HDI:

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(V) &= \int_V 1 \, d(\rho, \varphi, z) \stackrel{\text{Trafo}}{\stackrel{\text{C2B}}{=}} \int_D |\det \Phi'| \, d(\rho, \varphi, z) \stackrel{\text{Fub}}{\stackrel{\text{C1E}}{=}} \\ &= \int_{\rho=0}^a \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=r-h}^{\sqrt{r^2-\rho^2}} \rho \, dz \, d\varphi \, d\rho = \dots \img alt="blue pencil icon" data-bbox="620 700 670 760" \dots = \pi h^2 \left( r - \frac{h}{3} \right) \end{aligned}$$

😊 Das Ergebnis ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung!  
Jede:r darf den eigenen Rechenweg wählen: sorgfältig und korrekt,  
und nach Möglichkeit auch geschickt und bequem.

## Flächeninhalt der Kugelkappe

(4) Die Kugelkappe  $S$  ist implizit durch Un/Gleichungen gegeben:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \\ r - h \leq z \leq r \end{array} \right\}$$

Wir können  $S$  explizit in Zylinderkoordinaten parametrisieren:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} r - h \leq z \leq r \\ \rho = \sqrt{r^2 - z^2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\}$$

Wir können  $S$  ebenso als Graph einer Funktion  $f(x, y)$  beschreiben:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq a \\ z = \sqrt{r^2 - \rho^2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\}$$

😊 Im Inneren des Körpers haben wir drei Freiheitsgrade, z.B.  $z, \rho, \varphi$ , auf der Randfläche entsprechend nur noch zwei, z.B.  $z, \varphi$  oder  $\rho, \varphi$ .

## Flächeninhalt der Kugelkappe

(5a) Parametrisierung  $\Phi : \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$  in Zylinderkoordinaten:

$$s = \Phi \begin{pmatrix} z \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{r^2 - z^2} \cos \varphi \\ \sqrt{r^2 - z^2} \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ \varphi \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} r - h \leq z \leq r \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\}.$$

Die beiden Tangentialvektoren und der Normalenvektor sind:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \begin{pmatrix} -z/\sqrt{r^2 - z^2} \cos \varphi \\ -z/\sqrt{r^2 - z^2} \sin \varphi \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sqrt{r^2 - z^2} \sin \varphi \\ \sqrt{r^2 - z^2} \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sqrt{r^2 - z^2} \cos \varphi \\ -\sqrt{r^2 - z^2} \sin \varphi \\ -z \end{pmatrix} = -\Phi(z, \varphi)$$

 Der Normalenvektor  $d\Phi$  zeigt in  $V$  hinein, Rechte-Hand-Regel.  
Die Norm  $|d\Phi| = r$  ist die Flächenverzerrung der Parametrisierung  $\Phi$ .

## Flächeninhalt der Kugelkappe

(6a) Hieraus erhalten wir den Flächeninhalt der Kugelkappe  $S$ :

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(S) &= \int_S |dS| = \int_D \left| \frac{\partial \Phi}{\partial z} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right| d(z, \varphi) = \int_D r d(z, \varphi) \\ &= \int_{z=r-h}^r \int_{\varphi=0}^{2\pi} r d\varphi dz = \int_{z=r-h}^r 2\pi r dz = 2\pi r h \end{aligned}$$

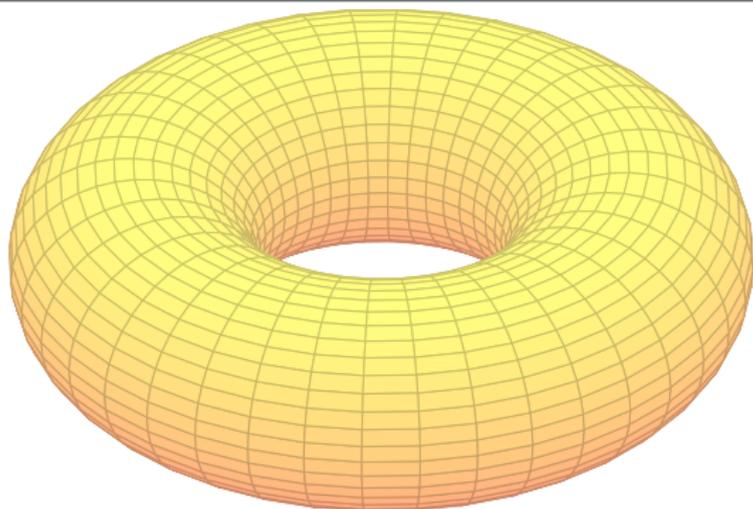
😊 Das ist eine bemerkenswert einfache Formel! Ist Sie plausibel? Das Ergebnis stimmt zumindest für  $h = 0, r, 2r$  (Hemi-/Sphäre).

😊 Das Ergebnis ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung: Jede andere Parametrisierungen geht evtl. einen anderen Rechenweg, endet aber beim selben Ergebnis. Wir wählen geschickte Parameter!

😊 Den Spezialfall der Hemisphäre haben wir oben schon gerechnet [G127](#). Statt über  $0 \leq z \leq r$  integrieren wir nur über  $r - h \leq z \leq r$ .

Die alternativen Rechnungen (5b,6b) in der zweiten Parametrisierung führe ich hier nicht aus. Sie verlaufen wie oben für die Hemisphäre vorgeführt [G124](#): Statt über  $0 \leq \rho \leq r$  integrieren wir nur über  $0 \leq \rho \leq a$ .

## Volltorus und Torusfläche



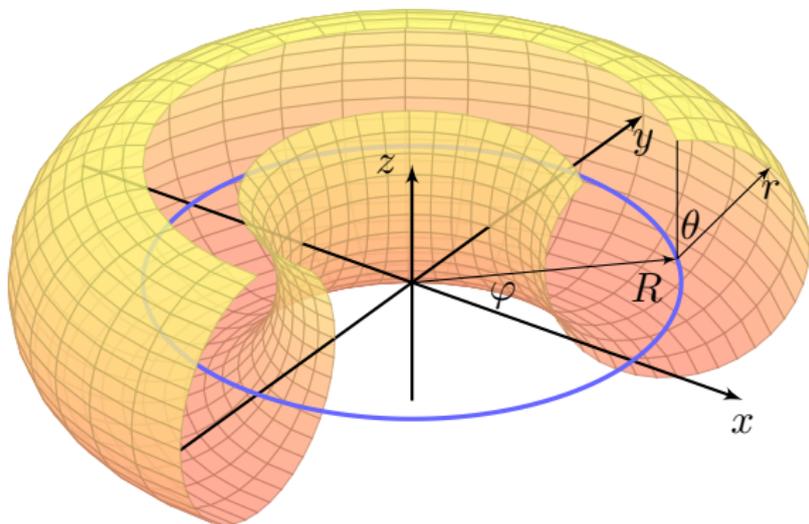
**Aufgabe:** Sei  $0 < r < R$ . Wir betrachten den Volltorus  $V$  mit

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} (R + \rho \sin \theta) \cos \varphi \\ (R + \rho \sin \theta) \sin \varphi \\ \rho \cos \theta \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq r \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\}.$$

- (1) Parametrisieren Sie die Torusfläche  $T = \partial V$  und skizzieren Sie die Teilfläche  $T' \subseteq T$  für die Werte  $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3}{2}\pi$  und  $0 \leq \theta \leq \frac{7}{4}\pi$ .
- (2) Bestimmen Sie den Flächeninhalt  $\text{vol}_2(T)$  der Torusfläche  $T$ .

## Volltorus und Torusfläche

## Lösung:



Für  $\rho = 0$  erhalten wir die blaue Kreislinie  $K$  vom Radius  $R$ , und der Volltorus  $V$  besteht aus allen Punkten mit Abstand höchstens  $r$  zu  $K$ .

😊 Im Sonderfall  $R = 0$  und  $r > 0$  erhalten wir Kugelkoordinaten.

Die Randfläche  $T = \partial V$  des Volltorus erhalten wir für  $\rho = r$ :

$$T = \partial V = \left\{ \begin{array}{l} \left( \begin{array}{l} (R + r \sin \theta) \cos \varphi \\ (R + r \sin \theta) \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{array} \right) \mid \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \end{array} \right\}$$

# Flächeninhalt der Torusfläche

😊 Im Inneren des Körpers haben wir drei Freiheitsgrade, hier  $\rho, \theta, \varphi$ , auf der Randfläche  $\{\rho = r\}$  entsprechend nur noch zwei, hier  $\theta, \varphi$ .

(2) Parametrisierung  $\Phi: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow T \subseteq \mathbb{R}^3$  in Toruskoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R + r \sin \theta) \cos \varphi \\ (R + r \sin \theta) \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\}$$

😊 Wir parametrisieren hier die gesamte Torusfläche. Wenn die Problemstellung anderes verlangt, dann passen Sie die Parameter entsprechend an, etwa  $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3}{2}\pi$  und  $0 \leq \theta \leq \frac{7}{4}\pi$  in obiger Skizze.

Tangentialvektoren, Normalenvektor, Flächenelement:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi \\ -r \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -(R + r \sin \theta) \sin \varphi \\ (R + r \sin \theta) \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \implies$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} r(R + r \sin \theta) \sin \theta \cos \varphi \\ r(R + r \sin \theta) \sin \theta \sin \varphi \\ r(R + r \sin \theta) \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right| = r(R + r \sin \theta)$$

## Flächeninhalt der Torusfläche

Das Flächenelement  $|d\Phi| = r(R + r \sin \theta)$  misst die durch  $\Phi$  bewirkte Flächenverzerrung. Ihre Berechnung ist hier etwas länglich, aber leicht.

Hiermit berechnen wir den Flächeninhalt:

$$\text{vol}_2(T) \stackrel{\text{Def}}{=} \int_D |d\Phi| \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{(\theta, \varphi) \in D} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta, \varphi) \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) \right| d(\theta, \varphi)$$

$$\stackrel{\text{Fub}}{\stackrel{\text{C1E}}{=}} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r(R + r \sin \theta) d\varphi d\theta$$

$$\stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B1I}}{=}} 2\pi \int_{\theta=0}^{2\pi} r(R + r \sin \theta) d\theta$$

$$\stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B1I}}{=}} 2\pi r \cdot 2\pi R$$

😊 Dies illustriert die Guldinsche Flächenregel G2B für die Mantelfläche  $M$  eines Rotationskörpers:

$$\text{vol}_2(M) = \text{vol}_1(\Gamma) \cdot 2\pi d(\Gamma)$$

## Volumen des Volltorus

**Aufgabe:** (3) Bestimmen Sie das Volumen  $\text{vol}_3(V)$  des Volltorus. Hierzu müssen Sie für  $V$  zunächst geeignete Koordinaten wählen. Hinweis und Präzisierung: Wählen Sie zunächst Toruskoordinaten.

**Lösung:** Parametrisierung  $\Phi: \mathbb{R}^3 \supseteq D \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^3$  in Toruskoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R + \rho \sin \theta) \cos \varphi \\ (R + \rho \sin \theta) \sin \varphi \\ \rho \cos \theta \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq r \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\}$$

Jacobi-Matrix  $\Phi'$  und Funktionaldeterminante  $\det \Phi'$ :

$$\Phi' = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi & -(R + \rho \sin \theta) \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi & (R + \rho \sin \theta) \cos \varphi \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det \Phi' = \dots \img alt="blue pen icon" data-bbox="198 788 248 848" \dots = \rho (R + \rho \sin \theta) \quad (\text{plausibel, rechtshändig})$$

Diese Determinante misst die durch  $\Phi$  bewirkte Volumenverzerrung. Rechnen Sie diese Determinante zur Übung sorgfältig aus.

## Volumen des Volltorus

Volumenberechnung dank Transformationsatz, Fubini und HDI:

$$\begin{aligned}
 \text{vol}_3(V) &\stackrel{\text{Def}}{=} \int_V 1 \, d(x, y, z) \stackrel{\substack{\text{Trafo} \\ \text{C2B}}}{=} \int_D |\det \Phi'| \, d(\rho, \theta, \varphi) \\
 &\stackrel{\substack{\text{Fub} \\ \text{C1E}}}{=} \int_{\rho=0}^r \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho (R + \rho \sin \theta) \, d\varphi \, d\theta \, d\rho \\
 &\stackrel{\substack{\text{HDI} \\ \text{B1I}}}{=} 2\pi \int_{\rho=0}^r \int_{\theta=0}^{2\pi} \rho (R + \rho \sin \theta) \, d\theta \, d\rho \\
 &\stackrel{\substack{\text{HDI} \\ \text{B1I}}}{=} 4\pi^2 \int_{\rho=0}^r \rho R \, d\rho \\
 &\stackrel{\substack{\text{HDI} \\ \text{B1I}}}{=} \pi r^2 \cdot 2\pi R
 \end{aligned}$$

😊 Dies illustriert die Guldinsche Volumenregel G2B für den Rauminhalt eines Rotationskörpers  $K$ :

$$\text{vol}_3(K) = \text{vol}_2(A) \cdot 2\pi d(A)$$

## Volumen des Volltorus

**Aufgabe:** (4) Parametrisieren Sie den Volltorus in Zylinderkoordinaten. Bestimmen Sie so erneut das Volumen  $\text{vol}_3(V)$  des Volltorus und vergleichen Sie das Ergebnis mit der vorigen Rechnung aus (3).

**Lösung:** Die Parametrisierung  $\Phi: \mathbb{R}^3 \supseteq D \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^3$  ist nun:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix},$$
$$D = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} -r \leq z \leq r \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ R - \sqrt{r^2 - z^2} \leq \rho \leq R + \sqrt{r^2 - z^2} \end{array} \right\}$$

Jacobi-Matrix  $\Phi'$  und Funktionaldeterminante  $\det \Phi' = \rho$  wie immer.

Die Determinante misst die durch  $\Phi$  bewirkte Volumenverzerrung. Ihre Berechnung ist hier besonders leicht und wohlbekannt von Polar- und Zylinderkoordinaten. Dafür ist die Integration etwas länger.

## Volumen des Volltorus

Volumenberechnung dank Transformationsatz, Fubini und HDI:

$$\begin{aligned}
 \text{vol}_3(V) &\stackrel{\text{Def}}{=} \int_V 1 \, d(x, y, z) \stackrel{\text{Trafo}}{\stackrel{\text{C2B}}{=}} \int_D |\det \Phi'| \, d(\rho, \varphi, z) \\
 &\stackrel{\text{Fub}}{\stackrel{\text{C1E}}{=}} \int_{z=-r}^r \int_{\rho=R-\sqrt{r^2-z^2}}^{R+\sqrt{r^2-z^2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho \, d\varphi \, d\rho \, dz \\
 &\stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B1I}}{=}} 2\pi \int_{z=-r}^r \int_{\rho=R-\sqrt{r^2-z^2}}^{R+\sqrt{r^2-z^2}} \rho \, d\rho \, dz \\
 &\stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B1I}}{=}} \pi \int_{z=-r}^r \left[ \rho^2 \right]_{\rho=R-\sqrt{r^2-z^2}}^{R+\sqrt{r^2-z^2}} dz \\
 &= \pi \int_{z=-r}^r 4R\sqrt{r^2-z^2} \, dz \\
 &\stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B1I}}{=}} 2\pi R \cdot \pi r^2
 \end{aligned}$$

😊 Dies illustriert die Guldinsche Volumenregel G2B.

## Guldinsche Regeln für Rotationskörper

Die folgenden Rechenregeln sind besonders einfach und häufig nützlich. Sie sind benannt nach Paul Guldin (1577–1643), waren aber bereits in der Antike bekannt, etwa Pappos von Alexandria (um 300 n. Chr.).

### Satz G2B: Guldinsche Regeln für Rotationskörper

Der Körper  $R \subseteq \mathbb{R}^3$  entstehe durch Rotation einer ebenen Fläche  $A$  um eine disjunkte Achse in derselben Ebene. Für sein **Volumen** gilt dann:

$$\text{vol}_3(R) = \text{vol}_2(A) \cdot 2\pi d(A)$$

Hierbei ist  $\text{vol}_2(A)$  der Flächeninhalt der rotierten Fläche  $A$  und  $d(A)$  der Abstand ihres Schwerpunktes zur Drehachse.

Die **Mantelfläche**  $M = \partial R$  hat den Flächeninhalt

$$\text{vol}_2(M) = \text{vol}_1(\Gamma) \cdot 2\pi d(\Gamma).$$

Hierbei ist  $\text{vol}_1(\Gamma)$  die Länge der rotierten Randkurve  $\Gamma = \partial A$  und  $d(\Gamma)$  der Abstand ihres Schwerpunktes zur Drehachse.

## Guldinsche Regeln für Rotationskörper

**Aufgabe:** Parametrisieren Sie  $R$  und  $M$  in Zylinderkoordinaten und beweisen Sie die Guldinschen Regeln durch explizites Nachrechnen.

**Nachrechnen der Guldinschen Volumenformel:**

Wir parametrisieren den Körper  $R$  durch  $\Phi : [0, 2\pi] \times A \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \varphi \\ r \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\varphi, r, z)} = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ r \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Funktionaldeterminante ist  $\det \Phi' = -r$  und das Volumen somit

$$\text{vol}_3(R) = \int_{(r,z) \in A} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r \, d\varphi \, d(r, z) = 2\pi \int_{(r,z) \in A} r \, d(r, z).$$

Der Abstand des Flächenschwerpunkts von der Drehachse ist

$$d(A) = \frac{1}{\text{vol}_2(A)} \int_{(r,z) \in A} r \, d(r, z).$$

Daraus erhalten wir die Guldinsche Volumenformel:

$$\text{vol}_3(R) = \text{vol}_2(A) \cdot 2\pi d(A)$$

# Guldinsche Regeln für Rotationskörper

## Nachrechnen der Guldinschen Flächenformel:

Die Kurve  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$  parametrisieren wir durch einen Weg

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}, \quad \gamma(t) = (r(t), z(t))$$

Die rotierte Mantelfläche  $M$  parametrisieren wir durch

$$\Phi: D = [0, 2\pi] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Phi \begin{pmatrix} \varphi \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t) \cos \varphi \\ r(t) \sin \varphi \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

Tangentialvektoren, Normalenvektor, Flächenelement:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r(t) \sin \varphi \\ r(t) \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \begin{pmatrix} r'(t) \cos \varphi \\ r'(t) \sin \varphi \\ z'(t) \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \begin{pmatrix} r(t)z'(t) \cos \varphi \\ r(t)z'(t) \sin \varphi \\ -r(t)r'(t) \end{pmatrix}, \quad \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right| = r(t) \sqrt{r'(t)^2 + z'(t)^2}$$

## Guldinsche Regeln für Rotationskörper

Als Flächeninhalt der Mantelfläche  $M$  erhalten wir:

$$\begin{aligned}\text{vol}_2(M) &= \int_D |\mathrm{d}\Phi| = \int_{(\varphi,t) \in D} r(t) \sqrt{r'(t)^2 + z'(t)^2} \mathrm{d}(\varphi, t) \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{t=a}^b r(t) |\mathrm{d}\gamma(t)| \mathrm{d}\varphi = 2\pi \int_{t=a}^b r(t) |\mathrm{d}\gamma(t)|\end{aligned}$$

Der Abstand des Kurvenschwerpunkts von der Drehachse ist

$$d(\Gamma) = \frac{1}{\text{vol}_1(\Gamma)} \int_{t=a}^b r(t) |\mathrm{d}\gamma(t)|.$$

Daraus erhalten wir die Guldinsche Flächenformel:

$$\text{vol}_2(M) = \text{vol}_1(\Gamma) \cdot 2\pi d(\Gamma).$$

😊 Besonders einfach werden die Guldinschen Regeln, wenn  $A$  und  $\Gamma$  symmetrisch sind, wie etwa der Kreis (G225) oder die Herzkurve (G425), bezüglich einer Achse im Abstand  $d$  parallel zur Rotationsachse.

## Volltorus und Torusfläche

**Aufgabe:** Bestimmen Sie mit den Guldinschen Regeln das Volumen  $\text{vol}_3(V)$  des Volltorus sowie den Flächeninhalt  $\text{vol}_2(T)$  der Torusfläche.

