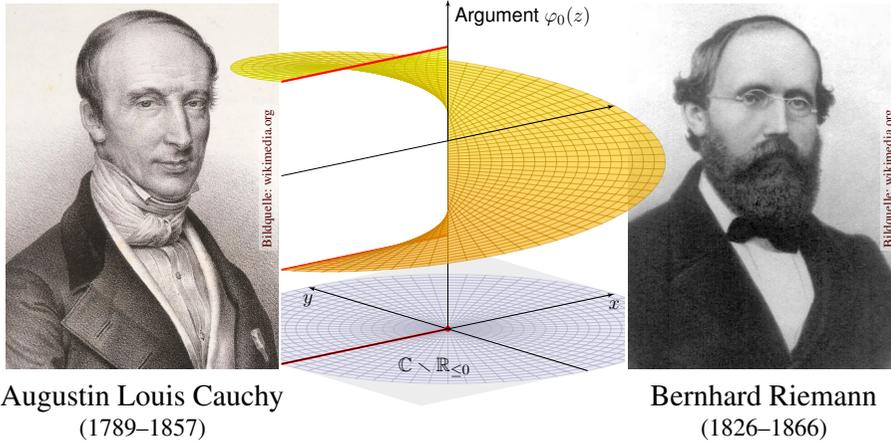


## Kapitel F

## Integralsätze für komplexe Funktionen



Augustin Louis Cauchy  
(1789–1857)

Bernhard Riemann  
(1826–1866)

## Inhalt dieses Kapitels F

- 1 Crashkurs zum Residuensatz
- 2 Komplexe Funktionen und Potenzreihen
  - Die Cauchy–Riemann–Differentialgleichungen
  - Exponentialfunktion und Zweige des Logarithmus
  - Laurent–Reihen, Polstellen und Residuen
- 3 Die Integralformel von Cauchy
  - Integralsatz und Integralformel von Cauchy
  - Fundamentalsatz der Algebra und Nullstellensuche
  - Entwicklung in Potenzreihen und in Laurent–Reihen
- 4 Der Residuensatz und Anwendungen
  - Das Residuum einer isolierten Singularität
  - Der Residuensatz für Kompakta
  - Anwendung auf reelle Integrale
- 5 Fazit: Residuenkalkül
  - Verständnisfragen und Vertiefungen
  - Anwendungsbeispiele zum Residuenkalkül

## Motivation und Zielsetzung

F003  
Überblick

Für  $f: \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  gelten die Integralsätze E11 von Green und Gauß:

$$\int_D \operatorname{rot}(f) d(x, y) = \int_{\partial D} f \cdot ds, \quad \int_D \operatorname{div}(f) d(x, y) = \int_{\partial D} f \times ds$$

Diese wenden wir nun auf komplexe Funktionen  $f: \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  an. Erfreulicherweise gewinnen wir mit komplexen Integralen auch reelle:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ux)}{x} dx = \pi \operatorname{sign}(u) \quad \text{für alle } u \in \mathbb{R},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ux)}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-|u|} \quad \text{für alle } u \in \mathbb{R},$$

$$\int_{t=0}^{\pi} \frac{1}{a + \cos t} dt = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}} \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}_{>1}.$$

Solche Integrale sind mit reellen Methoden nur schwer zu berechnen. Mit dem Residuensatz für komplexe Funktionen gelingen sie leicht!

Diese Technik wird oft angewendet, auch im Verlauf dieser Vorlesung, insbesondere für Fourier– und Laplace–Integrale (Kapitel K und L).

## Vorgehensweise

F004  
Überblick

Wir betrachten die komplexe Zahlenebene  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$  und hierauf komplexe Funktionen  $f: \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , die wir entlang von Wegen  $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$  integrieren gemäß  $\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$ .

Ebenso übertragen wir den Begriff der Differenzierbarkeit aus dem Reellen ins Komplexe und erleben einige schöne Überraschungen! Zur Orientierung skizziere ich zu Beginn als Crashkurs die wichtigsten Begriffe und typische Anwendungen zur Berechnung (reeller) Integrale.

Der Höhepunkt sind Cauchys Residuensatz und seine Anwendungen, die für (komplexe und reelle) Integrale neue Rechentechniken eröffnen. Auf dem Weg durch die *komplexe Ebene* gewinnen wir *reelle Integrale!*

Jacques Hadamard (1865–1963) sagte treffend: „Der kürzeste und beste Weg zwischen zwei reellen Wahrheiten führt oft durchs Imaginäre.“

(Im Original so schön: „La voie la plus courte et la meilleure entre deux vérités du domaine réel passe souvent par le domaine imaginaire.“)

📖 Meyberg–Vachenauer: *Höhere Mathematik*, Band 2. Zur Vertiefung Jänich: *Funktionentheorie* und Remmert: *Funktionentheorie*.

Komplexe Funktionen gehören zum mathematischen Grundwerkzeug. In diesem Kapitel werden wir damit phantastische Integrale berechnen. Auch darüber hinaus begegnen sie Ihnen häufig und nützen überall.

Die vorsichtige Ingenieur:in fragt sich: Lohnt sich diese Investition? Ja! Ich greife vor und nenne zwei wunderschöne klassische Anwendungen.

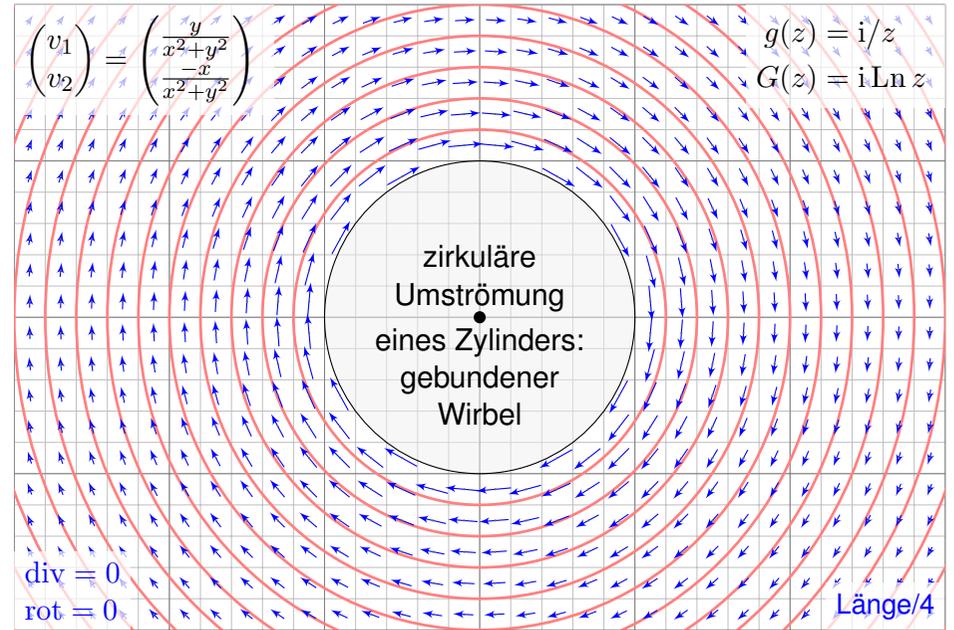
Wir können jede holomorphe Funktion  $f(x + iy) = u(x, y) - iv(x, y)$  als ein Vektorfeld  $(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\text{div}(u, v) = \text{rot}(u, v) = 0$  betrachten.

◆ Satz Q1A: holomorphe Lösungen der Maxwell-Gleichung

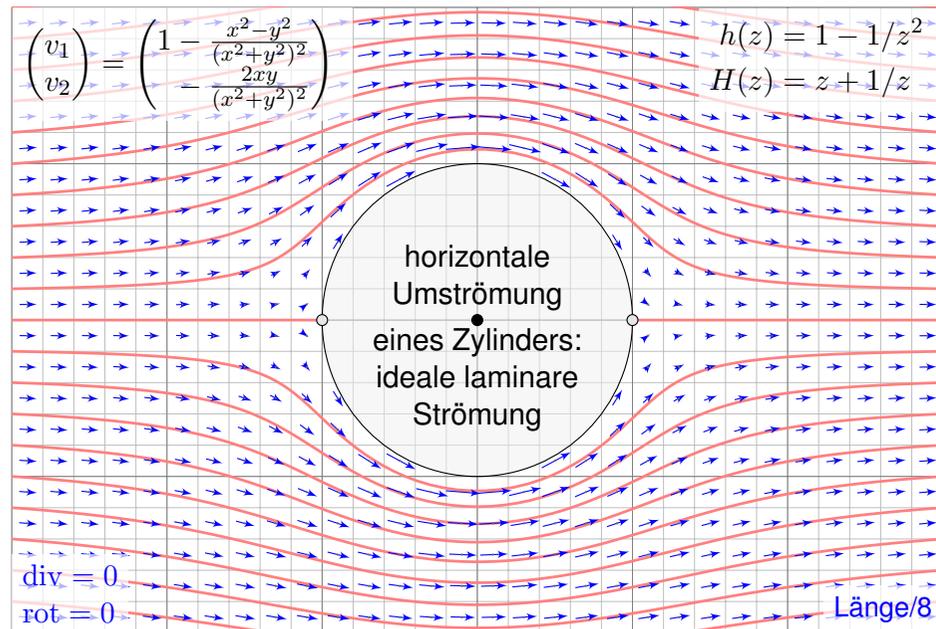
Jedes ebene statische  $E$ -Feld  $\vec{E} : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  ohne Quellen entspricht einer holomorphen Funktion  $f = E_1 - iE_2 : \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  und umgekehrt.

◆ Satz Q1B: holomorphe Lösungen der Navier-Stokes-Gleichung

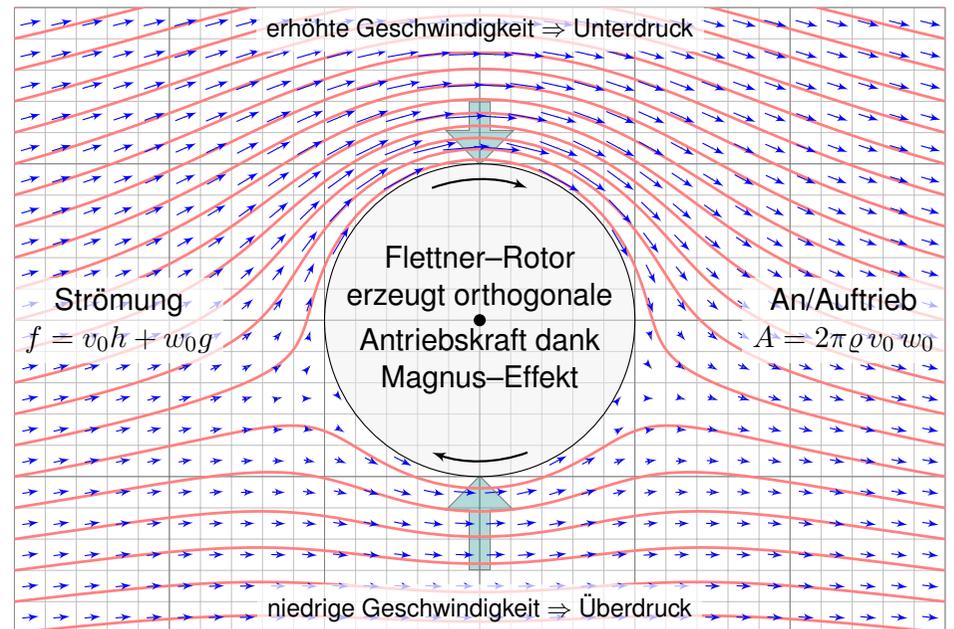
Jede ebene stationäre Strömung  $v = (v_1, v_2) : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  konstanter Dichte, ohne Wirbel, ohne Reibung und ohne äußere Kräfte entspricht einer holomorphen Funktion  $f = v_1 - iv_2 : \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  und umgekehrt.



☺ Holomorphe Funktionen beschreiben Strömungen: Wirbelfeld.



☺ Einfaches und intuitives Modell, exakte Lösung dank Holomorphie!



☺ So berechneten Kutta und Joukowski die dynamische Auftriebskraft!

📖 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 1, §1.7.  
Auf der Menge  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$  definieren wir die **Addition**  $+$  :  $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  und die komplexe **Multiplikation**  $\cdot$  :  $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$(x, y) + (u, v) := (x + u, y + v),$$

$$(x, y) \cdot (u, v) := (xu - yv, xv + yu).$$

Man prüft nach, dass  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  ein **Körper** ist. Additiv neutral ist  $(0, 0)$ , multiplikativ neutral ist  $(1, 0)$ , multiplikative Inversion ist gegeben durch

$$(x, y) \cdot \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = (1, 0).$$

Für  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt  $(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$  und  $(a, 0) \cdot (b, 0) = (a \cdot b, 0)$ . Wir können und werden daher den Körper  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  der reellen Zahlen mittels  $a \mapsto (a, 0)$  identifizieren mit dem Teilkörper  $\mathbb{R} \times \{0\}$  in  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ . Wir schreiben kurz  $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$  und betrachten  $\mathbb{C}$  als **Körpererweiterung**.

😊 Geometrisch stellen wir  $\mathbb{C}$  als komplexe Zahlenebene dar. Addition ist die für Vektoren übliche. Die Multiplikation ist eine Drehstreckung.

Die Gleichung  $z^2 + 1 = 0$  ist in  $\mathbb{R}$  nicht lösbar, in  $\mathbb{C}$  hingegen schon: Die komplexe Zahl  $i = (0, 1)$  hat die ersehnte Eigenschaft  $i^2 = (-1, 0)$ . Jede komplexe Zahl  $z \in \mathbb{C}$  schreibt sich eindeutig  $z = (x, y) = x + iy$ . Wir nennen  $\operatorname{Re}(z) := x$  den **Realteil** und  $\operatorname{Im}(z) := y$  den **Imaginärteil**. Die zu  $z = x + iy$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$  **komplex konjugierte Zahl** ist  $\bar{z} = x - iy$ . Es gilt  $\overline{w + z} = \bar{w} + \bar{z}$  und  $\overline{w \cdot z} = \bar{w} \cdot \bar{z}$ , sowie  $z \bar{z} = x^2 + y^2$  und somit

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \bar{z}}, \quad \text{das heißt} \quad \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Die Länge  $|z| := \sqrt{z \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$  heißt **Betrag** oder **Norm** von  $z$ . Das **komplexe Skalarprodukt** von  $w = u + iv$  und  $z = x + iy$  ist

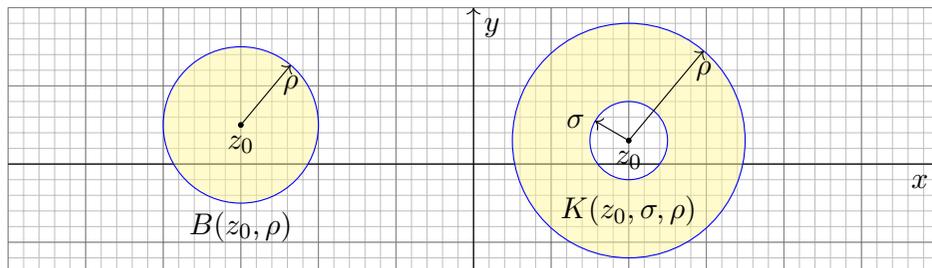
$$\langle w \mid z \rangle := \bar{w} z = (u - iv)(x + iy) = (ux + vy) + i(uy - vx)$$

Realteil ist das reelle Skalarprodukt, Imaginärteil ist das Kreuzprodukt:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ux + vy, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = uy - vx.$$

😊 Algebraische Aussagen und Rechnungen in  $\mathbb{C}$  entsprechen so geometrischen Aussagen und Rechnungen in der Ebene  $\mathbb{R}^2$ . [E007](#)

Wir identifizieren  $\mathbb{C} = \{ x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \}$  mit  $\mathbb{R}^2 = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$ . Der Betrag  $|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$  entspricht der euklidischen Norm. Der Abstand  $|w - z|$  entspricht somit dem euklidischen Abstand.



Zu jedem Punkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  und Radien  $0 \leq \sigma < \rho \leq \infty$  in  $\mathbb{R}$  betrachten wir die **offene Kreisscheibe**  $B(z_0, \rho) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \rho \}$  sowie den **offenen Kreisring**  $K(z_0, \sigma, \rho) = \{ z \in \mathbb{C} \mid \sigma < |z - z_0| < \rho \}$ .

Beispiele: Für  $\rho = \infty$  ist  $B(z_0, \infty) = \mathbb{C}$  die gesamte Ebene; für  $\rho = 0$  ist  $B(z_0, 0) = \emptyset$  leer. Ebenso für  $\sigma \geq \rho$  ist  $K(z_0, \sigma, \rho) = \emptyset$  leer. Für  $0 = \sigma < \rho$  ist  $K(z_0, 0, \rho) = B(z_0, \rho) \setminus \{z_0\}$  die Kreisscheibe ohne den Mittelpunkt  $z_0$ . Insbesondere gilt  $K(z_0, 0, \infty) = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ .

Eine Teilmenge  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  heißt **offen**, wenn zu jedem ihrer Punkte  $z_0 \in \Omega$  ein positiver Radius  $\varepsilon > 0$  existiert, sodass  $B(z_0, \varepsilon) \subseteq \Omega$  gilt. Das heißt anschaulich: Um jeden Punkt  $z_0 \in \Omega$  ist noch ein bisschen Platz in  $\Omega$ .

Ein **Gebiet** ist eine offene und zusammenhängende Teilmenge  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ : Je zwei Punkte  $p, q \in \Omega$  lassen sich durch einen Weg in  $\Omega$  verbinden. Wichtige Beispiele für Gebiete sind offene Kreisscheiben und Kreisinge.

Eine Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  komplexer Zahlen  $z_n \in \mathbb{C}$  **konvergiert** gegen den Grenzwert  $z \in \mathbb{C}$ , wenn  $|z_n - z| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  gilt. Für  $z_n = x_n + iy_n$  und  $z = x + iy$  ist dies gleichbedeutend mit  $x_n \rightarrow x$  und  $y_n \rightarrow y$ .

Eine komplexe Funktion  $f : \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  ordnet jeder komplexen Zahl  $z \in \Omega$  eine komplexe Zahl  $f(z) \in \mathbb{C}$  zu. Wir sagen,  $f$  ist **stetig** in  $z$ , wenn für jede Folge  $z_n \rightarrow z$  in  $\Omega$  auch  $f(z_n) \rightarrow f(z)$  in  $\mathbb{C}$  gilt.

Wir zerlegen  $f$  in **Realteil**  $u = \operatorname{Re}(f)$  und **Imaginärteil**  $v = \operatorname{Im}(f)$ . Für die Funktionen  $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  gilt  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Die Stetigkeit von  $f$  ist dann äquivalent zur Stetigkeit von  $u$  und  $v$ .

**Definition F1A: komplexes Wegintegral**

Sei  $f: \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und  $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$  stückweise stetig differenzierbar. Das **komplexe Wegintegral** von  $f$  entlang  $\gamma$  ist

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_{t=a}^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Einfache Merkregel zur Schreibweise: Für  $z = \gamma(t)$  gilt  $dz = \gamma'(t) dt$ .

Der Integrand  $g(t) = f(\gamma(t)) \gamma'(t)$  ist eine stetige Funktion  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ . Diese zerlegen wir gemäß  $g = g_1 + ig_2$  mit  $g_1, g_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  in Realteil  $g_1 = \text{Re}(g)$  und Imaginärteil  $g_2 = \text{Im}(g)$  und definieren das Integral

$$\int_{t=a}^b g(t) dt := \int_{t=a}^b g_1(t) dt + i \int_{t=a}^b g_2(t) dt$$

😊 Jedes komplexe Integral fasst also zwei reelle Integrale zusammen. Die komplexe Schreibweise ist sehr effizient, bequem und übersichtlich.

Es lohnt, diese beiden reellen Integrale noch genauer anzuschauen... Wir integrieren  $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$  längs  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ , also:

$$f(\gamma(t)) \gamma'(t) = (u + iv)(x' + iy') = (ux' - vy') + i(uy' + vx')$$

Das komplexe Wegintegral fasst zwei reelle Wegintegrale zusammen, das Arbeitsintegral und das Flussintegral des Vektorfeldes  $\vec{f} = (u, -v)$ :

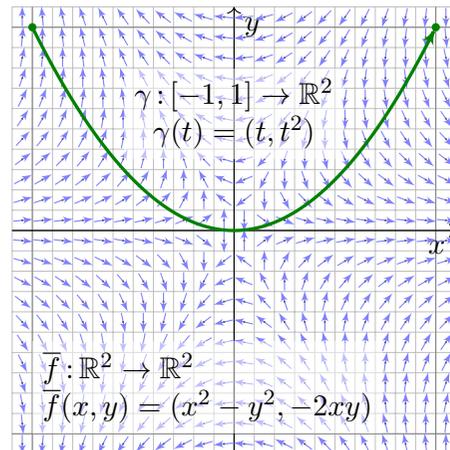
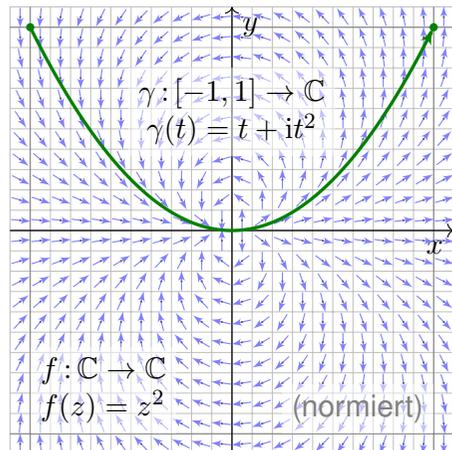
$$\text{Re} \int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b ux' - vy' dt = \int_{\gamma} (u, -v) \cdot (x', y') dt = \int_{\gamma} (u, -v) \cdot d\gamma \quad \text{Arbeitsintegral!}$$

$$\text{Im} \int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b uy' + vx' dt = \int_{\gamma} (u, -v) \times (x', y') dt = \int_{\gamma} (u, -v) \times d\gamma \quad \text{Flussintegral!}$$

⚠️ Man beachte das Vorzeichen: Es ist unschön, aber unvermeidlich. Es passt zum oben erklärten komplexen Skalarprodukt  $\langle w | z \rangle = \bar{w} \cdot z$ .

😊 Wir werden hierauf den Integralsatz von Green / Gauß anwenden und ernten den Integralsatz von Cauchy F3A für holomorphe Funktionen.

**Beispiel eines komplexen Wegintegrals**



- Aufgabe:** (1) Berechnen Sie das komplexe Wegintegral  $\int_{\gamma} f(z) dz$  von  $f(z) = z^2$  längs des Weges  $\gamma: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}: t \mapsto \gamma(t) = t + it^2$ . Ist das Ergebnis plausibel / kompatibel mit der obigen Skizze?  
 (2) Was erhalten Sie für andere Wege mit denselben Endpunkten?  
 (3) Gilt für  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  allgemein  $\int_{\gamma} F'(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$ ?

**Beispiel eines komplexen Wegintegrals**

**Lösung:** (1) Wir integrieren  $f(x + iy) = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$  entlang des Weges  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$  mit  $x(t) = t$  und  $y(t) = t^2$ :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{-1}^1 f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_{-1}^1 [t^2 - 5t^4] + i[4t^3 - 2t^5] dt \\ &= \left[ \frac{1}{3}t^3 - t^5 + it^4 + \frac{i}{3}t^6 \right]_{t=-1}^1 = -\frac{4}{3} \quad (\text{Vorzeichen ist plausibel!}) \end{aligned}$$

(2) Probieren Sie andere Wege aus, Sie erhalten dasselbe! Warum? Die Stammfunktion  $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto z^3/3$  erfüllt  $F'(z) = z^2$  (F2A), also

$$\int_{\gamma} z^2 dz = \left[ \frac{z^3}{3} \right]_{z=i-1}^{z=i+1} = \frac{(i+1)^3}{3} - \frac{(i-1)^3}{3} = \frac{-2+2i}{3} - \frac{2+2i}{3} = -\frac{4}{3}$$

für jeden Weg  $\gamma: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  von  $\gamma(-1) = i - 1$  nach  $\gamma(1) = i + 1$ .

(3) Dank Kettenregel und HDI rechnen wir dies auch hier leicht nach:

$$\int_{\gamma} F'(z) dz = \int_{t=a}^b F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_{t=a}^b [F(\gamma(t))]' dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

😊 Wir nutzen die komplexe Ableitung F2A und ihre Rechenregeln F2B!

**Aufgabe:** (1) Integrieren Sie  $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto f(z) = z^k$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  entlang der Kreislinie  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}: t \mapsto \gamma(t) = r e^{it}$  mit Radius  $r > 0$ .

**Lösung:** (0) Vorbereitung: Für jede ganze Zahl  $a \in \mathbb{Z}$  berechnen wir

$$\int_{t=0}^{2\pi} e^{iat} dt \stackrel{\text{Def}}{\stackrel{\text{Lin}}{=}} \int_{t=0}^{2\pi} \cos(at) dt + i \int_{t=0}^{2\pi} \sin(at) dt \stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{BII}}{=}} \begin{cases} 0 & \text{für } a \neq 0, \\ 2\pi & \text{für } a = 0. \end{cases}$$

😊 In der Fourier-Theorie entspricht dies der Orthonormalität. [I125]

(1) Wir nutzen die Definition F1A des komplexen Wegintegrals:

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} z^k dz &\stackrel{\text{Def}}{=} \oint_{\gamma} f(z) dz \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{t=0}^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{t=0}^{2\pi} (r e^{it})^k \cdot (r e^{it})' dt \\ &= \int_{t=0}^{2\pi} r^k e^{ikt} \cdot r i e^{it} dt \stackrel{\text{Lin}}{=} i r^{k+1} \int_{t=0}^{2\pi} e^{i(k+1)t} dt \stackrel{\text{HDI}}{\stackrel{\text{(0)}}{=}} \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq -1, \\ 2\pi i & \text{für } k = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

😊 Nur  $z^{-1}$  liefert einen Beitrag! Plausibel: Für jedes  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$  hat  $f(z) = z^k$  die Stammfunktion  $z^{k+1}/(k+1)$ : Das Wegintegral hängt daher nur von Start und Ziel ab, geschlossene Wegintegrale sind daher Null!

**Satz F1B:** die fundamentalen Integrale der Funktionentheorie  
Um den Punkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  und mit Radius  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  betrachten wir den Weg

$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}: t \mapsto \gamma(t) = z_0 + r e^{it}.$$

(1) Für jede ganze Zahl  $k \in \mathbb{Z}$  gilt die **Residuumsformel**:

$$\oint_{\gamma} (z - z_0)^k dz = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq -1, \\ 2\pi i & \text{für } k = -1. \end{cases}$$

(2) Für jedes **Laurent-Polynom**  $f(z) = \sum_{k=-n}^n a_k (z - z_0)^k$  folgt:

$$\oint_{\gamma} \left[ \sum_{k=-n}^n a_k (z - z_0)^k \right] dz = 2\pi i a_{-1}$$

(3) Dasselbe gilt für jede konvergente **Laurent-Reihe**, also  $n \rightarrow \infty$ , denn wir dürfen Integral und Grenzwert vertauschen dank Satz D1A.

**Aufgabe:** Rechnen Sie diese grundlegenden Integrale sorgsam nach!

**Lösung:** (1) Wir verschieben  $\gamma(t) = z_0 + r e^{it}$  zurück zu  $\delta(t) = r e^{it}$ :

$$\oint_{\gamma} (z - z_0)^k dz = \oint_{\delta} z^k dz = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq -1, \\ 2\pi i & \text{für } k = -1. \end{cases}$$

(2) Wir nutzen die Linearität des Integrals und erhalten:

$$\oint_{\gamma} \left[ \sum_{k=-n}^n a_k (z - z_0)^k \right] dz \stackrel{\text{Lin}}{\stackrel{\text{A3L}}{=}} \sum_{k=-n}^n a_k \left[ \oint_{\gamma} (z - z_0)^k dz \right] \stackrel{\text{Res}}{\stackrel{\text{(1)}}{=}} 2\pi i \underbrace{a_{-1}}_{\text{Residuum}}$$

😊 Die Wegintegrale  $\oint_{\gamma} (z - z_0)^k dz$  haben wir zuvor in (1) ausgerechnet: Für  $k \neq -1$  existiert eine Stammfunktion, daher  $\oint_{\gamma} (z - z_0)^k dz = 0$ .

😊 Beim Wegintegral des Laurent-Polynoms  $f(z) = \sum_{k=-n}^n a_k (z - z_0)^k$  um den Punkt  $z_0$  zählt nur der Koeffizient mit Hausnummer  $-1$ .

😊 Beim Wegintegral von  $f$  um  $z_0$  bleibt nur der Term  $2\pi i a_{-1}$  zurück. Deshalb heißt  $a_{-1}$  das **Residuum** (das 'Zurückbleibende') von  $f$  in  $z_0$ .

(3) Wir dürfen Integral und Grenzwert  $n \rightarrow \infty$  vertauschen (Satz D1A).

**Aufgabe:** Gegeben sei ein geschlossener Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  in komplexen Polarkoordinaten  $\gamma(t) = r(t) e^{i\varphi(t)}$ . Zeigen und erklären Sie:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} z^{-1} dz = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{2\pi} = \text{Umlaufzahl von } \gamma \text{ um } 0$$

**Lösung:** Wir nutzen die Polarkoordinaten  $\gamma(t) = r(t) e^{i\varphi(t)}$  und rechnen:

$$\oint_{\gamma} z^{-1} dz = \int_{t=a}^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt = \int_{t=a}^b \frac{r'(t)}{r(t)} + i\varphi'(t) dt = \left[ \ln r(t) \right]_a^b + i \left[ \varphi(t) \right]_a^b$$

😊 Der Realteil verschwindet für geschlossene Wege,  $\gamma(a) = \gamma(b)$ . Der Imaginärteil zählt die Umläufe von  $\gamma$  um den Nullpunkt. [E333]

Zum Vergleich in kartesischen Koordinaten  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ :

$$\begin{aligned} \text{Im} \oint_{\gamma} z^{-1} dz &= \int_{t=a}^b \frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2} dt = \int_{t=a}^b \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} dt \\ &= \int_{t=a}^b \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} dt \end{aligned}$$

😊 Dieses Arbeits- und Flussintegral kennen wir bereits gut! [E317]

$B(z_0, \rho) := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \rho \}$   
 $f'(z_0) = \lim_{\substack{w \rightarrow 0 \\ w \neq 0}} \frac{f(z_0 + w) - f(z_0)}{w}$   
 $K(z_0, \sigma, \rho) := \{ z \in \mathbb{C} \mid \sigma < |z - z_0| < \rho \}$

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen. Eine komplexe Funktion  $f = u + iv : \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **holomorph**, wenn sie komplex differenzierbar ist und  $f' : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  stetig.

⇔ **Cauchy-Riemann-Gleichungen**  $\partial_x u = \partial_y v$  und  $\partial_x v = -\partial_y u$ .

⇔ Die **Strömung**  $\vec{f} = (u, -v) : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  erfüllt  $\operatorname{div} \vec{f} = \operatorname{rot} \vec{f} = 0$ .

⇔ Auf jeder Kreisscheibe  $B(z_0, \rho) \subseteq \Omega$  gleicht  $f$  einer **Potenzreihe**.

⇔ Auf jedem Kreisring  $K(z_0, \sigma, \rho) \subseteq \Omega$  gleicht  $f$  einer **Laurent-Reihe**:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit} \quad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

Der Koeffizient  $\operatorname{res}_{z_0}(f) := a_{-1}$  ist das **Residuum** von  $f$  im Punkt  $z_0$ .

Alle analytischen Funktionen sind holomorph. Erinnerung:  $f$  analytisch heißt, dass sich  $f$  lokal als konvergente Potenzreihen darstellen lässt.

Erstaunlicherweise gilt die Umkehrung, also holomorph ⇔ analytisch!

Insbesondere: einmal komplex diff'bar impliziert beliebig oft diff'bar!

Ist  $f : \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph auf einer Kreisscheibe  $B(z_0, \rho) \subseteq \Omega$ , so lässt sie sich dort als konvergente **Potenzreihe** darstellen (Satz F3E):

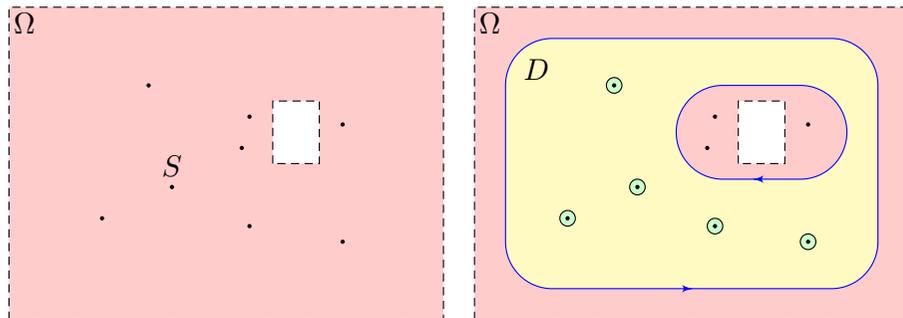
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit} \quad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz.$$

Wir können ebenso auch Singularitäten (insb. Polstellen) behandeln:

Ist  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph auf einem Kreisring  $K(z_0, \sigma, \rho) \subseteq \Omega$ , so lässt sie sich dort als konvergente **Laurent-Reihe** darstellen (Satz F3F):

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (z - z_0)^{-k}$$

Dies ist die Summe einer Potenzreihe in  $u = (z - z_0)$  als Nebenteil und in  $v = (z - z_0)^{-1}$  als Hauptteil. Letztere kodiert die Singularität in  $z_0$ .