**Lösung:** (1) Mit  $\text{vol}_2(A) = \pi r^2$  und  $d(A) = R$  gilt

$$\text{vol}_3(V) = \text{vol}_2(A) \cdot 2\pi d(A) = \pi r^2 \cdot 2\pi R = 2\pi^2 r^2 R$$

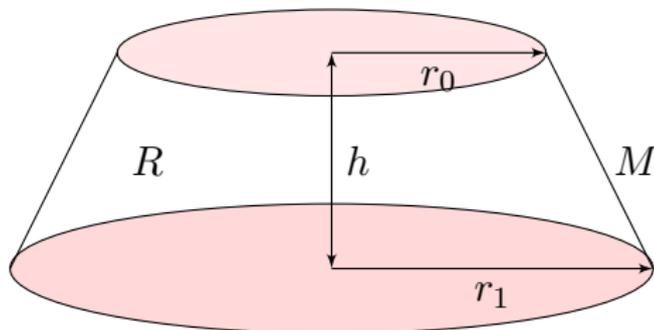
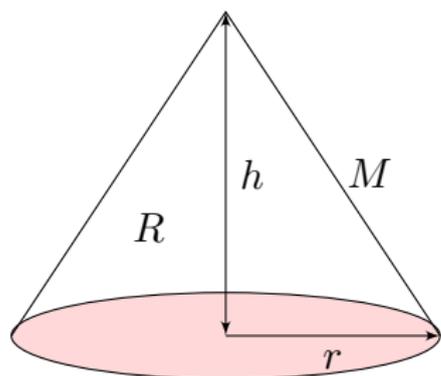
(2) Mit  $\text{vol}_1(\Gamma) = 2\pi r$  und  $d(\Gamma) = R$  gilt

$$\text{vol}_2(T) = \text{vol}_1(\Gamma) \cdot 2\pi d(\Gamma) = 2\pi r \cdot 2\pi R = 4\pi^2 r R$$

Sei  $\Gamma$  die Kreislinie vom Radius  $r$  um  $(R, 0, 0)$  in der  $x$ - $z$ -Ebene. Diese rotieren wir um die  $z$ -Achse und erhalten die Torusfläche  $T$ . Die Kurve  $\Gamma$  hat Länge  $2\pi r$  und den Schwerpunkt  $(R, 0, 0)$ . Somit hat die Torusfläche  $T$  den Flächeninhalt  $\text{vol}_2(T) = 4\pi^2 r R$ . Die von  $\Gamma$  berandete Kreisfläche  $A$  hat den Flächeninhalt  $\pi r^2$ . Ihr Schwerpunkt ist der Kreismittelpunkt, also ebenfalls  $(R, 0, 0)$ . Somit hat der Volltorus  $V$  den Rauminhalt  $\text{vol}_3(V) = 2\pi^2 r^2 R$ .

😊 So kann man sich Torusvolumen und Flächeninhalt leicht merken!

## Gerader Kegel und Kegelstumpf



**Aufgabe:** Bestimmen Sie das Volumen eines geraden Kegels bzw. eines Kegelstumpfes sowie den Flächeninhalt seiner Mantelfläche.

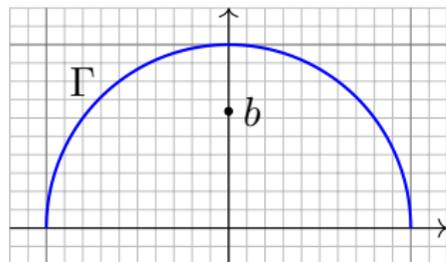
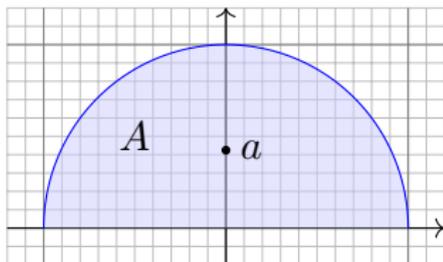
**Lösung:** Dank der Guldinschen Flächenformel finden wir:

$$\text{vol}_2(M) = \pi r \sqrt{h^2 + r^2} \quad \text{bzw.} \quad \text{vol}_2(M) = \pi(r_0 + r_1) \sqrt{h^2 + (r_1 - r_0)^2}$$

Dank der Guldinschen Volumenformel und Ergänzung finden wir:

$$\text{vol}_3(R) = \frac{1}{2} h r \cdot 2\pi \frac{r}{3} = \frac{\pi}{3} h r^2 \quad \text{bzw.} \quad \text{vol}_3(R) = \frac{\pi}{3} h (r_1^2 + r_1 r_0 + r_0^2)$$

## Vollkugel und Kugelfläche



**Aufgabe:** Sei  $(0, a)$  der Schwerpunkt der Halbkreisfläche

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2, y \geq 0 \}$$

und  $(0, b)$  der Schwerpunkt der Halbkreislinie

$$\Gamma = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2, y \geq 0 \}.$$

Berechnen Sie diese (1) mit Guldin sowie (2) direkt durch Integration.

**Lösung:** (1) Aus  $\text{vol}_2(A) = \frac{\pi}{2}r^2$  und  $\text{vol}_1(\Gamma) = \pi r$  folgt dank Guldin:

$$\frac{\pi}{2}r^2 \cdot 2\pi a \stackrel{!}{=} \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{4}{3\pi}r \quad \text{wobei} \quad \frac{4}{3\pi} \approx 0.42441$$

$$\pi r \cdot 2\pi b \stackrel{!}{=} 4\pi r^2 \quad \Longrightarrow \quad b = \frac{2}{\pi}r \quad \text{wobei} \quad \frac{2}{\pi} \approx 0.63662$$

## Vollkugel und Kugelfläche

(2) Zum Vergleich berechnen wir die beiden Schwerpunkte direkt durch Integration und nutzen Polarkoordinaten. (Für  $A$  können wir alternativ auch die Greensche Schwerpunktsformel nutzen, siehe E305.)

$$\begin{aligned}
 a \operatorname{vol}_2(A) &= \int_{(x,y) \in A} y \, d(x,y) && \stackrel{\text{Polar}}{=} \int_{\rho=0}^r \int_{\varphi=0}^{\pi} \rho \sin \varphi \cdot \rho \, d\varphi \, d\rho \\
 &= \int_{\rho=0}^r \rho^2 \left[ -\cos \varphi \right]_{\varphi=0}^{\pi} d\rho && = 2 \left[ \frac{\rho^3}{3} \right]_{\rho=0}^r = \frac{2}{3} r^3
 \end{aligned}$$

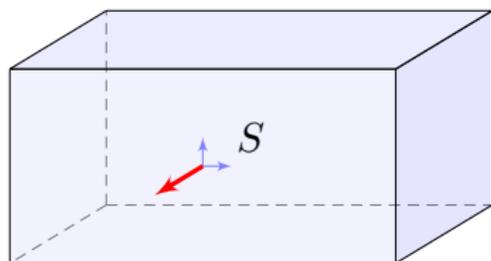
$$\begin{aligned}
 b \operatorname{vol}_1(\Gamma) &= \int_{(x,y) \in \Gamma} y \, d\Gamma && \stackrel{\text{Polar}}{=} \int_{\varphi=0}^{\pi} r \sin \varphi \cdot r \, d\varphi \\
 &= r^2 \left[ -\cos \varphi \right]_{\varphi=0}^{\pi} && = 2r^2
 \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir erneut die Koordinaten  $a = \frac{4}{3\pi} r$  und  $b = \frac{2}{\pi} r$ .

😊 Die Guldinschen Regeln können wir in beide Richtungen lesen: Sobald wir zwei der drei Größen kennen, erhalten wir daraus die dritte.

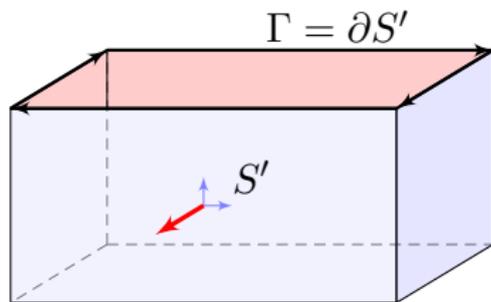
# Stückweise glatte Flächen

Glatte Flächen sind schön, aber oft zu restriktiv. Typisches Beispiel und Modell ist die Oberfläche eines Quaders  $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ .



## Die Oberfläche eines Quaders.

Dies ist eine stückweise glatte Fläche  $S = \partial Q \subseteq \mathbb{R}^3$ , zusammengesetzt aus sechs regulären Flächenstücken. Sie hat keinen Rand, geschrieben  $\partial S = \emptyset$ , und ist orientierbar durch die nach außen zeigende Normale.



## Die Quaderfläche ohne Deckel.

Diese Teilfläche  $S' \subseteq S$  lässt sich zusammensetzen aus fünf regulären Flächenstücken. Sie ist orientierbar durch die nach außen zeigende Normale. Ihre Randkurve  $\Gamma = \partial S'$  sind die vier Kanten des oben entstehenden Rechtecks mit der gezeigten positiven Orientierung.

Rechte-Hand-Regel: Die Orientierung der Fläche  $S$  definiert eine zugehörige positive Orientierung der Randkurve  $\Gamma = \partial S$ .

# Stückweise glatte Flächen

Eine Teilmenge  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  nennen wir **stückweise glatte Fläche**, wenn es glatte Flächenstücke  $S_1, \dots, S_k \subseteq \mathbb{R}^3$  gibt, sodass  $S = S_1 \cup \dots \cup S_k$  gilt.

Wie im obigen Modell verlangen wir dabei geometrische Vorkehrungen: Die Flächenstücke schneiden sich höchstens längs ihrer Randkurven. Im Inneren jeder Kante schneiden sich höchstens zwei Flächenstücke. Nur in Eckpunkten können mehrere Flächenstücke zusammenstoßen.

Innere Kanten treten also stets doppelt auf und heben sich auf.

Die verbleibenden einzelnen Kanten bilden den **Rand**  $\partial S$ .

Im Falle  $\partial S = \emptyset$  nennen wir die Fläche  $S$  **geschlossen**.

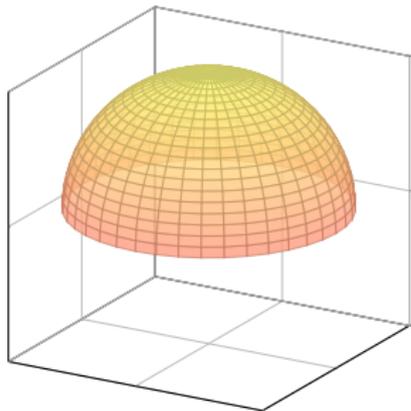
Jede geschlossene Fläche ist kompakt und ohne Rand.

Ein **Orientierung** von  $S$  besteht aus Orientierungen der Flächenstücke  $S_1, \dots, S_k$ , die wie gezeigt in gemeinsamen Kanten gegenläufig sind.

Dies definiert die Orientierung des Randes  $\partial S$  im Satz von Stokes: Beim Zusammensetzen einer stückweise glatten Fläche heben sich innere Kanten paarweise auf, denn sie sind gegenläufig orientiert.

Es bleibt die positiv orientierte Randkurve  $\Gamma = \partial S$ .

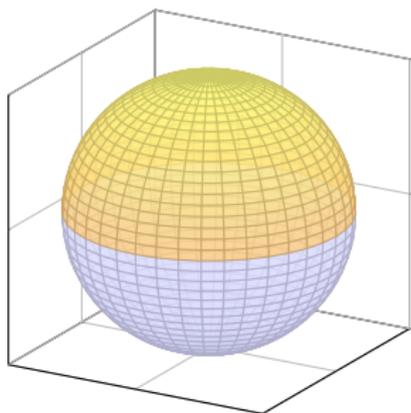
# Stückweise glatte Flächen



## Eine Hemisphäre.

Die Hemisphäre lässt sich als ein reguläres Flächenstück parametrisieren, zum Beispiel durch stereographische Projektion vom Südpol auf die Äquatorebene.

Die Hemisphäre ist orientierbar durch die nach außen zeigende Normale. Sie hat den Äquator als Rand, und die Rechte-Hand-Regel definiert seine Orientierung.

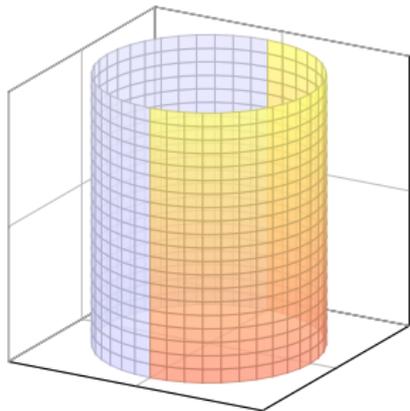


## Die Oberfläche einer Kugel.

Die Sphäre  $S$  lässt sich nicht als ein einziges reguläres Flächenstück parametrisieren, aber sie lässt sich aus zwei regulären Flächenstücken zusammensetzen, z.B. aus zwei Hemisphären. Sie ist orientierbar durch die nach außen zeigende Normale. Sie hat keinen Rand,  $\partial S = \emptyset$ .

Dies nennen wir eine „geschlossene Fläche“:  
Die Sphäre ist kompakt und ohne Rand.

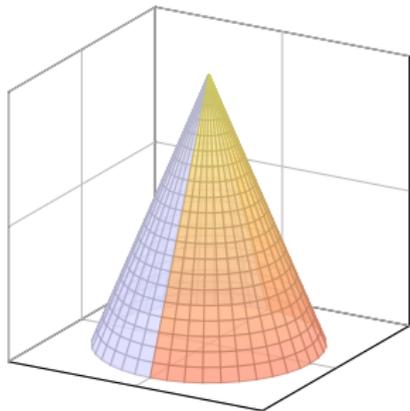
# Stückweise glatte Flächen



## Der Mantel eines Zylinders.

Der Zylindermantel ist ein reguläres Flächenstück, zum Beispiel parametrisiert durch einen Kreisring. Er lässt sich ebenso durch zwei Rechtecke regulär parametrisieren, wie in der Skizze angedeutet.

Der Zylindermantel ist orientierbar durch die nach außen zeigende Normale. Er hat zwei Kreislinien als Rand, und die Rechte-Hand-Regel definiert ihre Orientierungen.



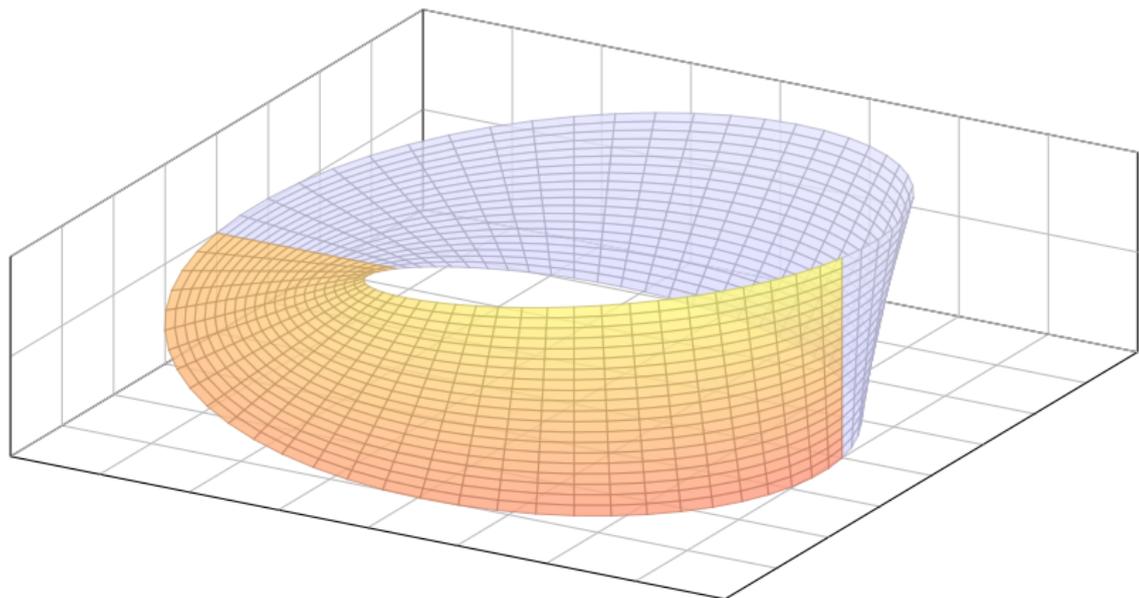
## Der Mantel eines Kegels.

Der Kegelmantel lässt sich durch zwei Dreiecke regulär parametrisieren, wie in der Skizze angedeutet.

Der Kegelmantel ist orientierbar durch die nach außen zeigende Normale. Er hat eine Kreislinie als Rand, und die Rechte-Hand-Regel definiert ihre Orientierung.

# Das Möbius-Band ist nicht orientierbar.

Es gibt auch nicht-orientierbare Flächen. Hier das einfachste Beispiel:



$$M = \left\{ \left( \begin{array}{c} (3 + r \sin \frac{\varphi}{2}) \cos \varphi \\ (3 + r \sin \frac{\varphi}{2}) \sin \varphi \\ r \cos \frac{\varphi}{2} \end{array} \right) \mid \begin{array}{l} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ -1 \leq r \leq 1 \end{array} \right\}$$



Auf solche Flächen lässt sich der Satz von Stokes **nicht** anwenden!

## Das Möbius–Band ist nicht orientierbar.

Das **Möbius–Band** ist eine simple, aber bemerkenswerte Fläche! Sie zeigt Eigenschaften, die man zuerst für unmöglich halten würde. Es erlaubt uns, eine bessere Vorstellung von Flächen zu entwickeln. Die Mittelachse ( $r = 0$ ) besteht aus einer Kreislinie, hier vom Radius 3. Um diese windet sich das Möbius–Band in halber Drehung, also  $180^\circ$ . Aus Papier hergestellt erhalten wir eine Fläche mit nur einer Seite! Sie lässt sich aus zwei regulären Flächenstücken zusammensetzen, je durch Rechtecke parametrisiert, etwa  $0 \leq \varphi \leq \pi$  und  $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$ , doch die Orientierungen passen nicht zusammen. Das bedeutet: Das Möbius–Band ist eine glatte Fläche, aber nicht orientierbar!

Dieses Band wurde 1858 unabhängig voneinander von dem Göttinger Mathematiker und Physiker Johann Benedict Listing und dem Leipziger Mathematiker und Astronomen August Ferdinand Möbius beschrieben. Das Möbius–Band ist das universelle Modell einer nicht-orientierbaren Fläche: Eine beliebige Fläche  $S$  ist genau dann nicht-orientierbar, wenn sie ein Möbius–Band enthält (als eingebettete Teilfläche).

# Das Möbius-Band als Antriebsriemen



(19)  
Bundesrepublik Deutschland  
Deutsches Patent- und Markenamt

(10) **DE 20 2004 005 763 U1** 2004.08.19

(12)

## Gebrauchsmusterschrift

(22) Anmeldetag: **13.04.2004**

(47) Eintragungstag: **15.07.2004**

(43) Bekanntmachung im Patentblatt: **19.08.2004**

(51) Int Cl.<sup>7</sup>: **F16F 1/00**

(71) Name und Wohnsitz des Inhabers:  
**Haitovs, Leopolds, 60385 Frankfurt, DE**

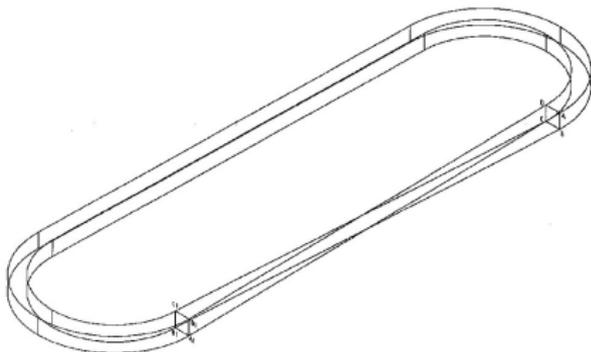
(74) Name und Wohnsitz des Vertreters:  
**Schweizer, P., Rechtsanwalt, 86150 Augsburg**

**Die folgenden Angaben sind den vom Anmelder eingereichten Unterlagen entnommen**

(54) Bezeichnung: **Antriebsriemen**

(57) Hauptanspruch: **Antriebsriemen**, der als ein Ring aus einem Band gemacht ist, dessen Oberfläche für ein Zusammenwirken mit einigen Antriebsscheiben bestimmt ist, dadurch gekennzeichnet, dass der genannte Ring **als Möbius-Band (einseitige Fläche)** gemacht ist.

**Der krasse Geheimtipp  
zur Konstruktion?**



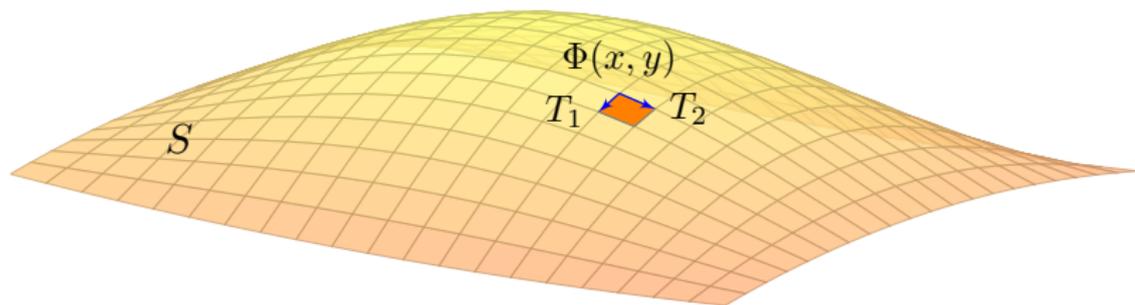
# Das Möbius-Band, entdeckt oder erfunden?

Ist **Mathematik** eine Tätigkeit des Erfindens oder des Entdeckens? Diese uralte Debatte ist nicht nur philosophisch bedeutsam, sondern auch ökonomisch: Technische **Erfindungen** können patentiert werden, nicht aber **Entdeckungen**. Daher sind wissenschaftliche Theorien grundsätzlich nicht patentierbar. Das betrifft auch mathematische Methoden bis hin zu Algorithmen und Computerprogrammen.

Das Möbius-Band zeigt eine erstaunliche mathematische **Anwendung**: Die elfseitige Gebrauchsmusterschrift findet man beim Deutschen Patent- und Markenamt unter [register.dpma.de/DPMAREGISTER/pat/PatSchrifteneinsicht?docId=DE202004005763U1](http://register.dpma.de/DPMAREGISTER/pat/PatSchrifteneinsicht?docId=DE202004005763U1). Sie beginnt so:

„Beschreibung: Die Erfindung gehört zum Maschinenbau, insb. zu den Antriebsriemen. [. . .] Der Nachteil der bekannten Antriebsriemen ist eine geringe Betriebszeit durch den Verschleiß der Arbeitsflächen. [. . .] Um den genannten Nachteil zu beseitigen wäre es zweckdienlich, nicht nur eine Oberfläche des Riemen als Arbeitsoberfläche zu benutzen, sondern möglichst alle Oberflächen des Riemen. Dafür sollte man den Riemen nach Art des Möbius-Bandes verdrehen. [. . .]“

## Tangentialvektoren und Normalenvektoren



Sei  $\Phi: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$  eine reguläre Parametrisierung. An jedem Bildpunkt  $s = \Phi(x, y)$  heften linear unabhängige Tangentialvektoren

$$T_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) \quad \text{und} \quad T_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y).$$

Der zugehörige Normalenvektor  $N = T_1 \times T_2$  ist daher nicht Null. Dies definiert das **Einheitsnormalenfeld**  $n: S \rightarrow \mathbb{R}^3$  durch

$$n(s) = \frac{N(x, y)}{|N(x, y)|}$$

Die Vektoren  $T_1, T_2, N$  ändern sich je nach Wahl der Parametrisierung!  
Die Einheitsnormale  $n$  bleibt jedoch gleich – bis auf das Vorzeichen.

## Äquivalente Parametrisierungen und Orientierung

## Satz G3A: Umparametrisierung, gleichsinnig vs gegensinnig

Je zwei reguläre Parametrisierungen  $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  und  $\tilde{\Phi}: \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit demselben Bild  $S$  sind äquivalent vermöge  $H = \tilde{\Phi}^{-1} \circ \Phi$ .

Ihre Orientierung ist entweder **gleichsinnig** oder **gegensinnig**, also entweder  $\tilde{n}(y) = n(y)$  in jedem Punkt  $y = \Phi(x) = \tilde{\Phi}(\tilde{x})$  oder aber  $\tilde{n}(y) = -n(y)$  in jedem Punkt  $y = \Phi(x) = \tilde{\Phi}(\tilde{x})$ .

**Beispiel:** Die Kugelfläche (Sphäre) können wir parametrisieren durch

$$\Phi \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \tilde{\Phi} \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} D &= [0, \pi] \times [0, 2\pi], \\ \tilde{D} &= [0, 2\pi] \times [0, \pi]. \end{aligned}$$

Hier gilt  $d\Phi = -d\tilde{\Phi}$ , die Parametrisierungen sind also gegensinnig.

## Definition G3B: Orientierung eines glatten Flächenstücks

Eine glattes Flächenstück  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  wird **orientiert** durch die Wahl eines der beiden möglichen Einheitsnormalenfelder  $n: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

## Definition G3c: Flächen- und Flussintegral

Sei  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  ein glattes Flächenstück (noch ohne Parametrisierung).  
Wir wählen eine (semi)reguläre Parametrisierung  $\Phi: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow S$ .  
Das **Flächenintegral** eines Skalarfeldes  $g: \mathbb{R}^3 \supseteq S \rightarrow \mathbb{R}$  ist

$$\int_S g |dS| := \int_D g |d\Phi| = \int_D g(\Phi(x, y)) \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right| d(x, y).$$

Im Spezialfall  $g = 1$  erhalten wir den **Flächeninhalt**  $\text{vol}_2(S)$ .

Für Flussintegrale sei die Fläche  $S$  zusätzlich **orientiert**.

Das **Flussintegral** eines Vektorfeldes  $f: \mathbb{R}^3 \supseteq S \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist

$$\int_S f \cdot dS := \int_D f \cdot d\Phi = \int_D \left\langle f(\Phi(x, y)) \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right. \right\rangle d(x, y).$$

Dies ist wohldefiniert (G2A), unabhängig von der Parametrisierung  $\Phi$ .

😊 Jede:r darf sich die jeweils bequemste Parametrisierung aussuchen.

# Integration über glatte Flächenstücke

Wir vollziehen damit für Flächen dieselbe Abstraktion wie für Kurven: Zunächst ist  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  nur eine nackte Menge ohne Struktur. Für diese hat es keinen Sinn nach Differenzierbarkeit oder Flächeninhalt zu fragen: Diesen Fragen müssen wir erst durch eine Parametrisierung  $\Phi: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$  einen Sinn geben! Hierzu verlangen wir, dass  $\Phi$  (semi)regulär ist.

In der praktischen Anwendung interessieren wir uns meist nur für die Fläche  $S$ . Für ihre Handhabung und die Berechnung von Integralen jedoch ist zusätzlich eine Parametrisierung  $\Phi$  notwendig. Die Wahl von  $\Phi$  ist willkürlich, doch glücklicherweise ist das Endergebnis von der Parametrisierung unabhängig: Je zwei (semi)reguläre Parametrisierungen  $\Phi: D \rightarrow S$  und  $\tilde{\Phi}: \tilde{D} \rightarrow S$  derselben Fläche  $S$  sind (semi)regulär äquivalent vermöge  $H = \tilde{\Phi}^{-1} \circ \Phi$ . Sie liefern somit dieselben Flächen- und Flussintegrale, wie oben ausführlich nachgerechnet.

Bei Flächen wie bei Kurven muss bei Integralen 2. Art die Orientierung angegeben werden. Wir benutzen hier die stillschweigende Voraussetzung, dass die Parameterbereiche  $D$  und  $\tilde{D}$  wegzusammenhängend sind. Zwei Parametrisierungen  $\Phi: D \rightarrow S$  und  $\tilde{\Phi}: \tilde{D} \rightarrow S$  sind dann entweder überall gleichsinnig oder überall gegensinnig. (Gibt es mehrere Wegkomponenten, so kann man auf jeder Komponente eine der beiden möglichen Orientierungen wählen.)

Jede reguläre Parametrisierung von  $S$  liefert eine reguläre Parametrisierung des Randes  $\partial S$ . In der Praxis nutzen wir neben regulären Parametrisierungen häufig auch semireguläre Parametrisierungen: Diese sind allgemeiner und flexibler, und daher meist bequemer. Sie können am Rand  $\partial D$  irregulär sein, aber das Innere  $\overset{\circ}{D} = D \setminus \partial D$  genügt für die Berechnung von Flächenintegralen: Wegen  $\text{vol}_2(\partial D) = 0$  trägt der Rand hierzu nichts bei.

## Integration über stückweise glatte Flächen

## Definition G3D: Flächen- und Flussintegral

Sei  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  eine stückweise glatte Fläche. Wir wählen (semi)reguläre Parametrisierung  $\Phi_1: \mathbb{R}^2 \supseteq D_1 \rightarrow \mathbb{R}^3, \dots, \Phi_k: \mathbb{R}^2 \supseteq D_k \rightarrow \mathbb{R}^3$ , sodass  $S = \Phi_1(D_1) \cup \dots \cup \Phi_k(D_k)$  gilt und  $\Phi_i(\overset{\circ}{D}_i) \cap \Phi_j(\overset{\circ}{D}_j) = \emptyset$  für  $i \neq j$ .

Das **Flächenintegral** eines Skalarfeldes  $g: \mathbb{R}^3 \supseteq S \rightarrow \mathbb{R}$  ist

$$\int_S g |dS| := \int_{D_1} g |d\Phi_1| + \dots + \int_{D_k} g |d\Phi_k|.$$

Für Flussintegrale sei die Fläche  $S$  zusätzlich **orientiert**.

Das **Flussintegral** eines Vektorfeldes  $f: \mathbb{R}^3 \supseteq S \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist

$$\int_S f \cdot dS := \int_{D_1} f \cdot d\Phi_1 + \dots + \int_{D_k} f \cdot d\Phi_k.$$

😊 Dies ist wohldefiniert, das heißt, das Ergebnis ist unabhängig von der Wahl der Zerlegung von  $S$  und der Parametrisierungen  $\Phi_k$ .

## Integration über stückweise glatte Flächen

**Aufgabe:** Vorgelegt sei eine stückweise glatte Fläche  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  mit stückweise (semi)regulärer Parametrisierung  $\Phi_i : D_i \rightarrow \mathbb{R}^3$  für  $i = 1, \dots, k$  sowie eine zweite  $\Psi_j : E_j \rightarrow \mathbb{R}^3$  für  $j = 1, \dots, \ell$ .

Warum liefern beide dasselbe Ergebnis für das Flächenintegral?

$$\int_{D_1} g |d\Phi_1| + \dots + \int_{D_k} g |d\Phi_k| \stackrel{?}{=} \int_{E_1} g |d\Psi_1| + \dots + \int_{E_\ell} g |d\Psi_\ell|$$

**Lösung:** Auf den paarweisen Schnitten  $S_{ij} = \Phi_i(\overset{\circ}{D}_i) \cap \Psi_j(\overset{\circ}{E}_j)$  erhalten wir stückweise Parametrisierungen  $\Phi_{ij} : D_{ij} \rightarrow S_{ij}$  und  $\Psi_{ij} : E_{ij} \rightarrow S_{ij}$ . Diese sind jeweils semiregulär äquivalent. Wir haben die Zerlegungen

$$S = \bigsqcup_i \Phi_i(D_i) = \bigsqcup_{i,j} \Phi_{ij}(D_{ij}) = \bigsqcup_{j,i} \Psi_{ji}(E_{ij}) = \bigsqcup_j \Psi_j(E_j)$$

jeweils bis auf Nullmengen (vom Flächeninhalt 0). Hieraus folgt:

$$\sum_i \int_{D_i} g |d\Phi_i| = \sum_i \sum_j \int_{D_{ij}} g |d\Phi_{ij}| = \sum_j \sum_i \int_{E_{ij}} g |d\Phi_{ij}| = \sum_j \int_{E_j} g |d\Phi_j|$$

😊 Gleiches gilt für Flussintegrale: Das Ergebnis ist also wohldefiniert. Jede:r darf sich die jeweils bequemste Parametrisierung aussuchen.

## Satz G3E: Integralsatz von Stokes

Sei  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  eine stückweise glatte, orientierte Fläche. Ihre Randkurve  $\Gamma = \partial S$  ist dann ebenso stückweise glatt und werde positiv orientiert. Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^3 \supseteq S \rightarrow \mathbb{R}^3$  gilt dann

$$\int_{s \in S} \operatorname{rot} f(s) \cdot dS = \int_{s \in \Gamma} f(s) \cdot d\Gamma.$$

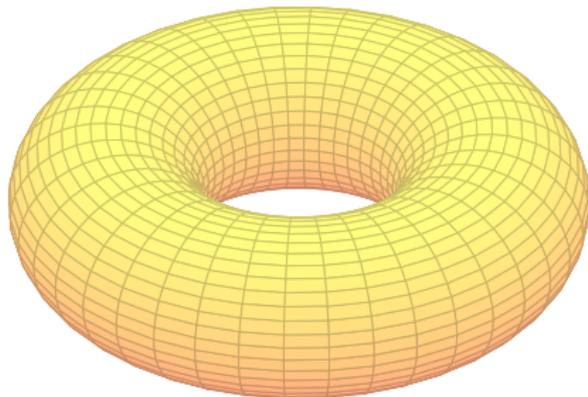
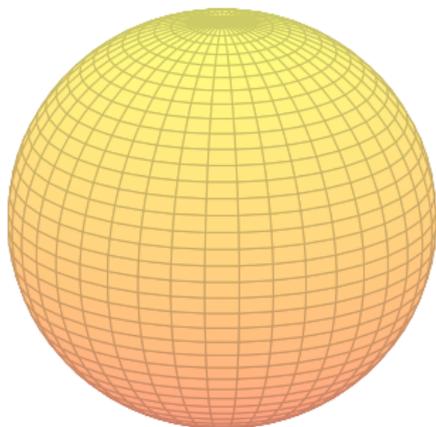
Die Zerlegung  $dS = n(s) |dS|$  ergibt die gleichwertige Formulierung

$$\int_{s \in S} \operatorname{rot} f(s) \cdot n(s) |dS| = \int_{s \in \Gamma} f(s) \cdot d\Gamma.$$

**Beweis:** Die Gleichung gilt für jedes reguläre Flächenstück  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  und folgt aus dem entsprechenden Satz von Green in der Ebene, siehe G1A.

Für stückweise glatte Flächen addieren sich die Flächenintegrale. Die Kurvenintegrale längs innerer Kanten heben sich paarweise auf, da sie gegenläufig orientiert sind. Bleibt der positiv orientierte Rand  $\Gamma = \partial S$ .

# Spezialfall: geschlossene Flächen



**Beispiel:** Ist die Fläche  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  geschlossen, also  $\partial S = \emptyset$ , so gilt

$$\int_{s \in S} \operatorname{rot} f(s) \cdot dS \stackrel[\text{G3E}]{\text{Stokes}} \int_{s \in \partial S} f(s) \cdot ds \stackrel{\partial S = \emptyset}{=} 0$$

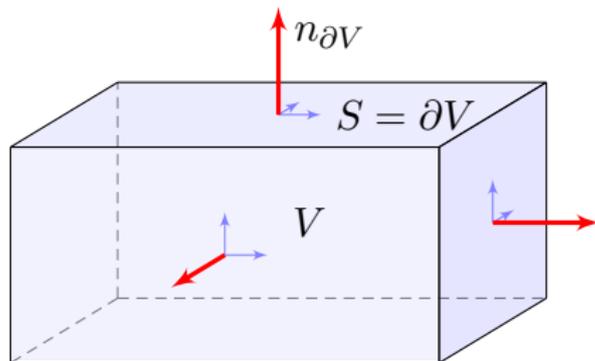
😊 Dies gilt für die Randfläche  $S = \partial V$  jedes Kompaktums  $V \subseteq \mathbb{R}^3$ .

😊 Integralsätze können Rechnungen dramatisch vereinfachen!

Das Flussintegral links kann beliebig kompliziert sein; rechts beim Randintegral sehen wir das Ergebnis auf einen Blick! Einfaches Beispiel: Die (dreidim.) Vollkugel  $K$  hat als (zweidim.) Randfläche die Sphäre  $S = \partial K$ . Die (zweidim.) Sphäre  $S$  wiederum hat als (eindim.) Randkurve die leere Menge,  $\partial S = \emptyset$ . Ebenso für den Volltorus  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  und die Torusfläche  $S = \partial V$ .

# Kompakta mit stückweise glattem Rand

Typisches Beispiel ist ein Quader  $V = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ .



## Definition G3F: Kompaktum mit stückweise glattem Rand

$V \subseteq \mathbb{R}^3$  heißt **Kompaktum mit stückweise glattem Rand**, wenn gilt:

- $V$  ist kompakt und der Rand  $\partial V$  ist eine stückweise glatte Fläche.
- In jedem regulären Punkt  $s \in \partial V$  liegt das Innere von  $V$  auf der einen Seite von  $\partial V$  und das Äußere von  $V$  auf der anderen Seite.

Der Rand  $\partial V$  ist **positiv orientiert**, wenn  $n_{\partial V}$  stets nach außen zeigt.

# Der Integralsatz von Gauß im Raum

## Satz G3G: Integralsatz von Gauß im Raum

Sei  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  kompakt mit stückweise glatter Randfläche  $S = \partial V$ , orientiert durch den von  $V$  nach außen weisenden Normalenvektor. Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld  $f: V \rightarrow \mathbb{R}^3$  gilt dann

$$\int_{v \in V} \operatorname{div} f(v) \, dV = \int_{s \in S} f(s) \cdot dS.$$

Die Zerlegung  $dS = n(s) |dS|$  ergibt die gleichwertige Formulierung

$$\int_{v \in V} \operatorname{div} f(v) \, dV = \int_{s \in S} f(s) \cdot n(s) |dS|.$$

Links steht das Volumenintegral der Quelldichte  $\operatorname{div}(f)$  über  $V$ .

Wie üblich bezeichnet  $dV = d(x, y, z)$  das Volumenelement.

Rechts steht das Flussintegral von  $f$  über die Randfläche  $S = \partial V$ .

Das Flächenelement  $dS = (\partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi) d(x, y)$  sei positiv orientiert: Der Normalenvektor  $dS$  senkrecht auf  $\partial V$  zeigt stets aus  $V$  heraus.

## Der Satz von Gauß für Normalbereiche

Den Satz von Gauß rechnen wir nach wie in der Ebene (Seite E145):

**Aufgabe:** Rechnen Sie die Gleichung des Gaußschen Satzes nach. . .

(1) Für  $f = (0, 0, f_3)$  und jeden Normalbereich in  $z$ -Richtung

$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in A, g(x, y) \leq z \leq h(x, y) \}.$$

Hierbei sei  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Kompaktum mit stückweise glattem Rand sowie  $g, h: A \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbare Funktionen mit  $g \leq h$ .

(2) Ebenso für  $(0, f_2, 0)$  in  $y$ -Richtung und  $(f_1, 0, 0)$  in  $x$ -Richtung.

(3) Für  $f = (f_1, f_2, f_3)$  und jeden Trinormalbereich  $V \subseteq \mathbb{R}^3$ .

Z.B. ein Quader, eine Kugel, oder jedes konvexe Kompaktum.

(4) Gilt die Gleichung für jeden Bereich  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  zerlegt wie in (3)?

Z.B. eine Kugelschale oder ein Quader mit mehreren Löchern.

**Lösung:** Zum Flussintegral tragen nur oberer und unterer Deckel bei:

$$O = \{ (x, y, h(x, y)) \mid (x, y) \in A \}, \quad n_O = (-\partial_x h, -\partial_y h, +1),$$

$$U = \{ (x, y, g(x, y)) \mid (x, y) \in A \}, \quad n_U = (+\partial_x g, +\partial_y g, -1).$$

## Der Satz von Gauß für Normalbereiche

(1) Für  $f = (0, 0, f_3)$  folgt Gauß aus Fubini und HDI (wie auf Seite E145):

$$\begin{aligned} \int_{v \in V} \operatorname{div} f(v) \, dV &\stackrel{\text{Fub}}{\stackrel{\text{C1E}}{=}} \int_{(x,y) \in A} \int_{z=g(x,y)}^{h(x,y)} \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z) \, dz \, d(x, y) \\ &\stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} \int_{(x,y) \in A} f_3(x, y, h(x, y)) - f_3(x, y, g(x, y)) \, d(x, y) \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} \int_{s \in O} f(s) \cdot dO + \int_{s \in U} f(s) \cdot dU \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{s \in S = \partial V} f \cdot dS \end{aligned}$$

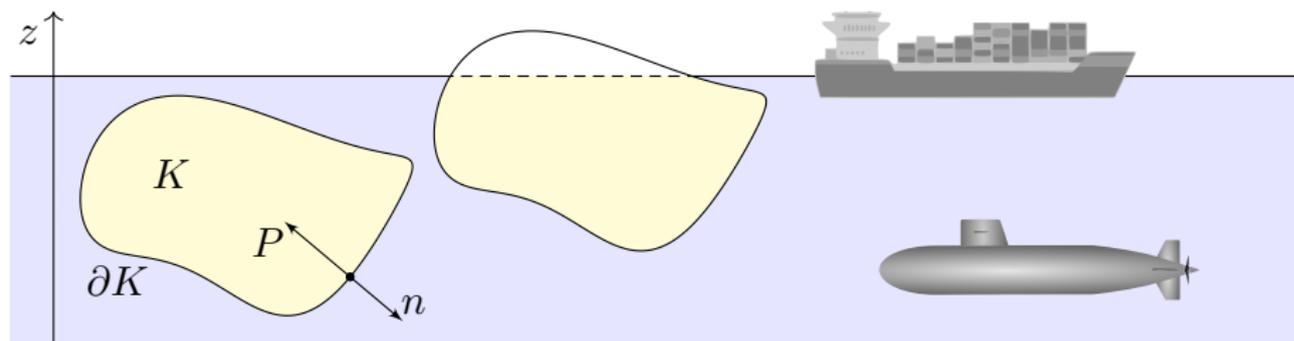
(3) Somit gilt der Satz von Gauß für jedes Vektorfeld  $f = (f_1, f_2, f_3)$ , wenn  $V$  ein Trinormalbereich ist, also in  $x$ - und  $y$ - und  $z$ -Richtung:

$$\begin{aligned} \int_V \operatorname{div}(f) \, dV &\stackrel{\text{Lin}}{\stackrel{\text{A3L}}{=}} \int_V \operatorname{div}(f_1, 0, 0) \, dV + \int_V \operatorname{div}(0, f_2, 0) \, dV + \int_V \operatorname{div}(0, 0, f_3) \, dV \\ &\stackrel{(1,2)}{=} \int_{\partial V} (f_1, 0, 0) \cdot dS + \int_{\partial V} (0, f_2, 0) \cdot dS + \int_{\partial V} (0, 0, f_3) \cdot dS \stackrel{\text{Lin}}{\stackrel{\text{A3L}}{=}} \int_{\partial V} f \cdot dS \end{aligned}$$

(4) Der allgemeine Fall folgt durch Zerlegung von  $V$  in Normalbereiche. Alle Volumenintegrale addieren sich, und ebenso alle Flächenintegrale. Innere Flächen heben sich paarweise auf, es bleibt nur der Rand  $\partial V$ .