◆ Satz F4D: Residuensatz für Kompakta, Cauchy 1825

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f : \Omega \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph auf  $\Omega$  bis auf eine Menge  $S$  isolierter Singularitäten. Sei  $D \subseteq \Omega$  kompakt mit stückweise glattem Rand, wobei  $\partial D \cap S = \emptyset$ . Dann gilt:

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i \sum_{s \in D} \operatorname{res}_s(f)$$

😊 Links muss man integrieren, rechts nur Residuen summieren!

Anschaulich können wir uns  $f : \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  als zweidimensionales elektromagnetisches Feld vorstellen. Eine Polstelle im Punkt  $s \in \Omega$  entspricht einem Teilchen mit seiner Ladung  $\operatorname{res}_s(f)$ : das Residuum!

Für das Feld  $(z - z_0)^{-k}$  haben wir oben das Wegintegral ausgerechnet:

Längs der Kreislinie  $\gamma(t) = z_0 + r e^{it}$  erhalten wir  $\oint (z - z_0)^{-1} dz = 2\pi i$ .

Für alle  $k \neq -1$  hingegen verschwindet das Integral:  $\oint (z - z_0)^k dz = 0$ .

Dasselbe gilt nun für jede holomorphe Funktion / Laurent-Reihe um  $z_0$ :

Das Wegintegral von  $f$  längs des Weges  $\gamma$  um  $z_0$  ist  $2\pi i \operatorname{res}_{z_0}(f)$ .

Mit diesem Integral messen wir demnach die Ladung im Punkt  $z_0$ .

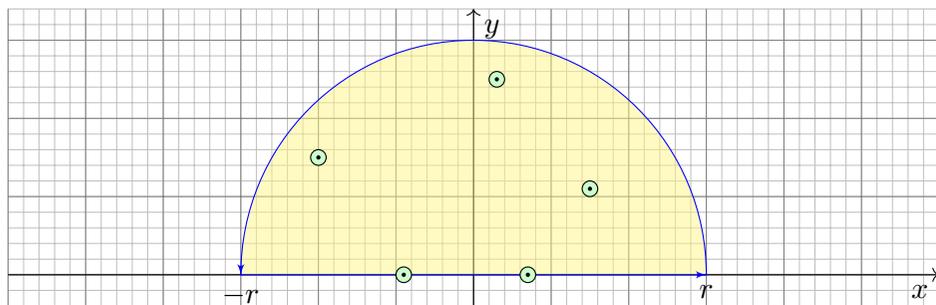
Umläuft  $\gamma$  mehrere Singularitäten, so addieren sich die Residuen:

Jede Singularität  $s$  liefert ihren Beitrag  $2\pi i \operatorname{res}_s(f)$  zum Integral.

Der Raum dazwischen ist Vakuum und liefert keinen Beitrag.

Dies ist eine wunderbare Eigenschaft holomorpher Funktionen.

Reelle Anwendung: Die Halbebene ist nicht kompakt, aber für schnell genug abklingende Funktionen können wir den Residuensatz hierauf ausdehnen. Auch einfache Polstellen auf  $\mathbb{R}$  können wir zulassen:

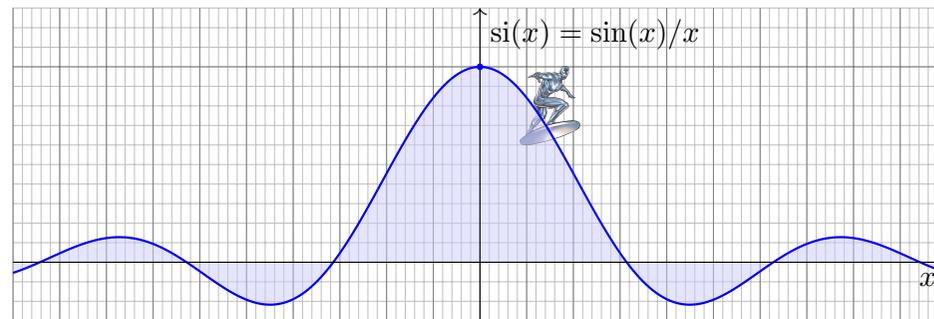


◆ Satz F4κ: Fourier-Integrale rationaler Funktionen

Sei  $f(z) = p(z)/q(z)$  eine rationale Funktion; reelle Polstellen  $z \in \mathbb{R}$  seien höchstens einfach. Für  $\deg(q) \geq \deg(p) + 2$  und  $u \geq 0$  gilt dann:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iux} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im}(s)>0} \text{res}_{z=s} [f(z) e^{iuz}] + \pi i \sum_{\text{Im}(s)=0} \text{res}_{z=s} [f(z) e^{iuz}]$$

Diese Gleichung gilt auch noch im Falle  $\deg(q) \geq \deg(p) + 1$  und  $u > 0$ .



Wir betrachten erneut die Spaltfunktion  $si : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$si(x) = \begin{cases} \sin(x)/x & \text{für } x \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Ihre Integralfunktion  $Si(x) = \int_{t=0}^x si(t) dt$  ist nicht elementar. [B149]  
Nun endlich können wir  $si : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  über ganz  $\mathbb{R}$  integrieren:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \frac{\sin(x)}{x} dx \stackrel{?}{=} \pi$$

**Aufgabe:** Berechnen Sie für  $u \in \mathbb{R}$  das reelle Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ux)}{x} dx = \pi \text{sign}(u).$$

**Lösung:** Der Integrand ist der Imaginärteil der holomorphen Funktion

$$f(z) = \frac{e^{iuz}}{z} = \frac{\cos(uz)}{z} + i \frac{\sin(uz)}{z}.$$

Für  $u > 0$  können wir daher den Residuensatz anwenden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iux}}{x} dx \stackrel{\text{Res}_{F4\kappa}}{=} \pi i \text{res}_{z=0} \left[ \frac{e^{iuz}}{z} \right] = \pi i \text{res}_{z=0} \left[ z^{-1} + \frac{i u}{1!} z^0 - \frac{u^2}{2!} z^1 + \dots \right] = \pi i.$$

Als Real- und Imaginärteil erhalten wir die reellen Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ux)}{x} dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ux)}{x} dx = \pi.$$

Für  $u < 0$  kehrt sich das Vorzeichen um. Für  $u = 0$  ist alles klar.

😊 Dieses Integral konnten wir zuvor noch nicht ausrechnen [B149], jetzt aber ganz leicht! Diese vielseitige Rechentechnik führen wir in §F4 aus. Dieses eindimensionale reelle Integral war zunächst außerhalb unserer Reichweite. Erst durch die effiziente Behandlung als zweidimensionales komplexes Integral löst sich nun alles in Wohlgefallen auf!

😊 Der Residuensatz ist ein allgemeines und mächtiges Werkzeug. Die obigen Beispiele motivieren, welche Aspekte wir nun klären müssen, wenn wir den mathematischen Begriffen auf den Grund gehen wollen:

Der Residuensatz gilt nur für **holomorphe Funktionen**  $f : \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . Wie können wir diese Eigenschaft definieren und bequem erkennen?

Wie entwickelt man eine holomorphe Funktion auf  $B(z_0, \rho)$  in eine konvergente **Potenzreihe**? auf  $K(z_0, \sigma, \rho)$  in eine **Laurent-Reihe**?

Wie definieren wir das **Residuum**? Wie berechnen wir es effizient? Wie können wir schließlich den **Residuensatz** beweisen und nutzen?

😊 Dieses Kapitel entwickelt die nötigen Grundlagen (§F2–§F3) und einige wichtige Anwendungen des Residuenkalküls (§F4–§F5).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx = \frac{\pi}{ab(a + b)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ux)}{x^4 + 4} dx = \frac{\pi}{4} e^{-|u|} (\cos|u| + \sin|u|)$$

**Aufgabe:** (1) Wie erklären / begründen Sie die Konvergenz dieser Integrale? Gilt sie absolut? uneigentlich? als Cauchy–Hauptwert? [B219](#)

(2) Welche können Sie bereits mit elementaren Methoden berechnen?

😊 Die fehlenden gewinnen Sie mit den Methoden dieses Kapitels!

**Lösung:** Zum ersten Integranden  $f(x) = 1/(x^2 + a^2)$  finden Sie (dank Substitution) leicht die Stammfunktion  $F(x) = \arctan(x/a)/a$ . Damit gelingt das erste Integral. Das zweite und dritte sind elementar kaum zugänglich, aber ganz bequem mit dem Residuenkalkül. [F429](#) [F431](#) Unser Universalwerkzeug ist der Residuensatz hier für Fourier–Integrale rationaler Funktionen (F4K).

$$\int_{x=0}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{x=0}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^3} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$$

$$\int_{x=0}^{\infty} \cos(x^2) dx = \int_{x=0}^{\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

**Aufgabe:** (1) Wie erklären / begründen Sie die Konvergenz dieser Integrale? Gilt absolute Konvergenz? oder zumindest uneigentlich?

(2) Welche können Sie bereits mit elementaren Methoden berechnen?

😊 Die fehlenden gewinnen Sie mit den Methoden dieses Kapitels!

**Lösung:** Zum ersten Integranden  $f(x) = 1/(1 + x^2)$  erkennen Sie direkt die Stammfunktion  $F(x) = \arctan(x)$ . Damit gelingt das erste Integral leicht. Die letzten drei sind elementar kaum zugänglich, doch Sie berechnen alle erfreulich einfach mit dem Residuenkalkül. [F434](#) [F529](#) Die letzten beiden sind die Fresnel–Integrale, die wir bereits seit Kapitel B suchen. [B424](#)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots = 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} = 1.6449340668 \dots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \mp \dots = -\frac{\pi^2}{12} = -0.8224670334 \dots$$

**Aufgabe:** (1) Wie erklären / begründen Sie die Konvergenz dieser Reihen? Gilt absolute Konvergenz? oder zumindest uneigentlich?

(2) Welche können Sie bereits mit elementaren Methoden berechnen?

😊 Die fehlenden gewinnen Sie mit den Methoden dieses Kapitels!

**Lösung:** Den ersten Summanden  $f(k) = 1/(k^2 + k) = 1/k - 1/(k + 1)$  zerlegen Sie sogleich routiniert in Partialbrüche und finden so die diskrete Stammfunktion  $F(x) = -1/k$ , siehe B3B. Damit gelingt die erste Summe leicht als Teleskop. Die zweite und dritte sind elementar kaum zugänglich, doch Sie berechnen beide Reihen bequem mit dem Residuenkalkül, siehe Satz F51.

😊 Diese phantastischen Rechnungen illustrieren das Eingangszitat:

*La voie la plus courte et la meilleure entre deux vérités  
du domaine réel passe souvent par le domaine imaginaire.*

[Der kürzeste und beste Weg zwischen zwei  
reellen Wahrheiten führt oft durchs Imaginäre.]

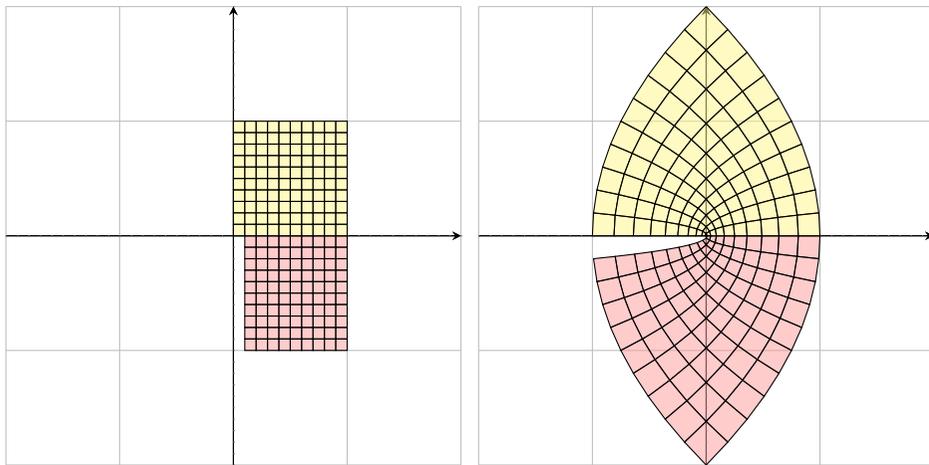
Jacques Hadamard (1865–1963)

Damit beschließen Sie diesen kurzen Crashkurs zum ersten Überblick. Sie erahnen nun, was Sie mit dem Residuensatz berechnen können, und dass sich das Erlernen dieses wunderbaren Kalküls lohnt.

Holomorphe Funktionen haben viel zu bieten, der Mathematiker:in ebenso wie der Physiker:in und der Ingenieur:in. Wir wollen uns nun diese effizienten Rechentechniken Schritt für Schritt erarbeiten.

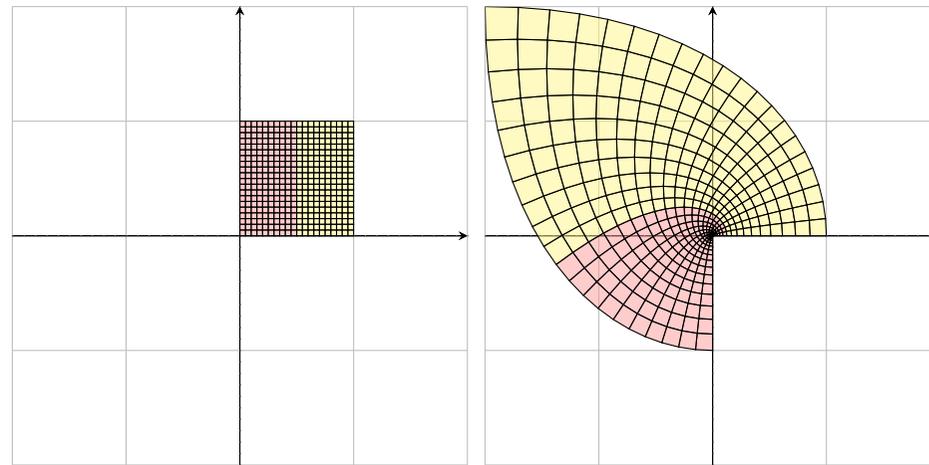
Ich hoffe, wie so oft, Sie sind bis in die Haarspitzen motiviert.  
Der Weg ist steil, aber das Ziel ist lohnend!

**Beispiel:**  $f(z) = z^2$ , also  $f(x + iy) = (x^2 - y^2) + i(2xy)$



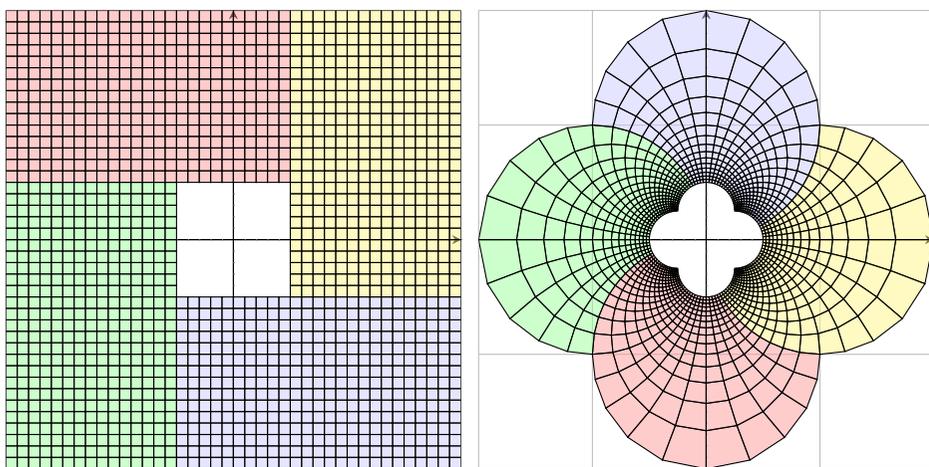
In Polardarstellung gilt  $f(r e^{i\varphi}) = r^2 e^{2i\varphi}$ . Im Ursprung sieht man die Winkelverdopplung. Außerhalb bleiben Winkel erhalten, und kleine Quadrate werden in kleine Quadrate überführt.

**Beispiel:**  $f(z) = z^3$ , also  $f(x + iy) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$



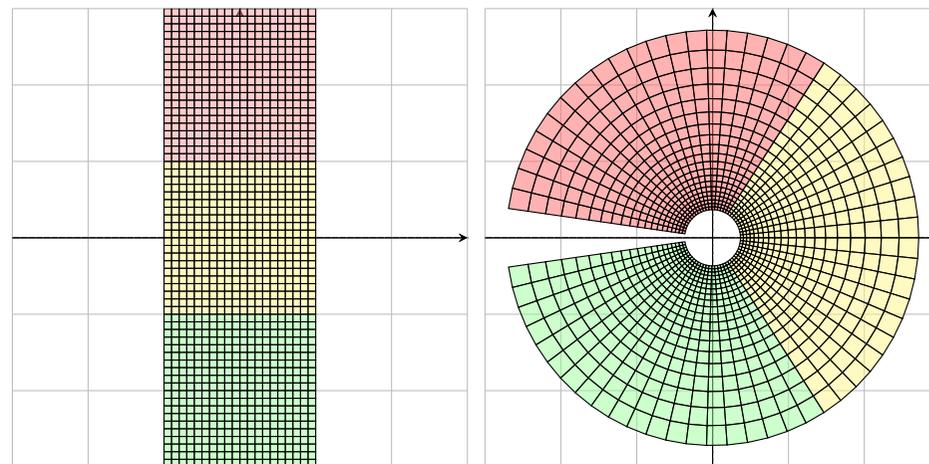
In Polardarstellung gilt  $f(r e^{i\varphi}) = r^3 e^{3i\varphi}$ . Im Ursprung sieht man die Winkelverdreifung. Außerhalb bleiben Winkel erhalten, und kleine Quadrate werden in kleine Quadrate überführt.

**Beispiel:**  $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$ , also  $f(x + iy) = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2}$



In Polardarstellung gilt  $f(r e^{i\varphi}) = r^{-1} e^{-i\varphi}$ . Geometrisch entspricht diese Abbildung einer Spiegelung am Einheitskreis ( $r \mapsto r^{-1}$ ) sowie einer an der reellen Achse ( $e^{i\varphi} \mapsto e^{-i\varphi}$ ).

**Beispiel:**  $f(z) = \exp(z)$ , also  $f(x + iy) = e^x \cos y + i e^x \sin y$



Das entspricht der Polardarstellung mit Radius  $e^x$  und Winkel  $y$ . Für jede komplexe Zahl  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  existiert  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  sodass  $w = \exp(z) = e^x (\cos y + i \sin y)$  gilt. Genau dann gilt  $\exp(z) = \exp(\bar{z})$ , wenn  $z - \bar{z} = k \cdot 2\pi i$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$ . (Satz F2K)

## Definition F2A: komplexe Ableitung

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  eine komplexe Funktion. Wir betrachten

$$\lim_{\substack{z_n \rightarrow z \\ z_n \in \Omega \setminus \{z\}}} \frac{f(z_n) - f(z)}{z_n - z}.$$

Wir nennen  $f$  im Punkt  $z \in \Omega$  **komplex differenzierbar**, wenn dieser Grenzwert existiert für jede Folge  $z_n \rightarrow z$  mit  $z_n \in \Omega$  und  $z_n \neq z$ .

Dieser Grenzwert heißt dann die **komplexe Ableitung**, geschrieben

$$f'(z) = \lim_{\substack{\zeta \rightarrow z \\ \zeta \neq z}} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} = \lim_{\substack{w \rightarrow 0 \\ w \neq 0}} \frac{f(z+w) - f(z)}{w}$$

**Beispiel:** Für  $f(z) = z^2$  gilt  $f'(z) = 2z$ , denn  $\frac{\zeta^2 - z^2}{\zeta - z} = \zeta + z \rightarrow 2z$ .

**Allgemein:** Für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $f(z) = z^n$  gilt  $f'(z) = nz^{n-1}$ , denn

$$\frac{\zeta^n - z^n}{\zeta - z} = \sum_{k=1}^n \zeta^{k-1} z^{n-k} \rightarrow nz^{n-1} \quad \text{für } \zeta \rightarrow z.$$

## Holomorphe Funktionen

## Definition F2C: Holomorphie

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen. Eine komplexe Funktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **holomorph**, wenn sie auf ganz  $\Omega$  komplex differenzierbar ist und  $f': \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  stetig.

**Aufgabe:** Ist jedes komplexe Polynom holomorph?

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

**Lösung:** Ja,  $f$  ist auf ganz  $\mathbb{C}$  holomorph mit der Ableitung

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + na_n z^{n-1}.$$

**Aufgabe:** Ist jedes komplexe Laurent-Polynom holomorph?

$$f(z) = a_{-n} z^{-n} + \cdots + a_{-1} z^{-1} + a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

**Lösung:** Ja,  $f$  ist auf  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  holomorph mit der Ableitung

$$f'(z) = -na_{-n} z^{-n-1} - \cdots - a_{-1} z^{-2} + a_1 + \cdots + na_n z^{n-1}.$$

😊 Gleiches gilt für konvergente (Laurent-)Potenzreihen, also  $n \rightarrow \infty$ .

## Komplexe Differentiation

## Satz F2B: komplexe Ableitungsregeln

Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit, aber nicht umgekehrt.

Die Ableitung ist linear und erfüllt Produkt- und Kettenregel:

$$\begin{aligned} [af]'(z) &= af'(z) \quad \text{für } a \in \mathbb{C}, & [f \cdot g]'(z) &= f'(z)g(z) + f(z)g'(z), \\ [f+g]'(z) &= f'(z) + g'(z), & [h \circ g]'(z) &= h'(g(z)) \cdot g'(z). \end{aligned}$$

Hierbei seien  $f, g$  im Punkt  $z \in \mathbb{C}$  komplex diff'bar und  $h$  im Punkt  $g(z)$ . Der Nachweis dieser Regeln verläuft wörtlich wie im reellen Fall.

Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §2.2.

**Aufgabe:** Für  $f(z) = z^{-n}$  folgt  $f'(z) = -nz^{-n-1}$  in jedem Punkt  $z \neq 0$ .

**Lösung:** Aus  $z^n \cdot f(z) = 1$  folgt dank Produktregel

$$nz^{n-1} \cdot f(z) + z^n \cdot f'(z) = 0.$$

Diese Gleichung lösen wir auf zu  $f'(z) = -nz^{-1}f(z) = -nz^{-n-1}$ .

## Holomorphe Funktionen

## Korollar F2D: Eigenschaften holomorpher Funktionen

Holomorphe Funktionen  $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  sind insbesondere stetig.

Linearkombination, Multiplikation und Komposition holomorpher Funktionen ergeben wieder holomorphe Funktionen. Dabei gilt:

$$\begin{aligned} [af]' &= af', & [f \cdot g]' &= f'g + fg', \\ [f+g]' &= f' + g', & [h \circ g]' &= (h' \circ g) \cdot g'. \end{aligned}$$

😊 Soweit verhält sich die komplexe Ableitung genau wie die reelle. Insbesondere für (Laurent-)Polynome gelten dieselben Rechenregeln. Wir wollen dies gleich auch für (Laurent-)Potenzreihen festhalten.

⚠ Wir werden sodann als fundamentalen Unterschied zu  $\mathbb{R}$  ausnutzen, dass wir in  $\mathbb{C}$  in zwei linear unabhängige Richtungen ableiten können. Dies impliziert die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen und wird unsere Integralsätze in der Ebene (Green / Gauß) zum Einsatz bringen. Dadurch entfalten sich viel stärkere Gesetzmäßigkeiten als im Reellen.

Sei  $f: \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  im Punkt  $z \in \mathbb{C}$  **komplex differenzierbar**:

$$f'(z) = \lim_{\substack{w \rightarrow 0 \\ w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}}} \frac{f(z+w) - f(z)}{w}.$$

Dann ist  $f$  im Punkt  $z \in \mathbb{C}$  insbesondere partiell differenzierbar:

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}} \frac{f(z+r) - f(z)}{r} = \frac{\partial f}{\partial x}(z), \quad \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}} \frac{f(z+is) - f(z)}{is} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z).$$

Beide stimmen mit  $f'(z)$  überein! Für  $f = u + iv$  gilt also

$$f'(z) \stackrel{!}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z) \stackrel{!}{=} \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z) - i \frac{\partial u}{\partial y}(z).$$

Dies sind die **Cauchy–Riemann–Differentialgleichungen**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

😊 Dieses Kriterium ist nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend. Damit können wir leicht überprüfen, ob  $f: \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph ist!

### Satz F2E: Cauchy–Riemann–Differentialgleichungen

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen. Die komplexe Funktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  zerlegen wir in  $f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  mit  $u, v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann sind äquivalent:

- 1 Die Funktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  ist holomorph, das heißt auf ganz  $\Omega$  komplex differenzierbar mit stetiger Ableitung  $f'$ .
- 2 Die Funktionen  $u, v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sind stetig partiell differenzierbar und erfüllen die Cauchy–Riemann–Differentialgleichungen.

**Nachrechnen:** Die Implikation „(1)  $\Rightarrow$  (2)“ haben wir ausgerechnet.

Die Umkehrung „(2)  $\Leftarrow$  (1)“ erhalten wir aus der Taylor–Formel:

Für  $w = r + is$  gilt  $f(z+w) = f(z) + \partial_x f(z)r + \partial_y f(z)s + o(|w|)$ .

Dank  $\partial_y f = i\partial_x f$  folgt  $f(z+w) = f(z) + \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)f(z)w + o(|w|)$ .

Für  $w \rightarrow 0$  gilt somit  $(f(z+w) - f(z))/w \rightarrow \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)f(z)$ .

😊 Einfach und praktisch: Die Cauchy–Riemann–Differentialgleichungen übersetzen verlustfrei komplexe in reelle Differenzierbarkeit und zurück! Wir nennen  $\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$  die Wirtinger–Ableitung nach  $z$ , siehe F2F.

Es gibt mehrere äquivalente Formulierungen der CR–Gleichungen

$$\partial_x u = \partial_y v, \quad \partial_x v = -\partial_y u.$$

Sie besagen, dass die Jacobi–Matrix eine ganz spezielle Form hat:

$$J = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

😊 Die Determinante ist  $a^2 + b^2 = |f'(z)|^2 \geq 0$ . Es handelt sich um eine Drehung gefolgt von einer Streckung um den Faktor  $|f'(z)|$ . Dies erklärt, warum im Falle  $f'(z) \neq 0$  die Abbildung  $f$  die Winkel erhält und kleine Quadrate in kleine Quadrate überführt, wie in obigen Graphiken gezeigt.

Das Vektorfeld  $\vec{f} = (u, -v): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist divergenz- und rotationsfrei:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u, -v) &= +\partial_x u - \partial_y v = 0, \\ \operatorname{rot}(u, -v) &= -\partial_x v - \partial_y u = 0. \end{aligned}$$

😊 Genau diese Eigenschaft nutzen wir im Residuensatz, siehe F3A.

**Aufgabe:** (1) Ist die Funktion  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto z^2$  holomorph?

(2) Ist  $f(z) = \bar{z}$  holomorph? (3) und  $e^{x+iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y$ ?

**Lösung:** (1) Wir finden  $u(x, y) = (x^2 - y^2)$  und  $v(x, y) = 2xy$  und somit

$$\begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \quad \text{also} \quad \begin{cases} \operatorname{div}(u, -v) = +\partial_x u - \partial_y v = 0, \\ \operatorname{rot}(u, -v) = -\partial_x v - \partial_y u = 0. \end{cases}$$

Die Funktion  $f(z) = z^2$  ist holomorph. 😊 Das wussten wir schon!

(2) Wir finden  $u(x, y) = x$  und  $v(x, y) = -y$  und somit

$$\begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{also} \quad \begin{cases} \operatorname{div}(u, -v) = +\partial_x u - \partial_y v = 2, \\ \operatorname{rot}(u, -v) = -\partial_x v - \partial_y u = 0. \end{cases}$$

Die Funktion  $f(z) = \bar{z}$  ist nicht holomorph. 😊 Erstes Gegenbeispiel!

(3) Auch  $e^{x+iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y$  ist holomorph:

$$\begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} \quad \text{also} \quad \begin{cases} \operatorname{div}(u, -v) = 0, \\ \operatorname{rot}(u, -v) = 0. \end{cases}$$

😊 Das folgt auch direkt aus der Exponentialreihe  $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$ .

Satz F2F: Wirtinger–Ableitungen

Wir definieren die **Wirtinger–Ableitungen** nach  $z$  und  $\bar{z}$  durch

$$\partial_z := \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y) \quad \text{und} \quad \partial_{\bar{z}} := \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y).$$

(0) Es gilt  $\partial_z z = 1$  und  $\partial_z \bar{z} = 0$  sowie  $\partial_{\bar{z}} \bar{z} = 1$  und  $\partial_{\bar{z}} z = 0$ .

(1) Ist  $f : \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  komplex differenzierbar, so gilt

$$f' = \partial_z f \quad \text{und} \quad \partial_{\bar{z}} f = 0.$$

(2) Ist umgekehrt  $f : \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  nach  $x$  und  $y$  partiell differenzierbar, so sind die Cauchy–Riemann–Gleichungen F2E äquivalent zu  $\partial_{\bar{z}} f = 0$ .

**Beweis:** Für  $f = u + iv$  rechnen wir gewissenhaft nach:

$$\partial_z f = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)(u + iv) = \frac{1}{2}(\partial_x u + \partial_y v) + \frac{i}{2}(\partial_x v - \partial_y u)$$

$$\partial_{\bar{z}} f = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)(u + iv) = \frac{1}{2}(\partial_x u - \partial_y v) + \frac{i}{2}(\partial_x v + \partial_y u)$$

😊 Somit ist  $\partial_{\bar{z}} f = 0$  äquivalent zu den Cauchy–Riemann–Gleichungen  $\partial_x u = \partial_y v, \partial_x v = -\partial_y u$ . Ist  $f$  komplex differenzierbar, so folgt  $\partial_z f = f'$ .

Satz F2G: inhomogener Integralsatz von Cauchy

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen und darauf  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  stetig partiell differenzierbar. Für jedes Kompaktum  $D \subseteq \Omega$  mit stückweise glattem Rand gilt:

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 2i \int_D \partial_{\bar{z}} f(x, y) d(x, y)$$

**Beweis:** (2) Für  $f = u + iv$  und  $dz = dx + i dy$  rechnen wir nach:

$$\int_{\partial D} f(z) dz \stackrel{\text{Def F1A}}{=} \int_{\partial D} (u dx - v dy) + i(u dy + v dx)$$

$$\stackrel{\text{Green Gauß}}{=} \int_D \text{rot}(u, -v) d(x, y) + i \int_D \text{div}(u, -v) d(x, y)$$

$$\stackrel{\text{Def F2F}}{=} 2i \int_D \partial_{\bar{z}} f(x, y) d(x, y)$$

😊 Ist  $f$  holomorph, so gilt  $\partial_{\bar{z}} f = 0$ , und das Integral verschwindet! (F3A) Erfreulicherweise gilt sogar die Umkehrung, siehe den folgenden Satz.

Satz F2H: Äquivalente Kriterien für Holomorphie

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen. Die komplexe Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  zerlegen wir in  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  mit  $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann sind äquivalent:

- 1 **Holomorphie:** Die Funktion  $f$  ist holomorph, das heißt auf ganz  $\Omega$  komplex differenzierbar mit stetiger Ableitung  $f'$ .
- 2 **Komplexe Differenzierbarkeit:** Die Funktion  $f$  ist auf ganz  $\Omega$  komplex differenzierbar (ohne die Stetigkeit von  $f'$  zu verlangen).
- 3 **Analytizität:** Die Funktion  $f$  lässt sich in jedem Punkt  $z_0 \in \Omega$  in eine konvergente Potenzreihe entwickeln,  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ .
- 4 **Glattheit:** Die Funktion  $f$  ist beliebig oft komplex differenzierbar.
- 5 **Cauchy–Riemann:** Die Funktionen  $u, v$  sind stetig partiell differenzierbar und erfüllen  $\partial_x u = \partial_y v$  und  $\partial_x v = -\partial_y u$ .
- 6 **Looman–Menchoff:** Die Funktion  $f$  ist stetig, die Ableitungen  $\partial_x f$  und  $\partial_y f$  existieren und erfüllen  $\partial_x f + i\partial_y f = 0$ , kurz  $\partial_{\bar{z}} f = 0$ .
- 7 **Morera:** Die Funktion  $f$  ist stetig und für jedes Rechteck  $R \subseteq \Omega$  verschwindet das komplexe Wegintegral  $\oint_{\partial R} f(z) dz = 0$ .

😊 Zu prüfen ist, ob eine vorgelegte Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph ist. Je nach Bedarf können wir hierzu jedes dieser sieben Kriterien nutzen! Das öffnet mehrere Zugänge zu den Werkzeugen der Funktionentheorie.

Diese sieben Bedingungen scheinen zunächst sehr verschieden und unterschiedlich stark. Es ist daher überaus bemerkenswert, dass all diese Bedingungen äquivalent sind zur Holomorphie (1).

Die Eigenschaft der Holomorphie ist demnach robust und fundamental. Wir haben bereits die Äquivalenz (1)  $\Leftrightarrow$  (5) nachgerechnet. (Satz F2E) Wir werden weiter unten die Äquivalenz (1)  $\Leftrightarrow$  (3) zeigen. (Satz F3E) Die Implikationen (3)  $\Rightarrow$  (4)  $\Rightarrow$  (1) sind dann klar (dank Satz F2J).

Die weiteren Kriterien nenne ich hier nur zur Illustration und Abrundung. Zum Beispiel garantieren (1)  $\Leftrightarrow$  (2) und (5)  $\Leftrightarrow$  (6), dass wir die Stetigkeit der Ableitungen nicht gesondert fordern bzw. nachweisen müssen (F5C). Formulierung (7) kommt ohne Ableitung nur mit Integralen aus (F5B).

📖 Ausführliche Beweise und Erläuterungen finden Sie in den meisten Einführungen zur Funktionentheorie, etwa von Jänich oder Remmert.

Besonders schöne und einfache Funktionen sind **Polynome**:

$$f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$

Manchmal benötigen wir etwas allgemeiner auch **Laurent–Polynome**:

$$f(z) = \sum_{k=-n}^n a_k z^k = a_{-n} z^{-n} + a_{1-n} z^{1-n} + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n$$

😊 Wir vollziehen mutig und umsichtig den Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$ .

Besonders schöne und einfache Funktionen sind **Potenzreihen**:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

Manchmal benötigen wir etwas allgemeiner auch **Laurent–Reihen**:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k = \dots + a_{-2} z^{-2} + a_{-1} z^{-1} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

😊 Für die Konvergenz und das Rechnen gibt es einfache Regeln.

Viele wichtige Funktionen lassen sich als Potenzreihen darstellen:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots \quad \text{für } |z| < 1,$$

$$\ln(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} z^k = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots \quad \text{für } |z| < 1,$$

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots \quad \text{für } z \in \mathbb{C},$$

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \quad \text{für } z \in \mathbb{C},$$

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \quad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

Hieraus folgen die **Euler–Formel**  $\exp(iz) = \cos z + i \sin z$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ , das **Potenzgesetz**  $e^{z+w} = e^z e^w$  [F222], speziell  $e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$ , sowie die **Additionstheoreme** für  $\sin$  und  $\cos$  [B125], und vieles mehr.

**Satz F2I: Konvergenz von Potenzreihen**

Eine **Potenzreihe** ist eine (zunächst formale) Reihe der Form

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Sie ist gegeben durch ihren **Entwicklungspunkt**  $z_0 \in \mathbb{C}$  und ihre **Koeffizienten**  $a_k \in \mathbb{C}$  für  $k \in \mathbb{N}$ . Ihr **Konvergenzradius** ist

$$\rho := 1 / \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \in [0, \infty].$$

Die Reihe **konvergiert** absolut für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z - z_0| < \rho$ .  
Hingegen **divergiert** die Reihe für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z - z_0| > \rho$ .

Für Randpunkte  $|z - z_0| = \rho$  kann beides passieren; hier ist keine einfache Aussage möglich. (Antworten über das subtile Verhalten auf dem Kreisrand gibt die Theorie der Fourier–Reihen. Allgemein gehört die Konvergenz solcher Reihen zu den schwierigsten Fragen der Analysis.)  
Im Falle  $\rho = \infty$  ist  $B(z_0, \infty) = \mathbb{C}$  die gesamte Ebene, und die Reihe konvergiert überall.  
Im Falle  $\rho = 0$  ist  $B(z_0, 0)$  leer und die Reihe konvergiert nur im Entwicklungspunkt  $z_0$ .

😊 Potenzreihen verhalten sich wie Polynome (von unendlichem Grad). Auf ihrem Konvergenzgebiet können wir mit Potenzreihen gut rechnen, wie üblich addieren, multiplizieren, verknüpfen, insbesondere ableiten.

**Satz F2J: Ableitung von Potenzreihen**

Sei  $\Omega = B(z_0, \rho)$  mit  $0 < \rho \leq \infty$ . Jede konvergente Potenzreihe

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{für alle } z \in \Omega,$$

ist auf  $\Omega$  holomorph. Ihre Ableitung ist gegeben durch

$$f' : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1} \quad \text{für alle } z \in \Omega.$$

Auch diese ist auf  $\Omega$  holomorph, somit ist  $f$  beliebig oft differenzierbar. Die Funktion  $f$  bestimmt die Koeffizienten vermöge  $a_k = f^{(k)}(z_0)/k!$ . Unsere Potenzreihe ist somit die Taylor–Reihe der Funktion  $f$ .

 Zur Wiederholung siehe Stroppel, Höhere Mathematik 2, §1.14. Nach Verschieben können wir als Entwicklungspunkt  $z_0 = 0$  annehmen:

$$f: B(z_0, \rho) \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{wird verschoben zu}$$

$$\tilde{f}: B(0, \rho) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \tilde{f}(z) = f(z_0 + z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

**Aufgabe:** Wie werden Potenzreihen addiert bzw. multipliziert?

**Lösung:** Addition erfolgt wie üblich bei konvergenten Reihen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) z^k$$

Multiplikation dank Umordnungssatz A2N für abs. konvergente Reihen:

$$\left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i \right) \cdot \left( \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{i+j=k} a_i b_j \right) z^k.$$

**Aufgabe:** Aus der Exponentialreihe folgt die **Funktionalgleichung**

$$\exp(z + w) = \exp(z) \exp(w) \quad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C}.$$

**Nachrechnen:** Dank Umordnungssatz und binomischer Formel gilt:

$$\begin{aligned} \exp(z) \exp(w) &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right) \left( \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{w^\ell}{\ell!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+\ell=n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^\ell}{\ell!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z + w)^n = \exp(z + w). \end{aligned}$$

😊 Dies entspricht dem **Potenzgesetz**, daher die Kurzschreibweise

$$e^z := \exp(z) \quad \text{und} \quad e^{z+w} = e^z e^w.$$

😊 Zusammen mit der wichtigen **Euler-Formel**  $\exp(iz) = \cos z + i \sin z$  erhalten wir hieraus sofort **Additionstheoreme** für  $\sin$  und  $\cos$ . [B125](#) (Wiederholen und beweisen Sie diese als lehrreiche Übung.)

**Aufgabe:** Aus der Exponentialreihe folgt die **Ableitungsregel**

$$\frac{d}{dz} \exp(az) = a \exp(az).$$

**Nachrechnen:** Dank Ableitungsregel F2J für Potenzreihen gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \exp(az) &= \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dz} \frac{a^k z^k}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k z^{k-1}}{(k-1)!} = a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k z^k}{k!} = a \exp(az). \end{aligned}$$

In Kurzschreibweise erhalten wir die vertraute Formel

$$\frac{d}{dz} e^{az} = a e^{az}.$$

😊 Das ist eine charakteristische Eigenschaft der Exponentialfunktion. Wir werden sie insbesondere für Differentialgleichungen ausnutzen!

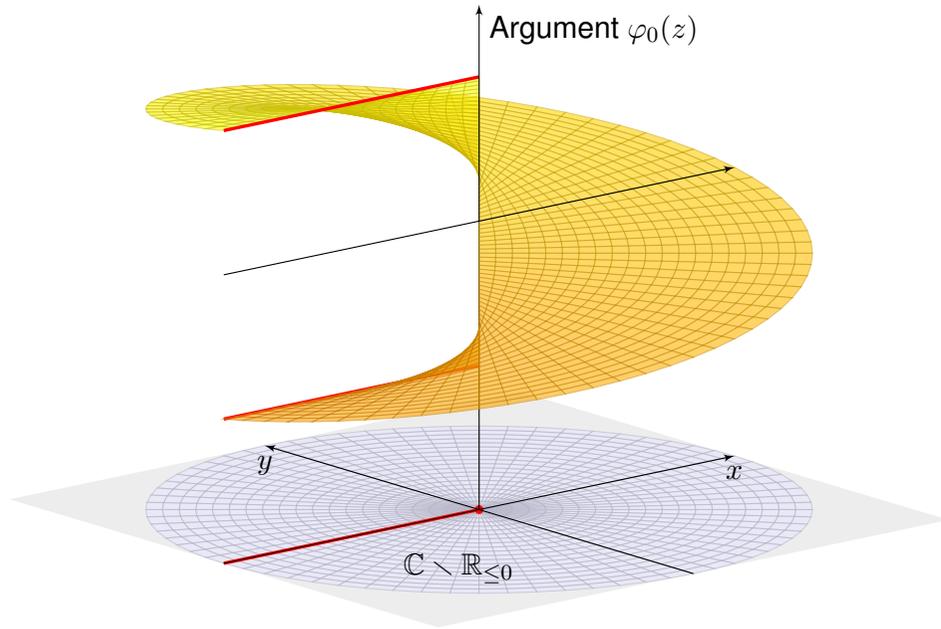
**Satz F2K: Bild und Kern der Exponentialfunktion**

- (1) Für jede komplexe Zahl  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  existiert  $w = u + iv \in \mathbb{C}$ , sodass  $z = \exp(w) = e^u (\cos v + i \sin v)$  gilt, also eine Polardarstellung von  $z$ .
- (2) Genau dann gilt  $\exp(w) = \exp(\tilde{w})$ , wenn  $w - \tilde{w} = k \cdot 2\pi i$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$ .
- (3) Lokal um den Entwicklungspunkt 1 ist der komplexe Logarithmus

$$\ln: B(1, 1) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \ln(1 + z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} z^k$$

eine Umkehrfunktion, das heißt  $\exp(\ln(1 + z)) = 1 + z$  für alle  $|z| < 1$ .

Aussage (1) bedeutet: Die komplexe Exponentialfunktion  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ist surjektiv. Wir können daher jede komplexe Zahl  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  in komplexen Polarkoordinaten darstellen. Aussage (2) besagt, dass  $\exp$  nicht injektiv ist, und benennt den Kern  $\ker(\exp) = \mathbb{Z}2\pi i$ . Das ist äquivalent zur vertrauten Periodizität der reellen Winkelfunktion  $\cos, \sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Im reellen Fall ist  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  bijektiv und erlaubt eine Umkehrfunktion  $\ln: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ . Im komplexen Fall ist dies global auf  $\mathbb{C}$  unmöglich, da  $\exp$  nach (2) nicht bijektiv ist, aber es gelingt immerhin lokal mit Hilfe der in (3) angegebenen Potenzreihe: Dies rechnet man (etwas mühsam) nach durch Einsetzen der beiden Potenzreihen, oder (viel einfacher) durch Ableiten:  $f(z) = \exp(\ln(1 + z)) / (1 + z)$  erfüllt  $f(0) = 1$  und  $f'(z) = 0$ . Berechnen Sie's zur Übung!



Die reelle Exponentialfunktion  $\exp : (\mathbb{R}, 0, +) \rightarrow (\mathbb{R}_{>0}, 1, \cdot)$  ist bijektiv, ihre Umkehrfunktion ist der reelle Logarithmus  $\ln : (\mathbb{R}_{>0}, 1, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}, 0, +)$ . Die komplexe Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ist surjektiv:  $w = u + iv \mapsto e^{u+iv} = e^u(\cos v + i \sin v)$  beschert uns Polarkoordinaten! Sie ist jedoch nicht injektiv, ganz im Gegenteil: Sie hat Periode  $2\pi i$  (F2K). Zu  $z \in \mathbb{C}^*$  gibt es also nicht nur einen Logarithmus  $w \in \mathbb{C}$  mit  $e^w = z$ , sondern unendlich viele, nämlich  $\exp^{-1}(\{z\}) = \{w + k \cdot 2\pi i \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . Man könnte nun für jedes  $z \in \mathbb{C}^*$  willkürlich einen Logarithmus  $w \in \mathbb{C}$  mit  $e^w = z$  wählen, aber das kann global auf  $\mathbb{C}^*$  nicht stetig gelingen! Zwecks Stetigkeit müssen wir das Definitionsgebiet einschränken:

**Definition F2L: Zweige des komplexen Logarithmus**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^*$  ein Gebiet, also eine offene zusammenhängende Menge. Eine stetige Funktion  $f : \mathbb{C}^* \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $e^{f(z)} = z$  heißt **ein Zweig des Logarithmus** auf  $\Omega$  oder auch **eine Logarithmusfunktion** auf  $\Omega$ . Eine stetige Funktion  $\varphi : \mathbb{C}^* \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $z = |z|e^{i\varphi(z)}$  heißt **ein Zweig des Arguments** auf  $\Omega$  oder auch **eine Argumentfunktion** auf  $\Omega$ .

**Aufgabe:** (1) Wie entsprechen sich Argument und Logarithmus? (2) Sind sie auf  $\Omega$  eindeutig? (3) bis auf eine additive Konstante?

**Lösung:** (1) Ist  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Argumentfunktion, so ist  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(z) = \ln|z| + i\varphi(z)$  eine Logarithmusfunktion. Ist umgekehrt  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  eine Logarithmusfunktion, so gilt  $z = e^{f(z)} = e^{\operatorname{Re} f(z)} e^{i \operatorname{Im} f(z)}$  für  $z \in \Omega$ , also folgt  $|z| = e^{\operatorname{Re} f(z)}$ , und  $\varphi(z) = \operatorname{Im} f(z)$  ist eine Argumentfunktion.

(2) Ist  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  eine Logarithmusfunktion auf  $\Omega$ , so auch  $g = f + 2\pi i k$  für jede Konstante  $k \in \mathbb{Z}$ , denn  $g$  ist stetig und  $e^{g(z)} = e^{f(z)} e^{2\pi i k} = z$ .

⚠ Da es auf  $\Omega$  mehrere Logarithmusfunktionen gibt, sagen wir betont **eine** Logarithmusfunktion und bewusst nicht „die“ Logarithmusfunktion.

(3) Seien umgekehrt  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  zwei Logarithmusfunktionen auf  $\Omega$ . In jedem  $z \in \Omega$  folgt  $e^{g(z)-f(z)} = e^{g(z)} e^{-f(z)} = e^{g(z)} / e^{f(z)} = z/z = 1$ . Dank Satz F2K gilt demnach  $g(z) - f(z) = k(z) \cdot 2\pi i$  für ein  $k(z) \in \mathbb{Z}$ . Mit  $f, g$  ist auch  $k = (g - f)/2\pi i : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$  stetig, also lokal konstant. Da wir  $\Omega$  als zusammenhängend voraussetzen, ist  $k$  konstant.

😊 Kennen wir also auf  $\Omega$  **eine** Logarithmusfunktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , so kennen wir bereits **alle**, nämlich  $f_k = f + k \cdot 2\pi i$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Übung:** Prüfen und erklären Sie die folgenden Konstruktionen!

**Satz F2M: Zweige des komplexen Logarithmus**

Die folgenden Abbildungen sind **Argumentfunktionen**:

$$\begin{aligned}
 g_0 : \mathbb{C}_{\operatorname{Re}>0} &\rightarrow \mathbb{R}, & x + iy &\mapsto \arctan(y/x) \\
 g_{\pi/2} : \mathbb{C}_{\operatorname{Im}>0} &\rightarrow \mathbb{R}, & x + iy &\mapsto +\pi/2 - \arctan(x/y) \\
 g_{-\pi/2} : \mathbb{C}_{\operatorname{Im}<0} &\rightarrow \mathbb{R}, & x + iy &\mapsto -\pi/2 - \arctan(x/y)
 \end{aligned}$$

$$\varphi_0 : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_0(z) = \begin{cases} g_0(z) & \text{für } \operatorname{Re}(z) > 0, \\ g_{\pi/2}(z) & \text{für } \operatorname{Im}(z) > 0, \\ g_{-\pi/2}(z) & \text{für } \operatorname{Im}(z) < 0. \end{cases}$$

Wir erhalten den sogenannten **Hauptzweig der Logarithmusfunktion**  $\ln_0 : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\ln_0(z) = \ln|z| + i\varphi_0(z)$ . Zu jedem Winkel  $\theta \in \mathbb{R}$  existiert entsprechend genau ein **Zweig der Logarithmusfunktion**  $\ln_\theta : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \cdot e^{i\theta} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\ln_\theta(e^{i\theta}) = i\theta$ , nämlich  $\ln_\theta(z) = \ln_0(z e^{-i\theta}) + i\theta$ . Er bijiziert den Sektor  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \cdot e^{i\theta}$  auf den Streifen  $\mathbb{R} \times ]\theta - \pi, \theta + \pi[$ .

**Aufgabe:** Wie finden Sie Nullstellen quadratischer Polynome  $p \in \mathbb{C}[z]$ ?

**Lösung:** Zu gegebenen Nullstellen  $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$  bilden wir das Polynom

$$p(z) = (z - z_1)(z - z_2) = az^2 + bz + c \in \mathbb{C}[z]$$

mit  $a = 1$  und  $b = -z_1 - z_2$  und  $c = z_1 z_2$ . Sind umgekehrt  $a, b, c \in \mathbb{C}$  mit  $a \neq 0$  vorgelegt, so finden wir beide Nullstellen  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  von  $p$  durch

$$\{z_1, z_2\} = \left\{ \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}.$$

Wir stehen daher vor der Aufgabe, zu jeder komplexen Zahl  $z \in \mathbb{C}$  eine  $n$ -te Wurzel zu konstruieren, also eine komplexe Zahl  $w \in \mathbb{C}$  mit  $w^n = z$ . Für  $n = 2$  gelingt dies leicht wie folgt: Für  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $y \geq 0$  setzen wir

$$z = x \pm iy \quad \mapsto \quad w = \sqrt{\frac{|z| + x}{2}} \pm i \sqrt{\frac{|z| - x}{2}}.$$

😊 Wir nutzen die reelle Wurzelfunktion  $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  und erhalten eine stetige komplexe Wurzelfunktion  $\sqrt{\cdot} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{< 0} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $(\sqrt{z})^2 = z$ .

⚠️ Für  $z \in \mathbb{R}_{< 0}$  ist die Zuordnung  $z \mapsto \pm i \sqrt{|z|}$  zweideutig bzw. unstetig.

**Aufgabe:** (1) Für  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  ist die reelle Potenzfunktion  $p : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit  $x \mapsto x^n$  bijektiv, ihre Umkehrfunktion ist die Wurzelfunktion  $y \mapsto \sqrt[n]{y}$ .

(2) Die komplexe Potenzfunktion  $p : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  mit  $w \mapsto w^n$  ist surjektiv aber nicht injektiv: Zu  $z \in \mathbb{C}^*$  existieren genau  $n$  Wurzeln  $w$  mit  $w^n = z$ .

**Lösung:** (1) Die Funktion  $p$  ist stetig, monoton dank  $p'(x) = nx^{n-1} > 0$  für  $x > 0$ , also insbesondere injektiv. Zudem gilt  $p(0) = 0$  und  $p(x) \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow \infty$ . Dank des Zwischenwertsatzes ist  $p : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  surjektiv.

(2) Zu jedem  $z \in \mathbb{C}^*$  existiert ein Logarithmus  $a \in \mathbb{C}$  mit  $e^a = z$  (F2K). Für  $w = e^{a/n}$  gilt demnach  $w^n = (e^{a/n})^n = e^a = z$ . Jede andere Wahl  $a' = a + 2\pi ik$  führt zu  $w' = w e^{2\pi ik/n}$ , wobei  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

**Definition F2N: Zweige der  $n$ -ten Wurzelfunktion**

Eine stetige Funktion  $g : \mathbb{C}^* \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}^*$  mit  $g(z)^n = z$  heißt **ein Zweig der  $n$ -ten Wurzel** auf  $\Omega$  oder auch **eine  $n$ -te Wurzelfunktion** auf  $\Omega$ .

Jede Logarithmusfunktion  $f : \mathbb{C}^* \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $e^{f(z)} = z$ , nach F2M etwa  $f = \ln_\theta$ , beschert uns eine Wurzelfunktion  $g(z) = e^{f(z)/n}$  mit  $g(z)^n = z$ . Die anderen Zweige erhalten wir durch  $e^{(f(z)+2\pi ik)/n} = g(z) e^{2\pi ik/n}$ .

**Aufgabe:** Für jede komplexe Zahl  $z \in \mathbb{C}^*$  gilt  $z \cdot 1/z = 1$ , also scheinbar

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{z \cdot 1/z} \stackrel{?}{=} \sqrt{z} \cdot \sqrt{1/z}.$$

Was erhalten Sie für  $z = 1$ ? Was geht schief für  $z = -1$ ? Gilt etwa

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} \stackrel{?}{=} \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i \cdot i = -1 \quad ?$$

Beobachten Sie diese Gleichung längs des Weges  $z = \gamma(t) = e^{\pi it}$ .

**Lösung:** Das Problem ist die Mehrdeutigkeit der komplexen Wurzeln!

Wir betrachten den Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$  mit  $\gamma(t) = e^{\pi it}$  von  $\gamma(0) = 1$  nach  $\gamma(1) = -1$ . Für das Inverse gilt demnach  $1/\gamma(t) = e^{-\pi it}$ . (Skizze!)

Längs des Weges ziehen wir stetig die Wurzel gemäß  $\sqrt{\gamma}(t) = e^{\pi it/2}$  und entsprechend  $\sqrt{1/\gamma}(t) = e^{-\pi it/2}$ . Während des gesamten Weges gilt  $\sqrt{\gamma}(t) \cdot \sqrt{1/\gamma}(t) = 1$ . Am Endpunkt  $t = 1$  erhalten wir die Gleichung

$$1 = \sqrt{\gamma}(1) \cdot \sqrt{1/\gamma}(1) = i \cdot (-i).$$

Für andere Wege erhält man alternativ  $1 = (-i) \cdot i$ . 😊 Alles wird gut. Dies ist die Methode der analytischen Fortsetzung längs eines Weges.

**Aufgabe:** (1) Jeden Weg  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^*$  mit Startpunkt  $\gamma(a) = z_0 = e^{w_0}$  können wir eindeutig hochheben zu einem Weg  $\ln \gamma := \tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  mit Startpunkt  $\tilde{\gamma}(a) = w_0$  und  $e^{\tilde{\gamma}(t)} = \gamma(t)$  für alle  $t \in [a, b]$ , nämlich:

$$\tilde{\gamma}(t) := w_0 + \int_{\gamma|_{[a,t]}} \frac{dz}{z} = w_0 + \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)} ds.$$

Für jeden anderen Weg  $\hat{\gamma}$  mit  $e^{\hat{\gamma}} = \gamma$  gilt  $\hat{\gamma} = \tilde{\gamma} + k \cdot 2\pi i$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$ .

(2) Jeden Weg  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^*$  mit Startpunkt  $\gamma(a) = z_0 = w_0^n$  können wir eindeutig hochheben zu einem Weg  $\hat{\gamma}_n = \sqrt[n]{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^*$  mit Startpunkt  $\hat{\gamma}_n(a) = w_0$  und der Wurzeleigenschaft  $(\hat{\gamma}_n(t))^n = \gamma(t)$  für alle  $t \in [a, b]$ , nämlich  $\hat{\gamma}_n(t) = e^{(\tilde{\gamma}(t)+2\pi ik)/n}$  für ein geeignetes  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ .

**Lösung:** (1) Für  $t = a$  gilt  $\tilde{\gamma}(a) = w_0$ . Es bleibt,  $e^{\tilde{\gamma}} = \gamma$  nachzuprüfen.

Die Funktion  $h(t) = \gamma(t) e^{-\tilde{\gamma}(t)}$  erfüllt  $h(a) = 1$  und dank HDI zudem  $h'(t) = [\gamma'(t) - \gamma(t)\tilde{\gamma}'(t)] e^{-\tilde{\gamma}(t)} = 0$  für alle  $t \in [a, b]$ , also  $h(t) = 1$ .

Aus  $e^{\hat{\gamma}(t)} = e^{\tilde{\gamma}(t)} = \gamma(t)$  für alle  $t \in [a, b]$  folgt  $e^{\hat{\gamma}(t)-\tilde{\gamma}(t)} = e^{\hat{\gamma}(t)}/e^{\tilde{\gamma}(t)} = 1$ , also  $\hat{\gamma}(t) - \tilde{\gamma}(t) = k(t) \cdot 2\pi i$  für ein  $k(t) \in \mathbb{Z}$ . Mit  $\hat{\gamma}, \tilde{\gamma}$  ist auch die Differenz  $k = (\hat{\gamma} - \tilde{\gamma})/2\pi i : [a, b] \rightarrow \mathbb{Z}$  stetig, also konstant.

**Motivation:** Wir wollen Funktionen auch um Polstellen entwickeln. Zum Beispiel  $z^{-1}$  oder  $z^{-n}$  oder  $e^{1/z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k!}$  entwickelt in  $z_0 = 0$ .

### Definition F20: Laurent-Reihe

Eine **Laurent-Reihe** ist eine (zunächst formale) Reihe der Form

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Sie ist gegeben durch ihren **Entwicklungspunkt**  $z_0 \in \mathbb{C}$  und ihre **Koeffizienten**  $a_k \in \mathbb{C}$  für  $k \in \mathbb{Z}$ . Ihr **Hauptteil** und **Nebenteil** sind

$$f_H(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} (z - z_0)^{-k}, \quad f_N(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Der Nebenteil ist eine Potenzreihe in  $u = (z - z_0)$ , der Hauptteil ist demnach eine Potenzreihe in  $v = (z - z_0)^{-1}$ . Für beide gelten die Rechenregeln für Potenzreihen, wie wir sie oben ausgeführt haben.

Gilt  $a_k = 0$  für alle  $k < 0$ , so haben wir eine **Potenzreihe** vorliegen; für die Koeffizienten gilt dann  $f(z_0) = a_0$  und  $f^{(k)}(z_0) = k! a_k$ .

Treten auch negative Potenzen  $(z - z_0)^k$  mit  $k < 0$  auf, so können wir in die Laurent-Reihe nicht den Entwicklungspunkt  $z_0$  einsetzen!

Man nennt  $z_0$  eine **Singularität** und unterscheidet drei Typen:

- 1 Wir nennen  $z_0$  eine **hebbare Singularität**, wenn  $a_k = 0$  für  $k < 0$ . In diesem Fall verschwindet der Hauptteil, kurz  $f_H = 0$ , und der verbleibende Nebenteil  $f = f_N$  ist eine Potenzreihe um  $z_0$ .

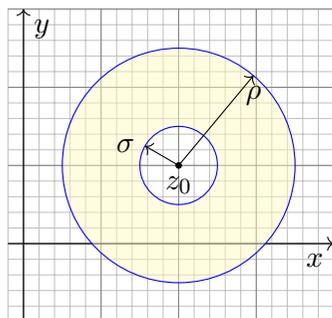
**Beispiel:**  $f(z) = \sin(z)/z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k} / (2k + 1)!$  in  $z_0 = 0$

- 2 Wir nennen  $z_0$  eine **Polstelle  $n$ -ter Ordnung** ( $n \geq 1$ ), wenn  $a_{-n} \neq 0$  aber  $a_k = 0$  für alle Indizes  $k < -n$  gilt.

**Beispiel:**  $f(z) = z^{-n} e^z = \sum_{k=-n}^{\infty} z^k / (k + n)!$  in  $z_0 = 0$

- 3 Wir nennen  $z_0$  eine **wesentliche Singularität**, wenn  $a_k \neq 0$  für unendlich viele Indizes  $k < 0$  gilt.

**Beispiel:**  $f(z) = e^{1/z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} / k!$  in  $z_0 = 0$



Der Nebenteil konvergiert für  $|z - z_0| < \rho$  mit

$$\rho := 1 / \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \in [0, \infty].$$

Der Hauptteil konvergiert für  $|z - z_0| > \sigma$  mit

$$\sigma := \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_{-k}|} \in [0, \infty].$$

Die Laurent-Reihe konvergiert somit auf dem offenen Kreisring

$$K(z_0, \sigma, \rho) := \{ z \in \mathbb{C} \mid \sigma < |z - z_0| < \rho \},$$

wo sowohl der Hauptteil konvergiert als auch der Nebenteil.

⚠ Für  $\sigma > \rho$  ist  $K(z_0, \sigma, \rho)$  leer und die Reihe konvergiert nirgends! Das ist unglücklich, aber möglich. Im Folgenden benötigen wir  $\sigma < \rho$ .

😊 Auf ihrem Konvergenzgebiet können wir mit Laurent-Reihen wie üblich rechnen: Addition, Multiplikation, Komposition, Ableitung, ...

### Satz F2P: Ableitung von Laurent-Reihen

Sei  $\Omega = K(z_0, \sigma, \rho)$  mit  $0 \leq \sigma < \rho \leq \infty$ . Jede Laurent-Reihe

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{für alle } z \in \Omega,$$

ist auf  $\Omega$  holomorph. Ihre Ableitung ist gegeben durch

$$f': \Omega \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad f'(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1} \quad \text{für alle } z \in \Omega.$$

Auch diese ist auf  $\Omega$  holomorph, somit ist  $f$  beliebig oft differenzierbar.

Eine Stammfunktion zu  $f$  existiert genau dann, wenn  $a_{-1} = 0$ , nämlich

$$F: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad F(z) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq -1}}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (z - z_0)^{k+1} \quad \text{für alle } z \in \Omega.$$

**Aufgabe:** Entwickeln Sie die Funktion  $f: \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}: f(z) = 1/(1-z)$  auf  $B(0,1)$  in eine Potenzreihe, auf  $K(0,1,\infty)$  in eine Laurent-Reihe.

**Lösung:** (1) Die **geometrische Reihe** ist die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \quad \text{für } |z| < 1$$

mit Entwicklungspunkt  $z_0 = 0$  und Koeffizienten  $a_k = 1$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Die Polstelle von  $1/(1-z)$  in  $z = 1$  begrenzt den Konvergenzkreis. Die Reihe konvergiert daher nur für  $|z| < 1$  und divergiert für  $|z| \geq 1$ .

(2) Die Funktion  $f(z) = 1/(1-z)$  hingegen existiert auch für  $|z| > 1$ . Wir können sie auf  $K(0,1,\infty)$  in eine **Laurent-Reihe** entwickeln. Statt in Potenzen von  $z$  entwickeln wir in Potenzen von  $1/z$ :

$$\frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z} = \frac{-1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} -z^{k-1} \quad \text{für } |z| > 1$$

Diese Laurent-Reihe konvergiert für  $|z| > 1$  und divergiert für  $|z| \leq 1$ .

**Aufgabe:** Entwickeln Sie die Funktion  $f: \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}: f(z) = 1/(z-a)$  auf  $B(0,|a|)$  in eine Potenzreihe, auf  $K(0,|a|,\infty)$  in eine Laurent-Reihe.

**Lösung:** (1) Auf  $B(0,|a|)$  erhalten wir die Potenzreihe

$$\frac{1}{z-a} = \frac{-1}{a} \cdot \frac{1}{1-z/a} = \frac{-1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{a^k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-a^{-k-1})z^k \quad \text{für } |z| < |a|.$$

(2) Auf  $K(0,|a|,\infty)$  erhalten wir die Laurent-Reihe

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-a/z} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k-1} \quad \text{für } |z| > |a|.$$

Zusammenfassend gilt also

$$\frac{1}{z-a} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} (-a^{-k-1})z^k & \text{für } |z| < |a|, \\ \sum_{k=-1}^{\infty} a^k z^{-k-1} & \text{für } |z| > |a|. \end{cases}$$

**Aufgabe:** Entwickeln Sie die rationale Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 5z + 6}$$

als Laurent-Reihe auf  $B(0,2)$ , auf  $K(0,2,3)$  sowie auf  $K(0,3,\infty)$ .

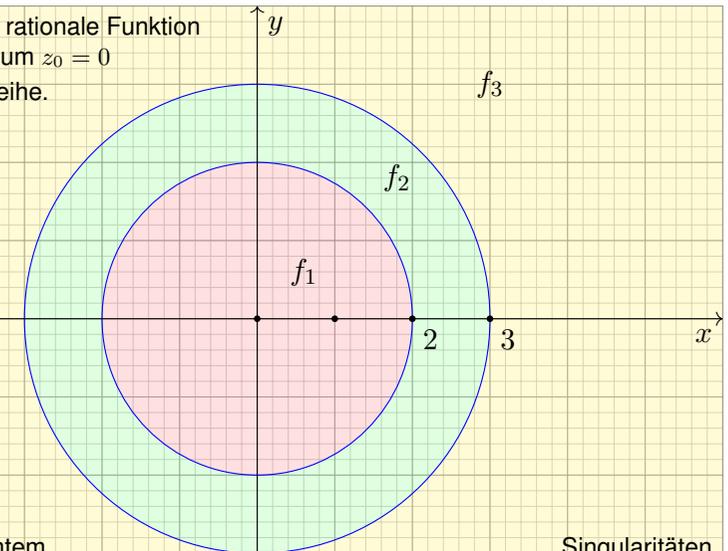
**Lösung:** Am leichtesten gelingt dies mit der Partialbruchzerlegung:

$$f(z) = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2}$$

Dank der vorigen Aufgabe erhalten wir drei gesuchten Entwicklungen:

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{-k-1} - 3^{-k-1})z^k & \text{für } |z| < 2, \\ f_2(z) = \sum_{k=-1}^{-\infty} (-2^{-k-1})z^k + \sum_{k=0}^{\infty} (-3^{-k-1})z^k & \text{für } 2 < |z| < 3, \\ f_3(z) = \sum_{k=-1}^{-\infty} (3^{-k-1} - 2^{-k-1})z^k & \text{für } 3 < |z|. \end{cases}$$

Wir entwickeln die rationale Funktion  $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$  um  $z_0 = 0$  in eine Laurent-Reihe.