## Das archimedische Prinzip als Integralsatz

**Aufgabe:** Integrieren Sie die Auftriebskraft, die auf den Körper  $K$  wirkt.



Folgern Sie daraus den Satz des Archimedes: Die Auftriebskraft des Körpers  $K$  gleich dem Gewicht  $g\rho \text{vol}_3(K)$  des verdrängten Mediums.

Es besteht eine bemerkenswerte Beziehung zwischen dem Rand  $\partial K$  (nur hier wirkt der Druck) und dem Inneren von  $K$  (nur dieses verdrängt das Fluid). Wir können dies nun exakt berechnen! Zur Vereinfachung nehmen wir an, die Flüssigkeit habe konstante Dichte  $\rho > 0$ . Die Schwerkraft wirkt nach unten in negativer  $z$ -Richtung, wie in der Skizze angedeutet. Der Körper liege ganz in der Flüssigkeit; ihre Oberfläche sei  $z = 0$ . Längs des Randes  $\partial K$  übt die Flüssigkeit einen Druck aus. Dieser nimmt linear mit der Tiefe  $z$  zu, entsprechend der darüber liegenden Wassersäule. Der Absolutbetrag des Drucks in Tiefe  $z$  ist demnach  $|P| = g\rho|z|$ . Konkrete Werte sind in unserem Beispiel  $\rho_{\text{Wasser}} = 1000\text{kg/m}^3$  und  $g_{\text{Erde}} = 9.81\text{m/s}^2$ , somit  $g\rho = 9810\text{N/m}^3$ .

## Das archimedische Prinzip als Integralsatz

**Lösung:** In jedem Randpunkt  $s = (x, y, z) \in \partial K$  sei  $n(s)$  die äußere Einheitsnormale. Hier herrscht folgender Druck (= Kraft pro Fläche):

$$\text{skalar } |P(s)| = g \varrho |z|, \quad \text{vektoriell } P(s) = g \varrho z \cdot n(s)$$

Die Vektoren  $P$  und  $n$  sind entgegengesetzt; das Vorzeichen steckt im Faktor  $z < 0$ . Dadurch erfährt der Körper  $K$  die folgende Auftriebskraft:

$$F = \int_{s \in \partial K} P(s) |dS| = g \varrho \int_{s \in \partial K} z n(s) |dS|$$

Ihre Komponenten  $F = (F_x, F_y, F_z)$  berechnen wir mit Gauß:

$$\int_{\partial K} z n_x |dS| = \int_{\partial K} \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot n |dS| \stackrel{\text{Gauß}}{\equiv} \int_K \text{div} \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} d(x, y, z) = 0$$

$$\int_{\partial K} z n_y |dS| = \int_{\partial K} \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ 0 \end{pmatrix} \cdot n |dS| \stackrel{\text{Gauß}}{\equiv} \int_K \text{div} \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ 0 \end{pmatrix} d(x, y, z) = 0$$

$$\int_{\partial K} z n_z |dS| = \int_{\partial K} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \cdot n |dS| \stackrel{\text{Gauß}}{\equiv} \int_K \text{div} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} d(x, y, z) = \text{vol}_3(K)$$

# Das archimedische Prinzip als Integralsatz

Das archimedische Prinzip gilt auch für Körper, die nur teilweise in die Flüssigkeit eintauchen: Es zählt das eingetauchte Volumen. (Warum?) Ein Schiff verdrängt Wasser, erhält dadurch Auftrieb und schwimmt!

Der hier angenommene Druckverlauf gilt bei konstanter Dichte, in einem inkompressiblen Medium. Er gilt annähernd auch in Luft (und anderen Gasen) bei nicht allzu großen Höhenunterschieden. Er gilt insbesondere für realistisch große Luftschiffe oder Ballone.

Schließlich löste Archimedes mit Hilfe der Wasserverdrängung das Problem der Dichtemessung und konnte den Goldschmied des Königs als Betrüger entlarven. Gibt es eine schönere historische Anwendung der HM3 für Materialwissenschaftler und Luft- und Raumfahrttechniker?

Damit sind wir schließlich zum Ausgangsbeispiel zurückgekehrt: dem archimedischen Prinzip, das wir nun mathematisch verstehen. Die Anordnung der Themen gleicht somit einem geschlossenen Weg. Das Wegintegral über dieses Kapitel ist aber nicht Null, denn wir haben sehr wohl wertvolle Arbeit verrichtet und neue Erkenntnisse gewonnen!

# Das archimedische Prinzip als Integralsatz

**Aufgabe:** Wieviel Prozent eines Eisberges liegen unter Wasser?  
Speziell für  $\rho_{\text{Eis}} = 918 \text{kg/m}^3$  und  $\rho_{\text{Wasser}} = 1025 \text{kg/m}^3$ ? Allgemein?  
Wie hängt das Ergebnis von der Form des Eisberges ab?

**Lösung:** Sei  $E$  der Eisberg, unter Wasser liege der Teil  $U \subseteq E$ .  
Wir nehmen Gleichgewicht an, d.h. der Eisberg sinkt oder steigt nicht.  
Das Gewicht  $\text{vol}_3(E) \rho_{\text{Eis}} g$  gleicht dem Auftrieb  $\text{vol}_3(U) \rho_{\text{Wasser}} g$ . Also

$$\frac{\text{vol}_3(U)}{\text{vol}_3(E)} = \frac{\rho_{\text{Eis}}}{\rho_{\text{Wasser}}} \approx 0.90$$

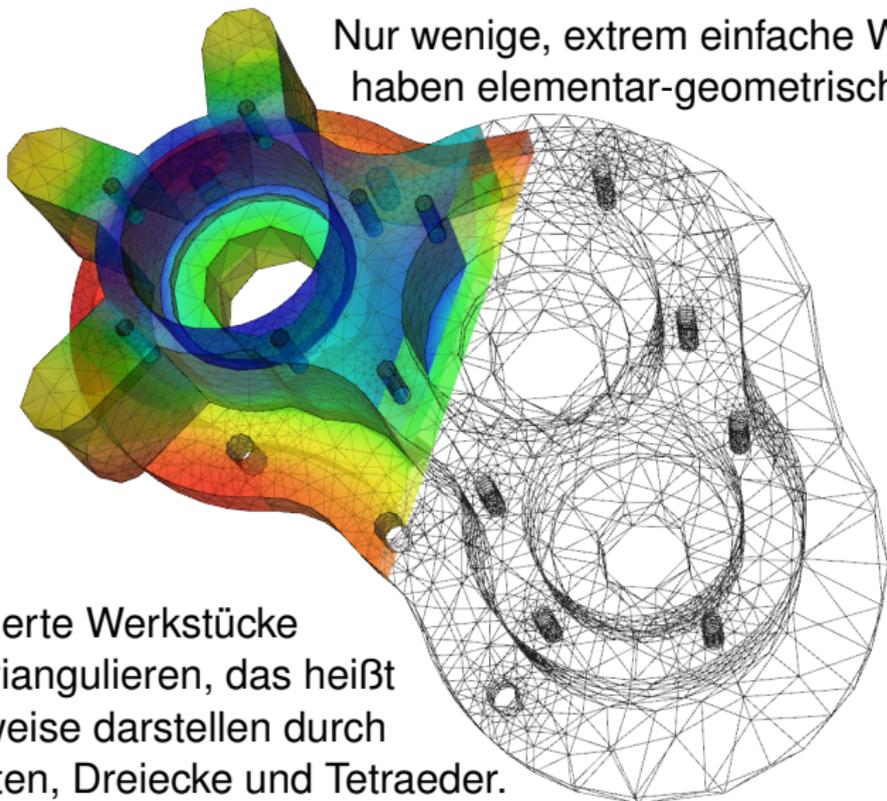
Mit anderen Worten, etwa 90% des Eisberges liegen unter Wasser, nur die verbleibenden 10% sind über Wasser sichtbar. Daher der sprichwörtliche Ausdruck: „Wir sehen nur die Spitze des Eisberges.“

Der genaue Wert hängt nur von den Materialkonstanten ab, also der Massendichte des Eises  $\rho_{\text{Eis}}$  und des Wassers  $\rho_{\text{Wasser}}$ . Hingegen ist die Form des Eisberges unerheblich. Alles ist schön und einfach!

😊 Der Integralsatz von Gauß und somit auch der archimedische Satz sind auf alle Körper mit stückweise glatter Randfläche anwendbar!

# Numerik: Triangulierung und Linearisierung

Nur wenige, extrem einfache Werkstücke haben elementar-geometrische Formen.



😊 Komplizierte Werkstücke kann man triangulieren, das heißt näherungsweise darstellen durch Ecken, Kanten, Dreiecke und Tetraeder.

😊 Diese Darstellung ist eine sehr effiziente Datenstruktur und eignet sich besonders gut zu numerischen Berechnungen auf einem Computer.

# Linearisierung und Approximation

Das Flächenstück  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  liege ganz in einer Ebene  $E$ , wie etwa jedes Dreieck  $S = [P, Q, R]$  einer Triangulierung.

Zudem sei das Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  affin-linear, das heißt

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + b = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3 \end{pmatrix}.$$

Dann gelten folgende nützliche Vereinfachungen:

- (1) Ebene Integration liefert den Flächeninhalt  $\text{vol}_2(S)$ .
- (2) Der Schwerpunkt  $\bar{s}$  von  $S$  liegt in derselben Ebene  $E$ .
- (3) Die Einheitsnormale  $n: S \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist konstant und senkrecht auf  $E$ .
- (4) Das Flussintegral von  $f$  durch  $S$  schließlich vereinfacht sich zu

$$\int_{s \in S} f(s) \cdot n(s) |dS| = f(\bar{s}) \cdot n \text{vol}_2(S).$$

- (5) Dank Linearität von  $f$  ist  $\text{div}(f) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$  konstant.

😊 Statt Integralen benötigen wir hier also nur Grundrechenarten!

# Linearisierung und Approximation

**Aufgabe:** Rechnen Sie diese vereinfachenden Formeln nach.

**Lösung:** (1–3) Wir können unser Koordinatensystem so wählen, dass  $S$  ganz in der  $x$ - $y$ -Ebene liegt, also  $S \subseteq \{ (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \}$ .

Die Parametrisierung  $\Phi : \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto (x, y, 0)$  ergibt

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Flächenintegrale über  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  sind demnach genau dasselbe wie gewöhnliche zweidimensionale Integrale über  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ .

(4) In unseren geschickt gewählten Koordinaten gilt schließlich:

$$\begin{aligned} \int_{s \in S} f(s) \cdot n(s) \, |dS| &\stackrel{\text{Def}}{=} \int_{(x,y) \in D} [a_{31}x + a_{32}y + b_3] \, d(x, y) \\ &\stackrel{\text{Lin}}{=} [a_{31}\bar{s}_x + a_{32}\bar{s}_y + b_3] \, \text{vol}_2(D) \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} f(\bar{s}) \cdot n \, \text{vol}_2(S) \end{aligned}$$

# Linearisierung und Approximation

😊 Für jede **ebene Fläche**  $S$  und jedes **affin-lineare Vektorfeld**  $f$  gilt die vereinfachte Formel (4) exakt, ohne jeden Näherungsfehler. Die vorige Aufgabe rechnet diese erfreuliche Vereinfachung nach.

Warum haben wir Flächenintegrale dann nicht gleich so definiert? Die vereinfachte Rechnung benötigt die genannten Voraussetzung! Nicht jede Fläche  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  ist eben. Nicht jedes Vektorfeld  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist affin-linear; allgemein ist die exakte Rechnung daher nicht so einfach.

Ist das Flächenstück  $S$  klein genug, so weicht das Vektorfeld  $f$  auf der Fläche  $S$  nur wenig von der Linearisierung um den Schwerpunkt  $\bar{s}$  ab. Für  $f(x) \approx Ax + b$  ist unsere Formel (4) dann eine einfache Näherung. In der Taylor-Entwicklung treten im Allgemeinen höhere Terme auf: Die Formel (4) ist exakt bis zu 1. Ordnung, der Fehler ist 2. Ordnung.

😊 Die Flächensummen  $\sum_k f(\bar{s}_k) \cdot n_k \operatorname{vol}_2(S_k)$  konvergieren bei immer feineren Unterteilungen gegen das Flächenintegral  $\int_{s \in S} f(s) \cdot n(s) |dS|$ . Die Numerik entwickelt hierzu Methoden, wie man Näherungsfehler kontrolliert, und möglichst kostengünstig möglichst klein bekommt.

## Illustration anhand einfacher Polyeder

**Aufgabe:** (1) Skizzieren Sie die folgenden Körper:

$$W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1 \}$$

$$O = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| + |y| + |z| \leq 2 \}$$

$$K = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x|, |y|, |z| \leq 1, |x| + |y| + |z| \leq 2 \}$$

$$P = \{ (x, y, z) \in [0, 1]^3 \mid x + y + z \leq 2 \}$$

(2) Bestimmen Sie den Rauminhalt  $\text{vol}_3(P)$  des Körpers  $P$ .

(3) Bestimmen Sie für jede Seite  $S_1, \dots, S_7$  von  $P$  den Fluss des Vektorfeldes  $f(x, y, z) = (3x + 1, 12y + 4, 36z + 6)$  durch  $S_k$ .

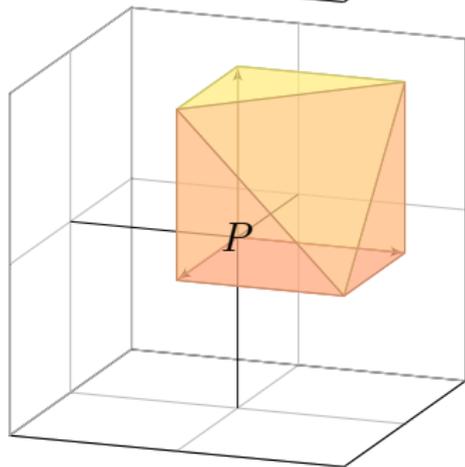
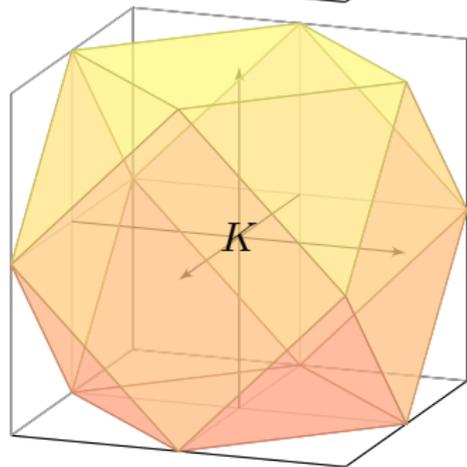
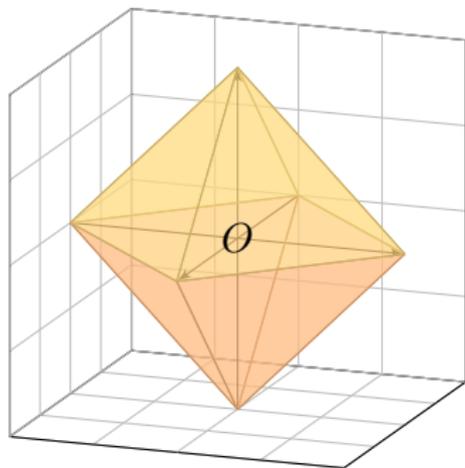
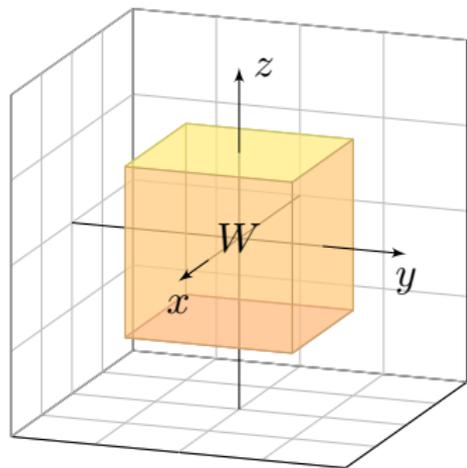
(4) Berechnen und vergleichen Sie  $\int_P \text{div}(f) \, d(x, y, z)$  und  $\int_{\partial P} f \cdot dS$ .

(5) Führen Sie alle Rechnungen ebenso für  $W$  und  $O$  und  $K$  aus.

Das ist der diskrete Charme dieser Aufgabe: Sie können dies ohne komplizierte Integrale direkt mit elementarer Geometrie lösen. Auch diesen Spezialfall sollten Sie kennen und beherrschen.

*Fun fact:* Der Würfel  $W$  (Hexaeder, Sechsfächner) und das Oktaeder  $O$  (Achtflächner) sind regulär, also vollkommen symmetrisch. Es gibt nur drei weitere Körper dieser Art: das Tetraeder (Vierflächner), das Dodekaeder (Zwölfplächner) und das Ikosaeder (Zwanzigflächner). Können Sie diese ebenfalls so konkret angeben, durch Koordinaten ihrer Eckpunkte? Das ist knifflig!

## Illustration anhand einfacher Polyeder



## Illustration anhand einfacher Polyeder

- Lösung:** (1) Die obige Skizze zeigt die Polyeder  $W$ ,  $O$ ,  $K$  und  $P$ .
- (2) Für das Polyeder  $P$  gilt  $\text{vol}_3(P) = 5/6$  und  $\text{vol}_2(\partial P) = (9 + \sqrt{3})/2$ .
- (3) Wir bestimmen für jede Seite  $S_1, \dots, S_7$  von  $P$  den Fluss des Vektorfeldes  $f(x, y, z) = (3x + 1, 12y + 4, 36z + 6)$  durch  $S_k$ .

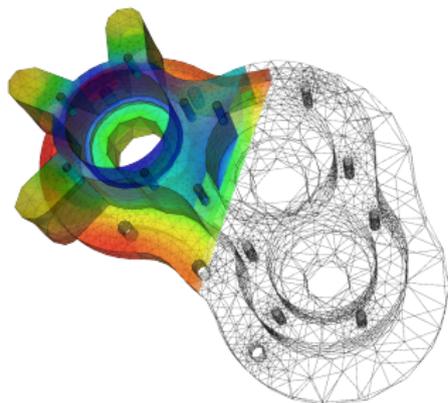
Flächenstück / Typ		Schwerpunkt $\bar{s}_k$	Normale $n_k$	Inhalt	Fluss
$S_1$	Quadrat	$(0, 1/2, 1/2)$	$(-1, 0, 0)$	1	-1
$S_2$	Quadrat	$(1/2, 0, 1/2)$	$(0, -1, 0)$	1	-4
$S_3$	Quadrat	$(1/2, 1/2, 0)$	$(0, 0, -1)$	1	-6
$S_4$	rechth. Dreieck	$(1, 1/3, 1/3)$	$(+1, 0, 0)$	1/2	2
$S_5$	rechth. Dreieck	$(1/3, 1, 1/3)$	$(0, +1, 0)$	1/2	8
$S_6$	rechth. Dreieck	$(1/3, 1/3, 1)$	$(0, 0, +1)$	1/2	21
$S_7$	gleichs. Dreieck	$(2/3, 2/3, 2/3)$	$(1, 1, 1)/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/2$	45/2

- (4) Wir finden  $\int_P \text{div}(f) d(x, y, z) = 51 \text{vol}_3(P) = 42.5 = \int_{\partial P} f \cdot dS$ .
- (5) Für  $W$ ,  $O$ ,  $K$  verlaufen alle Rechnung genauso (etwas länglich).

# Illustration anhand einfacher Polyeder

**Polyeder** faszinieren immer wieder: Der Würfel  $W$  und das Oktaeder  $O$  gehören zu den fünf platonischen, das Kuboktaeder  $K$  zu den dreizehn archimedischen Körpern. Unser Polyeder  $P$  ist weniger regelmäßig.