Je nach gewünschtem Konvergenzbereich erhalten wir drei verschiedene Lösungen  $f_1, f_2, f_3$ .

Singularitäten von  $f$  bestimmen die Konvergenzradien!

**Satz F2Q: Koeffizienten einer Laurent-Reihe**

Sei  $f: K(z_0, \sigma, \rho) \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch die Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Für jeden Radius  $r$  mit  $\sigma < r < \rho$  und jeden Index  $\ell \in \mathbb{Z}$  gilt dann

$$a_\ell = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{\ell+1}} dz.$$

- ☺ Für Potenzreihen (F2J) genügt ableiten, denn  $a_k = f^{(k)}(z_0)/k!$ . Bei Laurent-Reihen extrahiert das Integral für uns die Koeffizienten.
- ☺ Natürlich bestimmen die Koeffizienten  $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  die Funktion  $f$ . Dank F2Q bestimmt die Funktion  $f$  alle Koeffizienten  $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ .
- ☺ Umgekehrt können wir dies nutzen, um jede holomorphe Funktion  $f: K(z_0, \sigma, \rho) \rightarrow \mathbb{C}$  in eine Laurent-Reihe zu entwickeln (Satz F3E).

**Nachrechnen:** Wir setzen ein und rechnen es aus (dank Satz F1B):

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{\ell+1}} dz &= \int_{\partial B(z_0, r)} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-\ell-1} \right] dz \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left[ \int_{\partial B(z_0, r)} (z - z_0)^{k-\ell-1} dz \right] = 2\pi i a_\ell \end{aligned}$$

Wir erahnen hier bereits die Magie der komplexen Funktionen. Alles wird klar und einfach dank unserer gründlichen Vorbereitung:

- ☺ Reihe und Integral vertauschen dank absoluter Konvergenz (D1A). Die Integrale  $\int_{\partial B(z_0, r)} (z - z_0)^k$  haben wir oben ausgerechnet (F1B).
- ☺ Beim Wegintegral von  $f$  um  $z_0$  bleibt nur der Term  $2\pi i a_{-1}$  zurück. Deshalb heißt  $a_{-1}$  das **Residuum** (das 'Zurückbleibende') von  $f$  in  $z_0$ .
- ☺ Division durch  $(z - z_0)^\ell$  verschiebt alle Exponenten der Reihe, so dass der gewünschte Koeffizient  $a_\ell$  nun zum Residuum wird.

**Aufgabe:** Sei  $a \in \mathbb{C}$  und  $n, k \in \mathbb{N}$  sowie  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ . Berechnen Sie

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, r)} \frac{(z + a)^n}{z^{k+1}} dz.$$

**Lösung:** Für  $(z + a)^n$  nutzen wir den binomischen Lehrsatz. Es gilt

$$(z + a)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} z^j a^{n-j}, \quad \text{also} \quad \frac{(z + a)^n}{z^{k+1}} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} z^{j-k-1} a^{n-j}.$$

Das Integral gelingt leicht dank Linearität und obiger Formeln:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, r)} \frac{(z + a)^n}{z^{k+1}} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, r)} \left[ \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} z^{j-k-1} a^{n-j} \right] dz \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} \cdot \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, r)} z^{j-k-1} dz \right] = \binom{n}{k} a^{n-k} \end{aligned}$$

- ☺ Wir integrieren hier ein Laurent-Polynom, die Konvergenz spielt daher zunächst noch keine Rolle. Es genügt die Linearität des Integrals.

**Aufgabe:** Sei  $a \in \mathbb{C}$  und  $k \in \mathbb{N}$  sowie  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ . Berechnen Sie

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, r)} \frac{e^{az}}{z^{k+1}} dz.$$

**Lösung:** Dank Exponentialreihe gilt

$$e^{az} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^j}{j!} z^j.$$

Das Integral gelingt leicht dank obiger Formeln:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, r)} \frac{e^{az}}{z^{k+1}} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, r)} \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^j}{j!} z^{j-k-1} \right] dz \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^j}{j!} \cdot \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, r)} z^{j-k-1} dz \right] = \frac{a^k}{k!} \end{aligned}$$

- ☺ Wir integrieren hier eine Laurent-Reihe. Sie konvergiert absolut in jedem Punkt  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Daher vertauschen Reihe und Integral. 106

**Satz F3A: Integralsatz von Cauchy**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen und darauf  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion. Für jedes Kompaktum  $D \subseteq \Omega$  mit stückweise glattem Rand gilt:

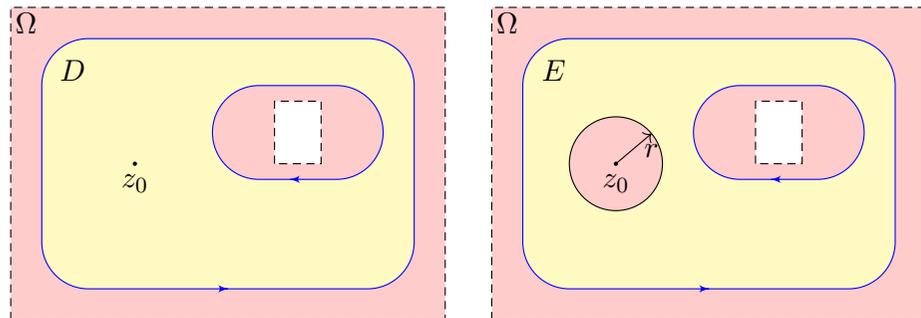
$$\int_{\partial D} f(z) dz = 0$$

**Nachrechnen:** Für  $f = u + iv$  und  $dz = dx + i dy$  rechnen wir nach:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} f(z) dz &\stackrel{\text{Def}}{\stackrel{\text{F1A}}{=}} \int_{\partial D} (u dx - v dy) + i(u dy + v dx) \\ &\stackrel{\text{Green}}{\stackrel{\text{Gauß}}{=}} \int_D \text{rot}(u, -v) d(x, y) + i \int_D \text{div}(u, -v) d(x, y) \stackrel{\text{CR}}{\stackrel{\text{F2E}}{=}} 0 \end{aligned}$$

Das ist die Grundlage des Residuensatzes F4D: gar keine Singularitäten! Für Anwendungen der Strömungsmechanik, wie die Kutta-Formel Q1C, schwächen wir die Voraussetzungen etwas ab: Es genügt  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und auf  $\mathring{D}$  holomorph. *Beweisidee:* Wir parametrisieren  $\partial D$  durch  $\delta$ . Zu  $\varepsilon > 0$  finden wir ein Kompaktum  $C \Subset D$  mit stückweise glattem Rand, parametrisiert durch  $\gamma$  mit  $|\int_\gamma f - \int_\delta f| \leq \varepsilon$ . Dank F3A gilt  $\int_\gamma f = 0$ . Aus  $|\int_\delta f| \leq \varepsilon$  für alle  $\varepsilon > 0$  folgt  $\int_\delta f = 0$ .

**Beweis:** Wir folgern die Integralformel F3B aus dem Integralsatz F3A. Der Integrand  $h(z) = f(z)/(z - z_0)$  ist holomorph auf  $\Omega \setminus \{z_0\}$  (F2D).  
Erster Fall: Für  $z_0 \notin D$  ist  $h$  holomorph auf  $D$ , also  $\int_{\partial D} h(z) dz = 0$ . Das ist Cauchys Integralsatz F3A, reell also Green und Gauß!



Zweiter Fall: Für  $z_0 \in \mathring{D}$  wählen wir  $r > 0$  so klein, dass  $\overline{B}(z_0, r) \subseteq \mathring{D}$ . Die Restmenge  $E = D \setminus B(z_0, r)$  ist kompakt mit stückweise glattem Rand  $\partial E = \partial D \cup \partial B(z_0, r)$ . *Orientierung:* Die Kreislinie  $\partial B(z_0, r)$  wird hier im Uhrzeigersinn (!) durchlaufen, sodass  $E$  links davon liegt.

**Satz F3B: Integralformel von Cauchy**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Sei  $D \subseteq \Omega$  kompakt mit stückweise glattem Rand. Für jeden Punkt  $z_0 \in \Omega \setminus \partial D$  gilt dann

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \begin{cases} f(z_0) & \text{für } z_0 \in \mathring{D}, \\ 0 & \text{für } z_0 \notin D. \end{cases}$$

☺ Das ist ein bemerkenswerter Integralsatz. Die Funktionswerte  $f(z)$  auf dem Rand  $\partial D$  bestimmen bereits alle Werte  $f(z_0)$  im Inneren  $\mathring{D}$ ! Einfache Anwendungsbeispiele: Für  $f = 1$  erhalten wir erneut

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{1}{z - z_0} dz = \mathbf{I}_D(z_0) = \begin{cases} 1 & \text{für } z_0 \in \mathring{D}, \\ 0 & \text{für } z_0 \notin D. \end{cases}$$

Das verallgemeinert die fundamentalen Integrale (Satz F1B) sowie die reellen Arbeits- und Flussintegrale [E317]. Weitere Anwendungsbeispiele:

$$\int_{\partial B(0,1)} \frac{e^z}{z} dz = 2\pi i e^0 = 2\pi i, \quad \int_{\partial B(0,1)} \frac{1}{z \cos z} dz = \frac{2\pi i}{\cos(0)} = 2\pi i$$

Da  $h$  auf  $E$  holomorph ist, gilt dank Cauchys Integralsatz F3A:

$$0 = \int_{\partial E} h(z) dz = \int_{\partial D} h(z) dz - \int_{\partial B(z_0, r)} h(z) dz$$

Das gesuchte Integral können wir durch diesen Trick ausrechnen:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{t=0}^{2\pi} \frac{f(z_0 + r e^{it})}{r e^{it}} \cdot r i e^{it} dt \\ &= i \int_{t=0}^{2\pi} f(z_0 + r e^{it}) dt \xrightarrow{r \rightarrow 0} 2\pi i f(z_0). \end{aligned}$$

Da die linke Seite gar nicht von  $r$  abhängt, schließen wir daraus

$$\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0).$$

☺ Dank unserer Werkzeuge ist die Rechnung kurz und schmerzlos. Wir brauchen: komplexe Wegintegrale (F1A), holomorphe Funktionen (F2c) und hierzu äquivalent Cauchy-Riemann (F2E), sowie Integralsätze in der Ebene: Green & Gauß (E1l) und hierzu äquivalent Cauchy (F3A).

**Satz F3C: Fundamentalsatz der Algebra**

Zu jedem Polynom  $f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$  vom Grad  $n$ , mit beliebigen komplexen Koeffizienten  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ ,  $a_n \neq 0$ , existieren genau  $n$  komplexe Nullstellen  $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ , sodass gilt:

$$f(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

Das ist ein schöner und nützlicher Satz! Noch schöner und noch nützlicher wäre es, zudem noch die Lage der Nullstellen zu erfahren. Nur für sehr kleine Grade gelingt dies leicht und explizit: Für  $n = 1$  führt die Nullstellensuche zur linearen Gleichung  $a_0 + a_1z = 0$ , also  $z = -a_0/a_1$ .

Für  $n = 2$  haben wir eine quadratische Gleichung  $a_0 + a_1z + a_2z^2 = 0$ , die wir mit der allseits beliebten Mitternachtsformel lösen können:  $z_{1,2} = (-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}) / (2a_2)$ . Das ist eine nicht-triviale Konstruktion, vor allem durch das Wurzelziehen in  $\mathbb{C}$ . Wie geht das nochmal? [F229]

Für Grad  $n = 3$  und  $n = 4$  gibt es ähnliche Formeln (von Cardano und Ferrari) mit dritten bzw. vierten Wurzeln. Diese Formeln sind leider etwas komplizierter und werden daher selten genutzt.

Für Grad  $n \geq 5$  existieren keine solchen Wurzelformeln mehr! Wir müssen uns im Allgemeinen damit begnügen, die Lage der Nullstellen näherungsweise zu bestimmen. Dies hinreichend genau und möglichst effizient zu erreichen, ist das Grundproblem bei der numerischen Nullstellensuche.

Der Fundamentalsatz der Algebra verkündet „das Vorhandensein eines Schatzes, ohne jedoch zu verraten, an welchem Ort. [...] Nicht das Existenztheorem ist das Wertvolle, sondern die im Beweise geführte Konstruktion.“ (Hermann Weyl) Die Suche der Nullstellen ist eine ungleich schwierigere Frage und für Anwendungen ungemein wichtig. Hierzu dient folgende Präzisierung:

**Satz F3D: Lokalisieren der Nullstellen**

Sei  $f(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$  ein Polynom mit  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ . Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  kompakt mit stückweise glattem Rand, z.B. ein Rechteck, wobei keine Nullstellen von  $f$  auf dem Rand  $\partial D$  liegen. Dann gilt:

$$\#_{\text{mult}} \left\{ z \in \overset{\circ}{D} \mid f(z) = 0 \right\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

**Nachrechnen:** Dank F3C gilt  $f(z) = a_n(z - z_1) \cdots (z - z_n)$ , also

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z - z_1} + \dots + \frac{1}{z - z_n} \quad \text{dank Produktregel.}$$

😊 Das Wegintegral zählt die Nullstellen! 📺 [youtu.be/b7FxpSqfK0Y](https://youtu.be/b7FxpSqfK0Y)

**Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra dank Umlaufzahl:**

Angenommen,  $f$  hat keine Nullstelle in  $\mathbb{C}$ , also  $f(z) \neq 0$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Dann ist der Quotient  $h(z) = f'(z)/f(z)$  auf ganz  $\mathbb{C}$  holomorph.

(0) Cauchys Integralsatz F3A garantiert  $\int_{\partial B(0,r)} h(z) dz = 0$  für alle  $r > 0$ .

(1) Für  $z = r e^{it}$  und  $r \rightarrow \infty$  gilt folgender Grenzwert gleichmäßig in  $t$ :

$$h(z)z = \frac{f'(z)z}{f(z)} = \frac{na_nz^n + (n-1)a_{n-1}z^n + \dots + a_1z}{a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0} \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} n.$$

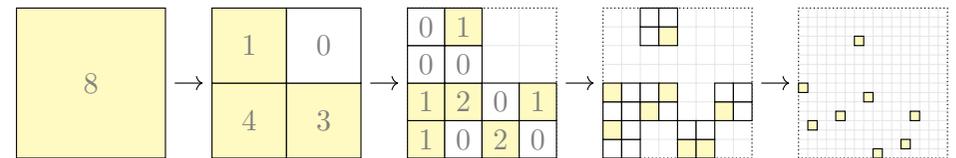
Für den Integrationsweg  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\gamma(t) = r e^{it}$  folgt dank D3C:

$$0 = \int_{\gamma} h(z) dz = \int_{t=0}^{2\pi} h(r e^{it}) r e^{it} i dt \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \int_{t=0}^{2\pi} n dt = 2\pi i n$$

(2) Beides ist nur für  $n = 0$  möglich. Das bedeutet: Jedes komplexe Polynom  $f$  von Grad  $n \geq 1$  hat mindestens eine Nullstelle  $z_n \in \mathbb{C}$ .

Polynomdivision ergibt  $f(z) = g(z)(z - z_n)$  mit  $g \in \mathbb{C}[z]$  von Grad  $n - 1$ . Die vollständige Zerlegung erhalten wir durch wiederholtes Abspalten.

Hieraus erhalten wir **Weyls Algorithmus zur Nullstellensuche:**



Die Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sind uns gegeben, gesucht sind die Nullstellen  $z_1, \dots, z_n$ .

Insbesondere sieht man dem Polynom  $f$  die Anzahl seiner Nullstellen in  $D$  nicht direkt an. Das Kurvenintegral von  $f'/f$  über  $\partial D$  hingegen können wir aus den Koeffizienten berechnen, z.B. algebraisch durch euklidische Polynomdivision (Algorithmus von Sturm) oder numerisch durch geschickte Approximation des Integrals. Genau hierin liegt der algorithmische Nutzen!

Zum Beginn der Rechnung wählen wir ein Quadrat  $D = [-r, r]^2$ , das alle  $n$  Nullstellen enthält, etwa  $r = \sum_{k=0}^n |a_k|/|a_n|$ . Dieses Quadrat unterteilen wir in vier gleich große Teilquadrate. In jedem können wir dank obiger Formel F3D exakt die Anzahl der Wurzeln von  $f$  bestimmen. Wir behalten nur die nicht-leeren Quadrate und unterteilen diese weiter, bis alle Nullstellen hinreichend genau lokalisiert sind. Dies ist völlig analog zur reellen Intervallhalbierung.

Algorithmen dieser Art gehören zu den schnellsten Nullstellenfindern. Hat man auf diese Weise alle Nullstellen von  $f$  lokalisiert und ausreichend genau voneinander getrennt, so kann man zum Newton-Verfahren übergehen. Dieses lokale Iterationsverfahren muss in unmittelbarer Nähe einer Nullstelle gestartet werden, konvergiert dann aber sehr schnell gegen diese Nullstelle.

**Satz F3E: Entwicklung als Potenzreihe**

Sei  $f: B(z_0, \rho) \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, also stetig komplex differenzierbar.  
Für einen beliebigen Radius  $r$  mit  $0 < r < \rho$  und  $k \in \mathbb{N}$  definieren wir

$$a_k := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz.$$

Dank Cauchys Integralsatz F3A ist das Ergebnis unabhängig von  $r$ .  
Diese Koeffizienten stellen  $f$  als Potenzreihe dar, das heißt, es gilt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{für alle } z \in B(z_0, \rho).$$

Insbesondere ist  $f$  beliebig oft komplex differenzierbar, und es gilt:

$$f^{(k)}(z_0) = k! a_k = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

**Beweis:** Nach Verschieben können wir  $z_0 = 0$  annehmen. F221

Zum Punkt  $z \in B(0, \rho)$  wählen wir einen Radius  $r$  mit  $|z| < r < \rho$ .

Wir nutzen die geometrische Reihe F238: Für  $|z| < r = |\zeta|$  gilt

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{1}{1 - (z/\zeta)} = \frac{1}{\zeta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\zeta^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\zeta^{k+1}}.$$

Auf  $\bar{B}(0, r)$  wenden wir Cauchys Integralformel F3B an:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, r)} f(\zeta) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\zeta^{k+1}} \right) d\zeta \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta \right) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k. \end{aligned}$$

Summe und Integral vertauschen dank absoluter Konvergenz. D106

**Satz F3F: Entwicklung als Laurent-Reihe**

Sei  $f: K(z_0, \sigma, \rho) \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, also stetig komplex differenzierbar.  
Für einen beliebigen Radius  $r$  mit  $\sigma < r < \rho$  und  $k \in \mathbb{Z}$  definieren wir

$$a_k := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz.$$

Dank Cauchys Integralsatz F3A ist das Ergebnis unabhängig von  $r$ .  
Diese Koeffizienten stellen  $f$  als Laurent-Reihe dar, das heißt, es gilt

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{für alle } z \in K(z_0, \sigma, \rho).$$

Insbesondere ist  $f$  auf  $K(z_0, \sigma, \rho)$  beliebig oft komplex differenzierbar.

😊 Die Konvergenz der Reihe wird garantiert für alle  $z \in K(z_0, \sigma, \rho)$ .

😊 Gilt  $a_k = 0$  für alle  $k < 0$ , so haben wir wie zuvor eine Potenzreihe.  
Die Funktion  $f$  lässt sich dann auf ganz  $B(z_0, \rho)$  holomorph fortsetzen.

**Beweis:** Nach Verschieben können wir  $z_0 = 0$  annehmen. F221

Zu  $z \in K(0, \sigma, \rho)$  wählen wir Radien  $s, r$  mit  $\sigma < s < |z| < r < \rho$ .

Auf  $\bar{K}(0, s, r)$  wenden wir Cauchys Integralformel F3B an:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, s)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Das Integral über  $\partial B(0, r)$  liefert wie oben die Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ .

Für  $\partial B(0, s)$  nutzen wir die geometrische Reihe, diesmal für  $|\zeta| < |z|$ :

$$\frac{-1}{\zeta - z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - (\zeta/z)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta^k}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta^k}{z^{k+1}} = \sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{z^k}{\zeta^{k+1}}.$$

Das Integral über  $\partial B(0, s)$  liefert dann den Hauptteil:

$$\begin{aligned} \frac{-1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, s)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, s)} f(\zeta) \left( \sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{z^k}{\zeta^{k+1}} \right) d\zeta \\ &= \sum_{k=-1}^{-\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, s)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta \right) z^k = \sum_{k=-1}^{-\infty} a_k z^k. \end{aligned}$$

**Definition F4A: Residuum**

Sei  $f$  holomorph auf  $B(z_0, \rho) \setminus \{z_0\} = K(z_0, 0, \rho)$  mit  $\rho > 0$ .  
 Hierauf ist  $f$  eine Laurent-Reihe  $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ .  
 Das **Residuum** von  $f$  im Punkt  $z_0$  ist somit gegeben durch

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} f(z) dz \quad \text{für } 0 < r < \rho.$$

**Beispiel:** Berechnen Sie das Residuum im Punkt  $z_0 = 0$  von...

- $f(z) = az^{-1}, \quad \operatorname{res}_0(f) = a$
- $f(z) = az^k \quad \text{mit } k \neq -1, \quad \operatorname{res}_0(f) = 0$
- $f(z) = \exp(a/z) = 1 + az^{-1} + \frac{a^2}{2!}z^{-2} + \frac{a^3}{3!}z^{-3} + \dots, \quad \operatorname{res}_0(f) = a$
- $f(z) = z^2 \exp(a/z) = z^2 + az + \frac{a^2}{2!}z^0 + \frac{a^3}{3!}z^{-1} + \dots, \quad \operatorname{res}_0(f) = a^3/6$
- $f(z) = \exp(z)/z^3 = z^{-3} + z^{-2} + \frac{1}{2!}z^{-1} + \frac{1}{3!}z^0 + \dots, \quad \operatorname{res}_0(f) = 1/2$
- $f(z) = \cos(z)/z^2 = z^{-2} - \frac{1}{2!}z^0 + \frac{1}{4!}z^2 - \frac{1}{6!}z^4 + \dots, \quad \operatorname{res}_0(f) = 0$

**Satz F4c: Residuum einer mehrfachen Polstelle**

Sei  $f$  holomorph auf  $B(z_0, \rho) \setminus \{z_0\} = K(z_0, 0, \rho)$  mit  $\rho > 0$ .  
 Zudem existiere der Grenzwert  $\lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^n f(z)]$  in  $\mathbb{C}$ .  
 Dann hat  $f$  in  $z_0$  höchstens einen **Pol  $n$ -ter Ordnung**, und es gilt

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(n-1)!} \left( \frac{d}{dz} \right)^{n-1} [(z - z_0)^n f(z)].$$

Für einfache Polstellen ( $n = 1$ ) erhalten wir obige Formel:

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)f(z)]$$

Für zweifache Polstellen ( $n = 2$ ) wird einmal abgeleitet:

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz} [(z - z_0)^2 f(z)]$$

**Beispiel:** Für  $f(z) = \exp(z)/z^n$  und  $z_0 = 0$  gilt  $\operatorname{res}_0(f) = 1/(n-1)!$ .  
 Alternativ als Reihe:  $f(z) = z^{-n} + \dots + z^{-1}/(n-1)! + z^0/n! + \dots$

**Satz F4B: Residuum einer einfachen Polstelle**

(1) Sei  $f$  holomorph auf  $B(z_0, \rho) \setminus \{z_0\} = K(z_0, 0, \rho)$  mit  $\rho > 0$ .  
 Zudem existiere der Grenzwert  $\lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)f(z)]$  in  $\mathbb{C}$ .  
 Dann hat  $f$  in  $z_0$  höchstens einen **einfachen Pol**, und es gilt

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)f(z)].$$

(2) Sei speziell  $f = p/q$  Quotient zweier holomorpher Funktionen mit einfachem Pol in  $z_0$ , d.h.  $p(z_0) \neq 0, q(z_0) = 0, q'(z_0) \neq 0$ . Dann gilt:

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) \stackrel{(1)}{=} \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)f(z)] \stackrel{(2)}{=} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{p(z)}{\frac{q(z)-q(z_0)}{z-z_0}} \stackrel{(2)}{=} \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

**Beispiel:** Sei  $f(z) = \exp(az)/z = z^{-1} + az^0 + \frac{a^2}{2!}z + \frac{a^3}{3!}z^2 + \dots$ .  
 Für  $p(z) = \exp(az)$  und  $q(z) = z$  folgt  $\operatorname{res}_0(f) = p(0)/q'(0) = 1$ .

☺ Dies vereinfacht die Berechnung von Residuen einfacher Pole.  
 Die letzte Formel entspricht der beliebten Regel von L'Hospital.

Das Residuum von  $f$  in  $z_0$  ist definiert als Laurent-Koeffizient  $a_{-1}$  bzw. als Wegintegral um  $z_0$ .  
 In einer *wesentlichen Singularität* wie  $f(z) = \exp(1/z)$  in  $z_0 = 0$  ist dies der einzige Zugang.  
 In einer *Polstelle* können wir das Residuum auf verschiedene, meist leichtere Weisen berechnen.

**Nachrechnen:** Wir entwickeln  $f$  um  $z_0$  in eine Laurent-Reihe (F3F):

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$$

Wenn  $\lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^n f(z)]$  existiert, dann gilt  $a_k = 0$  für  $k < -n$ .

Multiplikation mit  $(z - z_0)^n$  liefert zunächst die Potenzreihe

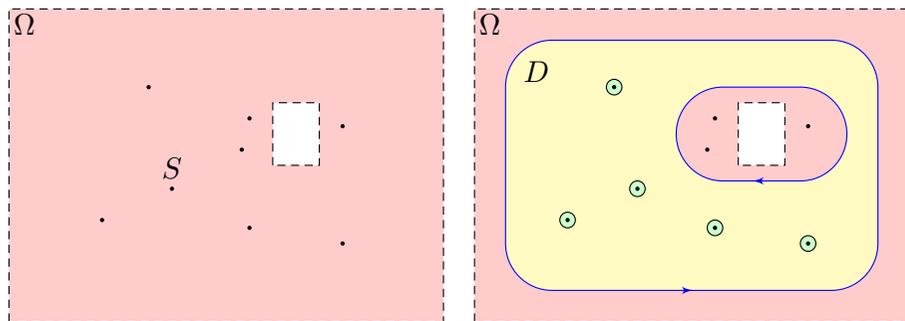
$$(z - z_0)^n f(z) = a_{-n}(z - z_0)^0 + \dots + a_{-1}(z - z_0)^{n-1} + a_0(z - z_0)^n + \dots$$

Nach  $(n - 1)$ -maligem Ableiten bleibt nur noch die Potenzreihe

$$\left( \frac{d}{dz} \right)^{n-1} [(z - z_0)^n f(z)] = (n - 1)! a_{-1}(z - z_0)^0 + n! a_0(z - z_0)^1 + \dots$$

Für  $z \rightarrow z_0$  erhalten wir schließlich  $(n - 1)! a_{-1}$ , wie gewünscht.

☺ In Worten: Multiplikation mit  $(z - z_0)^n$  löscht zunächst den Pol, anschließend verschiebt die  $(n - 1)$ -fache Ableitung  $a_{-1}$  in Grad 0.



**Satz F4D: Residuensatz für Kompakta, Cauchy 1825**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f : \Omega \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph auf  $\Omega$  bis auf eine Menge  $S$  isolierter Singularitäten. Sei  $D \subseteq \Omega$  kompakt mit stückweise glattem Rand, wobei  $\partial D \cap S = \emptyset$ . Dann gilt:

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i \sum_{s \in \mathring{D}} \text{res}_s(f)$$

☺ Links muss man integrieren, rechts nur Residuen summieren!

☺ Damit erreichen wir den Höhepunkt unserer Integrationstheorie komplexer Funktionen! Wir wissen nun, was holomorphe Funktionen sind und wie man sie dank Cauchy–Riemann–Gleichungen erkennt. Wir wissen zudem, wie man mit isolierten Singularitäten umgeht und ihr Residuum ausrechnet. Die nötigen Wegintegrale und Integralsätze in der Ebene haben wir im letzten Kapitel E kennen und nutzen gelernt.

Damit halten wir alle Zutaten für den Residuensatz in Händen!

Jede holomorphe Funktion  $f : \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  erfüllt die CR–Gleichungen. Für  $f = u + iv$  ist dies gleichbedeutend zu  $\text{rot}(u, -v) = \text{div}(u, -v) = 0$ . Dank Integralsatz gilt  $\int_{\partial D} f(z) dz = 0$  für jedes Kompaktum  $D \subseteq \Omega$ .

Was passiert nun, wenn  $f$  isolierte Singularitäten  $s \in \mathring{D}$  hat? Jede Singularität  $s$  liefert ihren Beitrag  $2\pi i \text{res}_s(f)$  zum Integral! Der Raum dazwischen ist „Vakuum“ und liefert keinen Beitrag.

Anschaulich können wir uns  $f : \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  als zweidimensionales elektromagnetisches Feld vorstellen. Eine Polstelle im Punkt  $s \in \Omega$  entspricht einem Teilchen mit einer gewissen Ladung  $a_{-1} = \text{res}_s(f)$ .

**Nachrechnen:** Seien  $s_1, \dots, s_n$  die Singularitäten im Inneren von  $D$ . Es gibt nur endlich viele, da jede isoliert liegt und  $D$  kompakt ist.

Wir wählen  $r > 0$  so klein, dass die abgeschlossenen Kreisscheiben  $\overline{B}(s_1, r), \dots, \overline{B}(s_n, r)$  ganz im Inneren von  $D$  liegen und disjunkt sind.

$$\int_{\partial B(s_k, r)} f(z) dz = 2\pi i \text{res}_{s_k}(f).$$

Die Restmenge  $E = D \setminus [B(s_1, r) \cup \dots \cup B(s_n, r)]$  ist kompakt mit stückweise glattem Rand  $\partial E = \partial D \cup \partial B(s_1, r) \cup \dots \cup \partial B(s_n, r)$ . Positive Orientierung bezüglich  $E$  bedeutet: Die Kreislinien  $\partial B(s_k, r)$  werden im Uhrzeigersinn durchlaufen, damit  $E$  links davon liegt.

Da  $f$  auf  $E$  holomorph ist, gilt nach dem Integralsatz von Cauchy

$$0 = \int_{\partial E} f(z) dz = \int_{\partial D} f(z) dz - \sum_{k=1}^n \int_{\partial B(s_k, r)} f(z) dz.$$

Die Vorzeichen entsprechen der positiven Orientierung des Randes.

Cauchys Residuensatz ist der Höhepunkt unserer Integrationstheorie komplexer Funktionen. Er beruht auf Cauchys Integralsatz F3A und Cauchys Integralformel F3B und enthält diese als Spezialfälle:

**Korollar F4E: Spezialfälle des Residuensatzes**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion.

(1) Für jedes Kompaktum  $D \subseteq \Omega$  mit stückweise glattem Rand gilt

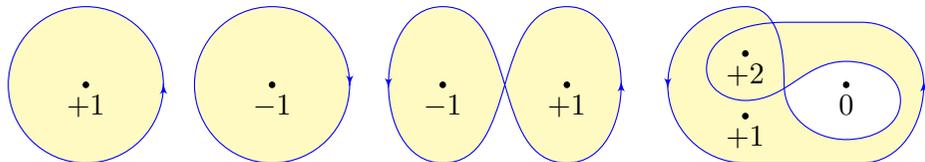
$$\int_{\partial D} f(z) dz = 0.$$

(2) Für jeden Punkt  $z_0 \in \Omega \setminus \partial D$  und  $k \in \mathbb{N}$  gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \begin{cases} \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0) & \text{für } z_0 \in \mathring{D}, \\ 0 & \text{für } z_0 \notin D. \end{cases}$$

Im ersten Integral hat der Integrand  $f(z)$  keine Singularität, im zweiten hat  $f(z)/(z - z_0)^{k+1}$  eine Polstelle in  $z_0$  mit Residuum  $f^{(k)}(z_0)/k!$ .

Bislang kennen wir den Residuensatz für Kompakta (F4D). Er gilt auch für beliebige geschlossene Wege (F4G). Hierzu zählen wir die Umläufe:



**Lemma F4F: Cauchy-Index = Umlaufzahl in der Ebene**

Für jeden geschlossenen Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$  ist der **Index**

$$\text{ind}_{z_0}(\gamma) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz$$

eine ganze Zahl; sie zählt die Umläufe von  $\gamma$  um den Punkt  $z_0$ .

- 😊 Dieses Integral hat eine einfache geometrische Interpretation.
- 😊 Die reelle Formulierung kennen wir bereits als Arbeitsintegral des Wirbelfeldes bzw. als Flussintegral des Quellenfeldes. [E333]

**Aufgabe:** Rechnen Sie die im Lemma gemachten Aussagen nach!

**Lösung:** Wir rechnen in Polarkoordinaten  $\gamma(t) = z_0 + r(t) e^{i\varphi(t)}$ .

Hierzu seien  $r: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  und  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stückw. stetig diff'bar.

Da der Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$  geschlossen sein soll, gilt  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .

Insbesondere sind die Beträge  $r(a) = |\gamma(a)|$  und  $r(b) = |\gamma(b)|$  gleich.