😊 Wir kommen ohne Integrale aus, weil das Vektorfeld  $f$  affin-linear ist. Ist  $f$  hingegen nicht linear, aber die Flächenstücke sind klein genug, so erhalten wir auf diese Weise wenigstens eine brauchbare **Näherung**.



😊 Auch extrem komplizierte Körper wie z.B. Maschinenteile können Sie so **triangulieren**, das heißt, Sie konstruieren sie explizit aus Ecken, Kanten, Dreiecken und Tetraedern.

😊 Diese Datenstruktur ist für Computer ideal. (Das Beispiel zeigt ein Pumpengehäuse, für das der Wärmefluss berechnet werden soll.)

Hieraus lassen sich nun Weglängen, Flächen- und Rauminhalte sowie Flussintegrale bestimmen, zumindest näherungsweise. Die Rechnung verläuft genau wie im obigen Beispiel, nur die Datenmenge ist größer.

# Kurvenintegrale

Ein **Weg** ist eine stetige Abbildung  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , hier meist  $n \in \{2, 3\}$ . Er parametrisiert die **Kurve**  $\Gamma = \{ \gamma(t) \mid a \leq t \leq b \} \subseteq \mathbb{R}^n$  als Bildmenge. Der Weg heißt **regulär**, wenn  $\gamma$  injektiv ist und stetig differenzierbar mit  $\gamma'(t) \neq 0$  für alle  $t \in [a, b]$ . Seine Bildmenge  $\Gamma$  heißt dann **glatte Kurve**. Am Punkt  $s = \gamma(t)$  heftet das infinitesimale **Wegelement**  $ds = \gamma'(t) dt$ . Das **Kurvenintegral** eines Skalarfeldes  $g: \mathbb{R}^n \supseteq \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  entlang  $\gamma$  ist

$$\int_{\Gamma} g |d\Gamma| = \int_{s \in \Gamma} g(s) |ds| := \int_{t=a}^b g(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)| dt.$$

Speziell für  $g = 1$  erhalten wir so die Länge  $\text{vol}_1(\Gamma) = \ell(\gamma)$  der Kurve  $\Gamma$ . Das **Arbeitsintegral** eines Vektorfeldes  $f: \mathbb{R}^n \supseteq \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$  entlang  $\gamma$  ist

$$\int_{\Gamma} f \cdot d\Gamma = \int_{s \in \Gamma} f(s) \cdot ds := \int_{t=a}^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Das Arbeitsintegral wechselt das Vorzeichen bei Orientierungsumkehr.



Diese Integrale sind invariant bei (positiver) Umparametrisierung und somit wohldefiniert für jede (orientierte) stückweise glatte Kurve  $\Gamma$ .

# Glatte Flächenstücke

$D \subseteq \mathbb{R}^2$  heißt **Kompaktum mit stückweise glattem Rand**, wenn gilt:

- $D$  ist kompakt und der Rand  $\partial D$  ist eine stückweise glatte Kurve.
- In jedem regulären Randpunkt  $s \in \partial D$  liegt das Innere von  $D$  auf der einen Seite von  $\partial D$  und das Äußere auf der anderen Seite.

Beispiele: Rechtecke, Polygone, Kreisscheiben, Kreisringe, ...

Der Rand ist **positiv orientiert**, wenn  $D$  stets links von  $\partial D$  liegt.

Die Einheitstangente  $t_{\partial D} : \partial D \rightarrow \mathbb{R}^2$  zeigt in Richtung der Orientierung, die Einheitsnormale  $n_{\partial D} = \circlearrowleft t_{\partial D} : \partial D \rightarrow \mathbb{R}^2$  zeigt überall aus  $D$  heraus.

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  zusammenhängend kompakt mit stückweise glattem Rand.

Ein parametrisiertes **Flächenstück** ist eine  $C^1$ -Abbildung  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Senkrecht auf den **Tangentenvektoren**  $\partial_x \Phi(x, y)$  und  $\partial_y \Phi(x, y)$  steht der **Normalenvektor**  $\partial_x \Phi(x, y) \times \partial_y \Phi(x, y)$  für  $(x, y) \in D$ .

Die Parametrisierung  $\Phi$  heißt **regulär**, wenn sie injektiv ist und zudem  $\partial_x \Phi(x, y) \times \partial_y \Phi(x, y) \neq 0$  in jedem Punkt  $(x, y) \in D$  erfüllt.

Das Bild  $S = \Phi(D) \subseteq \mathbb{R}^3$  heißt dann **glattes Flächenstück**.

Der Rand  $\partial S := \Phi(\partial D)$  ist dann eine stückweise glatte Kurve.

# Flächenintegrale

Flächen  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  parametrisieren wir (stückweise) durch  $\Phi: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow S$ . An  $s = \Phi(x, y)$  heftet das inf. Flächenelement  $dS = (\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi) d(x, y)$ . Das **Flächenintegral** eines Skalarfeldes  $g: \mathbb{R}^3 \supseteq S \rightarrow \mathbb{R}$  entlang  $\Phi$  ist

$$\int_{s \in S} g(s) |dS| := \int_{(x,y) \in D} g(\Phi(x, y)) \cdot |\partial_x \Phi(x, y) \times \partial_y \Phi(x, y)| d(x, y).$$

Speziell für  $g = 1$  erhalten wir den Inhalt  $\text{vol}_2(\Phi) = \text{vol}_2(S)$  der Fläche  $S$ . Das **Flussintegral** eines Vektorfeldes  $f: \mathbb{R}^3 \supseteq S \rightarrow \mathbb{R}^3$  entlang  $\Phi$  ist

$$\int_{s \in S} f(s) \cdot dS := \int_{(x,y) \in D} f(\Phi(x, y)) \cdot (\partial_x \Phi(x, y) \times \partial_y \Phi(x, y)) d(x, y).$$

Der Normalenvektor  $\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi$  im Punkt  $\Phi(x, y)$  steht senkrecht auf  $S$ . Für das Flussintegral zählt daher nur der Anteil von  $f$  senkrecht zu  $S$ . Das Flussintegral wechselt das Vorzeichen bei Orientierungsumkehr.

😊 Diese Integrale sind invariant bei (positiver) Umparametrisierung, somit wohldefiniert für jede (orientierte) stückweise glatte Fläche  $S$ .

## Kompakta mit stückweise glattem Rand

Hier ist  $|dS| = |d\Phi| = |\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi| d(x, y)$  das **skalare Flächenelement** und  $dS = d\Phi = (\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi) d(x, y)$  das **vektorielle Flächenelement**.

Die Zerlegung  $dS = n(s) |dS|$  definiert die Einheitsnormale  $n: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Diese definiert für jedes Flächenstück eine der beiden Orientierungen. Für stückweise glatte Flächen verlangen wir, dass die Orientierungen einzelner Flächenstücke am gemeinsamen Rand zusammenpassen.

😊 Zur numerischen Approximation können wir die Kurve / Fläche triangulieren und das Vektorfeld linearisieren / Taylor–entwickeln. Für Polygone [E017](#) oder Polyeder [G325](#) und lineare Vektorfelder ist dies exakt.

$V \subseteq \mathbb{R}^3$  heißt **Kompaktum mit stückweise glattem Rand**, wenn gilt:

- $V$  ist kompakt und der Rand  $\partial V$  ist eine stückweise glatte Fläche.
- In jedem regulären Punkt  $s \in \partial V$  liegt das Innere von  $V$  auf der einen Seite von  $\partial V$  und das Äußere von  $V$  auf der anderen Seite.

Beispiele: Quader, Polyeder, Vollkugeln, Kugelschalen, Volltori, ...

Der Rand  $\partial V$  ist **positiv orientiert**, wenn  $n_{\partial V}$  stets nach außen zeigt. Die Einheitsnormale ist der Einheitsvektor in Richtung  $d\Phi = n_{\partial V} |d\Phi|$ .

# Der HDI als eindimensionaler Integralsatz

Unsere Integralsätze beruhen alle auf dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI, Satz B11) und verallgemeinern diesen:

**1dim:** Jedes kompakte Intervall  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  hat als Rand  $\partial[a, b] = \{a, b\}$ . Der Startpunkt zählt negativ,  $n(a) = -1$ , der Zielpunkt positiv,  $n(b) = +1$ . Für jede stetig differenzierbare Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gilt dann

$$\int_{s \in [a, b]} f'(s) \, ds \stackrel{\text{HDI}}{=} \sum_{s \in \{a, b\}} f(s) n(s) = f(b) - f(a).$$

**Allgemein:** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Zudem sei  $\Gamma \subseteq \Omega$  eine stückweise glatte und orientierte Kurve. Für das Arbeitsintegral von  $f' = \text{grad } f$  entlang  $\Gamma$  gilt dann:

$$\int_{s \in \Gamma} f'(s) \cdot ds \stackrel{\text{HDI}}{=} \sum_{s \in \partial\Gamma} f(s) n(s)$$

Die Orientierung teilt die Randpunkte  $s \in \partial\Gamma$  in Start- und Zielpunkte; Startpunkte zählen negativ,  $n(s) = -1$ , Zielpunkte positiv,  $n(s) = +1$ . Ist die Kurve  $\Gamma$  geschlossen, also  $\partial\Gamma = \emptyset$ , so folgt  $\oint_{s \in \Gamma} f'(s) \cdot ds = 0$ .

# Der Integralsatz von Gauß

😊 Der Satz von Gauß in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  und im Raum  $\mathbb{R}^3$  besagt:  
Das Volumenintegral der Divergenz  $\operatorname{div}(f)$  über das Kompaktum  $V$  ist gleich dem Flussintegral von  $f$  nach außen über die Randfläche  $\partial V$ .

**2dim:** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  kompakt mit stückweise glatter Randkurve  $\Gamma = \partial D$ .  
Sei  $n : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^2 : s \mapsto n(s)$  die nach außen weisende Einheitsnormale.  
Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld  $f : \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^2$  gilt dann

$$\int_{(x,y) \in D} \operatorname{div} f(x, y) \, d(x, y) \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_{s \in \Gamma} f(s) \cdot n(s) \, |ds| = \int_{s \in \Gamma} f(s) \times ds.$$

**3dim:** Sei  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  kompakt mit stückweise glatter Randfläche  $S = \partial V$ .  
Sei  $n : S \rightarrow \mathbb{R}^3 : s \mapsto n(s)$  die nach außen weisende Einheitsnormale.  
Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld  $f : \mathbb{R}^3 \supseteq V \rightarrow \mathbb{R}^3$  gilt dann

$$\int_{(x,y,z) \in V} \operatorname{div} f(x, y, z) \, d(x, y, z) \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_{s \in S} f(s) \cdot n(s) \, |dS| = \int_{s \in S} f(s) \cdot dS.$$

Gleichwertige Schreibweise mit  $n(s) \, |ds| = \circlearrowright ds$  bzw.  $dS = n(s) \, |dS|$ .

# Der Integralsatz von Green und Stokes

😊 Der Satz von Green in der Ebene bzw. von Stokes im Raum:  
Das Flächenintegral der Rotation  $\text{rot}(f)$  über die Fläche  $S$  ist  
gleich dem Arbeitsintegral von  $f$  entlang der Randkurve  $\partial S$ .

**2dim:** Sei  $S \subseteq \mathbb{R}^2$  kompakt mit stückweise glatter Randkurve  $\Gamma = \partial S$ .  
Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^2 \supseteq S \rightarrow \mathbb{R}^2$  gilt dann

$$\int_{s \in S} \text{rot } f(s) \cdot dS \stackrel{\text{Green}}{=} \int_{s \in \Gamma} f(s) \cdot ds.$$

**3dim:** Allgemeiner gilt dies für jede stückweise glatte, orientierte Fläche  
 $S \subseteq \mathbb{R}^3$  und jedes stetig differenzierbare Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^3 \supseteq S \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Die Zerlegung  $dS = n(s) |dS|$  ergibt das gleichwertige Flächenintegral

$$\int_{s \in S} \text{rot } f(s) \cdot n(s) |dS| \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{s \in \Gamma} f(s) \cdot ds.$$

Die stückweise glatte Randkurve  $\Gamma = \partial S$  sei hierbei positiv orientiert.  
Liegt die Fläche  $S$  in einer Ebene, so reduziert sich Stokes zu Green.

## Zusammenfassung und Rückblick

Diese Integralsätze sind gut und schön! Geht es auch einfacher? Nein, denn Sie sollen nicht nur fühlen, sondern auch rechnen können! Zur präzisen Formulierung und konkreten Berechnung benötigen Sie daher alle Werkzeuge für Kurven-, Flächen- und Volumenintegrale. Hierzu brauchen Sie solide Grundlagen und effiziente Methoden: Definitionen & Sätze, Beispiele & Rechenricks. . . sowie Übung!

Nochmal die Lernziele laut Modulhandbuch:

- Die Studierenden verfügen über grundlegende Kenntnisse zur Integralrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher. [. . .]
- Sie sind in der Lage, die behandelten Methoden selbstständig, sicher, kritisch, korrekt und kreativ anzuwenden.
- Sie besitzen die mathematische Grundlage für das Verständnis quantitativer Modelle aus den Ingenieurwissenschaften.
- Sie können sich mit Spezialist:innen aus dem ingenieurs- und naturwissenschaftlichen Umfeld über die benutzten mathematischen Methoden verständigen.

## Gauß vs Stokes – integral battle

**Aufgabe:** (0) Rezitieren Sie möglichst präzise unsere Integralsätze. Wie bestimmen Sie möglichst allgemein  $\operatorname{div} \operatorname{rot}(g)$  und  $\operatorname{rot} \operatorname{grad}(h)$ ?

(1) Skizzieren Sie  $V = \{ (x, y, z) \in [-4, 4]^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 25 \}$ .

(2) Schätzen und bestimmen Sie das Volumen  $\operatorname{vol}_3(V)$  des Körpers  $V$  sowie den Flächeninhalt  $\operatorname{vol}_2(S)$  seiner Randfläche  $S = \partial V$ .

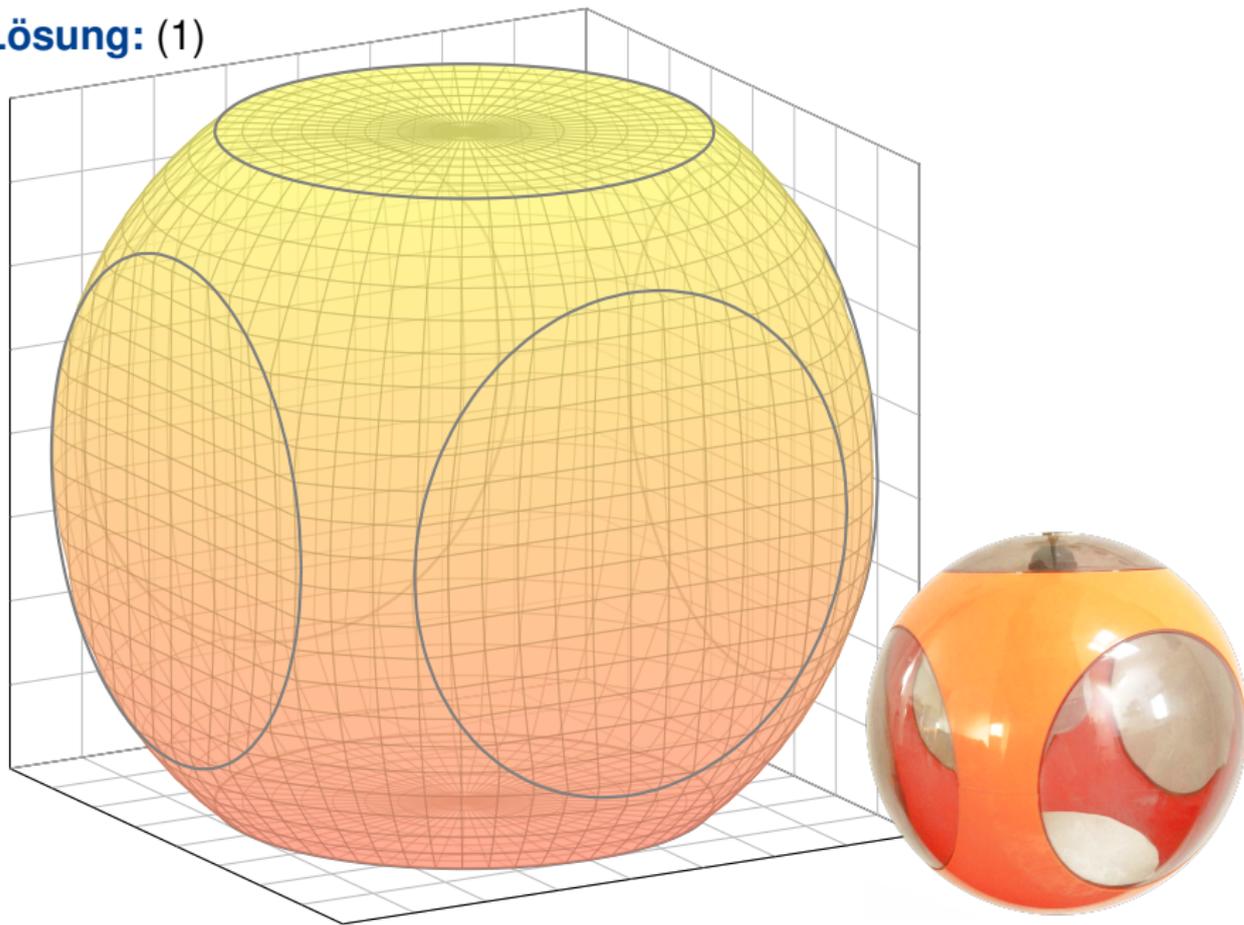
(3) In welchen Punkten  $s \in S$  ist die Randfläche  $S = \partial V$  nicht glatt? Geben Sie überall sonst den äußeren Einheitsnormalenvektor an.

(4) Berechnen Sie zu  $f(x, y, z) = (x, 2y, e^{xy})$  das Flussintegral  $\int_S f \cdot dS$ . Lässt sich der Satz von Stokes anwenden? der Satz von Gauß?

(5) Wir betrachten das Vektorfeld  $g(x, y, z) = (x, y, z)/(x^2 + y^4 + z^6)$ . Bestimmen Sie zum Vektorfeld  $f = \operatorname{rot}(g)$  das Flussintegral  $\int_S f \cdot dS$ . Lässt sich der Satz von Stokes anwenden? der Satz von Gauß?

(6) Wir betrachten  $g(x, y, z) = (\cos(xyz), \sin(xyz), \exp(x^2 + y^4 + z^6))$ . Bestimmen Sie zum Vektorfeld  $f = \operatorname{rot}(g)$  das Flussintegral  $\int_S f \cdot dS$ . Lässt sich der Satz von Stokes anwenden? der Satz von Gauß?

## Gauß vs Stokes – integral battle

**Lösung: (1)**

## Gauß vs Stokes – integral battle

(2) Der Körper  $V$  ist eine sechsseitig abgestumpfte Vollkugel vom Radius  $r = 5$ ; ihr fehlen sechs Kugelsegmente der Höhe  $h = 1$ : G217

$$\text{vol}_3(V) \stackrel{\text{G217}}{=} \frac{4}{3}\pi r^3 - 6 \cdot \pi h^2 \left( r - \frac{h}{3} \right) = \frac{416}{3} \pi \approx 436$$

$$\text{vol}_2(S) \stackrel{\text{G217}}{=} 4\pi r^2 - 6 \cdot 2\pi r h + 6 \cdot \pi 3^2 = 94 \pi \approx 295$$

😊 Plausibel?  $\text{vol}_3([-4, 4]^3) = 8^3 = 512$ ,  $\text{vol}_2(\partial[-4, 4]^3) = 6 \cdot 8^2 = 384$ .

(3) Die Randfläche  $S = \partial V$  ist nicht glatt in den sechs Kreislinien

$\Gamma_z^\pm = \{ z = \pm 4, x^2 + y^2 = 9 \}$  und  $\Gamma_y^\pm = \{ y = \pm 4, x^2 + z^2 = 9 \}$  und

$\Gamma_x^\pm = \{ x = \pm 4, y^2 + z^2 = 9 \}$ . Überall sonst ist die Fläche  $S$  glatt.

In  $s \in \{ z = \pm 4, x^2 + y^2 < 9 \}$  ist die Einheitsnormale  $n(s) = (0, 0, \pm 1)$ .

In  $s \in \{ y = \pm 4, x^2 + z^2 < 9 \}$  ist die Einheitsnormale  $n(s) = (0, \pm 1, 0)$ .

In  $s \in \{ x = \pm 4, y^2 + z^2 < 9 \}$  ist die Einheitsnormale  $n(s) = (\pm 1, 0, 0)$ .

In jedem anderen Punkt  $s \in \partial S$  ist die Einheitsnormale  $n(s) = s/5$ .

Hier gilt  $|s|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 25$  und  $-4 < x, y, z < 4$ . In einer kleinen Umgebung eines solchen Punktes  $s$  sieht die Fläche  $S$  genauso aus wie die Kugel vom Radius 5, daher ist die Einheitsnormale hier  $s/|s| = s/5$ .

## Gauß vs Stokes – integral battle

(4) Die direkte Berechnung von  $\int_S f \cdot dS$  ist möglich... aber mühsam.

😊 Dank Gauß gilt  $\int_S f \cdot dS = \int_V \operatorname{div}(f) dV = 3 \operatorname{vol}_3(V) = 416 \pi$ .

⚠️ Stokes ist hier nicht anwendbar, denn uns fehlt  $g$  mit  $f = \operatorname{rot}(g)$ .

(5) Die direkte Berechnung von  $\int_S f \cdot dS$  ist möglich... aber mühsam.

😊 Dank Stokes gilt  $\int_S f \cdot dS = \int_S \operatorname{rot}(g) \cdot dS = \int_{\partial S} g \cdot ds = 0$  da  $\partial S = \emptyset$ .

⚠️ Gauß ist hier nicht anwendbar, denn  $f$  ist nicht auf ganz  $V$  definiert.

(6) Die direkte Berechnung von  $\int_S f \cdot dS$  ist möglich... aber mühsam.

😊 Dank Stokes gilt  $\int_S f \cdot dS = \int_S \operatorname{rot}(g) \cdot dS = \int_{\partial S} g \cdot ds = 0$  da  $\partial S = \emptyset$ .

😊 Auch Gauß lässt sich anwenden:  $\int_S f \cdot dS = \int_V \operatorname{div}(f) dV = 0$ .

😊 Diese Beispiele illustrieren erneut den Nutzen unserer Integralsätze: Manche Rechnung löst man besser mit Anschauung und Verständnis!

😊 Wer eindimensional integrieren will, der sollte den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI) kennen und nutzen!  
Wer mehrdimensional integrieren will, der sollte die entsprechenden Integralsätze von Gauß, Green und Stokes kennen und nutzen!



**Aufgabe:** Ein bewohnter Iglu werde beschrieben durch die Menge

$$I = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0 \}.$$

Der Wärmefluss im Iglu sei gegeben durch das Vektorfeld

$$f(x, y, z) = (x, y, 4z + x^2 + y^2 - 4).$$

- (1) Wieviel Wärme entsteht im Iglu  $I$  insgesamt?
- (2) Wieviel Wärme fließt durch den Boden  $B$  nach unten?
- (3) Wieviel Wärme fließt durch die Kuppel  $K$  nach außen?

**Lösung:** (1) Das Vektorfeld  $f$  hat konstante Quelldichte  $\operatorname{div}(f) = 6$ . Dies entspricht homogener Wärmeezeugung im Inneren des Iglu. Die Gesamtmenge der im Iglu entstehenden Wärme ist demnach

$$\int_I \operatorname{div}(f) \, dI = 6 \cdot \operatorname{vol}_3(I) = 6 \cdot \frac{2}{3} \pi 2^3 = 32\pi.$$

(2) Der Boden des Iglu ist die Kreisscheibe

$$B = \{ (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4 \}.$$

Die äußere Einheitsnormale ist hier konstant  $n_B = (0, 0, -1)$ . Also

$$\begin{aligned} \int_B f \cdot n_B \, d(x, y) &\stackrel{\text{Def}}{=} \int_B 4 - x^2 - y^2 \, d(x, y) && \text{Flussintegral über } B \\ &\stackrel{\text{Trafo}}{\stackrel{\text{C2B}}{=}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^2 (4 - \rho^2) \rho \, d\rho \, d\varphi && \text{Polarkoordinaten} \\ &\stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{B11}}{=}} 2\pi \left[ 2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} \right]_{\rho=0}^2 = 2\pi(8 - 4) = 8\pi. \end{aligned}$$

😊 Hier ist „ $B \subseteq \mathbb{R}^2$ “ bereits eben, dies nutzen wir zur Parametrisierung.

(3a) Die Kuppel des Iglu ist die obere Hemisphäre

$$K = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0 \}.$$

Wir sparen uns viel Arbeit durch den Satz von Gauß:

$$\int_I \operatorname{div}(f) \, dI \stackrel[\text{G3G}]{\text{Gauß}}{=} \int_{S=\partial I} f \cdot dS \stackrel{\text{Def}}{=} \int_B f \cdot dB + \int_K f \cdot dK$$

Hieraus lesen wir ab:  $\int_K f \cdot dK = 32\pi - 8\pi = 24\pi$ . (Dieser Iglu verliert demnach dreimal mehr Wärme über die Kuppel als über den Boden.)

(3b) Alternativ integrieren wir, etwa in Kugelkoordinaten  $\Phi : D \rightarrow K$ :

$$s = \Phi \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\}.$$

Die beiden Tangentialvektoren und der Normalenvektor sind:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi \\ -r \sin \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 \sin^2 \theta \cos \varphi \\ r^2 \sin^2 \theta \sin \varphi \\ r^2 \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}$$

😊 Der Normalenvektor  $d\Phi$  zeigt aus  $V$  heraus, Rechte-Hand-Regel.

Das Flussintegral des Vektorfeldes  $f$  über die Kuppel  $K$  ist demnach:

$$\begin{aligned} \int_{s \in K} f(s) \cdot dK &= \int_D f(\Phi(\theta, \varphi)) \cdot \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) d(\theta, \varphi) \\ &= \int_D \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ 4r \cos \theta + r^2 \sin^2 \theta - 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r^2 \sin^2 \theta \cos \varphi \\ r^2 \sin^2 \theta \sin \varphi \\ r^2 \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} d(\theta, \varphi) \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} r^3 \sin^3 \theta + 4r^3 \sin \theta \cos^2 \theta + r^4 \sin^3 \theta \cos \theta - 4r^2 \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi \end{aligned}$$

Spätestens hier verfluchen wir unsere Wahl dieses Rechenweges...  
Umso mehr preisen wir den wunderbar nützlichen Satz von Gauß!

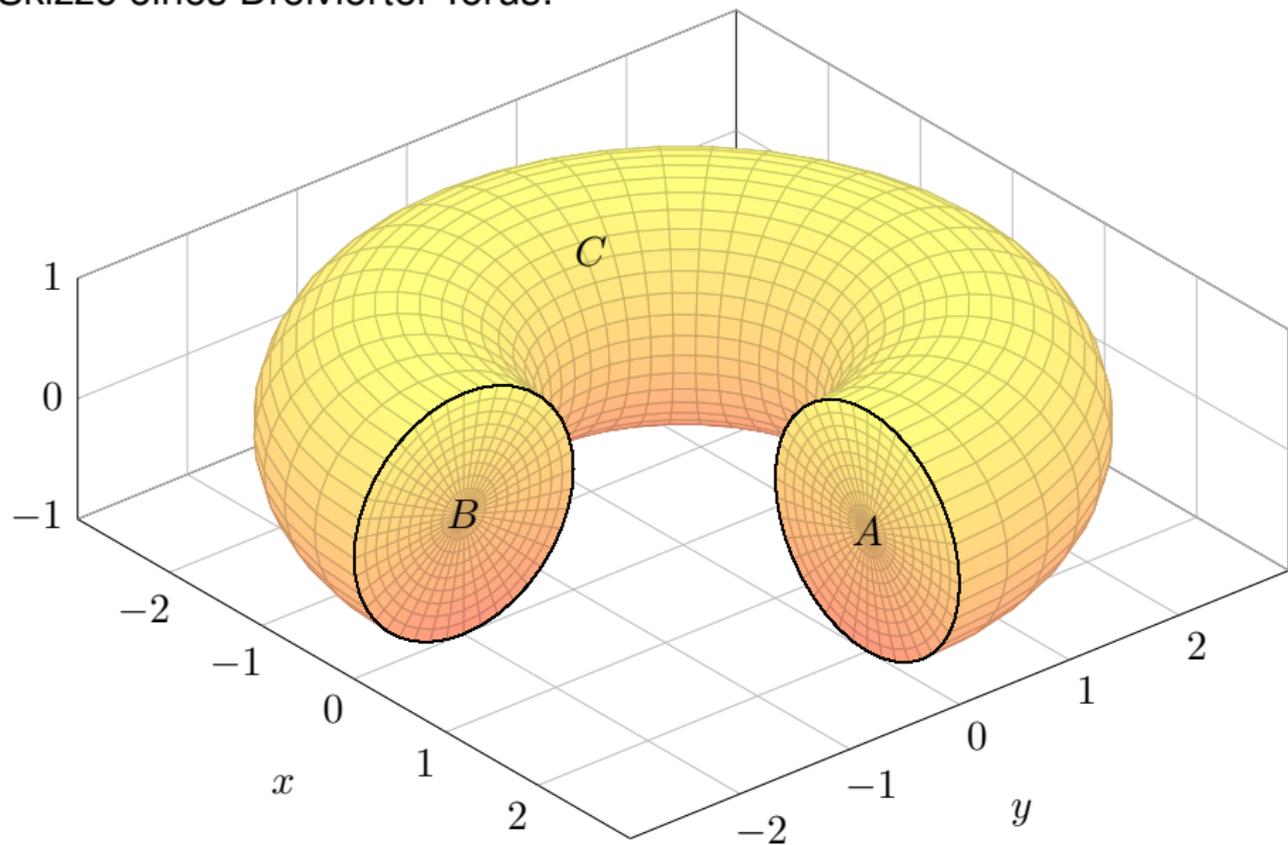
Zum Glück sind dies Standardintegrale der Form  $\int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin^p \theta \cos^q \theta d\theta$ .  
Geduldiges Ausrechnen / Nachschlagen ergibt (für den Radius  $r = 2$ ):

$$\int_{s \in K} f(s) \cdot dK = \dots \img alt="pencil icon" data-bbox="400 840 450 900" \dots = \frac{\pi}{2} r^2 (r^2 + 8r - 8) = 24\pi$$

😊 Diese Beispiel illustriert erneut den Nutzen unserer Integralsätze.

## Divergenz, Rotation und Flussintegrale

Skizze eines Dreiviertel-Torus:



## Divergenz, Rotation und Flussintegrale

**Aufgabe:** Sei  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  der oben skizzierte Dreiviertel-Volltorus.

- (1) Parametrisieren Sie den Körper  $V$  in Toruskoordinaten, sowie die Kreisscheiben  $A$  und  $B$  und die Mantelfläche  $C$ .
- (2) Bestimmen Sie Volumen  $\text{vol}_3(V)$  und Oberflächeninhalt  $\text{vol}_2(\partial V)$ .
- (3) Berechnen Sie die Divergenz und die Rotation des Vektorfeldes

$$f(x, y, z) = (x, y, x^2 + 4(y + 2)^3).$$

- (4) Berechnen Sie den Fluss von  $f$  durch  $S = \partial V$  nach außen.
- (5a) Berechnen Sie den Fluss von  $\text{rot}(f)$  durch  $A$  nach außen.
- (5b) Berechnen Sie den Fluss von  $\text{rot}(f)$  durch  $B$  nach außen.
- (5c) Folgern Sie den Fluss von  $\text{rot}(f)$  durch  $C$  nach außen

😊 Diese Aufgabe übt, Flächen- und Volumenintegrale möglichst effizient einzusetzen. Zur Vereinfachung nutzen wir womöglich die Integralsätze und für Rotationskörper auch die Guldinschen Regeln.

## Divergenz, Rotation und Flussintegrale

(1) In Toruskoordinaten mit  $R = 2$  und  $r = 1$  wird  $V$  beschrieben durch

$$V = \left\{ \left( \begin{array}{c} (R + \rho \sin \theta) \cos \varphi \\ (R + \rho \sin \theta) \sin \varphi \\ \rho \cos \theta \end{array} \right) \mid \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq r \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq 3\pi/2 \end{array} \right\}.$$

Die Randfläche  $S = \partial V$  besteht aus der Kreisscheibe  $A$  für  $\varphi = 0$ , der Kreisscheibe  $B$  für  $\varphi = 3\pi/2$ , sowie der Mantelfläche  $C$  für  $\rho = r$ :

$$A = \left\{ \left( \begin{array}{c} R + \rho \sin \theta \\ 0 \\ \rho \cos \theta \end{array} \right) \mid \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq r \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array} \right\}$$

$$B = \left\{ \left( \begin{array}{c} 0 \\ -R - \rho \sin \theta \\ \rho \cos \theta \end{array} \right) \mid \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq r \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array} \right\}$$

$$C = \left\{ \left( \begin{array}{c} (R + r \sin \theta) \cos \varphi \\ (R + r \sin \theta) \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{array} \right) \mid \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq 3\pi/2 \end{array} \right\}$$

## Divergenz, Rotation und Flussintegrale

(2) Nach den Guldinschen Regeln G2B finden wir:

$$\text{vol}_3(V) = \frac{3}{4} \cdot \pi r^2 \cdot 2\pi R = 3\pi^2$$

$$\text{vol}_2(\partial V) = \pi r^2 + \pi r^2 + \frac{3}{4} \cdot 2\pi r \cdot 2\pi R = 2\pi r^2 + 3\pi^2 r R$$

(3) Wir berechnen  $\text{div}(f) = 2$  und  $\text{rot}(f) = (12(y+2)^2, -2x, 0)$ .

(4) Das Flussintegral gelingt am einfachsten mit dem Satz von Gauß:

$$\int_S f \cdot dS = \int_V \text{div}(f) dV = \int_V 2 dV = 2 \text{vol}_3(V) = 6\pi^2.$$

Wir könnten das Flussintegral  $\int_S f \cdot dS$  auch direkt ausrechnen, indem wir über  $A$  und  $B$  und  $C$  integrieren. Das ist aber mühsamer. Wer keine länglichen Rechnungen scheut, versuche dies als Übung!

😊 Leistungsstarke Theorie ermöglicht effiziente Berechnung.  
Wir lassen die Integralsätze einen großen Teil der Arbeit erledigen.

## Divergenz, Rotation und Flussintegrale

(5a) Hier hilft kein Trick, wir müssen einfach die Definition nutzen und ausrechnen... Normalenvektor zu  $\Phi(\rho, \theta) = (2 + \rho \sin \theta, 0, \rho \cos \theta)$ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \rho \cos \theta \\ 0 \\ -\rho \sin \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho \\ 0 \end{pmatrix}$$

Plausibilitätscheck: Dies ist die äußere Einheitsnormale  $(0, -1, 0)$  mal der Funktionaldeterminante  $\rho$ . Als Flussintegral erhalten wir demnach:

$$\begin{aligned} \int_A \operatorname{rot}(f) \cdot dA &= \int_A 2x |dA| = \int_{\rho=0}^1 \int_{\theta=0}^{2\pi} 2(2 + \rho \sin \theta) \rho \, d\theta \, d\rho \\ &= \int_{\rho=0}^1 8\pi \rho \, d\rho = \left[ 4\pi \rho^2 \right]_{\rho=0}^1 = 4\pi \end{aligned}$$

(5b) Hier hilft kein Trick, wir müssen einfach die Definition nutzen und ausrechnen... Normalenvektor zu  $\Phi(\rho, \theta) = (0, -2 - \rho \sin \theta, \rho \cos \theta)$ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho \cos \theta \\ -\rho \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## Divergenz, Rotation und Flussintegrale

Plausibilitätscheck: Dies ist die äußere Einheitsnormale  $(1, 0, 0)$  mal der Funktionaldeterminante  $\rho$ . Als Flussintegral erhalten wir demnach:

$$\begin{aligned} \int_B \operatorname{rot}(f) \cdot dB &= \int_B 12(y+2)^2 |dB| = \int_{\rho=0}^1 \int_{\theta=0}^{2\pi} 12\rho^3 \sin^2 \theta \, d\theta \, d\rho \\ &= \int_{\rho=0}^1 12\pi\rho^3 \, d\rho = \left[ 3\pi\rho^4 \right]_{\rho=0}^1 = 3\pi \end{aligned}$$

(5c) Mantelfläche  $C$ ? Nach dem Integralsatz von Stokes gilt

$$\begin{aligned} \int_A \operatorname{rot}(f) \cdot dA + \int_B \operatorname{rot}(f) \cdot dB + \int_C \operatorname{rot}(f) \cdot dC &\stackrel{\text{Def}}{=} \int_S \operatorname{rot}(f) \cdot dS \\ &\stackrel[\text{G3E}]{\text{Stokes}} \int_{\partial S} f \cdot ds \stackrel{\partial S = \emptyset}{=} 0 \end{aligned}$$

😊 Ohne weitere Mühe folgt  $\int_C \operatorname{rot}(f) \cdot dC = -7\pi$ . Dies folgt ebenso aus dem Integralsatz von Gauß, denn  $\operatorname{div} \operatorname{rot}(f) = 0$ . Das Flussintegral  $\int_C \operatorname{rot}(f) \cdot dC$  kann man auch direkt ausrechnen, das ist aber mühsamer.

## Divergenz und Flussintegral

- Aufgabe:** (1) Seien  $r, h > 0$  reelle Zahlen. Skizzieren Sie den Körper  $V \subseteq \mathbb{R}^3$ , der begrenzt wird durch  $z = 0$  und  $z = h$  und  $x^2 + y^2 = r^2$ .
- (2) Berechnen Sie zum Vektorfeld  $f(x, y, z) = (x^4y, -2x^3y^2, z^2)$  die Divergenz und den Fluss von  $f$  durch den Rand  $\partial V$  nach außen.

**Lösung:** (1) Der angegebene Körper  $V$  ist ein Zylinder der Höhe  $h$  über einer Kreisscheibe  $D$  vom Radius  $r$  als Grundfläche:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leq r^2 \\ 0 \leq z \leq h \end{array} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq r \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq h \end{array} \right\}$$

(2) Die Divergenz ist leicht auszurechnen:

$$\operatorname{div} f(x, y, z) = 4x^3y - 4x^3y + 2z = 2z$$

Wir könnten das Flussintegral  $\int_{\partial V} f \cdot dS$  direkt ausrechnen, indem wir die Randfläche  $S = \partial V$  in Mantel, Deckel und Boden zerlegen, usw. Wer keine länglichen Rechnungen scheut, versuche dies als Übung!

## Divergenz und Flussintegral

Alternativ können wir den Satz von Gauß anwenden: Die Divergenz ist hier leicht, und der Rotationskörper  $V$  ist einfach zu beschreiben!

Das Volumenintegral gelingt leicht in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} f \cdot dS &\stackrel{\substack{\text{Gauß} \\ \text{G3G}}}{=} \int_V \operatorname{div}(f) dV \stackrel{\substack{\text{Trafo} \\ \text{C2B}}}{=} \int_{\rho=0}^r \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^h 2z \cdot \rho dz d\varphi d\rho \\ &\stackrel{\substack{\text{HDI} \\ \text{B1I}}}{=} \int_{\rho=0}^r \int_{\varphi=0}^{2\pi} [z^2 \rho]_{z=0}^h d\varphi d\rho = \int_{\rho=0}^r \int_{\varphi=0}^{2\pi} h^2 \rho d\varphi d\rho \\ &\stackrel{\substack{\text{HDI} \\ \text{B1I}}}{=} \int_{\rho=0}^r 2\pi h^2 \rho d\rho \stackrel{\substack{\text{HDI} \\ \text{B1I}}}{=} \pi h^2 r^2 \end{aligned}$$

Ebenso leicht gelingt das Integral in kartesischen Koordinaten:

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} f \cdot dS &\stackrel{\substack{\text{Gauß} \\ \text{G3G}}}{=} \int_V \operatorname{div}(f) dV \stackrel{\substack{\text{Fub} \\ \text{C1E}}}{=} \int_{(x,y) \in D} \int_{z=0}^h 2z dz d(x,y) \\ &\stackrel{\substack{\text{HDI} \\ \text{B1I}}}{=} \int_{(x,y) \in D} [z^2]_{z=0}^h d(x,y) = \int_{(x,y) \in D} h^2 d(x,y) \\ &\stackrel{\substack{\text{Lin} \\ \text{A3L}}}{=} h^2 \int_{(x,y) \in D} d(x,y) = \pi h^2 r^2 \end{aligned}$$

## Rotationskörper zur Herzfläche

Die folgende Aufgabe übt den sicheren Umgang mit Rotationskörpern. Sie kennen bereits den Torus (G225), wir variieren nun dieses Thema:

**Aufgabe:** (1) Zeichnen Sie in der  $x$ - $z$ -Ebene die Herzkurve

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (1 - \sin t) \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Wie berechnen Sie hieraus die Länge der durchlaufenen Kurve  $\Gamma$  und den Flächeninhalt des umlaufenen Bereichs  $H$  in der  $x$ - $z$ -Ebene?

(2) Zeichnen und parametrisieren Sie den Rotationskörper  $R$ , der aus  $H$  durch Rotation um die  $z$ -Achse entsteht, sowie seine Mantelfläche  $M$ .