Hingegen folgt aus  $e^{i\varphi(a)} = e^{i\varphi(b)}$  nur  $\varphi(b) = \varphi(a) + 2\pi\ell$  mit  $\ell \in \mathbb{Z}$ .

Diese Zahl  $\ell$  ist die Anzahl der Umläufe von  $\gamma$  um den Punkt  $z_0$ .

Einsetzen von  $z = \gamma(t)$  und  $dz = \gamma'(t) dt$  in die Indexformel liefert:

$$\begin{aligned} \text{ind}_{z_0}(\gamma) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{t=a}^b \frac{1}{\gamma(t) - z_0} \gamma'(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{t=a}^b \frac{1}{r(t) e^{i\varphi(t)}} [r'(t) e^{i\varphi(t)} + r(t) e^{i\varphi(t)} i\varphi'(t)] dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{t=a}^b \frac{r'(t)}{r(t)} + i\varphi'(t) dt = \frac{1}{2\pi i} [\ln r(t) + i\varphi(t)]_{t=a}^b \\ &= \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{2\pi} = \ell \quad \text{😊 Das ist die Umlaufzahl!} \end{aligned}$$

**Satz F4G: Residuensatz für geschlossene Wege**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f: \Omega \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph auf  $\Omega$  bis auf eine Menge  $S$  isolierter Singularitäten. Sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega \setminus S$  ein geschlossener Weg, sodass  $\text{ind}_z(\gamma) = 0$  für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ . (Das gilt insbesondere, wenn  $\gamma$  in  $\Omega$  zusammenziehbar ist.) Dann gilt:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{s \in S} \text{res}_s(f) \text{ind}_s(\gamma)$$

Anstelle eines (oft komplizierten) Kurvenintegrals links muss man rechts nur Residuen und Umlaufzahlen bestimmen, was meist leichter ist. Die Summe ist endlich, denn  $\gamma$  umläuft nur endlich viele Singularitäten; für alle anderen gilt  $\text{ind}_s(\gamma) = 0$ , sie tragen nichts zur Summe bei.

Dieser Satz verallgemeinert den vorigen Residuensatz F4D für Kompakta: Der Rand  $\partial K$  eines Kompaktums  $K$  umläuft jeden inneren Punkt genau einmal, äußere Punkte umläuft er nicht. Daher tritt im Residuensatz für Kompakta die Vielfachheit durch den Index nicht explizit auf.

Die allgemeine Formulierung für beliebige geschlossene Wege ist manchmal flexibler. Die Skizze zum Lemma F4F und die folgende Aufgabe zeigen einige einfache Beispiele.

**Aufgabe:** Überprüfen Sie diesen Satz für die Funktion  $f(z) = (z - z_0)^k$  und den Weg  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\gamma(t) = z_0 + r e^{ilt}$  mit Umlaufzahl  $\ell \in \mathbb{Z}$ .

**Lösung:** Wir berechnen zunächst die rechte Seite. Wir wissen bereits

$$\text{ind}_0(\gamma) = \ell \quad \text{und} \quad \text{res}_0(f) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = -1, \\ 0 & \text{für } k \neq -1. \end{cases}$$

Für das Wegintegral von  $f$  entlang  $\gamma$  erhalten wir laut Satz

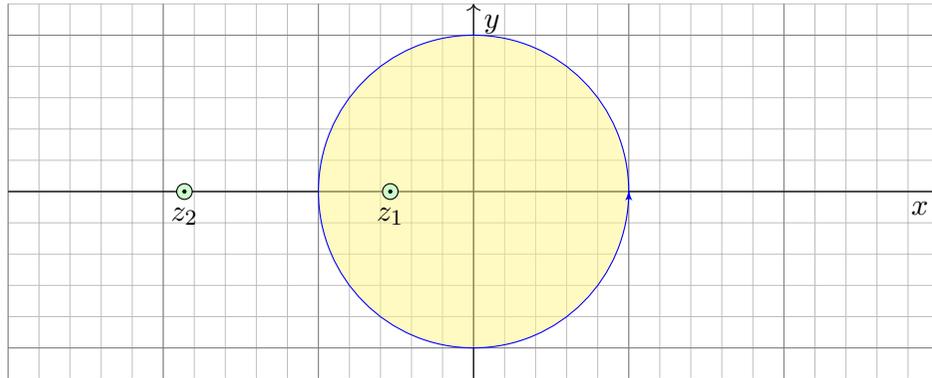
$$\int_{\gamma} z^k dz = 2\pi i \text{res}_0(z^k) \text{ind}_0(\gamma) = \begin{cases} 2\pi i \ell & \text{für } k = -1, \\ 0 & \text{für } k \neq -1. \end{cases}$$

Die Polstelle  $z_0 = 0$  wird hier genau  $\ell$  mal umlaufen.

Der Beitrag  $2\pi i \text{res}_0(z^k)$  wird dementsprechend  $\ell$  mal gezählt.

Zur Probe berechnen wir die linke Seite direkt nach Definition:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (z - z_0)^k dz &= \int_{t=0}^{2\pi} (\gamma(t) - z_0)^k \gamma'(t) dt = \int_{t=0}^{2\pi} r^k e^{ik\ell t} \cdot r e^{i\ell t} \cdot i\ell dt \\ &= i\ell r^{k+1} \int_{t=0}^{2\pi} e^{i(k+1)\ell t} dt = \begin{cases} 2\pi i \ell & \text{für } k = -1, \\ 0 & \text{für } k \neq -1. \end{cases} \end{aligned}$$



**Aufgabe:** (1) Berechnen Sie für  $a > 1$  das komplexe Wegintegral

$$\int_{\partial B(0,1)} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} = \frac{\pi i}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

Dabei ist  $\partial B(z_0, r)$  die Kreislinie um  $z_0$  mit Radius  $r$ . Wir parametrisieren sie mathematisch positiv durch  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}: t \mapsto \gamma(t) = z_0 + r e^{it}$ .

**Aufgabe:** (2) Berechnen Sie für  $a > 1$  ebenso das reelle Integral

$$\int_{t=0}^{\pi} \frac{1}{a + \cos t} dt = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

**Lösung:** Wir nutzen die Euler-Formel  $z = e^{it} = \cos t + i \sin t$ , also

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}.$$

Einsetzen in den Integranden ergibt

$$\frac{1}{a + \cos t} = \left( a + \frac{z + z^{-1}}{2} \right)^{-1} = \left( \frac{z^2 + 2az + 1}{2z} \right)^{-1} = \frac{2z}{z^2 + 2az + 1}$$

Wir integrieren längs der Kreislinie  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}: t \mapsto \gamma(t) = e^{it}$ .

Für  $z = \gamma(t) = e^{it}$  gilt  $dz = \gamma'(t) dt = i e^{it} dt$ , also  $dt = dz/(iz)$ , somit:

$$\int_{t=0}^{2\pi} \frac{dt}{a + \cos t} = \int_{t=0}^{2\pi} \frac{2z dt}{z^2 + 2az + 1} = \frac{2}{i} \int_{\partial B(0,1)} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} \stackrel{!}{=} \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

☺ Das gesuchte Integral über die halbe Periode ist genau die Hälfte.

**Lösung:** Unser Integrand  $f(z)$  hat zwei Polstellen  $z_1, z_2$ , beide **einfach**:

$$z_2 = -a - \sqrt{a^2 - 1} < -1 < z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1} < 0$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 2az + 1} = \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)} \stackrel{\text{PBZ}}{=} \frac{r_1}{z - z_1} + \frac{r_2}{z - z_2}$$

$$r_1 = \text{res}_{z_1}(f) \stackrel{\text{Res}}{\stackrel{\text{F4B}}{=}} \lim_{z \rightarrow z_1} \left[ (z - z_1) f(z) \right] = \frac{1}{z_1 - z_2} = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - 1}}$$

$$r_2 = \text{res}_{z_2}(f) \stackrel{\text{Res}}{\stackrel{\text{F4B}}{=}} \lim_{z \rightarrow z_2} \left[ (z - z_2) f(z) \right] = \frac{1}{z_2 - z_1} = \frac{-1}{2\sqrt{a^2 - 1}}$$

Der Residuensatz beschert uns somit ein erstes schönes Integral:

$$\int_{\partial B(0,1)} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} \stackrel{\text{Res}}{\stackrel{\text{F4D}}{=}} 2\pi i \sum_{z_1} \text{res}_{z_1}(f) = \frac{\pi i}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

- ☺ Links muss man integrieren, rechts nur Residuen summieren!
- ☺ Zur Berechnung von Residuen haben wir effiziente Formeln. [F402](#)
- ☺ Der Residuenkalkül nützt uns auch bei der Partialbruchzerlegung!

☺ Dieser Trick funktioniert für alle Integrale  $\int_{t=0}^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt$ :  
Wir substituieren  $z = e^{it} = \cos t + i \sin t$  und  $dz = i e^{it} dt = iz dt$ .

**Satz F4H:** rationale Integranden in  $\cos t$  und  $\sin t$

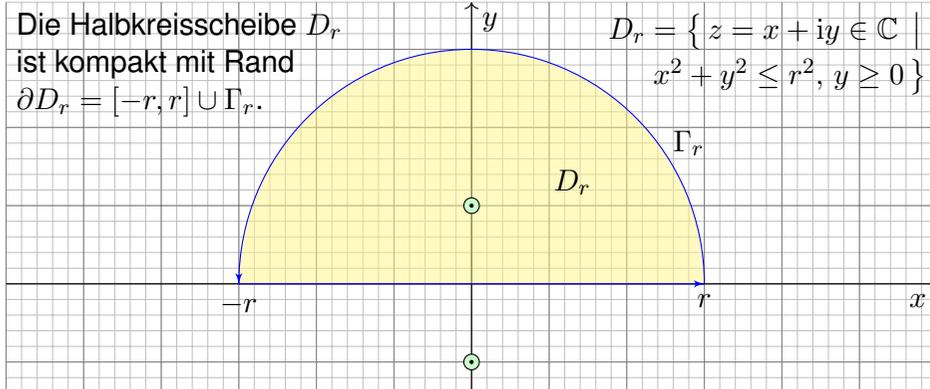
Sei  $R(x, y) = P(x, y)/Q(x, y)$  eine rationale Funktion, mit  $P, Q \in \mathbb{C}[x, y]$  und  $Q(\cos t, \sin t) \neq 0$  für  $t \in \mathbb{R}$ . Dann ergibt die Weierstraß-Substitution

$$f(z) := \frac{1}{iz} R\left( \frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i} \right) \in \mathbb{C}(z)$$

eine rationale Funktion in  $z$  ohne Polstellen auf  $\partial B(0, 1)$ , und es gilt

$$\int_{t=0}^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt \stackrel{\text{Subs}}{=} \int_{\partial B(0,1)} f(z) dz \stackrel{\text{Res}}{\stackrel{\text{F4D}}{=}} 2\pi i \sum_{s \in B(0,1)} \text{res}_s(f).$$

Diese Formel erhält man wie in der vorigen Aufgabe. Kennt man die Polstellen von  $f$  in  $B(0, 1)$ , so kann man hieraus die Summe der Residuen ableiten. Damit lassen sich alle Integranden der Form  $R(\cos t, \sin t)$  über  $[0, 2\pi]$  integrieren: Das Problem reduziert sich auf die Nullstellensuche des Nennerpolynoms von  $f$  (F3D). Alternativ können wir hier reell rechnen und mit Weierstraß' trigonometrischer Generalsubstitution sogar eine Stammfunktion bestimmen, siehe Satz B10.



**Aufgabe:** Berechnen Sie für  $u \in \mathbb{R}$  das reelle Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ux)}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-|u|}.$$

**Anleitung:** (1) Integrieren Sie  $f(z) = e^{iuz}/(z^2 + 1)$  über  $[-r, r]$  und  $\Gamma_r$ .  
 (2) Für  $u \geq 0$  und  $r \rightarrow \infty$  verschwindet das Integral über  $\Gamma_r$ . Warum?

(2) Für das Integral längs  $\Gamma_r$  suchen wir eine geeignete Majorante:

$$\left| \int_{\Gamma_r} \frac{e^{iuz}}{z^2 + 1} dz \right| \leq \int_{\Gamma_r} \left| \frac{e^{iuz} e^{-uy}}{z^2 + 1} \right| |dz| \leq \int_{\Gamma_r} \frac{1}{r^2 - 1} |dz| = \frac{\pi r}{r^2 - 1} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$$

Im Zähler gilt  $|e^{iuz}| = |e^{iux}| \cdot |e^{-uy}| \leq 1$  dank  $u, y \geq 0$ . Im Nenner gilt  $|z^2| = |z^2 + 1 - 1| \leq |z^2 + 1| + |1|$ , also  $|z^2 + 1| \geq |z^2| - 1 = r^2 - 1$ . Allgemein gilt die umgekehrte Dreiecksungleichung  $|z - w| \geq ||z| - |w||$ . Als Grenzwert für  $u \geq 0$  und  $r \rightarrow \infty$  erhalten wir somit das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iux}}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-u}.$$

Als Real- und Imaginärteil erhalten wir die reellen Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ux)}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-u} \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ux)}{x^2 + 1} dx = 0.$$

Beide sind absolut konvergent. Das zweite verschwindet da ungerade.

☺ Für  $u \leq 0$  erhalten wir dank Symmetrie dasselbe Integral:  $\pi e^{-|u|}$ .

☺ Für  $u = 0$  können wir den HDI nutzen dank  $\arctan(x)' = 1/(x^2 + 1)$ . Für  $u > 0$  hingegen gelingt uns die Berechnung erst komplex mit dem Residuensatz F4D. Für  $u < 0$  erhalten wir genau dasselbe Integral.

**Lösung:** (1) Wir untersuchen die holomorphe Funktion

$$f(z) = \frac{e^{iuz}}{z^2 + 1} = \frac{e^{iuz}}{(z - i)(z + i)}.$$

Ihre Singularitäten  $\pm i$  sind einfache Polstellen. Demnach gilt

$$\operatorname{res}(f)_{+i} \stackrel{\text{Res F4B}}{=} \lim_{z \rightarrow +i} [(z - i)f(z)] = \frac{e^{-u}}{2i}, \quad \operatorname{res}(f)_{-i} = -\frac{e^u}{2i}.$$

Wir betrachten die obere Halbkreisscheibe  $D_r$  vom Radius  $r > 1$ . Der Rand von  $D_r$  besteht aus  $[-r, r]$  und dem oberen Halbkreis  $\Gamma_r$ . In  $D_r$  liegt nur die Singularität  $+i$ . Dank Residuensatz erhalten wir:

$$\int_{-r}^r \frac{e^{iux}}{x^2 + 1} dx + \int_{\Gamma_r} \frac{e^{iuz}}{z^2 + 1} dz = \int_{\partial D_r} \frac{e^{iuz}}{z^2 + 1} dz \stackrel{\text{Res F4D}}{=} 2\pi i \operatorname{res}(f)_i = \pi e^{-u}.$$

☺ Der Residuensatz vereinfacht unsere Rechnung entscheidend!

☺ Die obige Abschätzung ist oft nützlich und verdient einen Namen:

**Lemma F4I: Jordan-Lemma**

Für den Halbkreis  $\Gamma_r := \{ r e^{it} \mid t \in [0, \pi] \}$  und  $M_r := \max_{z \in \Gamma_r} |f(z)|$  gilt

$$\left| \int_{\Gamma_r} f(z) dz \right| \leq \pi r M_r \quad \text{und} \quad \left| \int_{\Gamma_r} f(z) e^{iuz} dz \right| \leq \frac{\pi}{u} M_r \quad \text{für } u > 0.$$

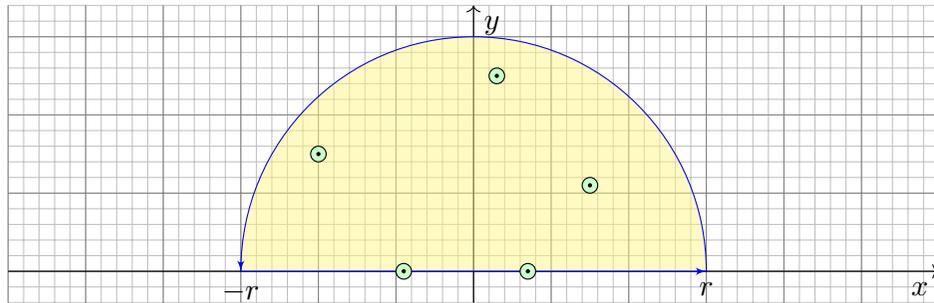
Dies geht gegen 0 für  $r \rightarrow \infty$ , falls  $r M_r \rightarrow 0$  bzw.  $M_r \rightarrow 0$  gilt.

**Nachrechnen:** Die erste Ungleichung ist klar. Die zweite folgt so:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_r} f(z) e^{iuz} dz \right| &\leq \int_{\Gamma_r} |f(z) e^{iuz}| |dz| \leq \int_{t=0}^{\pi} |f(r e^{it}) e^{ur(i \cos t - \sin t)}| |r i e^{it}| dt \\ &= r \int_{t=0}^{\pi} |f(r e^{it})| e^{-ur \sin t} dt \leq r M_r \int_{t=0}^{\pi} e^{-ur \sin t} dt = 2r M_r \int_{t=0}^{\pi/2} e^{-ur \sin t} dt \\ &\leq 2r M_r \int_{t=0}^{\pi/2} e^{-ur \frac{2t}{\pi}} dt = \frac{\pi}{u} M_r \left[ -e^{-ur \frac{2t}{\pi}} \right]_{t=0}^{\pi/2} = \frac{\pi}{u} M_r (1 - e^{-ur}) \leq \frac{\pi}{u} M_r \end{aligned}$$

Wir nutzen die Abschätzung  $\sin t \geq 2t/\pi$ ; machen Sie dazu eine Skizze!

😊 Diese Berechnung funktioniert für alle Integrale dieser Form:



Wir betrachten eine rationale Funktion  $f(z) = p(z)/q(z)$  mit Polynomen  $p, q \in \mathbb{C}[z]$  und  $\deg(q) \geq \deg(p) + 2$ . Der Beitrag des Halbkreises  $\Gamma_r$  vom Radius  $r$  geht wie gesehen gegen Null. Falls Polstellen auf der reellen Achse  $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$  liegen, so setzen wir diese Pole als einfach voraus.

Um nicht durch diese Polstellen zu laufen, machen wir um jede wie skizziert einen halbkreisförmigen Umweg vom Radius  $\rho$ . Für  $\rho \rightarrow 0$  ist der Beitrag genau das halbe Residuum, wie wir nun nachrechnen.

😊 Um reellen Polstellen auszuweichen, nutzen wir folgenden Trick:

**Lemma F4J: teilweises Umlaufen einer einfachen Polstelle**

Ist  $s \in \mathbb{C}$  eine einfache Polstelle von  $f$ , so gilt für kleine Kreisbögen  $\gamma_\rho: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\gamma(t) = s + \rho e^{it}$  vom Radius  $\rho > 0$  der Grenzwert

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} f(z) dz = i(\beta - \alpha) \operatorname{res}_s(f).$$

**Nachrechnen:** Um die Polstelle  $s$  gilt  $f(z) = a/(z - s) + g(z)$  mit einer holomorphen Funktion  $g$ . Für die gesuchten Integrale gilt deshalb:

$$\left| \int_{\gamma_\rho} g(z) dz \right| \leq \ell(\gamma_\rho) \max_{z \in \overline{B}(s, \rho)} |g(z)| \leq \rho(\beta - \alpha) \cdot \text{const} \rightarrow 0$$

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{a}{z - s} dz = \int_{t=\alpha}^\beta \frac{a}{\rho e^{it}} \rho i e^{it} dt = ia \int_{t=\alpha}^\beta dt = i(\beta - \alpha) a$$

Damit lassen sich auch einfache Polstellen auf dem Rand behandeln! Für mehrfache Polstellen hingegen divergiert das Integral für  $\rho \rightarrow 0$ !

😊 Diese Berechnung funktioniert für alle Integrale von dieser Form!  
Einfache Merkregel: Polstellen auf der reellen Achse zählen nur halb.

**Satz F4K: Fourier-Integrale rationaler Funktionen**

Sei  $f(z) = p(z)/q(z)$  eine rationale Funktion; hat  $f$  Polstellen in  $\mathbb{R}$ , so soll jede höchstens einfach sein. Für  $\deg(q) \geq \deg(p) + 2$  gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(s) > 0} \operatorname{res}_s(f) + \pi i \sum_{\operatorname{Im}(s) = 0} \operatorname{res}_s(f)$$

Für  $\deg(q) \geq \deg(p) + 1$  und alle  $u > 0$  bzw.  $u < 0$  gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iux} dx = +2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(s) > 0} \operatorname{res}_{z=s} [f(z) e^{iuz}] + \pi i \sum_{\operatorname{Im}(s) = 0} \operatorname{res}_{z=s} [f(z) e^{iuz}]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iux} dx = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(s) < 0} \operatorname{res}_{z=s} [f(z) e^{iuz}] - \pi i \sum_{\operatorname{Im}(s) = 0} \operatorname{res}_{z=s} [f(z) e^{iuz}]$$

😊 Diese Integrationstechnik ist sehr nützlich und wird oft angewendet, insbesondere für Fourier- und Laplace-Integrale (Kapitel K und L). Wie ist das Integral auf der linken Seite der Gleichung zu verstehen? Liegen Polstellen  $s_1 < \dots < s_n$  auf der reellen Achse, so betrachten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[ \int_{-r}^{s_1 - \frac{1}{r}} f + \int_{s_1 + \frac{1}{r}}^{s_2 - \frac{1}{r}} f + \dots + \int_{s_{n-1} + \frac{1}{r}}^{s_n - \frac{1}{r}} f + \int_{s_n - \frac{1}{r}}^r f \right]$$

Der Integrand  $f$  ist nicht absolut integrierbar, denn in der Nähe einer  $n$ -fachen reellen Polstelle  $s \in \mathbb{R}$  gilt  $f(x) \sim a/(x - s)^n$ , und wir wissen

$$\int_{s - \frac{1}{r}}^{s + \frac{1}{r}} \left| \frac{1}{(x - s)^n} \right| dx = \infty \quad \text{für alle } n \geq 1 \text{ (B208).}$$

Glücklicherweise heben sich für  $n = 1$  Positivteil und Negativteil auf:

$$\int_{s - \frac{1}{r}}^{s + \frac{1}{r}} \frac{1}{x - s} dx = 0 \quad \text{als Cauchy-Hauptwert.}$$

Daher konvergiert das oben angegebene Integral für  $r \rightarrow \infty$ . Die Zählung der Residuen folgt nun aus dem vorigen Lemma F4J.

**Aufgabe:** Berechnen Sie für  $u \in \mathbb{R}$  das reelle Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ux)}{x} dx = \pi \operatorname{sign}(u).$$

- (1) In welchem Sinne konvergiert dieses Integral? absolut? uneigentlich?  
 (2) Warum ist das Integral für alle  $u > 0$  gleich? Substitution  $s = ux!$

**Lösung:** [E115] Für  $u > 0$  können wir den Residuensatz anwenden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iux}}{x} dx \stackrel{\text{Res}}{\stackrel{\text{F4k}}{=}} \pi i \operatorname{res}_{z=0} \left[ \frac{e^{iuz}}{z} \right] = \pi i \operatorname{res}_{z=0} \left[ z^{-1} + \frac{i u}{1!} z^0 - \frac{u^2}{2!} z^1 + \dots \right] = \pi i.$$

Als Real- und Imaginärteil erhalten wir die reellen Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ux)}{x} dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ux)}{x} dx = \pi.$$

Für  $u < 0$  kehrt sich das Vorzeichen um. Für  $u = 0$  ist alles klar.

😊 Der Residuensatz ist ein allgemeines und mächtiges Werkzeug.

⚠ Die Spaltfunktion  $\operatorname{si}(x) = \sin(x)/x$  ist zwar stetig und somit über jedem endlichen Intervall  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  integrierbar [B149], aber sie ist nicht elementar integrierbar, d.h. ihre Stammfunktion  $\operatorname{Si}(x)$  ist nicht elementar.

⚠ Die Integranden sind nicht absolut integrierbar [B421], das heißt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\cos x}{x} \right| dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \infty$$

😊 Das Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x)/x dx$  existiert nur uneigentlich, das heißt

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_{x=a}^0 \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{x=0}^b \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Das Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x)/x dx$  existiert sogar nur als Cauchy-Hauptwert:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^{-1/r} \frac{\cos x}{x} dx = -\infty, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{1/r}^r \frac{\cos x}{x} dx = +\infty,$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[ \int_{-r}^{-1/r} \frac{\cos x}{x} dx + \int_{1/r}^r \frac{\cos x}{x} dx \right] = 0.$$

Letzteres ist klar, da der Integrand  $\cos(x)/x$  eine ungerade Funktion ist.

Die Spaltfunktion  $\operatorname{si} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\operatorname{si}(x) = \sin(x)/x$  für  $x \neq 0$  und  $\operatorname{si}(0) = 1$  ist auf ganz  $\mathbb{R}$  stetig, auch in  $x = 0$ . Sie ist der Realteil der holomorphen Funktion  $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto e^{iz}/z$ , mit einfacher Polstelle in  $z = 0$ .

😊 Das haben wir in der vorigen Aufgabe zur Berechnung ausgenutzt.

Zunächst scheint die Wahl der Funktion  $f$  vielleicht etwas willkürlich.

Könnte man hier auch andere komplexe Fortsetzungen wählen?

**Aufgabe:** Die Spaltfunktion  $\operatorname{si} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\operatorname{si}(x) = \sin(x)/x$  für  $x \neq 0$  und  $\operatorname{si}(0) = 1$  ist auf  $\mathbb{R}$  der Realteil der holomorphen Funktion  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$g(z) = \frac{\sin(z)}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \frac{z^8}{9!} - \frac{z^{10}}{11!} + \dots$$

Lässt sich hierauf der Residuensatz anwenden und folgendes nutzen?

$$(*) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(s)>0} \operatorname{res}_s(g) + \pi i \sum_{\operatorname{Im}(s)=0} \operatorname{res}_s(g)$$

Ist das nicht gerade unserer Residuenformel aus Satz F4k?

**Lösung:** Nein, die vermutete Formel (\*) gilt hier offensichtlich nicht! Nachrechnen: Links steht  $\pi$ , rechts steht 0, da  $g$  keine Singularitäten hat. Woran liegt's? Zunächst sollten Sie die Voraussetzungen von Satz F4k nochmal genau lesen. Die geforderten Bedingungen sind für unsere Funktion  $g$  nicht erfüllt, also sollten wir die Formel nicht anwenden!

Was ist der eigentliche geometrische Grund? Der Residuensatz F4D gilt für Randintegrale  $\oint_{\partial D} f(z) dz$  von Kompakta  $D$ . Die Halbebene  $\mathbb{C}_{\operatorname{Im} \geq 0}$  hat als Rand die reelle Achse  $\mathbb{R}$ , ist aber offensichtlich nicht kompakt!

Warum gilt Satz F4k trotzdem so schön und einfach? Er ist raffiniert und zur Anwendung sollten Sie seine Herleitung verstehen: Als Kompakta nutzen wir Halbkreisscheiben  $D_r$ . Die Bedingungen stellen sicher, dass das Wegintegral über den oberen Halbkreis  $\Gamma_r$  verschwindet für  $r \rightarrow 0$ . Hierzu nutzen wir das einfache, aber wirksame Jordan-Lemma F4I.

😊 Allein in diesem günstigen Falle können wir den Residuensatz für die obere Halbebene  $\mathbb{C}_{\operatorname{Im} \geq 0}$  und ihren Rand  $\mathbb{R}$  ohne Korrektur direkt nutzen.

⚠ Für die obige Funktion  $g(z) = \sin(z)/z$  gilt dies alles leider nicht!

**Aufgabe:** Berechnen Sie für  $a, b > 0$  das reelle Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx.$$

**Lösung:** Der Integrand  $f(z) = 1/(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)$  hat Pole in  $\pm ai, \pm bi$ .

😊 Das reelle Integrale wird bestimmt durch die komplexen Polstellen!

**Erster Fall:**  $a \neq b$ , also einfache Pole. Die Residuen sind dann

$$\operatorname{res}_{ai}(f) \stackrel{\text{Res}}{\underset{\text{F4B}}{=}} \lim_{z \rightarrow ai} [(z - ai)f(z)] = \lim_{z \rightarrow ai} \frac{1}{(z + ai)(z^2 + b^2)} = \frac{1}{2ai(b^2 - a^2)}$$

$$\operatorname{res}_{bi}(f) \stackrel{\text{Res}}{\underset{\text{F4B}}{=}} \lim_{z \rightarrow bi} [(z - bi)f(z)] = \lim_{z \rightarrow bi} \frac{1}{(z^2 + a^2)(z + bi)} = \frac{1}{(a^2 - b^2)2bi}$$

Dank Residuensatz erhalten wir unser reelles Integral:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &\stackrel{\text{Res}}{\underset{\text{F4K}}{=}} 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(s) > 0} \operatorname{res}_s(f) \\ &= \frac{2\pi i}{2ai(b^2 - a^2)} + \frac{2\pi i}{2bi(a^2 - b^2)} = \frac{\pi(a - b)}{ab(a^2 - b^2)} = \frac{\pi}{ab(a + b)} \end{aligned}$$

Im Falle  $a = b$  erwarten wir dasselbe, rechnen's aber ausführlich nach:

**Zweiter Fall:**  $a = b$ , also zweifache Pole in  $\pm ai$ . Das Residuum ist dann

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{ai}(f) &\stackrel{\text{Res}}{\underset{\text{F4C}}{=}} \lim_{z \rightarrow ai} \frac{d}{dz} [(z - ai)^2 f(z)] = \lim_{z \rightarrow ai} \frac{d}{dz} \left[ \frac{1}{(z + ai)^2} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow ai} \frac{-2}{(z + ai)^3} = \frac{-2}{(2ai)^3} = \frac{1}{4a^3 i} \end{aligned}$$

Dank Residuensatz erhalten wir unser reelles Integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \stackrel{\text{Res}}{\underset{\text{F4K}}{=}} 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(s) > 0} \operatorname{res}_s(f) = 2\pi i \frac{1}{4a^3 i} = \frac{\pi}{2a^3}$$

😊 Stetigkeit! Der zweite Fall  $a = b$  folgt aus dem ersten Fall  $a \neq b$ :

Dank Satz D3D dürfen wir den Grenzwert  $\lim_{b \rightarrow a}$  unters Integral ziehen.

Zusammenfassend erhalten wir für alle  $a, b > 0$  die Gleichung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx = \frac{\pi}{ab(a + b)}.$$

**Aufgabe:** (1) Berechnen Sie die Residuen der rationalen Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + 4}.$$

**Lösung:** Der Nenner hat in  $\pm 1 \pm i$  vier einfache Nullstellen:

$$f(z) = \frac{1}{(z - 1 - i)(z - 1 + i)(z + 1 - i)(z + 1 + i)}.$$

Erinnerung [F230]:  $z^4 + 4 = 0$  heißt  $z^4 = 4e^{\pi i + 2\pi i k}$  für  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ ,  
Wurzel  $z = \sqrt[4]{2} e^{(\pi i + 2\pi i k)/4}$ , also  $z \in \{\pm 1 \pm i\}$ . Machen Sie eine Skizze!

Für  $f = p/q$  mit einfacher Polstelle  $s$  gilt  $\operatorname{res}_s(p/q) = p(s)/q'(s)$ :

$$\operatorname{res}_{(+1+i)}(f) \stackrel{\text{Res}}{\underset{\text{F4B}}{=}} \lim_{z \rightarrow +1+i} \left[ \frac{1}{4z^3} \right] = \frac{1}{8(-1+i)} = -\frac{1+i}{16}, \quad \operatorname{res}_{(+1-i)}(f) = -\frac{1-i}{16},$$

$$\operatorname{res}_{(-1+i)}(f) \stackrel{\text{Res}}{\underset{\text{F4B}}{=}} \lim_{z \rightarrow -1+i} \left[ \frac{1}{4z^3} \right] = \frac{1}{8(+1+i)} = +\frac{1-i}{16}, \quad \operatorname{res}_{(-1-i)}(f) = +\frac{1+i}{16}.$$

Diese Vorbereitung nutzen wir für die folgende Integration.