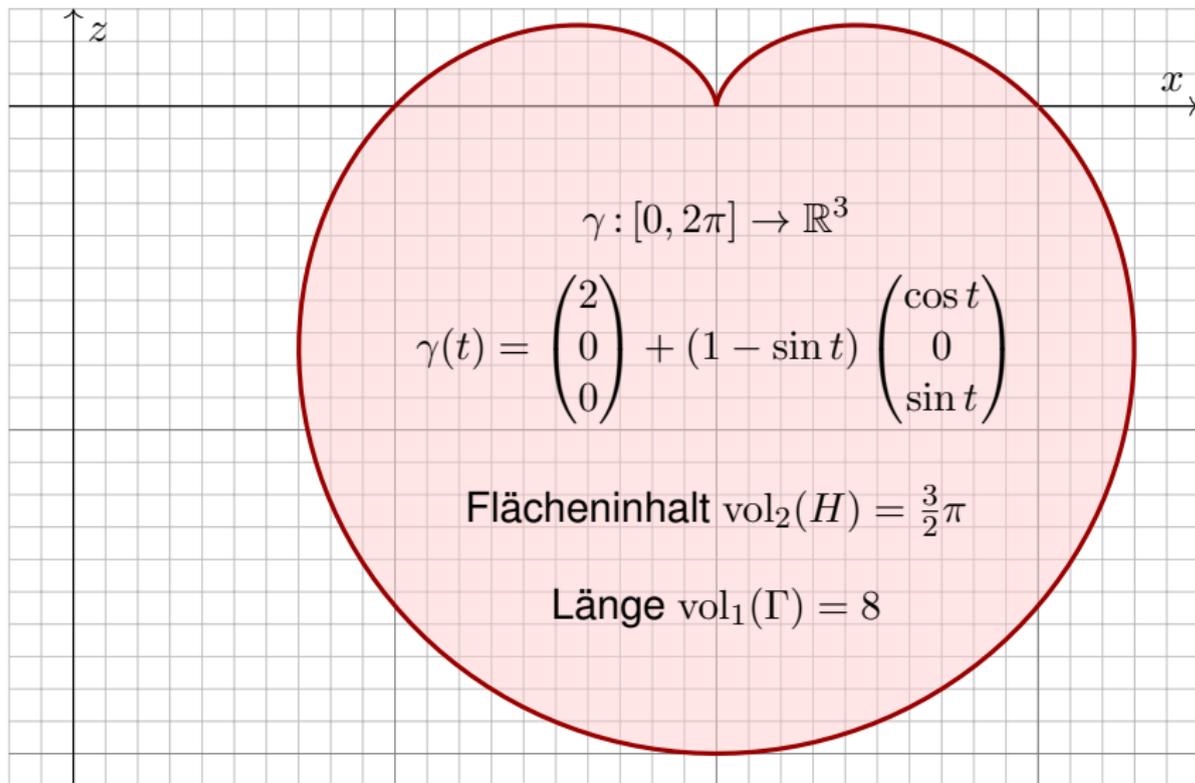
(3) Bestimmen Sie das Volumen  $\text{vol}_3(R)$  und den Flächeninhalt  $\text{vol}_2(M)$ . Welche Rechenwege kennen Sie? Welcher scheint am effizientesten?

(4) Berechnen Sie zum Vektorfeld  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (0, 0, z)$  das Flussintegral durch die Mantelfläche  $M = \partial R$  nach außen:

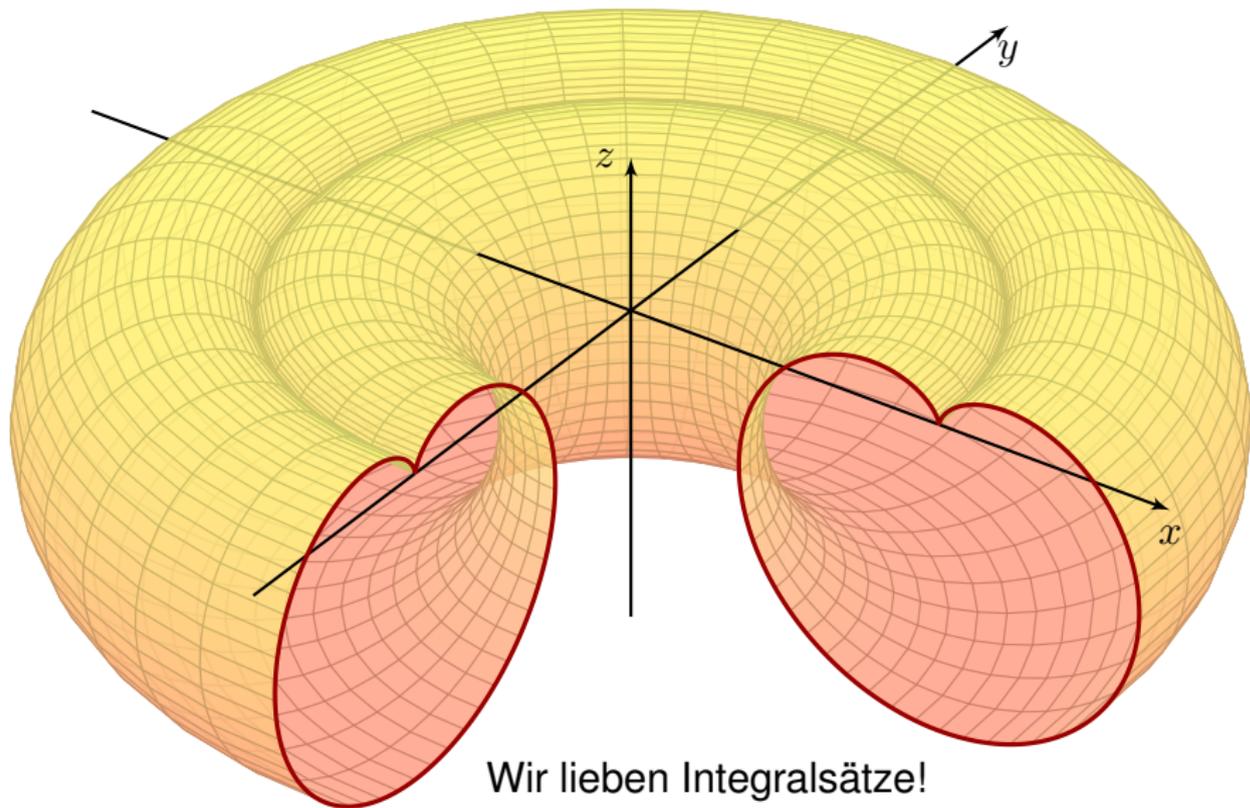
(a) direkt durch Einsetzen in die Definition und (b) per Integralsatz.

## Rotationskörper zur Herzfläche

**Lösung:** (1) Die Herzkurve kennen wir aus Kapitel E (Seite E217).



## Rotationskörper zur Herzfläche



Wir lieben Integralsätze!

# Rotationskörper zur Herzfläche

(2) Dank (1) sind Zeichnung und Parametrisierungen leicht:

$$\Psi : \mathbb{R}^3 \supseteq [0, 2\pi] \times H \rightarrow R : \quad \Psi \begin{pmatrix} \varphi \\ x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \varphi \\ x \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Phi : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow M : \quad \Phi \begin{pmatrix} \varphi \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \cos \varphi \\ \gamma_1(t) \sin \varphi \\ \gamma_3(t) \end{pmatrix}$$

(3) Mit (2) können wir das Volumen und den Flächeninhalt ausrechnen. Wesentlich leichter gelingt dies mit den Guldinschen Regeln (G2B):

$$\text{vol}_3(R) = \text{vol}_2(H) \cdot 2\pi d(H) = \frac{3}{2}\pi \cdot 4\pi = 6\pi^2$$

$$\text{vol}_2(M) = \text{vol}_1(\Gamma) \cdot 2\pi d(\Gamma) = 8 \cdot 4\pi = 32\pi$$

Warum geht das so einfach? Hier helfen geometrisches Verständnis und die passenden Sätze! Wir kennen aus Kapitel E die Länge  $\text{vol}_1(\Gamma) = 8$  der Herzkurve  $\Gamma$  und den Flächeninhalt  $\text{vol}_2(H) = \frac{3}{2}\pi$  der so umlaufenen Herzfläche  $H$ , siehe Seite E217. Aufgrund der Symmetrie von  $\Gamma$  und  $H$  müssen wir ihre Schwerpunkte nicht mühsam berechnen, sondern können aus unserer Skizze sofort ihren Abstand zur Rotationsachse ablesen:  $d(\Gamma) = d(H) = 2$ .

# Rotationskörper zur Herzfläche

(4) Physikalische Interpretation: Das Vektorfeld  $f(x, y, z) = (0, 0, z)$  entspricht der Auftriebskraft (genauer dem Druck, also Kraft pro Fläche) in einem homogenen Medium konstanter Dichte, etwa Wasser oder Luft.

Wir haben also genau die Situation des archimedischen Prinzips! G321

Daher stehen wir im Folgenden vor zwei möglichen Rechnungen. Wir verstehen beide sowohl mathematisch als auch physikalisch:

(a) Wir können direkt die Definition des Flussintegrals einsetzen; wir erhalten dann den Fluss, hier interpretiert als Gesamtkraft.

(b) Wir können den Integralsatz von Gauß zur Umrechnung nutzen; wir erhalten dann die Auftriebskraft des verdrängten Volumens.

Die Sichtweise (a) ist physikalisch motiviert: Der Wert interessiert uns! Die Sichtweise (b) ist leichter auszurechnen und zu verstehen: Das hilft!

😊 Leistungsstarke Theorie ermöglicht effiziente Berechnung. Wir lassen die Integralsätze einen großen Teil der Arbeit erledigen.

## Rotationskörper zur Herzfläche

(4a) Zunächst die direkte Lösung durch Einsetzen in die Definition.  
Wir berechnen die Tangentialvektoren und den Normalenvektor:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \begin{pmatrix} -\gamma_1(t) \sin \varphi \\ \gamma_1(t) \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \cos \varphi \\ \gamma_1'(t) \sin \varphi \\ \gamma_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ -\gamma_1'(t) \gamma_1(t) \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir das Flussintegral

$$\begin{aligned} \int_M f \cdot dM &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_3(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ -\gamma_1'(t) \gamma_1(t) \end{pmatrix} dt d\varphi \\ &= -2\pi \int_{t=0}^{2\pi} \gamma_1(t) \gamma_1'(t) \gamma_3(t) dt \end{aligned}$$

Wir setzen nun die Parametrisierung des Randes ein:

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= 2 + \cos t + \sin t \cos t \\ \gamma_3(t) &= \sin t + \sin^2 t \end{aligned}$$

## Rotationskörper zur Herzfläche

Wir erhalten einen etwas länglichen Integranden:

$$\begin{aligned} & \int_{t=0}^{2\pi} \gamma_1(t) \gamma_1'(t) \gamma_3(t) dt \\ &= \int_{t=0}^{2\pi} [2 + \cos t - \sin t \cos t] \cdot [-\sin t - \cos^2 t + \sin^2 t] \cdot [\sin t - \sin^2 t] dt \end{aligned}$$

Hier hilft sorgsames Ausmultiplizieren und geduldiges Integrieren...

Versuchen Sie es! Es ist vielleicht nicht spaßig, aber doch lehrreich...

Einige Integrale sind Null aus Symmetriegründen. Es bleibt schließlich:

$$\int_{t=0}^{2\pi} \gamma_1(t) \gamma_1'(t) \gamma_3(t) dt = -3\pi$$

☺ Für das gesuchte Flussintegral erhalten wir so  $\int_M f \cdot dM = 6\pi^2$ .

☹ Das war leider mühsam. Gibt es einen leichteren Weg? Ja!

## Rotationskörper zur Herzfläche

(4b) Das Integral gelingt am einfachsten mit dem Satz von Gauß:

$$\int_M f \cdot dM = \int_R \operatorname{div}(f) \, d(x, y, z) = \int_R 1 \, d(x, y, z) = \operatorname{vol}_3(R) = 6\pi^2$$

In Worten: Das Flussintegral von  $f$  über die Randfläche  $M = \partial R$  nach außen ist gleich dem Volumenintegral von  $\operatorname{div} f$  über den Körper  $R$ .

Wegen  $\operatorname{div} f = 1$  ist Letzteres hier einfach nur das Volumen  $\operatorname{vol}_3(R)$ .

😊 Diese Umformung vereinfacht erheblich unsere Rechnung.

😊 Sie illustriert zudem nochmal das archimedische Prinzip.

Damit endet dieses Kapitel wie es begann, nämlich mit anschaulichen, konkreten, handfesten physikalischen Anwendungen. Die Integralsätze von Gauß und Stokes sind grundlegende Rechenregeln und Hilfsmittel. Sie werden überall in den Natur- und Ingenieurwissenschaften genutzt. Zur Illustration und zur Einübung gebe ich hierzu im nächsten Kapitel weitere physikalisch-technische Anwendungsbeispiele.

# Die Gramsche Determinante

**Aufgabe:** Für je zwei Vektoren  $u, v \in \mathbb{R}^3$  gilt

$$|u \times v|^2 = \det \begin{pmatrix} u \cdot u & v \cdot u \\ u \cdot v & v \cdot v \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie dies (1) durch geduldiges Ausrechnen sowie (2) geometrisch.

**Lösung:** (1) Wir rechnen in kartesischen Koordinaten:

$$u \times v = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

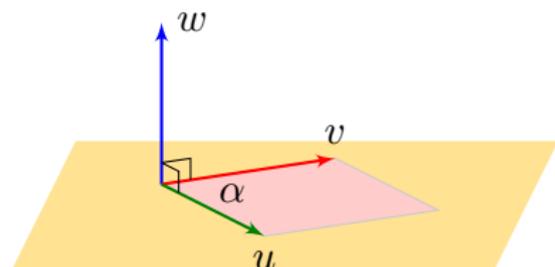
$$\begin{aligned} |u \times v|^2 &= +u_2^2 v_3^2 + u_3^2 v_2^2 - 2u_2 v_2 u_3 v_3 \\ &\quad + u_3^2 v_1^2 + u_1^2 v_3^2 - 2u_1 v_1 u_3 v_3 \\ &\quad + u_1^2 v_2^2 + u_2^2 v_1^2 - 2u_1 v_1 u_2 v_2 \end{aligned}$$

$$\det \begin{pmatrix} u \cdot u & v \cdot u \\ u \cdot v & v \cdot v \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 & u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \\ u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 & v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \end{pmatrix}$$

☺ Ausmultiplizieren und vereinfachen: Beide stimmen überein!

# Die Gramsche Determinante

(2) Ausrechnen ist gut, zudem wollen wir geometrisches Verständnis:



Das Kreuzprodukt  $w = u \times v$  steht senkrecht auf den Vektoren  $u, v$ .

Seine Norm  $|w| = |u| \cdot |v| \cdot \sin \angle(u, v)$  ist der Flächeninhalt des von  $u, v$  aufgespannten Parallelogramms.

Stehen  $u$  und  $v$  senkrecht, also  $u \cdot v = 0$ , so folgt  $|w| = |u| \cdot |v|$ , somit

$$|u \times v|^2 = \det \begin{pmatrix} u \cdot u & 0 \\ 0 & v \cdot v \end{pmatrix}.$$

Andernfalls orthogonalisieren wir  $v$  bezuglich  $u$  durch  $v' = v - \lambda u$  mit  $\lambda = (v \cdot u) / (u \cdot u)$ . Dadurch wird die Matrix diagonal, denn  $u \cdot v' = 0$ ; Kreuzprodukt und Determinante bleiben unverändert erhalten.

☺ Das Kreuzprodukt nützt uns nur für Flächen im  $\mathbb{R}^3$ . Die Gramsche Determinante hingegen nützt in jeder Dimension. Anwendung / Ausblick: So integrieren wir im  $\mathbb{R}^n$  auf  $k$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten.

# Die erste Fundamentalform

Sei  $\Phi : \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$  ein parametrisiertes Flächenstück.  
Die **erste Fundamentalform** von  $\Phi$  ist die folgende Matrix:

$$g^\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad g^\Phi = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \partial_x \Phi \cdot \partial_x \Phi & \partial_y \Phi \cdot \partial_x \Phi \\ \partial_x \Phi \cdot \partial_y \Phi & \partial_y \Phi \cdot \partial_y \Phi \end{pmatrix}$$

Sie gibt an, wie die Tangentialebene an  $(x, y)$  in  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  abgebildet wird auf die Tangentialebene am Punkt  $s = \Phi(x, y)$  in der Bildfläche  $S \subseteq \mathbb{R}^3$ . Wir nennen  $g^\Phi$  auch den **metrischen Tensor** der Parametrisierung  $\Phi$ . Er beschreibt vollständig die innere Geometrie der Fläche  $S \subseteq \mathbb{R}^3$ .

**Aufgabe:** Wie liest man der ersten Fundamentalform  $g^\Phi$  ab, (1) ob  $\Phi$  flächentreu ist? (2) winkeltreu? (3) längentreu? Welche Beziehung gilt?

**Lösung:** (1) Flachentreue folgt aus der (Gramschen) Determinante:

$$\Phi \text{ ist flächentreu} \iff \det(g^\Phi) = 1$$

Genauer und allgemeiner: Der Faktor  $\sqrt{\det(g^\Phi)} = |\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi|$  ist die Flächenverzerrung, wie wir in der vorigen Aufgabe ausgerechnet haben.

## Die erste Fundamentalform

(2) Für Winkeltreue müssen  $\partial_x \Phi$  und  $\partial_y \Phi$  senkrecht stehen und gleiche Länge  $\lambda$  haben (sonst stehen die Diagonalen nicht mehr senkrecht):

$$\Phi \text{ ist winkeltreu (konform)} \iff g^\Phi = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

(3) Die Länge eines Weges  $\gamma: [a, b] \rightarrow D \subseteq \mathbb{R}^2$  mit  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  ist

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt.$$

Die Länge des Weges  $\Phi \circ \gamma: [a, b] \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$  ist entsprechend

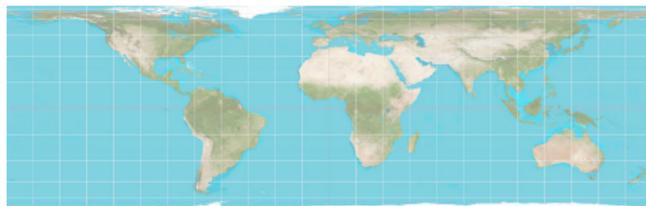
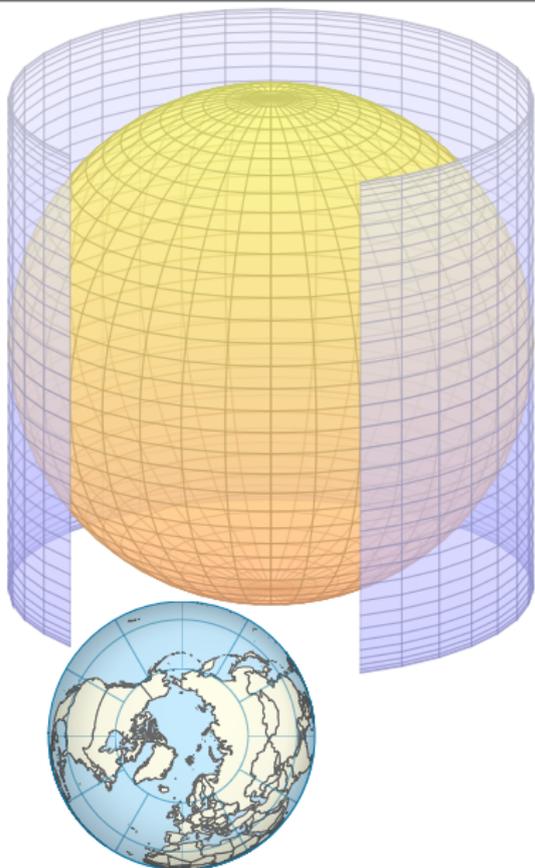
$$\ell(\Phi \circ \gamma) = \int_a^b |\Phi'(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t)| dt = \int_a^b \sqrt{g_{11}\dot{x}(t)^2 + 2g_{12}\dot{x}(t)\dot{y}(t) + g_{22}\dot{y}(t)^2} dt.$$

Gleichheit für alle Wege  $\gamma$  gilt nur, falls  $g_{11} = g_{22} = 1$  und  $g_{12} = g_{21} = 0$ :

$$\Phi \text{ ist längentreu (isometrisch)} \iff g^\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \Phi \text{ ist winkel- und flächentreu}$$

# Kartographie und Projektionen der Sphäre



Lambert–Projektion (1772)  
flächentreu, aber nicht winkeltreu



Mercator–Projektion (1569)  
winkeltreu, aber nicht flächentreu

*Fun fact:* Grönland (2.2 Mio km<sup>2</sup>) passt 14mal in Afrika (30.3 Mio km<sup>2</sup>).

## Die Abwicklung des Zylinders ist längentreu.

**Aufgabe:** Wir wickeln das Rechteck  $D = [0, 2\pi] \times [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$  auf den Zylinder  $Z = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, -1 \leq z \leq 1 \} \subseteq \mathbb{R}^3$ .