**Aufgabe:** (2) Berechnen Sie für  $u \in \mathbb{R}$  das reelle Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ux)}{x^4 + 4} dx.$$

**Lösung:** Auf den Fall  $u \geq 0$  wenden wir den Residuensatz an:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iux}}{x^4 + 4} dx \stackrel{\text{Res}}{\underset{\text{F4K}}{=}} 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(s) > 0} \operatorname{res}_s \left( \frac{e^{iuz}}{z^4 + 4} \right)$$

$$\stackrel{(\text{I})}{\underset{\text{F4B}}{=}} 2\pi i \left[ -\frac{1+i}{16} \cdot e^{iu(1+i)} + \frac{1-i}{16} \cdot e^{iu(-1+i)} \right]$$

$$= \frac{\pi}{8} \left[ (1-i)e^{-u+iu} + (1+i)e^{-u-iu} \right]$$

$$= \frac{\pi}{4} \operatorname{Re} \left[ (1-i)e^{-u+iu} \right] = \frac{\pi}{4} e^{-u} (\cos u + \sin u)$$

Für  $u \leq 0$  ist das Integral dasselbe. Zusammengefasst erhalten wir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ux)}{x^4 + 4} dx = \frac{\pi}{4} e^{-|u|} (\cos|u| + \sin|u|)$$

**Satz F4L: Integrale über die reelle Halbachse**

Sei  $f(z) = p(z)/q(z)$  rational mit  $p, q \in \mathbb{C}[z]$  und  $\deg q \geq \deg p + 2$ , aber ohne Polstellen in  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ , gekürzt also  $q(x) \neq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Dann gelten folgende Formeln für Integrale über die reelle Halbachse:

$$\int_{x=0}^{\infty} f(x) dx = - \sum_{s \neq 0} \operatorname{res}_{z=s} [f(z) \ln(z)]$$

$$\int_{x=0}^{\infty} f(x) \ln(x) dx = -\frac{1}{2} \sum_{s \neq 0} \operatorname{res}_{z=s} [f(z) \ln(z)^2] - \pi i \int_{x=0}^{\infty} f(x) dx$$

$$\int_{x=0}^{\infty} f(x) x^\alpha dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \sum_{s \neq 0} \operatorname{res}_{z=s} [f(z) z^\alpha] \quad \text{für } 0 < \alpha < 1$$

Hierbei nutzen wir für jede komplexe Zahl  $z = r e^{i\varphi}$  mit  $0 < r < \infty$  und  $0 \leq \varphi < 2\pi$  ihren komplexen Logarithmus mit  $\ln z := \ln r + i\varphi$ . Auf  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$  entspricht dies dem Nebenzweig  $\ln = \ln_\pi$  aus Satz F2M. Für  $\alpha \in \mathbb{R}$  setzen wir  $z^\alpha := e^{\alpha \ln z}$ . Auf  $\mathbb{R}_{> 0}$  sind das die üblichen reellen Definitionen; ihre komplexen Fortsetzungen sind unstetig quer zu  $\mathbb{R}_{> 0}$ .

(2) Auch das zweite Integral können wir noch elementar berechnen:

$$\int_{x=0}^{\infty} \frac{1}{(x+1)^2} dx = \left[ \frac{-1}{x+1} \right]_{x=0}^{\infty} = 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+1} = 1$$

😊 Die Voraussetzungen des Satzes F4L sind hier erfüllt. Das Residuum gibt hier tatsächlich die richtige Antwort:

$$\operatorname{res}_{z=-1} \left[ \frac{\ln(z)}{(z+1)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \ln(z) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{z} = -1$$

(3) Auch das dritte Integral können wir noch elementar berechnen:

$$\int_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \left[ \arctan(x) \right]_{x=0}^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x) - 0 = \frac{\pi}{2}$$

😊 Die Voraussetzungen des Satzes F4L sind hier erfüllt. Die Residuen der beiden Polstellen  $z_1 = +i$  und  $z_2 = -i$  geben die richtige Antwort:

$$\operatorname{res}_{z=z_k} \left[ \frac{\ln(z)}{z^2+1} \right] = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{\ln(z)}{\frac{d}{dz}(z^2+1)} = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{\ln(z)}{2z} = \frac{\ln(z_k)}{2z_k}, \quad \text{also}$$

$$\operatorname{res}_{z=+i} \left[ \frac{\ln(z)}{z^2+1} \right] = \frac{\pi i \cdot 1/2}{2i} = \pi \frac{1}{4}, \quad \operatorname{res}_{z=-i} \left[ \frac{\ln(z)}{z^2+1} \right] = \frac{\pi i \cdot 3/2}{-2i} = -\pi \frac{3}{4}$$

Wir werden diesen Satz anschließend als Übungsaufgabe beweisen. Zuvor betrachten wir einfache Anwendungsbeispiele zur Illustration.

**Aufgabe:** Berechnen Sie folgende Integrale. Ist der Satz anwendbar?

(1)  $\int_0^{\infty} \frac{1}{x+1} dx$ , (2)  $\int_0^{\infty} \frac{1}{(x+1)^2} dx$ , (3)  $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$ , (4)  $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^3+1} dx$

**Lösung:** (1) Das erste Integral können wir elementar berechnen:

$$\int_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x+1} dx = \left[ \ln(x+1) \right]_{x=0}^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x+1) - \ln(1) = \infty$$

⚠ Die Voraussetzungen des Satzes F4L sind hier nicht erfüllt, denn der Integrand  $f(z) = 1/(z+1)$  fällt nicht schnell genug ab.

⚠ Das Residuum gibt hier sicher nicht die richtige Antwort!

$$\operatorname{res}_{z=-1} \left[ \frac{\ln(z)}{z+1} \right] = \lim_{z \rightarrow -1} \ln(z) = \pi i$$

(4) Das vierte Integral können wir nicht mehr elementar berechnen. Wir nutzen deshalb Satz F4L. Alle Voraussetzungen sind hier erfüllt:

Es ist  $z^3 + 1 = (z + z_1)(z - z_2)(z - z_3)$  mit den drei Nullstellen

$$z_1 = -1 = e^{\pi i}, \quad z_2 = e^{\pi i \cdot 1/3} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad z_3 = e^{\pi i \cdot 5/3} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2},$$

$$\ln(z_1) = \pi i, \quad \ln(z_2) = \pi i \frac{1}{3}, \quad \ln(z_3) = \pi i \frac{5}{3}.$$

Die Residuen der Funktion  $F(z) = f(z) \ln(z)$  sind demnach

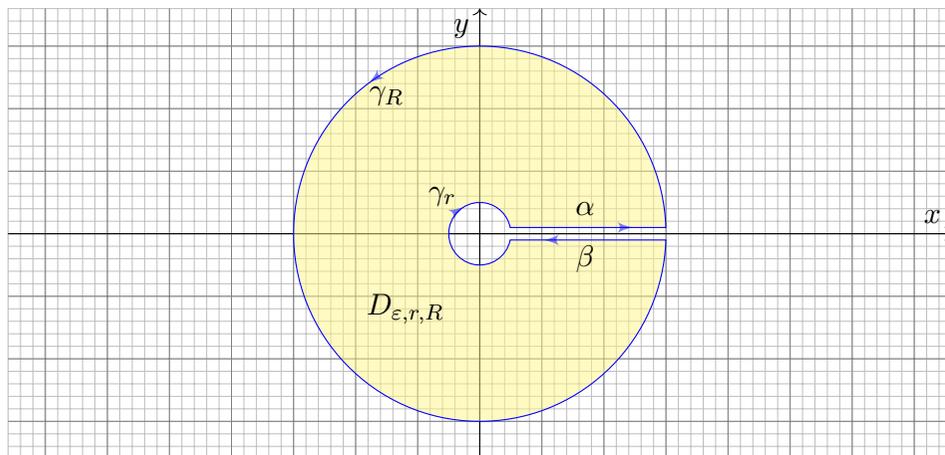
$$\operatorname{res}_{z=z_k} \left[ \frac{\ln(z)}{z^3+1} \right] = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{\ln(z)}{\frac{d}{dz}(z^3+1)} = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{\ln(z)}{3z^2} = \frac{\ln(z_k)}{3z_k^2}, \quad \text{also}$$

$$\operatorname{res}_{z_1} (F) = \pi \frac{i}{3}, \quad \operatorname{res}_{z_2} (F) = \pi \frac{\sqrt{3}-i}{18}, \quad \operatorname{res}_{z_3} (F) = -\pi \frac{5(\sqrt{3}+i)}{18}$$

😊 Dank Satz F4L erhalten wir den Wert des gesuchten Integrals:

$$\int_{x=0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$$

**Aufgabe:** Berechnen Sie die Integrale aus Satz F4L mit folgendem Integrationsweg und den Grenzübergängen  $\varepsilon \rightarrow 0, r \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$ .



Die Wege  $\gamma_r$  und  $\gamma_R$  verlaufen auf Kreisen um 0 mit den Radien  $r < R$ . Die Wege  $\gamma_+$  und  $\gamma_-$  verlaufen im Abstand  $\varepsilon > 0$  parallel zur  $x$ -Achse. Sei  $\gamma = \alpha * \gamma_R * \beta * \gamma_r$  der geschlossene Weg um das Gebiet  $D_{\varepsilon, r, R}$ .

(2) Wir integrieren  $F(z) = f(z) \ln(z)^2$ . Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  erhalten wir:

$$\int_{\alpha} f(z) \ln(z)^2 dz \rightarrow \int_{x=r}^R f(x) \ln(x)^2 dx$$

$$\int_{\beta} f(z) \ln(z)^2 dz \rightarrow \int_{x=R}^r f(x) [\ln(x) + 2\pi i]^2 dx$$

Für  $r \rightarrow 0$  bzw.  $R \rightarrow \infty$  finden wir:

$$\left| \int_{\gamma_r} f(z) \ln(z)^2 dz \right| \leq \int_{t=0}^{2\pi} |f(re^{it}) t^2 \cdot ri e^{it}| dt \leq \text{const} \cdot r \rightarrow 0$$

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) \ln(z)^2 dz \right| \leq \int_{t=0}^{2\pi} |f(Re^{it}) t^2 \cdot Ri e^{it}| dt \leq \frac{\text{const}}{R^2} \cdot R \rightarrow 0$$

Da  $\dot{D}_{\varepsilon, r, R}$  schließlich alle Singularitäten von  $f$  umfasst, erhalten wir:

$$2\pi i \sum_{s \neq 0} \text{res}_{z=s} [f(z) \ln(z)^2] = \int_{\gamma} f(z) \ln(z)^2 dz \rightarrow \int_{x=0}^{\infty} f(x) [4\pi^2 - 4\pi i \ln(x)] dx$$

😊 Das ist die zweite Residuenformel des Satzes F4L.

**Lösung:** (1) Wir integrieren  $F(z) = f(z) \ln(z)$ . Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  erhalten wir:

$$\int_{\alpha} f(z) \ln(z) dz \rightarrow \int_{x=r}^R f(x) \ln(x) dx$$

$$\int_{\beta} f(z) \ln(z) dz \rightarrow \int_{x=R}^r f(x) [\ln(x) + 2\pi i] dx$$

Für  $r \rightarrow 0$  bzw.  $R \rightarrow \infty$  finden wir:

$$\left| \int_{\gamma_r} f(z) \ln(z) dz \right| \leq \int_{t=0}^{2\pi} |f(re^{it}) t \cdot ri e^{it}| dt \leq \text{const} \cdot r \rightarrow 0$$

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) \ln(z) dz \right| \leq \int_{t=0}^{2\pi} |f(Re^{it}) t \cdot Ri e^{it}| dt \leq \frac{\text{const}}{R^2} \cdot R \rightarrow 0$$

Da  $\dot{D}_{\varepsilon, r, R}$  schließlich alle Singularitäten von  $f$  umfasst, erhalten wir:

$$2\pi i \sum_{s \neq 0} \text{res}_{z=s} [f(z) \ln(z)] = \int_{\gamma} f(z) \ln(z) dz \rightarrow -2\pi i \int_{x=0}^{\infty} f(x) dx$$

😊 Das ist die erste Residuenformel des Satzes F4L.

(3) Wir integrieren  $F(z) = f(z) z^{\alpha}$ . Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  erhalten wir:

$$\int_{\alpha} f(z) z^{\alpha} dz \rightarrow \int_{x=r}^R f(x) x^{\alpha} dx$$

$$\int_{\beta} f(z) z^{\alpha} dz \rightarrow \int_{x=R}^r f(x) x^{\alpha} e^{2\pi i \alpha} dx$$

Für  $r \rightarrow 0$  bzw.  $R \rightarrow \infty$  finden wir:

$$\left| \int_{\gamma_r} f(z) z^{\alpha} dz \right| \leq \int_{t=0}^{2\pi} |f(re^{it}) r^{\alpha} e^{it\alpha} \cdot ri e^{it}| dt \leq \text{const} \cdot r^{1+\alpha} \rightarrow 0$$

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) z^{\alpha} dz \right| \leq \int_{t=0}^{2\pi} |f(Re^{it}) R^{\alpha} e^{it\alpha} \cdot Ri e^{it}| dt \leq \frac{\text{const}}{R^2} \cdot R^{1+\alpha} \rightarrow 0$$

Da  $\dot{D}_{\varepsilon, r, R}$  schließlich alle Singularitäten von  $f$  umfasst, erhalten wir:

$$2\pi i \sum_{s \neq 0} \text{res}_{z=s} [f(z) z^{\alpha}] = \int_{\gamma} f(z) z^{\alpha} dz \rightarrow (1 - e^{2\pi i \alpha}) \int_{x=0}^{\infty} f(x) x^{\alpha} dx$$

😊 Das ist die dritte Residuenformel des Satzes F4L.

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen. Der Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$  sei stückweise stetig diff'bar. Das **komplexe Wegintegral** einer stetigen Funktion  $f: \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  ist

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_{t=a}^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt. \quad \text{Merkregel: } z = \gamma(t), \quad dz = \gamma'(t) dt$$

Eine komplexe Funktion  $f = u + iv: \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **holomorph**, wenn sie auf ganz  $\Omega$  komplex differenzierbar ist und  $f': \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  stetig.

⇔ **Cauchy-Riemann-Gleichungen**  $\partial_x u = \partial_y v$  und  $\partial_x v = -\partial_y u$ .

⇔ Die **Strömung**  $\vec{f} = (u, -v): \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  erfüllt  $\operatorname{div} \vec{f} = \operatorname{rot} \vec{f} = 0$ .

⇔ Auf jeder Kreisscheibe  $B(z_0, \rho) \subseteq \Omega$  gleicht  $f$  einer **Potenzreihe**:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit} \quad a_k := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$$

⇔ Auf jedem Kreisring  $K(z_0, \sigma, \rho) \subseteq \Omega$  gleicht  $f$  einer **Laurent-Reihe**:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit} \quad a_k := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$$

Der Koeffizient  $\operatorname{res}_{z_0}(f) := a_{-1}$  heißt das **Residuum** von  $f$  in  $z_0$ .

Wir nutzen den Satz von Green / Gauß in der komplexen Ebene  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ . Für holomorphe Funktionen erhalten wir so den **Residuensatz** F4D:

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f: \Omega \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph auf  $\Omega$  bis auf eine Menge  $S$  isolierter Singularitäten. Sei  $D \subseteq \Omega$  kompakt mit stückweise glattem Rand, wobei  $\partial D \cap S = \emptyset$ . Dann gilt

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i \sum_{s \in \mathring{D}} \operatorname{res}_s(f).$$

Das **Residuum** von  $f: K(s, 0, \rho) \rightarrow \mathbb{C}$  im Punkt  $s$  ist definiert durch

$$\operatorname{res}_s(f) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(s, r)} f(z) dz \quad \text{für } 0 < r < \rho.$$

Ist  $s$  eine **höchstens  $n$ -fache Polstelle** von  $f$ , so gilt

$$\operatorname{res}_s(f) = \lim_{z \rightarrow s} \frac{1}{(n-1)!} \left( \frac{d}{dz} \right)^{n-1} \left[ (z-s)^n f(z) \right].$$

Für  $f = p/q$  mit **einfacher Polstelle**  $s$  gilt  $\operatorname{res}_s(p/q) = p(s)/q'(s)$ .

☺ Damit lassen sich Residuen in Polstellen meist leicht berechnen.

(1) Sei  $R(x, y) = P(x, y)/Q(x, y)$  eine rationale Funktion mit Nenner  $Q(\cos t, \sin t) \neq 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Dann ergibt die Weierstraß-Substitution

$$f(z) := \frac{1}{iz} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)$$

eine rationale Funktion in  $z$  ohne Polstellen auf  $\partial B(0, 1)$ , und es gilt

$$\int_{t=0}^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = \int_{\partial B(0, 1)} f(z) dz = 2\pi i \sum_{s \in B(0, 1)} \operatorname{res}_s(f).$$

(2) Sei  $f(z) = p(z)/q(z)$  eine rationale Funktion; reelle Polstellen  $z \in \mathbb{R}$  seien höchstens einfach. Für  $\deg(q) \geq \deg(p) + 2$  und  $u \geq 0$  gilt dann:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iux} dx = 2\pi i \sum_{\substack{z=s \\ \operatorname{Im}(s) > 0}} \operatorname{res}_s[f(z) e^{iuz}] + \pi i \sum_{\substack{z=s \\ \operatorname{Im}(s) = 0}} \operatorname{res}_s[f(z) e^{iuz}]$$

Diese Gleichung gilt auch noch im Falle  $\deg(q) \geq \deg(p) + 1$  und  $u > 0$ .

(3) Sei  $f(z) = p(z)/q(z)$  rational mit  $p, q \in \mathbb{C}[z]$  und  $\deg q \geq \deg p + 2$ , aber ohne Polstellen in  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ , gekürzt also  $q(x) \neq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Dann gelten folgende Formeln für Integrale über die reelle Halbachse:

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^{\infty} f(x) dx &= - \sum_{s \neq 0} \operatorname{res}_{z=s} [f(z) \ln(z)] \\ \int_{x=0}^{\infty} f(x) \ln(x) dx &= -\frac{1}{2} \sum_{s \neq 0} \operatorname{res}_{z=s} [f(z) \ln(z)^2] - \pi i \int_{x=0}^{\infty} f(x) dx \\ \int_{x=0}^{\infty} f(x) x^\alpha dx &= \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \sum_{s \neq 0} \operatorname{res}_{z=s} [f(z) z^\alpha] \quad \text{für } 0 < \alpha < 1 \end{aligned}$$

Hierbei nutzen wir für jede komplexe Zahl  $z = r e^{i\varphi}$  mit  $0 < r < \infty$  und  $0 \leq \varphi < 2\pi$  ihren komplexen Logarithmus mit  $\ln z := \ln r + i\varphi$ . Auf  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$  entspricht dies dem Nebenzweig  $\ln = \ln_\pi$  aus Satz F2M. Für  $\alpha \in \mathbb{R}$  setzen wir  $z^\alpha := e^{\alpha \ln z}$ . Auf  $\mathbb{R}_{> 0}$  sind das die üblichen reellen Definitionen; ihre komplexen Fortsetzungen sind unstetig quer zu  $\mathbb{R}_{> 0}$ .

**Aufgabe:** Die folgende Rechnung beweist  $0 = 1$ . Wo stecken Fehler?

$$\text{Für alle } k \in \mathbb{Z} \text{ gilt:} \quad e^{2\pi i k} = 1 \quad (1)$$

$$\text{Multiplikation von (1) mit } e \quad \Rightarrow \quad e^{2\pi i k + 1} = e \quad (2)$$

$$\text{Einsetzen von (2) in (1)} \quad \Rightarrow \quad (e^{2\pi i k + 1})^{2\pi i k} = 1 \quad (3)$$

$$\text{Potenzgesetz } (e^w)^z = e^{wz} \quad \Rightarrow \quad e^{-4\pi^2 k^2 + 2\pi i k} = 1 \quad (4)$$

$$\text{Potenzgesetz } e^{w+z} = e^w \cdot e^z \quad \Rightarrow \quad e^{-4\pi^2 k^2} \cdot e^{2\pi i k} = 1 \quad (5)$$

$$\text{Anwendung von (1)} \quad \Rightarrow \quad e^{-4\pi^2 k^2} = 1 \quad (6)$$

$$\text{Grenzwert für } k \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad 0 = 1 \quad (7)$$

⚠ Das ist eine lehrreiche Übung, bitte versuchen Sie zuerst selbst, den Fehler einzugrenzen! Die Gleichungen (1) und (2) sind tatsächlich gültig, auch (3)  $1^z = 1$  scheint noch in Ordnung, obschon die Bedeutung von  $a^z$  für  $a, z \in \mathbb{C}$  unklar ist. Die letzte Gleichung (7) ist offensichtlich falsch, ebenso (6), (5), (4). Die Implikationen (4)  $\Rightarrow$  (5)  $\Rightarrow$  (6)  $\Rightarrow$  (7) sind alle einwandfrei, sie starten leider bei einer falschen Aussage (4). Der einzige Fehler liegt also bei (3)  $\Rightarrow$  (4). In  $\mathbb{C}$  sind Logarithmen und Potenzen nicht eindeutig, daher ist extreme Vorsicht geboten! [F506]

**Aufgabe:** (1) Es gilt  $1^z = 1$  für alle  $z \in \mathbb{R}$ , also wohl auch für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Aus  $e^{2\pi i} = 1$  folgt  $1 = 1^i = (e^{2\pi i})^i = e^{2\pi i \cdot i} = e^{-2\pi} \approx 0.002 < 1$ . Fehler?

(2) Für  $a \in \mathbb{C}$  und  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir  $a^0 := 1$  und rekursiv  $a^{n+1} := a^n \cdot a$ . Für  $a \in \mathbb{C}^*$  setzen wir  $a^{-n} = 1/a^n$ . Welche Potenzgesetze gelten hier?

(3) Für  $a \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $z \in \mathbb{R}$  sei  $a^z := e^{z \ln a}$ . Welche Regeln gelten?

(4) Für  $a \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $z \in \mathbb{C}$  sei  $a^z := e^{z \ln a}$ . Welche Regeln gelten?

(5) Ist  $a^z := e^{z \ln a}$  eine brauchbare Definition für alle  $a, z \in \mathbb{C}$ ?

⚠ Die Potenzgesetze lassen sich nicht naiv von  $\mathbb{R}$  auf  $\mathbb{C}$  fortsetzen! Vielleicht empfinden Sie die Redlichkeit und Sorgfalt als übertrieben, die ich für komplexe Logarithmen [F225] und Wurzeln [F229] aufwende. Die drastischen Beispiele sollen Sie gegen gefährliche Sorglosigkeit impfen.

(2) Für  $a \in (\mathbb{C}^*, \cdot, 1)$  und  $z \in \mathbb{Z}$  gelten alle üblichen Potenzgesetze:

$$1^z = 1, \quad (ab)^z = a^z b^z, \quad a^0 = 1, \quad a^{w+z} = a^w \cdot a^z, \quad a^1 = a, \quad (a^w)^z = a^{w \cdot z}.$$

Allgemeiner als  $(\mathbb{R}^*, \cdot, 1)$  und  $(\mathbb{C}^*, \cdot, 1)$  gilt dies für jede kommutative Gruppe  $(G, \cdot, 1)$ .

(3) Auch für  $a \in (\mathbb{R}_{>0}, \cdot, 1)$  und  $z \in \mathbb{R}$  gelten alle sechs Potenzgesetze. (So sind Sie's gewohnt.)

(4) Für  $a \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $z \in \mathbb{C}$  gelten diese Regeln bis auf die letzte! Als Gegenbeispiel siehe (1).

(5) Nein, denn für  $a \in \mathbb{C}$  sind  $\ln a$  und somit  $e^{z \ln a}$  nicht eindeutig! Als Gegenbeispiel siehe (1).

### Satz F5A: Existenz von Logarithmusfunktionen

Für jedes Gebiet  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^*$  sind äquivalent:

- 1 Auf  $\Omega$  existiert eine Logarithmusfunktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ .
- 2 Auf  $\Omega$  hat  $1/z$  eine Stammfunktion  $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g'(z) = 1/z$ .
- 3 Es gilt  $\oint_{\gamma} 1/z \, dz = 0$  für jeden geschlossenen Weg  $\gamma$  in  $\Omega$ . Das heißt, der Nullpunkt wird von Wegen in  $\Omega$  nicht umlaufen.

**Aufgabe:** Beweisen Sie sorgfältig die Äquivalenzen (1)  $\Leftrightarrow$  (2)  $\Leftrightarrow$  (3). Das ist das zentrale Beispiel für das ebene Potentialproblem. [E361]

**Lösung:** (1)  $\Rightarrow$  (2): Wir zeigen  $f'(z) = 1/z$  mit der Definition F2A. Sei  $z_n \rightarrow z$  eine konvergente Folge in  $\Omega$ . Für die Bildfolge  $w_n = f(z_n)$  und  $w = f(z)$  gilt dann  $w_n \rightarrow w$  dank Stetigkeit von  $f$ . Hieraus folgt:

$$\frac{f(z) - f(z_n)}{z - z_n} = \frac{w - w_n}{e^w - e^{w_n}} = \left[ \frac{e^w - e^{w_n}}{w - w_n} \right]^{-1} \rightarrow [e^w]^{-1} = \frac{1}{z}$$

Somit ist  $f$  für alle  $z \in \Omega$  differenzierbar mit Ableitung  $f'(z) = 1/z$ . Da somit auch  $f'$  stetig ist, ist  $f$  holomorph gemäß Definition F2c.

(2)  $\Rightarrow$  (1): Dank Produktregel gilt  $[z e^{-g(z)}] = [1 - z g'(z)] e^{-g(z)} = 0$ . Demnach ist  $z e^{-g(z)} \neq 0$  konstant, also  $z e^{-g(z)} = e^c$  für ein  $c \in \mathbb{C}$ . Somit ist  $f(z) = g(z) + c$  eine Logarithmusfunktion, wie behauptet.

(2)  $\Rightarrow$  (3): Sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$  ein geschlossener Weg, also  $\gamma(a) = \gamma(b)$ . Dank HDI verschwindet das Wegintegral  $\oint_{\gamma} 1/z \, dz = [g(z)]_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} = 0$ .

(3)  $\Rightarrow$  (2): Wir fixieren einen Basispunkt  $z_0 \in \Omega$ . Zu jedem Punkt  $z \in \Omega$  existiert ein Weg  $\alpha: [0, 1] \rightarrow \Omega$  von  $\alpha(0) = z_0$  nach  $\alpha(1) = z$ , da wir  $\Omega$  als zusammenhängend voraussetzen. Wir definieren nun  $g(z) := \int_{\alpha} 1/z \, dz$ . Wegen  $\oint 1/z \, dz = 0$  ist dies wohldefiniert, das heißt:  $g(z)$  hängt nur von  $z$  ab und nicht von der willkürlichen Wahl des Integrationsweges  $\alpha$ . Dank HDI gilt dann  $g'(z) = 1/z$ . (Cauchy–Riemann, analog zu H2A.)

**Beispiel:** Den Hauptzweig  $\ln_0: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \rightarrow \mathbb{C}$  des Logarithmus erhalten wir durch  $\ln_0(z) = \int_{[1, z]} 1/z \, dz$ . Hierzu wählen wir den direkten Weg  $[1, z]$  von 1 nach  $z$ ; jeder andere Weg in  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$  ergibt dasselbe. [E363]

Für den Zweig  $\ln_{\pi}: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$  gilt ebenso  $\ln_{\pi}(z) = i\pi + \int_{[-1, z]} 1/z \, dz$ .

**Aufgabe:** (1) Ist  $f(z) = 1/z$  holomorph? (2) Ist  $g(z) = 1/\bar{z}$  holomorph?  
(3) Für welche Konstanten  $a \in \mathbb{R}$  ist die Funktion  $h: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$h(x+iy) = \frac{x}{x^2+y^2} + ai \frac{y}{x^2+y^2} \quad \text{holomorph?}$$

**Lösung:** (1) Es gilt  $f(z) = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{=u(x,y)} + i \underbrace{\frac{-y}{x^2+y^2}}_{=v(x,y)}$ .

Wir prüfen die Cauchy–Riemann–Gleichungen... Diese sind erfüllt:

$$\begin{aligned} \partial_x u &= \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}, & \partial_x v &= \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \\ \partial_y u &= \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, & \partial_y v &= \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

Alternativ & kürzer:  $f(z) = 1/z$  ist eine Laurent–Reihe, also holomorph.

(2) Für  $g(z) = u(x,y) - iv(x,y)$  hingegen gilt Cauchy–Riemann nicht!

(3) Für  $h(z) = u(x,y) - iav(x,y)$  gilt Cauchy–Riemann nur bei  $a = -1$ !

☺ Die Cauchy–Riemann–Gleichungen F2E sind bequem und hilfreich.

**Aufgabe:** Wir untersuchen  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  und  $g: \mathbb{C}_{\text{Re}>0} \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch

$$f(x+iy) = x^3y^2 + ix^2y^3, \quad g(x+iy) = \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2) + i \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

(1) In welchen Punkten  $(x,y)$  sind  $f, g$  partiell differenzierbar?

(2) In welchen Punkten  $(x,y)$  sind  $f, g$  komplex differenzierbar?

(3) Begründen oder widerlegen Sie:  $g$  ist holomorph mit  $g'(z) = 1/z$ .

**Lösung:** (1) Die Funktionen  $f, g$  sind überall stetig partiell diff'bar:

$$\begin{aligned} \partial_x f(x,y) &= 3x^2y^2 + 2ixy^3, & \partial_y f(x,y) &= 2x^3y + 3ix^2y^2, \\ \partial_x g(x,y) &= \frac{x}{x^2+y^2} + i \frac{-y}{x^2+y^2}, & \partial_y g(x,y) &= \frac{y}{x^2+y^2} + i \frac{x}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

(2) Für  $f$  ist Cauchy–Riemann äquivalent zu  $2xy^3 = -2x^3y$ , also  $xy(y^2+x^2) = 0$ . Das ist nur auf den Achsen  $x=0$  und  $y=0$  erfüllt.

Die Funktion  $g$  erfüllt die Cauchy–Riemann–Gleichungen überall, ist also komplex differenzierbar, und somit holomorph auf  $\mathbb{C}_{\text{Re}>0}$ .

(3) Diese Rechnungen zeigen:  $g$  ist holomorph mit  $g'(z) = 1/z$ .

☺ Wie in Satz F2M ist  $g$  der Hauptzweig des Logarithmus auf  $\mathbb{C}_{\text{Re}>0}$ .

Zur Erinnerung: Der **Laplace–Operator** in der Ebene ist  $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ . Eine  $C^2$ –Funktion  $u: \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **harmonisch**, wenn  $\Delta u = 0$  gilt.

**Aufgabe:** (1) Ist  $f: \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, dann sind Realteil  $u = \text{Re } f$  und Imaginärteil  $v = \text{Im } f$  harmonisch. Prominente Beispiele sind:

$$e^x \cos y, \quad e^x \sin y, \quad \log|z|, \quad \arctan(y/x).$$

(2) Kann  $h: \mathbb{C}_{\text{Re}>0} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph sein mit  $h(x+iy) = x^x + iv(x,y)$ ?

**Lösung:** (1) Jede holomorphe Funktion  $f$  ist beliebig oft diff'bar (F3E), somit auch  $u, v$ . Wir können den Satz von Schwarz (D4A) anwenden. Dank Cauchy–Riemann–Gleichungen  $\partial_x u = \partial_y v$  und  $\partial_y u = -\partial_x v$  gilt

$$\begin{aligned} \Delta u &= \partial_x \partial_x u + \partial_y \partial_y u = +\partial_x \partial_y v - \partial_y \partial_x v = 0, \\ \Delta v &= \partial_x \partial_x v + \partial_y \partial_y v = -\partial_x \partial_y u + \partial_y \partial_x u = 0. \end{aligned}$$

(2) Nach (1) müsste  $u(x,y) = x^x$  harmonisch sein, ist sie aber nicht:

$$\begin{aligned} \partial_x x^x &= \partial_x (e^{x \ln x}) = e^{x \ln x} \cdot (x/x + \ln x) = x^x (1 + \ln x), \\ \partial_x^2 x^x &= \partial_x (x^x (1 + \ln x)) = x^x ((1 + \ln x)^2 + 1/x) = \Delta u. \end{aligned}$$

Daher gilt  $\Delta u \neq 0$ , z.B. für  $x=1$ . Also kann  $h$  nicht holomorph sein!

**Aufgabe:** Sei  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto |z|$ . Berechnen Sie die Wegintegrale

(1)  $\int_\alpha f(z) dz$  auf direktem Wege  $\alpha$  von 1 nach  $-1$  auf der  $x$ -Achse,

(2)  $\int_\beta f(z) dz$  von 1 nach  $-1$  aber über den oberen Halbkreis  $\beta$ .

(3) Kann demnach die Funktion  $f$  holomorph sein?

**Lösung:** (1) Für  $\alpha: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\alpha(t) = -t$  gilt  $\alpha'(t) = -1$  und somit

$$\int_\alpha f(z) dz = \int_{-1}^1 |t| \cdot (-1) dt = 2 \int_0^1 -t dt = \left[-t^2\right]_0^1 = -1$$

(2) Für  $\beta: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\beta(t) = e^{it}$  gilt  $f(\beta(t)) = |\beta(t)| = 1$  und somit

$$\int_\beta f(z) dz = \int_0^\pi 1 \cdot \beta'(t) dt = \left[\beta(t)\right]_0^\pi = -2$$

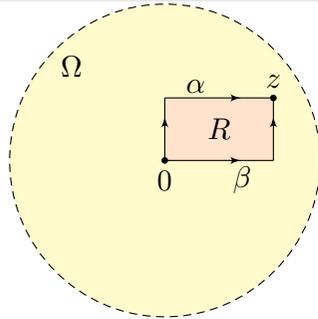
(3) Der Weg  $\alpha$  umgekehrt orientiert und  $\beta$  parametrisieren den Rand des Halbkreises. Wäre  $f$  holomorph, dann folgte dank Residuensatz

$$\int_\beta f(z) dz - \int_\alpha f(z) dz = 0.$$

☺ Dieses Integralkriterium ist sogar äquivalent zur Holomorphie (F5B).

**Satz F5B: Integralkriterium, Morera 1886**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Genau dann ist  $f$  holomorph, wenn  $\oint_{\partial R} f(z) dz = 0$  gilt für jedes Rechteck  $R = [a, b] \times [c, d] \subseteq \Omega$ .



Erinnerung:  $f$  holomorph bedeutet stetig komplex differenzierbar (F2C). Diese Bedingung ist extrem stark:  $f$  lässt sich lokal in eine Potenzreihe entwickeln und ist somit sogar beliebig oft differenzierbar (Satz F3E). Die zweite Bedingung nutzt nur die Stetigkeit von  $f$  und eine einfache Integralbedingung. Die Äquivalenz ist daher überaus bemerkenswert!

**Lösung:** „ $\Rightarrow$ “: Ist  $f$  holomorph, so folgt  $\int_{\partial D} f(z) dz = 0$  dank Cauchys Integralsatz F3A für jedes Kompaktum  $D \subseteq \Omega$  mit  $\partial D$  stückweise glatt.

😊 Dies gilt insbesondere für jedes Rechteck  $R = [a, b] \times [c, d] \subseteq \Omega$ .

„ $\Leftarrow$ “: Für die Holomorphie genügt es,  $B(z_0, r) \subseteq \Omega$  zu betrachten: Differenzierbarkeit (komplex oder reell) ist eine lokale Eigenschaft. Nach Einschränken und Verschieben dürfen wir  $\Omega = B(0, r)$  annehmen. Die Funktionen  $F, G : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  definieren wir dann durch obige Integrale. Für  $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und  $h \rightarrow 0$  finden wir dank HDI folgende Grenzwerte:

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_{t=x}^{x+h} f(t+iy) dt \rightarrow f(x+iy) = f(z)$$

$$\frac{G(z+ih) - G(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_{t=y}^{y+h} f(x+it) i dt \rightarrow if(x+iy) = if(z)$$

😊 Somit existiert die Ableitung  $\partial_x F(x+iy)$  und ist gleich  $f(x+iy)$ . Ebenso existiert die Ableitung  $\partial_y G(x+iy)$  und ist gleich  $if(x+iy)$ .

😊 Manchmal ist das Integralkriterium leichter zu handhaben als das Ableitungskriterium; dazu nützt dieser Satz. Anwendung: Angenommen,  $f_1, f_2, f_3, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  konvergieren lokal gleichmäßig gegen  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . Sind alle  $f_k$  stetig, so auch  $f$ . Sind alle  $f_k$  holomorph, so auch  $f$ .

**Aufgabe:** Beweisen Sie Satz F5B anhand folgender Rechnungen:

- (1) Die Implikation „ $\Rightarrow$ “ kennen wir bereits viel allgemeiner: Woher?
- (2) Zur Umkehrung „ $\Leftarrow$ “ genügt es,  $\Omega = B(0, r)$  zu betrachten: Warum? Hierauf definieren wir  $F, G : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  durch die beiden Hakenintegrale:

$$F(x+iy) := \int_{\alpha} f(z) dz = \int_{t=0}^y f(it) i dt + \int_{t=0}^x f(t+iy) dt$$

$$\stackrel{!}{=} G(x+iy) := \int_{\beta} f(z) dz = \int_{t=0}^x f(t) dt + \int_{t=0}^y f(x+it) i dt$$

- (a) Berechnen Sie hiermit die partiellen Ableitungen  $\partial_x F$  und  $\partial_y G$ .
- (b) Warum gilt  $F = G$ ? (c) Erfüllt  $F$  die Cauchy–Riemann–Gleichungen?
- (d) Ist  $F$  holomorph? und damit auch die komplexe Ableitung  $f = F'$ ?

⚠ Für  $\partial_y F(x+iy)$  und  $\partial_x G(x+iy)$  läuft es nicht so einfach! Wir können nicht unter den Integralen ableiten, da wir über  $f$  noch nichts wissen.

😊 Wir nutzen nun unsere Voraussetzung  $\oint_{\partial R} f(z) dz = 0$  speziell für das Rechteck  $R = [0, x] \times [0, y] \subseteq \Omega$ , wie in der Skizze gezeigt:

$$G(x+iy) - F(x+iy) = \int_{\beta} f(z) dz - \int_{\alpha} f(z) dz = \oint_{\partial R} f(z) dz = 0$$

Dies gilt für alle Punkte  $(x+iy) \in \Omega$ , also folgt  $F = G$  auf ganz  $\Omega$ . Somit existiert die Ableitung  $\partial_y F(x+iy)$  und ist gleich  $if(x+iy)$ .

Damit ist  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  stetig partiell differenzierbar und erfüllt die Cauchy–Riemann–Gleichungen, denn  $\partial_x F = f = -i(if) = -i\partial_y F$ . Dank Satz F2E ist demnach unsere Funktion  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph!

Dank Entwicklungssatz F3E können wir  $F$  in eine konvergente Potenzreihe  $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  entwickeln. Somit ist  $F$  beliebig oft komplex differenzierbar, und auch die Ableitung  $f = F'$  ist holomorph.

😊 Unsere sorgfältige Rechnung beweist die ersehnte Umkehrung „ $\Leftarrow$ “.

Erinnerung: Eine komplexe Funktion  $f: \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  ist **holomorph**, wenn  $f$  komplex differenzierbar ist und ihre Ableitung  $f': \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. In Definition F2C war es bequem, die Stetigkeit von  $f'$  zu fordern. Fordern ist immer bequem, doch nachweisen / überprüfen ist lästig.

☺ Die Stetigkeit von  $f'$  müssen wir nicht fordern, wir können sie folgern:

**Satz F5c: komplexe Differenzierbarkeit, Goursat 1883**

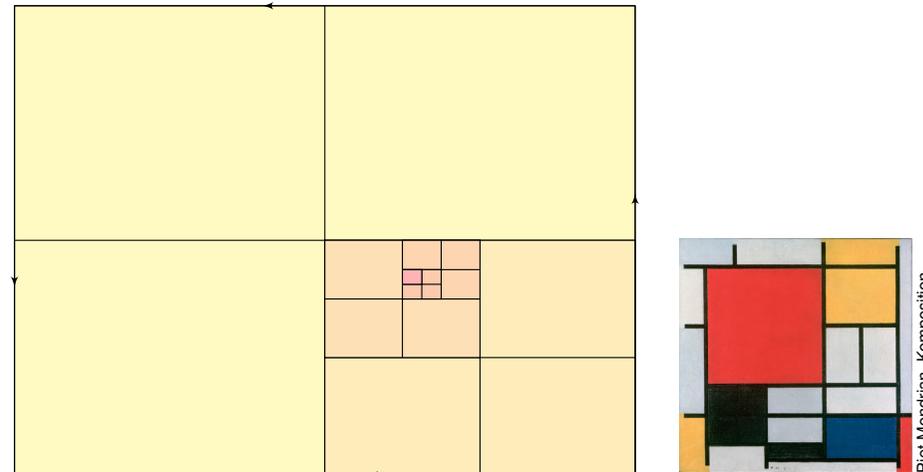
Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  komplex differenzierbar in jedem Punkt  $z \in \Omega$ , das heißt, es existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten:

$$f'(z) = \lim_{\Omega \setminus \{z\} \ni \zeta \rightarrow z} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$$

Dann ist  $f$  bereits holomorph auf ganz  $\Omega$ , also sogar komplex analytisch, und somit insbesondere beliebig oft komplex differenzierbar.

☺ Dank Satz F5c müssen Sie in der Praxis weniger nachweisen! Sie mögen einwenden, dass diese Frage eher eine Spitzfindigkeit ist, aber es ist beruhigend zu wissen und erleichtert tatsächlich Ihre Arbeit.

⚠ Aus reeller Differenzierbarkeit von  $f$  folgt nicht Stetigkeit von  $f'$ , wie das Gegenbeispiel  $f(x) = x^2 \sin(1/x)$  für  $x \neq 0$  und  $f(0) = 0$  zeigt. [B426]



Für die Anwendung unserer Integralsätze (Cauchy F3A, Gauß & Green, letztlich also HDI) fehlt uns hier leider die Stetigkeit von  $f'$ . Wir haben nur sehr schwache Voraussetzungen und müssen genauer hinsehen.

☺ Der folgende Beweis ist ein Juwel an Sorgfalt und Scharfsinn.

**Beweis:** Komplexe Differenzierbarkeit von  $f$  impliziert Stetigkeit von  $f$ . Nach dem Integralkriterium F5B von Morera genügt es daher zu zeigen:

$$I(R) := \oint_{\partial R} f(z) dz \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{für jedes Rechteck } R = [a, b] \times [c, d] \subseteq \Omega.$$

Wir beginnen mit einem Rechteck  $R_0 \subseteq \Omega$  und zeigen nun  $|I(R_0)| = 0$ .

Wir unterteilen  $R_0$  in vier gleich große Teilrechtecke  $A, B, C, D$ . Es gilt  $I(R_0) = I(A) + I(B) + I(C) + I(D)$ . Wir wählen ein  $R_1 \in \{A, B, C, D\}$  mit maximalem Betrag  $|I(R_1)|$ . So erhalten wir  $|I(R_0)| \leq 4|I(R_1)|$ .

So fortfahrend erhalten wir durch Vierteilung immer kleinere Rechtecke  $R_0 \supseteq R_1 \supseteq R_2 \supseteq \dots \supseteq R_n \supseteq \dots$  mit  $|I(R_0)| \leq 4^n |I(R_n)|$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Diese Intervallschachtelung konvergiert gegen einen Punkt  $z$  mit  $z \in R_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , kurz  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} R_n = \{z\}$ , dank Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$ .

Nach Voraussetzung ist  $f$  in  $z$  differenzierbar. Für  $\zeta \in \Omega$  gilt demnach

$$f(\zeta) = f(z) + f'(z)(\zeta - z) + (\zeta - z)g(\zeta)$$

mit einer stetigen Funktion  $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  und  $g(z) = 0$ .

Das Polynom  $\zeta \mapsto f(z) + f'(z)(\zeta - z)$  ist holomorph in  $\zeta$ , demnach gilt

$$\oint_{\partial R_n} f(z) + f'(z)(\zeta - z) d\zeta = 0.$$

Für unser Integral bleibt also nur noch:

$$I(R_n) := \oint_{\partial R_n} f(\zeta) d\zeta = \oint_{\partial R_n} (\zeta - z)g(\zeta) d\zeta$$

Seinen Absolutbetrag schätzen wir grob ab:

$$|I(R_n)| \leq \ell(\partial R_n) \cdot \max_{\zeta \in \partial R_n} |\zeta - z| \cdot \max_{\zeta \in \partial R_n} |g(\zeta)|$$

Der Abstand von  $z, \zeta \in R_n$  ist beschränkt durch  $|\zeta - z| \leq \ell(\partial R_n)$ .

Für die Randlängen gilt  $\ell(\partial R_n) = \frac{1}{2}\ell(\partial R_{n-1}) = \dots = 2^{-n}\ell(\partial R_0)$ .

Zusammenfassend erhalten wir also die Abschätzungen:

$$|I(R_0)| \leq 4^n |I(R_n)| \leq 4^n \ell(\partial R_n)^2 \max_{\zeta \in \partial R_n} |g(\zeta)| = \ell(\partial R_0)^2 \max_{\zeta \in \partial R_n} |g(\zeta)|$$

Für  $n \rightarrow \infty$  geht der letzte Term gegen 0. Somit folgt  $|I(R_0)| = 0$ .

## Satz F5D: Charakterisierung von Gebieten

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  eine offene Menge und nicht leer. Dann sind äquivalent:

- (1)  $\Omega$  ist wegzusammenhängend: Je zwei Punkte  $x, y \in \Omega$  sind verbindbar durch einen Weg  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega$  von  $\gamma(0) = x$  nach  $\gamma(1) = y$ .
- (2) Jede stetige Funktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  hat als Bild  $f(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall.
- (3) Jede stetige Funktion  $f: \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  ist konstant.
- (4)  $\Omega$  ist zusammenhängend: Für jede Zerlegung  $\Omega = U \sqcup V$  in zwei disjunkte offene Mengen  $U$  und  $V$  gilt entweder  $U = \emptyset$  oder  $V = \emptyset$ .

Bedingung (1) ist am anschaulichsten. Hingegen scheint (4) zunächst weniger anschaulich aber in Beweisen oft die geschickteste Sichtweise.

**Beweis:** „(1)  $\Rightarrow$  (2)“: Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  Bildwerte, also  $a = f(x)$  und  $b = f(y)$  für  $x, y \in \Omega$ . Nach (1) existiert ein Weg  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega$  von  $\gamma(0) = x$  nach  $\gamma(1) = y$ . Die Komposition  $g = f \circ \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig, also ein Weg in  $\mathbb{R}$  von  $g(0) = a$  nach  $g(1) = b$ . Nach dem Zwischenwertsatz wird jeder Wert zwischen  $a$  und  $b$  angenommen. Somit ist  $f(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall.

„(2)  $\Rightarrow$  (3)“: Das Bild  $f(\Omega) \subseteq \{0, 1\}$  muss nach (2) ein Intervall sein. Also gilt entweder  $f(\Omega) = \{0\}$  oder  $f(\Omega) = \{1\}$ , und  $f$  ist konstant.

„(3)  $\Rightarrow$  (4)“: Angenommen wir haben eine offene Zerlegung  $\Omega = U \sqcup V$ . Wir definieren  $f: \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  durch  $f(z) = 0$  für  $z \in U$  und  $f(z) = 1$  für  $z \in V$ . Diese Funktion ist stetig, denn sie ist lokal konstant. Nach (3) ist  $f$  konstant. Es bleibt somit nur  $U = \emptyset$  oder  $V = \emptyset$ .

„(4)  $\Rightarrow$  (1)“: Wir wählen einen Startpunkt  $x \in \Omega$ . Sei  $V$  die Menge aller Punkte  $y \in \Omega$ , die sich durch einen Weg in  $\Omega$  mit  $x$  verbinden lassen. Diese Menge ist offen, denn um jeden Punkt  $y \in V$  existiert eine kleine Kreisscheibe  $B(y, r) \subseteq \Omega$  mit Radius  $r > 0$ , und alle Punkte  $z \in B(y, r)$  lassen sich mit  $y$  verbinden, also auch mit  $x$ , also  $B(y, r) \subseteq V$ . (Skizze!) Das Komplement  $U = \Omega \setminus V$  besteht aus den Punkten  $y \in \Omega$ , die sich nicht durch einen Weg in  $\Omega$  mit  $x$  verbinden lassen. Aus demselben Grund wie eben ist auch  $U$  offen. Nach (4) gilt  $U = \emptyset$ , denn  $x \in V \neq \emptyset$ . Also  $V = \Omega$ , das heißt, in  $\Omega$  ist jeder Punkt  $y$  mit  $x$  verbindbar.

☺ Somit sind alle vier Bedingungen (1)–(4) äquivalent.

## Der Identitätssatz für holomorphe Funktionen

Holomorphe, also komplex differenzierbare Funktionen  $f: \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  sind rigide: Wenn wir  $f$  in einer kleinen Umgebung  $B(z_0, \varepsilon) \subseteq \Omega$  kennen, so bestimmt dies  $f$  bereits auf dem gesamten Gebiet  $\Omega$ ! Genauer gilt:

## Satz F5E: Identitätssatz für holomorphe Funktionen

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet, also offen und zusammenhängend und  $\Omega \neq \emptyset$ . Für je zwei holomorphe Funktionen  $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  sind äquivalent:

- (1) Es gilt  $f = g$ , also Gleichheit  $f(z) = g(z)$  in allen Punkten  $z \in \Omega$ .
- (2) Die Menge  $\{z \in \Omega \mid f(z) = g(z)\}$  hat einen Häufungspunkt  $z_0 \in \Omega$ .
- (3) Es gilt  $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$  in einem Punkt  $z_0 \in \Omega$  und für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

⚠ Für reell differenzierbare Funktionen gilt nichts dergleichen (B438): Es gibt glatte Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , also beliebig oft reell differenzierbar, mit  $f(x) = 0$  für  $x \leq 0$  aber  $f(x) > 0$  für alle  $x > 0$ . Bemerkenswert!

☺ Der Identitätssatz (1)  $\Leftrightarrow$  (3) gilt auch für reell-analytische Funktionen, also Funktionen  $f: \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ , die sich lokal um jeden Punkt  $x \in \Omega$  in eine konvergente Potenzreihe entwickeln lassen. Die Äquivalenz zu Bedingung (2) hingegen gilt nur (reell oder komplex) eindimensional.

## Der Identitätssatz für holomorphe Funktionen

**Beweis:** „(1)  $\Rightarrow$  (2)“: Jeder Punkt  $z_0 \in \Omega$  ist Häufungspunkt von  $\Omega$ .

„(2)  $\Rightarrow$  (3)“: Mit  $f, g$  ist auch die Funktion  $h = f - g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Nach (2) hat  $M = \{z \in \Omega \mid h(z) = 0\}$  einen Häufungspunkt  $z_0 \in \Omega$ . Angenommen  $h^{(n)}(z_0) \neq 0$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Wir betrachten das kleinste  $n$ , also  $h(z) = (z - z_0)^n h_n(z)$  mit  $h_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $h_n(z_0) \neq 0$ . Dank Stetigkeit von  $h_n$  folgt  $h(z) \neq 0$  für alle  $z \in B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$ . Also liegt der Punkt  $z_0$  isoliert in  $M$  und ist kein Häufungspunkt von  $M$ . An diesem Widerspruch zerbricht unsere Annahme  $h^{(n)}(z_0) \neq 0$ . Also gilt  $h^{(n)}(z_0) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , somit  $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ .

„(3)  $\Rightarrow$  (1)“: Wir betrachten die Differenz  $h = f - g$  und hierzu die Menge  $A = \{z \in \Omega \mid \forall n \in \mathbb{N}: h^{(n)}(z) = 0\}$ . Die Menge  $A$  ist abgeschlossen, denn  $h^{(n)}$  ist stetig. Sie ist auch offen, denn um jeden Punkt  $z \in A \subseteq \Omega$  können wir  $h$  in eine auf  $B(z, \varepsilon)$  konvergente Reihe entwickeln; diese ist die Nullreihe, also  $B(z, \varepsilon) \subseteq A$ . Wir erhalten so die offene Zerlegung  $\Omega = A \sqcup (\Omega \setminus A)$ . Da  $\Omega$  zusammenhängend ist und  $z_0 \in A$ , folgt  $A = \Omega$ .

**Warnung:** Für (2)  $\Rightarrow$  (3) muss der Häufungspunkt in  $\Omega$  liegen und nicht etwa auf dem Rand! Typisches Gegenbeispiel: Die Funktion  $f(z) = \sin(1/z)$  ist holomorph auf  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und verschwindet in  $z = 1/(k\pi)$  für  $k = 1, 2, 3, \dots$  mit Häufungspunkt 0. Dennoch gilt  $f \neq 0$ .

**Aufgabe:** Sei  $f: \Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion.

(1) Lässt sich  $f$  durch eine Laurent-Reihe  $f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k z^k$  darstellen? Wenn ja, wie berechnet man die hier benötigten Koeffizienten  $a_k \in \mathbb{C}$ ?

(2) Angenommen,  $f$  ist beschränkt auf  $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \rho \leq |z| < \infty\}$ . Welche der Koeffizienten  $a_k$  müssen hierzu verschwinden? Warum?

(3) Angenommen,  $f$  ist beschränkt auf  $B = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| \leq \sigma\}$ . Welche der Koeffizienten  $a_k$  müssen hierzu verschwinden? Warum?

(4) Folgern Sie damit folgenden Satz von Joseph Liouville (1809–1882):

#### Satz F5F: Liouville

Sei  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Ist  $f$  beschränkt, so ist  $f$  konstant.

Allgemeiner: Gilt  $|f(z)| \leq M|z|^n$  für Konstanten  $M \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| \geq \rho$ , so ist  $f$  ein Polynom vom Grad  $\leq n$ .

(5) Sei  $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ein Polynom, also  $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ . Angenommen,  $p$  hat keine Nullstellen, also  $p(z) \neq 0$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Ist  $f(z) = 1/p(z)$  dann holomorph? und beschränkt? also konstant? Folgern Sie hieraus erneut den Fundamentalsatz der Algebra (F3c).

**Lösung:** (1) Ja, genau das garantiert Cauchys Entwicklungssatz F3F. Die Koeffizienten  $a_k \in \mathbb{C}$  erhalten wir durch das komplexe Wegintegral

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0,r)} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{t=0}^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{(re^{it})^{k+1}} r i e^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{(re^{it})^k} dt$$

mit  $z = r e^{it}$  und  $dz = r i e^{it} dt$ . Dies gilt für jeden Radius  $r > 0$ .

(2) Angenommen, es gilt  $|f(z)| \leq M$  für ein  $M \in \mathbb{R}$  und alle  $z$  mit  $|z| \geq \rho$ .

$$|a_k| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{t=0}^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{(re^{it})^k} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \left| \frac{f(re^{it})}{(re^{it})^k} \right| dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \frac{M}{r^k} dt \leq \frac{M}{r^k}$$

Dies gilt für jeden Radius  $r \geq \rho$ . Für  $k \geq 1$  und  $r \rightarrow \infty$  folgt damit  $a_k = 0$ . Umgekehrt ist klar: Gilt  $a_k = 0$  für alle  $k \geq 1$ , so ist  $f$  beschränkt auf  $A$ .

(3) Angenommen, es gilt  $|f(z)| \leq M$  für ein  $M \in \mathbb{R}$  und alle  $0 < |z| \leq \sigma$ . Für  $r \rightarrow 0$  schließen wir wörtlich wie in (2): Für  $k \leq -1$  folgt  $a_k = 0$ .

(4) Es gilt (3) und wegen  $|f(z)| \leq M|z|^n$  zudem (2) für alle  $k \geq n+1$ .

(5) Mit  $p(z) \neq 0$  ist  $f(z) = 1/p(z)$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  definiert und holomorph nach Quotientenregel. Zudem ist  $f$  beschränkt, also konstant,  $p(z) = a_0$ .

☺ Jedes nicht-konstante Polynom hat demnach Nullstellen in  $\mathbb{C}$ .

#### Satz F5G: Riemannscher Hebbarkeitssatz

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $s \in \Omega$  ein Punkt. Sei  $f: \Omega \setminus \{s\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und zudem beschränkt auf einer kleinen Umgebung  $B(s, r) \setminus \{s\} \subseteq \Omega$ . Dann erlaubt  $f$  eine holomorphe Fortsetzung  $\tilde{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  im Punkt  $s$ .

Wir können also  $f$  in den Punkt  $s$  hinein holomorph fortsetzen, somit die Lücke im Definitionsgebiet schließen und die Singularität in  $s$  beheben.

**Aufgabe:** Beweisen Sie diesen Satz mit den vorigen Rechnungen.

**Lösung:** Nach Verschieben können wir  $s = 0$  annehmen.

Auf  $B(0, r) \setminus \{0\}$  gilt  $f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k z^k$  dank Entwicklungssatz F3F.

Nach Voraussetzung gilt  $|f(z)| \leq M$  für ein  $M \in \mathbb{R}$  und alle  $0 < |z| < r$ .

$$|a_k| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{t=0}^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{(re^{it})^k} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \left| \frac{f(re^{it})}{(re^{it})^k} \right| dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \frac{M}{r^k} dt \leq \frac{M}{r^k}$$

Für  $k \leq -1$  und  $r \rightarrow 0$  folgt  $a_k = 0$ . Wir haben also  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ . Diese Potenzreihe ist auf ganz  $B(0, r)$  konvergent und holomorph.

#### Satz F5H: Mittelwerteigenschaft und Maximumsprinzip

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. (1) Für  $\bar{B}(z_0, r) \subseteq \Omega$  gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} f(z_0 + r e^{it}) dt.$$

Das Integral rechts ist der Mittelwert von  $f$  auf der Kreislinie  $\partial B(z_0, r)$ .

(2) Nimmt  $|f(z)|$  in  $z_0 \in \Omega$  ein lokales Maximum an, so ist  $f$  konstant.

**Aufgabe:** Beweisen Sie diesen Satz mit den vorigen Rechnungen.

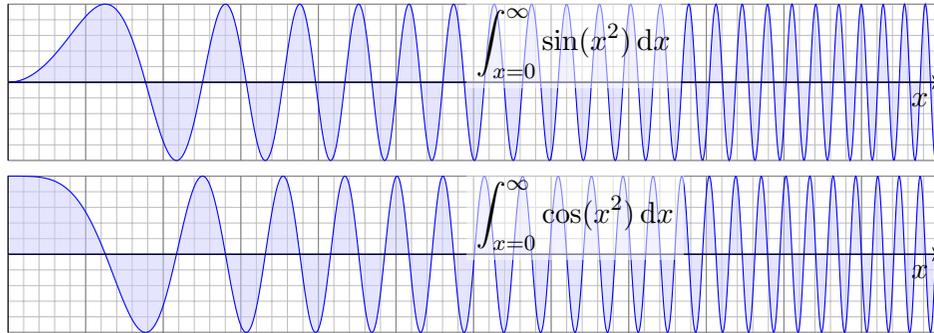
**Lösung:** (1) Das ist der Entwicklungssatz F3F in  $z_0$  im Spezialfall  $k = 0$ .

(2) Sei  $|f(z)| \leq |f(z_0)| =: M$  für alle  $z \in \bar{B}(z_0, r) \subseteq \Omega$  mit  $r > 0$ . Damit:

$$M = |f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{it})| dt \leq M \quad \text{für } 0 \leq \rho \leq r.$$

Gälte hierbei in einem Punkt die strikte Ungleichung  $|f(z_0 + \rho e^{it})| < M$ , so auch in einer Umgebung, und das Integral fiel insgesamt  $< M$  aus. Also ist  $f$  konstant auf  $\bar{B}(z_0, r)$ , also dank Identitätssatz F5E auf ganz  $\Omega$ .

**Aufgabe:** Ziel der Aufgabe ist die Berechnung der **Fresnel-Integrale**:



Bislang konnten wir nur die Konvergenz sicherstellen. Immerhin! [B424](#)  
Mit komplexer Integration können wir nun den Grenzwert ausrechnen:

- (1) Wiederholen Sie die Berechnung des Integrals  $\int_{x=0}^{\infty} e^{-x^2} dx$ .
- (2) Gilt  $\int_{\alpha} e^{-z^2} dz = \int_{\beta} e^{-z^2} dz + \int_{\gamma} e^{-z^2} dz$  für die Integrationswege  $\alpha, \beta, \gamma: [0, r] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\alpha(t) = t(1+i)$ ,  $\beta(t) = t$ ,  $\gamma(t) = r + it$ ?
- (3) Gilt  $\int_{\gamma} e^{-z^2} dz \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$ ? Finden Sie eine Abschätzung.
- (4) Folgern Sie hieraus den Wert der beiden Fresnel-Integrale.

(2) Die Wege  $\beta, \gamma$  und (umgekehrt)  $\alpha$  umlaufen das Dreieck  $D \subseteq \mathbb{C}$ .  
Da  $f$  auf ganz  $D$  holomorph ist, folgt  $\int_{\partial D} f(z) dz = 0$ , ausgeschrieben:

$$\int_{\alpha} e^{-z^2} dz = \int_{\beta} e^{-z^2} dz + \int_{\gamma} e^{-z^2} dz$$

Dies folgt aus Cauchys Integralsatz F3A, oder ebenso aus dem noch allgemeineren Residuensatz F4D, da  $f$  keine Singularitäten hat.

(3) Für  $r \rightarrow \infty$  wollen wir die Konvergenz  $\int_{\gamma} e^{-z^2} dz \rightarrow 0$  zeigen:

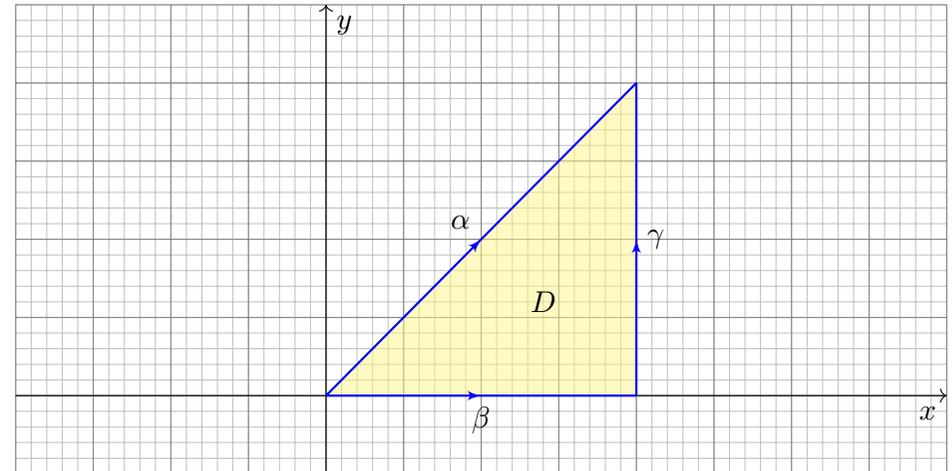
$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} e^{-z^2} dz \right| &= \left| \int_{t=0}^r e^{-(r+it)^2} dt \right| \leq \int_{t=0}^r |e^{t^2 - r^2 - 2itr}| dt \\ &= \int_{t=0}^r e^{t^2 - r^2} dt \leq \int_{t=0}^r e^{tr - r^2} dt \\ &= \left[ \frac{e^{tr - r^2}}{r} \right]_{t=0}^r = \frac{1 - e^{-r^2}}{r} \leq \frac{1}{r} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

😊 Das Integral entlang  $\gamma$  fällt schließlich nicht mehr ins Gewicht.

(1) Aus Kapitel C kennen wir das Gaußsche Integral (Satz C2G):

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}, \quad \int_{x=0}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(2) Wir betrachten die angegebenen Integrationswege  $\alpha, \beta, \gamma$ :



(4) Für  $r \rightarrow \infty$  wissen wir  $\int_{\beta} e^{-z^2} dz \rightarrow \sqrt{\pi}/2$  dank (1).  
Dank (3) gilt  $\int_{\gamma} e^{-z^2} dz \rightarrow 0$ . Mit (2) folgt  $\int_{\alpha} e^{-z^2} dz \rightarrow \sqrt{\pi}/2$ .  
Ausgeschrieben bedeutet das:

$$\int_{\alpha} e^{-z^2} dz = \int_{t=0}^r e^{-2it^2} (1+i) dt = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_{x=0}^{\sqrt{2}r} e^{-ix^2} dx$$

Wir substituieren hier  $t = x/\sqrt{2}$  und  $dt = dx/\sqrt{2}$ .

Für  $r \rightarrow \infty$  erhalten wir folgenden Grenzwert:

$$\int_{x=0}^{\infty} e^{-ix^2} dx = \int_{x=0}^{\infty} \cos(x^2) - i \sin(x^2) dx = \frac{1-i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Der Vergleich der Real- und Imaginärteile ergibt:

$$\int_{x=0}^{\infty} \cos(x^2) dx = \int_{x=0}^{\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

😊 Eine geschickte Wahl des Integrationsweges wirkt Wunder.

**Aufgabe:** (1) Die folgenden Funktionen  $h_i : \mathbb{C} \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$  sind holomorph bis auf isolierte Singularitäten. Bestimmen Sie jeweils alle Residuen:

$$(a) \quad h_1(z) = \frac{z^2}{z^4 - 1}, \quad (b) \quad h_2(z) = \frac{z}{(2z^2 + 5z + 2)^2},$$

$$(c) \quad h_3(z) = \frac{e^{\pi z}}{4z^2 - 4z + 5}, \quad (d) \quad h_4(z) = \frac{\cos z}{z^{k+1}} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

Das ist die Hauptarbeit dieser Aufgabe. Sie sollen Residuen verstehen und die Werkzeuge zu ihrer Berechnung möglichst effizient einsetzen. Im zweiten Teil nutzen Sie die Residuen zur Berechnung von Integralen: Sei  $\gamma_1$  der positiv orientierte Rand des Rechtecks mit Ecken  $\pm \frac{3}{2} \pm \frac{i}{2}$  und  $\gamma_2$  der Rand der Kreisscheibe  $B(-1/2, 1)$ . Bestimmen Sie die Integrale

$$(2) \int_{\gamma_j} h_i(z) dz \quad \text{für } i = 1, 2, 3, 4 \text{ und } j = 1, 2,$$

$$(3) \int_{t=0}^{2\pi} \frac{1}{(4 \cos t + 5)^2} dt \quad \text{und} \quad (4) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 - 1} dx.$$

In welchem Sinne konvergiert das letzte Integral? absolut? uneigentlich?