- (1) Formulieren Sie explizit diese Parametrisierung  $\Phi : D \rightarrow Z$ .
- (2) Ist  $\Phi$  flächentreu? oder winkeltreu? oder gar längentreu?

**Lösung:** (1) Wir bestimmen Parametrisierung und Tangentialvektoren:

$$\begin{aligned} \Phi : D = [0, 2\pi] \times [-1, 1] &\rightarrow Z, & \Phi(\varphi, z) &= (\cos \varphi, \sin \varphi, z) \\ \partial_\varphi \Phi &= (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0), & \partial_z \Phi &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

- (2) Die erste Fundamentalform beschreibt die geometrische Verzerrung:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_\varphi \Phi \cdot \partial_\varphi \Phi & \partial_z \Phi \cdot \partial_\varphi \Phi \\ \partial_\varphi \Phi \cdot \partial_z \Phi & \partial_z \Phi \cdot \partial_z \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Daher ist  $\Phi$  längentreu, somit insbesondere winkeltreu- und flächentreu.

Zum Vergleich nochmal die Flächenverzerrung übers Kreuzprodukt:

$$\partial_\varphi \Phi \times \partial_z \Phi = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) \quad \Rightarrow \quad |\partial_\varphi \Phi \times \partial_z \Phi| = 1$$

Intrinsisch gesehen ist der Zylinder  $Z$  flach, seine Geometrie ist lokal dieselbe wie die des ebenen Rechtecks  $D$ , nicht aber seine Lage im  $\mathbb{R}^3$ .

# Lamberts Zylinderprojektion ist flächentreu.

**Aufgabe:** (Lambert–Projektion) Wir projizieren den Zylinder  $Z$  axial auf die Einheitssphäre  $S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \} \subseteq \mathbb{R}^3$ .

- (1) Formulieren Sie diese Abbildung  $\Phi : D = [0, 2\pi] \times [-1, 1] \rightarrow S$ .
- (2) Ist  $\Phi$  flächentreu? oder winkeltreu? oder gar längentreu?

**Lösung:** (1) Wir bestimmen Parametrisierung und Tangentialvektoren:

$$\Phi(\varphi, z) = (\sqrt{1 - z^2} \cos \varphi, \sqrt{1 - z^2} \sin \varphi, z)$$

$$\partial_\varphi \Phi(\varphi, z) = (-\sqrt{1 - z^2} \sin \varphi, \sqrt{1 - z^2} \cos \varphi, 0)$$

$$\partial_z \Phi(\varphi, z) = (-z/\sqrt{1 - z^2} \cos \varphi, -z/\sqrt{1 - z^2} \sin \varphi, 1)$$

- (2) Die erste Fundamentalform beschreibt die geometrische Verzerrung:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_\varphi \Phi \cdot \partial_\varphi \Phi & \partial_z \Phi \cdot \partial_\varphi \Phi \\ \partial_\varphi \Phi \cdot \partial_z \Phi & \partial_z \Phi \cdot \partial_z \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - z^2 & 0 \\ 0 & 1/(1 - z^2) \end{pmatrix}$$

Daher ist  $\Phi$  flächentreu, aber nicht winkeltreu (auch nicht längentreu). Intrinsisch gesehen ist der Zylinder  $Z$  flach, die Sphäre  $S$  gekrümmt. Keine Abbildung  $Z \rightarrow S$  ist sowohl flächen- als auch winkeltreu.

## Mercators Zylinderprojektion ist winkeltreu.

**Aufgabe:** (Mercator–Projektion) Wir projizieren den unendlichen Zylinder  $Z' = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 \}$  zentral auf die Sphere  $S$ .

- (1) Formulieren Sie diese Abbildung  $\Phi : D = [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \rightarrow S$ .
- (2) Ist  $\Phi$  flächentreu? oder winkeltreu? oder gar längentreu?

**Lösung:** (1) Wir bestimmen Parametrisierung und Tangentialvektoren:

$$\Phi(\varphi, z) = (\cos \varphi, \sin \varphi, z) / \sqrt{1 + z^2}$$

$$\partial_\varphi \Phi(\varphi, z) = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) / \sqrt{1 + z^2}$$

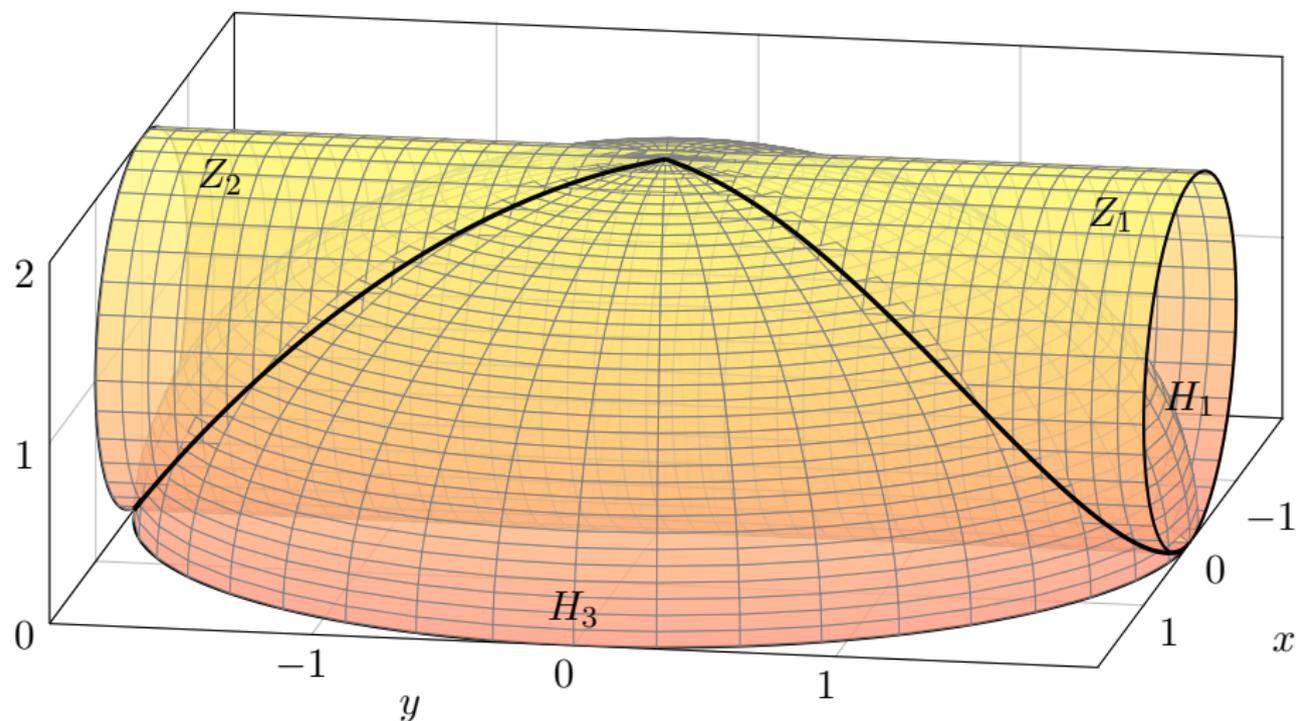
$$\partial_z \Phi(\varphi, z) = (-z \cos \varphi, -z \sin \varphi, 1) / (1 + z^2)^{3/2}$$

- (2) Die erste Fundamentalform beschreibt die geometrische Verzerrung:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_\varphi \Phi \cdot \partial_\varphi \Phi & \partial_z \Phi \cdot \partial_\varphi \Phi \\ \partial_\varphi \Phi \cdot \partial_z \Phi & \partial_z \Phi \cdot \partial_z \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/(1 + z^2) & 0 \\ 0 & 1/(1 + z^2) \end{pmatrix}$$

Daher ist  $\Phi$  winkeltreu, aber nicht flächentreu (auch nicht längentreu). Nahe des Äquators ist  $\Phi$  nahezu isometrisch, also auch flächentreu. Nahe den Polen wird die Flächenverzerrung dramatisch (siehe Skizze).

## Das Viviani-Fenster



Die vorigen Aufgaben üben die Schritte von Un/Gleichungen zum Bild und zur Parametrisierung. In dieser Aufgabe beginnen wir mit dem Bild. Sie ist eine Variante einer architektonisch-geometrischen Fragestellung, die Vincenzo Viviani, ein Schüler Galileos, 1692 vorschlug und löste.

# Das Viviani–Fenster

- Aufgabe:** (1) Beschreiben Sie gemäß obiger Skizze den Zylinder  $Z$  und die Hemisphere  $H$  in  $\mathbb{R}^3$  durch geeignete Un/Gleichungen.
- (2) Parametrisieren Sie die Schnittkurve  $\Gamma = Z \cap H$  und berechnen Sie ihre Länge  $\text{vol}_1(\Gamma)$  soweit möglich (bis zu einem elliptischen Integral).
- (3) Die Kurve  $\Gamma$  zerlegt die Fläche  $Z$ : Parametrisieren Sie jedes der drei Flächenstücke  $Z_1, Z_2, Z_3$  und berechnen Sie den Flächeninhalt  $\text{vol}_2(Z_i)$ . Erstes Wunder: Der Flächeninhalt  $\text{vol}_2(Z_3)$  ist rational, sogar ganzzahlig.
- (4) Berechnen Sie ebenso  $H_1$  (in  $x$ - $z$ -Polarkoordinaten) und damit  $H_3$ . Zweites Wunder: Es gilt  $\text{vol}_2(Z_1) = \text{vol}_2(H_1)$  und  $\text{vol}_2(Z_3) = 2 \text{vol}_2(H_3)$ .
- (5) Das zweite Wunder folgt geometrisch aus der Lambert–Projektion.
- 😊 Geometrisches Verständnis überprüft bzw. ersetzt die Rechnung.

**Lösung:** (1) Der vorgelegten Skizze entnehmen wir:

$$Z = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2 \leq y \leq 2, x^2 + (z - 1)^2 = 1 \}$$

$$H = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0 \}$$

(2) Wir wählen  $z = 1 + \cos(t)$  und  $x = \sin(t)$  auf  $Z$ . Auf  $H$  erhalten wir:

$$y^2 = 4 - x^2 - z^2 = 2 - 2 \cos(t) = 4 \sin^2(t/2)$$

# Das Viviani–Fenster

Der Weg  $\gamma: [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\gamma(t) = (\sin(t), 2 \sin(t/2), 1 + \cos(t))$  durchläuft  $\Gamma = Z \cap H$  einmal komplett, tatsächlich beide Schleifen.

$$\gamma'(t) = (\cos(t), \cos(t/2), -\sin(t))$$

$$|\gamma'(t)|^2 = \cos(t)^2 + \cos(t/2)^2 + \sin(t)^2 = 1 + \cos(t/2)^2$$

$$\text{vol}_1(\Gamma) = \int_{t=0}^{4\pi} \sqrt{1 + \cos(t/2)^2} dt \quad \approx 15.2808$$

Dieses elliptische Integral können wir leider nur numerisch auswerten. Plausibilitätscheck: Schraubenlinie (kürzester Weg)  $4\sqrt{\pi^2 + 2^2} \approx 14.897$ .

(3) Wir berechnen den Flächeninhalt des rechten Flächenstücks:

$$Z_1 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + (z - 1)^2 = 1, \sqrt{4 - x^2 - z^2} \leq y \leq 2 \}$$

$$\text{vol}_2(Z_1) = \int_{t=0}^{2\pi} 2 - 2 \sin(t/2) dt = \left[ 2t + 4 \cos(t/2) \right]_{t=0}^{2\pi}$$

$$= 4\pi - 4 - 4 = 4\pi - 8 \approx 4.566 \quad (\text{plausibel nach Skizze})$$

Ebenso erhalten wir für das linke und mittlere Flächenstück  $Z_2$  und  $Z_3$  die Flächeninhalte  $\text{vol}_2(Z_2) = 4(\pi - 2)$  und  $\text{vol}_2(Z_3) = 16$ . Rational!

(4) Wir berechnen den Flächeninhalt des rechten Flächenstücks:

$$H_1 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + (z - 1)^2 \leq 1, x^2 + y^2 + z^2 = 4 \}$$

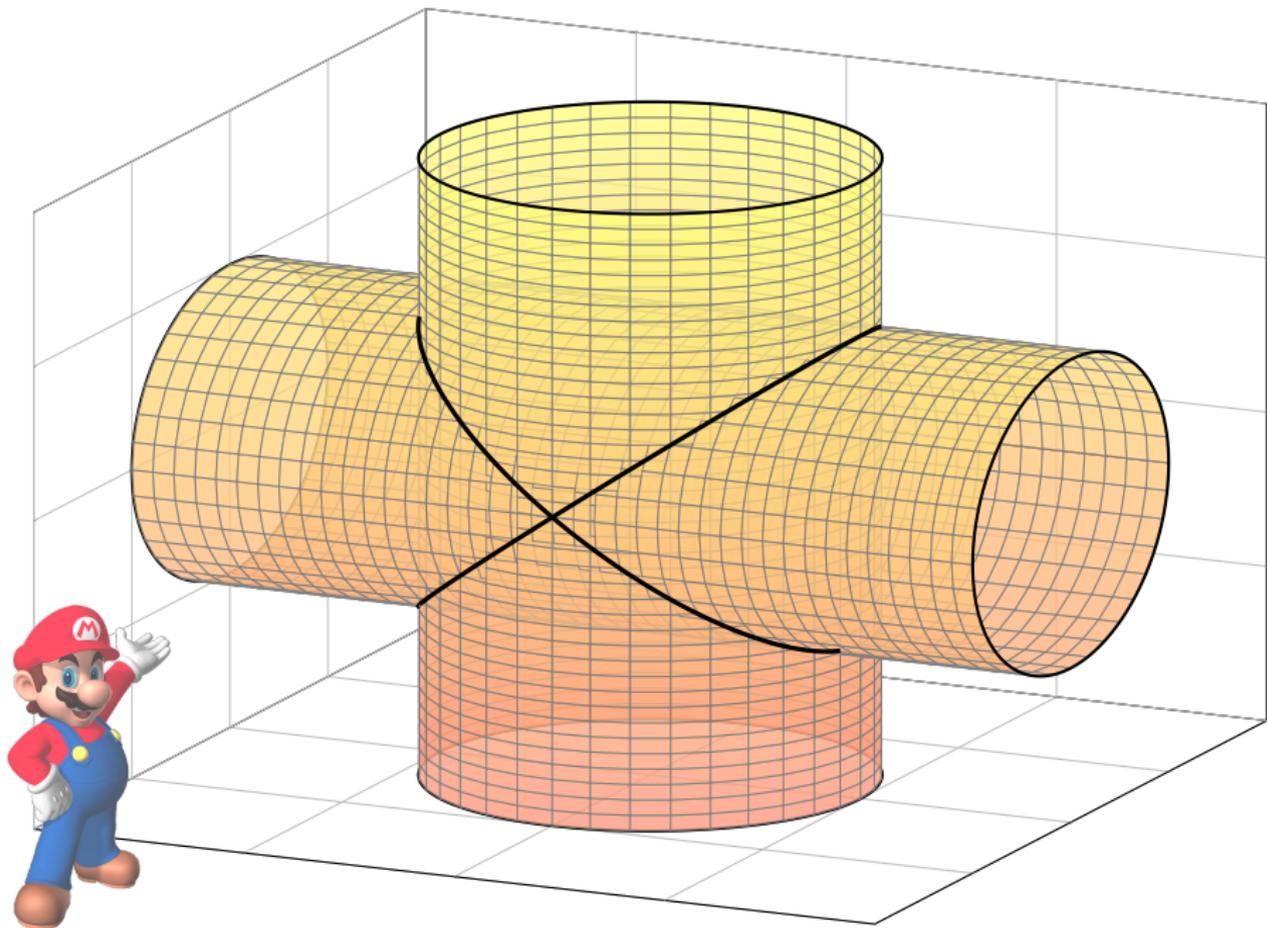
$$\Phi \begin{pmatrix} \varphi \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \sqrt{4 - \rho^2} \\ \rho \sin \varphi \end{pmatrix} \quad \text{auf} \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} \varphi \\ \rho \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq \rho \leq 2 \sin \varphi \end{array} \right\}$$

$$\partial_\varphi \Phi \times \partial_\rho \Phi = \begin{pmatrix} -\rho \sin \varphi \\ 0 \\ +\rho \cos \varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ -\rho / \sqrt{4 - \rho^2} \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho^2 / \sqrt{4 - \rho^2} \cos \varphi \\ \rho \\ \rho^2 / \sqrt{4 - \rho^2} \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(H_1) &= \int_D |\partial_\varphi \Phi \times \partial_\rho \Phi| \, d(\varphi, \rho) = \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\rho=0}^{2 \sin \varphi} \frac{2\rho}{\sqrt{4 - \rho^2}} \, d\rho \, d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{\pi} \left[ -2\sqrt{4 - \rho^2} \right]_{\rho=0}^{2 \sin \varphi} \, d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\pi} 4 - 4|\cos \varphi| \, d\varphi \\ &= 8 \int_{\varphi=0}^{\pi/2} 1 - \cos \varphi \, d\varphi = 8 \left[ \varphi - \sin \varphi \right]_{\varphi=0}^{\pi/2} = 4\pi - 8 \approx 4.566 \end{aligned}$$

Aus  $\text{vol}_2(H) = 8\pi = 2 \text{vol}_2(H_1) + 2 \text{vol}_2(H_3)$  folgt  $\text{vol}_2(H_3) = 8$ . Rational!

# Durchdringung zweier Zylinder



## Durchdringung zweier Zylinder

**Aufgabe:** (1) Skizzieren Sie die beiden Zylinder

$$Z_1 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, -2 \leq z \leq 2 \},$$

$$Z_2 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \leq 1, -2 \leq y \leq 2 \}.$$

(2) Berechnen Sie das Volumen der Schnittmenge  $K = Z_1 \cap Z_2$ .  
Beschreiben Sie  $K$  hierzu möglichst explizit als Normalbereich.

(3) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Randfläche  $\partial K$ .  
Parametrisieren Sie  $\partial K$  hierzu stückweise als Graph.

(4) In welchen Punkten ist die betrachtete Randfläche  $\partial K$  nicht glatt?  
Geometrisch: Wo erlaubt  $\partial K$  keine eindeutige Tangentialebene?

(5) Welche Form haben die beiden Schnittkurven  $\partial Z_1 \cap \partial Z_2$ ?  
Finden Sie implizite Gleichungen bzw. explizite Parametrisierungen.

😊 Dieser Durchdringungskörper ist nicht leicht zu visualisieren.  
Mit unseren Methoden gelingt die Rechnung dennoch leicht!

Das ist ein halbwegs realistisches Beispiel eines Werkstücks:  
nicht ganz trivial aber noch gut mit Stift und Papier zu berechnen.

## Durchdringung zweier Zylinder

**Lösung:** (1) Die Skizze gibt einen Überblick, was zu beachten ist.

(2) Für  $K$  müssen wir nur  $x^2 + y^2 \leq 1$  und  $x^2 + z^2 \leq 1$  erfüllen, also:

$$-1 \leq x \leq 1, \quad -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, \quad -\sqrt{1-x^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2}$$

Hieraus erhalten wir das Volumen ganz leicht als iteriertes Integral:

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(K) &= \int_K 1 \, d(x, y, z) = \int_{x=-1}^1 \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{z=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_{x=-1}^1 \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2\sqrt{1-x^2} \, dy \, dx = \int_{x=-1}^1 4(1-x^2) \, dx \\ &= \left[ 4x - \frac{4}{3}x^3 \right]_{x=-1}^1 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \quad (\text{rational, ohne } \pi) \end{aligned}$$

Plausibilitätscheck: Das ist größer als das Kugelvolumen  $\frac{4}{3}\pi r^3 \approx 4.189$ .

(3) Wir parametrisieren das obere der vier Flächenstücke als Graph:

$$\Phi: \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \right\} = D \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3, \quad \Phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1-x^2} \end{pmatrix}$$

## Durchdringung zweier Zylinder

Zur Flachenparametrisierung  $\Phi$  berechnen wir den Normalenvektor:

$$\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -x/\sqrt{1-x^2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/\sqrt{1-x^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Seine Länge (euklidische Norm) ist das Flächenelement:

$$|\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi|^2 = \frac{x^2}{1-x^2} + 0^2 + 1^2 = \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{1-x^2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

Den Flächeninhalt von  $S$  erhalten wir hieraus durch Integration:

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(S) &= \int_D |\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi| \, d(x, y) = \int_{x=-1}^1 \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dy \, dx \\ &= \int_{x=-1}^1 2 \, dx = 4 \quad \text{Am Ende geht's erraschend leicht!} \end{aligned}$$

Dank Symmetrie erhalten wir schließlich  $\text{vol}_2(\partial K) = 4 \text{vol}_2(S) = 16$ .

Plausibilitätscheck: Das ist größer als die Kugelfläche  $4\pi r^2 \approx 12.567$ .