**Lösung:** (1) Wir berechnen zunächst die Residuen mit F4B bzw. F4C.

(a) Die Funktion  $h_1(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)}$  hat einfache Pole:

$$\operatorname{res}_{z_0} h_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2}{\frac{d}{dz}(z^4 - 1)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2}{4z^3} = \frac{1}{4z_0} \quad \text{für } z_0 = \pm 1, \pm i, \text{ also}$$

$$\operatorname{res}_{+1} h_1 = +\frac{1}{4}, \quad \operatorname{res}_{-1} h_1 = -\frac{1}{4}, \quad \operatorname{res}_{+i} h_1 = -\frac{i}{4}, \quad \operatorname{res}_{-i} h_1 = +\frac{i}{4}$$

(b) Für  $h_2$  faktorisieren wir den Nenner (dank Mitternachtsformel) gemäß

$$2z^2 + 5z + 2 = 2(z+2)(z+1/2).$$

Die Funktion  $h_2(z) = \frac{z}{4(z+2)^2(z+1/2)^2}$  hat in  $-2, -1/2$  doppelte Pole:

$$\operatorname{res}_{-2} h_2 = \lim_{z \rightarrow -2} \frac{d}{dz} \left[ \frac{z}{4(z+1/2)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow -2} \frac{4(z+1/2)^2 - z \cdot 8(z+1/2)}{(4(z+1/2)^2)^2} = -\frac{5}{27}$$

$$\operatorname{res}_{-1/2} h_2 = \lim_{z \rightarrow -1/2} \frac{d}{dz} \left[ \frac{z}{4(z+2)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow -1/2} \frac{4(z+2)^2 - z \cdot 8(z+2)}{(4(z+2)^2)^2} = +\frac{5}{27}$$

(c) Wir untersuchen die Funktion

$$h_3(z) = \frac{e^{\pi z}}{4z^2 - 4z + 5}.$$

Wir faktorisieren den Nenner (dank Mitternachtsformel) gemäß

$$4z^2 - 4z + 5 = 4[z - (1/2 + i)][z - (1/2 - i)].$$

Für die einfachen Pole  $1/2 \pm i$  berechnen wir die Residuen vermöge

$$\operatorname{res}_{z_0} h_3 = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{e^{\pi z}}{\frac{d}{dz}(4z^2 - 4z + 5)} = \frac{e^{\pi z_0}}{8z_0 - 4} \quad \text{für } z_0 = 1/2 \pm i, \text{ alternativ}$$

$$\operatorname{res}_{\frac{1}{2}+i} h_3 = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}+i} \frac{e^{\pi z}}{4[z - (1/2 - i)]} = \frac{e^{\pi(\frac{1}{2}+i)}}{4(1/2 + i - 1/2 - i)} = \frac{-e^{\pi/2}}{8i} = +\frac{i e^{\pi/2}}{8},$$

$$\operatorname{res}_{\frac{1}{2}-i} h_3 = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}-i} \frac{e^{\pi z}}{4[z - (1/2 + i)]} = \frac{e^{\pi(\frac{1}{2}-i)}}{4(1/2 - i - 1/2 - i)} = \frac{-e^{\pi/2}}{-8i} = -\frac{i e^{\pi/2}}{8}.$$

(d) Wir untersuchen die Funktion  $h_4(z) = \cos(z)/z^{k+1}$  für  $k \in \mathbb{N}$ .

Die einzige Polstelle von  $h_4$  ist  $z_0 = 0$ ; sie hat die Ordnung  $k + 1$ .

Satz F4C für die Residuen mehrfacher Polstellen ergibt dann

$$\operatorname{res}_{z=0} h_4(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{k!} \left( \frac{d}{dz} \right)^k [z^{k+1} h_4(z)] = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!} & \text{falls } k = 2\ell \text{ gerade.} \end{cases}$$

☺ Die Ableitungen sind zu unserem Glück hier sehr übersichtlich.

Alternativ entwickeln wir  $h_4$  in eine Laurent-Reihe um  $z_0 = 0$ :

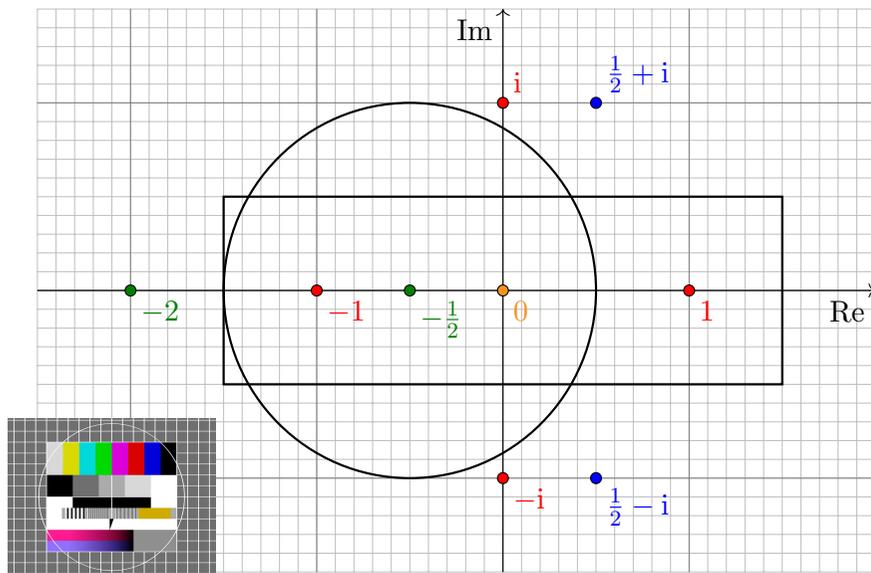
$$h_4(z) = \frac{1}{z^{k+1}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!} z^{2\ell} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!} z^{2\ell-k-1}$$

Das Residuum ist dann der Koeffizient vor  $z^{-1}$ , also

$$\operatorname{res}_{z=0} h_4(z) = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!} & \text{falls } k = 2\ell \text{ gerade.} \end{cases}$$

☺ Die Reihenentwicklung ist zu unserem Glück hier sehr übersichtlich.

(2) Dank Residuensatz F4D müssen wir zur Berechnung der Integrale nur die Residuen aufsummieren, die im Rechteck bzw. im Kreis liegen.



Die Pole innerhalb des Rechtecks sind: 0 und  $-\frac{1}{2}$  und  $\pm 1$ .

Die Pole innerhalb des Kreises sind: 0 und  $-\frac{1}{2}$  und  $-1$ .

Dank Residuensatz F4D erhalten wir schließlich die acht Integrale

$$\int_{\gamma_1} h_1(z) dz = 2\pi i \left[ \text{res}_{+1} h_1 + \text{res}_{-1} h_1 \right] = 0,$$

$$\int_{\gamma_2} h_1(z) dz = 2\pi i \left[ \text{res}_{-1} h_1 \right] = -\frac{1}{2}\pi i,$$

$$\int_{\gamma_1} h_2(z) dz = \int_{\gamma_2} h_2(z) dz = 2\pi i \left[ \text{res}_{-1/2} h_2 \right] = \frac{10}{27}\pi i,$$

$$\int_{\gamma_1} h_3(z) dz = \int_{\gamma_2} h_3(z) dz = 0,$$

$$\int_{\gamma_1} h_4(z) dz = \int_{\gamma_2} h_4(z) dz = 2\pi i \left[ \text{res}_0 h_4 \right] = \begin{cases} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!} & \text{für } k = 2\ell, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

☺ Es genügt jeweils, die Residuen aus Teil (1) zu summieren.

(3) Gesucht ist das reelle Integral

$$\int_{t=0}^{2\pi} \frac{1}{(4 \cos t + 5)^2} dt.$$

Dies berechnen wir als komplexes Integral mit Hilfe von Satz F4H:

Der Integrand ist  $R(x, y) = 1/(4x + 5)^2$  mit  $x = \cos t$  und  $y = \sin t$ .

Wir nutzen die Euler-Formel  $z = e^{it} = \cos t + i \sin t$  und substituieren

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i},$$

$$f(z) = \frac{1}{iz} \cdot \frac{1}{(2(z + z^{-1}) + 5)^2} = -i \frac{z}{(2z^2 + 5z + 2)^2} = -i h_2(z)$$

Hier ist  $-1/2$  die einzige Polstelle in  $B(0, 1)$ . Dank F4H erhalten wir:

$$\int_{t=0}^{2\pi} \frac{1}{(4 \cos t + 5)^2} dt = \int_{\partial B(0,1)} f(z) dz = 2\pi i \cdot (-i) \text{res}_{-1/2} h_2 = \frac{10}{27}\pi$$

☺ Links muss man integrieren, rechts nur Residuen summieren!

(4) Gesucht ist das reelle Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 - 1} dx.$$

Dies berechnen wir mit Hilfe des Residuensatzes F4K und Teil (1):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 - 1} dx &= 2\pi i \text{res}_i h_1 + \pi i \text{res}_1 h_1 + \pi i \text{res}_{-1} h_1 \\ &= 2\pi i \left[ -\frac{i}{4} \right] + \pi i \left[ \frac{1}{4} \right] + \pi i \left[ -\frac{1}{4} \right] = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

☺ Links muss man integrieren, rechts nur Residuen summieren!

⚠ Der Integrand ist weder absolut noch uneigentlich integrierbar.

Unter dem Integral verstehen wir daher den Cauchy-Hauptwert:

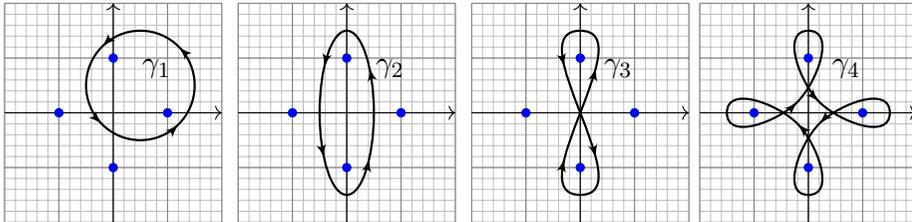
$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left( \int_{-r}^{-1-1/r} \frac{x^2}{x^4 - 1} dx + \int_{-1+1/r}^{1-1/r} \frac{x^2}{x^4 - 1} dx + \int_{1+1/r}^r \frac{x^2}{x^4 - 1} dx \right)$$

☺ Mit dieser Vorsichtsmaßnahme gelingt die Rechnung wie erhofft.

**Aufgabe:** (1) Berechnen Sie das Wegintegral

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{1}{z^4 - 1} dz$$

für jeden der folgenden geschlossenen Wege  $\gamma_i: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ .



Die markierten Punkte sind die Polstellen des Integranden. Ausführlich:  
 (2) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung über  $\mathbb{R}$  und über  $\mathbb{C}$   
 (3) Berechnen Sie alle Polstellen und dort jeweils das Residuum.  
 Welche Reihenfolge der Rechnungen (1,2,3) scheint Ihnen geschickt?

(2) Wir zerlegen den Nenner in seine Linearfaktoren über  $\mathbb{C}$ :

$$z^4 - 1 = (z - 1)(z + 1)(z - i)(z + i)$$

Alle Faktoren sind einfach. Die Partialbruchzerlegung (kurz PBZ) der Funktion  $1/(z^4 - 1)$  hat daher die besonders einfache Form

$$\frac{1}{z^4 - 1} = \frac{a}{z - 1} + \frac{b}{z + 1} + \frac{c}{z - i} + \frac{d}{z + i}.$$

Die Konstanten  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  sind hierbei noch zu berechnen, etwa durch Koeffizientenvergleich, oder bequem und mühelos dank Residuen:

$$\frac{1}{z^4 - 1} = \frac{1}{4(z - 1)} - \frac{1}{4(z + 1)} + \frac{i}{4(z - i)} - \frac{i}{4(z + i)}$$

Umgekehrt lassen sich aus der PBZ auch direkt die Residuen ablesen. Über  $\mathbb{R}$  fassen wir  $(z - i)(z + i) = z^2 + 1$  zusammen und erhalten:

$$\frac{1}{z^4 - 1} = \frac{1}{4(z - 1)} - \frac{1}{4(z + 1)} - \frac{1}{2(z^2 + 1)}$$

☺ Der Residuenkalkül nützt uns auch bei der Partialbruchzerlegung!

**Lösung:** Seit diesem Kapitel verfügen wir über effiziente Werkzeuge zur Berechnung von Residuen, daher bietet sich die Reihenfolge (3,2,1) an.

(3) Die Nullstellen von  $z^4 - 1$  sind die vierten Einheitswurzeln  $\pm 1, \pm i$ . Im Falle einfacher Polstellen, wie hier, können wir Satz F4B nutzen:

$$\operatorname{res}_{z=z_0} \left[ \frac{p(z)}{q(z)} \right] = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

Wir erhalten so bequem und effizient die gesuchten vier Residuen:

$$\operatorname{res}_{(+1)}(f) = \lim_{z \rightarrow +1} \left[ \frac{1}{4z^3} \right] = +\frac{1}{4}$$

$$\operatorname{res}_{(-1)}(f) = \lim_{z \rightarrow -1} \left[ \frac{1}{4z^3} \right] = -\frac{1}{4}$$

$$\operatorname{res}_{(+i)}(f) = \lim_{z \rightarrow +i} \left[ \frac{1}{4z^3} \right] = +\frac{i}{4}$$

$$\operatorname{res}_{(-i)}(f) = \lim_{z \rightarrow -i} \left[ \frac{1}{4z^3} \right] = -\frac{i}{4}$$

☺ Der Residuenkalkül gelingt uns leicht dank effizienter Werkzeuge!

(1) Wir nutzen Residuen (3) bzw. Partialbrüche (2): Für die Wegintegrale genügt es jeweils, die Umläufe um jede Polstelle zu zählen! (Satz F4G)

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{1}{z^4 - 1} dz = + \operatorname{res}_{(+1)}(f) + \operatorname{res}_{(+i)}(f) = \frac{1+i}{4}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{1}{z^4 - 1} dz = + \operatorname{res}_{(+1)}(f) + \operatorname{res}_{(-i)}(f) = 0$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_3} \frac{1}{z^4 - 1} dz = + \operatorname{res}_{(+1)}(f) - \operatorname{res}_{(-i)}(f) = \frac{i}{2}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_4} \frac{1}{z^4 - 1} dz = + \operatorname{res}_{(+1)}(f) + \operatorname{res}_{(-i)}(f) + \operatorname{res}_{(-1)}(f) + \operatorname{res}_{(+i)}(f) = 0$$

☺ Der Residuenkalkül löst selbst komplizierte Integrale sehr leicht.

Für Laurent–Polynome berechnen wir Wegintegrale leicht direkt (F1B); dank Linearität gelingt es hier ebenso für eine Summe solcher Terme. Viele Rechnungen lösen Sie so bequem, sicher, routiniert: Sie müssen schließlich nur noch die Umläufe von  $\gamma$  zählen und dabei das Vorzeichen beachten; wie üblich läuft mathematisch positiv *gegen* den Uhrzeiger.

**Aufgabe:** (1) Bestimmen Sie alle Polstellen und Residuen von

$$f(z) = \frac{nz^{n-1}}{z^n - w^n} \quad \text{für } w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

- (2) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung über  $\mathbb{C}$  und über  $\mathbb{R}$ .  
 (3) Berechnen Sie das Wegintegral  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(0,r)} f(z) dz$  für  $r > |w|$ .  
 (4) Zum Vergleich: Was gilt für  $w = 0$ ? Ist das kohärent?

**Lösung:** (1) Die Lösungen von  $z^n = 1$  sind die  $n$ -ten Einheitswurzeln  $z_k = \zeta_n^k = e^{2\pi i k/n}$  für  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . (Machen Sie sich eine Skizze!) Die Lösungen von  $z^n = w^n$  sind somit  $z_k = \zeta_n^k w$  für  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . Im Falle einfacher Polstellen, wie hier, können wir Satz F4B nutzen:

$$\operatorname{res}_{z=z_0} \left[ \frac{p(z)}{q(z)} \right] = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

Wir erhalten so bequem und effizient die Residuen:

$$\operatorname{res}_{z=z_k} \left[ \frac{nz^{n-1}}{z^n - w^n} \right] = \lim_{z \rightarrow z_k} \left[ \frac{nz^{n-1}}{nz^{n-1}} \right] = 1$$

**Aufgabe:** (1) Bestimmen Sie alle Polstellen und Residuen von

$$f_1(z) = \frac{6z^5}{z^6 + 1}, \quad f_2(z) = \frac{6z^5 e^z}{z^6 + 1}, \quad f_3(z) = \frac{1}{\sin(\pi z)}, \quad f_4(z) = \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}.$$

- (2) Bestimmen Sie – soweit möglich – die Partialbruchzerlegung von  $f_k$ .  
 (3) Berechnen Sie das Wegintegral  $\oint_{\partial B(0,4)} f_k(z) dz$  und ganz allgemein  $\oint_{\partial D} f_k(z) dz$  für jedes Kompaktum  $D \subseteq \mathbb{C}$  mit stückweise glattem Rand.

**Lösung:** (1a) Die Nullstellen des Nenners  $z^6 + 1$  sind  $z_k = e^{\pi i(2k+1)/6}$  für  $k = 0, 1, \dots, 5$ , kartesisch  $\pm i$  und  $(\pm\sqrt{3} \pm i)/2$ . Machen Sie eine Skizze! Alle Polstellen sind einfach; dank Satz F4B gilt  $\operatorname{res}_{z=z_k} [f_1(z)] = 1$ .

(2a) Die Partialbruchzerlegung hat die besonders einfache Form

$$\frac{6z^5}{z^6 + 1} = \frac{1}{z - z_0} + \frac{1}{z - z_1} + \dots + \frac{1}{z - z_5}.$$

- (3a) Es gilt  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} f_1(z) dz = \# [D \cap \{z_0, z_1, \dots, z_5\}]$  wie in Satz F3D. Für  $f_2(z) = f_1(z) e^z$  gelten die Rechnungen entsprechend angepasst.

(2) Wir zerlegen den Nenner in Linearfaktoren:  $z^n - w^n = \prod_{k=0}^{n-1} (z - \zeta_n^k w)$ . Alle Faktoren sind einfach, die PBZ hat die besonders einfache Form

$$\frac{nz^{n-1}}{z^n - w^n} = \frac{c_0}{z - w} + \frac{c_1}{z - \zeta_n w} + \frac{c_2}{z - \zeta_n^2 w} + \dots + \frac{c_{n-1}}{z - \zeta_n^{n-1} w}$$

Die Konstanten erhalten wir mühelos dank Residuen, nämlich  $c_k = 1$ .

$$\frac{nz^{n-1}}{z^n - w^n} = \frac{1}{z - w} + \frac{1}{z - \zeta_n w} + \frac{1}{z - \zeta_n^2 w} + \dots + \frac{1}{z - \zeta_n^{n-1} w}$$

Umgekehrt lassen sich aus der PBZ auch direkt die Residuen ablesen. Über  $\mathbb{R}$  kombinieren wir je zwei komplex Konjugierte, wobei  $w \in \mathbb{R}$ :

$$\frac{1}{z - \zeta_n^k w} + \frac{1}{z - \zeta_n^{-k} w} = \frac{2z - 2 \cos(2\pi k/n)w}{z^2 - 2 \cos(2\pi k/n)zw + w^2} \quad \text{für } 0 < k < n/2$$

- (3) Für  $r > |w|$  gilt  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(0,r)} f(z) dz = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{res}_{z_k}(f) = n$ , siehe F3D.  
 (4) Für  $w = 0$  finden wir direkt  $f(z) = n/z$  und  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(0,r)} f(z) dz = n$ . Anschaulich: Alle  $n$  Polstellen fusionieren, die Residuen addieren sich. Stetigkeit: Dank Satz D3C dürfen wir  $\lim_{w \rightarrow 0}$  unters Integral ziehen.

(1c) Die Funktion  $f_3(z) = 1/\sin(\pi z)$  hat einfache Polstellen in  $n \in \mathbb{Z}$ . Dank F4B gilt  $\operatorname{res}_{z=n} [f_3(z)] = \lim_{z \rightarrow n\pi} [1/\sin(\pi z)]' = (-1)^n/\pi$ .

(1d) Auch  $f_4(z) = \cos(\pi z)/\sin(\pi z)$  hat einfache Polstellen in  $n \in \mathbb{Z}$ . Dank F4B gilt  $\operatorname{res}_{z=n\pi} [f_4(z)] = \lim_{z \rightarrow n\pi} [\cos(\pi z)/\sin(\pi z)]' = 1/\pi$ .

(3) Hieraus folgt das Wegintegral  $\oint_{\partial D} f_k(z) dz$  wie in Satz F4D / F3D.

(2) **Wenn** sich  $f_3, f_4$  als Reihen  $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n/(z - n)$  absolut konvergent darstellen lassen, **dann** liefert der Residuenkalkül die Koeffizienten:

$$\csc(\pi z) := \frac{1}{\sin(\pi z)} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{z - n} = \frac{1}{\pi z} + \frac{2z}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 - n^2}$$

$$\cot(\pi z) := \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z - n} = \frac{1}{\pi z} + \frac{2z}{w} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2}$$

Nun müssen wir noch umgekehrt die vermuteten Formeln nachprüfen:

- ☺ Für jedes  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  sind die Reihen rechts absolut konvergent, denn für  $n \rightarrow \infty$  gilt  $1/(n^2 - z^2) \sim 1/n^2$ , und wir wissen  $\sum 1/n^2 < \infty$ .  
 ☺ Die Grenzwerte dieser Reihen sind tatsächlich  $\csc(\pi z)$  bzw.  $\cot(\pi z)$ . Diese Rechnung erfordert etwas Sorgfalt und wird in [F554] ausgeführt.

Bisher haben wir meist holomorphe Funktion  $f: \mathbb{C} \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$  betrachtet, die nur eine *endliche* Menge  $S \subseteq \mathbb{C}$  von Singularitäten aufweisen, wie rationale Funktionen  $f(z) = p(z)/q(z)$  mit Polynomen  $p, q \in \mathbb{C}[z]$ . Wir nutzen nun auch holomorphe Funktionen  $g: \mathbb{C} \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$  wie zum Beispiel  $g(z) = f(z) \cos(\pi z) / \sin(\pi z)$  mit unendlich vielen Singularitäten, insbesondere um Reihen wie  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$  berechnen zu können.

Die Menge  $S$  heißt **diskret**, wenn jeder ihrer Punkt  $s$  in  $S$  isoliert ist. In einer Menge  $S \subseteq \mathbb{C}$  nennen wir einen Punkt  $s \in S$  **isoliert**, wenn ein hinreichend kleiner Radius  $\varepsilon > 0$  existiert, sodass  $B(s, \varepsilon) \cap S = \{s\}$  gilt. Andernfalls sagen wir, dass sich die Punkte der Menge  $S$  um  $s$  **häufen**. Allgemein nennen wir  $a \in \mathbb{C}$  einen **Häufungspunkt** der Menge  $S$ , wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  die Menge  $B(a, \varepsilon) \cap S$  unendlich viele Punkte enthält.

Jede endliche Menge  $S \subseteq \mathbb{C}$  ist diskret; unendliche können diskret sein wie  $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{C}$  oder auch nicht diskret wie  $\{1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots, 0\}$  oder  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{C}$ . Sind  $g, h: \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph mit  $h \neq 0$ , so ist die Nullstellenmenge  $\{z \in \mathbb{C} \mid h(z) = 0\}$  diskret dank Satz F5E (somit höchstens abzählbar), und dasselbe gilt folglich für die Singularitätenmenge von  $f = g/h$ .

**Aufgabe:** (1) Bestimmen Sie alle Nullstellen  $z \in \mathbb{C}$  der Funktionen

$$\sin, \cos: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Zeigen und nutzen Sie für  $z = x + iy$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$  die Gleichungen

$$|\sin(z)|^2 = \sin(x)^2 + \sinh(y)^2, \quad |\cos(z)|^2 = \cos(x)^2 + \sinh(y)^2.$$

Der Quotient  $h(z) = \cos(z)/\sin(z)$  ist beschränkt durch

$$|h(z)|^2 \leq \frac{\cos(x)^2 + \sinh(y)^2}{\sin(x)^2 + \sinh(y)^2} \leq \frac{\cos(x)^2}{\sin(x)^2 + \sinh(y)^2} + 1$$

(2) Bestimmen Sie alle Residuen der Funktion  $h(z) = \cos(z)/\sin(z)$ .

**Lösung:** (1) Aus der reellen Analysis wissen wir  $\sin(z) = 0$  für  $z \in \mathbb{Z}\pi$  und  $\cos(z) = 0$  für  $z \in \pi/2 + \mathbb{Z}\pi$ . Weitere Nullstellen  $z \in \mathbb{C}$  gibt es nicht!

Die hierzu nützlichen Un/Gleichungen rechnet man geduldig nach.

(2) Die Funktion  $h(z) = \cos(z)/\sin(z)$  hat einfache Polstellen in  $z = k\pi$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ . Dank F4B gilt  $\text{res}_{z=k\pi}[h(z)] = \lim_{z \rightarrow k\pi} [\cos(z)/\sin'(z)] = 1$ .

**Aufgabe:** (3) Bestimmen Sie alle Residuen der holomorphen Funktion

$$g: \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}, \quad g(z) = \frac{\cos(\pi z)}{z^2 \sin(\pi z)}.$$

**Lösung:** (3) In  $k \in \mathbb{Z}$  mit  $k \neq 0$  liegt eine einfache Polstelle vor (F4B):

$$\text{res}_{z=k} \left[ \frac{\cos(\pi z)}{z^2 \sin(\pi z)} \right] = \lim_{z \rightarrow k} \left[ \frac{\cos(\pi z)}{2z \sin(\pi z) + \pi z^2 \cos(\pi z)} \right] = \frac{1}{\pi k^2}$$

Im Nullpunkt  $z = 0$  hingegen liegt eine dreifache Polstelle vor (F4C):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} &= \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} - \frac{\pi z}{\sin(\pi z)^2} \\ \frac{d^2}{dz^2} \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} &= \frac{-2\pi}{\sin(\pi z)^2} + \frac{2\pi^2 z \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)^3} = \frac{2\pi^2 z \cos(\pi z) - 2\pi \sin(\pi z)}{\sin(\pi z)^3} \\ &= \frac{2\pi^2 z [1 - \frac{1}{2!}\pi^2 z^2 + O(z^4)] - 2\pi [\pi z - \frac{1}{3!}\pi^3 z^3 + O(z^5)]}{\pi^3 z^3 + O(z^5)} = -\frac{2\pi}{3} + O(z^2) \end{aligned}$$

$$\text{res}_{z=0} \left[ \frac{\cos(\pi z)}{z^2 \sin(\pi z)} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left[ \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \right] = -\frac{\pi}{3} \quad \text{😊 Alles wird gut.}$$

😊 Noch leichter gelingt's mit der geometrischen Reihe, siehe [F554].

**Aufgabe:** Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $Q_n \subseteq \mathbb{C}$  das Quadrat mit Ecken  $(\pm 1 \pm i)(n + 1/2)$ .

(4) Berechnen Sie  $\int_{\partial Q_n} g(z) dz$  und (5) den Grenzwert für  $n \rightarrow \infty$ .

(6) Folgern Sie hieraus den Grenzwert der Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ .

**Lösung:** (4) Dank Residuensatz und der vorigen Aufgabe (3) gilt:

$$\int_{\partial Q_n} g(z) dz = 2\pi i \sum_{k=-n}^n \text{res}_k(g) = -\frac{\pi}{3} + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi k^2}$$

(5) Für  $n \geq 1$  und alle  $z \in Q_n$  gilt  $|\cos(\pi z)/\sin(\pi z)| \leq 2$ . Für  $n \rightarrow \infty$  folgt

$$\left| \int_{\partial Q_n} g(z) dz \right| \leq \int_{\partial Q_n} |g(z)| \cdot |dz| \leq \int_{\partial Q_n} \frac{2}{n^2} \cdot |dz| \leq \frac{8(2n+1)}{n^2} \rightarrow 0.$$

(6) Für die obige Reihe erhalten wir schließlich

$$-\frac{\pi}{3} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k^2} = 0 \quad \text{also} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} = 1.6449340668 \dots$$

Die Konvergenz ist leicht zu zeigen [B303], nun können wir auch den Grenzwert berechnen! Dies ist ein berühmtes Problem und wurde erst 1734 von Leonhard Euler gelöst (noch vage). In Kapitel I gelingt es noch leichter mit den starken Werkzeugen der Fourier-Theorie. [I321]

**Satz F51: Berechnung von Reihen durch Residuen**

Sei  $f(z) = p(z)/q(z)$  eine rationale Funktion. Wir können und werden  $p/q$  als gekürzt annehmen, mit teilerfremden Polynomen  $p, q \in \mathbb{C}[z]$ . Ihre Singularitätenmenge ist demnach  $S = \{z \in \mathbb{C} \mid q(z) = 0\}$ .

(1) Unter der Voraussetzung  $\deg(q) \geq \deg(p) + 2$  gilt:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus S} f(k) = -\pi \sum_{s \in S} \operatorname{res}_{z=s} \left[ f(z) \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \right]$$

(2) Unter der schwächeren Voraussetzung  $\deg(q) \geq \deg(p) + 1$  gilt:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus S} (-1)^k f(k) = -\pi \sum_{s \in S} \operatorname{res}_{z=s} \left[ \frac{f(z)}{\sin(\pi z)} \right]$$

- ☺ Links steht eine unendliche Reihe, rechts nur eine endliche Summe.
- ☺ Die Konvergenz ist leicht, nun können wir den Grenzwert berechnen!
- ☺ Die vorige Aufgabe zeigt das bemerkenswerte Beispiel  $f(z) = 1/z^2$ .

**Aufgabe:** (a) Berechnen Sie mit diesem Satz die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k/k^2$ .  
 (b) Berechnen Sie die Reihen  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{w-n}$  und  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{w-n}$  für  $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ .

**Lösung:** (a) Wir wenden die Formel (2) auf die Funktion  $f(z) = 1/z^2$  an. In  $z = 0$  hat  $1/z^2 \sin(z)$  eine dreifache Polstelle. Statt wie zuvor Satz F4c zu nutzen, können wir auch direkt die Laurent-Reihe entwickeln:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2 \sin(\pi z)} &= \frac{1}{\pi z^3(1-q)} \quad \text{mit } q = \frac{1}{3!}\pi^2 z^2 - \frac{1}{5!}\pi^4 z^4 + O(z^6) \\ &= \frac{1}{\pi z^3} [1 + q + q^2 + q^3 + \dots] = \frac{1}{\pi z^3} [1 + \frac{1}{3!}\pi^2 z^2 + O(z^4)] \\ &= \frac{1}{\pi} z^{-3} + \frac{\pi}{6} z^{-1} + O(z) \quad \implies \operatorname{res}_{z=0} \left[ \frac{1}{z^2 \sin(\pi z)} \right] = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Dank Satz F51 (2) schließen wir:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \mp \dots = -\frac{\pi^2}{12} = -0.8224670334\dots$$

(b) Wir wenden den Satz F51 auf die Funktion  $f(z) = 1/(w-z)$  an und erhalten sofort  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{w-n} = \frac{\pi \cos(\pi w)}{\sin(\pi w)}$  sowie  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{w-n} = \frac{\pi}{\sin(\pi w)}$ .

**Aufgabe:** Erklären und begründen Sie den allgemeinen Satz F51 nach dem Vorbild der Spezialfälle der vorigen Aufgaben.

**Lösung:** Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $Q_n \subseteq \mathbb{C}$  das Quadrat mit Ecken  $(\pm 1 \pm i)(n + 1/2)$ . Wir wählen  $n$  so groß, dass  $Q_n$  die Singularitätenmenge  $S$  von  $f$  enthält.

(1) Für  $g(z) = f(z) \cos(\pi z)/\sin(\pi z)$  ergibt Cauchys Residuensatz F4D:

$$\int_{\partial Q_n} g(z) dz = 2\pi i \sum_{s \in Q_n} \operatorname{res}_s(g)$$

Für  $n \rightarrow \infty$  verschwindet das Integral, denn

$$\left| \int_{\partial Q_n} g(z) dz \right| \leq \max_{z \in \partial Q_n} |f(z)| \int_{\partial Q_n} \left| \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \right| \cdot |dz| \leq \frac{c}{n^2} \cdot 8(2n+1) \rightarrow 0.$$

Mit den Residuen in  $k \in \mathbb{Z} \setminus S$  folgt die gewünschte Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{s \in \mathbb{C}} \operatorname{res}_s(g) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus S} \operatorname{res}_k(g) + \sum_{s \in S} \operatorname{res}_s(g) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus S} \frac{f(k)}{\pi} + \sum_{s \in S} \operatorname{res}_{z=s} \left[ f(z) \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \right] \end{aligned}$$

(2) Für  $g(z) = f(z)/\sin(\pi z)$  ergibt Cauchys Residuensatz F4D:

$$\int_{\partial Q_n} g(z) dz = 2\pi i \sum_{s \in Q_n} \operatorname{res}_s(g)$$

Für  $n \rightarrow \infty$  verschwindet das Integral, denn nach Rechnung gilt

$$\left| \int_{\partial Q_n} g(z) dz \right| \leq \max_{z \in \partial Q_n} |f(z)| \int_{\partial Q_n} \left| \frac{1}{\sin(\pi z)} \right| \cdot |dz| \leq \frac{\text{const}}{n} \rightarrow 0.$$

(Die Schranke  $\int_{\partial Q_n} |dz|/|\sin(\pi z)| \leq \text{const}$  ist leider etwas mühsam.)

Jede Polstelle in  $k \in \mathbb{Z} \setminus S$  ist höchstens einfach. Dank F4B gilt:

$$\operatorname{res}_{z=k} \left[ \frac{f(z)}{\sin(\pi z)} \right] = \frac{f(k)}{\pi \cos(\pi k)} = \frac{(-1)^k}{\pi} f(k)$$

Mit den Residuen in  $k \in \mathbb{Z} \setminus S$  folgt die gewünschte Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{s \in \mathbb{C}} \operatorname{res}_s(g) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus S} \operatorname{res}_k(g) + \sum_{s \in S} \operatorname{res}_s(g) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus S} \frac{(-1)^k}{\pi} f(k) + \sum_{s \in S} \operatorname{res}_{z=s} \left[ \frac{f(z)}{\sin(\pi z)} \right] \end{aligned}$$